CURS 9

Logică Matematică şi Computaţională

FMI · Denisa Diaconescu · An universitar 2018/2019

SINTAXA LOGICII PROPOZIŢIONALE

Axiomele logice.

Mulţimea *Axm* a axiomelor lui *LP* constă din toate formulele de forma:

(A1) $\varphi \to (\psi \to \varphi)$

(A2) $(\varphi \to (\psi \to \chi)) \to ((\varphi \to \psi) \to (\varphi \to \chi))$

(A3) $(\neg\psi \to \neg\varphi) \to (\varphi \to \psi)$

unde φ, ψ şi χ sunt formule.

Regula de deducţie.

Pentru orice formule φ, ψ,

din φ şi $\varphi \to \psi$ se inferă ψ (modus ponens sau (MP)):

$$\frac{\varphi, \ \varphi \to \psi}{\psi}$$

Definiţia 8.3

Fie Γ o mulţime de formule. Γ-teoremele sunt formulele definite astfel:

(T0) Orice axiomă este Γ-teoremă.

(T1) Orice formulă din Γ este Γ-teoremă.

(T2) Dacă φ şi $\varphi \to \psi$ sunt Γ-teoreme, atunci ψ este Γ-teoremă.

(T3) Numai formulele obţinute aplicând regulile (T0), (T1), (T2) sunt Γ-teoreme.

$$
\begin{array}{lll}
Thm(\Gamma) & := & \text{mulţimea } \Gamma\text{-teoremelor} \\
Thm & := & Thm(\emptyset) \\
\Gamma \vdash \varphi & \Leftrightarrow & \varphi \text{ este } \Gamma\text{-teoremă} \\
\vdash \varphi & \Leftrightarrow & \emptyset \vdash \varphi \\
\Gamma \vdash \Delta & \Leftrightarrow & \Gamma \vdash \varphi \text{ pentru orice } \varphi \in \Delta.
\end{array}
$$

Definiţia 8.4

O formulă φ se numeşte teoremă a lui *LP* dacă $\vdash \varphi$.

Definiţia Γ-teoremelor dă naştere la metoda de demonstraţie prin inducţie după Γ-teoreme.

Versiunea 1.
Fie *P* o proprietate a formulelor. Demonstrăm că orice Γ-teoremă satisface *P* astfel:

(i) demonstrăm că orice axiomă are proprietatea *P*;

(ii) demonstrăm că orice formulă din Γ are proprietatea *P*;

(iii) demonstrăm că dacă φ şi $\varphi \to \psi$ au proprietatea *P*, atunci ψ are proprietatea *P*.

Versiunea 2.
Fie Σ o mulţime de formule. Demonstrăm că $Thm(\Gamma) \subseteq \Sigma$ astfel:

(i) demonstrăm că orice axiomă este în Σ;

(ii) demonstrăm că orice formulă din Γ este în Σ;

(iii) demonstrăm că dacă $\varphi \in \Sigma$ şi $\varphi \to \psi \in \Sigma$, atunci $\psi \in \Sigma$.

Teorema deducţiei este unul din cele mai utile instrumente pentru a arăta că o formulă e teoremă.

Teorema deducţiei 8.14

Fie $\Gamma \subseteq Form$ şi $\varphi, \psi \in Form$. Atunci

$$\Gamma \cup \{\varphi\} \vdash \psi \text{ ddacă } \Gamma \vdash \varphi \to \psi.$$

Demonstraţie. "$\Leftarrow$" Presupunem că $\Gamma \vdash \varphi \to \psi$.

(1)	$\Gamma \vdash \varphi \to \psi$	ipoteză
(2)	$\Gamma \cup \{\varphi\} \vdash \varphi \to \psi$	Propoziţia 8.7.(i)
(3)	$\Gamma \cup \{\varphi\} \vdash \varphi$	Propoziţia 8.5.(ii)
(4)	$\Gamma \cup \{\varphi\} \vdash \psi$	(MP): (2), (3).

"$\Rightarrow$" Fie

$$\Sigma := \{\psi \in Form \mid \Gamma \vdash \varphi \to \psi\}.$$

Trebuie să demonstrăm că $Thm(\Gamma \cup \{\varphi\}) \subseteq \Sigma$. Arătăm prin inducţie după $\Gamma \cup \{\varphi\}$-teoreme.

· Fie ψ o axiomă sau o formulă din Γ. Atunci

(1)	$\Gamma \vdash \psi$	Propoziţia 8.5.(i), (ii)
(2)	$\Gamma \vdash \psi \to (\varphi \to \psi)$	(A1) şi Propoziţia 8.5.(i)
(3)	$\Gamma \vdash \varphi \to \psi$	(MP): (1), (2).

