

Seminar 3

Puncte fixe. Unificatori

Teorie pentru S3.1:

O *mulțime parțial ordonată* (*mpo*) este o pereche (M, \leq) unde $\leq \subseteq M \times M$ este o relație de ordine (i.e., reflexivă, antisimetrică, tranzitivă). O mulțime parțial ordonată (C, \leq) este *completă* (*cpo*) dacă C are prim element \perp ($\perp \leq x$ oricare $x \in C$) și $\bigvee_n x_n$ există în C pentru orice lanț $x_1 \leq x_2 \leq x_3 \leq \dots$

Fie (C, \leq_C) o mulțime parțial ordonată. Un element $a \in C$ este *punct fix* al unei funcții $f : C \rightarrow C$ dacă $f(a) = a$. Un element $lfp \in C$ este *cel mai mic punct fix* al unei funcții $f : C \rightarrow C$ dacă este punct fix și pentru orice alt punct fix $a \in C$ al lui f avem $lfp \leq_C a$.

(S3.1) Care sunt punctele fixe ale următoarelor funcții? Indicați cel mai mic punct fix.

1) $f_1 : \mathcal{P}(\{1, 2, 3\}) \rightarrow \mathcal{P}(\{1, 2, 3\})$, $f_1(Y) = Y \cup \{1\}$.

2) $f_2 : \mathcal{P}(\{1, 2, 3\}) \rightarrow \mathcal{P}(\{1, 2, 3\})$, $f_2(Y) = \begin{cases} \{1\} & \text{dacă } 1 \in Y \\ \emptyset & \text{altfel} \end{cases}$.

3) $f_3 : \mathcal{P}(\{1, 2, 3\}) \rightarrow \mathcal{P}(\{1, 2, 3\})$, $f_3(Y) = \begin{cases} \emptyset & \text{dacă } 1 \in Y \\ \{1\} & \text{altfel} \end{cases}$.

Teorie pentru S3.2:

Fie (A, \leq_A) și (B, \leq_B) mulțimi parțial ordonate. O funcție $f : A \rightarrow B$ este *monotonă* (*crescătoare*) dacă $a_1 \leq_A a_2$ implică $f(a_1) \leq_B f(a_2)$ oricare $a_1, a_2 \in A$.

O *clauză definită propozițională* este o formulă care poate avea una din formele:

- q (clauză unitate)
- $p_1 \wedge \dots \wedge p_k \rightarrow q$

unde q, p_1, \dots, p_n sunt variabile propoziționale.

Fie S o mulțime de clauze definite propoziționale. Fie A mulțimea variabilelor propoziționale p_1, p_2, \dots care apar în S și $Baza = \{p_i \mid p_i \in S\}$ mulțimea clauzelor unitate din S . Definim funcția $f_S : \mathcal{P}(A) \rightarrow \mathcal{P}(A)$ prin

$$f_S(Y) = Y \cup Baza \cup \{a \in A \mid (s_1 \wedge \dots \wedge s_n \rightarrow a) \text{ este în } S, s_1 \in Y, \dots, s_n \in Y\}$$

(S3.2) Arătați că funcția f_S este monotonă.

Teorie pentru S3.3, S3.4 și S3.5:

Fie (A, \leq_A) și (B, \leq_B) mulțimi parțial ordonate complete. O funcție $f : A \rightarrow B$ este *continuă* dacă $f(\bigvee_n a_n) = \bigvee_n f(a_n)$ pentru orice lanț $\{a_n\}_n$ din A . Observăm că orice funcție continuă este crescătoare.

Pentru orice mulțime de clauze definite propoziționale S , funcția f_S este continuă.

Teorema 1 (Knaster-Tarski). *Fie (C, \leq) o mulțime parțial ordonată completă și $\mathbf{F} : C \rightarrow C$ o funcție continuă. Atunci*

$$a = \bigvee_n \mathbf{F}^n(\perp)$$

este cel mai mic punct fix al funcției \mathbf{F} .

(S3.3) Calculați cel mai mic punct fix pentru funcția f_{S_i} , $i \in \{1, 2, 3\}$, pentru următoarele mulțimi de clauze definite propoziționale:

1) $S_1 = \{x_1 \wedge x_2 \rightarrow x_3, x_4 \wedge x_2 \rightarrow x_5, x_2, x_6, x_6 \rightarrow x_1\}.$

2) $S_2 = \{x_1 \wedge x_2 \rightarrow x_3, x_4 \rightarrow x_1, x_5 \rightarrow x_2, x_2 \rightarrow x_5, x_4\}.$

3) $S_3 = \{x_1 \rightarrow x_2, x_1 \wedge x_3 \rightarrow x_1, x_3\}.$

(S3.4) Fie L limbajul logicii propoziționale clasice și L^* monoidul cuvintelor cu litere din L . Definiți o funcție $\mathbf{F} : \mathcal{P}(L^*) \rightarrow \mathcal{P}(L^*)$ astfel încât mulțimea formulelor logicii propoziționale clasice, $Form$, este cel mai mic punct fix al lui \mathbf{F} .

(S3.5) * Fie X și Y două mulțimi nevide. O *funcție parțială* de la X la Y este un triplet $f = (X, R_f, Y)$ unde $R_f \subseteq X \times Y$ este o relație funcțională. Pentru o funcție parțială

$f = (X, R_f, Y)$ vom folosi notația $f : X \rightarrowtail Y$. Dacă notăm cu $dom(f)$ mulțimea elementelor din X pentru care funcția este definită, atunci $f|_{dom(f)} : dom(f) \rightarrow Y$ este funcție.

