Grupa 344, EDDP, Seminar 9, 07.12.2020

1 Fie sistemul : $\begin{cases} x_1' = 3x_1 - x_2 + e^t \\ x_2' = 2x_1 \quad\quad - e^t \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$. (1)

a) forma matriceală

b) sistem fundamental de soluții pt sistemul liniar omogen asociat sistemului (1).

c) Soluția generală pt. sistemul (1).

d) Soluția în cazul $x_1(0) = 2$; $x_2(0) = 1$

a) $$\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}}_{A} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e^t \\ -e^t \end{pmatrix}$$

$$x' = Ax + b(t)$$

$$A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \quad ; \quad b : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2, \quad b(t) = \begin{pmatrix} e^t \\ -e^t \end{pmatrix}$$

b) Sist. liniar omogen atașat este

$$\bar{x}' = Ax \xrightarrow[\text{(ex. 1)}]{\text{sem. 8}}$$

$\Rightarrow$ un sistem fundamental de soluții este :

$$\left\{ \varphi_1(t) = \begin{pmatrix} e^t \\ 2e^t \end{pmatrix} ; \ \varphi_2(t) = \begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix} \right\}$$

Matricea fundamentală de soluții:

$$\phi(t) = \begin{pmatrix} e^t & e^{2t} \\ 2e^t & e^{2t} \end{pmatrix}, \ t \in \mathbb{R}. \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\bar{x}(t) = \phi(t)C, \quad C \in \mathbb{R}^2.}$$

c) Pt. determinarea soluției sistemului afin $\boxed{x' = Ax + b(t)}$ se aplică metoda variației constantelor :

determinăm $C : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ ai $\boxed{x(t) = \phi(t)C(t)}$ să fie soluție a sistemului afin:

$$(\phi(t)C(t))' = A \cdot \phi(t)C(t) + b(t) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\phi(t)C'(t) = b(t)}$$ sistem algebric liniar în nec. C_1', C_2'.

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} e^t & e^{2t} \\ 2e^t & e^{2t}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_1' \\ c_2'\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^t \\ -e^t\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} e^t c_1' + e^{2t} c_2' = e^t \\ 2e^t c_1' + e^{2t} c_2' = -e^t \end{cases} \; (-)$$

$$-e^t c_1' \quad / \quad = 2e^t \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{c_1' = -2}$$

$$\Rightarrow -2e^t + e^{2t}c_2' = e^t \Rightarrow e^{2t}c_2' = 3e^t \Rightarrow \boxed{c_2' = 3e^{-t}}$$

Pt c_1, c_2 se obțin ec. de tip primitivă $\Rightarrow$

$$\Rightarrow c_1 = \int(-2)\,dt \Rightarrow c_1(t) = -2t + K_1, \quad K_1 \in \mathbb{R}$$

$$c_2 = \int 3e^{-t}\,dt \Rightarrow c_2(t) = -3e^{-t} + K_2, \quad K_2 \in \mathbb{R}. \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ Soluția generală a sistemului afin este:

$$x(t) = \begin{pmatrix} e^t & e^{2t} \\ 2e^t & e^{2t}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2t + K_1 \\ -3e^{-t} + K_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^t & e^{2t} \\ 2e^t & e^{2t}\end{pmatrix}\left(\begin{pmatrix} -2t \\ -3e^{-t}\end{pmatrix} + \begin{pmatrix} K_1 \\ K_2\end{pmatrix}\right)$$

$$= \underbrace{\begin{pmatrix} -2te^t - 3e^t \\ -4te^t - 3e^t\end{pmatrix}}_{\varphi_0(t) = \begin{pmatrix} -(2t+3)e^t \\ -(4t+3)e^t\end{pmatrix}} + \underbrace{\begin{pmatrix} e^t & e^{2t} \\ 2e^t & e^{2t}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} K_1 \\ K_2\end{pmatrix}}_{\text{soluția sistemului liniar omogen atașat}}$$

<u>OBS</u>: Dacă știu φ_0 sol particulară a sistemului (1), atunci soluția sist. afin este:

$$x(t) = \varphi(t) + \bar{x}(t)$$

d) $\begin{cases} x_1(0) = 2 \\ x_2(0) = 1 \end{cases} \Rightarrow x(0) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 \\ 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix} K_1 \\ -3+K_2\end{pmatrix} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} K_1 + (-3+K_2) = 2 \\ 2K_1 + (-3+K_2) = 1 \end{cases} \; (-)$$

$$-K_1 \quad / \quad = 1 \rightarrow \boxed{K_1 = -1}$$

$$-1 - 3 + K_2 = 2 \Rightarrow \boxed{K_2 = 6}$$

<u>Temă</u>: Aceleași cerințe ca la ex. 1 pentru următoarele sisteme:

2) $\begin{cases} x_1' = x_1 - x_2 + 2\sin t \\ x_2' = 2x_1 - x_2 \end{cases}, t \in (0, \frac{\pi}{2})$

3) $\begin{cases} x_1' = x_2 + 2e^t \\ x_2' = x_1 \end{cases}$

4) $\begin{cases} x_1' = x_2 - 2x_3 - x_1 \\ x_2' = 4x_1 + x_2 \qquad + e^{-t} \\ x_3' = 2x_1 + x_2 - x_3 \end{cases}$

(5) Fie sistemul: $\begin{cases} x_1 = 5t^4 x_2 + t^9 \\ x_2 = -5t^4 x_1 \end{cases}, t \in \mathbb{R}$. (2)

a) forma matriceală a sistemului

b) Arătați că prin schimbarea de variabilă $t^5 = s$ se ajunge la un sistem cu coef constanți:

$$y' = By + c(s), \quad (3)$$

cu $B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$

pentru care se cere sistem fundamental de soluții pentru sistemul liniar omogen atașat și soluția generală a sistemului (3)

c) Scrieți soluția generală pt (2) și un sistem fundamental de soluții pentru partea liniară omogenă a sist. (2).

a) $$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 5t^4 \\ -5t^4 & 0 \end{pmatrix}}_{A(t)} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \underbrace{\begin{pmatrix} t^9 \\ 0 \end{pmatrix}}_{f(t)}$$

$$A(t) = \underset{f(t)}{\underset{\shortparallel}{5t^4}} \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}}_{B}$$

OBS. Dacă într-un sistem $x' = A(t)x + b(t)$ avem
$A(t) = f(t)\,B$,
$B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$
atunci dacă f este continuă și inversabilă prin s.v. $\boxed{f(t) = s}$ se ajunge la sist cu coef constanți.

b)

$$(t, x) \xrightarrow[x(t) = y(s(t))]{t^5 = s} (s, y)$$

$t^5 = s \Rightarrow s(t) = t^5 \Rightarrow s'(s) = 5t^4$.

$\Leftrightarrow t = \sqrt[5]{s}$.

$x'(t) = y'(s(t))\cdot s'(t) = y'(s)\cdot 5t^4 = y'(s)\cdot 5\cdot(\sqrt[5]{s})^4$

Sistemul $\quad x' = 5t^4 B x + b(t)$

prin s.v. $t^5 = s$ devine:

$$y'\cancel{5(\sqrt[5]{s})^5} = \cancel{5}\,\cancel{(\sqrt[5]{s})^4}\cdot B\cdot y + b(\sqrt[5]{s})$$

$$\Rightarrow y' = By + \frac{1}{5\sqrt[5]{s^4}}\begin{pmatrix}(\sqrt[5]{s})^5\\ 0\end{pmatrix} \Rightarrow y' = By + \underbrace{\begin{pmatrix}(\sqrt[5]{s})^5\\ 0\end{pmatrix}\cdot\frac{1}{5\sqrt[5]{s^4}}}_{c(s)=b(t(s))}$$

$$\Rightarrow \quad y' = By + \underbrace{\begin{pmatrix}\frac{(\sqrt[5]{s})^5}{5}\\ 0\end{pmatrix}}_{c(s)} \quad (3) \Rightarrow y' = By + \begin{pmatrix}\frac{1}{5}s\\ 0\end{pmatrix}$$

• partea liniar omogenă a sist (3):

$$\bar{y}' = B\bar{y}$$

$$B = \begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}$$

$$\det(B-\lambda I_2) = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix}-\lambda & 1\\ -1 & -\lambda\end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

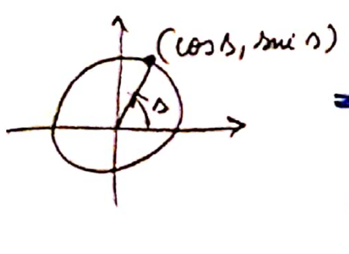
$$\Rightarrow \lambda^2+1=0 \Rightarrow \underline{\lambda = \pm i} \Rightarrow \begin{cases}\lambda_1 = i, & m_1 = 1\\ \lambda_2 = -i, & m_2 = 1\end{cases}$$

