

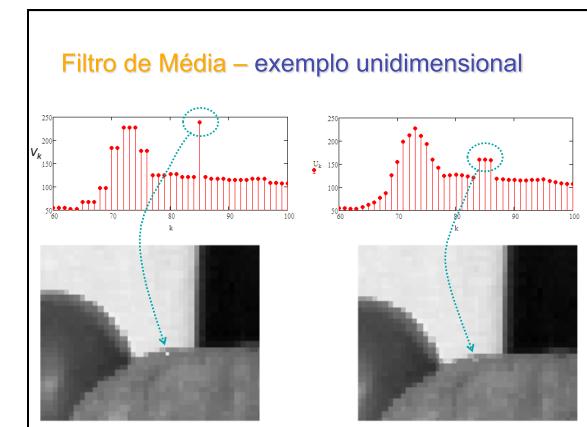
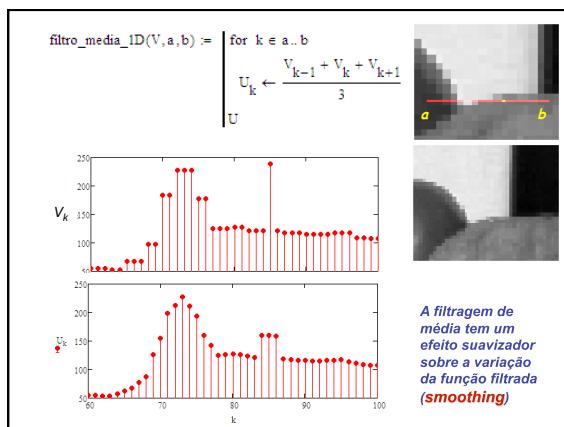
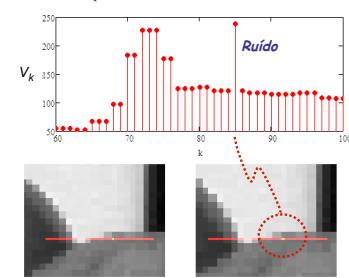


Filtragem de média

- Filtragem pode ser usada para aumentar a uniformidade das regiões
 - Eliminando irregularidades
 - Diminuindo o efeito do ruído
- A idéia consiste em substituir o valor de cada pixel pela média de seu valor com os vizinhos
 - Torna cada pixel mais semelhante aos seus vizinhos

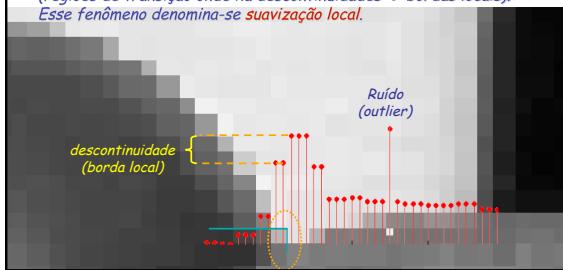
Filtragem de média

- Exemplo unidimensional



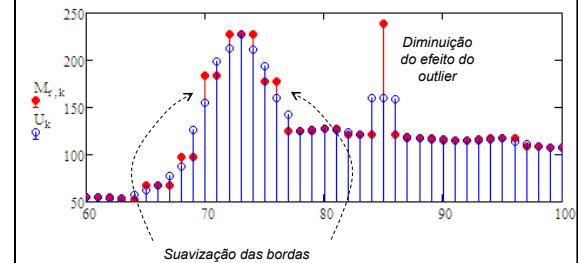
Filtro de Média – exemplo unidimensional

A filtragem de média busca eliminar o ruído tornando o valor no pixel mais parecido com os vizinhos (suavização). Entretanto isso poderá ter efeitos indesejáveis sobre os contornos (regiões de transição onde há descontinuidades → bordas locais). Esse fenômeno denomina-se **suavização local**.



Filtro de Média – exemplo unidimensional

Ocorre uma redução do contraste



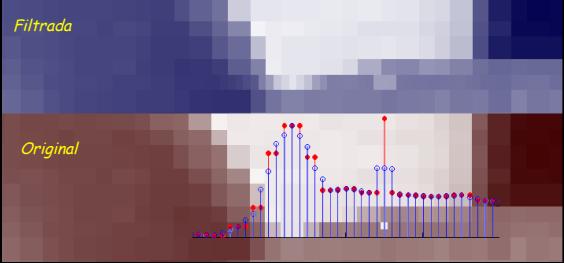
Filtro de Média – exemplo unidimensional

Note a suavização das bordas locais.



