① Fie $(A_i)_{i\in I}$ o familie de submulțimi ale lui X astfel încât $\bigcup_{i\in I} A_i = X$. Dacă B și C sunt două submulțimi ale lui X cu prop. că $A_i \cap B = A_i \cap C$, pt. orice $i \in I$, atunci $B = C$.

② Fie $f: X \to Y$ o funcție, $(A_i)_{i\in I}$ o familie de submulțimi ale lui X și $(B_i)_{i\in I}$ o familie de submulțimi ale lui Y. Să se arate că

(a) $f(\bigcup_{i\in I} A_i) = \bigcup_{i\in I} f(A_i)$;

(b) $f(\bigcap_{i\in I} A_i) \subseteq \bigcap_{i\in I} f(A_i)$;

(c) $f^{-1}(\bigcup_{i\in I} B_i) = \bigcup_{i\in I} f^{-1}(B_i)$;

(d) $f^{-1}(\bigcap_{i\in I} B_i) = \bigcap_{i\in I} f^{-1}(B_i)$.

③ Fie $f: X \to Y$ o funcție oarecare. Sunt echivalente:

(a) f este injectivă;

(b) Ex. o funcție $g: Y \to X$ astfel încât $g \circ f = 1_X$;

(c) Pentru orice familie $\{A_i\}_{i\in I}$ de submulțimi ale lui X avem

$f(\bigcap_{i\in I} A_i) = \bigcap_{i\in I} f(A_i)$.

④ Fie $f: X \to Y$ o funcție oarecare. Considerăm funcțiile $f_*: \mathcal{P}(X) \to \mathcal{P}(Y)$ și $f^*: \mathcal{P}(Y) \to \mathcal{P}(X)$ definite de

$f_*(A) = f(A)$, pt. orice $A \subseteq X$

$f^*(B) = f^{-1}(B)$, pt. orice $B \subseteq Y$.

Să se demonstreze echivalența următoarelor afirmații:

(a) f este injectivă;

(b) f_* este injectivă;

(c) f^* este surjectivă;

(d) $f^* \circ f_* = 1_{\mathcal{P}(X)}$

(e) $f(X - A) \subseteq Y - f(A)$, pt. orice $A \subseteq X$.

(5) Păstrăm notațiile din problema (4). Atunci sunt echivalente afirmațiile următoare:

(a) f este surjectivă;

(b) f_* este surjectivă;

(c) f^* este injectivă;

(d) $f_* \circ f^* = 1_{\mathcal{P}(Y)}$;

(e) $Y - f(A) = f(X - A)$, pt. orice $A \subseteq X$.

(6) Fie ~~f: X → X o funcție oarecare~~ $A, B \subseteq X$ nevide. Considerăm funcția $f: \mathcal{P}(X) \to \mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(B)$ definită de $f(M) = (M \cap A, M \cap B)$, pt. orice $M \subseteq X$. Să se arate că:

(a) f este injectivă $\Leftrightarrow A \cup B = X$;

(b) f este surjectivă $\Leftrightarrow A \cap B = \emptyset$;

(c) f este bijectivă $\Leftrightarrow A = X - B$.

(7) Vom spune că mulțimile A, B sunt <u>echipotente</u> dacă există o funcție bijectivă $f: A \to B$ (Vom nota $A \simeq B$ faptul că A, B sunt echipotente). Să se arate că:

(a) $A \simeq A$

(b) $A \simeq B \Rightarrow B \simeq A$

(c) $A \simeq B, B \simeq C \Rightarrow A \simeq C$

(8) Notăm cu $\mathrm{Hom}(A, B)$ mulțimea funcțiilor $f: A \to B$. Să se arate că:

(a) $\mathrm{Hom}(A, \mathrm{Hom}(B, C)) \simeq \mathrm{Hom}(A \times B, C)$

(b) $\mathrm{Hom}(A, B \times C) \simeq \mathrm{Hom}(A, B) \times \mathrm{Hom}(A, C)$

(c) Dacă $A \cap B = \emptyset$ atunci $\mathrm{Hom}(A \cup B, C) \simeq \mathrm{Hom}(A, C) \times \mathrm{Hom}(B, C)$

(9) Pt. orice mulțime X, X și $\mathcal{P}(X)$ nu pot fi echipotente.

(10) Fie A, B două submulțimi disjuncte ale unei mulțimi T. Să se rezolve ecuația $A \cup (B - X) = B \cup X$.

(11) Fie A, B, C submulțimi ale lui T astfel încât $B, C \subseteq A$ și $B \cap C = \emptyset$. Să se rezolve sistemul:

$$\begin{cases} X \cup Y = A \\ X \cap Y = B \\ X - Y = C. \end{cases}$$

(12) Notăm cu $|X|$ cardinalul unei mulțimi X. Dacă $|X| \le |Y|$ și $|Y| \le |X|$ atunci $|X| = |Y|$.

(13) Dacă A, B sunt două submulțimi ale lui X atunci diferența lor simetrică este introdusă prin $A \triangle B = (A - B) \cup (B - A)$. Să se arate că $(\mathcal{P}(X), \triangle, \cap, \emptyset, X)$ este inel comutativ și unitar.

