FMI, Info, 2018/2019, Anul I
Logică matematică şi computaţională

Examen

25.01.2019

Nume: ______________________

Prenume: __________________

Grupa: _____________________

P1	P2	P3	P4	P5	P6	P7	P8	P9	Of.	TOTAL
___/1	___/1	___/1	___/1	___/2	___/2	___/1	___/3	___/2	1	_____/15

Partea I. Logică propoziţională

(P1) [1 punct] Reamintim că $V = \{v_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ este mulţimea variabilelor din logica propoziţională. Fie $W := \{v_{2n} \mid n \in \mathbb{N}\}$. Să se demonstreze că W este numărabilă.

(P2) [1 punct] Folosind metoda tabelului de adevăr, arătaţi că pentru orice formule φ şi ψ, avem

$$\neg(\neg\varphi \land \neg\psi) \to \varphi \lor \psi \quad \sim \quad \neg\neg\varphi \to \varphi.$$

(P3) [1 punct] Să se arate sintactic că pentru orice formule φ şi ψ, avem

$$\vdash (\varphi \to (\psi \to \chi)) \to (\psi \to (\varphi \to \chi)).$$

(P4) [1 punct] Fie $\Gamma = \{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\}$ o mulţime finită de formule. Demonstraţi următoarele:

(i) Pentru orice formulă ψ, $\Gamma \vdash \psi$ dacă şi numai dacă $\vdash \varphi_1 \land \ldots \land \varphi_n \to \psi$ dacă şi numai dacă $\{\varphi_1 \land \ldots \land \varphi_n\} \vdash \psi$.

(ii) Γ este consistentă dacă şi numai dacă $\{\varphi_1 \land \ldots \land \varphi_n\}$ este consistentă.

(P5) [2 puncte]

(i) Să se aducă formula $\varphi := (v_1 \to \neg(v_2 \to v_1)) \to (\neg v_2 \land v_1)$ la FND şi FNC folosind transformări sintactice.

(ii) Să se aducă formula $\psi := v_3 \to (\neg v_1 \leftrightarrow v_2)$ la FND şi FNC folosind funcţia booleană asociată.

(P6) [2 puncte]

(i) Să se aplice algoritmul Davis-Putnam mulţimii de clauze:

$$\mathcal{S} = \{\{\neg v_2, v_3\},\ \{v_1, v_2, \neg v_4\},\ \{v_1, \neg v_2, \neg v_3, \neg v_4\},\ \{v_1, v_4\},\ \{\neg v_1\}\}$$

(ii) Folosind primul subpunct şi eventual alte proprietăţi, să se arate că:

$$\{v_4 \to (v_1 \lor v_2), (v_2 \land v_3 \land v_4) \to v_1, v_1 \lor v_4\} \vDash (v_2 \to v_3) \to v_1$$

Partea II. Logică de ordinul I

(P7) [1 punct] Fie $\mathcal{L}_1$ şi $\mathcal{L}_2$ două limbaje de ordinul I cu signaturile $\tau_1 = (\mathcal{R}_1, \mathcal{F}_1, \mathcal{C}_1, ari_1)$ şi, respectiv, $\tau_2 = (\mathcal{R}_2, \mathcal{F}_2, \mathcal{C}_2, ari_2)$. Spunem că $\mathcal{L}_2$ este o **expansiune** a lui $\mathcal{L}_1$ dacă $\mathcal{R}_1 \subseteq \mathcal{R}_2$, $\mathcal{F}_1 \subseteq \mathcal{F}_2$, $\mathcal{C}_1 \subseteq \mathcal{C}_2$ şi ari_1 este ari_2 restricţionată la $\mathcal{F}_1 \cup \mathcal{R}_1$.

Fie $\mathcal{L}_2$ o expansiune a lui $\mathcal{L}_1$. Demonstraţi prin inducţie după termenii şi formulele lui $\mathcal{L}_1$ că $Term_{\mathcal{L}_1} \subseteq Term_{\mathcal{L}_2}$ şi $Form_{\mathcal{L}_1} \subseteq Form_{\mathcal{L}_2}$.

(P8) [3 puncte]

(i) Să se arate că pentru orice limbaj $\mathcal{L}$ de ordinul I şi orice formule φ, ψ ale lui $\mathcal{L}$, avem:

(a) $\exists x(\varphi \wedge \psi) \vDash \exists x\varphi \vee \exists x\psi$, pentru orice variabilă x.

(b) $\exists x(\varphi \wedge \psi) \mathrel{\text{H}} \varphi \wedge \exists x\psi$, pentru orice variabilă $x \notin FV(\varphi)$.

(ii) Să se dea exemplu de limbaj $\mathcal{L}$ de ordinul I şi de formule φ, ψ ale lui $\mathcal{L}$ astfel încât:

$$\exists x\varphi \vee \exists x\psi \not\vDash \exists x(\varphi \wedge \psi)$$

(P9) [2 puncte] Fie $\mathcal{L}$ un limbaj de ordinul întâi care conţine

- două simboluri de relaţii unare S, T şi un simbol de relaţie binară R;
- un simbol de operaţie unară f şi un simbol de operaţie binară g;
- trei simboluri de constante a, b, c.

Să se găsească forme normale prenex pentru următoarele formule ale lui $\mathcal{L}$:

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= \neg\forall y(g(y,t) = b) \wedge \neg\exists x(f(x) = a) \\ \varphi_2 &= (\exists u S(u) \to \neg\exists z \neg T(z)) \to \exists v(R(c,v) \to R(z,v)) \end{aligned}$$