FMI, Info, 2018/2019, Anul I
Logică matematică şi computaţională

Seminar 10

(S10.1) Să se demonstreze Teorema de completitudine tare - versiunea 2, dar fără a se folosi, precum în curs, Teorema de completitudine tare - versiunea 1.
Demonstraţie: Fie $\varphi \in Form$, $\Gamma \subseteq Form$. Abreviem Teorema de completitudine (slabă) cu TC, iar Teorema de compacitate cu TK. Avem că:

$$\begin{aligned}
\Gamma \vdash \varphi &\Leftrightarrow \text{există } \varphi_1, ..., \varphi_n \in \Gamma \text{ cu } \{\varphi_1, ..., \varphi_n\} \vdash \varphi && \text{(din Propoziţia 8.12)}\\
&\Leftrightarrow \text{există } \varphi_1, ..., \varphi_n \in \Gamma \text{ cu } \vdash (\varphi_1 \wedge ... \wedge \varphi_n) \to \varphi && \text{(din Propoziţia 10.5.(i))}\\
&\Leftrightarrow \text{există } \varphi_1, ..., \varphi_n \in \Gamma \text{ cu } \vDash (\varphi_1 \wedge ... \wedge \varphi_n) \to \varphi && \text{(din TC)}\\
&\Leftrightarrow \text{există } \varphi_1, ..., \varphi_n \in \Gamma \text{ cu } \{\varphi_1, ..., \varphi_n\} \vDash \varphi && \text{(din Propoziţia 7.12.(ii))}\\
&\Leftrightarrow \Gamma \vDash \varphi. && \text{(din TK - versiunea 3)}
\end{aligned}$$

□

(S10.2) Să se arate că Teorema de completitudine tare - versiunea 2 implică imediat Teorema de completitudine tare - versiunea 1.
Demonstraţie: Vrem să arătăm că o mulţime de formule este consistentă dacă şi numai dacă este satisfiabilă. Fie $\Gamma \subseteq Form$. Abreviem Teorema de completitudine tare cu TCT. Avem că:

$$\begin{aligned}
\Gamma \text{ este consistentă} &\Leftrightarrow \Gamma \nvdash \bot && \text{(din Propoziţia 10.3)}\\
&\Leftrightarrow \Gamma \nvDash \bot && \text{(din TCT - versiunea 2)}\\
&\Leftrightarrow \Gamma \text{ este satisfiabilă.} && \text{(din Propoziţia 7.10)}
\end{aligned}$$

□

(S10.3) Să se arate că pentru orice formule φ, ψ, χ avem:

(i) $\{\varphi \wedge \psi\} \vdash \varphi$;

(ii) $\{\varphi \wedge \psi\} \vdash \psi$;

(iii) $\{\varphi, \psi\} \vdash \varphi \wedge \psi$;

(iv) $\{\varphi, \psi\} \vdash \chi$ ddacă $\{\varphi \wedge \psi\} \vdash \chi$.

Demonstraţie: Reamintim că $\varphi \wedge \psi = \neg(\varphi \rightarrow \neg\psi)$. De asemenea, oriunde folosim o teoremă formală cunoscută, aplicăm implicit Propoziţia 8.7.(ii).

Demonstrăm (i):

(1)	$\{\neg(\varphi \rightarrow \neg\psi)\}$	$\vdash \neg(\varphi \rightarrow \neg\psi)$	Propoziţia 8.5.(ii)
(2)	$\{\neg(\varphi \rightarrow \neg\psi)\}$	$\vdash \neg\varphi \rightarrow (\varphi \rightarrow \neg\psi)$	(S8.3).(ii)
(3)	$\{\neg(\varphi \rightarrow \neg\psi)\}$	$\vdash (\neg\varphi \rightarrow (\varphi \rightarrow \neg\psi)) \rightarrow (\neg(\varphi \rightarrow \neg\psi) \rightarrow \neg\neg\varphi)$	(S8.4)
(4)	$\{\neg(\varphi \rightarrow \neg\psi)\}$	$\vdash \neg(\varphi \rightarrow \neg\psi) \rightarrow \neg\neg\varphi$	(MP): (2), (3)
(5)	$\{\neg(\varphi \rightarrow \neg\psi)\}$	$\vdash \neg\neg\varphi$	(MP): (1), (4)
(6)	$\{\neg(\varphi \rightarrow \neg\psi)\}$	$\vdash \neg\neg\varphi \rightarrow \varphi$	(S8.3).(iii)
(7)	$\{\neg(\varphi \rightarrow \neg\psi)\}$	$\vdash \varphi$	(MP): (5), (6).

