

Modelagem de um sistema dinâmico
planta-herbívoros levando em conta a presença de
plantas tóxicas no ambiente

André Ribeiro, Erlon Kelvim

15 de dezembro de 2021

Sumário

1	Introdução	3
2	Metodologia	3
3	Equilíbrio e estabilidade	7
3.1	Equilíbrios de fronteira	7
3.2	Estabilidade	10
3.3	Equilíbrios internos	11
4	Discussão	13
5	Conclusão	13

1 Introdução

Embora o estudo da relação entre herbívoros-plantas já seja estudado a muitos anos, apenas a pouco tempo começou-se as pesquisas sobre a influência da toxicidade das plantas sobre tal relação. Nosso trabalho busca usar como base empírica a relação mamífero-planta a fim criar um modelo matemático em que o efeito negativo gerado pela toxicidade das plantas seja expresso de maneira mais explícita em nosso modelo [1] [2].

O modelo mais usado para análise da relação mamífero-planta é o Holling tipo II [3][4] que foi proposto em um sistema onde haja uma abundância de presas (plantas) e a reação do predador a tal sistema e chegou-se que a resposta funcional seria um aumento do consumo da presa a medida que sua biomassa aumenta, até a capacidade do predador de comer a presa esteja saciada, a partir disso, independente do aumento da biomassa da presa o consumo do predador se manterá constante. Entretanto a existência de toxinas nas plantas pode alterar esse sistema [5], pois a variação da toxicidade das plantas faz com que os mamíferos se alimentem seletivamente, fazendo com que a diversidade da vegetação e os processos do ecossistema sejam afetados.

2 Metodologia

Inicialmente, consideramos o sistema mais simples possível, onde há somente uma planta e não há toxicidade. Seja n o número de galhos de plantas disponíveis no sistema, t_b o tempo necessário para um herbívoro encontrar o galho, r a taxa de crescimento por unidade de galho e t_h o tempo (em segundos) que um herbívoro leva para consumir e digerir uma unidade de galho. Com essas informações, temos que o total de galhos encontrados em um dado tempo t_b é $T_g = nrt_b$ e o tempo total gasto pelo herbívoro consumindo galhos é $T_h = t_h nrt_b = t_h T_g$. Definimos então a taxa de consumo

$$f(n) := \frac{T_g}{t_b + T_h} = \frac{nr}{1 + t_h nr} \quad (1)$$

Note que da maneira como t_h foi definido, temos que $h_{\max} = \frac{1}{t_h}$ é o número máximo de galhos que um herbívoro pode consumir por unidade de tempo, na ausência de toxicidade. Note também que

$$h_{\max} = \lim_{n \rightarrow \infty} f(n) \quad (2)$$

i.e. h_{\max} é assintota da função f . Contudo, nossa análise até aqui considerava o sistema incompleto, sem toxicidade. Na presença dessa nova variável, devemos ter uma taxa real de consumo $\eta(n)$ menor que $f(n)$ e uma quantidade máxima de galhos contendo toxinas H_{\max} menor que h_{\max} . Para encontrar a função η , note que a função $R = \frac{\eta}{f}$ deve ser uma função decrescente de f , com $R \rightarrow 1$ quando $f \rightarrow 0$, já que se o consumo está diminuindo, o consumo de plantas com toxicidade está aumentando, e se $\frac{H_{\max}}{\alpha}$ é um valor limitante para

f , $R \rightarrow 0$ quando $f \rightarrow \frac{H_{\max}}{\alpha}$, já que há plantas em abundância e a taxa de consumo de plantas com toxicidade diminui. Uma boa maneira de expressar essas propriedades é considerar R como a seguinte função linear

$$R = 1 - \frac{\alpha f}{H_{\max}}$$

onde a constante de proporção α é escolhida de modo que $\max\{\eta\} = H_{\max}$. Lembrando que $R = \frac{\eta}{f}$, temos que

$$\frac{\eta}{f} = 1 - \frac{\alpha f}{H_{\max}}$$

logo

$$\eta(f) = f \left(1 - \frac{\alpha f}{H_{\max}} \right) \quad (3)$$

Para encontrar o valor de α , vamos encontrar o máximo da função η

$$\eta' = f' \left(1 - \frac{2\alpha f}{H_{\max}} \right)$$

Como buscamos $\eta' = 0$, devemos ter $f' = 0 \quad \vee \quad 1 - \frac{2\alpha f}{H_{\max}} = 0$. O primeiro caso ocorre apenas quando $n \rightarrow \infty$, iremos então considerar o segundo caso

$$\begin{aligned} 1 - \frac{2\alpha f}{H_{\max}} &= 0 \\ \frac{2\alpha f}{H_{\max}} &= 1 \\ \frac{H_{\max}}{2\alpha} &= f \end{aligned}$$

