Grafică rasterială – Procesarea imaginilor

Mihai-Sorin Stupariu

Sem. al II-lea, 2020 - 2021

Motivație

- Trei imagini digitale: una originalul, celelalte utilizează tehnici de compresie.


Image A


Image B


Image C

Sursa: C. Bénéteau, C. Haddad, D. Ruch, P. Van Fleet, *Why Wavelets?*, IMA Wavelet Workshop, 2011

Motivație

- Trei imagini digitale: una originalul, celelalte utilizează tehnici de compresie.

Image A

Image B

Image C

Sursa: C. Bénéteau, C. Haddad, D. Ruch, P. Van Fleet, *Why Wavelets?*, IMA Wavelet Workshop, 2011

- Originalul, (149604 bytes - Image B); a doua și a treia utilizează tehnici de compresie și contin 12253 bytes (Image C), respectiv 4452 bytes (Image A) (8%, respectiv 3% din original).

Semnale discrete și semnale continue

- O imagine digitală este privită ca un *semnal* (adică o funcție $s : A \to B$).

Semnale discrete și semnale continue

- O imagine digitală este privită ca un *semnal* (adică o funcție $s : A \to B$).
- Semnalele pot fi clasificate ca fiind:
  - discrete / continue (depinzând de domeniul A)
  - 1D / 2D / .... (depinzând de domeniul A)
  - scalare / vectoriale (depinzând de codomeniul B)

Semnale discrete și semnale continue

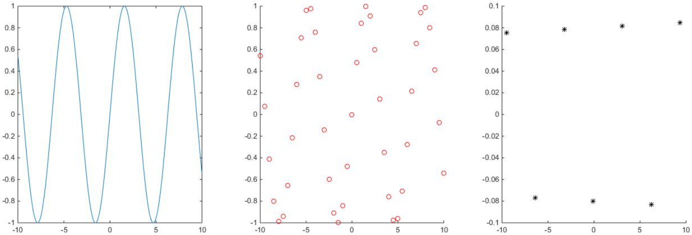
- O imagine digitală este privită ca un *semnal* (adică o funcție $s : A \to B$).
- Semnalele pot fi clasificate ca fiind:
  - discrete / continue (depinzând de domeniul A)
  - 1D / 2D / .... (depinzând de domeniul A)
  - scalare / vectoriale (depinzând de codomeniul B)
- Este necesară / utilă tranziția

discret $\longleftrightarrow$ continuu ($\longleftarrow$ eșantionare / sampling; $\longrightarrow$ reconstrucție)

Semnale discrete și semnale continue

- O imagine digitală este privită ca un *semnal* (adică o funcție $s : A \to B$).
- Semnalele pot fi clasificate ca fiind:
  - discrete / continue (depinzând de domeniul A)
  - 1D / 2D / .... (depinzând de domeniul A)
  - scalare / vectoriale (depinzând de codomeniul B)
- Este necesară / utilă tranziția

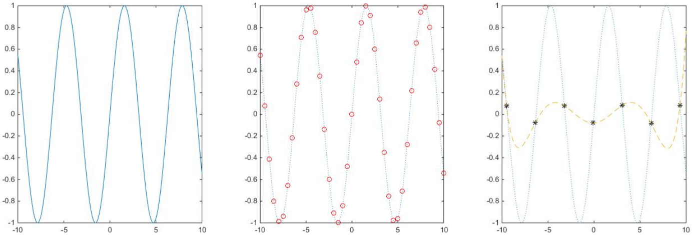
  discret $\longleftrightarrow$ continuu ($\longleftarrow$ eșantionare / sampling; $\longrightarrow$ reconstrucție)
- Exemplu de semnal discret și eșantionarea acestuia.



Semnale discrete și semnale continue

- O imagine digitală este privită ca un *semnal* (adică o funcție $s : A \to B$).
- Semnalele pot fi clasificate ca fiind:
  - discrete / continue (depinzând de domeniul A)
  - 1D / 2D / .... (depinzând de domeniul A)
  - scalare / vectoriale (depinzând de codomeniul B)
- Este necesară / utilă tranziția

  discret $\longleftrightarrow$ continuu ($\longleftarrow$ eșantionare / sampling; $\longrightarrow$ reconstrucție)
- Exemplu de semnal discret și eșantionarea acestuia.



Imaginile ca semnale discrete

- O *imagine* este un semnal digital discret, ce poate fi modelat cu ajutorul matricelor.

Imaginile ca semnale discrete

- O *imagine* este un semnal digital discret, ce poate fi modelat cu ajutorul matricelor.
- Folosind reprezentarea matriceală, pot fi efectuate diferite operații. De exemplu, dacă $c = 0.5$ și A este semnalul inițial, atunci $c \times A$ este o imagine cu un contrast mai redus; dacă T este matricea care are toate elementele 255 / 1 (valoarea maximă admisă), atunci $T - A$ este "negativul" imaginii inițiale A, etc.

A $c \cdot A$ A $T - A$ A $V \cdot A \cdot W$

Semnalul A și semnalul $c \cdot A$ ($c = 0.5$). Semnalul A și semnalul $T - A$, unde T este matricea care are toate elementele 255 / 1 (valoarea maximă admisă). Semnalul A și semnalul $V \cdot A \cdot W$, cu V, W convenabil alese.

Sursa: C. Bénéteau, C. Haddad, D. Ruch, P. Van Fleet, *Why Wavelets?*, IMA Wavelet Workshop, 2011

Produsul de convoluție - motivație

- Manevrarea / procesarea semnalelor se realizează cu ajutorul unei operații numite produs de convoluție.

Produsul de convoluție - motivație

- Manevrarea / procesarea semnalelor se realizează cu ajutorul unei operații numite produs de convoluție.
- În cazul 1D continuu, un semnal $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ este înlocuit cu un nou semnal,

$$\tilde{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad \tilde{f}(x) = \int_{x-r}^{x+r} f(t)dt.$$

Produsul de convoluție - motivație

- Manevrarea / procesarea semnalelor se realizează cu ajutorul unei operații numite produs de convoluție.
- În cazul 1D continuu, un semnal $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ este înlocuit cu un nou semnal,
$$\tilde{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad \tilde{f}(x) = \int_{x-r}^{x+r} f(t)dt.$$
- Pentru un semnal discret $a : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$, se generează un nou semnal $\tilde{a}$, având valoarea corespunzătoare unui număr i dată de media aritmetică a valorilor vecinilor:
$$\tilde{a} : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}, \quad \tilde{a}[i] = \frac{1}{2r+1} \sum_{j=i-r}^{i+r} a[j].$$

Produsul de convoluție - motivație

- Manevrarea / procesarea semnalelor se realizează cu ajutorul unei operații numite produs de convoluție.
- În cazul 1D continuu, un semnal $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ este înlocuit cu un nou semnal,

$$\tilde{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad \tilde{f}(x) = \int_{x-r}^{x+r} f(t)dt.$$

- Pentru un semnal discret $a : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$, se generează un nou semnal $\tilde{a}$, având valoarea corespunzătoare unui număr i dată de media aritmetică a valorilor vecinilor:

$$\tilde{a} : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}, \quad \tilde{a}[i] = \frac{1}{2r+1} \sum_{j=i-r}^{i+r} a[j].$$

- În loc de media aritmetică, poate fi considerată o medie ponderată.

Exemplu

Semnal $a : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$ discret; se consideră un nou semnal $\tilde{a} : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$, în care avem

$$\tilde{a}[i] = \frac{1}{16} a[i-2] + \frac{4}{16} a[i-1] + \frac{6}{16} a[i] + \frac{4}{16} a[i+1] + \frac{1}{16} a[i+2], \ \forall i$$

$\frac{1}{16}, \frac{4}{16}, \frac{6}{16}, \frac{4}{16}, \frac{1}{16}$ (ponderi)

Coeficienții pot fi priviți ca termeni ai unui alt semnal, numit "filtru"/"kernel"

$f : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$; $f[0] = \frac{6}{16}$; $f[1] = f[-1] = \frac{4}{16}$; $f[2] = f[-2] = \frac{1}{16}$, restul 0

Exemplu

Cu noile notații: $\tilde{a}[i] = f[2]\,a[i-2] + f[1]\,a[i-1] +$
$+ f[0]\,a[i] + f[-1]\,a[i+1] + f[-2]\,a[i+2]$

$$\tilde{a}[i] = \frac{1}{16}a[i-2] + \frac{4}{16}a[i-1] + \frac{6}{16}a[i] + \frac{4}{16}a[i+1] + \frac{1}{16}a[i+2], \ \forall i$$

$$\underbrace{\frac{1}{16}, \frac{4}{16}, \frac{6}{16}, \frac{4}{16}, \frac{1}{16}}$$ (ponderi)

Coeficienții pot fi priviți ca termenii ai unui alt semnal, numit "filtru"/"kernel"

$f: \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$; $f[0] = \frac{6}{16}$; $f[1] = f[-1] = \frac{4}{16}$; $f[2] = f[-2] = \frac{1}{16}$, restul 0

Cazul 1D (discret)

- **Notații.** Semnale discrete și continue
  - **Semnal discret:**

    $$a : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}; \quad i \mapsto a[i]$$

  - **Semnal continuu:**

    $$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \text{ (cu suport compact)}; \quad x \mapsto f(x)$$

- **Convoluție 1D – cazul discret**
  Definiție. Fie $a, b : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$ semnale discrete. **Convoluția (produsul de convoluție)** este semnalul $a \star b : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$ dat de formula

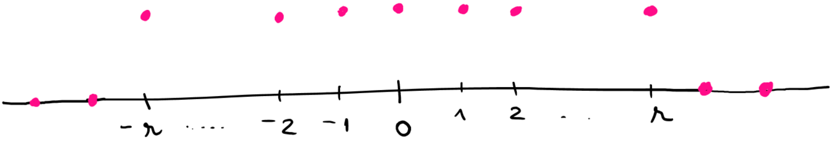
  $$(a \star b)[i] = \sum_{j \in \mathbb{Z}} a[j]b[i-j].$$

  $\delta : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}; \delta(a) = \begin{cases} 1, & a=0 \\ 0, & \text{în rest} \end{cases}$

- **Proprietăți ale produsului de convoluție – cazul discret:** asociativitate, comutativitate, element neutru (semnalul δ), distributivitate față de adunarea funcțiilor.

