CURSUL 3: INELE

G. MINCU

1. IDEALE

Definiţia 1. Fie R un inel, iar I o submulţime nevidă a lui R.
Spunem că I este **ideal stâng** al lui R dacă sunt îndeplinite condiţiile:
i) $\forall x, y \in I \ x - y \in I$.
ii) $\forall a \in R \ \forall x \in I \ ax \in I$.

Definiţia 2. Fie R un inel, iar I o submulţime nevidă a lui R.
Spunem că I este **ideal drept** al lui R dacă sunt îndeplinite condiţiile:
i) $\forall x, y \in I \ x - y \in I$.
ii) $\forall a \in R \ \forall x \in I \ xa \in I$.

Definiţia 3. Fie R un inel, iar I o submulţime nevidă a sa. I se numeşte **ideal bilateral** al lui R dacă este atât ideal stâng, cât şi ideal drept al lui R.

Observaţia 1. Orice ideal al unui inel R este subgrup aditiv al lui R.

Observaţia 2. Dacă inelul R este comutativ, orice ideal stâng al său este şi ideal drept, iar orice ideal drept al său este şi ideal stâng.

Exemplul 1. Orice inel are ca ideale bilaterale pe $\{0\}$ şi pe el însuşi.

Exemplul 2. Mulţimea idealelor lui $\mathbb{Z}$ este $\{n\mathbb{Z} : n \in \mathbb{N}\}$.

Exemplul 3. Mulţimea idealelor lui $\mathbb{Z}_n$ este $\{\widehat{d} \cdot \mathbb{Z}_n : d|n\}$.

Exemplul 4. Fie k un corp comutativ. Mulţimea idealelor lui $k[X]$ este $\{fk[X] : f \in k[X]\}$.

Demonstraţie: Fie k un corp comutativ şi I un ideal al lui $k[X]$. Dacă $I = \{0\}$, atunci $I = 0k[X]$. În caz contrar, mulţimea $I \setminus \{0\}$ este nevidă; fie $f \in I \setminus \{0\}$ un polinom de grad minim. Evident, $fk[X] \subset I$. Fie $g \in I$. Conform teoremei de împărţire cu rest, există $q, r \in k[X]$ astfel încât $g = fq + r$ şi grad $r <$ grad f. Din aceste relaţii rezultă mai întâi că $r \in I$, iar apoi, datorită alegerii lui f, că $r = 0$. Prin urmare, $g = fq$, deci $g \in fk[X]$. $\square$

Exemplul 5. i) Fie R şi S două inele, iar I şi J ideale de acelaşi tip ale lui R, respectiv S. Atunci, $I \times J$ este ideal de acelaşi tip al lui $R \times S$.
ii) Dacă R şi S sunt inele unitare, iar I este ideal în $R \times S$, atunci există idealele I_R şi I_S în R, respectiv în S, de acelaşi tip cu I, astfel încât $I = I_R \times I_S$.

Exerciţiul 1. i) Generalizaţi afirmaţiile din exemplul 5 la cazul a n inele ($n \in \mathbb{N}^*$).
ii) Demonstraţi afirmaţiile din exemplul 5.

Problemă suplimentară: Rămân adevărate afirmaţiile din exemplul 5 pentru o infinitate de inele?

Exemplul 6. Fie R un inel. Atunci, $I = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & 0 \end{pmatrix} : a, b \in R \right\}$ este ideal stâng al lui $\mathcal{M}_2(R)$, dar nu este ideal drept al acestui inel.

Exerciţiul 2. Daţi exemplu de ideal drept al unui inel care să nu fie ideal stâng al acelui inel!

Propoziţia 1. Fie R un inel şi I un ideal stâng (respectiv, drept) al său. Dacă I conţine un element inversabil la stânga (respectiv, la dreapta), atunci $I = R$.

