Probleme rezolvate de Teoria probabilitatilor

1. O urna contine N bile de doua culori, albe si negre, identice cu exceptia culorii. Dintre acestea, a sunt albe si b sunt negre $(a, b \in \mathbb{N}^*, a+b=N)$. Se considera experimentul $\mathcal{E}$ care consta in extragerea, cu revenire, a n bile. Asadar, dupa fiecare extragere se noteaza culoarea bilei extrase si apoi se repune bila in urna.

a) Sa se determine un spatiu de selectie Ω asociat experimentului de mai inainte.

b) Asociati experimentului $\mathcal{E}$ un spatiu natural de probabilitate $(\Omega, \mathcal{K}(\Omega), P)$.

c) Relativ la experimentul $\mathcal{E}$ se considera evenimentul A : *"k dintre bilele extrase sunt de culoare alba"*. Descrieti A ca pe o submultime a spatiului de selectie Ω.

d) Calculati $P(A)$.

e) Prezentati o aplicatie in biologie a schemei de probabilitate din aceasta problema.

Caz particular: $a = m + 17$, $b = 27 - m$.

Solutie.

a) Vom asocia fiecareia dintre bilele albe o eticheta purtand numerele de la 1 la a, iar bilelor de culoare neagra cate o eticheta purtand numerele de la $a+1$ la $a+b$. Prin urmare, pentru experimentul care consta in extragerea unei singure bile din urna se poate considera drept spatiu de selectie multimea

$$\omega = \{1, ..., a, a+1, ..., a+b\}.$$

Inseamna ca experimentului $\mathcal{E}$ i se poate asocia spatiul de selectie:

$$\Omega := \underbrace{\omega \times ... \times \omega}_{\text{n factori}} = \omega^n.$$

Se observa ca multimea Ω are $(card\ \omega)^n = (a+b)^n$ elemente.

b) Intrucat Ω este o multime finita se poate lua drept camp de evenimente chiar multimea partilor spatiului de selectie. Asadar,

$$\mathcal{K}(\Omega) = \mathcal{P}(\Omega).$$

Rezulta ca multimea $\mathcal{K}(\Omega)$ a tuturor evenimentelor avute in considerare are $2^{card(\Omega)} = 2^{(a+b)^n}$ elemente. Deoarece bilele sunt identice, cu exceptia culorii, iar extragerile se efectueaza in mod aleator, se poate admite ca suntem in cazul echiprobabil. Inseamna ca toate cele $(a+b)^n$ evenimente elementare $\{(\underbrace{1, 1, ..., 1}_{\text{n termeni}})\}, (\underbrace{1, 1, ..., 2}_{\text{n termeni}})\}, ..., \{(\underbrace{a+b, ..., a+b}_{\text{n termeni}})\}$ au probabilitatile egale. Acest fapt se traduce in concluzia ca pentru probabilitatea "naturala" $P : \mathcal{K}(\Omega) \longrightarrow [0; 1]$ trebuie sa avem:

$$P(\{(\underbrace{1, 1, ..., 1}_{\text{n termeni}})\}) = ... = P(\{(\underbrace{a+b, ..., a+b}_{\text{n termeni}})\}) = \frac{1}{(a+b)^n}.$$

Deoarece pentru $B \in \mathcal{K}(\Omega)$ avem

$$B = \underset{(i_1,...,i_n)\in B}{\cup}\{(i_1,...,i_n)\},$$

deducem ca

$$P(B) = \sum_{(i_1,...,i_n)\in B} P(\{(i_1,...,i_n)\}) = \sum_{(i_1,...,i_n)\in B} \frac{1}{(a+b)^n} = \frac{|B|}{(a+b)^n},$$

unde $|B|$ reprezinta cardinalul multimii B,adica numarul de elemente pe care le are multimea B.

Tripletul $(\Omega, \mathcal{K}(\Omega), P)$ avand componentele alese mai sus reprezinta spatiul natural de probabilitate asociat experimentului $\mathcal{E}$.

c) In cazul $k \geq n+1$ este clar ca evenimentul A este imposibil si prin urmare $A = \varnothing$ (evenimentul imposibil se identifica cu multimea vida). Sa admitem ca au loc inegalitatile $0 \leq k \leq n$. Se observa ca un element $(i_1,...,i_n) \in \Omega = \{1,...,a,a+1,...,a+b\}^n$ se afla in A daca si numai daca dintre numerele naturale nenule $i_1,...,i_n$ un numar de k sunt mai mici sau cel mult egale cu a, iar restul de $n-k$ se afla in multimea $\{a+1,...,a+b\}$ (se admit repetitii !).

Asadar,

$$A = \{(i_1,...,i_n) \in \Omega \,|\text{exact } k \text{ dintre aceste numere } \in \{1,...,a\}\}.$$

d) Intrucat din multimea $\{1,...,a\}$ se pot alege k numere, cu posibilitatea ca unele dintre acestea sa fie si egale intre ele, in a^k moduri, iar din multimea $\{a+1,...,a+b\}$ se pot alege $n-k$ numere, cu posibilitatea ca unele dintre ele sa fie si egale intre ele, in b^{n-k} moduri, iar pozitiile celor k numere $\leq a$, printre cele n numere dintr-un set $(i_1,...,i_n)$ se pot alege in C_n^k moduri, deducem ca multimea A are $C_n^k a^k b^{n-k}$ elemente.

