# 0.1 映射

**定义 0.1.** 设 $X$ 和 $Y$ 是集合，如果由 $X$ 到 $Y$ 的关系 $f$ 同时满足：

1. $\mathrm{dom} f = X$；
2. 对每一 $X$ 的元素 $x \in X$，有且只有一个 $Y$ 的元素 $y \in Y$ 满足 $(x, y) \in f$，

则称 $f$ 是由 $X$ 到 $Y$ 的映射（*mapping*），记作 $f : X \to Y$*。对每一 $(x, y) \in f$，称 $y$ 是 $x$ 在映射 $f$ 下的值（*value*），记作 $f(x)$。

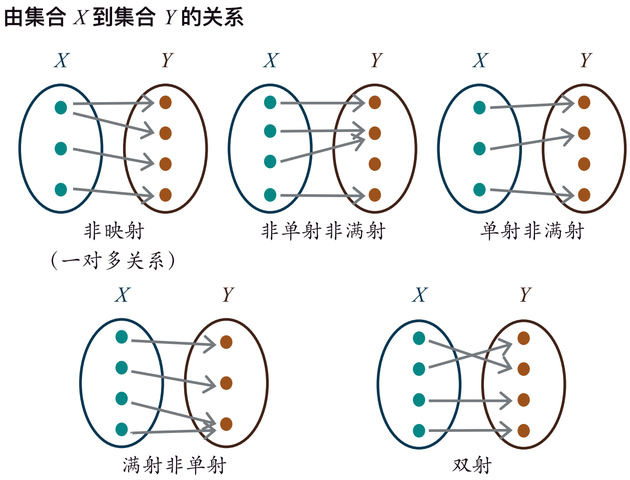


图 0.1: 映射的不同概念示意图。

映射定义的第 1 条要求如果违反了，可通过对集合 $X$ 的改动重新得到满足，而无需改动关系 $f$ 本身。例如若 $\mathrm{dom} f \subsetneq X$，则令 $X' = \mathrm{dom} f$ 并改为讨论由 $X'$ 到 $Y$ 的关系 $f$，就可通过映射定义的第 1 条。然而映射定义的第 2 条如果违反了，想要重新满足就不得不对关系 $f$ 本身进行改动。图0.1中的第一个例子就只是一个关系，而不是一个映射，除非我们从这一关系中拿掉一个有序对。

给定映射 $f : X \to Y$，我们继续以下讨论：

- 一般地，$Y$ 未必等于 $\mathrm{ran} f$，集合 $Y$ 称映射 $f$ 的陪域（*codomain*）。
- 若 $\mathrm{ran} f = Y$ 则称映射 $f$ 是满射（*surjective mapping*）。图0.1中的第 4 和第 5 个例子都是满射。
- 若 $A \subset X$，则集合 $\{y | y \in Y \wedge (\forall x \in A, y = f(x))\}$ 称集合 $A$ 在映射 $f$ 下的像（*image*）。常见但易产生歧义的记法是 $f(A)$。这一集合可用语言描述为：由集合 $A$ 的所有元素在

*记号 $f : X \to Y$ 包含的信息是：

1. $X$、$Y$ 是集合；
2. $f$ 是由 $X$ 到 $Y$ 的映射。

映射 $f$ 下的值组成的集合。易证它是 $Y$ 的子集。

- 若对任意 $x_1, x_2 \in X$，$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$，则称 $f$ 是单射（*injective mapping*）。可用语言描述为，“单射输出唯一地确定其输入”。图0.1中的第 3 和第 5 个例子都是单射。
- 如果 $f$ 既是满射又是单射，则称 $f$ 是一个双射（*bijective mapping*）。图0.1中的第 5 个例子是双射。
- 若另一映射 $g: Y \to Z$，可与映射 $f$ 构成从 $X$ 到 $Z$ 的映射 $g \circ f: X \to Z$，且

$$g \circ f(x) = g(f(x)), \forall x \in X$$

  则称 $g \circ f$ 是 $f$ 和 $g$ 的复合映射（*composite mapping*）。
- 如果 $f(x) = x, \forall x \in X$，则称映射 $f$ 是恒等映射（*identity mapping*）。
- 如果映射 $g: Y \to X$ 使得复合映射 $g \circ f$ 是恒等映射，则称映射 $f$ 是可逆的（*invertible*），映射 $g$ 是 $f$ 的逆映射（*inverse mapping*）。常将 $f$ 的逆映射计作 $f^{-1}$。

