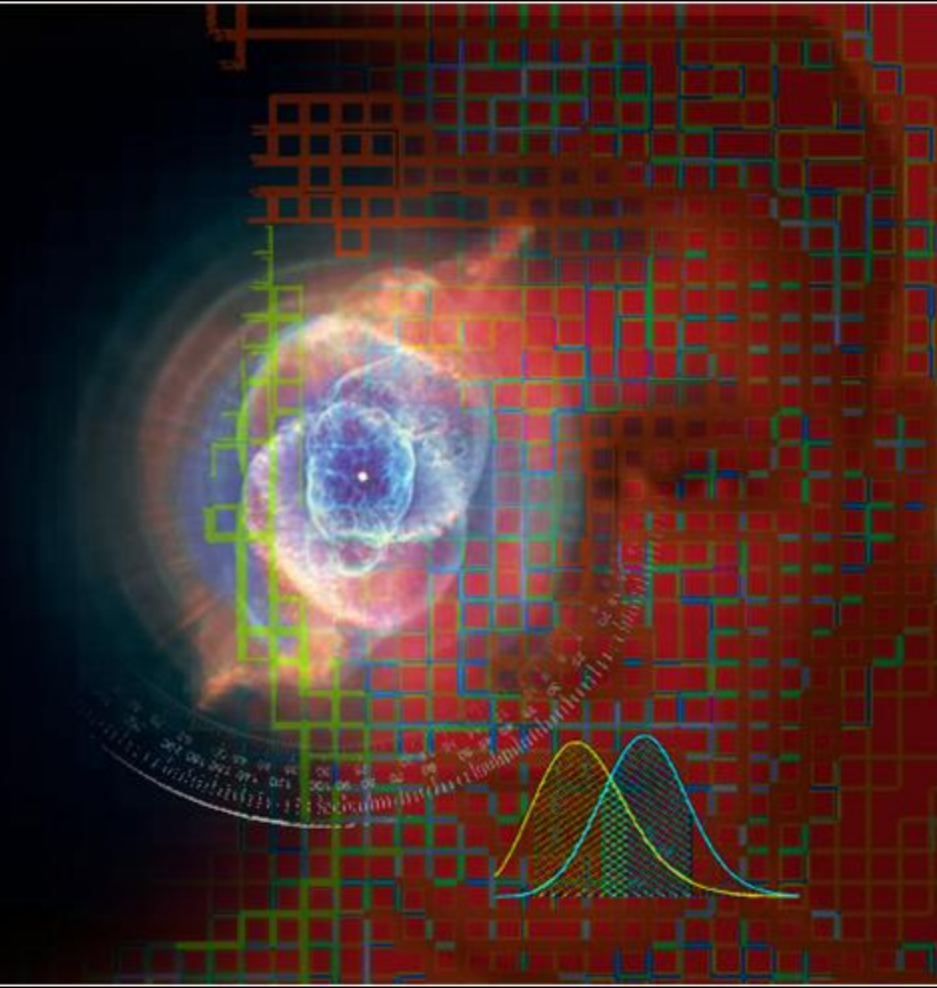
Introdução à

Visão Computacional e ao Processamento de Imagens



Roberto Hirata Jr. e João E. Kogler Jr.

16ª aula

Série de Fourier

- Forma complexa da série de Fourier:

$$f(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k e^{jk\omega_0 x}$$

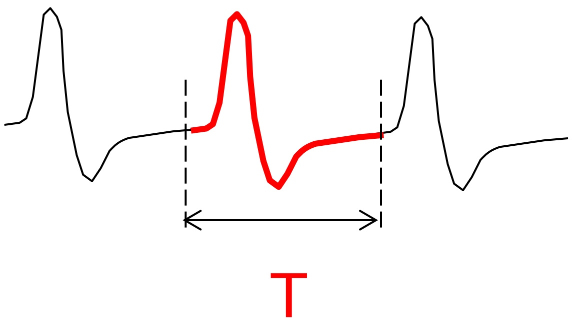
- Os coeficientes são dados por:

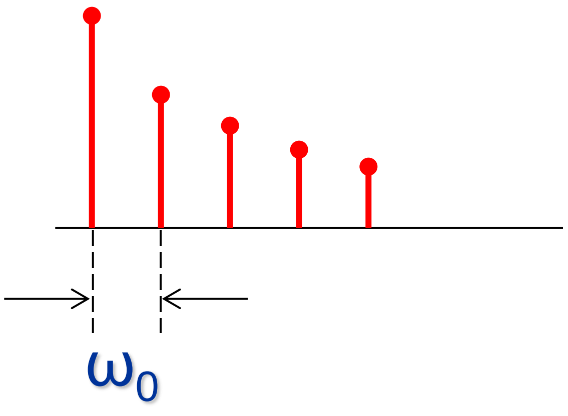
$$C_k = \frac{1}{T} \int_0^T f(x) e^{-jk\omega_0 x} dx$$

- Representa <u>funções periódicas</u>

Funções não-periódicas

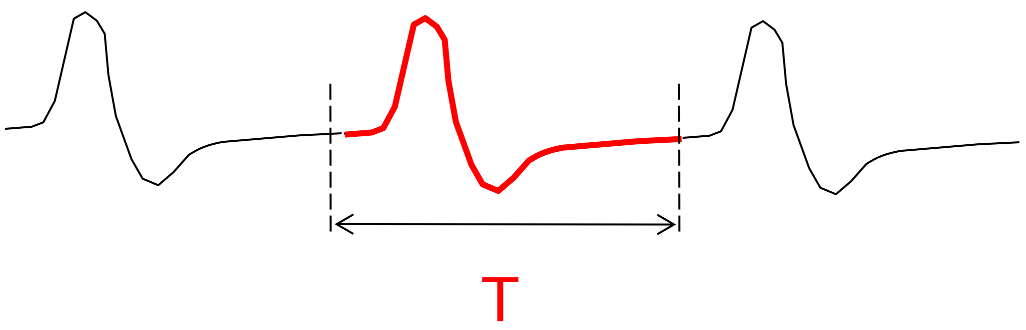
- Podemos, por um artifício heurístico, admitir que uma função não-periódica poderia ser obtida de uma periódica, com o período $T \rightarrow \infty$
  - Como $T = 2\pi / \omega_0$, resulta que $\omega_0 \rightarrow 0$

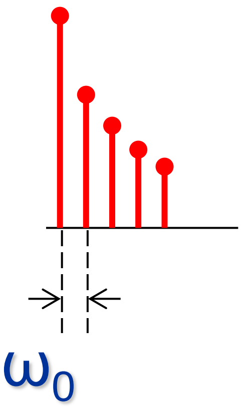




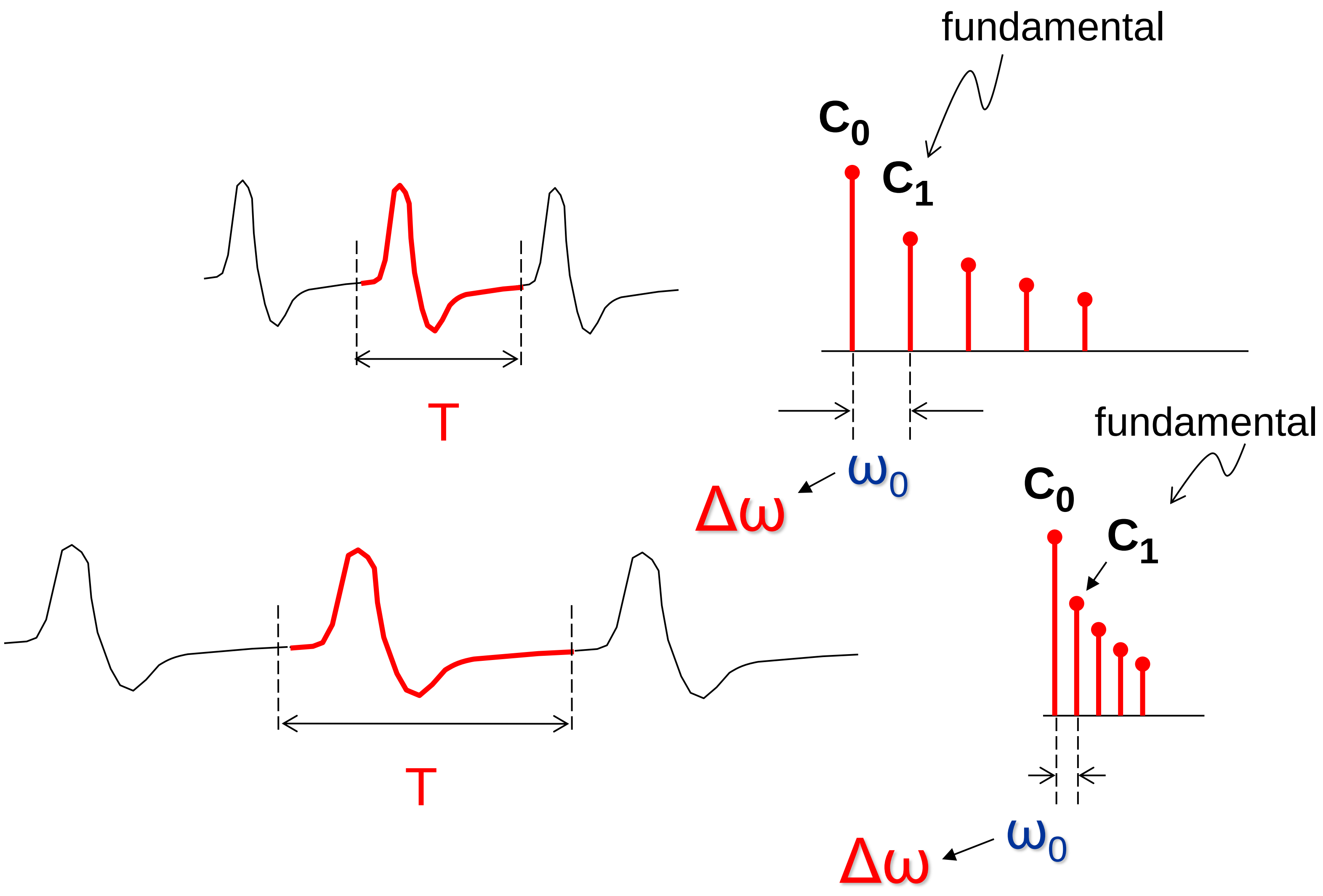
Funções não-periódicas

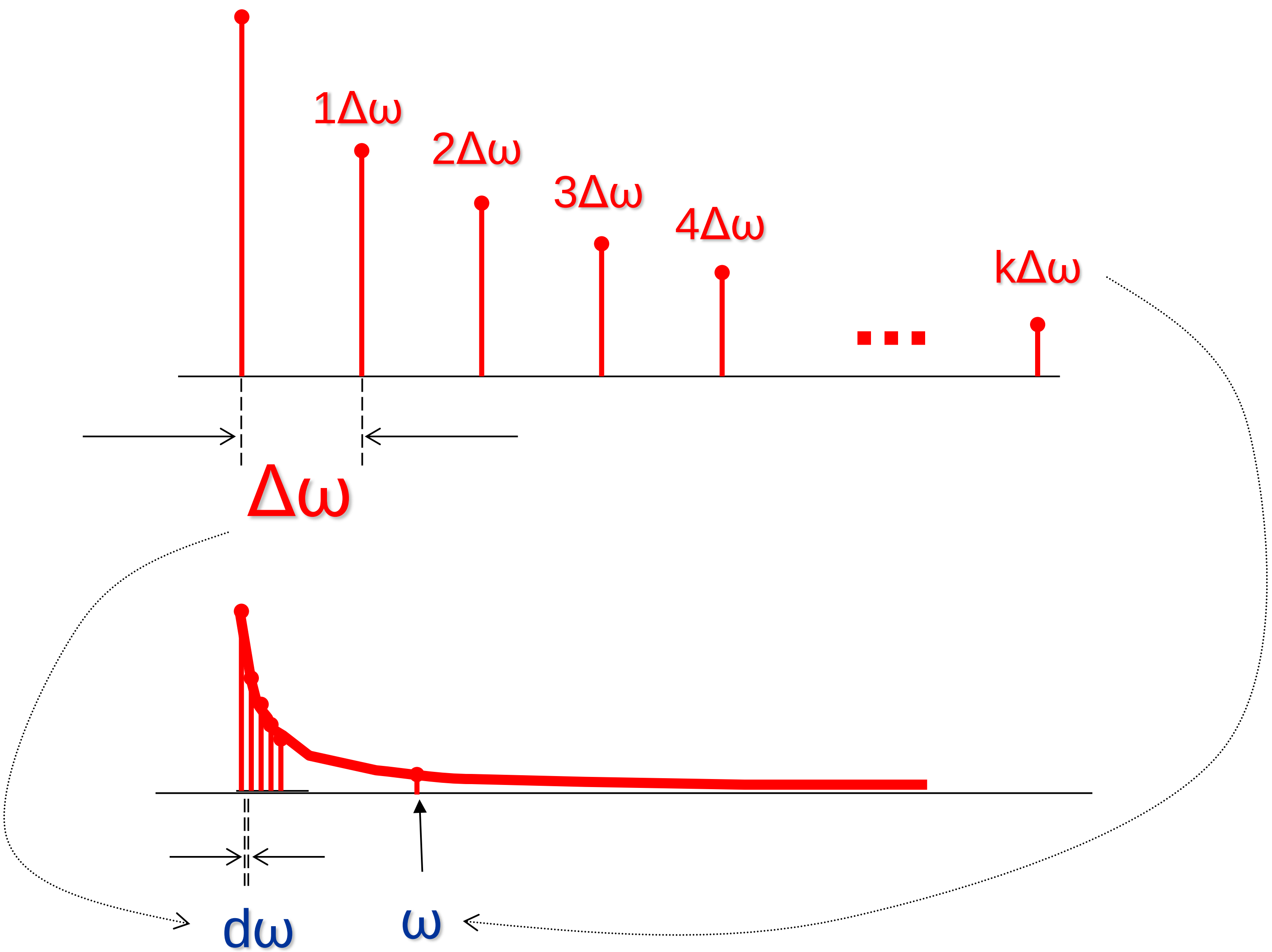
- Podemos, por um artifício heurístico, admitir que uma função não-periódica poderia ser obtida de uma periódica, com o período $T \rightarrow \infty$
  - Como $T = 2\pi / \omega_0$, resulta que $\omega_0 \rightarrow 0$





Funções não-periódicas





1Δω
2Δω
3Δω
4Δω
kΔω
Δω
dω
ω

Série de Fourier

- Forma complexa da série de Fourier:

$$f(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k e^{jk\omega_0 x}$$

- Os coeficientes são dados por:

$$C_k = \frac{1}{T} \int_0^T f(x) e^{-jk\omega_0 x} dx$$

- Representa <u>funções periódicas</u>

Funções não-periódicas

- No caso das funções periódicas:
  - Das 2 expressões do slide anterior, temos:

$$f(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k e^{jk\omega_0 x} \qquad C_k = \frac{1}{T}\int_0^T f(x) e^{-jk\omega_0 x} dx$$

$$f(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{T}\int_0^T f(x) e^{-jk\omega_0 x} dx\right) e^{jk\omega_0 x}$$

Funções não-periódicas

- Escrevendo T como T = 2π / ω_0 , resulta

$$f(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^T f(x) e^{-jk\omega_0 x} dx\right) \omega_0 e^{jk\omega_0 x}$$

- ou, ainda,

$$f(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-T/2}^{T/2} f(x) e^{-jk\Delta\omega x} dx\right) \Delta\omega e^{jk\Delta\omega x}$$

- Onde trocamos ω_0 por $\Delta\omega$ para indicar que é a frequência fundamental da função que irá tender a zero quando T → ∞

Funções não-periódicas : quando T → ∞

- Nessas circunstâncias, $\Delta\omega \rightarrow d\omega$ e $k\Delta\omega \rightarrow \omega$, sendo **ω** agora uma variável contínua

$$f(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-T/2}^{T/2} f(x) e^{-jk\Delta\omega x} dx\right) \Delta\omega e^{jk\Delta\omega x}$$

- Por sua vez, a somatória torna-se uma integral em ω

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{\left(\int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-j\omega x} dx\right)}_{\text{Chamemos de } F(\omega)} e^{j\omega x} d\omega$$

Funções não-periódicas

- Pode-se demonstrar que a aproximação abaixo converge
- $$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \Big(\underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-j\omega x} dx}_{F(\omega)} \Big) e^{j\omega x} d\omega$$

Chamemos de $F(\omega)$

- Por definição, F(ω) é a <u>transformada de Fourier de f(x)</u>
- Permite representar funções <u>não-periódicas</u>

Transformada de Fourier → Funções não-periódicas

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)e^{j\omega x}d\omega$$

– Essa é a representação de Fourier de f(x) genérica

- F(ω) → Transformada de Fourier de f(x)

$$\mathcal{F}\{f(x)\} = F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-j\omega x}dx$$

– Apresenta um <u>espectro contínuo</u> (ω é definido sobre o conjunto dos números reais)

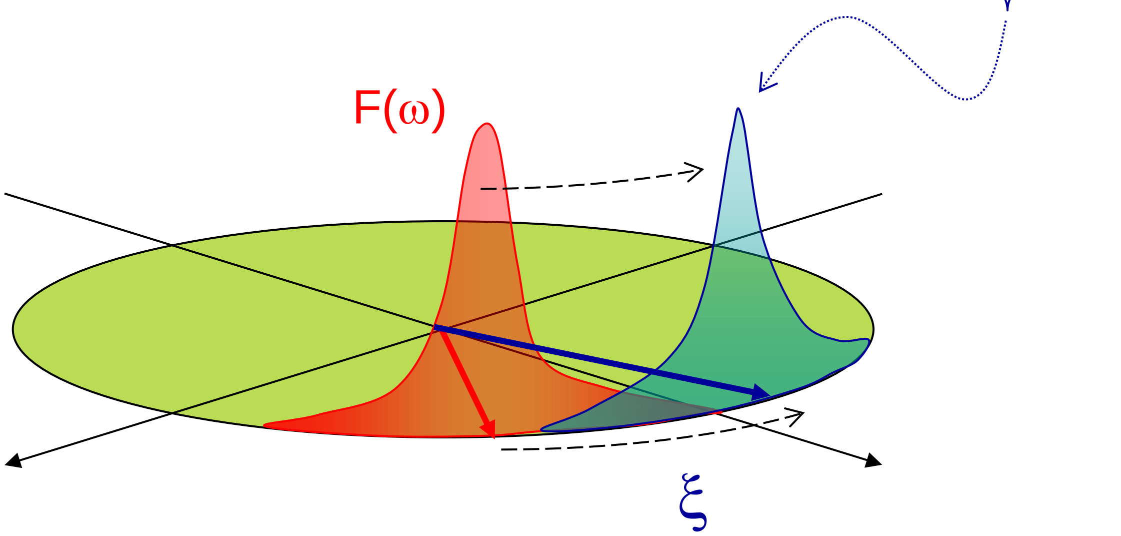
Translação da função

- Seja F(ω) a transformada de Fourier de f(x).

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-j\omega x} dx$$

  – a transformada de Fourier de f(x – ξ) é :

$$\mathcal{F}\{f(x-\xi)\} = \underbrace{e^{-j\omega\xi} F(\omega)}$$

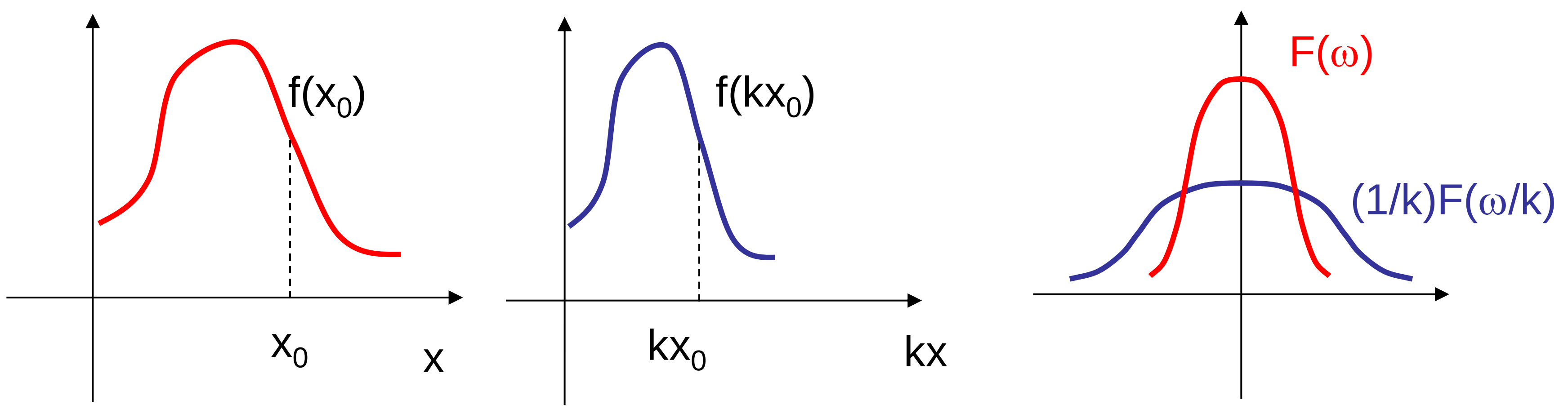


Escalamento do domínio

$$\mathcal{F}\{f(kx)\} = \frac{1}{k}F(\frac{\omega}{k})$$

– **Demonstração:**

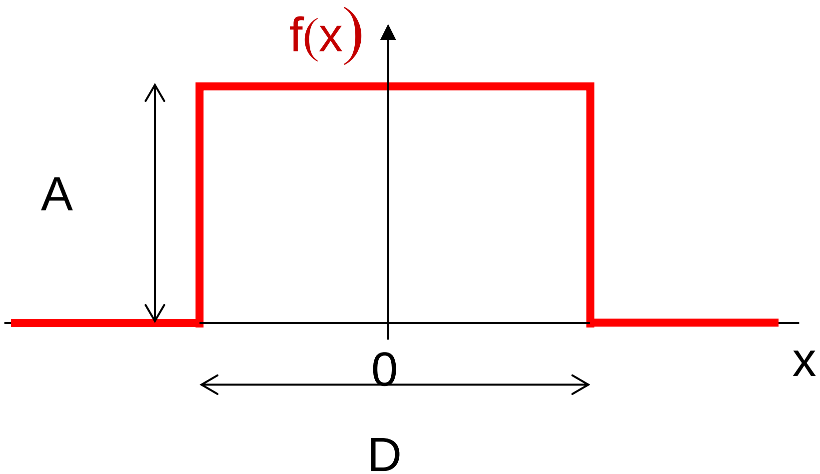
$$\mathcal{F}\{f(kx)\} = \int_{-\infty}^{\infty} f(kx)e^{-j\omega x}dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(y)e^{-j\omega \frac{y}{k}}\frac{1}{k}dy$$

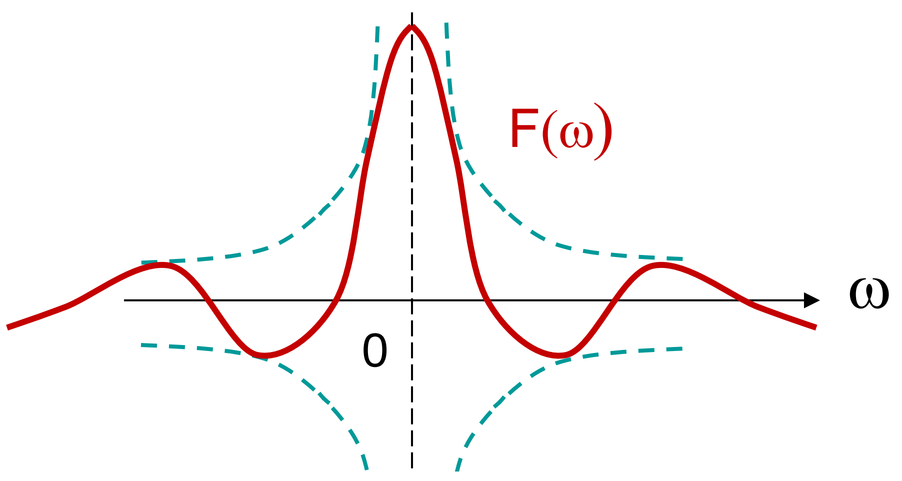


Transformada da janela retangular

- A transformada de Fourier de um pulso retangular de largura D e altura A tem a forma dada por

