

Seminar 13

(S13.1) Considerăm limbajul de ordinul I $\mathcal{L}_{ar} = (\dot{<}; \dot{+}, \dot{\times}, \dot{S}; \dot{0})$ (limbajul aritmeticii) și \mathcal{L}_{ar} -structura $\mathcal{N} = (\mathbb{N}, <, +, \cdot, S, 0)$.

- (i) Fie $x, y \in V$ cu $x \neq y$, și $t = \dot{S}x \dot{\times} \dot{S}\dot{S}y = \dot{\times}(\dot{S}x, \dot{S}\dot{S}y)$. Să se calculeze $t^{\mathcal{N}}(e)$, unde $e : V \rightarrow \mathbb{N}$ este o evaluare ce verifică $e(x) = 3$ și $e(y) = 7$.
- (ii) Fie $\varphi = x \dot{<} \dot{S}y \rightarrow (x \dot{<} y \vee x = y) = \dot{<}(x, \dot{S}y) \rightarrow (\dot{<}(x, y) \vee x = y)$. Să se arate că $\mathcal{N} \models \varphi[e]$ pentru orice $e : V \rightarrow \mathbb{N}$.

Demonstrație:

- (i) Pentru orice interpretare $e : V \rightarrow \mathbb{N}$, avem

$$\begin{aligned} t^{\mathcal{N}}(e) &= \dot{\times}^{\mathcal{N}}((\dot{S}x)^{\mathcal{N}}(e), (\dot{S}\dot{S}y)^{\mathcal{N}}(e)) = (\dot{S}x)^{\mathcal{N}}(e) \cdot (\dot{S}\dot{S}y)^{\mathcal{N}}(e) \\ &= \dot{S}^{\mathcal{N}}(x^{\mathcal{N}}(e)) \cdot \dot{S}^{\mathcal{N}}((\dot{S}y)^{\mathcal{N}}(e)) = S(e(x)) \cdot S(\dot{S}^{\mathcal{N}}(y^{\mathcal{N}}(e))) \\ &= S(e(x)) \cdot S(S(e(y))). \end{aligned}$$

Prin urmare, dacă $e(x) = 3$ și $e(y) = 7$, atunci

$$t^{\mathcal{N}}(e) = S(3) \cdot S(S(7)) = 4 \cdot 9 = 36.$$

- (ii) Pentru orice interpretare $e : V \rightarrow \mathbb{N}$, avem

$$\begin{aligned} \mathcal{N} \models \varphi[e] &\iff \mathcal{N} \not\models (\dot{<}(x, \dot{S}y))[e] \text{ sau } \mathcal{N} \models (\dot{<}(x, y) \vee x = y)[e] \\ &\iff \dot{<}^{\mathcal{N}}(e(x), S(e(y))) \text{ nu e satisfăcută sau} \\ &\quad \mathcal{N} \models (\dot{<}(x, y))[e] \text{ sau } \mathcal{N} \models (x = y)[e] \\ &\iff <(e(x), S(e(y))) \text{ nu e satisfăcută sau } <(e(x), e(y)) \\ &\quad \text{sau } e(x) = e(y) \\ &\iff e(x) \geq S(e(y)) \text{ sau } e(x) < e(y) \text{ sau } e(x) = e(y) \\ &\iff e(x) \geq e(y) + 1 \text{ sau } e(x) < e(y) \text{ sau } e(x) = e(y). \end{aligned}$$

Prin urmare, $\mathcal{N} \models \varphi[e]$ pentru orice $e : V \rightarrow \mathbb{N}$.

