Grupa 344, Seminar 5, EDDP, 02.11.2020.

I) Se cer soluțiile parametrice ale ecuațiilor diferențiale implicite:

1) $x = (1+x')t + (x')^2$

Temă $\begin{cases} 2) & x = 2tx' - (x')^2 \\ 3) & t+x = \left(\frac{x'+1}{x'-1}\right)^2 \end{cases}$ ec. Lagrange.

4) $x = tx' + \frac{1}{(x')^2}$.

II) Folosind metode pentru reducerea ordinului, să se determine mulțimea soluțiilor pentru fiecare ecuație:

1) $2x^{(2)}x^{(4)} - 3(x^{(3)})^3 = 0$

Temă
2) $[1+(x')^2]x''' = 3x'\cdot(x'')^2$ $(x'=y)$

3) $x^2 + (x')^2 - 2xx'' = 0$

I $x'(t) = y(x(t))$

II 1) $x=0$; 2) $x\neq 0$: $\frac{x'}{x} = y$.

4) $t^2x'' - 2txx' + tx' = 0$ Euler $|t| = e^s$.

5) $\left(\frac{x}{t}\right)^2 + (x')^2 = 3tx'' + \frac{2xx'}{t}$ ec omogenă

I) a) $\boxed{x = (1+x')t + (x')^2}$

Ec Lagrange: $\boxed{x = t\varphi(x') + \psi(x')}$ $\Rightarrow$ $\varphi(x') = 1+x'$, $\psi(x') = (x')^2$

Notăm $p = x'$

Din ec $\Rightarrow$ $\boxed{x = (1+p)t + p^2}$ (parte din soluția parametrică)

Pt. determina o relație între t și p, derivăm ec inițială: $x' = (1+x')'t + t'(1+x') + 2x'(x')'$

Dar $\left.\begin{array}{l} t'=1 \\ x'=p \end{array}\right| \Rightarrow \cancel{p} = p't + 1 + \cancel{p} + 2pp' \Rightarrow$

$\Rightarrow -1 = p'(t+2p)$

$\left.\begin{array}{l} \Rightarrow p' = \frac{-1}{t+2p}. \\ \text{m. răsturnată} \\ p' = \frac{dp}{dt} \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{dt}{dp} = -t-2p$

$$\frac{dt}{dp} = (-1)t + (-2p)$$

(p, t) ; ec. afină : $a_1(p) = -1$

$b_1(p) = -2p$.

Ec. liniară omogenă asociată:

$$\frac{d\bar{t}}{dp} = (-1)\bar{t} \Rightarrow \bar{t}(p) = C e^{-p}$$

Met. var. constantelor $\Rightarrow$ determinăm funcția C a.î.

$\boxed{t(p) = C(p) e^{-p}}$ sol. a ec. afine:

$$\Rightarrow (C(p) \cdot e^{-p})' = -C(p) e^{-p} + (-2p)$$

$$C'(p) \cdot e^{-p} + \cancel{C(p)(e^{-p})}(-p)' = \cancel{-C(p) e^{-p}} - 2p.$$

$C' = -2p e^{p}$, $\frac{dC}{dp} = -2pe^{p}$ } $\Rightarrow$

ec. de tip primitivă

$$\Rightarrow C = -2\int p e^{p} dp = -2\int p (e^{p})' dp = -2(p e^{p} - \int e^{p} dp) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow C(p) = -2(pe^{p} - e^{p}) + C_1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow t(p) = (-2e^{p}(p-1) + C_1) e^{-p}$$

$$t(p) = C_1 e^{-p} - 2(p-1) \quad , C_1 \in \mathbb{R}$$

Mult. sol. parametrice:

$$\begin{cases} x = t(1+p) + p^2 \\ t = C_1 e^{-p} - 2p + 2 \end{cases} \quad C_1 \in \mathbb{R}.$$

