

CURS 1

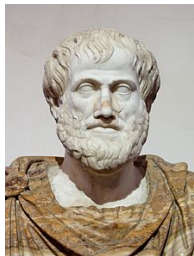
Logică Matematică și Computațională

FMI · Denisa Diaconescu · An universitar 2018/2019

O SCURTĂ ISTORIE

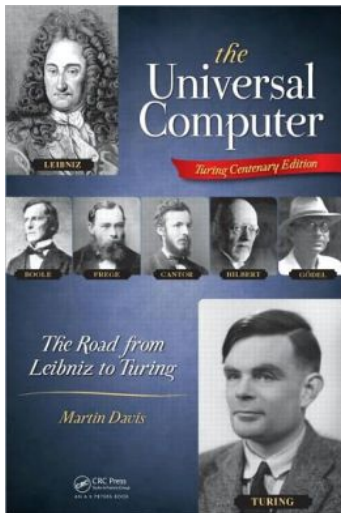
logiké tékhné = știința raționamentelor; logos = cuvânt, raționament

Aristotel (IV î.e.n.)



- <http://plato.stanford.edu/entries/aristotle-logic/>
- primul studiu formal al logicii
- a studiat silogismele (deducții formate din două premize și o concluzie).

	Barbara
Premiză	Toți oamenii sunt muritori.
Premiză	Grecii sunt oameni.
Concluzie	Deci grecii sunt muritori.



"... a computing machine is really a logic machine. Its circuits embody the distilled insights of a remarkable collection of logicians, developed over century. Nowadays, as computer technology advances with such breathtaking rapidity, as we admire the truly accomplishments of the engineers, it is all too easy to overlook the logicians whose ideas made it all possible. This book tells their story."

– M. Davis

Visul lui Leibniz

- un limbaj matematic universal (*lingua characteristica universalis*) în care toată cunoașterea umană poate fi exprimată și reguli de calcul (*calculus ratiocinator*) pentru a deriva, cu ajutorul mașinilor, toate relațiile logice.

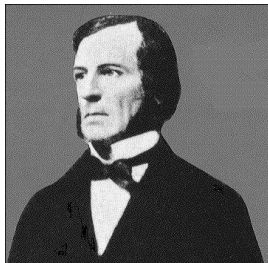


"If controversies were to arise, there would be no more need of disputation between two philosophers than between two accountants. For it would suffice to take their pencils in their hands, and say to each other: Calculemus - Let us calculate."

– G.W. Leibniz

GEORGE BOOLE (1815-1864)

- a inițiat analiza raționamentelor logice prin metode asemănătoare calculului algebric
- silogismele lui Aristotel sunt despre **clase** de obiecte, care pot fi studiate algebric.
- **The Mathematical Analysis of Logic** (1847), **The Laws of Thought** (1854)



"The design of the following treatise is to investigate the fundamental laws of the operations of the mind by which reasoning is performed; to give expressions to them in the symbolic language of calculus, and upon this foundation to establish the science of logic and constructs its methods."

– G. Boole

Begriffsschrift (1879) (scriere conceptuală)

- a introdus sintaxa formală: obiecte, predicate, funcții, conectori propoziționali, cuantificatori.
- a inventat logica de ordinul întâi.

“perhaps the most important single work ever written in logic.”

– van Heijenoort, From Frege to Godel, 1967



Exemplu:

- Toți oamenii sunt muritori.
- Pentru orice x , dacă x este om, atunci x este muritor.
- $\forall x(Om(x) \rightarrow Muritor(x))$.

GEORG CANTOR (1845-1918)

- a inventat teoria mulțimilor.
- a definit numerele cardinale, ordinale.
- a dezvoltat o teorie matematică a **infinitalui**.

*"No one shall be able to expel us from the
paradise that Cantor created for us."*

– D. Hilbert



Aristotel *"Infinitum Actu Non Datur"* (nu există infinit actual)

Leibniz *"I am so in favor of the actual infinite that instead of admitting that Nature abhors it, I hold that Nature makes frequent use of it everywhere."*

Gauss *"I protest above all the use of an infinite quantity as a completed one, which in mathematics is never allowed."*

Frege *"For the infinite will eventually refuse to be excluded from arithmetics . . . Thus we can foresee that this issue will provide for a momentous and decisive battle."*

Poincaré *"grave disease infecting mathematics"*.

Kronecker (despre Cantor) *"scientific charlatan", "corrupter of youth"*

Wittgenstein *"utter nonsense"*

Mittag-Leffler (despre lucrările lui Cantor) *"about one hundred years too soon."*

Scrisoarea lui [Bertrand Russell](#) către [Frege](#) (16 iunie, 1902):

"I find myself in agreement with you in all essentials . . . I find in your work discussions, distinctions, and definitions that one seeks in vain in the work of other logicians . . . There is just one point where I have encountered a difficulty."

[Frege](#), appendix la [The Fundamental Laws of Arithmetic](#), Vol. 2:

"There is nothing worse that can happen to a scientist than to have the foundation collapse just as the work is finished. I have been placed in this position by a letter from Mr. Bertrand Russell."

