CURS 10

Logică Matematică şi Computaţională

FMI · Denisa Diaconescu · An universitar 2018/2019

LEGĂTURA DINTRE SINTAXĂ ŞI SEMANTICĂ

Teorema de corectitudine 9.4

Orice Γ-teoremă este consecinţă semantică a lui Γ, adică,

$$\Gamma \vdash \varphi \quad \Rightarrow \quad \Gamma \vDash \varphi$$

pentru orice $\varphi \in Form$ şi $\Gamma \subseteq Form$.

Teorema de completitudine 9.6

Pentru orice formulă φ,

$$\vdash \varphi \quad \text{ddacă} \quad \vDash \varphi.$$

Definiţia 10.1

Fie Γ o mulţime de formule.

- Γ este consistentă dacă există o formulă φ astfel încât $\Gamma \nvdash \varphi$.
- Γ este inconsistentă dacă nu este consistentă, adică, $\Gamma \vdash \varphi$ pentru orice formulă φ.

Observaţie.

Fie Γ, Δ mulţimi de formule a.î. $\Gamma \subseteq \Delta$.

- Dacă Δ este consistentă, atunci şi Γ este consistentă.
- Dacă Γ este inconsistentă, atunci şi Δ este inconsistentă.

Propoziţia 10.2

(i) $\emptyset$ este consistentă.

(ii) Mulţimea teoremelor este consistentă.

Demonstraţie.

(i) Dacă $\vdash \bot$, atunci, conform Teoremei de corectitudine, ar rezulta că $\vDash \bot$, o contradicţie. Aşadar $\nvdash \bot$, deci $\emptyset$ este consistentă.

(ii) Aplicând Propoziţia 8.7.(iv) pentru $\Gamma = \emptyset$, obţinem că $Thm = Thm(Thm)$, adică, pentru orice φ,

$$\vdash \varphi \text{ ddacă } Thm \vdash \varphi.$$

Din (i) rezultă că *Thm* este consistentă. □

Propoziţia 10.3

Pentru o mulţime de formule Γ sunt echivalente:

(i) Γ este inconsistentă.

(ii) Pentru orice formulă ψ, $\Gamma \vdash \psi$ şi $\Gamma \vdash \neg\psi$.

(iii) Există o formulă ψ a.î. $\Gamma \vdash \psi$ şi $\Gamma \vdash \neg\psi$.

(iv) $\Gamma \vdash \bot$.

Demonstraţie. (*i*) $\Rightarrow$ (*ii*) $\Rightarrow$ (*iii*) şi (*i*) $\Rightarrow$ (*iv*) sunt evidente.

(*iii*) $\Rightarrow$ (*i*) Fie φ o formulă. Conform Propoziţia 9.2,

$$\vdash \neg\psi \to (\psi \to \varphi).$$

Aplicând (iii) şi de două ori modus ponens, rezultă că $\Gamma \vdash \varphi$.

(*iv*) $\Rightarrow$ (*iii*). Presupunem că $\Gamma \vdash \bot$. Avem că $\bot = \neg\top$. Deoarece $\top$ este tautologie, aplicăm Teorema de completitudine pentru a conclude că $\vdash \top$, deci şi $\Gamma \vdash \top$. $\square$

Propoziţia 10.4

Fie Γ o mulţime de formule şi φ o formulă.

(i) $\Gamma \vdash \varphi \iff \Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ este inconsistentă.

(ii) $\Gamma \vdash \neg\varphi \iff \Gamma \cup \{\varphi\}$ este inconsistentă.

Demonstraţie.

(i) Avem

$$\begin{array}{lll} \Gamma \cup \{\neg\varphi\} \text{ este inconsistentă} & \iff & \Gamma \cup \{\neg\varphi\} \vdash \bot \\ & & \text{P.10.3.(iv)} \\ & \iff & \Gamma \vdash \neg\varphi \to \bot \\ & & \text{Teorema Deducţiei} \\ & \iff & \Gamma \vdash \varphi \\ & & \neg\varphi \to \bot \sim \varphi \text{ şi P.9.7.} \end{array}$$

(ii) Similar. $\square$

Propoziţia 10.5

Fie $\Gamma = \{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\}$ o mulţime finită de formule.

(i) Pentru orice formulă ψ, $\Gamma \vdash \psi$ ddacă $\vdash \varphi_1 \wedge \ldots \wedge \varphi_n \to \psi$ ddacă $\{\varphi_1 \wedge \ldots \wedge \varphi_n\} \vdash \psi$.

(ii) Γ este consistentă ddacă $\{\varphi_1 \wedge \ldots \wedge \varphi_n\}$ este consistentă.

Demonstraţie. Exerciţiu.

Propoziţia 10.6

Fie Γ o mulţime de formule. Γ este inconsistentă ddacă Γ are o submulţime finită inconsistentă.

