设 $\mathscr{E}$ 是 N 维欧几里得空间，$\mathscr{V}_{\mathscr{E}}$ 是其平移空间。考虑一个 N 向量场函数 $\mathbf{f}:\mathscr{E}\supset\Omega\to\mathscr{V}$，其中 $\mathscr{V}$ 的维数也是 N（N^n 维且 $n=1$）。由于 $\mathscr{V}$ 与 $\mathscr{V}_{\mathscr{E}}$ 是同维数的，因此这两个向量空间是同构的。我们可以把 $\mathbf{f}$ 的值看作 $\mathscr{V}_{\mathscr{E}}$ 中的一个向量，即 $\mathscr{E}$ 中的一个平移向量。在作图时，我们常将 $\mathbf{f}(X)$ 以某平移向量的形式，画在点 X 处（如图??所示）。若 $\mathscr{E}$ 的基本坐标系是 $(O,\{\widehat{\mathbf{e}}_i\})$，则任一点 $X\in\Omega$ 的位置向量 $\mathbf{r}_X=\sum_{i=1}^N x_i\widehat{\mathbf{e}}_i$，其中 $(x_1,\cdots,x_N)$ 是点 X 在基本直角坐标系下的坐标。场函数 $\mathbf{f}(X)$ 的值，现作为 $\mathscr{V}_{\mathscr{E}}$ 中的一个向量，也具有在 $\{\widehat{\mathbf{e}}_i\}$ 下的坐标函数 $\mathbf{f}(X)=\sum_{i=1}^N f_i(X)\widehat{\mathbf{e}}_i$。设某曲线坐标系的基是 $\{\widehat{\mathbf{c}}_i\}$，则位置向量 $\mathbf{r}_X$ 和场函数值 $\mathbf{f}(X)$ 都可以写成点关于点 X 的 $\{\widehat{\mathbf{c}}_i\}$ 下的坐标（记得，曲线坐标系的基是依赖点 X 变化的），$(x_1^{\mathrm{c}},\cdots,x_N^{\mathrm{c}})$ 和 $(f_1^{\mathrm{c}},\cdots,f_N^{\mathrm{c}})$。场函数的导数 $\mathrm{D}\mathbf{f}(X)$ 在直角坐标系下的坐标矩阵和在曲线坐标系下的坐标矩阵之间，具有一般的的转换关系。本节将推导这个转换关系。

首先考虑由点 $X\in\mathscr{E}$ 出发的某平移 $X'-X$，它是一个平移向量，它可以用 $\mathscr{V}_{\mathscr{E}}$ 的基 $\{\widehat{\mathbf{e}}_i\}$ 表示为 $X-X_0=\sum_{i=1}^N(x_i'-x_i)\widehat{\mathbf{e}}_i$。由于在给定直角坐标系下，欧几里得空间中的点与其在该直角坐标系下的坐标之间是双射关系，所以若视 X 为 $(x_1,\cdots,x_n)$ 的函数，则由微分的定义，有

$$X'-X=\sum_{i=1}^N(x_i'-x_i)\widehat{\mathbf{e}}_i=\sum_{i=1}^N\mathrm{d}x_i\widehat{\mathbf{e}}_i+\sum_{i=1}^N o(|\Delta x_i|)\widehat{\mathbf{e}}_i$$

其中 $\Delta x_i\equiv x_i'-x_i$，$o(x)$ 表示 $x\to0$ 时 x 的高阶无穷小，且在这里显然 $o(x)\equiv0$，故记号 $\mathrm{d}x_i\equiv\Delta x_i$。我们记 $\mathbb{R}^n$ 中的一个向量 $\mathbf{x}=(x_1,\cdots,x_n)$ 为它所对应的点 $X\in\mathscr{E}$ 的在直角坐标系 $(O,\{\widehat{\mathbf{e}}_i\})$ 下的坐标，则 $\mathbf{x}$ 亦是点 X 的位置向量 $\mathbf{r}_X\in\mathscr{V}_{\mathscr{E}}$ 在基 $\{\widehat{\mathbf{e}}_i\}$。我们进一步记上式等号右边的向量 $\sum_{i=1}^N\mathrm{d}x_i\widehat{\mathbf{e}}_i$ 为 $\mathrm{d}\mathbf{x}$，我们可以说 $\mathrm{d}\mathbf{x}$ 在 $\{\widehat{\mathbf{e}}_i\}$ 下的坐标是 $\mathrm{d}x_i$。值得注意的是，这些概念都是在关于具体某点 $X\in\mathscr{E}$ 的讨论之下的。