Filtro de Média – exemplo unidimensional

Lembrar que a filtragem foi realizada em apenas 1 linha da imagem

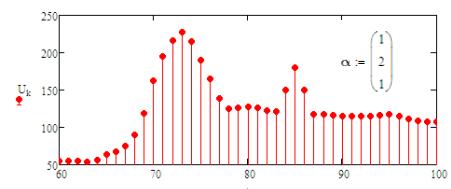


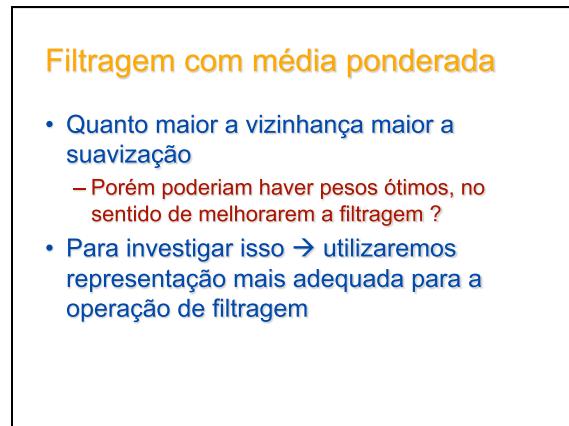
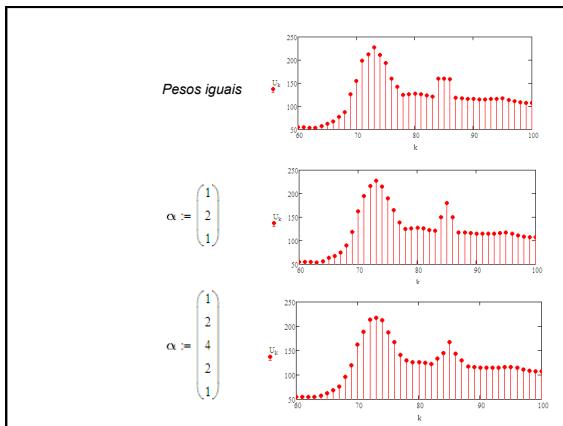
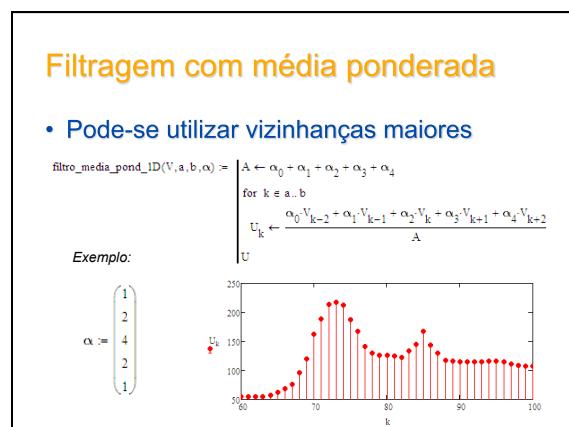
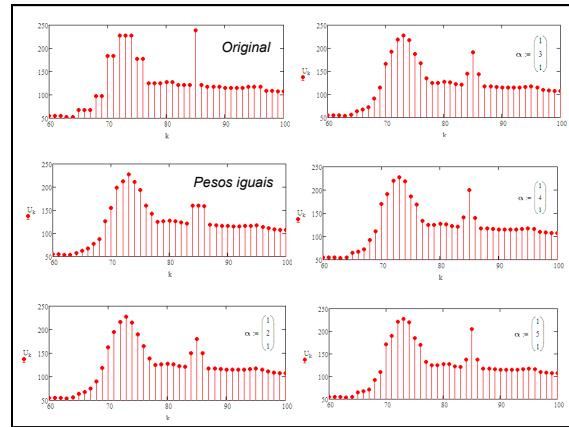
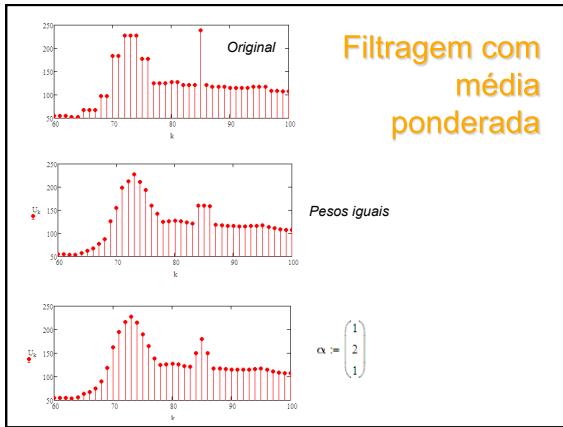
Filtro de média

