§1. Mulțimi ordonate

Definiția 1. Fie A o mulțime nevidă. O relație binară R pe A se numește relație de ordine (parțială) dacă pentru orice $x, y, z \in A$ sunt verificate următoarele axiome

(O1) xRx (reflexivitatea)

(O2) Dacă xRy și yRz atunci $x = y$ (antisimetria)

(O3) Dacă xRy și yRz atunci xRz (tranzitivitatea)

Dacă R mai verifică și axioma

(O4) Pentru orice $x, y \in A$, xRy sau yRx (= x și y sunt compatibile)

atunci R se numește relație de ordine totală. ~~~~

O relație binară R se numește relație de preordine dacă verifică (O1) și (O3).

O pereche (A, R) în care A este o mulțime nevidă și R este o relație de ordine pe A se numește mulțime (parțial) ordonată; dacă R este preordine atunci (A, R) se numește mulțime preordonată iar dacă R este ~~~~ ordine totală (A, R) se numește mulțime total ordonată sau lanț.

Exemple (1) Mulțimile $(\mathbb{R}, \leq)$, $(\mathbb{Q}, \leq)$, $(\mathbb{Z}, \leq)$, $(\mathbb{N}, \leq)$ sunt lanțuri;

(2) Dacă X este o mulțime nevidă atunci $(\mathcal{P}(X), \subseteq)$ este o mulțime ordonată; ea este total ordonată dacă și numai dacă X este formată dintr-un singur element.

(2) Dacă X este o mulțime nevidă atunci $(X, =)$ este o mulțime ordonată (în acest caz R este $\Delta = \{(x, x) \mid x \in X\}$).

(3) Dacă pe mulțimea $\mathbb{N}^*$ definim $x \preceq y \Leftrightarrow x \mid y$ atunci $(\mathbb{N}^*, \preceq)$ este o mulțime ordonată dar nu total ordonată;

(4) Pe mulțimea $\mathbb{C}$ definim relația binară $\leq$

$$z_1 = a_1 + ib_1 \leq z_2 = a_2 + ib_2 \Leftrightarrow a_1 \leq a_2 \text{ și } b_1 \leq b_2 .$$

Atunci $(\mathbb{C}, \leq)$ este o mulțime ordonată dar nu total ordonată.

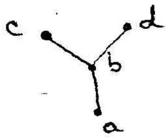
(5) Relația $x \preceq y \Leftrightarrow x \mid y$ definită pe $\mathbb{Z}^*$ este o relație de preordine care nu este o relație de ordine.

(6) Fie A mulțimea ofițerilor dintr-o unitate militară. Pentru $x, y \in A$ spunem că $x \leq y$ dacă gradul lui x este mai mic sau egal cu gradul lui y. Atunci $(A, \leq)$ este o mulțime preordonată care nu este ordonată.

<u>Obs.</u> O relație de ordine pe o mulțime finită se va reprezenta grafic. Dacă

$A = \{a, b, c, d\}$ și $R = \{(a,a), (b,b), (c,c), (d,d), (a,b), (a,c), (a,d), (b,c), (b,d)\}$

atunci (A, R) este o mulțime ordonată ce va fi reprezentată grafic astfel



<u>Convenție</u>. O relație de ordine arbitrară pe o mulțime A va fi notată de acum înainte prin $\leq$.

Fie o mulțime finită $A = \{x_1, \dots, x_n\}$ și R o relație binară pe A. Vom identifica mulțimea A cu mulțimea $\{1, \dots, n\}$ iar pe R cu o relație pe $\{1, \dots, n\}$. Se definește o matrice booleană $M_R = (m_{ij})$ de ordinul n prin

$$m_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{dacă } (i,j) \in R \\ 0, & \text{dacă } (i,j) \notin R. \end{cases}$$

Se observă că mulțimea relațiilor binare pe $A = \{1, \dots, n\}$ este în corespondență biunivocă cu mulțimea matricilor booleene de ordinul n. Atunci o relație binară pe A va fi dată prin matricea booleană asociată. De exemplu, relația R definită mai sus pe $A = \{1, 2, 3, 4\}$, unde $a = 1$, $b = 2$, $c = 3$ și $d = 4$ va fi reprezentată de

$$M_R = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Condițiile din Definiția 1 pot fi convertite cu ușurință în limbaj de matrici booleene

(Q1) $m_{ii} = 1$ pentru orice $i = 1, \dots, n$

(Q2) M_R este matrice antisimetrică ($m_{ij} = 1$ implică $m_{ji} = 0$)

(Q3) $m_{ij} = 1, m_{jk} = 1$ implică $m_{ik} = 1$, pentru orice $i, j, k \in \{1, \dots, n\}$

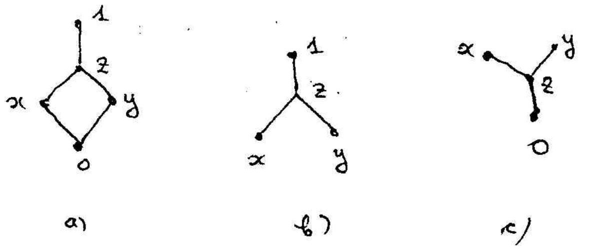
(Q3) Pentru orice $(i,j) \in \{1, \dots, n\}$, $m_{ij} = 1$ sau $m_{ji} = 1$.

- Program pentru determinarea tuturor relațiilor de ordine pe o mulțime finită

Fie $(A,\leq)$, $(B,\leq)$ două mulțimi ordonate. O funcție $f: A \to B$ se numește <u>izotonă</u> dacă $x \leq y$ implică $f(x) \leq f(y)$ pentru orice $x, y \in A$.

Fie $(A,\leq)$ o mulțime ordonată. Un element $u \in A$ se numește <u>prim element</u> (resp. <u>ultim element</u>) dacă $u \leq x$ (resp. $x \leq u$) pentru orice $x \in A$. Atât primul element cât și ultimul element al unei mulțimi ordonate sunt unice (atunci când există). Primul element va fi notat întotdeauna cu 0, iar ultimul element cu 1.

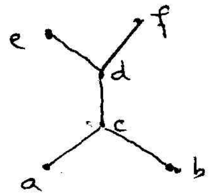
<u>Ex.</u> Considerăm mulțimile ordonate



În cazul a) există prim și ultim element, în cazul b) numai ultim element, iar în cazul c) numai prim element.

Fie X o submulțime ~~nevidă~~ a unei mulțimi ordonate A. Un element $a \in A$ este ~~un~~ <u>minorant</u> (resp. <u>majorant</u>) al lui X dacă $a \leq x$ (resp. $x \leq a$) pentru orice $x \in X$.

<u>Ex.</u> Considerăm mulțimea ordonată



Dacă $X = \{c, d\}$ atunci $\{a, b, c\}$ este mulțimea minoranților lui X iar $\{d, e, f\}$ mulțimea majoranților săi.

Atât mulțimea majoranților, cât și cea a minoranților ~~poate~~ fi vidă.

Supremumul $\sup$ unei mulțimi $X \subseteq A$ este cel mai mic majorant al lui X; dual, infimumul $\inf X$ al lui X este cel mai mare minorant al lui X. Atunci relația $a = \sup X$ este caracterizată de proprietățile

(i) $x \leq a$ pentru orice $x \in X$;

(ii) Dacă $x \leq b$ pentru orice $x \in X$ atunci $a \leq b$.

Relația $a = \inf X$ se reprezintă prin condiții duale.

Dacă $X=\{x_1,\dots,x_n\}$ vom nota $\sup X = \sup(x_1,\dots,x_n)$ și $\inf X = \inf(x_1,\dots,x_n)$.

~~O mulțime ordonată $(A, \leq)$ se numește inductivă dacă orice parte total ordonată a sa admite un majorant.~~

~~Axioma lui Zorn Orice~~

Fie $(A, \leq)$ o mulțime ordonată. Un element *maximal* (resp. *minimal*) este un element m al lui A cu proprietatea că $m \leq a$ (resp. $a \leq m$) implică $a = m$. O mulțime ordonată poate avea mai multe elemente maximale sau mai multe elemente minimale.

Exemple 1) $(\mathbb{R}, \leq)$ nu are niciun element maximal și niciun element minimal.

2) În $(\mathcal{P}(X), \subseteq)$ elementele minimale sunt de forma $\{x\}$, $x \in X$ iar X element maximal.

Ultimul element al unei mulțimi ordonate este și element maximal, iar primul element este element minimal. Reciprocele acestor afirmații nu sunt adevărate.

O mulțime ordonată $(A, \leq)$ se numește inductivă dacă orice parte total ordonată a sa admite un majorant.

Axioma lui Zorn. Orice mulțime ordonată inductivă admite un element maximal.

§2. Latici

<u>Definiția 1.</u> O mulțime ordonată $(L, \leq)$ se numește <u>latice</u> dacă pentru orice $x, y \in A$ există $\inf(x, y)$ și $\sup(x, y)$.

<u>Prop. 2.</u> Fie o latice $(L, \leq)$. Pentru orice $x, y \in L$ notăm $x \wedge y = \inf(x, y)$ și $x \vee y = \sup(x, y)$.

Atunci în L sunt verificate următoarele egalități:

(L1) $x \wedge x = x$; $x \wedge x = x$; (idempotența)

(L2) $x \wedge y = y \wedge x$; $x \vee y = y \vee x$; (comutativitatea)

(L3) $(x \wedge y) \wedge z = (x \wedge y) \wedge z$ (asociativitatea)

$(x \vee y) \vee z = (x \vee y) \vee z$

(L4) $x \wedge (x \vee y) = x$; $x \vee (x \wedge y) = x$ (absorbția).

<u>Dem.</u> Vom demonstra, spre exemplificare, asociativitatea supremumului. Arătăm că $(x \vee y) \vee z = \sup(x, y, z)$. Aceasta este echivalent cu următoarele două condiții

(a) ~~...~~ $x, y, z \leq (x \vee y) \vee z$

(b) Dacă $x, y, z \leq a$ atunci $(x \vee y) \vee z \leq a$.

Prima condiție este evidentă. Dacă $x, y, z \leq a$ atunci $x \vee y \leq a$ (pentru că $x \vee y = \sup(x, y)$) și $z \leq a$, deci $(x \vee y) \vee z = \sup(x \vee y, z) \leq a$.

Analog $x \vee (y \vee z) = \sup(x, y, z)$, deci $(x \vee y) \vee z = x \vee (y \vee z)$.

~~Propr.~~ Fie $(L, \vee, \wedge)$ o structură algebrică în care $\vee, \wedge$ sunt două operații binare ce verifică proprietățile (L1)-(L4) de mai sus. Vom observa că pentru orice $x, y \in L$ avem echivalența

~~$x \leq y$~~ $x \wedge y = x \Longleftrightarrow x \vee y = y$.

Într-adevăr, dacă $x \wedge y = x$ atunci $x \vee y = (x \wedge y) \vee y = x$; dacă $x \vee y = y$ atunci $x \wedge y = (x \vee y) \wedge x = x$. Echivalența demonstrată ne permite să definim următoarea relație binară pe L:

(1) $x \leq y \Leftrightarrow x \wedge y = x \Leftrightarrow x \vee y = y$.

<u>Prop. 3.</u> $(L, \leq)$ este o latice în care $\sup(x, y) = x \vee y$ și $\inf(x, y) = x \wedge y$ pentru orice $x, y \in L$.

Dem. Verificăm întâi că $\leq$ este o relație de ordine

- $a \leq a$ rezultă din $a \wedge a = a$;

  $a \leq b,\ b \leq a \Rightarrow a = a \wedge b = b \wedge a = b$.

  $a \leq b,\ b \leq c \Rightarrow a \wedge b = a,\ b \wedge c = b$

  $\Rightarrow a = a \wedge (b \wedge c) = (a \wedge b) \wedge c = a \wedge c$

  $\Rightarrow a \leq c$.

Pentru a arăta că $a \wedge b = \inf(x, y)$ va trebui să stabilim relațiile

$a \wedge b \leq a,\ a \wedge b \leq b$

$x \leq a,\ x \leq b \Rightarrow x \leq a \wedge b$.

Primele două inegalități rezultă din $(a \wedge b) \wedge a = a \wedge b$, $(a \wedge b) \wedge b = a \wedge b$, iar cealaltă relație conform implicației

$x \wedge a = x,\ x \wedge b = x \Rightarrow x \wedge (a \wedge b) = (x \wedge a) \wedge b = x \wedge b = x$.

În mod analog se arată că $a \vee b = \sup(x, y)$.

Observație. Propozițiile 2 și 3 arată că avem două definiții echivalente ale conceptului de latice: prima, în care o latice este o mulțime ordonată $(L, \leq)$ cu proprietatea că orice mulțime de două elemente admite infimum și supremum și a doua, în care o latice apare ca o structură algebrică $(L, \vee, \wedge)$ ce satisface axiomele (L_1)-(L_4).

O mulțime ordonată $(L, \leq)$ în care orice submulțime a lui L admite infimum și supremum se numește latice completă. Dacă $\{x_i\}_{i \in I}$ este o mulțime de elemente din L vom folosi notațiile

$$\bigvee_{i \in I} x_i = \sup\{x_i\}_{i \in I} \quad \text{și} \quad \bigwedge_{i \in I} x_i = \inf\{x_i\}_{i \in I}.$$

Observație (a) Într-o latice $(L, \vee, \wedge)$ sunt adevărate proprietățile

$x \leq y \Rightarrow a \wedge x \leq a \wedge y$ și $a \vee x \leq a \vee y$

$x \leq y,\ a \leq b \Rightarrow x \wedge a \leq y \wedge b$ și $x \vee a \leq y \vee b$

(b) Dacă $(L, \vee, \wedge)$ este o latice cu prim element 0 și cu ultim element 1 atunci $0 \wedge x = 0$, $0 \vee x = x$, $1 \wedge x = x$ și $1 \vee x = 1$ pentru orice $x \in L$.

Notație. Conform asociativității operațiilor $\vee, \wedge$ dintr-o latice vom putea nota

$$\bigvee_{i=1}^{n} x_i = x_1 \vee \dots \vee x_n = x_1 \vee (x_2 \vee \dots \vee (x_{n-1} \vee x_n) \dots) = \sup(x_1, \dots, x_n)$$

$$\bigwedge_{i=1}^{n} x_i = x_1 \wedge \dots \wedge x_n = x_1 \wedge (x_2 \wedge \dots \wedge (x_{n-1} \wedge x_n) \dots) = \inf(x_1, \dots, x_n).$$

Prop. 4. Într-o latice L sunt echivalente afirmațiile următoare

(i) $(x\wedge y)\vee(x\wedge z)=x\wedge(y\vee z)$ pentru orice $x,y,z\in L$;

(ii) $(x\vee y)\wedge(x\vee z)=x\vee(y\wedge z)$ pentru orice $x,y,z\in L$;

(iii) $(x\vee y)\wedge z\le x\vee(y\wedge z)$ pentru orice $x,y,z\in L$.

Dem. (i)$\Rightarrow$(ii) Vom arăta că orice elemente a,b,c ale lui L verifică (ii). În (i) vom pune $x=a\vee b$, $y=a$ și $z=c$

$$\begin{aligned}(a\vee b)\wedge(a\vee c)&=[(a\vee b)\wedge a]\vee[(a\vee b)\wedge c]\\&=a\vee[(a\vee b)\wedge c] &&\text{(conform (L4))}\\&=a\vee[(a\wedge c)\vee(b\wedge c)] &&\text{(conform (i))}\\&=[a\vee(a\wedge c)]\vee(b\wedge c)\\&=a\vee(b\wedge c). &&\text{(conform (L4))}\end{aligned}$$

(ii)$\Rightarrow$(iii) Din $z\le x\vee z$ rezultă $(x\vee y)\wedge z\le(x\vee y)\wedge(x\vee z)=x\vee(y\wedge z)$.

(iii)$\Rightarrow$(i) Fie $a,b,c\in L$. În (iii) facem $x=a$, $y=b$, $z=a\vee c$:

$(a\vee b)\wedge(a\vee c)\le a\vee[b\wedge(a\vee c)]=a\vee[(a\vee c)\wedge b]$;

Punând în (iii) $x=a$, $y=c$, $z=b$ rezultă $(a\vee c)\wedge b\le a\vee(c\wedge b)$, de unde

$a\vee[(a\vee c)\wedge b]\le a\vee[a\vee(c\wedge b)]=(a\vee a)\vee(b\wedge c)=a\vee(b\wedge c)$.

Din inegalitățile stabilite obținem $(a\vee b)\wedge(a\vee c)\le a\vee(b\wedge c)$, iar inegalitatea inversă este valabilă în orice latice (exercițiu).

O latice L ce satisface condițiile echivalente (i)-(iii) se numește <u>latice distributivă</u>.

Fie L o latice cu prim element 0 și cu ultim element 1. Un element $a\in L$ se numește <u>complementat</u> dacă există un element $b\in A$, numit <u>complement</u> al lui a astfel încât $a\wedge b=0$ și $a\vee b=1$.

Lema 5. Într-o latice distributivă L cu prim și ultim element orice element poate avea cel mult un complement.

Dem. Fie $a,b,c\in L$ astfel încât $a\wedge b=a\wedge c=0$ și $a\vee b=a\vee c=1$. Atunci

$b=b\wedge 1=b\wedge(a\vee c)=(b\wedge a)\vee(b\wedge c)=0\vee(b\wedge c)=b\wedge c$

și analog $c=b\wedge c$, deci $b=c$.

Complementul unui element a se va nota $\bar{a}$ sau $\neg a$.

Fie $C(L)$ mulţimea elementelor complementate ale unei latici distributive L cu prim şi ultim element. Este evident că $\{0,1\} \subseteq C(L)$.

<u>Prop. 6.</u> Dacă $a, b \in C(L)$ atunci $a \vee b$, $a \wedge b \in C(L)$ şi

$$(a \wedge b)^{-} = \bar{a} \vee \bar{b}, \quad (a \vee b)^{-} = \bar{a} \wedge \bar{b}.$$

<u>Dem.</u> Pentru verificarea primei relaţii este suficient să demonstrăm

$$(a \wedge b) \wedge (\bar{a} \vee \bar{b}) = 0, \quad (a \wedge b) \vee (\bar{a} \vee \bar{b}) = 1.$$

Aceste egalităţi se obţin astfel

$$(a \wedge b) \wedge (\bar{a} \vee \bar{b}) = (a \wedge b \wedge \bar{a}) \vee (b \wedge \bar{a} \wedge \bar{b}) = 0 \vee 0 = 0$$

$$(a \wedge b) \vee (\bar{a} \vee \bar{b}) = (a \vee \bar{a} \vee \bar{b}) \wedge (b \vee \bar{a} \vee \bar{b}) = 1 \wedge 1 = 1.$$

A doua relaţie se obţine în mod analog.

<u>Exemple.</u>

(1) Orice lanţ $(L, \leq)$ este o latice distributivă în care

~~$x \vee y = \max(x,y)$ şi $x \wedge y =$~~

$$x \vee y = \begin{cases} x, & \text{dacă } y \leq x \\ y, & \text{dacă } x \leq y \end{cases} \quad \text{şi} \quad x \wedge y = \begin{cases} x, & \text{dacă } x \leq y \\ y, & \text{dacă } y \leq x. \end{cases}$$

(2) Dacă X este o mulţime atunci $\mathcal{P}(X)$ este o latice distributivă cu prim şi ultim element.

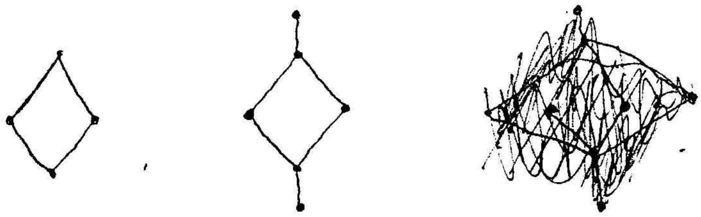
(3) Fie n un număr natural ≥ 2 şi D_n mulţimea divizorilor naturali ai lui n. Definim relaţia binară $\preceq$ pe D_n: $x \preceq y \Leftrightarrow x \mid y$. Atunci $(D_n, \preceq)$ este o latice distributivă cu prim element 1 şi cu ultim element n în care

$x \vee y = [x, y]$ (cel mai mic multiplu comun al lui x şi y)

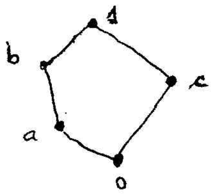
$x \wedge y = (x, y)$ (cel mai mare divizor comun al lui x şi y)

(4) $(\mathbb{Z}, \leq)$ este o latice distributivă fără prim şi ultim element.

(5) Următoarele latici sunt distributive



(6) Considerăm laticea următoare



Se observă că a și b sunt complemenți ai lui c deci laticea nu este distributivă.

Fie L, L' două latici cu prim și ultim element. O funcție $f: L \to L'$ se numește <u>morfism de latici cu prim</u> și <u>ultim element</u> dacă următoarele proprietăți sunt verificate, pentru orice $x, y \in L$:

(a) $f(x \vee y) = f(x) \vee f(y)$;

(b) $f(x \wedge y) = f(x) \wedge f(y)$;

(c) $f(0) = 0$; $f(1) = 1$.

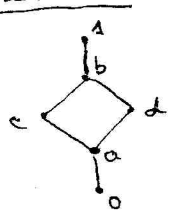
Vom nota cu $Ld(0,1)$ categoria laticilor distributive cu prim și ultim element.

<u>Observație</u>. Orice morfism din $Ld(0,1)$ este o funcție izotonă:

$$x \leq y \Rightarrow x \wedge y = x \Rightarrow f(x) \wedge f(y) = f(x) \Rightarrow f(x) \leq f(y).$$

Un morfism din $Ld(0,1)$ se numește <u>izomorfism</u> dacă este o funcție bijectivă. Un izomorfism de forma $f: L \to L$ se numește <u>automorfism al lui L</u>. Un <u>endomorfism</u> al lui L este un morfism de forma $f: L \to L$.