$$\boxed{\lambda_1 = i;\ m_1 = 1,\ \lambda_2 = \bar{\lambda}_1}$$

↳ determinăm $u\in\mathbb{R}^2$, $u\neq\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$ a.î. $Bu = \lambda_1 u \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u_1\\ u_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}iu_1\\ iu_2\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases}\boxed{u_2 = iu_1}\\ -u_1 = iu_2 \mid (-i)\end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{iu_1 = u_2}$$



$$\Rightarrow u = \begin{pmatrix}u_1\\ iu_1\end{pmatrix} = u_1\underbrace{\begin{pmatrix}1\\ i\end{pmatrix}}, u_1\in\mathbb{R}$$

$$\varphi_1(s) = \mathrm{Re}\left(e^{\lambda_1 s}\begin{pmatrix}1\\ i\end{pmatrix}\right) \ ; \ \varphi_2(s) = \mathrm{Im}\left(e^{\lambda_1 s}\begin{pmatrix}1\\ i\end{pmatrix}\right)$$

Avem: $e^{\lambda_1 s}\begin{pmatrix}1\\ i\end{pmatrix} = e^{is}\begin{pmatrix}1\\ i\end{pmatrix} = (\cos s + i\sin s)\left(\begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix} + i\begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix}\right)$

$$\Rightarrow \varphi_1(s) = \cos s\cdot\begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix} - \sin s\begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix} \Rightarrow \varphi_1(s) = \begin{pmatrix}\cos s\\ -\sin s\end{pmatrix}$$

$$\varphi_2'(s) = \cos s \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \sin s \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \varphi_2(s) = \begin{pmatrix} \sin s \\ \cos s \end{pmatrix}$$

Acum: matricea fundam de soluții:

$$\phi(s) = \begin{pmatrix} \cos s & \sin s \\ -\sin s & \cos s \end{pmatrix}, s \in R \Rightarrow \bar{y}(s) = \phi(s) c, \quad c \in R^2$$

Aplicăm met var const pt (3) $\Rightarrow$ det. $C : R \to R^2$

a.î. $y(s) = \phi(s) C(s)$ sol. a sist afin (3):

$$(\phi(s) C(s))' = B \phi(s) C(s) + \begin{pmatrix} \frac{1}{5} s \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \cancel{\underbrace{\phi'(s)}_{B\phi(s)} C(s)} + \phi(s) C'(s) = \cancel{B \phi(s) C(s)} + \begin{pmatrix} \frac{1}{5} s \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \phi(s) C'(s) = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} s \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} \cos s & \sin s \\ -\sin s & \cos s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1' \\ C_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} s \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} C_1' \cos s + C_2' \sin s = \frac{s}{5} \\ -C_1' \sin s + C_2' \cos s = 0 \end{cases}$$

$| \cdot \cos s$

$| \cdot (-\sin s)$

$$\Rightarrow \begin{cases} C_1' \cos^2 s + C_2' \sin s \cos s = \frac{s}{5} \cos s \\ C_1' \sin^2 s - C_2' \sin s \cos s = 0 \end{cases}$$

$$C_1' = \frac{s}{5} \cos s$$

$$\boxed{C_1' = \frac{s}{5} \cos s}$$

$$- C_1' \sin s = - C_2' \cos s \Rightarrow C_2' \cos s = \frac{s}{5} \cos s \sin s \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{C_2' = \frac{s}{5} \sin s}$$

$$C_1(s) = \int \frac{s}{5} (\sin s)' ds = \frac{s}{5} \sin s - \frac{1}{5} \int \sin s \, ds \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{C_1(s) = \frac{s}{5} \sin s + \frac{1}{5} \cos s + K_1}$$

$$C_2(s) = \int \frac{s}{5} (-\cos s)' ds = -\frac{s}{5} \cos s + \frac{1}{5} \int \cos s \, ds \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{C_2(s) = -\frac{s}{5} \cos s + \frac{1}{5} \sin s + K_2}$$

Sol. sist (3):

$$y(s) = \phi(s) \cdot \begin{pmatrix} C_1(s) \\ C_2(s) \end{pmatrix}$$

Pt. sist. 2 $\Rightarrow$ $x(t) = \phi(t^5)\cdot\begin{pmatrix} c_1(t^5) \\ c_2(t^5)\end{pmatrix}$

și un sistem fundam. de soluții pt. (2) este:

$$\begin{cases} \psi_1(t) = \varphi_1(t^5) = \begin{pmatrix}\cos t^5 \\ -\sin t^5\end{pmatrix} \\ \psi_2(t) = \varphi_2(t^5) = \begin{pmatrix}\sin t^5 \\ \cos t^5\end{pmatrix}\end{cases}$$

