

ПРИНЯТИЕ РЕШЕНИЙ В УСЛОВИЯХ РИСКА И НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ НА ОСНОВЕ МЕТОДОВ ИГРОВОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

1.1 Понятия риска и неопределенности

Во многих случаях результат принятия решения зависит не только от самого решения, но и от некоторых *внешних условий*. Под внешними условиями понимаются любые факторы, на которые невозможно влиять (или возможность такого влияния ограничена): спрос на продукцию, действия конкурентов, природно-климатические факторы и т.д. Так как заранее точно неизвестны условия реализации решения, не могут быть заранее известны и его результаты: прибыль, затраты, сроки реализации решения и т.д. Методы, применяемые для принятия решений в таких задачах, называются методами принятия решения в условиях риска и неопределенности.

Под *неопределенностью* понимается неполнота информации о внешних условиях, влияющих на результат принимаемого решения. Под *риском* понимается возможность каких-либо неблагоприятных последствий принятого решения: потери ресурсов, недополучения прибыли, возникновения дополнительных расходов, несвоевременного выполнения работ и т.д.

Задачи, связанные с принятием решений в условиях риска и неопределенности, возникают, например, при планировании производства. Результат принятого решения (например, прибыль от выпуска продукции) зависит не только от действий предприятия (т.е. от вида выпускаемой продукции, объема производства, качества продукции и т.д.), но и от внешних факторов (например, от спроса на продукцию, от наличия на рынке аналогичных видов продукции и т.д.). Очевидно, что внешние условия не могут быть точно известны заранее, и предприятие не может существенно влиять на них.

По имеющейся информации о внешних условиях задачи, связанные с принятием решений в условиях риска и неопределенности, можно разделить на следующие виды:

- задачи, в которых известны вероятности внешних условий;
- задачи, в которых вероятности внешних условий неизвестны (о внешних условиях есть лишь общие предположения);
- задачи, в которых внешние условия представляют собой действия сознательного противника (например, конкурирующего предприятия).

Примечание – Для задач принятия решений при известных вероятностях внешних условий часто применяется название “задачи принятия решений в условиях риска”, а при неизвестных внешних условиях – “задачи принятия решений в условиях неопределенности”

Имеется большое количество постановок задач, связанных с принятием решений в условиях риска и неопределенности, и методов их решения. Классификация методов решения таких задач приведена в таблице 1.

Таблица 1

Классы методов	Описание	Применение
Экспертные	Решение принимается на основе экспертных оценок	Задачи с минимальным объемом информации о внешних условиях, неформализуемые задачи
Игровые	Решение применяется на основе методов теории игр	Задачи, в которых имеется возможность для каждого варианта решения оценить его возможные последствия в различных вариантах внешних условий
Статистические	Решение принимается на основе анализа результатов принятия аналогичных решений в прошлом	Задачи, решаемые многократно
Аналитические	Решение принимается путем расчетов на основе каких-либо математических методов (например, методов линейного или нелинейного программирования, теории вероятностей и т.д.)	Задачи, для которых возможно построение достаточно полной математической модели
Методы на основе деревьев решений	Решение принимается на основе описания решаемой задачи в виде дерева решений – графа, вершины которого обозначают принимаемые решения и их результаты	Задачи, в которых для каждого варианта решения можно указать все его возможные результаты, а также вероятности этих результатов
Методы на основе зон риска	Решение принимается на основе выявления диапазонов возможных убытков и их вероятностей	Задачи, для которых имеется возможность указать диапазоны допустимого, нежелательного и недопустимого риска
Имитационные методы	Решение принимается по результатам моделирования возможных решений и внешних условий (обычно – на	Наиболее сложные задачи

	основе метода Монте-Карло)	
--	----------------------------	--

В данном пособии рассматривается принятие решений в условиях риска и неопределенности на основе методов *игрового программирования*.

1.2 Постановка задачи игрового программирования

Общая постановка задачи, решаемой методами игрового программирования, может быть сформулирована следующим образом. Имеется M возможных решений (альтернатив): A_1, A_2, \dots, A_M . Известно, что каждое из решений может быть реализовано в одном из N вариантов внешних условий: B_1, B_2, \dots, B_N . Для каждого из решений известны его последствия (выигрыши стороны, принимающей решение) в каждом из вариантов внешних условий: E_{ij} , $i=1, \dots, M$, $j=1, \dots, N$. Эти выигрыши можно свести в таблицу, называемую матрицей выигрышей (или платежной матрицей). Такая матрица представляет собой математическую модель задачи. Общий вид матрицы выигрышей показан в таблице 2.

Метод построения матрицы выигрышей полностью зависит от конкретных условий задачи.

Требуется выбрать наиболее эффективный вариант *решения*, т.е. одно из решений A_1, A_2, \dots, A_M или их комбинацию.

Таблица 2

	B_1	B_2	\dots	B_N
A_1	E_{11}	E_{12}	\dots	E_{1N}
A_2	E_{21}	E_{22}	\dots	E_{2N}
\dots	\dots	\dots	\dots	\dots
A_M	E_{M1}	E_{M2}	\dots	E_{MN}

Примечание – В матрице выигрышей могут быть отрицательные элементы, соответствующие убыткам.

