Definiții

SPAȚIU VECTORIAL

Fie $(\mathbb{K},+,\cdot)$ corp comutativ.

Fie $V \neq \emptyset$. Spunem că V e spațiu vectorial peste $\mathbb{K}$ $\Longleftrightarrow$

$\exists\ + : V\times V \to V$ lege internă

$\cdot\ : \mathbb{K}\times V \to V$ lege ext. a.î.

1. $(V,+)$ – grup abelian
2. $a\cdot(bx) = (ab)x$, $\forall a,b\in\mathbb{K}$, $\forall x\in V$
3. $a(x+y) = ax + ay$
4. $(a+b)x = ax + bx$.
5. $1_{\mathbb{K}}\cdot x = x$.

Not. $(V,+,\cdot)/_{\mathbb{K}}$. (El. lui V s.n. vectori; El. lui $\mathbb{K}$ s.n. scalari)

SUBSPAȚIU VECTORIAL

$(V,+,\cdot)/_{\mathbb{K}}$ spațiu vectorial, $V' \subset V$. Spunem că V' e subspațiu vectorial al lui V $\Longleftrightarrow$ V' e $\neq\emptyset$ închisă la $\begin{cases} \text{„+" vectorilor} \\ \text{„·" cu scalari} \end{cases}$

$\forall x,y\in V'$, $\forall a,b\in\mathbb{K}$ avem că $ax+by\in V'$

SLI

$(V,+,\cdot)/\mathbb{K}$ sp. vect; $S \subset V$ nevidă.

S s.n. sistem liniar independent $\Longleftrightarrow$ $\begin{cases} \forall x_1,\dots,x_n\in S \\ \forall a_1,\dots,a_n\in\mathbb{K} \end{cases}$ cu

$a_1x_1+\dots+a_nx_n = 0 \Rightarrow a_1 = a_2 \dots = a_n = 0_{\mathbb{K}}$.

$\longrightarrow$ $(V,+,\cdot)/_{\mathbb{K}}$ sp vect, $x\in V$, $x \in 0_V$ $\not\Rightarrow$ $\{x\}$ e SLI

$\rightarrow$ Orice submulț. a unui SLI e un SLI

$\rightarrow$ Orice supramulțime a unui SLI e un SLD.

SG.

$(V,+,\cdot)/_{\mathbb{K}}$ sp. vect. S s.n sistem de generatori $\Leftrightarrow$ $\langle S \rangle = V$

$S \subset V$ nevidă

$$\left(\forall x \in V \ \exists x_1, \dots, x_n \in S \atop \exists a_1, \dots, a_n \in \mathbb{K} \quad \text{a.î. } x = a_1 x_1 + \dots + a_n x_n \right).$$

$\rightarrow \forall$ supramulțime a unui sist. de generatori e un SG.

BAZĂ

$(V,+,\cdot)/_{\mathbb{K}}$ sp. vect. $B \subset V$ submulț. nevidă.

B s.n. bază a lui B $\Leftrightarrow$ 1. B e SLI
2. B e SG.

TEOREMA SCHIMBULUI

Fie $(V,+,\cdot)/\mathbb{K}$ sp. vectorial.

$\{x_1,\dots,x_n\} \subset V$ sist. de generatori.

$\{y_1,\dots,y_n\} \subset V$ sist. liniar indep.

Atunci $\{y_1,\dots,y_n\}$ este sistem de generatori.

<u>DEM</u> $\left.\begin{array}{l}\langle\{x_1,\dots,x_n\}\rangle = V \\ y_1 \in V\end{array}\right\} \Rightarrow \exists\, a_1,\dots,a_n \in \mathbb{K}$ a.î. $y_1 = a_1x_1 + \dots + a_nx_n$

Dacă $a_1 = \dots = a_n = 0_{\mathbb{K}} \Rightarrow y_1 = 0_V \in \{y_1,\dots,y_n\}$ SLI $\cancel{\times}$.

Deci $\exists\, a_1 \neq 0_{\mathbb{K}}$ (eventual renumerotăm).

$x_1 = \frac{1}{a_1}(y_1 - a_2x_2 - \dots - a_nx_n) \Rightarrow V = \langle\{x_1,\dots,x_n\}\rangle = \langle\{y_1,x_2,\dots,x_n\}\rangle$

$\Rightarrow \exists\, b_1,\dots,b_n \in \mathbb{K}$ a.î. $y_2 = b_1y_1 + b_2x_2 + \dots + b_nx_n$ $*$

Dacă $b_2 = b_3 = \dots = 0_{\mathbb{K}}$ 1) $b_1 = 0_{\mathbb{K}} \Rightarrow y_2 = 0_V$ $\cancel{\times}$ (SLI).

2) $b_1 \neq 0_{\mathbb{K}} \Rightarrow y_2 = b_1y_1 \Rightarrow$

$\Rightarrow b_1y_1 - y_2 + 0y_3 + \dots + 0y_n = 0_V$

dar $\{y_1,\dots,y_n\}$ SLI $\cancel{\times}$.

$\Rightarrow \exists$, eventual renumerotând, $b_2 = 0_{\mathbb{K}}$. $\overset{*}{\Rightarrow} x_2 = \frac{1}{b_2}(y_2 - b_1y_1 - b_3x_3 - \dots - b_nx_n)$

$V = \langle\{x_1,x_2,\dots,x_n\}\rangle = \langle\{y_1,x_2,\dots,x_n\}\rangle = \langle\{y_1,y_2,x_3,\dots,x_n\}\rangle$

Repetând raționamentul și după un nr. finit de pași avem:

$V = \langle\{y_1,\dots,y_n\}\rangle \Rightarrow \{y_1,\dots,y_n\}$ este S.G.

$\longrightarrow$ Obs: $|\{x_1,\dots,x_n\}| = |\{y_1,\dots,y_n\}| = \underline{\underline{n}}$

$\forall$ două baze au același cardinal.

$(V,+,\cdot)/_{\mathbb{K}}$ sp. vectorial finit generat.

$B_1, B_2 \subset V$ baze. Atunci $|B_1| = |B_2|$

Dem

B_1, B_2 baze $\Rightarrow \begin{cases} B_1, B_2 \text{ SG} \\ B_1, B_2 \text{ SLI} \end{cases}$

$$\left.\begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} B_1 \text{ SG.} \\ B_2 \text{ SLI} \end{array}\right\} \Rightarrow |B_1| \geq |B_2| \\ \text{Analog } |B_2| \geq |B_1| \end{array}\right\} \Rightarrow |B_1| = |B_2|.$$

$\longrightarrow$ Consecință: $\dim_{\mathbb{K}} V = n$ = cardinalul unei baze.
= nr. max. de vectori liniari indep.
= nr. min. de vectori care formează SG.

$B = \{e_1, \dots, e_n\} \Rightarrow |B| = n$. UASE:
1) B bază
2) B SLI
3) B SG.

MODIF. COMP. UNUI VECTOR LA SCH. REPERULUI:

Fie $(V,+,\cdot)/_{\mathbb{K}}$ spațiu vect, $\dim_{\mathbb{K}} V = n$; $R = \{e_1, \dots, e_n\}$ reper.

$(\forall)\, x \in V \Rightarrow x$ se scrie în mod unic $x = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n$.

$(x_1, \dots, x_n)$ = componentele lui x în rap. cu reperul R.

$$R = \{e_1, \dots, e_n\} \xrightarrow[i,j=\overline{1,n}]{A=(a_{ij})} R' = \{e_1', \dots, e_n'\}.$$

$$\boxed{e_i' = \sum_{j=1}^{n} a_{ji}\, e_j \quad \forall\, i = \overline{1,n}}$$

$e_1' = a_{11} e_1 + a_{21} e_2 + \dots + a_{n1} e_n \Rightarrow$ coloana 1 a lui A.

$e_n' = a_{1n} e_1 + a_{2n} e_2 + \dots + a_{nn} e_n \Rightarrow$ coloana n a lui A

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & & a_{nn} \\ e_1' & e_2' & & e_n' \end{pmatrix}$$

Deci $x = \sum_{i=1}^{n} x_i' e_i' = \sum_{i=1}^{n} x_i' \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ji} e_j\right) = \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{n} a_{ji} x_i'\right) e_j \Rightarrow$

$$\Rightarrow \boxed{x_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ji} \cdot x_i' \quad \forall\, j = \overline{1,n}}$$

$$\boxed{X = AX'}$$

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \qquad X' = \begin{pmatrix} x_1' \\ \vdots \\ x_n' \end{pmatrix} \qquad A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$\longrightarrow$ Un sistem de K vectori dintr-un spațiu vectorial ($n = \dim_{\mathbb{K}} V$) e SLI $\Longleftrightarrow$ matricea comp. vectorilor (în orice reper) are rg. maxim K.

OPERAȚII CU SUBSPAȚII VECTORIALE

$(V, +, \cdot)/\mathbb{K}$ sp. vect.

V_1, V_2 – ssp. vect.

→ $V_1 \cap V_2$ este ssp. vect.

→ În general, $V_1 \cup V_2$ nu e subspațiu vect.

Atunci, construim $\langle V_1 \cup V_2 \rangle \overset{\text{not.}}{=\!=} V_1 + V_2 \Leftrightarrow$ spațiu vect. generat de $V_1 \cup V_2$ sau acoperirea liniară a lui $V_1 \cup V_2$

$V_1 + V_2 = \{v_1 + v_2 \mid v_1 \in V_1, v_2 \in V_2\}$ unde V_1, V_2 ssp vect.

Def V – sp. vect; V_1, V_2 ssp vect $\subset V$.

Suma $V_1 + V_2$ s.n sumă directă și se not $V_1 \oplus V_2 \Leftrightarrow V_1 \cap V_2 = \{0_V\}$

→ $v \in V_1 \oplus V_2$ se scrie unic $v = v_1 + v_2$ cu $v_1 \in V_1$, $v_2 \in V_2$.

Dem „⇒" Suma e directă → $V_1 \cap V_2 = \{0_V\}$.

Pp prin RA. că $(\forall) v \in V_1 + V_2$ se poate scrie $v_1 + v_2 = v_1' + v_2'$, cu $v_1, v_1' \in V_1$ și $v_2, v_2' \in V_2$.

$\underbrace{v_1 - v_1'}_{\in V_1} = \underbrace{v_2 - v_2'}_{\in V_2} \in V_1 \cap V_2 = \{0_V\} \Rightarrow \begin{cases} v_1 = v_1' \\ v_2 = v_2' \end{cases}$ → scrierea este unică

„⇐" $(\forall) v \in V_1 + V_2$ se scrie în mod unic $v = v_1 + v_2$ cu $v_1 \in V_1$ și $v_2 \in V_2$

Dem. că $V_1 \cap V_2 = \{0_V\}$.

Pp. prin RA că $\exists\, x \neq 0_V$, $x \in V_1 \cap V_2$.

$v = v_1 + v_2 = \underbrace{(v_1 + x)}_{\in V_1} + \underbrace{(v_2 - x)}_{\in V_2}$ $\cancel{\infty}$

2

TH. GRASSMAN

Fie $(V,+,\cdot)/_{\mathbb{K}}$ spațiu vectorial finit generat. $V_1, V_2 \sqsubset V$ ssp. vect.

$\Rightarrow \dim(V_1+V_2) = \dim V_1 + \dim V_2 - \dim(V_1 \cap V_2)$.

DEM: $\dim V = n$; $\dim V_1 = n_1$; $\dim V_2 = n_2$; $\dim(V_1\cap V_2) = p$.

Fie $\{e_1,\dots,e_p\}$ reper în $V_1 \cap V_2$. Extindem la $R_1 = \{e_1,\dots,e_p, f_{p+1},\dots,f_{n_1}\}$ reper în V_1. Extindem la $R_2 = \{e_1,\dots,e_p, g_{p+1},\dots,g_{n_2}\}$ reper în V_2.

$\longrightarrow$ Dem. că $\dim(V_1+V_2) = n_1+n_2-p$.

Dem că $R = \{\underbrace{e_1,\dots,e_p}_{p \text{ vect.}}, \underbrace{\underbrace{f_{p+1},\dots,f_{n_1}}_{(n_1-p)\text{ vect}}, \underbrace{g_{p+1},\dots,g_{n_2}}_{(n_2-p)\text{ vect.}}}_{n_1+n_2-p \text{ vect.}}\}$ reper în V_1+V_2

$\longrightarrow$ Arătam că R e SLI.

Fie $a_1,\dots,a_p$, $b_{p+1},\dots,b_{n_1}$, $c_{p+1},\dots,c_{n_2}$ $\in \mathbb{K}$ aî $\sum_{i=1}^{p} a_i e_i + \sum_{j=p+1}^{n_1} b_j f_j + \sum_{s=p+1}^{n_2} c_s g_s = 0$

① $\underbrace{\sum_{i=1}^{p} a_i e_i + \sum_{j=p+1}^{n_1} b_j f_j}_{\in V_1} = \underbrace{-\sum_{s=p+1}^{n_2} c_s g_s}_{\in V_2} \in V_1\cap V_2 = \langle\{e_1,\dots,e_p\}\rangle$

$\sum_{i=1}^{p} a_i e_i + \sum_{j=p+1}^{n_1} b_j f_j = \sum_{i=1}^{p} a_i' e_i \Rightarrow \sum_{i=1}^{p}(a_i - a_i')e_i + \sum_{j=p+1}^{n_1} b_j f_j = 0$

$\xRightarrow{R_1 \text{ SLI}}$ $a_i - a_i' = 0$, $\forall i = \overline{1,p}$
$b_j = 0$, $\forall j = \overline{p+1,n_1}$

② $-\sum_{s=p+1}^{n_2} c_s g_s = \sum_{i=1}^{p} a_i' e_i \Rightarrow \sum_{i=1}^{p} a_i' e_i + \sum_{s=p+1}^{n_2} c_s g_s = 0 \xRightarrow{R_2 \text{ SLI}} \begin{cases} a_i' = 0, \ \forall i=\overline{1,p} \\ c_s = 0, \ \forall s = \overline{p+1,n_2} \end{cases}$

$\Rightarrow a_i = 0 \ \forall i = \overline{1,p}$, $c_s = 0$, $\forall s = \overline{p+1,n_2}$, $b_j = 0$, $\forall j = \overline{p+1,n_1}$

Deci R e SLI

$\longrightarrow$ Dem. că R e SG.

$\forall v \in V_1+V_2 \overset{?}{\Rightarrow} \exists\, a_1,\dots,a_p$, $b_{p+1},\dots,b_{n_1}$, $c_{p+1},\dots,c_{n_2}$ aî $v = \sum_{i=1}^{p} a_i e_i + \sum_{j=p+1}^{n_1} b_j f_j + \sum_{s=p+1}^{n_2} c_s g_s$.

$v \in V_1+V_2 \Rightarrow v = \underset{V_1}{\underset{\cap}{v_1}} + \underset{V_2}{\underset{\cap}{v_2}} \Rightarrow v = \left(\sum_{i=1}^{p} a_i' e_i + \sum_{j=p+1}^{n_1} b_j f_j\right) + \left(\sum_{i=1}^{p} a_i'' e_i + \sum_{s=p+1}^{n_2} c_s g_s\right)$

$\Rightarrow \sum_{i=1}^{p}(a_i' + a_i'')e_i + \sum_{j=p+1}^{n_1} b_j f_j + \sum_{s=p+1}^{n_2} c_s g_s$. Deci $v \in \langle R\rangle$

R reper pt V_1+V_2. $|R| = \dim V_1 + \dim V_2 - \dim(V_1\cap V_2)$

TH. DIM. PT. APLICAȚII LINIARE:

$f: V_1 \to V_2$ aplicație liniară.

$(V_1,+,\cdot)/_{\mathbb{K}}$ și $(V_2,+,\cdot)/_{\mathbb{K}}$ spații vectoriale. Atunci $\dim V_1 = \dim \operatorname{Ker} f + \dim \operatorname{Im} f$

DEM

Fie $R_0 = \{e_1, \dots, e_k\}$ reper în $\operatorname{Ker} f \subset V_1$ sp. vect.

Extindem la $R_1 = \{e_1, \dots, e_k, e_{k+1}, \dots, e_n\}$ reper în V_1.

$\dim \operatorname{Ker} f = k$, $\dim V_1 = n$, $k \leq n$.

Arătăm că $R = \{f(e_{k+1}), \dots, f(e_n)\}$ reper în $\operatorname{Im} f$.

<u>R SLi</u>

Fie $\alpha_j \in \mathbb{K}$, $j = \overline{k+1,n}$ a.î. $\sum_{j=k+1}^{n} \alpha_j f(e_j) = 0_{V_2} \xrightarrow{f \text{ lin}} f\left(\sum_{j=k+1}^{n} \alpha_j e_j\right) = 0_{V_2}$

$\Rightarrow \sum_{j=k+1}^{n} \alpha_j e_j \in \operatorname{Ker} f = \langle R_0 \rangle$

$\sum_{j=k+1}^{n} \alpha_j e_j = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i e_i$, $\alpha_i \in \mathbb{K}$, $i = \overline{1,n}$.

$\underbrace{\sum_{i=1}^{k} \alpha_i e_i - \sum_{j=k+1}^{n} \alpha_j e_j}_{\in \langle R_1 \rangle \text{ și } R_1 \text{ SLi}} = 0 \Rightarrow \alpha_1 = 0, \dots, \alpha_k = 0$, $\alpha_{k+1} = 0, \dots, \alpha_n = 0 \Rightarrow R$ SLi.

<u>R SG</u>

$\forall y \in \operatorname{Im} f \Rightarrow \exists\, \alpha_{k+1}, \dots, \alpha_n \in \mathbb{K}$ a.î. $y = \sum_{j=k+1}^{n} \alpha_j f(e_j)$.

$y \in \operatorname{Im} f \Rightarrow (\exists)\, x \in V_1 = \langle R_1 \rangle$ a.î. $f(x) = y$.

$\Rightarrow (\exists)\, \alpha_1, \dots, \alpha_k, \alpha_{k+1}, \dots, \alpha_n \in \mathbb{K}$ a.î. $x = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i e_i + \sum_{j=k+1}^{n} \alpha_j e_j$.

$f(x) = f\left(\sum_{i=1}^{k} \alpha_i e_i + \sum_{j=k+1}^{n} \alpha_j e_j\right)$

$\overset{f \text{ lin.}}{=} f\left(\sum_{i=1}^{k} \alpha_i e_i\right) + f\left(\sum_{j=k+1}^{n} \alpha_j e_j\right) =$

$y = f(x) = f\left(\sum_{j=k+1}^{n} \alpha_j e_j\right) = \sum_{j=k+1}^{n} \alpha_j f(e_j)$. Deci $R = \{f(e_{k+1}), \dots, f(e_n)\}$ reper în $\operatorname{Im} f$.

$\dim \operatorname{Im} f = |R| = n - k$

$\dim V_1 = n = k + n - k = \dim \operatorname{Ker} f + \dim \operatorname{Im} f$

TH. DIM. PT. APLICAȚII LINIARE:

$f: V_1 \to V_2$ aplicație liniară.

$(V_1, +, \cdot)/_{\mathbb{K}}$ și $(V_2, +, \cdot)/_{\mathbb{K}}$ spații vectoriale. Atunci $\dim V_1 = \dim \operatorname{Ker} f + \dim \operatorname{Im} f$

DEM

Fie $R_0 = \{e_1, \dots, e_k\}$ reper în $\operatorname{Ker} f \subset V_1$ ssp. vect.

Extindem la $R_1 = \{e_1, \dots, e_k, e_{k+1}, \dots, e_n\}$ reper în V_1.

$\dim \operatorname{Ker} f = k$, $\dim V_1 = n$, $k \le n$.

Arătăm că $R = \{f(e_{k+1}), \dots, f(e_n)\}$ reper în $\operatorname{Im} f$.

$\underline{R \text{ SLI}}$

Fie $\alpha_j \in \mathbb{K}$, $j = \overline{k+1, n}$ a.î. $\sum\limits_{j=k+1}^{n} \alpha_j f(e_j) = 0_{V_2} \xrightarrow{f \text{ lin}} f\left(\sum\limits_{j=k+1}^{n} \alpha_j e_j\right) = 0_{V_2}$

$\Rightarrow \sum\limits_{j=k+1}^{n} \alpha_j e_j \in \operatorname{Ker} f = \langle R_0 \rangle$

$\sum\limits_{j=k+1}^{n} \alpha_j e_j = \sum\limits_{i=1}^{k} \alpha_i e_i$, $\alpha_i \in \mathbb{K}$, $i = \overline{1, n}$.

$\underbrace{\sum\limits_{i=1}^{k} \alpha_i e_i - \sum\limits_{j=k+1}^{n} \alpha_j e_j}_{\in \langle R_1 \rangle \text{ și } R_1 \text{ SLI}} = 0 \Rightarrow \alpha_1 = 0, \dots, \alpha_k = 0$, $\alpha_{k+1} = 0, \dots, \alpha_n = 0$ $\Rightarrow R$ SLI.

$\underline{R \text{ SG}}$

$\forall y \in \operatorname{Im} f \Rightarrow \exists\, \alpha_{k+1}, \dots, \alpha_n \in \mathbb{K}$ a.î. $\underline{y = \sum\limits_{j=k+1}^{n} \alpha_j f(e_j)}$.

$y \in \operatorname{Im} f \Rightarrow (\exists)\, x \in V_1 = \langle R_1 \rangle$ a.î. $f(x) = y$.

$\Rightarrow (\exists)\, \alpha_1, \dots, \alpha_k, \alpha_{k+1}, \dots, \alpha_n \in \mathbb{K}$ a.î. $x = \sum\limits_{i=1}^{k} \alpha_i e_i + \sum\limits_{j=k+1}^{n} \alpha_j e_j$.

$f(x) = f\left(\sum\limits_{i=1}^{k} \alpha_i e_i + \sum\limits_{j=k+1}^{n} \alpha_j e_j\right)$

$\overset{f \text{ lin}}{=} f\left(\sum\limits_{i=1}^{k} \alpha_i e_i\right) + f\left(\sum\limits_{j=k+1}^{n} \alpha_j e_j\right) =$

$y = f(x) = f\left(\sum\limits_{j=k+1}^{n} \alpha_j e_j\right) = \sum\limits_{j=k+1}^{n} \alpha_j f(e_j)$. Deci $R = \{f(e_{k+1}), \dots, f(e_n)\}$ reper în $\operatorname{Im} f$.

$\dim \operatorname{Im} f = |R| = n - k$

$\dim V_1 = n = k + n - k = \dim \operatorname{Ker} f + \dim \operatorname{Im} f$.

(TH) $(V_1,+,\cdot)$, $(V_2,+,\cdot)$ sp. vect finit generate.

$V_1 \simeq V_2 \iff \dim_{\mathbb{K}} V_1 = \dim_{\mathbb{K}} V_2$

„$\Rightarrow$" $V_1 \simeq V_2 \Rightarrow \exists f: V_1 \to V_2$ izomorfism de sp. vect. $\Rightarrow$ 1) f liniară 2) f bijecție $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} \ker f = \{0_{V_1}\} \Rightarrow \dim \ker f = 0 \\ \dim \operatorname{Im} f = \dim V_2 . \end{cases}$$

Din th. dim $\Rightarrow \dim V_1 = \dim \ker f + \dim V_2 = 0 + \dim V_2 = \dim V_2$.

„$\Leftarrow$" $\dim V_1 = \dim V_2$.

Construim $f: V_1 \to V_2$ izomorfism de spații vectoriale.

$R_1 = \{e_1, \dots, e_n\}$ reper în V_1. $\quad f(e_i) = e_i' \quad \forall i = \overline{1,n}$.

$R_2 = \{e_1', \dots, e_n'\}$ reper în V_2.

· Prelungim f prin liniaritate: $f(x) = f\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i f(e_i) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i'$.

· f bijectivă:

$\forall y \in V_2 \ \exists \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{K}$ a.î. $y = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i' \Rightarrow \exists!\, x = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i$ a.î. $f(x) = y$.

$\Rightarrow f: V_1 \to V_2$ izomorfism de spații vect. $\Rightarrow V_1 \simeq V_2$.

APLICAȚII LINIARE.

$(V_1,+,\cdot)/_{\mathbb{K}}$, $(V_2,+,\cdot)/_{\mathbb{K}}$; $f: V_1 \to V_2$ aplicație liniară $\Leftrightarrow$

$$\begin{cases} f(x_1+x_2) = f(x_1)+f(x_2) \\ f(\alpha x) = \alpha f(x) \end{cases}$$

$\Leftrightarrow f(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) = \alpha_1 f(x_1) + \alpha_2 f(x_2)$ $\forall x_1, x_2 \in V_1$
$\forall \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{K}$.

Def $(V_1,+,\cdot)/_{\mathbb{K}}$, $(V_2,+,\cdot)/_{\mathbb{K}}$ sp. vect și $f: V_1 \to V_2$ aplicație liniară.

$\mathrm{Ker} f = \{ x \in V_1 \mid f(x) = 0_{V_2} \}$

$\mathrm{Im} f = \{ y \in V_2 \mid \exists\, x \in V_1$ aî $f(x) = y \}$.

$\to \mathrm{Ker} f \subset V_1$ ssp. vect

$\to \mathrm{Im} f \subset V_2$ ssp. vect.

TH $f: V_1 \to V_2$ aplicație liniară.

a) f injectivă $\Leftrightarrow \mathrm{Ker} f = \{0_{V_1}\}$

b) f surjectivă $\Leftrightarrow \dim \mathrm{Im} f = \dim V_2$.

TH. DIM. PT. APLICAȚII LINIARE

$f: V_1 \to V_2$ aplicație liniară.

$(V_1,+,\cdot)/_{\mathbb{K}}$ și $(V_2,+,\cdot)/_{\mathbb{K}}$ sp. vect.

- Atunci $\dim V_1 = \dim \mathrm{Ker}(f) + \dim \mathrm{Im} f$.

$\longrightarrow f: V_1 \to V_2$ izomorfism de spații vectoriale $\Leftrightarrow$

1) f liniară

2) f bijecție $\Leftrightarrow$ a) $\mathrm{Ker} f = \{0_{V_1}\}$ și $\dim \mathrm{Im} f = \dim V_2$.

$\longrightarrow f: V \to V$ endomorfism (i.e $f \in \mathrm{End}\, V$).

$\dim V = \dim \mathrm{Ker} f + \dim \mathrm{Im} f$.

$\mathrm{Ker} f, \mathrm{Im} f \subset V$ ssp. vect

$\Rightarrow V = \mathrm{Ker} f \oplus \mathrm{Im} f$.

CARACT. APLICAȚIILOR LINIARE
INJ, BIJ, SURJ.

