

# **БГУИР**

**Кафедра электронных вычислительных машин**

## **Лабораторная работа № 4**

Методы и процедуры принятия  
решений при многих критериях

Выполнил студент группы 950503:  
Гуринович А.В.

Проверил:  
Байдун Д.Р.

Минск 2022

## Цель работы

- Изучение методов и процедур многокритериального выбора альтернатив;
- Изучение применения методов многокритериального выбора альтернатив для анализа и выбора управленческих решений.

## Порядок выполнения работы

1. По указанию преподавателя выполнить анализ альтернатив и выбрать лучшую альтернативу одним из следующих двух способов:
2. Первый способ:
  - а) используя методику экспресс-анализа альтернатив, выбрать три лучших альтернативы;
  - б) выполнить ранжирование выбранных альтернатив, используя методику скаляризации векторных оценок;
  - в) сравнить две лучшие альтернативы, используя методику сравнительной оценки двух альтернатив по степени доминирования;
3. Второй способ:
  - а) по виду имеющихся экспертных суждений о важности критериев выбрать метод экспертного анализа, который следует использовать для определения весов критериев: метод предпочтений или метод ранга. Используя выбранный метод экспертного анализа, вычислить веса критериев;
  - б) выполнить ранжирование альтернатив на основе модифицированного алгоритма Кемени-Снелла. По результатам ранжирования отобрать три лучшие альтернативы;
  - в) выполнить анализ трех отобранных альтернатив по методу ЭЛЕКТРА. Для приведения оценок к безразмерному виду использовать алгоритм, применяемый в методике экспресс-анализа альтернатив. Изменяя пороговые значения индексов согласия и несогласия, выбрать: одну лучшую альтернативу.

## Исходные данные

### Вариант В.2 (Первый способ)

Предприятие предполагает приобрести станок. Характеристики станков, из которых делается выбор, следующие.

Станок	СТ1	СТ2	СТ3	СТ4	СТ5	СТ6
Производительность, изделий/ч	25	25	30	15	20	35
Стоимость станка, тыс. ден.ед.	140	100	200	100	100	200
Надежность	достаточно высокая	средняя	очень высокая	достаточно высокая (немного ниже, чем у СТ1 и СТ6)	средняя	достаточно высокая

Важность критериев оценивается двумя экспертами.

- По мнению первого эксперта, основной критерий - производительность, немного менее важный - надежность, еще немного менее важный - стоимость.
- По мнению второго эксперта, основной критерий - производительность, менее важный - стоимость, еще немного менее важный - надежность.

Выполнить анализ альтернатив и выбрать лучшую альтернативу следующим способом:

- а) используя методику экспресс-анализа альтернатив, выбрать три лучших альтернативы;
- б) выполнить ранжирование выбранных альтернатив, используя методику скаляризации векторных оценок;
- в) сравнить две лучшие альтернативы, используя методику сравнительной оценки двух альтернатив по степени доминирования;

## Экспресс-анализ альтернатив

Выберем множество Парето. Для этого выполним попарное сравнение альтернатив по всем критериям.

Сравним альтернативы СТ1 и СТ2. По критерию “производительность” альтернативы одинаковы; по критерию “стоимость станка” альтернатива СТ2 лучше, чем СТ1; по критерию “надежность” альтернатива СТ1 лучше, чем СТ2. Таким образом, ни одну из альтернатив исключить нельзя, так как по некоторым критериям лучше одна, а по другим – другая.

Сравним СТ1 и СТ3. По критериям “производительность” и “надежность” альтернатива СТ3 лучше, чем СТ1; по критерию “стоимость станка” СТ1 лучше, чем СТ3. Таким образом, ни одну из альтернатив исключить нельзя.

Сравним СТ1 и СТ4. По критериям “производительность” и “надежность” альтернатива СТ1 лучше, чем СТ4; по критерию “стоимость станка” СТ4 лучше, чем СТ1. Таким образом, ни одну из альтернатив исключить нельзя.

Сравним СТ1 и СТ5. По критериям “производительность” и “надежность” альтернатива СТ1 лучше, чем СТ5; по критерию “стоимость станка” СТ5 лучше, чем СТ1. Таким образом, ни одну из альтернатив исключить нельзя.

Сравним СТ1 и СТ6. По критерию “производительность” альтернатива СТ6 лучше, чем СТ1; по критерию “стоимость станка” СТ1 лучше, чем СТ6; по критерию “надежность” альтернативы одинаковы. Таким образом, ни одну из альтернатив исключить нельзя.

Сравним СТ2 и СТ3. По критериям “производительность” и “надежность” альтернатива СТ3 лучше, чем СТ2; по критерию “стоимость станка” СТ2 лучше, чем СТ3. Таким образом, ни одну из альтернатив исключить нельзя.

Сравним СТ2 и СТ4. По критерию “производительность” альтернатива СТ2 лучше, чем СТ4; по критерию “стоимость станка” альтернативы одинаковы; по критерию “надежность” альтернатива СТ4 лучше, чем СТ2. Таким образом, ни одну из альтернатив исключить нельзя.

Сравним СТ2 и СТ5. По критерию “производительность” альтернатива СТ2 лучше, чем СТ5; по критериям “стоимость станка” и “надежность” альтернативы одинаковы. Таким образом, альтернативу СТ5 следует исключить из рассмотрения, так как она явно не лучшая из имеющихся. Сравнивать с СТ5 другие альтернативы (СТ3, СТ4, СТ6) не требуется.

Сравним СТ2 и СТ6. По критериям “производительность” и “надежность” альтернатива СТ6 лучше, чем СТ2; по критерию “стоимость станка” СТ2 лучше, чем СТ6. Таким образом, ни одну из альтернатив исключить нельзя.

Сравним СТ3 и СТ4. По критериям “производительность” и “надежность” альтернатива СТ3 лучше, чем СТ4; по критерию “стоимость станка” СТ4 лучше, чем СТ3. Таким образом, ни одну из альтернатив исключить нельзя.

Сравним СТ3 и СТ6. По критерию “производительность” альтернатива СТ6 лучше, чем СТ3; по критерию “стоимость станка” альтернативы одинаковы; по критерию “надежность” СТ3 лучше, чем СТ6. Таким образом, ни одну из альтернатив исключить нельзя.

Сравним СТ4 и СТ6. По критериям “производительность” и “надежность” альтернатива СТ6 лучше, чем СТ4; по критерию “стоимость станка” СТ4 лучше, чем СТ6. Таким образом, ни одну из альтернатив исключить нельзя.

Таким образом, во множество Парето вошли альтернативы СТ1, СТ2, СТ3, СТ4, СТ6. Именно из них будет затем выбираться лучшая альтернатива.

Проведем выбор множества перспективных альтернатив на основе методики экспресс-анализа.

Оценки альтернатив по критериям приводим к безразмерному виду. Безразмерные оценки альтернатив  $P_{ij}$ ,  $i=1,...,M$ ,  $j=1,...,N$ , находятся следующим образом:

- для критериев, подлежащих максимизации, все оценки альтернатив по критерию делятся на максимальную из оценок по данному критерию:

$$P_{ij} = \frac{X_{ij}}{\max_j X_{ij}};$$

- для критериев, подлежащих минимизации, из оценок по данному критерию выбирается минимальная, и она делится на все оценки альтернатив по данному критерию:

$$P_{ij} = \frac{\min_j X_{ij}}{X_{ij}};$$

- для качественных (словесных) критериев выполняется переход к числовым оценкам по шкале Харрингтона.

Критерий “производительность” подвергается максимизации, критерий “стоимость станка” – минимизации, а критерий “надежность” – переходу к числовым оценкам по шкале Харрингтона, где оценка “очень высокая” соответствует 0,8-1, “достаточно высокая” – 0,63-0,8, “достаточно высокая (немного ниже, чем у СТ1 и СТ6)” – 0,37-0,63, “средняя” – 0,2-0,37.

Результаты сведены в таблице ниже.

Станок	СТ1	СТ2	СТ3	СТ4	СТ6
Производительность, изделий/ч	0,714	0,714	0,857	0,429	1
Стоимость станка, тыс. ден.ед.	0,714	1	0,5	1	0,5
Надежность	0,8	0,37	1	0,63	0,7

Для каждой альтернативы находится минимальная оценка, т.е. худшая из оценок данной альтернативы по всем критериям:

$$P_j = \min_i P_{ij}, \quad j = 1, \dots, N.$$

Станок	СТ1	СТ2	СТ3	СТ4	СТ6
$P_j$	0,714	0,37	0,5	0,429	0,5

Выбираем пороговое значение минимальной оценки  $P_0$ . Эта величина назначается ЛПР или экспертом из субъективных соображений. Для данной задачи назначено  $P_0=0,45$ , для того чтобы отобрать 3 лучших альтернативы.

Выбирается множество альтернатив, для которых  $P_j > P_0$ . Таким образом, для дальнейшего анализа отбираются альтернативы, у которых все оценки (в том числе худшая) не ниже предельной величины  $P_0$ .

В данной задаче отбираются альтернативы СТ1, СТ3, СТ6.

## Скаляризация векторных оценок для ранжирования

Приведем для удобства исходные данные альтернатив, прошедшие экспресс-анализ в таблице ниже.

