Grupa 344, Seminar 12, EDDP, 04.01.2021

Forma generală a soluției pentru ecuații cvasiliniare cu derivate parțiale de ordinul întâi:

Ecuației:
$$\boxed{\sum_{k=1}^{n} a_k(x,u)\cdot \partial_k u = g(x,u)} \qquad (1)$$

$a_1,\dots,a_n, g : D\subset \mathbb{R}^n\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$.

i se asociază sistemul caracteristic:
$$\boxed{\frac{dx_1}{a_1(x,u)} = \frac{dx_2}{a_2(x,u)} = \dots = \frac{dx_n}{a_n(x,u)} = \frac{du}{g(x,u)}} \qquad (2)$$

Prop: Dacă $\varphi_1,\dots,\varphi_n : D\subset\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ sunt integrale prime pentru sistemul caracteristic (2), atunci forma generală implicită a soluției ec. (1) este
$$\boxed{f(\varphi_1(x,u),\dots,\varphi_n(x,u)) = 0} \qquad (3)$$
unde $f: G\subset\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ este o funcție care admite derivate parțiale de ordinul întâi.

1) Se cere forma generală a soluției ecuațiilor:

$n=2$

a) $(x_2+u)\partial_1 u + x_2\partial_2 u = x_1 - x_2$

b) $x_1\partial_1 u + x_2\partial_2 u = x_1 x_2(u^2+1)$

temă: c) $u\partial_1 u + x_2\partial_2 u = x_1$

d) $x_1\partial_1 u + x_2\partial_2 u = (x_1+x_2)u$.

OBS: Pt $n=2$, ecuația cvasiliniară cu derivate parțiale de ordinul întâi este:
$$a_1(x,u)\partial_1 u + a_2(x,u)\partial_2 u = g(x,u)$$

a) $(x_2+u)\partial_1 u + x_2\partial_2 u = x_1 - x_2$

$\boxed{n=2}$
$$\begin{cases} a_1(x,u) = x_2+u \\ a_2(x,u) = x_2 \\ g(x,u) = x_1 - x_2 \end{cases}$$

Sistemul caracteristic: $\dfrac{dx_1}{x_2+u} = \dfrac{dx_2}{x_2} = \dfrac{du}{x_1-x_2}$.

care are ca variabile: x_1, x_2 și u.

Pt. a afla integrale prime trebuie să avem câte 2 rapoarte care depind doar de 2 variabile sau de 2 combinații ale variabilelor.

Din sistemul caracteristic $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \underbrace{\frac{dx_1}{x_2+u} = \frac{dx_2}{x_2}} = \frac{du}{x_1-x_2} = \frac{dx_1-dx_2}{\cancel{x_2}+u-\cancel{x_2}} = \frac{d(x_1-x_2)}{u}$$

Se obține:

$$\frac{du}{x_1-x_2} = \frac{d(x_1-x_2)}{u} \underset{\text{separăm variab}}{\Rightarrow} u\,du = (x_1-x_2)\,d(x_1-x_2)$$

$$\Rightarrow \int u\,du = \int \underbrace{(x_1-x_2)}_{y}\,d\underbrace{(x_1-x_2)}_{y} \Rightarrow \frac{u^2}{2} = \frac{(x_1-x_2)^2}{2} + \frac{C_1}{2} \Rightarrow$$

$$\int y\,dy \qquad \Rightarrow \underbrace{u^2-(x_1-x_2)^2}_{\varphi_1(x,u)} = C_1 \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ o integrală primă a sist caract, $\boxed{\varphi_1(x,u) = u^2-(x_1-x_2)^2}$

Din sistemul caracteristic:

$$\underbrace{\frac{dx_1}{x_2+u} = \frac{dx_2}{x_2} = \frac{du}{x_1-x_2}} = \frac{dx_1+du}{\cancel{x_2}+u+x_1-\cancel{x_2}} = \frac{d(x_1+u)}{x_1+u}$$

$$\Rightarrow \frac{dx_2}{x_2} = \frac{d(x_1+u)}{x_1+u} \Rightarrow \int \frac{dx_2}{x_2} = \int \frac{d(x_1+u)}{\underbrace{x_1+u}_{y}} \Rightarrow \qquad \int \frac{dy}{y} = \ln|y| + C_2$$

