CURS 8

Logică Matematică şi Computaţională

FMI · Denisa Diaconescu · An universitar 2018/2019

SEMANTICA LOGICII PROPOZIŢIONALE

Teorema de compacitate - versiunea 1

Pentru orice mulţime Γ de formule, Γ este satisfiabilă ddacă Γ este finit satisfiabilă.

Teorema de compacitate - versiunea 2

Pentru orice mulţime Γ de formule, Γ este nesatisfiabilă ddacă Γ nu este finit satisfiabilă.

Teorema de compacitate - versiunea 3

Pentru orice mulţime Γ de formule şi pentru orice formulă φ, $\Gamma \vDash \varphi$ ddacă există o submulţime finită Δ a lui Γ a.î. $\Delta \vDash \varphi$.

Propoziţia 7.13

Cele trei versiuni sunt echivalente.

Demonstraţie. Exerciţiu.

Lema 8.1

Fie Γ finit satisfiabilă. Atunci există un şir (ε_n) în $\{0, 1\}$ care satisface, pentru orice $n \in \mathbb{N}$:

P_n Orice submulţime finită Δ a lui Γ are un model $e : V \to \{0, 1\}$ care satisface $e(v_i) = \varepsilon_i$ pentru orice $i \in \{0, 1, \ldots n\}$.

Demonstraţie. Definim şirul (ε_n) prin inducţie după $n \in \mathbb{N}$.

$n = 0$. Avem următoarele cazuri:

(1_0) Pentru orice submulţime finită Δ a lui Γ, există un model e al lui Δ a.î. $e(v_0) = 0$. Definim $\varepsilon_0 := 0$.

(2_0) Există o submulţime finită Δ_0 a lui Γ a.î. pentru orice model e al lui Δ_0, avem $e(v_0) = 1$. Definim $\varepsilon_0 := 1$.

Demonstrăm că P_0 este satisfăcută. În cazul (1_0) este evident. Să considerăm cazul (2_0). Fie Δ o submulţime finită a lui Γ. Atunci $\Delta \cup \Delta_0$ este o submulţime finită a lui Γ. Deoarece Γ este finit satisfiabilă, $\Delta \cup \Delta_0$ are un model e. Rezultă că $e \vDash \Delta$ şi, din faptul că $e \vDash \Delta_0$, obţinem că $e(v_0) = 1 = \varepsilon_0$.

Demonstraţie. (continuare)

Pasul de inducţie. Fie $n \in \mathbb{N}$. Presupunem că am definit $\varepsilon_0, \ldots, \varepsilon_n$ a.î. $\boldsymbol{P_n}$ este satisfăcută. Avem următoarele cazuri:

(1_{n+1}) Pentru orice submulţime finită Δ a lui Γ, există un model e al lui Δ a.î.

$$e(v_i) = \varepsilon_i \text{ pentru orice } i \in \{0, 1, \ldots, n\} \text{ şi } e(v_{n+1}) = 0.$$

Definim $\varepsilon_{n+1} := 0$.

(2_{n+1}) Există o submulţime finită Δ_{n+1} a lui Γ a.î. pentru orice model e al lui Δ_{n+1}, avem

$$e(v_i) = \varepsilon_i \text{ pentru orice } i \in \{0, 1, \ldots, n\} \text{ implică } e(v_{n+1}) = 1.$$

Definim $\varepsilon_{n+1} := 1$.

Demonstrăm că $\boldsymbol{P_{n+1}}$ este satisfăcută. În cazul (1_{n+1}) este evident. Să considerăm cazul (2_{n+1}). Fie Δ o submulţime finită a lui Γ. Atunci $\Delta \cup \Delta_{n+1}$ este o submulţime finită a lui Γ. Prin urmare, conform $\boldsymbol{P_n}$, există un model e al lui $\Delta \cup \Delta_{n+1}$ a.î. $e(v_i) = \varepsilon_i$ pentru orice $i \in \{0, 1, \ldots n\}$. Din (2_{n+1}), obţinem şi $e(v_{n+1}) = 1 = \varepsilon_{n+1}$. $\square$

Teorema 8.2 (Teorema de compacitate)
Pentru orice mulţime Γ de formule,

$$\Gamma \text{ este satisfiabilă ddacă } \Gamma \text{ este finit satisfiabilă.}$$

Demonstraţie.

