MAE 228 - Noções de Probabilidade e Processos Estocásticos
1a Lista de Exercícios

1. Considere o seguinte jogo: um jogador, jogador "A", escolhe dois números inteiros sucessivos e escreve cada um deles em uma folha de papel; outro jogador, jogador "B", escolhe ao acaso uma dessas folhas de papel e entrega a outra ao jogador "A"; o jogador que tiver o *menor* número ganha e, como prêmio deve receber do jogador perdedor o valor, em Reais, equivalente ao maior dos dois números. O jogador "B" considera este jogo vantajoso pelo seguinte raciocínio: se o número que recebe é N, então o seu oponente terá o número N-1 ou o número N+1; se tiver N-1 então o jogador "B" perde, tendo que pagar N Reais; se, por outro lado, seu oponente tiver N+1, então o jogador "B" ganha, recebendo N+1 Reais; seu lucro médio por jogada seria, portanto, 50 centavos de Real. Já o jogador "A" acha que o jogo é favorável a ele, pelo mesmo raciocínio. Quem têm razão?

2. Três prisioneiros são informados pelo carcereiro, que nunca mente, que um deles foi escolhido ao acaso para ser executado ao amanhecer enquanto os outros dois irão ser libertados. O carcereiro informa tambem que não pode revelar mais nada até o amanhecer. O prisioneiro A pede ao carcereiro que lhe diga confidencialmente o nome de um dos que vai ser solto entre os outros dois; argumenta ele que isto não lhe trará informação alguma, visto que pelo menos um dos outros dois vai ser solto. O carcereiro recusa, argumentando que se A souber isto, a probabilidade dele ser executado que era 1/3 passa a ser de 1/2. Algum dos dois tem razão ? Construa um modelo adequado a esta situação.

3. Um dado honesto é jogado três vezes e os resultados são anotados na ordem de ocorrência. Assumindo que todos os resultados são igualmente prováveis, calcule as probabilidades deos seguintes eventos:
{a face 6 aparece pelo menos uma vez};
{o primeiro resultado é par};
{o segundo resultado é par};
{os dois primeiros resultados são pares};
{a soma dos dois primeiros resultados é igual par};
{o produto dos resultados é ímpar};
{os três resultados são diferentes}.

4. Retiramos ao acaso 2 cartas de um baralho de 52 cartas.
Sejam $A = \{$as duas cartas são de cor vermelha$\}$ e
$B = \{$entre as duas cartas há exatamente um valete$\}$. Calcule a probabilidade destes dois eventos. Os eventos A, B são independentes?

5. Uma moeda honesta é lançada repetidas vezes até que se encontre *cara* pela primeira vez. a) Descreva um espaço amostral adequado para este experimento aleatório e defina as probabilidades. b) Qual é a probabilidade de que seja necessário lançar a moeda mais do que três vezes até encontrar *cara* pela primeira vez? c) Se já lancei a moeda uma vez e encontrei *coroa*, qual é a probabilidade de ainda ser necessário lançar a moeda ainda mais três vezes até encontrar *cara* pela primeira vez? d) Qual é a probabilidade de que *cara* nunca apareça?

6. Uma urna contém 3 bolas brancas e 4 pretas. Lançamos um dado, e se o resultado for i, retiramos i bolas da urna e observamos o número de bolas brancas nesta amostra. a) Descreva o espaço amostral e probabilidades associadas a este experimento aleatório. b) Qual é a probabilidade de todas as moedas encontradas serem brancas? c) Aconteceu que todas as bolas retiradas eram brancas. Qual é a probabilidade que o resultado do dado tenha sido 3?

7. Numa fábrica de parafusos, as máquinas A, B, C produzem respectivamente 20, 30 e 50 por cento do total. De sua produção, 6, 8, e 7 por cento são defeituosos. Um parafuso é retirado ao acaso da produção e se verifica que o mesmo está defeituoso. Quais é a probabilidade que ele tenha sido manufaturado pela máquinas A?

8. Um indivíduo tem quatro moedas no bolso, sendo que uma delas tem cara nas duas faces e as demais são normais. Ele fecha os olhos, escolhe uma delas ao acaso e lança. Qual é a probabilidade de que a face da moeda que fica para cima seja cara? Ele abre os olhos e observa que a face para cima é cara. Qual é a probabilidade de que a outra face da moeda também seja cara?

