

David  
**Halliday**

Robert  
**Resnick**

Jearl  
**Walker**

2

Podstawy

**FIZYKI**

## Wybrane właściwości fizyczne (wartości zaokrąglone)

---

**Powietrze** (suche, w temp. 20°C i pod ciśn. 1 atm)

gęstość	1,21 kg/m <sup>3</sup>
ciepło właściwe pod stałym ciśnieniem	1010 J/(kg · K)
stosunek ciepł właściwych $c_p/c_V$	1,40
prędkość dźwięku	343 m/s
natężenie pola elektrycznego przebiecia	$3 \cdot 10^6$ V/m
efektywna masa molowa	0,0289 kg/mol

### **Woda**

gęstość	1000 kg/m <sup>3</sup>
prędkość dźwięku	1460 m/s
ciepło właściwe pod stałym ciśnieniem	4190 J/(kg · K)
ciepło topnienia (w temp. 0°C)	333 kJ/kg
ciepło parowania (w temp. 100°C)	2260 kJ/kg
współczynnik załamania ( $\lambda = 589$ nm)	1,33
masa molowa	0,0180 kg/mol

### **Ziemia**

masa	$5,98 \cdot 10^{24}$ kg
średni promień	$6,37 \cdot 10^6$ m
przyspieszenie grawitacyjne na powierzchni Ziemi	$9,8 \text{ m/s}^2$
standardowe ciśnienie atmosferyczne	$1,01 \cdot 10^5$ Pa
okres ruchu satelity na orbicie odległej od Ziemi o 100 km	86,3 min
promień orbity geostacjonarnej	42 200 km
prędkość ucieczki	11,2 km/s
dipolowy moment magnetyczny	$8,0 \cdot 10^{22}$ A · m <sup>2</sup>
średnie pole elektryczne na powierzchni Ziemi	150 V/m, skierowane w dół

### **Odległości od Ziemi**

do Księżyca	$3,82 \cdot 10^8$ m
do Słońca	$1,50 \cdot 10^{11}$ m
do najbliższej gwiazdy	$4,04 \cdot 10^{16}$ m
do środka naszej Galaktyki	$2,2 \cdot 10^{20}$ m
do galaktyki Andromedy	$2,1 \cdot 10^{22}$ m
do granicy obserwacyjnego Wszechświata	$\sim 10^{26}$ m

---

### **Nazwy przedrostków jednostek SI**

Czynnik	Przedrostek	Symbol	Czynnik	Przedrostek	Symbol
$10^{24}$	jotta	Y	$10^{-1}$	decy	d
$10^{21}$	zetta	Z	$10^{-2}$	centy	c
$10^{18}$	eksa	E	$10^{-3}$	mili	m
$10^{15}$	peta	P	$10^{-6}$	mikro	μ
$10^{12}$	tera	T	$10^{-9}$	nano	n
$10^9$	giga	G	$10^{-12}$	piko	p
$10^6$	mega	M	$10^{-15}$	femto	f
$10^3$	kilo	k	$10^{-18}$	atto	a
$10^2$	hekto	h	$10^{-21}$	zepto	z
$10^1$	deka	da	$10^{-24}$	jokto	y

David  
**Halliday**

Robert  
**Resnick**

Jearl  
**Walker**

Podstawy 

---

 **FIZYKI** **2**

Z języka angielskiego tłumaczyli

Mirosław Łukaszewski, Włodzimierz Komar i Rafał Bożek



W A R S Z A W A 2006

W Y D A W N I C T W O N A U K O W E PWN

Dane oryginału:  
David Halliday, Robert Resnick, Jearl Walker  
FUNDAMENTALS OF PHYSICS, PART 2  
John Wiley & Sons, Inc.

Authorized translation from English language edition published by John Wiley & Sons, Inc.  
Copyright © 2001 by John Wiley & Sons, Inc.  
All Rights Reserved

Projekt okładki i stron tytułowych **Joanna Sobieraj**

Przekład z języka angielskiego **Miroslaw Łukaszewski** (rozdziały 13–15)  
**Włodzimierz Komar** (rozdziały 16–18)  
**Rafał Bożek** (rozdziały 19–21)

Redaktor naukowy **Jan Mostowski**  
**Miroslaw Łukaszewski**

Redaktor **Anna Bogdanienko**

Korekta **Małgorzata Kopczyńska**

Copyright © for the Polish edition  
by Wydawnictwo Naukowe PWN SA  
Warszawa 2003

Wydawnictwo Naukowe PWN SA  
00-251 Warszawa, ul. Miodowa 10  
tel. 022 69 54 321  
faks 022 69 54 031  
e-mail: pwn@pwn.com.pl  
www.pwn.pl

ISBN-13: 978-83-01-14107-3 t. 2      ISBN-13: 978-83-01-13997-1 t. 1–5  
ISBN-10: 83-01-14107-7      ISBN-10: 83-01-13997-8

Wydawnictwo Naukowe PWN SA  
Wydanie pierwsze, 2 dodruk  
Arkuszy drukarskich 41,5  
Skład i łamanie: ArtGraph, Warszawa  
Druk ukończono w październiku 2006 r.  
Druk i oprawa: GRAFMAR Sp. z o.o.  
36-100 Kolbuszowa Dolna, ul. Wiejska 43

# SPIS ZAWARTOŚCI WSZYSTKICH TOMÓW

## TOM 1

- Rozdział 1. Pomiar
- Rozdział 2. Ruch prostoliniowy
- Rozdział 3. Wektory
- Rozdział 4. Ruch w dwóch i trzech wymiarach
- Rozdział 5. Siła i ruch I
- Rozdział 6. Siła i ruch II
- Rozdział 7. Energia kinetyczna i praca
- Rozdział 8. Energia potencjalna i zachowanie energii
- Rozdział 9. Układy cząstek
- Rozdział 10. Zderzenia
- Rozdział 11. Obroty
- Rozdział 12. Toczenie się ciał, moment siły i moment pędu

## TOM 2

- Rozdział 13. Równowaga i sprężystość
- Rozdział 14. Grawitacja
- Rozdział 15. Płyny
- Rozdział 16. Drgania
- Rozdział 17. Fale I
- Rozdział 18. Fale II
- Rozdział 19. Temperatura, ciepło  
i pierwsza zasada termodynamiki
- Rozdział 20. Kinetyczna teoria gazów
- Rozdział 21. Entropia i druga zasada termodynamiki

## TOM 3

- Rozdział 22. Ładunek elektryczny
- Rozdział 23. Pole elektryczne
- Rozdział 24. Prawo Gaussa

- Rozdział 25. Potencjał elektryczny
- Rozdział 26. Pojemność elektryczna
- Rozdział 27. Prąd elektryczny i opór elektryczny
- Rozdział 28. Obwody elektryczne
- Rozdział 29. Pole magnetyczne
- Rozdział 30. Pole magnetyczne wywołane przepływem prądu
- Rozdział 31. Zjawisko indukcji i indukcyjność
- Rozdział 32. Magnetyzm materii; równanie Maxwella
- Rozdział 33. Drgania elektromagnetyczne i prąd zmienny

## TOM 4

- Rozdział 34. Fale elektromagnetyczne
- Rozdział 35. Obrazy
- Rozdział 36. Interferencja
- Rozdział 37. Dyfrakcja
- Rozdział 38. Teoria względności

## TOM 5

- Rozdział 39. Fotony i fale materii
- Rozdział 40. Jeszcze o falach materii
- Rozdział 41. Wszystko o atomach
- Rozdział 42. Przewodnictwo elektryczne ciał stałych
- Rozdział 43. Fizyka jądrowa
- Rozdział 44. Energia jądrowa
- Rozdział 45. Kwarki, leptony i Wielki Wybuch

### Dodatki

- Odpowiedzi do sprawdzianów oraz pytań i zadań  
o numerach nieparzystych
- Skorowidz

# SPIS TABEL

13.1. Niektóre cechy sprząstwe wybranych materiałów przydatnych w technice	16
14.1. Zmiana $\alpha$ z wysokością	33
14.2. Prędkość ucieczki z kilku ciał niebieskich	41
14.3. Trzecie prawo Keplera dla planet Układu Słonecznego	44
15.1. Wybrane gęstości	62
15.2. Wybrane wartości ciśnienia	64
17.1. Różnice faz i charakter interferencji	139
18.1. Prędkość dźwięku	156
18.2. Głośności wybranych dźwięków	166
19.1. Wybrane temperatury w skali Celsjusza i Fahrenheita	192
19.2. Wartości współczynnika rozszerzalności liniowej wybranych substancji	195
19.3. Wartości ciepła właściwego wybranych substancji w temperaturze pokojowej	199
19.4. Wartości ciepła przemiany wybranych substancji	200
19.5. Pierwsza zasada termodynamiki: cztery przypadki szczególne	206
19.6. Wartości przewodności cieplnej właściwej wybranych substancji	209
20.1. Przykładowe prędkości cząsteczek w temperaturze pokojowej ( $T = 300$ K)	232
20.2. Molowe ciepła właściwe przy stałej objętości	241
20.3. Liczba stopni swobody dla różnych cząsteczek	246
20.4. Cztery szczególne przemiany	251
21.1. Sześć cząsteczek w zbiorniku	277

# SPIS TREŚCI

Przedmowa

## ROZDZIAŁ 13

Równowaga i sprężystość 1

Jak można bezpiecznie odpocząć w czasie wspinaczki w kominie skalnym?

13.1. Równowaga 2

13.2. Warunki równowagi 3

13.3. Środek ciężkości 5

13.4. Kilka przykładów równowagi statycznej 7

13.5. Układy nieoznaczone 12

13.6. Sprężystość 14

Podsumowanie 18

Pytania 19

Zadania 20

## ROZDZIAŁ 14

Grawitacja 27

Jak można wykryć czarną dziurę?

14.1. Siła grawitacyjna we Wszechświecie 28

14.2. Prawo powszechnego ciążenia 28

14.3. Grawitacja a zasada superpozycji 30

14.4. Grawitacja w pobliżu powierzchni Ziemi 32

14.5. Grawitacja wewnętrz Ziemi 36

14.6. Grawitacyjna energia potencjalna 37

14.7. Planety i satelity: prawa Keplera 42

14.8. Satelity: orbity i energia 46

14.9. Grawitacja według Einsteina 48

Podsumowanie 51

Pytania 52

Zadania 54

## ROZDZIAŁ 15

Płyny 60

Dlaczego poczynającym nurkowie czasem tracą życie?

15.1. Płyny w otaczającym nas świecie 61

15.2. Co to jest płyn? 61

15.3. Gęstość i ciśnienie 61

15.4. Płyny w spoczynku 64

15.5. Jak się mierzy ciśnienie? 67

15.6. Prawo Pascala 69

15.7. Prawo Archimedesa 71

15.8. Ruch płynów doskonałych 75

15.9. Równanie ciągłości 76

15.10. Równanie Bernoulliego 79

Podsumowanie 83

Pytania 84

Zadania 85

## ROZDZIAŁ 16

Drgania 93

Dlaczego budynki Mexico City zawaliły się pod wpływem bardzo odległego trzęsienia ziemi?

16.1. Drgania 94

16.2. Ruch harmoniczny 94

16.3. Siła w ruchu harmonicznym 98

16.4. Energia w ruchu harmonicznym 100

16.5. Wahadło torsyjne 102

16.6. Wahadła 103

16.7. Ruch harmoniczny a ruch jednostajny po okręgu 108

16.8. Ruch harmoniczny tłumiony 110

16.9. Drgania wymuszone i rezonans 112

Podsumowanie 113

Pytania 114

Zadania 116

## ROZDZIAŁ 17

Fale I 122

*Jak skorpion wykrywa obecność chrząszcza,  
nie widząc go ani nie słysząc?*

17.1. Fale i cząstki 123

17.2. Rodzaje fal 123

17.3. Fale poprzeczne i podłużne 124

17.4. Długość fali i częstotliwość 125

17.5. Prędkość fali biegnącej 128

17.6. Prędkość fali w napiętej linie 131

17.7. Energia i moc fali biegnącej w linie 134

17.8. Zasada superpozycji fal 136

17.9. Interferencja fal 137

17.10. Wskazy 140

17.11. Fale stojące 142

17.12. Fale stojące i rezonans 144

Podsumowanie 147

Pytania 148

Zadania 149

## ROZDZIAŁ 18

Fale II 154

*Jak nietoperz odnajduje ćmę w całkowitej ciemności?*

18.1. Fale dźwiękowe 155

18.2. Prędkość dźwięku 155

18.3. Biegnące fale dźwiękowe 159

18.4. Interferencja 162

18.5. Natężenie i głośność dźwięku 164

18.6. Źródła dźwięków w muzyce 168

18.7. Dudnienia 171

18.8. Zjawisko Dopplera 173

18.9. Prędkości naddźwiękowe; fale uderzeniowe 178

Podsumowanie 179

Pytania 180

Zadania 182

## ROZDZIAŁ 19

Temperatura, ciepło i pierwsza zasada termodynamiki 187

*Jak psczoły wykorzystują ciepło do obrony przed szerszeniami?*

19.1. Termodynamika 188

19.2. Zerowa zasada termodynamiki 188

19.3. Pomiary temperatury 189

19.4. Skale Celsjusza i Fahrenheita 192

19.5. Rozszerzalność cieplna 194

19.6. Temperatura i ciepło 197

19.7. Pochłanianie ciepła przez ciała stałe i ciecze 198

19.8. Bliższe spojrzenie na ciepło i pracę 202

19.9. Pierwsza zasada termodynamiki 205

19.10. Niektóre szczególne przypadki pierwszej zasady termodynamiki 206

19.11. Mechanizmy przekazywania ciepła 209

Podsumowanie 214

Pytania 216

Zadania 217

## ROZDZIAŁ 20

Kinetyczna teoria gazów 224

*Dlaczego przy otwarciu butelki z zimnym napojem gazowanym tworzy się mgiełka?*

20.1. Nowe spojrzenie na gazy 225

20.2. Liczba Avogadra 225

20.3. Gazy doskonale 226

20.4. Ciśnienie, temperatura i prędkość średnia kwadratowa 230

20.5. Energia kinetyczna ruchu postępowego 233

20.6. Średnia droga swobodna 233

20.7. Rozkład prędkości cząsteczek 236

20.8. Molowe ciepła właściwe gazu doskonałego 239

20.9. Stopnie swobody a molowe ciepła właściwe 244

20.10. Nieco fizyki kwantowej 246

20.11. Rozprężanie adiabatyczne gazu doskonałego 247

Podsumowanie 251

Pytania 253

Zadania 254

## ROZDZIAŁ 21

Entropia i druga zasada termodynamiki 259

*Co wyznacza kierunek czasu?*

21.1. Kilka przemian nieodwracalnych 260

21.2. Zmiana entropii 261

21.3. Druga zasada termodynamiki 266

21.4. Entropia w świecie rzeczywistym: silniki 267

21.5. Entropia w świecie rzeczywistym: chłodziarki 273

21.6. Sprawność silników rzeczywistych 275

21.7. Statystyczne spojrzenie na entropię 276

Podsumowanie 281

Pytania 282

Zadania 283

## DODATKI

A. Międzynarodowy Układ Jednostek (SI) A1

B. Niektóre podstawowe stałe fizyczne A3

C. Niektóre dane astronomiczne A5

D. Współczynniki zamiany jednostek A7

E. Wzory matematyczne A11

F. Właściwości pierwiastków A14

G. Układ okresowy pierwiastków A17

Odpowiedzi do sprawdzianów  
oraz pytań i zadań  
o numerach nieparzystych B1

Skorowidz

# PRZEDMOWA

Obecne, szóste wydanie *Podstaw fizyki* jest znacznie zmienione — pod względem układu treści i organizacji materiału — w stosunku do bardzo popularnego wydania piątego, zachowuje jednak wiele elementów klasycznego podręcznika Davida Hallidaya i Roberta Resnicka. Niemal wszystkie zmiany wynikają z sugestii wykładowców i studentów korzystających z wydania piątego oraz recenzentów maszynopisu wydania szóstego, a także z wyników badań nad procesem nauczania. Czytelnicy mogą nadsyłać swoje sugestie, poprawki oraz uwagi — pozytywne i negatywne — do wydawnictwa John Wiley and Sons (<http://www.wiley.com/college/hrw>) lub do Jearla Walkera (adres pocztowy: Physics Department, Cleveland State University, Cleveland, OH 44115, USA; faks: (USA) (216) 687-2424; adres elektroniczny: [physics@wiley.com](mailto:physics@wiley.com)). Nie uda nam się pewnie odpowiedzieć na każdy list, ale wszystkie zachowamy i uważnie przeczytamy.

## Zmiany w organizacji materiału

► **Bardziej przejrzysty układ tekstu.** Poprzednie wydania oryginału były drukowane w dwóch szpaltach, co wielu studentów i wykładowców uważało za układ tekstu zbyt zagęszczony i prowadzący do rozproszenia uwagi czytelnika.

► **Potoczyste przedstawienie materiału.** Wszystkim podręcznikom zarzuca się zwykle, że zawierają zbyt wiele materiału. W odpowiedzi na takie uwagi krytyczne szóste wydanie podręcznika zostało skrócone na dwa sposoby:

1. Materiał dotyczący szczególnej teorii względności i fizyki kwantowej został usunięty z rozdziałów początkowych i umieszczony w dalszych rozdziałach, poświęconych fizyce współczesnej.

2. W książce pozostawiono tylko najważniejsze przykłady, a pozostałe — bardziej wyspecjalizowane — przesunięto do towarzyszącego podręcznikowi *Zbioru za-*

*dań uzupełniających*, który jest opisany w dalszej części przedmowy.

► **Zapis wektorów.** Wektory są obecnie zapisywane jako symbol ze strzałką nad literą (np.  $\vec{F}$ ), a nie za pomocą czcionki półgrubej (jak **F**).

► **Użycie jednostek metrycznych.** W podręczniku stosowane są niemal wyłącznie jednostki metryczne. Jedynym wyjątkiem jest rozdział 1, w którym przedstawione są różne układy jednostek.

► **Układ i kolejność zadań.** Zebrane w podręczniku zadania, przeznaczone do rozwiązymania w ramach pracy domowej, są podzielone na grupy odnoszące się do kolejnych paragrafów tekstu głównego, a w ramach tych grup są ułożone w kolejności wzrastającej trudności. Wiele zadań z wydania piątego przesunięto jednak do *Zbioru zadań uzupełniających*, przy czym nie porządkowano ich ani pod względem trudności, ani tematyki w ramach rozdziału (łączna liczba zadań w podręczniku i w *Zbiorze zadań uzupełniających* jest większa od liczby zadań w wydaniu piątym).

► **Rozwiązań zadań.** Rozwiązań części zadań o numerach nieparzystych są dostępne w postaci elektronicznej. W tym przypadku na końcu treści zadania umieszczona jest ikonka informująca studenta i wykładowcę, gdzie może w razie potrzeby znaleźć rozwiązanie. Informacja o znaczeniu poszczególnych ikonek jest zawarta na początku każdego zestawu zadań domowych. Ma ona postać:

Rozwiązanie jest dostępne na stronie internetowej podręcznika: <http://www.wiley.com/college/hrw>

Rozwiązanie jest dostępne w postaci interaktywnej, wykorzystującej oprogramowanie Interactive Learning-Ware (na tej samej stronie)

Materiały te są opisane w dalszej części przedmowy.

## Zmiany natury dydaktycznej

► **Rozumowanie a proste ćwiczenia.** Głównym celem podręcznika jest nauczenie studenta rozumowania — od podstawowych zasad do rozwiązyania zagadnienia — przez stawianie go wobec kolejnych wyzwań. W związku z tym w większości zadań nacisk położony jest właśnie na umiejętność rozumowania. Niemniej jednak niektóre zadania są prostymi ćwiczeniami, wymagającymi jedynie podstawienia danych do wzoru.

► **Stwierdzenia kluczowe.** Rozwiązywanie wszystkich 360 przykładów w podręczniku i *Zbiorze zadań uzupełniających* zostało zredagowane od nowa, tak by zaczynały się od jednego lub więcej stwierdzeń kluczowych dla rozwiązania zadania (oznaczonych w tekście rozwiązania za pomocą ikonki klucza — ), wykorzystujących podstawowe prawa wprowadzone w głównym toku wykładowym.

► **Obszerniejsze rozwiązania przykładów.** Rozwiązywanie większości przykładów (czyli zadań rozwiązywanych w podręczniku) są teraz bardziej szczegółowe niż w poprzednim wydaniu, gdyż postępują krok po kroku od podanych na początku rozwiązania stwierdzeń kluczowych aż do końcowej odpowiedzi, przy czym często przytoczone są obszerne fragmenty rozumowania przedstawionego w tekście głównym.

► **Zadania z zastosowań fizyki.** W wielu miejscach — w treści przykładów lub zadań domowych — przedstawione są zagadnienia z zakresu zastosowań fizyki, oparte na opublikowanych wynikach badań; porównaj np. przykład 11.6, zadanie 64 z rozdziału 4 i zadanie 56 z rozdziału 10. Przykładem zadań domowych tworzących serię zadań na ten sam temat są zadania 4, 32 i 48 z rozdziału 6.

## Zmiany w treści podręcznika

► **Rozdział 5 o sile i ruchu** zawiera teraz bardziej szczegółowe omówienie siły ciężkości, ciężaru i siły normalnej.

► **Rozdział 7 o energii kinetycznej i pracy** zaczyna się od bardzo ogólnych uwag na temat energii. Następnie definiuje się energię kinetyczną i pracę oraz omawia się związek między nimi w taki sposób, by bardziej niż w

wydaniu piątym nawiązać do drugiej zasady dynamiki Newtona, nie tracąc jednak spójności tych definicji z pojęciami termodynamicznymi.

► **Rozdział 8 o zachowaniu energii** nie zawiera silnie krytykowanej definicji pracy wykonanej przez siłę niezachowawczą — zastąpiono ją omówieniem zmian energii pod wpływem siły niezachowawczej (użyte sformułowania nie uniemożliwiają jednak wykładowcy wprowadzenia pojęcia pracy wykonanej przez siłę niezachowawczą).

► **Rozdział 10 o zderzeniach** zawiera teraz najpierw omówienie ogólnego przypadku zderzeń niesprzysty whole w jednym wymiarze, a dopiero później przypadku szczególnego zderzeń sprzyjających w jednym wymiarze.

► **Rozdziały 16, 17 i 18 o ruchu harmonicznym i falach** zostały napisane na nowo, tak by ułatwić studentom przyswojenie sobie tych trudnych zagadnień.

► **Rozdział 21 o entropii** zawiera obecnie omówienie silnika Carnota jako idealnego silnika cieplnego o największej sprawności.

## Elementy towarzyszące tekstowi głównemu podręcznika

► **Ciekawostki.** Każdy rozdział zaczyna się od opisu ciekawego zjawiska lub doświadczenia, które zostaje później szczegółowo wyjaśnione w którymś miejscu tego rozdziału. Ma to za zadanie zachęcenie czytelnika do uważnego przeczytania całego rozdziału.

► **Sprawdziany** pojawiają się w miejscach, w których czytelnik powinien przerwać na chwilę lekturę i spróbować odpowiedzieć na pytanie: „czy potrafisz — wykorzystując informacje zawarte w przeczytanym właśnie paragrafie lub przykładzie — dać sobie radę z tym krótkim zadaniem, nie wymagającym obliczeń, lecz tylko chwili namysłu?” Jeśli nie, to należy jeszcze raz przestudiować ten materiał przed dalszą lekturą; porównaj np. sprawdzian 3 w rozdziale 5 oraz sprawdzian 1 w rozdziale 6. **Odpowiedzi do wszystkich sprawdzianów podane są na końcu książki.**

► **Przykłady**, czyli zadania rozwiązywane w podręczniku, mają pomóc czytelnikowi w utrwaleniu pojęć wprowadzonych w głównym tekście oraz w stopniowym opanowaniu ich zastosowań.

waniu umiejętności rozwiązywania zadań. Ich rozwiązania wychodzą od stwierdzeń kluczowych dla rozwiązywania danego zadania, oznaczonych w tekście rozwiązywania za pomocą ikonki klucza (●→), a następnie prowadzą krok po kroku aż do końcowej odpowiedzi.

► Fragmenty zatytuowane **Sztuka rozwiązywania zadań** zawierają porady praktyczne, ułatwiające początkującemu studentowi fizyki nabycie umiejętności rozwiązywania typowych zadań i uniknięcie często spotykanych błędów.

► Na końcu tekstu głównego każdego rozdziału znajduje się **Podsumowanie**, w którym zebrane są podstawowe pojęcia i prawa wprowadzone w tym rozdziale. Lektura tego podsumowania nie może oczywiście zastąpić starannego przeczytania całego tekstu rozdziału.

► **Pytania** są podobne do sprawdzianów — uzyskanie odpowiedzi na postawione pytania nie wymaga wykonywania obliczeń, lecz dobrego zrozumienia omówionego materiału i niezbyt skomplikowanego rozumowania, czasem prostych obliczeń w pamięci. **Odpowiedzi na pytania o numerach nieparzystych podane są na końcu książki.**

► **Zadania** są zebrane w grupy dotyczące kolejnych paragrafów, a w ramach takiej grupy są ustawione z grubsza w kolejności wzrastającej trudności. **Odpowiedzi do zadań o numerach nieparzystych podane są na końcu książki.** Rozwiązania części zadań o numerach nieparzystych są dostępne w postaci elektronicznej (informacja o oznaczeniu zadań, których rozwiązania można znaleźć w różnych materiałach, jest podana na początku każdego zestawu zadań domowych). Zadania trudniejsze oznaczono gwiazdką.

► W niektórych rozdziałach na samym końcu zestawu zadań występują **zadania dodatkowe**. Nie są one przypisane do konkretnych paragrafów i dotyczą nierzaz zagadnień z zastosowań fizyki.

## Zbiór zadań uzupełniających

Podręcznikowi będzie towarzyszył *Zbiór zadań uzupełniających*. Zbiór ten będzie zawierał inny zestaw pytań i zadań domowych oraz więcej przykładów. Oto jego cechy:

► **Przykłady uzupełniające** są częściowo przeniesione z podręcznika głównego, częściowo całkiem nowe. Wszystkie zaczynają się od stwierdzeń kluczowych dla rozwiązywania zadania (oznaczonych ikonką ●→) i prowadzą krok po kroku aż do końcowej odpowiedzi.

► **Pytania** są trzech rodzajów:

1. *pytania typu sprawdzianów*, jak w głównej części podręcznika;

2. *pytania porządkujące*, wymagające zebrania równań potrzebnych w określonej sytuacji, mające charakter rozgrzewki przed jednym z dalszych zadań;

3. *pytania do dyskusji*, przywrócone z wydań czwartego i wcześniejszych na żądanie czytelników.

► **Zadania** uzupełniają zestawy zadań przytoczone w głównej części książki; niektóre zostały przesunięte do zbioru z podręcznika głównego. Ich kolejność nie jest związana ani z ich trudnością, ani z kolejnością paragrafów czy pojęć w danym rozdziale. Niektóre nowe zadania dotyczą zagadnień z zakresu zastosowań fizyki. W niektórych rozdziałach końcowe zadania tworzą *zestawy zadań* dotyczących podobnych zagadnień. W innych rozdziałach na końcu podano *zadania z rozwiązaniami*.

## Wersje podręcznika

Szóste wydanie *Podstaw fizyki* w angielskiej wersji językowej jest dostępne w kilku wersjach, tak by zaspokoić różne potrzeby wykładowców i studentów. Wydanie podstawowe zawiera rozdziały 1–38 (ISBN 0-471-32000-5). Wydanie rozszerzone zawiera ponadto siedem dodatkowych rozdziałów o fizyce kwantowej i kosmologii, czyli łącznie 45 rozdziałów (ISBN 0-471-33236-4). Każde z tych wydań jest dostępne w postaci jednego tomu w twardej oprawie lub w następujących częściach:

► **tom 1 — rozdziały 1–21 (mechanika i termodynamika), oprawa twarda, 0-471-33235-6;**

► **tom 2 — rozdziały 22–45 (elektryczność i magnetyzm oraz fizyka współczesna), oprawa twarda, 0-471-36037-6;**

► **część 1 — rozdziały 1–12, oprawa miękka, 0-471-33234-8;**

- część 2 — rozdziały 13–21, oprawa miękka, 0-471-36041-4;
- część 3 — rozdziały 22–33, oprawa miękka, 0-471-36040-6;
- część 4 — rozdziały 34–38, oprawa miękka, 0-471-36039-2;
- część 5 — rozdziały 39–45, oprawa miękka, 0-471-36038-4.

Wydanie polskie powstało na podstawie tych pięciu części podręcznika.

## Materiały dodatkowe

Szóstemu wydaniu *Podstaw fizyki* towarzyszy w oryginale obszerny zestaw starannie przygotowanych materiałów uzupełniających, mających za zadanie ułatwić wykładowcom i studentom korzystanie z podręcznika.

### Materiały dla wykładowców

➤ **Instructor's Manual** (*Poradnik wykładowcy*, autor: J. Richard Christman, U.S. Coast Guard Academy). Poradnik ten zawiera wyjaśnienia najważniejszych zagadnień z każdego rozdziału, pokazy doświadczeń, projekty doświadczalne i komputerowe, opis filmów i kaset wideo, odpowiedzi do wszystkich pytań, zadań i sprawdzianów oraz przewodnik do zadań z poprzednich wydań podręcznika.

➤ **Instructor's Solutions Manual** (*Zbiór rozwiązań dla wykładowcy*, autor: James Whitenton, Southern Polytechnic University). W zbiorze tym podano szczegółowe rozwiązania wszystkich zadań zebranych na końcu poszczególnych rozdziałów oraz w *Zbiorze zadań uzupełniających*. Ten zbiór mogą otrzymać tylko wykładowcy.

➤ **Test Bank** (*Bank testów*, autor: J. Richard Christman, U.S. Coast Guard Academy) zawierający ponad 2200 pytań testowych wielokrotnego wyboru. Są one także dostępne w komputerowym banku testów (patrz niżej).

➤ **Instructor's Resource CD** (CD z materiałami dla wykładowcy). Jest to CD-ROM zawierający:

- pełny tekst *Zbioru rozwiązań dla wykładowcy* w postaci plików *LATEX*-owych oraz w formacie PDF,

- komputerowy bank testów, w wersjach dla komputerów IBM oraz Macintosh, z możliwością edycji tekstu, tak by wykładowca miał pełną swobodę tworzenia zestawów pytań testowych,
- wszystkie rysunki z podręcznika (poza fotografiami), przygotowane do przedstawienia na wykładzie oraz wydrukowania.

➤ **Przezrocz (transparencje)**. Ponad 200 kolorowych ilustracji z podręcznika w postaci folii do rzutnika przezroczy.

➤ **On-line Course Management** (Interaktywne zarządzanie zajęciami).

- Programy interaktywne WebAssign, CAPA oraz Web-Test, umożliwiające wykładowcom wyznaczanie oraz ocenianie zadań i testów za pośrednictwem Internetu.
- Wykładowcy mogą również uzyskać dostęp do materiałów edukacyjnych w systemie WebCT. Jest to obszerne oprogramowanie internetowe, umożliwiające organizowanie zajęć internetowych zawierających sesje dyskusyjne, tablice ogłoszeń, testy, ocenę postępów studentów itp. Dalsze informacje można uzyskać u przedstawicieli firmy Wiley.

### Materiały dla studentów

➤ **A Student Companion** (*Poradnik studenta*, autor: J. Richard Christman, U.S. Coast Guard Academy). Poradnik dla studentów składający się z tradycyjnych materiałów drukowanych oraz studenckiej strony internetowej, stanowiących łącznie bogate środowisko interaktywne do nauki i zdobywania dodatkowych informacji. Na studenckiej stronie internetowej dostępne są quizy, symulacje, wskazówki do zadań domowych, oprogramowanie interaktywne *Interactive LearningWare* (patrz niżej) oraz odnośniki do innych stron internetowych, zawierających materiały edukacyjne z fizyki.

➤ **Student Solutions Manual** (*Zbiór rozwiązań dla studenta*, autorzy: J. Richard Christman, U.S. Coast Guard Academy i Edward Derringh, Wentworth Institute). Zbiór szczegółowych rozwiązań 30% zadań zebranych w końcowych częściach rozdziałów podręcznika.

➤ **Interactive LearningWare**. Jest to oprogramowanie umożliwiające studentowi rozwiązanie 200 zadań z podręcznika. Odbywa się to interaktywnie, tzn. w kolejnych

krokach student udziela odpowiedzi, a w przypadku odpowiedzi niepoprawnych uzyskuje pomoc w postaci informacji o typowych błędach. Zadania, które można rozwiązać tym sposobem, są oznaczone ikonką .

► **CD-Physics, 3.0.** CD-ROM stanowiący elektroniczną wersję szóstego wydania *Podstaw fizyki*. Zawiera pełny tekst rozszerzonego wydania podręcznika, *Poradnik studenta, Zbiór rozwiązań dla studenta*, oprogramowanie Interactive LearningWare i liczne symulacje, przy czym wszystkie te materiały zawierają wiele wzajemnych odnośników.

► **Take Note!** (Zapisz to!). Notatnik w twardej oprawie umożliwiający studentom robienie notatek bezpośrednio

na dużych, czarno-białych wydrukach rysunków z podręcznika. Zawiera wszystkie ilustracje z zestawu przezroczycy. Użycie tego notatnika oszczędza studentowi wiele czasu zużywanego normalnie na przerysowywanie rysunków na wykładzie.

► **Physics Web Site**, strona internetowa podręcznika, dostępna pod adresem <http://www.wiley.com/college/hrw>, starannie zaprojektowana z myślą o użytkownikach szóstego wydania *Podstaw fizyki*, zapewniająca studentom pomoc w studiowaniu fizyki oraz udostępniająca im wiele materiałów dodatkowych. Zawiera także rozwiązania wielu zadań z podręcznika, oznaczonych ikonką .

## PODZIĘKOWANIA

Na końcowy kształt podręcznika miało wpływ wiele osób poza samymi jego autorami. J. Richard Christman z U.S. Coast Guard Academy po raz kolejny napisał dla nas wiele doskonałych materiałów uzupełniających. Trudno przecenić jego znajomość tej książki oraz wagę licznych porad dla studentów i wykładowców. James Tanner z Georgia Institute of Technology oraz Gary Lewis z Kennesaw State College umożliwiли nam użycie innowacyjnego oprogramowania związanego z zadaniami w podręczniku. James Whitenton z Southern Polytechnic State University i Jerry Shi z Pasadena City College podjęli i wykonali herkulesowe zadanie przygotowania rozwiązań wszystkich zadań z podręcznika. John Merrill z Brigham Young University i Edward Derringh z Wentworth Institute of Technology bardzo nam pomogli przy wcześniejszych wydaniach tej książki, za co im składamy podziękowanie. Dziękujemy także George'owi W. Huckle'owi z Oxnard (California) i Frankowi G. Jacobsowi z Evanston (Illinois) za sprawdzenie odpowiedzi do przedstawionych w podręczniku zadań.

W wydawnictwie John Wiley mieliśmy wielkie szczęście pracować nad książką z naszym głównym redaktorem Cliffem Millsem. Cliff koordynował i wspierał nasze działania oraz dostarczał nam wszelkiej niezbędnej pomocy. Gdy potem Cliffowi powierzono w wydawnictwie inne zadania, do szczęśliwego końca pracy doprowadził nas jego utalentowany następca, Stuart Johnson.

Ellen Ford koordynowała wstępne prace redakcyjne oraz próby druku wielobarwnego. Sue Lyons z działu marketingu była niezmordowana w pracy nad sukcesem tego wydania. Joan Kalkut stworzyła znakomity zestaw materiałów pomocniczych. Thomas Hempstead doskonale zarządał procesem recenzji maszynopisu podręcznika oraz licznymi pracami administracyjnymi.

Lucille Buonocore, kierownik produkcji książki, i Monique Calello, redaktor ds. produkcji, znakomicie po-radziły sobie z dopasowaniem do siebie różnych elementów podręcznika i pomogły doprowadzić z sukcesem do końca złożony proces produkcji książki, za co im serdecznie dziękujemy. Dziękujemy również Maddy Lesure za projekt graficzny książki, Helen Walden za redakcję tekstu, Edwardowi Starrowi i Annie Melhorn za kierowanie przygotowaniem rysunków, Georgii Kamvosoulis Mederer, Katrinie Avery i Lilian Brady za korektę składu, a także wszystkim pozostałym członkom zespołu produkcyjnego.

Hilary Newman oraz jej zespół zajmujący się wyborem fotografii do podręcznika z zapałem wyszukiwali ciekawe i niezwykłe zdjęcia, znakomicie uwidaczniające prawa fizyki. Mamy również wielki dług wdzięczności wobec nieżyjącego już Johna Balbalisa, którego talent graficzny i zrozumienie fizyki można odnaleźć w każdym z rysunków.

Szczególne podziękowania jesteśmy winni Edwardowi Millmanowi za pomoc w nadaniu tekstowi pod-

ręcznika jego ostatecznej postaci. Przeczytał on z nami cały podręcznik, każde jego słowo, zadając nam wiele pytań kierowanych z punktu widzenia korzystającego z książki studenta. Wiele z tych pytań i zasugerowanych przez niego zmian przyczyniło się wydatnie do zwiększenia jasności wykładu.

Szczególnie wielki dług wdzięczności mamy wobec wielu studentów korzystających z poprzednich wydań *Podstaw fizyki*, którzy zadali sobie trud podzielenia się z nami swoimi uwagami. Studenci są dla nas niezwykle ważni, gdyż to oni są ostatecznymi „konsumentami” pod-

ręcznika. Dzieląc się z nami swoimi uwagami, pomagają nam stale doskonalić oferowaną przez nas książkę, dzięki czemu pieniądze wydane na jej zakup można uważać za coraz lepszą inwestycję. Nadal zachęcamy użytkowników tej książki do informowania nas o swoich uwagach i refleksjach przy jej lekturze, co powinno nam pomóc w dalszym ulepszaniu podręcznika w następnych latach.

Na zakończenie chcemy podkreślić, że dysponowaliśmy znakomitym zespołem opiniodawców, i pragniemy wyrazić wdzięczność i podziękowanie każdemu z nich. Oto oni:

Edward Adelson  
*Ohio State University*  
Mark Arnett  
*Kirkwood Community College*  
Arun Bansil  
*Northeastern University*  
J. Richard Christman  
*U.S. Coast Guard Academy*  
Robert N. Davie, Jr.  
*St. Petersburg Junior College*  
Cheryl K. Dellai  
*Glendale Community College*  
Eric R. Dietz  
*California State University at Chico*  
N. John DiNardo  
*Drexel University*  
Harold B. Hart  
*Western Illinois University*  
Rebecca Hartzler  
*Edmonds Community College*  
Joey Huston  
*Michigan State University*  
Shawn Jackson  
*University of Tulsa*

Hector Jimenez  
*University of Puerto Rico*  
Sudhakar B. Joshi  
*York University*  
Leonard M. Kahn  
*University of Rhode Island*  
Yiuchi Kubota  
*Cornell University*  
Priscilla Laws  
*Dickinson College*  
Edberto Leal  
*Polytechnic University of Puerto Rico*  
Dale Long  
*Virginia Tech*  
Andreas Mandelis  
*University of Toronto*  
Paul Marquard  
*Caspar College*  
James Napolitano  
*Rensselaer Polytechnic Institute*  
Des Penny  
*Southern Utah University*  
Joe Redish  
*University of Maryland*

Timothy M. Ritter  
*University of North Carolina at Pembroke*  
Gerardo A. Rodriguez  
*Skidmore College*  
John Rosendahl  
*University of California at Irvine*  
Michael Schatz  
*Georgia Institute of Technology*  
Michael G. Strauss  
*University of Oklahoma*  
Dan Styer  
*Oberlin College*  
Marshall Thomsen  
*Eastern Michigan University*  
Fred F. Tomblin  
*New Jersey Institute of Technology*  
B.R. Weinberger  
*Trinity College*  
William M. Whelan  
*Ryerson Polytechnic University*  
William Zimmerman, Jr.  
*University of Minnesota.*

### **Opiniodawcami wydań piątego i wcześniejszych byli:**

Maris A. Abolins  
*Michigan State University*  
Barbara Andereck  
*Ohio Wesleyan University*

Albert Bartlett  
*University of Colorado*  
Michael E. Browne  
*University of Idaho*

Timothy J. Burns  
*Leeward Community College*  
Joseph Bushi  
*Manhattan College*

Philip A. Casabella <i>Rensselear Polytechnic Institute</i>	John Hubisz <i>North Carolina State University</i>	Michael O'Shea <i>Kansas State University</i>
Randall Caton <i>Christopher Newport College</i>	Joey Huston <i>Michigan State University</i>	Patrick Papin <i>San Diego State University</i>
J. Richard Christman <i>U.S. Coast Guard Academy</i>	Darrell Huwe <i>Ohio University</i>	George Parker <i>North Carolina State University</i>
Roger Clapp <i>University of South Florida</i>	Claude Kacser <i>University of Maryland</i>	Robert Pelcovits <i>Brown University</i>
W.R. Conkie <i>Queen's University</i>	Leonard Kleinman <i>University of Texas at Austin</i>	Oren P. Quist <i>South Dakota State University</i>
Peter Crooker <i>University of Hawaii at Manoa</i>	Earl Koller <i>Stevens Institute of Technology</i>	Jonathan Reichart <i>SUNY-Buffalo</i>
William P. Crummett <i>Montana College of Mineral Science and Technology</i>	Arthur Z. Kovacs <i>Rochester Institute of Technology</i>	Manuel Schwartz <i>University of Louisville</i>
Eugene Dunnam <i>University of Florida</i>	Kenneth Krane <i>Oregon State University</i>	Darrell Seeley <i>Milwaukee School of Engineering</i>
Robert Endorf <i>University of Cincinnati</i>	Sol Krasner <i>University of Illinois at Chicago</i>	Bruce Arne Sherwood <i>Carnegie Mellon University</i>
F. Paul Esposito <i>University of Cincinnati</i>	Peter Loly <i>University of Manitoba</i>	John Spangler <i>St. Norbert College</i>
Jerry Finkelstein <i>San Jose State University</i>	Robert R. Marchini <i>Memphis State University</i>	Ross L. Spencer <i>Brigham Young University</i>
Alexander Firestone <i>Iowa State University</i>	David Markovitz <i>University of Connecticut</i>	Harold Stokes <i>Brigham Young University</i>
Alexander Gardner <i>Howard University</i>	Howard C. McAllister <i>University of Hawaii at Manoa</i>	Jay D. Strieb <i>Villanova University</i>
Andrew L. Gardner <i>Brigham Young University</i>	W. Scott McCullough <i>Oklahoma State University</i>	David Toot <i>Alfred University</i>
John Gieniec <i>Central Missouri State University</i>	James H. McGuire <i>Tulane University</i>	J.S. Turner <i>University of Texas at Austin</i>
John B. Gruber <i>San Jose State University</i>	David M. McKinstry <i>Eastern Washington University</i>	T.S. Venkataraman <i>Drexel University</i>
Ann Hanks <i>American River College</i>	Joe P. Meyer <i>Georgia Institute of Technology</i>	Gianfranco Vidali <i>Syracuse University</i>
Samuel Harris <i>Purdue University</i>	Roy Middleton <i>University of Pennsylvania</i>	Fred Wang <i>Prairie View A &amp; M</i>
Emily Haught <i>Georgia Institute of Technology</i>	Irvin A. Miller <i>Drexel University</i>	Robert C. Webb <i>Texas A &amp; M University</i>
Laurent Hodges <i>Iowa State University</i>	Eugene Mosca <i>United States Naval Academy</i>	George Williams <i>University of Utah</i>
		David Wolfe <i>University of New Mexico.</i>

# 13 Równowaga i sprężystość

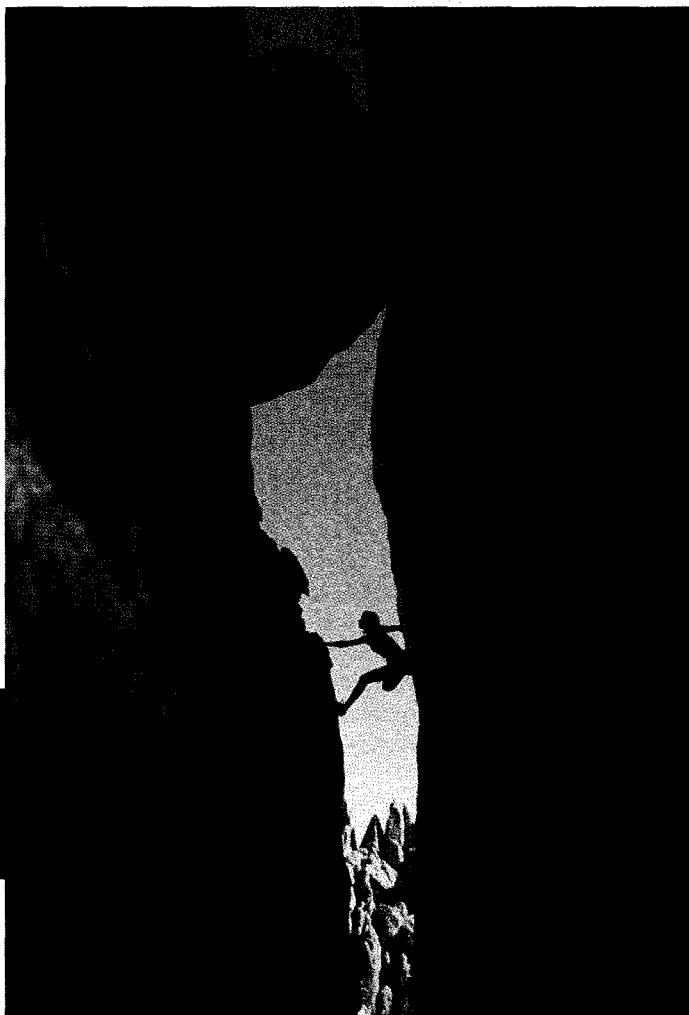
Wspinaczka skalna może się okazać najtrudniejszym egzaminem z fizyki. Niepowodzenie może oznaczać śmierć, a nawet „częściowy sukces” może się wiązać z poważnymi obrażeniami ciała.

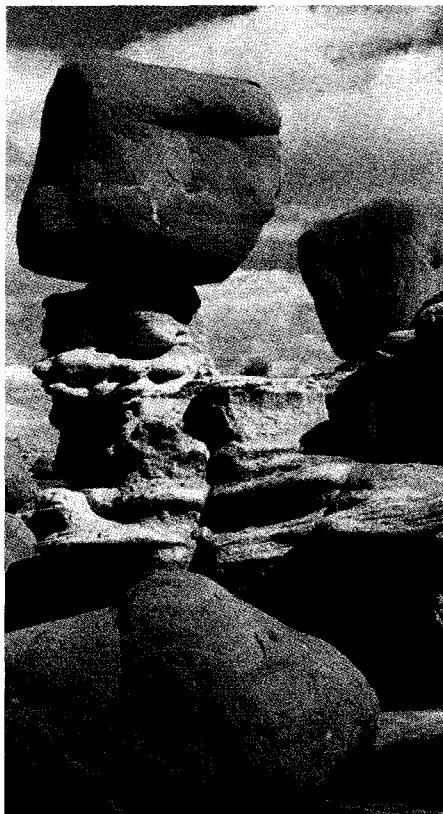
Jeśli na przykład wspinasz się w długim

kominie skalnym, mając plecy  
dociśnięte do jednej ściany szerokiego,  
pionowego pęknięcia skalnego, a stopy  
— do przeciwnego pionowego pęknięcia —  
do czasu musisz trochę odpocząć,  
by nie spaść z wyczerpania. Egzamin  
składa się tu z jednego pytania:  
o ile możesz zmniejszyć nacisk na  
ściany, by odpocząć, lecz nie odpaść  
od nich? Planując odpoczynek bez  
znajomości praw fizyki, możesz nie  
utrzymać się w kominie.

Jaka jest prawidłowa odpowiedź  
na jedyne pytanie na tym egzaminie,  
którego wynik oznacza życie lub  
śmierć?

Odpowiedź znajdziesz w tym rozdziale.





Rys. 13.1. Blok skalny spoczywający na innym, mniejszym, w pozycji, która wydaje się bardzo niepewna, lecz w rzeczywistości jest stanem równowagi statycznej. Zdjęcie wykonano w pobliżu parku narodowego w Arizonie noszącego nazwę Petrified Forest National Park (Park Narodowy „Skamieniały Las”)

Rys. 13.2. a) Kostka domina ustawiona na jednej z krawędzi tak, że jej środek ciężkości znajduje się dokładnie nad tą krawędzią. Działająca na kostkę siła ciężkości  $\vec{F}_g$  skierowana jest wzdłuż prostej przechodzącej przez punkt styczności kostki z podłożem. b) Jeśli kostka obróci się choćby nieznacznie od położenia z rysunku a, to moment siły  $\vec{F}_g$  spowoduje dalszy obrót kostki. c) Kostka ustawiona prosto na jednej z węższych ścian jest w równowadze bardziej trwałej niż kostka z rysunku a. d) Jeszcze bardziej trwała jest równowaga sześciennego klocka

## 13.1. Równowaga

Rozważmy cztery ciała: 1) książkę leżącą na stole, 2) krążek hokejowy ślizgający się bez tarcia po lodzie ze stałą prędkością, 3) wirujące łopatki wentylatora oraz 4) koło roweru jadącego ze stałą prędkością po prostym torze. Dla każdego z nich:

1. Pęd środka masy  $\vec{P}$  jest stały.
2. Moment pędu  $\vec{L}$  względem środka masy (lub dowolnego innego punktu) też jest stały.

Mówimy, że ciała te są w **równowadze**. Warunki równowagi ciała są zatem następujące:

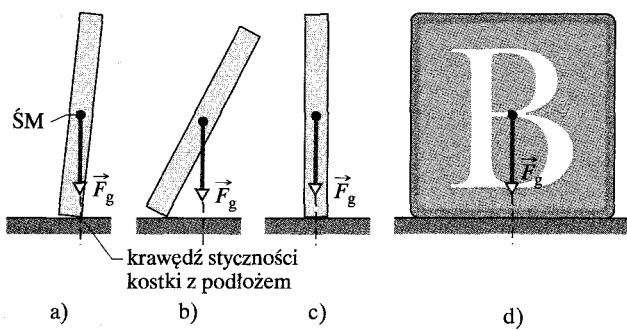
$$\vec{P} = \text{const} \quad \text{oraz} \quad \vec{L} = \text{const}. \quad (13.1)$$

W tym rozdziale będziemy się interesować sytuacjami, w których stałe w równaniu (13.1) są równe zeru, tzn. przypadkami ciał nie poruszających się ani ruchem postępowym, ani obrotowym — w układzie odniesienia, w którym je obserwujemy. Ciała takie znajdują się w **równowadze statycznej**. Z czterech ciał, które wymieniliśmy na początku paragrafu, tylko jedno — książka leżąca na stole — pozostaje w równowadze statycznej.

Blok skalny z rysunku 13.1 jest innym przykładem ciała znajdującego się — choć pewnie nie na zawsze — w równowadze statycznej. Właściwość tę ma też nieprzebrana mnogość innych ciał, takich jak katedry, domy, biurka czy kioski z gazetami, które nie zmieniają swego położenia z upływem czasu.

Jak wiemy z paragrafu 8.5, jeśli ciało wytrącone ze stanu równowagi statycznej w wyniku działania na nie siły powraca potem do tego stanu równowagi, to mówimy, że ciało jest w stanie *trwałej* równowagi statycznej. W takim stanie znajduje się na przykład kulka kamienna na dnie półkulistej misy. Jeśli natomiast nawet niewielka siła może na stałe wyprowadzić ciało ze stanu równowagi, to mówimy, że jest to stan *nietrwałej* równowagi statycznej.

Wyobraź sobie na przykład, że udało ci się ustawić kostkę domina tak, że jej środek ciężkości znajduje się dokładnie nad krawędzią, którą kostka styka się z podłożem, jak na rysunku 13.2a. Moment siły względem punktu styczności z podłożem, pochodzący od siły ciężkości  $\vec{F}_g$ , działającej na kostkę, jest równy zeru, ponieważ siła działa wzdłuż prostej przechodzącej przez ten punkt. Kostka znajduje się zatem w równowadze. Oczywiście najmniejsza nawet siła, mogąca pochodzić od jakiegokolwiek przypadkowego zaburzenia, wytrąci kostkę z tego



stanu równowagi. Gdy tylko kierunek działania siły  $\vec{F}_g$  przesunie się względem punktu styczności kostki z podłożem (jak np. na rysunku 13.2b), moment siły  $\vec{F}_g$  spowoduje obrót kostki. Stan równowagi z rysunku 13.2a jest zatem stanem nietrwałej równowagi statycznej.

Ustawienie kostki domina z rysunku 13.2c jest znacznie mniej nietrwałe. Aby przewrócić tę kostkę, trzeba przyłożyć do niej siłę, która zdoła obrócić ją wokół krawędzi aż do położenia z rysunku 13.2a, w którym środek masy znajduje się nad krawędzią styczności kostki z podłożem, a potem jeszcze trochę dalej. Niewielką siłę nie da się zatem przewrócić kostki, lecz silnym prztknieniem palcem w kostkę można to zrobić bez trudu (na pewno widziałeś, jak po ustawieniu długiego łańcucha pionowych kostek domina uderzenie palcem pierwszej z nich powoduje upadek całego łańcucha).

Sześcienny klocek z rysunku 12.3d (np. klocek z dziecięcej układanki) jest w równowadze jeszcze bardziej trwała, gdyż aby go przewrócić, trzeba doprowadzić do jeszcze znaczniejszego przemieszczenia środka masy, by wyprowadzić go poza krawędź styczności klocka z podłożem. Prztknienie palcem może tu nie wystarczyć (dlatego właśnie nie widuje się przewracania łańcuchów sześciennych klocków). Robotnik z rysunku 13.3 ma w sobie coś z kostki domina i coś z sześciennego klocka: wzduż belki ma nogi szeroko rozstawione, a więc jego położenie jest dość trwałe, natomiast w poprzek belki ma podstawę wąską — w tym kierunku jego równowaga jest dość nietrwała, a zatem robotnik musi się bardzo strzec mocniejszych podmuchów wiatru.

Badanie warunków równowagi statycznej ma wielkie znaczenie w technice. Budowniczowie muszą umieć przewidzieć wszystkie zewnętrzne siły i momenty sił, jakie mogą działać na projektowaną konstrukcję, a następnie przez właściwy kształt obiektu i odpowiedni dobór materiałów użytych do jego budowy zapewnić trwałość konstrukcji w warunkach, gdyby te siły istotnie na nią działały. Chodzi na przykład o to, by budować mosty, które nie zarwą się ani pod wpływem ruchu pojazdów, ani pod wpływem wiejących wiatrów, lub o to, aby podwozie samolotu wytrzymywało zderzenia z nie zawsze równą powierzchnią lądowiska.



Rys. 13.3. Robotnik budowlany stojący na belce stalowej wysoko nad centrum Nowego Jorku jest w równowadze statycznej, która jest bardziej trwała w kierunku wzduż belki niż w kierunku do niej prostopadłym

## 13.2. Warunki równowagi

Ruch postępowy ciała opisuje druga zasada dynamiki Newtona, którą możemy wyrazić za pomocą pędu ciała w postaci równania (9.29), czyli

$$\vec{F}_{\text{wyp}} = \frac{d\vec{P}}{dt}. \quad (13.2)$$

Jeśli ciało jest w równowadze ze względu na ruch postępowy, tzn. jeśli  $\vec{P}$  jest stałe, to  $d\vec{P}/dt = 0$ , a zatem

$$\vec{F}_{\text{wyp}} = 0 \quad (\text{równowaga sił}). \quad (13.3)$$

Do opisu ruchu obrotowego ciała wykorzystamy z kolei drugą zasadę dynamiki wyrażoną w *wielkościach kątowych*, czyli równanie (12.39) mające postać

$$\vec{M}_{\text{wyp}} = \frac{d\vec{L}}{dt}. \quad (13.4)$$

Jeśli ciało jest w równowadze ze względu na ruch obrotowy, tzn. jeśli  $\vec{L}$  jest stałe, to  $d\vec{L}/dt = 0$ , a zatem

$$\vec{M}_{\text{wyp}} = 0 \quad (\text{równowaga momentów sił}). \quad (13.5)$$

Tak więc dwa warunki równowagi ciała są następujące:

- 1. Suma wektorowa wszystkich działających na ciało sił zewnętrznych musi być równa zeru.
- 2. Suma wektorowa wszystkich działających na ciało zewnętrznych momentów sił mierzonych względem *dowolnego* punktu odniesienia, musi być równa zeru.

Warunki te są oczywiście spełnione, gdy ciało znajduje się w równowadze *statycznej*. Obowiązują one jednak również w bardziej ogólnej sytuacji, gdy wektory  $\vec{P}$  i  $\vec{L}$  są stałe, choć niekoniecznie równe zeru.

Równania (13.3) i (13.5) dotyczą wielkości wektorowych, a zatem są równoważne trzem niezależnym równaniom dla składowych wzduż każdej z osi układu współrzędnych:

równowaga sił	równowaga momentów sił
$F_{\text{wyp},x} = 0,$	$M_{\text{wyp},x} = 0,$
$F_{\text{wyp},y} = 0,$	$M_{\text{wyp},y} = 0,$
$F_{\text{wyp},z} = 0,$	$M_{\text{wyp},z} = 0.$

(13.6)

Uprościmy sobie sytuację i przyjmiemy, że wszystkie siły działają na ciało w płaszczyźnie  $xy$ . Oznacza to, że momenty wszystkich działających na ciało sił mogą powodować obrót ciała jedynie wokół osi równoległej do osi  $z$ . Wobec tego z zestawu równań (13.6) wypada nam jedno równanie dla składowych siły i dwa równania dla składowych momentu siły; zostają tylko równania:

$$F_{\text{wyp},x} = 0 \quad (\text{równowaga sił}), \quad (13.7)$$

$$F_{\text{wyp},y} = 0 \quad (\text{równowaga sił}), \quad (13.8)$$

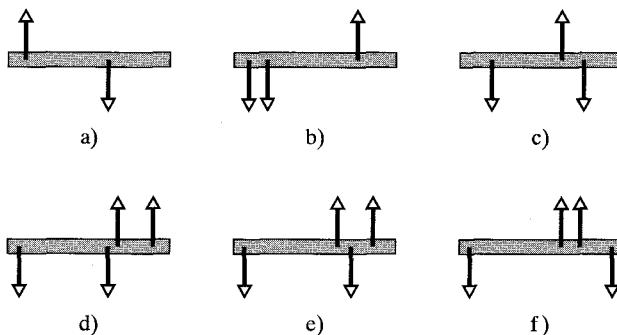
$$M_{\text{wyp},z} = 0 \quad (\text{równowaga momentów sił}), \quad (13.9)$$

przy czym  $M_{\text{wyp},z}$  jest wypadkowym zewnętrznym momentem siły, powodującym obrót ciała wokół osi  $z$  lub wokół *dowolnej* osi do niej równoległej.

Dla krążka hokejowego ślizgającego się po lodzie ze stałą prędkością równania (13.7), (13.8) i (13.9) są spełnione, a zatem znajduje się on w równowadze, lecz *nie jest to równowaga statyczna*. Aby krążek znajdował się w stanie równowagi statycznej, jego pęd  $\vec{P}$  musi być nie tylko stały, lecz także równy zeru — krążek musi pozostawać na lodzie w spoczynku. Mamy zatem jeszcze jeden warunek, który jest spełniony wtedy, gdy ciało znajduje się w stanie równowagi statycznej.

- 3. Pęd ciała  $\vec{P}$  musi być równy zeru.

**SPRAWDZIAN 1:** Na rysunku przedstawiono — w sześciu przypadkach — widziany z góry jednorodny prêt, na który działa kilka sił — dwie lub więcej — w kierunkach do niego prostopadłych. W których przypadkach można tak dobrą wartości sił (przy czym każda z nich musi być różna od zera), by prêt znajdował się w równowadze statycznej?



### 13.3. Środek ciężkości

Siła ciężkości działająca na ciało rozciągłe jest sumą wektorową sił działających na poszczególne elementy (atome) ciała. Zamiast rozważać te pojedyncze składowe, możemy powiedzieć, że:

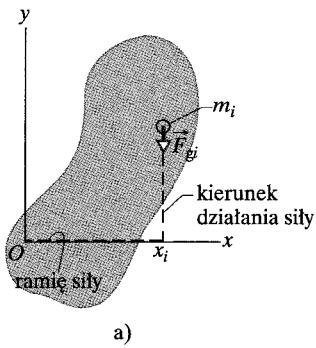
► Siła ciężkości  $\vec{F}_g$  działająca na ciało jest efektywnie przyłożona w punkcie, który nazywamy **środkiem ciężkości** (ŚC) tego ciała.

Słowo „efektywnie” oznacza, że siła wypadkowa oraz wypadkowy moment siły (względem dowolnego punktu) działające na to ciało nie uległyby zmianie, gdybyśmy w jakiś sposób potrafili „wyłączyć” siły działające na poszczególne elementy ciała, a „włączyć” siłę ciężkości  $\vec{F}_g$  w środku ciężkości ciała.

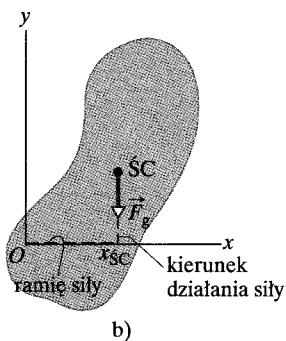
Dotychczas zawsze przyjmowaliśmy, że siła ciężkości jest przyłożona do ciała w jego środku masy (ŚM). Jest to równoważne założeniu, że środek ciężkości ciała i jego środek masy są tym samym punktem. Przypomnij sobie, że siła ciężkości  $\vec{F}_g$  działająca na ciało o masie  $M$  jest równa  $M\vec{g}$ , gdzie  $\vec{g}$  jest przyspieszeniem, z jakim ciało spada swobodnie pod wpływem siły ciężkości. Udowodnimy za chwilę, że:

► Jeżeli dla wszystkich elementów ciała przyspieszenie  $\vec{g}$  jest jednakowe, to środek ciężkości ciała i jego środek masy znajdują się w tym samym punkcie.

Stwierdzenie to jest w przybliżeniu prawdziwe dla ciał, z jakimi spotykamy się na co dzień, gdyż przyspieszenie  $\vec{g}$  zmienia się bardzo niewiele wzdłuż powierzchni Ziemi oraz tylko nieznacznie maleje ze wzrostem wysokości nad Ziemią. Dla ciał, takich jak mysz czy łos, możemy więc spokojnie zakładać, że siła ciężkości jest do nich przyłożona w ich środku masy. W dalszym rozważaniach będziemy to zakładać, a teraz przedstawimy dowód słuszności tego założenia.



a)



b)

Rys. 13.4. a) Element masy  $m_i$  ciała rozciągłego. Działająca na ten element siła ciężkości  $\vec{F}_{gi}$  ma ramię  $x_i$  względem początku układu współrzędnych  $O$ . b) Siła ciężkości  $\vec{F}_g$  działająca na całe ciało jest przyłożona w środku ciężkości ciała ( $\text{ŚC}$ ). Ma ona ramię  $x_{\text{ŚC}}$  względem początku układu współrzędnych  $O$

## Dowód

Rozważmy najpierw poszczególne elementy ciała. Na rysunku 13.4a przedstawiono ciało rozciągłe o masie  $M$  oraz jeden z jego elementów o masie  $m_i$ . Siła ciężkości  $\vec{F}_{gi}$  działająca na każdy z takich elementów jest równa  $m_i \vec{g}_i$ . Wskaźnik przy  $\vec{g}_i$  oznacza, że jest to przyspieszenie grawitacyjne w miejscu, w którym znajduje się ten element (w przypadku ogólnym może ono być różne dla różnych elementów ciała).

W sytuacji z rysunku 13.4a z siłą  $\vec{F}_{gi}$  działającą na odpowiedni element ciała związany jest moment siły  $M_i$  względem punktu  $O$ , przy czym ramię tej siły wynosi  $x_i$ . Korzystając z równania (11.33) ( $M = r \perp F$ ), moment  $M_i$  możemy zapisać jako

$$M_i = x_i F_{gi}. \quad (13.10)$$

Wypadkowy moment sił działających na wszystkie elementy ciała jest więc równy

$$M_{\text{wyp}} = \sum M_i = \sum x_i F_{gi}. \quad (13.11)$$

A teraz rozpatrzmy ciało jako całość. Na rysunku 13.4b przedstawiono siłę ciężkości przyłożoną do środka ciężkości ciała. Ma ona ramię  $x_{\text{ŚC}}$  względem punktu  $O$ , a zatem jej moment  $M$  możemy zapisać, korzystając znów z równania (11.33), jako

$$M = x_{\text{ŚC}} F_g. \quad (13.12)$$

Siła ciężkości  $\vec{F}_g$  działająca na całe ciało jest równa sumie sił ciężkości  $\vec{F}_{gi}$  działających na poszczególne jego elementy, zatem w równaniu (13.12) podstawiamy  $\sum F_{gi}$  zamiast  $F_g$  i otrzymujemy

$$M = x_{\text{ŚC}} \sum F_{gi}. \quad (13.13)$$

Przypomnijmy sobie teraz, że moment siły związany z siłą  $\vec{F}_g$  przyłożoną do ciała w jego środku ciężkości jest równy wypadkowemu momentowi siły pochodzącej od sił  $\vec{F}_{gi}$  działających na wszystkie elementy ciała (tak właśnie zdefiniowaliśmy środek ciężkości). Wobec tego moment siły  $M$  z równania (13.13) jest równy  $M_{\text{wyp}}$  z równania (13.11). Przyrównując do siebie prawe strony tych równań, dostajemy

$$x_{\text{ŚC}} \sum F_{gi} = \sum x_i F_{gi}.$$

Podstawiając  $m_i g_i$  zamiast  $F_{gi}$ , otrzymujemy

$$x_{\text{ŚC}} \sum m_i g_i = \sum x_i m_i g_i.$$

A teraz rzecz najważniejsza: jeśli przyspieszenie  $g_i$  jest jednakowe w miejscach zajmowanych przez poszczególne elementy ciała, to  $g_i$  w tym równaniu skracamy i mamy

$$x_{\text{ŚC}} \sum m_i = \sum x_i m_i. \quad (13.14)$$

Suma  $\sum m_i$  mas wszystkich elementów jest całkowitą masą ciała  $M$ . Równanie (13.14) możemy więc zapisać w postaci

$$x_{\text{ŚC}} = \frac{1}{M} \sum x_i m_i. \quad (13.15)$$

Prawa strona tego równania jest równa współrzędnej  $x_{SM}$  środka masy ciała (patrz równanie (9.4)). Otrzymujemy zatem związek, który chcieliśmy wyprowadzić:

$$x_{SC} = x_{SM}. \quad (13.16)$$

**✓ SPRAWDZIAN 2:** Wyobraź sobie, że chcesz nadziąć jabłko na cienki pręt, lecz nie udaje ci się trafić prętem w środek ciężkości jabłka. Jakie położenie końcowe zajmie środek ciężkości jabłka, jeśli będziesz trzymał pręt poziomo, tak by jabłko mogło się swobodnie wokół niego obracać? Uzasadnij odpowiedź.

## 13.4. Kilka przykładów równowagi statycznej

W tym paragrafie rozważymy kilka przykładów dotyczących równowagi statycznej ciał. W każdym z nich wybierzymy układ zawierający jedno lub więcej ciał, dla którego wykorzystamy warunki równowagi (tzn. wzory (13.7), (13.8) i (13.9)). We wszystkich przypadkach siły będą działać w płaszczyźnie  $xy$ , a zatem związane z nimi momenty sił będą równoległe do osi  $z$ . Wobec tego, korzystając z równania (13.9), czyli warunku równowagi momentów sił, będziemy obliczać momenty sił względem osi równoległej do osi  $z$ . Choć równanie (13.9) jest słusne dla *dowolnej* takiej osi, to — jak się przekonasz — właściwy wybór osi umożliwia łatwiejsze wykorzystanie warunku (13.9) dzięki eliminacji jednego lub więcej wyrazów.

### Przykład 13.1

Jak pokazano na rysunku 13.5a, jednorodna belka o długości  $L$  i masie  $m = 1,8$  kg znajduje się w spoczynku, a oba jej końce spoczywają na wagach. Na belce leży nieruchomo jednorodny klocek o masie  $M = 2,7$  kg, tak że jego środek jest odległy od lewego końca belki o  $L/4$ . Jakie są wskazania obu wag?

#### ROZWIĄZANIE:

Pierwszym krokiem prowadzącym do rozwiązania *każdego* zadania dotyczącego równowagi statycznej jest wybranie układu ciał, który będzie się rozważać, i sporządzenie dla tego układu diagramu sił zawierającego wszystkie siły działające na ten układ. W naszym zadaniu układ ten będzie się składał z belki i klocka. Diagram sił działających na ten układ przedstawiono na rysunku 13.5b. (Właściwy wybór układu ciał wymaga nieco doświadczenia; często istnieje kilka równie dobrzych możliwości takiego wyboru — patrz sztuka rozwiązywania zadań: porada 1 na końcu tego paragrafu).

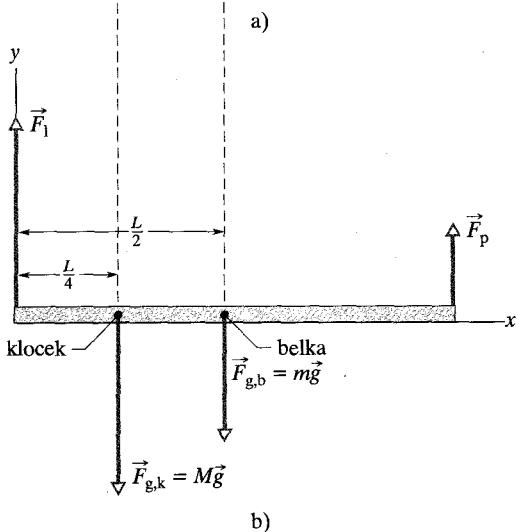
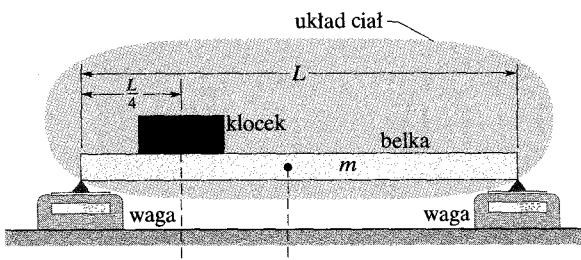
Na belkę działają ze strony wag siły normalne:  $\vec{F}_1$  na lewy koniec belki i  $\vec{F}_p$  na jej prawy koniec. Szukane przez nas wskazania wag są równe wartościami bezwzględnymi tych sił. Na belkę działa też siła ciężkości  $\vec{F}_{g,b}$ , która jest do niej przyłożona w środku masy belki i jest równa  $M\vec{g}$ . Podobnie na klocek działa siła ciężkości  $\vec{F}_{g,k}$  przyłożona w środku masy klocka i równa  $M\vec{g}$ . Dla uproszczenia rysunku 13.5b klocek zaznaczono na nim jako kropkę znaj-

dającą się w obrębie belki, a koniec wektora  $\vec{F}_{g,k}$  przesunięto do tej kropki. Można tak zrobić, ponieważ pionowe przesunięcie wektora  $\vec{F}_{g,k}$  wzdłuż kierunku działania tej siły nie zmienia związanego z nią momentu siły względem dowolnej osi prostopadłej do płaszczyzny rysunku.

Rozwiążanie zadania opiera się na stwierdzeniu, że skoro układ znajduje się w stanie równowagi statycznej, to spełnione są dla niego warunki równowagi sił, tzn. równanie (13.7) i (13.8), oraz równowagi momentów sił, tzn. równanie (13.9). Ponieważ działające na układ siły nie mają składowych wzdłuż osi  $x$ , więc równanie (13.7) ( $F_{wyp,x} = 0$ ) nie zawiera w sobie żadnych informacji. Z równania dla składowych  $y$  (równanie (13.8):  $F_{wyp,y} = 0$ ) otrzymujemy w naszym przypadku:

$$F_1 + F_p - Mg - mg = 0. \quad (13.17)$$

Równanie to zawiera dwie niewiadome:  $F_1$  i  $F_p$ , będzie więc nam również potrzebny warunek równowagi momentów sił, czyli równanie (13.9). Możemy je zapisać dla *dowolnej* osi obrotu prostopadłej do płaszczyzny rysunku 13.5. Wybierzmy oś przechodzącą przez lewy koniec belki. Musimy oczywiście pamiętać o regułach wyznaczania znaków momentów sił: jeśli moment siły powoduje obrót ciała, znajdującego się początkowo w spoczynku, w kierunku zgodnym z ruchem wskazówek zegara, to moment ten jest ujemny, a jeśli powoduje obrót w kierunku przeciwnym do ruchu wskazówek zegara, to jest dodatni. Wartości bezwzględne momentów zapiszemy w postaci  $r \perp F$ . W naszym przypadku ramiona sił



Rys. 13.5. Przykład 13.1. a) Belka o masie  $m$  podtrzymuje klocek o masie  $M$ . b) Diagram sił działających na układ belka + klocek

sił  $r_{\perp}$  wynoszą: 0 dla  $\vec{F}_1$ ,  $L/4$  dla  $M\vec{g}$ ,  $L/2$  dla  $m\vec{g}$  oraz  $L$  dla  $\vec{F}_p$ . Warunek równowagi momentów sił ( $M_{wyp,z} = 0$ ) jest zatem następujący:

$$(0)(F_1) - (L/4)(Mg) - (L/2)(mg) + (L)(F_p) = 0,$$

skąd otrzymujemy

$$F_p = \frac{1}{4}Mg + \frac{1}{2}mg$$

## Przykład 13.2

Jak pokazano na rysunku 13.6a, drabina o długości  $L = 12 \text{ m}$  i masie  $m = 45 \text{ kg}$  opiera się o gładką ścianę (między ścianą a drabiną nie działa siła tarcia). Górnny koniec drabiny jest oparty o ścianę na wysokości  $h = 9,3 \text{ m}$  nad podłożem, o które opiera się dolny koniec drabiny (między podłożem a drabiną działa siła tarcia). Środek masy drabiny znajduje się w odległości  $L/3$  od jej dolnego końca. Wspinający się po drabinie strażak o masie  $M = 72 \text{ kg}$  znajduje się w pewnej chwili na takiej wysokości, że jego środek masy jest odległy od dolnego końca drabiny o  $L/2$ . Ile wynoszą wartości sił działających wówczas na drabinę ze strony ściany i podłoża?

$$= \frac{1}{4}(2,7 \text{ kg})(9,8 \text{ m/s}^2) + \frac{1}{2}(1,8 \text{ kg})(9,8 \text{ m/s}^2)$$

$$= 15,44 \text{ N} \approx 15 \text{ N}.$$

(odpowiedź)

Rozwiążując następnie równanie (13.17) względem  $F_1$  i podstawiając do niego powyższy wynik, dostajemy

$$F_1 = (M + m)g - F_p$$

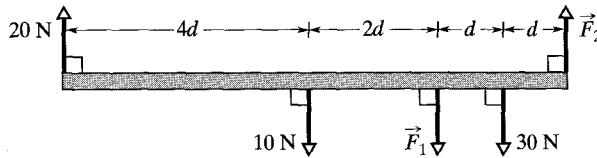
$$= (2,7 \text{ kg} + 1,8 \text{ kg})(9,8 \text{ m/s}^2) - 15,44 \text{ N}$$

$$= 28,66 \text{ N} \approx 29 \text{ N}.$$

(odpowiedź)

**Uwaga na temat metody rozwiązywania:** Zapisując warunek równowagi sił, otrzymaliśmy równanie z dwiema niewiadomymi. Warunek równowagi momentów sił względem dowolnej osi dałby nam również równanie z dwiema niewiadomymi. Aby ułatwić sobie pracę, wybraliśmy jednak osi obrotu tak, by przechodziła przez punkt przyłożenia jednej z nieznanych sił, w tym przypadku  $F_1$ , dzięki czemu siła ta nie wystąpiła w równaniu dla równowagi momentów sił. Taki wybór osi obrotu umożliwił nam otrzymanie równania z jedną niewiadomą, z którego łatwo było wyznaczyć wartość nieznanej siły  $F_p$ . Podstawiając otrzymany wynik do warunku równowagi sił, obliczyliśmy następnie wartość drugiej nieznanej siły.

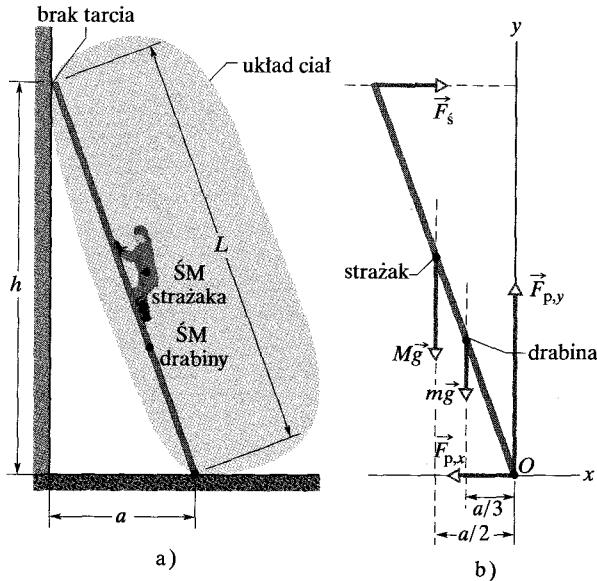
**SPRAWDZIAN 3:** Na rysunku przedstawiono widziany z góry jednorodny prêt znajdujący się w równowadze statycznej. a) Czy możesz wyznaczyć wartości nieznanych sił  $\vec{F}_1$  i  $\vec{F}_2$  z warunku równowagi sił? b) Gdzie powinieneś umieścić osi obrotu, aby otrzymać równanie, w którym jedyną niewiadomą jest wartość siły  $\vec{F}_2$ ? c) Okazuje się, że wartość siły  $\vec{F}_2$  jest równa 65 N. Ile wynosi wartość siły  $\vec{F}_1$ ?



## ROZWIĄZANIE:

Przede wszystkim decydujemy, że rozważany układ ciał będzie się składał ze strażaka oraz drabiny, i sporządzamy diagram sił działających na ten układ, przedstawiony na rysunku 13.6b. Na tym diagramie strażaka przedstawiliśmy za pomocą kropki na drabinię, zakładając, że jego środek masy znajduje się blisko drabiny, a działającą na niego siłę ciężkości zapisaliśmy jako  $M\vec{g}$ .

Jedyną siłą działającą na drabinę ze strony ściany jest pozioma siła  $\vec{F}_s$  (gdź między drabiną a ścianą nie działa tarcia). Siła działająca na drabinę ze strony podłoża  $\vec{F}_p$  ma składową poziomą  $\vec{F}_{p,x}$ , którą jest siła tarcia statycznego, oraz składową pionową  $\vec{F}_{p,y}$ , którą jest siła normalna.



Rys. 13.6. Przykład 13.2. a) Strażak wspinający się po drabinię opartej o gładką ścianę i o szorstkie podłożo znajduje się w połowie wysokości drabiny. b) Diagram sił działających na układ strażak-drabina. Początek układu współrzędnych  $O$  wybrano w punkcie, w którym przyłożona jest jedna z nieznanych sił  $\vec{F}_p$  (na rysunku pokazano składowe tej siły  $\vec{F}_{p,x}$  i  $\vec{F}_{p,y}$ )

Korzystamy ze spostrzeżenia, że skoro układ znajduje się w równowadze statycznej, to spełnione są warunki równowagi sił i momentów sił, czyli równania od (13.7) do (13.9). Skorzystajmy najpierw z równania (13.9) ( $M_{wyp,z} = 0$ ). Aby wybrać osią obrotu, względem której będziemy obliczać momenty sił, zauważmy, że mamy dwie nieznane siły:  $\vec{F}_s$  i  $\vec{F}_p$ , działające na dwa końce drabiny. Jeśli chcemy otrzymać równanie nie zawierające jednej z nich, na przykład  $\vec{F}_p$ , to musimy umieścić osią obrotu (prostopadłą do płaszczyzny rysunku) w punkcie przyłożenia tej siły, a zatem w punkcie  $O$ . Punkt ten wybieramy również jako początek układu współrzędnych  $x, y$ . Momenty sił względem punktu  $O$  możemy wyznaczyć z każdego z równań od (11.31) do (11.33); najwygodniej nam będzie skorzystać z równania (11.33) ( $M = r_{\perp} F$ ).

Aby wyznaczyć ramię siły  $\vec{F}_s$ , rysujemy prostą, na której leży ten wektor (rys. 13.6b). Ramię  $r_{\perp}$  jest to odległość punktu  $O$

od tej prostej. Jak widać z rysunku 13.6b, odmierzamy ją wzdłuż osi  $y$  i otrzymujemy  $h$ . Podobnie postępujemy z siłami  $Mg$  i  $mg$ : rysujemy proste, wzdłuż których one działają, i spostrzegamy, że ich ramiona musimy mierzyć wzdłuż osi  $x$ . Korzystając z wprowadzonej na rysunku 13.6a odległości  $a$ , stwierdzamy, że ramiona tych sił wynoszą odpowiednio  $a/2$  (strażak jest w połowie wysokości drabiny) i  $a/3$  (środek masy drabiny znajduje się w jednej trzeciej jej długości, licząc od dolnego końca). Ramiona sił  $\vec{F}_{p,x}$  i  $\vec{F}_{p,y}$  są równe zero.

Warunek równowagi momentów sił  $M_{wyp,z} = 0$ , zapisany za pomocą wyrażeń typu  $r_{\perp} F$ , przybiera zatem postać

$$-(h)(F_s) + (a/2)(Mg) + (a/3)(mg) + (0)(F_{p,x}) + (0)(F_{p,y}) = 0 \quad (13.18)$$

(przy czym skorzystaliśmy ze znanej już nam reguły, mówiącej, że momenty sił są dodatnie, jeśli powodują obroty w kierunku przeciwnym do ruchu wskazówek zegara, a ujemne — jeśli powodują obroty w kierunku zgodnym z ruchem wskazówek zegara).

Z twierdzenia Pitagorasa otrzymujemy, że

$$a = \sqrt{L^2 - h^2} = 7,58 \text{ m.}$$

Wobec tego z równania (13.18) dostajemy

$$\begin{aligned} F_s &= \frac{ga(M/2 + m/3)}{h} \\ &= \frac{(9,8 \text{ m/s}^2)(7,58 \text{ m})(72/2 \text{ kg} + 45/3 \text{ kg})}{9,3 \text{ m}} \\ &= 407 \text{ N} \approx 410 \text{ N.} \end{aligned} \quad (\text{odpowiedź})$$

Następnie skorzystamy z warunku równowagi sił. Równanie  $F_{wyp,x} = 0$  daje

$$F_s - F_{p,x} = 0, \quad (13.19)$$

skąd wynika, że

$$F_{p,x} = F_s = 410 \text{ N.} \quad (\text{odpowiedź})$$

Równanie  $F_{wyp,y} = 0$  ma w naszym przypadku postać

$$F_{p,y} - Mg - mg = 0, \quad (13.20)$$

skąd dostajemy ostatecznie

$$\begin{aligned} F_{p,y} &= (M + m)g = (72 \text{ kg} + 45 \text{ kg})(9,8 \text{ m/s}^2) \\ &= 1146,6 \text{ N} \approx 1100 \text{ N.} \end{aligned} \quad (\text{odpowiedź})$$

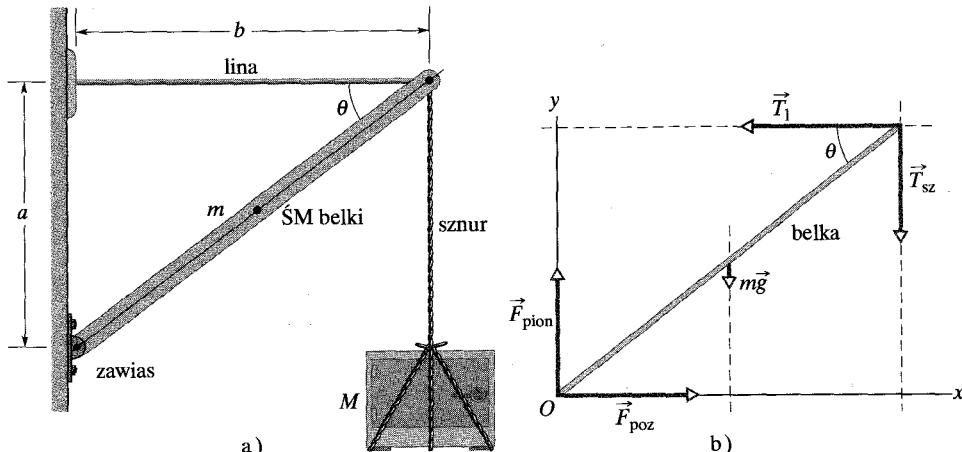
## Przykład 13.3

Rysunek 13.7a przedstawia szafę pancerną o masie  $M = 430 \text{ kg}$  zwisającą na sznurze z wysięgnika o wymiarach  $a = 1,9 \text{ m}$  i  $b = 2,5 \text{ m}$ . Wysięgnik składa się z belki na zawiasie oraz poziomej linii łączącej belkę ze ścianą. Jednorodna belka ma masę  $m$  równą  $85 \text{ kg}$ ; masę sznura i liny można pominać.

a) Ile wynosi naprężenie liny  $T_1$ ? Innymi słowy, ile wynosi wartość siły  $\vec{T}_1$ , jaką lina działa na belkę?