$f: V \to V'$ aplicație liniară.

[a) f injectivă $\Longleftrightarrow$ f transformă orice SLI din V într-un SLI din V'

(DEM) „$\Rightarrow$" f inj. Fie $S = \{e_1, \dots, e_k\} \underset{V}{\subset}$ SLI $\overset{?}{\Rightarrow} S' = \{f(e_1), \dots, f(e_k)\} \underset{V'}{\subset}$ SLI

Fie $a_1, \dots, a_k \in \mathbb{K}$ a.î. $\sum_{i=1}^{k} a_i \cdot f(e_i) = 0_{V'} \xRightarrow{f \text{ lin}} f\left(\sum_{i=1}^{k} a_i e_i\right) = 0_{V'} \Rightarrow$

$\Rightarrow \sum_{i=1}^{k} a_i e_i \in \operatorname{Ker} f = \{0_V\} \Rightarrow \sum_{i=1}^{k} a_i e_i = 0 \xRightarrow{S \text{ SLI}} a_i = 0, \forall i = \overline{1,k}$.

$\Rightarrow S$ SLI.

„$\Leftarrow$" $\forall S \subset V$ un SLI $\Rightarrow S' = f(S) \subset V'$ e SLI. Dem f inj, i.e. $\operatorname{Ker} f = \{0_V\}$.

Pp. prin RA. că $\exists x \neq 0_V \in \operatorname{Ker} f \Rightarrow \{x\}$ SLI $\Rightarrow \{f(x)\}$ SLI

$\Rightarrow f(x) \neq 0_V$, dar $f(x) = 0$ ($x \in \operatorname{Ker} f$) $\Rightarrow$ ↯.

Deci $\operatorname{Ker} f = \{0_V\} \Rightarrow f$ inj.

[b) f surj $\Longleftrightarrow$ f transformă orice SG din V într-un SG din V'

(DEM) „$\Rightarrow$" f surj. Fie $S = \{e_1, \dots, e_k\} \underset{V}{\subset}$ SG $\Rightarrow V = \langle S \rangle$. Dem. că

$S' = \{f(e_1), \dots, f(e_k)\} \subset V'$ SG. i.e.

$(\forall y) \in V'$, $\exists a_1 \dots a_k \in \mathbb{K}$ a.î. $y = \sum_{i=1}^{k} a_i f(e_i)$.

f surj: $\forall y \in V'$, $\exists x \in V = \langle S \rangle$ a.î. $y = f(x) \Rightarrow y = f\left(\sum_{i=1}^{k} a_i e_i\right) \overset{f \text{ lin.}}{=}$

$= \sum_{i=1}^{k} a_i f(e_i) \in \langle S' \rangle \Rightarrow \exists a_1, \dots, a_k$ a.î. $x = \sum_{i=1}^{k} a_i e_i$.

$V' \subset \langle S' \rangle \Rightarrow V' = \langle S' \rangle \Rightarrow S'$ SG.

$\supset$ din construcție

„$\Leftarrow$" $\forall S \subset V$ a.î. $V = \langle S \rangle \Rightarrow V' = \langle f(S) \rangle$. Dem. f surj: $\forall y \in V'$

$\exists x \in V$ a.î. $f(x) = y$.

$y \in V' = \langle \{f(e_1), \dots, f(e_k)\} \rangle \Rightarrow \exists a_1 \dots a_k \in \mathbb{K}$ a.î. $y = \sum_{i=1}^{k} a_i f(e_i) =$

$= f\left(\sum_{i=1}^{k} a_i e_i\right)$. Considerăm $x = \sum_{i=1}^{k} a_i e_i$ $\Rightarrow f$ surj.

[c) f ... transformă orice bază din V într-o bază din V'

CARACT. APLICAȚIILOR LINIARE INJ, BIJ, SURJ.

$f: V \to V'$ aplicație liniară.

a) f injectivă $\Longleftrightarrow$ f transformă orice SLI din V într-un SLI din V'

DEM „$\Rightarrow$" f inj. Fie $S = \{e_1, \dots, e_k\} \subset V$ SLI $\overset{?}{\Rightarrow}$ $S' = \{f(e_1), \dots, f(e_k)\} \subset V'$ SLI

Fie $a_1, \dots, a_k \in \mathbb{K}$ a.î. $\sum_{i=1}^{k} a_i \cdot f(e_i) = 0_{V'} \overset{f \text{ lin}}{\Longrightarrow} f\left(\sum_{i=1}^{k} a_i e_i\right) = 0_{V'} \Rightarrow$

$\Rightarrow \sum_{i=1}^{k} a_i e_i \in \operatorname{Ker} f = \{0_V\} \Rightarrow \sum_{i=1}^{k} a_i e_i = 0 \overset{S \text{ SLI}}{\Longrightarrow} a_i = 0, \forall i = \overline{1,k}$.

$\Rightarrow S$ SLI.

„$\Leftarrow$" $\forall S \subset V$ un SLI $\Rightarrow S' = f(S) \subset V'$ e SLI. Dem f inj, i.e. $\operatorname{Ker} f = \{0_V\}$.

Pp. prin RA. că $\exists x \neq 0_V \in \operatorname{Ker} f \Rightarrow \{x\}$ SLI $\Rightarrow \{f(x)\}$ SLI

$\Rightarrow f(x) \neq 0_V$, dar $f(x) = 0$ ($x \in \operatorname{Ker} f$) $\Rightarrow$ ↯.

Deci $\operatorname{Ker} f = \{0_V\} \Rightarrow f$ inj.

b) f surj $\Longleftrightarrow$ f transformă orice SG din V într-un SG din V'

DEM „$\Rightarrow$" f surj. Fie $S = \{e_1, \dots, e_k\} \subset V$ SG $\Rightarrow V = \langle S \rangle$. Dem. că

$S' = \{f(e_1), \dots, f(e_k)\} \subset V'$ SG. i.e.

$(\forall y) \in V'$, $\exists a_1 \dots a_k \in \mathbb{K}$ a.î. $y = \sum_{i=1}^{k} a_i f(e_i)$.

f surj: $\forall y \in V'$, $\exists x \in V = \langle S \rangle$ a.î. $y = f(x) \Rightarrow y = f\left(\sum_{i=1}^{k} a_i e_i\right) \overset{f \text{ lin.}}{=}$

$= \sum_{i=1}^{k} a_i f(e_i) \in \langle S' \rangle \Rightarrow \exists a_1, \dots, a_k$ a.î. $x = \sum_{i=1}^{k} a_i e_i$.

$V' \subset \langle S' \rangle \Rightarrow V' = \langle S' \rangle \Rightarrow S'$ SG.

$\supset$ din construcție

„$\Leftarrow$" $\forall S \subset V$ a.î. $V = \langle S \rangle \Rightarrow V' = \langle f(S) \rangle$. Dem. f surj $\Rightarrow \forall y \in V'$

$\exists x \in V$ a.î. $f(x) = y$.

$y \in V' = \langle \{f(e_1), \dots, f(e_k)\} \rangle \Rightarrow \exists a_1 \dots a_k \in \mathbb{K}$ a.î. $y = \sum_{i=1}^{k} a_i f(e_i) =$

$= f\left(\sum_{i=1}^{k} a_i e_i\right)$. Considerăm $x = \sum_{i=1}^{k} a_i e_i$ $\Rightarrow f$ surj.

c) ... f transformă orice bază din V într-o bază din V'

CARACT. APLICAȚIILOR LINIARE
INJ, BIJ, SURJ.

$f: V \to V'$ aplicație liniară.

[a) f injectivă $\Longleftrightarrow$ f transformă orice SLI din V într-un SLI din V'

DEM „$\Rightarrow$" f inj. Fie $S = \{e_1, \dots, e_k\} \subset V$ SLI. $\overset{?}{\Rightarrow}$ $S' = \{f(e_1), \dots, f(e_k)\} \subset V'$ SLI

Fie $a_1, \dots, a_k \in \mathbb{K}$ a.î. $\sum_{i=1}^{k} a_i \cdot f(e_i) = 0_{V'} \xrightarrow{f \text{ lin}} f\left(\sum_{i=1}^{k} a_i e_i\right) = 0_{V'} \Rightarrow$

$\Rightarrow \sum_{i=1}^{k} a_i e_i \in \operatorname{Ker} f = \{0_V\} \Rightarrow \sum_{i=1}^{k} a_i e_i = 0 \xrightarrow{S \text{ SLI}} a_i = 0, \forall i = \overline{1,k}$.

$\Rightarrow S$ SLI.

„$\Leftarrow$" $\forall S \subset V$ un SLI $\Rightarrow S' = f(S) \subset V'$ e SLI. Dem f inj, i.e. $\operatorname{Ker} f = \{0_V\}$.

Pp. prin RA. că $\exists x \neq 0_V \in \operatorname{Ker} f \Rightarrow \{x\}$ SLI $\Rightarrow \{f(x)\}$ SLI

$\Rightarrow f(x) \neq 0_V$, dar $f(x) = 0$ $(x \in \operatorname{Ker} f) \Rightarrow$ ↯.

Deci $\operatorname{Ker} f = \{0_V\} \Rightarrow f$ inj.

[b) f surj $\Longleftrightarrow$ f transformă orice SG din V într-un SG din V'

DEM „$\Rightarrow$" f surj. Fie $S = \{e_1, \dots, e_k\} \subset V$ SG $\Rightarrow V = \langle S \rangle$. Dem. că

$S' = \{f(e_1), \dots, f(e_k)\} \subset V'$ SG. i.e.

$(\forall y) \in V'$, $\exists a_1 \dots a_k \in \mathbb{K}$ a.î. $y = \sum_{i=1}^{k} a_i f(e_i)$.

f surj: $\forall y \in V'$, $\exists x \in V = \langle S \rangle$ a.î. $y = f(x) \Rightarrow y = f\left(\sum_{i=1}^{k} a_i e_i\right) \overset{f \text{ lin.}}{=}$

$= \sum_{i=1}^{k} a_i f(e_i) \in \langle S' \rangle \Rightarrow \exists a_1, \dots, a_k$ a.î. $x = \sum_{i=1}^{k} a_i e_i$.

$V' \subset \langle S' \rangle \Rightarrow V' = \langle S' \rangle \Rightarrow S'$ SG.

$\supset$ din construcție

„$\Leftarrow$" $\forall S \subset V$ a.î. $V = \langle S \rangle \Rightarrow V' = \langle f(S) \rangle$. Dem. f surj $\Rightarrow \forall y \in V'$ $\exists x \in V$ a.î. $f(x) = y$.

$y \in V' = \langle \{f(e_1), \dots, f(e_k)\} \rangle \Rightarrow \exists a_1 \dots a_k \in \mathbb{K}$ a.î. $y = \sum_{i=1}^{k} a_i f(e_i) =$

$= f\left(\sum_{i=1}^{k} a_i e_i\right)$. Considerăm $x = \sum_{i=1}^{k} a_i e_i$ $\Rightarrow f$ surj.

[c) f bij $\Longleftrightarrow$ f transformă orice bază din V într-o bază din V'
$\dim V = \dim V' = n$.

MATRICEA ASOCIATĂ UNEI APLICAȚII LINIARE

$\dim V = n$; $\dim V' = m$

$f : V \to V'$ aplicație liniară . $R = \{e_1, \dots, e_n\}$ și $R' = \{e_1', \dots, e_m'\}$ repere în V și V'.

$$R = \{e_1, \dots, e_n\} \xrightarrow{A} R' = \{e_1', \dots, e_m'\}.$$

$$\left[\begin{array}{l} f(e_i) = \sum_{j=1}^{m} a_{ji}\, e_j' \quad \forall i = \overline{1,m} . \\ A = (a_{ji}),\ j = \overline{1,m},\ i = \overline{1,n} . \end{array}\right.$$

TH. DE CARACT. A APLICAȚIILOR LINIARE:

f liniară $\iff \exists A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ a.î. coord. oricărui vector $x \in V$ și coord lui $f(x) \in V'$ în rap. cu reperul $R \in V$, resp $R' \in V'$ verifică $Y = AX$, unde $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, $A = (a_{ji})$, $j = \overline{1,m}$, $i = \overline{1,n}$.

$x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$, $f(x) = y = \sum_{j=1}^{m} y_j e_j'$, $R = \{e_1, \dots, e_n\}$, $R' = \{e_1', \dots, e_m'\}$.

Modif. matricei la sch. reperelor .

$$\begin{tikzcd} R \arrow[r, "A=(a_{ji})"] \arrow[d, "C"'] & R' \arrow[d, "C'"] \\ R_1 \arrow[r, "A'"] & R_1' = \{h_1', \dots, h_m'\} \end{tikzcd}$$

$R_1 = \{h_1, \dots, h_n\}$.

$$AC = C'A'.$$

→ PROP.: Rangul matricei asociate unei aplicații liniare e invariant la schimbarea reperelor.

DEM) $AC = C'A' \Rightarrow A' = C'^{-1} A C$

C, C' inversabile .

$\operatorname{rang}(A') = \operatorname{rang}(C'^{-1} A C) = \operatorname{rang} A$.

→ $\dim \operatorname{Ker} f = n - \operatorname{rang} A$.

f inj $\iff \dim V = \operatorname{rg} A$.

f surj $\iff \dim V' = \operatorname{rg} A$.

f bij $\Rightarrow \dim V = \dim V' = \operatorname{rg} A$.

MATRICEA ASOCIATĂ UNEI APLICAȚII LINIARE

$\dim V = n$; $\dim V' = m$

$f : V \to V'$ aplicație liniară. $R = \{e_1, \dots, e_n\}$ și $R' = \{e_1', \dots, e_m'\}$ repere în V și V'.

$$R = \{e_1, \dots, e_n\} \xrightarrow{A} R' = \{e_1', \dots, e_m'\}.$$

$$\left[\begin{array}{l} f(e_i) = \sum_{j=1}^{m} a_{ji}\, e_j' \quad \forall i = \overline{1,n}. \\ A = (a_{ji}),\ j = \overline{1,m},\ i = \overline{1,n}. \end{array}\right.$$

TH. DE CARACT. A APLICAȚIILOR LINIARE:

f liniară $\Leftrightarrow \exists A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ a.î. coord. oricărui vector $x \in V$ și coord lui $f(x) \in V'$ în rap. cu reperul $R \in V$, resp $R' \in V'$ verifică $Y = AX$, unde $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, $A = (a_{ji})$, $j = \overline{1,m}$, $i = \overline{1,n}$.

$$x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i,\quad f(x) = y = \sum_{j=1}^{m} y_j e_j',\quad R = \{e_1, \dots, e_n\},\ R' = \{e_1', \dots, e_m'\}.$$

Modif. matricii la sch. reperelor.

$$\begin{tikzcd} R \arrow[r, "A=(a_{ji})"] \arrow[d, "C"'] & R' \arrow[d, "C'"] \\ R_1 \arrow[r, "A'"] & R_1' = \{f_1', \dots, f_m'\} \end{tikzcd}$$

$R_1 = \{f_1, \dots, f_n\}$.

$$AC = C'A'.$$

→ PROP.: Rangul matricii asociate unei aplicații liniare e invariant la schimbarea reperelor.

DEM) $AC = C'A' \Rightarrow A' = C'^{-1} A C$

C, C' inversabile.

$$\operatorname{rang}(A') = \operatorname{rang}(C'^{-1} A C) = \operatorname{rang} A.$$

→ $\dim \operatorname{Ker} f = n - \operatorname{rang} A$.

f inj $\Leftrightarrow \dim V = \operatorname{rg} A$.

f surj $\Leftrightarrow \dim V' = \operatorname{rg} A$.

f bij $\Leftrightarrow \dim V = \dim V' = \operatorname{rg} A$.

DEF :

$f \in End(V)$; $x \neq 0_V \in V$ se numește vector propriu $\Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{K}$ (λ s.n valoare proprie) a.î. $f(x) = \lambda x$.

$V_\lambda = \{0_V\} \cup$ mulț. vectorilor proprii coresp. val. proprii λ s.n. subspațiul propriu coresp. val. proprii λ.

Prop. $\rightarrow$ a) $V_\lambda \subset V$ ssp vect.

b) $f(V_\lambda) \subset V_\lambda$ (i.e. V_λ subspațiu invariant al lui f).

(DEM) a) $\forall x, y \in V_\lambda$ i.e $f(x) = \lambda x$, $f(y) = \lambda y$ arătăm $\alpha x + \beta y \in V_\lambda$

i.e $f(\alpha x + \beta y) = \lambda(\alpha x + \beta y)$

f liniară $\Rightarrow f(\alpha x + \beta y) = \alpha f(x) + \beta f(y) = \lambda \alpha x + \beta \lambda y = \lambda(\alpha x + \beta y)$.

b) Fie $x \in V_\lambda \Rightarrow f(x) = \lambda x \in V_\lambda \Rightarrow f(V_\lambda) \subset V_\lambda$.

$V_\lambda \subset V$ subspațiu invariant.

POLINOM CARACTERISTIC

$P(\lambda) = \det(A - \lambda I_n) = 0$

$\rightarrow$ Valorile proprii ale unui endomorfism sunt rădăcinile din $\mathbb{K}$ ale polin. caract.

Prop: Polinomul caract. este un invariant la schimbarea de reper.

DEM

$$\begin{array}{ccc} R = \{e_1, \dots, e_n\} & \xrightarrow{A} & R = \{e_1, \dots, e_n\} \\ C \downarrow & & \\ R' = \{e_1', \dots, e_n'\} & \xrightarrow{A'} & R' = \{e_1, \dots, e_n\}. \end{array}$$

$AC = C'A' = CA' \Rightarrow A' = C^{-1}AC$

$f(e_i) = \sum_{j=1}^{m} a_{ji} e_j \quad \forall i = \overline{1,n}$

$e_i' = \sum_{k=1}^{n} c_{ki} e_k, \quad \forall i = \overline{1,n}$

$C^{-1}AC - C^{-1}\lambda C = C^{-1}(AC - \lambda C) =$
$= C^{-1}(A - \lambda I_n) C$.

$\det(A' - \lambda I_n) = \det(C^{-1}AC - \lambda C^{-1}C) = \det[C^{-1}(A - \lambda I_n) C]$

$= \det C^{-1} \cdot \det(A - \lambda I_n) \cdot \det C = \det(A' - \lambda I_n) =$ invariantă

$f \in End(V)$; $x \neq 0_V \in V$ se numește vector propriu ... $\exists \lambda \in \mathbb{K}$ (λ s.n valoare proprie) ai $f(x) = \lambda x$.

$V_\lambda = \{0_V\} \cup$ mulț. vectorilor proprii coresp. val. proprii λ s.n. subspațiul propriu coresp. val. proprii λ.

Prop. $\rightarrow$ a) $V_\lambda \subset V$ ssp vect.

b) $f(V_\lambda) \subset V_\lambda$ (i.e. V_λ subspațiu invariant al lui f).

(DEM) a) $\forall x, y \in V_\lambda$ i.e. $f(x) = \lambda x$, $f(y) = \lambda y$ arătăm $\alpha x + \beta y \in V_\lambda$

i.e. $f(\alpha x + \beta y) = \lambda(\alpha x + \beta y)$

f liniară $\Rightarrow f(\alpha x + \beta y) = \alpha f(x) + \beta f(y) = \lambda \alpha x + \beta \lambda y = \lambda(\alpha x + \beta y)$.

b) Fie $x \in V_\lambda \Rightarrow f(x) = \lambda x \in V_\lambda \Rightarrow f(V_\lambda) \subset V_\lambda$.

$V_\lambda \subset V$ subspațiu invariant.

POLINOM CARACTERISTIC

$P(\lambda) = \det(A - \lambda I_n) = 0$

$\rightarrow$ Valorile proprii ale unui endomorfism sunt rădăcinile din $\mathbb{K}$ ale polin. caract.

$\boxed{\text{Prop}}$ Polinomul caract. este un invariant la schimbarea de reper.

DEM
$$\begin{array}{ccc} R = \{e_1, \dots, e_n\} & \xrightarrow{A} & R = \{e_1, \dots, e_n\} \\ \downarrow C & & \\ R' = \{e_1', \dots, e_n'\} & \xrightarrow{A'} & R' = \{e_1', \dots, e_n'\} \end{array}$$

$AC = C'A' = CA' \Rightarrow A' = C^{-1}AC$

$f(e_i) = \sum_{j=1}^{m} a_{ji} e_j \quad \forall i = \overline{1,n}$

$e_i' = \sum_{k=1}^{n} c_{ki} e_k, \quad \forall i = \overline{1,n}$

$C^{-1}AC - C^{-1}\lambda C = C^{-1}(AC - \lambda C) =$
$= C^{-1}(A - \lambda I_n) C$.

$\det(A' - \lambda I_n) = \det(C^{-1}AC - \lambda C^{-1}C) = \det[C^{-1}(A - \lambda I_n) C]$

$= \det C^{-1} \cdot \det(A - \lambda I_n) \cdot \det C = \det(A' - \lambda I_n) =$ invariantă

DEF:

$f \in End(V)$; $x \neq 0_V \in V$ se numește vector propriu $\iff \exists \lambda \in \mathbb{K}$ (λ s.n valoare proprie) a.î. $f(x) = \lambda x$.

$V_\lambda = \{0_V\} \cup$ mult. vectorilor proprii coresp. val. proprii λ s.n. subspațiul propriu coresp. val. proprii λ.

Prop. $\rightarrow$ a) $V_\lambda \subset V$ ssp vect.

b) $f(V_\lambda) \subset V_\lambda$ (i.e. V_λ subspațiu invariant al lui f).

DEM a) $\forall x, y \in V_\lambda$ i.e $f(x) = \lambda x$, $f(y) = \lambda y$ arătăm $\alpha x + \beta y \in V_\lambda$

i.e $f(\alpha x + \beta y) = \lambda(\alpha x + \beta y)$

f liniară $\Rightarrow f(\alpha x + \beta y) = \alpha f(x) + \beta f(y) = \lambda \alpha x + \beta \lambda y = \lambda(\alpha x + \beta y)$.

b) Fie $x \in V_\lambda \Rightarrow f(x) = \lambda x \in V_\lambda \Rightarrow f(V_\lambda) \subset V_\lambda$.

$V_\lambda \subset V$ subspațiu invariant.

POLINOM CARACTERISTIC

$P(\lambda) = \det(A - \lambda I_n) = 0$

$\rightarrow$ Valorile proprii ale unui endomorfism sunt rădăcinile din $\mathbb{K}$ ale polin. caract.

$\boxed{\text{Prop}}$ Polinomul caract. este un invariant la schimbarea de reper.

DEM

$$\begin{array}{ccc} R = \{e_1, \dots, e_n\} & \xrightarrow{A} & R = \{e_1, \dots, e_n\} \\ \downarrow C & & \\ R' = \{e_1', \dots, e_n'\} & \xrightarrow{A'} & R' = \{e_1', \dots, e_n'\}. \end{array}$$

$AC = C'A' = CA' \Rightarrow A' = C^{-1}AC$.

$f(e_i) = \sum_{j=1}^{n} a_{ji} e_j \quad \forall i = \overline{1,n}$

$e_i' = \sum_{k=1}^{n} c_{ki} e_k, \quad \forall i = \overline{1,n}$

$C^{-1}AC - C^{-1}\lambda C = C^{-1}(AC - \lambda C) =$
$= C^{-1}(A - \lambda I_n) C$.

$\det(A' - \lambda I_n) = \det(C^{-1}AC - \lambda C^{-1}C) = \det[C^{-1}(A - \lambda I_n) C]$

$= \det C^{-1} \cdot \det(A - \lambda I_n) \cdot \det C = \det(A' - \lambda I_n) =$ invariantă

$\boxed{\text{PROP}}$ $f \in End(V)$, $\dim_{\mathbb{K}} V = n$.

Dacă $S = \{v_1, \dots, v_k\} \subset V$ $(k \leq n)$ sistem de k vectori coresp. la valori proprii distincte

$f(v_i) = \lambda_i v_i$, $i = \overline{1,k}$ și $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ distincte.

Atunci S e SLI

(DEM) inducție după nr. de vectori din S.

$S = \{v_1\}$ $\Rightarrow$ SLI
$v_1 \neq 0_V$

Pp. prop. adev. pt k valori.

Dem că prop. rămâne adevărată pt $k+1$ valori.

Fie $S = \{v_1, \dots, v_{k+1}\}$ vect. proprii coresp la val. proprii distincte.

Pp. prin RA că S e SLD.

Considerăm $a_1 \neq 0_{\mathbb{K}}$ (altfel renumerotăm / aî $a_1 v_1 + \dots + a_{k+1} v_{k+1} = 0_V$

$f(a_1 v_1 + \dots + a_{k+1} v_{k+1}) = f(0_V) = 0_V$

$f(a_1 v_1) + \dots + f(a_{k+1} v_{k+1}) = 0_V \Leftrightarrow a_1 f(v_1) + \dots + a_{k+1} f(v_{k+1}) = 0_V$

$\Leftrightarrow a_1 \lambda_1 v_1 + \dots + a_{k+1} \lambda_{k+1} v_{k+1} = 0_V$. 1)

Consid. $\lambda_{k+1} \neq 0$ (altfel, renumerotăm).

$a_1 \lambda_{k+1} v_1 + \dots + a_{k+1} \lambda_{k+1} v_{k+1} = 0_V$ 2).

$(1-2)$: $\underbrace{a_1(\lambda_1 - \lambda_{k+1})}_{\neq 0 \ (\lambda_1 \text{ și } \lambda_{k+1} \text{ erau diferite})} v_1 + \dots + a_k(\lambda_k - \lambda_{k+1}) v_k = 0_V$

$\Rightarrow \{v_1, \dots, v_k\}$ SLD $\not\!\!\!\times$ cu P_k.

$\boxed{\text{PROP}}$ $f \in End(V)$; λ - val proprie; V_λ ssp. propriu coresp val proprii λ.

Atunci, $\dim V_\lambda \leq m_\lambda$, unde m_λ e multiplicitatea lui λ ca răd. a polin. caract. P_λ.

(Dem) $V_\lambda \subseteq V$ ssp vect.

$n_\lambda = \dim V_\lambda$;

$R_0 = \{e_1, \dots, e_{n_\lambda}\}$ reper în V_λ.

Extindem la $R = \{e_1, \dots, e_{n_\lambda}, e_{n_\lambda+1}, \dots, e_n\}$ reper în V.

$f(e_i) = \lambda e_i$, $i = \overline{1,n}$.