Deoarece

$$P(A) = \frac{|A|}{(a+b)^n}$$

si $|A| = C_n^k a^k b^{n-k}$ rezulta ca

$$P(A) = \frac{C_n^k a^k b^{n-k}}{(a+b)^n} = C_n^k \frac{a^k}{(a+b)^k} \frac{b^{n-k}}{(a+b)^{n-k}} = C_n^k p^k q^{n-k}, \tag{1}$$

unde am utilizat notatiile clasice:

$$p := \frac{a}{a+b}, \; q := \frac{b}{a+b}.$$

Se obtine astfel tocmai rezultatul din schema binomiala a lui Jakob Bernoulli.

Vom nota:

$$P(n;k) := C_n^k p^k q^{n-k}.$$

Pentru ca formula (1) sa contina si cazul $k \geq n+1$, caz in care $P(A) = P(\varnothing) = 0$, va fi suficient sa convenim ca, prin definitie, $C_n^k = 0$, in situatia in care $k > n$.

e) Pe baza unui numar mare de observatii s-a stabilit ca nasterea unui baiat se face cu probabilitatea $p = 0,51$, iar a unei fetite cu probabilitatea $q = 0,49$. Care este probabilitatea ca intr-o familie cu 11 copii sa fie 4 baieti (si deci 7 fete) ?

Pentru a putea raspunde la aceasta intrebare vom considera o urna cu 51 de bile albastre si 49 de bile roz si vom asimila nasterea unui copil cu extragerea, cu revenire, a unei bile din urna mentionata, iar sexul copilului va fi dat de culoarea bilei: albastru pentru un baietel si roz pentru o fetita.

In cazul concret din enuntul problemei se fac 11 extrageri succesive, cu revenire. Se observa ca se poate aplica *schema lui Bernoulli* cu $N = a + b = 51 + 49 = 100$, $n = 11$, $k = 4$ si $n - k = 11 - 4 = 7$, $p = 0,51, q = 0,49$. Conform schemei mentionate probabilitatea cautata este:

$$P(11;4) = C_{11}^{4}(0,51)^4(0,49)^7.$$

* * * * *

2. Cazul fara revenire.

O urna contine bile de doua culori, albe si negre, identice cu exceptia culorii. Dintre acestea, a sunt albe si b sunt negre ($a, b \in \mathbb{N}^*, a + b := N$). Se considera experimentul $\mathcal{E}$ care consta in extragerea, **fara revenire**, a n bile. Asadar, dupa fiecare extragere se noteaza culoarea bilei extrase, dar aceasta nu se mai repune in urna.

a) Sa se determine un spatiu de selectie Ω asociat experimentului de mai inainte.

b) Asociati experimentului $\mathcal{E}$ un spatiu natural de probabilitate $(\Omega, \mathcal{K}(\Omega), P)$.

c) Relativ la experimentul $\mathcal{E}$ se considera evenimentul A : "*α dintre bilele extrase sunt de culoare alba, iar restul de* $\beta = n - \alpha$ bile sunt de culoare neagra".
Descrieti A ca pe o submultime a spatiului de selectie Ω.

d) Calculati $P(A)$.

e) Prezentati o aplicatie in biologie a schemei de probabilitate din aceasta problema.

Caz particular: $a = m + 17$, $b = 27 - m$.

Solutie.

a) Este evident ca problema are sens, adica nu avem de-a face cu evenimente imposibile, numai daca se verifica urmatoarele inegalitati:

$$0 \le \alpha \le a,\ 0 \le \beta \le b,\ 0 \le n \le N. \tag{2}$$

Vom asocia fiecareia dintre bilele albe o eticheta purtand numerele de la 1 la a, iar bilelor de culoare neagra cate o eticheta purtand numerele de la $a + 1$ la $a + b$. Prin urmare, pentru experimentul care consta in extragerea unei singure bile din urna se poate considera drept spatiu de selectie multimea

$$\omega = \{1, ..., a, a + 1, ..., a + b\}.$$

Daca notam

$$\Sigma := \{(i_1, ..., i_n)\,|1 \le i_1, ..., i_n \le N\} = \omega^n,$$

atunci drept spatiu de selectie pentru experimentul din enunt se poate alege multimea:

$$\Omega := \Sigma \setminus \{(i_1, ..., i_n) \in \Sigma \,|\exists\, 1 \leq j < k \leq n \text{ astfel incat } i_j = i_k\}.$$

Se observa ca multimea Ω se afla in corespondenta bijectiva cu multimea de functii

$$\{f : \{1, 2, ..., n\} \longrightarrow \omega \;\mid f \;\text{ functie injectiva}\}.$$