Demonstrăm (ii):

(1)	$\{\neg(\varphi \rightarrow \neg\psi), \neg\psi\}$	$\vdash \neg\psi \rightarrow (\varphi \rightarrow \neg\psi)$	(A1) şi Propoziţia 8.5.(i)
(2)	$\{\neg(\varphi \rightarrow \neg\psi), \neg\psi\}$	$\vdash \neg\psi$	Propoziţia 8.5.(ii)
(3)	$\{\neg(\varphi \rightarrow \neg\psi), \neg\psi\}$	$\vdash \varphi \rightarrow \neg\psi$	(MP): (1), (2)
(4)	$\{\neg(\varphi \rightarrow \neg\psi), \neg\psi\}$	$\vdash \neg(\varphi \rightarrow \neg\psi)$	Propoziţia 8.5.(ii)
(5)	$\{\neg(\varphi \rightarrow \neg\psi), \neg\psi\}$	$\vdash \neg(\varphi \rightarrow \neg\psi) \rightarrow ((\varphi \rightarrow \neg\psi) \rightarrow \bot)$	(S8.3).(iii)
(6)	$\{\neg(\varphi \rightarrow \neg\psi), \neg\psi\}$	$\vdash (\varphi \rightarrow \neg\psi) \rightarrow \bot$	(MP): (4), (5)
(7)	$\{\neg(\varphi \rightarrow \neg\psi), \neg\psi\}$	$\vdash \bot$	(MP): (3), (6)
(8)	$\{\neg(\varphi \rightarrow \neg\psi)\}$	$\vdash \psi$	(7) şi (S8.2).

Demonstrăm (iii):

(1)	$\{\varphi, \psi, \neg\neg(\varphi \rightarrow \neg\psi)\}$	$\vdash \varphi$	Propoziţia 8.5.(ii)
(2)	$\{\varphi, \psi, \neg\neg(\varphi \rightarrow \neg\psi)\}$	$\vdash \psi$	Propoziţia 8.5.(ii)
(3)	$\{\varphi, \psi, \neg\neg(\varphi \rightarrow \neg\psi)\}$	$\vdash \neg\neg(\varphi \rightarrow \neg\psi)$	Propoziţia 8.5.(ii)
(4)	$\{\varphi, \psi, \neg\neg(\varphi \rightarrow \neg\psi)\}$	$\vdash \neg\neg(\varphi \rightarrow \neg\psi) \rightarrow (\varphi \rightarrow \neg\psi)$	(S8.3).(iii)
(5)	$\{\varphi, \psi, \neg\neg(\varphi \rightarrow \neg\psi)\}$	$\vdash \varphi \rightarrow \neg\psi$	(MP): (3), (4)
(6)	$\{\varphi, \psi, \neg\neg(\varphi \rightarrow \neg\psi)\}$	$\vdash \neg\psi$	(MP): (1), (5)
(7)	$\{\varphi, \psi, \neg\neg(\varphi \rightarrow \neg\psi)\}$	$\vdash \neg\psi \rightarrow (\psi \rightarrow \bot)$	(S8.3).(ii)
(8)	$\{\varphi, \psi, \neg\neg(\varphi \rightarrow \neg\psi)\}$	$\vdash \psi \rightarrow \bot$	(MP): (6), (7)
(9)	$\{\varphi, \psi, \neg\neg(\varphi \rightarrow \neg\psi)\}$	$\vdash \bot$	(MP): (2), (8)
(10)	$\{\varphi, \psi\}$	$\vdash \neg(\varphi \rightarrow \neg\psi)$	(9) şi (S8.2).

Demonstrăm (iv), implicaţia "$\Rightarrow$":

(1)	$\{\varphi, \psi\}$	$\vdash \chi$	Ipoteză
(2)	$\{\varphi\}$	$\vdash \psi \to \chi$	Teorema deducţiei
(3)		$\vdash \varphi \to (\psi \to \chi)$	Teorema deducţiei
(4)	$\{\varphi \land \psi\}$	$\vdash \varphi \to (\psi \to \chi)$	(3)
(5)	$\{\varphi \land \psi\}$	$\vdash \varphi$	(i)
(6)	$\{\varphi \land \psi\}$	$\vdash \psi \to \chi$	(MP): (4), (5)
(7)	$\{\varphi \land \psi\}$	$\vdash \psi$	(ii)
(8)	$\{\varphi \land \psi\}$	$\vdash \chi$	(MP): (6), (7).

Demonstrăm (iv), implicaţia "$\Leftarrow$":

(1)	$\{\varphi \land \psi\}$	$\vdash \chi$	Ipoteză
(2)		$\vdash (\varphi \land \psi) \to \chi$	Teorema deducţiei
(3)	$\{\varphi, \psi\}$	$\vdash (\varphi \land \psi) \to \chi$	(2)
(4)	$\{\varphi, \psi\}$	$\vdash \varphi \land \psi$	(iii)
(5)	$\{\varphi, \psi\}$	$\vdash \chi$	(MP): (3), (4).

$\square$