Universitatea din Bucureşti
Facultatea de Matematică şi Informatică

29 ianuarie 2021, 10:00–12:30

NUME:	....
PRENUME:	....
GRUPA:	....
NR.CRT. - VARIANTA:	....

INSTRUCŢIUNI

1. Varianta se va alege conform Nr.Crt. din "Tabel formatiuni studiu". Daca Nr.Crt. ≤ 18, atunci Varianta = Nr.Crt. Daca Nr.Crt. > 18, se pastreaza restul impartirii Nr.Crt. la 18. Exemplu: Daca Nr.Crt. = 18, atunci Varianta = 18; Daca Nr.Crt. = 20, atunci Varianta = 2.
2. Problemele vor fi rezolvate pe coli de hârtie numerotate corespunzător, menţionându-se numărul problemei.
3. Pe prima pagină a rezolvării fiecarei probleme, vor fi scrise **cu litere de tipar** `numele şi prenumele studentului, grupa acestuia precum şi Nr. Crt. - Varianta.`
4. Fiecare problemă trebuie să aibă cel puţin o pagină alocată rezolvării sale chiar dacă respectiva problemă nu se poate rezolva.
5. **TIMP DE LUCRU, inclusiv transmiterea lucrărilor: 150 minute, i.e. 10:00–12:30.**
6. Lucrarea va fi trimisă prin email ca fişier PDF titularilor de laborator:
   - Grupele 331, 332 si 333 - Bucătaru Mihai (mihai.bucataru@drd.unibuc.ro)
   - Grupele 334, 343, 344 - Ghiţă Alexandru (alexandru.ghita@unibuc.ro)
   - Grupele 341, 342 - Paşcan Raisa (pascanraisa@fmi.unibuc.ro)

   Numele fişierului va fi denumit cu `Nume_Prenume_nrGrupa.pdf`

Calcul Numeric –Subiecte Examen 2021

I. Să se rezolve conform metodei de factorizare LU sistemul de mai jos. Factorizarea LU se va efectua folosind metoda Gauss cu pivotare parţială.

V1

$$\begin{cases} 10x_1 + 30x_2 + 16x_3 = 118 \\ 2x_1 + 15x_2 + 7x_3 = 53 \\ 2x_1 + 5x_2 + 3x_3 = 21 \end{cases}$$

V2

$$\begin{cases} 3x_1 + 8x_2 + 5x_3 = 18 \\ 3x_1 + 28x_2 + 23x_3 = 76 \\ 3x_1 + 3x_2 + x_3 = 4 \end{cases}$$

V3

$$\begin{cases} 6x_1 + 5x_2 + 6x_3 = 9 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ 6x_1 + 5x_2 + 7x_3 = 10 \end{cases}$$

V4

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 5x_3 = 4 \\ 2x_1 + 17x_2 + 20x_3 = 33 \\ 2x_1 + 7x_2 + 13x_3 = 16 \end{cases}$$

V5

$$\begin{cases} 12x_1 + 9x_2 + 17x_3 = 31 \\ 4x_1 + 2x_2 + 5x_3 = 12 \\ 20x_1 + 22x_2 + 38x_3 = 50 \end{cases}$$

V6

$$\begin{cases} 9x_1 + 18x_2 + 19x_3 = 84 \\ 15x_1 + 13x_2 + 12x_3 = 47 \\ 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 7 \end{cases}$$

V7

$$\begin{cases} x_1 + 5x_2 + 3x_3 = 25 \\ 5x_1 + 13x_2 + 12x_3 = 77 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 8 \end{cases}$$

V8

$$\begin{cases} 3x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 21 \\ 3x_1 + 11x_2 + 11x_3 = 58 \\ 15x_1 + 19x_2 + 22x_3 = 119 \end{cases}$$

V9

$$\begin{cases} 15x_1 + 6x_2 + 14x_3 = 94 \\ 25x_1 + 6x_2 + 7x_3 = 120 \\ 5x_1 + x_2 + x_3 = 23 \end{cases}$$

I. Să se rezolve conform metodei Gauss cu pivotare totală sistemele.

V10

$$\begin{cases} 10x_1 + 30x_2 + 16x_3 = 118 \\ 2x_1 + 15x_2 + 7x_3 = 53 \\ 2x_1 + 5x_2 + 3x_3 = 21 \end{cases}$$

V11

$$\begin{cases} 3x_1 + 8x_2 + 5x_3 = 18 \\ 3x_1 + 28x_2 + 23x_3 = 76 \\ 3x_1 + 3x_2 + x_3 = 4 \end{cases}$$

