Grupa 344, Seminar 13, EDDP, 11.01.2021

Problema Cauchy pt. ecuații neliniare cu derivate parțiale de ordinul întâi

① Se cer soluțiile următoarelor prob. Cauchy:

a) $(\partial_1 u)^2 + (\partial_2 u)^2 + (\partial_1 u)(\partial_2 u) - x_1(\partial_2 u) - x_2(\partial_1 u) + x_1 x_2 - 2u = 0.$

$u(x_1, x_2) = \dfrac{x_2^2}{2}$ pe $S = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 = -1\}$

√ b) $\begin{cases} x_1^2 + x_2^2 + \frac{1}{2}(\partial_1 u)^2 + \frac{1}{2}(\partial_2 u)^2 - 3u = 0. \\ u(\underset{\alpha_1(s)}{s}, \underset{\alpha_2(s)}{2}) = \underset{\varphi(s)}{s^2+4}, \quad s > 0 \end{cases}$

cond. inițială cuprinde și parametrizarea, adică, înlocuiește scrierea următoare:

$u(x_1, x_2) = \underbrace{x_1^2 + 4}_{u_0(x_1, x_2)}$ pe $S = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid x_2 = 2, \ x_1 > 0\}$

OBS. Deci, formularea problemei Cauchy poate fi:

$$\begin{cases} F(x_1, \dots, x_n, u, \partial_1 u, \dots, \partial_n u) = 0 \\ u(\alpha_1(s), \dots, \alpha_n(s)) = \varphi(s), \quad s \in D \subset \mathbb{R}^{n-1}! \end{cases}$$

c) $\begin{cases} (\partial_1 u)^2 - 2(\partial_1 u)(\partial_2 u) + 2(\partial_2 u)^2 - 4u = 0 \\ u(0, s) = \dfrac{s^2}{2}, \quad s > 0 \end{cases}$

d) $\begin{cases} x_2(\partial_2 u) - (\partial_1 u)(\partial_2 u) + x_1 x_2 - u = 0. \\ u(1, s) = s, \quad s \in \mathbb{R}. \end{cases}$

e) $\begin{cases} x_2 \partial_1 u + (2x_1 - x_2)\partial_2 u = 4x_1(x_1 + x_2) \\ u(2s, -s) = s^2, \quad s > 0 \end{cases}$ (ec. cvasiliniară)

ⓑ $\begin{cases} \underbrace{x_1^2 + x_2^2 + \frac{1}{2}(\partial_1 u)^2 + \frac{1}{2}(\partial_2 u)^2 - 3u}_{= F(x_1, x_2, u, \partial_1 u, \partial_2 u)} = 0 \\ u(s, 2) = s^2 + 4, \quad s > 0 \end{cases}$

$\begin{cases} \alpha_1(s) = s \\ \alpha_2(s) = 2 \end{cases}$; $\varphi(s) = s^2 + 4.$

Notăm $p_1 = \partial_1 u$; $p_2 = \partial_2 u$. Determinăm γ_1, γ_2, adică, valorile inițiale pt p_1 și p_2.

Se rezolvă sistemul:

$$\begin{cases} F(\alpha_1(s), \alpha_2(s), \varphi(s), \gamma_1, \gamma_2) = 0 \\ \gamma_1 \cdot \alpha_1'(s) + \gamma_2 \alpha_2'(s) = \varphi'(s) \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} s^2 + 4 + \frac{1}{2}\gamma_1^2 + \frac{1}{2}\gamma_2^2 - 3(s^2+4) = 0 \\ \gamma_1 \cdot 1 + \gamma_2 \cdot 0 = 2s \Rightarrow \boxed{\gamma_1 = 2s} \end{cases} \Bigg| \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\cancel{2}} \cdot \overset{2}{\cancel{4}} s^2 + \frac{1}{2}\gamma_2^2 - 2(s^2+4) = 0.$$

$$\cancel{2s^2} + \frac{1}{2}\gamma_2^2 - \cancel{2s^2} - 8 = 0 \Rightarrow \gamma_2^2 = 16 \Rightarrow \boxed{\gamma_2 = \pm 4}$$

$\Rightarrow$ vom avea 2 cazuri: I) $\begin{cases} \gamma_1 = 2s \\ \gamma_2 = 4 \end{cases}$; II) $\begin{cases} \gamma_1 = 2s \\ \gamma_2 = -4 \end{cases}$

OBS: Dacă în enunț avem cond: $\underline{\partial_2 u(0) > 0}$, atunci trebuie $\gamma_2 > 0 \Rightarrow$ cazul II nu este compatibil cu problema.

