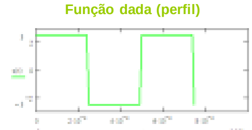
Representação Harmônica

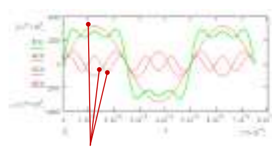
Representação de Funções

- Relembrando:
  - Desejamos representar funções arbitrárias através de funções conhecidas
  - Vantagem: as funções conhecidas podem ser especificadas através de poucos parâmetros
  - Queremos uma representação global (em contraste com a série de Taylor, que é uma representação local)

Representação de Funções

Função dada (perfil)





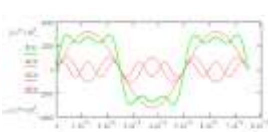
Componentes da função

$f(x) = \sum_k \left(F_k \, e^{\,j k \omega x} \right)$

coordenadas   vetores da base

Representação de Funções

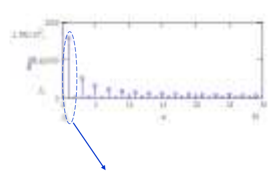
Gráfico das coordenadas (espectro)



$f(x) = \sum_k \left(F_k \, e^{\,j k \omega x} \right)$

coordenadas   vetores da base

Representação de Funções



$f1(x) = F_1 \, e^{\,j 1 \omega x}$

Esta é uma das componentes

$f(x) = \sum_k \left(F_k \, e^{\,j k \omega x} \right)$

coordenadas   vetores da base

As componentes dessa representação são caracterizadas por nºs complexos

Representação de Funções

- Analisando mais detalhadamente:
  - O conjunto dos perfis de intensidades (funções contínuas limitadas) constitui um espaço vetorial (sobre o corpo complexo)
  - Pode portanto ser representado através da decomposição em uma base
  - O espaço vetorial acima é normado e podemos definir um produto interno
  - Os coeficientes da decomposição na base poderão ser obtidos através desse produto interno

Representação de Funções

As funções trigonométricas sen(mωx) e cos(nωx), m,n = 0,1,2,..... formam um conjunto linearmente independente e ortonormal e podem constituir uma base para o espaço das funções com a seguinte regra de produto interno:

$$f(x) \bullet g(x) = K \int_a^b f(x) g(x) dx$$

sendo o intervalo (a,b) igual ao período $T = \frac{2\pi}{\omega}$ e K uma constante de normalização.

Série de Fourier

$$f(x) = A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (A_k cos(k\omega_0 x) + B_k sin(k\omega_0 x))$$

$$A_k = \frac{2}{T} \int_0^T f(x) cos(k\omega_0 x) dx \qquad B_k = \frac{2}{T} \int_0^T f(x) sin(k\omega_0 x) dx$$

- O coeficiente A_0 é proporcional ao valor médio da função no seu período T

$$A_0 = \frac{2}{T} \int_0^T f(x) dx \qquad T = \frac{2\pi}{\omega}$$

- Note que estamos ainda considerando f(x) periódica.

Representação complexa

- A série de Fourier pode ser representada por uma série de exponenciais complexas, lançando-se mão das relações de Euler:

$$\rho cos(k\omega x) + j \rho sin(k\omega x) = \rho e^{jk\omega x}$$

$$cos(k\omega x) = \frac{e^{jk\omega x} + e^{-jk\omega x}}{2}$$

$$sin(k\omega x) = \frac{e^{jk\omega x} - e^{-jk\omega x}}{2j}$$

Representação complexa

- A somatória da expressão da série trigonométrica de Fourier pode ser re-escrito

$$f(x) = \frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (\underbrace{\frac{A_k}{2}(e^{jk\omega_0 x} + e^{-jk\omega_0 x})}_{A_k cos(k\omega_0 x)} + \underbrace{\frac{B_k}{2j}(e^{jk\omega_0 x} - e^{-jk\omega_0 x})}_{B_k sin(k\omega_0 x)})$$

- Ou, ainda

$$f(x) = \frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (\frac{A_k - jB_k}{2} e^{jk\omega_0 x} + \frac{A_k + jB_k}{2} e^{-jk\omega_0 x})$$

Representação complexa

$$f(x) = \frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (\frac{A_k - jB_k}{2} e^{jk\omega_0 x} + \frac{A_k + jB_k}{2} e^{-jk\omega_0 x})$$

- Definindo-se

$$C_0 = \frac{A_0}{2} \qquad C_k = \frac{A_k - jB_k}{2} \qquad C_{-k} = \frac{A_k + jB_k}{2}$$

- vem:

$$f(x) = C_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (C_k e^{jk\omega_0 x} + C_{-k} e^{-jk\omega_0 x})$$

- ou,ainda:

$$f(x) = C_0 + \sum_{k=1}^{\infty} C_k e^{jk\omega_0 x} + \sum_{k=-1}^{-\infty} C_k e^{jk\omega_0 x}$$