<u>Exemplu</u>. Presupunem că L este laticea



Atunci L are două automorfisme f_1, f_2; f_1 este morfismul identic 1_L iar f_2 este dat de: $f_2(0) = 0$, $f_2(a) = a$, $f_2(c) = d$, $f_2(d) = c$, $f_2(b) = b$, $f_2(1)$. Argumentul are la bază observația că dacă A este o latice distributivă cu 0 și 1 și $f: A \to A$ un automorfism atunci pentru orice $x \in A$, $x < y$ dacă și numai dacă $f(x) < f(y)$.

Exercițiu. Dacă L este laticea din exemplul precedent atunci să se determine toate endomorfismele lui L.

Lema 7. Pentru orice familie $\{a_i\}_{i\in I}$ din B următoarele relații sunt adevărate

(1) Dacă $\bigvee_{i\in I} a_i$ există în B atunci ~~există~~ $\bigwedge_{i\in I} \bar{a}_i = \left(\bigvee_{i\in I} a_i\right)^{-}$

(2) Dacă $\bigwedge_{i\in I} a_i$ există în B atunci ~~există~~ $\bigvee_{i\in I} \bar{a}_i = \left(\bigwedge_{i\in I} a_i\right)^{-}$

(3) Dacă $\bigvee_{i\in I} a_i$ există în B atunci $\left(\bigvee_{i\in I} a_i\right)\wedge b = \bigvee_{i\in I} (a_i \wedge b)$.

Dem. Exercițiu.

Lema 8. Sunt echivalente următoarele afirmații

(1) Pentru orice $X \subseteq B$ există $\sup X$;

(2) Pentru orice $X \subseteq B$ există $\inf X$.

Dem. Se aplică Lema 7.

O algebră Boole completă este o algebră Boole în care sunt îndeplinite afirmațiile (1) și (2) din Lema 8.

§3. Algebre Boole

Def. 1. O algebră Boole este o latice distributivă cu prim și ultim element în care orice element este complementat.

Așadar o algebră Boole este o structură algebrică de tipul $(B, \vee, \wedge, ^-, 0, 1)$ în care $(B, \vee, \wedge, 0, 1)$ este o latice distributivă cu prim și ultim element, iar $^-$ este o operație unară astfel încât $x \vee \bar{x} = 1$ și $x \wedge \bar{x} = 1$ pentru orice $x \in B$.

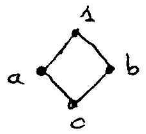
Dacă L este o latice distributivă cu prim și ultim element atunci mulțimea $C(L)$ a elementelor complementate ale lui L este o algebră Boole (vezi Prop. 6, §2).

Exemple de algebre Boole

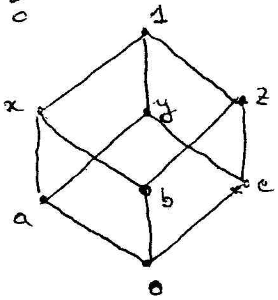
(1) Dacă X este o mulțime, atunci $(\mathcal{P}(X), \cup, \cap, C, \emptyset, X)$ este o algebră Boole.

(2) $L_2 = \{0, 1\}$.

(3) rombul



(4) cubul



(5) mulțimea evenimentelor asociate unei experiențe aleatoare.

(6) Dacă X este un spațiu topologic atunci familia $B(X)$ a părților simultan închise și deschise ale lui X formează o algebră Boole.

(7) Orice produs direct de algebre Boole are o structură canonică de algebră Boole (operațiile se fac pe componente). În particular, dacă X este o mulțime nevidă, atunci L_2^X este o algebră Boole.

Lema 2. Într-o algebră Boole B avem pentru orice $x, y \in B$:

(1) $\bar{\bar{x}} = x$

(2) $(x \vee y)^- = \bar{x} \wedge \bar{y}$; $(x \wedge y)^- = \bar{x} \vee \bar{y}$;

(3) $x \le y \iff \bar{y} \le \bar{x}$

(4) $x \le y \iff x \wedge \bar{y} = 0 \iff \bar{x} \vee y = 1$.

Dem. (i) Din unicitatea complementului: $x \vee \bar{x} = 1, x \wedge \bar{x} = 0$.

(ii) Prop. 6, §2.

(iii) $x \leq y \Rightarrow x \wedge y = x \Rightarrow \bar{x} \vee \bar{y} = \bar{x} \Rightarrow \bar{y} \leq \bar{x}$.

(iv) $x \leq y \Rightarrow x \wedge \bar{y} \leq y \wedge \bar{y} = 0 \Rightarrow x \wedge \bar{y} = 0$.

$x \wedge \bar{y} = 0 \Rightarrow y = y \vee 0 = y \vee (x \wedge \bar{y}) = (x \vee y) \wedge (y \vee \bar{y}) = (x \vee y) \wedge 1 = x \vee y$

$\Rightarrow x \leq y$.

Într-o algebră Boole B se definesc următoarele două operații binare

$x \to y = \bar{x} \vee y$ (implicația booleană)

$x \leftrightarrow y = (x \to y) \wedge (y \to x)$ (echivalența booleană)

Lema 3. Pentru orice $x, y \in B$ avem

(i) $x \leq y \Leftrightarrow x \to y = 1$;

(ii) $x \leftrightarrow y = 1 \Leftrightarrow x = y$.

Dem. (i) rezultă din Lema 2, (4), iar (ii) din (ii).

Dăm mai jos câteva din proprietățile celor două operații

$x \to (y \to x) = 1$

$(x \to (x \to y)) \to (x \to y) = 1$

$(x \to y) \to ((y \to z) \to (x \to z)) = 1$

$(x \leftrightarrow y) \to (x \to y) = 1$

$(x \to y) \to ((y \to x) \to (x \leftrightarrow y)) = 1$

$\bar{x} \leftrightarrow \bar{y} = x \leftrightarrow y$

Să stabilim, de exemplu, proprietatea a treia. Este suficient să probăm că $x \to y \leq (y \to z) \to (x \to z)$. Un calcul simplu arată că:

$(y \to z) \to (x \to z) = \overline{(\bar{y} \vee z)} \vee \bar{x} \vee z = (y \wedge \bar{z}) \vee \bar{x} \vee z = y \vee \bar{x} \vee z$

de unde $x \to y = \bar{x} \vee y \leq y \vee \bar{x} \vee z = (y \to z) \to (x \to z)$.

Exercițiu. Să se demonstreze că $(x \leftrightarrow y) \leftrightarrow z = x \leftrightarrow (y \leftrightarrow z)$ pentru orice $x, y, z \in B$.

Se numește inel Boole orice inel unitar $(A, +, \cdot, 0, 1)$ cu proprietatea că $x^2 = x$ pentru orice $x \in A$.

Lema 4. Pentru orice două elemente x, y ale unui inel Boole A avem $x + x = 0$ și $xy = yx$.

Dem. Din

$$x+y=(x+y)^2=x^2+xy+yx+y^2=x+xy+yx+y$$

rezultă $xy+yx=0$. Făcând $y=x$ se obține $x+x=x^2+x^2=0$. Pentru orice $z\in A$, vom avea $z+z=0$, adică $z=-z$. Luând $z=xy$, rezultă $xy=-yx=yx$.

Fie A un inel Boole. Definim următoarele operații pe A:

$$x\vee y=x+y+xy$$
$$x\wedge y=xy$$
$$\bar{x}=x+1$$

Prop. 5 $(A,\vee,\wedge,{}^-,0,1)$ este o algebră Boole.

Dem. Să stabilim, de exemplu, asociativitatea operației $\vee$

$$(x\vee y)\vee z=(x+y+xy)+z+(x+y+xy)\cdot z=x+y+z+xy+yx+zx+xyz=\dots$$

$$\dots=x\vee(y\vee z)$$

Vom mai arăta că $x+x$ verifică proprietățile complementului

$$x\vee(x+1)=x+x+1+x(x+1)=2x+1+x^2+x=0+1+(x+x)=1+0=1$$

$$x\wedge(x+1)=x(x+1)=x^2+x=x+x=0.$$

Fie acum B o algebră Boole. Introducem operațiile următoare pe B

$$x+y=(x\wedge\bar{y})\vee(\bar{x}\wedge y)\ ;\quad x\cdot y=x\wedge y$$

Prop. 6. $(B,+,\cdot,0,1)$ este un inel boolean.

Dem. Să verificăm asociativitatea operației +.

$$(a+b)+c=[((a\wedge\bar{b})\vee(\bar{a}\wedge b))\wedge\bar{c}]\vee[((a\wedge\bar{b})\vee(\bar{a}\wedge b))^-\wedge c]$$

Calculăm separat

$$((a\wedge\bar{b})\vee(\bar{a}\wedge b))\wedge\bar{c}=(a\wedge\bar{b}\wedge\bar{c})\vee(\bar{a}\wedge b\wedge\bar{c})$$

$$((a\wedge\bar{b})\vee(\bar{a}\wedge b))^-\wedge c=((\bar{a}\vee b)\wedge(a\vee\bar{b}))\wedge c$$
$$=[(a\wedge\bar{a})\vee(\bar{a}\wedge\bar{b})\vee(a\wedge b)\vee(b\wedge\bar{b})]\wedge c$$
$$=((a\wedge b)\vee(\bar{a}\wedge\bar{b}))\wedge c$$
$$=(a\wedge b\wedge c)\vee(\bar{a}\wedge\bar{b}\wedge c).$$

Înlocuind mai sus se obține

$(a+b)+c = (\bar{a}\wedge \bar{b}\wedge c)\vee(\bar{a}\wedge b\wedge \bar{c})\vee(a\wedge \bar{b}\wedge \bar{c})\vee(a\wedge b\wedge c)$.

Expresia obținută este simetrică în a, b, c, deci $(a+b)+c = a+(b+c)$.

Verificarea celorlalte axiome ale inelelor se face în aceeași manieră.

<u>Exercițiu</u>. Fie $F(B)$ inelul Boole asociat algebrei Boole B și $G(A)$ algebra Boole asociată inelului Boole A. Să se arate că algebrele Boole B și $G(F(B))$ sunt izomorfe și că inelele Boole A și $F(G(A))$ sunt izomorfe.

<u>Caz particular</u>. Fie algebra Boole $\mathcal{P}(X)$ a părților unei mulțimi X. Adunarea $+$ a lui $\mathcal{P}(X)$ ca inel Boole este chiar diferența simetrică $A\Delta B = (A-B)\cup(B-A)$, iar înmulțirea este intersecția $A\cap B$.

<u>Exercițiu</u>. Fie ~~A~~ $(A,+,\cdot,0,1)$ un inel comutativ și unitar. Un element ~~e~~ $e\in A$ se numește idempotent dacă $e^2=e$. Notăm cu $B(A)$ mulțimea idempotenților lui A. Pe $B(A)$ definim următoarea operație:

$$e\oplus f = e+f-2ef, \text{ pentru orice } e,f\in B(A).$$

Să se arate că $(B(A),\oplus,\cdot,0,1)$ este inel Boole.

<u>Definiția 7</u>. O submulțime nevidă B' a ~~lui~~ algebrei Boole B se numește subalgebră Boole (pe ~~scurt~~ scurt, subalgebră) a lui B dacă pentru orice $x,y\in A$ sunt verificate axiomele următoare:

(a) $x,y\in B' \Rightarrow x\vee y\in B'$;

(b) $x,y\in B' \Rightarrow x\wedge y\in B'$;

(c) $x\in B' \Rightarrow \bar{x}\in B'$;

(d) $0\in B'$ și $1\in B'$.

<u>Observație</u>. ~~Axiomele (a),(b),(d) rezultă~~ Fiecare din axiomele (a),(b) și (d) rezultă din celelalte trei. Axioma (c) nu rezultă din celelalte. Într-adevăr, considerăm algebra Boole L_2^2 și $B'=\{(0,0),(1,0),(1,1)\}$. B' verifică axiomele (a), (b), (d), dar nu este închisă la negație.

Exemple de subalgebre

(1) $L_2 = \{0,1\}$ este subalgebră a oricărei algebre Boole.

(2) Dacă B este o algebră Boole atunci $L_2^{\mathbb{N}}$ este subalgebră a lui $B^{\mathbb{N}}$.

(3) Dacă X este un spațiu topologic atunci algebra Boole $B(X)$ a părților simultan închise și deschise este subalgebră a lui $\mathcal{P}(X)$.

(4) L_2^3 are următoarele subalgebre

$B_1 = \{(0,0,0), (1,1,1)\}$

$B_2 = \{(0,0,0), (1,1,1), (1,0,0), (0,1,1)\}$

$B_3 = \{(0,0,0), (1,1,1), (0,1,0), (1,0,1)\}$

$B_4 = \{(0,0,0), (1,1,1), (0,0,1), (1,1,0)\}$

$B_5 = L_2^3$.

Exercițiu. Să se întocmească un program pentru determinarea tuturor subalgebrelor lui L_2^n.

Def. 8. Fie B, B' două algebre Boole. O funcție $f: B \to B'$ se numește morfism de algebre Boole (morfism boolean) dacă pentru orice $x, y \in B$ sunt verificate următoarele axiome:

(1) $f(x \vee y) = f(x) \vee f(y)$;

(2) $f(x \wedge y) = f(x) \wedge f(y)$;

(3) $f(\bar{x}) = \overline{f(x)}$;

(4) $f(0) = 0$; $f(1) = 1$.

Exercițiu. Să se arate că fiecare din cele ~~trei~~ axiomele (1)-(4) este implicată de celelalte trei.

Un morfism boolean de forma $f: B \to B$ se numește endomorfism. Un izomorfism boolean ~~de forma~~ este un morfism boolean $f: B \to B'$ bijectiv; un izomorfism de forma $f: B \to B$ se numește automorfism al lui B. Dacă B, B' sunt izomorfe atunci vom nota $B \simeq B'$.

Observație (a) Dacă $f: B \to B'$ este un morfism boolean atunci $f(B)$ este subalgebră a lui B'.

(b) Un morfism boolean $f: B \to B'$ verifică egalitățile:

$$f(x \to y) = f(x) \to f(y) \quad \text{și} \quad f(x \leftrightarrow y) = f(x) \leftrightarrow f(y)$$

pentru orice $x, y \in B$.

Vom nota cu $\mathbb{B}$ categoria algebrelor Boole și a morfismelor booleene.

Exemple de morfisme booleene

(1) Fie X, Y două mulțimi nevide ~~[illegible]~~ și $f : X \to Y$ o funcție oarecare. Funcția $\Phi : \mathcal{P}(Y) \to \mathcal{P}(X)$, definită de $\Phi(C) := f^{-1}(C)$ pentru orice $C \subseteq Y$, este morfism boolean.

(2) Fie $\mathcal{P}(X)$ algebra Boole a părților lui X. Considerăm funcția $\Phi : \mathcal{P}(X) \longrightarrow L_2^X$ definită de $\Phi(A) = \chi_A$ pentru orice $A \subseteq X$ (χ_A este funcția caracteristică a lui A). Atunci Φ este un izomorfism boolean.

(3) Rombul este izomorf cu L_2^2:

$0 \mapsto (0,0)$; $a \mapsto (1,0)$; $b \mapsto (0,1)$; $1 \mapsto (1,1)$.

(4) Cubul este izomorf cu L_2^3:

$0 \mapsto (0,0,0)$;	$x \mapsto (1,1,0)$	(pentru că $x = a \vee b$);
$a \mapsto (1,0,0)$;	$y \mapsto (1,0,1)$	(pentru că $y = a \vee c$)
$b \mapsto (0,1,0)$;	$z \mapsto (0,1,1)$	(pentru că $z = b \vee c$)
$c \mapsto (0,0,1)$;	$1 \mapsto (1,1,1)$	

(5) Ne propunem să determinăm automorfismele cubului. Întâi vom observa că dacă $f : B \to B'$ este un izomorfism boolean atunci: $x < y \iff f(x) < f(y)$, pentru orice $x, y \in B$. Atunci, dacă f este un automorfism al cubului, vom avea $f(\{a,b,c\}) = \{a,b,c\}$. Rezultă că numărul de automorfisme ale cubului este 8 (= numărul de permutări ale unei mulțimi cu 3 elemente). Morfismul identic este unul din cele 8. Să vedem cum se determină unul din celelalte. Presupunem că $f(a) = b$, $f(b) = c$, $f(c) = a$. Atunci

$$f(x) = f(a \vee b) = f(a) \vee f(b) = b \vee c = z$$
$$f(y) = f(a \vee c) = f(a) \vee f(c) = b \vee a = x$$
$$f(z) = f(b \vee c) = f(b) \vee f(c) = c \vee a = y.$$

Bineînțeles că $f(0) = 0$ și $f(1) = 1$.

<u>Exercițiu</u>. Să se determine (eventual printr-un program) toate automorfismele lui L_2^n.

<u>Exercițiu</u>. Să se determine toate morfismele booleene de tipul

a) $f : L_2^3 \to L_2$; b) $f : L_2^3 \to L_2^2$; c) $f : L_2^2 \to L_2^3$; d) $f : L_2^3 \to L_2^3$.

<u>Observație</u>. $f : L \to L'$ un morfism din $Ld(0,1)$. Dacă $x \in C(L)$ atunci $f(x) \in C(L')$ deci putem defini $C(f) = f|_{C(L)} : C(L) \to C(L')$. $C(f)$ este un morfism boolean.

Asocierea $L \rightsquigarrow C(L)$, $f \rightsquigarrow C(f)$ definește un functor contravariant $C : Ld(0,1) \to \mathbb{B}$.

Lema 9. Fie $f: B \to B'$ un morfism boolean. Sunt echivalente afirmațiile

(1) f este injectiv;

(2) Pentru orice $x, y \in B$ avem: $x \leq y \iff f(x) \leq f(y)$.

Dem (1) $\Rightarrow$ (2). Dacă $f(x) \leq f(y)$ atunci $f(x \wedge y) = f(x) \wedge f(y) = f(x)$, deci $x \wedge y = x$, de unde $x \leq y$

Este evident că $x \leq y$ implică $f(x) \leq f(y)$.

(2) $\Rightarrow$ (1). Dacă $f(x) = f(y)$ atunci $f(x) \leq f(y)$ și $f(y) \leq f(x)$, de unde $x \leq y$ și $y \leq x$.

Rezultă $x = y$.

Lema 10. Fie $f: B \to B'$ un morfism boolean. Sunt echivalente afirmațiile

(1) f este injectiv;

(2) $f^{-1}(0) = \{0\}$;

(3) $f^{-1}(1) = \{1\}$.

Dem. (1) $\Rightarrow$ (3) $\quad f(x) = 1 = f(1) \Rightarrow x = 1$.

(3) $\Rightarrow$ (1) $\quad f(x) \leq f(y) \Rightarrow f(x \to y) = f(x) \to f(y) = 1$

$\Rightarrow x \to y = 1$

$\Rightarrow x \leq y$.

Aplicând Lema 9 rezultă că f este injectiv.

(1) $\iff$ (2) Analog.

Observație. Fie A, A' două inele Boole și $G(A)$, $G(A')$ algebrele Boole asociate. Dacă $f: A \to A'$ este un morfism de inele unitare atunci $G(f) = f: G(A) \to G(A')$ este un morfism boolean.

Fie B, B' două algebre Boole și $F(B)$, $F(B')$ inelele Boole asociate. Dacă $g: B \to B'$ este un morfism boolean atunci $F(g) = g: F(B) \to F(B')$ este un morfism de inele unitare.

F poate fi privit ca un functor de la categoria algebrelor Boole la categoria ~~algebrelor~~ inelelor Boole, iar G un functor de categoria inelelor Boole la categoria algebrelor Boole. Functorii F și G stabilesc un izomorfism ~~dintre~~ între categoria algebrelor Boole și categoria inelelor Boole.

§4. Filtre și congruențe

<u>Def. 1</u>. Fie B o algebră Boole oarecare. O submulțime nevidă F a lui B se numește <u>filtru</u> dacă pentru orice $x, y \in B$ următoarele condiții sunt îndeplinite

(F1) $x, y \in F \Rightarrow x \wedge y \in F$;

(F2) $x \in F, x \leq y \Rightarrow y \in F$.

Dual, un <u>ideal</u> al lui B este o submulțime nevidă I a lui B pentru care

(F_1') $x, y \in I \Rightarrow x \wedge y \in I$;

(F_2') $x \leq y, y \in I \Rightarrow x \in I$.

Unui filtru F i se asociază idealul $I_F = \{\bar{x} \mid x \in F\}$, iar unui ideal I i se asociază filtrul $F_I = \{\bar{x} \mid x \in I\}$. În acest fel filtrele lui B sunt în corespondență biunivocă cu idealele lui B. Conform acestei observații vom studia numai filtrele unei algebre Boole; proprietățile idealelor se vor obține prin dualizare.

<u>Observație</u>. Dacă F este un filtru al lui B atunci $1 \in F$. Pentru orice elemente x, y ale lui F, $x, y \in F$ dacă și numai dacă $x \wedge y \in F$.

Fie B o algebră Boole. O relație de echivalență $\sim$ pe B se numește <u>congruență</u> dacă:

(i) $x \sim y, x' \sim y' \Rightarrow x \vee x' \sim y \vee y'$;

(ii) $x \sim y, x' \sim y' \Rightarrow x \wedge x' \sim y \wedge y'$;

(iii) $x \sim y \Rightarrow \bar{x} \sim \bar{y}$.

<u>Observație</u>. Condiția (i) sau (ii) rezultă din celelalte două.

În cele ce urmează vom stabili o corespondență biunivocă între filtre și congruențe.

Unui filtru F îi asociem relația binară

$$x \sim_F y \Longleftrightarrow x \leftrightarrow y \in F$$
$$\Longleftrightarrow x \to y \in F \text{ și } y \to x \in F.$$

<u>Prop. 2</u>. $\sim_F$ este o congruență a lui B.

<u>Demonstrație</u>. Arătăm întâi că $\sim_F$ este o relație de echivalență pe B.

$x \sim_F x$ rezultă din $x \leftrightarrow x = 1 \in F$.

