Manoloche Andrei 244

Probabilități și statistică

TEMA 1

1. a) A singur se realizează

$\Leftrightarrow$ A se realizează și B nu se realizează și C nu se realizează

$\Leftrightarrow$ A se realizează și B^c se realizează și C^c se realizează

(B^c - evenimentul contrar lui B, C^c - evenimentul contrar lui C)

Exprimând ultima relație prin operațiile cu mulțimi:

$A \cap B^c \cap C^c$

b) A și C se realizează, dar nu și B

$\Leftrightarrow$ A se realizează și C se realizează și B nu se realizează

$\Leftrightarrow$ A se realizează și C se realizează și B^c se realizează

(B^c - evenimentul contrar evenimentului B)

Exprimând ultima relație prin operațiile cu mulțimi:

$A \cap C \cap B^c = A \cap B \cap C^c$

c) cele trei evenimente se produc

$\Leftrightarrow$ A se realizează și B se realizează și C se realizează

Exprimând relația prin operațiile cu mulțimi:

$A \cap B \cap C$

d) Cel puțin unul dintre cele trei evenimente se produce

$\Leftrightarrow$ A se realizează sau B se realizează sau C se realizează

Exprimând relația prin operațiile cu mulțimi obținem:

$A \cup B \cup C$

e) Cel puțin două evenimente se produc

$\Leftrightarrow$ (A și B se produc și C nu se produce) sau (A și C se produc, B nu se produce) sau (B și C se produc și A nu se produce) sau (A și B și C se produc)

(X^c - evenimentul contrar lui X

$\Leftrightarrow$ (A și B și C^c se produc) sau (A și C și B^c se produc) sau (B și C și A^c se produc) sau (A și B și C se produc)

Exprimând relația prin operațiile cu mulțimi, obținem:

$$(A \cap B \cap C^c) \cup (A \cap B^c \cap C) \cup (A^c \cap B \cap C) \cup (A \cap B \cap C)$$

f) Cel mult un eveniment se produce

$\Leftrightarrow$ (Un eveniment se produce) sau (niciun eveniment nu se produce)

$\Leftrightarrow$ ((A se produce și B nu se produce și C nu se produce) sau (B se produce și A nu se produce și C nu se produce) sau (C se produce și A nu se produce și B nu se produce) sau (A nu se produce și B nu se produce și C nu se produce)

$\Leftrightarrow$ (A se produce și B^c se produce și C^c se produce) sau (B se produce și A^c se produce și C^c se produce) sau (C se produce și A^c se produce și B^c se produce) sau (A^c se produce și B^c se produce și C^c se produce)

Exprimând relația prin operațiile cu mulțimi, obținem:

$$(A \cap B^c \cap C^c) \cup (B \cap A^c \cap C^c) \cup (C \cap A^c \cap B^c) \cup (A^c \cap B^c \cap C^c)$$

$$= (A \cap B^c \cap C^c) \cup (A^c \cap B \cap C^c) \cup (A^c \cap B^c \cap C) \cup (A^c \cap B^c \cap C^c)$$

g) Niciunul dintre cele trei evenimente nu se produce

$\Leftrightarrow$ A nu se produce și B nu se produce și C nu se produce

$\Leftrightarrow$ A^c se produce și B^c se produce și C^c se produce

(X^c - evenimentul contrar lui X

exprimând relația prin intermediul operațiilor cu mulțimi:

$A^c \cap B^c \cap C^c$

---

h) Exact 2 evenimente se produc

$\Leftrightarrow$ (A și B se produc și C nu se produce) sau (A și C se produc și B nu se produce) sau (B și C se produc și A nu se produc)

$\Leftrightarrow$ (A se produce și B se produce și C^c produce)

sau (A se produce și C se produce și B^c se produce)

sau (B se produce și C se produce și A^c se produce)

$\Rightarrow$ $(A \cap B \cap C^c) \cup (A \cap B^c \cap C) \cup (A^c \cap B \cap C)$

---

2. a) Numai o bilă este albă

$\Leftrightarrow$ $\exists!\, i$, $i \in \{1,2,3,4,5\}$ a.î. la extragerea „i" s-a scos o bilă albă și pt $j \in \{1,2,3,4,5\}$, $j \neq i$ $A_j \to$ nu s-a extras o bilă albă

$S = S_1 \cup S_2 \cup S_3 \cup S_4 \cup S_5$ - mulțimea soluțiilor

S_i - s-a extras bila albă ~~doar~~ la extragerea „i", iar la celelalte NU

$S = \underbrace{(A_1 \cap A_2^c \cap A_3^c \cap A_4^c \cap A_5^c)}_{S_1} \cup \underbrace{(A_1^c \cap A_2 \cap A_3^c \cap A_4^c \cap A_5^c)}_{S_2}$
$\cup \underbrace{(A_1^c \cap A_2^c \cap A_3 \cap A_4^c \cap A_5^c)}_{S_3} \cup \underbrace{(A_1^c \cap A_2^c \cap A_3^c \cap A_4 \cap A_5^c)}_{S_4}$
$\cup \underbrace{(A_1^c \cap A_2^c \cap A_3^c \cap A_4^c \cap A_5)}_{S_5}$

b) Cel puțin o bilă este neagră

* $S = S_1 \cup S_2 \cup S_3 \cup S_4 \cup S_5$

S_i - mulțimea ~~soluțiilor~~ soluțiilor pentru care sunt extrase exact „i" bile negre

A_i – s-a extras o bilă albă la extragerea i
A_i^c – s-a extras o bilă neagră la extragerea i

$S_1 = (A_1^c \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4 \cap A_5) \cup (A_1 \cap A_2^c \cap A_3 \cap A_4 \cap A_5) \cup (A_1 \cap A_2 \cap A_3^c \cap A_4 \cap$
$\cup (A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4^c \cap A_5) \cup (A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4 \cap A_5^c)$

