

## Seminar 1

(S1.1) Fie  $T$  o mulțime și  $A, B, X \subseteq T$  cu  $A \cap B = \emptyset$  și  $A \cup (B \setminus X) = B \cup X$ . Să se arate că  $X = A$ .

**Demonstrație:** Arătăm egalitatea prin dublă incluziune.

Fie întâi  $x \in X$ . Atunci  $x \in B \cup X = A \cup (B \setminus X)$ . Cum  $x \in X$ ,  $x \notin B \setminus X$ , deci  $x \in A$ .

Luăm acum  $x \in A$ . Atunci  $x \in A \cup (B \setminus X) = B \cup X$ . Cum  $A \cap B = \emptyset$ ,  $x \notin B$ , deci  $x \in X$ .  $\square$

(S1.2) Fie  $A = \{a, b, c, d\}$  și  $R = \{(a, b), (a, c), (c, d), (a, a), (b, a)\}$  o relație binară pe  $A$ . Care este compunerea  $R \circ R$ ? Care este inversa  $R^{-1}$  a lui  $R$ ? Care dintre relațiile  $R, R^{-1}, R \circ R$  poate fi relația subiacentă unei funcții de la  $A$  la  $A$ ?

**Demonstrație:** Obținem

$$\begin{aligned} R \circ R &= \{(a, a), (a, b), (a, c), (a, d), (b, a), (b, b), (b, c)\}, \\ R^{-1} &= \{(a, a), (a, b), (b, a), (c, a), (d, c)\}. \end{aligned}$$

Niciuna dintre relațiile  $R, R^{-1}, R \circ R$  nu poate descrie o funcție de la  $A$  la  $A$ , deoarece

- (i)  $(a, b) \in R$  și  $(a, c) \in R$ ;
- (ii)  $(a, a) \in R^{-1}$  și  $(a, b) \in R^{-1}$ ;
- (iii) nu există  $y$  astfel încât  $(d, y) \in R \circ R$ .

De asemenea, se observă că o relație “validă” ar avea patru elemente, fapt ce nu e valabil pentru niciuna din relațiile de mai sus.  $\square$

(S1.3) Fie  $X$  o mulțime. Să se arate că nu există o funcție surjectivă cu domeniul  $X$  și codomeniul  $\mathcal{P}(X)$ .

**Demonstrație:** Presupunem că ar exista, și fie  $f : X \rightarrow \mathcal{P}(X)$  surjectivă. Fie mulțimea

$$A = \{x \in X \mid x \notin f(x)\} \in \mathcal{P}(X).$$

Dat fiind că  $f$  este surjectivă, există  $y \in X$  cu  $f(y) = A$ . Dar atunci:  $y \in A \Leftrightarrow y \notin f(y) = A \Leftrightarrow y \notin A$  ceea ce este o contradicție.  $\square$

**(S1.4)**

- (i) Demonstrați că orice intervale deschise  $(a, b)$ ,  $(c, d)$  ale lui  $\mathbb{R}$  sunt echipotente.
- (ii) Demonstrați că  $(0, 1)$ ,  $(0, 1]$ ,  $[0, 1)$ ,  $[0, 1]$  și  $\mathbb{R}$  sunt echipotente.

**Demonstrație:**

- (i) Fie funcția

$$f : (a, b) \rightarrow (c, d), \quad f(x) = \frac{d-c}{b-a}(x-a) + c \quad \text{pentru orice } x \in (a, b).$$

Dacă  $a < x < b$ , avem că  $0 < x - a < b - a$  și  $0 < \frac{d-c}{b-a}(x-a) < d-c$ . Adăugând  $c$ , rezultă că funcția noastră este bine definită, i.e. valoarea dată de noi pentru  $f(x)$  se află într-adevăr în  $(c, d)$ . Definim funcția

$$g : (c, d) \rightarrow (a, b), \quad g(x) = \frac{b-a}{d-c}(x-c) + a \quad \text{pentru orice } x \in (c, d).$$

Se observă ușor că  $f$  și  $g$  sunt inverse una celeilalte. Prin urmare,  $(a, b)$  și  $(c, d)$  sunt echipotente.

- (ii) Știm că  $\tan : (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \rightarrow \mathbb{R}$  este bijectivă, iar din punctul anterior avem că  $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$  este echipotent cu  $(0, 1)$ .

O soluție directă este: se ia funcția  $f : (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ , definită, pentru orice  $x \in (0, 1)$ , prin:

$$f(x) = \begin{cases} 2 - \frac{1}{x}, & \text{dacă } 0 < x < \frac{1}{2} \\ \frac{1}{1-x} - 2, & \text{altminteri} \end{cases}$$

ce are inversa  $f^{-1} : \mathbb{R} \rightarrow (0, 1)$ , definită, pentru orice  $y \in \mathbb{R}$ , prin:

$$f^{-1}(y) = \begin{cases} \frac{1}{2-y}, & \text{dacă } y < 0 \\ 1 - \frac{1}{2+y}, & \text{altminteri.} \end{cases}$$

Prin urmare,  $(0, 1)$  și  $\mathbb{R}$  sunt echipotente.

Se ia apoi funcția  $h : (0, 1] \rightarrow (0, 1)$ , definită, pentru orice  $x \in (0, 1]$ , prin:

$$h(x) = \begin{cases} \frac{1}{n+1}, & \text{dacă există } n \in \mathbb{N}^* \text{ a.î. } x = \frac{1}{n} \\ x, & \text{altminteri.} \end{cases}$$

Inversa sa  $h^{-1} : (0, 1) \rightarrow (0, 1]$  este definită, pentru orice  $y \in (0, 1)$ , prin:

$$h^{-1}(y) = \begin{cases} \frac{1}{n-1}, & \text{dacă există } n \in \mathbb{N}^* \text{ a.î. } y = \frac{1}{n} \\ y, & \text{altminteri} \end{cases}$$

Prin urmare,  $(0, 1]$  și  $(0, 1)$  sunt echipotente.

Considerăm apoi funcția  $j : [0, 1] \rightarrow (0, 1)$ , definită, pentru orice  $x \in [0, 1]$ , prin:

$$j(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & \text{dacă } x = 0 \\ \frac{1}{n+2}, & \text{dacă există } n \in \mathbb{N}^* \text{ a.î. } x = \frac{1}{n} \\ x, & \text{altminteri.} \end{cases}$$

Inversa sa  $j^{-1} : (0, 1) \rightarrow [0, 1]$  este definită, pentru orice  $y \in (0, 1)$ , prin:

$$j^{-1}(y) = \begin{cases} \frac{1}{n-2}, & \text{dacă există } n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1, 2\} \text{ a.î. } y = \frac{1}{n} \\ 0, & \text{dacă } y = \frac{1}{2} \\ y, & \text{altminteri} \end{cases}$$

Prin urmare,  $(0, 1)$  și  $[0, 1]$  sunt echipotente.

În sfârșit, se observă ușor că funcția  $F : (0, 1] \rightarrow [0, 1)$ ,  $F(x) = 1 - x$  este bijectivă (inversa lui  $F$  fiind tot  $F$ ). Prin urmare,  $(0, 1]$  și  $[0, 1)$  sunt echipotente.

□