Exemplu: filtrul constant și convoluția cu un semnal

Filtrul constant (box filter)



$$f[i] = \begin{cases} \dfrac{1}{2r+1}, & \text{dacă } i = -r, \dots, -1, 0, 1, \dots, r \\ 0, & \text{în rest} \end{cases}$$

⚠ Suma tuturor valorilor este 1.

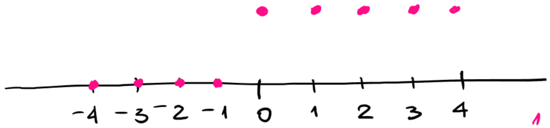
⚠ $r = 0 \Rightarrow$ se obține δ.

Exemplu: filtrul constant și convoluția cu un semnal

Concret: $r = 2$; deci $f[j] = \begin{cases} \frac{1}{5}, & j = -2, -1, 0, 1, 2 \\ 0, & \text{în rest} \end{cases}$

Semnal a:

$a[i] = \begin{cases} 1, & i \geq 0 \\ 0, & \text{în rest} \end{cases}$



Fixăm, de exemplu, $i = 1$.

(! restul $f[j] = 0$)

$$(f * a)[1] = \sum_{j \in \mathbb{Z}} f[j]\, a[1 - j] = \underbrace{f[-2]}_{=\frac{1}{5}} \cdot \underbrace{a[\underbrace{1-(-2)}_{3}]}_{=1} + \underbrace{f[-1]}_{\frac{1}{5}} \underbrace{a[\underbrace{1-(-1)}_{2}]}_{=1} + \underbrace{f[0]}_{\frac{1}{5}} \underbrace{a[\underbrace{1-0}_{1}]}_{=1} + \underbrace{f[1]}_{\frac{1}{5}} \underbrace{a[\underbrace{1-1}_{0}]}_{=1} + \overbrace{f[2]}^{\frac{1}{5}} \cdot \overbrace{a[\underbrace{1-2}_{-1}]}^{0}$$

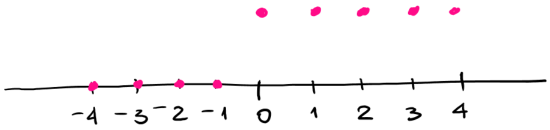
$$= \frac{4}{5}$$

Exemplu: filtrul constant și convoluția cu un semnal

Concret: $r = 2$; deci $f[j] = \begin{cases} \frac{1}{5}, & j = -2, -1, 0, 1, 2 \\ 0, & \text{în rest} \end{cases}$

Semnal a:

$a[i] = \begin{cases} 1, & i \geq 0 \\ 0, & \text{în rest} \end{cases}$



$(f * a)[1] = 0.8 \left(= \frac{4}{5}\right)$, $(f * a)[0] = 0.6 \left(= \frac{3}{5}\right)$ etc.

$$(f * a)[i] = \begin{cases} \frac{i+3}{5}, & i = -2, -1, 0, 1, 2 \\ 0, & i \leq -3 \\ 1, & i \geq 3 \end{cases}$$

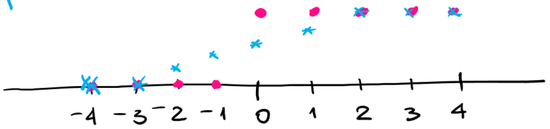
Exemplu: filtrul constant și convoluția cu un semnal

Concret: $r = 2$; deci $f[j] = \begin{cases} \frac{1}{5}, & j = -2, -1, 0, 1, 2 \\ 0, & \text{în rest} \end{cases}$

Semnal a:

$a[i] = \begin{cases} 1, & i \geq 0 \\ 0, & \text{în rest} \end{cases}$

$f * a$



$(f * a)[1] = 0.8 \left(= \frac{4}{5}\right)$, $(f * a)[0] = 0.6 \left(= \frac{3}{5}\right)$ etc.

$$(f * a)[i] = \begin{cases} \frac{i+3}{5}, & i = -2, -1, 0, 1, 2 \\ 0, & i \leq -3 \\ 1, & i \geq 3 \end{cases}$$

Cazul 1D (continuu)

- **Convoluție 1D – cazul continuu**
  Definiție. Fie $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ semnale continue. **Convoluția (produsul de convoluție)** este semnalul $f \star g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dat de formula

$$(f \star g)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)g(x - t)dt.$$

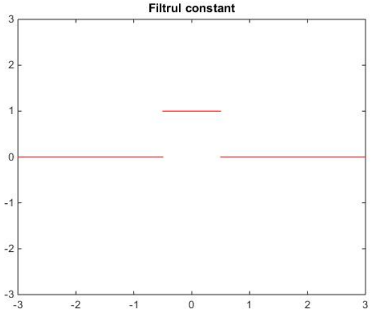
Cazul 1D (continuu)

- **Convoluție 1D – cazul continuu**
  Definiție. Fie $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ semnale continue. **Convoluția (produsul de convoluție)** este semnalul $f \star g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dat de formula
  $$(f \star g)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)g(x - t)dt.$$
- Aplicabilitatea lucrului cu funcții continue: sursă de exemple.

Filtrul constant

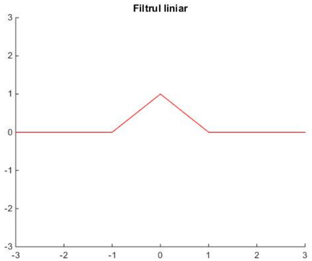
$$f_{\mathrm{const}} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}; \quad f_{\mathrm{const}}(x) = \begin{cases} 1 & x \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) \\ 0 & \text{în rest} \end{cases}$$

Observații. (i) Are loc relația $\int_{\infty}^{\infty} f_{\mathrm{const}}(x)dx = 1$. (ii) Cum ar putea fi definit filtrul constant pe intervalul $[-r, r)$, cu $r > 0$?



Filtrul liniar.

$$f_{\mathrm{lin}} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}; \quad f_{\mathrm{lin}}(x) = \begin{cases} 1 - |x| & x \in [-1, 1) \\ 0 & \text{în rest} \end{cases}$$



Pentru $r > 0$ filtrul liniar cu suport $[-r, r]$ este definit prin

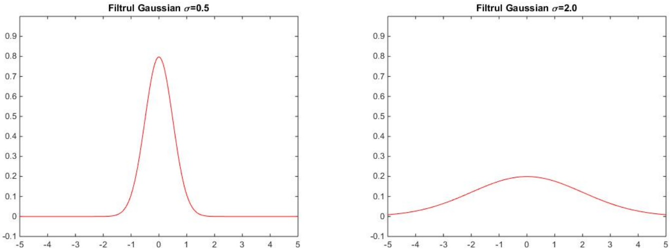
$$f_{\mathrm{lin},r} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}; \quad f_{\mathrm{lin},r}(x) = \frac{f_{\mathrm{lin}}\left(\frac{x}{r}\right)}{r}.$$

Filtrul Gaussian.

$$f_{\mathrm{G}} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}; \quad f_{\mathrm{G}}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}.$$

Pentru $\sigma > 0$ se definește

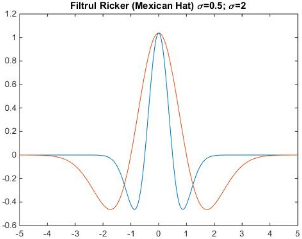
$$f_{\mathrm{G},\sigma} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}; \quad f_{\mathrm{G},\sigma}(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}.$$



Filtrul Ricker (Mexican Hat).

Pentru $\sigma > 0$ se definește

$$\psi_\sigma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}; \quad \psi_\sigma(x) = \frac{2}{\sqrt{3\sigma}\sqrt[4]{\pi}} \left(1 - \frac{x^2}{\sigma^2}\right) e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}.$$



Observație. Dezavantaje ale ultimelor două filtre: nu au suport compact, costisitoare.

Convoluția discret-continuu

- **Definiție.** Fie $a : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$ un semnal discret (semnal de intrare) și $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ un filtru continuu (cu suport compact). **Convoluția (produsul de convoluție)** este semnalul $a \star f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dat de formula

$$(a \star f)(x) = \sum_{j \in \mathbb{Z}} a[j] f(x - j).$$

Convoluția discret-continuu

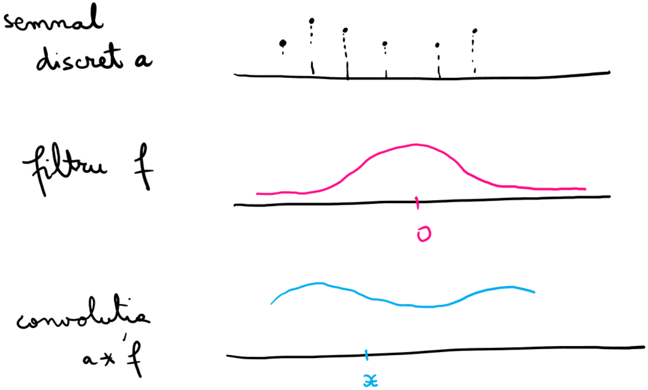
- **Definiție.** Fie $a : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$ un semnal discret (semnal de intrare) și $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ un filtru continuu (cu suport compact). **Convoluția (produsul de convoluție)** este semnalul $a \star f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dat de formula

$$(a \star f)(x) = \sum_{j \in \mathbb{Z}} a[j] f(x - j).$$

- **Observație.** Pentru $k \in \mathbb{Z}$, au sens atât $(a * f)(k)$ și $a[k]$; aceste valori nu sunt neapărat egale!

