Morfologia Matemática

Morfologia Matemática

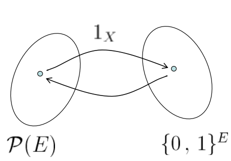
- Abordagem algébrica para processamento de imagens
- Não é a única, existem outras abordagens algébricas
- Criada na década de 60 por G. Matheron e J. Serra
- Em 1968 é fundado o Centre de Morphologie Mathématique

Transformações de Imagens binárias

- Imagem binária $g : E \rightarrow \{0\,,\,1\}$
  - Conjunto das imagens binárias definidas no espaço euclidiano E $\{0\,,\,1\}^E$
  - Espaço E $E \subset Z^2$
  - Coleção de todos subconjuntos de E $\mathcal{P}(E)$

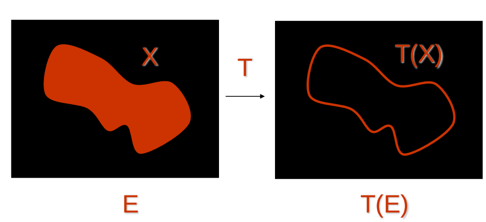
Transformações de Imagens binárias

- Função indicadora $\mathbf{1}_X = \begin{cases} 1x\,,\, \in X \\ 0x\,,\, \notin X \end{cases}$
  - Conjunto das imagens binárias definidas no espaço euclidiano E $\{0\,,\,1\}^E$
  - Coleção de todos subconjuntos de E $\mathcal{P}(E)$



Transformações de Imagens Binárias

- A morfologia matemática estudas as transformações **T** : $\mathcal{P}$(E) → $\mathcal{P}$(E)

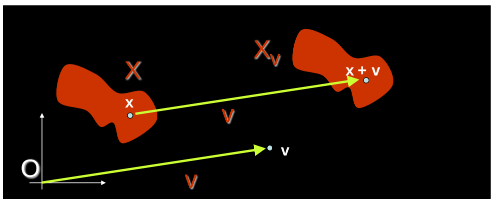


Translação

- Sejam X um conjunto e v um vetor
  - Translaçao de X por v:

$$X_v = \{x + v \in E \,,\, x \in X\}$$

E

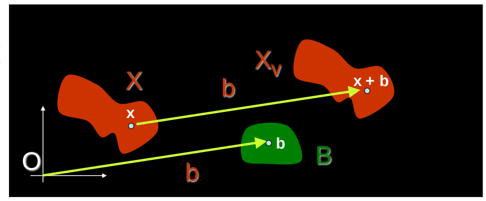


Adição de Minkowski

- Sejam X e B conjuntos. Define-se a soma de Minkowski de X por B como a união das translações de X por todos os vetores de B:

$$X \oplus B = \cup_{b \in B}\{x + b \in E \,,\, x \in X\}$$

E

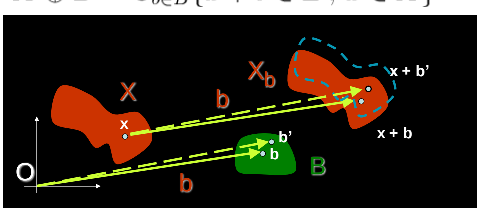


Adição de Minkowski

- Sejam X e B conjuntos. Define-se a soma de Minkowski de X por B como a união das translações de X por todos os vetores de B:

$$X \oplus B = \cup_{b \in B}\{x + b \in E \,,\, x \in X\}$$

E

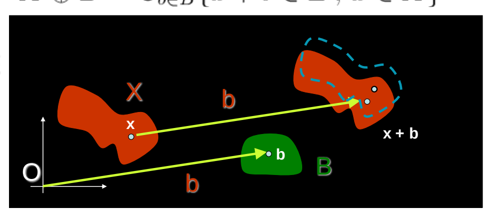


Adição de Minkowski

- Sejam X e B conjuntos. Define-se a soma de Minkowski de X por B como a união das translações de X por todos os vetores de B:

$$X \oplus B = \cup_{b \in B}\{x + b \in E \,,\, x \in X\}$$

E

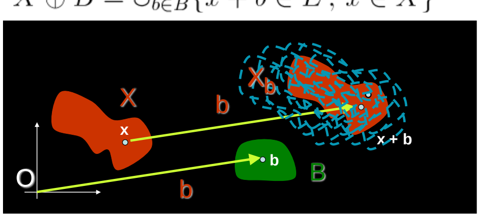


Adição de Minkowski

- Sejam X e B conjuntos. Define-se a soma de Minkowski de X por B como a união das translações de X por todos os vetores de B:

$$X \oplus B = \cup_{b \in B}\{x + b \in E \,,\, x \in X\}$$

E

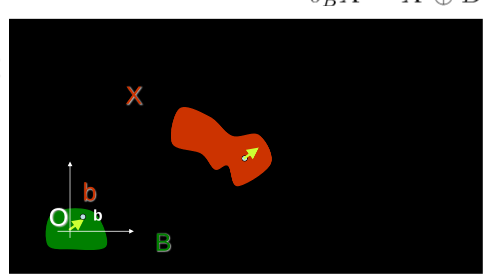


Adição de Minkowski → Dilatação

- B elemento estruturante.

$$\delta_B X = X \oplus B$$

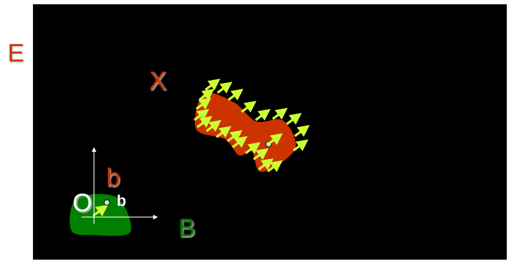
E



Adição de Minkowski → Dilatação

- B elemento estruturante.

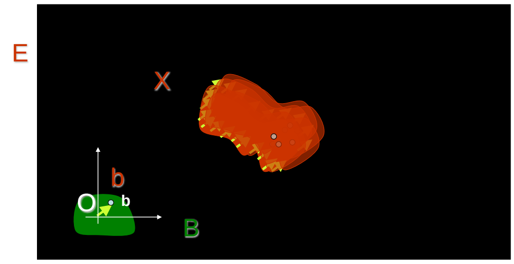
$$\delta_B X = X \oplus B$$



Adição de Minkowski → Dilatação

- B elemento estruturante.

