1. МЕТОД МОНТЕ-КАРЛО: КОНЦЕПТУАЛЬНЫЕ ОСНОВЫ И ПРИНЦИПЫ РЕАЛИЗАЦИИ

1.1. Назначение и принцип работы метода Монте-Карло

Метод Монте-Карло представляет собой универсальный метод, применяемый для решения задач самых различных классов: вероятностных и детерминированных, задач с дискретными и непрерывными величинами, задач моделирования и оптимизации и т.д.

Под *вероятностными* задачами будем понимать любые задачи, связанные с анализом случайных явлений (случайных событий, величин, процессов). *Детерминированные* задачи – это задачи, в постановке которых нет никаких случайных факторов.

Под задачами *с дискретными величинами* будем понимать задачи, в которых все анализируемые величины могут принимать значения только из некоторого конечного множества допустимых значений. Задачи *с непрерывными величинами* – это задачи, в которых анализируемые величины могут принимать любые значения из некоторого диапазона (этот диапазон может быть как ограниченным, так и неограниченным).

Задачи *моделирования* – это задачи, связанные с имитацией некоторого объекта (например, сложной технической системы) или явления (например, процесса развития отрасли) с целью определения их характеристик. Задачи *оптимизации* – это задачи, в которых требуется выбрать лучший вариант решения из нескольких возможных.

Большинство практических задач не могут быть однозначно отнесены к одному из приведенных выше классов, а содержат элементы, характерные для нескольких из этих классов.

В данном пособии в основном рассматривается применение метода Монте-Карло для решения задач моделирования сложных систем (производственных, технических, экономических и т.д.). Как правило, функционирование таких систем связано с разнообразными случайными факторами.

Решение задач моделирования на основе метода Монте-Карло основано на *многократной* имитации исследуемого явления, т.е. получении большого набора конкретных реализаций этого явления. Полученный набор реализаций затем обрабатывается с целью вычисления характеристик исследуемого явления, представляющих интерес в решаемой задаче.

Конкретный алгоритм решения задачи с помощью метода Монте-Карло полностью зависит от постановки задачи.

Во многих случаях задачи, решаемые методом Монте-Карло, в принципе могут быть решены другими (аналитическими) методами, т.е. путем расчетов по определенным формулам и алгоритмам. Однако применение аналитических методов, как правило, возможно только для задач небольшой размерности (с небольшим количеством исследуемых факторов). Для реальных задач применение аналитических методов нередко оказывается невозможным или нецелесообразным из-за большого объема сложных вычислений. Поэтому во многих случаях применение метода Монте-Карло оказывается единственно возможным способом решения задачи.

1.2. Случайные равномерно распределенные числа

Метод Монте-Карло основан на применении *случайных равномерно распределенных чисел* (СРРЧ). Расчет (розыгрыш) СРРЧ выполняется по специальным алгоритмам, позволяющим получать бесконечную последовательность таких чисел. Эти алгоритмы разработаны таким образом, что СРРЧ *всегда* принимают значения из диапазона *от нуля до единицы*. При этом СРРЧ обладают следующими свойствами:

- равномерность: СРРЧ могут принимать значения из любой части диапазона (0;1) с одинаковой частотой;
- независимость: любое из значений СРРЧ не зависит от предыдущих СРРЧ;
- случайность: в последовательности СРРЧ нет какой-либо закономерности.

Эти свойства СРРЧ позволяют рассматривать их как случайные величины, распределенные по равномерному закону в диапазоне от нуля до единицы.

Рассмотрим один из алгоритмов получения СРРЧ – **алгоритм Лемера**. Для этого алгоритма должны быть заданы три параметра (некоторые числа), обозначаемые как R_0, a, m. Значения этих параметров подбираются в процессе отладки алгоритма таким образом, чтобы получаемые СРРЧ соответствовали свойствам равномерности, случайности и независимости. Розыгрыш СРРЧ на основе алгоритма Лемера реализуется в следующем порядке.

1. Вычисляется произведение aR_{n-1}, где n – номер разыгрываемого СРРЧ (номер итерации алгоритма Лемера).

2. Вычисляется величина R_{n-1} как остаток от деления числа, полученного на шаге 1, на параметр m:

$$R_n = mod(aR_{n-1}/m), \tag{1.1}$$

где mod – остаток от деления.

3. Вычисляется СРРЧ:

$$R = \frac{R_n}{m}. \tag{1.2}$$

Приведем пример розыгрыша трех СРРЧ на основе алгоритма Лемера при a=3, m=7, R_0=2.

Итерация 1. Вычисляется произведение $aR_{n-1}=aR_0=3\cdot 2=6$. Вычисляется величина R_n: $R_n=R_1=mod(6/7)=6$. Вычисляется СРРЧ: R=6/7=0,8571.

Итерация 2. Вычисляется произведение $aR_{n-1}=aR_1=3\cdot 6=18$ (здесь $R_{n-1}=R_1=6$ было вычислено на предыдущей итерации). Вычисляется величина R_n: $R_n=R_2=mod(18/7)=4$. Вычисляется СРРЧ: R=4/7=0,5714.

Итерация 3. Вычисляется произведение $aR_{n-1}=aR_2=3\cdot4=12$. Вычисляется величина R_n: $R_n=R_3=mod(12/7)=5$. Вычисляется СРРЧ: $R=5/7=0{,}7143$.

Для проверки и отладки алгоритма выполняется розыгрыш большого количества СРРЧ и производится их проверка на равномерность, независимость и случайность на основе методов математической статистики. Например, для проверки соответствия СРРЧ равномерному закону распределения может применяться критерий “хи-квадрат”, рассматриваемый в п.3.2.3.

Имеются и другие алгоритмы розыгрыша СРРЧ. Одна из возможных реализаций СРРЧ приведена в прил.1.

Алгоритмы для получения СРРЧ реализованы практически во всех языках программирования и во многих прикладных программах обработки данных. Например, в языке Visual Basic для получения СРРЧ используется функция RND, в языке Delphi – функция RANDOM, в табличном процессоре EXCEL – функция СЛЧИС.

СРРЧ применяются для многократной имитации случайных явлений, характерных для объекта моделирования. Примеры имитации случайных явлений на основе СРРЧ будут рассмотрены ниже.