FLORENTIN ŞERBAN SILVIA DEDU

MATEMATICI APLICATE IN ECONOMIE

Suport de curs pentru ID

Cuprinsul cursului

Unitatea de învatare 7

7. Statistica matematica

Prefata

Lucrarea "Matematici aplicate in economie" dezvoltă numeroase probleme teoretice şi practice, care fac obiectul cursurilor de matematică sau de statistică economică ale studenților din învatamantul economic, şi în particular ale studenților înscrişi la programul de studiu ID, organizat de facultatea de Finante, Banci si Burse de Valori şi face parte din planul de învatamdnt aferent anului I, semestrul 1.

Fiind subordonate programei analitice a disciplinei "Matematici aplicate în economie" de la Academia de Studii Economice Bucureşti, facultatea de Finante, Banci si Burse de Valori, anul I, ID, noțiunile şi conceptele prezentate în lucrare apar, în mod firesc, într-o succesiune logică şi sunt supuse unor restricții temporale inevitabile, care conduc adeseori la dezvoltări teoretice limitate.

Obiectivele principale ale acestui curs, concretizate în competențele pe care studentul le va dobandi după parcurgerea şi asimilarea lui, sunt următoarele:

-va avea cunoştințe solide de strictă specialitate, dar şi de tehnici specifice matematicii aplicate;

-va fi în măsurd sa construiască, sa prelucreze şi sa valorifice o teorie economical relevantă, credibilă şi inteligibilă, numai în condițiile în care stăpdneşte deopotrivd cunoştințe în domeniul respectiv, dar şi temeinice cunoştințe de matematici aplicate în economies

-va dispune de numeroase soluții pentru eficientizarea marketingului la nivel micro şi macroeconomic în vederea practicdrii în condiții de performantd a muncii de economist;

-va putea aborda, înțelege şi dezvolta diverse probleme ale disciplinelor de specialitate, precum şi alte concepte legate de modelarea matematică a unor procese sau fenomene economice dintre cele mai diverse.

Cursul "Matematici aplicate in economie" este structurat pe sapte unitati de învatare (capitole), fiecare dintre acestea cuprinzand cate o lucrare de verificare, pe care studentul o va putea transmite tutorelui său.

Pentru ca procesul de instruire al studentului sa se desfasoare într-un mod riguros, dar şi atractiv, studentul va putea utiliza un set de resurse suplimentare prezentate sub forma bibliografiei de la sfarşitul fiecarei unitati de învatare în format electronic, ce sa va regăsi accesand platforma de e-learning.

Evaluarea cunoştințelor se va realiza sub două forme:

-evaluare continuă, pe baza lucrărilor de verificare, regăsite la sfdrşitul fiecdrei unitdti de învdtare;

-evaluare finală, realizată prin examenul susținut în perioada de sesiune.

Criteriile de evaluare constau în:

1. Punctajul obținut la cele şase lucrări de verificare menționate;

2. Gradul de implicare în discuțiile tematice, organizate prin opțiunea „Forum” a platformei electronice.

3. Punctajul obținut la examenul susținut în cadrul sesiunii.

Ponderile asociate fiecarui criteriu precizat sunt următoarele:

-criteriile 1 si 2 - cite 0,50 puncte pentru fiecare dintre cele sase lucrari de verificare (total = 3 puncte);(in evaluarea punctajului va conta si gradul de imiplicare al studentului in discutiile tematice organizate pe forumul platformei electronice)

-criteriul 3 - 7 puncte pentru examenul susținut în sesiune.

*Nutrim speranța ca studentul din anul I, de la programul de studiu ID, facultatea de Finante, Banci si Burse de Valori , s*a *găsească în această lucrare un sprijin real şi important pentru studiu şi cercetare, pentru viitoarea lor profesie, ce le va solicita şi cunoştințe de matematici aplicate în economic*

Autorii

UNIT ATEA DE INVATARE 1:

Serii numerice

Cuprins

1.1 Obiective

Unitate de învatare 1 conține, o prezentare intr-o formă accesibilă, dar riguroasă a noțiunii de serie numerică, din cadrul analizei matematice, care fundamentează teoretic noțiunea de serie de puteri, un alt element de bază al analizei matematice, ce va fi expus în unitatea de invatare 2.

După studiul acestei unitati de învatare, studentul va avea cunosjințe despre:

-conceptul de serie numerică, necesar si extrem de util, pentru a putea modela matematic anumite procese sau fenomene economice, dintre cele mai diverse;

-tipul de probleme teoretice si practice, care fac obiectul cursului de „Serii numerice" si al lucrărilor de verificare ale studenților din invatamântul economic din anul I, ID, de la Facultatea de Finante, Banci si Burse de Valori din Academia de Studii Economice, Bucuresji.

1.2 Definiții si proprietati generale ale seriilor numerice

Fie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ o serie numerică de termen general a_n.

Definim *şirul sumelor parțiale* $(S_n)_{n\geq 1}$, $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$.

Definiția 1. Seria $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ este *convergentă* dacă şirul $(S_n)_{n\geq 1}$ este convergent.
În acest caz, numărul $S = \lim_{n\to\infty} S_n$ se numeşte *suma seriei*.

Dacă $\lim_{n\to\infty} S_n = \pm\infty$ sau $(S_n)_{n\geq 1}$ nu are limită, seria $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ este *divergentă*.

Propoziția 1.

a) Dacă seria $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ este convergentă şi are suma S, atunci seria $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha \cdot a_n$ este convergentă şi are suma $\alpha \cdot S$.

b) Dacă seriile $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ şi $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ sunt convergente şi au sumele S_1 şi S_2, atunci seria $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$ este convergentă şi are suma $S_1 + S_2$.

Definiția 2. Seria $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ este *absolut convergentă* dacă seria $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ este convergentă.
Propoziția 2. Dacă o serie este absolut convergentă, atunci seria este convergentă.

1.3 Serii cu termeni oarecare,serii alternate, serii clasice

Criteriul suficient de divergență.

Dacă $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$, atunci seria $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ este divergentă.

Criteriul lui Leibniz.

Fie seria alternată $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$, $a_n > 0$. Dacă :

a) şirul $(a_n)_{n\geq 1}$ este descrescător şi

b) $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, atunci seria $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ este convergentă.

Serii clasice

1) *Seria geometrică* $\sum_{n=0}^{\infty} q^n$ *este convergentă* $\Leftrightarrow q \in (-1,1)$ *şi are suma* $S = \frac{1}{1-q}$.

2) *Seria armonică generalizată* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$ *este convergentă* $\Leftrightarrow \alpha > 1$.

1.4 Serii cu termeni pozitivi.Criterii de convergenta

Criteriul 1 de comparaţie. Fie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ şi $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ serii cu termini pozitivi pentru care există $n_0 \in N$ astfel încât $a_n \le b_n, (\forall) n \ge n_0$.

$a)$ Dacă $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ este convergentă, atunci $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ este convergentă.

$b)$ Dacă $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ este divergentă, atunci $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ este divergentă.

Criteriul 2 de comparaţie. Fie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ şi $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ serii cu termeni pozitivi pentru care există $n_0 \in N$ astfel încât $\frac{a_{n+1}}{a_n} \le \frac{b_{n+1}}{b_n}, (\forall) n \ge n_0$.

$a)$ Dacă $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ este convergentă, atunci $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ este convergentă.

$b)$ Dacă $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ este divergentă, atunci $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ este divergentă.

Criteriul 3 de comparaţie. Fie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ şi $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ serii cu termeni pozitivi.

$a)$ Dacă $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} \in (0,\infty)$, atunci seriile au aceeaşi natură.

$b)$ Dacă $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 0$ şi: $b_1)$ $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ este convergentă, atunci $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ este convergentă;

$b_2)$ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ este divergentă, atunci $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ este divergentă.

$c)$ Dacă $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \infty$ şi:

$c_1)$ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ este convergentă, atunci $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ este convergentă;

$c_2)$ $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ este divergentă, atunci $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ este divergentă.

Corolarul criteriului raportului (d'Alembert).

Fie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ o serie cu termeni pozitivi şi $l = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$.

$a)$ Dacă $l < 1$, atunci $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ este convergentă.

$b)$ Dacă $l > 1$, atunci $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ este divergentă.

Corolarul criteriului rădăcinii (Cauchy).

Fie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ o serie cu termeni pozitivi şi $l = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n}$.

$a)$ Dacă $l < 1$, atunci $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ este convergentă.

$b)$ Dacă $l > 1$, atunci $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ este divergentă.

Corolarul criteriului Raabe-Duhamel.

Fie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ o serie cu termeni pozitivi şi $l = \lim\limits_{n\to\infty} n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right)$.

$a)$ Dacă $l < 1$, atunci $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ este divergentă.

$b)$ Dacă $l > 1$, atunci $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ este convergentă.

Corolarul criteriului logaritmic.

Fie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ o serie cu termeni pozitivi şi $l = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{\ln \frac{1}{a_n}}{\ln n}$.

$a)$ Dacă $l < 1$, atunci $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ este divergentă.

$b)$ Dacă $l > 1$, atunci $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ este convergentă

Teste de autoevaluare

I.Sa se afle natura si daca este cazul sa se calculeze suma seriilor

1. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n+\alpha}+\sqrt{n+\alpha+1}},\alpha>0.$ 2. $\sum_{n=1}^{\infty}\ln\frac{3n-1}{3n+2}$ 3. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n+8^n}{3^{n+1}+8^{n+1}}$

II.Sa se afle natura seriilor

4. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1\cdot 4\cdot 7\cdot ...\cdot(3n-2)}{3\cdot 7\cdot 10\cdot ...\cdot(4n-1)}$. 5. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3n-1}{3n+2}\right)^{n^2}$

Răspunsuri si comentarii la testele de autoevaluare

1. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n+\alpha}+\sqrt{n+\alpha+1}},\alpha>0.$

Rezolvare:
Considerăm şirul sumelor parţiale:

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}a_k=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k+\alpha}+\sqrt{k+\alpha+1}}=\sum_{k=1}^{n}\frac{\sqrt{k+\alpha}-\sqrt{k+\alpha+1}}{-1}=$$

$$=-\sqrt{1+\alpha}+\sqrt{2+\alpha}-\sqrt{2+\alpha}+\sqrt{3+\alpha}-...-\sqrt{n+\alpha}+\sqrt{n+\alpha+1}\Rightarrow$$

$\Rightarrow S_n=\sqrt{n=\alpha+1}-\sqrt{1+\alpha}\Rightarrow\lim_{n\to\infty}S_n=\infty$, deci şirul $(S_n)_{n\geq 1}$ este divergent.

Conform definiției, rezultă că seria este divergentă.

2. $\sum_{n=1}^{\infty}\ln\frac{3n-1}{3n+2}$.

Rezolvare:

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}\ln\frac{3k-1}{3k+2}=\sum_{k=1}^{n}\left[\ln(3k-1)-\ln(3k+2)\right]=$$

$$=\ln 2-\ln 5+\ln 5-\ln 8+...+\ln(3n-1)-\ln(3n+2)=\ln 2-\ln(3n+2)\Rightarrow$$

$\Rightarrow\lim_{n\to\infty}S_n=-\infty$, prin urmare seria este divergentă.

3. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n+8^n}{3^{n+1}+8^{n+1}}$.

Rezolvare:

$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\frac{8^n\left(\left(\frac{3}{8}\right)^n+1\right)}{8^{n+1}\left(\left(\frac{3}{8}\right)^{n+1}+1\right)}=\frac{1}{8}\neq 0$; conform criteriului suficient de divergență, rezultă că seria este divergentă.

4. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1 \cdot 4 \cdot 7 \cdot ... \cdot (3n-2)}{3 \cdot 7 \cdot 10 \cdot ... \cdot (4n-1)}$.

Rezolvare:

Vom folosi corolarul criteriului raportului. Fie $a_n = \dfrac{1 \cdot 4 \cdot 7.....(3n-2)}{3 \cdot 7 \cdot 10....(4n-1)}$. Avem:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\dfrac{1 \cdot 4 \cdot 7 \cdot ... \cdot (3n-2)(3n+1)}{3 \cdot 7 \cdot 10 \cdot ... \cdot (4n-1)(4n+3)}}{\dfrac{1 \cdot 4 \cdot 7 \cdot ... \cdot (3n-2)}{3 \cdot 7 \cdot 10 \cdot ... \cdot (4n-1)}} = \lim_{n\to\infty} \frac{(3n+1)}{(4n+3)} = \frac{3}{4} < 1,$$

prin urmare seria este convergentă.

5. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\dfrac{3n-1}{3n+2} \right)^{n^2}$.

Rezolvare:

Aplicăm corolarul criteriului rădăcinii. Fie $a_n = \left(\dfrac{3n-1}{3n+2} \right)^{n^2}$. Avem:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{3n-1}{3n+2} \right)^n = \lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{3}{3n+2} \right)^n = e^{\lim\limits_{n\to\infty} -\frac{3}{3n+2} \cdot n} = \frac{1}{e} < 1,$$

prin urmare seria este convergentă.

Bibliografia unității de învățare 1:

1. Gh. Cenuşă şi colectiv, *Matematici aplicate in economie. Teorie si aplicatii.* Editura CISON, Bucureşti, 2007
2. S. Dedu, F. Şerban, *Matematici aplicate în economie. Culegere de probleme*, Editura. Teocora, Buzau, 2009
3. C.Raischi si colectiv, *Analiza matematica,* Editura.Plus, Bucureşti, *2005*
4.I. Purcaru , *Matematici generale si elemente de optimizare,* Editura Economică, Bucureşti, 1997.

UNITATEA DE ÎNVATARE 2

Serii de puteri

Cuprins

2.1 Obiectivele unitatii de învatare 2

Fiind, în strânsă concordanta cu programa analitică a disciplinei „Matematici aplicate în economie", de la Academia de Studii Economice Bucuresti, pentru studenții de la anul I, ID, Facultatea de Finante, Banci si Burse de Valori noțiunile si conceptele prezentate în cadrul acestei unitati de învatare apar, în mod firesc, intr-o succesiune logică si sunt supuse unor restricții temporale inevitabile, care conduc adeseori la dezvoltări teoretice limitate.

După studiul acestei unitati de învatare, studentul va avea cuno§tințe despre:

-conceptul de serie de puteri, un alt element de bază al analizei matematice, legat de studiul seriilor numerice, necesar **s**i extrem de util, pentru a putea aborda, ințelege si dezvolta diverse probleme ale disciplinelor de specialitate din cadrul Facultatii de Finante, Banci si Burse de Valori căreia ne adresăm;

-tipul de probleme teoretice si practice, care fac obiectul cursului de „Serii de puteri" **§i** al lucrărilor de verificare ale studenților din invatamântul economic din anul I, ID, de la Facultatea de Finante, Banci si Burse de Valori din Academia de Studii Economice, Bucuresti

2.2 Definiția si studiul noțiunii de serie de puteri

Fie seria de puteri $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n x^n$, Se numeşte *mulțime de convergență* a seriei de puteri mulțimea formată din punctele în care seria este convergentă: $C = \left\{ x \in R \mid \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n x^n \text{ convergentă} \right\}$.

Teorema 1 (Teorema lui Abel). Pentru orice serie de puteri $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ există R, $0 \le R \le \infty$, astfel încât:

1) seria este absolut convergentă pe intervalul $(-R, R)$;
2) seria este divergentă pe mulțimea $(-\infty, -R) \cup (R, \infty)$;
3) pentru orice $r \in (0, R)$, seria este uniform convergentă pe intervalul $[-r, r]$.

Observație. R se numeşte *rază de convergență*.

Teorema 2 (Cauchy-Hadamard). Fie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ o serie de puteri şi R raza de convergență a acesteia. Dacă notăm $\omega = \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|}$, atunci

$$R = \begin{cases} \frac{1}{\omega}, & \omega \neq 0 \\ \infty, & \omega = 0 \\ 0, & \omega = \infty \end{cases}$$

Observație. Se poate calcula ω şi după formula: $\omega = \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}$.

2.3 Ilustrarea rezultatelor teoretice pe cazul numeric concret al aplicațiilor

1. Să se studieze convergența seriei de puteri: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n \cdot 5^n} \cdot x^n$, $x \in R$.

Rezolvare:

- Calculăm raza de convergență. Fie $a_n = (-1)^n \frac{1}{n \cdot 5^n}$. Avem că:

$$\omega = \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{\left|(-1)^{n+1} \frac{1}{(n+1)\cdot 5^{n+1}}\right|}{\left|(-1)^n \frac{1}{n \cdot 5^n}\right|} = \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{n}{5(n+1)} = \frac{1}{5}, \text{ deci } R = \frac{1}{\omega} = 5.$$

- Conform teoremei lui Abel, rezultă că:
  1) seria este absolut convergentă pe intervalul $(-5,5)$;
  2) seria este divergentă pe mulțimea $(-\infty,-5) \cup (5,\infty)$;
  3) pentru orice $r \in (0,5)$, seria este uniform convergentă pe $[-r,r]$.

- Studiem natura seriei pentru $R = \pm 5$:

Pentru $R = 5$, seria de puteri devine: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n \dfrac{1}{n \cdot 5^n} \cdot 5^n$, adică $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n \dfrac{1}{n}$;

şirul $u_n = \dfrac{1}{n}$ este descrescător şi are limita zero; rezultă, conform criteriului

lui Leibniz, că seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n \dfrac{1}{n}$ este convergentă.

Pentru $R = -5$, seria de puteri devine: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n \dfrac{1}{n \cdot 5^n} \cdot (-5)^n$, adică

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n}$, care este divergentă (seria armonică).

În concluzie, seria de puteri este convergentă pe mulţimea $(-5,5]$.

2. Să se determine mulţimea de convergenţă a seriei de puteri:

$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{2n+1}{6n-5}\right)^n \cdot (x-3)^n,\ x \in R$.

Rezolvare:

- Notăm $y = x - 3$.

Determinăm mai întâi mulţimea de convergenţă a seriei $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{2n+1}{6n-5}\right)^n \cdot y^n$.

- Calculăm raza de convergenţă. Fie $a_n = \left(\dfrac{2n+1}{6n-5}\right)^n$. Avem:

$\omega = \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|} = \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{\left|\left(\dfrac{2n+1}{6n-5}\right)^n\right|} = \frac{1}{3}$, deci $R = \dfrac{1}{\omega} = 3$.

- Conform teoremei lui Abel, avem:

1) seria este absolut convergentă pe intervalul $(-3,3)$;
2) seria este divergentă pe mulţimea $(-\infty,-3) \cup (3,\infty)$;
3) pentru orice $r \in (0,3)$, seria este uniform convergentă pe $[-r,r]$.