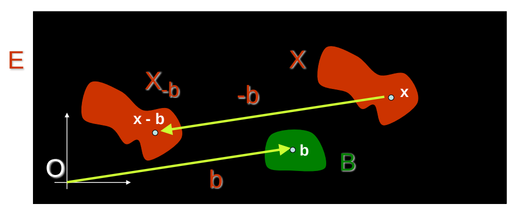
$$\delta_B(X) = X \oplus B$$



Subtração de Minkowski

- Sejam X e B conjuntos. Define-se a diferença de Minkowski de X por B como

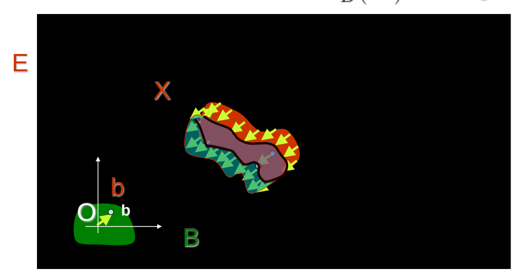
$$X \ominus B = \cap_{b \in B}\{x - b \in E\,,\, x \in X\}$$



Subtração de Minkowski → Erosão

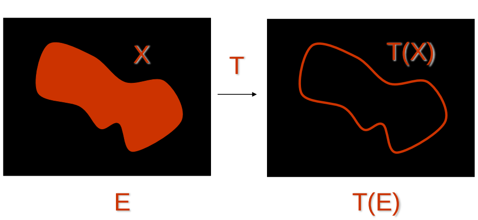
- B elemento estruturante.

$$\varepsilon_B(X) = X \ominus B$$

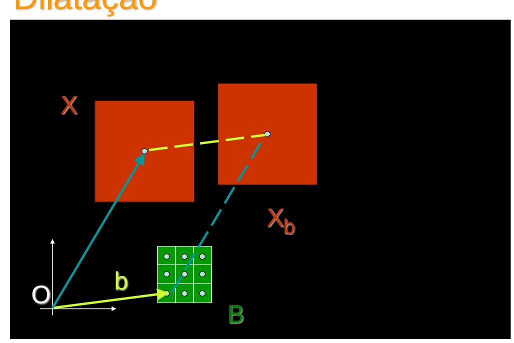


Transformações de Imagens Binárias

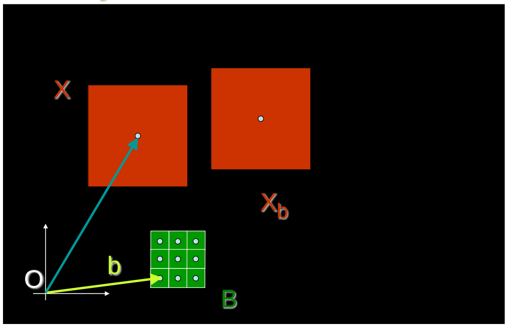
- A morfologia matemática estudas as transformações **T** : $\mathscr{P}$(E) → $\mathscr{P}$(E)



