Grupa 344, EDDP, Seminar 11, 21.12.2020

① Fie ecuația

$$x^{(5)} + 8x^{(3)} + 16x^{(1)} = 32. \quad (1)$$

a) Arătați că $\varphi_0(t) = 2t$, $\varphi_0 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ este soluție a ec. (1)

b) Determinați soluția generală a ec. (1)

a) $\varphi_0(t) = 2t$

φ_0 sol a ec. (1) $\Leftrightarrow$ $\varphi_0^{(5)}(t) + 8\varphi_0^{(3)}(t) + 16\varphi_0^{(1)}(t) = 32$.

$\varphi_0'(t) = 2 \Rightarrow \varphi_0''(t) = 2' = 0 \Rightarrow ..$

$\Rightarrow \varphi_0^{(k)}(t) = 0, \ \forall k \geq 2.$

Avem: $\varphi_0^{(5)}(t) + 8 \cdot \varphi_0^{(3)}(t) + 16\varphi_0^{(1)}(t) =$

$= 0 + 8 \cdot 0 + 16 \cdot 2 = 32 \Rightarrow \varphi_0$ sol. a ec. (1)

b) ec. (1) este liniară neomogenă, φ_0 e sol. particulară a ec. (1) $\Rightarrow$ sol. generală a ec. (1): $x(t) = \bar{x}(t) + \varphi_0(t)$,

unde $\bar{x}$ este sol. generală pt ec. liniară omogenă atașată:

$$\bar{x}^{(5)} + 8\bar{x}^{(3)} + 16\bar{x}^{(1)} = 0. \quad (2)$$

ec. liniară cu coef. constanți, pt care avem algoritm de determinare a unui sistem fundamental de soluții:

• scriem ec. caracteristică:

$$r^5 + 8r^3 + 16r = 0.$$

$$r(r^4 + 8r^2 + 16) = 0 \Rightarrow r_1 = 0, \ m_1 = 1$$

$$r^4 + 8r^2 + 16 = 0.$$

$$r^2 = \lambda \Rightarrow \lambda^2 + 8\lambda + 16 = 0.$$

$$(\lambda + 4)^2 = 0 \Rightarrow \lambda + 4 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lambda = -4 \text{ sol. dublă.}$$

$$r^2 = -4 \Rightarrow r^2 = (2i)^2 \Rightarrow r_2 = 2i, \ m_2 = 2; \quad r_3 = -2i, \ m_3 = 2$$

$\underline{r_1=0,\ m_1=1} \Rightarrow \varphi_1(t)=e^{r_1 t}=e^0=1.\ ;\ \boxed{\varphi_1(t)=1}$

$\boxed{\begin{matrix} r_2=2i, & m_2=2 \\ r_3=\overline{r_2} & \end{matrix}} \Bigg\} \Rightarrow \begin{aligned} \varphi_2(t) &= Re(e^{r_2 t}) = Re(e^{2it}) \\ \varphi_3(t) &= Im(e^{2it}) \\ \varphi_4(t) &= Re(te^{2it}) \\ \varphi_5(t) &= Im(te^{2it}). \end{aligned}$

$e^{2it}=e^{i(2t)}=\cos 2t+i\sin 2t \Rightarrow \boxed{\begin{matrix}\varphi_2(t)=\cos 2t \\ \varphi_3(t)=\sin 2t\end{matrix}}$

$te^{i(2t)}=t\cos 2t+i\,t\sin 2t \Rightarrow \boxed{\begin{cases}\varphi_4(t)=t\cos 2t \\ \varphi_5(t)=t\sin 2t\end{cases}}$

$\Rightarrow \{1, \cos 2t, \sin 2t, t\cos 2t, t\sin 2t\}$ este sistem fundam. de soluții pt ec. (2) $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \bar{x}(t)=C_1\cdot 1+C_2\cos 2t+C_3\sin 2t+C_4 t\cos 2t + C_5 t\sin 2t,$$

$$C_1, C_2, C_3, C_4, C_5 \in \mathbb{R}.$$

$\Rightarrow \begin{cases} x(t)=C_1+C_2\cos 2t+C_3\sin 2t+C_4 t\cos 2t+C_5 t\sin 2t+2t \\ C_1, C_2, C_3, C_4, C_5 \in \mathbb{R}. \end{cases}$

$\hookrightarrow$ sol. generală a ec. (1).