Substituindo o valor que maximiza a função η obtemos

$$\begin{aligned} \eta \left(\frac{H_{\max}}{2\alpha} \right) &= \frac{H_{\max}}{2\alpha} \left(1 - \frac{\alpha \cdot \frac{H_{\max}}{2\alpha}}{H_{\max}} \right) \\ &= \frac{H_{\max}}{2\alpha} \cdot \frac{1}{2} \\ &= \frac{H_{\max}}{4\alpha} \end{aligned}$$

Havíamos escolhido α de modo que $\max\{\eta\} = H_{\max}$, então $\alpha = \frac{1}{4}$. Como η é a taxa de consumo, faz sentido considerar apenas o intervalo de definição para o qual $\eta \geq 0$, ou seja

$$\eta \geq 0 \implies f \left(1 - \frac{f}{4H_{\max}} \right) \geq 0$$

Já que $f > 0$, devemos ter

$$1 - \frac{f}{4H_{\max}} \geq 0 \implies 1 \geq \frac{f}{4H_{\max}} \implies 4H_{\max} \geq f$$

Por (2), obtemos

$$4H_{\max} \geq f \quad \wedge \quad f < h_{\max} \implies 4H_{\max} > h_{\max} \implies H_{\max} > \frac{h_{\max}}{4}$$

Temos então a seguinte relação entre a quantidade máxima de galhos contendo toxinas consumidas por um herbívoro e a quantidade máxima de galhos consumidas por um herbívoro

$$\frac{h_{\max}}{4} < H_{\max} < h_{\max} \quad (4)$$

Com isso, temos o seguinte sistema de EDO's que descreve nosso sistema

$$\begin{aligned} \frac{dn}{dt} &= rn \left(1 - \frac{n}{W}\right) - \eta(n)X \\ \frac{dX}{dt} &= Y\eta(n)X - XZ \end{aligned}$$

onde $X = X(t)$ representa a quantidade de herbívoros no tempo t , Y a conversão da biomassa de espécies de plantas consumidas em novos herbívoros, Z a taxa de morte per capita de herbívoros devido a causas não relacionadas à toxicidade da planta e W a capacidade de carregamento do herbívoro.

Podemos obter a taxa real de consumo como uma função da abundância de plantas no sistema substituindo a equação (1) na equação (3)

$$\begin{aligned} \eta(n) &= f(n) \left(1 - \frac{f(n)}{4H_{\max}}\right) \\ &= \frac{nr}{1 + t_h nr} \left(1 - \frac{nr}{4H_{\max}(1 + t_h nr)}\right) \end{aligned} \quad (5)$$

Para generalizar o modelo obtido, consideramos os vetores $n = (n_1, n_2, \dots, n_k)$, $r = (r_1, r_2, \dots, r_k)$, $t_h = (t_{h_1}, t_{h_2}, \dots, t_{h_k})$ e $H_{\max} = (H_{\max_1}, H_{\max_2}, \dots, H_{\max_k})$, onde cada componente é relativo à planta da espécie i , e cada r_i é considerado em um ambiente em que não há competição de recursos pelas plantas. Podemos então obter $f = (f_1, f_2, \dots, f_k)$ e $\eta = (\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_k)$, onde cada componente é dada por

