ПРИЛОЖЕНИЕ 3

НЕКОТОРЫЕ СВЕДЕНИЯ О ВЕРОЯТНОСТНЫХ ХАРАКТЕРИСТИКАХ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

Дискретные случайные величины задаются перечислением их возможных значений $x_1, x_2,\ldots,x_n$ и вероятностей этих значений $P_1, P_2,\ldots,P_n$. Если количество возможных значений случайной величины n достаточно велико (или бесконечно), то значения случайной величины и их вероятности задаются формулами (законом распределения случайной величины).

Для описания **непрерывных случайных величин** обычно используются две функции: функция распределения $F(x)$ и плотность распределения (или плотность вероятности) $f(x)$.

Примечание. Случайные величины обычно обозначаются заглавными буквами (например X), а их конкретные значения - такими же строчными буквами (x).

Функция распределения $F(x)$ случайной величины X имеет следующий смысл:

$$F(x) = \mathrm{P}(X<x). \qquad (П3.1)$$

Таким образом, значение функции распределения $F(x)$ от конкретного числа x – это вероятность того, что случайная величина X примет значение меньше x.

Плотность распределения $f(x)$ и функция распределения $F(x)$ связаны следующими формулами:

$$f(x) = \frac{dF(x)}{dx}; \qquad (П3.2)$$

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)dx. \qquad (П3.3)$$

Примечание. Функция распределения $F(x)$ может быть задана как для непрерывной, так и для дискретной случайной величины X. Плотность распределения обычно задается для непрерывных случайных величин.

Зная функцию распределения или плотность распределения случайной величины X, можно вычислить вероятность попадания этой величины в любой диапазон значений $[a; b)$. Для этого используются следующие формулы:

$$\mathrm{P}(a \le X < b) = F(b)-F(a), \qquad (П3.4)$$

или

$$\mathrm{P}(a \le X < b) = \int_{a}^{b} f(x)dx. \qquad (П3.5)$$

Таким образом, вероятность попадания случайной величины X в некоторый диапазон $[a; b)$ равна разности значений функции распределения на границах этого диапазона, или интегралу от плотности распределения в этом диапазоне.

Пример П3.1. В условиях примера 3.2, используя функцию распределения времени внесения добавок, найти вероятность того, что время внесения добавок составит: а) менее 9 минут; б) от 5 до 9 минут; в) более 8 минут.

Приведем еще раз функцию распределения времени внесения добавок из примера 3.2:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 3; \\ 0{,}1x - 0{,}3, & 3 \le x < 6; \\ 0{,}15x - 0{,}6, & 6 \le x < 10; \\ 0{,}05x + 0{,}4, & 10 \le x < 12; \\ 1, & x \ge 12; \end{cases}$$

а) вероятность того, что время внесения добавок составит менее 9 минут, найдем по формуле (П3.1):

$P(X<9) = F(9) = 0{,}15 \cdot 9 - 0{,}6 = 0{,}75$;

б) вероятность того, что время внесения добавок составит от 5 до 9 минут, найдем по формуле (П3.4):

$P(5 \le X<9) = F(9) - F(5) = (0{,}15 \cdot 9 - 0{,}6) - (0{,}1 \cdot 5 - 0{,}3) = 0{,}55$;

в) вероятность того, что время внесения добавок составит более 8 минут, найдем через вероятность противоположного события (т.е. того, что время внесения добавок составит менее 8 минут), используя формулу (П3.1):

$P(X \ge 8) = 1 - P(X<8) = 1 - F(8) = 1 - (0{,}15 \cdot 8 - 0{,}6) = 0{,}4$.

Пример П3.2. Найти те же вероятности, что и в примере П3.1, используя плотность распределения времени внесения добавок.

Приведем еще раз плотность распределения времени внесения добавок из примера 3.2:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x < 3; \\ 0{,}1, & 3 \le x < 6; \\ 0{,}15, & 6 \le x < 10; \\ 0{,}05, & 10 \le x < 12; \\ 0, & x \ge 12. \end{cases}$$

Для вычисления вероятностей воспользуемся формулой (П3.5):

а) вероятность того, что время внесения добавок составит менее 9 минут:

$$P(X<9) = \int_{-\infty}^{9} f(x)dx = \int_{-\infty}^{3} 0dx + \int_{3}^{6} 0{,}1dx + \int_{6}^{9} 0{,}15dx = 0{,}75;$$

б) вероятность того, что время внесения добавок составит от 5 до 9 минут:

$$P(5 \le X<9) = \int_{5}^{9} f(x)dx = \int_{5}^{6} 0{,}1dx + \int_{6}^{9} 0{,}15dx = 0{,}55;$$

в) вероятность того, что время внесения добавок составит более 8 минут:

$$P(X \ge 8) = \int_{8}^{\infty} f(x)dx = \int_{8}^{10} 0{,}15dx + \int_{10}^{12} 0{,}05dx + \int_{12}^{\infty} 0dx = 0{,}4.$$

Кроме того, в практических задачах обычно используются **числовые характеристики** случайных величин. Чаще всего требуется использовать математическое ожидание, дисперсию, стандартное отклонение, коэффициент вариации.