$x \sim_F y$ implică $y \sim_F x$ deoarece $x \leftrightarrow y = y \leftrightarrow x$.

Fie $x \sim_F y$ și $y \sim_F z$, deci $x \to y \in F$, $y \to x \in F$, $y \to z \in F$ și $z \to y \in F$. Stabilim inegalitatea $(x \to y) \wedge (y \to z) \leq x \to z$, care va implica $x \to z \in F$. Într-adevăr

$(x \to y) \wedge (y \to z) = (\bar{x} \vee y) \wedge (\bar{y} \vee z) = (\bar{x} \wedge \bar{y}) \vee (y \wedge \bar{y}) \vee (\bar{x} \wedge z) \vee (y \wedge z) \leq \bar{x} \vee z = x \to z$.

Analog rezultă $z \to x \in F$, deci $x \sim_F z$.

• Vom arăta că

$$x\sim_F y,\ x'\sim_F y' \Rightarrow x\vee x'\sim_F y\vee y'.$$

Dacă $x\sim_F y$, $x'\sim_F y'$ atunci $x\to y\in F$, $y\to x\in F$, $x'\to y'\in F$ şi $y'\to x'\in F$. Se observă că

$$(x\to y)\wedge(x'\to y') = (\bar{x}\vee y)\wedge(\bar{x}'\vee y')$$
$$\leq (\bar{x}\vee y\vee y')\wedge(\bar{x}'\vee y\vee y')$$
$$=(\bar{x}\wedge\bar{x}')\vee y\vee y' = (x\vee x')\to(y\vee y').$$

Folosind această inegalitate se obţine $(x\vee x')\to(y\vee y')\in F$ şi analog $(y\vee y')\to(x\vee x')\in F$, deci $x\vee x'\sim_F y\vee y'$.

Cum $x\leftrightarrow y = \bar{x}\leftrightarrow\bar{y}$, vom avea: $x\sim_F y\Rightarrow \bar{x}\sim_F\bar{y}$. Deci $\sim_F$ este o congruenţă.

Reciproc, unei congruenţe $\sim$ îi asociem $\tilde{F}=\{x\in B \mid x\sim 1\}$.

Prop. 3. $\tilde{F}$ este un filtru al lui B.

Dem. $\tilde{F}$ este nevidă deoarece $1\sim 1$ implică $1\in F$. Verificăm axiomele filtrului

(F1): $x,y\in\tilde{F}\Rightarrow x\sim 1,\ y\sim 1 \Rightarrow x\wedge y\sim 1\wedge 1\Rightarrow x\wedge y\sim 1\Rightarrow x\wedge y\in\tilde{F}$,

(F2): $x\leq y,\ x\in\tilde{F}\Rightarrow x\vee y=y,\ x\sim 1\Rightarrow y=x\vee y\sim 1\vee y=1\Rightarrow y\in\tilde{F}$.

Prop. 4. Mulţimea filtrelor lui B este în corespondenţă biunivocă cu mulţimea congruenţelor lui B.

Dem. Arătăm că funcţiile $F\mapsto\sim_F$, $\sim\mapsto\tilde{F}$ sunt inverse una celeilalte. Observăm că

$$F\mapsto\sim_F\mapsto\tilde{F}^F \quad\text{şi}\quad \sim\mapsto\tilde{F}\mapsto\sim_{\tilde{F}}.$$ Atunci

$$\tilde{F}^F=\{x\mid x\sim_F 1\}=\{x\mid x\leftrightarrow 1\in F\}=\{x\mid x\in F\}=F.$$

Vom demonstra că pentru orice $x,y\in B$:

$$x\sim y \Leftrightarrow x\sim_{\tilde{F}} y.$$

$x\sim_{\tilde{F}} y$ este echivalent cu $x\to y\in\tilde{F}$ şi $y\to x\in\tilde{F}$. Dacă $x\sim y$ atunci $(x\to y)\sim(y\to 1)$, deci $(x\to y)\sim 1$ şi analog $(y\to x)\sim 1$. Rezultă $x\to y\in\tilde{F}$ şi $y\to x\in\tilde{F}$, deci $x\sim_{\tilde{F}} y$.

Reciproc, presupunem că $x\to y\in\tilde{F}$ şi $y\to x\in\tilde{F}$, deci $(x\to y)\sim 1$ şi $(y\to x)\sim 1$. Rezultă $x\wedge y = x\wedge(x\to y)\sim x\wedge 1 = x$ şi analog $x\wedge y\sim y$, deci $x\sim y$.

Exerciţiu. Fie algebra Boole $\mathcal{P}(X)$ cu X infinită. Să se arate că părţile cofinite (= părţile ce au complementarele finite) formează un filtru şi să se determine congruenţa asociată.

Fie F un filtru al algebrei Boole B. Notăm cu $B/_F$ mulțimea cât $B/\sim_F$ și cu $x/_F$ clasa de echivalență a lui $x \in B$. Pe $B/_F$ introducem operațiile:

$$x/_F \vee y/_F = x\vee y/_F \,,\quad x/_F \wedge y/_F = x \wedge y/_F \quad \text{și} \quad \overline{x/_F} = \bar{x}/_F .$$

<u>Prop. 5.</u> $(B/_F, \vee, \wedge, ^-, 0/_F, 1/_F)$ este o algebră Boole. Aplicația canonică $p: B \to B/\sim$ este un morfism boolean injectiv.

<u>Prop. 6.</u> Fie $f: B \to B'$ un morfism boolean:

(1) $f^{-1}(1) = \{x \in B \mid f(x) = 1\}$ este un filtru al lui B;

(2) $f(B)$ este o subalgebră a lui B' izomorfă cu $B/_{f^{-1}(1)}$

<u>Dem.</u> (1) Ușor.

(2) ~~Definim funcția g: B/F~~ Notăm $F = f^{-1}(1)$ și definim funcția $g: B/_F \to f(B)$ prin $g(x/_F) = f(x)$ pentru orice $x \in B$. Definiția lui g nu depinde de reprezentanți

$$x/_F = y/_F \Rightarrow x \leftrightarrow y \in F \Rightarrow f(x) \leftrightarrow f(y) = f(x \leftrightarrow y) = 1 \Rightarrow f(x) = f(y).$$

O verificare simplă arată că g este morfism boolean. Conform implicațiilor

$$g(x/_F) = 1 \Rightarrow f(x) = 1 \Rightarrow x \in F \Rightarrow x/_F = 1/_F$$

rezultă că g este injectivă (se aplică Lema 10, §3). Surjectivitatea lui g este evidentă.

<u>Exercițiu.</u> Fie $f: B \to B'$ un morfism boolean surjectiv. Dacă F este un filtru al lui B atunci $f(F)$ este un filtru al lui B'; dacă G este un filtru al lui B' atunci $f^{-1}(G)$ este un filtru al lui B. Filtrele lui B' sunt în corespondență biunivocă cu mulțimea filtrelor lui B ce includ pe $f^{-1}(1)$.

<u>Exercițiu.</u> Fie F, G două filtre ale lui B astfel încât $F \subseteq G$. Atunci $G/_F = \{x/_F \mid x \in G\}$ este un filtru al lui $B/_F$ și algebrele Boole $(B/F)/(G/F)$ și $B/_G$ sunt izomorfe.

<u>Lema 7.</u> Orice intersecție de filtre este un filtru.

Dacă X este o submulțime a lui B atunci <u>filtrul generat de X</u> este intersecția filtrelor ce include pe X. Cu alte cuvinte filtrul generat de X este cel mai mic filtru (în sensul incluziunii) ce include pe X. Vom nota cu $[X)$ filtrul generat de X.

Observație. Un filtru F este filtrul generat de X dacă el verifică

(a) $X \subseteq F$

(b) G filtru, $X \subseteq G \Rightarrow F \subseteq G$.

Este evident că filtrul generat de mulțimea vidă este $\{1\}$.

Prop. 8. Dacă $X \neq \emptyset$, atunci

$$[X) = \{a \in B \mid \text{ex. } n \in \mathbb{N}^* \text{ și } x_1, \dots, x_n \in X,\ x_1 \wedge \dots \wedge x_n \leq a\}.$$

Dem. Fie F mulțimea din dreapta. Arătăm că F este filtru. Dacă $a, b \in F$ atunci există

$x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m \in X$ astfel încât

$x_1 \wedge \dots \wedge x_n \leq a$, $y_1 \wedge \dots \wedge y_m \leq b$.

Rezultă $x_1 \wedge \dots \wedge x_n \wedge y_1 \wedge \dots \wedge y_m \leq a \wedge b$, deci $a \wedge b \in F$. Axioma (F_2) din Def. 1 este evident verificată. Se observă că $X \subseteq F$. Presupunem că G este un filtru ce include pe X. Dacă $a \in F$ atunci există $x_1, \dots, x_n \in X$ astfel încât $x_1 \wedge \dots \wedge x_n \leq a$. Atunci $x_1, \dots, x_n \in G$, deci $x_1 \wedge \dots \wedge x_n \in G$, de unde $a \in G$. A rezultat $F \subseteq G$. Deci $[X) = F$.

Vom nota cu $[x)$ filtrul generat de $\{x\}$; $[x)$ se va numi <u>filtrul principal</u> generat de x.

Corolar 9. $[x) = \{a \mid x \leq a\}$.

Corolar 10. $[\{x_1, \dots, x_n\}) = [x_1 \wedge \dots \wedge x_n)$.

Corolar 11. Dacă F este un filtru și $x \in A$ atunci $[F \cup \{x\}) = \{a \mid \text{ex. } e \in F,\ e \wedge x \leq a\}$.

Lema 12. Într-o algebră Boole finită orice filtru este principal.

Observație. Să calculăm congruența asociată unui filtru principal $[x)$:

$$\begin{aligned} a \sim_{[x)} b &\Leftrightarrow a \to b \in [x),\ b \to a \in [x) \\ &\Leftrightarrow x \leq a \to b,\ x \leq b \to a \\ &\Leftrightarrow x \wedge a \leq b,\ x \wedge b \leq a \\ &\Leftrightarrow a \wedge x = b \wedge x. \end{aligned}$$

Exercițiu. Să se determine toate filtrele cubului, congruențele ~~corespun~~ și algebrele Boole cât corespunzătoare.

§5. Teorema de reprezentare a lui Stone

Scopul acestui paragraf este de a demonstra că orice algebră Boole este izomorfă cu o algebră Boole ale cărei elemente sunt părţi ale unei mulţimi. Acest rezultat ocupă un loc central în teoria algebrelor Boole şi are numeroase aplicaţii în logică, topologie, calculul probabilităţilor, etc. Instrumentul principal folosit în demonstraţia acestei teoreme va fi conceptul de ultrafiltru.

Fie B o algebră Boole. Un filtru F al lui B este propriu dacă $F \neq B$; un filtru F este propriu dacă şi numai dacă $0 \notin F$.

Mulţimea filtrelor proprii ale lui B este ordonată în raport cu incluziunea. Un ultrafiltru este un element maximal al acestei mulţimi. ~~[illegible]~~ Cu alte cuvinte, un filtru propriu U este ultrafiltru dacă şi numai dacă pentru orice filtru propriu F, din $U \subseteq F$ rezultă $U = F$.

Exemple (1) Dacă X este o mulţime nevidă şi $x \in X$ atunci $\mathcal{U}_x = \{A \subseteq X \mid x \in A\}$ este un ultrafiltru în $\mathcal{P}(X)$.

(2) Dacă $B = L_2^n$ şi $e_1 = (1, 0, \ldots, 0), e_2 = (0, 1, \ldots, 0), \ldots, e_n = (0, \ldots, 0, 1)$ atunci filtrele principale $[e_1), [e_2), \ldots, [e_n)$ sunt ultrafiltrele lui B.

În cazul algebrelor Boole infinite demonstrarea existenţei ultrafiltrelor (altele decât cele din exemplul (1)) impune invocarea axiomei lui Zorn. Următorul rezultat poartă numele teorema de existenţă a ultrafiltrului.

Prop. 1. Pentru orice filtru propriu F există un ultrafiltru U astfel încât $F \subseteq U$.

Dem. Fie Σ mulţimea filtrelor proprii ale lui B ce includ pe F. Evident $F \in \Sigma$. Vom arăta că $(\Sigma, \subseteq)$ este inductiv ordonată. Fie $(F_i)_{i \in I}$ o familie total ordonată de filtre din Σ: pentru orice $i, j \in I$, $F_i \subseteq F_j$ sau $F_j \subseteq F_i$. Notăm $G = \bigcup_{i \in I} F_i$. Vom ~~[illegible]~~ demonstra că G este un filtru propriu. Dacă $x, y \in G$ atunci există $i, j \in I$ astfel încât $x \in F_i$ şi $y \in F_j$. Putem presupune, de exemplu, că $F_i \subseteq F_j$. Atunci $x, y \in F_j$, deci $x \wedge y \in F_j \subseteq G$. A doua proprietate din definiţia filtrului se verifică imediat.

Atunci G este un majorant al familiei $(F_i)_{i \in I}$ şi $(\Sigma, \subseteq)$ este inductivă. Aplicând axioma lui Zorn rezultă existenţa unui ultrafiltru U ce include pe F.

Cor 2. Dacă $x \neq 0$ atunci există un ultrafiltru U astfel încât $x \in U$.

Dem. Se aplică Prop. 1 filtrului propriu $F = [x)$.

Un filtru propriu F se numește filtru prim dacă pentru orice $x, y \in B$, $x \vee y \in F$ implică $x \in F$ sau $y \in F$.

Prop. 3. Dacă F este un filtru propriu al lui B atunci sunt echivalente următoarele afirmații:

(1) F este ultrafiltru;
(2) F este filtru prim;
(3) Pentru orice $x \in B$, $x \in F$ sau $\bar{x} \in F$.

Dem. (1) $\Rightarrow$ (2). Presupunem prin absurd că F nu este prim deci există $x, y \in B$ astfel încât $x \vee y \in F$, dar $x, y \notin F$. Atunci incluziunile stricte

$$F \subsetneq [F \cup \{x\}) \text{ și } F \subsetneq [F \cup \{y\})$$

arată că filtrele $[F \cup \{x\})$, $[F \cup \{y\})$ nu sunt proprii, deci conțin pe 0. Folosind Corolarul 11, §4, din $0 \in [F \cup \{x\})$ rezultă existența unui element $a \in F$ astfel încât $a \wedge x = 0$. Analog, există $b \in F$ cu $b \wedge y = 0$. Atunci

$$0 = (a \wedge x) \vee (b \wedge y) = (a \vee b) \wedge (a \vee y) \wedge (x \vee b) \wedge (x \vee y)$$

Cum $a \vee b, a \vee y, x \vee b \in F$ (din $a, b \in F$) și $x \vee y \in F$ (prin ipoteză) rezultă că $0 \in F$. Contradicție, deci F este prim.

(2) $\Rightarrow$ (3). Din $x \vee \bar{x} = 1 \in F$.

(3) $\Rightarrow$ (1) Presupunem prin absurd că există un filtru propriu G astfel încât $F \subsetneq G$. Atunci există $x \in G$ și $x \notin F$. Folosind ipoteza (3), $\bar{x} \in F \subseteq G$, deci $0 = x \wedge \bar{x} \in G$. Contradicție, deci F este ultrafiltru.

Exercițiu. Fie F un filtru propriu. Atunci F este ultrafiltru dacă și numai dacă algebra Boole cât $B/_F$ este izomorfă cu L_2.

Exercițiu. Un filtru propriu F este ultrafiltru dacă și numai dacă pentru orice $x, y \in B$, avem $x \to y \in F$ sau $y \to x \in F$.

Suntem acum în măsură să demonstrăm teorema de reprezentare a lui Stone.

<u>Prop. 4.</u> Pentru orice algebră Boole B există o mulțime nevidă X și un morfism boolean injectiv $d: B \to \mathcal{P}(X)$.

<u>Dem.</u> Vom nota cu X mulțimea ultrafiltrelor lui B și cu $d: B \to \mathcal{P}(X)$ funcția definită prin $d(x) = \{U \in X \mid x \in U\}$ pentru orice $x \in B$. Pentru orice $x, y \in B$ și pentru orice ultrafiltru U avem echivalențele:

$$\begin{aligned} U \in d(x \vee y) &\Leftrightarrow x \vee y \in U \\ &\Leftrightarrow x \in U \text{ sau } y \in U \qquad\qquad (U \text{ este prim}) \\ &\Leftrightarrow U \in d(x) \text{ sau } U \in d(y) \\ &\Leftrightarrow U \in d(x) \cup d(y) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} U \in d(x \wedge y) &\Leftrightarrow x \wedge y \in U \\ &\Leftrightarrow x \in U \text{ și } y \in U \qquad\qquad (U \text{ este filtru}) \\ &\Leftrightarrow U \in d(x) \text{ și } U \in d(y) \\ &\Leftrightarrow U \in d(x) \cap d(y) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} U \in d(\bar{x}) &\Leftrightarrow \bar{x} \in U \\ &\Leftrightarrow x \notin U \qquad\qquad (\text{Propoziția } 3, (3)) \\ &\Leftrightarrow U \notin d(x) \\ &\Leftrightarrow U \in \complement d(x) \end{aligned}$$

Am demonstrat că

$d(x \vee y) = d(x) \cup d(y)$; $d(x \wedge y) = d(x) \cap d(y)$; $d(\bar{x}) = \complement d(x)$

ceea ce arată că d este morfism boolean. Dacă $x \neq 0$ atunci există un ultrafiltru U astfel încât $x \in U$ (Corolarul 2), deci $U \in d(x)$ și $d(x) \neq \emptyset$. Am arătat că $d(x) = \emptyset$ implică $x = 0$, deci $d^{-1}(\emptyset) = \{0\}$. Aplicând Lema 10, §3, d este injectiv.

Cum $\mathcal{P}(X)$ și L_2^X sunt algebre Boole izomorfe teorema de reprezentare a lui Stone capătă și următoarea formă

<u>Prop. 4'</u> Pentru orice algebră Boole există o mulțime nevidă și un morfism boolean injectiv $d: B \longrightarrow L_2^X$.

Observație. (1) Prop. 4 reduce calculul boolean într-o algebră Boole oarecare la calculul cu mulțimi.

(2) Prop. 4' reduce calculul calculul boolean într-o algebră Boole oarecare la

a) întîi, la calculul în L_2^X;

b) apoi, calculul în L_2^X se reduce la calculul în L_2 (operațiile se fac pe componente)

§6. ~~Structura~~ Algebre Boole atomice. Structura algebrelor Boole atomice

Fie B o algebră Boole. Un element nenul a al lui B se numește <u>atom</u> dacă

$$0 \leq y \leq a \Rightarrow y = 0 \text{ sau } y = a.$$

Algebra Boole B se numește <u>atomică</u> dacă pentru orice element $x \neq 0$ există un atom a astfel încât $a \leq x$.

<u>Exemple</u>. (1) În algebra Boole $\mathcal{P}(X)$ atomii sunt $\{x\}$, $x \in X$. Evident $\mathcal{P}(X)$ este atomică

(2) În L_2^n atomii sunt $e_1 = (1, 0, \ldots, 0), \ldots, e_n = (0, 0, \ldots, 1)$.

<u>Lema 1</u>. Orice algebră Boole finită este atomică.

<u>Demonstrație</u>. Orice șir strict descrescător $a_0 > a_1 > \ldots > a_n > \ldots > 0$ este finit.

<u>Propoziția 2</u>. Dacă B este o algebră Boole atomică și $\{a_i\}_{i \in I}$ este mulțimea atomilor săi atunci $\bigvee_{i \in I} a_i = 1$.

<u>Dem</u>. Presupunem prin absurd că există un majorant b al familiei $\{a_i\}_{i \in I}$ diferit de 1: $a_i \leq b < 1$ pentru orice $i \in I$. Atunci $\bar{b} \neq 0$ și cum B este atomică există un atom a_j $(j \in I)$ astfel încât $a_j \leq \bar{b}$. Cum $a_j \leq b$ rezultă $a_j \leq b \wedge \bar{b} = 0$. Contradicție.

O familie $\{e_i\}_{i \in I}$ din B se numește <u>partiție</u> dacă

(i) $e_i \wedge e_j = 0$ pentru orice $i \neq j$;

(ii) $\bigvee_{i \in I} e_i = 1$.

<u>Exemplu</u>. Dacă B este atomică atunci mulțimea $\{a_i\}_{i \in I}$ a atomilor lui B formează o partiție. Condiția (ii) este dată de Prop. 2, iar (i) rezultă direct din definiția atomului.

Fie $a \neq 0$ în B; notăm $B(a) = \{x \in B \mid x \leq a\}$. Observăm că $B(a)$ este închisă la $\vee$ și $\wedge$.
Pentru orice $x \in B(A)$ notăm $\tilde{x} = \bar{x} \wedge a$, introducând astfel o operație unară $\sim$ pe $B(a)$.

<u>Lema 3</u>. $(B(a), \vee, \wedge, \sim, 0, a)$ este o algebră Boole.

<u>Dem</u>. Dacă $x \in B(a)$, atunci $x \wedge \tilde{x} = 0$ și $x \vee \tilde{x} = a$.

Prop. 4. Fie $a_1, \dots, a_n \in B$ și $f : B \to B(a_1) \times \dots \times B(a_n)$ funcția definită de

$f(x) = (x \wedge a_1, \dots, x \wedge a_n)$ pentru orice $x \in B$.

(a) f este injectivă $\iff$ $\bigvee_{i=1}^{n} a_i = 1$;

(b) f este surjectivă $\iff$ $a_i \wedge a_j = 0$ pentru orice $i \neq j$;

(c) f este bijectivă $\iff$ $\{a_1, \dots, a_n\}$ este o partiție;

(d) f este morfism boolean.

Dem. (a) $\Rightarrow$: Din $f(\bigvee_{i=1}^{n} a_i) = (a_1, \dots, a_n) = f(1)$ rezultă $\bigvee_{i=1}^{n} a_i = 1$.

