Grupa 344, Seminar 7, EDDP, 16.11.2020

Sisteme de ecuații diferențiale integrabile cu ajutorul integralelor prime.

I) Fie următoarele sisteme de ecuații diferențiale

✓ (1) $\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = \dfrac{x_2^2 - t^2}{x_2} \\ \dfrac{dx_2}{dt} = -\dfrac{t}{x_2} \end{cases}$

a) Arătați că $F(t, x_1, x_2) = t^2 + x_2^2$ este integrală primă a sistemului (1)

b) Determinați soluția $x(t) = (x_1(t), x_2(t))$ a sist. (1)

(2) $\begin{cases} x_1' = \dfrac{t - x_1}{t + x_1 + x_2} \\ x_2' = \dfrac{x_1 - t}{t + x_1 + x_2} \end{cases}$

a) Arătați că $F(t, x_1, x_2) = x_1 + x_2$ este integrală primă a sistemului (2)

b) Folosind integrala primă determinați mulțimea soluțiilor sistemului.

✓ (3) $\begin{cases} x_1' = (x_2 - x_3)^2 \\ x_2' = x_1 x_3 \\ x_3' = x_1 x_2 \end{cases}$

a) Arătați că $F(t, (x_1, x_2, x_3)) = x_1^2 + (x_2 - x_3)^2$ este integrală primă a sistemului (3).

b) Determinați mulțimea soluțiilor sistemului (3) folosind integrale prime.

(4) $\begin{cases} x_1' = x_1^2 x_2 \\ x_2' = \dfrac{x_2}{t} - x_1 x_2^2 \end{cases}$

a) $F(t, x_1, x_2) = \dfrac{x_1 x_2}{t}$ este integrală pt (4)

b) Precizați dacă se poate integra sistemul cu ajutorul integralei prime.

$$(5)\ \begin{cases}\dfrac{dx_1}{dt}=f_1(t,x_1,\dots,x_n)\\ \vdots\\ \dfrac{dx_n}{dt}=f_n(t,x_1,\dots,x_n)\end{cases}\quad ;\ f=(f_1,\dots,f_n):D\subset \underset{\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n}{\mathbb{R}^{n+1}}\to\mathbb{R}^n$$

$F(t,x_1,\dots,x_n)$

$F:D\to\mathbb{R}$ este integrală primă pt sistemul (5) $\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \frac{\partial F}{\partial t}+\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial F}{\partial x_k}(t,\underbrace{x_1,\dots,x_n}_{x})\,f_k(t,x_1,\dots,x_n)=0$$

$\forall (t,x)\in D$

Criteriu pentru integrale prime

$$(1)\ \begin{cases}\dfrac{dx_1}{dt}=\dfrac{x_2^2-t^2}{x_2}\\ \dfrac{dx_2}{dt}=-\dfrac{t}{x_2}\end{cases}$$

$n=2$

$f:\underbrace{(0,\infty)}_{\text{pt } t}\times\underbrace{(0,\infty)^2}_{\text{pt }(x_1,x_2)}\to\mathbb{R}^2$

$f=(f_1,f_2)$

$$f_1(t,x)=f_1(t,(x_1,x_2))=\frac{x_2^2-t^2}{x_2}$$

$$f_2(t,x)=f_2(t,(x_1,x_2))=-\frac{t}{x_2}$$

a) $\boxed{F(t,(x_1,x_2))=t^2+x_2^2}$ este integrală primă $\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \frac{\partial F}{\partial t}(t,\underbrace{x_1,x_2}_{x})+\frac{\partial F}{\partial x_1}(t,x)\cdot f_1(t,x)+\frac{\partial F}{\partial x_2}(t,x)\cdot f_2(t,x)=0.$$

$$\Leftrightarrow 2t+0\cdot\frac{x_2^2-t^2}{x_2}+2\cancel{x_2}\cdot\left(-\frac{t}{\cancel{x_2}}\right)=0\Leftrightarrow 2t-2t=0$$

Adev.

b) $F(t,x)=C_1 \Rightarrow \boxed{t^2+x_2^2=C_1,\quad C_1\in\mathbb{R}.}$

Obs: Pt sistemul (1), ecuația a 2-a din sistem poate fi integrată direct ca ecuație separată de sistem fiind ec. cu variabile separabile:

$$\frac{dx_2}{dt}=\underbrace{-t}_{a(t)}\cdot\underbrace{\frac{1}{x_2}}_{b(x_2)}$$

Evident $b(x_2)\neq 0 \Rightarrow$ separăm variabilele $\Rightarrow$

$$x_2 dx_2 = -t\,dt \Rightarrow \int x_2 dx_2 = -\int t\,dt \Rightarrow \frac{x_2^2}{2} = -\frac{t^2}{2} + c \;\Big|\cdot 2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_2^2 = -t^2 + 2c \Rightarrow \boxed{x_2^2 + t^2 = C_1}, \quad \underline{C_1 = 2c}$$