Demonstraţie: Fie I un ideal stâng al inelului R, iar $a \in I$ un element inversabil la stânga. Fie $r \in R$. Atunci, $r = (ra^{-1})a \in I$. Prin urmare, $I = R$. $\square$

Exerciţiul 3. Demonstraţi afirmaţia referitoare la ideale la dreapta din propoziţia anterioară!

Corolarul 1. Dacă inelul R este corp, atunci singurele sale ideale sunt $\{0\}$ şi R.

Exerciţiul 4. Este adevărată reciproca afirmaţiei din corolarul 1?

Exemplul 7. Fie R un inel şi I, J ideale (stângi, drepte, respectiv bilaterale) ale lui R. Atunci $\{a + b : a \in I, b \in J\}$ este ideal (stâng, drept, respectiv bilateral) al lui R.

Definiţia 4. Idealul definit în exemplul 7 se numeşte suma idealelor I şi J.

Exerciţiul 5. Definiţi suma mai multor ideale!

Propoziţia 2. Fie R un inel şi $(I_\alpha)_{\alpha \in A}$ o familie de ideale (stângi, drepte, respectiv bilaterale) ale sale. Atunci, $\bigcap_{\alpha \in A} I_\alpha$ este ideal (stâng, drept, respectiv bilateral) al lui R.

Exerciţiul 6. Demonstraţi propoziţia 2!

Definiţia 5. Fie R un inel şi $M \subset R$. Prin **idealul (stâng, drept, respectiv bilateral al) lui R generat de M** înţelegem intersecţia tuturor idealelor (stângi, drepte, respectiv bilaterale) ale lui R care conţin pe M.

Observaţia 3. Fie R un inel şi $M \subset R$. Idealul (stâng, drept, respectiv bilateral) al lui R generat de M este cel mai mic ideal (stâng, drept, respectiv bilateral) al lui R care conţine M.

Notăm de obicei cu (M) idealul bilateral al lui R generat de M.

Propoziţia 3. Fie R un inel unitar şi $M \subset R$. Atunci:
i) Idealul stâng al lui R generat de M este

$$\left\{ \sum_{i=1}^{n} a_i x_i : n \in \mathbb{N}, a_i \in R, x_i \in M \right\}.$$

ii) Idealul drept al lui R generat de M este

$$\left\{ \sum_{i=1}^{n} x_i a_i : n \in \mathbb{N}, a_i \in R, x_i \in M \right\}.$$

iii) Idealul bilateral al lui R generat de M este

$$\left\{ \sum_{i=1}^{n} a_i x_i b_i : n \in \mathbb{N}, a_i, b_i \in R, x_i \in M \right\}.$$

Demonstraţie: Notăm cu (M) idealul stâng generat de M şi cu I mulţimea $\left\{ \sum_{i=1}^{n} a_i x_i : n \in \mathbb{N}, a_i \in R, x_i \in M \right\}$. Este evident că $I \subset (M)$. Pe de altă parte, deoarece $I \leq^s R$ şi $M \subset I$, obţinem şi $(M) \subset I$. Celelalte două afirmaţii se probează analog. $\square$

Definiţia 6. Dacă R este un inel, iar a un element al său, atunci idealul (stâng, drept, respectiv bilateral) al lui R generat de $\{a\}$ se numeşte **ideal** (stâng, drept, respectiv bilateral) **principal** ale lui R.

Observaţia 4. Dacă R este un inel, iar a un element al său, atunci:
Idealul stâng principal al lui R generat de a este egal cu Ra.
Idealul drept principal al lui R generat de a este egal cu aR.
Idealul bilateral principal al lui R generat de a este egal cu RaR. Pentru acest ideal se foloseşte de obicei notaţia (a).

