Seminar 1

1 Probleme de seminar

Problema 1. Fie funcţiile $f : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$ şi $g : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$ definite de:

$$f(x) = 2x_1 + 5x_2 = [2 \quad 5] \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = a^T x$$
$$g(x) = 3x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2 + 5x_1 - x_2 = \frac{1}{2} x^T H x + a^T x + b.$$

Să se determine expresiile gradienţilor si hessienelor.

Rezolvare:

$$\nabla f(x) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f(x)}{\partial x_1} \\ \frac{\partial f(x)}{\partial x_2} \end{bmatrix} = a$$

$$\nabla g(x) = \begin{bmatrix} \frac{\partial g(x)}{\partial x_1} \\ \frac{\partial g(x)}{\partial x_2} \end{bmatrix} = Hx + a$$

$$g(x) = 3x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2 + 5x_1 - x_2 = \frac{1}{2}\left(6x_1^2 + 4x_1x_2 + 2x_2^2\right) + 5x_1 - x_2$$
$$= \frac{1}{2} x^T H x + a^T x + b = \frac{1}{2} x^T \begin{bmatrix} 6 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} x + [5 \quad -1] \cdot x.$$

Forma matriceala:

$$g(x) = 1/2(x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2) = \frac{1}{2}[x_1 \ x_2] \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + [0 \ \ 0]x + 0.$$

$$g(x_1,x_2,x_3) = 2x_1^2 + 2x_1x_2 + 3x_3^2 + 5x_1 + x_2 \qquad = \frac{1}{2}\left(4x_1^2 + 4x_1x_2 + 6x_3^2\right) + x_1 + x_2$$

$$= \frac{1}{2}x^T \begin{bmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix} x + [5 \;\; 1 \;\; 0]x + 0.$$

$$\nabla g(x_1,x_2,x_3) = Hx + a$$

Problema 2. Fie funcţiile $f : \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}$ şi $g : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$ definite de:

$$f(x) = x_1^3 x_2 + 2x_3^2 x_1 - x_2 x_3,$$
$$g(x) = \exp^{x_1 - x_2} + \exp^{2x_1 - 1} - \exp^{2x^2 - 2}.$$

(i) Să se determine expresiile gradienţilor $\nabla f(x), \nabla g(x)$.

(ii) Să se determine expresiile Hessianelor $\nabla^2 f(x), \nabla^2 g(x)$.

Rezolvare:

$$\nabla f(x) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f(x)}{\partial x_1} \\ \cdots \\ \frac{\partial f(x)}{\partial x_n} \end{bmatrix}$$

Problema 2. Fie problema de optimizare:

$$\min_{x \in \mathbb{R}^2} \; x_1^3 + x_2^3$$
$$\text{s.t. } (x_1 + x_2)^2 \leq 0,$$
$$x_1 x_2^3 = -1$$

(i) Să se precizeze care sunt constrângerile de egalitate şi care sunt cele de inegalitate.

(ii) Să se determine analitic punctul de optim şi valoarea optimă.

Rezolvare:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 0 \\ x_1 x_2^3 = -1 \end{cases} \quad \Rightarrow x_2 = -x_1 \Rightarrow x_1^4 = 1 \Rightarrow x_1 \in \{-1, 1\}$$

Multimea fezabila este formata din: $[1 \quad -1], [-1 \quad 1]$.

Valoarea optima a problemei este 0. Puncte de optim: $[1 \quad -1], [-1 \quad 1]$.

Problema 3. Fie problema de optimizare:

$$\begin{aligned} \min_{x \in \mathbb{R}^2} \ & 2x_1^2 + x_2^2 - x_1 x_2 \\ \text{s.t.} \ & 2^{x^T x - 1} \le 2, \ (a^T x - b)^2 \le 0 \\ & 5^{|x_1|} \le 1, \ 3^{x_1 + x_2} = 1 \end{aligned}$$

Arătaţi că muţimea fezabilă este formată din contrângeri liniare sau pătratice.

Rezolvare:

$$2^{x^T x - 1} \le 2, echivalent\ x^T x - 1 \le 1, echivalent\ x^T x = \|x\|_2^2 \le 2, echivalent \|x\|_2 \le \sqrt{2}$$
$$(a^T x - b)^2 \le 0, echivalent\ a^T x = b$$
$$|x_1| \le 0, echivalent\ x_1 = 0$$
$$3^{x_1 + x_2} = 1, echivalent\ x_1 + x_2 = 0, deci\ implicit\ \ x_2 = 0$$

Multimea fezabila contine doar punctul $[0 \quad 0]$