FMI, Info, 2018/2019, Anul I
Logică matematică şi computaţională

Seminar 12

(S12.1) Să se ruleze algoritmul Davis-Putnam pentru intrarea:

$$\{\{\neg v_0, \neg v_1, v_2\}, \{\neg v_3, v_1, v_4\}, \{\neg v_0, \neg v_4, v_5\}, \{\neg v_2, v_6\}, \{\neg v_5, v_6\}, \{\neg v_0, v_3\}, \{v_0\}, \{\neg v_6\}\}.$$

Demonstraţie: Notând mulţimea de clauze de mai sus cu $\mathcal{S}$, obţinem următoarea rulare:

$$
\begin{array}{ll}
 & i := 1 \\
 & \mathcal{S}_1 := \mathcal{S} \\
P1.1. & x_1 := v_0 \\
 & T_1^1 := \{\{v_0\}\} \\
 & T_1^0 := \{\{\neg v_0, \neg v_1, v_2\}, \{\neg v_0, \neg v_4, v_5\}, \{\neg v_0, v_3\}\} \\
P1.2. & U_1 := \{\{\neg v_1, v_2\}, \{\neg v_4, v_5\}, \{v_3\}\} \\
P1.3. & \mathcal{S}_2 := \{\{\neg v_3, v_1, v_4\}, \{\neg v_2, v_6\}, \{\neg v_5, v_6\}, \{\neg v_6\}, \{\neg v_1, v_2\}, \{\neg v_4, v_5\}, \{v_3\}\} \\
P1.4. & i := 2;\ \text{goto } P2.1 \\
P2.1. & x_2 := v_1 \\
 & T_2^1 := \{\{\neg v_3, v_1, v_4\}\} \\
 & T_2^0 := \{\{\neg v_1, v_2\}\} \\
P2.2. & U_2 := \{\{\neg v_3, v_4, v_2\}\} \\
P2.3. & \mathcal{S}_3 := \{\{\neg v_2, v_6\}, \{\neg v_5, v_6\}, \{\neg v_6\}, \{\neg v_4, v_5\}, \{v_3\}, \{\neg v_3, v_4, v_2\}\} \\
P2.4. & i := 3;\ \text{goto } P3.1 \\
P3.1. & x_3 := v_2 \\
 & T_3^1 := \{\{\neg v_3, v_4, v_2\}\} \\
 & T_3^0 := \{\{\neg v_2, v_6\}\} \\
P3.2. & U_3 := \{\{\neg v_3, v_4, v_6\}\} \\
P3.3. & \mathcal{S}_4 := \{\{\neg v_5, v_6\}, \{\neg v_6\}, \{\neg v_4, v_5\}, \{v_3\}, \{\neg v_3, v_4, v_6\}\} \\
P3.4. & i := 4;\ \text{goto } P4.1
\end{array}
$$

$P4.1.$	$x_4 := v_3$
	$T_4^1 := \{\{v_3\}\}$
	$T_4^0 := \{\{\neg v_3, v_4, v_6\}\}$
$P4.2.$	$U_4 := \{\{v_4, v_6\}\}$
$P4.3.$	$\mathcal{S}_5 := \{\{\neg v_5, v_6\}, \{\neg v_6\}, \{\neg v_4, v_5\}, \{v_4, v_6\}\}$
$P4.4.$	$i := 5;$ goto $P5.1$
$P5.1.$	$x_5 := v_4$
	$T_5^1 := \{\{v_4, v_6\}\}$
	$T_5^0 := \{\{\neg v_4, v_5\}\}$
$P5.2.$	$U_5 := \{\{v_5, v_6\}\}$
$P5.3.$	$\mathcal{S}_6 := \{\{\neg v_5, v_6\}, \{\neg v_6\}, \{v_5, v_6\}\}$
$P5.4.$	$i := 6;$ goto $P6.1$
$P6.1.$	$x_6 := v_5$
	$T_6^1 := \{\{v_5, v_6\}\}$
	$T_6^0 := \{\{\neg v_5, v_6\}\}$
$P6.2.$	$U_6 := \{\{v_6\}\}$
$P6.3.$	$\mathcal{S}_7 := \{\{\neg v_6\}, \{v_6\}\}$
$P6.4.$	$i := 7;$ goto $P7.1$
$P7.1.$	$x_7 := v_6$
	$T_7^1 := \{\{v_6\}\}$
	$T_7^0 := \{\{\neg v_6\}\}$
$P7.2.$	$U_7 := \{\square\}$
$P7.3.$	$\mathcal{S}_8 := \{\square\}$
$P7.4.$	$\square \in \mathcal{S}_8 \Rightarrow \mathcal{S}$ este nesatisfiabilă.