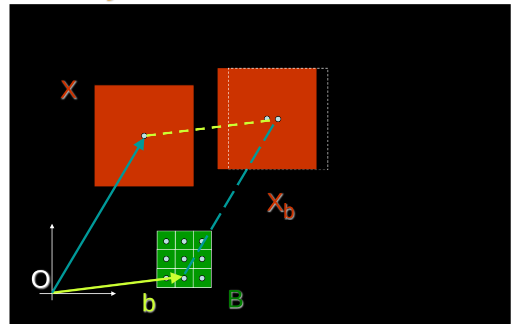
Dilatação



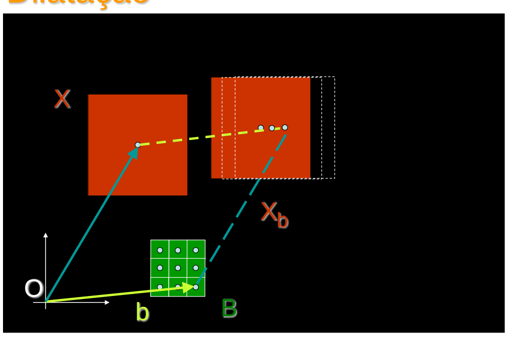
Dilatação



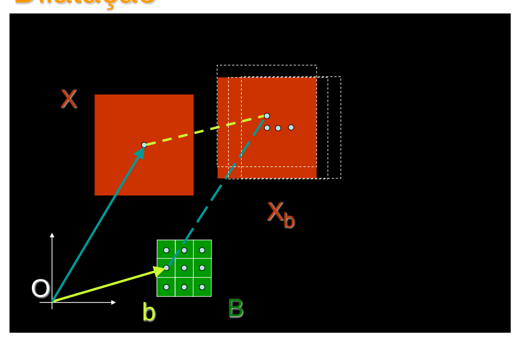
Dilatação



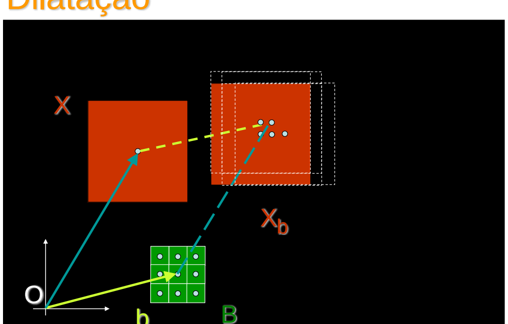
Dilatação



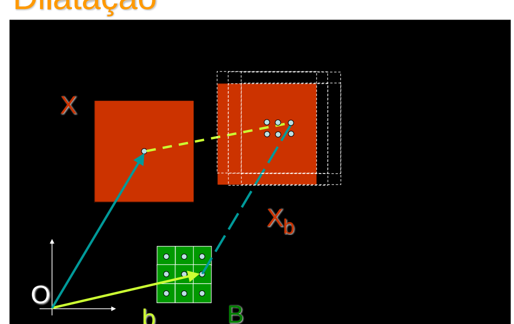
Dilatação



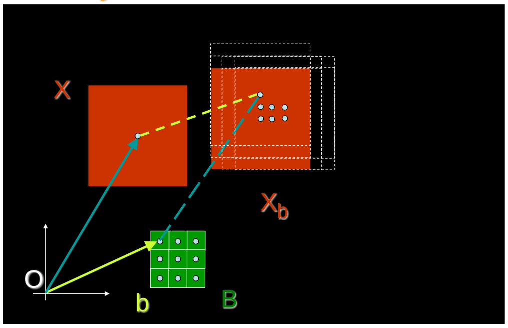
Dilatação



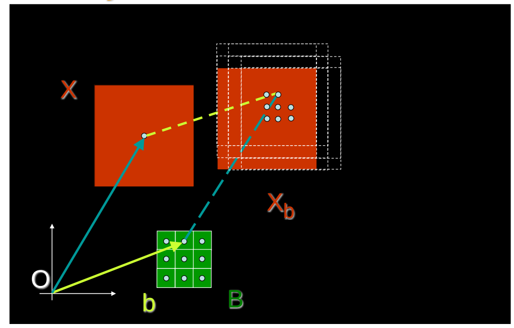
Dilatação



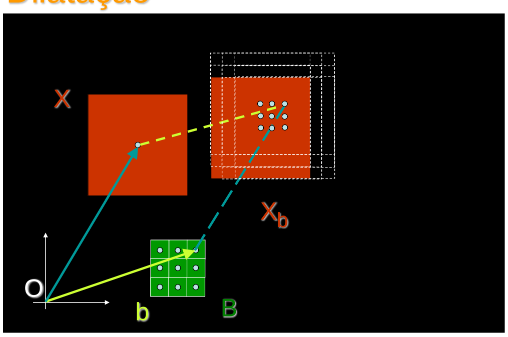
Dilatação



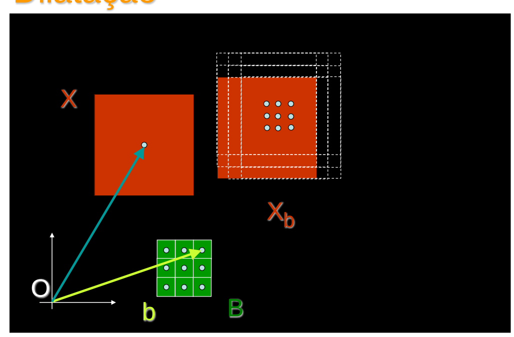
Dilatação



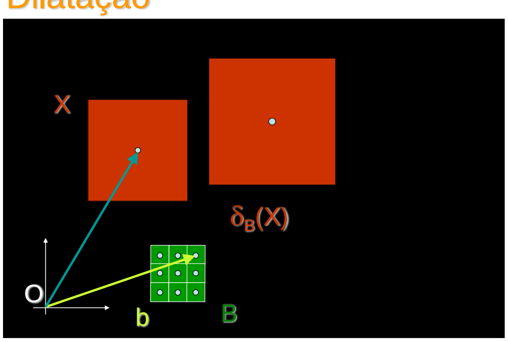
Dilatação



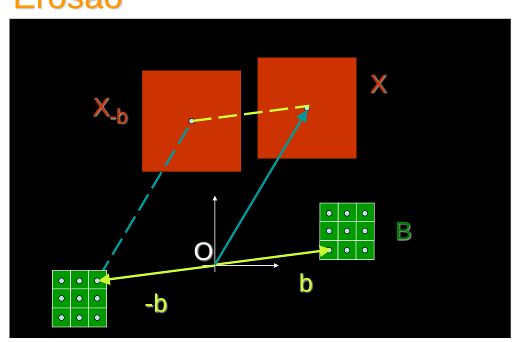
Dilatação



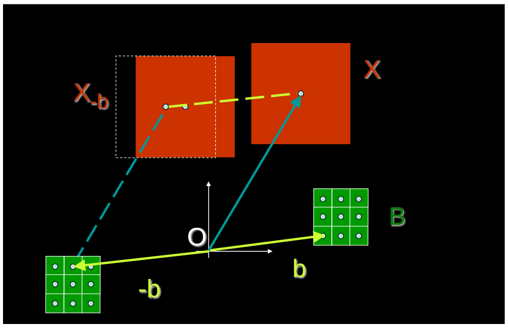
Dilatação



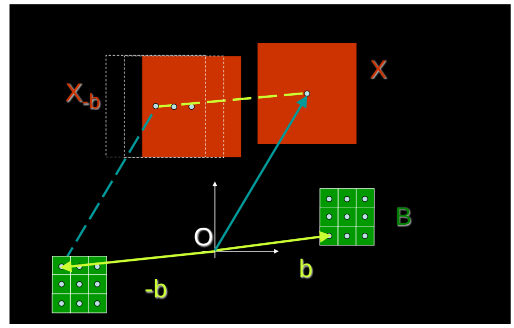
Erosão



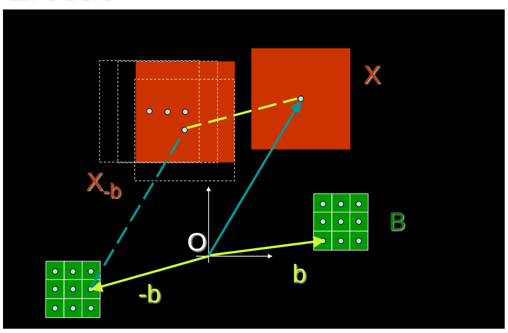
Erosão



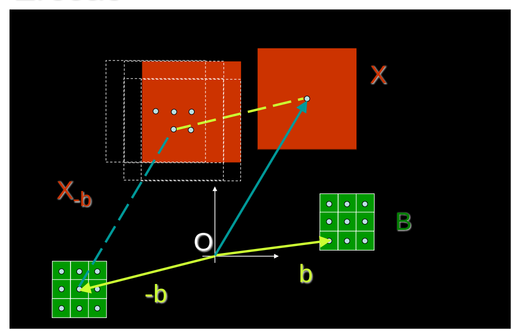
Erosão



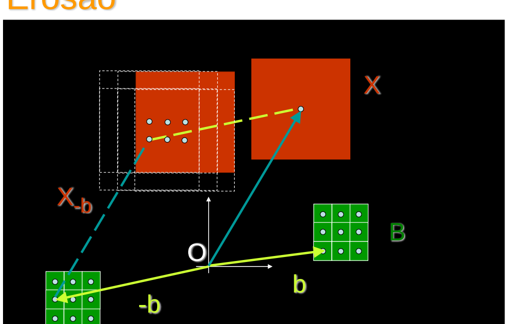
Erosão



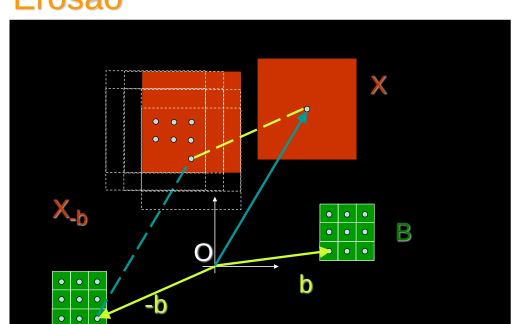
Erosão



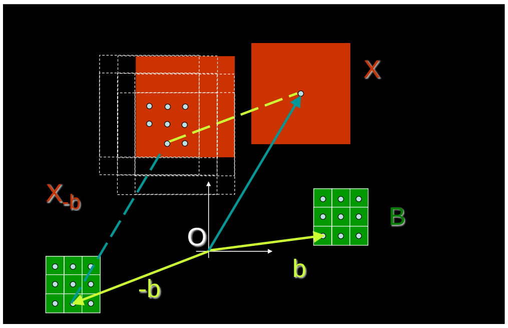
Erosão



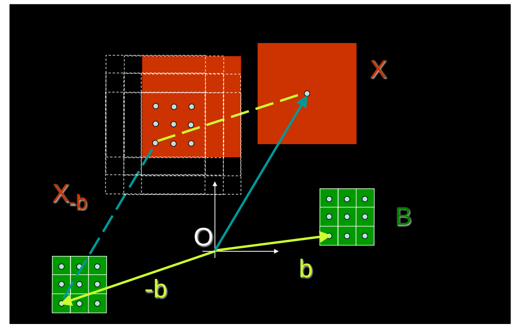
Erosão



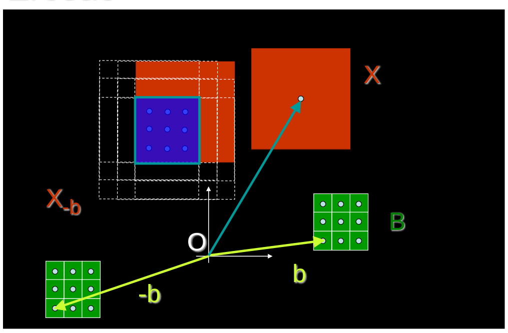
Erosão



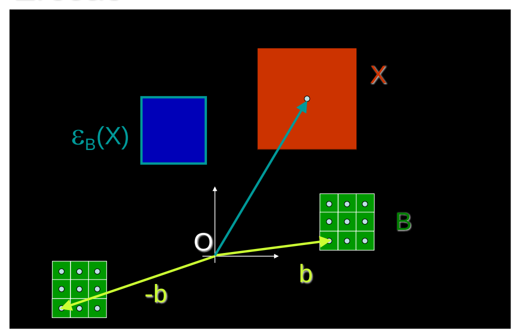
Erosão



Erosão



Erosão



Dilatação e Erosão - Propriedades

- Definições (para imagens binárias)
  - Dilatação → Adição de Minkowski

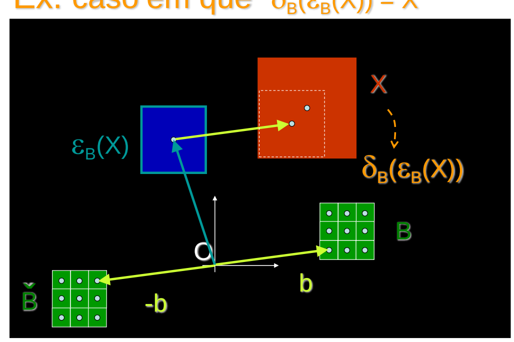
$$\delta_B(X) = X \oplus B = \cup_{b \in B} X_b$$

  - Erosão → Subtração de Minkowski

$$\epsilon_B(X) = X \ominus B = \cap_{b \in B} X_{-b}$$