$$f_i(n) = \frac{n_i r_i}{1 + \sum_{i=1}^k t_{h_i} n_i r_i} \quad (6)$$

e

$$\eta_i(n) = f_i(n) \left(1 - \frac{f_i(n)}{4H_{\max_i}}\right) \quad (7)$$

Utilizando a equação acima, nosso modelo para o sistema planta-herbívoro é

descrito pelo seguinte sistema de EDO's

$$\begin{aligned}\frac{dn_i}{dt} &= g_i n_i \left(1 - \frac{n_i + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^k \beta_{ij} n_j}{W_i} \right) - \eta_i(n) X \\ \frac{dX}{dt} &= \sum_{j=1}^k Y_j \eta_j(n) X - X Z\end{aligned}\tag{8}$$

onde β_{ij} é o parâmetro de competição dos herbívoros, que mede a intensidade de competição da espécie j contra a espécie i . Todos os parâmetros estão definidos na tabela abaixo, para alguns tipos de planta. Note que para cada i (espécie), os valores que acima possuem esse índice podem variar em relação aos valores abaixo

Parâmetro	Unidade	Valor (ou intervalo)
t_b	Taxa de encontro por unidade de galho	[0.0001,0.0005]
g_i	Máximo de novas unidades de galhos/galho por dia	[0.003,0.01]
t_h	Tempo para consumir uma unidade de galho na ausência de toxinas	[0.0025,0.03125]
W	Capacidade de carga	$[10^4, 10^5]$
Y	Constante de conversão (herbívoro/unidade de galho)	[0.00003,0.00006]
Z	Taxa de morte de herbívoros per capita	[0.00003,0.0002]
H_{\max}	Máximo de unidades de galho contendo toxina (de um certo tipo) que um herbívoro pode consumir por dia	[8,80]
β	Coeficiente de competição	$[10^{-1}, 10]$

Tabela 1: Parâmetros, unidades e valores das variáveis para algumas espécies de plantas

3 Equilíbrio e estabilidade

3.1 Equilíbrios de fronteira

Iremos considerar um sistema com duas espécies ($i = 1, 2$) na qual

$$H_{\max_i} = \frac{h_{\max_i}}{2} \quad (9)$$

Temos que a função $f(n)$ é monótona crescente, pois

$$f'(n) = \frac{r}{(1 + t_h n r)^2} > 0$$

e

$$f(n_1) > f(n_2) \iff \frac{n_1 r}{1 + t_h n_1 r} > \frac{n_2 r}{1 + t_h n_2 r} \iff n_1(1 + t_h n_2 r) > n_2(1 + t_h n_1 r) \iff n_1 > n_2$$

Portanto a função $\eta_i(n)$ é monótona crescente, com assíntota H_{\max_i} :

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \eta_i(n) &= \lim_{n \rightarrow \infty} f_i(n) \left(1 - \frac{f_i(n)}{4H_{\max_i}} \right) \\ &= h_{\max_i} \left(1 - \frac{h_{\max_i}}{4H_{\max_i}} \right) \\ &= h_{\max_i} - \frac{h_{\max_i}^2}{2h_{\max_i}} \\ &= \frac{h_{\max_i}}{2} \end{aligned}$$

Vamos agora encontrar os equilíbrios de fronteira do sistema em (8). Se $X = 0$, então

$$\begin{cases} g_1 n_1 \left(1 - \frac{n_1 + \beta_{12} n_2}{W_1} \right) = 0 \\ g_2 n_2 \left(1 - \frac{n_2 + \beta_{21} n_1}{W_2} \right) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} g_1 n_1 = 0 & \vee & 1 - \frac{n_1 + \beta_{12} n_2}{W_1} = 0 \\ g_2 n_2 = 0 & \vee & 1 - \frac{n_2 + \beta_{21} n_1}{W_2} = 0 \end{cases}$$

É imediato que $n_1 = n_2 = 0$ é uma solução (trivial) do sistema acima - portanto há um equilíbrio na origem. Consideremos agora $n_1 \neq 0$, $n_2 = 0$. Então

$$1 - \frac{n_1 + \beta_{12} n_2}{W_1} = 0 \iff n_1 = W_1$$

Portanto $(0, W_1, 0)$ é uma solução. Por simetria, temos que $(0, 0, W_2)$ também é solução. Para o caso $n_1, n_2 \neq 0$, temos

$$\begin{cases} 1 - \frac{n_1 + \beta_{12}n_2}{W_1} = 0 \\ 1 - \frac{n_2 + \beta_{21}n_1}{W_2} = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} n_1 + \beta_{12}n_2 = W_1 \\ n_2 + \beta_{21}n_1 = W_2 \end{cases}$$

$$n_1 = W_1 - \beta_{12}n_2 \implies n_2 + \beta_{21}(W_1 - \beta_{12}n_2) = W_2$$

$$\implies n_2 = \frac{W_2 - \beta_{21}W_1}{1 - \beta_{12}\beta_{21}} \quad \wedge \quad n_1 = \frac{W_1 - \beta_{12}W_2}{1 - \beta_{12}\beta_{21}}$$