De obicei, scriem:

$$\begin{aligned} \mathcal{N} \models \varphi[e] &\iff \mathcal{N} \not\models (\dot{<}(x, \dot{S}y))[e] \text{ sau } \mathcal{N} \models (\dot{<}(x, y) \vee x = y)[e] \\ &\iff e(x) \geq S(e(y)) \text{ sau } e(x) < e(y) \text{ sau } e(x) = e(y) \\ &\iff e(x) \geq e(y) + 1 \text{ sau } e(x) < e(y) \text{ sau } e(x) = e(y). \end{aligned}$$

□

Notăția 1. Fie \mathcal{L} un limbaj de ordinul I . Pentru orice variabile x, y cu $x \neq y$, orice \mathcal{L} -structură \mathcal{A} , orice $e : V \rightarrow A$ și orice $a, b \in A$, avem că:

$$(e_{y \leftarrow b})_{x \leftarrow a} = (e_{x \leftarrow a})_{y \leftarrow b}.$$

În acest caz, notăm valoarea lor comună cu $e_{x \leftarrow a, y \leftarrow b}$. Așadar,

$$e_{x \leftarrow a, y \leftarrow b} : V \rightarrow A, \quad e_{x \leftarrow a, y \leftarrow b}(v) = \begin{cases} e(v) & \text{dacă } v \neq x \text{ și } v \neq y \\ a & \text{dacă } v = x \\ b & \text{dacă } v = y. \end{cases}$$

(S13.2) Să se arate că pentru orice formule φ, ψ și orice variabile x, y cu $x \neq y$ avem,

- (i) $\neg \exists x \varphi \models \forall x \neg \varphi$;
- (ii) $\forall x (\varphi \wedge \psi) \models \forall x \varphi \wedge \forall x \psi$;
- (iii) $\exists y \forall x \varphi \models \forall x \exists y \varphi$;
- (iv) $\forall x (\varphi \rightarrow \psi) \models \forall x \varphi \rightarrow \forall x \psi$.

Demonstrație: Fie \mathcal{A} și $e : V \rightarrow A$.

- (i) Știm că “ $\exists x$ ” este o prescurtare pentru “ $\neg \forall x \neg$ ”.

$$\begin{aligned} \mathcal{A} \models (\neg \exists x \varphi)[e] &\iff \mathcal{A} \models (\neg \neg \forall x \neg \varphi)[e] \iff \text{nu este adevărat că } \mathcal{A} \models (\neg \forall x \neg \varphi)[e] \\ &\iff \text{nu este adevărat că nu este adevărat că } \mathcal{A} \models (\forall x \neg \varphi)[e] \iff \mathcal{A} \models (\forall x \neg \varphi)[e]. \end{aligned}$$

- (ii) $\mathcal{A} \models (\forall x (\varphi \wedge \psi))[e] \iff$ pentru orice $a \in A$, avem $\mathcal{A} \models (\varphi \wedge \psi)[e_{x \leftarrow a}] \iff$ pentru orice $a \in A$, avem $\mathcal{A} \models \varphi[e_{x \leftarrow a}]$ și $\mathcal{A} \models \psi[e_{x \leftarrow a}] \iff$ (pentru orice $a \in A$, avem $\mathcal{A} \models \varphi[e_{x \leftarrow a}]$) și (pentru orice $a \in A$, avem $\mathcal{A} \models \psi[e_{x \leftarrow a}]$) $\iff \mathcal{A} \models (\forall x \varphi)[e]$ și $\mathcal{A} \models (\forall x \psi)[e] \iff \mathcal{A} \models (\forall x \varphi \wedge \forall x \psi)[e]$.

(iii) Avem că $\mathcal{A} \models (\exists y \forall x \varphi)[e] \iff$ există $b \in A$ a.î. pentru orice $a \in A$ avem $\mathcal{A} \models \varphi[(e_{y \leftarrow b})_{x \leftarrow a}]$, i.e., folosind ipoteza că $x \neq y$, $\mathcal{A} \models \varphi[e_{x \leftarrow a, y \leftarrow b}]$ (*).

Pe de altă parte, $\mathcal{A} \models (\forall x \exists y \varphi)[e] \iff$ pentru orice $c \in A$ există $d \in A$ a.î. $\mathcal{A} \models \varphi[(e_{x \leftarrow c})_{y \leftarrow d}]$, i.e., folosind ipoteza că $x \neq y$, $\mathcal{A} \models \varphi[e_{x \leftarrow c, y \leftarrow d}]$ (**).