$S_2 = (A_1^c \cap A_2^c \cap A_3 \cap A_4 \cap A_5) \cup (A_1^c \cap A_2 \cap A_3^c \cap A_4 \cap A_5) \cup \cancel{(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4 \cap A_5)}$
$\cup (A_1^c \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4^c \cap A_5) \cup (A_1^c \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4 \cap A_5^c) \cup (A_1 \cap A_2^c \cap A_3^c \cap A_4 \cap A_5)$
$\cup (A_1 \cap A_2^c \cap A_3 \cap A_4^c \cap A_5) \cup (A_1 \cap A_2^c \cap A_3 \cap A_4 \cap A_5^c) \cup (A_1 \cap A_2 \cap A_3^c \cap A_4^c \cap A_5)$
$\cup (A_1 \cap A_2 \cap A_3^c \cap A_4 \cap A_5^c) \cup (A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4^c \cap A_5^c)$

$S_3 = (A_1^c \cap A_2^c \cap A_3^c \cap A_4 \cap A_5) \cup (A_1^c \cap A_2^c \cap A_3 \cap A_4^c \cap A_5) \cup (A_1^c \cap A_2^c \cap A_3 \cap A_4 \cap A_5^c)$
$\cup (A_1^c \cap A_2 \cap A_3^c \cap A_4^c \cap A_5) \cup (A_1^c \cap A_2 \cap A_3^c \cap A_4 \cap A_5^c) \cup (A_1^c \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4^c \cap A_5^c)$
$\cup (A_1 \cap A_2^c \cap A_3^c \cap A_4^c \cap A_5) \cup (A_1 \cap A_2^c \cap A_3^c \cap A_4 \cap A_5^c) \cup (A_1 \cap A_2^c \cap A_3 \cap A_4^c \cap A_5^c$
$\cup (A_1 \cap A_2 \cap A_3^c \cap A_4^c \cap A_5^c)$

$S_4 = (A_1^c \cap A_2^c \cap A_3^c \cap A_4^c \cap A_5) \cup (A_1^c \cap A_2^c \cap A_3^c \cap A_4 \cap A_5^c) \cup (A_1^c \cap A_2^c \cap A_3 \cap A_4^c \cap$
$\cup (A_1^c \cap A_2 \cap A_3^c \cap A_4^c \cap A_5^c) \cup (A_1 \cap A_2^c \cap A_3^c \cap A_4^c \cap A_5^c)$

$S_5 = (A_1^c \cap A_2^c \cap A_3^c \cap A_4^c \cap A_5^c)$

$S = S_1 \cup S_2 \cup S_3 \cup S_4 \cup S_5$ – mulțimea soluțiilor

c) Obținerea a cel mult 2 bile albe

$S = S_0 \cup S_1 \cup S_2$ – mulțimea soluțiilor

S_i – mulțimea soluțiilor pentru care s-au extras exact i bile albe

A_i – s-a extras o bilă albă la extragerea „i"
A_i^c – s-a extras o bilă neagră la extragerea „i"

$S_0 = A_1^c \cap A_2^c \cap A_3^c \cap A_4^c \cap A_5^c$

$\cancel{S_1 = (A_1 \cap A_2^c \cap A_3^c \cap A_4^c \cap A_5^c)} \cup (A_1^c \cap A_2 \cap A_3^c \cap A_4^c \cap A_5^c)$

$S_1 = (A_1 \cap A_2^c \cap A_3^c \cap A_4^c \cap A_5^c) \cup (A_1^c \cap A_2 \cap A_3^c \cap A_4^c \cap A_5^c) \cup (A_1^c \cap A_2^c \cap A_3 \cap A_4^c \cap A_5^c)$
$\cup (A_1^c \cap A_2^c \cap A_3^c \cap A_4 \cap A_5^c) \cup (A_1^c \cap A_2^c \cap A_3^c \cap A_4^c \cap A_5)$

$S_2 = (A_1 \cap A_2 \cap A_3^c \cap A_4^c \cap A_5^c) \cup (A_1 \cap A_2^c \cap A_3 \cap A_4^c \cap A_5^c) \cup (A_1 \cap A_2^c \cap A_3 \cap A_4 \cap A_5^c)$
$\cup (A_1 \cap A_2^c \cap A_3^c \cap A_4^c \cap A_5) \cup (A_1^c \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4^c \cap A_5^c) \cup (A_1^c \cap A_2 \cap A_3^c \cap A_4 \cap A_5^c) \cup$
$\cup (A_1^c \cap A_2 \cap A_3^c \cap A_4^c \cap A_5) \cup (A_1^c \cap A_2^c \cap A_3 \cap A_4 \cap A_5^c) \cup (A_1^c \cap A_2^c \cap A_3 \cap A_4^c \cap A_5)$
$\cup (A_1^c \cap A_2^c \cap A_3^c \cap A_4 \cap A_5)$

$S = S_0 \cup S_1 \cup S_2$ – mulțimea soluțiilor

d) Obținerea a cel puțin 3 bile albe

A_i – s-a extras bilă albă la extragerea i
A_i^c – s-a extras o bilă neagră la extragerea i

$S = S_3 \cup S_4 \cup S_5$

S_i – mulțimea soluțiilor pentru care s-au extras exact „i" bile albe

$S_3 = (A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4^c \cap A_5^c) \cup (A_1 \cap A_2 \cap A_3^c \cap A_4 \cap A_5^c) \cup (A_1 \cap A_2 \cap A_3^c \cap A_4^c \cap A_5) \cup$
$(A_1 \cap A_2^c \cap A_3 \cap A_4 \cap A_5^c) \cup (A_1 \cap A_2^c \cap A_3 \cap A_4^c \cap A_5) \cup (A_1 \cap A_2^c \cap A_3^c \cap A_4 \cap A_5) \cup$
$(A_1^c \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4 \cap A_5^c) \cup (A_1^c \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4^c \cap A_5) \cup (A_1^c \cap A_2 \cap A_3^c \cap A_4 \cap A_5) \cup$
$(A_1^c \cap A_2^c \cap A_3 \cap A_4 \cap A_5)$

$S_4 = (A_1^c \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4 \cap A_5) \cup (A_1 \cap A_2^c \cap A_3 \cap A_4 \cap A_5) \cup (A_1 \cap A_2 \cap A_3^c \cap A_4 \cap A_5)$
$\cup (A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4^c \cap A_5) \cup (A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4 \cap A_5^c)$

$S_5 = (A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4 \cap A_5)$

$S = S_3 \cup S_4 \cup S_5$ – mulțimea soluțiilor

e) Numai 2 bile sunt negre

A_i – s-a extras o bilă albă la extragerea i
A_i^c – s-a extras o bilă neagră la extragerea i