4) $x = t x' + \frac{1}{(x')^2}$

ec. Clairaut: $x = t \underbrace{x'}_{\varphi(x')} + \psi(x')$; $\psi(x') = \frac{1}{(x')^2}$

notăm $p = x'$

în ec $\Rightarrow$ $\boxed{x = tp + \frac{1}{p^2}}$

derivăm ec.: $x' = \left(t x' + \frac{1}{(x')^2}\right)'$

$$x' = \underset{1}{t'} x' + t(x')' + (-2)(x')^{-3} \cdot (x')'$$

dar $p = x'$ $\Rightarrow \cancel{p} = \cancel{p} + tp' - 2\frac{p'}{p^3}$

$\Rightarrow 0 = p'\left(t - \frac{2}{p^3}\right)$

I) $t - \frac{2}{p^3} = 0 \Rightarrow t = \frac{2}{p^3} \Rightarrow$ sol. parametrică

$\begin{cases} x = tp + \frac{1}{p^2} \\ t = \frac{2}{p^3} \end{cases}$ (1)

→ soluția explicită înseamnă: $x = x(t)$, ↗ parametrii

II) $p' = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow p = C_1 \Rightarrow x' = C_1 \Rightarrow$

$\Rightarrow x = C_1 t + C_2$.

$C_1, C_2 \in \mathbb{R}$

se determină relația între C_1 și C_2, înloc în

ec: $\cancel{C_1 t} + C_2 = \cancel{t C_1} + \frac{1}{C_1^2} \Rightarrow \boxed{C_2 = \frac{1}{C_1^2}} \Rightarrow$

$\Rightarrow \boxed{x = C_1 t + \frac{1}{C_1^2},\ C_1 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}}$ (2)

Mulț. sol. ec este (1) ∪ (2).

II) a) $\boxed{2x^{(2)} x^{(4)} - 3\left(x^{(3)}\right)^3 = 0.}$

ec. de ordin 4:

$F(\cancel{t}, \cancel{x}, \cancel{x^{(1)}}, x^{(2)}, x^{(3)}, x^{(4)})$

Lipsesc derivatele până la ordinul doi ⇒

⇒ se ~~face~~ face schimbarea de variabilă: $\boxed{x^{(2)} = y}$

$x^{(2)}(t) = y(t)$.

$(t, x) \xrightarrow{x^{(2)} = y} (t, y)$

$x^{(3)} = y^{(1)}$

$x^{(4)} = y^{(2)}$.

Ec. devine: $2y \cdot y^{(2)} - 3\left(y^{(1)}\right)^3 = 0$

$F_1(\cancel{t}, y, y^{(1)}, y^{(2)}) = 0$

$(t, y) \xrightarrow{y^{(1)} = z} (y, z)$

$\boxed{y^{(1)}(t) = z(y(t))}$

$y^{(2)} = \left(z(y(t))\right)' = z'(y(t)) \cdot y'(t) \Rightarrow \boxed{y^{(2)} = z' z}$

$$2y \cdot z' z - 3z^3 = 0.$$

$$z' = \frac{3z^{\cancel{3}2}}{2y\cancel{z}} \quad \text{dacă } z \neq 0.$$

• dacă $\underline{z = 0}$ ⇒ verifică ec ⇒ $y' = 0$ ⇒ $y = C_1$ ⇒

⇒ $x^{(2)} = C_1$ ⇒ $x^{(1)} = C_1 t + C_2$ ⇒

ec. de tip primitivă

$$\Rightarrow x = \int (C_1 t + C_2)\,dt = C_1 \frac{t^2}{2} + C_2 t + C_3$$

$C_1, C_2, C_3 \in \mathbb{R}$.

$$\Rightarrow x(t) = \frac{C_1 t^2}{2} + C_2 t + C_3, \quad C_1, C_2, C_3 \in \mathbb{R} \quad (3)$$

• dacă $z \neq 0$: $\dfrac{dz}{dy} = \underbrace{\dfrac{1}{y}}_{a_1(y)} \cdot \underbrace{\dfrac{3}{2} z^2}_{b_1(z)}$ ec. cu var separabile.