## ROZWIĄZANIE:

Rozważanym układem ciał jest tu sama belka; diagram sił działających na belkę przedstawiono na rysunku 13.7b. Ze strony liny działa na belkę siła  $\vec{T}_1$ . Siła ciężkości działa na belkę w jej środku masy (czyli w jej środku geometrycznym) i jest równa  $m\vec{g}$ . Składową pionową siły, jaką działa na belkę zawias, oznaczono przez  $\vec{F}_{pion}$ , a składową poziomą tej siły — przez  $\vec{F}_{poz}$ . Ze strony podtrzymującego szafę pancerną sznura działa na belkę siła  $\vec{T}_{sz}$ . Ponieważ belka, sznur i szafa pozostają w spoczynku, wartość siły  $\vec{T}_{sz}$  jest



Rys. 13.7. Przykład 13.3.

a) Ciężka szafa pancerna jest zawieszona na wysięgniku złożonym z poziomej liny stalowej i jednorodnej belki. b) Diagram sił działających na belkę

równa cięzarowi szafy:  $T_{sz} = Mg$ . Początek  $O$  układu współrzędnych  $x, y$  umieszczone w punkcie, w którym znajduje się zawias.

Zauważmy, że skoro układ znajduje się w równowadze statycznej, to spełnione są warunki równowagi sił i momentów sił. Skorzystajmy najpierw z równania (13.9) ( $M_{wyp,z} = 0$ ). Zwrócmy uwagę, że mamy wyznaczyć wartość siły  $\vec{T}_1$ , natomiast nie interesują nas wartości sił  $\vec{F}_{poz}$  i  $\vec{F}_{pion}$  działających na belkę ze strony zawiasu, czyli przyłożonych w punkcie  $O$ . Wobec tego oś obrotu, względem której będziemy obliczać momenty sił, warto wybrać tak, by w otrzymanym równaniu nie występowały siły  $\vec{F}_{poz}$  i  $\vec{F}_{pion}$ , czyli wybrać oś prostopadłą do płaszczyzny rysunku w punkcie  $O$ . Ramiona sił  $\vec{F}_{poz}$  i  $\vec{F}_{pion}$  względem punktu  $O$  są równe zeru. Proste, wzdłuż których działają siły  $\vec{T}_1$ ,  $\vec{T}_{sz}$  i  $m\vec{g}$ , zaznaczono na rysunku 13.7b za pomocą linii przerywanych. Ramiona tych sił względem punktu  $O$  wynoszą odpowiednio  $a$ ,  $b$  i  $b/2$ .

Zapisując momenty sił w postaci  $r \perp F$  i korzystając ze znanych reguł dotyczących znaków momentów sił, otrzymujemy warunek równowagi momentów sił  $M_{wyp,z} = 0$  w postaci

$$(a)(\vec{T}_1) - (b)(\vec{T}_{sz}) - (\frac{1}{2}b)(m\vec{g}) = 0.$$

Podstawiając  $Mg$  zamiast  $T_{sz}$  i rozwiązuając otrzymane równanie względem  $\vec{T}_1$ , dostajemy

$$\begin{aligned} \vec{T}_1 &= \frac{gb(M + \frac{1}{2}m)}{a} \\ &= \frac{(9,8 \text{ m/s}^2)(2,5 \text{ m})(430 \text{ kg} + 85/2 \text{ kg})}{1,9 \text{ m}} = 6093 \text{ N} \\ &\approx 6100 \text{ N.} \end{aligned} \quad (\text{odpowiedź})$$

b) Wyznacz wartość  $F$  siły wypadkowej działającej na belkę ze strony zawiasu.

#### ROZWIĄZANIE:

Obecnie chcemy wyznaczyć wartości  $F_{poz}$  i  $F_{pion}$ , by na tej podstawie obliczyć  $F$ . Zauważmy, że ponieważ znamy już wartość  $\vec{T}_1$ , więc możemy teraz skorzystać z warunku równowagi sił działających na belkę. Równanie dla składowych poziomych  $F_{wyp,x} = 0$  przybiera w naszym przypadku postać

$$F_{poz} - T_1 = 0,$$

skąd otrzymujemy

$$F_{poz} = T_1 = 6093 \text{ N.}$$

Równanie dla składowych pionowych  $F_{wyp,y} = 0$  ma postać

$$F_{pion} - mg - T_{sz} = 0.$$

Podstawiając  $Mg$  zamiast  $T_{sz}$  i rozwiązuając otrzymane równanie względem  $F_{pion}$ , dostajemy

$$F_{pion} = (m + M)g = (85 \text{ kg} + 430 \text{ kg})(9,8 \text{ m/s}^2) = 5047 \text{ N.}$$

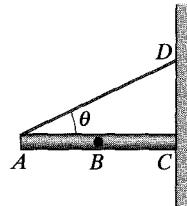
Wartość siły wypadkowej obliczamy z twierdzenia Pitagorasa:

$$F = \sqrt{F_{poz}^2 + F_{pion}^2} = \sqrt{(6093 \text{ N})^2 + (5047 \text{ N})^2} \approx 7900 \text{ N.} \quad (\text{odpowiedź})$$

Zauważ, że otrzymana wartość  $F$  jest wyraźnie większa zarówno od sumy cięzarów szafy pancernej i belki, wynoszącej 5000 N, jak i od naprężenia poziomej liny, równego 6100 N.

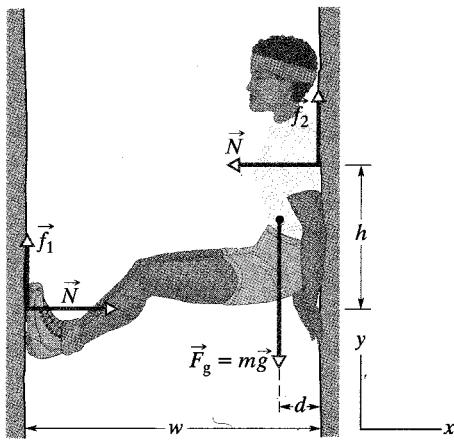
#### SPRAWDZIAN 4:

Na rysunku przedstawiono pozostający w spoczynku pręt  $AC$  o masie 5 kg, utrzymywany w pokazanym położeniu za pomocą sznura oraz dzięki tarciu występującemu między prętem a ścianą. Pręt jest jednorodny, ma długość równą 1 m, a kąt  $\theta = 30^\circ$ . a) W którym z punktów zaznaczonych na rysunku powinieneś umieścić oś obrotu, aby otrzymać równanie umożliwiające wyznaczenie z niego wartości siły  $\vec{T}$ , jaką sznur działa na pręt? Załóż, że momenty sił wyznaczamy względem osi wybranej w punkcie (a), korzystając z reguły mówiącej, że moment siły jest dodatni, jeśli powoduje obrót w kierunku przeciwnym do ruchu wskazówek zegara. Jaki jest znak b) momentu siły  $M_g$  związanego z siłą ciężkości działającą na pręt oraz c) momentu siły  $M_{sz}$  związanego z siłą działającą na pręt ze strony sznura? d) Czy wartość  $M_{sz}$  jest większa, mniejsza, czy taka sama jak wartość  $M_g$ ?



## Przykład 13.4

Jak pokazano na rysunku 13.8, w trakcie wspinaczki wzduż komina skalnego alpinistka o masie  $m = 55 \text{ kg}$  chce na chwilę odpocząć, opierając się stopami i ramionami o ściany szczeliny o szerokości  $w = 1 \text{ m}$ . Jej środek masy znajduje się w odległości  $d = 0,2 \text{ m}$  od ściany, o którą opiera się ona ramionami. Współczynnik tarcia statycznego między ścianą a butami alpinistki wynosi  $\mu_1 = 1,1$ , a między ścianą a jej ramionami —  $\mu_2 = 0,7$ . Aby jak najlepiej wypocząć, alpinistka chce działać na ściany możliwie jak najmniejszą siłą, co odpowiada sytuacji, w której jej stopy i ramiona są na granicy ześlizgnięcia się wzduż ściany.



Rys. 13.8. Przykład 13.4. Siły działające na alpinistkę odpoczywającą w czasie wspinaczki wzduż komina skalnego. Siły, którymi alpinistka działa na ściany skalne, powodują wystąpienie sił normalnych  $\vec{N}$  oraz sił tarcia statycznego  $\vec{f}_1$  i  $\vec{f}_2$ .

a) Ile wynosi minimalna siła, jaką alpinistka musi działać na ścianę?

### ROZWIĄZANIE:

Za rozważany układ przyjmujemy wspinającą się alpinistkę; diagram działających na nią sił jest przedstawiony na rysunku 13.8. W poziomie działają na nią ze strony ścian siły normalne  $\vec{N}$ , przyłożone do jej stóp i ramion. Działające na alpinistkę siły tarcia  $\vec{f}_1$  i  $\vec{f}_2$  są skierowane pionowo w góre. Siła ciężkości  $\vec{F}_g = m\vec{g}$  działa na nią w jej środku masy.

Skorzystamy z faktu, że skoro układ jest w stanie równowagi statycznej, to spełnione są warunki równowagi sił (równania (13.7) i (13.8)). Z równania  $F_{wyp,x} = 0$  wynika, że dwie działające na alpinistkę siły normalne muszą być równe co do wartości bezwzględnej i przeciwcześnie do kierunku. Chcemy wyznaczyć wartość  $N$  tych sił, będącą jednocześnie wartością siły, jaką alpinistka powinna działać na każdą ze ścian.

Z warunku równowagi  $F_{wyp,y} = 0$  otrzymujemy

$$f_1 + f_2 - mg = 0. \quad (13.21)$$

Chcemy, aby zarówno stopy, jak i ramiona alpinistki były na skraju ześlizgnięcia się wzduż ściany, co oznacza, że działające w tych miejscach siły tarcia statycznego powinny mieć swoje wartości maksymalne. Jak wynika z równania (6.1) ( $f_{s,max} = \mu_s N$ ), te wartości maksymalne wynoszą

$$f_1 = \mu_1 N \quad \text{oraz} \quad f_2 = \mu_2 N. \quad (13.22)$$

Podstawiając te wartości do równania (13.21) i rozwiązuje ją względem  $N$ , otrzymujemy

$$\begin{aligned} N &= \frac{mg}{\mu_1 + \mu_2} = \frac{(55 \text{ kg})(9,8 \text{ m/s}^2)}{1,1 + 0,7} \\ &= 299 \text{ N} \approx 300 \text{ N}. \end{aligned} \quad (\text{odpowiedź})$$

Alpinistka musi zatem odpchać się od ścian siłą o wartości równej co najmniej około 300 N.

b) Ile powinno wynosić odległość w pionie między stopami i ramionami alpinistki  $h$ , aby jej położenie było stabilne? Przyjmij, że działa ona na ściany siłą obliczoną w punkcie (a).

### ROZWIĄZANIE:

Przyjmijmy, że położenie alpinistki jest stabilne, jeśli spełniony jest dla niej także warunek równowagi momentów sił ( $M_{wyp,z} = 0$ ). Oznacza to, że w wyniku działających na nią sił nie powstaje wypadkowy moment sił względem dowolnej osi obrotu. Warto też wykorzystać fakt, że mamy swobodę wyboru osi obrotu, co może nam umożliwić uproszczenie obliczeń. Momenty siły wyrazimy w postaci  $r \perp F$ , w której  $r \perp$  jest ramieniem siły  $F$ . Wybierzmy oś obrotu prostopadłą do płaszczyzny rysunku w punkcie zetknięcia się ramion alpinistki ze ścianą (patrz rysunek 13.8). Ramiona siły tarcia  $\vec{f}_1$ , siły normalnej  $\vec{N}$  działającej na stopy alpinistki oraz działającej na nią siły ciężkości  $\vec{F}_g = m\vec{g}$  wynoszą odpowiednio  $w$ ,  $h$  oraz  $d$ .

Wykorzystując regułę dotyczącą znaku momentu siły, wiążącą go z kierunkiem obrotu ciała, jaki powoduje ten moment siły, możemy w naszym przypadku zapisać warunek  $M_{wyp,z} = 0$  jako

$$-(w)(f_1) + (h)(N) + (d)(mg) + (0)(f_2) + (0)(N) = 0 \quad (13.23)$$

(zauważ, że przez właściwy wybór osi obrotu wyeliminowaliśmy z obliczeń  $f_2$ ). Rozwiązuje równanie (13.23) względem  $h$ , a następnie podstawiając do otrzymanego wyrażenia  $f_1 = \mu_1 N$  wartość  $N = 299 \text{ N}$  oraz wartości liczbowe pozostałych wielkości danych, otrzymujemy

$$\begin{aligned} h &= \frac{f_1 w - mgd}{N} = \frac{\mu_1 N w - mgd}{N} = \mu_1 w - \frac{mgd}{N} \\ &= (1,1)(1 \text{ m}) - \frac{(55 \text{ kg})(9,8 \text{ m/s}^2)(0,2 \text{ m})}{299 \text{ N}} \\ &= 0,739 \text{ m} \approx 0,74 \text{ m}. \end{aligned} \quad (\text{odpowiedź})$$

Taką samą wartość  $h$  otrzymalibyśmy, zapisując warunek równowagi momentów sił względem każdej innej osi obrotu prostopadłej do płaszczyzny rysunku, na przykład względem osi przechodzącej przez punkt styczności stóp alpinistki ze ścianą.

Jeśli wartość  $h$  będzie większa *lub* mniejsza niż 0,74 m, to alpinistka będzie musiała działać na ściany siłami większymi niż 299 N, aby jej położenie było stabilne. Widać z tego, że znajomość fizyki może się przydać także podczas wspinaczki skalnej wzdłuż

komina. Gdy w trakcie takiej wspinaczki musisz odpocząć, dzięki znajomości fizyki możesz uniknąć błędu początkujących wspinaczy, którzy umieszczają swoje stopy zbyt wysoko lub zbyt nisko w stosunku do ramion, co w końcowym rachunku może być nawet fatalne w skutkach. Wiesz już teraz, że istnieje pewna „najlepsza” odległość w pionie między stopami a ramionami, przy której możesz działać na ściany stosunkowo najmniejszą siłą, a więc możliwe dobrze wypocząć przed dalszą wspinaczką.

## Sztuka rozwiązywania zadań

### Poradă 1: Zadania dotyczące równowagi statycznej

Oto spis czynności, które powinieneś kolejno wykonać, rozwiązuając zadania związane z równowagą statyczną.

1. Sporządź szkic sytuacji, której dotyczy zadanie.
2. Wybierz układ ciała, którego równowagę będziesz analizował. Na swoim rysunku otocz ten układ linią zamkniętą, abyś nie zapomniał, co jest badanym układem. Czasem może nim być jedno ciało — to, które ma się znajdować w równowadze (na przykład alpinistka z przykładu 13.4). W pewnych przypadkach możesz włączać do badanego układu także inne ciała. Warto tak postępować, gdy prowadzi to do uproszczenia obliczeń. Wyobraź sobie na przykład, że w przykładzie 13.2 zdecydowałeś się uważać za badany układ samą drabinę. Musiałbyś wtedy uwzględnić na rysunku 13.6b siły, jakimi działają na drabinę stopy i ręce strażaka, a siły tych nie znasz, co komplikuje analizę zagadnienia. W wybranym przez nas układzie, zawierającym oprócz drabiny także strażaka (rys. 13.6), siły, jakimi strażak działa na drabinę, są siłami *wewnętrznymi*, których znajomość nie jest potrzebna do zbadania równowagi układu i rozwiązania przykładu 13.2.
3. Narysuj diagram sił działających na badany układ. Umieść na nim wszystkie siły działające na układ, oznacz je i upewnij się, czy dobrze zaznaczyłeś punkty przyłożenia i kierunki działania tych sił.
4. Narysuj osie układu współrzędnych  $x$  i  $y$ . Wybierz je tak, aby przynajmniej jedna z osi była równoległa do jednej lub kilku

nieznanych sił. Rozłóż na składowe siły, które nie są równoległe do osi układu współrzędnych. We wszystkich rozpatrzonych w tym paragrafie przykładach rozsądny był wybór osi  $x$  jako osi poziomej, a osi  $y$  jako osi pionowej.

5. Wypisz dwa równania stanowiące warunek równowagi sił. Używaj symboli, a nie podstawiaj wartości liczbowych.
6. Wybierz jedną lub więcej osi obrotu, prostopadłych do płaszczyzny rysunku, i zapisz warunek równowagi momentów sił względem tych osi. Jeśli wybierzesz oś obrotu zgodną z kierunkiem działania jednej z nieznanych sił, to otrzymasz równania prostsze niż w przypadku ogólnym, gdyż nie będą one zawierać tej wyróżnionej siły.
7. Rozwiąż otrzymane równania algebraicznie. Niektórzy studenci czują się pewniej, jeśli już w tej fazie rozwiązywania zadania podstawią do równań liczby i jednostki, zwłaszcza gdy przekształcenia algebraiczne są dość złożone. Osoby bardziej doświadczone w rozwiązywaniu zadań wolą jednak podejść algebraiczne, gdyż lepiej uwidacznia ono zależność otrzymowanego rozwiązania od różnych zmiennych.
8. Na koniec podstaw wartości liczbowe danych — wraz z ich jednostkami — do otrzymanych wyrażeń algebraicznych i wyznacz wartości liczbowe wielkości szukanych.
9. Przyjrzyj się otrzymanej odpowiedzi. Czy jest ona rozsądna? Czy nie jest przypadkiem wyraźnie zbyt duża lub zbyt mała? Czy ma prawidłowy znak? Czy jednostki są poprawne?

## 13.5. Układy nieoznaczone

Rozwiązyując zadania w tym rozdziale, korzystamy z trzech niezależnych równań, którymi są zwykle dwa warunki równowagi sił i jeden warunek równowagi momentów sił względem wybranej osi obrotu. Gdyby zadanie zawierało więcej niż trzy niewiadome, nie moglibyśmy go rozwiązać.

A o takie zagadnienia wcale nie jest trudno. Wyobraźmy sobie, że w przykładzie 13.2, w którym zakładaliśmy brak tarcia między drabiną a ścianą, założenia tego nie będziemy mogli zrobić. Pojawi się zatem jeszcze jedna siła — siła tarcia działająca pionowo w punkcie oparcia drabiny o ścianę — i w sumie będziemy

mieli cztery siły nieznane. Dysponując tylko trzema równaniami, nie będziemy mogli rozwiązać tego zadania.

Jako inny przykład rozważmy samochód, który jest nierównomiernie obciążony. Jakie siły — a każda z nich jest inna — działają na jego cztery opony? Na to pytanie też nie potrafimy odpowiedzieć, gdyż możemy skorzystać tylko z trzech niezależnych równań. Z tego samego powodu możemy zbadać równowagę stołu o trzech nogach, ale stołu o czterech nogach — już nie. Zagadnienia tego rodzaju, w których mamy więcej niewiadomych niż równań, noszą nazwę **nieoznaczonych**.

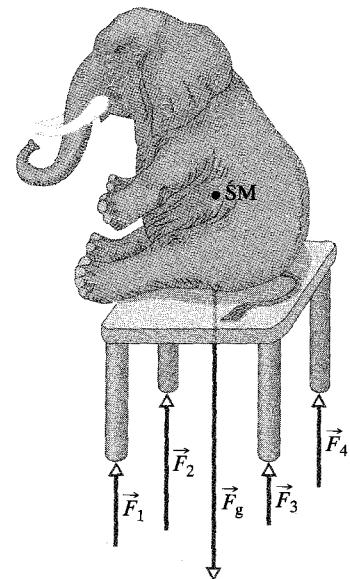
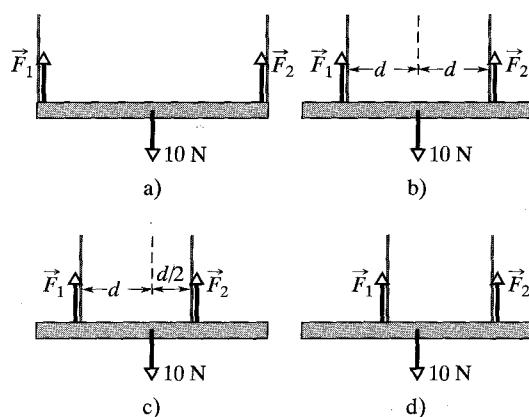
Niemniej jednak takie zagadnienia nieoznaczone mają rozwiązania w świecie rzeczywistym. Jeśli ustawisz samochód tak, że każde z jego kół będzie wsparte na wadze, to będziesz mógł odczytać wskazania tych wag, a ich suma będzie równa ciężarowi pojazdu. Dlaczego zatem nie potrafimy rozwiązać tego zagadnienia przy użyciu naszych równań? Czego nie umiemy w nich uwzględnić?

Rzecz w tym, że cały czas zakładaliśmy — choć może nie podkreślaliśmy tego zbyt silnie — że ciała, których równowagę statyczną badamy, są doskonale sztywne. Rozumiemy przez to, że nie ulegają one odkształceniom pod wpływem przyłożonych do nich sił. Ścisłe rzeczą biorąc, takich ciał w ogóle nie ma. Na przykład opony samochodu bardzo łatwo odkształcają się pod obciążeniem i samochód przyjmuje położenie równowagi statycznej.

Każdy z nas zetknął się z kiwającym się stolikiem w restauracji — zwykle rozwiązujemy ten problem, podkładając pod jedną z jego nóg złożoną kartkę papieru. Gdyby jednak na takim stoliku posadzić dostatecznie dużego słonia, to — o ile tylko stolik wytrzymałby to obciążenie — z pewnością stolik odkształciłby się dokładnie tak samo jak opony samochodu. Wszystkie nogi dotykałyby podłogi, na każdą z nich działałaby dobrze określona (różna od innych) siła, jak na rysunku 13.9, i stolik by się nie kiwał. Jak jednak można wyznaczyć wartości sił działających na poszczególne nogi tego stolika?

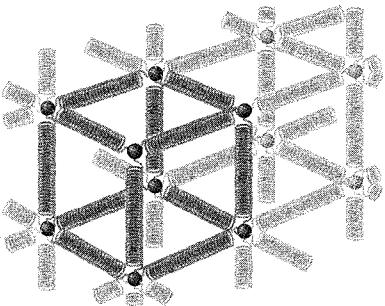
Aby móc analizować takie układy nieoznaczone, musimy — oprócz warunków równowagi statycznej — wykorzystać wiedzę z zakresu *teorii sprężystości*, działu fizyki i techniki, który dotyczy opisu odkształceń ciał rzeczywistych pod wpływem działających na nie sił. W następnym paragrafie przedstawimy wstępne informacje na ten temat.

**SPRAWDZIAN 5:** Jednorodny pręt o ciężarze 10 N jest zawieszony poziomo pod sufitem na dwóch linkach, które działają na pręt skierowanymi do góry siłami  $\vec{F}_1$  i  $\vec{F}_2$ . Na rysunkach przedstawiono cztery przypadki, w których linki przyjmocowane są do pręta w różnych miejscach. Czy któryś z tych przypadków, a jeśli tak, to który, odnoszą się do układów nieoznaczonych, tzn. takich, że nie możemy wyznaczyć wartości sił  $\vec{F}_1$  i  $\vec{F}_2$ ?



Rys. 13.9. Stół o czterech nogach jest przykładem układu nieoznaczonego. Siły działające na poszczególne nogi mają różne wartości, których nie można wyznaczyć, korzystając wyłącznie z warunków równowagi statycznej

## 13.6. Sprężystość



Rys. 13.10. Atomy metalicznego ciała stałego są regularnie ułożone w trójwymiarowej sieci. Sprzęzynki symbolizują siły działające między atomami

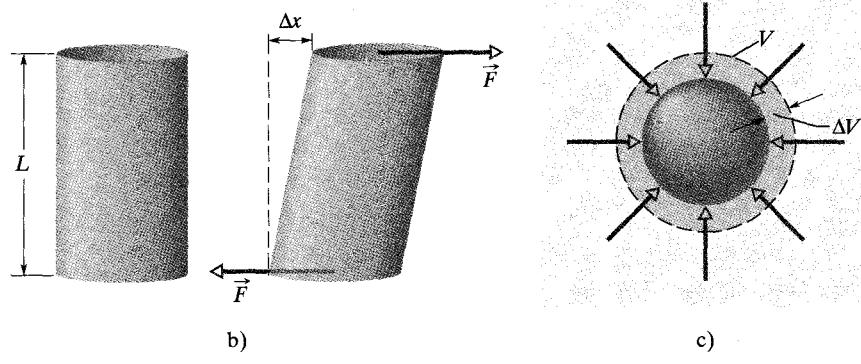
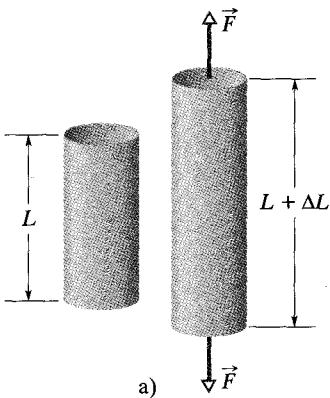
Gdy duża liczba atomów znajduje się bardzo blisko siebie, tworząc metaliczne ciało stałe, na przykład żelazny gwóźdź, atomy zajmują położenia równowagi w trójwymiarowej *sieci*, tzn. regularnym układzie powtarzających się położień, w których każdy atom ma dobrze określoną odległość od swych najbliższych sąsiadów. Atomy znajdują się blisko siebie dzięki występującym między nimi siłom międzymolowym. Działają one tak, jak gdyby atomy połączone były małymi sprężynkami, jak na rysunku 13.10. Sieć jest niezwykle sztywna, co oznacza, że te „międzyatomowe sprężynki” są bardzo mocne. Właśnie dlatego odnosimy wrażenie, że różne spotykane na co dzień przedmioty, jak metalowe drabiny, stoły czy łyżki są doskonale sztywne. Oczywiście znamy też przedmioty, takie jak węże ogrodowe czy gumowe rękawiczki, które bynajmniej nie wydają nam się sztywne. Atomy, z których złożone są te przedmioty, *nie tworzą* bowiem sztywnej sieci, jak na rysunku 13.10, lecz układają się w długie, elastyczne łańcuchy cząsteczek, a każdy z tych łańcuchów jest dość luźno związany z sąsiednimi.

Wszystkie rzeczywiste ciała „sztywne” są w jakimś stopniu **sprężyste**, co oznacza, że można nieznacznie zmienić ich rozmiary, rozciągając je, ściskając lub skręcając. Pewne pojęcie o wielkości tych zjawisk możesz uzyskać, rozważając taki przykład. Wyobraź sobie, że masz stalowy pręt o długości 1 m i średnicy 1 cm. Jeśli zawieszysz na końcu tego pręta niewielki samochód, to pręt się rozciągnie, ale tylko o około 0,5 mm, czyli 0,05% swej długości. Co więcej, pręt powróci do swojej pierwotnej długości, gdy samochód usuniesz.

Gdy jednak zawieszysz na tym pręcie dwa samochody, zostanie on odkształcony trwale, to znaczy nie przyjmie swej pierwotnej długości po usunięciu obciążenia. Jeśli zaś zawieszysz na nim trzy samochody, to pręt się przerwie. Tuż przed zerwaniem pręt będzie rozciągnięty, lecz tylko o niecałe 0,2%. Odkształcenie to możesz uznać za niezbyt wielkie, lecz jest ono bardzo ważne w zastosowaniach technicznych (zgodzisz się, że jest ważne, by skrzydło samolotu nie oderwało się od kadłuba pod obciążeniem).

Na rysunku 13.11 przedstawiono trzy sposoby, w jakie ciało stałe może zmieniać swoje rozmiary pod wpływem działających na nie sił. Na rysunku 13.11a walec jest rozciągany. Na rysunku 13.11b walec jest odkształcanym siłą prostopadłą do jego osi, podobnie jak możemy zginać taśkę kart lub książkę. Na rysunku 13.11c

Rys. 13.11. a) Walec poddany *naprężeniu rozciągającemu* wydłuża się o  $\Delta L$ . b) Walec poddany *naprężeniu ścinającemu* odkształca się o  $\Delta x$ , podobnie do zginanej taśmy kart lub książki. c) Ciało stałe w kształcie kuli jest poddane *naprężeniu objętościowemu* ze strony cieczy, przy czym zmniejsza swą objętość o  $\Delta V$ . Wielkość wszystkich tych odkształceń jest na rysunku znacznie przesadzona



ciało stałe jest umieszczone w cieczy pod dużym ciśnieniem i jest ściskane równomiernie ze wszystkich stron. Wspólną cechą tych przypadków jest to, że względne odkształcenie ciała zależy od wartości siły odkształcającej ciało, jaka przypada na jednostkę pola powierzchni. Wielkość tę nazywa się **naprężeniem** (termin ten ma tu inne znaczenie niż poprzednio, gdy naprężeniem sztywnej liny lub sznura nazywaliśmy działającą nań siłę; gdy ciało ulega odkształceniom, wygodnie jest odnosić tę siłę do pola powierzchni, na jaką ona działa). Rysunek 13.11 przedstawia odpowiednio a) *naprężenie rozciągające*, b) *naprężenie ścinające* i c) *naprężenie objętościowe* (hydrostatyczne).

W trzech przypadkach przedstawionych na rysunku 13.11 naprężenia i odkształcenia mają różną postać, lecz w każdym z nich naprężenie i odkształcenie są do siebie proporcjonalne — przynajmniej w zakresie ich przydatności w technice. Odpowiedni współczynnik proporcjonalności nazywa się **modułem sprężystości**, tak że

$$\text{naprężenie} = (\text{moduł sprężystości}) \cdot (\text{odkształcenie}). \quad (13.24)$$

W trakcie rutynowych badań wytrzymałości materiałów na rozciąganie do walca (takiego jak na rysunku 13.12) przykłada się naprężenie rozciągające, zwiększając stopniowo jego wartość od zera aż do wartości, przy której walec pęka. Odkształcenie walca jest przy tym dokładnie mierzone i analizowane jako funkcja przyłożonego naprężenia. Typowa zależność odkształcenia od naprężenia jest przedstawiona na rysunku 13.13. W znacznym zakresie przyłożonego naprężenia odkształcenie jest wprost proporcjonalne do naprężenia, a próbka powraca do pierwotnych wymiarów po usunięciu naprężenia; w tym zakresie spełnione jest równanie (13.24). Po przekroczeniu przez naprężenie pewnej wartości, noszącej nazwę **granicy sprężystości** materiału, próbka ulega odkształceniom trwałemu (plastycznemu). Przy dalszym zwiększaniu naprężenia można doprowadzić do pęknięcia próbki, co zachodzi dla naprężenia noszącego nazwę **naprężenia niszczącego**.

## Rozciąganie i ściskanie

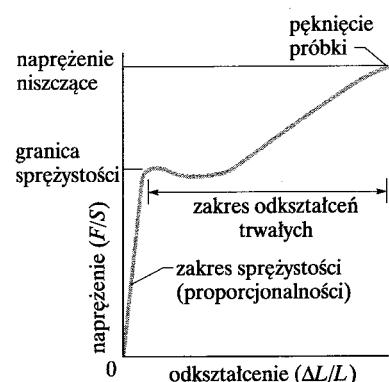
W najprostszym przypadku, gdy ciało jest rozciągane lub ściskane, naprężenie definiuje się jako  $F/S$ , gdzie  $F$  jest wartością siły przyłożonej do ciała w miejscu, w którym ciało ma pole  $S$  przekroju prostopadłego do kierunku działania siły. Za miarę odkształcenia przyjmuje się wielkość bezwymiarową  $\Delta L/L$ , czyli względną zmianę długości próbki (wyrażaną też czasem w procentach). Jeśli próbka ma kształt długiego walca, a naprężenie nie przekracza granicy sprężystości, to przy danym naprężeniu odkształcenie (względne) zarówno całego pręta, jak i każdego jego odcinka jest takie samo. Odkształcenie jest wielkością bezwymiarową, a zatem moduł sprężystości z równania (13.24) ma taki sam wymiar jak naprężenie, tzn. siły podzielonej przez pole powierzchni.

Moduł sprężystości związany z odkształcaniem przy rozciąganiu lub ściskaniu nazywa się **modułem Younga** i oznacza zwykle symbolem  $E$ . Równanie (13.24) ma w tym przypadku postać

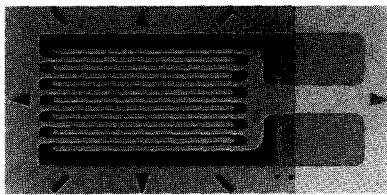
$$\frac{F}{S} = E \frac{\Delta L}{L}. \quad (13.25)$$



Rys. 13.12. Walec testowy, używany do wyznaczania zależności odkształcenia od naprężenia, której przykład przedstawiono na rysunku 13.13. Mierzy się zmianę długości  $\Delta L$  pewnego odcinka o długości początkowej  $L$



Rys. 13.13. Zależność odkształcenia od naprężenia dla próbki ze stali o kształcie jak na rysunku 13.12. Próbka ulega odkształceniom trwałemu po przekroczeniu przez naprężenie *granicy sprężystości* materiału. Próbka pęka po osiągnięciu przez naprężenie wartości odpowiadającej *naprężeniu niszczącemu* dla badanego materiału



Rys. 13.14. Tensometr o wymiarach zewnętrznych  $9,8 \times 4,6$  mm. Czujnik przykleja się do przedmiotu, którego odkształcenie ma być badane, dzięki czemu odkształca się on tak samo jak badany przedmiot. W wyniku odkształcenia zmienia się opór elektryczny czujnika, co umożliwia pomiar odkształceń nawet do 3%

Odkształcenie próbki  $\Delta L/L$  mierzy się często bardzo wygodnie *tensometrem* (rys. 13.14). Jest to prosty i użyteczny czujnik, który przykleja się wprost do badanego przedmiotu; działa on w ten sposób, że pod wpływem odkształcenia zmienia się jedna z jego właściwości elektrycznych.

Moduł Younga ma zwykle dla danego materiału prawie taką samą wartość przy rozciąganiu i ściskaniu, natomiast naprężenie niszczące może natomiast być zupełnie różne dla tych dwóch rodzajów naprężenia. Na przykład beton jest bardzo odporny na ściskanie, a bardzo kruchy przy rozciąganiu, w związku z czym niemal nigdy nie używa się go w warunkach, gdy może być narażony na rozciąganie. Wartości modułu Younga i innych cech sprężystych kilku materiałów przydatnych w technice podano w tabeli 13.1.

Tabela 13.1. Niektóre cechy sprężyste wybranych materiałów przydatnych w technice

Materiał	Gęstość $\rho$ [kg/cm <sup>3</sup> ]	Moduł Younga $E$ [10 <sup>9</sup> N/m <sup>2</sup> ]	Naprężenie niszczące [10 <sup>6</sup> N/m <sup>2</sup> ]	Granica sprężystości [10 <sup>6</sup> N/m <sup>2</sup> ]
Stal <sup>a</sup>	7860	200	400	250
Aluminiun	2710	70	110	95
Szkło	2190	65	50 <sup>b</sup>	—
Beton <sup>c</sup>	2320	30	40 <sup>b</sup>	—
Drewno <sup>d</sup>	525	13	50 <sup>b</sup>	—
Kość	1900	9 <sup>b</sup>	170 <sup>b</sup>	—
Polistyren	1050	3	48	—

<sup>a</sup> Stal konstrukcyjna (ASTM-A36). <sup>b</sup> Przy ściskaniu. <sup>c</sup> O dużej wytrzymałości. <sup>d</sup> Daglezja.

## Naprężenie ścinające

W przypadku odkształcenia poprzecznego (mówiąc wtedy o ścinaniu) naprężenie mierzy się także za pomocą siły na jednostkę pola powierzchni, ale siła działa teraz nie prostopadle do tej powierzchni, lecz równolegle do niej. Odkształcenie wyraża bezwymiarowy parametr  $\Delta x/L$ , przy czym występujące w nim wielkości zdefiniowane są na rysunku 13.11b. Odpowiedni moduł sprężystości, który w technice oznacza się zwykle literą  $G$ , nazywa się **modułem ścinania**. Równanie (13.24) dla ścinania zapisuje się w postaci

$$\frac{F}{S} = G \frac{\Delta x}{L}. \quad (13.26)$$

Naprężenia ścinające są odpowiedzialne za skrzywienia wałów obracających się w warunkach dużego obciążenia oraz za złamania kości przy ich wygięciu.

## Naprężenie objętościowe

Na rysunku 13.11c naprężeniem jest ciśnienie cieczy na ciało, które — jak się dowiesz w rozdziale 15 — jest równe sile działającej na jednostkowe pole powierzchni. Miarą odkształcenia jest w tym przypadku stosunek  $\Delta V/V$ , gdzie  $V$  jest pierwotną objętością próbki, a  $\Delta V$  — wartością bezwzględną zmiany objętości. Odpowiedni moduł sprężystości, oznaczany literą  $K$ , nazywa się **modułem**

**sprężystości objętościowej**, czyli **modułem ściśliwości** materiału. Mówiąc, że w tym przypadku ciało podlega *ścisaniu w całej objętości*, a zatem ciśnienie można nazwać *naprężeniem objętościowym*. Równanie (13.24) przybiera w tej sytuacji postać

$$p = K \frac{\Delta V}{V}. \quad (13.27)$$

Moduł ściśliwości wynosi  $2,2 \cdot 10^9 \text{ N/m}^2$  dla wody, a  $16 \cdot 10^{10} \text{ N/m}^2$  dla stali. Na dnie Oceanu Spokojnego, którego średnia głębokość jest równa około 4000 m, panuje ciśnienie  $4,0 \cdot 10^7 \text{ N/m}^2$ . Związana z tym ciśnieniem względna zmiana objętości wody  $\Delta V/V$  wynosi 1,8%. Objętość ciała ze stali zmienia się pod takim ciśnieniem jedynie o około 0,025%. Ciała stałe — o sztywnej sieci atomów — są z reguły mniej ściśliwe niż ciecze, w których atomy i cząsteczki są znacznie luźniej związane ze swymi sąsiadami.

### Przykład 13.5

Pręt ze stali konstrukcyjnej ma promień  $R$  równy 9,5 mm oraz długość  $L$  równą 81 cm. Pręt jest rozciągany wzdłuż swej osi w wyniku działania siły  $\vec{F}$  o wartości 62 kN. Ile wynosi naprężenie pręta oraz jego wydłużenie i odkształcenie?

#### ROZWIĄZANIE:

Przede wszystkim zauważmy, że — jak wynika z drugiego zdania treści zadania — **pręt** możemy przyjąć, iż jeden koniec pręta jest unieruchomiony, np. za pomocą imadła. Siła jest zatem przyłożona do drugiego końca pręta, równolegle do jego osi, a więc prostopadle do jego podstawy. Mamy wobec tego sytuację jak na rysunku 13.11a.

Ponadto **pręt** możemy założyć, że siła działa równomiernie na ściankę końcową pręta, która ma pole powierzchni  $S = \pi R^2$ . Naprężenie pręta jest zatem dane przez lewą stronę równania (13.25):

$$\text{naprężenie} = \frac{F}{S} = \frac{F}{\pi R^2} = \frac{6,2 \cdot 10^4 \text{ N}}{(\pi)(9,5 \cdot 10^{-3} \text{ m})^2} = 2,2 \cdot 10^8 \text{ N/m}^2. \quad (\text{odpowiedź})$$

### Przykład 13.6

Trzy nogi stołu mają długość 1 m, a czwarta jest od nich dłuższa o  $d = 0,5$  mm, tak że stół się nieznacznie kiwa. Gdy na tym stole postawiono ciężki walec stalowy o masie  $M = 290 \text{ kg}$  (znacznie większej od masy stołu), wszystkie nogi uległy ściśnięciu i stół przestał się kiwać. Drewniane nogi tego stołu mają kształt walców o polu przekroju poprzecznego  $S = 1 \text{ cm}^2$ . Moduł Younga  $E$  dla drewna wynosi  $1,3 \cdot 10^{10} \text{ N/m}^2$ . Przymij, że blat stołu pozostał poziomy, a jego nogi nie wygięły się, i wyznacz wartości sił, jakie działają ze strony podłogi na poszczególne nogi.

#### ROZWIĄZANIE:

Rozważmy układ ciał składający się ze stołu i walca stalowego. Mamy więc sytuację podobną do przedstawionej na rysunku 13.9,

Ponieważ granica sprężystości wynosi dla stali konstrukcyjnej  $2,5 \cdot 10^8 \text{ N/m}^2$ , naprężenie naszego pręta jest już niebezpiecznie bliskie tej granicy.

Zauważmy następnie, że **pręt** wydłużenie pręta zależy od naprężenia, długości początkowej oraz rodzaju materiału. Rodzaj materiału jest charakteryzowany przez wartość modułu Younga  $E$  (która możemy znaleźć w tabeli 13.1). Biorąc z tej tabeli wartość  $E$  dla stali, otrzymujemy na podstawie równania (13.25)

$$\Delta L = \frac{(F/S)L}{E} = \frac{(2,2 \cdot 10^8 \text{ N/m}^2)(0,81 \text{ m})}{2,0 \cdot 10^{11} \text{ N/m}^2} = 8,9 \cdot 10^{-4} \text{ m} = 0,89 \text{ mm}. \quad (\text{odpowiedź})$$

I wreszcie przypomnijmy sobie, że **pręt** odkształcenie jest zdefiniowane jako stosunek zmiany długości do długości pierwotnej. Wobec tego jest ono równe

$$\frac{\Delta L}{L} = \frac{8,9 \cdot 10^{-4} \text{ m}}{0,81 \text{ m}} = 1,1 \cdot 10^{-3} = 0,11\%. \quad (\text{odpowiedź})$$

z tą różnicą, że na stole znajduje się tym razem stalowy walec. Zauważmy, że **pręt** skoro blat stołu pozostał poziomy, to nogi musiały zostać odkształcone tak, że każda z krótszych nóg uległa jednakowemu skróceniu (które oznaczymy przez  $\Delta L_3$ ), a zatem działają na nie siły o jednakowej wartości  $F_3$ , natomiast noga dłuższa musiała ulec większemu skróceniu  $\Delta L_4$ , a więc działa na nią siła o większej wartości  $F_4$ . Inaczej mówiąc, jeśli stół pozostał poziomy, to zachodzi związek

$$\Delta L_4 = \Delta L_3 + d. \quad (13.28)$$

Zauważmy następnie, że **pręt** z równania (13.25) wynika związek między zmianą długości a powodującą ją siłą  $\Delta L = FL/SE$ , przy czym  $L$  jest pierwotną długością nogi. Związek ten możemy wykorzystać w równaniu (13.28) dla  $\Delta L_4$  i  $\Delta L_3$ .

Przyjmiemy przy tym, że wszystkie nogi miały początkowo jednakową w przybliżeniu długość  $L$ . Otrzymujemy zatem

$$\frac{F_4 L}{SE} = \frac{F_3 L}{SE} + d. \quad (13.29)$$

Równanie to nie wystarcza jeszcze do rozwiązania zadania, gdyż występują w nim dwie niewiadome:  $F_4$  i  $F_3$ .

Drugie równanie zawierające  $F_4$  i  $F_3$  otrzymamy z warunku równowagi sił działających wzduż pionowej osi  $y$  ( $F_{wyp,y} = 0$ ). Ma ono postać

$$3F_3 + F_4 - Mg = 0, \quad (13.30)$$

przy czym  $Mg$  jest to wartość siły ciężkości działającej na nasz układ ciał (w równaniu tym uwzględniliśmy też fakt, że na trzy nogi działa jednakowa siła  $F_3$ ). Aby rozwiązać układ równań (13.29) i (13.30) względem — powiedzmy —  $F_3$ , zapiszemy najpierw równanie (13.30) jako  $F_4 = Mg - 3F_3$ . Podstawiając to wyrażenie do równania (13.29), otrzymujemy po niewielkich przekształceniach:

$$\begin{aligned} F_3 &= \frac{Mg}{4} - \frac{dSE}{4L} \\ &= \frac{(290 \text{ kg})(9,8 \text{ m/s}^2)}{4} \\ &\quad - \frac{(5 \cdot 10^{-4} \text{ m})(10^{-4} \text{ m}^2)(1,3 \cdot 10^{10} \text{ N/m}^2)}{(4)(1 \text{ m})} \\ &= 548 \text{ N} \approx 550 \text{ N}. \end{aligned} \quad (\text{odpowiedź})$$

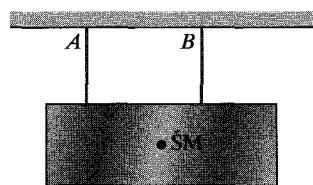
Z równania (13.30) mamy następnie

$$F_4 = Mg - 3F_3$$

$$= (290 \text{ kg})(9,8 \text{ m/s}^2) - 3(548 \text{ N}) \approx 1200 \text{ N}. \quad (\text{odpowiedź})$$

Możesz łatwo obliczyć, że teraz trzy krótsze nogi są skrócone o 0,42 mm, a nogą dłuższa — o 0,92 mm.

**SPRAWDZIAN 6:** Na rysunku przedstawiono poziomy klocki zawieszony na dwóch linkach  $A$  i  $B$ . Linki te mają teraz jednakową długość, lecz przed zawieszeniem na nich klocka miały długość różną. Środek masy klocka znajduje się bliżej linki  $B$  niż  $A$ . a) Rozważ momenty sił względem środka masy klocka i odpowiedź, czy wartość momentu siły, jaka działa na klocki ze strony linki  $A$ , jest większa, mniejsza, czy taka sama jak wartość momentu siły, jaka działa na klocki ze strony linki  $B$ . b) Która z liniek działa na klocki większą siłą? c) Która z liniek była krótsza przed zawieszeniem na nich klocka?



## Podsumowanie

**Równowaga statyczna** Gdy ciało sztywne pozostaje w spoczynku, mówimy, że jest ono w stanie **równowagi statycznej**. Gdy ciało znajduje się w tym stanie, suma wektorowa wszystkich działających na nie sił zewnętrznych jest równa zeru, tzn.

$$\vec{F}_{wyp} = 0 \quad (\text{równowaga sił}). \quad (13.3)$$

Jeśli wszystkie te siły działają w płaszczyźnie  $xy$ , to powyższe równanie wektorowe jest równoważne dwóm równaniom dla składowych:

$$F_{wyp,x} = 0 \quad \text{oraz} \quad F_{wyp,y} = 0 \quad (\text{równowaga sił}). \quad (13.7, 13.8)$$

W równowadze statycznej równa zero jest także suma wektorowa działających na ciało zewnętrznych momentów sił względem *dowolnego* punktu, tzn.

$$\bar{M}_{wyp} = 0 \quad (\text{równowaga momentów sił}). \quad (13.5)$$

Jeśli siły działają w płaszczyźnie  $xy$ , to wektory wszystkich momentów sił są równoległe do osi  $z$ , tak że równanie (13.5) jest równoważne jednemu równaniu dla składowych:

$$M_{wyp,z} = 0 \quad (\text{równowaga momentów sił}). \quad (13.9)$$

**Środek ciężkości** Siła ciężkości działa z osobna na każdy element ciała. Na ciało jako całość działa siła ciężkości  $\vec{F}_g$ , będąca wypadkową sił działających na poszczególne elementy. Jest ona przyłożona do ciała w punkcie, który nazywa się **środkiem ciężkości** ciała. Jeśli przyspieszenie grawitacyjne  $\vec{g}$  jest takie samo dla wszystkich elementów ciała, to środek ciężkości pokrywa się ze środkiem masy ciała.

**Moduły sprężystości** Właściwości sprężyste ciała, czyli rodzaj i wielkość ich odkształcenia pod wpływem działających na nie sił, opisuje się za pomocą trzech **modułów sprężystości**. Są one współczynnikami proporcjonalności między przyłożonym do ciała naprężeniem (określonym jako siła działająca na jednostkowe pole powierzchni) a odkształceniem ciała (określonym jako względna zmiana jego rozmiarów), zgodnie z ogólnym równaniem

$$\text{naprężenie} = (\text{moduł sprężystości}) \cdot (\text{odkształcenie}). \quad (13.24)$$

**Rozciąganie i ściskanie** Gdy ciało jest rozciągane lub ściskane, równanie (13.24) zapisuje się w postaci

$$\frac{F}{S} = E \frac{\Delta L}{L}, \quad (13.25)$$

gdzie  $\Delta L/L$  jest odkształceniem ciała przy rozciąganiu lub ściskaniu,  $F$  — wartością siły  $\vec{F}$  powodującej to odkształcenie,  $S$  — polem przekroju poprzecznego, na który działa siła  $\vec{F}$  (prostopadłe do  $S$ , jak na rysunku 13.11a), a  $E$  nazywa się **modułem Younga** materiału, z którego wykonane jest ciało. Naprężenie jest równe  $F/S$ .

**Naprężenie ścinające** Gdy ciało jest poddane naprężeniu ścinającemu, równanie (13.24) zapisuje się w postaci

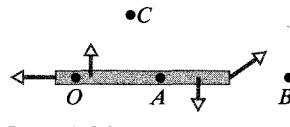
$$\frac{F}{S} = G \frac{\Delta x}{L}, \quad (13.26)$$

gdzie  $\Delta x/L$  jest odkształceniem ciała przy ścinaniu,  $\Delta x$  — przemieszczeniem jednego końca ciała w kierunku przyłożonej siły  $\vec{F}$

## Pytania

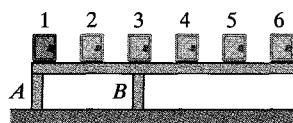
1. Na rysunku 13.15 pokazano widziany z góry jednorodny kij, na który działają cztery siły. Załóż, że wybraliśmy oś obrotu przechodzącą przez punkt  $O$ , obliczyliśmy momenty sił względem tej osi i stwierdziliśmy, że wypadkowy moment sił jest równy zeru. Czy wypadkowy moment sił względem osi przechodzącej przez: a) punkt  $A$ , b) punkt  $B$ , c) punkt  $C$  też jest równy zeru? d) Wyobraź sobie z kolei, że okazało się, iż wypadkowy moment sił względem punktu

$O$  jest różny od zera. Czy w tej sytuacji istnieje punkt, względem którego wypadkowy moment sił jest równy zeru?



Rys. 13.15. Pytanie 1

2. Na rysunku 13.16 przedstawiono sztywną belkę przymocowaną do dwóch słupków, które są z kolei przytwierdzone do podłoga. Na belce stawiamy małą, lecz ciężką szafkę pancerną, kolejno w sześciu miejscach pokazanych na rysunku. Przyjmij, że masa belki jest znikomo mała w porównaniu z masą szafki. a) Uszereguj położenia szafki ze względu na siłę działającą ze strony szafki na słupek  $A$ , od siły powodującej największe ścisnięcie słupka do siły powodującej największe jego rozciąganie, i odpowiedz, czy w którymś przypadku, a jeśli tak, to w którym, siła ta jest równa zeru. b) Uszereguj analogicznie te położenia ze względu na siłę działającą ze strony szafki na słupek  $B$ .



Rys. 13.16. Pytanie 2

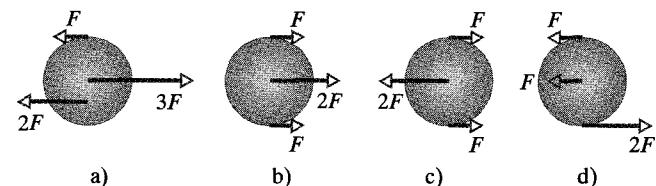
3. Na rysunku 13.17 pokazano cztery widziane z góry jednorodne krążki mogące się ślizgać bez tarcia po podłóżu i obracać się wokół swojej osi. Na każdym z nich działają trzy siły o wartościach  $F$ ,  $2F$  lub  $3F$ , które są przyłożone na obrzeżu krążka, w jego środku lub w połowie odległości od brzegu do środka. Wektory sił obracają się wraz z krążkami, a w chwili, której odpowiada rysunek 13.17, skierowane są w lewo lub w prawo. Które z tych krążków znajdują się w równowadze?

(jak na rysunku 13.11b), a  $G$  nazywa się **modułem ścinania** materiału, z którego wykonane jest ciało. Naprężenie jest równe  $F/S$ .

**Naprężenie objętościowe** Gdy ciało podlega ścisaniu w całej objętości pod wpływem naprężenia działającego na nie ze strony otaczającej je cieczy, równanie (13.24) zapisuje się w postaci

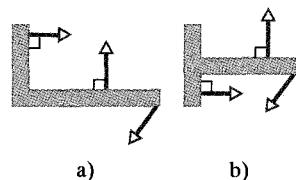
$$p = K \frac{\Delta V}{V}, \quad (13.27)$$

gdzie  $p$  jest ciśnieniem (*naprężeniem objętościowym*) działającym na ciało ze strony cieczy,  $\Delta V/V$  (odkształcenie) — wartością bezwzględną względnej zmiany objętości ciała pod wpływem tego ciśnienia, a  $K$  nazywa się **modułem ściśliwości** materiału, z którego wykonane jest ciało.



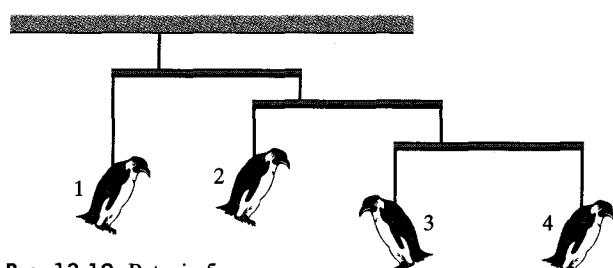
Rys. 13.17. Pytanie 3

4. Na rysunku 13.18 przedstawiono dwa widziane z góry elementy konstrukcyjne. Na każdy z nich działają trzy siły o kierunkach wskazanych na rysunku. Dla którego z tych elementów można tak dobrze wartości sił (różne od zera), aby znajdowała się ona w równowadze statycznej?



Rys. 13.18. Pytanie 4

5. Na rysunku 13.19 przedstawiono zawieszoną u sufitu ruchomą rzeźbę (tzw. mobil), złożoną z czterech metalowych pingwinów połączonych listewkami i linkami. Wszystkie listewki są poziome, mają znikomo małą masę, a linki są do nich przymocowane w jednej czwartej ich długości, licząc od lewego końca. Pingwin 1 ma masę  $m_1 = 48$  kg. Ile wynoszą masy pozostałych pingwinów?

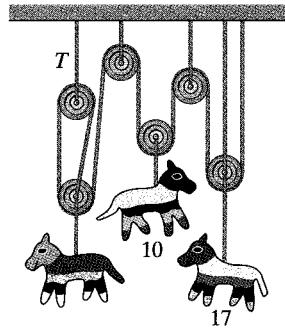


Rys. 13.19. Pytanie 5

6. Drabina opiera się o ścianę, po której jej koniec mógłby się ślizgać bez tarcia. Drabina nie porusza się jednak, gdyż na jej drugi koniec działa siła tarcia ze strony podłogi. Wyobraź sobie, że przysunąłeś ten dolny koniec drabiny bliżej ściany. Czy wartości: a) siły normalnej działającej na drabinę ze strony podłogi, b) siły działającej na drabinę ze strony ściany, c) siły tarcia statycznego działającej na drabinę ze strony podłogi, d) maksymalnej siły tarcia statycznego  $f_{s,\max}$ , wzrosły przy tym, zmalały, czy pozostały bez zmiany?

7. Trzy drewniane koniki zawieszone są w bezruchu na kilku krążkach i linkach, jak pokazano na rysunku 13.20. Jedna dłuża linka biegnie od sufitu po prawej stronie rysunku do dolnego krążka po lewej stronie, a kilka krótszych linek łączy krążki z sufitem oraz koniki z krążkami.

Na rysunku podano ciężary dwóch koników (w niutonach). a) Ile wynosi ciężar trzeciego konika? Wskazówka: Gdy linka styka się z krążkiem wzdłuż połowy jego obwodu, działająca na krążek siła wypadkowa jest dwa razy większa od naprężenia linki. b) Ile wynosi naprężenie krótkiej linki oznaczonej literą  $T$ ?



Rys. 13.20. Pytanie 7

8. a) Przypomnij sobie sprawdzian 4. a) Czy w wyrażeniu wiążącym ze sobą  $M_{sz}$  i  $T$  występuje  $\sin \theta$ , czy  $\cos \theta$ ? Wyobraź sobie,

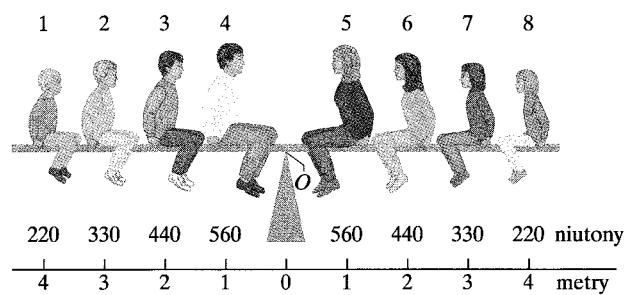
że zmniejszamy kąt  $\theta$  (tzn. skracamy sznur, utrzymując jednak pręt w położeniu poziomym). b) Czy moment siły  $M_{sz}$ , niezbędny do zachowania równowagi układu, rośnie przy tym, maleje, czy pozostaje bez zmiany? c) A czy wartość siły  $T$  rośnie przy tym, maleje, czy pozostaje bez zmiany?

9. W tabeli podano pola trzech powierzchni oraz wartość siły działającej równomiernie na te powierzchnie

	Pole	Siła
powierzchnia A	$0,5S_0$	$2F_0$
powierzchnia B	$2S_0$	$4F_0$
powierzchnia C	$3S_0$	$6F_0$

10. Cztery walcowe pręty są rozciągane jak na rysunku 13.11a. W tabeli podano wartości działających na nie sił, pola powierzchni podstawa, wydłużenia oraz początkowe długości prętów. Uszereguj te pręty w zależności od ich modułów Younga, od największego do najmniejszego.

Pręt	Siła	Pole powierzchni	Wydłużenie	Długość początkowa
1	$F$	$S$	$\Delta L$	$L$
2	$2F$	$2S$	$2\Delta L$	$L$
3	$F$	$2S$	$2\Delta L$	$2L$
4	$2F$	$S$	$\Delta L$	$2L$



### 13.4 Kilka przykładów równowagi statycznej

1. Jak pokazano na rysunku 13.21, rodzina pewnego fizyka siedzi na huśtawce, przy czym huśtawka znajduje się w równowadze. Ciężary poszczególnych członków rodziny (w niutonach) zaznaczono na rysunku. Od której z osób (podaj jej numer) pochodzi największy moment siły względem osi obrót przechodzącej przez ostrze  $O$ , na którym wsparta jest ta huśtawka, skierowany a) przed kartkę, b) za kartkę?

Rys. 13.21. Zadanie 1

2. Krzywa Wieża w Pizie ma wysokość 55 m i średnicę 7 m. Szczyt wieży jest odchylony od pionu o 4,5 m. Załóż, że wieżę można traktować jako jednorodny walec. a) O ile należałoby jeszcze odchylić od pionu wierzchołek wieży, by doprowadzić do jej upadku? b) Jaki kąt tworzyłaby oś wieży z pionem w położeniu, w którym wieża zaczęłaby się przewracać?

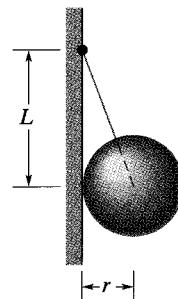
3. Na cząstkę działają dwie siły równe w newtonach  $\vec{F}_1 = 10\hat{i} - 4\hat{j}$  oraz  $\vec{F}_2 = 17\hat{i} + 2\hat{j}$ . a) Wyznacz siłę  $\vec{F}_3$ , która je równoważy.  
b) Jaki jest kierunek  $\vec{F}_3$  względem osi  $x$ ?

4. Cięciwa łuku jest naciągnięta w połowie swej długości tak, że jej naprężenie jest równe sile, jaką działa łucznik. Jaki kąt tworzą ze sobą dwie połowy cięciwy?

5. Linę o znikomo małej masie rozpięto poziomo między dwoma hakami odległymi od siebie o 3,44 m. Gdy w połowie długości liny zawieszono na niej przedmiot o ciężarze 3160 N, punkt środkowy liny opuścił się w pionie o 35 cm. Ile wynosiło wówczas naprężenie liny?

6. Pozioma platforma o masie 60 kg i długości 5 m jest zawieszona przy ścianie budynku na dwóch linach podtrzymujących jej końce. Osoba, która myje z zewnątrz okna budynku, ma masę 80 kg i stoi na platformie w odległości 1,5 m od jednego z jej końców. Ile wynosi naprężenie liny: a) bliżej robotnika i b) dalszej od niego?

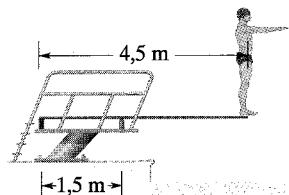
7. Jak pokazano na rysunku 13.22, jednorodna kula o masie  $m$  i promieniu  $r$  jest zawieszona przy ścianie na linie o znikomo małej masie, przymocowanej do haka odległego w pionie od środka kuli o  $L$ . Załóż, że między kulą a ścianą nie występuje tarcie, i wyznacz a) naprężenie liny oraz b) siłę działającą na kulę ze strony ściany.



Rys. 13.22. Zadanie 7

8. Samochód o masie 1360 kg ma osie kół przednich i tylnych odległe od siebie o 3,05 m. Środek ciężkości pojazdu znajduje się w odległości 1,78 m od osi przedniej. Samochód stoi na poziomej drodze. Wyznacz wartość siły działającej ze strony drogi na a) każde z przednich kół (przy założeniu, że na każde z nich działa taka sama siła) i b) każde z tylnych kół (przy założeniu, że na każde z nich działa taka sama siła).

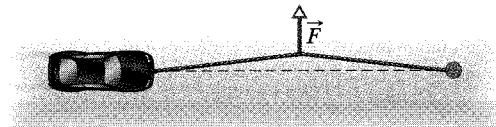
9. Skoczek do wody, którego ciężar wynosi 580 N, stoi na końcu trampoliny o znikomo małej masie (rys. 13.23). Trampolina jest przykrocona do dwóch słupków odległych od siebie o 1,5 m. Jaka jest wartość i kierunek siły działającej na trampolinę ze strony a) lewego słupka, b) prawego słupka? Który słupek jest c) rozciągany, a który d) ściszkany?



Rys. 13.23. Zadanie 9

10. Na rysunku 13.24 pokazano, jak pewien kierowca stara się wyciągnąć swój samochód z błota, w którym ugrzązł na poboczu drogi. Przywiązał on mocno jeden koniec liny do przedniego zderzaka, a drugi przymocował do słupa telegraficznego odległego

od samochodu o 18 m. Gdy następnie ciągnie on linię w środku jej długości, działając na nią siłą 550 N, przy czym środek liny odchyla się od swego położenia początkowego o 0,30 m, samochód ledwie rusza z miejsca. Ile wynosi wartość siły, którą lina działa na samochód? Zwróć uwagę, że lina nieco się rozciąga.



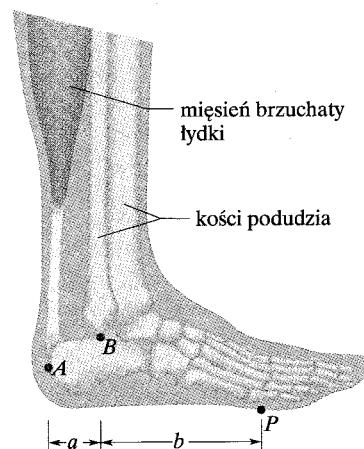
Rys. 13.24. Zadanie 10

11. Metrowy pręt mierniczy jest poziomy i znajduje się w równowadze, gdy jest podparty na ostrzu znajdującym się przy kresce oznaczającym 50 cm. Gdy w punkcie oznaczającym 12 cm położono na przecie dwie monety o masie 5 g każda, do zachowania równowagi pręta trzeba było przesunąć ostrze do kreski oznaczającej 45,5 cm. Ile wynosi masa tego pręta?

12. Jednorodna skrzynia o ciężarze 500 N oraz kształcie sześcianu o krawędzi 0,75 m spoczywa na podłodze tak, że jedna jej krawędź jest oparta o niewielką sztywną fałdę podłoga. Na jakiej co najmniej wysokości nad podłogą trzeba działać poziomo na tę skrzynię siłą o wartości 350 N, aby ją przewrócić?

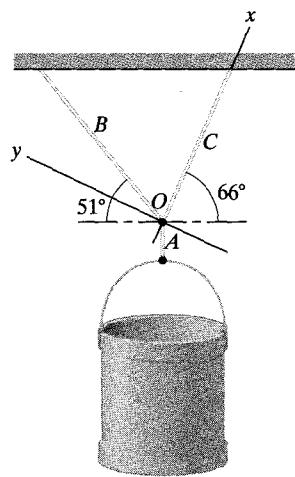
13. Przy myciu okien robotnik o masie 75 kg korzysta z drabiny o masie 10 kg i długości 5 m. Ustawia on dolny koniec drabiny w odległości 2,5 m od ściany, opiera górnego koniec o popękana szybę okienną i zaczyna się wspinać po drabinie. Po przebyciu przez niego 3 m wzdułz drabiny, szyba okienna rozpada się na kawałki. Pomiń tarcie między drabiną a szybą oraz załóż, że drabina nie ślizga się po podłodze, i oblicz: a) wartość siły, jaką działa drabina na szybę tuż przed rozpadnięciem się szyby, b) wartość i kierunek siły, jaką działa podłoga na drabinę tuż przed rozpadnięciem się szyby.

14. Na rysunku 13.25 przedstawiono budowę anatomiczną podudzia i stopy. Gdy stajesz „na paluszakach”, tak że pięta uniesiona jest nad podłogę, stopa efektywnie styka się z podłogą w jednym punkcie oznaczonym na rysunku literą  $P$ . Oblicz siły działające wówczas na stopę ze strony a) mięśnia brzuchatego lydkiego (przyłożoną do stopy w punkcie A), b) kości podudzia (przyłożoną do stopy w punkcie B), wyrażając je w jednostkach ciężaru człowieka. Przyjmij, że  $a = 5 \text{ cm}$ ,  $b = 15 \text{ cm}$ .



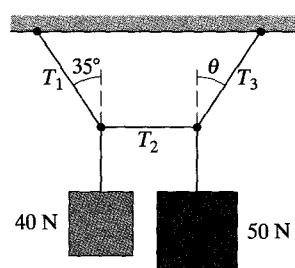
Rys. 13.25. Zadanie 14

15. Jak pokazano na rysunku 13.26, wiadro budowlane o masie 817 kg jest zawieszone na linie A, która w punkcie O łączy się z dwiema innymi linami B i C, które tworzą z poziomem kąty  $51^\circ$  i  $66^\circ$ . Wyznacz naprężenie: a) liny A, b) liny B i c) liny C. (Wskazówka: Aby uniknąć rozwiązywania układu dwóch równań z dwiema niewiadomymi, wybierz układ współrzędnych zaznaczony na rysunku).



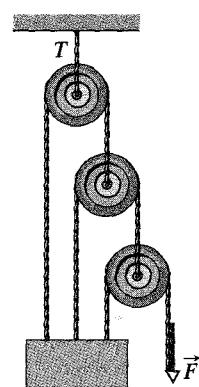
Rys. 13.26. Zadanie 15

16. Układ z rysunku 13.27 pozostaje w równowadze, gdy środkowa linka jest dokładnie pozioma. Wyznacz naprężenie lin: a)  $T_1$ , b)  $T_2$  i c)  $T_3$  oraz d) kąt  $\theta$ .



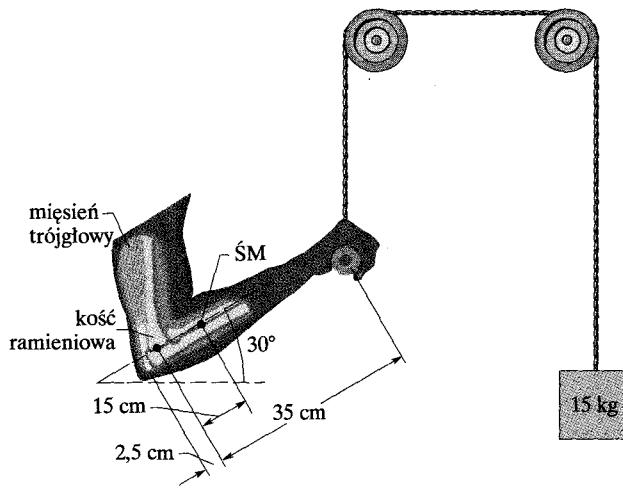
Rys. 13.27. Zadanie 16

17. Jak pokazano na rysunku 13.28, siła  $\vec{F}$  utrzymuje w równowadze klocki o masie 6,4 kg oraz układ krążków. Krążki mają znikomo małą masę i mogą się obracać bez tarcia. Wyznacz naprężenie  $T$  górnej linki. (Wskazówka: Gdy linka styka się z krążkiem wzdłuż połowy jego obwodu, działająca na krążek siła wypadkowa jest dwa razy większa od naprężenia linki).  $\text{Jlyw}$



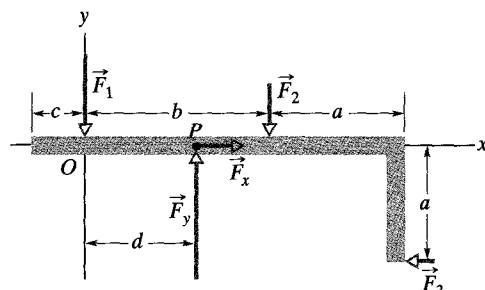
Rys. 13.28. Zadanie 17

18. Do podniesienia klocka o masie 15 kg zastosowano układ krążków przedstawiony na rysunku 13.29. Ramię ciągnącego linię człowieka jest pionowe, a jego przedramię tworzy z poziomem kąt  $30^\circ$ . Ile wynoszą siły działające na przedramieniu ze strony a) mięśnia trójgłowego i b) kości ramieniowej? Przedramię i dłoń mają masę 2 kg, a ich środek masy znajduje się w punkcie odległym o 15 cm od miejsca, w którym kość ramieniowa styka się z przedramieniem. Siła, jaką mięsień trójgłowy działa w góre na przedramieniu, jest przyłożona o 2,5 cm za tym punktem.



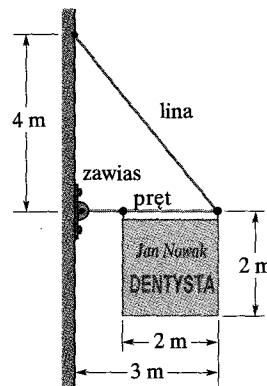
Rys. 13.29. Zadanie 18

19. Na element konstrukcyjny pokazany w rzucie z góry na rysunku 13.30 działają trzy siły:  $\vec{F}_1$ ,  $\vec{F}_2$  i  $\vec{F}_3$ . Chcemy utrzymać ten element w równowadze, przykładając do niego w punkcie P czwartą siłę o składowych  $\vec{F}_x$  i  $\vec{F}_y$ . Wiemy, że  $a = 2 \text{ m}$ ,  $b = 3 \text{ m}$ ,  $c = 1 \text{ m}$ ,  $F_1 = 20 \text{ N}$ ,  $F_2 = 10 \text{ N}$ , a  $F_3 = 5 \text{ N}$ . Wyznacz: a)  $F_x$ , b)  $F_y$  oraz c)  $d$ .



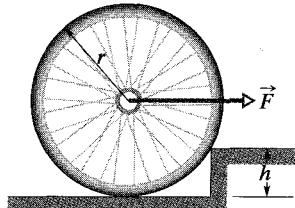
Rys. 13.30. Zadanie 19

20. Na rysunku 13.31 przedstawiono jednorodną tablicę o masie 50 kg umocowaną na poziomym pręcie, który ma długość 3 m i znikomo małą masę. Tablica ma kształt kwadratu o boku 2 m. Koniec pręta jest połączony linią z hakiem w ścianie oddległym o 4 m od zawiasu, który łączy ze ścianą drugi koniec pręta. a) Ile wynosi naprężenie liny? Jakie są wartości i kierunki składowych: b) poziomej i c) pionowej, siły działającej na pręt ze strony ściany?



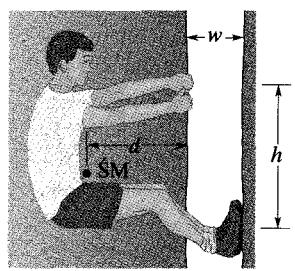
Rys. 13.31. Zadanie 20

21. Na rysunku 13.32 przedstawiono koło o promieniu  $r$  i masie  $m$ , do którego osi przyłożono poziomo siłę  $\vec{F}$ . Ile co najmniej musi wynosić wartość tej siły, by koło mogło pokonać schodek o wysokości  $h$ ?



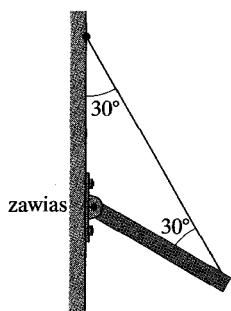
Rys. 13.32. Zadanie 21

22. Pionowa szczelina skalna jest tak wąska, że wspinacz nie mieści się w niej. Aby się wspiąć, przyjmuje on zatem pozycję pokazaną na rysunku 13.33, odpychając się stopami od jednej ściany szczeliny i ciągnąc drugą rękami. Szczelina ma szerokość  $w = 0,2$  m, masa wspinacza wynosi 55 kg, a jego środek masy znajduje się w odległości  $d = 0,4$  m od brzegu szczeliny. Współczynnik tarcia statycznego między skałą a rękami wspinacza wynosi  $\mu_1 = 0,4$ , a między skałą a jego butami —  $\mu_2 = 1,2$ . a) Jaką co najmniej siłą musi działać wspinacz na każdą ze ścian szczeliny („przyciągając” jedną i „odpychając” drugą), aby nie ześlizgnąć się wzdłuż szczeliny? b) Ile powinna wynosić przy tym odległość w pionie  $h$  między jego dloniami i stopami, aby siła obliczona w punkcie (a) wystarczyła do utrzymania się wspinacza w równowadze? c) Jak zmienią się odpowiedzi na pytania (a) i (b), gdy wspinacz dotrze do miejsca, w którym skała jest mokra, co oznacza, że współczynniki tarcia  $\mu_1$  i  $\mu_2$  są mniejsze od podanych powyżej wartości dla skały suchej?

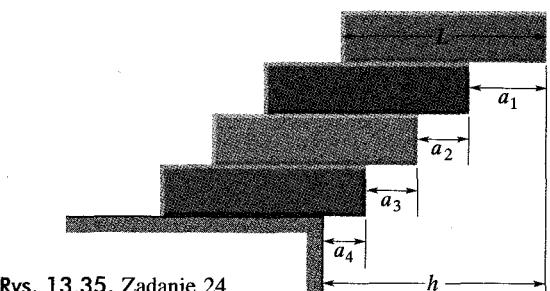


Rys. 13.33. Zadanie 22

23. Na rysunku 13.34 pokazano jednorodną belkę o ciężarze 222 N, której jeden koniec jest przymocowany do ściany za pomocą zawiasu, a drugi jest powieszony na linie. Wyznacz: a) naprężenie liny oraz b) poziom i c) pionową składową siły, jaką zawias działa na belkę.



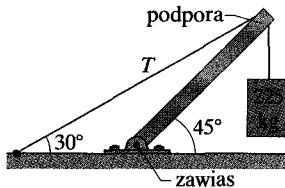
Rys. 13.34. Zadanie 23



Rys. 13.35. Zadanie 24

24. Cztery jednakowe, jednorodne cegły o długości  $L$  ustawiono jedną na drugiej na skraju stołu tak, że część każdej z nich wystaje poza cegłę, na której jest położona (rys. 13.35). Wyznacz w jednostkach  $L$  maksymalne długości odcinków: a)  $a_1$ , b)  $a_2$ , c)  $a_3$ , d)  $a_4$  i e)  $h$ , dla których stos cegieł się nie przewraca.

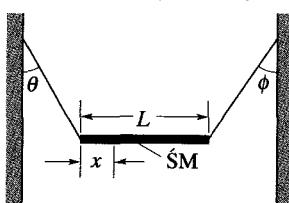
25. Układ przedstawiony na rysunku 13.36 znajduje się w równowadze. Blok betonowy o masie 225 kg jest podtrzymywany za pomocą jednorodnej podpory o masie 45 kg. Wyznacz: a) naprężenie liny  $T$  oraz b) poziom i c) pionową składową siły, jaką zawias działa na podporę.



Rys. 13.36. Zadanie 25

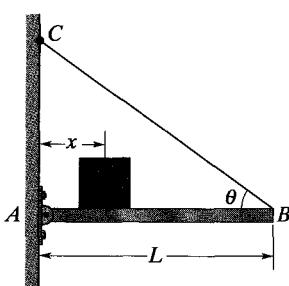
26. Drzwi o masie 27 kg mają wysokość 2,1 m i szerokość 0,91 m. Są one zawieszone na dwóch zawiasach umieszczonych w odległości 0,30 m od górnej i dolnej ich krawędzi. Przyjmij, że każdy zawias podtrzymuje połowę masy drzwi oraz że środek ciężkości drzwi znajduje się w ich środku geometrycznym, i wyznacz: a) poziom i b) pionową składową siły, jaką działa na drzwi każdy zawias.

27. Niejednorodny pręt jest zawieszony na dwóch liniach o znikomo małej masie jak na rysunku 13.37. Pręt znajduje się w równowadze, gdy jest poziomy. Kąty tworzone wówczas z poziomem przez liny wynoszą  $\theta = 36,9^\circ$  i  $\phi = 53,1^\circ$ . Długość pręta  $L$  jest równa 6,1 m. Wyznacz odległość  $x$  środka masy pręta od jego lewego końca.



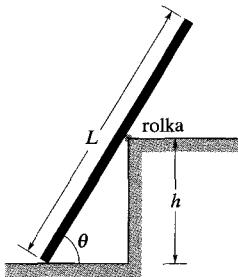
Rys. 13.37. Zadanie 27

28. Jak pokazano na rysunku 13.38, cienka belka pozioma  $AB$  o długości  $L$  i znikomo małej masie jest przymocowana do ściany za pomocą zawiasu na końcu  $A$ , a jej koniec  $B$  jest podtrzymywany na cienkiej linie  $BC$  tworzącej z poziomem kąt  $\theta$ . Przedmiot o ciężarze  $W$  można umieścić w dowolnym miejscu na belce i określić jego położenie, podając odległość  $x$  środka masy przedmiotu od ściany. Potraktuj  $x$  jako zmienną niezależną i wyznacz jako funkcję  $x$ : a) naprężenie liny oraz b) poziom i c) pionową składową siły, jaką działa zawias na belkę w punkcie  $A$ .



Rys. 13.38. Zadania 28 i 30

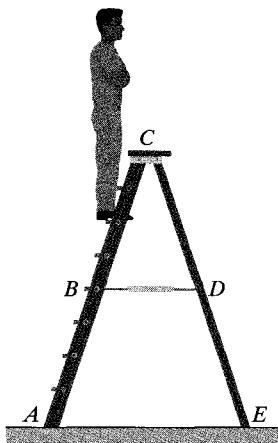
**29.** Na rysunku 13.39 przedstawiono jednorodną deskę o długości  $L$  równej 6,10 m i ciężarze 445 N wspartą na podłodze oraz na rolce umieszczonej w górnym skraju ścianki o wysokości  $h = 3,05$  m. Między deską a rolką nie występuje tarcie. Deskę pozostaje w równowadze, gdy kąt  $\theta$  jest większy lub równy  $70^\circ$ , lecz ześlizguje się po podłodze, gdy  $\theta < 70^\circ$ . Wyznacz współczynnik tarcia statycznego między deską a podłogą.



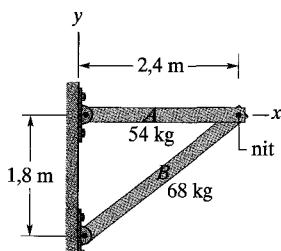
Rys. 13.39. Zadanie 29

**30.** Załóż, że jednorodna belka z rysunku 13.38 ma długość  $L$  równą 3 m, a jej ciężar wynosi 200 N. Przyjmij też, że stojący na belce przedmiot ma ciężar  $W = 300$  N, a kąt  $\theta = 30^\circ$ . Maksymalne naprężenie, jakie może wytrzymać lina, wynosi 500 N. a) W jakiej co najwyżej odległości  $x$  od ściany możesz ustawić przedmiot, jeśli chcesz, aby lina się nie zerwała? Ile wynosi b) pozioma i c) pionowa składowa siły, jaką działa zawias na belkę w punkcie A, gdy przedmiot jest ustawiony w położeniu z punktu (a)?

**31.** Drabina malaraska przedstawiona na rysunku 13.40 składa się z dwóch części  $AC$  i  $CE$  o długości 2,44 m każda, połączonych ze sobą zawiasem w punkcie  $C$  i linką  $BD$  o długości 0,762 m, przywiązaną do obu części drabiny w połowie ich długości. Malarz o ciężarze 854 N stoi na szczeblu odległym od podstawy drabiny o 1,80 m. Przyjmij, że między drabiną a podłogą nie działa tarcie oraz że masa drabiny jest znikomo mała, i wyznacz a) naprężenie linki łączącej dwie części drabiny oraz wartości sił działających na drabinę ze strony podłogi w punktach: b) A i c) E. (Wskazówka: Ułatwisz sobie pracę, jeśli rozważyysz warunki równowagi dla obu części drabiny z osobna).



Rys. 13.40. Zadanie 31

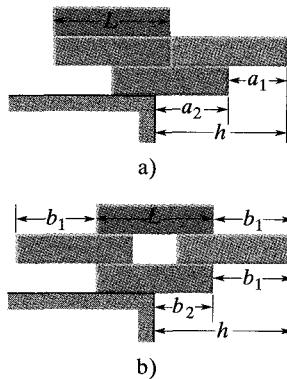


Rys. 13.41. Zadanie 32

**34.1.** Wyznacz składowe  $x$  i  $y$  sił działających: a) na belkę A ze strony jej zawiasu, b) na belkę A ze strony nitu, c) na belkę B ze strony jej zawiasu, d) na belkę B ze strony nitu.

**33.** Sześcienne pudło wypełnione piaskiem ma ciężar 890 N. Chcemy przewrócić to pudło, tak by jego podstawa stała się jedną ze ścian początkowo pionowych, przykładając do niego poziomo siłę na jednej z górnych krawędzi. a) Ile co najmniej musi wynosić wartość tej siły? b) Ile co najmniej musi wynosić współczynnik tarcia statycznego między pudłem a podłogą? c) Czy możliwe jest przewrócenie tego pudła mniejszą siłą? Jeśli tak, to jaka jest najmniejsza wartość siły — przykładowej wprost do pudła — umożliwiająca jego przewrócenie? (Wskazówka: Zastanów się, gdzie jest przyłożona siła normalna, gdy pudło zaczyna się unosić).

**34.** Cztery jednakowe, jednorodne cegły o długości  $L$  ustawiono na skraju stołu na dwa sposoby, przedstawione na rysunku 13.42 (por. z zadaniem 24). Chcemy, by stos cegieł wystawał jak najdalej poza krawędź stołu, tzn. aby  $h$  było w każdej z tych konfiguracji jak największe. Wyznacz długości odcinków  $a_1$ ,  $a_2$ ,  $b_1$  i  $b_2$  odpowiadające największej wartości  $h$  oraz te największe wartości  $h$  dla obu układów cegieł (w rubryce „The Amateur Scientist” w „Scientific American”, czerwiec 1985, s. 133–134, omówione są jeszcze lepsze konfiguracje układu cegieł z rysunku 13.42b).

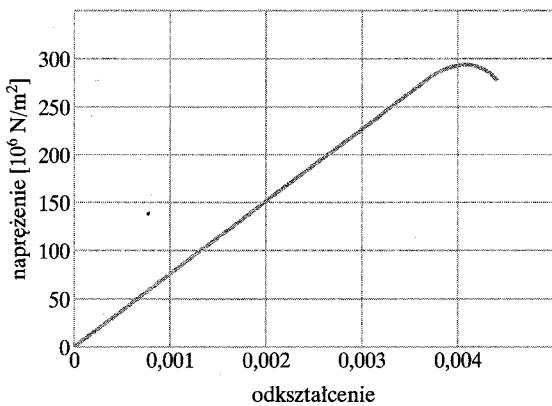


Rys. 13.42. Zadanie 34

**35.** Skrzynia w kształcie sześcianu o krawędzi 1,2 m zawiera pewne urządzenie mechaniczne. Środek masy skrzyni i jej zawartości jest położony o 0,30 m nad środkiem geometrycznym sześcianu. Skrzynia stoi na pochylni tworzącej z poziomem kąt  $\theta$ . Wyobraź sobie, że kąt ten jest początkowo równy zeru, a potem stopniowo go zwiększymy. Wcześniej czy później osiągniemy przy tym taką jego wartość, że skrzynia albo zacznie się ześlizgiwać wzduł pochylni, albo przewróci się na sąsiednią ścianę. a) Które z tych zdarzeń nastąpi, jeśli współczynnik tarcia statycznego między skrzynią a pochylnią wynosi 0,6? b) A jeśli jest równy 0,7? W każdym z przypadków wyznacz wartość kąta, dla której skrzynia zaczyna się poruszać. (Wskazówka: Zastanów się, gdzie jest przyłożona siła normalna, gdy skrzynia zaczyna się unosić.)

