FMI, Info, Anul II, 2019-2020
Programare logică

Seminar 3
Puncte fixe. Unificatori

Teorie pentru S3.1:

O *mulţime parţial ordonată (mpo)* este o pereche $(M, \leq)$ unde $\leq \subseteq M \times M$ este o relaţie de ordine (i.e., reflexivă, antisimetrică, tranzitivă). O mulţime parţial ordonată $(C, \leq)$ este *completă (cpo)* dacă C are prim element $\bot$ ($\bot \leq x$ oricare $x \in C$) şi $\bigvee_n x_n$ există în C pentru orice lanţ $x_1 \leq x_2 \leq x_3 \leq \ldots$.

Fie $(C, \leq_C)$ o mulţime parţial ordonată. Un element $a \in C$ este *punct fix* al unei funcţii $f : C \to C$ dacă $f(a) = a$. Un element $lfp \in C$ este *cel mai mic punct fix* al unei funcţii $f : C \to C$ dacă este punct fix şi pentru orice alt punct fix $a \in C$ al lui f avem $lfp \leq_C a$.

(S3.1) Care sunt punctele fixe ale următoarelor funcţii? Indicaţi cel mai mic punct fix.

1) $f_1 : \mathcal{P}(\{1,2,3\}) \to \mathcal{P}(\{1,2,3\}),\ f_1(Y) = Y \cup \{1\}$.

2) $f_2 : \mathcal{P}(\{1,2,3\}) \to \mathcal{P}(\{1,2,3\}),\ f_2(Y) = \begin{cases} \{1\} & \text{dacă } 1 \in Y \\ \emptyset & \text{altfel} \end{cases}$.

3) $f_3 : \mathcal{P}(\{1,2,3\}) \to \mathcal{P}(\{1,2,3\}),\ f_3(Y) = \begin{cases} \emptyset & \text{dacă } 1 \in Y \\ \{1\} & \text{altfel} \end{cases}$.

Demonstraţie:

1) Se observă că punctele fixe ale lui f_1 sunt submulţimile Y ale lui $\{1,2,3\}$ care îl conţin pe 1 (dacă $1 \notin Y$, atunci $f_1(Y) = Y \cup \{1\}$ şi evident $Y \neq Y \cup \{1\}$). Deci punctele fixe ale lui f_1 sunt $\{1\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{1,2,3\}$. Evident, cel mai mic punct fix este $\{1\}$.

2) Se observă că singurele puncte fixe ale lui f_2 sunt $\emptyset$ şi $\{1\}$. Evident $\emptyset$ este cel mai mic punct fix.

3) Se observă că f_3 nu are puncte fixe.

$\square$

Teorie pentru S3.2:

Fie $(A, \leq_A)$ şi $(B, \leq_B)$ mulţimi parţial ordonate. O funcţie $f : A \to B$ este *monotonă (crescătoare)* dacă $a_1 \leq_A a_2$ implică $f(a_1) \leq_B f(a_2)$ oricare a_1, $a_2 \in A$.

O *clauză definită propoziţională* este o formulă care poate avea una din formele:

- q (clauză unitate)
- $p_1 \land \ldots \land p_k \to q$

unde $q, p_1, \ldots, p_n$ sunt variabile propoziţionale.

Fie S o mulţime de clauze definite propoziţionale. Fie A mulţimea variabilelor propoziţionale $p_1, p_2, \ldots$ care apar în S şi $Baza = \{p_i \mid p_i \in S\}$ mulţimea clauzelor unitate din S. Definim funcţia $f_S : \mathcal{P}(A) \to \mathcal{P}(A)$ prin

$$f_S(Y) = Y \cup Baza \cup \ \{a \in A \mid (s_1 \land \ldots \land s_n \to a) \text{ este în } S, s_1 \in Y, \ldots, s_n \in Y\}$$

(S3.2) Arătaţi că funcţia f_S este monotonă.

