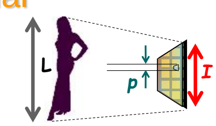
Escala e Regularidade

Escala e Representação

- A escala está associada à capacidade de discernir detalhes "físicos" (isto é, do mundo, da cena)
  - "resolver" detalhes → resolução espacial
  - *Tamanho do menor detalhe da cena*
- E também ao limite de resolução da representação
  - Tamanho do menor elemento da representação
  - No caso da representação ser uma imagem → *tamanho do pixel*

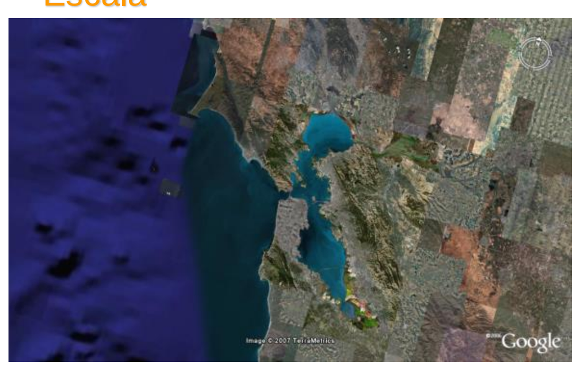
Resolução espacial



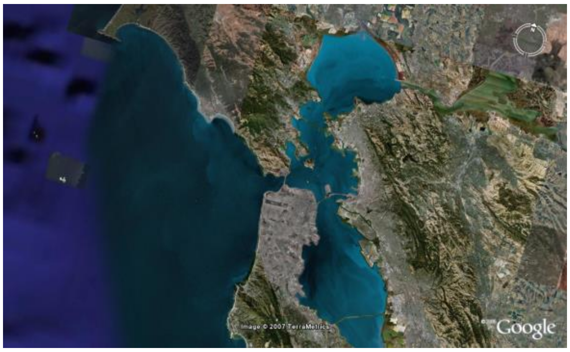
- Como vimos antes
  - Sejam:
    - L = tamanho da cena
    - I = tamanho do sensor
    - p = tamanho do pixel
  - *resolução física d* = tamanho do menor detalhe da cena visível na sua imagem formada no sensor
  - A relação se mantém: $\frac{L}{d} = \frac{I}{p}$