<u>Temă</u>: Aceleași cerințe ca în ex. 5 pt sistemele:

6) $\begin{cases} x_1' = 3t^2 x_2 \\ x_2' = 3t^2 x_1\end{cases}$; $\boxed{t^3 = s}$, $t \in \mathbb{R}$

7) $\begin{cases} x_1' = \dfrac{x_1 - 2x_2}{t} - \ln t, \ t > 0 \\ x_2' = \dfrac{2x_1 - 3x_2}{t} + \ln t,\end{cases}$; $\boxed{t = e^s}$

8) Fie sistemul $\begin{cases} x_1' = \frac{1}{t} x_2 \\ x_2' = \frac{1}{t} x_1\end{cases}$, $t > 0$. (4)

a) Arătați că $\varphi_1(t) = \begin{pmatrix} t \\ t\end{pmatrix}$ este soluție a sistemului

b) Determinați soluția generală a sistemului folosind metoda de reducere a dimensiunii sistemului și precizați φ_2 a.î. $\{\varphi_1, \varphi_2\}$ să fie sistem fundamental de soluții pt (4).

a) $x' = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{t} \\ \frac{1}{t} & 0\end{pmatrix} x$; $x' = A(t)x$.

φ_1 soluție $\Leftrightarrow$ $\varphi_1'(t) = A(t)\varphi_1(t) \Leftrightarrow \left(\begin{pmatrix} t \\ t\end{pmatrix}\right)' = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{t} \\ \frac{1}{t} & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix} t \\ t\end{pmatrix} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1\end{pmatrix}$ Adev.

b) $\varphi_1(t) = \begin{pmatrix} t \\ t\end{pmatrix}$

$n = 2$
$m = 1$; $\det(t) = t \neq 0, \ \forall t > 0$.
$t \in (0, +\infty)$.

Se consideră schimbarea de variabilă: $x = Z(t)y$

unde $Z(t) = \begin{pmatrix} t & 0 \\ t & 1 \end{pmatrix}$

m coloane → $n-m$ coloane care cuprind vectorii $e_{m+1}, \dots, e_n$ ai bazei canonice din $\mathbb{R}^n$.

$\underbrace{\det Z(t)}_{=t} \neq 0 \Rightarrow \exists (Z(t))^{-1}$

$${}^T(Z(t)) = \begin{pmatrix} t & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \; ; \; (Z(t))^* = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -t & t \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow (Z(t))^{-1} = \frac{1}{\det Z(t)} \cdot (Z(t))^* = \begin{pmatrix} \frac{1}{t} & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Prin s.v. $x = Z(t)y$, sistemul devine:

$$(Z(t)y)' = A(t)Z(t)y \xrightarrow{\text{(vezi curs)}} \boxed{y' = B(t)y},$$

unde $B(t) = (Z(t))^{-1}\left[A(t)Z(t) - Z'(t)\right] =$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{t} & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\left[\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{t} \\ \frac{1}{t} & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} t & 0 \\ t & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right] =$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{t} & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\left[\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{t} \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} \frac{1}{t} & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{t} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

m coloane zero

$$\Rightarrow B(t) = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{t^2} \\ 0 & -\frac{1}{t} \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{t^2} \\ 0 & -\frac{1}{t} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} y_1' = \frac{1}{t^2} y_2 \\ y_2' = -\frac{1}{t} y_2 \end{cases} \Rightarrow \text{ec. liniară omogenă}$$

s-au separat $n-m=1$ ecuații

$$\Rightarrow y_2 = C_2 \cdot e^{-\ln t} = \frac{C_2}{t} \Rightarrow y_1' = \frac{1}{t^2} \cdot \frac{C_2}{t} \Rightarrow y_1 = C_2 \int t^{-3} dt \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y_1 = C_2 \frac{t^{-2}}{-2} + C_1 \Rightarrow y_1 = -\frac{C_2}{2}\frac{1}{t^2} + C_1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x(t) = \begin{pmatrix} t & 0 \\ t & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -\frac{C_2}{2t^2} + C_1 \\ \frac{C_2}{t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{C_2}{2t} + C_1 t \\ -\frac{C_2}{2t} + C_1 t + \frac{C_2}{t} \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x(t) = C_1 \underbrace{\begin{pmatrix} t \\ t \end{pmatrix}}_{\varphi_1(t)} + C_2 \underbrace{\begin{pmatrix} -\frac{1}{2t} \\ \frac{1}{2t} \end{pmatrix}}_{\varphi_2(t)} \quad ; \; C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

<u>Temă</u>: Sistemul dat ca ex. la curs pt metoda reducerii dimensiunii.