- O filtro de média pode envolver vizinhanças maiores
 - Quanto maior a vizinhança, maior a suavização (smoothing)
- A suavização observada é intensa porque o pixel tem o mesmo peso dos vizinhos no cálculo da média
- Pode-se usar média ponderada com peso maior no pixel em comparação com os pesos dos vizinhos

Filtragem com média ponderada

```
filtro_media_pond_1D(V, a, b, α) := 
  A ← α0 + α1 + α2
  for k ∈ a..b
    Uk ←  $\frac{\alpha_0 \cdot V_{k-1} + \alpha_1 \cdot V_k + \alpha_2 \cdot V_{k+1}}{A}$ 
```





Filtragem com média ponderada

- Tomemos um dos exemplos anteriores de cálculo da média ponderada:

$$U_k = \frac{\alpha_0 V_{k-2} + \alpha_1 V_{k-1} + \alpha_2 V_k + \alpha_3 V_{k+1} + \alpha_4 V_{k+2}}{A}$$

Onde:

$$A = \alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4$$

Na expressão acima, é dada a sequência V_k que queremos filtrar, obtendo a sequência U_k . Os α_k são os pesos. Essa expressão pode ser re-escrita na forma:

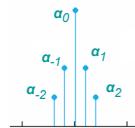
$$U_k = \frac{1}{A} \sum_{\xi=-\beta}^{\beta} (\alpha_\xi V_{k-\xi}) \quad \text{sendo } (2\beta + 1) \text{ a largura do filtro e mudando-se os índices dos pesos.}$$

Filtragem com média ponderada

$$U_k = \frac{1}{A} \sum_{\xi=-\beta}^{\beta} (\alpha_\xi V_{k-\xi}) \quad (2\beta + 1) \rightarrow \text{largura do filtro.}$$

O filtro pode ser interpretado como uma outra sequência, formada pelos pesos que, combinada adequadamente com a sequência V_k , produz a sequência filtrada U_k :

$$\{a_{-2}, a_{-1}, a_0, a_1, a_2\}$$



Modificamos os índices dos filtros de modo a fazer com que o peso central tenha o índice zero.

Filtragem com média ponderada

Se tomarmos a sequência $\{a_{-2}, a_{-1}, a_0, a_1, a_2\}$

e a completarmos com valores zero de modo que ela fique do mesmo tamanho que a sequência $\{V_k\}$ (essa operação chama-se "zero-padding"), então pode-se escrever:

$$U_k = \sum_{\xi} (\alpha_\xi V_{k-\xi}) = \sum_{\xi} (V_\xi \cdot \alpha_{k-\xi})$$

As duas expressões acima são simétricas. O índice ξ age como uma translação do filtro sobre os pontos da sequência V_k .

Diz-se que a média "move-se" sobre a sequência, suavizando os valores (smoothing). O filtro é dito também filtro de média móvel.