(14) Dacă X este o mulțime finită și $A_1, \dots, A_m \subseteq X$ atunci

(a) $$\left|\bigcup_{i=1}^{m} A_i\right| = \sum_{i=1}^{m} |A_i| - \sum_{i<j} |A_i \cap A_j| + \sum_{i<j<k} |A_i \cap A_j \cap A_k| - \dots + (-1)^{n-1} |A_1 \cap \dots \cap A_m|.$$

(b) $$|A_1 \triangle A_2 \triangle \dots \triangle A_m| = \sum_{i=1}^{m} |A_i| - 2 \sum_{i<j} |A_i \cap A_j| + 2^2 \sum_{i<j<k} |A_i \cap A_j \cap A_k| - \dots + (-1)^{n-1} 2^{n-1} |A_1 \cap \dots \cap A_{m-1}|$$

(15) Să se determine toate relațiile de echivalență pe mulțimea $X = \{a, b, c, d\}$ și mulțimile cât corespunzătoare.

(16) Fie $f: X \to Y$ o funcție. Notăm $Ker(f) = \{(x,y) \in X^2 \mid f(x) = f(y)\}$.

(a) $Ker(f)$ este o relație de echivalență pe X.

(b) $f(X) \simeq X/_{Ker(f)}$.

(17) Fie R_1, R_2 două relații binare pe X. Care din următoarele proprietăți este adevărată:

(a) R_1, R_2 reflexivă $\Rightarrow R_1 \circ R_2$ reflexivă.

(b) R_1, R_2 simetrice $\Rightarrow R_1 \circ R_2$ simetrică.

(c) R_1, R_2 antisimetrică $\Rightarrow R_1 \circ R_2$ antisimetrică

(d) R_1, R_2 tranzitivă $\Rightarrow R_1 \circ R_2$ tranzitivă.

(18) Fie $Echiv(X)$ mulțimea relațiilor de echivalență pe mulțimea X. Care din următoarele proprietăți sunt adevărate:

(a) $R_1, R_2 \in Echiv(X) \Rightarrow R_1 \cup R_2 \in Echiv(X)$

(b) $R_1, R_2 \in Echiv(X) \Rightarrow R_1 \cap R_2 \in Echiv(X)$

(c) $R_1, R_2 \in Echiv(X) \Rightarrow R_1 - R_2 \in Echiv(X)$

(d) $R_1, R_2 \in Echiv(X) \Rightarrow R_1 \circ R_2 \in Echiv(X)$

(e) $R \in Echiv(X) \Rightarrow R^{-1} \in Echiv\ X$.

(19) Pe $\mathbb{R}$ definim relația binară ρ: $(x,y) \in \rho \iff x - y \in \mathbb{Z}$. Să se arate că ρ este o relație de echiv. pe $\mathbb{R}$ și $\mathbb{R}/_\rho \simeq [0,1)$.

(20) Fie $N \subseteq M$. Pe mulțimea $\mathcal{P}(M)$ definim relația binară ρ:

$$(X,Y) \in \rho \iff X \cap N = Y \cap N \qquad (X, Y \in \mathcal{P}(M)).$$

Să se arate că ρ este o rel. de echiv și $\mathcal{P}(M)/_\rho \simeq \mathcal{P}(N)$.

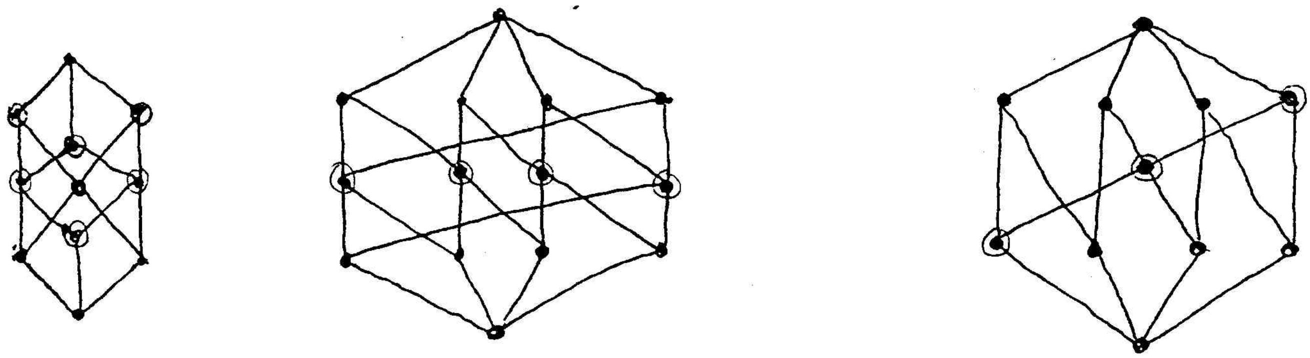
(21) Fie X o mulțime infinită. Definim relația binară ρ pe $\mathcal{P}(X)$:

$$(A,B) \in \rho \iff A \triangle B \text{ este finită} \qquad (A, B \in \mathcal{P}(X))$$

Să se arate că ρ este o rel. de echiv. pe $\mathcal{P}(X)$.

(22) Să se calculeze numărul relațiilor de echiv. pe o mulțime cu n elemente.

① Arătați că următoarele mulțimi ordonate nu sunt latici



② Fie $(P, \leq)$ o mulțime ordonată finită și $f: P \to P$ o funcție izotonă.

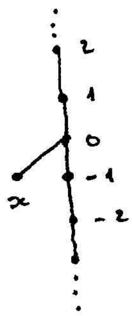
(a) Dacă f este bijectivă atunci și f^{-1} este izotonă.

(b) Arătați că prop. de la punctul (a) nu este adevărată decât pt. orice mulțime ordonată $(P, \leq)$.

