

CURS 7

Logică Matematică și Computațională

FMI · Denisa Diaconescu · An universitar 2018/2019

SEMANTICA LOGICII PROPOZIȚIONALE

Definiția 6.8

Pentru orice formule φ, χ, χ' , definim

$\varphi_\chi(\chi') \quad := \quad$ expresia obținută din φ prin înlocuirea tuturor aparițiilor lui χ cu χ' .

$\varphi_\chi(\chi')$ se numește **substituția lui χ cu χ' în φ** . Spunem și că $\varphi_\chi(\chi')$ este o **instanță de substituție** a lui φ .

Propoziția 6.9

Pentru orice formule $\varphi, \chi, \chi', \varphi_\chi(\chi')$ este de asemenea formulă.

Propoziția 6.10

Pentru orice formule φ, χ, χ' ,

$\chi \sim \chi' \quad \text{implică} \quad \varphi \sim \varphi_\chi(\chi').$

Fie $e : V \rightarrow \{0, 1\}$ o evaluare și $v \in V$ o variabilă.

Notăție.

Pentru orice $a \in \{0, 1\}$, definim evaluarea $e_{v \leftarrow a} : V \rightarrow \{0, 1\}$ prin

$$e_{v \leftarrow a}(x) = \begin{cases} e(x) & \text{daca } x \neq v \\ a & \text{daca } x = v. \end{cases}$$

Propoziția 7.1

Fie θ o formulă și $a := e^+(\theta)$. Atunci pentru orice formulă φ ,

$$(e_{v \leftarrow a})^+(\varphi) = e^+(\varphi_v(\theta)).$$

Demonstrație. [Exercițiu suplimentar.](#)

Propoziția 7.2

Pentru orice formule φ, ψ, θ și orice variabilă $v \in V$,

- (i) $\varphi \sim \psi$ implică $\varphi_v(\theta) \sim \psi_v(\theta)$.
- (ii) Dacă φ este tautologie atunci și $\varphi_v(\theta)$ este tautologie.
- (iii) Dacă φ este nesatisfiabilă, atunci și $\varphi_v(\theta)$ este nesatisfiabilă.

Demonstrație. Fie $e : V \rightarrow \{0, 1\}$ o evaluare arbitrară și $a := e^+(\theta)$.

Aplicând Propoziția 7.1, rezultă că $e^+(\varphi_v(\theta)) = (e_{v \leftarrow a})^+(\varphi)$ și $e^+(\psi_v(\theta)) = (e_{v \leftarrow a})^+(\psi)$.

- (i) Deoarece $\varphi \sim \psi$, avem că $(e_{v \leftarrow a})^+(\varphi) = (e_{v \leftarrow a})^+(\psi)$. Deci, $e^+(\varphi_v(\theta)) = e^+(\psi_v(\theta))$.
- (ii) Deoarece φ este tautologie, avem că $(e_{v \leftarrow a})^+(\varphi) = 1$. Deci, $e^+(\varphi_v(\theta)) = 1$.
- (iii) Deoarece φ este nesatisfiabilă, avem că $(e_{v \leftarrow a})^+(\varphi) = 0$. Deci, $e^+(\varphi_v(\theta)) = 0$.



De multe ori este convenabil să avem o tautologie canonică și o formulă nesatisfiabilă canonică.

Observație.

$v_0 \rightarrow v_0$ este tautologie și $\neg(v_0 \rightarrow v_0)$ este nesatisfiabilă.

Demonstrație. [Exercițiu.](#)

Notății.

- Notăm $v_0 \rightarrow v_0$ cu \top și o numim **adevăru**.
- Notăm $\neg(v_0 \rightarrow v_0)$ cu \perp și o numim **falsul**.

Observație.

- φ este tautologie ddacă $\varphi \sim \top$.
- φ este nesatisfiabilă ddacă $\varphi \sim \perp$.

Notății

- Scriem $\varphi \wedge \psi \wedge \chi$ în loc de $(\varphi \wedge \psi) \wedge \chi$.
- Similar, scriem $\varphi \vee \psi \vee \chi$ în loc de $(\varphi \vee \psi) \vee \chi$.
- Fie $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$ formule. Pentru $n \geq 3$, notăm

$$\varphi_1 \wedge \dots \wedge \varphi_n := ((\dots (\varphi_1 \wedge \varphi_2) \wedge \varphi_3) \wedge \dots \wedge \varphi_{n-1}) \wedge \varphi_n$$

$$\varphi_1 \vee \dots \vee \varphi_n := ((\dots (\varphi_1 \vee \varphi_2) \vee \varphi_3) \vee \dots \vee \varphi_{n-1}) \vee \varphi_n.$$

- $\varphi_1 \wedge \dots \wedge \varphi_n$ se mai scrie și $\bigwedge_{i=1}^n \varphi_i$ sau $\bigwedge_{i=1}^n \varphi_i$.