Representação complexa

- Resulta, então, a forma complexa da série de Fourier:

$$f(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k e^{jk\omega_0 x}$$

- Deduz-se facilmente que:

$$C_k = \frac{1}{T}\int_0^T f(x) e^{-jk\omega_0 x} dx$$

- Exercício: deduza C_k

Série de Fourier

- Forma complexa da série de Fourier:

$$f(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k e^{jk\omega_0 x}$$

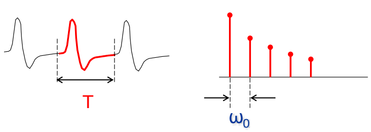
- Os coeficientes são dados por:

$$C_k = \frac{1}{T}\int_0^T f(x) e^{-jk\omega_0 x} dx$$

- Representa funções periódicas

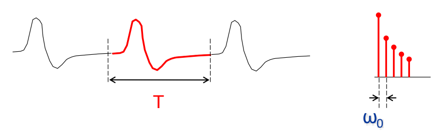
Funções não-periódicas

- Podemos, por um artifício heurístico, admitir que uma função não-periódica poderia ser obtida de uma periódica, com o período T → ∞
  - Como $T = 2\pi / \omega_0$, resulta que $\omega_0 \to 0$

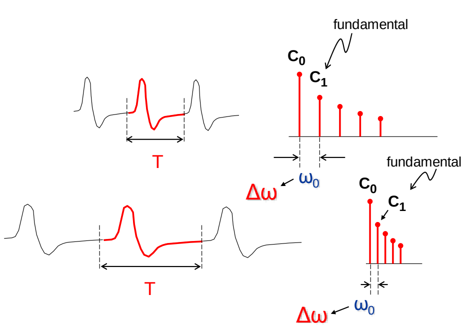


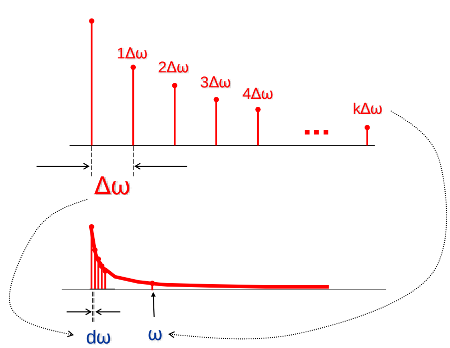
Funções não-periódicas

- Podemos, por um artifício heurístico, admitir que uma função não-periódica poderia ser obtida de uma periódica, com o período T → ∞
  - Como $T = 2\pi / \omega_0$, resulta que $\omega_0 \to 0$



Funções não-periódicas





Série de Fourier

- Forma complexa da série de Fourier:

$$f(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k e^{jk\omega_0 x}$$

- Os coeficientes são dados por:

$$C_k = \frac{1}{T}\int_0^T f(x)e^{-jk\omega_0 x}dx$$

- Representa funções periódicas

Funções não-periódicas

- No caso das funções periódicas:
  - Das 2 expressões do slide anterior, temos:

$$f(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k e^{jk\omega_0 x} \qquad C_k = \frac{1}{T}\int_0^T f(x)e^{-jk\omega_0 x}dx$$

$$f(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{T}\int_0^T f(x)e^{-jk\omega_0 x}dx\right)e^{jk\omega_0 x}$$

Funções não-periódicas

- Escrevendo T como T = 2π / ω_0 , resulta

$$f(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{2\pi}\int_0^T f(x)e^{-jk\omega_0 x}dx\right)\omega_0 e^{jk\omega_0 x}$$

- ou, ainda,

$$f(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{2\pi}\int_{-T/2}^{T/2} f(x)e^{-jk\Delta\omega x}dx\right)\Delta\omega e^{jk\Delta\omega x}$$

- Onde trocamos ω_0 por Δω para indicar que é a frequência fundamental da função que irá tender a zero quando T → ∞

Funções não-periódicas : quando T → ∞

- Nessas circunstâncias, Δω→ dω e kΔω → ω , sendo **ω** agora uma variável contínua

$$f(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{2\pi}\int_{-T/2}^{T/2} f(x)e^{-jk\Delta\omega x}dx\right)\Delta\omega e^{jk\Delta\omega x}$$

- Por sua vez, a somatória torna-se uma integral em ω

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{\left(\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-j\omega x}dx\right)}_{} e^{j\omega x}d\omega$$

Chamemos de $F(\omega)$

Funções não-periódicas

- Pode-se demonstrar que a aproximação abaixo converge

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{\left(\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-j\omega x}dx\right)}_{} e^{j\omega x}d\omega$$

Chamemos de $F(\omega)$

- Por definição, F(ω) é a transformada de Fourier de f(x)
- Permite representar funções não-periódicas

Funções não-periódicas

- Então:

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)e^{j\omega x}d\omega$$

- Denomina-se: F(ω) → Transformada de Fourier de f(x)

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-j\omega x}dx$$

Transformada de Fourier → Funções não-periódicas

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{j\omega x} d\omega$$

– Essa é a representação de Fourier de f(x) genérica

- F(ω) → Transformada de Fourier de f(x)

$$\mathcal{F}\{f(x)\} = F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-j\omega x} dx$$

– Apresenta um espectro contínuo (ω é definido sobre o conjunto dos números reais)

Translação da função

- Seja F(ω) a transformada de Fourier de f(x).