"$\Rightarrow$" Evident.

"$\Leftarrow$" Presupunem că Γ este finit satisfiabilă. Definim

$$\overline{e} : V \to \{0, 1\}, \quad \overline{e}(v_n) = \varepsilon_n,$$

unde (ε_n) este şirul construit în lema precedentă. Demonstrăm că $\overline{e}$ este model al lui Γ. Fie $\varphi \in \Gamma$ arbitrară şi fie $k \in \mathbb{N}$ a.î. $Var(\varphi) \subseteq \{v_0, v_1, \ldots, v_k\}$. Deoarece $\{\varphi\} \subseteq \Gamma$ este o submulţime finită a lui Γ, putem aplica Proprietatea $\boldsymbol{P_k}$ pentru a obţine un model e al lui φ a.î. $e(v_i) = \varepsilon_i$ pentru orice $i \in \{0, 1, \ldots k\}$. Atunci $\overline{e}(v) = e(v)$ pentru orice variabilă $v \in Var(\varphi)$. Aplicând Propoziţia 6.1, rezultă că $\overline{e}^+(\varphi) = e^+(\varphi) = 1$, deci $\overline{e} \vDash \varphi$.

Prin urmare, $\overline{e}$ este model al lui Γ, deci Γ este satisfiabilă. $\square$

SINTAXA LOGICII PROPOZIŢIONALE

Axiomele logice.

Mulţimea *Axm* a axiomelor lui *LP* constă din toate formulele de forma:

(A1) $\varphi \to (\psi \to \varphi)$

(A2) $(\varphi \to (\psi \to \chi)) \to ((\varphi \to \psi) \to (\varphi \to \chi))$

(A3) $(\neg\psi \to \neg\varphi) \to (\varphi \to \psi)$

unde φ, ψ şi χ sunt formule.

Regula de deducţie.

Pentru orice formule φ, ψ,

din φ şi $\varphi \to \psi$ se inferă ψ (modus ponens sau (MP)):

$$\frac{\varphi, \ \varphi \to \psi}{\psi}$$

Fie Γ o mulţime de formule.
Definiţia Γ-teoremelor este un nou exemplu de definiţie inductivă.

Definiţia 8.3

Γ-teoremele sunt formulele lui *LP* definite astfel:

(T0) Orice axiomă este Γ-teoremă.

(T1) Orice formulă din Γ este Γ-teoremă.

(T2) Dacă φ şi $\varphi \to \psi$ sunt Γ-teoreme, atunci ψ este Γ-teoremă.

(T3) Numai formulele obţinute aplicând regulile (T0), (T1), (T2) sunt Γ-teoreme.

Dacă φ este Γ-teoremă, atunci spunem şi că φ este dedusă din ipotezele Γ.

Notaţii.

$$
\begin{array}{lcl}
Thm(\Gamma) & := & \text{mulţimea } \Gamma\text{-teoremelor} \\
Thm & := & Thm(\emptyset) \\
\Gamma \vdash \varphi & \Leftrightarrow & \varphi \text{ este } \Gamma\text{-teoremă} \\
\vdash \varphi & \Leftrightarrow & \emptyset \vdash \varphi \\
\Gamma \vdash \Delta & \Leftrightarrow & \Gamma \vdash \varphi \text{ pentru orice } \varphi \in \Delta.
\end{array}
$$

Definiţia 8.4

O formulă φ se numeşte teoremă a lui *LP* dacă $\vdash \varphi$.

Reformulând condiţiile (T0), (T1), (T2) folosind notaţia $\vdash$, obţinem

Propoziţia 8.5

(i) dacă φ este axiomă, atunci $\Gamma \vdash \varphi$;

(ii) dacă $\varphi \in \Gamma$, atunci $\Gamma \vdash \varphi$;

(iii) dacă $\Gamma \vdash \varphi$ şi $\Gamma \vdash \varphi \to \psi$, atunci $\Gamma \vdash \psi$.

O definiţie alternativă a Γ-teoremelor:

Definiţia 8.6

Mulţimea *Thm*(Γ) este intersecţia tuturor mulţimilor de formule Σ care satisfac următoarele proprietăţi:

(i) $Axm \subseteq \Sigma$;

(ii) $\Gamma \subseteq \Sigma$;

(iii) Σ este închisă la modus ponens:

$$\text{dacă } \varphi, \varphi \rightarrow \psi \in \Sigma, \text{ atunci } \psi \in \Sigma.$$

Definiţia Γ-teoremelor dă naştere la metoda de demonstraţie prin inducţie după Γ-teoreme.

