.0.1 映射

设X和Y是集合，如果由X到Y的关系f同时满足：

1. $\mathrm{dom} f = X$；
2. 对每一X的元素$x \in X$，有且只有一个Y的元素$y \in Y$满足$(x, y) \in f$，

则称f是由X到Y的映射（*mapping*），记作$f : X \to Y$*。对应于每一$x \in X$的满足$(x, y) \in f$的那唯一的$y \in Y$，记作$y = f(x)$，称x在映射f下的值（*value*）。

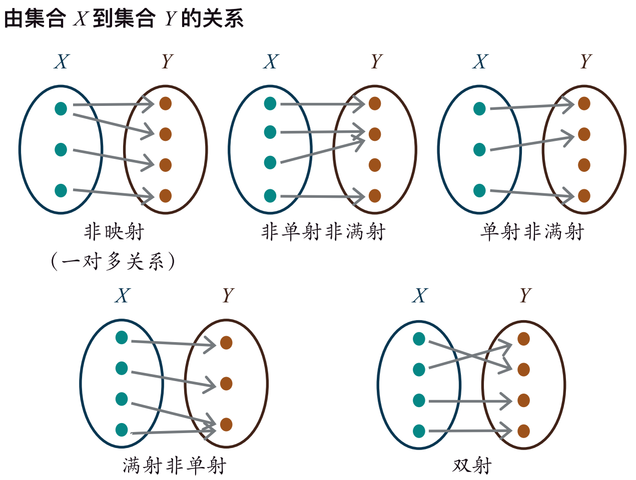

图 .0.1: 映射的定义

图??中的第一个例子只是一个关系，而不是一个映射。

给定映射$f : X \to Y$，我们继续以下讨论：

- 一般地，Y未必等于$\mathrm{ran} f$，集合Y称映射f的陪域（*codomain*）。
- 若$\mathrm{ran} f = Y$则称映射f是满射（*surjective mapping*）。图??中的第4和第5个例子都是满射。
- 若$A \subset X$，则集合$\{y | y \in Y \wedge (\forall x \in A, y = f(x))\}$称集合$A$在映射$f$下的像（*image*）。常见但易产生歧义的记法是$f(A)$。这一集合可用语言描述为：由集合A的所有元素在映射f下的值组成的集合。易证它是Y的子集。
- 若对任意$x_1, x_2 \in X$，$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$，则称$f$是单射（*injective mapping*）。可用语言描述为，“单射输出唯一地确定其输入”。图??中的第3和第5个例子都是满射。

（先补充数域的知识。）

*记号$f : X \to Y$包含的信息是：

1. X、Y是集合；
2. f是由X到Y的映射。

我们在上节已了解过一个集合的元素可以与另一个集合的元素建立对应关系。本节我们主要关心的是满足某种规定的对应关系，称为映射，定义如下。

定义 .0.1 (映射). 从集合X到集合Y的映射（mapping）f，记为$f : X \to Y$，是X的所有元素与Y的部分或所有元素之间的对应关系，且每个X的元素只对应Y的一个元素。如果$y \in Y$是$x \in X$通过映射f的对应，则可写成$y = f(x)$，并称$f(x)$是x的像（image）。按上述定义，x只有一个像。X称为该映射f的定义域（domain），记为$\mathrm{dom} f$，Y称为该映射f的陪域（codomain）或到达域（target domain）。x的像$f(x)$是Y的子集，称为该映射f的值域（range），记为$\mathrm{ran} f$。

当映射的陪域是实数集$\mathbb{R}^n$或复数集$\mathbb{C}^n$时，我们常常也称其为函数（function）。

定义 .0.2 (映射的相等). 若映射$f : X \to Y$和$g : X \to Y$满足$f(x) = g(x), \forall x \in X$，则这两个映射相等。

定义 .0.3 (恒等映射). 恒等映射（identity mapping）$\mathrm{id}_A : A \to A$是由集合A到其自身的映射：$\mathrm{id}_A(a) = a, \forall a \in A$。

../images/II.1.2-eps-converted-to.pdf

图 .0.2: 满射、单射和双射

定义 .0.4 (单射、双射、满射). 对于映射$f : X \to Y$，若$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$，则映射$f$是单射（injective mapping）。若$\forall y \in Y \exists x \in X : f(x) = y$，则称$f$是满射（surjective mapping）。既是单射又是满射的映射叫双射（bijective mapping）。

图??是一个非满射非单射的一般映射。图??给出的分而是满射非单射、单射非满射和双射的情况。

定义 .0.5 (复合映射). 设$f:X\to Y$和$g:Y\to Z$是两个映射。则f和g的复合映射（composite mapping），记为$g\circ f$，是从X到Z的映射：

$$g\circ f\left(x\right)=g\left(f\left(x\right)\right),\forall x\in X$$

定理 .0.1. 对于映射$f:X\to Y$和$g:Y\to Z$，

1. 如果f和g都是满射，则$g\circ f$是满射
2. 如果$g\circ f$是满射，则g是满射
3. 如果f和g都是单射，则$g\circ f$是单射
4. 如果$g\circ f$是单射，则f是单射