Filtragem com média ponderada

$$U_k = \sum_{\xi} (\alpha_\xi V_{k-\xi}) = \sum_{\xi} (V_\xi \cdot \alpha_{k-\xi})$$

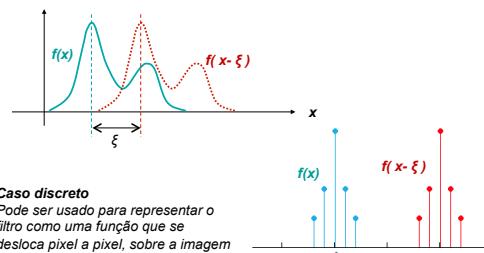
As expressões acima traduzem uma operação entre as sequências $\{a_{-2}, a_{-1}, a_0, a_1, a_2\}$ e $\{V_k\}$

Essa operação é linear e denomina-se **convolução**

$$U = V \otimes \alpha$$

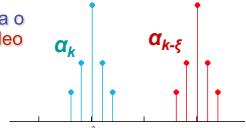
Filtragem de média móvel

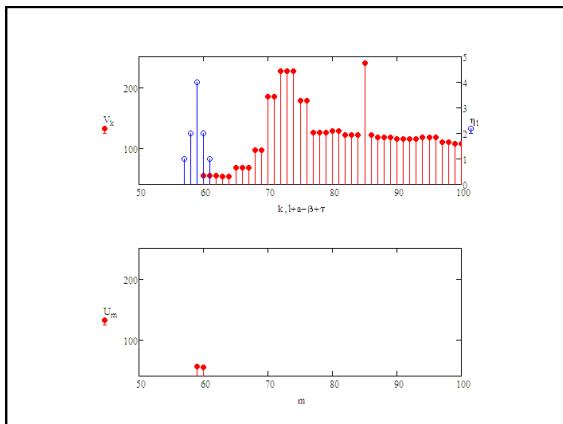
- Translação de uma função no domínio



Filtragem de média móvel

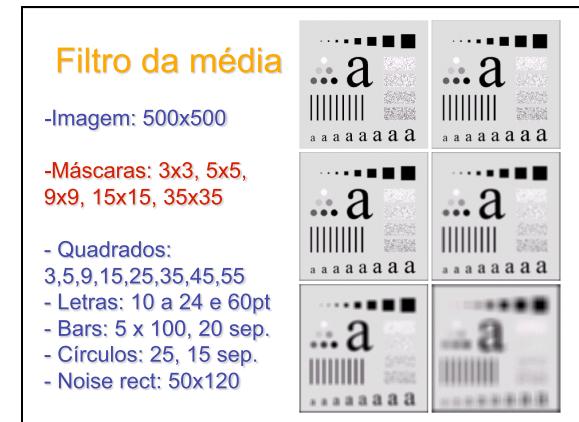
- O filtro de média ponderada com pesos a_k , com $k = \{-\beta, \dots, 0, \dots, \beta\}$, pode ser representado por uma função discreta $a_{k-\xi}$, com $\xi = \{0, \dots, \text{tamanho da seq. } V\}$, de modo que o filtro se desloca sobre toda a sequência V .
- A sequência a_k , que representa o filtro também se denomina **núcleo** ou **máscara** da operação de convolução.



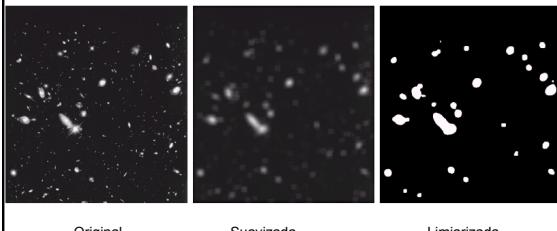


Filtragem em imagens

- Podemos generalizar facilmente os métodos desenvolvidos para o caso unidimensional
- Os núcleos ou máscaras que compõem os filtros apresentam-se na forma de matrizes quadradas de ordem ímpar
 - Em geral apresentam alguma simetria em relação ao elemento central



Suavização com filtro da média



Filtragem convolucional

Filtragem convolucional

- É o nome generalizado da filtragem de média móvel (ponderada)
- Os pesos são os elementos que constituem o núcleo ou máscara de convolução
- A filtragem convolucional é uma operação linear

Filtros convolucionais

- De acordo com os valores dos pesos os filtros realizarão diferentes tipos de ações sobre a imagem
 - Suavização
 - Filtragem de ruído
 - Realce de contraste
 - Detecção de bordas
 - Detecção de atributos locais

