Seminar 4

(S4.1) Arătaţi că $\mathbb{R}$ nu este numărabilă.

Demonstraţie: Cum ştim din exerciţiul S1.4 că intervalul $(0,1)$ şi $\mathbb{R}$ sunt echipotente, este suficient să arătăm că intervalul $(0,1)$ nu este numărabil. Cu scopul reducerii la absurd, să presupunem că există o bijecţie $f : \mathbb{N} \to (0,1)$. Vom reprezenta funcţia f folosind tabelul de mai jos:

$$\begin{array}{c|c} 0 & 0, a_{0,0}a_{0,1}a_{0,2}a_{0,3}\dots \\ 1 & 0, a_{1,0}a_{1,1}a_{1,2}a_{1,3}\dots \\ 2 & 0, a_{2,0}a_{2,1}a_{2,2}a_{2,3}\dots \\ 3 & 0, a_{3,0}a_{3,1}a_{3,2}a_{3,3}\dots \\ \vdots & \vdots \end{array}$$

Aşa cum se observă, $a_{i,j}$ este a $j+1$-a zecimală a lui $f(i), i \in \mathbb{N}$. Deoarece f este surjectivă, fiecărui număr din codomeniul acesteia, $(0,1)$, îi este asociat un număr natural. Cu alte cuvinte, toate numerele reale ce compun intervalul $(0,1)$ ar trebui să se regăsească în coloana a doua a tabelului de mai sus. Vom arăta că aceasta este imposibil, construind un număr $x \in (0,1)$ ce nu se poate găsi în coloana a doua a niciunei linii din tabel. Fie $x := 0, d_0d_1d_2d_3...d_j...$, unde fiecare cifră d_j din reprezentarea zecimală a lui x este obţinută astfel:

$$d_j := \begin{cases} 2, & \text{dacă } a_{j,j} = 1 \\ 1, & \text{dacă } a_{j,j} \neq 1. \end{cases}$$

Având în vedere construcţia numărului x, prima zecimală a acestuia va fi diferită de prima zecimală a lui $f(0)$, a doua zecimală va fi diferită de a doua zecimală a lui $f(1)$, ..., a n-a zecimală a lui x va fi diferită de a n-a zecimală a lui $f(n-1)$, şi aşa mai departe. În concluzie, numărului x nu îi este asociat un număr natural a a.î. $x = f(a)$, deci f nu este o bijecţie. Contradicţie.

$\square$

(S4.2) Arătaţi, pe rând, următoarele:

(i) Dacă A este finită şi B este numărabilă, atunci $A \cup B$ este numărabilă.

(ii) Dacă I este o mulţime numărabilă şi $(A_i)_{i \in I}$ este o familie disjunctă de mulţimi numărabile, atunci $\bigcup_{i \in I} A_i$ este numărabilă.

Demonstraţie:

(i) Dacă A este finită, atunci are un număr natural de elemente n. Demonstrăm prin inducţie după acel n.

Dacă $n = 0$, atunci $A = \emptyset$ şi $A \cup B = B$, numărabilă.

Presupunem acum adevărată pentru un n şi demonstrăm pentru $n+1$. Putem deci scrie $A = \{a\} \cup A'$ unde $|A'| = n$ şi $a \notin A'$. Atunci $A' \cup B$ e numărabilă, din ipoteza de inducţie – în particular, $A' \cup B \sim \mathbb{N}^*$. Scriem $A \cup B = \{a\} \cup A' \cup B$. Dacă $a \in B$, atunci $\{a\} \cup A' \cup B = A' \cup B$, numărabilă. Dacă $a \notin B$, atunci $\{a\} \cup A' \cup B \sim \{0\} \cup \mathbb{N}^* = \mathbb{N}$.

(ii) Oferim mai întâi demonstraţia pentru $I = \mathbb{N}$.

Pentru orice $n \in \mathbb{N}$, A_n este numărabilă, deci $A_n = \{a_{n,0}, a_{n,1}, a_{n,2}, \ldots, a_{n,k}, \ldots\}$. Definim

$$f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \bigcup_{n \in N} A_n, \quad f(n,m) = a_{n,m}.$$

Se observă uşor, în felul următor, că f este bijecţie. Pentru orice $a \in A$ există un unic $n_a \in \mathbb{N}$ a.î. $a \in A_{n_a}$ (deoarece $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ este familie disjunctă), deci există un unic $m_a \in \mathbb{N}$ a.î. $a = a_{n_a, m_a}$. Inversa lui f se defineşte, aşadar, astfel:

$$f^{-1} : \bigcup_{n \in N} A_n \to \mathbb{N} \times \mathbb{N}, \quad f^{-1}(a) = (n_a, m_a).$$

Deoarece $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ este numărabilă, rezultă că $\bigcup_{n \in N} A_n$ este numărabilă.