$S = (A_1^c \cap A_2^c \cap A_3 \cap A_4 \cap A_5) \cup (A_1^c \cap A_2 \cap A_3^c \cap A_4 \cap A_5) \cup (A_1^c \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4^c \cap A_5)$

$\cup (A_1^c \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4 \cap A_5^c) \cup (A_1 \cap A_2^c \cap A_3^c \cap A_4 \cap A_5) \cup (A_1 \cap A_2^c \cap A_3 \cap A_4^c \cap A_5)$
$\cup (A_1 \cap A_2^c \cap A_3 \cap A_4 \cap A_5^c) \cup (A_1 \cap A_2 \cap A_3^c \cap A_4^c \cap A_5) \cup (A_1 \cap A_2 \cap A_3^c \cap A_4 \cap A_5^c)$
$\cup (A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4^c \cap A_5^c)$

3. (Ω, F, P) câmp de probabilitate

a) $d(A,B) = \mathbb{P}(A \Delta B)$ este o distanță pe $\mathcal{F}$

Fie $d: \mathcal{F} \times \mathcal{F} \to \mathbb{R}_+$
$d(A,B) = \mathbb{P}(A \Delta B)$

(*) Știm că ~~$\mathbb{P}(A) \geq 0$~~ $\mathbb{P}(A) \in [0,1]\ \forall A \in \mathcal{F}$. Deci $\overline{\mathbb{P}(A) \geq 0.}$ $\forall A \in \mathcal{F}$.

Pentru $A, B \in \mathcal{F}$, avem $A \Delta B = (\underset{\in \mathcal{F}}{A \setminus B}) \cup (\underset{\in \mathcal{F}}{B \setminus A}) \in \mathcal{F}$, deci $\mathbb{P}(A \Delta B) \geq 0$. Deci $\underline{d(A,B) \geq 0}$. (1)

(*) Demonstrăm că $d(x,y) = 0 \iff x = y$ (2)

„$\Leftarrow$" $d(A,A) \overset{A \in \mathcal{F}}{=} \mathbb{P}(A \Delta A) = \mathbb{P}((A \setminus A) \cup (A \setminus A)) = \mathbb{P}(\emptyset) \overset{def}{=} \underline{0}$

„$\Rightarrow$" Fie $A, B \in \mathcal{F}$ a.î. $d(A,B) = \mathbb{P}(A \Delta B) = 0$

$\mathbb{P}(A \Delta B) = \mathbb{P}((A \cup B) \setminus (A \cap B)) = 0$

$A \cap B \subseteq A \cup B$

$\Rightarrow \mathbb{P}(A \cup B) - \mathbb{P}(A \cap B) = 0$

$\left.\begin{array}{l} \mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A \cap B) \\ A \cap B \subseteq A \cup B \end{array}\right\} \Rightarrow$

$\Rightarrow A \cap B = A \cup B \Rightarrow \boxed{A = B}$

(*) $d(A,B) = d(B,A)\ \forall A, B \in \mathcal{F}$ (3)

$d(A,B) = d(B,A)$

$\iff \mathbb{P}(A \Delta B) = \mathbb{P}(B \Delta A)$

$\mathbb{P}((A \setminus B) \cup (B \setminus A)) = \mathbb{P}((B \setminus A) \cup (A \setminus B))$

$\iff \mathbb{P}((A \setminus B) \cup (B \setminus A)) = \mathbb{P}((A \setminus B) \cup (B \setminus A))$ (A)

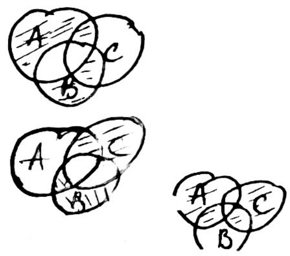
(*) $A,B,C \in \mathcal{F}$. Are loc inegalitatea $d(A,B) \le d(A,C) + d(B,C)$ (4)

$\Leftrightarrow \mathbb{P}(A\Delta B) \le \mathbb{P}(B\Delta C) + \mathbb{P}(A\Delta C)$

$A\Delta B = (A\cap B^c\cap C^c)\cup(A\cap B^c\cap C)\cup(A^c\cap B\cap C)\cup(A^c\cap B\cap C^c)$

$B\Delta C = (A^c\cap B\cap C^c)\cup(A\cap B\cap C^c)\cup(A\cap B^c\cap C)\cup(A^c\cap B^c\cap C)$

$A\Delta C = (A\cap B^c\cap C^c)\cup(A\cap B\cap C^c)\cup(A^c\cap B\cap C)\cup(A^c\cap B^c\cap C)$



$\mathbb{P}((A\cap B^c\cap C^c)\cup(A\cap B^c\cap C)\cup(A^c\cap B\cap C)\cup(A^c\cap B\cap C^c)) \le \mathbb{P}((A^c\cap B\cap C^c)\cup(A\cap B\cap C^c)\cup(A\cap B^c\cap C)\cup(A^c\cap B^c\cap C)) + \mathbb{P}((A\cap B^c\cap C^c)\cup(A\cap B\cap C^c)\cup(A^c\cap B\cap C)\cup(A^c\cap B^c\cap C))$

Fiecare mulțime e disjunctă față de oricare din reuniunea de mulțimi

$\Rightarrow \cancel{\mathbb{P}(A\cap B^c\cap C^c)} + \cancel{\mathbb{P}(A\cap B^c\cap C)} + \cancel{\mathbb{P}(A^c\cap B\cap C)} + \cancel{\mathbb{P}(A^c\cap B\cap C^c)} \le \cancel{\mathbb{P}(A^c\cap B\cap C^c)} + \mathbb{P}(A\cap B\cap C^c) + \cancel{\mathbb{P}(A\cap B^c\cap C)} + \mathbb{P}(A^c\cap B^c\cap C) + \cancel{\mathbb{P}(A\cap B^c\cap C^c)} + \mathbb{P}(A\cap B\cap C^c) + \cancel{\mathbb{P}(A^c\cap B\cap C)} + \mathbb{P}(A^c\cap B^c\cap C)$