$f(e_j) = \sum_{k=1}^{n} a_{kj} e_k$, $\forall j = \overline{n_\lambda+1, n}$

$$A = \left(\begin{array}{c|c} \begin{matrix} \lambda & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda \end{matrix} & /// \\ \hline 0 & /// \end{array}\right)$$

$$P(X) = \det(A - X I_n) = \left|\begin{array}{c|c} \begin{matrix} \lambda - X & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda - X \end{matrix} & /// \\ \hline 0 & \end{array}\right| = (\lambda - X)^{n_\lambda} \cdot Q(X). \quad m_\lambda \geq n_\lambda = \dim V_\lambda.$$

TH. CONDIȚIILE NEC. & SUF. CA MATR. ASOCIATĂ UNUI END SĂ FIE DIAGONALĂ.

$f \in End(V)$; $\dim_{\mathbb{K}} V = n$;

$\exists$ un reper în V a.î. matricea asociată lui f în raport cu R e diagonală $\Longleftrightarrow$ 1. rădăcinile polinomului caract $\in \mathbb{K}$.
2. dim ssp. proprii = multiplicitățile val. proprii coresp.

$\lambda_1, \dots, \lambda_k$ răd. dist. ale polin. caract.
$m_1, \dots, m_k$ multiplicitățile

$P(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{m_1} \cdot \ldots \cdot (\lambda - \lambda_k)^{m_k}$

$$\longrightarrow \begin{cases} \lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{K} \\ \dim V_{\lambda_i} = m_i \quad \forall i = \overline{1,k}. \end{cases}$$

DEM „$\Rightarrow$": $\exists R = \{e_1, \dots, e_n\}$ reper în V a.î. matricea asociată lui f e diag.

$$A = \begin{pmatrix} \mu_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \mu_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$$

Eventual renumerotând, avem:

$$A = \begin{pmatrix} \underbrace{\lambda_1 \ddots \lambda_1}_{m_1 \text{ ori}} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \underbrace{\lambda_k \ddots \lambda_k}_{m_k \text{ ori}} \end{pmatrix} \quad m_1 + \dots + m_k = n.$$

$$P(\lambda) = \det(A - \lambda I_n) = \begin{vmatrix} \lambda_1 - \lambda & & & & 0 \\ & \ddots \lambda_1 - \lambda & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & \lambda_k - \lambda & \\ 0 & & & & \ddots \lambda_k - \lambda \end{vmatrix} = (\lambda_1 - \lambda)^{m_1} \cdot \ldots \cdot (\lambda_k - \lambda)^{m_k}$$

① $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{K}$

② Cf. prop precedente, $\dim V_{\lambda_i} \leq m_{\lambda_i}$, $i = \overline{1,k}$ (1)

$$\begin{cases} f(e_1) = \lambda_1 e_1 \\ \vdots \\ f(e_{m_1}) = \lambda_1 e_{m_1} \end{cases}$$

$f(e_i) = \lambda_i e_i \quad \forall i = \overline{1,n}$

$V_{\lambda_1} = \{x \in V \mid f(x) = \lambda_1 x\}$

$R_1 = \{e_1, \dots, e_{m_1}\}$ SLi

$R_1 \subset V_{\lambda_1}$

$\Rightarrow \dim V_{\lambda_1} \geq m_1$ (2)

(1), (2) $\Rightarrow \dim V_{\lambda_1} = m_1$

Analog, $V_{\lambda_i} = m_i$ pt $i = \overline{2,k}$.

„$\Longleftarrow$" $f \in End(V)$

1) $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ răd. dist. ale polin. caract. $\in \mathbb{K}$

2) $\dim V_{\lambda_i} = m_i$, $i = \overline{1,k}$.

Construim un reper în V a.î. A diagonală.

Fie $R_1 = \{e_1, \dots, e_{m_1}\}$ reper în V_{λ_1}

$\vdots$

$R_k = \{e_{m_1 + \dots + m_{k-1}+1}, \dots, e_n\}$ reper în V_{λ_k}

$R = R_1 \cup \dots \cup R_k$.

Dem că R reper în V:

$|R| = n = \dim_{K} V$.

Dem că R e SLI.

$$\underbrace{\sum_{i=1}^{m_1} a_i e_i}_{f_1} + \dots + \underbrace{\sum_{j=m_1+\dots+m_{k-1}+1}^{n} a_j e_j}_{f_k} = 0.$$

Pp. prin RA $\exists f_1, \dots, f_m$ ($m \leq k$) nenule.

* $f_1 + \dots + f_m = 0_V$; $\{f_1, \dots, f_m\}$ vectori proprii coresp. la val. proprii dist $\Rightarrow$ SLI ~~SLD~~ (contradicție cu *)

Deci $f_1 = 0 \dots = f_k = 0 \Rightarrow \sum_{i=1}^{m_1} a_i e_i = 0 \xrightarrow{R_1 \text{ reper}} a_1 = \dots = a_{m_1} = 0$.

$\vdots$

$\Rightarrow \sum_{j=m_1+\dots+m_{k-1}+1}^{n} a_j e_j = 0 \xrightarrow{R_k \text{ reper}} a_j = 0 \quad \forall j = \overline{m_1+\dots+m_{k-1}+1, n}$

$\Rightarrow R$ e SLI $\Rightarrow R$ reper în V.

$f(e_i) = \lambda_1 e_i$, $i = \overline{1, m_1}$

$f(e_j) = \lambda_k e_j$, $j = \overline{m_1 + \dots + m_{k-1}+1, n}$.

$$A = \begin{pmatrix} \overbrace{\lambda_1 \dots \lambda_1}^{m_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \underbrace{\lambda_k \dots \lambda_k}_{m_k} \end{pmatrix} \Rightarrow A \text{ diag.} \Rightarrow V = V_{\lambda_1} \oplus \dots \oplus V_{\lambda_k}.$$

PROIECȚII & SIMETRII

$p : V_1 \oplus V_2 \to V_1 \oplus V_2$

p proiecție pe V_1 de-a lungul lui V_2 dacă

$p(v_1 + v_2) = v_1$.

→ Prop $p \in End(V)$

p proiecție $\Longleftrightarrow$ $p \circ p = p$.

DEM "$\Rightarrow$" $p(v) = p(v_1 + v_2) = v_1$

$(p \circ p)(v) = p(p(v_1)) = p(v) \quad \forall v \in V$

"$\Leftarrow$" $p \in End(V)$

$p : V \to V$ liniară

$p \circ p = p$

Considerăm: $V_1 = Im\,p$; $V_2 = Ker\,p$; $V = V_1 \oplus V_2$.

$$v = \underbrace{p(v)}_{\in V_1} + \underbrace{v - p(v)}_{\in V_2}$$

$p(v_2) = p(v - p(v)) = p(v) - p^2(v) = p(v) - p(v) = 0. \Rightarrow v_2 \in Ker\,p$.

Fie $v \in Im\,p \cap Ker\,p$.

$p(v) = 0$.

$v = p(w)$; $p(v) = p \circ p(w) = p(w) = v \to v = 0_V$.

$p(v) \overset{\shortparallel}{}$

$\dim V = \dim Ker\,p + \dim Im\,p$.

Deci $V = V_1 \oplus V_2$.

$p(v) = p(v_1 + v_2) = v_1$.

→ $s \in End(V)$

s s.n simetrie/involuție $\Longleftrightarrow$ $s \circ s = id_V$

FORME BILINIARE

$(V,+,\cdot)/\mathbb{K}$

Aplicație $g: V\times V \to \mathbb{K}$ s.n formă biliniară $\iff$

1) $g(\alpha x+\beta y, z) = \alpha g(x,z) + \beta g(y,z)$

2) $g(x, \alpha y+\beta z) = \alpha g(x,y) + \beta g(x,z)$ $\quad \forall \alpha,\beta \in \mathbb{K}$, $\forall x,y,z \in V$.

i.e g este liniară în fiecare argument.

Not: $L(V,V,\mathbb{K}) = \{g: V\times V \to \mathbb{K} \mid g \text{ formă bilin}\}$

$L^s(V,V,\mathbb{K}) = \{g \in L(V,V,\mathbb{K}) \mid g \text{ simetrică}\}$

i.e $g(x,y) = g(y,x)$ $\forall x,y \in V$.

$L^a(V,V,\mathbb{K}) = \{g \in L(V,V,\mathbb{K}) \mid g$ antisimetrică, i.e $g(x,y) = -g(y,x)$, $\forall x,y \in V\}$.

MATRICEA ASOC. UNEI FORME BILIN.

$g: V\times V \to \mathbb{K}$ formă bilin., $R = \{e_1,\dots,e_n\}$ reper în V.

Not. $g(e_i,e_j) = g_{ij}$ $\forall i,j=\overline{1,n}$.

$G = (g_{ij})$, $i,j=\overline{1,n}$ matricea asociată lui g în rap. cu R.

$$g(x,y) = g\left(\sum_{i=1}^{n} x_i e_i, \sum_{j=1}^{n} y_j e_j\right) = \sum_{i,j=1}^{n} (x_i y_j g_{ij}) = X^T \cdot G \cdot Y.$$

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}.$$

$R = \{e_1,\dots,e_n\} \xrightarrow{A} R' = \{e_1',\dots,e_n'\}$ repere în V.

$e_i' = \sum_{j=1}^{n} a_{ji} e_j$ $\forall i=\overline{1,n}$.

$G' = (g'_{rs})_{r,s=\overline{1,n}}$; $g'_{rs} = g(e_r', e_s') = g\left(\sum_{i=1}^{n} a_{ir} e_i, \sum_{j=1}^{n} a_{js} e_j\right)$.

$$g'_{rs} = \sum_{j,i=\overline{1,n}} (a_{ir}\, a_{js}\, g_{ij})$$

$$\boxed{G' = A^T G A.}$$

$\operatorname{Rg} G' = \operatorname{rg} G = \operatorname{rg} g$ este un invariant la schimbarea reperului.

DEF: $g \in L^s(V,V,\mathbb{K})$.

$\operatorname{Ker} g = \{x \in V \mid g(x,y)=0 \ \forall y \in V\}$ nucleul lui g.

g s.n. formă biliniară simetrică nedegenerată $\Leftrightarrow$ $\operatorname{Ker} g = \{0_V\}$.

OBS $\to$ g nedeg $\Leftrightarrow \det G \neq 0 \Rightarrow rg\, g = n = \dim_{\mathbb{K}} V$ (maxim
g simetrică $\Leftrightarrow G = G^T$.

DEF $Q: V \to \mathbb{K}$ s.n formă pătratică $\Leftrightarrow \exists g \in L^s(V,V,\mathbb{K})$ aî $g(x,x) = Q(x) \ \forall x \in V$

TH Există o coresp. bijectivă între mult. formelor biliniare simetrice & mult. formelor pătratice.

Dem 1) $g: V \to \mathbb{K}$, formă pătratică   chr $\mathbb{K} \neq 2$ $(1+1 \neq 0)$

Construim $Q: V\times V \to \mathbb{K}$ formă bilin. simetrică

$Q(x+y) = g(x+y, x+y) = g(x,x) + g(x,y) + g(y,x) + g(y,y)$.

$= Q(x) + Q(y) + 2g(x,y)$

$g(x,y) = 2^{-1}(Q(x+y) - Q(x) - Q(y))$ forma polară asoc. formei pătratice

2) Fie $g \in L(V,V,\mathbb{K})$.

Construim $Q: V \to \mathbb{K}$ $Q(x) = g(x,x)$. $\forall x \in V$.

$Q(x) = g(x,x) = X^T G X$.

$Q: V \to \mathbb{K} = \mathbb{R}$. Q s.n pozitiv def $\Leftrightarrow \begin{cases} Q(x) > 0 & \forall x \in V/\{0_V\} \\ Q(x) = 0 & x = 0_V \end{cases}$.

$g: V\times V \to \mathbb{R}$ forma polara asoc lui Q.

Dacă g poz def $\Leftarrow$ Q pozitiv def.

$g \in L^s(V,V,\mathbb{K})$

g poz def $\Rightarrow$ g e nedegenerată

Dem Fie $x \in \operatorname{Ker} g \Rightarrow g(x,y) = 0 \ \forall y \in V$. Consid. $y = x$. $\Rightarrow$

$\left.\begin{array}{l} \Rightarrow g(x,x) = 0 \\ \quad \| \\ \quad Q(x) \\ Q \text{ poz def} \end{array}\right\} \Rightarrow x = 0_V \Rightarrow \operatorname{Ker} g = \{0_V\} \Rightarrow g$ nedeg.

TEOREMA GAUSS

Fie $Q: V \to \mathbb{K}$ formă pătratică $\Rightarrow \exists$ un reper $R = \{e_1, \dots, e_n\}$ în V a.î. Q are o formă canonică i.e $Q(x) = g_{11} x_1^2 + \dots + g_{rr} x_r^2$, $r = rg\, Q = rg\, g$

$r \leq n = \dim_{\mathbb{K}} V$

$$G = \begin{pmatrix} g_{11} & & & & 0 \\ & \ddots & & & \\ & & g_{rr} & & \\ & & & 0 & \\ 0 & & & & \ddots \\ & & & & & g_{rr} \end{pmatrix}$$

<u>Dem</u> : 1) $Q(x) = 0$, $\forall x \in V$ are formă canonică

2) Dacă $Q(x) \neq 0$:

Aplicăm inducție matem. după nr. m de coor. ale lui x care apar în Q, $m \leq n$.

Pt pas 1 $\Rightarrow Q(x) = g_{11} x_1^2$ (f. canonică).

Pp. prop. adev. pt $m-1$ coord. Dem. că e adv. pt m:

$Q(x) = g_{11} x_1^2 + 2 g_{12} x_1 x_2 + \dots + 2 g_{1m} x_1 x_m + Q'(x)$

$\hookrightarrow$ conține $x_2 \dots x_m$

a) $g_{11} \neq 0$.

b) $g_{11} = 0$

b1) $\exists\, g_{kk} \neq 0$, $k = \overline{2,n}$ renumerotăm indicii (de fapt, sch. de reper)

a.î. $g_{11} \neq 0$.

b2) $g_{kk} = 0$, $\forall k = \overline{1,n}$, $\exists\, g_{ik} \neq 0$

Considerăm schimbarea de reper:

$$\begin{aligned} y_i &= x_i + x_k \\ y_k &= x_i - x_k \\ y_j &= x_j, \quad \forall j = \overline{1,n},\ j \neq i, j \neq k \end{aligned} \Rightarrow \begin{cases} x_i = \frac{1}{2}(y_i + y_k) \\ x_k = \frac{1}{2}(y_i - y_k) \\ x_j = y_j \quad \forall j = \overline{1,n},\ j \neq i, j \neq k. \end{cases}$$

$2 g_{ik} x_i x_k = \frac{1}{2} g_{ik} (y_i^2 - y_k^2) = \frac{1}{2} g_{ik} y_i^2 - \frac{1}{2} g_{ik} y_k^2$.

coef. lui y^2 e $\frac{1}{2} g_{ik} \neq 0$. Renumerotăm indicii ai coef lui y_h^2 e nenul, deci $g_{11} \neq 0$.

$Q(x) = g_{11} x^2 + 2 g_{12} x_1 x_2 + \dots + 2 g_{1m} x_1 x_m + Q'(x) =$

$= \frac{1}{g_{11}} (g_{11}^2 x_1^2 + 2 g_{11} g_{12} x_1 x_2 + \dots + 2 g_{11} g_{1m} x_1 x_m) + Q'(x) =$

$= \frac{1}{g_{11}} (g_{11} x_1 + g_{12} x_2 + \dots + g_{1m} x_m)^2 + Q''(x)$

$\hookrightarrow$ Cont. $x^2 \dots x_m$

Fie schimbarea de reper

$$z_1 = g_{11} x_1 + \dots + g_{1m} x_m \,, \quad \forall m = \overline{2,n} .$$

$$Q(x) = \overbrace{\frac{1}{g_{11}}}^{=a_1} z_1^2 + Q''(x)$$

↳ conține $y_2 \dots y_k$.

Aplicăm Pasul m-1 pt Q'' $\Rightarrow$ $\exists$ un reper în V, a.î. $x = \sum_{i=1}^{n} z_i e_i$

$$Q(x) = a_1 z_1^2 + a_2 z_2^2 + \dots + a_m z_m^2$$

TH. DE INERȚIE SYLVESTER

Fie $Q: V \to \mathbb{R}$ formă pătratică reală.
Atunci nr „+" din forma normală a lui Q este un invariant la schimbarea de reper.

Mai mult, $(\underset{\text{nr „+"}}{p}, \underset{\text{nr „-"}}{r-p})$ = signatura este un invariant la sch. de reper

DEM) Fie $R = \{e_1, \dots, e_r\}$ reper în V.

$Q(x) = x_1^2 + \dots + x_p^2 - x_{p+1}^2 - \dots - x_r^2$ forma normală

$\operatorname{rg} Q = r$.

$R = \{e_1, \dots, e_n\}$ reper în V, $Q(x) = x_1^2 + \dots + x_p^2 - x_{p+1}^2 - \dots - x_r^2$, $r = \operatorname{rg} Q$

$x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$

$R' = \{e_1', \dots, e_n'\}$ reper în V:

$x' = \sum_{i=1}^{n} x_i' e_i'$

$Q(x) = x_1'^2 + \dots + x_{p'}'^2 - x_{p'+1}'^2 - \dots - x_r'^2$

Dem. $p = p'$

Pp. prin RA $p' < p$.

Consid. $U_1 = \langle \{e_1, \dots, e_p, e_{r+1}, \dots, e_n\} \rangle$.

$\dim U_1 = p + n - r$.

$U_2 = \langle \{e_{p'+1}', \dots, e_r'\} \rangle$

$\dim U_2 = r - p'$

$\dim (U_1 + U_2) = \underbrace{\dim U_1 + \dim U_2}_{} - \dim (U_1 \cap U_2)$

$p + n - r + p - p' + r = \underbrace{n + p - p'}_{> n}$ ①

$U_1 + U_2 \subseteq V \Rightarrow \dim (U_1 + U_2) \leq n$ ②

① + ② $\Rightarrow \exists x \in U_1 \cap U_2 \Rightarrow x \in U_1 \Rightarrow Q(x) > 0$ ⨳.
și $x \in U_2 \Rightarrow$ și $Q(x) < 0$

Pp. făcută e falsă

Analog $p' > p$, deci $p = p'$.

SPAȚII VECT. EUCLIDIENE

$\boxed{\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}, \forall x \in V}$

NORMA.

$(V, +, \cdot)/\mathbb{R}$ sp. vect. real

S.n produs scalar pe V o aplicație $g: V \times V \to \mathbb{R}$ care verifică

1) g e formă biliniară

2) g e pozitiv definită (i.e $g(x,x) > 0 \ \forall x \in V / \{0_V\}$)

$g(x,x) = 0 \Rightarrow x = 0_V$

$(V, g) = (V, \langle , \rangle) = (V, (\cdot, \cdot)) = (E, g)$

spațiu vect euclidian; g s.n. struct. euclidiană.

Prop $\rightarrow$ $(V, \langle , \rangle)$ sp. vect. euclidian; $\dim_{\mathbb{R}} V = n$.

$S = \{x_1, \dots, x_k\} \subset V$ sist. de vect. nenuli, mutuali ortogonali (ortog. 2 câte 2) i.e. $\langle x_i, x_j \rangle = 0 \ \forall i,j \in \{1,k\}$ $i \neq j$, $k \leq n$ $\Longrightarrow$

S e SLI

Dem Fie $a_1, \dots, a_k \in \mathbb{R}$ a.î. $a_1 x_1 + \dots + a_k x_k = 0_V$

$\langle a_1 x_1 + \dots + a_k x_k \rangle = \langle 0_V, x_1 \rangle = 0_{\mathbb{R}}$

$a_1 \underbrace{\langle x_1, x_1 \rangle}_{\|x_1\|^2 \neq 0} + a_2 \underbrace{\langle x_2, x_1 \rangle}_{0} + \dots + a_k \underbrace{\langle x_k, x_1 \rangle}_{0} = 0_{\mathbb{R}} \Rightarrow a_1 = 0_{\mathbb{R}}$

Analog $\langle a_1 x_1 + \dots + a_k x_k, x_2 \rangle = 0 \Rightarrow a_2 = 0$

$\langle a_1 x_1 + \dots + a_k x_k, x_k \rangle = 0 \Rightarrow a_k = 0$.

Deci $S = \{x_1, \dots, x_k\}$ e SLI.

DEF $(V, \langle , \rangle)$ sp.v. ~~eucl~~ real.

$R = \{e_1, \dots, e_n\}$ reper în V.

a) R s.n reper ortogonal $\Longleftrightarrow$ $\langle e_i, e_j \rangle = 0 \ \forall i \neq j$, $i,j = \overline{1,n}$.

b) R s.n reper ortonormat $\Longleftrightarrow$ $\langle e_i, e_j \rangle = \delta_{ij}$, $\forall i,j = \overline{1,n}$ $= \begin{cases} 1, & i=j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$.

$(e_1, \dots, e_n)$ versori mutuali ortog.

$(V, \langle , \rangle)$ sp. e. real.

a) $x \in V$

$x^{\perp} = \{y \in V \mid \langle x, y \rangle = 0\}$

b) $U \subseteq E$ ssp vect

$U^{\perp} = \{y \in V \mid \langle x, y \rangle = 0, \forall x \in U\}$

TH. CAUCHY - BUNIAKOVSKI - SCHWARZ

$(V, <,>)$

$\forall x, y \in V \Rightarrow |<x,y>| \leq ||x|| \cdot ||y||$

$„=" \Leftrightarrow \{x,y\} \in SLI$

Dem) 1) Dacă $x = 0_V$ sau $y = 0_V$ atunci $|<x,y>| = 0_{\mathbb{R}}$, $||x|| \, ||y|| = 0_{\mathbb{R}}$ $\Rightarrow |<x,y>| = ||x|| \, ||y||$

2) Dacă $x \neq 0_V$ şi $y \neq 0_V$.

Fie $\lambda \in \mathbb{K}$ şi $<x+\lambda y, x+\lambda y> \geq 0 \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$ (poz. def).

$\lambda^2 ||y||^2 + 2\lambda <x,y> + ||x||^2 \geq 0 \quad \forall \lambda \in \mathbb{R} \quad \Rightarrow$

$\Rightarrow \Delta_\lambda = 4 <x,y>^2 - 4||x||^2 \, ||y||^2 \leq 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow <x,y>^2 \leq ||x||^2 \, ||y||^2 \Rightarrow |<x,y>| \leq ||x|| \, ||y||$.

Dem că $|<x,y>| = ||x|| \, ||y|| \Leftrightarrow \{x,y\}$ SLD

„$\Rightarrow$" $\exists \lambda_0 \in \mathbb{R}$ cu prop că $<x+\lambda_0 y, x+\lambda_0 y> = 0 \xRightarrow{p.def} x + \lambda_0 y = 0 \Rightarrow$ $\{x,y\}$ SLD

„$\Leftarrow$" $\{x,y\}$ SLD $\Rightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R}^*$ a.î. $y = \lambda x$.

$|<x,y>| = |<x, \lambda x>| = |\lambda| \cdot ||x||^2$.

$||x|| \cdot ||y|| = ||x|| \cdot ||\lambda x|| = |\lambda| \cdot ||x||^2$

$||\alpha x|| = \sqrt{<\alpha x, \alpha x>} = \sqrt{\alpha^2 ||x||^2} = |\alpha| \cdot ||x||$

PROCEDEUL DE ORTOGONALIZARE GRAN-SCHMIDT.

$(V, \langle , \rangle)$; $R = \{f_1, \dots, f_n\}$ reper.

$\exists R' = \{e_1, \dots, e_n\}$ reper ortog.

$\langle \{f_1, \dots, f_i\} \rangle = \langle \{e_1, \dots, e_i\} \rangle$. $\forall i = \overline{1,n}$.

Dem) Metoda inductivă.

f dat. Considerăm $e_1 = f_1 \neq 0_V$.

$\{f_1, f_2\}$ date. Consid. $e_2 = f_2 + a_{12} e_1$

$\langle e_2, e_1 \rangle = 0$.

$\langle f_2 + a_{12} e_1, e_1 \rangle = \langle f_2, e_1 \rangle + a_{12} \langle e_1, e_1 \rangle \Rightarrow a_{12} = -\dfrac{\langle f_2, e_1 \rangle}{\langle e_1, e_1 \rangle}$.

$$\begin{cases} e_1 = f_1 \\ e_2 = f_2 - \dfrac{\langle f_2, e_1 \rangle}{\langle e_1, e_1 \rangle} \cdot e_1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f_1 = e_1 \\ f_2 = \dfrac{\langle f_2, e_1 \rangle}{\langle e_1, e_1 \rangle} e_1 + e_2 \end{cases} \Rightarrow Sp\{f_1, f_2\} = Sp\{e_1, e_2\}.$$

Pp. construiți $\{e_1, \dots, e_i\}$ sist ortog aî. $\langle \{e_1, \dots, e_k\} \rangle = \langle \{f_1, \dots, f_k\} \rangle$ $\forall k = \overline{1,i}$.

Fie $e_{i+1} = f_{i+1} + \sum_{k=1}^{i} a_{k\,i+1} e_k$

$\langle e_{i+1}, e_j \rangle = 0 \quad \forall j = \overline{1,i}$.

$\langle f_{i+1}, e_j \rangle + \sum_{k=1}^{i} a_{k\,i+1} \langle e_k, e_j \rangle = 0$.

$\langle f_{i+1}, e_j \rangle + a_{j\,i+1} \cdot \langle e_j, e_j \rangle = 0 \Rightarrow a_{j\,i+1} = -\dfrac{\langle f_{i+1}, e_j \rangle}{\langle e_j, e_j \rangle} \quad \forall j = \overline{1,i}$

$$e_{i+1} = f_{i+1} - \sum_{j=1}^{i} \frac{\langle f_{i+1}, e_j \rangle}{\langle e_j, e_j \rangle} \cdot e_j.$$

$f_1 = e_1$

$f_2 = \dfrac{\langle f_2, e_1 \rangle}{\langle e_1, e_1 \rangle} \cdot e_1 + e_2$.

$$f_{i+1} = \frac{\langle f_{i+1}, e_1 \rangle}{\langle e_1, e_1 \rangle} \cdot e_1 + \dots + \frac{\langle f_{i+1}, e_i \rangle}{\langle e_i, e_i \rangle} \cdot e_i + e_{i+1}$$

$Sp\{f_1, \dots, f_k\} = Sp\{e_1, \dots, e_k\} \quad \forall k = \overline{1, i+1}$

$$\underset{\text{reper}}{R = \{f_1, \dots, f_n\}} \xrightarrow{C} \underset{\text{reper ortog}}{R' = \{e_1, \dots, e_n\}} \xrightarrow{D} \underset{\text{reper orton.}}{R'' = \left\{\frac{e_1}{\|e_1\|}, \dots, \frac{e_n}{\|e_n\|}\right\}}$$

$$C^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & \dfrac{\langle f_2, e_1 \rangle}{\langle e_1, e_1 \rangle} & \dots & \dfrac{\langle f_n, e_1 \rangle}{\langle e_1, e_1 \rangle} \\ 0 & & & \\ \vdots & & & \dfrac{\langle f_n, e_{n-1} \rangle}{\langle e_{n-1}, e_{n-1} \rangle} \\ 0 & 0 & & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \det C^{-1} = 1$$

$\det C = \frac{1}{\det C^{-1}} = 1 > 0 \Rightarrow R, R'$ sunt la fel orientate

TH. COMPLEMENT ORTOGONAL

$(V, \langle , \rangle)$ sp. euclidian real
$U \subseteq V$ subsp. $\rightarrow V = U \oplus U^{\perp}$

$U^{\perp}$ = complementul ortogonal al lui U (unic)

Dem Fie $x \in U \cap U^{\perp} \rightarrow x \in U$ și $x \in U^{\perp}$ $\rightarrow \langle x, x \rangle = 0_{\mathbb{R}} \Rightarrow x = 0_V \rightarrow \oplus$ e sumă directă.