Demonstraţie. "$\Leftarrow$" este evidentă.

"$\Rightarrow$" Presupunem că Γ este inconsistentă. Atunci, conform Propoziţiei 10.3.(iv), $\Gamma \vdash \bot$. Aplicând Propoziţia 8.12, obţinem o submulţime finită $\Sigma = \{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\}$ a lui Γ a.î. $\Sigma \vdash \bot$. Prin urmare, Σ este inconsistentă. $\square$

Un rezultat echivalent:

Propoziţia 10.7

Fie Γ o mulţime de formule. Γ este consistentă ddacă orice submulţime finită a lui Γ este consistentă.

Teorema 10.8
Pentru orice formulă φ,

$$\{\varphi\} \text{ este consistentă } \iff \{\varphi\} \text{ este satisfiabilă.}$$

Demonstraţie. Avem

$$\begin{aligned}
\{\varphi\} \text{ este inconsistentă} \quad &\iff \quad \vdash \neg\varphi \\
&\qquad\quad \text{conform Propoziţiei 10.4.(ii)} \\
&\iff \quad \models \neg\varphi \\
&\qquad\quad \text{conform Teoremei de completitudine} \\
&\iff \quad \{\varphi\} \text{ este nesatisfiabilă} \\
&\qquad\quad \text{conform Propoziţiei 7.11.(ii).}
\end{aligned}$$

Aşadar, $\{\varphi\}$ este consistentă $\iff$ $\{\varphi\}$ este satisfiabilă. $\square$

Teorema 10.9 (Teorema de completitudine tare - versiunea 1)
Pentru orice mulţime de formule Γ,

$$\Gamma \text{ este consistentă } \iff \Gamma \text{ este satisfiabilă.}$$

Demonstraţie. "$\Leftarrow$" Presupunem că Γ este satisfiabilă, deci are un model $e : V \to \{0, 1\}$. Presupunem că Γ nu este consistentă. Atunci $\Gamma \vdash \bot$ şi, aplicând Teorema de corectitudine, rezultă că $\Gamma \vDash \bot$. Ca urmare, $e \vDash \bot$, ceea ce este o contradicţie.

"$\Rightarrow$" Presupunem că Γ este consistentă. Demonstrăm că Γ este finit satisfiabilă şi aplicăm apoi Teorema de compacitate pentru a conclude că Γ este satisfiabilă.

Fie $\Sigma = \{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\}$ o submulţime finită a lui Γ. Atunci Σ este consistentă, conform Propoziţiei 10.7. Din Propoziţia 10.5.(ii), rezultă că $\{\varphi_1 \wedge \ldots \wedge \varphi_n\}$ este consistentă. Aplicând acum Teorema 10.8, obţinem că $\{\varphi_1 \wedge \ldots \wedge \varphi_n\}$ este satisfiabilă. Deoarece, conform Propoziţiei 7.12.(i), $\Sigma \sim \{\varphi_1 \wedge \ldots \wedge \varphi_n\}$, avem că Σ este satisfiabilă. $\square$

Teorema 10.10 (Teorema de completitudine tare - versiunea 2)
Pentru orice mulţime de formule Γ şi orice formulă φ,

$$\Gamma \vdash \varphi \iff \Gamma \vDash \varphi.$$

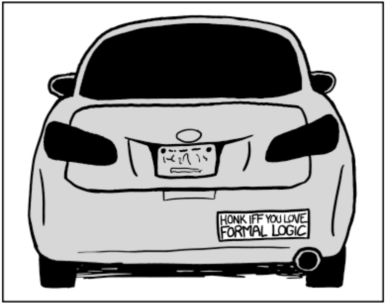
Demonstraţie.

$$\begin{aligned}
\Gamma \vdash \varphi \quad & \iff \quad \Gamma \cup \{\neg\varphi\} \text{ este inconsistentă} \\
& \qquad\ \text{conform Propoziţiei 10.4.(i)} \\
& \iff \quad \Gamma \cup \{\neg\varphi\} \text{ este nesatisfiabilă} \\
& \qquad\ \text{conform Teoremei de completitudine tare - versiunea 1} \\
& \iff \quad \Gamma \vDash \varphi \\
& \qquad\ \text{conform Propoziţiei 7.11.(i).}
\end{aligned}$$

$\square$

Observaţie
Am demonstrat Teorema de completitudine tare - versiunea 2 folosind Teorema de completitudine tare - versiunea 1. Se poate arăta că cele două versiuni sunt echivalente (exerciţiu).

Pe data viitoare!



Conţinutul tehnic al acestui curs se regăseşte în cursul de *Logică Matematică şi Computaţională* al prof. Laurenţiu Leuştean din anul universitar 2017/2018.