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-j\omega x} dx$$

– Obtenha a transformada de Fourier de f(x – ξ)

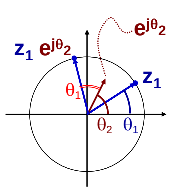
Multiplicação em C

Sejam $\mathbf{z_1}$ e $\mathbf{z_2}$ dois números complexos

$$\mathbf{z}_1 = z_1 e^{j\theta_1}$$
$$\mathbf{z}_2 = z_2 e^{j\theta_2}$$

Multiplicação $\mathbf{z_1} \times \mathbf{z_2}$:

$$\mathbf{z}_1 \times \mathbf{z}_2 = z_1 \times z_2 e^{j(\theta_1 + \theta_2)}$$



Em particular, para $\mathbf{z_2}$ de módulo unitário

$$\mathbf{z}_2 = e^{j\theta_2}$$

A multiplicação nesse caso equivale a girar $\mathbf{z_1}$ de um valor igual ao da fase de $\mathbf{z_2}$

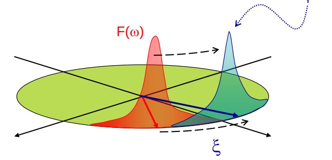
Translação da função

- Seja F(ω) a transformada de Fourier de f(x).

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-j\omega x} dx$$

– a transformada de Fourier de f(x – ξ) é :

$$\mathcal{F}\{f(x-\xi)\} = e^{-j\omega\xi} F(\omega)$$



Escalamento do domínio

- Exercício

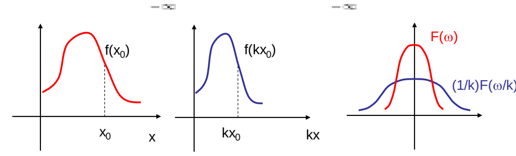
$$\mathcal{F}\{f(kx)\} = \frac{1}{k} F(\frac{\omega}{k})$$

Escalamento do domínio

$$\mathcal{F}\{f(kx)\} = \frac{1}{k} F(\frac{\omega}{k})$$

– **Demonstração:**

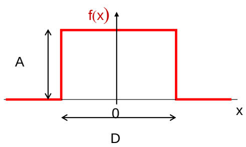
$$\mathcal{F}\{f(kx)\} = \int_{-\infty}^{\infty} f(kx) e^{-j\omega x} dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(y) e^{-j\omega \frac{y}{k}} \frac{1}{k} dy$$

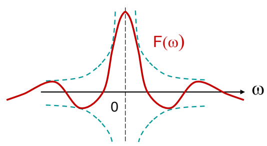


Transformada da janela retangular

- A transformada de Fourier de um pulso retangular de largura D e altura A tem a forma dada por

$$F(\omega) = AD\, sinc(\frac{\omega D}{2}) = AD\,\frac{\sin(\frac{\omega D}{2})}{\frac{\omega D}{2}}$$

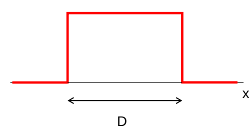


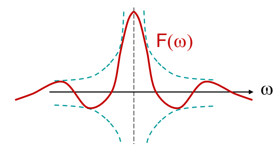


Exercício

- Demonstre que a transformada de Fourier de um pulso retangular de largura D tem a forma dada por

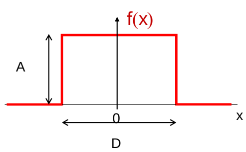
$$F(\omega) = A \times sinc(\omega) = A\frac{sin(\omega)}{\omega}$$





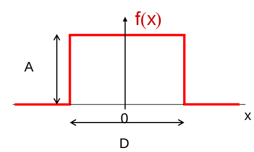
Temos:

$$f(x) = \begin{cases} A\,,\ x \in [-\frac{D}{2}\,,\ \frac{D}{2}] \\ 0\,,\ x \notin [-\frac{D}{2}\,,\ \frac{D}{2}] \end{cases}$$



Temos:

$$f(x) = \begin{cases} A\,,\ x \in [-\frac{D}{2}\,,\ \frac{D}{2}] \\ 0\,,\ x \notin [-\frac{D}{2}\,,\ \frac{D}{2}] \end{cases}$$



$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-j\omega x} dx$$

$$F(\omega) = AD\,\frac{\sin(\omega\frac{D}{2})}{\omega\frac{D}{2}}$$

$$F(\omega) = AD\, sinc(\frac{\omega D}{2})$$