$U, U^{\perp} \subseteq V$ ssp. vect $\Rightarrow U \oplus U^{\perp} \subseteq V$

Dem că $V \subseteq U \oplus U^{\perp}$

Fie $R = \{e_1, \dots, e_k\}$ reper ortonormat în V.

Fie $v \in V$.

Considerăm $v' = v - \underbrace{\sum_{i=1}^{k} \langle v, e_i \rangle \cdot e_i}_{v'' \in U}$

$v = v' + v''$.

Dem că $v' \in U^{\perp}$

$\langle v', e_1 \rangle = \langle v, e_1 \rangle - \underbrace{\sum_{i=1}^{k} \langle v, e_i \rangle \cdot \langle e_i, e_1 \rangle}_{\langle v, e_1 \rangle \cdot 1} = 0$

$\langle v', e_k \rangle = \langle v, e_k \rangle - \underbrace{\sum_{i=1}^{k} \langle v, e_i \rangle \langle e_i, e_k \rangle}_{\langle v, e_k \rangle \cdot 1} = 0$.

$\Rightarrow \langle v', x \rangle = 0 \ \forall x \in V$.

$x = e_1 x_1 + \dots + x_k e_k$.

$\langle v', x_1 e_1 + \dots + x_k e_k \rangle = x_1 \underbrace{\langle v', e_1 \rangle}_{=0} + \dots + x_k \underbrace{\langle v', e_k \rangle}_{=0} = 0$

$\underset{U^{\perp}}{\overset{\cap}{v'}} + \underset{U}{\overset{\cap}{v''}}$: $v = v' + v'' \Rightarrow v \in U \oplus U^{\perp} \Rightarrow V \subseteq U \oplus U^{\perp}$

Deci $V = U \oplus U^{\perp} \leftarrow$ unic.

... orientat (la fel orientat cu rep.can.).

PRODUS MIXT

$(\mathbb{R}^3, g_0)$; $S = \{x, y\} \subset \mathbb{R}^3$

Fie $z \in \mathbb{R}^3$, $z \wedge x \wedge y = \langle x \times y, z \rangle = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix}$

Prop.

a) $z \wedge x \wedge y = \langle x \times y, z \rangle = - z \wedge y \wedge x = y \wedge z \wedge x$

b) $x \times y = - y \times x$

c) $(x \times y) \times z = \langle x, z \rangle y - \langle y, z \rangle x$

d) id. Jacobi

$$(x \times y) \times z + (y \times z) \times x + (z \times x) \times y = 0$$

PRODUS VECTORIAL

Considerăm $(\mathbb{R}^3, g_0)$ $\hookrightarrow$ produs scalar canonic.

$S = \{x, y\} \subseteq \mathbb{R}$

$R = \{e_1, e_2, e_3\}$ reper canonic

Construim $\omega = x \times y$ (produs vect) astfel:

1. Dacă $S = SLD$ at $\omega = 0_{\mathbb{R}^3}$
2) Dacă $S = SLI$ at. ω verifică

a) $\|\omega\|^2 = \begin{vmatrix} \langle x, x\rangle & \langle x, y\rangle \\ \langle y, x\rangle & \langle y, y\rangle \end{vmatrix}$

b) $\omega \perp x$, $\omega \perp y$

c) $\{x, y, \omega\}$ reper pozitiv orientat (la fel orientat cu rep. can.).

PRODUS MIXT

$(\mathbb{R}^3, g_0)$; $S = \{x, y\} \subset \mathbb{R}^3$

Fie $z \in \mathbb{R}^3$, $z \wedge x \wedge y = \langle x \times y, z\rangle = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix}$

Prop.

a) $z \wedge x \wedge y = \langle x \times y, z\rangle = -z \wedge y \wedge x = y \wedge z \wedge x$

b) $x \times y = -y \times x$

c) $(x \times y) \times z = \langle x, z\rangle y - \langle y, z\rangle x$

d) id. Jacobi

$(x \times y) \times z + (y \times z) \times x + (z \times x) \times y = 0$

APLICAȚIE ORTOGONALĂ

Fie $(E_1, <,>)$, $(E_2, <,>)$ spații vect. euclidiene reale.

Aplicație $f: E_1 \to E_2$ s.n. aplicație ortog. $\Leftrightarrow$ $<f(x), f(y)>_2 = <x,y>_1$ $\forall x, y \in E_1$

Prop: Fie $f: E_1 \to E_2$ apl. ortog. Atunci:

1) $\|f(x)\|_2 = \|x\|_1$, $\forall x \in E_1$

2) f injectivă

Dem 1) $\|x\|_1^2 = <x,x>_1$

$\|f(x)\|_2^2 = <f(x), f(x)>_2$

f apl. ortog $<f(x), f(y)>_2 = <x,y>_1$, $\forall x,y \in E_1$ Pt $y = x$ $\Rightarrow$ $<f(x), f(x)>_2 = <x,x>_1$

$\Rightarrow \|f(x)\|_2^2 = \|x\|_1^2 \Rightarrow \|f(x)\|_2 = \|x\|_1$

2) f liniară

f inj. $\Leftrightarrow$ $Ker f = \{0_{E_1}\}$.

Fie $x \in Ker f \Rightarrow f(x) = 0_{E_2}$.

$\underset{0}{\underset{\|}{\|f(x)\|_2}} = \|x\|_1 \Rightarrow \|x\|_1 = 0 \xrightarrow{<,> \text{ poz def}} x = 0_{E_1}$

TRANSFORMARE ORTOGONALĂ

De $(E, <,>)$ sp. vect. euclidian real și $f \in End(E)$.

f s.n. transf. ortogonală $\Leftrightarrow$ $<f(x), f(y)> = <x,y>$ $\forall x, y \in E$.

Not. $O(E)$ = mulț. transf. ortog.

PROP: MATRICEA ASOC. LUI f ÎN RAP. CU $\forall$ REPER DIN E E ORTOG.
ORTONORMAT.

Prop [$\forall$ transf. ortogonală e echivalentă cu o schimbare de reper ortonormat]

Dem $R = \{e_1, \dots, e_n\} \longrightarrow R' = \{e_1', \dots, e_n'\}$ repere ortonormate în E

$\Rightarrow A \in O(n)$

Considerăm $f \in End(E)$, $f(e_i) = e_i' = \sum_{j=1}^{n} a_{ji} e_j$

A = matri. as. lui f în raport cu $R \Rightarrow \langle f(e_j), f(e_k) \rangle = \delta_{jk} \Rightarrow$

$\Rightarrow \langle f(x), f(y) \rangle = \langle x, y \rangle$

$f \in O(E)$. Fie A matricea asoc. lui f în raport cu $R = \{e_1, \dots, e_n\}$ $f(e_i) = \sum_{j=1}^{n} a_{ji} b_j$. Consid. $R' = \{e_1', \dots, e_n'\}$, $e_i' = \sum_{j=1}^{n} a_{ji} b_j$

$R \xrightarrow{A} R' \Rightarrow R'$ reper ortonormat.

$A \in O(n)$

(Prop) Fie $(E, \langle , \rangle)$ sp. vect. real și $f \in O(E)$.

Dacă $U \subseteq E$ un sp vect <u>invariant</u> al lui f i.e $f(U) \subseteq U$, atunci

$\hookrightarrow f(x) = \lambda x \Rightarrow f(V_\lambda) \subseteq V_\lambda$.

1. $f(U) = U$
2. $U^\perp \subseteq E$ subsp. vect invariant al lui f.
3. $f/_{U^\perp} : U^\perp \longrightarrow U^\perp$ e o transf ortog.

$f/_{U^\perp} \longrightarrow f$ restricționat la $U^\perp$

$\boxed{Dem}$ 1. $f : U \to f(U)$ izomorfism de sp. vect.

$f : U \to f(U)$ bij. și liniară $\Rightarrow \dim U = \dim f(U)$ dar $f(U) \subseteq U \Rightarrow f(U) = U$

2. $U^\perp = \{ x \in E \mid \langle x, y \rangle = 0 \ \forall y \in U \}$

Arătăm că $f(U^\perp) \subseteq U^\perp$. Fie $x \in U^\perp$ și $y \in U$. Dem că $\langle \underset{U^\perp}{\underset{\cap}{f(x)}}, \underset{U}{\underset{\cap}{y}} \rangle$.

$\underset{U^\perp}{\underset{\cap}{f(x)}} = \underset{U}{\underset{\cap}{y}} \Rightarrow \exists z \in U$ a.î. $y = f(z)$.

$\langle f(x), y \rangle = \langle f(x), f(z) \rangle \overset{f \in O(E)}{=} \langle \underset{U^\perp}{\underset{\cap}{x}}, \underset{U}{\underset{\cap}{z}} \rangle = 0$

Deci $U^\perp \subseteq E$ e un spațiu vect. invariant al lui f.

3) Din (1) și (2) $f(U^\perp) = U^\perp$ și mai mult $f/_{U^\perp} : U^\perp \longrightarrow U^\perp$ transf. ortog.

CLASIFICARE TRANSFORMĂRI ORTOGONALE.

1. $(E; \langle , \rangle)$ sp. vect. euclidian real, $\dim E = 1$.

$R = \{e\}$ reper în E, $e \neq 0_E$

$f \in O(E)$, $f(e) = \lambda e \Rightarrow \lambda = \pm 1$.

$O(E) = \{ id_E, -id_E \}$

2. $\dim E = 2$, $f \in O(E)$, A = matricea asociată lui f în raport cu un reper ortonormat. $\Rightarrow A \in O(2)$.

a) $\det A = 1$, $A = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$

f = rotație de $\sphericalangle \varphi$ în planul E

b) $\det A = -1$, $A = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ \sin\varphi & -\cos\varphi \end{pmatrix}$.

$\exists$ o schimbare de reper a.î. $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\varphi = \pi \Rightarrow f$ = simetrie ortog.

TH) $\dim E = 2$, $f \in O(E) \Rightarrow f$ se poate scrie ca o compunere de cel mult 2 simetrii ortogonale

Dem Fie A = matricea asociată lui f în raport cu R = reper orton.

a) $\det A = -1 \Rightarrow f = s$ = sim. ortog

b) $\det A = 1 \Rightarrow f$ = rotație.

Fie $s \in End(E)$ sim ortog.

$s \circ f = s'$ sim. ortog; $\underbrace{s \circ s}_{id_E} \circ f = s \circ s' \Rightarrow f = s \circ s'$

3. $\dim E = 3$, $f \in O(E)$

$R = \{e_1, e_2, e_3\}$ reper orton. în E și A = matr...

CLASIFICARE TRANSFORMĂRI ORTOGONALE.

1. $(E, \langle , \rangle)$ sp. vect. euclidian real, $\dim E = 1$.

$R = \{e\}$ reper în E, $e \neq 0_E$

$f \in O(E)$, $f(e) = \lambda e \Rightarrow \lambda = \pm 1$.

$O(E) = \{ id_E, -id_E \}$

2. $\dim E = 2$, $f \in O(E)$, A = matricea asociată lui f în raport cu un reper ortonormat. $\Rightarrow A \in O(2)$.

a) $\det A = 1$, $A = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$

f = rotație de $\sphericalangle \varphi$ în planul E

b) $\det A = -1$, $A = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ \sin\varphi & -\cos\varphi \end{pmatrix}$.

$\exists$ o schimbare de reper a.î. $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\varphi = \pi \Rightarrow f$ = simetrie ortog.

TH $\dim E = 2$, $f \in O(E) \Rightarrow f$ se poate scrie ca o compunere de cel mult 2 simetrii ortogonale

Dem Fie A = matricea asociată lui f în raport cu R = reper orton.

a) $\det A = -1 \Rightarrow f = s$ = sim. ortog

b) $\det A = 1 \Rightarrow f$ = rotație.

Fie $s \in End(E)$ sim ortog.

$s \circ f = s'$ sim. ortog; $\underbrace{s \circ s}_{id_E} \circ f = s \circ s' \Rightarrow f = s \circ s'$

3. $\dim E = 3$, $f \in O(E)$

$R = \{e_1, e_2, e_3\}$ reper orton. in E și A = matr asociată lui f în raport cu R.

$P(\lambda) = \det(A - \lambda I_3) = 0$. Polinomul e de grad 3 $\Rightarrow \exists$ cel puțin o răd. reală.

Fie $\lambda \in \mathbb{R}$ răd. reală. $\Rightarrow \lambda \in \{-1, 1\}$.

Fie e_1 versor propriu coresp. valorii proprii λ. i.e $f(e_1) = \lambda e_1$.

$\langle\{e_1\}\rangle$ subsp. invariant al lui $f \Rightarrow \langle\{e_1\}\rangle^\perp$ subsp. inv. al lui f.

$\langle\{e_2, e_3\}\rangle = \langle\{e_1\}\rangle^\perp$

$\forall \langle e_1\rangle^\perp : \langle e_1\rangle^\perp \to \langle e_1\rangle^\perp$ transf. ortog.

Fie $\tilde{A}$ matr. ~~cons~~ asociată lui $f/_{\langle e_1\rangle^\perp}$ în rap cu $\{e_2, e_3\} \Rightarrow \tilde{A} \in O(2)$

I $\det A = 1$

a) $\lambda = 1 \to f(e_1) = e_1$ $\quad$ $\det \tilde{A} = 1 \to f/_{\langle e_1\rangle^\perp}$ = rotație și

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \multicolumn{2}{c}{\boxed{\tilde{A}}} \\ 0 & & \end{pmatrix} \qquad \tilde{A} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$$

b) $\lambda = -1 \to f(e_1) = -e_1$ $\quad$ $\det \tilde{A} = -1 \Rightarrow f/_{\langle e_1\rangle^\perp}$ = simetrie $\Rightarrow$

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \multicolumn{2}{c}{\boxed{\tilde{A}}} \\ 0 & & \end{pmatrix} \qquad \tilde{A} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$ în rap. cu reperul $R\{e_1, e_2, e_3\}$.

În rap. cu reperul $R' = \{e_3, e_1, e_2\}$ $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\pi & -\sin\pi \\ 0 & \sin\pi & \cos\pi \end{pmatrix}$

II $\det A = -1$

a) $\lambda = 1 \Rightarrow f(e_1) = e_1$ $\quad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \multicolumn{2}{c}{\boxed{\tilde{A}}} \\ 0 & & \end{pmatrix}$ $\det \tilde{A} = -1$

$\tilde{A} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ în rap. cu $R = \{e_1, e_2, e_3\}$

În rap. cu $R' = \{e_2, e_1, e_3\}$: $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos 0 & -\sin 0 \\ 0 & \sin 0 & \cos 0 \end{pmatrix}$

b) $\lambda = -1 \Rightarrow f(e_1) = -e_1$ $\quad A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \multicolumn{2}{c}{\boxed{\tilde{A}}} \\ 0 & & \end{pmatrix}$ $\det \tilde{A} = 1 \Rightarrow$

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$$

TH $n = 3$: $\exists$ un reper orton. în E aî:

1) dacă $\det A = 1 \to$ atunci $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi & -\sin\varphi \\ 0 & \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$. f = rotație de $\sphericalangle \varphi$ în planul $\langle e_1\rangle^\perp$ de axa $\langle e_1\rangle$

$\operatorname{Tr} A = 1 + 2\cos\varphi$ invariant la sch de reper.

2) dacă $\det A = -1$ atunci $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi & -\sin\varphi \\ 0 & \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$

f = rotație de $\sphericalangle \varphi$ în planul $\langle e_1\rangle^\perp$ de axă $\langle e_1\rangle$

$\operatorname{Tr} A = -1 + 2\cos\varphi$ invariant la sch de reper

ENDOMORFISME SIMETRICE

Def $(E, <,>)$ sp. vect. euclidian real

$f \in End(E)$.

f s.n endomorfism simetric $\Leftrightarrow <f(x), y> = <x, f(y)>$ $\forall x, y \in E$

Prop $f \in Sim(E) \Leftrightarrow$ matr. asociată lui f în raport cu $\forall$ reper orton. e simetrică.

Dem: Fie $R = \{e_1, \dots, e_n\}$ reper orton

$A =$ matr. asociată lui f în raport cu R.

$$f(e_i) = \sum_{j=1}^{n} a_{ji} e_j \quad \forall i = \overline{1,n}.$$

$$<f(e_i), e_k> = <e_i, f(e_k)> = <\sum_{j=1}^{n} a_{ji} e_j, e_k> = <e_i, \sum_{r=1}^{n} a_{rk} e_r>$$

$$\underbrace{\sum_{j=1}^{n} a_{ji} \underbrace{<e_j, e_k>}_{\delta_{jk}}}_{a_{ki}} = \underbrace{\sum_{r=1}^{n} a_{rk} \underbrace{<e_i, e_r>}_{\delta_{ir}}}_{a_{ik}} \Rightarrow a_{ki} = a_{ik} \quad \forall i, k = \overline{1,n} \Rightarrow A = A^T$$

Prop Fie $f \in Sim(E)$ și $U \subseteq E$ ssp. invariant al f. $\Rightarrow U^{\perp} \subseteq E$ e ssp. invariant al lui f.

Dem: $U \subseteq E$ ssp invariant al lui f $f(U) \subseteq U$.

Dem că $f(U^{\perp}) \subseteq U^{\perp}$.

Fie $x \in U^{\perp}$ și $y \in U$. Dem că $<f(x), y> = 0$.

$$<f(x), y> = <\underset{U^{\perp}}{x}, \underset{U}{f(y)}> = 0 \Rightarrow f(x) \in U^{\perp}, \forall x \in U^{\perp} \Rightarrow$$

$\Rightarrow f(U^{\perp}) \subseteq U^{\perp}$. Mai mult $f/_{U^{\perp}} : U^{\perp} \to U^{\perp}$ e endom. sim.

Prop Fie $f \in Sim(E) \Rightarrow$ Vectorii proprii coresp. la valori proprii distincte sunt ortgonali.

Dem: Fie $x, y \in E \setminus \{0_E\}$ aî $f(x) = \alpha x$ cu $\alpha \neq \beta$.

$f(y) = \beta y$

Arătam că $<x, y> = 0$.

$<f(x), y> = <x, f(y)> \Rightarrow <\alpha x, y> = <x, \beta y> \Rightarrow \alpha <x, y> = \beta <x, y>

ENDOMORFISME SIMETRICE

Def $(E, <,>)$ sp. vect. euclidian real

$f \in End(E)$.

f s.n endomorfism simetric $\Leftrightarrow <f(x), y> = <x, f(y)> \ \forall x, y \in E$

Prop $f \in Sim(E) \Leftrightarrow$ matr. asociată lui f în raport cu $\forall$ reper orton. e simetrică.

Dem: Fie $R = \{e_1, \dots, e_n\}$ reper orton

$A =$ matr. asociată lui f în raport cu R.

$f(e_i) = \sum_{j=1}^{n} a_{ji} e_j \ \forall i = \overline{1,n}$.

$<f(e_i), e_k> = <e_i, f(e_k)> = <\sum_{j=1}^{n} a_{ji} e_j, e_k> = <e_i, \sum_{r=1}^{n} a_{rk} e_r>$

$\underbrace{\sum_{j=1}^{n} a_{ji} \underbrace{<e_j, e_k>}_{\delta_{jk}}}_{a_{ki}} = \underbrace{\sum_{r=1}^{n} a_{rk} \underbrace{<e_i, e_r>}_{\delta_{ir}}}_{a_{ik}} \Rightarrow a_{ki} = a_{ik} \ \forall i, k = \overline{1,n} \Rightarrow A = A^T$

Prop Fie $f \in Sim(E)$ și $U \subseteq E$ sp. invariant al f. $\Rightarrow U^{\perp} \subseteq E$ e sp. invariant al lui f.

Dem: $U \subseteq E$ sp invariant al lui f $\quad f(U) \subseteq U$.

Dem că $f(U^{\perp}) \subseteq U^{\perp}$.

Fie $x \in U^{\perp}$ și $y \in U$. Dem că $<f(x), y> = 0$.

$<f(x), y> = <\underset{\substack{\cap \\ U^{\perp}}}{x}, \underset{\substack{\cap \\ U}}{f(y)}> = 0 \Rightarrow f(x) \in U^{\perp}, \forall x \in U^{\perp} \Rightarrow$

$\Rightarrow f(U^{\perp}) \subseteq U^{\perp}$. Mai mult $f/_{U^{\perp}} : U^{\perp} \to U^{\perp}$ e endom. sim.

Prop Fie $f \in Sim(E) \Rightarrow$ Vectorii proprii coresp. la valori proprii distincte sunt ortgonali.

Dem: Fie $x, y \in E / \{0_E\}$ aî $f(x) = \alpha x$ cu $\alpha \neq \beta$.

$f(y) = \beta y$

Arătam că $<x, y> = 0$.

$<f(x), y> = <x, f(y)> \Rightarrow <\alpha x, y> = <x, \beta y> \Rightarrow \alpha <x, y> = \beta <x, y>$

$\Rightarrow \underset{\text{dar } \alpha \neq \beta}{(\alpha - \beta)} <x, y> = 0 \Rightarrow <x, y> = 0$

$\boxed{TH}$ Fie $f \in Sim(E)$. Toate valorile proprii sunt reale.

Dem: Fie $R = \{e_1, \ldots, e_n\}$ reper ortonormat, A - matricea asociată lui f în raport cu R;

$P(\lambda) = \det(A - \lambda I_n) = 0$.

Fie sistemul

TH: $(E, <,>), f \in Sim(E) \Rightarrow \exists$ un reper ortonormat format din valori proprii a.î. matr. asociată lui f e diagonală

<u>Dem</u>: Fie $\lambda_1 \in \mathbb{R}$ valoare proprie. Fie e_1 = versor propriu.

$f(e_1) = \lambda_1 e_1 \in V_1$.

$V_1 = <\{e_1\}>$ e subsp invariant al lui $f \Rightarrow V_1^\perp = <\{e_1\}>^\perp$ e ssp. propriu al lui f

1) $f/_{V_1^\perp} : V_1^\perp \to V_1^\perp$ e endom. simetric.

Fie $\lambda_2 \in \mathbb{R}$ val proprie pt $f/_{V_1^\perp}$ şi e_2 versor propriu

2) $f(e_2) = \lambda_2 e_2$.

$V_2 = <\{e_1, e_2\}>$.

Din 1, 2 $\Rightarrow V_2$ ssp. invariant al lui $f \Rightarrow V_2^\perp$ ssp al lui f.

Repetăm raţionamentul şi după n paşi construim $R = \{e_1, ..., e_n\}$, $f(e_i) = \lambda_i e_i$, $i = \overline{1,n}$, $n = \dim E$. R format din versori ortogonali 2 câte 2 $\Rightarrow$ R sist lin. $\Rightarrow$ R reper orton.

În rap. cu R matricea as. lui f este:

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & & & 0 \\ 0 & \lambda_2 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & & \lambda_n \end{pmatrix} \qquad f(e_1) = \lambda e_1 + 0 e_2 + \ldots + 0 e_n.$$

SPAȚII AFINE

DEF $(A, V/_{\mathbb{K}}, f)$ spațiu afin dacă
1. A mult $\neq \emptyset$
2. $(V, +, \cdot)/_{\mathbb{K}}$ sp. vect director
3. $f: A \times A \to V$ aplicație care verifică a) $f(A,B) + f(B,C) = f(A,C)$ $\forall A, B, C \in A$
   b) $\exists O \in A$ ai $f_O : A \to V$ bij, $f_O(A) = f(O, A)$

f structură afină

Not $f(A,B) = \overrightarrow{AB}$

→ P = baricentru al pct $\{P_1, \dots, P_n\}$ cu ponderile $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{K}$ dacă $P = \sum_{i=1}^{n} a_i P_i$, $\sum_{i=1}^{n} a_i = 1$.

Prin vectorializare, $\overrightarrow{OP} = \sum_{i=1}^{n} a_i \overrightarrow{OP_i}$, $\sum_{i=1}^{n} a_i = 1$.

→ $M \subset A$

$Af(M) = \{ \sum_{i=1}^{m} a_i P_i, \sum_{i=1}^{m} a_i = 1, P_1, \dots, P_m \in M, m \in \mathbb{N}^* \}$ – sp. afin generat de M

→ $\{P_1, \dots, P_n\} \subset A$ este sistem afin dependent (SAD) dc. $\exists i = \overline{1,n}$ ai P_i = baricentru al celorlalte puncte cu anumite ponderi

Dacă $\{P_1, \dots, P_n\}$ nu e SAD sau $n=1$ atunci este un sistem afin independent (SAI)

REPERE AFINE & CARTEZIENE

$(A, V/_{\mathbb{K}}, f)$ sp. afin.

$\dim A = \dim_{\mathbb{K}} V = n$ (V sp. vect finit generat).

$R_C = \{O; e_1, \dots, e_n\}$ s.n reper cartezian dacă $O \in A$, $\{e_1, \dots, e_n\}$ reper in V

Obs: $\forall P \in A \Rightarrow \overrightarrow{OP} = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$; $(x_1, \dots, x_n)$ coord carteziene ale lui P în raport cu R_C.

asociem reperul afin $R_{af} = \{O, P_1, \dots, P_n\}$

$(1 - \sum_{i=1}^{n} x_i; x_1, \dots, x_n)$ = coord baricentrice ale lui P în rap cu R_{af}

SUBSPAȚII AFINE

Def $(A, V/_{K}, \varphi)$ sp afin, $A' \subseteq A$ submult.

