FLORENTIN ŞERBAN SILVIA DEDU

MATEMATICA

Suport de curs pentru ID

Cuprinsul cursului

Unitatea de învățare 4
4.Calcul integral

Unitatea de învățare 5
5. Formule probabilistice în care apar **operatii** cu **evenimente**

Unitatea de învățare 6
6. Variabile aleatoare

Prefață

Lucrarea "Matematica " dezvoltă numeroase probleme teoretice şi practice, care fac obiectul cursurilor de matematică sau de statistică economică ale studenților din învățământul economic, şi în particular ale studenților înscrişi la programul de studiu ID organizat de Facultatea de Finanțe, Asigurări, Bănci şi Burse de Valori şi face parte din planul de învățământ aferent anului I, semestrul 1.

Fiind subordonate programei analitice a disciplinei "Matematici aplicate în economie" de la Academia de Studii Economice Bucureşti, Facultatea de Finanțe, Asigurări, Bănci şi Burse de Valori, anul I, ID, noțiunile şi conceptele prezentate în lucrare apar, în mod firesc, într-o succesiune logică şi sunt supuse unor restricții temporale inevitabile, care conduc adeseori la dezvoltări teoretice limitate.

Obiectivele principale ale acestui curs, concretizate în competențele pe care studentul le va dobândi după parcurgerea şi asimilarea lui, sunt următoarele:

- va avea cunoştințe solide de strictă specialitate, dar şi de tehnici specifice matematicii aplicate;

- va fi în măsură să construiască, să prelucreze şi să valorifice o teorie economică relevantă, credibilă şi inteligibilă, numai în condițiile în care stăpâneşte deopotrivă cunoştințe în domeniul respectiv, dar şi temeinice cunoştințe de matematici aplicate în economie

- va dispune de numeroase soluții pentru eficientizarea managementului la nivel micro şi macroeconomic în vederea practicării în condiții de performanță a muncii de economist;

- va putea aborda, înțelege şi dezvolta diverse probleme ale disciplinelor de specialitate, precum şi alte concepte legate de modelarea matematică a unor procese sau fenomene economice dintre cele mai diverse.

Cursul "Matematica" este structurat pe şase unități de învățare (capitole), fiecare dintre acestea cuprinzând câte o lucrare de verificare, pe care studentul o va putea transmite tutorelui său.

Pentru ca procesul de instruire al studentului să se desfaşoare într-un mod riguros, dar şi atractiv, studentul va putea utiliza un set de resurse suplimentare prezentate sub forma bibliografiei de la sfârşitul fiecărei unități de învățare în format electronic, ce sa va regăsi accesând platforma de e-learning.

Evaluarea cunoştințelor se va realiza sub două forme:

- evaluare continuă, pe baza temelor de control care se vor derula pe platforma online;

- evaluare finală, realizată prin examenul susținut în perioada de sesiune.

Criteriile de evaluare constau în:

1. *Punctajul obținut la zece teme de control;*
2. *Gradul de implicare în discuțiile tematice, organizate prin opțiunea „Forum” a platformei electronice.*
3. *Punctajul obținut la examenul susținut în cadrul sesiunii.*

Ponderile asociate fiecarui criteriu precizat sunt următoarele:

- criteriile 1 şi 2: câte 0,30 puncte pentru fiecare dintre cele zece teme de control (total = 3 puncte) ; (in evaluarea punctajului va conta si gradul de imiplicare al studentului in discutiile tematice organizate pe forumul platformei electronice)

- criteriul 3: 7 puncte pentru examenul susținut în sesiune.

Nutrim speranța ca studenții din anul I, de la programul de studiu ID, Facultatea de Finanțe, Asigurări, Bănci şi Burse de Valori, să găsească în această lucrare un sprijin real şi important pentru studiu şi cercetare, pentru viitoarea lor profesie, ce le va solicita şi cunoştințe de matematica

Autorii

UNITATEA DE INVĂȚARE 1:

Serii numerice

Cuprins

1.1 Obiective

Unitatea de învățare 1 conține o prezentare într-o formă accesibilă, dar riguroasă a noțiunii de serie numerică din cadrul analizei matematice, care fundamentează teoretic noțiunea de serie de puteri, un alt element de bază al analizei matematice, ce va fi expus în unitatea de invățare 2.

După studiul acestei unități de învățare, studentul va avea cunoştințe despre:

- conceptul de serie numerică, necesar si extrem de util, pentru a putea modela matematic anumite procese sau fenomene economice, dintre cele mai diverse;

- tipul de probleme teoretice si practice, care fac obiectul cursului de „Serii numerice” şi al lucrărilor de verificare ale studenților din învățământul economic din anul I, ID, de la Facultatea de Finanțe, Asigurăru, Bănci şi Burse de Valori din Academia de Studii Economice, Bucureşti.

1.2 Definiții si proprietăți generale ale seriilor numerice

Fie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ o serie numerică de termen general a_n.

Definim *şirul sumelor parțiale* $(S_n)_{n\geq 1}$, $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$.

Definiția 1. Seria $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ este *convergentă* dacă şirul $(S_n)_{n\geq 1}$ este convergent.
În acest caz, numărul $S = \lim_{n\to\infty} S_n$ se numeşte *suma seriei*.

Dacă $\lim_{n\to\infty} S_n = \pm\infty$ sau $(S_n)_{n\geq 1}$ nu are limită, atunci seria $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ este *divergentă*.

Propoziția 1.

a) Dacă seria $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ este convergentă şi are suma S, atunci seria $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha \cdot a_n$ este convergentă şi are suma $\alpha \cdot S$.

b) Dacă seriile $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ şi $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ sunt convergente şi au sumele S_1 şi S_2, atunci seria $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$ este convergentă şi are suma $S_1 + S_2$.

Definiția 2. Seria $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ este *absolut convergentă* dacă seria $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ este convergentă.
Propoziția 2. Dacă o serie este absolut convergentă, atunci seria este convergentă.

1.3 Serii cu termeni oarecare, serii alternate, serii clasice

Criteriul suficient de divergență.

Dacă $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$, atunci seria $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ este divergentă.

Criteriul lui Leibniz.

Fie seria alternată $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$, $a_n > 0$. Dacă :

a) şirul $(a_n)_{n\geq 1}$ este descrescător şi

b) $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, atunci seria $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ este convergentă.

Serii clasice

1) *Seria geometrică* $\sum_{n=0}^{\infty} q^n$ *este convergentă* $\Leftrightarrow q \in (-1,1)$ *şi are suma* $S = \dfrac{1}{1-q}$.
2) *Seria armonică generalizată* $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^\alpha}$ *este convergentă* $\Leftrightarrow \alpha > 1$.

1.4 Serii cu termeni pozitivi. Criterii de convergență

Criteriul 1 de comparație. Fie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ şi $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ serii cu termini pozitivi pentru care există $n_0 \in N$ astfel încât $a_n \leq b_n, (\forall) n \geq n_0$.

$a)$ Dacă $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ este convergentă, atunci $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ este convergentă.

$b)$ Dacă $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ este divergentă, atunci $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ este divergentă.

Criteriul 2 de comparație. Fie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ şi $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ serii cu termeni pozitivi pentru care există $n_0 \in N$ astfel încât $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \frac{b_{n+1}}{b_n}, (\forall) n \geq n_0$.

$a)$ Dacă $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ este convergentă, atunci $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ este convergentă.

$b)$ Dacă $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ este divergentă, atunci $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ este divergentă.

Criteriul 3 de comparație. Fie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ şi $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ serii cu termeni pozitivi.

$a)$ Dacă $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} \in (0, \infty)$, atunci seriile au aceeaşi natură.

$b)$ Dacă $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 0$ şi: $b_1)$ $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ este convergentă, atunci $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ este convergentă;

$b_2)$ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ este divergentă, atunci $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ este divergentă.

$c)$ Dacă $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \infty$ şi:

$c_1)$ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ este convergentă, atunci $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ este convergentă;

$c_2)$ $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ este divergentă, atunci $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ este divergentă.

Corolarul criteriului raportului (d'Alembert).

Fie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ o serie cu termeni pozitivi şi $l = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$.

$a)$ Dacă $l < 1$, atunci $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ este convergentă.

$b)$ Dacă $l > 1$, atunci $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ este divergentă.

Corolarul criteriului rădăcinii (Cauchy).

Fie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ o serie cu termeni pozitivi şi $l = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n}$.

$a)$ Dacă $l < 1$, atunci $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ este convergentă.

$b)$ Dacă $l > 1$, atunci $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ este divergentă.

Corolarul criteriului Raabe-Duhamel.

Fie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ o serie cu termeni pozitivi şi $l = \lim_{n\to\infty} n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right)$.

$a)$ Dacă $l < 1$, atunci $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ este divergentă.

$b)$ Dacă $l > 1$, atunci $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ este convergentă.

Corolarul criteriului logaritmic.

Fie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ o serie cu termeni pozitivi şi $l = \lim_{n\to\infty} \frac{\ln \frac{1}{a_n}}{\ln n}$.

$a)$ Dacă $l < 1$, atunci $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ este divergentă.

$b)$ Dacă $l > 1$, atunci $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ este convergentă

Teste de autoevaluare

I. Să se determine natura şi dacă este cazul să se calculeze suma seriilor:

1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n+\alpha}+\sqrt{n+\alpha+1}}, \alpha>0.$ 2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\ln\frac{3n-1}{3n+2}$ 3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3^n+8^n}{3^{n+1}+8^{n+1}}$

II. Să se determine natura seriilor:

4. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1\cdot 4\cdot 7\cdot\ldots\cdot(3n-2)}{3\cdot 7\cdot 10\cdot\ldots\cdot(4n-1)}$. 5. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3n-1}{3n+2}\right)^{n^2}$

Răspunsuri şi comentarii la testele de autoevaluare

1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n+\alpha}+\sqrt{n+\alpha+1}}, \alpha>0.$

Rezolvare:

Considerăm şirul sumelor parţiale:

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}a_k=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k+\alpha}+\sqrt{k+\alpha+1}}=\sum_{k=1}^{n}\frac{\sqrt{k+\alpha}-\sqrt{k+\alpha+1}}{-1}=$$

$$=-\sqrt{1+\alpha}+\sqrt{2+\alpha}-\sqrt{2+\alpha}+\sqrt{3+\alpha}-\ldots-\sqrt{n+\alpha}+\sqrt{n+\alpha+1}\Rightarrow$$

$\Rightarrow S_n=\sqrt{n=\alpha+1}-\sqrt{1+\alpha}\Rightarrow\lim\limits_{n\to\infty}S_n=\infty$, deci şirul $(S_n)_{n\geq 1}$ este divergent.

Conform definiției, rezultă că seria este divergentă.

2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\ln\frac{3n-1}{3n+2}$.

Rezolvare:

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}\ln\frac{3k-1}{3k+2}=\sum_{k=1}^{n}\left[\ln(3k-1)-\ln(3k+2)\right]=$$

$$=\ln 2-\ln 5+\ln 5-\ln 8+\ldots+\ln(3n-1)-\ln(3n+2)=\ln 2-\ln(3n+2)\Rightarrow$$

$\Rightarrow\lim\limits_{n\to\infty}S_n=-\infty$, prin urmare seria este divergentă.

3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3^n+8^n}{3^{n+1}+8^{n+1}}$.

Rezolvare:

$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{8^n\left(\left(\frac{3}{8}\right)^n+1\right)}{8^{n+1}\left(\left(\frac{3}{8}\right)^{n+1}+1\right)}=\frac{1}{8}\neq 0$; conform criteriului suficient de divergență, rezultă că seria este divergentă.

4. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 4 \cdot 7 \cdot ... \cdot (3n-2)}{3 \cdot 7 \cdot 10 \cdot ... \cdot (4n-1)}$.

Rezolvare:

Vom folosi corolarul criteriului raportului. Fie $a_n = \frac{1 \cdot 4 \cdot 7.....(3n-2)}{3 \cdot 7 \cdot 10....(4n-1)}$. Avem:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\dfrac{1 \cdot 4 \cdot 7 \cdot ... \cdot (3n-2)(3n+1)}{3 \cdot 7 \cdot 10 \cdot ... \cdot (4n-1)(4n+3)}}{\dfrac{1 \cdot 4 \cdot 7 \cdot ... \cdot (3n-2)}{3 \cdot 7 \cdot 10 \cdot ... \cdot (4n-1)}} = \lim_{n\to\infty} \frac{(3n+1)}{(4n+3)} = \frac{3}{4} < 1,$$

prin urmare seria este convergentă.

5. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3n-1}{3n+2} \right)^{n^2}$.

Rezolvare:

Aplicăm corolarul criteriului rădăcinii. Fie $a_n = \left(\frac{3n-1}{3n+2} \right)^{n^2}$. Avem:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{3n-1}{3n+2} \right)^n = \lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{3}{3n+2} \right)^n = e^{\lim\limits_{n\to\infty} -\frac{3}{3n+2} \cdot n} = \frac{1}{e} < 1,$$

prin urmare seria este convergentă.

Bibliografia unității de învățare 1:

1. Gh. Cenușă şi colectiv, *Matematici aplicate in economie. Teorie si aplicatii.* Editura CISON, Bucureşti, 2007

2. S. Dedu, F. Şerban, *Matematici aplicate în economie. Culegere de probleme*, Editura. Teocora, Buzau, 2009

3. C.Raischi si colectiv, *Analiza matematica,* Editura.Plus, Bucureşti, *2005*

4.I. Purcaru, *Matematici generale si elemente de optimizare,* Editura Economică, Bucureşti, 1997.

UNITATEA DE ÎNVĂȚARE 2

Serii de puteri

Cuprins

2.1 Obiectivele unității de învățare 2

Fiind în strânsă concordanță cu programa analitică a disciplinei „Matematici aplicate în economie", de la Academia de Studii Economice Bucuresti, pentru studenții de la anul I, ID, Facultatea de Finanțe, Asigurări, Bănci şi Burse de Valori, noțiunile si conceptele prezentate în cadrul acestei unități de învățare apar, în mod firesc, într-o succesiune logică şi sunt supuse unor restricții temporale inevitabile, care conduc adeseori la dezvoltări teoretice limitate.

După studiul acestei unități de învățare, studentul va avea cunoştințe despre:

- conceptul de serie de puteri, un alt element de bază al analizei matematice, legat de studiul seriilor numerice, necesar şi extrem de util, pentru a putea aborda, înțelege şi dezvolta diverse probleme ale disciplinelor de specialitate din cadrul Facultății de Finanțe, Asigurări, Bănci şi Burse de Valori, căreia ne adresăm;

- tipul de probleme teoretice si practice, care fac obiectul cursului de „Serii de puteri" şi al lucrărilor de verificare ale studenților din invatamântul economic din anul I, ID, de la Facultatea de Finanțe, Asigurări, Bănci şi Burse de Valori din Academia de Studii Economice, Bucuresti

2.2 Definiția si studiul noțiunii de serie de puteri

Fie seria de puteri $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$, Se numeşte *mulțime de convergență* a seriei de puteri mulțimea formată din punctele în care seria este convergentă: $C = \left\{ x \in R \mid \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n \text{ convergentă} \right\}$.

