CURS #13

CONȚINUTUL CURSULUI #13:

VII. Integrarea numerică
VII.1. Formule de cuadratură.

Fie $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ o funcție integrabilă și fie

$$I(f) := \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \tag{1}$$

Definiția (VII.1.)

Se numește formulă de cuadratură a lui f o formulă de aproximare a integralei (1) de forma

$$\boxed{I_n(f) := \sum_{k=1}^{n+1} w_k\, f(x_k)} \tag{2}$$

unde x_k, $k = \overline{1, n+1}$ sunt astfel încât $a \le x_1 < x_2 < \ldots < x_{n+1} \le b$. $w_k \in \mathbb{R}$, $k = \overline{1, n+1}$, se numesc coeficienții/ponderile cuadraturii (2), iar x_k, $k = \overline{1, n+1}$ se numesc nodurile cuadraturii (2).

Definiția (VII.2.)

Mărimea $e_t(f)$ definită conform formulei

$$e_t(f) := I(f) - I_n(f) \tag{3}$$

se numește eroarea cuadraturii (2) a lui f.

Considerăm funcția $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ astfel încât $f \in C^{n+1}[a, b]$. Fie $P_n : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ polinomul de interpolare Lagrange:

$$P_n(x) = \sum_{k=1}^{n+1} L_{n,k}(x)\, f(x_k)\,, \quad x \in [a, b]$$

cu $L_{n,k}$ funcțiile de bază:

$$L_{n,k}(x) = \prod_{\substack{i=1 \\ i \ne k}}^{n+1} \frac{x - x_i}{x_k - x_i}\,, \quad x \in [a, b]\,, \quad k = \overline{1, n+1}$$

Formula de cuadratură a lui f devine în acest caz:

$$I_n(f) = \int_a^b P_n(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b \sum_{k=1}^{n+1} L_{n,k}(x)\, f(x_k)\,\mathrm{d}x$$
$$= \sum_{k=1}^{n+1} \underbrace{\left(\int_a^b L_{n,k}(x)\,\mathrm{d}x \right)}_{=:w_k} f(x_k)$$

sau

$$I_n(f) = \sum_{k=1}^{n+1} w_k f(x_k) \tag{4}$$

unde ponderile cuadraturii (4) sunt date de:

$$w_k = \int_a^b L_{n,k}(x)\,\mathrm{d}x\,, \quad k = \overline{1, n+1} \tag{5}$$

VII.2. Formulele de cuadratură Newton-Cotes

Dacă nodurile cuadraturii (2) sunt echidistante și $x_1 = a, x_{n+1} = b$ atunci formula (2) se numește formula de cuadratură Newton - Cotes închisă cu $(n+1)$ noduri/puncte. În acest caz avem:

$$\begin{cases} x_1 = a \\ h = \dfrac{b-a}{n} \\ x_i = a + (i-1)h, i = \overline{1, n+1} \end{cases} \tag{6}$$

Dacă nodurile cuadraturii (2) sunt echidistante și $x_1 > a, x_{n+1} < b$ atunci formula (2) se numește formula de cuadratură Newton - Cotes deschisă cu $(n+1)$ noduri/puncte. În acest caz vom considera discretizarea de forma:

$$\begin{cases} x_0 = a, x_{n+2} = b \\ h = \dfrac{b-a}{n+2} \\ x_i = a + ih, i = \overline{0, n+2} \end{cases} \tag{7}$$

Menționăm că pentru ambele metode formula de cuadratură rămâne de forma (4) cu ponderile date de (5).
Fie următoarele schimbări de variabile corespunzătoare celor două formule (închisă și deschisă):

(a) S.V. pentru formula de cuadratură Newton - Cotes închisă:

$$x = a + h(t-1), \quad t \in [1, n+1]; \quad dx = h\,dt \tag{8}$$

(b) S.V. pentru formula de cuadratură Newton - Cotes deschisă:

$$x = a + h\,t, \quad t \in [0, n+2]; \quad dx = h\,dt \tag{9}$$

În cazul schimbării de variabilă pentru formula de cuadratura Newton - Cotes închisă avem:

$$L_{n,k}(x) = \prod_{\substack{i=1 \\ i\neq k}}^{n+1} \frac{x - x_i}{x_k - x_i} = \prod_{\substack{i=1 \\ i\neq k}}^{n+1} \frac{(a + h(t-1)) - (a + h(i-1))}{(a + h(k-1)) - (a + h(i-1))}$$
$$= \prod_{\substack{i=1 \\ i\neq k}}^{n+1} \frac{t-i}{k-i}, \quad x \in [a, b], \quad k = \overline{1, n+1}$$

Coeficienții/ponderile $w_k, k = \overline{1, n+1}$ cuadraturii Newton-Cotes se calculează după cum urmează:

(a) Pentru formula de cuadratură Newton - Cotes închisă avem

$$w_k = \int_a^b L_{n,k}(x)\,dx = h \int_1^{n+1} \prod_{\substack{i=1 \\ i\neq k}}^{n+1} \frac{t-i}{k-i}\,dt,$$

(b) Pentru formula de cuadratură Newton - Cotes deschisă avem

$$w_k = \int_a^b L_{n,k}(x)\,dx = h \int_0^{n+2} \prod_{\substack{i=1 \\ i\neq k}}^{n+1} \frac{t-i}{k-i}\,dt$$

VII.2.1. Formula de cuadratură a trapezului.