## 13.6 Sprężystość

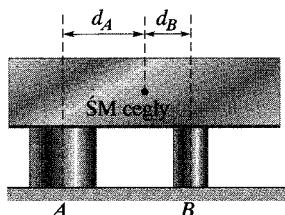
**36.** Na rysunku 13.43 przedstawiono zależność odkształcenia od naprężenia dla kwarcu. Wyznacz a) moduł Younga i b) przybliżoną wartość granicy sprężystości dla tego materiału.



Rys. 13.43. Zadanie 36

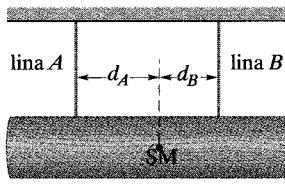
37. Poziomy pręt aluminiowy o średnicy 4,8 cm wystaje ze ściany na głębokość 5,3 cm. Na końcu tego pręta zawieszono przedmiot o masie 1200 kg. Moduł ścinania wynosi dla aluminium  $3,0 \cdot 10^{10}$  N/m<sup>2</sup>. Pomiń masę pręta i wyznacz: a) naprężenie ścinające działające na pręt oraz b) odkształcenie pionowe końca pręta.

38. Na rysunku 13.44 przedstawiono cegłę ołowianą leżącą poziomo na dwóch walcach A i B. Pola powierzchni podstawa walców są ze sobą związane zależnością  $S_A = 2S_B$ , a moduły Younga tych walców — zależnością  $E_A = 2E_B$ . Przed położeniem na nich cegły walce miały jednakową wysokość. Jaki ułamek masy cegły jest podtrzymywany przez a) walec A i b) walec B? Odległości w poziomie między środkiem masy cegły a osiami walców są równe  $d_A$  (dla waleca A) i  $d_B$  (dla waleca B). c) Ile wynosi stosunek  $d_A/d_B$ ?



Rys. 13.44. Zadanie 38

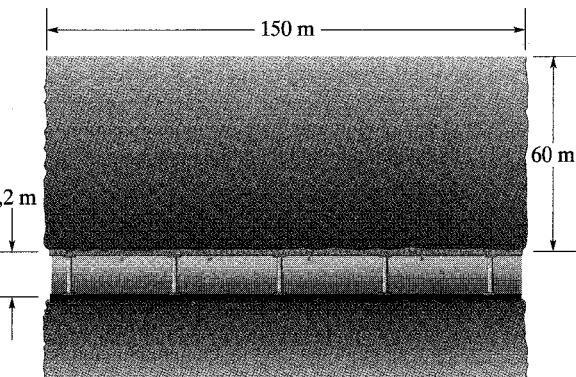
39. Na rysunku 13.45 przedstawiono jednorodny pierścionek o masie 103 kg zawieszony na dwóch stalowych liniach A i B, z których każda ma promień 1,2 mm. Przed zawieszeniem na nich pnia lina A miała długość 2,5 m i była o 2 mm krótsza od liny B. Pierścionek wisi poziomo. Ile wynoszą wartości sił działających na pierścionek ze strony a) liny A i b) liny B? c) Ile wynosi stosunek  $d_A/d_B$ ?



Rys. 13.45. Zadanie 39

40. Na głębokości 60 m pod powierzchnią ziemi ma być zbudowany korytarz o płaskim sklepieniu oraz długości 150 m, wysokości 7,2 m i szerokości 5,8 m (patrz rysunek 13.46). Sklepienie ma być wsparte wyłącznie na stalowych kolumnach, których przekrój poprzeczny jest kwadratem o polu powierzchni 960 cm<sup>2</sup>. Gęstość gruntu wynosi 2,8 g/cm<sup>3</sup>. a) Ile wynosi całkowita masa gruntu,

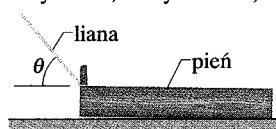
który muszą podtrzymać kolumny? b) Ilu kolumn trzeba użyć, jeśli wymaga się, aby naprężenie ściskające każdą kolumnę nie przekroczyło połowy jej naprężenia niszczącego?



Rys. 13.46. Zadanie 40

### Zadania dodatkowe

41. Wyobraź sobie, że musisz przesunąć ciężki pień drzewa w puszczy zwrotnikowej, a nie masz żadnych narzędzi. Oto co powinieneś zrobić. Znajdź małe drzewo znajdujące się mniej więcej w kierunku, w którym masz przesunąć pień. Wyszukaj lianę związaną ze szczytu drzewa aż do powierzchni ziemi. Przyciągnij tę lianę do pnia i owiń ją wokół jakiejś odnogi na pniu. Następnie naciągnij mocno lianę, tak by drzewo się zgęlio i wzmacnij węzeł na odnodze. Powtórz tę operację dla kilku dalszych drzew, a w końcu siła wypadkowa wywierana na pień przez kilka lian ruszy go z miejsca. Jest to metoda dość żmudna, lecz umożliwiała ona pracownikom leśnym przemieszczanie ciężkich pni na długo przed powstaniem nowoczesnych urządzeń mechanicznych. Na rysunku 13.47 przedstawiono schemat działania tej metody. Pokazano jedną lianę przywiązaną do gałęzi na jednym z końców jednorodnego pnia o masie  $M$ . Współczynnik tarcia statycznego między pniem a gruntem wynosi 0,8. Wyznacz: a) kąt  $\theta$  oraz b) wartość  $T$  siły, jaką działa liana na pień, gdy pień zaczyna się ślizgać, tzn. gdy jego lewy koniec jest nieznacznie uniesiony przez lianę.



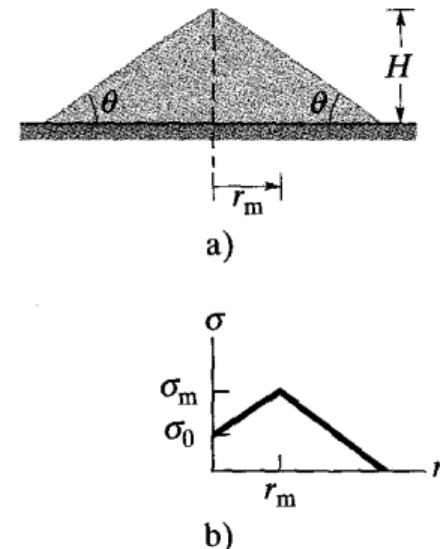
Rys. 13.47. Zadanie 41

42. Wyobraź sobie, że powierzono ci zadanie usypania dużego kopca z piasku na placu zabaw znajdującym się wewnątrz budynku. Musisz zatem zadbać o to, aby naprężenie podłogi pod górną częścią kopca nie przekroczyło dopuszczalnej wartości. Studując literaturę przedmiotu, stwierdziłeś ze zdziwieniem, że naprężenie podłoża jest największe nie pod szczytem kopca, lecz w punktach odległych o  $r_m$  od tego punktu środkowego (rys. 13.48a). Podejrzewa się, że to przesunięcie obszaru maksymalnego nacisku na podłożo od środka kopca na zewnątrz jest związane z tworzeniem luków przez ziarna piasku w kopcu. Na rysunku

13.48b przedstawiono zależność naprężenia  $\sigma$  od odległości  $r$  od punktu położonego wprost pod szczytem kopca dla kopca o wysokości  $H = 3$  m i kącie  $\theta = 33^\circ$ , usypanego z piasku o gęstości  $\rho = 1800 \text{ kg/m}^3$ ; na tym rysunku  $\sigma_0 = 40\,000 \text{ N/m}^2$ ,  $\sigma_m = 40\,024 \text{ N/m}^2$ , a  $r_m = 1,82 \text{ m}$ .

- Oblicz objętość piasku zawartego w części kopca o  $r \leq r_m/2$ . (Wskazówka: Objętość tej bryły jest równa sumie objętości pionowego walca i stożka nad tym walcem; objętość stożka wynosi  $\pi R^2 h/3$ , gdzie  $R$  jest promieniem podstawy stożka, a  $h$  jego wysokość).
- Ile wynosi ciężar piasku zawartego w tej objętości?
- Na podstawie wykresu z rysunku 13.48b napisz wyrażenie na działające na podłogę naprężenie  $\sigma$  jako funkcję  $r$  dla  $r \leq r_m$ .
- Ile wynosi pole powierzchni  $dS$  cienkiego pierścienia podłogi o promieniu  $r$  i środku pod szczytem kopca oraz szerokości radialnej  $dr$ ?
- Ile wynosi wartość  $dF$  siły działającej na ten pierścień ze strony piasku?
- Ile wynosi wartość  $F$  siły wypadkowej

działającej na podłogę ze strony całego piasku zawartego w bryle o  $r \leq r_m/2$ . (Wskazówka: Scałkuj wyrażenie otrzymane w punkcie (e) od  $r = 0$  do  $r = r_m/2$ ). Zauważ, że wynik jest zaokrąglający: wartość  $F$  siły działającej na podłogę jest mniejsza od ciężaru  $W$  piasku znajdującego się nad tą częścią podłogi, który obliczyłeś w punkcie (b). g) Ile wynosi wartość względna różnicę  $F$  i  $W$ , tzn. wielkość  $(F - W)/W$ ?



Rys. 13.48. Zadanie 42

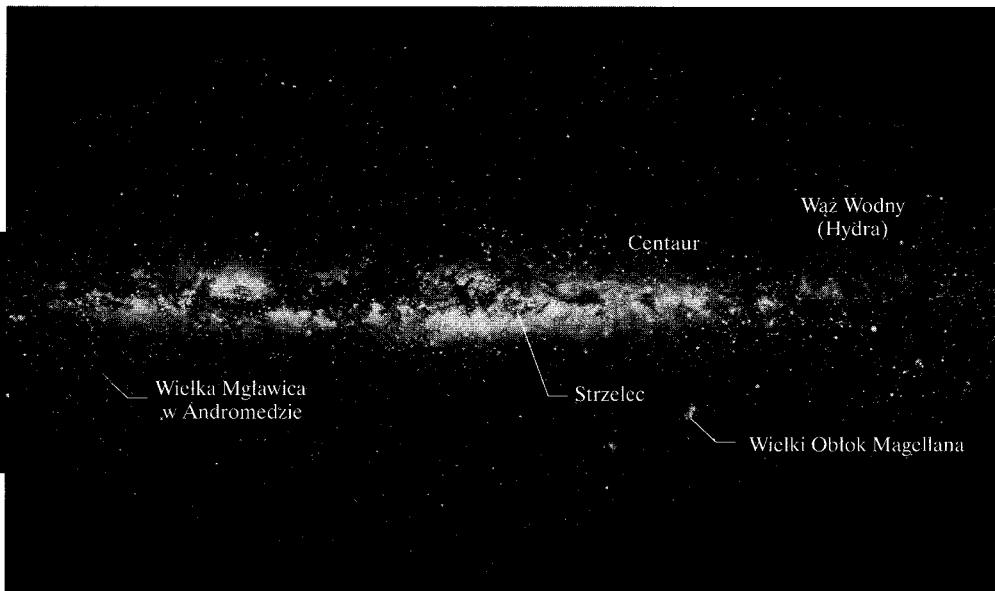
# 14 Gravitacja

Mająca kształt dysku Droga Mleczna, czyli nasza Galaktyka, zawiera pył, planety i miliardy gwiazd, w tym nasze Słońce z Układem Słonecznym. Wszystkie te obiekty związane są ze sobą — podobnie jak składniki innych galaktyk — tą samą siłą, która utrzymuje Księżyc na jego orbicie i ciebie na Ziemi — siłą grawitacyjną. Ta siła jest także źródłem istnienia najbardziej niezwykłych obiektów, jakie istnieją w przyrodzie — czarnych dziur, czyli gwiazd, które kurczą się nieograniczenie pod wpływem tzw. zapadania grawitacyjnego. Siła grawitacyjna w pobliżu czarnej dziury

jest tak olbrzymia,  
że nic nie może  
stamtąd uciec,  
nawet światło.

Jeśli tak jest,  
to w jaki sposób  
można stwierdzić  
istnienie czarnej  
dziury?

Odpowiedź znajdziesz  
w tym rozdziale.





Rys. 14.1. Wielka Mgławica w Andromedzie. Jest to galaktyka odległa od nas o  $2,3 \cdot 10^6$  lat świetlnych, bardzo podobna do naszej Galaktyki — Drogi Mlecznej. Jest ona ledwie widoczna gołym okiem

## 14.1. Siła grawitacyjna we Wszechświecie

Rozdział ten otwiera zdjęcie naszej Galaktyki — Drogi Mlecznej. My znajdujemy się w pobliżu skraju dysku, którego kształt ma Galaktyka, około 26 000 lat świetlnych ( $2,5 \cdot 10^{20}$  m) od jej środka, który leży w gwiazdozbiorze Strzelca. Nasza Galaktyka należy do Lokalnej Grupy Galaktyk, która zawiera także Wielką Mgławicę w Andromedzie (rys. 14.1), odległą od nas o  $2,3 \cdot 10^6$  lat świetlnych, oraz kilka bliższych nas galaktyk, jak widoczny na pierwszym zdjęciu Wielki Obłok Magellana.

Lokalna Grupa Galaktyk jest częścią większego zbiorowiska galaktyk — Supergromady Lokalnej. Pomiary wykonane w czasie ostatnich dwudziestu kilku lat wskazują na to, że Supergromada Lokalna, a także supergromada złożona z gromad w Hydrze i w Centaurze, poruszają się w kierunku niezwykle gęstego obszaru Wszechświata, zwanego Wielkim Atraktorem. Wydaje się, że ten obszar znajduje się w odległości około 300 milionów lat świetlnych od nas, po drugiej stronie Galaktyki, za gromadami w Hydrze i w Centaurze.

Siła, która wiąże ze sobą te coraz większe struktury materii — od gwiazd przez galaktyki po ich supergromady — i która być może przyciąga je wszystkie do Wielkiego Atraktora, to siła grawitacji (ciążkości). Jak widzisz, ta siła nie tylko przyciąga cię do Ziemi, lecz także sięga daleko w przestrzeń międzygalaktyczną.

## 14.2. Prawo powszechnego ciążenia

Fizykom sprawia wielką przyjemność, gdy dostatecznie szczegółowe badania zjawisk na pozór całkowicie ze sobą nie związanych wykażą, że istnieje jednak między nimi pewien związek. Tego rodzaju poszukiwania unifikacji różnych zjawisk mają tradycję wręcz wielowiekową. W roku 1665 23-letni Izaac Newton dokonał wielkiego odkrycia w fizyce, wykazując, że siła utrzymująca Księżyce na orbicie to ta sama siła, która sprawia, że jabłko spada z drzewa na ziemię. Dziś jest to dla nas tak oczywiste, że trudno nam pojąć, iż w starożytności uważano, że ruch ciał na Ziemi i ruch ciał na niebie są zupełnie różnego rodzaju i rzadzą się innymi prawami.

Newton stwierdził, że nie tylko Ziemia przyciąga jabłko i Księżyce, lecz każde ciało we Wszechświecie przyciąga każde inne. Tę skłonność ciał do zbliżania się do siebie nazwał **ciążeniem (grawitacją)**. Wniosek Newtona nie jest tak całkiem oczywisty na pierwszy rzut oka, gdyż dobrze wszystkim znane przyciąganie przez Ziemię ciał z naszego otoczenia jest tak silne, że utrudnia nam dostrzeżenie, że te inne ciała też się wzajemnie przyciągają. Na przykład Ziemia przyciąga jabłko siłą o wartości około 0,8 N; ty też przyciągasz jabłko (a ono przyciąga ciebie), lecz ta siła przyciągania ma wartość mniejszą od ciężaru ziarnka kurzu.

Przyciąganie ciał opisuje ilościowo prawo wprowadzone przez Newtona nazywane **prawem powszechnego ciążenia**, które mówi, że każda cząstka przyciąga każdą inną cząstkę **siłą ciążkości (siłą grawitacyjną)** o wartości

$$F = G \frac{m_1 m_2}{r^2} \quad (\text{prawo powszechnego ciążenia}). \quad (14.1)$$

W równaniu tym  $m_1$  i  $m_2$  to masy cząstek,  $r$  — ich odległość, a  $G$  — stała grawitacyjna, której przyjęta dziś wartość wynosi

$$G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{kg}^2 \\ = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3/(\text{kg} \cdot \text{s}^2). \quad (14.2)$$

Jak pokazano na rysunku 14.2, cząstka  $m_2$  przyciąga cząstkę  $m_1$  siłą grawitacyjną  $\vec{F}$  skierowaną do cząstki  $m_2$ , a cząstka  $m_1$  przyciąga cząstkę  $m_2$  siłą grawitacyjną  $-\vec{F}$  skierowaną do cząstki  $m_1$ . Siły  $\vec{F}$  i  $-\vec{F}$  stanowią parę akcja–reakcja, związaną ze sobą trzecią zasadą dynamiki Newtona — mają przeciwnie kierunki, lecz taką samą wartość bezwzględną. Ich wartość zależy od odległości cząstek, lecz nie od ich położenia: cząstki mogą się równie dobrze znajdować w głębi jaskini, jak i w głębi kosmosu. Co więcej, siły te nie zmieniają się, gdy w pobliżu cząstek znajdują się inne ciała, nawet gdy umieścimy je między rozważanymi cząstkami.

To, jak duża jest siła ciężkości, tzn. jak silnie przyciągają się cząstki o danej masie, znajdujące się w danej odległości, zależy od wartości stałej grawitacyjnej  $G$ . Gdyby ta wartość stała się nagle — w jakiś cudowny sposób — dziesięciokrotnie większa niż jest obecnie, przyciąganie ziemskie zwaliłoby cię na podłogę, a gdyby stała się dziesięciokrotnie mniejsza, byłoby ono tak słabe, że mógłbyś bez trudu przeskakiwać całe budynki.

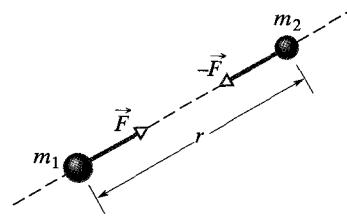
Prawo powszechnego ciążenia Newtona obowiązuje ściśle dla cząstek, lecz może być także stosowane do ciał rzeczywistych, o ile tylko ich rozmiary są małe w porównaniu z ich odległością. Księżyc i Ziemia są tak odległe od siebie, że z dobrym przybliżeniem można je traktować jako cząstki, lecz co zrobić z jabłkiem i Ziemią? Z punktu widzenia jabłka Ziemia jest rozległa i płaska, ciągnie się aż po horyzont jabłka, więc zupełnie nie przypomina cząstki.

Newton rozwiązał to zagadnienie jabłka i Ziemi, wprowadzając ważne twierdzenie o następującej treści:

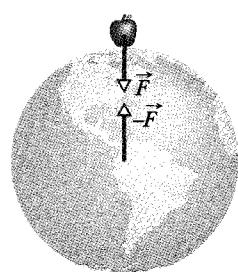
► Ciało w kształcie jednorodnej powłoki kulistej przyciąga cząstkę znajdującą się na zewnątrz powłoki tak, jak gdyby cała masa powłoki była skupiona w jej środku.

Ziemie można sobie wyobrazić jako wiele takich powłok znajdujących się jedna w drugiej. Zgodnie z powyższym twierdzeniem każda z nich przyciąga cząstkę poza Ziemią tak, jak gdyby cała masa powłoki była skupiona w środku tej powłoki. Wobec tego z punktu widzenia jabłka Ziemia *istotnie* zachowuje się jak cząstka, która znajduje się w środku Ziemi i ma masę Ziemi.

Przymijmy, że Ziemia przyciąga jabłko siłą 0,8 N skierowaną w dół na rysunku 14.3. Jabłko musi zatem także przyciągać Ziemię siłą o wartości 0,8 N, skierowaną w górę na rysunku 14.3; możemy uważać, że jest ona przyłożona do środka Ziemi. Choć siły te mają taką samą wartość, to przyspieszenia, jakie nadają one ciałom, na które działają, są bardzo od siebie różne. Gdy pozwolimy jabłku i Ziemi poruszać się względem siebie, jabłko będzie poruszać się z przyspieszeniem równym około  $9,8 \text{ m/s}^2$ , czyli z dobrze nam już znanym przyspieszeniem ziemskim, z jakim spada na Ziemię ciało znajdujące się w pobliżu



Rys. 14.2. Dwie cząstki o masach  $m_1$  i  $m_2$ , odległe od siebie o  $r$ , przyciągają się wzajemnie zgodnie z prawem powszechnego ciążenia (równanie (14.1)). Siły  $\vec{F}$  i  $-\vec{F}$ , jakimi każda z nich działa na drugą, mają taką samą wartość bezwzględną i przeciwny kierunek



Rys. 14.3. Jabłko przyciąga Ziemię siłą o tej samej wartości i przeciwnym kierunku co siła, jaką Ziemia przyciąga jabłko

jej powierzchni. Przyspieszenie Ziemi, mierzone w układzie odniesienia związanym ze środkiem masy układu jabłko–Ziemia, wyniesie natomiast zaledwie około  $1 \cdot 10^{-25} \text{ m/s}^2$ .

**SPRAWDZIAN 1:** Wyobraź sobie, że pewną cząstkę umieszczamy kolejno na zewnątrz czterech ciał, z których każde ma masę  $m$ : 1) dużej jednorodnej kuli, 2) dużej jednorodnej powłoki kulistej, 3) małej jednorodnej kuli oraz 4) małej jednorodnej powłoki kulistej. W każdym z tych przypadków odległość cząstki od środka ciała jest taka sama i wynosi  $d$ . Uszereguj te ciała w zależności od wartości siły grawitacyjnej, jaką wywierają one na cząstkę, od największej do najmniejszej.

### 14.3. Grawitacja a zasada superpozycji

Gdy mamy do czynienia z grupą cząstek, możemy wyznaczyć wypadkową siłę grawitacyjną, jaką działają na jedną z cząstek wszystkie inne, korzystając z **zasady superpozycji**. Jest to zasada ogólna, znajdująca zastosowanie w wielu sytuacjach, mówiąca, że działanie łączne (wypadkowe) pewnego czynnika jest sumą przyczynków od poszczególnych jego źródeł. W naszym przypadku wynika z niej, że musimy najpierw wyznaczyć siły grawitacyjne, jakimi działają na wybraną cząstkę wszystkie pozostałe, a potem — jak zwykle — dodać wektorowo te siły do siebie, co da w wyniku siłę wypadkową.

Dla  $n$  oddziałujących ze sobą cząstek zasada superpozycji dla sił grawitacyjnych ma zatem postać:

$$\vec{F}_{1,\text{wyp}} = \vec{F}_{12} + \vec{F}_{13} + \vec{F}_{14} + \vec{F}_{15} + \cdots + \vec{F}_{1n}. \quad (14.3)$$

We wzorze tym  $\vec{F}_{1,\text{wyp}}$  to siła wypadkowa działająca na cząstkę 1, a na przykład  $\vec{F}_{13}$  to siła, jaką na cząstkę 1 działa cząstka 3. Równanie to można zapisać w bardziej zwartej postaci jako sumę wektorową

$$\vec{F}_{1,\text{wyp}} = \sum_{i=2}^n \vec{F}_{1i}. \quad (14.4)$$

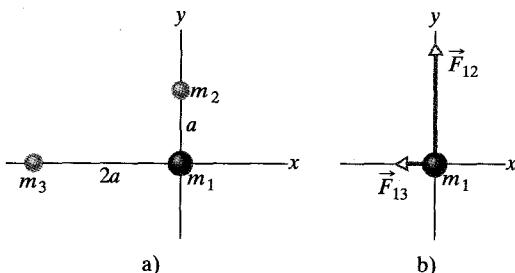
A co zrobić, jeśli chcemy obliczyć siłę grawitacyjną, jaką działa na cząstkę rzeczywiste ciało rozciągłe? Siłę wypadkową możemy wtedy obliczyć, dzieląc to ciało na części, które są tak małe, że możemy je uważać za cząstki, a następnie stosując równanie (14.4), aby wyznaczyć sumę wektorową sił pochodzących od wszystkich części ciała. W przypadku granicznym dzielimy ciało rozciągłe na nieskończonie małe elementy masy  $dm$ , z których każdy działa na cząstkę siłą  $d\vec{F}$ . Suma w równaniu (14.4) przechodzi wtedy w całkę i otrzymujemy

$$\vec{F}_1 = \int d\vec{F}, \quad (14.5)$$

przy czym całkowanie należy przeprowadzić po całej objętości ciała rozciągłego (dla prostoty zapisu opuściliśmy wskaźnik „wyp”). Jeśli ciało jest jednorodną kulą lub jednorodną powłoką kulistą, to nie musimy obliczać całki w równaniu (14.5), gdyż możemy założyć, że cała masa ciała jest skupiona w jego środku masy, i skorzystać z równania (14.1).

## Przykład 14.1

Rozważ trzy cząstki przedstawione na rysunku 14.4a. Cząstka 1 ma masę  $m_1 = 6 \text{ kg}$ , a cząstki  $m_2$  i  $m_3$  mają masy  $m_2 = m_3 = 4 \text{ kg}$ . Odległość  $a = 2 \text{ cm}$ . Wyznacz wypadkową siłę grawitacyjną  $\vec{F}_1$ , jaką działa na cząstkę 1 ze strony innych cząstek.



Rys. 14.4. Przykład 14.1. a) Układ trzech cząstek. b) Siły działające na cząstkę o masie  $m_1$  ze strony pozostałych cząstek

### ROZWIĄZANIE:

Zauważmy, że  $\text{O} \rightarrow$  mamy do czynienia z cząstkami, a zatem wartość siły grawitacyjnej, jaką działa na cząstkę 1 każda z pozostałych cząstek, jest dana wzorem (14.1) ( $F = Gm_1m_2/r^2$ ). Wartość siły  $\vec{F}_{12}$ , jaką działa cząstka 2 na cząstkę 1, jest wobec tego równa

$$\begin{aligned} F_{12} &= \frac{Gm_1m_2}{a^2} \\ &= \frac{(6,67 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3/(\text{kg} \cdot \text{s}^2))(6 \text{ kg})(4 \text{ kg})}{(0,02 \text{ m})^2} \\ &= 4 \cdot 10^{-6} \text{ N}. \end{aligned}$$

Analogicznie, wartość siły  $\vec{F}_{13}$ , jaką działa cząstka 3 na cząstkę 1, wynosi

$$\begin{aligned} F_{13} &= \frac{Gm_1m_3}{(2a)^2} \\ &= \frac{(6,67 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3/(\text{kg} \cdot \text{s}^2))(6 \text{ kg})(4 \text{ kg})}{(0,04 \text{ m})^2} \\ &= 1 \cdot 10^{-6} \text{ N}. \end{aligned}$$

Aby wyznaczyć kierunki sił  $\vec{F}_{12}$  i  $\vec{F}_{13}$ , skorzystamy ze spostrzeżenia, że  $\text{O} \rightarrow$  każda z sił działających na cząstkę 1 jest skierowana

w stronę cząstki, która jest źródłem tej siły. Siła  $\vec{F}_{12}$  ma zatem dodatni kierunek osi  $y$  (patrz rysunek 14.4b) i ma tylko składową  $y$ , równą  $F_{12}$ . Podobnie siła  $\vec{F}_{13}$  ma kierunek ujemny osi  $x$  i ma tylko składową  $x$ , równą  $-F_{13}$ .

W celu wyznaczenia działającej na cząstkę 1 siły wypadkowej  $\vec{F}_{1,\text{wyp}}$  zauważmy, że  $\text{O} \rightarrow$  siły nie są skierowane wzdłuż jednej prostej, a zatem siła wypadkowa *nie jest* po prostu równa sumie lub różnicy ich wartości (czy składowych) — siły te musimy dodać wektorowo.

Zauważmy jednak, że  $-F_{13}$  i  $F_{12}$  są niczym innym, jak składowymi  $x$  i  $y$  siły  $\vec{F}_{1,\text{wyp}}$ . Wartość i kierunek siły  $\vec{F}_{1,\text{wyp}}$  możemy zatem wyznaczyć z równania (3.6), co daje

$$\begin{aligned} F_{1,\text{wyp}} &= \sqrt{(F_{12})^2 + (-F_{13})^2} \\ &= \sqrt{(4 \cdot 10^{-6} \text{ N})^2 + (-1 \cdot 10^{-6} \text{ N})^2} \\ &= 4,1 \cdot 10^{-6} \text{ N} \quad (\text{odpowiedź}) \end{aligned}$$

oraz

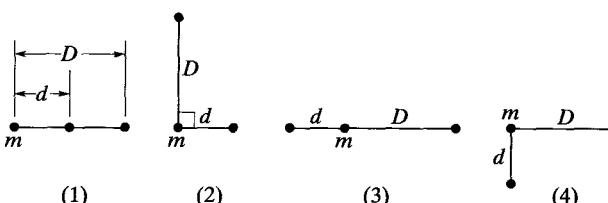
$$\theta = \arctg \frac{F_{12}}{-F_{13}} = \arctg \frac{4 \cdot 10^{-6} \text{ N}}{-1 \cdot 10^{-6} \text{ N}} = -76^\circ.$$

Czy ten kierunek jest zgodny z warunkami zadania? Nie — kierunek siły  $\vec{F}_{1,\text{wyp}}$  musi być pośredni między kierunkami sił  $F_{12}$  i  $-F_{13}$ . Przypomnij sobie z rozdziału 3 (poradą 3), że kalkulator podaje tylko jedną z możliwych wartości funkcji arctg. Drugą z tych wartości otrzymujemy, dodając  $180^\circ$  do pierwszej, co w naszym przypadku daje

$$-76^\circ + 180^\circ = 104^\circ. \quad (\text{odpowiedź})$$

Ta wartość wyznacza kierunek *zgodny* z warunkami zadania.

**SPRAWDZIAN 2:** Na rysunku przedstawiono cztery ustawienia trzech cząstek o jednakowej masie. a) Uszereguj je ze względu na wartość siły wypadkowej działającej na cząstkę oznaczoną jako  $m$ , od największej do najmniejszej. b) Czy w ustawieniu 2 kierunek siły wypadkowej jest bliższy kierunku odcinka  $d$ , czy odcinka  $D$ ?



## Przykład 14.2

Na rysunku 14.5 przedstawiono układ pięciu cząstek, których masy wynoszą:  $m_1 = 8 \text{ kg}$ ,  $m_2 = m_3 = m_4 = m_5 = 2 \text{ kg}$ , a ich położenie dane jest przez zdefiniowane na rysunku wielkości:  $a = 2 \text{ cm}$  i  $\theta = 30^\circ$ . Wyznacz wypadkową siłę grawitacyjną  $\vec{F}_{1,\text{wyp}}$ , jaką działają na cząstkę 1 wszystkie pozostałe cząstki.

### ROZWIĄZANIE:

Skorzystamy  $\text{O} \rightarrow$  z tego samego spostrzeżenia, którego użyliśmy w przykładzie 14.1. Rozwiązywanie zadania znacznie się uprości, gdy zwróciśmy uwagę na symetrię układu.

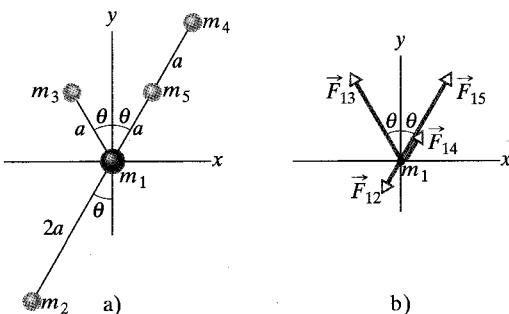
Aby wyznaczyć wartości sił działających na cząstkę 1, zauważmy najpierw, że cząstki 2 i 4 mają jednakowe masy oraz znajdują się w takiej samej odległości  $r = 2a$  od cząstki 1. Z

równania (14.1) otrzymujemy zatem

$$F_{12} = F_{14} = \frac{Gm_1m_2}{(2a)^2}. \quad (14.6)$$

Podobnie, cząstki 3 i 5 mają jednakowe masy oraz znajdują się w takiej samej odległości  $r = a$  od cząstki 1, wobec czego

$$F_{13} = F_{15} = \frac{Gm_1m_3}{a^2}. \quad (14.7)$$



Rys. 14.5. Przykład 14.2. a) Układ pięciu cząstek. b) Siły działające na cząstkę o masie  $m_1$  ze strony pozostałych cząstek

Moglibyśmy teraz podstawić do tych dwóch wzorów dane liczbowe i wyznaczyć wartości sił. Następnie zaznaczylibyśmy kierunki sił na diagramie, takim jak na rysunku 14.5b, i wyznaczyli siłę wypadkową. W tym celu rozłożylibyśmy wektory sił na składowe  $x$  i  $y$ , znaleźli wypadkowe składowe  $x$  i  $y$ , a wreszcie na tej podstawie wyznaczyli wektor siły wypadkowej.

#### Sztuka rozwiązywania zadań

### **Porad 1: Jak rysować wektor siły grawitacyjnej?**

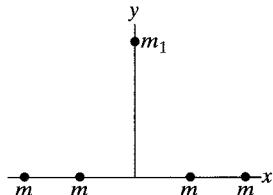
Gdy masz do czynienia z układem cząstek, jak na rysunku 14.4a, i masz obliczyć siłę grawitacyjną działającą na jedną z nich, będziesz musiał zwykle narysować diagram sił. Powinieneś wtedy narysować na nim tylko tę jedną cząstkę i siły działające na nią, tak jak to zrobiono na rysunku 14.4b. Jeśli chcesz umieścić wektory sił na rysunku, na którym są wszystkie cząstki, to pamiętaj, aby umieścić początki lub końce (lepiej początki) tych wektorów w punkcie, w którym znajduje się cząstka, na którą działa odpowiednia siła. Rysując wektory gdzie indziej, łatwo możesz pomylić ze sobą różne siły, a już na pewno je pomyliš, rysując

Zrobimy jednak inaczej, korzystając jeszcze raz z właściwości symetrii układu. Po pierwsze, zauważymy, że siły  $\vec{F}_{12}$  i  $\vec{F}_{14}$  mają taką samą wartość, lecz przeciwny kierunek, wobec czego ich wypadkowa jest równa zeru (siły te równoważą się wzajemnie). Z rysunku 14.5b i wzoru (14.7) wynika ponadto, że składowe  $x$  sił  $\vec{F}_{13}$  i  $\vec{F}_{15}$  także się równoważą, a ich składowe  $y$  mają jednakową wartość i taki sam kierunek — obie działają w dodatnim kierunku osi  $y$ . Wobec tego siła  $\vec{F}_{1,wyp}$  ma właśnie ten kierunek, a jej wartość jest równa podwojonej wartości składowej  $y$  siły  $\vec{F}_{13}$ , tzn.

$$\begin{aligned} F_{1,\text{wyp}} &= 2F_{13} \cos \theta = 2 \frac{Gm_1 m_3}{a^2} \cos \theta \\ &= 2 \frac{(6,67 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3/(\text{kg} \cdot \text{s}^2))(8 \text{ kg})(2 \text{ kg})}{(0,02 \text{ m})^2} \cos 30^\circ \\ &= 4,6 \cdot 10^{-6} \text{ N.} \quad (\text{odpowiedź}) \end{aligned}$$

Zauważ, że obecność cząstki 5 między cząstką 1 i 4 nie ma żadnego wpływu na wartość siły grawitacyjnej działającej na cząstkę 1 ze strony cząstki 4.

**SPRAWDZIAN 3:** Na rysunku przedstawiono układ pięciu cząstek. Cztery z nich mają jednakową masę  $m$  i znajdują się na osi  $x$  w położeniach symetrycznych względem osi  $y$ . Jaki jest kierunek wypadkowej siły grawitacyjnej, jaka działa na cząstkę o masie  $m_1$  ze strony pozostałych cząstek?



wektory sił w punktach, w których znajdują się cząstki, które tymi siłami działają.

**Porada 2:** Wykorzystuj właściwości symetrii układu

W przykładzie 14.2 wykorzystaliśmy właściwości symetrii układu cia&ł. Zauważliśmy, &e; czą&stki 2 i 4 s&ą położone symetrycznie wzgl&edem czą&stki 1, a więc siły  $\vec{F}_{12}$  i  $\vec{F}_{14}$  s&ą równowa&żne, wobec czego nie musimy oblicza&ć ich wartości. Stwierdziliśmy nast&epnie, &e; składowe  $x$  sił  $\vec{F}_{13}$  i  $\vec{F}_{15}$  tak&e; się równowa&żne, a ich składowe  $y$  s&ą takie same co do wartości i kierunku, co zaoszczędziło nam jeszcze trochę pracy.

#### 14.4. Grawitacja w pobliżu powierzchni Ziemi

Założymy, że Ziemia jest jednorodną kulą o masie  $M$ . Z równania (14.1) wynika, że wartość siły grawitacyjnej, jaką Ziemia działa na cząstkę o masie  $m$ , znajdująca się poza Ziemią w odległości  $r$  od jej środka, wynosi

$$F = G \frac{Mm}{r^2}. \quad (14.8)$$

Jeśli cząstkę tę puścimy swobodnie, to pod wpływem tej siły grawitacyjnej będzie ona spadać na Ziemię wzdłuż prostej skierowanej do środka Ziemi z przyspieszeniem, które nazywamy **przyspieszeniem grawitacyjnym** (lub **ziemskim**)  $\vec{a}_g$ . Związek wartości  $F$  i  $a_g$  jest dany przez drugą zasadę dynamiki

$$F = ma_g. \quad (14.9)$$

Podstawiając do tego równania wartość  $F$  ze wzoru (14.8) i rozwiązuje ją względem  $a_g$ , otrzymujemy

$$a_g = \frac{GM}{r^2}. \quad (14.10)$$

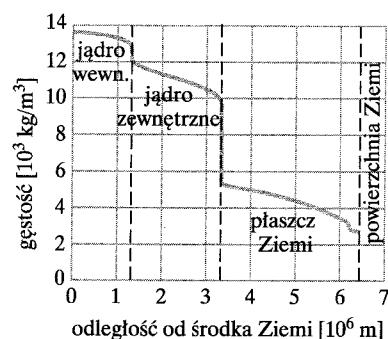
W tabeli 14.1 podano wartości  $a_g$  obliczone dla różnej wysokości nad powierzchnią Ziemi.

Tabela 14.1. Zmiana  $a_g$  z wysokością

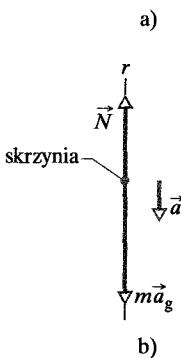
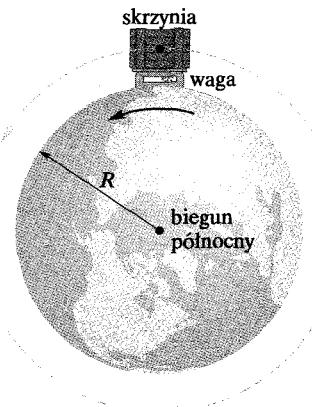
Wysokość [km]	$a_g$ [m/s <sup>2</sup> ]
0 (powierzchnia Ziemi)	9,83
8,8 (szczyt Mt. Everestu)	9,80
36,6 (największa wysokość załogowego lotu balonem)	9,71
400 (wahadłowiec kosmiczny na orbicie)	8,70
35 700 (satelita telekomunikacyjny)	0,225

Począwszy od paragrafu 5.6, przyjmowaliśmy, że układ związany z Ziemią jest inercjalny, co oznacza, że pomijaliśmy ruch obrotowy Ziemi. W tym przybliżeniu mogliśmy uważać, że przyspieszenie  $g$ , z jakim ciało spada swobodnie na Ziemię, jest równe przyspieszeniu grawitacyjnemu (które teraz oznaczamy przez  $a_g$ ). Zakładaliśmy ponadto, że wszędzie na powierzchni Ziemi  $g$  ma taką samą wartość, równą 9,8 m/s<sup>2</sup>. Gdybyśmy jednak dokładnie zmierzyli wartość  $g$ , to otrzymalibyśmy wartość nieco różną od tej, która wynika ze wzoru (14.10). Są trzy tego przyczyny: 1) Ziemia nie jest jednorodna, 2) nie jest też ona idealną kulą oraz 3) Ziemia się obraca. A skoro  $g$  jest różne od  $a_g$ , to mierzony przez nas ciężar ciała  $mg$  nie jest równy wartości działającej na ciało siły grawitacyjnej, obliczonej z równania (14.8). Rozważmy po kolejno trzy przyczyny stwierdzonych powyżej rozbieżności.

- Ziemia nie jest jednorodna.** Gęstość Ziemi (tzn. masa jej jednostkowej objętości) zmienia się wzdłuż jej promienia, jak pokazano na rysunku 14.6, a do tego gęstość skorupy ziemskiej (czyli jej najbardziej zewnętrznej części) jest różna w różnych miejscach na powierzchni Ziemi. Wobec tego w różnych miejscach na powierzchni Ziemi wartość  $g$  jest nieco inna.
- Ziemia nie jest kulista.** Ziemia ma w przybliżeniu kształt elipsoidy obrotowej, spłaszczonej przy biegunach, a grubszej w okolicy równika. Promień Ziemi na równiku jest o 21 km większy od jej promienia na biegunie. Gdy ciało znajduje się na biegunie, jest ono zatem bliżej gęstego jądra Ziemi niż wtedy, gdy znajduje się na równiku. Jest to jeden z powodów, dla którego przyspieszenie swobodnego spadku ciała rośnie w miarę przemieszczania go — na poziomie morza — z równika na biegun.



Rys. 14.6. Gęstość Ziemi jako funkcja odległości od jej środka. Na rysunku zaznaczono granice jądra wewnętrznego (stałego), jądra zewnętrznego (głównie ciekłego) i stałego płaszcza Ziemi. Grubość skorupy ziemskiej jest zbyt mała, aby można ją przedstawić na tym rysunku



Rys. 14.7. a) Skrzynia na wadze znajdującej się na równiku widziana z punktu na osi obrotu Ziemi nad biegiem północnym. b) Diagram sił działających na skrzynię. Oś  $r$  jest skierowana wzdłuż promienia Ziemi od jej środka na zewnątrz. Siłę grawitacyjną przedstawiono za pomocą równego jej wektora  $\vec{m}a_g$ . Siłę normalną działającą na skrzynię ze strony wagi oznaczono przez  $\vec{N}$ . Z powodu ruchu obrotowego Ziemi skrzynia porusza się z przyspieszeniem dośrodkowym  $\vec{a}$  skierowanym do środka Ziemi.

3. **Ziemia obraca się.** Oś obrotu Ziemi przechodzi przez jej bieguny: północny i południowy. Ciało umieszczone na powierzchni Ziemi gdziekolwiek poza biegunami wykonuje zatem ruch po okręgu wokół tej osi, przy czym ma ono przyspieszenie dośrodkowe skierowane do środka tego okręgu. Źródłem tego przyspieszenia musi być siła dośrodkowa, skierowana także do tego środka okręgu.

Aby się przekonać, dlaczego w wyniku ruchu obrotowego Ziemi  $g$  różni się od  $a_g$ , rozważmy proste doświadczenie polegające na umieszczeniu skrzyni o masie  $m$  na wadze znajdującej się na równiku. Na rysunku 14.7a przedstawiono tę sytuację, tak jak ją widać z punktu w przestrzeni wokółziemskiej znajdującego się wprost nad biegiem północnym.

Na rysunku 14.7b przedstawiono diagram sił działających na skrzynię, na którym pokazano dwie siły działające wzdłuż osi  $r$  przechodzącej przez środek Ziemi i skierowanej na zewnątrz. Siła normalna  $\vec{N}$ , działająca na skrzynię ze strony wagi, jest skierowana na zewnątrz, a więc w dodatnim kierunku osi  $r$ . Siła grawitacyjna, przedstawiona na rysunku za pomocą równego jej wektora  $\vec{m}a_g$ , jest skierowana do środka Ziemi. Gdy Ziemia się obraca, skrzynia porusza się wraz z nią, a zatem ma przyspieszenie dośrodkowe  $\vec{a}$  skierowane do środka Ziemi. Wiemy z równania (11.23), że przyspieszenie to jest równe  $\omega^2 R$ , przy czym  $\omega$  jest prędkością kątową Ziemi, a  $R$  — promieniem okręgu, po którym porusza się skrzynia (równym w przybliżeniu promieniowi Ziemi). Druga zasada dynamiki Newtona, zapisana dla składowych wzdłuż osi  $r$  ( $F_{wyp,r} = m a_r$ ), ma postać

$$N - m a_g = m(-\omega^2 R). \quad (14.11)$$

Wartość siły normalnej  $N$  jest równa wskazanemu przez wagę ciężarowi skrzyni  $mg$ . Podstawiając w równaniu (14.11)  $mg$  zamiast  $N$ , otrzymujemy

$$mg = m a_g - m(\omega^2 R), \quad (14.12)$$

co oznacza, że

$$\begin{pmatrix} \text{zmierzony} \\ \text{ciężar} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{wartość siły} \\ \text{grawitacyjnej} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \text{masa razy przyspieszenie} \\ \text{dośrodkowe} \end{pmatrix}.$$

Jak widać, ciężar wskazany przez wagę jest rzeczywiście mniejszy od wartości działającej na skrzynię siły grawitacyjnej, a przyczyną tego jest ruch obrotowy Ziemi.

Skracając  $m$  w równaniu (14.20), otrzymujemy związek  $g$  z  $a_g$ :

$$g = a_g - \omega^2 R, \quad (14.13)$$

który oznacza, że

$$\begin{pmatrix} \text{przyspieszenie} \\ \text{spadku ciała} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{przyspieszenie} \\ \text{grawitacyjne} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \text{przyspieszenie} \\ \text{dośrodkowe} \end{pmatrix}.$$

Jak widać, mierzone przyspieszenie jest rzeczywiście mniejsze od przyspieszenia grawitacyjnego, a przyczyną tego jest ruch obrotowy Ziemi.

Różnica przyspieszeń  $g$  i  $a_g$  jest równa  $\omega^2 R$  i jest największa na równiku (ponieważ promień toru skrzyni jest w tym miejscu największy). Aby obliczyć

tę różnicę, możemy skorzystać z równania (11.5) ( $\omega = \Delta\theta/\Delta t$ ) i wartości promienia Ziemi  $R = 6,37 \cdot 10^6$  m. Dla jednego obrotu Ziemi wokół jej osi  $\theta$  jest równe  $2\pi$  rad, a okres obrotu  $\Delta t$  wynosi około 24 h. Korzystając z tych wartości (i zamieniając godziny na sekundy), otrzymujemy, że  $g$  jest mniejsze od  $a_g$  zaledwie o około  $0,034$  m/s $^2$  (w stosunku do  $9,8$  m/s $^2$ ). Z tego względu pominiecie różnicy między przyspieszeniami  $g$  i  $a_g$  jest często całkiem dobrze usprawiedliwione. Podobnie, w wielu przypadkach można pominać różnicę między ciążarem ciała a wartością działającą na nie siły grawitacyjnej.

### Przykład 14.3

a) Astronautka o wzroście 1,70 m lewituje „stopami w dół” na pokładzie orbitalnej stacji kosmicznej znajdującej się w odległości  $r = 6,77 \cdot 10^6$  m od środka Ziemi. Wyznacz różnicę przyspieszenia grawitacyjnego w miejscu, w którym znajdują się jej stopy, i w miejscu, w którym znajduje się jej głowa.

#### ROZWIĄZANIE:

Skorzystamy ze spostrzeżenia, że Ziemię możemy potraktować w przybliżeniu jako jednorodną kulę o masie  $M_Z$ . Zgodnie z równaniem (14.10) przyspieszenie grawitacyjne w dowolnej odległości  $r$  od środka Ziemi jest równe

$$a_g = \frac{GM_Z}{r^2}. \quad (14.14)$$

Moglibyśmy po prostu podstawić do równania (10.14) kolejno  $r = 6,77 \cdot 10^6$  m oraz  $r = 6,77 \cdot 10^6$  m + 1,70 m, aby obliczyć przyspieszenie grawitacyjne w miejscu, w którym znajdują się stopy astronautki, i w miejscu, w którym znajduje się jej głowa. Kalkulator dałby nam jednak w obu przypadkach tę samą wartość  $a_g$ , a zatem zerową wartość szukanej różnicy, gdyż  $h$  jest niezwykle małe w porównaniu z  $r$ . Musimy więc postąpić inaczej. Pomoże nam następujący pomysł: skoro mamy do czynienia z bardzo małą różnicą wartości  $r$ , to możemy w przybliżeniu uznać ją za różniczkę  $dr$ . Różniczkując równanie (14.14) stronami względem  $r$ , otrzymujemy

$$da_g = -2 \frac{GM_Z}{r^3} dr, \quad (14.15)$$

przy czym  $da_g$  jest różniczkową zmianą przyspieszenia grawitacyjnego odpowiadającą różniczkowej zmianie  $dr$  odległości  $r$ . Dla naszej astronautki mamy  $dr = h$  oraz  $r = 6,77 \cdot 10^6$  m. Podstawiając wartości danych do równania (14.15), dostajemy

$$\begin{aligned} da_g &= -2 \frac{(6,67 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3/(\text{kg} \cdot \text{s}^2))(5,98 \cdot 10^{24} \text{ kg})}{(6,77 \cdot 10^6 \text{ m})^3} (1,70 \text{ m}) \\ &= -4,37 \cdot 10^{-6} \text{ m/s}^2. \end{aligned}$$

(odpowiedź)

Wynik ten oznacza, że pochodzące od przyciągania ziemskiego przyspieszenie grawitacyjne w miejscu, w którym znajdują się

stopy astronautki, jest nieznacznie większe niż w miejscu, w którym znajduje się jej głowa. Skutkiem różnicy sił grawitacyjnych jest rozciąganie ciała astronautki, lecz ta różnica jest tak niewielka, że jest ono całkowicie nieodczuwalne.

b) Wyobraźmy sobie teraz, że astronautka znajduje się znów „stopami w dół” na orbicie o takim samym promieniu  $r$ , równym  $6,77 \cdot 10^6$  m, lecz tym razem nad czarną dziurą o masie  $M_{cz.dz.} = 1,99 \cdot 10^{31}$  kg (czyli 10 razy większej od masy naszego Słońca). Ile wynosi w tym przypadku różnica przyspieszenia grawitacyjnego w miejscu, w którym znajdują się stopy astronautki, i w miejscu, w którym znajduje się jej głowa? Za granicę czarnej dziury przyjmuje się powierzchnię kuli o promieniu  $R_{cz.dz.} = 2,95 \cdot 10^4$  m, nazywaną też *horyzontem zdarzeń*. Z powierzchni tej, a także z wnętrza kuli, nie może nic uciec, nawet światło. Zauważ, że astronautka znajduje się (bardzo rozsądnie) dostatecznie daleko od tej powierzchni (w odległości  $r = 229R_{cz.dz.}$  od środka czarnej dziury).

#### ROZWIĄZANIE:

Podobnie jak w części (a) zadania,  $h$  jest bardzo małe w porównaniu z  $r$ , wobec czego możemy przybliżyć przyrost  $r$  różniczką tej wielkości, tzn. skorzystać z równania (14.15). Tym razem podstawimy jednak do niego nie  $M_Z$ , lecz  $M_{cz.dz.} = 1,99 \cdot 10^{31}$  kg. Otrzymamy zatem

$$\begin{aligned} da_g &= -2 \frac{(6,67 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3/(\text{kg} \cdot \text{s}^2))(1,99 \cdot 10^{31} \text{ kg})}{(6,77 \cdot 10^6 \text{ m})^3} (1,70 \text{ m}) \\ &= -14,5 \text{ m/s}^2. \end{aligned}$$

(odpowiedź)

Okazuje się, że wynikające z przyciągania przez czarną dziurę przyspieszenie grawitacyjne w miejscu, w którym znajdują się stopy astronautki, jest znacznie większe niż w miejscu, w którym znajduje się jej głowa. Skutkiem różnicy sił grawitacyjnych jest rozciąganie ciała astronautki, które jest dość bolesne, lecz możliwe do wytrzymywania. Gdyby jednak astronautka przybliżyła się bardziej do czarnej dziury, rozciąganie jej ciała wzrosłoby dramatycznie.

## 14.5. Grawitacja wewnętrz Ziemi

Twierdzenie Newtona o powłoce obowiązuje również w przypadku, gdy cząstka znajduje się *wewnątrz* jednorodnej powłoki. W tej sytuacji mówi ono, że:

► *Wypadkowa siła grawitacyjna, jaką ciało w kształcie jednorodnej powłoki kulistej działa na cząstkę znajdującej się wewnątrz powłoki, jest równa zeru.*

*Uwaga:* twierdzenie to *nie mówi*, że siły grawitacyjne działające na cząstkę ze strony różnych elementów powłoki w jakiś magiczny sposób znikają. Mówi ono tylko tyle, że *suma wektorowa* sił działających na cząstkę ze strony wszystkich elementów powłoki jest równa zeru.

Gdyby gęstość Ziemi była wszędzie taka sama, działająca na cząstkę siła grawitacyjna byłaby największa na powierzchni Ziemi i maleałaby przy oddalaniu się cząstki od tej powierzchni na zewnątrz. Gdyby natomiast cząstka przybliżała się do środka Ziemi, na przykład była opuszczana w głąb szybu kopalni, działająca na nią siła grawitacyjna zmieniałaby się z dwóch powodów. Z jednej strony, cząstka znajdowałaby się coraz bliżej środka Ziemi, co prowadziłoby do wzrostu tej siły. Z drugiej strony, rosłaby grubość warstwy Ziemi odległej od jej środka bardziej niż cząstka, co prowadziłoby do zmniejszania się tej siły, gdyż ze strony tej warstwy nie działa na cząstkę siła grawitacyjna.

Gdyby Ziemia była jednorodna, przeważałby ten drugi czynnik i siła działająca na cząstkę malałaby przez cały czas zbliżania się jej do środka Ziemi. Ziemia nie jest jednak jednorodna i — jak się okazuje — siła działająca na cząstkę przy jej przemieszczaniu od powierzchni do środka Ziemi początkowo rośnie. Na pewnej głębokości jest największa, a dopiero potem maleje.

### Przykład 14.4

W jednej z pierwszych książek, które można zaliczyć do gatunku fantastyki naukowej (zatytuowanej *Pole to Pole*, czyli *Z bieguna na bieguna*), George Griffith opisuje podjętą przez trzech badaczy próbę podróży — specjalnym pojazdem — z bieguna południowego na północny naturalny (oczywiście fikcyjny) tunelem przebiegającym wprost przez środek Ziemi (rys. 14.8). Według autora tej opowieści, gdy pojazd zbliża się do środka Ziemi, działająca na podróżników siła grawitacyjna niepokojąco rośnie, a potem — dokładnie w środku Ziemi — staje się nagle całkiem równa zeru, choć tylko na chwilę. Potem pojazd przebywa drugą połowę drogi i dociera do bieguna północnego.

Sprawdź, czy opis Griffitha jest zgodny z prawami fizyki, wyznaczając siłę grawitacyjną działającą na pojazd o masie  $m$  w zależności od jego odległości  $r$  od środka Ziemi. Załóż, że Ziemia jest jednorodną kulą o gęstości (tzn. masie jednostkowej objętości) równej  $\rho$ .

### ROZWIĄZANIE:

Wykorzystamy trzy wnioski z twierdzenia Newtona o powłoce:

► 1. Gdy pojazd znajduje się w odległości  $r$  od środka Ziemi, wypadkowa siła grawitacyjna działająca na niego ze strony tej części Ziemi, która jest zawarta na zewnątrz kuli o promieniu  $r$ , jest równa zeru.

► 2. Wypadkowa siła grawitacyjna działająca na pojazd ze strony tej części Ziemi, która jest zawarta wewnątrz kuli o promieniu  $r$ , nie jest równa零.

► 3. Siłę tę możemy obliczyć, przyjmując, że masa  $M_{\text{wewn}}$  tej części Ziemi, która jest zawarta wewnątrz kuli o promieniu  $r$ , jest skupiona w środku Ziemi.

Z wniosków tych wynika, że wartość działającej na pojazd siły grawitacyjnej jest — zgodnie ze wzorem (14.1) — równa

$$F = \frac{GmM_{\text{wewn}}}{r^2}. \quad (14.16)$$

Aby wyznaczyć masę  $M_{\text{wewn}}$  w zależności od  $r$ , zauważmy, że objętość  $V_{\text{wewn}}$  zajmowana przez tę masę jest równa  $\frac{4}{3}\pi r^3$  oraz że gęstość tej (podobnie jak każdej innej) części Ziemi wynosi  $\rho$ .

Mamy zatem

$$M_{\text{wewn}} = \rho V_{\text{wewn}} = \rho \frac{4\pi r^3}{3}. \quad (14.17)$$

Podstawiając to wyrażenie do równania (14.16), otrzymujemy ostatecznie

$$F = \frac{4\pi Gm\rho}{3}r. \quad (\text{odpowiedź}) \quad (14.18)$$

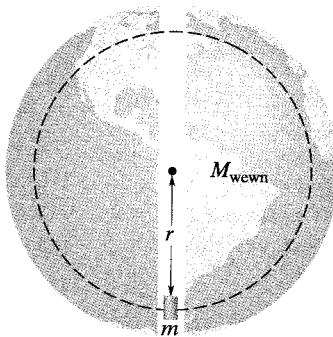
Z równania tego wynika, że wartość siły  $F$  jest proporcjonalna do odległości pojazdu od środka Ziemi  $r$ . Oznacza to, że gdy  $r$  maleje, wartość  $F$  również maleje — przeciwnie niż to opisał Griffith — aż do zera, któremu jest równa, gdy pojazd znajduje się w środku Ziemi. Tak więc przynajmniej w tym punkcie Griffith podał właściwą wartość siły grawitacyjnej.

Równanie (14.18) możemy także zapisać w postaci wektorowej, przyjmując osią  $r$  skierowaną wzdłuż średnicy Ziemi. Jeśli oznaczymy stały współczynnik  $4\pi Gm\rho/3$  przez  $K$ , to równanie (14.18) możemy zapisać w postaci

$$\vec{F} = -K\vec{r}, \quad (14.19)$$

przy czym znak minus wyraża fakt, że wektor siły  $\vec{F}$  i wektor położenia pojazdu  $\vec{r}$  są przeciwnie skierowane. Równanie (14.19) ma taką samą postać jak prawo Hooke'a (7.20). Wynika stąd, że w przyjętych przez nas warunkach idealnych pojazd poruszałby się ruchem drgającym jak klocek na sprężynie, a środkiem drgań

byłby środek Ziemi. Po startie z bieguna południowego pojazd spadałby do środka Ziemi, następnie docierał do bieguna północnego (tak, jak to opisał Griffith), potem przebywał tę drogę w przeciwnym kierunku i tak dalej.



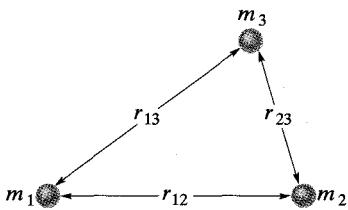
Rys. 14.8. Przykład 14.4. Pojazd o masie  $m$  spada z prędkością początkową równą零 w tunelu łączącym bieguna Ziemi, południowy i północny. W pewnej chwili pojazd znajduje się w odległości  $r$  od środka Ziemi. Masę tej części Ziemi, która jest zawarta wewnętrz kuli o promieniu  $r$ , oznaczono przez  $M_{\text{wewn}}$

## 14.6. Grawitacyjna energia potencjalna

W paragrafie 8.3 rozważaliśmy grawitacyjną energię potencjalną układu cząstka–Ziemia. Zajmowaliśmy się tylko sytuacjami, w których cząstka była blisko powierzchni Ziemi, aby można było uważać, że siła grawitacyjna jest stała. Przymawialiśmy też, że dla pewnej konfiguracji układu — konfiguracji odniesienia — grawitacyjna energia potencjalna jest równa零. Często była to konfiguracja, w której cząstka znajduje się na powierzchni Ziemi. Przy tym założeniu, gdy cząstka nie znajduje się na powierzchni Ziemi, grawitacyjna energia potencjalna układu maleje w miarę zmniejszania się odległości cząstki od Ziemi.

Obecnie rozważymy to zagadnienie nieco bardziej ogólnie. Będziemy się zajmować grawitacyjną energią potencjalną  $E_p$  dwóch cząstek o masach  $m$  i  $M$ , odległych od siebie o  $r$ . Jak poprzednio, przyjmiemy, że pewnej konfiguracji układu odpowiada wartość  $E_p$  równa zero. Aby otrzymać proste równania, przyjmiemy jednak, że w konfiguracji odniesienia odległość cząstek  $r$  jest tak duża, aby można ją było przyjąć za nieskończoną. W tych warunkach grawitacyjna energia potencjalna także maleje, gdy zmniejsza się odległość cząstek. Ponieważ jednak  $E_p = 0$  dla  $r = \infty$ , energia potencjalna jest ujemna dla każdej skończonej odległości cząstek i jest „tym bardziej ujemna”, im bliżej siebie znajdują się te cząstki.

Jak wykażemy w następnym punkcie, grawitacyjną energię potencjalną układu dwóch cząstek możemy w tych warunkach wyrazić jako



Rys. 14.9. Układ trzech cząstek (odległość każdej pary cząstek oznaczono przez  $r$  z dwucyfrowym wskaźnikiem dolnym, zawierającym numery cząstek). Grawitacyjna energia potencjalna układu jest równa sumie grawitacyjnych energii potencjalnych wszystkich trzech par cząstek.

$$E_p = -\frac{GMm}{r} \quad (\text{grawitacyjna energia potencjalna}). \quad (14.20)$$

Zauważ, że funkcja  $E_p(r)$  dąży do zera, gdy  $r$  dąży do nieskończoności, i że dla dowolnej skończonej wartości  $r$  wartość  $E_p(r)$  jest ujemna.

Energia potencjalna dana wzorem (14.20) odnosi się do układu dwóch cząstek, a nie do którejkolwiek z nich z osobna. Nie można jej podzielić i powiedzieć, że jakąś jej część ma jedna cząstka, a jakąś inną — druga. Jeśli jednak  $M \gg m$ , na przykład gdy układ składa się z Ziemi (o masie  $M$ ) i piłki tenisowej (o masie  $m$ ), to często mówi się o „energii potencjalnej piłki”. Jest to usprawiedliwione tym, że gdy ruch piłki odbywa się w pobliżu powierzchni Ziemi, zmiany energii potencjalnej układu piłka–Ziemia są równe niemal w całości zmianom energii kinetycznej piłki, gdyż zmiany energii kinetycznej Ziemi są tak małe, że nie da się ich zmierzyć. Podobnie, w paragrafie 14.8 będziemy mówić o „energii potencjalnej sztucznego satelity” na orbicie wokół Ziemi, ponieważ masa satelity jest bardzo mała w porównaniu z masą Ziemi. Gdy jednak mamy do czynienia z energią potencjalną układu ciał o zbliżonej masie, musimy pamiętać, aby zawsze traktować je jako układ ciał.

Gdy badany układ składa się z więcej niż dwóch cząstek, rozważamy każdą parę cząstek po kolejno, obliczając grawitacyjną energię potencjalną tej pary z równania (14.20), jak gdyby innych cząstek nie było, po czym dodajemy do siebie otrzymane wyniki. Na przykład dla układu trzech cząstek z rysunku 14.9, wyznaczając energię potencjalną każdej ich pary z równania (14.20), otrzymujemy energię potencjalną układu równą

$$E_p = -\left(\frac{Gm_1m_2}{r_{12}} + \frac{Gm_1m_3}{r_{13}} + \frac{Gm_2m_3}{r_{23}}\right). \quad (14.21)$$

### Wyprowadzenie wzoru (14.20)

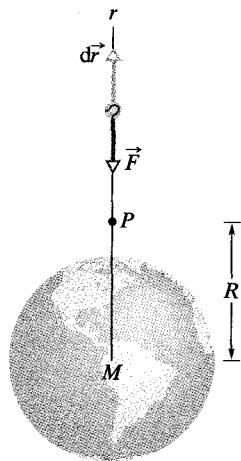
Wystrzelmy piłkę z powierzchni Ziemi pionowo w górę, po torze pokazanym na rysunku 14.10. Chcemy znaleźć wyrażenie na grawitacyjną energię potencjalną piłki  $E_p$  w punkcie  $P$ , leżącym na jej torze w odległości  $R$  od środka Ziemi. W tym celu wyznaczmy najpierw pracę  $W$  wykonaną nad piłką przez siłę grawitacyjną przy przemieszczeniu piłki z punktu  $P$  na bardzo dużą (nieskończoną) odległość od Ziemi. Siła grawitacyjna  $\vec{F}(r)$  jest siłą zmienną (jej wartość zależy od  $r$ ), a zatem do obliczenia pracy musimy wykorzystać metody z paragrafu 7.6. W zapisie wektorowym mamy

$$W = \int_R^{\infty} \vec{F}(r) \cdot d\vec{r}. \quad (14.22)$$

Powyższa całka zawiera iloczyn skalarny siły  $\vec{F}(r)$  i wektora różniczkowego przemieszczenia piłki  $d\vec{r}$  wzduł jej toru. Iloczyn skalarny możemy wyrazić jako

$$\vec{F}(r) \cdot d\vec{r} = F(r)dr \cos \phi, \quad (14.23)$$

przy czym  $\phi$  jest kątem tworzonym przez kierunki wektorów  $\vec{F}(r)$  i  $d\vec{r}$ . Do wzoru tego podstawiamy  $\phi = 180^\circ$  oraz prawą stronę równania (14.1) zamiast  $F(r)$ , co



Rys. 14.10. Piłka wystrzelona pionowo w górę z powierzchni Ziemi po torze przechodzącym przez punkt  $P$ . Na rysunku przedstawiono także działającą na piłkę siłę grawitacyjną  $\vec{F}$  oraz wektor różniczkowego przemieszczenia piłki  $d\vec{r}$ . Oba te wektory są skierowane wzduł osi  $r$  mającej kierunek promienia Ziemi.

daje

$$\vec{F}(r) \cdot d\vec{r} = -\frac{GMm}{r^2} dr,$$

gdzie  $M$  jest masą Ziemi, a  $m$  — masą piłki.

Podstawiając to wyrażenie do równania (14.22) i obliczając całkę, otrzymujemy

$$W = -GMm \int_R^\infty \frac{1}{r^2} dr = \left[ \frac{GMm}{r} \right]_R^\infty = 0 - \frac{GMm}{R} = -\frac{GMm}{R}. \quad (14.24)$$

W równaniu (14.24)  $W$  jest pracą potrzebną do przeniesienia piłki z punktu  $P$  (znajdującego się w odległości  $R$  od środka Ziemi) do nieskończoności. Z równania (8.1) ( $\Delta E_p = -W$ ) wynika, że pracę tę możemy też zapisać jako różnicę energii potencjalnej:

$$E_{p,\infty} - E_p = -W.$$

Energia potencjalna w nieskończoności  $E_{p,\infty}$  jest równa零, a  $E_p$  jest energią potencjalną w punkcie  $P$ . Podstawiając do powyższego wzoru  $W$  z równania (14.24), otrzymujemy zatem

$$E_p = W = -\frac{GMm}{R}.$$

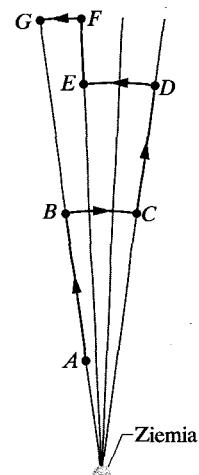
Zamieniając  $R$  na  $r$ , otrzymujemy stąd równanie (14.20), które zamierzaliśmy wyprowadzić.

## Niezależność pracy od drogi

Wyobraźmy sobie, że przemieszczamy piłkę z punktu  $A$  do punktu  $G$  po drodze złożonej z trzech odcinków radialnych oraz trzech łuków okręgów (o środku w środku Ziemi), jak pokazano na rysunku 14.11. Chcemy obliczyć całkowitą pracę  $W$  wykonaną nad piłką przez działającą na nią ze strony Ziemi siłę grawitacyjną  $\vec{F}$  przy przeniesieniu piłki z  $A$  do  $G$ . Praca wykonana przy przemieszczaniu piłki wzduż każdego łuku jest równa zero, ponieważ siła  $\vec{F}$  jest prostopadła do tych łuków w każdym ich punkcie. Siła  $\vec{F}$  wykonuje zatem pracę tylko przy przemieszczaniu piłki wzduż odcinków radialnych, a praca całkowita  $W$  jest równa sumie prac wykonanych na każdym z tych odcinków.

Wyobraźmy sobie następnie, że w myśli skracamy wszystkie łuki do zera, a zatem piłka przemieszcza się z  $A$  do  $G$  po prostym torze radialnym. Czy zmienia to wartość  $W$ ? Nie — praca wykonana przy przesunięciu piłki wzduż tych łuków była równa zero, a więc ich usunięcie nie zmienia pracy całkowitej. Tor, po którym przemieszcza się piłka z  $A$  do  $B$ , jest teraz wyraźnie inny niż poprzednio, lecz praca wykonana przez siłę  $\vec{F}$  jest taka sama.

Rozważyliśmy już to zagadnienie w sposób ogólny w paragrafie 8.2. Istota rzeczy polega na tym, że siła grawitacyjna jest siłą zachowawczą, co sprawia, że praca wykonana przez tę siłę nad cząstką przy jej przeniesieniu z pewnego punktu początkowego (pocz) do pewnego punktu końcowego (końc) nie zależy od drogi, po której cząstka porusza się między tymi punktami. Jak wynika z równania (8.1), zmiana grawitacyjnej energii potencjalnej  $\Delta E_p$  przy przeniesieniu cząstki



Rys. 14.11. Przemieszczamy piłkę w pobliżu powierzchni Ziemi z punktu  $A$  do punktu  $G$  po drodze złożonej z odcinków radialnych oraz łuków okręgów

z punktu początkowego do punktu końcowego wynosi

$$\Delta E_p = E_{p,\text{konc}} - E_{p,\text{pocz}} = -W. \quad (14.25)$$

Z tego, że praca  $W$  wykonana przez siłę zachowawczą nie zależy od drogi, po której porusza się cząstka, wynika, że towarzysząca temu zmiana grawitacyjnej energii potencjalnej  $\Delta E_p$  również nie zależy od tej drogi.

### Energia potencjalna a siła

Gdy wyprowadzaliśmy równanie (14.20), wyznaczyliśmy energię potencjalną  $E_p(r)$  jako funkcję  $r$  na podstawie zależności siły  $F(r)$  od  $r$ . Powinniśmy móc też postąpić na odwrót, tzn. obliczyć siłę na podstawie znajomości energii potencjalnej. Korzystając z równania (8.20), możemy napisać

$$F = -\frac{dE_p}{dr} = -\frac{d}{dr}\left(-\frac{GMm}{r}\right) = -\frac{GMm}{r^2}. \quad (14.26)$$

Równanie to jest niczym innym, jak prawem powszechnego ciążenia Newtona (14.1). Znak minus wskazuje na to, że siła działająca na ciało o masie  $m$  jest skierowana w stronę ciała o masie  $M$ .

### Prędkość ucieczki

Gdy wystrzelimy pocisk pionowo w górę, będzie się on zwykle poruszał coraz wolniej, aż do osiągnięcia prędkości równej zera, po czym powróci na Ziemię. Jeśli jednak nadamy mu dostatecznie dużą prędkość początkową, to będzie się poruszał w górę bez końca, zatrzymując się teoretycznie dopiero w nieskończonej odległości od Ziemi. Minimalną prędkość, jaka jest do tego potrzebna, nazywa się *prędkością ucieczki* (w tym przypadku z Ziemi).

Rozważmy pocisk o masie  $m$  opuszczający powierzchnię planety (lub jakieś innego ciała lub układu niebieskiego) z prędkością ucieczki  $v$ . Ma on energię kinetyczną  $E_k$  równą  $\frac{1}{2}mv^2$  oraz energię potencjalną  $E_p$  daną wzorem (14.20)

$$E_p = -\frac{GMm}{R},$$

przy czym  $M$  jest masą planety, a  $R$  — jej promieniem.

Pocisk ma się zatrzymać w nieskończoności, a zatem ma tam mieć energię kinetyczną równą zera. Jego energia potencjalna będzie wówczas także równa zera, gdyż tak właśnie wybraliśmy konfigurację ciał odpowiadającą zerowej energii potencjalnej. Całkowita energia pocisku jest zatem w nieskończoności równa zera. Z zasady zachowania energii wynika, że jej całkowita energia musi być równa zera także na powierzchni planety, wobec czego

$$E_k + E_p = \frac{1}{2}mv^2 + \left(-\frac{GMm}{R}\right) = 0.$$

Otrzymujemy stąd

$$v = \sqrt{\frac{2GM}{R}}. \quad (14.27)$$

Prędkość ucieczki  $v$  nie zależy od kierunku, w jakim pocisk opuszcza planetę. W praktyce doprowadzenie do ucieczki pocisku jest trochę łatwiejsze, jeśli kierunek wystrzału jest nieco odchylony od pionu w kierunku, w którym porusza się punkt startu pocisku przy obrocie planety wokół swej osi. Na przykład start rakiet z wyrzutni na Przylądku Canaveral odbywa się w kierunku nieco odchylonym na wschód od pionu, aby wykorzystać prędkość obrotu Ziemi, która wynosi tam 1500 km/h w kierunku wschodnim.

Z równania (14.27) można wyznaczyć prędkość ucieczki pocisku z dowolnego ciała niebieskiego, podstawiając do niego masę  $M$  i promień  $R$  tego ciała. W tabeli 14.2 zebrane wartości prędkości ucieczki z kilku ciał niebieskich.

**Tabela 14.2.** Prędkość ucieczki z kilku ciał niebieskich

Ciało	Masa [kg]	Promień [m]	Prędkość ucieczki [km/s]
Ceres <sup>a</sup>	$1,17 \cdot 10^{21}$	$3,8 \cdot 10^5$	0,64
Księżyc Ziemi	$7,36 \cdot 10^{22}$	$1,74 \cdot 10^6$	2,38
Ziemia	$5,98 \cdot 10^{24}$	$6,37 \cdot 10^6$	11,2
Jowisz	$1,90 \cdot 10^{27}$	$7,15 \cdot 10^7$	59,5
Słońce	$1,99 \cdot 10^{30}$	$6,96 \cdot 10^8$	618
Syriusz B <sup>b</sup>	$2 \cdot 10^{30}$	$1 \cdot 10^7$	5200
Gwiazda neutronowa <sup>c</sup>	$2 \cdot 10^{30}$	$1 \cdot 10^4$	$2 \cdot 10^5$

<sup>a</sup>Najciętsza planetoida.

<sup>b</sup>Biały karzeł (gwiazda w jednym z końcowych etapów ewolucji) tworzący układ z bardzo jasną gwiazdą — Syriuszem.

<sup>c</sup>Obiekt gwiazdowy powstały podczas wybuchu supernowej w wyniku zapadania grawitacyjnego jądra gwiazdy.

**SPRAWDZIAN 4:** Odsuwasz piłkę o masie  $m$  od kuli o masie  $M$ . a) Czy grawitacyjna energia potencjalna układu piłka–kula rośnie przy tym, czy maleje? b) Czy siła grawitacyjna działająca między piłką i kulą wykonuje pracę dodatnią, czy ujemną?

## Przykład 14.5

Planetoida zbliża się wzdłuż prostej przechodzącej przez środek Ziemi. Jej prędkość względem Ziemi wynosi 12 km/s, gdy jej odległość od środka Ziemi jest równa 10 promieniom Ziemi. Po miń obecność atmosfery ziemskiej i oblicz prędkość planetoidy w chwili jej dotarcia do powierzchni Ziemi.

### ROZWIĄZANIE:

Zauważmy, że skoro mamy pominąć wpływ atmosfery ziemskiej na ruch planetoidy, to możemy przyjąć, że energia mechaniczna układu planetoida–Ziemia jest zachowana. Wobec tego energia mechaniczna układu w chwili końcowej (tzn. gdy planetoida dociera do powierzchni Ziemi) jest równa jego energii mechanicznej w chwili początkowej (której dotyczą dane zadania). Możemy to zapisać jako

$$E_{k,końc} + E_{p,końc} = E_{k,pocz} + E_{p,pocz}, \quad (14.28)$$

przy czym  $E_k$  jest energią kinetyczną, a  $E_p$  — grawitacyjną energią potencjalną.

Drugie ważne spostrzeżenie mówi, że jeśli możemy uważać układ za izolowany, to w czasie ruchu planetoidy zachowany jest także pęd układu. Wobec tego zmiana pędu planetoidy i zmiana pędu Ziemi mają taką samą wartość, a przeciwny kierunek. Masa Ziemi jest jednak znacznie większa od masy planetoidy, co oznacza, że zmianę prędkości Ziemi można pominąć w porównaniu ze zmianą prędkości planetoidy. A stąd wynika, że pominąć można również zmianę energii kinetycznej Ziemi i przyjąć, że energia kinetyczna w równaniu (14.28) to tylko energia kinetyczna planetoidy.

Oznaczmy masę planetoidy przez  $m$ , a masę Ziemi ( $5,98 \cdot 10^{24}$  kg) przez  $M$ . Odległość planetoidy od środka Ziemi wynosi w chwili początkowej  $10R_Z$ , a w chwili końcowej —  $R_Z$ , gdzie

przez  $R_Z$  oznaczyliśmy promień Ziemi ( $6,37 \cdot 10^6$  m). Podstawiając do równania (14.28) prawą stronę wzoru (14.20) zamiast  $E_p$  oraz  $\frac{1}{2}mv^2$  zamiast  $E_k$ , otrzymujemy

$$\frac{1}{2}mv_{\text{kofic}}^2 - \frac{GMm}{R_Z} = \frac{1}{2}mv_{\text{pocz}}^2 - \frac{GMm}{10R_Z}.$$

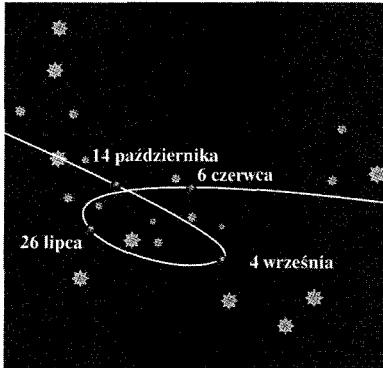
Po przekształceniu tego równania i podstawieniu do niego danych liczbowych dostajemy

$$\begin{aligned} v_{\text{kofic}}^2 &= v_{\text{pocz}}^2 + \frac{2GM}{R_Z} \left(1 - \frac{1}{10}\right) \\ &= (12 \cdot 10^3 \text{ m/s})^2 \\ &\quad + \frac{2(6,67 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3/(\text{kg} \cdot \text{s}^2))(5,98 \cdot 10^{24} \text{ kg})}{6,37 \cdot 10^6 \text{ m}} \cdot 0,9 \\ &= 2,567 \cdot 10^8 \text{ m}^2/\text{s}^2, \end{aligned}$$

a stąd

$$v_{\text{kofic}} = 1,60 \cdot 10^4 \text{ m/s} = 16 \text{ km/s}. \quad (\text{odpowiedź})$$

Mając taką prędkość, nawet niezbyt wielka planetoida mogłaby spowodować znaczne zniszczenia na powierzchni Ziemi. Na przykład przy uderzeniu w Ziemię planetoidy o średnicy 5 m wydzieliliby się energia równa energii wybuchu jądrowego nad Hiroziszim. Niepokojące jest, że w pobliżu orbity Ziemi krążą około 500 milionów planetoid o tej wielkości. W roku 1994 jedna z nich najprawdopodobniej weszła w atmosferę ziemską i wybuchła na wysokości 20 km nad odległą wysepką na południu Oceanu Spojnego (wyzwalając w sześciu satelitach wojskowych sygnały ostrzegawcze o eksplozji jądrowej). Uderzenie w Ziemię planetoidy o średnicy 500 m (których jest może i milion w pobliżu orbity Ziemi) mogłoby położyć kres całej współczesnej cywilizacji i niemal zniszczyć cały gatunek ludzki na Ziemi.



Rys. 14.12. Tor ruchu Marsa na tle gwiazdozbioru Koziorożca obserwowany w 1971 roku. Zaznaczono położenia planety w czterech wybranych dniach. Zarówno Mars, jak i Ziemia krążą po orbitach wokół Słońca, tak że z Ziemi obserwujemy ruch Marsa względem Ziemi; czasem wygląda to tak, jak gdyby Mars zataczał na swym torze pętlę.

## 14.7. Planety i satelity: prawa Keplera

Ruch planet obserwowany na tle gwiaździstego nieba był dla ludzi zagadką od niepamiętnych czasów. Szczególnie zadziwiająca wydawała się pętla toru Marsa pokazana na rysunku 14.12. Prawa empiryczne opisujące ruch planet podał Johannes Kepler (1571–1630) po badaniach, które zajęły mu całe życie. Na podstawie obszernych danych obserwacyjnych, które zebrał Tycho Brahe (1546–1601), ostatni z wielkich astronomów dokonujących obserwacji nieba bez użycia teleskopu, Kepler sformułował trzy prawa ruchu planet noszące dziś jego imię. Newton (1642–1727) wykazał później, że prawa Keplera wynikają z jego prawa powszechnego ciążenia.

W tym paragrafie omówimy po kolejno wszystkie prawa Keplera. Choć będziemy ich używać do badania ruchu planet wokół Słońca, stosują się one tak samo do ruchu satelitów — naturalnych i sztucznych — Ziemi lub każdego innego ciała o dużej masie.

- **1. Pierwsze prawo Keplera:** Wszystkie planety poruszają się po orbitach w kształcie elipsy, w której ognisko znajduje się Słońce.

Planetę o masie  $m$  poruszającą się po takiej orbicie wokół Słońca o masie  $M$  przedstawiono na rysunku 14.13. Zakładamy, że  $M \gg m$ , tak że środek masy układu planeta–Słońce znajduje się w przybliżeniu w środku Słońca.

Wielkość orbity przedstawionej na rysunku 14.13 jest wyznaczona przez wartość jej **półosi wielkiej  $a$**  i **mimośrodu  $e$** , zdefiniowanego tak, że  $ea$  jest odlegością każdego z ognisk elipsy  $F$  i  $F'$  od jej środka. **Mimośród równy zeru odpowiada okręgiowi**, będącemu przypadkiem szczególnym elipsy, w którym oboje ogniska są jednym punktem. Mimośrody orbit planet nie są zbyt wielkie, tak że orbity te — narysowane na kartce — wyglądają jak okręgi. Mimośród orbity

z rysunku 14.13 — narysowanej tak, aby było widać, że jest to elipsa — jest równy 0,74. Mimośród orbity Ziemi wynosi zaledwie 0,0167.

► **2. Drugie prawo Keplera:** Linia łącząca planetę ze Słońcem zakreśla w jednakowych odstępach czasu jednakowe pola powierzchni w płaszczyźnie orbity; inaczej mówiąc, wielkość  $dS/dt$ , przy czym  $S$  jest polem powierzchni zakreślonej przez tę linię, jest stała.

Jakościowo rzecz biorąc, z prawa tego wynika, że planeta porusza się po orbicie wolniej, gdy jest daleko od Słońca, a szybciej, gdy jest bliżej niego. Jak się okazuje, drugie prawo Keplera jest równoważne stwierdzeniu, że w ruchu planet spełniona jest zasada zachowania momentu pędu. Spróbujmy to udowodnić.

Pole powierzchni zacienionego klinu na rysunku 14.14a jest dobrym przybliżeniem pola powierzchni zakreślonego w czasie  $\Delta t$  przez linię łączącą planetę ze Słońcem, gdy ich odległość jest bliska  $r$ . Pole powierzchni tego klinu  $\Delta S$  jest równe w przybliżeniu polu trójkąta o podstawie  $r\Delta\theta$  i wysokości  $r$ . Pole trójkąta jest równe połowie iloczynu podstawy i wysokości, a zatem  $\Delta S \approx \frac{1}{2}r^2\Delta\theta$ . To wyrażenie na  $\Delta S$  jest tym bardziej dokładne, im bardziej  $\Delta t$  (a zatem i  $\Delta\theta$ ) jest bliskie zera. Chwilowa szybkość zmiany pola powierzchni jest wobec tego równa

$$\frac{dS}{dt} = \frac{1}{2}r^2 \frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{2}r^2\omega, \quad (14.29)$$

przy czym  $\omega$  jest prędkością kątową obrotu linii łączącej planetę ze Słońcem.