Можно выделить следующие основные виды задач игрового программирования:

- игры с сознательным противником. В этом случае внешние условия B_1, B_2, \dots, B_N – это действия сознательного противника, т.е. стороны, принимающей рациональные решения с целью максимизации своего выигрыша (или минимизации проигрыша). Элементы матрицы выигрышей E_{ij} , как правило – выигрыши одной из сторон и проигрыши другой. Существуют и более сложные виды игр с сознательным противником, например, игры с ненулевой суммой (задачи, где выигрыш одной из сторон не равен проигрышу другой), многосторонние игры (с участием более чем двух сторон), и т.д.;

- игры с природой. В этом случае внешние условия B_1, B_2, \dots, B_N – это состояния внешней среды, например, погодные условия, покупательский спрос на товар и т.д. Внешние условия могут оказаться как благоприятными,

так и неблагоприятными для стороны, принимающей решение. Внешние условия не могут быть точно известны заранее. В некоторых случаях (но не всегда) могут быть известны вероятности этих условий. Элементы матрицы выигрышей E_{ij} – выигрыши (или проигрыши) стороны, принимающей решения A_1, A_2, \dots, A_M .

В данном пособии рассматриваются задачи, представляющие собой игры с природой.

Методы решения задач игрового программирования существенно различаются в зависимости от того, что должно представлять собой решение: одно из решений A_1, A_2, \dots, A_M или некоторую комбинацию этих решений.

1.3 Выбор одного из возможных решений в условиях риска и неопределенности

Задачи, в которых требуется выбрать только одно из возможных решений, рассмотрим на следующем примере.

Пример 1 – Крупная компания предполагает вложить некоторую сумму денежных средств в покупку пакета акций одного из трех предприятий (П1, П2, П3). Прибыль, которую получит компания от покупки акций, не может быть точно известна заранее, так как она зависит от того, как будет изменяться стоимость этих акций. Возможные величины прибыли компании от покупки акций (в млн ден.ед.) приведены в таблице 3.

Таблица 3

Пакет акций	Изменение стоимости акций		
	Рост	Стабильное состояние	Снижение
П1	10	6	–7
П2	6	4	–3
П3	8	3	–2

Величины в таблице обозначают следующее: например, если компания приобретет пакет акций предприятия П1, и их стоимость будет расти, то прибыль компании составит 10 млн ден.ед. Если стоимость акций предприятия П1 будет оставаться стабильной, то прибыль компании составит 6 млн ден.ед. В случае снижения стоимости акций компания понесет убыток в размере 7 млн ден.ед.

Согласно имеющимся экспертным оценкам, возможны четыре сценария развития экономической ситуации (С1, С2, С3, С4):

сценарий С1: стоимость акций предприятий П1 и П2 остается стабильной, стоимость акций предприятия П3 растет;

сценарий С2: стоимость акций П1 снижается, П2 и П3 – растет;

сценарий С3: стоимость акций П1 растет, П2 и П3 – снижается;

сценарий С4: стоимость акций всех предприятий остается стабильной.

Требуется определить, какой пакет акций следует приобрести компании, чтобы получить максимальную прибыль.

Данная задача решается в условиях риска и неопределенности, так как прибыль компании зависит не только от ее решения (т.е. от того, какой пакет

акций она купит), но и от внешних условий (от сценария развития экономической ситуации).

При решении этой задачи важно понимать, что при покупке акций еще неизвестно, по какому сценарию будет развиваться экономическая ситуация. Влиять на этот сценарий невозможно. Следует также обратить внимание, что компания может приобрести пакет акций только одного предприятия.

Составим матрицу выигрышей. Для этого найдем, какой будет прибыль компании при различных решениях (т.е. при покупке различных пакетов акций) в разных внешних условиях.

Предположим, что компания купит пакет акций предприятия П1. Если экономическая ситуация будет развиваться по сценарию С1, то компания получит прибыль в размере 6 млн ден.ед., так как при таком сценарии стоимость акций предприятия П1 будет оставаться стабильной. Если экономическая ситуация будет развиваться по сценарию С2, то компания понесет убыток в размере 7 млн ден.ед., так как при таком сценарии стоимость акций П1 снизится. При сценарии С3 компания получит прибыль в размере 10 млн ден.ед., так как стоимость акций П1 возрастет. При сценарии С4 прибыль компании составит 6 млн ден.ед., так как стоимость акций П1 будет оставаться стабильной.

Выполнив аналогичные рассуждения для всех вариантов решения (покупка пакета акций П1, П2 или П3) и для всех вариантов внешних условий (сценарий С1, С2, С3 или С4), получим матрицу выигрышей (таблица 4).

Таблица 4

Приобретенный пакет акций	Сценарий			
	С1	С2	С3	С4
П1	6	–7	10	6
П2	4	6	–3	4
П3	8	8	–2	3

На основании этой матрицы требуется выбрать одно из решений, т.е. определить, какой пакет акций следует приобрести.

Примечание – Следует обратить внимание, что в данной задаче невозможно точно определить, какой будет прибыль компании. Например, если компания купит пакет акций П1, то она может получить прибыль в размере 6 или 10 млн ден.ед., или понести убыток в размере 7 млн ден.ед. (в зависимости от того, по какому сценарию будет развиваться экономическая ситуация).

Существует несколько методов (критериев) для выбора решений в таких задачах. Используемый метод зависит от имеющейся информации о внешних условиях, прежде всего – от того, имеется ли информация о вероятностях внешних условий.

