Fast Fourier Transform

RecursiveFFT(f)

$N = \text{length} f; /* N = 2^p */$

$\text{if } (N == 1) \;\; \text{return } f;$

$w_N = e^{-j\frac{2\pi}{N}}; w = 1;$

$f^0 = (f_0, f_2, \ldots, f_{N-2});$

$f^1 = (f_1, f_3, \ldots, f_{N-1});$

$y^0 = \text{RecursiveFFT}(f^0);$

$y^1 = \text{RecursiveFFT}(f^1);$

$\text{for } k = 0 \text{ to } N/2 - 1 \; \{$

$\quad y_k = y_k^0 + w y_k^1;$

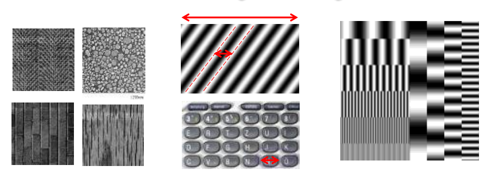
$\quad y_{k+N/2} = y_k^0 - w y_k^1;$

$\quad w = w w_N;$

$\text{return } y;$

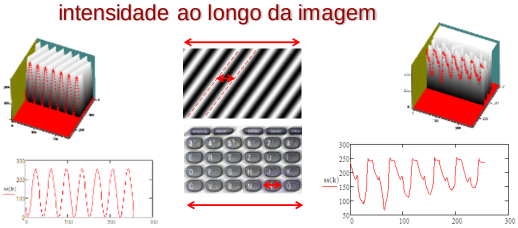
Análise no domínio de frequências

- Frequências espaciais
  - Repetições periódicas de variações na intensidade ao longo da imagem

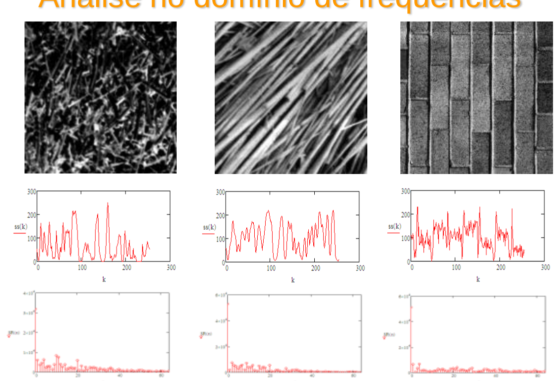


Análise no domínio de frequências

- Frequências espaciais
  - Repetições periódicas de variações na intensidade ao longo da imagem



Análise no domínio de frequências



Análise no domínio de frequências

- Ajuda a investigar algumas questões:
  - Determinar a resolução ideal da imagem
    - **Admitindo-se que a intensidade do campo incidente sobre o sensor seja espacialmente contínua, dentro dos limites ópticos:**
      - A imagem no sensor é um mapa de amostras da distribuição de intensidades
      - Cada amostra corresponde a 1 pixel
  - Caracterizar a regularidade de uma imagem
    - **Periodicidades (espaciais), texturas**
    - **Correlação espacial**
  - Caracterizar as descontinuidades e variações locais da intensidade
    - **Bordas locais**
    - **Contraste local**

Transformada Discreta

- Aproximação numérica da TF contínua
  - A expressão da TF contínua implica em banda de frequência infinita e densa
  - Na prática isso não é possível:
    - **Limite de resolução numérica**
    - **Quantidade de memória disponível**
    - **Tempo de cálculo finito**
  - Ou seja, haverá um passo de frequência definido
    - **Corresponderá à menor frequência representada**

Resolução de frequências

- Transformada discreta → convolução com pente de impulsos em ω
  - Resulta correspondente multiplicação por pulsos em x
  - Esse resultado deve ser compatível com a taxa de amostragem e com a duração do sinal
- Duração do Sinal → janelamento

Sinais finitos (janelados)

