

Curbe Bézier

Mihai-Sorin Stupariu

Sem. al II-lea, 2020 - 2021

Mecanism

Input: O mulțime de puncte (poligon de control)

Output: Curba reprezentată

Resurse online pentru curbele Bézier:

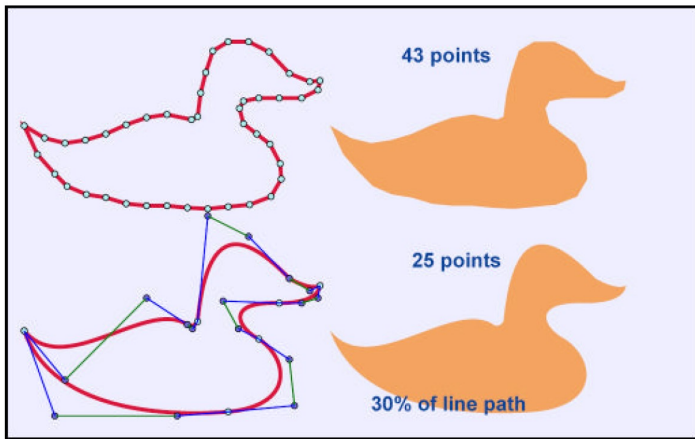
<https://javascript.info/bezier-curve>;

<https://www.jasondavies.com/animated-bezier/>

Mecanism

Input: O mulțime de puncte (poligon de control)

Output: Curba reprezentată




Sursa: Duce et al, SVG tutorial

Exemple de curbe în planul \mathbb{R}^2

1. Curbe reprezentate folosind ecuații (reprezentări implicite)

$$(i) \quad x_1^2 + x_2^2 - 1 = 0 \quad (\text{cerc})$$

$$(ii) \quad x_1^2 - x_2^2 - 1 = 0 \quad (\text{hiperbola})$$

$$(iii) \quad \sin(x_1) - \cos(x_2) + e^{\sin(x_1 x_2)} = 1$$


Exemple de curbe în planul \mathbb{R}^2

2. Curbe reprezentate folosind ecuații (reprezentări) parametrice

(ii) $\begin{cases} x_1 = t \\ x_2 = 2t + 1 \end{cases}, t \in \mathbb{R}$ (t = parameter)

 \hookrightarrow (directra)

(ii) $\begin{cases} x_1 = \cos(t) \\ x_2 = \sin(t) \end{cases}, t \in \mathbb{R} \quad (\text{cerce})$

(iii) $\begin{cases} x_1 = t \\ x_3 = t^2 \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R} \quad (\text{parabola})$

Exemple de curbe în planul \mathbb{R}^2

2. Curbe reprezentate folosind ecuații (reprezentări) parametrice

$$(i) c: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2, c(t) = (t^3 - 5t^2 - t, t^2 + 4t - 3)$$

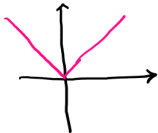
$$\begin{cases} x_1 = t^3 - 5t^2 - t \\ x_2 = t^2 + 4t - 3 \end{cases}$$

curbă polinomială

curbe Bézier

NURBS

$$(ii) c: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2; c(t) = (t, |t|) = \begin{cases} (t, t), & t \geq 0 \\ (t, -t), & t < 0 \end{cases}$$



curbă polinomială pe porțiuni

curbe spline

$$(iii) c: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2; c(t) = \left(\frac{-t^2 + 1}{t^2 + 1}, \frac{2t}{t^2 + 1} \right)$$

curbă
ratională

curbe Bézier rationale

Imaginea geometrică a acestei curbe
este cercul de centru 0 și rază 1
din care e eliminat $(-1, 0)$.

Definiție - curbă parametrizată

Fie $I \subset \mathbb{R}$ un interval. O **curbă parametrizată** de clasă \mathcal{C}^k este dată de o aplicație \mathcal{C}^k -diferențiabilă $c : I \rightarrow \mathbb{R}^n$. Aplicația c se numește **parametrizare**, iar mulțimea $M := \text{im}(c)$ se numește **image geometrică a curbei**.

Dacă $n = 2$ curba se numește **plană (curbă 2D)**, iar dacă $n = 3$ curba se numește **strâmbă (curbă 3D)**.

Exemple

(i) Curbele

$$c_1 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad c_1(t) = (2 + 4t + 1, -2 - 4t);$$

$$c_2 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad c_2(t) = (4 - 3 \cos t, 3 + 2 \sin t);$$

$$c'_2 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad c'_2(t) = (4 - 3 \cos 3t, 3 + 2 \sin 3t);$$

$$c''_2 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad c''_2(t) = (4 - 3 \cos(1 - t), 3 + 2 \sin(1 - t));$$

$$c_3 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad c_3(t) = (2 - t + t^2 - t^3 + 6t^4, 1 + t + 2t^2 + 3t^3);$$

$$\begin{aligned} c_4 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad c_4(t) &= (t^2 - 2t + 2, 2t^2 - 6t + 4) = \\ &= t^2(1, 0) + 2t(1 - t)(1, 1) + (1 - t)^2(2, 4); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} c_5 : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad c_5(t) &= (t^3 + 3t, -3t^2 + 3t) = \\ &= t^3(4, 0) + 3t^2(1 - t)(2, 1) + 3t(1 - t)^2(1, 1) + (1 - t)^3(0, 0) \end{aligned}$$

sunt curbe parametrizate plane de clasă \mathcal{C}^∞ .

Exemple

(ii) Curba $c_6 : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$, $c_6(t) = (t, t|t|)$ este de clasă \mathcal{C}^1 , dar nu este de clasă \mathcal{C}^2 , iar curba $c'_6 : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$, $c'_6(t) = (t, |t|)$ este de clasă \mathcal{C}^0 , dar nu este de clasă \mathcal{C}^1 .

(iii) Curbele $c_7 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$, $c_7(t) = (2 \cos t, 2 \sin t, t)$ și

$$\begin{aligned} c_8 : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad c_8(t) &= (-2t^3 + 3t^2, 4t^3 - 6t^2 + 3t, t^3) = \\ &= t^3(1, 1, 1) + 3t^2(1 - t)(1, 0, 0) + 3t(1 - t)^2(0, 1, 0) + (1 - t)^3(0, 0, 0) \end{aligned}$$

sunt curbe strâmbe de clasă \mathcal{C}^∞ .

