本节我们依次在欧几里得空间中引入角、直线、位置向量和坐标系。

为了引入角，我们考虑欧几里得空间 $\mathscr{E}$ 中的给定三个不同的点 $X, O, Y \in \mathscr{E}$，由于 $\mathscr{E}$ 的平移空间 $\mathscr{V}$ 是一个赋范内积空间，故有极化恒等式，

$$\begin{aligned}\|X-O\|^2+\|Y-O\|^2 &= \|(X-O)-(Y-O)\|^2+2\,(X-O|Y-O)\\ &= \|X-Y\|^2+2\,(X-O|Y-O)\end{aligned}$$

再应用柯西–施瓦茨不等式，有

$$\|X-O\|^2\,\|Y-O\|^2 \geq |(X-O|Y-O)|^2 \Leftrightarrow -1 \leq \frac{(X-O|Y-O)}{\|X-O\|\,\|Y-O\|} \leq 1$$

我们就做好了引入角的准备。

定义 0.1 (角). 设 $\mathscr{E}$ 是欧几里得空间，$\mathscr{E}$ 中的角是一个映射 $\angle : \mathscr{E}^3 \to \mathbb{R}$ 满足

$$\angle XOY \equiv \mathrm{Arccos}\left[\frac{(Y-O|X-O)}{\|X-O\|\,\|Y-O\|}\right], \quad \forall X, O, Y \in \mathscr{E}, X \neq O \neq Y$$

称点 XOY 所夹的角，或简称角 XOY。

在定义0.1中，反余弦函数的主值 Arccos 用首字母大写表示，其自变量取值范围是 $[0, \pi]$。这里采用反余弦的主值函数来定义角，是为了保证严格的双射关系。同时 $\angle XOY$ 的顺序是重要的，由定义可知 $\angle YOX = -\angle XOY$。

设 $i : \mathscr{E} \to \mathscr{E}$ 是一个等距变换，可验证 $\angle i(X)\,i(O)\,i(Y) = \angle XOY, \forall X, O, Y \in \mathscr{E}, X \neq O \neq Y$，即等距变换前后角不变。

定义 0.2 (过两点的直线). 设 $(\mathscr{E}, d)$ 是欧几里得空间，给定两点 $X, Y \in \mathscr{E}, X \neq Y$，则 $\mathscr{E}$ 的子集 $L_{XY} = \{C \in \mathscr{E} | \forall \alpha\,(\alpha \in \mathbb{R} \wedge C = X + \alpha\,(Y - X))\}$ 是过 X, Y 两点的一条直线。如果 $\angle XOY = \frac{\pi}{2}$，则直线 L_{OX} 与 L_{OY} 垂直，记为 $L_{OX} \perp L_{OY}$。

由角的定义，如果 $L_{OX} \perp L_{OY}$，则 $(X-O|Y-O)=0$。再由内积空间的格拉姆–施密特正交化过程可知，过 $\mathscr{E}$ 中任一点 O 的两两垂直的直线最大条数都相等且等于 $\dim\mathscr{V}$，故欧几里得空间的维数就可被自然地定义为其平移空间的维数。

L_{XY} 又可记为 $L_{XY} = \{C \in \mathscr{E} | \forall \alpha\,(\alpha \in \mathbb{R} \wedge C - X = \alpha\,(Y - X))\}$，它对应着平移向量空间 $\mathscr{V}$ 的子集 $L_{XY}^{\mathscr{V}} = \{\mathbf{u} \in \mathscr{V} | \forall \alpha\,(\alpha \in \mathbb{R} \wedge \mathbf{u} = \alpha\,(X - Y))\}$，易知该子集是 $\mathscr{V}$ 的子空间，维数是 1*。

我们将一个选定的原点 $O \in \mathscr{E}$ 和 $\mathscr{V}$ 的一组规范正交基的组合 $(O, \{\hat{\mathbf{e}}_i\})$ 称为欧几里得空间 $\mathscr{E}$ 的一个直角坐标系（*rectangular coordinates*），又称笛卡尔坐标系（*Cartesian coordinates*）。我们常常默认一个 n 维欧几里得空间必然已经自带一个直角坐标系，称为基本

*这里需要实数集的完备性概念。

坐标系（*common coordinates*），从而直接采用 $\mathbb{R}^n$ 来表示任意一点的坐标。在基本坐标系下，原点坐标为 $(0,\cdots,0)$，第 i 个基向量为 $(0,\cdots,1,\cdots,0)^{\intercal}$，也就是除第 i 个分量为 1 外其他分量均为零的有序实数 n 元组。选定了原点 O 后，对任一点 $X\in\mathscr{E}$ 可定义映射 $\mathbf{r}_O:\mathscr{E}\to\mathscr{V},\mathbf{r}\left(X\right)\equiv\mathbf{r}_X=X-O,\forall X\in\mathscr{E}$，我们称这个向量值函数 $\mathbf{r}_X$ 就是选定原点 O 下点 X 的位置向量（*position vector*）。注意，当且仅当选定了原点后，欧几里得空间 $\mathscr{E}$ 中的点才与其平移空间 $\mathscr{V}$ 的向量通过位置向量这个映射一一对应。

总而言之，一个（有限维）欧几里得空间 $(\mathscr{E},d,O,\mathscr{V},\{\hat{\mathbf{e}}_i\})$ 包括：

1. 一个度量空间 $(\mathscr{E},d)$
2. 一个实数域上的 n 维内积空间 $\mathscr{V}$。它是由度量空间 $(\mathscr{E},d)$ 上的等距群 $\mathcal{I}$ 经过 G1 至 G6、S1 至 S4 和 N1 构建的。n 同时定义了该欧几里得空间的维数。我们还规定了记法：

$$\forall\left(X,Y\right)\in\mathscr{E}^2\exists\mathbf{u}\in\mathscr{V},\quad\mathbf{u}=Y-X$$

3. 选定了原点 $O\in\mathscr{E}$
4. 选定了一组规范正交基 $\{\hat{\mathbf{e}}_i\}\subset\mathscr{V}$

   最后两项同时也使欧几里得空间默认带有一个直角坐标系，$\mathscr{V}$ 的向量是 $\mathscr{E}$ 的点在此直角坐标系下的位置向量。

明确了欧几里得空间的完整概念之后，为了简便我们仍只用 $\mathscr{E}$ 表示一个欧几里得空间。

基于《几何原本》的公设得到的大量欧氏几何定理仍然成立，因为这些公设的要求已蕴含在了实数域的、向量内积的性质以及度量的性质中了[Audin2002]。更重要的是，明确了这一线性结构后，我们能够用统一的数学语言推导出更多几何结论[Berger1987]。