- $\varphi_1 \vee \dots \vee \varphi_n$ se mai scrie și $\bigvee_{i=1}^n \varphi_i$ sau $\bigvee_{i=1}^n \varphi_i$.

Propoziția 7.3

Pentru orice evaluare $e : V \rightarrow \{0, 1\}$,

- $e^+(\varphi_1 \wedge \dots \wedge \varphi_n) = 1$ ddacă $e^+(\varphi_i) = 1$ pentru **orice** $i \in \{1, \dots, n\}$.
- $e^+(\varphi_1 \vee \dots \vee \varphi_n) = 1$ ddacă $e^+(\varphi_i) = 1$ pentru **un** $i \in \{1, \dots, n\}$.

Demonstrație. [Exercițiu.](#)

Propoziția 7.4

$$\neg(\varphi_1 \vee \dots \vee \varphi_n) \sim \neg\varphi_1 \wedge \dots \wedge \neg\varphi_n$$

$$\neg(\varphi_1 \wedge \dots \wedge \varphi_n) \sim \neg\varphi_1 \vee \dots \vee \neg\varphi_n$$

Demonstrație. [Exercițiu.](#)

Fie Γ o mulțime de formule.

Definiția 7.5

- O evaluare $e : V \rightarrow \{0, 1\}$ este **model** al lui Γ dacă este model al fiecărei formule din Γ (adică $e \models \gamma$ pentru orice $\gamma \in \Gamma$). **Notăție:** $e \models \Gamma$.
- Γ este **satisfiabilă** dacă are un model.
- Γ este **finit satisfiabilă** dacă orice submulțime finită a sa este satisfiabilă.
- Dacă Γ nu este satisfiabilă, spunem și că Γ este **nesatisfiabilă** sau **contradictorie**.

Mulțimea tuturor modelelor lui Γ se notează $Mod(\Gamma)$.

Notăm $Mod(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ în loc de $Mod(\{\varphi_1, \dots, \varphi_n\})$.

$$Mod(\Gamma) = \bigcap_{\varphi \in \Gamma} Mod(\varphi).$$

Fie Γ, Δ mulțimi de formule.

Definiția 7.6

O formulă φ este **consecință semantică** a lui Γ dacă $Mod(\Gamma) \subseteq Mod(\varphi)$.

Notăție: $\Gamma \models \varphi$.

Notăm cu **$Cn(\Gamma)$** mulțimea consecințelor semantice ale lui Γ . Așadar,

$$Cn(\Gamma) = \{\varphi \in Form \mid \Gamma \models \varphi\}.$$

Definiția 7.7

- Δ este **consecință semantică** a lui Γ dacă $Mod(\Gamma) \subseteq Mod(\Delta)$.

Notăție: $\Gamma \models \Delta$.

- Γ și Δ sunt **(logic) echivalente** dacă $Mod(\Gamma) = Mod(\Delta)$. **Notăție:** $\Gamma \sim \Delta$.

Observație.

- $\psi \models \varphi$ ddacă $\{\psi\} \models \varphi$ ddacă $\{\psi\} \models \{\varphi\}$.
- $\psi \sim \varphi$ ddacă $\{\psi\} \sim \{\varphi\}$.

Propoziția 7.8

- $Mod(\emptyset) = \{0, 1\}^V$, adică orice evaluare $e : V \rightarrow \{0, 1\}$ este model al mulțimii vide. În particular, mulțimea vidă este satisfiabilă.
- $Cn(\emptyset)$ este mulțimea tuturor tautologiilor, adică φ este tautologie ddacă $\emptyset \models \varphi$.

Demonstrație. [Exercițiu.](#)

Propoziția 7.9

Fie $\Gamma \cup \{\varphi, \psi\} \subseteq \text{Form}$.

- (i) Dacă $\Gamma \models \varphi$ și $\Gamma \models \varphi \rightarrow \psi$, atunci $\Gamma \models \psi$.
- (ii) $\Gamma \cup \{\varphi\} \models \psi$ ddacă $\Gamma \models \varphi \rightarrow \psi$.
- (iii) $\Gamma \models \varphi \wedge \psi$ ddacă $\Gamma \models \varphi$ și $\Gamma \models \psi$.

