

Seminar 8

(S8.1) Demonstrați că următoarele afirmații sunt echivalente:

- (V1) Pentru orice $\Gamma \subseteq Form$, Γ este satisfiabilă dacă Γ este finit satisfiabilă.
- (V2) Pentru orice $\Gamma \subseteq Form$, Γ este nesatisfiabilă dacă Γ nu este finit satisfiabilă.
- (V3) Pentru orice $\Gamma \subseteq Form$, $\varphi \in Form$, $\Gamma \models \varphi$ dacă și numai dacă $\Gamma \models_{fin} \varphi$.

Demonstrație:

Echivalența între (V1) și (V2) este evidentă.

Demonstrăm că (V2) \Rightarrow (V3):

$$\begin{aligned} \Gamma \models \varphi &\iff \Gamma \cup \{\neg\varphi\} \text{ este nesatisfiabilă (conform Propoziției 7.11.(i))} \\ &\iff \Gamma \cup \{\neg\varphi\} \text{ nu este finit satisfiabilă (conform (V2) pentru } \Gamma \cup \{\neg\varphi\}) \\ &\iff \Gamma \models_{fin} \varphi \text{ (conform (S7.4)).} \end{aligned}$$

Demonstrăm că (V3) \Rightarrow (V2):

$$\begin{aligned} \Gamma \text{ este nesatisfiabilă} &\iff \Gamma \models \perp \text{ (conform Propoziției 7.10)} \\ &\iff \Gamma \models_{fin} \perp \text{ (conform (V3) pentru } \Gamma \text{ și } \perp) \\ &\iff \text{există o submulțime finită } \Delta \text{ a lui } \Gamma \text{ a.î. } \Delta \models \perp \\ &\iff \text{există o submulțime finită } \Delta \text{ a lui } \Gamma \text{ a.î.} \\ &\quad \Delta \text{ este nesatisfiabilă (conform Propoziției 7.10)} \\ &\iff \Gamma \text{ nu este finit satisfiabilă.} \end{aligned}$$

□

(S8.2) (Metoda reducerii la absurd)

Să se arate că pentru orice mulțime de formule Γ și orice formule φ, ψ ,

$$\Gamma \cup \{\neg\psi\} \vdash \neg(\varphi \rightarrow \varphi) \Rightarrow \Gamma \vdash \psi.$$

Demonstrație:

Avem

(1)	$\Gamma \cup \{\neg\psi\} \vdash \neg(\varphi \rightarrow \varphi)$	Ipoteză
(2)	$\Gamma \vdash \neg\psi \rightarrow \neg(\varphi \rightarrow \varphi)$	Teorema deducției
(3)	$\Gamma \vdash (\neg\psi \rightarrow \neg(\varphi \rightarrow \varphi)) \rightarrow ((\varphi \rightarrow \varphi) \rightarrow \psi)$	(A3) și Propoziția 8.5.(i)
(4)	$\Gamma \vdash (\varphi \rightarrow \varphi) \rightarrow \psi$	(MP): (2), (3)
(5)	$\Gamma \vdash \varphi \rightarrow \varphi$	Propozițiile 8.13 și 8.7.(ii)
(6)	$\Gamma \vdash \psi$	(MP): (4), (5).

□

(S8.3) Să se arate că pentru orice formule φ, ψ ,

- (i) $\{\psi, \neg\psi\} \vdash \varphi$;
- (ii) $\vdash \neg\psi \rightarrow (\psi \rightarrow \varphi)$;
- (iii) $\vdash \neg\neg\varphi \rightarrow \varphi$;
- (iv) $\vdash \varphi \rightarrow \neg\neg\varphi$.

Demonstrație: Demonstrăm (i):

(1)	$\vdash \neg\psi \rightarrow (\neg\varphi \rightarrow \neg\psi)$	(A1)
(2)	$\{\neg\psi\} \vdash \neg\varphi \rightarrow \neg\psi$	Teorema deducției
(3)	$\{\neg\psi\} \vdash (\neg\varphi \rightarrow \neg\psi) \rightarrow (\psi \rightarrow \varphi)$	(A3) și Propoziția 8.5.(i)
(4)	$\{\neg\psi\} \vdash \psi \rightarrow \varphi$	(MP): (2), (3)
(5)	$\{\psi, \neg\psi\} \vdash \varphi$	Teorema deducției.