- Studiem natura seriei pentru $y = \pm 3$:

Pentru $y = 3$, seria de puteri devine: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{2n+1}{6n-5}\right)^n \cdot 3^n$, sau $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{6n+3}{6n-5}\right)^n$.

Fie $u_n = \left(\dfrac{6n+3}{6n-5}\right)^n$; avem: $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \lim\limits_{n\to\infty}\left(1 + \dfrac{8}{6n-5}\right)^n = e^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{8n}{6n-5}} = e^{\frac{4}{3}} \neq 0$, deci, conform criteriului suficient de divergenţă, seria este divergentă.

Pentru $y = -3$, seria devine: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{2n+1}{6n-5}\right)^n \cdot (-3)^n$, sau $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\dfrac{6n+3}{6n-5}\right)^n$.

Fie $v_n = (-1)^n\left(\dfrac{6n+3}{6n-5}\right)^n$; deoarece nu există $\lim\limits_{n\to\infty} v_n$, rezultă că şirul $(v_n)_{n\geq 1}$ este divergent, deci seria este divergentă.

În concluzie, seria de puteri este convergentă pentru $y \in (-3,3) \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow -3 < y < 3 \Leftrightarrow -3 < x - 3 < 3 \Leftrightarrow 0 < x < 6$. Rezultă că

mulţimea de convergenţă a seriei $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{2n+1}{6n-5}\right)^n \cdot (x-3)^n$ este $(0,6)$.

Teste de autoevaluare

1.Să se determine mulțimea de convergență a seriei de puteri $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n + (-4)^n}{n} \cdot (x+2)^n$

Răspunsuri si comentarii la testele de autoevaluare

1. Rezolvare:

- Notăm $y = x + 2$. Vom determina mai întâi mulțimea de convergență a seriei. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n + (-4)^n}{n} y^n$
- Calculăm raza de convergență. Fie $a_n = \frac{3^n + (-4)^n}{n}$, $n \geq 1$.

$$\omega = \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{\left|\frac{3^{n+1} + (-4)^{n+1}}{n+1}\right|}{\left|\frac{3^n + (-4)^n}{n}\right|} = \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{n}{(n+1)} \cdot \left|\frac{3^{n+1} + (-4)^{n+1}}{3^n + (-4)^n}\right| =$$

$$= \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{n}{(n+1)} \cdot \left|\frac{(-4)^{n+1}\left(\left(-\frac{3}{4}\right)^{n+1} + 1\right)}{(-4)^n\left(\left(-\frac{3}{4}\right)^n + 1\right)}\right| = 4 \Rightarrow R = \frac{1}{4}$$

Conform teoremei lui Abel, rezultă că:

1) seria este absolut convergentă pentru $y \in \left(-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right)$;

2) seria este divergentă pentru $y \in \left(-\infty, -\frac{1}{4}\right) \cup \left(\frac{1}{4}, \infty\right)$;

3) pentru orice $r \in \left(0, \frac{1}{4}\right)$, seria este uniform convergentă pe intervalul $[-r, r]$.

- Studiem natura seriei pentru $y = \pm\frac{1}{4}$:

Pentru $y = \frac{1}{4}$, seria de puteri devine: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n + (-4)^n}{n} \left(\frac{1}{4}\right)^n$, adică $\sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{n} \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^n + (-1)^n \cdot \frac{1}{n}\right]$. Avem că seria $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^n$ este convergentă (folosind criteriul raportului) şi seria $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{1}{n}$ este convergentă (folosind criteriul lui Leibniz), prin urmare seria este convergentă.

Pentru $y = -\frac{1}{4}$, seria de puteri devine: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n + (-4)^n}{n} \left(-\frac{1}{4}\right)^n$, adică $\sum_{n=1}^{\infty} \left[(-1)^n \frac{1}{n} \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^n + \frac{1}{n}\right]$. Notăm $b_n = (-1)^n \frac{1}{n} \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^n$, $n \in N^*$ $c_n = \frac{1}{n}$, $n \in N^*$ şi $d_n = (-1)^n \frac{1}{n} \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^n + \frac{1}{n}, n \in N^*$. Avem că seria $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ este convergentă (folosind criteriul lui Leibniz). Dacă presupunem că seria $\sum_{n=1}^{\infty} d_n$ este convergentă, deoarece $c_n = d_n - b_n, (\forall) n \in N^*$, rezultă că şi seria $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ este convergentă, contradicție. Prin urmare seria $\sum_{n=1}^{\infty} d_n$ este divergentă.

În concluzie, seria $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n + (-4)^n}{n} \cdot y^n$ este convergentă pentru

$y \in \left(-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right] \Leftrightarrow -\frac{1}{4} < y \leq \frac{1}{4} \Leftrightarrow -\frac{1}{4} < x + 2 \leq \frac{1}{4} \Leftrightarrow -\frac{9}{4} < x \leq -\frac{7}{4}$.

Am obținut că mulțimea de convergență a seriei este $\left(-\frac{9}{4}, -\frac{7}{4}\right]$.

Bibliografia unității de învățare 1:

1. Gh. Cenuşă şi colectiv, *Matematici aplicate in economie. Teorie si aplicatii.* Editura CISON, Bucureşti, 2007
2. S. Dedu, F. Şerban, *Matematici aplicate în economie. Culegere de probleme*, Editura Teocora, Buzau, 2009
3. C.Raischi si colectiv, *Analiza matematica,* Editura Plus, Bucureşti, *2005*
4.I. Purcaru , *Matematici generale si elemente de optimizare,* Editura Economică, Bucureşti, 1997.

Lucrarea de verificare nr. 1

1. Sa se afle natura si sa se calculeze suma seriei $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2 - 1}$
2. Sa se afle natura seriei $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n + 5^n}$
3. Sa se calculeza multimea de convergenta a seriei $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{(2n-1) \cdot 3^n} \cdot x^n, \ x \in R$

UNITATEA DE ÎNVATARE 3

Funcții de mai multe variabile reale

Cuprins

3.1 Obiective

Economiştii, indiferent de domeniul în care lucrează, au nevoie de cunostințe solide de strictă specialitate, dar **si** de tehnici specifice matematicii aplicate, cum ar fi noțiunile pe care ni le propunem să le prezentăm în cadrul unitatii de învatare 3. Informația economică trebuie să fie relevantă, credibilă, inteligibilă - calitati, care sunt asigurate numai atunci când economistul care o construieste, o prelucrează si o valorifică, stăpâneste deopotrivă cunostințe în domeniul respectiv, dar si temeinice cuno§tințe de matematici aplicate în economie.

După studiul acestei unitati de învatare, studentul va avea cunostințe despre funcțiile de 2 si respectiv 3 variabile reale, si conceptele asociate lor, precum: limitele lor, continuitatea acestora, derivabilitatea parțială a respectivelor funcții si diferențiabilitatea lor; ele reprezintă un alt element important al analizei matematice, necesar si extrem de util, pentru a putea aborda, ințelege si dezvolta diverse probleme ale disciplinelor de specialitate din cadrul Facultatii de Finante, Banci si Burse de Valori, căreia ne adresăm.

Prin introducerea unitatii de invatare 3, subordonată analizei matematice, nutrim speranța ca studentul de la anul I, ID, Facultatea de Finante, Banci si Burse de Valori, să obțină acumulări de noi cunostinte utile disciplinelor specifice anilor de licenta, de la această facultate, în vederea formării lui ca viitor economist, ce urmează să practice munca de economist în condiții de performanta

3.2 Definiția limitei si continuitatii pentru o funcție de doua variabile

Definiția 1. Fie $f : A \subset R^m \to R$ o funcție reală de m variabile reale. Spunem că $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = l$ dacă pentru orice şir $(x_n)_{n \in N} \subset A,\ x_n \neq x_0$ şi $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = x_0$ avem $\lim\limits_{n \to \infty} f(x_n) = l$.

Definiția 2. Fie $f : A \subset R^2 \to R$ şi $(a,b) \in A$.
Spunem că f *este continuă în punctul* (a,b) dacă pentru orice şir $\{(x_n, y_n)\}_{n \in N} \subset A$ cu proprietatea că $\lim\limits_{n \to \infty} (x_n, y_n) = (a,b)$ rezultă că $\lim\limits_{n \to \infty} f(x_n, y_n) = f(a,b)$.

3.3 Definiția derivatelor parțiale de ordinul I şi II pentru o funcție de doua variabile

Definiția 3. Fie $f : A \subset R^2 \to R$ şi $(a,b) \in A$.
Spunem că funcția f este *derivabilă parțial în raport cu* x *în punctul* $(a,b) \in A$ dacă

$\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x,b) - f(a,b)}{x - a}$ există şi este finită.

Vom nota această limită cu $f_x^{'}(a,b)$ sau $\dfrac{\partial f(a,b)}{\partial x}$.

Analog, funcția f este *derivabilă parțial în raport cu* y în punctul $(a,b) \in A$ dacă

$\lim\limits_{y \to b} \dfrac{f(a,y) - f(a,b)}{y - b}$ există şi este finită.

Vom nota această limită cu $f_y^{'}(a,b)$ sau $\dfrac{\partial f(a,b)}{\partial y}$.

3.4 Definiția diferențiabilitatii pentru o funcție de mai multe variabile

.

Definiția 4. Fie $f : A \subset R^2 \to R$ o funcție diferențiabilă în punctul (a,b) interior lui A.

- Se numeşte *diferențiala de ordinul întâi a funcției* f *în punctul* (a,b)
funcția liniară: $df(x,y;\ a,b) = f_x^{'}(a,b)(x-a) + f_y^{'}(a,b)(y-b) = f_x^{'}(a,b)dx + f_y^{'}(a,b)dy$.

- Se numeşte *diferențiala de ordinul n a funcției* f *în punctul*

(a,b) funcția: $d^n f(x,y;a,b) = \left[\dfrac{\partial}{\partial x}dx + \dfrac{\partial}{\partial y}dy\right]^{(n)} f(a,b)$.

Observație. Toate definițiile valabile pentru funcții de două variabile $f : A \subset R^2 \to R$ se pot extinde pentru cazul funcțiilor de n variabile, $f : A \subset R^n \to R$, $n \in N,\ n \geq 3$.

3.5 Extremele locale ale funcțiilor de mai multe variabile reale

Definiția 1. Funcția $f : A \subset R^n \to R$ admite un *maxim local (minim local)* în punctul $a = (a_1, a_2, ..., a_n) \in A$ dacă există o vecinătate V a punctului a astfel încât oricare ar fi $x = (x_1, x_2, ..., x_n) \in V \cap A$ are loc inegalitatea $f(x) \le f(a)$ (respectiv $f(x) \ge f(a)$). În aceste condiții, spunem că punctul a este *punct de extrem local* pentru funcția f. Dacă inegalitățile de mai sus sunt verificate pe tot domeniul de definiție A, spunem că punctul a este *punct de maxim (minim) global* pentru funcția f.

Definiția 2. Fie $f : A \subset R^n \to R$. Punctul $a = (a_1, a_2, ..., a_n) \in \text{int} A$ este *punct staționar* pentru funcția f dacă f este diferențiabilă în a şi diferențiala $df(x; a) = 0$.

Observație. Dacă punctul $a = (a_1, a_2, ..., a_n) \in \text{int} A$ este punct staționar, $df(x; a) = 0$ implică $f'_{x_k}(a) = 0,\ \forall k = \overline{1, n}$.

Propoziție. Dacă funcția $f : A \subset R^n \to R$ admite un extrem local în punctul $a = (a_1, a_2, ..., a_n) \in A$ şi există f'_{x_k} într-o vecinătate a punctului a, $\forall k = \overline{1, n}$, atunci $f'_{x_k}(a) = 0,\ \forall k = \overline{1, n}$

Teorema 1. Fie $f : A \subset R^2 \to R$ şi $(a, b) \in \text{int} A$ un punct staționar pentru f. Presupunem că f admite derivate parțiale de ordinul doi, continue pe o vecinătate V a punctului (a, b).

Considerăm expresia $\Delta(a, b) = \left[f''_{xy}(a, b)\right]^2 - f''_{x^2}(a, b) \cdot f''_{y^2}(a, b)$. Atunci:

1. Dacă $\Delta(a, b) < 0$, atunci (a, b) este punct de extrem local, şi anume:
   - punct de minim local, dacă $f''_{x^2}(a, b) > 0$;
   - punct de maxim local, dacă $f''_{x^2}(a, b) < 0$.
2. Dacă $\Delta(a, b) > 0$, atunci (a, b) este punct şa.

Teorema 2. Fie $f : A \subset R^n \to R$. Presupunem că punctul $a \in A$ este punct staționar pentru f şi funcția f are derivate parțiale de ordinul doi continue pe o vecinătate V a punctului a. Atunci:

1) dacă $d^2 f(x; a) < 0$, pentru orice $x \in V \cap A$, atunci a este punct de maxim local;
2) dacă $d^2 f(x; a) > 0$, pentru orice $x \in V \cap A$, atunci a este punct de minim local;
3) dacă $d^2 f(x; a)$ este nedefinită, atunci a este punct şa.

Algoritm de determinare a punctelor de extrem local pentru $f : A \subset R^n \to R$

Acest algoritm se aplică pe mulțimea punctelor în care funcția f este diferențiabilă şi admite derivate parțiale de ordinul doi continue într-o vecinătate a punctelor respective.

Etapa 1. Determinăm punctele staționare, care sunt soluțiile sistemului:

$$\begin{cases} f'_{x_1}(x_1, x_2, ..., x_n) = 0 \\ f'_{x_2}(x_1, x_2, ..., x_n) = 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ f'_{x_n}(x_1, x_2, ..., x_n) = 0 \end{cases}$$

Etapa 2. Stabilim care dintre punctele staționare sunt puncte de extrem local. Acest lucru se poate realiza în mai multe moduri:

Metoda I. Pentru fiecare punct staționar $P(a_1, a_2, ..., a_n)$ calculăm matricea hessiană:

$$H(a_1, a_2, ..., a_n) = \begin{pmatrix} f''_{x_1^2}(a_1,..,a_n) & f''_{x_1x_2}(a_1,..,a_n) & \dots & f''_{x_1x_n}(a_1,..,a_n) \\ f''_{x_2x_1}(a_1,..,a_n) & f''_{x_2^2}(a_1,..,a_n) & \dots & f''_{x_2x_n}(a_1,..,a_n) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ f''_{x_nx_1}(a_1,..,a_n) & f''_{x_nx_2}(a_1,..,a_n) & \dots & f''_{x_n^2}(a_1,..,a_n) \end{pmatrix}$$

şi minorii acesteia Δ_1, $\Delta_2, ..., \Delta_n$, unde Δ_i este minorul format din primele i linii şi i coloane ale matricei $H(a,b)$, $i = \overline{1,n}$.

Discuție.

- Dacă toți minorii $\Delta_i > 0$, atunci $P(a_1, a_2, ..., a_n)$ punct de minim local.
- Dacă minorii Δ_i alternează ca semn, începând cu minus, atunci $P(a_1, a_2, ..., a_n)$ este punct de maxim local.
- Orice altă combinație de semne, cu $\Delta_i \neq 0$, implică $P(a_1, a_2, ..., a_n)$ punct şa.

Metoda II. (aplicabilă numai funcțiilor de două variabile)
Pentru fiecare punct staționar $P(a,b)$ calculăm expresia:

$$\Delta(a,b) = \left[f''_{xy}(a,b)\right]^2 - f''_{x^2}(a,b) \cdot f''_{y^2}(a,b).$$

1. Dacă $\Delta(a,b) < 0$, atunci (a,b) este punct de extrem local, şi anume:
   - punct de minim local, dacă $f''_{x^2}(a,b) > 0$;
   - punct de maxim local, dacă $f''_{x^2}(a,b) < 0$.
2. Dacă $\Delta(a,b) > 0$, atunci (a,b) este punct şa.

Observația 1. În cazul funcțiilor de două variabile, se observă că $\Delta(a,b) = -\Delta_2$. Prin urmare, dacă aplicând metoda 1 obținem că $\Delta_2 < 0$, atunci $\Delta(a,b) > 0$, deci, indiferent de valoarea minorului Δ_1, rezultă că (a,b) este punct şa.

Metoda III. Se calculează diferențiala de ordinul al doilea a funcției în punctul staționar $a = (a_1, a_2, ..., a_n)$ şi se aplică teorema 2.

Observația 2. Existența unui punct de extrem local poate fi pusă în evidență cu ajutorul metodelor prezentate numai dacă funcția f este diferențiabilă în acel punct şi admite derivate parțiale de ordinul doi continue într-o vecinătate a punctului respectiv.

În caz contrar sau în cazul în care în urma aplicării metodelor de mai sus nu se poate preciza natura punctului, se foloseşte:

Metoda IV. Definiția punctului de extrem local.

3.7 Ilustrarea teoriei pe cazul numeric concret al aplicațiilor

1. Să se determine punctele de extrem local ale funcției:
$f : R^2 \to R,\ f(x,y) = 2x^2 + y^3 - 6xy + 1.$

Rezolvare:

Etapa 1. Determinăm punctele staționare, care sunt soluțiile sistemului: $\begin{cases} f_x'(x,y) = 0 \\ f_y'(x,y) = 0 \end{cases}$.

Avem că: $\begin{matrix} f_x'(x,y) = 4x - 6y \\ f_y'(x,y) = 3y^2 - 6x \end{matrix}$, prin urmare rezultă sistemul:

$$\begin{cases} 4x - 6y = 0 \\ 3y^2 - 6x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 3y = 0 \\ y^2 - 2x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{3y}{2} \\ y^2 - 3y = 0 \end{cases}.$$

Din a doua ecuație obținem: $y_1 = 0,\ y_2 = 3$, de unde, prin înlocuire în prima relație, rezultă $x_1 = 0,\ x_2 = \frac{9}{2}$, soluțiile sistemului sunt:

$$\begin{cases} x_1 = 0 \\ y_1 = 0 \end{cases}; \quad \begin{cases} x_2 = \frac{9}{2} \\ y_2 = 3 \end{cases}.$$

Am obținut punctele staționare: $P_1(0,\ 0),\ P_2\left(\frac{9}{2},\ 3\right)$.

Etapa 2. Stabilim care dintre punctele staționare sunt puncte de extrem local.