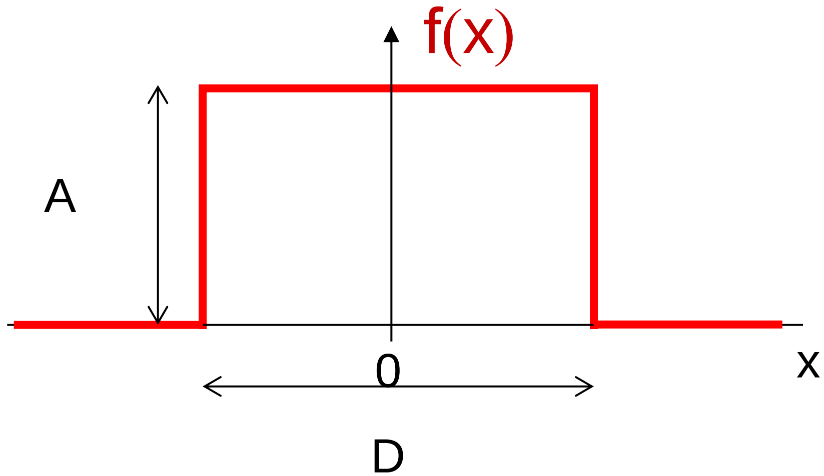
$$F(\omega) = AD\ sinc(\frac{\omega D}{2}) = AD\ \frac{\sin\left(\frac{\omega D}{2}\right)}{\frac{\omega D}{2}}$$





Temos:

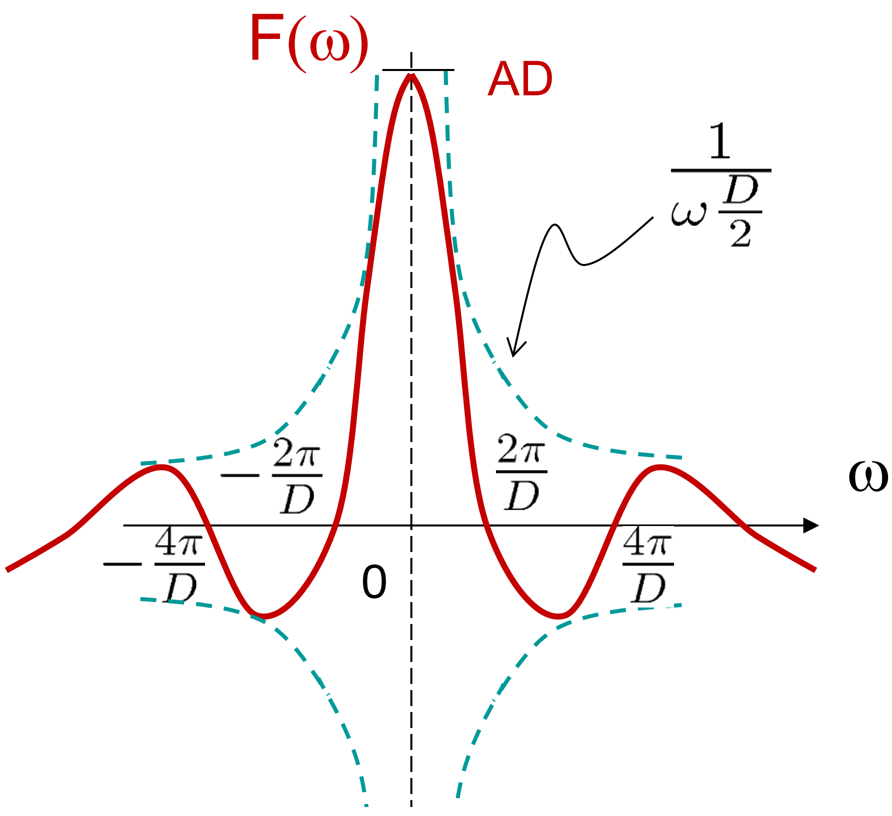
$$f(x) = \begin{cases} A\,, & x \in [-\frac{D}{2}\,,\ \frac{D}{2}] \\ 0\,, & x \notin [-\frac{D}{2}\,,\ \frac{D}{2}] \end{cases}$$



$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-j\omega x} dx$$

$$F(\omega) = AD \,\frac{\sin(\omega \frac{D}{2})}{\omega \frac{D}{2}}$$

$$F(\omega) = AD\ sinc(\frac{\omega D}{2})$$



Linearidade da Transformada de Fourier

- A transformada de Fourier é um operador linear

$$\mathcal{F}\{f(x) + g(x)\}(\omega) \;=\; F(\omega) + G(\omega)$$

$$\mathcal{F}\{K f(x)\}(\omega) \;=\; K F(\omega)\,,\; K \in \mathcal{R}$$

Convolução - Propriedade 1

- Definindo-se convolução de duas funções:

$$f(x) \otimes g(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) g(x - \xi) d\xi$$

- A transformada de Fourier da convolução de f(x) e g(x) é igual ao produto das transformadas F(ω) e G(ω) dessas funções

$$\mathcal{F}\{f(x) \otimes g(x)\}(\omega) = F(\omega) G(\omega)$$

$$f(x) \otimes g(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) g(x-\xi) d\xi$$

$$\mathcal{F}\{f(x) \otimes g(x)\}(\omega) \; = \; \int_{-\infty}^{\infty} (f(x) \otimes g(x)) e^{-j\omega x} dx \; =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) g(x-\xi) d\xi e^{-j\omega x} dx \; = \; \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) \left(\int_{-\infty}^{\infty} g(x-\xi) e^{-j\omega x} dx \right) d\xi \; =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) \left(\int_{-\infty}^{\infty} g(y) e^{-j\omega(y+\xi)} dy \right) d\xi \; =$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) e^{-j\omega\xi} \left(\int_{-\infty}^{\infty} g(y) e^{-j\omega y} dy \right) d\xi \; =$$

$$= \; G(\omega) \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) e^{-j\omega\xi} d\xi \; = \; \boxed{G(\omega) F(\omega)}$$

Convolução - Propriedade 2 (dual de 1)

- A convolução das transformadas de Fourier de duas funções:

$$F(\omega) \otimes G(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} F(\nu) G(\omega - \nu) d\nu$$

- A convolução de F(ω) e G(ω) é igual à transformada de Fourier do produto de f(x) e g(x)
  - A demonstração é imediata, observando-se a dualidade entre as propriedades

Convolução - sumário

- Em resumo, as duas propriedades duais da convolução nos domínios espacial (x) e frequência (ω) resultam nos seguintes fatos:
  - Multiplicando-se duas funções de x, resulta na convolução de suas transformadas de Fourier
  - Multiplicando-se duas transformadas de Fourier, resulta na convolução em x
  - A transformada da convolução é o produto das transformadas

Hipóteses de representação

- Funções periódicas contínuas → série de Fourier

$$f(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k e^{jk\omega_0 x} \qquad C_k = \frac{1}{T}\int_0^T e^{-jk\omega_0 x} dx$$

- Funções em geral, contínuas → transformada de Fourier

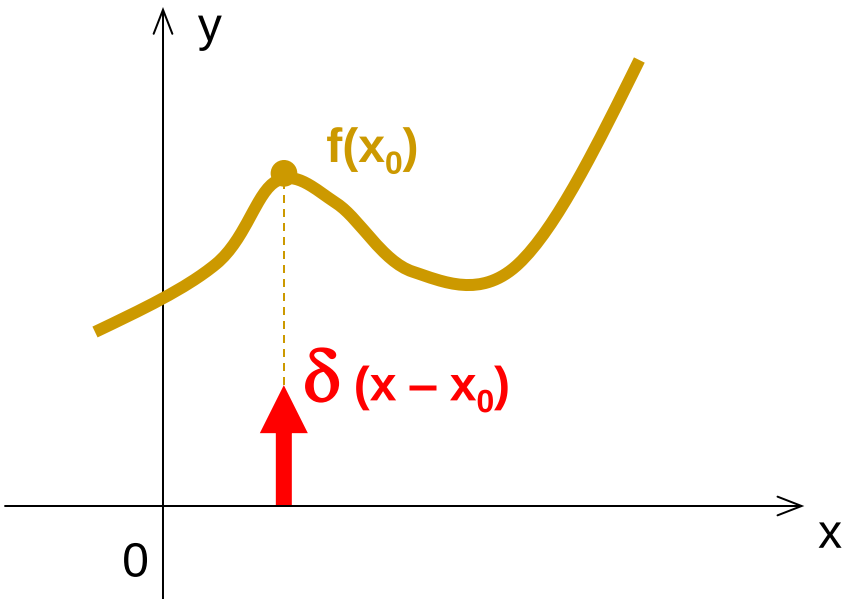
$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{j\omega x} d\omega \qquad F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-j\omega x} dx$$

- Funções discretas (amostradas) → transformada discreta de Fourier (DFT)

$$f(n) = \frac{1}{N}\sum_{k=-M}^{M} F(k) e^{jk\frac{2\pi}{N}n} \qquad F(k) = \sum_{k=0}^{N-1} f(n) e^{-jk\frac{2\pi}{N}n}$$

Trasformada Discreta de Fourier

Delta de Dirac



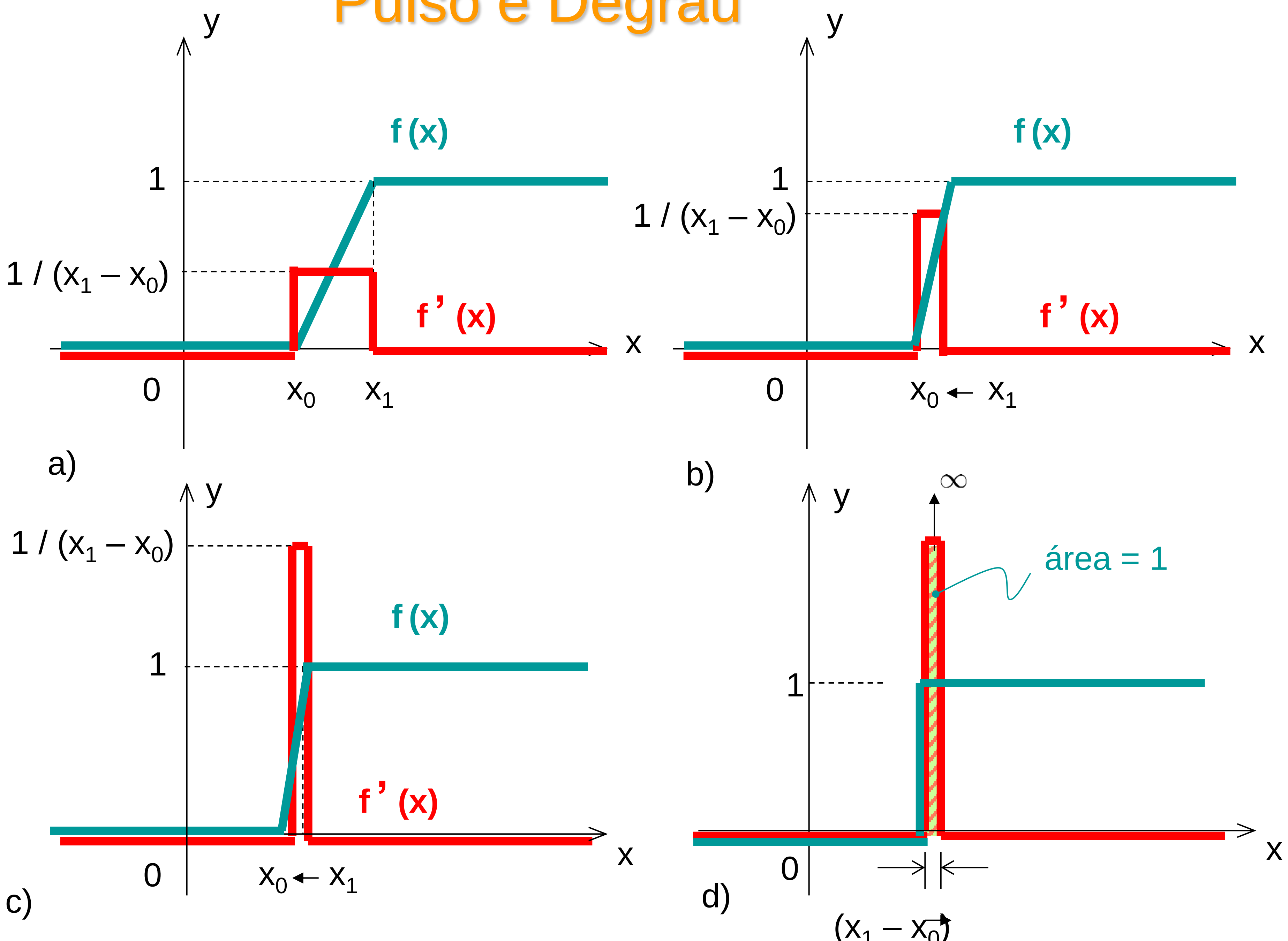
- Propriedade de filtragem local:
  - O Delta de Dirac pode ser definido através da seguinte expressão:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(x-\xi)dx = f(\xi)$$

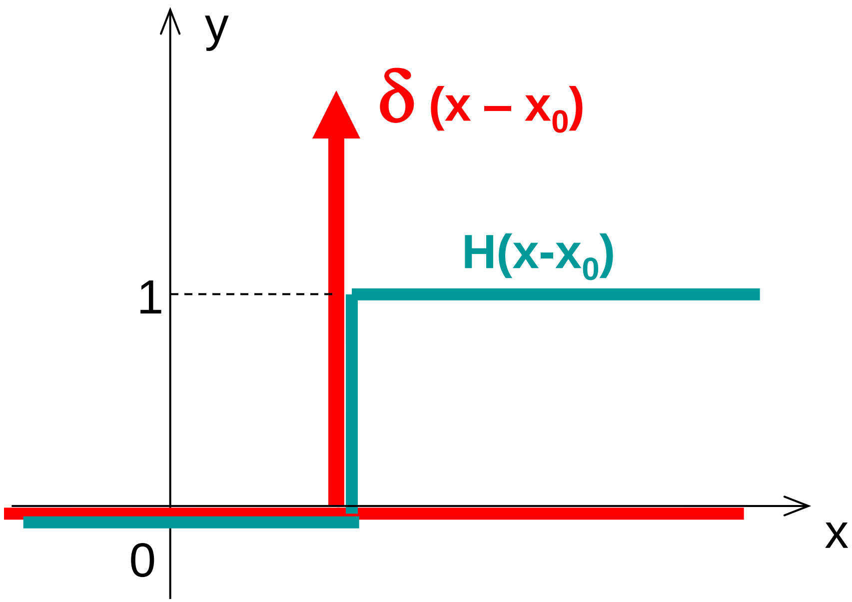
Onde $\delta(x)$ indica a distribuição Delta de Dirac

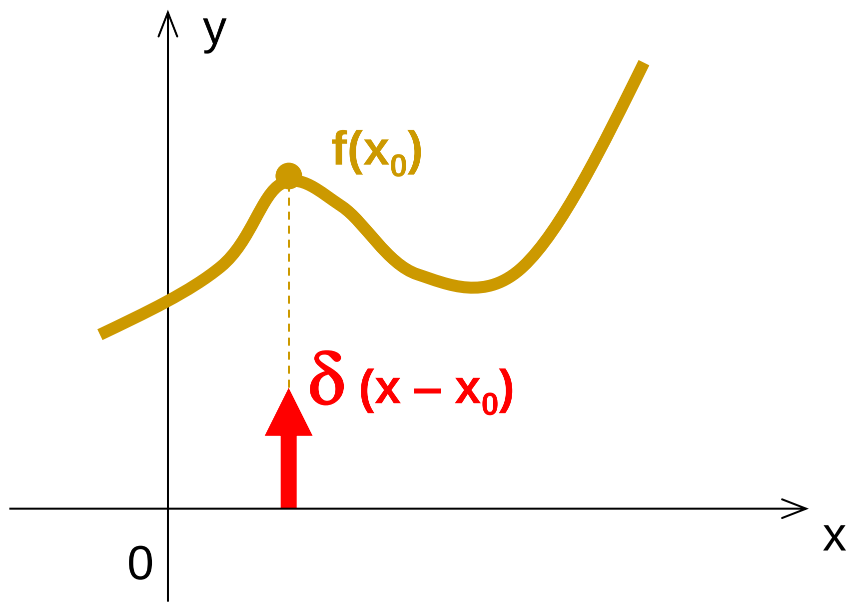
- A transformada de Fourier da delta de Dirac é uma constante ($F(\omega) = 1$)

Pulso e Degrau



Propriedades do Delta de Dirac





<u>Relação com o degrau unitário de Heaviside</u>
O delta de Dirac é a derivada (funcional) do degrau de Heaviside

<u>Propriedade de Filtragem ou Amostragem</u>
O produto do delta de Dirac por uma função amostra a função no ponto

http://jkogler.wordpress.com/2008/06/14/delta-de-dirac-ou-impulso-unitario/

Propiedades da Transformada de Fourier

Se $\mathcal{F}\{f(x)\} = F(\omega)$

então $\mathcal{F}\{F(x)\} = 2\pi f(-\omega)$

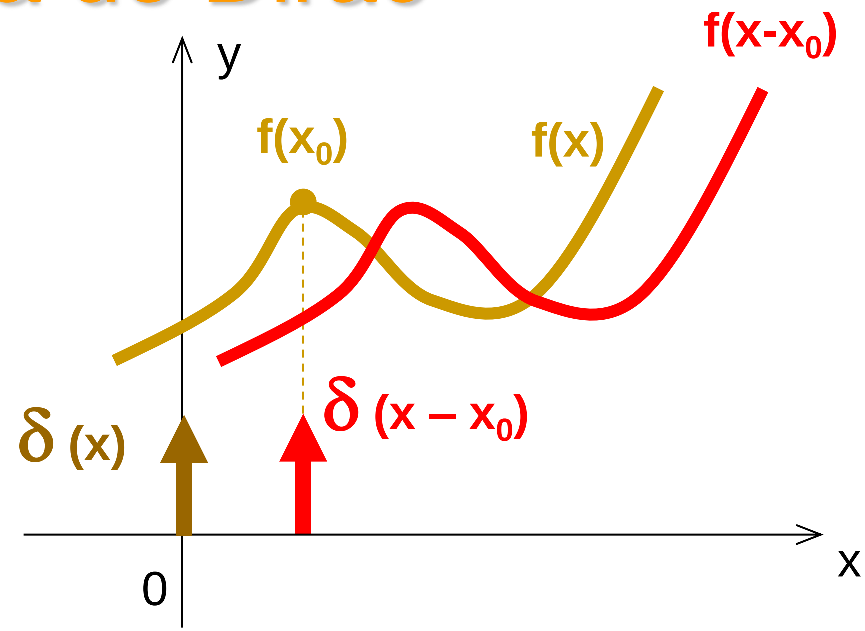
Se $f(x) = f(-x)$

então $F(\omega)$ é real e par

Convolução pelo Delta de Dirac

- Propriedade de filtragem:
  - Definição do Delta de Dirac

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(x-\xi)dx = f(\xi)$$



- Convolução

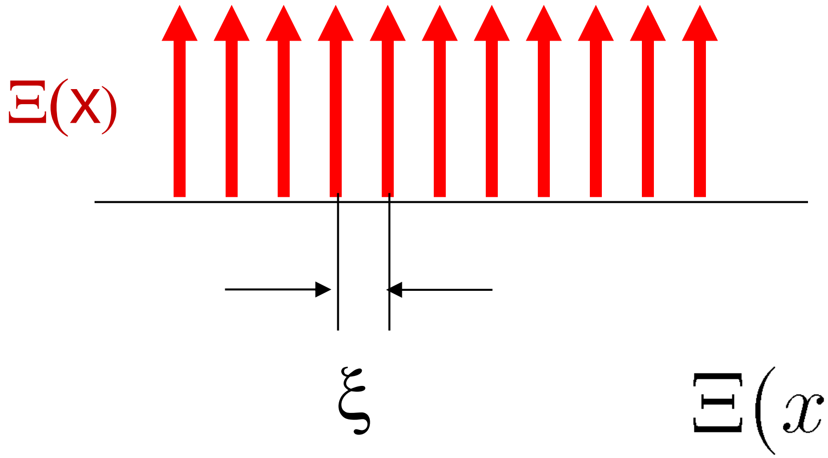
$$f(x)\otimes\delta(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi)\delta(x-\xi)d\xi \ = \ f(x)$$

$$f(x)\otimes\delta(x-x_0) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi)\delta(x-x_0-\xi)d\xi \ = \ f(x-x_0)$$

Delta de Dirac a partir do pulso

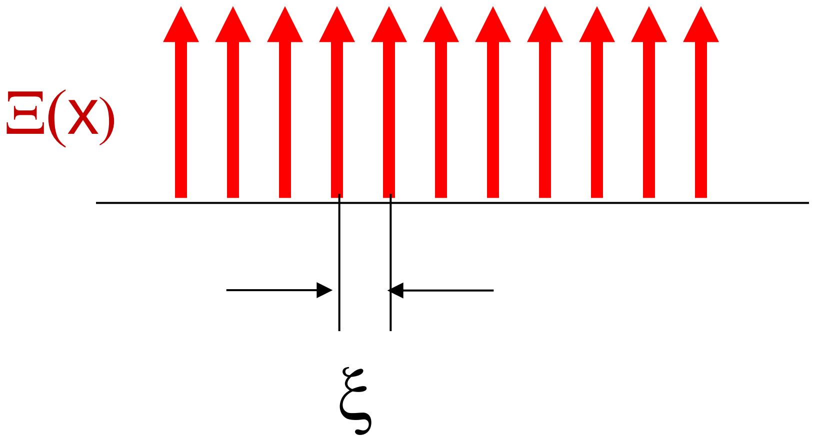
Trem de impulsos

- Obter a transformada de Fourier de um trem de impulsos (comb funtion Ξ (x))



$$\Xi(x) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(x - k\xi)$$

Trem de impulsos



Função pente (comb function)

$$\Xi(x) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(x - k\xi)$$

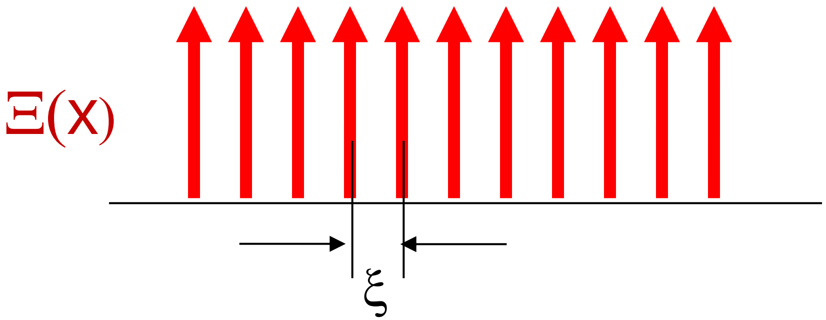
Calculando-se sua transformada de Fourier pela definição:

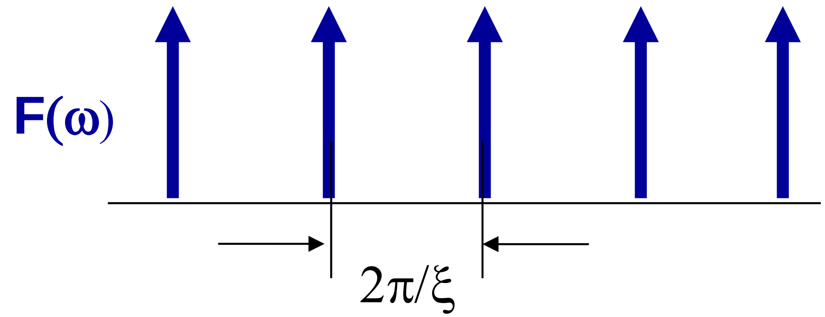
$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \Xi(x) e^{-j\omega x} dx = \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(x - k\xi) e^{-j\omega x} dx$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x - k\xi) e^{-j\omega x} dx = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} e^{-j\omega k\xi}$$

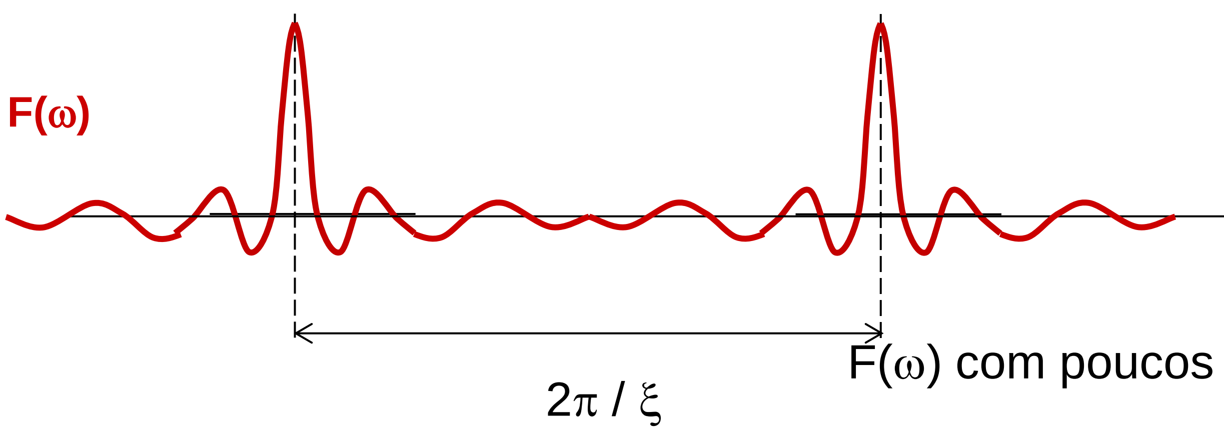
que pode ser interpretada como a série trigonométrica infinita em ω, de harmônicas em ω com frequência múltipla de ξ, ou seja $k\xi$, i.e., período **$2k\pi/\xi$.**

$$\Xi(x) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(x - k\xi) \qquad F(\omega) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} e^{-j\omega k\xi}$$



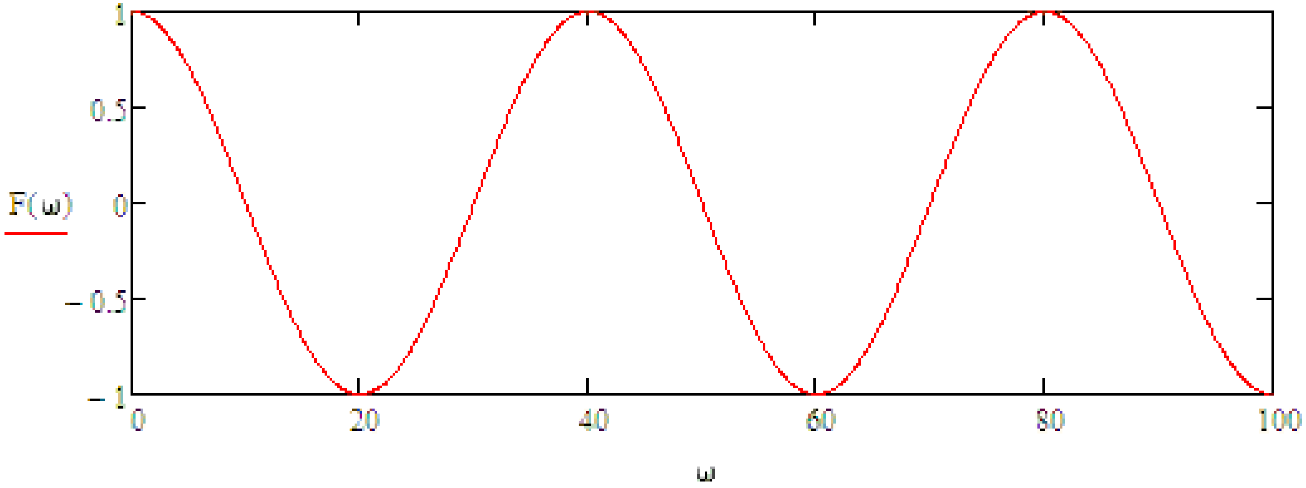


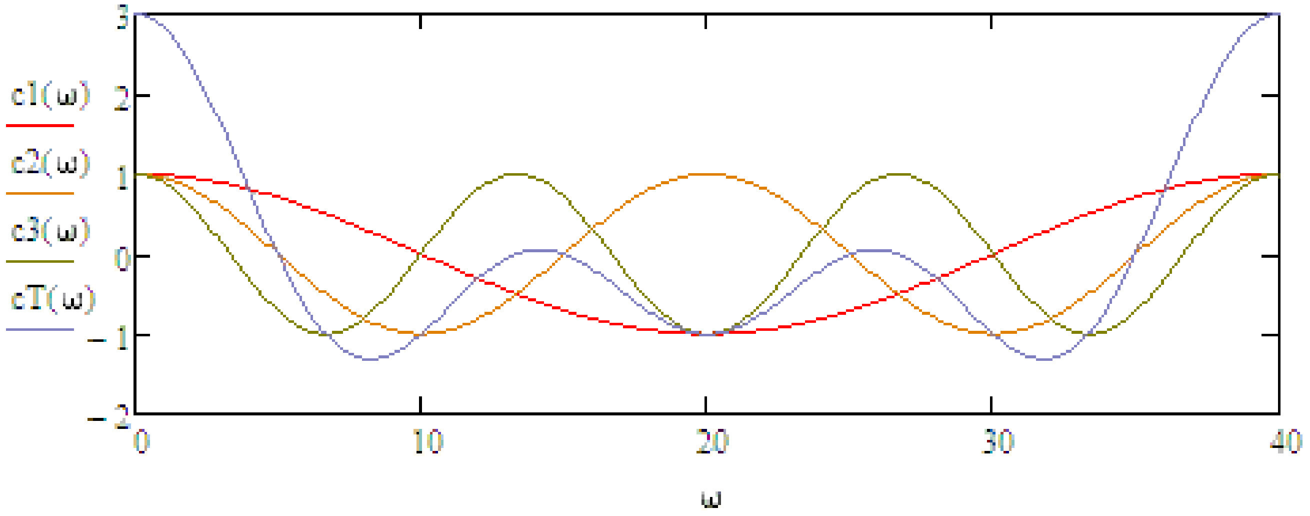
Soma de harmônicas em ω com frequência múltipla de ξ, ou seja kξ, i.e., período **2kπ/ξ.** Note que é uma função de ω e que kξ aparece como frequência múltipla da fundamental ξ, daí o período **2kπ/ξ.** Somando-se as harmônicas, obtem-se um trem de sincs com espaçamento 2π/ξ para uma quantidade finita de termos da somatória. No limite para infinitos termos, F(w) torna-se um trem de impulsos δ espaçados de 2π/ξ , conforme mostrado no slide seguinte



F(ω) com poucos termos somados

Trens de impulsos - animação



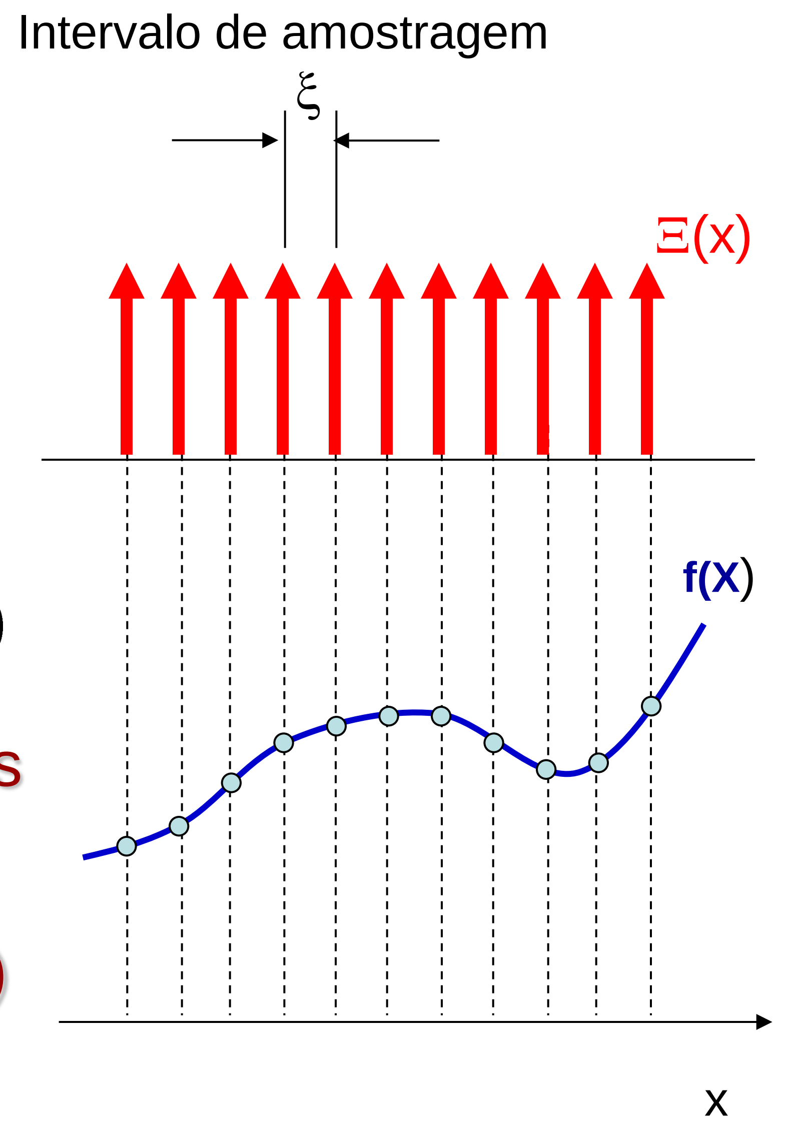


Amostragem

- Amostragem
  - Amostrar uma função f(x) corresponde a multiplicar essa função por um trem de pulsos (função pente)

$$\Xi(x) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(x - k\xi)$$

  - O espaçamento entre os pulsos define o intervalo de amostragem ξ (espaçamento entre 2 amostras consecutivas)
  - Seja $f_a(x)$ a coleção das amostras de f(x):



$$f_a(x) = f(x) \times \Xi(x) = f(x) \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(x - k\xi) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} f(k\xi)\delta(x - k\xi)$$

Transformada de Fourier da função amostrada

$$f_a(x) = f(x) \times \Xi(x) = f(x) \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(x - k\xi) \;=\; \sum_{k=-\infty}^{+\infty} f(k\xi)\delta(x - k\xi)$$

$$F_a(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f_a(x) e^{-j\omega x} dx \;=\; \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} f(k\xi)\delta(x - k\xi) e^{-j\omega x} dx$$

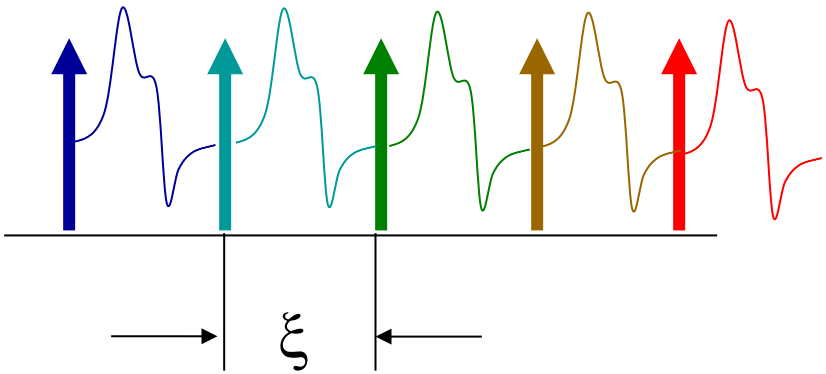
$$= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} f(k\xi) \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x - k\xi) e^{-j\omega x} dx \;=\; \sum_{k=-\infty}^{+\infty} f(k\xi) e^{-jk\omega\xi}$$

Note que, embora a função tenha caráter <u>discreto em x</u> (foi amostrada espacialmente e portanto só são usados os pontos $x = k\xi$), sua transformada de Fourier é <u>contínua em</u> ω.
Ela é um trem de sincs em ω modulado pelas amplitudes das amostras $f(k\xi)$. Discutiremos futuramente como construir uma transformada discreta no domínio ω também, de modo a ser calculável com o computador.

Convolução pelo pente

- Função pente:

$$\Xi(x) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(x - k\xi)$$



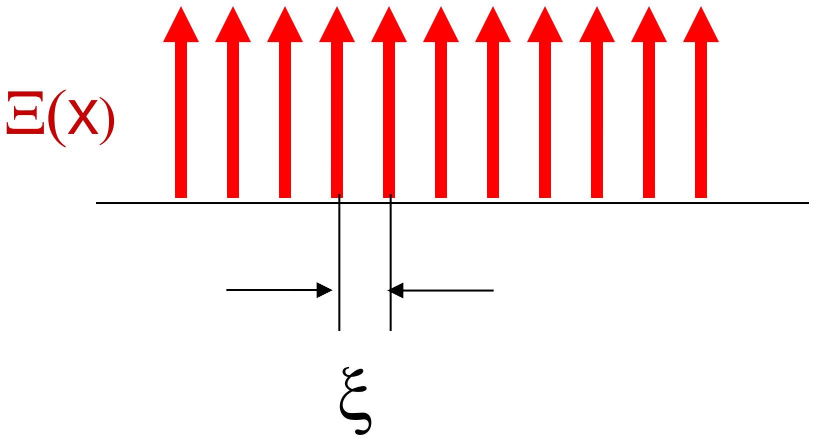
- Convolução

$$f(x) \otimes \delta(x - x_0) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)\delta(x - x_0 - \tau)d\tau \; = \; f(x - x_0)$$

$$f(x) \otimes \Xi(x) \; = \; \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(x - k\xi - \tau)d\tau$$

$$f(x) \otimes \Xi(x) \; = \; \sum_{k=-\infty}^{+\infty} f(x - k\xi)$$

Trem de impulsos

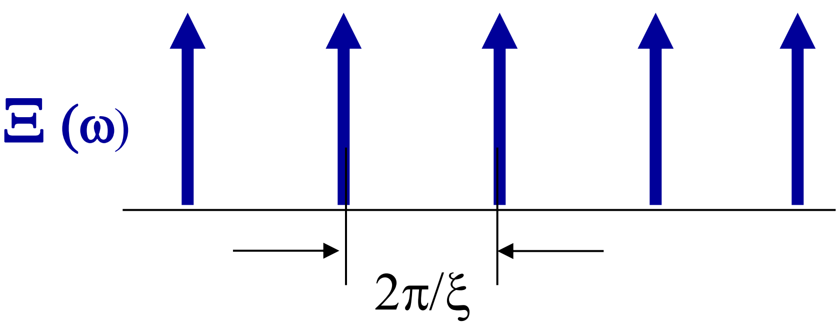


Função pente (comb function)

$$\Xi(x) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(x - k\xi)$$

transformada de Fourier: $$F(\omega) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} e^{-j\omega k\xi} = \Xi(\omega)$$

$$\Xi(\omega) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(\omega - k\tfrac{2\pi}{\xi})$$



Transformada de Fourier → Funções periódicas

- Seja f(x) periódica com período T, isto é :

$$f(x) = f(x - kT)\,,\, k \in Z$$

  - Transformada de Fourier de f(x)

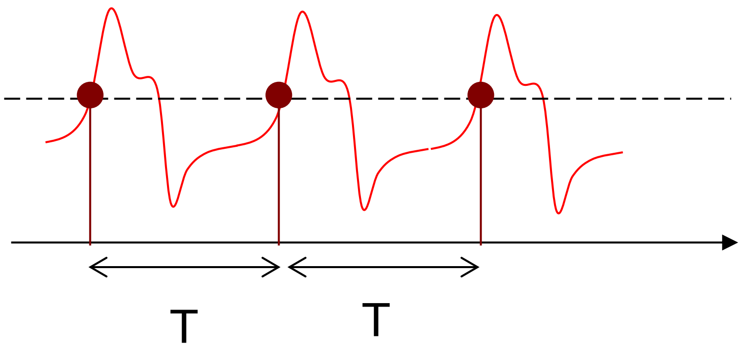
$$\mathcal{F}\{f(x)\} = F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-j\omega x} dx$$

$$\mathcal{F}\{f(x - kT)\} = \int_{-\infty}^{\infty} f(x - kT) e^{-j\omega x} dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(y) e^{-j\omega (y + kT)} dy =$$

$$= e^{-j\omega kT} \int_{-\infty}^{\infty} f(y) e^{-j\omega y} dy = e^{-j\omega kT} F(\omega)$$

Transformada de Fourier → Funções periódicas

$$f(x) = f(x - kT)\,, k \in Z$$

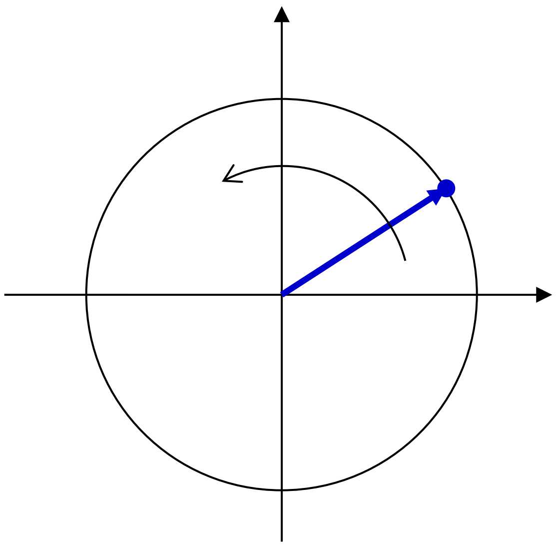


$$\mathcal{F}\{f_0(x)\} \;=\; F_0(\omega)$$

$$\mathcal{F}\{f_0(x - kT)\} \;=\; e^{-j\omega kT} \int_{-\infty}^{\infty} f_0(y) e^{-j\omega y} dy \;=\; e^{-j\omega kT} F_0(\omega)$$

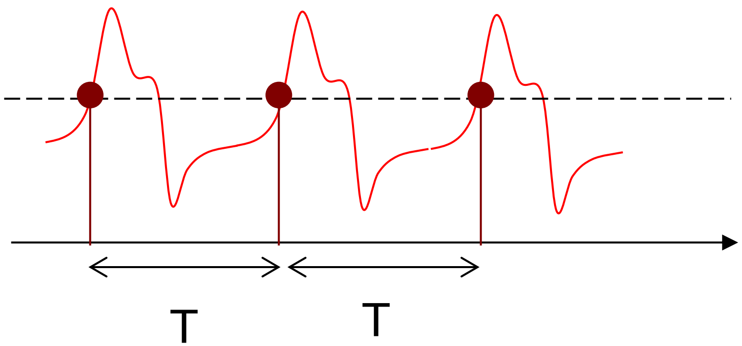
$$T = \frac{2\pi}{\omega_0}$$

$$\mathcal{F}\{f_0(x - kT)\} \;=\; e^{-j2k\pi\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)} F_0(\omega)$$



Transformada de Fourier → Funções periódicas

$$f(x) = f(x - kT)\,,\, k \in Z$$



$$\mathcal{F}\{f_0(x)\} = F_0(\omega)$$

$$\mathcal{F}\{f_0(x - kT)\} = e^{-j2k\pi\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)} F_0(\omega)$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0}$$

$$f(x) = f_0(x) \otimes \Xi(x)$$

$$F(\omega) = F_0(\omega)\mathcal{F}\{\Xi(x)\}$$

$$\mathcal{F}\{\Xi(x)\} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} e^{-j\omega kT}$$

$$F(\omega) = F(\omega_0) \sum_{k=-\infty}^{+\infty} e^{-j\omega kT} = F(\omega_0) \overbrace{\sum_{k=-\infty}^{+\infty} e^{-jk\left(\frac{2\pi}{\omega_0}\right)\omega}}^{\Xi(\omega)}$$

Transformada de Fourier → Funções periódicas

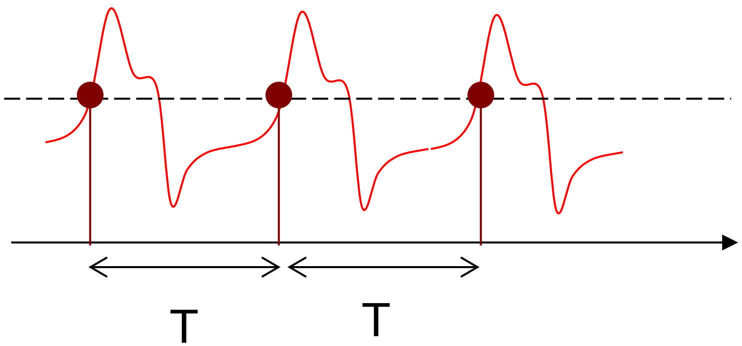
$$f(x) = f(x - kT)\,,\, k \in Z$$

$$\mathcal{F}\{f_0(x)\} \;=\; F_0(\omega)$$

$$\mathcal{F}\{f_0(x - kT)\} \;=\; e^{-j2k\pi\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)} F_0(\omega)$$

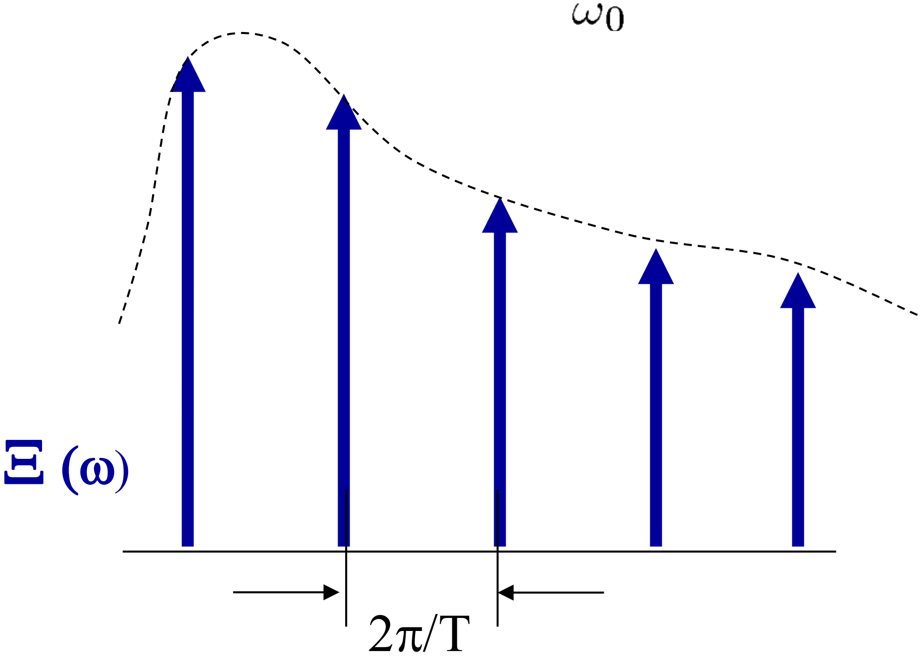
$$f(x) \;=\; f_0(x) \otimes \Xi(x)$$

$$F(\omega) = F(\omega_0)\Xi(\omega)$$



$$T = \frac{2\pi}{\omega_0}$$

i.e., o espectro é **discreto**
(tal como na série de Fourier)