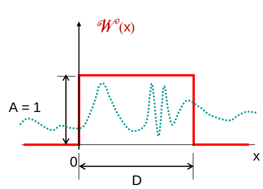
- Os sinais na prática têm duração finita
- Isso equivale a multiplicar o sinal pela janela retangular
- Como consequência, a transformada de Fourier resultante será a convolução entre a transformada da janela e a transformada da função amostrada

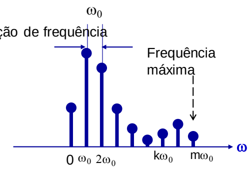
Janela retangular

- O sinal f(x) observado resulta da multiplicação pela janela $\mathscr{W}^o$(x)
- A janela é caracterizada pela duração D e amplitude unitária
- O valor de D determina a resolução máxima de frequência ω_0 :

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{D}$$

- A máxima frequência contida no sinal será um múltiplo m de ω_0



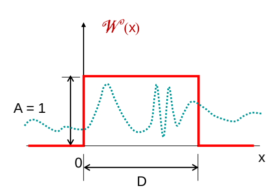


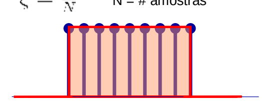
Janela retangular

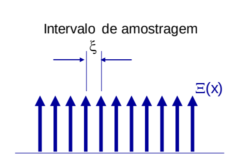
- O sinal amostrado f_a(x) resulta da multiplicação pelo pente Ξ(x) de com extensão limitada pela largura D da janela
- Deseja-se colocar um número inteiro de intervalos x completos em D

$$\xi = \frac{D}{N}$$

N = # amostras





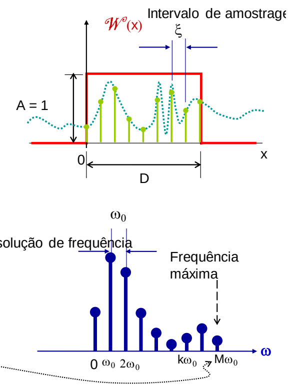


Janela retangular

- O sinal f(x) observado resulta da multiplicação pela janela $\mathcal{W}^{o}(x)$
- A janela é caracterizada pela duração D e amplitude unitária
- O valor de D determina a resolução máxima de frequência ω_0 :

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{D}$$

- A máxima frequência contida no sinal será um múltiplo m de ω_0



$$\xi \leq \frac{1}{f_N} = \frac{\pi}{\omega_{max}}$$

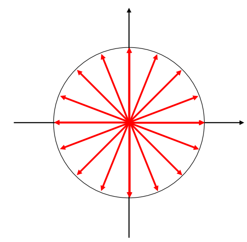
$$\omega_{max} = \frac{\pi}{\xi}$$

$$\xi = \frac{D}{N}$$

$$\omega_{max} = \frac{\pi N}{D}$$

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{D}$$

$$\omega_{max} = \frac{N}{2}\omega_0$$



Hipóteses de representação

- Funções periódicas contínuas → série de Fourier

$$f(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k e^{jk\omega_0 x} \qquad C_k = \frac{1}{T}\int_0^T e^{-jk\omega_0 x}dx$$

- Funções em geral, contínuas → transformada de Fourier

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)e^{j\omega x}d\omega \qquad F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-j\omega x}dx$$

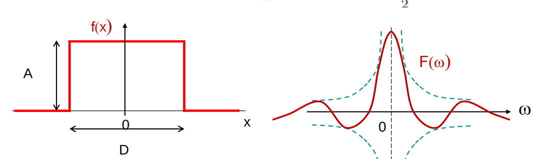
- Funções discretas (amostradas) → transformada discreta de Fourier (DFT)

$$f(n) = \frac{1}{N}\sum_{k=-M}^{M} F(k)e^{jk\frac{2\pi}{N}n} \qquad F(k) = \sum_{n=0}^{N-1} f(n)e^{-jk\frac{2\pi}{N}n}$$

