CONȚINUTUL CURSULUI #3:

II.1.1. Sisteme liniare superior triunghiulare

Definiția (II.1.)

a) *Matricea* $A = (a_{ij})_{i,j=\overline{1,n}} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ *se numește matrice superior triunghiulară dacă și numai dacă elementele sub diagonala principală sunt nule, i.e.* $a_{ij} = 0, \forall i > j$;

b) *Un sistem liniar a cărui matrice asociată este superior triunghiulară se numește sistem superior triunghiular.*

Fie sistemul liniar $Ax = b, A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ superior triunghiulară cu $a_{kk} \neq 0, k = \overline{1, n}$ și $b \in \mathbb{R}^n$. Sistemul superior triunghiular $Ax = b$ se scrie sub forma

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1k}x_k + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 & (E_1) \\ \qquad a_{22}x_2 + \ldots + a_{2k}x_k + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 & (E_2) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\ \qquad\qquad a_{kk}x_k + \ldots + a_{kn}x_n = b_k & (E_k) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\ \qquad\qquad\qquad a_{nn}x_n = b_n & (E_n) \end{cases} \tag{1}$$

Din (E_n) rezultă

$$x_n = \frac{b_n}{a_{nn}}. \tag{2}$$

Fie ecuația (E_k): $a_{kk}x_k + \sum_{j=k+1}^{n} a_{kj}x_j = b_k$. Dacă din ultimele $n-k$ ecuații sunt calculate componentele $x_j, j = \overline{k+1, n}$, atunci din (E_k) rezultă

$$x_k = \frac{1}{a_{kk}}\left(b_k - \sum_{j=k+1}^{n} a_{kj}x_j\right) \tag{3}$$

ALGORITM (Metoda substituției descendente)

Date de intrare: $A = (a_{ij})_{i,j=\overline{1,n}} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$; $b \in \mathbb{R}^n$;
Date de ieșire: $x \in \mathbb{R}^n$;

1. $x_n = \frac{1}{a_{nn}} b_n$; $k = n - 1$;
2. `while` $k > 0$ `do`

$$x_k = \frac{1}{a_{kk}}\left(b_k - \sum_{j=k+1}^{n} a_{kj}x_j\right);$$

$k = k - 1$;

`endwhile`

Definim în continuare conform Algoritmului (Metoda substituției descendente) procedura **SubsDesc** având sintaxa $x =$**SubsDesc**(A, b), unde x este soluția sistemului $Ax = b$.

II.1.2. Metoda Gauss fără pivotare.

Fie sistemul liniar $Ax = b, A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ b \in \mathbb{R}^n$. Sistemul $Ax = b$ se scrie sub forma

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1k}x_k + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 & (\mathrm{E}_1) \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2k}x_k + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 & (\mathrm{E}_2) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\ a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + \ldots + a_{kk}x_k + \ldots + a_{kn}x_n = b_k & (\mathrm{E}_k) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nk}x_k + \ldots + a_{nn}x_n = b_n & (\mathrm{E}_n) \end{cases} \tag{4}$$

Se numește **pivot** al matricei $A = \left(a_{ij}\right)_{i,j=\overline{1,n}}$ orice element de pe diagonala principală a matricei A, i.e. $a_{kk},\ k \in \overline{1,n}$.
Metoda Gauss fără pivotare transformă matricea extinsă $\overline{A}$ folosind transformările elementare într-o matrice superior triunghiulară, obținându-se astfel un sistem compatibil cu sistemul inițial.
La fiecare pas $k = \overline{1, n-1}$ al metodei lui Gauss fără pivotare se alege drept pivot corespunzător coloanei k primul element nenul $a_{pk} \neq 0, p \geq k$ de pe coloana k a matricei transformate. Apoi se elimină toate elementele de pe coloana k situate sub pivot (folosind transformările elementare).