Escala

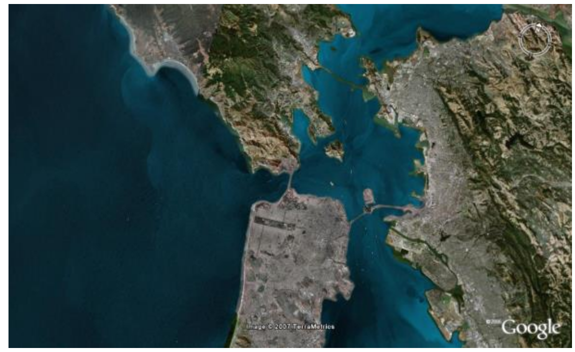
Escala



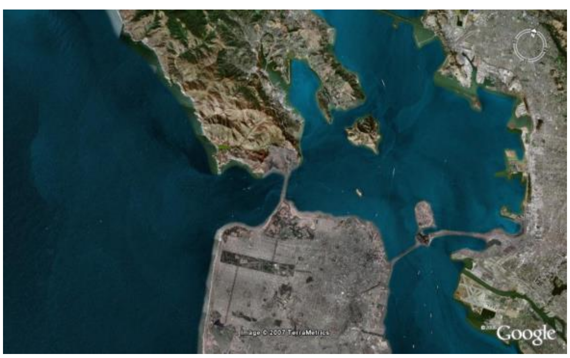
Escala



Escala

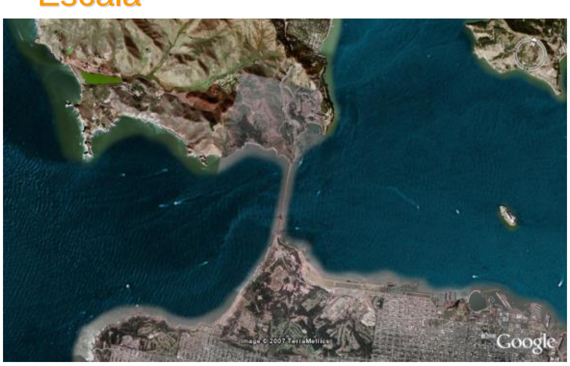


Escala

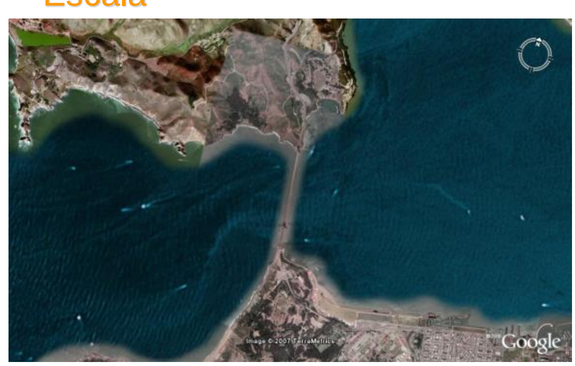


Escala

Escala



Escala



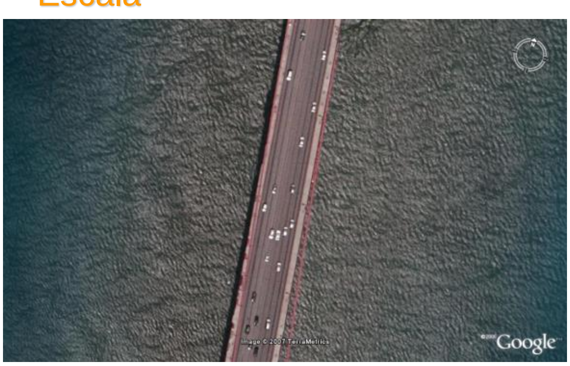
Escala

Escala

Escala

Escala

Escala

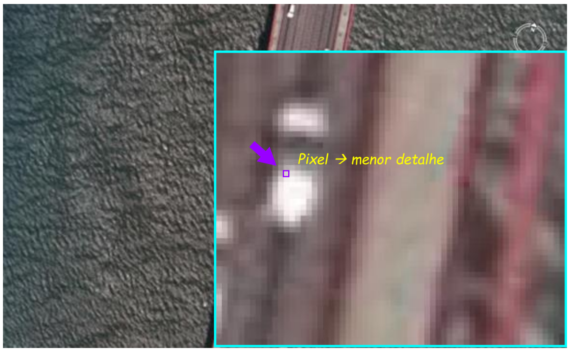


Escala

Maior objeto

Escala

Menor detalhe



Escala

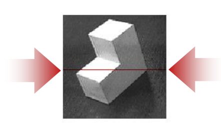
Não é possível ir além desse refinamento sem que se forneça outras informações

Resolução versus representação

- Como determinar a resolução ideal para as análises e processamentos ?
  - Admitindo-se que a intensidade do campo incidente sobre o sensor seja espacialmente **contínua**, dentro dos limites ópticos:
    - **A imagem no sensor é um mapa de amostras da distribuição de intensidades**
    - **Cada amostra corresponde a 1 pixel**

Resolução x representação

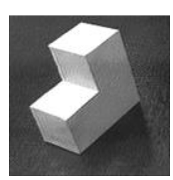
- Nosso objetivo é obter uma represen-tação que forneça respostas sobre a resolução ideal

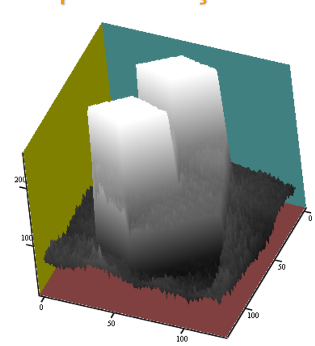


Por questão de simplicidade

Iniciaremos nossa investigação em 1D, utilizando uma linha individual da imagem.
Depois, faremos a extensão para 2D.