Chamando de \bar{n}_1 e \bar{n}_2 as soluções encontradas, temos que $(0, \bar{n}_1, \bar{n}_2)$ é ponto de equilíbrio. Assumimos agora que $X \neq 0$. Calcularemos o caso $n = (n_1, 0)$, o caso $n = (0, n_2)$ é simétrico. Como X não é nulo, voltamos à equação $\frac{dX}{dt} = 0$

$$\sum_{j=1}^2 Y_j \eta_j(n) X - XZ = 0 \implies Y_1 \eta_1(n) = Z \quad (10)$$

$$\begin{aligned} \implies Y_1 \left[f_1(n) \left(1 - \frac{f_1(n)}{4H_{\max_1}} \right) \right] &= Z \\ \implies \frac{[f_1(n)]^2}{4H_{\max_1}} - f_1(n) + \frac{Z}{Y_1} &= 0 \\ \implies f_1(n) &= 2H_{\max_1} \left(1 \pm \sqrt{1 - \frac{Z}{Y_1 H_{\max_1}}} \right) \end{aligned}$$

Notemos que, como h_{\max_1} é assíntota de $f_1(n)$, temos por (9) que $f_1(n) < 2H_{\max_1}$ e portanto

$$f_1(n) = 2H_{\max_1} \left(1 - \sqrt{1 - \frac{Z}{Y_1 H_{\max_1}}} \right) \quad (11)$$

Notemos também que

$$f_1(n) = f_1(n_1, 0) = \frac{n_1 r_1}{1 + t_{h_1} r_1 n_1}$$

substituindo em (11)

$$\begin{aligned}
\frac{n_1 r_1}{1 + t_{h_1} r_1 n_1} &= 2H_{\max_1} \left(1 - \sqrt{1 - \frac{Z}{Y_1 H_{\max_1}}} \right) \\
n_1 \left(\sqrt{1 - \frac{Z}{Y_1 H_{\max_1}}} \right) &= \frac{2H_{\max_1}}{r_1} \left(1 - \sqrt{1 - \frac{Z}{Y_1 H_{\max_1}}} \right) \\
n_1 &= \frac{2H_{\max_1}}{r_1} \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{Z}{Y_1 H_{\max_1}}}} - 1 \right)
\end{aligned}$$

Chamemos o valor encontrado acima de \tilde{n}_1 . Podemos então encontrar X por meio da equação $\frac{d\tilde{n}_1}{dt} = 0$

$$g_1 \tilde{n}_1 \left(1 - \frac{\tilde{n}_1}{W_1} \right) = \eta_1(n) X$$

Por (10), temos que $\eta_1(n) = \frac{Z}{Y_1}$, portanto

$$X = \frac{Y_1 g_1 \tilde{n}_1}{Z} \left(1 - \frac{\tilde{n}_1}{W_1} \right)$$

Seja \tilde{X} a solução acima. Temos então um equilíbrio em $(\tilde{X}, \tilde{n}_1, 0)$. O outro equilíbrio está em $(\hat{X}, 0, \hat{n}_2)$, onde

$$\begin{aligned}
\hat{n}_2 &= \frac{2H_{\max_2}}{r_2} \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{Z}{Y_2 H_{\max_2}}}} - 1 \right) \\
\hat{X} &= \frac{Y_2 g_2 \hat{n}_2}{Z} \left(1 - \frac{\hat{n}_2}{W_2} \right)
\end{aligned}$$