Scriem matricea hessiană:

$$H(x,y)=\begin{pmatrix} f''_{x^2}(x,y) & f''_{xy}(x,y) \\ f''_{yx}(x,y) & f''_{y^2}(x,y) \end{pmatrix}.$$

Avem: $f''_{x^2}(x,y)=\left[f'_x(x,y)\right]'_x=[4x-6y]'_x=4$;

$f''_{xy}(x,y)=\left[f'_x(x,y)\right]'_y=[4x-6y]'_y=-6=f''_{yx}(x,y)$;

$f''_{y^2}(x,y)=\left[f'_y(x,y)\right]'_y=\left[3y^2-6x\right]'_y=6y$, deci

$H(x,y)=\begin{pmatrix} 4 & -6 \\ -6 & 6y \end{pmatrix}$. Avem:

$$H(0,0)=\begin{pmatrix} 4 & -6 \\ -6 & 0 \end{pmatrix}\Rightarrow \Delta_1=4>0,\quad \Delta_2=\begin{vmatrix} 4 & -6 \\ -6 & 0 \end{vmatrix}=-36<0,$$

prin urmare $P_1(0,\ 0)$ este punct şa.

$$H\left(\tfrac{9}{2},\ 3\right)=\begin{pmatrix} 4 & -6 \\ -6 & 18 \end{pmatrix}\Rightarrow \Delta_1=4>0,\quad \Delta_2=\begin{vmatrix} 4 & -6 \\ -6 & 18 \end{vmatrix}=36>0,$$

prin urmare $P_2\left(\tfrac{9}{2},\ 3\right)$ este punct de minim local.

2. Să se determine punctele de extrem local ale funcției:
$f:R^2\to R,\ f(x,y)=6x^2y+2y^3-45x-51y+7$.

Rezolvare:

Etapa 1. Determinăm punctele staționare, care sunt soluțiile sistemului: $\begin{cases} f'_x(x,y)=0 \\ f'_y(x,y)=0 \end{cases}$.

Avem că:

$\begin{matrix} f'_x(x,y)=12xy-45 \\ f'_y(x,y)=6x^2+6y^2-51 \end{matrix}$, prin urmare obținem sistemul:

$$\begin{cases} 12xy-45=0 \\ 6x^2+6y^2-51=0 \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} xy=\frac{15}{4} \\ x^2+y^2=\frac{17}{2} \end{cases}.$$

Notăm $x+y=S,\ xy=P\Rightarrow\begin{cases} P=\frac{15}{4} \\ S^2-2P=\frac{17}{2} \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} P=\frac{15}{4} \\ S=\pm 4 \end{cases}$

Pentru $S = 4,\ P = \frac{15}{4} \Rightarrow t^2 - 4t + \frac{15}{4} = 0 \Rightarrow t_1 = \frac{3}{2},\ t_2 = \frac{5}{2}$,

deci $\begin{cases} x_1 = \frac{3}{2} \\ y_1 = \frac{5}{2} \end{cases}$ sau $\begin{cases} x_2 = \frac{5}{2} \\ y_2 = \frac{3}{2} \end{cases}$.

Pentru $S = -4,\ P = \frac{15}{4} \Rightarrow t^2 + 4t + \frac{15}{4} = 0 \Rightarrow t_1 = -\frac{3}{2},\ t_2 = -\frac{5}{2}$,

deci $\begin{cases} x_3 = -\frac{3}{2} \\ y_3 = -\frac{5}{2} \end{cases}$ sau $\begin{cases} x_4 = -\frac{5}{2} \\ y_4 = -\frac{3}{2} \end{cases}$.

Am obținut punctele staționare: $P_1\left(\frac{3}{2}, \frac{5}{2}\right),\ P_2\left(\frac{5}{2}, \frac{3}{2}\right), P_3\left(-\frac{3}{2}, -\frac{5}{2}\right),\ P_4\left(-\frac{5}{2}, -\frac{3}{2}\right)$.

Etapa 2. Stabilim care dintre punctele staționare sunt puncte de extrem local.

Metoda I. Scriem matricea hessiană:

$$H(x,y) = \begin{pmatrix} f''_{x^2}(x,y) & f''_{xy}(x,y) \\ f''_{yx}(x,y) & f''_{y^2}(x,y) \end{pmatrix}.$$

Avem: $f''_{x^2}(x,y) = \left[f'_x(x,y)\right]'_x = 12y$; $f''_{xy}(x,y) = \left[f'_x(x,y)\right]'_y = 12x = f''_{yx}(x,y)$;

$f''_{y^2}(x,y) = \left[f'_y(x,y)\right]'_y = 12y$, deci $\quad H(x,y) = \begin{pmatrix} 12y & 12x \\ 12x & 12y \end{pmatrix}$.

$H\left(\frac{3}{2}, \frac{5}{2}\right) = \begin{pmatrix} 30 & 18 \\ 18 & 30 \end{pmatrix} \Rightarrow \Delta_1 = 30 > 0,\ \ \Delta_2 = \begin{vmatrix} 30 & 18 \\ 18 & 30 \end{vmatrix} = 576 > 0$, prin urmare $P_1\left(\frac{3}{2}, \frac{5}{2}\right)$ este punct de minim local.

$H\left(\frac{5}{2}, \frac{3}{2}\right) = \begin{pmatrix} 18 & 30 \\ 30 & 18 \end{pmatrix} \Rightarrow \Delta_1 = 18 > 0,\ \ \Delta_2 = \begin{vmatrix} 18 & 30 \\ 30 & 18 \end{vmatrix} = -576 < 0$, prin urmare $P_2\left(\frac{5}{2}, \frac{3}{2}\right)$ este punct şa.

$H\left(-\frac{3}{2}, -\frac{5}{2}\right) = \begin{pmatrix} -30 & -18 \\ -18 & -30 \end{pmatrix} \Rightarrow \Delta_1 = -30 < 0, \Delta_2 = \begin{vmatrix} -30 & -18 \\ -18 & -30 \end{vmatrix} = 576 > 0$,

prin urmare $P_3\left(-\frac{3}{2}, -\frac{5}{2}\right)$ este punct de maxim local.

$H\left(-\frac{5}{2}, -\frac{3}{2}\right) = \begin{pmatrix} -18 & -30 \\ -30 & -18 \end{pmatrix} \Rightarrow \Delta_1 = -18 < 0, \Delta_2 = \begin{vmatrix} -18 & -30 \\ -30 & -18 \end{vmatrix} = -576 < 0$,

prin urmare $P_1\left(\frac{3}{2}, \frac{5}{2}\right)$ este punct şa.

Teste de autoevaluare

Să se determine punctele de extrem local ale funcției:

$f:(0,\ \infty)^2 \to R,\ f(x,y) = x^2 + y^2 + 3xy - 8\ln x - 14\ln y + 5$.

Răspunsuri si comentarii la testele de autoevaluare

Etapa 1. Determinăm punctele staționare. Avem că:

$f'_x(x,y) = 2x + 3y - \frac{8}{x}$

$f'_y(x,y) = 2y + 3x - \frac{14}{y}$. Rezolvăm sistemul:

$$\begin{cases} f'_x(x,y) = 0 \\ f'_y(x,y) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 3y - \frac{8}{x} = 0 \\ 2y + 3x - \frac{14}{y} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2 + 3xy = 8 & (1) \\ 2y^2 + 3xy = 14 & (2) \end{cases}.$$

Am obținut un sistem omogen. Înmulțim prima ecuație cu 7, pe cea de-a doua cu (-4) şi adunăm relațiile obținute; rezultă:

$14x^2 + 9xy - 8y^2 = 0$. Împărțim această ecuație prin y^2 $(y^2 \neq 0)$ și notăm $\frac{x}{y} = t$. Obținem:

$14t^2 + 9t - 8 = 0 \Rightarrow t_1 = -\frac{8}{7},\ t_2 = \frac{1}{2}$. Rădăcina negativă nu convine,

deoarece $x > 0$ şi $y > 0$, prin urmare avem $t = \frac{x}{y} = \frac{1}{2} \Rightarrow y = 2x$.

Înlocuind $y = 2x$ în (1), rezultă $x = \pm 1$. Cum $x > 0$, rezultă că singura valoare care se acceptă este $x = 1$, de unde obținem $y = 2$.

Am obținut un singur punct staționar: $P(1,\ 2)$.

Etapa 2. Stabilim dacă punctul staționar este punct de extrem local.

Avem: $f''_{x^2}(x,y) = \left[f'_x(x,y)\right]'_x = 2 + \frac{8}{x^2}$; $f''_{xy}(x,y) = \left[f'_x(x,y)\right]'_y = 3 = f''_{yx}(x,y)$;

$f''_{y^2}(x,y) = \left[f'_y(x,y)\right]'_y = 2 + \frac{14}{y^2}$, deci matricea hessiană este:

$$H(x,y) = \begin{pmatrix} f''_{x^2}(x,y) & f''_{xy}(x,y) \\ f''_{yx}(x,y) & f''_{y^2}(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 + \frac{8}{x^2} & 3 \\ 3 & 2 + \frac{14}{y^2} \end{pmatrix}.$$

Avem că $H(1,\ 2) = \begin{pmatrix} 10 & 3 \\ 3 & \frac{11}{2} \end{pmatrix} \Rightarrow \Delta_1 = 10 > 0,\quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 10 & 3 \\ 3 & \frac{11}{2} \end{vmatrix} = 46 > 0$, prin urmare $P(1,\ 2)$ este punct de minim local.

Bibliografia unitatii de învatare 3

1. Gh. Cenuşă şi colectiv, *Matematici aplicate in economie. Teorie si aplicatii.*
Editura CISON,Bucureşti, 2007
2. S. Dedu, F. Şerban, *Matematici aplicate în economie. Culegere de probleme*,
Editura Teocora,Buzau, 2009
3. C.Raischi si colectiv, *Analiza matematica,*
Editura Plus, Bucureşti, *2005*
4.I. Purcaru , *Matematici generale si elemente de optimizare,*
Editura Economică, Bucureşti, 1997.

Lucrarea de verificare nr. 2

1. Să se calculeze derivatele parțiale de ordinul întâi şi doi ale funcției
   $f : R^2 \to R, \quad f(x,y) = kx^{\alpha} y^{\beta};\; k,\; \alpha,\; \beta \in R.$
2. Sa se afle punctele de extreme alr functiei $f : R^2 \to R, f(x,y) = xy\left(x^2 + y^2 - 4\right)$
3. Sa se afle punctele de extreme ale functiei $f(x,y,z) = x^4 + y^3 + z^2 + 4xz - 3y + 2$

UNITATEA DE ÎNVATARE 4

Calcul integral

Cuprins

4.1 Obiectivele unitatii de învatare

Unitatea de învatare 4 cuprinde noțiuni si concepte, legate de calculul integral, un alt element deosebit de important al analizei matematice, fără de care nu este posibilă construcția unei teorii economice de valoare. Menționăm că sunt de notorietate modelele economice, care utilizează rezultate profunde din teoria calculului integral, si din acest motiv considerăm că unitatea de învatare 5 isi justifică pe deplin tangența cu domeniul economic.

După studiul acestei unitati de învatare, studentul va avea cunostințe despre:

- integralele euleriene, care oferă teoriilor economice un aparat matematic consistent;

- tipul de probleme teoretice si practice, care fac obiectul cursului de „Integrale euleriene" si al lucrărilor de verificare ale studenților din invatamântul economic din anul I, ID, de la Facultatea de Finante, Banci si Burse de Valori din Academia de Studii Economice Bucureşti. Conținutul acestei unitati de învatare incheie incursiunea noastră în domeniul analizei matematice si subliniem că el este conform programei analitice a disciplinei de „Matematici aplicate în economie" de la Academia de Studii Economice Bucuresti, Facultatea de Finante, Banci si Burse de Valori, anul I, ID.

4.2 Definiții §i proprietati ale integralelor euleriene

- **Integrala gamma:** $\Gamma(a) = \int_0^\infty x^{a-1} e^{-x} dx;\ a > 0$.

Proprietăți:

1) $\Gamma(1) = 1$.
2) $\Gamma(a) = (a-1)\Gamma(a-1),\ (\forall) a > 1$.
3) $\Gamma(n) = (n-1)!,\ (\forall) n \in N$.
4) $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$.

- **Integrala beta:** $\beta(a,b) = \int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1} dx;\ a > 0, b > 0$

Proprietăți:

1) $\beta(a,b) = \beta(b,a),\ \forall\, a,b > 0$
2) $\beta(a,b) = \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}, \forall\, a,b > 0$.
2) $\beta(a,b) = \int_0^\infty \frac{x^{a-1}}{(1+x)^{a+b}} dx$.
3) Dacă $a + b = 1$, atunci $\beta(a,b) = \frac{\pi}{\sin(a\pi)}$.

4.3 Ilustrarea teoriei pe cazul numeric concret al aplicațiilor

Sa se calculeze integralele

1. $I = \int_0^{+\infty} x^5 e^{-2x} dx$.

Rezolvare:

Folosim schimbarea de variabilă $2x = t \Rightarrow x = \frac{1}{2}t \Rightarrow dx = \frac{1}{2}dt$.

x	0	∞
t	0	∞

Obținem: $I = \int_0^{\infty} \left(\frac{t}{2}\right)^5 e^{-t} \frac{1}{2}dt = \frac{1}{2^6}\int_0^{\infty} t^5 e^{-t} dt = \frac{1}{2^6}\Gamma(6) = \frac{5!}{2^6} = \frac{15}{8}$.

2. $I = \int_0^{\infty} e^{-x^2} dx$ (*integrala Euler-Poisson*).

Rezolvare:

Folosim schimbarea de variabilă: $x^2 = t \Rightarrow x = t^{\frac{1}{2}} \Rightarrow dx = \frac{1}{2}t^{-\frac{1}{2}}dt$.

x	0	∞
t	0	∞

$I = \int_0^{\infty} e^{-t}\frac{1}{2}t^{-\frac{1}{2}}dt = \frac{1}{2}\int_0^{\infty} t^{-\frac{1}{2}}e^{-t}dt = \frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

3. $I = \int_0^1 x^8\left(1 - x^3\right)dx$.

Rezolvare:

Facem schimbarea de variabilă $x^3 = t \Rightarrow x = t^{\frac{1}{3}} \Rightarrow dx = \frac{1}{3}t^{-\frac{2}{3}}dt$.

x	0	1
t	0	1

$I = \frac{1}{3}\int_0^1 t^{\frac{8}{3}}(1-t)t^{-\frac{2}{3}}dt = \frac{1}{3}\int_0^1 t^2(1-t)dt = \frac{1}{3}\beta(3,2) = \frac{1}{3}\cdot\frac{\Gamma(3)\Gamma(2)}{\Gamma(5)} = \frac{1}{12}$

Teste de autoevaluare

Să se calculeze următoarele integrale:

1. $I = \int_{-1}^{+\infty} \sqrt{x+1}\, e^{-x-1} dx$.

2. $I = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2(1-x)}}$.

Răspunsuri si comentarii la testele de autoevaluare

1. Folosim schimbarea de variabilă $x+1=t \Rightarrow x=t-1 \Rightarrow dx=dt$.
Intervalul de integrare se modifică după cum rezultă din tabelul de mai jos:

x	-1	∞
t	0	∞

Obținem: $I=\int\limits_0^\infty t^{\frac{1}{2}}e^{-t}dt$. Prin identificare cu formula de definiție a integralei gamma, rezultă $a-1=\frac{1}{2}\Rightarrow a=\frac{3}{2}$, prin urmare $I=\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)=\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}\sqrt{\pi}$

2. $I=\int\limits_0^1\frac{dx}{\sqrt[3]{x^2(1-x)}}=\int\limits_0^1 x^{-\frac{2}{3}}(1-x)^{-\frac{1}{3}}dx$. Prin identificare cu formula de definiție a integralei beta, obținem:
$a-1=-\frac{2}{3}\Rightarrow a=\frac{1}{3}$; $b-1=-\frac{1}{3}\Rightarrow b=\frac{2}{3}$, prin urmare, având în vedere definiția şi proprietatea 3 pentru integrala beta, rezultă: $I=\beta\left(\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right)=\frac{\pi}{\sin\frac{\pi}{3}}=\frac{2\pi}{\sqrt{3}}$.

Bibliografia unitatii de învatare 4

1. Gh. Cenuşă şi colectiv, *Matematici aplicate in economie. Teorie si aplicatii.* Ed. CISON,Bucureşti, 2007
2. S. Dedu, F. Şerban, *Matematici aplicate în economie. Culegere de probleme*, Ed. Teocora,Buzau, 2009
3. C.Raischi si colectiv, *Analiza matematica,* Ed.Plus, Bucureşti, *2005*
4.I. Purcaru , *Matematici generale si elemente de optimizare,* Editura Economică, Bucureşti, 1997.

Lucrarea de verificare nr. 3

Să se calculeze integralele

1. $\int\limits_0^1\sqrt{x-x^2}\,dx$

2. $\int\limits_0^\infty x^6e^{-3x}dx$

UNITATEA DE ÎNVATARE 5

Formule probabilistice în care apar operatii cu evenimente

Cuprins

5.1 Obiectivele unitatii de învatare 5

Teoria probabilitatilor debutează cu unitatea de învatare 5, prin care introducem noțiunile de experienta si eveniment, prezentăm operațiile cu evenimente, formulele de calcul practic pentru probabilitati si schemele probabilistice clasice, toate aceste elemente fund esențiale în elaborarea modelelor economice temeinice si fundamentale din domenii precum: modelarea matematică a unor procese sau fenomene economice dintre cele mai diverse, gestiunea financiară, asigurări de bunuri si persoane, ingineria financiară.

După studiul acestei unitati de învatare, studentul va avea cunostințe despre:

-noțiunile elementare din teoria probabilitatilor, care oferă teoriilor economice un aparat matematic consistent;

-tipul de probleme teoretice si practice, care fac obiectul cursului de „Formule probabilistice în care apar operații cu evenimente” si al lucrărilor de verificare ale studenților din invatamântul economic din anul I, ID, de la Facultatea de Finante, Banci si Burse de Valori din Academia de Studii Economice Bucuresti.

5.2 Evenimente , operatii cu evenimente

Definiția 1. Se numeşte *eveniment* orice rezultat al unei experiențe.

Se numeşte *eveniment sigur* (notat Ω) evenimentul care se realizează cu certitudine într-o experiență.

Se numeşte *eveniment imposibil* (notat $\varnothing$) evenimentul care nu se realizează niciodată într-o experiență.

Definiția 2. Considerăm două evenimente A, B. Definim:

$A \cup B$ (*“ A sau B ”*) evenimentul ce constă în realizarea a cel puțin unuia dintre evenimentele A, B.

$A \cap B$ (*“ A şi B ”*) evenimentul ce constă în realizarea simultană a evenimentelor A, B.