Versiunea 1.
Fie *P* o proprietate a formulelor. Demonstrăm că orice Γ-teoremă satisface *P* astfel:

(i) demonstrăm că orice axiomă are proprietatea *P*;

(ii) demonstrăm că orice formulă din Γ are proprietatea *P*;

(iii) demonstrăm că dacă φ şi $\varphi \to \psi$ au proprietatea *P*, atunci ψ are proprietatea *P*.

Versiunea 2.
Fie Σ o mulţime de formule. Demonstrăm că $Thm(\Gamma) \subseteq \Sigma$ astfel:

(i) demonstrăm că orice axiomă este în Σ;

(ii) demonstrăm că orice formulă din Γ este în Σ;

(iii) demonstrăm că dacă $\varphi \in \Sigma$ şi $\varphi \to \psi \in \Sigma$, atunci $\psi \in \Sigma$.

Propoziţia 8.7
Fie Γ, Δ mulţimi de formule.

(i) Dacă $\Gamma \subseteq \Delta$, atunci $Thm(\Gamma) \subseteq Thm(\Delta)$, adică, pentru orice formulă φ,

$$\Gamma \vdash \varphi \text{ implică } \Delta \vdash \varphi.$$

(ii) $Thm \subseteq Thm(\Gamma)$, adică, pentru orice formulă φ,

$$\vdash \varphi \text{ implică } \Gamma \vdash \varphi.$$

(iii) Dacă $\Gamma \vdash \Delta$, atunci $Thm(\Delta) \subseteq Thm(\Gamma)$, adică, pentru orice formulă φ,

$$\Delta \vdash \varphi \text{ implică } \Gamma \vdash \varphi.$$

(iv) $Thm(Thm(\Gamma)) = Thm(\Gamma)$, adică, pentru orice formulă φ,

$$Thm(\Gamma) \vdash \varphi \;\text{ ddacă } \Gamma \vdash \varphi.$$

Demonstraţie. Exerciţiu uşor.

Definiţia 8.8

O Γ-demonstraţie (demonstraţie din ipotezele Γ) este o secvenţă de formule $\theta_1, \ldots, \theta_n$ a.î. pentru fiecare $i \in \{1, \ldots, n\}$, una din următoarele condiţii este satisfăcută:

(i) θ_i este axiomă;

(ii) $\theta_i \in \Gamma$;

(iii) există $k, j < i$ a.î. $\theta_k = \theta_j \to \theta_i$.

O $\emptyset$-demonstraţie se va numi simplu demonstraţie.

Lema 8.9

Dacă $\theta_1, \ldots, \theta_n$ este o Γ-demonstraţie, atunci

$$\Gamma \vdash \theta_i \text{ pentru orice } i \in \{1, \ldots, n\}.$$

Demonstraţie. Exerciţiu.

Definiţia 8.10

Fie φ o formulă. O Γ-demonstraţie a lui φ sau demonstraţie a lui φ din ipotezele Γ este o Γ-demonstraţie $\theta_1, \ldots, \theta_n$ a.î. $\theta_n = \varphi$. În acest caz, n se numeşte lungimea Γ-demonstraţiei.

Propoziţia 8.11

Fie Γ o mulţime de formule şi φ o formulă. Atunci $\Gamma \vdash \varphi$ ddacă există o Γ-demonstraţie a lui φ.

Demonstraţie. Exerciţiu suplimentar.

Propoziţia 8.12

Pentru orice mulţime de formule Γ şi orice formulă φ, $\Gamma \vdash \varphi$ ddacă există o submulţime finită Σ a lui Γ a.î. $\Sigma \vdash \varphi$.

Demonstraţie. "$\Leftarrow$" Fie $\Sigma \subseteq \Gamma$, Σ finită a.î. $\Sigma \vdash \varphi$. Aplicând Propoziţia 8.7 (i) obţinem că $\Gamma \vdash \varphi$.