Demonstraţie: Fie $Y_1, Y_2 \subseteq A$ astfel încât $Y_1 \subseteq Y_2$. Trebuie să arătăm că $f_S(Y_1) \subseteq f_S(Y_2)$.

Fie următoarele mulţimi:

$$\begin{aligned} Z_1 &= \{a \in A \mid (s_1 \land \ldots \land s_n \to a) \text{ este în } S, s_1 \in Y_1, \ldots, s_n \in Y_1\}, \\ Z_2 &= \{a \in A \mid (s_1 \land \ldots \land s_n \to a) \text{ este în } S, s_1 \in Y_2, \ldots, s_n \in Y_2\}. \end{aligned}$$

Deci $f_S(Y_1) = Y_1 \cup Baza \cup Z_1$ şi $f_S(Y_2) = Y_2 \cup Baza \cup Z_2$. Cum $Y_1 \subseteq Y_2$, rămâne să arătăm doar că $Z_1 \subseteq Z_2$. Fie $a \in Z_1$. Atunci există $s_1 \land \ldots \land s_n \to a \in S$ şi $s_1, \ldots, s_n \in Y_1$. Deci $s_1, \ldots, s_n \in Y_2$, de unde rezultă că $a \in Z_2$. $\square$

Teorie pentru S3.3, S3.4 şi S3.5:

Fie $(A, \leq_A)$ şi $(B, \leq_B)$ mulţimi parţial ordonate complete. O funcţie $f : A \to B$ este *continuă* dacă $f(\bigvee_n a_n) = \bigvee_n f(a_n)$ pentru orice lanţ $\{a_n\}_n$ din A. Observăm că orice funcţie continuă este crescătoare.

Pentru orice mulţime de clauze definite propoziţionale S, funcţia f_S este continuă.

Teorema 1 (Knaster-Tarski)**.** *Fie* $(C, \leq)$ *o mulţime parţial ordonată completă şi* $\mathbf{F} : C \to C$ *o funcţie continuă. Atunci*

$$a = \bigvee_n \mathbf{F}^n(\bot)$$

este cel mai mic punct fix al funcţiei $\mathbf{F}$*.*

(S3.3) Calculaţi cel mai mic punct fix pentru functia f_{S_i}, $i \in \{1, 2, 3\}$, pentru următoarele mulţimi de clauze definite propoziţionale:

1) $S_1 = \{x_1 \wedge x_2 \to x_3,\ x_4 \wedge x_2 \to x_5,\ x_2,\ x_6,\ x_6 \to x_1\}$.
2) $S_2 = \{x_1 \wedge x_2 \to x_3,\ x_4 \to x_1,\ x_5 \to x_2,\ x_2 \to x_5,\ x_4\}$.
3) $S_3 = \{x_1 \to x_2,\ x_1 \wedge x_3 \to x_1,\ x_3\}$.

Demonstraţie:

1) Observăm că $A = \{x_1, x_2, \ldots, x_6\}$ şi $Baza = \{x_2, x_6\}$. Cum f_S este continuă, aplicăm Teorema Knaster-Tarski pentru a calcula cel mai mic punct fix:

   $f_{S_1}(\emptyset) = Baza = \{x_2, x_6\}$

   $f_{S_1}(\{x_2, x_6\}) = \{x_2, x_6, x_1\}$

   $f_{S_1}(\{x_2, x_6, x_1\}) = \{x_2, x_6, x_1, x_3\}$

   $f_{S_1}(\{x_2, x_6, x_1, x_3\}) = \{x_2, x_6, x_1, x_3\}$

   În concluzie, cel mai mic punct fix căutam este $\{x_2, x_6, x_1, x_3\}$.