Transformada de Fourier

- Contínua

$$\mathcal{F}\{f(x)\} = F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-j\omega x}dx$$

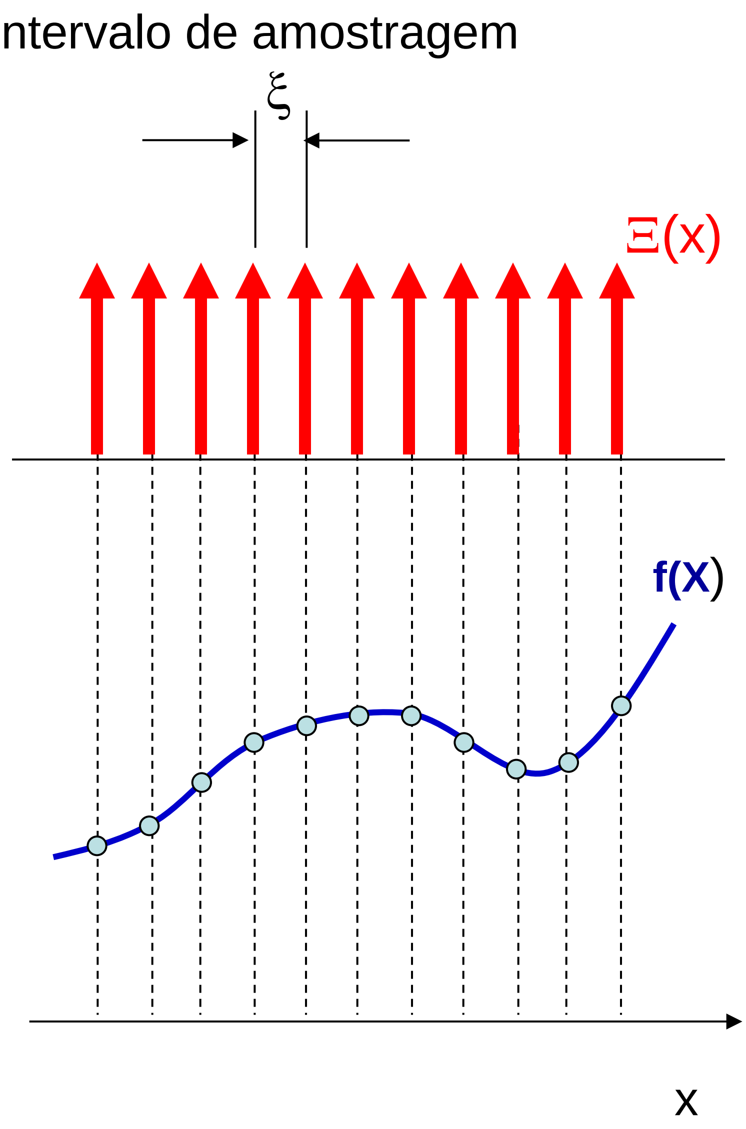
- Discreta
  - Opera sobre amostras
    - **O sinal fica discretizado no espaço**
  - É uma aproximação numérica
    - **A frequência é discreta**
  - O sinal e o espectro têm extensões finitas

Amostragem

- Amostragem
  - Amostrar uma função f(x) corresponde a multiplicar essa função por um trem de pulsos (função pente)

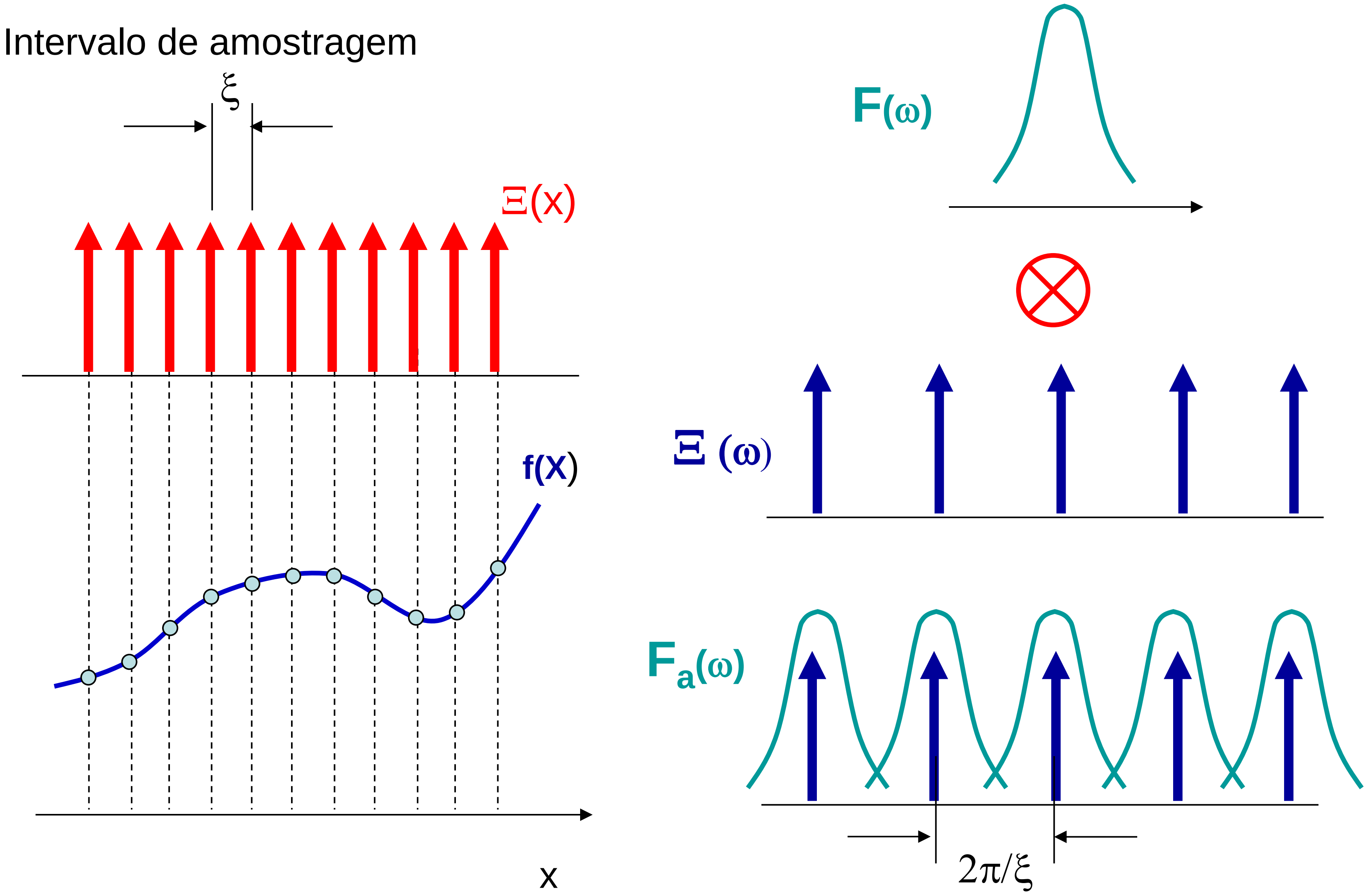
$$\Xi(x) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(x - k\xi)$$

- Logo, a transformada da função amostrada será a convolução entre a transformada de f(x) e a transformada do pente Ξ(x), que é Ξ(ω):



$$f_a(x) = f(x) \times \Xi(x) = f(x) \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(x - k\xi)$$

$$\mathcal{F}\{f_a(x)\} = \mathcal{F}\{f(x) \times \Xi(x)\} = F(\omega) \otimes \Xi(\omega)$$



$$\mathcal{F}\{f_a(x)\} = \mathcal{F}\{f(x) \times \Xi(x)\} = F(\omega) \otimes \Xi(\omega)$$

Sinais amostrados

- A transformada de Fourier fica replicada em torno de cada impulso do pente
- A separação entre os impulsos do pente é essencial para evitar o recobrimento das cópias de $F(\omega)$ que formam juntas o $F_a(\omega)$
- Se a separação não for suficiente ocorrerá *aliasing*

Conceito de sinal

- Chamaremos de sinal às funções que apresentam as propriedades de regularidade compatíveis com a representação de grandezas físicas:
  - Não apresentam descontinuidades abruptas (podem variar rapidamente mas não dão "saltos" instantâneos)
  - São limitadas
    - **Têm energia finita**
    - **Têm espectros de banda limitada**

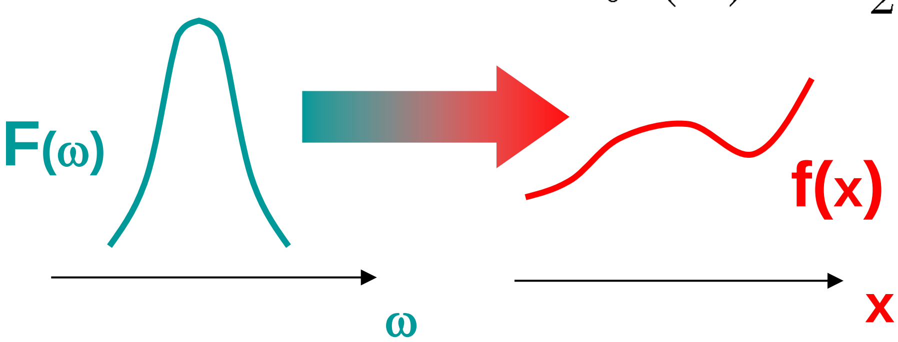
Recuperação do sinal a partir do seu espectro

- Significa inverter sua transformada de Fourier
  - Isto é, dada F(ω) obter a f(x)

$$\mathcal{F}\{f(x)\} = F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-j\omega x}dx$$

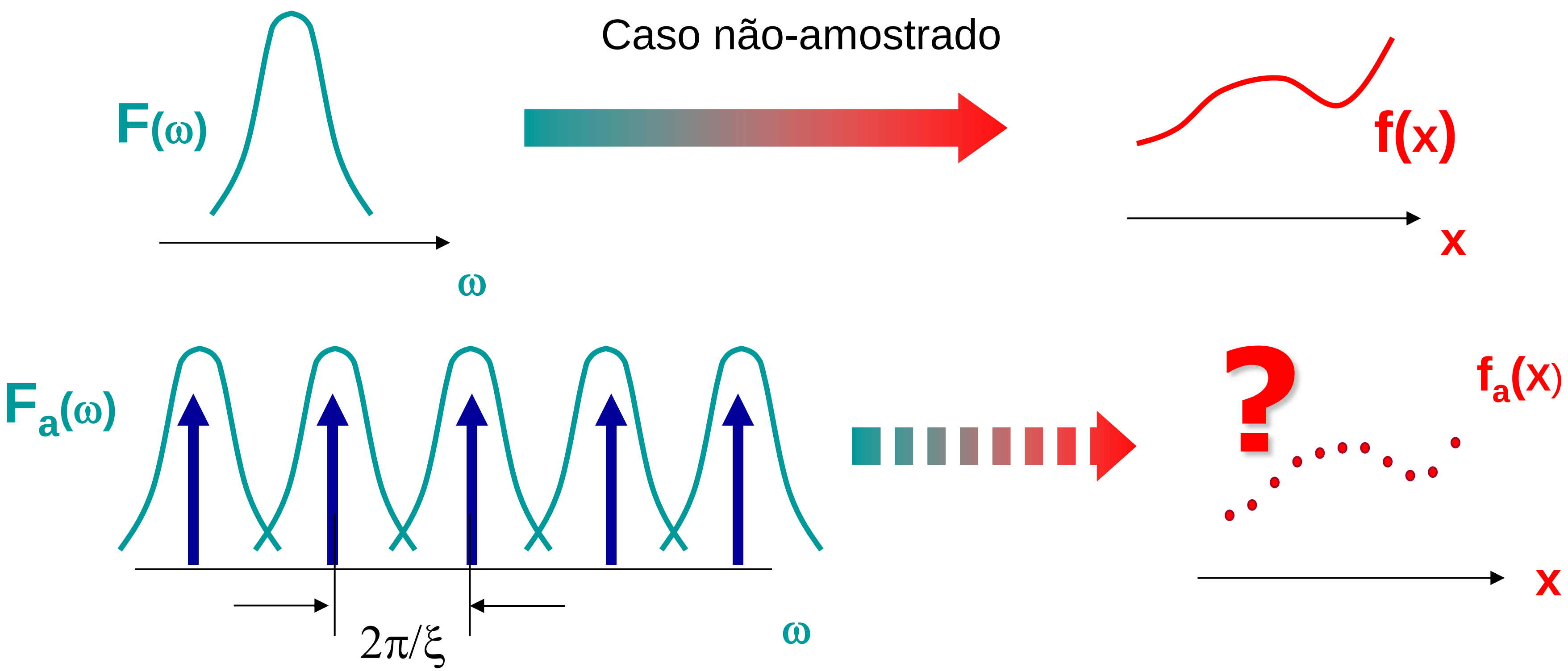
  - Analiticamente, basta usar:

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \boxed{F(\omega)}e^{j\omega x}d\omega$$



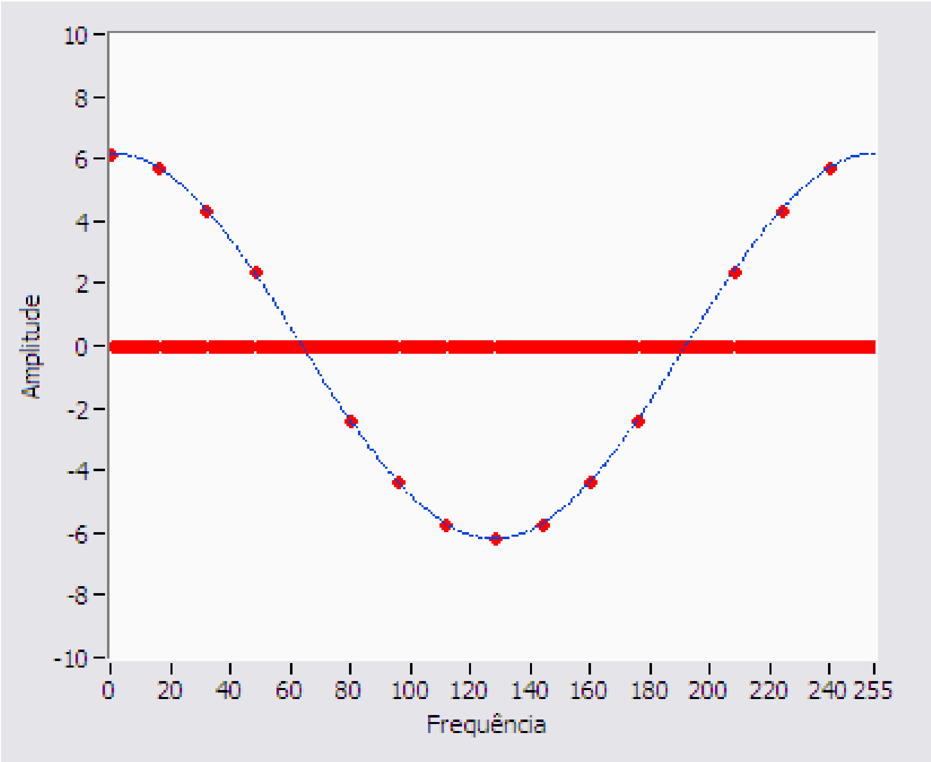
Recuperação do sinal <u>amostrado</u> a partir do seu espectro

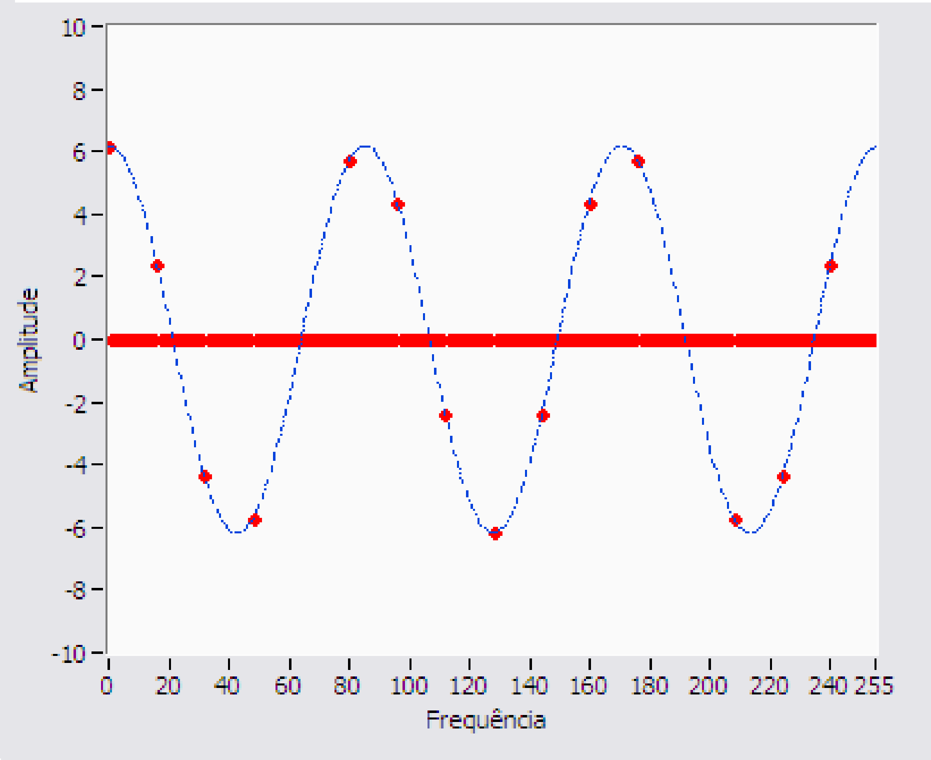
- No caso de sinais amostrados, o primeiro problema consiste no fato de que sua transformada é a convolução com a transformada do pente



Amostragem

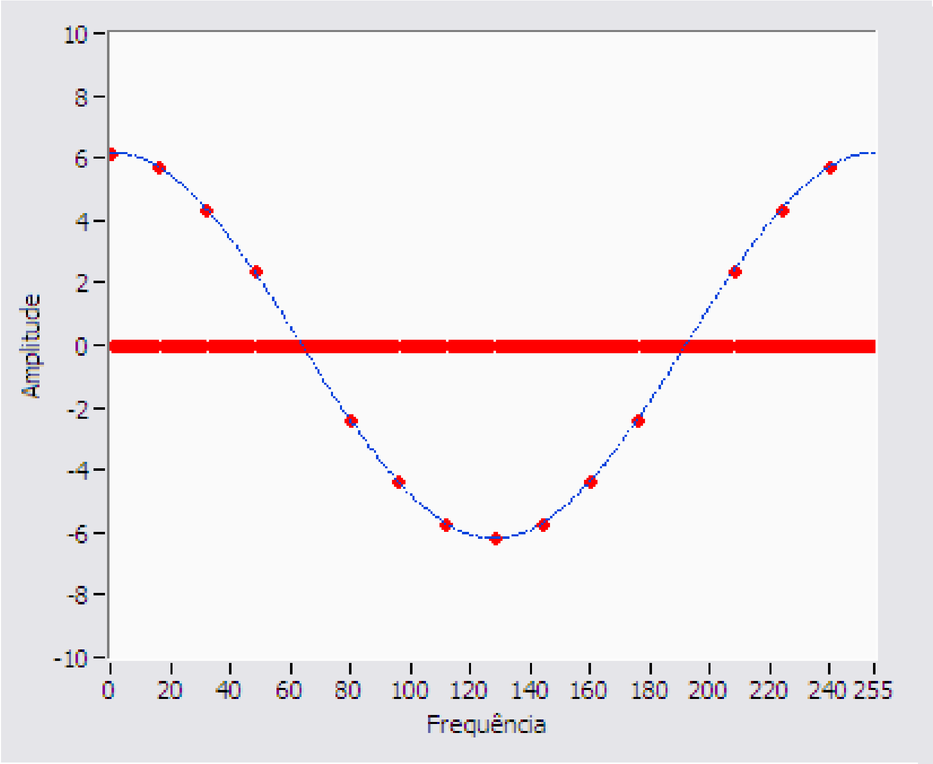
A taxa com que se amostra uma dada componente harmônica pode não ser suficiente para amostrar uma componente de frequência mais alta

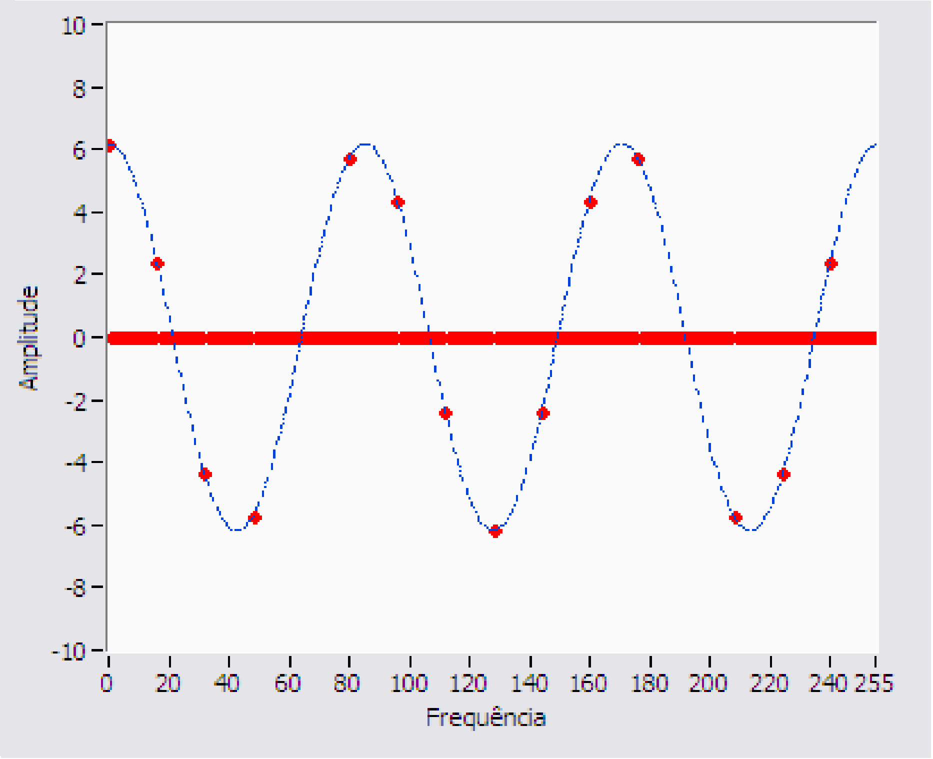




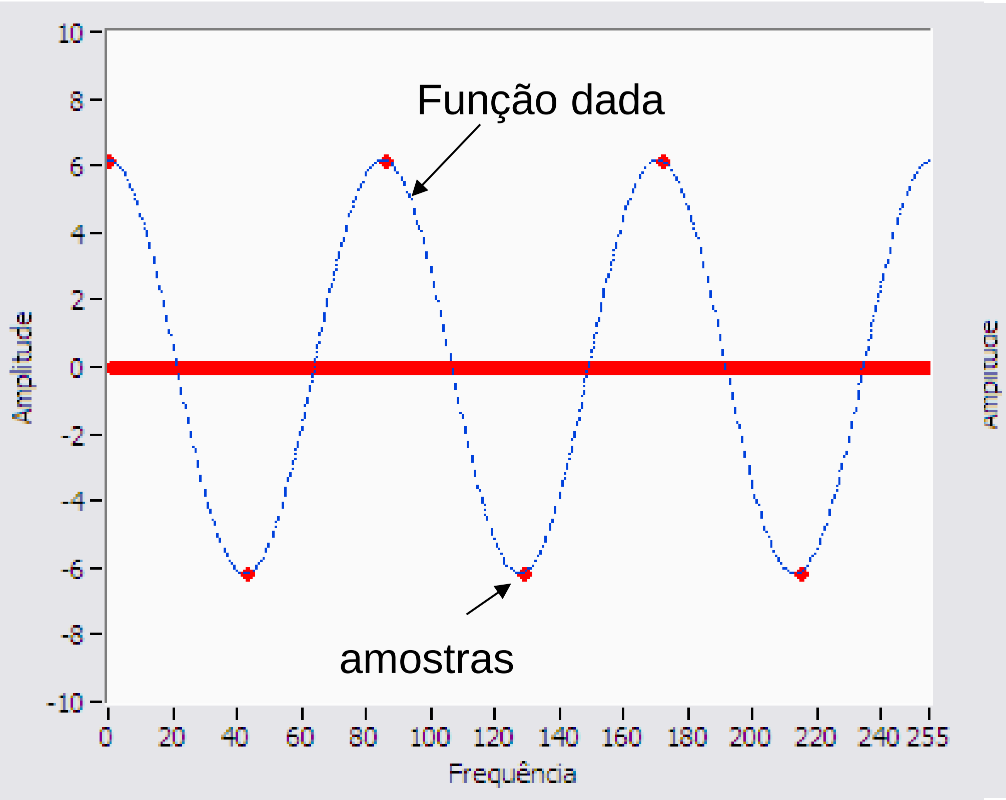
Amostragem

A taxa com que se amostra uma dada componente harmônica pode não ser suficiente para amostrar uma componente de frequência mais alta

