

**Calcul Numeric – Proba practică  
Informatică, Anul III**

**INSTRUCȚIUNI:**

1. Comentați și explicați toate rezolvările trimise. Codurile necomentate/neexplicate nu se punctează.
2. Codurile vor fi salvate cu următoarea denumire [Nume\\_Prenume\\_Grupa.py](#) și vor fi trimise titularului de laborator până în data de **29 ianuarie 2021, ora 14:30**.

**Factorizarea  $QR$ :**

Fie  $A = (a_{ij})_{i,j=\overline{1,n}} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ . Numim descompunere  $QR$  a matricei  $A$ , descompunerea de forma  $A = QR$  unde  $Q = (q_{ij})_{i,j=\overline{1,n}} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  este o matrice ortogonală, i.e.  $Q^T Q = Q Q^T = I$ , iar  $R = (r_{ij})_{i,j=\overline{1,n}} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  este o matrice superior triunghiulară.

Dacă  $A = (a_{ij})_{i,j=\overline{1,n}} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  este o matrice inversabilă, atunci există și este unică descompunerea  $QR$  a matricei  $A$  cu  $Q \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  o matrice ortogonală și  $R \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  o matrice superior triunghiulară având componentele pe diagonala principală  $r_{kk} > 0, k = \overline{1, n}$ .

Sistemul  $Ax = b$  devine  $QRx = b$ . Cum  $Q$  este ortogonală ( $Q^T Q = I$ ), înmulțind relația  $QRx = b$  cu  $Q^T$  obținem  $Rx = Q^T b$ . Cum  $R$  este superior triunghiulară sistemul  $Rx = Q^T b$  se rezolvă conform metodei substituției descendente.

**ALGORITM (Metoda Givens de descompunere  $QR$ )**

**Date de intrare:**  $A = (a_{ij})_{i,j=\overline{1,n}} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ ,  $b = (b_i)_{i=\overline{1,n}} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ ;

**Date de ieșire:**  $Q = (q_{ij})_{i,j=\overline{1,n}} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ ,  $R = (r_{ij})_{i,j=\overline{1,n}} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ ,  $x = (x_i)_{i=\overline{1,n}} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ ;

PASUL 1: Inițializează  $Q \leftarrow I_n$ .

PASUL 2: Pentru  $i = \overline{1, n}$  și  $j = \overline{i+1, n}$  execută:

- Determină parametrii rotației Givens:

$$\sigma = \sqrt{a_{ii}^2 + a_{ji}^2}, \quad c = \frac{a_{ii}}{\sigma}, \quad s = \frac{a_{ji}}{\sigma}.$$

- Pentru  $k = \overline{1, n}$  aplică matricea de rotație Givens matricei  $A$ , vectorului  $b$  și memorează rotația în matricea  $Q$ :

$$u \leftarrow ca_{ik} + sa_{jk}, \quad v \leftarrow -sa_{ik} + ca_{jk}, \quad a_{ik} \leftarrow u, \quad a_{jk} \leftarrow v;$$

$$u \leftarrow cq_{ik} + sq_{jk}, \quad v \leftarrow -sq_{ik} + cq_{jk}, \quad q_{ik} \leftarrow u, \quad q_{jk} \leftarrow v;$$

PASUL 3: Alege  $R \leftarrow A$  și  $Q \leftarrow Q^T$ .

PASUL 4: Determină soluția  $x$  a sistemului  $Rx = Q^T b$  conform metodei substituției descendente.

**Ex. 1** Fie matricea  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$  și  $b = (1, 2, 5)^T$ .

- Să se implementeze în Python procedura **DescQRGivens**(A) care returnează matricele Q, R și soluția x a sistemului  $Ax = b$ ;
- Să se rezolve numeric sistemul  $Ax = b$  în baza procedurii **DescQRGivens**;
- Să se verifice soluția obținută.

**Ex. 2**

- (a) Creați funcția **newton\_raphson** care determină numeric soluția ecuației:

$$f(x) = x^3 + 3x^2 - 16x + 12 = 0, \quad (1)$$

prin metoda Newton-Raphson și are ca **date de intrare**:

- funcția care determină ecuația (1),  $f$ ;
- derivata funcției care determină ecuația (1),  $df$ ;
- punctul de start al metodei Newton-Raphson,  $x_0$ ;
- toleranța erorii specifice metodei Newton-Raphson, **eps**;

iar ca **date de ieșire**:

- soluția numerică obținută,  $\mathbf{x}_{\text{aprox}}$ ;
- numărul de iterații necesare, N;

- (b) Alegeți subintervalele și punctele de start ale metodei respectând ipotezele teoremei de convergență ale metodei Newton-Raphson, astfel încât șirurile aproximărilor să rămână în subintervalele selectate și să converge la soluții. Justificați atât alegerea subintervalelor, cât și a valorilor inițiale.

Aflați toate soluțiile ecuației (1) apelând funcția **newton\_raphson** cu eroarea de aproximare **eps** =  $10^{-3}$  și construiți punctele obținute pe graficul funcției.