Se stie, din liceu, de la capitolul Combinatorica, faptul ca aceasta multime are cardinalul

$$A_N^n = \frac{N!}{(N-n)!} = n! C_N^n.$$

Am tinut cont de faptul ca multimea ω are cardinalul $|\omega| = N$. Asadar,

$$|\Omega| = n! C_N^n = n! C_{a+b}^{\alpha+\beta}.$$

b) Intrucat Ω este o multime finita este recomandabil sa alegem drept camp de evenimente chiar multimea partilor spatiului de selectie. Asadar,

$$\mathcal{K}(\Omega) = \mathcal{P}(\Omega).$$

Rezulta ca multimea $\mathcal{K}(\Omega)$ are $2^{card(\Omega)} = 2^{n! C_N^n}$ elemente. Deoarece bilele sunt identice, cu exceptia culorii, iar extragerile se efectueaza in mod aleator, se poate admite ca suntem in cazul echiprobabil. In consecinta, oricare dintre evenimentele elementare ale experimentului in discutie si anume $\{(i_1, ..., i_n)\}$, unde $(i_1, ..., i_n) \in \Omega$, are aceeasi sansa de realizare. Rezulta ca

$$P(\{(i_1, ..., i_n)\}) = \frac{1}{n! C_N^n}, \;\forall\; (i_1, ..., i_n) \in \Omega.$$

Prin urmare, pentru orice $B \in \mathcal{K}(\Omega)$ vom avea

$$P(B) = \sum_{(i_1,...,i_n) \in B} \frac{1}{n! C_N^n} = \frac{|B|}{n! C_N^n},$$

unde $|B|$ reprezinta cardinalul multimii B.

Asadar tripletul $(\Omega, \mathcal{K}(\Omega), P)$ avand componentele alese mai sus reprezinta un spatiu natural de probabilitate asociat experimentului $\mathcal{E}$.

c) Se observa ca un element $(i_1, ..., i_n) \in \Omega$ se afla in A daca si numai daca dintre numerele naturale nenule $i_1, ..., i_n$, doua cate doua distincte, un numar de α sunt mai mici sau cel mult egale cu a, iar restul de $\beta = n - \alpha$ se afla in multimea $\{a + 1, ..., a + b\}$.

d) Pentru a obtine un rezultat favorabil evenimentului A trebuie sa alegem α bile albe dintre cele a bile albe existente si β bile dintre cele b bile negre existente. Cum alegerile de bile albe se pot face in C_a^α moduri, iar cele de bile negre in C_b^β moduri, rezulta ca se pot obtine $C_a^\alpha \cdot C_b^\beta$ seturi de n bile care au pe primele α locuri bile albe, iar pe ultimele $\beta = n - \alpha$ locuri bile negre. Sa retinem ca daca σ este o permutare a multimii $\{1, 2, ..., n\}$ si $(i_1, ..., i_n) \in A$ atunci si $(i_{\sigma(1)}, ..., i_{\sigma(n)}) \in A$. In consecinta, evenimentul A va avea

$$|A| = n! C_a^{\alpha} \cdot C_b^{\beta}$$

rezultate favorabile.

Prin urmare

$$P(A) = \frac{|A|}{n! C_{a+b}^{\alpha+\beta}} = \frac{C_a^{\alpha} \cdot C_b^{\beta}}{C_{a+b}^{\alpha+\beta}},$$

adica tocmai rezultatul din schema bilei fara revenire.

Vom nota

$$P(a, b; \alpha, \beta) := \frac{C_a^{\alpha} \cdot C_b^{\beta}}{C_{a+b}^{\alpha+\beta}}.$$

e) O aplicatie interesanta a acestei scheme (a bilei fara revenire) este data de posibilitatea evaluarii numarului de indivizi dintr-o anumita specie care traieste intr-un areal dat.

Determinarea numarului de peşti dintr-un lac.

Intr-un lac sunt n pesti; desigur numarul n fiind necunoscut. Ne propunem sa indicam un procedeu pentru determinarea, cu un nivel de precizie (imprecizie) acceptabil, a numarului de pesti din acel lac. Vom admite, pentru a simplifica lucrurile, ca in timpul experimentului nu au loc fluctuatii semnificative ale numarului de pesti din lac. Se incepe prin a captura un numar de n_1 pesti din lac pe care ii marcam cumva (cu o vopsea bio, o taietura dintr-o aripioara etc.) si apoi ii eliberam in lac. Dupa ce efectuam aceasta operatie in lac vor fi n_1 pesti cu marcaj si $n - n_1$ pesti nemarcati. Admitem ca dupa un timp, de exemplu doua saptamani, pestii marcati se imprastie in tot lacul si ca fiecare dintre pestii aflati acum in lac are aceeasi sansa de a fi capturat. Se efectueaza, dupa cele doua saptamani de asteptare, o noua capturare de pesti. Fie acum r numarul acestora. Printre pestii capturati a doua oara se vor afla k pesti cu marcaj si deci, $r - k$ pesti nemarcati. Daca aplicam schema bilei neintoarse rezulta ca probabilitatea ca la a doua captura exact k pesti sa fie cu marcaj si $r - k$ sa fie nemarcati este:

$$q_k(n) := \frac{C_{n_1}^{k} \cdot C_{n-n_1}^{r-k}}{C_n^r}.$$

Facem conventia ca pentru $p < q$ sa luam $C_p^q := 0$.