Definiție - curbe polinomiale / polinomiale pe porțiuni

1. O **curbă polinomială de grad d** este o curbă definită de o parametrizare polinomială, i.e. de o aplicație $c = (c_1, \dots, c_n) : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ cu proprietatea că c_1, \dots, c_n sunt funcții polinomiale de grad cel mult d și cel puțin una dintre ele are grad exact d .
2. O curbă dată de o aplicație $c : [u_0, u_L] \rightarrow \mathbb{R}^n$ se numește **polinomială pe porțiuni** dacă există o diviziune

$$u_0 < u_1 < \dots < u_i < u_{i+1} < \dots < u_L$$

a intervalului $[u_0, u_L]$ astfel ca pentru orice $i = 0, \dots, L-1$, restricția $c|_{[u_i, u_{i+1}]}$ a aplicației c la intervalul $[u_i, u_{i+1}]$ să fie polinomială.

Exemple

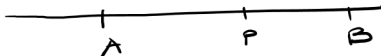
- (i)** Curbele c_1 , c_3 , c_4 și c_5 din exemplul anterior sunt curbe polinomiale de grade 1, 4, 2, respectiv 3.
- (ii)** Orice curbă polinomială $c : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ este o curbă polinomială pe porțiuni.
- (iii)** Curbele c_6 și c'_6 sunt curbe polinomiale pe porțiuni care nu sunt curbe polinomiale, deoarece avem

$$c_6(t) = \begin{cases} (t, -t^2), & \text{dacă } t \in [-1, 0] \\ (t, t^2), & \text{dacă } t \in [0, 1]. \end{cases}$$

$$c'_6(t) = \begin{cases} (t, -t), & \text{dacă } t \in [-1, 0] \\ (t, t), & \text{dacă } t \in [0, 1]. \end{cases}$$

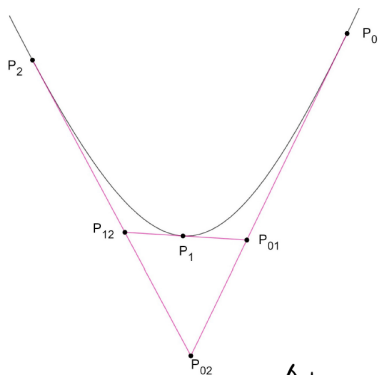
Remember - raport, combinație afină

A, P, B puncte coliniare ($P \neq B$)



- raportul punctelor A, P, B : acel scalar r pentru care $\boxed{\vec{AP} = r \vec{PB}}$
 ($r = r(A, P, B)$)
- P se poate scrie ca o combinație afină
 (baricentrică) $\boxed{P = (1-\alpha)A + \alpha B}$, $\alpha \in \mathbb{R}$
- sunt echivalente

O proprietate geometrică

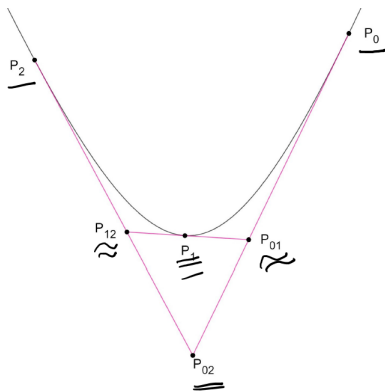


- P_0, P_1, P_2 puncte ale unei parabole
- tangentele la parabolă în aceste puncte
- pp.că se intersectează în punctele P_{01}, P_{02}, P_{12} (ca în figură)

Atunci:

$$\kappa(P_0, P_{01}, P_{02}) = \kappa(P_{01}, P_1, P_{12}) = \kappa(P_{02}, P_{12}, P_2)$$

O proprietate geometrică

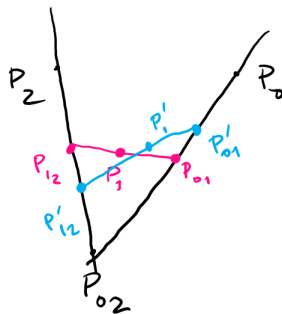
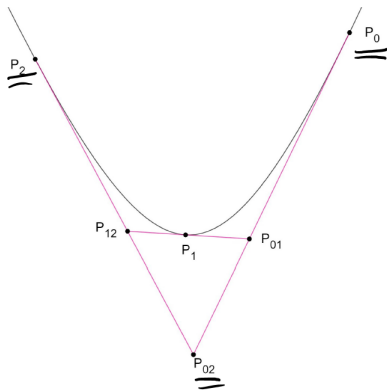


Reciproc: date două
puncte ale unei
parabole (P_0 și P_2)
și tangentele la
parabolă în aceste
puncte (pp. că se
intersectează în P_{02})

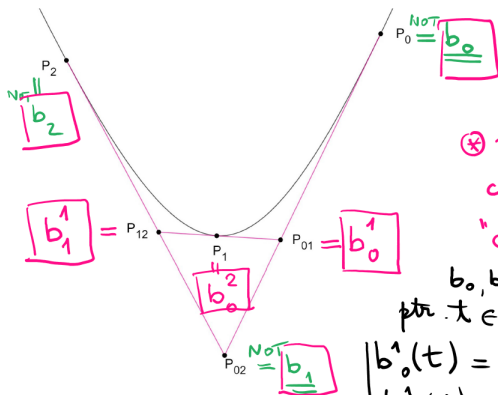
→ putem reconstrui
parabola

(determinăm P_{01} , P_{12} , apoi P_1). Când raportul
variază, P_1 descrie parabola.

O proprietate geometrică



O proprietate geometrică - reformulare

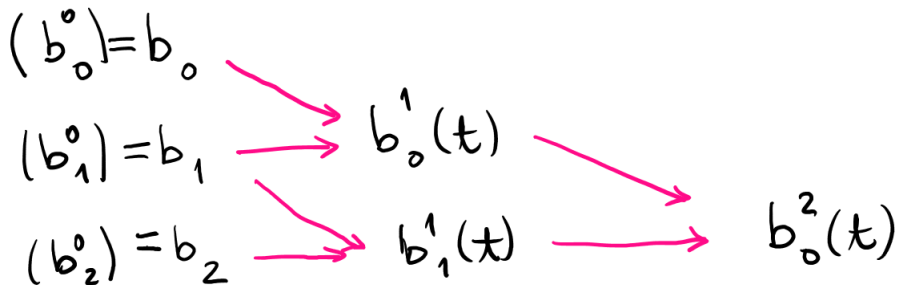


⊗ schimbăm

notății cf.
figurii⊗ înlocuim formularea
cu "raport" cu cea folosind
"combinatii afine" $b_0, b_1, b_2 \in \mathbb{R}^d$ (\mathbb{R}^2 ca în desen)
ptr. $t \in [0, 1]$ (eventual $t \in \mathbb{R}$)aceleași combinații
afine,

$$\begin{cases} b_0^1(t) = (1-t)b_0 + tb_1 \\ b_1^1(t) = (1-t)b_1 + tb_2 \\ b_0^2(t) = (1-t)b_0^1(t) + tb_1^1(t) \end{cases}$$

algoritmul de Casteljau ptr. $n=2$

Schema de Casteljau ($n = 2$)

