代数基本定理是一个非常重要的定理，它告诉我们任何一个非常数的复系数多项式都有至少一个复根。这个定理的证明是比较长的。完整的证明过程可参见其他文献[1]。此外，多项式的因式分解定理告诉我们，任何一个复系数多项式都可以分解为一次因式的乘积。这个定理的证明可以参见维基百科。

定义 0.1 (初等对称函数)**.** 设 $a, b \in \mathbb{Z}$ 且 $a \leq b$；U 是 $n = b - a + 1$ 个数的集合，$U = \{x_a, x_{a+1}, \cdots, x_b\}$；$m \in \mathbb{Z}$ 且 $m > 0$。记

$$e_m(U) = \sum_{a \leq j_1 < \cdots < j_m \leq b} \left(\prod_{i=1}^{m} x_{j_i} \right)$$

我们则称 $e_m(U)$ 为 U 的一个*m 次初等对称函数*（elementary symmetric function of degree m）。

我们常不妨令 $a = 1$、$b = n$，则 $e_m(U) = e_m(\{x_1, \cdots, x_n\})$。定义0.1中的求和式的直观意义是 $\{x_1, \cdots, x_n\}$ 中所有 m 个不同元素的积的和。具体地，当——

- $m = 0$ 时，$e_0(\{x_1, \cdots, x_n\}) = 1$；
- $m = 1$ 时，$e_1(\{x_1, \cdots, x_n\}) = x_1 + \cdots + x_n$；
- $m = 2$ 时，
$$\begin{aligned} e_1(\{x_1, \cdots, x_n\}) = x_1x_2 + &x_1x_3 + \cdots + x_1x_n \\ &+ x_2x_3 + \cdots + x_2x_n \\ &+ \cdots + x_{n-1}x_n \end{aligned}$$
- $m = n$ 时，$e_n(\{x_1, \cdots, x_n\}) = x_1x_2 \cdots x_n$。

引理 0.1 (初等对称函数的递归性质)**.** 设 $\{z_1, \cdots, z_{n+1}\}$ 是 $n + 1$ 个数的集合，允许有重复的取值。对任一 $m \in \mathbb{Z}, 1 \leq m \leq n$ 有

$$e_m(\{z_1, \cdots, z_n, z_{n+1}\}) = z_{n+1}e_{m-1}(\{z_1, \cdots, z_n\}) + e_m(\{z_1, \cdots, z_n\})$$

证明. 当 $m = 1$ 时，命题等号左边是

$$e_1(\{z_1, \cdots, z_n, z_{n+1}\}) = z_1 + \cdots + z_n + z_{n+1}$$

等号右边是

$$z_{n+1}e_0(\{z_1, \cdots, z_n\}) + e_1(\{z_1, \cdots, z_n\}) = z_{n+1} + z_1 + \cdots + z_n$$

命题成立。现在讨论 $2 \leq m \leq n$ 的情况。构建以下集合。设 A 是 $\{1, 2, \cdots, n+1\}$ 的 m 个元素的子集 $\{p_1, \cdots, p_m\}$ 的集合，

$$A = \{\{p_1, \cdots, p_m\} : 1 \leq p_1 < \cdots < \_m \leq n+1\}$$

B 是 $\{1, 2, \cdots, n+1\}$ 的 m 个元素——其中保证最大元素是 n+1——的子集 $\{p_1, \cdots, p_{m-1}, n+1\}$ 的集合，

$$B = \{\{p_1, \cdots, p_{m-1}, n+1\} : 1 \leq p_1 < \cdots < p_{m-1} \leq n\}$$

C 是 $\{1, 2, \cdots, n\}$ 的 m 个元素的子集 $\{p_1, \cdots, p_m\}$ 的集合，

$$C = \{\{p_1, \cdots, p_m\} : 1 \leq p_1 < \cdots < p_m \leq n\}$$

D 是 $\{1, 2, \cdots, n\}$ 的 $m-1$ 个元素的子集 $\{p_1, \cdots, p_{m-1}\}$ 的集合，

$$D = \{\{p_1, \cdots, p_{m-1}\} : 1 \leq p_1 < \cdots < p_{m-1} \leq n\}$$

注意到 $A = B \cup B$ 且 $B \cap C = \emptyset$。这可以通过观察集合的定义直观地看出。严格的集合论证明从略。

集合 A, B, C, D 能方便我们重写求和式。具体地，我们有

$$e_m(\{z_1, \cdots, z_{n+1}\}) = \sum_A z_{p_1} z_{p_2} \cdots z_{p_m}$$

其中求和号的下标 A 表示，按集合 A 中的每个元素 $\{p_1, \cdots, p_m\}$ 来获得求和项 $z_{p_1} z_{p_2} \cdots z_{p_m}$。既然 $A = B \cup C$ 且 $B \cap C = \emptyset$，在集合 A 上的求和可以分解为在集合 B 和 C 上的求和之和。即

$$\begin{aligned} e_m(\{z_1, \cdots, z_{n+1}\}) &= \sum_B z_{p_1} z_{p_2} \cdots z_{p_{m-1}} z_{n+1} + \sum_C z_{p_1} z_{p_2} \cdots z_{p_m} \\ &= z_{n+1} \sum_D z_{p_1} z_{p_2} \cdots z_{p_{m-1}} + \sum_C z_{p_1} z_{p_2} \cdots z_{p_m} \\ &= z_{n+1} e_{m-1}(\{z_1, \cdots, z_n\}) + e_m(\{z_1, \cdots, z_n\}) \end{aligned}$$

