Competència Transversal EDA

- *Aquest exercici s'ha de lliurar el dia 07/06/2021 al* **principi** *de l'examen final.*
- *Poseu el vostre nom complet i número de DNI.*
- *Contesteu a totes les qüestions en el propi full de l'enunciat.*
- *Quan doneu una referència a una font (llibre, revista, web, etc.), seguiu la norma "ISO-690 (author-date, English)". Podeu generar les referències en aquest format a:* `www.citethisforme.com/guides/iso690-author-date-en`
- *Quan doneu una URL, si us plau escriviu* **clarament** *i useu Tiny URL:* `https://tinyurl.com`

Donat un graf no dirigit $G = (V, E)$, un *aparellament* és un subconjunt de les arestes $M \subseteq E$ tal que per a tot vèrtex $v \in V$, com a molt una aresta de M incideix en v. Un vèrtex $v \in V$ és *cobert* per un aparellament M si hi ha alguna aresta en M incident en v; si no, v és *lliure*. Un *aparellament màxim* és un aparellament de mida màxima: un aparellament M tal que per qualsevol aparellament M', tenim $|M| \geq |M'|$.

En aquest exercici, restringirem la nostra atenció als aparellaments màxims en grafs bipartits. Un *graf bipartit* és un graf en el qual el conjunt de vèrtexs es pot partir en $V = L \cup R$, on L i R són disjunts i totes les arestes de E van entre L i R. El problema de l'*aparellament bipartit màxim* consisteix en, donat un graf bipartit, trobar un aparellament màxim del graf.

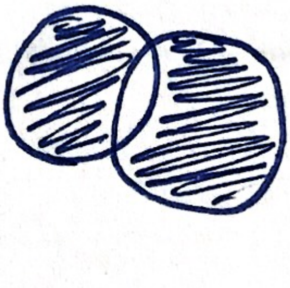
Nota: a continuació s'assumeix que cada vèrtex en V té almenys una aresta incident.

(a) Doneu la definició de *camí augmentatiu* respecte a un aparellament donat M.

Un camí augmentatiu és tracta d'un camí alternat que acaba en un vèrtex no aparellat. Un camí alternat és un camí que comença en un vèrtex no aparellat i va alternant arestes aparellades i no aparellades.
Respecte a un aparellament donat M es tracta d'un camí amb un número senar d'arestes $e_1, e_2, \ldots, e_m$ tal que $e_{senar} \notin M$ i $e_{parell} \in M$.

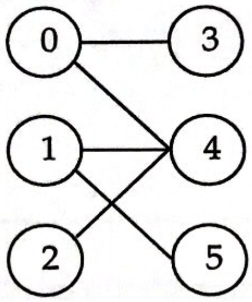
(b) Donats dos conjunts A i B, definiu la diferència simètrica $A \oplus B$ de A i B.

$A \oplus B = (A - B) \cup (B - A)$
$A \oplus B = (A \cup B) - (A \cap B)$



(c) El pseudo-codi a la part inferior esquerra descriu un algorisme per a trobar l'aparellament màxim d'un graf bipartit:

```
matching Max_Bipartite_Matching(graph G) {
  matching M = ∅;
  path  P = Augmenting_Path(G, M);
  while (P ≠ NULL) {
    M = M ⊕ P;
    P = Augmenting_Path(G, M);
  }
  return M;
}
```

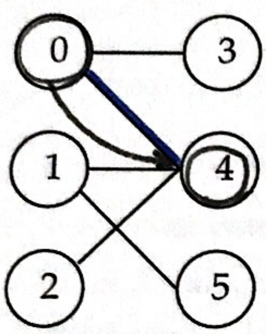


Considereu ara el graf bipartit a la dreta. En aquest cas, es pot veure que l'algorisme triga 3 iteracions per trobar l'aparellament màxim. Executeu l'algorisme en aquest graf i marqueu a sota les arestes de l'aparellament M al final de cadascuna de les iteracions (per exemple, subratllant amb un retolador).

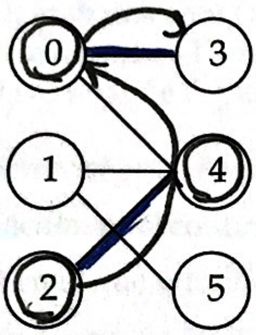
Camí augmentatiu

Arestes aparellament M

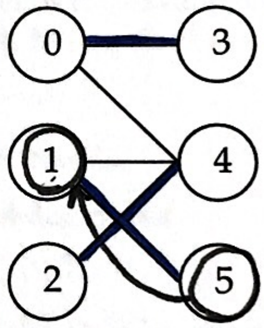
Iteració # 1



Iteració # 2



Iteració # 3



La funció Max_Bipartite_Matching retorna el següent conjunt d'arestes (segons el meu exemple): $\{\{0,3\},\{1,5\},\{2,4\}\}$

(d) L'algorisme de l'apartat (c) té cost en temps $\Theta(|V| \cdot |E|)$ en el cas pitjor. Un algorisme més eficient és el que es mostra continuació:

```
matching  Max_Bipartite_Matching_Efficient (graph G) {
  matching M = ∅;
  set  S = Maximal_Set_Vertex_Disjoint_Shortest_Augmenting_Paths(G, M );
  while (S ≠ ∅) {
    M = M ⊕ ⋃{ P | P ∈ S };
    S = Maximal_Set_Vertex_Disjoint_Shortest_Augmenting_Paths(G, M );
  }
  return M;
}
```

Sota quin nom es coneix aquest algorisme en la literatura informàtica?

Quin és el seu cost en temps en el cas pitjor en termes de $|V|$ i $|E|$?

Es coneix com a Algorisme de Hopcroft-Karp
El cost en temps en el cas pitjor és de $\Theta(|E| \cdot \sqrt{|V|})$

(e) Doneu la referència d'una font que heu usat per contestar les qüestions prèvies.

Weisstein, Eric W. "Augmenting Path". From MathWorld --A Wolfram Web Resource. https://mathworld.wolfram.com/AugmentingPath.html → https://tinyurl.com/luwyjfkzy

(f) A la següent llista, marqueu amb una creu (×) aquelles frases que justifiquin la vostra elecció de la referència donada a l'apartat (e). N'heu de marcar almenys una, o omplir la caixa buida al final de l'apartat.

- ☐ L'autor és un expert ben conegut a l'àrea d'algorísmia.
- ☒ Vaig poder entendre fàcilment el contingut del document.
- ☐ És un document obert en el que tothom pot contribuir.
- ☐ Era el primer de la llista quan vaig fer la cerca amb `google.es/google.com`.
- ☐ La vaig trobar amb un motor de cerca acadèmic (com Google Scholar).
- ☐ El document està allotjat o publicat per una institució acadèmica.
- ☐ Un company de classe me l'ha recomanat.

Si teniu alguna altra raó per a la vostra elecció, la podeu explicar aquí: