

CONȚINUTUL CURSULUI #8:

IV. Interpolarea Lagrange.

IV.1. Metoda directă de determinare a polinomului Lagrange P_n

IV.2. Metoda Lagrange de determinare a polinomului Lagrange P_n .

IV.3. Metoda Newton de determinare a polinomului Lagrange P_n .

IV.4. Metoda Newton cu diferențe divizate de determinare a polinomului Lagrange P_n .

Fie $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție continuă și $(x_i)_{i=1, n+1}$ o diviziune a intervalului $[a, b]$, i.e. $a = x_1 < x_2 < \dots < x_{n+1} = b$.

Fie \mathcal{P}_n mulțimea polinoamelor cel mult de grad $n \geq 0$:

$$\mathcal{P}_n = \left\{ P_n(x) = a_1 + a_2x + \dots + a_nx^{n-1} + a_{n+1}x^n \mid a_j \in \mathbb{R}, j = \overline{1, n+1} \right\}$$

Interpolarea Lagrange a funcției f relativ la diviziunea $(x_i)_{i=\overline{1, n+1}}$ constă în determinarea unui polinom $P_n \in \mathcal{P}_n$, numit polinom de interpolare Lagrange, care satisface relațiile:

$$P_n(x_i) = f(x_i), i = \overline{1, n+1} \quad (1)$$

Valorile $x_i, i = \overline{1, n+1}$ se numesc puncte sau noduri de interpolare.

IV.1. Metoda directă de determinare a polinomului Lagrange P_n .

Fie $P_n(x) = a_1 + a_2x + \dots + a_nx^{n-1} + a_{n+1}x^n$ un polinom de interpolare al funcției f relativ la diviziunea $(x_i)_{i=\overline{1, N+1}}$. Din condițiile $P_n(x_i) = f(x_i)$, $y_i = f(x_i)$, $i = \overline{1, n+1}$ rezultă următorul sistem de ecuații liniare

$$\begin{cases} a_1 + a_2x_1 + a_3x_1^2 + \dots + a_{n+1}x_1^n = y_1 \\ a_1 + a_2x_2 + a_3x_2^2 + \dots + a_{n+1}x_2^n = y_2 \\ a_1 + a_2x_3 + a_3x_3^2 + \dots + a_{n+1}x_3^n = y_3 \\ \dots\dots\dots \\ a_1 + a_2x_{n+1} + a_3x_{n+1}^2 + \dots + a_{n+1}x_{n+1}^n = y_{n+1} \end{cases} \quad (2)$$

sau scris la formă matriceală

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^n \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \dots & x_2^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_{n+1} & x_{n+1}^2 & \dots & x_{n+1}^n \end{pmatrix}}_{=: \mathbf{A}} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_{n+1} \end{pmatrix} \quad (3)$$

Cum $x_i \neq x_j, 1 \leq i < j \leq n+1$, rezultă

$$\det(A) = \prod_{1 \leq i < j \leq n+1} (x_i - x_j) \neq 0,$$

deci sistemul de ecuații liniare (3) este un sistem compatibil determinat cu soluția

$$\mathbf{a} = [a_1, a_2, \dots, a_{n+1}]^T \in \mathbb{R}^{n+1}$$

Din unicitatea soluției rezultă că polinomul Lagrange se determină în mod unic.

Soluția sistemului de ecuații liniare (3) se poate obține, de exemplu, aplicând metoda Gauss cu pivotare totală.

Exemplu 1: Să se afle, prin metoda directă, polinomul de interpolare Lagrange $P_2(x)$ al funcției $f(x) = e^{2x}$ relativ la diviziunea $(-1; 0; 1)$.

Rezolvare: Fie $P_2(x) = a_1 + a_2x + a_3x^2$. Din condițiile $P_2(-1) = e^{-2}$, $P_2(0) = e^0$, $P_2(1) = e^2$ rezultă sistemul de ecuații liniare:

Se consideră următoarea reprezentare a polinomului Lagrange:

$$P_n(x) = \sum_{k=1}^{n+1} L_{n,k}(x) y_k, \quad x \in \mathbb{R} \quad (5)$$

$$\begin{cases} a_1 + a_2 \cdot (-1) + a_3(-1)^2 = e^{-2} \\ a_1 + a_2 \cdot 0 + a_3 \cdot 0 = 1 \\ a_1 + a_2 \cdot 1 + a_3 \cdot 1 = e^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1 = 1 \\ a_2 = \frac{e^2 - e^{-2}}{2} \\ a_3 = \frac{e^2 + e^{-2} - 2}{2} \end{cases} \quad (4)$$

$$\text{Astfel, } P_2(x) = 1 + \frac{e^2 - e^{-2}}{2}x + \frac{e^2 + e^{-2} - 2}{2}x^2.$$

unde $L_{n,k}$ sunt polinoame de gradul n ce urmează să fie determinate. Deoarece P_n interpolează funcția f în nodurile $\{x_i\}_{i=\overline{1, n+1}}$ atunci au loc relațiile, $P_n(x_i) = y_i$, de unde rezultă $L_{n,k}(x_i) = \delta_{ik}$. Deoarece $L_{n,k}$ sunt polinoame de gradul n și $L_{n,k}(x_i) = 0$, $i \neq k$ rezultă că $x_1, x_2, \dots, x_{k-1}, x_{k+1}, \dots, x_{n+1}$ sunt n rădăcini, deci $L_{n,k}$ se reprezintă:

$$L_{n,k}(x) = C_k(x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_{k-1})(x - x_{k+1}) \dots (x - x_{n+1}), \quad (6)$$

iar din condiția $L_{n,k}(x_k) = 1$, rezultă relația pentru C_k :

$$C_k = \frac{1}{(x_k - x_1)(x_k - x_2) \dots (x_k - x_{k-1})(x_k - x_{k+1}) \dots (x_k - x_{n+1})} \quad (7)$$

Se înlocuiesc C_k în (6) și se obțin expresiile

$$L_{n,k}(x) = \frac{(x - x_1) \dots (x - x_{k-1})(x - x_{k+1}) \dots (x - x_{n+1})}{(x_k - x_1) \dots (x_k - x_{k-1})(x_k - x_{k+1}) \dots (x_k - x_{n+1})}, \quad (8)$$

$$x \in \mathbb{R}, \quad k = \overline{1, n+1}$$

Funcțiile $L_{n,k}$ se numesc funcții de bază pentru interpolarea Lagrange și se vor rescrie sub o formă compactă

$$L_{n,k}(x) = \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^{n+1} \frac{x - x_j}{x_k - x_j} \quad (9)$$

Vom nota în continuare $e_t(x) = f(x) - P_n(x)$ eroarea interpolării în fiecare punct.

Teorema (IV.1. Estimarea erorii de interpolare)

Fie $n \geq 1$, funcția $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ a.i. $f \in C^{n+1}[a, b]$ și diviziunea $(x_i)_{i=\overline{1, n+1}}$ a intervalului $[a, b]$. Atunci: $\forall x \in [a, b]$, $\exists \xi \in (a, b)$ astfel încât

$$e_t(x) := f(x) - P_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \pi_{n+1}(x)$$

unde

$$\pi_{n+1}(x) := (x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_{n+1}), \quad x \in [a, b]$$

Mai mult, are loc următoarea estimare a erorii de interpolare:

$$|f(x) - P_n(x)| \leq \frac{\max_{\zeta \in [a, b]} |f^{(n+1)}(\zeta)|}{(n+1)!} |\pi_{n+1}(x)|, \quad \forall x \in [a, b]$$

Exemplu 2: Să se afle, prin metoda Lagrange, polinomul de interpolare Lagrange $P_2(x)$ a funcției $f(x) = e^{2x}$ relativ la diviziunea $(-1; 0; 1)$.

Rezolvare: Polinomul $P_2(x)$ conform metodei Lagrange este

$P_2(x) = L_{2,1}(x)y_1 + L_{2,2}(x)y_2 + L_{2,3}(x)y_3$, unde

$$L_{2,1}(x) = \frac{(x-x_2)(x-x_3)}{(x_1-x_2)(x_2-x_3)} = \frac{x(x-1)}{2} = \frac{x^2-x}{2}$$

$$L_{2,2}(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_3)}{(x_2-x_1)(x_2-x_3)} = \frac{(x+1)(x-1)}{-1} = 1-x^2$$

$$L_{2,3}(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_3-x_1)(x_3-x_2)} = \frac{x(x+1)}{2} = \frac{x^2+x}{2}$$

Astfel,

$$\begin{aligned} P_2(x) &= \frac{x^2-x}{2} \cdot e^{-2} + (1-x^2) + \frac{x^2+x}{2} \cdot e^2 \\ &= 1 + \frac{e^2 - e^{-2}}{2}x + \frac{e^2 + e^{-2} - 2}{2}x^2 \end{aligned}$$

sistemului sunt determinate conform relațiilor:

$$\begin{aligned} a_{i1} &= 1, \quad i = \overline{1, n+1} \\ a_{ij} &= \prod_{k=1}^{j-1} (x_i - x_k), \quad i = \overline{2, n+1}, j = \overline{2, i} \end{aligned} \quad (12)$$

Exemplu 3: Să se afle, prin metoda Newton, polinomul de interpolare Newton $P_2(x)$ a funcției $f(x) = e^{2x}$ relativ la diviziunea $(-1; 0; 1)$.

