9.3. SCHEME CLASICE DE PROBABILITATE

BREVIAR TEORETIC

I. Schema lui Poisson

Se consideră n urne, fiecare urnă U_i, $i = \overline{1,n}$, conţinând bile albe şi bile negre.

Se ştie că probabilităţile evenimentelor ca, efectuând la întâmplare o extragere din urna U_i, $i = \overline{1,n}$, să apară o bilă albă, respectiv o bilă neagră, sunt p_i, respectiv q_i ($p_i + q_i = 1$).
Se extrage câte o bilă din fiecare urnă.
Probabilitatea ca, din cele n bile extrase, k să fie albe şi $n - k$ să fie negre este:
$P(n: k, n\text{-}k)$ = coeficientul lui t^k din polinomul $Q(t) = (p_1 t + q_1)(p_2 t + q_2)........(p_n t + q_n)$

II. Schema bilei revenite cu două stări (schema lui Bernoulli sau schema binomială)

Se consideră o urnă ce conţine bile albe şi bile negre. Se cunoaşte probabilitatea $p \in (0,1)$ ca extrăgând la întâmplare o bilă din urnă, aceasta să fie albă ($q = 1 - p$ este probabilitatea ca la o extragere din urnă să se obţină o bilă neagră).
Se fac n extrageri succesive din urnă, cu revenire.
Probabilitatea ca din cele n bile extrase k să fie albe şi $n - k$ să fie negre este: $P(n:k, n-k) = C_n^k\, p^k q^{n-k}$.

Observaţie. Schema bilei revenite poate modela o experienţă cu două rezultate posibile: evenimentele A şi $\overline{A}$, având probabilităţile p şi q de a se realiza la orice repetare a experienţei, cu $p, q > 0, p + q = 1$.

Generalizare***: Schema bilei revenite cu m stări (schema multinomială)***

Se consideră o urnă care conţine bile de *"m"* culori. Se cunosc probabilitatăţile evenimentelor ca, extrăgând la întâmplare o bilă din urnă, aceasta să fie de culoarea *"i"*, $i = \overline{1,m}$, probabilităţi notate p_i, cu

$$p_i \in (0,1),\ \sum_{i=1}^{m} p_i = 1$$

Se fac n extrageri succesive din urnă, cu revenire.
Probabilitatea ca din cele n bile extrase n_1 să fie de culoarea "1", n_2 să fie de culoarea "2", ……," n_m" de culoarea *"m"*, este:

$$P(n: n_1, n_2, ..., n_m) = \frac{n!}{n_1!\cdot n_2!\cdot ....\cdot n_m!}\, p_1^{n_1} \cdot p_2^{n_2} \cdot .... \cdot p_m^{n_m}$$

III. Schema bilei nerevenite cu două stări (schema hipergeometrică)

Se consideră o urnă care conţine N bile, dintre care N_1 bile albe şi N_2 bile negre.
Se fac n extrageri succesive din urnă, fără revenire.
Probabilitatea ca din cele n bile extrase k să fie albe şi $n\text{-}k$ negre este

$$P(n:k, n-k) = \frac{C_{N_1}^k \cdot C_{N_2}^{n-k}}{C_N^n}$$

Generalizare***: Schema bilei nerevenite cu "m" stări***

Se consideră o urnă ce conţine N bile de m culori, dintre care N_1 bile de culoarea "1", N_2 bile de culoarea "2",.., N_m bile de culoarea *"m"*.
Se fac n extrageri succesive din urnă, fără revenire.
Probabilitatea ca din cele n bile extrase n_1 să fie de culoarea "1", n_1 de culoarea "2", …, n_m de culoarea *"m"*, este:

$$P(n: n_1, n_2, ..., n_m) = \frac{C_{N_1}^{n_1} \cdot C_{N_2}^{n_2} \cdot .... \cdot C_{N_m}^{n_m}}{C_N^n}$$

IV. Schema lui Pascal (schema geometrică)

Se consideră o urnă care conţine bile albe şi bile negre. Se cunoaşte probabilitatea $p \in (0,1)$ ca extrăgând la întâmplare o bilă din urnă, aceasta să fie albă ($q = 1 - p$ este probabilitatea ca la o extragere din urnă să se obţină o bilă neagră). Se fac extrageri succesive din urnă, cu revenire.
Probabilitatea ca prima bilă albă să apară exact la extragerea *"k"*, primele k - 1 bile extrase fiind negre, este:
$p_k = p \cdot q^{k-1}$

PROBLEME REZOLVATE

1. Un magazin primeşte într-o zi 10 produse de acelaşi tip, dintre care 5 provin de la furnizorul F_1, 3 provin de la furnizorul F_2 şi restul de la furnizorul F_3. Care este probabilitatea ca din 4 produse vândute:

a) două să provină de la F_2 şi câte unul de la ceilalţi furnizori?

b) toate să provină de la acelaşi furnizor?

c) unul singur să provină de la F_3?

Rezolvare:

a) Problema poate fi modelată cu ajutorul unei urne conţinând bile de trei culori, din care se fac extrageri fără revenire.

10 produse: 5 F_1, 3 F_2, 2 F_3 $\xrightarrow[\text{fără revenire}]{\text{se extrag}}$ 4: 1 F_1, 2 F_2, 1 F_3

Aplicând schema urnei cu bila nerevenită, obţinem: $P(4:1,2,1)=\dfrac{C_5^1\cdot C_3^2\cdot C_2^1}{C_{10}^4}=\frac{1}{7}=0{,}142857$

b) Fie B evenimentul ca toate produsele să provină de la acelaşi furnizor; acesta se realizează numai atunci când toate produsele provin de la F_1, prin urmare $P(B)=P(4:4,0,0)=\dfrac{C_5^4\cdot C_3^0\cdot C_2^0}{C_{10}^4}=\frac{1}{42}=0{,}0238$

c) Fie C evenimentul ca un singur produs să provină de la F_3.

Se observă că, aplicând schema urnei cu bile de 3 culori, numărul situaţiilor în care se realizează evenimentul C este destul de mare.

Problema poate fi modelată mai uşor cu ajutorul unei urne conţinând bile de două culori: bilele albe reprezintă produsele ce provin de la F_1 sau F_2, iar bilele negre sunt produsele care provin de la F_3.

10 bile: 8 albe, 2 negre $\xrightarrow[\text{fără revenire}]{\text{se extrag}}$ 4: 3 albe, 1 neagră

Obţinem: $P(C)=P(4:3,1)=\dfrac{C_8^3\cdot C_2^1}{C_{10}^4}=\frac{8}{15}=0{,}53333$

2. Într-un magazin sunt trei cutii conţinând câte 20 de becuri. Prezintă defecte de fabricaţie: trei becuri din prima cutie, un bec din a doua cutie şi patru becuri din a treia cutie. Un cumpărător solicită câte un bec din fiecare cutie. Care este probabilitatea ca din cele trei becuri pe care le va primi:

a) toate să fie corespunzătoare;

b) unul singur să fie defect;

c) cel mult două să fie defecte;

d) cel puţin unul să fie corespunzător.