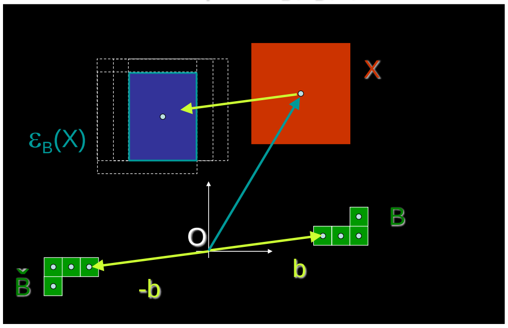
- A dilatação NÃO é a operação inversa da erosão e vice-versa

Ex: caso em que $\delta_B(\varepsilon_B(X)) = X$



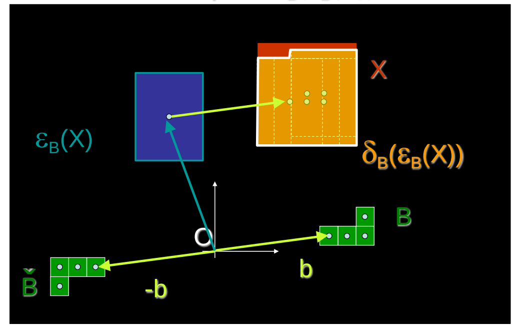
Transposto

Ex: caso em que $\delta_B(\varepsilon_B(X)) \neq X$



Transposto

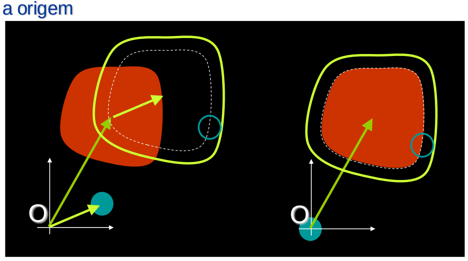
Ex: caso em que $\delta_B(\varepsilon_B(X)) \neq X$



Transposto

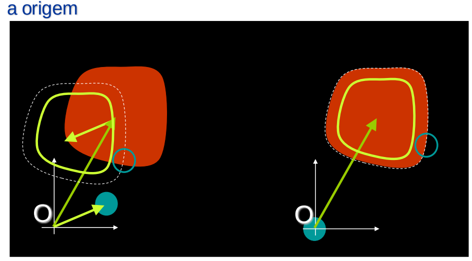
Dilatação e Erosão - Propriedades

- A dilatação (erosão) contém (está contida) no conjunto inicial somente quando o elemento estruturante contiver a origem



Dilatação e Erosão - Propriedades

- A dilatação (erosão) contém (está contida) no conjunto inicial somente quando o elemento estruturante contiver a origem

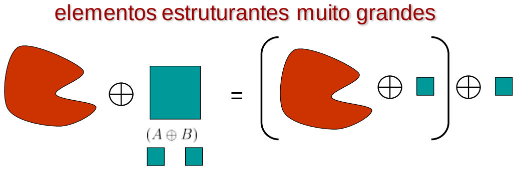


Dilatação e Erosão - Propriedades

- Associatividade da dilatação

$$X \oplus (A \oplus B) = (X \oplus A) \oplus B$$

  – Útil para a decomposição de dilatações com elementos estruturantes muito grandes

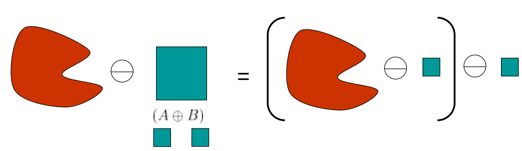


Dilatação e Erosão - Propriedades

- Decomposição da erosão em relação à dilatação

$$X \ominus (A \oplus B) = (X \ominus A) \ominus B$$

  – Útil para a decomposição de erosões com elementos estruturantes muito grandes



Morfologia Matemática

- Exemplo: $\{0,1\}^{\square\square\square}$ $\quad D = \overset{x_1\, x_2\, x_3}{\square\square\square}$