Teorema 1 (Teorema lui Abel). Pentru orice serie de puteri $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ există R, $0 \le R \le \infty$, astfel încât:

1) seria este absolut convergentă pe intervalul $(-R, R)$;
2) seria este divergentă pe mulțimea $(-\infty, -R) \cup (R, \infty)$;
3) pentru orice $r \in (0, R)$, seria este uniform convergentă pe intervalul $[-r, r]$.

Observație. R se numeşte *rază de convergență.*

Teorema 2 (Cauchy-Hadamard). Fie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ o serie de puteri şi R raza de convergență a acesteia. Dacă notăm $\omega = \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|}$, atunci

$$R = \begin{cases} \frac{1}{\omega}, & \omega \ne 0 \\ \infty, & \omega = 0 \cdot \\ 0, & \omega = \infty \end{cases}$$

Observație. Se poate calcula ω şi după formula: $\omega = \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}$.

2.3 Ilustrarea rezultatelor teoretice pe cazul numeric concret al aplicațiilor

1. Să se studieze convergența seriei de puteri: $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n \cdot 5^n} \cdot x^n$, $x \in R$.

Rezolvare:

- Calculăm raza de convergență. Fie $a_n = (-1)^n \frac{1}{n \cdot 5^n}$. Avem că:

$$\omega = \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{\left|(-1)^{n+1} \frac{1}{(n+1) \cdot 5^{n+1}}\right|}{\left|(-1)^n \frac{1}{n \cdot 5^n}\right|} = \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{n}{5(n+1)} = \frac{1}{5}, \text{ deci } R = \frac{1}{\omega} = 5.$$

- Conform teoremei lui Abel, rezultă că:
  1) seria este absolut convergentă pe intervalul $(-5,5)$;
  2) seria este divergentă pe mulțimea $(-\infty, -5) \cup (5, \infty)$;
  3) pentru orice $r \in (0,5)$, seria este uniform convergentă pe $[-r, r]$.

- Studiem natura seriei pentru $R = \pm 5$:

  Pentru $R = 5$, seria de puteri devine: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n \dfrac{1}{n \cdot 5^n} \cdot 5^n$, adică $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n \dfrac{1}{n}$;

şirul $u_n = \dfrac{1}{n}$ este descrescător şi are limita zero; rezultă, conform criteriului lui Leibniz, că seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n \dfrac{1}{n}$ este convergentă.

Pentru $R = -5$, seria de puteri devine: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n \dfrac{1}{n \cdot 5^n} \cdot (-5)^n$, adică $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n}$, care este divergentă (seria armonică).

În concluzie, seria de puteri este convergentă pe mulţimea $(-5,5]$.

2. Să se determine mulţimea de convergenţă a seriei de puteri:

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\dfrac{2n+1}{6n-5}\right)^n \cdot (x-3)^n$, $x \in R$.

Rezolvare:

- Notăm $y = x - 3$.

  Determinăm mai întâi mulţimea de convergenţă a seriei $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\dfrac{2n+1}{6n-5}\right)^n \cdot y^n$.

- Calculăm raza de convergenţă. Fie $a_n = \left(\dfrac{2n+1}{6n-5}\right)^n$. Avem:

$\omega = \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|} = \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{\left|\left(\dfrac{2n+1}{6n-5}\right)^n\right|} = \frac{1}{3}$, deci $R = \dfrac{1}{\omega} = 3$.

- Conform teoremei lui Abel, avem:

1) seria este absolut convergentă pe intervalul $(-3,3)$;
2) seria este divergentă pe mulţimea $(-\infty,-3) \cup (3,\infty)$;
3) pentru orice $r \in (0,3)$, seria este uniform convergentă pe $[-r,r]$.

- Studiem natura seriei pentru $y = \pm 3$:

  Pentru $y = 3$, seria de puteri devine: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\dfrac{2n+1}{6n-5}\right)^n \cdot 3^n$, sau $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\dfrac{6n+3}{6n-5}\right)^n$.

Fie $u_n = \left(\dfrac{6n+3}{6n-5}\right)^n$; avem: $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \lim\limits_{n\to\infty}\left(1 + \dfrac{8}{6n-5}\right)^n = e^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{8n}{6n-5}} = e^{\frac{4}{3}} \neq 0$, deci, conform criteriului suficient de divergenţă, seria este divergentă.

Pentru $y = -3$, seria devine: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\dfrac{2n+1}{6n-5}\right)^n \cdot (-3)^n$, sau $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\dfrac{6n+3}{6n-5}\right)^n$.

Fie $v_n = (-1)^n \left(\dfrac{6n+3}{6n-5}\right)^n$; deoarece nu există $\lim\limits_{n\to\infty} v_n$, rezultă că şirul $(v_n)_{n\geq 1}$ este divergent, deci seria este divergentă.

În concluzie, seria de puteri este convergentă pentru $y \in (-3,3) \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow -3 < y < 3 \Leftrightarrow -3 < x - 3 < 3 \Leftrightarrow 0 < x < 6$. Rezultă că mulţimea de convergenţă a seriei $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\dfrac{2n+1}{6n-5}\right)^n \cdot (x-3)^n$ este $(0,6)$.

Teste de autoevaluare

1.Să se determine mulţimea de convergenţă a seriei de puteri $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3^n+(-4)^n}{n}\cdot(x+2)^n$

Răspunsuri si comentarii la testele de autoevaluare

1. Rezolvare:

- Notăm $y=x+2$. Vom determina mai întâi mulţimea de convergenţă a seriei. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3^n+(-4)^n}{n}y^n$
- Calculăm raza de convergenţă. Fie $a_n=\frac{3^n+(-4)^n}{n}$, $n\geq 1$.

$$\omega=\overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}=\overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{\left|\frac{3^{n+1}+(-4)^{n+1}}{n+1}\right|}{\left|\frac{3^n+(-4)^n}{n}\right|}=\overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{n}{(n+1)}\cdot\left|\frac{3^{n+1}+(-4)^{n+1}}{3^n+(-4)^n}\right|=$$

$$=\overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{n}{(n+1)}\cdot\left|\frac{(-4)^{n+1}\left(\left(-\frac{3}{4}\right)^{n+1}+1\right)}{(-4)^n\left(\left(-\frac{3}{4}\right)^n+1\right)}\right|=4\Rightarrow R=\frac{1}{4}$$

Conform teoremei lui Abel, rezultă că:

1) seria este absolut convergentă pentru $y\in\left(-\frac{1}{4},\frac{1}{4}\right)$;

2) seria este divergentă pentru $y\in\left(-\infty,-\frac{1}{4}\right)\cup\left(\frac{1}{4},\infty\right)$;

3) pentru orice $r\in\left(0,\frac{1}{4}\right)$, seria este uniform convergentă pe intervalul $[-r,r]$.

- Studiem natura seriei pentru $y=\pm\frac{1}{4}$:

Pentru $y=\frac{1}{4}$, seria de puteri devine: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3^n+(-4)^n}{n}\left(\frac{1}{4}\right)^n$, adică $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{n}\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^n+(-1)^n\cdot\frac{1}{n}\right]$. Avem că seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^n$ este convergentă (folosind criteriul raportului) şi seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\cdot\frac{1}{n}$ este convergentă (folosind criteriul lui Leibniz), prin urmare seria este convergentă.

Pentru $y=-\frac{1}{4}$, seria de puteri devine: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3^n+(-4)^n}{n}\left(-\frac{1}{4}\right)^n$, adică $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left[(-1)^n\frac{1}{n}\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^n+\frac{1}{n}\right]$. Notăm $b_n=(-1)^n\frac{1}{n}\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^n$, $n\in N^*$ $c_n=\frac{1}{n}$, $n\in N^*$ şi $d_n=(-1)^n\frac{1}{n}\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^n+\frac{1}{n}, n\in N^*$. Avem că seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ este convergentă (folosind criteriul lui Leibniz). Dacă presupunem că seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty}d_n$ este convergentă, deoarece $c_n=d_n-b_n,(\forall)n\in N^*$, rezultă că şi seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty}c_n$ este convergentă, contradicție. Prin urmare seria $\sum_{n=1}^{\infty} d_n$ este divergentă.

În concluzie, seria $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n + (-4)^n}{n} \cdot y^n$ este convergentă pentru

$$y \in \left(-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right] \Leftrightarrow -\frac{1}{4} < y \le \frac{1}{4} \Leftrightarrow -\frac{1}{4} < x + 2 \le \frac{1}{4} \Leftrightarrow -\frac{9}{4} < x \le -\frac{7}{4}.$$

Am obținut că mulțimea de convergență a seriei este $\left(-\frac{9}{4}, -\frac{7}{4}\right]$.

Bibliografia unității de învățare 1:

1. Gh. Cenuşă şi colectiv, *Matematici aplicate in economie. Teorie si aplicatii.*
Editura CISON, Bucureşti, 2007
2. S. Dedu, F. Şerban, *Matematici aplicate în economie. Culegere de probleme*,
Editura Teocora, Buzau, 2009
3. C.Raischi si colectiv, *Analiza matematica,*
Editura Plus, Bucureşti, *2005*
4.I. Purcaru , *Matematici generale si elemente de optimizare,*
Editura Economică, Bucureşti, 1997.

Lucrarea de verificare nr. 1

1. Să se determine natura si sa se calculeze suma seriei $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2 - 1}$
2. Să se determine natura seriei $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n + 5^n}$
3. Sa se calculeze multimea de convergenta a seriei $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{(2n-1) \cdot 3^n} \cdot x^n, \ x \in R$

UNITATEA DE ÎNVĂȚARE 3

Funcții de mai multe variabile reale

Cuprins

3.1 Obiective

Economiştii, indiferent de domeniul în care lucrează, au nevoie de cunostințe solide de strictă specialitate, dar şi de tehnici specifice matematicii aplicate, cum ar fi noțiunile pe care ni le propunem să le prezentăm în cadrul unității de învățare 3. Informația economică trebuie să fie relevantă, credibilă, inteligibilă - calități, care sunt asigurate numai atunci când economistul care o construieşte, o prelucrează si o valorifică, stăpâneste deopotrivă cunostințe în domeniul respectiv, dar şi temeinice cunoştințe de matematici aplicate în economie.

După studiul acestei unități de învățare, studentul va avea cunostințe despre funcțiile de 2 si respectiv 3 variabile reale şi despre conceptele asociate lor, precum: limitele lor, continuitatea acestora, derivabilitatea parțială a respectivelor funcții si diferențiabilitatea lor; ele reprezintă un alt element important al analizei matematice, necesar şi extrem de util, pentru a putea aborda, înțelege şi dezvolta diverse probleme ale disciplinelor de specialitate din cadrul Facultății de Finanțe, Asigurări, Bănci şi Burse de Valori, căreia ne adresăm.

Prin introducerea unitatii de invatare 3, subordonată analizei matematice, nutrim speranța ca studentul de la anul I, ID, Facultatea de Finanțe, Asigurări, Bănci şi Burse de Valori, să obțină acumulări de noi cunoştințe utile disciplinelor specifice anilor de licență, de la această facultate, în vederea formării lui ca viitor economist, ce urmează să practice profesia de economist în condiții de performanță.

3.2 Definiția limitei si continuității pentru o funcție de două variabile

Definiția 1. Fie $f : A \subset R^m \to R$ o funcție reală de m variabile reale. Spunem că $\lim_{x \to x_0} f(x) = l$ dacă pentru orice şir $(x_n)_{n \in N} \subset A$, $x_n \neq x_0$ şi $\lim_{n \to \infty} x_n = x_0$ avem $\lim_{n \to \infty} f(x_n) = l$.

Definiția 2. Fie $f : A \subset R^2 \to R$ şi $(a,b) \in A$.
Spunem că f *este continuă în punctul* (a,b) dacă pentru orice şir $\{(x_n, y_n)\}_{n \in N} \subset A$ cu proprietatea că $\lim_{n \to \infty} (x_n, y_n) = (a,b)$ rezultă că $\lim_{n \to \infty} f(x_n, y_n) = f(a,b)$.

3.3 Definiția derivatelor parțiale de ordinul I şi II pentru o funcție de doua variabile

Definiția 3. Fie $f : A \subset R^2 \to R$ şi $(a,b) \in A$.
Spunem că funcția f este *derivabilă parțial în raport cu* x *în punctul* $(a,b) \in A$ dacă

$\lim_{x \to a} \dfrac{f(x,b) - f(a,b)}{x - a}$ există şi este finită.

Vom nota această limită cu $f_x^{'}(a,b)$ sau $\dfrac{\partial f(a,b)}{\partial x}$.

Analog, funcția f este *derivabilă parțial în raport cu* y în punctul $(a,b) \in A$ dacă

$\lim_{y \to b} \dfrac{f(a,y) - f(a,b)}{y - b}$ există şi este finită.

Vom nota această limită cu $f_y^{'}(a,b)$ sau $\dfrac{\partial f(a,b)}{\partial y}$.

3.4 Definiția diferențiabilitatii pentru o funcție de mai multe variabile

.

Definiția 4. Fie $f : A \subset R^2 \to R$ o funcție diferențiabilă în punctul (a,b) interior lui A.

- Se numeşte *diferențiala de ordinul întâi a funcției* f *în punctul* (a,b) funcția liniară: $df(x, y;\ a,b) = f_x^{'}(a,b)(x-a) + f_y^{'}(a,b)(y-b) = f_x^{'}(a,b)dx + f_y^{'}(a,b)dy$.
- Se numeşte *diferențiala de ordinul n a funcției* f *în punctul* (a,b) funcția: $d^n f(x,y;a,b) = \left[\dfrac{\partial}{\partial x} dx + \dfrac{\partial}{\partial y} dy \right]^{(n)} f(a,b)$.

Observație. Toate definițiile valabile pentru funcții de două variabile $f : A \subset R^2 \to R$ se pot extinde pentru cazul funcțiilor de n variabile, $f : A \subset R^n \to R$, $n \in N$, $n \geq 3$.

3.5 Extremele locale ale funcțiilor de mai multe variabile reale

Definiția 1. Funcția $f : A \subset R^n \to R$ admite un *maxim local (minim local)* în punctul $a = (a_1, a_2, ..., a_n) \in A$ dacă există o vecinătate V a punctului a astfel încât oricare ar fi $x = (x_1, x_2, ..., x_n) \in V \cap A$ are loc inegalitatea $f(x) \le f(a)$ (respectiv $f(x) \ge f(a)$). În aceste condiții, spunem că punctul a este *punct de extrem local* pentru funcția f. Dacă inegalitățile de mai sus sunt verificate pe tot domeniul de definiție A, spunem că punctul a este *punct de maxim (minim) global* pentru funcția f.

Definiția 2. Fie $f : A \subset R^n \to R$. Punctul $a = (a_1, a_2, ..., a_n) \in \operatorname{int} A$ este *punct staționar* pentru funcția f dacă f este diferențiabilă în a și diferențiala $df(x; a) = 0$.

Observație. Dacă punctul $a = (a_1, a_2, ..., a_n) \in \operatorname{int} A$ este punct staționar, $df(x; a) = 0$ implică $f'_{x_k}(a) = 0,\ \forall k = \overline{1, n}$.

