

## Seminar 4

### Forma prenex. Skolemizare. Herbrandizare

#### Teorie pentru S4.1:

O formulă  $\varphi$  este în **formă rectificată** dacă:

- (i) nici o variabilă nu apare și liberă și legată;
- (ii) cuantificatori distincți leagă variabile distincte.

Intuitiv, forma rectificată a unei formule se obține prin redenumirea variabilelor astfel încât să nu apară conflicte.

O **formulă prenex** este o formulă de forma  $Q_1x_1 Q_2x_2 \dots Q_nx_n \varphi$  unde  $Q_i \in \{\forall, \exists\}$  pentru orice  $i \in \{1, \dots, n\}$ ,  $x_1, \dots, x_n$  sunt variabile distincte și  $\varphi$  nu conține cuantificatori.

Pentru o formulă rectificată putem obține o formulă echivalentă în formă prenex astfel:

- Se înlocuiesc  $\rightarrow$  și  $\leftrightarrow$  :

$$\begin{aligned}\varphi \rightarrow \psi &\models \neg\varphi \vee \psi \\ \varphi \leftrightarrow \psi &\models (\neg\varphi \vee \psi) \wedge (\neg\psi \vee \varphi)\end{aligned}$$

- Se aplică următoarele echivalențe:

$$\begin{array}{ll}\neg\exists x \neg\varphi &\models \forall x \varphi & \forall x \varphi \wedge \forall x \psi &\models \forall x (\varphi \wedge \psi) \\ \neg\forall x \neg\varphi &\models \exists x \varphi & \exists x \varphi \vee \exists x \psi &\models \exists x (\varphi \vee \psi) \\ \neg\exists x \varphi &\models \forall x \neg\varphi & \forall x \forall y \varphi &\models \forall y \forall x \varphi \\ \neg\forall x \varphi &\models \exists x \neg\varphi & \exists x \exists y \varphi &\models \exists y \exists x \varphi \\ \forall x \varphi \vee \psi &\models \forall x (\varphi \vee \psi) \text{ dacă } x \notin FV(\psi) \\ \forall x \varphi \wedge \psi &\models \forall x (\varphi \wedge \psi) \text{ dacă } x \notin FV(\psi) \\ \exists x \varphi \vee \psi &\models \exists x (\varphi \vee \psi) \text{ dacă } x \notin FV(\psi) \\ \exists x \varphi \wedge \psi &\models \exists x (\varphi \wedge \psi) \text{ dacă } x \notin FV(\psi)\end{array}$$

(S4.1) Considerăm un limbaj de ordinul I cu  $\mathbf{R} = \{P, R, Q\}$  cu  $ari(P) = 1$  și  $ari(R) = ari(Q) = 2$ . Găsiți formele echivalente prenex pentru următoarele formule:

- 1)  $\forall x \exists y (R(x, y) \rightarrow R(y, x)) \rightarrow \exists x R(x, x)$
- 2)  $\neg P(x) \rightarrow \neg \forall y \exists x R(x, y)$
- 3)  $\exists x R(x, y) \leftrightarrow \forall y Q(x, y)$

**Teorie pentru S4.2:**

Fie  $\varphi$  enunț în formă prenex. Definim  $\varphi^{sk}$  o **formă Skolem** a lui  $\varphi$  și  $\mathcal{L}^{sk}(\varphi)$  astfel:

- dacă  $\varphi$  este liberă de cuantificatori, atunci  $\varphi^{sk} = \varphi$  și  $\mathcal{L}^{sk}(\varphi) = \mathcal{L}$ ,
- dacă  $\varphi$  este universală<sup>1</sup>, atunci  $\varphi^{sk} = \varphi$  și  $\mathcal{L}^{sk}(\varphi) = \mathcal{L}$ ,
- dacă  $\varphi = \exists x \psi$  atunci introducem un nou simbol de constantă  $c$  și considerăm  $\varphi^1 = \psi[x/c]$ ,  $\mathcal{L}^1 = \mathcal{L} \cup \{c\}$ .
- dacă  $\varphi = \forall x_1 \dots \forall x_k \exists x \psi$  atunci introducem un nou simbol de funcție  $f$  de aritate  $k$  și considerăm  $\mathcal{L}^1 = \mathcal{L} \cup \{f\}$ ,

