我们先引入关于子群的共轭子群的概念。

定义 0.1. 设 G 是一个群，对任意 $a,b\in G$，记其群操作为 $a\circ b$，单位元为 e，a 的逆元为 a^{-1}。若 G 中存在一个 $i\in G$ 使 G 中的两个元素 $a,b\in G$ 满足 $b=i\circ a\circ i^{-1}$，则称 b 为 a 的一个共轭（*conjugate*）。

其实，对于 $a\in G$，选不同的元素 $i\in G$ 都可以为 a 找到一个共轭元素。我们可以更仔细地称 $b=i\circ a\circ i^{-1}$ 为元素 a 通过元素 i 获得的共轭。但是，任意给定 G 的两个元素 a,b，并不一定总能找到一个 $i\in G$ 使 $b=i\circ a\circ i^{-1}$。事实上，两个群元素的共轭作为一个关系，是一个等价关系。与给定元素共轭的所有元素将构成一个等价类。不同元素的共轭等价类分割了整个群 G。

我们简短地证明为什么共轭是一个等价类，就不单独列为引理了。设关系 $\sim\in G\times G$ 满足：$a\sim b\Leftrightarrow \exists i\in G, b=i\circ a\circ i^{-1}$。我们需要证明 $\sim$ 满足等价关系的三个性质：自反性、对称性和传递性。首先，自反性要求 $a\sim a$，即存在 $i\in G$ 使 $a=i\circ a\circ i^{-1}$。取 $i=e$ 即可。其次，对称性要求 $a\sim b\Rightarrow b\sim a$。若存在 $i\in G$ 使 $b=i\circ a\circ i^{-1}$，则取 i^{-1} 即可。最后，传递性要求 $a\sim b, b\sim c\Rightarrow a\sim c$。若存在 $i,j\in G$ 使 $b=i\circ a\circ i^{-1}, c=j\circ b\circ j^{-1}$，则有 $c=j\circ i\circ a\circ i^{-1}\circ j^{-1}$，取 $i'=j\circ i$ 即可。故共轭是一个等价关系。给定任一 G 的元素 a，由共轭关系 $\sim$ 可形成一个等价类 $[\![a]\!]_\sim$，称 a 的共轭类（*conjugacy class*）。

另一个更加平凡的事实是，对每一 G 的元素 a，通过给定元素 $i\in G$，有且只有一个共轭 $b=i\circ a\circ i^{-1}$。这是因为，给定的 $a,i\in G$ 是确定的，而且对每一 $i\in G$ 有且只有一个 $i^{-1}\in G$，故整个表达式 $b=i\circ a\circ i^{-1}$ 是唯一的。这是下面的引理0.1中我们之所以能够定义里面的映射 Q 的基础。

引理 0.1. 设 G 是一个群，对任意 $a,b\in G$，记其群操作为 $a\circ b$，单位元为 e，a 的逆元为 a^{-1}。若 V 是 G 的一个子群。给定 $i\in G$，定义映射 $Q:V\to G$,

$$Q(v)=i\circ v\circ i^{-1},\quad \forall v\in V$$

则集合 $V^*\equiv \mathrm{ran}Q$ 是 G 的一个子群，且映射 Q 是由 V 到 V^* 的同构映射。

证明. 首先，V^* 是 G 的子集。对任意 $v_1,v_2\in V$，有 $Q(v_1)=i\circ v_1\circ i^{-1}, Q(v_2)=i\circ v_2\circ i^{-1}$，则有

$$Q(v_1)\circ Q(v_2)=i\circ v_1\circ i^{-1}\circ i\circ v_2\circ i^{-1}=i\circ v_1\circ v_2\circ i^{-1}=Q(v_1\circ v_2)\in V^*$$

其中由 V 的封闭性，$v_1\circ v_2$ 也是 V 的元素，故也能被 Q 映射到 V^*。这证明了，任意两个 V^* 中的元素的群运算结果也在 V^* 中，即 V^* 满足封闭性。

其次，我们将看到，$e\in V^*$。由 V 是 G 的子群，故 $e\in V$。由 Q 的定义，有 $Q(e)=i\circ e\circ i^{-1}=e\in V^*$。故 V^* 包含单位元。