Станок	СТ1	СТ3	СТ6
Производительность, изделий/ч	25	30	35
Стоимость станка, тыс. ден.ед.	140	200	200
Надежность	достаточно высокая	очень высокая	достаточно высокая

Оценки альтернатив приводим к безразмерному виду, как в предыдущем пункте. Критерий “надежность” подвергается переходу к числовым оценкам по шкале Харрингтона, где оценка “очень высокая” соответствует 0,8-1, “достаточно высокая” – 0,63-0,8.

Станок	СТ1	СТ3	СТ6
Производительность, изделий/ч	0,714	0,857	1
Стоимость станка, тыс. ден.ед.	0,714	0,5	0,5
Надежность	0,8	1	0,8

Определяются веса (оценки важности) критериев на основе разброса оценок. Веса определяются в следующем порядке:

- определяются средние оценки по каждому критерию:

$$\bar{P}_i = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N P_{ij}, \quad i=1, \dots, M,$$

где М - количество критериев, N - количество альтернатив,  $P_{ij}$  - безразмерные оценки.

Для данного примера:

$$\begin{aligned} P_1 &= (0,714 + 0,857 + 1) / 3 = 0,857; \\ P_2 &= (0,714 + 0,5 + 0,5) / 3 = 0,571; \\ P_3 &= (0,8 + 1 + 0,8) / 3 = 0,867. \end{aligned}$$

- находятся величины разброса по каждому критерию:

$$R_i = \frac{1}{N \cdot \bar{P}_i} \sum_{j=1}^N |P_{ij} - \bar{P}_i|, \quad i=1, \dots, M.$$

Для данного варианта:

$$\begin{aligned} R_1 &= \frac{|0,714 - 0,857| + |0,857 - 0,857| + |1 - 0,857|}{3 \cdot 0,857} = 0,111; \\ R_2 &= \frac{|0,714 - 0,571| + |0,5 - 0,571| + |0,5 - 0,571|}{3 \cdot 0,83} = 0,167; \\ R_3 &= \frac{|0,8 - 0,867| + |1 - 0,867| + |0,8 - 0,867|}{3 \cdot 0,867} = 0,103. \end{aligned}$$

- находится сумма величин разброса:

$$R = \sum_{i=1}^M R_i.$$

Для данного примера:

$$R = 0,111 + 0,167 + 0,103 = 0,38;$$

- находятся веса критериев, отражающие разброс оценок:

$$W_i = R_i / R, \quad i=1, \dots, M.$$

Для данного примера:

$$\begin{aligned} W_1 &= 0,111 / 0,38 = 0,292; \\ W_2 &= 0,167 / 0,38 = 0,438; \\ W_3 &= 0,103 / 0,38 = 0,27. \end{aligned}$$

Чем больше разброс (различие) в оценках альтернатив по критерию, тем больше вес этого критерия. Таким образом, критерии, по которым оценки альтернатив существенно различаются, считаются более важными. Если оценки альтернатив по какому-либо критерию очень близки, то его вес будет небольшим, так как сравнение альтернатив при близких оценках не имеет смысла.

Находим взвешенные оценки альтернатив (путем деления весов критериев на оценки по соответствующим критериям):

$$E_{ij} = W_i / P_{ij}, i = 1, \dots, M, j = 1, \dots, N.$$

Взвешенные оценки для данного примера приведены в таблице ниже.

Станок	СТ1	СТ3	СТ6
Производительность, изделий/ч	0,409	0,341	0,292
Стоимость станка, тыс. ден.ед.	0,613	0,876	0,876
Надежность	0,337	0,27	0,337

Чем большие значения принимают безразмерные оценки  $P_{ij}$ , тем меньше значения взвешенных оценок. Таким образом, чем меньше взвешенные оценки, тем лучше альтернатива.

Определяются комплексные оценки альтернатив (суммы взвешенных оценок):

$$E_j = \sum_{i=1}^M E_{ij}, \quad j=1, \dots, N.$$

Для данного примера:

$E_1 = 0,409 + 0,613 + 0,337 = 1,36$  (комплексная оценка альтернативы СТ1);

$E_2 = 0,341 + 0,876 + 0,27 = 1,487$  (СТ3);

$E_3 = 0,292 + 0,87 + 0,337 = 1,506$  (СТ6).

Чем меньше комплексная оценка, тем лучше альтернатива. Таким образом, в данном примере лучшим является вариант станка – СТ1; хуже вариант – СТ3, еще несколько хуже – СТ6.

Для дальнейших манипуляций отбираются альтернативы СТ1 и СТ3.

## Сравнительная оценка двух альтернатив по степени доминирования

Оценки альтернатив приводим к числовой форме. Критерий “надежность” подвергается переходу к числовым оценкам по шкале Харрингтона, где оценка “очень высокая” соответствует 0,8 - 1, “достаточно высокая” – 0,63 - 0,8. Таблица оценок альтернатив представлена ниже.