Efeito da janela retangular

- A transformada de Fourier de um pulso retangular de largura D e altura A tem a forma dada por

$$F(\omega) = AD\ sinc(\frac{\omega D}{2}) = AD\ \frac{\sin(\frac{\omega D}{2})}{\frac{\omega D}{2}}$$

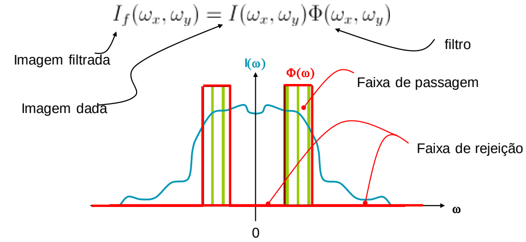


Filtragem no domínio frequência

Filtragem em frequência

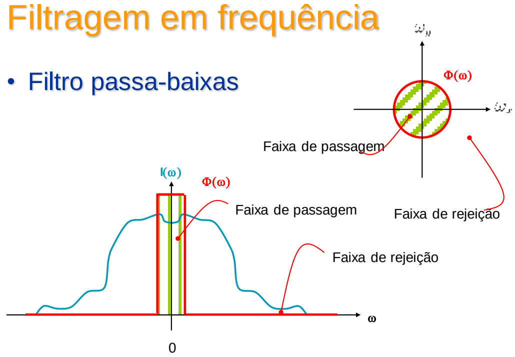
- Multiplica-se a transformada de Fourier da imagem por uma função tipo janela no domínio frequência
  - A janela seleciona a faixa de frequências espaciais cujas componentes serão preservadas pelo filtro e a faixa que será rejeitada