1.3.1 Выбор решений при известных вероятностях внешних условий. Критерий Байеса

Если известны вероятности внешних условий, то для оценки и выбора решений применяется критерий Байеса. Он может использоваться в двух

видах: как критерий максимума среднего выигрыша или как критерий минимума среднего риска.

Пусть известны вероятности вариантов внешних условий: P_1, P_2, \dots, P_N .

Если решение выбирается по значениям выигрышей, то для каждого решения находится средняя оценка по всем вариантам внешних условий (средний выигрыш):

$$Z_i = \sum_{j=1}^N (E_{ij} P_j), \quad i=1, \dots, M, \quad (7.1)$$

где P_j – вероятности внешних условий.

Лучшим является решение с максимальной оценкой.

Решим задачу из примера 1, используя критерий Байеса. Пусть, согласно имеющимся экспертным оценкам, наиболее вероятен сценарий С4: его вероятность составляет 50%. Менее вероятно изменение экономической ситуации по сценарию С1: вероятность этого сценария – 30%. Наименее вероятны сценарии С2 и С3: вероятность каждого из них – 10%.

Найдем оценки решений для данной задачи по формуле (7.1):

$$Z_1 = 6 \cdot 0,3 - 7 \cdot 0,1 + 10 \cdot 0,1 + 6 \cdot 0,5 = 5,1 \text{ (оценка для пакета акций П1);}$$

$$Z_2 = 4 \cdot 0,3 + 6 \cdot 0,1 - 3 \cdot 0,1 + 4 \cdot 0,5 = 3,5 \text{ (оценка для пакета акций П2);}$$

$$Z_3 = 8 \cdot 0,3 + 8 \cdot 0,1 - 2 \cdot 0,1 + 3 \cdot 0,5 = 4,5 \text{ (оценка для пакета акций П3).}$$

Таким образом, компании рекомендуется приобрести пакет акций предприятия П1.

В некоторых случаях для выбора решения используется матрица рисков (R_{ij} , $i=1, \dots, M$, $j=1, \dots, N$). Под риском понимается недополученный выигрыш: разность между выигрышем, максимально возможным для данного варианта внешних условий, и фактическим выигрышем. Для рассматриваемой задачи матрица рисков приведена в таблице 5.

Таблица 5

Приобретенный пакет акций	Сценарий			
	С1	С2	С3	С4
П1	2	15	0	0
П2	4	2	13	2
П3	0	0	12	3

Здесь, например, для первого варианта внешних условий (сценарий С1) максимальная прибыль достигается при покупке пакета акций П3; эта прибыль составляет 8 млн ден.ед. При покупке пакета акций П1 прибыль будет меньше и составит только 6 млн ден.ед. Потерянный выигрыш (риск) определяется как $8 - 6 = 2$ млн ден.ед. Если будет куплен пакет акций П2, то в случае сценария С1 прибыль составит 4 млн ден.ед., т.е. на 4 млн ден.ед. меньше, чем максимально возможная прибыль в данном варианте условий; таким образом, риск составит $8 - 4 = 4$ млн ден.ед.

Для варианта внешних условий С2 максимальная прибыль достигается при покупке пакета акций П3 (8 млн ден.ед.). Если будет куплен пакет акций

П1, то в случае сценария С2 компания понесет убыток в размере 7 млн ден.ед.; таким образом, риск составляет $8 - (-7) = 15$ млн ден.ед.

Аналогично находятся другие значения рисков.

Примечание – Следует еще раз напомнить, что внешние условия (сценарии) относятся к будущему, и в момент покупки пакета акций они неизвестны.

Оценки решений по критерию минимума среднего риска находятся по следующей формуле:

$$Z_i = \sum_{j=1}^N (R_{ij} P_j), \quad i=1, \dots, M. \quad (7.2)$$

Лучшим является решение с минимальной оценкой.

Оценки решений для данной задачи по формуле (11.2): $Z_1 = 2 \cdot 0,3 + 15 \cdot 0,1 + 0 \cdot 0,1 + 0 \cdot 0,5 = 2,1$; $Z_2 = 4 \cdot 0,3 + 2 \cdot 0,1 + 13 \cdot 0,1 + 2 \cdot 0,5 = 3,7$; $Z_3 = 2,7$. Таким образом, компании рекомендуется вложить денежные средства в акции предприятия П1.

1.3.2 Выбор решений при неизвестных вероятностях внешних условий

Если вероятности внешних условий неизвестны, то для оценки и выбора решений могут применяться следующие критерии.

Критерий Лапласа: применяется, если можно предполагать, что все варианты внешних условий одинаково вероятны. Для каждого решения находится средняя оценка по всем вариантам внешних условий (средний выигрыш):

$$Z_i = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N E_{ij}, \quad i=1, \dots, M. \quad (7.3)$$

Лучшим является решение с максимальной оценкой.

Предположим, что для задачи из примера 1 вероятности всех четырех сценариев развития экономической ситуации примерно одинаковы. Найдем оценки по критерию Лапласа (7.3): $Z_1 = (6 - 7 + 10 + 6)/4 = 3,75$; $Z_2 = (4 + 6 - 3 + 4)/4 = 2,75$; $Z_3 = 4,25$. Таким образом, если есть основания предполагать, что все сценарии одинаково вероятны, то компании следует приобрести пакет акций предприятия П3.