Propoziție. Dacă funcția $f : A \subset R^n \to R$ admite un extrem local în punctul $a = (a_1, a_2, ..., a_n) \in A$ și există f'_{x_k} într-o vecinătate a punctului a, $\forall k = \overline{1, n}$, atunci $f'_{x_k}(a) = 0,\ \forall k = \overline{1, n}$

Teorema 1. Fie $f : A \subset R^2 \to R$ și $(a, b) \in \operatorname{int} A$ un punct staționar pentru f. Presupunem că f admite derivate parțiale de ordinul doi, continue pe o vecinătate V a punctului (a, b).

Considerăm expresia $\Delta(a, b) = \left[f''_{xy}(a, b)\right]^2 - f''_{x^2}(a, b) \cdot f''_{y^2}(a, b)$. Atunci:

1. Dacă $\Delta(a, b) < 0$, atunci (a, b) este punct de extrem local, și anume:
   - punct de minim local, dacă $f''_{x^2}(a, b) > 0$;
   - punct de maxim local, dacă $f''_{x^2}(a, b) < 0$.
2. Dacă $\Delta(a, b) > 0$, atunci (a, b) este punct șa.

Teorema 2. Fie $f : A \subset R^n \to R$. Presupunem că punctul $a \in A$ este punct staționar pentru f și funcția f are derivate parțiale de ordinul doi continue pe o vecinătate V a punctului a. Atunci:

1) dacă $d^2 f(x; a) < 0$, pentru orice $x \in V \cap A$, atunci a este punct de maxim local;
2) dacă $d^2 f(x; a) > 0$, pentru orice $x \in V \cap A$, atunci a este punct de minim local;
3) dacă $d^2 f(x; a)$ este nedefinită, atunci a este punct șa.

Algoritm de determinare a punctelor de extrem local pentru $f : A \subset R^n \to R$

Acest algoritm se aplică pe mulţimea punctelor în care funcţia f este diferenţiabilă şi admite derivate parţiale de ordinul doi continue într-o vecinătate a punctelor respective.

Etapa 1. Determinăm punctele staţionare, care sunt soluţiile sistemului:

$$\begin{cases} f'_{x_1}(x_1, x_2, ..., x_n) = 0 \\ f'_{x_2}(x_1, x_2, ..., x_n) = 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ f'_{x_n}(x_1, x_2, ..., x_n) = 0 \end{cases}$$

Etapa 2. Stabilim care dintre punctele staţionare sunt puncte de extrem local. Acest lucru se poate realiza în mai multe moduri:

Metoda I. Pentru fiecare punct staţionar $P(a_1, a_2, ..., a_n)$ calculăm matricea hessiană:

$$H(a_1, a_2, ..., a_n) = \begin{pmatrix} f''_{x_1^2}(a_1,..,a_n) & f''_{x_1x_2}(a_1,..,a_n) & \dots\dots\dots & f''_{x_1x_n}(a_1,..,a_n) \\ f''_{x_2x_1}(a_1,..,a_n) & f''_{x_2^2}(a_1,..,a_n) & \dots\dots\dots & f''_{x_2x_n}(a_1,..,a_n) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ f''_{x_nx_1}(a_1,..,a_n) & f''_{x_nx_2}(a_1,..,a_n) & \dots\dots\dots & f''_{x_n^2}(a_1,..,a_n) \end{pmatrix}$$

şi minorii acesteia Δ_1, Δ_2,......,Δ_n, unde Δ_i este minorul format din primele i linii şi i coloane ale matricei $H(a,b)$, $i = \overline{1,n}$.

Discuţie.

- Dacă toţi minorii $\Delta_i > 0$, atunci $P(a_1, a_2, ..., a_n)$ punct de minim local.
- Dacă minorii Δ_i alternează ca semn, începând cu minus, atunci $P(a_1, a_2, ..., a_n)$ este punct de maxim local.
- Orice altă combinaţie de semne, cu $\Delta_i \neq 0$, implică $P(a_1, a_2, ..., a_n)$ punct şa.

Metoda II. (aplicabilă numai funcţiilor de două variabile)
Pentru fiecare punct staţionar $P(a,b)$ calculăm expresia:

$$\Delta(a,b) = \left[f''_{xy}(a,b)\right]^2 - f''_{x^2}(a,b) \cdot f''_{y^2}(a,b).$$

1. Dacă $\Delta(a,b) < 0$, atunci (a,b) este punct de extrem local, şi anume:
   - punct de minim local, dacă $f''_{x^2}(a,b) > 0$;
   - punct de maxim local, dacă $f''_{x^2}(a,b) < 0$.
2. Dacă $\Delta(a,b) > 0$, atunci (a,b) este punct şa.

Observația 1. În cazul funcțiilor de două variabile, se observă că $\Delta(a,b) = -\Delta_2$. Prin urmare, dacă aplicând metoda 1 obținem că $\Delta_2 < 0$, atunci $\Delta(a,b) > 0$, deci, indiferent de valoarea minorului Δ_1, rezultă că (a,b) este punct şa.

Metoda III. Se calculează diferențiala de ordinul al doilea a funcției în punctul staționar $a = (a_1, a_2, ..., a_n)$ şi se aplică teorema 2.

Observația 2. Existența unui punct de extrem local poate fi pusă în evidență cu ajutorul metodelor prezentate numai dacă funcția f este diferențiabilă în acel punct şi admite derivate parțiale de ordinul doi continue într-o vecinătate a punctului respectiv.

În caz contrar sau în cazul în care în urma aplicării metodelor de mai sus nu se poate preciza natura punctului, se foloseşte:

Metoda IV. Definiția punctului de extrem local.

3.7 Ilustrarea teoriei pe cazul numeric concret al aplicațiilor

1. Să se determine punctele de extrem local ale funcției:
$f : R^2 \to R,\ f(x,y) = 2x^2 + y^3 - 6xy + 1.$

Rezolvare:

Etapa 1. Determinăm punctele staționare, care sunt soluțiile sistemului: $\begin{cases} f'_x(x,y) = 0 \\ f'_y(x,y) = 0 \end{cases}$.

Avem că: $\begin{matrix} f'_x(x,y) = 4x - 6y \\ f'_y(x,y) = 3y^2 - 6x \end{matrix}$, prin urmare rezultă sistemul:

$$\begin{cases} 4x - 6y = 0 \\ 3y^2 - 6x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 3y = 0 \\ y^2 - 2x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{3y}{2} \\ y^2 - 3y = 0 \end{cases}.$$

Din a doua ecuație obținem: $y_1 = 0,\ y_2 = 3$, de unde, prin înlocuire în prima relație, rezultă $x_1 = 0,\ x_2 = \frac{9}{2}$, soluțiile sistemului sunt:

$$\begin{cases} x_1 = 0 \\ y_1 = 0 \end{cases};\quad \begin{cases} x_2 = \frac{9}{2} \\ y_2 = 3 \end{cases}.$$

Am obținut punctele staționare: $P_1(0,\ 0),\ P_2\left(\frac{9}{2},\ 3\right)$.

Etapa 2. Stabilim care dintre punctele staționare sunt puncte de extrem local.

Scriem matricea hessiană:

$$H(x,y)=\begin{pmatrix} f''_{x^2}(x,y) & f''_{xy}(x,y) \\ f''_{yx}(x,y) & f''_{y^2}(x,y) \end{pmatrix}.$$

Avem: $f''_{x^2}(x,y)=\left[f'_x(x,y)\right]'_x=[4x-6y]'_x=4$;

$f''_{xy}(x,y)=\left[f'_x(x,y)\right]'_y=[4x-6y]'_y=-6=f''_{yx}(x,y)$;

$f''_{y^2}(x,y)=\left[f'_y(x,y)\right]'_y=\left[3y^2-6x\right]'_y=6y$, deci

$H(x,y)=\begin{pmatrix} 4 & -6 \\ -6 & 6y \end{pmatrix}$. Avem:

$$H(0,0)=\begin{pmatrix} 4 & -6 \\ -6 & 0 \end{pmatrix}\Rightarrow \Delta_1=4>0,\quad \Delta_2=\begin{vmatrix} 4 & -6 \\ -6 & 0 \end{vmatrix}=-36<0,$$

prin urmare $P_1(0,\ 0)$ este punct şa.

$$H\left(\tfrac{9}{2},\ 3\right)=\begin{pmatrix} 4 & -6 \\ -6 & 18 \end{pmatrix}\Rightarrow \Delta_1=4>0,\quad \Delta_2=\begin{vmatrix} 4 & -6 \\ -6 & 18 \end{vmatrix}=36>0,$$

prin urmare $P_2\left(\tfrac{9}{2},\ 3\right)$ este punct de minim local.

2. Să se determine punctele de extrem local ale funcției:
$f:R^2\to R,\ f(x,y)=6x^2y+2y^3-45x-51y+7$.

Rezolvare:

Etapa 1. Determinăm punctele staționare, care sunt soluțiile sistemului: $\begin{cases} f'_x(x,y)=0 \\ f'_y(x,y)=0 \end{cases}$.

Avem că:

$\begin{matrix} f'_x(x,y)=12xy-45 \\ f'_y(x,y)=6x^2+6y^2-51 \end{matrix}$, prin urmare obținem sistemul:

$$\begin{cases} 12xy-45=0 \\ 6x^2+6y^2-51=0 \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} xy=\frac{15}{4} \\ x^2+y^2=\frac{17}{2} \end{cases}.$$

Notăm $x+y=S,\ xy=P\Rightarrow\begin{cases} P=\frac{15}{4} \\ S^2-2P=\frac{17}{2} \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} P=\frac{15}{4} \\ S=\pm 4 \end{cases}$

Pentru $S=4,\ P=\frac{15}{4} \Rightarrow t^2-4t+\frac{15}{4}=0 \Rightarrow t_1=\frac{3}{2},\ t_2=\frac{5}{2}$,

deci $\begin{cases} x_1=\frac{3}{2} \\ y_1=\frac{5}{2} \end{cases}$ sau $\begin{cases} x_2=\frac{5}{2} \\ y_2=\frac{3}{2} \end{cases}$.

Pentru $S=-4,\ P=\frac{15}{4} \Rightarrow t^2+4t+\frac{15}{4}=0 \Rightarrow t_1=-\frac{3}{2},\ t_2=-\frac{5}{2}$,

deci $\begin{cases} x_3=-\frac{3}{2} \\ y_3=-\frac{5}{2} \end{cases}$ sau $\begin{cases} x_4=-\frac{5}{2} \\ y_4=-\frac{3}{2} \end{cases}$.

Am obținut punctele staționare: $P_1\left(\frac{3}{2},\frac{5}{2}\right),\ P_2\left(\frac{5}{2},\frac{3}{2}\right), P_3\left(-\frac{3}{2},-\frac{5}{2}\right),\ P_4\left(-\frac{5}{2},-\frac{3}{2}\right)$.

Etapa 2. Stabilim care dintre punctele staționare sunt puncte de extrem local.

Metoda I. Scriem matricea hessiană:

$$H(x,y)=\begin{pmatrix} f''_{x^2}(x,y) & f''_{xy}(x,y) \\ f''_{yx}(x,y) & f''_{y^2}(x,y) \end{pmatrix}.$$

Avem: $f''_{x^2}(x,y)=\left[f'_x(x,y)\right]'_x=12y$; $f''_{xy}(x,y)=\left[f'_x(x,y)\right]'_y=12x=f''_{yx}(x,y)$;

$f''_{y^2}(x,y)=\left[f'_y(x,y)\right]'_y=12y$, deci $H(x,y)=\begin{pmatrix} 12y & 12x \\ 12x & 12y \end{pmatrix}$.

$H\left(\frac{3}{2},\frac{5}{2}\right)=\begin{pmatrix} 30 & 18 \\ 18 & 30 \end{pmatrix} \Rightarrow \Delta_1=30>0,\ \ \Delta_2=\begin{vmatrix} 30 & 18 \\ 18 & 30 \end{vmatrix}=576>0$, prin urmare $P_1\left(\frac{3}{2},\frac{5}{2}\right)$ este punct de minim local.

$H\left(\frac{5}{2},\frac{3}{2}\right)=\begin{pmatrix} 18 & 30 \\ 30 & 18 \end{pmatrix} \Rightarrow \Delta_1=18>0,\ \ \Delta_2=\begin{vmatrix} 18 & 30 \\ 30 & 18 \end{vmatrix}=-576<0$, prin urmare $P_2\left(\frac{5}{2},\frac{3}{2}\right)$ este punct şa.

$H\left(-\frac{3}{2},-\frac{5}{2}\right)=\begin{pmatrix} -30 & -18 \\ -18 & -30 \end{pmatrix} \Rightarrow \Delta_1=-30<0, \Delta_2=\begin{vmatrix} -30 & -18 \\ -18 & -30 \end{vmatrix}=576>0$,

prin urmare $P_3\left(-\frac{3}{2},-\frac{5}{2}\right)$ este punct de maxim local.

$H\left(-\frac{5}{2},-\frac{3}{2}\right)=\begin{pmatrix} -18 & -30 \\ -30 & -18 \end{pmatrix} \Rightarrow \Delta_1=-18<0, \Delta_2=\begin{vmatrix} -18 & -30 \\ -30 & -18 \end{vmatrix}=-576<0$,

prin urmare $P_1\left(\frac{3}{2},\frac{5}{2}\right)$ este punct şa.

Teste de autoevaluare

Să se determine punctele de extrem local ale funcției:
$f:(0,\ \infty)^2 \to R,\ f(x,y) = x^2 + y^2 + 3xy - 8\ln x - 14\ln y + 5$.

Răspunsuri si comentarii la testele de autoevaluare

Etapa 1. Determinăm punctele staționare. Avem că:

$f'_x(x,y) = 2x + 3y - \frac{8}{x}$
$f'_y(x,y) = 2y + 3x - \frac{14}{y}$
. Rezolvăm sistemul:

$$\begin{cases} f'_x(x,y) = 0 \\ f'_y(x,y) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 3y - \frac{8}{x} = 0 \\ 2y + 3x - \frac{14}{y} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2 + 3xy = 8 & (1) \\ 2y^2 + 3xy = 14 & (2) \end{cases}.$$

Am obținut un sistem omogen. Înmulțim prima ecuație cu 7, pe cea de-a doua cu (-4) și adunăm relațiile obținute; rezultă:

$14x^2 + 9xy - 8y^2 = 0$. Împărțim această ecuație prin y^2 $(y^2 \neq 0)$ și notăm $\frac{x}{y} = t$. Obținem:

$14t^2 + 9t - 8 = 0 \Rightarrow t_1 = -\frac{8}{7},\ t_2 = \frac{1}{2}$. Rădăcina negativă nu convine,

deoarece $x > 0$ și $y > 0$, prin urmare avem $t = \frac{x}{y} = \frac{1}{2} \Rightarrow y = 2x$.

Înlocuind $y = 2x$ în (1), rezultă $x = \pm 1$. Cum $x > 0$, rezultă că singura valoare care se acceptă este $x = 1$, de unde obținem $y = 2$.

Am obținut un singur punct staționar: $P(1,\ 2)$.