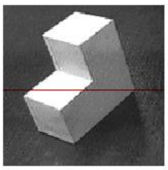
Resolução x representação



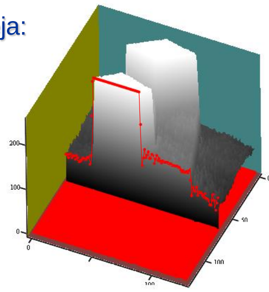


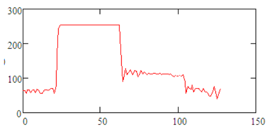
- Analisemos o perfil de intensidades sobre uma linha da imagem acima

Resolução x representação

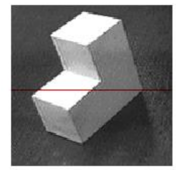


Ou seja:

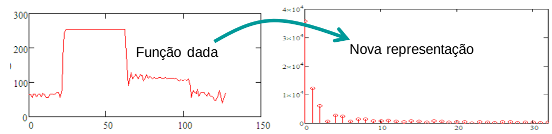




Resolução x representação



- Procuraremos uma representação para as intensidades, descritas pelo perfil, que nos revele informações sobre resolução
- O perfil pode ser visto como uma **função**, que mapeia intensidades em pontos do *domínio* (*suporte da linha da imagem* → *reta*)



Resolução x representação

- O perfil de intensidades é uma função relativamente bem comportada (descrevem sinais → energia e resolução fisicamente limitadas)
- Procuraremos representações que revelem informações de resolução associadas a essa função
- Discutamos um pouco sobre representação de funções

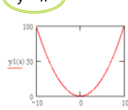
Resolução x representação

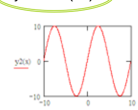
- Funções conhecidas têm nomes : seno, co-seno, exponencial, logaritmica, hiperbólicas, gama, zeta de Riemann, etc...
- Funções arbitrárias não têm nome, mas são aquelas que aparecem na natureza
- Funções conhecidas são modelos, com regras de construção conhecidas

Representação de Funções

Funções conhecidas

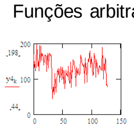
$y = x^2$ $y = A*\sin(\omega x)$





Fornecidas pelos nomes

Funções arbitrárias



$y4 =$

	0
0	142
1	169
2	132
3	141
4	122
5	140
6	198
7	170
8	136
9	148
10	122
11	194
12	147
13	193
14	153
15	173

Fornecidas por tabelas

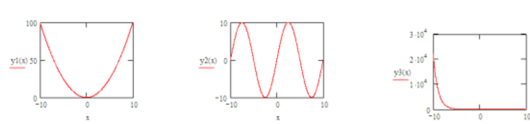
Representação de Funções

$x := -10, -9.99 .. 10$

$A := 10$ $T := 10$ $f := \frac{1}{T}$

$\omega := 2 \cdot \pi \cdot f$

$y1(x) := x^2$ $y2(x) := A \cdot \sin(\omega \cdot x)$ $y3(x) := e^{-x}$

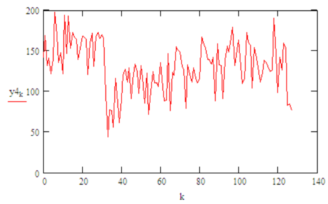


Funções conhecidas

Representação de Funções

	0
0	142
1	169
2	132
3	141
4	122
5	140
6	198
7	170
8	136
9	148
10	122
11	194
12	147
13	193
14	153
15	173

y4 =

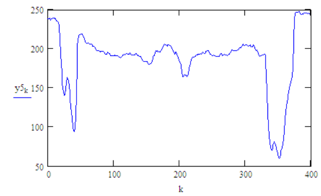


Funções arbitrárias

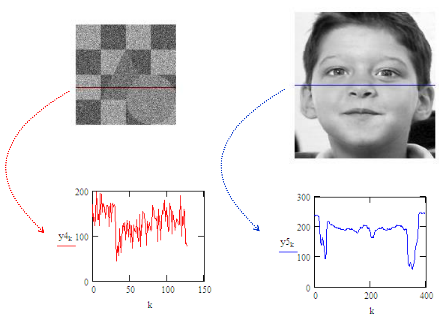
Representação de Funções

	0
0	238
1	238
2	238
3	238
4	239
5	237
6	238
7	238
8	239
9	239
10	239
11	239
12	238
13	238
14	236
15	236

