FMI, Info, Anul II, 2019-2020
Programare logică

Seminar 2
Deducţia naturală pentru calculul propoziţional

Sistemul de reguli al deducţiei naturale

$$\frac{\varphi \quad \psi}{\varphi \wedge \psi}\ (\wedge i) \qquad\qquad \frac{\varphi \wedge \psi}{\varphi}\ (\wedge e_1) \qquad \frac{\varphi \wedge \psi}{\psi}\ (\wedge e_2)$$

$$\frac{\boxed{\begin{array}{c}\varphi\\ \vdots\\ \psi\end{array}}}{\varphi \to \psi}\ (\to i) \qquad\qquad \frac{\varphi \quad \varphi \to \psi}{\psi}\ (\to e)$$

$$\frac{\varphi}{\varphi \vee \psi}\ (\vee i_1) \qquad \frac{\psi}{\varphi \vee \psi}\ (\vee i_2) \qquad\qquad \frac{\varphi \vee \psi \quad \boxed{\begin{array}{c}\varphi\\ \vdots\\ \chi\end{array}} \quad \boxed{\begin{array}{c}\psi\\ \vdots\\ \chi\end{array}}}{\chi}\ (\vee e)$$

$$\frac{\boxed{\begin{array}{c}\varphi\\ \vdots\\ \bot\end{array}}}{\neg\varphi}\ (\neg i) \qquad\qquad \frac{\varphi \quad \neg\varphi}{\bot}\ (\neg e)$$

$$\frac{\varphi}{\neg\neg\varphi}\ (\neg\neg i) \qquad\qquad \frac{\neg\neg\varphi}{\varphi}\ (\neg\neg e)$$

$$\frac{}{\varphi \vee \neg\varphi}\ \textbf{TND} \qquad\qquad \frac{\bot}{\varphi}\ (\bot e)$$

TND (*tertium non datur*) este regulă derivată.

Atenţie! La acest sistem se adaugă regula de copiere.

Regula de copiere:

- la un pas al unei demonstraţii poate fi copiată orice formulă demonstrată anterior.
- la un pas al unei demonstraţii nu pot fi copiate formule din interiorul cutiilor care sunt închise în acel moment.

Exemplu în curs sau Huth si Ryan, pg. 20

(S2.1) Demonstraţi că următorii secvenţi sunt valizi:

(1) $(p \wedge q) \wedge r, s \wedge t \vdash q \wedge s$

(2) $p, \neg\neg(q \wedge r) \vdash \neg\neg p \wedge r$

(3) $p \wedge q \rightarrow r \vdash p \rightarrow (q \rightarrow r)$

(4) $p \wedge (q \vee r) \vdash (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$

(5) $p \rightarrow q, p \rightarrow \neg q \vdash \neg p$

Demonstraţie:

(1) $(p \wedge q) \wedge r, s \wedge t \vdash q \wedge s$

1	$(p \wedge q) \wedge r$	*premisa*
2	$s \wedge t$	*premisa*
3	$p \wedge q$	$(\wedge e_1)$,1
4	q	$(\wedge e_2)$,3
5	s	$(\wedge e_1)$,2
6	$q \wedge s$	$(\wedge i)$,4,5

(2) $p, \neg\neg(q \wedge r) \vdash \neg\neg p \wedge r$

1	p	*premisa*
2	$\neg\neg(q \wedge r)$	*premisa*
3	$q \wedge r$	$(\neg\neg e)$,2
4	r	$(\wedge e_2)$,3
5	$\neg\neg p$	$(\neg\neg i)$,1
6	$\neg\neg p \wedge r$	$(\wedge i)$,4,5

(3) $p \wedge q \to r \vdash p \to (q \to r)$

1	$p \wedge q \to r$	*premisa*
2	p	*ipoteza*
3	q	*ipoteza*
4	$p \wedge q$	$(\wedge i)$,2,3
5	r	$(\to i)$,1,4
6	$q \to r$	$(\to i)$,3–5
7	$p \to (q \to r)$	$(\to i)$,2–6

(4) $p \wedge (q \vee r) \vdash (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$

1	$p \wedge (q \vee r)$	*premisa*
2	p	$(\wedge e)$,1
3	$q \vee r$	$(\wedge e)$,1
4	q	*ipoteza*
5	$p \wedge q$	$(\wedge i)$,2,4
6	$(p \wedge q) \vee (p \wedge r)$	$(\vee i)$,5
7	r	*ipoteza*
8	$p \wedge r$	$(\wedge i)$,2,7
9	$(p \wedge q) \vee (p \wedge r)$	$(\vee i)$,8
10	$(p \wedge q) \vee (p \wedge r)$	$(\vee e)$,3,4–6,7–9