Aşadar $\psi \in \Sigma$.

· Fie $\psi = \varphi$. Atunci $\varphi \to \psi = \varphi \to \varphi$ este teoremă, conform Propoziţiei 8.13, deci $\Gamma \vdash \varphi \to \psi$. Aşadar $\psi \in \Sigma$.

· Demonstrăm acum că Σ este închisă la modus ponens. Presupunem că $\psi, \psi \to \chi \in \Sigma$ şi trebuie să arătăm că $\chi \in \Sigma$. Atunci

(1)	$\Gamma \vdash \varphi \to \psi$	ipoteza inducţie
(2)	$\Gamma \vdash \varphi \to (\psi \to \chi)$	ipoteza inducţie
(3)	$\Gamma \vdash (\varphi \to (\psi \to \chi)) \to ((\varphi \to \psi) \to (\varphi \to \chi))$	(A2) şi P. 8.5.(i)
(4)	$\Gamma \vdash (\varphi \to \psi) \to (\varphi \to \chi)$	(MP): (2), (3).
(5)	$\Gamma \vdash \varphi \to \chi$	(MP): (1), (4).

Aşadar $\chi \in \Sigma$. $\square$

Recap. - Propoziţia 8.15

Pentru orice formule φ, ψ, χ,

$$\vdash (\varphi \to \psi) \to ((\psi \to \chi) \to (\varphi \to \chi)). \tag{1}$$

Propoziţia 9.1

Pentru orice mulţime de formule Γ şi orice formule φ, ψ, χ,

$$\Gamma \vdash \varphi \to \psi \text{ şi } \Gamma \vdash \psi \to \chi \quad \Rightarrow \quad \Gamma \vdash \varphi \to \chi\ .$$

Demonstraţie.

(1)	$\Gamma \vdash \varphi \to \psi$	ipoteză
(2)	$\Gamma \vdash (\varphi \to \psi) \to ((\psi \to \chi) \to (\varphi \to \chi))$	P. 8.15 şi P. 8.7.(ii)
(3)	$\Gamma \vdash (\psi \to \chi) \to (\varphi \to \chi)$	(MP): (1), (2)
(4)	$\Gamma \vdash \psi \to \chi$	ipoteză
(5)	$\Gamma \vdash \varphi \to \chi$	(MP): (3), (4).

□

Propoziţia 9.2

Pentru orice formule φ, ψ,

$$\begin{aligned}
\{\psi, \neg\psi\} &\vdash \varphi && (2)\\
&\vdash \neg\psi \to (\psi \to \varphi) && (3)\\
&\vdash \neg\neg\varphi \to \varphi && (4)\\
&\vdash \varphi \to \neg\neg\varphi && (5)\\
\{\psi, \neg\varphi\} &\vdash \neg(\psi \to \varphi). && (6)
\end{aligned}$$

Demonstraţie. Exerciţiu.

Propoziţia 9.3

Pentru orice mulţime de formule Γ şi orice formule φ, ψ,

$$\Gamma \cup \{\psi\} \vdash \varphi \text{ şi } \Gamma \cup \{\neg\psi\} \vdash \varphi \quad \Rightarrow \quad \Gamma \vdash \varphi. \tag{7}$$

Demonstraţie. Exerciţiu.

LEGĂTURA DINTRE SINTAXĂ ŞI SEMANTICĂ

Teorema de corectitudine (Soundness Theorem) 9.4
Orice Γ-teoremă este consecinţă semantică a lui Γ, adică,

$$\Gamma \vdash \varphi \quad \Rightarrow \quad \Gamma \vDash \varphi$$

pentru orice $\varphi \in Form$ şi $\Gamma \subseteq Form$.

Demonstraţie. Fie

$$\Sigma := \{\varphi \in Form \mid \Gamma \vDash \varphi\}.$$

Trebuie să demonstrăm că $Thm(\Gamma) \subseteq \Sigma$. Arătăm prin inducţie după Γ-teoreme.

- Axiomele sunt în Σ (exerciţiu).
- Evident, $\Gamma \subseteq \Sigma$.
- Demonstrăm acum că Σ este închisă la modus ponens. Presupunem că $\varphi, \varphi \to \psi \in \Sigma$, adică, $\Gamma \vDash \varphi$ şi $\Gamma \vDash \varphi \to \psi$. Conform Propoziţiei 7.9.(i), obţinem că $\Gamma \vDash \psi$, adică, $\psi \in \Sigma$. $\square$

Notaţii.