V12

$$\begin{cases} 6x_1 + 5x_2 + 6x_3 = 9 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ 6x_1 + 5x_2 + 7x_3 = 10 \end{cases}$$

V13

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 5x_3 = 4 \\ 2x_1 + 17x_2 + 20x_3 = 33 \\ 2x_1 + 7x_2 + 13x_3 = 16 \end{cases}$$

V14

$$\begin{cases} 12x_1 + 9x_2 + 17x_3 = 31 \\ 4x_1 + 2x_2 + 5x_3 = 12 \\ 20x_1 + 22x_2 + 38x_3 = 50 \end{cases}$$

V15

$$\begin{cases} 9x_1 + 18x_2 + 19x_3 = 84 \\ 15x_1 + 13x_2 + 12x_3 = 47 \\ 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 7 \end{cases}$$

V16

$$\begin{cases} x_1 + 5x_2 + 3x_3 = 25 \\ 5x_1 + 13x_2 + 12x_3 = 77 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 8 \end{cases}$$

V17

$$\begin{cases} 3x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 21 \\ 3x_1 + 11x_2 + 11x_3 = 58 \\ 15x_1 + 19x_2 + 22x_3 = 119 \end{cases}$$

V18

$$\begin{cases} 15x_1 + 6x_2 + 14x_3 = 94 \\ 25x_1 + 6x_2 + 7x_3 = 120 \\ 5x_1 + x_2 + x_3 = 23 \end{cases}$$

II. Să se afle polinomul de interpolare Lagrange $P_3(x)$ asociat funcţiei $y = f(x)$ conform metodei Newton cu diferenţe divizate, relativ la diviziunea $x = (x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4)$. Valorile functiei $y_i = f(x_i)$ se vor calcula cu ajutorul calculatorului. Toate rezultatele se vor scrie cu 3 cifre dupa virgula.

V1 $f(x) = ln(x), x = (1,\ 2,\ 3,\ 5)$
V2 $f(x) = sin(x), x = (0, \pi/6, \pi/3, \pi/2)$
V3 $f(x) = e^{\frac{x}{2}}, x = (0,\ 1,\ 2,\ 4)$
V4 $f(x) = cos(x), x = (0, \pi/6, \pi/3, \pi/2)$
V5 $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}, x = (-1,\ 0,\ 1,\ 4)$
V6 $f(x) = \dfrac{4}{x}, x = (1,\ 2,\ 4,\ 6)$
V7 $f(x) = \sqrt{x}, x = (1,\ 3,\ 5,\ 6)$
V8 $f(x) = sin(2x), x = (0, \pi/12, \pi/6, \pi/4)$
V9 $f(x) = ln(2x), x = (1,\ 2,\ 3,\ 5)$

II. Să se afle polinomul de interpolare Lagrange $P_3(x)$ asociat funcţiei $y = f(x)$ conform metodei Lagrange, relativ la diviziunea $x = (x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4)$. Valorile functiei $y_i = f(x_i)$ se vor calcula cu ajutorul calculatorului. Toate rezultatele se vor scrie cu 3 cifre dupa virgula.

V10 $f(x) = ln(x), x = (1,\ 2,\ 3,\ 5)$
V11 $f(x) = sin(x), x = (0, \pi/6, \pi/3, \pi/2)$
V12 $f(x) = e^{\frac{x}{2}}, x = (0,\ 1,\ 2,\ 4)$
V13 $f(x) = cos(x), x = (0, \pi/6, \pi/3, \pi/2)$
V14 $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}, x = (-1,\ 0,\ 1,\ 4)$
V15 $f(x) = \dfrac{4}{x}, x = (1,\ 2,\ 4,\ 6)$
V16 $f(x) = \sqrt{x}, x = (1,\ 3,\ 5,\ 6)$
V17 $f(x) = sin(2x), x = (0, \pi/12, \pi/6, \pi/4)$
V18 $f(x) = ln(2x), x = (1,\ 2,\ 3,\ 5)$

III. Să se afle funcţia de interpolare spline pătratică S pentru funcţia $y = f(x)$ relativ la diviziunea $x = (x_1,\ x_2,\ x_3)$. Valorile functiei $y_i = f(x_i)$ se vor calcula cu ajutorul calculatorului. Toate rezultatele se vor scrie cu 3 cifre dupa virgula.

