n 维欧几里得空间 $\mathscr{E}$ 中的一个点 $X \in \mathscr{E}$，只有在选择了某一恰当的坐标系后，才可唯一对应于一个有序实数 n 元组 $(x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n$，作为这个点在这一个坐标系下的坐标。如果所选择的是直角坐标系，那么点 X 的坐标是它的位置向量在 $\mathscr{E}$ 的平移空间 $\mathscr{V}_{\mathscr{E}}$ 的一组规范正交基下的坐标。但是，我们还可以在同一个欧几里得空间中建立各种曲线坐标系。我们将会看到，在曲线坐标系下，X 仍可唯一对应于一个有序实数 n 元组，但曲线坐标系下的坐标与直角坐标系下的坐标之间的变换法则，并非向量空间下的基变换规律。因此，仅按 §??知识是无法解决的。

正式地，设 $\mathscr{E}$ 是一个 n 维欧几里得空间，$\mathscr{V}_{\mathscr{E}}$ 是 $\mathscr{E}$ 的平移空间，$\mathscr{E}$ 的基本直角坐标系是 $(O, \{\hat{\mathbf{e}}_i\})$，$\mathscr{E}$ 中的每个点 $X \in \mathscr{E}$ 就已经唯一地对应 $\mathbb{R}^n$ 中的一个元素 $(x_1, \cdots, x_n)$ 作为它在这个直角坐标系下的坐标。一个恰当地建立的曲线坐标系（*curvilinear coordinate system*），也能使 $\mathscr{E}$ 中的每个点 X 唯一地对应于 $\mathbb{R}^n$ 中的一个元素 $(u_1, \cdots, u_n) \in \mathbb{R}^n$，作为它在这个曲线坐标系下的坐标。在直角坐标系，从 $\mathscr{E}$ 到 $\mathbb{R}^n$ 的对应关系是双射。而一个恰当的曲线坐标系，首先应能保证每个 $X \in \mathscr{E}$ 都能唯一对应一个不同的 $(u_1, \cdots, u_n) \in \mathbb{R}^n$（单射），但就不一定是一个满射了。我们把曲线坐标系下，所有欧几里得空间的点的坐标的集合记为 $\mathscr{U} \subseteq \mathbb{R}^n$，称为曲线坐标系的参数域。直角坐标系作为一个特殊的曲线坐标系，它的参数域 $\mathscr{U} = \mathbb{R}^n$。设由 $\mathscr{U}$ 到 $\mathbb{R}^n$ 的双射 $T : \mathbb{R}^n \supset \mathscr{U} \to \mathbb{R}^n$ 把同一个点 $X \in \mathscr{E}$ 的曲线坐标 $(u_1, \cdots, u_n) \in \mathscr{U}$ 映射其原点相同的直角坐标系下的坐标 $(x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n$。我们不失一般性地再规定，我们所讨论的任一曲线坐标系的映射 T 是至少一阶连续可微的。例??以我们以前所熟悉的 3 维欧几里得空间下的柱坐标系和球坐标系为例，给出了这两个曲线坐标系下的映射 T。请注意为了保证 T 的双射性所做的仔细讨论。

例 0.1 (柱坐标系与球坐标系的参数域映射). *设 $\mathscr{E}$ 是 3 维欧几里得空间，$O \in \mathscr{E}$ 是选定的原点。记任一点 X 的直角坐标系坐标是 (x, y, z)，柱坐标系（cylindrical coordinate system）的坐标是 (ρ, φ, z)，球坐标系（spherical coordinate system）的坐标是 (r, ϑ, φ)（图0.1）。*

记柱坐标系的参数域 $\mathscr{U}_{\text{cyl}} = \{(\rho, \varphi, z) \in \mathbb{R}^3 | \rho \geq 0, \varphi \in [0, 2\pi), z \in \mathbb{R}\}$，可定义映射 $T_{\text{cyl}} : \mathscr{U}_{\text{cyl}} \to \mathbb{R}^3$，

$$(x, y, z) = T_{\text{cyl}}(\rho, \varphi, z) = \begin{cases} (\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi, z), & \rho > 0 \\ (0, 0, 0), & \rho = 0 \end{cases}$$