关于逆映射，有一条重要的定理——

**定理 0.1.** 双射必存在唯一逆映射。双射的逆映射也是双射。

*证明.* 为了证明这一定理，我们首先证明一个引理：任一单射非满射均存在逆映射。

设 $f: X \to Y$ 是一个单射非满射，即 $\exists y \notin \text{ran} f, y \in Y$。由集合的相关定义此处必有 $\{y | y \in \text{ran} f\} \cup \{y | y \notin \text{ran} f, y \in Y\} = Y$。

现定义 $g: Y \to X$，为使 $g$ 为一个映射，它必须对 $y \in \text{ran} f$ 和 $y \notin \text{ran} f, y \in Y$ 均有定义。现将其定义为：

$$g(y) = \begin{cases} x|_{f(x)=y}, & y \in \text{ran} f \\ \text{任一} x \in X, & y \notin \text{ran} f, y \in Y \end{cases}$$

则有如下几条结论：

1. $g(y)$ 是映射。因为它对每一 $y \in Y$ 均有定义且一个 $y \in Y$ 只对应一个 $x \in X$。
2. $g$ 是满射。因为，仅 $y \in \text{ran} f$ 情况的定义式就已决定了 $\text{ran} g = X$。
3. $g$ 是非单射。因为 $g$ 是满射，再考虑 $y \notin \text{ran} f, y \in Y$ 情况的定义式，就可知 $\exists x \in X$ 满足 $x = g(y) = g(y')$，其中 $y \neq y', y \in \text{ran} f, y' \notin \text{ran} f, y' \in Y$。
4. $g$ 是 $f$ 的逆映射。因为，对于任一 $x \in X$ 均有 $g \circ f(x) \equiv g(f(x)) = x$，即 $g \circ f = \text{id}_X$。
5. 一般地，$g$ 是不唯一的。因为 $y \notin \text{f}, y \in Y$ 的情况可定义 $g(x)$ 等于任一 $x \in X$，故只要集合 $X$ 不是只有一个元素，那么 $g$ 都不唯一。

该引理证毕。

现在正式证定理0.1。从上面定义的这个 $g$ 继续，如果 $g$ 是双射，则 $g$ 不仅是满射，还是单射。由刚刚证完的引理，可用类似方法给 $g$ 找一个逆映射 $f': X \to Y$。而且，由于 $\text{ran} g \equiv X$，

我们无需像定义 $g$ 那样为 $f'$ 分出 $x \notin \mathrm{rang}, x \in X$ 的情况，因为不存在这种情况。故

$$f'(x) = y|_{g(y)=x}$$

是 $g$ 的逆映射，且 $f'$ 是满射。而且，把 $g$ 的定义代入上式有 $f'(x) = y|_{g(y)=x} = y|_{x|_{f(x)=y}} = f(x)$，即 $f'$ 不是别的映射而恰为 $f(x)$。即 $g$ 的逆映射是唯一的。因 $f'$ 是满射故 $f$ 是满射，而 $f$ 本身就是单射，故 $f$ 是双射。 □

我们常把映射写成另一种形式，并给以另一个名称。具体地，当我们把由 $I$ 到 $X$ 的映射 $x : I \to X$ 改称为索引族（*indexed family*）时，定义域 $I$ 就称为索引集（*indexing set*），其元素 $i \in I$ 称为索引（*indexes*）。映射 $x$ 的关于 $i \in I$ 的值，记作 $x_i$，称为该索引族的一项（*term*）。映射 $x$ 的值域，称作由 $I$ 索引的集合（*set indexed by I*），或笼统地称其为一个索引集（*indexed set*）。我们经常不加分辨地直接把 $\{x_i\}_{i\in I}$ 称为一个由 $I$ 索引的族（*I-indexed family*）。可见，我们无非把映射原有概念的名称换了一套新的名称。我们经常讨论的是以项为集合的族，称为集合的索引族（*indexed family of sets*）。