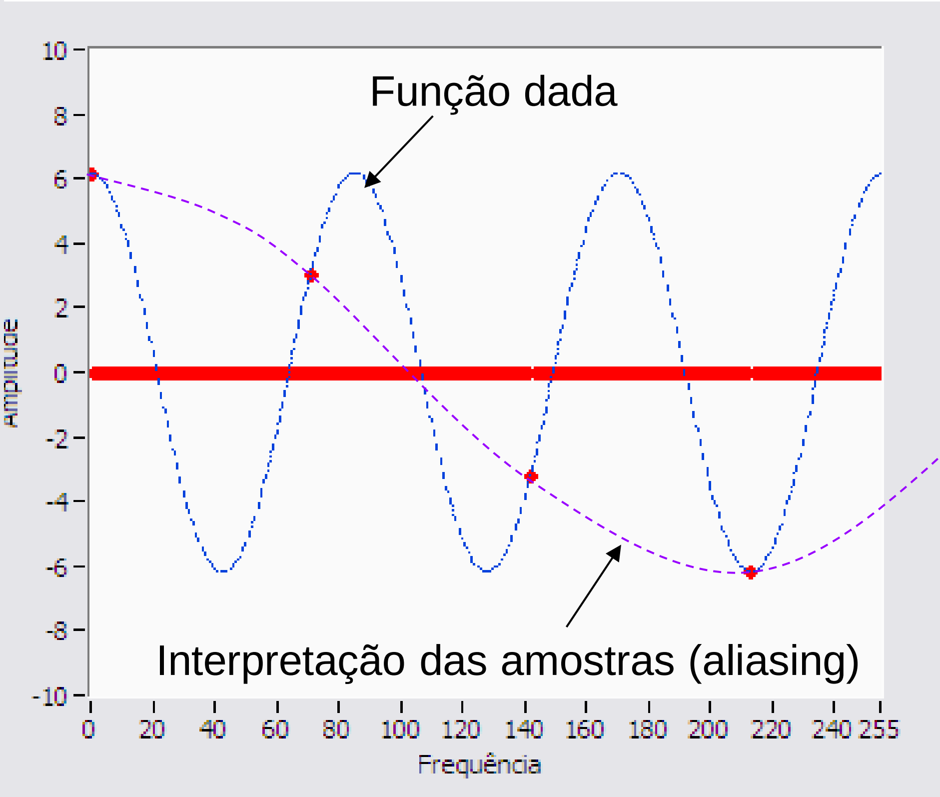




Amostragem

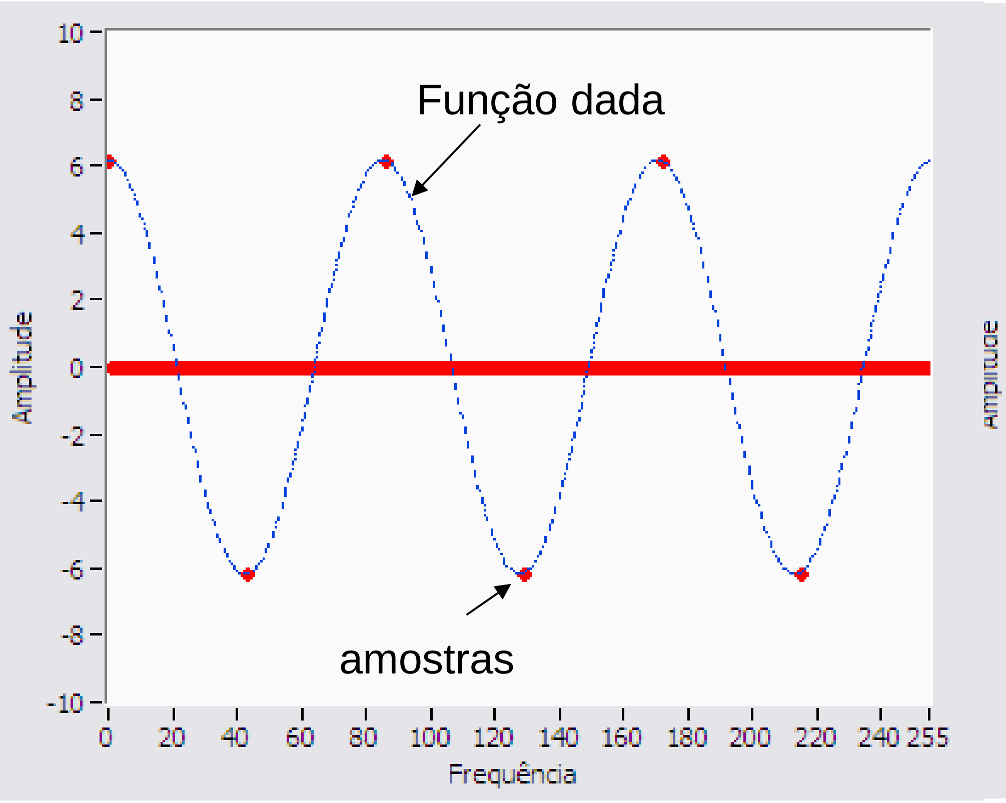


Situação limite → Frequência de Nyquist

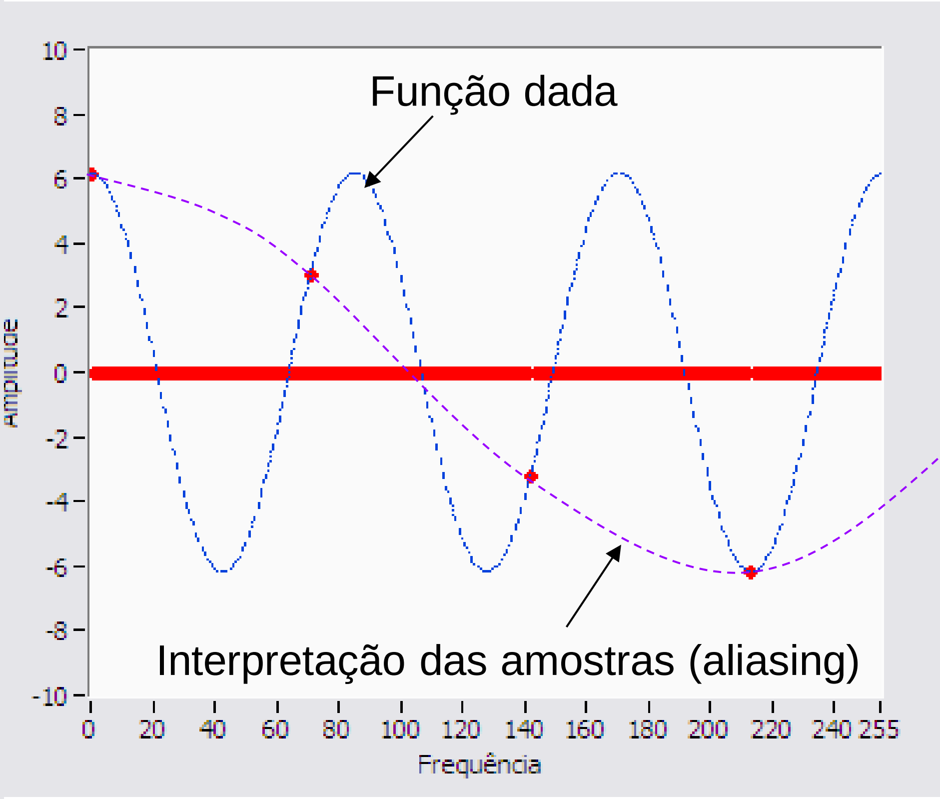


Aliasing

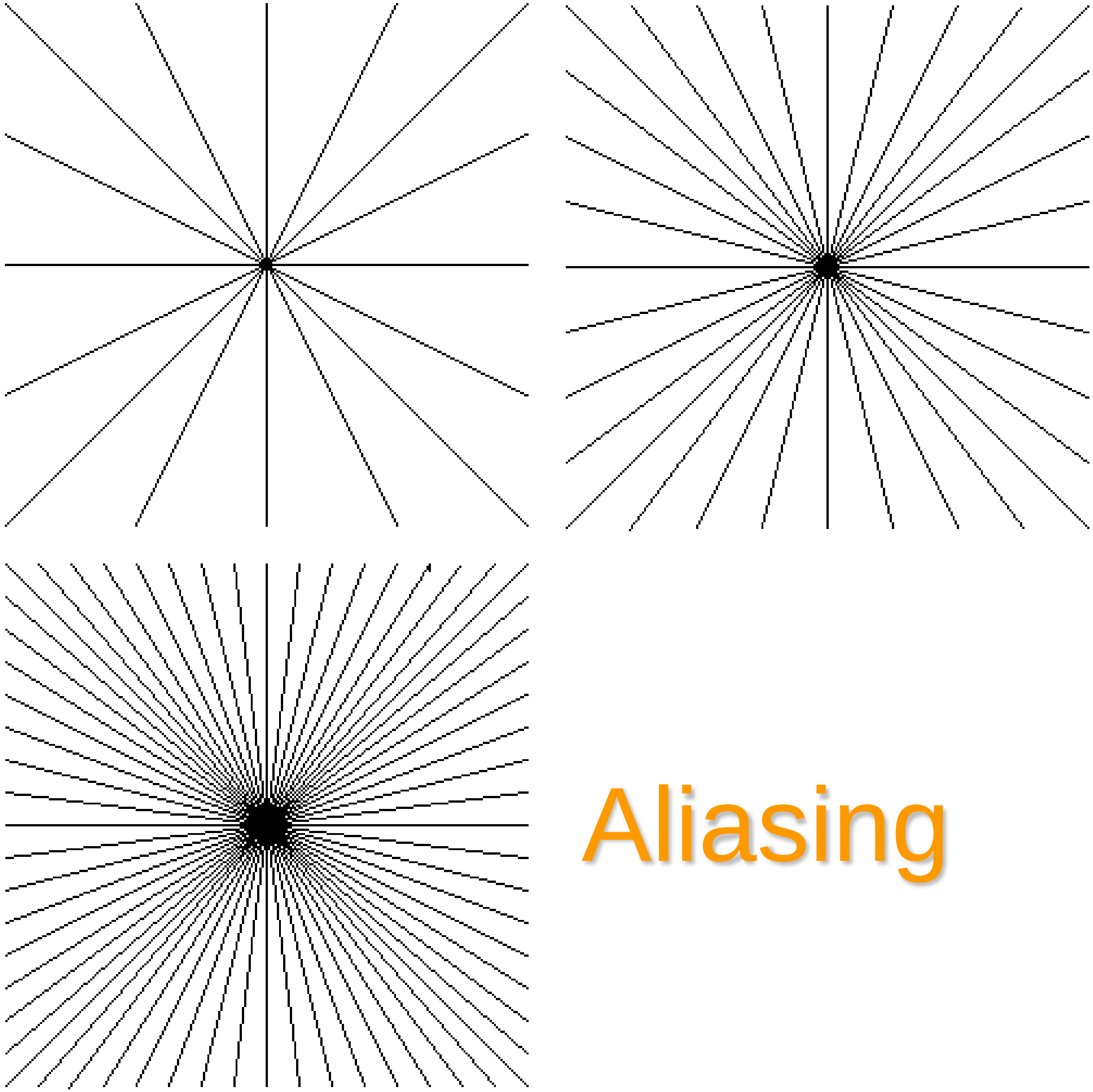
Amostragem



Situação limite → Frequência de Nyquist



Aliasing



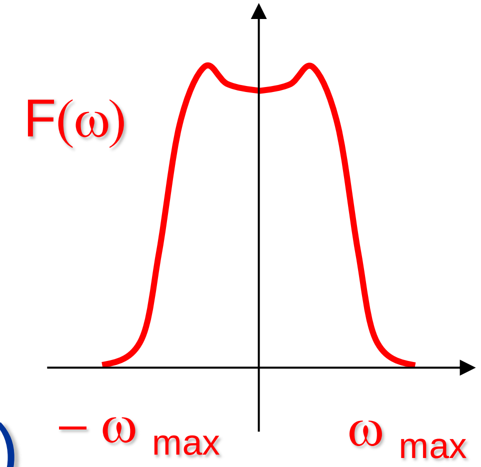
Aliasing

Aliasing

Original

Sub-amostrada (com aliasing)

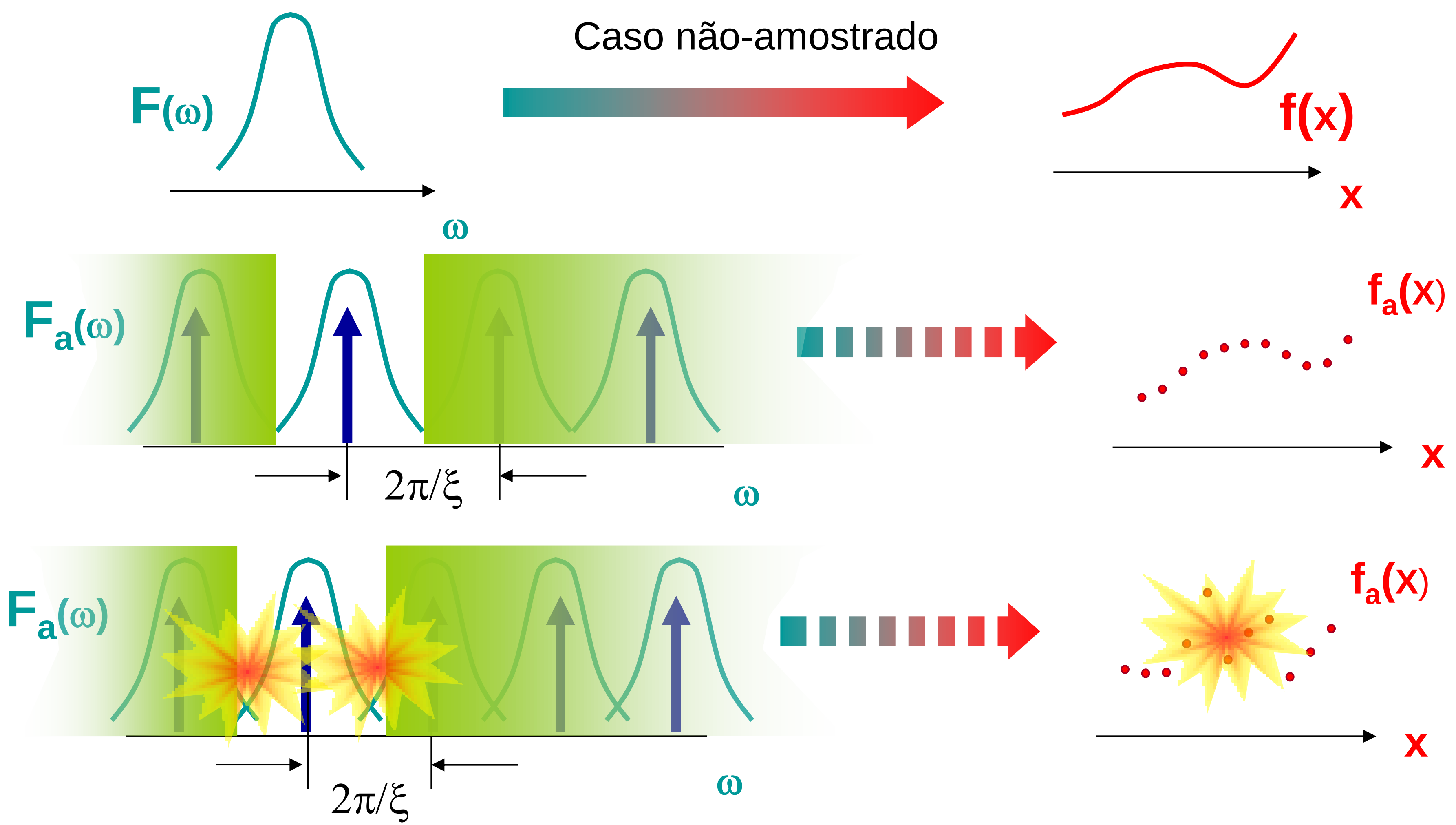
Amostragem



- Sinal de banda limitada (*band limited*)
  - É o sinal cujo espectro tem duração finita
- Faixa espectral ou largura de banda
  - É o tamanho do intervalo $[-\omega_{max}, \omega_{max}]$ sobre o qual está definido um sinal de banda limitada
- Frequência de Nyquist
  - Para evitar-se o aliasing, o sinal deve ser amostrado com uma taxa no mínimo igual ao dobro da maior frequência contida no sinal
  - Frequência de Nyquist = $2\,\omega_{max} \rightarrow f_N = \omega_{max} / \pi$

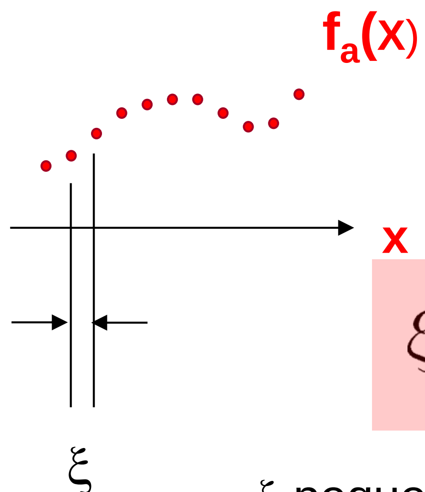
Recuperação do sinal amostrado a partir do espectro

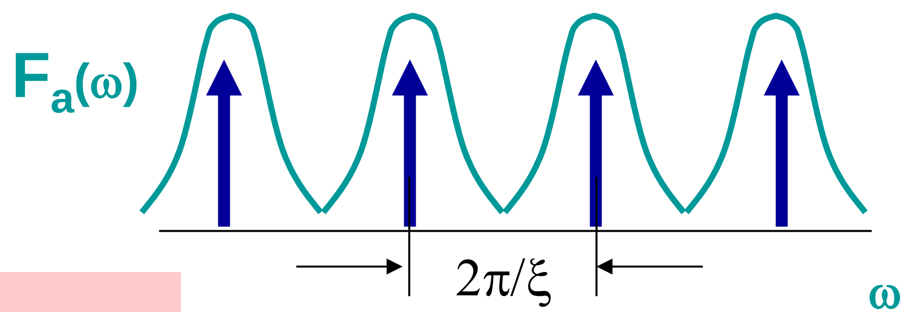
- No caso de sinais amostrados, a recuperação só é possível se o limite de Nyquist for observado



Recuperação do sinal amostrado a partir do espectro

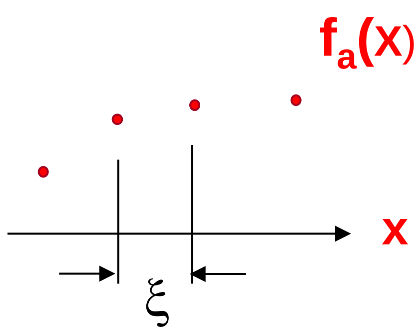
- O intervalo de amostragem deve ser pequeno suficientemente para alcançar a taxa de Nyquist f_N

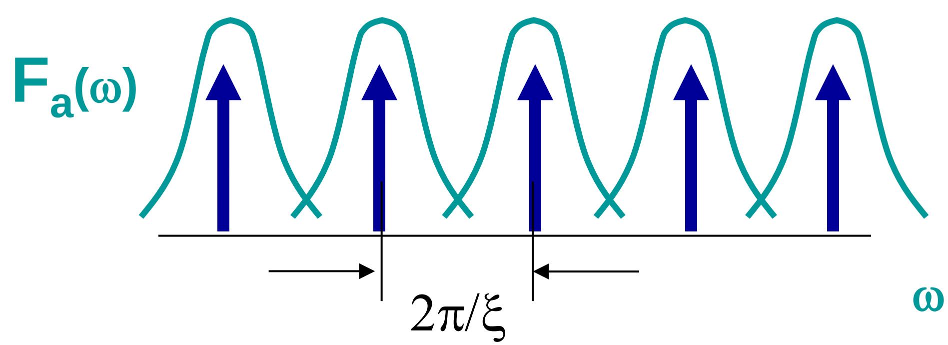




$$\xi \leq \frac{1}{f_N} = \frac{\pi}{\omega_{max}}$$

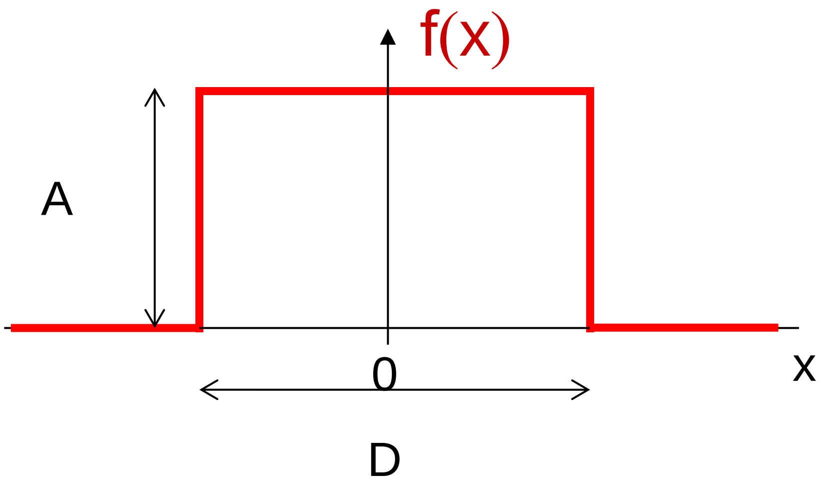
ξ pequeno → muitas amostras → mais memória