ALGORITM (Metoda Gauss fără pivotare)

Date: $A = (a_{ij})_{i,j=\overline{1,n}} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \quad b \in \mathbb{R}^n$

1. $A = (A \mid b) = (a_{ij})_{i=\overline{1,n};j=\overline{1,n+1}}$ `(matricea extinsă);`
2. `for` $k = 1 : n-1$ `do`

```
    Se caută primul p cu k ≤ p ≤ n a.î.  a_pk ≠ 0;
    if (nu a fost gasit p ) then
      OUTPUT('Sist.  incomp.  sau sist.  comp.
  nedet.')
      STOP.
    endif
    if p ≠ k then
        L_p ↔ L_k (schimbă linia p cu linia k)
    endif
    for ℓ = k+1 : n do
```


$$m_{\ell k} = \frac{a_{\ell k}}{a_{kk}};$$
$$L_\ell \leftarrow L_\ell - m_{\ell k} L_k;$$

```
    endfor
  endfor
```

3. `if` $a_{nn} = 0$ `then`

```
    OUTPUT('Sistem incomp.  sau sist.  comp.
  nedet.')
    STOP.
  endif
```

4. $x =$ **SubsDesc**$\left((a_{ij})_{i,j=\overline{1,n}}, (a_{i,n+1})_{i=\overline{1,n}}\right)$.

Exemplul #1 Să se rezolve, folosind metoda lui Gauss fără pivotare, sistemul liniar:

$$\begin{cases} x_2 + 2x_3 = 8 \\ x_1 + x_3 = 4 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 10 \end{cases} \tag{5}$$

Matricea extinsă $\overline{A}$ asociată sistemului este:

$$\bar{A} = [A|b] = \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 2 & 8 \\ 1 & 0 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & 1 & 10 \end{array}\right]$$

$k = 1 : a_{21} \neq 0 \Rightarrow p = 2$. Deoarece $p \neq k$ interschimbăm $L_p \leftrightarrow L_k$. Se obține o matrice echivalentă cu matricea $\overline{A}$.

$$\bar{A} \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 8 \\ 3 & 2 & 1 & 10 \end{array}\right]$$

Eliminăm toate elementele de pe prima coloană situate sub elementul $a_{11} = 1$ al matricei echivalente. Aplicăm următoarea transformare elementară $L_3 \leftarrow L_3 - \dfrac{3}{1}L_1$:

$$\bar{A} \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 8 \\ 0 & 2 & -2 & -2 \end{array}\right]$$

$k = 2 : a_{22} = 1 \neq 0$. Eliminăm elementul situat sub pivotul curent a_{22} aplicând transformarea $L_3 \leftarrow L_3 - 2L_2$

$$\bar{A} \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 8 \\ 0 & 0 & -6 & -18 \end{array}\right]$$

Matricea finală este o matrice superior triunghiulară și reprezintă matricea asociată unui sistem compatibil cu sistemul inițial. Soluția sistemului este: $x_1 = 1, x_2 = 2, x_3 = 3$.

Exemplul # 2 Să se rezolve, folosind metoda lui Gauss fără pivotare, sistemul liniar:

$$\begin{cases} \varepsilon x_1 + x_2 = 1 & (\mathrm{E}_1) \\ x_1 + x_2 = 2 & (\mathrm{E}_2) \end{cases} \tag{6}$$

unde $\varepsilon = \mathrm{O}(10^{-20}) \ll 1$.
Transformăm matricea $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ într-o matrice superior triunghiulară

$$\bar{A} = \left[\begin{array}{cc|c} \varepsilon & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} \varepsilon & 1 & 1 \\ 0 & 1 - \frac{1}{\varepsilon} & 2 - \frac{1}{\varepsilon} \end{array}\right]$$

Cum $a_{11} \neq 0$, s-a efectuat transformarea $L_2 \leftarrow L_2 - \dfrac{a_{21}}{a_{11}} L_1$