Scriem sistemul caracteristic. Calculăm derivatele parțiale pentru: $F(x_1, x_2, u, p_1, p_2) = x_1^2 + x_2^2 + \frac{1}{2}p_1^2 + \frac{1}{2}p_2^2 - 3u$

$$\frac{\partial F}{\partial x_1} = 2x_1;\ \frac{\partial F}{\partial x_2} = 2x_2;\ \frac{\partial F}{\partial p_1} = p_1;\ \frac{\partial F}{\partial p_2} = p_2;\ \frac{\partial F}{\partial u} = -3.$$

Sistemul caracteristic este: (cu cond inițiale)

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = p_1 \\ \frac{dx_2}{dt} = p_2 \\ \frac{dp_1}{dt} = -2x_1 - p_1(-3) \\ \frac{dp_2}{dt} = -2x_2 - p_2(-3) \\ \frac{du}{dt} = p_1 \cdot p_1 + p_2 \cdot p_2 \\ x_1(0) = s \\ x_2(0) = 2 \\ p_1(0) = 2s \\ p_2(0) = 4 \\ u(0) = s^2 + 4. \end{cases}$$

(1) (2)

t = varib. independentă

x_1, x_2, u, p_1, p_2 = variab dependente

Se încearcă descompunerea sistemului de 5 ecuații $(2n+1)$ în subsisteme de dim. mai mică (care conțin doar o parte dintre variab. dependente) sau chiar ec. independente (conțin doar o variab. dependentă)

Pt. acest sistem avem:

- subsistem în (x_1, p_1): $\begin{cases} x_1' = p_1 \\ p_1' = -2x_1 + 3p_1 \end{cases}$ (1)

- subsistem în (x_2, p_2): $\begin{cases} x_2' = p_2 \\ p_2' = -2x_2 + 3p_2 \end{cases}$ (2)

- ec. în u: $\dfrac{du}{dt} = p_1^2 + p_2^2$ (care se integrează după ce am aflat p_1 și p_2).

(1) $\begin{cases} x_1' = p_1 \\ p_1' = -2x_1 + 3p_1 \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} x_1' \\ p_1' \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}}_{A} \begin{pmatrix} x_1 \\ p_1 \end{pmatrix}$ sistem liniar cu coef. constanți. $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ x_1 verifică ec.: $x_1'' = (\operatorname{tr} A)x_1' - (\det A)\, x_1$

$$\left.\begin{array}{l} \operatorname{tr} A = 0 + 3 = 3 \\ \det A = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} = 0 + 2 = 2 \end{array}\right] \Rightarrow \underbrace{x_1'' = 3x_1' - 2x_1}_{\text{ec. de ordinul al doilea cu coef. constanți}} \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ scriem ec. caracteristică: $r^2 = 3r - 2 \Rightarrow$

$\Rightarrow r^2 - 3r + 2 = 0$

$(r-1)(r-2) = 0 \Rightarrow r_1 = 1,\ m_1 = 1$; $r_2 = 2,\ m_2 = 1$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ scriem un sistem fundamental de soluții pt ec în x_1: $\left.\begin{array}{l} \varphi_1(t) = e^{r_1 t} = e^t \\ \varphi_2(t) = e^{r_2 t} = e^{2t} \end{array}\right| \Rightarrow \boxed{x_1(t) = C_1 e^t + C_2 e^{2t}}$; $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$.

