**定理.** 定理??：如果函数 $\mathbf{f}:\mathbb{R}^n\supseteq D\to\mathbb{R}^m$ 在 $\mathbf{x}_0\in D$ 处可微分；函数 $\mathbf{g}:\mathbb{R}^n\supset E\to\mathbb{R}^p$ 在 $\mathbf{f}(\mathbf{x}_0)\in E\cap D$ 处可微分，则复合函数 $\mathbf{g}\circ\mathbf{f}$ 在 $\mathbf{x}_0$ 处可微分，且其导数

$$\mathrm{D}\mathbf{g}\circ\mathbf{f}(\mathbf{x}_0)=\mathrm{D}\mathbf{g}(\mathbf{f}(\mathbf{x}_0))\,\mathrm{D}\mathbf{f}(\mathbf{x}_0)$$

证明. 首先证明 $\mathbf{x}_0$ 处于复合函数 $\mathbf{g}\circ\mathbf{f}$ 的定义域内。由于 $\mathbf{f}(\mathbf{x}_0)\in\mathrm{dom}\mathbf{g}$ 且 $\mathbf{g}$ 在 $\mathbf{f}(\mathbf{x}_0)$ 处可微分，故总存在正实数 $\delta'$ 使得只要 $\|\mathbf{f}(\mathbf{x})-\mathbf{f}(\mathbf{x}_0)\|<\delta'$ 就有 $\mathbf{f}(\mathbf{x})\in\mathrm{dom}\mathbf{g}$。又因为 $\mathbf{x}_0\in\mathrm{dom}\mathbf{f}$ 且 $\mathbf{f}$ 在 $\mathbf{x}_0$ 处可微分，故总存在正实数 $\delta$ 使得只要 $\|\mathbf{x}-\mathbf{x}_0\|<\delta$ 则 $\mathbf{x}\in\mathrm{dom}\mathbf{f}$，同时还必存在 $\delta'>0$ 使得这一 $\delta$ 选择下的 $\mathbf{x}$ 满足 $\|\mathbf{f}(\mathbf{x})-\mathbf{f}(\mathbf{x}_0)\|<\delta'$。所以任一满足 $\|\mathbf{x}-\mathbf{x}_0\|<\delta$ 的 $\mathbf{x}$ 均在复合函数 $\mathbf{g}\circ\mathbf{f}$ 的定义域内。

按照全微分和全导数的定义，由于函数 $\mathbf{f}$ 和 $\mathbf{g}$ 分别在 $\mathbf{x}_0$ 和 $\mathbf{f}(\mathbf{x}_0)$ 可导，故存在函数 $\mathbf{z}_1$、$\mathbf{z}_2$ 满足 $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0}\mathbf{z}_1(\mathbf{x}-\mathbf{x}_0)=\mathbf{0}$、$\lim_{\mathbf{f}(\mathbf{x})\to\mathbf{f}(\mathbf{x}_0)}\mathbf{z}_2(\mathbf{f}(\mathbf{x})-\mathbf{f}(\mathbf{x}_0))=\mathbf{0}$，且

$$\begin{aligned}
\mathbf{f}(\mathbf{x})-\mathbf{f}(\mathbf{x}_0)-\mathrm{D}\mathbf{f}(\mathbf{x}_0)(\mathbf{x}-\mathbf{x}_0)&=\|\mathbf{x}-\mathbf{x}_0\|\,\mathbf{z}_1(\mathbf{x}-\mathbf{x}_0)\\
\mathbf{g}(\mathbf{f}(\mathbf{x}))-\mathbf{g}(\mathbf{f}(\mathbf{x}_0))-\mathrm{D}\mathbf{g}(\mathbf{f}(\mathbf{x}_0))(\mathbf{f}(\mathbf{x})-\mathbf{f}(\mathbf{x}_0))&=\|\mathbf{f}(\mathbf{x})-\mathbf{f}(\mathbf{x}_0)\|\,\mathbf{z}_2(\mathbf{f}(\mathbf{x})-\mathbf{f}(\mathbf{x}_0))
\end{aligned}$$

