0.0.1 向量值函数的积分的定义

我们在本科的高等数学课上已经学过二重积分和三重积分[1]§8。在这里我们它的定义推广至 n 维。在正式定义之前，先要明确一系列概念和术语。

考虑 $\mathbb{R}^n$ 上的“矩形”区域，它具体是 $\mathbb{R}^n$ 的一个子集 R，任一 $(x_1, \cdots, x_n)^\intercal \in R$ 满足 $a_i \le x_i \le b_i$，其中 $a_i, b_i \in \mathbb{R}$，$i = 1, \cdots, n$。我们称这个区域 R 是一个n 维矩形闭区域。如果所有的 $\le$ 号都换成 $<$ 号，则称 R 是一个n 维矩形开区域。R 的体积记作 $V(R)$，

$$V(R) = \prod_{i=1}^{n} (b_i - a_i)$$

我们知道当 $n = 2$ 时 $V(R)$ 称为面积，当 $n = 1$ 时 $V(R)$ 称为长度。如果对于某一 i，$a_i = b_i$，则称 $V(R) = 0$，我们称 R 是退化（*degenerate*）的。

若 $\mathbb{R}^n$ 的子集 B 满足：$\exists k \in \mathbb{R}, k > 0, \|\mathbf{x}\| < k, \forall \mathbf{x} \in B$，则称 B 是 $\mathbb{R}^n$ 的有界（*bounded*）子集。

$\mathbb{R}^n$ 中的若干个 $(n-1)$ 维矩形区域可被称为一套网格（*grid*）。任一套网格可把 $\mathbb{R}^n$ 分割成有限个有界闭矩形区域 $R_1, \cdots, R_r$ 和有限个无界区域 $R_{r+1}, \cdots, R_s$。我们称这个分割是有限的。若某区域 $B \subset \mathbb{R}^n$ 在闭合区域 $R_1, \cdots, R_r$ 的并集之内，由称 B 被这套网格覆盖（*covered*）。显然 B 必须有界才可以被一个有限分割 $\mathbb{R}^n$ 的网格所覆盖。我们称一套网格的所有闭合有界区域 $R_1, \cdots, R_r$ 的边长的最大值 λ 称为这套网格的网眼（*mesh*）。

现在我们已经做好定义积分准备。

定义 0.1 (n 重积分的黎曼定义)**.** 设函数 $f : \mathbb{R}^n \supset D \to \mathbb{R}$，$B \subset D$ 且 B 是有界闭区域，f 在 B 上有界。由函数 f 可构造一个判断某点 $\mathbf{x} \in \mathbb{R}$ 是否在 B 内的特征函数 $\chi_B(\mathbf{x})$，即

$$\chi_B(\mathbf{x}) = \begin{cases} 1, & \mathbf{x} \in B \\ 0, & \mathbf{x} \notin B \end{cases}$$

令 G 是一套覆盖 B 的网格，$R_1, \cdots, R_r$ 是 G 的闭合有界区域，λ 是 G 的网眼。在每个有界闭区域 R_i 上取一点 $\mathbf{x}_i$，则以下求和

$$\sum_{i=1}^{r} \chi_B(\mathbf{x}_i) V(R_i)$$

称为函数 f 在区域 B 上的一个黎曼和（*Riemann sum*）。它的值依赖网格 G 和点 $\mathbf{x}_i$ 的选取。如果无论我们如何选取网格 G 和点 $\mathbf{x}_i$，当 $\lambda \to 0$ 时，黎曼和的极限

$$\lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{r} \chi_B(\mathbf{x}_i) V(R_i)$$

