

**Calcul Numeric – Proba practică  
Informatică, Anul III**

**INSTRUCȚIUNI:**

1. Comentați și explicați toate rezolvările trimise. Codurile necomentate/neexplicate nu se punctează.
2. Codurile vor fi salvate cu următoarea denumire `Nume_Prenume_Grupa.py` și vor fi trimise titularului de laborator până în data de **29 ianuarie 2021, ora 14:30**.

**ALGORITM** (Factorizarea  $LL^T$ )

**Date de intrare:**  $A = (a_{ij})_{i,j=\overline{1,n}} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ ;

**Date de ieșire:**  $L = (\ell_{ij})_{i,j=\overline{1,n}} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ ;

PASUL 1: Verifică simetria și pozitiv definirea matricei  $A$ .

PASUL 2: Inițializează complementul Schur:  $S = (s_{ij})_{i,j=\overline{1,n}} \leftarrow A$  și matricea  $L \leftarrow O_n$ .

PASUL 3: Pentru  $k = \overline{1, n-1}$  execută

- Determină elementele diagonale ale matricei  $L$ :  $\ell_{kk} = \sqrt{s_{11}}$ ;
- Determină coloana  $k$  a matricei  $L$ :  $\ell_{ik} \leftarrow \frac{s_{i-(k-1),1}}{\sqrt{s_{11}}}$ ,  $\forall i = \overline{k+1, n}$ ;
- Conform următoarei partiționări a matricii  $S$  în blocuri de matrici

$$S = \left( \begin{array}{c|c} \mathbf{S}_{11} & \mathbf{S}_{21}^T \\ \hline \mathbf{S}_{21} & \mathbf{S}_{22} \end{array} \right), \quad \text{unde } \mathbf{S}_{11} = s_{11} \in \mathbb{R}, \mathbf{S}_{21} \in \mathcal{M}_{n-k,1}(\mathbb{R}) \text{ și } \mathbf{S}_{22} \in \mathcal{M}_{n-k,n-k}(\mathbb{R}),$$

complementul Schur  $S \in \mathcal{M}_{n-k+1,n-k+1}(\mathbb{R})$  își va reduce, la fiecare pas  $k$ , numărul de linii și coloane cu 1 prin următoarea operație  $S \leftarrow \mathbf{S}_{22} - \frac{\mathbf{S}_{21}\mathbf{S}_{21}^T}{s_{11}} \in \mathcal{M}_{n-k,n-k}(\mathbb{R})$ :

$$s_{i-k,j-k} \leftarrow s_{i-k+1,j-k+1} - \frac{s_{i-k+1,1} s_{1,j-k+1}}{s_{1,1}}, \quad \forall i, j = \overline{k+1, n};$$

PASUL 4: Determină ultimul element diagonal al matricei  $L$ :  $\ell_{nn} \leftarrow \sqrt{S} = \sqrt{s_{11}}$ .

**Ex. 1**

- a) Să se construiască în Python procedura **FactLLT**(A) conform algoritmului (Factorizarea  $LL^T$ ). Procedura **FactLLT** returnează matricea L din descompunerea Cholesky. Să se testeze programul pentru matricea

$$A = \begin{pmatrix} 25 & 15 & -5 \\ 15 & 18 & 0 \\ -5 & 0 & 11 \end{pmatrix}$$

- b) Să se rezolve sistemul  $Ax = b$ , cu  $b = (1, 2, 3)^T$  prin metoda factorizării  $LL^T$ , folosind metodele substituțiilor ascendente și descendente pentru rezolvarea sistemelor  $Ly = b$ , respectiv  $L^T x = y$ .

**Ex. 2**

- (a) Creați funcția **newton\_raphson** care determină numeric soluția ecuației:

$$f(x) = x^3 - 3x^2 - x + 3 = 0, \quad (1)$$

prin metoda Newton-Raphson și are ca **date de intrare**:

- funcția care determină ecuația (1),  $f$ ;
- derivata funcției care determină ecuația (1),  $df$ ;
- punctul de start al metodei Newton-Raphson,  $x_0$ ;
- toleranța erorii specifice metodei Newton-Raphson, **eps**;

iar ca **date de ieșire**:

- soluția numerică obținută,  $x_{\text{aprox}}$ ;
  - numărul de iterații necesare, N;
- (b) Alegeți subintervalele și punctele de start ale metodei respectând ipotezele teoremei de convergență ale metodei Newton-Raphson, astfel încât șirurile aproximărilor să rămână în subintervalele selectate și să converge la soluții. Justificați atât alegerea subintervalului, cât și a valorilor inițiale.

Aflați toate soluțiile ecuației (1) apelând funcția **newton\_raphson** cu eroarea de aproximare **eps** =  $10^{-3}$  și construiți punctele obținute pe graficul funcției.