Exemplu

Fie a un semnal discret, f un filtru continuu de rază 2 centrat în 0 (cu suportul inclus în intervalul $(-2,2)$). Cum se calculează $(a * f)(5.3)$?



Exemplu

Fie a un semnal discret, f un filtru continuu de rază 2 centrat în 0 (cu suportul inclus în intervalul $(-2, 2)$). Cum se calculează $(a * f)(5.3)$?

$$(a * f)(x) = \sum_{j \in \mathbb{Z}} a[j] f(x - j)$$

$$(a * f)(5.3) = \sum_{j \in \mathbb{Z}} a[j] f(5.3 - j) =$$

în această sumă apar doar acele valori ale lui j pentru care $5.3 - j \in (-2, 2)$, mai precis apar: $j = 4$, $j = 5$, $j = 6$, $j = 7$

Exemplu

Fie a un semnal discret, f un filtru continuu de rază 2 centrat în 0 (cu suportul inclus în intervalul $(-2,2)$). Cum se calculează $(a * f)(5.3)$?

$$(a * f)(x) = \sum_{j \in \mathbb{Z}} a[j] f(x-j)$$

$$(a * f)(5.3) = \sum_{j \in \mathbb{Z}} a[j] f(5.3-j) =$$

$$= a[4] \cdot f(5.3-4) + a[5] \cdot f(5.3-5) +$$

$$+ a[6] \cdot f(5.3-6) + a[7] \cdot f(5.3-7) =$$

$$= a[4] f(1.3) + a[5] \cdot f(0.3) + a[6] \cdot f(-0.7) + a[7] \cdot f(-1.7)$$

↓ "mediere" a valorilor semnalului a din jurul lui x folosind filtrul f

Convoluție 2D (cazul discret)

Definiție. Fie $a, b : \mathbb{Z}^2 \to \mathbb{R}$ semnale discrete (cu suport finit).
Convoluția $a \star b$ este semnalul $a \star b : \mathbb{Z}^2 \to \mathbb{R}$ dat de formula

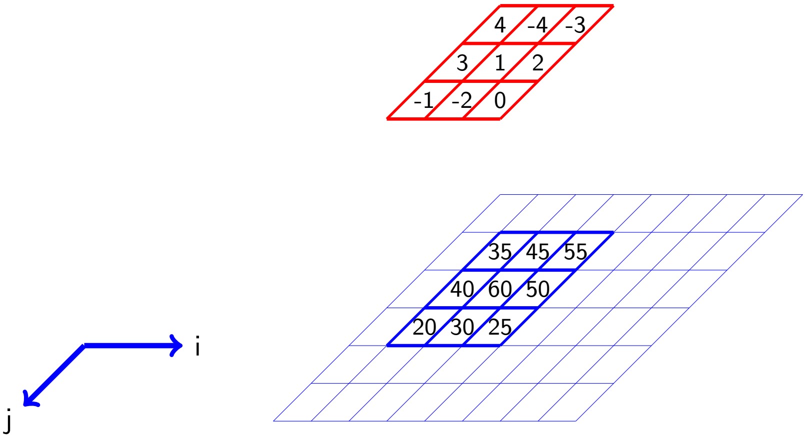
$$(a \star b)[i,j] = \sum_{i',j'} a[i',j']b[i-i',j-j'],$$

unde b poate fi privit ca semnal de intrare, iar a ca filtru (mască, nucleu/kernel, etc.).

Exemplu pentru convoluția 2D.
Aplicarea unor filtre este deja implementată în produsele software dedicate procesării imaginilor (de exemplu GIMP).

Produsul de convoluție – Convenție de notație

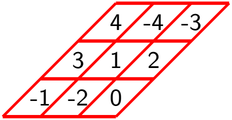
$$(a \star b)[i,j] = \sum_{i',j'} a[i',j']b[i-i',j-j'],$$



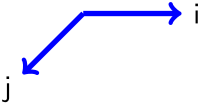
Produsul de convoluție – Convenție de notație

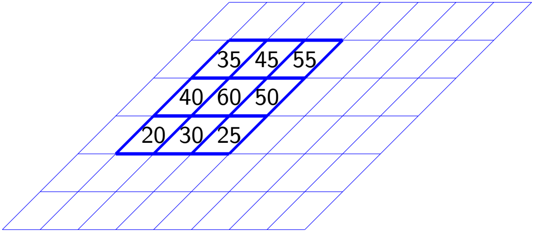
$$(a \star b)[i,j] = \sum_{i',j'} a[i',j']b[i-i',j-j'],$$

$$a[0,0] = 1$$
$$a[0,1] = -4$$
$$a[0,-1] = -2$$
$$a[1,0] = 3$$



$$b[i,j] = 60$$
$$b[i,j-1] = 45$$
$$b[i,j+1] = 30$$
$$b[i-1,j] = 40$$

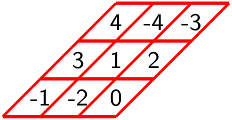


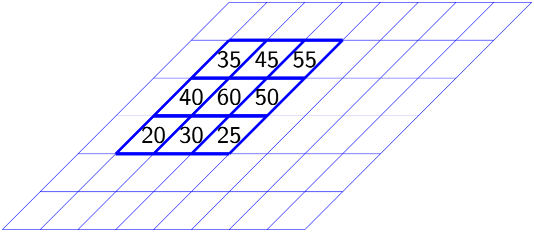


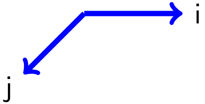
Produsul de convoluție – Convenție de notație

$$(a \star b)[i,j] = \sum_{i',j'} a[i',j']b[i-i',j-j'],$$

$$(a \star b)[i,j] = 4 \cdot 35 + (-4) \cdot 45 + -3 \cdot 55 + \ldots$$



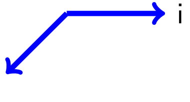


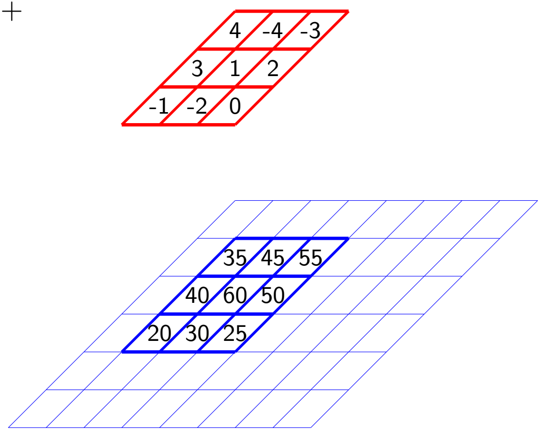


Produsul de convoluție – Convenție de notație

$$(a \star b)[i,j] = \sum_{i',j'} a[i',j']b[i-i',j-j'],$$

$$\begin{aligned}(a \star b)[i,j] = 4 \cdot 35+\\ (-4) \cdot 45+\\ -3 \cdot 55+\\ 3 \cdot 40+\\ 1 \cdot 60+\\ 2 \cdot 50+\\ (-1) \cdot 20\\ (-2) \cdot 30+\\ 0 \cdot 25 = -5\end{aligned}$$





Alt exemplu

$$\begin{matrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & 0 \end{matrix}$$

ce valoare apare în locul lui 70?

$$\begin{matrix} 10 & 20 & 40 \\ 20 & 70 & 30 \\ 20 & 30 & 30 \end{matrix}$$

Primele 5 răsp. corecte: 2p bonus

Filtre de convoluție continue – cazul 2D

- Dat un filtru 1D continuu, $f^{(1)} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, acesta poate fi folosit pentru a construi un filtru 2D, $f^{(2)} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, dat de formula

$$f^{(2)}(x, y) = f^{(1)}(x) \cdot f^{(1)}(y).$$

Filtre de convoluție continue – cazul 2D

- Dat un filtru 1D continuu, $f^{(1)} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, acesta poate fi folosit pentru a construi un filtru 2D, $f^{(2)} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, dat de formula
$$f^{(2)}(x, y) = f^{(1)}(x) \cdot f^{(1)}(y).$$
- **Filtrul liniar** f_{lin} induce filtrul 2D
$$f_{\mathrm{lin}}^{(2)} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}; \quad f_{\mathrm{lin}}^{(2)}(x, y) = \begin{cases} (1 - |x|)(1 - |y|) & |x|, |y| \leq 1 \\ 0 & \text{în rest} \end{cases}$$

Filtre de convoluție continue – cazul 2D

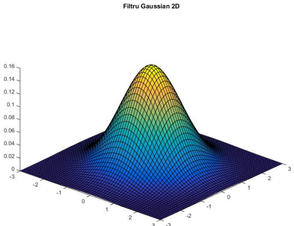
- Dat un filtru 1D continuu, $f^{(1)} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, acesta poate fi folosit pentru a construi un filtru 2D, $f^{(2)} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, dat de formula

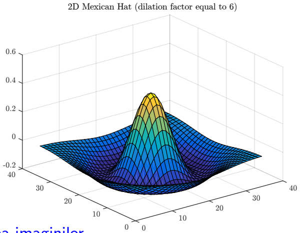
$$f^{(2)}(x, y) = f^{(1)}(x) \cdot f^{(1)}(y).$$

- **Filtrul liniar** f_{lin} induce filtrul 2D

$$f_{\mathrm{lin}}^{(2)} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}; \quad f_{\mathrm{lin}}^{(2)}(x, y) = \begin{cases} (1 - |x|)(1 - |y|) & |x|, |y| \leq 1 \\ 0 & \text{în rest} \end{cases}$$

- **Filtrul Gaussian** $f_G^{(2)}\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ are proprietatea de simetrie circulară, deoarece $f_G^{(2)}(x, y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}} = \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{x^2+y^2}{2}} = \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{\rho^2}{2}}$





Utilizarea produsului de convoluție în grafică

Exemplul 1. Obținerea *“soft drop shadows”*.