Rezolvare:

Notăm cu p_i, respectiv q_i, probabilităţile ca un bec din cutia ” i ” să fie defect, respectiv corespunzător, $i=\overline{1,3}$.

Structura celor trei cutii este următoarea:

C_1 : 20 becuri: 3 defecte, $p_1=\frac{3}{20}$; 17 corespunzătoare, $q_1=\frac{17}{20}$

C_2 : 20 becuri: 1 defect, $p_2=\frac{1}{20}$; 19 corespunzătoare, $q_2=\frac{19}{20}$

C_3 : 20 becuri: 4 defecte, $p_3=\frac{4}{20}$; 16 corespunzătoare, $q_3=\frac{16}{20}$

Vom aplica schema lui Poisson. Considerăm polinomul $Q(t) = (p_1 t + q_1)(p_2 t + q_2)(p_3 t + q_3)$

a) Probabilitatea ca din cele trei becuri, zero să fie defecte şi trei corespunzătoare este: $P(3{:}\ 0, 3)$ = coeficientul lui t^0 din polinomul $Q(t)$;

$$P(3:0,3) = q_1 q_2 q_3 = \frac{17}{20}\cdot\frac{19}{20}\cdot\frac{16}{20} = 0{,}646\,.$$

b) Probabilitatea ca din cele trei becuri unul singur să fie defect este:
$P(3{:}\ 1, 2)$ = coeficientul lui t^1 din polinomul $Q(t)$;

$$P(3:1,2) = p_1 q_2 q_3 + q_1 p_2 q_3 + q_1 q_2 p_3 = \frac{3}{20}\cdot\frac{19}{20}\cdot\frac{16}{20} + \frac{17}{20}\cdot\frac{1}{20}\cdot\frac{16}{20} + \frac{17}{20}\cdot\frac{19}{20}\cdot\frac{4}{20} = 0{,}3095$$

c) Fie C evenimentul ca din cele trei becuri cel mult două să fie defecte; C reprezintă evenimentul ca zero becuri să fie defecte sau un singur bec să fie defect sau două becuri becuri să fie defecte, deci

$$P(C) = P(3:0,3) + P(3:1,2) + P(3:2,1)$$

$P(3{:}\ 2, 1)$ = coeficientul lui t^2 din polinomul $Q(t)$;

$$P(3:2,1) = p_1 p_2 q_3 + p_1 q_2 p_3 + q_1 p_2 p_3 = \frac{3}{20}\cdot\frac{1}{20}\cdot\frac{16}{20} + \frac{3}{20}\cdot\frac{19}{20}\cdot\frac{4}{20} + \frac{17}{20}\cdot\frac{1}{20}\cdot\frac{4}{20} = 0{,}043\,,$$

prin urmare $P(C) = 0{,}9985$.

d) Fie D evenimentul ca din cel puţin un bec să fie corespunzător, adică un singur bec să fie corespunzător sau exact două să fie corespunzătoare sau trei să fie corespunzătoare, deci:

$$P(D) = P(3:2,1) + P(3:1,2) + P(3:0,3) = 0{,}043 + 0{,}3095 + 0{,}646 = 0{,}9985$$

Această probabilitate poate fi calculată şi astfel:

$$P(D) = 1 - P(\overline{D}) = 1 - P(3:3,0) = 1 - p_1 p_2 p_3 = 1 - 0{,}0015 = 0{,}9985$$

3. În urma realizării unei campanii publicitare pentru promovarea unei mărci de cafea solubilă, s-a stabilit că din zece persoane care încearcă acest tip de cafea două se decid să cumpere. Să se determine probabilitatea ca din opt persoane cărora li se prezintă noul tip de cafea:

a) jumătate să cumpere acest produs;
b) exact trei să nu cumpere;
c) cel mult două să nu cumpere;
d) cel puţin trei să cumpere, ştiind că minim două nu vor cumpăra.

Rezolvare:

Notăm cu p, respectiv q probabilitatea ca o persoană care încearcă noul tip de cafea să cumpere, respectiv să nu cumpere acest produs. Prin urmare avem: $p = \frac{2}{10} = \frac{1}{5}$, $q = \frac{8}{10} = \frac{4}{5}$

Problema descrie un experiment ("o persoană încearcă produsul") cu două rezultate posibile (A = "persoana cumpără" şi $\overline{A}$ = "persoana nu cumpără"):

O persoană care încearcă produsul
- cumpără produsul $p = \frac{1}{5}$
- nu cumpără produsul $q = \frac{4}{5}$

Se realizează acest experiment de opt ori.
Deoarece probabilităţile de apariţie a celor două rezultate sunt constante, conform observaţiei din breviarul teoretic vom aplica schema lui Bernoulli.

a) Probabilitatea ca din 8 persoane care încearcă produsul 4 să cumpere şi 4 să nu cumpere este:

$$P(8:4,\ 4) = C_8^4\, p^4 q^4 = C_8^4 \left(\frac{1}{5}\right)^4 \left(\frac{4}{5}\right)^4 = 0{,}0458752$$

b) Se cere probabilitatea ca din opt persoane care încearcă produsul cinci să cumpere şi trei să nu cumpere:

$$P(8:5,\ 3) = C_8^5\, p^5 q^3 = C_8^5 \left(\tfrac{1}{5}\right)^5 \left(\tfrac{4}{5}\right)^3 = 0{,}0091750$$

c) Notăm cu C evenimentul ca cel mult două persoane să nu cumpere.

$$P(C) = P(8:8,\ 0) + P(8:7,\ 1) + P(8:6,\ 2) = C_8^8 \left(\tfrac{1}{5}\right)^8 \left(\tfrac{4}{5}\right)^0 + C_8^7 \left(\tfrac{1}{5}\right)^7 \left(\tfrac{4}{5}\right)^1 + C_8^6 \left(\tfrac{1}{5}\right)^6 \left(\tfrac{4}{5}\right)^2 = 0{,}00123136$$

d) Fie D evenimentul a cărui probabilitate se cere. Notăm cu E evenimentul ca cel puţin trei persoane să cumpere şi cu F evenimentul ca minim două persoane să nu cumpere. Avem:

$$P(D)=P(E/F)=\frac{P(E\cap F)}{P(F)}=\frac{\sum\limits_{k=3}^{6}P(8:k,8-k)}{\sum\limits_{k=0}^{6}P(8:k,8-k)}=\frac{\sum\limits_{k=3}^{6}C_8^k\left(\frac{1}{5}\right)^k\left(\frac{4}{5}\right)^{8-k}}{\sum\limits_{k=0}^{6}C_8^k\left(\frac{1}{5}\right)^k\left(\frac{4}{5}\right)^{8-k}}=\frac{\sum\limits_{k=3}^{6}C_8^k\left(\frac{1}{5}\right)^k\left(\frac{4}{5}\right)^{8-k}}{1-\sum\limits_{k=7}^{8}C_8^k\left(\frac{1}{5}\right)^k\left(\frac{4}{5}\right)^{8-k}}=0{,}20272816$$

4. Dintre cele 30 de subiecte recomandate pentru examen de către profesorul de curs, un student a pregătit 20 de subiecte, pe care le poate prezenta perfect . La examen fiecare subiect este scris pe câte un bilet, iar studentul trebuie să extragă cinci bilete la întâmplare şi să prezinte cele cinci subiecte aflate pe bilete. Ştiind că pentru fiecare subiect la care răspunde corect va primi două puncte şi că nu se acordă nici un punct pentru rezolvări parţiale, să se determine probabilitatea ca:

a) studentul să primească nota 10;
b) studentul să primească nota 6;
c) studentul să nu promoveze examenul.