Pentru orice variabilă $v \in V$ şi orice evaluare $e : V \to \{0, 1\}$,

$$v^e = \begin{cases} v & \text{dacă } e(v) = 1 \\ \neg v & \text{dacă } e(v) = 0. \end{cases}$$

Aşadar, $e^+(v^e) = 1$.

Pentru orice mulţime $W = \{x_1, \ldots, x_k\}$ de variabile, notăm

$$W^e = \{v^e \mid v \in W\} = \{x_1^e, x_2^e, \ldots, x_k^e\}.$$

Propoziţia 9.5
Fie $e : V \to \{0, 1\}$ o evaluare. Pentru orice formulă φ,

(i) Dacă $e^+(\varphi) = 1$, atunci $Var(\varphi)^e \vdash \varphi$.
(ii) Dacă $e^+(\varphi) = 0$, atunci $Var(\varphi)^e \vdash \neg\varphi$.

Demonstraţie. Prin inducţie după formule. Avem următoarele cazuri:

- $\varphi = v$. Atunci $Var(\varphi)^e = \{v^e\}$ şi $e^+(v) = e(v)$.

  Dacă $e(v) = 1$, atunci $v^e = v$, deci, $\{v^e\} \vdash v$.

  Dacă $e(v) = 0$, atunci $v^e = \neg v$, deci, $\{v^e\} \vdash \neg v$.

- $\varphi = \neg\psi$. Atunci $Var(\varphi) = Var(\psi)$, deci $Var(\varphi)^e = Var(\psi)^e$.

  Dacă $e^+(\varphi) = 1$, atunci $e^+(\psi) = 0$, deci, conform ipotezei de inducţie pentru ψ, $Var(\psi)^e \vdash \neg\psi$, adică, $Var(\varphi)^e \vdash \varphi$.

  Dacă $e^+(\varphi) = 0$, atunci $e^+(\psi) = 1$, deci, conform ipotezei de inducţie pentru ψ, $Var(\psi)^e \vdash \psi$, adică, $Var(\varphi)^e \vdash \psi$. Deoarece $\vdash \psi \to \neg\neg\psi$ (Propoziţia 9.2), putem aplica (MP) pentru a obţine $Var(\varphi)^e \vdash \neg\neg\psi$, deci $Var(\varphi)^e \vdash \neg\varphi$.

- $\varphi = \psi \to \chi$. Atunci $Var(\varphi) = Var(\psi) \cup Var(\chi)$, deci $Var(\psi)^e, Var(\chi)^e \subseteq Var(\varphi)^e$.

  Dacă $e^+(\psi \to \chi) = 0$, atunci $e^+(\psi) = 1$ şi $e^+(\chi) = 0$. Avem

$Var(\psi)^e \vdash \psi$	ipoteza de inducţie pentru ψ
$Var(\chi)^e \vdash \neg\chi$	ipoteza de inducţie pentru χ
$Var(\varphi)^e \vdash \{\psi, \neg\chi\}$	$Var(\psi)^e, Var(\chi)^e \subseteq Var(\varphi)^e$ şi P.8.7.(i)
$\{\psi, \neg\chi\} \vdash \neg(\psi \to \chi)$	Propoziţia 9.2
$Var(\varphi)^e \vdash \neg(\psi \to \chi)$	Propoziţia 8.7.(iv).

Dacă $e^+(\psi \to \chi) = 1$, atunci fie $e^+(\psi) = 0$, fie $e^+(\chi) = 1$.

În primul caz, obţinem

$Var(\psi)^e \vdash \neg\psi$	ipoteza de inducţie pentru ψ
$Var(\psi)^e \vdash \neg\psi \to (\psi \to \chi)$	din P.9.2 şi P.8.7.(ii)
$Var(\psi)^e \vdash \psi \to \chi$	(MP)
$Var(\varphi)^e \vdash \psi \to \chi$	$Var(\psi)^e \subseteq Var(\varphi)^e$ şi P.8.7.(i).

În al doilea caz, obţinem

$Var(\chi)^e \vdash \chi$	ipoteza de inducţie pentru χ
$Var(\chi)^e \vdash \chi \to (\psi \to \chi)$	(A1) şi Propoziţia 8.5.(i)
$Var(\chi)^e \vdash \psi \to \chi$	(MP)
$Var(\varphi)^e \vdash \psi \to \chi$	$Var(\chi)^e \subseteq Var(\varphi)^e$ şi P.8.7.(i). $\square$

Demonstraţia propoziţiei anterioare ne dă o construcţie efectivă a unei demonstraţii a lui φ sau $\neg\varphi$ din premizele $Var(\varphi)^e$.

