.1 映射

定义 .1.1. 设 X 和 Y 是集合，如果由 X 到 Y 的关系 f 同时满足：

1. $\mathrm{dom}f = X$；
2. 对每一 X 的元素 $x \in X$，有且只有一个 Y 的元素 $y \in Y$ 满足 $(x, y) \in f$，

则称 f 是由 X 到 Y 的映射（*mapping*），记作 $f : X \to Y$*。对每一 $(x, y) \in f$，称 y 是 x 在映射 f 下的值（*value*），记作 $f(x)$。

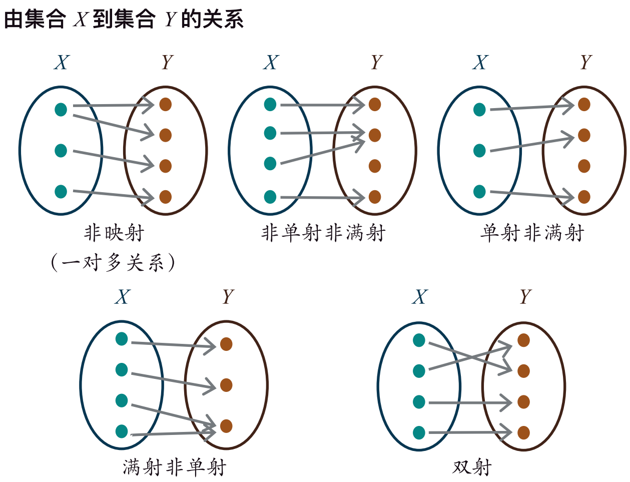

图 .1.1: 映射的不同概念示意图。

映射定义的第 1 条要求如果违反了，可通过对集合 X 的改动重新得到满足，而无需改动关系 f 本身。例如若 $\mathrm{dom}f \subsetneq X$，则令 $X' = \mathrm{dom}f$ 并改为讨论由 X' 到 Y 的关系 f，就可通过映射定义的第 1 条。然而映射定义的第 2 条如果违反了，想要重新满足就不得不对关系 f 本身进行改动。图1.1中的第一个例子就只是一个关系，而不是一个映射，除非我们从这一关系中拿掉一个有序对。

给定映射 $f : X \to Y$，我们继续以下讨论：

- 一般地，Y 未必等于 $\mathrm{ran}f$，集合 Y 称映射 f 的陪域（*codomain*）。
- 若 $\mathrm{ran}f = Y$ 则称映射 f 是满射（*surjective mapping*）。图1.1中的第 4 和第 5 个例子都是满射。
- 若 $A \subset X$，则集合 $\{y | y \in Y \wedge (\forall x \in A, y = f(x))\}$ 称集合 A 在映射 f 下的像（*image*）。常见但易产生歧义的记法是 $f(A)$。这一集合可用语言描述为：由集合 A 的所有元素在

*记号 $f : X \to Y$ 包含的信息是：

1. X、Y 是集合；
2. f 是由 X 到 Y 的映射。

映射 f 下的值组成的集合。易证它是 Y 的子集。

- 若对任意 $x_1, x_2 \in X$，$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$，则称 f 是单射（*injective mapping*）。可用语言描述为，“单射输出唯一地确定其输入”。图.1.1中的第 3 和第 5 个例子都是单射。
- 如果 f 既是满射又是单射，则称 f 是一个双射（*bijective mapping*）。图.1.1中的第 5 个例子是双射。
- 若另一映射 $g : Y \to Z$，可与映射 f 构成从 X 到 Z 的映射 $g \circ f : X \to Z$，且

$$g \circ f(x) = g(f(x)), \forall x \in X$$

  则称 $g \circ f$ 是 f 和 g 的复合映射（*composite mapping*）。
- 如果 $f(x) = x, \forall x \in X$，则称映射 f 是恒等映射（*identity mapping*）。
- 如果映射 $g : Y \to X$ 使得复合映射 $g \circ f$ 是恒等映射，则称映射 f 是可逆的（*invertible*），映射 g 是 f 的逆映射（*inverse mapping*）。

关于逆映射，有一条重要的定理——

定理 .1.1. 双射必存在唯一逆映射。双射的逆映射也是双射。

证明. 为了证明这一定理，我们首先证明一个引理：任一单射非满射均存在逆映射。

设 $f : X \to Y$ 是一个单射非满射，即 $\exists y \notin \mathrm{ran} f, y \in Y$。由集合的相关定义此处必有 $\{y | y \in \mathrm{ran} f\} \cup \{y | y \notin \mathrm{ran} f, y \in Y\} = Y$。

现定义 $g : Y \to X$，为使 g 为一个映射，它必须对 $y \in \mathrm{ran} f$ 和 $y \notin \mathrm{ran} f, y \in Y$ 均有定义。现将其定义为：

$$g(y) = \begin{cases} x|_{f(x)=y}, & y \in \mathrm{ran} f \\ \text{任一} x \in X, & y \notin \mathrm{ran} f, y \in Y \end{cases}$$

则有如下几条结论：

1. $g(y)$ 是映射。因为它对每一 $y \in Y$ 均有定义且一个 $y \in Y$ 只对应一个 $x \in X$。
2. g 是满射。因为，仅 $y \in \mathrm{ran} f$ 情况的定义式就已决定了 $\mathrm{ran} g = X$。
3. g 是非单射。因为 g 是满射，再考虑 $y \notin \mathrm{ran} f, y \in Y$ 情况的定义式，就可知 $\exists x \in X$ 满足 $x = g(y) = g(y')$，其中 $y \neq y', y \in \mathrm{ran} f, y' \notin \mathrm{ran} f, y' \in Y$。
4. g 是 f 的逆映射。因为，对于任一 $x \in X$ 均有 $g \circ f(x) \equiv g(f(x)) = x$，即 $g \circ f = \mathrm{id}_X$。
5. 一般地，g 是不唯一的。因为 $y \notin \mathrm{f}, y \in Y$ 的情况可定义 $g(x)$ 等于任一 $x \in X$，故只要集合 X 不是只有一个元素，那么 g 都不唯一。

该引理证毕。

现在正式证定理.1.1。从上面定义的这个 g 继续，如果 g 是双射，则 g 不仅是满射，还是单射。由刚刚证完的引理，可用类似方法给 g 找一个逆映射 $f' : X \to Y$。而且，由于 $\mathrm{ran} g \equiv X$，

我们无需像定义 g 那样为 f' 分出 $x \notin \mathrm{ran} g, x \in X$ 的情况，因为不存在这种情况。故

$$f'(x) = y|_{g(y)=x}$$

是 g 的逆映射，且 f' 是满射。而且，把 g 的定义代入上式有 $f'(x) = y|_{g(y)=x} = y|_{x|_{f(x)=y}} = f(x)$，即 f' 不是别的映射而恰为 $f(x)$。即 g 的逆映射是唯一的。因 f' 是满射故 f 是满射，而 f 本身就是单射，故 f 是双射。 $\square$