Subiecte Examen Calculabilitate și Complexitate - Partea de Teorie

1. Mașini Turing ca dispozitive de acceptare și de calcul *([1] și [2] pag. 146 - 166 și [3] pag. 108 - 117)*

- ***Nota 6:***
  - Definiții
    - TM (STM)
    - n-TM
    - NTM
    - MT ca acceptor și MT ca traductor (calculator al valorilor unei funcții)
    - *Variații* : nD-TM, nD-NTM, bandă (benzi) infinite numai într-o parte, mai multe capete de citire/scriere pe o bandă, fără opțiunea de a sta pe loc, orice combinații între ele.
  - Enunțuri
    - $\mathcal{L}_{\text{NTM}} \subseteq \mathcal{L}_{3\text{-TM}}$
    - $\mathcal{L}_{n\text{-TM}} \subseteq \mathcal{L}_{\text{TM}}$
    - $\mathcal{L}_{\text{NTM}} \subseteq \mathcal{L}_{2D\text{-TM}}$
    - $\mathcal{L}_{2D\text{-TM}} \subseteq \mathcal{L}_{\text{TM}}$
- ***Nota 10:***
  - Demonstrație $\mathcal{L}_{\text{NTM}} \subseteq \mathcal{L}_{3\text{-TM}}$ (2 puncte)
  - Demonstrație $\mathcal{L}_{n\text{-TM}} \subseteq \mathcal{L}_{\text{TM}}$ (2 puncte)

2. Funcții recursive, funcții calculabile cu programe standard, funcții Turing-calculabile *([1] și [3] pag. 15 - 28)*

- ***Nota 6:***
  - Definiții
    - Funcție primitiv recursivă, funcție parțial recursivă, funcție recursivă
    - Programe standard, limbajul $\mathcal{S}$, funcție $\mathcal{S}$-calculabilă
    - Funcție Turing-calculabilă
  - Enunțuri
    - *f* funcție $\mathcal{S}$-calculabilă $\Longrightarrow$ *f* funcție Turing-calculabilă
    - *f* funcție Turing-calculabilă $\Longrightarrow$ *f* funcție recursivă
    - *f* funcție recursivă $\Longrightarrow$ *f* funcție $\mathcal{S}$-calculabilă
- ***Nota 10:***
  - Demonstrație *f* funcție Turing-calculabilă $\Longrightarrow$ *f* funcție recursivă (4 puncte)

    sau
  - Demonstrație pentru celelalte două dintre rezultatele de mai sus (câte 2 puncte de fiecare)

3. Funcție ($\mathcal{S}$-calculabilă) universală, program universal *([1] și [3] pag. 51 - 59)*

- ***Nota 6:***
  - Definiții
    - Programe standard, limbajul $\mathcal{S}$, funcție $\mathcal{S}$-calculabilă
    - Codificarea și decodificarea perechilor de numere naturale și a secvențelor finte de numere naturale ca numere naturale, i.e. funcțiile

      $\langle\cdot,\ \cdot\rangle : \mathbb{N}^2 \longrightarrow \mathbb{N}$, $\langle x, y\rangle = 2^x (2y+1) - 1$ și $l(\cdot), r(\cdot) : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ a.î. $\langle l(z), r(z)\rangle = z$

      $[\cdots] : \bigcup_{n \geq 0} \mathbb{N}^n \longrightarrow \mathbb{N}$, $[x_1, x_2, \ldots, x_n] = p_1^{x_1} p_2^{x_2} \ldots p_n^{x_n}$ și

      $(\cdot)_i : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ a.î. $([x_1, x_2, \ldots, x_n])_i = x_i$
    - Codificarea programelor standard
    - Funcția universală de n variabile
  - Enunțuri
    - Funcția universală este $\mathcal{S}$-calculabilă
- ***Nota 10:***
  - Demonstrație Funcția universală este $\mathcal{S}$-calculabilă (4 puncte)

4. Mulțimi recursive (R), mulțimi recursiv enumerabile (RE), mulțimi nerecursiv enumerabile (NRE)

([1] și [3] pag. 60 - 63)

- ***Nota 6:***
  - Definiții
    - Mulțimi recursive (R)
    - Mulțimi recursiv enumerabile (RE)
    - Mulțimi nerecursiv enumerabile (NRE)
  - Enunțuri
    - RE $\subsetneq$ NRE cu specificarea unui limbaj care separă cele două clase
    - $R \subsetneq$ RE cu specificarea unui limbaj care separă cele două clase
    - Proprietăți de închidere ale claselor R și RE
- ***Nota 10:***
  - Demonstrați două din rezultatele de mai sus (fiecare demonstrație 2 puncte)

5. Complexitate spațiu *([1] și [2] pag. 285 - 295, 300 - 302) ([3] pag. 474-478)*

- ***Nota 6:***
  - Definiții
    - Modelul de MT pe care se face evaluarea măsurii spațiu - off-line TM
    - Definiția măsurii și a claselor de complexitate spațiu și timp
    - Funcție spațiu-construibilă, funcție complet spațiu-construibilă
  - Enunțuri
    - Comprimarea spațiului de lucru cu un factor constant
    - Reducerea numărului de benzi (numărul de benzi nu contează pentru măsura spațiu)

