

Seminar 5

(S5.1) Fie următoarele propoziții exprimate în limbaj natural:

- (i) Merg în parc dacă îmi termin treaba și nu apare altceva.
- (ii) Este necesar să nu plouă ca să putem observa stelele.
- (iii) Treci examenul la logică dacă faci o prezentare de calitate.
- (iv) Treci examenul la logică numai dacă înțelegi subiectul.

Transpuneți-le în formule ale limbajului formal al logicii propoziționale.

Demonstrație:

- (i) Fie φ = Merg în parc dacă îmi termin treaba și nu apare altceva. Considerăm propozițiile atomice:

$$p = \text{Merg în parc.} \quad q = \text{Îmi termin treaba.} \quad r = \text{Apare altceva.}$$

$$\text{Atunci } \varphi = (q \wedge (\neg r)) \rightarrow p.$$

- (ii) Fie ψ = Este necesar să nu plouă ca să putem observa stelele. Considerăm propozițiile atomice:

$$s = \text{Plouă.} \quad t = \text{Putem observa stelele.}$$

$$\text{Atunci } \psi = t \rightarrow \neg s.$$

- (iii) Fie χ = Treci examenul la logică dacă faci o prezentare de calitate. Considerăm propozițiile atomice:

$$u = \text{Treci examenul la logică.} \quad v = \text{Faci o prezentare de calitate.}$$

$$\text{Atunci } \chi = v \rightarrow u.$$

- (iv) Fie $\theta = \text{Treci examenul la logică numai dacă înțelegi subiectul}$. Considerăm propozițiile atomice:

$$w = \text{Treci examenul la logică}. \quad z = \text{Înțelegi subiectul}.$$

Atunci $\theta = w \rightarrow z$.

□

(S5.2) Să se arate că mulțimea $Form$, a formulelor logicii propoziționale, este numărabilă.

Demonstrație: Avem că $Expr = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} Sim^n = \{\lambda\} \cup \bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} Sim^n$. Deoarece $Sim = V \cup \{\neg, \rightarrow, (,)\}$ și V este numărabilă, obținem, din (S4.2).(i), că Sim este numărabilă. Conform (S2.5).(ii), Sim^n este numărabilă pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$. Aplicând (S4.2), rezultă că $Expr$ este numărabilă. Deoarece $V \subseteq Form$, rezultă că $Form$ este infinită (vezi Exerciții suplimentare, S.1). Însă $Form \subseteq Expr$, deci $Form$ este o submulțime infinită a unei mulțimi numărabile. Conchidem că $Form$ este numărabilă (vezi Exerciții suplimentare, S.1). □

(S5.3) Să se arate că pentru orice formulă φ , numărul parantezelor deschise care apar în φ coincide cu numărul parantezelor închise care apar în φ .

Demonstrație: Notăm, pentru orice $\varphi \in Form$, cu $l(\varphi)$ numărul parantezelor deschise și cu $r(\varphi)$ numărul parantezelor închise care apar în φ . Definim următoarea proprietate **P**: pentru orice formulă φ ,

$$\varphi \text{ are proprietatea } \mathbf{P} \text{ dacă și numai dacă } l(\varphi) = r(\varphi).$$

Demonstrăm că orice formulă φ are proprietatea **P** folosind Principiul inducției pe formule. Avem următoarele cazuri:

- Formula φ este în V , deci există $n \in \mathbb{N}$ cu $\varphi = v_n$. Atunci $l(\varphi) = l(v_n) = 0 = r(v_n) = r(\varphi)$.
- Există $\psi \in Form$ cu $\varphi = (\neg\psi)$. Presupunem că ψ satisface **P**. Obținem

$$l(\varphi) = l(\psi) + 1 = r(\psi) + 1 = r(\varphi).$$

- Există $\psi, \chi \in Form$ cu $\varphi = (\psi \rightarrow \chi)$. Presupunem că ψ, χ satisfac **P**. Obținem

$$l(\varphi) = l(\psi) + l(\chi) + 1 = r(\psi) + r(\chi) + 1 = r(\varphi).$$

□

(S5.4) Să se dea o definiție recursivă a mulțimii variabilelor unei formule.

Demonstrație: Se observă că $Var : Form \rightarrow 2^V$ satisface următoarele condiții:

$$\begin{aligned} (R0) \quad Var(v) &= \{v\} \\ (R1) \quad Var(\neg\varphi) &= Var(\varphi) \\ (R2) \quad Var(\varphi \rightarrow \psi) &= Var(\varphi) \cup Var(\psi). \end{aligned}$$

Aplicăm Principiul recursiei pe formule pentru $A = 2^V$ și pentru

$$\begin{aligned} G_0 : V &\rightarrow A, & G_0(v) &= \{v\}, \\ G_{\neg} : A &\rightarrow A, & G_{\neg}(\Gamma) &= \Gamma, \\ G_{\rightarrow} : A \times A &\rightarrow A, & G_{\rightarrow}(\Gamma, \Delta) &= \Gamma \cup \Delta. \end{aligned}$$

pentru a concluziona că Var este unica funcție care satisface (R0), (R1) și (R2). \square

(S5.5) Să se demonstreze că pentru orice x_0, x_1, x_3, x_4 din $\{0, 1\}$ avem:

- (i) $((x_0 \rightarrow x_1) \rightarrow x_0) \rightarrow x_0 = 1$;
- (ii) $(x_3 \rightarrow x_4) \rightarrow ((x_4 \rightarrow x_1) \rightarrow (x_3 \rightarrow x_1)) = 1$.

