Universitatea din Bucureşti | 29 ianuarie 2021
Facultatea de Matematică şi Informatică

Calcul Numeric – Proba practică
Informatică, Anul III

INSTRUCŢIUNI:

1. Comentaţi şi explicaţi toate rezolvările trimise. Codurile necomentate/neexplicate nu se punctează.
2. Codurile vor fi salvate cu următoarea denumire `Nume_Prenume_Grupa.py` şi vor fi trimise titularului de laborator până în data de **29 ianuarie 2021, ora 14:30**.

ALGORITM(Metoda Romberg)

Date de intrare: f, a, b, n `(n - ordinul de aproximare);`
Date de ieşire: $\mathrm{I}_{Romberg}$;

`PASUL 1: Determină` h`, lungimea intervalului` $[a, b]$.

`PASUL 2: Construieşte o matrice` $\mathrm{Q} = (q_{ij})_{i,j=\overline{1,n}} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$:

- $q_{11} \leftarrow \frac{h}{2}\left(f(a) + f(b)\right)$ `(formula trapezului)`
- `Pentru` $i = \overline{2, n}$`, completează prima coloană a matricii` Q:

$$q_{i1} \leftarrow \frac{h}{2^i}\left(f(a) + 2\sum_{k=2}^{2^{i-1}} f\left(a + (k-1)\frac{h}{2^{i-1}}\right) + f(b)\right)$$

- `Pentru` $i = \overline{2, n}$ `şi` $j = \overline{2, i}$`, completează restul matricei` Q:

$$q_{ij} \leftarrow \frac{4^{j-1} q_{i,j-1} - q_{i-1,j-1}}{4^{j-1} - 1}$$

`PASUL 3:` $\mathrm{I}_{Romberg} \leftarrow q_{nn}$.

Ex. 1

a) Să se construiască în Python procedura **Romberg**(f, a, b, n) conform algoritmului (Metoda Romberg);

b) Să se calculeze integrala exactă $\mathrm{I}_{exact}(f) = \int_{-6}^{6} \frac{1}{1+x^2}\, dx$;

c) Să se aproximeze integrala de mai sus în baza procedurii **Romberg** cu $n = 6$;

d) Să se calculeze eroarea $err = |\mathrm{I}_{exact} - \mathrm{I}_{Romberg}|$.

Ex. 2

(a) Creaţi funcţia `newton_raphson` care determină numeric soluţia ecuaţiei:

$$f(x) = x^3 + 2x^2 - 16x - 32 = 0\,, \tag{1}$$

prin metoda Newton-Raphson şi are ca **date de intrare**:

- funcţia care determină ecuaţia (1), f;

- derivata funcţiei care determină ecuaţia (1), df;
- punctul de start al metodei Newton-Raphson, x_0;
- toleranţa erorii specifice metodei Newton-Raphson, `eps`;

iar ca **date de ieşire**:

- soluţia numerică obţinută, $\mathtt{x}_{\mathtt{aprox}}$;
- numărul de iteraţii necesare, `N`;

(b) Alegeţi subintervalele şi punctele de start ale metodei respectând ipotezele teoremei de convergenţă ale metodei Newton-Raphson, astfel încât şirurile aproximărilor să rămână în subintervalele selectate şi să conveargă la soluţii. Justificaţi atât alegerea subintervalelor, cât şi a valorilor iniţiale.

Aflaţi toate soluţiile ecuaţiei (1) apelând funcţia `newton_raphson` cu eroarea de aproximare `eps` $= 10^{-3}$ şi construiţi punctele obţinute pe graficul funcţiei.