

**Calcul Numeric – Proba practică
Informatică, Anul III**

INSTRUCȚIUNI:

1. Comentați și explicați toate rezolvările trimise. Codurile necomentate/neexplicate nu se punctează.
2. Codurile vor fi salvate cu următoarea denumire `Nume_Prenume_Grupa.py` și vor fi trimise titularului de laborator până în data de **29 ianuarie 2021, ora 14:30**.

ALGORITM (Factorizarea LL^T)

Date de intrare: $A = (a_{ij})_{i,j=\overline{1,n}} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$;

Date de ieșire: $L = (\ell_{ij})_{i,j=\overline{1,n}} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$;

PASUL 1: Verifică simetria și pozitiv definirea matricei A .

PASUL 2: Inițializează complementul Schur: $S = (s_{ij})_{i,j=\overline{1,n}} \leftarrow A$ și matricea $L \leftarrow O_n$.

PASUL 3: Pentru $k = \overline{1, n-1}$ execută

- Determină elementele diagonale ale matricei L : $\ell_{kk} = \sqrt{s_{11}}$;
- Determină coloana k a matricei L : $\ell_{ik} \leftarrow \frac{s_{i-(k-1),1}}{\sqrt{s_{11}}}$, $\forall i = \overline{k+1, n}$;
- Conform următoarei partiționări a matricii S în blocuri de matrici

$$S = \left(\begin{array}{c|c} \mathbf{S}_{11} & \mathbf{S}_{21}^T \\ \hline \mathbf{S}_{21} & \mathbf{S}_{22} \end{array} \right), \quad \text{unde } \mathbf{S}_{11} = s_{11} \in \mathbb{R}, \mathbf{S}_{21} \in \mathcal{M}_{n-k,1}(\mathbb{R}) \text{ și } \mathbf{S}_{22} \in \mathcal{M}_{n-k,n-k}(\mathbb{R}),$$

complementul Schur $S \in \mathcal{M}_{n-k+1,n-k+1}(\mathbb{R})$ își va reduce, la fiecare pas k , numărul de linii și coloane cu 1 prin următoarea operație $S \leftarrow \mathbf{S}_{22} - \frac{\mathbf{S}_{21}\mathbf{S}_{21}^T}{s_{11}} \in \mathcal{M}_{n-k,n-k}(\mathbb{R})$:

$$s_{i-k,j-k} \leftarrow s_{i-k+1,j-k+1} - \frac{s_{i-k+1,1} s_{1,j-k+1}}{s_{1,1}}, \quad \forall i, j = \overline{k+1, n};$$

PASUL 4: Determină ultimul element diagonal al matricei L : $\ell_{nn} \leftarrow \sqrt{S} = \sqrt{s_{11}}$.

Ex. 1

- a) Să se construiască în Python procedura **FactLLT**(A) conform algoritmului (Factorizarea LL^T). Procedura **FactLLT** returnează matricea L din descompunerea Cholesky. Să se testeze programul pentru matricea

$$A = \begin{pmatrix} 25 & 15 & -5 \\ 15 & 18 & 0 \\ -5 & 0 & 11 \end{pmatrix}$$

- b) Să se rezolve sistemul $Ax = b$, cu $b = (1, 2, 3)^T$ prin metoda factorizării LL^T , folosind metodele substituțiilor ascendente și descendente pentru rezolvarea sistemelor $Ly = b$, respectiv $L^T x = y$.

Ex. 2

- (a) Creați funcția **newton_raphson** care determină numeric soluția ecuației:

$$f(x) = x^3 - 13x^2 + 54x - 72 = 0, \quad (1)$$

prin metoda Newton-Raphson și are ca **date de intrare**:

- funcția care determină ecuația (1), f ;
- derivata funcției care determină ecuația (1), df ;
- punctul de start al metodei Newton-Raphson, x_0 ;
- toleranța erorii specifice metodei Newton-Raphson, **eps**;

iar ca **date de ieșire**:

- soluția numerică obținută, x_{aprox} ;
- numărul de iterații necesare, N;

- (b) Alegeți subintervalele și punctele de start ale metodei respectând ipotezele teoremei de convergență ale metodei Newton-Raphson, astfel încât șirurile aproximărilor să rămână în subintervalele selectate și să converge la soluții. Justificați atât alegerea subintervalului, cât și a valorilor inițiale.

Aflați toate soluțiile ecuației (1) apelând funcția **newton_raphson** cu eroarea de aproximare **eps** = 10^{-3} și construiți punctele obținute pe graficul funcției.