② Fie ec:

(3) $\quad \underline{(2t+3)^3 x'''}+4\underline{(2t+3)^2 x''}+4\underline{(2t+3)x'}-8x=8(2t+3)^2$

$t>-\frac{3}{2}.$

a) Arătați că prin s.v. $\boxed{2t+3=e^s} \Leftrightarrow \boxed{s=\ln(2t+3)}$

$$(t,x) \xrightarrow[x(t)=y(s(t))]{} (s,y)$$

se obține o ec. liniară, neomogenă cu coeficienți constanți în (s,y).

b) Integrați ec. în variab. (s,y) și apoi precizați forma generală a sol. ec. (3).

a) $\boxed{x(t) = y(s(t))}$

Calculăm derivatele lui x până la ordinul trei:

$$\left.\begin{aligned} x'(t) &= (y(s(t)))' = y'(s(t))\cdot s'(t) \\ s(t) &= \ln(2t+3) \Rightarrow s'(t) = \frac{1}{2t+3}\cdot(2t+3)' = \frac{2}{2t+3}. \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x'(t) = y'(s)\cdot\frac{2}{2t+3} \Rightarrow \boxed{(2t+3)x' = 2y'}$$

$$x''(t) = \left(y'(s)\cdot\frac{2}{2t+3}\right)' = y''(s)\cdot s'(t)\cdot\frac{2}{2t+3} + y'(s)\cdot\frac{-2\cdot 2}{(2t+3)^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x''(t) = \frac{4}{(2t+3)^2}\left(y''(s) - y'(s)\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{(2t+3)^2 x'' = 4(y'' - y')}$$

$$x'''(t) = \left(\frac{4}{(2t+3)^2}\cdot\left(y''(s) - y'(s)\right)\right)' =$$

$$= \left(4\cdot(2t+3)^{-2}\right)'\left(y''(s) - y'(s)\right) + \frac{4}{(2t+3)^2}\left(y'''(s) - y''(s)\right)\cdot s'(t)$$

$$= 4\cdot(-2)(2t+3)^{-3}\cdot 2\left(y''(s) - y'(s)\right) + \frac{4}{(2t+3)^2}\,\frac{2}{(2t+3)}\left(y'''(s) - y''(s)\right) \Rightarrow$$

$(2t+3)'$

$$\Rightarrow x'''(t) = \frac{8}{(2t+3)^3}\left(-2y''(s) + 2y'(s) + y'''(s) - y''\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{(2t+3)^3 x''' = 8(y''' - 3y'' + 2y')}$$

Ec. (3) devine:

$$8(y''' - 3y'' + 2y') + 4\cdot 4(y'' - y') + 4\cdot 2y' - 8y = 8(e^s)^2 \;\Big|\, :8$$

$$y''' - 3y'' \cancel{+ 2y'} + 2y'' \cancel{- 2y'} + y' - y = e^{2s}.$$

$$\boxed{y''' - y'' + y' - y = e^{2s}} \quad (4)$$

ec. liniară neomogenă cu coef constanți (afină)

b) Pt. integrarea ec. (4), căutăm soluție particulară de forma: $\boxed{\varphi_0(s)=\alpha e^{2s}}$ cu $\alpha \in \mathbb{R}^*$.

φ_0 sol $\Leftrightarrow$ $\underline{\varphi_0'''(s)-\varphi_0''(s)+\varphi_0'(s)-\varphi_0(s)=e^{2s}}$.

$$\varphi_0'(s)=(\alpha e^{2s})'=\alpha\cdot e^{2s}\cdot(2s)'=2\alpha e^{2s}$$
$$\varphi_0''(s)=(2\alpha e^{2s})''=2\alpha\cdot e^{2s}(2s)'=4\alpha e^{2s}$$
$$\varphi_0'''(s)=(4\alpha e^{2s})'''=8\alpha e^{2s}$$

Trebuie să avem:

$$8\alpha e^{2s}-4\alpha e^{2s}+2\alpha e^{2s}-\alpha e^{2s}=e^{2s} \quad \Big|:e^{2s}$$
$$8\alpha-4\alpha+2\alpha-\alpha=1$$
$$5\alpha=1 \Rightarrow \alpha=\frac{1}{5}\in\mathbb{R}^* \Rightarrow \boxed{\varphi_0(s)=\frac{1}{5}e^{2s}} \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ forma generală a soluției ec. (4) este:

$$y(s)=\bar{y}(s)+\varphi_0(s).$$

unde $\bar{y}(s)$ este soluția ec. liniare omogenă atașată ec. (4): $\underline{\bar{y}'''-\bar{y}''+\bar{y}'-\bar{y}=0}$ (5)