$$\Rightarrow \ln|x_2| = \ln|x_1+u| + \ln C_2, \quad C_2 > 0.$$

$$\Rightarrow \ln\left|\frac{x_2}{x_1+u}\right| = \ln C_2 \Rightarrow \left|\frac{x_2}{x_1+u}\right| = C_2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{x_2}{x_1+u} = \pm C_2, \quad C_2 > 0$$

$$\boxed{\varphi_2(x,u) = \frac{x_2}{x_1+u}}$$

Forma generală a soluției ec. date:

$$f\left(u^2-(x_1-x_2)^2, \frac{x_2}{x_1+u}\right) = 0.$$

Pt. a da exemplu de o soluție, luăm pt f o formă particulară. De exemplu: $f(\underset{(z_1,z_2)}{z}) = z_2 - 1 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{x_2}{x_1+u} - 1 = 0 \Rightarrow x_2 - x_1 - u = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underline{u(x_1, x_2) = x_2 - x_1}$$

b) $\underline{x_1 \partial_1 u + x_2 \partial_2 u = x_1 x_2 (u^2+1)}$

$\underline{n=2} \Rightarrow a_1(x, u) = x_1$

$a_2(x,u) = x_2$

$g(x,u) = x_1 x_2 (u^2+1)$

Sistemul caracteristic: $\frac{dx_1}{x_1} = \frac{dx_2}{x_2} = \frac{du}{x_1 x_2 (u^2+1)}$

Din $\frac{dx_1}{x_1} = \frac{dx_2}{x_2} \Rightarrow \int \frac{dx_1}{x_1} = \int \frac{dx_2}{x_2} \Rightarrow \ln|x_1| = \ln|x_2| + \ln C_1$

$C_1 > 0$

$\Rightarrow \ln|x_1| - \ln|x_2| = \ln C_1 \Rightarrow$

$\Rightarrow \ln\left|\frac{x_1}{x_2}\right| = \ln C_1 \Rightarrow \frac{x_1}{x_2} = \pm C_1,\ C_1 > 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \boxed{\varphi_1(x,u) = \frac{x_1}{x_2}}$ sau $\varphi_1(x,u) = \frac{x_1}{x_2} + k$, $k \in \mathbb{R}$

sau $\varphi_1(x,u) = m \cdot \frac{x_1}{x_2}$, $m \in \mathbb{R}^*$.

Din sistemul caract.: $\underline{\frac{x_2 dx_1}{x_1 x_2} = \frac{x_1 dx_2}{x_1 x_2}} = \frac{du}{x_1 x_2 (u^2+1)} =$

$$= \frac{x_2 dx_1 + x_1 dx_2}{2 x_1 x_2} = \frac{d(x_1 x_2)}{2 x_1 x_2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{du}{\cancel{x_1 x_2}(u^2+1)} = \frac{d(x_1 x_2)}{2 \cancel{x_1 x_2}} \Rightarrow \underline{\frac{du}{u^2+1} = \frac{1}{2} d(x_1 x_2)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int \frac{du}{u^2+1} = \frac{1}{2} \int d(\underbrace{x_1 x_2}_{y}) \Rightarrow \operatorname{arctg} u = \frac{1}{2} x_1 x_2 + C_2 \Rightarrow$$

$\int dy = y + C_2$

$$\Rightarrow \boxed{\varphi_2(x,u) = \operatorname{arctg} u - \frac{1}{2} x_1 x_2}$$

Deci, forma generală a soluției este $\underline{f\left(\frac{x_1}{x_2}, \operatorname{arctg} u - \frac{x_1 x_2}{2}\right) = 0}$

Scanned with CamScanner

Problema Cauchy pentru ec. cvasiliniare cu derivate parțiale de ordinul întâi:

$$(1)\begin{cases}\sum_{k=1}^{n} a_k(x,u)\,\partial_k u = g(x,u)\\ u(x)=u_0(x) \quad \text{pe } S=\{x\in\mathbb{R}^n \mid h(x)=0\}\end{cases}$$