$A' \subseteq A$ s.n. ssp afin $\Leftrightarrow$ $\exists V' \subseteq V$ ssp vect. a.î. $\operatorname{Im}(\varphi/_{A' \times A'}) \subseteq V$ și $(A', V'/_{K}, \varphi/_{A' \times A'})$ este spațiu afin sau $A' = \emptyset$.

TH: $(A, V/_{K}, \varphi)$ sp afin, $A_1, A_2 \subseteq A$ ssp afine, V_{12} = sp vect director pt A_1, A_2

$$V_{12} = \begin{cases} V_1 + V_2, & A_1 \cap A_2 \neq \emptyset \\ V_1 + V_2 + \langle \overrightarrow{O_1 O_2} \rangle, & A_1 \cap A_2 = \emptyset. \end{cases}$$

$\forall O_1 \in A_1, O_2 \in A_2.$

Not V_{12} = subspațiu director asociat lui $A_1 + A_2$. $\left[\begin{array}{l}(A_1 + A_2, V_{12}, \varphi) \\ \text{ssp afin}\end{array}\right]$

Dem

① $A_1 \cap A_2 \neq \emptyset$:

$$\left.\begin{array}{l} A_1 \subseteq A_1 + A_2 \\ A_2 \subseteq A_1 + A_2 \end{array}\right. \Rightarrow \begin{array}{l} V_1 \subseteq V_{12} \\ V_2 \subseteq V_{12} \end{array} \Rightarrow \underbrace{V_1 + V_2}_{= \langle V_1 \cup V_2 \rangle} \subseteq V_{12}$$

Dem că $V_{12} \subseteq V_1 + V_2$

Fie $v \in V_{12}$ sp. vect director pt $A_1 + A_2$. $\exists O \in A_1 \cap A_2$, $f_O : A_1 + A_2 \to V_{12}$

bijectivă $\Rightarrow \exists ! P \in A_1 + A_2$ a.î. $f_O(P) = \overrightarrow{OP} = v$.

$P = \sum_{i=1}^{n} a_i P_i + \sum_{j=1}^{m} b_j Q_j \Rightarrow$ $P_1, \dots, P_n \in A_1$, $Q_1, \dots, Q_m \in A_2$. $\sum_{i=1}^{n} a_i + \sum_{j=1}^{m} b_j = 1$.

$v = \sum_{i=1}^{n} a_i \overrightarrow{OP_i} + \sum_{j=1}^{m} b_j \overrightarrow{OQ_j} = v_1 + v_2 \in V_1 + V_2$. Deci $V_{12} = V_1 + V_2$

② $A_1 \cap A_2 = \emptyset$

Dem că $V_{12} = V_1 + V_2 + \langle \overrightarrow{O_1 O_2} \rangle$ $\forall O_1 \in A_1, O_2 \in A_2$.

$$\left.\begin{array}{l} A_1 \subset A_1 + A_2 \\ A_2 \subset A_1 + A_2 \end{array}\right. \Rightarrow \begin{array}{l} V_1 \subset V_{12} \\ V_2 \subset V_{12} \end{array} \Rightarrow V_1 + V_2 \subset V_{12}$$

$\forall O_1 \in A_1, O_2 \in A_2 \Rightarrow O_1, O_2 \in A_1 + A_2 \Rightarrow \overrightarrow{O_1 O_2} \in V_{12} \Rightarrow \langle \overrightarrow{O_1 O_2} \rangle \subseteq V_{12}$

$\Rightarrow V_1 + V_2 + \langle \overrightarrow{O_1 O_2} \rangle \subseteq V_{12}$.

Dem că $V_{12} \subseteq V_1 + V_2 + \langle \overrightarrow{O_1O_2} \rangle$

Fie $v \in V_{12}$, $\exists!\ P \in A_1 + A_2$ a.î. $\overrightarrow{O_1P} = v$

$$\overrightarrow{O_1P} = \sum_{i=1}^{n} a_i \overrightarrow{O_1P_i} + \sum_{j=1}^{m} b_j \overrightarrow{O_1Q_j}, \quad P_1, \dots, P_n \in A_1, \quad Q_1, \dots, Q_m \in A_2$$

$$\sum_{i=1}^{n} a_i + \sum_{j=1}^{m} b_j = 1$$

$$\overrightarrow{O_1Q_j} = \overrightarrow{O_1O_2} + \overrightarrow{O_2Q_j}$$

$$v = \underbrace{\sum_{i=1}^{n} a_i \overrightarrow{O_1P_i}}_{\in V_1} + \underbrace{\sum_{j=1}^{m} a_j \overrightarrow{O_1O_2}}_{\in \langle \overrightarrow{O_1O_2} \rangle} + \underbrace{\sum_{j=1}^{m} b_j \overrightarrow{O_2Q_j}}_{\in V_2}$$

$\Downarrow$

$v \in V_1 + V_2 + \langle \overrightarrow{O_1O_2} \rangle$. Deci $V_{12} = V_1 + V_2 + \langle \overrightarrow{O_1O_2} \rangle$ sp director pt $A_1 + A_2$ daca $A_1 \cap A_2 = \emptyset$.

Dem că $V_{12} \subseteq V_1 + V_2 + \langle \overrightarrow{O_1O_2} \rangle$

Fie $r \in V_{12}$, $\exists !\ P \in A_1 + A_2$ a.î. $\overrightarrow{O_1P} = r$

$$\overrightarrow{O_1P} = \sum_{i=1}^{n} a_i \overrightarrow{O_1P_i} + \sum_{j=1}^{m} b_j \overrightarrow{O_1Q_j}, \quad P_1,\dots,P_n \in A_1,\ Q_1,\dots,Q_m \in A_2,\ \sum_{i=1}^{n} a_i + \sum_{j=1}^{m} b_j = 1$$

$$\overrightarrow{O_1Q_j} = \overrightarrow{O_1O_2} + \overrightarrow{O_2Q_j}$$

$$r = \underbrace{\sum_{i=1}^{n} a_i \overrightarrow{O_1P_i}}_{\in V_1} + \underbrace{\sum_{j=1}^{m} a_j \overrightarrow{O_1O_2}}_{\in \langle \overrightarrow{O_1O_2} \rangle} + \underbrace{\sum_{j=1}^{m} b_j \overrightarrow{O_2Q_j}}_{\in V_2}$$

$\Downarrow$

$r \in V_1 + V_2 + \langle \overrightarrow{O_1O_2} \rangle$. Deci $V_{12} = V_1 + V_2 + \langle \overrightarrow{O_1O_2} \rangle$ sp director pt $A_1 + A_2$ dacă $A_1 \cap A_2 = \emptyset$.

Dem că $V_{12} \subseteq V_1 + V_2 + \langle \overrightarrow{O_1O_2} \rangle$

Fie $r \in V_{12}$, $\exists!\ P \in A_1 + A_2$ a.î. $\overrightarrow{O_1P} = r$

$$\overrightarrow{O_1P} = \sum_{i=1}^{n} a_i \overrightarrow{O_1P_i} + \sum_{j=1}^{m} b_j \overrightarrow{O_1Q_j}, \quad P_1,\dots,P_n \in A_1,\ Q_1,\dots,Q_m \in A_2,\ \sum_{i=1}^{n} a_i + \sum_{j=1}^{m} b_j = 1$$

$$\overrightarrow{O_1Q_j} = \overrightarrow{O_1O_2} + \overrightarrow{O_2Q_j}$$

$$r = \underbrace{\sum_{i=1}^{n} a_i \overrightarrow{O_1P_i}}_{\in V_1} + \underbrace{\sum_{j=1}^{m} a_j \overrightarrow{O_1O_2}}_{\in \langle \overrightarrow{O_1O_2} \rangle} + \underbrace{\sum_{j=1}^{m} b_j \overrightarrow{O_2Q_j}}_{\in V_2}$$

$\Downarrow$

$r \in V_1 + V_2 + \langle \overrightarrow{O_1O_2} \rangle$. Deci $V_{12} = V_1 + V_2 + \langle \overrightarrow{O_1O_2} \rangle$ sp director pt $A_1 + A_2$ dacă $A_1 \cap A_2 = \emptyset$.

TEOREMA DIM. PT SPAȚII AFINE

$$\dim(\mathcal{A}_1+\mathcal{A}_2) = \begin{cases} \dim \mathcal{A}_1 + \dim \mathcal{A}_2 - \dim(\mathcal{A}_1+\mathcal{A}_2), & \mathcal{A}_1 \cap \mathcal{A}_2 \neq \emptyset \\ \dim A_1 + \dim A_2 - \dim(V_1 \cap V_2) + 1, & \mathcal{A}_1 \cap A_2 = \emptyset. \end{cases}$$

unde $(A, V_{/K}, \varphi)$ spațiu afin, $A_1, A_2 \subseteq A$ ssp. afine.

Dem 1) $\mathcal{A}_1 \cap \mathcal{A}_2 \neq \emptyset$

$\dim(\mathcal{A}_1+\mathcal{A}_2) = \dim V_{12} = \dim(V_1+V_2) = \dim V_1 + \dim V_2 - \dim(V_1 \cap V_2)$

$= \dim \mathcal{A}_1 + \dim \mathcal{A}_2 - \dim(\mathcal{A}_1 \cap \mathcal{A}_2)$.

2) $A_1 \cap A_2 = \emptyset$

$\dim(A_1+A_2) = \dim V_{12} = \dim(V_1+V_2+\langle\overrightarrow{O_1O_2}\rangle) = \dim(V_1+V_2) + \dim(\langle\overrightarrow{O_1O_2}\rangle) - \dim((V_1+V_2)\cap\langle\overrightarrow{O_1O_2}\rangle) =$

$= \dim V_1 + \dim V_2 - \dim(V_1\cap V_2) + 1 - \underbrace{\dim((V_1+V_2)\cap\langle\overrightarrow{O_1O_2}\rangle)}_{=0} =$

$= \dim \mathcal{A}_1 + \dim \mathcal{A}_2 - \dim(V_1 \cap V_2) + 1$.

Dem că $(V_1+V_2)\cap\langle\overrightarrow{O_1O_2}\rangle = \{0_V\}$

Pp prin RA că $\overrightarrow{O_1O_2} \in V_1+V_2$.

$\overrightarrow{O_1O_2} = \underset{V_1}{v_1} + \underset{V_2}{v_2} = \overrightarrow{O_1P_1} + \overrightarrow{O_2P_2} = \overrightarrow{O_1O_2} + \overrightarrow{O_2P_1} + \overrightarrow{O_2P_2}$

$O_1, P_1 \in \mathcal{A}_1$, $O_2, P_2 \in \mathcal{A}_2$

$\left.\begin{array}{l}\overrightarrow{P_1O_2} = \overrightarrow{O_2P_2} \in V_2 \\ O_2 \in \mathcal{A}_2\end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l}P_1 \in \mathcal{A}_2 \\ \text{dar } P_1 \in \mathcal{A}_1\end{array} \Rightarrow A_1 \cap A_2 \neq \emptyset$ ⚡.

$\Rightarrow \dim((V_1+V_2)\cap\langle\overrightarrow{O_1O_2}\rangle) = 0$.

$\boxed{\text{Def}}$ $(A, V_{/K}, \varphi)$ sp afin, $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2 \subseteq A$ ssp. afine

Spunem că $\mathcal{A}_1 \parallel \mathcal{A}_2 \Leftrightarrow V_1 \subseteq V_2$ sau $V_2 \subseteq V_1$.

$A_1 \parallel A_2$ și $\dim \mathcal{A}_1 = \dim \mathcal{A}_2 \Rightarrow V_1 = V_2$

TEOREMA DIM. PT SPAŢII AFINE

$$\dim(\mathcal{A}_1+\mathcal{A}_2) = \begin{cases} \dim \mathcal{A}_1 + \dim \mathcal{A}_2 - \dim(\mathcal{A}_1+\mathcal{A}_2), & \mathcal{A}_1 \cap \mathcal{A}_2 \neq \emptyset \\ \dim \mathcal{A}_1 + \dim \mathcal{A}_2 - \dim(V_1 \cap V_2) + 1, & \mathcal{A}_1 \cap \mathcal{A}_2 = \emptyset. \end{cases}$$

unde $(\mathcal{A}, V_{/K}, \varphi)$ spaţiu afin, $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2 \subseteq \mathcal{A}$ ssp. afine.

Dem 1) $\mathcal{A}_1 \cap \mathcal{A}_2 \neq \emptyset$

$$\dim(\mathcal{A}_1+\mathcal{A}_2) = \dim V_{12} = \dim(V_1+V_2) = \dim V_1 + \dim V_2 - \dim(V_1 \cap V_2)$$
$$= \dim \mathcal{A}_1 + \dim \mathcal{A}_2 - \dim(\mathcal{A}_1 \cap \mathcal{A}_2).$$

2) $\mathcal{A}_1 \cap \mathcal{A}_2 = \emptyset$

$$\dim(\mathcal{A}_1+\mathcal{A}_2) = \dim V_{12} = \dim(V_1+V_2+\langle \overrightarrow{O_1O_2} \rangle) = \dim(V_1+V_2) + \dim(\langle \overrightarrow{O_1O_2} \rangle) - \dim((V_1+V_2) \cap \langle \overrightarrow{O_1O_2} \rangle) =$$
$$= \dim V_1 + \dim V_2 - \dim(V_1 \cap V_2) + 1 - \underbrace{\dim((V_1+V_2) \cap \langle \overrightarrow{O_1O_2} \rangle)}_{=0} =$$
$$= \dim \mathcal{A}_1 + \dim \mathcal{A}_2 - \dim(V_1 \cap V_2) + 1.$$

Dem că $(V_1+V_2) \cap \langle \overrightarrow{O_1O_2} \rangle = \{0_V\}$

Pp prin RA că $\overrightarrow{O_1O_2} \in V_1+V_2$.

$$\overrightarrow{O_1O_2} = \underset{\substack{\cap \\ V_1}}{v_1} + \underset{\substack{\cap \\ V_2}}{v_2} = \overrightarrow{O_1P_1} + \overrightarrow{O_2P_2} = \cancel{\overrightarrow{O_1O_2}} + \overrightarrow{O_2P_1} + \overrightarrow{O_2P_2}$$

$O_1, P_1 \in \mathcal{A}_1$, $O_2, P_2 \in \mathcal{A}_2$

$$\left.\begin{array}{l} \overrightarrow{P_1O_2} = \overrightarrow{O_2P_2} \in V_2 \\ O_2 \in \mathcal{A}_2 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} P_1 \in \mathcal{A}_2 \\ \text{dar } P_1 \in \mathcal{A}_1 \end{array} \Rightarrow \mathcal{A}_1 \cap \mathcal{A}_2 \neq \emptyset \ \text{✗}.$$

$\Rightarrow \dim((V_1+V_2) \cap \langle \overrightarrow{O_1O_2} \rangle) = 0.$

Def $(\mathcal{A}, V_{/K}, \varphi)$ sp afin, $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2 \subseteq \mathcal{A}$ ssp. afine

Spunem că $\mathcal{A}_1 \parallel \mathcal{A}_2 \Leftrightarrow V_1 \subseteq V_2$ sau $V_2 \subseteq V_1$.

$\mathcal{A}_1 \parallel \mathcal{A}_2$ şi $\dim \mathcal{A}_1 = \dim \mathcal{A}_2 \Rightarrow V_1 = V_2$

TEOREMA DIM. PT SPAȚII AFINE

$$\dim(\mathcal{A}_1+\mathcal{A}_2)=\begin{cases}\dim\mathcal{A}_1+\dim\mathcal{A}_2-\dim(\mathcal{A}_1+\mathcal{A}_2), & \mathcal{A}_1\cap\mathcal{A}_2\neq\emptyset\\ \dim A_1+\dim A_2-\dim(V_1\cap V_2)+1, & \mathcal{A}_1\cap A_2=\emptyset.\end{cases}$$

unde $(A, V_{/K}, \varphi)$ spațiu afin, $A_1, A_2 \subseteq A$ ssp. afine.

Dem 1) $\mathcal{A}_1\cap\mathcal{A}_2\neq\emptyset$

$$\dim(\mathcal{A}_1+\mathcal{A}_2)=\dim V_{12}=\dim(V_1+V_2)=\dim V_1+\dim V_2-\dim(V_1\cap V_2)$$

$$=\dim\mathcal{A}_1+\dim\mathcal{A}_2-\dim(\mathcal{A}_1\cap\mathcal{A}_2).$$

2) $A_1\cap A_2=\emptyset$

$$\dim(A_1+A_2)=\dim V_{12}=\dim(V_1+V_2+\langle\overrightarrow{O_1O_2}\rangle)=\dim(V_1+V_2)+$$

$$+\dim(\langle\overrightarrow{O_1O_2}\rangle)-\dim((V_1+V_2)\cap\langle\overrightarrow{O_1O_2}\rangle)=$$

$$=\dim V_1+\dim V_2-\dim(V_1\cap V_2)+1-\underbrace{\dim((V_1+V_2)\cap\langle\overrightarrow{O_1O_2}\rangle)}_{=0}=$$

$$=\dim\mathcal{A}_1+\dim\mathcal{A}_2-\dim(V_1\cap V_2)+1.$$

Dem că $(V_1+V_2)\cap\langle\overrightarrow{O_1O_2}\rangle=\{0_V\}$

Pp prin RA că $\overrightarrow{O_1O_2}\in V_1+V_2$.

$$\overrightarrow{O_1O_2}=\underset{\substack{\cap\\ V_1}}{v_1}+\underset{\substack{\cap\\ V_2}}{v_2}=\overrightarrow{O_1P_1}+\overrightarrow{O_2P_2}=\cancel{\overrightarrow{O_1O_2}}+\overrightarrow{O_2P_1}+\overrightarrow{O_2P_2}$$

$O_1, P_1\in\mathcal{A}_1$, $O_2, P_2\in\mathcal{A}_2$

$\left.\begin{array}{l}\overrightarrow{P_1O_2}=\overrightarrow{O_2P_2}\in V_2\\ O_2\in\mathcal{A}_2\end{array}\right\}\Rightarrow P_1\in\mathcal{A}_2$ dar $P_1\in\mathcal{A}_1$ $\Rightarrow A_1\cap\mathcal{A}_2\neq\emptyset$ ✗.

$\Rightarrow\dim((V_1+V_2)\cap\langle\overrightarrow{O_1O_2}\rangle)=0.$

$\boxed{\text{Def}}$ $(A, V_{/K}, \varphi)$ sp afin, $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2\subseteq A$ ssp. afine

Spunem că $\mathcal{A}_1\parallel\mathcal{A}_2\Leftrightarrow V_1\subseteq V_2$ sau $V_2\subseteq V_1$.

$\mathcal{A}_1\parallel\mathcal{A}_2$ și $\dim\mathcal{A}_1=\dim\mathcal{A}_2\Rightarrow V_1=V_2$

ECUAȚII SUBSPAȚII AFINE

$(\mathcal{A}, V/_{\mathbb{K}}, \varphi)$ spațiu afin.

$R_c = \{O; e_1, \dots, e_n\}$ reper cartezian, $\dim_{\mathbb{K}} \mathcal{A} = n$.

Ecuația unei drepte afine D ($\dim D = 1$)

a) $R_c' = \{P_0, u\}$, $P_0 \in D$, $V_D = \langle \{u\} \rangle$

$$\overrightarrow{OP_0} = \sum_{i=1}^{n} x_{0i} e_i, \quad u = \sum_{i=1}^{n} u_i e_i$$

$$D: \frac{x_1 - x_{01}}{u_1} = \dots = \frac{x_n - x_{0n}}{u_n} = t.$$

b) $R_{af} = \{P_0, P_1\}$, $P_0 \neq P_1$, $\overrightarrow{P_0P_1} = u$.

$$\overrightarrow{OP_1} = \sum_{i=1}^{n} x_{1i} e_i$$

$$D: \frac{x_1 - x_{01}}{x_{11} - x_{01}} = \dots = \frac{x_n - x_{0n}}{x_{1n} - x_{0n}} = t$$

Ecuația unui hiperplan ($\dim H = n \neq 1$)

a) $R_c' = \{P_0, u_1, \dots, u_{n-1}\}$ reper cartezian în H.

$u_i = \sum_{j=1}^{n} u_{ij} e_j$, $i = \overline{1, n-1}$, $P_0 \in H$.

$$H: \begin{vmatrix} x_1 - x_{01} & u_{11} & \dots & u_{n-1\,1} \\ \vdots & & & \\ x_n - x_{0n} & u_{1n} & \dots & u_{n-1\,n} \end{vmatrix} = 0.$$

$V_H = \langle \{u_1, \dots, u_{n-1}\} \rangle$ spațiul director

b) $R_{af} = \{P_0, P_1, \dots, P_{n-1}\}$ reper afin în H.

$\overrightarrow{P_0P_i} = u_i$, $\forall i = \overline{1, n-1}$

$\{P_0, P_1, \dots, P_{n-1}\}$ n puncte afin indep.

$\overrightarrow{OP_i} = \sum_{j=1}^{n} x_{ij} e_j$, $i = \overline{1, n-1}$.

$$H: \begin{vmatrix} x_1 - x_{01} & x_{11} - x_{01} & \dots & x_{n-1} - x_{01} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_n - x_{0n} & x_{n} - x_{0n} & & x_{n-1\,n} - x_{0n} \end{vmatrix} = 0 \quad \text{sau} \quad H: \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_1 & x_{01} & x_{11} & & x_{n-1\,1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_n & x_{0n} & x_{1n} & & x_{n-1\,n} \end{vmatrix} = 0$$

$H: a_1 x_1 + \dots + a_n x_n = 0$ (ec. generală hiperplan)

$$\sum_{i=1}^{n} a_i^2 > 0$$

APLICAȚII AFINE

Def: $(\mathcal{A}_i, V_i/_{K}, f_i)$ $i=\overline{1,2}$ spații afine.

$\tau: \mathcal{A}_1 \to \mathcal{A}_2$ s.n aplicație afină $\Leftrightarrow$ $\exists O \in \mathcal{A}_1$, $\exists T: V_1 \to V_2$ aplicație liniară a.î. $T(\overrightarrow{OA}) = \overrightarrow{\tau(O)\tau(A)}$; $f_1(O,A) = \overrightarrow{OA}$

$f_2(\tau(O), \tau(A)) = \overrightarrow{\tau(O)\tau(A)}$

Prop $\tau: \mathcal{A}_1 \to \mathcal{A}_2$ aplicație afină este unic det. de perechea $(O, \tau(O))$ și aplicația liniară $T: V_1 \to V_2$ (urma lui τ).

Dem Fie $A_1 \in \mathcal{A}_1$. Construim $A_2 \in \mathcal{A}$. a.î. $\tau(A_1) = A_2$.

Fie $O \in \mathcal{A}_1$

$T(\overrightarrow{OA_1}) = \overrightarrow{\tau(O)\tau(A_1)} = W \in V_2$.

$f_2: \mathcal{A}_2 \times \mathcal{A}_2 \to V$ str afină $\Rightarrow f_{2\tau(O)} : \mathcal{A}_2 \to V_2$ apl. bij $\Rightarrow$

$\Rightarrow \exists! A_2 \in \mathcal{A}_2$ a.î. $f_{2\tau(O)}(A_2) = W$

$\Rightarrow \overrightarrow{\tau(O)A_2} = \overrightarrow{\tau(O)\tau(A_1)} \Rightarrow \tau(A_1 = A_2$

TH: $\tau: \mathcal{A}_1 \to \mathcal{A}_2$ aplicații afine și $T: V_1 \to V_2$ urma lui τ.

a) τ inj $\Leftrightarrow$ T inj

b) τ surj $\Leftrightarrow$ T surj

c) τ bij $\Leftrightarrow$ T bij

Dem: 1) "$\Rightarrow$" τ inj. Dem T inj $\Leftrightarrow \operatorname{Ker} T = \{0_{V_1}\}$.

Fie $v \in \operatorname{Ker} T \Rightarrow T(v) = 0_{V_2}$.

$v = \overrightarrow{AB}$, $A, B \in \mathcal{A}_1$

$T(\overrightarrow{AB}) = \overrightarrow{\tau(A)\cdot\tau(B)} \Rightarrow \tau(A) = \tau(B) \overset{\tau \text{ inj}}{\Rightarrow} A = B \Rightarrow v = 0_{V_1}$ deci T inj

"$\Leftarrow$" T inj. Dem τ inj.

Fie $A, B \in \mathcal{A}_1$ a.î. $\tau(A) = \tau(B)$

$\underset{T(\overrightarrow{AB})}{\overset{\parallel}{\overrightarrow{\tau(A)\tau(B)}}} = 0_{V_2} \overset{T \text{ inj}}{\Rightarrow} \overrightarrow{AB} = 0_{V_1} \Rightarrow A = B.$

APLICAȚII AFINE

Def: $(\mathcal{A}_i, V_i/_{\mathbb{K}}, \varphi_i)$ $i=\overline{1,2}$ spații afine.

$\tau: \mathcal{A}_1 \to \mathcal{A}_2$ s.n aplicație afină $\Leftrightarrow \exists\, O \in \mathcal{A}_1, \exists\, T: V_1 \to V_2$ aplicație liniară a.î. $T(\overrightarrow{OA}) = \overrightarrow{\tau(O)\tau(A)}$; $\varphi_1(O,A) = \overrightarrow{OA}$

$\varphi_2(\tau(O), \tau(A)) = \overrightarrow{\tau(O)\tau(A)}$

Prop $\tau: \mathcal{A}_1 \to \mathcal{A}_2$ aplicație afină este unic det. de perechea $(O, \tau(O))$ și aplicația liniară $T: V_1 \to V_2$ (urma lui τ).

Dem Fie $A_1 \in \mathcal{A}_1$. Construim $A_2 \in \mathcal{A}$. a.î. $\tau(A_1) = A_2$.

Fie $O \in \mathcal{A}_1$

$T(\overrightarrow{OA_1}) = \overrightarrow{\tau(O)\tau(A_1)} = w \in V_2$.

$\varphi_2: \mathcal{A}_2 \times \mathcal{A}_2 \to V$ str afină $\Rightarrow \varphi_{2\tau(O)} : \mathcal{A}_2 \to V_2$ apl. bij $\Rightarrow$

$\Rightarrow \exists!\, A_2 \in \mathcal{A}_2$ a.î. $\varphi_{2\tau(O)}(A_2) = w$

$\Rightarrow \overrightarrow{\tau(O)A_2} = \overrightarrow{\tau(O)\tau(A_1)} \Rightarrow \tau(A_1) = A_2$

TH: $\tau: \mathcal{A}_1 \to \mathcal{A}_2$ aplicații afine și $T: V_1 \to V_2$ urma lui τ.

a) τ inj $\Leftrightarrow$ T inj

b) τ surj $\Leftrightarrow$ T surj

c) τ bij $\Leftrightarrow$ T bij

Dem: 1) "$\Rightarrow$" τ inj. Dem T inj $\Leftrightarrow \ker T = \{0_{V_1}\}$.

