FMI, Info, Anul I
Logică matematică şi computaţională

Examen

1 Partea I. Logică propoziţională

(P1) [1 punct] Fie
$$Z = \{\varphi \in Form \mid Var(\varphi) = \{v_1, v_2\}\}.$$
Să se demonstreze că Z este numărabilă.

(P2) [1 punct] Arătaţi că pentru orice formule φ, ψ, χ, avem:
$$\varphi \vee \psi \to \chi \sim (\varphi \to \chi) \wedge (\psi \to \chi).$$

(P3) [1,5 puncte] Fie φ, $\psi \in Form$. Să se arate sintactic :
$$\vdash (\varphi \to \neg\varphi) \to \neg\varphi.$$

(P4) [2,5 puncte]

(i) Să se aducă formula $\varphi := (v_1 \leftrightarrow \neg v_2) \to v_1$ la FND şi FNC folosind transformări sintactice.

(ii) Să se aducă formula $\psi := (v_1 \wedge v_3) \leftrightarrow (\neg v_2 \vee v_3)$ la FND şi FNC folosind funcţia booleană asociată.

(P5) [2 puncte]

(i) Să se aplice algoritmul Davis-Putnam mulţimii de clauze:
$$\mathcal{S} = \{\{v_0\}, \{\neg v_0, v_1\}, \{\neg v_1, v_2, v_3\}, \{\neg v_3, v_4\}, \{\neg v_4\}, \{\neg v_2\}\}.$$

(ii) Folosind primul subpunct şi eventual alte proprietăţi, să se arate că:
$$\{v_0, v_0 \to v_1, (v_1 \to v_2) \vee v_3, v_3 \to v_4\} \vDash \neg v_4 \to v_2.$$

2 Partea II. Logică de ordinul întâi

(P6) [3 puncte]

(i) Să se arate că pentru orice limbaj $\mathcal{L}$ de ordinul I şi orice formule φ, ψ ale lui $\mathcal{L}$, avem:

(a) $\exists x\varphi \vee \exists x\psi \mathrel{\models\!\!\!\dashv} \exists x(\varphi \vee \psi)$, pentru orice variabilă x.

(b) $\forall x(\psi \to \varphi) \mathrel{\models\!\!\!\dashv} \exists x\psi \to \varphi$, pentru orice variabilă $x \notin FV(\varphi)$.

(ii) Să se dea exemplu de limbaj $\mathcal{L}$ de ordinul I şi de formule φ, ψ ale lui $\mathcal{L}$ astfel încât:

$$\exists x\varphi \to \exists x\psi \not\models \forall x(\varphi \to \psi).$$

(P7) [1 punct] Fie $\mathcal{L}$ un limbaj de ordinul I ce conţine cel puţin un simbol de relaţie unară P şi un simbol de constantă c. Să se arate:

$$\models P(c) \to (\exists v_0 P(v_0)).$$

(P8) [2 puncte] Fie $\mathcal{L}$ un limbaj de ordinul întâi care conţine

- două simboluri de relaţii unare R, S şi două simboluri de relaţii binare P, Q;
- un simbol de operaţie unară f;
- un simbol de constantă c.

Să se găsească forme normale prenex pentru următoarele formule ale lui $\mathcal{L}$:

$$\begin{aligned}
\varphi_1 &= \exists x P(x,y) \to (\neg\exists z(f(z) = c) \wedge \forall v R(v)) \\
\varphi_2 &= \exists x(\forall y S(y) \wedge \neg\exists y Q(x,y)) \to \neg(\forall x \exists y Q(x,y) \wedge \neg\exists x R(x)).
\end{aligned}$$