$\Leftarrow$: Presupunem $\bigvee_{i=1}^{n} a_i = 1$. Atunci

$$f(x) = f(y) \Rightarrow x \wedge a_i = y \wedge a_i, \ i = 1, \dots, n$$
$$\Rightarrow x = x \wedge \Big(\bigvee_{i=1}^{n} a_i\Big) = \bigvee_{i=1}^{n} (x \wedge a_i) = \bigvee_{i=1}^{n} (y \wedge a_i) = y \wedge \Big(\bigvee_{i=1}^{n} a_i\Big) = y$$

deci f este injectivă.

(b) $\Rightarrow$: Fie $i, j \in I$ distincți; notăm $c = a_i \wedge a_j$ și definim

$$x_k = \begin{cases} c, & k = i \\ \bar{c} \wedge a_j, & k = j \\ 0, & k \neq i, j \end{cases}$$

Atunci $(x_1, \dots, x_n) \in B(a_1) \times \dots \times B(a_n)$ deci există $x \in B$ astfel încât $f(x) = (x_1, \dots, x_n)$. Pe componentele i și j vom avea $a_i \wedge x = c$ și $a_j \wedge x = \bar{c} \wedge a_j$. Atunci $c \leq x$ și $c \leq a_j$ de unde $c \leq x \wedge a_j = \bar{c} \wedge a_j \leq \bar{c}$. Rezultă $c = 0$, deci $a_i \wedge a_j = 0$ pentru orice $i \neq j$.

$\Leftarrow$: Presupunem $a_i \wedge a_j = 0$ pentru $i \neq j$. Fie $(x_1, \dots, x_n) \in B(a_1) \times \dots \times B(a_n)$, deci $x_i \leq a_i$, $i = 1, \dots, n$. Notăm $x = x_1 \vee \dots \vee x_n$. Pentru orice $i = 1, \dots, n$ avem:

$$x \wedge a_i = \Big(\bigvee_{j=1}^{n} x_j\Big) \wedge a_i = \bigvee_{j=1}^{n} (x_j \wedge a_i) = x_i$$

pentru că $x_j \wedge a_i = 0$ pentru $j \neq i$ (pentru că $x_j \wedge a_i \leq a_j \wedge a_i = 0$) și $x_i \wedge a_i = x_i$.

Se deduce că $f(x) = (x \wedge a_1, \dots, x \wedge a_n) = (x_1, \dots, x_n)$, deci f este surjectivă.

(c) Din (a) și (b).

(d) Exercițiu.

Cor. 5. Dacă $\{a_1, \dots, a_n\}$ este o partiție atunci morfismul f din Prop. 4 este un izomorfism boolean.

Prop. 6. Dacă B este o algebră Boole finită atunci există ~~astfel~~ un număr natural n astfel încât B şi L_2^n sunt izomorfe.

Dem. Dacă B este finită atunci B este atomică. Fie $a_1, \ldots, a_n$ atomii lui B. Cum $\{a_1, \ldots, a_n\}$ este o partiţie avem $B \simeq \prod_{i=1}^{n} B(a_i)$. Dacă a este un atom atunci $B(a_i) = \{0, a\}$, deci $B(a_i) \simeq L_2$ pentru orice $i = 1, \ldots, n$. Am obţinut $B \simeq L_2^n$.

Cor. 7. Două algebre Boole finite de acelaşi cardinal sunt izomorfe.

Dem. Dacă $B_1 \simeq B_2$ şi $B_1 \simeq L_2^n$, $B_2 \simeq L_2^m$ atunci $n = m$ şi $B_1 \simeq B_2$.

~~O algebră Boole B este completă dacă pentru orice $\{x_i\}_{i \in I}$ din B există $\bigvee_{i \in I} x_i$.~~

Prop. 8. Fie B o algebră Boole completă şi $\{a_i\}_{i \in I}$ o partiţie în B. Atunci funcţia $f: B \to \prod_{i \in I} B(a_i)$ definită de $f(x) = (x \wedge a_i)_{i \in I}$ este un izomorfism boolean.

Dem. Analog cu demonstraţia Prop. 4 şi a Cor. 5.

Prop. 9. Sunt echivalente afirmaţiile următoare:

(1) B este o algebră Boole completă şi atomică;

(2) B este izomorfă cu o algebră Boole de forma $\mathcal{P}(X)$.

Dem. (1) $\Rightarrow$ (2) Analog cu demonstraţia Prop. 6, aplicându-se Prop. 8.

(2) $\Rightarrow$ (1) $\mathcal{P}(X)$ este completă şi atomică.

7. Dualitatea algebrelor Boole

Fie B o algebră Boole, $\mathrm{Spec}\, B$ mulţimea ultrafiltrelor lui B şi $d: B \to \mathcal{P}(\mathrm{Spec}\, B)$ morfismul lui Stone: ~~$d(x)=\{P \in \mathrm{Spec}\, B \mid x \notin P\}$~~. $d_A(x) = \{P \in \mathrm{Spec}\, B \mid x \in P\}$.

<u>Lema 1.</u> Pentru orice $x, y \in B$ avem

(i) $d(x \vee y) = d(x) \cup d(y)$;

(ii) $d(x \wedge y) = d(x) \cap d(y)$;

(iii) $d(\bar{x}) = \complement d(x)$;

(iv) $d(0) = \emptyset$; $d(1) = \mathrm{Spec}\, B$.

<u>Dem.</u> Vezi demonstraţia teoremei de reprezentare a lui Stone.

Fie $\mathcal{F}(B)$ mulţimea filtrelor lui B. Pentru orice $F \in \mathcal{F}(B)$ notăm $d(F) = \{P \in \mathrm{Spec}\, B \mid F \subseteq P\}$.

Este evident că $d(x) = d([x))$ pentru orice $x \in B$.

<u>Prop. 2.</u> $\{d(F) \mid F \in \mathcal{F}(B)\}$ este familia mulţimilor închise ale unei topologii pe B.

<u>Dem.</u> Fie $(F_i)_{i \in I} \subseteq \mathcal{F}(B)$ şi $F_1, F_2 \in \mathcal{F}(B)$. Atunci:

(1) $\bigcap_{i \in I} d(F_i) = d(\bigvee_{i \in I} F_i)$ unde $\bigvee_{i \in I} F_i$ este filtrul lui B generat de $\bigcup_{i \in I} F_i$;

(2) $d(F_1) \cup d(F_2) = d(F_1 \cap F_2)$;

(3) $d(1) = \mathrm{Spec}\, B$; $d(0) = \emptyset$.

Fie $P \in \mathrm{Spec}\, B$. (1) rezultă din echivalenţa

(1') $F_i \subseteq P, i \in I \iff \bigvee_{i \in I} F_i \subseteq P$,

iar (2) rezultă din echivalenţa

(2') $F_1 \cap F_2 \subseteq P \iff F_1 \subseteq P$ ~~sau~~ $F_2 \subseteq P$.

Vom demonstra (2'). Dacă $F_1, F_2 \not\subseteq P$ atunci există $x \in F_1 - P$ şi $y \in F_2 - P$, deci $x \vee y \notin P$ (P fiind filtru prim). ~~ceea ce contrazice $x \vee y \in F_1 \cap F_2$~~. Dar $x \vee y \in F_1 \cap F_2$, deci $F_1 \cap F_2 \not\subseteq P$.

Implicaţia cealaltă este evidentă.

Egalităţile (3) sunt evidente. Proprietăţile (1)-(3) nu exprimă altceva decât că $\{d(F) \mid F \in \mathcal{F}(B)\}$ sunt închişii unei topologii pe $\mathrm{Spec}\, B$.

<u>Observaţie.</u> Topologia definită de Prop. 2 poartă numele de <u>topologia lui Stone</u>.

~~Fie $f: A \to B$ un morfism boolean şi $\mathrm{Spec}\, f: \mathrm{Spec}\, B \to \mathrm{Spec}\, A$ funcţia definită de $(\mathrm{Spec}\, f)(P) = f^{-1}(P)$ pentru orice $P \in \mathrm{Spec}\, B$.~~

Prop. 3 (1) Pentru orice $x \in B$, $d(x)$ este o mulțime închisă și deschisă a lui Spec B.

(2) $\{d(x) \mid x \in X\}$ este bază de deschiși (sau de închiși)

Dem. (1) Din $Cd(x) = d(\bar{x})$.

(2) Pentru orice filtru F avem $F = \bigvee\{[x) \mid x \in F\}$, de unde

$$d(F) = d(\bigvee\{[x) \mid x \in F\}) = \bigcap_{x \in F} d(x).$$

Prop. 4. Pentru orice $x \in B$, $d(x)$ este o mulțime compactă

Dem. Considerăm o acoperire deschisă a lui $d(x)$: $d(x) \subseteq \bigcup_{i \in I} d(x_i)$. Așadar, pentru orice $P \in \mathrm{Spec} B$, $x \in P$ implică existența unui $i \in I$ astfel încât $x_i \in P$.

Fie $X = \{x\} \cup \{\bar{x}_i \mid i \in I\}$ și $F = [X)$ filtrul generat de X. Presupunem prin absurd că F este propriu, deci există $U \in \mathrm{Spec} B$, $F \subseteq U$ (Prop. 1, §5). Atunci $\bar{x}_i \in U$ pentru orice $i \in I$ și $x \in U$ implică existența unui $j \in I$ astfel încât $x_j \in U$. Contradicție, deci $0 \in F$. Ținând seama de Prop. 8, §4 există $J \subseteq I$ finită astfel încât $0 = x \wedge \bigwedge\{\bar{x}_j \mid j \in J\}$. De aici se deduce că $x \leq \bigvee_{j \in J} x_j$, de unde $d(x) \subseteq d(\bigvee_{j \in J} x_j) = \bigcup_{j \in J} d(x_j)$. Rezultă că $d(x)$ este compactă.

Prop. 5. Spec B este spațiu compact și separat.

Dem. Fie $P_1, P_2 \in \mathrm{Spec} B$, $P_1 \neq P_2$ deci există $x \in P_1$ și $x \notin P_2$. Conform Prop. 3, §5, $\bar{x} \in P$, de unde $P_1 \in d(x)$, $P_2 \in d(\bar{x})$ și $d(x) \cap d(\bar{x}) = \emptyset$. Am demonstrat că Spec B este separat. Compacitatea lui B rezultă din Prop. 4 ($\mathrm{Spec} B = d(1)$).

Un spațiu topologic este <u>zero-dimensional</u> dacă părțile sale închise și deschise formează o bază.

Un spațiu compact, separat și zero-dimensional se numește spațiu boolean.

Prop. 6. Pentru orice algebră Boole B, Spec B este un spațiu boolean.

Fie $f : A \to B$ un morfism boolean și $\mathrm{Spec} f : \mathrm{Spec} B \to \mathrm{Spec} A$ funcția definită astfel: $(\mathrm{Spec} f)(P) = f^{-1}(P)$ pentru orice $P \in \mathrm{Spec} B$.

Prop 7. Spec f este o funcție continuă.

Dem. Pentru orice $y \in A$ avem

$$(\mathrm{Spec}\, f)^{-1}(d_A(y)) = \{P \in \mathrm{Spec}\, B \mid f^{-1}(P) \in d_A(y)\}$$
$$= \{P \in \mathrm{Spec}\, B \mid y \in f^{-1}(P)\}$$
$$= \{P \in \mathrm{Spec}\, B \mid f(y) \in P\}$$
$$= d_B(f(y)).$$

Dacă $\mathbb{B}$ este categoria algebrelor Boole și $S\mathbb{B}$ este categoria spațiilor booleene și a funcțiilor continue atunci asocierea $B \rightsquigarrow \mathrm{Spec}\, B$, $f \rightsquigarrow \mathrm{Spec}\, f$ definește un functor contravariant $\mathrm{Spec} : \mathbb{B} \to S\mathbb{B}$.

Fie acum X un spațiu ~~Bo~~ boolean și $T(X)$ algebra Boole a părților închise și deschise ale lui X. Dacă $g : X \to Y$ este un morfism din $S\mathbb{B}$ (= aplicație continuă) atunci considerăm funcția $T(g) : T(Y) \to T(X)$ definită de $T(g)(D) = g^{-1}(D)$ pentru orice $D \in T(Y)$. Asocierea $X \rightsquigarrow T(X)$, $g \rightsquigarrow T(g)$ definește un functor contravariant $T : S\mathbb{B} \to \mathbb{B}$.

Prop. 8. Pentru orice $B \in \mathbb{B}$ algebrele Boole B și $T(\mathrm{Spec}(B))$ sunt izomorfe.

Dem. Considerăm morfismul lui Stone $d_B : B \to T(\mathrm{Spec}(B))$ $(x \mapsto d_B(x))$. d_B este un morfism boolean injectiv. A rămas de arătat surjectivitatea lui d_B. Fie $D \in T(\mathrm{Spec}(B))$, deci D este o parte a lui $\mathrm{Spec}\, B$ închisă și deschisă. Cum D este închisă în spațiul $\mathrm{Spec}\, B$ compact și separat rezultă că D este compactă. D fiind deschisă și $\{d_B(x) \mid x \in B\}$ bază a lui $\mathrm{Spec}\, B$ există o familie $(x_i)_{i \in I}$ în B astfel încât $D = \bigcup_{i \in I} d_A(x_i)$. Atunci există $J \subseteq I$ finită astfel încât $D = \bigcup_{i \in J} d_B(x_i) =$

$= d_B\left(\bigvee_{i \in J} x_i\right)$ și d_B este ~~injectiv~~ surjectiv.

Prop. 9. Pentru orice $X \in S\mathbb{B}$ spațiile booleene X și $\mathrm{Spec}\, T(X)$ sunt homeomorfe.

Dem. Pentru orice $x \in X$, $U_x = \{D \in T(X) \mid x \in D\}$ este un ultrafiltru al lui $T(X)$. Considerăm funcția $\varphi_X : X \to \mathrm{Spec}\, T(X)$ definită de $\varphi_X(x) = U_x$ pentru orice $x \in X$. Pentru a arăta că φ_X este homeomorphism parcurgem următorii pași:

a) φ_X este injectivă.

Dacă $x, y \in X$, $x \neq y$ atunci există $D_1, D_2 \in T(X)$, $x \in D_1$, $y \in D_2$ și $D_1 \cap D_2 = \emptyset$. Atunci $D_1 \in \mathcal{U}_x$, $D_2 \in \mathcal{U}_y$ și $D_2 \notin \mathcal{U}_x$, deci ~~φ~~ $\varphi_X(x) = \mathcal{U}_x \neq \mathcal{U}_y = \varphi_X(y)$.

b) φ_X este surjectivă

~~Dacă~~ Fie $\mathcal{U} \in \operatorname{Spec} T(X)$. Dacă $\{D_1, \dots, D_n\} \in \mathcal{U}$ atunci $\bigcap_{i=1}^{n} D_i \in \mathcal{U}$, deci $\bigcap_{i=1}^{n} D_i \neq \emptyset$ (pentru că $\mathcal{U}$ este filtru propriu în $T(X)$). Atunci $\mathcal{U}$ are proprietatea intersecției finite deci $\bigcap\{D \mid D \in \mathcal{U}\} \neq \emptyset$, deoarece X este compact.

Fie $x, y \in \bigcap\{D \mid D \in \mathcal{U}\}$, $x \neq y$, deci există $D_1, D_2 \in T(X)$, $x \in D_1$, $y \in D_2$, $D_1 \cap D_2 = \emptyset$. Dar $CD_1 \cup CD_2 = X \in \mathcal{U}$ deci $CD_1 \in \mathcal{U}$ sau $CD_2 \in \mathcal{U}$, pentru că $\mathcal{U}$ este filtru prim în $T(X)$. S-a obținut $x \notin D_1$ sau $y \notin D_2$. Contradicție, deci mulțimea $\bigcap\{D \mid D \in \mathcal{U}\}$ are un singur element x. Atunci avem $x \in D$ dacă și numai dacă $D \in \mathcal{U}$, de unde $\mathcal{U}_x = \mathcal{U}$. Am demonstrat că $\varphi_X(x) = \mathcal{U}$, deci φ_X este surjectivă.

c) φ_X este continuă

Pentru orice $D \in T(X)$ avem

$$\varphi_X^{-1}(d(D)) = \{x \mid \mathcal{U}_x \in d(D)\} = \{x \mid D \in \mathcal{U}_x\} = \{x \mid x \in D\} = D.$$

d) φ_X este aplicație deschisă

Pentru orice $D \in T(X)$ vom demonstra că

$$\{\mathcal{U}_x \mid x \in D\} = \{\mathcal{U} \in \operatorname{Spec} T(X) \mid D \in \mathcal{U}\}$$

Dacă $D \in \mathcal{U} \in \operatorname{Spec} T(X)$ atunci $\mathcal{U} = \mathcal{U}_x$ cu $\bigcap\{D' \mid D' \in \mathcal{U}\} = \{x\}$. Rezultă $D \in \mathcal{U}_x$ și deci $x \in D\}$. Implicația cealaltă este evidentă. Am demonstrat că

$\varphi_X(D) = \{\mathcal{U}_x \mid x \in D\} = d(D)$, deci φ_X este aplicație deschisă.

<u>Prop. 10.</u> Dacă $f : A \to B$ este un morfism boolean atunci următoarea diagramă este comutativă

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "d_A", "\sim"'] \arrow[d, "f"'] & T(\mathrm{Spec}(A)) \arrow[d, "T(\mathrm{Spec}(f))"] \\ B \arrow[r, "\sim", "d_B"'] & T(\mathrm{Spec}(B)) \end{tikzcd}$$

<u>Dem.</u> Pentru orice $x \in A$ au loc următoarele egalități:

$$\begin{aligned} T(\mathrm{Spec}(f))(d_A(x)) &= \{P \in \mathrm{Spec}\,B \mid \mathrm{Spec}(f)(P) \in d_A(x)\} \\ &= \{P \in \mathrm{Spec}\,B \mid f^{-1}(P) \in d_A(x)\} \\ &= \{P \in \mathrm{Spec}\,B \mid x \in f^{-1}(P)\} \\ &= d_B(f(x)). \end{aligned}$$

Propoziția 10 spune că $d : id\,\mathbb{B} \to T \circ \mathrm{Spec}$ este izomorfism functorial.

<u>Prop. 11.</u> Dacă $g : X \to Y$ este un morfism din $S\mathbb{B}$ atunci următoarea diagramă este comutativă:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\varphi_X", "\sim"'] \arrow[d, "g"'] & \mathrm{Spec}(T(X)) \arrow[d, "\mathrm{Spec}(T(g))"] \\ Y \arrow[r, "\sim", "\varphi_Y"'] & \mathrm{Spec}(T(Y)) \end{tikzcd}$$

<u>Dem.</u> Pentru orice $x \in X$ următoarele egalități sunt adevărate

$$\begin{aligned} \mathrm{Spec}(T(g))(\varphi_X(x)) &= (T(g))^{-1}(\varphi_X(x)) \\ &= \{D \in T(Y) \mid T(g)(D) \in \varphi_X(x)\} \\ &= \{D \in T(Y) \mid g^{-1}(D) \in \mathcal{U}_x\} \\ &= \{D \in T(Y) \mid x \in g^{-1}(D)\} \\ &= \varphi_Y(g(x)). \end{aligned}$$

Prop. 11 spune că $\varphi : id\, S\mathbb{B} \to \mathrm{Spec} \circ T$ este izomorfism functorial.

Însumând toate rezultatele acestui paragraf putem formula următoarea

<u>Teoremă</u> (dualitatea Stone). Categoriile $\mathbb{B}$ și $S\mathbb{B}$ sunt duale.

§9. Algebre Boole injective

Fie B o algebră Boole oarecare.

Lema 1. Intersecția unei familii de subalgebre ale lui B este o subalgebră.

Dem. Direct din definiția subalgebrei.

Dacă $X \subseteq B$ atunci subalgebra generată de X este intersecția tuturor subalgebrelor lui B ~~generate~~ ce includ pe X.

Lema 2. Fie A o subalgebră a lui B și $b \notin A$. Atunci:

$$A(b) = \{(a_1 \wedge b) \vee (a_2 \wedge \bar{b}) \mid a_1, a_2 \in A\}$$

este subalgebra lui B generată de $A \cup \{b\}$.

Dem. Fie $x = (a_1 \wedge b) \vee (a_2 \vee \bar{b})$ și $y = (a_1' \wedge b) \vee (a_2' \vee \bar{b})$. Atunci:

$$x \vee y = [(a_1 \vee a_2') \wedge b] \vee [(a_2 \vee a_2') \wedge \bar{b}] \in A(b).$$

Dacă $a \in A$ atunci

$$a \vee x = [a \wedge (b \wedge \bar{b})] \vee x = (a \wedge b) \vee (a \wedge \bar{b}) \vee (a_1 \vee b) \vee (a_2 \vee \bar{b})$$

$$= [(a_1 \vee a_2) \wedge b] \vee [(a_2 \vee a) \wedge \bar{b}] \in A(b)$$

Conform acestei observații:

$$\bar{x} = (\bar{a}_1 \vee \bar{b}) \wedge (\bar{a}_2 \vee b) = (\bar{a}_1 \wedge \bar{a}_2) \vee [(\bar{a}_1 \wedge b) \vee (\bar{a}_2 \wedge \bar{b})] \in A(b)$$

deoarece $\bar{a}_1 \wedge \bar{a}_2 \in A$ și $(\bar{a}_1 \wedge b) \vee (\bar{a}_2 \wedge \bar{b}) \in A(b)$. Rezultă că $A(b)$ este subalgebră și restul demonstrației este evident.

(Sikorski)

Prop. 3. Fie A o subalgebră a lui B, $b \notin A$, C o algebră Boole completă și $h: A \to C$ un morfism boolean. Atunci există un ~~morfism~~ boolean $\tilde{h}: A(b) \to C$ ce extinde pe h. $\tilde{h}(b)$ poate fi orice element $c \in C$ cu proprietatea următoare

$$(1) \qquad \bigvee\{h(a) \mid a \in A, a \le b\} \le c \le \bigwedge\{h(a) \mid a \in A, b \le a\}.$$

Dem. Se stabilește imediat inegalitatea

$$\bigvee\{h(a) \mid a \in A, a \le b\} \le \bigwedge\{h(a) \mid a \in A, b \le a\}$$

deci există un ~~elemente~~ c cu proprietatea (1).

