Cognoms	Nom	DNI
Examen Final EDA	Duració: 3h	07/06/2021
<ul> <li>L'enunciat té 4 fulls, 8 care</li> <li>Poseu el vostre nom comple</li> <li>Contesteu tots els problementes digui el contre en temps.</li> <li>Llevat que es digui el contre en temps.</li> </ul>	let i número de DNI a cada p es en el propi full de l'enunc ari, sempre que parlem de cos	iat a l'espai reservat. Et ens referim a cost asimptòtic
Problema 1		(3 pts.)
Responeu a les següents pregi	untes:	
-	ta a més gran, segons el e enen el mateix grau de cre	$n^2$ ), $n^2$ , $n \log n$ , $n(\log n)^2$ . seu creixement asimptòtic. Eixement, indiqueu-ho. No
(b) (1 pt.) Raoneu si l'afirma problemes NP-complets o no hi pertanyen".		a o no se sap: "Hi ha més oblemes NP-complets que

(c) (1 pt.) Considereu el codi següent (que no calcula res en particular):

```
int a;

int f (const vector < int>& v, int l, int r) {

  if (l \ge r) return 0;

  int tot = 0;

  int m = (l+r)/2;

  for (int i = 0; i < a; ++i) {

    if (i\%2 == 0) tot += f(v,l,m);

    else tot += f(v,m+1,r);

  }

  for (int i = l; i \le r; ++i)

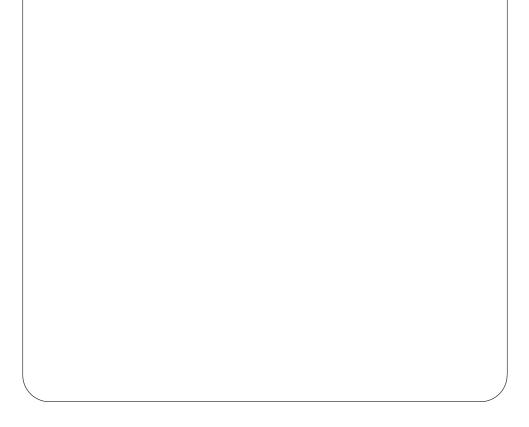
    for (int j = i+1; j \le r; ++j)

    tot += v[i]*v[j];

  return tot;

}
```

Si v és un vector de mida n, determineu de forma raonada el cost d'una crida f(v,0,n-1) en funció d'n segons el valor de la constant  $a \ge 0$ , que és un enter que no canvia durant l'execució del programa.



Cognoms	Nom	DNI	

Problema 2 (2.5 pts.)

Un *graf signat* és un graf **no dirigit** i **connex** on cada aresta té una etiqueta +1 o -1. S'utilitzen àmpliament en psicologia i ciències socials per a modelitzar les relacions entre persones, grups, corporacions, nacions, etc.

Diem que un graf signat és *estable* si tot cicle del graf té signe positiu. El signe d'un camí o un cicle en el graf és el producte de les etiquetes de les arestes que formen el camí o cicle. Per exemple, un triangle amb tres arestes positives, o amb dues arestes negatives i una positiva és estable, mentre que un triangle amb tres arestes negatives o dues positives i una negativa no ho és.

Un teorema clàssic de la teoria de grafs signats estableix que un graf signat és estable si i només si el conjunt de vèrtexs es pot dividir en dos equips *A* i *B*, possiblement buits, de manera que tota aresta positiva connecta vèrtexs del mateix equip, i tota aresta negativa connecta vèrtexs d'equips oposats.

a) (2 pts.) Ompliu les caselles del codi següent per tal de determinar si un graf signat *G* és o no estable.