Rezolvare:
Problema poate fi modelată cu ajutorul unei urne conţinând bile de două culori, din care se fac extrageri fără revenire.

a) Se cere probabilitatea ca din cele 5 subiecte extrase, 5 să fie rezolvate perfect.

30 subiecte: 20 pot fi rezolvate perfect; 10 nu pot fi rezolvate perfect $\xrightarrow[\text{fără revenire}]{\text{se extrag}}$ 5: 5 pot fi rezolvate perfect; 0 nu pot fi rezolvate perfect

$$P(5:5,0)=\frac{C_{20}^5\cdot C_{10}^0}{C_{30}^5}=0{,}027198$$

b) Se cere probabilitatea ca din cele 5 subiecte extrase, exact 3 să fie rezolvate perfect:

$$P(5:3,2)=\frac{C_{20}^3\cdot C_{10}^2}{C_{30}^5}=0{,}35998$$

c) Fie C evenimentul ca studentul să nu promoveze examenul, adică să rezolve perfect 0, 1 sau 2 subiecte:

$$P(C)=\sum_{k=0}^{2}P(5:k,5-k)=\frac{C_{20}^0\cdot C_{10}^5}{C_{30}^5}+\frac{C_{20}^1\cdot C_{10}^4}{C_{30}^5}+\frac{C_{20}^2\cdot C_{10}^3}{C_{30}^5}=0{,}27283$$

5. Trei bănci acordă credite pentru finanţarea studiilor cu probabilităţile 0,8; 0,75, respectiv 0,82, independent una de alta. Un student se adresează tuturor băncilor. Cu ce probabilitate el va primi:

a) trei răspunsuri favorabile;
b) exact două răspunsuri favorabile;
c) exact două răspunsuri nefavorabile;
d) nici un răspuns favorabil;
e) cel mult două răspunsuri favorabile .

Rezolvare:
Vom aplica schema lui Poisson.
Notăm cu p_i, respectiv q_i, probabilităţile ca un client care se adresează băncii B_i să primească un răspuns favorabil, respectiv nefavorabil, $i=\overline{1,3}$.
Avem: $p_1=0{,}8$, $p_2=0{,}75$, $p_3=0{,}82$, $q_1=0{,}2$, $q_2=0{,}25$, $q_3=0{,}18$.
$Q(t)=(p_1 t+q_1)(p_2 t+q_2)(p_3 t+q_3)=(0{,}8\,t+0{,}2)(0{,}75\,t+0{,}25)(0{,}82\,t+0{,}18)$.

a) $P(3{:}\,3,0)$ = coeficientul lui t^3 din polinomul $Q(t)$;

$$P(3:3,0)=p_1p_2p_3=0{,}8\cdot 0{,}75\cdot 0{,}82=0{,}492.$$

b) $P(3{:}\,2,1)$ = coeficientul lui t^2 din polinomul $Q(t)$;

$$P(3:2,1)=p_1p_2q_3+p_1q_2p_3+q_1p_2p_3=0{,}8\cdot 0{,}75\cdot 0{,}18+0{,}8\cdot 0{,}25\cdot 0{,}82+0{,}2\cdot 0{,}75\cdot 0{,}82=0{,}395$$

c) $P(3{:}\,1,2)$ = coeficientul lui t^1 din polinomul $Q(t)$;

$$P(3:1,2)=p_1q_2q_3+q_1p_2q_3+q_1q_2p_3=0{,}8\cdot 0{,}25\cdot 0{,}18+0{,}2\cdot 0{,}75\cdot 0{,}18+0{,}2\cdot 0{,}25\cdot 0{,}82=0{,}104$$

d) $P(3{:}\,0,3)$ = coeficientul lui t^0 din polinomul $Q(t)$;

$P(3:0{,}3) = q_1 \cdot q_2 \cdot q_3 = 0{,}2 \cdot 0{,}25 \cdot 0{,}18 = 0{,}003$

e) Probabilitatea ca studentul să primească cel mult două răspunsuri favorabile este: $P(3:0{,}3) + P(3:1{,}2) + P(3:2{,}1) = 1 - P(3:3{,}0) = 0{,}508$.

6. Se achiziţionează 4 piese similare de la 2 furnizori calificaţi *A*, *B*. Datele privind performanţele obişnuite ale furnizorilor, precum şi numărul de piese cumpărate de la fiecare furnizor apar în tabelul următor:

Furnizor	proporţie piese corespunzătoare	proporţie piese rebut	număr piese cumpărate
A	90%	10%	2
B	80%	20%	2

Să se determine probabilitatea ca printre cele patru piese cumpărate să avem:

a) patru piese corespunzătoare;
b) cel puţin o piesă corespunzătoare;
c) cel mult trei piese corespunzătoare.

Rezolvare:
Vom aplica schema lui Poisson. Notăm cu p_i, respectiv q_i, probabilităţile ca o piesă ce provine de la furnizorul "*i*" să fie corespunzătoare, respectiv rebut, $i = \overline{1,2}$. Avem:

$p_1 = 0{,}9$; $p_2 = 0{,}8$; $q_1 = 0{,}1$; $q_2 = 0{,}2$. Considerăm polinomul

$Q(t) = (p_1 t + q_1)^2 \cdot (p_2 t + q_2)^2 = (0{,}9t + 0{,}1)^2 \cdot (0{,}8t + 0{,}2)^2$.

a) $P(4{:}\ 4,\ 0)$ = coeficientul lui t^4 din polinomul $Q(t)$;

$P(4:4{,}0) = p_1^2 \cdot p_2^2 = 0{,}9^2 \cdot 0{,}8^2 = 0{,}5184$.

b) Fie *B* evenimentul ca cel puţin o piesă să fie corespunzătoare. Avem că:

$P(B) = P(4:1{,}3) + P(4:2{,}2) + P(4:3{,}1) + P(4:4{,}0) = 1 - P(4:0{,}4)$.

Cum $P(4:0{,}4) = q_1^2 \cdot q_2^2 = 0{,}1^2 \cdot 0{,}2^2 = 0{,}0004 \Rightarrow P(B) = 0.9996$;

c) Fie *C* evenimentul ca cel mult trei piese să fie corespunzătoare. Avem:

$P(C) = (P4:0{,}4) + P(4:1{,}3) + P(4:2{,}2) + P(4:3{,}1) = 1 - P(4:4{,}0) = 0{,}4816$.

7. Un magazin îşi îndeplineşte planul de desfacere a produselor pe o lună cu probabilitatea 0,75. Se cere probabilitatea ca magazinul să-şi îndeplinească planul în opt din cele 12 luni ale unui an.