如果选择了一个曲线坐标系，它的参数映射是 $T:\mathbb{R}^N\supset\mathscr{U}\to\mathbb{R}^N$，即对任一点 $X\in\mathscr{E}$，总有唯一一组 $(u_1,\cdots,u_N)\in\mathscr{U}$ 与之对应，则 $(x_1,\cdots,x_N)=T(u_1,\cdots,u_N)$。若记 x_i 在映射 T 下关于 $(u_1,\cdots,u_N)$ 的分量函数为 $x_i(u_1,\cdots,u_N)$，则按照全微分的定义和写法有

$$\begin{aligned}\mathrm{d}x_i&=\sum_{j=1}^N\frac{\partial x_i}{\partial u_j}\mathrm{d}u_j,\quad i=1,\cdots,N,\\ \mathrm{d}\mathbf{x}&=\sum_{i=1}^N\sum_{j=1}^N\frac{\partial x_i}{\partial u_j}\mathrm{d}u_j\widehat{\mathbf{e}}_i\\ &=\sum_{i=1}^N\sum_{j=1}^N h_j^{-1}h_j\frac{\partial x_i}{\partial u_j}\mathrm{d}u_j\widehat{\mathbf{e}}_i\\ &=\sum_{j=1}^N h_j\mathrm{d}u_j\widehat{\mathbf{c}}_j\end{aligned}$$

其中 h_i 是曲线坐标系在点 X 处的拉梅系数，$\widehat{\mathbf{c}}_i$ 是曲线坐标系在点 X 处的基向量。可见在每一

点 X 处，向量 $\mathrm{d}\mathbf{x}$ 在曲线坐标系的基下的坐标是 $(h_1\mathrm{d}u_1,\cdots,h_N\mathrm{d}u_N)$。若记 $\mathrm{d}\mathbf{x}=\sum_{i=1}^{N}\mathrm{d}x_i^{\mathrm{c}}\widehat{\mathbf{c}}_i$，则有坐标变换公式

$$\mathrm{d}x_i^c=h_i\mathrm{d}u_i,\quad i=1,\cdots,N$$

现在我们考虑向量场函数 $\mathbf{f}(X)$ 的导数在直角坐标系和曲线坐标系下的坐标。函数 $\mathbf{f}$ 在点 X 处的微分是 $\mathrm{D}\mathbf{f}(X)(X'-X)$，它是一个 $\mathscr{V}_{\mathscr{E}}$ 中的向量，我们记为 $\mathrm{d}\mathbf{f}$。我们记 $\mathbf{f}(X)$ 的导数为 $\mathbf{L}=\mathrm{D}f(X)$，则 $\mathbf{L}\in\mathscr{L}(\mathscr{V}_{\mathscr{E}})$ 是 $\mathscr{V}_{\mathscr{E}}$ 上的一个线性算符。再利用之前的记法 $\mathrm{d}\mathbf{x}=X'-X$，我们有

$$\mathrm{d}\mathbf{f}=\mathbf{L}\mathrm{d}\mathbf{x}$$

我们关心的是 $\mathbf{L}$ 在直角坐标系下的坐标矩阵分量 L_{ij} 和在曲线坐标系下的坐标矩阵分量 L_{ij}^{c} 之间的关系。由于 $\mathrm{d}\mathbf{f}$ 是同一个向量，因此它由基 $\{\widehat{\mathbf{e}}_i\}$ 的线性表出等于由基 $\{\widehat{\mathbf{c}}_i\}$ 的线性表出。即

$$\mathrm{d}\mathbf{f}=\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}L_{ij}\mathrm{d}x_j\widehat{\mathbf{e}}_i=\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}L_{ij}^{\mathrm{c}}\mathrm{d}x_j^{\mathrm{c}}\widehat{\mathbf{c}}_i$$

若记 S 是由基 $\{\widehat{\mathbf{e}}_i\}$ 到基 $\{\widehat{\mathbf{c}}_i\}$ 的过渡矩阵，则由定理**??**有

$$L_{ij}^{\mathrm{c}}=\sum_{k,l=1}^{N}S_{ik}^{\mathrm{inv}}L_{kl}S_{lj},\quad i,j=1,\cdots,N$$