再次，我们将看到，V^* 包含逆元。对任意 $v\in V$，有 $Q(v)=i\circ v\circ i^{-1}$，同时也有

$$Q(v)^{-1}=i\circ v^{-1}\circ i^{-1}=Q\left(v^{-1}\right)\in V^*$$

其中由 V 的封闭性，v^{-1} 也是 V 的元素，故也能被 Q 映射到 V^*。故 V^* 包含逆元。

综上，V^* 是一个群。结合 V^* 是 G 的子集的事实，就有 V^* 是 G 的子群。

以下证明 Q 是由 V 到 V^* 的同构映射。之前已经证明了 $Q(v_1)\circ Q(v_1)=Q(v_1\circ v_2)$ 即 Q 是 V 上的同态映射，只需证明 Q 是由 V 到 V^* 的双射。首先，由于 $V^*=\mathrm{ran}Q$，故 Q 是由 V 到 V^* 的满射。其次，Q 是单射：$\forall v_1,v_2\in V$，若 $Q(v_1)=Q(v_2)$，则有

$$\begin{aligned}
&i\circ v_1\circ i^{-1}=i\circ v_2\circ i^{-1}\\
\Leftrightarrow&i^{-1}\circ i\circ v_1\circ i^{-1}=i^{-1}\circ i\circ v_2\circ i^{-1}\\
\Leftrightarrow&i^{-1}\circ i\circ v_1\circ i^{-1}\circ i=i^{-1}\circ i\circ v_2\circ i^{-1}\circ i\\
\Leftrightarrow&v_1=v_2
\end{aligned}$$

因此 Q 是由 V 到 V^* 的双射，即是同构映射。 □

该引理的证明是直接的，留作练习。

定义 0.2 (共轭子群). 设 G 是一个群，对任意 $a,b\in G$，记其群操作记为 $a\circ b$，单位元为 e，a 的逆元为 a^{-1}。若 V 是 G 的一个子群。给定 $i\in G$，定义映射 $Q:\mathscr{V}\to G$,

$$Q(v)=i\circ v\circ i^{-1}$$

则称 $\mathscr{V}^*$ 是 $\mathscr{V}$ 的一个共轭子群。

引理 0.2. 设 $(\mathscr{E},d)$ 是一个度量空间，若其上的等距群存在一个满足条件 G1 至 G6、S1 至 S4 和 N1 的子群 $\mathscr{V}$，则这样的子群只有一个。

证明. 设 $\mathscr{V}'$ 也是满足上述条件的子群，则给定任意两点 $X,Y\in\mathscr{E}$，$\mathscr{V}$ 中必存在唯一一个等距变换 $\mathbf{u}$、$\mathscr{V}'$ 中必存在唯一一个等距变换 $\mathbf{u}'$，分别满足 $\mathbf{u}=Y-X,\mathbf{u}'=Y-'X$，其中 $-$ 和 $-'$ 分别是由 $\mathscr{V}$ 和 $\mathscr{V}'$ 的传递性所定义的记号。相应地有 $Y=X+\mathbf{u}=X+'\mathbf{u}'$。

定义由 $\mathscr{V}$ 到 $\mathscr{V}'$ 的映射 $f:\mathscr{V}\to\mathscr{V}'$,

$$X+\mathbf{u}=X+'f(\mathbf{u}),\quad\forall X\in\mathscr{E},\forall\mathbf{u}\in\mathscr{V}$$

易证 f 是双射且 $f(\mathbf{0})=\mathbf{0}$，其中 $\mathbf{0}$ 是 $\mathscr{E}$ 上的恒等变换，故它同时是 $\mathscr{V}$ 和 $\mathscr{V}'$ 的单位元。

f 是由 $\mathscr{V}$ 到 $\mathscr{V}'$ 的同构映射：对任意 $\mathbf{u},\mathbf{v}\in\mathscr{V}$ 和 $X_0\in\mathscr{V}$ 必存在 $X,Y\in\mathscr{V}$ 满足

$$X=X_0+\mathbf{u},Y=X_0+\mathbf{v}=X+\mathbf{v}-\mathbf{u}$$

若记 $\mathbf{u}'=f(\mathbf{u}),\mathbf{v}'=f(\mathbf{v})$，则亦有

$$X=X_0+'\mathbf{u}',Y=X+'\mathbf{u}'-\mathbf{v}'$$

由 $\mathscr{V}$ 和 $\mathscr{V}'$ 上的范的定义方式都来自同一度量 d，故有

$$\|\mathbf{v}-\mathbf{u}\|=\|\mathbf{v}'-\mathbf{u}'\|$$

特别地，当 $\mathbf{u}=\mathbf{0}$ 时，$\mathbf{u}'=\mathbf{0}$，上式说明 $\|\mathbf{v}\|=\|\mathbf{v}'\|$ 对任意 $\mathbf{v}\in\mathscr{V}$ 成立。故