Dacă $x=(a_1\wedge b)\vee(a_2\wedge\bar b)$ atunci vom pune

(2) $\tilde h(x)=[h(a_1)\wedge c]\vee[h(a_2)\wedge\bar c]$

c fiind un element ce verifică (1). Arătăm că $\tilde h : A(b)\to C$ este bine definită.

Anume vom arăta că

$$x=(a_1\wedge b)\vee(a_2\wedge\bar b)=(a_1'\wedge b)\vee(a_2'\wedge\bar b)$$

implică

$$[h(a_1)\wedge c]\vee[h(a_2)\wedge\bar c]=[h(a_1')\wedge c]\vee[h(a_2')\wedge\bar c]$$

Inegalitatea

(3) $$(a_1\wedge b)\vee(a_2\wedge\bar b)\le(a_1'\wedge b)\vee(a_2'\wedge\bar b)=$$
$$=(a_1'\vee a_2')\wedge(a_1'\vee\bar b)\wedge(a_2'\vee b)$$

implică inegalitățile

(4) $$a_1\wedge b\le a_1'\vee a_2',\ a_1'\vee\bar b,\ a_2'\vee b$$
$$a_2\wedge\bar b\le a_1'\vee a_2',\ a_1'\vee\bar b,\ a_2'\vee b$$

De aici rezultă

(5) $$h(a_1)\wedge c\le h(a_1')\vee h(a_2'),\ h(a_1')\vee\bar c,\ h(a_2')\vee c$$
$$h(a_2)\wedge\bar c\le h(a_1')\vee h(a_2'),\ h(a_1')\vee\bar c,\ h(a_2')\vee c$$

De exemplu

$$a_1\wedge b\le a_1'\vee\bar b\Rightarrow(a_1\wedge b)\wedge(a_1'\vee\bar b)^-=0$$
$$\Rightarrow a_1\wedge\bar{a_1'}\wedge b=0$$
$$\Rightarrow b\le(a_1\wedge\bar{a_1'})^-$$
$$\Rightarrow c\le h((a_1\wedge\bar{a_1'})^-)=(h(a_1)\wedge h(\bar{a_1'}))^-$$
$$\Rightarrow h(a_1)\wedge h(\bar{a_1'})\wedge c=0$$
$$\Rightarrow h(a_1)\wedge c\wedge(h(a_1')\vee\bar c)^-=0$$
$$\Rightarrow h(a_1)\wedge c\le h(a_1')\vee\bar c$$

Inegalitățile (5) implică

$$[h(a_1)\wedge c]\vee[h(a_2)\wedge\bar c]\le[h(a_1')\wedge c]\wedge[h(a_2')\wedge\bar c]$$

Inegalitatea inversă rezultă analog.

Arătăm acum că $\tilde{h}$ este morfism boolean.

Dacă $x=(a_1\wedge b)\vee(a_2\wedge\bar{b})$ şi $y=(a_1'\wedge b)\vee(a_2'\wedge\bar{b})$ atunci

$$x\vee y=[(a_1\vee a_1')\wedge b]\vee[(a_2\vee a_2')\wedge\bar{b}]\text{ , deci}$$

$$\tilde{h}(x\vee y)=[h(a_1\vee a_1')\wedge c]\vee[h(a_2\vee a_2')\wedge\bar{c}]$$

$$=[(h(a_1)\vee h(a_1'))\wedge c]\vee[(h(a_2)\vee h(a_2'))\wedge\bar{c}]$$

$$=[(h(a_1)\wedge c)\vee(h(a_2)\wedge\bar{c})]\vee[(h(a_1')\wedge c)\vee(h(a_2)\wedge\bar{c})]$$

$$=\tilde{h}(x)\vee\tilde{h}(y).$$

Rezultă că $\tilde{h}(x_1\vee\dots\vee x_n)=\tilde{h}(x_1)\vee\dots\vee\tilde{h}(x_n)$ pentru orice $x_1,\dots,x_n\in A(b)$. Observând că $\bar{x}=(\bar{a}_1\wedge\bar{a}_2)\vee(\bar{a}_1\wedge b)\vee(\bar{a}_2\wedge\bar{b})$ vom avea

$$\tilde{h}(\bar{x})=\tilde{h}(\bar{a}_1\wedge\bar{a}_2)\vee\tilde{h}[(\bar{a}_1\wedge b)\vee(\bar{a}_2\wedge\bar{b})]$$

$$=(\overline{h(a_1)}\wedge\overline{h(a_2)})\vee[h(\bar{a}_1)\wedge c]\vee[h(\bar{a}_2)\wedge\bar{c}]$$

$$=[(h(a_1)\vee h(a_2))\wedge(h(a_1)\vee\bar{c})\wedge(h(a_2)\wedge c)]^-$$

$$=[(h(a_1)\wedge c)\vee(h(a_2)\wedge\bar{c})]'$$

$$=(\tilde{h}(x))^-.$$

Am demonstrat că $\tilde{h}$ este morfism boolean şi restul este evident.

Definiţia 4. O algebră Boole C se numeşte *injectivă* dacă pentru orice algebră Boole B, pentru orice subalgebră A a lui B şi pentru orice morfism boolean $f: A\to C$ există un morfism boolean $g: B\to C$ ce extinde pe f:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, phantom, "\subseteq"] \arrow[dr, "f"'] & B \arrow[d, "g"] \\ & C \end{tikzcd}$$

Prop. 5 (Sikorski) Orice algebră Boole completă C este injectivă.

Dem. Considerăm diagrama în $\mathbb{B}$:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, phantom, "\leq"] \arrow[dr, "f"'] & B \\ & C \end{tikzcd}$$

Fie Σ mulțimea perechilor (D, h), astfel încât D este subalgebră a lui B ce include pe A și $h: D \to C$ este un morfism boolean ce extinde pe f:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, phantom, "\subseteq"] \arrow[dr, "f"'] & D \arrow[r, phantom, "\subseteq"] \arrow[d, "h"] & B \\ & C & \end{tikzcd}$$

Dacă $(D, h), (E, u) \in \Sigma$ definim $(D, h) \preceq (E, u)$ dacă următoarea diagramă este ~~A≤~~ comutativă:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, phantom, "\subseteq"] \arrow[dr, "f"'] & D \arrow[r, phantom, "\subseteq"] \arrow[d, "h"] & E \arrow[r, phantom, "\subseteq"] \arrow[dl, "u"] & B \\ & C & & \end{tikzcd}$$

Se demonstrează ușor că $(\Sigma, \preceq)$ este inductiv ordonată deci, conform axiomei lui Zorn, admite un element maximal (D, h). Presupunem că $D \neq B$ deci există $a \in B - D$. Considerăm $D(a)$ și aplicăm Prop. 3: există un morfism boolean $\tilde{h}: D(a) \to C$ ce extinde pe h. Aceasta contrazice maximalitatea lui (D, h), ceea ce arată că $D = B$. Propoziția este astfel demonstrată.

<u>Lema 6</u>. Fie în $\mathcal{B}$ diagrama comutativă

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "1_C"'] & B \arrow[d, "g"] \\ & C \end{tikzcd}$$

. Dacă B este algebră Boole completă atunci și C este completă.

<u>Dem</u>. Pentru o familie de elemente $\{x_i\}_{i \in I}$ vom arăta că $\bigvee_C x_i = g(\bigvee_B f(x_i))$. Este evident că $x_i = g(f(x_i)) \leq g(\bigvee_B f(x_i))$ pentru orice $i \in I$. Dacă $y \in C$ și $x_i \leq y$ pentru orice $i \in I$ atunci $f(x_i) \leq f(y)$, $i \in I$ în B, deci $\bigvee_B f(x_i) \leq f(y)$. Se obține $g(\bigvee_B f(x_i)) \leq g(f(y)) = y$.

<u>Prop. 7</u>. (Halmos) Orice algebră Boole injectivă C este completă.

<u>Dem</u>. Fie $d: C \to L_2^X$ morfismul lui Stone. C se identifică cu o subalgebră a lui L_2^X. Conform injectivității rezultă un morfism boolean $g: L_2^X \to C$ astfel încât $g \circ d = 1_C$. L_2^X este completă și se aplică apoi Lema 6.

<u>Teorema 8</u> (Sikorski-Halmos). O algebră Boole este injectivă dacă și numai dacă ea este completă.

<u>Dem</u>. Din Propozițiile 5 și 7.

SISTEMUL FORMAL AL CALCULULUI PROPOZIȚIONAL (L)

§1. Sintaxa calculului propozițional.

Alfabetul sistemului formal al calculului propozițional este format din următoarele simboluri:

1) variabile propoziționale, notate $u, v, w, \ldots$ (eventual cu indici)
2) simboluri logice (conectori):
   - $\neg$: simbolul de negație (va fi citit: non)
   - $\rightarrow$: simbolul de implicație (va fi citit: implică)
3) parantezele (,), [,].

Se va presupune că mulțimea V a variabilelor propoziționale este infinită.

Pornind de la aceste simboluri primitive vom construi cuvintele (asamblajele). Prin definiție, un cuvânt este un șir finit de simboluri primitive, scrise unul după altul.

Exemplu: $u \rightarrow \neg v$, $\neg(u \rightarrow \neg v) \rightarrow w$, $u \rightarrow u v \neg)$

Intuiția ne spune că primele două cuvinte "au sens" pe când cel de-al treilea nu. Din mulțimea cuvintelor le vom selecta pe acelea care "au sens", noțiune precizată astfel:

Se numește enunț orice cuvânt φ ce verifică una din condițiile următoare:

(i) φ este o variabilă propozițională;
(ii) există un enunț ψ astfel încât $\varphi = \neg\psi$;
(iii) există enunțurile ψ, θ astfel încât $\varphi = \psi \rightarrow \theta$.

Observație. Definiția conceptului de enunț este dată prin inducție. Momentul inițial al definiției prin inducție este dat de condiția (i), iar trecerea "de la k la $k+1$" este asigurată de (ii) și (iii).

Variabilele propoziționale se vor numi enunțuri atomice sau elementare. Vom nota cu E mulțimea enunțurilor. Pentru $\varphi, \psi \in E$ introducem abrevierile:

$\varphi \vee \psi = \neg\varphi \rightarrow \psi$ (disjuncția lui φ și ψ)

$\varphi \wedge \psi = \neg(\varphi \rightarrow \neg\psi)$ (conjuncția lui φ și ψ)

$\varphi \leftrightarrow \psi = (\varphi \rightarrow \psi) \wedge (\psi \rightarrow \varphi)$ (echivalența logică a lui φ și ψ).

Obs. În prezentarea sistemului formal al calculului propozițional am considerat negația și implicația drept conectori primitivi. Conectorii derivați $\vee$ (sau), $\wedge$ (și), $\leftrightarrow$ (echivalent) au fost introduși prin prescurtările de mai sus. Există prezentări ale sistemului formal al calculului propozițional (echivalente cu cea de mai sus) ce folosesc alți conectori primitivi.

În dezvoltarea sintaxei calculului propozițional vom urmări stabilirea unei noțiuni care să reprezinte "adevărurile formale" ale sistemului și a unei noțiuni care să spună ce este inferența sintactică.

O axiomă a sistemului formal al calculului propozițional este un enunț care are una din formele următoare:

(A1) $\varphi \to (\psi \to \varphi)$

(A2) $(\varphi \to (\psi \to \chi)) \to ((\varphi \to \psi) \to (\varphi \to \chi))$

(A3) $(\neg\varphi \to \neg\psi) \to (\psi \to \varphi)$

unde φ, ψ, χ sunt enunțuri arbitrare.

O teoremă formală (pe scurt, teoremă) este un enunț φ ce verifică una din condițiile următoare:

(T1) φ este o axiomă

(T2) Există un enunț ψ astfel încât ψ și $\psi \to \varphi$ sunt teoreme.

Condiția (T2) se scrie prescurtat : $\dfrac{\psi, \psi \to \varphi}{\varphi}$

și se numește regula de deducție modus ponens (m.p.)

Vom nota cu T mulțimea teoremelor, iar faptul că φ este o teoremă cu $\vdash \varphi$.

Definiția conceptului de teoremă formală a fost de asemenea dată prin inducție.

O demonstrație formală a unui enunț φ este un șir finit de enunțuri $\psi_1, \ldots, \psi_n$ astfel încât $\psi_n = \varphi$ și pentru orice $1 \le i \le n$ se verifică una din condițiile următoare:

(1) ψ_i este o axiomă

(2) Există doi indici $k, j < i$ astfel încât $\psi_k = \psi_j \to \psi_i$.

Se observă că proprietățile (1), (2) nu exprimă altceva decât condițiile (T1), (T2), deci $\vdash \varphi$ dacă și numai dacă există o demonstrație formală $\psi_1, \dots, \psi_n$ a lui φ. n se numește lungimea demonstrației formale. O teoremă poate avea demonstrații formale de lungimi diferite.

Fie Γ o mulțime de enunțuri și φ un enunț. Vom spune că enunțul φ este dedus din ipotezele Γ dacă una din condițiile următoare este verificată:

(D1) φ este o axiomă

(D2) $\varphi \in \Gamma$

(D3) Există un enunț ψ astfel încât ψ și $\psi \to \varphi$ sunt deduse din ipotezele Γ.

Condiția (D3) se mai scrie $\dfrac{\Gamma \vdash \psi,\ \psi \to \varphi}{\Gamma \vdash \varphi}$ și se numește tot modus ponens.

Dacă φ este dedus din Γ vom nota $\Gamma \vdash \varphi$.

O Γ-demonstrație formală a lui φ este un șir de enunțuri $\psi_1, \dots, \psi_n$ astfel încât $\psi_n = \varphi$ și pentru orice $1 \le i \le n$ este verificată una din condițiile:

(1) ψ_i este o axiomă

(2) $\psi_i \in \Gamma$

(3) Există doi indici $k, j < i$ astfel încât $\psi_k = \psi_j \to \psi_i$.

Atunci $\Gamma \vdash \varphi$ dacă și numai dacă există o Γ-demonstrație a lui φ.

Observație

(i) $\emptyset \vdash \varphi \iff \vdash \varphi$

(ii) Dacă $\vdash \varphi$ atunci $\Gamma \vdash \varphi$ pentru orice $\Gamma \subseteq E$.

Cu aceasta descrierea sintactică a sistemului formal al calculului propozițional este încheiată. Vom nota cu L acest sistem logic. Observăm că toată prezentarea s-a desfășurat la nivel simbolic: pornind de la o mulțime de simboluri am definit enunțurile, după care am definit teoremele formale și deducția sintactică (inferența sintactică).

§2. Proprietăți sintactice ale lui L

In acest paragraf vom prezenta unele proprietăți sintactice ale lui L, cea mai importantă fiind teorema deducției. Folosind acest rezultat vom stabili cele mai semnificative teoreme formale ale lui L.

Prop. 1. Fie $\Gamma, \Delta \subseteq E$ și $\varphi \in E$.

(i) Dacă $\Gamma \subseteq \Delta$ și $\Gamma \vdash \varphi$ atunci $\Delta \vdash \varphi$.

(ii) Dacă $\Gamma \vdash \varphi$ atunci există $\Sigma \subseteq \Gamma$ finită astfel încât $\Sigma \vdash \varphi$.

(iii) Dacă $\Gamma \vdash \chi$ pentru orice $\chi \in \Delta$ și $\Delta \vdash \varphi$ atunci $\Gamma \vdash \varphi$.

Dem. (i) Demonstrația se face prin inducție asupra conceptului $\Gamma \vdash \varphi$. Dacă $\Gamma \vdash \varphi$ atunci este verificată una din condițiile (D1)-(D3). Le vom lua pe rând

- dacă φ este o axiomă atunci $\Delta \vdash \varphi$
- dacă $\varphi \in \Gamma$ atunci $\varphi \in \Delta$, deci $\Delta \vdash \varphi$
- dacă $\Gamma \vdash \psi$ și $\Gamma \vdash \psi \to \varphi$ atunci, conform ipotezei ind., $\Delta \vdash \psi$ și $\Delta \vdash \psi \to \varphi$, deci $\Delta \vdash \varphi$.

(ii) Demonstrația se face tot prin inducție:

- dacă φ este axiomă atunci $\emptyset \vdash \varphi$ și $\emptyset \subseteq \Gamma$ este finită.
- dacă $\varphi \in \Gamma$ atunci luăm $\Sigma = \{\varphi\}$.
- dacă $\Gamma \vdash \psi$ și $\Gamma \vdash \psi \to \varphi$ atunci, conform ip. ind., există $\Sigma_1, \Sigma_2 \subseteq \Sigma$ finite astfel încât $\Sigma_1 \vdash \psi$, $\Sigma_2 \vdash \psi \to \varphi$; se ia $\Sigma = \Sigma_1 \cup \Sigma_2$ și se aplică (i)

(iii) Exercițiu.

Prop. 2. Pentru orice enunț φ, $\vdash \varphi \to \varphi$ (principiul identității).

Dem. Următoarea listă de enunțuri este o demonstrație formală a lui $\vdash \varphi \to \varphi$.

$\varphi \to ((\varphi \to \varphi) \to \varphi)$	(A1)
$[\varphi \to ((\varphi \to \varphi) \to \varphi)] \to [(\varphi \to (\varphi \to \varphi)) \to (\varphi \to \varphi)]$	(A2)
$(\varphi \to (\varphi \to \varphi)) \to (\varphi \to \varphi)$	m.p.
$\varphi \to (\varphi \to \varphi)$	A1
$\varphi \to \varphi$	m.p.

Prop. 3 (teorema deducţiei). Dacă $\Gamma \subseteq E$ şi $\varphi, \psi \in E$ atunci:

$$\Gamma \vdash \varphi \to \psi \Leftrightarrow \Gamma \cup \{\varphi\} \vdash \psi.$$

Dem. ($\Rightarrow$) Se aplică Prop. 1, (i) şi modus ponens

($\Leftarrow$) Prin inducţie. Dacă $\Gamma \cup \{\varphi\} \vdash \psi$ atunci avem cazurile

(1) ψ este o axiomă

Cum $\vdash \psi$ şi $\psi \to (\varphi \to \psi)$, conform (A1), atunci $\vdash \varphi \to \psi$ prin m.p., deci $\Gamma \vdash \varphi \to \psi$.

(2) $\psi \in \Gamma \cup \{\varphi\}$, cu două subcazuri

(a) $\psi \in \Gamma$: din $\Gamma \vdash \psi$, $\Gamma \vdash \psi \to (\varphi \to \psi)$ se deduce $\Gamma \vdash \varphi \to \psi$

(b) $\psi \in \{\varphi\}$: se aplică principiul identităţii : $\Gamma \vdash \varphi \to \varphi$

(3) Există $\alpha \in E$ astfel încât $\Gamma \cup \{\varphi\} \vdash \alpha$ şi $\Gamma \cup \{\varphi\} \vdash \alpha \to \psi$. Aplicând ipoteza inducţiei rezultă $\Gamma \vdash \varphi \to \alpha$ şi $\Gamma \vdash \varphi \to (\alpha \to \psi)$. De asemenea

$$\Gamma \vdash (\varphi \to (\alpha \to \psi)) \to ((\varphi \to \alpha) \to (\varphi \to \psi)) \qquad (A2)$$

Aplicând de două ori m.p. se obţine $\Gamma \vdash \varphi \to \psi$.

Observaţie. În demonstrarea principiului identităţii şi a teoremei deducţiei nu au intervenit decât axiomele (A1), (A2) şi m.p.

Prop. 4. $\vdash (\varphi \to \psi) \to ((\psi \to \chi) \to (\varphi \to \chi))$

Dem. Vom aplica succesiv m.p. şi apoi teorema deducţiei

$\{\varphi \to \psi, \psi \to \chi, \varphi\} \vdash \varphi$

$\{\varphi \to \psi, \psi \to \chi, \varphi\} \vdash \varphi \to \psi$

$\{\varphi \to \psi, \psi \to \chi, \varphi\} \vdash \psi$ m.p.

$\{\varphi \to \psi, \psi \to \chi, \varphi\} \vdash \psi \to \chi$

$\{\varphi \to \psi, \psi \to \chi, \varphi\} \vdash \chi$ m.p.

$\{\varphi \to \psi, \psi \to \chi\} \vdash \varphi \to \chi$ th. ded.

$\{\varphi \to \psi\} \vdash (\psi \to \chi) \to (\varphi \to \chi)$ th. ded.

$\vdash (\varphi \to \psi) \to ((\psi \to \chi) \to (\varphi \to \chi))$ th. ded.

Obs. Din Prop. 4 se deduce următoarea regulă de deducție derivată:

$$(R_1) \qquad \frac{\varphi\to\psi,\ \psi\to\chi}{\varphi\to\chi}$$

Prop. 5. $\vdash (\varphi\to(\psi\to\chi))\to(\psi\to(\varphi\to\chi))$

Dem. Aplicăm m.p. și apoi teorema deducției

$\{\varphi, \psi, \varphi\to(\psi\to\chi)\} \vdash \varphi$

$\{\varphi, \psi, \varphi\to(\psi\to\chi)\} \vdash \varphi\to(\psi\to\chi)$

$\{\varphi, \psi, \varphi\to(\psi\to\chi)\} \vdash \psi\to\chi$ — m.p.

$\{\varphi, \psi, \varphi\to(\psi\to\chi)\} \vdash \psi$

$\{\varphi, \psi, \varphi\to(\psi\to\chi)\} \vdash \chi$ — m.p.

$\{\psi, \varphi\to(\psi\to\chi)\} \vdash \varphi\to\chi$ — Th. ded.

$\{\varphi\to(\psi\to\chi)\} \vdash \psi\to(\varphi\to\chi)$ — Th. ded.