Suavização e filtragem de ruído

- Emprega métodos de média ponderada
- Há diversos tipos de filtros possíveis
 - As diferenças estão nos valores dos elementos do núcleo, ou máscara
 - Demonstra-se que os filtros ótimos constituem uma categoria denominada de *funções prolatas* (Torre e Poggio - 1984)
 - Dentre elas a mais utilizada é a máscara gaussiana (Marr e Hildreth – 1979)

Filtragem com máscara gaussiana

- O núcleo ou máscara correspondem a valores tomados sobre um perfil gaussiano
- $$G(\mu, \sigma)_{i,j} = \frac{1}{2\pi\sigma^2} e^{-\frac{(i-j)^2}{2\sigma^2}}$$
- O núcleo gaussiano é separável, isto é:
 - O núcleo \mathcal{K} pode ser decomposto no produto de dois vetores:

$$[\mathcal{K}] = \mathcal{K}_x \cdot \mathcal{K}_y^T$$
 - Como a máscara é separável, o filtro gaussiano $G(0,1)$ pode ser obtido facilmente através do cálculo de coeficientes binomiais ou do triângulo de Pascal

Triângulo de Pascal

0:	1
1:	1 1
2:	1 2 1
3:	1 3 3 1
4:	1 4 6 4 1
5:	1 5 10 10 5 1
6:	1 6 15 20 15 6 1
7:	1 7 21 35 35 21 7 1
8:	1 8 28 56 70 56 28 8 1

Coeficientes binomiais

$$C(m, n) := \text{if } [m \geq n, \frac{m!}{n!(m-n)!}, 0] \quad m \geq n \geq 0$$

$$A_{i,j} := C(i,j)$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 6 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 5 & 10 & 10 & 5 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 6 & 15 & 20 & 15 & 6 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 7 & 21 & 35 & 35 & 21 & 7 & 1 & 0 \\ 1 & 8 & 28 & 56 & 70 & 56 & 28 & 8 & 1 \end{pmatrix}$$

Exemplo:

$$K = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 6 & 4 & 1 \\ 4 & 16 & 24 & 16 & 4 \\ 6 & 24 & 36 & 24 & 6 \\ 4 & 16 & 24 & 16 & 4 \\ 1 & 4 & 6 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

Exemplo

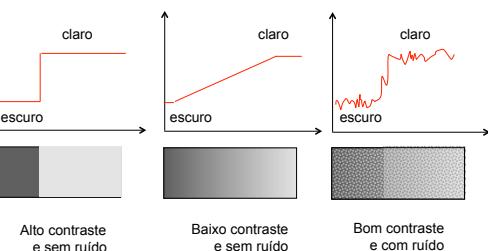
Filtragem da imagem corrompida com 5% de ruído gaussiano monocromático usando o filtro gaussiano de ordem 5

$$K = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 6 & 4 & 1 \\ 4 & 16 & 24 & 16 & 4 \\ 6 & 24 & 36 & 24 & 6 \\ 4 & 16 & 24 & 16 & 4 \\ 1 & 4 & 6 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

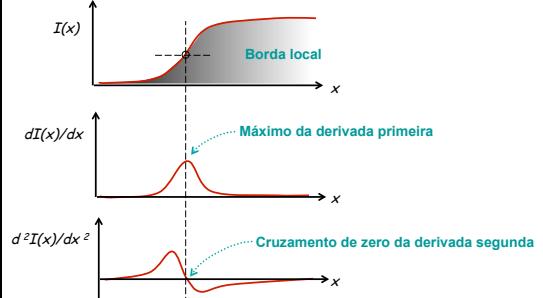


Realce de contraste

Princípio da detecção de contorno pelo gradiente local



Princípio da detecção de contorno pelo gradiente local



Derivadas parciais discretas

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x) = f(x+1) - f$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x) = f(x+1) + f(x-1) - 2f(x)$$

Derivadas parciais discretas

- Deve ser zero em segmentos de nível de cinza constante
- Deve ser diferente de zero nas bordas das regiões cujo nível de cinza é crescente, ou decrescente
- Deve ser diferente de zero em regiões cujo nível de cinza é crescente, ou decrescente

Derivada de primeira versus segunda ordem

- Derivadas de primeira ordem produzem bordas mais grossas
- Derivadas de primeira ordem respondem fortemente a inclinações
- Derivadas de segunda ordem respondem mais fortemente a impulsos pequenos
- Derivadas de segunda ordem produzem uma resposta dobrada a mudanças de níveis de cinza