$0 \le \underbrace{\mathbb{P}(A\cap B\cap C^c)}_{\ge 0} + \underbrace{\mathbb{P}(A^c\cap B^c\cap C)}_{\ge 0} + \underbrace{\mathbb{P}(A\cap B\cap C^c)}_{\ge 0} + \underbrace{\mathbb{P}(A^c\cap B^c\cap C)}_{\ge 0}$ (A)

Din (1), (2), (3), (4) $\Rightarrow d(A,B) = \mathbb{P}(A\Delta B)$ este o distanță pe $\mathcal{F}$

4) $|\mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(B)| \le \mathbb{P}(A\Delta B)$

$-\mathbb{P}(A\Delta B) \le \mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(B) \le \mathbb{P}(A\Delta B)$

$-\mathbb{P}((A\cup B)\setminus(A\cap B)) \le \mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(B) \le \mathbb{P}((A\cup B)\setminus(A\cap B))$

$A\cap B \subseteq A\cup B$

$\Rightarrow -\mathbb{P}(A\cup B) + \mathbb{P}(A\cap B) \le \mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(B) \le \mathbb{P}(A\cup B) - \mathbb{P}(A\cap B)$

$2\mathbb{P}(A\cap B) - \mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(B) \le \mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(B) \le \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - 2\mathbb{P}(A\cap B)$

1: $2\mathbb{P}(A\cap B) - \mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(B) \le \mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(B)$

$\mathbb{P}(A\cap B) \le \mathbb{P}(A)$ (A) pt că $A\cap B \subseteq A$ și $\mathbb{P}$ monotonă

2: $\mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(B) \le \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - 2\mathbb{P}(A\cap B)$

$\mathbb{P}(A\cap B) \le \mathbb{P}(B)$ (A) pt că $A\cap B \subseteq B$ și $\mathbb{P}$ monotonă

4. Fie r - numărul de șosete roșii
n - numărul de șosete negre

Fie evenimentele:

a) RR - ambele șosete scoase sunt roșii
1R - prima șosetă scoasă este roșie

1N - prima șosetă este neagră

$$\frac{1}{2} = \mathbb{P}(RR) = \mathbb{P}(RR/1R) \cdot \mathbb{P}(1R) + \underbrace{\mathbb{P}(RR/1N)}_{=0} \cdot \mathbb{P}(1N)$$

(nu pot avea 2 șosete roșii știind că una din ele (prima) este neagră)

$$\mathbb{P}(RR) = \mathbb{P}(RR/1R) \cdot \mathbb{P}(1R)$$

$$\mathbb{P}(1R) = \frac{r}{r+n}$$

$$\mathbb{P}(RR/1R) = \frac{r-1}{r+n-1}$$

$$\mathbb{P}(RR) = \frac{r}{r+n} \cdot \frac{r-1}{r+n-1} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{r(r-1)}{(r+n)(r+n-1)} = \frac{1}{2}$$

$$2r(r-1) = (r+n)(r+n-1)$$

$$2r^2 - 2r = r^2 + rn - r + rn + n^2 - n$$

$$r^2 + (-1-2n)r + (n-n^2) = 0$$

$$\Delta = (2n+1)^2 - 4(n-n^2) = 4n^2+4n+1-4n+4n^2 = 8n^2+1$$

$$r_1 = \frac{2n+1+\sqrt{8n^2+1}}{2} \qquad r_2 = \frac{2n+1-\sqrt{8n^2+1}}{2} \leq 0$$

~~Notăm $\sqrt{8n^2+1} = p \Rightarrow 8n^2+1 = p^2$~~

~~$p^2 - 8n^2 = 1$~~

Dăm valori pentru n:

Pt $n=1 \Rightarrow r=3$

Dacă n crește, și r va crește.

Deci, numărul minim de șosete este $n+r=4$.

b) Pt $n=2$ $r=5,37$
Pt $n=4$ $r=10,17$
Pt $\underline{n=6 \quad r=15}$

Deci numărul minim este 21.

(5.) $n, r > 1$.

$x_1 + x_2 + \dots + x_r = n$.

a) Câte soluții sunt, știind că $x_i > 0 \ \forall i = \overline{1,r}$?

Examinăm problema sub o altă înfățișare: Presupunem că avem o mulțime formată din r cutii, numerotate de la 1 la r ($x_1, x_2 \dots x_r$). Avem r cutii și n obiecte. Problema ne cere să aflăm numărul de posibilități de aranjare a obiectelor în cutii astfel încât orice cutie să conțină minim un obiect. Înșiruim cele n obiecte unul după altul, notându-le cu X:

$$\underbrace{X \ X \ X \ X \ \dots \ X \ X}_{n \text{ obiecte}}$$

Pentru a separa obiectele în cutii, introducem notația „|" ce delimitează cutiile. Astfel, obiectele ce se află delimitate de 2 bare succesive sau între un capăt și o bară se vor găsi în aceeași cutie. (De ex., notația XX|XXX|XXXX|X reprezintă 4 cutii ce conțin 10 obiecte este echivalentă cu soluția $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 10$ și $x_1 = 2, x_2 = 3, x_3 = 4, x_4 = 1$).

Pentru a împărți obiectele în r cutii astfel încât fiecare cutie are cel puțin un obiect, sunt necesare r-1 bare de tipul „|", care se pot afla în exact n-1 locuri (pentru că avem condiția în care fiecare cutie are cel puțin un obiect). Deci, sunt C_{n-1}^{r-1} posibilități de a împărți cele n obiecte în r cutii. Deci, sunt C_{n-1}^{r-1} soluții $(x_1, \dots x_r)$ pentru care $x_1 + x_2 + \dots + x_r = n$.

b) Pentru $x_i \geq 0 \ \forall i = \overline{1,r}$, rezolvarea este asemănătoare. Transformând $y_i = x_i + 1$, $i = \overline{1,r}$, trebuie să aflăm numărul de soluții $(y_1, y_2 \dots y_r)$ pentru care $y_1 + y_2 + \dots + y_r = n + r$. $\underbrace{1+1+1+\dots+1}_{r \text{ ori}}$

și $y_i > 0$ $i=\overline{1,n}$. Rezultatul îl aflăm aplicând raționamentul de la a). Rezultatul este C_{r+n-1}^{n-1}