$\overline{A}$ (*“non A ”*) evenimentul ce constă în nerealizarea evenimentului A.

$A \setminus B$ evenimentul ce constă în realizarea evenimentului A şi nerealizarea evenimentului B.

Spunem că $A \subset B$ (*"A implică B"*) dacă realizarea lui A are ca efect realizarea lui B.

Definiția 3. Un eveniment A este *eveniment elementar* dacă din $B \subset A$ rezultă $B = \varnothing$ sau $B = A$.

Observația 1. Dacă asociem evenimentului sigur ataşat unei experiențe o mulțime Ω, atunci se poate realiza o corespondență între mulțimea evenimentelor ataşate acelei experiențe şi mulțimea părților lui Ω şi o corespondență între operațiile cu evenimente şi operațiile cu mulțimi..

Observația 2. Dacă Ω este o mulțime cel mult numărabilă, atunci elementele acesteia sunt *evenimente elementare*.

Definiția 4. Două evenimente A, B sunt *incompatibile* dacă nu se pot realiza simultan: $A \cap B = \varnothing$.

În caz contrar, ele sunt evenimente *compatibile*.

Fie Ω evenimentul sigur ataşat unei experiențe şi $P(\Omega)$ mulțimea părților lui Ω.

Definiția 5. O familie nevidă $K \subset P(\Omega)$ se numeşte *corp de părți* dacă verifică axiomele: *i)* $\forall A \in K \Rightarrow \overline{A} \in K$;

ii) $\forall A, B \in K \Rightarrow A \cup B \in K$.

Observație. Dacă înlocuim condiția *ii)* prin

ii)' $\forall (A_n)_{n \in N} \subset K \Rightarrow \bigcup\limits_{n \in N} A_n \in K$, se obține noțiunea de *corp borelian*.

Definiția 6. Se numeşte *câmp (câmp borelian) de evenimente* evenimentul sigur Ω înzestrat cu un corp (corp borelian) K de evenimente.

Vom nota acest câmp de evenimente (Ω, K)

5.3 Formule de calcul practic pentru probabilitati

Definiția 1. *(definiția clasică a probabilității)* Se numeşte p*robabilitate* a evenimentului A şi se notează $P(A)$ raportul dintre numărul de rezultate favorabile producerii evenimentului A (n_{fav}) şi numărul total de rezultate ale experimentului, considerate egal posibile (n_{pos}): $P(A)=\frac{n_{fav}}{n_{pos}}$.

Definiția 2. *(definiția axiomatică a probabilității)* Considerăm un câmp de evenimente (Ω, K). Se numeşte *probabilitate* pe câmpul de evenimente (Ω, K) o funcție de mulțime $P: K \to R_+$, care verifică axiomele:

1) $\forall A \in K \Rightarrow P(A) \geq 0$;
2) $P(\Omega)=1$;
3) $\forall A, B \in K,\ A \cap B=\varnothing \Rightarrow P(A \cup B)=P(A)+P(B)$.

Definiția 3. Un câmp de evenimente (Ω, K) înzestrat cu o probabilitate P se numeşte *câmp de probabilitate* şi se notează (Ω, K, P).

Propoziția 1. *(Proprietăți ale funcției probabilitate)*

1) $P(\overline{A})=1-P(A),\ \forall\ A \in K$.
2) $P(B \setminus A)=P(B)-P(A \cap B),\ \forall\ A, B \in K$.
3) $P(\varnothing)=0$.
4) $0 \leq P(A) \leq 1,\ \forall\ A \in K$.
5) $P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right)=\sum_{i=1}^{n} P(A_i)-\sum_{1 \leq i<j \leq n} P(A_i \cap A_j)+\sum_{1 \leq i<j<k \leq n} P(A_i \cap A_j \cap A_k)-\ldots..+(-1)^{n-1} P\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right)$
   (*formula lui Poincaré*).

Observația 1. Dacă evenimentele $A_1, A_2, ..., A_n$ sunt incompatibile două câte două, atunci formula 5) devine: 5') $P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right)=\sum_{i=1}^{n} P(A_i)$.

Observația 2. În cazul $n=2$, formula lui Poincaré devine:

$$P(A \cup B)=\begin{cases} P(A)+P(B), & A \cap B=\varnothing\ (A, B\ \textit{incompatibile}) \\ P(A)+P(B)-P(A \cap B), & A \cap B \neq \varnothing\ (A, B\ \textit{compatibile}) \end{cases}$$

6) $P\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right) \geq \sum_{i=1}^{n} P(A_i)-(n-1)$ (*inegalitatea lui Boole*).

Definiția 4. Fie (Ω, K, P) un cămp de probabilitate şi $A \in K$, *a.î.* $P(A)>0$. Se numeşte *probabilitate condiționată* de evenimentul A a evenimentului B expresia:

$$P(B / A)=\frac{P(A \cap B)}{P(B)},\ P(B)>0.$$

Definiția 5. Spunem că evenimentele A şi B sunt *independente* dacă $P(A \cap B)=P(A) \cdot P(B)$.

Definiția 6. Spunem că evenimentele $A_1, A_2, ..., A_n$ sunt *independente în totalitate* dacă $P(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap .... \cap A_{i_k}) = P(A_{i_1}) \cdot P(A_{i_2}) \cdot .... \cdot P(A_{i_k})$,
$\forall\, k = \overline{1,n},\ \forall\ 1 \le i_1 < i_2 < ... < i_k \le n$.

Propoziția 2. Fie $A_1, A_2, ..., A_n$ o familie finită de evenimente astfel încât $P\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right) \neq 0$;

atunci $P\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right) = P(A_1) \cdot P(A_2 / A_1) \cdot P(A_3 / A_1 \cap A_2) \cdot .... \cdot P(A_n / A_1 \cap A_2 \cap ... \cap A_{n-1})$.

Observație. Dacă $A_1, A_2, ..., A_n$ este o familie finită de evenimente independente în totalitate, atunci: $P\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right) = P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot P(A_3) \cdot .... \cdot P(A_n)$.

Observație. $P(A \cap B) = \begin{cases} P(A) \cdot P(B), & \textit{pentru } A,\ B \textit{ evenimente independente} \\ P(A) \cdot P(B / A), & \textit{pentru } A,\ B \textit{ evenimente dependente} \end{cases}$.

Propoziția 3. (Formula probabilității totale) Fie $(A_1, A_2, ..., A_n)$ un sistem complet de evenimente (adică $A_i \cap A_j = \varnothing, \forall\, i \neq j;\ i, j = \overline{1,n}$ şi $\bigcup_{i=1}^{n} A_i = \Omega$) şi $X \in K$, cu $P(X) \neq 0$. Atunci $P(X) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) \cdot P(X / A_i)$.

Propoziția 4. (Formula lui Bayes) Fie $(A_1, A_2, ..., A_n)$ un sistem complet de evenimente şi $X \in K$, cu $P(X) \neq 0$. Atunci $P(A_i / X) = \dfrac{P(A_i) \cdot P(X / A_i)}{\sum_{i=1}^{n} P(A_i) \cdot P(X / A_i)}$ sau

$P(A_i / X) = \dfrac{P(A_i) \cdot P(X / A_i)}{P(X)}$.

5.3 Scheme probabilistice clasice

I. Schema lui Poisson

Se consideră n urne, fiecare urnă U_i, $i=\overline{1,n}$, conținând bile albe şi bile negre. Se cunosc probabilitățile evenimentelor ca, făcând la întâmplare o extragere din urna U_i, $i=\overline{1,n}$, să obținem o bilă albă, respectiv o bilă neagră, probabilități notate p_i, respectiv q_i ($p_i+q_i=1$).

Se extrage câte o bilă din fiecare urnă.

Probabilitatea ca, din cele *n* bile extrase, *k* să fie albe şi $n-k$ să fie negre, notată $P(n:k,n-k)$, este: $P(n:k,n-k) =$ coeficientul lui t^k din polinomul $Q(t)$, unde $Q(t)=(p_1t+q_1)(p_2t+q_2)......(p_nt+q_n)$.

II. Schema bilei revenite cu două stări (schema lui Bernoulli sau schema binomială)

Se consideră o urnă care conține bile albe şi bile negre. Se cunoaşte probabilitatea $p\in(0,1)$ ca extrăgând la întâmplare o bilă din urnă, aceasta să fie albă ($q=1-p$ este probabilitatea ca la o extragere la întâmplare din urnă să se obțină o bilă neagră).

Se fac *n* extrageri succesive din urnă, cu revenire.

Probabilitatea ca din cele *n* bile extrase *k* să fie albe şi $n-k$ să fie negre, notată $P(n:k,n-k)$, este: $P(n:k,n-k)=C_n^k\, p^k q^{n-k}$.

Generalizare*: Schema bilei revenite cu "m" stări (schema multinomială)*

Se consideră o urnă care conține bile de *"m"* culori. Se cunosc probabilitatățile evenimentelor ca, extrăgând la întâmplare o bilă din urnă, aceasta să fie de culoarea *"i"*, $i=\overline{1,m}$, probabilități notate $p_1,p_2,.....,p_m$, cu $p_i\in(0,1)$, $\sum_{i=1}^{m}p_i=1$.

Se fac *n* extrageri succesive din urnă, cu revenire.

Probabilitatea $P(n:n_1,n_2,....,n_m)$ ca din cele *n* bile extrase n_1 să fie de culoarea *"1", n_2* să fie de culoarea *"2",……"n_m"* de culoarea *"m"*, este:

$$P(n:n_1,n_2,....,n_m)=\frac{n!}{n_1!\cdot n_2!\cdot........\cdot n_m!}p_1^{n_1}\cdot p_2^{n_2}\cdot.......\cdot p_m^{n_m}\cdot$$

Observație. Schema bilei revenite poate modela o experiență cu două rezultate posibile: evenimentele A şi $\overline{A}$, având probabilitățile p şi q de a se realiza la orice repetare a experienței, cu $p,q>0$, $p+q=1$.

III. Schema bilei nerevenite cu două stări (schema hipergeometrică)

Se consideră o urnă care conține N bile, dintre care N_1 bile albe şi N_2 bile negre. Se fac *n* extrageri succesive din urnă, fără revenire.

Probabilitatea ca din cele *n* bile extrase *k* să fie albe şi $n-k$ să fie negre, notată $P(n:k,n-k)$, este:

$$P(n:k,n-k)=\frac{C_{N_1}^{k}\cdot C_{N_2}^{n-k}}{C_N^n}.$$

Generalizare*: Schema bilei nerevenite cu "m" stări*

Se consideră o urnă ce conține N bile de $"m"$ culori, dintre care N_1 bile de culoarea $"1"$, N_2 bile de culoarea $"2"$,.., N_m bile de culoarea $"m"$.

Se fac *n* extrageri succesive din urnă, fără revenire.

Probabilitatea $P(n:n_1,n_2,....,n_m)$ ca din cele *n* bile extrase n_1 să fie de culoarea $"1"$, n_2 de culoarea $"2",\ldots\ldots"n_m"$ de culoarea $"m"$, este:

$$P(n:n_1,n_2,....,n_m)=\frac{C_{N_1}^{n_1}\cdot C_{N_2}^{n_2}\cdot ....\cdot C_{N_m}^{n_m}}{C_N^n}.$$

5.4 Ilustrarea teoriei pe cazul numeric concret al aplicațiilor

1. Într-o urnă sunt 10 bile albe şi 15 negre. Se extrag consecutiv 2 bile. Să se calculeze probabilitatea de a obține bile de culori diferite în ipotezele:

a) prima extragere este cu revenire;

b) prima extragere este fără revenire.

Rezolvare:

Notăm A_1 - evenimentul ca la prima extragere să obținem o bilă albă;

A_2 - evenimentul ca la a doua extragere să obținem o bilă albă;

N_1 - evenimentul ca la prima extragere să obținem o bilă neagră;

N_2 - evenimentul ca la a doua extragere să obținem o bilă neagră.

Fie X evenimentul ca în cele două extrageri să obținem bile de culori diferite. Deoarece evenimentele $A_1\cap N_2$ şi $N_1\cap A_2$ sunt incompatibile, rezultă că

$$P(X)=P((A_1\cap N_2)\cup(N_1\cap A_2))=P(A_1\cap N_2)+P(N_1\cap A_2).$$

a) Dacă extragerile sunt cu revenire, atunci evenimentele A_1 şi N_2, respectiv N_1 şi A_2 sunt independente, prin urmare:

$$P(X)=P(A_1)\cdot P(N_2)+P(A_2)\cdot P(N_1)=\frac{10}{25}\cdot\frac{15}{25}+\frac{10}{25}\cdot\frac{15}{25}=0{,}48.$$

b) Dacă extragerile sunt fără revenire, atunci evenimentele A_1 şi N_2, respectiv N_1 şi A_2 sunt dependente, deci $P(X) = P(A_1) \cdot P(N_2 / A_1) + P(N_1) \cdot P(A_2 / N_1)$.

$P(N_2 / A_1)$ reprezintă probabilitatea de a obține o bilă neagră la a doua extragere, ştiind că la prima extragere s-a obținut o bilă albă, deci

$$P(N_2 / A_1) = \frac{nr\ de\ bile\ negre}{nr\ de\ bile\ ramase\ in\ urna} = \frac{15}{24}.$$

$P(A_2 / N_1)$ reprezintă probabilitatea de a obține o bilă albă la a doua extragere, ştiind că la prima extragere s-a obținut o bilă neagră, deci

$$P(A_2 / N_1) = \frac{nr.\ de\ bile\ \text{albe}}{nr\ de\ bile\ ramase\ in\ urna} = \frac{15}{24}.$$

Obținem că $P(X) = \frac{10}{25} \cdot \frac{15}{24} + \frac{15}{25} \cdot \frac{10}{24} = 0{,}5$.

2. Un magazin primeşte într-o zi 10 produse de acelaşi tip, dintre care 5 provin de la furnizorul F_1, 3 provin de la furnizorul F_2 şi restul de la furnizorul F_3. Care este probabilitatea ca din 4 produse vândute:

a) două să provină de la F_2 şi câte unul de la ceilalți furnizori?

b) toate să provină de la acelaşi furnizor?

c) unul singur să provină de la F_3?

Rezolvare:

a) Problema poate fi modelată cu ajutorul unei urne conținând bile de trei culori, din care se fac extrageri fără revenire.

$$10\ \text{produse} \begin{cases} 5\ F_1 \\ 3\ F_2 \\ 2\ F_3 \end{cases} \xrightarrow[\text{fără revenire}]{\text{se extrag}} 4 \begin{cases} 1\ F_1 \\ 2\ F_2 \\ 1\ F_3 \end{cases}$$

Aplicând schema urnei cu bila nerevenită, obținem:

$$P(4:1,2,1) = \frac{C_5^1 \cdot C_3^2 \cdot C_2^1}{C_{10}^4} = \frac{1}{7} = 0{,}142857.$$

b) Fie B evenimentul ca toate produsele să provină de la acelaşi furnizor; acesta se realizează numai atunci când toate produsele provin de la F_1, prin urmare

$$P(B) = P(4:4,0,0) = \frac{C_5^4 \cdot C_3^0 \cdot C_2^0}{C_{10}^4} = \frac{1}{42} = 0{,}0238.$$

c) Fie C evenimentul ca *c*) un singur produs să provină de la F_3.

Se observă că, aplicând schema urnei cu bile de 3 culori, numărul situațiilor în care se realizează evenimentul C este destul de mare.

Problema poate fi modelată mai uşor cu ajutorul unei urne conținând bile de două culori: bilele albe reprezintă produsele ce provin de la F_1 sau F_2, iar bilele negre sunt produsele care provin de la F_3. Obținem: $P(C) = P(4:3,1) = \frac{C_8^3 \cdot C_2^1}{C_{10}^4} = \frac{8}{15} = 0{,}53333$.

Teste de autoevaluare

1. Doi studenți susțin simultan un examen. Probabilitatea ca primul student să promoveze este 0,8, iar probabilitatea ca al doilea să promoveze este 0,7. Să se calculeze probabilitatea ca:

a) ambii studenți să promoveze examenul;

b) exact un student să promoveze;

c) cel puțin un student să promoveze;

d) numai primul student să promoveze.

2. Dintre cele 30 de subiecte recomandate pentru examen de către profesorul de curs, un student a pregătit 20 de subiecte, pe care le poate prezenta perfect . La examen fiecare subiect este scris pe câte un bilet, iar studentul trebuie să extragă cinci bilete la întâmplare şi să prezinte cele cinci subiecte aflate pe bilete. Ştiind că pentru fiecare subiect la care răspunde corect va primi două puncte şi că nu se acordă nici un punct pentru rezolvări parțiale, să se determine probabilitatea ca:

a) studentul să primească nota 10;

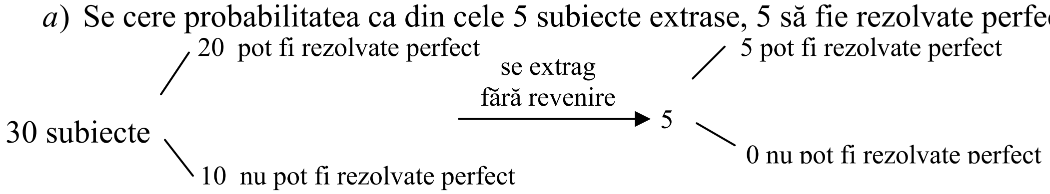
b) studentul să primească nota 6;

c) studentul să nu promoveze examenul.

Răspunsuri si comentarii la testele de autoevaluare

1. Problema poate fi modelată cu ajutorul unei urne conținând bile de două culori, din care se fac extrageri fără revenire.

a) Se cere probabilitatea ca din cele 5 subiecte extrase, 5 să fie rezolvate perfect.



$$P(5:5,0)=\frac{C_{20}^{5}\cdot C_{10}^{0}}{C_{30}^{5}}=0{,}027198\,.$$

b) Se cere probabilitatea ca din cele 5 subiecte extrase, exact 3 să fie rezolvate perfect:

$$P(5:3,2)=\frac{C_{20}^{3}\cdot C_{10}^{2}}{C_{30}^{5}}=0{,}35998\,.$$

c) Fie C evenimentul ca studentul să nu promoveze examenul, adică să rezolve perfect 0, 1 sau 2 subiecte:

$$P(C)=\sum_{k=0}^{2}P(5:k,5-k)=\frac{C_{20}^{0}\cdot C_{10}^{5}}{C_{30}^{5}}+\frac{C_{20}^{1}\cdot C_{10}^{4}}{C_{30}^{5}}+\frac{C_{20}^{2}\cdot C_{10}^{3}}{C_{30}^{5}}=0{,}27283\cdot$$

2. Notăm cu A evenimentul ca primul student să promoveze examenul şi cu B evenimentul ca al doilea student să promoveze.

$a)$ Cum cele două evenimente sunt independente, rezultă că probabilitatea ca ambii studenți să promoveze examenul este: $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) = 0{,}8 \cdot 0{,}7 = 0{,}56$.

