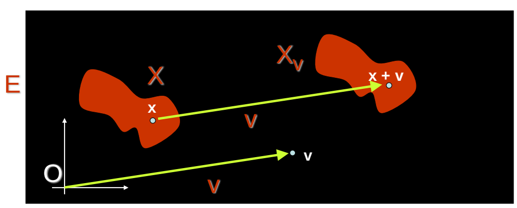
Morfologia Matemática

Translação

- Sejam X um <u>conjunto</u> e v um vetor
  - Translaçao de X por v:

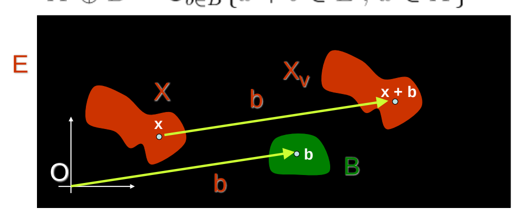
$$X_v = \{x + v \in E \,,\, x \in X\}$$



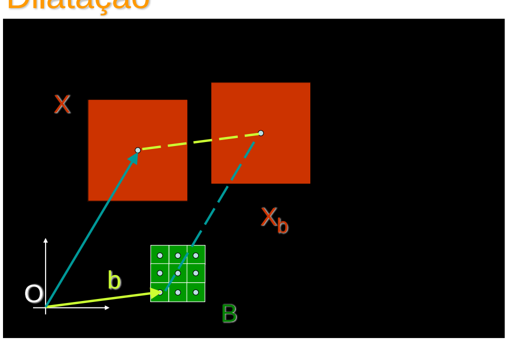
Adição de Minkowski

- Sejam X e B <u>conjuntos</u>. Define-se a soma de Minkowski de X por B como a união das translações de X por todos os vetores de B:

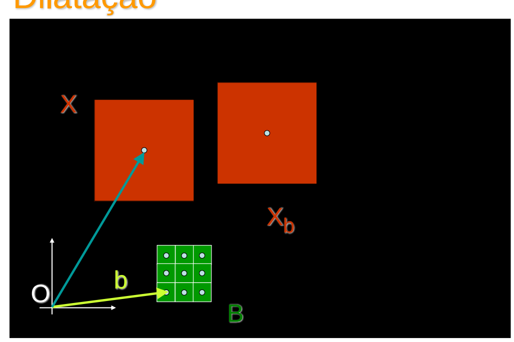
$$X \oplus B = \cup_{b \in B} \{x + b \in E \,,\, x \in X\}$$



