

一个向量空间可以有不止一组基。同一个向量，在不同基下的坐标是不同的，因此向量并不一般地对应一组数；线性变换与矩阵的关系也类似。这是本讲义中的线性代数部分与大学一年级的线性代数课程不同的地方。之所以要建立这种更抽象的线性代数结构，是为了用它们描述物理规律时，能拥有不依赖坐标系选择的不变形式。

但是，光说“向量并不一般地对应一组数”，仍然无法保证这种数学对象能够具有“不依赖基的选择的不变性”。比如，同在一个向量空间 \mathcal{V} 内，向量 \mathbf{a} 在某两组基下的坐标分别是 $(a_1, \dots, a_n)^\top$ 和 $(a'_1, \dots, a'_n)^\top$ ；向量 \mathbf{b} 在选择某第三组基下的坐标是 (b_1, \dots, b_n) 。这三个有序 n 元数组各不相等，但有没有可能其实 $\mathbf{a} = \mathbf{b}$ ？我们必须有能力判断这件事，才一般性地拥有“不依赖基的选择而辨认不同向量”的能力，从而才有资格作出“向量独立于坐标系的选择而存在”的判断。这样的能力就基于基变换与坐标变换公式的知识。基变换与坐标变换公式，使得每个向量在选择不同基下的坐标之间形成相互联系的整体，使得尽管不同向量各自都可以有不同的坐标，但它们仍然能相互区别。

我们先推导基变换公式。考虑数域 \mathbb{F} 上的 N 维向量空间 \mathcal{V}_N 中的两组有序基 $(\mathbf{e}_i), (\mathbf{e}'_j)$ ，用第一组基表示第二组基的每个基向量，可列出以下 N 个等式：

$$\mathbf{e}'_j = \sum_{i=1}^N S_{ij} \mathbf{e}_i, \quad j = 1, \dots, N$$

它们称为从有序基 (\mathbf{e}_i) 到有序基 (\mathbf{e}'_j) 的基变换公式 (*change of basis formula*)，其中矩阵 (S_{ij}) 称为从有序基 (\mathbf{e}_i) 到有序基 (\mathbf{e}'_j) 的过渡矩阵 (*change-of-basis matrix*)。以下定理告诉我们，反过来从 (\mathbf{e}'_i) 到 (\mathbf{e}_i) 的过渡矩阵就是矩阵 S 的逆 (S 可逆的证明见 [1]§2.4 例题 4.4。)

定理 0.1. 设 \mathcal{V}_N 是数域 \mathbb{F} 上的 N 维向量空间， $\{\mathbf{e}_i\}, \{\mathbf{e}'_j\}$ 是 \mathcal{V}_N 的两组基，则从有序基 (\mathbf{e}_i) 到有序基 (\mathbf{e}'_j) 的过渡矩阵是从 (\mathbf{e}'_j) 到 (\mathbf{e}_i) 的过渡矩阵的逆矩阵。具体地，若 $\mathbf{e}'_j = \sum_{i=1}^N S_{ij} \mathbf{e}_i$ ，则 $\mathbf{e}_i = \sum_{j=1}^N S_{ji}^{\text{inv}} \mathbf{e}'_j$ 。

证明. 两边同乘 S^{-1} 立刻得证，略。 □

特别地，由 n 维向量空间的一组基到它自身的过渡矩阵是 $n \times n$ 单位矩阵 I_n 。

我们通过过渡矩阵可以写出一个向量 $\mathbf{v} \in \mathcal{V}_N$ 在两组有序基 $(\mathbf{e}_i), (\mathbf{e}'_j)$ 下的坐标之间的关系，共有 N 条式子：