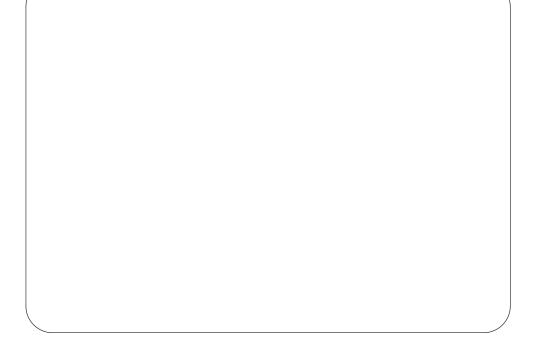
```
const int A = 0; const int B = 1; const int no\_team = -1;
struct edge {
  int target; // id of other vertex
  int sign; //-1 or +1
};
typedef vector<vector<edge \gg signed_graph;
int opposed\_team(int b) {return (b == A ? B : A);}
int expected_team(int t, int sign) {
  if (sign == 1) return t;
  else return opposed_team(t);
bool is_stable (const signed_graph& G, int u, vector < int>& team) {
  for (auto& e : G[u]) {
    int e_t = expected_team(team[u], e.sign);
    if (
                                                                    ) return false;
    if (team[e.target] == no_team) {
      if (
                                                        ) return false;
    }
  }
  return
```

```
bool is_stable (const signed_graph& G, vector < int>& team[0] = A;
  return is_stable (G,0,team);
}

int main() {
  int n, m;
  cin >> n >> m;
    signed_graph G(n);
  for (int i = 0; i < m; ++i) {
    int v1, v2, sign;
    cin >> v1 >> v2 >> sign;
    G[v1].push_back({v2,sign});
    G[v2].push_back({v1,sign});
}

vector < int> team(n,no_team);
  cout « is_stable (G,team) « endl;
}
```

b) (0.5 pts). Per què hem assignat l'equip A al vèrtex 0 i ni tan sols hem provat l'altra possibilitat?



Cognoms	Nom	DNI

Problema 3 (2.25 pts.)

En una empresa extraordinàriament jeràrquica i paranoica, tenim n treballadors identificats amb els nombres  $\{1,2,\cdots,n\}$ . Aquests nombres també determinen l'ordre jeràrquic dels treballadors. Més concretament, si i < j aleshores i és superior jeràrquicament a j.

Els treballadors només poden transmetre missatges a col·legues que siguin inferiors jeràrquicament. No obstant, s'han d'utilitzar canals de transmissió extraordinàriament segurs i amb un alt cost. L'empresa no vol crear  $\Theta(n^2)$  canals de transmissió, sinó que com a molt en vol  $O(n\log n)$ . Un conjunt de canals de transmissió és vàlid si, per a tot parell de treballadors (i,j) amb i < j o bé existeix un canal  $i \to j$  o bé existeix un altre treballador k (amb i < k < j) que pot actuar com a intermediari. És a dir, existeixen canals  $i \to k$  i  $k \to j$ . Recalquem que no es permeten dos o més salts d'intermediaris. És a dir,  $i \to k, k \to l, l \to j$  no és suficient perquè i es pugui comunicar de forma vàlida amb j.

Per exemple, si n = 8, una possible solució és:

$1 \rightarrow 2$	$2 \rightarrow 3$	$7 \rightarrow 8$	$5 \rightarrow 6$	$6 \rightarrow 7$
$6 \rightarrow 8$	$1 \rightarrow 4$	2  o 4	$3 \rightarrow 4$	$4 \rightarrow 5$
4  o 6	4 o 7	4 o 8		

Si 5 vol parlar amb 8 haurà d'utilitzar 6 com a intermediari. En canvi, si 4 vol parlar amb 7 ho podrà fer directament.

(a) (1.5 pts.) Dissenyeu un algorisme que determini un conjunt vàlid de canals de transmissió de mida com a molt  $O(n \log n)$ . No cal que doneu codi, amb una descripció d'alt nivell serà suficient.

(*Pista:* partiu els treballadors en dues meitats. Considereu tres tipus de transmissions: entre treballadors de la primera part, entre treballadors de la segona part i entre treballadors de parts diferents.)