$b)$ Probabilitatea ca exact un student să promoveze examenul este:
$P\left((A \cap \overline{B}) \cup (\overline{A} \cap B)\right) = P(A \cap \overline{B}) + P(\overline{A} \cap B) = P(A) \cdot P(\overline{B}) + P(\overline{A}) \cdot P(B) =$
$= 0{,}8 \cdot 0{,}3 + 0{,}2 \cdot 0{,}7 = 0{,}38$.

$c)$ Probabilitatea ca cel puțin un student să promoveze se scrie:
$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A) \cdot P(B) =$
$0{,}8 + 0{,}7 - 0{,}8 \cdot 0{,}7 = 0{,}94$.

$d)$ Probabilitatea ca numai primul student să promoveze se poate calcula astfel:
$P\left(A \cap \overline{B}\right) = P(A) \cdot P\left(\overline{B}\right) = 0{,}8 \cdot 0{,}3 = 0{,}24$, având în vedere independența celor două evenimente, sau
$P\left(A \cap \overline{B}\right) = P\left(A \setminus B\right) = P(A) - P(A \cap B) = 0{,}8 - 0{,}56 = 0{,}24$

Bibliografia unitatii de învatare 5

1. Gh. Cenuşă şi colectiv, *Matematici aplicate in economie. Teorie si aplicatii.* Editura CISON, Bucureşti, 2007
2. S. Dedu, F. Şerban, *Matematici aplicate în economie. Culegere de probleme*, Editura Teocora, Buzau, 2009
3. I. Purcaru , *Matematici generale si elemente de optimizare,* Editura Economică, Bucureşti, 1997.

Lucrarea de verificare nr. 4

1. Într-o urnă sunt 10 bile albe şi 15 negre. Se extrag consecutiv 2 bile. Să se calculeze probabilitatea de a obține bile de culori diferite în ipotezele:

$a)$ prima extragere este cu revenire;

$b)$ prima extragere este fără revenire.

2. Trei bănci acordă credite pentru finanțarea studiilor cu probabilitățile 0,8; 0,75, respectiv 0,82, independent una de alta. Un student se adresează tuturor băncilor. Cu ce probabilitate el va primi:

$a)$ trei răspunsuri favorabile;

$b)$ exact două răspunsuri favorabile;

$c)$ exact două răspunsuri nefavorabile;

$d)$ nici un răspuns favorabil;

$e)$ cel mult două răspunsuri favorabile .

UNITATEA DE ÎNVATARE 6

Variabile aleatoare

Cuprins

6.1 Obiective

Unitatea de învatare 6 continuă incursiunea în teoria probabilitatilor, prezentând variabilele aleatoare. Impreună cu noțiunile importante asociate lor, precum caracteristicile numerice corespunzătoare acestora, ce sunt de un real folos pentru practica economică, pentru studiu **s**i cercetare, pentru realizarea performanței în viitoarea muncă de economist si eficientizarea activitatii l la nivel micro si macroeconomic.

După studiul acestei unitati de învatare, studentul va avea cunostințe despre:

-noțiunile de variabile aleatoare existente **s**i conceptele de bază din teoria probabilitatilor corelate cu ele, toate acestea oferind economiştilor, indiferent de domeniul în care vor lucra, cunoştințe solide de strictă specialitate, dar **s**i tehnici specifice matematicii aplicate;

-tipul de probleme teoretice **s**i practice, care fac obiectul cursului de „Variabile aleatoare ” si al lucrărilor de verificare ale studenților din invatamântul economic din anul I, ID, de la Facultatea de Finante, Banci si Burse de Valori din Academia de Studii Economice Bucureşti.

6.2 Variabile aleatoare unidimensionale

Definiția 1. Fie (Ω, K, P) un câmp de probabilitate.
O aplicație $X:\Omega \to R$ se numeşte *variabilă aleatoare* dacă pentru orice $x \in R$ avem: $\{\omega \mid X(\omega) < x\} \in K$.

Definiția 2. Spunem că variabila aleatoare $X:\Omega \to R$ este:

$a)$ *discretă*, dacă mulțimea valorilor variabilei aleatoare (adică $X(\Omega)$) este finită sau numărabilă;

$b)$ *continuă*, dacă mulțimea valorilor variabilei aleatoare este un interval sau o reuniune finită de intervale din R.

Repartiția unei variabile aleatoare discrete X se reprezintă sub forma unei matrice având două linii: prima linie conține valorile pe care le ia variabila aleatoare, iar a doua linie conține probabilitățile ca variabila aleatoare să ia aceste valori:

$$X:\begin{pmatrix} x_i \\ p_i \end{pmatrix}_{i\in I}, \quad p_i = P(X = x_i),\ i \in I,\ \sum_{i\in I} p_i = 1,$$

unde I este o mulțime finită sau numărabilă.

Definiția 3. Se numeşte *funcția de repartiție* a variabilei aleatoare X aplicația $F: R \to [0,1],\ F(x) = P(X < x) = P(\{\omega \in \Omega / X(\omega) < x\})$.

Propoziția 1. Dacă $F: R \to [0,1]$ este funcția de repartiție a unei variabilei aleatoare $X:\Omega \to R$, atunci:

$a)$ $\lim\limits_{x\to-\infty} F(x) = 0$, $\lim\limits_{x\to\infty} F(x) = 1$;

$b)$ F este nedescrescătoare adică $\forall\, x_1, x_2 \in R,\ x_1 < x_2 \Rightarrow F(x_1) \le F(x_2)$;

$c)$ F este continuă la stânga, adică $\forall\, x \in R \Rightarrow F(x-0) = F(x)$.

Propoziția 2. Dacă funcția $F: R \to R$ satisface condițiile $a)$, $b)$, $c)$ din propoziția precedentă, atunci există un un câmp de probabilitate (Ω, K, P) şi o variabilă aleatoare $X:\Omega \to R$ a cărei funcție de repartiție este F.

Definiția 4. Fie $X:\Omega \to R$ o variabilă aleatoare continuă şi $I = X(\Omega)$. Dacă funcția de repartiție F a variabilei aleatoare X este derivabilă, cu derivata continuă, pe I, atunci funcția $f(x) = \begin{cases} F'(x),\ x \in I \\ \ 0\ \ ,\ x \notin I \end{cases}$ se numeşte *densitatea de repartiție* (*densitatea de probabilitate*) a variabilei aleatoare X.

Propoziția 3. Densitatea de repartiție $f: R \to R$ a unei variabile aleatoare continue verifică proprietățile: $a)$ $f(x) \ge 0,\ \forall\, x \in R$; $b)$ $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$.

Propoziția 4. Dacă funcția $f: R \to R$ satisface condițiile $a)$, $b)$ din propoziția precedentă, atunci există un un câmp de probabilitate (Ω, K, P) şi o variabilă aleatoare $X:\Omega \to R$ a cărei densitate de probabilitate este f.

Observații. Fie $X:\Omega \to R$ o variabilă aleatoare continuă, având densitatea de repartiție f şi funcția de repartiție F. Atunci:

1) Deoarece F este o primitivă pe R a funcției f, rezultă $F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(t)dt,\ \forall x\in R$.

2) $P(X<a)=P(X\le a)=F(a)=\int_{-\infty}^{a} f(x)dx$;

$P(X>b)=P(X\ge b)=1-F(b)=\int_{b}^{\infty} f(x)dx$;

$P(a\le X<b)=P(a<X<b)=P(a\le X\le b)=P(a<X\le b)=F(b)-F(a)=\int_{a}^{b} f(x)dx$

Definiția 5. Variabilele aleatoare $X_i,\ i=\overline{1,n},\ n\ge 2$ sunt *independente* dacă evenimentele $A_i=\{\omega \mid X_i(\omega)<x_i\}$ sunt independente, $\forall x_i\in R,\ i=\overline{1,n}$.

Observație. Fie $X:\begin{pmatrix} x_i \\ p_i \end{pmatrix}_{i\in I}$, $Y:\begin{pmatrix} y_j \\ q_j \end{pmatrix}_{j\in J}$ variabile aleatoare discrete. Atunci X, Y independente dacă $P(X=x_i, Y=y_j)=P(X=x_i)\cdot P(Y=y_j),\ \forall i\in I,\ j\in J$

Propoziția 5. Dacă $X:\Omega\to R$, $Y:\Omega\to R$ sunt variabile aleatoare şi $c\in R$, $a\in R,\ a>0$, $k\in N^*$, atunci $c\cdot X$, $X+c$, $|X|$, X^k, $\frac{1}{X}$ (dacă X nu ia valoarea 0), a^X, $X+Y$, $X\cdot Y$ sunt variabile aleatoare.

Observație. Dacă $X:\begin{pmatrix} x_i \\ p_i \end{pmatrix}_{i\in I}$ şi $Y:\begin{pmatrix} y_j \\ q_j \end{pmatrix}_{j\in J}$ sunt variabile aleatoare discrete, atunci

repartițiile operațiilor cu variabile aleatoare definite mai sus sunt: $c\cdot X:\begin{pmatrix} cx_i \\ p_i \end{pmatrix}_{i\in I}$,

$X+c:\begin{pmatrix} x_i+c \\ p_i \end{pmatrix}_{i\in I}$, $|X|:\begin{pmatrix} |x_i| \\ p_i \end{pmatrix}_{i\in I}$, $X^k:\begin{pmatrix} x_i^k \\ p_i \end{pmatrix}_{i\in I}$, $\frac{1}{X}:\begin{pmatrix} \frac{1}{x_i} \\ p_i \end{pmatrix}_{i\in I}$, $x_i\ne 0,\ \forall i=\overline{1,n}$, $a^X:\begin{pmatrix} a^{x_i} \\ p_i \end{pmatrix}_{i\in I}$,

$X+Y:\begin{pmatrix} x_i+y_j \\ p_{ij} \end{pmatrix}_{\substack{i\in I\\ j\in J}}$, $X\cdot Y:\begin{pmatrix} x_i y_j \\ p_{ij} \end{pmatrix}_{\substack{i\in I\\ j\in J}}$, unde $p_{ij}=P(X=x_i, Y=y_j),\ \forall\ i\in I, j\in J$.

Definiția 6. Se numeşte *media (valoarea medie)* variabilei aleatoare X numărul (dacă există):

$M(X)=\sum_{i\in I} x_i p_i$, dacă X este o variabilă aleatoare discretă;

$M(X)=\int_{-\infty}^{\infty} x\cdot f(x)dx$, dacă X este o variabilă aleatoare continuă.

Propoziția 6. Dacă $X:\Omega\to R$, $Y:\Omega\to R$ sunt variabile aleatoare şi $a\in R$, rezultă:

$a)$ $M(a)=a$;

$b)$ $M(aX)=aM(X)$;

$c)$ $M(X+Y)=M(X)+M(Y)$;

$d)$ dacă variabilele aleatoare X, Y sunt independente, atunci $M(X\cdot Y)=M(X)\cdot M(Y)$.

Definiția 7. Se numeşte *dispersia* variabilei aleatoare X numărul (dacă există):
$D^2(X) = M\left[(X - M(X))^2\right].$

Propoziția 7. Dacă $X : \Omega \to R$, $Y : \Omega \to R$ sunt variabile aleatoare şi $a \in R$, rezultă:

$a)$ $D^2(X) \geq 0$;

$b)$ $D^2(X) = M(X^2) - M^2(X)$;

$c)$ $D^2(a) = 0$;

$d)$ $D^2(aX) = a^2 D^2(X)$;

$e)$ dacă X, Y sunt independente, atunci $D^2(X+Y) = D^2(X) + D^2(Y)$.

Definiția 8. Se numeşte *abaterea medie pătratică (abaterea standard)* a variabilei aleatoare X numărul (dacă există): $\sigma(X) = D(X) = \sqrt{D^2(X)}$.

Definiția 9. Se numeşte *moment inițial de ordin r* al variabilei aleatoare X numărul (dacă există): $m_r = M_r(X) = M(X^r)$.

Observație. $m_r = \sum_{i \in I} x_i^r p_i$, dacă X este o variabilă aleatoare discretă;

$m_r = \int_{-\infty}^{\infty} x^r \cdot f(x)dx$, dacă X este o variabilă aleatoare continuă.

Definiția 10. Se numeşte *moment centrat de ordin r* al variabilei aleatoare X numărul (dacă există): $\mu_r = M_r(X - M(X)) = M\left[(X - M(X))^r\right]$.

Observație. $m_r = \sum_{i \in I} (x_i - M(X))^r p_i$, dacă X este o variabilă aleatoare discretă;

$m_r = \int_{-\infty}^{\infty} (x - M(X))^r f(x)dx$, dacă X este o variabilă aleatoare continuă.

Definiția 15. Fie (Ω, K, P) un câmp de probabilitate şi $X : \Omega \to R$ o variabilă aleatoare. Se numeşte *funcția caracteristică* a variabilei aleatoare X aplicația
$\varphi : R \to C,\ \varphi(t) = M\left(e^{itX}\right).$

Observație. $\varphi(t) = \sum_{k \in I} e^{itx_k} p_k$, dacă X este o variabilă aleatoare discretă;

$\varphi(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} f(x)\, dx$, dacă X este o variabilă aleatoare continuă.

Definiția 16. Fie (Ω, K, P) un câmp de probabilitate şi $X : \Omega \to R$ o variabilă aleatoare. Se numeşte *funcția generatoare de momente* a variabilei aleatoare X aplicația $g : R \to R,\ g(t) = M\left(e^{tX}\right).$

6.3 Variabile aleatoare bidimensionale

Definiția 1. Fie (Ω, K, P) un câmp de probabilitate. O aplicație $(X,Y):\Omega \to R^2$ se numeşte *variabilă aleatoare bidimensională (vector aleator)* dacă oricare ar fi $(x,y) \in R^2$ avem: $\{\omega \mid X(\omega) < x, Y(\omega) < y\} \in K$.

- În cazul în care componentele X, Y sunt *variabile aleatoare discrete cu o mulțime finită de valori*, *repartiția vectorului aleator* (X,Y) se poate reprezenta sub forma: $(X,Y):\begin{pmatrix} (x_i, y_j) \\ p_{ij} \end{pmatrix}_{\substack{i=\overline{1,m} \\ j=\overline{1,n}}}$ sau sub forma tabelului următor:

$X \backslash Y$	y_1	y_2	$\cdots$	y_j	$\cdots$	y_n	p_i
x_1	p_{11}	p_{12}	$\cdots$	p_{1j}	$\cdots$	p_{1n}	p_1
x_2	p_{21}	p_{22}	$\cdots$	p_{2j}		p_{2n}	p_2
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$
x_i	p_{i1}	p_{i2}	$\cdots$	p_{ij}	$\cdots$	p_{in}	p_i
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$
x_m	p_{m1}	p_{m2}	$\cdots$	p_{mj}	$\cdots$	p_{mn}	p_n
q_j	q_1	q_2	$\cdots$	q_j	$\cdots$	q_m	1

unde $p_{ij} = P(X = x_i, Y = y_j),\ i = \overline{1,m},\ j = \overline{1,n}$, $p_i = \sum_{j=1}^{n} p_{ij}, i = \overline{1,m}$, $q_j = \sum_{i=1}^{m} p_{ij}, j = \overline{1,n}$

cu condițiile: **1)** $p_{ij} \geq 0,\ \forall i = \overline{1,m},\ j = \overline{1,n}$ şi **2)** $\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} p_{ij} = 1$.

Repartițiile marginale sunt repartițiile variabilelor care compun vectorul (X,Y).

Repartiția variabilei aleatoare X *condiționată de evenimentul* $(Y = y_j)$, unde $j \in \overline{1,n}$,

este: $X/Y=y_j:\begin{pmatrix} x_i \\ P(X=x_i/Y=y_j) \end{pmatrix}_{i=\overline{1,m}}$.

Repartiția variabilei aleatoare Y *condiționată de evenimentul* $(X = x_i)$, unde $i \in \overline{1,m}$,

este: $Y/X=x_i:\begin{pmatrix} y_j \\ P(Y=y_j/X=x_i) \end{pmatrix}_{j=\overline{1,n}}$.

Definiția 2. Se numeşte *covarianța* variabilelor aleatoare X *şi* Y numărul:
$\operatorname{cov}(X,Y) = M(XY) - M(X)\cdot M(Y)$.

Definiția 3. Variabilele aleatoare X şi Y se numesc *necorelate* dacă
$\operatorname{cov}(X,Y) = 0$.

Definiția 4. Se numeşte *coeficientul de corelație* al variabilelor aleatoare X şi Y numărul: $$\rho(X,Y)=\frac{\operatorname{cov}(X,Y)}{\sigma(X)\cdot\sigma(Y)}=\frac{M(XY)-M(X)\cdot M(Y)}{\sigma(X)\cdot\sigma(Y)}.$$

Propoziție. Oricare ar fi variabilele aleatoare X *şi* Y cu $D^2(X)\cdot D^2(Y)\neq 0$, au loc următoarele proprietăți:

1) $\rho(X,Y)=0$ dacă şi numai dacă X şi Y sunt necorelate.
2) Dacă X, Y sunt independente, atunci $\rho(X,Y)=0$.
3) $|\rho(X,Y)|\leq 1$.
4) Dacă $|\rho(X,Y)|=1$, atunci între X şi Y există o dependență liniară.

