FMI, Info, 2018/2019, Anul I
Logică matematică şi computaţională

Seminar 6

(S6.1) Să se găsească câte un model pentru fiecare din formulele:

(i) $v_0 \to v_2$;

(ii) $v_0 \wedge v_3 \wedge \neg v_4$.

Demonstraţie:

(i) Fie funcţia $e : V \to \{0, 1\}$, definită, pentru orice $x \in V$, prin:

$$e(x) := \begin{cases} 0, & \text{dacă } x = v_0 \\ 1, & \text{dacă } x = v_2 \\ 0, & \text{altfel.} \end{cases}$$

Atunci:

$$e^+(v_0 \to v_2) = e^+(v_0) \to e^+(v_2) = e(v_0) \to e(v_2) = 0 \to 1 = 1.$$

(ii) Fie funcţia $e : V \to \{0, 1\}$, definită, pentru orice $x \in V$, prin:

$$e(x) := \begin{cases} 1, & \text{dacă } x = v_0 \\ 1, & \text{dacă } x = v_3 \\ 0, & \text{dacă } x = v_4 \\ 1, & \text{altfel.} \end{cases}$$

Atunci:

$$\begin{aligned} e^+(v_0 \wedge v_3 \wedge \neg v_4) &= e^+(v_0) \wedge e^+(v_3) \wedge \neg e^+(v_4) \\ &= e(v_0) \wedge e(v_3) \wedge \neg e(v_4) \\ &= 1 \wedge 1 \wedge \neg 0 \\ &= 1 \wedge 1 \wedge 1 \\ &= 1. \end{aligned}$$

$\square$

(S6.2) Să se demonstreze că, pentru orice formulă φ,

(i) φ este tautologie dacă şi numai dacă $\neg\varphi$ este nesatisfiabilă.

(ii) φ este nesatisfiabilă dacă şi numai dacă $\neg\varphi$ este tautologie.

Demonstraţie:

(i) Avem:

$$\begin{aligned}
\varphi \text{ este tautologie} &\iff \text{pentru orice } e: V \to \{0,1\},\ e^+(\varphi) = 1 \\
&\iff \text{pentru orice } e: V \to \{0,1\},\ \boldsymbol{\neg} e^+(\varphi) = 0 \\
&\iff \text{pentru orice } e: V \to \{0,1\},\ e^+(\neg\varphi) = 0 \\
&\iff \text{pentru orice } e: V \to \{0,1\},\ \text{nu avem că } \ e^+(\neg\varphi) = 1 \\
&\iff \text{nu avem că există } e: V \to \{0,1\} \text{ cu } \ e^+(\neg\varphi) = 1 \\
&\iff \text{nu avem că } \neg\varphi \text{ e satisfiabilă} \\
&\iff \neg\varphi \text{ nu e satisfiabilă} \\
&\iff \neg\varphi \text{ e nesatisfiabilă.}
\end{aligned}$$

(ii) Avem:

$$\begin{aligned}
\varphi \text{ este nesatisfiabilă} &\iff \varphi \text{ nu e satisfiabilă} \\
&\iff \text{nu avem că } \varphi \text{ e satisfiabilă} \\
&\iff \text{nu avem că există } e: V \to \{0,1\} \text{ cu } \ e^+(\varphi) = 1 \\
&\iff \text{pentru orice } e: V \to \{0,1\},\ \text{nu avem că } \ e^+(\varphi) = 1 \\
&\iff \text{pentru orice } e: V \to \{0,1\},\ e^+(\varphi) = 0 \\
&\iff \text{pentru orice } e: V \to \{0,1\},\ \boldsymbol{\neg} e^+(\varphi) = 1 \\
&\iff \text{pentru orice } e: V \to \{0,1\},\ e^+(\neg\varphi) = 1 \\
&\iff \neg\varphi \text{ este tautologie.}
\end{aligned}$$

$\square$

(S6.3) Să se demonstreze că, pentru orice formule φ, ψ,

(i) $\psi \vDash \varphi$ dacă şi numai dacă $\vDash \psi \to \varphi$.

(ii) $\psi \sim \varphi$ dacă şi numai dacă $\vDash \psi \leftrightarrow \varphi$.

