LUCRARE SCRISĂ LA ALGEBRĂ

18.06.2019

1. a) Demonstraţi că, dat fiind un corp comutativ K, orice ideal al inelului $K[X]$ este principal.
b) Este polinomul $X^5 + Y^5 + Z^5 \in \mathbb{C}[X, Y, Z, T]$ simetric? Justificare!
c) Scrieţi polinomul $X^3Y + XY^3 + Y^3Z + YZ^3 + Z^3X + ZX^3 \in \mathbb{C}[X, Y, Z]$ ca polinom de polinoamele simetrice fundamentale.

2. a) Arătaţi că, dat fiind un corp comutativ K, orice polinom neconstant din $K[X]$ se poate scrie ca produs de polinoame ireductibile.
b) Descompuneţi polinomul $X^5 + 1$ în factori ireductibili în $K[X]$ pentru fiecare $K \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}, \mathbb{Z}_5\}$

3. a) Enunţaţi un criteriu pentru inversabilitatea matricelor din $\mathcal{M}_n(R)$, unde $n \in \mathbb{N}^*$, iar R este un inel comutativ şi unitar. Definiţi noţiunile pe care le utilizaţi în enunţul acestui criteriu.
b) Determinaţi, folosind eşalonare, inversa matricei

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_4(\mathbb{Q})$$