Monoloche Andrei 1.04.2021
344

Tema 3

1). $\min\limits_{x\in\mathbb{R}^2} f(x) = x_1^3 x_2^2 (-1 - x_1 - x_2)$

$\quad$ s.l. $x \in Q$

a) $Q = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 + 2x_2 \leq 1\}$

$\Rightarrow a = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \quad b = 1 \quad \alpha = 1$

$$\nabla f(x) = \begin{bmatrix} -3x_1^2x_2^2 - 4x_1^3x_2^2 - 3x_1^2x_2^3 \\ -2x_1^3x_2 - 2x_1^4x_2 - 3x_1^3x_2^2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} x_1^2x_2^2(-3 - 4x_1 - 3x_2) \\ x_1^3x_2(-2 - 2x_1 - 3x_2) \end{bmatrix}$$

$\cancel{y = x^0}$ Alegem $x^0 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$

$$x^1 = \Pi_Q(\underbrace{x^0 - \nabla f(x^0)}_{y_1})$$

$$y_1 = x^0 - \nabla f(x^0) = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$$

$$x^1 = \Pi_Q\left(\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} - \frac{\max\{0, [1,2]\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} - 1\}}{1^2+2^2} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$$

$$x^2 = \Pi_Q(\underbrace{x^1 - \nabla f(x^1)}_{y_2})$$

$$y_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -4 \\ -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$x^2 = \Pi_Q\left(\begin{bmatrix} 5 \\ 2 \end{bmatrix}\right)$$

$$= \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \end{bmatrix} - \frac{\max\{0, [1\ 2]\begin{bmatrix} 5 \\ 2 \end{bmatrix} - 1\}}{5} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \end{bmatrix} - \frac{8}{5}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 17 \\ -6 \end{bmatrix}$$

b) $Q = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid \max\{x_1^2, x_2^2\} \leq 1\}$

$\max\{x_1^2, x_2^2\} \leq 1 \iff x_1^2, x_2^2 \in [0, 1] \iff$

$x_1, x_2 \in [-1, 1]$

$\iff \begin{cases} -1 \leq x_1 \leq 1 \\ -1 \leq x_2 \leq 1 \end{cases}$

$box^Q_{-1,1} = \{x : -1 \leq x \leq 1\}$

$$\Pi_Q(\underset{\in \mathbb{R}^n}{x}) = \max\{-1, \min\{1, x\}\} = \begin{bmatrix} \max\{-1, \min\{1, x_0\}\} \\ \max\{-1, \min\{1, x_1\}\} \\ \cdots \\ \max\{-1, \min\{1, x_n\}\} \end{bmatrix}$$

Alegem $x^0 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$

$$x^1 = \Pi_Q(\underbrace{x^0 - \nabla f(x^0)}_{y_1})$$

$$y_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow x^1 = \Pi_Q\left(\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} \max\{-1, \min\{1, 1\}\} \\ \max\{-1, \min\{1, -2\}\} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$x^2 = \Pi_Q(\underbrace{x^1 - \nabla f(x^1)}_{y_2}) =$$

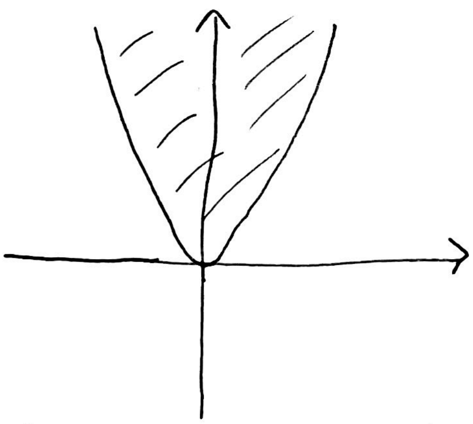
$$y_2 = \begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix} - \nabla f\left(\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}-4\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}5\\-2\end{bmatrix}$$

$$x^2 = \Pi_Q\left(\begin{bmatrix}5\\-2\end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix}\max\{-1, \min\{5, 1\}\}\\ \max\{-1, \min\{-2, 1\}\}\end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}$$

c) Stabilim dacă mulțimea este convexă și funcția obiectiv este convexă.

Cum $Q = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid x_1^2 \le x_2\}$, graficul va fi:



Observăm că mulțimea este o parabolă, deci mulțimea Q este convexă datorită interpretării geometrice (Dacă ducem un segment de dreaptă între 2 puncte din mulțime, acesta nu va ieși din mulțime).

$$\nabla f(x) = \begin{bmatrix} x_1^2 x_2^2(-3-4x_1-3x_2) \\ x_1^3 x_2(-2-2x_1-3x_2) \end{bmatrix}$$

$$\underset{H}{\nabla^2 f(x)} = \begin{bmatrix} 6x_1x_2^2(-1-2x_1-x_2) & x_1^2x_2(-6-8x_1-9x_2) \\ x_1^2x_2(-6-8x_1-9x_2) & x_1^3(-2-2x_1-6x_2) \end{bmatrix}$$

Verificăm dacă ~~Hessiana~~ H este semipozitiv definită:

$6x_1x_2^2(-1-2x_1-x_2) \geq 0$

$|H| \geq 0$

Nu putem stabili dacă H este semipozitiv definită din cauza $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$