Variab. p_1 se determină din prima ec. din subsistem. (adică, cea în care nu intervine p_1') $\Rightarrow p_1 = x_1' \Rightarrow$

$\Rightarrow \boxed{p_1(t) = C_1 e^t + C_2 \cdot 2e^{2t}}$

Const C_1 și C_2 se determină din cond. inițiale.

$$\begin{cases} x_1(0) = s \\ p_1(0) = 2s \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 + C_2 = s \\ C_1 + 2C_2 = 2s \end{cases} \overset{(-)}{\Rightarrow} C_2 = 2s - s$$

$\boxed{C_2 = s} \Rightarrow C_1 = 0$

$$\boxed{\begin{cases} \tilde{x}_1(t,s) = s e^{2t} \\ \tilde{p}_1(t,s) = 2s e^{2t} \end{cases}}$$

Al doilea subsistem: $(2)\begin{cases} x_2' = p_2 \\ p_2' = -2x_2 + 3p_2 \end{cases} \rightarrow \begin{pmatrix} x_2' \\ p_2' \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}}_{A} \begin{pmatrix} x_2 \\ p_2 \end{pmatrix}$

are aceeași matrice ca primul subsistem $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_2(t) = C_3 e^{t} + C_4 e^{2t} \\ p_2(t) = C_3 e^{t} + 2C_4 e^{2t} \end{cases}, \ C_3, C_4 \in \mathbb{R}.$$

Aflăm constantele C_3, C_4 din cond. inițiale

$$\begin{cases} x_2(0) = 2 \\ p_2(0) = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_3 + C_4 = 2 \\ C_3 + 2C_4 = 4 \end{cases} \Rightarrow C_4 = 4 - 2 = 2$$

$\boxed{C_4 = 2} \Rightarrow$

$\boxed{C_3 = 0} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{cases} \tilde{x}_2(t,s) = 2e^{2t} \\ \tilde{p}_2(t,s) = 4e^{2t} \end{cases}}$$

Integrăm ec. pt u: $\dfrac{du}{dt} = p_1^2 + p_2^2$

$$\frac{du}{dt} = 4s^2 e^{4t} + 16 e^{4t}$$

$$\frac{du}{dt} = 4(s^2+4)e^{4t}$$, ec de tip primitivă $\Rightarrow$

$$\Rightarrow u(t) = 4(s^2+4)\int e^{4t}\,dt = \cancel{4}(s^2+4)\frac{e^{4t}}{\cancel{4}} + C_5 \ \Big| \Rightarrow$$

dar $u(0) = s^2+4$

$$\Rightarrow s^2+4 + C_5 = s^2+4 \Rightarrow \boxed{C_5 = 0} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\tilde{u}(t,s) = (s^2+4)e^{4t}}$$

Soluția parametrică a problemei este $\begin{cases} x_1 = s e^{2t} \\ x_2 = 2e^{2t} \\ u = (s^2+4)e^{4t} \end{cases}$

Din primele 2 ec. din soluția parametrică:

$$\begin{cases} x_1 = s e^{2t} \\ x_2 = 2e^{2t} \end{cases}$$ determinăm s și t și le înlocuim în u (a 3-a ec din sol. param).

$$\left.\begin{array}{l} \frac{x_1}{x_2} = \frac{s}{2} \Rightarrow s = \frac{2x_1}{x_2} \\ e^{2t} = \frac{x_2}{2} \Rightarrow t = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{x_2}{2}\right) \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow u(x_1,x_2) = \left(\frac{4x_1^2}{x_2^2}+4\right)\cdot e^{\cancel{4}^{2}\cdot\frac{1}{\cancel{2}}\ln\left(\frac{x_2}{2}\right)} =$$

$$= \frac{4(x_1^2+x_2^2)}{x_2^2}\cdot e^{\ln\left(\frac{x_2}{2}\right)^2} = \frac{\cancel{4}(x_1^2+x_2^2)}{\cancel{x_2^2}}\cdot\frac{\cancel{x_2^2}}{\cancel{4}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{u(x_1,x_2) = x_1^2+x_2^2}$$

OBS: dacă calculăm direct $x_1^2+x_2^2 = s^2e^{4t}+4e^{4t} =$
$= (s^2+4)e^{4t} = u$

ⓐ $$\begin{cases} (\partial_1 u)^2 + (\partial_2 u)^2 + (\partial_1 u)(\partial_2 u) - x_1(\partial_2 u) - x_2(\partial_1 u) - 2u = 0 \\ u(x_1,x_2) = \underbrace{\frac{x_2^2}{2}}_{u_0(x_1,x_2)} \text{ pe } S = \{x\in\mathbb{R}^2 \mid x_1 = -1\}. \end{cases}$$