Fie $v \in \ker T \Rightarrow T(v) = 0_{V_2}$.

$v = \overrightarrow{AB}$, $A,B \in \mathcal{A}_1$

$T(\overrightarrow{AB}) = \overrightarrow{\tau(A)\tau(B)} \Rightarrow \tau(A) = \tau(B) \overset{\tau \text{ inj}}{\Longrightarrow} A = B \Rightarrow v = 0_{V_1}$, deci T inj

"$\Leftarrow$" T inj. Dem τ inj.

Fie $A, B \in \mathcal{A}_1$ a.î. $\tau(A) = \tau(B)$

$\underset{\substack{\| \\ T(\overrightarrow{AB})}}{\overrightarrow{\tau(A)\tau(B)}} = 0_{V_2} \overset{T \text{ inj}}{\Longrightarrow} \overrightarrow{AB} = 0_{V_1} \Rightarrow A = B.$

2. „$\Rightarrow$" τ surj. Dem T surj

$T: V_1 \to V_2$ apl. liniară.

Dem că $\forall w \in V_2$, $\exists v \in V_1$ a.î. $T(v) = w$.

$w = \overrightarrow{CD}$, $C, D \in \mathcal{A}_1$

$\tau: \mathcal{A}_1 \to \mathcal{A}_2$ surj, $\exists A, B \in \mathcal{A}_1$ a.î. $\tau(A) = C$ și $\tau(B) = D$.

$\overrightarrow{\tau(A)\tau(B)} = \overrightarrow{CD} = w \qquad v = \overrightarrow{AB}$

$\overset{\|}{T(\overrightarrow{AB})}$

„$\Leftarrow$" T surj. Dem τ surj

$\tau: \mathcal{A}_1 \to \mathcal{A}_2$.

$\forall C \in \mathcal{A}_2$, $\exists A \in \mathcal{A}_1$ a.î. $\tau(A) = C$ (dem).

Fie $O \in \mathcal{A}_1$

$w = \overrightarrow{\tau(O)C} \in V_2 \qquad T: V_1 \to V_2$ surj (ip)

$\exists!\, v \in V_1$ a.î. $T(v) = w$.

$$v = \overrightarrow{OA}$$

$$T(v) = T(\overrightarrow{OA}) = \overrightarrow{\tau(O)\tau(A)}$$

$$T(v) = w = \overrightarrow{\tau(O)C} \Rightarrow \tau(A) = C.$$

τ_1, τ_2 apl afine cu urma T_1, resp T_2 $\Rightarrow$ $\tau_2 \circ \tau_1$ apl afină cu urma $T_2 \circ T_1$

GRUPUL AFIN

Def $\tau: \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ aplicație afină & bijectivă s.n transf afină.

NOTĂM $(AGL(\mathcal{A}) = \{\tau : \mathcal{A} \to \mathcal{A} \mid \tau \text{ transf. afină}\}, \circ)$

grupul afin; el. sale s.n afinități.

$\Theta : (AGL(\mathcal{A}), \circ) \to (GL(V), \circ)$

$\Theta(\tau) = T$ morf de grupuri

$\longrightarrow$ Fie $O \in \mathcal{A}$.

Not. $AGL(\mathcal{A}, O) = \{\tau \in AGL(\mathcal{A}) \mid \tau(O) = O\}$. i.e pct. fix pt τ $\overset{\shortparallel}{O}$

mulț transf. centro afine de centru O.

$AGL(A, O) \leqslant AGL(\mathcal{A})$ subgrup în grupul afin

Def $\tau : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ aplicație afină.

τ s.n translație afină $\Leftrightarrow$ urma sa $T: V \to V$, $T = id_V$.

$\mathcal{T}(A)$ = mulț. translațiilor afine.

$\boxed{TH}$: $\forall \nabla \in AGL(A) \Rightarrow \exists!\ t \in \mathcal{T}(A)$ translație

$\theta \in AG(A, O)$ a.î. $\nabla = t \circ \theta$

transf afină — centro-afinitate

Dem

Fie $t \in \mathcal{T}(A)$ cu vect $v_t = \overrightarrow{O\nabla(O)}$.

$O \in \mathcal{A}$, $\nabla : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ transf. afină

Considerăm $\theta = t^{-1} \circ \nabla$. Dem că $\theta(O) = O$, i.e O = pct fix.

$\overrightarrow{O\nabla(O)} = v_t = \overrightarrow{At(A)} = \Theta(O)\ \underbrace{t \circ \theta(O)}_{\nabla(O)} \Rightarrow \theta(O) = O$.

Unicitate:

Pp prin RA $\exists t, t' \in \mathcal{T}(A)$, $\theta, \theta' \in AGL(\mathcal{A}, \theta)$ a.î.

$\nabla = t \circ \theta = t' \circ \theta' \Rightarrow \underset{\mathcal{T}(A)}{\underset{\cap}{t'^{-1} \circ t}} = \underset{AGL(\mathcal{A}, \theta)}{\underset{\cap}{\theta' \circ \theta^{-1}}}$

$t'^{-1} \circ t$ = translație cu un punct fix $O \Rightarrow t'^{-1} \circ t = id_V \Rightarrow t' = t$, $\theta' = \theta$

1) Schimbare de reper:

$R = \{e_1, \dots, e_n\}$
$R' = \{e_1', \dots, e_n'\}$

→ $e_1' \dots e_n'$ vor fi date ca niște sume de vectori.
→ ca să obțin matricea A scriu $e_1', \dots, e_n'$ în funcție de $e_1, \dots, e_n$ și îi trec unii sub alții
→ iau coeficienții și îi trec pe coloană, obț. coloana lui e_1, a lui e_2 etc
→ aceasta va fi matricea transp. la cea de care am eu nevoie, deci îi calc. transpusa pt a afla matricea A

Ca să calculez coord unui vect. în raport cu acest nou reper, fol. formula $X' = A^{-1}X$.

2) Ca să dem că două mult. de vectori generează același spațiu, găsesc (da) vectori ~~prin~~ în fct. de care să-i scriu pe cei din
in fct. de dim
ambele mulțimi

$\dim \operatorname{Im} f = \operatorname{rg} A$. A asoc apl. liniare

$\dim \operatorname{Ker} f = n - \operatorname{rg} A$

$\dim V_1 \times V_2 = m + n$

APLICAȚII LINIARE

$a: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$; $f(x) = (x_1 + x_2 - x_3,\ x_1 + x_2,\ x_1 + x_2 + x_3)$

a) f liniară

b) Ker f, Im f = ?

Sol:

a) f liniară:

$f(x) = y \Leftrightarrow Y = AX = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \to f$ liniară

$\det A = 0$, $rg\, A = 2$.

$\boxed{\text{sau}}$

a) $f(x+y) = (x_1 + x_2 - x_3 + y_1 + y_2 - y_3,\ x_1 + x_2 + y_1 + y_2,\ x_1 + x_2 + x_3 + y_1 + y_2 + y_3)$

① $= (x_1 + x_2 - x_3, x_1 + x_2, x_1 + x_2 + x_3) + (y_1 + y_2 - y_3, y_1 + y_2, y_1 + y_2 + y_3)$

$= f(x) + f(y)$

$f(ax) = (ax_1 + ax_2 - ax_3,\ ax_1 + ax_2,\ ax_1 + ax_2 + ax_3) =$

② $= (a(x_1 + x_2 - x_3,\ a(x_1 + x_2),\ a(x_1 + x_2 + x_3)) =$

$= a(x_1 + x_2 - x_3,\ x_1 + x_2, x_1 + x_2 + x_3) = a f(x)$.

f liniară

b) $\text{Ker} f = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid f(x) = 0_{\mathbb{R}^3}\} = \left\{ x \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \begin{matrix} x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 0 \end{matrix} \right\}$

$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ dim Ker f = 3 − rang A = 3 − 2 = 1

$\boxed{\text{dim Ker} f = n - \text{rang} A}$

$\begin{cases} x_3 = 0 \\ x_1 = -x_2 \end{cases} \Rightarrow \text{Ker} f = \{(-x_2, x_2, 0) \mid x_2 \in \mathbb{R}\}$

$R_1 = \{(-1, 1, 0)\}$ reper în Ker f.

$y \in \text{Im} f \Rightarrow \exists x \in \mathbb{R}^3$ a.î. $f(x) = y$.

$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = y_1 \\ x_1 + x_2 = y_2 \\ x_1 + x_2 + x_3 = y_3 \end{cases} \to$ Sistem compatibil nedet.

$$\Delta_c = \begin{vmatrix} +1 & -1 & y_1 \\ 1 & 0 & y_2 \\ 1 & 1 & y_3 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 1 & y_1 \\ 1 & 0 & y_2 \\ 2 & 0 & y_1+y_3 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y_1 + y_3 - 2y_2 = 0 \Rightarrow \operatorname{Im} f = \{ y \in \mathbb{R}^3 \mid y_1 - 2y_2 + y_3 = 0 \}$$

$\dim \operatorname{Im} f = 3 - 1 = 2$

$y_1 = 2y_2 - y_3$

$\operatorname{Im} f = \{ (2y_2 - y_3, y_2, y_3) \mid y_2, y_3 \in \mathbb{R} \} = \{ y_2(2,1,0) + y_3(-1,0,1) \mid y_2, y_3 \in \mathbb{R} \}$

$R_2 = \{ (2,1,0), (-1,0,1) \}$ reper in $\operatorname{Im} f$

TEST

(1) $f:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$

$f(x) = (x_2,\ -4x_1 + 4x_2,\ -2x_1 + x_2 + 2x_3)$

a) $\operatorname{Ker} f$, $\operatorname{Im} f = ?$

b) valorile proprii, sp proprii ; matricea lui f diag. ?

→ VERIFICĂM DACĂ $\det A \neq 0$.

- Dacă $\det A \neq 0 \Rightarrow f$ bij $\Rightarrow \begin{cases} \operatorname{Ker} f = \{0_{\mathbb{R}^3}\} \\ \operatorname{Im} f = \mathbb{R}^3 \end{cases}$
- Dacă $\det A = 0$ atunci construim un sistem egalând cu 0 componentele lui $f(x_1,x_2,x_3)$ și se obț mereu sistem omogen $\Rightarrow$ compatibil.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad \det A = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -4 & 4 \end{vmatrix} = 2 \cdot 4 = 8.$$

$\to \operatorname{Ker} f = \{0_{\mathbb{R}^3}\} \Rightarrow \dim \operatorname{Ker} f = 0$.

$3 = 0 + \dim \operatorname{Im} f \Rightarrow \dim \operatorname{Im} f = 3$

$\left.\begin{array}{l} \dim \operatorname{Im} f = \dim \mathbb{R}^3 \\ \operatorname{Im} f \subseteq \mathbb{R}^3 \end{array}\right\} \Rightarrow \operatorname{Im} f = \mathbb{R}^3.$

b) Calculăm $\det(A - \lambda I_3) = 0$

Obținem $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ cu $m_1, \dots, m_n$ ord. de multip.

$P(\lambda) = \det(A - \lambda I_3) = 0$

$$P(\lambda) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ -4 & 4-\lambda & 0 \\ -2 & 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda) \cdot \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -4 & 4-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda) \cdot (-\lambda \cdot (4-\lambda) + 4)$$

$= (2-\lambda) \cdot (\lambda^2 - 4\lambda + 4) = (2-\lambda)(2-\lambda)^2 = (2-\lambda)^3$; $\boxed{\lambda_1 = 2,\ m_1 = 3}$

$V_{\lambda_1} = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid f(x) = 2x\}$ $\qquad V_\lambda = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid f(x) = \lambda x\}$

- Egalăm fiecare comp. din $f(x_1, x_2, x_3)$ cu λx
- Rezolvăm sistemului și det. x_1, x_2, x_3.

$$\begin{cases} x_2 = 2x_1 \\ -4x_1 + 4x_2 = 2x_2 \\ -2x_1 + x_2 + 2x_3 = 2x_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x_1 - x_2 = 0 \\ 4x_1 - 2x_2 = 0 \\ -2x_1 + x_2 = 0 \end{cases} \to 2x_1 = x_2 \Rightarrow V_{\lambda_1} = \{(x_1, 2x_1, x_3) \mid x_1, x_3 \in \mathbb{R}\}$$

$V_{\lambda_1} = \{x_1(1,2,0) + x_3(0,0,1) \mid x_1, x_3 \in \mathbb{R}\}$ $\quad$ $\dim V_{\lambda_1} \to$ calculăm rg. det format din vect. acestuia.

$R_1 = \{(1,2,0), (0,0,1)\}$. $\operatorname{rg} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 2$

$(\dim V_{\lambda_1} = 2) \neq (3 = m_1) \Rightarrow A$ nu se poate diagonaliza

<u>Ex2</u>: $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \quad f(x) = (x_1+x_2,\ x_1-x_2)$

Matr. asociată lui f în raport cu reperul $R' = \{(1,1),(-1,0)\}$.

$$\boxed{A' = C^{-1} A C}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$\det C = +1$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad C^T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$c_{11} = (-1)^{1+1} \cdot 0 = 0$

$c_{12} = (-1)^{1+2} \cdot (-1) = 1$

$c_{21} = (-1)^{2+1} \cdot 1 = -1$

$c_{22} = (-1)^{2+2} \cdot 1 = 1$

$$C^{-1} = \frac{1}{\det C} \cdot C^* =$$

$$= +1 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$$

$\boxed{\text{Ex3}}$ $\mathbb{R}_3[X] \cong \mathbb{R}^4$

$S = \{x+5,\ x(x-1),\ x^3-x\}$

a) $\dim \langle S \rangle = ?$

b) $\mathbb{R}_3[X] = V_1 \oplus V_2 \oplus V_3$.

$R_0 = \{1, x, x^2, x^3\}$

$1 \to (1,0,0,0)$, $x \to (0,1,0,0)$, $x^2 \to (0,0,1,0)$, $x^3 \to (0,0,0,1)$

$S = \{5+X,\ -x+x^2,\ x^3-x\}$

$5+X \to (5,1,0,0)$, $-x+x^2 \to (0,-1,1,0)$, $x^3-x \to (0,-1,0,1)$

$$\operatorname{rg} \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 3 \text{ (maxim)} \Rightarrow S \text{ e SLI}.$$

$\dim \langle S \rangle = 3$.

b) Scriem reperul ca reuniune (partiționare) de submulțimi

$$\langle \{1, x\} \rangle \quad \langle x^2 \rangle \quad \langle \{x^3\} \rangle$$
$$\quad\ \ \| \qquad\quad \| \qquad\quad \|$$
$$\quad\ V_1 \qquad\ V_2 \qquad\ V_3$$

EX4 $Q: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$

$$Q(x) = 7x_1^2 + 7x_2^2 + 10x_3^2 - 2x_1x_2 - 4x_1x_3 - 4x_2x_3$$

a) $\uparrow$ la forma canonica.

Q poz. def - ?

b) Forma polară asociată ?

a)
$$A = \begin{pmatrix} 7 & -1 & -2 \\ -1 & 7 & -2 \\ -2 & -2 & 10 \end{pmatrix}$$

Jacobi:

$\Delta_1 = 7$

$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 7 & -1 \\ -1 & 7 \end{vmatrix} = 48$

$\Delta_3 = \det A \neq 0$.

$$\boxed{Q(x) = \frac{1}{\Delta_1} x_1'^2 + \frac{\Delta_1}{\Delta_2} x_2'^2 + \frac{\Delta_2}{\Delta_3} x_3'^2}$$

Signatura $(3,0) \Rightarrow Q$ poz. def.

Dacă $\Delta_1 / \Delta_2 / \Delta_3 = 0$

Gauss: $Q(x) = \underline{7x_1^2} + 7x_2^2 + 10x_3^2 \underline{- 2x_1x_2} \underline{- 4x_1x_3} - 4x_2x_3$

- Subliniem termenii care conțin x_1.
- Din cei 3 termeni vreau să fac un pătrat perfect.
- La fel x_2, x_3 și vreau să obțin 3 pătrate

$$Q(x) = \frac{1}{7}\left(7^2x_1^2 - 14x_1x_2 - 28x_1x_3\right) + 7x_2^2 + 10x_3^2 - 4x_2x_3 =$$

$$= \frac{1}{7}\cdot(7x_1 - x_2 - 2x_3)^2 - \frac{1}{7}\left(x_2^2 + 2^2x_3^2 + 4x_2x_3\right) + 7x_2^2 + 10x_3^2 - 4x_2x_3 =$$

$$= \frac{1}{7}(7x_1 - x_2 - 2x_3)^2 - \frac{1}{7}\left[x_2^2 + 4x_3^2 + 4x_2x_3 + 7^2x_2^2 + 7\cdot 10x_3^2 - 7\cdot 4x_2x_3\right]$$

....

ex 5) $U = \left\{x \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ -x_1 + x_2 - 3x_3 = 0 \end{cases}\right\}$

a) $\mathbb{R}^3 = U \oplus W$

b) $p: U \oplus W \to U$

$p(x + x') = x$.

$p(0, -1, 0) = ?$

$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ -x_1 + x_2 - 3x_3 = 0 \end{cases} \to \begin{cases} x_2 + x_1 = x_3 \\ x_2 - x_1 = 3x_3 \end{cases}$ (+)

$2x_2 = 4x_3 \Rightarrow x_2 = 2x_3$

$x_1 = -x_3$

$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -3 \end{pmatrix}$

$rg = 2$

$\Rightarrow \dim U = 3 - 2 = 1$.

$U = \{(-x_3, 2x_3, x_3) \mid x_3 \in \mathbb{R}\} = \{x_3(-1, 2, 1) \mid x_3 \in \mathbb{R}\}$

$U = <\{(-1,2,1)\}>$.

$$\det\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 1\cdot 1\cdot\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0.$$

$W = <\{(1,0,0), (0,1,0)\}>$

b) $p(0,-1,0) = ?$

$p(\underset{U}{\underset{\cap}{x}} + \underset{W}{\underset{\cap}{x'}}) = x$

$$(0,-1,0) = \underbrace{x_1(-1,2,1)}_{\in U} + \underbrace{x_2(1,0,0) + x_3(0,1,0)}_{\in W} =$$

$$= (-x_1, 2x_1, x_1) + (x_2, 0, 0) + (0, x_3, 0) =$$

$$= (-x_1 + x_2,\ 2x_1 + x_3,\ x_1)$$

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 = 0 \\ 2x_1 + x_3 = -1 \\ x_1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} x_1 = x_2 = 0 \\ x_3 = -1 \end{matrix}$$

$p(0,-1,0) = (0,0,0)$

$\boxed{\text{Ex 4 b}}$ FORMA POLARĂ

$g: \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$

$\begin{cases} g(x,y) = g(y,x) \Leftrightarrow G = G^T \\ g \text{ liniară în fiecare argument.} \end{cases}$

$$\boxed{g(x,y) = \frac{1}{2}\left(Q(x+y) - Q(x) + Q(y)\right)}.$$

SEMINAR 5

$\longrightarrow (\mathbb{R}^2, +, \cdot)/\mathbb{R}$

$g_0 : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$

$g_0(x, y) = x_1 y_1 + x_2 y_2$ produs scalar canonic.

$g : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ formă biliniară simetrică.

$G = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$ matricea asociată în raport cu reperul canonic.

a) $(\mathbb{R}^2, g)$ sp. vect. euclidian.

b) $u = (2, -1)$. u este versor în raport cu g.

c) $u^\perp$ în raport cu g, resp g_0.

d) $\{f_1 = (1, 0),\ f_2 = (0, 1)\}$ să se ortonormeze în raport cu g.

e) intersecția dintre cercul unitate în $(\mathbb{R}^2, g_0)$ și $(\mathbb{R}^2, g)$.

a) $g : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ produs scalar $\iff$ g formă biliniară simetrică, poz. definită.

$G = G^T$.

$\longrightarrow$

$G^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} = G \Rightarrow g$ simetrică.

$Q : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \quad Q(x) = g(x, x) = \underline{x_1^2} + 5x_2^2 + \underline{4x_1x_2}$

M. Gauss: $Q(x) = x_1^2 + 4x_1x_2 + 2^2x_2^2 - 2^2x_2^2 + 5x_2^2 =$

$= (x_1 + 2x_2)^2 + x_2^2 \geq 0$

$Q(x) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_1 + 2x_2 = 0 \\ x_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \end{matrix}$

$\Rightarrow Q$ poz. def $\Rightarrow$

$\Rightarrow g$ e poz. def.

$g(x, y) = x_1 y_1 + 2x_1 y_2 + 2y_2 x_1 + 5x_2 y_2$

b) $\|u\|_g = \sqrt{g(u,u)} = \sqrt{Q(u)} = \sqrt{2^2 + 5\cdot(-1)^2 + 4\cdot 2\cdot(-1)} = 1.$

$u = (2,-1)$

$\rightarrow u$ versor în rap. cu g $\qquad \|u\|_{g_0} = \sqrt{g_0(u,u)} = \sqrt{4+1} = \sqrt{5}.$

c) În raport cu g_0, $u^\perp$

$$u^\perp = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid g_0(x,u) = 0\} = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid 2x_1 - x_2 = 0\} \quad \rightarrow x_2 = 2x_1$$

$$= \{(x_1, 2x_1) \mid x_1 \in \mathbb{R}\}$$

$$= \{x_1(1,2) \mid x_1 \in \mathbb{R}\}$$

$u^\perp = \langle\{(1,2)\}\rangle.$

<u>În raport cu g</u>

$$u^\perp = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid g(x,u) = 0\} = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid \cancel{2x_1} - 5x_2 - \cancel{2x_1} + 4x_2 = 0\}$$

$$= \{x \in \mathbb{R}^3 \mid -x_2 = 0\} = \{(x_1, 0) \mid x_1 \in \mathbb{R}\} = \{x_1(1,0) \mid x_1 \in \mathbb{R}\}$$

$u^\perp = \langle\{(1,0)\}\rangle.$

d) $\{f_1 = (1,0), f_2 = (0,1)\}$ să se ortonormeze în rap. cu g.

Aplicăm Gram-Schmidt.

$e_1 = f_1 = (1,0)$

$$e_2 = f_2 - \frac{g(f_2, e_1)}{g(e_1,e_1)} \cdot e_1 = (0,1) - \frac{2}{1}(1,0) = (0,1) - (2,0) = (-2,1).$$

$g((\underset{x_1}{1}, \underset{x_2}{0}), (\underset{y_1}{0}, \underset{y_2}{1})) = 2$; $g(e_1,e_1) = g((1,0),(1,0)) = 1 = \|e_1\|^2$

$\{f_1, f_2\}$ reper oarecare $\Rightarrow \{e_1, e_2\}$ reper orto g $\Rightarrow \left\{\underset{e_1}{\frac{e_1}{\|e_1\|_g}}, \underset{\frac{1}{5} e_2}{\frac{e_2}{\|e_2\|_g}}\right\}$

reper orton

în rap cu g.

$\longrightarrow$

$\mathbb{R}^4/\mathbb{R}$

$U = \left\{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \;\middle|\; \begin{cases} x-y+2z+4t=0 \\ 2x+y-3z+t=0 \end{cases}\right\}$

$\mathbb{R}^4 = U \oplus U^\perp$

$p : U \oplus U^\perp \longrightarrow U^\perp$

$p(\underset{\substack{\cap \\ U}}{u} + \underset{\substack{\cap \\ U^\perp}}{v}) = v \qquad p(0,1,1,0) = ?$

REZ. SISTEMUL.

$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & -3 & 1 \end{pmatrix}$ $\boxed{\text{rang } A = 2}$; $\dim U = 4 - \text{rg} A = 2$

$\begin{cases} x-y = -2z-4t \\ 2x+y = 3z-t \end{cases} \Rightarrow \begin{aligned} 3x &= z-5t \\ y &= 3z-t-\tfrac{2}{3}(z-5t) \\ x &= \tfrac{1}{3}(z-5t) \\ y &= \tfrac{1}{3}(7z+7t) \end{aligned}$

Deci $U = \left\{ \frac{1}{3}(z-5t, 7z+7t, 3z, 3t) \mid z,t \in \mathbb{R} \right\}$. $\Rightarrow$

$R = \{(1,7,3,0), (-5,7,0,3)\}$ reper în U.

Scriem vectorii pe coloană & completăm matricea la un reper.

$M = \begin{pmatrix} 1 & -5 & 0 & 0 \\ 7 & 7 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $\quad \det M \neq 0$.

$U^\perp = \langle\{e_3, e_4\}\rangle$ cu $e_3 = (0,0,1,0)$, $e_4 = (0,0,0,1)$.

$p(\underset{\substack{\cap \\ U}}{u} + \underset{\substack{\cap \\ U^\perp}}{v}) = v$

$p(0,1,1,0) = \underbrace{a(1,7,3,0) + b(-5,7,0,3)}_{\in U} + \underbrace{c(0,0,1,0) + d(0,0,0,1)}_{\in U^\perp}$

Calculăm a, b, c, d și $p(0,1,1,0) = \underline{\underline{c}} \cdot (0,0,1,0) + \underline{\underline{d}}(0,0,0,1)$

SEMINAR 7

Spații afine

$f: \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$

$f(x,y) = y - x$

$\boxed{Ex\ 1}$ $(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3/_{\mathbb{R}}, f)$ spațiu afin cu str. canonică. și

a) $A_1 = (1, 1, -1, -1)$

$A_2 = (2, 2, 0, -1)$

$A_3 = (3, 1, -1, 0)$

$A_4 = (2, 0, -2, 1)$

b) $P_1 = (1, -1, 2, 3)$

$P_2 = (2, 1, 1, 0)$

$P_3 = (-1, 0, 6, 8)$

$P_4 = (0, 7, 7, 4)$.

Aflați ponderile lui P_2 în rap cu $\{P_1, P_3, P_4\}$

$M = \{A_1, A_2, A_3, A_4\}$ afin indep $\Leftrightarrow \{\overrightarrow{A_1A_2}, \overrightarrow{A_1A_3}, \overrightarrow{A_1A_4}\}$ SLI

$\{P_1, P_2, P_3, P_4\}$ afin dep $\Leftrightarrow \{\overrightarrow{P_1P_2}, \overrightarrow{P_1P_3}, \overrightarrow{P_1P_4}\}$ SLD.

a) $\overrightarrow{A_1A_2} = (1, 1, 1, 0)$

$\overrightarrow{A_1A_3} = (2, 0, 0, 1)$

$\overrightarrow{A_1A_4} = (1, -1, -1, 2)$

$$rg\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} = 3 \Rightarrow M \text{ e SLI}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} \neq 0$$

$\Rightarrow \{A_1, A_2, A_3, A_4\}$ SAI (sistem afin indep).