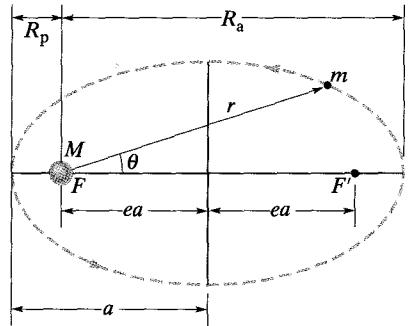
Na rysunku 14.14b pokazano pęd planety  $\vec{p}$  oraz jego składowe: radialną i prostopadłą do  $r$ . Z równania (12.20) ( $L = rp_{\perp}$ ) wynika, że wartość momentu pędu planety względem Słońca  $\vec{L}$  jest równa iloczynowi  $r$  i  $p_{\perp}$ , czyli składowej  $\vec{p}$  prostopadłej do  $r$ . Dla planety o masie  $m$  mamy zatem

$$L = rp_{\perp} = (r)(mv_{\perp}) = (r)(m\omega r) = mr^2\omega, \quad (14.30)$$

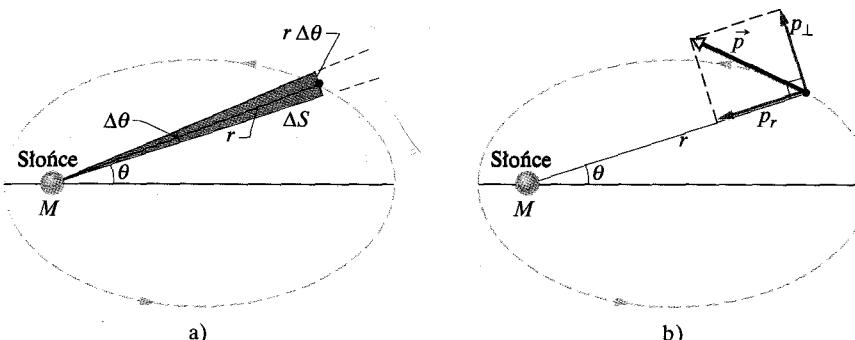
przy czym zamiast  $v_{\perp}$  wstawiliśmy — na podstawie równania (11.18) — wielkość  $\omega r$ . Eliminując  $r^2\omega$  z równań (14.29) i (14.30), otrzymujemy

$$\frac{dS}{dt} = \frac{L}{2m}. \quad (14.31)$$

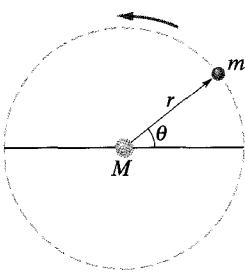
Jeśli  $dS/dt$  ma być stałe, jak mówi drugie prawo Keplera, to z równania (14.31) wynika, że stałe musi być też  $L$ , a to znaczy, że moment pędu musi być za-



Rys. 14.13. Planeta o masie  $m$  porusza się wokół Słońca po orbicie eliptycznej. Słońce o masie  $M$  znajduje się w jednym z ognisk elipsy  $F$ . Drugie ognisko tej elipsy  $F'$  jest tylko punktem w przestrzeni kosmicznej. Każde z ognisk jest odległe od środka elipsy o  $ea$ , przy czym  $e$  jest mimośrodem elipsy. Na rysunku zaznaczono również półosię elipsy  $a$  oraz odległość od Słońca perihelium (punktu orbity najbliższego Słońca)  $R_p$  i aphelium (punktu orbity najdalszego od Słońca)  $R_a$ .



Rys. 14.14. a) W przedziale czasu  $\Delta t$  linia łącząca planetę ze Słońcem o masie  $M$  (mającą w danej chwili długość  $r$ ) zatacza kąt  $\Delta\theta$ , zakreślając przy tym obszar (zacieniony) o polu powierzchni  $\Delta S$ . b) Pęd planety  $\vec{p}$  i jego składowe



Rys. 14.15. Planeta o masie  $m$  porusza się wokół Słońca po orbicie kołowej o promieniu  $r$

chowany. Wykazaliśmy zatem, że drugie prawo Keplera jest rzeczywiście równoważne zasadzie zachowania momentu pędu.

► **3. Trzecie prawo Keplera:** Kwadrat okresu ruchu każdej planety na orbicie wokół Słońca jest proporcjonalny do sześcianu półosi wielkiej tej orbity.

Aby się o tym przekonać, rozważmy orbitę kołową z rysunku 14.15, której promień jest równy  $r$  (promień okręgu jest odpowiednikiem półosi wielkiej elipsy). Zapisując drugą zasadę dynamiki ( $F = ma$ ) dla planety na orbicie kołowej z rysunku 14.15, dostajemy

$$\frac{GMm}{r^2} = (m)(\omega^2 r). \quad (14.32)$$

Skorzystaliśmy z tego, że wartość siły  $F$  jest dana równaniem (14.1), a przyspieszenie dośrodkowe wynosi — zgodnie z równaniem (11.23) —  $\omega^2 r$ . Zgodnie ze wzorem (11.20) możemy do powyższego równania wstawić  $2\pi/T$  zamiast  $\omega$ , przy czym  $T$  jest okresem ruchu po orbicie. Otrzymamy w ten sposób trzecie prawo Keplera:

$$T^2 = \left( \frac{4\pi^2}{GM} \right) r^3 \quad (\text{trzecie prawo Keplera}). \quad (14.33)$$

Wielkość w nawiasie jest stałą, której wartość zależy tylko od masy  $M$  ciała, wokół którego krąży planeta.

Równanie (14.33) obowiązuje także dla orbit eliptycznych, przy czym zamiast  $r$  należy podstawić  $a$  — półosię wielką elipsy. Z prawa tego wynika, że stosunek  $T^2/a^3$  powinien być stały dla wszystkich orbit planet krążących wokół tego samego ciała o dużej masie. W tabeli 14.3 przedstawiono, jak dobrze spełniona jest ta reguła dla orbit planet w Układzie Słonecznym.

#### Tablica 14.3 Trzecie prawo Keplera dla planet Układu Słonecznego

Planeta	Półosia wielka $a$ [ $10^{10}$ m]	Okres $T$ [a]	$T^2/a^3$ [ $10^{-34}$ a $^2/\text{m}^3$ ]
Merkury	5,79	0,241	2,99
Wenus	10,8	0,615	3,00
Ziemia	15,0	1,00	2,96
Mars	22,8	1,88	2,98
Jowisz	77,8	11,9	3,01
Saturn	143	29,5	2,98
Uran	287	84,0	2,98
Neptun	450	165	2,99
Pluton	590	248	2,99

SPRAWDZIAN 5: Satelita 1 krąży wokół planety po pewnej orbicie kołowej, a satelita 2 po innej — większej — orbicie kołowej. Który z tych satelitów ma: a) większy okres obiegu planety, b) większą prędkość?

## Przykład 14.6

Okres obiegu Słońca przez kometę Halleya wynosi 76 lat. W roku 1986 kometa ta przeszła przez *perihelium*, tzn. punkt największego zbliżenia do Słońca. Odległość tego punktu od Słońca  $R_p$  wynosi  $8,9 \cdot 10^{10}$  m. Jak wynika z tabeli 14.3, punkt ten znajduje się między orbitami Merkurego i Wenus.

- a) Ile wynosi największa odległość komety od Słońca  $R_a$ , odpowiadająca *aphelium* orbity?

### ROZWIĄZANIE:

→ Z równania (14.13) wynika, że  $R_a + R_p = 2a$ , gdzie  $a$  jest połółką wielką orbity komety Halleya. Tak więc będziemy mogli wyznaczyć  $R_a$ , jeśli przedtem znajdziemy wartość  $a$ . Zauważmy w tym celu, że →  $a$  jest związane z okresem obiegu za pomocą trzeciego prawa Keplera, czyli równania (14.33), w którym zamiast  $r$  podstawimy połówkę wielkiej  $a$ . Postępując tak i rozwiążając otrzymane równanie względem  $a$ , dostajemy

$$a = \left( \frac{GMT^2}{4\pi^2} \right)^{1/3}. \quad (14.34)$$

## Przykład 14.7

*Połowanie na czarną dziurę.* Obserwacje światła wysyłanego przez pewną gwiazdę wskazują na to, że jest ona składnikiem układu podwójnego (układu dwóch gwiazd). Gwiazda, którą widać, porusza się po orbicie z prędkością  $v = 270$  km/s, ma okres obiegu  $T = 1,7$  doby i masę równą w przybliżeniu  $m_1 = 6M_\odot$ , przy czym  $M_\odot$  jest masą Słońca, równą  $1,99 \cdot 10^{30}$  kg. Załóż, że zarówno ta gwiazda, jak i drugi składnik jej układu podwójnego, który nie wysyła światła, a zatem jest niewidoczny, poruszają się po orbitach kołowych (jak na rysunku 14.16), i wyznacz w przybliżeniu masę  $m_2$  tego składnika „ciemnego”.

### ROZWIĄZANIE:

Aby rozwiązać to ciekawe i ambitne zadanie, musimy skorzystać z kilku kluczowych spostrzeżeń:

→ 1. Dwie rozważane gwiazdy poruszają się po orbitach kołowych, lecz nie jedna wokół drugiej, a obie wokół środka masy układu podwójnego, który stanowią.

→ 2. Podobnie jak dla układu dwóch cząstek z paragrafu 9.2, środek masy tego układu leży na odcinku łączącym środki gwiazd, tzn. w punkcie  $O$  na rysunku 14.16. Gwiazda, którą widać, porusza się po orbicie o promieniu  $r_1$ , a gwiazda ciemna — po orbicie o promieniu  $r_2$ .

→ 3. Ruch gwiazd wokół ich środka masy nie może być nawet w przybliżeniu uważany za ruch orbitalny wokół ciała o bardzo dużej masie (jak w przypadku ruchu planet wokół Słońca). Trzecie

Podstawiając do tego wzoru masę Słońca  $M$ , równą  $1,99 \cdot 10^{30}$  kg, oraz okres obiegu komety  $T$ , równy 76 lat, czyli  $2,4 \cdot 10^9$  s, otrzymujemy  $a = 2,7 \cdot 10^{12}$  m. Wobec tego

$$\begin{aligned} R_a &= 2a - R_p = (2)(2,7 \cdot 10^{12} \text{ m}) - 8,9 \cdot 10^{10} \text{ m} \\ &= 5,3 \cdot 10^{12} \text{ m}. \end{aligned} \quad (\text{odpowiedź})$$

Jak widać z tabeli 14.3, jest to nieco mniej niż połowa wielkiej orbity Plutona. Kometa Halleya nie znajduje się zatem nigdy tak daleko od Słońca jak Pluton.

- b) Ile wynosi mimośród  $e$  orbity komety Halleya?

### ROZWIĄZANIE:

Zauważmy, że → związek między wielkościami  $e$ ,  $a$  i  $R_p$  wynika z rysunku 14.13. Widzimy na nim, że  $ea = a - R_p$ , czyli

$$\begin{aligned} e &= \frac{a - R_p}{a} = 1 - \frac{R_p}{a} \\ &= 1 - \frac{8,9 \cdot 10^{10} \text{ m}}{2,7 \cdot 10^{12} \text{ m}} = 0,97. \end{aligned} \quad (\text{odpowiedź})$$

Orbita tej komety ma mimośród bliski jedności, a więc jest elipsą bardzo długą i spłaszoną.

prawo Keplera (równanie (14.33)) *nie stosuje się* zatem w tej sytuacji, a więc nie możemy go wykorzystać do wyznaczenia masy  $m_2$ .

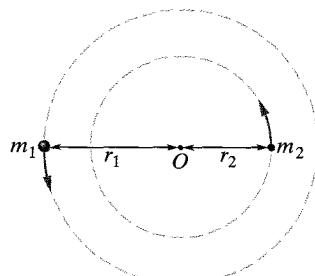
→ 4. Ruch gwiazd po okręgach odbywa się pod wpływem siły dośrodkowej, która jest siłą ich wzajemnego przyciągania grawitacyjnego. Wartość tej siły wynosi  $Gm_1m_2/r^2$ , gdzie  $r$  jest odlegością środków gwiazd.

→ 5. Z równania (4.32) wynika, że przyspieszenie dośrodkowe gwiazdy widocznej  $a$  jest równe  $v^2/r_1$ .

Wszystko to razem prowadzi nas do zapisania drugiej zasady dynamiki ( $F = ma$ ) dla gwiazdy widocznej w postaci

$$\frac{Gm_1m_2}{r^2} = m_1 \frac{v^2}{r_1}. \quad (14.35)$$

Równanie to zawiera szukaną przez nas masę  $m_2$ , lecz aby ją wyznaczyć, musimy najpierw znaleźć wyrażenia na  $r$  i  $r_1$  (zauważ natomiast, że  $m_1$  skracą się w tym równaniu).



Rys. 14.16. Przykład 14.7. Gwiazda widoczna o masie  $m_1$  i niewidoczna („ciemna”) gwiazda o masie  $m_2$  krążą po orbitach wokół środka masy układu podwójnego, czyli punktu  $O$ .

Zacznijmy od wyznaczenia położenia środka masy względem gwiazdy widocznej, do czego wykorzystamy równanie (9.1). Rozważana gwiazda znajduje się w odległości równej zera od siebie, w odległości  $r_1$  od środka masy i w odległości  $r$  od środka gwiazdy ciemnej. Z równania (9.2) otrzymujemy zatem

$$r_1 = \frac{m_1(0) + m_2 r}{m_1 + m_2}, \quad (14.36)$$

a stąd

$$r = r_1 \frac{m_1 + m_2}{m_2}. \quad (14.37)$$

W celu znalezienia wyrażenia na  $r_1$  zauważmy, że gwiazda widoczna porusza się po okręgu o promieniu  $r_1$  z prędkością  $v$  i ma okres obiegu  $T$ . Z równania (4.33) wynika zatem, że  $v = 2\pi r_1/T$ , czyli

$$r_1 = \frac{vT}{2\pi}. \quad (14.38)$$

Podstawiając to wyrażenie na  $r_1$  do wzoru (14.37), otrzymujemy

$$r = \frac{vT}{2\pi} \frac{m_1 + m_2}{m_2}. \quad (14.39)$$

Wróćmy teraz do wzoru (14.35) i podstawmy do niego wyrażenia na  $r$  z równania (14.39) i na  $r_1$  z równania (14.38) oraz daną wartość  $m_1$ , tzn.  $6M_S$ . Przekształcając następnie to równanie i podstawiając dane liczbowe, otrzymujemy

$$\begin{aligned} \frac{m_2^3}{(6M_S + m_2)^2} &= \frac{v^3 T}{2\pi G} = \frac{(2,7 \cdot 10^5 \text{ m/s})^3 (1,7 \text{ d}) (86\,400 \text{ s/d})}{(2\pi)(6,67 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3/(\text{kg} \cdot \text{s}^2))} \\ &= 6,90 \cdot 10^{30} \text{ kg}, \end{aligned}$$

czyli

$$\frac{m_2^3}{(6M_S + m_2)^2} = 3,47 M_S. \quad (14.40)$$

Jest to równanie trzeciego stopnia, do rozwiązywania którego możemy wykorzystać proste programy komputerowe. Interesuje nas jednak tylko rozwiązanie dość przybliżone, możemy zatem podstawić po prostu do tego równania kolejno wartości  $m_2$  równe całkowitym wielokrotnościami  $M_S$  i sprawdzać, dla których z nich równanie (14.40) jest możliwe dobrze spełnione. Stwierdzimy w ten sposób, że najlepiej spełnia to równanie wartość

$$m_2 \approx 9M_S. \quad (\text{odpowiedź})$$

Dane tego zadania odpowiadają w przybliżeniu układowi podwójnemu LMC X-3 w Wielkim Obłoku Magellana (który widać na zdjęciu otwierającym ten rozdział). Z innych pomiarów wiadomo, że składnik ciemny jest bardzo czarny, skąd wynika, że jest to zapewne gwiazda, która w wyniku kurczenia się pod wpływem własnej siły ciążenia (tzw. zapadania grawitacyjnego) stała się gwiazdą neutronową lub czarną dziurą. Gwiazda neutronowa nie może jednak mieć masy większej niż około  $2M_S$ , a zatem nasz wynik —  $m_2 \approx 9M_S$  — wskazuje na to, że ciemny składnik rozważanego układu podwójnego jest czarną dziurą.

Widzimy więc, że obecność czarnej dziury da się wykryć, jeśli jest ona składnikiem układu podwójnego, a druga gwiazda tego układu jest widoczna, można zatem zmierzyć jej masę, prędkość orbitalną i okres obiegu.

## 14.8. Satelity: orbity i energia

Gdy satelita obiega Ziemię po orbicie eliptycznej, okresowo zmienia się zarówno jego prędkość, od której zależy jego energia kinetyczna  $E_k$ , jak i jego odległość od środka Ziemi, od której zależy jego energia potencjalna  $E_p$ . Energia mechaniczna satelity  $E$  pozostaje jednak stała (przy założeniu, że  $E_p$  i  $E$  układu satelita–Ziemia możemy przypisać samemu satelicie, co jest uzasadnione, gdyż masa satelity jest bardzo mała w porównaniu z masą Ziemi).

Energia potencjalna układu jest dana równaniem (14.20) i wynosi

$$E_p = -\frac{GMm}{r}$$

(przymajemy, że  $E_p = 0$  dla nieskończonie odległych ciał). W równaniu tym  $r$  jest promieniem orbity, którą będziemy chwilowo uważać za kołową, a  $M$  i  $m$  są masami Ziemi i satelity.

W celu wyznaczenia energii kinetycznej satelity na orbicie kołowej zapiszmy drugą zasadę dynamiki ( $F = ma$ ) w postaci

$$\frac{GMm}{r^2} = m \frac{v^2}{r}, \quad (14.41)$$

gdzie  $v^2/r$  jest przyspieszeniem dośrodkowym satelity. Z tego równania wynika, że energia kinetyczna jest równa

$$E_k = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{GMm}{2r}, \quad (14.42)$$

skąd widać, że dla satelity na orbicie kołowej

$$E_k = -\frac{E_p}{2} \quad (\text{orbita kołowa}). \quad (14.43)$$

Całkowita energia mechaniczna satelity na orbicie jest zatem równa

$$E = E_k + E_p = \frac{GMm}{2r} - \frac{GMm}{r},$$

czyli

$$E = -\frac{GMm}{2r} \quad (\text{orbita kołowa}). \quad (14.44)$$

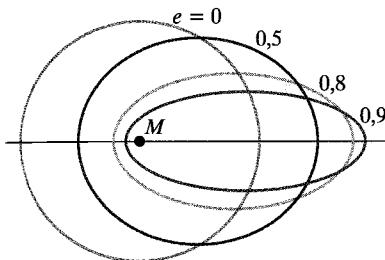
Oznacza to, że całkowita energia  $E$  satelity na orbicie kołowej jest równa jego energii kinetycznej  $E_k$  wziętej z przeciwnym znakiem, tzn.

$$E = -E_k \quad (\text{orbita kołowa}). \quad (14.45)$$

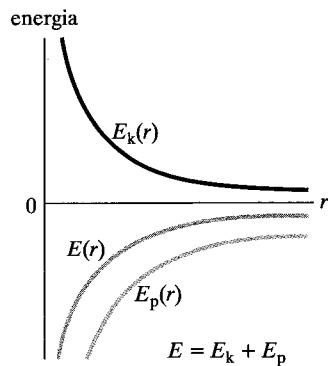
Energię mechaniczną satelity na orbicie eliptycznej o półosi wielkiej  $a$  otrzymamy, podstawiając do równania (14.44)  $a$  zamiast  $r$ . Daje to

$$E = -\frac{GMm}{2a} \quad (\text{orbita eliptyczna}). \quad (14.46)$$

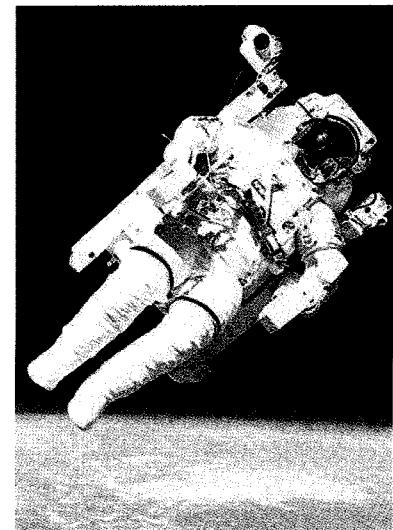
Z równania (14.46) wynika, że całkowita energia satelity na orbicie zależy tylko od półosi wielkiej orbity, a nie od jej mimośrodu  $e$ . Na przykład określony satelita będzie miał taką samą całkowitą energię mechaniczną  $E$  na każdej z czterech orbit pokazanych na rysunku 14.17, gdyż mają one wszystkie taką samą półosią wielką. Na rysunku 14.18 przedstawiono zależność  $E_k$ ,  $E_p$  i  $E$  od  $r$  dla satelity poruszającego się po orbicie kołowej wokół ciała o bardzo dużej masie.



**Rys. 14.17.** Cztery orbity wokół ciała o masie  $M$ . Wszystkie te orbity mają taką samą półosią wielką  $a$ , a zatem odpowiadają im taka sama całkowita energia mechaniczna satelity  $E$ . Przy każdej orbicie podano jej mimośród



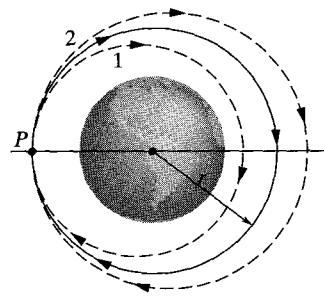
**Rys. 14.18.** Zależność energii kinetycznej  $E_k$ , energii potencjalnej  $E_p$  i energii całkowitej  $E$  od promienia  $r$  dla satelity na orbicie kołowej. Dla każdej wartości  $r$  wartości  $E_k$  i  $E$  są ujemne, a wartość  $E_p$  jest dodatnia, przy czym  $E = -E_k$ . Gdy  $r \rightarrow \infty$ , każda z tych energii dąży do zera



7 lutego 1984 roku Bruce McCandless wyszedł w przestrzeń kosmiczną z pojazdu poruszającego się z prędkością 29 000 km/h, znajdującego się wówczas na wysokości 102 km nad Hawajami. Nie był przymocowany do wahadłowca liną, a zatem stał się pierwszym człowiekiem satelitą Ziemi

**SPRAWDZIAN 6:** Wahadłowiec kosmiczny okrąży początkowo Ziemię po orbicie kołowej o promieniu  $r$ , jak pokazano na rysunku. W chwili, gdy pojazd znajduje się w punkcie  $P$ , pilot włącza na chwilę silnik hamujący, aby zmniejszyć energię kinetyczną  $E_k$  i energię mechaniczną  $E$  wahadłowca.

a) Po której z orbit eliptycznych, oznaczonych na rysunku linią przerywaną, będzie się następnie poruszał pojazd? b) Czy okres obiegu orbity  $T$  (czyli czas powrotu do punktu  $P$ ) tego wahadłowca będzie większy, mniejszy, czy taki sam, jak wtedy, gdy krażył on po orbicie kołowej?



## Przykład 14.8

Pojazd kosmiczny znajduje się na wysokości  $h$  równej 350 km nad Ziemią, gdy astronauta żartowniś wyrzuca z niego na orbitę kołową wokół Ziemi kulę do kręgli o masie  $m = 7,2 \text{ kg}$ .

a) Wyznacz energię mechaniczną  $E$  tej kuli na jej orbicie.

### ROZWIĄZANIE:

Zauważmy, że ~~O~~ — energię  $E$  będziemy mogli obliczyć ze wzoru (14.44) ( $E = -GMm/2r$ ), jeśli znajdziemy najpierw promień orbity  $r$ . Jego wartość wynosi

$$r = R + h = 6370 \text{ km} + 350 \text{ km} = 6,72 \cdot 10^6 \text{ m},$$

gdzie  $R$  jest promieniem Ziemi. Z równania (14.44) otrzymujemy zatem

$$\begin{aligned} E &= -\frac{GMm}{2r} \\ &= -\frac{(6,67 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3/(\text{kg} \cdot \text{s}^2))(5,98 \cdot 10^{24} \text{ kg})(7,2 \text{ kg})}{(2)(6,72 \cdot 10^6 \text{ m})} \\ &= -2,14 \cdot 10^8 \text{ J} = -214 \text{ MJ}. \end{aligned} \quad (\text{odpowiedź})$$

b) Ile wynosiła energia mechaniczna tej kuli  $E_0$  na wyrzutni na Przykładku Canaveral? Wyznacz zmianę  $\Delta E$  energii mechanicznej kuli w czasie podróży z wyrzutni na orbitę.

### ROZWIĄZANIE:

Musimy pamiętać, że ~~O~~ — na wyrzutni kula *nie znajduje się* na orbicie, a więc *nie stosuje się* do niej wzór (14.44). Zapiszemy zatem po prostu, że  $E_0 = E_{k0} + E_{p0}$ , przy czym  $E_{k0}$  jest energią kinetyczną kuli, a  $E_{p0}$  — grawitacyjną energią potencjalną układu kula-Ziemia. W celu wyznaczenia  $E_{p0}$  skorzystamy ze wzoru (14.20), co daje

$$\begin{aligned} E_{p0} &= -\frac{GMm}{R} \\ &= -\frac{(6,67 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3/(\text{kg} \cdot \text{s}^2))(5,98 \cdot 10^{24} \text{ kg})(7,2 \text{ kg})}{6,37 \cdot 10^6 \text{ m}} \\ &= -4,51 \cdot 10^8 \text{ J} = -451 \text{ MJ}. \end{aligned}$$

Energia kinetyczna kuli  $E_{k0}$  jest związana z ruchem kuli podczas ruchu obrotowego Ziemi. Możesz wykazać, że jest ona mniejsza niż 1 MJ, a więc jest znaczko mała w porównaniu z wartością bezwzględną  $E_{p0}$ . Wobec tego energia mechaniczna kuli na wyrzutni wynosi

$$E_0 = E_{k0} + E_{p0} \approx 0 - 451 \text{ MJ} = -451 \text{ MJ}. \quad (\text{odpowiedź})$$

Wzrost energii mechanicznej kuli podczas jej podróży z wyrzutni na orbitę wynosi

$$\Delta E = E - E_0 = (-214 \text{ MJ}) - (-451 \text{ MJ}) = 237 \text{ MJ}. \quad (\text{odpowiedź})$$

Tyle energii możesz kupić od zakładu energetycznego za kilkanaście złotych. Jest zatem oczywiste, że wysoki koszt umieszczenia ciała na orbicieokoziemskiej nie jest związany z energią mechaniczną, której trzeba mu w tym celu dostarczyć.

## 14.9. Grawitacja według Einsteina

### Zasada równoważności

Albert Einstein powiedział kiedyś: „Siedziałem (...) w urzędzie patentowym w Bernie, gdy nagle przyszła mi do głowy taka myśl: gdy człowiek spada swobodnie, nie może czuć swego ciężaru. Byłem wstrząśnięty. Ta prosta myśl wywarła na mnie wielkie wrażenie. To ona skierowała mnie w stronę teorii grawitacji”.

Tak Einstein wspomina początek swej pracy nad stworzeniem **ogólnej teorii względności**. Podstawowym postulatem tej teorii grawitacji (czyli wzajemnego ciążenia ciał ku sobie) jest **zasada równoważności**, która mówi, że skutki grawitacji i ruchu przyspieszonego są sobie równoważne. Gdyby fizyka zamknąć w niewielkim pojemniku, jak na rysunku 14.19, nie mógłby on stwierdzić, czy pojemnik spoczywa na Ziemi (znajdując się jedynie pod działaniem ziemskiej siły ciężkości), jak na rysunku 14.19a, czy też porusza się w przestrzeni kosmicznej z przyspieszeniem równym  $9,8 \text{ m/s}^2$  (znajdując się jedynie pod wpływem siły wywołującej to przyspieszenie), jak na rysunku 14.19b. W obu przypadkach czułby się tak samo i taki sam ciężar odczytywałby na swej wadze. Co więcej, gdyby obserwował ciało spadające swobodnie w pojemniku, przyspieszenie tego ciała względem niego też byłoby takie samo w obydwu przypadkach.

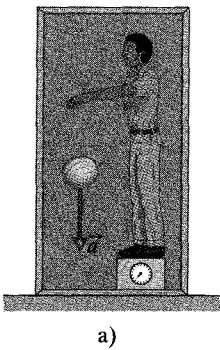
## Krzywizna przestrzeni

Mówiąc dotychczas o ciążeniu (grawitacji), wiązaliśmy je z siłami działającymi między ciałami mającymi masę. Einstein wykazał natomiast, że przyczyną grawitacji jest zakrzywienie (odkształcenie) przestrzeni powodowane przez masy (jak się dowiesz w dalszej części tej książki, przestrzeń i czas są ze sobą powiązane, a zatem zakrzywienie, o którym mówił Einstein, dotyczy w istocie *czasoprzestrzeni*, czterowymiarowej przestrzeni, w której znajduje się nasz wszechświat).

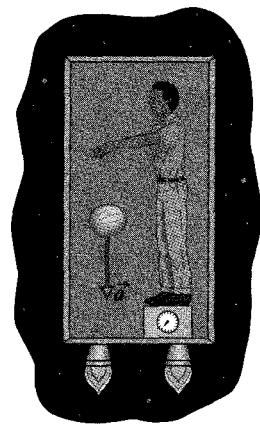
Wytłumaczenie, jak przestrzeń (na przykład próżnia) może być zakrzywiona, nie jest łatwe. Spróbujmy posłużyć się następującą analogią. Wyobraź sobie, że ze statku na orbicie okoziemskiej obserwujesz wyścig dwóch łodzi. Linią startu jest równik, w chwili startu łodzie są od siebie odległe o 20 km i obie kierują się wprost na południe, jak na rysunku 14.20a. Z punktu widzenia żeglarzy ich łodzie płyną po płaskich torach równoległych. W miarę upływu czasu łodzie zbliżają się jednak do siebie, aż w pobliżu bieguna południowego wpadają na siebie. Żeglarze mogą uważać, że zbliżenie ich łodzi musi być związane z działaniem na nie jakiejś siły. My natomiast widzimy wyraźnie, że zbliżenie się łodzi do siebie jest po prostu konsekwencją krzywizny powierzchni Ziemi. Widzimy to, gdyż obserwujemy wyścig „spoza” tej powierzchni.

Na rysunku 14.20b przedstawiono podobny „wyścig”. Dwa jabłka puszczaamy swobodnie z tej samej wysokości nad Ziemią w dwóch niezbyt odległych od siebie miejscach. Wydaje się, że jabłka spadają po torach równoległych, lecz w rzeczywistości zbliżają się do siebie, gdyż oba kierują się ku środkowi Ziemi. Możemy analizować ruch jabłek, korzystając z pojęcia siły ciężkości działającej na jabłka ze strony Ziemi. Można też jednak rozpatrywać ten ruch jako skutek zakrzywienia przestrzeni w pobliżu Ziemi, związanego z obecnością tam ciała o znacznej masie — Ziemi. Nie możemy dostrzec tego zakrzywienia, gdyż nie możemy znaleźć się „poza” zakrzywoną przestrzenią, tak jak udało nam się wydostać poza krzywiznę powierzchni Ziemi w przykładzie z dwiema łodziami. Możemy jednak zobrazować tę krzywiznę, tak jak na rysunku 14.20c. Jabłka będą się na nim poruszać po powierzchni, która zakrzywia się ku Ziemi ze względu na jej masę.

Gdy światło przebiega w pobliżu Ziemi, jego tor nieco się zakrzywia ze względu na krzywiznę przestrzeni w otoczeniu Ziemi. Zjawisko to nazywa się

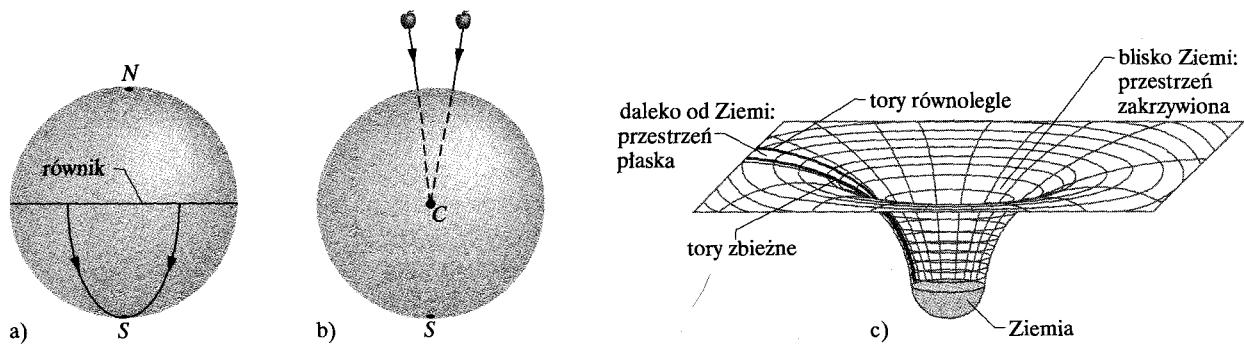


a)



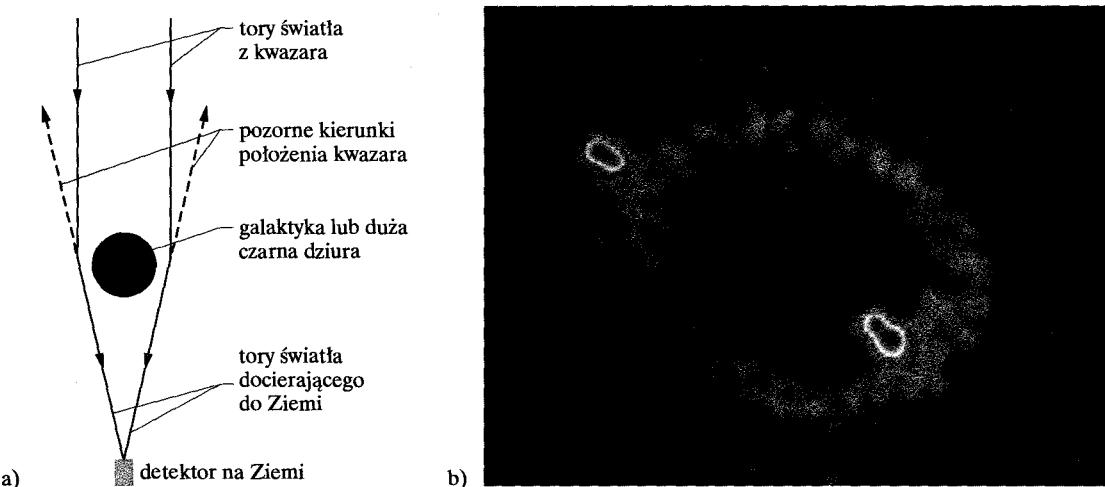
b)

**Rys. 14.19.** a) Fizyk zamknięty w pojemniku spoczywającym na Ziemi obserwuje melon spadający z przyspieszeniem  $a = 9,8 \text{ m/s}^2$ . b) Jeśli pojemnik porusza się daleko w przestrzeni kosmicznej z przyspieszeniem równym  $9,8 \text{ m/s}^2$ , to przyspieszenie melona względem fizyka jest takie samo jak na Ziemi. Fizyk nie może stwierdzić na podstawie żadnych doświadczeń wykonanych w pojemniku, w której z tych dwóch sytuacji się znajduje. Na przykład waga, na której fizyk stoi, ma w obu przypadkach takie same wskazania



Rys. 14.20. a) Dwa ciała poruszające się wzduł południków ku biegunowi południowemu zbliżają się do siebie ze względu na krzywiznę powierzchni Ziemi. b) Dwa ciała spadające swobodnie w pobliżu Ziemi poruszają się po torach, które zbiegają się ku środkowi Ziemi ze względu na zakrzywienie przestrzeni w pobliżu Ziemi. c) Daleko od Ziemi (i innych mas) przestrzeń jest płaska i tory równoległe pozostają takimi w czasie ruchu ciał. W pobliżu Ziemi tory te zaczynają się zbiegać, gdyż przestrzeń jest tu zakrzywiona na skutek obecności masy Ziemi

*ogniskowaniem (soczewkowaniem) grawitacyjnym.* Przy przejściu w pobliżu ciała o jeszcze większej masie, na przykład galaktyki lub czarnej dziury o dużej masie, tor wiązki zagina się odpowiednio silniej. Wyobraźmy sobie, że takie ciało o dużej masie znajduje się między nami a kwazarem, czyli niezwykle silnym i bardzo odległym źródłem światła. Światło biegające do nas z kwazara ulegnie zakrzywieniu w pobliżu tego ciała o dużej masie, jak pokazano na rysunku 14.21a.



Rys. 14.21 a) Światło z odległego kwazara biegnie po torach, które zakrzywiają się ku galaktyce lub dużej czarnej dziurze, ponieważ masa tej galaktyki lub czarnej dziury zakrzywia przestrzeń w jej otoczeniu. Światło obserwowane z Ziemi zdaje się przychodzić z kierunków wyznaczonych przez przedłużenia promieni docierających do Ziemi (oznaczone liniami przerywanymi). b) Pierścień Einsteina, znany jako obiekt MG1131+0456, na ekranie komputera połączonego z teleskopem. Źródło światła (w istocie fal radiowych, będących — jak światło — promieniowaniem elektromagnetycznym) znajduje się daleko za dużą, niewidoczną galaktyką, której obecność jest przyczyną powstania pierścienia; część źródła jest widoczna w postaci dwóch jasnych punktów na pierścieniu

W rezultacie światło będzie docierać do nas z wielu nieco różnych kierunków, a zatem będziemy widzieć ten sam kwazar w wielu kierunkach. Skutkiem tego może być w pewnych warunkach rozmycie się obrazu kwazara w gigantyczny świetlny łuk, zwany *pierścieniem Einsteina* (rys. 14.21b).

Czy powinniśmy wiązać ciążenie z krzywizną przestrzeni w otoczeniu mas, czy też z siłą działającą między masami? A może powinniśmy je uważać za działanie pewnej cząstki elementarnej, zwanej *gravitonem*, której istnienie postuluje się w niektórych sformułowaniach fizyki współczesnej? Nie wiemy tego.

## Podsumowanie

**Prawo powszechnego ciążenia** Każde ciało we wszechświecie przyciąga każde inne ciało **siłą ciężkości (siłą grawitacyjną)** o wartości

$$F = G \frac{m_1 m_2}{r^2} \quad (\text{prawo powszechnego ciążenia}). \quad (14.1)$$

W równaniu tym  $m_1$  i  $m_2$  to masy ciał,  $r$  — ich odległość, a  $G (= 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{kg}^2)$  — **stała grawitacyjna**.

**Właściwości grawitacyjne jednorodnej powłoki kulistej** Równanie (14.1) obowiązuje tylko dla cząstek (ciał punktowych). Wyznaczenie siły ciążenia działającej między ciałami rozcięgłyymi wymaga dodania do siebie sił działających między poszczególnymi elementami obu ciał, co w przypadku ogólnym sprowadza się do całkowania. Jeśli jednak któryś z ciał ma kształt jednorodnej powłoki kulistej lub jednorodnej kuli, to wypadkowa siła grawitacyjna, jaką działa ono na ciało *zewnętrzne względem niego*, może być obliczona przy założeniu, że cała masa powłoki lub kuli jest skupiona w jej środku.

**Zasada superpozycji** Siła ciężkości podlega **zasadzie superpozycji**, co oznacza, że jeśli oddziałuje ze sobą  $n$  cząstek, to siła wypadkowa  $\vec{F}_{1,\text{wyp}}$  działająca na cząstkę oznaczoną jako 1 jest sumą sił działających na nią ze strony wszystkich innych cząstek:

$$\vec{F}_{1,\text{wyp}} = \sum_{i=2}^n \vec{F}_{1i}, \quad (14.4)$$

przy czym znak sumy oznacza, że należy dodać wektorowo siły  $\vec{F}_{1i}$ , działające na cząstkę 1 ze strony cząstek 2, 3, ...,  $n$ . Aby wyznaczyć siłę grawitacyjną  $\vec{F}_1$  działającą na cząstkę ze strony ciała rozcięgłego, należy podzielić to ciało na nieskończonie małe elementy o masie  $dm$ , z których każdy działa na cząstkę siłą  $d\vec{F}$ , i na drodze całkowania znaleźć ich sumę

$$\vec{F}_1 = \int d\vec{F}. \quad (14.5)$$

**Przyspieszenie grawitacyjne** Przyspieszenie grawitacyjne  $a_g$  jest to przyspieszenie, które nadaje cząstce działającą na nie siła grawitacyjna. Gdy cząstka znajduje się w odległości  $r$  od środka

jednorodnego ciała kulistego o masie  $M$ , wartość działającej na cząstkę siły ciążenia jest dana wzorem (14.1). Z drugiej zasady dynamiki wynika zatem, że

$$F = ma_g, \quad (14.9)$$

a stąd

$$a_g = \frac{GM}{r^2}. \quad (14.10)$$

**Przyspieszenie spadku swobodnego i ciężar** Przyspieszenie  $\vec{g}$ , z jakim ciało spada swobodnie w pobliżu powierzchni Ziemi, różni się nieco od przyspieszenia grawitacyjnego  $\vec{a}_g$ , a ciężar ciała (równy  $mg$ ) jest nieco różny od wartości działającej na to ciało siły ciążenia, danej wzorem (14.1), ponieważ Ziemia nie jest ani jednorodna, ani kulista, a do tego obraca się wokół swej osi.

**Ciążenie wewnątrz powłoki kulistej** Wypadkowa siła ciążenia działająca ze strony ciała w kształcie jednorodnej powłoki kulistej na cząstkę znajdującej się wewnątrz powłoki jest równa zeru. Wynika stąd, że jeśli cząstkę umieścimy wewnątrz ciała w kształcie jednorodnej kuli w odległości  $r$  od jej środka, to działająca na cząstkę siła ciążenia pochodzi jedynie od tej części masy ciała  $M_{\text{wewn}}$ , która jest zawarta wewnątrz kuli o promieniu  $r$ . Masa ta jest równa

$$M_{\text{wewn}} = \rho \frac{4\pi r^3}{3}, \quad (14.17)$$

gdzie  $\rho$  jest gęstością ciała.

**Grawitacyjna energia potencjalna** Grawitacyjna energia potencjalna  $E_p(r)$  układu dwóch cząstek o masach  $M$  i  $m$  znajdujących się w odległości  $r$  od siebie jest równa wziętej z przeciwnym znakiem pracy wykonanej przez siłę ciążenia, działającą ze strony dowolnej z tych cząstek na drugą z nich, przy zmianie odległości cząstek od nieskończonej (bardzo dużej) do  $r$ . Wynosi ona

$$E_p = -\frac{GMm}{r} \quad (\text{grawitacyjna energia potencjalna}). \quad (14.20)$$

**Energia potencjalna układu cząstek** Jeśli układ składa się z więcej niż dwóch cząstek, to całkowita grawitacyjna energia potencjalna tego układu  $E_p$  jest równa sumie energii potencjalnych

wszystkich par cząstek. Na przykład dla trzech cząstek o masach  $m_1$ ,  $m_2$  i  $m_3$

$$E_p = - \left( \frac{Gm_1m_2}{r_{12}} + \frac{Gm_1m_3}{r_{13}} + \frac{Gm_2m_3}{r_{23}} \right). \quad (14.21)$$

**Piątkość ucieczki** Cząstka może się uwolnić od działania przyciągania grawitacyjnego ciała niebieskiego o masie  $M$  i promieniu  $R$  (tzn. może się od niego nieskończonie oddalić), jeśli nada się jej w pobliżu powierzchni tego ciała prędkość równą co najmniej prędkości ucieczki, wynoszącej

$$v = \sqrt{\frac{2GM}{R}}. \quad (14.27)$$

**Prawa Keplera** Ciała Układu Słonecznego, a także satelity Ziemi, naturalne i sztuczne, wiążą ze sobą siły przyciągania grawitacyjnego. Wzajemny ruch tych ciał jest rzadzony przez trzy prawa Keplera wynikające z prawa powszechnego ciążenia i zasad dynamiki Newtona:

- Pierwsze prawo Keplera.** Wszystkie planety poruszają się po orbitach w kształcie elipsy, w której ognisku znajduje się Słońce.
- Drugie prawo Keplera.** Linia łącząca planetę ze Słońcem zakreśla w jednakowych odstępach czasu jednakowe pola powierzchni w płaszczyźnie orbity (stwierdzenie to jest równoważne zasadzie zachowania momentu pędu).
- Trzecie prawo Keplera.** Kwadrat okresu  $T$  ruchu każdej planety na orbicie wokół Słońca jest proporcjonalny do sześcianu półosi wielkiej  $a$  tej orbity. Dla orbit kołowych o

promieniu  $r$  półosi wielka  $a$  jest równa promieniowi orbity  $r$  i prawo to przybiera postać

$$T^2 = \left( \frac{4\pi^2}{GM} \right) r^3 \quad (\text{trzecie prawo Keplera}), \quad (14.33)$$

przy czym  $M$  jest masą ciała, wokół którego krąży planeta, czyli Słońca w przypadku Układu Słonecznego. Równanie to stosuje się również do orbit eliptycznych, przy czym zamiast promienia  $r$  należy podstawić półosi wielką  $a$ .

**Energia w ruchu po orbicie** Energia potencjalna  $E_p$  i kinetyczna  $E_k$  planety lub satelity o masie  $m$  w ruchu po orbicie kołowej o promieniu  $r$  wynosi

$$E_p = -\frac{GMm}{r} \quad \text{oraz} \quad E_k = \frac{GMm}{2r}. \quad (14.20, 14.42)$$

Energia mechaniczna  $E = E_k + E_p$  jest zatem równa

$$E = -\frac{GMm}{2r}. \quad (14.44)$$

Dla orbity eliptycznej o półosi wielkiej równej  $a$

$$E = -\frac{GMm}{2a}. \quad (14.46)$$

**Grawitacja według Einsteina** Einstein stwierdził, że skutki ciążenia (grawitacji) i ruchu przyspieszonego są sobie równoważne. Sformułowana w ten sposób **zasada równoważności** doprowadziła go do stworzenia teorii grawitacji (**ogólnej teorii względności**), która tłumaczy zjawiska grawitacyjne za pomocą zakrzywienia przestrzeni.

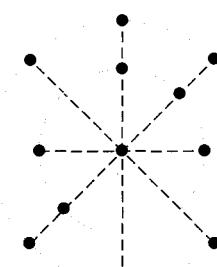
## Pytania

1. Jak pokazano na rysunku 14.22, dwie cząstki o masach  $m$  i  $2m$  znajdują się w pewnych punktach na osi. a) Gdzie na tej osi (w skończonej odległości od danych cząstek) należy umieścić trzecią cząstkę o masie  $3m$ , tak by wypadkowa siła ciążenia działająca na nią ze strony cząstek danych była równa zeru — na lewo od obu cząstek, na prawo od nich, między cząstkami i bliżej lżejszej z nich czy między cząstkami i bliżej cięższej z nich? b) Czy odpowiedź na to pytanie zmieni się, jeśli trzecia cząstka będzie miała masę  $16m$ ? c) Czy istnieje taki punkt poza osią, w którym siła wypadkowa działająca na trzecią cząstkę jest równa zero?

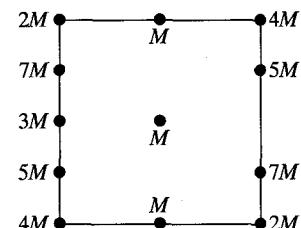


Rys. 14.22. Pytanie 1

2. Na rysunku 14.23 przedstawiono pewną cząstkę, otoczoną dwoma kołowymi pierścieniami cząstek. Promienie tych pierścieni wynoszą  $r$  i  $R$ , przy czym  $R > r$ , a wszystkie cząstki mają masę  $m$ . Wyznacz wartość i kierunek wypadkowej siły grawitacyjnej działającej na środkową cząstkę ze strony cząstek tworzących pierścieńie.



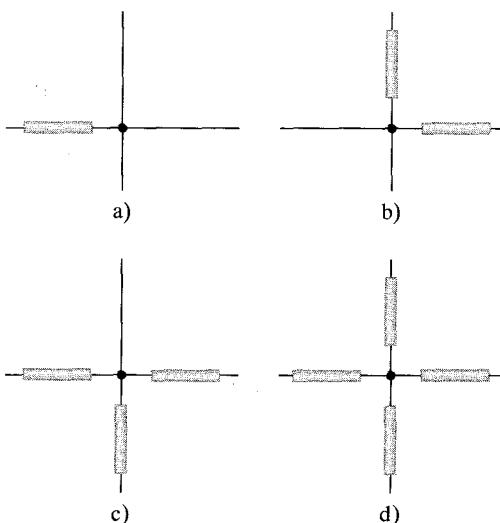
Rys. 14.23. Pytanie 2



Rys. 14.24. Pytanie 3

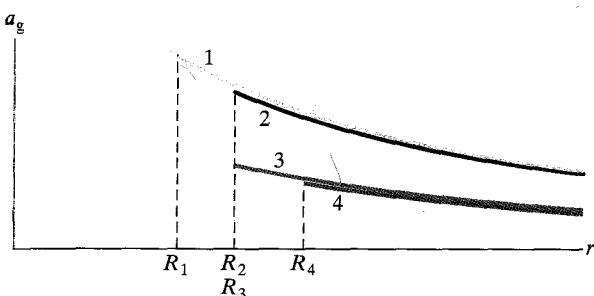
3. Jak pokazano na rysunku 14.24, pewna cząstka o masie  $M$  znajduje się w środku kwadratu, wzdłuż boków którego umieszczone są inne cząstki, odległe od siebie wzdłuż obwodu kwadratu o  $d$  lub  $d/2$ . Wyznacz wartość i kierunek wypadkowej siły grawitacyjnej działającej na środkową cząstkę ze strony pozostałych cząstek.

4. Na rysunku 14.25 przedstawiono cztery układy ciał złożone z części o masie  $m$  oraz jednego lub więcej jednorodnych prętów o masie  $M$  i długości  $L$ , odległych od części o  $d$ . Uszereguj te układy w zależności od wartości wypadkowej siły grawitacyjnej działającej na częstkę ze strony prętów, od największej do najmniejszej.



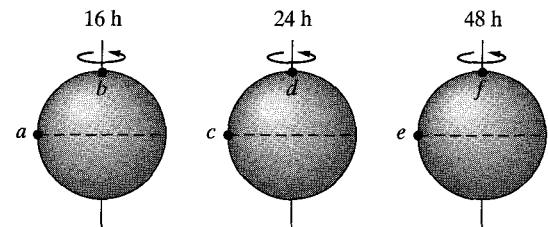
Rys. 14.25. Pytanie 4

5. Na rysunku 14.26 przedstawiono dla czterech planet zależność przyspieszenia grawitacyjnego  $a_g$  na tej planecie od odległości  $r$  od środka planety, poczynając od powierzchni planety (czyli odpowiednio od  $R_1$ ,  $R_2$ ,  $R_3$  i  $R_4$ ). Krzywe 1 i 2 nakładają się na siebie dla  $r \geq R_2$ , a krzywe 3 i 4 nakładają się na siebie dla  $r \geq R_4$ . Uszereguj planety według: a) ich masy oraz b) ich gęstości, od największych do najmniejszych wartości tych wielkości.



Rys. 14.26. Pytanie 5

6. Na rysunku 14.27 przedstawiono trzy jednorodne planety w kształcie kuli o jednakowej wielkości i masie. Ich okresy obrotu wokół własnej osi podano na rysunku. Zaznaczono również sześć punktów: trzy na równikach planet i trzy na ich biegunach północnych. Uszereguj te punkty w zależności od wartości przyspieszenia swobodnego spadku  $g$  w tych punktach, od największej do najmniejszej.

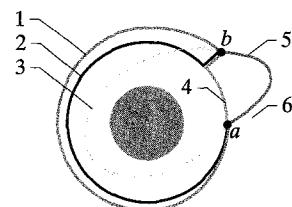


Rys. 14.27. Pytanie 6

7. Znajdujesz się w przestrzeni kosmicznej w inercjalnym układzie odniesienia i obserwujesz dwie jednakowe, jednorodne kule poruszające się ku sobie pod wpływem siły wzajemnego przyciągania grawitacyjnego. Przyjmij, że w chwili początkowej obie kule miały prędkość równą zeru, a energia potencjalna układu kul wynosiła  $E_{p,pocz}$ . Wyznacz energię kinetyczną każdej kuli w chwili, gdy ich odległość wynosi połowę ich odległości początkowej.

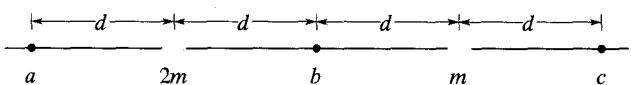
8. Uszereguj cztery układy cząstek o jednakowej masie ze sprawdzianu 2 w zależności od wartości bezwzględnej grawitacyjnej energii potencjalnej układu, od największej do najmniejszej.

9. Na rysunku 14.28 przedstawiono sześć torów, po których rakieta znajdująca się na orbicie wokół księżyca może przemieścić się z punktu  $a$  do punktu  $b$ . Uszereguj te tory w zależności od odpowiadającej ruchowi po nich: a) zmiany grawitacyjnej energii potencjalnej układu rakieta-księżyc, b) pracy wykonanej nad rakietą przez siłę grawitacyjną działającą na nią ze strony księżyca, od największych do najmniejszych.



Rys. 14.28. Pytanie 9

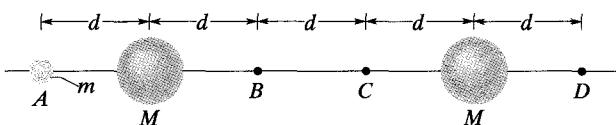
10. Jak pokazano na rysunku 14.29, dwie części o masach  $m$  i  $2m$  są unieruchomione w pewnych punktach na osi. Trzecia część (nie pokazana na rysunku), o masie  $m$ , ma być przeniesiona z nieskończonej odległości w jedno z położień:  $a$ ,  $b$  lub  $c$ . Uszereguj te położenia w zależności od pracy, jaką musi wykonać nad trzecią częścią wypadkowa siła grawitacyjna działająca na nią ze strony części nieruchomych, od największej do najmniejszej.



Rys. 14.29. Pytanie 10

11. Jak pokazano na rysunku 14.30, cząstka o masie  $m$  znajduje się początkowo w punkcie  $A$ , odległym o  $d$  od środka pewnej jednorodnej kuli oraz o  $4d$  od środka innej jednorodnej kuli, z których obie mają masę  $M \gg m$ . Cząstka zostaje następnie przeniesiona z punktu  $A$  do punktu  $D$ . Odpowiedz, czy poniższe wielkości są przy tym dodatnie, ujemne, czy równe zeru: a) zmiana grawitacyjnej energii potencjalnej cząstki, b) praca wykonana przez działającą na cząstkę wypadkową siłę grawitacyjną,

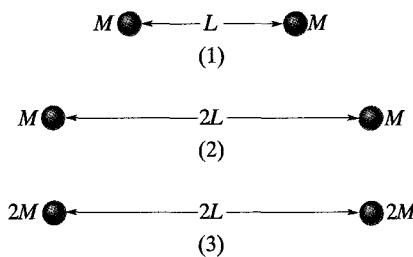
- c) praca wykonana przez siłę powodującą przemieszczenie cząstki.  
d) Jaki byłyby odpowiedzi na powyższe pytania, gdyby cząstka była przenoszona z punktu *B* do punktu *C*?



Rys. 14.30. Pytanie 11

12. Na rysunku 14.31 przedstawiono trzy pary gwiazd tworzących układy podwójne oraz podano ich masy i odległości. a) Gdzie znajduje się punkt, wokół którego poruszają się po orbitach składniki każdego z pokazanych układów podwójnych? b) Uszereguj te

pary gwiazd w zależności od wartości przyspieszenia dośrodkowego gwiazd, od największej do najmniejszej.



Rys. 14.31. Pytanie 12

## Zadania

Rozwiążanie jest dostępne na stronie internetowej podręcznika: <http://www.wiley.com/college/hrw>

Rozwiążanie jest dostępne w postaci interaktywnej, wykorzystującej oprogramowanie Interactive Learning Ware (na tej samej stronie)

### 14.2 Prawo powszechnego ciążenia

1. W jakiej odległości od siebie muszą znajdować się dwie cząstki o masach 5,2 kg oraz 2,4 kg, aby siła ich przyciągania grawitacyjnego miała wartość  $2,3 \cdot 10^{-12}$  N?

2. Niektórzy wierzą w to, że położenie planet w chwili urodzin ma wpływ na losy człowieka. Inni wyjmiewają ten pogląd, mówiąc, że siła ciążenia, jaką działa na dziecko lekarz przyjmujący poród, jest większa od siły, jaką działają na nie planety. Aby sprawdzić, czy tak jest w istocie, oblicz i porównaj ze sobą wartości siły grawitacyjnej, jaką działa na noworodka o masie 3 kg: a) lekarz o masie 70 kg znajdujący się w odległości 1 m od dziecka (przymij, że jego masa jest w przybliżeniu skupiona w jednym punkcie), b) Jowisz, czyli najczęstsza planeta, o masie  $m = 2 \cdot 10^{27}$  kg, gdy znajduje się on najbliżej Ziemi, tzn. w odległości  $6 \cdot 10^{11}$  m od niej, oraz c) Jowisz, gdy znajduje się on najdalej od Ziemi, tzn. w odległości  $9 \cdot 10^{11}$  m od niej. d) Czy wspomniani prześmiewcy mają rację?

3. Jeden z satelitów z serii *Echo* ma postać kulistego balonu aluminiowego o średnicy 30 m i masie 20 kg. Wyobraź sobie, że meteoroid o masie 7 kg przelatuje w odległości 3 m od powierzchni tego satelity. Ile wynosi wartość siły ciążenia, jaką działa satelita na meteoroid w chwili ich największego zbliżenia?

4. Na Księżyc działa siła ciążenia ze strony zarówno Słońca, jak i Ziemi. Ile wynosi stosunek tych sił  $F_S/F_Z$  (średnia odległość Księżyca od Słońca jest równa odległości Ziemi od Słońca)?

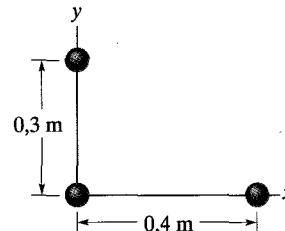
5. Pewne ciało o masie *M* dzieli się na dwie części o masach *m* i *M - m*, które następnie oddalają się od siebie. Dla jakiej wartości stosunku *m/M* wartość siły grawitacyjnej działającej między tymi częściami jest największa?

### 14.3 Grawitacja a zasada superpozycji

6. Statek kosmiczny leci wzdłuż linii prostej łączącej Ziemię i Księżyc. W jakiej odległości od Ziemi wypadkowa siła ciążenia działająca na statek jest równa零?

7. W jakiej odległości od Ziemi musi znajdować się sonda kosmiczna na prostej łączącej Ziemię i Słońce, aby siły przyciągania grawitacyjnego działające na nią ze strony Ziemi i Słońca równoważyły się?

8. Trzy kule o masie 5 kg znajdują się na płaszczyźnie *xy* w miejscach pokazanych na rysunku 14.32. Ile wynosi wartość wypadkowej siły grawitacyjnej działającej na kulę umieszczoną w początku układu współrzędnych ze strony pozostałych kul?

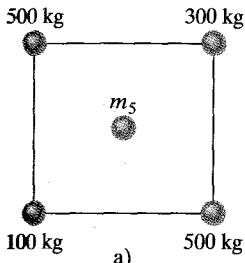


Rys. 14.32. Zadanie 8

9. Jak pokazano na rysunku 14.33a, cztery kule znajdują się w wierzchołkach kwadratu o boku 2 cm. Wyznacz wartość i kierunek wypadkowej siły grawitacyjnej, jaką działają te kule na kulę o masie  $m_5 = 250$  kg umieszczoną w środku kwadratu.

10. Jak pokazano na rysunku 14.33b, trzy kule, dwie o masie *m* i jedną o masie *M*, umieszczone w wierzchołkach trójkąta równobocznego, a czwartą kulę, o masie  $m_4$  — w środku tego trójkąta. Wypadkowa siła grawitacyjna działająca na kulę środkową ze strony trzech pozostałych jest równa zero. a) Ile wynosi

**M** w jednostkach **m**? b) Ile wyniesie wartość wypadkowej siły grawitacyjnej działającej na środkową kulę, jeśli jej masa będzie wynosić  $2m_4$ ?

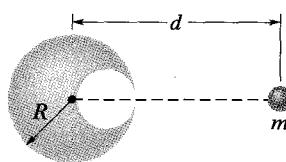


Rys. 14.33. Zadania 9 i 10

11. Masy i współrzędne trzech kul wynoszą:  $20 \text{ kg}, x = 0,5 \text{ m}, y = 1 \text{ m}$ ;  $40 \text{ kg}, x = -1 \text{ m}, y = -1 \text{ m}$ ;  $60 \text{ kg}, x = 0 \text{ m}, y = -0,5 \text{ m}$ ; Ile wynosi wartość siły grawitacyjnej, jaką działają te kule na kulę o masie  $20 \text{ kg}$  znajdującą się w początku układu współrzędnych?

12. Cztery jednorodne kule o masach  $m_A = 400 \text{ kg}$ ,  $m_B = 350 \text{ kg}$ ,  $m_C = 2000 \text{ kg}$  i  $m_D = 500 \text{ kg}$  znajdują się w punktach o współrzędnych ( $x, y$ ) równych odpowiednio  $(0, 50 \text{ cm})$ ,  $(0, 0)$ ,  $(-80 \text{ cm}, 0)$  i  $(40 \text{ cm}, 0)$ . Ile wynosi wypadkowa siła grawitacyjna działająca na kulę  $B$  ze strony pozostałych kul?

13. Na rysunku 14.34 przedstawiono kulę ołowianą o promieniu  $R$  z kulistym wydłużeniem rociągającym się od środka kuli do jej prawego brzegu. Masa kuli przed jej wydłużeniem wynosiła  $M$ . Wyznacz siłę grawitacyjną, jaką ta wydłużona kula ołowiana przyciąga małą kulę o masie  $m$ , leżącą na prostej przechodzącej przez środek kuli i środek jej wydłużenia, w odległości  $d$  od środka dużej kuli.



Rys. 14.34. Zadanie 13

#### 14.4 Grawitacja w pobliżu powierzchni Ziemi

14. Wyobraź sobie, że stoisz na wadze na chodniku przed wieżowcem w centrum Nowego Jorku. Waga wskazuje, że twój ciężar wynosi  $530 \text{ N}$ . Następnie wjeżdzasz na szczyt wieżowca o wysokości  $410 \text{ m}$ . O ile mniej będziesz ważył na szczycie wieżowca (będziesz przecież nieco dalej od środka Ziemi)? Pomiń wpływ ruchu obrotowego Ziemi.

15. Na jakiej wysokości nad powierzchnią Ziemi przyspieszenie grawitacyjne jest równe  $4,9 \text{ m/s}^2$ ?

16. a) Ile będzie ważyło na powierzchni Księżyca ciało, które na powierzchni Ziemi waży  $100 \text{ N}$ ? b) W jakiej odległości od środka Ziemi, mierzonej w jednostkach promienia Ziemi, należałoby

umieścić to ciało, aby jego ciężar był równy jego ciężarowi na Księżyku?

17. Największa możliwa prędkość kątowa ruchu obrotowego planety odpowiada sytuacji, w której siła ciążenia działająca na grunt na równiku ledwie wystarcza, by zapewnić siłę dośrodkową potrzebną do obrotu z taką prędkością (dlaczego?). a) Wykaż, że odpowiadający tej sytuacji najkrótszy okres obrotu planety wynosi

$$T = \sqrt{\frac{3\pi}{G\rho}},$$

gdzie  $\rho$  jest gęstością jednorodnej planety kulistej. b) Oblicz ten okres obrotu, zakładając, że gęstość planety wynosi  $3 \text{ g/cm}^3$ , co jest wielkością typową dla wielu planet, satelitów i planetoid. Nigdy nie obserwowano, aby jakiekolwiek ciało niebieskie obracało się z okresem krótszym niż wyznaczony w tym zadaniu.

18. Model pewnej planety zakłada, że składa się ona z jądra o promieniu  $R$  i masie  $M$  oraz warstwy zewnętrznej o promieniu wewnętrznym równym  $R$  i zewnętrznym równym  $2R$  oraz masie  $4M$ . Przyjmij, że  $M = 4,1 \cdot 10^{24} \text{ kg}$ , a  $R = 6 \cdot 10^6 \text{ m}$  i oblicz przyspieszenie grawitacyjne cząstki znajdującej się w odległości a)  $R$  oraz b)  $3R$  od środka planety.

19. Ciało jest zawieszone na wadze sprężynowej na statku płynącym wzdłuż równika z prędkością  $v$ . a) Wykaż, że wskazanie wagi jest niemal równe  $W_0(1 \pm 2\omega v/g)$ , gdzie  $\omega$  jest prędkością kątową Ziemi, a  $W_0$  — wskazaniem wagi na nieruchomym statku. b) Wyjaśnij, skąd bierze się znak  $\pm$ .

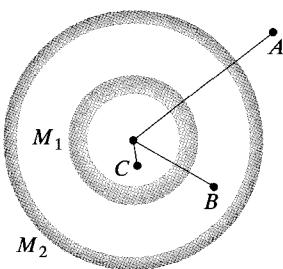
20. Promień  $R_{\text{dz}}$  i masa  $M_{\text{dz}}$  czarnej dziury są ze sobą związane zależnością  $R_{\text{dz}} = 2GM_{\text{dz}}/c^2$ , przy czym  $c$  jest prędkością światła. Przyjmij, że przyspieszenie grawitacyjne  $a_g$  ciała znajdującego się w odległości  $r_c = 1,001R_{\text{dz}}$  od środka czarnej dziury jest dane wzorem (14.10) (co jest prawdą dla dużych czarnych dziur). a) Wyznacz zależność  $a_g$  (w punkcie odległym od środka czarnej dziury o  $r_c$ ) od  $M_{\text{dz}}$ . b) Czy  $a_g$  (w tym punkcie) rośnie, czy maleje ze wzrostem  $M_{\text{dz}}$ ? c) Ile wynosi  $a_g$  (w tym punkcie) dla bardzo dużej czarnej dziury o masie równej  $1,55 \cdot 10^{12}$  mas Słońca (masa Słońca wynosi  $1,99 \cdot 10^{30} \text{ kg}$ )? d) Wyobraź sobie, że astronautka z przykładu 14.3 znajduje się w punkcie odległym o  $r_c$  od środka tej czarnej dziury, mając stopy zwrócone w stronę jej środka. Oblicz różnicę przyspieszenia grawitacyjnego w miejscu, w którym znajduje się jej głowa, i w miejscu, w którym znajdują się jej stopy. e) Czy rozciąganie ciała astronautki będzie groźne dla jej zdrowia?

21. Podejrzewa się, że niektóre gwiazdy neutronowe (gwiazdy o olbrzymiej gęstości) wirują z prędkością 1 obrotu na sekundę. Przyjmij, że taka gwiazda ma promień  $20 \text{ km}$ , i oblicz, jaka co najmniej musi być jej masa, by materia na jej powierzchni nie odrywała się od gwiazdy przy tak szybkim jej obrocie.

#### 14.5 Grawitacja wewnętrz Ziemi

22. Na rysunku 14.35 przedstawiono dwie współśrodkowe powłoki kuliste o stałej gęstości i masach  $M_1$  i  $M_2$ . Ob-

licz wartość wypadkowej siły grawitacyjnej działającej ze strony tych powłok na cząstkę o masie  $m$  umieszczoną: a) w punkcie  $A$  odległym od środka o  $r = a$ , b) w punkcie  $B$  odległym od środka o  $r = b$ , c) w punkcie  $C$  odległym od środka o  $r = c$  ( $r$  jest odległością od wspólnego środka powłok).

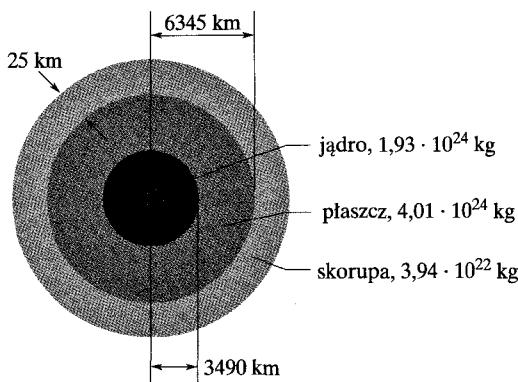


Rys. 14.35. Zadanie 22

**23.** Kula o stałej gęstości ma masę  $1 \cdot 10^4$  kg i promień 1 m. Ile wynosi wartość siły ciążenia, jaką działa ta kula na cząstkę o masie  $m$  umieszczoną w odległości a) 1,5 m oraz b) 0,5 m od środka tej kuli? c) Wyznacz zależność wartości siły grawitacyjnej, działającej na cząstkę odległą od środka kuli o  $r \leq 1$  m, od wartości  $r$ .

**24.** Przyspieszenie grawitacyjne ciał znajdujących się na powierzchni jednorodnej kuli o promieniu  $R$  jest równe  $a_g$ . Wyznacz dwie wartości odległości od środka kuli, w których przyspieszenie grawitacyjne wynosi  $a_g/3$ . (Wskazówka: Rozważ odległości zarówno większe, jak i mniejsze od promienia kuli).

**25.** Na rysunku 14.36 przedstawiono schematyczny (nie w skali) przekrój Ziemi. Pokazuje on, że Ziemia nie jest jednorodna, lecz składa się z trzech warstw: zewnętrznej *skorupy*, *płaszcza* oraz wewnętrznego *jądra*. Wymiary tych warstw i ich masy podano na rysunku. Jako całość Ziemia ma masę  $5,98 \cdot 10^{24}$  kg i promień 6370 km. Przyjmij, że Ziemia jest kulą, i pomiń jej ruch obrotowy. a) Oblicz przyspieszenie  $a_g$  na powierzchni Ziemi. b) Wyobraź sobie, że w Ziemi wywiercono pionowy szyb aż do granicy skorupy i płaszcza Ziemi, tzn. na głębokość 25 km (na przełomie lat pięćdziesiątych i sześćdziesiątych XX wieku w USA podjęto takie prace wiertnicze w ramach projektu „Mohole”, pomyślanego trochę jako przeciwaga dla programu podboju kosmosu; projekt zarzucono ze względu na jego znaczne koszty). Oblicz wartość  $a_g$



Rys. 14.36. Zadanie 25

na dnie takiego szybu. c) Przyjmij z kolei, że Ziemia jest jednorodną kulą o takiej samej, jak podano powyżej, całkowitej masie i takim samym promieniu. Ile wynosi teraz  $a_g$  na głębokości 25 km (dokładne pomiary  $a_g$  są źródłem informacji o wewnętrznej budowie Ziemi, choć ich wyniki są nieraz zaburzone przez lokalne zmiany gęstości gruntu)?

#### 14.6 Grawitacyjna energia potencjalna

**26.** a) Ile wynosi grawitacyjna energia potencjalna układu dwóch cząstek z zadania 1? Wyobraź sobie, że odległość tych cząstek zwiększo trzykrotnie. Jaka praca została przy tym wykonana przez: b) działającą między cząstkami siłę grawitacyjną, c) siłę powodującą zwiększenie odległości cząstek?

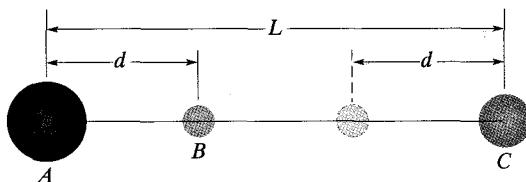
**27.** Rozważ jeszcze raz sytuację z zadania 12. a) Usuń kulę  $A$  i oblicz grawitacyjną energię potencjalną układu pozostałych trzech kul. b) Wyobraź sobie, że ponownie umieszczasz kulę  $A$  w jej poprzednim miejscu. Czy energia potencjalna powstałego w ten sposób układu czterech kul będzie większa, czy mniejsza od energii z punktu (a)? c) Czy praca, jaką musiałeś wykonać w punkcie (a), aby usunąć kulę  $A$ , jest dodatnia czy ujemna? d) Czy praca, jaką musiałeś wykonać w punkcie (b), aby ponownie dołączyć do układu kulę  $A$ , jest dodatnia, czy ujemna?

**28.** Rozważ jeszcze raz sytuację z zadania 5. Dla jakiej wartości stosunku  $m/M$  grawitacyjna energia potencjalna układu jest najmniejsza?

**29.** Średnica Marsa wynosi w przybliżeniu  $6,9 \cdot 10^3$  km, a średnica Ziemi —  $1,3 \cdot 10^4$  km. Masa Marsa stanowi  $0,11$  masy Ziemi. a) Ile wynosi stosunek średnich gęstości Marsa i Ziemi? b) Ile wynosi przyspieszenie grawitacyjne na Marsie? c) Ile wynosi prędkość ucieczki z Marsa?

**30.** Oblicz energię potrzebną do ucieczki ciała a) z Księżyca oraz b) z Jowisza, wyrażając ją w jednostkach energii potrzebnej do ucieczki z Ziemi.

**31.** Trzy kule przedstawione na rysunku 14.37 mają masy:  $m_A = 800$  g,  $m_B = 100$  g i  $m_C = 200$  g, a ich środki ustawione są na jednej prostej, przy czym  $L = 12$  cm, a  $d = 4$  cm. Przesuwamy kulę  $B$  wzdłuż linii łączącej środki kul do położenia, w którym odległość środków kul  $B$  i  $C$  wynosi  $d = 4$  cm. Jaka praca zostaje przy tym wykonana nad kulą  $B$  przez: a) siłę użytą do przesunięcia kuli  $B$ , b) wypadkową siłę grawitacyjną działającą na kulę  $B$  ze strony kul  $A$  i  $C$ ?



Rys. 14.37. Zadanie 31

**32.** Hipotetyczna planeta Zero ma masę równą  $5 \cdot 10^{23}$  kg, promień wynoszący  $3 \cdot 10^6$  m i jest pozbawiona atmosfery. Z jej powierzchni ma być wystrzelona pionowo sonda kosmiczna o masie 10 kg. a) Wyznacz energię kinetyczną tej sondy w odległości  $4 \cdot 10^6$  m od środka planety, jeśli jej energia początkowa w chwili wystrzelienia wynosiła  $5 \cdot 10^7$  J. b) Jaką początkową energię kinetyczną należy nadać tej sondzie podczas jej wystrzelenia z powierzchni planety, aby w chwili maksymalnego wzniesienia była ona odległa od środka planety o  $8 \cdot 10^6$  m?

**33.** Rakietę nadano w pobliżu powierzchni Ziemi prędkość  $v = 2\sqrt{gR_Z}$  ( $R_Z$  — promień Ziemi), po czym pozwolono jej wzrosnąć się swobodnie. a) Wykaż, że rakietę ta oddali się od Ziemi nieograniczenie („ucieknie”). b) Wykaż, że bardzo daleko od Ziemi będzie się ona poruszać z prędkością  $v = \sqrt{2gR_Z}$ .

**34.** Planeta Roton o masie  $7 \cdot 10^{24}$  kg i promieniu 1600 km przyiąga siłą grawitacyjną meteoroid znajdujący się początkowo w spoczynku tak daleko od planety, że jego odległość od planety można przyjąć za nieskończoną. Następnie meteoroid spada na planetę. Oblicz prędkość meteoroidu w chwili dotarcia do powierzchni Rotona, zakładając, że planeta nie ma atmosfery.

**35.** a) Oblicz prędkość ucieczki z kulistej planetoidy o promieniu 500 km i przyspieszeniu grawitacyjnym na powierzchni równym  $3 \text{ m/s}^2$ . b) Jak daleko odbiegnie od powierzchni tej planetoidy cząstka opuszczająca tę powierzchnię z prędkością radialną równą 1000 m/s? c) Z jaką prędkością uderzy w powierzchnię tej planetoidy przedmiot puszczonej swobodnie z wysokości 1000 km nad tą powierzchnią?

**36.** Rakietę o masie 150 kg oddala się radialnie od Ziemi. W chwili, gdy znajduje się ona w odległości 200 km od powierzchni Ziemi i ma prędkość 3,7 km/s, jej silnik zostaje wyłączone. a) Zaniedbując opór powietrza, wyznacz energię kinetyczną rakietę, gdy znajdzie się ona w odległości 1000 km od powierzchni Ziemi. b) Na jaką maksymalną wysokość nad powierzchnię Ziemi wznieś się ta rakietą?

**37.** Każda z dwóch gwiazd neutronowych odległych od siebie o  $10^{10}$  m ma masę  $10^{30}$  kg i promień  $10^5$  m. W chwili początkowej znajdują się one względem siebie w spoczynku. Wyznacz ich prędkość, mierzoną w układzie odniesienia, w którym gwiazdy początkowo spoczywały, w chwili, gdy: a) ich odległość jest równa połowie ich odległości początkowej, b) zderzają się ze sobą.

**38.** Daleko w przestrzeni kosmicznej znajdują się dwie kule. Kula A ma masę 20 kg i jest umieszczona w początku osi  $x$ , a kula B ma masę 10 kg i jest umieszczona w punkcie o współrzędnej  $x = 0,8$  m. Kula A jest unieruchomiona, a kuli B pozwalamy się w pewnej chwili poruszać. a) Ile wynosi grawitacyjna energia potencjalna układu tych kul w chwili, w której zwalniamy kulę B? b) Ile wynosi energia kinetyczna kuli B po przebyciu przez nią drogi 0,2 m w kierunku kuli A?

**39.** Pocisk zostaje wystrzelony pionowo z powierzchni Ziemi z prędkością początkową równą 10 km/s. Pomiń opór powietrza

i wyznacz maksymalną wysokość, na jaką wznieś się ten pocisk nad powierzchnię Ziemi. ilw

#### 14.7 Planety i satelity: prawa Keplera

**40.** Średnia odległość Marsa od Słońca jest 1,52 razy większa niż średnia odległość Ziemi od Słońca. Korzystając z trzeciego prawa Keplera, oblicz, ile lat zajmuje Marsowi jedno okrążenie Słońca. Porównaj otrzymany wynik z wartością podaną w dodatku C.

**41.** Satelita Marsa Phobos obiega planetę po orbicie niemal kołowej. Znając promień tej orbity, równy  $9,4 \cdot 10^6$  m, i okres obiegu, wynoszący 7 godzin i 39 minut, wyznacz masę Marsa.

**42.** Wyznacz masę Ziemi, wiedząc, że promień orbity Księżyca  $r$  jest równy  $3,82 \cdot 10^5$  km, a okres obiegu  $T$  wynosi 27,3 doby. Przyjmij, że środkiem orbity Księżyca jest środek Ziemi, a nie środek masy układu Ziemia-Księżyca.

**43.** Słońce, którego masa wynosi  $2 \cdot 10^{30}$  kg, obiega środek Drogi Mlecznej, odległy od nas o  $2,2 \cdot 10^{20}$  m, przy czym okres tego ruchu wynosi  $2,5 \cdot 10^8$  lat. Przyjmij, że wszystkie gwiazdy w Galaktyce mają masę równą masie Słońca, że są one rozłożone równomiernie w kuli o środku w centrum Galaktyki oraz że Słońce znajduje się na skraju tej kuli, i oszacuj liczbę gwiazd w naszej Galaktyce.

**44.** Satelita został umieszczony na okoziemskiej orbicie kołowej o promieniu równym połowie promienia orbity Księżyca. Oblicz okres ruchu tego satelity w miesiącach księżycowych (miesiąc księżycowy jest to okres obiegu Księżyca wokół Ziemi).

**45.** a) Ile wynosi prędkość liniowa satelity Ziemi na orbicie kołowej odległej od powierzchni Ziemi o 160 km? b) Ile wynosi okres obiegu Ziemi przez tego satelitę?

**46.** Środek Słońca znajduje się w jednym z ognisk orbity Ziemi. Ile wynosi odległość drugiego ogniska tej orbity od Słońca, wyrażona: a) w metrach, b) w jednostkach promienia Słońca, równego  $6,96 \cdot 10^8$  m? Mimośród orbity Ziemi wynosi 0,0167, a jej półosi wielka jest równa  $1,5 \cdot 10^{11}$  m.

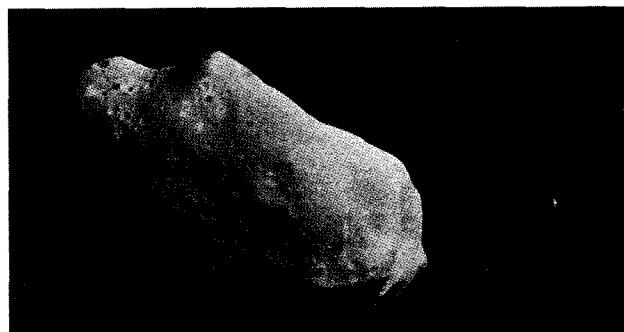
**47.** Satelita poruszający się wokół Ziemi po orbicie eliptycznej znajduje się na wysokości 360 km nad powierzchnią Ziemi, gdy jest najdalej od Ziemi, a na wysokości 180 km, gdy jest najbliższej Ziemi. Oblicz: a) półosi wielką i b) mimośród jego orbity (Wskaźówka: Patrz przykład 14.6).

**48.** Pewien satelita znajduje się przez cały czas nad określonym miejscem na równiku Ziemi (która obraca się wokół swej osi). Na jakiej wysokości nad powierzchnią Ziemi znajduje się ten satelita (jego orbitę nazywamy *geostacjonarną*)?

**49.** Pewna kometa, zaobserwowana przez astronomów chińskich w kwietniu 574 roku, została ponownie zauważona na niebie w maju 1994 roku. Przyjmij czas, który upłynął między tymi

dwiema obserwacjami, za okres obiegu tej komety wokół Słońca i założ, że mimośród jej orbity jest równy 0,11. Oblicz: a) półosią wielką orbity tej komety oraz b) największą odległość komety od Słońca, wyrażając te wielkości w jednostkach średniego promienia orbity Plutona  $R_p$ .

**50.** W roku 1993 sonda kosmiczna Galileo przeszła na Ziemię obraz planetoidy 243 Ida i jej maleńskiego księżyca (noszącego obecnie nazwę Daktyl), pierwszego zaobserwowanego księżyca planetoidy (rys. 14.38). Na tym obrazie księżyc o średnicy 1,5 km znajduje się w odległości 100 km od środka planetoidy, która ma długość 55 km. Kształt orbity księżyca nie jest zbyt dobrze znany; przyjmij, że ta orbita jest kołowa, a okres jej obiegu wynosi 27 h. a) Ile wynosi masa planetoidy? b) Objętość planetoidy, zmierzona na podstawie obrazów z sondy Galileo, wynosi  $14\,100 \text{ km}^3$ . Ile wynosi gęstość tej planetoidy?



Rys. 14.38. Zadanie 50. Obraz z sondy kosmicznej Galileo, na którym widoczny jest maleński księżyc planetoidy 243 Ida

**51.** W 1610 roku Galileusz odkrył za pomocą swego teleskopu cztery największe księżyce Jowisza. Średnie promienie ich orbit  $a$  oraz okresy ich obiegu  $T$  podano w poniższej tabelce.

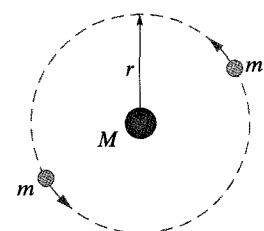
Nazwa	$a [10^8 \text{ m}]$	$T [\text{doby}]$
Io	4,22	1,77
Europa	6,71	3,55
Ganimedes	10,7	7,16
Callisto	18,8	16,7

a) Sporządź wykres  $\log a$  (oś y) jako funkcji  $\log T$  (oś x) i wykaż, że otrzymuje się linię prostą. b) Wyznacz nachylenie tej prostej i porównaj je z wartością oczekiwana na podstawie trzeciego prawa Keplera. c) Wyznacz masę Jowisza na podstawie współrzędnej punktu przecięcia otrzymanej prostej z osią y.

**52.** Satelita o masie 20 kg znajduje się na orbicie kołowej o promieniu  $8 \cdot 10^6 \text{ m}$  wokół planety o nieznanej masie. Okres obiegu wynosi 2,4 h, a wartość przyspieszenia grawitacyjnego na powierzchni planety jest równa  $8 \text{ m/s}^2$ . Ile wynosi promień tej planety?

**53.** Gwiazdy będące składnikami układu podwójnego mają masy równe masie Słońca i krążą wokół swego środka masy. Ich odległość jest równa odległości Ziemi od Słońca. Wyznacz okres ich ruchu w latach.

**54.** Pewien potrójny układ gwiazd składa się z dwóch gwiazd o masie  $m$  obiegających gwiazdę środkową o masie  $M$  po tej samej orbicie kołowej o promieniu  $r$  (rys. 14.39), znajdując się w każdej chwili na końcach średnicy orbity. Wyprowadź wzór na okres obiegu tych gwiazd.

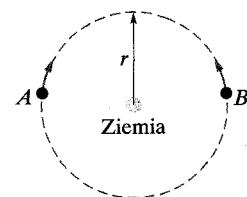


Rys. 14.39. Zadanie 54

**55\***. Trzy jednakowe gwiazdy o masie  $M$  położone są w wierzchołkach trójkąta równobocznego o boku  $L$ . Pod wpływem działających między nimi sił grawitacyjnych poruszają się po orbicie kołowej stanowiącej okrąg opisany na tym trójkącie, przy czym ich względne położenia nie ulegają zmianie (tzn. przez cały czas tworzą trójkąt równoboczny). Ile wynosi prędkość liniowa, z jaką poruszają się te gwiazdy po orbicie?