2) Observăm că $A = \{x_1, x_2, \ldots, x_5\}$ şi $Baza = \{x_4\}$. Cum f_S este continuă, aplicăm Teorema Knaster-Tarski pentru a calcula cel mai mic punct fix:

   $f_{S_2}(\emptyset) = Baza = \{x_4\}$

   $f_{S_2}(\{x_4\}) = \{x_4, x_1\}$

   $f_{S_2}(\{x_4, x_1\}) = \{x_4, x_1\}$

   În concluzie, cel mai mic punct fix căutam este $\{x_4, x_1\}$.

3) Observăm că $A = \{x_1, x_2, x_3\}$ şi $Baza = \{x_3\}$. Cum f_S este continuă, aplicăm Teorema Knaster-Tarski pentru a calcula cel mai mic punct fix:

   $f_{S_3}(\emptyset) = Baza = \{x_3\}$

   $f_{S_3}(\{x_3\}) = \{x_3\}$

   În concluzie, cel mai mic punct fix căutam este $\{x_3\}$.

$\square$

(S3.4) Fie L limbajul logicii propoziţionale clasice şi L^* monoidul cuvintelor cu litere din L. Definiţi o funcţie $\mathbf{F} : \mathcal{P}(L^*) \to \mathcal{P}(L^*)$ astfel încât mulţimea formulelor logicii propoziţionale clasice, $Form$, este cel mai mic punct fix al lui $\mathbf{F}$.

Demonstraţie: Pentru a economisi spaţiul folosit, considerăm că operatorii logici de bază sunt $\neg, \to$, iar ceilalţi sunt derivaţi folosind convenţiile uzuale: $\varphi \wedge \psi := \neg(\varphi \to \neg\psi)$, $\varphi \vee \psi := \neg\varphi \to \psi$. Acum, să amintim limbajul logicii propoziţionale clasice, L, şi să specificăm limbajul generat de monoidul cuvintelor cu litere din L, L^*:

- $L = Var \cup \{\neg, \to\} \cup \{(,)\}$
- $L^* = \{\lambda\} \cup \{w_1 \dots w_n \mid w_i \in L\}$

Definim funcţia $\mathbf{F}$ astfel: $\mathbf{F}(X) = Var \cup \{\neg w | w \in X\} \cup \{w_1 \to w_2 | w_1, w_2 \in X\}$
Se arată uşor că funcţia este continuă. Fie Y cel mai mic punct fix al funcţiei $\mathbf{F}$. Trebuie să demonstrăm, acum, că $Y = Form$. Se observă că $Form$ este punct fix al lui $\mathbf{F}$, deci $Y \subseteq Form$ deoarece Y este cel mai mic punct fix. Rămâne de demonstrat că $Form \subseteq Y$ şi demonstrăm prin inducţie structurală (puteţi revedea slide-urile celui de-al doilea curs de Logică Matematică şi Computaţională: https://cs.unibuc.ro/ lleustean/Teaching/2019-LOGICINFO/Curs4-handout.pdf):

- $Var \subseteq Y$
- dacă $\varphi \in Y$ atunci există un k astfel încât $\varphi \in \mathbf{F}^k(\emptyset)$, deci $\neg\varphi \in \mathbf{F}^{k+1}(\emptyset)$
- dacă $\varphi, \psi \in Y$ atunci există k_1, k_2 astfel încât $\varphi \in \mathbf{F}^{k_1}(\emptyset)$ şi $\psi \in \mathbf{F}^{k_2}(\emptyset)$. Dacă $m = max(k_1, k_2)$ atunci $\varphi \to \psi \in \mathbf{F}^m(\emptyset)$.