Demonstraţie:

(i) Avem:

$$\begin{aligned}
\psi \vDash \varphi &\iff \text{orice model al lui } \psi \text{ este şi model pentru } \varphi \\
&\iff \text{pentru orice } e : V \to \{0,1\},\ \text{dacă } e^+(\psi) = 1,\ \text{atunci } e^+(\varphi) = 1 \\
&\iff \text{pentru orice } e : V \to \{0,1\}, e^+(\psi) \leq e^+(\varphi) \\
&\iff \text{pentru orice } e : V \to \{0,1\}, e^+(\psi) \rightarrow e^+(\varphi) = 1 \\
&\iff \text{pentru orice } e : V \to \{0,1\}, e^+(\psi \to \varphi) = 1 \\
&\iff \vDash \psi \to \varphi.
\end{aligned}$$

(ii) Avem:

$$\begin{aligned}
\psi \sim \varphi &\iff Mod(\psi) = Mod(\varphi) \\
&\iff Mod(\psi) \subseteq Mod(\varphi) \text{ şi } Mod(\varphi) \subseteq Mod(\psi) \\
&\iff \psi \vDash \varphi \text{ şi } \varphi \vDash \psi \\
&\overset{\text{(i)}}{\iff} \vDash \psi \to \varphi \text{ şi } \vDash \varphi \to \psi \\
&\iff \text{pentru orice } e : V \to \{0,1\}, e^+(\varphi \to \psi) = 1 \text{ şi } e^+(\psi \to \varphi) = 1 \\
&\iff \text{pentru orice } e : V \to \{0,1\}, e^+(\varphi \to \psi) \wedge e^+(\psi \to \varphi) = 1 \\
&\iff \text{pentru orice } e : V \to \{0,1\}, e^+((\varphi \to \psi) \wedge (\psi \to \varphi)) = 1 \\
&\iff \text{pentru orice } e : V \to \{0,1\}, e^+(\varphi \leftrightarrow \psi) = 1 \\
&\iff \vDash \psi \leftrightarrow \varphi.
\end{aligned}$$

□

(S6.4) Confirmaţi sau infirmaţi:

(i) pentru orice $\varphi, \psi \in Form$, $\vDash \varphi \wedge \psi$ dacă şi numai dacă $\vDash \varphi$ şi $\vDash \psi$;

(ii) pentru orice $\varphi, \psi \in Form$, $\vDash \varphi \vee \psi$ dacă şi numai dacă $\vDash \varphi$ sau $\vDash \psi$.

Demonstraţie:

(i) Este adevărat. Avem:

$$\begin{aligned}
\vDash \varphi \wedge \psi &\iff \text{pentru orice } e : V \to \{0,1\}, e^+(\varphi \wedge \psi) = 1\\
&\iff \text{pentru orice } e : V \to \{0,1\}, e^+(\varphi) \mathbf{\wedge} e^+(\psi) = 1\\
&\iff \text{pentru orice } e : V \to \{0,1\}, e^+(\varphi) = 1 \text{ şi } e^+(\psi) = 1\\
&\iff \text{pentru orice } e : V \to \{0,1\}, e^+(\varphi) = 1 \text{ şi}\\
&\qquad \text{pentru orice } e : V \to \{0,1\}, e^+(\psi) = 1\\
&\iff \vDash \varphi \text{ şi} \vDash \psi.
\end{aligned}$$

(ii) Nu este adevărat! Dacă luăm $e_1 : V \to \{0,1\}$, $e_1(x) = 1$, pentru orice $x \in V$, şi $e_2 : V \to \{0,1\}$, $e_2(x) = 0$, pentru orice $x \in V$, avem că $e_1 \nvDash \neg v_0$ şi $e_2 \nvDash v_0$, deci v_0 şi $\neg v_0$ nu sunt tautologii, pe când $v_0 \vee \neg v_0$ este tautologie.

□

(S6.5) Arătaţi că pentru orice φ, ψ, $\chi \in Form$, avem:

(i) $\psi \vDash \varphi \to \psi$;

(ii) $(\varphi \to \psi) \wedge (\psi \to \chi) \vDash \varphi \to \chi$;

(iii) $\varphi \to (\psi \to \chi) \sim (\varphi \wedge \psi) \to \chi$;

(iv) $\varphi \vee (\varphi \wedge \psi) \sim \varphi$;

(v) $\varphi \wedge \psi \to \chi \sim (\varphi \to \chi) \vee (\psi \to \chi)$;

(vi) $\vDash \neg\varphi \to (\neg\psi \leftrightarrow (\psi \to \varphi))$.

