CURS #7

CONȚINUTUL CURSULUI #7:

II.2. Valori proprii. Metoda Jacobi de aproximare a valorilor proprii unei matrice simetrice.

Definiția (II.7.)

Fie $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Un număr complex λ se numește valoare proprie a matricei A dacă $\exists\ v \in C^n \setminus \{0\}$ astfel încât $Av = \lambda v$. Vectorul v se numește vector propriu asociat valorii λ.

O formă echivalentă a relației $Av = \lambda v$ este:

$$(A - \lambda I_n)v = 0 \tag{1}$$

Se obține astfel un sistem omogen care depinde de parametrul λ și are drept necunoscute componentele $v_1, v_2, ..., v_n$ ale vectorului v. Acest sistem admite soluție nenulă dacă și numai dacă

$$det(A - \lambda I_n) = 0 \tag{2}$$

Definiția (II.8.)

Fie $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Polinomul de grad n, $P_n(\lambda) = det(A - \lambda I_n)$ se numește polinomul caracteristic al matricei A.

Rădăcinile polinomului $P_n(\lambda)$ sunt valorile proprii ale matricei A. Mulțimea valorilor proprii ale matricei A se numește spectrul matricei A și se notează cu $\sigma(A)$.

Propoziție (II.3.)

Fie $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ și $\lambda_i, i = \overline{1,n}$, valorile proprii asociate matricei A.

a) *Dacă A este simetrică, atunci $\lambda_i \in \mathbb{R}, i = \overline{1,n}$;*
b) *Dacă A este simetrică și semipozitiv definită, atunci $\lambda_i \in \mathbb{R}_{\geq 0}, i = \overline{1,n}$;*
c) *Dacă A este simetrică și pozitiv definită, atunci $\lambda_i \in \mathbb{R}_{>0}, i = \overline{1,n}$.*

Definiția (II.9.)

Fie $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Se definește raza spectrală $\rho(A)$ a matricei A astfel:

$$\rho(A) = \max_{1 \leq i \leq n} |\lambda_i| \tag{3}$$

unde $\lambda_i \in \sigma(A), i = \overline{1,n}$. Dacă $\lambda = a + bi \in C$ atunci $|\lambda| = \sqrt{a^2 + b^2}$.

Definiția (II.10.)

Matricea $R(\theta) = \begin{pmatrix} cos\theta & sin\theta \\ -sin\theta & cos\theta \end{pmatrix}$ cu $\theta \in \mathbb{R}$ se numește matrice de rotații în două dimensiuni.

Obs.: Matricea $R(\theta)$ rotește vectorii în planul xOy cu unghiul θ în sensul acelor de ceasornic.

Exemplu 2: Vectorul $e_1 = (1,0)^T$ este vectorul $e_2 = (0,1)^T$ rotit cu $\theta = \dfrac{\pi}{2}$ conform acelor de ceasornic. Într-adevăr,

$$
\begin{aligned}
R\left(\frac{\pi}{2}\right) e_2 &= \begin{pmatrix} cos(\pi/2) & sin(\pi/2) \\ -sin(\pi/2) & cos(\pi/2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} && (4) \\
&= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = e_1 && (5)
\end{aligned}
$$

Definiția (II.11.)

Fie $n \in \mathbb{N}, p < q = \overline{1,n}$ și un unghi $\theta \in \mathbb{R}$. Cu notația $c = cos\theta, s = sin\theta$, se definește matricea de rotație Givens, matricea ortogonală

$$
R^{pq}(\theta) = \begin{pmatrix}
1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\
\vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
0 & \cdots & c & \cdots & s & \cdots & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\
0 & \cdots & -s & \cdots & c & \cdots & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1
\end{pmatrix} \qquad (6)
$$

unde elementele c, s se află la intersecția liniilor p și q cu coloanele p și q.

Dacă $r_{k\ell}, k, \ell = \overline{1,n}$, sunt componentele matricei $R^{(pq)}(\theta)$, atunci acestea se exprimă prin:

$$
r_{pp} = c, \quad r_{pq} = s, \quad r_{qp} = -s, \quad r_{qq} = c \qquad (7)
$$

$$
r_{kl} = \delta_{kl}, \quad k, l = \overline{1,n}, \quad k, l \neq p, q. \qquad (8)
$$

Obs.: Pentru $n = 3$ matricea de rotație Givens rotește vectorii $u \in \mathbb{R}^3$ în planul generat de vectorii $e_p, e_q, p < q$.

Exemplu 3: Să se afle vectorul rotit în planul Oe_1e_3 al vectorului $e_1 = (1,0,0)^T$ cu un unghi $\theta = \dfrac{\pi}{2}$.

Se observă că $c = cos\dfrac{\pi}{2} = 0, s = sin\dfrac{\pi}{2} = 1$, de unde rezultă matricea de rotație

$$
R^{(13)}\left(\frac{\pi}{2}\right) = \begin{pmatrix} c & 0 & s \\ 0 & 1 & 0 \\ -s & 0 & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}
$$

Astfel că

$$
R^{(13)}\left(\frac{\pi}{2}\right) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = -e_3
$$

Dacă aplicăm matricea $R^{(pq)}(\theta)$ unui vector $a \in \mathbb{R}^n$, acesta își va schimba doar elementele p și q.