$\square$

(S3.5) * Fie X şi Y două mulţimi nevide. O *funcţie parţială* de la X la Y este un triplet $f = (X, R_f, Y)$ unde $R_f \subseteq X \times Y$ este o relaţie funcţională. Pentru o funcţie parţială $f = (X, R_f, Y)$ vom folosi notaţia $f : X \nrightarrow Y$. Dacă notăm cu $dom(f)$ mulţimea elementelor din X pentru care funcţia este definită, atunci $f|_{dom(f)} : dom(f) \to Y$ este funcţie.
Fie $Pfn(X, Y)$ mulţimea funcţiilor parţiale de la X la Y şi $\perp : X \nrightarrow Y$ unica funcţie cu $dom(\perp) = \emptyset$ (funcţia care nu este definită în nici un punct). Definim pe $Pfn(X, Y)$ următoarea relaţie:

$$f \sqsubseteq g \text{ dacă şi numai dacă } dom(f) \subseteq dom(g) \text{ şi } g|_{dom(f)} = f_{dom(f)}$$

1) Arătaţi că $(Pfn(X,Y), \sqsubseteq)$ este mulţime parţial ordonată completă şi că $\perp$ este cel mai mic element.

2) Definim $\mathbf{F} : Pfn(\mathbb{N},\mathbb{N}) \to Pfn(\mathbb{N},\mathbb{N})$ prin

$$\mathbf{F}(g)(k) = \begin{cases} 1, & \text{dacă } k = 0, \\ k * g(k-1) & \text{dacă } k > 0 \text{ şi } (k-1) \in dom(g), \\ \text{nedefinit}, & \text{altfel} \end{cases}$$

Arătaţi că $\mathbf{F}$ este o funcţie continuă şi caracterizaţi punctul fix al lui $\mathbf{F}$.

Demonstraţie:

1) Dacă $\{g_n\}_n$ este un şir de funcţii crescătoare ($g_n \sqsubseteq g_{n+1}$), definim $g : X \nrightarrow Y$ unde $dom(g) = \bigcup dom(g_n)$ şi $g(x) = g_n(x)$ dacă$x \in dom(g_n)$ or. x or. n. Din condiţia de lanţ rezultă că g este bine definită. Se arată că $g = \bigvee g_n$.

2) Fie $g_n = \mathbf{F}^n(\perp)$. Demonstrăm prin inducţie după n că:

   $dom(g_n) = \{0, \ldots, n\}$ şi $g_n(k) = k!$ or. $k \in dom(g_n)$

   Astfel, daca g este punctul fix, adică $g = \bigvee g_n$ observăm că g este funcţia factorial.

$\square$

Teorie pentru S3.6:

O *substituţie* este o funcţie parţială de la variabile la termeni, adică $\sigma : V \to Trm_{\mathcal{L}}$. Un *unificator* pentru doi termeni t_1 şi t_2 este o substituţie θ astfel încât $\theta(t_1) = \theta(t_2)$. Un unificator ν pentru t_1 şi t_2 este un *cel mai general unificator* dacă pentru orice alt unificator ν' pentru t_1 şi t_2, există o substituţie μ astfel încât $\nu' = \nu; \mu$.

Algoritmul de unificare:

	Lista soluţie S	Lista de rezolvat R
Iniţial	$\emptyset$	$t_1 \doteq t'_1, \ldots, t_n \doteq t'_n$
SCOATE	S	$R',\, t \doteq t$
	S	R'
DESCOMPUNE	S	$R',\, f(t_1, \ldots, t_n) \doteq f(t'_1, \ldots, t'_n)$
	S	$R',\, t_1 \doteq t'_1, \ldots t_n \doteq t'_n$
REZOLVĂ	S	$R',\, x \doteq t$ sau $t \doteq x$, x nu apare în t
	$x \doteq t,\, S[x \leftarrow t]$	$R'[x \leftarrow t]$
Final	S	$\emptyset$

Algoritmul *se termină normal* dacă $R = \emptyset$ (în acest caz, în S are un unificator pentru termenii din lista iniţială R).
Algoritmul este oprit cu concluzia *inexistenţei unui unificator* dacă:

(i) În R există o ecuaţie de forma $f(t_1, \ldots, t_n) \doteq g(t'_1, \ldots, t'_k)$ cu $f \neq g$. Simbolurile de constantă se consideră simboluri de funcţie de aritate 0.

