Universitatea din Bucureşti | 29 ianuarie 2021
Facultatea de Matematică şi Informatică

Calcul Numeric – Proba practică
Informatică, Anul III

INSTRUCŢIUNI:

1. Comentaţi şi explicaţi toate rezolvările trimise. Codurile necomentate/neexplicate nu se punctează.
2. Codurile vor fi salvate cu următoarea denumire `Nume_Prenume_Grupa.py` şi vor fi trimise titularului de laborator până în data de **29 ianuarie 2021, ora 14:30**.

ALGORITM (Factorizarea LL^T)

Date de intrare: $\mathrm{A} = (a_{ij})_{i,j=\overline{1,n}} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$;
Date de ieşire: $\mathrm{L} = (\ell_{ij})_{i,j=\overline{1,n}} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$;

PASUL 1: Verifică simetria şi pozitiv definirea matricei A.

PASUL 2: Iniţializează complementul Schur: $\mathrm{S} = (s_{ij})_{i,j=\overline{1,n}} \leftarrow \mathrm{A}$ şi matricea $\mathrm{L} \leftarrow \mathrm{O}_n$.

PASUL 3: Pentru $k = \overline{1, n-1}$ execută

- Determină elementele diagonale ale matricei L: $\ell_{kk} = \sqrt{s_{11}}$;
- Determină coloana k a matricei L: $\ell_{ik} \leftarrow \dfrac{s_{i-(k-1),1}}{\sqrt{s_{11}}}, \quad \forall\ i = \overline{k+1, n}$;
- Conform următoarei partiţionări a matricii S în blocuri de matrici

$$\mathrm{S} = \left(\begin{array}{c|c} \mathbf{S}_{11} & \mathbf{S}_{21}^{\mathrm{T}} \\ \hline \mathbf{S}_{21} & \mathbf{S}_{22} \end{array}\right), \quad \text{unde } \mathbf{S}_{11} = s_{11} \in \mathbb{R},\ \mathbf{S}_{21} \in \mathcal{M}_{n-k,1}(\mathbb{R}) \text{ şi } \mathbf{S}_{22} \in \mathcal{M}_{n-k,n-k}(\mathbb{R}),$$

complementul Schur $\mathrm{S} \in \mathcal{M}_{n-k+1,n-k+1}(\mathbb{R})$ îşi va reduce, la fiecare pas k, numărul de linii şi coloane cu 1 prin următoarea operaţie $\mathrm{S} \leftarrow \mathbf{S}_{22} - \dfrac{\mathbf{S}_{21}\mathbf{S}_{21}^{\mathrm{T}}}{s_{11}} \in \mathcal{M}_{n-k,n-k}(\mathbb{R})$:

$$s_{i-k,j-k} \leftarrow s_{i-k+1,j-k+1} - \frac{s_{i-k+1,1}\ s_{1,j-k+1}}{s_{1,1}}, \quad \forall\ i,j = \overline{k+1, n};$$

PASUL 4: Determină ultimul element diagonal al matricei L: $\ell_{nn} \leftarrow \sqrt{S} = \sqrt{s_{11}}$.

Ex. 1

a) Să se construiască în Python procedura **FactLLT**(A) conform algoritmului (Factorizarea LL^T). Procedura **FactLLT** returnează matricea L din descompunerea Cholesky. Să se testeze programul pentru matricea
$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 25 & 15 & -5 \\ 15 & 18 & 0 \\ -5 & 0 & 11 \end{pmatrix}$$

b) Să se rezolve sistemul Ax = b, cu b = $(1, 2, 3)^{\mathrm{T}}$ prin metoda factorizării LL^T, folosind metodele substituţiilor ascendente şi descendente pentru rezolvarea sistemelor Ly = b, respectiv $\mathrm{L^T x = y}$.

Ex. 2

(a) Creaţi funcţia `newton_raphson` care determină numeric soluţia ecuaţiei:
$$f(x) = x^3 + 2x^2 - 24x = 0\,, \tag{1}$$
prin metoda Newton-Raphson şi are ca **date de intrare**:

- funcţia care determină ecuaţia (1), f;
- derivata funcţiei care determină ecuaţia (1), df;
- punctul de start al metodei Newton-Raphson, x_0;
- toleranţa erorii specifice metodei Newton-Raphson, `eps`;

iar ca **date de ieşire**:

- soluţia numerică obţinută, $\mathtt{x_{aprox}}$;
- numărul de iteraţii necesare, `N`;

(b) Alegeţi subintervalele şi punctele de start ale metodei respectând ipotezele teoremei de convergenţă ale metodei Newton-Raphson, astfel încât şirurile aproximărilor să rămână în subintervalele selectate şi să conveargă la soluţii. Justificaţi atât alegerea subintervalelor, cât şi a valorilor iniţiale.

Aflaţi toate soluţiile ecuaţiei (1) apelând funcţia `newton_raphson` cu eroarea de aproximare `eps` $= 10^{-3}$ şi construiţi punctele obţinute pe graficul funcţiei.