(6) a) A-evenimentul în care am careu

52 cărți $\nearrow$ 4 culori, $\searrow$ 13 figuri

Sunt $C_{13}^1 = 13$ moduri de a alege figura celor 4 cărți. Cum sunt alese toate cele 4 cărți ale culorii respective, există un singur mod de a le alege ($C_4^4=1$). Cea de-a cincea carte poate fi aleasă în 48 de moduri ($52-4=48$).

$$\Rightarrow \mathbb{P}(A) = \frac{C_{13}^1 \cdot C_4^4 \cdot 48}{C_{52}^5} = \frac{624}{C_{52}^5} = \frac{1}{4165} = 0,00024$$

b) B-evenimentul în care am full-house

Vom avea 2 figuri alese, una de 3 ori și cealaltă de 2 ori. Pentru prima carte aleasă, sunt $C_{13}^1 = 13$ figuri disponibile. Pentru aceasta, vom alege doar 3 cărți, alese în $C_4^3 = 4$ moduri. A doua figură aleasă este aleasă în $C_{12}^1 = 12$ moduri. Pentru aceasta sunt alese 2 cărți, alese în $C_4^2 = 6$ moduri.

$$\Rightarrow \mathbb{P}(B) = \frac{C_{13}^1 \cdot C_4^3 \cdot C_{12}^1 \cdot C_4^2}{C_{52}^5} = \frac{3744}{2.598.960} = 0,00144$$

c) C-evenimentul în care avem 3 cărți de același tip

Sunt $C_{13}^1 = 13$ posibilități de a alege figura celor 3 cărți. Acestea pot fi alese în $C_4^3 = 4$ moduri. Pentru cele 2 cărți rămase să fie diferite (pentru a nu fi full-house și nici 4 cărți de același tip), acestea pot fi alese în C_{12}^2 moduri figurile. Fiecare figură poate fi aleasă în C_4^1 moduri.

$$\mathbb{P}(C) = \frac{C_{13}^1 \cdot C_4^3 \cdot C_{12}^2 \cdot C_4^1 \cdot C_4^1}{C_{52}^5} = \frac{13 \cdot 4 \cdot 66 \cdot 4 \cdot 4}{C_{52}^5} = \frac{54\,912}{2.598.960} = 0,02112$$

d) D - evenimentul în care avem 2 perechi

Sunt C_{13}^2 posibilități de a alege figurile celor 2 perechi. Pentru fiecare figură, cele 2 cărți ce se pot alege se fac în $C_4^2 = 6$ moduri. Cea de-a cincea carte se poate alege în $C_{11}^1 = 11$ moduri și cartea în $C_4^1 = 4$ moduri.

$$\Rightarrow \mathbb{P}(D) = \frac{C_{13}^2 \cdot C_4^2 \cdot C_4^2 \cdot C_{11}^1 \cdot C_4^1}{C_{52}^5} = \frac{78 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 11 \cdot 4}{C_{52}^5} = \frac{1}{21} = 0,0476$$

e) E - evenimentul în care avem o pereche

Perechea poate fi aleasă în C_{13}^1 moduri (doar figura), iar culoarea în $C_4^2 = 6$ moduri. Următoarele 3 cărți în C_{12}^3 moduri (figura), iar culoarea în C_4^1 moduri fiecare.

$$\Rightarrow \mathbb{P}(E) = \frac{C_{13}^1 \cdot C_4^2 \cdot C_{12}^3 \cdot C_4^1 \cdot C_4^1 \cdot C_4^1}{C_{52}^5} = \frac{13 \cdot 6 \cdot 220 \cdot 4^3}{C_{52}^5} = 0,4225$$

7) $p = 0,99$

$pA = 0,005$

1. Fie D - evenimentul în care testul este considerat pozitiv
A - evenimentul în care automobilistul a depășit limita autorizată

$\mathbb{P}(A) = 0,005 = pA$

$\mathbb{P}(D|A) = \mathbb{P}(D^c|A^c) = 0.99 = p.$

$$\mathbb{P}(A|D) = \frac{\mathbb{P}(D|A) \cdot \mathbb{P}(A)}{\mathbb{P}(D|A) \cdot \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(D|A^c) \cdot \mathbb{P}(A^c)} = \frac{0,99 \cdot 0,005}{0,99 \cdot 0,005 + (1 - \mathbb{P}(D|A))(1 - \mathbb{P}(A))}$$

$$= \frac{0,99 \cdot 0,005}{0,99 \cdot 0,005 + 0,01 \cdot 0,995} = \frac{0,00495}{0,0149} \approx 0,332214$$

2. $p = ?$ a.î. $\mathbb{P}(A|D) = 0,95$

$$0,95 = \mathbb{P}(A|D) = \frac{0,005 \cdot p}{0,005p + (1-p) \cdot 0,995}$$

$$0,95 = \frac{5p}{5p + 995(1-p)}$$

$4,75p + 945,25(1-p) = 5p$

$945,25 = 945,5p$

$p = 0,9997350$

c) $\mathbb{P}(A) = p_A = 0,3$

$$\mathbb{P}(D) = \mathbb{P}(D|A)\cdot\mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(D|A^c)\cdot\mathbb{P}(A^c)$$
$$= 0,99\cdot 0,3 + (1-\mathbb{P}(D|A))(1-\mathbb{P}(A))$$
$$= 0,297 + 0,01\cdot 0,7 = 0,304$$

$$\mathbb{P}(A|D) = \frac{\mathbb{P}(D|A)\cdot\mathbb{P}(A)}{\mathbb{P}(D|A)\cdot\mathbb{P}(A)+\mathbb{P}(D|A^c)\cdot\mathbb{P}(A^c)} = \frac{0,297}{0,304} = 0,976973$$

$\Rightarrow$ Testul este mult mai fiabil

(3) a) Notăm 2B – evenimentul pentru care a 2-a bilă extrasă este albastră.
1B – –"– prima bilă extrasă este albastră
1R – –"– prima bilă extrasă este roșie

$$\mathbb{P}(2B) = \mathbb{P}(2B|1B)\cdot\mathbb{P}(1B) + \mathbb{P}(2B|1B^c)\cdot\mathbb{P}(1B^c)$$
$$= \mathbb{P}(2B|1B)\cdot\mathbb{P}(1B) + \mathbb{P}(2B|1R)\cdot\mathbb{P}(1R)$$