Demonstraţie: Vom folosi în demonstraţii următoarele: pentru orice $a, b \in \{0,1\}$,

$$\begin{aligned}
a \mathbf{\to} b = 1 &\iff a \leq b,\\
1 \mathbf{\to} a = a, &\qquad a \mathbf{\to} 1 = 1\\
0 \mathbf{\to} a = 1, &\qquad a \mathbf{\to} 0 = \mathbf{\neg} a\\
1 \mathbf{\wedge} a = a, &\qquad 0 \mathbf{\wedge} a = 0,\\
1 \mathbf{\vee} a = 1, &\qquad 0 \mathbf{\vee} a = a.
\end{aligned}$$

(i) Fie $e : V \to \{0,1\}$ cu $e^+(\psi) = 1$. Vrem să arătăm că $e^+(\varphi \to \psi) = 1$. Dar:

$$e^+(\varphi \to \psi) = e^+(\varphi) \mathbf{\to} e^+(\psi) = e^+(\varphi) \mathbf{\to} 1 = 1.$$

(ii) Fie $e : V \to \{0,1\}$ cu $e^+((\varphi \to \psi) \wedge (\psi \to \chi)) = 1$. Vrem să arătăm că $e^+(\varphi \to \chi) = 1$. Avem că

$$1 = e^+((\varphi \to \psi) \wedge (\psi \to \chi)) = (e^+(\varphi) \boldsymbol{\to} e^+(\psi)) \boldsymbol{\wedge} (e^+(\psi) \boldsymbol{\to} e^+(\chi)),$$

de unde tragem concluzia că $e^+(\varphi) \boldsymbol{\to} e^+(\psi) = 1$ şi $e^+(\psi) \boldsymbol{\to} e^+(\chi) = 1$. Prin urmare, $e^+(\varphi) \leq e^+(\psi)$ şi $e^+(\psi) \leq e^+(\chi)$. Obţinem atunci, din tranzitivitatea lui $\leq$, că $e^+(\varphi) \leq e^+(\chi)$. Aşadar,

$$e^+(\varphi \to \chi) = e^+(\varphi) \boldsymbol{\to} e^+(\chi) = 1.$$

(iii) Fie $e : V \to \{0,1\}$ o evaluare arbitrară. Trebuie să demonstrăm că

$$e^+(\varphi \to (\psi \to \chi) = 1 \text{ dacă şi numai dacă } e^+(\varphi \wedge \psi \to \chi) = 1,$$

ceea ce este echivalent cu a arăta că $e^+(\varphi \to (\psi \to \chi)) = e^+(\varphi \wedge \psi \to \chi)$.

Metoda 1: Ne folosim de următorul tabel:

$e^+(\varphi)$	$e^+(\psi)$	$e^+(\chi)$	$e^+(\psi \to \chi)$	$e^+(\varphi \to (\psi \to \chi))$	$e^+(\varphi \wedge \psi)$	$e^+(\varphi \wedge \psi \to \chi)$
1	1	1	1	1	1	1
1	1	0	0	0	1	0
1	0	1	1	1	0	1
1	0	0	1	1	0	1
0	1	1	1	1	0	1
0	1	0	0	1	0	1
0	0	1	1	1	0	1
0	0	0	1	1	0	1

Metoda 2: Raţionăm direct. Observăm că

$$\begin{aligned} e^+(\varphi \to (\psi \to \chi)) &= e^+(\varphi) \boldsymbol{\to} (e^+(\psi) \boldsymbol{\to} e^+(\chi)), \\ e^+(\varphi \wedge \psi \to \chi) &= e^+(\varphi) \boldsymbol{\wedge} e^+(\psi) \boldsymbol{\to} e^+(\chi). \end{aligned}$$

Avem cazurile:

(a) $e^+(\varphi) = 0$. Atunci

$$\begin{aligned} e^+(\varphi) \boldsymbol{\to} (e^+(\psi) \boldsymbol{\to} e^+(\chi)) &= 0 \boldsymbol{\to} (e^+(\psi) \boldsymbol{\to} e^+(\chi)) = 1, \\ e^+(\varphi) \boldsymbol{\wedge} e^+(\psi) \boldsymbol{\to} e^+(\chi) &= 0 \boldsymbol{\wedge} e^+(\psi) \boldsymbol{\to} e^+(\chi) = 0 \boldsymbol{\to} e^+(\chi) = 1. \end{aligned}$$

(b) $e^+(\varphi) = 1$. Atunci

$$\begin{aligned} e^+(\varphi) \rightarrow (e^+(\psi) \rightarrow e^+(\chi)) &= 1 \rightarrow (e^+(\psi) \rightarrow e^+(\chi)) = e^+(\psi) \rightarrow e^+(\chi), \\ e^+(\varphi) \wedge e^+(\psi) \rightarrow e^+(\chi) &= 1 \wedge e^+(\psi) \rightarrow e^+(\chi) = e^+(\psi) \rightarrow e^+(\chi). \end{aligned}$$