Exemplul 2. Redimensionarea unui semnal discret.

Exemplul 3. Detectarea contururilor / muchiilor.

Exemplul 4. Ilustrări ale aplicării produsului de convoluție în grafică.

Exemplul 5. Există implementări bazate pe OpenGL / GLSL.

Exemplu - *soft drop shadows*

Filtre:

- "shift": fixat (m_0, n_0)

$$d_{(m_0,n_0)}[i,j] = \begin{cases} 1, & i = m_0, \ j = n_0 \\ 0, & \text{în rest} \end{cases}$$

- "blur": $f^{(2)}_{G,\sigma}$

- "scalare": s_c (înmulțire cu $c \in (0,1)$)

$$I_{umbră} = s_c * \left(f^{(2)}_{G,\sigma} * \left(d_{(m_0,n_0)} * I_{inițială} \right) \right) =$$

$$= \underbrace{\left(s_c * f^{(2)}_{G,\sigma} * d_{(m_0,n_0)} \right)}_{\text{filtrul corespunzător}} * I_{inițială}$$

Exemplu - redimensionarea unui semnal discret

cameră foto → 4000 × 3000
monitor → 1280 × 1024

? pentru a reprezenta <u>toată</u> imaginea pe <u>tot</u> monitorul?

semnal discret (imag. inițială) | $\xrightarrow{\text{convoluție}}$ semnal continuu (teoretic)
filtru continuu

$\xrightarrow{\text{reeșantionare}}$ semnal discret final
(calculul valorilor relevante)

Detectarea contururilor - motivație

- **Muchie (contur)**: variație în valoarea scării de gri / a culorii, deci trebuie măsurată **variația semnalului.**

Detectarea contururilor - motivație

- **Muchie (contur)**: variație în valoarea scării de gri / a culorii, deci trebuie măsurată **variația semnalului.**
- **În cazul continuu:** fie $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de clasă (cel puțin) $\mathcal{C}^1$. **Gradientul** lui f într-un punct (x_0, y_0) este

$$\nabla f(x_0, y_0) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0), \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \right).$$

Detectarea contururilor - motivație

- **Muchie (contur)**: variație în valoarea scării de gri / a culorii, deci trebuie măsurată **variația semnalului.**
- **În cazul continuu:** fie $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de clasă (cel puțin) $\mathcal{C}^1$. **Gradientul** lui f într-un punct (x_0, y_0) este

$$\nabla f(x_0, y_0) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0), \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \right).$$

- **Trecerea la cazul discret:** Avem

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \lim_{\Delta h \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta h, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta h}, \ldots$$

Detectarea contururilor - motivație

- **Muchie (contur)**: variație în valoarea scării de gri / a culorii, deci trebuie măsurată **variația semnalului.**
- **În cazul continuu:** fie $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de clasă (cel puțin) $\mathcal{C}^1$. **Gradientul** lui f într-un punct (x_0, y_0) este

$$\nabla f(x_0, y_0) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0), \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \right).$$

- **Trecerea la cazul discret:** Avem

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \lim_{\Delta h \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta h, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta h}, \ldots$$

- **Pentru cazul discret** se consideră $\Delta h = 1$ și se calculează "derivate" în direcția x, respectiv direcția y prin formulele

$$f[x_0 + 1, y_0] - f[x_0, y_0]$$

$$f[x_0, y_0 + 1] - f[x_0, y_0]$$

Detectarea contururilor - interpretare cu ajutorul semnalelor

- Fie $a : \mathbb{Z}^2 \to \mathbb{R}^d$ ($d \in \mathbb{N}^*$) un semnal discret. Avem

$$a[i+1, j] - a[i, j] =$$

Detectarea contururilor - interpretare cu ajutorul semnalelor

- Fie $a : \mathbb{Z}^2 \to \mathbb{R}^d$ ($d \in \mathbb{N}^*$) un semnal discret. Avem

$$a[i+1,j] - a[i,j] =$$

$$= 1 \cdot a[i+1,j] + (-1) \cdot a[i,j] =$$

Detectarea contururilor - interpretare cu ajutorul semnalelor

- Fie $a : \mathbb{Z}^2 \to \mathbb{R}^d$ ($d \in \mathbb{N}^*$) un semnal discret. Avem

$$a[i+1,j] - a[i,j] =$$

$$= 1 \cdot a[i+1,j] + (-1) \cdot a[i,j] =$$

$$= \underbrace{1}_{f[-1,0]} \cdot a[i+1,j] + \underbrace{(-1)}_{f[0,0]} \cdot a[i,j] \stackrel{NOT}{=} c[i,j],$$

unde $c = a \star f$ și f este filtrul descris mai sus.

Detectarea contururilor - interpretare cu ajutorul semnalelor

- Fie $a : \mathbb{Z}^2 \to \mathbb{R}^d$ ($d \in \mathbb{N}^*$) un semnal discret. Avem

$$a[i+1,j] - a[i,j] =$$

$$= 1 \cdot a[i+1,j] + (-1) \cdot a[i,j] =$$

$$= \underbrace{1}_{f[-1,0]} \cdot a[i+1,j] + \underbrace{(-1)}_{f[0,0]} \cdot a[i,j] \overset{NOT}{=} c[i,j],$$

  unde $c = a \star f$ și f este filtrul descris mai sus.
- Altfel spus, "derivata parțială în direcția i" este dată de filtrul

$$f = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \leftarrow f[-1,0] \\ \leftarrow f[0,0] \end{array},$$

  iar operația poate fi interpretată ca o convoluție.

Detectarea contururilor - alte exemple de filtre

- **Detectorul Roberts:**

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}; \qquad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Detectarea contururilor - alte exemple de filtre

- **Detectorul Roberts:**

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}; \qquad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

- **Detectorul Prewitt:**

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}; \qquad \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Detectarea contururilor - alte exemple de filtre

- **Detectorul Roberts:**

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}; \qquad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

- **Detectorul Prewitt:**

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}; \qquad \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- **Detectorul Sobel:**

$$\begin{pmatrix} -1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}; \qquad \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Pentru derivata secundă

- "Derivata derivatei"

$$f \stackrel{\text{derivare}}{\longmapsto} g \stackrel{\text{derivare}}{\longmapsto} h$$

Pentru derivata secundă

- "Derivata derivatei"

$$f \overset{\text{derivare}}{\longmapsto} g \overset{\text{derivare}}{\longmapsto} h$$

$$\begin{array}{ccc} g[x+1,y] & - & g[x,y] \\ \| & & \| \\ (f[x+2,y]-f[x+1,y]) & - & (f[x+1,y]-f[x,y]) = \end{array}$$

$$= f[x+2,y] - 2f[x+1,y] + f[x,y],$$

deci filtrul dat de $[1,-2,1]^t$.

Pentru derivata secundă

- "Derivata derivatei"

$$f \overset{\text{derivare}}{\mapsto} g \overset{\text{derivare}}{\mapsto} h$$

$$\begin{array}{ccc} g[x+1,y] & - & g[x,y] \\ \| & & \| \\ (f[x+2,y]-f[x+1,y]) & - & (f[x+1,y]-f[x,y]) = \end{array}$$

$$= f[x+2,y] - 2f[x+1,y] + f[x,y],$$

  deci filtrul dat de $[1,-2,1]^t$.

- În practică: **Laplacian**

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -1 & 8 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Compresia imaginilor - motivație

- Se dorește transmiterea unui semnal. Cum se poate face aceasta cât mai eficient? Ce înseamnă *compresia* imaginilor? Există tehnici de compresie cu sau fără pierdere de informații (”*lossy*” sau ”*lossless*”).

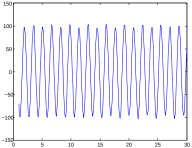
Compresia imaginilor - motivație

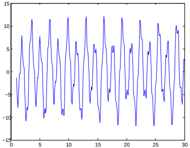
- Se dorește transmiterea unui semnal. Cum se poate face aceasta cât mai eficient? Ce înseamnă *compresia* imaginilor? Există tehnici de compresie cu sau fără pierdere de informații (*"lossy"* sau *"lossless"*).

Graficele semnalelor periodice $3\sin(2x) + 100\sin(4x) - 2\sin(300x)$, respectiv $3\sin(2x) + 8\sin(4x) - 2\sin(300x)$.

Compresia imaginilor - motivație

- Se dorește transmiterea unui semnal. Cum se poate face aceasta cât mai eficient? Ce înseamnă *compresia* imaginilor? Există tehnici de compresie cu sau fără pierdere de informații (”*lossy*” sau ”*lossless*”).



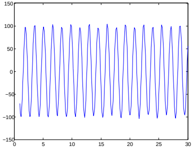


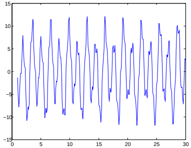
Graficele semnalelor periodice $3\sin(2x) + 100\sin(4x) - 2\sin(300x)$, respectiv $3\sin(2x) + 8\sin(4x) - 2\sin(300x)$.

  - Cele două semnale din Figură ”componente de frecvență”: 2, 4, 300 de ori pe $[0, 2\pi]$

Compresia imaginilor - motivație

- Se dorește transmiterea unui semnal. Cum se poate face aceasta cât mai eficient? Ce înseamnă *compresia* imaginilor? Există tehnici de compresie cu sau fără pierdere de informații (*"lossy"* sau *"lossless"*).