② Să se determine soluțiile următoarelor probleme Cauchy:

a) $\begin{cases}2x_2\partial_1 u + (x_1+x_2)\partial_2 u = x_1^2\\ u(x_1,x_2)=\dfrac{7x_1x_2}{4} \quad \text{pe } S=\{(x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2 \mid x_1-4x_2=0\}\end{cases}$

b) $\begin{cases}x_2\partial_1 u + x_1\partial_2 u = 2u\\ u(x_1,x_2)=\dfrac{x_1^2}{2} \quad \text{pe } S=\{x\in\mathbb{R}^2 \mid x_2=0,\ x_1>0\}\end{cases}$

c) $x_2\partial_1 u + (2x_1-x_2)\partial_2 u = 4x_1(x_1+x_2)$

$u(x_1,x_2) = -\frac{1}{2}x_1x_2 \quad \text{pe } S=\{x\in\mathbb{R}^2 \mid x_1+2x_2=0,\ x_1>0\}.$

d) $\begin{cases}(x_2+u)\partial_1 u + (x_1+u)\partial_2 u = x_1+x_2\\ u(x_1,x_2)=x_1+x_2 \quad \text{pe } S=\{x\in\mathbb{R}^2 \mid x_2=0\}.\end{cases}$

a) $\begin{cases}2x_2\,\partial_1 u + (x_1+x_2)\partial_2 u = x_1^2\\ u(x_1,x_2)=\boxed{\dfrac{7x_1x_2}{4}} \quad \text{pe } S=\{(x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2 \mid x_1-4x_2=0\}\end{cases}$

- $a_1(x,u) = 2x_2$
  $a_2(x,u) = x_1+x_2$
  $g(x,u) = x_1^2$; $u_0(x_1,x_2)=\frac{7x_1x_2}{4}$

  $S: h(x)=x_1-4x_2$.

S: $h(x)=0$; $x_1-4x_2=0$; $\boxed{x_1=4x_2}$

- scriem o parametrizare pt S : $\begin{cases}x_1=4s=\alpha_1(s)\\ x_2=s=\alpha_2(s)\end{cases}$
- scriem $\varphi(s)=u_0(\alpha_1(s),\alpha_2(s))=\dfrac{7\alpha_1(s)\cdot\alpha_2(s)}{4}=\dfrac{7\cdot\cancel{4}s\cdot s}{\cancel{4}}\Rightarrow$
  $\Rightarrow \varphi(s)=7s^2$.
- verificăm condițiile:

$$\begin{cases} i) \ \text{rang}\begin{pmatrix}\alpha_1'(s)\\ \alpha_2'(s)\end{pmatrix} = n-1 = 2-1 = 1 \\ ii) \ \begin{vmatrix} a_1(\alpha_1(s), \alpha_2(s), \varphi(s)) & \alpha_1'(s) \\ a_2(\alpha_1(s), \alpha_2(s), \varphi(s)) & \alpha_2'(s)\end{vmatrix} \neq 0. \end{cases}$$

i) $\text{rang}\begin{pmatrix}\alpha_1'(s)\\ \alpha_2'(s)\end{pmatrix} = \text{rang}\begin{pmatrix}(4s)'\\ (s)'\end{pmatrix} = \text{rang}\begin{pmatrix}4\\ 1\end{pmatrix} = 1$

ii) $\begin{vmatrix} 2\alpha_2(s) & \alpha_1'(s) \\ \alpha_1(s)+\alpha_2(s) & \alpha_2'(s)\end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2s & 4 \\ 4s+s & 1\end{vmatrix} = 2s - 20s = -18s \neq 0.$

Cu cond $\boxed{s \neq 0}$, adică $(x_1, x_2) \neq (0,0)$

• scriem sistemul caracteristic:

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = 2x_2 \\ \dfrac{dx_2}{dt} = x_1 + x_2 \\ \dfrac{du}{dt} = x_1^2 \\ x_1(0) = 4s \\ x_2(0) = s \\ u(0) = 7s^2 \end{cases}$$

sistem liniar în x_1, x_2

se integrează după ce am aflat x_1.

$$\begin{pmatrix}x_1'\\ x_2'\end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix}0 & 2\\ 1 & 1\end{pmatrix}}_{A}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}$$

A cu coef. constanți

(seminar 11) $\Rightarrow$ x_1 verifică ec:

$$x_1'' = (\text{tr} A)\, x_1' - (\det A)\cdot x_1$$

Avem: $\text{tr} A = 0+1 = 1$

$\det A = \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1\end{vmatrix} = -2$

$\Rightarrow \underbrace{x_1'' = x_1' + 2x_1}_{\text{ec. de ordinul doi cu coef constanți}} \Rightarrow$

$\Rightarrow r^2 = r + 2 \Rightarrow r^2 - r - 2 = 0$

$\Delta = (-1)^2 - 4\cdot 1\cdot(-2) = 9 \Rightarrow r_{1,2} = \dfrac{1 \pm 3}{2}$ $\begin{cases} r_1 = 2, \ m_1 = 1 \\ r_2 = -1, \ m_2 = 1\end{cases}$

$r_1 = 2, m_1 = 1 \Rightarrow \varphi_1(t) = e^{2t}$

$r_2 = -1, m_2 = 1 \Rightarrow \varphi_2(t) = e^{-t}$

$\Rightarrow \underbrace{x_1(t) = C_1 e^{2t} + C_2 e^{-t}}$, $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$.