Temos então os seguintes equilíbrios de fronteira

$$\begin{aligned}
E_0 &= (0, 0, 0) & E_1 &= (0, W_1, 0) & E_2 &= (0, 0, W_2) \\
\bar{E} &= (0, \bar{n}_1, \bar{n}_2) & \tilde{E} &= (\tilde{X}, \tilde{n}_1, 0) & \hat{E} &= (\hat{X}, 0, \hat{n}_2)
\end{aligned}$$

Utilizando *SageMath9.3* para visualizar os 4 primeiros equilíbrios:

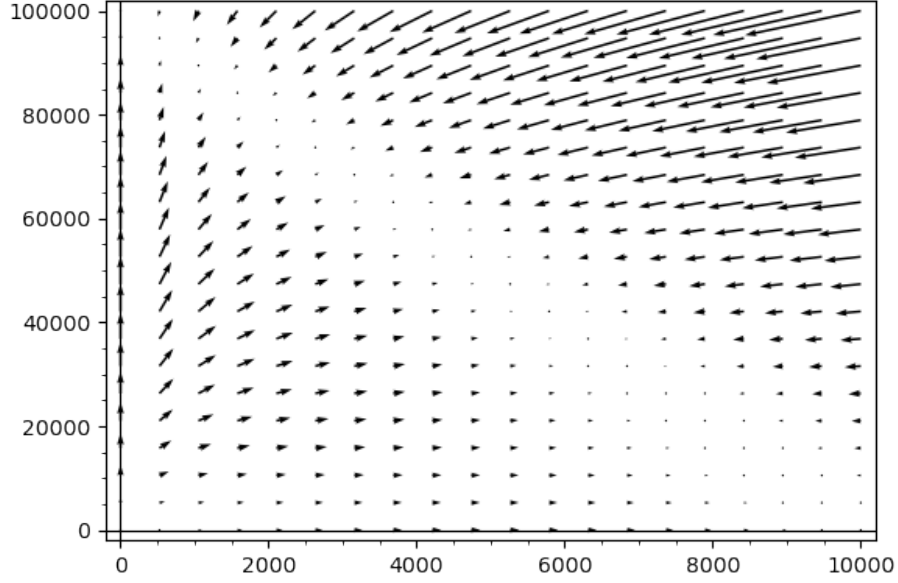


Figura 1: equilíbrios de fronteira

3.2 Estabilidade

Os Equilíbrios E_0 , E_1 , E_2 e \bar{E} representam um estado estacionário onde os herbívoros estão ausentes. A condição de estabilidade para esses equilíbrios são similares ao modelo de competição provado no modelo de Lotka-Volterra, que a taxa de morte de herbívoros, Z , excede o valor crítico $\min(Z_i)$, dado por $Z_i = Y_1\eta_1(\mathbf{n}_i) + Y_2\eta_2(\mathbf{n}_i)$ com $n_1 = (W_1, 0)$, $n_2 = (0, W_2)$ e $n_3 = (\bar{n}_1, \bar{n}_2)$.

$$\begin{aligned}\frac{dn_1}{dt} &= g_1 n_1 \left(1 - \frac{n_1}{W_1} - \frac{\beta_{12} n_2}{W_1} \right) - \eta_1(\mathbf{n})X \\ \frac{dn_2}{dt} &= g_2 n_2 \left(1 - \frac{n_2}{W_2} - \frac{\beta_{21} n_1}{W_2} \right) - \eta_2(\mathbf{n})X \\ \frac{dX}{dt} &= Y_1\eta_1(\mathbf{n})X + Y_2\eta_2(\mathbf{n})X - ZX = [Y_1\eta_1(\mathbf{n}) + Y_2\eta_2(\mathbf{n})]X - ZX\end{aligned}$$

Isso é fácil de ver em $\frac{dX}{dt}$ pois se $Z > \min(Z_i)$ essa derivada será negativa, o que acarreta na extinção dos herbívoros.