$\vdash (\varphi\to(\psi\to\chi))\to(\psi\to(\varphi\to\chi))$ — Th. ded.

Obs. Prop. 5 îi corespunde următoarea regulă de deducție derivată:

$$(R_2) \qquad \frac{\varphi\to(\psi\to\chi)}{\psi\to(\varphi\to\chi)}$$

Prop. 6 $\vdash \varphi\to(\neg\varphi\to\psi)$

Dem

$\{\varphi, \neg\varphi\} \vdash \neg\varphi\to(\neg\psi\to\neg\varphi)$ — (A_1)

$\{\varphi, \neg\varphi\} \vdash \neg\varphi$

$\{\varphi, \neg\varphi\} \vdash \neg\psi\to\neg\varphi$ — m.p.

$\{\varphi, \neg\varphi\} \vdash (\neg\psi\to\neg\varphi)\to(\varphi\to\psi)$ — (A_3)

$\{\varphi, \neg\varphi\} \vdash \varphi\to\psi$ — m.p.

$\{\varphi, \neg\varphi\} \vdash \varphi$

$\{\varphi, \neg\varphi\} \vdash \psi$ — m.p.

$\{\varphi\} \vdash \neg\varphi\to\psi$ — Th. ded.

$\vdash \varphi\to(\neg\varphi\to\psi)$ — Th. ded.

Prop. 7. $\vdash \neg\varphi\to(\varphi\to\psi)$

<u>Dem.</u> Conform Prop. 5 : $\vdash (\varphi \to (\neg\varphi \to \psi)) \to (\neg\varphi \to (\varphi \to \psi))$

de unde, aplicând Prop. 6 și m.p., $\vdash \neg\varphi \to (\varphi \to \psi)$.

<u>Exercițiu</u>. Să se demonstreze Prop. 7 în maniera Prop. 6, folosind teorema deducției.

<u>Prop. 8</u>. $\vdash \neg\neg\varphi \to \varphi$

<u>Dem</u>

$\{\neg\neg\varphi\} \vdash \neg\neg\varphi \to (\neg\neg\neg\neg\varphi \to \neg\neg\varphi)$	(A1)
$\{\neg\neg\varphi\} \vdash \neg\neg\varphi$	
$\{\neg\neg\varphi\} \vdash \neg\neg\neg\neg\varphi \to \neg\neg\varphi$	m.p.
$\{\neg\neg\varphi\} \vdash (\neg\neg\neg\neg\varphi \to \neg\neg\varphi) \to (\neg\varphi \to \neg\neg\neg\varphi)$	(A3)
$\{\neg\neg\varphi\} \vdash \neg\varphi \to \neg\neg\neg\varphi$	m.p.
$\{\neg\neg\varphi\} \vdash (\neg\varphi \to \neg\neg\neg\varphi) \to (\neg\neg\varphi \to \varphi)$	(A3)
$\{\neg\neg\varphi\} \vdash \neg\neg\varphi \to \varphi$	m.p.
$\{\neg\neg\varphi\} \vdash \varphi$	m.p.
$\vdash \neg\neg\varphi \to \varphi$	th. ded.

<u>Prop. 9</u>. $\vdash (\varphi \to \psi) \to (\neg\psi \to \neg\varphi)$

<u>Dem.</u>

$\{\varphi \to \psi, \neg\psi, \neg\neg\varphi\} \vdash \neg\neg\varphi \to \varphi$	Prop. 8
$\{\varphi \to \psi, \neg\psi, \neg\neg\varphi\} \vdash \neg\neg\varphi$	
$\{\ \dots\ \} \vdash \varphi$	m. p.
$\{\ \dots\ \} \vdash \varphi \to \psi$	
$\{\ \dots\ \} \vdash \psi$	m.p.
$\{\ \dots\ \} \vdash \neg\psi$	
$\{\ \dots\ \} \vdash \neg\psi \to (\psi \to \neg\neg\psi)$	Prop. 7
$\{\varphi \to \psi, \neg\psi, \neg\neg\varphi\} \vdash \neg\neg\psi$	m.p. de două ori
$\{\varphi \to \psi, \neg\psi\} \vdash \neg\neg\varphi \to \neg\neg\psi$	th. ded.
$\{\ \dots\ \} \vdash (\neg\neg\varphi \to \neg\neg\psi) \to (\neg\psi \to \neg\varphi)$	(A3)
$\{\ \dots\ \} \vdash \neg\psi \to \neg\varphi$	m.p.
$\{\ \dots\ \} \vdash \neg\psi$	
$\{\varphi \to \psi, \neg\psi\} \vdash \neg\varphi$	m.p
$\{\varphi \to \psi\} \vdash \neg\psi \to \neg\varphi$	th. ded.
$\vdash (\varphi \to \psi) \to (\neg\psi \to \neg\varphi)$	th. ded.

Prop. 10. $\vdash \varphi \to \neg\neg\varphi$

Dem.

$\{\varphi, \neg\neg\neg\varphi\} \vdash \neg\neg\neg\varphi \to \neg\varphi$	(Prop. 8)
$\{\varphi, \neg\neg\neg\varphi\} \vdash \neg\neg\neg\varphi$	
$\{\varphi, \neg\neg\neg\varphi\} \vdash \neg\varphi$	m.p.
$\{\varphi\} \vdash \neg\neg\neg\varphi \to \neg\varphi$	th. ded.
$\{\varphi\} \vdash (\neg\neg\neg\varphi \to \neg\varphi) \to (\varphi \to \neg\neg\varphi)$	(A3)
$\{\varphi\} \vdash \varphi \to \neg\neg\varphi$	th. ded.
$\{\varphi\} \vdash \varphi$	
$\{\varphi\} \vdash \neg\neg\varphi$	m.p.
$\vdash \varphi \to \neg\neg\varphi$	th. ded.

Prop. 11. $\vdash (\varphi \to \neg\varphi) \to \neg\varphi$

Dem.

$\{\varphi \to \neg\varphi, \neg\neg\varphi\} \vdash \neg\neg\varphi \to \varphi$	(Prop. 8)
$\{\ \ldots\ \} \vdash \neg\neg\varphi$	
$\{\ \ldots\ \} \vdash \varphi$	m.p.
$\{\varphi \to \neg\varphi, \neg\neg\varphi\} \vdash \varphi \to \neg\varphi$	
$\{\ \ldots\ \} \vdash \neg\varphi$	m.p.
$\{\ \ldots\ \} \vdash \varphi \to (\neg\varphi \to \neg(\varphi \to \varphi))$	(Prop. 6)
$\{\varphi \to \neg\varphi, \neg\neg\varphi\} \vdash \neg(\varphi \to \varphi)$	m.p. de două ori
$\{\varphi \to \neg\varphi\} \vdash \neg\neg\varphi \to \neg(\varphi \to \varphi)$	th. ded.
$\{\ \ldots\ \} \vdash (\neg\neg\varphi \to \neg(\varphi \to \varphi)) \to ((\varphi \to \varphi) \to \neg\varphi)$	(A3)
$\{\ \ldots\ \} \vdash (\varphi \to \varphi) \to \neg\varphi$	m.p.
$\{\ \ldots\ \} \vdash \varphi \to \varphi$	(Prop. 1)
$\{\varphi \to \neg\varphi\} \vdash \neg\varphi$	m.p.
$\vdash (\varphi \to \neg\varphi) \to \neg\varphi$	

Prop. 12. $\vdash \varphi \to (\neg\psi \to \neg(\varphi \to \psi))$

Dem.

$\{\varphi, \varphi \to \psi\} \vdash \psi$	m.p.
$\{\varphi\} \vdash (\varphi \to \psi) \to \psi$	th. ded.
$\{\varphi\} \vdash ((\varphi \to \psi) \to \psi) \to (\neg\psi \to \neg(\varphi \to \psi))$	(Prop. 9)
$\{\varphi\} \vdash \neg\psi \to \neg(\varphi \to \psi)$	m.p.
$\vdash \varphi \to (\neg\psi \to \neg(\varphi \to \psi))$	th. ded.

Prop. 13 $\vdash \varphi \to \varphi \vee \psi$

Dem. Este o transcriere a Prop. 6

Prop. 14 $\vdash \psi \to \varphi \vee \psi$

Dem. $\vdash \psi \to \varphi \vee \psi$ se scrie echivalent $\vdash \psi \to (\neg\varphi \to \psi)$ pt. care avem dem. formala:

$\{\psi, \neg\varphi\} \vdash \psi$

$\{\psi\} \vdash \neg\varphi \to \psi$ th. ded.

$\vdash \psi \to (\neg\varphi \to \psi)$ th. ded.

Prop. 15. $\vdash (\varphi \to \chi) \to ((\psi \to \chi) \to (\varphi \vee \psi \to \chi))$

Dem.

$\{\varphi \to \chi, \psi \to \chi, \neg\varphi \to \psi\} \vdash \neg\varphi \to \psi$

$\{\ \ldots\ \} \vdash \varphi \to \chi$

$\{\ \ldots\ \} \vdash \neg\varphi \to \chi$ (R1)

$\{\ \ldots\ \} \vdash \neg\chi \to \neg\neg\varphi$ (Prop. 9)

$\{\ \ldots\ \} \vdash \neg\neg\varphi \to \varphi$ (Prop. 8)

$\{\ \ldots\ \} \vdash \neg\chi \to \varphi$ (R1)

$\{\varphi \to \chi, \psi \to \chi, \neg\varphi \to \psi\} \vdash \varphi \to \chi$

$\{\ \ldots\ \} \vdash \neg\chi \to \chi$ (R1)

$\{\ \ldots\ \} \vdash (\neg\chi \to \chi) \to (\neg\chi \to \neg\neg\chi)$ (Prop. 9)

$\{\ \ldots\ \} \vdash \neg\chi \to \neg\neg\chi$ m.p.

$\{\ \ldots\ \} \vdash (\neg\chi \to \neg\neg\chi) \to \neg\neg\chi$ (Prop. 11)

$\{\ \ldots\ \} \vdash \neg\neg\chi$ m.p.

$\{\ \ldots\ \} \vdash \neg\neg\chi \to \chi$ (Prop. 8)

$\{\ \ldots\ \} \vdash \chi$ m.p.

$\{\varphi \to \chi, \psi \to \chi\} \vdash (\neg\varphi \to \psi) \to \chi$ th. ded.

Aplicând încă de două ori th. deducției rezultă

$$\vdash (\varphi \to \chi) \to [(\psi \to \chi) \to ((\neg\varphi \to \psi) \to \chi)]$$

Observație. Prop. 15 implică regula de deducție derivată

$$(R3)\qquad \frac{\varphi \to \chi,\ \psi \to \chi}{\varphi \vee \psi \to \chi}$$

Prop. 16. $\vdash \varphi\wedge\psi\to\varphi$

Dem

$\vdash \varphi\to(\neg\varphi\to\neg\psi)$ (Prop. 6)

$\vdash \neg\varphi\to(\varphi\to\neg\psi)$ (R2)

$\vdash (\neg\varphi\to(\varphi\to\neg\psi))\to(\neg(\varphi\to\neg\psi)\to\neg\neg\varphi)$ (Prop. 9)

$\vdash \neg(\varphi\to\neg\psi)\to\neg\neg\varphi$ m. p.

$\vdash \neg\neg\varphi\to\varphi$ (Prop. 8)

$\vdash \neg(\varphi\to\neg\psi)\to\varphi$ (R1)

Am obținut exact $\vdash\varphi\wedge\psi\to\varphi$.

Prop. 17. $\vdash \varphi\wedge\psi\to\psi$

Dem.

$\vdash \neg\psi\to(\varphi\to\neg\psi)$ (A1)

$\vdash (\neg\psi\to(\varphi\to\neg\psi))\to(\neg(\varphi\to\neg\psi)\to\neg\neg\psi)$ (Prop. 9)

$\vdash \neg(\varphi\to\neg\psi)\to\neg\neg\psi$ m. p.

$\vdash \neg\neg\psi\to\psi$ (Prop. 8)

$\vdash \neg(\varphi\to\neg\psi)\to\psi$ (R1)

Ultima teoremă formală este chiar $\vdash\varphi\wedge\psi\to\psi$

Prop. 18. $\vdash (\chi\to\varphi)\to((\chi\to\psi)\to(\chi\to\varphi\wedge\psi))$

Dem.

$\{\chi\to\varphi, \chi\to\psi, \chi\} \vdash \chi$

$\{\quad\ldots\quad\} \vdash \chi\to\varphi$

$\{\quad\ldots\quad\} \vdash \varphi$ m. p.

$\{\quad\ldots\quad\} \vdash \psi$ analog

$\{\quad\ldots\quad\} \vdash \psi\to\neg\neg\psi$ (Prop. 10)

$\{\quad\ldots\quad\} \vdash \neg\neg\psi$ (m. p)

$\{\quad\ldots\quad\} \vdash \varphi\to(\neg\neg\psi\to\neg(\varphi\to\neg\psi))$ (Prop. 7)

$\{\chi\to\varphi, \chi\to\psi, \chi\} \vdash \neg(\varphi\to\neg\psi)$ m. p. de două ori

Folosind teorema deducției de trei ori se obține

$\vdash (\chi\to\varphi)\to((\chi\to\psi)\to(\chi\to\varphi\wedge\psi))$

care este chiar teorema formală căutată.

Obs. Prop. 18 îi este asociată următoarea regulă de deducție derivată

(R4) $\dfrac{\chi \to \varphi,\ \chi \to \psi}{\chi \to \varphi \wedge \psi}$

Prop. 19 $\vdash \varphi \wedge \psi \to \psi \wedge \varphi$

Dem $\vdash \varphi \wedge \psi \to \psi$ (Prop. 17)

$\vdash \varphi \wedge \psi \to \varphi$ (Prop. 16)

$\vdash \varphi \wedge \psi \to \psi \wedge \varphi$ (R4)

Prop. 20. $\vdash \varphi \to (\psi \to \varphi \wedge \psi)$

Dem. $\{\varphi, \psi\} \vdash \varphi$

$\{\varphi, \psi\} \vdash \psi$

$\{\varphi, \psi\} \vdash \psi \to \neg\neg\psi$ (Prop. 10)

$\{\varphi, \psi\} \vdash \neg\neg\psi$ m.p.

$\{\varphi, \psi\} \vdash \varphi \to (\neg\neg\psi \to \neg(\varphi \to \neg\psi))$ (Prop. 12)

$\{\varphi, \psi\} \vdash \neg(\varphi \to \neg\psi)$ m.p. de două ori

$\vdash \varphi \to (\psi \to \varphi \wedge \psi)$ th. ded. de două ori.

Prop. 21. $\vdash ((\varphi \wedge \chi) \vee (\varphi \wedge \chi)) \to ((\varphi \vee \psi) \wedge \chi)$

Dem. $\vdash \varphi \wedge \chi \to \varphi$ (Prop. 16)

$\vdash \varphi \to \varphi \vee \psi$ (Prop. 14)

$\vdash \varphi \wedge \chi \to \varphi \vee \psi$ (R1)

$\vdash \varphi \wedge \chi \to \chi$

$\vdash \varphi \wedge \chi \to (\varphi \vee \psi) \wedge \chi$ (R4)

$\vdash \psi \wedge \chi \to (\varphi \vee \psi) \wedge \chi$ analog

$\vdash (\varphi \wedge \chi) \vee (\varphi \vee \chi) \to ((\varphi \vee \psi) \wedge \chi)$. (R3)

Prop. 22. $\vdash (\chi \to \theta) \to [(\varphi \to (\psi \to \chi)) \to (\varphi \to (\psi \to \theta))]$

Dem. $\{\chi \to \theta,\ \varphi \to (\psi \to \chi),\ \varphi,\ \psi\} \vdash \varphi \to (\psi \to \chi)$

$\{\ \ldots\ \} \vdash \varphi$

$\{\ \ldots\ \} \vdash \psi \to \chi$ m.p

$\{\ \ldots\ \} \vdash \psi$

$\{\ \ldots\ \} \vdash \chi$ m.p.

$\{\ \ldots\ \} \vdash \chi \to \theta$

$\{\chi \to \theta,\ \varphi \to (\psi \to \chi),\ \varphi,\ \psi\} \vdash \theta$ m.p.

Se aplică apoi th. deducției de patru ori

Prop. 23 $\vdash (\varphi \to (\psi \to \chi)) \to (\varphi \wedge \psi \to \chi)$

Dem.

$\{\varphi \to (\psi \to \chi), \varphi \wedge \psi\} \vdash \varphi \wedge \psi$

$\{\quad \dots \quad\} \vdash \varphi \wedge \psi \to \varphi$

$\{\quad \dots \quad\} \vdash \varphi$ m.p.

$\{\quad \dots \quad\} \vdash \psi$ analog

$\{\quad \dots \quad\} \vdash \varphi \to (\psi \to \chi)$

$\{\varphi \to (\psi \to \chi), \varphi \wedge \psi\} \vdash \chi$ m.p. de două ori

Se aplică apoi th. deducției de două ori.

Prop. 24. $\vdash (\varphi \wedge \psi \to \chi) \to (\varphi \to (\psi \to \chi))$

Dem. $\{\varphi \wedge \psi \to \chi, \varphi, \psi\} \vdash \varphi$

$\{\quad \dots \quad\} \vdash \psi$

$\{\quad \dots \quad\} \vdash \varphi \to (\psi \to \varphi \wedge \psi)$ (Prop. 20)

$\{\quad \dots \quad\} \vdash \varphi \wedge \psi$ m.p. de două ori

$\{\quad \dots \quad\} \vdash \varphi \wedge \psi \to \chi$

$\{\varphi \wedge \psi \to \chi, \varphi, \psi\} \vdash \chi$ m.p.

Se aplică apoi th. ded. de trei ori.

Prop. 25. $\vdash \varphi \vee \psi \to (\chi \to [(\varphi \wedge \chi) \vee (\psi \wedge \chi)])$

Dem. Conform th. deducției se reduce la a demonstra

$$\{\varphi \vee \psi, \chi\} \vdash \neg(\varphi \wedge \chi) \to (\psi \wedge \chi)$$

ceea ce este totuna cu

$$\{\varphi \vee \psi, \chi\} \vdash \neg\neg(\varphi \to \neg\chi) \to \neg(\psi \to \neg\chi).$$

Aplicând th. deducției se reduce la a demonstra

$$\{\neg\varphi \to \psi, \chi, \neg\neg(\varphi \to \neg\chi)\} \vdash \neg(\psi \to \neg\chi)$$

Dăm mai jos demonstrația acestui ultim fapt.

$\{\neg\varphi \to \psi, \chi, \neg\neg(\varphi \to \neg\chi)\} \vdash \neg\neg(\varphi \to \neg\chi)$

$\{\quad \dots \quad\} \vdash \varphi \to \neg\chi$ (Prop. 8), m.p

$\{\quad \dots \quad\} \vdash \chi \to \neg\varphi$ (A3), m.p.

$\{\quad \dots \quad\} \vdash \neg\varphi \to \psi$

$\{\quad \dots \quad\} \vdash \chi \to \psi$ (R1)

$\{\quad \dots \quad\} \vdash \chi$

$\{\quad \dots \quad\} \vdash \psi$ m.p.

$\{\quad \dots \quad\} \vdash \psi \to (\chi \to \neg(\psi \to \neg\chi))$ (Prop. 12)

$\{\quad \dots \quad\} \vdash \neg(\psi \to \neg\chi)$ m.p. de două ori.

<u>Prop. 26</u>. $\vdash ((\varphi \vee \psi) \wedge \chi) \rightarrow ((\varphi \wedge \chi) \vee (\psi \wedge \chi))$

<u>Dem</u>. Din Prop. 25, cu ajutorul Propozițiilor 23 și 24.

<u>Prop. 27</u>. Pentru orice enunțuri φ și ψ avem $\vdash \varphi \wedge \neg\varphi \rightarrow \psi$ și $\vdash \psi \rightarrow \varphi \vee \neg\varphi$.

<u>Dem</u>. Pentru $\vdash \varphi \wedge \neg\varphi \rightarrow \psi$ avem următoarea demonstrație formală

$\vdash \varphi \rightarrow (\neg\varphi \rightarrow \psi)$ (Prop. 6)

$\vdash (\varphi \rightarrow (\neg\varphi \rightarrow \psi)) \rightarrow (\varphi \wedge \neg\varphi \rightarrow \psi)$ (Prop. 23)

$\vdash \varphi \wedge \neg\varphi \rightarrow \psi$ m.p.

Conform principiului identității, $\{\psi\} \vdash \neg\varphi \rightarrow \neg\varphi$, de unde prin teorema deducției; $\vdash \psi \rightarrow (\neg\varphi \rightarrow \neg\varphi)$, adică $\vdash \psi \rightarrow \varphi \vee \neg\varphi$.

<u>Obs</u>. Principiul identității în forma $\vdash \neg\varphi \rightarrow \neg\varphi$ ne dă $\vdash \varphi \vee \neg\varphi$ (principiul terțului exclus).

<u>Prop. 28</u>. Fie $\Gamma \subseteq E$ și $\varphi \in E$. Atunci $\Gamma \vdash \varphi$ dacă și numai dacă există $\gamma_1, \ldots, \gamma_n \in \Gamma$ astfel încât $\vdash \bigwedge_{i=1}^{n} \gamma_i \rightarrow \varphi$.

<u>Dem</u>. Dacă $\Gamma \vdash \varphi$ atunci conf. Prop. 1, (ii) există $\gamma_1, \ldots, \gamma_n \in \Gamma$ astfel încât

$$\{\gamma_1, \ldots, \gamma_n\} \vdash \varphi$$

Aplicând de n-ori teorema deducției

$$\vdash \gamma_1 \rightarrow (\gamma_2 \rightarrow \ldots \rightarrow (\gamma_n \rightarrow \varphi) \ldots)$$

Ținând cont de Prop. 23 avem $\vdash \bigwedge_{i=1}^{n} \gamma_i \rightarrow \varphi$. Reciproc, din $\vdash \bigwedge_{i=1}^{n} \gamma_i \rightarrow \varphi$ cu $\gamma_1, \ldots, \gamma_n \in \Gamma$, deducem conform Prop. 24:

$$\vdash \gamma_1 \rightarrow (\gamma_2 \rightarrow \ldots \rightarrow (\gamma_n \rightarrow \varphi) \ldots)$$

Cu teorema deducției aplicată în sens invers obținem $\{\gamma_1, \ldots, \gamma_n\} \vdash \varphi$, deci $\Gamma \vdash \varphi$.

