为了建立一个几何空间，我们需要先让一个集合的两个元素间有“距离”的概念。

定义 0.1 (度量空间). 设 $\mathscr{E}$ 是一个非空集合，如果映射 $d:\mathscr{E}\times\mathscr{E}\to[0,+\infty)\subset\mathbb{R}$ 满足

1. 不可区分者的同一性：$d(x,y)=0\Leftrightarrow x=y,\quad\forall x,y\in\mathscr{E}$
2. 对称性：$d(x,y)=d(y,x),\quad\forall x,y\in\mathscr{E}$
3. 三角不等式：$d(x,z)\le d(x,y)+d(y,z),\quad\forall x,y,z\in\mathscr{E}$

则称：$\mathscr{E}$ 的元素是点（*point*），d 是定义在 $\mathscr{E}$ 上的一个度量（*metric*），有序对 $(\mathscr{E},d)$ 是一个度量空间（*metric space*）。

由定义易证，度量总是非负的，即 $d(x,y)\ge 0,\forall x,y\in\mathscr{E}$。由第 3 条，$d(x,y)+d(y,x)\ge d(x,x)$；再由第 2 条，$d(x,y)+d(x,y)\ge d(x,x)$；最后由第一条有 $2d(x,y)\ge 0\Rightarrow d(x,y)\ge 0$（当且仅当 $x=y$ 时取等号）。由于这是定义0.1中的规定能够推出的，因此就算它是我们对距离的最直观要求，但却无需写进定义0.1中。

例 0.1. *1.* 离散度量（*discrete metric*）：设 $M=\{0,1\}$，定义 $d(x,y),\forall x,y\in M$

$$d(x,y)=\begin{cases}1, & x\neq y\\ 0, & x=y\end{cases}$$

则 (M,d) 是一个度量空间。把 M 改成实数集 $\mathbb{R}$，结合上列定义的 d，$(\mathbb{R},d)$ 也是一个度量空间。

2. 数域 $\mathbb{F}$ 上的赋范向量空间 $\mathscr{V}$，连同 $d(\mathbf{a},\mathbf{b})\equiv\|\mathbf{a}-\mathbf{b}\|$，构成一个度量空间 $(\mathscr{V},d)$。

3. 在实区间 $[0,\infty)$ 上定义的度量 $d(x,y)=|x-y|$ 形成一个度量空间。

易验，若 (M,d) 是一个度量空间，且 N 是 M 的一个子集，则 (N,d) 也是一个度量空间。

度量空间之间的同态映射将保持距离。具体地，

定义 0.2 (等距变换). 设 $(A,d_A),(B,d_B)$ 是两个度量空间，若映射 $i:A\to B$ 满足

$$d_B(i(a),i(b))=d_A(a,b),\forall a,b\in A$$

则称 i 是由 (A,d_A) 到 (B,d_B) 的一个保距映射（*distance-preserving mapping*）；若 i 是双射，则称 i 是由 (A,d_A) 到 (B,d_B) 的一个等距变换（*isometry*）。若两个度量空间之间可以定义出至少一个等距变换，则称这两个度量空间是等距的（*isometric*）。

所有保距映射都是单射，因为当 $a=b,d_B(i(a),i(b))=d_A(a,b)=0\Rightarrow i(a)=i(b)$。因此也可以说，等距变换是满射的保距映射。

一个集合 M 上可以定义不止一种度量映射，而形成不同的度量空间。两个度量空间之间也可以存在不止一个保距映射或等距变换。由一个度量空间到另一个度量空间的一个映射是否保距映射或等距变换，依赖这两个度量空间的度量定义。

例 0.2. 等距变换的一些例子：

1. 给定两个度量空间：

$$\left(\mathbb{R}^{+},d_{1}\right),d_{1}\left(x,y\right)=\left|\log x-\log y\right|,\quad\forall x,y\in\mathbb{R}^{+}$$

和

$$\left(\mathbb{R},d_{2}\right),d_{2}\left(x,y\right)=\left|x-y\right|\forall x,y\in\mathbb{R}$$