(iv) Fie $e : V \to \{0, 1\}$ o evaluare arbitrară. Trebuie să demonstrăm că

$$e^+(\varphi \vee (\varphi \wedge \psi)) = e^+(\varphi), \quad \text{deci că} \quad e^+(\varphi) \vee (e^+(\varphi) \wedge e^+(\psi)) = e^+(\varphi).$$

Avem cazurile:

(a) $e^+(\varphi) = 1$. Atunci

$$e^+(\varphi) \vee (e^+(\varphi) \wedge e^+(\psi)) = 1 \vee (1 \wedge e^+(\psi)) = 1 \vee e^+(\psi) = 1.$$

(b) $e^+(\varphi) = 0$. Atunci

$$e^+(\varphi) \vee (e^+(\varphi) \wedge e^+(\psi)) = 0 \vee (0 \wedge e^+(\psi)) = 0 \vee 0 = 0.$$

(v) Fie $e : V \to \{0, 1\}$ o evaluare arbitrară. Trebuie să demonstrăm că

$$e^+(\varphi \wedge \psi \to \chi) = e^+((\varphi \to \chi) \vee (\psi \to \chi)),$$

deci că

$$(e^+(\varphi) \wedge e^+(\psi)) \rightarrow e^+(\chi) = (e^+(\varphi) \rightarrow e^+(\chi)) \vee (e^+(\psi) \rightarrow e^+(\chi)).$$

Avem cazurile:

(a) $e^+(\varphi) = e^+(\psi) = 1$. Atunci

$$\begin{aligned} (e^+(\varphi) \wedge e^+(\psi)) \rightarrow e^+(\chi) &= 1 \rightarrow e^+(\chi) = e^+(\chi), \\ (e^+(\varphi) \rightarrow e^+(\chi)) \vee (e^+(\psi) \rightarrow e^+(\chi)) &= (1 \rightarrow e^+(\chi)) \vee (1 \rightarrow e^+(\chi)) \\ &= e^+(\chi) \vee e^+(\chi) = e^+(\chi). \end{aligned}$$

(b) $e^+(\varphi) = 0$. Atunci

$$\begin{aligned} (e^+(\varphi) \wedge e^+(\psi)) \rightarrow e^+(\chi) &= (0 \wedge e^+(\psi)) \rightarrow e^+(\chi) \\ &= 0 \rightarrow e^+(\chi) = 1, \\ (e^+(\varphi) \rightarrow e^+(\chi)) \vee (e^+(\psi) \rightarrow e^+(\chi)) &= (0 \rightarrow e^+(\chi)) \vee (e^+(\psi) \rightarrow e^+(\chi)) \\ &= 1 \vee (e^+(\psi) \rightarrow e^+(\chi)) = 1. \end{aligned}$$

(c) $e^+(\psi) = 0$. Similar cu cazul precedent.

(vi) Fie $e : V \to \{0, 1\}$ o evaluare arbitrară.

$$e^+(\neg\varphi \to (\neg\psi \leftrightarrow (\psi \to \varphi))) = \neg e^+(\varphi) \to (\neg e^+(\psi) \leftrightarrow (e^+(\psi) \to e^+(\varphi))).$$

Avem cazurile:

(a) $e^+(\varphi) = 1$. Atunci $\neg e^+(\varphi) = 0$ şi, prin urmare,

$$\begin{aligned}
\neg e^+(\varphi) \to (\neg e^+(\psi) \leftrightarrow (e^+(\psi) \to e^+(\varphi))) &= 0 \to (\neg e^+(\psi) \leftrightarrow (e^+(\psi) \to e^+(\varphi))) \\
&= 1.
\end{aligned}$$

(b) $e^+(\varphi) = 0$. Atunci

$$\begin{aligned}
\neg e^+(\varphi) \to (\neg e^+(\psi) \leftrightarrow (e^+(\psi) \to e^+(\varphi))) &= \neg 0 \to (\neg e^+(\psi) \leftrightarrow (e^+(\psi) \to 0)) \\
&= 1 \to (\neg e^+(\psi) \leftrightarrow (e^+(\psi) \to 0)) \\
&= \neg e^+(\psi) \leftrightarrow (e^+(\psi) \to 0) \\
&= \neg e^+(\psi) \leftrightarrow \neg e^+(\psi) \\
&= 1.
\end{aligned}$$

$\square$