      $(D)\,(N)\,\mathrm{SPACE}_k(f(n)) = (D)\,(N)\,\mathrm{SPACE}_1(f(n))$
    - $(D)\,(N)\,\mathrm{TIME}(f(n)) \subseteq (D)\,(N)\,\mathrm{SPACE}(f(n))$
    - $f(n) \geq \log n \implies \mathrm{DSPACE}(f(n)) \subseteq \mathrm{DTIME}\left(2^{O(f(n))}\right)$
    - th. Savitch :

      $$\left.\begin{array}{r} f(n) \geq \log n \\ f(n)\ \text{complet spațiu} - \text{construibilă} \end{array}\right\} \implies \mathrm{NSPACE}\,(f(n)) \subseteq \mathrm{DSPACE}\left(f^2(n)\right)$$
- ***Nota 10:***
  - Demonstrați două din rezultatele de mai sus (fiecare demonstrație 2 puncte)

6. Complexitate timp *([1] și [2] pag. 285 - 295, 300 - 302)*

- ***Nota 6:***
  - Definiții
    - Modelul de MT pe care se face evaluarea măsurii timp
    - Definiția măsurii și a claselor de complexitate spațiu și timp
    - Funcție timp-construibilă, funcție complet timp-construibilă
  - Enunțuri
    - Comprimarea timpului de lucru cu un factor constant
    - Reducerea numărului de benzi (numărul de benzi contează pentru măsura timp)

      $(D)\,(N)\,\mathrm{TIME}_k(f(n)) = (D)\,(N)\,\mathrm{TIME}_1\left(f^2(n)\right)$
    - $(D)\,(N)\,\mathrm{TIME}(f(n)) \subseteq (D)\,(N)\,\mathrm{SPACE}(f(n))$
    - $f(n) \geq \log n \implies \mathrm{DSPACE}(f(n)) \subseteq \mathrm{DTIME}\left(2^{O(f(n))}\right)$
    - $\mathrm{NTIME}(f(n)) \subseteq \mathrm{DTIME}\left(2^{O(f(n))}\right)$
- ***Nota 10:***
  - Demonstrați două din rezultatele de mai sus (fiecare demonstrație 2 puncte)

7. Ierarhii de clase de complexitate spațiu și timp *([1] și [2] pag. 295 - 300)*

- ***Nota 6:***
  - Definiții
    - Modelele de MT pe care se face evaluarea măsurii timp și spațiu
    - Definiția măsurii și a claselor de complexitate spațiu și timp
    - Funcție spațiu-construibilă, funcție complet spațiu-construibilă
    - Funcție timp-construibilă, funcție complet timp-construibilă
    - Codificarea binară a TM
  - Enunțuri
    - Existența ierarhiilor de clase de complexitate spațiu și timp

      (i) $\underset{\text{recursivă}}{\forall T(n)} \ \underset{\text{recursiv}}{\exists L} \ (L \notin \text{DTIME}(T(n)))$

      (ii) $\underset{\text{recursivă}}{\forall S(n)} \ \underset{\text{recursiv}}{\exists L} \ (L \notin \text{DSPACE}(S(n)))$
    - Ierarhie rafinată de clase de complexitate spațiu

$$\left.\begin{array}{l} S_1(n) \geq \log n \ , \quad \lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{S_1(n)}{S_2(n)} = 0 \\ S_2(n) \text{ complet spațiu} - \text{construibilă} \end{array}\right\} \Longrightarrow \text{DSPACE}(S_1(n)) \underset{\neq}{\subset} \text{DSPACE}(S_2(n))$$

    - Ierarhie rafinată de clase de complexitate timp

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{T_1(n) \log T_1(n)}{T_2(n)} = 0 \\ T_2(n) \text{ complet timp} - \text{construibilă} \end{array}\right\} \Longrightarrow \text{DTIME}(T_1(n)) \underset{\neq}{\subset} \text{DTIME}(T_2(n))$$

- ***Nota 10:***
  - Demonstrați două din rezultatele de mai sus (fiecare demonstrație 2 puncte)

8. *Bibliografie*

8.1. *Cursul === în primul rând ===* ☺☺☺

8.2. *Computability, Complexity and Languages - Martin Davis, Elaine Weyuker - Academic Press - 1983*

8.3. *Introduction to Automata Theory, Languages, and Computation - Hopcroft, Ullman - Addison-Wesley - 1979*

8.4. *Introduction to Automata Theory, Languages, and Computation - Hopcroft, Motwani, Ullman - Addison-Wesley - 2001*

Pentru NP-completitudine si exemple importante de probleme NP-complete

- Capitolele 10 și 11 din *8.4.*
- Capitolul 34 din *Introduction to Algorithms - Cormen, Leiserson, Rivest, Stein - MIT Press - 2009*