Etapa 2. Stabilim dacă punctul staționar este punct de extrem local.

Avem: $f''_{x^2}(x,y) = \left[f'_x(x,y)\right]'_x = 2 + \frac{8}{x^2}$; $f''_{xy}(x,y) = \left[f'_x(x,y)\right]'_y = 3 = f''_{yx}(x,y)$;

$f''_{y^2}(x,y) = \left[f'_y(x,y)\right]'_y = 2 + \frac{14}{y^2}$, deci matricea hessiană este:

$$H(x,y) = \begin{pmatrix} f''_{x^2}(x,y) & f''_{xy}(x,y) \\ f''_{yx}(x,y) & f''_{y^2}(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 + \frac{8}{x^2} & 3 \\ 3 & 2 + \frac{14}{y^2} \end{pmatrix}.$$

Avem că $H(1,\ 2) = \begin{pmatrix} 10 & 3 \\ 3 & \frac{11}{2} \end{pmatrix} \Rightarrow \Delta_1 = 10 > 0,\quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 10 & 3 \\ 3 & \frac{11}{2} \end{vmatrix} = 46 > 0$, prin urmare $P(1,\ 2)$ este punct de minim local.

Bibliografia unității de învățare 3

1. Gh. Cenuşă şi colectiv, *Matematici aplicate in economie. Teorie si aplicatii.* Editura CISON,Bucureşti, 2007
2. S. Dedu, F. Şerban, *Matematici aplicate în economie. Culegere de probleme*, Editura Teocora,Buzau, 2009
3. C.Raischi si colectiv, *Analiza matematica,* Editura Plus, Bucureşti, *2005*
4. I. Purcaru , *Matematici generale si elemente de optimizare,* Editura Economică, Bucureşti, 1997.

Lucrarea de verificare nr. 2

1. Să se calculeze derivatele parțiale de ordinul întâi şi doi ale funcției $f: R^2 \to R, \quad f(x,y) = kx^{\alpha} y^{\beta}; \; k, \; \alpha, \; \beta \in R.$
2. Sa se determine punctele de extrem local ale funcției $f: R^2 \to R, f(x,y) = xy\left(x^2 + y^2 - 4\right)$
3. Sa se determine punctele de extrem local ale funcției $f(x,y,z) = x^4 + y^3 + z^2 + 4xz - 3y + 2$

UNITATEA DE ÎNVĂȚARE 4

Calcul integral

Cuprins

4.1 Obiectivele unităţii de învatare

Unitatea de învăţare 4 cuprinde noţiuni si concepte, legate de calculul integral, un alt element deosebit de important al analizei matematice, fără de care nu este posibilă construcţia unei teorii economice de valoare. Menţionăm că sunt de notorietate modelele economice, care utilizează rezultate profunde din teoria calculului integral, şi din acest motiv considerăm că unitatea de învăţare 5 îşi justifică pe deplin tangenţa cu domeniul economic.

După studiul acestei unităţi de învăţare, studentul va avea cunostinţe despre:

- integralele euleriene, care oferă teoriilor economice un aparat matematic consistent;

- tipul de probleme teoretice si practice, care fac obiectul cursului de „Integrale euleriene" si al lucrărilor de verificare ale studenţilor din invatamântul economic din anul I, ID, de la Facultatea de Finanţe, Asigurări, Bănci şi Burse de Valori din Academia de Studii Economice Bucureşti. Conţinutul acestei unitati de învatare incheie incursiunea noastră în domeniul analizei matematice si subliniem că el este conform programei analitice a disciplinei de „Matematici aplicate în economie" de la Academia de Studii Economice Bucuresti, Facultatea de Finanţe, Asigurări, Bănci şi Burse de Valori, anul I, ID.

4.2 Definiții şi proprietăți ale integralelor euleriene

- **Integrala gamma:** $\Gamma(a) = \int_0^\infty x^{a-1} e^{-x} dx;\ a > 0$.

Proprietăți:

1) $\Gamma(1) = 1$.
2) $\Gamma(a) = (a-1)\Gamma(a-1),\ (\forall)a > 1$.
3) $\Gamma(n) = (n-1)!,\ (\forall)n \in N$.
4) $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$.

- **Integrala beta:** $\beta(a,b) = \int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1} dx;\ a > 0, b > 0$

Proprietăți:

1) $\beta(a,b) = \beta(b,a),\ \forall\, a,b > 0$
2) $\beta(a,b) = \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}, \forall\, a,b > 0$.
2) $\beta(a,b) = \int_0^\infty \frac{x^{a-1}}{(1+x)^{a+b}} dx$.
3) Dacă $a + b = 1$, atunci $\beta(a,b) = \frac{\pi}{\sin(a\pi)}$.

4.3Ilustrarea teoriei pe cazul numeric concret al aplicațiilor

Sa se calculeze integralele

1. $I=\int\limits_{0}^{+\infty} x^5 e^{-2x}dx$.

Rezolvare:

Folosim schimbarea de variabilă $2x=t \Rightarrow x=\frac{1}{2}t \Rightarrow dx=\frac{1}{2}dt$.

x	0	∞
t	0	∞

Obținem: $I=\int\limits_{0}^{\infty}\left(\frac{t}{2}\right)^5 e^{-t}\frac{1}{2}dt=\frac{1}{2^6}\int\limits_{0}^{\infty}t^5e^{-t}dt=\frac{1}{2^6}\Gamma(6)=\frac{5!}{2^6}=\frac{15}{8}$.

2. $I=\int\limits_{0}^{\infty}e^{-x^2}dx$ (*integrala Euler-Poisson*).

Rezolvare:

Folosim schimbarea de variabilă: $x^2=t \Rightarrow x=t^{\frac{1}{2}} \Rightarrow dx=\frac{1}{2}t^{-\frac{1}{2}}dt$.

x	0	∞
t	0	∞

$I=\int\limits_{0}^{\infty}e^{-t}\frac{1}{2}t^{-\frac{1}{2}}dt=\frac{1}{2}\int\limits_{0}^{\infty}t^{-\frac{1}{2}}e^{-t}dt=\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

3. $I=\int\limits_{0}^{1}x^8\left(1-x^3\right)dx$.

Rezolvare:

Facem schimbarea de variabilă $x^3=t \Rightarrow x=t^{\frac{1}{3}} \Rightarrow dx=\frac{1}{3}t^{-\frac{2}{3}}dt$.

x	0	1
t	0	1

$I=\frac{1}{3}\int\limits_{0}^{1}t^{\frac{8}{3}}(1-t)t^{-\frac{2}{3}}dt=\frac{1}{3}\int\limits_{0}^{1}t^2(1-t)dt=\frac{1}{3}\beta(3,2)=\frac{1}{3}\cdot\frac{\Gamma(3)\Gamma(2)}{\Gamma(5)}=\frac{1}{12}$

Teste de autoevaluare

Să se calculeze următoarele integrale:

1. $I=\int\limits_{-1}^{+\infty}\sqrt{x+1}\ e^{-x-1}dx$.

2. $I=\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2(1-x)}}$.

Răspunsuri si comentarii la testele de autoevaluare

1. Folosim schimbarea de variabilă $x+1=t \Rightarrow x=t-1 \Rightarrow dx=dt$.
Intervalul de integrare se modifică după cum rezultă din tabelul de mai jos:

x	-1	∞
t	0	∞

Obținem: $I=\int_0^\infty t^{\frac{1}{2}} e^{-t} dt$. Prin identificare cu formula de definiție a integralei gamma, rezultă $a-1=\frac{1}{2} \Rightarrow a=\frac{3}{2}$, prin urmare $I=\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)=\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}\sqrt{\pi}$

2. $I=\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2(1-x)}}=\int_0^1 x^{-\frac{2}{3}}(1-x)^{-\frac{1}{3}} dx$. Prin identificare cu formula de definiție a integralei beta, obținem:

$a-1=-\frac{2}{3} \Rightarrow a=\frac{1}{3}$; $b-1=-\frac{1}{3} \Rightarrow b=\frac{2}{3}$, prin urmare, având în vedere definiția şi proprietatea 3 pentru integrala beta, rezultă: $I=\beta\left(\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right)=\frac{\pi}{\sin\frac{\pi}{3}}=\frac{2\pi}{\sqrt{3}}$.

Bibliografia unitatii de învatare 4

1. Gh. Cenuşă şi colectiv, *Matematici aplicate in economie. Teorie si aplicatii.* Ed. CISON,Bucureşti, 2007
2. S. Dedu, F. Şerban, *Matematici aplicate în economie. Culegere de probleme*, Ed. Teocora,Buzau, 2009
3. C.Raischi si colectiv, *Analiza matematica,* Ed.Plus, Bucureşti, *2005*
4.I. Purcaru , *Matematici generale si elemente de optimizare,* Editura Economică, Bucureşti, 1997.

Lucrarea de verificare nr. 3

Să se calculeze integralele

1. $\int_0^1 \sqrt{x-x^2}\,dx$

2. $\int_0^\infty x^6 e^{-3x} dx$

UNITATEA DE ÎNVĂȚARE 5

Formule probabilistice în care apar operatii cu evenimente

Cuprins

5.1 Obiectivele unității de învățare 5

Teoria probabilitatilor debutează cu unitatea de învaățre 5, prin care introducem noțiunile de experienta si eveniment, prezentăm operațiile cu evenimente, formulele de calcul practic pentru probabilitati si schemele probabilistice clasice, toate aceste elemente fund esențiale în elaborarea modelelor economice temeinice si fundamentale din domenii precum: modelarea matematică a unor procese sau fenomene economice dintre cele mai diverse, gestiunea financiară, asigurări de bunuri si persoane, ingineria financiară.

După studiul acestei unitati de învatare, studentul va avea cunostințe despre:

-noțiunile elementare din teoria probabilitatilor, care oferă teoriilor economice un aparat matematic consistent;

-tipul de probleme teoretice si practice, care fac obiectul cursului de „Formule probabilistice în care apar operații cu evenimente" si al lucrărilor de verificare ale studenților din invatamântul economic din anul I, ID, de la Facultatea de Finante, Banci si Burse de Valori din Academia de Studii Economice Bucuresti.

5.2 Evenimente, operatii cu evenimente

Definiția 1. Se numeşte *eveniment* orice rezultat al unei experiențe.

Se numeşte *eveniment sigur* (notat Ω) evenimentul care se realizează cu certitudine într-o experiență.

Se numeşte *eveniment imposibil* (notat $\varnothing$) evenimentul care nu se realizează niciodată într-o experiență.

Definiția 2. Considerăm două evenimente A, B. Definim:

$A \cup B$ (*"A sau B"*) evenimentul ce constă în realizarea a cel puțin unuia dintre evenimentele A, B.

$A \cap B$ (*"A şi B"*) evenimentul ce constă în realizarea simultană a evenimentelor A, B.

$\overline{A}$ (*"non A"*) evenimentul ce constă în nerealizarea evenimentului A.

$A \setminus B$ evenimentul ce constă în realizarea evenimentului A şi nerealizarea evenimentului B.

Spunem că $A \subset B$ (*"A implică B"*) dacă realizarea lui A are ca efect realizarea lui B.

Definiția 3. Un eveniment A este *eveniment elementar* dacă din $B \subset A$ rezultă $B = \varnothing$ sau $B = A$.

Observația 1. Dacă asociem evenimentului sigur ataşat unei experiențe o mulțime Ω, atunci se poate realiza o corespondență între mulțimea evenimentelor ataşate acelei experiențe şi mulțimea părților lui Ω şi o corespondență între operațiile cu evenimente şi operațiile cu mulțimi..

Observația 2. Dacă Ω este o mulțime cel mult numărabilă, atunci elementele acesteia sunt *evenimente elementare*.

Definiția 4. Două evenimente A, B sunt *incompatibile* dacă nu se pot realiza simultan: $A \cap B = \varnothing$.

În caz contrar, ele sunt evenimente *compatibile*.

Fie Ω evenimentul sigur ataşat unei experiențe şi $P(\Omega)$ mulțimea părților lui Ω.

Definiția 5. O familie nevidă $K \subset P(\Omega)$ se numeşte *corp de părți* dacă verifică axiomele: *i)* $\forall A \in K \Rightarrow \overline{A} \in K$;

ii) $\forall A, B \in K \Rightarrow A \cup B \in K$.

Observație. Dacă înlocuim condiția *ii)* prin

ii)' $\forall (A_n)_{n \in N} \subset K \Rightarrow \bigcup\limits_{n \in N} A_n \in K$, se obține noțiunea de *corp borelian*.

Definiția 6. Se numeşte *câmp (câmp borelian) de evenimente* evenimentul sigur Ω

înzestrat cu un corp (corp borelian) K de evenimente.

Vom nota acest câmp de evenimente (Ω, K)

5.3 Formule de calcul practic pentru probabilitati

Definiția 1. *(definiția clasică a probabilității)* Se numeşte p*robabilitate* a evenimentului A şi se notează $P(A)$ raportul dintre numărul de rezultate favorabile producerii evenimentului A (n_{fav}) şi numărul total de rezultate ale experimentului, considerate egal posibile (n_{pos}): $P(A)=\frac{n_{fav}}{n_{pos}}$.

Definiția 2. *(definiția axiomatică a probabilității)* Considerăm un câmp de evenimente (Ω, K). Se numeşte *probabilitate* pe câmpul de evenimente (Ω, K) o funcție de mulțime $P: K \rightarrow R_{+}$, care verifică axiomele:

1) $\forall A \in K \Rightarrow P(A) \geq 0$;
2) $P(\Omega)=1$;
3) $\forall A, B \in K,\ A \cap B=\varnothing \Rightarrow P(A \cup B)=P(A)+P(B)$.

Definiția 3. Un câmp de evenimente (Ω, K) înzestrat cu o probabilitate P se numeşte *câmp de probabilitate* şi se notează (Ω, K, P).

Propoziția 1. *(Proprietăți ale funcției probabilitate)*

1) $P(\bar{A})=1-P(A),\ \forall\ A \in K$.
2) $P(B \setminus A)=P(B)-P(A \cap B),\ \forall\ A, B \in K$.
3) $P(\varnothing)=0$.
4) $0 \leq P(A) \leq 1,\ \forall\ A \in K$.
5) $P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_{i}\right)=\sum_{i=1}^{n} P(A_{i})-\sum_{1 \leq i<j \leq n} P(A_{i} \cap A_{j})+\sum_{1 \leq i<j<k \leq n} P(A_{i} \cap A_{j} \cap A_{k})-\ldots . .+(-1)^{n-1} P\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_{i}\right)$

   (*formula lui Poincaré*).

Observația 1. Dacă evenimentele $A_1, A_2, \ldots, A_n$ sunt incompatibile două câte două, atunci formula 5) devine: 5') $P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_{i}\right)=\sum_{i=1}^{n} P(A_{i})$.

Observația 2. În cazul $n=2$, formula lui Poincaré devine:

$$P(A \cup B)=\begin{cases}P(A)+P(B), & A \cap B=\varnothing\ (A, B \text{ incompatibile}) \\ P(A)+P(B)-P(A \cap B), & A \cap B \neq \varnothing\ (A, B \text{ compatibile})\end{cases}$$

6) $P\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_{i}\right) \geq \sum_{i=1}^{n} P(A_{i})-(n-1)$ (*inegalitatea lui Boole*).