2. Subinele, ideale şi morfisme

Propoziţia 4. Fie $f : R \to S$ un morfism de inele. Atunci:
i) Dacă R' este subinel al lui R, atunci $f(R')$ este subinel al lui S.
ii) Dacă S' este subinel al lui S, atunci $f^{-1}(S')$ este subinel al lui R.
iii) Dacă J este ideal (stâng, drept, respectiv bilateral) al lui S, atunci $f^{-1}(J)$ este ideal (stâng, drept, respectiv bilateral) al lui R.
iv) Dacă f este surjectiv, iar I este ideal (stâng, drept, respectiv bilateral) al lui R, atunci $f(I)$ este ideal (stâng, drept, respectiv bilateral) al lui S.

Definiţia 7. Fie $f : R \to S$ un morfism de inele. Numim **nucleul** lui f, şi notăm $\ker f$, mulţimea $\{a \in R : f(a) = 0\}$.

Observaţia 5. Conform propoziţiei 4, dacă $f : R \to S$ este un morfism de inele, atunci $\ker f$ este ideal bilateral al lui R.

Propoziţia 5. Morfismul de inele $f : R \to S$ este injectiv dacă şi numai dacă $\ker f = \{0\}$.

Exerciţiul 7. Demonstraţi această propoziţie!

Exerciţiul 8. Folosind propoziţia 5, redemonstraţi faptul că orice morfism de corpuri este injectiv!

Teorema de corespondenţă pentru ideale. Fie $f : R \to S$ un morfism surjectiv de inele. Notăm cu $\mathcal{M}$ mulţimea idealelor lui R care conţin $\ker f$ şi cu $\mathcal{N}$ mulţimea idealelor lui S. Atunci aplicaţiile $\Phi : \mathcal{M} \to \mathcal{N}$, $\Phi(I) = f(I)$ şi $\Psi : \mathcal{N} \to \mathcal{M}$, $\Psi(J) = f^{-1}(J)$ sunt inverse una celeilalte.

3. inel factor

3.1. **Construcţia inelului factor.** Fie R un inel, iar I un ideal bilateral al lui R. Cum I este subgrup normal al grupului $(R, +)$, putem construi grupul factor R/I. Dacă $\widehat{a} = \widehat{a'}$ şi $\widehat{b} = \widehat{b'}$ în acest grup, atunci $a - a' \in I$ şi $b - b' \in I$, de unde deducem că $ab - a'b' = a(b - b') + (a - a')b' \in I$, deci $\widehat{ab} = \widehat{a'b'}$ în R/I. Prin urmare, operaţia $\widehat{a} \cdot \widehat{b} = \widehat{ab}$ este corect definită pe R/I.

Exerciţiul 9. Arătaţi că $(R/I, +, \cdot)$ este inel.

Definiţia 8. Inelul $(R/I, +, \cdot)$ se numeşte inelul factor al lui R în raport cu idealul bilateral I.

Observaţia 6. Date fiind un inel R şi un ideal bilateral I al acestuia, inelul factor R/I are:

- mulţimea subiacentă $\{a+I : a \in R\}$,
- adunarea $(a+I)+(b+I)=(a+b)+I$, şi
- înmulţirea $(a+I)(b+I)=(ab)+I$.

Notaţie uzuală: Vom folosi frecvent atunci când lucrăm în inelul R/I notaţia $\widehat{a}$ în loc de $a+I$. Cu această notaţie, observaţia anterioară se rescrie astfel:

Observaţia 7. Date fiind un inel R şi un ideal bilateral I al acestuia, inelul factor R/I are:

- mulţimea subiacentă $\{\widehat{a} : a \in R\}$,
- adunarea $\widehat{a}+\widehat{b}=\widehat{a+b}$, şi
- înmulţirea $\widehat{a}\widehat{b}=\widehat{ab}$.

Observaţia 8. *În inelul factor R/I avem:*

- $\widehat{a}=\widehat{b} \Leftrightarrow a-b \in I$
- $\widehat{a}=\widehat{0} \Leftrightarrow a \in I$.

Exemplul 8. Dat fiind $n \in \mathbb{N}$, inelul factor $\dfrac{\mathbb{Z}}{n\mathbb{Z}}$ este $\mathbb{Z}_n$.