Obținem sistemul liniar superior triunghiular echivalent:

$$\begin{cases} \varepsilon x_1 + \quad x_2 = 1 \\ \left(1 - \dfrac{1}{\varepsilon}\right) x_2 = 2 - \dfrac{1}{\varepsilon} \end{cases} \tag{7}$$

Sistemul liniar (7) se rezolvă prin metoda substituției descendente

$$\begin{cases} x_2 = \dfrac{2 - 1/\varepsilon}{1 - 1/\varepsilon} = \dfrac{2\varepsilon - 1}{\varepsilon - 1} \approx \dfrac{-1}{-1} = 1 \\ x_1 = \dfrac{1 - x_2}{\varepsilon} = \dfrac{1 - 1}{\varepsilon} = 0 \end{cases} \Longrightarrow \tag{8}$$

$$x_1 = 0 \quad \& \quad x_2 = 1$$

Verificare:

$$\begin{cases} \varepsilon x_1 + x_2 = 0 + 1 = 1 & (\mathrm{E}_1) \\ x_1 + x_2 = 0 + 1 = 1 & (\mathrm{E}_2) \end{cases} \tag{9}$$

Relațiile (9) implică faptul că soluția (8) a sistemului liniar (11), obținută prin metoda lui Gauss fără pivotare, conține o eroare foarte mare.

II.1.3. Metoda Gauss cu pivotare parțială.

La fiecare pas $k = \overline{1, n-1}$ al Algoritmului metodei Gauss fără pivotare se alege ca pivot corespunzător coloanei k elementul a_{pk} cu valoarea absolută cea mai mare de pe coloana k, aflat sub sau pe diagonala principală a matricei curente A, i.e.

$$|a_{pk}| = \max_{j=\overline{k,n}} |a_{jk}|, \quad p \in \overline{k, n} \tag{10}$$

ALGORITM (Metoda Gauss cu pivotare parțială)

Date: $A = (a_{ij})_{i,j=\overline{1,n}} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $b \in \mathbb{R}^n$

1. $A = (A \mid b) = (a_{i,j})_{i=\overline{1,n}, j=\overline{1,n+1}}$ `(matricea extinsă)`
2. `for` $k = 1 : n-1$ `do`
   - `Determină primul indice` p, $(k \le p \le n)$
     `a.î.` $|a_{pk}| = \max_{j=\overline{k,n}} |a_{jk}|$
   - `if` $a_{pk} = 0$ `then`
     - `OUTPUT('Sist. incomp. sau comp. nedet.')`
     - `STOP.`
   - `endif`

if $p \neq k$ then

$L_p \leftrightarrow L_k$ (schimbă linia p cu linia k)

endif

for $\ell = k+1 : n$ do

$m_{\ell k} = \dfrac{a_{\ell k}}{a_{kk}}$;

$L_\ell \leftarrow L_\ell - m_{\ell k} L_k$;

endfor

endfor

3. if $a_{nn} = 0$ then

OUTPUT('Sist. incomp. sau comp. nedet.')

STOP.

endif

4. $x =$ **SubsDesc**$\left((a_{ij})_{i,j=\overline{1,n}}, (a_{i,n+1})_{i=\overline{1,n}}\right)$

Exemplul #3 Să se rezolve, folosind metoda lui Gauss cu pivotare parțială, sistemul liniar:

$$\begin{cases} x_2 + 2x_3 = 8 \\ x_1 + x_3 = 4 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 10 \end{cases} \tag{11}$$

Matricea extinsă $\overline{A}$ asociată sistemului este:

$$\bar{A} = [A|b] = \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 2 & 8 \\ 1 & 0 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & 1 & 10 \end{array}\right]$$