#### 14.8 Satelity: orbity i energia

**56.** Dwa satelity  $A$  i  $B$ , mające jednakową masę  $m$ , poruszają się po tej samej orbicie kołowej o promieniu  $r$  wokół Ziemi, której masa wynosi  $M_Z$ . Ich ruch zachodzi w przeciwnych kierunkach (patrz rysunek 14.40), tak że dochodzi do ich zderzenia. a) Wyznacz: całkowitą energię mechaniczną  $E_A + E_B$  układu złożonego z tych satelitów i Ziemi przed zderzeniem, wyrażając ją przez  $G$ ,  $M_Z$ ,  $m$  i  $r$ . b) Przyjmij, że zderzenie satelitów jest całkowicie niesprężyste, tzn. że po zderzeniu tworzą one jedną bryłę (o masie równej  $2m$ ), i oblicz jej całkowitą energię mechaniczną tuż po zderzeniu. c) Opisz ruch tej bryły po zderzeniu.



Rys. 14.40. Zadanie 56

**57.** Planetoida o masie stanowiącej  $2 \cdot 10^{-4}$  masy Ziemi obiega Słońce po orbicie kołowej o promieniu dwa razy większym od odległości Ziemi od Słońca. a) Wyznacz okres ruchu planetoidy w latach. b) Ile wynosi stosunek energii kinetycznej tej planetoidy do energii kinetycznej Ziemi?

**58.** Dwa satelity Ziemi  $A$  i  $B$  o jednakowej masie  $m$  mają być umieszczone na orbitach kołowych o środku w środku Ziemi. Orbita satelity  $A$  ma się znajdować na wysokości 6370 km nad Ziemią, a orbita satelity  $B$  — na wysokości 19 110 km. Promień Ziemi  $R_Z$  jest równy 6370 km. a) Ile wynosi stosunek energii potencjalnej satelity  $B$  do energii potencjalnej satelity  $A$  na ich

orbitach? a) Ile wynosi stosunek energii kinetycznej satelity  $B$  do energii kinetycznej satelity  $A$  na ich orbitach? c) Który z nich ma większą energię całkowitą, jeśli masa każdego z nich wynosi 14,6 kg? O ile większa jest jedna z tych energii od drugiej?

59. Ciało znajduje się na orbicie eliptycznej wokół planety o mase  $M$ . Półosi wielka tej orbity wynosi  $a$ . Wykaż, że odległość tego ciała od planety  $r$  i jego prędkość  $v$  są ze sobą związane zależnością

$$v^2 = GM \left( \frac{2}{r} - \frac{1}{a} \right).$$

(Wskazówka: Skorzystaj z zasady zachowania energii mechanicznej oraz równania (14.46)).

60. Skorzystaj z wyniku zadania 59 oraz danych z przykładu 14.6 i oblicz: a) prędkość  $v_p$  komety Halleya w peryhelium jej orbity, b) jej prędkość  $v_a$  w aphelium tej orbity. c) Wykorzystaj zasadę zachowania momentu pędu względem Słońca i wyznacz stosunek odległości od Słońca peryhelium  $R_p$  i aphelium  $R_a$  orbity tej komety, wyrażając go przez  $v_p$  i  $v_a$ .

61. a) Czy wyniesienie satelity na wysokość 1500 km nad powierzchnię Ziemi wymaga większej energii niż wprawienie go w ruch po orbicie kołowej, gdy już się znajdzie na tej wysokości (przymij, że promień Ziemi wynosi 6370 km)? b) Jaka jest odpowiedź na to pytanie, jeśli wysokość wynosi 3185 km? c) Jaka jest odpowiedź na to pytanie, jeśli wysokość wynosi 4500 km?

62. Jednym ze sposobów zaatakowania satelity na orbicie okozziemskiej jest umieszczenie na tej orbicie roju ziarenek śrutu, poruszających się po tej orbicie w kierunku przeciwnym niż satelita. Założmy, że satelita znajduje się na orbicie kołowej na wysokości 500 km nad powierzchnią Ziemi i zderza się z ziarnkiem śrutu o masie 4 g. a) Ile wynosi tuż przed zderzeniem energia kinetyczna ziarnka śrutu w układzie odniesienia związanym z satelitą? b) Ile wynosi stosunek tej energii kinetycznej do energii kinetycznej pocisku o masie 4 g mającego u wylotu z lufy nowoczesnego karabina wojskowego prędkość 950 m/s?

63. Wyznacz a) prędkość, b) okres obiegu satelity o masie 220 kg na niemal kołowej orbicie na wysokości 640 km nad powierzchnią Ziemi. Przymij, że satelita traci energię mechaniczną ze średnią szybkością  $1,4 \cdot 10^5$  J na jeden obieg orbity. Załącz, co jest całkiem rozsądnym przybliżeniem, że orbita satelity jest przy tym „okręgiem o powoli zmniejszającym się promieniu” i oblicz: c) wysokość, d) prędkość i e) okres ruchu satelity na końcu jego 1500. obiegu orbity. f) Ile wynosi wartość średniej siły działającej na satelitę, która powoduje spowolnienie jego ruchu? Czy zasada zachowania momentu pędu względem środka Ziemi jest spełniona dla g) satelity, h) układu satelita–Ziemia?

#### 14.9 Grawitacja według Einsteina

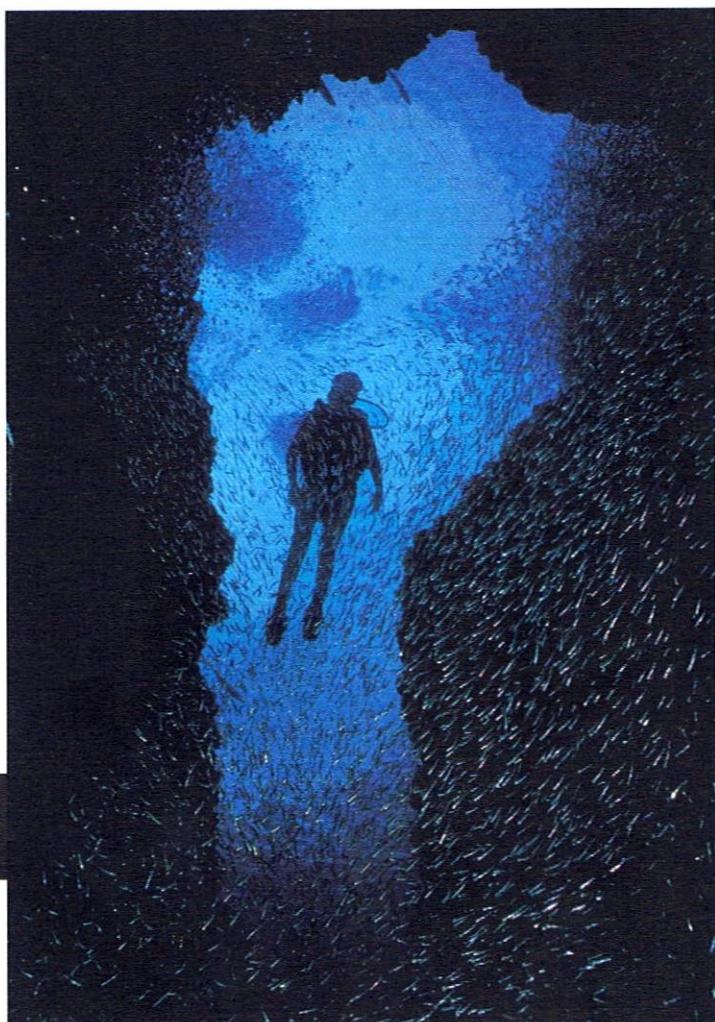
64. Waga, na której stoi na rysunku 14.19b fizyk o masie 60 kg, wskazuje 220 N. Fizyk wypuszcza z ręki melon. Po jakim czasie melon spadnie na podłogę odległą od ręki fizyka o 2,1 m?

# 15 Płyny

Siła, jaką działa woda na ciało opuszczającego się w głąb nurka, może być dla niego groźna nawet przy tak niewielkim zanurzeniu, jak na dno basenu pływackiego. A jednak w 1975 roku William Rhodes, wyposażony w specjalny sprzęt do nurkowania, w tym odpowiednią mieszankę gazów do oddychania, wyszedł z komory opuszczonej w Zatoce Meksykańskiej na głębokość 300 m, po czym zanurzył się na rekordową głębokość 350 m. Może ci się to wydawać dziwne, lecz początkujący nurek, wykonujący ćwiczenia w basenie pływackim, może być bardziej narażony na niebezpieczeństwo ze strony siły, jaką działa na niego woda, niż Rhodes w czasie swego wyczynu. Początkującym nurkom zdarzają się nawet wypadki śmiertelne, gdy zapomną, jak należy zachowywać się pod wodą.

**Na czym polega to potencjalnie zabójcze zagrożenie?**

Odpowiedź znajdziesz w tym rozdziale.



## 15.1. Płyny w otaczającym nas świecie

**Płyny** — pod tą nazwą rozumiemy ciecze i gazy — grają kluczową rolę w naszym codziennym życiu. Wdychamy je i pijemy, a niezwykle ważny, życiodajny płyn krąży w krwiobiegu każdego z nas. Płynne są oceany, płynna jest też atmosfera ziemska.

W samochodzie mamy płyny w oponach, w zbiorniku z paliwem, w chłodnicy, w komorach spalania w silniku, w układzie wydechowym, w akumulatorze, w układzie klimatyzacji, w zbiorniku płynu do spryskiwacza, w układzie smarowania i w układzie hydraulicznym (*hydrauliczny* oznacza właśnie działający przy użyciu płynu). Gdy natkniesz się następnym razem na dużą koparkę, spróbuj policzyć, ile zawiera ona siłowników hydraulicznych, za pomocą których wykonuje swą pracę. Wielkie samoloty odrzutowe też mają ich mnóstwo.

Dzięki energii kinetycznej poruszającego się płynu działają wiatraki, a dzięki energii potencjalnej innego płynu — elektrownie wodne. Działając przez długi czas, płyny wyrzeźbiły nasz krajobraz. Nieraz jeździmy bardzo daleko, by móc po prostu popatrzeć na ruch płynu. Może więc czas już dowiedzieć się, co mówi fizyka o płynach.

## 15.2. Co to jest płyn?

**Płyn** — w odróżnieniu od ciała stałego — to substancja zdolna do przepływu. Gdy umieścimy go w naczyniu, przyjmie kształt tego naczynia. Dzieje się tak dlatego, że płyn nie może się przeciwstawić sile stycznej do jego powierzchni (używając pojęć wprowadzonych w paragrafie 13.6, powiemy, że płyn to substancja, która płynie, gdyż nie jest w stanie przeciwstawić się naprężeniu ścińiącemu; może jednak działać siłą prostopadłą do swej powierzchni). Niektóre materiały, na przykład smoła, bardzo długo dostosowują swój kształt do kształtu naczynia, ale w końcu tak się właśnie dzieje i dlatego uważamy je również za płyny.

Możesz się trochę dziwić, dlaczego łączymy ze sobą ciecze oraz gazy i nazywamy je razem płynami. Przecież — mógłbyś powiedzieć — woda w postaci cieczy tak samo różni się od pary, jak od lodu. Otóż nie jest to prawda. Lód, podobnie jak inne ciała krystaliczne, składa się z atomów rozmieszczenych w regularny sposób w trójwymiarowej sieci. Ani w parze, ani w cieczy (np. wodzie) nie ma regularnego układu atomów czy cząsteczek, rozciągającego się tak daleko jak w ciele stałym.

## 15.3. Gęstość i ciśnienie

Gdy omawialiśmy ciała sztywne, interesowaliśmy się ciałami o dobrze określonym kształcie, na przykład drewnianymi klockami, gumowymi piłkami czy metalowymi prętami. Przydatne były nam wtedy wielkości fizyczne, które występują w zasadach dynamiki Newtona, to znaczy *masa* i *siła*. Mówiliśmy na przykład, że na klocek o masie 3,6 kg działa siła 25 N.

W przypadku płynów mamy w znacznie większym stopniu do czynienia z rozciągłością substancji, a zatem będziemy stosować do ich opisu wielkości, które mogą mieć różną wartość w różnych punktach ciała. Zamiast mówić o masie i sile, będziemy częściej korzystać z **gęstości i ciśnienia**.

## Gęstość

Aby wyznaczyć gęstość płynu  $\rho$  w pewnym jego punkcie, wydzielamy mały element objętości  $\Delta V$  w otoczeniu tego punktu i mierzymy masę  $\Delta m$  płynu zawartego w tej objętości. **Gęstość** płynu jest równa

$$\rho = \frac{\Delta m}{\Delta V}. \quad (15.1)$$

Ścisłe rzecz biorąc, gęstość płynu w danym punkcie jest równa granicy tego ilorazu, gdy objętość  $\Delta V$  staje się coraz mniejsza i mniejsza. W praktyce zakładamy zwykle, że badana próbka cieczy jest większa niż rozmiary atomów i jej struktura jest „gładka” (tzn. o stałej gęstości), a nie złożona z „ziaren” atomowych. Założenie to umożliwia nam zapisanie równania (15.1) w postaci

$$\rho = \frac{m}{V} \quad (\text{stała gęstość}), \quad (15.2)$$

przy czym  $m$  i  $V$  — to masa i objętość próbki.

Tabela 15.1. Wybrane gęstości

Substancja lub ciało	Gęstość [kg/m <sup>3</sup> ]
Przestrzeń międzygwiazdowa	$10^{-20}$
Najlepsza próżnia w laboratorium	$10^{-17}$
Powietrze (20°C, 1 atm)	1,21
Powietrze (20°C, 50 atm)	60,5
Styropian	$1 \cdot 10^2$
Lód	$0,917 \cdot 10^3$
Woda (20°C, 1 atm)	$0,998 \cdot 10^3$
Woda (20°C, 50 atm)	$1,000 \cdot 10^3$
Woda morska (20°C, 1 atm)	$1,024 \cdot 10^3$
Krew	$1,060 \cdot 10^3$
Żelazo	$7,9 \cdot 10^3$
Rtęć	$13,6 \cdot 10^3$
Ziemia (średnio)	$5,5 \cdot 10^3$
Ziemia (jądro)	$9,5 \cdot 10^3$
Ziemia (skorupa ziemska)	$2,8 \cdot 10^3$
Słońce (średnio)	$1,4 \cdot 10^3$
Słońce (jądro)	$1,6 \cdot 10^5$
Gwiazda w fazie białego karła (jądro)	$10^{10}$
Jądro uranu	$3 \cdot 10^{17}$
Gwiazda neutronowa (jądro)	$10^{18}$
Czarna dziura (o masie równej masie Słońca)	$10^{19}$

Gęstość jest wielkością skalarną; jej jednostką w układzie SI jest kilogram na metr sześcienny. W tabeli 15.1 przedstawiono wartości gęstości wybranych substancji i średnich gęstości pewnych ciał. Zwróć uwagę na to, że gęstość gazu (np. powietrza w tej tabeli) bardzo silnie zależy od ciśnienia, a gęstość cieczy (np. wody) zależy od ciśnienia nieznacznie. Inaczej mówiąc, gazy są bardzo *ścisłe*, a cieczy raczej nie.

## Ciśnienie

Wyobraź sobie, że w naczyniu wypełnionym płynem umieszczono niewielki przyrząd do pomiaru ciśnienia (rys. 15.1a). Czujnik przedstawiony na rysunku 15.1b składa się z tłoka o polu powierzchni  $\Delta S$ , mogącego się poruszać w cylindrze, do którego jest ciasno dopasowany, i opierającego się na sprężynie. Układ odczytu jego wskazań umożliwia wyznaczenie długości, o jaką sprężyna jest ściskana przez płyn napierający na tłok. Długość ta jest miarą wartości siły  $\Delta F$ , jaką płyn działa na tłok. **Ciśnienie**, jakiego doznaje tłok ze strony płynu, definiujemy jako

$$p = \frac{\Delta F}{\Delta S}. \quad (15.3)$$

Ścisłe rzeczą biorąc, ciśnienie w dowolnym punkcie płynu jest równe granicy, do której dąży ten stosunek, gdy pole powierzchni tłoka  $\Delta S$  wokół tego punktu staje się coraz mniejsze i mniejsze. Jeśli jednak siła działa równomiernie na całą powierzchnię  $S$  płaskiego tłoka, to równanie (15.3) możemy zapisać w postaci:

$$p = \frac{F}{S} \quad (\text{równomierny nacisk, płaska powierzchnia}), \quad (15.4)$$

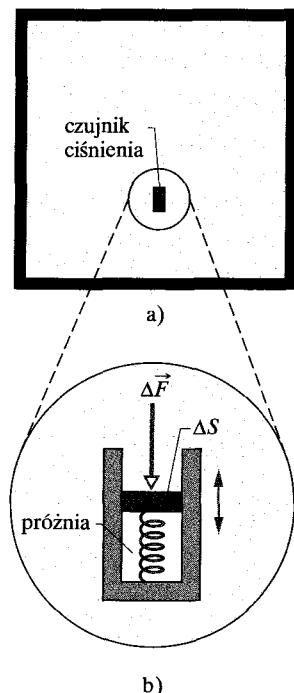
przy czym  $F$  jest wartością siły normalnej działającej na powierzchnię  $S$  (mówiąc, że nacisk jest równomierny, mamy na myśli, że siła działająca na tłok jest jednakowa w każdym punkcie jego powierzchni).

Można przekonać się doświadczalnie, że w każdym punkcie płynu pozostającego w spoczynku ciśnienie zdefiniowane równaniem (15.3) jest takie samo dla każdej orientacji czujnika. Ciśnienie jest wielkością skalarną, a zatem nie zależy od kierunku. Co prawda siła działająca na tłok czujnika jest wektorem, lecz w równaniu (15.3) występuje jedynie wartość tej siły, która jest skalarem.

Jednostką ciśnienia w układzie SI jest niuton na metr kwadratowy, czyli **pascal** (oznaczenie: Pa). Manometry do pomiaru ciśnienia w oponach są często wyskalowane w kilopaskalach. Pascal jest związany z innymi często wciąż spotykany jednostkami ciśnienia (nie należącymi do układu SI) zależnością:

$$1 \text{ atm} = 1,01 \cdot 10^5 \text{ Pa} = 760 \text{ Torr} = 14,7 \text{ funt/in}^2.$$

**Atmosfera** (atm) jest to — jak wskazuje sama nazwa — przybliżona wartość średnia ciśnienia atmosferycznego na poziomie morza. **Torr** (Tr), nazwany tak na cześć Evangelisty Toricellego, który wynalazł barometr rtęciowy w 1647 roku, nazywany jest również *milimetrem stupa rtęci* (mm Hg). W odniesieniu do funta na cal kwadratowy stosuje się często skrót psi (od ang. *pound per square inch*). W tabeli 15.2 przedstawiono kilka wybranych wartości ciśnienia.



Rys. 15.1. a) W naczyniu z płynem umieszczono niewielki czujnik ciśnienia, pokazany w powiększeniu w części (b). Miarą ciśnienia jest względne położenie ruchomego tłoka

Tabela 15.2. Wybrane wartości ciśnienia

	Ciśnienie [Pa]
Środek Słońca	$2 \cdot 10^{16}$
Środek Ziemi	$4 \cdot 10^{11}$
Największe ciśnienie uzyskane trwale w laboratorium	$1,5 \cdot 10^{10}$
Dno największej głębi oceanicznej	$1,1 \cdot 10^8$
Obcas buta na szpilce	$1 \cdot 10^6$
Opona samochodowa <sup>a</sup>	$2 \cdot 10^5$
Ciśnienie atmosferyczne na poziomie morza	$1,0 \cdot 10^5$
Normalne ciśnienie krwi <sup>a,b</sup>	$1,6 \cdot 10^4$
Najlepsza próżnia w laboratorium	$10^{-12}$

<sup>a</sup> Nadwyżka w stosunku do ciśnienia atmosferycznego.<sup>b</sup> Ciśnienie skurczowe, odpowiadające wskazaniu aparatu do pomiaru ciśnienia równemu 120 mm Hg.

## Przykład 15.1

Podłoga dużego pokoju ma wymiary  $3,5 \text{ m} \times 4,2 \text{ m}$ , a wysokość tego pokoju wynosi  $2,4 \text{ m}$ .

a) Ile wynosi ciężar powietrza zawartego w tym pokoju, jeśli ciśnienie powietrza jest równe 1 atm?

### ROZWIĄZANIE:

Skorzystamy z dwóch spostrzeżeń:

1. Ciężar powietrza jest równy  $mg$ , przy czym  $m$  jest masą powietrza.

2. Masa  $m$  jest związana z gęstością powietrza  $\rho$  i jego objętością  $V$  równaniem (15.2) ( $\rho = m/V$ ). Korzystając z tych stwierdzeń i przyjmując wartość gęstości powietrza pod ciśnieniem 1 atm z tabeli 15.1, otrzymujemy

$$\begin{aligned} mg &= (\rho V)g \\ &= (1,21 \text{ kg/m}^3)(3,5 \text{ m} \cdot 4,2 \text{ m} \cdot 2,4 \text{ m})(9,8 \text{ m/s}^2) \\ &= 418 \text{ N} \approx 420 \text{ N.} \end{aligned} \quad (\text{odpowiedź})$$

Jest to ciężar około 110 puszek coca-coli.

b) Wyznacz wartość siły, jaką działa atmosfera ziemska na podłogę tego pokoju.

### ROZWIĄZANIE:

Zauważ, że atmosfera ziemska działa na podłogę pokoju siłą o wartości  $F$ , wywierając równomierny nacisk na całą jej powierzchnię. Wobec tego ciśnienie powietrza na podłogę jest związane z  $F$  i polem  $S$  płaskiej powierzchni podłogi równaniem (15.4) ( $\rho = F/S$ ), skąd otrzymujemy

$$\begin{aligned} F &= pS \\ &= (1 \text{ atm}) \left( \frac{1,01 \cdot 10^5 \text{ N/m}^2}{1 \text{ atm}} \right) (3,5 \text{ m})(4,2 \text{ m}) \\ &= 1,5 \cdot 10^6 \text{ N.} \end{aligned} \quad (\text{odpowiedź})$$

Ta olbrzymia siła jest równa ciężarowi słupa powietrza o wysokości równej całej wysokości atmosfery ziemskiej i polu podstawy równemu polu powierzchni podłogi.

## 15.4. Płyny w spoczynku

Na rysunku 15.2a przedstawiono zbiornik z wodą — lub inną cieczą — która od góry ma bezpośredni kontakt z atmosferą. Jak wie każdy nurk, ciśnienie rośnie ze wzrostem głębokości pod powierzchnią wody. Wskaźniki głębokości, używane przez nurków, to w istocie rzeczy czujniki ciśnienia, działające bardzo podobnie do tego z rysunku 15.1b. Jak wie z kolei każdy miłośnik wędrówek po górach, ciśnienie maleje ze wzrostem wysokości, na jaką wznosimy się w atmosferze. Ciśnienie, którego zmiany odczuwa nurek i taternik, nazywa się zwykle *ciśnieniem hydrostatycznym*, gdyż pochodzi ono od płynu statycznego, tzn. pozostającego

w spoczynku. Postaramy się teraz wyznaczyć to ciśnienie hydrostatyczne jako funkcję głębokości lub wysokości.

Rozważmy najpierw wzrost ciśnienia ze wzrostem głębokości pod powierzchnią wody. Wybieramy pionową oś  $y$  tak, by jej początek znajdował się na granicy powietrza i wody, a jej kierunek dodatni był kierunkiem do góry. Wybieramy w wyobrażni pewną objętość wody, zawartą w walcu, którego podstawy są poziome i mają pole powierzchni równe  $S$ . Oznaczmy przez  $y_1$  i  $y_2$  głębokości, na jakich znajdują się podstawy — górna i dolna — naszego walca (współrzędne te są oczywiście ujemne).

Na rysunku 15.2b przedstawiono diagram sił działających na wodę w rozważanym walcu. Woda ta znajduje się w *równowadze statycznej*, to znaczy pozostaje w spoczynku, a zatem wszystkie działające na nią siły równoważą się. W pionie działają na tę wodę trzy siły. Na górną podstawę walca działa ze strony znajdującej się nad nią wody siła  $\vec{F}_1$ . Podobnie, na dolną powierzchnię walca działa ze strony znajdującej się pod nią wody siła  $\vec{F}_2$ . Na wodę działa też siła ciężkości  $m\vec{g}$ , przy czym  $m$  jest masą wody zawartej w objętości wybranego walca. Siły te równoważą się, tzn.

$$\vec{F}_2 = \vec{F}_1 + m\vec{g}. \quad (15.5)$$

Przekształcimy równanie (15.5) tak, aby zawierało ciśnienia. Z równania (15.4) wiemy, że

$$\vec{F}_1 = p_1 S \quad \text{oraz} \quad \vec{F}_2 = p_2 S. \quad (15.6)$$

Jak wynika z równania (15.2), masa wody stanowiącej rozważany walec wynosi  $m = \rho V$ , przy czym objętość walca  $V$  możemy wyrazić jako iloczyn pola jego podstawy  $S$  i wysokości walca  $y_1 - y_2$ . Wobec tego  $m$  jest równe  $\rho S(y_1 - y_2)$ . Podstawiając to wyrażenie do równania (15.5) i korzystając z równania (15.6), otrzymujemy

$$p_2 S = p_1 S + \rho S g (y_1 - y_2),$$

czyli

$$p_2 = p_1 + \rho g (y_1 - y_2). \quad (15.7)$$

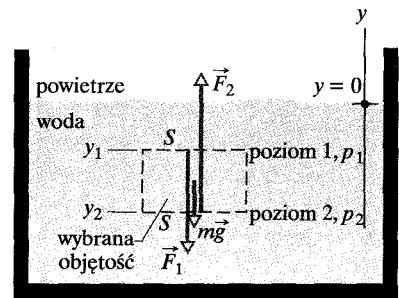
Równanie to możemy wykorzystać zarówno do wyznaczenia ciśnienia w cieczy (w zależności od głębokości), jak i w atmosferze (w zależności od wysokości). W pierwszym z tych przypadków interesuje nas na przykład ciśnienie  $p$  na głębokości  $h$  pod powierzchnią cieczy. Wybieramy wtedy naszą próbki tak, by poziom 1 był poziomem powierzchni cieczy, a poziom 2 znajdował się na głębokości  $h$  pod tą powierzchnią. Oznaczając przez  $p_0$  ciśnienie atmosferyczne na powierzchni cieczy, otrzymujemy:

$$y_1 = 0, \quad p_1 = p_0 \quad \text{oraz} \quad y_2 = -h, \quad p_2 = p,$$

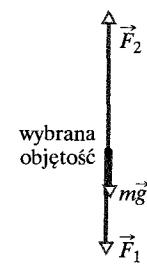
co po podstawieniu do równania (15.7) daje

$$p = p_0 + \rho gh \quad (\text{ciśnienie na głębokości } h). \quad (15.8)$$

Zauważ, że ciśnienie na danej głębokości w cieczy zależy od tej głębokości, lecz nie zależy od żadnej wielkości mierzonej w poziomie.

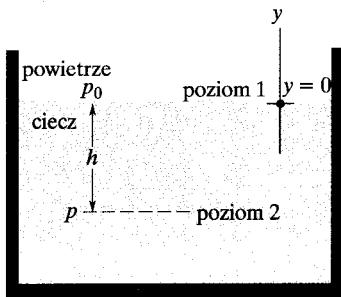


a)



b)

Rys. 15.2. a) Naczynie wypełnione jest wodą. Rozważamy pewną jej objętość, ograniczoną powierzchnią walca o polu poziomej podstawy równym  $S$ . Na górną podstawę tego walca działa siła  $\vec{F}_1$ , a na jego dolną podstawę — siła  $\vec{F}_2$ . Siła ciężkości działająca na wodę zawartą w tym walcu wynosi  $m\vec{g}$ . b) Diagram sił działających na wybraną objętość wody



Rys. 15.3. Ciśnienie  $p$  rośnie ze wzrostem głębokości  $h$  pod powierzchnią cieczy zgodnie ze wzorem (15.8)

► Ciśnienie w pewnym punkcie w płynie znajdującym się w równowadze statycznej zależy od głębokości tego punktu pod powierzchnią płynu, a nie zależy od poziomowych rozmiarów płynu ani zbiornika, w którym płyn jest zawarty.

Równanie (15.8) jest zatem spełnione niezależnie od kształtu zbiornika. Jeśli dno zbiornika znajduje się na głębokości  $h$  pod powierzchnią płynu, to ciśnienie płynu na dno zbiornika  $p$  jest dane wzorem (15.8).

Ciśnienie  $p$  we wzorze (15.8) nazywa się pełnym (lub bezwzględnym) ciśnieniem na poziomie 2. Mówimy: pełnym, gdyż — jak widać z rysunku 15.3 — na ciśnienie  $p$  na poziomie 2 składają się dwa przyczynki: 1) ciśnienie atmosferyczne  $p_0$ , związane z naciskiem powietrza na ciecz, oraz 2) ciśnienie cieczy położonej powyżej poziomu 2, równe  $\rho gh$ , związane z naciskiem tej cieczy na ciecz na poziomie 2. Różnicę między ciśnieniem bezwzględnym a ciśnieniem atmosferycznym nazywa się nieraz nadciśnieniem lub ciśnieniem względym (przyrządy do pomiaru ciśnienia wskazują często właśnie nadciśnienie). W sytuacji przedstawionej na rysunku 15.3 nadciśnienie jest równe  $\rho gh$ .

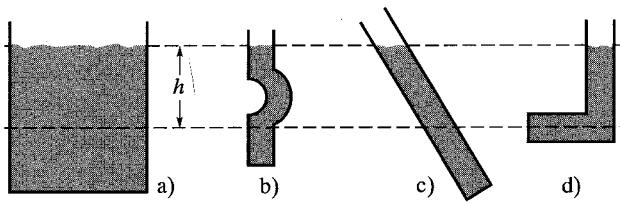
Równanie (15.7) stosuje się także w obszarze nad powierzchnią cieczy. Otrzymujemy wtedy ciśnienie atmosferyczne na pewnej wysokości nad poziomem 1 w zależności od ciśnienia  $p_1$  na poziomie 1 (przy założeniu, że gęstość atmosfery jest stała w rozważanym zakresie wysokości). Na przykład, aby wyznaczyć ciśnienie atmosferyczne na wysokości  $d$  nad poziomem 1 na rysunku 15.3, podstawiamy

$$y_1 = 0, \quad p_1 = p_0 \quad \text{oraz} \quad y_2 = d, \quad p_2 = p.$$

Oznaczając gęstość powietrza przez  $\rho_{\text{pow}}$ , otrzymujemy stąd

$$p = p_0 - \rho_{\text{pow}}gd.$$

SPRAWDZIAN 1: Na rysunku przedstawiono cztery naczynia zawierające olej z oliwek. Uszereguj te naczynia ze względu na wartość ciśnienia na głębokości  $h$ , od największej do najmniejszej.



## Przykład 15.2

W czasie ćwiczeń w basenie pływackim początkujący pletwonurek na głębokości  $L$  nabiera w płuca pełno powietrza, po czym porzuca aparat tlenowy i wypływa na powierzchnię. Zapominając o wskazówkach instruktora, nie wypuszcza przy tym powietrza z płuc. Gdy nurek dociera do powierzchni wody, różnica między ciśnieniem działającym na niego z zewnątrz a ciśnieniem powietrza w jego płucach jest równa 9,3 kPa. Na jakiej głębokości nurek

porucił aparat tlenowy? Na jakie śmiertelne niebezpieczeństwo się naraził, nie pamiętając o wskazówkach instruktora?

### ROZWIĄZANIE:

Zauważmy, że w chwili, gdy nurek nabrał powietrza w płuca, działające na niego ciśnienie zewnętrzne (równe ciśnieniu powietrza w płucach) było większe od ciśnienia na powierzchni i wynosiło, jak wynika z równania (15.8)

$$p = p_0 + \rho g L,$$

gdzie  $p_0$  jest ciśnieniem atmosferycznym, a  $\rho$  — gęstością wody (równą  $998 \text{ kg/m}^3$  — patrz tabela 15.1). Gdy nurek wznosi się ku powierzchni wody, działające na niego ciśnienie zewnętrzne maleje aż do wartości równej ciśnieniu atmosferycznemu  $p_0$ , którym osiąga na powierzchni. Tak samo, tzn. aż do ciśnienia atmosferycznego, maleje ciśnienie krwi nurka. W związku z tym, że nie wypuszcza on powietrza z płuc, ciśnienie w płucach ma nadal taką samą wartość, jak na głębokości  $L$ . Na powierzchni różnica ciśnień w płucach nurka (które jest większe) i ciśnienia działającego na jego klatkę piersiową (które jest mniejsze) wynosi

$$\Delta p = p - p_0 = \rho g L,$$

skąd otrzymujemy

$$L = \frac{\Delta p}{\rho g} = \frac{9300 \text{ Pa}}{(998 \text{ kg/m}^3)(9,8 \text{ m/s}^2)} = 0,95 \text{ m. (odpowiedź)}$$

To całkiem niewielka głębokość! Jednak nadciśnienie równe  $9,3 \text{ kPa}$  (co stanowi około 9% ciśnienia atmosferycznego) jest dostatecznie duże na to, by rozerwać płuca nurka, w wyniku czego powietrze z płuc wdziela się do krewobiegu nurka, dociera do serca i powoduje jego śmierć. Gdyby nurek stosował się do wskazówek instruktora i stopniowo wypuszczał powietrze z płuc w czasie wznoszenia się ku powierzchni, umożliwiłyby wyrównywanie się ciśnień w płucach i ciśnienia zewnętrznego, a zatem uniknąłby tragicznych skutków nadciśnienia.

## Przykład 15.3

Rurka w kształcie litery U, przedstawiona na rysunku 15.4, zawiera dwie cieczy w równowadze statycznej. W prawym ramieniu rurki znajduje się woda o gęstości  $\rho_w$  ( $= 998 \text{ kg/m}^3$ ), a w lewym — olej o nieznanej gęstości  $\rho_x$ . Pomiar wykazał, że  $l = 135 \text{ mm}$ , a  $d = 12,3 \text{ mm}$ . Ile wynosi gęstość oleju?

### ROZWIĄZANIE:

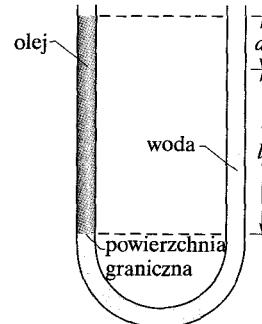
Zauważmy, że ciśnienie  $p_{pg}$ , działające na powierzchnię rozgraniczającą cieczy w lewym ramieniu rurki, zależy od gęstości  $\rho_x$  i wysokości słupa oleju nad tą powierzchnią. Zauważmy ponadto, że woda w prawym ramieniu rurki musi mieć na tym samym poziomie takie samo ciśnienie  $p_{pg}$ . Jest tak dlatego, że skoro woda znajduje się w równowadze statycznej, to ciśnienie w punktach znajdujących się na takim samym poziomie musi być jednakowe nawet wtedy, gdy punkty te znajdują się w różnych (ale połączonych ze sobą) ramionach rurki.

W prawym ramieniu powierzchnia wody znajduje się na wysokości  $l$  nad poziomem powierzchni granicznej cieczy. Z równania (15.8) otrzymujemy zatem:

$$p_{pg} = p_0 + \rho_w g l \quad (\text{prawe ramię}).$$

W lewym ramieniu powierzchnia oleju znajduje się na wysokości  $l + d$  nad powierzchnią graniczną cieczy. Z równania (15.8) otrzymujemy więc teraz:

$$p_{pg} = p_0 + \rho_x g (l + d) \quad (\text{lewe ramię}).$$



Rys. 15.4. Przykład 15.3. Olej w lewym ramieniu rurki wznosi się na większą wysokość niż woda w prawym ramieniu, ponieważ gęstość oleju jest mniejsza niż gęstość wody. Słupy obu cieczy wywierają takie samo ciśnienie  $p_{pg}$  na poziomie powierzchni granicznej cieczy

Przyporządkując do siebie prawe strony tych wyrażeń i rozwiązujejąc otrzymane równanie względem nieznanej gęstości, otrzymujemy:

$$\begin{aligned} \rho_x &= \rho_w \frac{l}{l + d} = (998 \text{ kg/m}^3) \frac{135 \text{ mm}}{135 \text{ mm} + 12,3 \text{ mm}} \\ &= 915 \text{ kg/m}^3. \end{aligned} \quad (\text{odpowiedź})$$

Zauważ, że odpowiedź nie zależy od ciśnienia atmosferycznego  $p_0$  ani od przyspieszenia ziemskiego  $g$ .

## 15.5. Jak się mierzy ciśnienie?

### Barometr rtęciowy

Na rysunku 15.5a przedstawiono najprostszy *barometr rtęciowy*, czyli przyrząd do pomiaru ciśnienia atmosferycznego. Długa rurka szklana została napełniona rtęcią, odwrócona do góry zamkniętym końcem, a jej koniec otwarty umieszczono

w płaskim naczyniu z rtęcią, jak pokazano na rysunku. W górnej części rurki — nad słupem rtęci — zawarta jest tylko para rtęci, której ciśnienie jest tak małe, że w temperaturze niewiele różnej od pokojowej można je pominąć.

Korzystając z równania (15.7), możemy otrzymać związek ciśnienia atmosferycznego  $p_0$  z wysokością słupa rtęci  $h$ . Wybierzmy jako poziom 1 z rysunku 15.2 poziom powierzchni granicznej rtęć-powietrze, a jako poziom 2 — górny poziom słupa rtęci w rurce, jak pokazano na rysunku 15.5a. Możemy zatem podstawić do równania (15.7) wartości:

$$y_1 = 0, \quad p_1 = p_0 \quad \text{oraz} \quad y_2 = h, \quad p_2 = 0,$$

co daje:

$$p_0 = \rho g h, \quad (15.9)$$

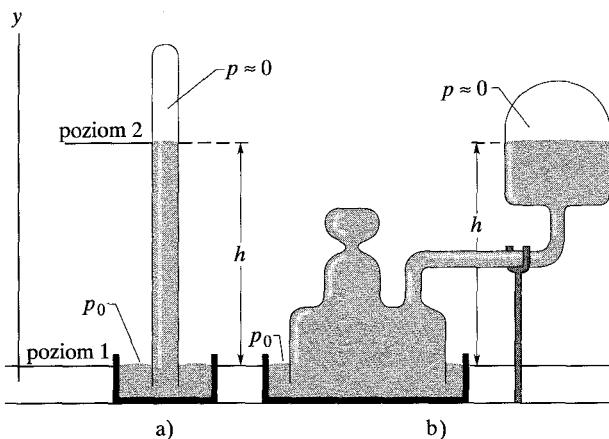
przy czym  $\rho$  jest gęstością rtęci.

Dla danego ciśnienia wysokość słupa rtęci  $h$  nie zależy od pola przekroju poprzecznego pionowej rurki. Barometr rtęciowy z rysunku 15.5b, o niezwykle wymyślnym kształcie, wskazuje takie samo ciśnienie jak prosty barometr z rysunku 15.5a — w obu przypadkach otrzymuje się taką samą pionową odległość poziomów rtęci w rurze i w zbiorniku otwartym.

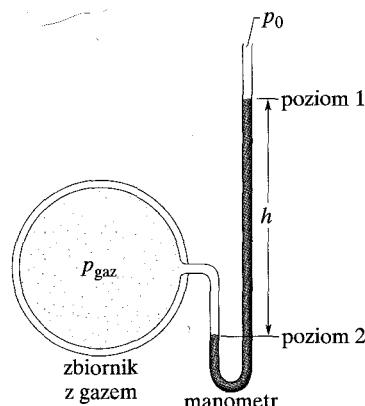
Z równania (15.9) wynika, że dla ustalonego ciśnienia wysokość słupa rtęci zależy od wartości  $g$  w miejscu, w którym znajduje się barometr, oraz od gęstości rtęci, która zmienia się wraz ze zmianą temperatury. Wysokość słupa rtęci (w milimetrach) jest zatem równa liczbowo ciśnieniu (w torach) *tylko wtedy*, gdy barometr znajduje się w miejscu, w którym  $g$  ma wartość standardową, równą  $9,80665 \text{ m/s}^2$ , a temperatura rtęci wynosi  $0^\circ\text{C}$ . Gdy warunki te nie są spełnione (a najczęściej nie są), wyznaczenie ciśnienia na podstawie pomiaru wysokości słupa rtęci wymaga zastosowania niewielkich poprawek.

### Manometr otwarty

*Manometr otwarty* (rys. 15.6) służy do pomiaru ciśnienia gazu  $p_{\text{gaz}}$ , a dokładniej różnicy ciśnienia gazu i ciśnienia atmosferycznego. Stanowi go rura w kształ-



Rys. 15.5. a) Barometr rtęciowy. b) Inny barometr rtęciowy. Odległość  $h$  jest taka sama w obu przypadkach



Rys. 15.6. Manometr otwarty, przeznaczony do pomiaru ciśnienia gazu w zbiorniku, z którym połączone jest jego lewe ramię. Prawe ramię rury w kształcie litery U jest otwarte do atmosfery

cie litery U wypełniona cieczą. Jeden koniec rury jest połączony z naczyniem, w którym chcemy zmierzyć ciśnienie, a drugi koniec jest otwarty do atmosfery. Różnicę ciśnienia w zbiorniku i ciśnienia atmosferycznego, której miarą jest zaznaczona na rysunku 15.6 wysokość  $h$ , możemy wyznaczyć z równania (15.7). Wybierzmy poziomy 1 i 2 jak na rysunku 15.6. Podstawiając do równania (15.7):

$$y_1 = 0, \quad p_1 = p_0 \quad \text{oraz} \quad y_2 = -h, \quad p_2 = p,$$

otrzymujemy

$$p_{\text{gaz}} = p - p_0 = \rho gh, \quad (15.10)$$

gdzie  $\rho$  jest gęstością cieczy w rurze manometru. Jak widać, nadciśnienie gazu  $p_{\text{gaz}}$  jest wprost proporcjonalne do  $h$ .

Nadciśnienie to może być dodatnie lub ujemne, zależnie od tego, czy  $p > p_0$ , czy też  $p < p_0$ . W napompowanej oponie lub krwiobiegu człowieka pełne ciśnienie jest większe od ciśnienia atmosferycznego, a zatem nadciśnienie jest dodatnie. Gdy natomiast pijesz napój ze szklanki przez słomkę, wytwarzasz w płucach ciśnienie bezwzględne mniejsze od ciśnienia atmosferycznego, a zatem nadciśnienie w twoich płucach jest wtedy ujemne — często mówi się w takiej sytuacji o podciśnieniu.

## 15.6. Prawo Pascala

Gdy ściszasz jeden koniec tuby z pastą do zębów, aby na drugim jej końcu pasta wydostała się z tuby, stosujesz — być może nieświadomie — **prawo Pascala**. Lekarze wykorzystują je czasem do wypchnięcia pokarmu (lub ciała obcego) z gardła pacjenta, wywierając gwałtowny nacisk na jego brzuch (jest to tzw. metoda Heimlicha). Po raz pierwszy prawo to sformułował precyzyjnie w 1652 roku Blaise Pascal (od którego nazwiska pochodzi nazwa jednostki ciśnienia). Mówi ono, że:

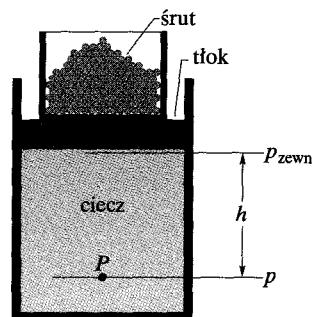
► W zamkniętej objętości nieściśliwego płynu zmiana ciśnienia jest przenoszona bez zmiany wartości do każdego miejsca w płynie i do ścian zbiornika.

### Uzasadnienie prawa Pascala

Wyobraź sobie, że nieściśliwym płynem jest ciecz zawarta w cylindrze, jak na rysunku 15.7. Cylinder jest od góry zamknięty tłokiem, na którym umieszczono zbiornik ze śrutem. Na tłok, a zatem i na ciecz, działa ciśnienie atmosferyczne oraz ciśnienie związane z siłą, jaką działa na tłok śrut i zbiornik, w którym się on znajduje. Oznaczmy sumę tych ciśnień przez  $p_{\text{zewn}}$ . Ciśnienie  $p$  w dowolnym punkcie cieczy  $P$  wynosi wobec tego

$$p = p_{\text{zewn}} + \rho gh. \quad (15.11)$$

Wyobraź sobie następnie, że do zbiornika ze śrutem dosypujesz nieco śrutek, w wyniku czego ciśnienie  $p_{\text{zewn}}$  wzrasta o  $\Delta p_{\text{zewn}}$ . Wielkości  $\rho$ ,  $g$  i  $h$  w równaniu



Rys. 15.7. Na zawsze w cylindrze nieściśliwą ciecz wywieramy ciśnienie zewnętrzne  $p_{\text{zewn}}$ , ustawiając na zamykającym ciecz tłoku naczynie ze śrutem (czyli małymi ołówianymi kulkami). Gdy zwiększamy  $p_{\text{zewn}}$ , dosypując do naczynia nieco śrutek, ciśnienie w każdym punkcie cieczy wzrasta o taką samą wartość

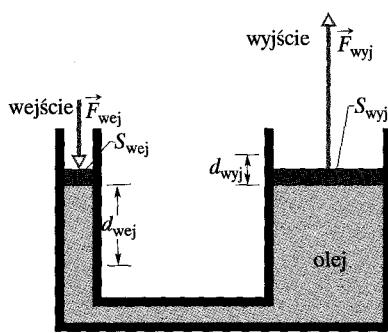
(15.11) nie ulegają przy tym zmianie, a zatem zmiana ciśnienia w punkcie  $P$  jest równa

$$\Delta p = \Delta p_{zewn.} \quad (15.12)$$

Ten przyrost ciśnienia nie zależy od  $h$ , a więc musi być taki sam w każdym punkcie cieczy, co właśnie stwierdza prawo Pascala.

### Prawo Pascala i prasa hydrauliczna

Rys. 15.8. Prasa hydrauliczna, czyli urządzenie służące do działania na przedmiot siłą większą od przyłożonej do układu. Praca, jaką wykonuje każda z tych sił — wejściowa i wyjściowa — jest taka sama



Na rysunku 15.8 pokazano, jak prawo Pascala można wykorzystać do budowy podnośnika hydraulicznego. Wyobraź sobie, że na tłoce zamkijający lewy cylinder (możemy go nazwać wejściowym) działamy pionowo w dół siłą zewnętrzną o wartości  $F_{wej}$ , a pole powierzchni tłočka wynosi  $S_{wej}$ . Dzięki temu, że ciecz jest nieściśliwa, na tłoce zamkijający prawy cylinder (wyjściowy), o polu powierzchni równym  $S_{wyj}$ , działa wtedy pionowo w góre siła o wartości  $F_{wyj}$ . Aby układ pozostawał w równowadze, na ten tłoce musi również działać skierowana pionowo w dół siła o takiej samej wartości  $F_{wyj}$ . Siła ta pochodzi od ciężaru podnoszonego przedmiotu (którego nie pokazano na rysunku). Siłę zewnętrzną  $\vec{F}_{wej}$ , działającą w dół na lewy tłoce, i siłę  $\vec{F}_{wyj}$ , działającą w górę na podnoszony przedmiot, możemy powiązać ze sobą, zapisując zmianę ciśnienia cieczy  $\Delta p$  równą

$$\Delta p = \frac{F_{wej}}{S_{wej}} = \frac{F_{wyj}}{S_{wyj}},$$

skąd otrzymujemy

$$F_{wyj} = F_{wej} \frac{S_{wyj}}{S_{wej}}. \quad (15.13)$$

Z równania (15.13) wynika, że działająca na podnoszony przedmiot siła wyjściowa  $F_{wyj}$  jest większa od siły wejściowej  $F_{wej}$ , gdy  $S_{wyj} > S_{wej}$ , tak jak w sytuacji przedstawionej na rysunku 15.8.

Jeśli przesuniemy tłoce wejściowe w dół o odcinek  $d_{wej}$ , to tłoce wyjściowe przesunie się w górę o odcinek  $d_{wyj}$ , który możemy wyznaczyć, wiedząc, że ciecz jest nieściśliwa, a zatem przy obu tlöckach przemieszcza się takie same jej objętości  $V$ . Wobec tego

$$V = S_{wej}d_{wej} = S_{wyj}d_{wyj},$$

co możemy też zapisać w postaci

$$d_{wyj} = d_{wej} \frac{S_{wej}}{S_{wyj}}. \quad (15.14)$$

Wynika stąd, że gdy  $S_{wyj} > S_{wej}$  (jak na rysunku 15.8), przemieszczenie tłočka wyjściowego jest mniejsze niż przemieszczenie tłočka wejściowego.

Na podstawie równań (15.13) i (15.14) możemy zapisać pracę wykonaną przez siłę wyjściową jako:

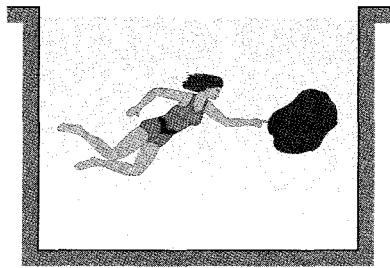
$$W = F_{wyj}d_{wyj} = \left( F_{wej} \frac{S_{wyj}}{S_{wej}} \right) \left( d_{wej} \frac{S_{wej}}{S_{wyj}} \right) = F_{wej}d_{wej}. \quad (15.15)$$

Stwierdziliśmy w ten sposób, że praca  $W$  wykonana nad tłočkiem wejściowym przez siłę zewnętrzną jest równa pracy  $W$  wykonanej przez tłoce wyjściowy przy podnoszeniu przedmiotu.

Przydatność prasy hydraulicznej polega na tym, że:

- Prasa hydrauliczna umożliwia działanie mniejszą siłą na dłuższej drodze zamiast działania większą siłą na krótszej drodze.

Iloczyn siły i przemieszczenia jest przy tym stały, tak że wykonywana jest jednakowa praca. Możliwość uzyskania większej siły jest jednak nierzadko niezwykle pożądana. Na przykład mało kto jest w stanie podnieść samochód bez żadnych narzędzi, lecz można to łatwo zrobić, korzystając z podnośnika hydraulicznego, choć trzeba wtedy przemieścić dźwignię podnośnika na znacznie większą odległość niż wysokość, na jaką podnosi się pojazd. Przemieszczenie  $d_{\text{wej}}$  nie zaczyna się przy tym jednorazowo, lecz jako suma wielu małych przesunięć tłoka wejściowego.



Rys. 15.9. Woda w cienkościennym worku plastиковym, zanurzonym w basenie, znajduje się w równowadze statycznej. Działająca na nią siła ciężkości musi być zatem równoważona przez siłę działającą na nią od dołu ze strony wody otaczającej worek

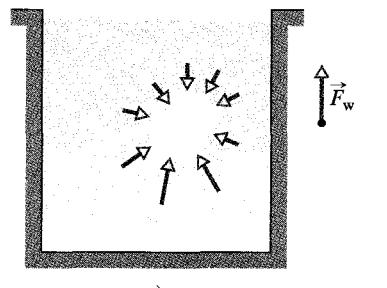
## 15.7. Prawo Archimedesa

Na rysunku 15.9 przedstawiono studentkę w basenie kąpielowym, badającą zachowanie się wypełnionego wodą worka plastikowego o bardzo cienkich ścianach (czyli o znikomo małej masie). Studentka stwierdza, że worek z wodą pozostaje w równowadze statycznej, to znaczy ani nie wypływa na powierzchnię wody w basenie, ani nie opada na dno. Siła ciężkości  $\vec{F}_g$ , działająca w dół na wodę w worku, musi być zatem równoważona przez siłę działającą na nią od dołu ze strony wody otaczającej worek.

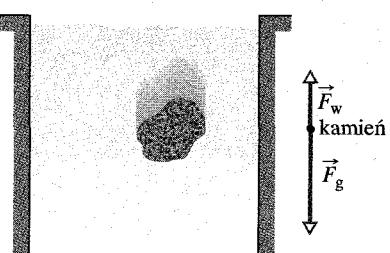
Ta skierowana w górę siła nosi nazwę **siły wyporu**  $\vec{F}_w$ . Jest ona skutkiem tego, że ciśnienie w wodzie rośnie ze wzrostem głębokości pod powierzchnią wody, z czego wynika, że ciśnienie w miejscu, gdzie znajduje się dolna część worka, jest większe niż w miejscu, gdzie znajduje się jego część górna. W związku z tym siły działające na dolne części worka mają większe wartości niż siły działające na górne części worka. Kilka z tych sił zaznaczono na rysunku 15.10a, na którym obszar zajmowany przez worek narysowano jako obszar pusty. Zauważ, że wektory sił działających na ten obszar na dole (skierowane w górę) mają większe długości niż wektory sił działających na ten obszar na górze (skierowane w dół). Jeśli dodamy do siebie wektorowo wszystkie siły działające na worek ze strony wody, to składowe poziome zniosą się, a wypadkowa składowych pionowych da właśnie działającą na worek siłę wyporu  $\vec{F}_w$ , skierowaną pionowo w górę (na rysunku 15.10a siłę  $\vec{F}_w$  pokazano z prawej strony basenu).

Worek z wodą znajduje się w równowadze statycznej, a zatem wartość siły  $\vec{F}_w$  jest równa wartości siły ciężkości  $\vec{F}_g$  działającej na wodę w worku, tzn.  $F_w = m_{\text{pl}} g$  (wskaźnik  $płyn$ , którym w naszym przypadku jest woda). Wyrażając to słowami: wartość siły wyporu jest równa ciężarowi wody w worku.

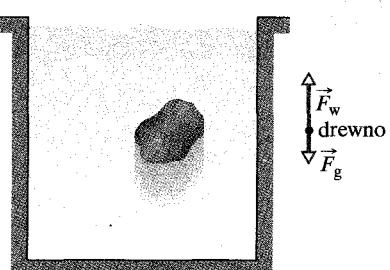
Rys 15.10. a) Woda otaczająca pewien obszar w jej wnętrzu działa na ciało, które w tym obszarze umieścimy, skierowaną do góry siłą wyporu. b) Gdy ciałem tym jest kamień (o takiej samej objętości jak rozważany obszar), działająca na niego siła ciężkości jest większa od siły wyporu. c) Gdy ciałem tym jest kawałek drewna (o takiej samej objętości jak rozważany obszar), działająca na niego siła ciężkości jest mniejsza od siły wyporu



a)



b)



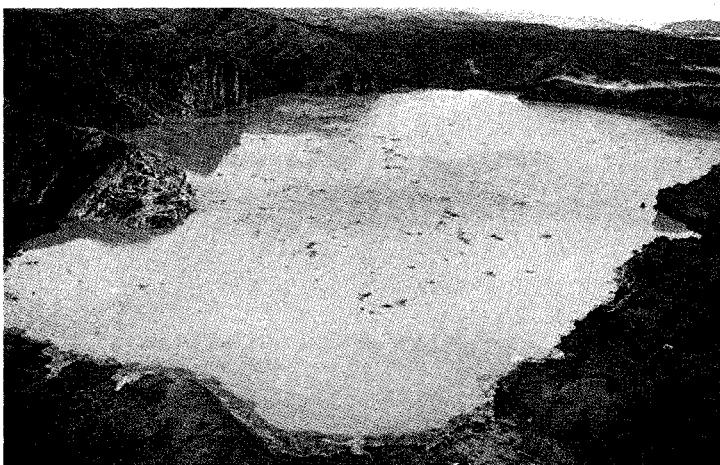
c)

Na rysunku 15.10b przedstawiono sytuację, w której worek z wodą zastąpiliśmy kamieniem dokładnie wypełniającym pusty obszar z rysunku 15.10a. Mówimy, że kamień *wypiera* wodę, to znaczy zajmuje obszar, w którym pod jego nieobecność znajdowała się woda. Kształt rozważanego obszaru nie zmienił się, a zatem siły działające na jego powierzchnię muszą być takie same jak wtedy, gdy znajdował się tam worek z wodą. Inaczej mówiąc, na kamień działa taka sama siła wyporu, jaka działała poprzednio na worek z wodą, to znaczy wartość siły wyporu wynosi  $m_p g$ , czyli jest równa ciężarowi wody wypartej przez kamień.

W odróżnieniu od worka z wodą, kamień nie znajduje się w równowadze statycznej. Działająca na niego w dół siła ciężkości  $\vec{F}_g$  ma wartość większą od wartości działającej na niego od dołu siły wyporu, co pokazano na diagramie sił z prawej strony basenu na rysunku 15.10b. Kamień porusza się więc ruchem przyspieszonym w dół i opada na dno basenu.

Wyobraźmy sobie następnie, że pusty obszar z rysunku 15.10a dokładnie wypełniliśmy klockiem z lekkiego drewna, jak na rysunku 15.10c. Jak poprzednio, obszar zajmowany przez ciało w wodzie nie zmienił się, a więc siła wyporu ma nadal wartość  $F_w$  równą  $m_p g$ , czyli ciężarowi wypartej wody. Podobnie jak kamień, klocek nie znajduje się w równowadze statycznej. Siła ciężkości  $\vec{F}_g$  ma jednak teraz wartość mniejszą od wartości siły wyporu, jak pokazano na rysunku z prawej strony basenu, a zatem drewniany klocek porusza się ruchem przyspieszonym do góry i wypływa na powierzchnię wody w basenie.

Wnioski, do których doszliśmy, analizując worek z wodą, kamień i drewniany klocek, stosują się do wszystkich płynów. Możemy je podsumować, mówiąc:



Późnym popołudniem 21 sierpnia 1986 roku wstrząs nieznanego pochodzenia (być może wulkaniczny) wzburzył wodę w jeziorze Nyos w Kamerunie, które zawiera bardzo dużo rozpuszczonego w wodzie dwutlenku węgla. Wstrząs ten spowodował tworzenie się w wodzie pęcherzyków dwutlenku węgla, które — jako lżejsze od otaczającego je płynu (wody) — unosiły się na powierzchnię jeziora, gdzie dwutlenek węgla przechodził do powietrza. Dwutlenek węgla jest gazem cięższym od powietrza, a zatem — znajdując się teraz w lżejszym płynie — pozostawał przy powierzchni ziemi i spływał ze zbocza góry jak rzeka, powodując śmierć przez uduszenie 1700 osób oraz bardzo wielu zwierząt, co widać na zdjęciu z prawej

► Na ciało całkowicie lub częściowo zanurzone w płynie działa ze strony płynu siła wyporu  $\vec{F}_w$ . Jest ona skierowana pionowo do góry, a jej wartość jest równa ciężarowi  $m_p g$  płynu wypartego przez to ciało.

Stwierdzenie to stanowi treść **prawa Archimedesa**. Siła wyporu, jaka działa na ciało w płynie, ma więc wartość:

$$F_w = m_p g \quad (\text{siła wyporu}), \quad (15.16)$$

przy czym  $m_p$  jest masą płynu wypartego przez ciało.

### Pływanie ciał

Gdy upuścisz klocek z lekkiego drewna tuż nad powierzchnią wody w basenie, spadnie on do wody pod wpływem działającej na niego siły ciężkości, skierowanej pionowo w dół. Poruszając się w wodzie, będzie on stopniowo wypierał coraz więcej wody, przy czym wartość  $F_w$  działającej na niego w góre siły wyporu będzie rosła. Na pewnej głębokości wartość  $F_w$  stanie się równa wartości działającej na klocek siły ciężkości  $F_g$  i klocek przestanie się poruszać. Znajdzie się on wtedy w równowadze statycznej i będzie *pływał* w wodzie. Mówiąc ogólnie:

► Gdy ciało pływa w płynie, wartość działającej na nie siły wyporu  $F_w$  jest równa wartości działającej na nie siły ciężkości  $F_g$ .

Moglibyśmy zapisać to stwierdzenie w postaci:

$$F_w = F_g \quad (\text{pływanie ciał}). \quad (15.17)$$

Z równania (15.16) wiemy, że  $F_w = m_p g$ . Moglibyśmy więc powiedzieć, że:

► Gdy ciało pływa w płynie, wartość działającej na nie siły ciężkości  $F_g$  jest równa ciężarowi płynu wypartego przez to ciało  $m_p g$ .

To stwierdzenie moglibyśmy zapisać jako:

$$F_g = m_p g \quad (\text{pływanie ciał}). \quad (15.18)$$

Innymi słowy, ciało pływające w płynie wypiera płyn o ciężarze równym swojemu ciężarowi.

### Ciężar pozorny w płynie

Jeśli umieściszesz kamień na wadze wyskalowanej w jednostkach ciężaru, to na skali wagi odczytasz jego ciężar. Gdybyś jednak wykonał to doświadczenie pod wodą, siła wyporu działająca na kamień spowodowałaby zmniejszenie odczytywanego przez ciebie wartości. To wskazanie byłoby równe pozornemu ciężarowi kamienia. Mówiąc ogólnie, ciężar pozorny jest związany z prawdziwym ciężarem ciała i działającą na ciało siłą wyporu w następujący sposób:

$$\begin{pmatrix} \text{ciężar} \\ \text{pozorny} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{ciężar} \\ \text{rzeczywisty} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \text{wartość} \\ \text{siły wyporu} \end{pmatrix},$$

co można zapisać w postaci równania:

$$\text{ciężar}_{\text{poz}} = \text{ciężar} - F_w \quad (\text{ciężar pozorny}). \quad (15.19)$$

Gdybyś w ramach jakiegoś osobliwego testu sprawnościowego musiał podnieść ciężki kamień, to w wodzie byłoby ci łatwiej tego dokonać niż w powietrzu. Musiałbyś bowiem wówczas działać na niego siłą o wartości nieco większej od pozornego ciężaru kamienia, a nie od jego ciężaru rzeczywistego, większego niż pozorny. Można powiedzieć, że działająca na kamień w góre siła wyporu „pomogłaby” ci unieść kamień.

Wartość siły wyporu działającej na ciało, które pływa w płynie, jest równa ciężarowi ciała. Z równania (15.19) wynika zatem, że ciężar pozorny takiego ciała jest równy zeru — gdybyśmy umieścili je na wadze, to jej wskaźówka pokazałaby zero (w trakcie przygotowań do trudnych zadań, jakie mają wykonać w przestrzeni kosmicznej, astronauci odbywają treningi, pływając w wodzie, gdyż ich ciężar pozorny jest wtedy równy zeru — jak w przestrzeni kosmicznej).

**SPRAWDZIAN 2:** Pingwin pływa najpierw w płynie o gęstości  $\rho_0$ , potem w płynie o gęstości  $0,95\rho_0$ , a jeszcze później w płynie o gęstości  $1,1\rho_0$ . a) Uszereguj te gęstości w zależności od wartości siły wyporu działającej na pingwina, od największej do najmniejszej. b) Uszereguj je w zależności od ilości płynu wypartego przez pingwina, od największej do najmniejszej.

## Przykład 15.4

Jaki ułamek objętości góry lodowej, pływającej po morzu, stanowi część widoczna nad wodą?

**ROZWIĄZANIE:**

Przyjmijmy, że całkowita objętość góry lodowej jest równa  $V_c$ . Niewidoczna część góry znajduje się pod wodą, a więc jej objętość jest równa objętości  $V_p$  płynu (wody morskiej) wypartego przez górę. Szukamy wobec tego ułamka (oznaczonego przez  $u$ ):

$$u = \frac{V_c - V_p}{V_c} = 1 - \frac{V_p}{V_c}, \quad (15.20)$$

lecz nie znamy żadnej z tych objętości. Zauważmy jednak, że skoro góra lodowa pływa, to spełnione jest równanie (15.18) ( $F_g = m_p g$ ). Równanie to możemy zapisać w postaci:

$$m_c g = m_p g,$$

skąd widzimy, że  $m_c = m_p$ . Tak więc masa góry jest równa masie wypartego przez nią płynu (wody morskiej). Wprawdzie tych mas też nie znamy, lecz możemy wyrazić je przez gęstości lodu i wody morskiej, podane w tabeli 15.1, korzystając z równania (15.2) ( $\rho = m/V$ ). Wiemy, że  $m_c = m_p$ , mamy więc:

$$\rho_c V_c = \rho_p V_p,$$

czyli

$$\frac{V_p}{V_c} = \frac{\rho_c}{\rho_p}.$$

Wstawiając ten stosunek oraz wartości liczbowe gęstości do równania (15.20), otrzymujemy

$$\begin{aligned} u &= 1 - \frac{\rho_p}{\rho_c} \\ &= 1 - \frac{917 \text{ kg/m}^3}{1024 \text{ kg/m}^3} = 0,10, \text{ czyli } 10\%. \quad (\text{odpowiedź}) \end{aligned}$$

## Przykład 15.5

Balon wypełniony helem ma kształt kuli o promieniu  $R$  równym 12 m. Powłoka, liny i gondola balonu mają łączną masę  $m = 196$  kg. Wyznacz maksymalną masę  $M$  ładunku, jaki może unieść ten

balon, gdy znajduje się na wysokości, na której gęstość helu  $\rho_{\text{He}}$  jest równa  $0,16 \text{ kg/m}^3$ , a gęstość powietrza  $\rho_{\text{pow}}$  wynosi  $1,25 \text{ kg/m}^3$ . Przyjmij, że objętość powietrza wypartego przez ładunek, liny i gondolę można pominać.

## ROZWIĄZANIE:

Zauważmy, że powłoka, liny, gondola, ładunek oraz hel, którym wypełniona jest powłoka, są łącznie ciałem pływającym w powietrzu. Masa tego ciała wynosi  $m + M + m_{\text{He}}$ , przy czym  $m_{\text{He}}$  jest masą helu w powłoce. Skoro ciało to pływa, to wartość działającej na nie siły ciężkości jest równa ciężarowi wypartego przez nie płynu (czyli powietrza). Oznaczmy masę powietrza wypartego przez balon przez  $m_{\text{pow}}$ . Z równania (15.18) ( $F_g = m_p g$ ) otrzymujemy

$$(m + M + m_{\text{He}})g = m_{\text{pow}}g,$$

czyli

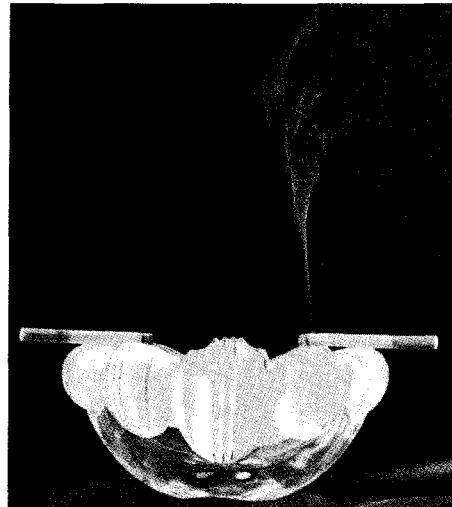
$$M = m_{\text{pow}} - m_{\text{He}} - m. \quad (15.21)$$

Nie znamy wprawdzie  $m_{\text{He}}$  ani  $m_{\text{pow}}$ , lecz znamy gęstości tych gazów, możemy więc zastosować równanie (15.2) ( $\rho = m/V$ ), aby wyrazić masy gazów w równaniu (15.21) przez ich gęstości. Zauważmy przy tym, że ponieważ ładunek, liny i gondola wyplątają powietrze o znakomo małej objętości, objętość powietrza wypartego przez nasze ciało możemy przyjąć za równą objętości kulistej powłoki z helem  $V (= \frac{4}{3}\pi R^3)$ . Z równania (15.21) otrzymujemy zatem

$$\begin{aligned} M &= \rho_{\text{pow}} V - \rho_{\text{He}} V - m = (\frac{4}{3}\pi R^3)(\rho_{\text{pow}} - \rho_{\text{He}}) - m \\ &= (\frac{4}{3}\pi)(12 \text{ m})^3(1,25 \text{ kg/m}^3 - 0,160 \text{ kg/m}^3) - 196 \text{ kg} \\ &= 7694 \text{ kg} \approx 7690 \text{ kg}. \end{aligned} \quad (\text{odpowiedź})$$

## 15.8. Ruch płynów doskonałych

Ruch płynów rzeczywistych jest bardzo złożony i ciągle jeszcze nie umiemy go w pełni opisać. Omówimy zatem przepływ płynu doskonalego, którego opis matematyczny jest łatwiejszy, a daje mimo to bardzo użyteczne wyniki. Oto cztery założenia, związane z przepływem płynu, które muszą być spełnione, abyśmy nasz płyn mogli nazwać doskonałym.

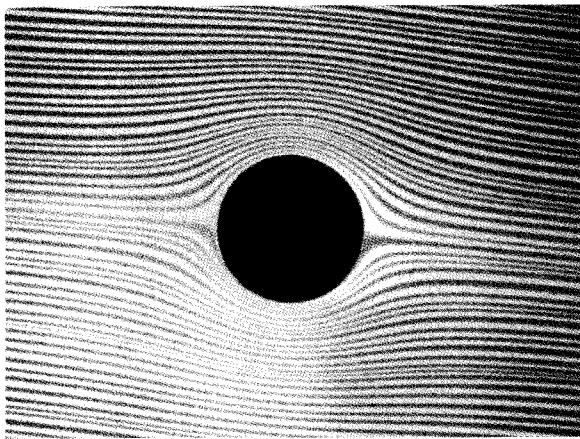


**1. Przepływ ustalony.** Przepływ jest *ustalony* (nazywany też *laminarnym*), gdy prędkość poruszającego się płynu w każdym wybranym punkcie nie zmienia się w upływie czasu, zarówno co do wartości, jak i co do kierunku. Łagodny przepływ wody w środkowej części płynącego powoli strumienia jest ustalony; gdy strumień napotyka szereg progów, jego przepływ nie jest już ustalony. Na rysunku 15.11 pokazano przepływ dymu unoszącego się z papierosa, przy czym zachodzi przejście od przepływu ustalonego do *nieustalonego* (inaczej: *turbulentnego*). Gdy cząstki dymu wznoszą się, ich prędkość rośnie i poczawszy od pewnej prędkości krytycznej przepływ zmienia się z ustalonego w *nieustalonego* (tzn. z laminarnego w *nielaminarny*).

**2. Przepływ nieściśliwy.** Będziemy zakładać, podobnie jak to już robiliśmy dla płynów w spoczynku, że nasz doskonały płyn jest nieściśliwy, to znaczy, że jego gęstość jest stała.

**3. Przepływ nielepki.** Z grubsza rzecz biorąc, lepkość płynu jest miarą oporu, jaki stawia płyn jego przepływowi. Na przykład gęsty miód stawia przepływowi większy opór niż woda, a zatem mówimy, że miód jest bardziej lepki niż woda. Lepkość jest zjawiskiem analogicznym do tarcia między ciałami stałymi — w obu przypadkach energia kinetyczna poruszających się ciał ulega zamianie w energię termiczną. Pod nieobecność tarcia klocek ślizgałby się po poziomej płaszczyźnie ze stałą prędkością. Podobnie, ciało poruszające się w płynie nielepkim nie doznawałoby działania siły oporu lepkiego, tzn. siły oporu pochodzącej od lepkości płynu, i poruszałoby się w płynie ze stałą prędkością. Jak swego czasu zauważył uczony angielski lord Rayleigh, w płynie doskonałym śruba statku nie mogłaby spełniać swej funkcji, lecz

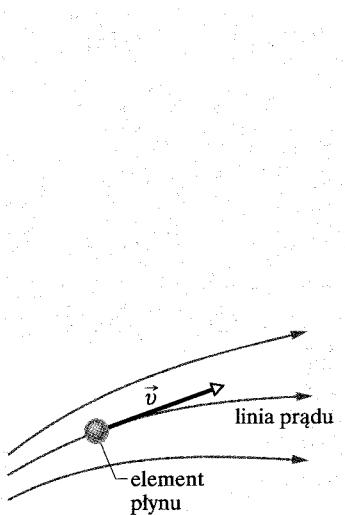
Rys. 15.11. Przepływ wznoszącego się dymu z papierosa i rozgrzanego gazu zmienia się w pewnym miejscu z ustalonego w turbulentny



Rys. 15.12. Przepływ ustalony płynu wokół walcowej przeszkody, uwidoczniony za pomocą wskaźnika — barwnika wprowadzonego do strumienia płynu przed przeszkodą



Rys. 15.13. Linie prądu w strumieniu powietrza opływającego samochód w tunelu aerodynamicznym, uwidocznione dzięki wprowadzeniu dymu do strumienia powietrza



Rys. 15.14. Element płynu porusza się wzdłuż linii prądu. Wektor prędkości tego elementu jest w każdej chwili styczny do linii prądu

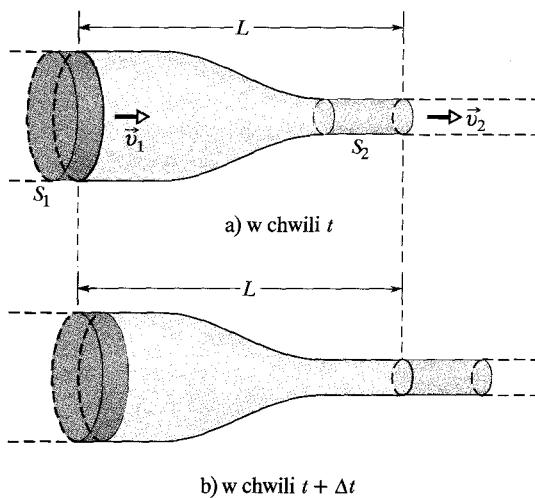
- z drugiej strony — nie byłaby ona wcale potrzebna, bo wprawiony w ruch statek nie wymagałby już żadnego napędu!
- Przepływ bezwirowy.** Choć nie będzie nam to tutaj specjalnie potrzebne, założymy również, że przepływ jest *bezwirowy*. Aby przekonać się, czy przepływ jest bezwirowy, możemy umieścić w płynie małe ziarnko pyłu. Przepływ jest bezwirowy, gdy takie ziarnko nie obraca się wokół osi przechodzącej przez swój środek masy, niezależnie od tego, czy porusza się po torze kołowym, czy nie. Stosując dość daleką analogię, moglibyśmy powiedzieć, że ruch diabelskiego młyna jest wirowy, ale ruch jego pasażerów jest bezwirowy.

W celu uwidocznienia charakteru przepływu płynu dodaje się nierzadko jakiś *wskaźnik*. Może nim być barwnik wprowadzany do cieczy w wielu punktach w poprzek strumienia (jak na rysunku 15.12) lub cząstki dymu umieszczone w przepływającym gazie (jak na rysunkach 15.11 i 15.13). Cząstki wskaźnika poruszają się wzdłuż *linii prądu*, które są torami cząstek płynu przy jego przepływie. Przypomnij sobie z rozdziału 2, że prędkość cząstki jest zawsze styczna do jej toru. Tak więc prędkość elementów (cząstek) płynu  $\vec{v}$  jest styczna do linii prądu (rysunek 15.14). Z tego względu linie prądu nigdy się nie przecinają, gdyby bowiem tak było, cząstka docierająca do punktu przecięcia linii prądu miałaby jednocześnie dwie różne prędkości, co jest niemożliwe.

## 15.9. Równanie ciągłości

Być może zauważyłeś już kiedyś, że można zwiększyć prędkość wody wypływającej z węza ogrodowego, zasłaniając palcem część otworu wylotowego. Najwyraźniej prędkość wody  $v$  zależy od pola przekroju poprzecznego  $S$ , przez który ona przepływa.

Chcemy teraz wyprowadzić zależność między  $v$  i  $S$  przy ustalonym przepływie płynu doskonałego przez rurę o zmiennym przekroju poprzecznym, jak



Rys. 15.15. Płyn przepływa jednostajnie z lewa na prawo przez odcinek rury o długości  $L$ . Prędkość płynu jest równa  $v_1$  na lewym, a  $v_2$  na prawym końcu rury. Pole przekroju poprzecznego rury wynosi  $S_1$  na jej lewym końcu, a  $S_2$  na jej końcu prawym. Od chwili  $t$  (rys. a) do chwili  $t + \Delta t$  (rys. b) z lewej strony wpływa do rury płyn zaznaczony na fioletowo, a na prawym końcu wypływa z niej taka sama ilość płynu, zaznaczona na zielono

pokazano na rysunku 15.15. Płyn przepływa tu w prawą stronę, a przedstawiony na rysunku odcinek rury (która może być w całości znacznie dłuższa) ma długość  $L$ . Prędkość płynu na lewym końcu rury oznaczamy przez  $v_1$ , a na prawym końcu przez  $v_2$ . Podobnie, pole przekroju poprzecznego rury wynosi  $S_1$  na jej lewym końcu oraz  $S_2$  na jej końcu prawym. Założymy, że w przedziale czasu  $\Delta t$  do rury wpływa z lewej strony płyn o objętości  $\Delta V$  (objętość tę na rysunku 15.15a zaznaczono na fioletowo). Płyn jest nieściśliwy, a zatem na prawym końcu rury musi z niej wypłynąć w tym czasie płyn o takiej samej objętości  $V$  (zaznaczonej na rysunku 15.15b na zielono).

To, że obie objętości  $\Delta V$  są takie same, umożliwia nam wyznaczenie związku prędkości z polem przekroju poprzecznego. W tym celu przeanalizujemy najpierw sytuację przedstawioną na rysunku 15.16 pokazującym widok z boku rury o stałym przekroju (o polu  $S$ ). Na rysunku 15.16a element płynu  $e$  dociera do linii przerywanej, narysowanej w poprzek rury. Prędkość tego elementu jest równa  $v$ , a zatem w przedziale czasu  $\Delta t$  element ten przebywa wzduż rury odcinek o długości  $\Delta x = v\Delta t$ . Wobec tego w przedziale czasu  $\Delta t$  przez linię przerywaną przepływa płyn o objętości  $\Delta V$  równej

$$\Delta V = S\Delta x = Sv\Delta t. \quad (15.22)$$

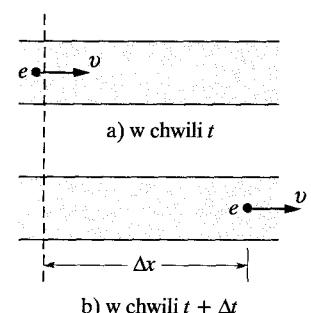
Zapisując równanie (15.22) dla lewego i prawego końca odcinka rury z rysunku 15.15, otrzymujemy

$$\Delta V = S_1v_1\Delta t = S_2v_2\Delta t,$$

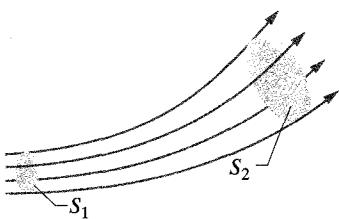
czyli

$$S_1v_1 = S_2v_2 \quad (\text{równanie ciągłości}). \quad (15.23)$$

Ten związek prędkości z polem przekroju poprzecznego nazywamy **równaniem ciągłości** dla przepływu płynu doskonałego. Wynika z niego, że prędkość przepływu wzrasta, gdy maleje pole przekroju poprzecznego, przez który płyn przepływa (tak właśnie jest, gdy zasłaniasz palcem część otworu wyjściowego węża ogrodowego).



Rys. 15.16. Płyn przepływa przez rurę ze stałą prędkością  $v$ . a) W chwili  $t$  element płynu  $e$  dociera do linii przerywanej. b) W chwili  $t + \Delta t$  element  $e$  znajduje się w odległości  $\Delta x = v\Delta t$  od tej linii



Rys. 15.17. Struga prądu jest wyznaczona przez linie prądu stanowiące jej granice. Szybkość przepływu objętości płynu musi być taka sama we wszystkich miejscach strugi (o różnych polach przekroju poprzecznego)

Równanie (15.23) stosuje się nie tylko do przepływu płynu przez prawdziwą rurę, lecz także do tak zwanej *strugi prądu*, czyli umownej rury ograniczonej przez linie prądu. Taka rura działa tak samo jak prawdziwa, gdyż żaden element płynu nie może przepływać przez linię prądu, wobec czego cały płyn zawarty w strudze prądu pozostaje w niej przez cały czas. Na rysunku 15.17 przedstawiono strugę prądu, której pole przekroju poprzecznego rośnie od wartości  $S_1$  do wartości  $S_2$  wzdłuż kierunku przepływu. Z równania (15.23) wiemy, że gdy pole przekroju poprzecznego wzrasta, prędkość przepływu musi się zmniejszać. Jak widać z rysunku 15.17, przejawem tego jest zwiększenie się wzajemnych odległości linii prądu (w prawej części tego rysunku). Wiedząc to, możemy odczytać z rysunku 15.12, że prędkość przepływu płynu jest największa tuż nad i tuż pod walcem.

Równanie (15.23) możemy również zapisać w postaci

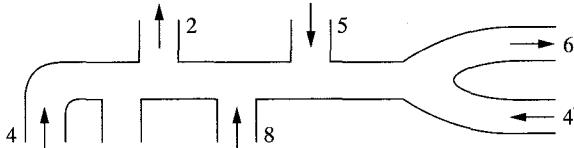
$$R_V = Sv = \text{const} \quad (\text{strumień objętościowy, równanie ciągłości}), \quad (15.24)$$

przy czym  $R_V$  jest **szybkością przepływu objętości płynu (strumieniem objętościowym)**, czyli objętością płynu przepływającego przez pewien przewód w jednostkowym czasie. Jednostką tej wielkości w układzie SI jest metr sześcienny na sekundę ( $\text{m}^3/\text{s}$ ). Gdy gęstość płynu  $\rho$  jest stała, możemy pomnożyć stronami równanie (15.24) przez gęstość i wyznaczyć **szybkość przepływu masy (strumień masy)**  $R_m$ , czyli masę płynu przepływającego przez przewód w jednostkowym czasie. Otrzymujemy

$$R_m = \rho R_V = \rho Sv = \text{const} \quad (\text{strumień masy}). \quad (15.25)$$

Jednostką strumienia masy w układzie SI jest kilogram na sekundę ( $\text{kg/s}$ ). Z równania (15.25) wynika, że masa płynu, który wpływa w jednostce czasu do odcinka rury z rysunku (15.15), jest równa masie płynu wypływającego z tego odcinka w jednostce czasu.

**SPRAWDZIAN 3:** Na rysunku przedstawiono odcinek rury o wielu wlotach i wylotach. Podano również wartość strumienia objętościowego (w  $\text{cm}^3/\text{s}$ ) i kierunek przepływu płynu dla wszystkich otworów z wyjątkiem jednego. Ile wynosi dla tego otworu strumień objętościowy i jaki jest kierunek przepływu?



## Przykład 15.6

Pole przekroju poprzecznego  $S_0$  aorty (wychodzącej z serca tętnicy głównej układu krwionośnego) u normalnego człowieka w warunkach spoczynkowych wynosi  $3 \text{ cm}^2$ . Krew przepływa

przez aortę z prędkością równą  $30 \text{ cm/s}$ . Typowe naczynie włosowskie (kapilarne), o średnicy około  $6 \mu\text{m}$ , ma pole przekroju poprzecznego  $S$  równe  $3 \cdot 10^{-7} \text{ cm}^2$ , a krew przepływa przez nie z prędkością  $v$  wynoszącą  $0,05 \text{ cm/s}$ . Ile takich naczyń włosowatych ma człowiek?

## ROZWIĄZANIE:

Jest oczywiste, że cała krew przepływająca przez naczynia włosowate musiała najpierw wydostać się z serca przez aortę. Strumień objętościowy w aortie musi zatem być równy sumie strumieni objętościowych we wszystkich naczyniach włosowatych. Założymy, że wszystkie te naczynia są jednakowe, o polu przekroju poprzecznego  $S$  i prędkości przepływu  $v$  podanych w treści zadania. Z równania (15.25) otrzymujemy wobec tego

$$S_0 v_0 = n S v,$$

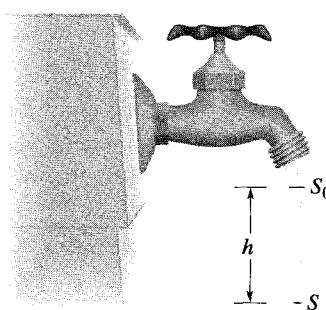
gdzie  $n$  jest liczbą naczyń włosowatych. Rozwiążując to równanie względem  $n$ , dostajemy:

$$n = \frac{S_0 v_0}{S v} = \frac{(3 \text{ cm}^2)(30 \text{ cm/s})}{(3 \cdot 10^{-7} \text{ cm}^2)(0,05 \text{ cm/s})} = 6 \cdot 10^9, \text{ czyli } 6 \text{ miliardów.} \quad (\text{odpowiedź})$$

Możesz łatwo wykazać, że łączne pole przekroju poprzecznego tych wszystkich naczyń włosowatych jest około 600 razy większe od pola przekroju poprzecznego aorty.

## Przykład 15.7

Jak pokazano na rysunku 15.18, struga wody wypływającej z kranu zwęża się ku dołowi. Zaznaczone na rysunku przekroje poprzeczne strugi, odległe od siebie w pionie o  $h = 45 \text{ mm}$ , mają pola równe  $S_0 = 1,2 \text{ cm}^2$  i  $S = 0,35 \text{ cm}^2$ . Ile wynosi strumień objętościowy wody wypływającej z kranu?