Fie

$$
b = R^{(pq)}(\theta)a
$$

sau scris pe componente

$$
b_k = \sum_{s=1}^{n} r_{ks}a_s, k = \overline{1,n}
$$

de unde rezultă

$$
\begin{cases}
b_p = r_{pp}a_p + r_{pq}a_q = ca_p + sa_q \\
b_q = r_{qp}a_p + r_{qq}a_q = -sa_p + ca_q \\
b_k = a_k, k = \overline{1,n}, k \neq p, q
\end{cases} \qquad (9)
$$

Dacă aplicăm matricea $R^{(pq)}(\theta)$ unei matrice $A \in \mathcal{M}(\mathbb{R})$, atunci matricea A își va schimba doar liniile p și q. Fie

$$
B = R^{(pq)}(\theta)A
$$

sau scris pe componente

$$b_{k\ell} = \sum_{s=1}^{n} r_{ks} a_{s\ell}, k, \ell = \overline{1, n}$$

de unde rezultă

$$\begin{cases} b_{p\ell} = \sum_{s=1}^{n} r_{ps} a_{s\ell} = r_{pp} a_{p\ell} + r_{pq} a_{q\ell} = c a_{p\ell} + s a_{q\ell}, \ \ell = \overline{1, n} \\ b_{q\ell} = \sum_{s=1}^{n} r_{qs} a_{s\ell} = r_{qp} a_{p\ell} + r_{qq} a_{q\ell} = -s a_{p\ell} + c a_{q\ell}, \ \ell = \overline{1, n} \\ b_{k\ell} = a_{k\ell}, \ k, \ell = \overline{1, n}, \ k, \ell \neq p, q \end{cases} \tag{10}$$

Fie în continuare matricea B de forma

$$B = (R^{(pq)}(\theta)^T) A (R^{(pq)}(\theta) \tag{11}$$

Această transformare afectează atât liniile cât și coloanele p, q ale matricei A. În urma unui calcul elementar rezultă componentele matricei B :

$$\begin{cases} b_{ij} = a_{ij}, i, j \neq p, q, \\ b_{pj} = b_{jp} = c a_{pj} - s a_{qj}, j \neq p, q \\ b_{qj} = b_{jq} = s a_{pj} + c a_{qj}, j \neq p, q \\ b_{pp} = c^2 a_{pp} - 2cs a_{pq} + s^2 a_{qq} \\ b_{qq} = s^2 a_{pp} + 2cs a_{pq} + c^2 a_{qq} \\ b_{pq} = b_{qp} = sc(a_{pp} - a_{qq}) + (c^2 - s^2) a_{pq} \end{cases} \tag{12}$$

Ideea metodei Jacobi este să se aplice matricei A rotații succesive de forma (11) până se obține o matrice diagonală.
La fiecare rotație de forma $B = (R^{(pq)}(\theta)^T) A (R^{(pq)}(\theta))$ vom impune condiția ca elementele nediagonale b_{pq}, b_{qp} să fie nule, astfel

$$b_{pq} = b_{qp} = sc(a_{pp} - a_{qq}) + (c^2 - s^2) a_{pq} = 0$$

sau echivalent

$$a_{pq} cos2\theta + \frac{1}{2}(a_{pp} - a_{qq}) sin2\theta = 0$$

Dacă $a_{pp} \neq a_{qq}$ obținem

$$tg2\theta = \frac{2a_{pq}}{a_{qq} - a_{pp}}$$

de unde rezultă

$$\theta = \frac{1}{2} arctg\left(\frac{2a_{pq}}{a_{qq} - a_{pp}}\right)$$

Se observă că $\theta \in (-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4})$. Dacă $a_{pp} = a_{qq}$ rezultă $cos2\theta = 0$, deci $\theta = \frac{\pi}{4}$.

Metoda Jacobi aproximează valorile proprii ale unei matrice simetrice prin construirea unui șir de matrice, $(A_m)_{m \geq 0}$, obținut cu ajutorul matricilor de rotație, ale căror valori de pe diagonală converg către valorile proprii ale matricei A. Șirul $(A_m)_{m \geq 0}$ este construit conform schemei numerice:

$$\begin{cases} A_0 = A \\ A_m = (R^{pq}(\theta))^T A_{m-1} R^{pq}(\theta), \ m \geq 1 \end{cases} \tag{13}$$

Metoda Jacobi clasică presupune alegerea perechii (p, q) cu proprietatea ca

$$|a_{pq}^{(m)}| = \max_{i<j} |a_{ij}^{(m)}| \tag{14}$$

unde $a_{ij}^{(m)}, i, j = \overline{1, n}$ sunt elementele matricei curente A_m. În această manieră se vor elimina două elemente care sunt cele mai mari în valoarea absolută. Trebuie să remarcăm că elementele care s-au anulat la o iterație dată sunt în general înlocuite cu elemente nenule în timpul rotațiilor succesive. Vom repeta procedeul până când toate elementele nediagonale sunt mai mici decât o valoare ε (numită toleranța) sub care un număr este considerat 0.