Exemplu - schema de Casteljau ($n = 2$)

$$(b_0^0) = b_0$$

$$(b_1^0) = b_1$$

$$(b_2^0) = b_2$$

$$b_0^1(t) = (1-t)b_0 + t b_1$$

$$b_1^1(t) = (1-t)b_1 + t b_2$$

$$b_0^2(t) = (1-t)b_0^1(t) + t b_1^1(t)$$

$$b_0^1(t)$$

$$b_1^1(t)$$

$$b_0^2(t)$$

Exemplu

$$b_0 = (2, 4), \quad b_1 = (6, 8), \quad b_2 = (10, 4); \quad \underline{t = \frac{1}{2}}$$

$$(2, 4)$$

$$(6, 8)$$

$$(10, 4)$$

$$(4, 6)$$

$$(8, 6)$$

$$(6, 6)$$

Schema de Casteljau - forma generală

Fie b_0, b_1, \dots, b_n poligon de control format din
 $(n+1)$ puncte. Fie $t \in [0, 1]$ ($t \in \mathbb{R}$) fixat

$$\begin{aligned} (b_0^0) &= b_0 \\ (b_1^0) &= b_1 \rightarrow b_0^1(t) \\ (b_2^0) &= b_2 \rightarrow b_1^1(t) \rightarrow b_0^2(t) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b_n^{m-1}(t) &\rightarrow b_n^m(t) \\ b_{n+1}^{m-1}(t) &\rightarrow b_n^m(t) \end{aligned}$$

$$(b_n^0) = b_n \quad b_{n-1}^1(t) \quad b_{n-2}^2(t) \quad \dots \quad b_1^{n-1}(t) \quad b_0^n(t)$$

formula:
$$b_n^m(t) = (1-t)b_n^{m-1}(t) + t b_{n+1}^{m-1}(t)$$

Algoritmul de Casteljau - Construcția generală

Fie $b_0, b_1, \dots, b_n \in \mathbb{R}^m$. Pentru $t \in [0, 1]$ se notează $b_i^0(t) := b_i$ ($i = 0, \dots, n$) și se definesc inductiv punctele de Casteljau

$$b_i^r(t) := (1 - t)b_i^{r-1}(t) + tb_{i+1}^{r-1}(t), \quad \begin{cases} r = 1, \dots, n \\ i = 0, \dots, n - r \end{cases} \quad (1)$$

Variantă algebrică

Revenim la $n=2$

Avem: b_0, b_1, b_2 ;

$$b_0^1(t) = (1-t)b_0 + tb_1$$

$$b_1^1(t) = (1-t)b_1 + tb_2$$

$$b_0^2(t) = (1-t)b_0^1(t) + tb_1^1(t) =$$

$$= (1-t) [(1-t)b_0 + tb_1] +$$

$$t [(1-t)b_1 + tb_2] \Rightarrow$$

$$b_0^2(t) = (1-t)^2 b_0 + 2t(1-t)b_1 + t^2 b_2$$

polinoame
Bernstein de gradul 2

\downarrow $B_0^2(t)$ \downarrow $B_1^2(t)$ \downarrow $B_2^2(t)$

Exemplu

Îie poligonul de control (b_0, b_1, b_2) , unde
 $b_0 = (0, 0)$, $b_1 = (1, 3)$, $b_2 = (-3, 6)$

curba asociată:

$$b^2(t) = \underline{(1-t)^2} b_0 + \underline{2t(1-t)} b_1 + \underline{t^2} b_2 =$$

$$= (1-2t+t^2) \cdot (0, 0) +$$

$$(2t-2t^2) \cdot (1, 3) +$$

$$t^2 \cdot (-3, 6) =$$

$$= (2t-2t^2-3t^2, 6t-6t^2+6t^2) =$$

$$= (2t-5t^2, 6t) = \underline{1 \cdot (0, 0) + t \cdot (2, 6) + t^2(-5, 6)}$$

▼ Suma polim. Bernstein este 1 \rightarrow apar combinații
 baricentrice / afine

Comentarii

Polinoamele Bernstein de gradul 2 formează o **bază** în spațiul vectorial al polinoamelor de grad mai mic sau egal cu 2, deci **orice** curbă parametrizată polinomial (cu grad ≤ 2) poate fi scrisă folosind polinoame Bernstein.

De fapt: curbele polinomiale de grad mai mic sau egal cu 2 sunt curbele construite folosind algoritmul de Casteljau (sau folosind forma Bernstein) pentru $n = 2$.

Forma algebrică a curbelor Bézier - cazul general

Fie $n \in \mathbb{N}^*$ fixat. Polinoamele Bernstein de grad n :

$B_0^n(t), B_1^n(t), \dots, B_n^n(t)$; unde $\text{ptr. } k \in \{0 \dots n\}$

$$B_k^n(t) = C_n^k (1-t)^{n-k} \cdot t^k$$

Fapt (Teoremă) Dat un poligon de control (b_0, \dots, b_n) și $b^n(t)$ punctul construit cu algoritmul de Casteljau, are loc relația:

$$b^n(t) = \sum_{k=0}^n B_k^n(t) \cdot b_k$$

↑ forma Bernstein a curbei Bézier asociate poligonului de control (b_0, \dots, b_n)

Proprietăți elementare

Fie (b_0, \dots, b_n) un poligon de control din \mathbb{R}^m și $b : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^m$ curba Bézier asociată.

Proprietăți elementare

Fie (b_0, \dots, b_n) un poligon de control din \mathbb{R}^m și $b : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^m$ curba Bézier asociată.

- (i) b este o curbă polinomială, având gradul mai mic sau egal cu n ;
- (ii) curba b interpolează extremitățile poligonului de control, i.e. $b(0) = b_0$, $b(1) = b_n$; în particular, dacă poligonul de control este închis, curba Bézier asociată este închisă;
- (iii) **proprietatea acoperirii convexe**: punctele curbei Bézier b se află în acoperirea convexă a punctelor de control;
- (iv) **invarianța la schimbări afine de parametru**: dacă $\varphi : [0, 1] \rightarrow [\alpha, \beta]$, $\varphi(t) = \alpha + t(\beta - \alpha)$ este o schimbare afină de parametru și dacă $b^{[\alpha, \beta]}$ este curba Bézier asociată poligonului de control (b_0, \dots, b_n) , dar definită pe intervalul $[\alpha, \beta]$, atunci $b = b^{[\alpha, \beta]} \circ \varphi$;

Proprietăți elementare

Fie (b_0, \dots, b_n) un poligon de control din \mathbb{R}^m și $b : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^m$ curba Bézier asociată.