Demonstrație:

(i)

x_0	x_1	$x_0 \rightarrow x_1$	$(x_0 \rightarrow x_1) \rightarrow x_0$	$((x_0 \rightarrow x_1) \rightarrow x_0) \rightarrow x_0$
1	1	1	1	1
1	0	0	1	1
0	1	1	0	1
0	0	1	0	1

(ii) Notăm $f(x_1, x_3, x_4) := (x_3 \rightarrow x_4) \rightarrow ((x_4 \rightarrow x_1) \rightarrow (x_3 \rightarrow x_1))$.

x_1	x_3	x_4	$x_3 \rightarrow x_4$	$x_4 \rightarrow x_1$	$x_3 \rightarrow x_1$	$(x_4 \rightarrow x_1) \rightarrow (x_3 \rightarrow x_1)$	$f(x_1, x_3, x_4)$
1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	0	0	1	1	1	1
1	0	1	1	1	1	1	1
1	0	0	1	1	1	1	1
0	1	1	1	0	0	1	1
0	1	0	0	1	0	0	1
0	0	1	1	0	1	1	1
0	0	0	1	1	1	1	1

□

(S5.6) Să se arate că pentru orice $e : V \rightarrow \{0, 1\}$ și pentru orice formule φ, ψ avem:

- (i) $e^+(\varphi \vee \psi) = e^+(\varphi) \vee e^+(\psi)$;
- (ii) $e^+(\varphi \wedge \psi) = e^+(\varphi) \wedge e^+(\psi)$;
- (iii) $e^+(\varphi \leftrightarrow \psi) = e^+(\varphi) \leftrightarrow e^+(\psi)$.

Demonstrație:

(i)

$$e^+(\varphi \vee \psi) = e^+(\neg\varphi \rightarrow \psi) = e^+(\neg\varphi) \rightarrow e^+(\psi) = \neg e^+(\varphi) \rightarrow e^+(\psi) \stackrel{(*)}{=} e^+(\varphi) \vee e^+(\psi).$$

Pentru (*), demonstrăm că pentru orice $x, y \in \{0, 1\}$, avem $\neg x \rightarrow y = x \vee y$:

x	y	$\neg x$	$\neg x \rightarrow y$	$x \vee y$
1	1	0	1	1
1	0	0	1	1
0	1	1	1	1
0	0	1	0	0

(ii)

$$\begin{aligned}
 e^+(\varphi \wedge \psi) &= e^+(\neg(\varphi \rightarrow \neg\psi)) \\
 &= \neg e^+(\varphi \rightarrow \neg\psi) \\
 &= \neg(e^+(\varphi) \rightarrow e^+(\neg\psi)) \\
 &= \neg(e^+(\varphi) \rightarrow \neg e^+(\psi)) \\
 &\stackrel{(*)}{=} e^+(\varphi) \wedge e^+(\psi).
 \end{aligned}$$

Pentru (*), demonstrăm că pentru orice $x, y \in \{0, 1\}$, avem $\neg(x \rightarrow \neg y) = x \wedge y$:

x	y	$\neg y$	$x \rightarrow \neg y$	$\neg(x \rightarrow \neg y)$	$x \wedge y$
1	1	0	0	1	1
1	0	1	1	0	0
0	1	0	1	0	0
0	0	1	1	0	0

(iii)

$$\begin{aligned} e^+(\varphi \leftrightarrow \psi) &= e^+((\varphi \rightarrow \psi) \wedge (\psi \rightarrow \varphi)) \\ &\stackrel{(ii)}{=} e^+(\varphi \rightarrow \psi) \wedge e^+(\psi \rightarrow \varphi) \\ &= (e^+(\varphi) \rightarrow e^+(\psi)) \wedge (e^+(\psi) \rightarrow e^+(\varphi)) \\ &\stackrel{(*)}{=} e^+(\varphi) \leftrightarrow e^+(\psi). \end{aligned}$$

Pentru (*), demonstrăm că pentru orice $x, y \in \{0, 1\}$, avem $(x \rightarrow y) \wedge (y \rightarrow x) = x \leftrightarrow y$:

x	y	$x \rightarrow y$	$y \rightarrow x$	$(x \rightarrow y) \wedge (y \rightarrow x)$	$x \leftrightarrow y$
1	1	1	1	1	1
1	0	0	1	0	0
0	1	1	0	0	0
0	0	1	1	1	1

□