Pe x_2, îl exprimăm din prima ecuație din sistemul în x_1, x_2 $\Rightarrow$

$$\Rightarrow x_2 = \frac{1}{2} x_1' = \frac{1}{2}\left(C_1 e^{2t} \cdot 2 + C_2 e^{-t}(-1)\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{x_2(t) = C_1 e^{2t} - \frac{1}{2} C_2 e^{-t}}$$

Din cond $\begin{cases} x_1(0) = 4s \\ x_2(0) = s \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 + C_2 = 4s \\ C_1 - \frac{1}{2} C_2 = s \end{cases}$ (–)

$$\frac{3}{2} C_2 = 3s \Rightarrow \boxed{C_2 = 2s}$$

$$C_1 = 4s - 2s$$

$$\boxed{C_1 = 2s} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{cases} \tilde{x}_1(t,s) = 2s\left(e^{2t} + e^{-t}\right) \\ \tilde{x}_2(t,s) = s\left(2e^{2t} - e^{-t}\right) \end{cases}} \quad (5)$$

Ec. a treia din sistemul caracteristic este:

$$\frac{du}{dt} = \left(2s\left(e^{2t} + e^{-t}\right)\right)^2, \text{ ec. de tip primitivă}$$

$$\Rightarrow \frac{du}{dt} = 4s^2\left(e^{4t} + 2e^{t} + e^{-2t}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow u = 4s^2 \int \left(e^{4t} + 2e^{t} + e^{-2t}\right) dt \Rightarrow$$

$$\Rightarrow u(t) = 4s^2\left(\frac{e^{4t}}{4} + 2e^{t} - \frac{e^{-2t}}{2}\right) + C$$

Dar $u(0) = 7s^2$ $\Rightarrow$

$$\Rightarrow 7s^2 = 4s^2\left(\frac{1}{4} + 2 - \frac{1}{2}\right) + C \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 7s^2 = \cancel{4}s^2 \cdot \frac{7}{\cancel{4}} + C \Rightarrow C = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\tilde{u}(t,s) = 4s^2\left(\frac{e^{4t}}{4} + 2e^{t} - \frac{e^{-2t}}{2}\right)} \quad (6)$$

Relațiile (5) și (6) reprezintă soluția parametrică a problemei. Din (5) exprimăm t și s în funcție de x_1, x_2 și le înlocuim în (6). Astfel, se obține $u(x_1, x_2)$.

$$(5) \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 2se^{2t} + 2e^{-t}s \\ x_2 = 2se^{2t} - se^{-t} \end{cases}$$

$$x_1 - x_2 = \cancel{\ } \quad 3se^{-t} \Rightarrow \boxed{se^{-t} = \frac{x_1 - x_2}{3}}$$

$$\begin{cases} x_1 = 2se^{2t} + 2se^{-t} \\ 2x_2 = 4se^{2t} - 2se^{-t} \end{cases} \quad (+)$$

$$x_1 + 2x_2 = 6se^{2t} \quad \cancel{\ } \Rightarrow \boxed{se^{2t} = \frac{x_1 + 2x_2}{6}}$$

$$\overset{(6)}{\Longrightarrow}$$

$$\Rightarrow u(x_1, x_2) = \tilde{u}(t(x_1, x_2), s(x_1, x_2)) = s^2 e^{4t} + 8s^2 e^{t} - 2s^2 e^{-2t} =$$

$$= (se^{2t})^2 + 8(se^{2t})(se^{-t}) - 2(se^{-t})^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow u(x_1, x_2) = \frac{(x_1 + 2x_2)^2}{36} + \overset{4}{\cancel{8}} \cdot \frac{(x_1 + 2x_2)}{\underset{3}{\cancel{6}}} \cdot \frac{(x_1 - x_2)}{3} - 2\frac{(x_1 - x_2)^2}{9}$$

$$\Rightarrow \boxed{u(x_1, x_2) = \frac{(x_1 + 2x_2)^2}{36} + \frac{4(x_1 + 2x_2)(x_1 - x_2)}{9} - \frac{2(x_1 - x_2)^2}{9}.}$$

Temă: ① c, d

② b, c, d.