Критерий Вальда (критерий крайнего пессимизма, максиминный критерий): решение выбирается в расчете на наихудшие внешние условия. В качестве оценки каждого решения используется пессимистическая оценка: минимальный выигрыш, который можно получить при выборе этого решения:

$$Z_i = \min_j E_{ij}, \quad i=1, \dots, M. \quad (7.4)$$

Лучшим является решение с максимальной оценкой.

В примере 1 оценки решений по критерию Вальда следующие: $Z_1 = \min(6; -7; 10; 6) = -7$; $Z_2 = \min(4; 6; -3; 4) = -3$, $Z_3 = -2$. Другими словами, при покупке пакета акций П1 компания *в самом худшем случае* понесет убыток в размере 7 млн ден.ед. (если экономическая ситуация будет развиваться по сценарию С2). При покупке пакета акций П2 убыток в самом худшем случае составит 3 млн ден.ед. (при сценарии С3), при покупке пакета акций П3 – 2 млн ден.ед. (при сценарии С3). Таким образом, компании рекомендуется приобрести пакет акций предприятия П3.

Критерий Сэвиджа (критерий крайнего пессимизма, минимаксный критерий): решение принимается в расчете на наихудшие внешние условия (как и при использовании критерия Вальда), но для оценки решений используется матрица рисков. В качестве оценки используется максимальный риск (максимальный потерянный выигрыш), соответствующий данному решению:

$$Z_i = \max_j R_{ij}, i=1,...,M. \quad (7.5)$$

Лучшим является решение с минимальной оценкой.

В примере 1 $Z_1 = \max(2; 15; 0; 0) = 15$; $Z_2 = \max(4; 2; 13; 2) = 13$; $Z_3 = 12$. Таким образом, рекомендуется приобрести пакет акций предприятия П3.

Критерий Гурвица: решение принимается с учетом того, что возможны как благоприятные, так и неблагоприятные внешние условия. При использовании этого критерия требуется указать "коэффициент пессимизма" – число в диапазоне от 0 до 1, представляющее собой субъективную (т.е. не рассчитанную, а указанную человеком) оценку возможности неблагоприятных внешних условий. Если есть основания предполагать, что внешние условия будут неблагоприятными, то коэффициент пессимизма назначается близким к единице. Если неблагоприятные внешние условия маловероятны, то используется коэффициент пессимизма, близкий к нулю. Оценки решений находятся по следующей формуле:

$$Z_i = a \cdot \min_j E_{ij} + (1 - a) \cdot \max_j E_{ij}, i=1,...,M, \quad (7.6)$$

где a – коэффициент пессимизма.

Таким образом, при вычислении критерия Гурвица коэффициент пессимизма a умножается на пессимистическую оценку решения, а величина $1-a$ – на оптимистическую, т.е. на максимальный выигрыш, который может быть получен при выборе данного решения.

Лучшим является решение с максимальной оценкой.

Предположим, что в задаче из примера 1 есть основания предполагать, что неблагоприятные условия (способствующие снижению стоимости акций) немного более вероятны, чем благоприятные. Для принятия решения по критерию Гурвица выберем коэффициент пессимизма $a=0,6$. Найдем оценки решений: $Z_1 = 0,6 \cdot (-7) + 0,4 \cdot 10 = -0,2$; $Z_2 = 0,6 \cdot (-3) + 0,4 \cdot 6 = 0,6$; $Z_3 = 0,6 \cdot (-2)$

$+ 0,4 \cdot 8 = 2$. Таким образом, рекомендуется приобрести пакет акций предприятия ПЗ.

С учетом всех использованных критериев, лучшим решением является покупка пакета акций предприятия ПЗ. Это решение оказалось лучшим по всем критериям (по критериям Лапласа, Вальда, Сэвиджа и Гурвица). При таком решении, если экономическая ситуация будет развиваться по сценарию С1 или С2, то компания получит прибыль в размере 8 млн ден.ед. В случае развития экономической ситуации по сценарию С4 прибыль компании составит 3 млн ден.ед. При сценарии С3 компания понесет убыток в размере 2 млн ден.ед.

1.3.3 Выбор решений на основе матрицы затрат

В некоторых случаях для выбора решений в условиях риска и неопределенности применяется не матрица выигрышей, а матрица затрат (потерь, убытков). В этих случаях могут применяться те же критерии, что и для задач, решаемых на основе матрицы выигрышей. Рассмотрим решение такой задачи на следующем примере.

Пример 2 – Требуется определить количество строительного материала, необходимого для укрепления стен при строительстве туннеля. Расход материала зависит от состояния грунта, в котором прокладывается туннель. Рассчитано, что для прокладки туннеля в легком грунте потребуется 60 тонн строительного материала, для тяжелого грунта – 80 тонн, для особо тяжелого – 110 тонн. Состояние грунта не может быть точно определено заранее. Цена строительного материала составляет 8 тыс. ден.ед. за тонну. Если будет закуплено недостаточное количество материала, то недостающий материал потребуется срочно закупать во время строительства. Однако из-за срочности закупки цена материала составит 15 тыс. ден.ед. за тонну. Продать лишний строительный материал достаточно сложно. С учетом всех указанных факторов требуется найти, сколько материала следует закупить перед началом строительства.

В данной задаче имеются три варианта внешних условий: легкий, тяжелый или особо тяжелый грунт. Из-за того, что состояние грунта на всем участке строительства не может быть точно определено заранее, неизвестно и количество строительного материала, которое потребуется в ходе строительства, а значит – и затраты на него. В данной задаче будем рассматривать три возможных решения: закупка материала в расчете на легкий, тяжелый и особо тяжелый грунт.

Выполним расчет матрицы затрат.

Пусть принято решение – закупить материал в расчете на легкий грунт (т.е. 60 тонн). Затраты составят $60 \cdot 8 = 480$ тыс. ден.ед. Если грунт на всем участке строительства туннеля окажется легким, то дополнительные затраты не потребуются. Если грунт окажется тяжелым, то потребуется дополнительно закупить 20 тонн материала по цене 15 тыс. ден.ед.; общие затраты составят $480 + 20 \cdot 15 = 780$ тыс. ден.ед. Если грунт окажется особо тяжелым, то потребуется дополнительно закупить 50 тонн материала по цене

15 тыс. ден.ед.; общие затраты в этом случае составят $480+50 \times 15 = 1$ млн 230 тыс. ден.ед.

Пусть принято решение – закупить материал в расчете на тяжелый грунт (т.е. 80 тонн). Затраты составят $80 \times 8 = 640$ тыс. ден.ед. Если грунт окажется легким или тяжелым, то дополнительные затраты не потребуются (причем если на всем участке строительства грунт окажется легким, то 20 тонн материала останутся неизрасходованными). Если грунт окажется особо тяжелым, то потребуется дополнительно закупить 30 тонн по цене 15 тыс. ден.ед.; общие затраты в этом случае составят $640+30 \times 15 = 1$ млн 90 тыс. ден.ед.

Пусть принято решение – закупить материал в расчете на особо тяжелый грунт (т.е. 110 тонн). Затраты составят $110 \times 8 = 880$ тыс. ден.ед. Такого количества материала достаточно для прокладки туннеля в любом грунте.

Матрица затрат (в тыс. ден.ед.) приведена в таблице 6.

Таблица 6

Закупка стройматериала, тонн	Характеристика грунта		
	легкий	тяжелый	особо тяжелый
60	480	780	1230
80	640	640	1090
110	880	880	880

Пусть по результатам исследования места строительства установлено, что на местности, где будет прокладываться туннель, примерно 40% составляют участки с легким грунтом, 50% – с тяжелым, 10% – с особо тяжелым. Так как имеются оценки вероятностей состояний внешних условий, можно использовать критерий Байеса. Найдем оценки решений по формуле (11.1): $Z_1 = 480 \times 0,4 + 780 \times 0,5 + 1230 \times 0,1 = 705$; $Z_2 = 640 \times 0,4 + 640 \times 0,5 + 1090 \times 0,1 = 685$; $Z_3 = 880 \times 0,4 + 880 \times 0,5 + 880 \times 0,1 = 880$. Лучшим является решение с минимальной оценкой (так как расчет выполняется по значениям затрат). Таким образом, лучшее решение – закупить 60 тонн строительного материала.

Предположим, что оценки вероятностей состояния грунта отсутствуют или недостаточно достоверны. Найдем решения на основе критериев, для которых не требуется использовать вероятности внешних условий. При этом также необходимо учитывать, что в данной задаче для оценки решений используется матрица затрат (а не выигрышей).

Критерий Лапласа: $Z_1 = (480 + 780 + 1230)/3 = 830$; $Z_2 = (640 + 640 + 1090)/3 = 790$; $Z_3 = (880 + 880 + 880)/3 = 880$. Лучшее решение – закупить 80 тонн строительного материала.

Критерий Вальда основан на том, что для каждого решения определяется пессимистическая оценка (оценка в наихудших внешних условиях), а затем выбирается решение, у которого эта оценка наилучшая. В данном случае, если будет выбран первый вариант решения (закупка 60 тонн

строительного материала), то в самом худшем случае затраты составят 1 млн 230 тыс. ден.ед. При закупке 80 тонн затраты в худшем случае составят 1 млн 90 тыс. ден.ед., при закупке 110 тонн – 880 тыс. ден.ед. Таким образом, оценки решений по критерию Вальда следующие: $Z1 = \max(480, 780, 1230) = 1230$; $Z2 = 1090$; $Z3 = 880$. Лучшее решение – то, для которого затраты в наихудших внешних условиях будут минимальными. Таким образом, следует закупить 110 тонн строительного материала.

Критерий Гурвица: пусть по результатам исследования участка строительства установлено, что большая часть туннеля будет проложена в легком и тяжелом грунте, и только незначительная часть – в особо тяжелом. Таким образом, вероятность неблагоприятных внешних условий невелика. Используем коэффициент пессимизма $\alpha=0,3$. При вычислении оценок по критерию Гурвица эта величина будет умножаться на наихудшую оценку, т.е. на максимальную величину затрат. Найдем оценки решений: $Z1 = 0,3 \cdot 1230 + 0,7 \cdot 480 = 705$; $Z2 = 0,3 \cdot 1090 + 0,7 \cdot 640 = 775$; $Z3 = 0,3 \cdot 880 + 0,7 \cdot 880 = 880$. Лучшее решение – закупить 60 тонн строительного материала.

Примечание – При выборе решений на основе матрицы затрат критерии, основанные на использовании рисков (критерий минимума среднего риска, критерий Сэвиджа), обычно не применяются.