<u>Soluție</u>. (a) Cum P este finită ex. $m \geq 1$ astfel încât $f^m(x) = x$ pt. orice $x \in X$. Atunci $f^m = 1_P$, deci $f^{-1} = f^{m-1}$, de unde rezultă că f^{-1} este izotonă.

(b) Fie $P = \mathbb{Z} \cup \{x\}$ cu $x \notin \mathbb{Z}$. Ordinea canonică a lui $\mathbb{Z}$ împreună cu condițiile ~~xxxx~~ și

- $x < n$, pt. orice $n \geq 0$
- x incomparabil cu cu orice $n < 0$

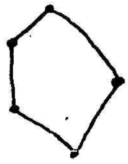


definesc o ordine parțială pe P.

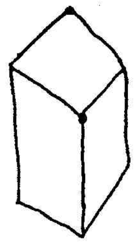
Definim $f: P \to P$ prin $f(x) = x$ și $f(n) = n + 1$, pt orice $n \in \mathbb{Z}$.

f este bijectivă și izotonă. Observăm că $x < 0$ însă $f^{-1}(0) = -1$ și $f^{-1}(x) = x$ sunt incomparabile, deci f^{-1} nu este izotonă.

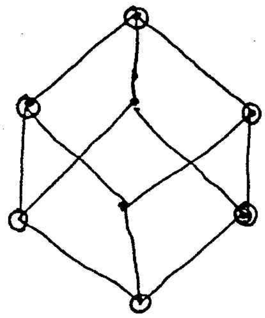
③ Se consideră următoarele mulțimi ordonate:



A



B



C

a) Să se arate că A, B și C sunt latici.

b) Să se arate că A este izomorfă cu o ~~subalgebră~~ sublatice a lui B.

c) Câte morfisme de latice injective există de la A în B?

d) Elementele figurate formează o sublatice a lui C?

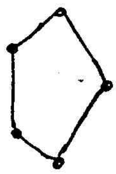
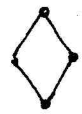
④ Să se determine două latici L, K astfel încât

(a) L × K să aibă 20 de elemente.

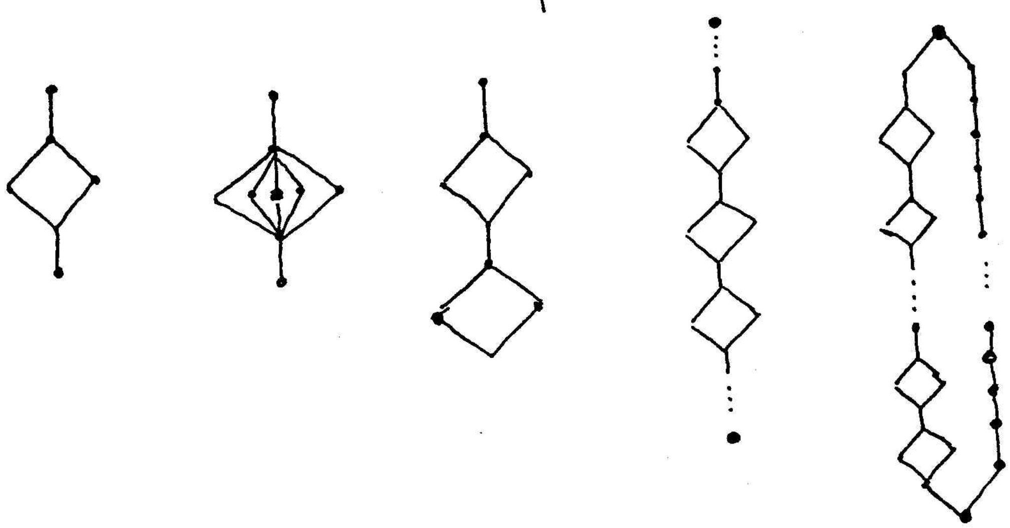
(b) L să fie nedistributivă.

(c) K să aibă cel puțin 3 elemente.

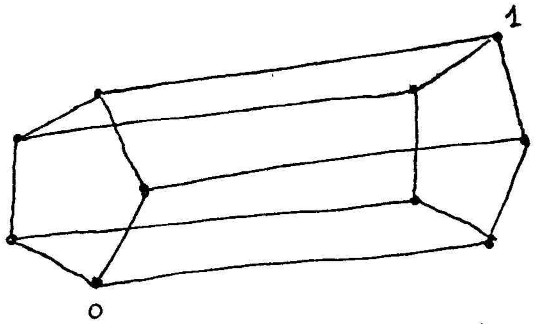
(d) Cel mai mare element al lui L × K să acopere exact 4 elemente

Răspuns. L =  , K: 

⑤ Să se determine automorfismele următoarelor latici cu prim și ultim element:



(6) Se consideră următoarea mulțime ordonată A.



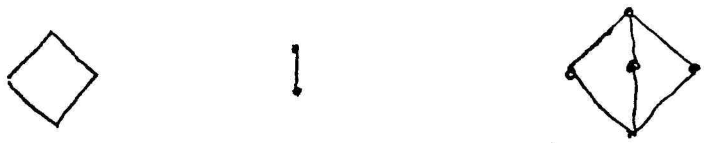
(a) Să se arate că A este latice cu prim și ultim element.

(b) Să se descompună A în produsul direct a două latici.

(c) Să se determine toate automorfismele de latice cu prim și ultim element ale lui,

(d) Să se calculeze complemenții fiecărui element al lui A și să se deducă că A este nedistributivă.