Laplaciano

$$\nabla^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = f(x+1, y) + f(x-1, y) - 2f(x, y)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = f(x, y+1) + f(x, y-1) - 2f(x, y)$$

Laplaciano

$$\begin{aligned} \nabla^2 f &= f(x+1, y) + f(x-1, y) - 2f(x, y) \\ &\quad + f(x, y+1) + f(x, y-1) - 2f(x, y) \end{aligned}$$

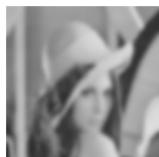
$$\begin{aligned} \nabla^2 f &= f(x+1, y) + f(x-1, y) + f(x, y+1) \\ &\quad + f(x, y-1) - 4f(x, y) \end{aligned}$$

Realce de contraste

- Utilizando-se pesos negativos no núcleo em torno do valor central positivo, ou vice-versa, resulta na ênfase das diferenças entre o pixel central e seus vizinhos
 - Se a ênfase for suficientemente pronunciada, de modo que, para uma região uniforme da imagem, o resultado do realce seja nulo, ocorrerá a detecção dos contornos
 - Caso contrário, ocorrerá a ênfase do contraste ou dos contornos, de acordo com o sinal do elemento central
- Não se faz a normalização dos coeficientes neste caso

Exemplo – realce de contornos

$$K := \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$



Simplificação

- Se subtrairmos de f o seu laplaciano (realce de contraste), teremos uma transformação que realça a imagem.

$$g = f - \nabla^2 f$$

Simplificação

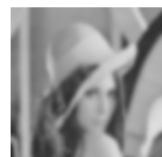
- Se subtrairmos de f o seu laplaciano (realce de contraste), teremos uma transformação que realça a imagem.

$$g = f - \nabla^2 f = f(x, y) - [f(x+1, y) + f(x-1, y) + f(x, y+1) + f(x, y-1) - 4f(x, y)]$$

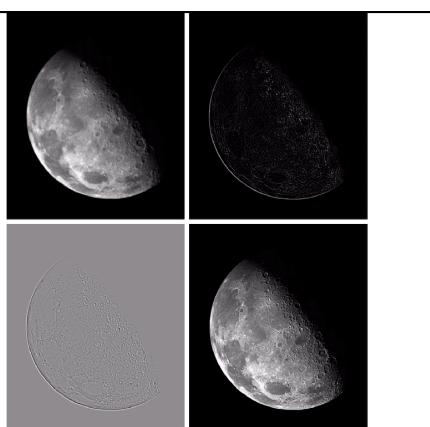
$$g = 5f(x, y) - f(x+1, y) - f(x-1, y) - f(x, y+1) - f(x, y-1)$$

Exemplo – realce de contraste

$$K := \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 5 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$



a b
c d
(a) Image of the North Pole of the moon.
(b) Laplacian-filtered image.
(c) Laplacian image scaled for display purposes.
(d) Image enhanced by using
(Original image courtesy of NASA.)



$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline 0 & -1 & 0 \\ \hline -1 & 5 & -1 \\ \hline 0 & -1 & 0 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline -1 & -1 & -1 \\ \hline -1 & 9 & -1 \\ \hline -1 & -1 & -1 \\ \hline \end{array}$$

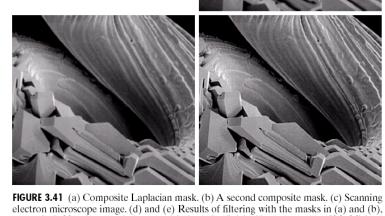


FIGURE 3.41 (a) Composite Laplacian mask. (b) A second composite mask. (c) Scanning electron microscope image. (d) and (e) Results of filtering with the masks in (a) and (b), respectively. Note how much sharper (e) is than (d). (Original image courtesy of Mr. Michael Shaffer, Department of Geological Sciences, University of Oregon, Eugene.)