$F(x_1,x_2,u,\partial_1 u,\partial_2 u)$

$S = \{x\in\mathbb{R}^2 \mid h(x) = 0\}$

$x_1 = -1 \Rightarrow x_1+1 = 0$

$h(x_1,x_2) = x_1+1$

din $h(x) = 0$ exprimăm una dintre componente în funcție de celelalte:

$$\left.\begin{array}{l} x_1 = -1 \\ x_2 \end{array}\right| \Rightarrow \begin{cases} \alpha_1(s) = -1 \\ \alpha_2(s) = s, \ s\in\mathbb{R}. \end{cases}$$

OBS: Dacă $S = \{x\in\mathbb{R}^2 \mid h(x_1,x_2) = 2x_1 - x_2 + 1 = 0\}$

$2x_1 - x_2 + 1 = 0 \Rightarrow x_2 = 1+2x_1 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = \alpha_1(s) = s \\ x_2 = \alpha_2(s) = 1+2s \end{cases}, s\in\mathbb{R}.$$

• $\varphi(s) = u_0(\alpha_1(s),\alpha_2(s)) = \frac{1}{2}\alpha_2^2(s) = \frac{s^2}{2}$

• $p_1 = \partial_1 u$; $p_2 = \partial_2 u$

γ_1, γ_2 valori inițiale pt p_1, p_2, care se determină din:

$$\begin{cases} F(\alpha_1(s), \alpha_2(s), \varphi(s), \gamma_1, \gamma_2) = 0 \\ \gamma_1 \alpha_1'(s) + \gamma_2 \alpha_2'(s) = \varphi'(s) \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_1\gamma_2 - (-1)\gamma_2 - s\cdot\gamma_1 + (-1)s - \cancel{2}\frac{s^2}{\cancel{2}} = 0 \\ \gamma_1 \cdot 0 + \gamma_2 \cdot 1 = \frac{1}{\cancel{2}}\cdot \cancel{2}s \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_1\gamma_2 + \gamma_2 - s\gamma_1 - s - s^2 = 0 \\ \boxed{\gamma_2 = s} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \gamma_1^2 + \cancel{s^2} + \cancel{s\gamma_1} + s - \cancel{s\gamma_1} - s - \cancel{s^2} = 0 \Rightarrow \gamma_1^2 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\gamma_1 = 0}$$

Avem

$$F(x_1, x_2, u, p_1, p_2) = p_1^2 + p_2^2 + p_1 p_2 - x_1 p_2 - x_2 p_1 + x_1 x_2 - 2u \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\partial F}{\partial x_1} = -p_2 + x_2 ; \quad \frac{\partial F}{\partial x_2} = -p_1 + x_1 ; \quad \frac{\partial F}{\partial p_1} = 2p_1 + p_2 - x_2$$

$$\frac{\partial F}{\partial p_2} = 2p_2 + p_1 - x_1 ; \quad \frac{\partial F}{\partial u} = -2$$

Sist. caract.:

$$(*) \begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = 2p_1 + p_2 - x_2 \\ \dfrac{dx_2}{dt} = 2p_2 + p_1 - x_1 \\ \dfrac{dp_1}{dt} = p_2 - x_2 - p_1(-2) \\ \dfrac{dp_2}{dt} = p_1 - x_1 - p_2(-2) \\ \dfrac{du}{dt} = p_1(2p_1 + p_2 - x_2) + p_2(2p_2 + p_1 - x_1) \\ x_1(0) = -1 \\ x_2(0) = s \\ p_1(0) = 0 \\ p_2(0) = s \\ u(0) = \dfrac{s^2}{2} \end{cases}$$

sistem diferențial liniar de 4 ec. cu 4 nec.: x_1, x_2, p_1, p_2.

obs. că: $x_1' = p_1' \Rightarrow x_1 = p_1 + C_1$

$x_2' = p_2' \Rightarrow x_2 = p_2 + C_2$

Temă: - de integrat sistemul (*).

- prob c, d, e.