Știm (*) și vrem să arătăm (**). Fie $c \in A$. Vrem $d \in A$ a.î. $\mathcal{A} \models \varphi[e_{x \leftarrow c, y \leftarrow d}]$.

Luăm d să fie b -ul din (*). Atunci, pentru orice $a \in A$ avem $\mathcal{A} \models \varphi[e_{x \leftarrow a, y \leftarrow d}]$. În particular, luând $a := c$, obținem $\mathcal{A} \models \varphi[e_{x \leftarrow c, y \leftarrow d}]$, ceea ce ne trebuia.

(iv) Presupunem că $\mathcal{A} \models (\forall x (\varphi \rightarrow \psi))[e]$. Atunci, pentru orice $a \in A$, $\mathcal{A} \models (\varphi \rightarrow \psi)[e_{x \leftarrow a}]$, lucru pe care îl putem scrie și $\varphi^{\mathcal{A}}(e_{x \leftarrow a}) \rightarrow \psi^{\mathcal{A}}(e_{x \leftarrow a}) = 1$ sau chiar $\varphi^{\mathcal{A}}(e_{x \leftarrow a}) \leq \psi^{\mathcal{A}}(e_{x \leftarrow a})$ (*).

Vrem să arătăm că $\mathcal{A} \models (\forall x \varphi \rightarrow \forall x \psi)[e]$, ceea ce este echivalent, din aceleași considerente, cu $(\forall x \varphi)^{\mathcal{A}}(e) \leq (\forall x \psi)^{\mathcal{A}}(e)$.

Dacă $(\forall x \varphi)^{\mathcal{A}}(e) = 0$, suntem OK. Presupunem, așadar, că $(\forall x \varphi)^{\mathcal{A}}(e) = 1$, i.e. pentru orice $b \in A$, $\varphi^{\mathcal{A}}(e_{x \leftarrow b}) = 1$ (**).

Ne rămâne de arătat că $(\forall x \psi)^{\mathcal{A}}(e) = 1$, i.e. că pentru orice $c \in A$, $\psi^{\mathcal{A}}(e_{x \leftarrow c}) = 1$. Fie $c \in A$. Din (*), avem că $\varphi^{\mathcal{A}}(e_{x \leftarrow c}) \leq \psi^{\mathcal{A}}(e_{x \leftarrow c})$, iar din (**), că $\varphi^{\mathcal{A}}(e_{x \leftarrow c}) = 1$. Deci $\psi^{\mathcal{A}}(e_{x \leftarrow c}) = 1$, ceea ce ne trebuia.

□

(S13.3) Fie x, y variabile cu $x \neq y$. Să se dea exemple de limbaj de ordinul I, \mathcal{L} , și de formule φ, ψ ale lui \mathcal{L} astfel încât:

- (i) $\forall x (\varphi \vee \psi) \not\models \forall x \varphi \vee \forall x \psi$;
- (ii) $\exists x \varphi \wedge \exists x \psi \not\models \exists x (\varphi \wedge \psi)$;
- (iii) $\forall x \exists y \varphi \not\models \exists y \forall x \varphi$.

Demonstrație: Considerăm $\mathcal{L}_{ar} = (\dot{<}, \dot{+}, \dot{\times}, \dot{S}, \dot{0})$, \mathcal{L}_{ar} -structura $\mathcal{N} := (\mathbb{N}, <, +, \cdot, S, 0)$ și $e : V \rightarrow \mathbb{N}$ o evaluare arbitrară (să zicem, punem $e(v) := 7$ pentru orice $v \in V$).