O mulțime nevidă Σ de enunțuri se numește <u>sistem deductiv</u> dacă $\Sigma \vdash \varphi$ implică $\varphi \in \Sigma$ pentru orice enunț φ.

<u>Lema 29</u>. Dacă Σ este o mulțime de enunțuri atunci sunt echivalente

(a) Σ este sistem deductiv;

(b) Σ conține mulțimea teoremelor formale și $\alpha, \alpha \rightarrow \beta \in \Sigma$ implică $\beta \in \Sigma$.

Dem. (a)$\Rightarrow$(b). Dacă $\vdash \varphi$ atunci $\Sigma \vdash \varphi$, deci $\varphi \in \Sigma$. Presupunem că $\alpha, \alpha \to \beta \in \Sigma$, deci $\Sigma \vdash \alpha$, $\Sigma \vdash \alpha \to \beta$ de unde $\Sigma \vdash \beta$, conform m.p. Rezultă $\beta \in \Sigma$

(b)$\Rightarrow$(a) Σ este o mulțime nevidă. Presupunem $\Sigma \vdash \varphi$. Conform Prop. 1,(ii) există $\sigma_1, \ldots, \sigma_n \in \Sigma$ astfel încât $\{\sigma_1, \ldots, \sigma_n\} \vdash \varphi$. Aplicând teorema deducției:

$$\vdash \sigma_1 \to (\ldots \to (\sigma_n \to \varphi)\ldots).$$

Cum $\sigma_1, \ldots, \sigma_n \in \Sigma$ rezultă $\varphi \in \Sigma$.

Vom nota cu $D(\Sigma)$ sistemul deductiv generat de Σ, adică intersecția sistemelor deductive ce includ pe Σ. Se poate arăta că $D(\Sigma) = \{\varphi \in \Sigma \mid \Sigma \vdash \varphi\}$.

Exercițiu.

$$D(\Sigma) = \{\varphi \in E \mid \text{există } \sigma_1, \ldots, \sigma_n \in \Sigma, \vdash \bigwedge_{i=1}^{n} \sigma_i \to \varphi\}.$$

Exercițiu: Care din următoarele enunțuri sunt teoreme formale?

$$\vdash [\alpha \to (\beta \to \gamma)] \to [(\alpha \to (\gamma \to \delta)) \to (\alpha \to (\beta \to \delta))]$$

$$\vdash [\alpha \to (\gamma \to \beta)] \to [(\alpha \to (\beta \to \delta)) \to (\alpha \to (\gamma \to (\beta \to \delta)))]$$

$$\vdash [(\delta \to \varepsilon) \to (\gamma \to (\alpha \to \beta))] \to [(\alpha \to (\delta \to \varepsilon)) \to (\delta \to (\gamma \to (\alpha \to \varepsilon)))]$$

§3 Algebra Lindenbaum-Tarski

Acest paragraf conține ~~conține~~ construcția unei algebre Boole asociate canonic sistemului formal L. Proprietățile sintactice ale lui L se vor reflecta în proprietăți booleene, realizându-se trecerea de la sintaxă la algebră.

Lema 1. Pentru orice enunțuri φ, ψ avem

$$\vdash \varphi \text{ și } \vdash \psi \iff \vdash \varphi \wedge \psi$$

Dem. ($\Rightarrow$) Presup. $\vdash \varphi$ și $\vdash \psi$. Cum $\vdash \varphi \to (\psi \to \varphi \wedge \psi)$ (Prop. 20, §2) rezultă $\vdash \varphi \wedge \psi$ prin aplicarea de două ori a lui m.p.

($\Leftarrow$) Rezultă din Propozițiile 16 și 17, §2.

Se definește relația binară $\sim$ pe mulțimea E a enunțurilor lui L:

$$\varphi \sim \psi \overset{def}{\iff} \vdash \varphi \leftrightarrow \psi$$

Obs. Conform Lemei 1, $\varphi \sim \psi$ dacă și numai dacă ~~[illegible]~~ $\vdash \varphi \to \psi$ și $\vdash \psi \to \varphi$.

Lema 2. $\sim$ este o relație de echivalență pe E.

Dem. Vor trebui verificate următoarele condiții:

(1) $\vdash \alpha \to \alpha$

(2) $\vdash \varphi \leftrightarrow \psi \Rightarrow \vdash \psi \leftrightarrow \varphi$

(3) $\vdash \alpha \to \beta, \vdash \beta \to \gamma \Rightarrow \vdash \alpha \to \gamma$

(1) este principiul identității, (2) rezultă din obs. precedentă, iar (3) este (R1).

Considerăm mulțimea cât $E/\sim$; $\hat{\varphi}$ va fi clasa de echivalență a lui $\varphi \in E$. Definim relația binară $\leq$ pe $E/\sim$:

$$\hat{\varphi} \leq \hat{\psi} \iff \vdash \varphi \to \psi$$

Este necesar să verificăm independența de reprezentanți:

$$\left.\begin{array}{l} \vdash \varphi \to \varphi', \vdash \varphi' \to \varphi \\ \vdash \psi \to \psi', \vdash \psi' \to \psi \end{array}\right\} \Rightarrow (\vdash \varphi \to \psi \Leftrightarrow \vdash \varphi' \to \psi')$$

Presup. $\vdash \varphi \to \psi$. Din $\vdash \varphi' \to \varphi$, $\vdash \varphi \to \psi$ și $\vdash \psi \to \psi'$ rezultă $\vdash \varphi' \to \psi'$ prin aplicarea regulii de deducție (R1).

Lema 3. $\leq$ este o relație de ordine pe $E/\sim$.

Dem. Este necesar să verificăm condițiile următoare

(1) $\vdash \varphi \to \varphi$

(2) $\vdash \varphi \to \psi, \vdash \psi \to \varphi \Rightarrow \varphi \sim \psi$

(3) $\vdash \varphi \to \psi, \vdash \psi \to \chi \Rightarrow \vdash \varphi \to \chi$

care rezultă din principiul identității și din (R1).

Prop. 4. $(E/\sim, \leq)$ este o latice distributivă în care

$\inf(\hat{\varphi}, \hat{\psi}) = \widehat{\varphi \wedge \psi}$ și $\sup(\hat{\varphi}, \hat{\psi}) = \widehat{\varphi \vee \psi}$.

Dem. Arătăm întâi că $\inf(\hat{\varphi}, \hat{\psi}) = \widehat{\varphi \wedge \psi}$ ceea ce revine la a verifica condițiile următoare:

(i) $\vdash \varphi \wedge \psi \to \varphi$, $\vdash \varphi \wedge \psi \to \psi$

(ii) Dacă $\vdash \chi \to \varphi$ și $\vdash \chi \to \psi$ atunci $\vdash \chi \to \varphi \wedge \psi$.

Condiția (i) rezultă din Propozițiile 16 și 17, iar (ii) din (R4).

Egalitatea $\sup(\hat{\varphi}, \hat{\psi}) = \widehat{\varphi \vee \psi}$ revine la a proba că

(iii) $\vdash \varphi \to \varphi \vee \psi$, $\vdash \psi \to \varphi \vee \psi$

(iv) Dacă $\vdash \varphi \to \chi$ și $\vdash \psi \to \chi$ atunci $\vdash \varphi \vee \psi \to \chi$

Se folosesc Propozițiile 13 și 14, §2 și (R3). Rezultă că $(E/\sim, \leq)$ este o latice în care $\hat{\varphi} \vee \hat{\psi} = \widehat{\varphi \vee \psi}$ și $\hat{\varphi} \wedge \hat{\psi} = \widehat{\varphi \wedge \psi}$ pt. orice $\varphi, \psi \in E$. Distributivitatea rezultă din Propozițiile 21 și 25, §2.

Obs. Conform Prop. 27, §2 avem $\widehat{\varphi \wedge \neg\varphi} \leq \hat{\psi} \leq \widehat{\varphi \vee \neg\varphi}$ pentru orice $\varphi, \psi \in E$. Atunci $\widehat{\varphi \wedge \neg\varphi}$ este prim element al laticii $E/\sim$, iar $\widehat{\varphi \vee \neg\varphi}$ este ultim element. Vom nota $0 = \widehat{\varphi \wedge \neg\varphi}$, $1 = \widehat{\varphi \vee \neg\varphi}$ (este evident că definiția nu depinde de reprezentanți).

Prop. 5. $E/\sim$ este o algebră Boole.

Dem. Conform observației precedente, $\hat{\varphi} \wedge \widehat{\neg\varphi} = 0$ și $\hat{\varphi} \vee \widehat{\neg\varphi} = 1$, deci orice element $\hat{\varphi}$ al lui $E/\sim$ admite pe $\widehat{\neg\varphi}$ drept complement: $\neg\hat{\varphi} = \widehat{\neg\varphi}$.

Algebra Boole $(E/\sim, \vee, \wedge, \neg, 0, 1)$ poartă numele de <u>algebra Lindenbaum-Tarski</u> asociată sistemului formal L.

<u>Obs.</u> Dacă notăm $p: E \to E/\sim$ surjecția canonică ($p(\varphi) = \hat{\varphi}$ pt. orice $\varphi \in E$) atunci pt. orice $\varphi, \psi \in E$ sunt verificate condițiile următoare:

(a) $p(\varphi \vee \psi) = p(\varphi) \vee p(\psi)$;

(b) $p(\varphi \wedge \psi) = p(\varphi) \wedge p(\psi)$;

(c) $p(\neg\varphi) = \neg p(\varphi)$;

(d) $p(\varphi \to \psi) = p(\varphi) \to p(\psi)$;

(e) $p(\varphi \leftrightarrow \psi) = p(\varphi) \leftrightarrow p(\psi)$.

Egalitățile (a), (b), (c) sunt chiar definițiile operațiilor din $E/\sim$, (d) revine la a arăta că $\vdash (\varphi \to \psi) \leftrightarrow (\neg\varphi \to \psi)$ (exercițiu), iar (e) rezultă din (b) și (d).
Cele cinci egalități de mai sus arată modul cum conectorii sunt convertiți în operații booleene.

<u>Lema 6</u>. Pentru orice $\varphi \in E$, $\vdash \varphi$ dacă și numai dacă $\hat{\varphi} = 1$.

<u>Dem.</u> Trebuie să demonstrăm: $\vdash \varphi \Leftrightarrow \vdash \varphi \leftrightarrow \varphi \vee \neg\varphi$. Presupunem $\vdash \varphi$. Cum $\vdash \varphi \to (\varphi \vee \neg\varphi \to \varphi)$ (conform (A1)), rezultă $\vdash \varphi \vee \neg\varphi \to \varphi$; totdeauna are loc $\vdash \varphi \to \varphi \vee \neg\varphi$, deci $\vdash \varphi \leftrightarrow \varphi \vee \neg\varphi$. Reciproc, presupunem că $\vdash \varphi \leftrightarrow \varphi \vee \neg\varphi$. Dar $\vdash \varphi \vee \neg\varphi$ (principiul terțului exclus), deci prin m.p. $\vdash \varphi$.

<u>Obs.</u> Lema 6 oferă o metodă algebrică pentru verificarea dacă un enunț este teoremă formală.

<u>Exemplu.</u> Să se arate că

$\vdash [\alpha \to (\beta \to \gamma)] \to [(\alpha \to (\gamma \to \delta)) \to (\alpha \to (\beta \to \delta))]$

Notând $x = \hat{\alpha}$, $y = \hat{\beta}$, $z = \hat{\gamma}$ și $s = \hat{\delta}$, conform Lemei 6, este suficient să stabilim identitatea booleană.

$$[x \to (y \to z)] \to [(x \to (z \to s)) \to (x \to (y \to s))] = 1$$

ceea ce este echivalent cu

$$x \to (y \to z) \leq (x \to (z \to s)) \to (x \to (y \to s))$$

Dar, un calcul boolean în algebra Lindenbaum-Tarski $E/\sim$ ne dă

$$\begin{aligned}(x \to (z \to s)) \to (x \to (y \to s)) &= (\bar{x} \vee \bar{z} \vee s)^{-} \vee \bar{x} \vee \bar{y} \vee s \\ &= (x \wedge z \wedge \bar{s}) \vee \bar{x} \vee \bar{y} \vee s \\ &= \bar{x} \vee \bar{y} \vee z = x \to (y \to z)\end{aligned}$$

ceea ce termină verificarea.

Fie Σ o mulțime de enunțuri ale lui L. Se definește următoarea relație binară pe E:

$$\begin{aligned}\varphi \sim_{\Sigma} \psi &\iff \Sigma \vdash \varphi \leftrightarrow \psi \\ &\iff \Sigma \vdash \varphi \to \psi \text{ și } \Sigma \vdash \psi \to \varphi.\end{aligned}$$

Procedând analog ca mai sus se poate arăta că $\sim_{\Sigma}$ este o relație de echivalență pe E și că $E/\sim$ are o structură canonică de algebră Boole (= algebra Lindenbaum-Tarski a lui Σ). Notăm cu $\varphi/_{\Sigma}$ clasa de echivalență a lui $\varphi \in E$.

Atunci

$$\varphi/_{\Sigma} \vee \psi/_{\Sigma} = (\varphi \vee \psi)/_{\Sigma}\ ; \quad \varphi/_{\Sigma} \wedge \psi/_{E} = (\varphi \wedge \psi)/_{\Sigma}\ ; \quad \neg(\varphi/_{\Sigma}) = \neg\varphi/_{\Sigma}.$$

$$\varphi/_{\Sigma} \leq \psi/_{\Sigma} \iff \Sigma \vdash \varphi \to \psi$$

$$\varphi/_{\Sigma} = 1 \iff \Sigma \vdash \varphi$$

Pentru $\Sigma = \emptyset$ obținem algebra Lindenbaum-Tarski $E/\sim$.

§4. Semantica sistemului formal L

Până acum am dezvoltat sistemul L la nivel formal, fără a atribui enunțurilor valori de adevăr. Acest lucru va fi realizat în paragraful de față prin noțiunea de interpretare.

O *interpretare* a lui L este o funcție oarecare $h: V \to L_2$.

Prop. 1. Pentru orice interpretare $h: V \to L_2$ există o funcție unică $\tilde{h}: E \to L_2$ ce satisface proprietățile următoare:

(a) $\tilde{h}(u) = h(u)$ pentru orice $u \in V$;

(b) $\tilde{h}(\neg\varphi) = \neg\tilde{h}(\varphi)$ pentru orice $\varphi \in E$;

(c) $\tilde{h}(\varphi \to \psi) = \tilde{h}(\varphi) \to \tilde{h}(\psi)$ pentru orice $\varphi, \psi \in E$.

Dem. Definiția lui $\tilde{h}$ se face prin inducție, urmărind clauzele (a)-(c). Demonstrarea unicității lui $\tilde{h}$ se face tot prin inducție. Fie $g: E \to L_2$ astfel încât

(a') $g(u) = h(u)$ pentru orice $u \in V$;

(b') $g(\neg\varphi) = \neg g(\varphi)$ pentru orice $\varphi \in E$;

(c') $g(\varphi \to \psi) = g(\varphi) \to g(\psi)$ pentru orice $\varphi, \psi \in E$.

Vom arăta că pentru orice $\alpha \in E$, $\tilde{h}(\alpha) = g(\alpha)$. Distingem trei cazuri pentru α:

- $\alpha \in V$: $g(\alpha) = h(\alpha) = \tilde{h}(\alpha)$
- $\alpha = \neg\varphi$: $g(\alpha) = \neg g(\varphi) = \neg\tilde{h}(\varphi) = \tilde{h}(\neg\alpha)$, pentru că $g(\varphi) = \tilde{h}(\varphi)$ (ip. inducției)
- $\alpha = \varphi \to \psi$: $g(\alpha) = g(\varphi) \to g(\psi) = \tilde{h}(\varphi) \to \tilde{h}(\psi) = \tilde{h}(\alpha)$ pt. că $g(\varphi) = \tilde{h}(\varphi)$ și $g(\psi) = \tilde{h}(\psi)$ (ip. ind.)

Consecințe imediate. Pentru orice $\varphi, \psi \in E$.

(d) $\tilde{h}(\varphi \vee \psi) = \tilde{h}(\varphi) \vee \tilde{h}(\psi)$

(e) $\tilde{h}(\varphi \wedge \psi) = \tilde{h}(\varphi) \wedge \tilde{h}(\psi)$

(f) $\tilde{h}(\varphi \leftrightarrow \psi) = \tilde{h}(\varphi) \leftrightarrow \tilde{h}(\psi)$.

Obs. Dacă $h: V \to L_2$ este o interpretare atunci există un unic morfism boolean $\bar{h}: E/\sim \to L_2$ care face comutativă următoarea diagramă.

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, hook] \arrow[dr, "h"'] & E \arrow[r, "p"] \arrow[d, "\tilde{h}"] & E/\sim \arrow[dl, "\bar{h}"] \\ & L_2 & \end{tikzcd}$$

$\bar{h}$ este definit de $\bar{h}(\hat{\varphi}) = \tilde{h}(\varphi)$ pt. orice $\varphi \in E$.

Enunțul φ este <u>adevărat</u> în interpretarea $h: V \to L_2$ dacă $\tilde{h}(\varphi) = 1$; φ este <u>fals</u> în interpretarea h dacă $\tilde{h}(\varphi) = 1$. Un enunț φ este universal adevărat ($\models \varphi$) dacă este adevărat în orice interpretare.

<u>Obs</u>. Interpretarea unui enunț este valoarea este valoarea 0 sau 1 obținută atunci când tuturor variabilelor propoziționale ce intră în componența sa le atribuim valori din L_2. Un enunț universal adevărat va avea valoarea 1 pentru orice valori din L_2 luate de variabilele propoziționale ce ~~[illegible]~~ apar în φ.

<u>Prop. 2</u>. Pentru orice enunț φ, $\vdash \varphi$ implică $\models \varphi$.

<u>Dem</u>. ~~Vom~~ ~~Presupu~~ Vom arata că dacă $\vdash \varphi$ atunci $\tilde{h}(\varphi) = 1$ pentru orice interpretare $h: V \to L$. Se procedează prin inducție asupra modului cum s-a definit $\vdash \varphi$.

Considerăm întâi cazul axiomelor:

(A1) φ este de forma $\alpha \to (\beta \to \alpha)$

$\tilde{h}(\varphi) = \tilde{h}(\alpha) \to (\tilde{h}(\beta) \to \tilde{h}(\alpha)) = \neg \tilde{h}(\alpha) \vee \neg \tilde{h}(\beta) \vee \tilde{h}(\alpha) = 1$

(A2) φ este de forma $(\alpha \to (\beta \to \gamma)) \to ((\alpha \to \beta) \to (\alpha \to \gamma))$.

Dacă notam $x = \tilde{h}(\alpha)$, $y = \tilde{h}(\beta)$, $z = \tilde{h}(\gamma)$ atunci $\tilde{h}(\varphi) = (x \to (y \to z)) \to ((x \to y) \to (x \to z))$

$= 1$ după cum arată o simplă verificare în L_2.

(A3) φ este de forma $(\neg \alpha \to \neg \beta) \to (\beta \to \alpha)$.

Este suficient să probăm $(\bar{x} \to \bar{y}) \to (y \to x) = 1$ în L_2

Presup. acum că $\vdash \varphi$ a fost obținut prin m.p. din $\vdash \psi$, $\vdash \psi \to \varphi$. Ipoteza inducției conduce la $\tilde{h}(\psi) = 1$ și $\tilde{h}(\psi \to \varphi) = 1$. Atunci:

$$1 = \tilde{h}(\psi) \to \tilde{h}(\psi) = 1 \to \tilde{h}(\varphi) = \tilde{h}(\varphi)$$

și demonstrația s-a încheiat.

Corolar 3. Pentru orice enunț φ nu putem avea $\vdash \varphi$ și $\vdash \neg\varphi$.

Dem. Dacă ar exista un enunț φ astfel încât $\vdash \varphi$ și $\vdash \neg\varphi$ atunci pentru orice interpretare h am avea $\tilde{h}(\varphi)=1$ și $\neg\tilde{h}(\varphi)=\tilde{h}(\neg\varphi)=1$. Contradicție.

Prop. 4. Pentru orice enunț φ avem

$$\vdash \varphi \Longleftrightarrow \models \varphi.$$

Dem. $(\Rightarrow)$ Prop. 2.

$(\Leftarrow)$ Presupunem că $\nvdash \varphi$ (φ nu este teoremă formală). Trecând la algebra Lindenbaum-Tarski $E/\sim$ și aplicând Lema 6, §3 rezultă $\hat{\varphi}\neq 1$. Aplicăm teorema de reprezentare a lui Stone pentru algebra Boole $E/\sim$. Atunci există o mulțime nevidă X și un morfism boolean injectiv $d: E/\sim \to L_2^X$. Din injectivitatea lui d rezultă $d(\hat{\varphi})\neq 1$ în L_2^X deci există $x\in X$ astfel încât $d(\hat{\varphi})(x)\neq 1$ în L_2.

Considerăm proiecția $\pi_x : L_2^X \to L_2$ definită prin $\pi_x(f)=f(x)$ pentru orice $f\in L_2^X$. π_x este morfism boolean. Să luăm interpretarea h dată de compunerea următoarelor morfisme booleene

$$\begin{tikzcd} V\subseteq E \arrow[r, "p"] \arrow[rrr, bend right, "h"'] & E/\sim \arrow[r, "d"] & L_2^X \arrow[r, "\pi_x"] & L_2 \end{tikzcd}$$

Vom stabili că

(*) $\tilde{h}(\alpha)=d(\hat{\alpha})(x)$ pentru orice $\alpha\in E$.