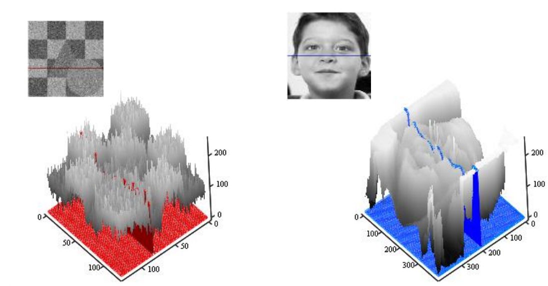
y5 =

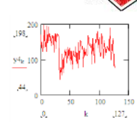


Funções arbitrárias

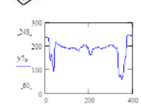


Funções arbitrárias





Funções arbitrárias



Representação de Funções

- Funções conhecidas podem ser especificadas de modo <u>bastante sumário</u>
  - **Poucos dados precisam ser fornecidos**
  - **Os demais são calculados a partir das especificações da função**
  - **São especificadas por um pequeno conjunto de parâmetros**
- Funções arbitrárias precisam ser descritas <u>ponto a ponto</u>

Representação de Funções

- Como obter uma representação de funções arbitrárias através de funções conhecidas ?
  - Resposta: conhecendo-se melhor o conjunto que contém todas as funções arbitrárias e as conhecidas
  - Estudando-se suas propriedades estruturais → estrutura algébrica

Representação de Funções

- Interessa-nos modelar o conjunto das funções que traduzem os perfis de intensidades
  - Os perfis são funções arbitrárias, porém bem comportadas
    - **Seus valores são limitados, não divergem em nenhum ponto**
    - **Qualquer soma finita dessas funções continuará a ser limitada ainda**
    - **Também o será seu produto por uma constante (escalar) finita**

Representação de Funções

- Combinamos que consideraríamos os perfis de intensidades como funções contínuas, por ora
- Munido da estrutura de ser fechado sob a adição de dois elementos e sob a multiplicação por um escalar, o conjunto dos perfis apresenta a estrutura de **espaço vetorial**
  - Podemos portanto, aproveitar o que conhecemos dessa estrutura algébrica, para auxiliar na construção de nossa representação desejada

Representação Harmônica

Representação de Funções

- Relembrando:
  - Desejamos representar funções arbitrárias através de funções conhecidas
  - Vantagem: as funções conhecidas podem ser especificadas através de poucos parâmetros
  - Queremos uma representação global (em contraste com a série de Taylor, que é uma representação local)

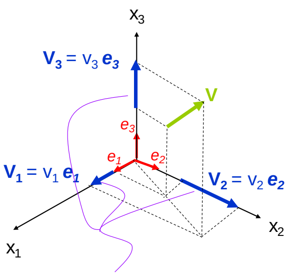
Representação de Funções

- Situação análoga: Representação de Vetores (geométricos)
  - Como obter uma representação de vetores arbitrários através de vetores conhecidos ?
  - Resposta:
    - **Através da decomposição do vetor arbitrário em um conjunto de vetores unitários ortogonais**
      - » Base ortonormal
      - » Nº de vetores da base = dimensão

Façamos um overview

- Só para guiar o raciocínio
- Analisaremos em mais detalhes a seguir

Representação de Vetores

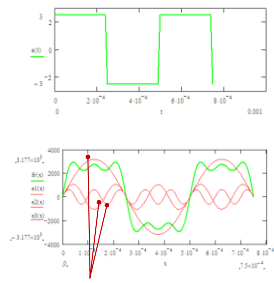


$V = \sum_k (v_k \, e_k)$

coordenadas vetores da base

Representação de Funções

Função dada (perfil)



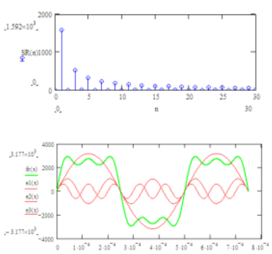
Componentes da função

$f(x) = \sum_k (F_k \, e^{jk\omega x})$

coordenadas vetores da base

Representação de Funções

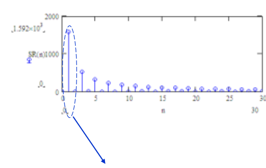
Gráfico das coordenadas (espectro)