Rezolvare:
Asimilăm situaţia din problemă cu o experienţă având două rezultate posibile:
A = "magazinul îşi îndeplineşte planul" şi $\overline{A}$ = " magazinul nu îşi îndeplineşte planul".
Deoarece probabilitatea ca evenimentul A să se realizeze într-o probă oarecare este constantă, conform observaţiei făcute în breviarul teoretic vom aplica schema bilei revenite.
Avem că $P(A) = p = 0{,}75$ şi $P(\overline{A}) = q = 0{,}25$.

Aplicând formula din breviarul teoretic, obţinem: $P(12:8{,}4) = C_{12}^{8}(0{,}75)^8(0{,}25)^4 = 0{,}193$.

8. Se aruncă două zaruri de zece ori. Să se determine probabilitatea de a se obţine:

a) de exact patru ori suma 7;
b) de cel puţin opt ori suma 7.

Rezolvare:
În experienţa ce constă în aruncarea a două zaruri punem în evidenţă evenimentele:
A = "suma punctelor apărute pe feţele superioare ale zarurilor este 7" şi
$\overline{A}$ = " suma punctelor apărute pe feţele superioare ale zarurilor este diferită de 7".
Probabilităţile producerii acestor evenimente sunt constante în orice probă: $P(A) = p = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$ şi $P(\overline{A}) = q = \frac{5}{6}$, prin urmare vom aplica schema bilei revenite.

a) Probabilitatea de a obţine de exact patru ori suma 7 este: $P(10:4{,}6) = C_{10}^{4}\left(\frac{1}{6}\right)^4\left(\frac{5}{6}\right)^6 = 0{,}054$

b) Probabilitatea de a se obţine de cel puţin opt ori suma 7 este:

$$P(10:8,2)+P(10:9,1)+P(10:10,0)=C_{10}^{8}\left(\tfrac{1}{6}\right)^{8}\left(\tfrac{5}{6}\right)^{2}+C_{10}^{9}\left(\tfrac{1}{6}\right)^{9}\left(\tfrac{5}{6}\right)^{1}+C_{10}^{10}\left(\tfrac{1}{6}\right)^{10}\left(\tfrac{5}{6}\right)^{0}=0{,}0019$$

9. Se aruncă un zar de cinci ori. Care este probabilitatea ca de două ori să obținem fața cu un punct, de două ori fața cu 6 puncte și o dată nici una dintre aceste două fețe?

Rezolvare:
În experiența ce constă în aruncarea unui zar punem în evidență evenimentele:
A = "numărul de puncte de pe fața superioară a zarului este 1 ";
B = "numărul de puncte de pe fața superioară a zarului este 6 ";
C = "numărul de puncte de pe fața superioară a zarului nu este 1 sau 6 ".

Probabilitățile producerii acestor evenimente sunt constante în orice probă: $P(A)=p_1=1/6$, $P(B)=p_2=1/6$ și $P(C)=p_3=4/6$, prin urmare vom aplica schema multinomială. Rezultă:

$$P(5:2,2,1)=\frac{5!}{2!\,2!\,1!}\left(\tfrac{1}{6}\right)^{2}\left(\tfrac{1}{6}\right)^{2}\left(\tfrac{4}{6}\right)^{1}=0{,}015\cdot$$

10. Într-o urnă se află 49 de bile numerotate 1, 2,…, 49. Se fac șase extrageri, fără a pune înapoi bila extrasă anterior.
Să se determine probabilitatea ca patru dintre numerele extrase să fie 7, 26, 14, 8, 3 sau 22.

Rezolvare:
Vom aplica schema bilei nerevenite.
Asimilăm cele 6 numere câștigătoare cu bile albe, iar restul de 43 de numere cu bile negre.
Probabilitatea cerută este: $P(6:4,2)=\dfrac{C_6^4\cdot C_{43}^2}{C_{49}^6}=0{,}000968$

11. Un profesor de matematică pregătește pentru examenul oral al elevilor săi 20 de bilete, dintre care: 10 bilete de algebră, 7 de programare liniară și 3 de analiză matematică. Un elev extrage succesiv 3 bilete, fără a pune înapoi biletul extras. Se cere probabilitatea ca:
a) cele 3 bilete să fie de algebră;
b) un singur bilet din cele trei să fie de programare liniară;
c) cel puțin 2 bilete să fie de analiză ;
d) un bilet să fie de algebră, unul de programare liniară și unul de analiză.

Rezolvare:
a) Aplicăm schema bilei nerevenite, asimilând biletele de algebră cu bilele albe, iar restul biletelor cu bilele negre. Rezultă: $P(3:3,0)=\dfrac{C_{10}^3\cdot C_{10}^0}{C_{20}^3}$.

b) Aplicăm schema bilei nerevenite, considerând biletele de programare liniară ca bile albe, iar restul biletelor ca bile negre. Rezultă: $P(3:1,2)=\dfrac{C_7^1\cdot C_{13}^2}{C_{20}^3}$.

c) Aplicăm schema bilei nerevenite, considerând biletele de analiză ca bile albe, iar restul biletelor ca bile negre. Rezultă că probabilitatea cerută este: $P(3:2,1)+P(3:3,0)=\dfrac{C_3^2\cdot C_{17}^1}{C_{20}^3}+\dfrac{C_3^3\cdot C_{17}^0}{C_{20}^3}$.

d) Aplicăm schema bilei nerevenite pentru urna cu bile de mai multe culori. Rezultă:
$P(3:1,1,1)=\dfrac{C_{10}^1\cdot C_7^1\cdot C_3^1}{C_{20}^3}$.

12. Probabilitatea ca o persoană juridică să găsească o bancă dispusă să o crediteze este 0,8. Să se determine cu ce probabilitate persoana va obține creditul:
a) la a patra încercare;
b) din cel mult 3 încercări;
c) după cel puțin patru încercări nereușite.

Rezolvare:
Vom aplica schema lui Pascal (p = 0,8; q = 0,2). Notăm cu p_k probabilitatea evenimentului ca persoana juridică să obțină creditul exact la încercarea $k,\ \ k\in N^*$.

a) Probabilitatea cerută este: $p_4 = pq^3 = (0{,}8)\cdot(0{,}2)^3 = 0{,}0064$.

b) Pentru a face cel mult trei încercări, persoana juridică trebuie să obțină creditul din prima încercare , din a doua încercare sau din a treia încercare. Probabilitatea cerută este:

$$p_1 + p_2 + p_3 = p + pq + pq^2 = 0{,}8 + 0{,}2\cdot 0{,}8 + (0{,}2)^2\cdot(0{,}8) = 0{,}992.$$

c) Probabilitatea ca persoana juridică să obțină creditul după cel puțin patru încercări nereușite este:

$$p_5 + p_6 + ... + p_n + ... = pq^4 + pq^5 + ... + pq^n + ... = pq^4\cdot\frac{1}{1-q} = q^4 = 0{,}0016$$

13. Se consideră trei urne notate U_1 , U_2 , U_3. Se știe că urna U_1 conține 4 bile albe și 2 bile negre, urna U_2 conține 5 bile albe și 5 bile negre, iar urna U_3 conține 2 bile albe și 4 bile negre. Din fiecare urnă se extrag câte 3 bile, cu revenire. Să se determine probabilitatea de a se obține:

a) dintr-o urnă două bile albe și una neagră, iar din celelalte urne orice altă combinație;

b) toate bilele extrase de aceeași culoare;

c) din două urne numai bile negre, iar din cealaltă urnă orice altă combinație.