则映射 $\log:\mathbb{R}^{+}\to\mathbb{R}$ 是这两个度量空间的一个等距变换。

2. $\mathscr{V}$ 是数域 $\mathbb{F}$ 上的赋范向量空间，度量空间 $(\mathscr{V},\|\cdot\|)$ 到 $(\mathscr{V},\|\cdot\|_{r})$ 的映射 $i:\mathscr{V}\to\mathscr{V},i\left(\mathbf{a}\right)=r^{-1}\mathbf{a},\quad\forall\mathbf{a}\in\mathscr{V}$ 是一个等距变换，其中 $\|\cdot\|_{r}=r\|\cdot\|,r\in\mathbb{F}$。

3. 接着例0.1中的第 *1* 个例子，$\mathscr{V}$ 上的幺正算符是该例的度量空间中的等距变换。

4. 接着例0.1中的第 *2* 个例子，定义函数 $f\left(x\right)=x+1,\forall x\in[0,\infty)$，则 f 是该例的度量空间中的一个等距变换。

为了建立一个几何空间，我们特别关心的是从一个度量空间 (M,d) 到其自身的等距变换（度量空间的自同态映射）。特别地，若 (M,d) 上的所有等距变换的集合 $\mathcal{I}$ 满足：

G1 封闭性：$\forall i_1,i_2\in\mathcal{I},\quad i_1\circ i_2\in\mathcal{I}$

G2 结合律：$\forall i_1,i_2,i_3\in\mathcal{I},\quad,(i_1\circ i_2)\circ i_3=i_1\circ(i_2\circ i_3)$

G3 单位元：集合 M 上的恒等映射 $\mathrm{id}_M:M\to M,\quad\mathrm{id}_M\left(x\right)=x,\forall x\in M$ 也是等距变换，即 $\mathrm{id}_M\in\mathcal{I}$，且满足 $\forall i\in\mathcal{I},\quad\mathrm{id}_M\circ i=i\circ\mathrm{id}_M=i$

G4 逆元：$\forall i\in\mathcal{I}\exists i^{-1}\in\mathcal{I}\quad i^{-1}\circ i=\mathrm{id}_M$

则称 $\mathcal{I}$ 是度量空间 (M,d) 的等距群（*isomtric group*）。事实上，条件 G1 至 G4 是群的一般定义——

定义 0.3 (群)**.** 设 G 是一个非空集合，若为 G 的元素规定一个二元运算（binary operation），记为 $x\circ y,\quad x,y\in G$*，且该运算具有以下性质：

1. 封闭性：$x\circ y\in G,\quad\forall x,y\in G$；
2. 结合律：$(x\circ y)\circ z=x\circ(y\circ z),\quad\forall x,y,z\in G$；
3. 单位元：$\exists e\in G,\quad e\circ x=x\circ c=x,\quad\forall x\in G$；
4. 逆元：$\forall x\in G,\exists x^{-1}\in G,xx^{-1}=x^{-1}x=e$。

易证，群的单位元和逆元总是唯一的，这也跟向量空间的情况类似。

其实，G1 至 G4 规定，都是可被证明总能满足的。它们的证明比较简单，可以留作练习。因此，任一度量空间上的所有等距变换的集合，总能形成一个等距群。

*跟复合映射的符号一样，可算是一种推广意义的使用，因为映射的复合就是一种二元运算。

一般地，群的定义不包括交换律。满足交换率的群叫*交换群*（*commutative group*）。交换群的二元操作比较像平时的“加法”。向量空间的定义中，若去除标量乘的规定，剩下的规定实际上定义了一个交换群。

例 0.3. *设 $\mathscr{V}$ 是数域 $\mathbb{F}$ 上的 n 维向量空间，$\mathscr{V}$ 上的所有可逆算符的集合，基于算符的复合操作，形成一个群。我们称这个群为数域 $\mathbb{F}$ 上的 n 维一般线性群（generalized linear group），记作 $GL(n,\mathbb{F})$；在所讨论的数域维持不变时，简记为 $GL(n)$。*

为了使空间两点间不仅有距离的概念，还能有“有向线段”的概念（即以往我们所习惯的，用“向量”来描述几何对象的数学语言），我们需要从一个度量空间的等距群中定义出一个向量空间。因此首先要使一个度量空间上的等距群或等距子群成为一个交换群。

设 $(\mathscr{E},d)$ 是一个度量空间，$\mathcal{I}$ 是 $(\mathscr{E},d)$ 上的等距群，若 $\mathcal{I}$ 的子群 $\mathscr{V}$ 满足：