separăm variab:

$$\frac{2}{3z^2}\,dz = \frac{1}{y}\,dy$$

$$\frac{2}{3} \cdot \int z^{-2}\,dz = \int \frac{1}{y}\,dy \Rightarrow \frac{2}{3} \cdot \frac{z^{-2+1}}{-2+1} = \ln|y| + C_1$$

$$\Rightarrow -\frac{2}{3z} = \ln|y| + C_1 \Rightarrow z = \frac{-2}{3(\ln|y| + C_1)} \Rightarrow$$

dar $z = y'$
Presup. $y > 0$ $\Bigg\}$ ⇒ $y' = \dfrac{-2}{3(\ln y + C_1)}$ ⇒

⇒ ec. cu var. sep. pt. y:

$$\frac{dy}{dt} = \underbrace{\left(\frac{-2}{3}\right)}_{a_2(t)} \underbrace{\left(\frac{1}{\ln y + C_1}\right)}_{b_2(y)} \Rightarrow$$

Evident $b_2(y) \neq 0$ ⇒ sep. variabilele

$$\Rightarrow (\ln y + C_1)\,dy = -\frac{2}{3}\,dt \Rightarrow \int (\ln y + C_1)\,dy = -\frac{2}{3}t + C_2$$

$$\int (\ln y + C_1)\,dy = \int \ln y\,dy + C_1 y = \int y' \ln y\,dy + C_1 y =$$
$$= y\ln y - \int y\cdot\frac{1}{y}\,dy + C_1 y = \underbrace{y\ln y - y + C_1 y + K}$$

Pt. ec. în y avem soluția implicită:

$$y\ln y - y + C_1 y = -\frac{2}{3}t + C_2$$
$$y(\ln y - 1 + C_1) = -\frac{2}{3}t + C_2 \Rightarrow$$

Dar $x^{(2)} = y$.

$$\Rightarrow x^{(2)}\left(\ln x^{(2)} - 1 + C_1\right) = -\frac{2}{3}t + C_2.$$
$$C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Obs.: Dacă din (4) se poate scrie $y(t)$, atunci prin schimbarea de variab. $x^{(2)} = y$, integrăm de ori câte o ec. de tip primitivă și obținem soluție pt. ec. în x.

5) $$\underline{\left(\frac{x}{t}\right)^2 + (x')^2 - 3t x'' - \frac{2x x'}{t} = 0}$$

$$F\left(\frac{x}{t}, x', t x''\right) = 0.$$

ec. omogenă

$$(t,x) \xrightarrow[x(t) = t y(t).]{\frac{x}{t} = y} (t,y)$$

$$\boxed{x' = t'y + t y' = y + ty'}$$
$$\boxed{x'' = (y+ty')' = y' + y' + ty'' = 2y' + ty''} \;\Big|\cdot t \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \boxed{t x'' = 2ty' + t^2 y''}$$

Ec. în (t,y): $y^2 + (y+ty')^2 - 3(2ty' + t^2y'') - 2y(y+ty') = 0$

$$\Rightarrow \cancel{y^2} + \cancel{y^2} + \cancel{2tyy'} + t^2(y')^2 - 6ty' - 3t^2y'' - \cancel{2y^2} - \cancel{2tyy'} = 0 \Rightarrow$$

$$(ty')^2 - 6ty' - 3t^2y'' = 0$$

ec. Euler $\quad F_1(y, ty', t^2y'') = 0.$

$$(t,y) \xrightarrow[|t| = e^s \Leftrightarrow s = \ln|t| = s(t) \Rightarrow s'(t) = \frac{1}{t}]{} (s,z)$$

$$y(t) = z(s(t))$$

$$y'(t) = (z(s(t)))' = z'(s(t)) \cdot s'(t) \quad | \cdot t \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{ty' = z'}$$

$$y'' = \left(z' \cdot \frac{1}{t}\right)' = z'' \cdot \underbrace{s'(t)}_{\frac{1}{t}} \cdot \frac{1}{t} + z'\left(-\frac{1}{t^2}\right) \quad | \cdot t^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{t^2y'' = z'' - z'}$$