	$\{x_1,x_2,x_3\}$			111	
$\{x_1,x_2\}$	$\{x_1,x_3\}$	$\{x_2,x_3\}$	110	101	011
$\{x_1\}$	$\{x_2\}$	$\{x_3\}$	100	010	001
	$\emptyset$			000	

Operações de conjuntos e imagens

- União
  $$\cup : A \cup B = \{x \in D : x \in A \mid x \in B\}$$
- Intersecção
  $$\cap : A \cap B = \{x \in D : x \in A \,\&\, x \in B\}$$
- max
  $$\vee : (f \vee g)(x) = \max\{f(x), g(x)\}$$
- min
  $$\wedge : (f \wedge g)(x) = \min\{f(x), g(x)\}$$

Operações aplicadas a operadores

- União
  $$\cup : (\Psi \cup \Phi)(A) = \Psi(A) \cup \Phi(A)$$
- Intersecção
  $$\cap : (\Psi \cap \Phi)(A) = \Psi(A) \cap \Phi(A)$$
- max
  $$\vee : (\Psi \vee \Phi)(f) = \Psi(f) \vee \Phi(f)$$
- min
  $$\wedge : (\Psi \wedge \Phi)(f) = \Psi(f) \wedge \Phi(f)$$

Outras operações

- Complemento de um conjunto
  $$A^c \subset D, A \cup A^c = D$$
- Complemento de uma imagem
  $$f^c(x) = K - f(x)$$

Outras operações

- Diferença de conjuntos
  $$A \setminus B = A \wedge B^c$$
- Translação de uma imagem por um vetor
  $$f_b(x) = f(x - b)$$

Homotetia e Reflexão

- Seja X um conjunto k um escalar
  - Define-se a homotetia de X por k como sendo
    $$k\,X = \{kx\,,\ x \in X\}$$
  - Define-se a reflexão de X em relação à origem como sendo
    $$\check{X} = \{-x\,,\ x \in X\}$$
    - A reflexão equivale a uma homotetia com k = - 1

Propriedades

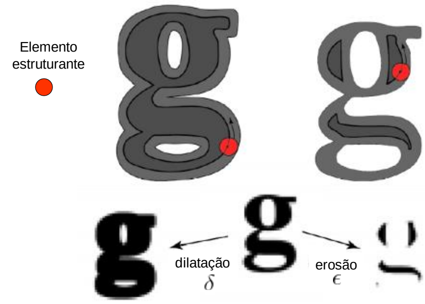
- A homotetia é distributiva em relação à dilatação e à erosão

$$k(A \oplus B) = kA \oplus kB$$

$$k(A \ominus B) = kA \ominus kB$$

  – Aplicações
$$2B = B \oplus B$$
$$nB = B \oplus B \oplus B \oplus B \cdots \oplus B$$
$$A \oplus 3B = ((A \oplus B) \oplus B) \oplus B$$

Morfologia binária dilatação e erosão



Dilatação

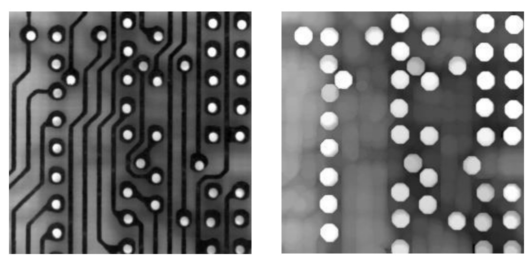
- Operador entre imagens definido por:

$$f \oplus B(x) = max\{f(y) : y \in (\check{B} + x) \cap E\}$$

Dilatação

- Operador entre imagens definido por:

$$f \oplus B(x) = max\{f(y) : y \in (\check{B} + x) \cap E\}$$



Erosão

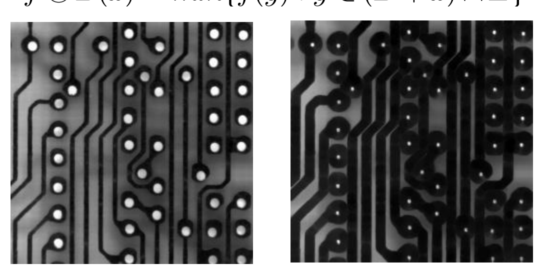
- Operador entre imagens definido por:

$$f \ominus B(x) = min\{f(y) : y \in (B + x) \cap E\}$$

Erosão

- Operador entre imagens definido por:

$$f \ominus B(x) = min\{f(y) : y \in (B + x) \cap E\}$$



Morfologia Matemática

- Transformação identidade

$$I(f) = \mathrm{id}(f) = f$$

- Composição de transformações

$$\Psi^n = \Psi^{n-1}\Psi, \quad \Psi^0 = \mathrm{id}$$

- Transformações pontuais

$$\Psi(f)(p) = \Psi(f(p))$$

Morfologia Matemática

- Transformações de vizinhança

$$\Psi_B(f)(p) = \rho(f(p-b_1), f(p-b_2), \ldots, f(p-b_n))$$

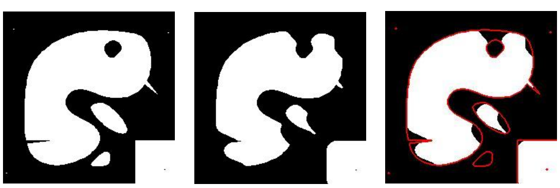
$$b_i \in B$$

$$\rho : f \times f \times \ldots \times f \longrightarrow f$$

Abertura

- Operador entre imagens definido por:

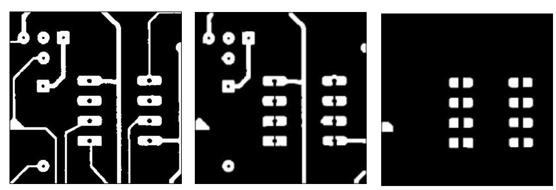
$$f \circ B = (f \ominus B) \oplus B$$



Abertura

- Operador entre imagens definido por:

$$f \circ B = (f \ominus B) \oplus B$$



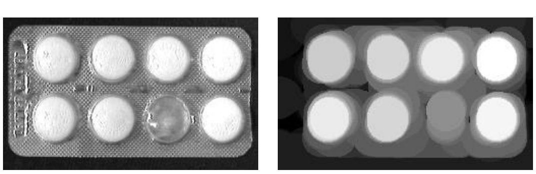
5x5

9x9

Abertura

- Operador entre imagens definido por:

$$f \circ B = (f \ominus B) \oplus B$$

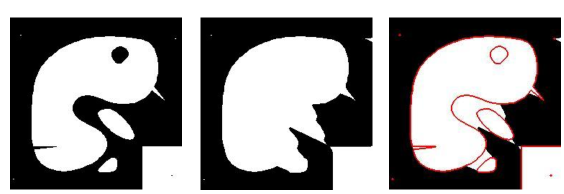


Disco 18

Fechamento

- Operador entre imagens definido por:

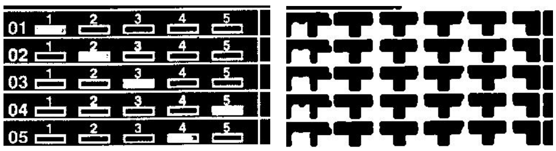
$$f \bullet B = (f \oplus B) \ominus B$$



Fechamento

- Operador entre imagens definido por:

$$f \bullet B = (f \oplus B) \ominus B$$



Disco 4

Fechamento

- Operador entre imagens definido por:

$$f \bullet B = (f \oplus B) \ominus B$$

Disco 3

Morfologia binária - Abertura

- Abertura → erosão seguida de dilatação
- Remove pontes, saliências e ilhas menores que o elemento estruturante

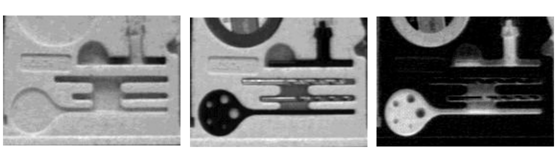
Morfologia binária - Fechamento

- Fechamento → dilatação seguida de erosão
- Fecha canais, concavidades e buracos menores que o elemento estruturante

Subtração

- Operação entre duas imagens

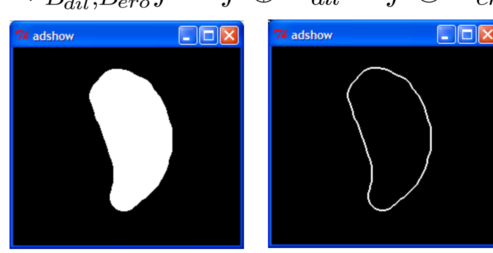
$$(f-g)(x) = \begin{cases} f(x) - g(x) & \text{se} \quad f(x) \geq g(x) \\ 0 & \text{c.c.} \end{cases}$$



Gradiente morfológico

- Operador de imagens dado por:

$$\nabla_{B_{dil},B_{ero}} f = f \oplus B_{dil} - f \ominus B_{ero}$$



Gradiente morfológico

- Operador de imagens dado por:

$$\nabla_{B_{dil},B_{ero}} f = f \oplus B_{dil} - f \ominus B_{ero}$$

- Quando B_ero é a origem, temos o gradiente externo.

$$\nabla_{B_{dil},B_{ero}} f = f \oplus B_{dil} - f$$

Gradiente externo

$$\nabla_{B_{dil},B_{ero}} f = f \oplus B_{dil} - f$$

Gradiente morfológico

- Operador de imagens dado por:

$$\nabla_{B_{dil},B_{ero}} f = f \oplus B_{dil} - f \ominus B_{ero}$$

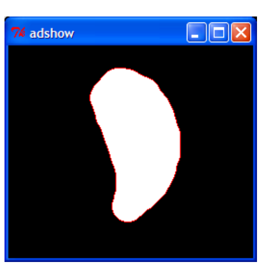
- Quando B_dil é a origem, temos o gradiente interno.

$$\nabla_{B_{dil},B_{ero}} f = f - f \ominus B_{ero}$$

Gradiente interno

$$\nabla_{B_{dil},B_{ero}} f = f - f \ominus B_{ero}$$

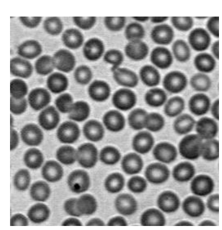
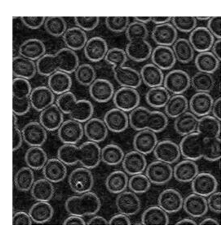
Gradiente interno e externo



Gradiente morfológico

- Operador de imagens dado por:

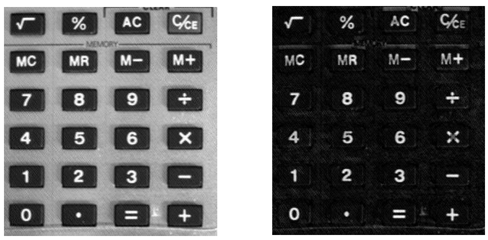
$$\nabla_{B_{dil},B_{ero}} f = f \oplus B_{dil} - f \ominus B_{ero}$$

Abertura top-hat

- Operador de imagens dado por:

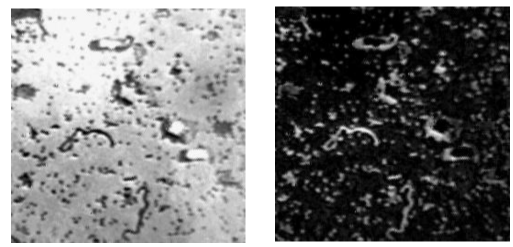
$$f \hat{\circ} B = f - f \circ B_{dil}$$



Fechamento top-hat

- Operador de imagens dado por:

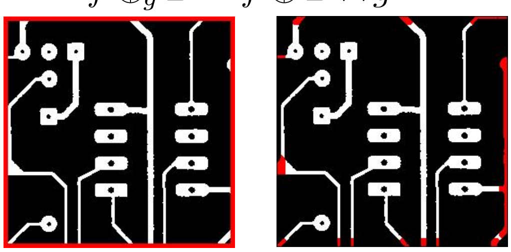
$$f \hat{\bullet} B = f \bullet B_{dil} - f$$



Dilatação condicional

- Operador de imagens dado por:

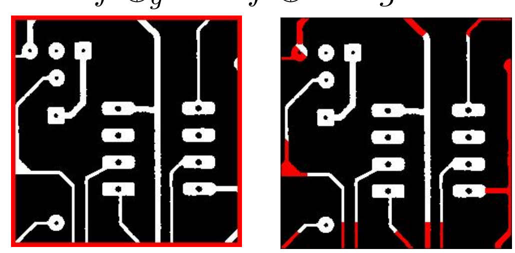
$$f \oplus_g B = f \oplus B \wedge g$$



Dilatação condicional

- Operador de imagens dado por:

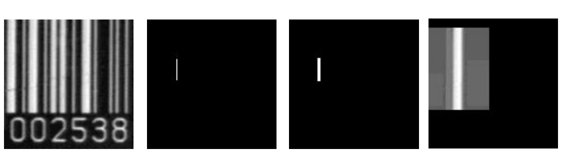
$$f \oplus_g B = f \oplus B \wedge g$$



Dilatação condicional

- Operador de imagens dado por:

$$f \oplus_g B = f \oplus B \wedge g$$



g

Erosão condicional

- Operador de imagens dado por:

$$f \ominus_g B = f \ominus B \vee g$$

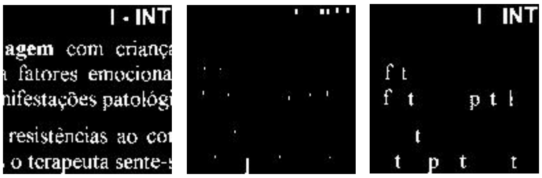
f

g

Inf-reconstrução

- Operador de imagens definido por:

$$f \triangle_{Bc} g = (g \oplus_f B_c)^\infty$$



Inf-reconstrução

- Operador de imagens definido por:

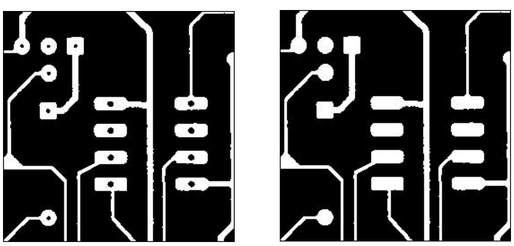
$$f \triangle_{Bc} g = (g \oplus_f Bc)^\infty$$

f g 30 cond dil $f \triangle_{Bc} g$

Close-holes

- Operador de imagens dado por:

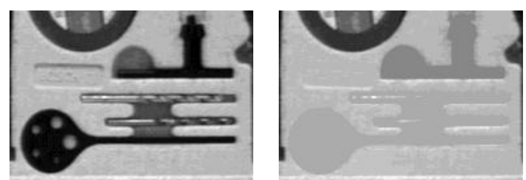
$$\mathrm{Fill}_{B_c}(f) = (f^c \triangle_{B_c} \partial f)^c$$



Close-holes

- Operador de imagens definido por:

$$\mathrm{Fill}_{Bc}(f) = (f^c \triangle_{Bc} \partial f)^c$$



Abertura por reconstrução

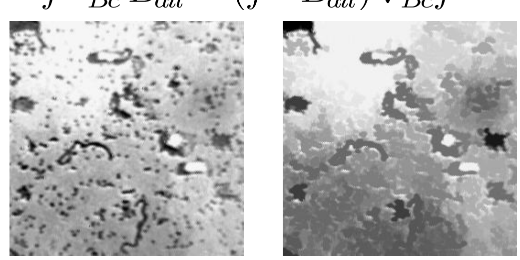
- Operador de imagens definido por:

$$f \circ_{Bc} B_{ero} = (f \circ B_{ero}) \triangle_{Bc} f$$

Fechamento por reconstrução

- Operador de imagens definido por:

$$f \bullet_{Bc} B_{dil} = (f \bullet B_{dil}) \nabla_{Bc} f$$



Transformada Distância

$$T_d(f)(p) = d(p, \{q \in E : f(q) = 0\})$$

- Usando um elemento estruturante

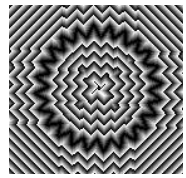
$$\mathrm{T}_{Bc}(f) = \sum_i f \ominus iB_c$$

- Relação com erosão

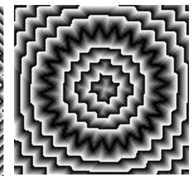
$$f \ominus iB_c = i + 1 \leq \mathrm{T}_{B_c}(f)$$

Transformada Distância

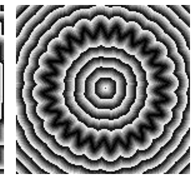
$$\mathrm{T}_{Bc}(f) = \sum_i f \ominus iB_c$$



City-block



Chess-board

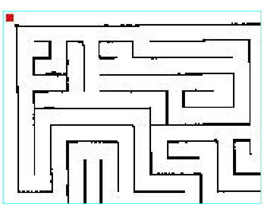


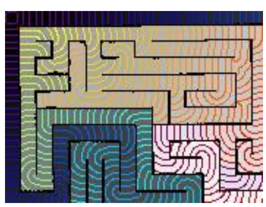
Euclidean

Distância geodésica

- Operador de imagens definido por:

$$T_{B_c,g}(f) = \sum_{i=1}^{\infty} g^c \ominus_{f^c} B_c$$

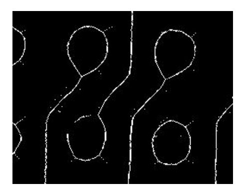




Esqueleto morfológico

- Operador entre imagens definido por:

$$\sigma_B(f) = \bigvee\{((f \ominus iB) \hat{\circ} B) : i = 0, 1, \ldots\}$$



Alternados seqüênciais

- São operadores definidos por:

oc

$$\text{nB-}\gamma\phi(f) = f \bullet B \circ B \ldots \bullet (n-1)B \circ (n-1)B \bullet nB \circ nB$$

co

$$\text{nB-}\phi\gamma(f) = f \circ B \bullet B \ldots \circ (n-1)B \bullet (n-1)B \circ nB \bullet nB$$

oco

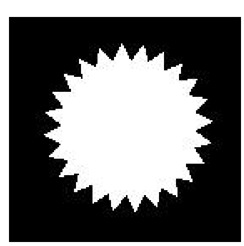
$$\text{nB-}\gamma\phi\gamma(f) = f \circ B \bullet B \circ B \ldots \circ (n-1)B \bullet (n-1)B \circ (n-1)B \circ nB \bullet nB \circ nB$$

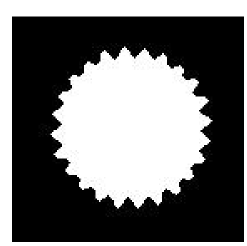
coc

$$\text{nB-}\phi\gamma\phi(f) = f \bullet B \circ B \bullet B \ldots \bullet (n-1)B \circ (n-1)B \bullet (n-1)B \bullet B \circ nB \bullet nB$$