Conform teoriei naive a mulțimilor, orice colecție definibilă este mulțime.
Fie U mulțimea tuturor mulțimilor.

Paradoxul lui Russel (1902)

Fie $R = \{A \in U \mid A \notin A\}$. Atunci R este mulțime, deci $R \in U$.

Obținem că $R \in R \iff R \notin R$.

Criza fundamentelor matematice

- Paradoxul lui Russel \Rightarrow Sistemul logic al lui Frege este **inconsistent**
- a declanșat criza fundamentelor matematice ("foundations of mathematics")
- s-a dezvoltat teoria axiomatică a mulțimilor: **Zermelo-Fraenkel (ZF)**, **ZFC**: ZF+ Axioma alegerii (*Axiom of Choice*)

- unul dintre matematicienii de vârf ai generației sale
- unul dintre fondatorii teoriei demonstrației și logicii matematice
- lista sa de 23 probleme deschise (1902) a influențat foarte mult matematica secolului XX



Programul lui Hilbert (1921)

Să se formalizeze matematica și să se stabilească următoarele:

- Matematica este **consistentă**: un enunț matematic și negația sa nu pot fi demonstrate simultan.
- Matematica este **completă**: toate enunțurile matematice adevărate pot fi demonstrate.
- Matematica este **decidabilă**: există o regulă mecanică pentru a determina dacă un enunț matematic dat este adevărat sau fals.

There is no such thing as an unsolvable problem.

We must know, we will know.

– D. Hilbert

Teoremele de incompletitudine ale lui Gödel (1931-33)

- **incompletitudinea** aritmeticii obișnuite (la 25 de ani).
- **imposibilitatea** de a demonstra consistența teoriei mulțimilor.
- au marcat eșecul programului lui Hilbert.



- este considerat cel mai mare logician al secolului XX.
- a introdus funcțiile calculabile.
- a demonstrat teorema de completitudine a logicii de ordinul întâi.
- a demonstrat că Axioma Alegerii și Ipoteza Continuumului sunt consistente cu axiomele teoriei mulțimilor.

“Kurt Gödel’s achievement in modern logic is singular and monumental - indeed it is more than a monument, it is a landmark which will remain visible far in space and time The subject of logic has certainly completely changed its nature and possibilities with Gödel’s achievement.”

– J. von Neumann

Revista TIME (19 martie 1999)

Gödel a fost inclus în lista cu cei mai importanți 20 oameni de știință și gânditori ai secolului XX.

Entscheidungsproblem – Hilbert și Ackermann (1928)

- Există un algoritm pentru a verifica dacă o anumită formulă din logica de ordinul întâi este adevărată?
- Cu alte cuvinte: Este logica de ordinul întâi **decidabilă**?

- a demonstrat că logica de ordinul întâi este **nedecidabilă** (la 24 de ani) (rezultat obținut independent de Church în 1935).
- a introdus mașina Turing (universală) pentru a formaliza noțiunea de algoritm.



- părintele informaticii și inteligenței artificiale
- mașina Turing universală este model al calculatoarelor actuale

Revista TIME (19 martie 1999)

Turing a fost inclus in lista cu cei mai importanți 20 oameni de știință și gânditori ai secolului XX.

“Virtually all computers today from 10 million supercomputers to the tiny chips that power cell phones and Furbies, have one thing in common: they are all “von Neumann machines“, variations on the basic computer architecture that John von Neumann, building on the work of Alan Turing, laid out in the 1940’s.”

– Revista Time

Premiul Turing

- <http://amturing.acm.org/>
- decernat anual de către Association for Computing Machinery (ACM) pentru contribuții în informatică
- este considerat un Premiu Nobel pentru Informatică

"Computing and Computing Science unavoidably emerge as an exercise in formal mathematics or, if you wish an acronym, as exercise in VLSAL (Very Large Scale Application of Logic)."

– E. W. Dijkstra

"Logic is the calculus of computation."

– A. R. Bradley, Z. Manna

"Computer science is the continuation of logic by other means."

– G. Gottlob

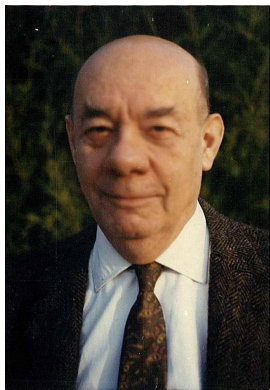
Aplicații ale logicii în informatică:

- limbaje de programare (semantică, programare logică, programare funcțională)
- software engineering (verificare, model checking)
- baze de date (algebre de relații, teoria modelelor finite)
- inteligență artificială
- criptografie și securitate
- calculabilitate și complexitate
- arhitectura calculatoarelor (circuite logice)
- ...

J. Y. Halpern, R. Harper, N. Immerman, P.G. Kolaitis, M.Y. Vardi, V. Vianu, *On the Unusual Effectiveness of Logic in Computer Science*, Bulletin of Symbolic Logic 7 (2001).

