

Seminar 1

Recapitulare logica propozițională

Teorie pentru S1.1: Amintim tabelele de adevăr pentru conectorii propoziționali:

p	$\neg p$	p	q	$p \rightarrow q$	p	q	$p \wedge q$	p	q	$p \vee q$	p	q	$p \leftrightarrow q$
0	1	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1
1	0	0	1	1	0	1	0	0	1	1	0	1	0
		1	0	0	1	0	0	1	0	1	1	0	0
		1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1

Putem să arătăm că o formulă φ este tautologie (validă, universal adevărată) folosind **metoda tabelului de adevăr**. Dacă v_1, \dots, v_n sunt variabilele propoziționale care apar în φ , atunci cele 2^n evaluări posibile (i.e, o evaluare este o funcție $e : \{v_1, \dots, v_n\} \rightarrow \{0, 1\}$) e_1, \dots, e_{2^n} pot fi scrise într-un tabel:

v_1	v_2	\dots	v_n	φ
$e_1(v_1)$	$e_1(v_2)$	\dots	$e_1(v_n)$	$f_{e_1}(\varphi)$
$e_2(v_1)$	$e_2(v_2)$	\dots	$e_2(v_n)$	$f_{e_2}(\varphi)$
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots
$e_{2^n}(v_1)$	$e_{2^n}(v_2)$	\dots	$e_{2^n}(v_n)$	$f_{e_{2^n}}(\varphi)$

Dacă pe coloana lui φ obținem doar valoarea 1, atunci φ este tautologie.

Teorie pentru S1.2: Axiomele calculului propozițional sunt următoarele:

(A1) $\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \varphi)$

(A2) $(\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \chi)) \rightarrow ((\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\varphi \rightarrow \chi))$

(A3) $(\neg\psi \rightarrow \neg\varphi) \rightarrow (\varphi \rightarrow \psi)$

unde φ , ψ și χ sunt formule. În plus, avem următoarea **regulă de deducție**:

$$\text{MP (modus ponens)} \quad \frac{\varphi, \varphi \rightarrow \psi}{\psi}$$

O Γ -**demonstrație** este o secvență de formule $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ astfel încât, pentru fiecare $i \in \{1, \dots, n\}$, una din următoarele condiții este satisfăcută:

- φ_i este axiomă sau $\varphi_i \in \Gamma$,
- φ_i se obține din formulele anterioare prin MP.

O formulă φ este Γ -**teoremă** dacă există o Γ -demonstrație $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ astfel încât $\varphi_n = \varphi$. Notăm prin $\Gamma \vdash \varphi$ faptul că φ este Γ -teoremă.

Teorema 1 (Teorema deducției). $\Gamma \vdash \varphi \rightarrow \psi \Leftrightarrow \Gamma \cup \{\varphi\} \vdash \psi$.

Teorie pentru S1.3: Amintim următoarele definiții:

- Un **literal** este o variabilă sau negația unei variabile.
- O **formă normală disjunctivă (FND)** este o disjuncție de conjuncții de literali

$$(l_1 \wedge \dots \wedge l_n) \vee \dots \vee (l'_1 \wedge \dots \wedge l'_m).$$

- O **formă normală conjunctivă (FNC)** este o conjuncție de disjuncții de literali

$$(l_1 \vee \dots \vee l_n) \wedge \dots \wedge (l'_1 \vee \dots \vee l'_m).$$

Pentru orice formulă φ există θ_1 în FND și θ_2 în FNC echivalente cu φ .

Metoda transformărilor sintactice succesive. Putem aduce o formulă în FND și/sau în FNC folosind următoarele transformări:

- înlocuirea implicațiilor și echivalențelor

$$\begin{aligned} \varphi \rightarrow \psi &\sim \neg\varphi \vee \psi \\ \varphi \leftrightarrow \psi &\sim (\neg\varphi \vee \psi) \wedge (\neg\psi \vee \varphi) \end{aligned}$$

- regulile De Morgan

$$\begin{aligned} \neg(\varphi \vee \psi) &\sim \neg\varphi \wedge \neg\psi \\ \neg(\varphi \wedge \psi) &\sim \neg\varphi \vee \neg\psi \end{aligned}$$

- principiului dublei negații

$$\neg\neg\psi \sim \psi$$

- distributivitatea

$$\begin{aligned} \varphi \vee (\psi \wedge \chi) &\sim (\varphi \vee \psi) \wedge (\varphi \vee \chi) \\ (\psi \wedge \chi) \vee \varphi &\sim (\psi \vee \varphi) \wedge (\chi \vee \varphi) \end{aligned}$$

- absorbția

$$\begin{aligned} \varphi \wedge (\varphi \vee \psi) &\sim \varphi \\ \varphi \vee (\varphi \wedge \psi) &\sim \varphi \end{aligned}$$