$k = 1 : |a_{p1}| = \max_{j=\overline{1,3}} |a_{j1}| = |a_{31}| \Rightarrow p = 3$. Interschimbăm $L_3 \leftrightarrow L_1$. Se obține matricea echivalentă cu $\overline{A}$

$$\bar{A} \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 1 & 10 \\ 0 & 1 & 2 & 8 \\ 1 & 0 & 1 & 4 \end{array}\right]$$

În urma transformării elementare $L_3 \leftarrow L_3 - \dfrac{1}{3} L_1$ se obține:

$$\bar{A} \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 1 & 10 \\ 0 & 1 & 2 & 8 \\ 0 & -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \end{array}\right]$$

$k = 2 : |a_{p2}| = \max_{j=\overline{2,3}} |a_{j2}| = |a_{22}| \Rightarrow p = 2$. Alpicăm transformarea elementară $L_3 \leftarrow L_3 - \dfrac{-2/3}{1} = L_3 + \dfrac{2}{3} L_2$

$$\bar{A} \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 1 & 10 \\ 0 & 1 & 2 & 8 \\ 0 & 0 & 2 & 6 \end{array}\right]$$

Soluția sistemului este: $x_1 = 1, x_2 = 2, x_3 = 3$.

Exemplul #4 Să se rezolve, folosind metoda lui Gauss cu pivotare parțială, sistemul liniar:

$$\begin{cases} \varepsilon x_1 + x_2 = 1 & (\mathrm{E}_1) \\ x_1 + x_2 = 2 & (\mathrm{E}_2) \end{cases} \tag{12}$$

unde $\varepsilon = \mathrm{O}(10^{-20}) \ll 1$.
Scriem matricea extinsă asociată sistemului:

$$\bar{A} = \left[\begin{array}{cc|c} \varepsilon & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{array}\right] \tag{13}$$

Determinăm pivotul corespunzător coloanei $k = 1$ a matricei curente A:

$$|a_{p1}| = \max_{j=\overline{1,2}} |a_{j1}| = \max\left\{|\varepsilon|, 1\right\} = 1 \quad \Longrightarrow \quad p = 2 \tag{14}$$

Interschimbăm liniile $k = 1$ și $p = 2$, i.e. $\mathrm{L}_2 \longleftrightarrow \mathrm{L}_1$

Se obține matricea echivalenta

$$\bar{A} \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 2 \\ \varepsilon & 1 & 1 \end{array}\right]$$

În urma transformării $L_2 \leftarrow L_2 - \frac{a_{21}}{a_{11}} L_1$, i.e., $L_2 \leftarrow L_2 - \varepsilon L_1$ se obține:

$$\bar{A} \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1-\varepsilon & 1-2\varepsilon \end{array}\right]$$

Obținem sistemul liniar superior triunghiular echivalent:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 2 \\ (1-\varepsilon)\, x_2 = 1 - 2\varepsilon \end{cases} \tag{15}$$

Sistemul liniar (15) se rezolvă prin metoda substituției descendente

$$\begin{cases} x_2 = \dfrac{1-2\varepsilon}{1-\varepsilon} \approx \dfrac{1}{1} = 1 \\ x_1 = 2 - x_2 = 2 - 1 = 1 \end{cases} \implies \tag{16}$$

$$x_1 = x_2 = 1$$

Verificare:

$$\begin{cases} \varepsilon\, x_1 + x_2 = \varepsilon + 1 \approx 1 & (\mathrm{E}_1) \\ x_1 + x_2 = 1 + 1 = 2 & (\mathrm{E}_2) \end{cases} \tag{17}$$

Relațiile (17) implică faptul că soluția (16) a sistemului liniar (11), obținută prin metoda lui Gauss cu pivotare parțială, este acurată.

Exemplul $\#$5

Să se rezolve, folosind metoda lui Gauss cu pivotare parțială, sistemul liniar:

$$\begin{cases} x_1 + C\, x_2 = C & (\mathrm{E}_1) \\ x_1 + x_2 = 2 & (\mathrm{E}_2) \end{cases} \tag{18}$$

unde $C = \mathrm{O}(10^{20}) \gg 1$.