Definiția 4. Fie (Ω, K, P) un cămp de probabilitate şi $A \in K$, *a.î.* $P(A)>0$. Se numeşte *probabilitate condiționată* de evenimentul A a evenimentului B expresia:
$P(B / A)=\frac{P(A \cap B)}{P(B)},\ P(B)>0$.

Definiția 5. Spunem că evenimentele A şi B sunt *independente* dacă

$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$.

Definiția 6. Spunem că evenimentele $A_1, A_2, ..., A_n$ sunt *independente în totalitate* dacă
$P(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap .... \cap A_{i_k}) = P(A_{i_1}) \cdot P(A_{i_2}) \cdot .... \cdot P(A_{i_k})$,
$\forall\, k = \overline{1, n},\ \forall\ 1 \le i_1 < i_2 < ... < i_k \le n$.

Propoziția 2. Fie $A_1, A_2, ..., A_n$ o familie finită de evenimente astfel încât $P\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right) \neq 0$;
atunci $P\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right) = P(A_1) \cdot P(A_2 / A_1) \cdot P(A_3 / A_1 \cap A_2) \cdot .... \cdot P(A_n / A_1 \cap A_2 \cap ... \cap A_{n-1})$.

Observație. Dacă $A_1, A_2, ..., A_n$ este o familie finită de evenimente independente în totalitate, atunci: $P\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right) = P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot P(A_3) \cdot .... \cdot P(A_n)$.

Observație. $P(A \cap B) = \begin{cases} P(A) \cdot P(B), & \textit{pentru } A,\ B \textit{ evenimente independente} \\ P(A) \cdot P(B / A), & \textit{pentru } A,\ B \textit{ evenimente dependente} \end{cases}$.

Propoziția 3. (Formula probabilității totale) Fie $(A_1, A_2, ..., A_n)$ un sistem complet de evenimente (adică $A_i \cap A_j = \varnothing, \forall\, i \neq j;\ i, j = \overline{1, n}$ și $\bigcup_{i=1}^{n} A_i = \Omega$) și $X \in K$, cu $P(X) \neq 0$. Atunci $P(X) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) \cdot P(X / A_i)$.

Propoziția 4. (Formula lui Bayes) Fie $(A_1, A_2, ..., A_n)$ un sistem complet de evenimente și $X \in K$, cu $P(X) \neq 0$. Atunci $P(A_i / X) = \dfrac{P(A_i) \cdot P(X / A_i)}{\sum_{i=1}^{n} P(A_i) \cdot P(X / A_i)}$ sau

$$P(A_i / X) = \frac{P(A_i) \cdot P(X / A_i)}{P(X)}.$$

5.3 Scheme probabilistice clasice

I. Schema lui Poisson

Se consideră n urne, fiecare urnă U_i, $i = \overline{1,n}$, conținând bile albe şi bile negre. Se cunosc probabilitățile evenimentelor ca, făcând la întâmplare o extragere din urna U_i, $i = \overline{1,n}$, să obținem o bilă albă, respectiv o bilă neagră, probabilități notate p_i, respectiv q_i ($p_i + q_i = 1$).

Se extrage câte o bilă din fiecare urnă.

Probabilitatea ca, din cele *n* bile extrase, *k* să fie albe şi $n-k$ să fie negre, notată $P(n:k,n-k)$, este: $P(n:k,n-k) =$ coeficientul lui t^k din polinomul $Q(t)$, unde $Q(t) = (p_1t+q_1)(p_2t+q_2)......(p_nt+q_n)$.

II. Schema bilei revenite cu două stări (schema lui Bernoulli sau schema binomială)

Se consideră o urnă care conține bile albe şi bile negre. Se cunoaşte probabilitatea $p \in (0,1)$ ca extrăgând la întâmplare o bilă din urnă, aceasta să fie albă ($q = 1-p$ este probabilitatea ca la o extragere la întâmplare din urnă să se obțină o bilă neagră).

Se fac *n* extrageri succesive din urnă, cu revenire.

Probabilitatea ca din cele *n* bile extrase *k* să fie albe şi $n-k$ să fie negre, notată $P(n:k,n-k)$, este: $P(n:k,n-k) = C_n^k\, p^k q^{n-k}$.

Generalizare*: Schema bilei revenite cu "m" stări (schema multinomială)*

Se consideră o urnă care conține bile de *"m"* culori. Se cunosc probabilitatățile evenimentelor ca, extrăgând la întâmplare o bilă din urnă, aceasta să fie de culoarea *"i"*, $i = \overline{1,m}$, probabilități notate $p_1, p_2, ..., p_m$, cu $p_i \in (0,1)$, $\sum_{i=1}^{m} p_i = 1$.

Se fac *n* extrageri succesive din urnă, cu revenire.

Probabilitatea $P(n: n_1, n_2, ..., n_m)$ ca din cele *n* bile extrase n_1 să fie de culoarea *"1"*, n_2 să fie de culoarea *"2"*, ……*"n_m"* de culoarea *"m"*, este:

$$P(n: n_1, n_2, ..., n_m) = \frac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdot .... \cdot n_m!} p_1^{n_1} \cdot p_2^{n_2} \cdot .... \cdot p_m^{n_m}.$$

Observație. Schema bilei revenite poate modela o experiență cu două rezultate posibile: evenimentele A şi $\overline{A}$, având probabilitățile p şi q de a se realiza la orice repetare a experienței, cu $p, q > 0$, $p + q = 1$.

III. Schema bilei nerevenite cu două stări (schema hipergeometrică)

Se consideră o urnă care conține N bile, dintre care N_1 bile albe şi N_2 bile negre. Se fac *n* extrageri succesive din urnă, fără revenire.

Probabilitatea ca din cele *n* bile extrase *k* să fie albe şi $n-k$ să fie negre, notată $P(n:k,n-k)$, este:

$$P(n:k,n-k)=\frac{C_{N_1}^{k}\cdot C_{N_2}^{n-k}}{C_N^n}.$$

Generalizare*: Schema bilei nerevenite cu "m" stări*

Se consideră o urnă ce conține N bile de $"m"$ culori, dintre care N_1 bile de culoarea $"1"$, N_2 bile de culoarea $"2"$,.., N_m bile de culoarea $"m"$.

Se fac *n* extrageri succesive din urnă, fără revenire.

Probabilitatea $P(n:n_1,n_2,....,n_m)$ ca din cele *n* bile extrase n_1 să fie de culoarea $"1"$, n_2 de culoarea $"2"$,……$"n_m"$ de culoarea $"m"$, este:

$$P(n:n_1,n_2,....,n_m)=\frac{C_{N_1}^{n_1}\cdot C_{N_2}^{n_2}\cdot.........\cdot C_{N_m}^{n_m}}{C_N^n}.$$

5.4 Ilustrarea teoriei pe cazul numeric concret al aplicațiilor

1. Într-o urnă sunt 10 bile albe şi 15 negre. Se extrag consecutiv 2 bile. Să se calculeze probabilitatea de a obține bile de culori diferite în ipotezele:

a) prima extragere este cu revenire;

b) prima extragere este fără revenire.

Rezolvare:

Notăm A_1 - evenimentul ca la prima extragere să obținem o bilă albă;

A_2 - evenimentul ca la a doua extragere să obținem o bilă albă;

N_1 - evenimentul ca la prima extragere să obținem o bilă neagră;

N_2 - evenimentul ca la a doua extragere să obținem o bilă neagră.

Fie X evenimentul ca în cele două extrageri să obținem bile de culori diferite. Deoarece evenimentele $A_1\cap N_2$ şi $N_1\cap A_2$ sunt incompatibile, rezultă că

$$P(X)=P\big((A_1\cap N_2)\cup(N_1\cap A_2)\big)=P(A_1\cap N_2)+P(N_1\cap A_2).$$

a) Dacă extragerile sunt cu revenire, atunci evenimentele A_1 şi N_2, respectiv N_1 şi A_2 sunt independente, prin urmare:

$$P(X)=P(A_1)\cdot P(N_2)+P(A_2)\cdot P(N_1)=\frac{10}{25}\cdot\frac{15}{25}+\frac{10}{25}\cdot\frac{15}{25}=0{,}48.$$

b) Dacă extragerile sunt fără revenire, atunci evenimentele A_1 şi N_2, respectiv N_1 şi A_2 sunt dependente, deci $P(X) = P(A_1) \cdot P(N_2 / A_1) + P(N_1) \cdot P(A_2 / N_1)$.

$P(N_2 / A_1)$ reprezintă probabilitatea de a obține o bilă neagră la a doua extragere, știind că la prima extragere s-a obținut o bilă albă, deci

$$P(N_2 / A_1) = \frac{nr\ de\ bile\ negre}{nr\ de\ bile\ ramase\ in\ urna} = \frac{15}{24}.$$

$P(A_2 / N_1)$ reprezintă probabilitatea de a obține o bilă albă la a doua extragere, știind că la prima extragere s-a obținut o bilă neagră, deci

$$P(A_2 / N_1) = \frac{nr.\ de\ bile\ \text{albe}}{nr\ de\ bile\ ramase\ in\ urna} = \frac{15}{24}.$$

Obținem că $P(X) = \frac{10}{25} \cdot \frac{15}{24} + \frac{15}{25} \cdot \frac{10}{24} = 0{,}5$.

2. Un magazin primeşte într-o zi 10 produse de acelaşi tip, dintre care 5 provin de la furnizorul F_1, 3 provin de la furnizorul F_2 şi restul de la furnizorul F_3. Care este probabilitatea ca din 4 produse vândute:

a) două să provină de la F_2 şi câte unul de la ceilalți furnizori?

b) toate să provină de la acelaşi furnizor?

c) unul singur să provină de la F_3?

Rezolvare:

a) Problema poate fi modelată cu ajutorul unei urne conținând bile de trei culori, din care se fac extrageri fără revenire.

$$10 \text{ produse} \begin{cases} 5\ F_1 \\ 3\ F_2 \\ 2\ F_3 \end{cases} \xrightarrow[\text{fără revenire}]{\text{se extrag}} 4 \begin{cases} 1\ F_1 \\ 2\ F_2 \\ 1\ F_3 \end{cases}$$

Aplicând schema urnei cu bila nerevenită, obținem:

$$P(4:1,2,1) = \frac{C_5^1 \cdot C_3^2 \cdot C_2^1}{C_{10}^4} = \frac{1}{7} = 0{,}142857 \cdot$$

b) Fie B evenimentul ca toate produsele să provină de la acelaşi furnizor; acesta se realizează numai atunci când toate produsele provin de la F_1, prin urmare

$$P(B) = P(4:4,0,0) = \frac{C_5^4 \cdot C_3^0 \cdot C_2^0}{C_{10}^4} = \frac{1}{42} = 0{,}0238.$$

c) Fie C evenimentul ca c) un singur produs să provină de la F_3.

Se observă că, aplicând schema urnei cu bile de 3 culori, numărul situațiilor în care se realizează evenimentul C este destul de mare.

Problema poate fi modelată mai uşor cu ajutorul unei urne conținând bile de două culori: bilele albe reprezintă produsele ce provin de la F_1 sau F_2, iar bilele negre sunt produsele care provin de la F_3. Obținem: $P(C) = P(4:3,1) = \frac{C_8^3 \cdot C_2^1}{C_{10}^4} = \frac{8}{15} = 0{,}53333 \cdot$

Teste de autoevaluare

1. Doi studenți susțin simultan un examen. Probabilitatea ca primul student să promoveze este 0,8, iar probabilitatea ca al doilea să promoveze este 0,7. Să se calculeze probabilitatea ca:

a) ambii studenți să promoveze examenul;

b) exact un student să promoveze;

c) cel puțin un student să promoveze;

d) numai primul student să promoveze.

2. Dintre cele 30 de subiecte recomandate pentru examen de către profesorul de curs, un student a pregătit 20 de subiecte, pe care le poate prezenta perfect . La examen fiecare subiect este scris pe câte un bilet, iar studentul trebuie să extragă cinci bilete la întâmplare şi să prezinte cele cinci subiecte aflate pe bilete. Ştiind că pentru fiecare subiect la care răspunde corect va primi două puncte şi că nu se acordă nici un punct pentru rezolvări parțiale, să se determine probabilitatea ca:

a) studentul să primească nota 10;

b) studentul să primească nota 6;

c) studentul să nu promoveze examenul.

Răspunsuri si comentarii la testele de autoevaluare

1. Problema poate fi modelată cu ajutorul unei urne conținând bile de două culori, din care se fac extrageri fără revenire.

a) Se cere probabilitatea ca din cele 5 subiecte extrase, 5 să fie rezolvate perfect.

30 subiecte: 20 pot fi rezolvate perfect; 10 nu pot fi rezolvate perfect $\xrightarrow[\text{fără revenire}]{\text{se extrag}}$ 5: 5 pot fi rezolvate perfect; 0 nu pot fi rezolvate perfect

$$P(5:5,0)=\frac{C_{20}^{5}\cdot C_{10}^{0}}{C_{30}^{5}}=0{,}027198.$$

b) Se cere probabilitatea ca din cele 5 subiecte extrase, exact 3 să fie rezolvate perfect:

$$P(5:3,2)=\frac{C_{20}^{3}\cdot C_{10}^{2}}{C_{30}^{5}}=0{,}35998.$$

c) Fie C evenimentul ca studentul să nu promoveze examenul, adică să rezolve perfect 0, 1 sau 2 subiecte:

$$P(C)=\sum_{k=0}^{2}P(5:k,5-k)=\frac{C_{20}^{0}\cdot C_{10}^{5}}{C_{30}^{5}}+\frac{C_{20}^{1}\cdot C_{10}^{4}}{C_{30}^{5}}+\frac{C_{20}^{2}\cdot C_{10}^{3}}{C_{30}^{5}}=0{,}27283\cdot$$

2. Notăm cu A evenimentul ca primul student să promoveze examenul şi cu B evenimentul ca al doilea student să promoveze.

$a)$ Cum cele două evenimente sunt independente, rezultă că probabilitatea ca ambii studenți să promoveze examenul este: $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) = 0{,}8 \cdot 0{,}7 = 0{,}56$.

$b)$ Probabilitatea ca exact un student să promoveze examenul este:
$P\left((A \cap \overline{B}) \cup (\overline{A} \cap B)\right) = P(A \cap \overline{B}) + P(\overline{A} \cap B) = P(A) \cdot P(\overline{B}) + P(\overline{A}) \cdot P(B) =$
$= 0{,}8 \cdot 0{,}3 + 0{,}2 \cdot 0{,}7 = 0{,}38$.

$c)$ Probabilitatea ca cel puțin un student să promoveze se scrie:
$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A) \cdot P(B) =$
$0{,}8 + 0{,}7 - 0{,}8 \cdot 0{,}7 = 0{,}94$.