9. *Paradoxo de Galton* Você lança três moedas honestas. Naturalmente você já sabe que pelo menos duas delas devem ser iguais. O outro lançamento pode resultar em cara ou coroa com a mesma probabilidade. *Portanto* a probabilidade das três serem iguais é 1/2. Este argumento está correto?

10. Um dado honesto é lançado repetidas vezes até que apareça, pela primeira vez, a face 3 para cima. Qual é o espaço amostral e probabilidades adequadas para este experimento aleatório? Seja A_n o evento "a face 3 aparece pela primeira vez na jogada n". Determine $P(A_n)$. Seja B o evento "a face 2 aparece antes da primeira face 3". Determine $P(B)$.

11. Numa fruteira há 3 maçãs e duas goiabas sendo que uma das maçãs e uma das goiabas estão estragadas. Um indivíduo escolhe uma fruta ao acaso; se a fruta estiver estragada, ele a joga fora e escolhe outra, também aleatoriamente, repetindo o procedimento anterior (jogando fora a fruta se ela estiver estragada e fazendo nova escolha ao acaso) até encontrar uma fruta que não esteja estragada. a) Identifique um espaço amostral adequado para este experimento aleatório. b) Qual é a probabilidade dele ter que jogar fora pelo menos uma fruta antes de encontrar uma boa? c) Se a primeira fruta escolhida estava estragada qual é a probabilidade da segunda fruta escolhida ser uma maçã?

12. A água de uma certa região é considerada imprópria para o consumo (contaminada) se são encontrados bacilos do tipo A ou bacilos tipo B e C (estes dois simultaneamente). As probabilidades de se encontrarem bacilos tipo A, B e C são, respectivamente, 0,30; 0,20 e 0,80. Existindo bacilos do tipo A não existirão bacilos do tipo B; e existindo bacilos do tipo B, a probabilidade de existirem bacilos do tipo C é reduzida a metade. Baseado nessas informações, calcule a) A probabilidade de aparecerem bacilos tipo B ou C. b) A probabilidade da água estar contaminada.

13. Um indivíduo guarda suas camisas em um armário com duas gavetas. No começo da semana a gaveta 1 contém duas camisas brancas e uma azul e a gaveta 2 contém uma camisa azul e uma camisa branca. Em cada dia da semana, de segunda a sexta, ele escolhe a camisa que vai usar naquele dia da seguinte forma: escolhe ao acaso uma gaveta; se ela não estiver vazia, ele escolhe uma camisa ao acaso; se a gaveta escolhida estiver vazia, ele abre a outra gaveta e escolhe uma camisa ao acaso dessa gaveta. a) Qual é a probabilidade de que ele use uma camisa branca na segunda-feira? b) Se ele usou uma camisa azul na terça-feira, qual é a probabilidade de que ela tenha sido escolhida da gaveta 1? c) Qual é a probabilidade de que ele use camisa branca em dois dias sucessivos?

14. Paradoxo de Simpson. Um médico testou duas drogas com os seguintes resultados:

	Sucesso	Fracasso	Total	Taxa de Sucesso
Tratamento	20	30	50	0,40
Controle	16	34	50	0,32
Total	36	64	100	

A taxa de sucesso com o tratamento (40 %) é maior que a taxa de sucesso no grupo de controle (32 %), o que sugere que o tratamento deva ser recomendado.

Por outro lado, se separamos os 100 indivíduos da pesquisa entre os 50 mais *Jovens* e os 50 mais *Idosos*, encontramos:

Jovens:

	Sucesso	Fracasso	Total	Taxa de Sucesso
Tratamento	16	24	40	0,40
Controle	5	5	10	0,50
Total	21	29	50	

Idosos:

	Sucesso	Fracasso	Total	Taxa de Sucesso
Tratamento	1	9	10	0,10
Controle	14	26	40	0,35
Total	15	35	50	

Notamos que o resultado entre os tratados é pior nos dois grupos! Afinal, o tratamento deve ou não ser recomendado?