把 $\mathbf{g}(\mathbf{f}(\mathbf{x}))$ 记为 $\mathbf{g}\circ\mathbf{f}(\mathbf{x})$，并把上面的第一条式子代入第二条，得

$$\begin{aligned}
&\mathbf{g}\circ\mathbf{f}(\mathbf{x})-\mathbf{g}\circ\mathbf{f}(\mathbf{x}_0)-\mathrm{D}\mathbf{g}(\mathbf{f}(\mathbf{x}_0))\left[\mathrm{D}\mathbf{f}(\mathbf{x}_0)(\mathbf{x}-\mathbf{x}_0)+\|\mathbf{x}-\mathbf{x}_0\|\,\mathbf{z}_1(\mathbf{x}-\mathbf{x}_0)\right]\\
=&\|\mathbf{f}(\mathbf{x})-\mathbf{f}(\mathbf{x}_0)\|\,\mathbf{z}_2(\mathbf{f}(\mathbf{x})-\mathbf{f}(\mathbf{x}_0))\\
\Leftrightarrow&\mathbf{g}\circ\mathbf{f}(\mathbf{x})-\mathbf{g}\circ\mathbf{f}(\mathbf{x}_0)-\mathrm{D}\mathbf{g}(\mathbf{f}(\mathbf{x}_0))\,\mathrm{D}\mathbf{f}(\mathbf{x}_0)(\mathbf{x}-\mathbf{x}_0)\\
=&\|\mathbf{x}-\mathbf{x}_0\|\,\mathrm{D}\mathbf{g}(\mathbf{f}(\mathbf{x}_0))\,\mathbf{z}_1(\mathbf{x}-\mathbf{x}_0)+\|\mathbf{f}(\mathbf{x})-\mathbf{f}(\mathbf{x}_0)\|\,\mathbf{z}_2(\mathbf{f}(\mathbf{x})-\mathbf{f}(\mathbf{x}_0))
\end{aligned}$$

由三角不等式，又有*

$$\begin{aligned}
\|\mathbf{f}(\mathbf{x})-\mathbf{f}(\mathbf{x}_0)\|&=\|\mathrm{D}\mathbf{f}(\mathbf{x}_0)(\mathbf{x}-\mathbf{x}_0)+\|\mathbf{x}-\mathbf{x}_0\|\,\mathbf{z}_1(\mathbf{x}-\mathbf{x}_0)\|\\
&\le\|\mathrm{D}\mathbf{f}(\mathbf{x}_0)(\mathbf{x}-\mathbf{x}_0)\|+\|\mathbf{x}-\mathbf{x}_0\|\,\|\mathbf{z}_1(\mathbf{x}-\mathbf{x}_0)\|\\
&\le k\|\mathbf{x}-\mathbf{x}_0\|+\|\mathbf{x}-\mathbf{x}_0\|\,\|\mathbf{z}_1(\mathbf{x}-\mathbf{x}_0)\|
\end{aligned}$$

故

$$\begin{aligned}
&\mathbf{g}\circ\mathbf{f}(\mathbf{x})-\mathbf{g}\circ\mathbf{f}(\mathbf{x}_0)-\mathrm{D}\mathbf{g}(\mathbf{f}(\mathbf{x}_0))\,\mathrm{D}\mathbf{f}(\mathbf{x}_0)(\mathbf{x}-\mathbf{x}_0)\\
\le&\|\mathbf{x}-\mathbf{x}_0\|\,\mathrm{D}\mathbf{g}(\mathbf{f}(\mathbf{x}_0))\,\mathbf{z}_1(\mathbf{x}-\mathbf{x}_0)+\left(k\|\mathbf{x}-\mathbf{x}_0\|+\|\mathbf{x}-\mathbf{x}_0\|\,\|\mathbf{z}_1(\mathbf{x}-\mathbf{x}_0)\|\right)\mathbf{z}_2(\mathbf{f}(\mathbf{x})-\mathbf{f}(\mathbf{x}_0))\\
\le&\|\mathbf{x}-\mathbf{x}_0\|\left\{\|\mathrm{D}\mathbf{g}(\mathbf{f}(\mathbf{x}_0))\,\mathbf{z}_1(\mathbf{x}-\mathbf{x}_0)\|+\left(k+\|\mathbf{z}_1(\mathbf{x}-\mathbf{x}_0)\|\right)\mathbf{z}_2(\mathbf{f}(\mathbf{x})-\mathbf{f}(\mathbf{x}_0))\right\}
\end{aligned}$$

由于函数 $\mathbf{f}$ 在 $\mathbf{x}_0$ 处连续，即极限 $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0}\mathbf{f}(\mathbf{x})=\mathbf{f}(\mathbf{x}_0)$，故上式最后的大括号在 $\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0$ 时趋于 $\mathbf{0}$。按照全微分和全导数的定义，命题得证。 □

*此处用到定理??。