G5 交换律：$i_1\circ i_2=i_2\circ i_1,\quad \forall i_1,i_2\in\mathscr{V}$；

G6 $\mathscr{V}$ 在 $\mathscr{E}$ 上的*作用*（*action*）的传递性，即对 $\mathscr{E}$ 中的任一点 X 和一点 Y，总存在 $\mathcal{I}$ 中的一个等距变换 i 满足 $Y=i(X)$。

则 $\mathscr{V}$ 是 $\mathcal{I}$ 的一个交换子群。

接下来我们赋予 $\mathscr{V}$ 以实数域上的标量乘法规定，即使 $\mathscr{V}$ 具有满足以下规定的形式运算：

S1 $\forall\alpha\in\mathbb{R},i\in\mathscr{V},\alpha i\in\mathscr{V}$。特别地，$\forall i\in\mathscr{V},1i=i$；

S2 $\forall\alpha,\beta\in\mathbb{R},i\in\mathscr{V},\quad \alpha(\beta i)=(\alpha\beta)i$；

S3 $\forall\alpha\in\mathbb{R},i,j\in\mathscr{V},\quad \alpha(i\circ j)=(\alpha i)\circ(\alpha j)$

S4 $\forall\alpha,\beta\in\mathbb{R},i\in\mathscr{V},\quad (\alpha+\beta)i=(\alpha i)\circ(\beta i)$

带有上述规定的 $\mathscr{V}$ 形成一个实数域 $\mathbb{R}$ 上的向量空间。

向量空间 $\mathscr{V}$ 的向量作为度量空间 $(\mathscr{E},d)$ 上的等距变换，可天然具有一种范的定义。由条件 G5 和 G6 易验 $\forall i\in\mathscr{V},X,Y\in\mathscr{E},d(X,i(X))=d(Y,i(Y))$，故每个等距变换自带一个特定的长度。可定义 $\mathscr{V}$ 上的范 $\|\cdot\|:\mathscr{V}\to[0,\infty)\subset\mathbb{R}$,

$$\forall i\in\mathscr{V},\|i\|=d(X,i(X)),X\in\mathscr{E}$$

再附加一条运算的形式规定：

N1 调和性：$\forall\alpha\in\mathbb{R},i\in\mathscr{V},\|\alpha i\|=|\alpha|\,\|i\|$

则易验该范满足范的定义。再通过极化恒等式构建 $\mathscr{V}$ 上的内积 $(\cdot|\cdot):\mathscr{V}^2\to\mathbb{R}$,

$$(i|j)=\frac{1}{4}\|i\circ j\|^2-\frac{1}{4}\left\|i\circ j^{-1}\right\|^2$$

则 $\mathscr{V}$ 形成一个实数域上的内积空间，$\|\cdot\|$ 是 $\mathscr{V}$ 上的欧几里得范。

引理**??**告诉我们，如果一个度量空间上的等距群存在一个满足条件 G1 至 G6、S1 至 S4 和 N1 的子群，则这样的子群只有一个。我们就已经做好正式构建欧几里得空间的准备。

定义 0.4 (欧几里得空间). 若一个度量空间 $(\mathscr{E}, d)$ 上的度量 d 所确定的等距群可定义出满足条件 G1 至 G6、S1 至 S4 和 N1 的子群 $\mathscr{V}$，则 $\mathscr{V}$ 自然形成一个实数域上的内积空间。若 $\mathscr{V}$ 是有限维内积空间，则称 $(\mathscr{E}, d, \mathscr{V})$ 为欧几里得空间（*Euclidean space*）。$\mathscr{E}$ 称为欧几里得空间的点空间（*point space*），$\mathscr{E}$ 的元素称为点（*points*）；$\mathscr{V}$ 称为欧几里得空间的平移空间（*translation space*），$\mathscr{V}$ 中的向量称为欧几里得空间的平移向量（*translation vectors*）；$\mathscr{V}$ 的维数就是欧几里得空间的维数。我们常简记欧几里得空间为 $\mathscr{E}$。

最后，我们建立一个记法。设 $\mathscr{E}$ 是欧几里得空间，$X, Y \in \mathscr{E}$，由 $X, Y \in \mathscr{E}$ 确定的平移向量 $\mathbf{u}$ 可记作 $\mathbf{u} = Y - X$；由点 X 经平移向量 $\mathbf{u}$（它是一个等距变换）平移为点 Y 的事实可记作 $Y = X + \mathbf{u}$。注意，我们没有定义两个点“相加”的意义。