É de fácil visualização que E_0 é um equilíbrio instável, pois qualquer pequena variação não tende a voltar para ele, para E_1 teremos que é um equilíbrio localmente assintoticamente estável quando $\frac{\beta_{21}n_1}{W_2} > 1$, pois isso fará com que a derivada $\frac{dn_2}{dt}$ seja sempre negativa e $Z < Z_1$, para E_2 teremos que é um equilíbrio localmente assintoticamente estável quando $\frac{\beta_{12}n_2}{W_1} > 1$, pois isso fará

com que a derivada $\frac{dn_1}{dt}$ seja sempre negativa e $Z < Z_3$ e para \bar{E} teremos que é um equilíbrio localmente assintoticamente estável quando $\frac{\beta_{21}n_1}{W_2} < 1$ e $\frac{\beta_{12}n_2}{W_1} < 1$, com isso as derivadas vão depender dos valores de n_1 e n_2 para serem negativas ou positivas até se tornarem estáveis e $Z < Z_3$.

3.3 Equilíbrios internos

Devido a alta não linearidade das equações, é muito difícil obter uma solução analítico pro equilíbrio interior. Entretanto, podemos usar as raízes positivas das derivadas para determinar tal equilíbrio (E^*). Utilizando o sistema de EDO's descrito em (8) temos:

$$\begin{aligned}
0 = \frac{dX}{dt} &= \sum_{i=1}^2 \left\{ \frac{Y_i r_i n_i}{1 + t_{h_1} r_1 n_1 + t_{h_2} r_2 n_2} \left[1 - \frac{r_i n_i}{4 \frac{1}{2t_{h_i}} (1 + t_{h_1} r_1 n_1 + t_{h_2} r_2 n_2)} \right] \right\} - Z \\
&= \sum_{i=1}^2 \left[\frac{Y_i r_i n_i}{1 + t_{h_1} r_1 n_1 + t_{h_2} r_2 n_2} - \frac{t_{h_i} Y_i r_i^2 n_i^2}{2(1 + t_{h_1} r_1 n_1 + t_{h_2} r_2 n_2)^2} \right] - Z \\
&= \sum_{i=1}^2 \left[\frac{Y_i r_i n_i [2(1 + t_{h_1} r_1 n_1 + t_{h_2} r_2 n_2)] - t_{h_i} Y_i r_i^2 n_i^2}{2(1 + t_{h_1} r_1 n_1 + t_{h_2} r_2 n_2)^2} \right] - Z \\
&= \sum_{i=1}^2 \left[\frac{Y_i r_i n_i (2 + 2t_{h_1} r_1 n_1 + 2t_{h_2} r_2 n_2 - t_{h_i} r_i n_i)}{2(1 + t_{h_1} r_1 n_1 + t_{h_2} r_2 n_2)^2} \right] - Z \\
\Rightarrow \Upsilon_1(n_1^*, n_2^*) &= \sum_{i,j=1, i \neq j}^2 \left[\frac{Y_i r_i n_i^* (2 + t_{h_i} r_i n_i^* + 2t_{h_j} r_j n_j^*)}{2(1 + t_{h_1} r_1 n_1^* + t_{h_2} r_2 n_2^*)^2} \right] - Z = 0
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
\frac{dN_1}{dt} &= g_1 n_1 \left(1 - \frac{n_1 + \beta_{12} n_1}{W_1} \right) - f_1(\mathbf{n}) X = 0 \\
\Rightarrow X &= \frac{2(1 + t_{h_1} r_1 n_1 + t_{h_2} r_2 n_2)^2}{r_1 n_1 (2 + t_{h_1} r_1 n_1 + 2t_{h_2} r_2 n_2)} g_1 n_1 \left(1 - \frac{n_1 + \beta_{12} n_1}{W_1} \right) \\
\frac{dN_2}{dt} &= g_2 n_2 \left(1 - \frac{n_2 + \beta_{21} n_2}{W_2} \right) - f_2(\mathbf{n}) X = 0 \\
\Rightarrow X &= \frac{2(1 + t_{h_1} r_1 n_1 + t_{h_2} r_2 n_2)^2}{r_2 n_2 (2 + 2t_{h_1} r_1 n_1 + t_{h_2} r_2 n_2)} g_2 n_2 \left(1 - \frac{n_2 + \beta_{21} n_2}{W_2} \right)
\end{aligned}$$

