Universitatea din Bucureşti
 29 ianuarie 2021
Facultatea de Matematică şi Informatică

Calcul Numeric – Proba practică
Informatică, Anul III

INSTRUCŢIUNI:

1. Comentaţi şi explicaţi toate rezolvările trimise. Codurile necomentate/neexplicate nu se punctează.
2. Codurile vor fi salvate cu următoarea denumire `Nume_Prenume_Grupa.py` şi vor fi trimise titularului de laborator până în data de **29 ianuarie 2021, ora 14:30**.

Factorizarea LR pentru sisteme pentadiagonale:
Se consideră matricea A $\in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ - pentadiagonală definită prin:

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & d_1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ c_1 & a_2 & b_2 & d_2 & \ddots & & & & \vdots \\ e_1 & c_2 & a_3 & b_3 & \ddots & \ddots & & & \vdots \\ 0 & e_2 & c_3 & a_4 & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & a_{n-3} & b_{n-3} & d_{n-3} & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & c_{n-3} & a_{n-2} & b_{n-2} & d_{n-2} \\ \vdots & & & & \ddots & e_{n-3} & c_{n-2} & a_{n-1} & b_{n-1} \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & e_{n-2} & c_{n-1} & a_n \end{bmatrix}$$

Factorizarea LR descompune matricea A în produs de două matrice, L şi R, definite prin

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ \ell_1 & 1 & 0 & 0 & \ddots & & & & \vdots \\ m_1 & \ell_2 & 1 & 0 & \ddots & \ddots & & & \vdots \\ 0 & m_2 & \ell_3 & 1 & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & \ell_{n-3} & 1 & 0 & 0 \\ \vdots & & & & \ddots & m_{n-3} & \ell_{n-2} & 1 & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & m_{n-2} & \ell_{n-1} & 1 \end{bmatrix}, \quad R = \begin{bmatrix} r_1 & s_1 & v_1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & r_2 & s_2 & v_2 & \ddots & & & & \vdots \\ 0 & 0 & r_3 & s_3 & \ddots & \ddots & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & r_4 & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & r_{n-3} & s_{n-3} & v_{n-3} & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & \ell_{n-3} & r_{n-2} & s_{n-2} & v_{n-2} \\ \vdots & & & & \ddots & 0 & 0 & r_{n-1} & s_{n-1} \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 0 & 0 & r_n \end{bmatrix}$$

ALGORITM (DescLRPentaDiag)

Date de intrare: $\mathrm{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ `pentadiagonală`, $\mathrm{t} = (t_i)_{i=\overline{1,n}} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$;
Date de ieşire: $\mathrm{L} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\mathrm{R} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$;

`PASUL 1: Determină matricile` L, R:

- $r_1 \leftarrow a_1,\ s_1 \leftarrow b_1,\ \ell_1 \leftarrow \dfrac{c_1}{r_1},\ r_2 \leftarrow a_2 - \ell_1 s_1$;
- $v_i \leftarrow d_i,\ m_i \leftarrow \dfrac{e_i}{r_i}, \quad \forall\ i = \overline{1, n-2}$;
- $s_{i+1} \leftarrow b_{i+1} - \ell_i v_i,\ \ell_{i+1} \leftarrow \dfrac{c_{i+1} - m_i s_i}{r_{i+1}}, \quad \forall\ i = \overline{1, n-2}$;
- $r_{i+2} \leftarrow a_{i+2} - \ell_{i+1}\, s_{i+1} - m_i v_i, \quad \forall\ i = \overline{1, n-2}$;

`PASUL 2: Rezolvă` $\mathrm{Ly} = \mathrm{t}$:

- $y_1 \leftarrow t_1,\ y_2 \leftarrow t_2 - \ell_1 y_1,\ y_i \leftarrow t_i - \ell_{i-1} y_{i-1} - m_{i-2} y_{i-2}, \quad \forall\ i = \overline{3, n}$

`PASUL 3: Rezolvă` $\mathrm{Rx} = \mathrm{y}$:

- $x_n \leftarrow \dfrac{y_n}{r_n},\ x_{n-1} \leftarrow \dfrac{y_{n-1} - s_{n-1} x_n}{r_{n-1}},\ x_i \leftarrow \dfrac{y_i - s_i x_{i+1} - v_i x_{i+2}}{r_i}, \quad \forall\ i = \overline{n-2, 1}$

Ex. 1

a) Să se implementeze procedura **DescLRPentaDiag**(A, t) în baza algoritmului de mai sus. Procedura **DescLRPentaDiag** returnează matricele L, R şi soluţia sistemului;

b) Fie sistemul $\mathrm{Ax} = \mathrm{t}$, unde A este o matrice pentadiagonală. Vectorii $a, b, c, d, e, \mathrm{t}$ se vor construi cu valori aleatoare cuprinse între 0 şi 1. Să se construiască matricea A şi vectorul termenilor liberi t;

c) Să se calculeze matricele L, R şi să se rezolve sistemul $\mathrm{Ax} = \mathrm{t}$ pentru $n = 10$, folosind procedura **DescLR-PentaDiag**;

d) Să se afişeze şi să se verifice soluţia.