(5) $p \to q, p \to \neg q \vdash \neg p$

1	$p \to q$	*premisa*
2	$p \to \neg q$	*premisa*
3	p	*ipoteza*
4	q	$(\to e)$,1,3
5	$\neg q$	$(\to e)$,2,3
6	$\bot$	$(\neg e)$,4,5
7	$\neg p$	$(\neg i)$,3–6

$\square$

(S2.2) Demonstraţi că următoarele reguli pot fi derivate din regulile deducţiei naturale:

$$\frac{\varphi \to \psi \quad \neg\psi}{\neg\varphi}\ \textbf{MT} \qquad\qquad \frac{\boxed{\begin{array}{c}\neg\varphi \\ \vdots \\ \bot\end{array}}}{\varphi}\ \textbf{RAA}$$

MT =*modus tollens* RAA =*reductio ad absurdum*

Demonstraţie:

1	$\varphi \to \psi$	*premisa*
2	$\neg\psi$	*premisa*
3	φ	*ipoteza*
4	ψ	$(\to e)$,1,3
5	$\bot$	$(\neg e)$,2,4
6	$\neg\varphi$	$(\neg i)$,3–5

□

(S2.3) Fie $n \geq 1$ şi $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$, φ formule. Demonstraţi că

dacă $\vdash \varphi_1 \to (\varphi_2 \to (\cdots \to (\varphi_n \to \varphi) \cdots))$ este valid, atunci $\varphi_1, \ldots, \varphi_n \vdash \varphi$ este valid.

Demonstraţie: Presupunem că $\vdash \varphi_1 \to (\varphi_2 \to (\cdots \to (\varphi_n \to \varphi) \cdots))$ este un secvent valid. Având forma unei teoreme, ştim, atunci, că formula $\varphi_1 \to (\varphi_2 \to (\cdots \to (\varphi_n \to \varphi) \cdots))$ poate fi derivată din mulţimea vidă de premise. Ştim, de asemenea, că putem suplimenta mulţimea de premise a unui secvent fără afecta validităţii acestuia. Alegem, desigur, să adăugăm mulţimea de premise $\{\varphi_1, ..., \varphi_n\}$ (deci $\varphi_1, ..., \varphi_n \vdash \varphi_1 \to (\varphi_2 \to (\cdots \to (\varphi_n \to \varphi) \cdots))$ este, de asemenea, un secvent valid). Aplicând de n ori regula $(\to e)$ îl derivăm pe φ.

□

(S2.4) Ştim că *echivalenţa logică* este definită astfel: $\varphi \leftrightarrow \psi = (\varphi \to \psi) \land (\psi \to \varphi)$. Găsiţi reguli de introducere şi eliminare pentru $\leftrightarrow$.

Demonstraţie: Observăm că $\leftrightarrow$ este o combinaţie între $\to$ şi $\land$. Regulile pentru $\leftrightarrow$ se obţin combinând regulile pentru $\to$ şi $\land$.

Introducerea $(\leftrightarrow i)$: pentru a introduce $\varphi \leftrightarrow \psi$ trebuie să introducem $\varphi \to \psi$ şi $\psi \to \varphi$, apoi să introducem $\land$; în consecinţă regula va arăta aşa

$$\frac{\boxed{\begin{array}{c}\varphi\\ \vdots\\ \psi\end{array}} \quad \boxed{\begin{array}{c}\psi\\ \vdots\\ \varphi\end{array}}}{\varphi \leftrightarrow \psi}\ (\leftrightarrow i)$$

Eliminarea $(\leftrightarrow i)$: pentru a elimina $\varphi \leftrightarrow \psi$ trebuie să eliminăm $\wedge$ apoi să eliminăm o $\to$; vom avea două variante:

$$\frac{\varphi \leftrightarrow \psi \quad \psi}{\varphi}\ (\leftrightarrow e_1) \qquad \frac{\varphi \leftrightarrow \psi \quad \varphi}{\psi}\ (\leftrightarrow e_2)$$

$\square$

Teorie pentru S2.5 şi S2.6:

Fie $\Gamma \cup \{\varphi\} \subseteq Form$. O formulă φ este $\Gamma-$*tautologie (*consecinţă semantică a lui Γ) dacă orice model al lui Γ este şi model pentru φ, i.e. $e^+(\Gamma) = \{1\}$ implică $e^+(\varphi) = 1$ pentru orice evaluare $e : Var \to \{0, 1\}$. Notăm prin $\Gamma \vDash \varphi$ faptul că φ este o Γ-tautologie.