Rezolvare: Polinomul $P_2(x)$ conform metodei Newton se reprezintă sub

forma: $P_2(x) = c_1 + c_2(x-x_1) + c_3(x-x_1)(x-x_2)$. Din condițiile

$P_2(-1) = e^{-2}$, $P_2(0) = 1$, $P_2(1) = e^2$ rezultă sistemul

$$\begin{cases} c_1 = e^{-2} \\ c_1 + c_2 = 1 \\ c_1 + 2c_2 + 2c_3 = e^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c_1 = e^{-2} \\ c_2 = 1 - e^{-2} \\ c_3 = \frac{e^{-2} + e^2 - 2}{2} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} P_2(x) &= e^{-2} + (1 - e^{-2})(x+1) + \frac{e^{-2} + e^2 - 2}{2}x(x+1) \\ &= 1 + \frac{e^2 - e^{-2}}{2}x + \frac{e^2 + e^{-2} - 2}{2}x^2. \end{aligned}$$

IV.3. Metoda Newton de determinare a polinomului Lagrange P_n .

Se consideră următoarea reprezentare a polinomului Lagrange

$$P_n(x) = c_1 + c_2(x-x_1) + c_3(x-x_1)(x-x_2) + \dots + c_{n+1}(x-x_1)(x-x_2)\dots(x-x_n)$$

sau

$$P_n(x) = c_1 + \sum_{i=2}^{n+1} c_i \prod_{j=1}^{i-1} (x - x_j) \quad (10)$$

Condițiile $P_n(x_i) = y_i$, $i = \overline{1, n+1}$ ne furnizează sistemul de ecuații liniare necesar pentru determinarea coeficienților c_i , $i = \overline{1, n+1}$

$$\begin{cases} c_1 = y_1 \\ c_1 + c_2(x_2 - x_1) = y_2 \\ c_1 + c_2(x_3 - x_1) + c_3(x_3 - x_1)(x_3 - x_2) = y_3 \\ \dots \\ c_1 + c_2(x_{n+1} - x_1) + c_3(x_{n+1} - x_1)(x_{n+1} - x_2) + \dots + c_{n+1}(x_{n+1} - x_1)\dots(x_{n+1} - x_n) = y_{n+1} \end{cases} \quad (11)$$

Sistemul (11) este un sistem inferior triunghiular și se rezolvă conform metodei substituției ascendente. Componentele matricei A asociată

IV.4. Metoda Newton cu diferențe divizate de determinare a polinomului Lagrange P_n .

Definiția (IV.1.)

Fie funcția $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ și o diviziune $(x_i)_{i=\overline{1, n+1}}$.

(i) S.n. diferența divizată (DD) de ordin 0 a lui f în raport cu nodul x_1 :

$$f[x_1] := f(x_1)$$

(ii) S.n. DD de ordin 1 a lui f în raport cu nodurile x_1, x_2 :

$$f[x_1, x_2] := \frac{f[x_2] - f[x_1]}{x_2 - x_1}$$

(iii) S.n. DD de ordin 2 a lui f în raport cu nodurile x_1, x_2, x_3 :

$$f[x_1, x_2, x_3] := \frac{f[x_2, x_3] - f[x_1, x_2]}{x_3 - x_1}$$

Definiția (IV.1. continuare)

(iv) S.n. DD de ordin n a lui f în raport cu nodurile x_1, x_2, \dots, x_{n+1} :

$$f[x_1, x_2, \dots, x_{n+1}] := \frac{f[x_2, x_3, \dots, x_{n+1}] - f[x_1, x_2, \dots, x_n]}{x_{n+1} - x_1}$$

Teorema (IV.2. formula de interpolare a lui Newton cu DD)

Polinomul de interpolare Lagrange de gradul n asociat funcției $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ și nodurile de interpolare $\{x_1, x_2, \dots, x_{n+1}\}$ este dat de formula

$$P_n(x) = f[x_1] + f[x_1, x_2](x - x_1) + \dots \quad (13)$$

$$+ f[x_1, x_2, \dots, x_{n+1}](x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_n) \quad (14)$$

$$= f[x_1] + \sum_{i=2}^{n+1} f[x_1, \dots, x_i] \prod_{j=1}^{i-1} (x - x_j), \quad x \in [a, b] \quad (15)$$