T_{cyl} 是双射，简单证明如下。若 $\rho \neq 0$ 且 $T_{\text{cyl}}(\rho, \varphi, z) = T_{\text{cyl}}(\rho', \varphi', z)$，则有 $\tan\varphi = \tan\varphi'$，即 $\varphi = \varphi'$ 或 $\varphi = \varphi' + \pi$。易知当 $\varphi = \varphi' + \pi$ 时 $\rho = \rho' = 0$，与假设矛盾，故有且仅有 $\varphi = \varphi'$。若 $\rho = 0$，则 $\varphi = 0$，按条件有且仅有 $\rho' = 0$ 且 $\varphi' = 0$。因此 T_{cyl} 是单射。若 $(x, y) \neq (0, 0)$，则只要令 $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$，$\varphi = \operatorname{atan2}(x, y)$，即可得到 $(x, y) = T_{\text{cyl}}(\rho, \varphi, z)$；当 $(x, y) = (0, 0)$ 时，只要令 $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$，$\varphi = 0$，即可得到 $(x, y) = T_{\text{cyl}}(\rho, \varphi, z)$。因此 T_{cyl} 是满射。因此

T_{cyl} 是双射。

上一段出现的双变量反正切函数atan2 : $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to [0,2\pi)$，是一个常用的函数，定义为

$$\operatorname{atan2}(x,y) = \begin{cases} \operatorname{Arctan}\left(\frac{x}{y}\right), & y>0, x\geq 0 \\ \operatorname{Arctan}\left(\frac{x}{y}\right)+2\pi, & y>0, x<0 \\ \operatorname{Arctan}\left(\frac{x}{y}\right)+\pi, & y<0 \\ \frac{\pi}{2}, & y=0, x>0 \\ \frac{3\pi}{2}, & y=0, x<0 \end{cases}$$

其中 Arctan 表示反正切主值函数，其值域是 $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$。$T_{\mathrm{cyl}}$ 的逆映射 T_{cyl}^{-1} 可表示为

$$(\rho,\varphi,z) = T^{-1}(x,y,z) = \begin{cases} \left(\sqrt{x^2+y^2}, \operatorname{atan2}(x,y), z\right), & (x,y)\neq(0,0) \\ (0,0,z), & (x,y)=(0,0) \end{cases}$$

记球坐标系的参数域 $\mathscr{U}_{\mathrm{sph}} = \{(r,\vartheta,\varphi)\in\mathbb{R}^3 \mid r\geq 0, \vartheta\in[0,2\pi), \varphi\in[0,\pi]\}$，可定义映射 $T_{\mathrm{sph}}:\mathscr{U}_{\mathrm{sph}}\to\mathbb{R}^3$，

$$(x,y,z) = T_{\mathrm{sph}}(r,\vartheta,\varphi) = \begin{cases} (r\sin\vartheta\cos\varphi, r\sin\vartheta\sin\varphi, r\cos\vartheta), & r>0 \\ (0,0,0), & r=0 \end{cases}$$

用类似之前的方法可证明 T_{sph} 是双射，需且只需取其逆映射为

$$\begin{aligned} (r,\vartheta,\varphi) &= T_{\mathrm{sph}}^{-1}(x,y,z) \\ &= \begin{cases} \left(\sqrt{x^2+y^2+z^2}, \operatorname{atan2}(x,y), \operatorname{Arccos}\left(\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right)\right), & (x,y)\neq(0,0) \\ (0,0,0), & (x,y)=(0,0) \end{cases} \end{aligned}$$

还可以证明的是，T_{cyl} 和 T_{sph} 在它们的定义域上处处都是一阶连续可微的。

记 T 的雅可比矩阵是

$$J \equiv (\mathrm{D}T) = \begin{pmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial u_1} & \cdots & \frac{\partial x_1}{\partial u_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial x_n}{\partial u_1} & \cdots & \frac{\partial x_n}{\partial u_n} \end{pmatrix}$$

