Modelagem de um sistema dinâmico planta-herbívoro levando em conta a presença de plantas tóxicas no ambiente

André Ribeiro, Erlon Kelvim

September 22, 2021

1 Introdução

Embora o estudo da relação entre herbívoros-plantas já seja estudado a muitos anos, apenas a pouco tempo começou-se as pesquisas sobre a influência da toxidade das plantas sobre tal relação. Nosso trabalho busca usar como base empírica a relação mamífero-planta a fim criar um modelo matemático em que p efeito negativo gerado pela toxidade das plantas seja expresso de maneira mais explícita em nosso modelo [1] [2].

O modelo mais usado para análise da relação mamífero-planta é o Holling tipo II [3][4] que foi proposto em um sistema onde haja uma abundância de presas (plantas) e a reação do predador a tal sistema e chegou-se que a resposta funcional seria um aumento do consumo da presa a medida que sua biomassa aumenta, até a capacidade do predador de comer a presa esteja saciada, a partir disso, independente do aumento da biomassa da presa o consumo do predador se manterá constante. Entretanto a existência de toxinas nas plantas pode alterar esse sistema [5], pois a variação da toxidade das plantas faz com que os mamíferos se alimentem seletivamente, fazendo com que a diversidade da vegetação e os processos do ecossistema sejam afetados.

2 Metodologia

Inicialmente, consideramos o sistema mais simples possível, onde há somente uma planta e não há toxicidade. Seja n o número de galhos de plantas disponíveis no sistema, t_b o tempo necessário para um herbívoro encontrar o galho, r a taxa de crescimento por unidade de galho e t_h o tempo (em segundos) que um herbívoro leva para consumir e digerir uma unidade de galho. Com essas informações, temos que o total de galhos encontrados em um dado tempo t_b é $T_g = nrt_b$ e o tempo total gasto pelo herbívoro consumindo galhos é

$T_h = hnrt_b = hT_g$. Definimos então a taxa de consumo

$$f(n) \coloneqq \frac{T_g}{t_b + T_h} = \frac{nr}{1 + t_h nr} \tag{1}$$

Note que da maneira como t_h foi definido, temos que $h_{\max} = \frac{1}{t_h}$ é o número máximo de galhos que um herbívoro pode consumir por unidade de tempo, na ausência de toxicidade. Note também que

$$h_{\max} = \lim_{n\to\infty} f(n) \tag{2}$$

i.e. $h_{\max}$ é assintota da função f. Contudo, nossa análise até aqui considerava o sistema incompleto, sem toxicidade. Na presença dessa nova variável, devemos ter uma taxa real de consumo $\eta(n)$ menor que $f(n)$ e uma quantidade máxima de galhos contendo toxinas $H_{\max}$ menor que $h_{\max}$. Para encontrar a função η, note que a função $R = \frac{\eta}{f}$ deve ser uma função decrescente de f, com $R \to 1$ quando $f \to 0$, já que se o consumo está diminuindo, o consumo de plantas com toxicidade está aumentando, e se $\frac{H_{\max}}{\alpha}$ é um valor limitante para f, $R \to 0$ quando $f \to \frac{H_{\max}}{\alpha}$, já que há plantas em abundância e a taxa de consumo de plantas com toxicidade diminui. Uma boa maneira de expressar essas propriedades é considerar R como a seguinte função linear

$$R = 1 - \frac{\alpha f}{H_{\max}}$$

onde a constante de proporção α é escolhida de modo que $\max\{\eta\} = H_{\max}$. Lembrando que $R = \frac{\eta}{f}$, temos que

$$\frac{\eta}{f} = 1 - \frac{\alpha f}{H_{\max}}$$

logo

$$\eta(f) = f\left(1 - \frac{\alpha f}{H_{\max}}\right) \tag{3}$$

Para encontrar o valor de α, vamos encontrar o máximo da função η

$$\eta' = f'\left(1 - \frac{2\alpha f}{H_{\max}}\right)$$

Como buscamos $\eta' = 0$, devemos ter $f' = 0 \quad \vee \quad 1 - \frac{2\alpha f}{H_{\max}} = 0$. O primeiro caso ocorre apenas quando $n \to \infty$, iremos então considerar o segundo caso

$$\begin{aligned} 1 - \frac{2\alpha f}{H_{\max}} &= 0 \\ \frac{2\alpha f}{H_{\max}} &= 1 \\ \frac{H_{\max}}{2\alpha} &= f \end{aligned}$$

Substituindo o valor que maximiza a função η obtemos

$$\begin{aligned}
\eta\left(\frac{H_{\max}}{2\alpha}\right) &= \frac{H_{\max}}{2\alpha}\left(1-\frac{\alpha\cdot\frac{H_{\max}}{2\alpha}}{H_{\max}}\right)\\
&= \frac{H_{\max}}{2\alpha}\cdot\frac{1}{2}\\
&= \frac{H_{\max}}{4\alpha}
\end{aligned}$$

Havíamos escolhido α de modo que $\max\{\eta\} = H_{\max}$, então $\alpha = \frac{1}{4}$. Como η é a taxa de consumo, faz sentido considerar apenas o intervalo de definição para o qual $\eta \geq 0$, ou seja

$$\eta \geq 0 \implies f\left(1-\frac{f}{4H_{\max}}\right) \geq 0$$

Já que $f > 0$, devemos ter

$$1-\frac{f}{4H_{\max}} \geq 0 \implies 1 \geq \frac{f}{4H_{\max}} \implies 4H_{\max} \geq f$$