(S2.5) Fie $n \geq 1$ şi $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$, φ formule. Demonstraţi că

$$\text{dacă } \varphi_1, \ldots, \varphi_n \vDash \varphi \text{ atunci } \vDash \varphi_1 \to (\varphi_2 \to (\cdots \to (\varphi_n \to \varphi) \cdots)).$$

Demonstraţie: Presupunem că $\varphi_1, \ldots, \varphi_n \vDash \varphi$. Atunci, pentru orice $e : Var \to \{0, 1\}$, dacă $e^+(\varphi_1) = ... = e^+(\varphi_n) = 1$, avem că $e^+(\varphi) = 1$. Deci $e^+(\varphi_1) \leq e^+(\varphi_2) \ldots \leq e^+(\varphi_n) \leq e^+(\varphi)$, de unde obţinem că $e^+(\varphi_1) \to (e^+(\varphi_2) \to (\cdots \to (e^+(\varphi_n) \to e^+(\varphi)) \cdots)) = 1$, pentru orice $e : Var \to \{0, 1\}$, deci, în fine, $\vDash \varphi_1 \to (\varphi_2 \to (\cdots \to (\varphi_n \to \varphi) \cdots))$.

$\square$

(S2.6)

(1) Arătaţi că regula $(\vee i_1)$ este corectă, adică

$$\Gamma \vDash \varphi \text{ implică } \Gamma \vDash \varphi \vee \psi \text{ pentru orice } \Gamma \subseteq Form.$$

(2) Arătaţi că regula $(\neg i)$ este corectă, adică

$$\Gamma \vDash \varphi \to \bot \text{ implică } \Gamma \vDash \neg\varphi \text{ pentru orice } \Gamma \subseteq Form.$$

Demonstraţie: (1) Fie $e : Var \to \{0, 1\}$ o evaluare astfel încât $e^+(\Gamma) = 1$. Deoarece $\Gamma \vDash \varphi$, avem că $e^+(\varphi) = 1$. Atunci, $e^+(\varphi) \vee e^+(\psi) = 1$, de unde obţinem că $e^+(\varphi \vee \psi) = 1$, deci $\Gamma \vDash \varphi \vee \psi$.
(2) Fie $e : Var \to \{0, 1\}$ o evaluare astfel încât $e^+(\Gamma) = 1$. Din ipoteza $\Gamma \vDash \varphi \to \bot$ obţinem $e^+(\varphi \to \bot) = 1$, adică $e^+(\varphi) \to 0 = 1$. Rezultă $e^+(\varphi) = 0$, deci $e^+(\neg\varphi) = 1$. $\square$

(S2.7) Formalizaţi şi demonstraţi folosind deducţia naturală faptul că din ipotezele (i1)-(i5) deducem (c):

(i1) *Toţi scriitorii care înţeleg natura umană sunt înţelepţi.*
(i2) *Un scriitor care este poet adevărat poate trezi sentimente puternice.*
(i3) *Eminescu este scriitorul care a scris "Luceafărul".*
(i4) *Un poet care trezeşte sentimente puternice înţelege natura umană.*
(i5) *Numai un poet adevărat putea scrie "Luceafărul".*

(c) Eminescu este înţelept.

Prelucrare după S. Burris, Logic for Mathemetics and Computer Science, Prentice Hall 1998, care citeză un exerciţiu din Lewis Carroll, Symbolic Logic and The Game of Logic

Demonstraţie:

Vocabular:
S := x este scriitor.
N := x înţelege natura umană.
I := x este înţelept.
P := x este poet.
T := x trezeşte sentimente puternice.
E := x este Eminescu.
L := x este autorul Luceafărului.

1	$(S \wedge N) \to I$	*premisa*
2	$(S \wedge P) \to T$	*premisa*
3	$E \to (S \wedge L)$	*premisa*
4	$(P \wedge T) \to N$	*premisa*
5	$L \to P$	*premisa*
6	E	*ipoteza*
7	$S \wedge L$	$(\to e)$,3,6
8	S	$(\wedge e)$,7
9	L	$(\wedge e)$,7
10	P	$(\to e)$,5,9
11	$S \wedge P$	$(\wedge i)$,8,10
12	T	$(\to e)$,2,11
13	$P \wedge T$	$(\wedge i)$,10,12
14	N	$(\to e)$,4,13
15	$S \wedge N$	$(\wedge i)$,8,14
16	I	$(\to e)$,1,15
17	$E \to I$	$(\to i)$,6,16

$\square$