$\hookrightarrow$ ec. cu coef. constanți $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ scriem ec. caracteristică:

$$\underline{r^3}-r^2+r-1=0 \qquad (\bar{y}=\bar{y}^{(0)})$$
$$r^2(r-1)+(r-1)=0$$
$$(r-1)(r^2+1)=0$$
$$r-1=0 \Rightarrow \underline{r_1=1,\ m_1=1} \Rightarrow \boxed{\varphi_1(s)=e^s}$$

$$r^2+1=0,\quad r^2=-1 \quad \left\langle \begin{array}{l} r_2=i,\ m_2=1 \\ r_3=-i,\ m_3=1;\ r_3=\overline{r_2} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \boxed{\varphi_2(s)}=Re(e^{is})=Re(\cos s+i\sin s)=\boxed{\cos s} \\ \boxed{\varphi_3(s)}=Im(e^{is})=Im(\cos s+i\sin s)=\boxed{\sin s} \end{cases}$$

$\Rightarrow \{e^s, \cos s, \sin s\}$ sistem fundam. de soluții pt ec. (5) $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \bar{y}(s)=C_1e^s+C_2\cos s+C_3\sin s,\quad C_1,C_2,C_3\in\mathbb{R}.$$

Cum φ_0 sol. a ec. (4) $\Rightarrow$ $\boxed{y(s)=C_1e^s+C_2\cos s+C_3\sin s+\frac{1}{5}e^{2s}}$

Deci, pentru ec. (3) forma generală a soluției este:

$$x(t) = y(s(t)) = y(\ln(2t+3)) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x(t) = C_1(2t+3) + C_2 \cos(\ln(2t+3)) + C_3 \sin(\ln(2t+3)) +$$
$$+ \frac{1}{9}(2t+3)^2, \quad C_1, C_2, C_3 \in \mathbb{R}$$

Temă:
3) $(t-2)^2 x'' - 3(t-2)x' + 4x = t$, $t > 2$
(aceleași cerințe ca la ②, doar că schimbarea de variabilă este $t-2 = e^s$).

④ Fie ec: $(2t+1)x'' + 4tx' - 4x = (2t+1)^3$, $t > -\frac{1}{2}$. (6)

a) Arătați că $\varphi_0(t) = t^2 + \frac{1}{4}$ este sol. a ec. (6).
$\varphi_0 : (-\frac{1}{2}, +\infty) \to \mathbb{R}$

b) Fie ec. liniară omogenă atașată ec. (6):

$$(2t+1)\bar{x}'' + 4t\bar{x}' - 4\bar{x} = 0. \quad (7)$$

Arătați prin schimbările de variabile succesive:

$$(t, \bar{x}) \xrightarrow[\bar{x} = ty]{} (t, y) \xrightarrow[y' = z]{} (t, z) \quad (8)$$

se obține o ec. liniară omogenă de ordin 1.)

c) Determinați soluția ec. (6).

a) temă!

b) $\bar{x} = ty$

$$\bar{x}(t) = t y(t) \Rightarrow \left.\begin{aligned} \bar{x}' &= y + ty' \\ \bar{x}'' &= 2y' + ty'' \end{aligned}\right| \Rightarrow \text{ ec. în } (t, y):$$

$$(2t+1)(2y' + ty'') + 4t(y + ty') - 4ty = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4ty' + 2t^2y'' + 2y' + ty'' + \cancel{4ty} + 4t^2y' - \cancel{4ty} = 0$$

$$\Rightarrow \underbrace{(2t^2 + t)y'' + y'(4t^2 + 4t + 2) = 0}, \Big/ \Rightarrow \text{ ec. în } (t, z) \text{ va fi:}$$

$$y'(t) = z(t) \Rightarrow y''(t) = z'(t)$$

$$(2t^2+t)z' + (4t^2+4t+2)z = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underbrace{z' = -\frac{(4t^2+4t+2)}{2t^2+t}z}\quad (9) \text{ ec. liniară omog de ordin 1}$$