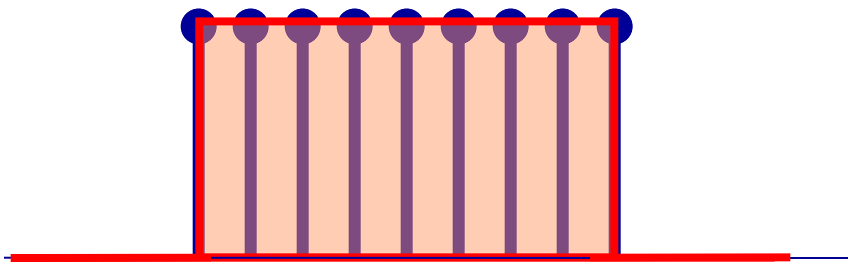


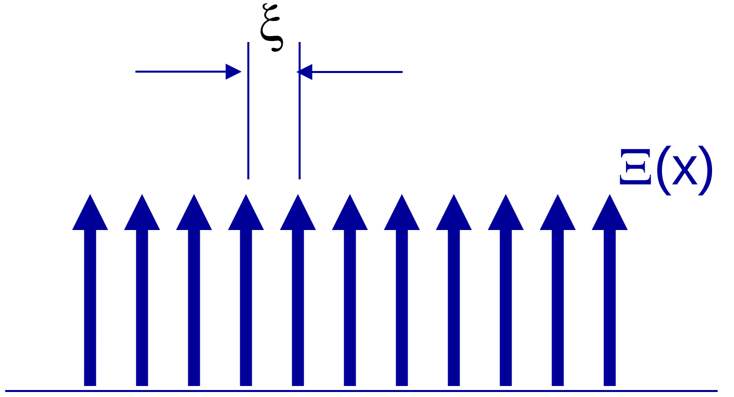
Exemplo: pulso retangular – parte 2: amostrado

$$f(x) = \begin{cases} A\,, & x \in [-\frac{D}{2}\,,\ \frac{D}{2}] \\ 0\,, & x \notin [-\frac{D}{2}\,,\ \frac{D}{2}] \end{cases}$$



- O pulso amostrado $f_a(x)$ resulta da multiplicação do pulso dado pelo pente $\Xi(x)$





Exemplo: pulso retangular – parte 2: amostrado

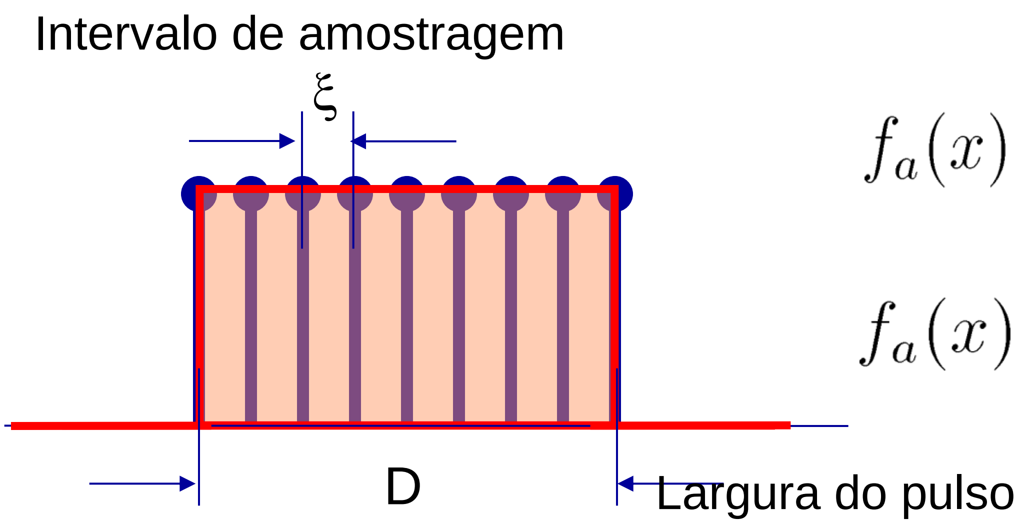
$$f(x) = A \cdot rect(x) = \begin{cases} A\,,\ x \in [-\frac{D}{2}\,,\ \frac{D}{2}] \\ 0\,,\ x \notin [-\frac{D}{2}\,,\ \frac{D}{2}] \end{cases}$$

Supondo que sejam retiradas N amostras na extensão D do pulso, o intervalo de amostragem será: $\xi = \frac{D}{N}$

Portanto, a função amostrada será dada por:

$$f_a(x) = \sum_{k=-N/2}^{N/2} A\delta(x - k\frac{D}{N})$$

$$f_a(x) = 0\,,\ x \notin [-\frac{D}{2}\,,\ \frac{D}{2}]$$



Exemplo: pulso retangular – parte 2: amostrado

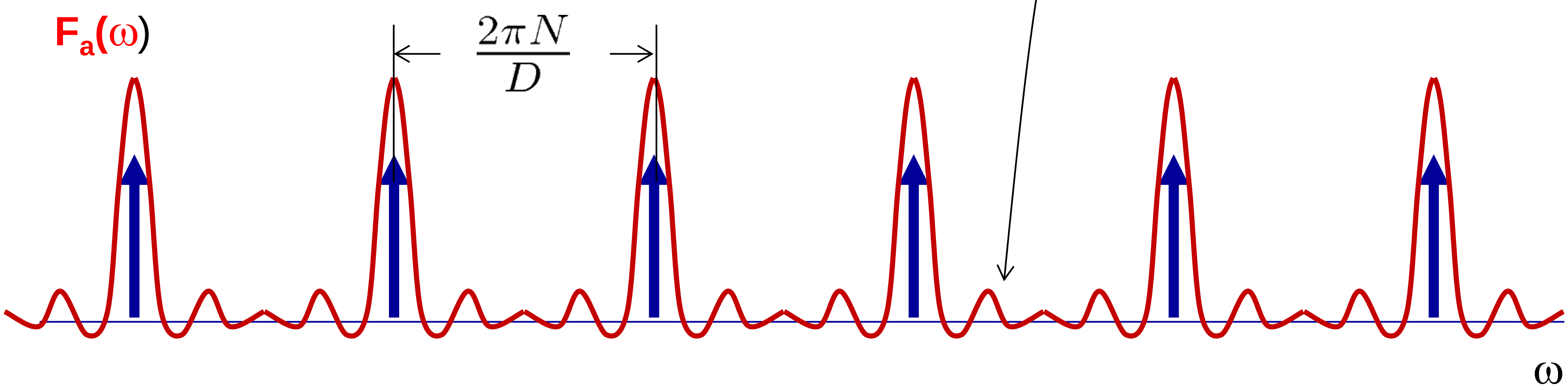
Usando a notação compacta rect(x) para o pulso retangular:

$$f_a(x) = A \cdot rect(x) \cdot \Xi(x)$$

A transformada de $f_a(x)$ será a convolução das transformadas de rect(x) pela do transformada do pente $\Xi(x)$

$$F_a(\omega) = AD \cdot sinc(\frac{\omega D}{2}) \cdot \Xi(\omega)$$

<u>Contínuo</u> em ω
e periódico



Transformada Discreta

- Aproximação numérica da TF contínua
  - A expressão da TF contínua implica em banda de frequência infinita e densa
  - Na prática isso não é possível:
    - **Limite de resolução numérica**
    - **Quantidade de memória disponível**
    - **Tempo de cálculo finito**
  - Ou seja, haverá um passo de frequência definido
    - **Corresponderá à menor frequência representada**

Resolução de frequências

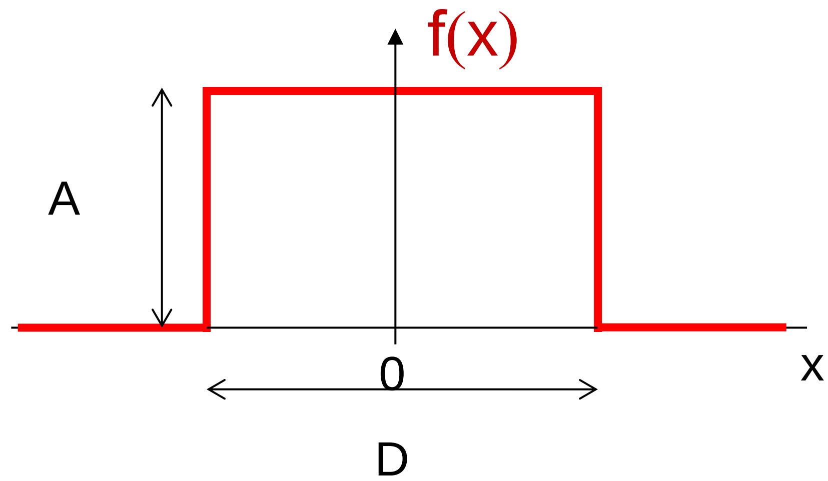
- Transformada discreta → convolução com pente de impulsos em ω
  - Resulta correspondente multiplicação por pulsos em x
  - Esse resultado deve ser compatível com a taxa de amostragem e com a duração do sinal
- Duração do Sinal → janelamento

Sinais finitos (janelados)

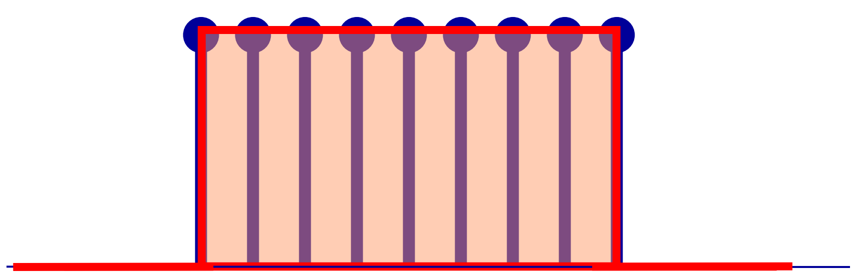
- Os sinais na prática têm duração finita
- Isso equivale a multiplicar o sinal pela janela retangular
- Como consequência, a transformada de Fourier resultante será a convolução entre a transformada da janela e a transformada da função amostrada

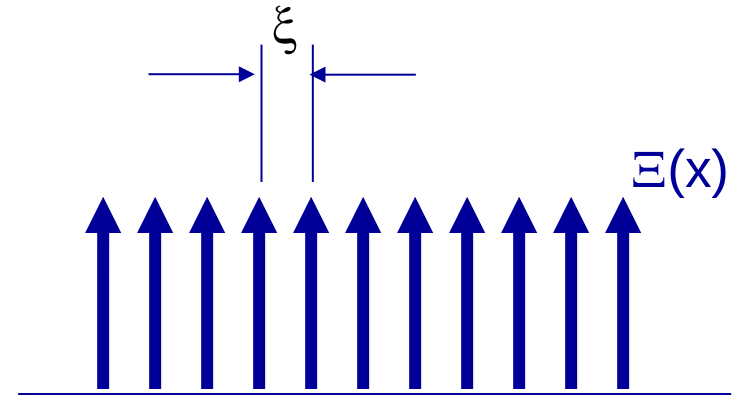
Janela retangular

$$f(x) = \begin{cases} A\,, & x \in [-\frac{D}{2}\,,\,\frac{D}{2}] \\ 0\,, & x \notin [-\frac{D}{2}\,,\,\frac{D}{2}] \end{cases}$$



- O sinal amostrado $f_a(x)$ resulta da multiplicação pelo pente $\Xi(x)$ de duração limitada pela janela

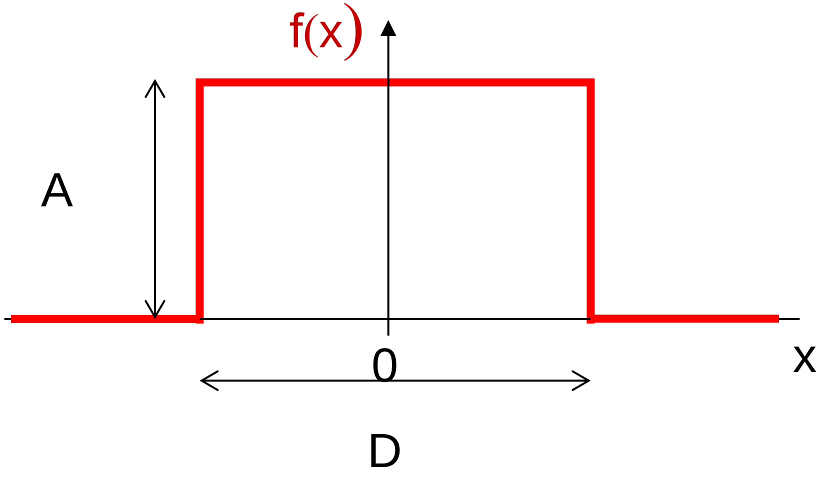


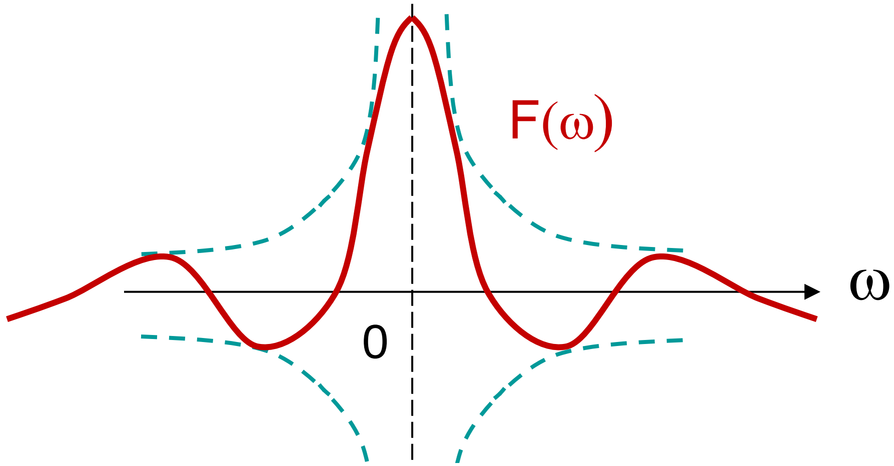


Efeito da janela retangular

- A transformada de Fourier de um pulso retangular de largura D e altura A tem a forma dada por

$$F(\omega) = AD\ sinc(\frac{\omega D}{2}) = AD\ \frac{\sin\left(\frac{\omega D}{2}\right)}{\frac{\omega D}{2}}$$





Hipóteses de representação

- Funções periódicas contínuas → série de Fourier

$$f(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k e^{jk\omega_0 x} \qquad C_k = \tfrac{1}{T}\int_0^T e^{-jk\omega_0 x}dx$$

- Funções em geral, contínuas → transformada de Fourier

$$f(x) = \tfrac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)e^{j\omega x}d\omega \qquad F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-j\omega x}dx$$

- Funções discretas (amostradas) → transformada discreta de Fourier (DFT)

$$f(n) = \tfrac{1}{N}\sum_{k=-M}^{M} F(k)e^{jk\frac{2\pi}{N}n} \qquad F(k) = \sum_{k=0}^{N-1} f(n)e^{-jk\frac{2\pi}{N}n}$$

Caso 2D - imagens

Periodicidades

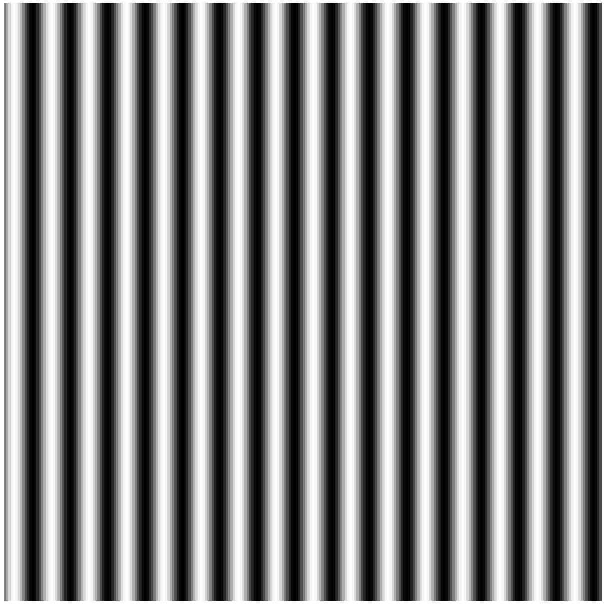
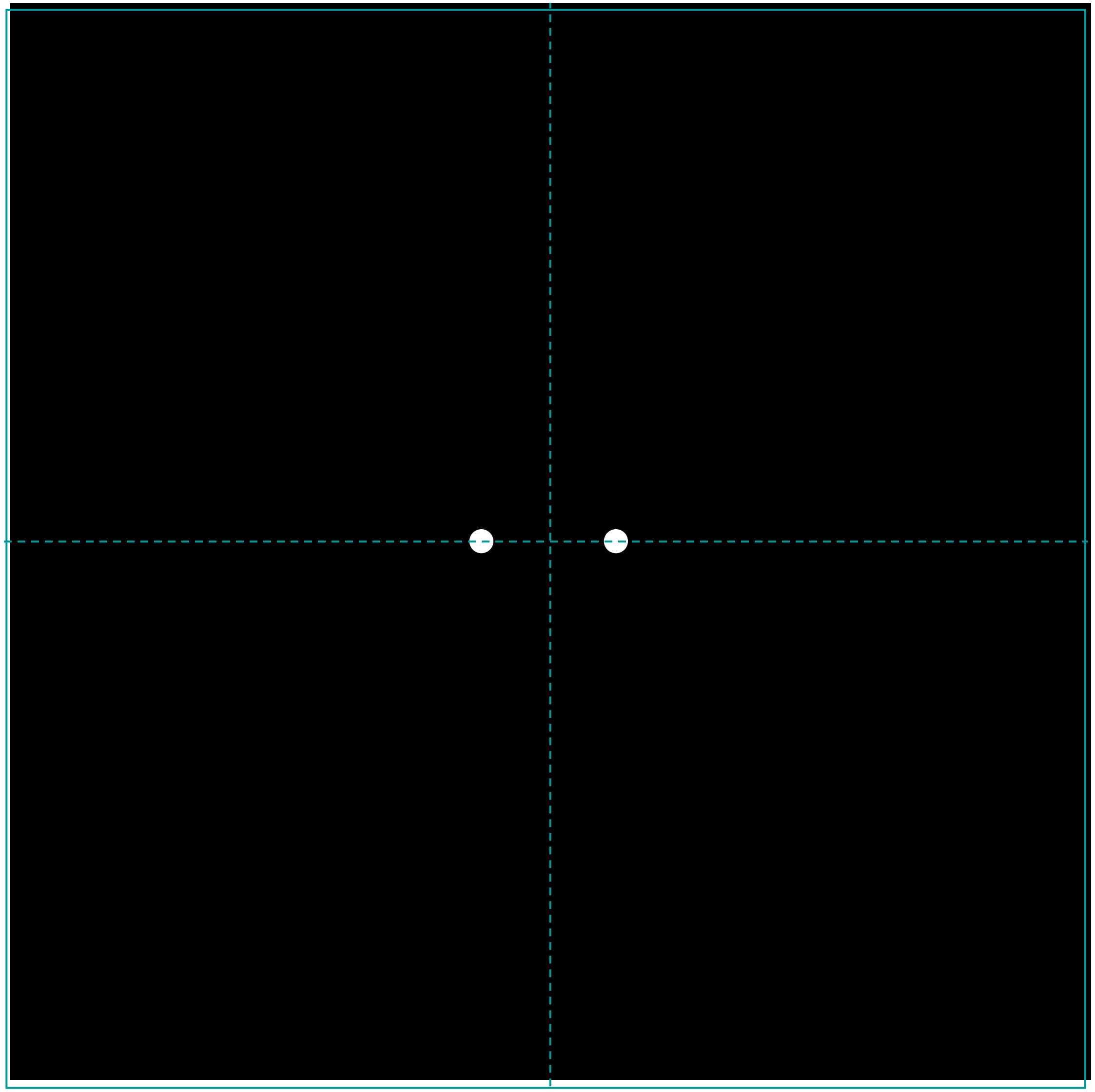
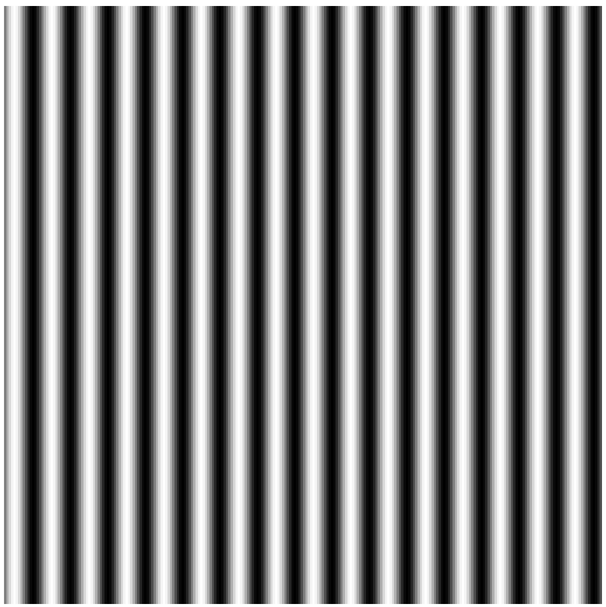