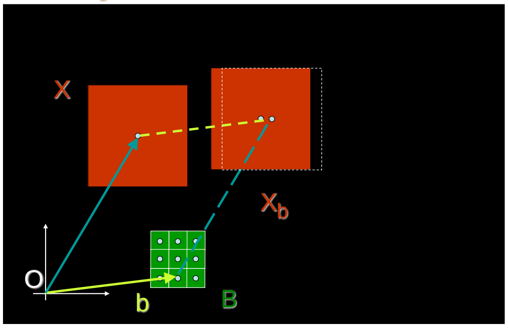
Dilatação



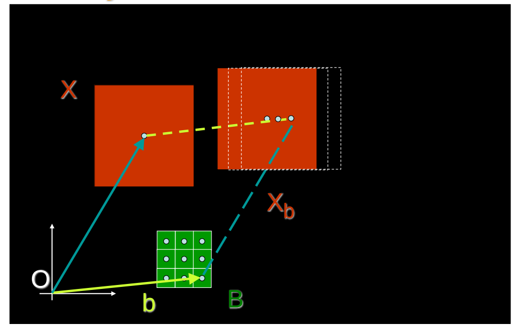
Dilatação



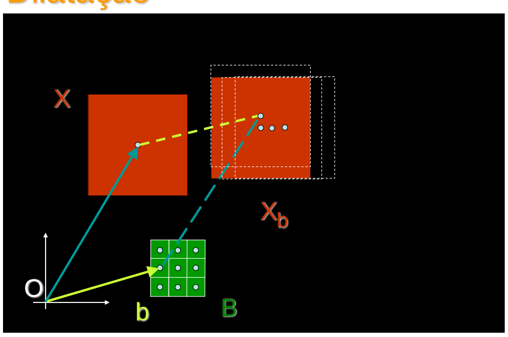
Dilatação



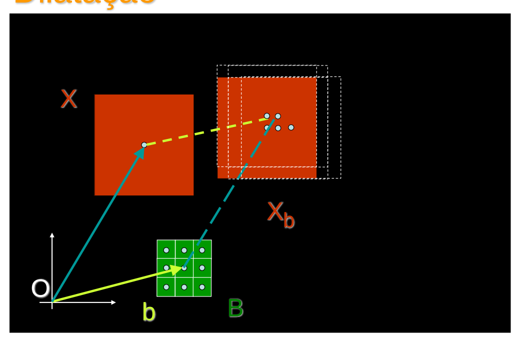
Dilatação



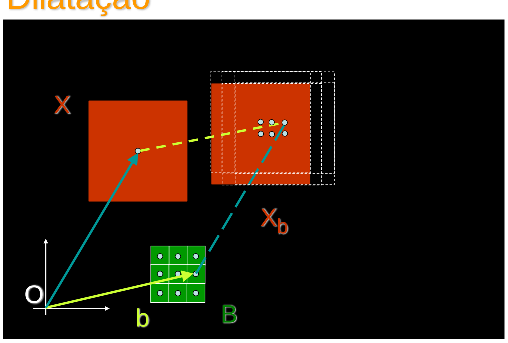
Dilatação



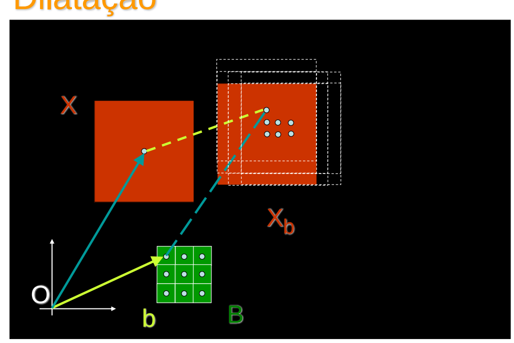
Dilatação



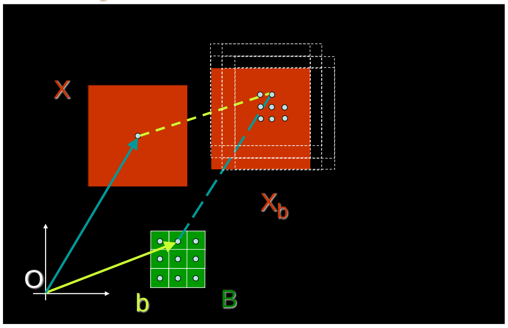
Dilatação



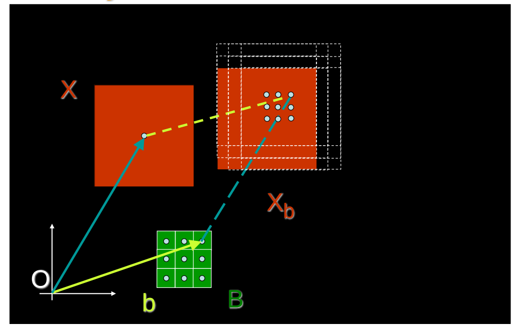
Dilatação



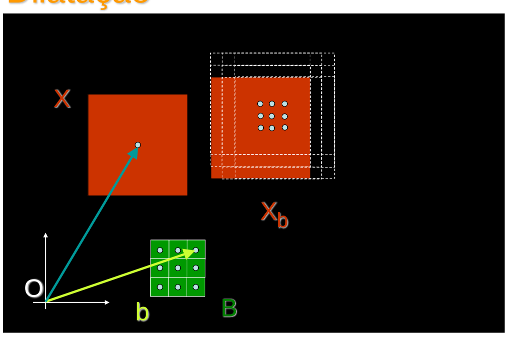
Dilatação



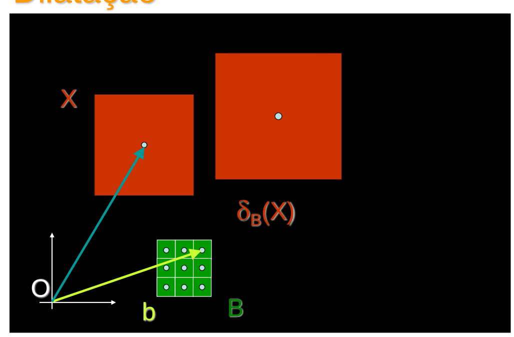
Dilatação



Dilatação



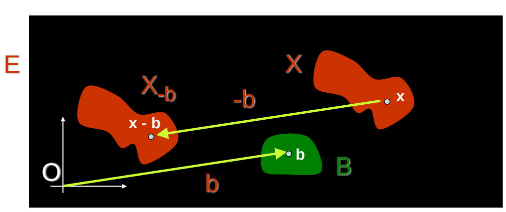
Dilatação



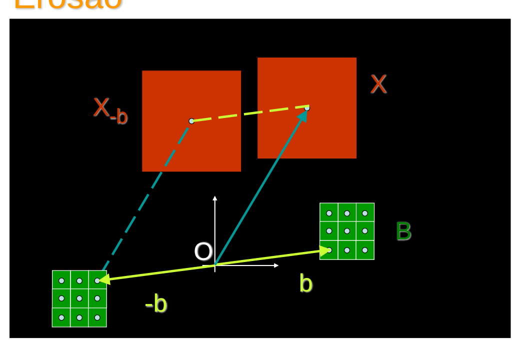
Subtração de Minkowski

- Sejam X e B conjuntos. Define-se a diferença de Minkowski de X por B como

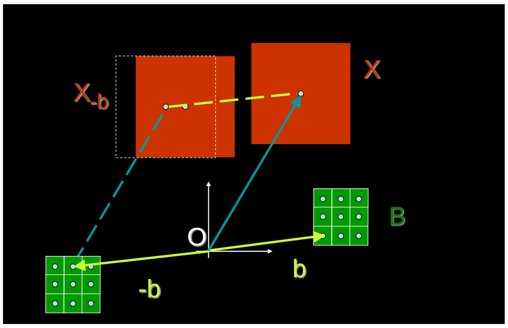
$$X \ominus B = \cap_{b \in B}\{x - b \in E\,,\ x \in X\}$$