都存在，且其值与网格 G 和点 $\mathbf{x}_i$ 的选取无关而唯一确定，我们就把该极限值称为函数 f 在区域 B 上的积分（*integral of f on region B*），记作

$$\int_B f(\mathbf{x})\,\mathrm{d}\mathbf{x}$$

并称函数 f 在区域 B 上是可积的（*integrable on region B*）。

定义只负责告诉我们，如果一个东西存在，那么如何称呼它。我们还需要证明这个东西的存在性。具体到函数积分，我们需要证明的是黎曼积分的存在定理。

定理 0.1 (黎曼积分的存在定理). 设函数 $f:\mathbb{R}^n \supset D \to \mathbb{R}$ 在有界区域 $B \subset D$ 上有界，且 B 被有限多个光滑曲面覆盖。如果在 B 上，函数 f 除在有限多个光滑集上之外，是连续的，则 f 在 B 上是可积的，且函数 f 在 B 上的积分值不随光滑曲面的选取而改变。

证明. 见其他资料[2]Appendix 8。 □

这个定理的证明是很长的。在本科的《高等数学》课本中，这个证明往往是从略的*。在这里我们只需理解定理的通俗意思。这个定理告诉我们，只要函数 f 在其定义域的某个子区域 B 上没有无穷大或无穷小的取值（有界），而这个区域 B 的边界是“分段光滑”的（被包含在有限多个光滑曲面上），那么 f 在 B 上是可积的。

拿定义0.1与本科《高等数学》中的二重、三重积分的定义相对比，就会发现它们很相似。这是因为定义0.1是对二重、三重积分的推广。《高等数学》中的重积分的所有性质，都能直接推广到 n 重积分上。这里不再赘述。在这里我们只需要简单说明什么是向量函数的积分。若 $\mathbf{f}:\mathbb{R}^n \supset D \to \mathbb{R}^m$ 的坐标函数是 $f_1,\cdots,f_m$，若区域 $B \subset D$，且对每个 $i=1,\cdots,m$，f_i 在 B 上是可积的，则 $\mathbf{f}$ 在 B 上的积分定义为

$$\int_B \mathbf{f}(\mathbf{x})\,\mathrm{d}\mathbf{x} = \left(\int_B f_1(\mathbf{x})\,\mathrm{d}\mathbf{x},\cdots,\int_B f_m(\mathbf{x})\,\mathrm{d}\mathbf{x}\right)^i ntercal$$

0.0.2 3 维欧几里得空间上的场

在物理学当中，我们考虑任何问题之前，先假定了物理事件所发生的时空的几何结构。在本讲义中，我们假定物理事件发生的空间和时间是独立的。在这里我们先讨论空间的几何结构，它是 3 维欧几里得空间 $\mathscr{E}$。

考虑任何一个具体的物理问题，都需要区分“系统”与“环境”。在连续介质力学中我们把“系统”称为物体（*body*）。它在给定的某时刻 t，将在 3 维欧几里得空间中占据一个确定的

*例如定理 8.1.1 和定义 8.3.1 下面的“可以证明，……”[1]§8。

区域 $\Omega_t \subset \mathscr{E}$。我们称 Ω_t 是物体的空间区域。在 Ω_t 上，我们可以定义一个场（*field*），它是一个函数 $f : \Omega \to \mathscr{V}_f$。在物理学中，场的值是这个物体的某个强度性质在时刻 t 下的值，例如密度、速度、应力等。我们把物理量的值视为实数域上的内积空间 $\mathscr{V}_f$ 的元素，是为了保持物理客观性，将在下面的讨论中详细说明。

作为欧几里得空间，$\mathscr{E}$ 有其附带的平移空间 $\mathscr{V}_{\mathscr{E}}$。想要 $\mathscr{E}$ 中的点 $X \in \mathscr{E}$ 能唯一对应一个坐标 $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$，需要选定一套坐标系。在之前的介绍中我们说过，任一欧几里得空间，自带一套直角坐标系 $(O, \{\hat{\mathbf{e}}_i\})$ 其中 $O \in \mathscr{E}$，$\{\hat{\mathbf{e}}_i\} \subset \mathscr{V}_{\mathscr{E}}$。但是，我们也可以为欧几里得空间选取任一曲线坐标系，使得任一 $\mathscr{X} \in \mathscr{E}$ 仍然唯一地与一个 $\mathbb{R}^3$ 的元素 (c_1, c_2, c_3) 对应。3 维欧几里得空间中常见的两个曲线坐标系是柱坐标系（*cylindrical coordinate*）和球坐标系（*spherical coordinate*）。我们已经学过这两个坐标系的定义，这里不再赘述。场被一般地定义为 $\mathscr{E}$ 上的函数，因此场的自变量是不依赖于坐标系的选择的。至于场函数的取值，作为内积空间 $\mathscr{V}_f$ 中的一个向量，它应该具有基变换下的不变性。在物理学当中，大部分物理量的定义是通过空间和时间作出的，因此我们可以把 $\mathscr{V}_f$ 的基变换问题归结为 $\mathscr{E}$ 的基变换问题。从而，整个场的定义方式，就具有不依赖于坐标系的选择的不变性。用场来描述的物理事实，因此也就具有不依赖不同观察者坐标系选择的不变性。