6.4 Variabile aleatoare unidimensionale clasice

REPARTIȚII CLASICE DISCRETE

Repartiția binomială

$$X\in Bi(n,p)\Leftrightarrow X:\begin{pmatrix} k \\ C_n^k p^k q^{n-k}\end{pmatrix}_{k=\overline{0,n}};\ n\in N^*;\ p,q>0;\ p+q=1.$$

$$M(X)=np;\quad D^2(X)=npq;\ \varphi(t)=\left(pe^{it}+q\right)^n.$$

Repartiția Poisson

$$X\in Po(\lambda)\Leftrightarrow X:\begin{pmatrix} k \\ e^{-\lambda}\cdot\dfrac{\lambda^k}{k!}\end{pmatrix}_{k\in N};\ \lambda>0.$$

$$M(X)=\lambda;\quad D^2(X)=\lambda;\ \varphi(t)=e^{\lambda(e^{it}-1)}.$$

REPARTIȚII CLASICE CONTINUE

Repartiția Gamma

$X\in\Gamma[a,b];\ a,b>0\Leftrightarrow X$ are densitatea de repartiție: $$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{b^a\,\Gamma(a)}x^{a-1}e^{-\frac{x}{b}}, & x>0\\ 0, & x\leq 0\end{cases}$$

$$M(X)=ab,\ D^2(X)=ab^2;\ \varphi(t)=(1-ibt)^{-a}.$$

Repartiția normală

$X\in N(m,\sigma);\ \sigma>0, m\in R\Leftrightarrow X$ are densitatea de repartiție:

$$f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}},\ x\in R$$

$$M(X)=m,\ D^2(X)=\sigma^2;\ \varphi(t)=e^{imt-\frac{\sigma^2t^2}{2}}.$$

6.5 Ilustrarea teoriei pe cazul numeric concret al aplicațiilor

1. Fie variabila aleatoare discretă $X:\begin{pmatrix} -2 & -1 & 0 & 1 & 2 \\ 2p & 4p & p & 2p & p \end{pmatrix}$, $p \in R$.

Să se determine:

a) repartiția variabilei aleatoare *X*;

b) funcția de repartiție a variabilei *X*;

c) media, dispersia şi abaterea medie pătratică variabilei aleatoare *X*;

d) $M(X^3)$, $M(2X-3)$, $D^2(3X-2)$;

e) probabilitățile: $P(X \le -0{,}75)$, $P(X > 1{,}25)$, $P(-1{,}25 \le X \le 0{,}5)$,

.

Rezolvare:

a) Impunem condițiile ca $p \ge 0$ şi $2p + 4p + p + 2p + p = 1 \Rightarrow p = \frac{1}{10}$.

Rezultă că repartiția variabilei aleatoare X este: $X:\begin{pmatrix} -2 & -1 & 0 & 1 & 2 \\ \frac{2}{10} & \frac{4}{10} & \frac{1}{10} & \frac{2}{10} & \frac{1}{10} \end{pmatrix}$.

b)
$$F_x(x) = P(X < x) = \begin{cases} 0,\ x \in (-\infty, -2] \\ \frac{2}{10} = \frac{1}{5},\ x \in (-2, 1] \\ \frac{2}{10} + \frac{4}{10} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5},\ x \in (-1, 0] \\ \frac{2}{10} + \frac{4}{10} + \frac{1}{10} = \frac{7}{10},\ x \in (0, 1] \\ \frac{2}{10} + \frac{4}{10} + \frac{1}{10} + \frac{2}{10} = \frac{9}{10},\ x \in (1, 2] \\ 1,\ x \in (2, +\infty\ ] \end{cases}$$

c) $M(X) = (-2)\cdot\frac{2}{10} + (-1)\cdot\frac{4}{10} + 0\cdot\frac{1}{10} + 1\cdot\frac{2}{10} + 2\cdot\frac{1}{10} = -\frac{4}{10} = -0{,}4$.

$M(X^2) = (-2)^2\cdot\frac{2}{10} + (-1)^2\cdot\frac{4}{10} + 0^2\cdot\frac{1}{10} + 1^2\cdot\frac{2}{10} + 2^2\cdot\frac{1}{10} = \frac{18}{10} = 1{,}8$.

$D^2(X) = M(X^2) - M^2(X) = 1{,}8 - (-0{,}4)^2 = 1{,}64$.

$\sigma(X) = \sqrt{D^2(X)} \cong 1{,}28$.

d) $M(X^3) = (-2)^3\cdot\frac{2}{10} + (-1)^3\cdot\frac{4}{10} + 0^3\cdot\frac{1}{10} + 1^3\cdot\frac{2}{10} + 2^3\cdot\frac{1}{10} = -1$.

Folosind proprietățile mediei şi ale dispersiei, obținem:

$M(2X-3) = 2M(X) - 3 = 2\cdot(-0{,}4) - 3 = -3{,}8$. $D^2(3X-2) = 9D^2(X) = 9\cdot 1{,}64 = 14{,}76$.

e) $P(X \le -0{,}75) = P(X = -1) + P(X = -2) = \frac{2}{10} + \frac{4}{10} = \frac{3}{5}$.

$P(X > 1{,}25) = P(X = 2) = \frac{1}{10}$.

$P(-1{,}25 \le X \le 0{,}5) = P(X = -1) + P(X = 0) = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$.

2. Fie $f : R \to R,\ f(x) = \begin{cases} a\,(1-x), & x \in [0,1] \\ 0, & x \notin [0,1] \end{cases},\ a \in R$.

Să se determine:

$a)$ parametrul $a \in R$ astfel încât f să fie densitatea de repartiție a unei variabile aleatoare continue X;

$b)$ funcția de repartiție a variabilei aleatoare X;

$c)$ probabilitățile: $P\left(X < \frac{1}{4}\right),\ P\left(X > \frac{1}{2}\right)$ şi $P\left(\frac{1}{4} \le X \le \frac{3}{2}\right)$;

$d)$ media şi dispersia variabilei aleatoare X;

Rezolvare:

$a)$ Pentru ca funcția f să fie densitatea de repartiție a unei variabile aleatoare continue, trebuie să îndeplinească următoarele condiții:

1) $f(x) \ge 0, \forall x \in R \Rightarrow a \ge 0$;

2) $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$.

Avem: $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int\limits_{-\infty}^{0} f(x)dx + \int\limits_{0}^{1} f(x)dx + \int\limits_{1}^{\infty} f(x)dx = \int\limits_{-\infty}^{0} 0\,dx + \int\limits_{0}^{1} a(1-x)\,dx + \int\limits_{1}^{\infty} 0\,dx =$

$= a\left(x - \frac{x^2}{2}\right)\Big|_0^1 = \frac{a}{2}$; din condiția $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$ rezultă $\frac{a}{2} = 1 \Rightarrow a = 2$, deci

$f(x) = \begin{cases} 2\,(1-x), & x \in [0,1] \\ 0, & x \notin [0,1] \end{cases}$.

$b)$ Funcția de repartiție a variabilei aleatoare X este $F : R \to R,\ F(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} f(t)dt$.

- $x \in (-\infty, 0] \Rightarrow F(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} 0\,dt = 0$;
- $x \in (0,1] \Rightarrow F(x) = \int\limits_{-\infty}^{0} 0dt + \int\limits_{0}^{x} 2(1-t)dt = \left(2t - t^2\right)\Big|_0^x = 2x - x^2$;
- $x \in (1,\infty) \Rightarrow F(x) = \int\limits_{-\infty}^{0} 0dt + \int\limits_{0}^{1} 2(1-t)dt + \int\limits_{1}^{x} 0dt = 1$.

Am obținut că:

$$F : R \to [0,1],\ F(x) = \begin{cases} 0, & x \in (-\infty,0] \\ 2x - x^2, & x \in (0,1] \\ 1, & x \in (1,\infty) \end{cases}$$

$c)$ $P\left(X<\frac{1}{4}\right)=F\left(\frac{1}{4}\right)=\frac{1}{2}-\frac{1}{4}=\frac{1}{4}$.

$P\left(X>\frac{1}{2}\right)=1-P\left(X\le\frac{1}{2}\right)=1-F\left(\frac{1}{2}\right)=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$.

$P\left(\frac{1}{4}\le X\le\frac{3}{2}\right)=F\left(\frac{3}{2}\right)-F\left(\frac{1}{4}\right)=1-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$.

$d)$ $M(X)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}xf(x)dx=\int\limits_{-\infty}^{0}x\cdot 0dx+\int\limits_{0}^{1}x\cdot 2(1-x)\,dx+\int\limits_{1}^{\infty}x\cdot 0\,dx=\left.\left(\frac{x^2}{2}-\frac{2x^3}{3}\right)\right|_0^1=\frac{1}{3}$.

$M\left(X^2\right)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}x^2 f(x)dx=\int\limits_{-\infty}^{0}x^2\cdot 0dx+\int\limits_{0}^{1}x^2\cdot 2(1-x)\,dx+\int\limits_{1}^{\infty}x^2\cdot 0\,dx=\left.\left(\frac{2x^3}{3}-\frac{x^4}{2}\right)\right|_0^1=\frac{1}{6}$.

$D^2(X)=M(X^2)-M^2(X)=\frac{1}{18}$.

3. Fie funcția $f:R\to R$, $f(x)=\begin{cases}k\mathrm{x}^2e^{-\frac{x}{2}}, & x\ge 0\\ 0, & x<0\end{cases}$, $k\in R$. Să se determine:

$a)$ parametrul $k\in R$ astfel încât f să fie densitatea de repartiție a unei variabile aleatoare continue X;

$b)$ funcția de repartiție a variabilei aleatoare X;

$c)$ probabilitățile: $P(X<4)$, $P(X>6)$, $P(6\le X\le 8)$, $P(X\le 4/X>2)$;

$d)$ media, dispersia, momentul inițial de ordinul r, $r\in N^*$ pentru variabila aleatoare X

Rezolvare:

$a)$ Condițiile ca f să fie densitatea de repartiție a unei variabile aleatoare continue X sunt:

1) $f(x)\ge 0\Rightarrow k\ge 0$;

2) $\int\limits_{-\infty}^{\infty}f(x)dx=1$.

Avem că $I=\int\limits_{-\infty}^{\infty}f(x)dx=\int\limits_{-\infty}^{0}0dx+\int\limits_{0}^{\infty}k\mathrm{x}^2e^{-\frac{x}{2}},dx$; folosind schimbarea de variabilă $\frac{x}{2}=t\Rightarrow x=2t;\ dx=2dt$, obținem că $I=k\int\limits_{0}^{\infty}4t^2e^{-t}2dt=8k\cdot\Gamma(3)=16k$; din condiția $I=1\Rightarrow k=\frac{1}{16}$.Rezultă că $f:R\to R,\ f(x)=\begin{cases}\frac{1}{16}\mathrm{x}^2e^{-\frac{x}{2}}, & x\ge 0\\ 0, & x<0\end{cases}$.

$b)$ Funcția de repartiție a variabilei aleatoare X este $F : R \to R,\ F(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} f(t)dt$.

- $x \in (-\infty,\ 0] \Rightarrow F(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} 0\, dt = 0$;
- $x \in (0,\infty) \Rightarrow F(x) = \int\limits_{-\infty}^{0} 0dt + \frac{1}{16}\int\limits_{0}^{x} t^2 e^{-\frac{t}{2}}dt = \frac{1}{16}\int\limits_{0}^{x} t^2\left(-2e^{-\frac{t}{2}}\right)' dt = -\frac{1}{8}t^2 e^{-t}\Big|_0^x + \frac{1}{8}\int\limits_{0}^{x}(2t)e^{-\frac{t}{2}}dt =$

$$= -\frac{x^2}{8}e^{-\frac{x}{2}} + \frac{1}{4}\int\limits_{0}^{x} t\left(-2e^{-\frac{t}{2}}\right)' dt = -\frac{x^2}{8}e^{-\frac{x}{2}} - \frac{t}{2}e^{-\frac{t}{2}}\Big|_0^x + \frac{1}{2}\int\limits_{0}^{x} e^{-\frac{t}{2}}dt = -\frac{x^2}{8}e^{-\frac{x}{2}} - \frac{x}{2}e^{-\frac{x}{2}} - e^{-\frac{t}{2}}\Big|_0^x =$$

$= 1 - \frac{x^2+4x+8}{8}e^{-\frac{x}{2}}$. Rezultă:

$$F : R \to R,\ F(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0 \\ 1 - \dfrac{x^2+4x+8}{8}e^{-\frac{x}{2}}, & x > 0 \end{cases}$$

$c)$ $P(X < 4) = F(4) = 1 - 5e^{-2}$;

$P(X > 6) = 1 - P(X \le 6) = 1 - P(X < 6) = 1 - F(6) = \frac{17}{2}e^{-3}$;

$P(6 \le X \le 8) = F(8) - F(6) = \frac{17}{2}e^{-3} - 13e^{-4}$;

$$P(X \le 4 / X > 2) = \frac{P((X \le 4) \cap (X > 2))}{P(X > 2)} = \frac{P(2 < X \le 4)}{1 - P(X < 2)} = \frac{F(4) - F(2)}{1 - F(2)} = \frac{\frac{5}{2e} - \frac{5}{e^2}}{\frac{5}{2e}} = \frac{e-2}{e}.$$

$d)$ Momentul inițial de ordinul r este:

$$m_r = M(X^r) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} x^r f(x)dx = \int\limits_{-\infty}^{0} x^r \cdot 0dx + \int\limits_{0}^{\infty} x^r \cdot \frac{1}{16}x^2 e^{-\frac{x}{2}}dx;$$

cu schimbarea de variabilă $\frac{x}{2} = t \Rightarrow x = 2t;\ dx = 2dt$ rezultă

$$m_r = \frac{1}{16}\int\limits_{0}^{\infty}(2t)^{r+2}e^{-t}2dt = 2^{r-1} \cdot \Gamma(r+3).$$

Am obținut că $m_r = 2^{r-1} \cdot (r+2)!,\ \forall r \in N^*$.

- Media variabilei aleatoare X este momentul inițial de ordinul *1*, prin urmare $M(X) = m_1 = 3! = 6$.

- Avem că $M(X^2) = m_2 = 2 \cdot 4! = 48$, deci dispersia variabilei este:

$D^2(X) = M(X^2) - M^2(X) = m_2 - m_1^2 = 12$.

4. Fie X, Y două variabile aleatoare discrete având repartiția comună dată în tabelul incomplet de mai jos:

$X \backslash Y$	-1	0	1	p_i
-1	0,2			0,6
1		0,1		
q_j	0,3		0,3	

a) Să se scrie repartițiile variabilelor X, Y şi repartiția comună a variabilelor X, Y.

b) Să se scrie repartițiile variabilelor $X/Y=1$ şi $Y/X=1$, $|Y|$..

Rezolvare:

a) Impunând condițiile

$\sum\limits_{i=1}^{2} p_i = 1$, $\sum\limits_{j=1}^{3} q_j = 1$, $\sum\limits_{j=1}^{3} p_{ij} = p_i$, $\forall i = \overline{1,2}$, $\sum\limits_{1=1}^{2} p_{ij} = q_j$, $\forall j = \overline{1,3}$, obținem:

$p_1 + p_2 = 1 \Rightarrow p_2 = 0,4$; $q_1 + q_2 + q_3 = 1 \Rightarrow q_2 = 0,4$; $p_{11} + p_{21} = 0,3 \Rightarrow p_{21} = 0,1$;

$p_{12} + p_{22} = 0,4 \Rightarrow p_{21} = 0,3$; $p_{11} + p_{12} + p_{13} = 0,6 \Rightarrow p_{13} = 0,1$;

$p_{13} + p_{23} = 0,3 \Rightarrow p_{23} = 0,2$.

Rezultă repartițiile variabilelor X, Y: $X : \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0,6 & 0,4 \end{pmatrix}$; $Y : \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0,3 & 0,4 & 0,3 \end{pmatrix}$

şi repartiția comună a variabilelor X, Y:

$X \backslash Y$	-1	0	1	p_i
-1	0,2	0,3	0,1	0,6
1	0,1	0,1	0,2	0,4
q_j	0,3	0,4	0,3	1

b) $X/Y = 1 : \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ \alpha_1 & \alpha_2 \end{pmatrix}$

$$\alpha_1 = P(X = -1/Y = 1) = \frac{P((X=-1) \cap (Y=1))}{P(Y=1)} = \frac{0,1}{0,3} = \frac{1}{3};$$

$$\alpha_2 = P(X = 1/Y = 1) = \frac{P((X=1) \cap (Y=1))}{P(Y=1)} = \frac{0,2}{0,3} = \frac{2}{3};$$

obținem: $X/Y = 1 : \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$; $Y/X = -1 : \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \end{pmatrix}$;

Analog $Y/X = -1 : \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}$

$|Y| : \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0,3 & 0,4 & 0,3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0,4 & 0,6 \end{pmatrix}$;

Teste de autoevaluare

1. Să se determine variabila aleatoare $X:\begin{pmatrix} a & a+1 & a+2 \\ p & 3p & 2p \end{pmatrix}$, ştiind că $M(6X^2)=7$, $a \in Z,\ p \in R$.

2. Fie funcţia $f: R \to R$, $f(x)=\begin{cases} ax, & x\in[0,1] \\ 2-x, & x\in(1,2] \\ 0, & x\notin[0,2] \end{cases}$. Să se determine:

$a)$ parametrul $a \in R$ astfel încât f să fie densitatea de repartiţie a unei variabile aleatoare continue X;

$b)$ probabilităţile $P\left(X>\frac{3}{2}\right)$ şi $P\left(X\geq\frac{1}{4} / X\leq\frac{3}{2}\right)$;

$c)$ funcţia de repartiţie a variabilei aleatoare X;

$d)$ media şi dispersia variabilei aleatoare X;

3. Fie două variabile aleatoare X, Y unde

$X:\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0{,}7 & 0{,}3 \end{pmatrix}$, $Y:\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0{,}4 & 0{,}6 \end{pmatrix}$. Fie $k=P(X=-1,\ Y=0)$.

$a)$ Să se scrie tabelul comun al repartiţiei variabilelor aleatoare X, Y.

$b)$ Să se determine parametrul $k \in R$ astfel încât variabilele aleatoare X, Y să fie necorelate.

$c)$ Pentru k determinat la punctul precedent, să se stabilească dacă variabilele aleatoare X, Y sunt independente.

Răspunsuri si comentarii la testele de autoevaluare

1. Din condiţia ca X să reprezinte o variabilă aleatoare discretă, obţinem:

$p\geq 0$ şi $p+3p+2p=1 \Rightarrow p=\frac{1}{6} \Rightarrow X:\begin{pmatrix} a & a+1 & a+2 \\ \frac{1}{6} & \frac{3}{6} & \frac{2}{6} \end{pmatrix}$.

$$M\left(6X^2\right)=7 \Leftrightarrow 6M\left(X^2\right)=7 \Leftrightarrow 6\cdot\left(a^2\cdot\frac{1}{6}+(a+1)^2\cdot\frac{3}{6}+(a+2)^2\cdot\frac{2}{6}\right)=7 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow a^2+3a^2+6a+3+2a^2+8a+8=7 \Leftrightarrow 6a^2+14a+4=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a_1=-2,\ a_2=-\frac{1}{3}\notin Z \text{, deci } a=-2.$$

Prin urmare, repartiţia variabilei aleatoare X este:

$X:\begin{pmatrix} -2 & -1 & 0 \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$.

2. *a*) Pentru ca funcția f să fie densitatea de repartiție a unei variabile aleatoare continue, trebuie să îndeplinească următoarele condiții:

1) $f(x) \geq 0, \forall x \in R \Rightarrow a \geq 0$;

2) $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$.

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int\limits_{-\infty}^{0} f(x)dx + \int\limits_{0}^{1} f(x)dx + \int\limits_{1}^{2} f(x)dx + \int\limits_{2}^{\infty} f(x)dx =$$

$$= \int\limits_{-\infty}^{0} 0\,dx + \int\limits_{0}^{1} ax\,dx + \int\limits_{1}^{2} (2-x)\,dx + \int\limits_{2}^{\infty} 0\,dx = a\left.\frac{x^2}{2}\right|_0^1 + \left.\left(2x - \frac{x^2}{2}\right)\right|_1^2 = \frac{a}{2} + \frac{1}{2}.$$

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1 \Rightarrow a = 1 \Rightarrow f(x) = \begin{cases} x, & x \in [0,1] \\ 2-x, & x \in (1,2] \\ 0, & x \notin [0,2] \end{cases}.$$

b) $P\left(X > \frac{3}{2}\right) = \int\limits_{\frac{3}{2}}^{\infty} f(x)dx = \int\limits_{\frac{3}{2}}^{2} (2-x)dx + \int\limits_{2}^{\infty} 0dx = \frac{1}{8}$.

$$P\left(X \geq \tfrac{1}{4} / X \leq \tfrac{3}{2}\right) = \frac{P\left(\left(X \geq \frac{1}{4}\right) \cap \left(X \leq \frac{3}{2}\right)\right)}{P\left(X \leq \frac{3}{2}\right)} = \frac{P\left(\frac{1}{4} \leq X \leq \frac{3}{2}\right)}{P\left(X \leq \frac{3}{2}\right)}.$$

$P\left(\frac{1}{4} \leq X \leq \frac{3}{2}\right) = \int\limits_{\frac{1}{4}}^{\frac{3}{2}} f(x)dx = \int\limits_{\frac{1}{4}}^{1} xdx + \int\limits_{1}^{\frac{3}{2}} (2-x)dx = \frac{27}{32}$; $P\left(X \leq \frac{3}{2}\right) = 1 - P\left(X > \frac{3}{2}\right) = \frac{7}{8}$, deci $P\left(X \geq \frac{1}{4} / X \leq \frac{3}{2}\right) = \frac{27}{28}$.

c) Funcția de repartiție a variabilei aleatoare X este $F : R \to R,\ F(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} f(t)dt$.

- $x \in (-\infty, 0] \Rightarrow F(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} 0\,dt = 0$;
- $x \in (0,1] \Rightarrow F(x) = \int\limits_{-\infty}^{0} 0dt + \int\limits_{0}^{x} tdt = \left.\frac{t^2}{2}\right|_0^x = \frac{x^2}{2}$;
- $x \in (1,2] \Rightarrow F(x) = \int\limits_{-\infty}^{0} 0dt + \int\limits_{0}^{1} tdt + \int\limits_{1}^{x} (2-t)dt = \left.\frac{t^2}{2}\right|_0^1 + \left.\left(2t - \frac{t^2}{2}\right)\right|_1^x =$

$= \frac{1}{2} + 2x - \frac{x^2}{2} - \frac{3}{2} = \frac{-x^2+4x-2}{2}$;

$x \in (2,\infty) \Rightarrow F(x) = \int\limits_{-\infty}^{0} 0dt + \int\limits_{0}^{1} tdt + \int\limits_{1}^{2} (2-t)dt + \int\limits_{2}^{x} 0dt = 1$. Am obținut că:

$$F: R \to [0,1],\ F(x) = \begin{cases} 0, & x \in (-\infty, 0] \\ \dfrac{x^2}{2}, & x \in (0,1] \\ \dfrac{-x^2+4x-2}{2}, & x \in (1,2] \\ 1, & x \in (2,\infty) \end{cases}$$

d) $M(X) = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx = \int_{-\infty}^{0} x \cdot 0dx + \int_{0}^{1} x \cdot x\,dx + \int_{1}^{2} x(2-x)dx + \int_{2}^{\infty} x \cdot 0\,dx =$

$= \left.\dfrac{x^3}{3}\right|_0^1 + \left.\left(x^2 - \dfrac{x^3}{3}\right)\right|_1^2 = \dfrac{1}{3} + 4 - \dfrac{8}{3} - 1 + \dfrac{1}{3} = 1$.

$M(X^2) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)dx = \int_{-\infty}^{0} x \cdot 0dx + \int_{0}^{1} x^2 \cdot x\,dx + \int_{1}^{2} x^2(2-x)dx + \int_{2}^{\infty} x \cdot 0\,dx =$

$= \left.\dfrac{x^4}{4}\right|_0^1 + \left.\left(2\dfrac{x^3}{3} - \dfrac{x^4}{4}\right)\right|_1^2 = \dfrac{1}{4} + \dfrac{16}{3} - 4 - \dfrac{2}{3} + \dfrac{1}{4} = \dfrac{7}{6} \Rightarrow D^2(X) = M(X^2) - M^2(X) = \frac{1}{6}$

3. *a*)

X \ Y	0	1	p_i
-1	k	$0{,}7-k$	0,7
1	$0{,}4-k$	$k-0{,}1$	0,3
q_j	0,4	0,6	1

Din condițiile: 1) $p_{ij} \geq 0,\ \forall i, j = \overline{1,2}$ şi

2) $\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2} p_{ij} = 1$ obținem:

$$1) \Leftrightarrow \begin{cases} k \geq 0 \\ 0{,}7 - k \geq 0 \\ 0{,}4 - k \geq 0 \\ k - 0{,}1 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow 0{,}1 \leq k \leq 0{,}4\,;$$

2) $\Leftrightarrow k + 0{,}7 - k + 0{,}4 - k + k - 0{,}1 = 1$, relație care se verifică, $\forall\ k \in R$.

În concluzie, repartiția comună a variabilelor X, Y este cea din tabelul de mai sus, cu condiția $k \in [0{,}1;\ 0{,}4]$.

b) Variabilele aleatoare X, Y sunt necorelate dacă avem:

$\text{cov}(X,Y) = 0 \Leftrightarrow M(XY) - M(X) \cdot M(Y) = 0$.

$M(X) = \sum_{i=1}^{2} x_i p_i = (-1) \cdot 0{,}7 + 1 \cdot 0{,}3 = -0{,}4$; $\quad M(Y) = \sum_{j=1}^{2} y_j q_j = 0 \cdot 0{,}4 + 1 \cdot 0{,}6 = 0{,}6$;

$M(XY) = \sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2} x_i y_j p_{ij} = (-1) \cdot 0 \cdot k + (-1) \cdot 1 \cdot (0{,}7 - k) + 1 \cdot 0 \cdot (0{,}4 - k) + 1 \cdot 1 \cdot (k - 0{,}1) = 2k - 0{,}8$

$M(XY) - M(X) \cdot M(Y) = 0 \Rightarrow 2k - 0{,}8 + 0{,}24 = 0 \Rightarrow k = 0{,}28 \in [0{,}1;\ 0{,}4]$.

$c)$ Pentru valoarea determinată a parametrului k obținem tabelul repartiției comune de mai jos:

$X \backslash Y$	0	1	p_i
-1	0,28	0,42	0,7
1	0,12	0,18	0,3
q_j	0,4	0,6	1

Avem că: $P(X=-1,\ Y=0)=0{,}28=P(X=-1)\cdot P(Y=0)$;

$P(X=-1,\ Y=1)=0{,}42=P(X=-1)\cdot P(Y=1)$; $P(X=1,\ Y=0)=0{,}12=P(X=1)\cdot P(Y=0)$;

$P(X=1,\ Y=1)=0{,}18=P(X=1)\cdot P(Y=1)$;de aici rezultă, că v.a sunt independente.

Bibliografia unitatii de învatare 6

1. Gh. Cenuşă şi colectiv, *Matematici aplicate in economie. Teorie si aplicatii.* Editura CISON, Bucureşti, 2007
2. S. Dedu, F. Şerban, *Matematici aplicate în economie. Culegere de probleme*, Editura Teocora, Buzau, 2009
3. I. Purcaru , *Matematici generale si elemente de optimizare,* Editura Economică, Bucureşti, 1997.

Lucrarea de verificare nr.5

1.Distribuția variabilei aleatoare X este $X:\begin{pmatrix} -2 & -1 & 0 & 1 & 2 \\ \frac{7}{16} & \frac{1}{4}p & \frac{3}{2}p & p^2 & \frac{1}{16} \end{pmatrix}$.

Să se determine: $a)$ parametrul $p \in R$; $b)$ Media si dispersia lui X,

2. Fie funcția $f:R \to R$, $f(x)=\begin{cases} kx\ e^{-\frac{x}{3}}, & x \geq 0 \\ 0, & x<0 \end{cases}$, $k \in R$. Să se determine:

$a)$ parametrul $k \in R$ astfel încât f să fie densitatea de repartiție a unei variabile aleatoare continue X; $b)$ funcția de repartiție a variabilei aleatoare X;

$c)$ media, dispersia, momentul inițial de ordinul r, $r \in N^*$ pentru v.a. X

3. Se consideră variabilele aleatoare X, Y, având repartițiile: $X:\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0{,}4 & 0{,}6 \end{pmatrix}$,

$Y:\begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 0{,}2 & 0{,}5 & 0{,}3 \end{pmatrix}$, astfel încât $P(X=1, Y=2)=0{,}1$ şi $P(X=2, Y=4)=0{,}3$. Să se determine coeficientul de corelatie al variabilele aleatoare X, Y

UNITATEA DE ÎNVATARE 7

Statistica matematica

Cuprins

7.1 Obiective

Unitatea de învatare 7, introduce statistica matematică, prin relevarea a câtorva elemente de bază ale acestui domeniu deosebit de important din matematicile aplicate în economie.

După studiul acestei unitati de învatare, studentul va avea cunostințe despre:

- noțiunile fundamentale din statistica matematică, toate acestea pentru a cunoaste mai mult si mai bine tematica si problematica matematicilor aplicate sau aplicabile în economie;

-tipul de probleme teoretice si practice, care fac obiectul cursului de “ teoria selecției si a estimației” si al lucrărilor de verificare ale studenților din invatamântul economic din anul I, ID, de la Facultatea de Finante, Banci si Burse de Valori din Academia de Studii Economice, Bucuresti.

7.2 Elemente de teoria selecţiei

Ne propunem să studiem o anumită caracteristică a unei colectivităţi C.

Presupunem că această caracteristică este descrisă de o variabilă aleatoare X definită pe un câmp de probabilitate (Ω, K, P), în care elementele mulţimii Ω sunt tocmai lementele colectivităţii C.

Se numeşte *selecţie* (*eşantion*) o colectivitate parţială de elemente luate la întâmplare din C .Numărul elementelor unei selecţii îl numim *volumul selecţiei*.

Spunem că o *selecţie* este *repetată* dacă elementul luat la întâmplare din C este reintrodus în colectivitatea generală înaintea efectuării următoarei alegeri.

Se efectuează o selecţie de volum n din populaţia considerată şi se notează cu $x_1, x_2,.., x_n$ valorile de observaţie (*valori de selecţie* sau *date de selecţie*)

- După efectuarea selecţiei, valorile de selecţie $x_1, x_2,......, x_n$ sunt valori bine determinate ale variabilei aleatoare X .

- Înainte de efectuarea selecţiei, acestea pot fi considerate ca variabile aleatoare independente $X_1, X_2,....., X_n$, identic repartizate cu variabila X, în cazul unei selecţii repetate.

Variabila aleatoare asociată experimentului cu n probe independente efectuate asupra lui X se numeşte *variabilă aleatoare de selecţie* *(empirică)* şi se notează X^*. Aceasta are următoarea repartiţie, numită şi *repartiţie empirică*: $X^* : \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & x_n \\ \frac{1}{n} & \frac{1}{n} & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \frac{1}{n} \end{pmatrix}$.

Funcţia de repartiţie a variabilei aleatoare de selecţie se numeşte *funcţie empirică de repartiţie*.

Se numeşte *statistică* o funcţie de variabilele aleatoare de selecţie: $T(X_1, X_2,....., X_n)$.

După efectuarea selecţiei, statisticii $T(X_1, X_2,....., X_n)$ i se asociază valoarea sa corespunzătoare valorilor de selecţie obţinute, notată $t(x_1, x_2,....., x_n)$.

Considerăm o selecţie de volum $n : X_1, X_2,....., X_n$ efectuată asupra variabilei al. X .

- Se numeşte *moment iniţial de selecţie de ordin* r statistica $\overline{M}_r = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^r$.

Pentru $r = 1$ obţinem *media de selecţie*: $\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$.

- Se numeşte *moment centrat de selecţie de ordin* r statistica $\overline{\mu}_r = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \overline{X}\right)^r$.

Pentru $r = 2$ obţinem *dispersia de selecţie necorectată*:

$$\overline{\sigma}^2 = S^2 = \overline{\mu}_2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \overline{X}\right)^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2 - \overline{X}^2$$

Dispersia de selecţie corectată (modificată) este: $s^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \overline{X}\right)^2$.

7.3 Elemente de teoria estimației

Considerăm selecția $X_1, X_2, ..., X_n$ efectuată asupra unei populații care este caracterizată de o variabilă aleatoare X cu legea de repartiție $f(x;\, \theta)$.

Dorim să estimăm parametrul θ din legea $f(x;\, \theta)$ cu ajutorul statisticii $T_n(X_1, X_2, ..., X_n)$, care se numeşte *estimator* al parametrului θ. Valoarea luată de $T_n(X_1, X_2, ..., X_n)$ pentru valori bine determinate $x_1, x_2, ..., x_n$ ale variabilelor $X_1, X_2, ..., X_n$ se numeşte *estimație* a parametrului θ.

Definiția 1. Spunem că statistica $T_n(X_1, X_2, ..., X_n)$ este un *estimator nedeplasat* al parametrului θ dacă $M(T_n(X_1, X_2, ..., X_n)) = \theta$.

Spunem că statistica $T_n(X_1, X_2, ..., X_n)$ este un *estimator deplasat* al parametrului θ dacă $M(T_n(X_1, X_2, ..., X_n)) \xrightarrow[n\to\infty]{} \theta$.

Definiția 2. Spunem că statistica $T_n(X_1, X_2, ..., X_n)$ este un *estimator absolut corect* al parametrului θ dacă $M(T_n(X_1, X_2, ..., X_n)) = \theta$ şi $D^2(T_n(X_1, X_2, ..., X_n)) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.

Spunem că statistica $T_n(X_1, X_2, ..., X_n)$ este un estimator nedeplasat al parametrului θ dacă $M(T_n(X_1, X_2, ..., X_n)) = \theta$.

Definiția 3. Spunem că statistica $T_n(X_1, X_2, ..., X_n)$ este un *estimator eficient* al parametrului θ dacă este absolut corect şi $D^2(T_n(X_1, X_2, ..., X_n)) = \dfrac{1}{n \cdot I(\theta)}$, unde

$$I(\theta) = M\left[\left(\frac{\partial \ln f(X,\theta)}{\partial\theta}\right)\right] = -M\left[\left(\frac{\partial^2 \ln f(X,\theta)}{\partial\theta^2}\right)\right].$$

Propoziție. a) Media de selecție $\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ este un estimator absolut corect pentru media m a oricărei populații.

b) Dispersia de selecție $S^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \overline{X}\right)^2$ este un est.corect pentru dispersia σ^2.

c) Dispersia de selecție corectată $s^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \overline{X}\right)^2$ este un estimator absolut corect pentru dispersia σ^2.

METODE DE ESTIMARE A PARAMETRILOR UNEI REPATIȚII

A. Metode de estimare punctuală

1. Metoda momentelor

Presupunem că legea de repartiție $f(x;\theta_1,\theta_2,...,\theta_k)$ a variabilei aleatoare X depinde de k parametri necunoscuți: $\theta_1,\theta_2,....,\theta_k$ şi că variabila aleatoare X admite momente cel puțin până la ordinul k inclusiv.

Aplicarea metodei momentelor constă în parcurgerea următoarelor etape:
Etapa 1) Considerăm o selecție de volum n: $X_1, X_2,....., X_n$.
Etapa 2) Rezolvăm sistemul $M_r(X|\theta_1,\theta_2,...,\theta_k)=\overline{M}_r$, $r=\overline{1,k}$.
Dacă sistemul are soluții reale, atunci acestea sunt estimații ale parametrilor $\theta_1,\theta_2,....,\theta_k$.

2. Metoda verosimilității maxime

Aplicarea acestei metode constă în parcurgerea următoarelor etape:
Etapa 1) Considerăm o selecție de volum n: $X_1,X_2,.....,X_n$, cu valorile de selcție $x_1,x_2,.....,x_n$.
Etapa 2) Construim funcția de verosimilitate:

$$P(x_1,x_2,...,x_n;\theta_1,\theta_2,...,\theta_k)=\prod_{j=1}^{n} f(x_j;\theta_1,\theta_2,...,\theta_k)$$

Etapa 3) Logaritmăm funcția de verosimilitate:

$$L(x_1,x_2,...,x_n;\theta_1,\theta_2,...,\theta_k)=\ln P(x_1,x_2,...,x_n;\theta_1,\theta_2,...,\theta_k)$$

Etapa 4) Rezolvăm sistemul: $\dfrac{\partial L(x_1,x_2,...,x_n;\theta_1,\theta_2,...,\theta_k)}{\partial\theta_j}=0,\ j=\overline{1,k}$ şi obținem estimațiile de maximă verosimilitate: $\hat{\theta}_j=\hat{\theta}_j(x_1,x_2,...,x_n)$, $j=\overline{1,k}$ ale parametrilor $\theta_1,\theta_2,....,\theta_k$.
Etapa 5) Verificăm faptul că estimațiile găsite asigură maximul funcției de verosimilitate.

B. Estimare prin intervale de încredere pentru parametrii m şi σ^2 ai unei repartiții normale $N(m,\sigma)$

1. Interval de încredere pentru parametrul m când σ este cunoscut

$$\overline{x}-z_{1-\frac{\alpha}{2}}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}<m<\overline{x}+z_{1-\frac{\alpha}{2}}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

2. Interval de încredere pentru parametrul m când σ este necunoscut

$$\overline{x}-t_{1-\frac{\alpha}{2};n-1}\cdot\frac{s}{\sqrt{n}}<m<\overline{x}+t_{1-\frac{\alpha}{2};n-1}\cdot\frac{s}{\sqrt{n}}$$

7.4 Ilustrarea teoriei pe cazul numeric concret al aplicațiilor

1. Pentru a studia o anumită caracteristică X a unei populații statistice oarecare, s-a realizat un sondaj de volum $n = 16$ din populația respectivă şi s-au obținut rezultatele:

x_i	-2	-1	0	2
n_i	3	4	2	7

$a)$ Să se scrie repartiția variabilei aleatoare de selecție.