Punctul (ii) se obține din (i) aplicând de două ori Teorema deducției:

(1)	$\{\psi, \neg\psi\} \vdash \varphi$	(S8.3).(i)
(2)	$\{\neg\psi\} \vdash \psi \rightarrow \varphi$	Teorema deducției
(3)	$\vdash \neg\psi \rightarrow (\psi \rightarrow \chi)$	Teorema deducției.

Demonstrăm în continuare (iii).

(1)	$\{\neg\varphi, \neg\neg\varphi\} \vdash \neg(\varphi \rightarrow \varphi)$	(i)
(2)	$\{\neg\neg\varphi\} \vdash \varphi$	(1) și (S8.2)
(3)	$\vdash \neg\neg\varphi \rightarrow \varphi$	Teorema deducției.

Demonstrăm (iv):

(1)	$\vdash \neg\neg\neg\varphi \rightarrow \neg\varphi$	(iii) cu $\varphi := \neg\varphi$
(2)	$\vdash (\neg\neg\neg\varphi \rightarrow \neg\varphi) \rightarrow (\varphi \rightarrow \neg\neg\varphi)$	(A3)
(3)	$\vdash \varphi \rightarrow \neg\neg\varphi$	(MP): (1), (2).

□

(S8.4) (“Reciproca” axiomei 3)

Să se arate că pentru orice formule φ, ψ ,

$$\vdash (\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\neg\psi \rightarrow \neg\varphi).$$

Demonstrație:

(1)	$\{\varphi \rightarrow \psi, \neg\psi, \neg\neg\varphi\}$	$\vdash \varphi \rightarrow \psi$	Propoziția 8.5.(ii)
(2)	$\{\varphi \rightarrow \psi, \neg\psi, \neg\neg\varphi\}$	$\vdash \neg\psi$	Propoziția 8.5.(ii)
(3)	$\{\varphi \rightarrow \psi, \neg\psi, \neg\neg\varphi\}$	$\vdash \neg\neg\varphi$	Propoziția 8.5.(ii)
(4)	$\{\varphi \rightarrow \psi, \neg\psi, \neg\neg\varphi\}$	$\vdash \neg\neg\varphi \rightarrow \varphi$	(S8.3).(iii) și Propoziția 8.7.(ii)
(5)	$\{\varphi \rightarrow \psi, \neg\psi, \neg\neg\varphi\}$	$\vdash \varphi$	(MP): (3), (4)
(6)	$\{\varphi \rightarrow \psi, \neg\psi, \neg\neg\varphi\}$	$\vdash \psi$	(MP): (1), (5)
(7)	$\{\varphi \rightarrow \psi, \neg\psi, \neg\neg\varphi\}$	$\vdash \neg\psi \rightarrow (\psi \rightarrow \neg(\varphi \rightarrow \varphi))$	(S8.3).(ii) și Propoziția 8.7.(ii)
(8)	$\{\varphi \rightarrow \psi, \neg\psi, \neg\neg\varphi\}$	$\vdash \psi \rightarrow \neg(\varphi \rightarrow \varphi)$	(MP): (2), (7)
(9)	$\{\varphi \rightarrow \psi, \neg\psi, \neg\neg\varphi\}$	$\vdash \neg(\varphi \rightarrow \varphi)$	(MP): (6), (8)
(10)	$\{\varphi \rightarrow \psi, \neg\psi\}$	$\vdash \neg\varphi$	(9) și (S8.2)
(11)	$\{\varphi \rightarrow \psi\}$	$\vdash \neg\psi \rightarrow \neg\varphi$	Teorema deducției
(12)		$\vdash (\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\neg\psi \rightarrow \neg\varphi)$	Teorema deducției.

□