* 由于矩阵的分量是标量，为防与倒数的记法混淆，矩阵 S 的逆矩阵 S^{-1} 的分量记为 S_{ij}^{inv} ，矩阵 S 的分量的倒数记为 S_{ij}^{-1} 。

$$\begin{aligned}
\mathbf{v} &= \sum_{j=1}^N v'_j \mathbf{e}'_j \\
&= \sum_{j=1}^N v'_j \left(\sum_{i=1}^N S_{ij} \mathbf{e}_i \right) \\
&= \sum_{i=1}^N \left(\sum_{j=1}^N S_{ij} v'_j \right) \mathbf{e}_i \\
&= \sum_{i=1}^N v_i \mathbf{e}_i \\
&\Leftrightarrow v_i = \sum_{j=1}^N S_{ij} v'_j, \quad i = 1, \dots, N
\end{aligned}$$

这 N 个式子称为向量 \mathbf{v} 从有序基 (\mathbf{e}'_j) 到 (\mathbf{e}_i) 的坐标变换公式。它们也可以写成一个矩阵乘法表达式：

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S_{11} & \cdots & S_{1N} \\ \vdots & & \vdots \\ S_{N1} & \cdots & S_{NN} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v'_1 \\ \vdots \\ v'_N \end{pmatrix}$$

注意到，对于同一个矩阵 S_{ij} ，它是从 (\mathbf{e}'_j) 到 (\mathbf{e}_i) 的过渡矩阵，但却用于向量 \mathbf{v} 从 (\mathbf{e}_i) 下的坐标到 (\mathbf{e}'_j) 下的坐标的变换公式中。按照相同的推算方法还可以得到，向量 \mathbf{v} 从 (\mathbf{e}'_j) 到 (\mathbf{e}_i) 的坐标变换公式是

$$v'_j = \sum_{i=1}^N S_{ji}^{\text{inv}} v_i, \quad j = 1, \dots, N$$

接下来，我们讨论线性变换在给定不同有序基下的坐标矩阵之间的变换公式。

定理 0.2. 设 \mathcal{V}_N 、 \mathcal{W}_M 分别是数域 \mathbb{F} 上的 N 、 M 维向量空间， $\{\mathbf{a}_i\}, \{\mathbf{a}'_i\} \in \mathcal{V}_N$ 是 \mathcal{V}_N 的两组基，基变换公式为 $\mathbf{a}'_j = \sum_{i=1}^N S_{ij} \mathbf{a}_i$ ； $\{\mathbf{b}_j\}, \{\mathbf{b}'_j\}$ 是 \mathcal{W}_M 的两组基，基变换公式为 $\mathbf{b}'_j = \sum_{i=1}^M T_{ij} \mathbf{b}_i$ 。线性变换 $\mathbf{A} : \mathcal{V}_N \rightarrow \mathcal{W}_M$ 在 $(\mathbf{a}_i), (\mathbf{b}_i)$ 下的矩阵表示为 (\mathbf{A}) ，在 $(\mathbf{a}'_i), (\mathbf{b}'_i)$ 下的矩阵表示为 $(\mathbf{A})'$ 。则有

$$(\mathbf{A}) = T (\mathbf{A})' S^{-1}$$

$$(\mathbf{A})' = T^{-1} (\mathbf{A}) S$$

证明. 对于任一向量 $\mathbf{v} \in \mathcal{V}_N$, 记 $\mathbf{w} = \mathbf{A}\mathbf{v} \in \mathcal{W}_M$. 我们从向量 \mathbf{w} 的坐标变换出发:

$$\begin{aligned}
 w_i &= \sum_{j=1}^M T_{ij} w'_j \\
 &= \sum_{j=1}^M T_{ij} \left(\sum_{k=1}^N A'_{jk} v'_k \right) \\
 &= \sum_{j=1}^M \sum_{k=1}^N T_{ij} A'_{jk} \left(\sum_{l=1}^N S_{kl}^{\text{inv}} v_l \right) \\
 &= \sum_{j=1}^M \sum_{k=1}^N \sum_{l=1}^N T_{ij} A'_{jk} S_{kl}^{\text{inv}} v_l \\
 &= \sum_{j=1}^N \sum_{l=1}^M \sum_{k=1}^N T_{il} A'_{lk} S_{kj}^{\text{inv}} v_j, \quad i = 1, \dots, M
 \end{aligned}$$

