**FMI, Info, Anul I**
**Logică matematică şi computaţională**

# Seminar 14

**(S14.1)** Să se arate că pentru orice formule $\varphi$, $\psi$ şi orice variabilă $x \notin FV(\varphi)$,

$$\forall x(\varphi \wedge \psi) \mathrel{\text{⫤⊨}} \varphi \wedge \forall x\psi \quad (1)$$
$$\exists x(\varphi \vee \psi) \mathrel{\text{⫤⊨}} \varphi \vee \exists x\psi \quad (2)$$
$$\forall x(\varphi \to \psi) \mathrel{\text{⫤⊨}} \varphi \to \forall x\psi \quad (3)$$
$$\exists x(\psi \to \varphi) \mathrel{\text{⫤⊨}} \forall x\psi \to \varphi \quad (4)$$

**Demonstraţie:** Fie $\mathcal{A}$ o $\mathcal{L}$-structură şi $e : V \to A$.

$\forall x(\varphi \wedge \psi) \mathrel{\text{⫤⊨}} \varphi \wedge \forall x\psi$:
$\mathcal{A} \vDash (\forall x(\varphi \wedge \psi))[e] \iff$ pentru orice $a \in A$, $\mathcal{A} \vDash (\varphi \wedge \psi)[e_{x\leftarrow a}] \iff$ pentru orice $a \in A$, $\mathcal{A} \vDash \varphi[e_{x\leftarrow a}]$ şi $\mathcal{A} \vDash \psi[e_{x\leftarrow a}] \iff$ (aplicând Propoziţia 2.24) pentru orice $a \in A$, $\mathcal{A} \vDash \varphi[e]$ şi $\mathcal{A} \vDash \psi[e_{x\leftarrow a}] \iff \mathcal{A} \vDash \varphi[e]$ şi pentru orice $a \in A$, $\mathcal{A} \vDash \psi[e_{x\leftarrow a}] \iff \mathcal{A} \vDash \varphi[e]$ şi $\mathcal{A} \vDash \forall x\psi[e]$ $\iff \mathcal{A} \vDash (\varphi \wedge \forall x\psi)[e]$.

$\exists x(\varphi \vee \psi) \mathrel{\text{⫤⊨}} \varphi \vee \exists x\psi$:
$\mathcal{A} \vDash (\exists x(\varphi \vee \psi))[e] \iff$ există $a \in A$ a.î. $\mathcal{A} \vDash (\varphi \vee \psi)[e_{x\leftarrow a}] \iff$ există $a \in A$ a.î. $\mathcal{A} \vDash \varphi[e_{x\leftarrow a}]$ sau $\mathcal{A} \vDash \psi[e_{x\leftarrow a}] \iff$ (aplicând Propoziţia 2.24) există $a \in A$ a.î. $\mathcal{A} \vDash \varphi[e]$ sau $\mathcal{A} \vDash \psi[e_{x\leftarrow a}] \iff \mathcal{A} \vDash \varphi[e]$ sau există $a \in A$ a.î. $\mathcal{A} \vDash \psi[e_{x\leftarrow a}] \iff \mathcal{A} \vDash \varphi[e]$ sau $\mathcal{A} \vDash \exists x\psi[e] \iff \mathcal{A} \vDash (\varphi \vee \exists x\psi)[e]$.

$\forall x(\varphi \to \psi) \mathrel{\text{⫤⊨}} \varphi \to \forall x\psi$:
$\mathcal{A} \vDash (\forall x(\varphi \to \psi))[e] \iff$ pentru orice $a \in A$, $\mathcal{A} \vDash (\varphi \to \psi)[e_{x\leftarrow a}] \iff$ pentru orice $a \in A$, $\mathcal{A} \not\vDash \varphi[e_{x\leftarrow a}]$ sau $\mathcal{A} \vDash \psi[e_{x\leftarrow a}] \iff$ (aplicând Propoziţia 2.24) pentru orice $a \in A$, $\mathcal{A} \not\vDash \varphi[e]$ sau $\mathcal{A} \vDash \psi[e_{x\leftarrow a}] \iff \mathcal{A} \not\vDash \varphi[e]$ sau pentru orice $a \in A$, $\mathcal{A} \vDash \psi[e_{x\leftarrow a}] \iff \mathcal{A} \not\vDash \varphi[e]$ sau $\mathcal{A} \vDash \forall x\psi[e] \iff \mathcal{A} \vDash (\varphi \to \forall x\psi)[e]$.