$f(x) = \sum_k (F_k \, e^{jk\omega x})$

coordenadas vetores da base

Representação de Funções



$f1(x) = F_1 \, e^{j1\omega x}$

Esta é uma das componentes

$f(x) = \sum_k (F_k \, e^{jk\omega x})$

coordenadas vetores da base

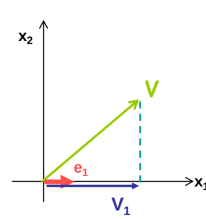
As componentes dessa representação são caracterizadas por nos complexos

Representação de Funções

- Analisando mais detalhadamente:
  - O conjunto dos perfis de intensidades (funções contínuas limitadas) constitui um espaço vetorial (sobre o corpo complexo)
  - Pode portanto ser representado através da decomposição em uma base
  - O espaço vetorial acima é normado e podemos definir um produto interno
  - Os coeficientes da decomposição na base poderão ser obtidos através desse produto interno

Representação de Funções

- No caso dos vetores (geométricos):



$V_1 = v_1 \, e_1$

$V_1 = v_1 \, e_1$

componente

vetor da base

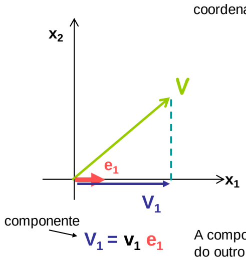
coordenada (coeficiente)

Produto escalar

$v_1 = V \cdot e_1$

Representação de Funções

- Produto escalar = produto interno



coordenada → v_1 = V . e_1

Regra do produto escalar de dois vetores:

$$V \cdot U = \sum v_i u_i$$

A componente é a projeção de um vetor na direção do outro

Representação de Funções

- Os vetores que formam a base
  - São não-nulos
  - Têm módulo unitário (versores)
  - Formam um conjunto linearmente independente
    - **São ortogonais (ortonormais→ módulo unitário)**

$$e_i \cdot e_j = \delta_{ij}$$

- **A quantidade de versores requeridos para formar a base é igual à <u>dimensão</u> do espaço a ser gerado por ela**

Representação de Funções

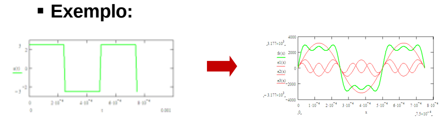
- No caso do espaço de funções
  - É um espaço de dimensão infinita
  - O número de funções na base será infinito também
  - As funções e(x) da base são tais que

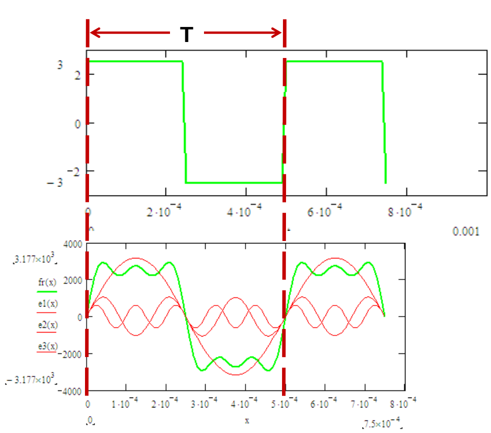
$$e_i(x) \cdot e_j(x) = \delta_{ij}$$

  - As funções trigonométricas sen($m\omega_0 x$) e cos($n\omega_0 x$), m,n = 0,1,2,..... podem constituir uma base para o espaço das funções

Representação de Funções

- As funções trigonométricas sen($m\omega_0 x$) e cos($n\omega_0 x$), m,n = 0,1,2,..... podem constituir uma base para o espaço das funções
- Consideremos apenas funções periódicas, por enquanto:
  - **Nesse caso, $\omega_0 = 2\pi / T$, sendo T o período da função a ser representada**
  - **Exemplo:**





Demonstração

- Sintetizador harmônico
  - Mostrar como é possível construir (sintetizar) e analisar sinais utilizando as funções harmônicas (seno e co-seno)

Representação de Funções

As funções trigonométricas sen(mωx) e cos(nωx), m,n = 0,1,2,..... formam um conjunto linearmente independente e ortonormal e podem constituir uma base para o espaço das funções com a seguinte regra de produto interno:

$$f(x) \bullet g(x) = K \int_a^b f(x)g(x)dx$$

sendo o intervalo (a,b) igual ao período $T = \frac{2\pi}{\omega}$ e K uma constante de normalização.