V1 $f(x) = ln(x), x = (1,\ 2,\ 3)$
V2 $f(x) = sin(x), x = (0, \pi/6, \pi/3)$
V3 $f(x) = e^{\frac{x}{2}}, x = (0,\ 1,\ 2)$
V4 $f(x) = cos(x), x = (0, \pi/6, \pi/3)$
V5 $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}, x = (-1,\ 0,\ 1)$
V6 $f(x) = \dfrac{4}{x}, x = (1,\ 2,\ 4)$
V7 $f(x) = \sqrt{x}, x = (1,\ 3,\ 5)$
V8 $f(x) = sin(2x), x = (0, \pi/12, \pi/6)$
V9 $f(x) = ln(2x), x = (1,\ 2,\ 3)$

III. În cazul interpolării spline cubice cu constrângeri, să se deducă sistemul complet în baza căruia se calculează coeficienţii funcţiei spline cubice, pentru funcţia $y = f(x)$ relativ la diviziunea $x = (x_1,\ x_2,\ x_3)$. Valorile functiei $y_i = f(x_i)$ se vor calcula cu ajutorul calculatorului. Toate rezultatele se vor scrie cu 3 cifre dupa virgula.

V10 $f(x) = ln(x), x = (1,\ 2,\ 3)$
V11 $f(x) = sin(x), x = (0, \pi/6, \pi/3)$
V12 $f(x) = e^{\frac{x}{2}}, x = (0,\ 1,\ 2)$
V13 $f(x) = cos(x), x = (0, \pi/6, \pi/3)$
V14 $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}, x = (-1,\ 0,\ 1)$
V15 $f(x) = \dfrac{4}{x}, x = (1,\ 2,\ 4)$
V16 $f(x) = \sqrt{x}, x = (1,\ 3,\ 5)$
V17 $f(x) = sin(2x), x = (0, \pi/12, \pi/6)$
V18 $f(x) = ln(2x), x = (1,\ 2,\ 3)$

IV. Fie $I = \int_a^b f(x)dx$. Să se calculeze integrala exactă. Să se aproximeze numeric integrala folosind datele din variantă. Să se calculeze eroarea absolută.

V1 $a = 0, b = 1, f(x) = x^2, 5$ noduri, metoda trapezului sumată.
V2 $a = 1, b = 2, f(x) = x^3, 4$ noduri, metoda trapezului sumată.
V3 $a = 0, b = \pi, f(x) = sin(x), 4$ noduri, metoda trapezului sumată.
V4 $a = 0, b = 1, f(x) = x^2, 5$ noduri, metoda Simpson sumată.
V5 $a = 1, b = 2, f(x) = x^3, 5$ noduri, metoda Simpson sumată.
V6 $a = 0, b = \pi, f(x) = sin(x), 5$ noduri, metoda Simpson sumată.
V7 $a = 0, b = 1, f(x) = x^2, 5$ noduri, metoda dreptunghiului sumată.
V8 $a = 1, b = 2, f(x) = x^3, 5$ noduri, metoda dreptunghiului sumată.
V9 $a = 0, b = \pi, f(x) = sin(x), 5$ noduri, metoda dreptunghiului sumată.
V10 $a = 0, b = 1, f(x) = x^2, 6$ noduri, metoda trapezului sumată.
V11 $a = 1, b = 2, f(x) = x^3, 5$ noduri, metoda trapezului sumată.
V12 $a = 0, b = \pi, f(x) = sin(x), 5$ noduri, metoda trapezului sumată.
V13 $a = 0, b = 1, f(x) = x^2$, 5 noduri, metoda Simpson sumată.
V14 $a = 1, b = 2, f(x) = x^3$, 5 noduri, metoda Simpson sumată.

IV. V15 Dacă se aplică formula trapezului calculului integralei $\int_0^2 f(x)dx$ se obţine valoarea 5, iar dacă se aplică formula dreptunghiului, se obţine 4. Ce valoare va da formula Simpson pentru calculul integralei.

V16 Fiind date $f(0) = 1, f(0.5) = 2.5, f(1) = 2, f(0.25) = f(0.75) = \alpha$. Să se afle α dacă, folosind formula trapezului sumată cu $m = 4$, se obţine $\int_0^1 f(x)dx \approx 1.75$.

V17 Dacă se aplică formula trapezului calculului integralei $\int_0^2 f(x)dx$ se obţine valoarea 5, iar dacă se aplică formula dreptunghiului, se obţine 4. Ce valoare va da formula Simpson pentru calculul integralei.