In cazul particular $n_1 = r = 1\ 000$ si $k = 100$ numarul pestilor diferiti prinsi in cele doua capturari va fi $n_1 + r - k = 1\ 900$; prin urmare va trebui ca $n \geq 1\ 900$. Sa observam ca, daca am alege $n = 1\ 900$, am avea

$$q_{100}(1\ 900) := \frac{C_{1000}^{100} \cdot C_{900}^{900}}{C_{1900}^{1000}} = \frac{1000!/(100! \cdot 900!)}{1900!/(900! \cdot 1000!)} = \frac{(1000!)^2}{100! \cdot 1900!} \approx 10^{-430}.$$

Intrucat aceasta probabilitate este ridicol de mica inseamna ca numarul de pesti din lac trebuie sa fie mai mare. Dar cat de mare ? Daca, de exemplu, am presupune ca $n = 1\ 000\ 000$, iarasi am obtine o probabilitate $q_{100}(1\ 000\ 000)$

extrem de mica. Aceste consideratii ne sugereaza ca alegerea cea mai rationala ar fi aceea a unui n pentru care probabilitatea $q_k(n)$ sa fie maxima. R.A. Fisher a numit aceasta alegere **metoda verosimilitatii maxime**, iar numarul n pentru care se realizeaza acest maxim se noteaza cu $\hat{n}$. Sa observam ca

$$\frac{q_k(n)}{q_k(n-1)} - 1 = \frac{C_{n_1}^k \cdot C_{n-n_1}^{r-k}}{C_n^r} \cdot \frac{C_{n-1}^r}{C_{n_1}^k \cdot C_{n-1-n_1}^{r-k}} - 1 =$$

$$= \frac{(n-n_1)(n-r)}{n(n-n_1-r+k)} - 1 = \frac{n_1 r - nk}{n(n-n_1-r+k)}.$$

Prin urmare,

$$q_k(n-1) \leq q_k(n),$$

daca $nk \leq n_1 r$, adica $n \leq n_1 r/k$ si

$$q_k(n-1) \geq q_k(n),$$

daca $nk \geq n_1 r$, adica $n_1 r/k \leq n$.

Rezulta ca probabilitatea $q_k(n)$ va fi maxima pentru $n = n_1 r/k$. Intrucat n este un numar natural se poate alege $\hat{n} = [n_1 r/k]$, unde $[a]$ reprezinta partea intreaga a numarului real a, adica $[a]$ este cel mai mare numar intreg mai mic sau cel mult egal cu a. In exemplul nostru, $\hat{n} = 1000 \times 1000/100 = 10\ 000$.

Daca am admite ca $n \leq 8\ 500$ probabilitatea ca a doua captura sa contina cel mult 100 de pesti marcati este

$$x = q_0 + ... + q_{100} \leq 0,04,$$

iar daca am presupune ca $n \geq 12\ 000$, probabilitatea ca numarul pestilor cu marcaj sa fie de cel putin 100 ar fi $\leq 0,03$. In concluzie este perfect plauzibil ca

$$8\ 500 \leq \hat{n} \leq 12\ 000.$$

3. Fie ξ si η variabile aleatoare **independente** cu repartitiile :

$$\xi \rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ \frac{m}{4m+1} & \alpha & \beta \end{pmatrix}, \ \eta \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \alpha+\beta & \alpha-\beta \end{pmatrix}.$$

a) Definiti conceptul de variabile aleatoare independente si apoi aratati cum se pot determina parametrii α si β.

b) Determinati repartitiile variabilelor aleatoare $\xi + \eta,\ \xi\eta,\ \xi^2,\ \eta^2$.

c) Calculati $M(\xi \cdot \eta)$ si $D(\xi + \eta)$.

d) Verificati egalitatile

$$M(\xi \cdot \eta) = M(\xi) \cdot M(\eta)$$

in cazul numerelor pare, respectiv

$$D(\xi + \eta) = D(\xi + \eta) + D(\xi + \eta),$$

in cazul numerelor impare.

Precizati daca rezultatul obtinut se datoreaza unei conjuncturi favorabile sau nu.

e) Deteminati functia de repartitie F_ξ a v.a. ξ, reprezentati-o grafic si apoi calculati valoarea $F_\xi((-1)^{m+7})$.

Solutie.

a) Doua v.a. ξ si η definite peste acelasi spatiu de probabilitate $(\Omega, \mathcal{K}(\Omega), P)$ se numesc independente daca si numai daca oricare ar fi numerele reale x si y avem:

$$P(\xi < x \text{ si } \eta < y) = P(\xi < x\ ) \cdot P(\eta < y).$$

In cazul in care avem de-a face cu variabile aleatoare discrete, asa cum este cazul nostru, se arata ca definitia precedenta este echivalenta cu faptul ca pentru orice numere reale x si y sa avem verificata egalitatea:

$$P(\xi = x \text{ si } \eta = y) = P(\xi = x\ ) \cdot P(\eta = y).$$

Avand in vedere definitia matricilor de repartitie asociate unor variabile aleatoare discrete va trebui ca:

$$0 \leq \alpha, \beta, \alpha+\beta, \alpha-\beta \leq 1$$

si

$$\frac{m}{4m+1} + \alpha + \beta = 1,$$
$$\alpha + \beta + \alpha - \beta = 1.$$