设 $\mathscr{C}$ 是集合的集合。如果有 $\mathscr{C}$ 恰好还是一个由集合 $I$ 索引的集合，$\mathscr{C} = \{X_i\}_{i\in I}$，那么第一节介绍的 $\mathscr{C}$ 的元素的交集和并集就相应有新的表示方式：

$$\bigcap_{X\in\mathscr{C}} X = \bigcap_{i\in I} X_i, \quad \bigcup_{X\in\mathscr{C}} X = \bigcup_{i\in I} X_i$$

下面我们介绍多于两个集合的笛卡尔集的定义*

**定义 0.2** (笛卡尔积). 设 $\{S_i\}_{i\in I}$ 是由 $I$ 索引的族，且它是集合的索引族，$\{s_i\}_{i\in I}$ 也是由 $I$ 索引的族，且 $s_i \in S_i, \forall i \in I$。我们称 $\{S_i\}_{i\in I}$ 的笛卡尔积是由 $\{S_i\}_{i\in I}$ 得出的所有族 $\{s_i\}_{i/inI}$ 的集合，记为

$$\prod_{i\in I} S_i$$

若 $S_i = S, \forall i \in I$，则记 $\prod_{i\in I} S_i \equiv S^I$。

**例 0.1.** 设 $I = \{a, b\}, X_a = \{a_\alpha, a_\beta\}, X_b = \{b_\alpha, b_\beta\}$，则按照笛卡尔积的老定义，

$$X_a \times X_b = \{(a_\alpha, b_\alpha), (a_\alpha, b_\beta), (a_\beta, b_\alpha), (a_\beta, b_\beta)\}$$

*第一节中引入的两个集合的笛卡尔集定义，无法推广至不可数无穷多个集合间的笛卡尔积。所以，我们在介绍了映射之后，在族的基础上可重新定义笛卡尔集。这个新的定义，在集合个数为两个的情况下，也导致一种与老定义不同的“有序对”，但是新定义和老定义得出有序对之间总是一一对应的，因此无所谓从哪种定义去理解有序对。虽然笛卡尔积的新定义既兼容两个集合间的情况（甚至把“一个集合的笛卡尔集”也定义了），又能够推广到不可数无穷个集合间的笛卡尔集，但是它却不能在一开始就采用，因为它依赖映射的定义，而映射是一种关系，关系的定义依赖有序对的定义。所以我们至少需要先以老定义获得有序对的概念，才能走到现在这一步。

其中按照有序对的老定义，$(x,y)=\{\{x\},\{x,y\}\}$。

按照新定义*0.2*的要求，我们要在 $X_a$ 和 $X_b$ 中各选一个元素组成由 $\{a,b\}$ 索引的族 $\{x_i\}_{i\in\{a,b\}}$。例如，令 $x_a=a_\beta, x_b=b_\alpha$ 所形成的族 $\{x_i\}_{i\in\{a,b\}}\equiv\{x_a,x_b\}=\{a_\beta,b_\alpha\}$ 就是其中一个符合要求的族。所有这样的族，一共有 *4* 个。因此有

$$\prod_{i\in\{a,b\}}X_i=\{\{a_\alpha,b_\alpha\},\{a_\alpha,b_\beta\},\{a_\beta,b_\alpha\},\{a_\beta,b_\beta\}\}$$

一般地，老定义下的笛卡尔合积 $X_a\times X_b$ 和新定义下的笛卡尔集 $\prod_{i\in\{a,b\}}X_i$ 之间可定义一个映射 $f:\prod_{i\in\{a,b\}}X_i\to X_a\times X_b, f(x)=(x_a,x_b),\forall z\in\prod_{i\in I}X_i$。记 $z=\{z_i\}_{i\in\{a,b\}}$，则按定义0.2有 $z_i\in X_i\forall i\in\{a,b\}$。可以证明 $f$ 是双射：