"$\Rightarrow$" Presupunem că $\Gamma \vdash \varphi$. Conform Propoziţiei 8.11, φ are o Γ-demonstraţie $\theta_1, \ldots, \theta_n = \varphi$. Fie

$$\Sigma := \Gamma \cap \{\theta_1, \ldots, \theta_n\}.$$

Atunci Σ este finită, $\Sigma \subseteq \Gamma$ şi $\theta_1, \ldots, \theta_n = \varphi$ este o Σ-demonstraţie a lui φ, deci $\Sigma \vdash \varphi$. $\square$

Propoziţia 8.13

Pentru orice formulă φ, $\vdash \varphi \to \varphi$.

Demonstraţie.

(1) $\vdash (\varphi \to ((\varphi \to \varphi) \to \varphi)) \to ((\varphi \to (\varphi \to \varphi)) \to (\varphi \to \varphi))$

(A2) (cu φ, $\psi := \varphi \to \varphi$, $\chi := \varphi$) şi Propoziţia 8.5.(i)

(2) $\vdash \varphi \to ((\varphi \to \varphi) \to \varphi)$

(A1) (cu φ, $\psi := \varphi \to \varphi$) şi Propoziţia 8.5.(i)

(3) $\vdash (\varphi \to (\varphi \to \varphi)) \to (\varphi \to \varphi)$

(1), (2) şi Propoziţia 8.5.(iii). Scriem de obicei (MP): (1), (2)

(4) $\vdash \varphi \to (\varphi \to \varphi)$

(A1) (cu φ, $\psi := \varphi$) şi Propoziţia 8.5.(i)

(5) $\vdash \varphi \to \varphi$

(MP): (3), (4) $\square$

Teorema deducţiei este unul din cele mai utile instrumente pentru a arăta că o formulă e teoremă.

Teorema deducţiei 8.14

Fie $\Gamma \subseteq Form$ şi $\varphi, \psi \in Form$. Atunci

$$\Gamma \cup \{\varphi\} \vdash \psi \text{ ddacă } \Gamma \vdash \varphi \to \psi.$$

Demonstraţie. "$\Leftarrow$" Presupunem că $\Gamma \vdash \varphi \to \psi$.

(1)	$\Gamma \vdash \varphi \to \psi$	ipoteză
(2)	$\Gamma \cup \{\varphi\} \vdash \varphi \to \psi$	Propoziţia 8.7.(i)
(3)	$\Gamma \cup \{\varphi\} \vdash \varphi$	Propoziţia 8.5.(ii)
(4)	$\Gamma \cup \{\varphi\} \vdash \psi$	(MP): (2), (3).

"$\Rightarrow$" Fie
$$\Sigma := \{\psi \in Form \mid \Gamma \vdash \varphi \to \psi\}.$$

Trebuie să demonstrăm că $Thm(\Gamma \cup \{\varphi\}) \subseteq \Sigma$. Arătăm prin inducţie după $\Gamma \cup \{\varphi\}$-teoreme.

· Fie ψ o axiomă sau o formulă din Γ. Atunci

(1)	$\Gamma \vdash \psi$	Propoziţia 8.5.(i), (ii)
(2)	$\Gamma \vdash \psi \to (\varphi \to \psi)$	(A1) şi Propoziţia 8.5.(i)
(3)	$\Gamma \vdash \varphi \to \psi$	(MP): (1), (2).

Aşadar $\psi \in \Sigma$.

· Fie $\psi = \varphi$. Atunci $\varphi \to \psi = \varphi \to \varphi$ este teoremă, conform Propoziţiei 8.13, deci $\Gamma \vdash \varphi \to \psi$. Aşadar $\psi \in \Sigma$.

· Demonstrăm acum că Σ este închisă la modus ponens. Presupunem că $\psi, \psi \to \chi \in \Sigma$ şi trebuie să arătăm că $\chi \in \Sigma$. Atunci

(1)	$\Gamma \vdash \varphi \to \psi$	ipoteza inducţie
(2)	$\Gamma \vdash \varphi \to (\psi \to \chi)$	ipoteza inducţie
(3)	$\Gamma \vdash (\varphi \to (\psi \to \chi)) \to ((\varphi \to \psi) \to (\varphi \to \chi))$	(A2) şi P. 8.5.(i)
(4)	$\Gamma \vdash (\varphi \to \psi) \to (\varphi \to \chi)$	(MP): (2), (3).
(5)	$\Gamma \vdash \varphi \to \chi$	(MP): (1), (4).

