CURS #10

CONȚINUTUL CURSULUI #10:

V. Interpolarea cu funcții spline.
- V.1. Interpolare cu funcții spline liniare.
- V.2. Interpolare cu funcții spline pătratice.

V. Interpolarea cu funcții spline.
V.1. Interpolare cu funcții spline liniare.

Fie $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ și $(x_i)_{i=\overline{1,n+1}}$ o diviziune a intervalului $[a, b]$, i.e. $a = x_1 < \ldots < x_{n+1} = b$. Fie $I_j = [x_j, x_{j+1})$ cu $\bar{I}_j = [x_j, x_{j+1}]$, $j = \overline{1, n-1}$, $I_n = \bar{I}_n = [x_n, x_{n+1}]$.

Definiția (V.1.)

Funcția $S : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ s.n. funcție spline liniară pentru funcția $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ dacă:

(a) *S este liniară pe porțiuni:*

$$S(x) = S_j(x)\,, \quad \forall\, x \in I_j, \quad j = \overline{1, n} \tag{1}$$

unde

$$S_j : \bar{I}_j \longrightarrow \mathbb{R}\,, \quad S_j(x) = a_j + b_j\,(x - x_j)\,, \quad j = \overline{1, n} \tag{2}$$

cu $a_j, b_j \in \mathbb{R}$, $j = \overline{1, n}$, ce trebuie determinate.

Definiția (V.1. (continuare))

(b) *S interpolează f în x_j, $j = \overline{1, n+1}$:*

$$S(x_j) = f(x_j)\,, \quad j = \overline{1, n+1} \tag{3}$$

(c) *S este continuă în nodurile interioare, i.e. x_{j+1}, $j = \overline{1, n-1}$:*

$$S_j(x_{j+1}) = S_{j+1}(x_{j+1})\,, \quad j = \overline{1, n-1} \tag{4}$$

Relațiile (3)–(4) ne furnizează sistemul de ecuații liniare, i.e. $2n$ ecuații liniare pentru necunoscutele $a_j, b_j \in \mathbb{R}$, $j = \overline{1, n}$.
Conform condiției (b) și ținând cont de faptul că $x_j \in I_j, j = \overline{1, n}$ rezultă

$$S(x_j) = S_j(x_j) = f(x_j), \quad \text{deci} \quad a_j = f(x_j), \quad j = \overline{1, n}$$

Nodul $x_{n+1} \in I_n$, deci

$$S(x_{n+1}) = S_n(x_{n+1}) \Rightarrow a_n + b_n(x_{n+1} - x_n) = f(x_{n+1}) \Rightarrow$$

$$b_n = \frac{f(x_{n+1}) - f(x_n)}{x_{n+1} - x_n} \tag{5}$$

Conform condiției (c) se obțin succesiv următoarele relații:

$$(a_j + b_j(x - x_j))\,|_{x=x_{j+1}} = (a_{j+1} + b_{j+1}(x - x_{j+1}))\,|_{x=x_{j+1}}$$

$$a_j + b_j(x_{j+1} - x_j) = a_{j+1}, \quad j = \overline{1, n-1}$$

$$b_j = \frac{f(x_{j+1}) - f(x_j)}{x_{j+1} - x_j}, \quad j = \overline{1, n-1} \tag{6}$$

Rezultă următoarea schemă numerică de determinare a coeficienților $a_j, b_j, j = \overline{1, n}$:

$$\begin{cases} a_j = f(x_j), & j = \overline{1, n} \\ b_j = \dfrac{f(x_{j+1}) - f(x_j)}{x_{j+1} - x_j}, & j = \overline{1, n} \end{cases} \tag{7}$$

ALGORITM (Interpolarea spline liniară)

Date de intrare: $X; Y; x$;
Date de ieșire: y;

STEP 1: `Determină` n;

STEP 2: `for` $j = 1 : n$ `do`

$$a_j = Y_j; \quad b_j = \frac{Y_{j+1} - Y_j}{X_{j+1} - X_j};$$

`endfor`

STEP 3: `for` $j = 1 : n$ `do`

`if` $x \in [X_j, X_{j+1}]$ `do`

$S = a_j + b_j(x - X_j)$;

`STOP`

`endif`

`endfor`

$y = S$;

Obs.: Vectorul X conține nodurile de interpolare $x_1, \ldots, x_{n+1}$, iar vectorul Y conține valorile funcției în nodurile de interpolare, $f(x_1), \ldots, f(x_{n+1})$.

Exemplul # 1: Să se afle funcția spline liniară pentru funcția $f(x) = e^{2x}$ relativ la diviziunea $(x_1,\ x_2,\ x_3) = (-1,\ 0,\ 1)$.