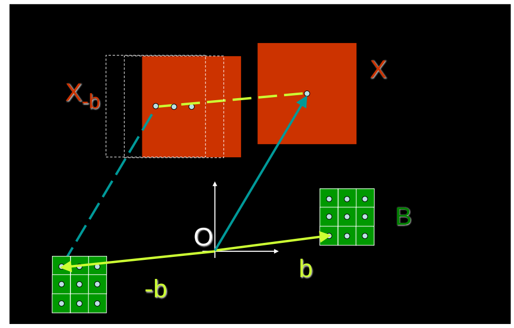
Erosão



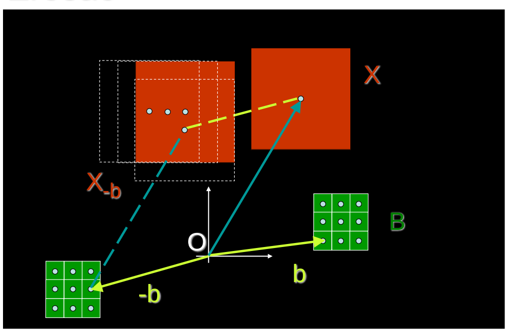
Erosão



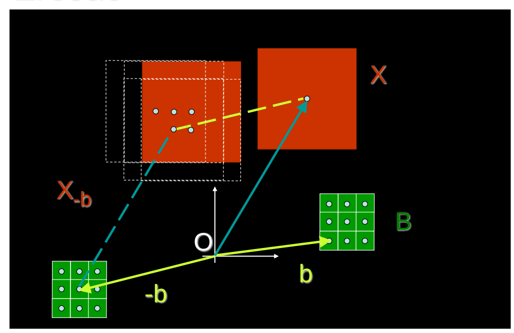
Erosão



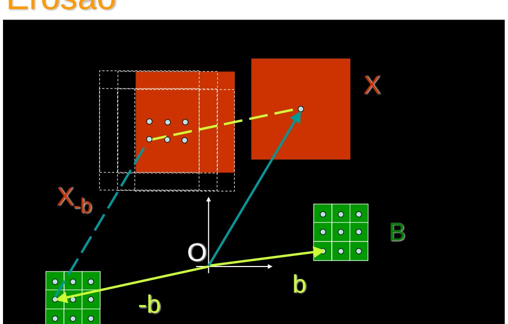
Erosão



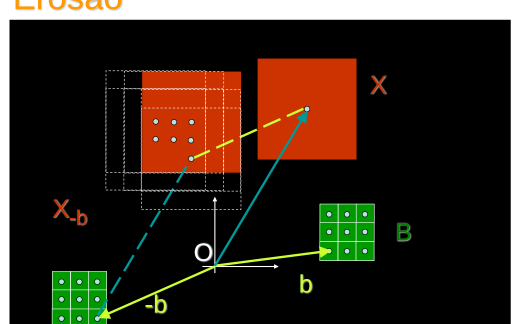
Erosão



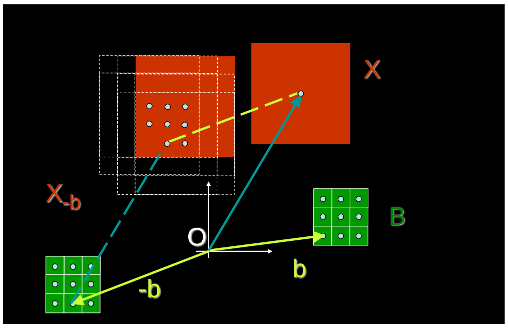
Erosão



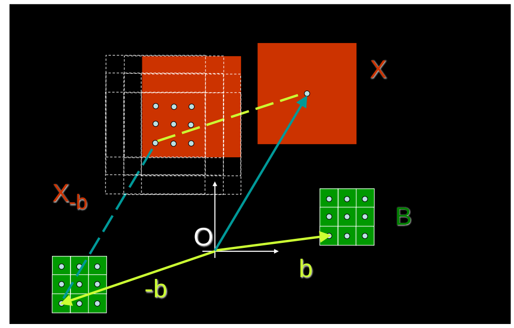
Erosão



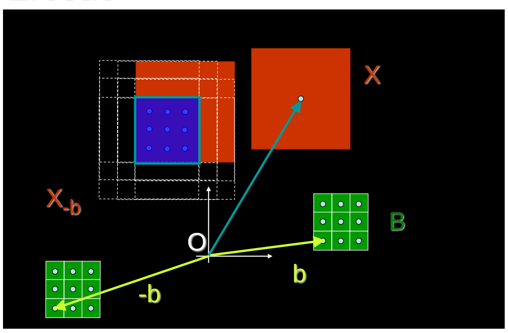
Erosão



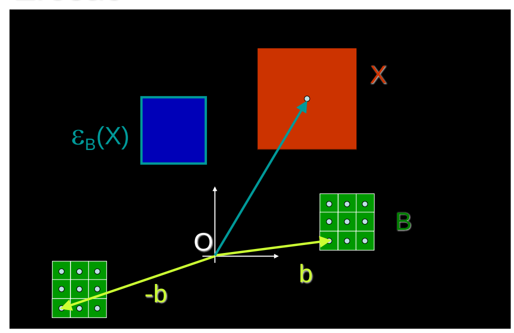
Erosão



Erosão



Erosão



Dilatação e Erosão - Propriedades

- Definições (para imagens binárias)
  - Dilatação → Adição de Minkowski

$$\delta_B(X) = X \oplus B = \cup_{b \in B} X_b$$

  - Erosão → Subtração de Minkowski

$$\epsilon_B(X) = X \ominus B = \cap_{b \in B} X_{-b}$$

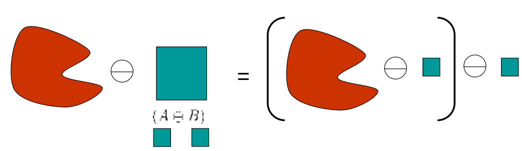
- A dilatação NÃO é a operação inversa da erosão e vice-versa

Dilatação e Erosão - Propriedades

- Decomposição da erosão em relação à dilatação

$$X \ominus (A \oplus B) = (X \ominus A) \ominus B$$

  - Útil para a decomposição de erosões com elementos estruturantes muito grandes



Operações de conjuntos e imagens

- União
$$\cup : A \cup B = \{x \in D : x \in A \mid x \in B\}$$
- Intersecção
$$\cap : A \cap B = \{x \in D : x \in A \;\&\; x \in B\}$$
- max
$$\vee : (f \vee g)(x) = \max\{f(x), g(x)\}$$
- min
$$\wedge : (f \wedge g)(x) = \min\{f(x), g(x)\}$$

Operações aplicadas a operadores

- União
$$\cup : (\Psi \cup \Phi)(A) = \Psi(A) \cup \Phi(A)$$
- Intersecção
$$\cap : (\Psi \cap \Phi)(A) = \Psi(A) \cap \Phi(A)$$