Demonstrăm (*) prin inducție asupra enunțului α.

(a) $\alpha\in V$

$\tilde{h}(\alpha)=h(\alpha)=\pi_x(d(p(\alpha)))=d(\hat{\alpha})(x)$.

(b) $\alpha=\neg\beta$ și ip. ind. funcționează pt. β, deci $\tilde{h}(\beta)=d(\hat{\beta})(x)$. Atunci

$\tilde{h}(\alpha)=\neg\tilde{h}(\beta)=\neg d(\hat{\beta})(x)=(\neg d(\hat{\beta}))(x)=d(\neg\hat{\beta})(x)=d(\widehat{\neg\beta})(x)=d(\hat{\alpha})(x)$

(c) $\alpha = \beta \to \gamma$ și ip. ind. funcționează pt. β și γ, deci $\tilde{h}(\beta) = d(\hat{\beta})(x)$ și $\tilde{h}(\gamma) = d(\hat{\gamma})(x)$. Atunci

$$\tilde{h}(\alpha) = \tilde{h}(\beta) \to \tilde{h}(\gamma) = d(\hat{\beta})(x) \to d(\hat{\gamma})(x) = (d(\hat{\beta}) \to d(\hat{\gamma}))(x) =$$

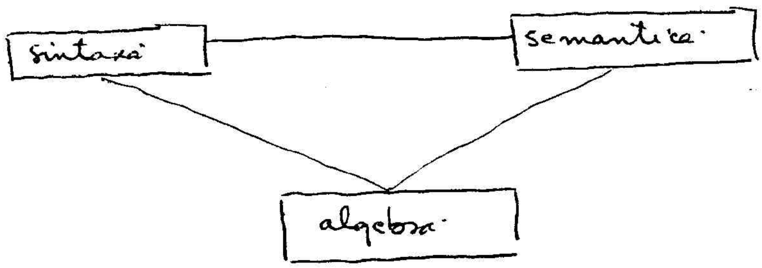
$$= d(\hat{\beta} \to \hat{\gamma})(x) = d(\widehat{\beta \to \gamma})(x) = d(\hat{\alpha})(x).$$

Proprietatea (*) a fost demonstrată. Aplicând (*) pentru $\alpha = \varphi$ rezultă $\tilde{h}(\varphi) = d(\hat{\varphi})(x) \neq 1$, deci $\not\models \varphi$.

Propoziția 4 se numește <u>teorema de completitudine</u> a lui L.

<u>Comentarii</u>. (i) Teorema de completitudine răspunde unei probleme naturale. Relativ la sistemul logic L s-au definit două tipuri de "adevăruri": teoremele formale, care sunt "adevărurile sintactice" ale lui L și enunțurile universal adevărate, "adevărurile semantice" ale lui L. În mod natural s-a pus problema comparării acestor două tipuri de "adevăruri", iar teorema de completitudine spune că ele sunt echivalente. De asemenea, teorema de completitudine ne dă un procedeu comod de verificare a faptului că un enunț este o teoremă formală (procedeu ce poate fi programat).

(ii) Demonstrația prezentată mai sus este de natură algebrică. Ideea fundamentală este trecerea la algebra Lindenbaum-Tarski și invocarea teoremei lui Stone pentru găsirea interpretării necesare în demonstrație. Această trecere prin algebră aruncă o lumină mai completă asupra relației dintre sintaxă și semantică, care are de fapt și un substrat algebric. Pe scurt, sistemul formal L a fost analizat din perspectiva triunghiului:



§5 Mulțimi consistente. Teorema de completitudine extinsă (tare)

In acest paragraf vom studia inferența și vom demonstra teorema de completitudine tare. Demonstrația nu este algebrică și va utiliza ca instrument noțiunea de mulțime consistentă.

O mulțime Σ de enunțuri este <u>inconsistentă</u> dacă $\Sigma \vdash \varphi$ pentru orice enunț φ al lui L.
Σ este <u>consistentă</u> dacă nu este inconsistentă.

<u>Prop. 1</u>. Fie Σ o mulțime de enunțuri. Sunt echivalente:

(1) Σ este inconsistentă;
(2) Există $\varphi \in \mathbf{E}$ astfel încât $\Sigma \vdash \varphi \wedge \neg\varphi$;
(3) Există $\varphi \in E$ astfel încât $\Sigma \vdash \varphi$ și $\Sigma \vdash \neg\varphi$;
(4) $\Sigma \vdash \neg(\varphi \to \varphi)$ pentru orice $\varphi \in E$;
(5) Există $\varphi \in E$ astfel încât $\Sigma \vdash \neg(\varphi \to \varphi)$.

<u>Dem</u>. (1) $\Rightarrow$ (2) Evident

(2) $\Rightarrow$ (3) Rezultă din $\Sigma \vdash \varphi \wedge \neg\varphi \to \varphi$ și $\Sigma \vdash \varphi \wedge \neg\varphi \to \neg\varphi$ și m.p. (Prop. 16 și 17, §2).

(3) $\Rightarrow$ (4) Cf. Prop. 12, §2 avem $\vdash \varphi \to (\neg\varphi \to \neg(\psi \to \psi))$ pt. orice $\psi \in E$. Presupunând $\Sigma \vdash \varphi$ și $\Sigma \vdash \neg\varphi$ rezultă $\Sigma \vdash \neg(\psi \to \psi)$ (aplicând de două ori m.p.)

(4) $\Rightarrow$ (5) Evident

(5) $\Rightarrow$ (1) Fie $\varphi \in E$ cu $\Sigma \vdash \neg(\varphi \to \varphi)$ și $\psi \in E$. Conform (A1),

$$\Sigma \vdash (\varphi \to \varphi) \to (\neg\psi \to (\varphi \to \varphi))$$

Dar $\Sigma \vdash \varphi \to \varphi$, deci $\Sigma \vdash \neg\psi \to (\varphi \to \varphi)$ prin m.p. Conform Prop. 9, §2

$$\Sigma \vdash (\neg\psi \to (\varphi \to \varphi)) \to (\neg(\varphi \to \varphi) \to \neg\neg\psi).$$

Aplicând de două ori m.p., $\Sigma \vdash \neg\neg\psi$. Însă $\Sigma \vdash \neg\neg\psi \to \psi$ (Prop. 8, §2), deci $\Sigma \vdash \psi$ pentru orice $\psi \in E$. Atunci Σ este inconsistentă.

<u>Prop. 2</u>. Dacă $\Sigma \subseteq E$ și $\varphi \in E$ atunci $\Sigma \cup \{\varphi\}$ este inconsistentă dacă și numai dacă $\Sigma \vdash \neg\varphi$.

<u>Dem</u>. Dacă $\Sigma \cup \{\varphi\}$ este inconsistentă atunci $\Sigma \cup \{\varphi\} \vdash \neg\varphi$, deci, prin teorema deducției, $\Sigma \vdash \varphi \to \neg\varphi$. Aplicând Prop. 11, §2 și m.p. rezultă $\Sigma \vdash \neg\varphi$.

Reciproc, presup. că $\Sigma \vdash \neg\varphi$, de unde $\Sigma \cup \{\varphi\} \vdash \neg\varphi$ și $\Sigma \cup \{\varphi\} \vdash \varphi$. Conf. Prop. 5, §2 avem $\Sigma \cup \{\varphi\} \vdash \varphi \to (\neg\varphi \to \psi)$, de unde prin m.p. $\Sigma \cup \{\varphi\} \vdash \psi$ pentru orice $\psi \in E$.

Cor. 3. $\Sigma \cup \{\neg\varphi\}$ este inconsistentă $\Leftrightarrow \Sigma \vdash \varphi$

Dem. Se folosește faptul că: $\Sigma \vdash \varphi \Leftrightarrow \Sigma \vdash \neg\neg\varphi$.

Exemplu. $\emptyset$ este o mulțime consistentă (cf. Corolarului 3, §4), iar E este inconsistentă.

Obs. Dacă Σ este consistentă atunci sistemul deductiv $D(\Sigma)$ generat de Σ este consistent.

O mulțime consistentă Δ este maximal consistentă dacă pentru orice mulțime consistentă Σ avem: $\Delta \subseteq \Sigma$ implică $\Delta = \Sigma$.

Prop. 4. Pt. orice mulțime consistentă Σ există o mulțime maximal consistentă Δ astfel încât $\Sigma \subseteq \Delta$.

Dem. Fie familia de mulțimi $\mathcal{A} = \{\Gamma \subseteq E \mid \Gamma$ consistentă și $\Sigma \subseteq \Gamma\}$.

Evident că $\Sigma \in \mathcal{A}$. Vom arăta că $(\mathcal{A}, \subseteq)$ este inductiv ordonată. Fie $\{\Gamma_i\}_{i\in I}$ o familie total ordonată de mulțimi din $\mathcal{A}$: pt. orice $i,j \in I$, $\Gamma_i \subseteq \Gamma_j$ sau $\Gamma_j \subseteq \Gamma_i$.

Vom arăta că $\Gamma_0 = \bigcup_{i\in I} \Gamma_i$ este un majorant al familiei $\{\Gamma_i\}_{i\in I}$. În primul rând trebuie demonstrat că $\Gamma_0 \in \mathcal{A}$.

Presup. prin absurd că Γ_0 este inconsistentă deci există $\varphi \in E$ astfel încât $\Gamma_0 \vdash \neg(\varphi \to \varphi)$.

Conform Prop. 1, (ii), §2 există o mulțime finită $\{\psi_1, \ldots, \psi_n\} \subseteq \Gamma_0$ astfel încât $\{\psi_1, \ldots, \psi_n\} \vdash \varphi$. Observăm că există indici $i_1, \ldots, i_n \in I$ astfel încât $\psi_1 \in \Gamma_{i_1}, \ldots,$ $\psi_n \in \Gamma_{i_n}$. Cum $\{\Gamma_i\}_{i\in I}$ este total ordonată va exista $k \in \{i_1, \ldots, i_n\}$ astfel încât toți $\Gamma_{i_1}, \ldots, \Gamma_{i_n}$ sunt incluși în Γ_k. Atunci $\{\psi_1, \ldots, \psi_n\} \subseteq \Gamma_k$ deci $\Gamma_k \vdash \neg(\varphi \to \varphi)$.

Aceasta contrazice consistența lui Γ_k, deci Γ_0 este consistentă. Cum $\Sigma \subseteq \Gamma_0$, rezultă că $\Gamma_0 \in \mathcal{A}$. Este evident că Γ_0 este majorant al familiei $\{\Gamma_i\}_{i\in I}$.

Aplicarea axiomei lui Zorn asigură existența unui element maximal Δ al lui $(\mathcal{A}, \subseteq)$ deci a unei mulțimi maximal consistente Δ ce include pe Σ.

Obs. Se va observa o asemănare în demonstrația acestei propoziții și demonstrației unui rezultat de la algebre Boole: orice filtru propriu se scufundă într-un ultrafiltru.

Prop. 5. Orice mulțime maximal consistentă Δ are următoarele proprietăți:

(i) Δ este sistem deductiv ($\Delta \vdash \psi \Rightarrow \psi \in \Delta$);

(ii) Dacă $\varphi \vee \psi \in \Delta$ atunci $\varphi \in \Delta$ sau $\psi \in \Delta$;

(iii) Pentru orice $\psi \in E$, $\psi \in \Delta$ sau $\neg\psi \in \Delta$;

(iv) Pentru orice $\psi, \chi \in E$ are loc echivalența:

$$\psi \to \chi \in \Delta \iff \neg\psi \in \Delta \text{ sau } \chi \in \Delta.$$

~~Dem. (i) Presup. prin absurd că există $\varphi, \psi \in \Delta$ astfel încât $\varphi\vee\psi \in \Delta$, $\varphi \notin \Delta$ și $\psi \notin \Delta$.~~

~~Ca mai sus se deduce $\Delta \cup \{\varphi\}$ și $\Delta\cup\{\psi\}$ sunt inconsistente, deci~~

Dem. (i) Presup. prin absurd că există $\psi \in E$ astfel încât $\Delta \vdash \psi$ și $\psi \notin \Delta$. Atunci $\Delta \subsetneq \Delta \cup \{\psi\}$, de unde, conform maximalității lui Δ, rezultă că $\Delta \cup \{\psi\}$ este inconsistentă. Aplicând Prop. 2 rezultă $\Delta \vdash \neg\psi$, ceea ce contrazice consistența lui Δ.

(ii) Presup. prin absurd că există $\varphi, \psi \in \Delta$ astfel încât $\varphi\vee\psi \in \Delta$, $\varphi \notin \Delta$ și $\psi \notin \Delta$. Ca mai sus se deduce că $\Delta\cup\{\varphi\}$, $\Delta\cup\{\psi\}$ sunt inconsistente, deci $\Delta \vdash \neg\varphi$ și $\Delta \vdash \neg\psi$ (cf. Prop. 2). Conform Prop. 12, §2 avem $\vdash \neg\varphi \to (\neg\psi \to \neg(\neg\varphi \to \psi))$, de unde, prin m.p., $\Delta \vdash \neg(\neg\varphi\to\psi)$. Această ultimă proprietate spune că $\Delta \vdash \neg(\varphi\vee\psi)$, ceea ce contrazice consistența lui Δ.

(iii) Rezultă din (ii) și din $\vdash \psi \vee \neg\psi$;

(iv) Rezultă din (iii) și din: $\vdash \varphi \to \psi \iff \vdash \neg\varphi \vee \psi$

O interpretare $h: V \to L_2$ este un *model* al lui $\Sigma \subseteq E$ dacă $\tilde{h}(\sigma) = 1$ pt. orice $\sigma \in \Sigma$. Notăm cu $h \models \Sigma$ faptul că h este un model al lui Σ.

Prop. 6. Orice mulțime consistentă Σ admite un model.

Dem. Fie Δ o mulțime maximal consistentă astfel încât $\Sigma \subseteq \Delta$. Considerăm interpretarea h definită prin

$$h(v) = \begin{cases} 1, & \text{dacă } v \in \Delta \\ 0, & \text{dacă } v \notin \Delta, \end{cases} \quad \text{pentru orice } v \in V.$$

Pentru orice $\varphi \in E$ avem echivalența

$$(*) \quad \tilde{h}(\varphi) = 1 \iff \varphi \in \Delta.$$

Dem. lui $(*)$ se face prin inducție relativ la φ.

(a) Dacă $\varphi \in V$, $(*)$ este chiar definiția lui h.

(b) Presup. $\varphi = \neg\alpha$. Folosind ip. inducției și Prop. 5, (iii):

$$\tilde{h}(\varphi) = 1 \iff \tilde{h}(\alpha) = 0 \iff \alpha \notin \Delta \iff \varphi \in \Delta.$$

(c) Presupunem $\varphi = \alpha \to \beta$. Din ip. inducţiei şi Prop. 5, (iii) şi (iv)

$$\tilde{h}(\varphi)=1 \iff \tilde{h}(\alpha)\to\tilde{h}(\beta)=1$$
$$\iff \tilde{h}(\alpha)=0 \text{ sau } \tilde{h}(\beta)=0 \qquad (\text{suntem în } L_2)$$
$$\iff \alpha\notin\Delta \text{ sau } \beta\in\Delta$$
$$\iff \neg\alpha\in\Delta \text{ sau } \beta\in\Delta$$
$$\iff \alpha\to\beta\in\Delta$$
$$\iff \varphi\in\Delta.$$

Folosind (*) şi $\Sigma\subseteq\Delta$ rezultă că $\tilde{h}(\sigma)=1$ pentru orice $\sigma\in\Sigma$.

Dacă $\Sigma\subseteq E$ şi $\varphi\in E$ atunci spunem că φ se <u>deduce semantic</u> din ipotezele Σ ($\Sigma\models\varphi$) dacă $\tilde{h}(\varphi)=1$ pentru orice model h al lui Σ.

<u>Teorema de completitudine extinsă</u>. Pentru orice $\Sigma\subseteq E$ şi $\varphi\in E$ avem echivalenţa:

$$\Sigma\vdash\varphi \iff \Sigma\models\varphi.$$

<u>Dem.</u> ($\Rightarrow$) Prin ind. asupra modului de definiţie al noţiunii $\Sigma\vdash\varphi$.

($\Leftarrow$) Dacă $\Sigma\nvdash\varphi$ atunci $\Sigma\cup\{\neg\varphi\}$ este consistentă (Corolar 3). Aplicând Prop. 5, $\Sigma\cup\{\neg\varphi\}$ admite un model h. Atunci h este un model al lui Σ şi $\tilde{h}(\varphi)=0$, deci $\Sigma\not\models\varphi$.

<u>Obs</u>. Teorema de completitudine extinsă stabileşte echivalenţa între inferenţa sintactică şi cea semantică. Pt. $\Sigma=\emptyset$ se obţine teorema de completitudine demonstrată în §3: $\vdash\varphi \iff \models\varphi$.

<u>Exerciţiu</u>. Folosind algebra Lindenbaum-Tarski $E/_\Delta$ asociată unei mulţimi $\Delta\subseteq E$ şi aplicând teorema lui Stone acestei algebre Boole să se dea o demonstraţie algebrică teoremei de completitudine extinsă (vezi demonstraţia din §3).

§6. De la teorema de completitudine la teorema lui Stone

Am văzut că teorema de completitudine extinsă poate fi dedusă folosind teorema lui Stone. Vom da acum o demonstrație teoremei de reprezentare a lui Stone folosind teorema de completitudine extinsă.

Teorema lui Stone. Pentru orice algebră Boole B există o mulțime nevidă X și un morfism boolean injectiv $d: B \to L_2^X$.

Dem. (a) Considerăm sistemul formal al calculului propozițional L în care mulțimea V a variabilelor este B. E este mulțimea enunțurilor, $E/\sim$ este algebra Lindenbaum-Tarski asociată și $p: E \to E/\sim$ surjecția canonică. Se poate arăta (imitând demonstr. Prop. 1, §4) că există un morfism boolean surjectiv $f: E/\sim \to B$ astfel încât următoarea diagramă este comutativă:

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r, "p|_B"] \arrow[dr, "1_B"'] & E/\sim \arrow[d, "f"] \\ & B \end{tikzcd}$$

Atunci $F = f^{-1}(1) = \{\hat{\varphi} \mid f(\hat{\varphi}) = 1\}$ este un filtru propriu în $E/\sim$ și avem un izomorfism boolean $\lambda: (E/\sim)/_F \to B$ $(: \lambda(\hat{\varphi}/_F) = f(\hat{\varphi})$ pt. orice $\varphi \in E)$

(b) Fie F un filtru propriu în $E/\sim$ (eventual cel de la (a)) și $\Delta = p^{-1}(F)$. Δ este un sistem deductiv, consistent în L și pentru orice $\varphi, \psi \in E$ au loc echivalențele:

$$\hat{\varphi}/_F = \hat{\psi}/_F \iff \hat{\varphi} \leftrightarrow \hat{\psi} \in F \iff \widehat{\varphi \leftrightarrow \psi} \in F \iff \varphi \leftrightarrow \psi \in \Delta \iff$$

$$\iff \Delta \vdash \varphi \leftrightarrow \psi \iff \varphi/_\Delta = \psi/_\Delta,$$

unde $\varphi/_\Delta$ este clasa de echivalență a lui φ în raport cu $\sim_\Delta$. Dacă $E/_\Delta = E/\sim_\Delta$ este algebra Lindenbaum-Tarski asociată lui Δ atunci echivalențele de mai sus spun că funcția $\Phi: (E/\sim)/_F \to E/_\Delta$ definită prin: $\Phi(\hat{\varphi}/_F) = \varphi/_\Delta$ pentru orice $\varphi \in E$, este un izomorfism boolean.

(c) Presupunem că Δ este o mulțime consistentă (eventual cea de la punctul (b)) și X este mulțimea modelelor lui Δ:

$$X = \{h: V \to L_2 \mid h \models \Delta\}.$$

Conform teoremei de completitudine extinsă (presupusă anterior demonstrată) $X \neq \emptyset$. Pentru orice $\varphi, \psi \in E$ avem echivalențele:

$$\begin{aligned}
\varphi/_\Delta = \psi/_\Delta &\Leftrightarrow \Delta \vdash \varphi \leftrightarrow \psi \\
&\Leftrightarrow \Delta \models \varphi \leftrightarrow \psi \\
&\Leftrightarrow \tilde{h}(\varphi \leftrightarrow \psi) = 1 \text{ pt. orice } h \in X \\
&\Leftrightarrow \tilde{h}(\varphi) \leftrightarrow \tilde{h}(\psi) = 1 \text{ pt. orice } h \in X \\
&\Leftrightarrow \tilde{h}(\varphi) = \tilde{h}(\psi) \text{ pt. orice } h \in X.
\end{aligned}$$

Definim funcția $\lambda : E/_\Delta \to L_2^X$ prin $\lambda(\varphi/_\Delta)(h) = \tilde{h}(\varphi)$ pentru orice $\varphi \in E$ și $h \in X$. Echivalențele de mai sus arată că funcția λ este bine definită și că ea este injectivă. Este ușor de văzut că λ este morfism boolean. În consecință, λ este un morfism boolean injectiv.

Asamblând pașii (a), (b), (c) vom obține teorema lui Stone. Considerăm compunerea morfismelor booleene (toate injective) de la acești trei pași:

$$\begin{tikzcd}
B \arrow[r, "\sim"] \arrow[rrr, bend right, "d"'] & (E/\sim)/_F \arrow[r, hook, "\Phi"] & E/_\Delta \arrow[r, hook, "\lambda"] & L_2^X
\end{tikzcd}$$

Am obținut un morfism boolean injectiv $d : B \hookrightarrow L_2^X$.

<u>Obs.</u> În demonstrația teoremei lui Stone și cea a teoremei de completitudine extinsă s-a folosit axioma lui Zorn. Într-o axiomatizare a teoriei mulțimilor fără axioma lui Zorn enunțurile celor două teoreme apar ca proprietăți echivalente.