# CURS 2

Logică Matematică şi Computaţională

FMI · Denisa Diaconescu · An universitar 2018/2019

# PRELIMINARII - CONTINUARE

**Definiţie.**

O funcţie este un triplet $(A, B, R)$, unde $A$ şi $B$ sunt mulţimi, iar $R \subseteq A \times B$ este o relaţie cu proprietatea că pentru orice $a \in A$ există un unic $b \in B$ cu $(a, b) \in R$.

Vom nota o funcţie $(A, B, R)$ prin $f : A \to B$, simbolul $f$ având semnificaţia: fiecărui element $x \in A$ îi corespunde un singur element $f(x) \in B$ a.î. $(x, f(x)) \in R$.

Spunem că $f : A \to B$ este definită pe $A$ cu valori în $B$, $A$ se numeşte domeniul de definiţie al funcţiei $f$ şi $B$ domeniul valorilor lui $f$.

**Definiţie.**

O funcţie parţială de la $A$ la $B$ este o funcţie $f : C \to B$, unde $C$ este o submulţime a lui $A$.

**Notaţie.**

- $B^A$ este mulţimea funcţiilor de la $A$ la $B$.
- Fie $f : A \to B$ o funcţie, $X \subseteq A$ şi $Y \subseteq B$.
  - $f(A)$ este imaginea lui $f$.
  - $f(X) = \{f(x) \mid x \in X\}$ este imaginea directă a lui $X$ prin $f$
  - $f^{-1}(Y) = \{x \in X \mid f(x) \in Y\}$ este imaginea inversă a lui $Y$ prin $f$.

**Definiţie.**
Fie $f : A \to B$ o funcţie.

- $f$ este injectivă dacă pentru orice $x_1, x_2 \in A$, $x_1 \neq x_2$ implică $f(x_1) \neq f(x_2)$ (sau, echivalent, $f(x_1) = f(x_2)$ implică $x_1 = x_2$).
- $f$ este surjectivă dacă pentru orice $y \in B$ există $x \in A$ a.î. $f(x) = y$ (sau, echivalent, $f(A) = B$).
- $f$ este bijectivă dacă $f$ este injectivă şi surjectivă.

**Definiţie.**
Fie $f : A \to B$ şi $g : B \to C$ două funcţii. Compunerea lor $g \circ f$ este definită astfel:

$$g \circ f : A \to C, \quad (g \circ f)(x) = g(f(x)) \text{ pentru orice } x \in A.$$

Funcţia identitate a lui $A$ este funcţia $1_A : A \to A$, $1_A(x) = x$.

**Definiţie.**
O funcţie $f : A \to B$ este inversabilă dacă există $g : B \to A$ astfel încât $g \circ f = 1_A$ şi $f \circ g = 1_B$.

**Exerciţiu.**
O funcţie este bijectivă ddacă este inversabilă.

**Definiţie.**
Spunem că $A$ este echipotentă cu $B$ dacă există o bijecţie $f : A \to B$. Notăm acest fapt prin $A \sim B$.

**Exerciţiu.**
$A$ este echipotentă cu $B$ ddacă $B$ este echipotentă cu $A$.
De aceea, spunem de obicei că $A$ şi $B$ sunt echipotente.

**Definiţie.**
Fie $A, T$ mulţimi a.î. $A \subseteq T$. Funcţia caracteristică a lui $A$ în raport cu $T$ este definită astfel:

$$\chi_A : T \to \{0,1\}, \quad \chi_A(x) = \begin{cases} 1, & \text{dacă } x \in A \\ 0, & \text{dacă } x \notin A \end{cases}$$

**Proprietăţi.**
Dacă $A$, $B \subseteq T$ şi $x \in T$ atunci

$$\begin{aligned} \chi_{A\cap B}(x) &= \min\{\chi_A(x), \chi_B(x)\} = \chi_A(x) \cdot \chi_B(x) \\ \chi_{A\cup B}(x) &= \max\{\chi_A(x), \chi_B(x)\} = \chi_A(x) + \chi_B(x) - \chi_A(x) \cdot \chi_B(x) \\ \chi_{\overline{A}}(x) &= 1 - \chi_A(x). \end{aligned}$$

Fie $I$ o mulţime nevidă.