Grigore C. Moisil (1906-1973)

Computer Pioneer Award of IEEE Computer Society



"As a professor of the Bucharest University, he was the first to teach there mathematical logic. Articulating logic and automata, Moisil was well prepared to organize the Romanian development in the emergent field of Computer Science...we can say that 1957 is the date of birth of Romanian Computer Science, under the guidance of Professor Moisil and with the collaboration of engineers and mathematicians."

– S. Marcus

Există diferite sisteme logice:

- logica propozițională
- logica de ordinul întâi
- logica intuitionistă
- logica modală
- logica temporală
- logica dinamică
- logica fuzzy
- ...

PRELIMINARII

Fie A, B, T mulțimi a.î. $A, B \subseteq T$.

$$A \cup B = \{x \in T \mid x \in A \text{ sau } x \in B\}$$

$$A \cap B = \{x \in T \mid x \in A \text{ și } x \in B\}$$

$$A \setminus B = \{x \in T \mid x \in A \text{ și } x \notin B\}$$

$$C_T A = T \setminus A = \{x \in T \mid x \notin A\}$$

$C_T A$ se mai notează și \bar{A} când T este clar din context.

Notății.

- $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$ este mulțimea numerelor naturale
- $\mathbb{N}^* = \mathbb{N} \setminus \{0\}$
- \mathbb{Z} este mulțimea numerelor întregi
- \mathbb{Q} este mulțimea numerelor raționale.
- \mathbb{R} este mulțimea numerelor reale

Mulțimea părților lui T este $\mathcal{P}(T) = \{A \mid A \subseteq T\}$.

Se mai notează și 2^T .

Exemple.

- $\mathcal{P}(\emptyset) = \{\emptyset\}$,
- $\mathcal{P}(\{\emptyset\}) = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$,
- $\mathcal{P}(\{\emptyset, \{\emptyset\}\}) = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$.

Dacă T are n elemente, atunci 2^T are 2^n elemente.

Notăm cu (a, b) **perechea ordonată** formată din a și b (care sunt **componentele** lui (a, b)).

În teoria mulțimilor, (a, b) se definește ca fiind mulțimea $\{\{a\}, \{a, b\}\}$.

Observații.

- dacă $a \neq b$, atunci $(a, b) \neq (b, a)$
- $(a, b) \neq \{a, b\}$
- $(7, 7)$ este o pereche ordonată validă
- două perechi ordonate (a, b) și (c, d) sunt egale dacă $a = c$ și $b = d$.

Definiție.

Produsul cartezian a două mulțimi A și B este definit astfel:

$$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A \text{ și } b \in B\}$$

Exercițiu.

- $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$
- $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$

Definiție.

O relație binară între A și B este o submulțime a lui $A \times B$.

O relație binară pe A este o submulțime a lui $A \times A$.

Exemple.

$$\cdot < \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$$

$$< = \{(k, n) \mid \text{există } m \in \mathbb{N} \text{ a.î. } m \neq 0 \text{ și } m + k = n\}$$

$$\cdot \mid \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$$

$$\mid = \{(k, n) \mid \text{există } m \in \mathbb{N} \text{ a.î. } mk = n\}$$

Definiție.

- Dacă $R \subseteq A \times B$, atunci **relația inversă** $R^{-1} \subseteq B \times A$ este definită astfel:

$$R^{-1} = \{(b, a) \mid (a, b) \in R\}.$$

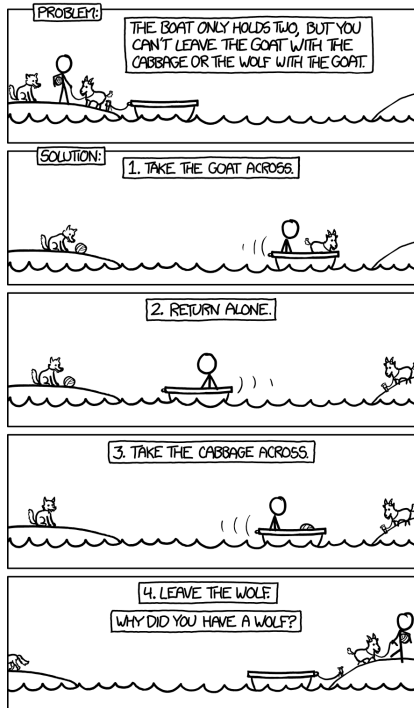
- Dacă $R \subseteq A \times B$ și $Q \subseteq B \times C$, atunci **compunerea** lor $Q \circ R \subseteq A \times C$ este definită astfel:

$$Q \circ R = \{(a, c) \mid \text{există } b \in B \text{ a.î. } (a, b) \in R \text{ și } (b, c) \in Q\}.$$

- **Diagonala** lui A este $\Delta_A = \{(a, a) \mid a \in A\}$.

Exercițiu.

- Compunerea relațiilor este asociativă.
- Dacă $R \subseteq A \times B$ atunci $R \circ \Delta_A = R$ și $\Delta_B \circ R = R$.



Pe data viitoare!

Conținutul tehnic al acestui curs se regăsește în cursul de *Logică Matematică și Computațională* al prof. Laurențiu Leuștean din anul universitar 2017/2018.

Comic-ul aparține xkcd.