Graficele semnalelor periodice $3\sin(2x) + 100\sin(4x) - 2\sin(300x)$, respectiv $3\sin(2x) + 8\sin(4x) - 2\sin(300x)$.

  - Cele două semnale din Figură "componente de frecvență": 2, 4, 300 de ori pe $[0, 2\pi]$
  - Pentru componenta de frecvență $\frac{\pi}{2}$: coeficientul din primul semnal "domină" coeficientul celui de-al doilea semnal

Compresia imaginilor - motivație

- Se dorește transmiterea unui semnal. Cum se poate face aceasta cât mai eficient? Ce înseamnă *compresia* imaginilor? Există tehnici de compresie cu sau fără pierdere de informații (”*lossy*” sau ”*lossless*”).

Graficele semnalelor periodice $3\sin(2x) + 100\sin(4x) - 2\sin(300x)$, respectiv $3\sin(2x) + 8\sin(4x) - 2\sin(300x)$.

  - Cele două semnale din Figură ”componente de frecvență”: 2, 4, 300 de ori pe $[0, 2\pi]$
  - Pentru componenta de frecvență $\frac{\pi}{2}$: coeficientul din primul semnal ”domină” coeficientul celui de-al doilea semnal
  - **Compresia datelor**: eliminarea coeficienților ”mai puțin relevanți”, eliminarea zgomotelor (frecvențe mari).

Transformata Fourier continuă

- **Fapt:** orice semnal periodic $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ poate fi scris ca

$$f(x) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} [a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)]$$

Transformata Fourier continuă

- **Fapt:** orice semnal periodic $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ poate fi scris ca

$$f(x) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} [a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)]$$

  - **Semnificație:**

Transformata Fourier continuă

- **Fapt:** orice semnal periodic $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ poate fi scris ca

$$f(x) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} [a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)]$$

  - **Semnificație:**
  - Este indicată o bază $\mathcal{B} = (1, \cos(n\cdot), \sin(n\cdot))$ a unui spațiu vectorial real (infinit dimensional) de funcții.
  - Semnalul este "descompus" în raport cu această bază:

Transformata Fourier continuă

- **Fapt:** orice semnal periodic $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ poate fi scris ca

$$f(x) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} [a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)]$$

  - **Semnificație:**
  - Este indicată o bază $\mathcal{B} = (1, \cos(n\cdot), \sin(n\cdot))$ a unui spațiu vectorial real (infinit dimensional) de funcții.
  - Semnalul este "descompus" în raport cu această bază:
  - a da un semnal este echivalent cu a da coeficienții $a_0, a_1, a_2, \ldots; b_0, b_1, b_2, \ldots$.

Transformata Fourier continuă

- **Fapt:** orice semnal periodic $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ poate fi scris ca

$$f(x) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} [a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)]$$

  - **Semnificație:**
  - Este indicată o bază $\mathcal{B} = (1, \cos(n\cdot), \sin(n\cdot))$ a unui spațiu vectorial real (infinit dimensional) de funcții.
  - Semnalul este "descompus" în raport cu această bază:
  - a da un semnal este echivalent cu a da coeficienții $a_0, a_1, a_2, \ldots; b_0, b_1, b_2, \ldots$.
  - Pentru a "comprima" / aproxima semnalul este suficient să fie indicați un număr finit de coeficienți!

Exemple

1. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \cos^2(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos(2x)$, deci $a_0 = \frac{1}{2}, a_2 = \frac{1}{2}$, restul 0.

Exemple

1. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \cos^2(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos(2x)$, deci $a_0 = \frac{1}{2}, a_2 = \frac{1}{2}$, restul 0.
2. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \sin^2(x)$ avem

$$\sin^2 x = 1 - \cos^2 x = \underbrace{\frac{1}{2}}_{=a_0} \underbrace{- \frac{1}{2}}_{=a_2} \cos(2x)$$

Exemple

1. $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\cos^2(x)=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos(2x)$, deci $a_0=\frac{1}{2}, a_2=\frac{1}{2}$, restul 0.
2. $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\sin^2(x)$ avem

$$\sin^2 x = 1-\cos^2 x = \underbrace{\frac{1}{2}}_{= a_0} \underbrace{-\frac{1}{2}}_{= a_2}\cos(2x)$$

3. Pentru funcțiile definite pe $[-\pi,\pi]$ au loc relațiile

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)dx,\ n\geq 0;\ b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(nx)dx,\quad n\geq 1.$$

Exemple

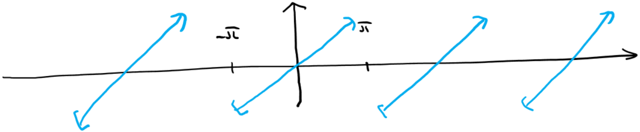
4. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = x$ pe $[-\pi, \pi)$, în rest periodicitate.

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx) dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x \cos(nx) dx = 0, \quad \forall n \geq 0,$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(nx) dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x \sin(nx) = \ldots = 2 \cdot \frac{(-1)^{n+1}}{n},$$

deci

$$f(x) = 2 \sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sin(nx).$$



Relații fundamentale

- Au loc egalitățile:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos(mx)\cos(nx)dx = \begin{cases} 0, & m \neq n \\ 2\pi, & m = n = 0 \\ \pi, & m = n \neq 0 \end{cases}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin(mx)\sin(nx)dx = \begin{cases} 0, & m \neq n \\ \pi, & m = n \end{cases}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos(mx)\sin(nx)dx = 0$$

Relații fundamentale

- Au loc egalitățile:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos(mx)\cos(nx)dx = \begin{cases} 0, & m \neq n \\ 2\pi, & m = n = 0 \\ \pi, & m = n \neq 0 \end{cases}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin(mx)\sin(nx)dx = \begin{cases} 0, & m \neq n \\ \pi, & m = n \end{cases}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos(mx)\sin(nx)dx = 0$$

- **Semnificație:** Baza $\mathcal{B} = (1, \cos(n\cdot), \sin(n\cdot))$ este o bază *ortogonală* a spațiului de funcții considerat! (produsul scalar este dat de integrare)

Transformata Fourier – cazul continuu

- **Transformata Fourier** a unei funcții f este $\hat{f}$, unde

$$\hat{f}(\omega) = \int_I f(t)e^{-i\omega t}dt,$$

unde ω: frecvență, I convenabil

Transformata Fourier – cazul continuu

- **Transformata Fourier** a unei funcții f este $\hat{f}$, unde

$$\hat{f}(\omega) = \int_I f(t)e^{-i\omega t}dt,$$

unde ω: frecvență, I convenabil

- **Observații și proprietăți:**

Transformata Fourier – cazul continuu

- **Transformata Fourier** a unei funcții f este $\hat{f}$, unde

$$\hat{f}(\omega) = \int_I f(t)e^{-i\omega t}dt,$$

unde ω: frecvență, I convenabil

- **Observații și proprietăți:**
  - f este definită în "domeniul spațial", iar $\hat{f}$ în "domeniul frecvențelor"

Transformata Fourier – cazul continuu

- **Transformata Fourier** a unei funcții f este $\hat{f}$, unde

$$\hat{f}(\omega) = \int_I f(t)e^{-i\omega t}dt,$$

  unde ω: frecvență, I convenabil

- **Observații și proprietăți:**
  - f este definită în "domeniul spațial", iar $\hat{f}$ în "domeniul frecvențelor"
  - transformarea $f \mapsto \hat{f}$ este inversabilă, iar inversa se determină cu o formulă asemănătoare

Transformata Fourier – cazul continuu

- **Transformata Fourier** a unei funcții f este $\hat{f}$, unde

$$\hat{f}(\omega) = \int_I f(t)e^{-i\omega t}dt,$$

unde ω: frecvență, I convenabil

- **Observații și proprietăți:**
  - f este definită în "domeniul spațial", iar $\hat{f}$ în "domeniul frecvențelor"
  - transformarea $f \mapsto \hat{f}$ este inversabilă, iar inversa se determină cu o formulă asemănătoare
  - are loc relația $\widehat{f \star g} = \hat{f} \cdot \hat{g}$

Transformata Fourier – cazul continuu

- **Transformata Fourier** a unei funcții f este $\hat{f}$, unde

$$\hat{f}(\omega) = \int_I f(t)e^{-i\omega t}dt,$$

unde ω: frecvență, I convenabil

- **Observații și proprietăți:**
  - f este definită în "domeniul spațial", iar $\hat{f}$ în "domeniul frecvențelor"
  - transformarea $f \mapsto \hat{f}$ este inversabilă, iar inversa se determină cu o formulă asemănătoare
  - are loc relația $\widehat{f \star g} = \hat{f} \cdot \hat{g}$
  - transformata Fourier $\hat{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ are valori complexe (magnitudinea $|\hat{f}|$ și faza / unghiul)

Transformata Fourier – cazul discret

- Fie x un semnal discret de perioada n,

$$x[0], x[1], x[2], \ldots, x[n]$$

Transformata Fourier pentru x este

$$\hat{x}[u] = \sum_{k=0}^{n-1} x[k] e^{-2\pi i \cdot \frac{uk}{n}}.$$

Transformata Fourier – cazul discret

- Fie x un semnal discret de perioada n,

$$x[0], x[1], x[2], \ldots, x[n]$$

Transformata Fourier pentru x este

$$\hat{x}[u] = \sum_{k=0}^{n-1} x[k] e^{-2\pi i \cdot \frac{uk}{n}}.$$

- Analog pentru semnale discrete 2D ("principiul separabilității")

$$\hat{x}[u, v] = \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{l=0}^{m-1} x[k, l] e^{-2\pi i \cdot \left(\frac{uk}{n} + \frac{vl}{m}\right)}.$$

Aplicare

- Semnalul: transformat, coeficienții Fourier ai frecvențelor înalte: eliminați.