(7) Se consideră următoarele latici cu prim și ultim element



A B C

(a) Să se reprezinte grafic $A \times C$ și $B \times C$.

(b) Să se determine sublaticile și sublaticile cu prim și ultim element ale lui $A \times C$ și $B \times C$.

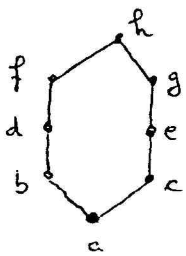
(c) Să se determine toate morfismele de latici cu prim și ultim element de la C în A.

(d) Să se arate că $A \oplus B$ și $B \oplus A$ sunt neizomorfe.

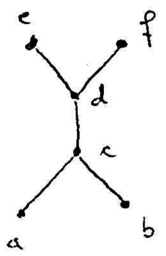
(e) Să se arate că $(A \oplus B) \oplus C$ și $A \oplus (B \oplus C)$ sunt izomorfe. Să se determine ~~[illegible]~~ toate izomorfismele ce se pot stabili între ele.

(f) ~~În câte moduri se poate descompune în sumă directă~~ Considerăm laticea $D = B \oplus A \oplus B$. Să se găsească toate descompunerile lui D în sumă directă de latici cu prim și ultim element.

(8) Se consideră următoarele mulțimi ordonate



A



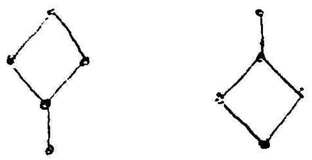
B

(a) Considerăm submulțimile $X = \{b, e, d\}$ și $Y = \{c, d\}$ ale lui A, resp. B.
Să se determine $\sup X$, $\inf X$, $\sup Y$, $\inf Y$, în cazul când ele există.
Să se determine $\max X$, $\min X$, $\max Y$, $\min Y$, în cazul când ele există.

(b) Care este cea mai mică latice în care se poate scufunda B ?

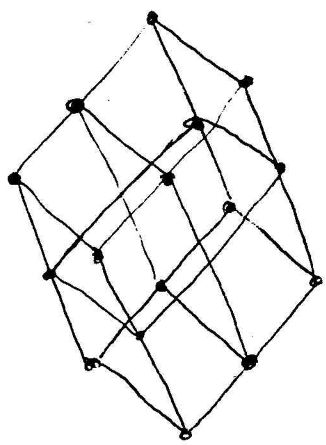
(c) Să se determine toate submulțimile lui B care sunt latici în raport cu ordinea lui B.

(9) Să se arate că următoarele două latici sunt neizomorfe:



(10) Se consideră laticea următoare.

Să se determine toate descompunerile lui L în produs direct de latici.



L

(11) Să se determine toate automorfismele de latice cu prim și ultim element ale lui D_n.

(12) Fie $n \geq 2$. Să se stabilească un antiizomorfism între laticea idealelor inelului $\mathbb{Z}_n$ și laticea D_n.

① Să se arate că într-o algebră Boole B avem:

(a) $(a\wedge b)\vee(\bar a\wedge b)\vee(a\wedge\bar b)\vee(\bar a\wedge\bar b)=1$;

(b) $(a\wedge b)\vee(\bar a\wedge b)=(a\wedge b)\vee(\bar a\wedge c)\vee(b\wedge c)$;

(c) $a=b \Leftrightarrow (a\wedge\bar b)\vee(\bar a\wedge b)=0$.

② Să se determine subalgebrele algebrei Boole $\mathcal{P}(X)$, unde $X=\{a,b,c,d\}$.

③ Să se arate că reuniunea a două ~~algebre Boole~~ subalgebre a unei algebre Boole B nu este întotdeauna o subalgebră a lui B.

④ Să se determine toate morfismele booleene de la L^3 la L_2^2.

⑤ Să se determine automorfismele booleene ale lui $\mathcal{P}(X)$, unde $X=\{x_1,\dots,x_n\}$.

⑥ Fie $f_1: A_1\to B_1$, $f_2: A_2\to B_2$ două morfisme booleene. Atunci funcția

$f_1\times f_2: A_1\times A_2\to B_1\times B_2$ definită prin

$(f_1\times f_2)(a_1,a_2)=(f_1(a_1), f_2(a_2))$, pt. orice $(a_1,a_2)\in A_1\times A_2$

este un morfism boolean.

Dacă $g: A_1\times A_2\to B_1\times B_2$ este un morfism boolean atunci există întotdeauna două morfisme booleene $f_1: A_1\to B_1$, $f_2: A_2\to B_2$ astfel încât $g=f_1\times f_2$?

⑦ Să se arate că există o infinitate de automorfisme booleene ale lui L_2^{N}.

⑧ Dacă L este o ~~algebră~~ latice distributivă cu prim și ultim element atunci $C(L)$ este algebra Boole a elementelor complementate ale lui L (= centrul boolean al lui L)

(a) Dacă $(L_i)_{i\in I}$ este o familie de latici distr. cu prim și ultim element atunci $C(\prod_{i\in I} L_i)=\prod_{i\in I} C(L_i)$.

(b) Să se determine centrul boolean al lui D_n, $n\geq 2$.

⑨ Fie $f: B\to B'$ un morfism boolean.

(a) Dacă B_1 este o subalg. a lui B atunci $f(B_1)$ este o subalg. a lui B'.

(b) Dacă B_1' este o subalg. a lui B' atunci $f^{-1}(B_1')$ este o subalg. a lui B_1?