Математическое ожидание характеризует среднее значение случайной величины. Оно вычисляется по следующей формуле:

- для дискретных случайных величин:

$$M[X] = \sum_{i=1}^{n} x_i P_i \,, \qquad (П3.6)$$

где x_i – возможные значения дискретной случайной величины;

P_i – вероятности этих значений;

n – количество возможных значений дискретной случайной величины;

- для непрерывных случайных величин:

$$M[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x)dx \,, \qquad (П3.7)$$

где $f(x)$ – плотность распределения непрерывной случайной величины.

Дисперсия, стандартное отклонение и коэффициент вариации случайной величины характеризуют разброс ее значений, т.е. отклонение конкретных значений случайной величины от ее среднего значения (математического ожидания).

Дисперсия вычисляется следующим образом:

- для дискретных случайных величин:

$$D[X]=\sum_{i=1}^{n}(x_i-M[X])^2 P_i\,, \tag{П3.8}$$

- для непрерывных случайных величин:

$$D[X]=\int_{-\infty}^{\infty}(x-M[X])^2 f(x)dx\,, \tag{П3.9}$$

где $M[X]$ – математическое ожидание случайной величины.

На практике во многих случаях дисперсия вычисляется по следующей формуле:

$$D[X]=M[X^2]-(M[X])^2, \tag{П3.10}$$

где $M[X^2]$ –математическое ожидание квадрата случайной величины (второй начальный момент случайной величины), вычисляемое следующим образом:

- для дискретных случайных величин:

$$M[X^2]=\sum_{i=1}^{n}x_i^2 P_i\,, \tag{П3.11}$$

- для непрерывных случайных величин:

$$M[X^2]=\int_{-\infty}^{\infty}x^2\cdot f(x)dx\,. \tag{П3.12}$$

Стандартное отклонение σ и коэффициент вариации ε вычисляются по следующим формулам:

$$\sigma=\sqrt{D[X]}\,; \tag{П3.13}$$

$$\varepsilon=\frac{\sigma}{M[X]}\,. \tag{П3.14}$$

Пример П3.3. В условиях примера 2.2 найти математическое ожидание прибыли от ремонта одного изделия.

В примере 2.2 прибыль от ремонта одного изделия представляет собой дискретную случайную величину, которая может принимать значения 35 (с вероятностью 0,2), 60 (с вероятностью 0,4), 40 (с вероятностью 0,15) или 25 (с вероятностью 0,25). Для вычисления математического ожидания воспользуемся формулой (П3.6):

$M[X]$=35·0,2+60·0,4+40·0,15+25·0,25=43,25 ден.ед.

Таким образом, математическое ожидание прибыли (т.е. *средняя* прибыль) от ремонта одного изделия составляет 43,25 ден.ед.

Пример П3.4. В условиях примера 3.3 для времени внесения добавок найти математическое ожидание, дисперсию, стандартное отклонение и коэффициент вариации.

Найдем математическое ожидание по формуле (П3.7):

$$M[X]=\int_{-\infty}^{3}0\,x\,dx+\int_{3}^{6}0{,}1x\,dx+\int_{6}^{10}0{,}15x\,dx+\int_{10}^{12}0{,}05x\,dx+\int_{12}^{\infty}0x\,dx=$$

$$=0+0{,}1\frac{x^2}{2}\Bigg|_3^6+0{,}15\frac{x^2}{2}\Bigg|_6^{10}+0{,}05\frac{x^2}{2}\Bigg|_{10}^{12}+0=7{,}25 \text{ мин.}$$

Таким образом, *среднее* время внесения добавок при изготовлении пластмассовой плиты составляет 7,25 мин (хотя это время различно при изготовлении каждой конкретной плиты).

Чтобы вычислить дисперсию, воспользуемся формулой (П3.10). Для этого сначала найдем второй начальный момент по формуле (П3.12):

$$M[X^2]=\int_{-\infty}^{3}0\,x^2\,dx+\int_{3}^{6}0{,}1x^2\,dx+\int_{6}^{10}0{,}15x^2\,dx+\int_{10}^{12}0{,}05x^2\,dx+\int_{12}^{\infty}0x^2\,dx=$$

$$=0+0{,}1\frac{x^3}{3}\Bigg|_3^6+0{,}15\frac{x^3}{3}\Bigg|_6^{10}+0{,}05\frac{x^3}{3}\Bigg|_{10}^{12}+0=57{,}63 \text{ мин}^2.$$

Вычислим дисперсию по формуле (П3.10):

$D[X]$=57,63-7,25^2=5,07 мин^2.

Найдем стандартное отклонение по формуле (П3.13):

$\sigma=\sqrt{D[X]}$=2,25 мин.

Это означает, что конкретные значения времени внесения добавок отклоняются от математического ожидания (т.е. от 7,25 мин) *в среднем* на 2,25 мин.

Найдем коэффициент вариации по формуле (П3.14):

$$\varepsilon=\frac{2{,}25}{7{,}25}=0{,}31.$$

Можно сказать, что отклонения отдельных значений времени внесения добавок от математического ожидания составляют в среднем 31%.

Примечание. Для математического ожидания и дисперсии во многих случаях используются обозначения, отличающиеся от $M[X]$ и $D[X]$.