Universitatea din Bucureşti 29 ianuarie 2021
Facultatea de Matematică şi Informatică

Calcul Numeric – Proba practică
Informatică, Anul III

INSTRUCŢIUNI:

1. Comentaţi şi explicaţi toate rezolvările trimise. Codurile necomentate/neexplicate nu se punctează.
2. Codurile vor fi salvate cu următoarea denumire `Nume_Prenume_Grupa.py` şi vor fi trimise titularului de laborator până în data de **29 ianuarie 2021, ora 14:30**.

Factorizarea QR:

Fie $A = (a_{ij})_{i,j=\overline{1,n}} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Numim descompunere QR a matricei A, descompunerea de forma $A = QR$ unde $Q = (q_{ij})_{i,j=\overline{1,n}} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ este o matrice ortogonală, i.e. $Q^TQ = QQ^T = I$, iar $R = (r_{ij})_{i,j=\overline{1,n}} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ este o matrice superior triunghiulară.

Dacă $A = (a_{ij})_{i,j=\overline{1,n}} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ este o matrice inversabilă, atunci există şi este unică descompunerea QR a matricei A cu $Q \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ o matrice ortogonală şi $R \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ o matrice superior triunghiulară având componentele pe diagonala principală $r_{kk} > 0, k = \overline{1,n}$.

Sistemul $Ax = b$ devine $QRx = b$. Cum Q este ortogonală ($Q^TQ = I$), înmulţind relaţia $QRx = b$ cu Q^T obţinem $Rx = Q^Tb$. Cum R este superior triunghiulară sistemul $Rx = Q^Tb$ se rezolvă conform metodei substituţiei descendente.

ALGORITM (Metoda Givens de descompunere QR)

Date de intrare: $\mathrm{A} = (a_{ij})_{i,j=\overline{1,n}} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\mathrm{b} = (b_i)_{i=\overline{1,n}} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$;
Date de ieşire: $\mathrm{Q} = (q_{ij})_{i,j=\overline{1,n}} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\mathrm{R} = (r_{ij})_{i,j=\overline{1,n}} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\mathrm{x} = (x_i)_{i=\overline{1,n}} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$;

PASUL 1: Iniţializează $\mathrm{Q} \leftarrow \mathrm{I}_n$.

PASUL 2: Pentru $i = \overline{1,n}$ şi $j = \overline{i+1,n}$ execută:

- Determină parametrii rotaţiei Givens:

$$\sigma = \sqrt{a_{ii}^2 + a_{ji}^2}, \quad c = \frac{a_{ii}}{\sigma}, \quad s = \frac{a_{ji}}{\sigma}.$$

- Pentru $k = \overline{1,n}$ aplică matricea de rotaţie Givens matricei A, vectorului b şi memorează rotaţia în matricea Q:

$$u \leftarrow ca_{ik} + sa_{jk}, \quad v \leftarrow -sa_{ik} + ca_{jk}, \quad a_{ik} \leftarrow u, \quad a_{jk} \leftarrow v;$$

$$u \leftarrow cq_{ik} + sq_{jk}, \quad v \leftarrow -sq_{ik} + cq_{jk}, \quad q_{ik} \leftarrow u, \quad q_{jk} \leftarrow v;$$

PASUL 3: Alege $\mathrm{R} \leftarrow \mathrm{A}$ şi $\mathrm{Q} \leftarrow \mathrm{Q}^\mathrm{T}$.

PASUL 4: Determină soluţia x a sistemului $\mathrm{Rx} = \mathrm{Q^Tb}$ conform metodei substituţiei descendente.

Ex. 1 Fie matricea $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ şi $b = (1, 2, 5)^T$.

a) Să se implementeze în Python procedura **DescQRGivens**(A) care returnează matricele Q, R şi soluţia x a sistemului $Ax = b$;

b) Să se rezolve numeric sistemul $Ax = b$ în baza procedurii **DescQRGivens**;

c) Să se verifice soluţia obţinută.

Ex. 2

(a) Creaţi funcţia `newton_raphson` care determină numeric soluţia ecuaţiei:

$$f(x) = x^3 + x^2 - 4x - 4 = 0\,, \tag{1}$$

prin metoda Newton-Raphson şi are ca **date de intrare**:

- funcţia care determină ecuaţia (1), f;
- derivata funcţiei care determină ecuaţia (1), df;
- punctul de start al metodei Newton-Raphson, x_0;
- toleranţa erorii specifice metodei Newton-Raphson, `eps`;

iar ca **date de ieşire**:

- soluţia numerică obţinută, $\mathtt{x}_{\mathtt{aprox}}$;
- numărul de iteraţii necesare, `N`;

(b) Alegeţi subintervalele şi punctele de start ale metodei respectând ipotezele teoremei de convergenţă ale metodei Newton-Raphson, astfel încât şirurile aproximărilor să rămână în subintervalele selectate şi să conveargă la soluţii. Justificaţi atât alegerea subintervalelor, cât şi a valorilor iniţiale.

Aflaţi toate soluţiile ecuaţiei (1) apelând funcţia `newton_raphson` cu eroarea de aproximare $\mathtt{eps} = 10^{-3}$ şi construiţi punctele obţinute pe graficul funcţiei.