Din ultima egalitate deducem ca $\alpha = 1/2$. Prin urmare, din egalitatea

$$\frac{m}{4m+1} + \frac{1}{2} + \beta = 1,$$

vom obtine

$$\beta = \frac{1}{2} - \frac{m}{4m+1} = \frac{2m+1}{2(4m+1)}.$$

In concluzie, matricele de repartitie ale v.a. ξ si η vor fi:

$$\xi \rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ \frac{m}{4m+1} & \frac{1}{2} & \frac{2m+1}{2(4m+1)} \end{pmatrix}, \ \eta \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{3m+1}{4m+1} & \frac{m}{4m+1} \end{pmatrix}.$$

In continuare, vom trata in detaliu cazul $m = 1$.

Asadar,

$$\xi \rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{2} & \frac{3}{10} \end{pmatrix}, \ \eta \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{4}{5} & \frac{1}{5} \end{pmatrix}$$

b) In cazul general, in care v.a. ξ si η au maticele de repartitie

$$\xi \rightarrow \begin{pmatrix} x_1 & ... & x_i & ... & x_n \\ p_1 & ... & p_i & ... & p_n \end{pmatrix},$$

respectiv,

$$\eta \to \begin{pmatrix} y_1 & ... & y_j & ... & y_m \\ q_1 & ... & q_j & ... & q_m \end{pmatrix},$$

cu

$$x_1 < ... < x_n,\ y_1 < ... < y_m,$$

si

$$0 \leq p_1, ..., p_i, ..., p_n,\ q_1, ..., q_j, ..., q_m \leq 1,$$
$$p_1 + ... + p_n = 1,\ q_1 + ... + q_m = 1,$$

conform definitiei,

$$\xi + \eta \to \begin{pmatrix} x_1 + y_1 & ... & x_i + y_j & ... & x_n + y_m \\ r_{11} & ... & r_{ij} & ... & r_{nm} \end{pmatrix},$$

unde $r_{ij} := P(\xi = x_i \text{ si } \eta = y_j), \forall 1 \leq i \leq n,\ 1 \leq j \leq m$. Intrucat ξ si η sunt variabile aleatoare **independente**, vom avea:

$$r_{ij} = P(\xi = x_i) \cdot P(\eta = y_j) = p_i \cdot q_j.$$

Asadar,

$$\xi + \eta : \begin{pmatrix} x_1 + y_1 & ... & x_i + y_j & ... & x_n + y_m \\ p_1 q_1 & ... & p_i q_j & ... & p_n q_m \end{pmatrix}.$$

In mod absolut analog, daca ξ si η sunt v.a. **independente**, va trebui sa avem:

$$\xi \cdot \eta \to \begin{pmatrix} x_1 \cdot y_1 & ... & x_i \cdot y_j & ... & x_n \cdot y_m \\ p_1 q_1 & ... & p_i q_j & ... & p_n q_m \end{pmatrix}.$$

In cazul $\eta = \xi$, in mod evident cele doua v.a. nu pot fi independente, dar

$$r_{ij} := P(\xi = x_i \text{ si } \xi = x_j) = \begin{cases} 0 & , \text{ daca } \quad j \neq i, \\ p_i & , \text{ daca } \quad j \neq i \end{cases}.$$

Aici tinem cont ca $x_i \neq x_j$, pentru $i \neq j$, conform ipotezelor; prin urmare, in cazul $i \neq j$, vom avea

$$(\xi = x_i \text{ si } \xi = x_j) = \varnothing.$$

Asadar, repartitia v.a. ξ^2 va fi

$$\xi^2 \to \begin{pmatrix} x_1^2 & ... & x_i^2 & ... & x_n^2 \\ p_1 & ... & p_i & ... & p_n \end{pmatrix}.$$

Analog,

$$\eta^2 \to \begin{pmatrix} y_1^2 & ... & y_j^2 & ... & y_m^2 \\ q_1 & ... & q_j & ... & q_m \end{pmatrix}.$$

Prin urmare, in cazul nostru particular,

$$\xi + \eta \to \begin{pmatrix} -1+0 & -1+1 & 0+0 & 0+1 & 1+0 & 1+1 \\ \frac{1}{5} \cdot \frac{4}{5} & \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{5} & \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{5} & \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{5} & \frac{3}{10} \cdot \frac{4}{5} & \frac{3}{10} \cdot \frac{1}{5} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ \frac{4}{25} & \frac{1}{25} & \frac{4}{10} & \frac{1}{10} & \frac{12}{50} & \frac{3}{50} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 2 \\ \frac{8}{50} & \frac{22}{50} & \frac{17}{50} & \frac{3}{50} \end{pmatrix},$$

deoarece $\frac{1}{25} + \frac{4}{10} = \frac{22}{50}$ si $\frac{1}{10} + \frac{12}{50} = \frac{17}{50}$.