Таким образом, с учетом всех использованных критериев следует выбрать компромиссное решение: закупить 80 тонн строительного материала. Затраты в этом случае составят от 640 тыс. ден.ед. (если на всем участке строительства грунт окажется легким или тяжелым) до 1 млн 90 тыс. ден.ед. (если грунт везде окажется особо тяжелым).

1.3.4 Выбор комбинации решений в условиях риска и неопределенности

При выборе решений в условиях риска, как правило, каждое из возможных решений наиболее эффективно при каком-то определенном варианте внешних условий, причем для разных вариантов внешних условий наиболее эффективными являются разные решения. Поэтому во многих случаях эффективным является выбор не какого-то одного из возможных решений, а комбинации решений, которая окажется достаточно эффективной при любом варианте внешних условий.

При решении таких задач обычно применяется приближенный метод решения задач игрового программирования. Метод основан на многократном выборе решений из матрицы выигрышей (или матрицы затрат) по определенным правилам. Каждое очередное решение выбирается в расчете на худшие внешние условия и с учетом опыта предыдущих решений. Затем определяется, насколько часто оказывалось лучшим каждое из решений, и находится рациональная комбинация решений.

Примечание – Название “приближенный метод” связано с тем, что существует и другой метод решения таких задач, основанный на их сведении к задачам линейного программирования. Такой метод, строго говоря, более точный по сравнению с приближенным методом, однако значительно более сложный. Приближенный метод, при

достаточном количестве испытаний, обеспечивает точность решения, достаточную для практических задач.

Пример 3 – Пусть в условиях примера 1 компания имеет возможность вкладывать денежные средства в акции нескольких предприятий. Требуется найти, как следует распределить имеющиеся денежные средства, чтобы прибыль от их вложения в акции предприятий оказалась максимальной.

Рассмотрим решение задачи на основе приближенного игрового метода.

Выполняется первое испытание. В этом испытании выбирается начальное решение. Обычно для этого применяется критерий Вальда. В данном случае в качестве такого решения следует выбрать покупку пакета акций П3 (см. пример 1).

В расчетную таблицу (см. таблицу 7) заносится выбранное начальное решение и выигрыши от этого решения для всех возможных вариантов внешних условий. Указывается также худший (для выбранного решения) вариант внешних условий, т.е. вариант внешних условий, при котором выигрыш от выбранного решения минимален. В данном примере этот вариант – С3. Для этого варианта внешних условий определяются возможные выигрыши при всех возможных решениях. В данном случае это 10 (при выборе решения П1), –3 (при решении П2) или –2 (при решении П3). Все эти величины также заносятся в расчетную таблицу.

Таблица 7

Номер испытания	Решение	Возможные выигрыши в различных внешних условиях				Худший вариант внешних условий	Возможные выигрыши при различных решениях		
		С1	С2	С3	С4		П1	П2	П3
1	П3	8	8	–2	3	С3	10	–3	–2

Последующие испытания (начиная со второго) выполняются по алгоритму, приведенному ниже. Весь ход решения задачи отражается в расчетной таблице (см. таблицу 8).

Шаг 1. По значениям возможных выигрышей при различных решениях (последние столбцы расчетной таблицы), полученным в предыдущем испытании, выбирается лучшее решение, т.е. решение с максимальным выигрышем.

Шаг 2. Для выбранного решения находятся возможные выигрыши в различных внешних условиях. Они определяются как суммы выигрышей от данного решения (из матрицы выигрышей, в данном примере – из таблицы 4) и выигрышей, полученных в предыдущем испытании (из расчетной таблицы).

Шаг 3. По значениям возможных выигрышей в различных внешних условиях, найденным на шаге 2, определяется худший вариант внешних условий.

Шаг 4. Для худшего варианта внешних условий, найденного на шаге 3, находятся возможные выигрыши при различных решениях. Они

определяются как суммы выигрышей в данном варианте внешних условий (из матрицы выигрышей) и выигрышей при различных решениях, полученных в предыдущем испытании (из расчетной таблицы).

Шаг 5. Выполняется возврат на шаг 1 (следующее испытание).

Испытания выполняются многократно. В таблице 8 показаны десять испытаний.

Примечание – Для практических задач рекомендуется выполнять примерно 1000 испытаний, используя программные средства.

Таблица 8

Номер испытания	Решение	Возможные выигрыши в различных внешних условиях				Худший вариант внешних условий	Возможные выигрыши при различных решениях		
		С1	С2	С3	С4		П1	П2	П3
1	П3	8	8	–2	3	С3	10	–3	–2
2	П1	14	1	8	9	С2	3	3	6
3	П3	22	9	6	12	С3	13	0	4
4	П1	28	2	16	18	С2	6	6	12
5	П3	36	10	14	21	С2	–1	12	20
6	П3	44	18	12	24	С3	9	9	18
7	П3	52	26	10	27	С3	19	6	16
8	П1	58	19	20	33	С2	12	12	24
9	П3	66	27	18	36	С3	22	9	22
10	П1	72	20	28	42	С2	15	15	30

Например, во втором испытании значения возможных выигрышей в различных внешних условиях получены как суммы возможных выигрышей от решения П1 (6, –7, 10, 6) и из предыдущего испытания (8, 8, –2, 3): $6+8=14$; $-7+8=1$; $10-2=8$; $3+6=9$. Наихудший вариант внешних условий – С2 (при нем выигрыш минимален и равен 1). Возможные выигрыши при различных решениях получены как суммы возможных выигрышей при варианте условий С2 (–7, 6, 8) и из предыдущего испытания (10, –3, –2): $-7+10=3$; $6-3=3$; $8-2=6$. Максимальный выигрыш соответствует решению П3, поэтому оно выбирается для использования в следующем (третьем) испытании.