$\overrightarrow{P_1P_2} = (1, 2, -1, -3)$

$\overrightarrow{P_1P_3} = (-2, 1, 4, 5)$

$\overrightarrow{P_1P_4} = (-1, 8, 5, 1)$

$$rg\begin{pmatrix} \boxed{1 & -2} & -1 \\ \boxed{2 & 1} & 8 \\ -1 & 4 & 5 \\ -3 & 5 & 1 \end{pmatrix} = 2 \Rightarrow$$

$\Rightarrow \{\overrightarrow{P_1P_2}, \overrightarrow{P_1P_3}, \overrightarrow{P_1P_2}\}$ SLD $\Rightarrow \{P_1, P_2, P_3, P_4\}$ SAD

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 2 & 1 & 8 \\ -1 & 4 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 10 \\ -1 & 2 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & 10 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 20 - 20 = 0$$

SEMINAR 7

<u>Spații afine</u>

$\varphi : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$

$\varphi(x, y) = y - x$.

$\boxed{Ex\ 1}$ $(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3/_{\mathbb{R}}, \varphi)$ spațiu afin cu str. canonică și

a) $A_1 = (1, 1, -1, -1)$

$A_2 = (2, 2, 0, -1)$

$A_3 = (3, 1, -1, 0)$

$A_4 = (2, 0, -2, 1)$

b) $P_1 = (1, -1, 2, 3)$

$P_2 = (2, 1, 1, 0)$

$P_3 = (-1, 0, 6, 8)$

$P_4 = (0, 7, 7, 4)$.

Aflați ponderile lui P_2 în rap cu $\{P_1, P_3, P_4\}$

$M = \{A_1, A_2, A_3, A_4\}$ afin indep $\Leftrightarrow \{\overrightarrow{A_1A_2}, \overrightarrow{A_1A_3}, \overrightarrow{A_1A_4}\}$ SLI

$\{P_1, P_2, P_3, P_4\}$ afin dep $\Rightarrow \{\overrightarrow{P_1P_2}, \overrightarrow{P_1P_3}, \overrightarrow{P_1P_4}\}$ SLD.

a) $\overrightarrow{A_1A_2} = (1, 1, 1, 0)$

$\overrightarrow{A_1A_3} = (2, 0, 0, 1)$

$\overrightarrow{A_1A_4} = (1, -1, -1, 2)$

$rg\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} = 3 \Rightarrow M$ e SLI

$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} \neq 0$

$\Rightarrow \{A_1, A_2, A_3, A_4\}$ SAI (sistem afin indep).

$\overrightarrow{P_1P_2} = (1, 2, -1, -3)$

$\overrightarrow{P_1P_3} = (-2, 1, 4, 5)$

$\overrightarrow{P_1P_4} = (-1, 8, 5, 1)$

$rg\begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{matrix}} & \begin{matrix} -1 \\ 8 \end{matrix} \\ \begin{matrix} -1 & 4 \\ -3 & 5 \end{matrix} & \begin{matrix} 5 \\ 1 \end{matrix} \end{pmatrix} = 2 \Rightarrow$

$\Rightarrow \{\overrightarrow{P_1P_2}, \overrightarrow{P_1P_3}, \overrightarrow{P_1P_2}\}$ SLD $\Rightarrow \{P_1, P_2, P_3, P_4\}$ SAD

$\begin{vmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 2 & 1 & 8 \\ -1 & 4 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 10 \\ -1 & 2 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & 10 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 20 - 20 = 0$

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 2 & 1 & 8 \\ -3 & 5 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 10 \\ -3 & -1 & -2 \end{vmatrix} = -10+10=0$$

b)

$$\overrightarrow{P_1P_2} = a\overrightarrow{P_1P_3} + b\overrightarrow{P_1P_4} = -\frac{2}{3}\overrightarrow{P_1P_3} + \frac{1}{3}\cdot\overrightarrow{P_1P_4} + \underbrace{\left(1-\left(-\frac{2}{3}+\frac{1}{3}\right)\right)}_{=\frac{4}{3}}\overrightarrow{P_1P_1}$$

$$(1,2,-1,-3) = (-2a, a, 4a, 5a) + (-b, 8b, 5b, b)$$

$$\begin{cases} 1=-2a-b \\ 2=a+8b \\ -1=4a+5b \\ -3=5a+b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2a-b=1 \\ a+8b=2 \;/\cdot 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2a-b=1 \\ 2a+16b=4 \end{cases}$$

$$15b=5 \Leftrightarrow \begin{cases} b=\frac{1}{3} \\ a=-\frac{2}{3} \end{cases}$$

↳ sist. compatibil determinat.

$$P_2 = -\frac{2}{3}P_3 + \frac{1}{3}P_4 + \frac{4}{3}P_1$$ (P_2 e $\boxed{\text{baricentru}}$ pt P_3, P_4, P_1 cu ponderile $\underbrace{-\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{4}{3}}_{\text{suma scalarilor este } 1}$)

! De la vectori trecem la pcte doar când suma scalarilor este 1.

$\boxed{\text{Ex2}}$ $(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3/_{\mathbb{R}}, \varphi)$

$E_0=(1,1,0)$

$E_1=(0,3,-1)$

$E_2=(1,2,1)$

$E_3=(-1,1,-1)$

$\mathcal{R}_{af}=\{E_0,E_1,E_2,E_3\}$ reper afin $\Leftrightarrow$ $\mathcal{R}_C=\{E_0, \overrightarrow{E_0E_1}, \overrightarrow{E_0E_2}, \overrightarrow{E_0E_3}\}$ reper cartezian.

Coord. carteziene / baricentrice ale lui $A(1,2,0)$.

$\overrightarrow{E_0E_1} = (-1, 2, -1)$

$\overrightarrow{E_0E_2} = (0, 1, 1)$

$\overrightarrow{E_0E_3} = (-2, 0, -1)$

$rg\, A = rg \begin{pmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} = 3 \Rightarrow \{\overrightarrow{E_0E_1}, \overrightarrow{E_0E_2}, \overrightarrow{E_0E_3}\}$ este SLI

$\Rightarrow$ reper $\Rightarrow R_c$ este reper cart.

$\quad\quad\quad\quad\quad\quad ||$

$\quad\quad\quad\quad E_0$ U reper

$$\begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -4 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 5 \neq 0$$

$\overrightarrow{E_0A} = (0, 1, 0)$

$\overrightarrow{E_0A} = x_1 \overrightarrow{E_0E_1} + x_2 \cdot \overrightarrow{E_0E_2} + x_3 \cdot \overrightarrow{E_0E_3}$

$(0, 1, 0) = (-x_1, 2x_1, -x_1) + (0, x_2, +x_2) + (-2x_3, 0, -x_3)$

$$\begin{cases} 0 = -x_1 - 2x_3 \\ 1 = 2x_1 + x_2 - \\ 0 = -x_1 + x_2 - x_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -2x_3 \\ x_2 = 4x_3 - 1 \\ +2x_3 + 4x_3 - x_3 = 1 \Rightarrow x_3 = \frac{1}{5} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = \frac{-2}{5} \\ x_2 = \frac{-1}{5} \end{cases}$$

$(x_1, x_2, x_3) = \left(-\frac{2}{5}, \frac{-1}{5}, \frac{1}{5}\right)$ coord. carteziene

$\cancel{E_0}A = \frac{-2}{5} \cancel{E_0}E_1 - \frac{1}{5} \cancel{E_0}E_2 + \frac{1}{5} \cdot \cancel{E_0}E_3 + \underbrace{\left(1 - \left(\frac{-2-1+1}{5}\right)\right)}_{= \frac{7}{5}} \overrightarrow{E_0E_0}$

$A = x_1E_1 + x_2E_2 + x_3E_3 + (1 - x_1 - x_2 - x_3)E_0$

$(\underbrace{1 - x_1 - x_2 - x_3}, x_1, x_2, x_3) = \left(\frac{7}{5}, \frac{-2}{5}, \frac{-1}{5}, \frac{1}{5}\right)$ coord baricentrice

Geometrie analitică afină

Ex 1: $(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3/\mathbb{R}, \varphi)$

$R_C = \{O, e_1, e_2, e_3\}$ reper cartezian canonic.

Să se ~~arată că~~ scrie ec. dreptei afine $\mathcal{D}$ a.î.:

a) $P_0(1,2,3) \in \mathcal{D}$ și $V_{\mathcal{D}} = \langle 3e_1 + e_2 - e_3 \rangle$

b) $P_1(1,1,1),\ P_2(3,2,5) \in \mathcal{D}$.

a) $\mathcal{D}: \dfrac{x_1 - 1}{3} = \dfrac{x_2 - 2}{1} = \dfrac{x_3 - 3}{-1} = t$.

$$\begin{cases} x_1 = 3t + 1 \\ x_2 = t + 2 \\ x_3 = -t + 3 \end{cases}$$ ec. parametrice.

b) $\overrightarrow{P_1P_2} = (2, 1, 4)$.

$V_D = \langle (2,1,4) \rangle$

$\mathcal{D}: \dfrac{x_1 - 1}{2} = \dfrac{x_2 - 1}{1} = \dfrac{x_3 - 1}{4} = t$

$$\begin{cases} x_1 = 2t + 1 \\ x_2 = t + 1 \\ x_3 = 4t + 1 \end{cases}$$ ec. parametrice.

Ex2 $(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3/\mathbb{R}, \varphi)$

Să se scrie ecuația planului afin a.î.:

1) $P(1,1,1) \in \pi$, $V_\pi = \langle \{e_1 + e_2 + e_3, e_1 - e_2 + e_3\} \rangle$

2) $P_0(4,-3,1) \in \pi$, $\pi \in \mathcal{D}_k$, $k = \overline{1,2}$.

$\mathcal{D}_1: \dfrac{x_1}{6} = \dfrac{x_2}{2} = \dfrac{x_3}{-3}$

$\mathcal{D}_2: \dfrac{x_1 + 1}{5} = \dfrac{x_2 - 3}{4} = \dfrac{x_3 - 4}{2}$

3) π conține $\mathcal{D}: \dfrac{x_1 - 3}{2} = \dfrac{x_2 + 4}{1} = \dfrac{x_3 - 2}{-5}$; $\pi \parallel \mathcal{D}': \dfrac{x_1 + 5}{4} = \dfrac{x_2 - 2}{7} = \dfrac{x_3 - 1}{2}$.

4) π trece prin $\mathcal{D}: \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 - 1 = 0 \\ 2x_1 - x_2 - 2 = 0 \end{cases}$ și

$\pi \parallel \mathcal{D}': \dfrac{x_1 - 1}{1} = \dfrac{x_2 + 1}{-1} = \dfrac{x_3 - 2}{2}$

5) $\Pi \parallel \pi'$: $x_1 + 3x_2 - 2x_3 + 15 = 0$ și conține

$\mathcal{D}: \frac{x_1+3}{4} = \frac{x_2-2}{2} = \frac{x_3-1}{5}$

6) $P_1(0,1,0)$, $P_2(1,-1,1)$, $P_3(2,0,0) \in \Pi$.

1) $\Pi: \begin{vmatrix} x_1 - x_{01} & u_1 & v_1 \\ x_2 - x_{02} & u_2 & v_2 \\ x_3 - x_{03} & u_3 & v_3 \end{vmatrix} = 0$

$P_0 \in \Pi$

$\langle\{u, v\}\rangle = V$

$\begin{vmatrix} x_1 - 1 & 1 & 1 \\ x_2 - 1 & 1 & -1 \\ x_3 - 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$

$\begin{vmatrix} \cancel{x_1 - 1} & \cancel{1} & 1 \\ x_1 + x_2 - 2 & 2 & 0 \\ x_3 - x_1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$

$\Rightarrow -2(x_3 - x_1) = 0 \Rightarrow x_3 = x_1$

2) $u_1 = (6, 2, -3)$

$u_2 = (5, 4, 2)$

$V_\Pi = \langle\{u_1, u_2\}\rangle$

$\begin{vmatrix} x_1 - 4 & 6 & 5 \\ x_2 + 3 & 2 & 4 \\ x_3 - 1 & -3 & 2 \end{vmatrix} = (x_1 - 4)\cdot 16 - (x_2 + 3)\cdot 27 + (x_3 - 1)\cdot 14 = 0$

$\Rightarrow \boxed{16x_1 - 27x_2 + 14x_3 = 159}$.

3) $M(3, -4, 2) \in \mathcal{D} \subset \Pi$

$u_1 = (2, 1, -5)$

$u_2 = (4, 7, 2)$

$V_\Pi = \langle\{u_1, u_2\}\rangle$

$$\begin{vmatrix} x_1-3 & 2 & 4 \\ x_2+4 & 1 & 7 \\ x_3-2 & -5 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

$-37\cdot 3 - 4\cdot 24 -$

$= 227$

$(x_1-3)\cdot 37 - (x_2+4)\cdot 24 + (x_3-2)\cdot 10 = 0$

$$\boxed{37x_1 - 24x_2 + 10x_3 = 227}$$

4) $x_3 = t$: $\begin{cases} x_1 + x_2 = 1-t \\ 2x_1 - x_2 = 2 \end{cases}$ $(+)$

$3x_1 = 3 - t \Rightarrow \boxed{x_1 = 1 - \frac{t}{3}}$

$x_2 = \cancel{1} - t - \cancel{1} + \frac{t}{3} = \boxed{-\frac{2t}{3}}$

$$\mathcal{D}: \boxed{\frac{x_1-1}{-\frac{1}{3}} = \frac{x_2}{-\frac{2}{3}} = x_3 = t}$$

$u = (-1, -2, 3)$

$u' = (1, -1, 2)$

$P(+1, 0, 0) \in \mathcal{D} \subset \pi$

$$\begin{vmatrix} x_1-1 & -1 & 1 \\ x_2 & -2 & -1 \\ x_3 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

$(x_1-1)\cdot(-1) - x_2\cdot(-5) + x_3 = 0$

$$\boxed{-x_1 + 5x_2 + x_3 + 1 = 0}$$

5) Arătăm că $\mathcal{D} \parallel \pi'$

$\pi' : \boxed{x_1 + 3x_2 - 2x_3} + 15 = 0$

$V_{\pi'} = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 + 3x_2 - 2x_1 = 0\}$

$u = (4, 2, 5)$ $\qquad 4 + 3\cdot 2 - 5\cdot 2 = 0$ ✓

$V_{\mathcal{D}} \subset V_{\pi'}$ $\qquad \pi : x_1 + 3x_2 - 2x_3 + b = 0$

$P(-3, 2, 1) \in \pi \Rightarrow -3 + 6 - 2 + b = 0 \Rightarrow b = -1.$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ x_1 & 0 & 1 & 2 \\ x_2 & 1 & -1 & 0 \\ x_3 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0. \Rightarrow \text{Pt 3 puncte care det un plan}$$

-20

SEMINAR 1

Spații vectoriale

Ex1: $(\mathbb{R}^2, +, \cdot)/_{\mathbb{R}}$; $B_0 = \{e_1 = (1,0),\ e_2 = (0,1)\}$ bază canonică.

B_0 bază canonică i.e. B_0 — SLI : $\forall a,b \in \mathbb{R}: ae_1 + be_2 = 0_{\mathbb{R}^2}$
$\Rightarrow a = b = 0_{\mathbb{R}}$

B_0 e SG : $\forall x \in \mathbb{R}^2, x = (x_1, x_2)\ \exists\, a,b \in \mathbb{R}$ a.î. $x = ae_1 + be_2$.

$\dim \mathbb{R}^2/_{\mathbb{R}} = 2 = |B_0|$

$B = \{\underset{u}{(1,2)}, \underset{v}{(3,1)}\}$ bază în $\mathbb{R}^2$

① B e SLI : $\forall a,b \in \mathbb{R}$ cu $au + bv = 0 \Rightarrow a = b = 0$?

$a(1,2) + b(3,1) = 0_{\mathbb{R}^2} \Rightarrow (a, 2a) + (3b, b) = 0_{\mathbb{R}^2} \Rightarrow (a+3b,\ 2a+b) = 0_{\mathbb{R}^2}$

$\Rightarrow \begin{cases} a+3b = 0 \\ 2a+b = 0 \end{cases}$ sistem liniar omogen ; $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1 - 6 = -5 \neq 0 \Rightarrow a = b = 0$ s.o. soluție.

② B este SG : $\forall x \in \mathbb{R}^2, x = (x_1, x_2)\ \exists\, a,b \in \mathbb{R}$ a.î. $x = au + b\cdot v$

$(x_1, x_2) = (a+3b, 2a+b) \Rightarrow \begin{cases} a+3b = x_1 \ /(-2) \\ 2a+b = x_2 \end{cases} \Rightarrow$

$\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1 - 6 = -5 \neq 0 \Rightarrow$ sist. compatibil det. $\Rightarrow$

$\Rightarrow \forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}\ \exists!\ a,b \in \mathbb{R}$ soluție

$\Rightarrow \begin{cases} -2a - 6b = -2x_1 \\ 2a + b = x_2 \end{cases}$ (+)

$-5b = -2x_1 + x_2 \Rightarrow b = \dfrac{-2x_1 + x_2}{-5}$

$a = \dfrac{-x_1 + 3x_2}{5}$

<u>Ex 2</u>: $(\mathbb{R}^2, +, \cdot)/\mathbb{R}$

$S = \{(1,2), (3,1)\}$

$S' = S \cup \{(1,1)\}$

S' este SLI, SLD, SG?

2 = nr max. de vect. care formează SLI

$\underset{\|}{2}$ = nr. minim de vect care formează SG.

$\dim \mathbb{R}^2 = 2$.

card $S' = 3 \Rightarrow S'$ este SLD

S este SG $\Longrightarrow S' = S \cup \{(1,1)\}$ este SG

<u>Ex 3</u> $(\mathbb{R}^2, +, \cdot)/\mathbb{R}$. $S = \{(\alpha, 1), (-1, 1)\}$.

$\alpha = ?$ aî $S = SLI$

$S = SLD$

S este SLI $\iff \forall a, b \in \mathbb{R}$ și $a(\alpha, 1) + b(-1, 1) = 0_{\mathbb{R}^2} \Longrightarrow a = b = 0$.

$(\alpha a, a) + (-b, b) = 0_{\mathbb{R}^2} \Rightarrow (\alpha a - b, a + b) = 0_{\mathbb{R}^2}$

$$\begin{cases} \alpha a - b = 0 \\ a + b = 0 \quad / \cdot (-1) \end{cases} \Rightarrow \det A \neq 0$$

(+)

$\Rightarrow \boxed{\alpha \;\; -1}$

Dacă $\alpha \neq -1 \Rightarrow S$ SLI

Dacă $\alpha = 1 \Rightarrow S$ SLD.

<u>Ex 4</u>: $(\mathbb{R}^3, +, \cdot)/\mathbb{R}$; $B_0 = \{\underset{e_1}{(1,0,0)}, \underset{e_2}{(0,1,0)}, \underset{e_3}{(0,0,1)}\}$ baza canonica

$S = \{(1,1,0)\}$

$S' = S \cup \{(1,1,1)\}$

$S'' = S' \cup \{(0,1,0)\}$

a) S, S', S'' SLI / SLD?

b) S'' bază în $\mathbb{R}^3$?

a) $(1,1,0) \neq 0_{\mathbb{R}^3} \Rightarrow S$ e SLI

S': $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ rang A = 2 $\Rightarrow$. S e SLI
<u>maxim</u>

S'' : $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

$\det B = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 \neq 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow$ rang $B = 3$ (maxim) $\Rightarrow S''$ e SLI.

b) S'' SG. $\forall x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ $\exists\, a, b, c \in \mathbb{R}$ a.î. $x = au + bv + cw$

$S'' = \{\underset{u}{(1,1,0)}, \underset{v}{(1,1,1)}, \underset{w}{(0,1,0)}\}$

$x = a(1,1,0) + b(1,1,1) + c(0,1,0) = (a+b,\ a+b+c,\ b) = (x_1, x_2, x_3)$.

$\begin{cases} a+b = x_1 \\ a+b+c = x_2 \\ b = x_3 \end{cases}$ $\qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$; $\det B \neq 0 \Rightarrow$ sistemul e compatibil determinat

$\Rightarrow \forall x \in \mathbb{R}^3$ există $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ soluție a sistemului.

Ex5: $\mathbb{R}_2[X] = \{P \in \mathbb{R}[X] \mid \text{grad } P \leq 2\} \cong \mathbb{R}^3$

$\Big[$ $(\mathbb{R}_2[X], +, \cdot)/_{\mathbb{R}}$ sp vect ; $B_0 = \{1, x, x^2\}$ bază canonică.

$\dim \mathbb{R}_2[X] = 3$

a) $B = \{1, x-2, (x-2)^2\}$ bază

b) $B' = \{f, f', f''\}$ bază; $f = x^2 + x + 1$

a) B bază $\Leftrightarrow$ B e SLI și B e SG.

$\forall a, b, c \in \mathbb{R}$ a.î. $a \cdot 1 + b(x-2) + c \cdot (x-2)^2 = 0 \Rightarrow a = b = c = 0$.

$a + bx - 2b + c(x^2 - 4x + 4) = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow a + bx - 2b + cx^2 - 4cx + 4c = 0$

$\Leftrightarrow cx^2 + x(b - 4c) + a - 2b + 4c = 0$

$\Leftrightarrow \begin{cases} c = 0 \\ b - 4c = 0 \Rightarrow b = 0 \\ a - 2b + 4c = 0 \Rightarrow a = 0. \end{cases}$

B e SG $\Leftrightarrow \forall \ \in \mathbb{R}_2[X] \ \exists a,b,c \in \mathbb{R}$ a.î. $a\cdot p_1 + b\cdot p_2 + c\cdot p_3 =$

$a\cdot 1 + b\cdot(x-2) + c\cdot(x-2)^2 = p$. (1)

$\boxed{\text{Obs}}$ $f(x) = f(x_0) + f'(x_0)\dfrac{(x-x_0)}{1!} + f''(x_0)\dfrac{(x-x_0)^2}{2!} + \dots$

Dezv. în serie Taylor în jurul lui x_0.

$f \in \mathbb{R}_2[X] \Rightarrow f(x) = f(2) + f'(2)\cdot\dfrac{(x-2)}{1!} + f''(2)\cdot\dfrac{(x-2)^2}{2!}$ (2)

1)+2) $\rightarrow$ Identificăm termenii și obț. pt. $p = f(x) \in \mathbb{R}_2[X]$ că B e SG

$$\begin{cases} a = f(2) \\ b = f'(2) \\ c = \dfrac{f''(2)}{2!} \end{cases}$$

b) B' bază:

B' SLI: $a(x^2+x+1) + b(2x+1) + 2c = 0$

$ax^2 + ax + a + 2bx + b + 2c = 0$

$ax^2 + (2b+a)x + a + b + 2c = 0 \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} a = 0 \\ a+2b = 0 \\ a+b+2c = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \\ c = 0 \end{cases} \Rightarrow B' \text{ SLI}$$

B' SG: $\forall \underset{\substack{\parallel \\ \alpha x^2 + \beta x + \gamma}}{p} \in \mathbb{R}_2[X]$, $\exists a,b,c \in \mathbb{R}$ a.î. $p = af + bf' + cf''$

Identificăm coef termenilor cu același grad și obținem sist:

Not. "*"
$$\begin{cases} a = \alpha \\ 2b + a = \beta \Rightarrow b = \dfrac{\beta - \alpha}{2} \\ a+b+2c = \gamma \Rightarrow c = \dfrac{1}{4}(2\gamma - \alpha - \beta) \end{cases}$$

$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 4 \neq 0 \Rightarrow$ "*" compatibil determinat și deci $\forall \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ avem $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ soluție unică a sist $\Rightarrow B'$ e SG

EX 6 $V' = \mathcal{M}_2^S(\mathbb{R}) = \{A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \mid A = A^T\}$.

a) $V' \subset M_2(\mathbb{R})$ subsp. vect.

b) $B' = \left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}\right\}$ bază în V'

$V' \subset V$ subsp. vect $\iff \left[\begin{array}{l} 1.\ \forall x,y \in V' \Rightarrow x+y \in V' \\ 2.\ \forall a \in \mathbb{R}, \forall x \in V', ax \in V' \end{array}\right. \iff \forall a,b \in \mathbb{K}$ și $\forall x,y \in V'$ $ax+by \in V'$

a) $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ $\quad A^T = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$

$A = A^T \Rightarrow b = c$

$V' = \left\{ A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix} \;\middle|\; a,b,d \in \mathbb{R} \right\}$

Fie $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix}$, $A' = \begin{pmatrix} a' & b' \\ b' & d' \end{pmatrix} \in V'$

Fie $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

$\alpha A + \beta A' = \begin{pmatrix} \alpha a + \beta a' & \alpha b + \beta b' \\ \alpha b + \beta b' & \alpha d + \beta d' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha'' & \beta'' \\ \beta'' & \gamma'' \end{pmatrix} \in V' \Rightarrow V'$ ssp.

b) B este bază $\iff \begin{cases} B \text{ SLI} \\ \text{și} \\ B \text{ e SG.} \end{cases}$

SLI: $\forall a,b,c \in \mathbb{R}$ a.î. $a\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 0_V \Rightarrow a=b=c=0$

$\begin{pmatrix} a+b+c & 2b \\ 2b & 2a+c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} a+b+c=0 \\ 2b=0 \\ 2a+c=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=0 \\ b=0 \\ c=0 \end{cases}$ B e SLI

SG: $\forall A \in V'$, $A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \beta & \gamma \end{pmatrix}$ $\exists a,b,c \in \mathbb{R}$ a.î. $A = \begin{pmatrix} a+b+c & 2b \\ 2b & 2a+c \end{pmatrix}$

$\begin{cases} a+b+c=\alpha \\ 2b=\beta \\ 2a+c=\gamma \end{cases}$ $\quad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$

$\Rightarrow$ Sist. compatibil det, deci pt $\forall \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ avem soluția unică $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$.

