

## Calcul Numeric – Proba practică Informatică, Anul III

### INSTRUCȚIUNI:

1. Comentați și explicați toate rezolvările trimise. Codurile necomentate/neexplicate nu se punctează.
2. Codurile vor fi salvate cu următoarea denumire `Nume_Prenume_Grupa.py` și vor fi trimise titularului de laborator până în data de **29 ianuarie 2021, ora 14:30**.

### Factorizarea $QR$ :

Fie  $A = (a_{ij})_{i,j=\overline{1,n}} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ . Numim descompunere  $QR$  a matricei  $A$ , descompunerea de forma  $A = QR$  unde  $Q = (q_{ij})_{i,j=\overline{1,n}} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  este o matrice ortogonală, i.e.  $Q^T Q = Q Q^T = I$ , iar  $R = (r_{ij})_{i,j=\overline{1,n}} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  este o matrice superior triunghiulară.

Dacă  $A = (a_{ij})_{i,j=\overline{1,n}} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  este o matrice inversabilă, atunci există și este unică descompunerea  $QR$  a matricei  $A$  cu  $Q \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  o matrice ortogonală și  $R \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  o matrice superior triunghiulară având componentele pe diagonala principală  $r_{kk} > 0, k = \overline{1, n}$ .

Sistemul  $Ax = b$  devine  $QRx = b$ . Cum  $Q$  este ortogonală ( $Q^T Q = I$ ), înmulțind relația  $QRx = b$  cu  $Q^T$  obținem  $Rx = Q^T b$ . Cum  $R$  este superior triunghiulară sistemul  $Rx = Q^T b$  se rezolvă conform metodei substituției descendente.

### ALGORITM (Metoda de descompunere $QR$ )

**Date de intrare:**  $A = (a_{ij})_{i,j=\overline{1,n}} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ ,  $b = (b_i)_{i=\overline{1,n}} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ ;

**Date de ieșire:**  $Q = (q_{ij})_{i,j=\overline{1,n}} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ ,  $R = (r_{ij})_{i,j=\overline{1,n}} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ ,  $x = (x_i)_{i=\overline{1,n}} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ ;

PASUL 1: Determină prima coloană a matricei  $Q$  și prima linie a matricei  $R$ :

$$\begin{aligned} \bullet \quad r_{11} &\leftarrow \sqrt{\sum_{i=1}^n a_{i1}^2} \\ \bullet \quad q_{i1} &\leftarrow \frac{a_{i1}}{r_{11}}, \quad \forall i = \overline{1, n}; \\ \bullet \quad r_{1j} &\leftarrow \sum_{s=1}^n q_{s1} a_{sj}, \quad \forall j = \overline{2, n}; \end{aligned}$$

PASUL 2: Pentru  $k = \overline{2, n}$  completează coloana  $k$  a matricei  $Q$  și linia  $k$  a matricei  $R$ :

$$\begin{aligned} \bullet \quad r_{kk} &\leftarrow \sqrt{\sum_{i=1}^n a_{ik}^2 - \sum_{s=1}^{k-1} r_{sk}^2}; \\ \bullet \quad q_{ik} &\leftarrow \frac{1}{r_{kk}} \left( a_{ik} - \sum_{s=1}^{k-1} q_{is} r_{sk} \right), \quad \forall i = \overline{1, n}; \\ \bullet \quad r_{kj} &\leftarrow \sum_{s=1}^n q_{sk} a_{sj}, \quad \forall j = \overline{k+1, n}; \end{aligned}$$

PASUL 3: Determină soluția  $x$  a sistemului  $Rx = Q^T b$  conform metodei substituției descendente

**Ex. 1** Fie matricea  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$  și vectorul  $b = (1, 2, 5)^T$ .

- Să se implementeze în Python procedura **DescQR**(A) care returnează matricele Q, R și soluția x a sistemului  $Ax = b$ ;
- Să se rezolve numeric sistemul  $Ax = b$  apelând procedura **DescQR**;
- Să se verifice soluția obținută.

**Ex. 2**

- (a) Creați funcția **newton\_raphson** care determină numeric soluția ecuației:

$$f(x) = x^3 + 4x^2 - 21x = 0, \quad (1)$$

prin metoda Newton-Raphson și are ca **date de intrare**:

- funcția care determină ecuația (1),  $f$ ;
- derivata funcției care determină ecuația (1),  $df$ ;
- punctul de start al metodei Newton-Raphson,  $x_0$ ;
- toleranța erorii specifice metodei Newton-Raphson, **eps**;

iar ca **date de ieșire**:

- soluția numerică obținută,  $x_{\text{approx}}$ ;
- numărul de iterații necesare, N;

- (b) Alegeți subintervalele și punctele de start ale metodei respectând ipotezele teoremei de convergență ale metodei Newton-Raphson, astfel încât șirurile aproximărilor să rămână în subintervalele selectate și să converge la soluții. Justificați atât alegerea subintervalelor, cât și a valorilor inițiale.

Aflați toate soluțiile ecuației (1) apelând funcția **newton\_raphson** cu eroarea de aproximare **eps** =  $10^{-3}$  și construiți punctele obținute pe graficul funcției.