\

0.75 pts.) Raoneu per què l'algorisme anterior construeix com a mol- anals de transmissió.	$\operatorname{molt} O(n)$	
0.75 pts.) Raoneu per què l'algorisme anterior construeix com a mol· anals de transmissió.	molt $O(n  \mathbf{l})$	
0.75 pts.) Raoneu per què l'algorisme anterior construeix com a molanals de transmissió.	$\operatorname{molt} O(n 1$	
0.75 pts.) Raoneu per què l'algorisme anterior construeix com a mol anals de transmissió.	nolt $O(n 1$	
0.75 pts.) Raoneu per què l'algorisme anterior construeix com a molanals de transmissió.	$\operatorname{molt} O(n 1$	
0.75 pts.) Raoneu per què l'algorisme anterior construeix com a moli anals de transmissió.	molt $O(n$ l	
0.75 pts.) Raoneu per què l'algorisme anterior construeix com a moli anals de transmissió.	molt $O(n$ l	
0.75 pts.) Raoneu per què l'algorisme anterior construeix com a moli anals de transmissió.	molt $O(n 1$	
0.75 pts.) Raoneu per què l'algorisme anterior construeix com a moltanals de transmissió.	molt $O(n$ l	
0.75 pts.) Raoneu per què l'algorisme anterior construeix com a moli anals de transmissió.	molt $O(n$ l	_
0.75 pts.) Raoneu per què l'algorisme anterior construeix com a molanals de transmissió.	$\operatorname{molt} O(n \operatorname{l}$	/
0.75 pts.) Raoneu per què l'algorisme anterior construeix com a molanals de transmissió.	molt $O(n$ l	/
0.75 pts.) Raoneu per què l'algorisme anterior construeix com a molanals de transmissió.	molt $O(n$ l	
0.75 pts.) Raoneu per què l'algorisme anterior construeix com a molanals de transmissió.	molt $O(n$ l	_
0.75 pts.) Raoneu per què l'algorisme anterior construeix com a molanals de transmissió.	molt $O(n  \mathbf{l})$	/
0.75 pts.) Raoneu per què l'algorisme anterior construeix com a molanals de transmissió.	molt $O(n$ l	/
0.75 pts.) Raoneu per què l'algorisme anterior construeix com a molanals de transmissió.	molt $O(n$ l	

Cognoms	Nom	DNI

Problema 4 (2.25 pts.)

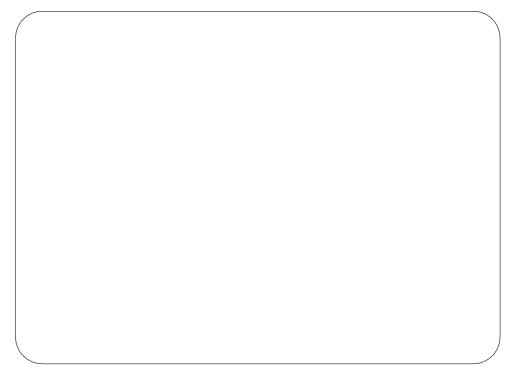
Volem comprar un cotxe i el fabricant ens ofereix un conjunt d'n equipaments  $E = \{1,2,\cdots,n\}$  que hi podem instal·lar. Hi ha un conjunt d'equipaments  $V \subseteq E$  que volem i un conjunt d'equipaments  $N \subseteq E$  que no volem de cap de les maneres. Evidentment,  $V \cap N = \emptyset$ . Malauradament, el fabricant ens imposa dos tipus de restriccions. D'una banda, hi ha un conjunt  $I \subseteq E \times E$  de parelles d'equipaments que no es poden instal·lar alhora. D'altra banda, hi ha un conjunt de relacions entre equipaments  $R \subseteq E \times E$ . Una parella  $(i,j) \in R$  significa que si volem instal·lar i també cal instal·lar j. Necessitem decidir si és possible satisfer les restriccions imposades pels conjunts V, N, I i R. Per exemple, si n = 8 i les restriccions són:

- $V = \{1, 4\}$
- $N = \{2, 3\}$
- $I = \{ (1,3), (2,3), (1,5), (5,8) \}$
- $R = \{ (1, 6), (4, 1), (6, 7) \}$

aleshores les restriccions es poden satisfer tot instal·lant, per exemple, els equipaments  $\{1,4,6,7,8\}$ . Notem que no és el conjunt mínim d'equipaments que satisfà totes les restriccions.

(a) (1.5 pts.) Construeix una reducció polinòmica del problema que acabem d'introduir cap a 2*SAT* (determinar si una *CNF* en lògica proposicional on cada clàusula té **com a molt** 2 literals és satisfactible). No cal demostrar que la reducció compleix les propietats desitjades.

*Pista*: utilitza variables Booleanes  $p_i$ , amb  $1 \le i \le n$ , que signifiquen que l'equipament i s'instal·larà.



(b)	(0.75 pts.) Podem afirmar que el problema dels equipaments es pot resoldre en temps polinòmic? Només valorarem de forma positiva argumentacions concises i precises.		