igualando as duas equações

$$\begin{aligned} \frac{2(1+t_{h_1}r_1n_1+t_{h_2}r_2n_2)^2}{r_1(2+t_{h_1}r_1n_1+2t_{h_2}r_2n_2)}g_1\left(1-\frac{n_1+\beta_{12}n_1}{W_1}\right) &= \frac{2(1+t_{h_1}r_1n_1+t_{h_2}r_2n_2)^2}{r_2(2+2t_{h_1}r_1n_1+t_{h_2}r_2n_2)}g_2\left(1-\frac{n_2+\beta_{21}n_2}{W_2}\right) \implies \\ (2+2t_{h_1}r_1n_1+t_{h_2}r_2n_2)g_1r_2\left(1-\frac{n_1+\beta_{12}n_1}{W_1}\right) &= (2+t_{h_1}r_1n_1+2t_{h_2}r_2n_2)g_2r_1\left(1-\frac{n_2+\beta_{21}n_2}{W_2}\right) \implies \\ \Upsilon_2(n_1^*, n_2^*) &= \sum_{i,j=1, i \neq j}^2 (-1)^j r_j g_i \left(1 - \frac{n_i^* + \beta_{ij}n_i^*}{W_i}\right) (2 + t_{h_j}r_jn_j^* + 2t_{h_i}r_in_i^*) = 0 \end{aligned}$$

Se calcularmos a intercessão das curvas chegaremos nos pontos de equilíbrios interiores no plano (n_1, n_2) .

4 Discussão

Utilizamos como base os modelos de competição de Lotka-Volterra, cuja equação para uma população de N espécies é dada por

$$\frac{dn_i}{dt} = g_i n_i \left(1 - \frac{\sum_{j=1}^N \beta_{ij} n_j}{W_i} \right)$$

e o modelo padrão Holling de tipo 2, com equação

$$f(n) = \frac{nr}{1 + t_h nr}$$

conseguimos expressar de maneira funcional o sistema proposto adicionando a variável de toxicidade aos sistemas já existentes. A partir das equações encontradas para a taxa de consumo (f) e a taxa real de consumo (η), conseguimos um sistema de equações diferenciais que representa a relação planta-herbívoro no ambiente.

Seguimos o mesmo modelo utilizado em [1], adicionando alguns detalhes que não estavam presentes nesse artigo, como passos não triviais omitidos nas equações e a utilização do *SageMath9.3* para visualização dos 4 primeiros equilíbrios de fronteira. Tivemos foco no desenvolvimento passo a passo das equações obtidas, para uma melhor compreensão analítica do que ocorre a cada resultado encontrado.

5 Conclusão

Vimos com nossas análises que o fato de uma planta ter toxicidade influencia fortemente no desenvolvimento das equações e por consequência nos equilíbrios do sistema, pois torna ele mais realístico e diferente do Lotka-Volterra, mais comum nesse tipo de análise. Com possíveis análises futuras e modelos mais realistas usando dados coletados da natureza com herbívoros e plantas poderíamos chegar a melhores conclusões e gráficos mostrando a realidade de um sistema natural. Com isso poderíamos prever os riscos de determinada planta ou animal ser extinto de uma região e assim impedindo algumas extinções.

Referências

- [1] Y. Li, Z. Feng, R. Swihart, J. Bryant, and N. Huntly, “Modeling the impact of plant toxicity on plant–herbivore dynamics,” *Journal of Dynamics and Differential equations*, vol. 18, no. 4, pp. 1021–1042, 2006.
- [2] Z. Feng, R. Liu, and D. L. DeAngelis, “Plant–herbivore interactions mediated by plant toxicity,” *Theoretical Population Biology*, vol. 73, no. 3, pp. 449–459, 2008.
- [3] C. S. Holling, “Some characteristics of simple types of predation and parasitism1,” *The Canadian Entomologist*, vol. 91, no. 7, pp. 385–398, 1959.
- [4] C. S. Holling, “The components of predation as revealed by a study of small-mammal predation of the european pine sawfly1,” *The Canadian Entomologist*, vol. 91, no. 5, pp. 293–320, 1959.
- [5] Z. Feng, Z. Qiu, R. Liu, and D. L. DeAngelis, “Dynamics of a plant–herbivore–predator system with plant-toxicity,” *Mathematical Biosciences*, vol. 229, no. 2, pp. 190–204, 2011.