Por (2), obtemos

$$4H_{\max} \geq f \quad \wedge \quad f < h_{\max} \implies 4H_{\max} > h_{\max} \implies H_{\max} > \frac{h_{\max}}{4}$$

Temos então a seguinte relação entre a quantidade máxima de galhos contendo toxinas consumidas por um herbívoro e a quantidade máxima de galhos consumidas por um herbívoro

$$\frac{h_{\max}}{4} < H_{\max} < h_{\max} \tag{4}$$

Com isso, temos o seguinte sistema de EDO's que descreve nosso sistema

$$\begin{aligned}
\frac{dn}{dt} &= rn\left(1-\frac{n}{W}\right) - \eta(n)X\\
\frac{dX}{dt} &= Y\eta(n)X - XZ
\end{aligned}$$

onde $X = X(t)$ representa a quantidade de herbívoros no tempo t, Y a conversão da biomassa de espécies de plantas consumidas em novos herbívoros, Z a taxa de morte per capita de herbívoros devido a causas não relacionadas à toxicidade da planta e W a capacidade de carregamento do herbívoro.

Podemos obter a taxa real de consumo como uma função da abundância de plantas no sistema substituindo a equação (1) na equação (3)

$$\begin{aligned}
\eta(n) &= f(n)\left(1-\frac{f(n)}{4H_{\max}}\right)\\
&= \frac{nr}{1+t_h nr}\left(1-\frac{nr}{4H_{\max}(1+t_h nr)}\right)
\end{aligned} \tag{5}$$

Para generalizar o modelo obtido, consideramos os vetores $n = (n_1, n_2, \cdots, n_k)$, $r = (r_1, r_2, \cdots, r_k)$, $t_h = (t_{h_1}, t_{h_2}, \cdots, t_{h_k})$ e $H_{\max} = (H_{\max_1}, H_{\max_2}, \cdots, H_{\max_k})$, onde cada componente é relativo à planta da espécie i, e cada r_i é considerado em um ambiente em que não há competição de recursos pelas plantas. Podemos então obter $f = (f_1, f_2, \cdots, f_k)$ e $\eta = (\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_k)$, onde cada componente é dada por

$$f_i(n) = \frac{n_i r_i}{1 + \sum_{i=1}^{k} t_{h_i} n_i r_i} \tag{6}$$

e

$$\eta_i(n) = f_i(n)\left(1 - \frac{f_i(n)}{4H_{\max_i}}\right) \tag{7}$$

Utilizando a equação acima, nosso modelo para o sistema planta-herbívoro é descrito pelo seguinte sistema de EDO's

$$\begin{aligned} \frac{dn_i}{dt} &= r_i n_i \left(1 - \frac{n_i + \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{k} \beta_{ij} n_j}{W_i}\right) - \eta_i(n) X \\ \frac{dX}{dt} &= \sum_{j=1}^{k} Y_j \eta_j(n) X - XZ \end{aligned} \tag{8}$$

onde β_{ij} é o parâmetro de competição dos herbívoros, que mede a intensidade de competição da espécie j contra a espécie i. Todos os parâmetros e suas unidade estão definidos na tabela abaixo, para alguns tipos de planta. Note que para cada i (espécie), os valores que acima possuem esse índice podem variar em relação aos valores abaixo

Parâmetro	Unidade	Valor (ou intervalo)
t_b	Taxa de encontro por unidade de galho	[0.0001,0.0005]
r	Máximo de novas unidades de galhos/galho por dia	[0.003,0.01]
t_h	Tempo para consumir uma unidade de galho na ausência de toxinas	[0.0025,0.03125]
W	Capacidade de carga	$[10^4, 10^5]$
Y	Constante de conversão (herbívoro/unidade de galho)	[0.00003,0.00006]
Z	Taxa de morte de herbívoros per capita	[0.00003,0.0002]
$H_{\max}$	Máximo de unidades de galho contendo toxina (de um certo tipo) que um herbívoro pode consumir por dia	[8,80]
β	Coeficiente de competição	$[10^{-1}, 10]$

Table 1: Parâmetros, unidades e valores das variáveis para algumas espécies de plantas

References

[1] Y. Li, Z. Feng, R. Swihart, J. Bryant, and N. Huntly, "Modeling the impact of plant toxicity on plant–herbivore dynamics," *Journal of Dynamics and Differential equations*, vol. 18, no. 4, pp. 1021–1042, 2006.

[2] Z. Feng, R. Liu, and D. L. DeAngelis, "Plant–herbivore interactions mediated by plant toxicity," *Theoretical Population Biology*, vol. 73, no. 3, pp. 449–459, 2008.

[3] C. S. Holling, "Some characteristics of simple types of predation and parasitism1," *The Canadian Entomologist*, vol. 91, no. 7, pp. 385–398, 1959.

[4] C. S. Holling, "The components of predation as revealed by a study of small-mammal predation of the european pine sawfly1," *The Canadian Entomologist*, vol. 91, no. 5, pp. 293–320, 1959.

[5] Z. Feng, Z. Qiu, R. Liu, and D. L. DeAngelis, "Dynamics of a plant–herbivore–predator system with plant-toxicity," *Mathematical Biosciences*, vol. 229, no. 2, pp. 190–204, 2011.