EXAMEN ALGEBRĂ

2017

1) Grupuri ciclice (definiție, exemple, teorema de caracterizare).
2) Pe $\mathbb{N}^*$ se consideră relația $a \sim b \Leftrightarrow \frac{a}{(a,b)}$ $și$ $\frac{b}{(a,b)}$ $au\ aceeași\ paritate$, unde $(a,\ b)$ este $cmmdc(a,\ b)$.
   a) Arătați că $a \sim b \Leftrightarrow\ \exists\ t \in \mathbb{N}\ a.\text{î}.\ 2^t \mid a, b\ și\ 2^{t+1} \nmid a, b$.
   b) Demonstrați că $\sim$ este relație de echivalență.
   c) Descrieți clasele de echivalență $\widehat{1}, \widehat{6}, \widehat{48}$.
   d) Scrieți un sistem complet de reprezentanți pentru $\sim$.
3) Fie $f: (\mathbb{Q}, +) \to (\mathbb{C}^*, \cdot)$ definit prin $f(x) =\ \cos 2\pi x + i \sin 2\pi x\ , \forall x \in \mathbb{Q}$
   a) Arătați că f este morfism de grupuri.
   b) Calculați $Ker(f), Im(f)$ și aplicați teorema de izomorfism lui f.
   c) Dați exemplu de $H \subseteq (\mathbb{Q}, +)$ astfel încât $\mathbb{Z}\ \subset\ H \subset \mathbb{Q}$.
4) Fie permutarea $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \\ 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 2 & 9 & 10 & 1 & 12 & 11 & 8 \end{pmatrix} \in S_{12}$.
   a) Descompuneți σ în produs de cicluri disjuncte de transpoziții.
   b) Calculați ordinul și signatura lui σ.
   c) Rezolvați ecuația $x^2 = \sigma$ în S_{12}.