Rezolvare:

a) Fie E experiența ce constă în extragerea a 3 bile, cu revenire, dintr-o urnă oarecare. Fie A evenimentul ca în urma efectuării experienței E să obținem două bile albe și o bilă neagră. Notăm cu p_i probabilitatea ca evenimentul A să se realizeze dacă extragerea se face din urna U_i, $i = \overline{1,3}$ și q_i probabilitatea evenimentului contrar.

Folosind schema lui Bernoulli în cazul fiecărei urne, obținem: $p_1 = C_3^2\left(\frac{4}{6}\right)^2\left(\frac{2}{6}\right)^1 = \frac{4}{9}$, $q_1 = 1 - p_1 = \frac{5}{9}$;

$p_2 = C_3^2\left(\frac{5}{10}\right)^2\left(\frac{5}{10}\right)^1 = \frac{3}{8}$, $q_2 = 1 - p_2 = \frac{5}{8}$; $p_3 = C_3^2\left(\frac{2}{6}\right)^2\left(\frac{4}{6}\right)^1 = \frac{2}{9}$, $q_3 = 1 - p_3 = \frac{7}{9}$.

Efectuarea experienței E o singură dată pentru fiecare urnă.poate fi modelată cu ajutorul schemei lui Poisson, asimilând realizarea evenimentului A cu "obținerea unei bile albe" (din schema lui Poisson) și nerealizarea acestuia cu "obținerea unei bile negre".

Probabilitatea ca, în cele 3 produceri ale experienței E, evenimentul A să se realizeze o singură dată este: P (3: 1, 2) = coeficientul lui t^1 din polinomul

$Q(t) = (p_1 t + q_1)\,(p_2 t + q_2)........\,(p_n t + q_n)$. Obținem:

$$P(3:1{,}2) = p_1q_2q_3 + q_1p_2q_3 + q_1q_2p_3 = \frac{4}{9}\cdot\frac{5}{8}\cdot\frac{7}{9} + \frac{5}{9}\cdot\frac{3}{8}\cdot\frac{7}{9} + \frac{5}{9}\cdot\frac{5}{8}\cdot\frac{2}{9} = 0{,}4552.$$

b) Fie A_i evenimentul ca la extragerea din urna U_i să se obțină numai bile albe și N_i evenimentul ca la extragerea din urna U_i să se obțină numai bile negre, $i = \overline{1,3}$. Probabilitatea ca toate cele 9 bile extrase să fie de aceeași culoare este:

$$p = P((A_1 \cap A_2 \cap A_3)\cup(N_1 \cap N_2 \cap N_3)) = P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) + P(N_1 \cap N_2 \cap N_3) =$$
$$= P(A_1)\cdot P(A_2)\cdot P(A_3) + P(N_1)\cdot P(N_2)\cdot P(N_3).$$

Aplicând schema lui Bernoulli în cazul fiecărei urne, obținem: $P(A_1) = C_3^3\left(\frac{4}{6}\right)^3\left(\frac{2}{6}\right)^0 = \frac{8}{27}$;

$P(N_1) = C_3^0\left(\frac{4}{6}\right)^0\left(\frac{2}{6}\right)^3 = \frac{1}{27}$; $P(A_2) = C_3^3\left(\frac{5}{10}\right)^3\left(\frac{5}{10}\right)^1 = \frac{1}{8}$; $P(N_2) = C_3^0\left(\frac{5}{10}\right)^0\left(\frac{5}{10}\right)^3 = \frac{1}{8}$;

$P(A_3) = C_3^3\left(\frac{2}{6}\right)^3\left(\frac{4}{6}\right)^0 = \frac{1}{27}$; $P(N_3) = C_3^0\left(\frac{2}{6}\right)^0\left(\frac{4}{6}\right)^3 = \frac{8}{27}$.

Rezultă că probabilitatea cerută este: $p = \frac{8}{27}\cdot\frac{1}{8}\cdot\frac{1}{27} + \frac{1}{27}\cdot\frac{1}{8}\cdot\frac{8}{27} = \frac{2}{729} = 0{,}00274$.

c) Fie E experiența ce constă în extragerea a 3 bile, cu revenire, dintr-o urnă oarecare. Fie C evenimentul ca în urma efectuării experienței E să obținem trei bile negre. Notăm cu p_i probabilitatea ca evenimentul C să se realizeze dacă extragerea se face din urna U_i, $i = \overline{1,3}$ și q_i probabilitatea evenimentului contrar.

Folosind schema lui Bernoulli în cazul fiecărei urne, obținem: $p_1 = C_3^0\left(\frac{4}{6}\right)^0\left(\frac{2}{6}\right)^3 = \frac{1}{27}$, $q_1 = 1 - p_1 = \frac{26}{27}$;

$p_2 = C_3^0\left(\frac{5}{10}\right)^0\left(\frac{5}{10}\right)^3 = \frac{1}{8}$, $q_2 = 1 - p_2 = \frac{7}{8}$; $p_3 = C_3^0\left(\frac{2}{6}\right)^0\left(\frac{4}{6}\right)^3 = \frac{8}{27}$, $q_3 = 1 - p_3 = \frac{19}{27}$.

Efectuarea experienței E o singură dată pentru fiecare urnă poate fi modelată cu ajutorul schemei lui Poisson, asimilând realizarea evenimentului C cu "obținerea unei bile albe"(din schema lui Poisson) și nerealizarea acestuia cu "obținerea unei bile negre"(din schema lui Poisson).

Probabilitatea ca, în cele 3 produceri ale experienţei E, evenimentul C să se realizeze exact de două ori este: $P(3{:}\ 2,1)$ = coeficientul lui t^2 din polinomul
$Q(t) = (p_1 t + q_1)(p_2 t + q_2)........(p_n t + q_n)$. Obţinem:

$$P(3:2,1) = p_1 p_2 q_3 + p_1 q_2 p_3 + q_1 p_2 p_3 = \frac{1}{27}\cdot\frac{1}{8}\cdot\frac{19}{27} + \frac{1}{27}\cdot\frac{7}{8}\cdot\frac{8}{27} + \frac{26}{27}\cdot\frac{1}{8}\cdot\frac{8}{27} = 0{,}0485$$

PROBLEME PROPUSE

1. Într-un depozit sunt patru seturi a câte 12 farfurii. Prezintă defecte de fabricaţie: două farfurii din primul set, trei farfurii din al doilea set, o farfurie din al treilea set şi patru farfurii din setul patru. Din fiecare set se ia câte o farfurie. Care este probabilitatea să rezulte:
a) trei farfurii fără defecte şi una cu defecte;
b) cel puţin trei farfurii fără defecte de fabricaţie.