Construim în continuare următorul tabel cu diferențele divizate:

x_i	DD ordin 0	DD ordin 1	DD ordin 2	DD ordin 3	...
x_1	$f[x_1] = f(x_1)$				
x_2	$f[x_2] = f(x_2)$	$f[x_1, x_2]$			
x_3	$f[x_3] = f(x_3)$	$f[x_2, x_3]$	$f[x_1, x_2, x_3]$		
x_4	$f[x_4] = f(x_4)$	$f[x_3, x_4]$	$f[x_2, x_3, x_4]$	$f[x_1, x_2, x_3, x_4]$	
...

Fie matricea Q , matricea inferior triunghiulară definită astfel:

$$Q_{ij} = f[x_{i-j+1}, \dots, x_i] \quad (16)$$

Se observă că elementele matricei coincid cu diferențele divizate din tabel.

x_i	DD ordin 0	DD ordin 1	DD ordin 2	DD ordin 3	...
x_1	$f[x_1] = Q_{11}$				
x_2	$f[x_2] = Q_{21}$	$f[x_1, x_2] = Q_{22}$			
x_3	$f[x_3] = Q_{31}$	$f[x_2, x_3] = Q_{32}$	$f[x_1, x_2, x_3] = Q_{33}$		
x_4	$f[x_4] = Q_{41}$	$f[x_3, x_4] = Q_{42}$	$f[x_2, x_3, x_4] = Q_{43}$	$f[x_1, x_2, x_3, x_4] = Q_{44}$	
...

Curs #8

December 3, 2020 13 / 17

Curs #8

December 3, 2020 14 / 17

Au loc următoarele relații:

$$\begin{aligned} f[x_{i-j+1}, \dots, x_i] &= \frac{f[x_{i-j+2}, \dots, x_i] - f[x_{i-j+1}, \dots, x_{i-1}]}{x_i - x_{i-j+1}} \\ &= \frac{f[x_{i-(j-1)+1}, \dots, x_i] - f[x_{i-1-(j-1)+1}, \dots, x_{i-1}]}{x_i - x_{i-j+1}} \end{aligned}$$

Obținem astfel o relație de recurență pentru componentele matricei Q :

$$Q_{ij} = \frac{Q_{i,j-1} - Q_{i-1,j-1}}{x_i - x_{i-j+1}}, \quad j = \overline{2, n+1}, i = \overline{j, n+1} \quad (17)$$

Prima coloană a matricei Q se calculează conform formulei:

$$Q_{i1} = f(x_i), i = \overline{1, n+1}.$$

Exemplu 2: Să se afle, prin metoda Newton cu DD, polinomul de interpolare Lagrange $P_2(x)$ al funcției $f(x) = e^{2x}$ relativ la diviziunea $(-1; 0; 1)$.

Rezolvare: Construiam tabelul diferențelor divizate:

x_i	DD ordin 0	DD ordin 1	DD ordin 2
-1	e^{-2}		
0	1	$1 - e^{-2}$	
1	e^2	$e^2 - 1$	$\frac{e^{-2} + e^2 - 2}{2}$

Pentru reprezentarea polinomului $P_2(x)$ păstrăm din tabel doar elementele de pe diagonala principală, i.e., $e^{-2}, 1 - e^{-2}$ și $\frac{e^{-2} + e^2 - 2}{2}$. Se obține

$$P_2(x) = e^{-2} + (1 - e^{-2})(x + 1) + \frac{e^{-2} + e^2 - 2}{2}(x + 1)x.$$

Curs #8

December 3, 2020 15 / 17

Curs #8

December 3, 2020 16 / 17

ALGORITM (Metoda Newton cu diferențe divizate)**Date de intrare:** $(x_i)_{i=\overline{1, n+1}}$; $(y_i)_{i=\overline{1, n+1}}$; x ;**Date de ieșire:** y ;**STEP 1:** Se determină matricea Q

$$Q_{i1} = f(x_i), i = \overline{1, n+1}$$

$$Q_{ij} = \frac{Q_{i,j-1} - Q_{i-1,j-1}}{x_i - x_{i-1}}, i = \overline{2, n+1}, j = \overline{2, i};$$

STEP 2: Determină $P_n = Q_{11} + \sum_{k=2}^{n+1} Q_{kk}(x - x_1) \dots (x - x_{k-1})$ **STEP 3:** $y = P_n$.