Станок	СТ1	СТ3
Производительность, изделий/ч	25	30
Стоимость станка, тыс. ден.ед.	140	200
Надежность	0,8	1

Если при сравнении альтернатив по какому-либо критерию они имеют одинаковые оценки, то такой критерий не учитывается. В данной задаче таких критериев нет.

Выполняем ранжирование критериев по важности: наиболее важный критерий получает ранг 1, следующий по важности - 2, и т.д. Если какие-либо критерии близки по важности, им рекомендуется назначать одинаковые ранги. Обозначим ранги как  $R_i$ ,  $i=1,...,M$ , где  $M$  - количество критериев.

В задаче у нас 2 эксперта. Используя метод предпочтений оцениваем важность каждого критерия, чтобы на основе этих оценок проранжировать критерии. A1 – производительность, A2 – стоимость станка, A3 – надежность.

Матрица экспертных оценок для метода предпочтений:

Эксперты	Альтернативы		
	A1	A2	A3
1	1	3	2
2	1	2	3

Преобразованная матрица экспертных оценок для метода предпочтений:

Эксперты	Альтернативы		
	A1	A2	A3
1	2	0	1
2	2	1	0

Находим суммы преобразованных оценок по каждой из альтернатив:

$$C1=2+2=4;$$

$$C2=0+1=1;$$

$$C3=1+0=1.$$

Сумма всех оценок в данном примере:

$$C = 4+1+1 = 6.$$

Веса альтернатив равняются:

$$V1 = 4/6 = 0,667;$$

$$V2 = 1/6 = 0,167;$$

$$V3 = 1/6 = 0,167.$$

Таким образом, критерий “производительность” (A1) получает ранг равный 1, а критерии “стоимость станка” (A2) и “надежность” (A3) ранг 2.

Выполняется переход от рангов к весам критериев. Веса находятся так: из всех рангов выбирается максимальный (он равен 2), к нему прибавляется 1, и из полученного числа вычитаются ранги:

$$V_i = \max_i(R_i) + 1 - R_i,$$



$$l=1,\dots,M.$$

Таким образом, чем важнее критерий, тем больше его вес.  
Для данной задачи веса критериев следующие:

$$\begin{aligned}V_1 &= 2 + 1 - 1 = 2; \\V_2 &= 2 + 1 - 2 = 1; \\V_3 &= 2 + 1 - 2 = 1.\end{aligned}$$

Находим отношения оценок альтернатив (степени доминирования) путем деления большей оценки по каждому критерию на меньшую:

$$S_i = \max(X_{i1}, X_{i2}) / \min(X_{i1}, X_{i2}), i = 1, \dots, M,$$

где  $X_{i1}$ ,  $X_{i2}$  - оценки двух сравниваемых альтернатив по  $i$ -му критерию.  
Для данной задачи:

$$\begin{aligned}S_1 &= 30 / 25 = 1,2; \\S_2 &= 200 / 140 = 1,429; \\S_3 &= 1 / 0,8 = 1,25.\end{aligned}$$

Находим скорректированные степени доминирования альтернатив путем возведения степеней доминирования в степени, равные весам критериев:

$$C_i = S_i^{V_i},$$

$$l=1,\dots,M.$$

Таким образом учитываем важность критериев: чем больше вес критерия, тем больше соответствующая степень доминирования будет влиять на окончательную оценку.

Для данной задачи:

$$\begin{aligned}C_1 &= 1,2^2 = 1,44; \\C_2 &= 1,429^1 = 1,429; \\C_3 &= 1,25^1 = 1,251.\end{aligned}$$

Для каждой из сравниваемых альтернатив находится оценка ее доминирования над другой альтернативой. Эта оценка вычисляется как произведение скорректированных степеней доминирования по всем критериям, по которым данная альтернатива лучше другой.

В данном случае станок СТ1 лучше станка СТ3 по критерию "стоимость". Оценка доминирования станка СТ1 над СТ3 находится следующим образом:

$$D_1=1,429.$$

Станок СТ3 лучше, чем станок СТ1, по критериям "производительность" и "надежность". Оценка доминирования СТ3 над СТ1:

$$D_2=1,44 \cdot 1,25=1,8.$$

Находим обобщенная оценка доминирования:

$$D = D1 / D2.$$

Если  $D > 1$ , то первая альтернатива (оценка которой указана в числителе) лучше второй; если  $D < 1$ , то вторая альтернатива превосходит первую. В данном примере:

$$D = 1,429 / 1,8 = 0,794.$$

Таким образом, станок СТ3 лучше, чем СТ1.