Apoi,

$$\xi \cdot \eta \to \left(\begin{pmatrix} (-1)\cdot 0 & (-1)\cdot 1 & 0\cdot 0 & 0\cdot 1 & 1\cdot 0 & 1\cdot 1 \\ \frac{1}{5}\cdot\frac{4}{5} & \frac{1}{5}\cdot\frac{1}{5} & \frac{1}{2}\cdot\frac{4}{5} & \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{5} & \frac{3}{10}\cdot\frac{4}{5} & \frac{3}{10}\cdot\frac{1}{5} \end{pmatrix} = \right) =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{4}{25} & \frac{1}{25} & \frac{4}{10} & \frac{1}{10} & \frac{12}{50} & \frac{3}{50} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ \frac{1}{25} & \frac{45}{50} & \frac{3}{50} \end{pmatrix},$$

deoarece $\frac{4}{25} + \frac{4}{10} + \frac{1}{10} + \frac{12}{50} = \frac{45}{50}$.

In sfarsit,

$$\xi^2 : \begin{pmatrix} (-1)^2 & 0^2 & 1^2 \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{2} & \frac{3}{10} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix},$$

$$\eta^2 : \begin{pmatrix} 0^2 & 1^2 \\ \frac{4}{5} & \frac{1}{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{4}{5} & \frac{1}{5} \end{pmatrix}.$$

Sa retinem si ca

$$(\xi+\eta)^2 \to \begin{pmatrix} (-1)^2 & 0^2 & 1^2 & 2^2 \\ \frac{8}{50} & \frac{22}{50} & \frac{17}{50} & \frac{3}{50} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 4 \\ \frac{22}{50} & \frac{25}{50} & \frac{3}{50} \end{pmatrix}$$

Prin urmare,

c)

$$M(\xi) = (-1)\cdot\frac{1}{5} + 0\cdot\frac{1}{2} + 1\cdot\frac{3}{10} = \frac{3}{10} - \frac{1}{5} = \frac{1}{10},$$

$$M(\xi^2) = 0\cdot\frac{1}{2} + 1\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

Rezulta

$$D(\xi) = M(\xi^2) - [M(\xi)]^2 = \frac{1}{2} - (\frac{1}{10})^2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{100} = \frac{49}{100}.$$

In mod analog,

$$M(\eta) = 0\cdot\frac{4}{5} + 1\cdot\frac{1}{5} = \frac{1}{5},$$

$$M(\eta^2) = 0\cdot\frac{4}{5} + 1\cdot\frac{1}{5} = \frac{1}{5},$$

$$M(\xi+\eta) = (-1)\cdot\frac{8}{50} + 0\cdot\frac{22}{50} + 1\cdot\frac{17}{50} + 2\cdot\frac{3}{50} = \frac{15}{50}$$

si

$$M[(\xi+\eta)^2] = 1\cdot\frac{25}{50} + 4\cdot\frac{3}{50} = \frac{37}{50}.$$

Asadar,

$$D(\eta) = M(\eta^2) - [M(\eta)]^2 = \frac{1}{5} - \frac{1}{25} = \frac{4}{25}.$$

In fine,

$$M(\xi \cdot \eta) = (-1) \cdot \frac{1}{25} + 0 \cdot \frac{45}{50} + 1 \cdot \frac{3}{50} = \frac{1}{50}.$$

$$D(\xi+\eta) = M[(\xi+\eta)^2] - [M(\xi+\eta)]^2 = \frac{37}{50} - (\frac{15}{50})^2 = \frac{37}{50} - \frac{9}{100} = \frac{65}{100} = \frac{13}{20}.$$

d) Avem,

$$M(\xi) \cdot M(\eta) = \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{5} = \frac{1}{50} = M(\xi \cdot \eta)$$

si

$$D(\xi) + D(\eta) = \frac{49}{100} + \frac{4}{25} = \frac{49+16}{100} = \frac{65}{100} = D(\xi+\eta).$$

In concluzie, ambele egalitati sunt verificate. Trebuie subliniat ca rezultatele nu se datoreaza vreunei conjuncturi favorabile. Ele trebuie sa aiba in mod necesar loc, intrucat variabilele aleatoare ξ si η sunt independente.

e) Daca matricea de repartitie a v.a. discrete ξ are forma

$$\xi \rightarrow \begin{pmatrix} x_1 & ... & x_i & ... & x_n \\ p_1 & ... & p_i & ... & p_n \end{pmatrix},$$

unde $x_1 < ... < x_n$ si $0 \leq p_1, ..., p_i, ..., p_n \leq 1,\ p_1 + ... + p_n = 1$, se partitioneaza axa reala intr-un numar de $n+1$ intervale disjuncte, astfel:

$$\mathbb{R} = (-\infty; x_1] \cup (x_1; x_2] \cup ... \cup (x_{n-1}; x_n] \cup (x_n; +\infty).$$