$\mathbb{P}(2B|1B) = \frac{b+d}{b+d+r}$ $\quad\mathbb{P}(1B) = \frac{b}{b+r}$ $\quad\mathbb{P}(2B|1R) = \frac{b}{b+d+r}$ $\quad\mathbb{P}(1R) = \frac{r}{b+r}$

$$\mathbb{P}(2B) = \frac{b+d}{b+d+r}\cdot\frac{b}{b+r} + \frac{b}{b+d+r}\cdot\frac{r}{b+r} = \frac{1}{(b+d+r)(b+r)}(b^2+bd+br)$$
$$= \frac{b(b+d+r)}{(b+d+r)(b+r)} = \underline{\frac{b}{b+r}}$$

b) $$\mathbb{P}(1B|2B) = \frac{\mathbb{P}(2B|1B)\cdot\mathbb{P}(1B)}{\mathbb{P}(2B|1B)\cdot\mathbb{P}(1B)+\mathbb{P}(2B|1R)\cdot\mathbb{P}(1R)}$$

$$= \frac{\frac{b+d}{b+d+r}\cdot\frac{b}{b+r}}{\frac{b+d}{b+d+r}\cdot\frac{b}{b+r}+\frac{b}{b+d+r}\cdot\frac{r}{b+r}} = \frac{(b+d)b}{(b+d)b+br} = \frac{(b+d)b}{b(b+d+r)} = \underline{\frac{b+d}{b+d+r}}$$

c) Notăm $N_b(k)$ – numărul bile albastre la pasul K

$\mathbb{P}(B_n) = \mathbb{P}(B_1)$

$P(n): \mathbb{P}(B_n) = \mathbb{P}(B_1)$

Pt $n=1$: $\mathbb{P}(B_1) = \mathbb{P}(B_1)$ (A)

$n=2$: $\mathbb{P}(B_2) = \mathbb{P}(2B) = \mathbb{P}(B_1)$ (A) (punctul a))

Presupunem adevărat $P(n-1)$: $\mathbb{P}(B_{n-1}) = \mathbb{P}(B_1)$

Dem. $\mathbb{P}(B_n) = \mathbb{P}(B_1)$

$$\mathbb{P}(B_n) = \mathbb{P}(B_n | B_{n-1}) \cdot \underbrace{\mathbb{P}(B_{n-1})}_{= \mathbb{P}(B_1)} + \mathbb{P}(B_n | B_{n-1}^c) \cdot \underbrace{\mathbb{P}(B_{n-1}^c)}_{= (1-\mathbb{P}(B_{n-1}))}$$

$$= \frac{N_b(n-2)+d}{r+b+d(n-1)} \cdot \frac{b}{r+b} + \frac{N_b(n-2)}{r+b+d(n-1)} \cdot \frac{r}{r+b}$$

Știm că $\mathbb{P}(B_{n-2}) = \frac{N_b(n-2)}{r+b+d(n-2)} = \frac{b}{r+b}$ (pasul inducție)

$$N_b(n-2) = \frac{b}{r+b}[r+b+d(n-2)]$$

Înlocuim în $\mathbb{P}(B_n)$:

$$\mathbb{P}(B_n) = \frac{N_b(n-2)+d}{r+b+d(n-1)} \cdot \frac{b}{r+b} + \frac{N_b(n-2)}{r+b+d(n-1)} \cdot \frac{r}{r+b}$$

$$= \frac{1}{(r+b)[r+b+d(n-1)]}\left[N_b(n-2)(b+r)+bd\right]$$

$$= \frac{1}{(r+b)[r+b+d(n-1)]} \cdot \left[\frac{b}{\cancel{r+b}}(r+b+d(n-2))(\cancel{r+b})+bd\right]$$

$$= \frac{b[r+b+d(n-2)+d]}{(r+b)[r+b+d(n-1)]} = \frac{b[\cancel{r+b+d(n-1)}]}{(r+b)[\cancel{r+b+d(n-1)}]}$$

$$= \frac{b}{r+b} = \mathbb{P}(B_1).$$

d) $\mathbb{P}(B_1 | \underbrace{B_2 \cap B_3 \cap B_{n+1}}) = ?$

Următoarele n bile extrase sunt albastre

$$\mathbb{P}(B_1 | B_2 \cap B_3 \cap B_4 \dots \cap B_{n+1}) = \frac{\mathbb{P}(B_1 \cap B_2 \cap \dots \cap B_{n+1})}{\mathbb{P}(B_2 \cap B_3 \cap B_4 \cap \dots \cap B_{n+1})}$$

Din formula probabilității totale:

- $\mathbb{P}(B_1 \cap B_2 \dots \cap B_{n+1}) = \mathbb{P}(B_{n+1} | B_1 \cap \dots B_n) \cdot \mathbb{P}(B_n | B_1 \cap \dots \cap B_{n-1}) \cdot \dots \mathbb{P}(B_2 | B_1) \cdot \mathbb{P}(B_1)$

$$= \frac{b+nd}{b+r+nd} \cdot \frac{b+(n-1)d}{b+r+(n-1)d} \cdot \dots \cdot \frac{b+d}{b+r+d} \cdot \frac{b}{b+r}$$

$$= \frac{b(b+d)(b+2d)(b+3d)\dots[b+(n-1)d](b+nd)}{(b+r)(b+r+d)\cdot \dots \cdot (b+r+nd)}$$

• $\mathbb{P}(B_2 \cap B_3 \cap B_4 \cap \dots \cap B_{n+1}) = \mathbb{P}(B_1 \cap B_2 \cap \dots \cap B_{n+1}) + \mathbb{P}(B_1^c \cap B_2 \cap \dots \cap B_{n+1})$

Știm că $\mathbb{P}(A|B) = \dfrac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)} \to \mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A|B) \cdot \mathbb{P}(B)$ $(*)$

Aplicăm în $\mathbb{P}(B_1 \cap B_2 \cap \dots B_{n+1})$ și $\mathbb{P}(B_1^c \cap B_2 \cap \dots \cap B_{n+1})$:

$\mathbb{P}(B_1 \cap B_2 \cap \dots B_{n+1}) = \mathbb{P}(B_{n+1} | B_1 \cap B_2 \cap \dots \cap B_n) \cdot \mathbb{P}(B_1 \cap B_2 \dots \cap B_n)$