证明. “1”的证明：g是满射$\Leftrightarrow\forall z\in Z\exists y\in Y:g\left(y\right)=z$，$f$是满射$\Leftrightarrow\forall y\in Y\exists x\in X:f\left(x\right)=y$，所以$\forall z\in Z\exists x\in X:g\left(f\left(x\right)\right)=z$。

“2”的证明：$g\circ f$是满射$\Leftrightarrow\forall z\in Z\exists x\in X:g\circ f\left(x\right)=z$，故对于$g$，$\forall z\in Z\exists y=f\left(x\right):g\left(y\right)=z$，即$g$是满射。

“3”的证明：$g\left(f\left(x_1\right)\right)=g\left(f\left(x_2\right)\right)\Rightarrow f\left(x_1\right)=f\left(x_2\right)\Rightarrow x_1=x_2$。

“4”的证明：$\because g\circ f$是单射，$\therefore g\left(f\left(x_1\right)\right)=g\left(f\left(x_2\right)\right)\Rightarrow x_1=x_2$。由映射的基本定义又有$f\left(x_1\right)=f\left(x_2\right)\Rightarrow g\left(f\left(x_1\right)\right)=g\left(f\left(x_2\right)\right)$。故$f\left(x_1\right)=f\left(x_2\right)\Rightarrow x_1=x_2$。 □

定义 .0.6 (逆映射). 对于映射$f:X\to Y$，如果存在一个映射$g:Y\to X$，使得复合映射$g\circ f$是恒等映射id_X，则称映射f是可逆的（invertible），映射g是f的逆映射（inverse mapping）。

关于逆映射，有一条重要的定理，使得在今后的数学陈述和推理中，我们可以默认——

定理 .0.2. 双射必存在唯一逆映射。双射的逆映射也是双射。

证明. 为了证明这一定理，我们首先证明一个引理：任一单射非满射均存在逆映射。

设$f:X\to Y$是一个单射非满射，即$\exists y\notin\mathrm{ran}f,y\in Y$。由集合的相关定义此处必有$\{y|y\in\mathrm{ran}f\}\cup\{y|y\notin\mathrm{ran}f,y\in Y\}=Y$。

现定义$g:Y\to X$，为使g为一个映射，它必须对$y\in\mathrm{ran}f$和$y\notin\mathrm{ran}f,y\in Y$均有定义。现将其定义为：

$$g\left(y\right)=\begin{cases}x|_{f(x)=y}, & y\in\mathrm{ran}f\\ \text{任一}x\in X, & y\notin\mathrm{ran}f,y\in Y\end{cases}$$

则有如下几条结论：

1. $g(y)$是映射。因为它对每一$y\in Y$均有定义且一个$y\in Y$只对应一个$x\in X$。
2. g是满射。因为，仅$y\in\mathrm{ran}f$情况的定义式就已决定了$\mathrm{ran}g=X$。
3. g是非单射。因为g是满射，再考虑$y\notin\mathrm{ran}f,y\in Y$情况的定义式，就可知$\exists x\in X$满足$x=g(y)=g(y')$，其中$y\neq y',y\in\mathrm{ran}f,y'\notin\mathrm{ran}f,y'\in Y$。
4. g是f的逆映射。因为，对于任一$x\in X$均有$g\circ f(x)\equiv g(f(x))=x$，即$g\circ f=\mathrm{id}_X$。
5. 一般地，g是不唯一的。因为$y\notin\mathrm{f},y\in Y$的情况可定义$g(x)$等于任一$x\in X$，故只要集合X不是只有一个元素，那么g都不唯一。

该引理证毕。

现在正式证定理**??**。从上面定义的这个g继续，如果g是双射，则g不仅是满射，还是单射。由刚刚证完的引理，可用类似方法给g找一个逆映射$f':X\to Y$。而且，由于$\mathrm{ran}g\equiv X$，我们无需像定义g那样为f'分出$x\notin\mathrm{ran}g,x\in X$的情况，因为不存在这种情况。故

$$f'(x)=y|_{g(y)=x}$$

是g的逆映射，且f'是满射。而且，把g的定义代入上式有$f'(x)=y|_{g(y)=x}=y|_{x|_{f(x)=y}}=f(x)$，即$f'$不是别的映射而恰为$f(x)$。即$g$的逆映射是唯一的。因$f'$是满射故$f$是满射，而$f$本身就是单射，故$f$是双射。 $\square$