- max
$$\vee : (\Psi \vee \Phi)(f) = \Psi(f) \vee \Phi(f)$$
- min
$$\wedge : (\Psi \wedge \Phi)(f) = \Psi(f) \wedge \Phi(f)$$

Outras operações

- Complemento de um conjunto
$$A^c \subset D, A \cup A^c = D$$
- Complemento de uma imagem
$$f^c(x) = K - f(x)$$

Outras operações

- Diferença de conjuntos
$$A \setminus B = A \wedge B^c$$
- Translação de uma imagem por um vetor
$$f_b(x) = f(x - b)$$

Dilatação

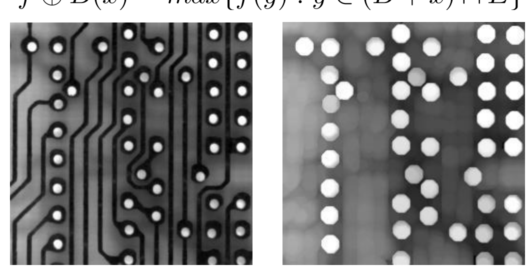
- Operador entre imagens definido por:

$$f \oplus B(x) = max\{f(y) : y \in (\check{B} + x) \cap E\}$$

Dilatação

- Operador entre imagens definido por:

$$f \oplus B(x) = max\{f(y) : y \in (\check{B} + x) \cap E\}$$



Erosão

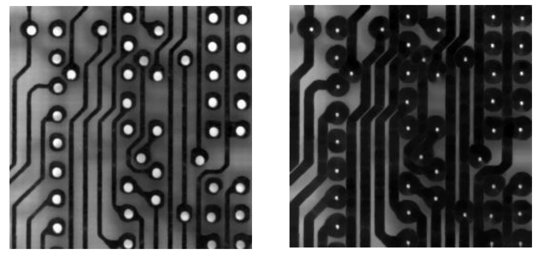
- Operador entre imagens definido por:

$$f \ominus B(x) = min\{f(y) : y \in (B + x) \cap E\}$$

Erosão

- Operador entre imagens definido por:

$$f \ominus B(x) = min\{f(y) : y \in (B + x) \cap E\}$$



Morfologia Matemática

- Transformação identidade

$$I(f) = \mathrm{id}(f) = f$$

- Composição de transformações

$$\Psi^n = \Psi^{n-1}\Psi, \quad \Psi^0 = \mathrm{id}$$

- Transformações pontuais

$$\Psi(f)(p) = \Psi(f(p))$$

Abertura

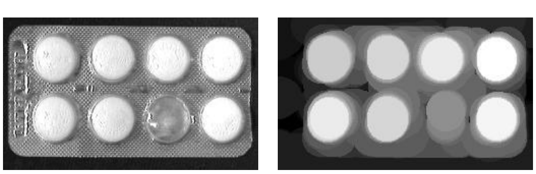
- Operador entre imagens definido por:

$$f \circ B = (f \ominus B) \oplus B$$

Abertura

- Operador entre imagens definido por:

$$f \circ B = (f \ominus B) \oplus B$$

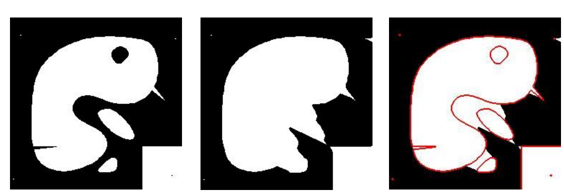


Disco 18

Fechamento

- Operador entre imagens definido por:

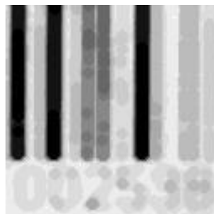
$$f \bullet B = (f \oplus B) \ominus B$$



Fechamento

- Operador entre imagens definido por:

$$f \bullet B = (f \oplus B) \ominus B$$



Disco 3

Gradiente morfológico

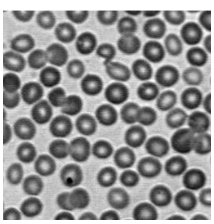
- Operador de imagens dado por:

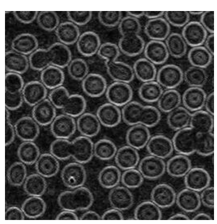
$$\nabla_{B_{dil},B_{ero}} f = f \oplus B_{dil} - f \ominus B_{ero}$$

Gradiente morfológico

- Operador de imagens dado por:

$$\nabla_{B_{dil},B_{ero}} f = f \oplus B_{dil} - f \ominus B_{ero}$$

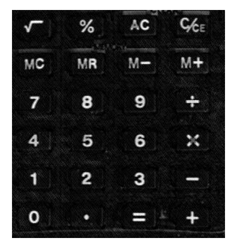




Abertura top-hat

- Operador de imagens dado por:

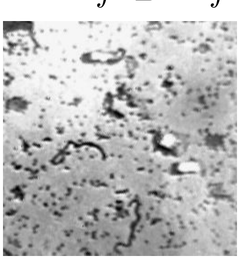
$$f \hat{\circ} B = f - f \circ B_{dil}$$

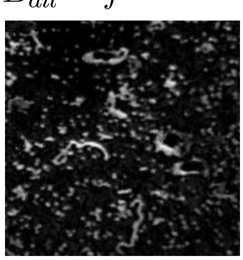


Fechamento top-hat

- Operador de imagens dado por:

$$f \hat{\bullet} B = f \bullet B_{dil} - f$$

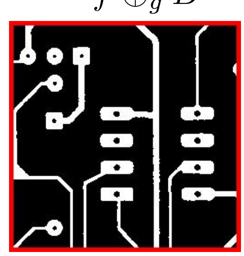


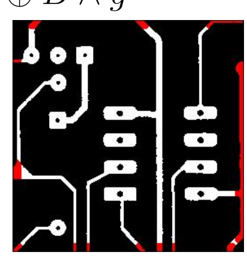


Dilatação condicional

- Operador de imagens dado por:

$$f \oplus_g B = f \oplus B \wedge g$$





Dilatação condicional

- Operador de imagens dado por:

$$f \oplus_g B = f \oplus B \wedge g$$

g

Inf-reconstrução

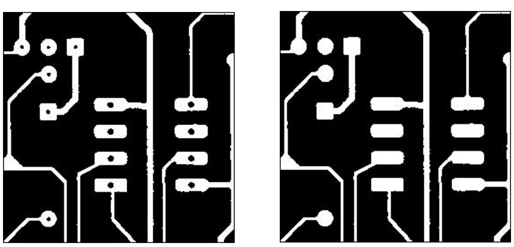
- Operador de imagens definido por:

$$f \triangle_{Bc} g = (g \oplus_f B_c)^{\infty}$$

Close-holes

- Operador de imagens dado por:

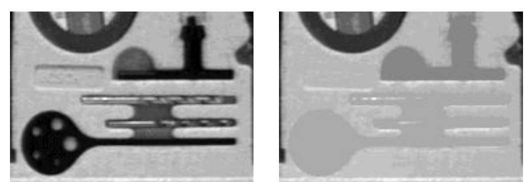
$$\mathrm{Fill}_{B_c}(f) = (f^c \triangle_{B_c} \partial f)^c$$



Close-holes

- Operador de imagens definido por:

$$\mathrm{Fill}_{Bc}(f) = (f^c \triangle_{Bc} \partial f)^c$$



Abertura por reconstrução

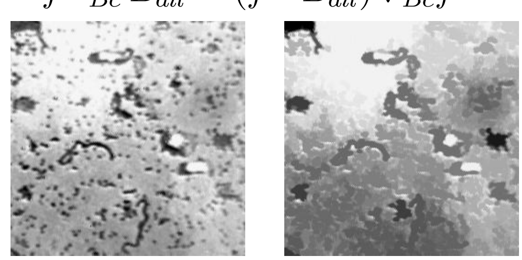
- Operador de imagens definido por:

$$f \circ_{Bc} B_{ero} = (f \circ B_{ero}) \triangle_{Bc} f$$

Fechamento por reconstrução

- Operador de imagens definido por:

$$f \bullet_{Bc} B_{dil} = (f \bullet B_{dil}) \nabla_{Bc} f$$



Transformada Distância

$$T_d(f)(p) = d(p, \{q \in E : f(q) = 0\})$$

- Usando um elemento estruturante

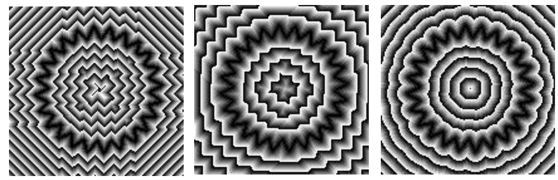
$$\mathrm{T}_{Bc}(f) = \sum_i f \ominus iB_c$$