由于 T 是双射且连续可微，由反函数定理??，J 是可逆的，其各列之间线性无关。记以 J 各列作为基 $\{\widehat{\mathbf{e}}_i\}$ 下的坐标的 $\mathscr{V}_{\mathscr{E}}$ 中的向量为 $\mathbf{c}_i, i=1,\cdots,n$，即 $\mathbf{c}_i = \sum_{j=1}^n J_{ij}\widehat{\mathbf{e}}_j = \sum_{j=1}^n \partial x_j/\partial u_i \widehat{\mathbf{e}}_j, i=1,\cdots,n$。则 $\{\mathbf{c}_i\}$ 是 $\mathscr{V}_{\mathscr{E}}$ 线性无关向量组，那么它就是 $\mathscr{V}_{\mathscr{E}}$ 的基。$\{\widehat{\mathbf{c}}_i\}, \widehat{\mathbf{c}}_i = \mathbf{c}_i/\|\mathbf{c}_i\|, i=1,\cdots,n$ 就是 $\mathscr{V}_{\mathscr{E}}$ 的规范正交基。我们把 $\{\widehat{\mathbf{c}}_i\}$ 称为曲线坐标系的基，把 $h_i = \|\mathbf{c}_i\|^{-1}$ 称为曲线坐标系的拉梅系数（*Lamé coefficients*）。如果 $\{\widehat{\mathbf{c}}_i\}$ 两两正交，那么这个曲线坐标系称为正交曲线坐标

系（*orthogonal curvilinear coodinate*）。曲线坐标系的基的内积 $g_{ij}=(\mathbf{c}_i \mid \mathbf{c}_j)\,, i,j=1,\cdots,n$ 称为该曲线坐标系的度量张量（*metrix tensor*），虽称为张量，但其实 g_{ij} 只是组成了一个对称矩阵。特别地，对于直角坐标系，$g_{ij}=\delta_{ij}$。

在这里需要注意两件事。第一，我们所讨论的映射 T 是关于同一个点 X 的坐标之间的映射，一般地偏导数 $\partial x_j/\partial u_i$ 依赖点 X 的变化而变化，因此 $\{\widehat{\mathbf{c}}_i\}$ 不是 $\mathscr{V}_{\mathscr{E}}$ 的常向量基。同理 h_i 也是点 X 的函数。第二，虽然点 X 在直角坐标系下的坐标 $(x_1,\cdots,x_n)$ 恰好满足 $\mathbf{r}_X=\sum_{i=1}^n x_i\widehat{\mathbf{e}}_i$，但其在曲线坐系下的坐标 $(u_1,\cdots,u_n)$ 一般不满足 $\mathbf{r}_X=\sum_{i=1}^n u_i\widehat{\mathbf{c}}_i$。这是因为映射 T 一般不是线性的。作为一般讨论，我们记点 X 在曲线坐标系的基下的坐标为 $(x_1^{\mathrm{c}},\cdots,x_n^{\mathrm{c}})$，即 $\mathbf{r}_X=\sum_{i=1}^n x_i^{\mathrm{c}}\widehat{\mathbf{c}}_i$。在每个点 X 处，仍然可以使用基变换与坐标变换公式来联系 $(x_1,\cdots,x_n)$ 和 $(x_1^{\mathrm{c}},\cdots,x_n^{\mathrm{c}})$。记由由 $\{\widehat{\mathbf{e}}_i\}$ 到 $\{\widehat{\mathbf{c}}_i\}$ 的过渡矩阵是 S，则基变换公式是

$$\begin{aligned}\widehat{\mathbf{c}}_i &= \sum_j S_{ji}\widehat{\mathbf{e}}_j,\\ \widehat{\mathbf{e}}_i &= \sum_j S_{ji}^{\mathrm{inv}}\widehat{\mathbf{c}}_j,\quad i=1,\cdots n\end{aligned}$$

与 $\widehat{\mathbf{c}}_i$ 的表达式比较，可知

$$S_{ij}=h_j^{-1}\frac{\partial x_i}{\partial u_j},\quad i,j=1,\cdots,n$$

即矩阵 S 也是依赖点 X 变化的。坐标变换公式是

$$\begin{aligned}x_i &= \sum_j S_{ij}x_j^{\mathrm{c}},\\ x_i^{\mathrm{c}} &= \sum_j S_{ij}^{\mathrm{inv}}x_j,\quad i=1,\cdots,n\end{aligned}$$