Considerăm acum cazul general, când I este mulţime numărabilă arbitrară şi fie $F : \mathbb{N} \to I$ o bijecţie. Notăm, pentru orice $n \in \mathbb{N}$, $B_n := A_{F(n)}$. Atunci $\bigcup_{n \in N} B_n = \bigcup_{n \in N} A_{F(n)} = \bigcup_{i \in I} A_i$. Însă, din cazul particular de mai sus, rezultă că $\bigcup_{n \in N} B_n$ e numărabilă. Demonstraţia este încheiată.

$\square$

(S4.3) Fie $(A, \leq)$ o mulţime parţial ordonată şi $\emptyset \neq S \subseteq A$. Atunci:

(i) Dacă minimul lui S există, atunci acesta este unic.

(ii) Orice minim (maxim) al lui S este element minimal (maximal).

Demonstraţie:

(i) Vom presupune că există două valori minime şi vom demonstra că acestea sunt egale. Fie x minim al lui S, deci pentru orice $y \in S$, $x \leq y$. Fie x' minim al lui S, deci pentru orice $y' \in S$, $x' \leq y'$. Cum $x \leq y$ pentru orice $y \in S$, alegem $y = x'$. Rezultă că $x \leq x'$. Cum $x' \leq y'$ pentru orice $y' \in S$, alegem $y' = x$. Rezulă că $x' \leq x$. Atunci obţinem că $x' = x$, deci minimul este unic.
Se procedează asemănător pentru maxim.

(ii) Fie x minimul mulţimii S. Pentru a demonstra că x este element minimal, vom presupune că există cel puţin un element $t \in S$ a.î. $t \leq x$ şi vom arăta că $t = x$. Cum x este minim şi $t \in S$, rezultă că $x \leq t$. Prin urmare, $t = x$, deci x este element minimal al lui S.
Se procedează asemănător pentru maxim.

$\square$

(S4.4) Fie $D(n) = \{d \in \mathbf{N} | \ d|n\}$ şi $P(n) = \{d \in \mathbf{N} | \ d|n,\ d \neq 1,\ d \neq n\}$.
Demonstraţi că $(P(n), |)$ şi $(D(n), |)$ sunt mulţimi parţial ordonate. Enumeraţi elementele minimale, elementele maximale, minimul şi maximul (dacă există) pentru următoarele mulţimi: $P(12)$, $P(32)$, $P(72)$, $D(72)$.
Demonstraţie:

Definim relaţia de divizibilitate pe mulţimea $P(n)$ astfel : $R = \{(a, b) \in P(n) \times P(n) | \ a|b\}$.

Reflexivitate
Pentru orice $a \in P(n)$, $a = a \cdot 1 \Rightarrow a|a$ pentru orice $a \in P(n)$

Antisimetrie
Pentru orice $a, b \in P(n)$, dacă $(a, b) \in R$ şi $(b, a) \in R$, atunci:

$$\left.\begin{array}{r} a|b \Rightarrow \text{există } r \in \mathbb{N} \text{ a.î. } b = a \cdot r \\ b|a \Rightarrow \text{există } t \in \mathbb{N} \text{ a.î. } a = b \cdot t \end{array}\right| \Rightarrow a = a \cdot r \cdot t,\ r, t \in \mathbb{N} \Rightarrow r \cdot t = 1,\ r, t \in \mathbb{N} \Rightarrow$$

$\Rightarrow t = \frac{1}{r} \in \mathbb{N}$. Deci r este divizor al lui 1. Rezultă $r = 1 \Rightarrow t = 1 \Rightarrow a = b \cdot 1 \Rightarrow a = b$.

Tranzitivitate
Pentru orice $a, b, c \in P(n)$, dacă $(a, b) \in P(n)$ şi $(b, c) \in P(n)$, atunci:

$$\left.\begin{array}{r} a|b \Rightarrow \text{există } r \in \mathbb{N} \text{ a.î. } b = a \cdot r \\ b|c \Rightarrow \text{există } t \in \mathbb{N} \text{ a.î. } c = b \cdot t \end{array}\right| \Rightarrow c = a \cdot r \cdot t,\ r, t \in \mathbb{N} \Rightarrow a|c, \text{ unde } a, c \in P(n)$$

$\Rightarrow (a, c) \in R$.
În concluzie, R este o relaţie de ordine parţială, deci $(P(n), |)$ este mulţime parţial ordonată.
Asemător se demonstrează şi că $(D(n), |)$ este mulţime parţial ordonată.