Rys. 15.18. Przykład 15.7. W strudze wody wypływającej z kranu prędkość rośnie w miarę spadania wody. Wartość strumienia objętościowego nie może się zmieniać, wobec czego struga musi się zwężać ku dołowi

## ROZWIĄZANIE:

Nietrudno zauważyć, że strumień objętościowy wody musi być taki sam we wszystkich miejscach strugi, a więc także w dwóch miejscach zaznaczonych na rysunku. Z równania (15.24) otrzymujemy zatem

$$S_0 v_0 = S v, \quad (15.26)$$

gdzie  $v_0$  i  $v$  są prędkościami wody na poziomach odpowiadających przekrojom o polach  $S_0$  i  $S$ . Woda spada swobodnie z przyspieszeniem ziemskim  $g$ , a zatem zgodnie z równaniem (2.16) prędkości te związane są ze sobą wzorem

$$v^2 = v_0^2 + 2gh. \quad (15.27)$$

Eliminując  $v$  z równań (15.26) i (15.27), a następnie rozwiązując otrzymane równanie względem  $v_0$ , dostajemy

$$v_0 = \sqrt{\frac{2ghS^2}{S_0^2 - S^2}} = \sqrt{\frac{(2)(9,8 \text{ m/s}^2)(0,045 \text{ m})(0,35 \text{ cm}^2)^2}{(1,2 \text{ cm}^2)^2 - (0,35 \text{ cm}^2)^2}} = 0,286 \text{ m/s} = 28,6 \text{ cm/s.}$$

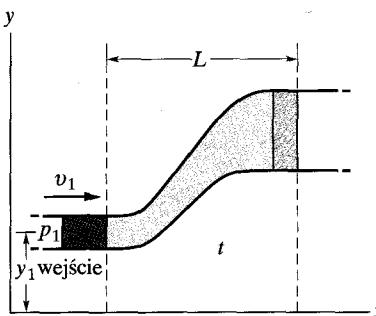
Strumień objętościowy  $R_V$  wyznaczamy z równania (15.24):

$$R_V = S_0 v_0 = (1,2 \text{ cm}^2)(28,6 \text{ cm/s}) = 34 \text{ cm}^3/\text{s.} \quad (\text{odpowiedź})$$

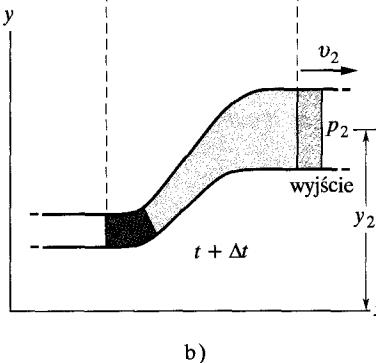
## 15.10. Równanie Bernoulliego

Na rysunku 15.19 przedstawiono rurę, przez którą jednostajnie przepływa płyn doskonali. Zakładamy, że w przedziale czasu  $\Delta t$  z lewej strony (czyli na wejściu do rury) wpływa do niej płyn o objętości  $\Delta V$  (oznaczonej na rysunku 15.19a na fioletowo), a z prawej (na wyjściu) wypływa z niej płyn o takiej samej objętości (oznaczonej na rysunku 15.19b na zielono). Objętość płynu wypływającego z rury musi być taka sama jak objętość płynu wpływającego do niej, gdyż płyn jest nieściśliwy, tzn. ma stałą gęstość  $\rho$ .

Oznaczmy przez  $y_1$ ,  $v_1$  i  $p_1$  poziom, prędkość i ciśnienie płynu wchodzącego do rury z lewej strony, a przez  $y_2$ ,  $v_2$  i  $p_2$  — odpowiednie wielkości odnoszące się do płynu wychodzącego z rury z prawej strony. Wykażemy wkrótce, że z zasady



a)



b)

Rys. 15.19. Płyn przepływa jednostajnie przez rurę o długości  $L$ , od wejścia na jej lewym końcu do wyjścia na końcu prawym. W przedziale czasu od  $t$  (rysunek a) do  $t + \Delta t$  (rysunek b) do rury wpływa płyn oznaczony na fioletowo i wypływa z niej taka sama ilość płynu, oznaczona na zielono

zachowania energii dla tego płynu wynika następujący związek między tymi wielkościami:

$$p_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 + \rho gy_1 = p_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2 + \rho gy_2. \quad (15.28)$$

Równanie to możemy też zapisać w postaci

$$p + \frac{1}{2}\rho v^2 + \rho gy = \text{const} \quad (\text{równanie Bernoulliego}). \quad (15.29)$$

Równania (15.28) i (15.29) są równoważnymi sobie postaciami **równania Bernoulliego**, nazwanego tak dla upamiętnienia Daniela Bernoulliego, który badał przepływy płynów w XVIII wieku<sup>1</sup>. Podobnie jak równanie ciągłości (15.24), równanie Bernoulliego nie jest nowym prawem fizycznym, lecz sformułowaniem znanych już zasad, zapisanym w postaci wygodnej z punktu widzenia mechaniki płynów. Aby się o tym przekonać, zastosujmy równanie Bernoulliego do płynu w spoczynku, podstawiając do równania (15.28)  $v_1 = v_2 = 0$ . W wyniku otrzymujemy

$$p_2 = p_1 + \rho g(y_1 - y_2),$$

czyli równanie (15.7), choć występujące w nim symbole mają nieco inne znaczenie.

Najważniejszy wniosek, jaki wynika z równania Bernoulliego, otrzymamy, zakładając, że  $y$  jest stałe (możemy dla wygody przyjąć, że  $y = 0$ ), tak że płyn nie zmienia w trakcie przepływu swego położenia w pionie. Z równania (15.28) otrzymujemy wtedy

$$p_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 = p_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2, \quad (15.30)$$

co oznacza, że:

► Jeśli przy przepływie wzduż poziomej linii prądu prędkość elementu płynu wzrasta, to ciśnienie płynu maleje i na odwrót.

Innymi słowy, w miejscach, w których linie prądu są ułożone stosunkowo blisko siebie (tzn. w miejscach, w których prędkość przepływu jest stosunkowo duża), ciśnienie płynu jest stosunkowo małe i na odwrót.

Związek zmiany prędkości ze zmianą ciśnienia możesz zrozumieć, rozpatrując zachowanie się elementu płynu. Gdy element ten zbliża się do wąskiego miejsca w rurze, panujące za nim duże ciśnienie powoduje przyspieszenie jego ruchu, w związku z czym w wąskim miejscu rury prędkość przepływu jest duża. Gdy natomiast element zbliża się do szerokiego odcinka rury, panujące przed nim duże ciśnienie powoduje zwolnienie jego ruchu, a zatem w szerokim miejscu rury prędkość przepływu jest mała.

Równanie Bernoulliego stosuje się ściśle jedynie dla płynu doskonałego. Gdy występują siły lepkości, nie wolno nam pominąć zmian energii termicznej płynu.

<sup>1</sup>Dla przepływu, który jest bezwirowy (co przez cały czas zakładamy), stała w równaniu (15.29) ma taką samą wartość dla wszystkich punktów w strudze prądu; punkty te nie muszą leżeć na jednej linii prądu. Podobnie, punkty 1 i 2 w równaniu (15.28) są dwoma dowolnymi punktami w strudze prądu.

W rozumowaniu, które przedstawimy za chwilę, nie będziemy uwzględniać sił lepkości.

## Wyprowadzenie równania Bernoulliego

Rozpatrzmy układ zawierający całą objętość płynu doskonałego, przedstawioną na rysunku 15.19. Zastosujemy do niego zasadę zachowania energii w czasie przepływu od stanu początkowego (z rysunku 15.19a) do stanu końcowego (z rysunku 15.19b). Płyn zawarty między dwiema płaszczyznami pionowymi z rysunku 15.19, odległymi od siebie o  $L$ , nie zmienia w trakcie przepływu swych właściwości, wobec czego możemy zajmować się jedynie wielkościami odnoszącymi się do końców rury, wejściowego i wyjściowego.

Zapiszemy zasadę zachowania energii w postaci związku pracy ze zmianą energii kinetycznej, tzn.

$$W = \Delta E_k, \quad (15.31)$$

z którego wynika, że zmiana energii kinetycznej układu jest równa całkowitej pracy wykonanej nad układem. Zmiana energii kinetycznej jest wynikiem zmiany prędkości płynu między końcami rury, a zatem wynosi:

$$\Delta E_k = \frac{1}{2} \Delta m v_2^2 - \frac{1}{2} \Delta m v_1^2 = \frac{1}{2} \rho \Delta V (v_2^2 - v_1^2), \quad (15.32)$$

przy czym  $\Delta m (= \rho \Delta V)$  jest masą płynu, który wpływa do rury na końcu wejściowym i wypływa z niej na końcu wyjściowym w przedziale czasu  $\Delta t$ .

Praca wykonana nad układem ma dwa źródła. Po pierwsze, siła ciężkości ( $\Delta m \vec{g}$ ) wykonuje pracę  $W_g$  nad płynem o masie  $\Delta m$ , wznosząc go z poziomu wejściowego na wyjściowy. Praca ta jest równa:

$$W_g = -\Delta m g (y_2 - y_1) = -\rho g \Delta V (y_2 - y_1). \quad (15.33)$$

Jest ona ujemna ze względu na przeciwe kierunki przemieszczenia płynu (skierowanego w górę) i siły ciężkości (skierowanej w dół).

Po drugie, praca jest też wykonywana nad układem (na wejściowym końcu rury), gdy płyn jest włączany do rury, oraz przez układ (na wyjściowym końcu rury), gdy płyn jest wypychany z rury. Całkiem ogólnie możemy powiedzieć, że praca wykonana przez siłę o wartości  $F$ , działającą na próbce płynu o polu przekroju poprzecznego  $S$ , przy przemieszczeniu płynu na odległość  $\Delta x$ , jest równa

$$F \Delta x = (pS)(\Delta x) = p(S \Delta x) = p \Delta V.$$

Praca wykonana nad układem jest zatem równa  $p_1 \Delta V$ , a praca wykonana przez układ wynosi  $-p_2 \Delta V$ . Ich suma  $W_p$  jest równa:

$$W_p = -p_2 \Delta V + p_1 \Delta V = -(p_2 - p_1) \Delta V. \quad (15.34)$$

Związek pracy ze zmianą energii kinetycznej, czyli równanie (15.31), możemy teraz zapisać jako

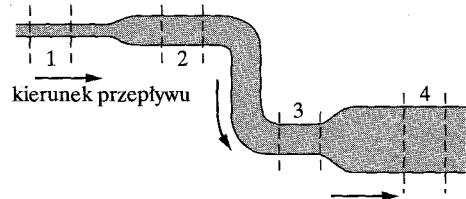
$$W = W_g + W_p = \Delta E_k.$$

Wstawiając do tego wzoru wyrażenia (15.32), (15.33) i (15.34), otrzymujemy

$$-\rho g \Delta V (y_2 - y_1) - \Delta V (p_2 - p_1) = \frac{1}{2} \rho \Delta V (v_2^2 - v_1^2).$$

Po niewielkich przekształceniach otrzymujemy stąd równanie (15.28), które zamierzaliśmy wyprowadzić.

**SPRAWDZIAN 4:** Woda przepływa jednostajnie przez rurę przedstawioną na rysunku, przy czym zmienia swój poziom. Uszereguj cztery odcinki rury, oznaczone na rysunku cyframi, w zależności od odpowiadających im wartości: a) strumieni objętościowych  $R_V$ , b) prędkości przepływu  $v$  oraz c) ciśnienia wody  $p$ , od największych do najmniejszych.



## Przykład 15.8

Etanol o gęstości  $\rho = 791 \text{ kg/m}^3$  przepływa jednostajnie przez poziomą rurę, której pole przekroju poprzecznego zmniejsza się (jak na rysunku 15.15) od wartości  $S_1 = 1,2 \cdot 10^{-3} \text{ m}^2$  do  $S_2 = S_1/2$ . Różnica ciśnień na wąskim i szerokim końcu rury wynosi 4120 Pa. Wyznacz strumień objętościowy etanolu  $R_V$ .

### ROZWIĄZANIE:

Po pierwsze zauważmy, że cały płyn przepływający przez szeroki odcinek rury musi również przepływać przez jej odcinek wąski, a zatem strumień objętościowy  $R_V$  musi być taki sam na obu tych odcinkach. Z równania (15.24) mamy więc

$$R_V = v_1 S_1 = v_2 S_2. \quad (15.35)$$

Z równania tego nie możemy jednak wyznaczyć  $R_V$ , gdyż nie znamy żadnej z występujących w nim prędkości.

Weźmy zatem pod uwagę, że skoro przepływ płynu jest jednostajny, to możemy zastosować do niego równanie Bernoulliego. Z równania (15.28) otrzymujemy:

$$p_1 + \frac{1}{2} \rho v_1^2 + \rho gy = p_2 + \frac{1}{2} \rho v_2^2 + \rho gy, \quad (15.36)$$

przy czym wskaźniki 1 i 2 odnoszą się odpowiednio do szerokiego i wąskiego odcinka rury, a  $y$  jest ich jednakowym poziomem. Na pierwszy rzut oka równanie to nie wydaje się szczególnie przydatne do naszego celu, gdyż nie zawiera szukanego strumienia objętościowego  $R_V$ , lecz zawiera nieznane prędkości  $v_1$  i  $v_2$ .

Niemniej jednak właśnie to równanie umożliwi nam rozwiązanie zadania, jeśli umiejętnie je wykorzystamy. Najpierw, na

podstawie równania (15.35) stwierdzamy, że

$$v_1 = \frac{R_V}{S_1} \quad \text{oraz} \quad v_2 = \frac{R_V}{S_2} = \frac{2R_V}{S_1}, \quad (15.37)$$

przy czym skorzystaliśmy dodatkowo z tego, że  $S_2 = S_1/2$ . Następnie podstawimy te wyrażenia do równania (15.36), dzięki czemu wyeliminujemy z niego nieznane prędkości, a jednocześnie wprowadzimy szukany strumień objętościowy. Rozwiązujeając otrzymane równanie względem  $R_V$ , otrzymamy

$$R_V = S_1 \sqrt{\frac{2(p_1 - p_2)}{3\rho}}. \quad (15.38)$$

Pozostaje jeszcze jedna kwestia do rozstrzygnięcia: wiemy, że różnica ciśnień na końcach rury wynosi 4120 Pa, lecz co mamy podstawić za  $p_1 - p_2$ : 4120 Pa czy -4120 Pa? Można zgadnąć, że powinniśmy skorzystać z tej pierwszej wartości, gdyż podstawiając drugą, otrzymalibyśmy pod pierwiastkiem w równaniu (15.38) liczbę ujemną. Zamiast zgadywać, spróbujmy jednak pomyśleć. Z równania (15.35) wynika, że prędkość  $v_2$  w wąskim odcinku rury (małe  $S_2$ ) jest większa niż prędkość  $v_1$  w jej szerokim odcinku (małe  $S_2$ ). Przypomnij sobie, że gdy prędkość płynu wzrasta w trakcie przepływu w poziomym przewodzie (jak w naszym zadaniu), ciśnienie płynu maleje. Tak więc  $p_1$  jest większe niż  $p_2$ , wobec czego  $p_1 - p_2 = 4120 \text{ Pa}$ . Podstawiając tę wartość i inne wartości dane do równania (15.38), otrzymujemy

$$\begin{aligned} R_V &= 1,2 \cdot 10^{-3} \text{ m}^2 \sqrt{\frac{(2)(4120 \text{ Pa})}{(3)(791 \text{ kg/m}^3)}} \\ &= 2,24 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3/\text{s}. \end{aligned} \quad (\text{odpowiedź})$$

## Przykład 15.9

Podczas strzelaniny na Dzikim Zachodzie kula trafia w ściankę otwartego od góry zbiornika z wodą (rys. 15.20), tworząc w niej otwór w odległości  $h$  od powierzchni wody. Wyznacz prędkość, z jaką woda wypływa przez ten otwór.

### ROZWIĄZANIE:

Zauważmy przede wszystkim, że w istocie mamy do czynienia z przepływem wody w dół z prędkością  $v_0$  przez szeroką rurę (zbiornik) o polu przekroju poprzecznego  $S$  oraz z jej przepływem w poziomie z prędkością  $v$  przez wąską rurę (otwór) o polu prze-

kroju poprzecznego  $s$ . Ponadto woda przepływająca przez szeroką rurę przepływa też przez wąską rurę, a zatem strumień objętościowy  $R_V$  musi być taki sam w obu „rurach”. Wobec tego z równania (15.24) mamy

$$R_V = sv = Sv_0,$$

a stąd

$$v_0 = \frac{s}{S}v.$$

Wiemy, że  $s \ll S$ , a zatem  $v_0 \ll v$ .

Ważne jest też to, że  $v$  jest związane z  $v_0$  (oraz z  $h$ ), a związek ten wyraża równanie Bernoulliego, czyli równanie (15.28). Wybierzmy poziom otworu za poziom odniesienia, względem którego będziemy mierzyć poziom płynu. Zauważmy ponadto, że ciśnienie na powierzchni wody w zbiorniku i u jej wylotu z otworem po kuli jest równe ciśnieniu atmosferycznemu  $p_0$  (gdyż w tych obydwu miejscach woda jest w bezpośrednim kontakcie z atmosferą). Równanie (15.28) możemy zatem zapisać w postaci:

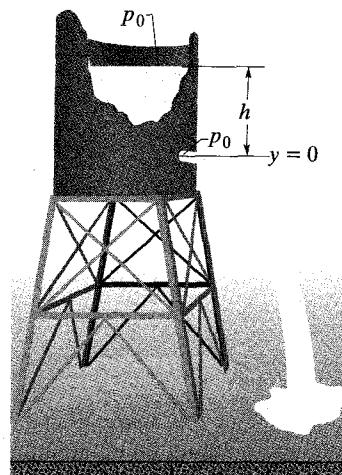
$$p_0 + \frac{1}{2}\rho v_0^2 + \rho gh = p_0 + \frac{1}{2}\rho v^2 + \rho g(0). \quad (15.39)$$

Lewa strona tego równania zawiera wielkości odnoszące się do powierzchni wody w zbiorniku, a prawa strona — do otworu po kuli. Zero w ostatnim składniku prawej strony bierze się stąd, że poziom otworu przyjęliśmy za poziom odniesienia. Z równania (15.39) chcemy wyznaczyć  $v$ . Zanim jednak je rozwiążemy, zauważmy, że możemy je uprościć, korzystając z warunku  $v_0 \ll v$ . Mianowicie, możemy przyjąć, że skoro  $v_0^2$  jest bardzo małe, to możemy uznać, że wyraz  $\frac{1}{2}\rho v_0^2$  jest znikomo mały w porównaniu

z innymi wyrazami w równaniu (15.39), a więc możemy go opuścić. Rozwiązujeć otrzymane w ten sposób równanie względem  $v$ , otrzymujemy

$$v = \sqrt{2gh}. \quad (\text{odpowiedź})$$

Zwróć uwagę, że taką samą prędkość ma przedmiot spadający swobodnie z wysokości  $h$  z prędkością początkową równą zeru.



Rys. 15.20. Przykład 15.9. Woda wypływa ze zbiornika przez otwór znajdujący się w odległości  $h$  od powierzchni wody. Ciśnienie na powierzchni wody oraz u wylotu z otworem jest równe ciśnieniu atmosferycznemu  $p_0$

## Podsumowanie

**Gęstość** Gęstość  $\rho$  dowolnej substancji definiujemy jako masę jej jednostkowej objętości:

$$\rho = \frac{\Delta m}{\Delta V}. \quad (15.1)$$

Gdy rozważana próbka substancji jest duża w porównaniu z rozmiarami atomów, możemy zwykle zapisać równanie (15.1) w postaci

$$\rho = \frac{m}{V}. \quad (15.2)$$

**Ciśnienie płynu** Płyn jest to substancja zdolna do przepływu; przybiera on kształt naczynia, gdyż nie jest w stanie przeciwstawić się naprężeniu ścinającemu. Może jednak działać siłą prostopadłą do swej powierzchni. Siłę tę możemy wyrazić przez **ciśnienie  $p$** :

$$p = \frac{\Delta F}{\Delta S}, \quad (15.3)$$

przy czym  $\Delta F$  jest siłą działającą na element powierzchni o polu  $\Delta S$ . Jeśli ta siła powoduje jednakowy nacisk w każdym punkcie

plaskiej powierzchni, to równanie (15.3) możemy zapisać w postaci

$$p = \frac{F}{S}. \quad (15.4)$$

Siła pochodząca od ciśnienia płynu ma w każdym punkcie płynu taką samą wartość we wszystkich kierunkach. Różnicę między bezwzględnym (*pełnym*) ciśnieniem w danym punkcie a ciśnieniem atmosferycznym nazywa się nieraz **nadciśnieniem**.

**Zmiana ciśnienia ze zmianą wysokości i głębokości w płynie** Ciśnienie w płynie, znajdującym się w spoczynku, zależy od współrzędnej pionowej  $y$  punktu miernika. Gdy osi  $y$  jest skierowana w górę,

$$p_2 = p_1 + \rho g(y_1 - y_2). \quad (15.7)$$

Ciśnienie w płynie jest takie samo we wszystkich punktach leżących na jednym poziomie. Jeśli przez  $h$  oznaczymy głębokość próbki płynu mierzoną w dół od pewnego poziomu odniesienia,

na którym ciśnienie wynosi  $p_0$ , to z równania (15.7) wynika, że:

$$p = p_0 + \rho gh, \quad (15.8)$$

gdzie  $p$  jest ciśnieniem w wybranej próbce płynu.

**Prawo Pascala** Prawo Pascala, które można wyprowadzić ze wzoru (15.7), mówi, że zmiana ciśnienia zamkniętej objętości płynu jest przenoszona bez zmiany wartości do każdego miejsca w płynie i do ścian zbiornika, w którym płyn się znajduje.

**Prawo Archimedesa** Na ciało całkowicie lub częściowo zanurzone w płynie działa ze strony otaczającego je płynu siła wyporu  $F_w$ . Siła ta jest skierowana w góre, a jej wartość jest dana wzorem

$$F_w = m_p g, \quad (15.16)$$

przy czym  $m_p$  jest masą płynu wypartego przez ciało.

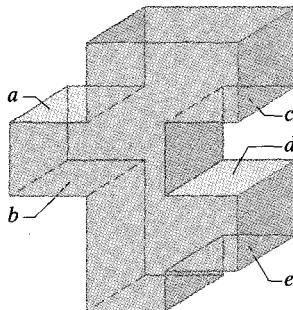
Gdy ciało pływa w płynie, wartość  $F_w$  działającej na nie (w góre) siły wyporu jest równa wartości  $F_g$  działającej na nie (w dół) siły ciężkości. Ciężar pozorny ciała, na które działa siła wyporu, jest związany z jego rzeczywistym ciężarem zależnością

$$\text{ciężar}_{\text{poz}} = \text{ciężar} - F_w. \quad (15.19)$$

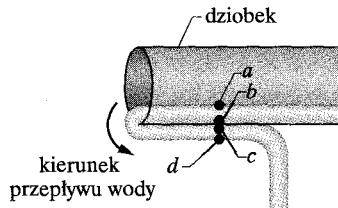
## Pytania

1. Na rysunku 15.21 przedstawiono zbiornik z wodą o skomplikowanym kształcie, zawierającym między innymi pięć zaznaczonych na rysunku literami poziomych („susfitów” i „podłóg”) o jednakowym polu powierzchni, odległych od wierzchu zbiornika o  $L$ ,  $2L$  lub  $3L$ . Uszereguj te ścianki w zależności od wartości siły, jaką działa na nie woda w zbiorniku, od największej do najmniejszej.

2. **Efekt czajniczka.** Gdy powoli wylewasz wodę z czajniczka przez jego dziobek, możesz czasem stwierdzić, że strumień wody zatrzymuje się pod dziobkiem, przy czym może przebyć w ten sposób całkiem długą drogę, zanim oderwie się od dziobka i skieruje w dół (tym, co utrzymuje strumień w kontakcie ze spodnią powierzchnią dziobka, jest ciśnienie atmosferyczne). Sytuację tę przedstawiono na rysunku 15.22, przy czym zaznaczono



Rys. 15.21. Pytanie 1



Rys. 15.22. Pytanie 2

**Przepływ płynów doskonałych** Płyn doskonały jest nieściśliwy i nielepki, a jego przepływ jest ustalony i bezwirowy. Linią prądu nazywamy tor pojedynczej cząstki płynu. Wiązkę linii prądu nazywamy strugą prądu. Przepływ każdej strugi prądu spełnia **równanie ciągłości**:

$$R_V = Sv = \text{const}, \quad (15.24)$$

przy czym  $R_V$  jest **szybkością przepływu objętości płynu (strumieniem objętościowym)**,  $S$  — polem przekroju poprzecznego strugi w danym jej punkcie, a  $v$  — prędkością płynu w tym punkcie (zakładamy, że prędkość jest stała w obszarze przekroju  $S$ ). **Szybkość przepływu masy (strumień masy)**  $R_m$  wynosi

$$R_m = \rho R_V = \rho Sv = \text{const}. \quad (15.25)$$

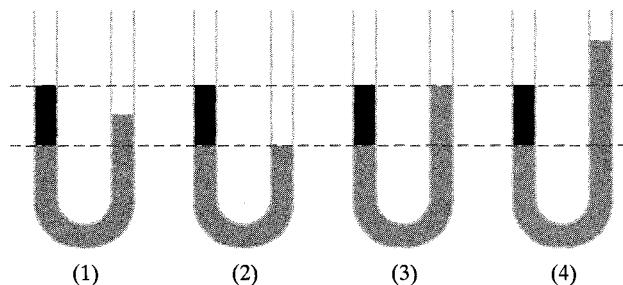
**Równanie Bernoulliego** Z zasady zachowania energii mechanicznej, zastosowanej do przepływu płynu doskonałego, wynika **równanie Bernoulliego**

$$p + \frac{1}{2} \rho v^2 + \rho gy = \text{const} \quad (15.29)$$

w każdym miejscu strugi prądu.

cztery punkty w strumieniu wody:  $a$  i  $b$  — na górze i na dole strumienia w dziobku, oraz  $c$  i  $d$  — na górze i na dole strumienia pod dziobkiem. Uszereguj te punkty w zależności od panującego w nich nadciśnienia wody, od największego ( dodatniego) do najmniejszego (ujemnego).

3. Na rysunku 15.23 przedstawiono cztery sposoby umieszczenia w rurce w kształcie litery U dwóch cieczy: czerwonej i szarej. W jednym z tych przypadków ciecze nie mogą znajdować się w równowadze statycznej. a) Który to przypadek? b) W pozostałych przypadkach założyć, że ciecze są w równowadze statycznej. W każdym z tych przypadków określ, czy gęstość cieczy czerwonej jest większa, mniejsza, czy równa gęstości cieczy szarej?



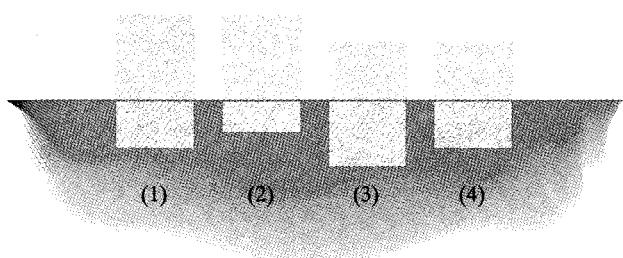
Rys. 15.23. Pytanie 3

4. Trzy podnośniki hydrauliczne, takie jak przedstawiony na rysunku 15.8, stosujemy do podnoszenia takich samych ładunków na

taką samą wysokość (w ramieniu wyjściowym). Wszystkie podnośniki mają jednakowe tłoki wejściowe, natomiast tłoki wyjściowe mają pola powierzchni równe  $S$  (podnośnik 1),  $2S$  (podnośnik 2) i  $3S$  (podnośnik 3). Uszereguj te podnośniki w zależności od: a) pracy wykonanej nad tłem wejściowym, b) siły działającej na tło wejściowy (załóż, że jest ona stała), c) przemieszczenia tła wejściowego, od największych do najmniejszych.

5. Zanurzamy całkowicie blok z pewnego materiału, o nieregularnym kształcie i masie 3 kg, w pewnym płynie. Płyn zawarty poprzednio w obszarze zajętym przez blok ma masę 2 kg. a) Czy gdy puścimy blok, wypłynie on, zatonie, czy pozostanie w tym samym miejscu? b) Jak zachowa się ten blok, gdy następnie zanurzymy go całkowicie w płynie o mniejszej gęstości, a potem zwolnimy nacisk?

6. Na rysunku 15.24 przedstawiono cztery ciała stałe pływające w syropie kukurydzianym. Uszereguj te ciała według ich gęstości, od największej do najmniejszej.



Rys. 15.24. Pytanie 6

7. Na rysunku 15.25 przedstawiono trzy jednako, otwarte od góry zbiorniki, wypełnione po brzegi wodą. W dwóch z nich pływa gumowa kaczuszka. Uszereguj przedstawione na rysunku przypadki w zależności od ciężaru zbiornika wraz z jego zawartością, od największego do najmniejszego.

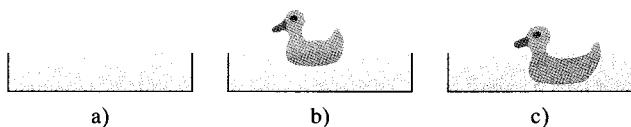
## Zadania

Rozwiązań jest dostępne na stronie internetowej podręcznika: <http://www.wiley.com/college/hrw>

Rozwiązań jest dostępne w postaci interaktywnej, wykorzystującej oprogramowanie Interactive Learning-Ware (na tej samej stronie)

## 15.3 Gęstość i ciśnienie

1. Oblicz zmianę ciśnienia płynu w strzykawce, gdy pielęgniarka działa siłą o wartości 42 N na kołowy tło strzykawki o promieniu 1,1 cm.

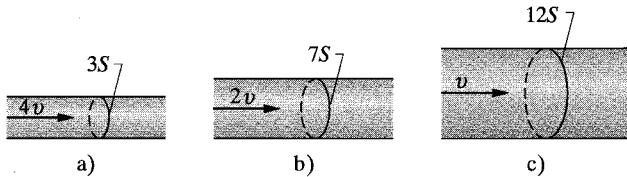


Rys. 15.25. Pytanie 7

8. Klocek pływa w wiadrze stojącym na podłodze nieruchomej windy. Czy klocek ten zanurzy się w wodzie głębiej, płycej, czy pozostanie zanurzony tak samo, gdy kabina windy będzie poruszać się: a) w górn ze stałą prędkością, b) w dół ze stałą prędkością, c) z przyspieszeniem skierowanym w górę, d) z przyspieszeniem skierowanym w dół, o wartości mniejszej od  $g$ ?

9. Łódź pływa w basenie, którego szerokość jest tylko nieco większa od szerokości łodzi, a jej kotwica leży na pokładzie. Czy poziom wody w basenie podniesie się, opuści, czy pozostanie nie zmieniony, gdy kotwicę: a) wrzucimy do wody, b) wyrzucimy na brzeg basenu? c) Czy poziom wody w basenie podniesie się, opuści, czy pozostanie nie zmieniony, gdy zamiast kotwicy wyrzucimy z łodzi do wody korek, który będzie pływał po wodzie?

10. Na rysunku 15.26 przedstawiono trzy proste rury, przez które płynie woda. Na rysunku podano prędkość przepływu wody przez każdą rurę oraz pole przekroju poprzecznego każdej z nich. Uszereguj te rury w zależności od objętości wody, która przepływa przez przekrój poprzeczny każdej z nich w ciągu jednej minuty, od największej do najmniejszej.



Rys. 15.26. Pytanie 10

2. Do cylindrycznego zbiornika wlano trzy nie mieszające się ze sobą cieczy. Ich objętości i gęstości wynoszą: 0,5 l i  $2,6 \text{ g/cm}^3$ , 0,25 l i  $1 \text{ g/cm}^3$  oraz 0,4 l i  $0,8 \text{ g/cm}^3$ . Wyznacz siłę działającą ze strony tych cieczy na dno zbiornika. Pamiętaj, że  $1 \text{ l} = 1000 \text{ cm}^3$ ; pomień wpływ atmosfery.

3. Okno w biurze ma wymiary  $3,4 \text{ m} \times 2,1 \text{ m}$ . Po przejściu burzy ciśnienie powietrza za oknem spada do wartości 0,96 atm, lecz wewnątrz budynku nadal panuje ciśnienie 1 atm. Ile wynosi całkowita siła działająca wówczas na okno?

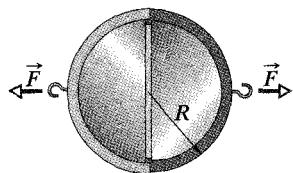
4. Napompowałaś przednie koła samochodu do ciśnienia 28 psi (patrz s. 63). Następnie zmierzyłeś sobie ciśnienie krwi, otrzyma-

mając wynik 120/80, przy czym wskazania są wyrażone w mm Hg. W krajach, w których obowiązuje układ jednostek SI, czyli niemal na całym świecie, ciśnienie podaje się zwykle w kilopascalach (kPa). Wyraź w kilopascalach: a) ciśnienie w oponach twojego samochodu, b) zmierzone przez ciebie ciśnienie krwi.

5. Ryby sterują głębokością swego zanurzenia w wodzie, zmieniając zawartość powietrza w porowatych kościach lub pęcherzach pławnych, tak aby ich średnia gęstość była równa gęstości wody na danej głębokości. Przyjmij, że gdy całe powietrze jest usunięte z pęcherzy pławnych, ryba ma średnią gęstość równą  $1,08 \text{ g/cm}^3$ . Jaką część całkowitej objętości ryby musi stanowić powietrze w pęcherzach pławnych, aby jej gęstość zmniejszyła się do wartości odpowiadającej zwykłej gęstości wody?

6. Hermetyczny pojemnik, którego wieczko ma znikomo małą masę oraz pole powierzchni równe  $77 \text{ cm}^2$ , jest częściowo opróżniony z powietrza. Gdy ciśnienie atmosferyczne wynosi  $1 \cdot 10^5 \text{ Pa}$ , do zdobycia wieczka potrzebna jest siła o wartości  $480 \text{ N}$ . Ile wynosi ciśnienie powietrza w pojemniku (przed zdaniem wieczka)?

7. W roku 1654 Otto von Guericke, wynalazca pompy próżniowej, wykonał na oczach dostojuników Świętego Cesarstwa Rzymskiego doświadczenie, w którym dwa ośmiokonne zaprzęgi nie były w stanie rozerwać dwóch złączonych półkul mosiężnych (nazwanych później półkulami magdeburiskimi), spomiędzy których odpompowano powietrze. a) Załóż, że półkule miały ścianki dostatecznie cienkie na to, aby  $R$  na rysunku 15.27 mogło oznaczać zarówno ich promień zewnętrzny, jak i wewnętrzny, i wykaż, że siła  $\vec{F}$  potrzebna do rozerwania półkul ma wartość  $F = \pi R^2 \Delta p$ , przy czym  $\Delta p$  jest różnicą ciśnienia na zewnątrz i wewnętrz kuli. b) Przyjmij, że  $R$  było równe  $30 \text{ cm}$ , ciśnienie wewnętrz kuli wynosiło  $0,1 \text{ atm}$ , a ciśnienie zewnętrzne było równe  $1 \text{ atm}$ , i oblicz wartość siły, jaką musiałyby działać dwa ze społy koni, aby rozdzielić półkule. c) Uzasadnij, że doświadczenie dałoby taki sam wynik, gdyby zastosować tylko jeden zaprzęg koni, a półkule przymocować do sztywnej ściany.



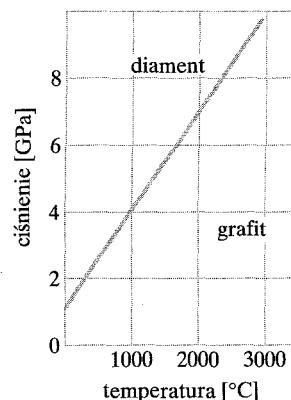
Rys. 15.27. Zadanie 7

## 15.4 Płyny w spoczynku

8. Oblicz różnicę ciśnienia hydrostatycznego krwi w krwiobiegu człowieka w jego mózgu i w jego stopie. Przyjmij, że wzrost człowieka wynosi  $1,83 \text{ m}$ , a gęstość krwi jest równa  $1,06 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3$ .

9. Odpływ ścieków z domu zbudowanego na zboczu znajduje się o  $8,2 \text{ m}$  niżej niż poziom ulicy. Kanał ściekowy znajduje się natomiast o  $2,1 \text{ m}$  niżej niż poziom ulicy. Oblicz minimalną różnicę ciśnienia, jaką musi wytworzyć pomp do ścieków, aby umożliwić odprowadzenie z odpływu do kanału ściekowego ścieków o średniej gęstości wynoszącej  $900 \text{ kg/m}^3$ .

10. Na rysunku 15.28 przedstawiono wykres fazowy dla węgla, pokazujący, w jakich zakresach temperatury i ciśnienia w wyniku krystalizacji węgla otrzymuje się bądź diament, bądź grafit. Na jakiej minimalnej głębokości może tworzyć się diament, jeśli temperatura na tej głębokości jest równa  $1000^\circ\text{C}$ , a masa skalna ma gęstość  $3,1 \text{ g/cm}^3$ ? Przyjmij, że — podobnie jak w płynie — ciśnienie na danej głębokości pochodzi od siły ciężkości działającej na materiał leżący powyżej tego poziomu.

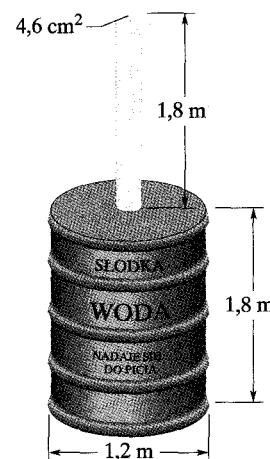


Rys. 15.28. Zadanie 10

11. Basen kąpielowy ma wymiary  $24 \text{ m} \times 9,0 \text{ m} \times 2,5 \text{ m}$  i jest całkowicie wypełniony wodą. Oblicz siłę (pochodzącą tylko od wody), działającą na: a) dno basenu, b) jego krótszą ścianę oraz c) jego dłuższą ścianę. d) Czy gdyby istniała możliwość, że betonowe ściany lub dno basenu mogą być bliskie załamania się, powinieneś uwzględnić także ciśnienie atmosferyczne? Dlaczego tak uważaś?

12. a) Oblicz całkowity ciężar wody znajdującej się nad okretem podwodnym o napędzie jądrowym, którego zanurzenie wynosi  $200 \text{ m}$ , a pole poziomego przekroju jego kadłuba jest równe  $3000 \text{ m}^2$ . Gęstość wody morskiej wynosi  $1,03 \text{ g/cm}^3$ . b) Wyznacz ciśnienie wody działające na znajdującego się na takiej głębokości nurka i wyraź je w atmosferach. Czy sądzisz, że członkowie załogi okrętu podwodnego, który uległ uszkodzeniu na takiej głębokości, mogliby się z niego wydostać bez specjalnych kombinezonów?

13. Członkowie załogi okrętu podwodnego, który uległ uszkodzeniu na głębokości  $100 \text{ m}$  pod powierzchnią wody, starają się z niego wydostać. Ile wynosi wartość siły, która trzeba działać na pokrywę luku awaryjnego o wymiarach  $1,2 \text{ m} \times 0,6 \text{ m}$ , aby ją otworzyć na tej głębokości? Przyjmij, że gęstość wody w oceanie wynosi  $1025 \text{ kg/m}^3$ .

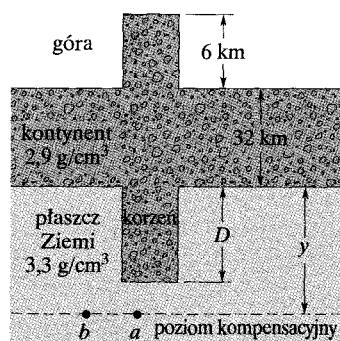


Rys. 15.29. Zadanie 14

beczki i rury. Naczynie jest napełnione wodą aż po gorny brzeg rury. Oblicz stosunek siły działającej ze strony cieczy na dno beczki do siły ciężkości działającej na wodę zawartą w beczce. Dlaczego ten stosunek nie jest równy jedności? Ciśnienia atmosferycznego nie musisz brać pod uwagę.

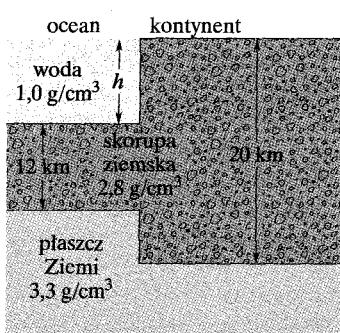
**15.** Dwa jednakowe naczynia cylindryczne, o podstawach znajdujących się na tym samym poziomie, zawierają tę samą ciecz o gęstości  $\rho$ . Podstawy obu naczyń mają pole równe  $S$ , lecz wysokość słupa cieczy w jednym z nich jest równa  $h_1$ , a w drugim  $h_2$ . Oblicz pracę, jaką wykona siła grawitacyjna, gdy po połączeniu ze sobą tych naczyń doprowadzi do zrównania poziomu cieczy w obu naczyniach.

**16.** W badaniach niektórych struktur geologicznych zakłada się nierzaz istnienie pewnego *poziomu kompensacyjnego*, głęboko we wnętrzu Ziemi, na którym ciśnienie jest jednakowe w dużym obszarze i równe ciśnieniu pochodząemu od siły ciężkości działającej na leżący nad nim materiał. Oznacza to, że ciśnienie na tym poziomie jest dane wzorem na ciśnienie w płynie. Jedną z konsekwencji przyjęcia tego modelu jest istnienie pod górami „korzeni”, tzn. obszarów skał kontynentalnych wrośnieńnych w płaszcz Ziemi, który ma gęstość większą niż skorupa ziemska (patrz rys. 15.30). Przyjmij, że góra ma wysokość 6 km. Skały kontynentalne mają gęstość równą  $2,9 \text{ g/cm}^3$ , a gęstość płaszcza Ziemi pod kontynentem wynosi  $3,3 \text{ g/cm}^3$ . Wyznacz głębokość „korzenia”  $D$ . (Wskazówka: Skorzystaj z faktu, że ciśnienie w punktach  $a$  i  $b$  jest jednakowe; głębokość poziomu kompensacyjnego  $y$  powinna się zredukować).

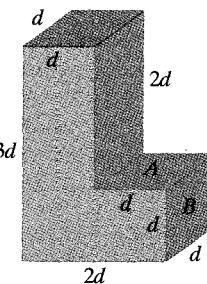


Rys. 15.30. Zadanie 16

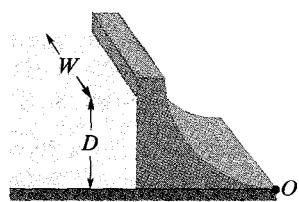
**17.** Na rysunku 15.31 przedstawiono miejsce styku oceanu z kontynentem. Oblicz głębokość oceanu  $h$ , korzystając z metody poziomu kompensacyjnego z zadania 16.



Rys. 15.31. Zadanie 17



Rys. 15.32. Zadanie 18



Rys. 15.33. Zadanie 19

**19.** Głębokość zbiornika wodnego utworzonego za tamą, której ściana stykająca się z wodą jest pionowa, jak na rysunku 15.33, wynosi  $D$ . Szerokość tamy jest równa  $W$ . Wyznacz: a) całkowitą siłę, jaką działa poziomo woda na tamę dzięki swemu nadciśnieniu, b) wypadkowy moment tej siły względem osi przechodzącej przez punkt  $O$  i równoległej do szerokości tamy, c) ramię siły z punktu (a) względem osi z punktu (b).

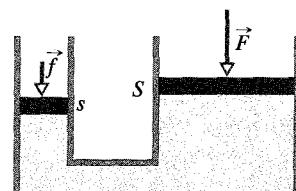
### 15.5 Jak się mierzy ciśnienie?

**20.** Ile wynosi minimalne podciśnienie (wyrażone w atmosferach), jakie musisz wytworzyć w płucach, aby napić się przez słomkę lemoniady o gęstości równej  $1000 \text{ kg/m}^3$ , jeśli musisz przy tym podnieść poziom lemoniady w słomce na wysokość równą maksymalnie 4 cm?

**21.** Ile wynosiłaby wysokość atmosfery, gdyby gęstość powietrza w niej: a) była stała, b) maleała liniowo aż do zera ze wzrostem wysokości? Przyjmij, że ciśnienie powietrza na poziomie morza wynosi 1 atm, a gęstość powietrza jest równa  $1,3 \text{ kg/m}^3$ .

### 15.6 Prawo Pascale'a

**22.** Prasa hydrauliczna zawiera tłok o małym polu powierzchni, równym  $s$ , za pomocą którego działamy na ciecz niewielką siłą  $f$ . Ciecz łączy ten tłok z większym tłokiem o polu powierzchni równym  $S$  (rys. 15.34). a) Ile musi wynosić wartość  $F$  siły działającej na większy tłok, aby pozostał on w spoczynku? b) Ile wynosi wartość siły działającej na mniejszy tłok, która równoważy siłę o wartości 20 kN, działającą na większy tłok? Średnica małego tłoka wynosi 3,8 cm, a średnica dużego — 53 cm.



Rys. 15.34. Zadania 22 i 23

**23.** Rozważ prasę hydrauliczną z zadania 22. O jaki odcinek trzeba przesunąć duży tłok, aby mały tłok podniósł się o 0,85 m?

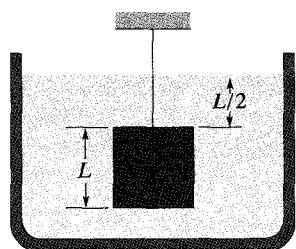
### 15.7 Prawo Archimedesa

**24.** Łódź pływająca w słodkiej wodzie wypiera wodę o ciężarze równym 35,6 kN. a) Ile wynosiłyby ciężar wody wypartej przez

te łódź, gdyby pływała ona w słonej wodzie o gęstości równej  $1,1 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3$ ? b) Czy objętość wypieranej przez łódź wody zmieniłaby się przy tym? Jeśli tak, to o ile?

25. Kotwica wykonana z żelaza o gęstości  $7870 \text{ kg/m}^3$  wydaje się w wodzie lżejsza o  $200 \text{ N}$  niż w powietrzu. a) Ile wynosi objętość tej kotwicy? b) Ile wynosi jej ciężar w powietrzu?

26. Na rysunku 15.35 przedstawiono ciało o masie  $450 \text{ kg}$ , mające kształt sześciangu o krawędzi  $L = 0,6 \text{ m}$ , zawieszone na linie i całkowicie zanurzone w otwartym zbiorniku z cieczą o gęstości  $1030 \text{ kg/m}^3$ . a) Oblicz wartość wypadkowej siły działającej w dół na górną ścianę sześciangu ze strony cieczy i powietrza, zakładając, że ciśnienie atmosferyczne jest równe  $1 \text{ atm}$ . b) Oblicz wartość wypadkowej siły działającej od dołu na dolną ścianę sześciangu. c) Oblicz naprężenie liny. d) Wyznacz z prawa Archimedesa wartość działającej na ciało siły wyporu. Jaki jest związek między wszystkimi wyznaczonymi w tym zadaniu wielkościami?



Rys. 15.35. Zadanie 26

27. Gdy drewniany klocek pływa w słodkiej wodzie, nad wodą znajduje się jedna trzecia jego objętości. Klocek ten może również pływać w oleju, lecz wtedy nad cieczą znajduje się  $0,1$  jego objętości. Wyznacz gęstość: a) drewna, b) oleju.

28. Mały sterowiec płynie powoli w powietrzu na niewielkiej wysokości, wypełniony — jak zwykle — helem. Jego maksymalna ładowność, odnosząca się do załogi i przewożonego towaru, wynosi  $1280 \text{ kg}$ . Objętość komory z helem wynosi  $5000 \text{ m}^3$ . Gęstość helu jest równa  $0,16 \text{ kg/m}^3$ , a gęstość wodoru wynosi  $0,081 \text{ kg/m}^3$ . O ile więcej towaru mógłby unieść ten sterowiec, gdyby zamiast helu wypełniony był wodorem? Dlaczego lepiej tego nie robić?

29. Pusta w środku kula o promieniu wewnętrznym  $8 \text{ cm}$  i promieniu zewnętrznym  $9 \text{ cm}$  pływa w cieczy o gęstości  $800 \text{ kg/m}^3$ , przy czym jest zanurzona do połowy. a) Ile wynosi masa kuli? b) Ile wynosi gęstość materiału, z którego jest ona wykonana?

www

30. Mniej więcej jedna trzecia ciała osoby pływającej w Morzu Martwym znajduje się nad wodą. Przyjmij, że gęstość ciała ludzkiego jest równa  $0,98 \text{ g/cm}^3$ , i oblicz gęstość wody w Morzu Martwym. Jak myślisz, dlaczego jest ona tak znacznie większa od wartości  $1,0 \text{ g/cm}^3$ ?

31. Kulista powłoka z żelaza pływa w wodzie, będąc w niej niemal całkowicie zanurzona. Jej średnica zewnętrzna wynosi  $60 \text{ cm}$ , a gęstość żelaza jest równa  $7,87 \text{ g/cm}^3$ . Wyznacz średnicę wewnętrzną powłoki.

32. Drewniany klocek ma masę  $3,67 \text{ kg}$  i gęstość równą  $600 \text{ kg/m}^3$ . Chcemy, aby  $0,9$  objętości klocka znajdowało się pod

wodą, gdy będzie on w niej pływał, wobec czego zamierzamy obciążyć go ołowiem. Ile musi wynosić masa potrzebna do tego celu obciążnika ołowianego, jeśli umocujemy go: a) do górnej ścianki klocka, b) do dolnej ścianki klocka? Gęstość ołowiu wynosi  $1,13 \cdot 10^4 \text{ kg/m}^3$ .

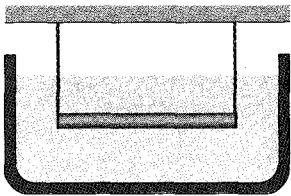
33. Odlew z żelaza, zawierający pewną liczbę zamkniętych komór, ma w powietrzu ciężar równy  $6000 \text{ N}$ , a jego ciężar poworny w wodzie wynosi  $4000 \text{ N}$ . Ile wynosi całkowita objętość zamkniętych komór w tym odlewie? Gęstość żelaza (tzn. próbki nie zawierającej komór wewnętrznych) wynosi  $7,87 \text{ g/cm}^3$ .

34. Jaki błąd względny (wyrażony w procentach) popełniamy przy ważeniu ciała o masie  $m$  i gęstości  $\rho$  na wadze szalkowej, jak na rysunku 5.6, pomijając siłę wyporu, jaka działa na ciało w powietrzu? Gęstość mosiądu, z którego wykonane są odważniki, wynosi  $8,0 \text{ g/cm}^3$ , a gęstość powietrza jest równa  $0,0012 \text{ g/cm}^3$ .

35. a) Ile co najmniej musi wynosić pole powierzchni tafla lodu o grubości  $0,3 \text{ m}$ , pływającej w słodkiej wodzie, aby nie zatonęła po postawieniu na niej samochodu o masie  $1100 \text{ kg}$ ? b) Czy ma znaczenie, w którym miejscu postawimy na taflę samochód?

36. Troje dzieci, każde o ciężarze równym  $356 \text{ N}$ , buduje tratwę, wiążąc ze sobą pnie drewniane o średnicy  $0,3 \text{ m}$  i długości  $1,8 \text{ m}$ . Ile takich pni muszą ze sobą połączyć, aby tratwa utrzymała całą trójkę na słodkiej wodzie? Przyjmij, że gęstość drewna wynosi  $800 \text{ kg/m}^3$ .

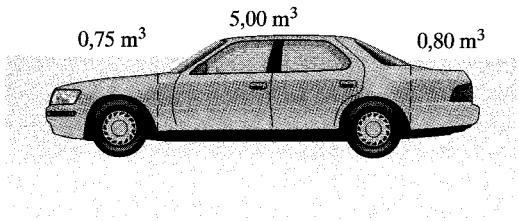
37. Pręt metalowy o długości  $80 \text{ cm}$  i masie  $1,6 \text{ kg}$  ma stały przekrój o polu równym  $6 \text{ cm}^2$ . Gęstość pręta nie jest stała, w związku z czym jego środek masy znajduje się w odległości  $20 \text{ cm}$  od jednego z jego końców. Pręt jest zawieszony poziomo w wodzie na linach zamocowanych na jego końcach (patrz rysunek 15.36). a) Ile wynosi naprężenie liny bliższej środkowi ciężkości pręta? b) Ile wynosi naprężenie liny dalszej od środkowej ciężkości pręta? (Wskazówka: Siła wyporu działa na pręt w taki sposób, jakby była do niego przyłożona w jego środku geometrycznym).



Rys. 15.36. Zadanie 37

38. Całkowita masa samochodu wynosi  $1800 \text{ kg}$ . Objętość powietrza zawartego w kabinie dla pasażerów jest równa  $5,00 \text{ m}^3$ . Objętość silnika i przednich kół wynosi  $0,75 \text{ m}^3$ , a objętość tylnych kół, baku i bagażnika jest równa  $0,80 \text{ m}^3$ . Samochód został zaparkowany na zboczu wznesienia i gdy w pewnej chwili pęka linka hamulca ręcznego, samochód stacza się ze wzgórza i wpada do stawu (patrz rysunek 15.37). a) Początkowo w kabinie dla pasażerów nie ma wody i samochód pływa. Ile wynosi wtedy objętość (w metrach sześciennych) tej części samochodu, która znajduje się w wodzie? b) Z upłykiem czasu woda powoli wcieka do kabiny i samochód zanurza się coraz bardziej. Ile metrów sześciennych wody znajduje się w kabinie, gdy samochód znika pod

powierzchnią wody? Przyjmij, że w bagażniku znajduje się jakiś ciężki ładunek, dzięki czemu samochód pozostaje przez cały czas poziomy, a także, że woda dostaje się tylko do kabiny dla pasażerów.

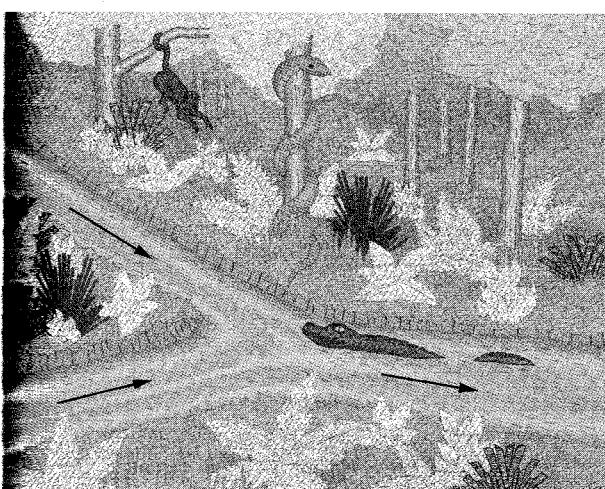


Rys. 15.37. Zadanie 38

## 15.9 Równanie ciągłości

**39.** Wąż ogrodowy o średnicy wewnętrznej równej 1,9 cm jest połączony z nieruchomym zraszacząkiem do trawnika, zawierającym 24 otwory o średnicy 0,13 cm każdy. Woda wpływa do zraszacza z prędkością 0,91 m/s. Ile wynosi prędkość, z jaką woda wypływa przez otwory zraszacza?

**40.** Na rysunku 15.38 pokazano, jak dwa strumienie łączą się ze sobą, tworząc rzekę. Jeden ze strumieni ma szerokość równą 8,2 m i głębokość równą 3,4 m; prędkość wody w tym strumieniu wynosi 2,3 m/s. Drugi strumień ma szerokość równą 6,8 m i głębokość równą 3,2 m; prędkość wody wynosi w nim 2,6 m/s. Rzeka ma szerokość równą 10,5 m, a woda płynie w niej z prędkością wynoszącą 2,9 m/s. Ile wynosi głębokość rzeki?



Rys. 15.38. Zadanie 40

**41.** Z zalanej piwnicy wypompujemy wodę przez wąż o promieniu równym 1 cm, a woda płynie w nim z prędkością równą 5 m/s. Wąż wychodzi z piwnicy przez okno znajdujące się na wysokości 3 m nad powierzchnią wody. Oblicz moc pompy.

**42.** Woda, płynąca początkowo w rurze o średnicy wewnętrznej równej 1,9 cm, wypływa następnie przez trzy rury o średnicy równej 1,3 cm. a) Wiedząc, że strumień objętościowy w trzech węższych rurach wynoszą 26, 19 i 11 l/min, oblicz strumień objętościowy w szerszej rurze. b) Oblicz stosunek prędkości wody w szerszej rurze i w tej rurze węższej, przez którą przepływa 26 litrów wody na minutę.

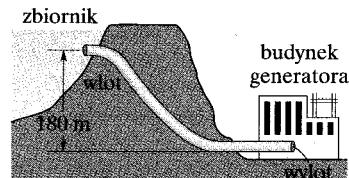
## 15.10 Równanie Bernoulliego

**43.** Woda płynie początkowo z prędkością równą 5 m/s w rurze, której przekrój ma pole równe  $4 \text{ cm}^2$ . Następnie poziom, na którym znajduje się rura, obniża się stopniowo o 10 m, a pole jej przekroju poprzecznego zwiększa się przy tym do wartości  $8 \text{ cm}^2$ . a) Ile wynosi prędkość wody na szerszym końcu rury? b) Ile wynosi ciśnienie wody na szerszym końcu rury, jeśli na jej węższym końcu jest ono równe  $1,5 \cdot 10^5 \text{ Pa}$ ?

**44.** Modele torped testuje się czasem w poziomej rurze z płynącą wodą, podobnie jak modele samolotów bada się w tunelu aerodynamicznym. Wyobraź sobie, że w kołowej rurze o średnicy wewnętrznej równej 25 cm umieszczamy wzduż osi rury model torpedy o średnicy równej 5 cm. Model ten ma być badany w warunkach, gdy woda przepływa wokół niego z prędkością 2,5 m/s. a) Ile musi wobec tego wynosić prędkość wody w tej części rury, w której nie ma torpedy? b) Ile wynosi różnica ciśnień w tej części rury, w której znajduje się model torpedy, i w tej jej części, w której go nie ma?

**45.** Woda jest doprowadzana do piwnicy budynku rurą o średnicy wewnętrznej równej 2,5 cm i płynie w niej z prędkością 0,9 m/s. Ciśnienie w rurze wynosi 170 kPa. Następnie woda dociera rurą o mniejszej średnicy, równej 1,2 cm, na drugie piętro, czyli na poziom wyższy o 7,6 m od poziomu piwnicy. Oblicz: a) prędkość oraz b) ciśnienie wody na drugim piętrze.

**46.** Wlot rury, doprowadzającej wodę ze zbiornika elektrowni wodnej pompowej (rys. 15.39) do budynku generatora, ma pole przekroju poprzecznego równe  $0,74 \text{ m}^2$ , a woda wpływa do niego z prędkością 0,4 m/s. Wylot rury w budynku generatora jest położony o 180 m niżej od wlotu. Rura ma tu mniejszy przekrój i woda wypływa z niej z prędkością równą 9,5 m/s. Ile wynosi różnica ciśnień wody u wlotu do rury i u wylotu z niej, wyrażona w megapascalach?



Rys. 15.39. Zadanie 46

**47.** Zbiornik o dużej powierzchni dna jest napełniony wodą, tak że głębokość wody wynosi  $D = 0,3 \text{ m}$ . Woda wypływa ze zbiornika przez otwór w dnie o polu powierzchni równym  $S = 6,5 \text{ cm}^2$ . a) Oblicz strumień objętościowy wody wypływającej przez ten otwór i wyraź go w metrach sześciennych na sekundę. b) W

jakiej odległości od dna zbiornika pole przekroju poprzecznego strugi wody jest równe połowie pola powierzchni otworu?

**48.** Powietrze opływa górną powierzchnię skrzydła samolotu, o polu  $S$ , z prędkością  $v_g$ , a jego dolną powierzchnię, o takim samym polu — z prędkością  $v_d$ . Wykaż, że w tej uproszczonej sytuacji z równania Bernoulliego wynika, że wartość  $L$  skierowana do góry siły nośnej, działającej na skrzydło samolotu, wynosi

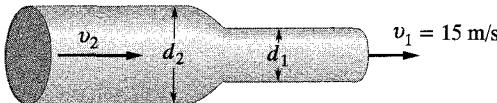
$$L = \frac{1}{2} \rho S (v_g^2 - v_d^2),$$

przy czym  $\rho$  jest gęstością powietrza.

49. Prędkość przepływu powietrza wzdłuż dolnej powierzchni skrzydła samolotu wynosi  $110 \text{ m/s}$ , a różnica ciśnień działających na górną i dolną powierzchnię skrzydła jest równa  $900 \text{ Pa}$ . Oblicz prędkość, z jaką powietrze opływa górną powierzchnię skrzydła. Przyjmij, że gęstość powietrza wynosi  $1,3 \cdot 10^{-3} \text{ g/cm}^3$ , oraz zapoznaj się z zadaniem 48.

50. Dwa zbiorniki, 1 i 2, o dużych otworach w górnych ścianach, zawierają różne cieczy. W ścianie bocznej każdego zbiornika zrobiono otwory na jednakowej głębokości  $h$  względem poziomu cieczy w zbiorniku, przy czym pole powierzchni otworu w zbiorniku 1 jest dwa razy mniejsze od pola powierzchni otworu w zbiorniku 2. Strumień masy cieczy wypływającej z każdego zbiornika jest taki sam. a) Ile wynosi stosunek gęstości tych cieczy  $\rho_1/\rho_2$ ? b) Ile wynosi stosunek strumieni objętościowych cieczy wypływających z obu zbiorników? c) Jak należałoby zmienić wysokość słupa cieczy w drugim zbiorniku, mierzoną od otworu w ścianie bocznej (czy należałoby ją zwiększyć, czy zmniejszyć i o ile), aby strumienie objętościowe cieczy wypływającej z obu zbiorników były jednakowe?

51. Jak pokazano na rysunku 15.40, woda przepływa w prawo przez poziomą rurę, a na jej końcu wychodzi do atmosfery z prędkością równą  $15 \text{ m/s}$ . Średnice rury na lewym i prawym jej końcu wynoszą odpowiednio  $5 \text{ cm}$  i  $3 \text{ cm}$ . a) Jaka objętość wody przepływa z rury do atmosfery w czasie  $10 \text{ min}$ ? Ile wynosi w lewej części rury b) prędkość  $v_2$  i c) nadciśnienie wody?



Rys. 15.40. Zadanie 51

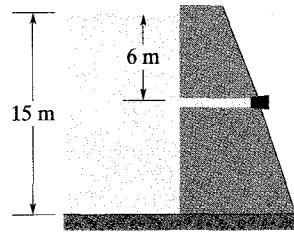
**52.** Beczułka zawiera napój o gęstości  $1 \text{ g/cm}^3$ . W odległości 50 cm od poziomu cieczy, w ścianie beczułki znajduje się kurek, którego otwór ma pole powierzchni równe  $0,25 \text{ cm}^2$ . Ile wynosi prędkość, z jaką wypływa z beczułki napój po otwarciu kurka, jeśli nadciśnienie powietrza nad cieczą jest równe a) zeru, b)  $0,4 \text{ atm}$ ?

53. Tama zamyka zbiornik słodkiej wody o głębokości równej 15 m. Jak pokazano na rysunku 15.41, w tamie wydrążony jest poziomy kanał o średnicy 4 cm, znajdujący się na głębokości

6 m pod powierzchnią wody.

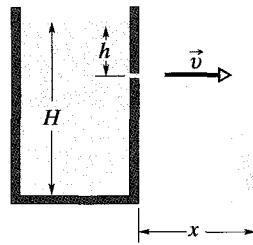
Z drugiej strony tamy kanał

jest zaczopowany. a) Wy-  
znacz wartość siły tarcia  
działającej między czopem  
a ściankami kanału. Wy-  
obraż sobie, że w pewnej  
chwili usuwamy czop zamy-  
kający kanał. b) Ile wynosi  
objętość wody, która wypły-  
nie przez kanał z ciągu 3 go-  
dzin od jego otwarcia?



Rys. 15.41. Zadanie 53

54. Zbiornik napełniono wodą do wysokości  $H$ , a w jednej z jego ścianek wywiercono otwór na głębokości  $h$  pod powierzchnią wody (patrz rysunek 15.42). a) Wykaż, że odległość  $x$  od podstawy zbiornika do punktu, w którym spada na ziemię strumień wody wypływającej przez otwór, jest dana wyrażeniem  $x = 2\sqrt{h(H-h)}$ . b) Czy jest możliwe, aby strumień wody wypływającej z otworu wywierconego na innej głębokości pod powierzchnią wody miał taki sam poziomy zasięg lotu? Jeśli tak, to ile wynosi ta głębokość? c) Na jakiej głębokości należałoby wywiercić otwór w ścianie zbiornika, aby strumień wypływającej przezń wody spa dał na ziemię w największej odległości od podstawy zbiornika?



Rys. 15.42. Zadanie 54

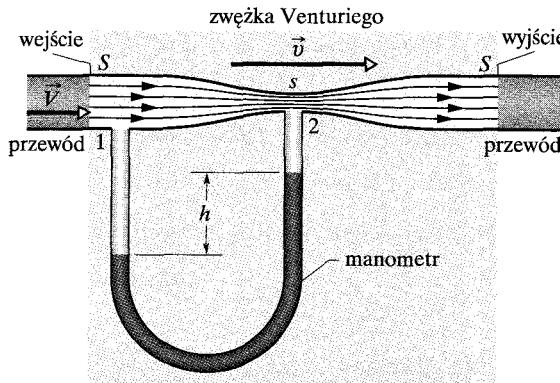
55. Zwężka Venturiego służy do pomiaru prędkości przepływu płynu w przewodzie. Jak pokazano na rysunku 15.43, zwężkę łączy się z przewodem tak, aby stanowiła jego odcinek. Otwory wejściowy i wyjściowy urządzenia mają taki sam przekrój jak przewód, o polu równym  $S$ . Na obu końcach urządzenia prędkość przepływu płynu jest równa  $V$ , a w jego zwężonej części środkowej, o polu przekroju poprzecznego równym  $s$ , wynosi ona  $v$ . Urządzenie zawiera manometr, którego jedno ramię jest dołączone do przewodu na jego szerokim odcinku, a drugie — w miejscu zwężenia. Zmianie prędkości przepływu towarzyszy zmiana ciśnienia w płynie  $\Delta p$ , której miarą jest różnica  $h$  poziomów cieczy w obu ramionach manometru ( $\Delta p$  jest tu różnicą ciśnienia w miejscu zwężenia i w szerokiej części przewodu). a) Zastosuj równanie Bernoulliego i równanie ciągłości w punktach 1 i 2 na rysunku 15.43, aby wykazać, że

$$V = \sqrt{\frac{2s^2\Delta p}{\rho(s^2 - S^2)}},$$

gdzie  $\rho$  jest gęstością płynu. b) Przyjmij, że płynem jest słodka woda, pole przekroju poprzecznego przewodu wynosi  $64 \text{ cm}^2$  w jego szerokiej części oraz  $32 \text{ cm}^2$  w miejscu zwężenia, a ciśnienie jest równe  $55 \text{ kPa}$  w szerokim odcinku przewodu oraz

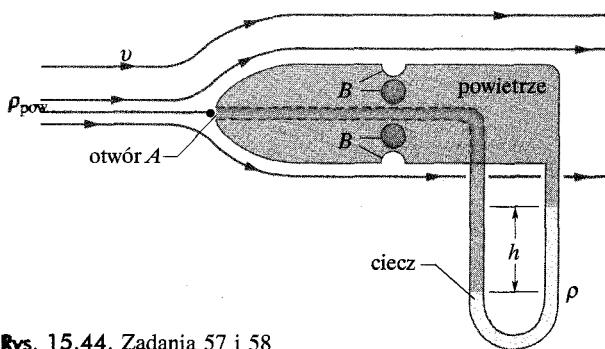
41 kPa w przewężeniu. Ile wynosi strumień objętościowy wody w metrach sześciennych na sekundę?

**56.** Wyobraź sobie, że zwężka Venturiego z zadania 55 i rysunku 15.43 nie zawiera manometru. Przyjmij, że  $S$  jest równe  $5\text{ s}$ , a ciśnienie  $p_1$  w szerokiej części przewodu wynosi 2 atm. Wyznacz prędkości: a)  $V$  — w szerokim odcinku przewodu oraz b)  $v$  — w zwężeniu, dla których ciśnienie  $p_2$  w miejscu zwężenia jest równe zero. c) Wyznacz odpowiadający tej sytuacji strumień objętościowy wody, jeśli średnica szerokiego odcinka przewodu jest równa 5 cm. Zjawisko, które zachodzi w miejscu zwężenia przewodu, gdy  $p_2$  jest bliskie zera, nazywa się kawitacją. W wodzie tworzą się wówczas niewielkie pęcherzyki pary wodnej.



Rys. 15.43. Zadania 55 i 56

**57.** Rurka Pitota (przedstawiona na rysunku 15.44) może służyć do pomiaru prędkości samolotu względem powietrza. Jedną z jej części jest rura zewnętrzna, w której wykonano kilka małych otworów  $B$  (na rysunku widać cztery z nich), przez które może do niej wchodzić powietrze. Rura ta jest połączona z jednym z ramion rurki w kształcie litery U. Przedłużenie drugiego ramienia tej rurki ma na końcu otwór  $A$  znajdujący się z przodu skoku i zwrócony w kierunku lotu samolotu. W punkcie  $A$  powietrze zostaje unieruchomione, tak że  $v_A = 0$ . Prędkość przepływu powietrza w  $B$  można natomiast przyjąć za równą prędkości samolotu względem powietrza  $v$ . a) Wykaż na podstawie równania Bernoulliego, że



Rys. 15.44. Zadania 57 i 58

$$v = \sqrt{\frac{2\rho gh}{\rho_{\text{pow}}}},$$

gdzie  $\rho_{\text{pow}}$  jest gęstością powietrza,  $\rho$  — gęstością cieczy w rurce w kształcie litery U, a  $h$  — różnicą poziomów cieczy w tej rurce.  
b) Załóż, że rurka zawiera alkohol, a różnica jego poziomów  $h$  wynosi 26 cm. Ile wynosi prędkość samolotu względem powietrza? Gęstość powietrza jest równa  $1,03 \text{ kg/m}^3$ , a gęstość alkoholu wynosi  $810 \text{ kg/m}^3$ .

**58.** Rurka Pitota (patrz zadanie 57), w której wyposażony jest samolot, wskazuje na dużej wysokości lotu różnicę ciśnień o wartości 180 Pa. Ile wynosi prędkość samolotu względem powietrza, jeśli gęstość powietrza jest równa  $0,031 \text{ kg/m}^3$ ?

### Zadania dodatkowe

**59.** Dinozaur o nazwie diplodok był olbrzymim zwierzęciem o długiej szyi i długim ogonie, a jego masa była tak wielka, że jego tylne kończyny były bardzo obciążone. Według pewnej hipotezy diplodok miał brodzić w wodzie, zanurzony w niej być może aż po łeb, tak że siła wyporu równoważyła częściowo siłę ciężkości i zmniejszała obciążenie kończyn. W celu sprawdzenia, czy tak mogło być, przyjmij, że gęstość ciała diplodoka wynosiła 0,9 gęstości wody, a jego masa była równa  $1,85 \cdot 10^4 \text{ kg}$  (zgodnie z jej opublikowanym oszacowaniem). a) Oblicz ciężar diplodoka. Oblicz jego ciężar pozorny przy założeniu, że pod wodą znajdował się: b) 0,5, c) 0,8, d) 0,9 jego objętości. Gdyby diplodok był niemal całkowicie zanurzony, tzn. gdyby nad wodę wystawał tylko jego łeb, płuca zwierzęcia znajdowałyby się na głębokości około 8 m pod powierzchnią wody. e) Oblicz, ile wynosiłaby wówczas różnica ciśnienia wody, działającego z zewnątrz na jego płuca, oraz ciśnienia powietrza w płucach zwierzęcia. Aby diplodok mógł brać powietrza w płucach, jego mięśnie oddechowe musiałyby przy zwiększeniu objętości płuc pokonać tę różnicę ciśnień. Zapewne nie udałoby mu się to, gdyby ta różnica ciśnień była większa niż 8 kPa. f) Czy hipoteza, że diplodok brodził w wodzie, wydaje ci się uzasadniona?

**60.** Gdy kaszlesz, wypuszczasz powietrze z dużą prędkością przez tchawicę i dochodzące do niej oskrzela, przy czym usuwany jest nadmiar śluzu zalegającego w drogach oddechowych. Robisz to tak: bierzesz głęboki wdech, zatrzymujesz powietrze w płucach, zamkając głośnię (mały otwór w krtani), po czym zwiększasz ciśnienie powietrza, ściskając płuca, przy czym częściowo zatyczasz tchawicę i oskrzela, aby zwęzić drogi oddechowe, i wreszcie wypuszczasz powietrze, otwierając gwałtownie głośnię. Przyjmij, że strumień objętościowy powietrza w czasie wydechu wynosi  $7 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3/\text{s}$ . Wyznacz prędkość przepływu powietrza przez tchawicę, gdy jej średnica wynosi a) 14 mm, jak przy normalnym oddychaniu, oraz b) 5,2 mm, jak przy kasaniu. Wyraź wynik w jednostkach prędkości dźwięku  $v_{\text{dzw}} = 343 \text{ m/s}$ .

**61.** Załóż, że gęstość twoego ciała jest stała i wynosi 0,95 gęstości wody. a) Jaka część objętości twoego ciała znajduje się nad wodą, gdy pływasz w basenie kąpielowym?

Tak zwany ciekły piasek to płyn tworzący się, gdy woda przechodzi pod ciśnieniem przez piasek, przy czym odpycha ona ziarnka piasku od siebie, tak że przestają być ze sobą związane za pośrednictwem występującego między nimi tarcia. Ciekłe piaski tworzą się na przykład wtedy, gdy woda przepływa pod ziemią ze wzgórza w dolinę przez złoża piasku. b) Jaka część objętości twoego ciała znalazłaby się nad powierzchnią płynu, gdybyś wpadł do dużego zbiornika z ciekłym piaskiem, którego gęstość jest 1,6 razy większa od gęstości wody? c) Czy byłbyś przy tym zanurzony tak głęboko, że nie mógłbyś oddychać? Lepkość ciekłego piasku znacznie się zwiększa, gdy płyn znajduje się w ruchu (pływ o tej właściwości nosi nazwę płynu *tiksotropowego*). Tak więc, im bardziej gwałtownie starasz się z niego wydostać, tym większy opór stawia płyn twoim ruchom. d) Jak mógłbyś się z niego wydostać bez pomocy innych osób?

62. Odkręć kran z wodą nad zlewem z płaskim dnem, tak by na dno padał jednostajny (laminarny) strumień cieczy. Przekonasz się, że woda rozplyna się od punktu spadku na dno w postaci

cienkiej warstwy, po czym w pewnej odległości  $r_s$  od tego punktu grubość warstwy wody nagle się zwiększa. Ta zmiana grubości warstwy, zwana *skokiem hydraulicznym*, daje doskonale widoczny okrąg o środku w punkcie spadku strumienia wody na dno zlewu. Wewnątrz tego okręgu prędkość przepływu wody  $v_1$  jest stała, równa prędkości strugi tuż przed spadkiem na dno.

W pewnym doświadczeniu stwierdzono, że promień strugi wody tuż przed spadkiem na dno wynosi 1,3 mm, objętościowy strumień wody  $R_V$  jest równy  $7,9 \text{ cm}^3/\text{s}$ , promień  $r_s$  wynosi 2 cm, a grubość warstwy wody tuż za skokiem hydraulicznym jest równa 2 mm. a) Oblicz prędkość wody  $v_1$ . b) Wyznacz grubość warstwy wody  $d$  w zależności od odległości radialnej  $r$  od punktu spadku strugi na dno dla  $r < r_s$ . c) Czy grubość warstwy wody rośnie, czy maleje ze wzrostem  $r$ ? d) Ile wynosi ta grubość tuż przed skokiem hydraulicznym? e) Ile wynosi prędkość wody  $v_2$  tuż za skokiem? Ile wynosi gęstość energii kinetycznej wody f) tuż przed i g) tuż za skokiem hydraulicznym? h) Ile wynosi zmiana ciśnienia wody na dno zlewu związana ze skokiem? i) Czy dla linii prądu w obszarze skoku obowiązuje równanie Bernoulliego?

# 16 Drgania

Był 19 września 1985 roku. Fale sejsmiczne wywołane przez trzęsienie ziemi na zachodnim wybrzeżu Meksyku spowodowały ogromne zniszczenia w stolicy kraju — mieście Meksyk — w odległości około 400 km od miejsca, gdzie powstały.

Dlaczego fale sejsmiczne spowodowały tak rozległe zniszczenia w stolicy, natomiast stosunkowo niewielkie po drodze?

Odpowiedź znajdziesz w tym rozdziale.



## 16.1. Drgania

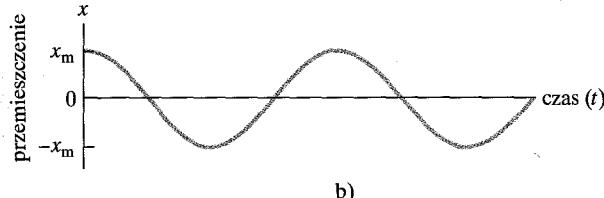
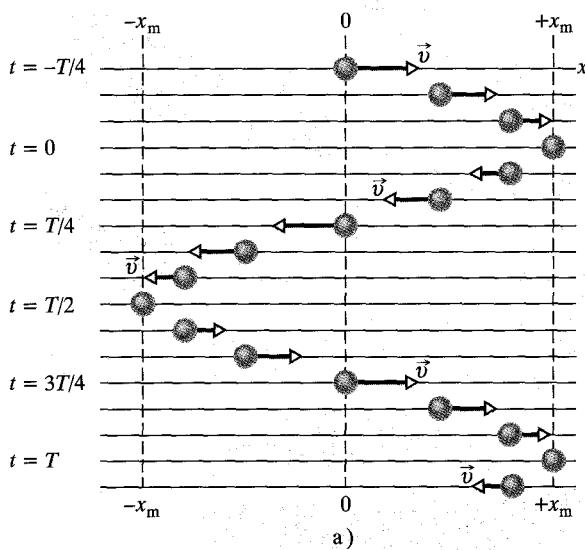
Na każdym kroku spotykamy się z drganiami, czyli powtarzającymi się ruchami. Zetknąłeś się z pewnością z wahającym się żyrandolem, z kołyszącymi się, zakończonymi lóziami, z poruszającymi się tam i z powrotem tłokami w silnikach samochodowych, z drgającymi strunami gitar, bębnami, dzwonami, membranami w słuchawkach telefonicznych i głośnikach, drgającymi kryształami kwarcu w zegarkach. Nieco mniej oczywiste są drgania cząsteczek powietrza, które są źródłem dźwięków, oscylacje atomów w ciele stałym, które są związane z temperaturą, a także przenoszące informacje drgania elektronów w antenach nadajników radiowych i telewizyjnych.

Drgania, jakie występują w realnym świecie, zwykle są *ttłumione* — ruch stopniowo zanika, a na skutek działania sił tarcia energia mechaniczna zamienia się w energię termiczną. Mimo iż nie możemy całkowicie wyeliminować takich strat energii mechanicznej, możemy ją uzupełniać kosztem jakiegoś źródła. Na przykład, jak wiadomo, dzięki odpowiednim ruchom nóg i tułowia możesz rozbijać huśtawkę, podtrzymując lub wzmacniając jej wahania. W ten sposób przekształcasz energię swych mięśni w mechaniczną energię układu drgającego.

## 16.2. Ruch harmoniczny

Na rysunku 16.1a przedstawiono serię „migawkowych zdjęć” prostego układu drgającego, a mianowicie cząstki poruszającej się tam i z powrotem względem początku osi  $x$ . W tym paragrafie ograniczymy się do opisu tego ruchu. Później zastanowimy się, w jaki sposób można taki ruch uzyskać.

Jedną z ważnych własności opisujących ruch drgający jest jego **częstość** (częstotliwość), czyli liczba pełnych drgań (cykli) wykonywanych w ciągu każdej sekundy. Częstość oznaczamy symbolem  $v$ ; jej jednostką w układzie SI jest



Rys. 16.1. a) Szereg „zdjęć migawkowych” (wykonanych w jednakowych odstępach czasu) przedstawiających położenia ciała poruszającego się tam i z powrotem ruchem drgającym wzdłuż osi  $x$  wokół jej początku, w przedziale od  $+x_m$  do  $-x_m$ . Długości strzałek odzwierciedlają prędkość ciała. Ciało ma największą prędkość w początku osi  $x$ , a w punktach  $\pm x_m$  prędkość równą零. Jeżeli początek pomiaru czasu ( $t = 0$ ) przyjmiemy w chwili, gdy ciało znajduje się w punkcie  $+x_m$ , to powróci ono do tego punktu w chwili  $t = T$ , gdzie  $T$  jest okresem ruchu. Ruch jest zatem powtarzalny. b) Wykres zależności położenia  $x$  od czasu dla ruchu przedstawionego na rysunku (a).

herc (w skrócie Hz):

$$1 \text{ herc} = 1 \text{ Hz} = 1 \text{ pełne drganie na sekundę} = 1 \text{ s}^{-1}. \quad (16.1)$$

Z częstotliwością związaną jest **okres ruchu**  $T$ , czyli czas, w jakim wykonywane jest jedno pełne drganie

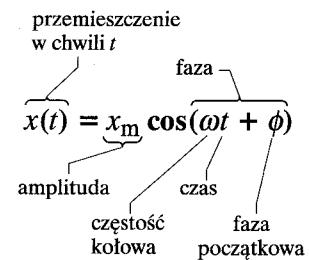
$$T = \frac{1}{\nu}. \quad (16.2)$$

Każdy ruch powtarzający się w regularnych odstępach czasu nazywamy **ruchem okresowym**. Tutaj interesować nas będzie ruch powtarzający się w pewien szczególny sposób — a mianowicie tak, jak na rysunku 16.1. W takim ruchu zależność przemieszczenia  $x$  ciała względem początku układu współrzędnych od czasu opisana jest wzorem

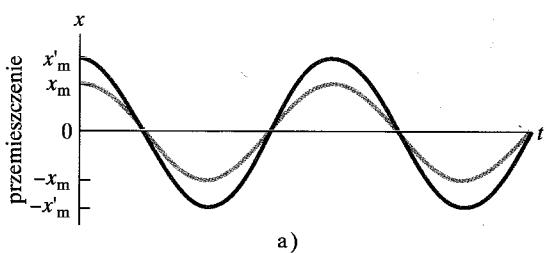
$$x(t) = x_m \cos(\omega t + \phi) \quad (\text{przemieszczenie}), \quad (16.3)$$

gdzie  $x_m, \omega, \phi$  — stałe. Taki ruch nazywamy **ruchem harmonicznym** — jest to ruch okresowy opisywany sinusoidalną funkcją czasu. Zależność (16.3), w której jako funkcji sinusoidalnej użyto funkcji cosinus, przedstawiono graficznie na rysunku 16.1b. (Możesz otrzymać ten wykres, obracając rysunek 16.1a o  $90^\circ$  przeciwne do ruchu wskazówek zegara i prowadząc krzywą przez kolejne położenia ciała). Poszczególne wielkości określające kształt wykresu oraz ich nazwy przedstawiono na rysunku 16.2. Zajmiemy się teraz zdefiniowaniem tych wielkości.

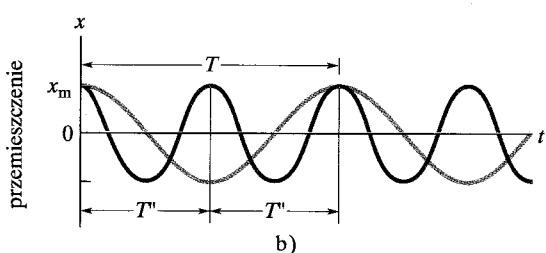
Wielkość  $x_m$  nazywamy **amplitudą drgań**. Jest to dodatnia stała, której wartość zależy od tego, jak silnie wywołano drgania. Indeks  $m$  pochodzi od słowa **maksimum**, gdyż amplituda jest wartością bezwzględną maksymalnego przemieszczenia ciała w obu kierunkach. Funkcja cosinus we wzorze (16.3) zmienia się w granicach  $\pm 1$ , zatem przemieszczenie  $x(t)$  zmienia się w przedziale  $\pm x_m$ .



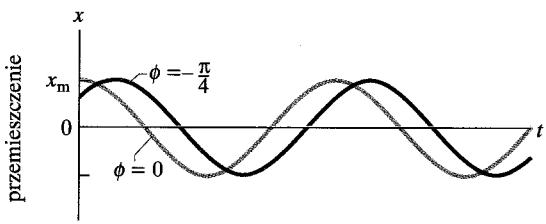
Rys. 16.2. Zestawienie wielkości występujących we wzorze (16.3) opisującym ruch harmoniczny



a)



b)



c)

Rys. 16.3. W każdym z przypadków niebieską krzywą otrzymano ze wzoru (16.3) dla  $\phi = 0$ . a) Czerwona krzywa różni się od niebieskiej **jedynie** tym, że jej amplituda  $x'_m$  jest większa (maksima dla krzywej czerwonej są wyższe, a minima niższe niż dla krzywej niebieskiej). b) Czerwona krzywa różni się od niebieskiej **jedynie** tym, że jej okres wynosi  $T' = T/2$  (minima i maksima krzywej czerwonej są zagęszczone w stosunku do krzywej niebieskiej). c) Czerwona krzywa różni się od niebieskiej **jedynie** tym, że jej faza początkowa wynosi  $\phi = -\pi/4$ , a nie zero (ujemna wartość  $\phi$  powoduje przesunięcie czerwonej krzywej w prawo)

Zależna od czasu wielkość ( $\omega t + \phi$ ) we wzorze (16.3) nosi nazwę **fazy ruchu**, przy czym stała  $\phi$  nazywana jest **fazą początkową**. Wartość  $\phi$  zależy od położenia i prędkości ciała w chwili  $t = 0$ . Dla przemieszczenia  $x(t)$  wykreślonego na rysunku 16.3a faza początkowa  $\phi$  równa jest zeru.