$\exists x(\psi \to \varphi) \mathrel{\text{⫤⊨}} \forall x\psi \to \varphi$:
$\mathcal{A} \vDash \exists x(\psi \to \varphi)[e] \iff$ există $a \in A$ a.î. $\mathcal{A} \vDash (\psi \to \varphi)[e_{x\leftarrow a}] \iff$ există $a \in A$ a.î. $\mathcal{A} \not\vDash \psi[e_{x\leftarrow a}]$ sau $\mathcal{A} \vDash \varphi[e_{x\leftarrow a}] \iff$ (aplicând Propoziţia 2.24) există $a \in A$ a.î. $\mathcal{A} \not\vDash \psi[e_{x\leftarrow a}]$ sau $\mathcal{A} \vDash \varphi[e] \iff \mathcal{A} \not\vDash \forall x\psi[e]$ sau $\mathcal{A} \vDash \varphi[e] \iff \mathcal{A} \vDash (\forall x\psi \to \varphi)[e]$.

□

**(S14.2)** Fie $\mathcal{L}$ un limbaj de ordinul I. Să se arate că:

(i) pentru orice formule $\varphi$, $\psi$ şi orice variabilă $x$,

$$\forall x(\varphi \to \psi) \to (\forall x\varphi \to \forall x\psi)$$

este validă;

(ii) pentru orice formulă $\varphi$ şi orice variabilă $x$ cu $x \notin Var(\varphi)$,

$$\varphi \to \forall x\varphi$$

este validă.

**Demonstraţie:** Fie $\mathcal{A}$ o $\mathcal{L}$-structură şi $e : V \to A$ o evaluare.

(i) Presupunem că $\mathcal{A} \vDash (\forall x(\varphi \to \psi))[e]$. Deci pentru orice $a \in A$, vom avea că are loc $\mathcal{A} \vDash (\varphi \to \psi)[e_{x\leftarrow a}]$ (*). Vrem să arătăm că $\mathcal{A} \vDash (\forall x\varphi \to \forall x\psi)[e]$. Presupunem prin absurd că nu e aşa – atunci avem că $\mathcal{A} \vDash (\forall x\varphi)[e]$ şi $\mathcal{A} \nvDash (\forall x\psi)[e]$. Deci pentru orice $a \in A$, $\mathcal{A} \vDash \varphi[e_{x\leftarrow a}]$ (**) şi există un $b \in A$ cu $\mathcal{A} \nvDash \psi[e_{x\leftarrow b}]$ (***). Luând în (*) şi (**) $a := b$, obţinem că $\mathcal{A} \vDash (\varphi \to \psi)[e_{x\leftarrow b}]$ şi $\mathcal{A} \vDash \varphi[e_{x\leftarrow b}]$, ceea ce contrazice (***).

(ii) Presupunem că $\mathcal{A} \vDash \varphi[e]$. Vrem să arătăm $\mathcal{A} \vDash (\forall x\varphi)[e]$, i.e. că pentru orice $a \in A$, $\mathcal{A} \vDash \varphi[e_{x\leftarrow a}]$. Fie $a \in A$. Clar $FV(\varphi) \subseteq Var(\varphi)$. Cum $x \notin Var(\varphi)$, $x \notin FV(\varphi)$. Avem că $e$ şi $e_{x\leftarrow a}$ diferă cel mult pe "poziţia" $x$, deci restricţionate la $FV(\varphi)$ ele devin egale. Aplicând Propoziţia 2.24, rezultă că avem într-adevăr $\mathcal{A} \vDash \varphi[e_{x\leftarrow a}]$.