c) Integrăm (9) $\Rightarrow$ $z = C_1 e^{A(t)}$, $C_1 \in \mathbb{R}$

unde A este primitivă pt $a(t) = -\frac{(4t^2+4t+2)}{2t^2+t} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \int -\frac{(4t^2+4t+2)}{2t^2+t}dt = \int -\frac{2(2t^2+t)+2t+2}{2t^2+t}dt =$$

$$= -2\int 1dt - \int \frac{2t+2}{t(2t+1)}dt = -2t - \int \frac{2(2t+1)-2t}{t(2t+1)}dt =$$

$$= -2t - 2\int \frac{\cancel{2t+1}}{t(\cancel{2t+1})}dt + 2\int \frac{\cancel{t}}{\cancel{t}(2t+1)}dt =$$

$$= \underbrace{-2t - 2\ln|t| + \cancel{2}\ln|2t+1|\cdot\frac{1}{\cancel{2}}}_{A(t)} + C \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A(t) = -2t + \ln\left(\frac{2t+1}{t^2}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow z(t) = C_1 e^{-2t}\cdot\frac{2t+1}{t^2} = C_1\cdot e^{-2t}\left(\frac{2}{t}+\frac{1}{t^2}\right)$$

$$y' = z \Rightarrow y' = C_1 e^{-2t}\left(\frac{2}{t}+\frac{1}{t^2}\right)$$

$$y' = C_1\left(-e^{-2t}\cdot\frac{1}{t}\right)' \Rightarrow \boxed{y = -C_1 e^{-2t}\frac{1}{t} + C_2} \Rightarrow$$

$\bar{x} = ty$

$$\Rightarrow \bar{x}(t) = y(t)\cdot t = \underline{-C_1 e^{-2t}} + \underline{C_2 t}, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R} \Rightarrow$$

forma gen a sol. ec (7)

$\Rightarrow \{-e^{-2t}, t\}$ este sistem fundam de soluții pt. ec. (7) $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ sol. ec. (6):

$$x(t) = \bar{x}(t) + p_0(t) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{x(t) = -C_1 e^{-2t} + C_2 t + t^2 + \frac{t}{4}}, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Temă

(5) Fie ec. $(t^2-1)x'' - 4tx' + 2x = 6t$, $t>0$ (11)

a) Determinați $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ a.î. $\varphi_0(t) = \alpha t + \beta$ să fie sol. a ec. (11).

b) Verificați dacă prin schimbarea de variabile

$$(t, x) \xrightarrow[x=ty]{} (t, y)$$

se poate reduce ordinul ec. în y.

(6) Fie sistemul liniar omogen cu coeficienți constanți

$$\boxed{\begin{cases} x_1' = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \\ x_2' = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \end{cases}}$$ sau $x' = Ax$ cu $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$

Arătați că x_1 verifică ec de ordinul al doilea:

$$\boxed{x_1'' = (\operatorname{tr} A)x_1' - (\det A)x_1.} \quad (12)$$

Pt. a arăta acest lucru:

derivăm ec. 1 din sistem $\Rightarrow x_1'' = a_{11}x_1' + \cancel{a_{12}x_2'}$

ec. 2 din sistem $\cdot(a_{12}) \Rightarrow \cancel{a_{12}x_2'} = a_{21}a_{12}x_1 + \cancel{a_{12}a_{22}x_2}$

ec. 1 din sistem $\cdot(a_{22}) \Rightarrow -a_{22}x_1' = -a_{22}a_{11}x_1 - \cancel{a_{22}a_{12}x_2}$ (+)

$$x_1'' - a_{22}x_1' = a_{11}x_1' + (a_{21}a_{12} - a_{22}a_{11})x_1$$

$$\Rightarrow x_1'' = \underbrace{(a_{11}+a_{22})}_{\operatorname{tr} A}x_1' - \underbrace{(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})}_{\det A}x_1$$

Aplicație la (6) (temă):

Integrați sistemele următoare folosind ec. de ordin 2 atașată sistemului (12):

(6.1) $\begin{cases} x_1' = x_2 \\ x_2' = x_1 \end{cases}$ (6.2) $\begin{cases} x_1' = 2x_1 - 3x_2 \\ x_2' = -3x_1 + 2x_2 \end{cases}$