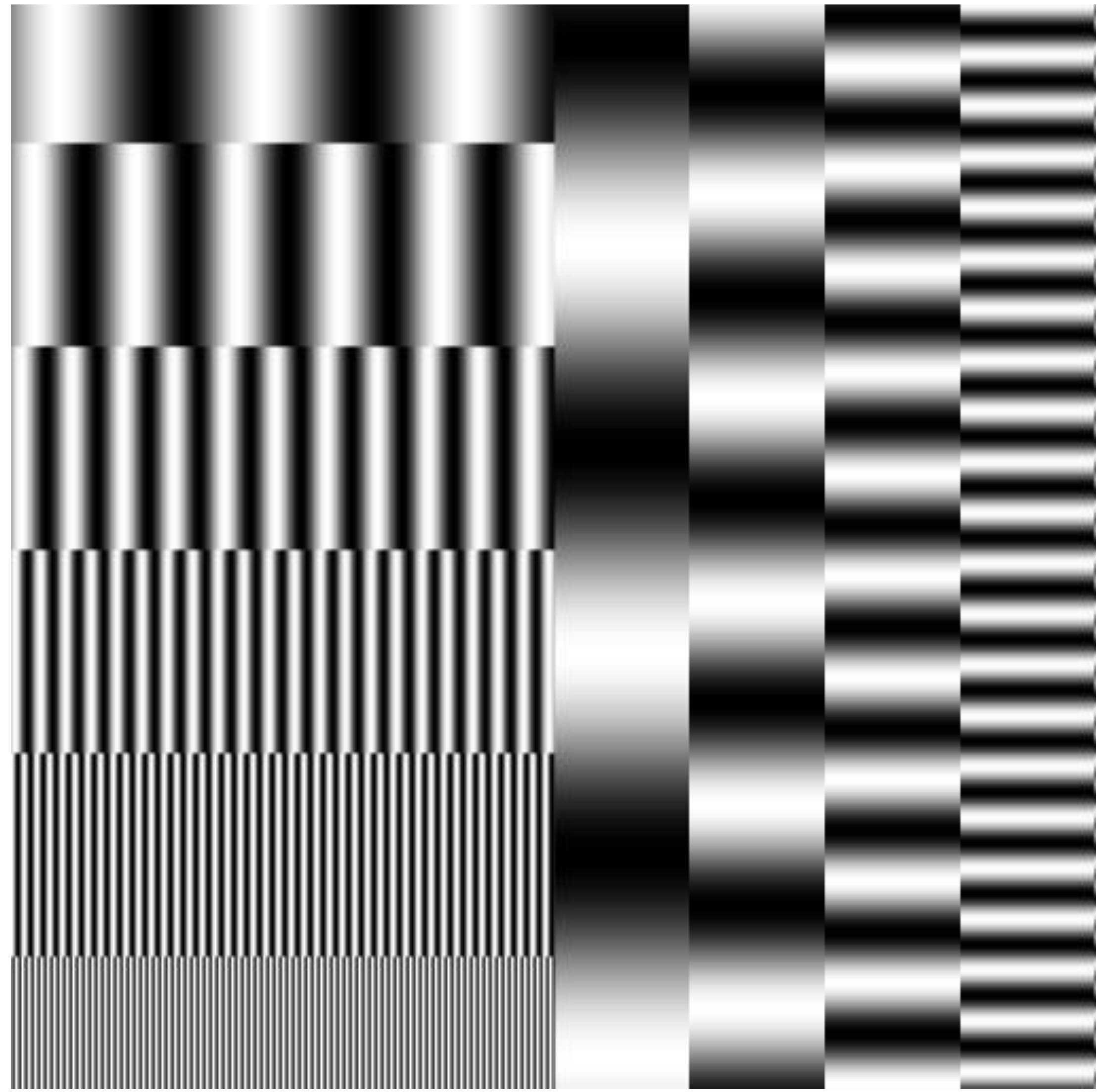
Imagem Senoidal



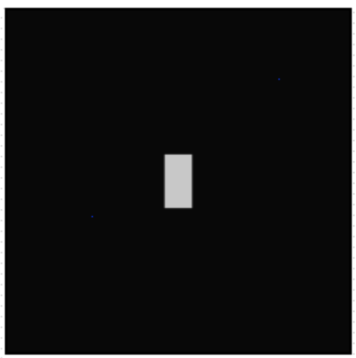
Periodicidades

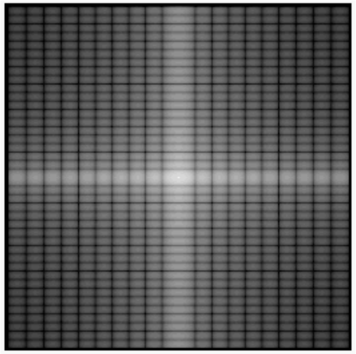


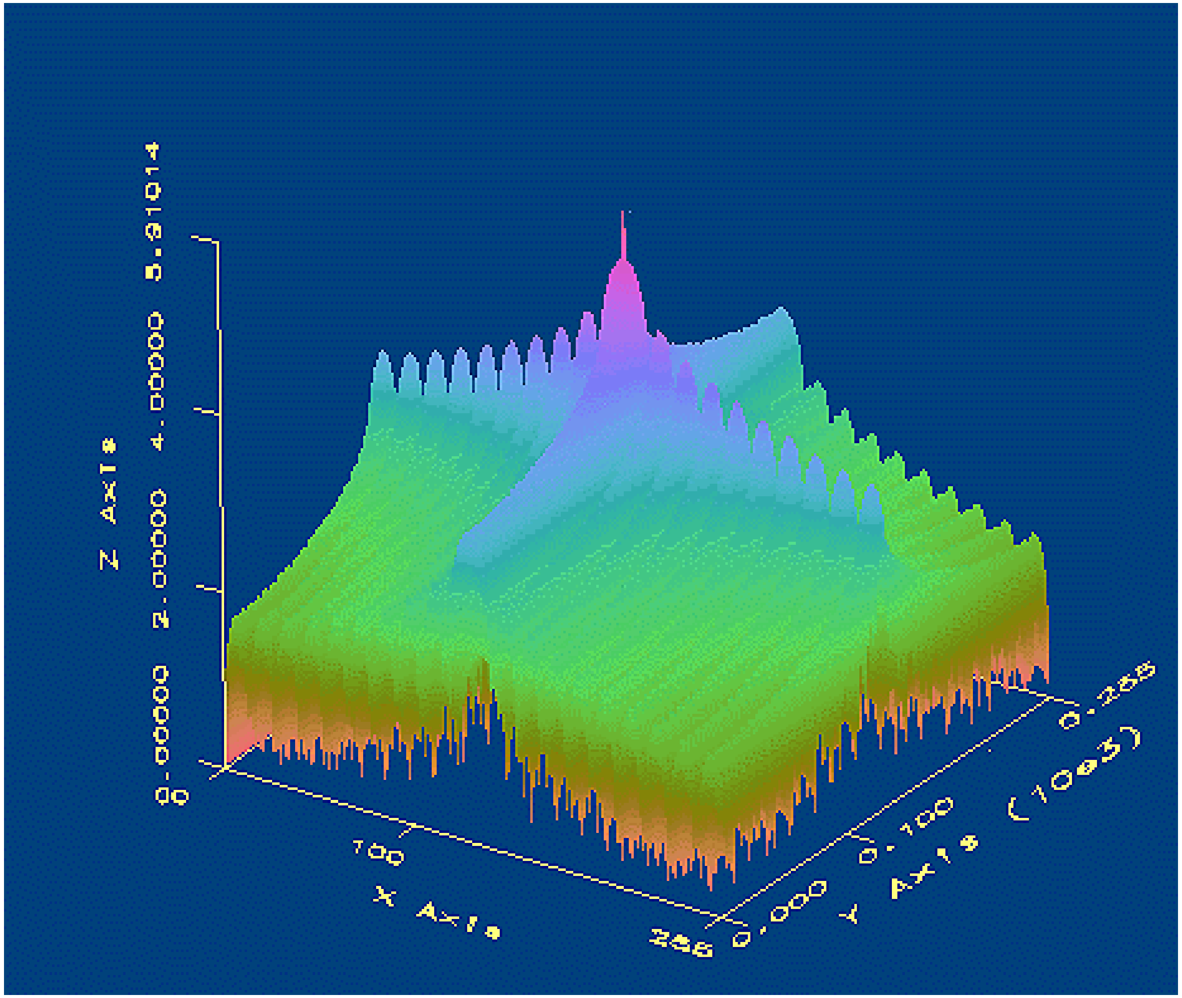
Ciclos
por unidade
de comprimento



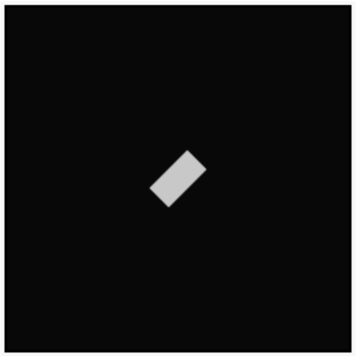
Exemplo 1: Box0

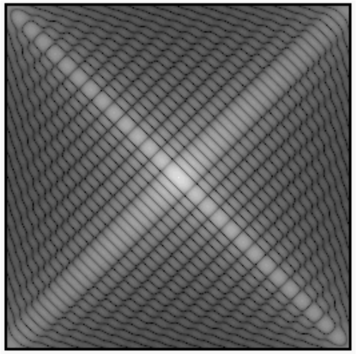


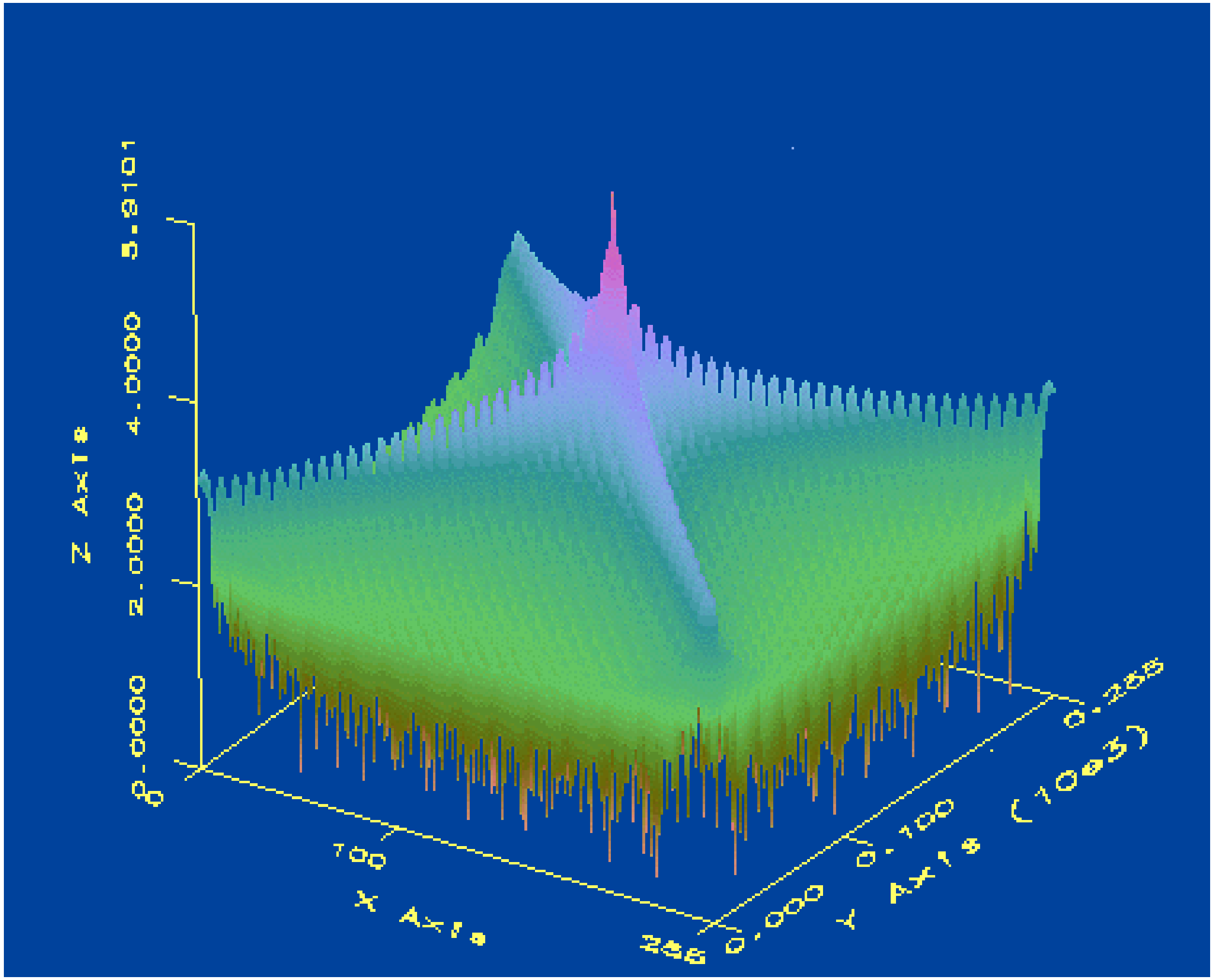




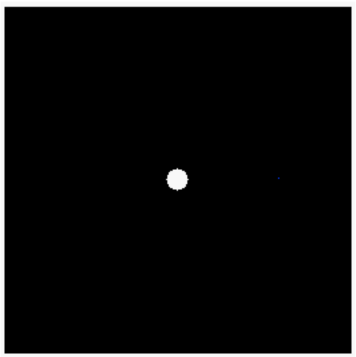
Exemplo 2: Box45

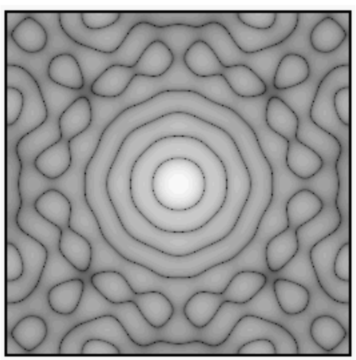


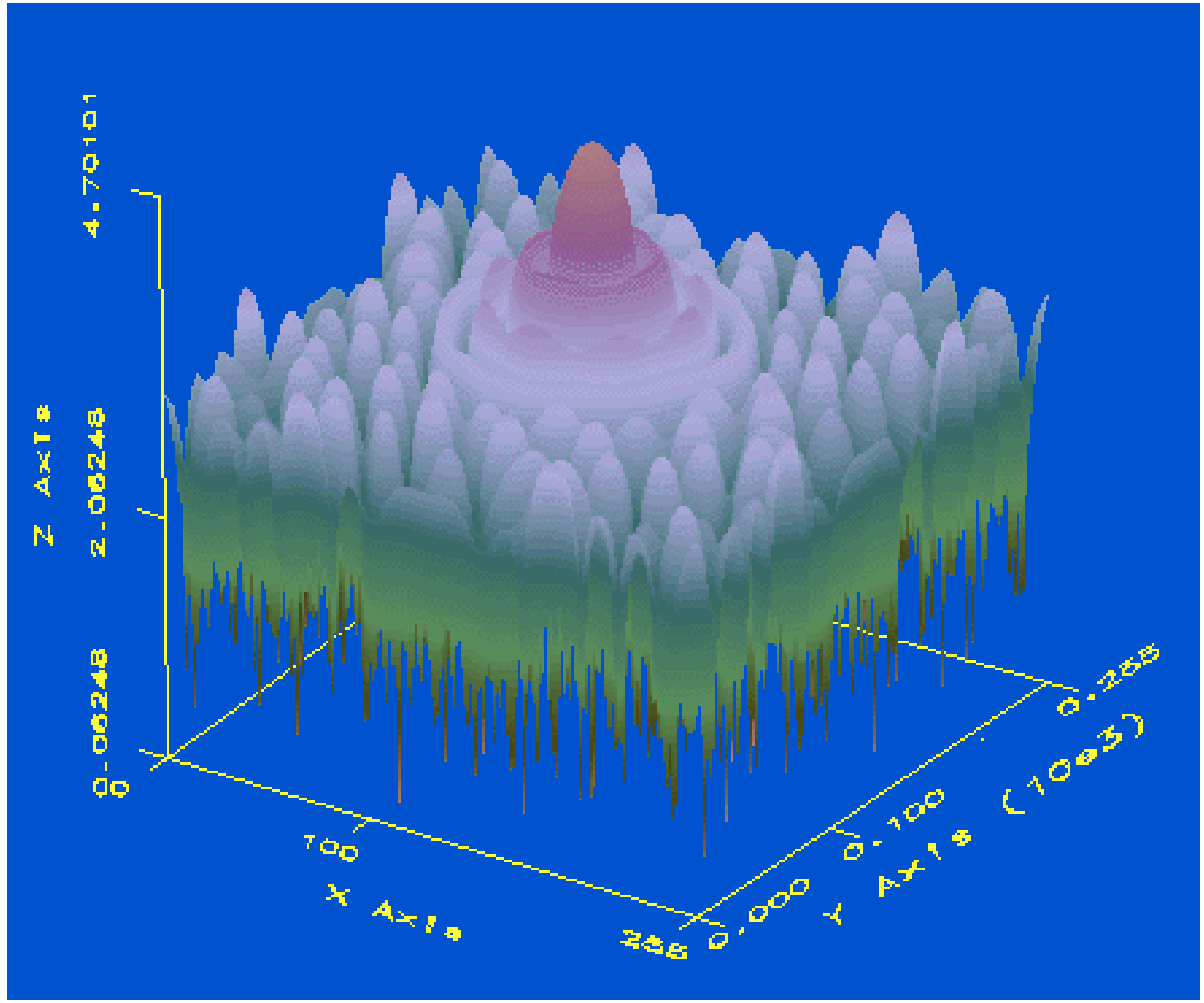




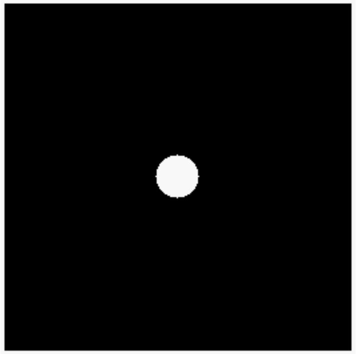
Exemplo 3: Circle16

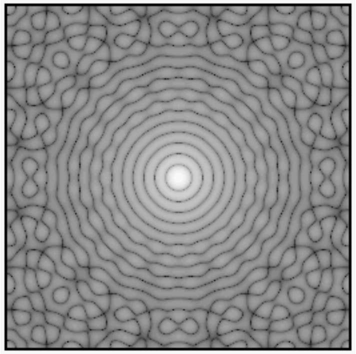


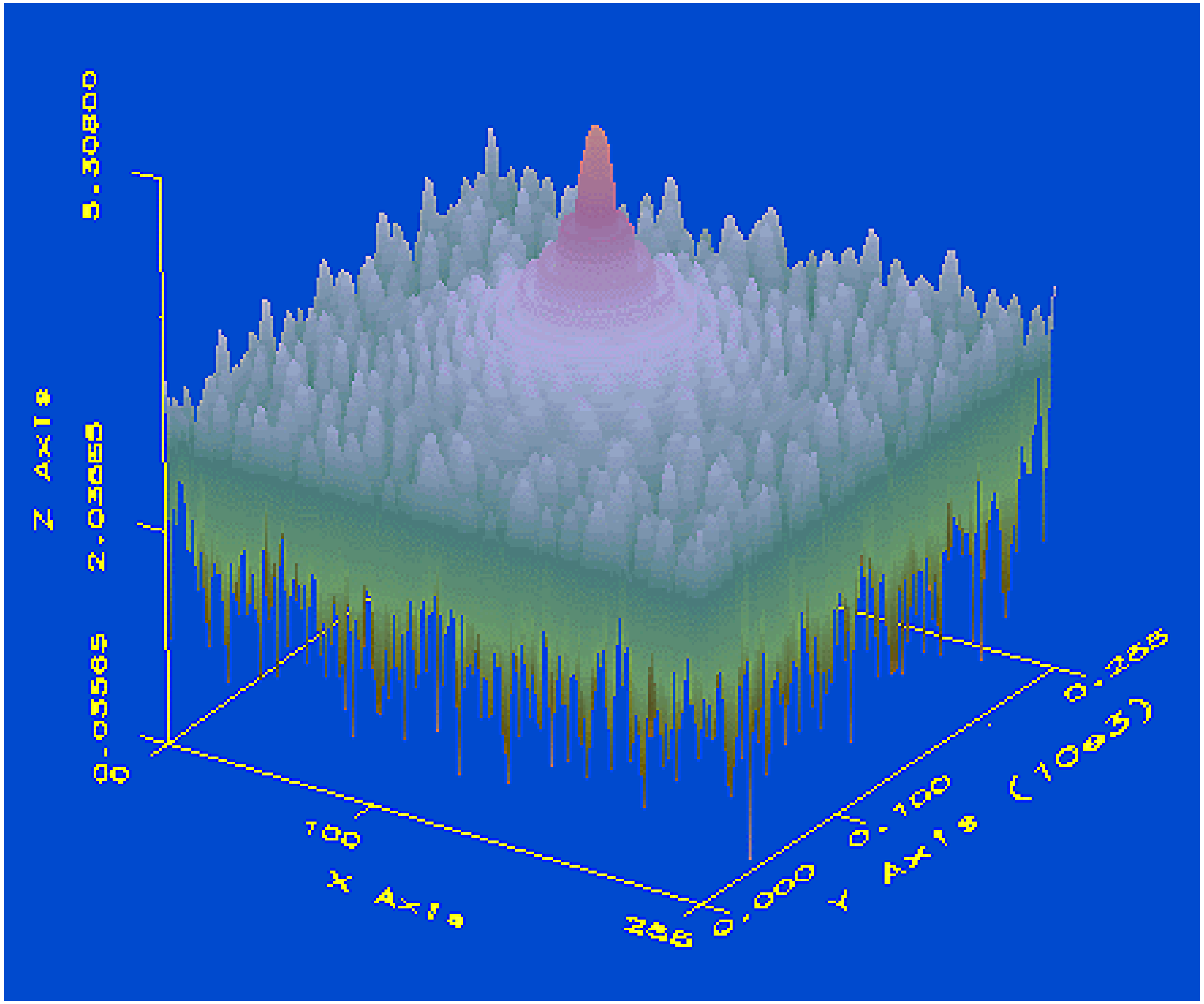




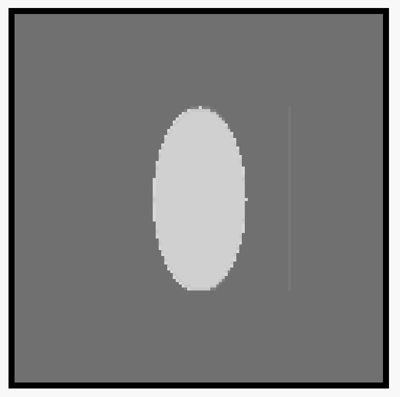
Exemplo 4: Circle32

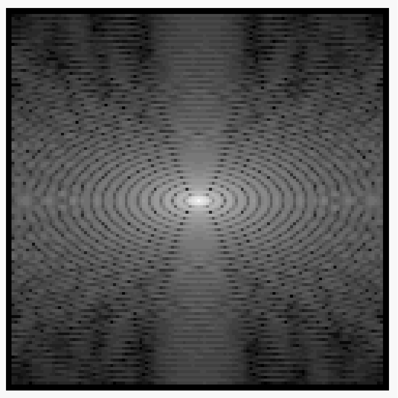