Se verifica direct, utilizand definitia functiei de repartitie ($F_\xi(x) := P(\xi < x)$, $x \in \mathbb{R}$), ca aceasta functie este constanta pe fiecare dintre cele $n+1$ intervale. Mai precis, vom avea:

$$F_\xi(x) = \begin{cases} 0 & , \quad x \leq x_1, \\ p_1 & , \quad x_1 < x \leq x_2, \\ p_1 + p_2 & , \quad x_2 < x \leq x_3, \\ .... & , \quad .... \\ p_1 + p_2 + ... + p_{n-1} & , \quad x_{n-1} < x \leq x_n, \\ 1 & , \quad x_n < x\ . \end{cases}$$

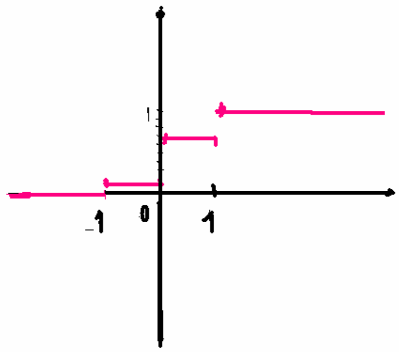
In cazul nostru concret vom obtine:

$$F_\xi(x) = \begin{cases} 0 & , \quad x \leq -1, \\ 1/5 & , \quad -1 < x \leq 0, \\ 1/5 + 1/2 = 7/10 & , \quad 0 < x \leq 1, \\ 1 & , \quad 1 < x\ . \end{cases} .$$

Vom observa ca

$$F_\xi[(-1)^{m+7}] = \begin{cases} F_\xi(-1) = 0 & , \quad \text{daca } m \text{ este par}, \\ F_\xi(1) = 7/10 & , \quad \text{daca } m \text{ este impar} \end{cases} .$$

Graficul lui F_ξ este o functie in scara, cu patru trepte, continua la stanga, avand salturi in punctele -1, 0 si 1.



Alte rezultate.

Care este cea mai probabila configuratie pentru o familie cu n copii ?

Solutie. Daca x dintre cei n copii sunt baieti atunci probabilitatea de a avea configuratia (x baieti, $(n-x)$ fete) este $C_n^x p^x(1-p)^{n-x}$. Trebuie sa determinam $x \in \mathbb{N}$, $0 \leq x \leq n$ care maximizeaza $C_n^x p^x(1-p)^{n-x}$. Atunci va trebui sa avem:

$$C_n^{x-1}p^{x-1}(1-p)^{n-(x-1)} \leq C_n^x p^x(1-p)^{n-x}$$

si

$$C_n^{x+1}p^{x+1}(1-p)^{n-(x+1)} \leq C_n^x p^x(1-p)^{n-x}.$$

Prin urmare

$$\frac{n!}{(x-1)!(n+1-x)!}p^{x-1}(1-p)^{n-(x-1)} \leq \frac{n!}{x!(n-x)!}p^x(1-p)^{n-x}$$

si

$$\frac{n!}{(x+1)!(n-x-1)!}p^{x+1}(1-p)^{n-(x+1)} \leq \frac{n!}{x!(n-x)!}p^x(1-p)^{n-x}.$$

Efectuand simplificarile necesare obtinem:

$$x \leq (n+1)p \leq x+1$$

ceea ce, in cazul $(n+1)p \notin \mathbb{Z}$, conduce la rezultatul $x = [(n+1)p]$, unde $[t]$ este partea intreaga a numarului real t.

In cazul $x = (n+1)p \in \mathbb{Z}$ rezulta

$$C_n^{x-1}p^{x-1}(1-p)^{n-(x-1)} = C_n^x p^x(1-p)^{n-x},$$

iar daca $x = (n+1)p - 1 \in \mathbb{Z}$ obtinem

$$C_n^{x+1}p^{x+1}(1-p)^{n-(x+1)} = C_n^x p^x(1-p)^{n-x}.$$

De exemplu, daca $p = 0,51$ si $n = 99$ vom avea $(n+1)p = 100 \cdot 0,51 = 51$ si

$$C_{99}^{51}p^{51}(1-p)^{48} = C_{99}^{50}p^{50}(1-p)^{49}.$$

Asadar pentru $n = 99$ si $p = 0,51$ configuratiile cu 51 baieti si 48 de fete sau 50 de baieti si 49 de fete au aceeasi probabilitate.

Este evident ca ultimele consideratii sunt pur teoretice, deoarece este greu de imaginat o familie cu 99 de copii.

Cazuri particulare. Daca $n = 2$ cel mai probabil este ca familia sa aiba $x = [3 \cdot 0,51] = 1$ baiat si $2 - 1 = 1$ fata. Daca $n = 3$ cazul cel mai frecvent este cel cu $x = [4 \cdot 0,51] = 2$ baieti si $3 - 2 = 1$ fata, iar daca $n = 11$ rezulta ca varianta cea mai probabila este aceea cu $x = [12 \cdot 0,51] = 6$ baieti si $11 - 6 = 5$ fete.

■

4. Un alt exemplu.

Fie ξ si η variabile aleatoare **independente** cu repartitiile :

$$\xi : \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{5}{12} \end{pmatrix}, \ \eta : \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

a) Calculati repartitiile variabilelor aleatoare $\xi+\eta,\ \xi\eta,\ \xi^2,\ |\eta|$.
b) Determinati $M(\xi),\ D(\xi),\ M(\eta),\ D(\eta),\ M(\xi\cdot\eta),\ D(\xi+\eta)$.