Condições para o produto interno

- Bilinearidade

$$(f_1 + f_2) \bullet g = f_1 \bullet g + f_2 \bullet g$$
$$g \bullet (f_1 + f_2) = g \bullet f_1 + g \bullet f_2$$
$$g \bullet (kf) = k(g \bullet f) = (kg) \bullet f$$

- Simetria

$$(f \bullet g) = (g \bullet f)$$

- Positividade

$$(f \bullet f) \geq 0$$

  - Em particular, escolheremos K de modo que, para as funções $\{ e_k \}$ da base :

$$(e_i \bullet e_j) = \delta_{ij}$$

Exercício (para casa)

- Demonstre que

$$sin(m\omega x) \bullet cos(n\omega x) = 0$$
$$sin(m\omega x) \bullet sin(n\omega x) = \delta_{mn}$$
$$cos(m\omega x) \bullet cos(n\omega x) = \delta_{mn}$$

Com a seguinte regra de produto interno:

$$f(x) \bullet g(x) = \frac{2}{b-a} \int_a^b f(x)g(x)dx$$

sendo o intervalo (a,b) igual ao período $T = \frac{2\pi}{\omega}$

Série de Fourier

- É utilizada para representar funções periódicas
- Sua forma é:

$$A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (A_k cos(k\omega_0 x) + B_k sin(k\omega_0 x))$$

- Os coeficientes Ak e Bk são calculados pelo produto interno da função f(x) a ser representada, e cada componente da base, $cos(k\omega_0 x)$ e $sin(k\omega_0 x)$, respectivamente

$$A_k = \frac{2}{T}\int_0^T f(x)cos(k\omega_0 x)dx \quad B_k = \frac{2}{T}\int_0^T f(x)sin(k\omega_0 x)dx$$

Série de Fourier

$$f(x) = A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (A_k cos(k\omega_0 x) + B_k sin(k\omega_0 x))$$

$$A_k = \frac{2}{T}\int_0^T f(x)cos(k\omega_0 x)dx \quad B_k = \frac{2}{T}\int_0^T f(x)sin(k\omega_0 x)dx$$

- O coeficiente A_0 é proporcional ao valor médio da função no seu período T

$$A_0 = \frac{2}{T}\int_0^T f(x)dx \qquad T = \frac{2\pi}{\omega_0}$$

- Note que estamos ainda considerando f(x) periódica.

Representação complexa

- A série de Fourier pode ser representada por uma série de exponenciais complexas, lançando-se mão das relações de Euler:

$$\rho cos(k\omega x) + j\rho sin(k\omega x) = \rho e^{jk\omega x}$$

$$cos(k\omega x) = \frac{e^{jk\omega x} + e^{-jk\omega x}}{2}$$

$$sin(k\omega x) = \frac{e^{jk\omega x} - e^{-jk\omega x}}{2j}$$

Representação complexa

- A somatória da expressão da série trigonométrica de Fourier pode ser re-escrito

$$f(x) = \frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\Big(\underbrace{\frac{A_k}{2}\left(e^{jk\omega_0 x} + e^{-jk\omega_0 x}\right)}_{A_k cos(k\omega_0 x)} + \underbrace{\frac{B_k}{2j}\left(e^{jk\omega_0 x} - e^{-jk\omega_0 x}\right)}_{B_k sin(k\omega_0 x)}\Big)$$

- Ou, ainda

$$f(x) = \frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{A_k - jB_k}{2} e^{jk\omega_0 x} + \frac{A_k + jB_k}{2} e^{-jk\omega_0 x}\right)$$

Representação complexa

$$f(x) = \frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{A_k - jB_k}{2} e^{jk\omega_0 x} + \frac{A_k + jB_k}{2} e^{-jk\omega_0 x}\right)$$

- Definindo-se

$$C_0 = \frac{A_0}{2} \qquad C_k = \frac{A_k - jB_k}{2} \qquad C_{-k} = \frac{A_k + jB_k}{2}$$