例 0.2 (柱坐标系的基和几何图象). T_{cyl} 的雅可比矩阵是 J_{cyl} 是

$$J_{\mathrm{cyl}}=\begin{pmatrix}\cos\varphi & -\rho\sin\varphi & 0\\ \sin\varphi & \rho\cos\varphi & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

柱坐标的拉梅系数是 $h_\rho=1, h_\varphi=\rho, h_z=1$。过渡矩阵 S_{cyl} 是

$$S_{\mathrm{cyl}}=\begin{pmatrix}\cos\varphi & -\sin\varphi & 0\\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

柱坐标的基与直角坐标系的基的关系是

$$\begin{aligned}\widehat{\mathbf{e}}_\rho &= \cos\varphi\widehat{\mathbf{e}}_x+\sin\varphi\widehat{\mathbf{e}}_y,\\ \widehat{\mathbf{e}}_\varphi &= -\sin\varphi\widehat{\mathbf{e}}_x+\cos\varphi\widehat{\mathbf{e}}_y,\\ \widehat{\mathbf{e}}_z &= \widehat{\mathbf{e}}_z\end{aligned}$$

位置向量在柱坐标系的基下的坐标是

$$\mathbf{r}_X = \rho\widehat{\mathbf{e}}_\rho + z\widehat{\mathbf{e}}_z$$

我们发现，位置向量在 $\widehat{\mathbf{e}}_\varphi$ 方向上的投影总是零。诚然，如图0.1所示，$\mathbf{r}_X$ 总是与 $\widehat{\mathbf{e}}_\varphi$ 正交的。

T_{sph} 的雅可比矩阵是 J_{sph} 是

$$J_{\text{sph}} = \begin{pmatrix} \sin\vartheta\cos\varphi & r\cos\vartheta\cos\varphi & -r\sin\vartheta\sin\varphi \\ \sin\vartheta\sin\varphi & r\cos\vartheta\sin\varphi & r\sin\vartheta\cos\varphi \\ \cos\vartheta & -r\sin\vartheta & 0 \end{pmatrix}$$

球坐标的拉梅系数是 $h_r = 1, h_\vartheta = r, h_\varphi = r\sin\vartheta$。过渡矩阵是

$$S_{\text{sph}} = \begin{pmatrix} \sin\vartheta\cos\varphi & \cos\vartheta\cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\vartheta\sin\varphi & \cos\vartheta\sin\varphi & \cos\varphi \\ \cos\vartheta & -\sin\vartheta & 0 \end{pmatrix}$$

球坐标的基与直角坐标系的基的关系是

$$\begin{aligned} \widehat{\mathbf{e}}_r &= \sin\vartheta\cos\varphi\widehat{\mathbf{e}}_x + \sin\vartheta\sin\varphi\widehat{\mathbf{e}}_y + \cos\vartheta\widehat{\mathbf{e}}_z, \\ \widehat{\mathbf{e}}_\vartheta &= \cos\vartheta\cos\varphi\widehat{\mathbf{e}}_x + \cos\vartheta\sin\varphi\widehat{\mathbf{e}}_y - \sin\vartheta\widehat{\mathbf{e}}_z, \\ \widehat{\mathbf{e}}_\varphi &= -\sin\varphi\widehat{\mathbf{e}}_x + \cos\varphi\widehat{\mathbf{e}}_y \end{aligned}$$

位置向量在球坐标系的基下的坐标是

$$\mathbf{r}_X = r\widehat{\mathbf{e}}_r$$

我们发现，位置向量在 $\widehat{\mathbf{e}}_\vartheta$ 和 $\widehat{\mathbf{e}}_\varphi$ 方向上的投影总是零。诚然，如图0.1所示，$\mathbf{r}_X$ 总是与 $\widehat{\mathbf{e}}_\vartheta$ 和 $\widehat{\mathbf{e}}_\varphi$ 正交的。