Ec în (s,z): $\quad (z')^2 - 6z' - 3(z'' - z') = 0.$

$$(z')^2 - 6z' - 3z'' + 3z' = 0$$

$$(z')^2 - 3z' - 3z'' = 0.$$

$$F_2(\cancel{s}, \cancel{z}, z', z'') = 0.$$

$$(s,z) \xrightarrow[z'(s) = v(s)]{z' = v} (s,v)$$

$z''(s) = v'(s) \quad \Rightarrow$ ec în (s,v):

$$v^2 - 3v - 3v' = 0 \Rightarrow$$

$\Rightarrow v' = \dfrac{v^2 - 3v}{3} \Rightarrow$ ec. var. sep: $\boxed{\dfrac{dv}{ds} = \dfrac{v^2 - 3v}{3}}$

$$a_2(s) = 1; \quad b_2(v) = \frac{v^2 - 3v}{3}.$$

- $b_2(v) = 0 \Rightarrow v^2 - 3v = 0$, $v(v-3) = 0$ $\Rightarrow$ $v_1 = 0$, $v_2 = 3.$

$\boxed{v_1 = 0} \Rightarrow z' = 0 \Rightarrow z = C_1$, $z(s) = C_1$ $\Big| \Rightarrow y(t) = z(\ln|t|) = C_1 \Rightarrow$ (4)

dar $z' = v$

$$\xrightarrow[x = ty]{} x(t) = C_1 t, \; C_1 \in \mathbb{R}$$

$\boxed{v_2=3} \Rightarrow z'=3 \Rightarrow z(s)=3s+C_1 \Rightarrow$ ($z'=v$)

$\Rightarrow y(t)=z(\ln|t|) \Rightarrow$

$\Rightarrow y(t)=3\ln|t|+C_1 \Rightarrow$

$\Rightarrow x(t)=t(3\ln|t|+C_1),\ C_1\in\mathbb{R}$ (5)

• $b_2(v)\neq 0 \Rightarrow$ în ec (s,v) sep. variab:

$$\frac{3}{v(v-3)}dv=ds \Rightarrow \frac{v-(v-3)}{v(v-3)}dv=ds \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\frac{1}{v-3}-\frac{1}{v}\right)dv=ds \Rightarrow \ln|v-3|-\ln|v|=s+C \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ln\left|\frac{v-3}{v}\right|=s+C \Rightarrow \left|\frac{v-3}{v}\right|=e^s\cdot e^C \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{v-3}{v}=\underbrace{\pm e^C}_{C_1\in\mathbb{R}^*}\cdot e^s \Rightarrow v-3=C_1 v e^s \Rightarrow$$

$$\Rightarrow v(1-C_1e^s)=3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow v(s)=\frac{3}{1-C_1e^s}$$

dar $z'(s)=v(s)$ $\Big| \Rightarrow z'=\frac{3}{1-C_1e^s} \Rightarrow$

ec. de tip primitivă

$$\Rightarrow z=\int\frac{3}{1-C_1e^s}ds=3\int\frac{(1-C_1e^s)+C_1e^s}{1-C_1e^s}ds=$$

$$=3\left(\int 1\,ds-\int\frac{(1-C_1e^s)'}{1-C_1e^s}ds\right)=$$

$$=3\left(s-\ln|1-C_1e^s|\right)+C_2 \Rightarrow$$

dar $y(t)=z(\ln|t|)$

$$\Rightarrow y(t)=3\left(\ln|t|-\ln|1-C_1e^{\ln|t|}|\right)+C_2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y(t)=3\left(\ln|t|-\ln|1-C_1|t||\right)+C_2 \Rightarrow$$

dar $x(t)=t\,y(t)$

$$\Rightarrow x(t)=3t\left(\ln|t|-\ln|1-C_1|t||\right)+C_2t,\quad C_1\in\mathbb{R}^*,\ C_2\in\mathbb{R} \quad (6)$$

Mulț. sol. ec. este $(4)\cup(5)\cup(6)$.