$$I_f(\omega_x, \omega_y) = I(\omega_x, \omega_y)\Phi(\omega_x, \omega_y)$$



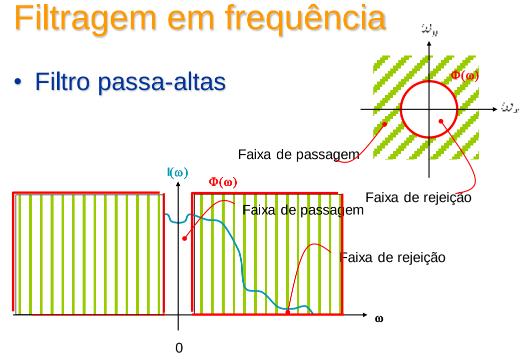
Filtragem em frequência

- Filtro passa-baixas



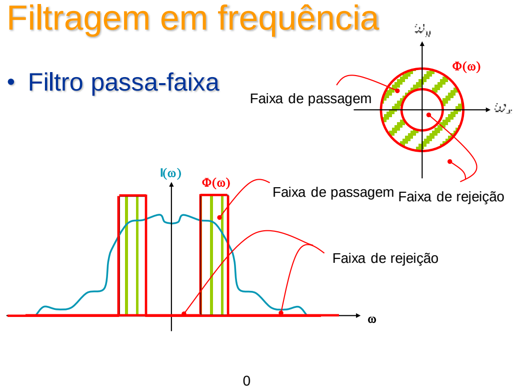
Filtragem em frequência

- Filtro passa-altas



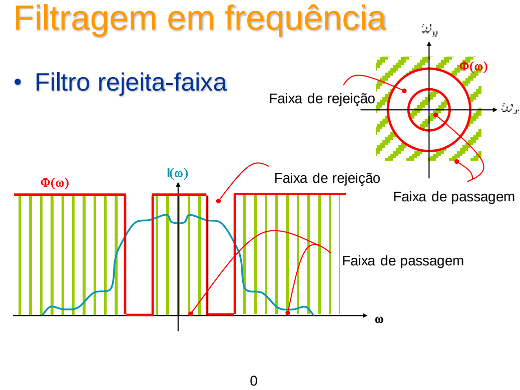
Filtragem em frequência

- Filtro passa-faixa



Filtragem em frequência

- Filtro rejeita-faixa



Periodicidades

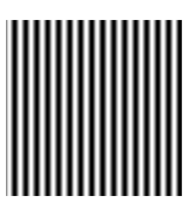
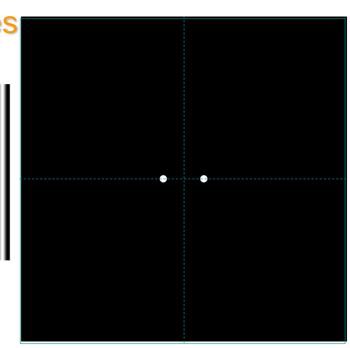
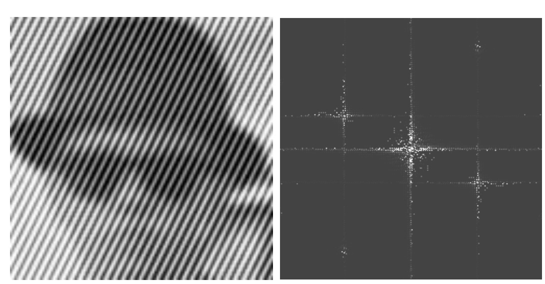


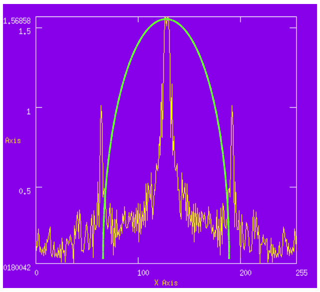
Imagem Senoidal

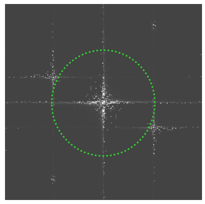


Filtragem

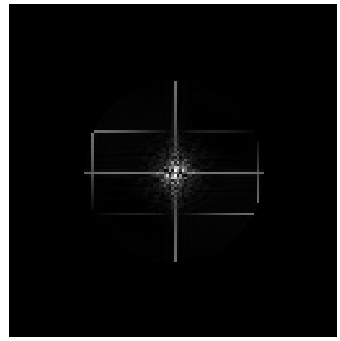


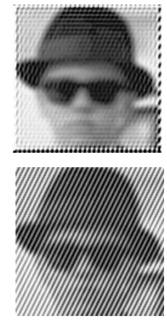
Filtragem em Frequência



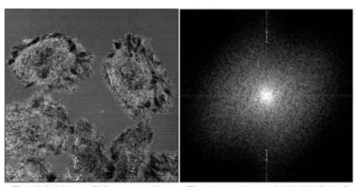


Filtragem em Frequência



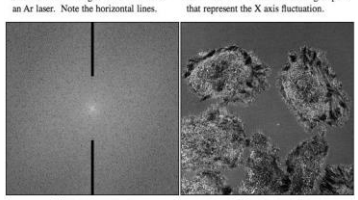


Filtragem em Frequência



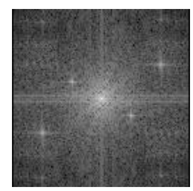
The original image. Reflectance mode of the confocal using the 458 nm line of an Ar laser. Note the horizontal lines.

The power spectrum calculated by ImageJ, contrast enhanced to show the bright spots that represent the X axis fluctuation.

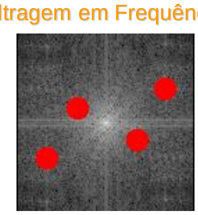


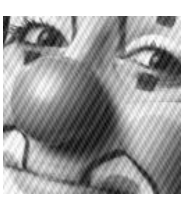
The power spectrum with masks drawn on it.

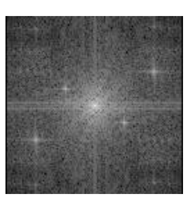
The inverse transform applying the masks.



Filtragem em Frequência







Filtragem em Frequência