2. S-a stabilit că în medie 70% din piesele produse de o maşină automată sunt de calitatea I, 20% de calitatea a II-a şi restul de calitatea a III-a. Să se determine probabilitatea ca extrăgând simultan patru piese dintr-un lot de 20 piese produse de această maşină să apară:
a) două piese de calitatea I şi câte una de celelalte două calităţi;
b) toate piesele de aceeaşi calitate;
c) nici o piesă de calitatea a III-a;
d) cel puţin o piesă de calitatea I;
e) cel mult două piese de calitatea a III-a.

3. Patru camioane transportă fructe de calităţi diferite, ambalate în lăzi identice. Fructele de calitatea *I* deţin următoarele ponderi: în primul camion 95%, în al doilea 80%, în al treilea 75% iar în al patrulea 70%. Se ia câte o ladă din fiecare camion pentru recepţie calitativă. Se cere probabilitatea ca:
a) trei dintre ele să nu fie de calitatea *I*;
b) cel mult două lăzi să conţină fructe de calitatea *I*.

4. S-a stabilit că, în medie, din trei persoane care se adresează unei agenţii de turism, una cumpără bilete şi două nu cumpără. Să se determine probabilitatea ca din opt persoane ce se adresează agenţiei:
a) trei să cumpere şi restul să nu cumpere bilete;
b) toate să cumpere;
c) cel mult trei să nu cumpere;
d) cel puţin patru să cumpere.

5. Se dau patru urne; U_1 conţine 3 bile albe şi 4 bile negre, U_2 conţine 2 bile albe şi 5 bile negre, U_3 conţine 6 bile albe şi 2 bile negre, U_4 conţine 4 bile albe şi 3 bile negre. Din prima urnă se fac 3 extrageri cu revenire, iar din celelalte trei se face câte o extragere. Se cere probabilitatea să obţinem:
a) 2 bile albe şi o bilă neagră din prima urnă sau 2 bile albe şi una neagră din următoarele 3 urne;
b) toate bilele de aceeaşi culoare;
c) numai bile albe din prima urnă sau din următoarele trei urne.

6. La deschiderea bursei se pun în vânzare 100 pachete de acţiuni, dintre care 30 sunt ale societăţii *A*, 50 sunt ale societăţii *B*, iar restul sunt ale societăţii *C*. Ştiind că până la momentul închiderii bursei s-au vândut 30 pachete de acţiuni, se cere probabilitatea ca acestea să provină:
a) 5 de la *A*, 7 de la *B* şi restul de la *C*;
b) toate de la aceeaşi societate;
c) 6 de la *B* şi cel puţin 2 de la *C*;
d) nici una de la *B*;
e) 3 de la *A* şi cel mult 2 de la *B*.

7. Se experimentează trei prototipuri de aparate, câte unul din fiecare prototip. Probabilitatea ca un prototip să corespundă este de respectiv 0,8 ; 0,6 şi 0,5. Să se afle probabilitatea ca:
a) toate cele 3 aparate să corespundă;
b) un singur aparat să nu corespundă;
c) cel puţin 2 aparate să corespundă;
d) cel mult două aparate să nu corespundă.

8. Se aruncă un zar până la apariţia feţei cu 6 puncte. Să se determine probabilitatea ca:
a) faţa cu 6 puncte să apară pentru prima dată la a trei aruncare;
b) faţa cu 6 puncte să nu apară în una din primele cinci aruncări;
c) cel mult în primele 4 aruncări să apară un număr diferit de 6.

9. Într-un atelier sunt trei maşini. Prima dă 0,9% rebuturi, a doua 1% iar a treia 1,3%. Se ia la întâmplare câte o piesă de la fiecare maşină. Să se determine probabilitatea ca cel puţin două din piesele luate să fie corespunzătoare.

10. Un studiu statistic privind rentabilitatea agenţilor economici la sfârşitul unui an relevă că în medie 70% din aceştia au o activitate eficientă (încasările sunt strict mai mari decât cheltuielile), 10% dau faliment (încasările sunt strict mai mici decât cheltuielile) şi 20% ating pragul minim de rentabilitate (încasările sunt egale cu cheltuielile). În ipoteza unei economii stabile se anticipează rezultatele activităţii după un an la 10 firme. Să se determine probabilitatea ca:
a) şase firme să aibă o activitate eficientă, 3 firme să atingă pragul minim de rentabilitate şi o firmă să dea faliment;
b) cel puţin şase firme să aibă o activitate eficientă şi cel mult o firmă să dea faliment;
c) nici o firmă să nu dea faliment.

11. La un magazin, în trei rafturi, se găsesc cămăşi de trei culori: în primul raft cămăşi albe, 7 de talia I şi 3 de talia II, în al doilea raft cămăşi albastre, 4 de talia I şi 8 de talia II, iar în al treilea raft cămăşi roşii, 2 de talia I şi 6 de talia II. Un cumpărător cere câte o cămaşă din fiecare raft. Să se afle probabilitatea ca:
a) două cămăşi să fie de talia I şi una să fie de talia II;
b) toate cămăşile să fie de talia I;
c) cel puţin una să fie de talia I;
d) toate să fie de aceeaşi talie.

12. Se aruncă o monedă până la apariţia stemei. Să se determine probabilitatea ca:
a) stema să apară pentru prima dată la a şaptea aruncare;
b) stema să apară pentru prima dată în una din primele 6 aruncări;
c) cel mult în primele 4 aruncări să nu apară stema;
d) stema să nu apară în una din primele 5 aruncări.

13. Într-o cutie sunt 100 de becuri, dintre care 60 roşii, 30 galbene, 10 albastre. O persoană cumpără 10 becuri. Care este probabilitatea ca distribuţia anterioară să se regăsească în acest eşantion de 10 bucăţi?

14. Doi adversari cu şanse egale joacă şah. Pentru unul dintre ei, ce este mai probabil să câştige:
a) trei partide din patru jucate sau şase partide din opt jucate?
b) cel puţin trei partide din patru jucate sau cel puţin şase partide din opt jucate?

15. Într-o urnă sunt 15 bile, dintre care 4 sunt albe, 5 negre şi 6 roşii. Se extrag 3 bile fără revenire. Se cere probabilitatea ca:
a) toate să fie de aceeaşi culoare;
b) primele două să fie roşii şi a treia să fie neagră;
c) să fie două de o culoare şi una de altă culoare;
d) prima şi ultima să fie albe;
e) bilele extrase să fie de culori diferite.

16. Din producţia realizată de o maşină automată care realizează 5% piese defecte se extrag la întâmplare piese până la obţinerea primei piese defecte. Se cere probabilitatea ca:
a) prima piesă defectă să se obţină la a zecea extragere;
b) cel mult primele 5 piese să fie corespunzătoare;
c) prima piesă defectă să nu apară în una din primele 4 extrageri.

17. O societate comercială are şase debitori. Probabilitatea ca la sfârşitul unei luni un debitor să fie solvabil este 0,7. Să se determine probabilitatea ca:
a) toţi debitorii să fie solvabili;
b) cel puţin doi debitori să fie solvabili;
c) patru debitori să nu fie solvabili;
d) cel mult 3 debitori să nu fie solvabili.