Aşadar $\chi \in \Sigma$. $\square$

Propoziţia 8.15

Pentru orice formule φ, ψ, χ,

$$\vdash (\varphi \to \psi) \to ((\psi \to \chi) \to (\varphi \to \chi)). \tag{1}$$

Demonstraţie. Folosind teorema deducţiei observăm că

$$\begin{gathered}
\vdash (\varphi \to \psi) \to ((\psi \to \chi) \to (\varphi \to \chi)) \\
\Updownarrow \\
\{\varphi \to \psi\} \vdash (\psi \to \chi) \to (\varphi \to \chi) \\
\Updownarrow \\
\{\varphi \to \psi, \psi \to \chi\} \vdash \varphi \to \chi \\
\Updownarrow \\
\{\varphi \to \psi, \psi \to \chi, \varphi\} \vdash \chi.
\end{gathered}$$

În acest fel am reformulat ceea ce aveam de demonstrat. A demonstra teorema iniţială este echivalent cu a demonstra

$$\{\varphi \to \psi, \psi \to \chi, \varphi\} \vdash \chi.$$

(1)	$\{\varphi \to \psi, \psi \to \chi, \varphi\} \vdash \varphi$	Propoziţia 8.5.(ii)
(2)	$\{\varphi \to \psi, \psi \to \chi, \varphi\} \vdash \varphi \to \psi$	Propoziţia 8.5.(ii)
(3)	$\{\varphi \to \psi, \psi \to \chi, \varphi\} \vdash \psi$	(MP): (1), (2)
(4)	$\{\varphi \to \psi, \psi \to \chi, \varphi\} \vdash \psi \to \chi$	Propoziţia 8.5.(ii)
(5)	$\{\varphi \to \psi, \psi \to \chi, \varphi\} \vdash \chi$	(MP): (3), (4).

$\square$

Propoziţia 8.16

Pentru orice mulţime de formule Γ şi orice formule φ, ψ, χ,

$$\Gamma \vdash \varphi \to \psi \text{ şi } \Gamma \vdash \psi \to \chi \quad \Rightarrow \quad \Gamma \vdash \varphi \to \chi \, .$$

Demonstraţie.

(1)	$\Gamma \vdash \varphi \to \psi$	ipoteză
(2)	$\Gamma \vdash (\varphi \to \psi) \to ((\psi \to \chi) \to (\varphi \to \chi))$	P. 8.15 şi P. 8.7.(ii)
(3)	$\Gamma \vdash (\psi \to \chi) \to (\varphi \to \chi)$	(MP): (1), (2)
(4)	$\Gamma \vdash \psi \to \chi$	ipoteză
(5)	$\Gamma \vdash \varphi \to \chi$	(MP): (3), (4).

□

Propoziţia 8.17

Pentru orice formule φ, ψ,

$$\begin{aligned} \{\psi, \neg\psi\} &\vdash \varphi & (2)\\ &\vdash \neg\psi \to (\psi \to \varphi) & (3)\\ &\vdash \neg\neg\varphi \to \varphi & (4)\\ &\vdash \varphi \to \neg\neg\varphi & (5)\\ \{\psi, \neg\varphi\} &\vdash \neg(\psi \to \varphi). & (6) \end{aligned}$$

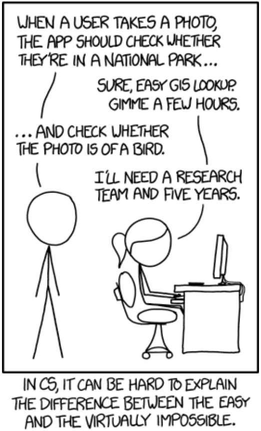
Demonstraţie. Exerciţiu.

Propoziţia 8.18

Pentru orice mulţime de formule Γ şi orice formule φ, ψ,

$$\Gamma \cup \{\psi\} \vdash \varphi \text{ şi } \Gamma \cup \{\neg\psi\} \vdash \varphi \quad \Rightarrow \quad \Gamma \vdash \varphi. \tag{7}$$

Demonstraţie. Exerciţiu.



Pe data viitoare!

Conţinutul tehnic al acestui curs se regăseşte în cursul de *Logică Matematică şi Computaţională* al prof. Laurenţiu Leuştean din anul universitar 2017/2018.

Comic-ul aparţine xkcd.