

Tehnici de Optimizare

Tema 3 - 344

1. Fie următoarea problemă de optimizare constrânsă:

$$\begin{aligned} \min_{x \in \mathbb{R}^2} \quad & f(x) = x_1^3 x_2^2 (-1 - x_1 - x_2) \\ \text{s.l.} \quad & x \in Q \end{aligned}$$

Calculați explicit primele 2 iterații ale Metodei Gradient Proiectat cu pas constant 1, în următoarele situații:

2p a) $Q = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 + 2x_2 \leq 1\}$

2p b) $Q = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid \max\{x_1^2, x_2^2\} \leq 1\}$

2p c) Este problema convexă când $Q = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid x_1^2 \leq x_2\}$?

Indicație: Reamintim că o problemă de optimizare este convexă dacă funcția obiectiv este convexă și mulțimea fezabilă este convexă. La punctul b), simplificați formularea lui Q pentru a obține o mulțime convexă simplă.

2. Fie problema de optimizare neconstrânsă:

$$\begin{aligned} \min_{x \in \mathbb{R}^n} \quad & \frac{1}{2}(a^T x)^2 + \frac{1}{2}x^T x, \\ \text{s.l.} \quad & \sum_{i=1}^n x_i = 1 \end{aligned}$$

unde $a \in \mathbb{R}^n$ este un vector dat.

2p a) Pentru rezolvarea problemei, implementați Metoda Gradient Proiectat: (i) cu pas ales prin backtracking; (ii) cu pas constant $\alpha = \frac{1}{L}$.

2p b) Trasați 2 figuri pentru a compara performanța metodelor de la punctul a). În fiecare dintre cele două figuri vor apărea 2 curbe de convergență 2D: prima pentru MGP cu pas constant, iar a doua MGP cu pas backtracking. Prima figură va indica pe axa Ox contorul iterațiilor (notat k), iar pe Oy valorile distanței $f(x^k) - f^*$. În a doua figură axa Oy va indica valorile $\|x^{k+1} - x^k\|$ (vezi Tema 2).

Indicații :

1. Pentru $f(x) = \frac{1}{2}(a^T x)^2 + \frac{1}{2}x^T x = \frac{1}{2}x^T (aa^T + I_n)x$, avem $\nabla f(x) = (aa^T + I_n)x$.
2. Se va genera vectorul a de dimensiune n aleator sau deterministic.
3. Criterii oprire pentru algoritmi: $f(x^k) - f^* \leq \epsilon$ sau $\|x^{k+1} - x^k\| \leq \epsilon$.

Observații generale::

- Tema va cuprinde: un fișier cu rezolvarea problemei 1 (Word, Latex etc.) și un fișier Python cu rezolvarea problemei 2 (utilizați comentariile pentru explicații).
- Nume fișier (arhiva): Grupa_Nume_Prenume_NrTema
- Termen: 02.04.2021