(ii) În R există o ecuaţie de forma $x \doteq t$ sau $t \doteq x$ şi variabila x apare în termenul t.

(S3.6) Considerăm

- x, y, z, u, v variabile,
- a, b, c simboluri de constantă,
- $h, g, (\_)^{-1}$ simboluri de funcţie de aritate 1,
- $f, *, +$ simboluri de funcţie de aritate 2,
- p simbol de funcţie de aritate 3.

Aplicaţi algoritmul de unificare de mai sus pentru a găsi un unificator pentru termenii:

1) $p(a, x, h(g(y)))$ şi $p(z, h(z), h(u))$

2) $f(h(a), g(x))$ şi $f(y, y)$

3) $p(a, x, g(x))$ şi $p(a, y, y)$

4) $p(x, y, z)$ şi $p(u, f(v, v), u)$

5) $f(x, f(x, x))$ şi $f(g(y), f(z, g(a)))$

6) $x + (y * y)$ şi $(y * y) + z$

7) $(x * y) * z$ şi $u * u^{-1}$

8) $x * y$ şi $u * u^{-1}$

9) $x * y$ şi $x * (y * (u * v)^{-1})$

10) $x * y$ şi $y * (u * v)^{-1}$

11) $f(g(x), x)$ şi $f(y, y)$

12) $p(x, z, z)$ şi $p(y, y, b)$

13) $p(a, u, h(x))$ şi $p(y, f(y, z), z)$

14) $f(x, f(b, x))$ şi $f(f(y, a), f(b, f(z, z)))$

15) $p(x, b, x)$ şi $p(y, y, c)$

16) $f(x, y)$, $f(h(x), x)$ şi $f(x, b)$

17) $f(x, f(x, g(y)))$, $f(u, z)$ şi $f(g(y), y)$

18) $f(f(x, y), x)$, $f(g(y), z)$ şi $f(u, h(z))$

19) $f(f(x, y), x)$, $f(v, u)$ şi $f(u, h(z))$

20) $f(f(x, y), x)$, $f(v, u)$ şi $f(u, z)$

21) $f(f(g(x), h(y)), h(z))$, $f(f(u, h(h(x))), h(y))$ şi $f(v, w)$

22) $p(x, x, z)$, $p(f(a, a), y, y)$ şi $p(f(x, a), b, z)$

23) $p(x, x, z)$, $p(f(a, a), y, y)$ şi $p(x, b, z)$

24) $p(x, x, z)$, $p(f(a, a), y, y)$ şi $p(x, f(a, a), z)$

25) $p(f(x, a), g(y), z)$, $p(f(a, a), z, u)$ şi $p(v, u, z)$

Demonstraţie:

1.

S	R	
$\emptyset$	$p(a, x, h(g(y))) = p(z, h(z), h(u))$	DESCOMPUNE
$\emptyset$	$a \doteq z, x \doteq h(z), h(g(y)) \doteq h(u)$	REZOLVĂ
$z \doteq a$	$x \doteq h(a), h(g(y)) \doteq h(u)$	REZOLVĂ
$z \doteq a, x \doteq h(a)$	$h(g(y)) \doteq h(u)$	DESCOMPUNE
$z \doteq a, x \doteq h(a)$	$g(y) \doteq u$	REZOLVĂ
$z \doteq a, x \doteq h(a), u \doteq g(y)$	$\emptyset$	

- $\nu = \{z/a,\ x/h(a),\ u/g(y)\}$ este cgu.

2.

S	R	
$\emptyset$	$f(h(a), g(x)) \doteq f(y, y)$	DESCOMPUNE
$\emptyset$	$y \doteq h(a), y \doteq g(x)$	REZOLVĂ
$y \doteq h(a)$	$g(x) \doteq h(a)$	EŞEC

- Nu există unificator.

3.