我们已经知道，$L_{ij}=\partial f_i/\partial x_j$，视 $x_j=x_j(u_1,\cdots,u_N)$ 为映射 T 的分量函数，以及 S_{ij} 的表达式，上式可以进一步写成

$$L_{ij}^{\mathrm{c}}=\sum_{k,l=1}^{N}S_{ik}^{\mathrm{inv}}\frac{\partial f_k}{\partial x_l}h_j^{-1}\frac{\partial x_l}{\partial u_j}$$

再由坐标变换公式 $f_i=\sum_{j=1}^{N}f_j^{\mathrm{c}}S_{ij}$，代入上式得

$$\begin{aligned}
L_{ij}^{\mathrm{c}}&=\sum_{k,l=1}^{N}S_{ik}^{\mathrm{inv}}\frac{\partial}{\partial x_l}\left(\sum_{m=1}^{N}S_{km}f_m^{\mathrm{c}}\right)h_j^{-1}\frac{\partial x_l}{\partial u_j}\\
&=\sum_{k,l,m=1}^{N}S_{ik}^{\mathrm{inv}}\left(\frac{\partial S_{km}}{\partial x_l}f_m^{\mathrm{c}}+\frac{\partial f_m^{\mathrm{c}}}{\partial x_l}S_{km}\right)h_j^{-1}\frac{\partial x_l}{\partial u_j}\\
&=\sum_{k,l,m=1}^{N}\left(h_j^{-1}S_{ik}^{\mathrm{inv}}\frac{\partial S_{km}}{\partial x_l}\frac{\partial x_l}{\partial u_j}f_m^{\mathrm{c}}+h_j^{-1}S_{ik}^{\mathrm{inv}}S_{km}\frac{f_m^{\mathrm{c}}}{\partial x_l}\frac{\partial x_l}{\partial u_j}\right)\\
&=\sum_{k,l=1}^{N}h_j^{-1}S_{ik}^{\mathrm{inv}}\frac{\partial S_{kl}}{\partial u_j}f_l^{\mathrm{c}}+\sum_{k=1}^{N}h_j^{-1}\frac{\partial f_i^{\mathrm{c}}}{\partial u_j},\quad i,j=1,\cdots,N
\end{aligned}$$

记上式第二项中的

$$\Gamma_{lj}^{i}=h_j^{-1}\sum_{k=1}^{N}\frac{\partial S_{kl}}{\partial u_j}S_{ik}^{\mathrm{inv}},\quad i,j,l=1,\cdots,N$$

称为该曲线坐标系的克里斯托菲尔符号（*Christoffel symbols*）*。我们可以把 $\mathbf{L}$ 在直角坐标系和曲线坐标系下的坐标矩阵之间的关系总结为

$$L_{ij}^{\mathrm{c}} = h_j^{-1}\frac{\partial f_i^{\mathrm{c}}}{\partial u_j} + \sum_{l=1}^{N}\Gamma_{lj}^{i} f_l^{\mathrm{c}}, \quad i,j=1,\cdots,N$$

只要我们把某向量场物理性质视为欧几里得空间的平移向量，那么它的导数在曲线坐标系下的矩阵就必须满足上式。我们将会在本讲义的后面看到，有些向量场并不能简单视为平移向量，它们的导数在曲线坐标系下的矩阵就并不满足上式，而需根据这些向量场的物理定义来具体推算。

例 0.1 (柱坐标系和球坐标系的克氏符号). 我们由例??给出的 S_{cyl} 和 S_{sph} 可以写出三维（$N=3$）柱坐标系和球坐标系的克氏符号。柱坐标系的克氏符号为

$$\Gamma^{\rho} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{\rho} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \Gamma^{\varphi} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\rho} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \Gamma^{z} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

球坐标系的克氏符号为

$$\Gamma^{r} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{r} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{r} \end{pmatrix}, \quad \Gamma^{\vartheta} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{r} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\cot\varphi}{r} & 0 \end{pmatrix}, \quad \Gamma^{\varphi} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{r} \\ 0 & -\frac{\cot\varphi}{r} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

*这里的克氏符号与有些文献中所说的第二类克氏符号定义相同。