- (i) b este o curbă polinomială, având gradul mai mic sau egal cu n ;
- (ii) curba b interpolează extremitățile poligonului de control, i.e. $b(0) = b_0$, $b(1) = b_n$; în particular, dacă poligonul de control este închis, curba Bézier asociată este închisă;
- (iii) **proprietatea acoperirii convexe**: punctele curbei Bézier b se află în acoperirea convexă a punctelor de control;
- (iv) **invarianța la schimbări afine de parametru**: dacă $\varphi : [0, 1] \rightarrow [\alpha, \beta]$, $\varphi(t) = \alpha + t(\beta - \alpha)$ este o schimbare afină de parametru și dacă $b^{[\alpha, \beta]}$ este curba Bézier asociată poligonului de control (b_0, \dots, b_n) , dar definită pe intervalul $[\alpha, \beta]$, atunci $b = b^{[\alpha, \beta]} \circ \varphi$;
- (v) **invarianță afină**: dacă $\tau : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ este o aplicație afină, atunci curba Bézier asociată poligonului de control date de $(\tau(b_0), \dots, \tau(b_n))$ este curba $\tau(b)$;
- (vi) **(Invarianța la combinații baricentrice)**: fie (b_0, \dots, b_n) , respectiv $(\tilde{b}_0, \dots, \tilde{b}_n)$ două poligoane de control și b , respectiv \tilde{b} curbele Bézier corespunzătoare. Pentru orice $\alpha \in \mathbb{R}$, curba Bézier asociată poligonului de control $((1 - \alpha)b_0 + \alpha\tilde{b}_0, \dots, (1 - \alpha)b_n + \alpha\tilde{b}_n)$ este curba $(1 - \alpha)b + \alpha\tilde{b}$.
- (vii) dacă $\tilde{b} : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^m$ este curba Bézier asociată poligonului de control (b_n, \dots, b_0) , atunci $\tilde{b}(t) = b(1 - t)$, în particular, aceste curbe au aceeași imagine geometrică.

De reținut!

- Curbele Bézier:
- definite / controlate de un poligon de control; acesta este "memorat" și determină geometria curbei
 - construcție / randare: algoritmul de Casteljau / forma Bernstein

Motivație

Q: Cum putem genera curbe cât mai complexe?

- A:**
- (i) folosind mai multe puncte de control (crește gradul curbei)
 - (ii) racordând ("punând cap la cap") arce de curbă de grad "mai mic"
- În practică: curbe de gradul 3 (cubice)

În continuare...

Două elemente:

- cum definim c.B pe intervale arbitrare?
- ce înseamnă un "racord convenabil" (a.i. vectorii tangenți / accelerație să coincidă)

Ce ne așteptăm?

- să caracterizăm racordul curbelor Bézier folosind poligoanele de control

Schimbări de parametru

- **Definiție.** Fie $c : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ și $\bar{c} : \bar{I} \rightarrow \mathbb{R}^n$ două curbe parametrizate. Spunem că c și \bar{c} diferă printr-o **schimbare de parametru** (sau că \bar{c} a fost obținută din c printr-o schimbare de parametru) dacă există un difeomorfism $\varphi : \bar{I} \rightarrow I$ (numit **reparametrizare**) astfel ca $\bar{c} = c \circ \varphi$. O reparametrizare φ **păstrează (schimbă) orientarea** dacă este strict crescătoare (respectiv strict descrescătoare).

Schimbări de parametru

- ▶ **Definiție.** Fie $c : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ și $\bar{c} : \bar{I} \rightarrow \mathbb{R}^n$ două curbe parametrizate. Spunem că c și \bar{c} diferă printr-o **schimbare de parametru** (sau că \bar{c} a fost obținută din c printr-o schimbare de parametru) dacă există un difeomorfism $\varphi : \bar{I} \rightarrow I$ (numit **reparametrizare**) astfel ca $\bar{c} = c \circ \varphi$. O reparametrizare φ **păstrează (schimbă) orientarea** dacă este strict crescătoare (respectiv strict descrescătoare).
- ▶ **Observație.** Printr-o reparametrizare imaginea geometrică a curbei considerate nu se modifică, se schimbă doar "modul" în care parcurgem curba.

Schimbări afine de parametru

- O **schimbare afină de parametru (reparametrizare afină)** este o aplicație de forma

$$\varphi : [c, d] \rightarrow [a, b], \quad \varphi(t) = \frac{b-a}{d-c}t + \frac{ad-bc}{d-c},$$

unde $[a, b], [c, d] \subset \mathbb{R}$ sunt două intervale (care nu se reduc la un punct).

Observație. Schimbările afine de parametru sunt singurele care mențin o curbă polinomială în clasa curbelor polinomiale de același grad.

Schimbări afine de parametru - Exemple

$$(i) \text{ Fie } c, c_1, c_2: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$c(t) = \left(\cos(t), \sin(t) \right)$$

$$c_1(t) = \left(\cos(2t), \sin(2t) \right)$$

$$c_2(t) = \left(\cos\left(\frac{t+1}{4}\right), \sin\left(\frac{t+1}{4}\right) \right)$$

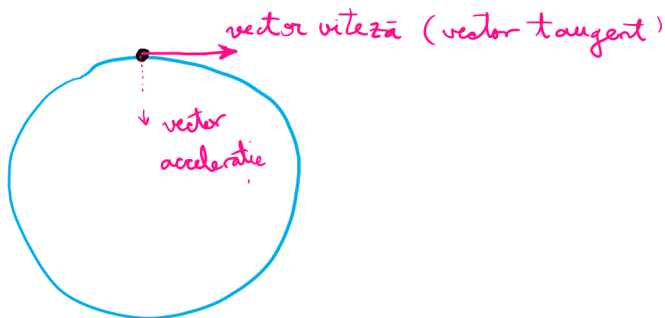
Schimbări afine de parametru - Exemple

- (ii) Aplicațiile c_2 , c_2' și c_2'' din Exemplul (i) sunt parametrizări diferite ale elipsei de ecuație $\frac{(x_1-4)^2}{9} + \frac{(x_2-3)^2}{4} = 1$. Schimbările de parametru utilizate sunt $t \mapsto 3t$, respectiv $t \mapsto 1 - t$.

Schimbări afine de parametru - Exemple

- (ii) Aplicațiile c_2 , c'_2 și c''_2 din Exemplul (i) sunt parametrizări diferite ale elipsei de ecuație $\frac{(x_1-4)^2}{9} + \frac{(x_2-3)^2}{4} = 1$. Schimbările de parametru utilizate sunt $t \mapsto 3t$, respectiv $t \mapsto 1 - t$.
- (iii) Aplicația $\varphi : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$, $\varphi(t) = 1 - t$ este o schimbare afină de parametru care schimbă orientarea. Aplicând această schimbare de parametru curbei polinomiale de gradul 2 dată de $c : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$, $c(t) = (t^2 + 4t + 1, t + 2)$ obținem curba parametrizată $\bar{c} : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$, $\bar{c}(t) = (t^2 - 6t + 6, -t + 3)$. Imaginea geometrică a celor două curbe este un arc al parabolei $x_1 - x_2^2 + 3 = 0$, care unește punctele $A = (1, 2)$ și $B = (6, 3)$. Parametrizarea c "parcure" acest arc de la A la B , în vreme ce \bar{c} "parcure" acest arc în sens invers.

Intuiție - vector tangent



$$\underline{c(t) = (\cos t, \sin t)}, \quad \underline{\text{fixat } t_0.}$$

vectorul viteză în $c(t_0)$:

$$c'(t_0) = (-\sin t_0, \cos t_0)$$

vectorul accelerație în $c(t_0)$:

$$c''(t_0) = (-\cos t_0, -\sin t_0)$$

Vector tangent, vector accelerație - formalizare

- **Definiție.** Fie $c : I \rightarrow \mathbb{R}^n$, $c = (c_1, \dots, c_n)$ o parametrizare de clasă \mathcal{C}^k ($k \geq 1$) a unei curbe și $t_0 \in I$ fixat.
- (i) Vectorul $c'(t_0) := (c'_1(t_0), \dots, c'_n(t_0))$ se numește **vector tangent** (**vector viteză**) la curbă în punctul corespunzător lui $c(t_0)$. Dreapta care trece prin punctul $c(t_0)$ și are direcția dată de vectorul $c'(t_0)$ se numește **tangentă** la curba c în punctul $c(t_0)$.
- (ii) Dreapta care trece prin punctul $c(t_0)$ și este perpendiculară la tangenta la curbă în acest punct se numește **normală** la curba c în punctul $c(t_0)$.

Vector tangent, vector accelerație - formalizare

- ▶ **Definiție.** Fie $c : I \rightarrow \mathbb{R}^n$, $c = (c_1, \dots, c_n)$ o parametrizare de clasă \mathcal{C}^k ($k \geq 1$) a unei curbe și $t_0 \in I$ fixat.
 - (i) Vectorul $c'(t_0) := (c'_1(t_0), \dots, c'_n(t_0))$ se numește **vector tangent** (**vector viteză**) la curbă în punctul corespunzător lui $c(t_0)$. Dreapta care trece prin punctul $c(t_0)$ și are direcția dată de vectorul $c'(t_0)$ se numește **tangentă** la curba c în punctul $c(t_0)$.
 - (ii) Dreapta care trece prin punctul $c(t_0)$ și este perpendiculară la tangenta la curbă în acest punct se numește **normală** la curba c în punctul $c(t_0)$.
- ▶ Fie $c : I \rightarrow \mathbb{R}^n$, $c = (c_1, \dots, c_n)$ o parametrizare de clasă \mathcal{C}^k ($k \geq 2$) a unei curbe și $t_0 \in I$ fixat. Vectorul $c''(t_0) := (c''_1(t_0), \dots, c''_n(t_0))$ se numește **vector accelerație** la curbă în punctul corespunzător lui $c(t_0)$.

Vector tangent, vector accelerație - formalizare

- ▶ **Definiție.** Fie $c : I \rightarrow \mathbb{R}^n$, $c = (c_1, \dots, c_n)$ o parametrizare de clasă \mathcal{C}^k ($k \geq 1$) a unei curbe și $t_0 \in I$ fixat.
 - (i) Vectorul $c'(t_0) := (c'_1(t_0), \dots, c'_n(t_0))$ se numește **vector tangent** (**vector viteză**) la curbă în punctul corespunzător lui $c(t_0)$. Dreapta care trece prin punctul $c(t_0)$ și are direcția dată de vectorul $c'(t_0)$ se numește **tangentă** la curba c în punctul $c(t_0)$.
 - (ii) Dreapta care trece prin punctul $c(t_0)$ și este perpendiculară la tangenta la curbă în acest punct se numește **normală** la curba c în punctul $c(t_0)$.
- ▶ Fie $c : I \rightarrow \mathbb{R}^n$, $c = (c_1, \dots, c_n)$ o parametrizare de clasă \mathcal{C}^k ($k \geq 2$) a unei curbe și $t_0 \in I$ fixat. Vectorul $c''(t_0) := (c''_1(t_0), \dots, c''_n(t_0))$ se numește **vector accelerație** la curbă în punctul corespunzător lui $c(t_0)$.
- ▶ **Observație** Ecuațiile parametrice ale tangentei la curba c prin punctul $c(t_0)$ sunt

$$\begin{cases} x_1 = c_1(t_0) + sc'_1(t_0) \\ \dots\dots\dots \\ x_n = c_n(t_0) + sc'_n(t_0) \end{cases} \quad s \in \mathbb{R}.$$

Alte concepte

- **Definiție.** Fie $c : I \rightarrow \mathbb{R}^n$, $c = (c_1, \dots, c_n)$ o parametrizare de clasă \mathcal{C}^k ($k \geq 1$) a unei curbe
- (i) Punctul $c(t_0)$ se numește **punct regulat** dacă $c'(t_0) \neq 0$.
 - (ii) Punctul $c(t_0)$ se numește **punct singular** dacă $c'(t_0) = 0$.
 - (iii) O curbă se numește **regulată** dacă toate punctele sale sunt regulate.

Alte concepte

- ▶ **Definiție.** Fie $c : I \rightarrow \mathbb{R}^n$, $c = (c_1, \dots, c_n)$ o parametrizare de clasă \mathcal{C}^k ($k \geq 1$) a unei curbe
 - (i) Punctul $c(t_0)$ se numește **punct regulat** dacă $c'(t_0) \neq 0$.
 - (ii) Punctul $c(t_0)$ se numește **punct singular** dacă $c'(t_0) = 0$.
 - (iii) O curbă se numește **regulată** dacă toate punctele sale sunt regulate.