Aby poznać znaczenie stałej  $\omega$ , nazywanej **częstością kołową (kątową)** ruchu, zauważmy, że przemieszczenie  $x(t)$  musi osiągnąć swą początkową wartość po czasie równym jednemu okresowi drgań  $T$ ; tak więc  $x(t)$  musi być równe  $x(t + T)$  dla każdego  $t$ . Dla uproszczenia rozważań podstawmy  $\phi = 0$  do wzoru (16.3). Możemy wówczas zapisać

$$x_m \cos \omega t = x_m \cos \omega(t + T). \quad (16.4)$$

Wartości funkcji cosinus będą ponownie takie same, gdy jej argument (faza) wzrośnie o  $2\pi$  radianów, zatem z równania (16.4) otrzymujemy

$$\omega(t + T) = \omega t + 2\pi,$$

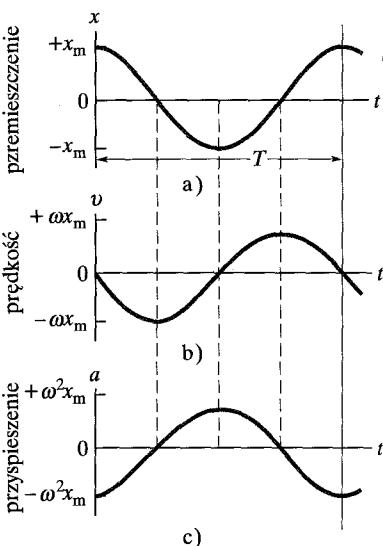
czyli

$$\omega T = 2\pi.$$

Tak więc, korzystając z wyrażenia (16.2), otrzymaliśmy wzór na częstotliwość kołową

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi\nu. \quad (16.5)$$

Jednostką częstotliwości kołowej w układzie SI jest radian na sekundę. (Faza  $\phi$  musi być oczywiście też mierzona w radianach). Na rysunku 16.3 porównano dwa ruchy harmoniczne różniące się kolejno amplitudą, okresem (czyli również częstotliwością i częstotliwością kołową) oraz fazą początkową.



**SPRAWDZIAN 1:** Ciało wykonujące drgania harmoniczne o okresie  $T$  (takie jak drgania na rysunku 16.1) w chwili  $t = 0$  znajduje się w punkcie  $-x_m$ . Gdzie znajdzie się to ciało kolejno w chwilach: a)  $t = 2T$ , b)  $t = 3,5T$  i c)  $t = 5,25T$  — w punkcie  $-x_m$ , w punkcie  $+x_m$ , w punkcie  $x = 0$ , w przedziale od  $-x_m$  do 0 czy też w przedziale od 0 do  $+x_m$ ?

### Prędkość w ruchu harmonicznym

Różniczkując wzór (16.3), otrzymujemy wyrażenie na prędkość ciała wykonującego ruch harmoniczny:

$$v(t) = \frac{dx(t)}{dt} = \frac{d}{dt}[x_m \cos(\omega t + \phi)],$$

czyli

$$v(t) = -\omega x_m \sin(\omega t + \phi) \quad (\text{prędkość}). \quad (16.6)$$

**Rys. 16.4.** a) Przemieszczenie  $x(t)$  ciała wykonującego drgania harmoniczne z fazą początkową  $\phi$  równą zeru. Jeden pełny cykl drgań wykonywany jest w ciągu okresu  $T$ . b) Prędkość ciała  $v(t)$ . c) Przyspieszenie ciała  $a(t)$

Na rysunku 16.4a przedstawiono zależność (16.3) dla  $\phi = 0$ , a na rysunku 16.4b — zależność (16.6) również dla  $\phi = 0$ . Analogicznie do amplitudy  $x_m$  w wyrażeniu (16.3) dodatnia wielkość  $\omega x_m$  w wyrażeniu (16.6) ma znaczenie amplitudy zmian prędkości  $v_m$ . Jak widać z rysunku 16.4b, prędkość drgającego ciała zmienia się w zakresie  $\pm v_m = \pm \omega x_m$ . Zauważmy również, że krzywa  $v(t)$

jest przesunięta (w lewo) względem krzywej  $x(t)$  o ćwierć okresu; w chwili gdy przemieszczenie jest największe (tj. gdy  $x(t) = x_m$ ), wartość prędkości jest najmniejsza (tzn.  $v(t) = 0$ ), gdy zaś wartość przemieszczenia jest najmniejsza (czyli równa zeru), prędkość osiąga maksymalną wartość ( $v_m = \pm\omega x_m$ ).

## Przyspieszenie w ruchu harmonicznym

Znając prędkość  $v(t)$  w ruchu harmonicznym i wykonując powtórnie różniczkowanie, możemy otrzymać wyrażenie na przyspieszenie drgającego ciała. Ze wzoru (16.6) otrzymujemy zatem

$$a(t) = \frac{dv(t)}{dt} = \frac{d}{dt}[-\omega x_m \sin(\omega t + \phi)],$$

czyli

$$a(t) = -\omega^2 x_m \cos(\omega t + \phi) \quad (\text{przyspieszenie}). \quad (16.7)$$

Na rysunku 16.4c wykreślono zależność (16.7) dla przypadku  $\phi = 0$ . Dodatnia wielkość  $\omega^2 x_m$  w wyrażeniu (16.7) ma znaczenie amplitudy zmian przyspieszenia  $a_m$ ; jak widać na rysunku 16.4c, przyspieszenie drgającego ciała zmienia się w zakresie  $\pm a_m = \pm \omega^2 x_m$ . Zauważmy również, że krzywa  $a(t)$  jest przesunięta o  $T/4$  (w lewo) w stosunku do krzywej  $v(t)$ .

Łącząc wyrażenia (16.3) i (16.7), otrzymujemy równanie ruchu harmonicznego

$$a(t) = -\omega^2 x(t). \quad (16.8)$$

Wynika z niego, że

► W ruchu harmonicznym przyspieszenie jest proporcjonalne do przemieszczenia, ale ma przeciwny znak, przy czym łączący obie wielkości współczynnik proporcjonalności równy jest kwadratowi częstości kołowej.

Tak więc, jak widać z rysunku 16.4, w chwili gdy przemieszczenie ma największą wartość dodatnią, przyspieszenie osiąga największą wartość ujemną i odwrotnie. Gdy przemieszczenie jest równe zero, przyspieszenie również ma wartość zero.

## Sztuka rozwiązywania zadań

### Poradka 1: Faza początkowa

Rozważmy wpływ fazy początkowej  $\phi$  na postać wykresu  $x(t)$ . Gdy  $\phi = 0$ , wykres zależności  $x(t)$ , podobnie jak na rysunku 16.4a, ma postać cosinusoidy. Wzrost  $\phi$  powoduje przesuwanie się krzywej w lewo wzdłuż osi  $t$ . Zmniejszenie fazy  $\phi$  spowoduje z kolei przesunięcie krzywej w prawo, jak na rysunku 16.3c, na którym przedstawiono wykres dla  $\phi = -\pi/4$ .

O dwóch przedstawionych na wykresach ruchach harmonicznych mających różne fazy początkowe, mówimy, że jeden jest przesunięty w fazie względem drugiego lub nie jest zgodny w fa-

zie z drugim. Na przykład dla krzywych przedstawionych na rysunku 16.3c przesunięcie fazowe wynosi  $\pi/4$  radianów.

Ponieważ ruch harmoniczny powtarza się po każdym okresie  $T$ , a funkcja cosinus — po każdym  $2\pi$  radianów, każdy okres  $T$  odpowiada przesunięciu fazowemu o  $2\pi$  radianów. Na rysunku 16.4 wielkość  $x(t)$  jest przesunięta w fazie względem  $v(t)$  o ćwierć okresu w prawo, tj. o  $-\pi/2$  radianów, a względem  $a(t)$  o pół okresu w prawo, czyli o  $-\pi$  radianów. Przesunięcie fazowe o  $2\pi$  radianów powoduje, że krzywa ruchu harmonicznego pokrywa się ze sobą, czyli wygląda na nie zmienioną.

### 16.3. Siła w ruchu harmonicznym

Skoro już znamy zależność przyspieszenia ciała od czasu, możemy — korzystając z drugiej zasady dynamiki Newtona — zbadać, jaką siłę musi działać na to ciało, aby nadać mu takie przyspieszenie. Podstawiając wyrażenie (16.8) do drugiej zasady dynamiki, otrzymujemy

$$F = ma = -(m\omega^2)x. \quad (16.9)$$

Z taką zależnością — gdzie siła jest proporcjonalna do przemieszczenia, ale ma przeciwny znak — już się spotkaliśmy. Taką postać ma prawo Hooke'a

$$F = -kx, \quad (16.10)$$

przy czym  $k$  jest stałą sprężystości, wobec tego

$$k = m\omega^2. \quad (16.11)$$

W istocie możemy przyjąć równanie (16.10) jako inną definicję ruchu harmonicznego. Mówiąc o nim, że:

➤ Ruch harmoniczny jest to ruch, jaki wykonuje ciało o masie  $m$ , na które działa siła proporcjonalna do przemieszczenia, ale o przeciwnym znaku.

Przedstawiony na rysunku 16.5 układ klocków–sprężyna tworzy liniowy oscylator harmoniczny (w skrócie oscylator liniowy), przy czym słowo „liniowy” wskazuje, iż siła  $F$  jest proporcjonalna do  $x$ , a nie do jakiejś innej potęgi  $x$ . Z równania (16.11), wiążącego częstotliwość kołową  $\omega$  ruchu harmonicznego klocka z jego masą  $m$  i stałą sprężystością  $k$ , otrzymujemy

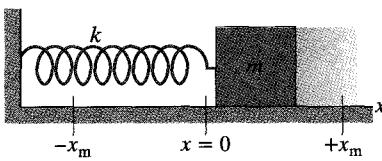
$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (\text{częstość kołowa}). \quad (16.12)$$

Podstawiając wzór (16.12) do (16.5), otrzymujemy wyrażenie na okres drgań oscylatora liniowego przedstawionego na rysunku 16.5

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} \quad (\text{okres}). \quad (16.13)$$

Z równań (16.12) i (16.13) widzimy, że duża częstotliwość kołowa (czyli mały okres) występuje w przypadku sztywnej sprężyny (duże  $k$ ) i lekkiego klocka (małe  $m$ ).

Każdy układ drgający, czy to oscylator liniowy z rysunku 16.5, trampolina, czy też struna skrzypiec, ma pewną „sprężystość” oraz pewną „bezwładność”, czyli masę, dzięki czemu przypomina oscylator liniowy. W oscylatorze liniowym, który przedstawiono na rysunku 16.5, za te dwie cechy odpowiedzialne są inne części układu. Sprężystość jest cechą sprężyny, o której zakładamy, że jest pozbawiona masy, a bezwładność — klocka, o którym z kolei zakładamy, że jest sztywny. Natomiast w przypadku struny skrzypiec te dwie cechy, jak zobaczymy w rozdziale 17, występują w samej strunie.



Rys. 16.5. Liniowy oscylator harmoniczny. Klocki poruszają się bez tarcia po poziomej powierzchni. Podobnie jak ciało na rysunku 16.2, klocki po odcięciu gnięciu i puszczeniu swobodnie wykonują ruch harmoniczny. Jego przemieszczenie opisuje wzór (16.3)

**SPRAWDZIAN 2:** Która z poniższych zależności między działającą na ciało siłą  $F$  a położeniem  $x$  ciała opisuje ruch harmoniczny: a)  $F = -5x$ , b)  $F = -400x^2$ , c)  $F = 10x$ , d)  $F = 3x^2$ ?

## Przykład 16.1

Klocek o masie  $m = 680 \text{ g}$  umocowany jest na sprężynie o stałej sprężystości  $k = 65 \text{ N/m}$  i znajduje się na powierzchni, po której może się poruszać bez tarcia. Klocek odciągnięto na odległość  $x = 11 \text{ cm}$  od jego położenia równowagi, znajdującego się w punkcie  $x = 0$ , a następnie puszczone swobodnie w chwili  $t = 0$ .

a) Wyznacz częstotliwość kołową, częstotliwość i okres drgań klocka.

### ROZWIĄZANIE:

Układ klocek-sprzęzyna tworzy oscylator liniowy, w którym klocek wykonuje drgania harmoniczne. Zatem częstotliwość kołowa dana jest wzorem (16.12)

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{65 \text{ N/m}}{0,68 \text{ kg}}} = 9,78 \text{ rad/s} \approx 9,8 \text{ rad/s}. \quad (\text{odpowiedź})$$

Częstotliwość dana jest równaniem (16.5), zatem

$$v = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{9,78 \text{ rad/s}}{2\pi \text{ rad}} = 1,56 \text{ Hz} \approx 1,6 \text{ Hz}. \quad (\text{odpowiedź})$$

Z kolei okres drgań spełnia zależność (16.2), zatem

$$T = \frac{1}{v} = \frac{1}{1,56 \text{ Hz}} = 0,64 \text{ s} = 640 \text{ ms}. \quad (\text{odpowiedź})$$

b) Ile wynosi amplituda drgań?

### ROZWIĄZANIE:

W przypadku braku tarcia energia mechaniczna układu klocek-sprzęzyna pozostaje zachowana. Klocek został puszczyony swobodnie w odległości 11 cm od swojego położenia równowagi przy zerowej energii kinetycznej oraz maksymalnej energii potencjalnej sprężystości układu. Zatem klocek będzie miał energię kinetyczną równą zeru ilekroć znajdzie się w odległości 11 cm od położenia równowagi, co oznacza, iż nigdy nie znajdzie się w większej odległości niż 11 cm od tego położenia. Maksymalne przemieszczenie klocka równe jest 11 cm,

$$x_m = 11 \text{ cm}. \quad (\text{odpowiedź})$$

c) Wyznacz maksymalną prędkość drgającego klocka i określ, w którym punkcie zostaje osiągnięta.

### ROZWIĄZANIE:

Maksymalna prędkość  $v_m$  jest równa  $\omega x_m$  w wyrażeniu (16.6), czyli

$$v_m = \omega x_m = (9,78 \text{ rad/s})(0,11 \text{ m}) = 1,1 \text{ m/s}. \quad (\text{odpowiedź})$$

Maksymalna prędkość zostaje osiągnięta, gdy klocek przechodzi przez położenie równowagi. Porównując rysunki 16.4a i 16.4b, zobaczymy, że prędkość osiąga maksimum ilekroć  $x = 0$ .

d) Ile wynosi maksymalna wartość przyspieszenia klocka  $a_m$ ?

### ROZWIĄZANIE:

Maksymalna wartość  $a_m$  równa jest  $\omega^2 x_m$  w wyrażeniu (16.7), czyli

$$a_m = \omega^2 x_m = (9,78 \text{ rad/s})^2 (0,11 \text{ m}) \approx 11 \text{ m/s}^2. \quad (\text{odpowiedź})$$

Przyspieszenie osiąga maksimum, gdy klocek znajduje się na końcach swojego toru. W tych punktach siła działająca na klocek ma największą wartość. Porównując rysunki 16.4a i 16.4c, zobaczymy, że wartości przemieszczenia i przyspieszenia osiągają maksima jednocześnie.

e) Wyznacz fazę początkową  $\phi$  dla rozważanych drgań.

### ROZWIĄZANIE:

Wyrażenie (16.3) opisuje zależność położenia klocka od czasu. Jak wiemy, w chwili  $t = 0$  klocek znajduje się w punkcie  $x = x_m$ . Podstawiając te warunki początkowe do równania (16.3) i dzieląc przez  $x_m$ , otrzymujemy

$$1 = \cos \phi. \quad (16.14)$$

Biorąc funkcję arccos od jedności, otrzymujemy

$$\phi = 0 \text{ rad}. \quad (\text{odpowiedź})$$

(Każdy kąt będący całkowitą wielokrotnością  $2\pi$  rad również spełnia równanie (16.14); tutaj wybraliśmy najmniejszą wartość).

f) Wyznacz zależność przemieszczenia  $x(t)$  od czasu w układzie klocek-sprzęzyna.

### ROZWIĄZANIE:

W ogólnej postaci  $x(t)$  dane jest wzorem (16.3). Podstawiając znane wielkości do tego równania, otrzymujemy

$$\begin{aligned} x(t) &= x_m \cos(\omega t + \phi) = (0,11 \text{ m}) \cos[(9,8 \text{ rad/s})t + 0] \\ &= 0,11 \cos(9,8t), \end{aligned} \quad (\text{odpowiedź})$$

gdzie  $x$  wyrażone jest w metrach, a  $t$  — w sekundach.

## Przykład 16.2

W chwili  $t = 0$  położenie  $x(0)$  klocka w oscylatorze liniowym z rysunku 16.5 wynosi  $-8,5$  cm. (Symbol  $x(0)$  czytamy „ $x$  w chwili zero”). Prędkość klocka  $v(0)$  w tym momencie wynosi  $-0,92$  m/s, a jego przyspieszenie  $a(0)$  jest równe  $+47$  m/s $^2$ .

a) Wyznacz częstotliwość kołową  $\omega$  drgań tego oscylatora.

**ROZWIĄZANIE:**

○ Położenie, prędkość i przyspieszenie klocka poruszającego się ruchem harmonicznym opisane są odpowiednio wyrażeniami (16.3), (16.6) i (16.7), przy czym każde z nich zawiera  $\omega$ . Podstawmy do wszystkich równań  $t = 0$ , aby sprawdzić, czy któreś z nich będzie można rozwiązać ze względu na  $\omega$ . Otrzymujemy

$$x(0) = x_m \cos \phi, \quad (16.15)$$

$$v(0) = -\omega x_m \sin \phi \quad (16.16)$$

oraz

$$a(0) = -\omega^2 x_m \cos \phi. \quad (16.17)$$

W równaniu (16.15) częstotliwość kołowa  $\omega$  nie występuje. W równaniach (16.16) i (16.17) znamy wartości lewych stron, ale wartości  $x_m$  i  $\phi$  są nieznane. Jednakże dzieląc stronami równania (16.15) i (16.17), eliminujemy obie wielkości i otrzymujemy rozwiązanie

$$\omega = \sqrt{-\frac{a(0)}{x(0)}} = \sqrt{-\frac{47 \text{ m/s}^2}{-0,085 \text{ m}}} = 23,5 \text{ rad/s. (odpowiedź)}$$

b) Wyznacz fazę początkową  $\phi$  i amplitudę  $x_m$ .

**ROZWIĄZANIE:**

Analogicznie jak w punkcie (a) skorzystamy z równań (16.15)–(16.17). Znamy już wartość  $\omega$ , a poszukujemy  $\phi$  i  $x_m$ . Jeżeli podzielimy stronami równanie (16.16) przez (16.15), otrzymamy

$$\frac{v(0)}{x(0)} = \frac{-\omega x_m \sin \phi}{x_m \cos \phi} = -\omega \tan \phi.$$

Zatem

$$\tan \phi = -\frac{v(0)}{\omega x(0)} = -\frac{-0,92 \text{ m/s}}{(23,5 \text{ rad/s})(-0,085 \text{ m})} = -0,461.$$

To równanie ma dwa rozwiązania:

$$\phi = -25^\circ \quad \text{oraz} \quad \phi = 180^\circ + (-25^\circ) = 155^\circ.$$

(Kalkulator podaje jedynie pierwsze rozwiązanie).

○ Wyboru prawidłowego rozwiązania dokonujemy, obliczając dla obu wartości  $\phi$  amplitudę  $x_m$ . Dla  $\phi = -25^\circ$  z równania (16.15) otrzymujemy

$$x_m = \frac{x(0)}{\cos \phi} = \frac{-0,085 \text{ m}}{\cos(-25^\circ)} = -0,094.$$

Dla  $\phi = 155^\circ$  natomiast otrzymujemy  $x_m = 0,094$  m. Ponieważ amplituda w ruchu harmonicznym musi być stałą dodatnią, poprawne wartości fazy początkowej i amplitudy to

$$\phi = 155^\circ \quad \text{oraz} \quad x_m = 0,094 \text{ m} = 9,4 \text{ cm. (odpowiedź)}$$

### Sztuka rozwiązywania zadań

#### Porad 2: Jak wykryć ruch harmoniczny

W liniowym ruchu harmonicznym przyspieszenie  $a$  i przemieszczenie  $x$  układu wiążą ze sobą zależność typu

$$a = -(dodatnia \text{ stała}) \cdot x,$$

która mówi, że przyspieszenie jest proporcjonalne do odchylenia od położenia równowagi, ale ma przeciwny znak. Gdy tylko znajdziesz taką zależność dla układu drgającego, możesz natychmiast na podstawie wyrażenia (16.8) utożsamić dodatnią stałą z wielkością  $\omega^2$  i w ten sposób szybko uzyskać wzór na częstotliwość kołową ruchu. Korzystając ze wzoru (16.5), możesz następnie określić okres  $T$  i częstotliwość  $\omega$ .

W niektórych zadaniach otrzymasz wyrażenie opisujące zależność siły  $F$  od przesunięcia  $x$ . Gdy mamy do czynienia z liniowym ruchem harmonicznym, siłę i przemieszczenie układu wiążą ze sobą zależność typu

$$F = -(dodatnia \text{ stała}) \cdot x,$$

która mówi, że siła jest proporcjonalna do przemieszczenia, ale ma przeciwny znak. Gdy tylko znajdziesz taką zależność dla układu drgającego, możesz natychmiast porównać ją ze wzorem (16.10) i utożsamić dodatnią stałą z wielkością  $k$ . Jeżeli znasz masę w danym układzie, możesz — posługując się wzorami (16.12), (16.13) i (16.5) — wyznaczyć częstotliwość kołową  $\omega$ , okres  $T$  i częstotliwość  $v$ .

## 16.4. Energia w ruchu harmonicznym

Jak wiemy z rozdziału 8, energia oscylatora liniowego zmienia się wciąż z energią kinetyczną i z potencjalną, i z powrotem, podczas gdy ich suma — energia mechaniczna  $E$  oscylatora — pozostaje stała. Zanalizujmy to ilościowo.

Energia potencjalna oscylatora przedstawionego na rysunku 16.5 w całości związana jest ze sprężyną. Jej wartość zależy od stopnia rozciągnięcia lub ścisknięcia sprężyny — czyli od  $x(t)$ . Korzystając z zależności (8.11) i (16.3), otrzymujemy

$$E_p(t) = \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}kx_m^2 \cos^2(\omega t + \phi). \quad (16.18)$$

Pamiętajmy, że funkcja zapisana (jak w powyższym wzorze) w postaci  $\cos^2 A$  oznacza  $(\cos A)^2$  i *nie* jest tym samym co zapis  $\cos A^2$ , który oznacza  $\cos(A^2)$ .

Energia kinetyczna układu z rysunku 16.5 w całości związana jest z klockiem. Jej wartość zależy od tego, jak szybko porusza się klocek — czyli od  $v(t)$ . Korzystając z zależności (16.6), otrzymujemy

$$E_k(t) = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\omega^2 x_m^2 \sin^2(\omega t + \phi). \quad (16.19)$$

Jeżeli skorzystamy z zależności (16.12) i podstawimy  $k/m$  zamiast  $\omega^2$ , równanie (16.19) przybierze postać

$$E_k(t) = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}kx_m^2 \sin^2(\omega t + \phi). \quad (16.20)$$

Sumując wyrażenia (16.18) i (16.20), otrzymujemy energię mechaniczną

$$\begin{aligned} E = E_p + E_k &= \frac{1}{2}kx_m^2 \cos^2(\omega t + \phi) + \frac{1}{2}kx_m^2 \sin^2(\omega t + \phi) \\ &= \frac{1}{2}kx_m^2 [\cos^2(\omega t + \phi) + \sin^2(\omega t + \phi)]. \end{aligned}$$

Dla dowolnego kąta  $\alpha$

$$\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1.$$

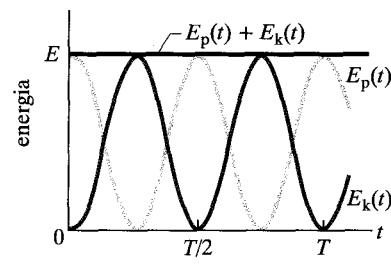
Tak więc wyrażenie zawarte w nawiasach kwadratowych równe jest jedności i mamy

$$E = E_p + E_k = \frac{1}{2}kx_m^2. \quad (16.21)$$

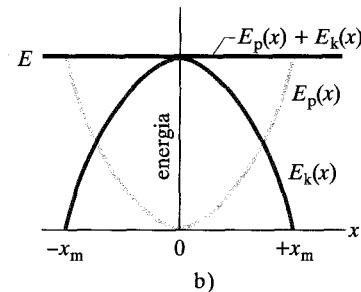
Energia mechaniczna oscylatora liniowego rzeczywiście jest stała i nie zależy od czasu. Na rysunku 16.6a przedstawiono zależności energii potencjalnej i energii kinetycznej oscylatora liniowego od czasu  $t$ , a na rysunku 16.6b — od przemieszczenia  $x$ .

Rozumiemy teraz, jaka jest rola sprężystości i bezwładności układu drgającego. Ze sprężystością związana jest energia potencjalna układu, a z bezwładnością — jego energia kinetyczna.

**SPRAWDZIAN 3:** Gdy klocek w układzie przedstawionym na rysunku 16.5 znajduje się w punkcie  $x = 2$  cm, jego energia kinetyczna wynosi 3 J, a energia potencjalna sprężystości sprężyny równa jest 2 J. a) Wyznacz energię kinetyczną klocka w punkcie  $x = 0$ . Wyznacz energię potencjalną sprężystości układu, gdy klocek znajduje się b) w punkcie  $x = -2$  cm oraz c) w punkcie  $x = -x_m$ .



a)



b)

Rys. 16.6. a) Energia potencjalna  $E_p(t)$ , energia kinetyczna  $E_k(t)$  oraz energia mechaniczna  $E$  liniowego oscylatora harmonicznego jako funkcja czasu  $t$ . Za uważmy, że wszystkie rodzaje energii są dodatnie, przy czym energia potencjalna i energia kinetyczna mają dwa maksima w ciągu każdego okresu. b) Energia potencjalna  $E_p(x)$ , energia kinetyczna  $E_k(x)$  oraz energia mechaniczna  $E$  liniowego oscylatora harmonicznego o amplitudzie  $x_m$  jako funkcja położenia  $x$ . Dla  $x = 0$  mamy do czynienia tylko z energią kinetyczną, a dla  $x = \pm x_m$  — tylko z energią potencjalną

## Przykład 16.3

a) Wyznacz energię mechaniczną  $E$  oscylatora liniowego z przykładu 16.1 (warunki początkowe: położenie klocka  $x = 11$  cm, prędkość  $v = 0$ ; stała sprężystości  $k$  równa jest 65 N/m).

### ROZWIĄZANIE:

**O** Energia mechaniczna  $E$  (suma energii kinetycznej  $E_k = mv^2/2$  klocka i energii potencjalnej  $E_p = kx^2/2$  sprężyny) jest stała podczas ruchu oscylatora. Zatem energię  $E$  możemy wyznaczyć w dowolnym punkcie. Ponieważ mamy dane warunki początkowe dla oscylatora:  $x = 11$  cm i  $v = 0$ , wyznaczmy dla nich energię  $E$ . Otrzymujemy

$$E = E_k + E_p = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2 = 0 + \frac{1}{2}(65 \text{ N/m})(0,11 \text{ m})^2 \\ = 0,393 \text{ J} \approx 0,39 \text{ J.} \quad (\text{odpowiedź})$$

b) Wyznacz energię potencjalną  $E_p$  i energię kinetyczną  $E_k$  oscylatora, gdy klocek znajduje się w punkcie  $x = x_m/2$  oraz gdy znajduje się w punkcie  $x = -x_m/2$ .

### ROZWIĄZANIE:

**O** Znając położenie klocka, możemy łatwo wyznaczyć energię potencjalną sprężyny  $E_p = kx^2/2$ . Dla  $x = x_m/2$  mamy

$$E_p = \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}k\left(\frac{1}{2}x_m\right)^2 = \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{4}\right)kx_m^2.$$

Możemy podstawić do tego wzoru wartości  $k$  i  $x_m$  lub **O** skorzystać z tego, że całkowita energia mechaniczna, którą obliczyliśmy w części (a), wynosi  $kx_m^2/2$ . Otrzymujemy w ten sposób

$$E_p = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}kx_m^2\right) \\ = \frac{1}{4}E = \frac{1}{4}(0,393 \text{ J}) = 0,098 \text{ J.} \quad (\text{odpowiedź})$$

Podobnie jak w części (a) skorzystamy ze wzoru  $E = E_p + E_k$  i otrzymamy

$$E_k = E - E_p = 0,393 \text{ J} - 0,098 \text{ J} \approx 0,3 \text{ J.} \quad (\text{odpowiedź})$$

Powtarzając te obliczenia dla  $x = -x_m/2$ , otrzymamy taki sam wynik — zgodnie z symetrią rysunku 16.6b względem prostej  $x = 0$ .

## 16.5. Wahadło torsyjne

Na rysunku 16.7 przedstawiono **wahadło torsyjne** (skrętne). Jest to też oscylator harmoniczny, w którym jednak sprężystość nie jest związana ze ściskaniem i rozciąganiem sprężyny, lecz ze *skręcaniem* zamocowanego na jednym końcu cienkiego pręta.

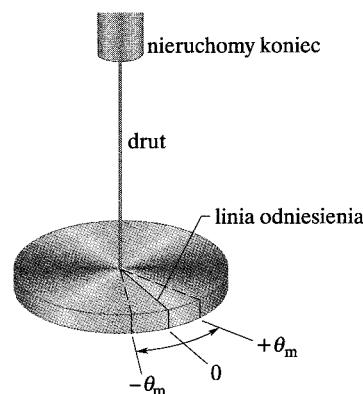
Jeżeli obróciśmy zawieszony na drucie krążek z rysunku 16.7 o pewien kąt  $\theta$  w stosunku do położenia spoczynkowego (w którym linia odniesienia ma położenie  $\theta = 0$ ) i puścimy swobodnie, zacznie on drgać wokół położenia spoczynkowego, wykonując **ruch harmoniczny**. Obrót krążka o kąt  $\theta$  w dowolnym kierunku powoduje powstanie momentu siły przywracającego stan równowagi, danego wzorem

$$M = -\kappa\theta. \quad (16.22)$$

Symbolem  $\kappa$  (grecka litera kappa) oznaczono stałą, nazywaną **momentem kierującym**, która zależy od długości, średnicy i materiału, z jakiego wykonano drut.

Porównanie wzorów (16.22) i (16.10) prowadzi do wniosku, że wyrażenie (16.22) jest analogiczne do prawa Hooke'a. W konsekwencji możemy przekształcić wzór (16.13) na okres drgań w liniowym ruchu harmonicznym na wzór na okres drgań wahadła torsyjnego. W tym celu stałą sprężystości  $k$  we wzorze (16.13) należy zastąpić jej odpowiednikiem — stałą  $\kappa$  ze wzoru (16.22) i podobnie masę  $m$  we wzorze (16.13) — jej odpowiednikiem, czyli momentem bezwładności  $I$  drgającego krążka. Otrzymujemy w ten sposób poprawny wzór na okres drgań wahadła torsyjnego

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{\kappa}} \quad (\text{wahadło torsyjne}). \quad (16.23)$$



Rys. 16.7. Wahadło torsyjne to kątowy odpowiednik liniowego oscylatora harmonicznego z rysunku 16.5. Krążek oscyluje w płaszczyźnie poziomej, linia odniesienia wykonuje drgania z amplitudą zmianą kąta  $\theta_m$ . Skręcenie drutu jest źródłem energii potencjalnej — analogicznie do rozciągania sprężyny — i powoduje powstanie momentu siły dążącej do przywrócenia stanu początkowego

**Poradą 3:** Po czym poznać harmoniczne drgania torsyjne

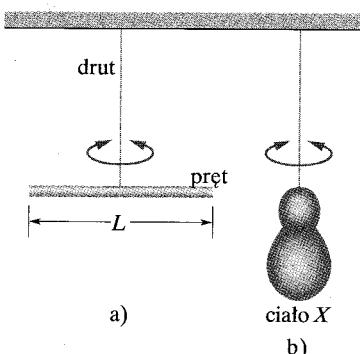
Gdy pewien układ wykonuje harmoniczne drgania torsyjne, przyspieszenie kątowe  $\alpha$  i przemieszczenie kątowe  $\theta$  układu wiążą ze sobą zależność typu

$$\alpha = -(dodatnia\ stała) \cdot \theta.$$

Jest to kątowy odpowiednik wyrażenia (16.8) ( $a = -\omega^2 x$ ). Powyższa zależność mówi, że przyspieszenie kątowe  $\alpha$  jest proporcjonalne do kątowego odchylenia  $\theta$  od położenia równowagi, ale powoduje obrót układu w przeciwnym kierunku niż odchylenie. Jeżeli dla danego układu otrzymasz wyrażenie o takiej postaci, możesz utożsamić występującą w nim dodatnią stałą z wielkością  $\omega^2$ , a następnie wyznaczyć  $\omega$ ,  $v$  i  $T$ .

## Przykład 16.4

Na rysunku 16.8a przedstawiono cienki pręt o długości  $L$  równej 12,4 cm i masie  $m$  równej 135 g zawieszony w środku na długim drucie. Zmierzony okres  $T_a$  drgań torsyjnych pręta wynosi 2,53 s. Następnie na tym samym drucie zawieszono ciało o nieregularnym kształcie, które nazwiemy ciałem  $X$  (rys. 16.8b), i zmierzono okres  $T_b$  — wynosi on 4,76 s. Wyznacz moment bezwładności tego ciała  $X$  względem osi, wokół której zachodzą drgania.



Rys. 16.8. Przykład 16.4. Dwa wahadła torsyjne złożone: a) z drutu i pręta oraz b) z takiego samego drutu i ciała o nieregularnym kształcie

Harmoniczne drgania torsyjne możesz również zidentyfikować po wyrażeniu wiążącym moment siły  $M$  z przemieszczeniem kątowym, o ile ma ono postać analogiczną do wzoru (16.22) ( $M = -\kappa\theta$ ), czyli

$$M = -(dodatnia\ stała) \cdot \theta.$$

Jest to kątowy odpowiednik równania (16.10) ( $F = -kx$ ). Wyrażenie to mówi, że moment siły  $M$  jest proporcjonalny do przemieszczenia kątowego  $\theta$ , ale powoduje obrót układu w przeciwnym kierunku. Mając zależność o takiej postaci, możesz utożsamić dodatnią stałą z momentem kierującym  $\kappa$  układu. Jeżeli znasz moment bezwładności  $I$  układu, możesz — posługując się równaniem (16.23) — wyznaczyć okres  $T$ .

## ROZWIĄZANIE:

○→ Związek momentów bezwładności pręta i ciała  $X$  ze zmierzonymi okresami opisuje zależność (16.23). Zgodnie z tabelą 11.2e moment bezwładności cienkiego pręta względem osi przechodzącej przez jego środek jest równy  $mL^2/12$ . Zatem dla pręta przedstawionego na rysunku 16.8a mamy

$$I_a = \frac{1}{12}mL^2 = \left(\frac{1}{12}\right)(0,135\text{ kg})(0,124\text{ m})^2 = 1,73 \cdot 10^{-4} \text{ kg} \cdot \text{m}^2.$$

Zapiszmy teraz wyrażenie (16.23) osobno dla pręta i dla ciała  $X$ ; otrzymujemy dwa równania

$$T_a = 2\pi\sqrt{\frac{I_a}{\kappa}}$$

oraz

$$T_b = 2\pi\sqrt{\frac{I_b}{\kappa}}.$$

Stała  $\kappa$ , będąca właściwością drutu, jest w obu wzorach taka sama; różnią się one jedynie okresami i momentami bezwładności.

Podnosimy obydwa równania do kwadratu, dzielimy drugie przez pierwsze, a następnie rozwiązujemy uzyskane w ten sposób równanie ze względu na  $I_b$ . Otrzymujemy

$$\begin{aligned} I_b &= I_a \frac{T_b^2}{T_a^2} = (1,73 \cdot 10^{-4} \text{ kg} \cdot \text{m}^2) \frac{(4,76 \text{ s})^2}{(2,53 \text{ s})^2} \\ &= 6,12 \cdot 10^{-4} \text{ kg} \cdot \text{m}^2. \end{aligned} \quad (\text{odpowiedź})$$

## 16.6. Wahadła

Zajmiemy się teraz takimi oscylatorami harmonicznymi, w których „sprężystość” związana jest z siłą grawitacyjną, a nie ze sprężystymi właściwościami skręcanego drutu lub ściskanej albo rozciąganej sprężyny.

## Wahadło matematyczne

Jeżeli zawieszysz jabłko na końcu długiej nici umocowanej na górnym końcu i zaczniesz nim kołysać tam i z powrotem z niewielką amplitudą, to z łatwością obserwujesz, że jabłko wykonuje ruch okresowy. Czy jest to ruch harmoniczny? A jeżeli tak, to ile wynosi jego okres  $T$ ? Aby odpowiedzieć na te pytania, rozważmy **wahadło matematyczne**; ma ono postać ciała (ciężarka) o masie  $m$  zawieszonego na jednym końcu nierożcagliwej linki, o znikomo małej masie i o długości  $L$ , której drugi koniec jest umocowany (rys. 16.9a). Ciężarek kołysze się swobodnie tam i z powrotem w płaszczyźnie rysunku, w lewo i w prawo od pionowej linii przechodzącej przez punkt zawieszenia wahadła.

Jak pokazano na rysunku 16.9b, na którym linka odchylona jest o kąt  $\theta$  od pionu, na ciężarek działają naprężenie linki  $\vec{T}$  i siła ciężkości  $\vec{F}_g$ . Rozkładamy siłę  $\vec{F}_g$  na składową radialną  $F_g \cos \theta$  i składową styczną do toru zakreślonego przez ciężarek  $F_g \sin \theta$ . Składowa styczna powoduje powstanie przywracającego stan równowagi momentu siły względem punktu zawieszenia wahadła, gdyż zawsze działa przeciwnie do wychylenia ciężarka i wymusza jego powrót do centralnego położenia. Nazywamy je *położeniem równowagi* ( $\theta = 0$ ), gdyż nieruchome wahadło pozostawałoby w nim w spoczynku.

Korzystając ze wzoru (11.33) ( $M = r_{\perp} F$ ), możemy zapisać moment siły w postaci

$$M = -L(F_g \sin \theta), \quad (16.24)$$

gdzie znak minus oznacza, że moment siły powoduje zmniejszenie kąta  $\theta$ , a  $L$  jest ramieniem składowej stycznej siły  $F_g \sin \theta$  względem punktu zawieszenia wahadła. Podstawiając wyrażenie (16.24) do wzoru (11.36) ( $M = I\alpha$ ) oraz zastępując wartość siły ciężkości wyrażeniem  $mg$ , otrzymujemy

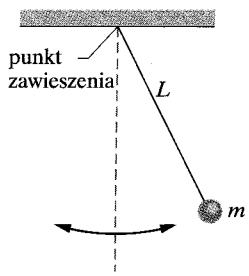
$$-L(mg \sin \theta) = I\alpha, \quad (16.25)$$

gdzie  $I$  jest momentem bezwładności wahadła względem punktu zawieszenia, a  $\alpha$  — przyspieszeniem kątowym względem tego punktu.

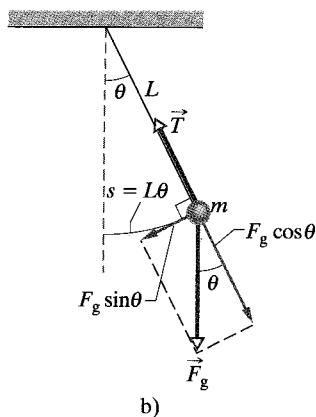
Możemy uprościć wzór (16.25), zakładając, że kąt  $\theta$  jest mały; wówczas funkcję  $\sin \theta$  można przybliżyć przez  $\theta$  (kąt  $\theta$  musi być wyrażony w radianach). (Na przykład, jeżeli  $\theta = 5^\circ = 0,0873$  rad, to  $\sin \theta = 0,0872$ , różnica jest rzędu 0,1%). Korzystając z tego przybliżenia i wykonując przekształcenia, otrzymujemy

$$\alpha = -\frac{mgL}{I}\theta. \quad (16.26)$$

Otrzymaliśmy wzór, który jest kątowym odpowiednikiem równania dla ruchu harmonicznego (16.8). Mówi on, że przyspieszenie kątowe  $\alpha$  wahadła jest proporcjonalne do jego przemieszczenia kątowego  $\theta$ , ale ma przeciwny znak. Tak więc, gdy ciężarek wahadła porusza się, powiedzmy, w prawo, jak na rys. 16.9a, jego przyspieszenie skierowane w lewo wzrasta, dopóki ciężarek nie zatrzyma się i nie zacznie poruszać się w lewo. Gdy następnie znajduje się on z lewej strony, jego przyspieszenie skierowane jest w prawo i powoduje powrót na prawą stronę, i tak dalej, jak w ruchu harmonicznym. Mówiąc ściśle, ruch wahadła matematycznego poruszającego się w zakresie odpowiednio małych kątów jest w przybliżeniu harmoniczny. To ograniczenie do małych kątów możemy wyrazić



a)



b)

Rys. 16.9. a) Wahadło matematyczne.  
b) Na ciężarek działają siła ciężkości  $\vec{F}_g$  i naprężenie linki  $\vec{T}$ . Składowa styczna siły ciężkości  $F_g \sin \theta$  powoduje powrót wahadła do położenia równowagi

również w inny sposób — **amplituda zmian kąta**  $\theta_m$  (maksymalny kąt odchylenia) musi być mała.

Porównując wyrażenia (16.26) i (16.8), widzimy, że częstość kołowa wahadła równa jest

$$\omega = \sqrt{\frac{mgL}{I}}.$$

Jeżeli następnie podstawimy wyrażenie na  $\omega$  do wzoru (16.5) ( $\omega = 2\pi/T$ ), otrzymamy wzór na okres drgań wahadła

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{mgL}}. \quad (16.27)$$

Cała masa wahadła matematycznego skupiona jest w cieążarze o masie  $m$  znajdującym się w odległości  $L$  od punktu zawieszenia. Korzystając ze wzoru (11.26) ( $I = mr^2$ ), możemy zapisać moment bezwładności wahadła w postaci  $I = mL^2$ . Po podstawieniu do (16.27) i uproszczeniu otrzymujemy proste wyrażenie na okres drgań wahadła matematycznego poruszającego się w zakresie małych kątów

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{L}{g}} \quad (\text{wahadło matematyczne, mała amplituda}). \quad (16.28)$$

(W zadaniach do tego rozdziału będziemy zakładali ruch w zakresie małych kątów).

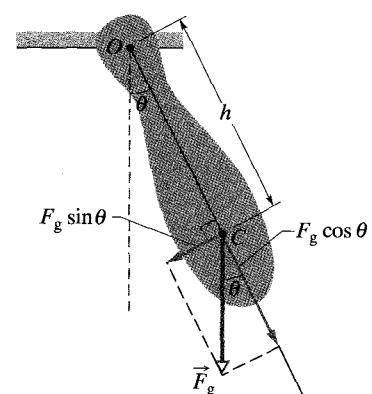
## Wahadło fizyczne

Rzeczywiste wahadło, nazywane zwykle **wahadłem fizycznym**, może mieć skomplikowany rozkład masy, zupełnie inny niż w wahadle matematycznym. Czy wahadło fizyczne również wykonuje ruch harmoniczny? A jeżeli tak, to jaki jest jego okres?

Na rysunku 16.10 przedstawiono pewne wahadło fizyczne odchylone w jedną stronę o kąt  $\theta$ . Siła ciężkości  $\vec{F}_g$  działa na jego środek masy  $C$  znajdujący się w odległości  $h$  od punktu zawieszenia  $O$ . Pomimo różnicy kształtów porównanie rysunków 16.10 i 16.9b ujawnia tylko jedną istotną różnicę między dowolnym wahadłem fizycznym a wahadłem matematycznym. W wahadle fizycznym moment siły związany ze składową siły ciężkości  $F_g \sin \theta$  ma ramię o długości  $h$  względem punktu zawieszenia, a nie ramię równe długości linki  $L$ . Tak więc pod wszystkimi innymi względami analiza wahadła fizycznego byłaby — aż do wzoru (16.27) — powtóżeniem naszej analizy dla wahadła matematycznego. Ponownie (dla małych  $\theta_m$ ) doszlibyśmy do wniosku, że ruch jest w przybliżeniu harmoniczny.

Jeżeli we wzorze (16.27) zastąpimy  $L$  przez  $h$ , otrzymamy następujące wyrażenie na okres ruchu wahadła fizycznego

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{mgh}} \quad (\text{wahadło fizyczne, mała amplituda}). \quad (16.29)$$



Rys. 16.10. Wahadło fizyczne. Przywracający równowagę moment siły wynosi  $hF_g \sin \theta$ . Gdy  $\theta = 0$ , środek masy  $C$  znajduje się bezpośrednio pod punktem zawieszenia wahadła  $O$

Podobnie jak w wahadle matematycznym,  $I$  jest momentem bezwładności wahadła względem punktu  $O$ . Jednakże w tym przypadku moment  $I$  nie wyraża się prostym wzorem  $mL^2$  (moment bezwładności zależy od kształtu wahadła fizycznego), ale nadal jest proporcjonalny do masy  $m$ .

Wahadło fizyczne nie będzie drgać, gdy jego punkt zawieszenia będzie się znajdował w środku masy. Formalnie taka sytuacja odpowiada podstawieniu  $h = 0$  do wyrażenia (16.29). Mamy wtedy  $T \rightarrow \infty$ , co oznacza, że takie wahadło nigdy nie wykona jednego pełnego cyklu drgań.

Każdemu wahadłowi fizycznemu, drgającemu wokół danego punktu zawieszenia  $O$  z okresem  $T$  odpowiada wahadło matematyczne o długości  $L_0$  drgające z tym samym okresem  $T$ . Wielkość  $L_0$ , nazywaną *długością zredukowaną wahadła fizycznego*, możemy wyznaczyć ze wzoru (16.28). Punkt znajdujący się w odległości  $L_0$  od punktu zawieszenia  $O$  nazywamy *środkiem wahadła fizycznego* dla danego punktu zawieszenia.

### Pomiar przyspieszenia ziemskiego $g$

Wahadło fizyczne możemy wykorzystać do pomiaru przyspieszenia ziemskiego  $g$  w poszczególnych punktach na powierzchni Ziemi. (W ramach badań geofizycznych takich pomiarów wykonano niezliczenie wiele).

Rozważmy prosty przypadek. Weźmy wahadło w postaci jednorodnego pręta o długości  $L$ , unieruchomionego na jednym końcu. Dla takiego wahadła odległość od punktu zawieszenia do środka masy — czyli wielkość  $h$  we wzorze (16.29) — wynosi  $L/2$ . Zgodnie z tabelą 11.2e moment bezwładności tego wahadła względem prostopadłej osi przechodzącej przez środek masy jest równy  $mL^2/12$ . Korzystając z danego równaniem (11.29) twierdzenia Steinera ( $I = I_{SM} + mh^2$ ), otrzymujemy moment bezwładności pręta względem osi przechodzącej przez jeden z jego końców i prostopadłej do pręta

$$I = I_{SM} + mh^2 = \frac{1}{12}mL^2 + m\left(\frac{1}{2}L\right)^2 = \frac{1}{3}mL^2. \quad (16.30)$$

Jeżeli do równania (16.29) podstawimy  $h = L/2$  i  $I = mL^2/3$ , a następnie rozwiążemy je względem  $g$ , to otrzymamy

$$g = \frac{8\pi^2 L}{3T^2}. \quad (16.31)$$

Zatem zmierzywszy długość  $L$  i okres  $T$ , możemy wyznaczyć wartość przyspieszenia ziemskiego  $g$  w miejscu, gdzie znajduje się wahadło. (W przypadku gdy potrzebne są precyzyjne pomiary, niezbędne staje się wprowadzenie szeregu udoskonaleń, jak na przykład umieszczenie wahadła w komorze próżniowej).

### Przykład 16.5

Przymiar metrowy wykonuje drgania wokół punktu zawieszenia, znajdującego się na jednym z jego końców, w odległości  $h$  od środka masy (rys. 16.11a).

a) Wyznacz okres  $T$  drgań przymiaru.

#### ROZWIĄZANIE:

 Przymiar nie jest wahadłem matematycznym, gdyż jego masa nie jest skupiona na końcu przeciwnym do punktu zawieszenia — tak więc przymiar jest wahadłem fizycznym. Zatem okres

drgań dany jest wzorem (16.29), w którym występuje moment bezwładności  $I$  przymiaru względem jego punktu zawieszenia. Możemy przyjąć, że przymiar jest jednorodnym prętem o długości  $L$  i masie  $m$ . Wówczas ze wzoru (16.30) mamy  $I = mL^2/3$ , a odległość  $h$  we wzorze (16.29) równa jest  $L/2$ . Podstawiając te wielkości do równania (16.29), otrzymujemy

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{mgh}} = 2\pi \sqrt{\frac{\frac{1}{3}mL^2}{mg(\frac{1}{2}L)}} = 2\pi \sqrt{\frac{2L}{3g}} \quad (16.32)$$

$$= 2\pi \sqrt{\frac{(2)(1 \text{ m})}{(3)(9,8 \text{ m/s}^2)}} = 1,64 \text{ s.} \quad (\text{odpowiedź})$$

Zauważ, że wynik nie zależy od masy  $m$  wahadła.

b) Wyznacz odległość  $L_0$  od punktu zawieszenia  $O$  przymiaru do jego środka wahań.

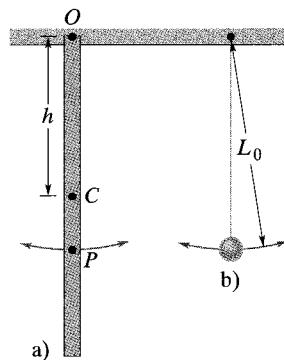
#### ROZWIĄZANIE:

Cheemy wyznaczyć długość  $L_0$  wahadła matematycznego (przedstawionego na rysunku 16.11b), mającego taki sam okres drgań jak wahadło fizyczne (przymiar) z rysunku 16.11a. Z porównania wzorów (16.28) i (16.32) otrzymujemy

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{L_0}{g}} = 2\pi \sqrt{\frac{2L}{3g}}.$$

Stąd

$$L_0 = \frac{2}{3}L = \left(\frac{2}{3}\right)(100 \text{ cm}) = 66,7 \text{ cm.} \quad (\text{odpowiedź})$$



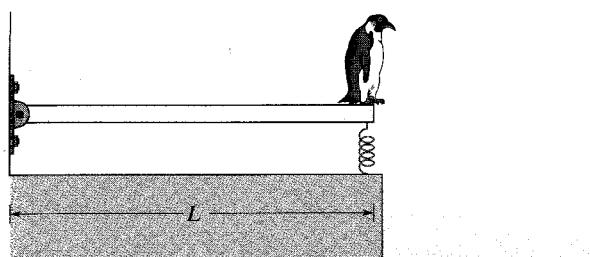
Rys. 16.11. Przykład 16.5. a) Przymiar metrowy zawieszony za jeden koniec jako wahadło fizyczne. b) Wahadło matematyczne o długości  $L_0$  dobranej w taki sposób, by okresy drgań obu wahadł były jednakowe. Punkt  $P$  na wahadle przedstawionym w części (a) rysunku wskazuje jego środek wahań

Punkt  $P$  na rysunku 16.11a znajduje się właśnie w takiej odległości od punktu zawieszenia  $O$ . Zatem punkt  $P$  stanowi środek wahań przymiaru dla danego punktu zawieszenia.

**SPRAWDZIAN 4:** Dane są trzy wahadła fizyczne o masach  $m_0$ ,  $2m_0$  i  $3m_0$ , mające takie same kształty i wymiary, zawieszone w takich samych punktach. Uszereguj wahadła według okresów ich drgań, zaczynając od największego.

## Przykład 16.6

Na rysunku 16.12 przedstawiono pingwina (oczywiście wprawionego w sportach wodnych) skaczącego do wody z trampoliny mającej postać jednorodnej deski, której lewy koniec jest zamocowany na zawiasie, a prawy jest oparty na sprężynie. Deska ma długość  $L = 2 \text{ m}$  i masę  $m = 12 \text{ kg}$ ; stała sprężystości  $k$  wynosi  $1300 \text{ N/m}$ . Gdy pingwin skacze do wody, deska i sprężyna zaczynają wykonywać drgania o małej amplitudzie. Zakładamy, że deska jest wystarczająco sztywna, by się nie uginać. Wyznacz okres  $T$  drgań.



Rys. 16.12. Przykład 16.6. Pingwin skaczący do wody wzbudza drgania deski i sprężyny; z lewej strony deska zamocowana jest na zawiasie

#### ROZWIĄZANIE:

Wobec tego, że w układzie znajduje się sprężyna, możemy przypuszczać, że drgania układu są harmoniczne, ale nie możemy tego założyć. Posłużymy się więc następującym rozumowaniem.

Gdy deska wykonuje drgania harmoniczne, przyspieszenie i przemieszczenie drgającego końca deski powinna wiązać zależność mająca taką postać jak wyrażenie (16.8) ( $a = -\omega^2x$ ). Jeżeli tak jest, to na podstawie tej zależności będziemy mogli wyznaczyć częstotliwość kołową  $\omega$ , a następnie poszukiwaną wartość  $T$ . Znajdzmy zatem zależność między przyspieszeniem a przemieszczeniem prawego końca deski.

Gdy koniec deski wykonuje drgania, deska jako całość obraca się na zawiasie, skupimy się zatem na działającym na deskę momencie siły  $\vec{M}$  względem osi zawiasu. Ten moment siły związany jest z siłą  $\vec{F}$ , jaką sprężyna działa na deskę. Ponieważ siła  $\vec{F}$  zmienia się w czasie, zatem i moment siły  $\vec{M}$  musi również ulegać zmianom. Dla dowolnej chwili możemy jednak, posługując się wzorem (11.31) ( $M = rF \sin \phi$ ), powiązać wartości  $\vec{M}$  i  $\vec{F}$ . W naszym przypadku mamy

$$M = LF \sin 90^\circ, \quad (16.33)$$

gdzie  $L$  jest ramieniem siły  $\vec{F}$ , a  $90^\circ$  to kąt między ramieniem siły a kierunkiem jej działania. Z zależności (16.33) i (11.36)

$(M = I\alpha)$ , otrzymujemy

$$LF = I\alpha, \quad (16.34)$$

gdzie  $I$  jest momentem bezwładności deski względem zawiasu, a  $\alpha$  — jej przyspieszeniem kątowym względem tego samego punktu. Potraktujmy deskę jak cienki, podwieszony na jednym końcu, pręt. Wówczas — zgodnie ze wzorem (16.30) — jej moment bezwładności  $I$  wynosi  $mL^2/3$ .

Wyobraźmy sobie pionową oś  $x$  przechodzącą przez drgający koniec deski i skierowaną w górę. Wówczas siła wywierana przez sprężynę na prawy koniec deski jest równa  $F = -kx$ , gdzie  $x$  jest pionowym przemieszczeniem prawego końca deski.

Podstawiając wyrażenia na  $I$  i  $F$  do wzoru (16.34), otrzymujemy

$$-Lkx = \frac{mL^2\alpha}{3}. \quad (16.35)$$

Otrzymaliśmy związek pionowego przemieszczenia liniowego  $x$  z przyspieszeniem kątowym  $\alpha$  względem zawiasu. Korzystając ze wzoru (11.22) ( $a_{st} = \omega r$ ) na przyspieszenie styczne, możemy wyrazić przyspieszenie kątowe  $\alpha$  we wzorze (16.35) przez przyspieszenie liniowe  $a$  wzdłuż osi  $x$ . W naszym przypadku przyspieszenie styczne wynosi  $a$ , natomiast odległość pingwina od

osi obrotu  $r$  jest równa  $L$ , tak więc  $\alpha = a/L$ . Po podstawieniu  $\alpha$  do równania (16.35) przybiera ono postać

$$-Lkx = \frac{mL^2a}{3L},$$

skąd otrzymujemy

$$a = -\frac{3k}{m}x. \quad (16.36)$$

Wyrażenie (16.36) ma w istocie taką samą postać jak wyrażenie (16.8) ( $a = -\omega^2x$ ). Zatem deska rzeczywiście porusza się ruchem harmonicznym, przy czym z porównania zależności (16.36) i (16.8) mamy

$$\omega^2 = \frac{3k}{m},$$

co daje

$$\omega = \sqrt{\frac{3k}{m}}.$$

Korzystając ze wzoru (16.5) ( $\omega = 2\pi/T$ ), wyznaczamy okres  $T$

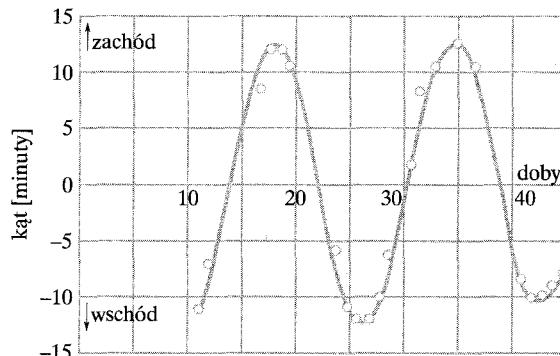
$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{3k}} = 2\pi\sqrt{\frac{12 \text{ kg}}{3(1300 \text{ N/m})}} = 0,35 \text{ s.} \quad (\text{odpowiedź})$$

Może to cię zaskoczy, ale okres drgań nie zależy od długości  $L$  deski.

## 16.7. Ruch harmoniczny a ruch jednostajny po okręgu

W roku 1610 Galileusz, posługując się skonstruowanym przez siebie teleskopem, odkrył cztery główne księżyce Jowisza. Po tygodniach obserwacji stwierdził, iż wydaje się, że każdy księżyc porusza się tam i z powrotem względem planety w sposób, który obecnie nazwalibyśmy ruchem harmonicznym; dysk planety był centralnym punktem ruchu. Wykonane własnoręcznie przez Galileusza notatki z obserwacji wciąż są dostępne. A.P. French z MIT na podstawie danych Galileusza wyznaczył położenia księżyca Callisto względem Jowisza. Na rysunku 16.13 kółkami oznaczono obserwacje Galileusza, a linią ciągłą — krzywą najlepiej dopasowaną do danych. Kształt krzywej zdecydowanie pasuje do zależności

Rys. 16.13. Widziana z Ziemi odległość kątowa między Jowiszem a jego księżycem Callisto. Kółkami oznaczono obserwacje Galileusza z 1610 roku. Linia ciągła, reprezentująca najlepsze dopasowanie, wskazuje na ruch harmoniczny. Dla średniej odległości od Ziemi do Jowisza łuk o rozpiętości 10 minut kątowych odpowiada około  $2 \cdot 10^6 \text{ km}$ . (Na podstawie A.P. French, *Newtonian Mechanics*, W.W. Norton & Co., New York 1971, s. 288)



(16.3) opisującej przemieszczenie w ruchu harmonicznym. Na podstawie wykresu można określić okres tego ruchu — jest on w przybliżeniu równy 16,8 dób.

W rzeczywistości Callisto porusza się z niemal stałą prędkością po prawie kołowej orbicie wokół Jowisza. Rzeczywisty ruch księżyca wcale nie jest ruchem harmonicznym, jest to ruch jednostajny po okręgu. To, co widział Galileusz — i co możesz sam zobaczyć, dysponując dobrą lornetką i odrobiną cierpliwości — to ruch rzutu punktu poruszającego się ruchem jednostajnym po okręgu na średnicę tego okręgu. Obserwacje Galileusza prowadzą nas do wniosku, że ruch harmoniczny jest „widokiem z boku” ruchu jednostajnego po okręgu. Nieco ściślej:

► Ruch harmoniczny jest ruchem rzutu punktu poruszającego się ruchem jednostajnym po okręgu na średnicę okręgu, po którym ten ruch się odbywa.

Zilustrowano to na rysunku 16.14a. Przedstawiono na nim cząstkę  $P'$  poruszającą się po okręgu ruchem jednostajnym ze stałą prędkością kątową  $\omega$ . Promień  $x_m$  okręgu równy jest długości wektora położenia cząstki. W dowolnej chwili położenie kątowe cząstki równe jest  $\omega t + \phi$ , gdzie  $\phi$  — położenie kątowe w chwili  $t = 0$ .

Rzutem położenia cząstki  $P'$  na oś  $x$  jest punkt  $P$ , którego ruch będziemy analizować. Rzut wektora położenia cząstki  $P'$  na oś  $x$  daje współrzędną  $x(t)$  cząstki  $P$ . Otrzymujemy zatem

$$x(t) = x_m \cos(\omega t + \phi),$$

czyli po prostu wyrażenie (16.3). Nasz wniosek jest prawidłowy. Jeżeli cząstka  $P'$  porusza się ruchem jednostajnym po okręgu, to rzut jej położenia  $P$  porusza się ruchem harmonicznym wzdłuż średnicy tego okręgu.

Na rysunku 16.14b przedstawiono prędkość  $\vec{v}$  cząstki  $P'$ . Zgodnie ze wzorem (11.18) ( $v = \omega r$ ) długość wektora prędkości wynosi  $\omega x_m$ , a jego rzut na oś  $x$  opisuje wyrażenie

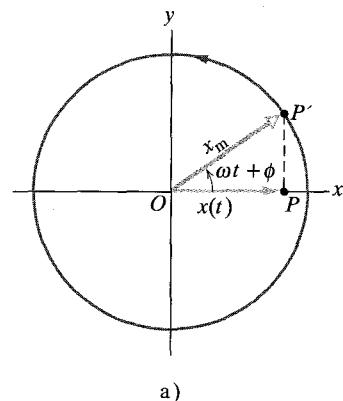
$$v(t) = -\omega x_m \sin(\omega t + \phi),$$

dokładnie takie jak wzór (16.6). Znak minus wynika stąd, że prędkość punktu  $P$  na rysunku 16.14b skierowana jest w lewo, przeciwnie do kierunku osi  $x$ .

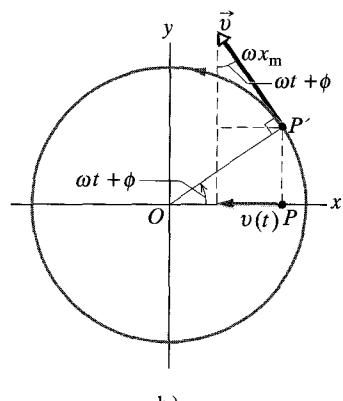
Na rysunku 16.14c przedstawiono przyspieszenie dośrodkowe  $\vec{a}$  cząstki  $P'$ . Zgodnie ze wzorem (11.23) ( $a_r = \omega^2 r$ ) długość wektora przyspieszenia dośrodkowego wynosi  $\omega^2 x_m$ , a jego rzut na oś  $x$  opisuje wyrażenie

$$a(t) = -\omega^2 x_m \cos(\omega t + \phi),$$

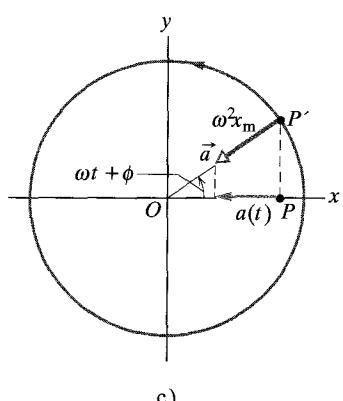
czyli po prostu wzór (16.7). Tak więc niezależnie od tego, czy zajmujemy się przemieszczeniem, prędkością, czy przyspieszeniem, widzimy, iż ruch rzutu punktu poruszającego się ruchem jednostajnym po okręgu rzeczywiście jest ruchem harmonicznym.



a)



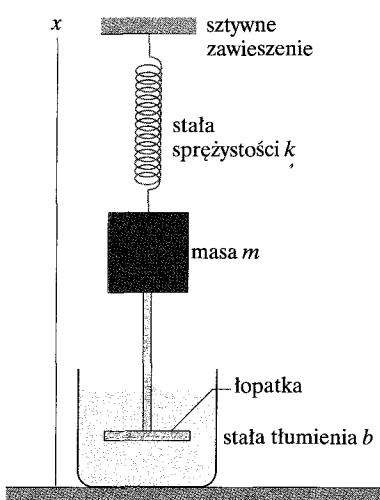
b)



c)

Rys. 16.14. a) Cząstka  $P'$  poruszająca się ruchem jednostajnym po okręgu o promieniu  $x_m$ . Rzut jej położenia  $P$  na oś  $x$  wykonuje ruch harmoniczny. b) Rzut prędkości  $\vec{v}$  cząstki jest prędkością ruchu harmonicznego. c) Rzut przyspieszenia dośrodkowego  $\vec{a}$  cząstki jest przyspieszeniem ruchu harmonicznego

## 16.8. Ruch harmoniczny tłumiony



Rys. 16.15. Prosty oscylator tłumiony. Zanurzona w cieczy łopatka działa hamującą na klocek drgający wzdłuż osi  $x$

Wahadło zanurzone w wodzie będzie drgać krótko, gdyż woda stawia mu opór, co powoduje szybkie zanikanie ruchu. W powietrzu wahadło porusza się łatwiej, ale i tak w końcu jego ruch zamiera, gdyż powietrze także stawia opór (znaczenie ma również tarcie w punkcie zawieszenia wahadła), zmniejszając energię wahadła.

Jeżeli ruch oscylatora słabnie na skutek działania sił zewnętrznych, to taki oscylator nazywamy **oscylatorem tłumionym**, a jego drgania nazywamy **tłumionymi**. Na rysunku 16.15 przedstawiono prosty oscylator tłumiony, w którym klocek o masie  $m$  drga w pionie zawieszony na sprężynie o stałej sprężystości  $k$ . Do klocka przyczepiony jest pręt zakończony łopatką (zakładamy, że oba te elementy mają znikomą masę) zanurzoną w cieczy. Gdy łopatka porusza się w góre i w dół, ciecz wywiera na nią (i w konsekwencji na cały układ drgający) siłę oporu. Z upływem czasu energia mechaniczna układu klocek–sprężyna maleje — przekształca się w energię termiczną cieczy i łopatki.

Załóżmy następnie, że **siła oporu**  $\vec{F}_o$ , jaką działa ciecz, jest proporcjonalna do wartości prędkości  $\vec{v}$  łopatki i klocka (takie założenie jest poprawne, gdy łopatka porusza się powoli). Dla składowej wzdłuż kierunku  $x$  na rysunku 16.15 mamy zatem

$$F_o = -bv, \quad (16.37)$$

gdzie  $b$  jest **stałą tłumienia**, która zależy od właściwości łopatki i cieczy (w układzie SI stałą tłumienia mierzymy w kilogramach na sekundę). Znak minus wskazuje, że siła  $\vec{F}_o$  przeciwdziała ruchowi.

Sprężyna działa na klocek siłą  $F_s = -kx$ . Zakładamy, że siła ciężkości działająca na klocek jest znikomo mała w porównaniu z siłami  $F_o$  i  $F_s$ . Wówczas drugą zasadę Newtona dla składowej wzdłuż osi  $x$  ( $F_x = ma_x$ ) zapisujemy w postaci

$$-bv - kx = ma. \quad (16.38)$$

Po podstawieniu  $dx/dt = v$  i  $d^2x/dt^2 = a$  otrzymujemy równanie różniczkowe

$$m \frac{d^2x}{dt^2} + b \frac{dx}{dt} + kx = 0. \quad (16.39)$$

Rozwiążanie tego równania ma postać

$$x(t) = x_m e^{-bt/2m} \cos(\omega' t + \phi), \quad (16.40)$$

gdzie  $x_m$  jest amplitudą, a  $\omega'$  — częstością kołową oscylatora tłumionego, daną wzorem

$$\omega' = \sqrt{\frac{k}{m} - \frac{b^2}{4m^2}}. \quad (16.41)$$

Gdy  $b = 0$  (brak tłumienia), wyrażenie (16.41) sprowadza się do wzoru (16.12) na częstość kołową oscylatora nietłumionego ( $\omega = \sqrt{k/m}$ ), a wyrażenie (16.40) — do wzoru (16.3) na przemieszczenie oscylatora nietłumionego. Jeżeli stała tłumienia jest mała, ale nie równa zeru (czyli  $b \ll \sqrt{km}$ ), to  $\omega' \approx \omega$ .

Jak widać z rysunku 16.16, wyrażenie (16.40) przedstawia drgań sinusoidalnych, których amplituda (równa  $x_m e^{-bt/2m}$ ) stopniowo maleje z upływem czasu. Energia mechaniczna oscylatora nietłumionego jest stała i zgodnie ze wzorem (16.21) wynosi  $E = \frac{1}{2}kx_m^2$ . W przypadku oscylatora tlumionego energia mechaniczna nie jest stała i maleje z czasem. Jeżeli tlumienie jest słabe, możemy znaleźć zależność  $E(t)$ , zastępując w wyrażeniu (16.21) wielkość  $x_m$  przez amplitudę drgań tlumionych  $x_m e^{-bt/2m}$ . Otrzymujemy w ten sposób zależność

$$E(t) \approx \frac{1}{2}kx_m^2 e^{-bt/m}, \quad (16.42)$$

z której wynika, że energia — podobnie jak amplituda — maleje wykładniczo z czasem.

**SPRAWDZIAN 5:** Mamy trzy zestawy wartości parametrów (stała sprężystości, stała tlumienia, masa) oscylatora tlumionego przedstawionego na rysunku 16.15. Uszereguj je w kolejności czasu, jaki jest potrzebny, by energia mechaniczna zmalała do jednej czwartej wartości początkowej, od najdłuższego do najkrótszego.

zestaw 1	$2k_0$	$b_0$	$m_0$
zestaw 2	$k_0$	$6b_0$	$4m_0$
zestaw 3	$3k_0$	$3b_0$	$m_0$

## Przykład 16.7

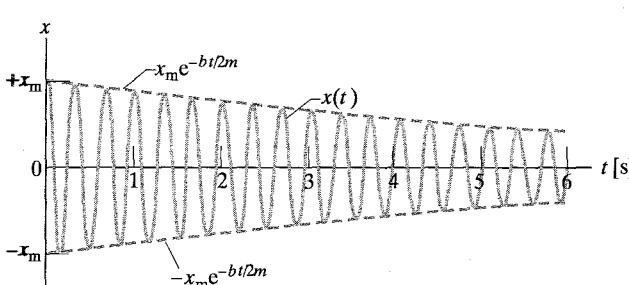
Oscylator tlumiony przedstawiony na rysunku 16.15 ma następujące parametry:  $m = 250$  g,  $k = 85$  N/m oraz  $b = 70$  g/s.

a) Wyznacz okres drgań tego oscylatora.

**ROZWIĄZANIE:**

○ Ponieważ  $b \ll \sqrt{km} = 4,6$  kg/s, okres drgań jest w przybliżeniu taki sam jak w przypadku oscylatora nietłumionego. Zatem ze wzoru (16.13) otrzymujemy

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} = 2\pi\sqrt{\frac{0,25 \text{ kg}}{85 \text{ N/m}}} = 0,34 \text{ s.} \quad (\text{odpowiedź})$$



Rys. 16.16. Zależność  $x(t)$  dla oscylatora tlumionego z rysunku 16.15, którego parametry określono w przykładzie 16.7. Amplituda, równa  $x_m e^{-bt/2m}$ , maleje wykładniczo z czasem

b) Wyznacz czas, po jakim amplituda drgań tlumionych zmalała do połowy swojej wartości początkowej.

**ROZWIĄZANIE:**

○ Jak wynika ze wzoru (16.40), amplituda w chwili  $t$  jest równa  $x_m e^{-bt/2m}$ . Dla  $t = 0$  jest ona równa  $x_m$ . Tak więc musimy znaleźć taką wartość czasu  $t$ , dla której zachodzi

$$x_m e^{-bt/2m} = \frac{1}{2}x_m.$$

Po podzieleniu obu stron równania przez  $x_m$  i zlogarytmowaniu ich prawa strona równania jest równa  $\ln(1/2)$ , a lewa

$$\ln(e^{-bt/2m}) = -bt/2m.$$

Zatem

$$\begin{aligned} t &= \frac{-2m \ln(\frac{1}{2})}{b} \\ &= \frac{-(2)(0,25 \text{ kg}) \ln(\frac{1}{2})}{0,07 \text{ kg/s}} = 5 \text{ s.} \quad (\text{odpowiedź}) \end{aligned}$$

Ponieważ  $T = 0,34$  s, wyznaczony czas jest równy w przybliżeniu 15 okresom drgań.

c) Wyznacz czas, po jakim energia mechaniczna układu zmalała do połowy swojej wartości początkowej.

**ROZWIĄZANIE:**

○ Jak wynika ze wzoru (16.42), energia mechaniczna w chwili  $t$  równa jest  $\frac{1}{2}kx_m^2 e^{-bt/m}$ . Dla  $t = 0$  jest ona równa  $\frac{1}{2}kx_m^2$ . Musimy

zatem znaleźć taką wartość czasu  $t$ , dla której zachodzi

$$\frac{1}{2}kx_m^2 e^{-bt/m} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}kx_m^2\right).$$

Dzieląc obie strony równania przez  $\frac{1}{2}kx_m^2$ , a następnie rozwiązuując — tak jak poprzednio — względem  $t$ , otrzymujemy

$$t = \frac{-m \ln(\frac{1}{2})}{b} = \frac{-(0,25 \text{ kg}) \ln(\frac{1}{2})}{0,07 \text{ kg/s}} = 2,5 \text{ s.} \quad (\text{odpowiedź})$$

Jest to dokładnie połowa czasu, jaki otrzymaliśmy w punkcie (b), równa w przybliżeniu 7,5 okresom drgań. Rysunek 16.16 stanowi ilustrację do tego przykładu.

## 16.9. Drgania wymuszone i rezonans

Człowiek bujający się na huśtawce, której nikt nie popycha, to przykład *drgań swobodnych*. Jeżeli jednak ktoś okresowo popycha huśtawkę, wykonuje ona *drgania wymuszone*. Z układem wykonującym drgania wymuszone związane są *dwie* częstotliwości kołowe: 1) *własna częstotliwość kołowa*  $\omega$  układu, czyli częstotliwość kołowa, z jaką układ wykonywałby drgania swobodne, gdyby został w nie wprawiony w wyniku nagłego zaburzenia, oraz 2) częstotliwość kołowa  $\omega_{\text{wym}}$  zewnętrznej siły powodującej drgania wymuszone.

Do przedstawienia drgań wymuszonych oscylatora harmonicznego możemy posłużyć się ponownie rysunkiem 16.15, o ile zawieszenie nie będzie sztywne, lecz będzie się poruszać w góre i w dół z częstotliwością kołową  $\omega_{\text{wym}}$ . Taki oscylator wymuszony drga z częstotliwością kołową  $\omega_{\text{wym}}$  siłą wymuszającą, a jego przemieszczenie  $x(t)$  dane jest wzorem

$$x(t) = x_m \cos(\omega_{\text{wym}} t + \phi), \quad (16.43)$$

gdzie  $x_m$  jest amplitudą drgań.

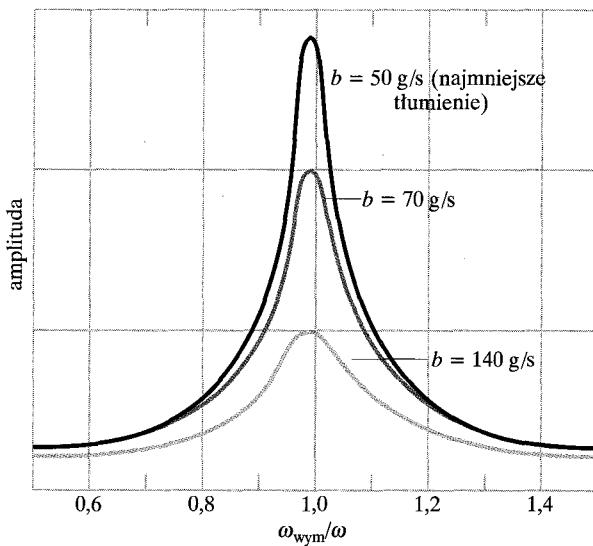
Wartość amplitudy drgań  $x_m$  w skomplikowany sposób zależy od częstotliwości  $\omega_{\text{wym}}$  i  $\omega$ . Łatwiej opisać amplitudę zmian prędkości drgań  $v_m$  — jest ona największa, gdy spełniony jest warunek **rezonansu**

$$\omega_{\text{wym}} = \omega \quad (\text{rezonans}). \quad (16.44)$$

Wyrażenie (16.44) jest również *przybliżonym* warunkiem na to, aby amplituda drgań  $x_m$  była największa. Tak więc, jeżeli będziemy popychać huśtawkę z jej własną częstotliwością kołową, amplituda drgań i zmian prędkości będą bardzo duże — jest to fakt, którego dzieci bardzo szybko się uczą metodą prób i błędów. Jeżeli będziemy popychać huśtawkę z inną częstotliwością kołową, mniejszą lub większą, amplitudy drgań i zmian prędkości będą mniejsze.

Na rysunku 16.17 przedstawiono zależność amplitudy oscylatora od częstotliwości  $\omega_{\text{wym}}$  siły wymuszającej dla trzech wartości stałej tłumienia  $b$ . Zauważmy, że wszystkie trzy amplitudy są największe, gdy  $\omega_{\text{wym}}/\omega = 1$ , tzn. gdy spełniony jest warunek rezonansu dany wzorem (16.44). Z krzywych przedstawionych na rysunku 16.17 widać, że im mniejsze tłumienie, tym wyższe i węższe *maksimum rezonansowe*.

Wszystkie konstrukcje mechaniczne mają jedną lub więcej własnych częstotliwości kołowych; jeżeli na tę konstrukcję działa duża siła zewnętrzna zmieniająca się z częstotliwością pasującą do jednej z tych częstotliwości, powstające drgania mogą



Rys. 16.17. Amplituda  $x_m$  oscylatora wymuszonego zmienia się wraz z częstością  $\omega_{wym}$  siły wymuszającej. Amplituda jest w przybliżeniu największa, gdy spełniony jest warunek rezonansu  $\omega_{wym}/\omega = 1$ . Przedstawione krzywe odpowiadają trzem wartościami stałej tłumienia  $b$

zniszczyć konstrukcję. Tak więc na przykład projektanci samolotów muszą być pewni, że żadna z własnych częstotliwości kołowych, z jakimi mogą drgać skrzydła, nie pokrywa się z częstotliwością kołową pracy silników. Skrzydło wpadające w gwałtowne drgania przy pewnej częstotliwości obrotów silnika stanowiłoby oczywiście zagrożenie.

Trzęsienie ziemi w Meksyku we wrześniu 1985 roku było silne (8,1 stopni w skali Richtera), ale wywołane przez nie fale sejsmiczne powinny być zbyt słabe, aby spowodować rozległe zniszczenia po dotarciu do oddalonego o około 400 km miasta Meksyk. Jednakże miasto zostało w znacznej części zbudowane na dnie dawnego jeziora, gdzie ziemia ciągle jeszcze jest miękka i wilgotna. Pomimo że fale sejsmiczne w twardszym gruncie w drodze do miasta Meksyk miały małą amplitudę, to znacznie wzrosła ona w luźnej ziemi na terenie miasta. Amplituda zmian przyspieszenia fal osiągnęła 0,2g, a drgania o częstotliwości kołowej bliskiej 3 rad/s stały się niespodziewanie silne. Nie tylko ziemia silnie drgała; wiele budynków o średniej wysokości ma rezonansowe częstotliwości kołowe właśnie bliskie 3 rad/s. Większość budynków średniej wysokości runęła podczas wstrząsów, podczas gdy budynki niższe (o większych rezonansowych częstotliwościach kołowych) oraz wyższe (o mniejszych rezonansowych częstotliwościach kołowych) pozostały całe.

## Podsumowanie

**Częstość** Częstość  $v$  ruchu okresowego lub drgającego — to liczba drgań wykonywanych w ciągu każdej sekundy. W układzie SI jej jednostką jest herc

$$1 \text{ herc} = 1 \text{ Hz} = 1 \text{ pełne drganie na sekundę} = 1 \text{ s}^{-1}. \quad (16.1)$$

**Okres** Okres  $T$  to czas, w jakim wykonywane jest jedno pełne drganie. Okres i częstotliwość wiążą zależność

$$T = \frac{1}{v}. \quad (16.2)$$

**Ruch harmoniczny** W ruchu harmonicznym przemieszczenie  $x(t)$  ciała względem jego położenia równowagi opisane jest wzorem

$$x = x_m \cos(\omega t + \phi) \quad (\text{przemieszczenie}), \quad (16.3)$$

gdzie  $x_m$  jest amplitudą drgań, wielkość  $(\omega t + \phi)$  — fazą drgań, a  $\phi$  — fazą początkową. Częstość kołową  $\omega$  wiąże z okresem i częstotliwością zależność

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi v \quad (\text{częstość kołowa}). \quad (16.5)$$

Różniczkując wzór (16.3), otrzymujemy wyrażenia na prędkość i przyspieszenie w zależności od czasu dla ciała wykonującego ruch harmoniczny:

$$v = -\omega x_m \sin(\omega t + \phi) \quad (\text{prędkość}) \quad (16.6)$$

oraz

$$a = -\omega^2 x_m \cos(\omega t + \phi) \quad (\text{przyspieszenie}). \quad (16.7)$$

Dodatnia wielkość  $\omega x_m$  w wyrażeniu (16.6) to **amplituda zmian prędkości**  $v_m$  ruchu. Dodatnia wielkość  $\omega^2 x_m$  w wyrażeniu (16.7) to **amplituda zmian przyspieszenia**  $a_m$  ruchu.

**Oscylator liniowy** Pod wpływem siły zwrotnej opisanej prawem Hooke'a  $F = -kx$  ciało o masie  $m$  porusza się ruchem harmonicznym. Częstość kołowa i okres dane są wzorami:

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (\text{częstość kołowa}) \quad (16.12)$$

oraz

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}} \quad (\text{okres}). \quad (12.13)$$

Taki układ nazywamy **liniowym oscylatorem harmonicznym**.

**Energia** Ciało wykonujące ruch harmoniczny ma w każdej chwili energię kinetyczną  $E_k = mv^2/2$  oraz energię potencjalną  $E_p = kx^2/2$ . Jeżeli nie występuje tarcie, to całkowita energia mechaniczna  $E = E_k + E_p$  pozostaje stała, mimo że energie  $E_k$  i  $E_p$  się zmieniają.

**Wahadła** Przykładami urządzeń wykonujących ruch harmoniczny są **wahadło torsyjne** (rys. 16.7), **wahadło matematyczne** (rys. 16.9) oraz **wahadło fizyczne** (rys. 16.10). Okresy małych drgań tych wahadeł wynoszą odpowiednio

$$T = 2\pi\sqrt{I/\kappa}, \quad (16.23)$$

$$T = 2\pi\sqrt{L/g} \quad (16.28)$$

oraz

$$T = 2\pi\sqrt{I/mgh}. \quad (16.29)$$

**Ruch harmoniczny a ruch jednostajny po okręgu** Rzut punktu poruszającego się ruchem jednostajnym po okręgu na średnicę okręgu, po którym ten ruch się odbywa, porusza się ruchem harmonicznym. Na rysunku 16.14 pokazano, że położenie, prędkość i przyspieszenie tego rzutu spełniają równania ruchu harmonicznego.

**Ruch harmoniczny tłumiony** Energia mechaniczna  $E$  w rzeczywistym układzie drgającym maleje podczas drgań, gdyż siły zewnętrzne, jak na przykład siły oporu, hamują drgania i powodują przekształcanie się energii mechanicznej w energię termiczną. W związku z tym o rzeczywistym oscylatorze i jego ruchu mówimy, że są **tłumione**. Jeżeli siła oporu opisana jest wzorem  $\vec{F}_o = -b\vec{v}$ , gdzie  $v$  jest prędkością oscylatora, a  $b$  — stałą **tłumienia**, to przemieszczenie oscylatora dane jest wzorem

$$x(t) = x_m e^{-bt/2m} \cos(\omega' t + \phi), \quad (16.40)$$

gdzie  $\omega'$  — częstość kołowa oscylatora tłumionego dana wzorem

$$\omega' = \sqrt{\frac{k}{m} - \frac{b^2}{4m^2}}. \quad (16.41)$$

Jeżeli stała tłumienia jest mała ( $b \ll \sqrt{km}$ ), to  $\omega' \approx \omega$ , gdzie  $\omega$  jest częstością kołowej  $\omega_{\text{wym}}$  działającą na układ drgający o właściwej częstości kołowej  $\omega$ , układ drga z częstością kołową  $\omega_{\text{wym}}$ . Amplituda zmian prędkości  $v_m$  układu jest największa, gdy spełniony jest warunek **rezonansu**

$$\omega_{\text{wym}} = \omega. \quad (16.44)$$

Również amplituda drgań  $x_m$  układu jest wtedy (w przybliżeniu) największa.

