CONȚINUTUL CURSULUI #11:

V. Interpolarea cu funcții spline.

V.3. Interpolare cu funcții spline cubice.

Definiția (V.3.)

Funcția $S : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *s.n. funcție spline cubică pentru funcția* $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *dacă:*

(a) S *este cubică pe porțiuni:*

$$S(x) = S_j(x), \quad \forall\, x \in I_j, \quad j = \overline{1, n} \tag{1}$$

unde

$$S_j : \bar{I}_j \longrightarrow \mathbb{R},$$

$$S_j(x) = a_j + b_j\,(x - x_j) + c_j\,(x - x_j)^2 + d_j\,(x - x_j)^3, j = \overline{1, n} \tag{2}$$

cu $a_j, b_j, c_j, d_j \in \mathbb{R}$, $j = \overline{1, n}$, *ce trebuie determinate.*

(b) S *interpolează* f *în* x_j, $j = \overline{1, n+1}$*:*

$$S(x_j) = f(x_j), \quad j = \overline{1, n+1} \tag{3}$$

Definiția (V.3. (continuare))

(c) S *este continuă în* x_{j+1}, $j = \overline{1, n-1}$*:*

$$S_j(x_{j+1}) = S_{j+1}(x_{j+1}), \quad j = \overline{1, n-1} \tag{4}$$

(d) S' *este continuă în* x_{j+1}, $j = \overline{1, n-1}$*:*

$$S_j'(x_{j+1}) = S_{j+1}'(x_{j+1}), \quad j = \overline{1, n-1} \tag{5}$$

(e) S'' *este continuă în* x_{j+1}, $j = \overline{1, n-1}$*:*

$$S_j''(x_{j+1}) = S_{j+1}''(x_{j+1}), \quad j = \overline{1, n-1} \tag{6}$$

(f) *Unul dintre următoarele seturi de condiții este îndeplinit*

$$(f)_1 : \quad S'(x_1) = f'(x_1), \quad S'(x_{n+1}) = f'(x_{n+1}) \tag{7}$$

$$(f)_2 : \quad S''(x_1) = f''(x_1), \quad S''(x_{n+1}) = f''(x_{n+1}) \tag{8}$$

Vom trata doar cazul $(f)_1$, cazul $(f)_2$ se abordează după același raționament. Conform condiției (b) rezultă

$$\begin{cases} a_j = f(x_j), \quad j = \overline{1, n} \\ a_n + b_n(x_{n+1} - x_n) + c_n(x_{n+1} - x_n)^2 + d_n(x_{n+1} - x_n)^3 = f(x_{n+1}) \end{cases} \tag{9}$$

Din (c) rezultă

$$a_j + b_j(x_{j+1} - x_j) + c_j(x_{j+1} - x_j)^2 + d_j(x_{j+1} - x_j)^3 = a_{j+1}, \quad j = \overline{1, n-1} \tag{10}$$

Relațiile (9) și (10) se rescriu

$$\begin{cases} a_j = f(x_j), \quad j = \overline{1, n} \\ b_j h_j + c_j h_j^2 + d_j h_j^3 = f(x_{j+1}) - f(x_j), \quad j = \overline{1, n} \end{cases} \tag{11}$$

Deoarece $S_j'(x) = b_j + 2c_j(x - x_j) + 3d_j(x - x_j)^2$ din (d) rezultă

$$b_j + 2c_j(x_{j+1} - x_j) + 3d_j(x_{j+1} - x_j)^2 = b_{j+1}, \quad j = \overline{1, n-1} \tag{12}$$

sau

$$b_j + 2c_j h_j + 3d_j h_j^2 = b_{j+1}, \quad j = \overline{1, n-1} \tag{13}$$

Deoarece $S_j''(x) = 2c_j + 6d_j(x - x_j)$, atunci conform (e) rezultă

$$c_j + 3d_jh_j = c_{j+1}, \quad j = \overline{1, n-1} \tag{14}$$

Din condițiile (f)$_1$ și ținând cont că $S'(x_1) = S_1'(x_1)$, $S'(x_{n+1}) = S_n(x_{n+1})$ rezultă

