Tehnici de Optimizare

Tema 1 - 344

1. Fie funcţia $f : Q \to \mathbb{R}$ defintă de $f(x) = \sum_{i=1}^{m} \log(a_{(i)}^T x + b_i)$, unde $a_{(i)}$ reprezintă al $i-$lea vector dintr-un set de m vectori cunoscuţi. De asemenea, b_i reprezinta componenta scalară i dintr-un vector dat b. s

2p a) Pentru $Q = \{x \in \mathbb{R}^n : a_{(i)}^T x + b_i > 0, \forall i \in \{1, \cdots, m\}\}$, determinaţi constanta Lipschitz a gradientului funcţiei alese, folosind relaţia de ordin II (vezi *Indicaţia* de mai jos). Dar pentru $Q = \{x \in \mathbb{R}^n : a_{(i)}^T x + b_i > 1, \forall i \in \{1, \cdots, m\}\}$, ce observaţi?

2p b) Determinaţi punctele de extrem ale acesteia pentru o dimensiune la alegere.

2p c) Specificaţi natura punctelor de extrem.

Indicaţie: o funcţie f are gradient continuu Lipschitz cu constanta L dacă:

$$\|\nabla^2 f(x)\|_2 := \max_i |\lambda_i \left(\nabla^2 f(x)\right)| \leq L \qquad \forall x \in \mathrm{dom} f.$$

În cazul în care nu există asemenea constantă, spunem că funcţia nu are gradient continuu Lipschitz.

2. Fie problema de programare liniară (LP) cu n variabile de forma:

$$\max_{x \in \mathbb{R}^n} \ \frac{1}{2}\|Ax - b\|_2^2$$
$$\text{s.l. } Cx \leq d,$$

unde $A \in \mathbb{R}^{m \times n}, b \in \mathbb{R}^m, C \in \mathbb{R}^{p \times n}, d \in \mathbb{R}^p$.

2p a) Generaţi datele problemei, alegând dimensiunile p, m, n, şi aplicaţi funcţia *minimize* pentru a găsi minimul. Este global acest minim?

2p b) Generaţi 2 seturi de date (A, b, C, d) astfel încât: (i) pentru primul set, mulţimea punctelor de extrem ale funcţiei obiectiv $\frac{1}{2}\|Ax - b\|_2^2$ să fie fezabile; (ii) pentru al doilea set, să existe cel puţin un punct de extrem nefezabil.

Indicaţii:

- Tema va cuprinde: un fişier cu rezolvarea problemei 1 (Word, Latex etc.) şi un fişier Python cu rezolvarea problemei 2 (utilizaţi comentariile pentru explicaţii).
- Nume fişier (arhiva): Grupa_Nume_Prenume_NrTema
- Termen tema 1: 01.03.2021