Rezolvare:

$$S(x) = \begin{cases} S_1(x), & x \in [x_1, x_2) \\ S_2(x), & x \in [x_2, x_3] \end{cases}$$

unde $S_1(x) = a_1 + b_1(x - x_1)$ și $S_2(x) = a_2 + b_2(x - x_2)$. Se obține astfel

$$S(x) = \begin{cases} a_1 + b_1(x + 1), & x \in [-1, 0) \\ a_2 + b_2 x, & x \in [0, 1] \end{cases}$$

Deoarece S interpolează f în cele trei noduri rezultă

$$S(x_1) = f(x_1), S(x_2) = f(x_2), S(x_3) = f(x_3)$$

echivalent:

$$S_1(-1) = e^{-2},\ S_2(0) = 1,\ S_2(1) = e^2$$

de unde $a_1 = e^{-2},\ a_2 = 1,\ a_2 + b_2 = e^2$, deci $b_2 = e^2 - 1$.
Pe de altă parte, S este continuă în nodul $x_2 \in (-1, 1)$, i.e. $S_1(x_2) = S_2(x_2)$ sau $S_1(0) = S_2(0)$, deci $a_1 + b_1 = a_2$, de unde rezultă $b_1 = 1 - e^{-2}$. Obținem astfel, următoarea reprezentare:

$$S(x) = \begin{cases} e^{-2} + (1 - e^{-2})(x + 1), & x \in [-1, 0) \\ 1 + (e^2 - 1)x, & x \in [0, 1] \end{cases}$$
$$= \begin{cases} 1 + (1 - e^{-2})x, & x \in [-1, 0) \\ 1 + (e^2 - 1)x, & x \in [0, 1] \end{cases}$$

V.2. Interpolare cu funcții spline pătratice

Definiția (V.2.)

Funcția $S : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ s.n. funcție spline pătratică pentru funcția $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ dacă:

(a) *S este pătratică pe porțiuni:*

$$S(x) = S_j(x)\,, \quad \forall\, x \in I_j, \quad j = \overline{1, n} \tag{8}$$

unde

$$S_j : \bar{I}_j \longrightarrow \mathbb{R}\,,$$
$$S_j(x) = a_j + b_j\,(x - x_j) + c_j\,(x - x_j)^2\,, j = \overline{1, n} \tag{9}$$

cu $a_j, b_j, c_j \in \mathbb{R}$, $j = \overline{1, n}$, ce trebuie determinate.

(b) *S interpolează f în x_j, $j = \overline{1, n+1}$:*

$$S(x_j) = f(x_j)\,, \quad j = \overline{1, n+1} \tag{10}$$

Definiția (V.2. (continuare))

(c) *S este continuă în nodurile interioare* x_{j+1}, $j = \overline{1, n-1}$:

$$S_j(x_{j+1}) = S_{j+1}(x_{j+1}), \quad j = \overline{1, n-1} \tag{11}$$

(d) *S′ este continuă în nodurile interioare* x_{j+1}, $j = \overline{1, n-1}$:

$$S'_j(x_{j+1}) = S'_{j+1}(x_{j+1}), \quad j = \overline{1, n-1} \tag{12}$$

(e) *Una din următoarele condiții este satisfăcută*

$(e)_1$: $S'(x_1) = f'(x_1)$

$(e)_2$: $S'(x_{n+1}) = f'(x_{n+1})$

Conform condiției (b) rezultă

$$a_j = f(x_j), \quad j = \overline{1, n} \tag{13}$$

$$a_n + b_n(x_{n+1} - x_n) + c_n(x_{n+1} - x_n)^2 = f(x_{n+1}) \tag{14}$$

Conform condiției (c) rezultă

$$a_j + b_j(x_{j+1} - x_j) + c_j(x_{j+1} - x_j)^2 = a_{j+1}, \quad j = \overline{1, n-1} \tag{15}$$

sau

$$a_j + b_j(x_{j+1} - x_j) + c_j(x_{j+1} - x_j)^2 = f(x_{j+1}), \quad j = \overline{1, n-1} \tag{16}$$

Relațiile (14) și (16) pot fi cuplate și rescrise ca o singură relație pentru $j = \overline{1, n}$.
Cum $S'_j(x) = b_j + 2c_j(x - x_j)$, atunci conform condiției (d) rezultă

$$b_j + 2c_j(x_{j+1} - x_j) = b_{j+1}, \quad j = \overline{1, n-1} \tag{17}$$

Conform condiției (e) rezultă

$$S'_1(x_1) = f'(x_1) \Rightarrow b_1 = f'(x_1) \tag{18}$$

sau

$$S'_n(x_{n+1}) = f'(x_{n+1}) \Rightarrow b_n + 2c_n(x_{n+1} - x_n) = f'(x_{n+1}) \tag{19}$$

Dacă în (19) considerăm $b_{n+1} = f'(x_{n+1})$ atunci relațiile (19) și (17) pot fi cuplate și rescrise ca o singură relație pentru $j = \overline{1, n}$.