**Definiţie.**

Fie $A$ o mulţime. O familie de elemente din $A$ indexată de $I$ este o funcţie $f : I \to A$. Notăm cu $(a_i)_{i\in I}$ familia $f : I \to A$, $f(i) = a_i$ pentru orice $i \in I$. Vom scrie şi $(a_i)_i$ sau $(a_i)$ atunci când $I$ este dedusă din context.

**Definiţie.**

Dacă fiecărui $i \in I$ îi este asociată o mulţime $A_i$, obţinem o familie (indexată) de mulţimi $(A_i)_{i\in I}$.

Fie $(A_i)_{i\in I}$ o familie de submulţimi ale unei mulţimi $T$. Reuniunea şi intersecţia familiei $(A_i)_{i\in I}$ sunt definite astfel:

$$\begin{aligned}
\bigcup_{i\in I} A_i &= \{x \in T \mid \text{ există } i \in I \text{ a.î. } x \in A_i\} \\
\bigcap_{i\in I} A_i &= \{x \in T \mid x \in A_i \text{ pentru orice } i \in I\}
\end{aligned}$$

Fie $I$ o mulţime nevidă şi $(A_i)_{i\in I}$ o familie de mulţimi.

**Definiţie.**

Produsul cartezian al familiei $(A_i)_{i\in I}$ se defineşte astfel:

$$\begin{aligned}\prod_{i\in I} A_i &= \left\{ f : I \to \bigcup_{i\in I} A_i \mid f(i) \in A_i \text{ pentru orice } i \in I \right\} \\ &= \{(x_i)_{i\in I} \mid x_i \in A_i \text{ pentru orice } i \in I\}.\end{aligned}$$

Pentru orice $j \in I$, funcţia $\pi_j : \prod_{i\in I} A_i \to A_j, \pi_j((x_i)_{i\in I}) = x_j$ se numeşte proiecţie canonică a lui $\prod_{i\in I} A_i$. $\pi_j$ este surjectivă.

**Exerciţiu.**

Fie $I$, $J$ mulţimi nevide. Atunci

$$\bigcup_{i\in I} A_i \times \bigcup_{j\in J} B_j = \bigcup_{(i,j)\in I\times J} A_i \times B_j \text{ şi } \bigcap_{i\in I} A_i \times \bigcap_{j\in J} B_j = \bigcap_{(i,j)\in I\times J} A_i \times B_j.$$

Fie $n \geq 1$ un număr natural, $I = \{1, \ldots, n\}$ şi $A_1, \ldots, A_n \subseteq T$.

- $(x_i)_{i \in I} = (x_1, \ldots, x_n)$, un $n$-tuplu (ordonat)
- $\bigcup\limits_{i \in I} A_i = \bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i$ şi $\bigcap\limits_{i \in I} A_i = \bigcap\limits_{i=1}^{n} A_i$
- $\prod\limits_{i \in I} A_i = \prod\limits_{i=1}^{n} A_i = A_1 \times \cdots \times A_n$ şi $A^n = \underbrace{A \times \cdots \times A}_{n}$

**Definiţie.**

O relaţie $n$-ară între $A_1, \ldots, A_n$ este o submulţime a produsului cartezian $\prod_{i=1}^{n} A_i$. Dacă $R$ este o relaţie $n$-ară, spunem că $n$ este aritatea lui $R$.

O relaţie $n$-ară pe $A$ este o submulţime a lui $A^n$.

**Principiul bunei ordonări.**
Orice submulţime nevidă a lui $\mathbb{N}$ are un cel mai mic element.

**Principiul inducţiei.**
Fie $S \subseteq \mathbb{N}$ astfel încât:

(i) $0 \in S$ şi

(ii) pentru orice $n \in \mathbb{N}$, dacă $n \in S$, atunci $n+1 \in S$.

Atunci $S = \mathbb{N}$.