- vem:

$$f(x) = C_0 + \sum_{k=1}^{\infty}\left(C_k e^{jk\omega_0 x} + C_{-k} e^{-jk\omega_0 x}\right)$$

- ou,ainda:

$$f(x) = C_0 + \sum_{k=1}^{\infty} C_k e^{jk\omega_0 x} + \sum_{k=-1}^{-\infty} C_k e^{jk\omega_0 x}$$

Representação complexa

- Resulta, então, a forma complexa da série de Fourier:

$$f(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k e^{jk\omega_0 x}$$

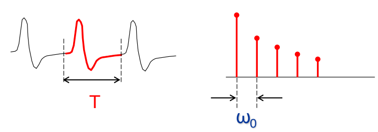
- Deduz-se facilmente que:

$$C_k = \frac{1}{T}\int_0^T f(x) e^{-jk\omega_0 x} dx$$

- Exercício: deduza C_k

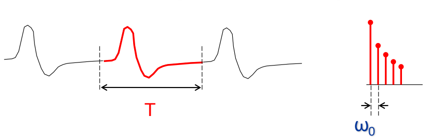
Funções não-periódicas

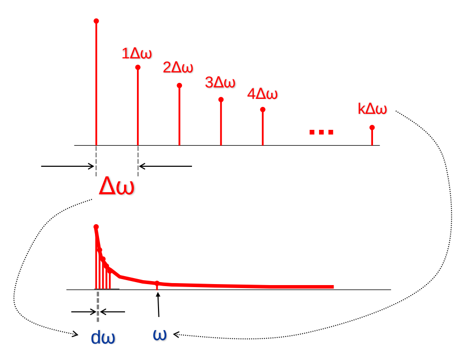
- Podemos, por um artifício heurístico, admitir que uma função não-periódica poderia ser obtida de uma periódica, com o período T → ∞
  - Como $T = 2\pi / \omega_0$, resulta que $\omega_0 \rightarrow 0$



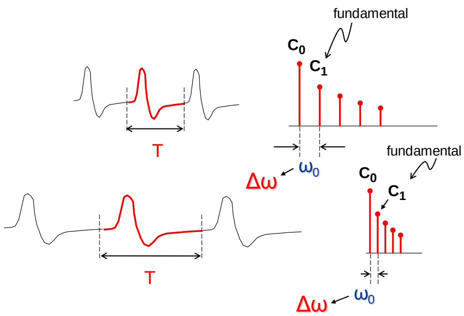
Funções não-periódicas

- Podemos, por um artifício heurístico, admitir que uma função não-periódica poderia ser obtida de uma periódica, com o período T → ∞
  - Como $T = 2\pi / \omega_0$, resulta que $\omega_0 \rightarrow 0$





Funções não-periódicas



Funções não-periódicas

- No caso das funções periódicas:
  - Das 2 expressões do slide anterior, temos:

$$f(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k e^{jk\omega_0 x} \qquad C_k = \frac{1}{T}\int_0^T f(x) e^{-jk\omega_0 x} dx$$

$$f(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{T}\int_0^T f(x) e^{-jk\omega_0 x} dx\right) e^{jk\omega_0 x}$$

Funções não-periódicas

- Escrevendo T como T = $2\pi / \omega_0$, resulta

$$f(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{2\pi}\int_0^T f(x) e^{-jk\omega_0 x} dx\right) \omega_0 e^{jk\omega_0 x}$$

- ou, ainda,

$$f(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{2\pi}\int_{-T/2}^{T/2} f(x) e^{-jk\Delta\omega x} dx\right) \Delta\omega e^{jk\Delta\omega x}$$

- Onde trocamos ω_0 por $\Delta\omega$ para indicar que é a frequência fundamental da função que irá tender a zero quando T → ∞

Funções não-periódicas : quando T → ∞

- Nessas circunstâncias, $\Delta\omega \rightarrow d\omega$ e $k\Delta\omega \rightarrow \omega$, sendo **ω** agora uma variável contínua

$$f(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{2\pi}\int_{-T/2}^{T/2} f(x) e^{-jk\Delta\omega x} dx\right) \Delta\omega e^{jk\Delta\omega x}$$