$d)$ Probabilitatea ca numai primul student să promoveze se poate calcula astfel:
$P\left(A \cap \overline{B}\right) = P(A) \cdot P\left(\overline{B}\right) = 0{,}8 \cdot 0{,}3 = 0{,}24$, având în vedere independența celor două evenimente, sau
$P\left(A \cap \overline{B}\right) = P(A \setminus B) = P(A) - P(A \cap B) = 0{,}8 - 0{,}56 = 0{,}24$

Bibliografia unitatii de învatare 5

1. Gh. Cenuşă şi colectiv, *Matematici aplicate in economie. Teorie si aplicatii.* Editura CISON, Bucureşti, 2007
2. S. Dedu, F. Şerban, *Matematici aplicate în economie. Culegere de probleme*, Editura Teocora, Buzau, 2009
3. I. Purcaru , *Matematici generale si elemente de optimizare,* Editura Economică, Bucureşti, 1997.

Lucrarea de verificare nr. 4

1. Într-o urnă sunt 10 bile albe şi 15 negre. Se extrag consecutiv 2 bile. Să se calculeze probabilitatea de a obține bile de culori diferite în ipotezele:

$a)$ prima extragere este cu revenire;

$b)$ prima extragere este fără revenire.

2. Trei bănci acordă credite pentru finanțarea studiilor cu probabilitățile 0,8; 0,75, respectiv 0,82, independent una de alta. Un student se adresează tuturor băncilor. Cu ce probabilitate el va primi:

$a)$ trei răspunsuri favorabile;

$b)$ exact două răspunsuri favorabile;

$c)$ exact două răspunsuri nefavorabile;

$d)$ nici un răspuns favorabil;

$e)$ cel mult două răspunsuri favorabile .

UNITATEA DE ÎNVĂȚARE 6

Variabile aleatoare

Cuprins

6.1 Obiective

Unitatea de învățare 6 continuă incursiunea în teoria probabilitatilor, prezentând variabilele aleatoare. Împreună cu noțiunile importante asociate lor, precum caracteristicile numerice corespunzătoare acestora, ce sunt de un real folos pentru practica economică, pentru studiu şi cercetare, pentru realizarea performanţei în viitoarea muncă de economist si eficientizarea activității l la nivel micro si macroeconomic.

După studiul acestei unități de învățare, studentul va avea cunostințe despre:

- noțiunile de variabile aleatoare existente şi conceptele de bază din teoria probabilitatilor corelate cu ele, toate acestea oferind economiştilor, indiferent de domeniul în care vor lucra, cunoştințe solide de strictă specialitate, dar **s**i tehnici specifice matematicii aplicate;

- tipul de probleme teoretice şi practice, care fac obiectul cursului de „Variabile aleatoare ” si al lucrărilor de verificare ale studenților din invatamântul economic din anul I, ID, de la Facultatea de Finanțe, Asigurări, Bănci şi Burse de Valori din Academia de Studii Economice Bucureşti.

6.2 Variabile aleatoare unidimensionale

Definiția 1. Fie (Ω, K, P) un câmp de probabilitate.
O aplicație $X:\Omega \to R$ se numeşte *variabilă aleatoare* dacă pentru orice $x \in R$ avem: $\{\omega \mid X(\omega) < x\} \in K$.

Definiția 2. Spunem că variabila aleatoare $X:\Omega \to R$ este:

$a)$ *discretă*, dacă mulțimea valorilor variabilei aleatoare (adică $X(\Omega)$) este finită sau numărabilă;

$b)$ *continuă*, dacă mulțimea valorilor variabilei aleatoare este un interval sau o reuniune finită de intervale din R.

Repartiția unei variabile aleatoare discrete X se reprezintă sub forma unei matrice având două linii: prima linie conține valorile pe care le ia variabila aleatoare, iar a doua linie conține probabilitățile ca variabila aleatoare să ia aceste valori:

$$X:\begin{pmatrix} x_i \\ p_i \end{pmatrix}_{i\in I}, \quad p_i = P(X = x_i),\ i \in I,\ \sum_{i\in I} p_i = 1,$$

unde I este o mulțime finită sau numărabilă.

Definiția 3. Se numeşte *funcția de repartiție* a variabilei aleatoare X aplicația $F:R \to [0,1],\ F(x) = P(X < x) = P(\{\omega \in \Omega / X(\omega) < x\})$.

Propoziția 1. Dacă $F:R \to [0,1]$ este funcția de repartiție a unei variabilei aleatoare $X:\Omega \to R$, atunci:

$a)$ $\lim\limits_{x\to-\infty} F(x) = 0$, $\lim\limits_{x\to\infty} F(x) = 1$;

$b)$ F este nedescrescătoare adică $\forall x_1, x_2 \in R,\ x_1 < x_2 \Rightarrow F(x_1) \le F(x_2)$;

$c)$ F este continuă la stânga, adică $\forall x \in R \Rightarrow F(x-0) = F(x)$.

Propoziția 2. Dacă funcția $F:R \to R$ satisface condițiile $a)$, $b)$, $c)$ din propoziția precedentă, atunci există un un câmp de probabilitate (Ω, K, P) şi o variabilă aleatoare $X:\Omega \to R$ a cărei funcție de repartiție este F.

Definiția 4. Fie $X:\Omega \to R$ o variabilă aleatoare continuă şi $I = X(\Omega)$. Dacă funcția de repartiție F a variabilei aleatoare X este derivabilă, cu derivata continuă, pe I, atunci funcția $f(x) = \begin{cases} F'(x), & x \in I \\ 0, & x \notin I \end{cases}$ se numeşte *densitatea de repartiție* (*densitatea de probabilitate*) a variabilei aleatoare X.

Propoziția 3. Densitatea de repartiție $f:R \to R$ a unei variabile aleatoare continue verifică proprietățile: $a)$ $f(x) \ge 0,\ \forall x \in R$; $b)$ $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$.

Propoziția 4. Dacă funcția $f:R \to R$ satisface condițiile $a)$, $b)$ din propoziția precedentă, atunci există un un câmp de probabilitate (Ω, K, P) şi o variabilă aleatoare $X:\Omega \to R$ a cărei densitate de probabilitate este f.

Observații. Fie $X:\Omega \to R$ o variabilă aleatoare continuă, având densitatea de repartiție

f şi funcţia de repartiţie F. Atunci:

1) Deoarece F este o primitivă pe R a funcţiei f, rezultă $F(x)=\int\limits_{-\infty}^{x} f(t)dt,\ \forall x\in R$.

2) $P(X<a)=P(X\le a)=F(a)=\int\limits_{-\infty}^{a} f(x)dx$;

$P(X>b)=P(X\ge b)=1-F(b)=\int\limits_{b}^{\infty} f(x)dx$;

$P(a\le X<b)=P(a<X<b)=P(a\le X\le b)=P(a<X\le b)=F(b)-F(a)=\int\limits_{a}^{b} f(x)dx$

Definiţia 5. Variabilele aleatoare $X_i,\ i=\overline{1,n},\ n\ge 2$ sunt *independente* dacă evenimentele $A_i=\{\omega \mid X_i(\omega)<x_i\}$ sunt independente, $\forall x_i\in R,\ i=\overline{1,n}$.

Observaţie. Fie $X:\begin{pmatrix} x_i \\ p_i \end{pmatrix}_{i\in I}$, $Y:\begin{pmatrix} y_j \\ q_j \end{pmatrix}_{j\in J}$ variabile aleatoare discrete. Atunci X, Y independente dacă $P(X=x_i, Y=y_j)=P(X=x_i)\cdot P(Y=y_j),\ \forall i\in I,\ j\in J$

Propoziţia 5. Dacă $X:\Omega\to R$, $Y:\Omega\to R$ sunt variabile aleatoare şi $c\in R,\ a\in R,\ a>0$, $k\in N^*$, atunci $c\cdot X$, $X+c$, $|X|$, X^k, $\frac{1}{X}$ (dacă X nu ia valoarea 0), a^X, $X+Y$, $X\cdot Y$ sunt variabile aleatoare.

Observaţie. Dacă $X:\begin{pmatrix} x_i \\ p_i \end{pmatrix}_{i\in I}$ şi $Y:\begin{pmatrix} y_j \\ q_j \end{pmatrix}_{j\in J}$ sunt variabile aleatoare discrete, atunci

repartiţiile operaţiilor cu variabile aleatoare definite mai sus sunt: $c\cdot X:\begin{pmatrix} cx_i \\ p_i \end{pmatrix}_{i\in I}$,

$X+c:\begin{pmatrix} x_i+c \\ p_i \end{pmatrix}_{i\in I}$, $|X|:\begin{pmatrix} |x_i| \\ p_i \end{pmatrix}_{i\in I}$, $X^k:\begin{pmatrix} x_i^k \\ p_i \end{pmatrix}_{i\in I}$, $\frac{1}{X}:\begin{pmatrix} \frac{1}{x_i} \\ p_i \end{pmatrix}_{i\in I}$, $x_i\ne 0,\ \forall i=\overline{1,n}$, $a^X:\begin{pmatrix} a^{x_i} \\ p_i \end{pmatrix}_{i\in I}$,

$X+Y:\begin{pmatrix} x_i+y_j \\ p_{ij} \end{pmatrix}_{\substack{i\in I\\ j\in J}}$, $X\cdot Y:\begin{pmatrix} x_i y_j \\ p_{ij} \end{pmatrix}_{\substack{i\in I\\ j\in J}}$, unde $p_{ij}=P(X=x_i, Y=y_j),\ \forall\, i\in I, j\in J$.

Definiţia 6. Se numeşte *media (valoarea medie)* variabilei aleatoare X numărul (dacă există):

$M(X)=\sum\limits_{i\in I} x_i p_i$, dacă X este o variabilă aleatoare discretă;

$M(X)=\int\limits_{-\infty}^{\infty} x\cdot f(x)dx$, dacă X este o variabilă aleatoare continuă.

Propoziţia 6. Dacă $X:\Omega\to R$, $Y:\Omega\to R$ sunt variabile aleatoare şi $a\in R$, rezultă:

a) $M(a)=a$;

b) $M(aX)=aM(X)$;

c) $M(X+Y)=M(X)+M(Y)$;

$d)$ dacă variabilele aleatoare X, Y sunt independente, atunci $M(X \cdot Y) = M(X) \cdot M(Y)$.

Definiția 7. Se numeşte *dispersia* variabilei aleatoare X numărul (dacă există): $D^2(X) = M\left[(X - M(X))^2\right]$.

Propoziția 7. Dacă $X : \Omega \to R$, $Y : \Omega \to R$ sunt variabile aleatoare şi $a \in R$, rezultă:

$a)$ $D^2(X) \geq 0$;

$b)$ $D^2(X) = M(X^2) - M^2(X)$;

$c)$ $D^2(a) = 0$;

$d)$ $D^2(aX) = a^2 D^2(X)$;

$e)$ dacă X, Y sunt independente, atunci $D^2(X+Y) = D^2(X) + D^2(Y)$.

Definiția 8. Se numeşte *abaterea medie pătratică (abaterea standard)* a variabilei aleatoare X numărul (dacă există): $\sigma(X) = D(X) = \sqrt{D^2(X)}$.

Definiția 9. Se numeşte *moment inițial de ordin r* al variabilei aleatoare X numărul (dacă există): $m_r = M_r(X) = M(X^r)$.

Observație. $m_r = \sum\limits_{i \in I} x_i^r p_i$, dacă X este o variabilă aleatoare discretă;

$m_r = \int\limits_{-\infty}^{\infty} x^r \cdot f(x)dx$, dacă X este o variabilă aleatoare continuă.

Definiția 10. Se numeşte *moment centrat de ordin r* al variabilei aleatoare X numărul (dacă există): $\mu_r = M_r(X - M(X)) = M\left[(X - M(X))^r\right]$.

Observație. $m_r = \sum\limits_{i \in I} (x_i - M(X))^r p_i$, dacă X este o variabilă aleatoare discretă;

$m_r = \int\limits_{-\infty}^{\infty} (x - M(X))^r f(x)dx$, dacă X este o variabilă aleatoare continuă.

Definiția 15. Fie (Ω, K, P) un câmp de probabilitate şi $X : \Omega \to R$ o variabilă aleatoare. Se numeşte *funcția caracteristică* a variabilei aleatoare X aplicația $\varphi : R \to C,\ \varphi(t) = M\left(e^{itX}\right)$.

Observație. $\varphi(t) = \sum\limits_{k \in I} e^{itx_k} p_k$, dacă X este o variabilă aleatoare discretă;

$\varphi(t) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{itx} f(x)\,dx$, dacă X este o variabilă aleatoare continuă.

Definiția 16. Fie (Ω, K, P) un câmp de probabilitate şi $X : \Omega \to R$ o variabilă aleatoare. Se numeşte *funcția generatoare de momente* a variabilei aleatoare X aplicația $g : R \to R,\ g(t) = M\left(e^{tX}\right)$.

6.3 Variabile aleatoare bidimensionale

Definiția 1. Fie (Ω, K, P) un câmp de probabilitate. O aplicație $(X,Y):\Omega \to R^2$ se numeşte *variabilă aleatoare bidimensională (vector aleator)* dacă oricare ar fi $(x,y)\in R^2$ avem: $\{\omega \mid X(\omega)<x, Y(\omega)<y\}\in K$.

- În cazul în care componentele X, Y sunt *variabile aleatoare discrete cu o mulțime finită de valori*, *repartiția vectorului aleator* (X,Y) se poate reprezenta sub forma: $(X,Y):\begin{pmatrix}(x_i,y_j)\\ p_{ij}\end{pmatrix}_{\substack{i=\overline{1,m}\\ j=\overline{1,n}}}$ sau sub forma tabelului următor:

$X \backslash Y$	y_1	y_2	$\cdots$	y_j	$\cdots$	y_n	p_i
x_1	p_{11}	p_{12}	$\cdots$	p_{1j}	$\cdots$	p_{1n}	p_1
x_2	p_{21}	p_{22}	$\cdots$	p_{2j}		p_{2n}	p_2
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$
x_i	p_{i1}	p_{i2}	$\cdots$	p_{ij}	$\cdots$	p_{in}	p_i
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$
x_m	p_{m1}	p_{m2}	$\cdots$	p_{mj}	$\cdots$	p_{mn}	p_n
q_j	q_1	q_2	$\cdots$	q_j	$\cdots$	q_m	1

unde $p_{ij}=P(X=x_i, Y=y_j),\ i=\overline{1,m},\ j=\overline{1,n}$, $p_i=\sum\limits_{j=1}^{n} p_{ij}, i=\overline{1,m}$, $q_j=\sum\limits_{i=1}^{m} p_{ij}, j=\overline{1,n}$

cu condițiile: **1)** $p_{ij}\geq 0,\ \forall i=\overline{1,m},\ j=\overline{1,n}$ şi **2)** $\sum\limits_{i=1}^{m}\sum\limits_{j=1}^{n} p_{ij}=1$.

Repartițiile marginale sunt repartițiile variabilelor care compun vectorul (X,Y).

Repartiția variabilei aleatoare X condiționată de evenimentul $(Y=y_j)$, unde $j\in\overline{1,n}$,

este: $X/Y=y_j:\begin{pmatrix}x_i\\ P(X=x_i/Y=y_j)\end{pmatrix}_{i=\overline{1,m}}$.