Aplicare

- Semnalul: transformat, coeficienții Fourier ai frecvențelor înalte: eliminați.
- Fast Fourier Transform (FFT) eficientizează algoritmul ($O(n \log n)$ în loc de $O(n^2)$)

Aplicare

- Semnalul: transformat, coeficienții Fourier ai frecvențelor înalte: eliminați.
- Fast Fourier Transform (FFT) eficientizează algoritmul ($O(n \log n)$ în loc de $O(n^2)$)
- Discrete Cosine Transform (DCT): "partea reală"

Aplicare

- Semnalul: transformat, coeficienții Fourier ai frecvențelor înalte: eliminați.
- Fast Fourier Transform (FFT) eficientizează algoritmul ($O(n \log n)$ în loc de $O(n^2)$)
- Discrete Cosine Transform (DCT): "partea reală"
- Implementare: formatul JPEG

Aplicare

- Semnalul: transformat, coeficienții Fourier ai frecvențelor înalte: eliminați.
- Fast Fourier Transform (FFT) eficientizează algoritmul ($O(n \log n)$ în loc de $O(n^2)$)
- Discrete Cosine Transform (DCT): "partea reală"
- Implementare: formatul JPEG
- Exemplu

Aplicare

- Semnalul: transformat, coeficienții Fourier ai frecvențelor înalte: eliminați.
- Fast Fourier Transform (FFT) eficientizează algoritmul ($O(n \log n)$ în loc de $O(n^2)$)
- Discrete Cosine Transform (DCT): "partea reală"
- Implementare: formatul JPEG
- Exemplu
- **Dezavantaje:**
  - Nu orice semnal este periodic.

Aplicare

- Semnalul: transformat, coeficienții Fourier ai frecvențelor înalte: eliminați.
- Fast Fourier Transform (FFT) eficientizează algoritmul ($O(n \log n)$ în loc de $O(n^2)$)
- Discrete Cosine Transform (DCT): "partea reală"
- Implementare: formatul JPEG
- Exemplu
- **Dezavantaje:**
  - Nu orice semnal este periodic.
  - Unele semnale sunt "localizate"

Transformata Haar

- Dat un semnal discret 1D, i.e. un șir de numere reale $x = (x_1, x_2, \ldots, x_N)$ cu N par. Trebuie transmisă o aproximare s a acestor date, iar lungimea aproximării trebuie să fie $N/2$. Cum se procedează?

Transformata Haar

- Dat un semnal discret 1D, i.e. un șir de numere reale $\mathrm{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_N)$ cu N par. Trebuie transmisă o aproximare s a acestor date, iar lungimea aproximării trebuie să fie $N/2$. Cum se procedează?
- De exemplu

$$\mathrm{x} = (440, 446, 502, 504, 530, 530).$$

Transformata Haar

- Dat un semnal discret 1D, i.e. un șir de numere reale $\mathrm{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_N)$ cu N par. Trebuie transmisă o aproximare s a acestor date, iar lungimea aproximării trebuie să fie $N/2$. Cum se procedează?
- De exemplu
$$\mathrm{x} = (440, 446, 502, 504, 530, 530).$$
- Pot fi transmise mediile termenilor alăturați, adică semnalul
$$\mathrm{s} = (443, 503, 530).$$

Transformata Haar

- Dat un semnal discret 1D, i.e. un șir de numere reale $\mathrm{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_N)$ cu N par. Trebuie transmisă o aproximare s a acestor date, iar lungimea aproximării trebuie să fie $N/2$. Cum se procedează?
- De exemplu
$$\mathrm{x} = (440, 446, 502, 504, 530, 530).$$
- Pot fi transmise mediile termenilor alăturați, adică semnalul
$$\mathrm{s} = (443, 503, 530).$$
- Este posibil să fie trimis și un set de date adiționale. De exemplu, poate fi trimisă o a doua listă d. Ce listă ar putea fi trimisă așa încât lista inițială x să poată fi "recuperată" din s și d?

Transformata Haar

- Dat un semnal discret 1D, i.e. un șir de numere reale $x = (x_1, x_2, \ldots, x_N)$ cu N par. Trebuie transmisă o aproximare s a acestor date, iar lungimea aproximării trebuie să fie $N/2$. Cum se procedează?
- De exemplu
$$x = (440, 446, 502, 504, 530, 530).$$
- Pot fi transmise mediile termenilor alăturați, adică semnalul
$$s = (443, 503, 530).$$
- Este posibil să fie trimis și un set de date adiționale. De exemplu, poate fi trimisă o a doua listă d. Ce listă ar putea fi trimisă așa încât lista inițială x să poată fi "recuperată" din s și d?
- Pot fi transmise semi-diferențele termenilor alăturați
$$d = (3, 1, 0).$$

Transformata Haar

- Dat un semnal discret 1D, i.e. un șir de numere reale $\mathrm{x} = (x_1, x_2, \dots, x_N)$ cu N par. Trebuie transmisă o aproximare s a acestor date, iar lungimea aproximării trebuie să fie $N/2$. Cum se procedează?
- De exemplu
$$\mathrm{x} = (440, 446, 502, 504, 530, 530).$$
- Pot fi transmise mediile termenilor alăturați, adică semnalul
$$\mathrm{s} = (443, 503, 530).$$
- Este posibil să fie trimis și un set de date adiționale. De exemplu, poate fi trimisă o a doua listă d. Ce listă ar putea fi trimisă așa încât lista inițială x să poată fi “recuperată” din s și d?
- Pot fi transmise semi-diferențele termenilor alăturați
$$\mathrm{d} = (3, 1, 0).$$
- Concluzie: dat un semnal x au fost generate semnalele s și d. A da semnalul inițial $\mathrm{x}(x_1, x_2, \dots, x_N)$, cu N par este echivalent cu a da perechea de semnale $(\mathrm{s}|\mathrm{d}) = (s_1, s_2, \dots, s_{N/2}|d_1, d_2, \dots, d_{N/2})$, unde
$$\mathrm{s}_k = (x_{2k+1} + x_{2k+2})/2; \qquad \mathrm{d}_k = (-x_{2k+1} + x_{2k+2})/2.$$

Transformata Haar

- Dat un semnal discret 1D, i.e. un șir de numere reale $\mathrm{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_N)$ cu N par. Trebuie transmisă o aproximare s a acestor date, iar lungimea aproximării trebuie să fie $N/2$. Cum se procedează?
- De exemplu
$$\mathrm{x} = (440, 446, 502, 504, 530, 530).$$
- Pot fi transmise mediile termenilor alăturați, adică semnalul
$$\mathrm{s} = (443, 503, 530).$$
- Este posibil să fie trimis și un set de date adiționale. De exemplu, poate fi trimisă o a doua listă d. Ce listă ar putea fi trimisă așa încât lista inițială x să poată fi "recuperată" din s și d?
- Pot fi transmise semi-diferențele termenilor alăturați
$$\mathrm{d} = (3, 1, 0).$$
- Concluzie: dat un semnal x au fost generate semnalele s și d. A da semnalul inițial $\mathrm{x}(x_1, x_2, \ldots, x_N)$, cu N par este echivalent cu a da perechea de semnale $(\mathrm{s}|\mathrm{d}) = (s_1, s_2, \ldots, s_{N/2}|d_1, d_2, \ldots, d_{N/2})$, unde
$$\mathrm{s}_k = (x_{2k+1} + x_{2k+2})/2; \qquad \mathrm{d}_k = (-x_{2k+1} + x_{2k+2})/2.$$
- Transformarea $\mathrm{x} \mapsto (\mathrm{s}|\mathrm{d})$ se numește transformarea Haar discretă *(Discrete Haar Wavelet Transform)*.

Transformata Haar – Exemplu

Dat un semnal $x = (100, 100, 80, 60, 40, 40, 40, 20)$.

Rezoluție	Medii	Diferențe
$8(= 2^3)$	100 100 80 60 40 40 40 20	
$4(= 2^2)$	100 70 40 30	$0\ -10\ 0\ -10$
$2 = (2^1)$	85 35	$-15\ -5$
$1 = (2^0)$	60	-25

Semnalul inițial este echivalent cu semnalul

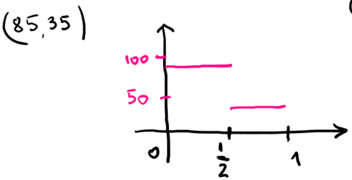
$$[60; -25; -15, -5; 0, -10, 0, -10].$$

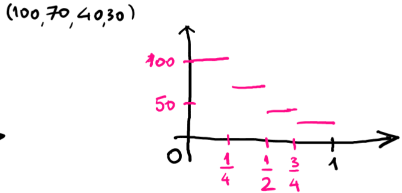
Semnalele ca funcții constante pe porțiuni

- Un semnal discret poate fi privit ca o funcție constantă pe porțiuni, definită pe un anumit interval (de exemplu $[0, 1]$). "Porțiunile" vor fi subintervale echidistante ale lui $[0, 1]$.

Semnalele ca funcții constante pe porțiuni

- Un semnal discret poate fi privit ca o funcție constantă pe porțiuni, definită pe un anumit interval (de exemplu $[0, 1]$). "Porțiunile" vor fi subintervale echidistante ale lui $[0, 1]$.
- Pentru exemplul anterior: semnalele "medie" la nivelurile de rezoluție intermediare.