- ▶ **Definiție.** Fie $c : I \rightarrow \mathbb{R}^n$, $c = (c_1, \dots, c_n)$ o parametrizare de clasă \mathcal{C}^k ($k \geq 1$) a unei curbe și $[a, b] \subset I$ un interval.
 - (i) $c|_{[a,b]} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ se numește **arc al curbei** c ;
 - (ii) **lungimea arcului de curbă** $c|_{[a,b]}$ este $L(c|_{[a,b]}) = \int_a^b \|c'(t)\| dt$.

Modificarea vectorului tangent/acelerație la schimbări de parametru

- **Propoziție.** Fie $c : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ și $\bar{c} : \bar{I} \rightarrow \mathbb{R}^n$ două parametrizări de clasă \mathcal{C}^k ($k \geq 2$) ale unei curbe, astfel ca $\bar{c} = c \circ \varphi$, unde $\varphi : \bar{I} \rightarrow I$ este o schimbare de parametru. Pentru orice $s \in \bar{I}$ au loc relațiile

$$\bar{c}'(s) = \varphi'(s) \cdot c'(\varphi(s)),$$

$$\bar{c}''(s) = \varphi'(s)^2 \cdot c''(\varphi(s)) + \varphi''(s) \cdot c'(\varphi(s)).$$

În particular, regularitatea unei curbe este o proprietate intrinsecă a acesteia, în sensul că nu depinde de parametrizarea aleasă.

Modificarea vectorului tangent/acelerație la schimbări de parametru

- **Propoziție.** Fie $c : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ și $\bar{c} : \bar{I} \rightarrow \mathbb{R}^n$ două parametrizări de clasă \mathcal{C}^k ($k \geq 2$) ale unei curbe, astfel ca $\bar{c} = c \circ \varphi$, unde $\varphi : \bar{I} \rightarrow I$ este o schimbare de parametru. Pentru orice $s \in \bar{I}$ au loc relațiile

$$\bar{c}'(s) = \varphi'(s) \cdot c'(\varphi(s)),$$

$$\bar{c}''(s) = \varphi'(s)^2 \cdot c''(\varphi(s)) + \varphi''(s) \cdot c'(\varphi(s)).$$

În particular, regularitatea unei curbe este o proprietate intrinsecă a acesteia, în sensul că nu depinde de parametrizarea aleasă.

- **Propoziție.** Lungimea unui arc de curbă este invariantă la schimbări de parametru.

Derivatele unei curbe Bézier

Propoziție. Fie $b : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^d$ o curbă Bézier.

(i) Derivatele de orice ordin calculate pentru $t = 0$ și $t = 1$ depind doar de poligonul de control. Mai mult, $b'(0) = n(b_1 - b_0)$, $b'(1) = n(b_n - b_{n-1})$, cu alte cuvinte, vectorii tangenți la curba Bézier în punctele b_0 (respectiv b_n) sunt coliniari și au același sens cu vectorii $\overrightarrow{b_0 b_1}$ (respectiv $\overrightarrow{b_{n-1} b_n}$). În cazul în care acești vectori sunt nenuli, ei reprezintă direcția tangentelor la curbă în punctele respective.

(ii) Pentru orice $t \in [0, 1]$ are loc egalitatea

$$b'(t) = n(b_1^{n-1}(t) - b_0^{n-1}(t)),$$

cu alte cuvinte, punctele construite în etapa $(n - 1)$ a algoritmului de Casteljau determină vectorul tangent la curba Bézier în punctul $b(t)$.

Exemplu

Considerăm punctele

$$b_0 = (1, -2), \quad b_1 = (3, 2), \quad b_2 = (3, -2), \quad b_3 = (-3, -2).$$

Schema de Casteljau corespunzătoare acestor puncte și valorii $t_0 = \frac{1}{2}$ a parametrului este

$$\begin{array}{ccccccc} (1, -2) & & & & & & \\ (3, 2) & & (2, 0) & & & & \\ (3, -2) & & (3, 0) & & (\frac{5}{2}, 0) & & \\ (-3, -2) & & (0, -2) & & (\frac{3}{2}, -1) & & (2, -\frac{1}{2}). \end{array}$$

Vectorul tangent la curbă corespunzător valorii $t = \frac{1}{2}$ a parametrului este $(-3, -3)$.

Pregătire - extinderea intervalului de definire a unei curbe Bézier

Am definit o curbă Bézier pe intervalul $[0, 1]$
(asoc. (b_0, \dots, b_n))

Fie $[\alpha, \beta]$ un interval; fie (b_0, \dots, b_n) un poligon de control din \mathbb{R}^d

$$[\alpha, \beta] \xrightarrow{\gamma} [0, 1] \xrightarrow{b} \mathbb{R}^d$$

$\searrow b \circ \gamma$

γ : schimbare a fină de parametru

b : curbă Bézier asoc. (b_0, \dots, b_n) definită pe $[0, 1]$

Atunci $(b \circ \gamma): [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}^d$ este curbă Bézier asociată p.c. (b_0, \dots, b_n) definită pe $[\alpha, \beta]$

Formalizare - extinderea intervalului de definire a unei curbe Bézier

Observație. Fie (b_0, b_1, \dots, b_n) un poligon de control din \mathbb{R}^m și fie $b : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^m$ curba Bézier asociată. Pentru un interval arbitrar $[\alpha, \beta] \subset \mathbb{R}$ ($\alpha \neq \beta$), definim aplicația (numită **curbă Bézier** definită pe intervalul $[\alpha, \beta]$)

$$b^{[\alpha, \beta]} : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}^m, \quad b^{[\alpha, \beta]} := b \circ \psi,$$

unde

$$\psi : [\alpha, \beta] \rightarrow [0, 1] \quad \psi(u) = \frac{u - \alpha}{\beta - \alpha}$$

este schimbarea afină de parametru de la intervalul $[\alpha, \beta]$ la intervalul $[0, 1]$. În cele ce urmează vom renunța la scrierea intervalului de definiție ca indice superior, acest interval rezultând din context.