Transformăm matricea $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ într-o matrice superior triunghiulară, ținând seama de alegerea pivotului corespunzător coloanelor matricelor respective:

$$\bar{A} = \left[\begin{array}{cc|c} 1 & C & C \\ 1 & 1 & 2 \end{array}\right] \quad (\mathrm{L}_2) \longleftarrow \left(\mathrm{L}_2 - \frac{1}{2}\,\mathrm{L}_1\right) \quad \implies$$

$$\bar{A} \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & C & C \\ 0 & 1-C & 2-C \end{array}\right]$$

Obținem sistemul liniar superior triunghiular echivalent:

$$\begin{cases} x_1 + C\, x_2 = C \\ (1-C)\, x_2 = 2 - C \end{cases} \tag{19}$$

Sistemul liniar (19) se rezolvă prin metoda substituției descendente

$$\begin{cases} x_2 = \dfrac{2-C}{1-C} \approx \dfrac{-C}{-C} = 1 \\ x_1 = C - C\, x_2 = C - C = 0 \end{cases} \implies$$

$$x_1 = 0 \quad \& \quad x_2 = 1$$

Verificare:

$$\begin{cases} x_1 + C\, x_2 = 0 + C = C & (\mathrm{E}_1) \\ x_1 + x_2 = 0 + 1 = 1 & (\mathrm{E}_2) \end{cases} \tag{20}$$

Relațiile (20) implică faptul că soluția (20) a sistemului liniar (18), obținută prin metoda lui Gauss cu pivotare parțială, conține o eroare foarte mare.

Cauza erorii se datorează faptului că nu se ține seama de valoarea pivotului în raport cu valorile elementelor liniei sale. Se introduce astfel pivotărea totală.

II.1.4. Metoda Gauss cu pivotare totală.

La fiecare pas $k = \overline{1, n-1}$ al Algoritmului metodei Gauss fără pivotare alegem ca pivot elementul curent a_{pm} cu valoarea absolută cea mai mare din submatricea $(a_{ij})_{i,j=\overline{k,n}}$, i.e.

$$\boxed{|a_{pm}| = \max_{i,j=\overline{k,n}} |a_{ij}|, \quad p, m \in \overline{k, n}} \tag{21}$$

Dacă $m \neq k$, atunci interschimbăm coloanele k și m. Dacă $p \neq k$, atunci interschimbăm liniile k și ℓ.

Obs.: La interschimbarea a două coloane se schimbă ordinea necunoscutelor în vectorul x.

ALGORITM (Metoda Gauss cu pivotare totală)

Date de intrare: $A = (a_{ij})_{i,j=\overline{1,n}} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $b \in \mathbb{R}^n$;
Date de ieșire: $x \in \mathbb{R}^n$;

1. $A = (A \mid b) = (a_{i,j})_{i=\overline{1,n}, j=\overline{1,n+1}}$ (matricea extinsă);
   $index_i = i, i = \overline{1, n}$;
2. for $k = 1 : n-1$ do
   Determină primii indici p, m $(k \leq p, m \leq n)$
   a.î. $|a_{pm}| = \max_{i,j=\overline{k,n}} |a_{ij}|$;
   if $a_{pm} = 0$ then
   OUTPUT('Sist. incomp. sau comp. nedet.')
   STOP
   endif
   if $p \neq k$ then
   $L_\ell \leftrightarrow L_k$ (schimbă linia p cu linia k);
   endif

   if $m \neq k$ then
   $C_m \leftrightarrow C_k$ (schimbă coloana m cu coloana k);
   $index_m \leftrightarrow index_k$ (schimbă indicii nec.);
   endif
   for $\ell = k+1 : n$ do
   $m_{\ell k} = \dfrac{a_{\ell k}}{a_{kk}}$;
   $L_\ell \leftarrow L_\ell - m_{\ell k} L_k$;
   endfor
   endfor
3. if $a_{nn} = 0$ then
   OUTPUT('Sist. incomp. sau comp. nedet.')
   STOP.
   endif
4. $y =$ **SubsDesc**$((a_{ij})_{i,j=\overline{1,n}}, (a_{i,n+1})_{i=\overline{1,n}})$;
   $x_{index_i} = y_i, i = \overline{1, n}$ (renumerotare nec.).