$\square$

(S12.2) Există o derivare prin rezoluţie a lui $\square$ din mulţimea de clauze $\mathcal{S} := \{C_1 := \{v_0, \neg v_1\}, C_2 := \{\neg v_0, v_1\}\}$? Justificaţi.

Demonstraţie: Fie mulţimea de clauze $\mathcal{S}' := \{C_1, C_2, C_3 := \{v_0, \neg v_0\}, C_4 := \{v_1, \neg v_1\}\}$. Observăm că $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{S}'$ şi că:

$$Res(C_1, C_1) = \emptyset$$

$$Res(C_1, C_2) = \{C_3, C_4\}$$

$$Res(C_1, C_3) = \{C_1\}$$

$$Res(C_1, C_4) = \{C_1\}$$
$$Res(C_2, C_2) = \emptyset$$
$$Res(C_2, C_3) = \{C_2\}$$
$$Res(C_2, C_4) = \{C_2\}$$
$$Res(C_3, C_3) = \{C_3\}$$
$$Res(C_3, C_4) = \emptyset$$
$$Res(C_4, C_4) = \{C_4\}$$

Am arătat, deci, că pentru orice $D_1, D_2 \in \mathcal{S}'$, $Res(D_1, D_2) \subseteq \mathcal{S}'$ (*). Presupunem prin absurd că există o derivare prin rezoluţie a lui $\square$ din $\mathcal{S}$ şi fie aceasta $(C'_1, \ldots, C'_n = \square)$. Demonstrăm prin inducţie completă că pentru orice $i \in \{1, \ldots, n\}$, $C'_i \in \mathcal{S}'$. Fie un astfel de i. Din definiţia derivării, avem că ori $C'_i \in \mathcal{S} \subseteq \mathcal{S}'$, ceea ce rezolvă problema, ori există $j, k < i$ cu $C'_i \in Res(C'_j, C'_k)$. Din ipoteza de inducţie completă, $C'_j, C'_k \in \mathcal{S}'$, iar din (*) avem $Res(C'_j, C'_k) \subseteq \mathcal{S}'$, deci $C'_i \in \mathcal{S}'$. Am obţinut că $C'_n = \square \in \mathcal{S}'$, ceea ce este o contradicţie. Rămâne că nu există o derivare prin rezoluţie a lui $\square$ din $\mathcal{S}$. $\square$

(S12.3) Demonstraţi, folosindu-vă de proprietăţile satisfacerii semantice şi de aplicarea sistematică (i.e., via algoritmul Davis-Putnam) a regulii rezoluţiei:

$$\{v_2, v_2 \to \neg v_3, v_3 \to v_4\} \vDash (\neg v_3 \to \neg(v_1 \to \neg v_2)) \vee (v_1 \to (v_3 \wedge v_4)) \vee v_4.$$