V18 Fiind date $f(0) = 1, f(0.5) = 2.5, f(1) = 2, f(0.25) = f(0.75) = \alpha$. Să se afle α dacă, folosind formula trapezului sumată cu $m = 4$, se obţine $\int_0^1 f(x)dx \approx 1.75$.

V. V1 Să se determine coeficienţii B, C, D, astfel încât funcţia

$$S(x) = \begin{cases} S_1(x) = 1 + 2x - x^3, x \in [0, 1) \\ S_2(x) = 2 + B(x-1) + C(x-1)^2 + D(x-1)^3, x \in [1, 2] \end{cases}$$

să reprezinte o funcţie spline naturală (i.e. $S''(a) = S''(b) = 0$, a, b fiind capetele intervalului de interpolare).

V2 Fie funcţia $S(x)$ o funcţie spline cubică cu constrângeri la capete (i.e. $S'(a) = f'(a), S'(b) = f'(b)$, unde a, b sunt capetele intervalului de interpolare):

$$S(x) = \begin{cases} S_1(x) = 3(x-1) + 2(x-1)^2 - (x-1)^3, x \in [1,2) \\ S_2(x) = A + B(x-2) + C(x-2)^2 + D(x-2)^3, x \in [2,3] \end{cases}$$

Să se afle A, B, C, D, dacă $f'(1) = f'(3)$.

V3 O funcţie spline cubică cu constrângeri este definită prin

$$S(x) = \begin{cases} S_1(x) = 1 + Bx + 2x^2 - 2x^3, x \in [0,1) \\ S_2(x) = 1 + b(x-1) - 4(x-1)^2 + 7(x-1)^3, x \in [1,2] \end{cases}$$

Să se afle $f'(0)$ şi $f'(2)$.

V4 O funcţie spline cubică naturală este definită prin

$$S(x) = \begin{cases} S_1(x) = 1 + B(x-1) - D(x-1)^3, x \in [1,2) \\ S_2(x) = 1 + b(x-2) - \frac{3}{4}(x-2)^2 + d(x-2)^3, x \in [2,3] \end{cases}$$

Să se afle B, D, b, d, ştiind că S interpolează datele $(1,1), (2,1)$ şi $(3,0)$.

V5 Să se arate că polinomul Lagrange care interpolează datele $(-2,1), (-1,4), (0,11), (1,16), (2,13), (3,-4)$ este de gradul 3. Se va folosi metoda Newton DD.

V6 Fie $P_3(x)$ polinomul de interpolare Lagrange asociat setului de date $(0,0), (0.5, y), (1,3), (2,2)$. Să se afle y ştiind că, coeficientul lui x^3 în reprezentarea polinomului $P_3(x)$ este 6. Pentru reprezentarea polinomului $P_3(x)$ se va folosi metoda Lagrange.

V7 Următorul tabel se referă la polinomul de grad necunoscut, $P_n(x)$

x	0	1	2
$P_n(x)$	2	-1	4

Să se determine coeficientul lui x^2 în reprezentarea $P_n(x)$ dacă toate diferenţele divizate de ordinul 3 sunt 1.

V8 Să se determine coeficienţii B, C, D, astfel încât funcţia

$$S(x) = \begin{cases} S_1(x) = 1 + 2x - x^3, x \in [0,1) \\ S_2(x) = 2 + B(x-1) + C(x-1)^2 + D(x-1)^3, x \in [1,2] \end{cases}$$

să reprezinte o funcţie spline naturală (i.e. $S''(a) = S''(b) = 0$, a, b fiind capetele intervalului de interpolare).

V9 Fie funcţia $S(x)$ o funţie spline cubică cu constrângeri la capete (i.e. $S'(a) = f'(a), S'(b) = f'(b)$, unde a, b sunt capetele intervalului de interpolare):

$$S(x) = \begin{cases} S_1(x) = 3(x-1) + 2(x-1)^2 - (x-1)^3, x \in [1,2) \\ S_2(x) = A + B(x-2) + C(x-2)^2 + D(x-2)^3, x \in [2,3] \end{cases}$$

Să se afle A, B, C, D, dacă $f'(1) = f'(3)$.

V10 Presupunem că $\varphi(h)$ este aproximarea derivatei $f'(x_0)$ de ordinul $\mathcal{O}(h)$ şi $f'(x_0) = \varphi(h) + a_1 h + a_2 h^2 + a_3 h^3 + ...$, unde a_1, a_2, a_3 sunt constante. Să se folosească valorile $\varphi(h), \varphi(h/3), \varphi(h/9)$ pentru a se construi o formulă de aproximare de ordinul $\mathcal{O}(h^3)$, folosind metoda Richardson.