Definiția (II.12.)

Se numește modul al matricei A numărul

$$|A| = \sqrt{\sum_{i \neq j=1}^{n} a_{ij}^2} \tag{15}$$

ALGORITM (Metoda Jacobi de aproximare a valorilor proprii)

Date de intrare: $A = (a_{ij})_{i,j=\overline{1,n}} -$ simetrică, ε;

Date de ieșire: $\lambda_i \in \mathbb{R}, i = \overline{1,n}$.

STEP 1: while $|A| \geq \varepsilon$ do

Determină p, q a.î. $|a_{pq}| = \max_{1 \leq i < j \leq n} |a_{ij}|$;

if $a_{pp} = a_{qq}$ then

$\theta = \frac{\pi}{4}$

else

$\theta = \frac{1}{2} arctg \frac{2a_{pq}}{a_{qq} - a_{pp}}$;

endif

$c = cos\theta, s = sin\theta$;

for $j = 1 : n$ do

if $j \neq p, q$ then

$u = a_{pj}c - a_{qj}s$; $v = a_{pj}s + a_{qj}c$;

$a_{pj} = u$; $a_{qj} = v$; $a_{jp} = u$; $a_{jq} = v$;

endif

endfor

$u = c^2 a_{pp} - 2csa_{pq} + s^2 a_{qq}$;

$v = s^2 a_{pp} + 2csa_{pq} + c^2 a_{qq}$;

$a_{pp} = u$; $a_{qq} = v$;

$a_{pq} = 0$; $a_{qp} = 0$;

endwhile

STEP 2: $\lambda_i = a_{ii}, i = \overline{1,n}$.

Teorema (II.3.)

Fie $n \geq 3, \lambda_n \geq \lambda_{n-1} \geq ... \geq \lambda_1$ valorile proprii ale matricei simetrice A și $\alpha_n^{(m)} \geq \alpha_{n-1}^{(m)} \geq ... \geq \alpha_1^{(m)}$ elementele diagonale ale matricei A_m construită iterativ conform formulei (13) unde p, q, θ sunt calculați conform algoritmului (Metoda Jacobi). Atunci

$$|\lambda_i - \alpha_i^{(m)}| \leq |A_m| \leq q^m |A|, \forall i = \overline{1,n} \tag{16}$$

cu $q = \sqrt{1 - \frac{2}{n^2 - n}}$.

Se observă că $\lim_{m \to \infty} \alpha_i^{(m)} = \lambda_i, i = \overline{1,n}$.

Exemplu 4: Fie matricea

$$A = \begin{pmatrix} 17 & -2 & 3\sqrt{3} \\ -2 & 8 & 2\sqrt{3} \\ 3\sqrt{3} & 2\sqrt{3} & 11 \end{pmatrix} \tag{17}$$

Folosind metoda Jacobi, să se determine valorile proprii ale matricei A. Evident că A este simetrică. Se determină $p < q$, astfel încât $|a_{pq}| = \max_{1 \leq i < j \leq 3} |a_{ij}|$. Se observă că

$$|a_{pq}| = \max\{|a_{12}|, |a_{13}|, |a_{23}|\} = |a_{13}| = 3\sqrt{3} \Rightarrow p = 1, q = 3$$

Deoarece $a_{11} \neq a_{33}$ rezultă

$$\theta = \frac{1}{2} arctg \frac{2a_{13}}{a_{33} - a_{11}} = \frac{1}{2} arctg(-\sqrt{3}) = -\frac{\pi}{6}$$

Matricea de rotație este:

$$R^{(13)}\left(\frac{\pi}{6}\right) = \begin{pmatrix} cos\frac{\pi}{6} & 0 & -sin\frac{\pi}{6} \\ 0 & 1 & 0 \\ sin\frac{\pi}{6} & 0 & cos\frac{\pi}{6} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$$

Se recalculează A :

$$A = \left(R^{(13)}\left(\frac{\pi}{6}\right)\right)^T AR^{(13)}\left(\frac{\pi}{6}\right) = \begin{pmatrix} 20 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 4 \\ 0 & 4 & 8 \end{pmatrix}$$

Se reia algoritmul.

$$|a_{pq}| = \max\{|a_{12}|, |a_{13}|, |a_{23}|\} = |a_{23}| = 4 \Rightarrow p = 2, q = 3$$

Deoarece $a_{22} = a_{33}$ rezultă $\theta = \frac{\pi}{4}$. Atunci

$$R^{(23)}\left(\frac{\pi}{4}\right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & cos\frac{\pi}{4} & sin\frac{\pi}{4} \\ 0 & -sin\frac{\pi}{4} & cos\frac{\pi}{4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$$

Se recalculează matricea A :

$$A = \left(R^{(23)}\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)^T AR^{(23)}\left(\frac{\pi}{4}\right) = \begin{pmatrix} 20 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 12 \end{pmatrix}$$

Procesul iterativ se oprește datorită faptului că toate elementele nediagonale ale matricei A sunt nule.