$\mathbb{P}(B_1^c \cap B_2 \cap \dots B_{n+1}) = \mathbb{P}(B_{n+1} / B_1^c \cap B_2 \cap \dots \cap B_n) \cdot \mathbb{P}(B_1^c \cap \dots \cap B_n)$

(Aplicăm în continuare $(*)$ și vom obține:

$\mathbb{P}(B_1 \cap B_2 \cap \dots \cap B_{n+1}) = \mathbb{P}(B_{n+1} | B_1 \cap B_2 \cap \dots B_n) \cdot \mathbb{P}(B_n | B_1 \cap B_2 \cap \dots B_{n-1}) \cdot \dots \cdot \mathbb{P}(B_2|B_1) \cdot \mathbb{P}(B_1)$

$\mathbb{P}(B_1^c \cap B_2 \cap \dots \cap B_{n+1}) = \mathbb{P}(B_{n+1} | B_1^c \cap B_2 \cap \dots \cap B_n) \cdot \mathbb{P}(B_n | B_1^c \cap B_2 \cap \dots B_{n-1}) \cdot \dots \cdot \mathbb{P}(B_2 | B_1^c) \cdot \mathbb{P}(B_1^c)$

$\Rightarrow \mathbb{P}(B_2 \cap B_3 \cap \dots B_{n+1}) = \dfrac{b+nd}{b+r+nd} \cdot \dfrac{b+(n-1)d}{b+r+(n-1)d} \cdot \dfrac{b+(n-2)d}{b+r+(n-2)d} \cdots \dfrac{b+d}{b+r+d} \cdot \dfrac{b}{b+r}$

$+ \dfrac{b+(n-1)d}{b+r+nd} \cdot \dfrac{b+(n-2)d}{b+r+(n-1)d} \cdots \dfrac{b}{b+r+d} \cdot \dfrac{r}{b+r}$

$= \dfrac{b(b+d)\dots[b+(n-1)d](b+r+nd)}{(b+r)(b+r+d)\dots(b+r+nd)}$

$\Rightarrow \mathbb{P}(B_1 | B_2 \cap B_3 \cap \dots \cap B_n) = \dfrac{\dfrac{b(b+d)\dots(b+nd)}{(b+r)(b+r+d)\dots(b+r+nd)}}{\dfrac{b(b+d)\dots(b+r+nd)}{(b+r)(b+r+d)\dots(b+r+nd)}}$

$= \dfrac{b+nd}{b+r+nd}$

$\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{b+nd}{b+r+nd} = 1$

⑨ $\overline{abcde} \vdots 495$

$495 = 5 \cdot 9 \cdot 11$

$\Rightarrow \begin{cases} e \in \{0,5\} \\ a+b+c+d+e \vdots 9 \\ (a+c+e)-(b+d) \vdots 11 \end{cases}$

(Criteriile de divizibilitate cu 5, 9, 11)

Cifrele sunt distincte $\Rightarrow$

$\left.\begin{array}{l} a+b+c+d+e \geq 0+1+2+3+4 = 10 \\ a+b+c+d+e \leq 9+8+7+6+5 = 35 \\ a+b+c+d+e \vdots 9 \end{array}\right\} \Rightarrow$

$\Rightarrow a+b+c+d+e \in \{18, 27\}$

Caz 1 $e=0$

$\overline{abcde} = \overline{abcd0}$

i) $a+b+c+d+e = 18 \Rightarrow a+b+c+d = 18$

$(a+c+e)-(b+d) \vdots 11$

$18-2b-2d \vdots 11$

$\underbrace{2(\overbrace{9-b-d}^{par}}_{\in[-8,6]})\vdots 11$, $\in[-16,12]$ $\Rightarrow 18-2b-2d = 0 \Rightarrow \boxed{b+d=9}$

$a+c = b+d = 9$

$(b,d), (a,c) \in \{(1,8), (2,7), (3,6), (4,5), (5,4), (6,3), (7,2), (8,1)\}$

O dată aleasă perechea (a,c) (în 8 moduri posibile), (b,d) poate fi aleasă în 6 moduri, deci sunt $8 \cdot 6 = 48$ cazuri.

ii) $a+b+c+d+e = 27 \Rightarrow a+b+c+d = 27$

$\left.\begin{array}{l} 27\underbrace{-2b-2d}_{impar} \vdots 11 \\ -7 \leq 27-2b-2d \leq 21 \end{array}\right\} \Rightarrow 27-2b-2d = 11 \Rightarrow b+d = 8 \Rightarrow a+c = 19$ imposibile

$\Rightarrow$ Sunt 0 cazuri

Caz 2 $e=5$

i) $a+b+c+d+e=18$

$a+b+c+d=13$

$(a+c+e)-(b+d) \vdots 11$

$\underbrace{18-(2b+2d)}_{par} \vdots 11$

$-16 \leq \underbrace{18-(2b+2d)}_{par, \vdots 11} \leq 16 \Rightarrow 18-(2b+2d)=0$

$\Rightarrow b+d=9$

$a+c=4$

$(b,d) \in \{(0,9),(1,8),(2,7),(3,6),\underset{(e=5)}{\cancel{(4,5)}},\underset{(e=5)}{\cancel{(5,4)}},(6,3),(7,2),(8,1),(9,0)\}$

$(a,c) \in \{(0,4),(1,3),\underset{(a=c)}{\cancel{(2,2)}},(3,1),(4,0)\}$

Pentru perechea $(a,c)=(0,4)$ sunt 6 posibilități de alegere pt (b,d)

$(a,c)=(1,3)$ sunt 4 — " —

$(a,c)=(3,1)$ sunt 4 — " —

$(a,c)=(4,0)$ sunt 6 — " —

În total sunt $6+4+4+6=\underline{20 \text{ cazuri}}$

ii) $a+b+c+d+e=27$

$a+b+c+d=22$

$(a+c+e)-(b+d) \vdots 11$

$27-(2b+2d) \vdots 11$

$-7 \leq \underbrace{27-(2b+2d)}_{impar, \vdots 11} \leq 25 \Rightarrow 27-(2b+2d)=11$

$2b+2d=16 \Rightarrow b+d=8$

$a+c=14$

$(b,d) \in \{(0,8),(1,7),(2,6),\underset{(e=5)}{\cancel{(3,5)}},\underset{(b=d)}{\cancel{(4,4)}},\underset{(e=5)}{\cancel{(5,3)}},(6,2),(7,1),(8,0)\}$

$(a,c) \in \{\underset{(e=5)}{\cancel{(5,9)}},(6,8),\underset{(a=c)}{\cancel{(7,7)}},(8,6),\cancel{(9,5)}\}$

Pt $(a,c) = (6,8)$ sunt 2 posibilități de alegere pt (b,d)
$(a,c) = (8,6)$ sunt 2 posibilități de alegere pt (b,d)
În total sunt $2+2=4$ cazuri

Deci, sunt $48+20+4=72$ cazuri favorabile în total.