Propoziţia 6. Fie R un inel, iar I un ideal bilateral al lui R. Atunci:
i) Dacă R este comutativ, atunci R/I este comutativ.
ii) Dacă R este unitar, atunci R/I este unitar (cu unitatea 1+I).

Exerciţiul 10. Demonstraţi propoziţia 6.

Propoziţia 7. Fie R un inel (unitar), iar I un ideal bilateral al lui R. Atunci, $\pi : R \to R/I$, $\pi(a)=a+I$ este morfism (unitar şi) surjectiv de inele. În plus, $\ker\pi = I$.

Exerciţiul 11. Demonstraţi propoziţia 7.

Definiţia 9. Morfismul π din propoziţia 7 se numeşte **proiecţia** (sau **surjecţia**) **canonică** a lui R pe R/I.

Proprietatea de universalitate a inelului factor. Fie R un inel, I un ideal bilateral în R, $\pi : R \to R/I$ proiecţia canonică, iar $f : R \to S$ un morfism de inele. Atunci:
i) Dacă $\ker\pi \subset \ker f$, atunci există un unic morfism de inele $u : R/I \to S$ cu proprietatea $f = u \circ \pi$.
ii) u este injectiv dacă şi numai dacă $\ker\pi = \ker f$.
iii) u este surjectiv dacă şi numai dacă f este surjectiv.

4. Teorema fundamentală de izomorfism pentru inele

Teorema fundamentală de izomorfism pentru inele. Fie $f : R \to S$ un morfism de inele. Atunci, $\widetilde{f} : \frac{R}{\ker f} \to \operatorname{Im} f$, $\widetilde{f}(\widehat{a}) = f(a)$ este un izomorfism. Deci, $\frac{R}{\ker f} \stackrel{\sim}{\to} \operatorname{Im} f$.

Demonstraţie: Dacă $\widehat{a} = \widehat{b}$, atunci $a - b \in \ker f$, deci $f(a - b) = 0$, de unde $f(a) = f(b)$. Prin urmare, $\widetilde{f}$ din enunţ este corect definită. $\widetilde{f}$ este în mod evident morfism surjectiv de inele. $\ker \widetilde{f} = \{\widehat{a} \in R/\ker f : \widetilde{f}(\widehat{a}) = \widehat{0}\} = \{\widehat{a} \in R/\ker f : f(a) = 0\} = \{\widehat{a} \in R/\ker f : a \in \ker f\} = \{\widehat{0}\}$, deci $\widetilde{f}$ este şi injectivă. □

Corolarul 2. Fie $n, d \in \mathbb{N}$ cu $d|n$. Atunci, $\frac{\mathbb{Z}_n}{\widehat{d}\mathbb{Z}_n} \stackrel{\sim}{\to} \mathbb{Z}_d$.

Exerciţiul 12. Demonstraţi corolarul 2.

Corolarul 3. Fie R, S două inele, iar I şi J ideale bilaterale ale lui R, respectiv S. Atunci, $\frac{R \times S}{I \times J} \stackrel{\sim}{\to} \frac{R}{I} \times \frac{S}{J}$.

Exerciţiul 13. Demonstraţi corolarul 3.

Lema chineză a resturilor. Fie R un inel comutativ şi unitar şi I, J două ideale ale lui R cu proprietatea că $I + J = R$. Atunci, $\frac{R}{I \cap J} \stackrel{\sim}{\to} \frac{R}{I} \times \frac{R}{J}$.

References

[1] T. Dumitrescu, *Algebra*, Ed. Universităţii din Bucureşti, 2006.
[2] I. D. Ion, N. Radu, *Algebra*, Ed. Universităţii din Bucureşti, 1981.
[3] C. Năstăsescu, C. Niţă, C. Vraciu, *Bazele algebrei*, Ed. Academiei, Bucureşti, 1986.