- Relação com erosão

$$f \ominus iB_c = i + 1 \leq \mathrm{T}_{B_c}(f)$$

Transformada Distância

$$\mathrm{T}_{Bc}(f) = \sum_i f \ominus iB_c$$

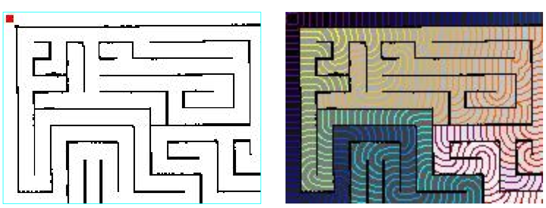


City-block *Chess-board* *Euclidean*

Distância geodésica

- Operador de imagens definido por:

$$T_{B_c,g}(f) = \sum_{i=1}^{\infty} g^c \ominus_{f^c} B_c$$



Esqueleto morfológico

- Operador entre imagens definido por:

$$\sigma_B(f) = \bigvee\{((f \ominus iB) \hat{\circ} B) : i = 0, 1, \ldots\}$$

Alternados seqüênciais

- São operadores definidos por:

oc

$$\text{nB-}\gamma\phi(f) = f \bullet B \circ B \ldots \bullet (n-1)B \circ (n-1)B \bullet nB \circ nB$$

co

$$\text{nB-}\phi\gamma(f) = f \circ B \bullet B \ldots \circ (n-1)B \bullet (n-1)B \circ nB \bullet nB$$

oco

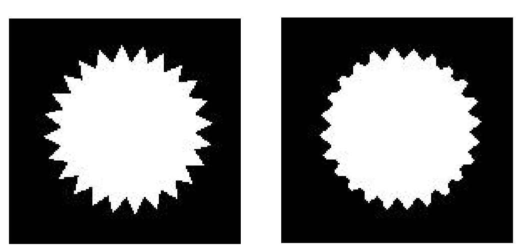
$$\text{nB-}\gamma\phi\gamma(f) = f \circ B \bullet B \circ B \ldots \circ (n-1)B \bullet (n-1)B \circ (n-1)B \circ nB \bullet nB \circ nB$$

coc

$$\text{nB-}\phi\gamma\phi(f) = f \bullet B \circ B \bullet B \ldots \bullet (n-1)B \circ (n-1)B \bullet (n-1)B \bullet B \circ nB \bullet nB$$

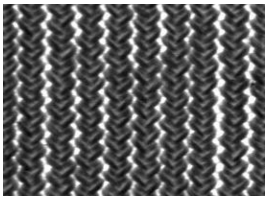
Alternados seqüênciais

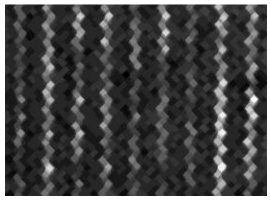
oc cruz



Alternados seqüênciais

oc cruz

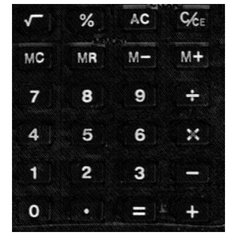




Abertura top-hat

- Operador de imagens dado por:

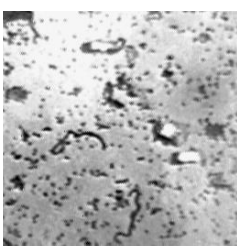
$$f \hat{\circ} B = f - f \circ B_{dil}$$

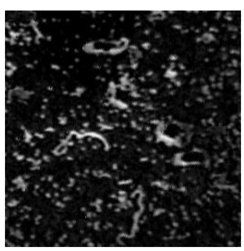


Fechamento top-hat

- Operador de imagens dado por:

$$f \hat{\bullet} B = f \bullet B_{dil} - f$$

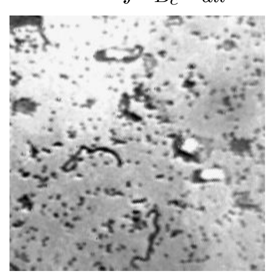


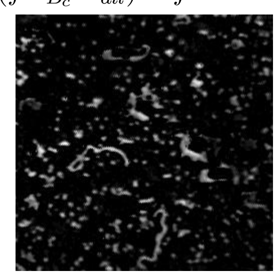


Closerecth

- Operador entre imagens definido por:

$$f \hat{\bullet}_{B_c} B_{dil} = (f \bullet_{B_c} B_{dil}) - f$$





Area open

- Operador entre imagens definido por:

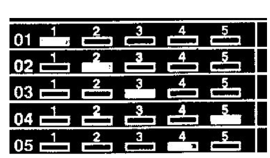
$$f \circ (a)_{B_C} = \bigvee_{B \in \mathcal{B}_{B_C,a}} f \circ B$$

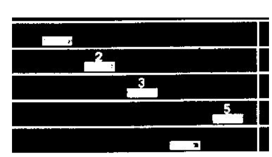
$$\mathcal{B}_{B_C,a} = \{X \subset E : X \text{ is } B_C - \text{connected} \quad Area(X) \geq a\}$$