我们具体讨论不同物理量体现在 $\mathscr{V}_f$ 的维数。我们将看到，在我们所讨论的时空中的物理量取值只会是 3^n 维的，$n = 0, 1, 2, \cdots$。

当 $n = 0$，我们称这样的物理量是一个标量场（scalar field）。例如，温度场、密度场、压强场等。当 $n = 1$ 时，我们称这样的物理量是一个向量场（vector field）。例如，速度场、位移场、力场等。当 $n = 2$ 时，我们称这样的物理量是一个二阶张量场（second-order tensor field）。例如，应力场、应变场等。当 $n = 3$ 时，我们称这样的物理量是一个三阶张量场（third-order tensor field）。当 $n > 3$ 时，我们称这样的物理量是一个高阶张量场（higher-order tensor field）。

在这里，所谓的“n 阶张量”可理解为 $\mathscr{L}(\mathscr{V}_{\mathscr{E}}, \mathscr{V}_f)$ 上的线性变换及其在曲线坐标系下的坐标变换规律的一套数学结构。在不涉及曲线坐标系变换问题时，就是相应的线性变换。2 阶张量是把一个向量变成另一个向量的线性变换，而 3 阶张量是把一个向量变成一个二阶张量的线性变换。4 阶张量则是把一个二阶张量变成另一个二阶张量的线性变换。以此类推。在连续介质力学中，固体的弹性系数、液体的粘滞系数都是 4 阶张量。因为它们是联系应力和应变的“系数”，而应力和应变本身就是二阶张量。只是对于各向同性不可压缩的最理想情况，它们的分量都只有 1 个非零值，故可退化为标量值的剪切模量和剪切粘度。

只要选定了坐标系，无论是场的自变量还是场的值，都分别可对应为 $\mathbb{R}^3$ 上的和 $\mathbb{R}^{3^n}$ 上的元素，从而场函数的讨论可等价为由 $\mathbb{R}^3$ 到 $\mathbb{R}^{3^n}$ 的向量函数的讨论，回到本章前面介绍的数学知识。但是，无论是场函数的导数还是积分，都保持独立于不同坐标系选择的不变性。这里我

们详细讨论场函数的导数，并引出更多场论的概念。

设 $\mathscr{E}$ 是 3 维欧几里得空间，$\mathscr{V}_f$ 是一个实数域上的 3^n 维内积空间，函数 $f : \mathscr{E} \supset \Omega_t \to \mathscr{V}_f$ 是某物体在 t 时刻某物理性质在其空间区域 Ω_t 的场。所谓函数 f 在点 $X_0 \in \mathscr{E}$ 处可微分，即存在一个线性变换 $\mathrm{D}f\left(X_0\right) \in \mathscr{L}\left(\mathscr{V}_{\mathscr{E}}, \mathscr{V}_f\right)$ 满足：

$$\lim_{\left\|X-X_0\right\| \to 0} \frac{f\left(X\right) - f\left(X_0\right) - \mathrm{D}f\left(X_0\right)\left(X - X_0\right)}{\left\|X - X_0\right\|} = 0$$

这里 $\mathrm{D}f\left(X_0\right)$ 是该物体的性质 f 在 t 时刻下在空间位置点 X_0 处的导数。