Ex7 $\quad V' = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x - 2y = 0\}$.

a) $V' \subset \mathbb{R}^2$ ssp.

b) O bază în V'

9) 1) Fie $(x,y), (x',y') \in V' \Rightarrow ?\ (x,y)+(x',y') \in V'$.

$$(x,y)+(x',y') = (x+x', y+y')$$

: $x+x'-2y-2y' = \underbrace{x-2y}_{=0} + \underbrace{x'-2y'}_{=0} = 0$

2) Fie $(x,y) \in V'$ şi $a \in \mathbb{R}$; $a(x,y) \in V'$?

$$a(x,y) = (ax, ay).$$

$ax-2ay = a(\underbrace{x-2y}_{=0}) = 0 \Rightarrow a(x,y) \in V'$

V' e ssp.

b) $x-2y=0 \Rightarrow x=2y$.

$V' = \{(2y, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \in \mathbb{R}\} = \{y(2,1) \mid y \in \mathbb{R}\}$.

$\{(2,1)\}$ este SG.

$(2,1) \neq 0_{\mathbb{R}^2} \Rightarrow \{(2,1)\}$ e SLI $\Rightarrow \{(2,1)\}$ e bază.

EX8 $\quad V' = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x-y+z=0\}$

a) $V' \subset \mathbb{R}^3$ e ssp.

b) Det. o bază în V'

a) 1) Fie (x,y,z) şi $(x',y',z') \in \mathbb{R}^3$ a.î. $x-y+z=0$ şi $x'-y'+z'=0$.

Dem că $(x,y,z)+(x',y',z') \in V'$.

$(x,y,z)+(x',y',z') = (x+x', y+y', z+z')$.

$x+x'-y-y'+z+z' = \underbrace{x-y+z}_{=0} + \underbrace{x'-y'+z'}_{=0} = 0$. (1)

2) Dem că $\forall a \in \mathbb{R}$ avem $a(x,y,z) \in V'$.

$a(x,y,z) = (ax, ay, az)$.

$ax-ay+az = a(\underbrace{x-y+z}_{=0}) = 0$ (2) $\quad$ (1) + (2) $\Rightarrow V'$ e ssp.

SEMINAR 2

$V' = \{(x,y,z) \mid x-y+z=0\} = \{(x, x+z, z) \mid x, z \in \mathbb{R}\}$

$x-y+z=0 \Rightarrow y = x+z.$ $\quad = \{(x,x,0)+(0,z,z) \mid x, z \in \mathbb{R}\}$

$= \{x(1,1,0)+z(0,1,1) \mid x, z \in \mathbb{R}\}.$

$$\left.\begin{array}{l} B = \{(1,1,0),(0,1,1)\} \text{ este SG.} \\ M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{rang } M = \underset{\text{maxim}}{2} \Rightarrow B \text{ e SLI} \end{array}\right\} \Rightarrow B \text{ este bază}$$

SEMINAR 2

EX 1 $(\mathbb{R}^3, +, \cdot)/\mathbb{R}$.

$R = \{e_1 = (1,0,0),\ e_2 = (0,1,0),\ e_3 = (0,0,1)\}$ reperul canonic.

$$\begin{cases} e_1' = e_1 + 2e_2 + e_3 \\ e_2' = e_1 + 7e_2 + e_3 \\ e_3' = -e_1 + e_2 + e_3 \end{cases} \qquad R' = \{e_1', e_2', e_3'\} \text{ reper} \qquad R \xrightarrow{A} R'$$

a) $A = ?$

b) Fie $v = (3,2,1)$. Coord lui v în raport cu R'.

a) $\boxed{e_i' = \sum_{j=1}^{3} a_{ji} \cdot e_j, \quad \forall i = \overline{1,3}.}$

$e_1' = a_{11} e_1 + a_{21} e_2 + a_{31} e_3$ $\qquad \boxed{X = AX' \Rightarrow X' = A^{-1}X.}$

$$A^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 7 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 7 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

b) $v = x_1' e_1' + x_2' e_2' + x_3' e_3'$

grupez în fct de e_1, e_2, e_3

$= x_1'(e_1 + 2e_2 + e_3) + x_2'(e_1 + 7e_2 + e_3) + x_3'(-e_1 + e_2 + e_3)$

$= \underbrace{e_1}_{(1,0,0)}(x_1' + x_2' - x_3') + \underbrace{e_2}_{(0,1,0)}(2x_1' + 7x_2' + x_3') + \underbrace{e_3}_{(0,0,1)}(x_1' + x_2' + x_3')$

$= (x_1' + x_2' - x_3', 0, 0) + (0, 2x_1' + 7x_2' + x_3', 0) + (0, 0, x_1' + x_2' + x_3')$

$= (x_1' + x_2' - x_3',\ 2x_1' + 7x_2' + x_3',\ x_1' + x_2' + x_3') = (3, 2, 1)$

$$\begin{cases} x_1' + x_2' - x_3' = 3 \\ 2x_1' + 7x_2' + x_3' = 2 \\ x_1' + x_2' + x_3' = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1' + x_2' = 2 \\ 2x_1' + 7x_2' = 3 \end{cases}$$

$(1+3)$

$5x_2' = -1 \Rightarrow x_2' = \frac{-1}{5} \Rightarrow x_1' = 2 + \frac{1}{5} = \frac{11}{5}$

$2x_1' + 2x_2' = 4 \Rightarrow x_1' + x_2' = 2$

$2 + x_3' = 1 \Rightarrow x_3' = -1$

Coord lui v în raport cu R' sunt $(x_1', x_2', x_3') = \left(\frac{11}{5}, \frac{-1}{5}, -1\right)$.

EX2 $(\mathbb{R}^3,+,\cdot)$

$S=\{(1,1,1)\}$; $S'=\{(1,0,-1),(2,1,3),(1,1,-1),(-1,2,0)\}$ Notăm: |

a) Să se completeze S la o bază în $\mathbb{R}^3$.

b) Să se extragă din S' o bază în $\mathbb{R}^3$.

$\langle S \rangle$

a)

S e SLI (conține un vector nenul).

$v_1=(1,0,0)$

$v_2=(0,1,0)$

$B=S\cup\{v_1,v_2\}$ = SLI?

$$A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

$$\det A=\begin{vmatrix}1 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 0\end{vmatrix}=(-1)^{1+3}\cdot\begin{vmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{vmatrix}=1$$

$1\neq 0 \Rightarrow$ rang $A=3$ maxim $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ = SLI

$|B|=3$; $\dim_{\mathbb{R}}\mathbb{R}^3=3$ $\Rightarrow$ B este BAZĂ.

$$C=\begin{pmatrix}1 & 2 & 1 & -1\\ 0 & 1 & 1 & 2\\ -1 & 3 & -1 & 0\end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix}1 & 2 & 1\\ 0 & 1 & 1\\ -1 & 3 & -1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & 2 & 1\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 5 & 0\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & 1\\ 5 & 0\end{vmatrix}=-5\neq 0 \Rightarrow \text{rang } C=3$$
(maxim).

$B'=\{(1,0,-1),(2,1,3),(1,1,-1)\}$ e SLI

card $B'=3=\dim_{\mathbb{R}}\mathbb{R}^3$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ B' e bază.

EX3 $(\mathbb{R}^3,+,\cdot)/\mathbb{R}$; $S=\{u_1=(1,5,3),\ u_2=(2,0,6)\}$

$S'=\{v_1=(-1,7,3),\ v_2=(4,5,12)\}$.

a) $\langle S\rangle=\langle S'\rangle$, $\dim\langle S\rangle=?$

b) Prelungiți S și S' la baze B și B' în $\mathbb{R}^3$.

Notăm: $u = (1, 0, 3)$, $v = (0, 1, 0)$

$\begin{cases} u_1 = u + 5v \\ u_2 = 2u \end{cases}$ $\begin{cases} v_1 = -u + 7v \\ v_2 = 4u + 5v. \end{cases}$

$$\langle S\rangle = \{a_1 u_1 + a_2 u_2 \mid a_1, a_2 \in \mathbb{R}\}$$
$$= \{a_1(u+5v) + a_2(2u) \mid a_1, a_2 \in \mathbb{R}\} =$$
$$= \{(a_1 + 2a_2)u + 5a_1 v \mid a_1, a_2 \in \mathbb{R}\}.$$

$$\langle S'\rangle = \{b_1 v_1 + b_2 v_2 \mid b_1, b_2 \in \mathbb{R}\} =$$
$$= \{b_1(-u+7v) + b_2(4u+5v) \mid b_1, b_2 \in \mathbb{R}\} =$$
$$= \{(4b_2 - b_1)u + (7b_1 + 5b_2)v \mid b_1, b_2 \in \mathbb{R}\}$$

$\operatorname{rang}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} = 2$

$\{u, v\} = SLI$ și $\operatorname{card}\{u, v\} = 2$

$\Rightarrow \{u, v\} =$ bază. $\dim \langle S\rangle = 2$

b) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 5 & 0 & 0 \\ 3 & 6 & 0 \end{pmatrix}$

$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 5 & 0 & 0 \\ 3 & 6 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & 0 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} = 30 \neq 0 \Rightarrow S \cup \{(1,0,0)\} = B$ SLI $\Rightarrow$

$\operatorname{card} B = 3$, $\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{R}^3 = 3$

$\Rightarrow B$ bază.

ex4 $(V_1, +, \cdot)/\mathbb{K}$, $B_1 = \{e_1, \dots, e_n\}$ baze în V_1 $\Rightarrow$

$(V_2, +, \cdot)/\mathbb{K}$, $B_2 = \{f_1, \dots, f_m\}$ V_2

$$\boxed{\begin{array}{l} B = \{(e_1, 0_{V_2}), \dots, (e_n, 0_{V_2}), (0_{V_1}, f_1), \dots, (0_{V_1}, f_m)\} \\ \text{bază în } V_1 \times V_2. \end{array}}$$

$\dim V_1 = n$, $\dim V_2 = m$, $\dim V_1 \times V_2 = n + m$

$\underline{B\ SLI} \Leftrightarrow \forall a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_m \in K$ a.î.

$a_1(e_1, 0_{V_2}) + a_2(e_2, 0_{V_2}) + \dots + a_n(e_n, 0_{V_n}) + b_1(0_{V_1}, f_1) + \dots + b_m(0_{V_1}, f_m) = 0_{V_1 \times V_2}$

$\Rightarrow a_1 = \dots = a_n = b_1 = \dots = b_m = 0_{\mathbb{R}}$

$(a_1e_1 + a_2e_2 + \dots + a_ne_n, b_1f_1 + \dots + b_mf_m) = (0_{V_1}, 0_{V_2}) \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} a_1e_1 + \dots + a_ne_n = 0_{V_1} \xrightarrow[SLI]{B_1 e} a_1 = a_2 = \dots = a_n = 0_K \\ b_1f_1 + \dots + b_mf_m = 0_{V_2} \xrightarrow[B_2 \text{ e } SLI]{} b_1 = \dots = b_m = 0_K \end{cases} \Rightarrow B \text{ e } SLI.$

$\underline{B \text{ e } SG}$

$\forall (v_1, v_2) \in V_1 \times V_2 \Rightarrow \exists a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_m \in K$ a.î.

$(v_1, v_2) = a_1(e_1, 0_{V_2}) + a_2(e_2, 0_{V_2}) + \dots + a_n(e_n, 0_{V_2}) + b_1(0_{V_1}, f_1) + \dots + (0_{V_1}, f_m)b_m$

$(v_1, v_2) = (a_1e_1 + \dots + a_nv_n, b_1f_1 + \dots + b_mf_m) \Leftrightarrow$

$\begin{cases} v_1 = a_1e_1 + \dots + a_nv_n \quad \forall v_1 \in V_1 \Longrightarrow \text{adev din faptul că } B_1 \text{ e } SG \\ v_2 = b_1f_1 + \dots + b_mf_m \quad \forall v_2 \in V_2 \Longrightarrow \text{adev deoarece } B_2 \text{ e } SG. \end{cases}$

$\Downarrow$

B e bază în $V_1 \times V_2$. □

<u>Obs</u>: Consid $V_1 = V_2 = \mathbb{R}$.

$B_1 = B_2 = \{1\}$, bază în $\mathbb{R}$.

$B = \{(1,0), (0,1)\}$ bază în $\mathbb{R}^2$.

<u>Ex5</u>. $V' = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid \begin{cases} x+y-z=0 \\ x-y+z=0 \end{cases}\}$.

$z = x+y$

$x - \cancel{y} + x + \cancel{y} = 0$

$2x = 0 \Rightarrow x = 0$

$y = z$.

a) $V' \sqsubseteq \mathbb{R}^3$ ssp.

b) O bază în V' și $\dim V' = ?$

$V' = \{(0,y,y) \in \mathbb{R}^3 \mid y \in \mathbb{R}\}$.

$V' = \{y(0,1,1) \in \mathbb{R}^3 \mid y \in \mathbb{R}\}$.

$\forall a,b \in \mathbb{R}$ și $x, y \in_{\mathbb{R}^3} V \Rightarrow ax + by \in \mathbb{R}$

$ax + by = a(0, x_1, x_1) + b(0, y_1, y_1) = (0, ax_1, ax_1) + (0, by_1, by_1)$

$= (0, \underbrace{ax_1 + by_1}_{\alpha \in \mathbb{R}}, \underbrace{ax_1 + by_1}_{\alpha \in \mathbb{R}}) = (0, \alpha, \alpha) \in V' \Rightarrow V'$ e ssp.

$\dots = \{y(0,1,1) \in \mathbb{R}^3 \mid y \in \mathbb{R}\}$

$f_m) = 0$ $\{(0,1,1)\}$ este SG și $\{(0,1,1)\}$ este SLI (vector nenul) $\Rightarrow$

V_1 $\{(0,1,1)\}$ = bază în V'

$\dim V' = 1.$

EX6 $(\mathbb{R}_4[X], +, \cdot)/_{\mathbb{R}}$, $P \in \mathbb{R}_4[X] \Rightarrow \text{grad}\, P \leq 4$

$\dim \mathbb{R}_4[X] = 5.$

$V_1 = \{p \in \mathbb{R}_4[X] \mid \tilde{p}(0) = 0\} \overset{Dem}{=} \langle\{x, x^2, x^3, x^4\}\rangle.$

$V_2 = \{p \in \mathbb{R}_4[X] \mid \tilde{p}(1) = 0\} \overset{Dem}{=} \langle -1+x, -1+x^2, -1+x^3, -1+x^4 \rangle.$

$V_3 = \{p \in \mathbb{R}_4[X] \mid \tilde{p}(0) = \tilde{p}(1) = 0\} \overset{Dem}{=} \langle\{-x+x^2, -x+x^3, -x+x^4\}\rangle$

Fie $p = a_4x^4 + \dots + a_0$

$\rightarrow p \in V_1 \Rightarrow a_0 = 0 \Rightarrow V_1 = \langle\{x, x^2, x^3, x^4\}$

$\rightarrow p \in V_2 \Rightarrow a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 0$

$a_0 = -a_1 - a_2 - a_3 - a_4$

$\Rightarrow p = a_4x^4 + a_3x^3 \underset{+a_2x^2}{+} a_1x - a_1 - a_2 - a_3 - a_4$

$= a_4(x^4-1) + a_3(x^3-1) + a_2(x^2-1) + a_1(x-1).$

$V_2 = \langle\{x-1, x^2-1, x^3-1, x^4-1\}\rangle$

$\rightarrow p \in V_3 \Rightarrow \begin{cases} a_0 = 0 \\ a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 0 \end{cases} \Rightarrow a_1 = -a_2 - a_3 - a_4$

$p = a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + (-a_4 - a_3 - a_2)x.$

$= a_4(x^4 - x) + a_3(x^3 - x) + a_2(x^2 - x).$

$V_3 = \langle\{x^4 - x, x^3 - x, x^2 - x\}\rangle$

EX7 $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), +, \cdot)/\mathbb{R}$; $B = \left\{\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \lambda & 3 \\ 2-\lambda & \lambda+1 \end{pmatrix}\right\}$

$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \longrightarrow (a_{11}\ a_{12}\ a_{21}\ a_{22}) \in \mathbb{R}^4$

λ a.î. B - baza

SEMINAR 4

EX 1 Fie $Q: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ formă patratică

$$Q(x) = x_1^2 + 3x_2^2 + 4x_2x_3$$

a) Să se scrie matricea asociată lui Q în rap. cu reperul canonic.

b) Forma polară asociată $g: \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$

c) $\mathrm{Ker}(g) = ?$ Este g nedeg?

d) Să se aducă g la forma canonică utilizând → Gauss, → Jacobi, → Met. val. proprii

Precizați reperul.

e) Ě Q poz. definită?

a) $Q(x) = \underset{g_{11}}{\underset{\parallel}{1}} \cdot x_1^2 + \underset{g_{22}}{\underset{\parallel}{3}} x_2^2 + \underset{2g_{23}}{\underset{\parallel}{4}} x_2x_3 = \boxed{X^T G X = \sum_{i,j=1}^{3} g_{ij} x_i x_j}$

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

b) $g: \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ formă biliniară simetrică

$$\begin{cases} g(x,y) = g(y,x) \iff G = G^T \\ g \text{ liniară în fiecare argument.} \end{cases}$$

$$g(x,y) = \frac{1}{2}\left(Q(x+y) - Q(x) + Q(y)\right)$$

$$g(x,y) = x_1y_1 + 3x_2y_2 + 2x_2y_3 + 2x_3y_2$$

c) $\mathrm{Ker}\, g = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid g(x,y) = 0 \ \ \forall y \in \mathbb{R}^3\}$.

$$\begin{cases} g(x, e_1) = 0 \Rightarrow x_1 = 0 \\ g(x, e_2) = 0 \Rightarrow 3x_2 + 2x_3 = 0 \Rightarrow x_3 = 0 \\ g(x, e_3) = 0 \Rightarrow 2x_2 = 0 \Rightarrow x_2 = 0 \end{cases}$$

$G = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ $\det G = -4 \neq 0 \Rightarrow x_1 = x_2 = x_3 = 0$

$\mathrm{Ker}\, g = \{0_{\mathbb{R}^3}\} \Rightarrow g$ e nedeg.

d) $Q(x) = x_1^2 + 3x_2^2 + 4x_2x_3$

GAUSS $= x_1^2 + \frac{1}{3}\left(9x_2^2 + \underset{2\cdot 3\cdot x}{\underbrace{12x_2x_3}}\right)$

$x = 4$

$= x_1^2 + \frac{1}{3}(3x_2 + 2x_3)^2 - \frac{4}{3} \cdot x_3^2$

Fie schimbarea de reper.

$$\begin{cases} y_1 = x_1 \\ y_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}(3x_2 + 2x_3) \\ y_3 = \frac{2}{\sqrt{3}} x_3 \end{cases}$$

$Q(x) = y_1^2 + y_2^2 - y_3^2$ (formă normală).

signatura: $(2, 1) \rightarrow Q$ nu e poz. def.

JACOBI $\Delta_1 = |1| = 1 \neq 0$

$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = 3 \neq 0$

$\Delta_3 = -4 \neq 0$

$\Rightarrow \exists$ un reper în $\mathbb{R}^3$ a.î.

$Q(x) = \frac{1}{\Delta_1} y_1^2 + \frac{\Delta_1}{\Delta_2} y_2^2 + \frac{\Delta_2}{\Delta_3} y_3^2$

$= y_1^2 + \frac{1}{3} y_2^2 + \frac{-3}{4} y_3^2$

MET. VAL. PROPRII

$P_G(\lambda) = \det(G - \lambda I_3) = 0$

$\det(G - \lambda I_3) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 3-\lambda & 2 \\ 0 & 2 & -\lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow (1-\lambda)\begin{vmatrix} 3-\lambda & 2 \\ 2 & -\lambda \end{vmatrix} = 0$

$\Leftrightarrow (1-\lambda)\left[(3-\lambda)(-\lambda) - 4\right] = 0 \Leftrightarrow (1-\lambda)(\lambda^2 - 3\lambda - 4) = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (\lambda - 1)(\lambda + 1)(\lambda - 4) = 0$

$$\begin{cases} \lambda_1 = 1 & m_1 = 1 \\ \lambda_2 = -1 & m_2 = 1 \\ \lambda_3 = 4 & m_3 = 1 \end{cases}$$

$V_{\lambda_1} = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid f(x) = \underset{\overset{\shortparallel}{1}}{\lambda_1} x\} = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid (G - I_3)x = 0\}$

$f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$

$f(x) = (x_1, 3x_2 + 2x_3, 2x_2)$

$f \in End(\mathbb{R}^3)$, G mat. asoc.

$$G - I_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

$Rg(G - I_3) = 2$

$\dim V_{\lambda_1} = 3 - 2 = \underline{\underline{1}}$

$$(G - I_3)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{cases} 2x_2 + 2x_3 = 0 \\ 2x_2 - x_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow x_2 = x_3 = 0.$$

$V_{\lambda_1} = \{(x_1, 0, 0) \mid x_1 \in \mathbb{R}\} = \langle (1,0,0) \rangle$

$V_{\lambda_2} = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid f(x) = \underset{\overset{\shortparallel}{-1}}{\lambda_2} x\} = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid (G + I_3)X = 0\}$

$$G + I_3 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$Rg(G + I_3) = 2$

$\text{Dim}\, V_{\lambda_2} = 3 - 2 = 1$

$$\begin{cases} 2x_1 = 0 \Rightarrow x_1 = 0 \\ 4x_2 + 2x_3 = 0 \\ 2x_2 + x_3 = 0 \to x_3 = -2x_2 \end{cases}$$

$V_{\lambda_2} = \{(0, x_2, -2x_2) \mid x_2 \in \mathbb{R}\} = \langle (0,1,-2) \rangle.$

$V_{\lambda_3} = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid f(x) = \lambda_3 x\} = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid (G - 4I_3)X = 0\}$

$$G + 4I_3 = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 0 \\ 0 & \boxed{-1} & \boxed{2} \\ 0 & \boxed{2} & \boxed{-4} \end{pmatrix}$$

$Rg(G - 4I_3) = 2$

$\text{Dim}\, V_{\lambda_3} = 3 - 2 = 1.$

$$\begin{cases} -3x_1 = 0 \Rightarrow x_1 = 0 \\ -x_2 + x_3 = 0 \Rightarrow x_2 = 2x_3 \\ 2x_2 - 4x_3 = 0 \end{cases}$$

$V_{\lambda_3} = \{(0, 2x_3, x_3) \mid x_3 \in \mathbb{R}\} = \langle (0,2,1) \rangle$

Obținem $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ $Q(x) = y_1^2 - y_2^2 + 4y_3^2$

$R = R_1 \cup R_2 \cup R_3 = \{(1,0,0), (0,1,-2), (0,2,1)\}$

EX2 $g: \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$

$g(x,y) = x_1y_2 + x_2y_1 - 3x_1y_3 - 3x_3y_1 - 3x_2y_3 - 3x_3y_2 = X^T G Y$ *

a) formă biliniară simetrică

b) Q forma pătratică asociată

c) $Q \longrightarrow$ forma canonică

a) $$G = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -3 \\ 1 & 0 & -3 \\ -3 & -3 & 0 \end{pmatrix} \quad **$$

$*, ** \to g$ biliniară simetrică.

b) $Q(x) = g(x,x) = 2x_1x_2 - 6x_1x_3 - 6x_2x_3$

c) Teoria Gauss: Fie schimbarea de reper: $\begin{cases} y_1 = x_1 + x_2 \\ y_2 = x_1 - x_2 \\ y_3 = x_3 \end{cases} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{1}{2}(y_1+y_2) \\ x_2 = \frac{1}{2}(y_1-y_2) \\ x = y_3 \end{cases}$$

$$Q(x) = \cancel{2}\cdot\frac{1}{\cancel{2}}\cdot(y_1+y_2)\cdot\frac{1}{2}(y_1-y_2) - \overset{3}{\cancel{6}}\cdot\frac{1}{\cancel{2}}(y_1+y_2)\cdot y_3 - \overset{3}{\cancel{6}}\cdot\frac{1}{\cancel{2}}(y_1-y_2)y_3$$

$$= \frac{1}{2}(y_1^2 - y_2^2) - 3y_3(y_1+y_2+y_1-y_2) =$$

$$= \frac{1}{2}(y_1^2 - y_2^2) - 6y_3y_1$$

$$= 2\left[\frac{1}{4}y_1^2 - 3y_1y_3\right] - \frac{1}{2}y_2^2 = \qquad 3 = 2\cdot\frac{1}{\cancel{2}}\cdot x \Rightarrow x = 3$$

$$= 2\left[\frac{1}{4}y_1^2 - 3y_1y_3 + (3y_3)^2\right] - \frac{1}{2}y_2^2 - 18y_3^2 = 2\left(\frac{1}{2}y_1 - 3y_3\right)^2 - \frac{1}{2}y_2^2 - 18y_3^2$$

Fie schimbarea de reper $\begin{cases} z_1 = \sqrt{2}\left(\frac{1}{2}y_1 - 3y_3\right) \\ z_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}y_2 \\ z_3 = 3\sqrt{2}\,y_3 \end{cases}$

$Q(x) = z_1^2 - z_2^2 - z_3^2$ – forma normală

Signatura $(1,2)$ – nu e pozitiv definită

EX3 $g : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

formă biliniară antisimetrică $\longleftarrow$ NU îi POT ASOCIA UN Q

$R = \{e_1, e_2\}$ reper în $\mathbb{R}^2$. $\quad \boxed{g = ?}$

$g_{12} = g(e_1, e_2) = 5.$

$g(x, y) = -g(y, x) \Leftrightarrow G = -G^T$

$g_{ij} = -g_{ji}$

$g_{ii} = -g_{ii} \Rightarrow g_{ii} = 0.$

$G = \begin{pmatrix} 0 & b \\ -b & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow G = \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ -5 & 0 \end{pmatrix}$

$b = 5$

$g(x, y) = 5x_1y_2 - 5x_2y_1$

EX4 $f \in End(V)$

λ = valoare proprie.

$x \in V$ a.î. $f(x) = \lambda x$.

$\neq$
0_V

a) Dacă $\lambda = 0 \Rightarrow x \in Ker f$

b) Dacă $\lambda \neq 0 \Rightarrow x \in Im f$.

a) $\lambda = 0 \Rightarrow f(x) = 0 \xrightarrow[Ker]{Def} x \in Ker f.$

b) $\lambda \neq 0 \Rightarrow f(x) = \lambda x \Rightarrow x = \frac{1}{\lambda} f(x) \xrightarrow[liniară]{f} x = f\left(\frac{1}{\lambda} x\right) \in Im f$

EX5 $f \in End V$, $f^2 = 0 \Rightarrow g = f + Id_V$ automorfism.

$\Leftrightarrow \quad A^2 = O_n \Rightarrow A + I_n \in GL(n, \mathbb{K})$

$I_n = I_n^2 - A^2 = (I_n - A)(I_n + A)$

$(I_n + A)^{-1} = I_n - A.$

□