- Por sua vez, a somatória torna-se uma integral em ω

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{\left(\int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-j\omega x} dx\right)}_{\text{Chamemos de } F(\omega)} e^{j\omega x} d\omega$$

Funções não-periódicas

- Então:

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{j\omega x} d\omega$$

- Denomina-se: F(ω) → Transformada de Fourier de f(x)

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-j\omega x} dx$$

Exercícios

- Demonstre que a transformada de Fourier é uma transformação linear
- Definindo-se convolução de duas funções:

$$f(x) \otimes g(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) g(x-\xi) d\xi$$

- Mostre que a transformada de Fourier da convolução de f(x) e g(x) é igual ao produto das transformadas F(ω) e G(ω)

Exercícios

- Sabendo-se que

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(x-\xi)dx = f(\xi)$$

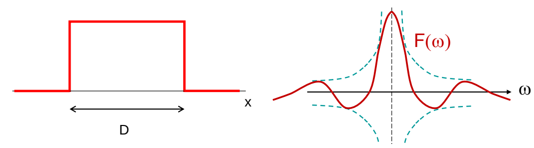
calcule a transformada de Fourier de δ(x)

- Calcule a transformada de Fourier de f(sx), sendo s um escalar dado.

Exercício

- Demonstre que a transformada de Fourier de um pulso retangular de largura D tem a forma dada por

$$F(\omega) = A \times sinc(\omega) = A\frac{sin(\omega)}{\omega}$$



Propriedade 1

- Definindo-se convolução de duas funções:

$$f(x) \otimes g(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi)g(x-\xi)d\xi$$

- A transformada de Fourier da convolução de f(x) e g(x) é igual ao produto das transformadas F(ω) e G(ω)

Propriedade 2 (dual de 1)

- A convolução das transformadas de Fourier de duas funções:

$$F(\omega) \otimes G(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} F(\nu)G(\omega-\nu)d\nu$$

- A convolução de F(ω) e G(ω) é igual à transformada de Fourier do produto de f(x) e g(x)

Amostragem

- Propriedade de filtragem local:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(x-\xi)dx = f(\xi)$$

- Amostragem
  - Corresponde a multiplicar uma função por um trem de pulsos

Hipóteses de representação

- Funções periódicas contínuas → série de Fourier

$$f(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k e^{jk\omega_0 x} \qquad C_k = \frac{1}{T}\int_0^T e^{-jk\omega_0 x}dx$$

- Funções em geral, contínuas → transformada de Fourier

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)e^{j\omega x}d\omega \qquad F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-j\omega x}dx$$

- Funções discretas (amostradas) → transformada discreta de Fourier (DFT)

$$f(n) = \frac{1}{N}\sum_{k=-M}^{M} F(k)e^{jk\frac{2\pi}{N}n} \qquad F(k) = \sum_{k=0}^{N-1} f(n)e^{-jk\frac{2\pi}{N}n}$$

Amostragem

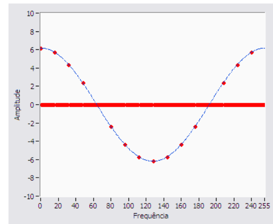
$$f(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=-M}^{M} F(k) e^{jn\frac{2\pi}{N}k}$$

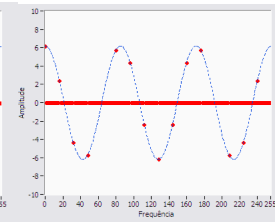
$$F(n) = \sum_{k=0}^{N-1} f(k) e^{-jn\frac{2\pi}{N}k}$$

- A função será amostrada
- Questão: quanto vale M ?

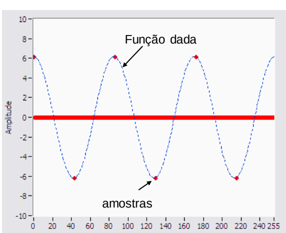
Amostragem

A taxa com que se amostra uma dada componente harmônica pode não ser suficiente para amostrar uma componente de frequência mais alta

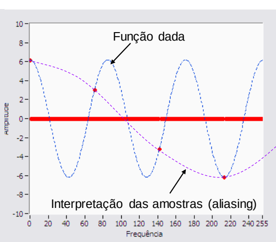




Amostragem



Situação limite → Frequência de Nyquist



Aliasing