**Demonstraţie.** Fie $S \subseteq \mathbb{N}$ a.î. (i) şi (ii) sunt adevărate. Presupunem că $S \neq \mathbb{N}$, deci $\mathbb{N} \setminus S \neq \emptyset$. Fie $n_0$ cel mai mic element din $\mathbb{N} \setminus S$. Din (i) rezultă că $n_0 \neq 0$. Deoarece $n_0 - 1 \in S$, din (ii) rezultă că $n_0 \in S$. Am obţinut o contradicţie. Prin urmare, $S = \mathbb{N}$. $\square$

**Observaţie.**
Principul bunei ordonări şi principiul inducţiei sunt echivalente.

Principiul inducţiei (forma tare).

Fie $S \subseteq \mathbb{N}$ astfel încât:

(i) $0 \in S$ şi

(ii) pentru orice $n \in \mathbb{N}$, dacă $\{0, 1, \ldots, n\} \subseteq S$, atunci $n + 1 \in S$.

Atunci $S = \mathbb{N}$.

**Demonstraţie.** Aplicăm Principiul inducţiei pentru

$$S' = \{n \in \mathbb{N} \mid \{0, \ldots, n\} \subseteq S\}.$$

Obţinem $S' = \mathbb{N}$. Rezultă că, pentru orice $n \in \mathbb{N}$, $\{0, \ldots, n\} \subseteq S$, deci $n \in S$. Prin urmare, $S = \mathbb{N}$. $\square$

Fie $P : \mathbb{N} \to \{0, 1\}$ un predicat (o proprietate).
$P(n) = 1$ înseamnă că $P(n)$ este adevărat.

## Principiul inducţiei.

- Pasul iniţial. Verificăm că $P(0) = 1$.
- Ipoteza de inducţie. Presupunem că $P(n) = 1$, unde $n \in \mathbb{N}$.
- Pasul de inducţie. Demonstrăm că $P(n + 1) = 1$.

Concluzie: $P(n) = 1$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$.

## Principiul inducţiei (forma tare).

- Pasul iniţial. Verificăm că $P(0) = 1$.
- Ipoteza de inducţie. Pres. că $P(k) = 1$ pentru orice $k \leq n$, unde $n \in \mathbb{N}$.
- Pasul de inducţie. Demonstrăm că $P(n + 1) = 1$.

Concluzie: $P(n) = 1$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$.

**Definiţie.**
O mulţime $A$ este numărabilă dacă este echipotentă cu $\mathbb{N}$.
O mulţime finită sau numărabilă se numeşte cel mult numărabilă.

**Propoziţie.**

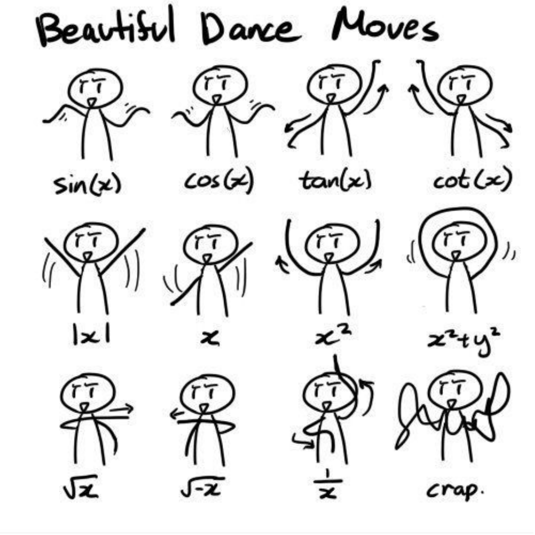
(i) Orice submulţime infinită a lui $\mathbb{N}$ este numărabilă.

(ii) Reuniunea unei familii cel mult numărabile de mulţimi numărabile este mulţime numărabilă.

(iii) $\mathbb{Z}$ şi $\mathbb{Q}$ sunt numărabile.

(iv) Produsul cartezian al unei familii cel mult numărabile de mulţimi numărabile este mulţime numărabilă.

**Demonstraţie.** Exerciţiu.




Pe data viitoare!

Conţinutul tehnic al acestui curs se regăseşte în cursul de *Logică Matematică şi Computaţională* al prof. Laurenţiu Leuştean din anul universitar 2017/2018.