Filtro high-boost

- Parte-se de uma operação de mascaramento não-afiado. Denotemos por f uma imagem em níveis de cinza, como usualmente e \bar{f} a imagem f transformada por algum operador de borramento

$$f_s = f - \bar{f}$$

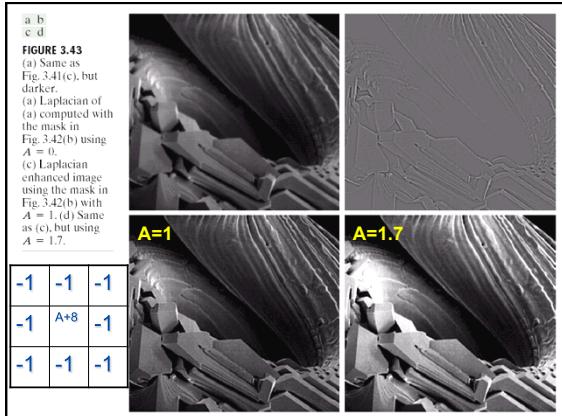
Filtro high-boost

- Seja A um real positivo, maior ou igual a 1

$$f_{hb} = Af - \bar{f}$$

- Quando usamos um filtro laplaciano

$$f_{hb} = Af - \nabla^2 f$$



Filtros “Gradiente”

- O gradiente de f é definido por:

$$\nabla f = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \end{bmatrix}$$

- O módulo do gradiente é definido por:

$$\|\nabla f\| = \left[\left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}}$$

Filtros “Gradiente”

- O módulo do gradiente é aproximado por:

$$\|\nabla f\| \approx \sqrt{\left| \frac{\partial f}{\partial x} \right|^2 + \left| \frac{\partial f}{\partial y} \right|^2}$$

Filtros “Gradiente”

$$\frac{\partial f}{\partial x} = (z_8 - z_5)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = (z_6 - z_5)$$

z_1	z_2	z_3
z_4	(z_5)	(z_6)
z_7	(z_8)	z_9

Gradiente cruzado de Roberts

$$\frac{\partial f}{\partial x} = (z_9 - z_5)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = (z_8 - z_6)$$

z_1	z_2	z_3
z_4	z_5	z_6
z_7	z_8	z_9

Gradiente cruzado de Roberts

$$\frac{\partial f}{\partial x} = (z_9 - z_5)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = (z_8 - z_6)$$

z_1	z_2	z_3
z_4	z_5	z_6
z_7	z_8	z_9

$$\nabla f \approx |z_9 - z_5| + |z_8 - z_6|$$

Gradiente cruzado de Roberts

$$\nabla f \approx |z_9 - z_5| + |z_8 - z_6|$$

-1	0
0	1

0	-1
1	0

Operadores de Prewitt, 3x3

$$\nabla f \approx |(z_7 + z_8 + z_9) - (z_1 + z_2 + z_3)| + |(z_3 + z_6 + z_9) - (z_1 + z_4 + z_7)|$$

-1	-1	-1
0	0	0
1	1	1

-1	0	1
-1	0	1
-1	0	1

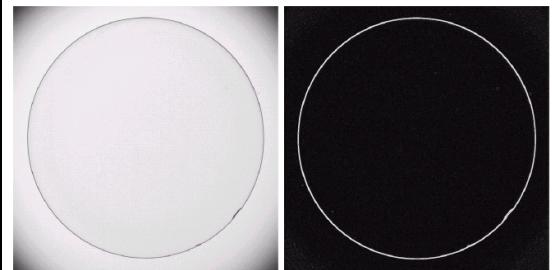
Operadores de Sobel, 3x3

$$\nabla f \approx |(z_7 + 2z_8 + z_9) - (z_1 + 2z_2 + z_3)| + |(z_3 + 2z_6 + z_9) - (z_1 + 2z_4 + z_7)|$$

-1	-2	-1
0	0	0
1	2	1

-1	0	1
-2	0	2
-1	0	1

Operadores de Sobel



Operadores de Sobel

a b

c d

FIGURE 10.10
 (a) Original image.
 (b) $|G_x|$, component of the gradient in the x-direction.
 (c) $|G_y|$, component in the y-direction.
 (d) Gradient image, $|G_x| + |G_y|$.