Metoda funcției booleene asociate unei formule. Fie φ o formulă, v_1, \dots, v_n variabilele care apar în φ și e_1, \dots, e_{2^n} evaluările posibile. Tabelul asociat lui φ definește funcția booleană $F_\varphi : \{0, 1\}^n \rightarrow \{0, 1\}$:

v_1	v_2	\dots	v_n	φ	x_1	x_2	\dots	x_n	$F_\varphi(x_1, \dots, x_n)$
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots
$e_k(v_1)$	$e_k(v_2)$	\dots	$e_k(v_n)$	$f_{e_k}(\varphi)$	$e_k(v_1)$	$e_k(v_2)$	\dots	$e_k(v_n)$	$f_{e_k}(\varphi)$
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots

Dacă luăm disjuncția cazurilor în care avem 1 în tabelul de adevăr al funcției booleene obținem o formulă în FND.

Teorie pentru S1.4: O **clauză** este o mulțime finită de literali, i.e $C = \{L_1, \dots, L_n\}$ unde L_1, \dots, L_n sunt literali. O clauză $C = \{L_1, \dots, L_n\}$ este satisfiabilă dacă $L_1 \vee \dots \vee L_n$ este satisfiabilă. **Clauza vidă** $\square = \{\}$ nu este satisfiabilă. O mulțime de clauze $\mathcal{S} = \{C_1, \dots, C_m\}$ este satisfiabilă dacă există o evaluare $e : Var \rightarrow \{0, 1\}$ astfel încât $e(C_i) = 1$ oricare $i \in \{1, \dots, m\}$.

$$\begin{aligned} \text{clauză} &= \text{disjuncție de literali} \\ \text{mulțime de clauze} &= \text{FNC} \end{aligned}$$

Regula rezoluției:

$$Rez \frac{C_1 \cup \{p\}, C_2 \cup \{\neg p\}}{C_1 \cup C_2}$$

unde $\{p, \neg p\} \cap C_1 = \emptyset$ și $\{p, \neg p\} \cap C_2 = \emptyset$.

Fie \mathcal{S} o mulțime de clauze. O *derivare prin rezoluție* din \mathcal{S} este o secvență finită de clauze astfel încât fiecare clauză este din \mathcal{S} sau rezultă din clauze anterioare prin rezoluție. Dacă există o derivare prin rezoluție care se termină cu \square , atunci mulțimea inițială de clauze este nesatisfiabilă.

(S1.1) Arătați că următoarea formulă în logica propozițională este o tautologie:

$$(v_1 \vee v_2 \rightarrow v_3) \leftrightarrow (v_1 \rightarrow v_3) \wedge (v_2 \rightarrow v_3)$$

(S1.2) Fie φ și ψ formule în logica propozițională. Să se arate sintactic că

$$\vdash \varphi \rightarrow (\neg\varphi \rightarrow \psi).$$

(S1.3) Fie $\varphi := (p \leftrightarrow \neg q) \rightarrow p$ o formulă în logica propozițională. Să se aducă φ la cele două forme normale, folosind, pe rând:

- (i) metoda transformărilor sintactice succesive,
- (ii) metoda funcției booleene corespunzătoare formulei φ .

(S1.4) Să se arate folosind rezoluția că următoarea formulă este nesatisfiabilă:

$$\varphi := (\neg v_1 \vee \neg v_2) \wedge ((v_3 \rightarrow \neg v_2) \vee v_1) \wedge (v_1 \rightarrow v_2) \wedge (v_2 \wedge v_3)$$

(S1.5) Fie L un limbaj pentru logica propozițională, cu un vocabular alcătuit din următoarea mulțime de variabile propoziționale $V = \{v_0, v_1, \dots, v_n\}$. Să se găsească mulțimea modelelor următoarei formule propoziționale:

$$\gamma := (v_0 \wedge \bigvee_{1 \leq i \leq n} v_i) \leftrightarrow \bigvee_{1 \leq i \leq n} (v_0 \wedge v_i)$$

(S1.6) Există două triburi pe insula Tufa - Tu și Fa. Membrii tribului Tu spun întotdeauna adevărul, iar membrii tribului Fa mint întotdeauna. Un călător întâlnește trei băștinași - A , B , și C . Fiecare dintre ei face o declarație călătorului:

- A spune: ” B și C spun adevărul dacă și numai dacă C spune adevărul”,
- B spune: ”dacă A și C spun adevărul atunci este fals faptul că A spune adevărul când B și C spun adevărul”,
- C spune: ” B minte dacă și numai dacă A sau B spun adevărul”.

Puteți determina din ce trib fac parte A , B și C ?