Formalizare - extinderea intervalului de definire a unei curbe Bézier

Observație. Fie (b_0, b_1, \dots, b_n) un poligon de control din \mathbb{R}^m și fie $b : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^m$ curba Bézier asociată. Pentru un interval arbitrar $[\alpha, \beta] \subset \mathbb{R}$ ($\alpha \neq \beta$), definim aplicația (numită **curbă Bézier** definită pe intervalul $[\alpha, \beta]$)

$$b^{[\alpha, \beta]} : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}^m, \quad b^{[\alpha, \beta]} := b \circ \psi,$$

unde

$$\psi : [\alpha, \beta] \rightarrow [0, 1] \quad \psi(u) = \frac{u - \alpha}{\beta - \alpha}$$

este schimbarea afină de parametru de la intervalul $[\alpha, \beta]$ la intervalul $[0, 1]$. În cele ce urmează vom renunța la scrierea intervalului de definiție ca indice superior, acest interval rezultând din context.

Exemplu. Considerăm poligonul de control (b_0, b_1, b_2) cu $b_0 = (0, 0)$, $b_1 = (2, 0)$, $b_2 = (2, 4)$. Curba Bézier asociată definită pe intervalul $[0, 1]$ este

$$b : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad b(t) = (4t - 2t^2, 4t^2)$$

iar curba Bézier asociată aceluiași poligon, dar definită pe intervalul $[2, 4]$ este

$$\tilde{b} : [2, 4] \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad \tilde{b}(u) = b \circ \psi(u),$$

cu $\psi(u) = \frac{u-2}{4-2}$, deci

$$\tilde{b}(u) = b\left(\frac{u-2}{2}\right) = \left(\frac{-u^2 + 8u - 12}{2}, (u-2)^2\right).$$

Condiții de racord între curbe Bézier

Fie $b: [u_0, u_1] \rightarrow \mathbb{R}^d$ și $\tilde{b}: [\underline{u}_1, u_2] \rightarrow \mathbb{R}^d$ curbe Bézier asociate unor poligoane de control $(b_0, b_1, \dots, \underline{b_m})$ și $(\underline{b_m}, b_{m+1}, \dots, b_{m+m})$. Curbele b și \tilde{b} au în punctul b_m :

(i) racord de clasă $G C^1$ (continuitate geometrică, i.e. curbele au aceeași tangentă în pct. de racord) \Leftrightarrow

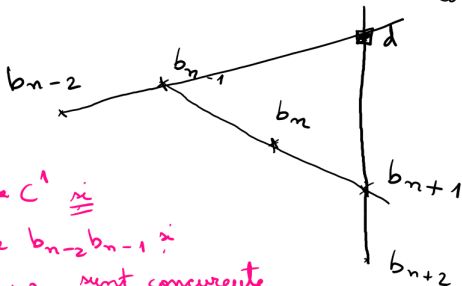
b_{m-1}, b_m, b_{m+1} sunt coliniare

(ii) racord de clasă C^1 (vectorii tangenți la cele două curbe în pct. de racord coincid) \Leftrightarrow

$\begin{cases} b_{m-1}, b_m, b_{m+1} \text{ sunt coliniare și} \\ \kappa(b_{m-1}, b_m, b_{m+1}) = \kappa(u_0, u_1, u_2). \end{cases}$

Condiții de racord între curbe Bézier

(iii) racord de clasă C^2 (și vectorii tangenți
și vectorii accelerației
coincid)

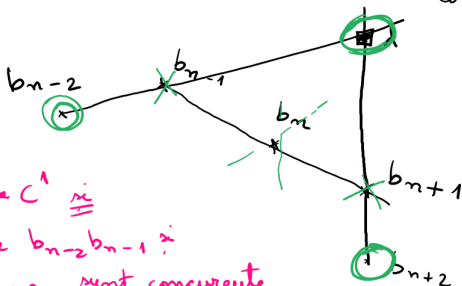


- condiția C^1 și
dreptele $b_{n-2}b_{n-1}$ și
 $b_{n+1}b_{n+2}$ sunt concurente
într-un punct d și

$$\underline{\underline{r(b_{n-2}, b_{n-1}, d) = r(d, b_{n+1}, b_{n+2}) = r(b_{n-1}, b_n, b_{n+1})}} \\ \underline{\underline{= r(u_0, u_1, u_2)}}.$$

Condiții de racord între curbe Bézier

(iii) racord de clasă C^2 (și vectorii tangenți și vectorii accelerație coincid)



μ_0, μ_1, μ_2

- condiția C^1 și
dreptele $b_{n-2}b_{n-1}$ și
 $b_{n+1}b_{n+2}$ sunt concurente
într-un punct d. și

$$\underline{\kappa(b_{n-2}, b_{n-1}, d) = \kappa(d, b_{n+1}, b_{n+2}) = \kappa(b_{n-1}, b_n, b_{n+1})}$$

Condiții de racord între curbe Bézier

Propoziție. Fie $(b_0, \dots, b_{n-1}, b_n)$ și $(b_n, b_{n+1}, \dots, b_{2n})$ două poligoane de control și $b : [u_0, u_1] \rightarrow \mathbb{R}^m$, respectiv $\tilde{b} : [u_1, u_2] \rightarrow \mathbb{R}^m$ curbele Bézier asociate ($u_0 < u_1 < u_2$; această condiție va fi subînțeleasă în cele ce urmează).

(i) Cele două curbe au un racord de clasă GC^1 în punctul b_n dacă și numai dacă punctele b_{n-1}, b_n, b_{n+1} sunt coliniare.

(ii) Cele două curbe au un racord de clasă C^1 în punctul b_n dacă și numai dacă punctele b_{n-1}, b_n, b_{n+1} sunt coliniare și are loc egalitatea de rapoarte $r(b_{n-1}, b_n, b_{n+1}) = r(u_0, u_1, u_2)$.

(iii) Cele două curbe au un racord de clasă C^2 în punctul b_n dacă și numai dacă sunt verificate condițiile:

- punctele b_{n-1}, b_n, b_{n+1} sunt coliniare și are loc egalitatea de rapoarte $r(b_{n-1}, b_n, b_{n+1}) = r(u_0, u_1, u_2)$;
- există un punct d cu proprietatea că b_{n-2}, b_{n-1}, d , respectiv d, b_{n+1}, b_{n+2} sunt triplete de puncte coliniare și, în plus, au loc egalitățile

$$r(b_{n-2}, b_{n-1}, d) = r(d, b_{n+1}, b_{n+2}) = r(u_0, u_1, u_2).$$

Punctul d se numește **punct de Boor** asociat racordului celor două curbe.