În total sunt $10\cdot9\cdot8\cdot7\cdot6 = 30240$ cazuri posibile.

Deci $P = \frac{72}{30240} = 0,0023$

Am considerat că prima cifră extrasă poate fi 0, iar numărul rămas format din cele 4 cifre ~~trei~~ poate fi $\vdots 495$. În cazul în care nu trebuie/nu se poate considera ca prima cifră să fie 0, sunt $72-6=66$ cazuri favorabile și $P = \frac{66}{30240} = 0,00218$

10. a) Aplicând schema urnei cu bile nerevenite cu $N_1 = 3$ crapi, $N_2 = 7$ caraşi, $N = N_1 + N_2 = 10$, $n = 4$ extrageri și $n_1 = 1$ crap, $n_2 = 3$ caraşi

$$\mathbb{P}(4,1) = \frac{C_3^1 \cdot C_7^3}{C_{10}^4} = \frac{3\cdot35}{210} = \frac{1}{2}$$

$\mathbb{P}(n, n_1)$ – probabilitatea ca din n extrageri, să fie exact n_1 obiecte de tip N_1

b) Aplicând schema urnei cu bile nerevenite pentru $n_1 = 1$, $n_1 = 2$ și $n_1 = 3$, $N_1 = 3$, probabilitatea este:

$$P = \mathbb{P}(4,1) + \mathbb{P}(4,2) + \mathbb{P}(4,3)$$

$\mathbb{P}(4,1) = \frac{1}{2}$ – exact un crap prins

$\mathbb{P}(4,2) = \frac{C_3^2 \cdot C_7^2}{C_{10}^4} = \frac{3\cdot21}{210} = \frac{3}{10}$ – exact 2 crapi sunt prinși

$\mathbb{P}(4,3) = \frac{C_3^3 \cdot C_7^1}{C_{10}^4} = \frac{7}{210} = \frac{1}{30}$ – exact 3 crapi sunt prinși

$P = \frac{1}{2} + \frac{3}{10} + \frac{1}{30} = \frac{25}{30} = \frac{5}{6}$

c) $\mathbb{P}$(primul pește prins e crap) $= \frac{3}{10}$

d) Fie evenimentele:

i Crap – al i-lea pește prins este crap

i Caras – al i-lea pește prins este caras

$$\mathbb{P}(2Crap) = \mathbb{P}(2Crap \mid 1Crap) \cdot \mathbb{P}(1Crap) + \mathbb{P}(2Crap \mid (1Crap)^c) \cdot \mathbb{P}((1Crap)^c)$$

$$= \mathbb{P}(2Crap \mid 1Crap) \cdot \mathbb{P}(1Crap) + \mathbb{P}(2Crap \mid 1Caras) \cdot \mathbb{P}(1Caras)$$

$\mathbb{P}(2Crap \mid 1Crap) = \frac{2}{9}$ $\quad$ $\mathbb{P}(1Crap) = \frac{3}{10}$

$\mathbb{P}(2Crap \mid 1Caras) = \frac{3}{9}$ $\quad$ $\mathbb{P}(1Caras) = \frac{7}{10}$

$\Rightarrow \mathbb{P}(2Crap) = \frac{2}{9} \cdot \frac{3}{10} + \frac{3}{9} \cdot \frac{7}{10} = \frac{27}{90} = \frac{3}{10}$

e) A – evenimentul că primul pește prins este crap

B – evenimentul că al doilea pește prins este crap

$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A \mid B) \cdot \mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(B \mid A) \cdot \mathbb{P}(A)$

$\mathbb{P}(B \mid A) = \frac{2}{9}$

$\mathbb{P}(A) = \frac{3}{10}$

$\Rightarrow \mathbb{P}(A \cap B) = \frac{3}{10} \cdot \frac{2}{9} = \frac{6}{90} = \frac{1}{15}$

f) Fie iCrap – evenimentul că al i-lea pește prins este crap

$\mathbb{P}$(cel puțin unul dintre primii 2 pești este crap) $= \mathbb{P}(1Crap \cup 2Crap)$

Știm că $\mathbb{P}(1Crap \cup 2Crap) = \mathbb{P}(1Crap) + \mathbb{P}(2Crap) - \mathbb{P}(1Crap \cap 2Crap)$

$\mathbb{P}(1Crap \cap 2Crap) = \frac{1}{15}$ (punctul e)

$\mathbb{P}(1Crap) = \frac{3}{10}$ (punctul c)

$\mathbb{P}(2Crap) = \frac{3}{10}$ (punctul d)

$\Rightarrow \mathbb{P}$(cel puțin unul dintre primii 2 pești este crap) $= \frac{3}{10} + \frac{3}{10} - \frac{1}{15}$

$= \frac{16}{30} = \frac{8}{15} = 0{,}533$

g) Fie G_i = greutatea peștelui i $\quad i=\overline{1,10}$

Putem renumerota peștii astfel încât $G_i < G_{i+1}$ $\quad i=\overline{1,9}$

(Ordonăm crescător după greutate)

Numărul de cazuri favorabile este $C_{10}^{4} = \frac{10!}{4!\,6!} = 210$

Numărul de cazuri posibile este $A_{10}^{4} = \frac{10!}{6!} =$

$\Rightarrow \mathbb{P}$(fiecare din ultimii 3 pești prinși cântărește mai mult decât cel precedent) $= \frac{C_{10}^{4}}{A_{10}^{4}} = \frac{210}{5040} = 0{,}04166$