Area open

- Operador entre imagens definido por:

$$f \circ (a)_{B_C} = \bigvee_{B \in \mathcal{B}_{B_C,a}} f \circ B$$





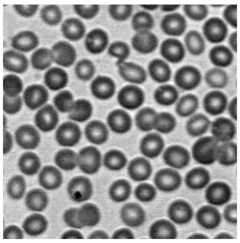
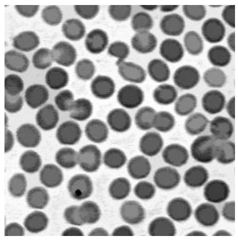
a=500

Area open

- Operador entre imagens definido por:

$$f \circ (a)_{B_C} = \bigvee_{B \in \mathcal{B}_{B_C,a}} f \circ B$$

a=500

Area close

- Operador entre imagens definido por:

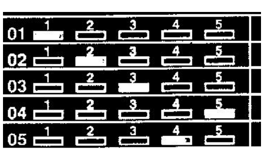
$$f \bullet (a)_{B_C} = \bigwedge_{B \in \mathcal{B}_{B_C,a}} f \bullet B$$

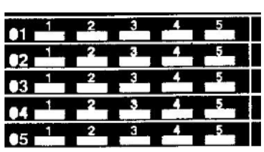
$$\mathcal{B}_{B_C,a} = \{X \subset E : X \text{ is } B_C - \text{connected}$$
$$Area(X) \geq a\}$$

Area close

- Operador entre imagens definido por:

$$f \bullet (a)_{B_C} = \bigwedge_{B \in \mathcal{B}_{B_C,a}} f \bullet B$$





a=400

Area close

- Operador entre imagens definido por:

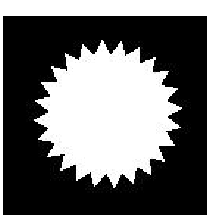
$$f \bullet (a)_{B_C} = \bigwedge_{B \in \mathcal{B}_{B_C,a}} f \bullet B$$

a=400

Sup-geradora

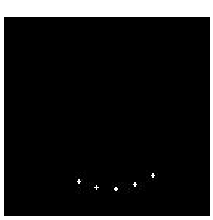
- Operador entre imagens definido por:

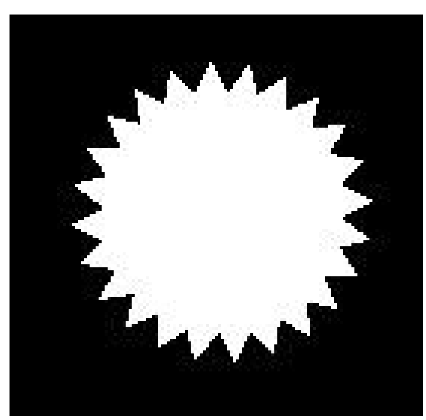
$$f \circledast \mathcal{I}_{A,B} = (f \ominus A) \wedge (f^c \ominus B^c)$$



A
000
010
000

B
111
010
000





Emagrecimento homotópico

- Operador entre imagens definido por:

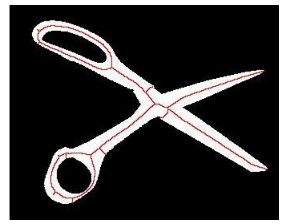
$$\sigma^n_{\Delta\theta,\mathcal{I}_{A,B}}(f) = \sigma_{\Delta\theta,\mathcal{I}_{A,B}}(\sigma_{\Delta\theta,\mathcal{I}_{A,B}}(\ldots\sigma_{\Delta\theta,\mathcal{I}_{A,B}}(f)))$$

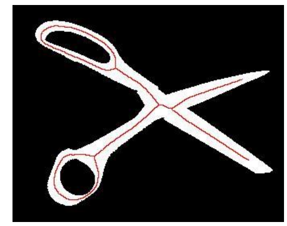
$$\sigma_{\Delta\theta,\mathcal{I}_{A,B}}(f) = \begin{cases} \sigma_{315}(\sigma_{270}(\sigma_{225}(\sigma_{180}(\sigma_{135}(\sigma_{90}(\sigma_{45}(\sigma_0(f)))))))) \text{ if } \Delta\theta = 45 \\ \sigma_{270}(\sigma_{180}(\sigma_{90}(\sigma_0(f)))) \text{ if } \Delta\theta = 90 \\ \sigma_{180}(\sigma_{90}(f)) \text{ if } \Delta\theta = 180 \end{cases}$$