Demonstrație. [Exercițiu.](#)

Propoziția 7.10

Fie Γ o mulțime de formule. Următoarele afirmații sunt echivalente:

- (i) Γ este nesatisfiabilă.
- (ii) $\Gamma \models \varphi$ pentru orice formulă φ .
- (iii) $\Gamma \models \varphi$ pentru orice formulă nesatisfiabilă φ .
- (iv) $\Gamma \models \perp$.

Demonstrație. [Exercițiu.](#)

Propoziția 7.11

Fie Γ o mulțime de formule.

- (i) $\Gamma \models \varphi$ ddacă $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ este nesatisfiabilă.
- (ii) $\Gamma \models \neg\varphi$ ddacă $\Gamma \cup \{\varphi\}$ este nesatisfiabilă.
- (iii) Dacă Γ este satisfiabilă, atunci cel puțin una dintre $\Gamma \cup \{\varphi\}$ și $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ este satisfiabilă.

Demonstrație.

- (i) Avem că $\Gamma \not\models \varphi \iff$ există o evaluare $e : V \rightarrow \{0, 1\}$ a.î. $e \models \Gamma$ și $e^+(\varphi) = 0 \iff$ există o evaluare $e : V \rightarrow \{0, 1\}$ a.î. $e \models \Gamma$ și $e^+(\neg\varphi) = 1 \iff$ există o evaluare $e : V \rightarrow \{0, 1\}$ a.î. $e \models \Gamma \cup \{\neg\varphi\} \iff \Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ este satisfiabilă.
- (ii) Similar.
- (iii) Fie e un model al lui Γ . Dacă $e^+(\varphi) = 1$, atunci e este model al lui $\Gamma \cup \{\varphi\}$. Dacă $e^+(\varphi) = 0$, deci $e^+(\neg\varphi) = 1$, atunci e este model al lui $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$.

Propoziția 7.12

Fie $\Gamma = \{\varphi_1, \dots, \varphi_n\}$ o mulțime finită de formule.

- (i) $\Gamma \sim \{\varphi_1 \wedge \dots \wedge \varphi_n\}$.
- (ii) $\Gamma \models \psi$ dacă $\models \varphi_1 \wedge \dots \wedge \varphi_n \rightarrow \psi$.
- (iii) Γ este nesatisfiabilă dacă $\neg\varphi_1 \vee \neg\varphi_2 \vee \dots \vee \neg\varphi_n$ este tautologie.
- (iv) Dacă $\Delta = \{\psi_1, \dots, \psi_k\}$ este o altă mulțime finită de formule, atunci următoarele afirmații sunt echivalente:
 - (a) $\Gamma \sim \Delta$.
 - (b) $\varphi_1 \wedge \dots \wedge \varphi_n \sim \psi_1 \wedge \dots \wedge \psi_k$.

Demonstrație. [Exercițiu.](#)

Teorema de compacitate - versiunea 1

Pentru orice mulțime Γ de formule, Γ este satisfiabilă dacă Γ este finit satisfiabilă.

Teorema de compacitate - versiunea 2

Pentru orice mulțime Γ de formule, Γ este nesatisfiabilă dacă Γ nu este finit satisfiabilă.

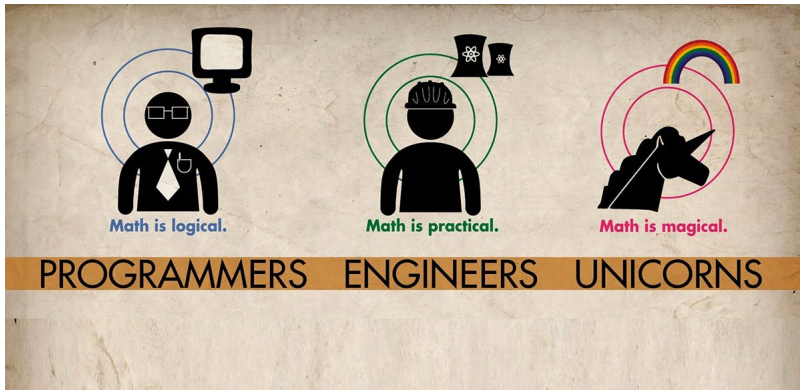
Teorema de compacitate - versiunea 3

Pentru orice mulțime Γ de formule și pentru orice formulă φ , $\Gamma \models \varphi$ dacă există o submulțime finită Δ a lui Γ a.î. $\Delta \models \varphi$.

Propoziția 7.13

Cele trei versiuni sunt echivalente.

Demonstrație. [Exercițiu.](#)



Pe data viitoare!

Conținutul tehnic al acestui curs se regăsește în cursul de *Logică Matematică și Computațională*
al prof. Laurențiu Leuștean din anul universitar 2017/2018.