证明. 设 $z=\{z_i\}_{i\in\{a,b\}},z'=\{z_i'\}_{i\in\{a,b\}}$ 且 $z_a,z_a'\in X_a,z_b,z_b'\in X_b$。若 $z\neq z'$。由映射 $f$ 的定义，$f(z)=(z_a,z_b),f(z')=(z_a',z_b')$。由集合相等的定义，$z\neq z'\Rightarrow(z_a,z_B)\neq(z_a',z_b')$，即 $f(z)\neq f(z')$，即 $f$ 是非单射。

设 $(u,v)\in X_a\times X_b$*，则以 $\{a,b\}$ 索引的族 $x\equiv\{x_i\}_{i\in\{a,b\}},x_a=u,x_b=v$ 满足 $x_a\in X_a,x_b\in X_b$（按照笛卡尔积的老定义），按照定义0.2，有 $x\in\operatorname{dom}f$。由于所选取的 $X_a\times X_b$ 的元素 $(u,v)$ 是任意的，上述性质对任一 $X_a\times X_b$ 的元素都成立，故 $f$ 是满射。

由双射的定义，$f$ 是双射。 □

因此，笛卡尔集的新定义0.2在集合数为 2 的情况下所得到的集合，跟笛卡尔集的老定义所得到的集合，它们的元素之间是一一对应的。所以在此情况下老定义和新定义没有本质差别。根据笛卡尔积的新定义，“有序对”又可以定义索引集有两个元素的族。即 $(x,y)=\{z_a,z_b\},z_a=x,z_b=y$。这时“序”的性质仍被保留，因为 $(y,x)=\{z_a,z_b\},z_a=y,z_b=x$ 是不同的族，故有 $(x,y)\neq(y,x)$。而且，按照新定义，仅通过改变索引集元素的个数，可方便地推广出“有序三元组”、“有序四元组”……的定义，这是比老定义更有利的地方。从今以后，笛卡尔积就不再采用老定义，而采用定义0.2。就算若干个集合 $X,Y,\cdots$ 尚未成为一个索引族，由于易验任一集合的非空集合 $\mathscr{C}$ 均可充当其自己的索引集而成为一个索引族，故由集合 $X,Y,\cdots$ 组成的集合 $\{X,Y,\cdots\}$ 总能成为一个索引族，从而定义它的笛卡尔集。具体地，给定任一非空集 $\mathscr{C}$，它的元素的笛卡尔积可由定义0.2记为

$$\prod_{X\in\mathscr{C}}X\equiv\prod_{i\in\mathscr{C}}A_i,\quad A_i=i,\forall i\in\mathscr{C}$$

我们常讨论索引集 $I$ 为自然数集 $\mathbb{N}$ 的子集的族，即 $I\subset\mathbb{N}$。具体地，若

$$I=\{a,a+1,a+2,\cdots,b-2,b-1,b\},a,b\in\mathbb{N},a<b$$

*此处我们需要规定，只要集合 $X$ 和 $Y$ 都是非空集合，那么它们的笛卡尔集 $X\times Y$ 也是非空集合，即必存在一 $(x,y)\in X\times Y,x\in X,y\in Y$。这是集合论的选择公理（*axiom of choice*）。

则由 $I$ 索引的族可记为 $\{X_i\}_{i=a}^{b}$。相应地，若该族是集合的族，则该族的交集、并集和笛卡尔积可分别记为：

$$\bigcap_{i=a}^{b} X_i, \quad \bigcup_{i=a}^{b} X_i, \quad \prod_{i=a}^{b} X_i$$

特别地，若 $X_i = X, \forall i \in I$，令 $n = b - a + 1$，$\{X_i\}_{i=1}^{b}$ 的笛卡尔积可记为 $X^n$。例如，$\mathbb{R}^n$ 是所有有序实数 $n$ 元组 $(x_1, \cdots, x_n), x_1, \cdots, x_n \in \mathbb{R}$ 的集合。