Considerăm cazul cuadraturii Newton-Cotes închisă (n=1).
Nodurile cuadraturii sunt:

$$x_1 = a, \quad x_2 = b, \quad h = b - a$$

Formula de cuadratură este:

$$I_1(f) = w_1 f(x_1) + w_2 f(x_2) = w_1 f(a) + w_2 f(b)$$

Ponderile cuadraturii sunt:

$$w_1 = h \int_1^2 \frac{t-2}{-1}\,dt = \frac{h}{2}$$
$$w_2 = h \int_1^2 (t-1)\,dt = \frac{h}{2}$$

Astfel, obținem formula de cuadratură a trapezului:

$$I_1(f) = h\left[\frac{1}{2} f(a) + \frac{1}{2} f(b)\right] = \frac{b-a}{2}\left[f(a) + f(b)\right] \tag{10}$$

Estimarea erorii de cuadratură a trapezului:
Dacă $f \in C^2[a, b]$, se poate demonstra că

$$e_t(f) = I(f) - I_1(f) = -\frac{f''(\xi)}{12} h^3 = O(h^3), \quad \text{cu} \quad \xi \in (a, b)$$

VII.2.2 Formula de cuadratură Simpson.

Considerăm cazul cuadraturii Newton-Cotes închisă ($n = 2$). Nodurile cuadraturii sunt:

$$x_1 = a, \quad x_2 = \frac{a+b}{2} = a + h, \quad x_3 = b = a + 2h, \quad h = \frac{b-a}{2}$$

Formula de cuadratură este:

$$I_2(f) = w_1 f(x_1) + w_2 f(x_2) + w_3 f(x_3)$$

Ponderile cuadraturii sunt:

$$w_1 = h \int_1^3 \frac{1}{2} (t-2)(t-3)\, \mathrm{d}t = \frac{h}{3}$$
$$w_2 = h \int_1^3 -(t-1)(t-3)\, \mathrm{d}t = \frac{4h}{3}$$
$$w_3 = h \int_1^3 \frac{1}{2} (t-1)(t-2)\, \mathrm{d}t = \frac{h}{3}$$

Astfel, obținem formula de cuadratură Simpson:

$$\begin{aligned} I_2(f) &= h \left[\frac{1}{3} f(a) + \frac{4}{3} f\left(\frac{a+b}{2}\right) + \frac{1}{3} f(b) \right] \\ &= \frac{b-a}{6} \left[f(a) + 4 f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b) \right] \end{aligned} \tag{11}$$

Estimarea erorii de cuadratură Simpson: Se poate arăta că dacă $f \in C^4[a, b]$, atunci $\exists\, \xi \in (a, b)$ a.i.

$$e_t(f) = I(f) - I_2(f) = -\frac{f^{(4)}(\xi)}{90} h^5 = O(h^5) \tag{12}$$

VII.2.3. Formula de cuadratură a dreptunghiului

Considerăm cazul cuadraturii Newton-Cotes deschisă ($n = 0$). Nodurile cuadraturii sunt:

$$x_0 := a, \quad x_1 = \frac{a+b}{2} = a + h, \quad x_2 := b = a + 2h, \quad h = \frac{b-a}{2}$$

Formula de cuadratură este:

$$I_0(f) = w_1 f(x_1) = w_1 f(\frac{a+b}{2}) \tag{13}$$

Ponderea de cuadratură w_1 este:

$$w_1 = \int_a^b L_{0,1}(x) dx = b - a = 2h$$

Obs.: Convenție: Funcția de bază pentru $n = 0$ o vom considera $L_{0,1}(x) = 1$.
Obținem astfel formula de cuadratură a dreptunghiului

$$I_0(f) = 2h f\left(\frac{a+b}{2}\right) = (b-a) f\left(\frac{a+b}{2}\right) \tag{14}$$

Dacă $f \in C^2[a, b]$, atunci $\exists\, \xi \in (a, b)$ a.i. $e_t(f) = \frac{f''(\xi)}{3} h^3$

VII.3. Formule de cuadratură sumate

VII.3.1. Formula de cuadratură sumată a dreptunghiului.
Fie partiție/diviziune echidistantă $a = x_1 < x_2 < \ldots < x_{2m} < x_{2m+1} = b$, $m \geq 1$, a intervalului $[a, b]$:

$$[a,b] = \bigcup_{k=1}^{m} \left[x_{2k-1}, x_{2k+1}\right]; \quad x_k = a+(k-1)h, \quad k = \overline{1, 2m+1}; \quad h = \frac{b-a}{2m}$$

Are loc identitatea:

$$I(f) = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{k=1}^{m} \int_{x_{2k-1}}^{x_{2k+1}} f(x)\,\mathrm{d}x \tag{15}$$