$$\sigma_\theta = (f - f \circledast \mathcal{I}_{A_\theta,B_\theta})$$

Emagrecimento homotópico

A	B	
000	111	
010	010	15 emagrecimentos
000	000	

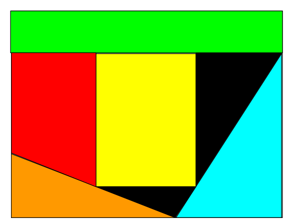




Segmentação de imagens

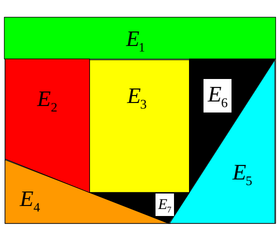
Segmentação de imagens

- Segmentar uma imagem é criar uma partição finita do domínio da imagem



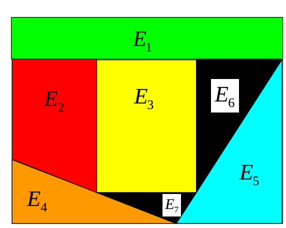
Segmentação de imagens

- Partição: $\Omega = \{E_1, E_2, E_3, E_4, E_5, E_6, E_7\}$



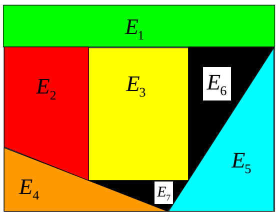
Segmentação de imagens

- Partição: $\bigcup E_i = E$



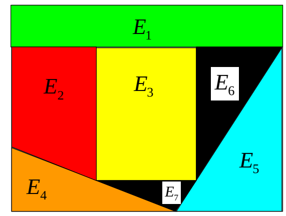
Segmentação de imagens

- Partição: $E_i \cap E_j = \emptyset \qquad i \neq j$



Segmentação de imagens

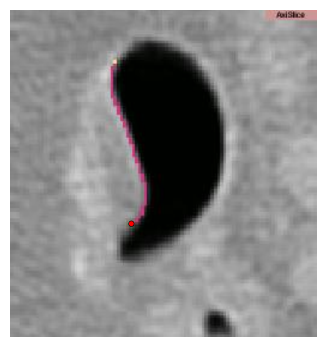
- Condição: $\forall i, E_i$ é conexo



Como criar as partições?

- Usando interfaces com canetas digitalizadoras ou mouse para demarcar as partições
- Usando operadores de imagens adequados
- Usando programas de segmentação assistida/auxiliada de imagens que mesclam as interfaces de demarcação com operadores de imagens

Segmentação manual - mouse



Segmentação manual - mouse

Segmentação manual

- Vantagens
  - Qualquer pessoa com conhecimento do que precisa ser segmentado por fazer
  - Muito IHC, pouco PDI
- Desvantagens
  - Trabalhoso e cansativo
  - Sujeito a erros
  - Pouco replicável

Segmentação por PDI

- Normalmente categorizada em:
  - Segmentação por descontinuidades
    - **Detecção de bordas**
    - **Detecção de atributos locais**
    - **…**
  - Segmentação por similaridades
    - **Crescimento de regiões**
    - **Divisão e fusão**
    - **…**

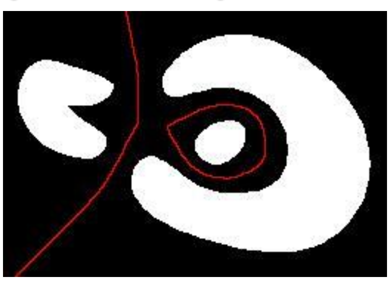
Zona de Influência Geodésica

- Dada uma família de componentes Y_i em X, a Zona de influência geodésica de uma componente Y_i em X é o conjunto:

$$skiz(Y_i/X) = \{x \in X, \forall j, j \neq i, d_X(x, Y_i) \leq d(x, Y_j\}$$

Zona de Influência Geodésica

- Diagrama de Voronoi generalizado

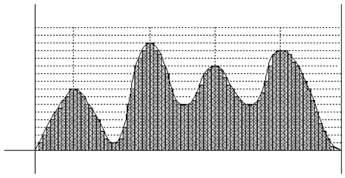


Zona de Influência Geodésica

- Diagrama de Voronoi generalizado

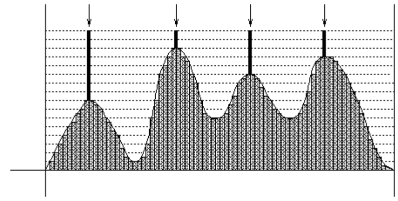
Watershed

- Calcula as linhas de partição de águas de uma imagem vista como um gráfico de uma função



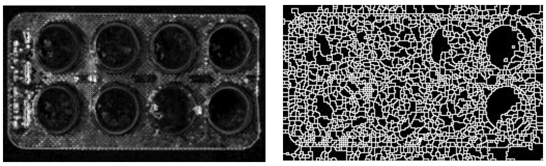
Watershed

- Calcula as linhas de partição de águas de uma imagem vista como um gráfico de uma função



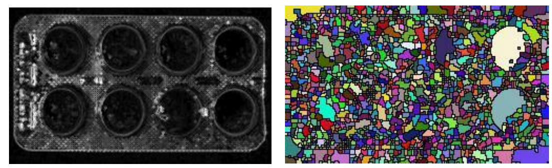
Watershed

- Calcula as linhas de partição de águas de uma imagem vista como um gráfico de uma função



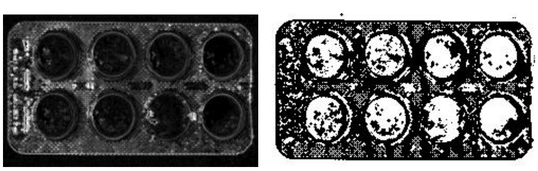
Watershed

- Calcula as linhas de partição de águas de uma imagem vista como um gráfico de uma função



Watershed com marcadores

- Calcula as linhas de partição de águas a partir de marcadores



Watershed com marcadores

- Calcula as linhas de partição de águas a partir de marcadores