(10) Fie B, B' două algebre Boole și $f: B \to B'$ o funcție. Considerăm proprietățile:

(i) $f(0)=0$; $f(1)=1$;

(ii) $f(x \to y) = f(x) \to f(y)$, pt. orice $x, y \in B$;

(iii) $f(x \leftrightarrow y) = f(x) \leftrightarrow f(y)$, pt. orice $x, y \in B$.

(a) Sunt independente proprietățile (i), (ii) și (iii)?

(b) Dacă f îndeplinește (i)-(iii) atunci f este morfism boolean?

(11) Să se întocmească tabelele de operații pt. $\to$ și $\leftrightarrow$ în cazul cubului.

(12) Fie $f: B \to B'$ un morfism boolean. Să se stabilească echivalența proprietăților următoare

(i) f este injectiv;

(ii) Pt. orice morfisme booleene $g: C \to B$, $h: C \to B$, dacă $f \circ g = f \circ h$ atunci $g = h$.

(13) Fie A_1 o subalgebră a algebrei Boole A și B_1 o subalg. a alg. Boole B. Atunci $A_1 \times B_1$ este o subalgebră a lui $A \times B$. Dacă C este o subalgebră a lui $A \times B$ atunci există întotdeauna o subalg. C_1 a lui A și o subalg. C_2 a lui B astfel încât $C = C_1 \times C_2$?

(14) Să se arate că $L_2^{\mathbb{N}}$ are o infinitate de subalgebre neizomorfe.

(15) Fie $(B, \vee, \wedge, ^-, 0, 1)$ o algebră Boole și $(B, +, \cdot, 0, 1)$ structura de inel boolean asociată. Să se arate că:

(a) Dacă $a \wedge b = 0$ atunci $a + b = a \vee b$.

(b) $a \to b = 1 + a + ab$

(c) $a \leftrightarrow b = 1 + a + b$

(d) $(a \leftrightarrow b) \leftrightarrow c = a \leftrightarrow (b \leftrightarrow c) = a + b + c$ ($\leftrightarrow$ este asociativă)

(e) $a_1 \leftrightarrow a_2 \leftrightarrow \dots \leftrightarrow a_n = \begin{cases} 1 + a_1 + \dots + a_n, & \text{pt. } n = \text{par} \\ a_1 + \dots + a_n, & \text{pt. } n = \text{impar} \end{cases}$

(f) $\overline{(a \leftrightarrow b)} = a + b$

(16) Care dintre proprietățile următoare este adevărată într-o alg. Boole B :

(a) $\rightarrow$ este asociativă ;

(b) $\rightarrow$ este comutativă ;

(c) $\rightarrow$ are element neutru ;

(d) $a \wedge (x \leftrightarrow y) = (a \wedge x) \leftrightarrow (a \wedge y)$;

(e) $a \vee (x \leftrightarrow y) = (a \vee x) \leftrightarrow (a \vee y)$;

(f) $a + (x \vee y) = (a + x) \vee (a + y)$;

(g) $a + (x \wedge y) = (a + x) \wedge (a + y)$?

(17) Fie B, B' două algebre Boole și $f : B \to B'$. Dacă

(a) $f(a \to b) = f(a) \to f(b)$, or $a, b \in B$

(b) $f(\bar{a}) = \overline{f(a)}$, or $a \in B$.

atunci f este morfism boolean ?

(18) Într-o alg. Boole B notăm $\rho(a,b) := a \leftrightarrow b$, pt. orice $a, b \in B$. Să se arate că:

(a) $\rho(a,1) = a$

(b) $a = b \iff \rho(a,b) = 1$

(c) $\rho(a,b) = \rho(b,a)$

(d) $\rho(a,b) = \rho(\bar{a}, \bar{b})$

(e) $\rho(a,b) \wedge \rho(b,c) \leq \rho(a,c)$

(f) $\rho(a,b) \wedge \rho(c,d) \leq \rho(a \wedge c, b \wedge d)$

(g) $\rho(a,b) \wedge \rho(c,d) \leq \rho(a \vee c, b \to d)$

(h) $\rho(a,b) \wedge \rho(c,d) \leq \rho(a \to c, b \to d)$

(i) $\rho(a,b) \wedge \rho(c,d) \leq \rho(\rho(a,c), \rho(b,d))$

(j) $\rho(a,b) \wedge a \leq b$

(k) $a \wedge b \leq \rho(a,b)$.

(19) Să se descompună laticile D_{72} și D_{80} în produs direct de lanțuri.

(20) Să se determine centrul boolean al următoarelor latici:

$D_{64} \times D_{100}$, $D_2 \times D_3 \times \ldots \times D_{10}$.

(21) Să se găsească patru algebre Boole A, B, C, D astfel încât $A \times B \simeq C \times D$, dar $A \not\simeq C$ și $B \not\simeq D$.

(22) Să se găsească două latici distributive cu prim și ultim element L, L' neizomorfe, dar $C(L) \simeq C(L')$.

(23) Determinați toate sublaticile lui D_n care sunt algebre Boole.

(24) Fie $(A, +, \cdot, 0, 1)$ un inel comutativ și unitar și $B(A) = \{x \in A \mid x^2 = x\}$. Pentru $e, f \in B(A)$, notăm $e \oplus f = e + f - 2ef$. Să se arate că $(B(A), \oplus, \cdot, 0, 1)$ este un inel Boole.