Aplicăm formula de cuadratură a dreptunghiului pe fiecare subinterval $\left[x_{2k-1}, x_{2k+1}\right] \subset [a, b]$, $k = \overline{1, m}$

$$I_{0,m} = \sum_{k=1}^{m} I_0^k(f) = \sum_{k=1}^{m} f(x_{2k})(x_{2k+1} - x_{2k-2}) = 2h \sum_{k=1}^{m} f(x_{2k}) \tag{16}$$

unde $I_0^k(f)$ reprezintă formula de cuadratură a dreptunghiului scrisă pe intervalul $[x_{2k-1}, x_{2k+1}]$.
Obs.: Adunând erorile formulei de cuadratură de la fiecare subinterval , eroarea formulei de cuadratură sumată își micșorează ordinul cu o unitate. Fie $e_k = O(h^3)$, eroarea formulei de cuadratură a dreptunghiului pe subintervalul $[x_{2k-1}, x_{2k+1}]$, atunci eroarea formulei de cuadatură sumată a a dreptunghiului este:

$$e = \sum_{k=1}^{m} e_k = O(h^3) \sum_{k=1}^{m} 1 = m \cdot O(h^3) = \frac{b-a}{2h} \cdot O(h^3) = O(h^2) \tag{17}$$

VII.3.2. Formula de cuadratură sumată a trapezului.
Fie diviziunea echidistantă $a = x_1 < x_2 < \ldots < x_m < x_{m+1} = b$, $m \geq 1$, a intervalului $[a, b]$:

$$[a,b] = \bigcup_{k=1}^{m} \left[x_k, x_{k+1}\right]; \quad x_k = a + (k-1)h, \quad k = \overline{1, m+1}; \quad h = \frac{b-a}{m}$$

Are loc identitatea:

$$I(f) = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{k=1}^{m} \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x)\,\mathrm{d}x \tag{18}$$

În fiecare subinterval $\left[x_k, x_{k+1}\right] \subset [a, b]$, $k = \overline{1, m+1}$, considerăm nodurile de interpolare x_k și x_{k+1}.
Aplicăm formula de cuadratură a trapezului pe fiecare subinterval $\left[x_k, x_{k+1}\right] \subset [a, b]$, $k = \overline{1, m+1}$

$$\begin{aligned}
I_{1,m}(f) &= \sum_{k=1}^{m} I_1^k(f) = \sum_{k=1}^{m} \frac{f(x_k) + f(x_{k+1})}{2} \cdot (x_{k+1} - x_k) \\
&= \frac{h}{2} \sum_{k=1}^{m} (f(x_k) + f(x_{k+1})) = \frac{h}{2}(f(x_1) + f(x_2) \\
&+ f(x_2) + f(x_3) + \ldots + f(x_m) + f(x_{m+1})) \\
&= \frac{h}{2}(f(x_1) + 2\sum_{k=2}^{m} f(x_k) + f(x_{m+1}))
\end{aligned} \tag{19}$$

unde $I_1^k(f)$ reprezintă formula de cuadratură a trapezului pe intervalul $[x_k, x_{k+1}]$.
Eroarea formulei de cuadratură sumată a trapezului este de ordinul $O(h^2)$.

VII.3.3. Formula de cuadratură sumată Simpson.

Fie diviziune echidistantă $a = x_1 < x_2 < \ldots < x_{2m} < x_{2m+1} = b$, $m \geq 1$, a intervalului $[a, b]$:

$$[a, b] = \bigcup_{k=1}^{m} \left[x_{2k-1}, x_{2k+1}\right]; \quad x_k = a + (k-1)h, \quad k = \overline{1, 2m+1}$$
$$h := \frac{b-a}{2m}$$

Are loc identitatea:

$$I(f) = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{k=1}^{m} \int_{x_{2k-1}}^{x_{2k+1}} f(x)\,\mathrm{d}x \tag{20}$$

În fiecare subinterval $\left[x_{2k-1}, x_{2k+1}\right] \subset [a, b]$, $k = \overline{1, m}$, considerăm nodurile de interpolare x_{2k-1}, x_{2k} și x_{2k+1}

Aplicăm formula de cuadratură Simpson pe fiecare subinterval $\left[x_{2k-1}, x_{2k+1}\right] \subset [a, b]$, $k = \overline{1, m}$:

$$\begin{aligned} I_{2,m}(f) &= \sum_{k=1}^{m} I_2^k(f) = \sum_{k=1}^{m} \left(\frac{1}{3} f(x_{2k-1}) + \frac{4}{3} f(x_{2k}) + \frac{1}{3} f(x_{2k+1})\right) \times \\ &\quad \times \frac{x_{2k+1} - x_{2k-1}}{2} \\ &= \frac{h}{3}\left(f(x_1) + 4\sum_{k=1}^{m} f(x_{2k}) + 2\sum_{k=1}^{m-1} f(x_{2k+1}) + f(x_{2m+1})\right) \end{aligned} \tag{21}$$

unde $I_2^k(f)$ reprezintă formula de cuadratură Simpson pe intervalul $\left[x_{2k-1}, x_{2k+1}\right]$.

Eroarea formulei de cuadratură sumată Simpson este de ordinul $O(h^4)$.