18. Într-o pungă se găsesc 50 bilete de loterie, dintre care 7 sunt câştigătoare. Se cere:
a) probabilitatea ca din 10 bilete extrase nici unul să nu fie câştigător;
b) probabilitatea ca din 10 bilete extrase unul să fie câştigător;
c) câte bilete trebuie extrase pentru ca şansa de a găsi unul câştigător sa fie de cel puţin 50%?

19. La un magazin se vând patru sortimente ale unui anumit produs, notate s_1, s_2, s_3 şi s_4, care au următoarele ponderi în volumul vânzărilor: 10%, 20%, 30% şi respectiv 40%. Se consideră 20 de cumpărători dintre clienţii magazinului şi se anticipează solicitările acestora. Se cere probabilitatea ca:
a) 5 să cumpere s_1, 4 să cumpere s_2, 3 să cumpere s_3 şi restul s_4;
b) să nu fie cumpărate s_2 şi s_4;
c) 8 să cumpere s_1 sau s_3 şi restul celelalte sortimente;

d) 3 să cumpere s_3 şi cel puţin 2 să cumpere s_4.

20. Probabilitatea ca într-o anumită regiune o zi din luna iunie să fie ploioasă este 0,2. Să se determine probabilitatea ca în regiunea respectivă, într-o săptămână din luna iunie, să fie:
a) numai trei zile ploioase;
b) cel puţin patru zile fără ploaie;
c) nici o zi ploioasă;
d) cel mult două zile ploioase.

21. La un serviciu financiar sunt verificate lucrările realizate de trei contabili, care lucrează fără greşeală în proporţie de 97%, 96% şi respectiv 95%. Se ia la întâmplare câte o lucrare de la fiecare contabil. Să se afle probabilitatea ca:
a) toate cele trei lucrări să fie bune;
b) o singură lucrare să fie greşită;
c) cel mult două lucrări să fie bune.

22. Patru universităţi oferă respectiv câte 3, 5, 7 şi 9 burse de studiu. O anumită facultate primeşte 6 astfel de burse şi, care sunt trase la sorţi din totalul celor 24 de burse. Cu ce probabilitate cele 6 burse ar putea să provină:
a) de la aceeaşi universitate;
b) una la prima, două la a doua, două la a treia, una la a patra universitate;
c) şase la a patra universitate;
d) cel puţin câte o bursă la fiecare din primele 3 universităţi şi 2 la a patra universitate.

23. Dintr-o urnă ce conţine bile numerotate de la 1 la 10 se fac extrageri cu revenire până la apariţia unui număr divizibil cu 3. Să se determine probabilitatea ca:
a) primul număr divizibil cu 3 să apară la a treia extragere;
b) în primele 5 extrageri să nu apară un număr divizibil cu 3;
c) cel mult în primele 4 extrageri să apară un număr ce nu se divide cu 3.

24. În trei loturi de produse, 4%, 5% respectiv 3% sunt defecte. Se extrage la întâmplare câte un produs din fiecare lot. Să se afle probabilitatea ca:
a) toate cele 3 produse să fie corespunzătoare;
b) un singur produs să fie defect;
c) cel puţin 2 produse să fie corespunzătoare;
d) cel mult două produse să fie defecte.

25. Se dau 3 urne astfel: U_1 conţine 5 bile albe şi 5 bile negre, U_2 conţine 4 bile albe şi 6 bile negre, U_3 conţine 4 bile albe şi 5 bile negre. Din fiecare urnă se extrag câte 5 bile, cu revenire. Să se determine probabilitatea ca din două urne să obţinem 2 bile albe şi 3 bile negre, iar din cealaltă să obţinem orice altă combinaţie.

26. Se consideră urnele din problema precedentă. Din fiecare urnă se extrage câte o bilă, punându-se înapoi în urnă bila extrasă. Dacă se efectuează de 5 ori acest experiment care este probabilitatea ca de trei ori să obţinem o bilă albă şi două bile negre?

27. Se aruncă două zaruri pe o suprafaţă netedă de mai multe ori. Să se calculeze probabilitatea ca exact la a patra aruncare suma punctelor de pe feţele zarurilor să fie 8.

28. Într-o urnă sunt 15 bile albe şi 10 bile negre. Se extrage câte o bilă, se notează culoarea şi se pune înapoi în urnă. Cu ce probabilitate prima bilă neagră se obţine:
a) din prima încercare;
b) la a patra încercare;
c) cel mult la a treia încercare;
d) cel puţin la a patra încercare.

29. Patru studenţi care se prezintă la un examen au pregătit respectiv 12, 24, 15 şi 21 dintre cele 30 de subiecte indicate de către profesor. La examen fiecare student primeşte câte un subiect.
Să se determine probabilitatea ca:
a) cel puţin trei studenţi să rezolve corect subiectul;
b) cel mult trei studenţi să nu rezolve corect subiectul;
c) cel puţin doi studenţi să rezolve corect subiectul, ştiind că cel mult trei au rezolvat corect.

30. Se consideră următoarele urne: U_1, care conţine o bilă albă şi 9 bile negre, U_2, care conţine 2 bile albe şi 8 bile negre, U_3, care conţine 3 bile albe şi 7 bile negre, U_4, care conţine 4 bile albe şi 6 bile negre, U_5, care conţine 5 bile albe şi 5 bile negre.
a) Din primele patru urne se extrage câte o bilă, iar din ultima se extrag 4 bile cu revenire. Să se determine probabilitatea ca toate bilele extrase să fie albe.

b) Din prima urnă se extrag 4 bile fără revenire, iar din celelalte urne se extrage câte o bilă. Să se afle probabilitatea ca toate bilele extrase să fie de aceeaşi culoare.

c) Din urna U_3 se extrag 4 bile fără revenire, iar din celelalte urne se extrage câte o bilă. Să se afle probabilitatea de a obţine 2 bile albe şi 2 negre din U_3 sau 2 bile albe şi 2 negre din urnele rămase.

31. Se aruncă o monedă de 8 ori. Se cere probabilitatea de a obţine de 4 ori stema şi de 4 ori banul

32. Se aruncă un zar de şase ori. Care este probabilitatea să obţinem de cel puţin patru ori o faţă cu un număr mai mic de 4 puncte?

33. Se aruncă de 12 ori un zar. Care este probabilitatea ca fiecare faţă să apară de 2 ori?

34. Se aruncă cinci monede. Care este probabilitatea ca 3 dintre ele să cadă cu banul deasupra?

35. Se consideră trei urne notate U_1 , U_2 , U_3. Se ştie că urna U_i conţine $4i$ bile albe şi i+3 bile negre, $i = \overline{1,3}$. Din fiecare urnă se extrag câte 4 bile, cu revenire. Se cere probabilitatea de a se obţine:
a) dintr-o urnă trei bile albe şi una neagră, iar din celelalte urne orice altă combinaţie;
b) toate bilele extrase de aceeaşi culoare;
c) din două urne numai bile negre, iar din cealaltă urnă orice altă combinaţie.