Avem $x_2^2 = C_1 - t^2 \Rightarrow x_2 = \pm\sqrt{C_1 - t^2}$, $\underline{C_1 - t^2 \geq 0} \Rightarrow \boxed{C_1 > 0}$

Înlocuim în prima ec: $\dfrac{dx_1}{dt} = \dfrac{C_1 - t^2 - t^2}{\pm\sqrt{C_1 - t^2}}$

i) $\dfrac{dx_1}{dt} = \dfrac{C_1 - 2t^2}{\sqrt{C_1 - t^2}}$ ec de tip primitivei $\Rightarrow$

$$\Rightarrow x_1(t) = \int \frac{C_1 - 2t^2}{\sqrt{C_1 - t^2}}dt = C_1 \int \frac{1}{\sqrt{C_1 - t^2}}dt + 2\int \frac{-t^2}{\sqrt{C_1 - t^2}}dt =$$

$$= C_1 \int \frac{1}{\sqrt{(\sqrt{C_1})^2 - t^2}}dt + 2\mathcal{I} = C_1 \arcsin\left(\frac{t}{\sqrt{C_1}}\right) + 2\mathcal{I}.$$

$$\mathcal{I} = \int t \cdot \left(\frac{-t}{\sqrt{C_1 - t^2}}\right)dt = \int t\left(\sqrt{C_1 - t^2}\right)' dt \Bigg\} \Rightarrow$$

$$\left(\sqrt{C_1 - t^2}\right)' = \frac{1}{\cancel{2}\sqrt{C_1 - t^2}} \cdot (-\cancel{2}t) = \frac{-t}{\sqrt{C_1 - t^2}}$$

$$\Rightarrow \mathcal{I} = t\sqrt{C_1 - t^2} - \int \sqrt{C_1 - t^2}\,dt = t\sqrt{C_1 - t^2} - \int \frac{C_1 - t^2}{\sqrt{C_1 - t^2}}dt =$$

$$= t\sqrt{C_1 - t^2} - C_1 \int \frac{1}{\sqrt{(\sqrt{C_1})^2 - t^2}}dt - \underbrace{\int \frac{-t^2}{\sqrt{C_1 - t^2}}dt}_{\mathcal{I}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2\mathcal{I} = t\sqrt{C_1 - t^2} - C_1 \arcsin\left(\frac{t}{\sqrt{C_1}}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_1(t) = \cancel{C_1 \arcsin\left(\frac{t}{\sqrt{C_1}}\right)} + t\sqrt{C_1 - t^2} - \cancel{C_1 \arcsin\left(\frac{t}{\sqrt{C_1}}\right)} + C_2$$

$$\begin{cases} x_1(t) = t\sqrt{C_1 - t^2} + C_2, & C_1 > 0 \\ & C_2 \in \mathbb{R} \\ x_2 = \sqrt{C_1 - t^2} \end{cases}$$

Verificare: $x_1' = \left(t\sqrt{C_1 - t^2}\right)' = \sqrt{C_1 - t^2} + t\dfrac{-t}{\sqrt{C_1 - t^2}} = \dfrac{C_1 - t^2 - t^2}{\sqrt{C_1 - t^2}} = \dfrac{C_1 - 2t^2}{\sqrt{C_1 - t^2}}$

(3) $\begin{cases} x_1' = (x_2 - x_3)^2 \\ x_2' = x_1 x_3 \\ x_3' = x_1 x_2 \end{cases}$

a) $F(t,x) = x_1^2 + (x_2 - x_3)^2 = x_1^2 + x_2^2 - 2x_2x_3 + x_3^2$

$n = 3$; $x = (x_1, x_2, x_3)$

$f: \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$

$f = (f_1, f_2, f_3)$

$f_1(t,x) = (x_2 - x_3)^2$

$f_2(t,x) = x_1 x_3$

$f_3(t,x) = x_1 x_2$

F integrală primă pt. sistemul (3) $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \frac{\partial F}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial x_1}(t,x) \cdot f_1(t,x) + \frac{\partial F}{\partial x_2}(t,x) \cdot f_2(t,x) + \frac{\partial F}{\partial x_3}(t,x) f_3(t,x) = 0$

$\Leftrightarrow 0 + 2x_1 \cdot (x_2 - x_3)^2 + (2x_2 - 2x_3) \cdot x_1 x_3 + (2x_3 - 2x_2) \cdot x_1 x_2 = 0.$

$\Leftrightarrow \cancel{2x_1x_2^2} - \cancel{4x_1x_2x_3} + \cancel{2x_1x_3^2} + \cancel{2x_1x_2x_3} - \cancel{2x_1x_3^2} +$
$+ \cancel{2x_1x_2x_3} - \cancel{2x_1x_2^2} = 0 \Leftrightarrow 0 = 0.$