Примечание – Если в каком-либо испытании значения выигрышей при различных решениях оказываются одинаковыми, то можно выбирать любое решение. Например, в девятом испытании выигрыши при решениях П1 и П3 оказались одинаковыми (22). Можно было выбрать любое из этих решений (в данном примере выбрано П1). Аналогично, если для нескольких вариантов внешних условий выигрыши оказываются одинаковыми и минимальными, то любой из этих вариантов может выбираться в качестве наихудшего. При большом количестве испытаний это никак не повлияет на результат.

Определяются *частоты* выбора каждого из решений. В данном случае решение П1 было выбрано в четырех испытаниях из десяти, решение П2 – не выбрано ни разу, П3 – в шести испытаниях из десяти. Таким образом, частота выбора решения П1 составляет 0,4, частота выбора П2 – 0; П3 – 0,6. Это значит, что из всей суммы денежных средств, выделенной на покупку акций, предприятию следует вложить в акции предприятия П1 40%, в акции П3 – 60%. Акции предприятия П2 приобретать не следует.

Выполнив с помощью программы 1000 испытаний, получим примерно такие же частоты.

Найдем оценки возможных прибылей компании от выбранного решения. Как и во всех задачах, связанных с риском и неопределенностью, точно определить будущую прибыль невозможно, так как неизвестно, какой будет экономическая ситуация (С1, С2, С3 или С4). Найдем возможную прибыль для различных сценариев экономической ситуации.

Предположим, что экономическая ситуация будет соответствовать сценарию С1 (стоимость акций предприятий П1 и П2 остается стабильной, стоимость акций предприятия П3 растет). Согласно постановке задачи (см. таблицу 3 или 4), если бы компания вложила *все* средства в акции П1, то ее прибыль составила бы 6 млн ден.ед. Но в эти акции вложено только 40% средств (компания приобрела 40% акций предприятия П1). Значит, можно ожидать, что прибыль составит $0,4 \cdot 6 = 2,4$ млн ден.ед.

В акции П3 вложено 60% средств. Если бы в эти акции были вложены все средства, то прибыль составила бы 8 млн ден.ед. При выбранном решении она составит $0,6 \cdot 8 = 4,8$ млн ден.ед.

Таким образом, в случае развития экономической ситуации по сценарию С1 прибыль компании составит $2,4 + 4,8 = 7,2$ млн ден.ед.

Найдем ожидаемую прибыль компании в случае развития экономической ситуации по сценарию С2 (стоимость акций П1 снижается, П2 и П3 – растет). Вложение средств в акции П1 в этом случае приносит убыток. Если бы в эти акции были вложены все средства, то убыток составил бы 7 млн ден.ед. При вложении 40% средств он составит $0,4 \cdot 7 = 2,8$ млн ден.ед. Средства, вложенные в акции П3, принесут прибыль в размере $0,6 \cdot 8 = 4,8$ млн ден.ед. Таким образом, прибыль компании составит $-2,8 + 4,8 = 2$ млн ден.ед.

Аналогично найдем, что при сценарии С3 прибыль компании составит 2,8 млн ден.ед. При сценарии С4 компания получит прибыль 4,2 млн ден.ед.

Таким образом, можно ожидать, что прибыль компании составит от 2 млн ден.ед. (пессимистическая оценка) до 7,2 млн ден.ед. (оптимистическая оценка). Следует обратить внимание, что выбранное решение обеспечивает получение прибыли при любом варианте внешних условий. Это достигнуто за счет выбора комбинации решений (вложения средств в акции нескольких предприятий).

Пример 4 – Предприятие выпускает два вида скоропортящихся продуктов: пирожки и мороженое. Затраты предприятия на приготовление одного пирожка составляют 3 ден.ед., одной порции мороженого – 4 ден.ед. Пирожки продаются по цене 4 ден.ед., мороженое – по 7 ден.ед. Спрос на продукты зависит от погодных условий: в теплую погоду повышается спрос на мороженое и снижается спрос на пирожки, в прохладную погоду – наоборот. Нераспроданные продукты уничтожаются. Из опыта работы предприятия известны примерные величины спроса на продукты при различных погодных условиях (таблица 9).

Таблица 9

Продукт	Спрос, тыс. штук в день		
	Обычная погода	Прохладная погода	Жаркая погода
Пирожки	4	6	3
Мороженое	5	2	7

Требуется найти, сколько продуктов каждого вида следует выпустить предприятию для продажи в течение дня.

Рассмотрим три возможных решения:

выпуск продуктов в расчете на обычную погоду, т.е. 4 тыс. пирожков и 5 тыс. порций мороженого;

выпуск продуктов в расчете на прохладную погоду, т.е. 6 тыс. пирожков и 2 тыс. порций мороженого;

выпуск продуктов в расчете на жаркую погоду, т.е. 3 тыс. пирожков и 7 тыс. порций мороженого.

Обозначим эти решения как A_1 , A_2 и A_3 соответственно. Так как погода не может быть точно известна заранее, предприятию не следует выбирать одно из этих решений; очевидно, например, что если будут выпущены продукты в расчете на жаркую погоду, а она окажется прохладной, то значительная часть продуктов не будет реализована. Поэтому следует выбрать некоторое “промежуточное” решение.