Exemplul #6 Să se rezolve, folosind metoda lui Gauss cu pivotare totală, sistemul liniar:

$$\begin{cases} x_1 + C\, x_2 = C & (\mathrm{E}_1) \\ x_1 + x_2 = 2 & (\mathrm{E}_2) \end{cases} \tag{22}$$

unde $C = \mathrm{O}(10^{20}) \gg 1$.

$$\widetilde{A} = \left[\begin{array}{cc|c} 1 & C & C \\ 1 & 1 & 2 \end{array}\right] \tag{23}$$

Determinăm pivotul corespunzător coloanei $k = 1$ a matricei curente A căutând maximul elementelor matricei A:

$$|a_{pm}| = \max_{i,j=\overline{1,2}} |a_{ij}| = |C| = |a_{12}| \quad \Longrightarrow \quad p = 1,\ m = 2 \tag{24}$$

Cum $p = k$ și $m \neq k$, iterschimbăm coloanele $k = 1$ și $m = 2$.

$$\overline{A} \sim \left[\begin{array}{cc|c} C & 1 & C \\ 1 & 1 & 2 \end{array}\right] \qquad \left(\mathrm{E}_2 - \frac{1}{C}\,\mathrm{E}_1\right) \longrightarrow (\mathrm{E}_2) \qquad \Longrightarrow \tag{25}$$

$$\overline{A} \sim \left[\begin{array}{cc|c} C & 1 & C \\ 0 & 1 - \dfrac{1}{C} & 1 \end{array}\right] \tag{26}$$

Obținem sistemul liniar superior triunghiular echivalent:

$$\begin{cases} C\,x_2 + \qquad x_1 = 2\,C \\ \left(1 - \dfrac{1}{C}\right) x_1 = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} x_2 + \qquad x_1 = C \\ \dfrac{C-1}{C}\, x_1 = 1 \end{cases} \tag{27}$$

Sistemul liniar (27) se rezolvă prin metoda substituției descendente

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{C}{C-1} \approx \dfrac{C}{C} = 1 \\ x_2 = \dfrac{C - x_1}{C} = \dfrac{C-1}{C} \approx \dfrac{C}{C} = 1 \end{cases} \qquad \Longrightarrow \tag{28}$$

$$x_1 = x_2 = 1$$

Verificare:

$$\begin{cases} x_1 + Cx_2 = 1 + C \approx C & (\mathrm{E}_1) \\ x_1 + x_2 = 1 + 1 = 2 & (\mathrm{E}_2) \end{cases} \tag{29}$$

Relația (29) implică faptul că soluția (28) a sistemului liniar (22), obținută prin metoda lui Gauss cu pivotare totală, este acurată.

II.1.5. Sisteme liniare inferior triunghiulare

Definiția (II.2.)

a) *Matricea $A = (a_{ij})_{i,j=\overline{1,n}} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ se numește inferior triunghiulară dacă și numai dacă elementele sub diagonala principală sunt nule, i.e. $a_{ij} = 0, \forall i > j$;*

b) *Un sistem liniar a cărui matrice asociată este inferior triunghiulară se numește sistem inferior triunghiular.*