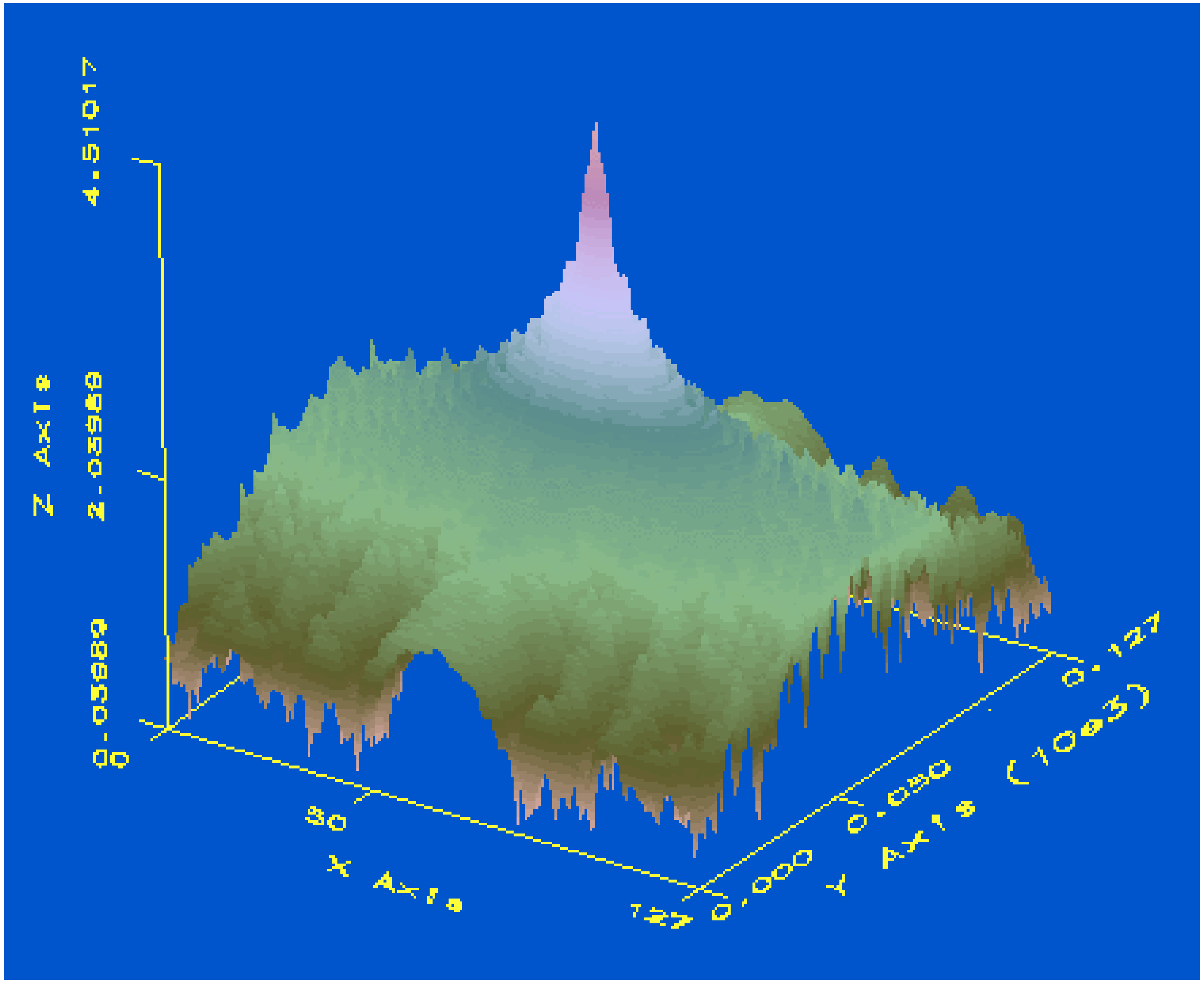




Exemplo 5: Elipse



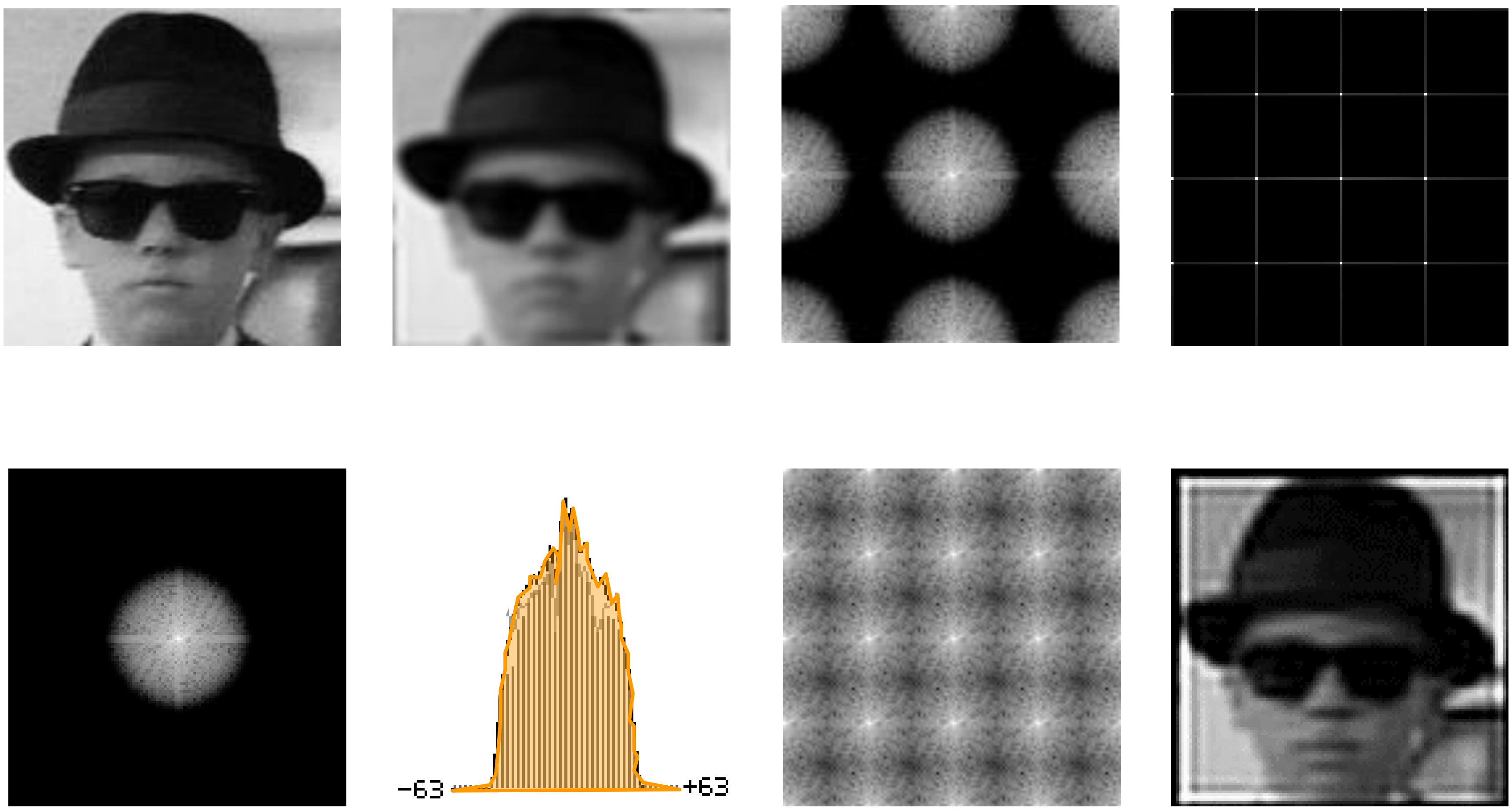




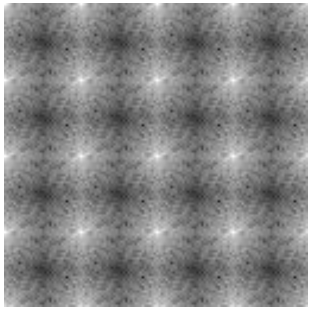
Freqüências Espaciais
x
Amostragem

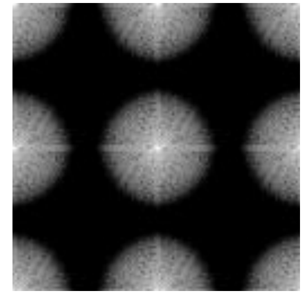
Amostragem Espacial

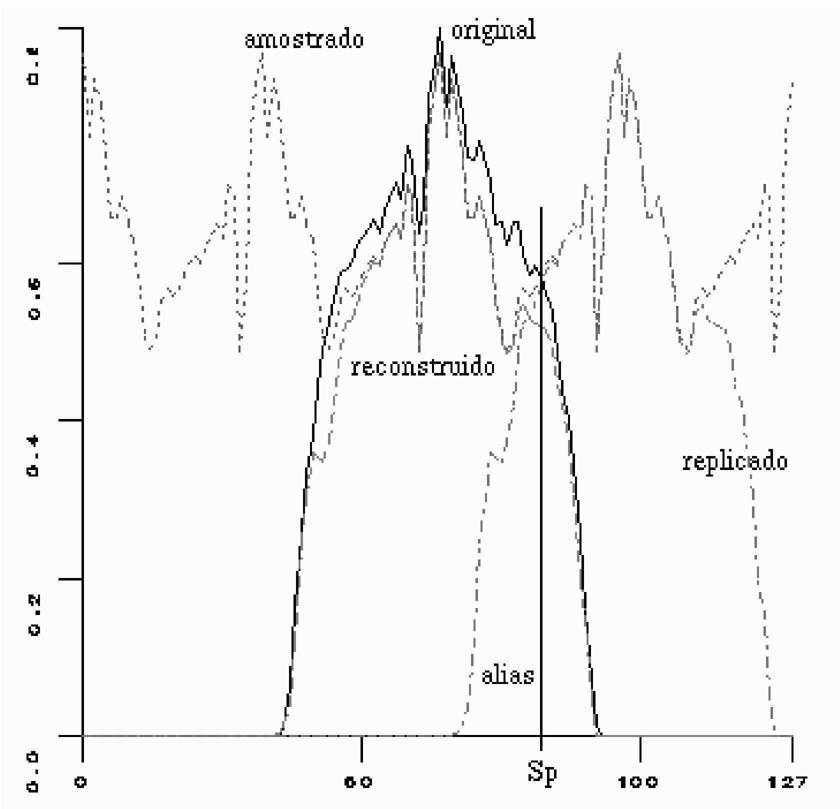
exemplo

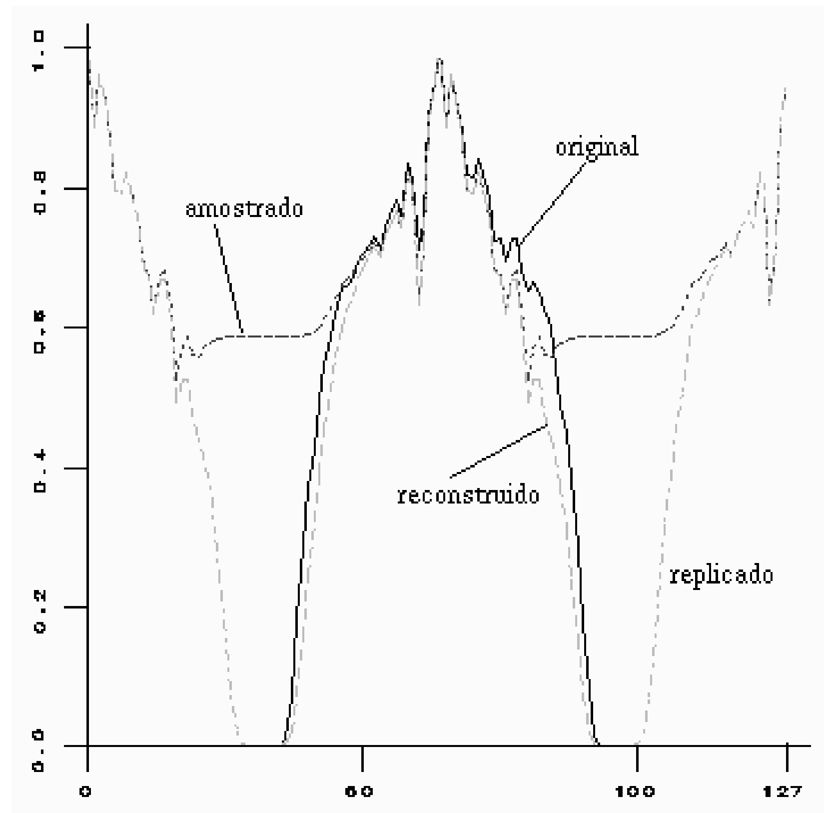


Continuação

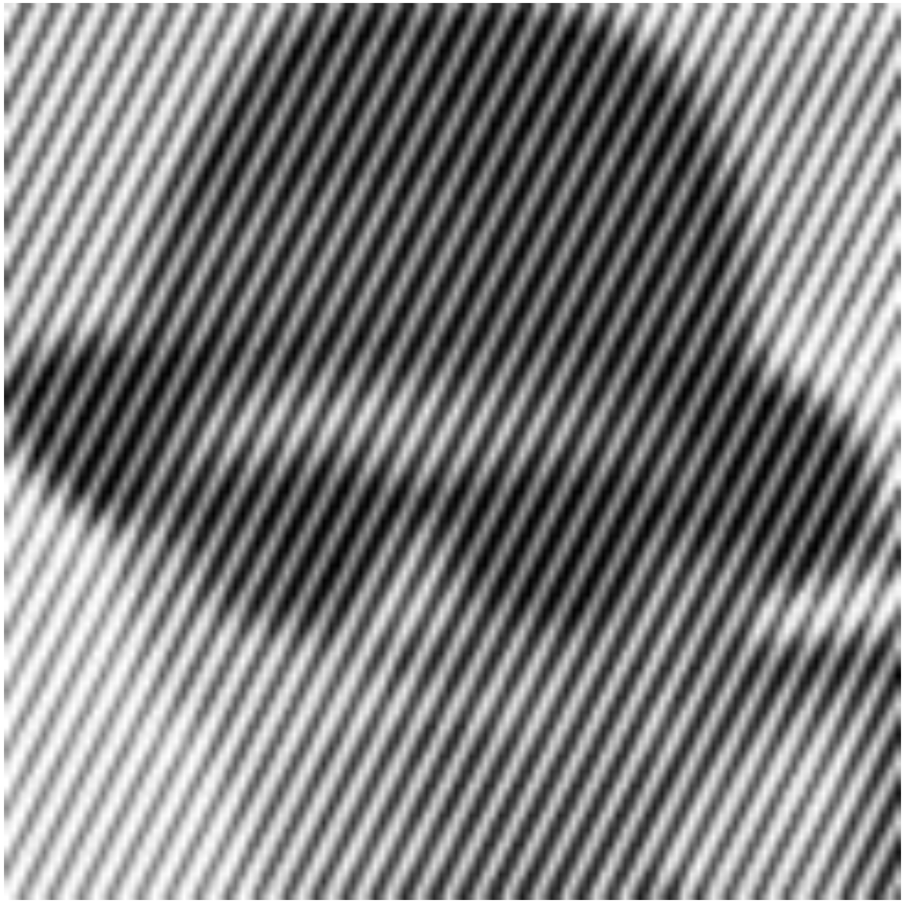


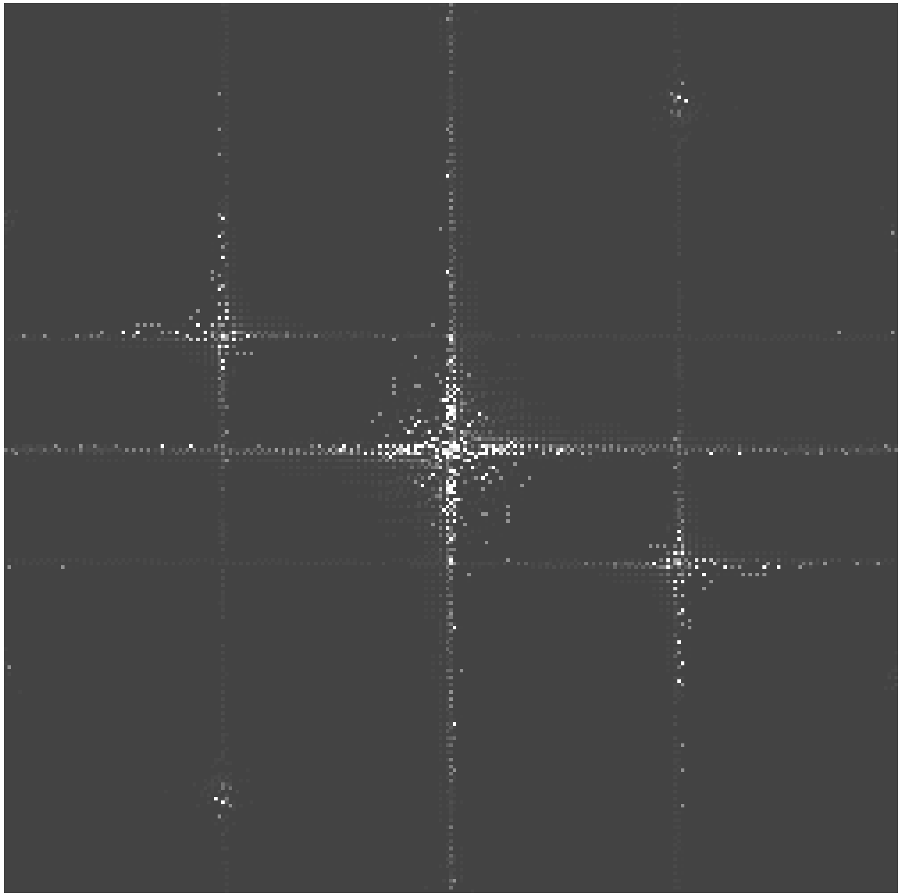


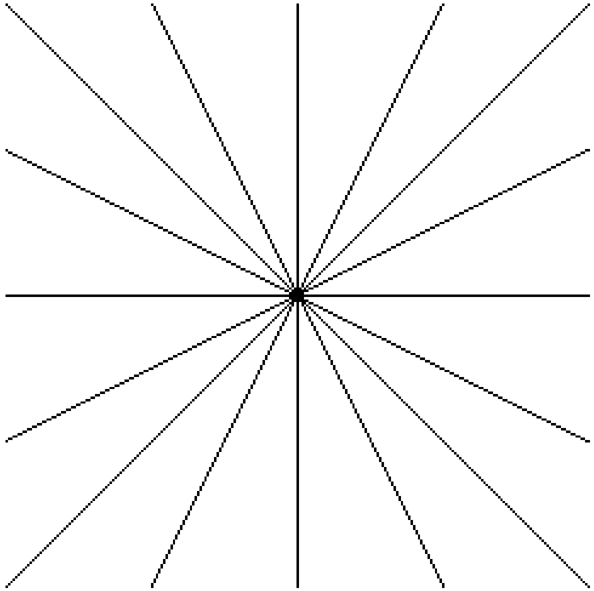
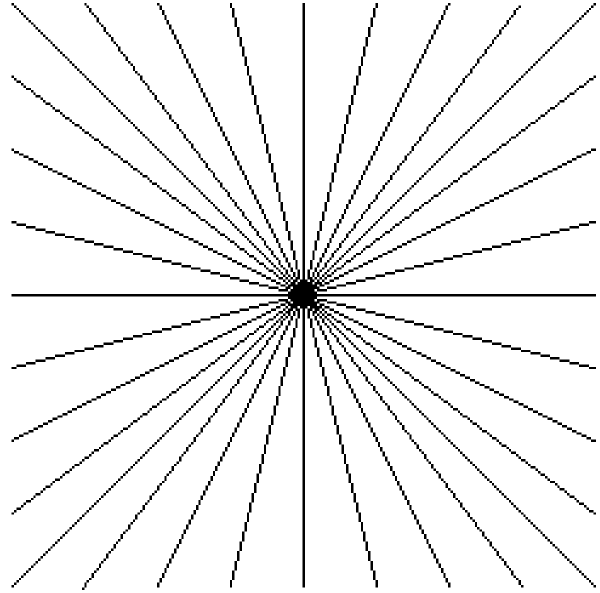
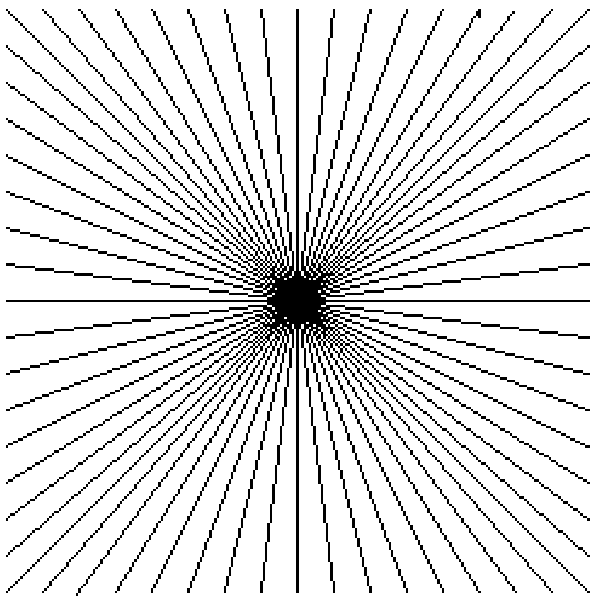




Filtragem





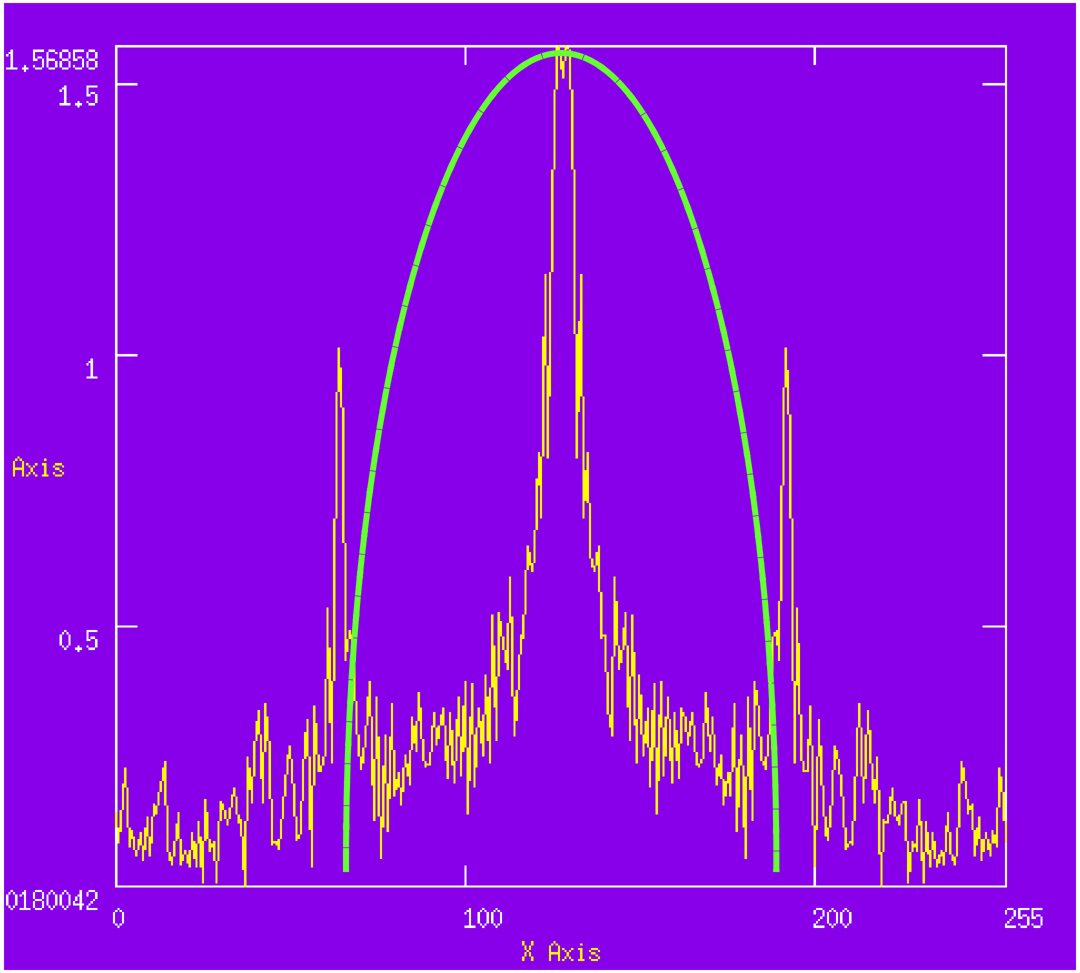
Aliasing

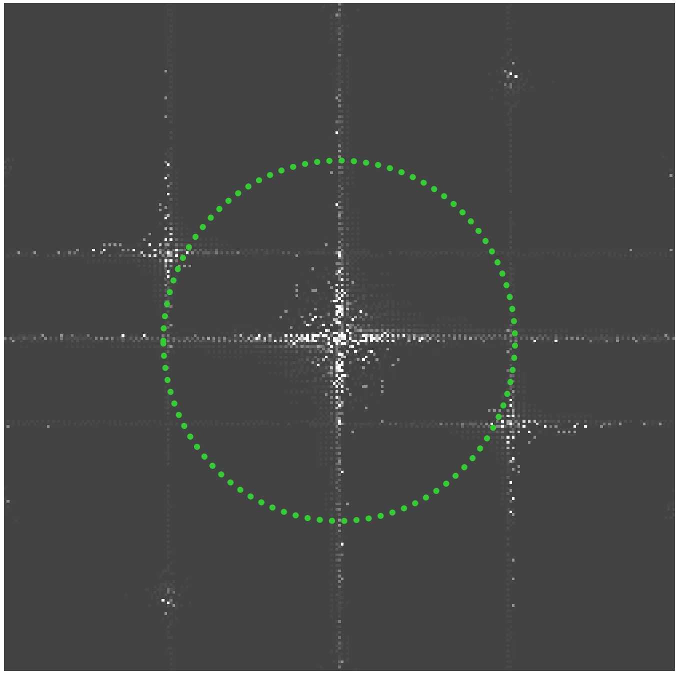
Aliasing

Original

Sub-amostrada (com aliasing)

Filtragem em Frequência





Filtragem em Frequência