(25) Dacă $(A_i)_{i \in I}$ este o familie de inele comutative și unitare atunci inelele booleene $B(\prod_{i \in I} A_i)$, $\prod_{i \in I} B(A_i)$ sunt izomorfe.

(26) Se dă o algebră Boole finită B. Să se găsească un nr. natural $n \geq 2$ astfel încât $C(D_n) = B$. Dacă $B = L_2^2$ atunci există o infinitate de nr. naturale $n \geq 2$ astfel încât $C(D_n) = L_2^2$?

① Fie B_1, B_2 două algebre Boole şi $n \geq 1$. Notăm:

$\pi_n^i : B_1^n \to B_1$, $i = 1,\dots,n$: proiecţiile lui B_1^n

$p_n^i : B_2^n \to B_2$, $i = 1,\dots,n$: proiecţiile lui B_2^n.

Fie $u : B_1 \to B_2$ un izomorfism boolean. Fie $f : B_1^n \to B_1$ o funcţie oarecare şi $u(f) : B_2^n \to B_2$ funcţia definită astfel:

$$u(f)(b_1,\dots,b_n) = f(u^{-1}(b_1),\dots,u^{-1}(b_n)), \text{ pt. orice } b_1,\dots,b_n \in B_2.$$

Să se arate că

(a) $u(0_n) = 0_n$; $u(1_n) = 1_n$

(b) $u(\pi_n^i) = p_n^i$, $i = 1,\dots,n$

(c) $u(f \vee g) = u(f) \vee u(g)$
$u(f \wedge g) = u(f) \wedge u(g)$, pt. orice $f, g : B_1^n \to B_1$

(d) $u(\overline{f}) = \overline{u(f)}$, pt. orice $f : B_1^n \to B_1$.

(e) Dacă $f \in BF_n(B_1)$ atunci $u(f) \in BF_n(B_2)$.

(f) Funcţia $\Phi : BF_n(B_1) \to BF_n(B_2)$, definită prin $\Phi(f) = u(f)$, pt. orice $f \in BF_n(B_1)$, este un izomorfism boolean.

② Fie $u : B_1 \to B_2$ un izomorfism boolean, $m \geq 1$, $n \geq 0$ şi $a_1,\dots,a_n, b, x_1^0,\dots,x_m^0 \in B_1$.

Pt. orice funcţie booleană $g : B_1^{m+n} \to B_1$ sunt echivalente:

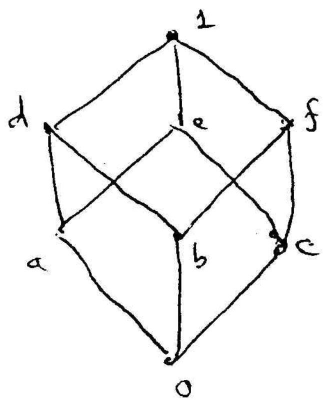
(a) $x_1^0,\dots,x_m^0$ este o soluţie a ecuaţiei (în B_1)

$$g(x_1,\dots,x_m, a_1,\dots,a_n) = b;$$

(b) $u(x_1^0),\dots,u(x_m^0)$ este o soluţie a ecuaţiei (în B_2):

$$u(g)(x_1,\dots,x_m, u(a_1),\dots,u(a_n)) = u(b).$$

③ Considerăm algebra Boole B:



Să se rezolve în B ecuațiile următoare:

$$ax+b=c \qquad ax+by+cz=1$$

$$ax+b=d \qquad dx+ey+fz=a+b+c$$

$$ax+by=c \qquad ax \leftrightarrow by = cz$$

$$ax \to by = f$$

(4) Fie $B = L_2^n$ și $e_1=(1,0,\dots,0),\dots, e_n=(0,\dots,0,1)$

$a_1=(0,1,\dots,1),\dots, a_n=(1,\dots,1,0)$

Să se rezolve în B ecuațiile următoare:

$$e_1x_1+\dots+e_nx_n=1$$

$$a_1x_1+\dots+a_nx_n=e_1+\dots+e_n$$

$$a_1x_1 \leftrightarrow a_2x_2 \leftrightarrow \dots \leftrightarrow a_nx_n = e_1 \leftrightarrow e_2 \leftrightarrow \dots \leftrightarrow e_n$$

$$e_ix_i+e_jx_j=e_k \quad , \text{ cu } i,j,k \in \{1,\dots,n\}$$

$$e_ix_i+e_j=d_i \quad , \text{ cu } i,j \in \{1,\dots,n\}.$$

(5) Să se rezolve într-o algebră Boole oarecare ecuațiile:

$$\cancel{(a\vee b)\wedge(x\to a)=b\vee x \quad (a,b\in B)}$$

$$a\wedge x=b$$

$$a\vee x=b$$

$$a\to x=b$$

$$x\to a=b$$

$$x\leftrightarrow a=b$$

$$(a\vee b)\wedge(x\to a)=b\vee x$$

$$(a\wedge b)\vee(x\to a)=b\wedge x$$

$$(a\vee b)\wedge(a\to x)=b\vee x .$$

(a,b sunt elemente fixate din B).

6. Într-o alg. Boole B să se rezolve sistemul de ecuații:

$$\begin{cases} x \vee y = a \\ x \wedge y = b \\ x \to y = c \end{cases}$$

7. În algebra Boole B să se rezolve ecuația:

$$(a+b)xy + a\bar{b}x + \bar{a}by = 1.$$

① Să se determine filtrele și congruențele alg. Boole $\mathcal{P}(\{a,b,c\})$.