- (i) Fie $\dot{2} := \dot{S}\dot{S}\dot{0}$, $\varphi := x \dot{<} \dot{2}$ și $\psi := \neg(x \dot{<} \dot{2})$. Atunci

$$\mathcal{N} \models \forall x (\varphi \vee \psi)[e].$$

Pe de altă parte,

- (a) $\mathcal{N} \models (\forall x\varphi)[e] \iff$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$ avem $\mathcal{N} \models \varphi[e_{x \leftarrow n}] \iff$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$, avem $n < 2$, ceea ce nu este adevărat (luând $n := 3$, de exemplu). Deci, $\mathcal{N} \not\models (\forall x\varphi)[e]$.
- (b) $\mathcal{N} \models (\forall x\psi)[e] \iff$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$ avem $\mathcal{N} \models \psi[e_{x \leftarrow n}] \iff$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$, avem $n \geq 2$, ceea ce nu este adevărat (luând $n := 1$, de exemplu). Deci, $\mathcal{N} \not\models (\forall x\psi)[e]$.

Prin urmare,

$$\mathcal{N} \not\models (\forall x\varphi \vee \forall x\psi)[e].$$

(ii) Fie $\dot{2} := \dot{S}\dot{S}\dot{0}$, $\varphi := x < \dot{2}$ și $\psi := \neg(x < \dot{2})$. Avem:

- (a) $\mathcal{N} \models (\exists x\varphi)[e] \iff$ există $n \in \mathbb{N}$ a.î. $\mathcal{N} \models \varphi[e_{x \leftarrow n}] \iff$ există $n \in \mathbb{N}$ a.î. $n < 2$, ceea ce este adevărat (luând $n := 1$, de exemplu). Deci, $\mathcal{N} \models (\exists x\varphi)[e]$.
- (b) $\mathcal{N} \models (\exists x\psi)[e] \iff$ există $n \in \mathbb{N}$ a.î. $\mathcal{N} \models \psi[e_{x \leftarrow n}] \iff$ există $n \in \mathbb{N}$ a.î. $n \geq 2$, ceea ce este adevărat (luând $n := 3$, de exemplu). Deci, $\mathcal{N} \models (\exists x\psi)[e]$.

Prin urmare,

$$\mathcal{N} \models (\exists x\varphi \wedge \exists x\psi)[e].$$

Pe de altă parte, $\mathcal{N} \models \exists x(\varphi \wedge \psi)[e] \iff$ există $n \in \mathbb{N}$ a.î. $\mathcal{N} \models (\varphi \wedge \psi)[e_{x \leftarrow n}] \iff$ există $n \in \mathbb{N}$ a.î. $n < 2$ și $n \geq 2$, ceea ce este fals. Prin urmare,

$$\mathcal{N} \not\models \exists x(\varphi \wedge \psi)[e].$$

(iii) Fie $\varphi := x < y$. Atunci

$$\begin{aligned} \mathcal{N} \models (\forall x \exists y \varphi)[e] &\iff \text{pentru orice } n \in \mathbb{N}, \text{ avem } \mathcal{N} \models (\exists y \varphi)[e_{x \leftarrow n}] \\ &\iff \text{pentru orice } n \in \mathbb{N} \text{ există } m \in \mathbb{N} \text{ a.î. } \mathcal{N} \models \varphi[e_{x \leftarrow n, y \leftarrow m}] \\ &\iff \text{pentru orice } n \in \mathbb{N} \text{ există } m \in \mathbb{N} \text{ a.î. } n < m, \end{aligned}$$

ceea ce este adevărat – se ia, de pildă, $m := n + 1$. Așadar,

$$\mathcal{N} \models (\forall x \exists y \varphi)[e].$$

Pe de altă parte,

$$\begin{aligned} \mathcal{N} \models (\exists y \forall x \varphi)[e] &\iff \text{există } m \in \mathbb{N} \text{ a.î. } \mathcal{N} \models (\forall x \varphi)[e_{y \leftarrow m}] \\ &\iff \text{există } m \in \mathbb{N} \text{ a.î. pentru orice } n \in \mathbb{N} \\ &\quad \text{avem } \mathcal{N} \models \varphi[e_{x \leftarrow n, y \leftarrow m}] \\ &\iff \text{există } m \in \mathbb{N} \text{ a.î. pentru orice } n \in \mathbb{N} \text{ avem } n < m, \end{aligned}$$

ceea ce este fals. Așadar,

$$\mathcal{N} \not\models (\exists y \forall x \varphi)[e].$$

□