其中 A_{ij}, A'_{ij} 分别是 $(\mathbf{A}), (\mathbf{A})'$ 的坐标。

另一方面, $w_i = \sum_{j=1}^N A_{ij} v_j, i = 1, \dots, M$, 与上面的结果比较可得:

$$A_{ij} = \sum_{l=1}^M \sum_{k=1}^N T_{il} A'_{lk} S_{kj}^{\text{inv}} \Leftrightarrow (\mathbf{A}) = T(\mathbf{A})' S^{-1}$$

由 $T^{-1}(\mathbf{A})S = T^{-1}T(\mathbf{A})'S^{-1}S = (\mathbf{A})'$, 可得 $(\mathbf{A})' = T^{-1}(\mathbf{A})S$. □

有了基变换和坐标变换公式, 我们可以验证任何关于抽象的向量和线性变换的运算结果是否依赖基的选择。以下定理及其证明可作为一个示例。

定理 0.3. 设 \mathcal{V} 是数域 \mathbb{F} 上的有限维内积空间, 则 \mathcal{V} 上的内积运算结果不依赖基的选择。

证明. 设 $(\mathbf{e}), (\mathbf{e}')$ 是 \mathcal{V} 的任意两组有序基, 任意两个向量 $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathcal{V}$ 在这两组有序基下的坐标表示为: $\mathbf{u} = \sum_{i=1}^n u \mathbf{e}_i = \sum_{i=1}^n u' \mathbf{e}'_i, \mathbf{v} = \sum_{i=1}^n v \mathbf{e}_i = \sum_{i=1}^n v' \mathbf{e}'_i$. 设由 (\mathbf{e}) 到 (\mathbf{e}') 的过渡矩阵坐标是 S_{ij} , 即

$$\mathbf{e}'_j = \sum_{i=1}^n S_{ij} \mathbf{e}_i, j = 1, \dots, n$$

则有:

$$u_i = \sum_{j=1}^n S_{ij} u'_j, v_i = \sum_{j=1}^n S_{ij} v'_j, i = 1, \dots, n$$

记 $G_{ij} = (\mathbf{e}_i | \mathbf{e}_j), G'_{ij} = (\mathbf{e}'_i | \mathbf{e}'_j), i, j = 1, \dots, n$, 分别是基 $\{\mathbf{e}_i\}, \{\mathbf{e}'_i\}$ 的格拉姆矩阵的分量, 则

两组基之间的格拉姆矩阵变换关系为：

$$\begin{aligned}
 G'_{ij} &= (\mathbf{e}'_i | \mathbf{e}'_j) \\
 &= \left(\sum_{k=1}^n S_{ki} \mathbf{e}_k \middle| \sum_{l=1}^n S_{lj} \mathbf{e}_l \right) \\
 &= \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n S_{ki} \overline{S_{lj}} (\mathbf{e}_k | \mathbf{e}_l) \\
 &= \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n S_{ki} \overline{S_{lj}} G_{kl}
 \end{aligned}$$

故 $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathcal{V}$ 的内积

$$\begin{aligned}
 (\mathbf{u} | \mathbf{v}) &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n u_i \overline{v_j} G_{ij} \\
 &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \left(\sum_{k=1}^n S_{ik} u'_k \right) \overline{\left(\sum_{l=1}^n S_{jl} v'_l \right)} G_{ij} \quad (\text{利用了坐标变换公式。}) \\
 &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n u'_k \overline{v'_l} S_{ik} \overline{S_{jl}} G_{ij} \\
 &= \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n u'_k \overline{v'_l} G'_{kl} \quad (\text{利用格拉姆矩阵的坐标变换公式。})
 \end{aligned}$$

可见两向量内积在任意两组基下的计算结果是相等的。 □

推论 0.3.1. 设 \mathcal{V} 是数域 \mathbb{F} 上的有限维赋范向量空间，则 \mathcal{V} 中向量的范不依赖基的选择。

证明. 由 \mathcal{V} 上的内积不依赖基的选择易证 \mathcal{V} 上的欧几里得范不依赖基的选择。再由范的等价性（定理??）易证该命题。 □