Deci: F integrală primă pt (3).

b) F int. primă $\Rightarrow$ $F(t,x) = C_1$, $C_1 \in \mathbb{R}$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow x_1^2 + (x_2 - x_3)^2 = C_1 \Rightarrow \underbrace{(x_2 - x_3)^2}_{\geq 0} = \underbrace{C_1 - x_1^2}_{\geq 0}$. În prima ec. din sistem $\Rightarrow$

$\Rightarrow \boxed{x_1' = C_1 - x_1^2}$ OBS: Cum $C_1 - x_1^2 \geq 0 \Rightarrow C_1 \geq 0$

$\frac{dx_1}{dt} = \underbrace{1}_{a(t)} \underbrace{(C_1 - x_1^2)}_{b(x_1)}$ ec cu variab. separabile.

• $b(x_1) = 0 \Rightarrow x_1^2 = C_1$; • dacă $C_1 \geq 0 \Rightarrow x_1 = \pm\sqrt{C_1} \Rightarrow$
(cazul $C_1 < 0$ nu este posibil)

$\Rightarrow$ i) $x_1 = \sqrt{C_1} \Rightarrow \begin{cases} x_2' = \sqrt{C_1}\, x_3 \\ x_3' = \sqrt{C_1}\, x_2 \end{cases}$ sistem liniar în (x_2, x_3)

ii) $x_1 = -\sqrt{C_1}$

sau

$x_2'' = \sqrt{C_1}\, x_3' \Rightarrow$

$\Rightarrow x_2'' = (\sqrt{C_1})^2 x_2 \Rightarrow$

$\Rightarrow \boxed{x_2'' = C_1 \cdot x_2}$ ec. de ordin 2 liniară în x_2, rezolvabilă ca ec. liniară sau îi reducem ordinul cu schimbarea de variabilă $x_2'(t) = y(x_2(t)) \Rightarrow$

$x_2''(t) = y'(x_2) \cdot y \Rightarrow$

$\Rightarrow y'y = C_1 x_2 \Rightarrow$

ec. în y cu var. separabile.

• dacă $\boxed{C_1 = 0} \Rightarrow x_1^2 = 0 \Rightarrow x_1 = 0 \Rightarrow \boxed{x_1(t) = 0} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_2' = 0 \\ x_3' = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_2 = C_2 \\ x_3 = C_3 \end{cases}$$

Soluția obținută se înlocuiește în integrala primă $\Rightarrow 0^2 + (C_2 - C_3)^2 = \underset{0}{C_1} \Rightarrow$

$$\Rightarrow C_2 = C_3 \Rightarrow \boxed{\begin{cases} x_1(t) = 0 \\ x_2(t) = C_2 \\ x_3(t) = C_2 \end{cases}} C_2 \in \mathbb{R}$$

• dacă $b(x_1) = 0 \Rightarrow$ sep. variabilele:

$$\frac{1}{C_1 - x_1^2} dx_1 = dt$$

• $C_1 \neq 0$, $C_1 > 0 \Rightarrow \frac{1}{(\sqrt{C_1})^2 - x_1^2} dx_1 = dt \Rightarrow -\frac{1}{2\sqrt{C_1}} \ln \left| \frac{x_1 - \sqrt{C_1}}{x_1 + \sqrt{C_1}} \right| = t + C_2$

$$\Rightarrow \ln \left| \frac{x_1 + \sqrt{C_1}}{x_1 - \sqrt{C_1}} \right| = 2\sqrt{C_1}\, t + 2\sqrt{C_1}\, C_2 \Rightarrow \underline{\underline{x_1(t)}} \Rightarrow$$

$\Rightarrow x_2$ și x_3 se determină din ec. $(3)_2$ și $(3)_3$,

$$\begin{cases} x_2' = x_1(t)\, x_3 \\ x_3' = x_1(t)\, x_2 \end{cases}$$ sistem liniar în x_2, x_3.

• $\underline{\underline{C_1 = 0}} \Rightarrow \frac{-1}{x_1^2} dx_1 = dt \Rightarrow -\frac{x_1^{-2+1}}{-2+1} = t + C_2 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{1}{x_1} = t + C_2 \Rightarrow \boxed{x_1(t) = \frac{1}{t + C_2}}, \; C_2 \in \mathbb{R}$$

În ec. $(3)_2$ și $(3)_3 \Rightarrow \begin{cases} x_2' = \frac{1}{t+C_2} \cdot x_3 \\ x_3' = \frac{1}{t+C_2}\, x_2 \end{cases}$ sistem liniar în x_2, x_3.

Temă: 2) și 4)