Metoda inversă pentru simularea v.a.

I Cazul v.a. continue

! Avem nevoie ca F (funcția de repartiție) să fie dată sub o formă explicită

(T) Fie X o v.a. având o repartiție continuă

Dacă $U \sim Uniform(0,1)$

F este f. de repartiție a v.a. continue (continuă)

Atunci $\boxed{X = F^{-1}(U)}$ are repartiția dată de funcția de repartiție F.

OBS: A simula o v.a. înseamnă a genera o valoare dintre cele posibile conform repartiției sale.

Exemplu

$X \sim Exp(\lambda)$, $\lambda > 0$

Reamintim: $f(x) = \begin{cases} \lambda \cdot e^{-\lambda x}, & x \geq 0 \\ 0, & \text{în rest} \end{cases}$

$F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x}, & x \geq 0 \\ 0, & \text{în rest} \end{cases}$

Dacă $X = F^{-1}(U)$ înseamnă că $x = F^{-1}(u)$ $\forall x$, ceea ce se reduce la rezolvarea ecuației

$$\boxed{u = F(x)}$$

În cazul nostru:

$u = F(x) \Leftrightarrow u = 1 - e^{-\lambda x} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow e^{-\lambda x} = 1 - u \Leftrightarrow -\lambda x = \ln(1-u)$

$\Leftrightarrow x = -\frac{1}{\lambda} \cdot \ln(1-u)$

Deci $\boxed{X = -\frac{1}{\lambda} \cdot \ln(1-U)}$

OBS: Cum $1-U \sim Unif(0,1)$ putem folosi: $\boxed{X = -\frac{1}{\lambda} \cdot \ln U}$

Dar dacă F nu e dat într-o formă explicită?

1. Exemplu: $X \sim \text{Gamma}(n, \lambda)$, $n \in \mathbb{N}$, $\lambda > 0$

$$\boxed{F(x) = \int_0^x \frac{\lambda \cdot e^{-\lambda y} \cdot (\lambda y)^{n-1}}{(n-1)!}\, dy}$$

→ nu are formă explicită

Dar, știm relația:

Dacă $X_1, X_2, \ldots, X_n$ i.i.d. $\sim \text{Exp}(\lambda)$ atunci

$$X = \sum_{i=1}^{n} X_i \sim \text{Gamma}(n, \lambda)$$

Atunci:

$$\boxed{X = -\frac{1}{\lambda} \cdot \sum_{i=1}^{n} \ln(U_i)}$$

2. Exemplu: $X \sim \text{Norm}(m, \sigma^2)$

→ metoda transformării polare