Spații de funcții

- Apar, în mod natural, spații de funcții

Spații de funcții

- Apar, în mod natural, spații de funcții
    - V^0=spațiul funcțiilor constante pe $[0, 1]$ (0 în rest)

Spații de funcții

- Apar, în mod natural, spații de funcții
  - V^0=spațiul funcțiilor constante pe $[0, 1]$ (0 în rest)
  - V^1=spațiul funcțiilor constante pe $[0, \frac{1}{2})$ și $[\frac{1}{2}, 1)$ (0 în rest)

Spații de funcții

- Apar, în mod natural, spații de funcții
  - V^0=spațiul funcțiilor constante pe $[0,1]$ (0 în rest)
  - V^1=spațiul funcțiilor constante pe $[0,\frac{1}{2})$ și $[\frac{1}{2},1)$ (0 în rest)
  - V^2=spațiul funcțiilor constante pe $[0,\frac{1}{2^2})$; $[\frac{1}{2^2},\frac{2}{2^2})$; $[\frac{3}{2^2},\frac{3}{2^2})$ și $[\frac{3}{2^2},\frac{4}{2^2})$ (0 în rest)

Spații de funcții

- Apar, în mod natural, spații de funcții
  - V^0=spațiul funcțiilor constante pe $[0,1]$ (0 în rest)
  - V^1=spațiul funcțiilor constante pe $[0,\frac{1}{2})$ și $[\frac{1}{2},1)$ (0 în rest)
  - V^2=spațiul funcțiilor constante pe $[0,\frac{1}{2^2})$; $[\frac{1}{2^2},\frac{2}{2^2})$; $[\frac{3}{2^2},\frac{3}{2^2})$ și $[\frac{3}{2^2},\frac{4}{2^2})$ (0 în rest)
  - $\ldots$

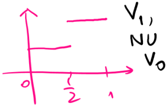
Spații de funcții

- Apar, în mod natural, spații de funcții
  - V^0=spațiul funcțiilor constante pe $[0,1]$ (0 în rest)
  - V^1=spațiul funcțiilor constante pe $[0,\frac{1}{2})$ și $[\frac{1}{2},1)$ (0 în rest)
  - V^2=spațiul funcțiilor constante pe $[0,\frac{1}{2^2})$; $[\frac{1}{2^2},\frac{2}{2^2})$; $[\frac{3}{2^2},\frac{3}{2^2})$ și $[\frac{3}{2^2},\frac{4}{2^2})$ (0 în rest)
  - $\ldots$
  - $V^j = \cdots\cdots\ [0,\frac{1}{2^j}); \ldots [\frac{k}{2^2},\frac{k+1}{2^j});$

Spații de funcții

- Apar, în mod natural, spații de funcții
  - V^0=spațiul funcțiilor constante pe $[0,1]$ (0 în rest)
  - V^1=spațiul funcțiilor constante pe $[0,\frac{1}{2})$ și $[\frac{1}{2},1)$ (0 în rest)
  - V^2=spațiul funcțiilor constante pe $[0,\frac{1}{2^2})$; $[\frac{1}{2^2},\frac{2}{2^2})$; $[\frac{3}{2^2},\frac{3}{2^2})$ și $[\frac{3}{2^2},\frac{4}{2^2})$ (0 în rest)
  - ...
  - $V^j = \cdots\cdots\ [0,\frac{1}{2^j}); \ldots [\frac{k}{2^2},\frac{k+1}{2^j});$
- Au loc incluziunile naturale

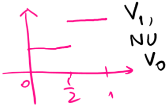
$$V^0 \subsetneq V^1 \subsetneq V^2 \subsetneq \ldots \subsetneq V^j \subsetneq$$



Spații de funcții

- Apar, în mod natural, spații de funcții
  - V^0=spațiul funcțiilor constante pe $[0,1]$ (0 în rest)
  - V^1=spațiul funcțiilor constante pe $[0,\frac{1}{2})$ și $[\frac{1}{2},1)$ (0 în rest)
  - V^2=spațiul funcțiilor constante pe $[0,\frac{1}{2^2})$; $[\frac{1}{2^2},\frac{2}{2^2})$; $[\frac{3}{2^2},\frac{3}{2^2})$ și $[\frac{3}{2^2},\frac{4}{2^2})$ (0 în rest)
  - ...
  - $V^j= \cdots\cdots\ [0,\frac{1}{2^j}); \ldots [\frac{k}{2^2},\frac{k+1}{2^j});$
- Au loc incluziunile naturale

$$V^0 \subsetneqq V^1 \subsetneqq V^2 \subsetneqq \ldots \subsetneqq V^j \subsetneqq$$

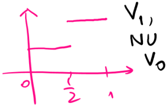


- Întrebări naturale:

Spații de funcții

- Apar, în mod natural, spații de funcții
  - V^0=spațiul funcțiilor constante pe $[0,1]$ (0 în rest)
  - V^1=spațiul funcțiilor constante pe $[0,\frac{1}{2})$ și $[\frac{1}{2},1)$ (0 în rest)
  - V^2=spațiul funcțiilor constante pe $[0,\frac{1}{2^2})$; $[\frac{1}{2^2},\frac{2}{2^2})$; $[\frac{3}{2^2},\frac{3}{2^2})$ și $[\frac{3}{2^2},\frac{4}{2^2})$ (0 în rest)
  - $\ldots$
  - $V^j = \cdots\cdots\ [0,\frac{1}{2^j}); \ldots [\frac{k}{2^2},\frac{k+1}{2^j});$
- Au loc incluziunile naturale

$$V^0 \subsetneqq V^1 \subsetneqq V^2 \subsetneqq \ldots \subsetneqq V^j \subsetneqq$$

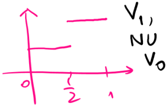


- Întrebări naturale:
  - Bază pentru spațiul $V^j (j \in \mathbb{N})$?

Spații de funcții

- Apar, în mod natural, spații de funcții
  - V^0=spațiul funcțiilor constante pe $[0,1]$ (0 în rest)
  - V^1=spațiul funcțiilor constante pe $[0,\frac{1}{2})$ și $[\frac{1}{2},1)$ (0 în rest)
  - V^2=spațiul funcțiilor constante pe $[0,\frac{1}{2^2})$; $[\frac{1}{2^2},\frac{2}{2^2})$; $[\frac{3}{2^2},\frac{3}{2^2})$ și $[\frac{3}{2^2},\frac{4}{2^2})$ (0 în rest)
  - ...
  - $V^j = \cdots\cdots\ [0,\frac{1}{2^j}); \ldots [\frac{k}{2^2},\frac{k+1}{2^j});$
- Au loc incluziunile naturale

$$V^0 \subsetneq V^1 \subsetneq V^2 \subsetneq \ldots \subsetneq V^j \subsetneq$$



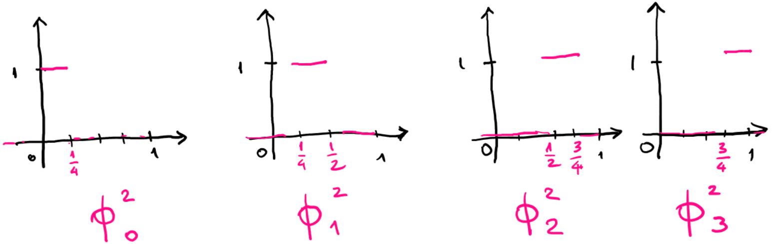
- Întrebări naturale:
  - Bază pentru spațiul $V^j (j \in \mathbb{N})$?
  - Incluziunea $V^j \subsetneq V^{j+1}$ este strictă. Ce se poate spune despre diferență?

O bază a spațiului V^2

- Spațiul V^2: funcții constante pe $[0, \frac{1}{2^2})$; $[\frac{1}{2^2}, \frac{2}{2^2})$; $[\frac{3}{2^2}, \frac{3}{2^2})$ și $[\frac{3}{2^2}, \frac{4}{2^2})$ (0 în rest).

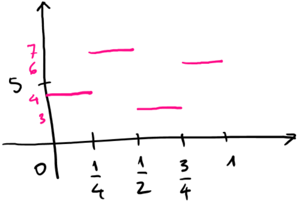
O bază a spațiului V^2

- Spațiul V^2: funcții constante pe $[0, \frac{1}{2^2})$; $[\frac{1}{2^2}, \frac{2}{2^2})$; $[\frac{3}{2^2}, \frac{3}{2^2})$ și $[\frac{3}{2^2}, \frac{4}{2^2})$ (0 în rest).
- O bază a spațiului V^2 este dată de funcțiile $\phi_0^2, \phi_1^2, \phi_2^2, \phi_3^2$



Exemplu

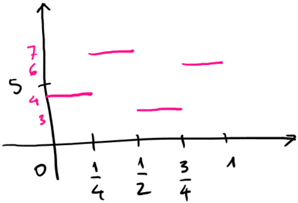
- Funcția f care este 4 pe intervalul $[0, \frac{1}{4})$, 7 pe $[\frac{1}{4}, \frac{2}{4})$, 3 pe $[\frac{2}{4}, \frac{3}{4})$, 6 pe $[\frac{3}{4}, 1)$.



$$f = 4\cdot\phi^2_0 + 7\cdot\phi^2_1 + 3\cdot\phi^2_2 + 6\cdot\phi^2_3$$

Exemplu

- Funcția f care este 4 pe intervalul $[0, \frac{1}{4})$, 7 pe $[\frac{1}{4}, \frac{2}{4})$, 3 pe $[\frac{2}{4}, \frac{3}{4})$, 6 pe $[\frac{3}{4}, 1)$.



$$f = 4 \cdot \phi_0^2 + 7 \cdot \phi_1^2 + 3 \cdot \phi_2^2 + 6 \cdot \phi_3^2$$

- Funcția dată se scrie ca $f = 4\phi_0^2 + 7\phi_1^2 + 3\phi_2^2 + 6\phi_3^2$

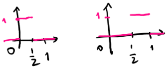
Fapt esențial referitor la bazele spațiilor V^j

- Baza spațiului V^0

Fapt esențial referitor la bazele spațiilor V^j

- Baza spațiului V^0

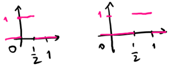
- Baza spațiului V^1



Fapt esențial referitor la bazele spațiilor V^j

- Baza spațiului V^0

- Baza spațiului V^1



- De fapt, funcțiile ϕ_0^1, ϕ_1^1 sunt versiuni scalate și translatate ale unei **singure funcții**, și anume

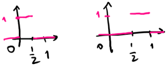
$$\phi^0 = \phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad \phi(x) = \begin{cases} 1 & \text{pe } [0,1) \\ 0 & \text{în rest} \end{cases}$$

ϕ se numește **scaling function**.