Repartiția variabilei aleatoare Y condiționată de evenimentul $(X=x_i)$, unde $i\in\overline{1,m}$,

este: $Y/X=x_i:\begin{pmatrix}y_j\\ P(Y=y_j/X=x_i)\end{pmatrix}_{j=\overline{1,n}}$.

Definiția 2. Se numeşte *covarianța* variabilelor aleatoare X *şi* Y numărul: $\operatorname{cov}(X,Y)=M(XY)-M(X)\cdot M(Y)$.

Definiția 3. Variabilele aleatoare X şi Y se numesc *necorelate* dacă $\operatorname{cov}(X,Y)=0$.

Definiția 4. Se numește *coeficientul de corelație* al variabilelor aleatoare X și Y numărul: $$\rho(X,Y)=\frac{\operatorname{cov}(X,Y)}{\sigma(X)\cdot\sigma(Y)}=\frac{M(XY)-M(X)\cdot M(Y)}{\sigma(X)\cdot\sigma(Y)}.$$

Propoziție. Oricare ar fi variabilele aleatoare X *și* Y cu $D^2(X)\cdot D^2(Y)\neq 0$, au loc următoarele proprietăți:

1) $\rho(X,Y)=0$ dacă și numai dacă X și Y sunt necorelate.
2) Dacă X, Y sunt independente, atunci $\rho(X,Y)=0$.
3) $|\rho(X,Y)|\leq 1$.
4) Dacă $|\rho(X,Y)|=1$, atunci între X și Y există o dependență liniară.

6.4 Variabile aleatoare unidimensionale clasice

REPARTIȚII CLASICE DISCRETE

Repartiția binomială

$$X\in Bi(n,p)\Leftrightarrow X:\begin{pmatrix} k \\ C_n^k p^k q^{n-k}\end{pmatrix}_{k=\overline{0,n}};\ n\in N^*;\ p,q>0;\ p+q=1.$$

$$M(X)=np;\quad D^2(X)=npq;\ \varphi(t)=\left(pe^{it}+q\right)^n.$$

Repartiția Poisson

$$X\in Po(\lambda)\Leftrightarrow X:\begin{pmatrix} k \\ e^{-\lambda}\cdot\dfrac{\lambda^k}{k!}\end{pmatrix}_{k\in N};\ \lambda>0.$$

$$M(X)=\lambda;\quad D^2(X)=\lambda;\ \varphi(t)=e^{\lambda(e^{it}-1)}.$$

REPARTIȚII CLASICE CONTINUE

Repartiția Gamma

$X\in\Gamma[a,b];\ a,b>0\Leftrightarrow X$ are densitatea de repartiție: $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{b^a\,\Gamma(a)}x^{a-1}e^{-\frac{x}{b}}, & x>0\\ 0, & x\leq 0\end{cases}$

$$M(X)=ab,\ D^2(X)=ab^2;\ \varphi(t)=(1-ibt)^{-a}.$$

Repartiția normală

$X\in N(m,\sigma);\ \sigma>0, m\in R\Leftrightarrow X$ are densitatea de repartiție:

$$f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}},\ x\in R$$

$$M(X)=m,\ D^2(X)=\sigma^2;\ \varphi(t)=e^{imt-\frac{\sigma^2t^2}{2}}.$$

6.5 Ilustrarea teoriei pe cazul numeric concret al aplicațiilor

1. Fie variabila aleatoare discretă $X:\begin{pmatrix} -2 & -1 & 0 & 1 & 2 \\ 2p & 4p & p & 2p & p \end{pmatrix}$, $p \in R$.

Să se determine:

a) repartiția variabilei aleatoare *X*;

b) funcția de repartiție a variabilei *X*;

c) media, dispersia şi abaterea medie pătratică variabilei aleatoare *X*;

d) $M(X^3)$, $M(2X-3)$, $D^2(3X-2)$;

e) probabilitățile: $P(X \le -0{,}75)$, $P(X > 1{,}25)$, $P(-1{,}25 \le X \le 0{,}5)$,

.

Rezolvare:

a) Impunem condițiile ca $p \ge 0$ şi $2p + 4p + p + 2p + p = 1 \Rightarrow p = \frac{1}{10}$.

Rezultă că repartiția variabilei aleatoare X este: $X:\begin{pmatrix} -2 & -1 & 0 & 1 & 2 \\ \frac{2}{10} & \frac{4}{10} & \frac{1}{10} & \frac{2}{10} & \frac{1}{10} \end{pmatrix}$.

b)
$$F_x(x) = P(X < x) = \begin{cases} 0,\ x \in (-\infty, -2] \\ \frac{2}{10} = \frac{1}{5},\ x \in (-2, 1] \\ \frac{2}{10} + \frac{4}{10} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5},\ x \in (-1, 0] \\ \frac{2}{10} + \frac{4}{10} + \frac{1}{10} = \frac{7}{10},\ x \in (0, 1] \\ \frac{2}{10} + \frac{4}{10} + \frac{1}{10} + \frac{2}{10} = \frac{9}{10},\ x \in (1, 2] \\ 1,\ x \in (2, +\infty\ ] \end{cases}$$

c) $M(X) = (-2)\cdot\frac{2}{10} + (-1)\cdot\frac{4}{10} + 0\cdot\frac{1}{10} + 1\cdot\frac{2}{10} + 2\cdot\frac{1}{10} = -\frac{4}{10} = -0{,}4$.

$M(X^2) = (-2)^2\cdot\frac{2}{10} + (-1)^2\cdot\frac{4}{10} + 0^2\cdot\frac{1}{10} + 1^2\cdot\frac{2}{10} + 2^2\cdot\frac{1}{10} = \frac{18}{10} = 1{,}8$.

$D^2(X) = M(X^2) - M^2(X) = 1{,}8 - (-0{,}4)^2 = 1{,}64$.

$\sigma(X) = \sqrt{D^2(X)} \cong 1{,}28$.

d) $M(X^3) = (-2)^3\cdot\frac{2}{10} + (-1)^3\cdot\frac{4}{10} + 0^3\cdot\frac{1}{10} + 1^3\cdot\frac{2}{10} + 2^3\cdot\frac{1}{10} = -1$.

Folosind proprietățile mediei şi ale dispersiei, obținem:

$M(2X-3) = 2M(X) - 3 = 2\cdot(-0{,}4) - 3 = -3{,}8$. $D^2(3X-2) = 9D^2(X) = 9\cdot 1{,}64 = 14{,}76$.

e) $P(X \le -0{,}75) = P(X = -1) + P(X = -2) = \frac{2}{10} + \frac{4}{10} = \frac{3}{5}$.

$P(X > 1{,}25) = P(X = 2) = \frac{1}{10}$.

$P(-1{,}25 \le X \le 0{,}5) = P(X=-1) + P(X=0) = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$.

2. Fie $f : R \to R,\ f(x) = \begin{cases} a\,(1-x), & x \in [0,1] \\ 0, & x \notin [0,1] \end{cases},\ a \in R$.

Să se determine:

a) parametrul $a \in R$ astfel încât f să fie densitatea de repartiție a unei variabile aleatoare continue *X*;

b) funcția de repartiție a variabilei aleatoare *X*;

c) probabilitățile: $P\left(X < \frac{1}{4}\right)$, $P\left(X > \frac{1}{2}\right)$ şi $P\left(\frac{1}{4} \le X \le \frac{3}{2}\right)$;

d) media şi dispersia variabilei aleatoare *X*;

Rezolvare:

a) Pentru ca funcția f să fie densitatea de repartiție a unei variabile aleatoare continue, trebuie să îndeplinească următoarele condiții:

1) $f(x) \ge 0, \forall x \in R \Rightarrow a \ge 0$;

2) $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$.

Avem: $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int\limits_{-\infty}^{0} f(x)dx + \int\limits_{0}^{1} f(x)dx + \int\limits_{1}^{\infty} f(x)dx = \int\limits_{-\infty}^{0} 0\,dx + \int\limits_{0}^{1} a(1-x)\,dx + \int\limits_{1}^{\infty} 0\,dx =$

$= a\left(x - \frac{x^2}{2}\right)\Big|_0^1 = \frac{a}{2}$; din condiția $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$ rezultă $\frac{a}{2} = 1 \Rightarrow a = 2$, deci

$f(x) = \begin{cases} 2\,(1-x), & x \in [0,1] \\ 0, & x \notin [0,1] \end{cases}$.

b) Funcția de repartiție a variabilei aleatoare X este $F : R \to R,\ F(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} f(t)dt$.

- $x \in (-\infty, 0] \Rightarrow F(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} 0\,dt = 0$;
- $x \in (0,1] \Rightarrow F(x) = \int\limits_{-\infty}^{0} 0dt + \int\limits_{0}^{x} 2(1-t)dt = \left(2t - t^2\right)\Big|_0^x = 2x - x^2$;
- $x \in (1,\infty) \Rightarrow F(x) = \int\limits_{-\infty}^{0} 0dt + \int\limits_{0}^{1} 2(1-t)dt + \int\limits_{1}^{x} 0dt = 1$.

Am obținut că:

$$F: R \to [0,1],\ \ F(x) = \begin{cases} 0, & x \in (-\infty, 0] \\ 2x - x^2, & x \in (0,1] \\ 1, & x \in (1, \infty) \end{cases}$$

c) $P\left(X < \frac{1}{4}\right) = F\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$.

$P\left(X > \frac{1}{2}\right) = 1 - P\left(X \le \frac{1}{2}\right) = 1 - F\left(\frac{1}{2}\right) = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$.

$P\left(\frac{1}{4} \le X \le \frac{3}{2}\right) = F\left(\frac{3}{2}\right) - F\left(\frac{1}{4}\right) = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$.

d) $M(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x)dx = \int_{-\infty}^{0} x \cdot 0dx + \int_{0}^{1} x \cdot 2(1-x)\,dx + \int_{1}^{\infty} x \cdot 0\,dx = \left.\left(\frac{x^2}{2} - \frac{2x^3}{3}\right)\right|_0^1 = \frac{1}{3}$.

$M\left(X^2\right) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)dx = \int_{-\infty}^{0} x^2 \cdot 0dx + \int_{0}^{1} x^2 \cdot 2(1-x)\,dx + \int_{1}^{\infty} x^2 \cdot 0\,dx = \left.\left(\frac{2x^3}{3} - \frac{x^4}{2}\right)\right|_0^1 = \frac{1}{6}$.

$D^2(X) = M(X^2) - M^2(X) = \frac{1}{18}$.

3. Fie funcția $f: R \to R$, $f(x) = \begin{cases} k\mathrm{x}^2 e^{-\frac{x}{2}}, & x \ge 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$, $k \in R$. Să se determine:

a) parametrul $k \in R$ astfel încât *f* să fie densitatea de repartiție a unei variabile aleatoare continue *X*;

b) funcția de repartiție a variabilei aleatoare *X*;

c) probabilitățile: $P(X < 4)$, $P(X > 6)$, $P(6 \le X \le 8)$, $P(X \le 4 / X > 2)$;

d) media, dispersia, momentul inițial de ordinul r, $r \in N^*$ pentru variabila aleatoare *X*

Rezolvare:

a) Condițiile ca f să fie densitatea de repartiție a unei variabile aleatoare continue X sunt:

1) $f(x) \ge 0 \Rightarrow k \ge 0$;

2) $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$.

Avem că $I = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{0} 0dx + \int_{0}^{\infty} k\mathrm{x}^2 e^{-\frac{x}{2}}, dx$; folosind schimbarea de variabilă $\frac{x}{2} = t \Rightarrow x = 2t;\ dx = 2dt$, obținem că $I = k\int_{0}^{\infty} 4t^2 e^{-t}\, 2dt = 8k \cdot \Gamma(3) = 16k$; din condiția

$I=1 \Rightarrow k=\dfrac{1}{16}$.Rezultă că $f : R \to R,\ f(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{16}x^2 e^{-\frac{x}{2}}, & x \geq 0 \\ 0, & x<0 \end{cases}$.

b) Funcția de repartiție a variabilei aleatoare *X* este $F : R \to R,\ F(x)=\int\limits_{-\infty}^{x} f(t)dt$.

- $x \in (-\infty, 0] \Rightarrow F(x)=\int\limits_{-\infty}^{x} 0\, dt = 0$;
- $x \in (0,\infty) \Rightarrow F(x)=\int\limits_{-\infty}^{0} 0dt + \frac{1}{16}\int\limits_{0}^{x} t^2 e^{-\frac{t}{2}}dt = \frac{1}{16}\int\limits_{0}^{x} t^2\left(-2e^{-\frac{t}{2}}\right)' dt = -\frac{1}{8}t^2 e^{-t}\Big|_0^x + \frac{1}{8}\int\limits_{0}^{x}(2t)e^{-\frac{t}{2}}dt =$

$= -\frac{x^2}{8}e^{-\frac{x}{2}} + \frac{1}{4}\int\limits_{0}^{x} t\left(-2e^{-\frac{t}{2}}\right)' dt = -\frac{x^2}{8}e^{-\frac{x}{2}} - \frac{t}{2}e^{-\frac{t}{2}}\Big|_0^x + \frac{1}{2}\int\limits_{0}^{x} e^{-\frac{t}{2}}dt = -\frac{x^2}{8}e^{-\frac{x}{2}} - \frac{x}{2}e^{-\frac{x}{2}} - e^{-\frac{t}{2}}\Big|_0^x =$

$= 1-\frac{x^2+4x+8}{8}e^{-\frac{x}{2}}$. Rezultă:

$$F : R \to R,\ F(x)=\begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ 1-\dfrac{x^2+4x+8}{8}e^{-\frac{x}{2}}, & x>0 \end{cases}$$

c) $P(X<4)=F(4)=1-5e^{-2}$;

$P(X>6)=1-P(X \leq 6)=1-P(X<6)=1-F(6)=\dfrac{17}{2}e^{-3}$;

$P(6 \leq X \leq 8)=F(8)-F(6)=\dfrac{17}{2}e^{-3}-13e^{-4}$;

$P(X \leq 4 / X>2)=\dfrac{P((X \leq 4)\cap(X>2))}{P(X>2)}=\dfrac{P(2<X \leq 4)}{1-P(X<2)}=\dfrac{F(4)-F(2)}{1-F(2)}=\dfrac{\frac{5}{2e}-\frac{5}{e^2}}{\frac{5}{2e}}=\dfrac{e-2}{e}$.

d) Momentul inițial de ordinul *r* este:

$m_r = M(X^r)=\int\limits_{-\infty}^{\infty} x^r f(x)dx = \int\limits_{-\infty}^{0} x^r \cdot 0dx + \int\limits_{0}^{\infty} x^r \cdot \frac{1}{16}x^2 e^{-\frac{x}{2}}dx$;

cu schimbarea de variabilă $\dfrac{x}{2}=t \Rightarrow x=2t;\ dx=2dt$ rezultă

$m_r=\dfrac{1}{16}\int\limits_{0}^{\infty}(2t)^{r+2}e^{-t}2dt = 2^{r-1}\cdot\Gamma(r+3)$.

Am obținut că $m_r = 2^{r-1}\cdot(r+2)!,\ \forall r \in N^*$.