Solutie.a) Conform definitiei, cu notatiile din probleme precedenta:

$$\xi+\eta : \begin{pmatrix} x_1+y_1 & ... & x_i+y_j & ... & x_n+y_m \\ r_{11} & ... & r_{ij} & ... & r_{nm} \end{pmatrix},$$

unde $r_{ij} := P(\xi = x_i \text{ si } \eta = y_j) = P(\xi = x_i)\cdot P(\eta = y_j) = p_i \cdot q_j, \forall 1 \le i \le n$, $1 \le j \le m$, daca ξ si η sunt variabile aleatoare independente. Prin urmare, in cazul nostru particular,

$$\xi+\eta : \begin{pmatrix} 0+1 & 0+(-1) & 1+1 & 1+(-1) & 2+1 & 2+(-1) \\ \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2} & \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2} & \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2} & \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2} & \frac{5}{12}\cdot\frac{1}{2} & \frac{5}{12}\cdot\frac{1}{2} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 & 3 & 1 \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{8} & \frac{1}{8} & \frac{5}{24} & \frac{5}{24} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{8} & \frac{9}{24} & \frac{1}{8} & \frac{5}{24} \end{pmatrix},$$

deoarece $\frac{1}{6}+\frac{5}{24}=\frac{9}{24}$.

Apoi

$$\xi\cdot\eta : \begin{pmatrix} 0\cdot 1 & 0\cdot(-1) & 1\cdot 1 & 1\cdot(-1) & 2\cdot 1 & 2\cdot(-1) \\ \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2} & \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2} & \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2} & \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2} & \frac{5}{12}\cdot\frac{1}{2} & \frac{5}{12}\cdot\frac{1}{2} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & -1 & 2 & -2 \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{8} & \frac{1}{8} & \frac{5}{24} & \frac{5}{24} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & -1 & 1 & 2 \\ \frac{5}{24} & \frac{1}{6}+\frac{1}{6} & \frac{1}{8} & \frac{1}{8} & \frac{5}{24} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -2 & -1 & 0 & 1 & 2 \\ \frac{5}{24} & \frac{1}{8} & \frac{1}{3} & \frac{1}{8} & \frac{5}{24} \end{pmatrix}.$$

In sfarsit

$$\xi^2 : \begin{pmatrix} 0^2 & 1^2 & 2^2 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{5}{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 4 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{5}{12} \end{pmatrix},$$

$$|\eta| : \begin{pmatrix} 1 & |-1| \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{2}+\frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 1.$$

Prin urmare,
b)

$$M(\xi) = 0\cdot\frac{1}{3}+1\cdot\frac{1}{4}+2\cdot\frac{5}{12} = \frac{1}{4}+\frac{10}{12} = \frac{13}{12},$$

$$D(\xi) = M(\xi^2)-[M(\xi)]^2 = 0\cdot\frac{1}{3}+1\cdot\frac{1}{4}+4\cdot\frac{5}{12}-(\frac{13}{12})^2 =$$

$$= \frac{1}{4}+\frac{20}{12}-\frac{169}{144} = \frac{36+240-169}{144} = \frac{107}{144},$$

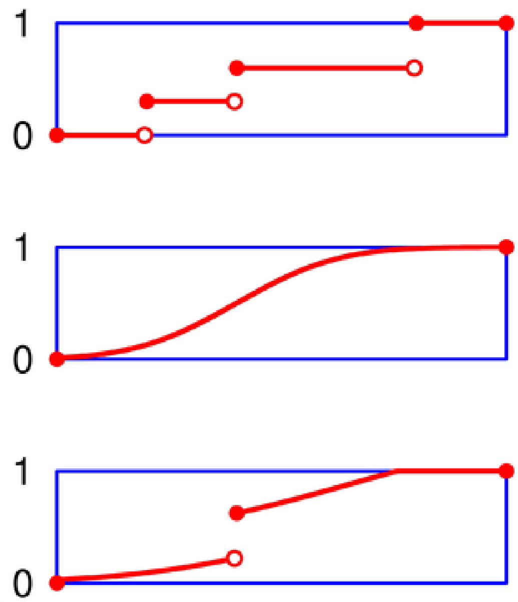
$$M(\eta) = 1 \cdot \frac{1}{2} + (-1) \cdot \frac{1}{2} = 0,$$

$$D(\eta) = M(\eta^2) - [M(\eta)]^2 = 1^2\frac{1}{2} + (-1)^2 \cdot \frac{1}{2} - 0 = 1,$$

$$M(\xi \cdot \eta) = M(\xi) \cdot M(\eta) = 0,$$

$$D(\xi + \eta) = D(\xi) + D(\eta) = \frac{107}{144} + 1 = \frac{251}{144}.$$

■



$$F_\xi(x) = \begin{cases} 0 & , \quad x \le -1, \\ 1/5 & , \quad -1 < x \le 0, \\ 7/10 & , \quad 0 < x \le 1, \\ 1 & , \quad 1 < x \ . \end{cases}$$