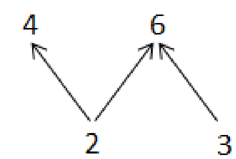
Definiţia 1. *Fie $(A, \leq)$ o mulţime parţial ordonată. Construim diagrama Hasse corespunzătoare sub forma unui graf orientat în modul următor:*

(i) vârfurile grafului reprezintă toate elementele mulţimii A.

(ii) există muchie $x \to y$ dacă $x < y$ şi nu există $z \in A$ a.î. $x < z < y$

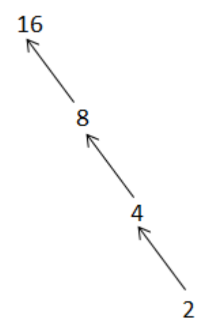
Folosim diagrama Hasse pentru a observa diferenţa dintre elementele minimale(maximale) şi minimul(maximul) unei mulţimi parţial ordonate.

$P(12) = \{2, 3, 4, 6\}$.
Observăm că pentru toate elementele $y \in S$ care se află într-o relaţie de divizibilitate, dacă $y|2$, rezultă $y = 2$, sau dacă $y|3$, rezultă $y = 3$. Deci, 2 şi 3 sunt elemente minimale.
Asemănător, pentru toate elementele $y \in S$ care se află într-o relaţie de divizibilitate, dacă $4|y$, rezultă $y = 4$, sau dacă $y|6$, rezultă $y = 6$. Deci, 4 şi 6 sunt elemente maximale.
Nu avem element minim, deoarece 2 şi 3 nu sunt într-o relaţie.
Nu avem element maxim, deoarece 4 şi 6 nu sunt într-o relaţie.
Observăm că dacă un element este minimal(maximal), nu implică faptul că el este minim(maxim).



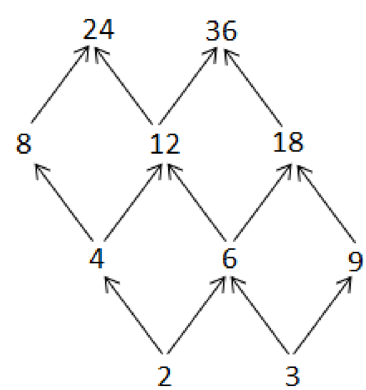
$2|4$
$2|6$
$3|6$

$P(32) = \{2, 4, 8, 16\}$.
2 este element minimal, deoarece pentru toate elementele $y \in S$ care se află într-o relaţie de divizibilitate, dacă $y|2$, rezultă $y = 2$.
Exemplu: 4 nu este maximal, deoarece pentru $y|4$, unde $y \in S$, avem $y \in \{2, 4\}$, deci nu implică $y = 4$.
2 este şi minim, deoarece pentru toate elementele $y \in S$ avem $2|y$.
16 este element maximal, deoarece pentru toate elementele $y \in S$ care se află într-o relaţie de divizibilitate, dacă $16|y$, rezultă $y = 16$.
Dar 16 este şi maxim, deoarece pentru toate elementele $y \in S$ avem $y|16$.

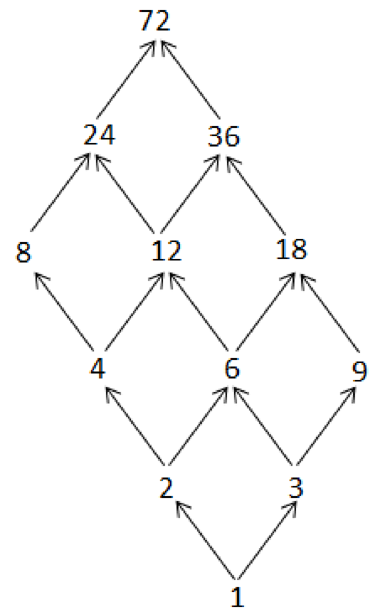


$2|4|8|16$

$P(72) = \{2, 3, 4, 6, 8, 9, 12, 18, 24, 36\}$.
2 şi 3 sunt elemente minimale.
24 şi 36 sunt elemente maximale.
Nu avem minim, deoarece 2 şi 3 nu sunt într-o relaţie de divizibilitate şi nici maxim, deoarece 24 şi 36 nu sunt într-o relaţie de divizibilitate.



$D(72) = \{1, 2, 3, 4, 6, 8, 9, 12, 18, 24, 36, 72\}$.
1 este element minimal, dar şi minim.
72 este element maximal, dar şi maxim.



$\square$