$$\varphi^1 = \forall x_1 \dots \forall x_k \psi[x/f(x_1 \dots x_k)]$$

În ambele cazuri,  $\varphi^1$  are cu un cuantificator existențial mai puțin decât  $\varphi$ . Dacă  $\varphi^1$  este liberă de cuantificatori sau universală, atunci  $\varphi^{sk} = \varphi^1$ . Dacă  $\varphi^1$  nu este universală, atunci formăm  $\varphi^2, \varphi^3, \dots$ , până ajungem la o formulă universală și aceasta este  $\varphi^{sk}$ .

**(S4.2)** Considerăm un limbaj de ordinul I cu  $\mathbf{C} = \{b\}$  și  $\mathbf{R} = \{P, R, Q\}$  cu  $ari(P) = 1$  și  $ari(R) = ari(Q) = 2$ . Găsiți formele Skolem pentru următoarele formule în formă prenex:

- 1)  $\forall x \exists y \forall z \exists w (R(x, y) \wedge (R(y, z) \rightarrow (R(z, w) \wedge R(w, w))))$
- 2)  $\forall x_1 \forall y_1 \exists y_2 \exists x_2 ((\neg R(x_1, y_2) \vee Q(b, y_1)) \wedge (\neg Q(x_1, y_2) \vee R(x_2, b)))$
- 3)  $\exists x_1 \forall y_1 \exists x_2 (P(y_1) \vee R(x_1, x_2))$

**Teorie pentru S4.3:**

Fie  $\varphi$  un enunț în forma Skolem, adică  $\varphi = \forall x_1 \dots \forall x_n \psi$ .

- Definim **universul Herbrand al formulei**  $\varphi$ , notat  $T(\varphi)$ , astfel:

---

<sup>1</sup>Un enunț se numește **universal** dacă conține doar cuantificatori universali.

- dacă  $c$  este o constantă care apare în  $\varphi$  atunci  $c \in T(\varphi)$ ,
- dacă  $\varphi$  nu conține nicio constantă atunci alegem o constantă arbitrară  $c$  și considerăm că  $c \in T(\varphi)$ ,
- dacă  $f$  este un simbol de funcție care apare în  $\varphi$  cu  $ari(f) = n$  și  $t_1, \dots, t_n \in T(\varphi)$  atunci  $f(t_1, \dots, t_n) \in T(\varphi)$ .

- Definim **expansiunea Herbrand** a lui  $\varphi$  astfel

$$\mathcal{H}(\varphi) = \{\psi[x_1/t_1, \dots, x_n/t_n] \mid t_1, \dots, t_n \in T(\varphi)\}.$$
<sup>2</sup>

(S4.3) Considerăm un limbaj de ordinul I cu  $\mathbf{F} = \{f, g\}$  cu  $ari(f) = 2$  și  $ari(g) = 1$ ,  $\mathbf{C} = \{b, c\}$ ,  $\mathbf{R} = \{P, Q\}$  cu  $ari(P) = 3$ ,  $ari(Q) = 2$  și următoarele formule:

- 1)  $\varphi := \forall x \forall y P(c, f(x, b), g(y))$
- 2)  $\psi := \forall x \forall y (Q(x, b) \vee Q(x, g(y)))$

- (a) Descrieți termenii din universul Herbrand.
- (b) Descrieți formulele din expansiunea Herbrand a următoarelor formule:
- (c) Cercetați satisfiabilitatea formulelor  $\varphi$  și  $\psi$ .

(S4.4) Considerăm următoarea formulă în logica de ordinul I:

$$\varphi = \forall y \forall z ((\neg P(f(a)) \vee Q(y)) \wedge P(z) \wedge \neg Q(b))$$

Construiți expansiunea Herbrand și arătați că formula nu este satisfiabilă.

---

<sup>2</sup>Reamintim că  $\psi[x/t]$  este formula obținută înlocuind în  $\psi$  toate aparițiile libere ale lui  $x$  cu  $t$ .