S	R	
$\emptyset$	$p(a, x, g(x)) \doteq p(a, y, y)$	DESCOMPUNE
$\emptyset$	$a \doteq a, x \doteq y, y \doteq g(x)$	SCOATE
$\emptyset$	$x \doteq y, y \doteq g(x)$	REZOLVĂ
$x \doteq y$	$y \doteq g(y)$	EŞEC

- Nu există unificator.

4.

S	R	
$\emptyset$	$p(x, y, z) \doteq p(u, f(v, v), u)$	DESCOMPUNE
$\emptyset$	$x \doteq u, y \doteq f(v, v), z \doteq u$	REZOLVĂ
$x \doteq u$	$y \doteq f(v, v), z \doteq u$	REZOLVĂ
$x \doteq u, y \doteq f(v, v)$	$z \doteq u$	REZOLVĂ
$x \doteq u, y \doteq f(v, v), z \doteq u$		

- $\nu = \{x/u,\ y/f(v, v),\ z/u)\}$ este cgu.

5.

S	R	
$\emptyset$	$f(x, f(x, x)) \doteq f(g(y), f(z, g(a)))$	DESCOMPUNE
$\emptyset$	$x \doteq g(y), f(x, x) \doteq f(z, g(a))$	REZOLVĂ
$x \doteq g(y)$	$f(g(y), g(y)) \doteq f(z, g(a))$	DESCOMPUNE
$x \doteq g(y)$	$z \doteq g(y), g(y) \doteq g(a)$	REZOLVĂ
$x \doteq g(y), z \doteq g(y)$	$g(y) \doteq g(a)$	DESCOMPUNE
$x \doteq g(y), z \doteq g(y)$	$y \doteq a$	REZOLVĂ
$x \doteq g(a), z \doteq g(a), y \doteq a$		

- $\nu = \{x/g(a),\ z/g(a),\ y/a)\}$ este cgu.

6.

S	R	
$\emptyset$	$x + (y * y) \doteq (y * y) + z$	DESCOMPUNE
$\emptyset$	$x \doteq y * y, z \doteq y * y$	REZOLVĂ
$x \doteq y * y$	$z \doteq y * y$	REZOLVĂ
$x \doteq y * y, z \doteq y * y$		

- $\nu = \{x/y * y,\ z/y * y)\}$ este cgu.

7.

S	R	
$\emptyset$	$(x * y) * z \doteq u * u^{-1}$	DESCOMPUNE
$\emptyset$	$u \doteq x * y, z \doteq u^{-1}$	REZOLVĂ
$u \doteq x * y$	$z \doteq (x * y)^{-1}$	REZOLVĂ
$u \doteq x * y, z \doteq (x * y)^{-1}$		

- $\nu = \{u/x * y,\ z/(x * y)^{-1}\}$ este cgu.

8.

S	R	
$\emptyset$	$x * y \doteq u * u^{-1}$	DESCOMPUNE
$\emptyset$	$x \doteq u, y = u^{-1}$	REZOLVĂ
$x \doteq u$	$y = u^{-1}$	REZOLVĂ
$x \doteq u, y \doteq u^{-1}$		

- $\nu = \{x/u,\ y/u^{-1}\}$ este cgu.

9.

S	R	
$\emptyset$	$x * y \doteq x * (y * (u * v)^{-1})$	DESCOMPUNE
$\emptyset$	$x \doteq x, y \doteq y * (u * v)^{-1}$	SCOATE
$\emptyset$	$y \doteq y * (u * v)^{-1}$	EŞEC

- Nu există unificator.

10.

S	R	
$\emptyset$	$x * y \doteq y * (u * v)^{-1}$	DESCOMPUNE
$\emptyset$	$x \doteq y, y \doteq (u * v)^{-1}$	REZOLVĂ
$x \doteq y$	$y \doteq (u * v)^{-1}$	REZOLVĂ
$x \doteq y, y \doteq (u * v)^{-1}$		REZOLVĂ

- $\nu = \{x/y,\ y/(u * v)^{-1}\}$ este cgu.

$\square$