36. Se consideră o urnă ce conţine 3 bile albe şi 7 bile negre, două urne care conţin câte 6 bile albe şi 4 bile negre, trei urne care conţin câte 2 bile albe şi 8 bile negre şi patru urne care conţin câte 5 bile albe şi 5 bile negre. Din una din aceste urne se extrag 4 bile, fără revenire. Se cere probabilitatea ca:
a) din cele patru bile extrase, o bilă să fie albă şi 3 negre;
b) toate bilele extrase să fie negre;
c) toate bilele extrase să fie albe.

37. Se consideră o urnă ce conţine 8 bile albe şi 2 negre, două urne care conţin câte 5 bile albe şi 5 negre, trei urne care conţin câte 2 bile albe şi 7 negre şi patru urne care conţin câte 6 bile albe şi 4 negre. Din una din aceste urne se extrag 3 bile, cu revenire. Se cere probabilitatea ca din cele 3 bile:
a) două bile să fie albe şi una neagră;
b) toate să fie negre;
c) toate să fie albe.

38. Dintre studenţii unei grupe care se prezintă la un examen, 3 studenţi cunosc în întregime materia predată, 8 cunosc 90% din materia predată, 6 cunosc 70%, 4 cunosc 50%, 3 cunosc 30%, iar un student nu cunoaşte nimic din materia predată. La examen, un student al acestei grupe răspunde bine la 4 întrebări, iar la a cincea greşeşte. Să se determine probabilitatea ca el să fie dintre studenţii care cunosc toată materia, respectiv 90%, 70%, 50%, 30%, 0% din întreaga materie.

39. Se aruncă o pereche de zaruri de zece ori. Să se determine probabilitatea de a obţine:
a) exact de 4 ori un total de 7 puncte;
b) de cel puţin două ori un total de 10 puncte;
c) o singură dată un total de cel puţin 6 puncte;
d) la toate aruncările efectuate, produsul numereler de puncte apărute pe feţele superioare ale zarurilor să fie un număr impar.

40. Dintr-o urnă ce conţine 12 bile albe şi 8 bile negre se extrag de patru ori câte 6 bile simultan, de fiecare dată punându-se înapoi în urnă cele 6 bile extrase. Se cere probabilitatea de a se obţine:
a) de fiecare dată un număr egal de bile albe şi bile negre;
b) 4 bile albe şi 2 bile negre de cel puţin trei ori.

41. Într-un magazin, în cutia C_1 se găsesc 35 becuri corespunzătoare şi 5 becuri defecte, iar în cutia C_2 se găsesc 30 becuri corespunzătoare şi 10 becuri defecte. Un cumpărător ia dintr-o cutie la întâmplare 10 becuri. Să se determine probabilitatea ca din cele 10 becuri:
a) toate să fie corespunzătoare;
b) cel puţin unul să fie corespunzător;
c) cel mult două să fie defecte.

42. Lotul L_1 conţine 30 de produse, 24 corespunzătoare şi restul defecte, iar lotul L_2 conţine 20 de produse, 12 corespunzătoare şi restul defecte. Din fiecare lot se iau câte patru produse.
Să se determine probabilitatea ca:
a) toate produsele extrase din primul lot să fie corespunzătoare şi unul singur din al doilea lot să fie defect;
b) cel mult două din totalul produselor extrase să fie defecte.

43. Se dau trei urne notate U_1 , U_2 , U_3. Se ştie că urna U_i conţine $3i$ bile albe şi $5 - i$ bile negre, $i = \overline{1,3}$. Se consideră următoarea experienţă: din fiecare urnă se extrage câte o bilă, se notează culoarea fiecărei bile extrase, apoi fiecare bilă se pune în urna din care a fost extrasă. Această experiență se efectuează de cinci ori. Să se determine probabilitatea de a se obține:

a) la o singură efectuare a experienței numai bile albe;
b) de fiecare dată câte o bilă albă și două negre;
c) de cel mult două ori numai bile negre;
d) să nu apară bile negre la nici o efectuare a experienței.

44. Se consideră trei urne notate U_1, U_2, U_3. Se știe că urna U_i conține $8-i$ bile albe și $4i$ bile negre, $i=\overline{1,3}$. Din fiecare urnă se extrag câte 3 bile simultan. Se cere probabilitatea de a se obține:

a) din două urne numai bile albe, iar din cealaltă urnă orice altă combinație;
b) toate bilele extrase de aceeași culoare;
c) dintr-o urnă o bilă albă și două negre, iar din celelalte urne orice altă combinație;
d) o singură bilă albe din cele 9 bile extrase.

45. Un fumător cumpără două cutii de chibrituri. Apoi, de fiecare dată când are nevoie scoate la întâmplare una sau alta dintre cutii.

a) Care este probabilitatea ca în momentul în care constată că una din cutii este goală, cealaltă cutie să mai conțină fix ”*k*” bețe, știind că fiecare cutie a conținut inițial ”*n*” bețe?

b) Utilizând rezultatul de la punctul precedent, să se deducă formula:

$C_{2n}^{n}+2C_{2n-1}^{n}+2^{2}C_{2n-2}^{n}+....+2^{n}C_{n}^{n}=2^{2n}$ (*Problema lui Banach*).

Indicații. Se aplică: **1.** schema lui Poisson; **2.** schema multinomială; **3.** schema lui Poisson; **4.** schema bilei revenite; **5.** schema bilei revenite, schema lui Poisson și formule de calcul cu probabilități; **6.** schema bilei nerevenite; **7.** schema lui Poisson; **8.** formule de calcul cu probabilități sau schema lui Pascal; **9.** schema lui Poisson; **10.** schema multinomială; **11.** schema lui Poisson; **12.** formule de calcul cu probabilități sau schema lui Pascal; **13.** schema bilei nerevenite; **14.** schema bilei revenite; **15.** schema bilei nerevenite; **16.** formule de calcul cu probabilități sau schema lui Pascal; **17.** schema bilei revenite; **18.** schema bilei nerevenite; **19.** schema multinomială; **20.** schema bilei revenite; **21.** schema lui Poisson; **22.** schema bilei nerevenite; **23.** formule de calcul cu probabilități sau schema lui Pascal; **24.** schema lui Poisson; **25.** schema bilei revenite și schema lui Poisson; **26.** schema lui Poisson și schema bilei revenite; **27.** formule de calcul cu probabilități; **28.** formule de calcul cu probabilități sau schema lui Pascal; **29.** schema lui Poisson; **30.** schema lui Poisson și schema bilei revenite; **31.** schema bilei revenite; **32.** schema bilei revenite; **33.** schema multinomială; **34.** schema bilei revenite; **35.** schema bilei revenite și schema lui Poisson; **36.** schema bilei nerevenite și formula probabilității totale; **37.** schema bilei revenite și formula probabilității totale; **38.** schema bilei revenite și formula probabilității totale; **39.** schema bilei revenite; **40.** schema bilei nerevenite și schema bilei revenite; **41.** schema bilei nerevenite și formula probabilității totale; **42.** schema bilei nerevenite și formule de calcul cu probabilități; **43.** schema lui Poisson și schema bilei revenite; **44.** schema bilei nerevenite și schema bilei revenite.