② Fie $(B, \vee, \wedge, ^-, 0, 1)$ o alg. Boole și $(B, +, \cdot, 0, 1)$ inelul Boole asociat. Fie $F \subseteq B$ și $I = \{x \mid \bar{x} \in F\}$.

(a) F este filtru în alg. Boole $(B, \vee, \wedge, ^-, 0, 1)$ dacă și numai dacă I este ideal în inelul $(B, +, \cdot, 0, 1)$.

(b) Inelul Boole asociat lui $(B/_F, \vee, \wedge, ^-, 0, 1)$ este izomorf cu inelul cât $B/_I$?

③ Fie $f: B \to B'$ un morfism boolean.

(a) $Ker(f) = \{x \in B \mid f(x) = 1\}$ este un filtru în B.

(b) Dacă f este surjectiv atunci algebrele Boole $B/_{Ker(f)}$ și B' sunt izomorfe.

④ Fie $(B, \vee, \wedge, ^-, 0, 1)$ și $a \in B$. Notăm $B(a) = \{x \in B \mid x \leq a\}$. Pt. $x \in B(a)$ vom nota $\tilde{x} = x \wedge a$.

(a) $\langle B(a), \vee, \wedge, \sim, 0, a \rangle$ este o algebră Boole.

(b) Să se arate că funcția $f: B \to B(a)$, definită prin $f(x) = x \wedge a$, pt. orice $x \in B$, este un morfism boolean surjectiv.

(c) Să se determine $Ker(f)$.

(d) Să se arate că $B(a)$ și $B/_{Ker(f)}$ sunt izomorfe.

⑤ Să se determine filtrele, congruențele și algebrele cât în cazul rombului și cubului.

⑦ Fie B o algebră Boole și $a, b \in B$. Considerăm funcția $f: B \to B(a) \times B(b)$ definită prin $f(x) = (x \wedge a, x \wedge b)$, pt. orice $x \in B$.

(a) f este morfism boolean;

(b) Să se calculeze $Ker(f)$;

(c) f este injectivă $\iff a \vee b = 1$;

(d) f este surjectivă $\iff a \wedge b = 0$;

(e) f este izomorfism boolean $\iff b = \bar{a}$.

⑧ Folosind problema 7 să se stabilească teorema de structură a algebrelor Boole finite: pt. orice alg. Boole finită B există $n \geq 1$ astfel încât B este izomorfă cu L_2^n.

(9) Fie B o algebră Boole și $a \le b$. Notăm $[a,b] = \{x \in B \mid a \le x \le b\}$.

Pt. $x \in [a,b]$, notăm $\tilde{x} = (\bar{x} \wedge b) \vee a$. Atunci

(a) $([a,b], \vee, \wedge, \tilde{\ }, a, b)$ este o algebră Boole

(b) Funcția $f: B \to [a,b]$, definită prin $f(x) = (x \wedge b) \vee a$, pt. orice $x \in B$, este un morfism boolean surjectiv.

(c) Să se determine $Ker(f)$.

(d) Ce rezultă din izomorfismul $[a,b] \simeq B/_{Ker(f)}$?

(10) Fie $a_1 \le b_1$ și $a_2 \le b_2$ în algebra Boole B.

(a) Funcția $f: B \to [a_1, b_1] \times [a_2, b_2]$ definită de:

$$f(x) = ((x \wedge b_1) \vee a_1, (x \wedge b_2) \vee a_2), \text{ pt. } x \in B$$

este un morfism boolean.

(b) Să se determine $Ker(f)$.

(c) ~~Consecință izomorfism~~ Să se găsească condiții necesare și suficient pentru ca:

- f să fie injectiv
- f să fie surjectiv
- f să fie izomorfism boolean.

(11) Dacă B este o alg. Boole atunci notăm cu $Filt(B)$ mulțimea filtrelor lui B. Fie $F_1, \dots, F_n$ filtre în algebrele Boole $B_1, \dots, B_n$. Atunci $F_1 \times \dots \times F_n$ este un filtru în $B_1 \times \dots \times B_n$ funcția $(F_1, \dots, F_n) \mapsto F_1 \times \dots \times F_n$ este o bijecție de la $\prod_{i=1}^{n} Filt(B_i)$ la $Filt(\prod_{i=1}^{n} B_i)$.

(12) Fie X o mulțime infinită. Să se arate că relația binară $\equiv$ pe $P(X)$ definită prin:

$$A \equiv B \iff A \cap F = B \cap F, \text{ pentru orice } F \subseteq X \text{ finită}$$

este o congruență a alg. Boole $P(X)$. Care este filtrul asociat lui $\equiv$?

(13) Fie o alg. Boole B. Să se arate că ex. o infinitate de alg. Boole neizomorfe B' și de filtre $F' \subseteq B$ astfel încât $B'/_{F'} \simeq B$.

(14) Fie F un filtru în alg. Boole B și $p: B \to B/_F$ morfismul canonic.

(a) Dacă G este un filtru în B astfel încât $F \subseteq G$ atunci $G/_F = \{x/_F \mid x \in G\}$ este filtru în $B/_F$.

(b) Considerăm alg. Boole cât $(B/_F)/_{(G/_F)}$ și morfismul canonic $\varphi: B/_F \to (B/_F)/_{(G/_F)}$. Să se arate că $G = \mathrm{Ker}(\varphi \circ p)$

(c) Să se dem. că $A/_G$ și $(B/_F)/_{(G/_F)}$ sunt izomorfe.