Alternados seqüênciais

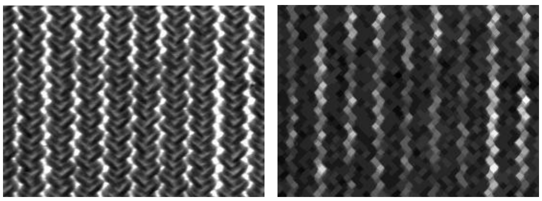
oc cruz





Alternados seqüênciais

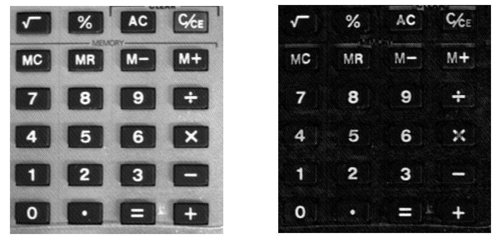
oc cruz



Abertura top-hat

- Operador de imagens dado por:

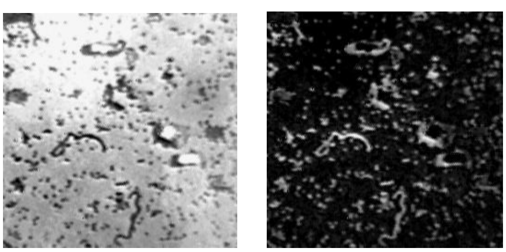
$$f \hat{\circ} B = f - f \circ B_{dil}$$



Fechamento top-hat

- Operador de imagens dado por:

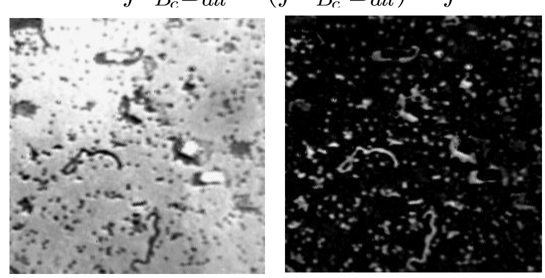
$$f \hat{\bullet} B = f \bullet B_{dil} - f$$



Closerecth

- Operador entre imagens definido por:

$$f \hat{\bullet}_{B_C} B_{dil} = (f \bullet_{B_C} B_{dil}) - f$$



Area open

- Operador entre imagens definido por:

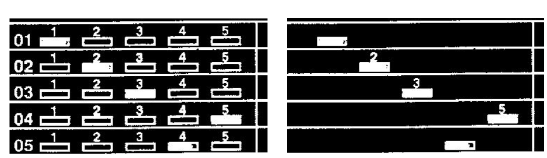
$$f \circ (a)_{B_C} = \bigvee_{B \in \mathcal{B}_{B_C,a}} f \circ B$$

$$\mathcal{B}_{B_C,a} = \{X \subset E : X \text{ is } B_C - \text{connected} \quad Area(X) \geq a\}$$

Area open

- Operador entre imagens definido por:

$$f \circ (a)_{B_C} = \bigvee_{B \in \mathcal{B}_{B_C,a}} f \circ B$$



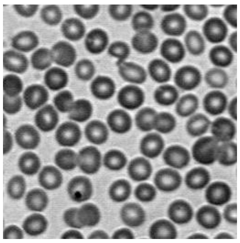
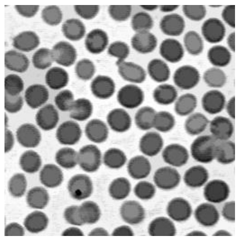
a=500

Area open

- Operador entre imagens definido por:

$$f \circ (a)_{B_C} = \bigvee_{B \in \mathcal{B}_{B_C,a}} f \circ B$$

a=500

Area close

- Operador entre imagens definido por:

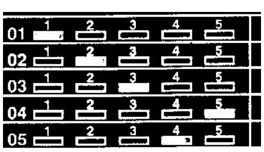
$$f \bullet (a)_{B_C} = \bigwedge_{B \in \mathcal{B}_{B_C,a}} f \bullet B$$

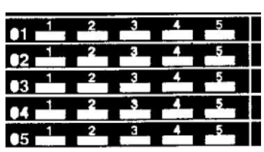
$$\mathcal{B}_{B_C,a} = \{X \subset E : X \text{ is } B_C - \text{connected}$$
$$Area(X) \geq a\}$$

Area close

- Operador entre imagens definido por:

$$f \bullet (a)_{B_C} = \bigwedge_{B \in \mathcal{B}_{B_C,a}} f \bullet B$$





a=400

Area close

- Operador entre imagens definido por:

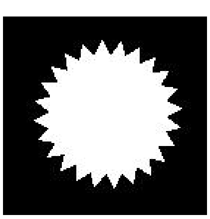
$$f \bullet (a)_{B_C} = \bigwedge_{B \in \mathcal{B}_{B_C,a}} f \bullet B$$

a=400

Sup-geradora

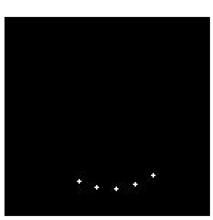
- Operador entre imagens definido por:

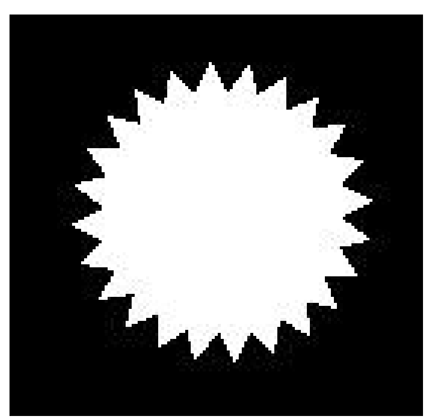
$$f \circledast \mathcal{I}_{A,B} = (f \ominus A) \wedge (f^c \ominus B^c)$$



A
000
010
000

B
111
010
000





Emagrecimento homotópico

- Operador entre imagens definido por:

$$\sigma^{n}_{\Delta\theta,\mathcal{I}_{A,B}}(f) = \sigma_{\Delta\theta,\mathcal{I}_{A,B}}(\sigma_{\Delta\theta,\mathcal{I}_{A,B}}(\ldots\sigma_{\Delta\theta,\mathcal{I}_{A,B}}(f)))$$

$$\sigma_{\Delta\theta,\mathcal{I}_{A,B}}(f) = \begin{cases} \sigma_{315}(\sigma_{270}(\sigma_{225}(\sigma_{180}(\sigma_{135}(\sigma_{90}(\sigma_{45}(\sigma_0(f)))))))) \text{ if } \Delta\theta = 45 \\ \sigma_{270}(\sigma_{180}(\sigma_{90}(\sigma_0(f)))) \text{ if } \Delta\theta = 90 \\ \sigma_{180}(\sigma_{90}(f)) \text{ if } \Delta\theta = 180 \end{cases}$$

$$\sigma_\theta = (f - f \circledast \mathcal{I}_{A_\theta,B_\theta})$$

Emagrecimento homotópico

A	B
000	111
010	010
000	000

15 emagrecimentos