□

定理 0.1 (韦达公式（Viète's formula）). 设 $P(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n, a_n = 1, a_0 \neq 0$ 是一个首一 n 次多项式。对任意 $m \in \mathbb{Z}, 1 \leq m \leq n$，有

$$e_m(\{z_1, \cdots, z_n\}) = (-1)^m a_{n-m}$$

其中 $z_1, \cdots, z_n$ 是 $P(x)$ 的所有根。

证明. 由多项式的因式定理，我们有

$$P\left(x\right)=\prod_{j=1}^{n}\left(x-z_{j}\right)$$

故原命题等价于，对任意 n 个数 $\{z_1,\cdots,z_n\}$（可能有重复取值），以下等式成立

$$\prod_{j=1}^{n}\left(x-z_{j}\right)=\sum_{j=1}^{n}\left(-1\right)^{j}e_{j}\left(\left\{z_{1},\cdots,z_{n}\right\}x^{n-j}\right)$$

我们用数学归纳法证明这个等式。当 $n=1$ 时，等式显然成立。现在假设 $n=k$ 时等式成立，即对任意 k 个数 $\{z_1,\cdots,z_k\}$（可能有重复取值），有

$$\prod_{j=1}^{k}\left(x-z_{j}\right)=\sum_{j=0}^{k}\left(-1\right)^{j}e_{j}\left(\left\{z_{1},\cdots,z_{k}\right\}\right)x_{k-j}$$

考虑

$$\begin{aligned}
\textstyle\prod_{j=1}^{k+1}\left(x-z_{j}\right) &= \left(x-z_{k+1}\right)\textstyle\prod_{j=1}^{k}\left(x-z_{j}\right)\\
&= \left(x-z_{k+1}\right)\textstyle\sum_{j=0}^{k}\left(-1\right)^{j}e_{j}\left(\left\{z_{1},\cdots,z_{k}\right\}\right)x^{k-j}\\
&= \textstyle\sum_{j=0}^{k}\left(-1\right)^{j}e_{j}\left(\left\{z_{1},\cdots,z_{k}\right\}\right)x^{k+1-j}\\
&\quad +\textstyle\sum_{j=0}^{k}\left(-1\right)^{j}e_{j}\left(\left\{z_{1},\cdots,z_{k}\right\}\right)x^{k-j}z_{k+1}\\
&= x^{k+1}+\textstyle\sum_{j'=0}^{k-1}\left(-1\right)^{j'+1}e_{j'+1}\left(\left\{z_{1},\cdots,z_{k}\right\}\right)x^{k-j'}\\
&\quad +\textstyle\sum_{j=0}^{k-1}\left(-1\right)^{j}e_{j}\left(\left\{z_{1},\cdots,z_{k}\right\}\right)x^{k-j}z_{k+1}-\left(-1\right)^{k}e_{k}\left(\left\{z_{1},\cdots,z_{k}\right\}\right)z_{k+1}\\
&= x^{k+1}\\
&\quad +\textstyle\sum_{j=0}^{k-1}\left(-1\right)^{j}x^{k-j}\left(-1\right)\left[e_{j+1}\left(\left\{z_{1},\cdots,z_{k}\right\}\right)+e_{j}\left(\left\{z_{1},\cdots,z_{k}\right\}\right)z_{k+1}\right]\\
&\quad -\left(-1\right)^{k}e_{k+1}\left(\left\{z_{1},\cdots,z_{k+1}\right\}\right)\\
&= x^{k+1}\\
&\quad +\textstyle\sum_{j'=1}^{k}\left(-1\right)^{j'}e_{j'}\left(\left\{z_{1},\cdots,z_{k+1}\right\}\right)x^{k+1-j'}+\left(-1\right)^{k+1}e_{k+1}\left(\left\{z_{1},\cdots,z_{k+1}\right\}\right)\\
&= \textstyle\sum_{j=0}^{k+1}\left(-1\right)^{j}e_{j}\left(\left\{z_{1},\cdots,z_{k+1}\right\}\right)x^{k+1-j}
\end{aligned}$$

其中使用了两次变换求和下标操作，又利用了引理0.1。故由数学归纳法，定理得证。 □

定理 0.2 (共轭复根定理). 设 $P(x)=a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n, a_0\neq 0$ 是一个 n 次多项式。如果 z_0 是 $P(x)$ 的一个复根，则其共轭复数 $\overline{z_0}$ 也是 $P(x)$ 的一个复根。

证明. 由条件 z_0 是 $P(x)$ 的一个复根，我们有

$$P\left(z_{0}\right)=0$$

两边共轭有

$$
\begin{aligned}
\overline{P(z_0)} &= 0 \\
\Leftrightarrow \overline{P(x)} = \sum_{i=0}^{n} a_i \overline{z_0}^{i} &= 0 \\
\Leftrightarrow P(\overline{z_0}) &= 0
\end{aligned}
$$

也就是说 $\overline{z_0}$ 也是 $P(x)$ 的一个复根。 □

推论 0.2.1. 如果实系数多项式 $P(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i, a_0 \neq 0$ 的阶数 n 是奇数，则 $P(x)$ 至少有一个实根。

证明. 如果 $P(x)$ 没有实根，则所有根都是共轭复数对。一对共轭复数有且只有两种情况：如果它们不相等，则它们是两个共轭的非实数；如果它们相等，则它们是同一个实数。由于 n 是奇数，就算所有 $n-1$ 个根都组成了 $(n-1)/2$ 对不等共轭复数对，仍剩下一个根，由定理0.2它的共轭也是根，但已没有更多的根了，所以这个共轭根就是它本身，故该根是实根。 □