Fie $h_j = x_{j+1} - x_j, j = \overline{1, n}$ lungimea fiecărei subinterval $[x_j, x_{j+1}]$.
Obținem astfel, sistemele complete de ecuații necesare pentru determinarea coeficienților b_j, c_j:

$$\begin{cases} a_j + b_j h_j + c_j h_j^2 = f(x_{j+1}), & j = \overline{1, n} \\ b_1 = f'(x_1) \\ b_j + 2c_j h_j = b_{j+1}, & j = \overline{1, n-1} \end{cases} \tag{20}$$

sau

$$\begin{cases} a_j + b_j h_j + c_j h_j^2 = f(x_{j+1}), & j = \overline{1, n} \\ b_{n+1} = f'(x_{n+1}) \\ b_j + 2c_j h_j = b_{j+1}, & j = \overline{1, n} \end{cases} \tag{21}$$

Din $(20)_1$ rezultă

$$c_j = \frac{1}{h_j^2}\left(f(x_{j+1}) - f(x_j) - h_j b_j\right), \quad j = \overline{1, n} \tag{22}$$

Introducând (22) în $(20)_3$ obținem

$$b_{j+1} + b_j = \frac{2}{h_j}\left(f(x_{j+1}) - f(x_j)\right), \quad j = \overline{1, n-1} \tag{23}$$

Rezultă schemele numerice de calcul a coeficienților $b_j, c_j, j = \overline{1, n}$

$$\begin{cases} b_1 = f'(x_1) \\ b_{j+1} = \dfrac{2}{h_j}\left(f(x_{j+1}) - f(x_j)\right) - b_j, & j = \overline{1, n-1} \\ c_j = \dfrac{1}{h_j^2}\left(f(x_{j+1}) - f(x_j) - h_j b_j\right), & j = \overline{1, n} \end{cases} \tag{24}$$

sau

$$\begin{cases} b_{n+1} = f'(x_{n+1}) \\ b_j = \dfrac{2}{h_j}\left(f(x_{j+1}) - f(x_j)\right) - b_{j+1}, & j = \overline{n, 1} \\ c_j = \dfrac{1}{h_j^2}\left(f(x_{j+1}) - f(x_j) - h_j b_j\right), & j = \overline{1, n} \end{cases} \tag{25}$$

Exemplul #2: Să se afle funcția spline pătratică pentru funcția $f(x) = e^{2x}$ relativ la diviziunea $(x_1,\ x_2,\ x_3) = (-1,\ 0,\ 1)$.
Rezolvare:

$$S(x) = \begin{cases} S_1(x), & x \in [x_1, x_2) \\ S_2(x), & x \in [x_2, x_3] \end{cases}$$

unde

$$S_1(x) = a_1 + b_1(x - x_1) + c_1(x - x_1)^2$$

și

$$S_2(x) = a_2 + b_2(x - x_2) + c_2(x - x_2)^2$$

Se obține astfel

$$S(x) = \begin{cases} a_1 + b_1(x+1) + c_1(x+1)^2, & x \in [-1, 0) \\ a_2 + b_2 x + c_2 x^2, & x \in [0, 1] \end{cases}$$

Deoarece S interpolează f în cele trei noduri rezultă

$$S(x_1) = S_1(x_1) = f(x_1), S(x_2) = S_2(x_2) = f(x_2), S(x_2) = S_2(x_3) = f(x_3)$$

echivalent

$$S_1(-1) = e^{-2},\ S_2(0) = 1,\ S_2(1) = e^2$$

de unde $a_1 = e^{-2},\ a_2 = 1,\ a_2 + b_2 + c_2 = e^2$, deci

$$b_2 + c_2 = e^2 - 1. \tag{26}$$

Pe de altă parte, S este continuă în nodul $x_2 \in (-1, 1)$, i.e.
$S_1(x_2) = S_2(x_2)$ sau $S_1(0) = S_2(0)$, deci $a_1 + b_1 + c_1 = a_2$, de unde rezultă

$$b_1 + c_1 = 1 - e^{-2}. \tag{27}$$

Derivatele funcțiilor S_1 și S_2 sunt:
$S_1'(x) = b_1 + 2c_1(x - x_1), S_2'(x) = b_2 + 2c_2(x - x_2)$. Funcția S' se exprimă prin formula

$$S'(x) = \begin{cases} b_1 + 2c_1(x+1), & x \in [-1, 0) \\ b_2 + 2c_2 x, & x \in [0, 1] \end{cases}$$

Derivata S' a funcției spline pătratice este continuă în nodul interior x_2, i.e. $S_1'(x_2) = S_2'(x_2)$ sau $S_1'(0) = S_2'(0)$ de unde rezultă

$$b_1 + 2c_1 = b_2 \tag{28}$$

Considerăm în plus satisfăcută condiția $S'(x_1) = f'(x_1)$ sau $S_1'(-1) = f'(-1)$, de unde $b_1 = 2e^{-2}$. Din relația (27) rezultă $c_1 = 1 - 3e^{-2}$, iar din (28) rezultă $b_2 = 2 - 4e^{-2}$. În final, din relația (26) rezultă $c_2 = e^2 + 4e^{-2} - 3$. Obținem astfel, următoarea reprezentare a funcției spline pătratice S :

$$S(x) = \begin{cases} e^{-2} + 2e^{-2}(x+1) + (1 - 3e^{-2})(x+1)^2, & x \in [-1, 0) \\ 1 + (2 - 4e^{-2})x + (e^2 + 4e^{-2} - 3)x^2, & x \in [0, 1] \end{cases}$$