(15) Fie $a \leq b$ în algebra Boole B. Să se arate că algebrele Boole $B/_{[\bar{a} \wedge b)}$ și $[a, b]$ sunt izomorfe. Să se arate, pt. orice $x, y \in B$, că $B/_{(x \to y)} \simeq [0, x \wedge \bar{y}]$.

(16) Fie F un filtru în algebra Boole B. Sunt echivalente:

a) F este ultrafiltru;

b) $B/_F \simeq L_2$.

(17) Fie B o algebră Boole, X mulțimea ultrafiltrelor sale și $d: B \to \mathcal{P}(X)$ morfismul lui Stone: $d(x) = \{U \in X \mid x \in U\}$, pt. orice $x \in B$.

(a) Dacă B este finită atunci d este un izomorfism boolean.

(b) Folosind (a) să se deducă teorema de structură a algebrelor Boole finite (vezi Problema 8).

(1) O probabilitate pe o alg. Boole B este o funcție $P : B \to [0,1]$ ce satisface condițiile:

(i) $P(x \vee y) = P(x) + P(y)$, dacă $x \wedge y = 0$

(ii) $P(1) = 1$.

Dacă P este o prob. pe B atunci pt. orice $x, y \in B$, avem:

(a) $P(0) = 0$;

(b) $P(\bar{x}) = 1 - P(x)$;

(c) $P(x \ominus y) = P(x) - P(x \wedge y)$, unde $x \ominus y = x \wedge \bar{y}$.

(d) Dacă $y \leq x$ atunci $P(x \ominus y) = P(x) - P(y)$.

(e) $y \leq x \Rightarrow P(y) \leq P(x)$

(f) $P(x \vee y) = P(x) + P(y) - P(x \wedge y)$.

(g) $P(x + y) = P(x) + P(y) - 2\, P(xy)$

(2) Dacă P este o prob. pe B atunci pt. orice $x_1, \dots, x_n \in B$:

$$P\left(\bigvee_{i=1}^{n} x_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(x_i) - \sum_{1 \leq i < j \leq n} P(x_i \wedge x_j) + \sum_{1 \leq i < j < k \leq n} P(x_i \wedge x_j \wedge x_k) - \dots + (-1)^{n-1} P(x_1 \wedge \dots \wedge x_n)$$

$$P\left(\bigwedge_{i=1}^{n} x_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(x_i) - \sum_{1 \leq i < j \leq n} P(x_i \vee x_j) + \sum_{1 \leq i < j < k \leq n} P(x_i \vee x_j \vee x_k) - \dots + (-1)^{n-1} P(x_1 \vee \dots \vee x_n)$$

(3) Dacă P este o probabilitate pe B atunci

$$P(x_1 + x_2 + \dots + x_n) = \sum_{i=1}^{n} P(x_i) - 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} P(x_i x_j) + 2^2 \sum_{1 \leq i < j < k \leq n} P(x_i x_j x_k) - \dots$$
$$\dots + (-1)^{n-1} 2^{n-1} P(x_1 x_2 \dots x_n).$$

(4) Fie P o probabilitate pe B.

(a) Să se calculeze $P(a \to b)$ și $P(a \leftrightarrow b)$.

(b) Să se stabilească o formulă similară celei din problema (3) pentru $P(x_1 \leftrightarrow x_2 \leftrightarrow \dots \leftrightarrow x_n)$.

(5) Fie B o alg. Boole și $P : B \to [0,1]$ o funcție astfel încât $P(1) = 1$. Atunci sunt echivalente următoarele afirmații:

(a) P este o probabilitate;

(b) $1 + P(x \wedge y) = P(x \vee y) + P(x \leftrightarrow y)$, pt. orice $x, y \in B$;

(c) $1 + P(x \wedge y) = P(x) + P(x \to y)$, pt. orice $x, y \in B$;

(d) $P(x) + P(x \to y) = P(y) + P(y \to x)$, pt. orice $x, y \in B$.

(6) Fie P o probabilitate pe alg. Boole B. Atunci $Ker(P) = \{x \in B \mid P(x) = 1\}$ este un filtru propriu al lui B. Funcția $\overline{P} : B/_{Ker(P)} \to [0,1]$ definită de $\overline{P}(x/_{Ker(P)}) = P(x)$, pt. orice $x \in B$, este o prob. pe alg. Boole cât $B/_{Ker(P)}$.

(7) Fie P o prob. pe alg. Boole B și $x, y \in B$. Sunt echivalente:

(a) $x/_{Ker(P)} = y/_{Ker(P)}$

(b) $P(x \wedge y) = P(x \vee y)$

(c) $P(x) = P(y) = P(x \wedge y)$.

(8) Dacă P este o probabilitate pe alg. Boole B atunci sunt echivalente:

(a) $Ker(P)$ este un filtru maximal al lui B;

(b) P este un morfism boolean.

(9) Fie B o alg. Boole finită și $At(B)$ mulțimea atomilor săi. ~~Definim funcția $P : B \to$~~ Fie $p : At(B) \to [0,1]$ astfel încât:

- $\sum_{a \in At(B)} p(a) = 1$.

Definim $P : B \to [0,1]$ prin $P(0) = 0$ și $P(x) = \sum \{p(a) \mid a \in At(B), a \leq x\}$, pt. orice $x \in B - \{0\}$. Atunci P este unica probabilit. pe B astfel încât $P|_{At(B)} = p$.