Prewitt, Sobel – realce diagonais

Prewitt

-1	-1	0
-1	0	1
0	1	1

0	1	1
-1	0	1
-1	-1	0

Sobel

-2	-1	0
-1	0	1
0	1	2

0	1	2
-1	0	1
-2	-1	0

Realce de diagonais - Sobel



Aplicação de Sobel, suavização

- Em alguns casos, podemos não querer que todas as bordas sejam realçadas
- Principalmente em casos que a imagem tem boa resolução
- Neste caso, aplica-se alguma suavização na imagem antes do operador gradiente

Aplicação de Sobel, suavização

a

b

c

d

a

b

c

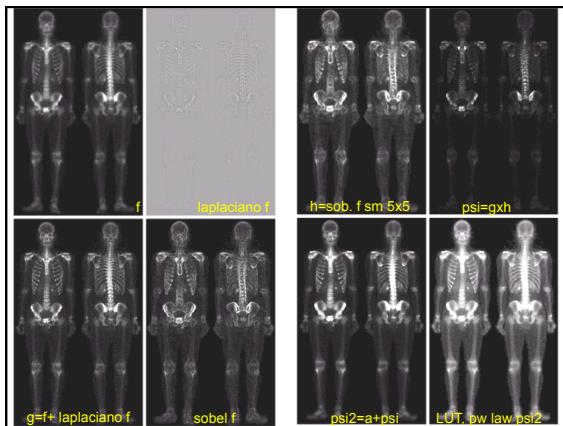
d

FIGURE 10.11
 Same sequence as in Fig. 10.10, but with the original image smoothed with a 5×5 averaging filter.



Aplicação mais elaborada

- A aplicação a seguir é um exemplo de abordagem heurística para realce de imagem usando:
 - Operador laplaciano
 - Operador gradiente (Sobel)
 - Transformação de LUT



Filtragem de mediana

Filtragem de ruído

- Vimos que os filtros de média aritmética e ponderada (filtros convolucionais de suavização) permitem reduzir o ruído
 - Todavia fazem às custas de redução no contraste local (suavização das bordas)
- A média tem efeito de igualar a intensidade de um pixel às de seus vizinhos
 - Com isso diminui o efeito dos outliers
 - Porém reduz o contraste nas transições (bordas locais)

Filtragem de ruído

- Uma boa alternativa que consegue preservar bem o contraste é o emprego da mediana da vizinhança, em vez da média
 - A média se coloca no centróide da vizinhança, considerando-se as intensidades como pesos
 - A mediana é o valor que se encontra no centro geométrico da distribuição das intensidades, ordenadas sequencialmente
 - É um valor que mantém certo contraste, pois coloca-se bem no meio da faixa dinâmica da vizinhança

Filtro de mediana

- Algoritmo
- Dada a imagem I e um tamanho de vizinhança (em geral, ímpar)
 - Para cada pixel de I , obter sua vizinhança
 - Ordenar a vizinhança e achar o elemento central (mediana)
 - O valor do pixel na imagem filtrada será o da mediana de sua vizinhança

Exemplo de mediana de uma vizinhança

$$\text{Vizinhança} = \begin{pmatrix} 255 & 243 & 221 \\ 232 & 121 & 120 \\ 242 & 244 & 239 \end{pmatrix}$$

Ordenando a vizinhança, vem:

$$(120 \ 121 \ 221 \ 232 \ 239 \ 242 \ 243 \ 244 \ 255)$$

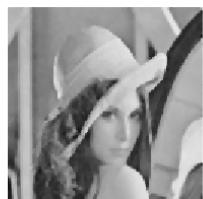
↑
Mediana

Exemplo

- Filtragem de mediana da imagem Lena (normal) com vizinhança de tamanho 3×3



I

 I_{filtr}

Exemplo 2

- Filtragem de mediana da imagem Lena (5% de ruído gaussiano monocromático) com vizinhanças de tamanho 3×3 e 5×5



I

 $I_{mediana3}$  $I_{mediana5}$

Comparação com filtro de média

- vizinhanças de tamanho 3×3



I

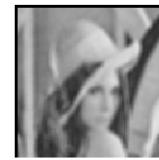
 I_{filtr}  $I_{mediana3}$

Comparação com filtro de média

- vizinhanças de tamanho 5×5



I

 I_{filtr}  $I_{mediana5}$