Exemplu

În \mathbb{R}^2 considerăm punctele $b_0 = (0, 2)$, $b_1 = (1, 3)$, $b_2 = (3, 3)$, $b_3 = (4, 2)$, $b_4 = (6, 0)$, $b_5 = (4, -6)$, $b_6 = (1, -1)$. Fie $u_0 = 1$, $u_1 = 4$, $u_2 = 7$. Ce racord au cubicele Bézier $b : [1, 4] \rightarrow \mathbb{R}^2$ și $\tilde{b} : [4, 7] \rightarrow \mathbb{R}^2$ asociate poligoanelor de control (b_0, b_1, b_2, b_3) , respectiv (b_3, b_4, b_5, b_6) ?

Ce date sunt necesare pentru a putea construi două cubice Bézier care au un racord de clasă C^1 ? Dar un racord de clasă C^2 ?

- ptr. racord C^2 :

- se indică u_0, u_1, u_2

- se iau b_{n-2}, b_{n+2}, d

- se construiesc b_{n-1} și b_{n+1} a.î.

$$\begin{aligned} r(u_0, u_1, u_2) &= r(b_{n-2}, \underline{b_{n-1}}, d) = \\ &= r(d, \underline{\underline{b_{n+1}}}, b_{n+2}) \end{aligned}$$

- se construiește b_n a.î.

$$r(b_{n-1}, \underline{\underline{b_n}}, b_{n+1}) = r(u_0, u_1, u_2)$$

"poligon de Boor ptr. curbe spline"

Exemplu

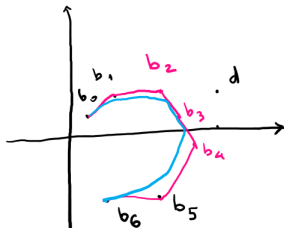
Considerăm punctele:

$$b_0 = (1, 1), \quad b_1 = (2, 2), \quad d = (6, 2), \quad b_5 = (3, -3), \quad b_6 = (1, -3)$$

și numerele reale

$$u_0 = 0, \quad u_1 = 1, \quad u_2 = 2.$$

Pornind de la aceste date putem construi poligoane de control $(b_0, b_1, b_2, \underline{b_3})$ și $(\underline{b_3}, b_4, b_5, b_6)$ astfel încât curbele Bézier asociate b și \tilde{b} definite pe intervalele $[0, 1]$, respectiv $[1, 2]$ să aibă un racord de clasă \mathcal{C}^2 .



$$\begin{aligned} \bullet b_2 \text{ a. c. } \kappa(b_1, b_2, d) &= \\ &= \kappa(u_0, u_1, u_2) = \frac{u_1 - u_0}{u_2 - u_1} = 1 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \underline{b_2 = (4, 2)}$$

$$\bullet b_4 \text{ a. c. } \kappa(d, b_4, b_5) = 1 \Rightarrow$$

$$b_4 = \left(\frac{9}{2}, -\frac{1}{2} \right)$$

$$\bullet b_3 \text{ a. c. } \kappa(b_2, b_3, b_4) = 1 \Rightarrow \underline{b_3 = \left(\frac{17}{4}, \frac{3}{4} \right)}$$

Exerciții

1. Considerăm poligonul de control (b_0, b_1, b_2, b_3) , unde

$$b_0 = (2, 3), \quad b_1 = (4, 3), \quad b_2 = (4, 5), \quad b_3 = (-2, 9).$$

Scrieți schema de Casteljau corespunzătoare acestui poligon de control și valorii $t = \frac{1}{2}$ a parametrului.

2. Scrieți forma Bernstein a curbei Bézier asociate poligonului de control $b_0 = (-2, 1)$, $b_1 = (1, 5)$, $b_2 = (3, 0)$.

3. În \mathbb{R}^2 considerăm poligoanele de control $P = (b_0, b_1, b_2)$ respectiv $\tilde{P} = (b_2, b_3, b_4)$, unde

$$b_0 = (-6, -4), \quad b_1 = (3, 3), \quad b_2 = (\lambda - 1, 3), \quad b_3 = (7, \mu + 1), \quad b_4 = (-3, -1).$$

Fie $b : [2, 5] \rightarrow \mathbb{R}^2$, respectiv $\tilde{b} : [5, 8] \rightarrow \mathbb{R}^2$ curbele Bézier asociate lui P , respectiv \tilde{P} . Discutați dacă b și \tilde{b} au un racord de clasă $G\mathcal{C}^1$ sau \mathcal{C}^1 în b_2 .

Exerciții

4. Considerăm poligonul de control

$$b_0 = (1, 1), \quad b_2 = (2, 0), \quad b_3 = (0, 0)$$

și fie $b : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$ curba Bézier asociată. Calculați $b(\frac{1}{3})$ și stabiliți dacă punctul $(1, \frac{1}{3})$ aparține imaginii lui b .

5. Pentru o curbă Bézier b , calculați vectorii $b'(0)$ și $b'(1)$ direct, folosind forma Bernstein.
6. Considerăm punctele $b_0 = (4, 2)$, $b_1 = (4, 4)$, $b_2 = (2, 4)$ și fie $b : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$ curba Bézier asociată poligonului de control (b_0, b_1, b_2) . Determinați vectorii tangenți la această curbă în punctele $b(0)$, $b(\frac{1}{2})$, $b(1)$.
7. Dacă punctele b_0 , b_1 , b_2 , b_3 sunt vârfurile unui pătrat, stabiliți care este punctul obținut aplicând algoritmul de Casteljau pentru valoarea parametrului $t = \frac{1}{2}$ și care este tangenta la curbă în acest punct.

Exerciții

8. În \mathbb{R}^2 considerăm punctele

$$b_0 = (0, 0), \quad b_1 = (2, 2), \quad b_2 = (2, 4), \quad b_3 = (3, 3),$$

$$b_4 = (5, 1), \quad b_5 = (4, 0), \quad b_6 = (2, -1)$$

și numerele reale

$$u_0 = 0, \quad u_1 = 1, \quad u_2 = 3.$$

Fie $b : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$ și $\tilde{b} : [1, 3] \rightarrow \mathbb{R}^2$ curbele Bézier asociate. Stabiliți ce clasă are racordul celor două curbe în punctul b_3 .

9. Considerăm punctele:

$$b_0 = (0, 2), \quad b_1 = (0, 4), \quad d = (4, 2), \quad b_5 = (4, -2), \quad b_6 = (0, -3)$$

și numerele reale

$$u_0 = 1, \quad u_1 = 2, \quad u_2 = 3.$$

Determinați poligoanele de control (b_0, b_1, b_2, b_3) și (b_3, b_4, b_5, b_6) astfel încât curbele Bézier asociate b și \tilde{b} definite pe intervalele $[1, 2]$, respectiv $[2, 3]$ să aibă un racord de clasă \mathcal{C}^2 .