Составим матрицу выигрышей.

Предположим, что выбрано решение A_1 , т.е. выпущено 4 тыс. пирожков и 5 тыс. порций мороженого. Затраты предприятия составят $3 \times 4 + 4 \times 5 = 32$ тыс. ден.ед. Найдем величины прибыли, которая может быть получена от этого решения (с учетом погодных условий).

Если погода окажется обычной, то будут проданы все продукты. Прибыль предприятия составит $4 \times 4 + 7 \times 5 - 32 = 19$ тыс. ден.ед.

Если погода окажется прохладной, то будет продано 4 тыс. пирожков (хотя есть спрос на 6 тыс., но выпущено только 4 тыс.) и 2 тыс. порций мороженого (еще 3 тыс. порций останутся нераспроданными). Прибыль предприятия составит $4 \times 4 + 7 \times 2 - 32 = -2$ тыс. ден.ед., т.е. предприятие понесет убыток в размере 2 тыс. ден.ед.

Если погода окажется жаркой, то будет продано 3 тыс. пирожков (еще 1 тыс. пирожков останутся нераспроданными) и 5 тыс. порций мороженого (спрос еще на 2 тыс. порций не будет удовлетворен). Прибыль предприятия составит $4 \times 3 + 7 \times 5 - 32 = 15$ тыс. ден.ед.

Предположим, что выбрано решение A_2 , т.е. выпущено 6 тыс. пирожков и 2 тыс. порций мороженого. Затраты предприятия составят $3 \times 6 + 4 \times 2 = 26$ тыс. ден.ед. Если погода окажется обычной, то будет продано 4 тыс. пирожков (еще 2 тыс. останутся нераспроданными из-за отсутствия спроса) и все 2 тыс. порций мороженого. Прибыль предприятия составит $4 \times 4 + 7 \times 2 - 26 = 4$ тыс. ден.ед. Если погода окажется прохладной, то будут проданы все продукты; прибыль предприятия в этом случае составит $4 \times 6 + 7 \times 2 - 26 = 12$ тыс. ден.ед. Найдем прибыль при жаркой погоде: $4 \times 3 + 7 \times 2 - 26 = 0$, т.е. выручка окажется равной затратам.

Аналогично вычислим величины прибыли при решении A3 (выпуск 3 тыс. пирожков и 7 тыс. порций мороженого).

Сведем ожидаемые прибыли в матрицу выигрышей (таблица 10).

Таблица 10

Решение	Погода		
	обычная (О)	прохладная (П)	жаркая (Ж)
A1	19	−2	15
A2	4	12	0
A3	10	−11	24

Решим задачу, используя приближенный метод игрового программирования. Первые десять испытаний показаны в таблице 11.

Таблица 11

Номер испытания	Решение	Возможные выигрыши в различных внешних условиях			Худший вариант внешних условий	Возможные выигрыши при различных решениях		
		О	П	Ж		A1	A2	A3
1	A2	4	12	0	Ж	15	0	24
2	A3	14	1	24	П	13	12	13
3	A1	33	−1	39	П	11	24	2
4	A2	37	11	39	П	9	36	−9
5	A2	41	23	39	П	7	48	−20
6	A2	45	35	39	П	5	60	−31
7	A2	49	47	39	Ж	20	60	−7
8	A2	53	59	39	Ж	35	60	17
9	A2	57	71	39	Ж	50	60	41
10	A2	61	83	39	Ж	65	60	65

По результатам десяти испытаний, частоты выбора решений оказались следующими: A1 – 0,1; A2 – 0,8; A3 – 0,1.

Выполнив с помощью программы 1000 испытаний, получим следующие частоты: A1 – 0,39; A2 – 0,6; A3 – 0,01.

С учетом полученных частот, а также смысла решений A1, A2, A3, используемых в задаче, найдем количество выпускаемых продуктов каждого вида: пирожки – $0,39 \cdot 4 + 0,6 \cdot 6 + 0,01 \cdot 3 = 5,19$ тыс. штук; мороженое – $0,39 \cdot 5 + 0,6 \cdot 2 + 0,01 \cdot 7 = 3,22$ тыс. порций.

Затраты на выпуск продуктов в таком количестве составят $3 \cdot 5,19 + 4 \cdot 3,22 = 28,45$ тыс. ден.ед.

Найдем оценки прибыли, которую может получить предприятие от выпуска продукции в указанных количествах. При этом необходимо учитывать, что прибыль будет различной в зависимости от погодных условий. Расчет прибыли при различных погодных условиях приведен в таблице 12.

Таблица 12

Погода	Продажа, тыс. шт.		Прибыль, тыс. ден.ед.
	пирожки	мороженое	
Обычная	4	3,22	$4 \cdot 4 + 7 \cdot 3,22 - 28,45 = 10,09$
Прохладная	5,19	2	$4 \cdot 5,19 + 7 \cdot 2 - 28,45 = 6,31$
Жаркая	3	3,22	$4 \cdot 3 + 7 \cdot 3,22 - 28,45 = 6,09$

Таким образом, предприятию следует произвести 5190 пирожков и 3220 порций мороженого. Прибыль от производства продуктов, в зависимости от погоды, составит от 6090 до 10 090 ден.ед.