Fie sistemul liniar $Ax = b$, unde $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ este inferior triunghiulară cu $a_{kk} \neq 0, k = \overline{1,n}$ și $b \in \mathbb{R}^n$. Sistemul inferior triunghiular $Ax = b$ se scrie sub forma

$$\begin{cases} a_{11}\,x_1 & = b_1 & (\mathrm{E}_1) \\ a_{21}\,x_1 + a_{22}\,x_2 & = b_2 & (\mathrm{E}_2) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & & \\ a_{k1}\,x_1 + a_{k2}\,x_2 + \ldots + a_{kk}\,x_k & = b_k & (\mathrm{E}_k) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & & \\ a_{n1}\,x_1 + a_{n2}\,x_2 + \ldots + a_{nk}\,x_k + \ldots + \ a_{nn}\,x_n & = b_n & (\mathrm{E}_n) \end{cases} \tag{30}$$

Din (E_1) rezultă

$$x_1 = \frac{b_1}{a_{11}}. \tag{31}$$

Fie ecuația (E_k): $a_{kk}x_k + \sum_{j=1}^{k-1} a_{kj}x_j = b_k$. Dacă din primele $k-1$ ecuații sunt calculate componentele $x_j, j = \overline{1, k-1}$, atunci din (E_k) rezultă

$$x_k = \frac{1}{a_{kk}}\left(b_k - \sum_{j=1}^{k-1} a_{kj}x_j\right) \tag{32}$$

ALGORITM (Metoda substituției ascendente)

Date de intrare: $A = (a_{ij})_{i,j=\overline{1,n}}$; $b = (b_i)_{i=\overline{1,n}}$;
Date de ieșire: $x = (x_i)_{i=\overline{1,n}}$

STEP 1: $x_1 = \dfrac{1}{a_{11}} b_1$;

STEP 2: `for 2 :` n `do`

$$x_k = \frac{1}{a_{kk}}\left(b_k - \sum_{j=1}^{k-1} a_{kj}\, x_j\right);$$

`endfor`

Definim în continuare conform Algoritmului (Metoda substituției ascendente) procedura **SubsAsc** având sintaxa $x =$**SubsAsc**(A, b), procedură care returnează soluția x a sistemului $Ax = b$.

II.1.6. Inversarea unei matrice aplicând metodele Gauss cu pivotare. Determinantul unei matrice.

Fie $A = (a_{ij})_{i,j=\overline{1,n}} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ inversabilă și A^{-1} invesa matricei. Inversa A^{-1} verifică relația

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I_n.$$

Fie $x^{(k)} \in \mathbb{R}^n$, $k = \overline{1, n}$ coloana k a matricei A^{-1}, i.e.,

$$A^{-1} = cols(x^{(1)}, ..., x^{(k)}, ..., x^{(n)}).$$

Deasemenea, fie $e^{(k)} = (0, ..., 1, ..., 0)^T$, cu 1 pe poziția k, coloana k din matricea I_n. Atunci

$$AA^{-1} = I_n \Longleftrightarrow Ax^{(k)} = e^{(k)}, k = \overline{1, n} \tag{33}$$

Am obținut n sisteme liniare în care vectorii necunoscutelor sunt pe rând coloanele inversei și vor fi calculați conform unei metode de pivotare, fie de exemplu, metoda Gauss cu pivotare totală.

Sistemele (33) se pot rezolva și simultan dacă se consideră drept matrice extinsă, matricea formată din matricea A la care se adaugă cele n coloane ale matricei I_n.

Fie $a_{11}^{(1)}, a_{22}^{(2)}, ..., a_{n-1,n-1}^{(n-1)}, a_{nn}^{(n-1)}$ pivoții la fiecare etapă din algoritmii Gauss, atunci

$$|A| = (-1)^s a_{11}^{(1)} a_{11}^{(2)} a_{n-1,n-1}^{(n-1)} a_{nn}^{(n-1)} \tag{34}$$

unde s este numărul de interschimbări de linii și coloane, în funcție de metodă. Matricea A se modifică pe parcursul iterațiilor, din acest motiv s-a folosit notația cu indici sus pentru a face distincție între elementele matricei A la fiecare pas.