Teorema 9.6 (Teorema de completitudine)
Pentru orice formulă φ,

$$\vdash \varphi \quad \text{ddacă} \quad \vDash \varphi.$$

Demonstraţie. "$\Rightarrow$" Se aplică Teorema de corectitudine 9.4 pentru $\Gamma = \emptyset$.

"$\Leftarrow$" Fie φ o tautologie şi $Var(\varphi) = \{x_1, \ldots, x_n\}$. Demonstrăm prin inducţie după k următoarea proprietate:

(*) pentru orice $k \leq n$, pentru orice $e : V \to \{0,1\}$, $\{x_1^e, \ldots, x_{n-k}^e\} \vdash \varphi$.

Pentru $k = n$, (*) ne dă $\vdash \varphi$.

$k = 0$. Fie $e : V \to \{0,1\}$. Deoarece φ este tautologie, $e^+(\varphi) = 1$. Aplicând Propoziţia 9.5, obţinem că

$$Var(\varphi)^e = \{x_1^e, \ldots, x_n^e\} \vdash \varphi.$$

$k \Rightarrow k+1$. Presupunem că (*) este adevărată pentru k şi fie $e : V \to \{0,1\}$. Trebuie să arătăm că $\{x_1^e, \ldots, x_{n-k-1}^e\} \vdash \varphi$. Considerăm evaluarea $e' := e_{x_{n-k} \leftarrow \neg e(x_{n-k})}$. Aşadar, $e'(v) = e(v)$ pentru orice $v \neq x_{n-k}$ şi

$$e'(x_{n-k}) = \begin{cases} 0 & \text{dacă } e(x_{n-k}) = 1 \\ 1 & \text{dacă } e(x_{n-k}) = 0. \end{cases}$$

Rezultă că $x_i^{e'} = x_i^e$ pentru orice $i \in \{0, \ldots, n-k-1\}$ şi

$$x_{n-k}^{e'} = \begin{cases} \neg x_{n-k} & \text{dacă } x_{n-k}^e = x_{n-k} \\ x_{n-k} & \text{dacă } x_{n-k}^e = \neg x_{n-k}. \end{cases}$$

Din (*) pentru e şi e', obţinem

$$\{x_1^e, \ldots, x_{n-k-1}^e, x_{n-k}\} \vdash \varphi \text{ şi } \{x_1^e, \ldots, x_{n-k-1}^e, \neg x_{n-k}\} \vdash \varphi.$$

Aplicăm acum Propoziţia 9.3 cu $\Gamma := \{x_1^e, \ldots, x_{n-k-1}^e\}$ şi $\psi := x_{n-k}$ pentru a conclude că $\{x_1^e, \ldots, x_{n-k-1}^e\} \vdash \varphi$. $\square$

Propoziţia 9.7
Fie $\Gamma \cup \{\varphi, \psi\} \subseteq Form$. Presupunem că $\varphi \sim \psi$. Atunci

$$\Gamma \vdash \varphi \quad \Longleftrightarrow \quad \Gamma \vdash \psi.$$

Demonstraţie. Observăm că

$\varphi \sim \psi \quad \Longleftrightarrow \quad \vDash \varphi \rightarrow \psi$ şi $\vDash \psi \rightarrow \varphi$
(conform Propoziţiei 6.6)
$\Longleftrightarrow \quad \vdash \varphi \rightarrow \psi$ şi $\vdash \psi \rightarrow \varphi$
(conform Teoremei de completitudine).

"$\Rightarrow$" Presupunem că $\Gamma \vdash \varphi$. Deoarece $\vdash \varphi \rightarrow \psi$, rezultă din Propoziţia 8.7.(ii) că $\Gamma \vdash \varphi \rightarrow \psi$. Aplicăm acum (MP) pentru a obţine că $\Gamma \vdash \psi$.

"$\Leftarrow$" Similar. $\square$

Fie Γ o mulţime de formule şi φ o formulă.

Notaţii.

$$
\begin{array}{lcl}
\Gamma \nvdash \varphi & \Leftrightarrow & \varphi \text{ nu este } \Gamma\text{-teoremă} \\
\nvdash \varphi & \Leftrightarrow & \varphi \text{ nu este teoremă} \\
\Gamma \nvDash \varphi & \Leftrightarrow & \varphi \text{ nu este consecinţă semantică a lui } \Gamma \\
\nvDash \varphi & \Leftrightarrow & \varphi \text{ nu este tautologie.}
\end{array}
$$

Pe data viitoare!

Conţinutul tehnic al acestui curs se regăseşte în cursul de *Logică Matematică şi Computaţională* al prof. Laurenţiu Leuştean din anul universitar 2017/2018.