$$b_1 = f'(x_1) \tag{15}$$

$$b_n + 2c_n + 3d_nh_n^2 = f'(x_{n+1}) \tag{16}$$

Relația (16) poate fi înglobată în relațiile (13) dacă adoptăm notația $b_{n+1} = f'(x_{n+1})$. Se obține sistemul complet de determinare a coeficienților funcției spline cubice S

$$\begin{cases} a_j = f(x_j), \quad j = \overline{1, n} \\ b_jh_j + c_jh_j^2 + d_jh_j^3 = f(x_{j+1}) - f(x_j), \quad j = \overline{1, n} \\ b_j + 2c_jh_j + 3d_jh_j^2 = b_{j+1}, \quad j = \overline{1, n} \\ b_1 = f'(x_1), \quad b_{n+1} = f'(x_{n+1}) \\ c_{j-1} + 3d_{j-1}h_{j-1} = c_j, \quad j = \overline{2, n} \end{cases} \tag{17}$$

Obs.: Relațiile (17) formează un sistem de $4n + 1$ ecuații și $4n + 1$ necunoscute $a_j, c_j, d_j, j = \overline{1, n}$; $b_j, j = \overline{1, n+1}$.

Dacă cuplăm relațiile $(17)_2$ și $(17)_3$ obținem sistemul

$$\begin{cases} c_jh_j + d_jh_j^2 = \dfrac{f(x_{j+1}) - f(x_j)}{h_j} - b_j, \quad j = \overline{1, n} \\ 2c_jh_j + 3d_jh_j^2 = b_{j+1} - b_j, \quad j = \overline{1, n} \end{cases} \tag{18}$$

Combinațiile de forma: $(18)_1 \times 2 - (18)_2$ și $(18)_1 \times 3 - (18)_2$ furnizează expesii pentru coeficienții $d_j, c_j, j = \overline{1, n}$ exprimați în raport cu coeficienții $b_j, j = \overline{1, n+1}$. Astfel

$$\begin{cases} d_j = -\dfrac{2}{h_j^3}(f(x_{j+1}) - f(x_j)) + \dfrac{1}{h_j^2}(b_{j+1} + b_j), \quad j = \overline{1, n} \\ c_j = \dfrac{3}{h_j^2}(f(x_{j+1}) - f(x_j)) - \dfrac{b_{j+1} + 2b_j}{h_j}, j = \overline{1, n} \end{cases} \tag{19}$$

Introducând coeficienții c_j, d_j în relația $(17)_5$ se obține un sistem de $n + 1$ ecuații, având drept necunoscute coeficienții, b_j, $j = \overline{1, n+1}$

$$\begin{cases} b_1 = f'(x_1) \\ \dfrac{1}{h_{j-1}}b_{j-1} + \left(\dfrac{2}{h_j} + \dfrac{2}{h_{j-1}}\right)b_j + \dfrac{1}{h_j}b_{j+1} \\ = -\dfrac{3}{h_{j-1}^2}f(x_{j-1}) + \left(\dfrac{3}{h_{j-1}^2} - \dfrac{3}{h_j^2}\right)f(x_j) + \dfrac{3}{h_j^2}f(x_{j+1}), \quad j = \overline{2, n} \\ b_{n+1} = f'(x_{n+1}) \end{cases} \tag{20}$$

În cazul unei diviziuni $(x_j)_{j=\overline{1,n+1}}$ echidistante cu pasul h sistemul de mai sus se rescrie sub forma

$$\begin{cases} b_1 = f'(x_1) \\ b_{j-1} + 4b_j + b_{j+1} = \dfrac{3}{h}(f(x_{j+1}) - f(x_{j-1})), \quad j = \overline{2, n} \\ b_{n+1} = f'(x_{n+1}) \end{cases} \tag{21}$$

cu matricea asociată, B, diagonal dominantă

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} \tag{22}$$