Fie $Pfn(X, Y)$ mulțimea funcțiilor parțiale de la X la Y și $\perp : X \rightarrowtail Y$ unica funcție cu $dom(\perp) = \emptyset$ (funcția care nu este definită în nici un punct). Definim pe $Pfn(X, Y)$ următoarea relație:

$$f \sqsubseteq g \text{ dacă și numai dacă } dom(f) \subseteq dom(g) \text{ și } g|_{dom(f)} = f|_{dom(f)}$$

- 1) Arătați că $(Pfn(X, Y), \sqsubseteq)$ este mulțime parțial ordonată completă și că \perp este cel mai mic element.
- 2) Definim $\mathbf{F} : Pfn(\mathbb{N}, \mathbb{N}) \rightarrow Pfn(\mathbb{N}, \mathbb{N})$ prin

$$\mathbf{F}(g)(k) = \begin{cases} 1, & \text{dacă } k = 0, \\ k * g(k-1) & \text{dacă } k > 0 \text{ și } (k-1) \in dom(g), \\ \text{nedefinit}, & \text{altfel} \end{cases}$$

Arătați că \mathbf{F} este o funcție continuă și caracterizați punctul fix al lui \mathbf{F} .

Teorie pentru S3.6:

O *substituție* este o funcție parțială de la variabile la termeni, adică $\sigma : V \rightarrow Trm_{\mathcal{L}}$. Un *unificator* pentru doi termeni t_1 și t_2 este o substituție θ astfel încât $\theta(t_1) = \theta(t_2)$. Un unificator ν pentru t_1 și t_2 este un *cel mai general unificator* dacă pentru orice alt unificator ν' pentru t_1 și t_2 , există o substituție μ astfel încât $\nu' = \nu; \mu$.

Algoritmul de unificare:

	Lista soluție S	Lista de rezolvat R
Inițial	\emptyset	$t_1 \dot{=} t'_1, \dots, t_n \dot{=} t'_n$
SCOATE	S	$R', t \dot{=} t$
	S	R'
DESCOMPUNE	S	$R', f(t_1, \dots, t_n) \dot{=} f(t'_1, \dots, t'_n)$
	S	$R', t_1 \dot{=} t'_1, \dots, t_n \dot{=} t'_n$
REZOLVĂ	S	$R', x \dot{=} t \text{ sau } t \dot{=} x, x \text{ nu apare în } t$
	$x \dot{=} t, S[x \leftarrow t]$	$R'[x \leftarrow t]$
Final	S	\emptyset

Algoritmul *se termină normal* dacă $R = \emptyset$ (în acest caz, în S are un unificator pentru termenii din lista inițială R).

Algoritmul este oprit cu concluzia *inexistenței unui unificator* dacă:

- (i) În R există o ecuație de forma $f(t_1, \dots, t_n) \doteq g(t'_1, \dots, t'_k)$ cu $f \neq g$. Simbolurile de constantă se consideră simboluri de funcție de aritate 0.
- (ii) În R există o ecuație de forma $x \doteq t$ sau $t \doteq x$ și variabila x apare în termenul t .

(S3.6) Considerăm

- x, y, z, u, v variabile,
- a, b, c simboluri de constantă,
- $h, g, (-)^{-1}$ simboluri de funcție de aritate 1,
- $f, *, +$ simboluri de funcție de aritate 2,
- p simbol de funcție de aritate 3.

Aplicați algoritmul de unificare de mai sus pentru a găsi un unificator pentru termenii:

- 1) $p(a, x, h(g(y)))$ și $p(z, h(z), h(u))$
- 2) $f(h(a), g(x))$ și $f(y, y)$
- 3) $p(a, x, g(x))$ și $p(a, y, y)$
- 4) $p(x, y, z)$ și $p(u, f(v, v), u)$
- 5) $f(x, f(x, x))$ și $f(g(y), f(z, g(a)))$
- 6) $x + (y * y)$ și $(y * y) + z$
- 7) $(x * y) * z$ și $u * u^{-1}$
- 8) $x * y$ și $u * u^{-1}$
- 9) $x * y$ și $x * (y * (u * v)^{-1})$
- 10) $x * y$ și $y * (u * v)^{-1}$
- 11) $f(g(x), x)$ și $f(y, y)$
- 12) $p(x, z, z)$ și $p(y, y, b)$
- 13) $p(a, u, h(x))$ și $p(y, f(y, z), z)$

- 14) $f(x, f(b, x))$ și $f(f(y, a), f(b, f(z, z)))$
- 15) $p(x, b, x)$ și $p(y, y, c)$
- 16) $f(x, y), f(h(x), x)$ și $f(x, b)$
- 17) $f(x, f(x, g(y))), f(u, z)$ și $f(g(y), y)$
- 18) $f(f(x, y), x), f(g(y), z)$ și $f(u, h(z))$
- 19) $f(f(x, y), x), f(v, u)$ și $f(u, h(z))$
- 20) $f(f(x, y), x), f(v, u)$ și $f(u, z)$
- 21) $f(f(g(x), h(y)), h(z)), f(f(u, h(h(x))), h(y))$ și $f(v, w)$
- 22) $p(x, x, z), p(f(a, a), y, y)$ și $p(f(x, a), b, z)$
- 23) $p(x, x, z), p(f(a, a), y, y)$ și $p(x, b, z)$
- 24) $p(x, x, z), p(f(a, a), y, y)$ și $p(x, f(a, a), z)$
- 25) $p(f(x, a), g(y), z), p(f(a, a), z, u)$ și $p(v, u, z)$