0.1　场函数的导数

设 $f : \mathscr{D} \supseteq \mathscr{N} \to \mathscr{F}$ 是定义在 $\mathscr{D}$ 的子集 $\mathscr{N}$ 上的函数。也就是说，函数 T 定义了一个参数方程规定的 n 维空间区域 $\mathscr{D}$，而 f 是 $\mathscr{D}$ 内的一个场函数。若 $\mathbf{x} \in \mathscr{N}$，则 $f(\mathbf{x}) \in \mathscr{F}$。在之前的讨论中我们已经知道，有了双射 T，我们就能用参数 $\mathbf{u} \in \mathscr{U}$ 来表示 $\mathscr{D}$ 中的位置，故可记 $f^{\mathrm{u}}(\mathbf{u}) \equiv f(T(\mathbf{u}))$。$f^{\mathrm{u}}$ 与 f 的函数表达式一般是不同的（除了 T 是恒等映射的平凡情况），但在实际常见的惯例中常常不加区分地把 f^{u} 也记成 f。在后面的例子中我们将看到更多惯例问题。所幸 f^{u} 与 f 是同属于一个空间 $\mathscr{F}$ 的元素。这里的 $\mathscr{F}$ 可以是一个标量、向量或张量的空间。

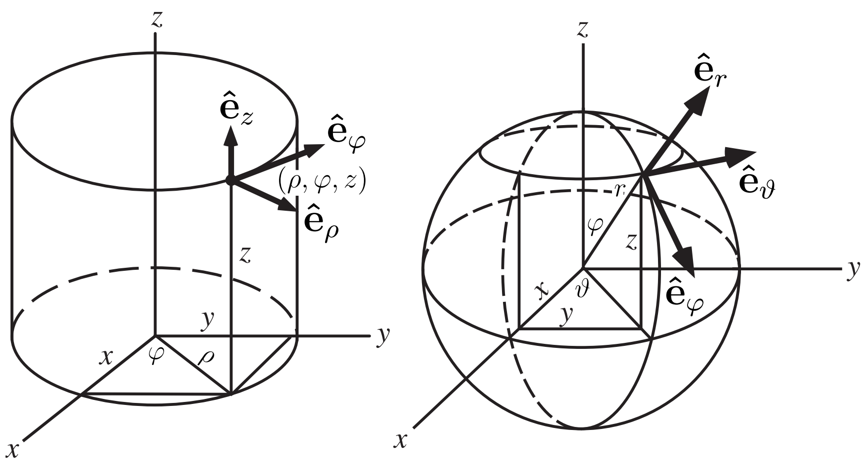

图 0.1: 柱坐标系和球坐标系的基和几何图象

我们考虑位置向量的微分 $d\mathbf{x}$，如果把它写成坐标微元的向量：$d\mathbf{x}=\sum_{i=1}^{3}dx_i\widehat{\mathbf{e}}_i$，则由函数微分定义有 $d\mathbf{x}=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial x_i}{\partial u_j}du_j\widehat{\mathbf{e}}_i=\sum_{j=1}^{n}\widehat{\mathbf{c}}_jh_jdu_j$。视 $\widehat{\mathbf{c}}_i$ 为另一组基的时，可进一步记为

$$d\mathbf{x}=\sum_{i=1}^{n}dx_i^{\mathrm{c}}\widehat{\mathbf{c}}_i,\quad dx_i^{\mathrm{c}}=h_idu_i,i=1,\cdots,n$$

这个关系后面会用到。

f 在点 $\mathbf{x}_0$ 处的导数是 $\left.\frac{df(\mathbf{x})}{d\mathbf{x}}\right|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_0}$。但在使用曲线坐标讨论问题时，我们经常已知的是 $\mathbf{u}\in\mathscr{U}$ 和 $f^{\mathrm{u}}(\mathbf{u})$，可直接计算的导数是 $\left.\frac{df^{\mathrm{u}}(\mathbf{u})}{d\mathbf{u}}\right|_{\mathbf{u}=\mathbf{u}(\mathbf{x}_0)}$，但这并非性质场 f 在 $\mathscr{D}$ 空间上的导数，应用时不能直接拿去作用于 $\mathscr{D}$ 空间上的位移向量。我们希望得到的是空间 $\mathscr{D}$ 上的函数导数在曲线坐标系的基 $\{\widehat{\mathbf{c}}_i\}$ 下的坐标矩阵，它可以作用于微元 $d\mathbf{x}$ 在相同基下的矩阵 $(dx_1^{\mathrm{c}},\cdots,dx_n^{\mathrm{c}})^{\mathsf{T}}$。我们从以下等式关系出发