- Media variabilei aleatoare X este momentul inițial de ordinul *1*, prin urmare $M(X)=m_1=3!=6$.

- Avem că $M(X^2) = m_2 = 2\cdot 4! = 48$, deci dispersia variabilei este:
$D^2(X) = M(X^2) - M^2(X) = m_2 - m_1^2 = 12$.

4. Fie X, Y două variabile aleatoare discrete având repartiția comună dată în tabelul incomplet de mai jos:

$X \backslash Y$	-1	0	1	p_i
-1	0,2			0,6
1		0,1		
q_j	0,3		0,3	

$a)$ Să se scrie repartițiile variabilelor X, Y și repartiția comună a variabilelor X, Y.

$b)$ Să se scrie repartițiile variabilelor $X/Y=1$ și $Y/X=1$, $|Y|$..

Rezolvare:

$a)$ Impunând condițiile

$\sum_{i=1}^{2} p_i = 1$, $\sum_{j=1}^{3} q_j = 1$, $\sum_{j=1}^{3} p_{ij} = p_i$, $\forall i = \overline{1,2}$, $\sum_{1=1}^{2} p_{ij} = q_j$, $\forall j = \overline{1,3}$, obținem:

$p_1 + p_2 = 1 \Rightarrow p_2 = 0{,}4$; $q_1 + q_2 + q_3 = 1 \Rightarrow q_2 = 0{,}4$; $p_{11} + p_{21} = 0{,}3 \Rightarrow p_{21} = 0{,}1$;
$p_{12} + p_{22} = 0{,}4 \Rightarrow p_{21} = 0{,}3$; $p_{11} + p_{12} + p_{13} = 0{,}6 \Rightarrow p_{13} = 0{,}1$;
$p_{13} + p_{23} = 0{,}3 \Rightarrow p_{23} = 0{,}2$.

Rezultă repartițiile variabilelor X, Y: $X:\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0{,}6 & 0{,}4 \end{pmatrix}$; $Y:\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0{,}3 & 0{,}4 & 0{,}3 \end{pmatrix}$

și repartiția comună a variabilelor X, Y:

$X \backslash Y$	-1	0	1	p_i
-1	0,2	0,3	0,1	0,6
1	0,1	0,1	0,2	0,4
q_j	0,3	0,4	0,3	1

$b)$ $X/Y=1:\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ \alpha_1 & \alpha_2 \end{pmatrix}$

$$\alpha_1 = P(X=-1/Y=1) = \frac{P((X=-1)\cap(Y=1))}{P(Y=1)} = \frac{0{,}1}{0{,}3} = \frac{1}{3};$$

$$\alpha_2 = P(X=1/Y=1) = \frac{P((X=1)\cap(Y=1))}{P(Y=1)} = \frac{0{,}2}{0{,}3} = \frac{2}{3};$$

obținem: $X/Y=1:\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$; $Y/X=-1:\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \end{pmatrix}$;

Analog $Y/X=-1:\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}$

$|Y|:\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0{,}3 & 0{,}4 & 0{,}3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0{,}4 & 0{,}6 \end{pmatrix};$

Teste de autoevaluare

1. Să se determine variabila aleatoare $X:\begin{pmatrix} a & a+1 & a+2 \\ p & 3p & 2p \end{pmatrix}$, ştiind că $M(6X^2)=7$, $a\in Z,\ p\in R$.

2. Fie funcţia $f:R\to R$, $f(x)=\begin{cases} ax, & x\in[0,1] \\ 2-x, & x\in(1,2] \\ 0, & x\notin[0,2] \end{cases}$. Să se determine:

a) parametrul $a\in R$ astfel încât *f* să fie densitatea de repartiţie a unei variabile aleatoare continue *X*;

b) probabilităţile $P\left(X>\frac{3}{2}\right)$ şi $P\left(X\geq \frac{1}{4}/X\leq \frac{3}{2}\right)$;

c) funcţia de repartiţie a variabilei aleatoare *X*;

d) media şi dispersia variabilei aleatoare *X*;

3. Fie două variabile aleatoare X, Y unde

$X:\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0{,}7 & 0{,}3 \end{pmatrix}$, $Y:\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0{,}4 & 0{,}6 \end{pmatrix}$. Fie $k=P(X=-1,\ Y=0)$.

a) Să se scrie tabelul comun al repartiţiei variabilelor aleatoare X, Y.

b) Să se determine parametrul $k\in R$ astfel încât variabilele aleatoare X, Y să fie necorelate.

c) Pentru k determinat la punctul precedent, să se stabilească dacă variabilele aleatoare X, Y sunt independente.

Răspunsuri si comentarii la testele de autoevaluare

1. Din condiţia ca X să reprezinte o variabilă aleatoare discretă, obţinem:

$p\geq 0$ şi $p+3p+2p=1\Rightarrow p=\frac{1}{6}\Rightarrow X:\begin{pmatrix} a & a+1 & a+2 \\ \frac{1}{6} & \frac{3}{6} & \frac{2}{6} \end{pmatrix}$.

$$M\left(6X^2\right)=7\Leftrightarrow 6M\left(X^2\right)=7\Leftrightarrow 6\cdot\left(a^2\cdot\tfrac{1}{6}+(a+1)^2\cdot\tfrac{3}{6}+(a+2)^2\cdot\tfrac{2}{6}\right)=7\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow a^2+3a^2+6a+3+2a^2+8a+8=7\Leftrightarrow 6a^2+14a+4=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow a_1=-2,\ a_2=-\frac{1}{3}\notin Z\text{, deci } a=-2.$$

Prin urmare, repartiția variabilei aleatoare X este:

$$X:\begin{pmatrix} -2 & -1 & 0 \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$

2. *a*) Pentru ca funcția f să fie densitatea de repartiție a unei variabile aleatoare continue, trebuie să îndeplinească următoarele condiții:

1) $f(x)\geq 0, \forall x\in R \Rightarrow a\geq 0$;

2) $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$.

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int\limits_{-\infty}^{0} f(x)dx + \int\limits_{0}^{1} f(x)dx + \int\limits_{1}^{2} f(x)dx + \int\limits_{2}^{\infty} f(x)dx =$$

$$= \int\limits_{-\infty}^{0} 0\,dx + \int\limits_{0}^{1} ax\,dx + \int\limits_{1}^{2} (2-x)\,dx + \int\limits_{2}^{\infty} 0\,dx = a\left.\frac{x^2}{2}\right|_0^1 + \left.\left(2x-\frac{x^2}{2}\right)\right|_1^2 = \tfrac{a}{2}+\tfrac{1}{2}.$$

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1 \Rightarrow a=1 \Rightarrow f(x)=\begin{cases} x, & x\in[0,1] \\ 2-x, & x\in(1,2] \\ 0, & x\notin[0,2] \end{cases}.$$

b) $P\left(X>\frac{3}{2}\right)=\int\limits_{\frac{3}{2}}^{\infty} f(x)dx = \int\limits_{\frac{3}{2}}^{2}(2-x)dx + \int\limits_{2}^{\infty} 0dx = \frac{1}{8}$.

$$P\left(X\geq \tfrac{1}{4} / X\leq \tfrac{3}{2}\right) = \frac{P\left(\left(X\geq \frac{1}{4}\right)\cap\left(X\leq \frac{3}{2}\right)\right)}{P\left(X\leq \frac{3}{2}\right)} = \frac{P\left(\frac{1}{4}\leq X\leq \frac{3}{2}\right)}{P\left(X\leq \frac{3}{2}\right)}.$$

$P\left(\frac{1}{4}\leq X\leq \frac{3}{2}\right)=\int\limits_{\frac{1}{4}}^{\frac{3}{2}} f(x)dx = \int\limits_{\frac{1}{4}}^{1} xdx + \int\limits_{1}^{\frac{3}{2}}(2-x)dx = \frac{27}{32}$; $P\left(X\leq\frac{3}{2}\right)=1-P\left(X>\frac{3}{2}\right)=\frac{7}{8}$, deci

$P\left(X\geq\frac{1}{4} / X\leq\frac{3}{2}\right)=\frac{27}{28}$.

c) Funcția de repartiție a variabilei aleatoare X este $F: R\to R,\ F(x)=\int\limits_{-\infty}^{x} f(t)dt$.

- $x\in(-\infty, 0] \Rightarrow F(x)=\int\limits_{-\infty}^{x} 0\,dt = 0$;
- $x\in(0,1] \Rightarrow F(x)=\int\limits_{-\infty}^{0} 0dt + \int\limits_{0}^{x} tdt = \left.\frac{t^2}{2}\right|_0^x = \frac{x^2}{2}$;
- $x\in(1,2] \Rightarrow F(x)=\int\limits_{-\infty}^{0} 0dt + \int\limits_{0}^{1} tdt + \int\limits_{1}^{x}(2-t)dt = \left.\frac{t^2}{2}\right|_0^1 + \left.\left(2t-\frac{t^2}{2}\right)\right|_1^x =$

$= \frac{1}{2}+2x-\frac{x^2}{2}-\frac{3}{2} = \frac{-x^2+4x-2}{2}$;

$x\in(2,\infty) \Rightarrow F(x)=\int\limits_{-\infty}^{0} 0dt + \int\limits_{0}^{1} tdt + \int\limits_{1}^{2}(2-t)dt + \int\limits_{2}^{x} 0dt = 1$. Am obținut că:

$$F: R \to [0,1],\ F(x) = \begin{cases} 0, & x \in (-\infty, 0] \\ \dfrac{x^2}{2}, & x \in (0,1] \\ \dfrac{-x^2+4x-2}{2}, & x \in (1,2] \\ 1, & x \in (2,\infty) \end{cases}$$

d) $M(X) = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx = \int_{-\infty}^{0} x\cdot 0 dx + \int_{0}^{1} x\cdot x\, dx + \int_{1}^{2} x(2-x)dx + \int_{2}^{\infty} x\cdot 0\, dx =$

$= \left.\dfrac{x^3}{3}\right|_0^1 + \left.\left(x^2 - \dfrac{x^3}{3}\right)\right|_1^2 = \dfrac{1}{3} + 4 - \dfrac{8}{3} - 1 + \dfrac{1}{3} = 1.$

$M(X^2) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)dx = \int_{-\infty}^{0} x\cdot 0 dx + \int_{0}^{1} x^2\cdot x\, dx + \int_{1}^{2} x^2(2-x)dx + \int_{2}^{\infty} x\cdot 0\, dx =$

$= \left.\dfrac{x^4}{4}\right|_0^1 + \left.\left(2\dfrac{x^3}{3} - \dfrac{x^4}{4}\right)\right|_1^2 = \dfrac{1}{4} + \dfrac{16}{3} - 4 - \dfrac{2}{3} + \dfrac{1}{4} = \dfrac{7}{6} \Rightarrow D^2(X) = M(X^2) - M^2(X) = \frac{1}{6}$

3. *a*)

X \ Y	0	1	p_i
-1	k	$0,7-k$	0,7
1	$0,4-k$	$k-0,1$	0,3
q_j	0,4	0,6	1

Din condițiile: 1) $p_{ij} \geq 0,\ \forall i, j = \overline{1,2}$ și

2) $\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2} p_{ij} = 1$ obținem:

1) $\Leftrightarrow \begin{cases} k \geq 0 \\ 0,7-k \geq 0 \\ 0,4-k \geq 0 \\ k-0,1 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow 0,1 \leq k \leq 0,4$;

2) $\Leftrightarrow k + 0,7 - k + 0,4 - k + k - 0,1 = 1$, relație care se verifică, $\forall\ k \in R$.

În concluzie, repartiția comună a variabilelor X, Y este cea din tabelul de mai sus, cu condiția $k \in [0,1;\ 0,4]$.

b) Variabilele aleatoare X, Y sunt necorelate dacă avem:

$\mathrm{cov}(X,Y) = 0 \Leftrightarrow M(XY) - M(X)\cdot M(Y) = 0$.

$M(X) = \sum_{i=1}^{2} x_i p_i = (-1)\cdot 0,7 + 1\cdot 0,3 = -0,4$; $M(Y) = \sum_{j=1}^{2} y_j q_j = 0\cdot 0,4 + 1\cdot 0,6 = 0,6$;

$M(XY) = \sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2} x_i y_j p_{ij} = (-1)\cdot 0\cdot k + (-1)\cdot 1\cdot(0,7-k) + 1\cdot 0\cdot(0,4-k) + 1\cdot 1\cdot(k-0,1) = 2k - 0,8$

$M(XY) - M(X)\cdot M(Y) = 0 \Rightarrow 2k - 0,8 + 0,24 = 0 \Rightarrow k = 0,28 \in [0,1;\ 0,4]$.

c) Pentru valoarea determinată a parametrului k obținem tabelul repartiției comune de mai jos:

$X \backslash Y$	0	1	p_i
-1	0,28	0,42	0,7
1	0,12	0,18	0,3
q_j	0,4	0,6	1

Avem că: $P(X=-1,\ Y=0)=0{,}28=P(X=-1)\cdot P(Y=0)$;

$P(X=-1,\ Y=1)=0{,}42=P(X=-1)\cdot P(Y=1)$; $P(X=1,\ Y=0)=0{,}12=P(X=1)\cdot P(Y=0)$;

$P(X=1,\ Y=1)=0{,}18=P(X=1)\cdot P(Y=1)$;de aici rezultă, că v.a sunt independente.

Bibliografia unitatii de învatare 6

1. Gh. Cenuşă şi colectiv, *Matematici aplicate in economie. Teorie şi aplicații.* Editura CISON, Bucureşti, 2007
2. S. Dedu, F. Şerban, *Matematici aplicate în economie. Culegere de probleme*, Editura Teocora, Buzau, 2009
3. I. Purcaru , *Matematici generale si elemente de optimizare,* Editura Economică, Bucureşti, 1997.

Lucrarea de verificare nr.5

1. Distribuția variabilei aleatoare *X* este $X:\begin{pmatrix} -2 & -1 & 0 & 1 & 2 \\ \frac{7}{16} & \frac{1}{4}p & \frac{3}{2}p & p^2 & \frac{1}{16} \end{pmatrix}$.

Să se determine: *a*) parametrul $p \in R$; *b*) Media si dispersia lui X,

2. Fie funcția $f: R \to R$, $f(x)=\begin{cases} kx\ e^{-\frac{x}{3}}, & x \geq 0 \\ 0, & x<0 \end{cases}$, $k \in R$. Să se determine:

a) parametrul $k \in R$ astfel încât *f* să fie densitatea de repartiție a unei variabile aleatoare continue *X*; *b*) funcția de repartiție a variabilei aleatoare *X*;

c) media, dispersia, momentul inițial de ordinul r, $r \in N^*$ pentru v.a. *X*

3. Se consideră variabilele aleatoare X , Y , având repartițiile: $X:\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0{,}4 & 0{,}6 \end{pmatrix}$,

$Y:\begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 0{,}2 & 0{,}5 & 0{,}3 \end{pmatrix}$, astfel încât $P(X=1, Y=2)=0{,}1$ şi $P(X=2, Y=4)=0{,}3$. Să se determine coeficientul de corelatie al variabilele aleatoare X , Y