Demonstraţie: Aplicând Propoziţia 7.11.(i), condiţia din enunţ este echivalentă cu faptul că mulţimea de formule:

$$\{v_2, v_2 \to \neg v_3, v_3 \to v_4, \neg((\neg v_3 \to \neg(v_1 \to \neg v_2)) \vee (v_1 \to (v_3 \wedge v_4)) \vee v_4)\}$$

este nesatisfiabilă şi, mai departe, din Propoziţia 7.12.(i), cu faptul că formula:

$$v_2 \wedge (v_2 \to \neg v_3) \wedge (v_3 \to v_4) \wedge \neg((\neg v_3 \to \neg(v_1 \to \neg v_2)) \vee (v_1 \to (v_3 \wedge v_4)) \vee v_4)$$

este nesatisfiabilă. Aplicând transformări sintactice succesive, obţinem că formula de mai sus este echivalentă, pe rând, cu:

$$v_2 \wedge (\neg v_2 \vee \neg v_3) \wedge (\neg v_3 \vee v_4) \wedge \neg(\neg\neg v_3 \vee \neg(\neg v_1 \vee \neg v_2) \vee \neg v_1 \vee (v_3 \wedge v_4) \vee v_4),$$

$$v_2 \wedge (\neg v_2 \vee \neg v_3) \wedge (\neg v_3 \vee v_4) \wedge \neg\neg\neg v_3 \wedge \neg\neg(\neg v_1 \vee \neg v_2) \wedge \neg\neg v_1 \wedge \neg(v_3 \wedge v_4) \wedge \neg v_4,$$
$$v_2 \wedge (\neg v_2 \vee \neg v_3) \wedge (\neg v_3 \vee v_4) \wedge \neg v_3 \wedge (\neg v_1 \vee \neg v_2) \wedge v_1 \wedge \neg(v_3 \wedge v_4) \wedge \neg v_4,$$
$$v_2 \wedge (\neg v_2 \vee \neg v_3) \wedge (\neg v_3 \vee v_4) \wedge \neg v_3 \wedge (\neg v_1 \vee \neg v_2) \wedge v_1 \wedge (\neg v_3 \vee \neg v_4) \wedge \neg v_4,$$

ultima formulă fiind în FNC şi corespunzându-i forma clauzală:

$$\mathcal{S} := \{\{v_2\}, \{\neg v_2, \neg v_3\}, \{\neg v_3, v_4\}, \{\neg v_3\}, \{\neg v_1, \neg v_2\}, \{v_1\}, \{\neg v_3, \neg v_4\}, \{\neg v_4\}\},$$

despre care vom arăta că este nesatisfiabilă, încheind astfel demonstraţia (prin aplicarea Propoziţiei 11.25). Folosim mulţimea $\mathcal{S}$ ca intrare a algoritmului Davis-Putnam, a cărui rulare se produce după cum urmează.

$$\begin{array}{ll}
 & i := 1 \\
 & \mathcal{S}_1 := \{\{v_2\}, \{\neg v_2, \neg v_3\}, \{\neg v_3, v_4\}, \{\neg v_3\}, \{\neg v_1, \neg v_2\}, \{v_1\}, \{\neg v_3, \neg v_4\}, \{\neg v_4\}\} \\
P1.1. & x_1 := v_1 \\
 & T_1^1 := \{\{v_1\}\} \\
 & T_1^0 := \{\{\neg v_1, \neg v_2\}\} \\
P1.2. & U_1 := \{\{\neg v_2\}\} \\
P1.3. & \mathcal{S}_2 := \{\{v_2\}, \{\neg v_2, \neg v_3\}, \{\neg v_3, v_4\}, \{\neg v_3\}, \{\neg v_3, \neg v_4\}, \{\neg v_4\}, \{\neg v_2\}\} \\
P1.4. & i := 2;\ \text{goto } P2.1 \\
P2.1. & x_2 := v_2 \\
 & T_2^1 := \{\{v_2\}\} \\
 & T_2^0 := \{\{\neg v_2, \neg v_3\}, \{\neg v_2\}\} \\
P2.2. & U_2 := \{\{\neg v_3\}, \square\} \\
P2.3. & \mathcal{S}_3 := \{\{\neg v_3, v_4\}, \{\neg v_3\}, \{\neg v_3, \neg v_4\}, \{\neg v_4\}, \{\neg v_3\}, \square\} \\
P2.4. & \square \in \mathcal{S}_3 \Rightarrow \mathcal{S} \text{ este nesatisfiabilă.}
\end{array}$$

Rămâne, deci, că $\mathcal{S}$ este nesatisfiabilă. $\square$