Fapt esențial referitor la bazele spațiilor V^j

- Baza spațiului V^0

- Baza spațiului V^1



- De fapt, funcțiile ϕ_0^1, ϕ_1^1 sunt versiuni scalate și translatate ale unei **singure funcții**, și anume

$$\phi^0 = \phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad \phi(x) = \begin{cases} 1 & \text{pe } [0,1) \\ 0 & \text{în rest} \end{cases}$$

  ϕ se numește **scaling function**.

- Pentru $j \in \mathbb{N}$, $k = 0, \ldots, j-1$ are loc relația

$$\phi_k^j(x) = \phi(2^j x - k).$$

Spațiile de “detalii”

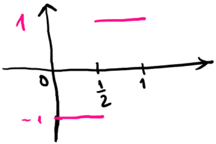
- Au loc incluziunile $V^0 \subsetneq V^1 \subsetneq V^2 \subsetneq \ldots \subsetneq V^j \subsetneq$. Prin alegerea unei baze convenabile, se poate scrie

$$V^{j+1} = V^j \oplus W^{j+1}$$

În această descompunere:
V^j: **mediile**, generate de ϕ^j_k
W^{j+1}: **detaliile**, generate de funcții ψ^j_k

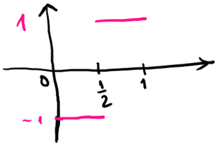
Spațiile de "detalii"

- Au loc incluziunile $V^0 \subsetneq V^1 \subsetneq V^2 \subsetneq \ldots \subsetneq V^j \subsetneq$. Prin alegerea unei baze convenabile, se poate scrie
$$V^{j+1} = V^j \oplus W^{j+1}$$
În această descompunere:
V^j: **mediile**, generate de ϕ_k^j
W^{j+1}: **detaliile**, generate de funcții ψ_k^j
- Analog, $j \in \mathbb{N}$, $k = 0, \ldots, j-1$ are loc o relație de forma
$$\psi_k^j(x) = \psi(2^j x - k),$$
unde ψ este o funcție care este în V^1, dar nu în V^0.



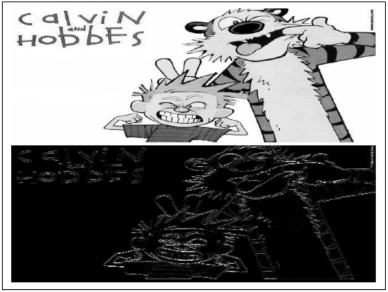
Spațiile de "detalii"

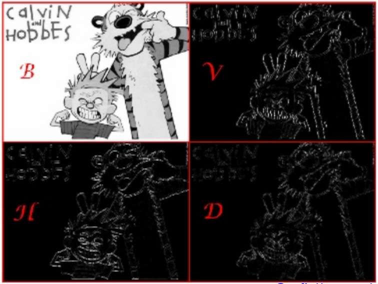
- Au loc incluziunile $V^0 \subsetneq V^1 \subsetneq V^2 \subsetneq \ldots \subsetneq V^j \subsetneq$. Prin alegerea unei baze convenabile, se poate scrie
$$V^{j+1} = V^j \oplus W^{j+1}$$
În această descompunere:
V^j: **mediile**, generate de ϕ_k^j
W^{j+1}: **detaliile**, generate de funcții ψ_k^j
- Analog, $j \in \mathbb{N}$, $k = 0, \ldots, j-1$ are loc o relație de forma
$$\psi_k^j(x) = \psi(2^j x - k),$$
unde ψ este o funcție care este în V^1, dar nu în V^0.

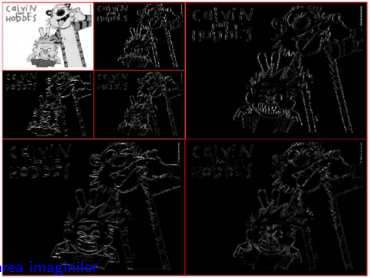


- Funcțiile ψ_k^j se numesc **wavelet functions**. Funcția ψ s.n. **wavelet mother/wavelet function.**

Pentru imagini...







Transformata Haar – Exemplu cu completare

Dat un semnal $x = (100, 100, 80, 60, 40, 40, 40, 20)$.

Rezoluție	Medii	Diferențe
$8(= 2^3)$	100 100 80 60 40 40 40 20	
$4(= 2^2)$	100 70 40 30	$0 \quad -10 \; 0 \quad -10$
$2 = (2^1)$	85 35	$-15 \quad -5$
$1 = (2^0)$	60	-25

Semnalul inițial este echivalent cu semnalul

$$[60; -25; -15, -5; 0, -10, 0, -10].$$

$y = (85, 35) = 85\phi_0^1 + 35\phi_1^1 \in \underline{V^1}$

pe $[0, \frac{1}{2})$: $60 - (-25)$

$[\frac{1}{2}, 1)$: $60 + (-25)$

$\rightarrow \underbrace{60 \cdot \phi_0^0}_{} + \underbrace{(-25)}_{}\psi_0^0$, $60 \cdot \phi_0^0 \in V^0$, $(-25)\psi_0^0 \in \underline{W^0}$

Concluzii

- **Intuitiv:** Baza de funcții periodice de la transformata Fourier este înlocuită cu altă bază (alte baze)

Concluzii

- **Intuitiv:** Baza de funcții periodice de la transformata Fourier este înlocuită cu altă bază (alte baze)
- Mecansimul de generare: prin divizare

Concluzii

- **Intuitiv:** Baza de funcții periodice de la transformata Fourier este înlocuită cu altă bază (alte baze)
- Mecansimul de generare: prin divizare
- Esențiale: φ (”*scaling function*”), ψ (”*wavelet*”) cu ajutorul acestora este construită baza spațiului de funcții

Concluzii

- **Intuitiv:** Baza de funcții periodice de la transformata Fourier este înlocuită cu altă bază (alte baze)
- Mecansimul de generare: prin divizare
- Esențiale: φ (”*scaling function*”), ψ (”*wavelet*”) cu ajutorul acestora este construită baza spațiului de funcții
- Diverse alegeri pentru $\varphi \& \psi$ (Haar, Daubechies, Meyer, ”*mexican hat*”) și aplicații în domenii variate, inclusiv modelul de compresie JPEG 2000.

Concluzii

- **Intuitiv:** Baza de funcții periodice de la transformata Fourier este înlocuită cu altă bază (alte baze)
- Mecansimul de generare: prin divizare
- Esențiale: φ (”*scaling function*”), ψ (”*wavelet*”) cu ajutorul acestora este construită baza spațiului de funcții
- Diverse alegeri pentru $\varphi \& \psi$ (Haar, Daubechies, Meyer, ”*mexican hat*”) și aplicații în domenii variate, inclusiv modelul de compresie JPEG 2000.
- **Avantaje:**

Concluzii

- **Intuitiv:** Baza de funcții periodice de la transformata Fourier este înlocuită cu altă bază (alte baze)
- Mecansimul de generare: prin divizare
- Esențiale: φ (”*scaling function*”), ψ (”*wavelet*”) cu ajutorul acestora este construită baza spațiului de funcții
- Diverse alegeri pentru $\varphi \& \psi$ (Haar, Daubechies, Meyer, ”*mexican hat*”) și aplicații în domenii variate, inclusiv modelul de compresie JPEG 2000.
- **Avantaje:**
  - Utilizarea în analize multi-rezoluție, datorită percepției ”*multi-scale*”

Concluzii

- **Intuitiv:** Baza de funcții periodice de la transformata Fourier este înlocuită cu altă bază (alte baze)
- Mecansimul de generare: prin divizare
- Esențiale: φ (*"scaling function"*), ψ (*"wavelet"*) cu ajutorul acestora este construită baza spațiului de funcții
- Diverse alegeri pentru $\varphi \& \psi$ (Haar, Daubechies, Meyer, *"mexican hat"*) și aplicații în domenii variate, inclusiv modelul de compresie JPEG 2000.
- **Avantaje:**
  - Utilizarea în analize multi-rezoluție, datorită percepției *"multi-scale"*
  - Pot fi utilizate și pentru semnale cu discontinuități / care nu sunt periodice.

Exerciții

1. Fie f filtrul continuu constant nenul pe $(-2, 2)$. Determinaţi intervalul pe care va fi nenulă convoluţia $f \star f$.

2. Fie a un semnal discret şi f un filtru continuu de rază 2. Explicaţi cum se calculează $(a \star f)(6.2)$.

3. Considerăm funcţia periodică $f(x) = 2\cos^2 x - \sin^2 x$ şi fie $f(x) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} [a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)]$ dezvoltarea în serie Fourier a lui f. Stabiliţi câţi dintre coeficienţii $(a_i)_i$ şi $(b_i)_i$ sunt nenuli.

4. Fie $f = 2\phi_0^2 + 3\phi_1^2 + 3\phi_2^2 + 5\phi_3^2$ în spaţiul V^2. Determinaţi $f(\frac{1}{8}) + f(\frac{3}{8}) + f(\frac{5}{8}) + f(\frac{7}{8})$.