□

**(S14.3)** Fie $\mathcal{L}$ un limbaj de ordinul întâi care conţine

- două simboluri de relaţii unare $R, S$ şi două simboluri de relaţii binare $P, Q$;
- un simbol de funcţie unară $f$ şi un simbol de funcţie binară $g$;
- două simboluri de constante $c, d$.

Să se găsească forme normale prenex pentru următoarele formule ale lui $\mathcal{L}$:

$$\begin{aligned}
\varphi_1 &= \forall x(f(x) = c) \land \neg\forall z(g(y,z) = d)\\
\varphi_2 &= \forall y(\forall xP(x,y) \to \exists zQ(x,z))\\
\varphi_3 &= \exists x\forall yP(x,y) \lor \neg\exists y(S(y) \to \forall zR(z))\\
\varphi_4 &= \exists z(\exists xQ(x,z) \lor \exists xR(x)) \to \neg(\neg\exists xR(x) \land \forall x\exists zQ(z,x))
\end{aligned}$$

**Demonstraţie:**

$$
\begin{aligned}
\forall x(f(x) = c) \land \neg\forall z(g(y,z) = d) \quad &\mathrel{\Dashv\vDash} \quad \forall x(f(x) = c \land \exists z\neg(g(y,z) = d) \\
&\mathrel{\Dashv\vDash} \quad \forall x\exists z(f(x) = c \land \neg(g(y,z) = d)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\forall y(\forall x P(x,y) \to \exists z Q(x,z)) \quad &\mathrel{\Dashv\vDash} \quad \forall y\exists z(\forall x P(x,y) \to Q(x,z)) \vDash \forall y\exists z(\forall u P(u,y) \to Q(x,z)) \\
&\mathrel{\Dashv\vDash} \quad \forall y\exists z\exists u(P(u,y) \to Q(x,z)).
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\exists x\forall y P(x,y) \lor \neg\exists y(S(y) \to \forall z R(z)) \quad &\mathrel{\Dashv\vDash} \quad \exists x(\forall y P(x,y) \lor \neg\exists y\forall z(S(y) \to R(z)) \\
&\mathrel{\Dashv\vDash} \quad \exists x(\forall y P(x,y) \lor \forall y\exists z\neg(S(y) \to R(z)) \\
&\mathrel{\Dashv\vDash} \quad \exists x(\forall u P(x,u) \lor \forall y\exists z\neg(S(y) \to R(z)) \\
&\mathrel{\Dashv\vDash} \quad \exists x\forall u\forall y\exists z(P(x,u) \lor \neg(S(y) \to R(z))
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\exists z(\exists x Q(x,z) \lor \exists x R(x)) \to \neg(\neg\exists x R(x) \land \forall x\exists z Q(z,x)) \quad &\mathrel{\Dashv\vDash} \\
\exists z\exists x(Q(x,z) \lor R(x)) \to (\neg\neg\exists x R(x) \lor \neg\forall x\exists z Q(z,x)) \quad &\mathrel{\Dashv\vDash} \\
\exists z\exists x(Q(x,z) \lor R(x)) \to (\exists x R(x) \lor \exists x\forall z\neg Q(z,x)) \quad &\mathrel{\Dashv\vDash} \\
\exists z\exists x(Q(x,z) \lor R(x)) \to \exists x(R(x) \lor \forall z\neg Q(z,x)) \quad &\mathrel{\Dashv\vDash} \\
\exists z\exists x(Q(x,z) \lor R(x)) \to \exists x\forall z(R(x) \lor \neg Q(z,x)) \quad &\mathrel{\Dashv\vDash} \\
\exists z\exists x(Q(x,z) \lor R(x)) \to \exists u\forall v(R(u) \lor \neg Q(v,u)) \quad &\mathrel{\Dashv\vDash} \\
\forall z\forall x\exists u\forall v((Q(x,z) \lor R(x)) \to (R(u) \lor \neg Q(v,u))) \quad &
\end{aligned}
$$

$\square$