V11 Presupunem că $\varphi(h)$ este aproximarea derivatei $f'(x_0)$ de ordinul $\mathcal{O}(h)$ şi $f'(x_0) = \varphi(h) + a_1 h + a_2 h^2 + a_3 h^3 + ...$, unde a_1, a_2, a_3 sunt constante. Să se folosească valorile $\varphi(h), \varphi(h/4), \varphi(h/16)$ pentru a se construi o formulă de aproximare de ordinul $\mathcal{O}(h^3)$, folosind metoda Richardson.

V12 Presupunem că $\varphi(h)$ este aproximarea derivatei $f'(x_0)$ de ordinul $\mathcal{O}(h)$ şi $f'(x_0) = \varphi(h) + a_1 h + a_2 h^2 + a_3 h^3 + ...$, unde a_1, a_2, a_3 sunt constante. Să se folosească valorile $\varphi(h), \varphi(2h), \varphi(4h)$ pentru a se construi o formulă de aproximare de ordinul $\mathcal{O}(h^3)$, folosind metoda Richardson.

V13 Presupunem că $\varphi(h)$ este aproximarea derivatei $f'(x_0)$ de ordinul $\mathcal{O}(h)$ şi $f'(x_0) = \varphi(h) + a_1 h + a_2 h^2 + a_3 h^3 + ...$, unde a_1, a_2, a_3 sunt constante. Să se folosească valorile $\varphi(h), \varphi(3h), \varphi(9h)$ pentru a se construi o formulă de aproximare de ordinul $\mathcal{O}(h^3)$, folosind metoda Richardson.

V14 Presupunem că $\varphi(h)$ este aproximarea derivatei $f'(x_0)$ de ordinul $\mathcal{O}(h)$ şi $f'(x_0) = \varphi(h) + a_1 h + a_2 h^2 + a_3 h^3 + ...$, unde a_1, a_2, a_3 sunt constante. Să se folosească valorile $\varphi(h), \varphi(4h), \varphi(16h)$ pentru a se construi o formulă de aproximare de ordinul $\mathcal{O}(h^3)$, folosind metoda Richardson.

V15 Presupunem că $\varphi(h)$ este aproximarea derivatei $f'(x_0)$ de ordinul $\mathcal{O}(h^2)$ şi $f'(x_0) = \varphi(h) + a_2 h^2 + a_3 h^3 + a_4 h^4 + ...$, unde a_1, a_2, a_3 sunt constante. Să se folosească valorile $\varphi(h), \varphi(h/3), \varphi(h/9)$ pentru a se construi o formulă de aproximare de ordinul $\mathcal{O}(h^4)$, folosind metoda Richardson.

V16 Presupunem că $\varphi(h)$ este aproximarea derivatei $f'(x_0)$ de ordinul $\mathcal{O}(h^2)$ şi $f'(x_0) = \varphi(h) + a_2 h^2 + a_3 h^3 + a_4 h^4 + ...$, unde a_1, a_2, a_3 sunt constante. Să se folosească valorile $\varphi(h), \varphi(h/2), \varphi(h/4)$ pentru a se construi o formulă de aproximare de ordinul $\mathcal{O}(h^4)$, folosind metoda Richardson.

V17 Presupunem că $\varphi(h)$ este aproximarea derivatei $f'(x_0)$ de ordinul $\mathcal{O}(h^2)$ şi $f'(x_0) = \varphi(h) + a_2 h^2 + a_3 h^3 + a_4 h^4 + ...$, unde a_1, a_2, a_3 sunt constante. Să se folosească valorile $\varphi(h), \varphi(h/4), \varphi(h/16)$ pentru a se construi o formulă de aproximare de ordinul $\mathcal{O}(h^4)$, folosind metoda Richardson.

V18 Presupunem că $\varphi(h)$ este aproximarea derivatei $f'(x_0)$ de ordinul $\mathcal{O}(h^2)$ şi $f'(x_0) = \varphi(h) + a_2 h^2 + a_3 h^3 + a_4 h^4 + ...$, unde a_1, a_2, a_3 sunt constante. Să se folosească valorile $\varphi(h), \varphi(2h), \varphi(4h)$ pentru a se construi o formulă de aproximare de ordinul $\mathcal{O}(h^4)$, folosind metoda Richardson.