$$\begin{aligned}
&\|\mathbf{v}-\mathbf{u}\|=\|\mathbf{v}'-\mathbf{u}'\|\\
\Rightarrow\ &\|\mathbf{v}-\mathbf{u}\|^2=\|\mathbf{v}'-\mathbf{u}'\|^2\\
\Leftrightarrow\ &\|\mathbf{u}\|^2-2(\mathbf{u}|\mathbf{v})+\|\mathbf{v}\|^2=\|\mathbf{u}'\|^2-2(\mathbf{u}'|\mathbf{v}')+\|\mathbf{v}'\|^2\\
\Leftrightarrow\ &(\mathbf{u}|\mathbf{v})=(\mathbf{u}'|\mathbf{v}')
\end{aligned}$$

即 f 保持内积。由类似引理??的证明过程可知 f 是由 $\mathscr{V}$ 到 $\mathscr{V}'$ 的同构线性变换。

由外延公理，如果两个集合 A 和 B 之间存在一个双映射 f 满足 $f(x)=x,\forall x\in A$ 则 $A=B$。对任意 $X\in\mathscr{E}$ 和 $\mathbf{v}\in\mathscr{V}$，设 $\mathbf{u}=X-X_0,X_0\in\mathscr{E}$，则

$$\begin{aligned}
X+\mathbf{v}&=X_0+\mathbf{u}+\mathbf{v}\\
&=X_0+'f(\mathbf{u}+\mathbf{v})\\
&=X_0+'f(\mathbf{u})+f(\mathbf{v})\\
&=X_0+\mathbf{u}+'f(\mathbf{v})\\
&=X+f(\mathbf{v})
\end{aligned}$$

均成立，故 $f(\mathbf{v})=\mathbf{v},\forall\mathbf{v}\in\mathscr{V}$，即 $\mathscr{V}'$ 与 $\mathscr{V}$ 作为内积空间是同一的。 □

定理 (等距变换的表示定理??). 设 $\mathscr{E}$ 是一个欧几里得空间，$\mathscr{V}$ 是其平移空间，选定任一点 $X_0\in\mathscr{E}$，则 $\mathscr{E}$ 上的任一等距变换 $i:\mathscr{E}\to\mathscr{E},i\in\mathscr{V}$ 都可表示为

$$i(X)=i(X_0)+\mathbf{Q}_i(X-X_0)$$

其中 $\mathbf{Q}_i$ 是一个正交算符，由 i 唯一确定。

证明. 由引理0.1、0.2和??，给定任一 $\mathscr{E}$ 上的等距变换 i，$\mathscr{V}$ 的共轭子群都是它自己，且每个 i 引出的共轭映射 $\mathbf{Q}_i\mathbf{v} = i \circ \mathbf{v} \circ i^{-1}$ 就是 $\mathscr{V}$ 上的自同构映射，故 $\mathbf{Q}$ 是 $\mathscr{V}$ 上的正交算符。

注意到 $i \circ \mathbf{v} = \mathbf{Q}_i\mathbf{v} \circ i$，则对任一 $X_0 \in \mathscr{E}$，有

$$i \circ \mathbf{v}\left(X_0\right) = i\left(X + 0 + \mathbf{v}\right), \quad \mathbf{Q}_i\mathbf{v} \circ i\left(X_0\right) = i\left(X_0\right) + \mathbf{Q}_i\mathbf{v}$$

令 $X = X_0 + \mathbf{v}$，则有

$$i\left(X\right) = i\left(X_0\right) + \mathbf{Q}_i\left(X - X_0\right)$$

$\mathbf{Q}_i$ 由 i 唯一确定：设另有一正交算符 $\mathbf{P}: \mathscr{V} \to \mathscr{V}$ 满足 $\mathbf{Pu} = i\left(X + \mathbf{u}\right) - i\left(X\right), \forall \mathbf{u} \in \mathscr{V}, \forall X \in \mathscr{E}$，则 $\left(\mathbf{P} - \mathbf{Q}_i\right)\mathbf{u} = \mathbf{Pu} - \mathbf{Q}_i\mathbf{u} = \mathbf{0}, \forall \mathbf{u} \in \mathscr{V}$。 □