$b)$ Să se calculeze media de selecție, dispersia de selecție şi dispersia de selecție corectată.

Rezolvare:

$a)$ Repartiția variabilei aleatoare de selecție este: $X^* : \begin{pmatrix} -2 & -1 & 0 & 2 \\ \frac{3}{16} & \frac{4}{16} & \frac{2}{16} & \frac{7}{16} \end{pmatrix}$.

$b)$ Media de selecție este statistica: $\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{4} n_i X_i$, iar valoarea acesteia corespunzătoare selecției efectuate este $\overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{4} n_i x_i$.

Dispersia de selecție este statistica $\overline{\mu}_2 = S^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{4} n_i \left(X_i - \overline{X}\right)^2$, iar valoarea acesteia corespunzătoare selecției efectuate este

$$S^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{4} n_i \left(x_i - \overline{x}\right)^2 .$$

Dispersia de selecție corectată este statistica $s^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{4} n_i \left(X_i - \overline{X}\right)^2$, iar valoarea acesteia corespunzătoare selecției efectuate este

$$s^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{4} n_i \left(x_i - \overline{x}\right)^2 .$$

Pentru determinarea valorilor cerute organizăm valorile de selecție în următorul tabel:

x_i	n_i	$x_i n_i$	$x_i - \overline{x}$	$\left(x_i - \overline{x}\right)^2$	$n_i\left(x_i - \overline{x}\right)^2$
-2	3	-6	-2,25	5,0625	15,1875
-1	4	-4	-1,25	1,5625	6,25
0	2	0	-0,25	0,0625	0,125
2	7	14	1,75	3,0625	21,4375
-	16	4	-	-	43

Obținem: $\overline{x} = \frac{1}{16} \cdot 4 = 0,25$; $S^2 = \frac{1}{16} \cdot 43 = 2,6875$; $s^2 = \frac{1}{15} \cdot 43 = 2,87$.

2. Fie X o variabilă aleatoare având o repartiție Poisson de parametru θ.

a) Să se determine un estimator al parametrului θ al acestei repartiții prin ambele metode de estimare punctuală, utilizând o selecție de volum n.

b) Să se determine o estimație a parametrului θ al acestei repartiții prin ambele metode de estimare punctuală, pe baza valorilor de selecție: 1, 2, 3, 3, 2, 2, 1, 4, 2, 3.

c) Să se studieze calitățile estimatorului obținut.

Rezolvare:

a) Legea de probabilitate a variabilei aleatoare X este $f(x;\theta)=e^{-\theta}\cdot\dfrac{\theta^x}{x!},\ x\in N$.

Metoda momentelor

Etapa 1) Considerăm o selecție de volum n: $X_1, X_2,....., X_n$.

Etapa 2) Rezolvăm ecuația: $M_1(X|\theta)=\overline{M}_1 \Leftrightarrow M(X)=\overline{X}$.   (1)

Folosind faptul că media unei variabile aleatoare X cu repartiție Poisson de parametru θ este $M(X)=\theta$, ecuația (1) devine: $\theta=\overline{X}$ şi prin urmare estimatorul parametrului θ obținut prin metoda momentelor este $\hat{\theta}=\overline{X}$, iar estimația este $\hat{\theta}=\overline{x}$.

Metoda verosimilității maxime

Etapa 1) Considerăm o selecție de volum n: $X_1, X_2,....., X_n$, cu valorile de selcție $x_1, x_2,....., x_n$.

Etapa 2) Construim funcția de verosimilitate:

$$P(x_1,x_2,...,x_n;\theta)=\prod_{j=1}^{n} f(x_j;\theta)=\prod_{j=1}^{n} e^{-\theta}\cdot\frac{\theta^{x_j}}{x_j!}=e^{-\theta}\cdot\frac{\theta^{x_1}}{x_1!}\cdot e^{-\theta}\cdot\frac{\theta^{x_2}}{x_2!}\cdot.....\cdot e^{-\theta}\cdot\frac{\theta^{x_n}}{x_n!}=e^{-n\theta}\cdot\frac{\theta^{\sum_{j=1}^{n}x_j}}{\prod_{j=1}^{n}x_j!}.$$

Etapa 3) Logaritmăm funcția de verosimilitate:

$$L(x_1,x_2,...,x_n;\theta)=\ln P(x_1,x_2,...,x_n;\theta)=\ln\left[e^{-n\theta}\cdot\frac{\theta^{\sum_{j=1}^{n}x_j}}{\prod_{j=1}^{n}x_j!}\right]=$$

$$=\ln\left[e^{-n\theta}\right]+\ln\theta^{\sum_{j=1}^{n}x_j}-\ln\prod_{j=1}^{n}x_j!=-n\theta+\sum_{j=1}^{n}x_j\ln\theta-\ln\prod_{j=1}^{n}x_j!$$

Etapa 4) Rezolvăm ecuația:

$\dfrac{\partial L(x_1,x_2,...,x_n;\theta)}{\partial\theta}=0\Leftrightarrow -n+\dfrac{\sum_{j=1}^{n}x_j}{\theta}=0\Leftrightarrow -n\theta+\sum_{j=1}^{n}x_j=0$ şi obținem că estimația de maximă verosimilitate a parametrului λ este $\hat{\theta}=\dfrac{\sum_{j=1}^{n}x_j}{n}\Leftrightarrow\hat{\theta}=\overline{x}$, iar estimatorul de maximă verosimilitate este $\hat{\theta}=.\overline{X}$.

Etapa 5) Verificăm faptul că estimația găsită asigură maximul funcției de verosimilitate.

$$\left.\frac{\partial^2 L(x_1, x_2, ..., x_n; \theta)}{\partial\theta^2}\right|_{\theta=\hat{\theta}} = -\left.\frac{\sum_{j=1}^{n} x_j}{\theta^2}\right|_{\theta=\hat{\theta}} = -\frac{\sum_{j=1}^{n} x_j}{\hat{\theta}^2} < 0,$$ deoarece $x_j \in N$, prin urmare $\hat{\theta} = \overline{x}$ este punct de maxim al funcției de verosimilitate.

b) Estimația parametrului θ prin ambele metode de estimare punctuală este $\hat{\theta} = \overline{x}$.

Pe baza valorilor de selecție din enunț obținem: $\hat{\theta} = \overline{x} = \frac{\sum_{j=1}^{10} x_j}{10} = \frac{2\cdot 1 + 4\cdot 2 + 3\cdot 3 + 1\cdot 4}{10} = 2{,}3$.

c) Avem că:

1) $M(\hat{\theta}) = M(\overline{X}) = M\left(\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} X_j\right) = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} M(X_j) = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} M(X) = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\theta = \frac{1}{n}\cdot n\theta = \theta$, deci $M(\hat{\theta}) = \theta$.

2) $D^2(\hat{\theta}) = D^2(\overline{X}) = D^2\left(\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} X_j\right) = \frac{1}{n^2}\sum_{j=1}^{n} D^2(X_j) = \frac{1}{n^2}\sum_{j=1}^{n} D^2(X) = \frac{1}{n^2}\cdot nD^2(X) = \frac{\theta}{n}$, unde am folosit că dispersia unei variabile aleatoare X cu repartiție Poisson de parametru θ este $D^2(X) = \theta$.

Rezultă că $\lim_{n\to\infty} D^2(\hat{\theta}) = \lim_{n\to\infty}\frac{\theta}{n} = 0$.

Din 1) rezultă că estimatorul este *nedeplasat*.

Din 1) şi 2) rezultă că estimatorul este *absolut corect*.

Deoarece am văzut că estimatorul este absolut corect, putem cerceta eficiența, verificând condiția: $D^2(\hat{\theta}) = \frac{1}{n\cdot I(\theta)}$, unde $I(\theta) = -M\left[\left(\frac{\partial^2 \ln f(X,\theta)}{\partial\theta^2}\right)\right]$.

$$\ln f(X;\theta) = \ln\left(e^{-\theta}\cdot\frac{\theta^X}{X!}\right) = \ln e^{-\theta} + \ln\theta^X - \ln X! = -\theta + X\ln\theta - \ln X!;$$

$$\frac{\partial \ln f(X;\theta)}{\partial\theta} = -1 + \frac{X}{\theta};\quad \frac{\partial^2 \ln f(X;\theta)}{\partial\theta^2} = -\frac{X}{\theta^3} \Rightarrow I(\theta) = -M\left(-\frac{X}{\theta^3}\right) = \frac{1}{\theta^3}M(X) = \frac{1}{\theta^3}\cdot\theta = \frac{1}{\theta}.$$

Rezultă că $\frac{1}{n\cdot I(\theta)} = \frac{\theta}{n} = D^2(\hat{\theta})$, prin urmare estimatorul este şi *eficient*.

Teste de autoevaluare

Fie X o variabilă aleatoare continuă, având densitatea de repartiție:

$$f : R \to R,\ f(x;\lambda) = \begin{cases} \frac{x^3}{96\lambda^4} e^{-\frac{x}{2\lambda}}, & x > 0 \\ 0, & x \le 0 \end{cases},\quad \lambda > 0.$$

a) Să se estimeze parametrul λ prin ambele metode de estimare punctuală, utilizând o selecție de volum n.

b) Să se arate că estimatorul obținut este absolut corect şi eficient.

Răspunsuri si comentarii la testele de autoevaluare

a) *Metoda momentelor*

Etapa 1) Considerăm o selecție de volum n: $X_1, X_2, ..., X_n$.

Etapa 2) Rezolvăm ecuația: $M_1(X|\theta) = \overline{M}_1 \Leftrightarrow M(X) = \overline{X}$. (1)

$$M(X) = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx = \int_{-\infty}^{0} x \cdot 0dx + \int_{0}^{\infty} x \cdot \frac{x^3}{96\lambda^4} e^{-\frac{x}{2\lambda}} dx = \frac{1}{96\lambda^4} \int_{0}^{\infty} x^4 e^{-\frac{x}{2\lambda}} dx;$$

facem schimbarea de variabilă $\frac{x}{2\lambda} = t \Rightarrow x = 2\lambda t;\ \ dx = 2\lambda dt$ şi obținem:

$$M(X) = \frac{1}{96\lambda^4} \int_{0}^{\infty} (2\lambda t)^4 e^{-t} 2\lambda dt = \frac{\lambda}{3} \int_{0}^{\infty} t^4 e^{-t} dt = \frac{\lambda}{3} \Gamma(5) = \frac{\lambda}{3}.4! = 8\lambda.$$

Ecuația (1) devine: $8\lambda = \overline{X}$ şi prin urmare estimatorul parametrului λ obținut prin metoda momentelor este $\hat{\lambda} = \frac{\overline{X}}{8}$, iar estimația este $\hat{\lambda} = \frac{\overline{x}}{8}$.

Metoda verosimilității maxime

Etapa 1) Considerăm o selecție de volum n: $X_1, X_2, ..., X_n$, cu valorile de selcție $x_1, x_2, ..., x_n$.

Etapa 2) Construim funcția de verosimilitate:

$$P(x_1, x_2, ..., x_n; \lambda) = \prod_{j=1}^{n} f(x_j; \lambda) = \prod_{j=1}^{n} \frac{x_j^3}{96\lambda^4} e^{-\frac{x_j}{2\lambda}} =$$

$$= \frac{x_1^3}{96\lambda^4} e^{-\frac{x_1}{2\lambda}} \cdot \frac{x_2^3}{96\lambda^4} e^{-\frac{x_2}{2\lambda}} \cdot ..... \cdot \frac{x_n^3}{96\lambda^4} e^{-\frac{x_n}{2\lambda}} = \frac{(x_1 x_2 ... x_n)^3}{96^n \lambda^{4n}} e^{-\frac{\sum_{j=1}^{n} x_j}{2\lambda}}$$

Etapa 3) Logaritmăm funcția de verosimilitate:

$$L(x_1, x_2, ..., x_n; \lambda) = \ln P(x_1, x_2, ..., x_n; \lambda) = \ln\left[\frac{(x_1 x_2 ... x_n)^3}{96^n \lambda^{4n}} e^{-\frac{\sum_{j=1}^{n} x_j}{2\lambda}}\right] =$$

$$\ln\left[(x_1 x_2 ... x_n)^3\right] - \ln 96^n - \ln \lambda^{4n} + \ln e^{-\frac{\sum_{j=1}^{n} x_j}{2\lambda}} = 3\ln \prod_{j=1}^{n} x_j - n\ln 96 - 4n\ln\lambda - \frac{\sum_{j=1}^{n} x_j}{2\lambda}$$

Etapa 4) Rezolvăm ecuația:

$\frac{\partial L(x_1, x_2, ..., x_n; \lambda)}{\partial \lambda} = 0 \Leftrightarrow -\frac{4n}{\lambda} + \frac{\sum_{j=1}^{n} x_j}{2\lambda^2} = 0 \Leftrightarrow -8n\lambda + \sum_{j=1}^{n} x_j = 0$ și obținem că estimația de maximă verosimilitate a parametrului λ este $\hat{\lambda} = \frac{\sum_{j=1}^{n} x_j}{8n} \Leftrightarrow \hat{\lambda} = \frac{\bar{x}}{8}$, iar estimatorul de maximă verosimilitate este $\hat{\lambda} = .\frac{\overline{X}}{8}$.

Etapa 5) Verificăm faptul că estimația găsită asigură maximul funcției de verosimilitate.

$\left.\frac{\partial^2 L(x_1, x_2, ..., x_n; \lambda)}{\partial \lambda^2}\right|_{\lambda=\hat{\lambda}} = \left.\frac{4n}{\lambda^2} - \frac{\sum_{j=1}^{n} x_j}{\lambda^3}\right|_{\lambda=\frac{\bar{x}}{8}} = 4n \cdot \frac{64}{\bar{x}^2} - n\bar{x} \cdot \frac{512}{\bar{x}^3} = -\frac{256}{\bar{x}^2} < 0$, prin urmare $\hat{\lambda} = \frac{\bar{x}}{8}$ este punct de maxim al funcției de verosimilitate.

b) Verificăm condițiile din definiția estimatorului absolut corect:

1) $M(\hat{\lambda}) = M\left(\frac{\overline{X}}{8}\right) = \frac{1}{8} M(\overline{X}) = \frac{1}{8} M\left(\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} X_j\right) = \frac{1}{8n}\sum_{j=1}^{n} M(X_j) =$

$= \frac{1}{8n}\sum_{j=1}^{n} M(X) = \frac{1}{8n}\sum_{j=1}^{n} 8\lambda = \frac{1}{8n} 8\lambda n = \lambda$. Am obținut că $M(\hat{\lambda}) = \lambda$.

2) $D^2(\hat{\lambda}) = D^2\left(\frac{\overline{X}}{8}\right) = \frac{1}{64} D^2(\overline{X}) = \frac{1}{64} D^2\left(\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} X_j\right) = \frac{1}{64n^2}\sum_{j=1}^{n} D^2(X_j) =$

$= \frac{1}{64n^2}\sum_{j=1}^{n} D^2(X) = \frac{1}{64n^2} \cdot nD^2(X) = \frac{D^2(X)}{64n}$

$M(X^2) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)dx = \int_{-\infty}^{0} x^2 \cdot 0dx + \int_{0}^{\infty} x^2 \cdot \frac{x^3}{96\lambda^4} e^{-\frac{x}{2\lambda}} dx = \frac{1}{96\lambda^4}\int_{0}^{\infty} x^5 e^{-\frac{x}{2\lambda}} dx$;

cu schimbarea de variabilă $\frac{x}{2\lambda} = t \Rightarrow x = 2\lambda t;\ \ dx = 2\lambda dt$ obținem:

$M(X^2) = \frac{1}{96\lambda^4}\int_{0}^{\infty} (2\lambda t)^5 e^{-t} 2\lambda dt = \frac{2\lambda^2}{3}\int_{0}^{\infty} t^5 e^{-t} dt = \frac{2\lambda^2}{3}\Gamma(6) = \frac{2\lambda^2}{3}.5! = 80\lambda^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow D^2(X) = M(X^2) - M^2(X) = 80\lambda^2 - 64\lambda^2 = 16\lambda^2$.

Revenind, găsim că $D^2(\hat{\lambda}) = \frac{D^2(X)}{64n} = \frac{16\lambda^2}{64n} = \frac{\lambda^2}{4n}$.

Rezultă că $\lim_{n\to\infty} D^2(\hat{\lambda}) = \lim_{n\to\infty} \frac{\lambda^2}{4n} = 0$.

Din 1) și 2) rezultă că estimatorul este absolut corect.

Bibilografia unitatii de învatare 7

1. Gh. Cenuşă şi colectiv, *Matematici aplicate in economie. Teorie si aplicatii.* Editura CISON, Bucureşti, 2007
2. S. Dedu, F. Şerban, *Matematici aplicate în economie. Culegere de probleme*, Editura Teocora, Buzau, 2009
3. I. Purcaru , *Matematici generale si elemente de optimizare,* Editura Economică, Bucureşti, 1997.

Lucrarea de verificare nr. 6

1) Pentru a stabili conținutul în magneziu al apei minerale provenite de la un anumit izvor s-a determinat cantitatea de magneziu, exprimată în grame, conțiunută într-un litru de apă minerală. Efectuîndu-se un număr de 15 măsurători, s-au obținut următoarele rezultate, prezentate în ordinea apariției acestora: 7,2; 8,3; 6,7; 6,7; 7,2; 8,1; 8,3; 6,9; 7,2; 7,2; 8,1; 6,7; 6,7; 8,1; 6,7.

a) Să se scrie repartiția variabilei aleatoare de selecție.

b) Pe baza rezultatelor înregistrate, să se determine cantitatea medie de magneziu, exprimată în grame, conținută într-un litru de apă minerală şi modul în care variază

2) Fie X o variabilă aleatoare continuă, având densitatea de repartiție:

$$f : R \to R,\ f(x;\theta) = \begin{cases} \dfrac{x^2}{54\theta^3} e^{-\frac{x}{3\theta}}, & x > 0 \\ 0, & x \le 0 \end{cases},\quad \theta > 0 .$$

a) Să se estimeze parametrul θ prin ambele metode de estimare punctuală, utilizând o selecție de volum n .

b) Să se arate că estimatorul obținut este absolut corect .