$$df(\mathbf{x}_0)=df^{\mathrm{u}}(\mathbf{u}(\mathbf{x}_0))$$

等式左边：

$$\begin{aligned}df(\mathbf{x}_0)&=\mathbf{L}_{\mathbf{x}_0}d\mathbf{x}\\&=\left(\left.\frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_1}\right|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_0}\cdots\left.\frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_n}\right|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_0}\right)\begin{pmatrix}dx_1\\\vdots\\dx_n\end{pmatrix}\quad\text{这是在基 }\{\widehat{\mathbf{e}}_i\}\text{ 下的坐标式。}\end{aligned}$$

其中 $\mathbf{L}_{\mathbf{x}_0} \equiv \left.\frac{d\mathbf{f}(\mathbf{x})}{d\mathbf{x}}\right|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_0}$ 是函数 $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ 在点 $\mathbf{x}_0$ 处的导数。等式右边：

$$
\begin{aligned}
df^{\mathrm{u}}(\mathbf{u}(\mathbf{x}_0)) &= \mathbf{L}^{\mathrm{u}}_{\mathbf{u}(\mathbf{x}_0)} d\mathbf{u} \quad \mathbf{L}^{\mathrm{u}}_{\mathbf{u}(\mathbf{x}_0)} \text{ 是空间 } \mathscr{U} \text{ 上的线性变换。} \\
&= \begin{pmatrix} \left.\dfrac{\partial f^{\mathrm{u}}(\mathbf{u})}{\partial u_1}\right|_{\mathbf{u}=\mathbf{u}(\mathbf{x}_0)} \cdots \left.\dfrac{\partial f^{\mathrm{u}}(\mathbf{u})}{\partial u_n}\right|_{\mathbf{u}=\mathbf{u}(\mathbf{x}_0)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} du_1 \\ \vdots \\ du_n \end{pmatrix} \\
&\quad \text{这是在空间 } \mathscr{U} \text{ 中的基 } \left\{\widehat{\mathbf{f}}_i\right\} \text{ 下的坐标式。} \\
&= \begin{pmatrix} \left.\dfrac{\partial f^{\mathrm{u}}(\mathbf{u})}{\partial u_1}\right|_{\mathbf{u}=\mathbf{u}(\mathbf{x}_0)} \cdots \left.\dfrac{\partial f^{\mathrm{u}}(\mathbf{u})}{\partial u_n}\right|_{\mathbf{u}=\mathbf{u}(\mathbf{x}_0)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1^{-1} h_1 du_1 \\ \vdots \\ h_n^{-1} h_n du_n \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} h_1^{-1} \left.\dfrac{\partial f^{\mathrm{u}}(\mathbf{u})}{\partial u_1}\right|_{\mathbf{u}=\mathbf{u}(\mathbf{x}_0)} \cdots h_n^{-1} \left.\dfrac{\partial f^{\mathrm{u}}(\mathbf{u})}{\partial u_n}\right|_{\mathbf{u}=\mathbf{u}(\mathbf{x}_0)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dx_1^{\mathrm{c}} \\ \vdots \\ dx_n^{\mathrm{c}} \end{pmatrix} \\
&\quad \text{这是在空间 } \mathscr{D} \text{ 中的基 } \{\widehat{\mathbf{c}}_i\} \text{ 下的坐标式。}
\end{aligned}
$$

比较可知，$\mathbf{L}_{\mathbf{x}_0}$ 在基 $\{\widehat{\mathbf{c}}_i\}$ 下的矩阵就是

$$
\begin{pmatrix} h_1^{-1} \left.\dfrac{\partial f^{\mathrm{u}}(\mathbf{u})}{\partial u_1}\right|_{\mathbf{u}=\mathbf{u}(\mathbf{x}_0)} \cdots h_n^{-1} \left.\dfrac{\partial f^{\mathrm{u}}(\mathbf{u})}{\partial u_n}\right|_{\mathbf{u}=\mathbf{u}(\mathbf{x}_0)} \end{pmatrix}
$$