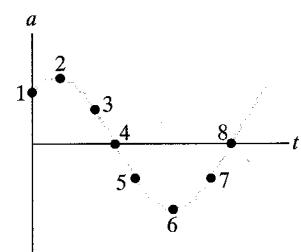
## Pytania

1. Która z poniższych zależności między przyspieszeniem  $a$  i przemieszczeniem  $x$  cząstki związana jest z ruchem harmonicznym: a)  $a = 0,5x$ , b)  $a = 400x^2$ , c)  $a = -20x$ , d)  $a = -3x^2$ ?

2. Mamy ruch harmoniczny opisany wzorem  $x = (2 \text{ m}) \cos(5t)$ . Jeżeli chcemy wyznaczyć prędkość w chwili  $t = 2 \text{ s}$ , to powinniśmy podstawić wartość  $t$ , a następnie zróżniczkować względem czasu, czy też odwrotnie?

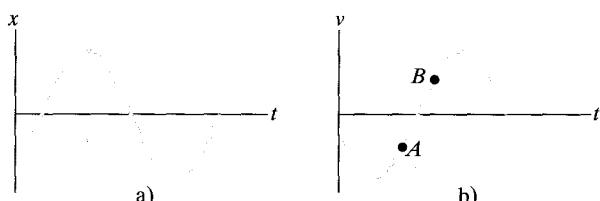
3. Na rysunku 16.18 wykreślono przyspieszenie  $a(t)$  ciała wykonującego ruch harmoniczny. a) Który z zaznaczonych punktów od-

powiada ciału znajdującemu się punkcie  $-x_m$ ? b) Jaka prędkość ciała odpowiada punktowi 4: dodatnia, ujemna, czy równa zeru? c) Jakie położenie ciała odpowiada punktowi 5: w punkcie  $-x_m$ , w punkcie  $+x_m$ , w punkcie zero, w przedziale od  $-x_m$  do zera, w przedziale od zera do  $+x_m$ ?



Rys. 16.18. Pytanie 3

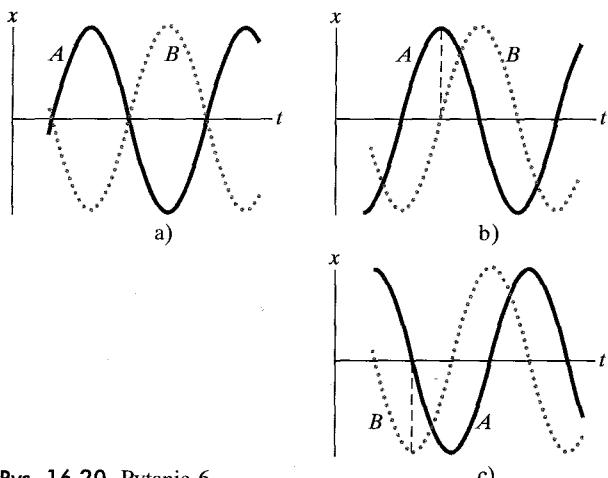
4. Który z poniższych warunków dla  $\phi$  odpowiada ruchowi harmonijnemu przedstawionemu na rysunku 16.19a: a)  $\pi < \phi < -\pi/2$ , b)  $\pi < \phi < 3\pi/2$ , c)  $-3\pi/2 < \phi < -\pi$ ?



Rys. 16.19. Pytanie 4 i 5

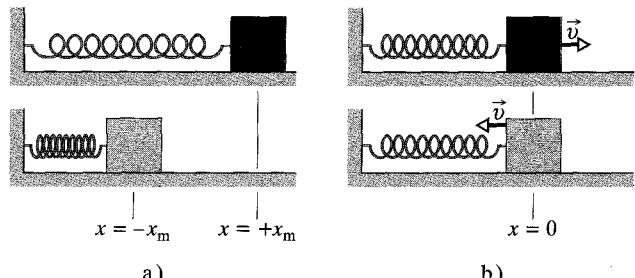
5. Na rysunku 16.19b wykreślono prędkość  $v(t)$  ciała wykonującego ruch harmoniczny. Czy a) punkt A i b) punkt B na wykresie odpowiada sytuacji, w której ciało jest chwilowo nieruchome, porusza się w kierunku  $-x_m$ , czy też porusza się w kierunku  $+x_m$ ? Gdzie znajduje się ciało, gdy jego prędkość ma wartość c) z punktu A i d) z punktu B na wykresie: w punkcie  $-x_m$ , w punkcie  $+x_m$ , w punkcie 0, w przedziale od  $-x_m$  do zera, czy też w przedziale od zera do  $+x_m$ ? W jaki sposób zmienia się prędkość ciała o wartości e) z punktu A i f) z punktu B na wykresie — rośnie czy maleje?

6. Na rysunku 16.20 przedstawiono — dla trzech przypadków — zależność przemieszczenia od czasu  $x(t)$  dla dwóch identycznych oscylatorów harmonicznych (A i B), różniących się jedynie fazą drgań. Dla każdego przypadku podaj kąt (w radianach i w stopniach), o jaki należy przesunąć krzywą A, aby nałożyła się na krzywą B. Z wielu możliwych odpowiedzi wybierz przesunięcie o najmniejszej wartości bezwzględnej.



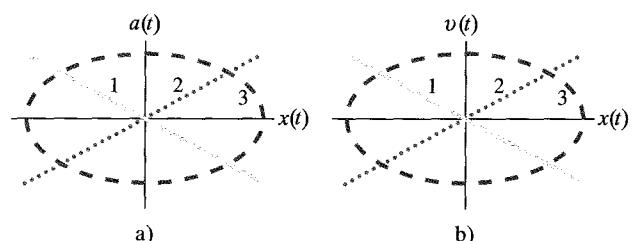
Rys. 16.20. Pytanie 6

7. Na rysunku 16.21a i b przedstawiono chwilowe położenia (w tej samej chwili) czterech oscylatorów liniowych o jednakowych masach i stałych sprężystości. Podaj różnicę faz drgań dwóch oscylatorów przedstawionych a) na rysunku 16.21a oraz b) na rysunku 16.21b. c) Podaj różnicę faz drgań oscylatora czerwonego z rysunku 16.21a i zielonego z rysunku 16.21b.



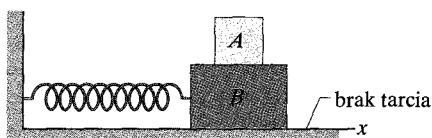
Rys. 16.21. Pytanie 7

8. a) Któża z krzywych na rysunku 16.22a przedstawia zależność przyspieszenia  $a(t)$  od przemieszczenia  $x(t)$  dla ruchu harmonijnego? b) Któża z krzywych na rysunku 16.22b przedstawia zależność prędkości  $v(t)$  od przemieszczenia  $x(t)$  dla ruchu harmonijnego?



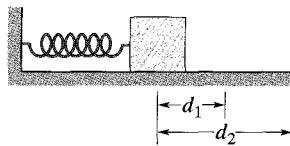
Rys. 16.22. Pytanie 8

9. Na rysunku 16.23 przedstawiono mały klocek A umieszczony na dużym klocku B, przy czym między klockami występuje tarcie statyczne. Klocek B, leżący na powierzchni, po której może poruszać się bez tarcia, znajduje się początkowo w punkcie  $x = 0$ , odpowiadającym długości nieodkształconej sprężyny. Odciągamy klocek na odległość  $d$  w prawo i puszczamy swobodnie. Gdy układ klocek-sprężyna wykonuje drgania harmoniczne o amplitudzie  $x_m$ , klocek A jest na granicy poślizgu względem B. a) Czy przyspieszenie klocka A jest stałe, czy zmienne? b) Czy wartość siły tarcia przyspieszającej klocek A jest stała, czy zmieniona? c) Czy poślizg klocka A jest bardziej prawdopodobny w punkcie  $x = 0$ , czy też w punktach  $x = \pm x_m$ ? d) Gdyby ruch harmoniczny rozpoczął się przy początkowym przemieszczeniu większym niż  $d$ , to czy poślizg byłby bardziej, czy też mniej prawdopodobny? (Rozgrzewka przed zadaniem 16).



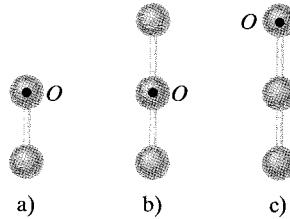
Rys. 16.23. Pytanie 9

**10.** Przedstawiony na rysunku 16.24 układ klocek–sprężyna dwukrotnie wprawiono w ruch harmoniczny. Za pierwszym razem klocek odciągnięto z położenia równowagi na odległość  $d_1$  i puszczone swobodnie. Za drugim razem klocek odciągnięto z położenia równowagi na większą odległość  $d_2$  i również puszczone swobodnie. Czy w drugim przypadku: a) amplituda, b) okres, c) częstotliwość, d) maksymalna energia kinetyczna oraz e) maksymalna energia potencjalna były większe, mniejsze niż w pierwszym?



Rys. 16.24. Pytanie 10

**11.** Na rysunku 16.25 przedstawiono trzy wahadła fizyczne zbudowane z jednakowych jednorodnych kul o takich samych masach połączonych sztywno identycznymi pretami o znikomo małej mase. Każde wahadło wisi pionowo i może drgać względem punktu zawieszenia  $O$ . Uszereguj wahadła w kolejności okresów ich drgań, poczynając od największego.



Rys. 16.25. Pytanie 11

## Zadania

WWW Rozwiążanie jest dostępne na stronie internetowej podręcznika: <http://www.wiley.com/college/hrw>

ILW Rozwiążanie jest dostępne w postaci interaktywnej, wykorzystującej oprogramowanie Interactive Learning-Ware (na tej samej stronie)

### 16.3 Siła w ruchu harmonicznym

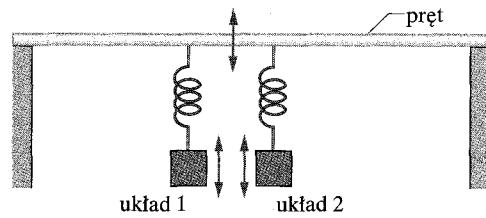
**1.** Ciało drgające ruchem harmonicznym potrzebuje 0,25 s na przejście z punktu, w którym ma zerową prędkość, do następnego takiego punktu. Odległość między tymi punktami jest równa 36 cm. Wyznacz: a) okres, b) częstotliwość i c) amplitudę drgań.

**2.** Drgający układ klocek–sprężyna po upływie 0,75 s rozpoczyna powtarzanie swojego ruchu. Wyznacz: a) okres, b) częstotliwość w hercach oraz c) częstotliwość kołową w radianach na sekundę.

**3.** Oszylator ma postać klocka o masie 0,5 kg umocowanego na sprężynie. Po wprawieniu w drgania o amplitudzie 35 cm oszylator powtarza swój ruch co 0,5 s. Wyznacz: a) okres, b) częstotliwość, c) częstotliwość kołową, d) stałą sprężystości, e) maksymalną prędkość oraz f) wartość maksymalnej siły, jaką sprężyna wywiera na klocek.

**12.** Uzupełnienie do zadania 36. Gdyby prędkość pocisku była większa, to czy: a) amplituda, b) okres i c) maksymalna energia potencjalna, charakteryzujące otrzymany ruch harmoniczny, byłyby większe, mniejsze, czy też takie same?

**13.** Masz zbudować przedstawione na rysunku 16.26 urządzenie do przekazywania drgań. Składa się ono z dwóch układów sprężyna–klocek zawieszonych na giętkim precie. Po rozciagnięciu i puszczeniu swobodnie sprężyny w układzie 1 powstałe drgania harmoniczne tego układu o częstotliwości  $v_1$  wywołują drgania preta. Z kolei preć jest źródłem siły wymuszającej działającej z taką samą częstotliwością  $v_1$  na układ 2. Mamy do wyboru cztery sprężyny o stałych sprężystości  $k$  równych 1600 N/m, 1500 N/m, 1400 N/m i 1200 N/m oraz cztery klocki o masach 800 kg, 500 kg, 400 kg i 200 kg. Zastanów się, które sprężyny i które klocki należy wykorzystać w obu układach, aby uzyskać maksymalną amplitudę drgań układu 2. Podaj odpowiedź bez wykonywania obliczeń.



Rys. 16.26. Pytanie 13

**4.** Wyznacz maksymalne przyspieszenie platformy drgającej z amplitudą 2,2 cm i częstotliwością 6,6 Hz.

**5.** Głośnik wytwarza dźwięk za pomocą drgającej membrany. Amplituda drgań jest nie większa niż  $1 \cdot 10^{-3}$  mm. Dla jakich częstotliwości wartość przyspieszenia membrany przekracza wartość  $g$ ?

**6.** Skala wagi sprężynowej o zakresie pomiarowym od 0 do 15 kg ma 12 cm długości. Stwierdzono, że paczka zawieszona na wadze drga z częstotliwością 2 Hz. a) Wyznacz stałą sprężystości. b) Określ, ile waży paczka.

**7.** Cząstka o masie  $1 \cdot 10^{-20}$  kg drga ruchem harmonicznym z okresem  $1 \cdot 10^{-5}$  s i maksymalną prędkością  $1 \cdot 10^3$  m/s. Oblicz a) częstotliwość kołową oraz b) maksymalne przemieszczenie cząstki.

**8.** Małe ciało o masie 0,12 kg drga ruchem harmonicznym o amplitudzie 8,5 cm i okresie 0,2 s. a) Wyznacz wartość maksymalnej siły działającej na ciało. b) Zakładając, że drgania wywołane są przez sprężynę, oblicz jej stałą sprężystości.

**9.** Ostrze golarki elektrycznej porusza się tam i z powrotem ruchem harmonicznym z częstotliwością 120 Hz, pokonując dystans 2 mm. Znajdź: a) amplitudę, b) maksymalną prędkość ostrza oraz c) wartość maksymalnego przyspieszenia ostrza.

**10.** Membrana głośnika wykonuje drgania harmoniczne o częstotliwości 440 Hz i maksymalnym przemieszczeniu 0,75 mm. Wyznacz: a) częstotliwość kołową, b) maksymalną prędkość oraz c) wartość maksymalnego przyspieszenia.

**11.** Gdy rozważamy drgania pionowe samochodu, możemy przyjąć, że samochód stoi na czterech identycznych sprężynach. W pewnym samochodzie sprężyny zostały wyregulowane w taki sposób, by drgania miały częstotliwość 3 Hz. a) Wyznacz stałą sprężystości każdej sprężyny, wiedząc, że masa samochodu wynosi 1450 kg i jest równo rozłożona na wszystkie sprężyny. b) Oblicz, jaka będzie częstotliwość drgań, gdy do samochodu wsiądzie 5 pasażerów o średniej masie 73 kg. (Ponownie zakładamy równomierny rozkład masy).

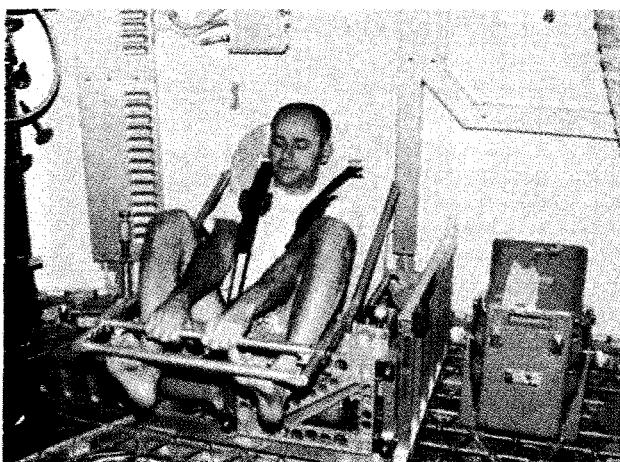
**12.** Ciało dąga ruchem harmonicznym opisany wzorem

$$x = (6 \text{ m}) \cos[(3\pi \text{ rad/s})t + \pi/3 \text{ rad}].$$

Dla czasu  $t = 2$  s wyznacz: a) przemieszczenie, b) prędkość, c) przyspieszenie oraz d) fazę ruchu. Wyznacz również e) częstotliwość f) okres drgań.

**13.** Skok tłoka (równy dwóm amplitudom) w cylindrach silnika lokomotywy wynosi 0,76 m. Zakładając, że tłok porusza się ruchem harmonicznym z częstotliwością kołową 180 obrotów/min, wyznacz maksymalną prędkość tłoka.

**14.** Na rysunku 16.27 przedstawiono astronautę na stanowisku do pomiaru masy ciała (ang. *body-mass measuring device*, w skrócie BMMD). Urządzenie zostało zaprojektowane do użytku na pokładzie statków kosmicznych w celu umożliwienia astronautom pomiaru masy ich ciała w warunkach „nieważkości” na orbicie okoloziemskiej. BMMD to po prostu fotel zawieszony na sprężynach — astronauta, siedząc w fotelu, mierzy okres swoich drgań, a następnie oblicza masę, korzystając ze wzoru na okres drgań układu klocek-sprzęzyna. a) Zakładając, że  $M$  jest masą astronauty, a  $m$  — efektywną masą tej części urządzenia, która również wykonuje



Rys. 16.27. Zadanie 14

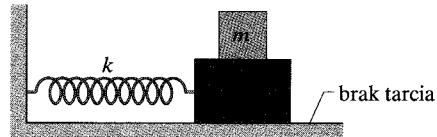
drgania, wykaż, iż

$$M = (k/4\pi^2)T^2 - m,$$

gdzie  $T$  — okres drgań,  $k$  — stała sprężystości. b) W urządzeniu BMMD zainstalowanym na stacji kosmicznej Skylab (Skylab Mission Two) stała sprężystości wynosiła  $k = 605,6 \text{ N/m}$ ; okres drgań samego fotela był równy  $0,90149 \text{ s}$ . Oblicz efektywną masę fotela. c) Po zajęciu fotela przez astronautę okres drgań stał się równy  $2,08832 \text{ s}$ . Wyznacz masę astronauty.

**15.** W pewnym porcie powierzchnia oceanu na skutek płynów podnosi się i opada ruchem harmonicznym o okresie  $12,5 \text{ h}$ ; odległość między najwyższym a najniższym poziomem wynosi  $d$ . Ile czasu potrzeba, by woda opadła do poziomu leżącego  $d/4$  poniżej maksimum?

**16.** Układ złożony z dwóch klocków ( $m = 1 \text{ kg}$  i  $M = 10 \text{ kg}$ ) i sprężyny ( $k = 200 \text{ N/m}$ ) ustawiono na poziomej powierzchni, po której może poruszać się bez tarcia (rys. 16.28). Współczynnik tarcia statycznego między klockami wynosi 0,4. Wyznacz amplitudę ruchu harmonicznego układu, przy której mniejszy klocek znajdzie się na granicy poślizgu po powierzchni dużego klocka.



Rys. 16.28. Zadanie 16

**17.** Klocek znajduje się na poziomej powierzchni, która porusza się poziomo tam i z powrotem ruchem harmonicznym o częstotliwości 2 Hz. Współczynnik tarcia statycznego między klokiem a podłożem wynosi 0,5. Wyznacz największą amplitudę ruchu harmonicznego, przy której klocek nie będzie się ślizgał po podłożu.

**18.** Na tłoku poruszającym się pionowo ruchem harmonicznym umieszczone klocek. a) Zakładając, że okres drgań harmonicznych wynosi 1 s, oblicz, przy jakiej ich amplitudzie klocek i tłok rozdzielą się. b) Zakładając, że amplituda drgań tłoka wynosi 5 cm, wyznacz maksymalną częstotliwość, przy której klocek i tłok będą cały czas się stykać.

**19.** Oszylator ma postać klocka umocowanego na sprężynie ( $k = 400 \text{ N/m}$ ). W pewnej chwili  $t$  położenie klocka (mierzone względem położenia równowagi układu), jego prędkość i przyspieszenie wynoszą odpowiednio  $x = 0,1 \text{ m}$ ,  $v = -13,6 \text{ m/s}$ ,  $a = -123 \text{ m/s}^2$ . Oblicz: a) częstotliwość drgań, b) masę klocka oraz c) amplitudę drgań.

**20.** Oszylator harmoniczny ma postać klocka o masie 2 kg umocowanego na sprężynie o stałej sprężystości 100 N/m. W chwili  $t = 1 \text{ s}$  położenie i prędkość klocka wynoszą odpowiednio  $x = 0,129 \text{ m}$ ,  $v = 3,415 \text{ m/s}$ . a) Wyznacz amplitudę drgań. Oblicz: b) położenie i c) prędkość klocka w chwili  $t = 0 \text{ s}$ .

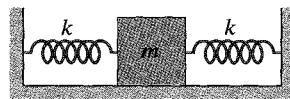
**21.** Z sufitu zwisa sprężyna o znikomo małej masie, na której zawieszono małe ciało. Początkowo ciało utrzymywane jest w spoczynku w takim położeniu  $y_{\text{pocz}}$ , aby długość sprężyny była równa długości sprężyny nieodkształconej. Następnie ciało zostaje uwolnione z położenia  $y_{\text{pocz}}$  i zaczyna drgać w górę i w dół, przy czym jego najniższe położenie znajduje się 10 cm poniżej  $y_{\text{pocz}}$ . a) Wyznacz częstotliwość drgań. b) Wyznacz prędkość ciała, gdy znajduje się ono 8 cm poniżej położenia początkowego. c) Do pierwszego ciała doczepiono drugie o masie 300 g, w wyniku czego układ drga z częstotliwością równą połowie pierwotnej częstotliwości. Wyznacz masę pierwszego ciała. d) Wyznacz nowe położenie równowagi układu (względem  $y_{\text{pocz}}$ ) w sytuacji, gdy do sprężyny doczepione są obydwa ciała.

**22.** Dwie części wykonyują ruch harmoniczny o takich samych częstotliwościach i amplitudach wzdłuż bliskich równoległych linii. Części mijają się (poruszając się w przeciwnych kierunkach) za każdym razem, gdy ich położenie jest równe połowie amplitudy drgań. Wyznacz różnicę faz drgań obu częściek.

**23.** Dwie części poruszają się ruchem harmonicznym wzdłuż wspólnego odcinka prostej o długości  $A$ . Okres drgań każdej części wynosi 1,5 s, ale ich drgania różnią się w fazie o  $\pi/6$  rad. a) Wyznacz odległość między częściami (w jednostkach  $A$ ) po upływie 0,5 s od momentu, gdy „opóźniona” częstka opuści jeden z końców jej toru. b) Określ, czy części będą się wówczas poruszały w tym samym kierunku, zbliżały do siebie, czy też oddalały od siebie.

**24.** Dwie identyczne sprężyny o stałych sprężystości  $k$  umocowano do klocka o masie  $m$  oraz do sztywnych podpór (rys. 16.29). Wykaż, że częstotliwość drgań klocka leżącego na podłóżu, po którym może poruszać się bez tarcia, dana jest wzorem

$$v = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{2k}{m}}.$$



Rys. 16.29. Zadania 24 i 25

**25.** Założmy, że dwie sprężyny z rysunku 16.29 mają różne stałe sprężystości, równe odpowiednio  $k_1$  i  $k_2$ . Udowodnij, że częstotliwość drgań klocka dana jest wzorem

$$v = \sqrt{v_1^2 + v_2^2},$$

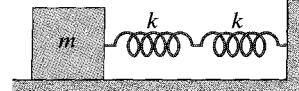
gdzie  $v_1$  i  $v_2$  — częstotliwości, z jakimi by drgał klocek, gdyby był przyczepiony tylko do sprężyny 1 lub tylko do sprężyny 2.

**26.** Koniec jednego z ramion kamertonu wykonuje drgania harmoniczne o częstotliwości 1000 Hz i amplitudzie 0,4 mm. Wyznacz: a) wartość maksymalnego przyspieszenia i b) maksymalnej prędkości końca ramienia. Wyznacz: c) wartość przyspieszenia i d) prędkości końca ramienia w chwili, gdy jest on wychylone o 0,2 mm.

**27.** Dwie sprężyny połączono ze sobą i przyczepiono do klocka o masie  $m$  znajdującego się na gładkiej powierzchni, po której może poruszać się bez tarcia (rys. 16.30). Obie sprężyny mają

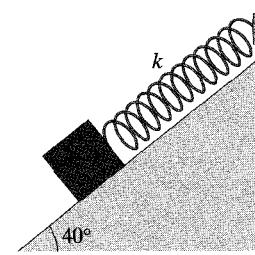
jednakowe stałe sprężystości  $k$ . Wykaż, że częstotliwość drgań klocka dana jest wzorem

$$v = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{2m}}.$$



Rys. 16.30. Zadanie 27

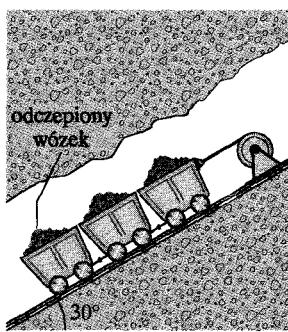
**28.** Kloczek o ciężarze 14 N ślizgający się bez tarcia po równi pochyłej nachylonej pod kątem  $40^\circ$  umocowano do górnego końca równi za pomocą sprężyny o znikomo małej masie i stałej sprężystości 120 N/m, która w stanie nieodkształconym ma długość 0,45 m (rys. 16.31). a) W jakiej odległości od górnego końca równi klocek pozostaje w spoczynku? b) Kloczek został lekko pociągnięty w dół wzdłuż równi, a następnie puszczyony swobodnie. Wyznacz okres powstałych drgań.



Rys. 16.31. Zadanie 28

**29.** Jednorodną sprężynę o stałej sprężystości  $k$ , która w stanie nieodkształconym ma długość  $L$ , przecięto na dwie części o długościach  $L_1$  i  $L_2$ , przy czym  $L_1 = nL_2$ . Wyznacz stałe sprężystości a)  $k_1$  oraz b)  $k_2$  obu otrzymanych w ten sposób sprężyn jako funkcje  $n$  i  $k$ . Kloczek przyczepiony do pierwotnej sprężyny, tak jak na rysunku 16.5, drga z częstotliwością  $v$ . Jeżeli sprężynę zastąpimy jednym z jej kawałków o długości  $L_1$  lub  $L_2$ , to częstotliwość drgań będzie odpowiednio równa  $v_1$  i  $v_2$ . Wyznacz zależności częstotliwości c)  $v_1$  i d)  $v_2$  od  $v$ .

**30.** Na rysunku 16.32 przedstawiono trzy wózki kopalniane o masach 10 000 kg utrzymywane w spoczynku w nachylonej pod kątem  $30^\circ$  do poziomu sztolni za pomocą liny (równoległej do sztolni). Lina jest rozciągnięta o 15 cm. W pewnej chwili połączenie dwóch ostatnich wózków pęka i uwalnia ostatni wózek. Zakładając, że lina podlega prawu Hooke'a, wyznacz a) częstotliwość i b) amplitudę pojawiących się w tej sytuacji drgań dwóch pozostałych wózków.



Rys. 16.32. Zadanie 30

## 16.4 Energia w ruchu harmonicznym

**31.** Wyznacz energię mechaniczną układu klocek-sprężyna, wiedząc, że stała sprężystości wynosi 1,3 N/cm, a amplituda drgań 2,4 cm.

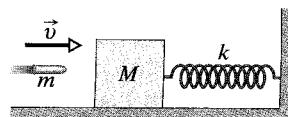
**32.** W drgającym układzie klocków–sprężyna energia mechaniczna wynosi 1 J, amplituda 10 cm, a maksymalna prędkość 1,2 m/s. Wyznacz: a) stałą sprężystości, b) masę klocka oraz c) częstotliwość drgań.

**33.** Znajdujące się na poziomej idealnie gładkiej powierzchni ciało o masie 5 kg doczepiono do sprężyny o stałej sprężystości 1000 N/m. Ciało odsunięto poziomo od położenia równowagi na odległość 50 cm i nadano mu prędkość początkową 10 m/s w kierunku położenia równowagi. Wyznacz: a) częstotliwość ruchu, b) początkową energię potencjalną układu ciało–sprężyna, c) początkową energię kinetyczną oraz d) amplitudę drgań.

**34.** Wyobraź sobie, że zbudowano gigantyczną katapultę w celu wyrzucenia pocisku o masie 130 g z prędkością wystarczającą do opuszczenia Ziemi (11,2 km/s). Katapultę naciągnięto o 1,5 m. Załóż, że dla tej katapulty spełnione jest prawo Hooke'a. a) Wyznacz stałą sprężystości urządzenia, zakładając, że cała energia potencjalna sprężystości zostaje przekształcona w energię kinetyczną pocisku. b) Załóż, że jeden człowiek może działać siłą 220 N. Ile osób potrzeba do naciągnięcia katapulty?

**35.** Pionowa sprężyna rozciągnęła się o 9,6 cm po zawieszeniu na jej końcu klocka o masie 1,3 kg. a) Oblicz stałą sprężystości. Następnie klocek został przemieszczony o dalsze 5 cm w dół i puszczyony swobodnie. Wyznacz: b) okres, c) częstotliwość, d) amplitudę powstały drgań oraz e) maksymalną prędkość drgającego klocka.

**36.** Klocek o masie  $M$  spoczywający na poziomym idealnie gładkim stole umocowany jest do sztywnego wspornika za pośrednictwem sprężyny o stałej sprężystości  $k$ . W klocek uderza pocisk o masie  $m$  i prędkością  $\vec{v}$ , jak przedstawiono na rysunku 16.33 i grzęźnie w nim. Określ: a) prędkość klocka natychmiast po zderzeniu oraz b) amplitudę powstały drgań harmonicznych.



Rys. 16.33. Zadanie 36

**37.** Określ, jaka część całkowitej energii ma postać a) energii kinetycznej, a jaka b) energii potencjalnej, gdy przemieszczenie w ruchu harmonicznym jest równe połowie amplitudy  $x_m$ . c) Znajdź przemieszczenie, przy którym energia układu jest równo podzielona między energię kinetyczną i potencjalną; wyraż je w postaci ułamka amplitudy.

**38.** Cząstka o masie 10 g wykonuje drgania harmoniczne o amplitudzie  $2 \cdot 10^{-3}$  m i maksymalnej wartości przyspieszenia  $8 \cdot 10^3$  m/s<sup>2</sup>. Faza początkowa wynosi  $-\pi/3$  rad. a) Podaj wzór przedstawiający siłę działającą na cząstkę jako funkcję czasu. b) Wyznacz okres ruchu. c) Wyznacz maksymalną prędkość cząstki. d) Wyznacz całkowitą energię mechaniczną tego prostego oscylatora harmonicznego.

**39\*.** Klocek o masie 4 kg zawieszono na sprężynie o stałej sprężystości 500 N/m. W klocek pionowo od dołu z prędkością 150

m/s uderza pocisk o masie 50 g i grzęźnie w nim. a) Wyznacz amplitudę powstały drgań harmonicznych. b) Oblicz, jaka część początkowej energii kinetycznej pocisku zamienia się w energię mechaniczną oscylatora harmonicznego.

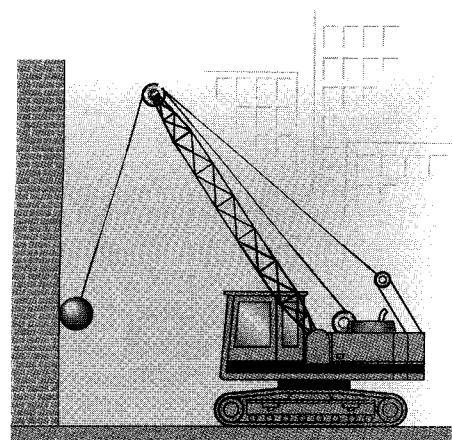
## 16.5 Wahadło torsyjne

**40.** Płaski jednorodny krążek o masie 3 kg i promieniu 70 cm zawieszono w płaszczyźnie poziomej na umocowanym w jego środku pionowym drucie. Krążek obrócono o kąt 2,5 rad wokół pionowej osi; do utrzymania tej orientacji krążka potrzebny jest moment siły 0,06 N·m. Oblicz: a) moment bezwładności krążka względem drutu, b) moment kierujący oraz c) częstotliwość kołową drgań, jakie można wzbudzić w tym wahadle torsyjnym.

**41.** Balans w zegarku drga z amplitudą zmian kąta równą  $\pi$  rad i okresem 0,5 s. Wyznacz: a) maksymalną prędkość kątową balansu, b) prędkość kątową balansu w chwili, gdy jego przemieszczenie równe jest  $\pi/2$  rad, oraz c) wartość przyspieszenia kątowego balansu w chwili, gdy przemieszczenie równe jest  $\pi/4$  rad.

## 16.6 Wahadło

**42.** Kula burząca o masie 2500 kg zwisa z końca ramienia dźwigu (rys. 16.34). Długość wahającego się odcinka liny wynosi 17 m. a) Wyznacz okres wahania, zakładając, iż cały układ można uznać za wahadło matematyczne. b) Czy okres wahania zależy od masy kuli?



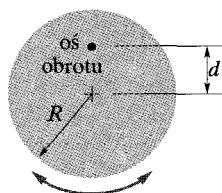
Rys. 16.34. Zadanie 42

**43.** Jaka jest długość wahadła sekundowego, które wykonuje pełne wahnięcie z lewa na prawo i z powrotem w ciągu 2 s?

**44.** Akrobata siedzący na trapezie wykonuje wahania tam i z powrotem z okresem 8,85 s. Jeżeli wstanie, to środek masy układu trapez–akrobata podniesie się o 35 cm. Jaki będzie wówczas okres drgań układu? Potraktuj układ trapez–akrobata jako wahadło matematyczne.

45. Wahadło fizyczne ma postać metrowej linijki zawieszonej na osi umieszczonej w małym otworku wywierconym w odległości  $d$  od kreski oznaczającej 50 cm. Okres drgań wynosi 2,5 s. Wyznacz  $d$ .

46. Wahadło fizyczne ma postać jednorodnego krążka (o masie  $M$  i promieniu  $R$ ) zawieszzonego w płaszczyźnie pionowej w taki sposób, że oś obrotu znajduje się w odległości  $d$  od środka krążka (rys. 16.35). Krążek odchyliono o niewielki kąt i puszczeno swobodnie. Znajdź wyrażenie na okres powstały drgań harmonicznych.

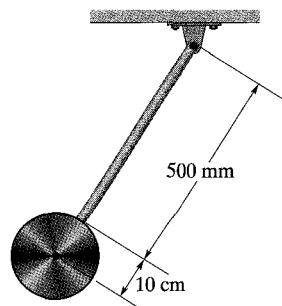


Rys. 16.35. Zadanie 46

47. Wahadło ma postać długiego, cienkiego pręta o długości  $L$  i masie  $m$ , zawieszzonego w punkcie znajdującym się w odległości  $d$  powyżej środka pręta. a) Zakładając wahania o małej amplitudzie, wyraź okres drgań wahadła za pomocą wielkości  $d$ ,  $L$  i  $m$ . Jak zmieni się okres, gdy: b) zmniejszymy  $d$ , c) zwiększymy  $L$  lub d) zwiększymy  $m$ ?

48. Jednorodny krążek o promieniu  $R$  równym 12,5 cm zawieszono za punkt na jego brzegu, tworząc w ten sposób wahadło fizyczne. a) Wyznacz okres drgań. b) W jakiej odległości  $r < R$  od środka krążka znajduje się punkt zawieszenia dający taki sam okres?

49. Wahadło składa się z jednorodnego krążka, o promieniu 10 cm i masie 500 g, i jednorodnego pręta o długości 500 mm i masie 270 g (rys. 16.36). a) Oblicz moment bezwładności wahadła względem punktu zawieszenia. b) Wyznacz odległość między punktem zawieszenia a środkiem masy wahadła. c) Oblicz okres drgań wahadła.

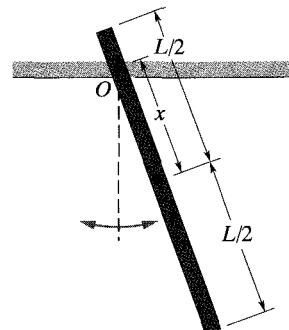


Rys. 16.36. Zadanie 49

50. a) Jaki będzie okres drgań wahadła z przykładu 16.5, jeżeli je odwróciemy i podwiesimy w punkcie  $P$ ? b) Czy ten okres drgań będzie większy, mniejszy, czy też równy poprzedniemu?

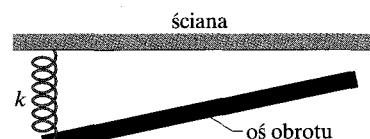
51. W przykładzie 16.5 pokazaliśmy, że środek wahadła fizycznego znajduje się w odległości  $2L/3$  od punktu zawieszenia. Udowodnij, że dla wahadła fizycznego o dowolnym kształcie odległość punktu zawieszenia od środka wahadła jest równa  $I/mh$ , gdzie symbole  $I$  i  $h$  mają to samo znaczenie co w wyrażeniu (16.29), a  $m$  jest masą wahadła.

52. Wahadło fizyczne w postaci linijki o długości  $L$  obraca się względem punktu zawieszenia  $O$  (rys. 16.37). a) Wyprowadź wyrażenie na okres drgań wahadła jako funkcji długości  $L$  oraz odległości  $x$  punktu podwieszenia od środka masy wahadła. b) Dla jakiej wartości stosunku  $x/L$  okres drgań osiąga minimum? c) Wykaż, że dla  $L = 1$  m i  $g = 9,8 \text{ m/s}^2$  minimalny okres wynosi 1,53 s.



Rys. 16.37. Zadanie 52

53. Długi jednorodny pręt o długości  $L$  i masie  $m$  może się obracać w płaszczyźnie poziomej wokół pionowej osi przechodzącej przez jego środek (rysunek 16.38 przedstawia widok z góry). Sprężynę o stałej sprężystości  $k$  umieszczono poziomo między końcem pręta a nieruchomą ścianą. W stanie równowagi pręt jest równoległy do ściany. Wyznacz okres małych drgań, jakie powstaną, gdy pręt nieco obróciemy, a następnie puścimy swobodnie.



Rys. 16.38. Zadanie 53

54. Wahadło matematyczne o długości  $L$  i masie  $m$  zawieszono w samochodzie poruszającym się ze stałą prędkością  $v$  po okręgu o promieniu  $R$ . Zakładając, że wahadło wykonuje małe drgania w kierunku radialnym względem położenia równowagi, wyznacz częstość tych drgań.

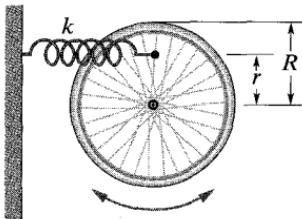
55. Wyznacz częstość wahadła matematycznego o długości 2 m: a) w pokoju, b) w windzie jadącej do góry z przyspieszeniem  $2 \text{ m/s}^2$ , c) podczas swobodnego spadania.

56. Dla wahadła matematycznego wyznacz amplitudę zmian kąta  $\theta_m$ , dla której rzeczywisty moment siły różni się o 1% od momentu siły, dla którego ruch wahadła można uznać za harmoniczny. (Patrz rozwinięcia funkcji w szeregi potęgowe w dodatku E).

57. Ciężarek wahadła matematycznego o długości  $R$  porusza się po łuku okręgu. a) Przyjmując, że przyspieszenie dośrodkowe ciężarka w chwili, gdy przechodzi on przez położenie równowagi, jest takie jak w ruchu jednostajnym po okręgu, tzn.  $v^2/R$ , wykaż, że naprężenie nici w tym położeniu jest równe  $mg(1 + \theta_m^2)$ , o ile amplituda zmian kąta  $\theta_m$  jest mała. (Patrz rozwinięcia funkcji w szeregi potęgowe w dodatku E). b) Jakie jest naprężenie nici, gdy ciężarek znajduje się w innym położeniu — większe, mniejsze czy takie samo?

**58.** Koło może się obracać wokół swojej sztywno umocowanej osi. Do jednej ze szprych koła umocowano sprężynę w odległości  $r$  od jego osi (rys. 16.39).

a) Zakładając, że koło jest obręczą o masie  $m$  i promieniu  $R$ , wyznacz częstotliwość kołową małych drgań układu jako funkcję  $m$ ,  $R$ ,  $r$  oraz stałej sprężystości  $k$ . Jak zmieni się uzyskany wynik, jeżeli b)  $r = R$  i c)  $r = 0$ ?



Rys. 16.39. Zadanie 58

## 16.8 Ruch harmoniczny tłumiony

**59.** Dla układu opisanego w przykładzie 16.7 wyznacz stosunek amplitudy drgań tłumionych po wykonaniu 20 pełnych drgań do amplitudy początkowej.

**60.** Amplituda słabo tłumionego oscylatora maleje w każdym cyklu drgań o 3%. Jaka część energii mechanicznej tracona jest w każdym cyklu drgań?

**61.** W układzie przedstawionym na rysunku 16.15 masa klocka wynosi 1,5 kg, a stała sprężystości 8 N/m. Siłę tłumiącą opisuje wyraz  $-b(dx/dt)$ , gdzie  $b = 230$  g/s. Założ, że początkowo klocek został pociągnięty w dół na odległość 12 cm i puszczyony swobodnie. a) Wyznacz czas, po którym amplituda drgań spadnie do jednej trzeciej wartości początkowej. b) Ile okresów drgań klocek wykona w tym czasie?

**62.** Wyobraź sobie, że badamy właściwości oscylacyjne układu zawieszenia w samochodzie o masie 2000 kg. Zawieszenie obciążone całym samochodem „siada” o 10 cm, a amplituda drgań zmniejsza się o 50% w ciągu jednego cyklu. Wyznacz: a) stałą sprężystości resorów  $k$  i b) stałą tłumienia amortyzatorów  $b$  dla jednego koła, zakładając, że na każde koło przypada 500 kg masy samochodu.

## 16.9 Drgania wymuszone i rezonans

**63.** Załóż, że amplituda drgań  $x_m$  w wyrażeniu (16.43) dana jest wzorem

$$x_m = \frac{F_m}{[m^2(\omega_{\text{wym}}^2 - \omega^2)^2 + b^2\omega_{\text{wym}}^2]^{1/2}},$$

gdzie  $F_m$  jest (stałą) amplitudą zewnętrzną siły działającej na sprężynę poprzez jej sztywne zawieszenie (rys. 16.15). Wyznacz: a) amplitudę drgań i b) amplitudę zmian prędkości drgającego ciała w rezonansie.

**64.** Po nierównie wyboistej drodze typu „tarka”, której pofałdowania odległe są od siebie o 4 m, jedzie — podskakując na resorach — samochód o masie 1000 kg wiozący cztery osoby o masach 82 kg każda. Samochód podskakuje z największą amplitudą przy prędkości 16 km/h. Następnie samochód zatrzymuje się i cztery osoby wysiadają. O ile samochód podniesie się na swym zawieszeniu na skutek zmniejszenia masy?

# 17 Fale I

Gdy chrząszcz idący po piasku znajdzie się w odległości kilkudziesięciu centymetrów od skorpiona, ten natychmiast odwraca się w kierunku chrząszcza i rzuca się na niego (aby go zjeść). Skorpion może to zrobić, ani nie widząc (jest zwierzęciem nocnym), ani nie słysząc chrząszcza.

**W jaki sposób skorpion jest w stanie tak precyzyjnie zlokalizować swoją ofiarę?**

Odpowiedź znajdziesz w tym rozdziale.



## 17.1. Fale i cząstki

Mamy dwa sposoby kontaktowania się z przyjacielem w innym mieście: możemy napisać list lub skorzystać z telefonu.

Pierwszy sposób (list) polega na wykorzystaniu jakichś *cząstek* — obiektów materialnych, które poruszają się z jednego punktu do drugiego, niosąc ze sobą informację i energię. W większości poprzednich rozdziałów zajmowaliśmy się cząstkami lub układami cząstek.

Drugi sposób (telefon) polega na wykorzystaniu *fal*, które będą tematem tego oraz następnego rozdziału. W przypadku fali informacja i energia przemieszczają się z jednego punktu do drugiego, mimo iż żaden obiekt materialny takiej podróży nie odbywa. Gdy rozmawiasz przez telefon, fala dźwiękowa niesie komunikat od naszych strun głosowych do słuchawki telefonicznej. Tutaj zadanie przejmują fale elektromagnetyczne, biegnące wzduż miedzianego drutu, światłowodu lub przez atmosferę, być może za pośrednictwem satelity telekomunikacyjnego. Na drugim końcu linii telefonicznej ponownie pojawia się fala dźwiękowa, biegnąca od słuchawki do ucha twojego przyjaciela. Odbiera on komunikat, mimo że nic, czego mógłby dotknąć, do niego nie dotarło. Leonardo da Vinci orientował się, o co tu chodzi, gdy pisał o falach na wodzie: „Często zdarza się, że fala ucieka z miejsca powstania, podczas gdy woda pozostaje, podobnie jest z falami, jakie wiatr wywołuje na polu zboża — widzimy fale biegnące przez pole, podczas gdy zboże pozostaje w miejscu”.

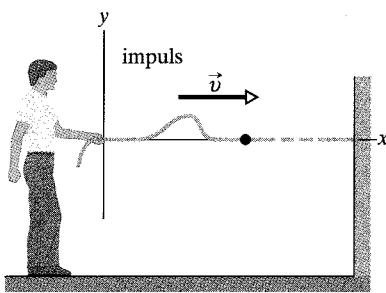
*Cząstka* i *fala* to dwa ważne pojęcia w fizyce klasycznej — wydaje się, że w każdym przypadku możemy powiedzieć, że coś jest albo cząstką, albo falą. Przy tym obydwa te pojęcia są zupełnie różne. Słowo *cząstka* oznacza małutkie skupienie materii zdolne do przenoszenia energii. Słowo *fala* oznacza coś wręcz przeciwnego, a mianowicie energię wypełniającą rozległy obszar w przestrzeni. Odłóżmy cząstki na razie na bok i zajmijmy się falami.

## 17.2. Rodzaje fal

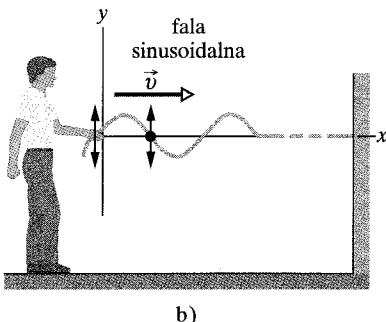
Wyróżniamy trzy główne rodzaje fal:

1. **Fale mechaniczne.** Jest to najbardziej znany rodzaj fal, ponieważ napotykamy je prawie zawsze — typowe przykłady to fale na wodzie, fale dźwiękowe lub fale sejsmiczne. Wszystkie te fale mają pewne wspólne cechy, a mianowicie podlegają zasadom Newtona i mogą istnieć wyłącznie w jakimś ośrodku materialnym: w wodzie, w powietrzu, w skale.
2. **Fale elektromagnetyczne.** Te fale są mniej znane, mimo iż stale się nimi posługujemy. Zaliczamy do nich światło widzialne i nadfioletowe, fale radiowe i telewizyjne, mikrofale, promieniowanie rentgenowskie oraz fale radarowe. Fale te nie potrzebują żadnego ośrodka materialnego. Na przykład fale świetlne emitowane przez gwiazdy docierają do nas przez próżnię kosmiczną. Wszystkie fale elektromagnetyczne poruszają się w próżni z tą samą prędkością  $c$  równą

$$c = 299\,792\,458 \text{ m/s} \quad (\text{prędkość światła}). \quad (17.1)$$



a)



b)

Rys. 17.1. a) Wzdłuż naciągniętej liny zostaje wysłany pojedynczy impuls. Typowy element liny (oznaczony kropką) w chwili, gdy mija go impuls, wykona jeden ruch w górę, a następnie w dół. Ruch elementu liny jest prostopadły do kierunku ruchu fali, tak więc impuls jest falą poprzeczną. b) Wzdłuż liny zostaje wysłana fala sinusoidalna. Podczas przechodzenia fali typowy element liny porusza się w sposób ciągły w górę i w dół. Ta fala również jest falą poprzeczną.

3. **Fale materii.** Pomimo że te fale są powszechnie wykorzystywane we współczesnej technice, są one ci prawdopodobnie nieznane. Są to fale związane z elektronami, protonami i innymi cząstkami elementarnymi, a nawet z atomami i cząsteczkami. Ponieważ te obiekty uważamy na ogół za składniki materii, fale te nazywamy falami materii.

Większość materiału omawianego w tym rozdziale dotyczy wszystkich rodzajów fal. Jednakże w przykładach będziemy odnosić się do fal mechanicznych.

### 17.3. Fale poprzeczne i podłużne

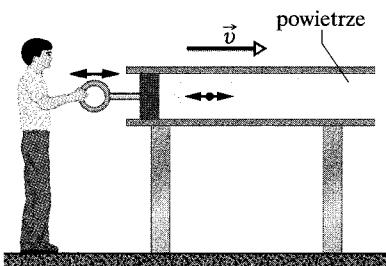
Fala wysłana wzdłuż rozpiętej naprężonej liny jest najprostszą falą mechaniczną. Jeżeli jeden koniec napiętej liny jednokrotnie szarpniesz pionowo w górę i w dół, pojawi się biegąca wzdłuż liny fala w postaci pojedynczego *impulu*, jak na rysunku 17.1a. Taki impuls i jego ruch mogą pojawić się dzięki temu, że lina jest napięta. Gdy szarpniesz swój koniec liny w górę, pociągnie on za sobą w górę sąsiedni fragment liny, a to dzięki siłom działającym między poszczególnymi fragmentami liny. Z kolei ten fragment, poruszając się w górę, pociągnie za sobą następny i tak dalej. Tymczasem zaczynasz ciągnąć swój koniec liny w dół. W efekcie kolejne poruszające się do góry fragmenty liny zaczynają być ciągnięte w dół przez sąsiednie fragmenty, które już się poruszają w tym kierunku. Ostatecznie zaburzenie kształtu liny (impuls) porusza się wzdłuż niej z pewną prędkością  $\vec{v}$ .

Jeżeli poruszasz ręką w górę i w dół w sposób ciągły ruchem harmonicznym, to wzdłuż liny z prędkością  $\vec{v}$  biegnie fala ciągła. Ponieważ ruch ręki opisany jest sinusoidalną funkcją czasu, w dowolnej chwili fala — jak widać z rysunku 17.1b — będzie miała kształt sinusoidalny; oznacza to, iż fala ma kształt sinusoid lub cosinusoidy.

Rozważamy tu wyłącznie „idealną” linię, w której nie działają żadne siły tarcia powodujące zanikanie fali podczas jej ruchu wzdłuż liny. Dodatkowo zakładamy, że lina jest odpowiednio długa i nie musimy zajmować się falą odbitą od jej drugiego końca.

Jednym ze sposobów badania fal przedstawionych na rysunku 17.1 jest obserwacja ich **kształtu** podczas ruchu w prawo. Możemy również zająć się wybranym elementem liny i obserwować jego drgania w górę i w dół, podczas ruchu fali. Zauważmy, że — jak przedstawiono na rysunku 17.1 — przemieszczenie każdego drgającego w taki sposób elementu liny jest *prostopadłe* do kierunku ruchu fali, czyli poprzeczne. W tym przypadku falę nazywamy **falą poprzeczną**.

Na rysunku 17.2 przedstawiono sposób, w jaki za pomocą tłoka można wytworzyć falę dźwiękową w długiej wypełnionej powietrzem rurze. Jeżeli gwałtownie przesunesz tłok w prawo, a następnie w lewo, wzdłuż rury zostanie wysłany impuls dźwiękowy. Ruch tłoka w prawo powoduje ruch w tym samym kierunku siedzących z nim cząsteczek powietrza i w konsekwencji zmianę ciśnienia w jego pobliżu. Wzrost ciśnienia popycha z kolei cząsteczki powietrza znajdujące się nieco dalej wzdłuż rury. Ruch tłoka w lewo zmniejsza ciśnienie w jego pobliżu. Najpierw najbliższe przesunięte w prawo cząsteczki powietrza, a potem



Rys. 17.2. W rurze wypełnionej powietrzem wzbudzono falę dźwiękową za pomocą tłoka poruszającego się tam i z powrotem. Ponieważ drgania cząsteczek powietrza (reprezentowanej przez czarną kropkę) są równoległe do kierunku, w jakim porusza się fala, falę nazywamy **podłużną**.

te dalsze powracają na lewo. Tak więc ruch powietrza i zmiana jego ciśnienia poruszają się wzdłuż rury w prawo w postaci impulsu.

Jeżeli będziesz poruszał tłem tam i z powrotem ruchem harmonicznym, jak to przedstawiono na rysunku 17.2, wzdłuż rury będzie biegła fala sinusoidalna. Ponieważ ruch cząsteczek powietrza jest *równoległy* do kierunku ruchu fali, falę taką nazywamy **falą podłużną**. W tym rozdziale skupimy się na falach poprzecznych, w szczególności na falach w linie; natomiast w rozdziale 18 zajmiemy się falami podłużnymi, w szczególności falami dźwiękowymi.

Fale zarówno poprzeczne, jak i podłużne nazywamy **falami biegącymi**, gdyż obie poruszają się od jednego punktu do drugiego — od jednego końca liny do drugiego (tak jak na rysunku 17.1) lub od jednego końca rury do drugiego (tak jak na rysunku 17.2). Zauważmy, że to fala porusza się od jednego końca do drugiego, a nie ośrodek (lina lub powietrze), w którym fala biegnie.

Skorpion przedstawiony na fotografii otwierającej ten rozdział do lokalizacji swojej ofiary wykorzystuje fale zarówno poprzeczne, jak i podłużne. Nawet niewielkie zaburzenie piasku przez chrząszcza powoduje wysłanie ciągu impulsów po jego powierzchni (rys. 17.3) w postaci impulsów podłużnych, biegących z prędkością  $v_{\text{podl}} = 150 \text{ m/s}$ , oraz impulsów poprzecznych, biegących z prędkością  $v_{\text{poprz}} = 50 \text{ m/s}$ .

Skorpion ze swoimi ośmioro odnóżami rozstawionymi w przybliżeniu na okręgu o średnicy około 5 cm najpierw odbiera szybsze impulsy podłużne i określa kierunek, w jakim znajduje się chrząszcz — jest to kierunek wskazywany przez to odnóże skorpiona, które jako pierwsze zostało zaburzone przez impulsy. Skorpion następnie wyczuwa przedział czasowy  $\Delta t$  między pierwszym odebraniem impulsów a odebraniem wolniejszych impulsów poprzecznych i na tej podstawie określa odległość  $d$  od chrząszcza. Odległość ta dana jest wzorem

$$\Delta t = \frac{d}{v_{\text{poprz}}} - \frac{d}{v_{\text{podl}}},$$

i wynosi

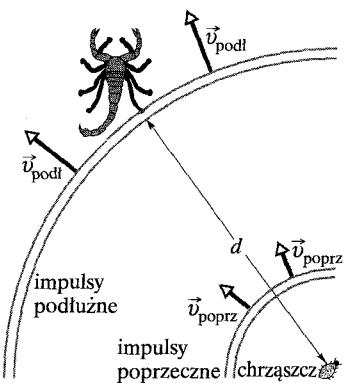
$$d = (75 \text{ m/s})\Delta t.$$

Na przykład dla  $\Delta t = 4 \text{ ms}$  mamy  $d = 30 \text{ cm}$ , co daje skorpionowi możliwość dokładnej lokalizacji chrząszcza.

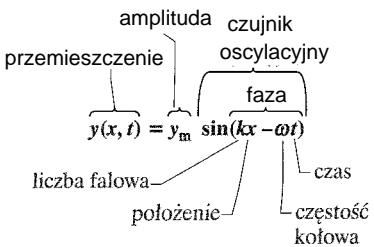
## 17.4. Długość fali i częstotliwość

Aby w pełni opisać falę w linie (i ruch dowolnego jej elementu), potrzebujemy funkcji opisującej jej kształt. Oznacza to, że potrzebna jest nam zależność w postaci  $y = h(x, t)$ , opisująca poprzeczne przemieszczenie  $y$  elementu liny jako funkcję  $h$  zależną od czasu  $t$  i położenia  $x$  tego elementu liny. W ogólności sinusoidalny kształt fali z rysunku 17.1b może być opisany za pomocą funkcji zarówno sinus, jak i cosinus; obie funkcje dają taki sam ogólny kształt. W tym rozdziale będziemy posługiwać się funkcją sinus.

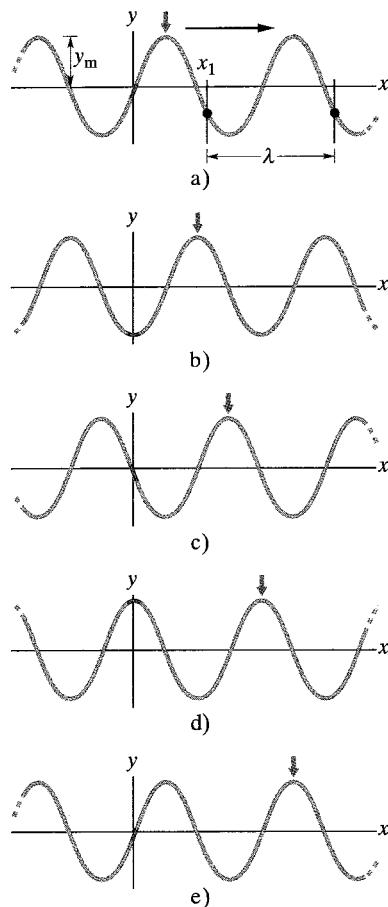
Wyobraźmy sobie falę sinusoidalną, taką jak na rysunku 17.1b, biegającą w dodatnim kierunku osi  $x$ . W miarę jak fala dociera do kolejnych elementów (tj.



Rys. 17.3. Ruch chrząszcza powoduje powstanie szybkich impulsów podłużnych i wolniejszych impulsów poprzecznych biegących po powierzchni piasku. Skorpion najpierw odbiera impulsy podłużne; na rysunku impulsy wyczuwane są najpierw przez położone najbliżej z tyłu prawe odnóża



Rys. 17.4. Nazwy wielkości występujących w wyrażeniu (17.2) dla poprzecznej fali sinusoidalnej



Rys. 17.5. Pięć „zdjęć migawkowych” fali biegnącej w linie w dodatnim kierunku osi  $x$ . Zaznaczono amplitudę  $y_m$  oraz długość fali mierzoną względem wybranego punktu  $x_1$

bardzo krótkich odcinków) liny, elementy te drgają równolegle do osi  $y$ . W chwili  $t$  przemieszczenie  $y$  elementu znajdującego się w punkcie  $x$  dane jest wzorem

$$y(x, t) = y_m \sin(kx - \omega t). \quad (17.2)$$

Ponieważ wyrażenie to zawiera zależność od położenia  $x$ , może być wykorzystane do wyznaczenia położenia wszystkich elementów liny w zależności od czasu. Tak więc wynika z niego informacja zarówno o kształcie fali w danej chwili, jak i o zmianach kształtu podczas ruchu fali wzdłuż liny. Poniżej zdefiniujemy wielkości występujące w wyrażeniu (17.2); nazwy tych wielkości przedstawiono na rysunku 17.4.

Zanim jednak zaczniemy je analizować, przyjrzyjmy się rysunkowi 17.5, na którym przedstawiono pięć „zdjęć migawkowych” fali sinusoidalnej biegnącej w dodatnim kierunku osi  $x$ . Ruch fali reprezentowany jest przez przesuwanie się w prawo małej strzałki wskazującej najwyższy punkt fali. Przechodząc od jednego „zdjęcia” do drugiego, widzimy, że mała strzałka przesuwa się wraz z falą w prawo, natomiast lina porusza się wyłącznie równolegle do osi  $y$ . Aby to zobaczyć, prześledźmy ruch zabarwionego na czerwono fragmentu liny znajdującego się w punkcie  $x = 0$ . Na pierwszym zdjęciu (rys. 17.5a) przemieszczenie  $y = 0$ . Na kolejnym mamy maksymalne przemieszczenie w dół, gdyż właśnie przez nasz element przechodzi dolina fali (czyli jej najniższy punkt), po czym nasz element powraca w górę do  $y = 0$ . Na czwartym zdjęciu mamy maksymalne przemieszczenie w górę, gdyż właśnie przez ten element przechodzi grzbiet fali (czyli jej najwyższy punkt). Na piątym zdjęciu ponownie przemieszczenie  $y = 0$ , a zatem nasz element wykonał pełny cykl drgań.

## Amplituda i faza

**Amplitudą fali**  $y_m$ , jak pokazano na rysunku 17.5, nazywamy bezwzględną wartość maksymalnego przemieszczenia elementu — przy przechodzeniu przez fali — względem jego położenia równowagi. (Indeks  $m$  oznacza maksimum). Wielkość  $y_m$  jako wartość bezwzględna jest zawsze dodatnia, nawet wtedy, gdybyśmy na rysunku 17.5a mierzyli ją w dół względem położenia równowagi, a nie w górę, jak zostało narysowane.

**Fazą fali** nazywamy argument  $kx - \omega t$  funkcji sinus w wyrażeniu (17.2). Gdy fala przechodzi przez pewien element liny znajdujący się w punkcie  $x$ , faza zmienia się liniowo wraz z czasem  $t$ . Oznacza to, że wartość funkcji sinus również się zmienia, oscylując między +1 a -1. Maksymalna wartość dodatnia (+1) odpowiada grzbietowi fali przechodzącej przez dany element; wówczas przemieszczenie  $y$  elementu znajdującego się w punkcie  $x$  przyjmuje wartość  $y_m$ . Maksymalna wartość ujemna (-1) odpowiada dolinie fali przechodzącej przez dany element, co oznacza, że przemieszczenie  $y$  w punkcie  $x$  przyjmuje wartość  $-y_m$ . Tak więc funkcja sinus oraz zależna od czasu faza fali odpowiadają drganiom elementu liny, przy czym amplituda fali określa największe przemieszczenie elementu.

## Długość fali i liczba falowa

**Długością fali**  $\lambda$  nazywamy odległość (mierzoną równolegle do kierunku rozchodzenia się fali) między kolejnymi powtórzeniami kształtu fali. Długość fali zaznaczono na rysunku 17.5a, przedstawiającym migawkowe zdjęcie fali w chwili  $t = 0$ . Z wyrażenia (17.2) otrzymujemy opis kształtu fali w tej chwili

$$y(x, 0) = y_m \sin kx. \quad (17.3)$$

Przemieszczenie  $y$  z definicji musi być takie samo na obu końcach odcinka odpowiadającego długości fali, czyli w punktach  $x = x_1$  oraz  $x = x_1 + \lambda$ . Zatem ze wzoru (17.3) mamy

$$y_m \sin kx_1 = y_m \sin k(x_1 + \lambda) = y_m \sin(kx_1 + k\lambda). \quad (17.4)$$

Wartości funkcji sinus zaczynają się powtarzać, gdy jej argument wzrośnie o  $2\pi$  rad, tak więc z wyrażenia (17.4) mamy  $k\lambda = 2\pi$ , czyli

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} \quad (\text{liczba falowa}). \quad (17.5)$$

Wielkość  $k$  nazywamy **liczbą falową**; jednostką liczby falowej w układzie SI jest radian na metr. (Zauważ, że tutaj symbol  $k$  nie oznacza — w odróżnieniu od poprzedniego rozdziału — stałej sprężystości).

Zauważmy, iż kolejne zdjęcia migawkowe na rysunku 17.5 przedstawiają falę przesuniętą w prawo o kolejne  $\lambda/4$ . Tak więc piąte zdjęcie przedstawia falę przesuniętą w prawo o  $1\lambda$ .

## Okres, częstotliwość kołowa i częstotliwość

Na rysunku 17.6 przedstawiono wykres zależności przemieszczenia  $y$  od czasu  $t$  (wg wzoru (17.2)) w pewnym punkcie wzdłuż liny, dla którego przyjmujemy  $x = 0$ . Obserwując linię, możesz zauważyć, że jej pojedynczy, znajdujący się w tym punkcie, element porusza się w górę i w dół ruchem harmonicznym, opisany wzorem (17.2) przy założeniu  $x = 0$ :

$$y(0, t) = y_m \sin(-\omega t) = -y_m \sin \omega t \quad (x = 0). \quad (17.6)$$

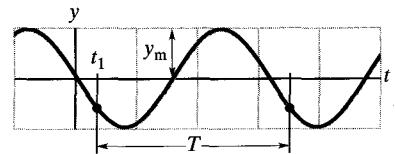
Wykorzystaliśmy tu fakt, że dla dowolnego kąta  $\alpha$  spełniona jest zależność  $\sin(-\alpha) = -\sin \alpha$ . Na rysunku 17.6 przedstawiono wykres wyrażenia (17.6) — ten wykres nie przedstawia kształtu fali.

**Okres  $T$**  fali definiujemy jako czas, w ciągu którego dowolny element liny wykona jedno pełne drganie. Okres zaznaczono na rysunku 17.6. Stosując wyrażenie (17.6) do obu końców tego przedziału czasu i przyrównując wartości, otrzymujemy

$$-y_m \sin \omega t_1 = -y_m \sin \omega(t_1 + T) = -y_m \sin(\omega t_1 + \omega T). \quad (17.7)$$

Ta zależność może być spełniona jedynie wtedy, gdy  $\omega T = 2\pi$ , czyli gdy

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \quad (\text{częstotliwość kołowa}). \quad (17.8)$$



Rys. 17.6. Wykres zależności przemieszczenia elementu liny, znajdującego się w  $x = 0$ , od czasu  $t$  podczas przechodzenia fali sinusoidalnej z rysunku 17.5 przez ten element. Zaznaczono amplitudę  $y_m$  oraz okres  $T$  mierzony od wybranej chwili  $t_1$

Wielkość  $\omega$  nazywamy **częstością kołową**, jej jednostką w układzie SI jest radian na sekundę.

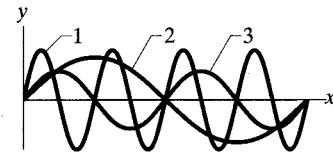
Powróćmy do pięciu zdjęć fali biegnącej przedstawionych na rysunku 17.5. Odstęp czasu między kolejnymi zdjęciami wynosi  $T/4$ . Tak więc na piątym zdjęciu każdy element liny wykonał jedno pełne drganie.

**Częstość fali  $v$**  definiujemy jako  $1/T$  i jest ona związana z częstością kołową  $\omega$  zależnością

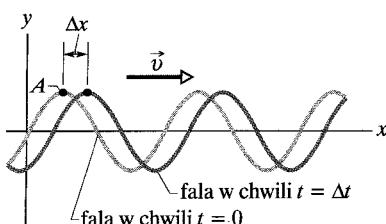
$$v = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi} \quad (\text{częstość}). \quad (17.9)$$

Podobnie jak częstość ruchu harmonicznego w rozdziale 16, częstość  $v$  jest to liczba drgań wykonywanych w ciągu jednostki czasu — chodzi tu o liczbę drgań elementu liny, przez który przechodzi fala. Tak jak w rozdziale 16, częstość  $v$  fali mierzymy w hercach lub w jednostkach wielokrotnych, na przykład kilohercach.

**SPRAWDZIAN 1:** Na rysunku nałożono trzy zdjęcia migawkowe, przedstawiające fale biegnące wzdłuż pewnej liny. Fazy fal opisane są zależnościami: a)  $2x - 4t$ , b)  $4x - 8t$ , c)  $8x - 16t$ . Dopasuj wykresy do tych wyrażeń.



## 17.5. Prędkość fali biegnącej



Rys. 17.7. Dwa zdjęcia migawkowe fali z rysunku 17.5 wykonane w chwilach  $t = 0$  i  $t = \Delta t$ . Ponieważ fala porusza się w prawo z prędkością  $\vec{v}$ , cała krzywa przesuwa się na odległość  $\Delta x$  w czasie  $\Delta t$ . Punkt odpowiadający maksimum „podróżuje” razem z falą, ale element liny porusza się tylko w góre i w dół

Na rysunku 17.7 przedstawiono dwa zdjęcia migawkowe fali opisane wzorem (17.2), wykonane w niewielkim odstępie czasu  $\Delta t$ . Fala porusza się w dodatnim kierunku osi  $x$  (na rysunku 17.7 w prawo); w czasie  $\Delta t$  cały wykres fali przesuwa się w tym kierunku na odległość  $\Delta x$ . Iloraz różnicowy  $\Delta x/\Delta t$  (w granicy pochodna  $dx/dt$ ) jest **prędkością fali  $v$** . W jaki sposób możemy wyznaczyć jej wartość?

Badając ruch fali przedstawionej na rysunku 17.7, możemy interesować się punktami liny lub punktami, w których jest taka sama faza drgań. Wychylenie  $y$  ciągle się zmienia, natomiast punktowi o ustalonej fazie odpowiada co chwila inny punkt liny. Z równania (17.2) otrzymujemy jako warunek stałości fazy wyrażenie

$$kx - \omega t = \text{const.} \quad (17.10)$$

Zauważmy, że chociaż faza jako całość pozostaje stała, to zarówno przemieszczenie  $x$ , jak i czas  $t$  się zmieniają. W istocie, gdy wzrasta  $t$ , musi również — aby faza pozostała stała — wzrastać  $x$ , stąd więc wynika, iż cały „kształt” fali przesuwa się w dodatnim kierunku osi  $x$ .

Aby wyznaczyć prędkość fali  $v$ , weźmy pochodną wyrażenia (17.10)

$$k \frac{dx}{dt} - \omega = 0,$$

czyli

$$\frac{dx}{dt} = v = \frac{\omega}{k}. \quad (17.11)$$

Korzystając ze wzorów (17.5) ( $k = 2\pi/\lambda$ ) oraz (17.8) ( $\omega = 2\pi/T$ ), możemy zapisać prędkość fali jako

$$v = \frac{\omega}{k} = \frac{\lambda}{T} = \lambda\nu \quad (\text{prędkość fali}). \quad (17.12)$$

Z wyrażenia  $v = \lambda/T$  wynika, że prędkość fali jest równa ilorazowi dłużosci fali i okresu — fala w ciągu jednego okresu drgań przebywa odległość równą jednej dłużosci fali.

Wzór (17.2) opisuje falę biegnącą w dodatnim kierunku osi  $x$ . Falę biegnącą w przeciwnym kierunku opisuje wyrażenie, które możemy znaleźć, zastępując czas  $t$  w (17.2) przez  $-t$ . Odpowiada to warunkowi

$$kx + \omega t = \text{const}, \quad (17.13)$$

który pociąga za sobą *zmniejszanie* się  $x$  wraz ze wzrostem czasu (porównaj z (17.10)). Tak więc fala biegnąca w ujemnym kierunku osi  $x$  opisana jest równaniem

$$y(x, t) = y_m \sin(kx + \omega t). \quad (17.14)$$

Jeżeli zanalizujemy falę opisaną wzorem (17.14), podobnie jak zrobiliśmy to z falą (17.2), znajdziemy wyrażenie na jej prędkość

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{\omega}{k}. \quad (17.15)$$

Znak minus (porównaj z wyrażeniem (17.11)) potwierdza, iż fala rzeczywiście porusza się w ujemnym kierunku osi  $x$ , co uzasadnia dokonaną przez nas zmianę znaku zmiennej  $t$ .

Rozważmy teraz falę o pewnym dowolnym kształcie opisanym wzorem

$$y(x, t) = h(kx \pm \omega t), \quad (17.16)$$

gdzie  $h$  reprezentuje dowolną funkcję (jedną z możliwości jest funkcja sinus). Nasze poprzednie rozważania wskazują, że wszystkie fale, w których zmienne  $x$  i  $t$  występują w postaci kombinacji  $kx \pm \omega t$ , są falami biegnącymi. Co więcej, wszystkie fale biegnące muszą mieć postać zgodną ze wzorem (17.16). Tak więc funkcja  $y(x, t) = \sqrt{ax + bt}$  opisuje możliwą (chociaż być może z fizycznego punktu widzenia nieco dziwaczna) falę biegnącą. Z drugiej strony, funkcja  $y(x, t) = \sin(ax^2 - bt)$  nie opisuje fali biegnącej.

## Przykład 17.1

Fala biegnąca wzdłuż linii opisana jest wzorem

$$y(x, t) = 0,00327 \sin(72,1x - 2,72t), \quad (17.17)$$

w którym wszystkie stałe numeryczne wyrażone są w jednostkach układu SI (0,00327 m, 72,1 rad/m oraz 2,72 rad/s).

a) Znajdź amplitudę fali.

**ROZWIĄZANIE:**

Wyrażenie (17.17) ma taką samą postać jak (17.2)

$$y = y_m \sin(kx - \omega t), \quad (17.18)$$

tak więc mamy do czynienia z falą sinusoidalną. Z porównania tych wyrażeń otrzymujemy amplitudę

$$y_m = 0,00327 \text{ m} = 3,27 \text{ mm}. \quad (\text{odpowiedź})$$

b) Wyznacz długość fali, jej okres i częstotliwość.

**ROZWIĄZANIE:**

Porównując wyrażenia (17.17) i (17.18), widzimy, że liczba falowa i częstotliwość kołowa wynoszą odpowiednio

$$k = 72,1 \text{ rad/m} \quad \text{oraz} \quad \omega = 2,72 \text{ rad/s}.$$

Korzystając ze wzoru (17.5), wyrażamy długość fali  $\lambda$  przez  $k$

$$\begin{aligned} \lambda &= \frac{2\pi}{k} = \frac{2\pi \text{ rad}}{72,1 \text{ rad/m}} \\ &= 0,0871 \text{ m} = 8,71 \text{ cm}. \quad (\text{odpowiedź}) \end{aligned}$$

Następnie, korzystając ze wzoru (17.8), wyrażamy okres  $T$  przez  $\omega$

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi \text{ rad}}{2,72 \text{ rad/s}} = 2,31 \text{ s}, \quad (\text{odpowiedź})$$

## Przykład 17.2

W przykładzie 17.1d pokazaliśmy, że w chwili  $t = 18,9$  s fala, dana wzorem (17.17), wywołuje poprzeczne przemieszczenie y elementu linii znajdującego się w punkcie  $x = 0,255$  m, równe 1,92 mm.

a) Wyznacz poprzeczną prędkość  $u$  tego elementu linii w podanej chwili. (Chodzi o prędkość związaną z poprzecznymi drganiami elementu linii w kierunku osi  $y$ ; nie należy jej mylić z prędkością  $v$  — stałą prędkością, z jaką kształt fali przemieszcza się wzdłuż osi  $x$ ).

**ROZWIĄZANIE:**

Poprzeczna prędkość  $u$  jest szybkością zmian przemieszczenia  $y$  elementu linii. Przemieszczenie dane jest wzorem

$$y(x, t) = y_m \sin(kx - \omega t). \quad (17.19)$$

po czym ze wzoru (17.9) otrzymujemy

$$v = \frac{1}{T} = \frac{1}{2,31 \text{ s}} = 0,433 \text{ Hz}. \quad (\text{odpowiedź})$$

c) Wyznacz prędkość fali.

**ROZWIĄZANIE:**

Prędkość fali dana jest wzorem (17.12)

$$\begin{aligned} v &= \frac{\omega}{k} = \frac{2,72 \text{ rad/s}}{72,1 \text{ rad/m}} = 0,0377 \text{ m/s} \\ &= 3,77 \text{ cm/s}. \quad (\text{odpowiedź}) \end{aligned}$$

Ponieważ faza w wyrażeniu (17.17) zawiera zmienną  $x$  opisującą położenie, fala porusza się wzdłuż osi  $x$ . Ponieważ wyrażenie ma taką samą postać jak (17.2), znak *minus* przed wyrazem  $\omega t$  wskazuje, iż fala biegnie w *dodatnim* kierunku osi  $x$ . (Zauważmy, że wielkości obliczone w punktach (b) i (c) nie zależą od amplitudy fali).

d) Wyznacz przemieszczenie dla punktu  $x = 22,5$  cm w chwili  $t = 18,9$  s.

**ROZWIĄZANIE:**

Wyrażenie (17.17) opisuje przemieszczenie w zależności od położenia  $x$  i czasu  $t$ . Podstawiając podane wartości do tego wyrażenia, otrzymujemy

$$\begin{aligned} y &= 0,00327 \sin(72,1 \cdot 0,225 - 2,72 \cdot 18,9) \\ &= (0,00327 \text{ m}) \sin(-35,1855 \text{ rad}) \\ &= (0,00327 \text{ m})(0,588) \\ &= 0,00192 \text{ m} = 1,92 \text{ mm}. \quad (\text{odpowiedź}) \end{aligned}$$

Tak więc przemieszczenie jest dodatnie. (Przed obliczeniem wartości funkcji sinus należy się upewnić, że aktualną miarą kątów w kalkulatorze są radiany).

Szybkość zmian przemieszczenia  $y$  dla elementu znajdującego się w pewnym punkcie  $x$  znajdujemy, biorąc pochodną wyrażenia (17.19) względem  $t$  przy założeniu, że  $x$  jest stałe. Pochodną wyznaczaną przy założeniu, że jedną (lub więcej) ze zmiennych traktujemy jako stałą, nazywamy *pochodną częstotkową* i oznaczamy symbolem  $\partial/\partial t$ , a nie  $d/dt$ . W naszym przypadku mamy

$$u = \frac{\partial y}{\partial t} = -\omega y_m \cos(kx - \omega t). \quad (17.20)$$

Podstawiając następnie dane liczbowe z przykładu 17.1, otrzymujemy

$$\begin{aligned} u &= (-2,72 \text{ rad/s})(3,27 \text{ mm}) \cos(-35,1855 \text{ rad}) \\ &= 7,2 \text{ mm/s}. \quad (\text{odpowiedź}) \end{aligned}$$

Tak więc w chwili  $t = 18,9$  s element linii znajdujący się w punkcie  $x = 22,5$  cm porusza się w dodatnim kierunku  $y$  z prędkością 7,2 mm/s.

b) Wyznacz poprzeczne przyspieszenie  $a_y$  tego elementu w podanej chwili.

### ROZWIĄZANIE:

Poprzeczne przyspieszenie  $a_y$  jest szybkością zmian poprzecznej prędkości rozważanego elementu. Ze wzoru (17.20), ponownie przyjmując, iż  $x$  jest stałe, a  $t$  może się zmieniać, otrzymujemy

$$a_y = \frac{\partial u}{\partial t} = -\omega^2 y_m \sin(kx - \omega t).$$

Z porównania z wyrażeniem (17.19) widać, że wyrażenie to możemy zapisać w postaci

$$a_y = -\omega^2 y.$$

Widzimy, że przyspieszenie poprzeczne drgającego elementu liny jest proporcjonalne do jego poprzecznego przemieszczenia, ale z przeciwnym znakiem. Jest to w pełni zgodne z zachowaniem się tego elementu — porusza się on w tym kierunku ruchem harmonicznym. Podstawienie danych liczbowych daje

$$y = -(2,72 \text{ rad/s})^2 (1,92 \text{ mm})$$

$$= -14,2 \text{ mm/s}^2.$$

(odpowiedź)

Tak więc w chwili  $t = 18,9$  s element liny, znajdujący się w punkcie  $x = 22,5$  cm, jest odchylony od swojego położenia równowagi o 1,92 mm w dodatnim kierunku osi  $y$  i ma przyspieszenie o wartości  $14,2 \text{ mm/s}^2$  skierowane w ujemnym kierunku osi  $y$ .

### SPRAWDZIAN 2:

Dane są równania opisujące trzy fale:

1)  $y(x, t) = 2 \sin(4x - 2t)$ ,    2)  $y(x, t) = \sin(3x - 4t)$ ,    3)  $y(x, t) = 2 \sin(3x - 3t)$ .

Uszereguj je według: a) prędkości rozchodzenia się fal i b) maksymalnej prędkości poprzecznej, zaczynając od największych.

### Sztuka rozwiązywania zadań

#### Poradă 1: Wyznaczanie dużych faz

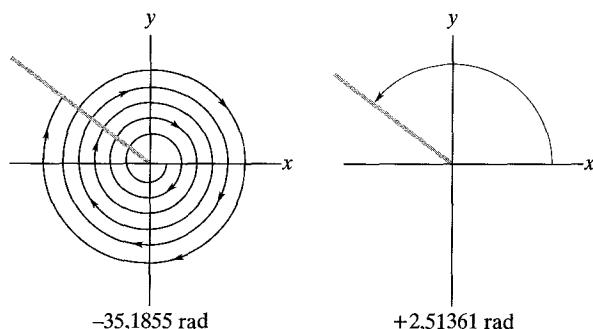
Niekiedy, jak w przykładach 17.1d i 17.2, pojawia się kąt znacznie przekraczający  $2\pi$  rad (czyli  $360^\circ$ ), dla którego musisz wyznaczyć wartość funkcji sinus lub cosinus. Dodanie do kąta całkowitej wielokrotności  $2\pi$  rad (lub jej odjęcie) nie zmienia wartości żadnej z jego funkcji trygonometrycznych. W przykładzie 17.1d wystąpił kąt  $-35,1855$  rad. Dodając do niego  $(6)(2\pi \text{ rad})$ , otrzymujemy

$$-35,1855 \text{ rad} + (6)(2\pi \text{ rad}) = 2,51361 \text{ rad},$$

czyli kąt mniejszy niż  $2\pi$  rad, dla którego wartości funkcji trygonometrycznych są takie same jak dla kąta  $-35,1855$  rad (rys. 17.8). Na przykład wartość funkcji sinus dla obydwu kątów  $2,51361$  rad i  $-35,1855$  rad wynosi 0,588. Kalkulatory automatycznie dokonują takiej zamiany kątów.

*Uwaga:* Nie należy zaokrągać dużych kątów, jeżeli mamy zamiar obliczać wartości ich sinusów i cosinusów. Przy obliczaniu wartości funkcji sinus dla bardzo dużego kąta odrzucamy większą część tego kąta i obliczamy wartość funkcji dla pozostały części. Gdybyśmy na przykład zaokrąglili kąt  $-35,1855$  rad do wartości

$-35$  rad (a przecież zmiana o  $0,5\%$  wydaje się uzasadnionym krokiem), spowodowałoby to zmianę wartości funkcji sinus tego kąta o  $27\%$ . Również przy zamianie stopni na radiany musimy się upewnić, że posługujemy się wzorem dokładnym (np.  $180^\circ = \pi$  rad), a nie przybliżonym (np.  $57,3^\circ \approx 1$  rad).



Rys. 17.8. Te dwa kąty są różne, ale wartości wszystkich ich funkcji trygonometrycznych są identyczne

## 17.6. Prędkość fali w napiętej linie

Prędkość fali, którą z długością fali i częstością wiąże zależność (17.12), określona jest przez właściwości ośrodka. Fala poruszająca się w takim ośrodku, jak woda, powietrze, stal lub napięta lina, musi wywoływać drgania częsteczek tego ośrodka. Aby było to możliwe, ośrodek musi mieć zarówno masę (aby gdzieś

mogła gromadzić się energia kinetyczna), jak i sprężystość (aby gdzieś mogła gromadzić się energia potencjalna). Tak więc to masa i właściwości sprężyste ośrodka określają, jak szybko fala może się w nim poruszać. Inaczej mówiąc, powinna istnieć możliwość obliczania prędkości fali w ośrodku w zależności od tych jego właściwości. Zajmiemy się teraz — na dwa sposoby — tym zagadnieniem dla napiętej liny.

## Analiza wymiarowa

Analiza wymiarowa polega na szczegółowym badaniu wymiarów wszystkich wielkości fizycznych, mających znaczenie w danej sytuacji, w celu definiowania wielkości, jakie możemy na ich podstawie uzyskać. W naszym przypadku zbadamy masę i sprężystość, aby wyznaczyć prędkość  $v$ , której wymiar to długość podzielona przez czas, czyli  $LT^{-1}$ .

Jako masę do naszych rozważań wykorzystamy masę elementu liny, czyli masę liny  $m$  podzieloną przez jej długość  $l$ . Taki iloraz nazywamy *gęstością liniową*  $\mu$  liny. Tak więc wymiar wielkości  $\mu = m/l$  to masa podzielona przez długość, czyli  $ML^{-1}$ .

Nie można wysłać fali wzdłuż liny, jeżeli nie została ona naprężona, co oznacza, iż musi być rozciągnięta i napięta przez siły działające na oba jej końce. Naprężenie  $T$  liny jest równe wspólnej wartości obu tych sił. Gdy fala biegnie wzdłuż liny, jej elementy przemieszczają się, powodując dodatkowe rozciąganie — w wyniku naprężenia sąsiednie elementy liny rozciągają się wzajemnie. Możemy zatem powiązać naprężenie liny z jej sprężystością. Naprężenie — podobnie jak siły przyłożone do obu końców — ma wymiar  $MLT^{-2}$  (zgodnie ze wzorem  $F = ma$ ).

Naszym celem jest uzyskanie takiej kombinacji wielkości  $\mu$  (o wymiarze  $ML^{-1}$ ) oraz  $T$  (o wymiarze  $MLT^{-2}$ ), która dawałaby wielkość  $v$  o wymiarze  $LT^{-1}$ . Metodą prób i błędów możemy dość szybko otrzymać

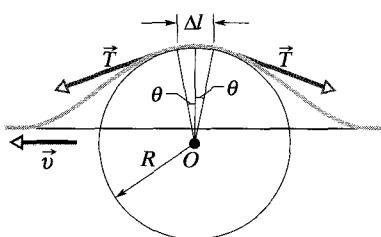
$$v = C \sqrt{\frac{T}{\mu}}, \quad (17.21)$$

gdzie  $C$  jest bezwymiarową stałą, której nie można wyznaczyć na drodze analizy wymiarowej. Poniżej wyznaczmy prędkość fali w inny sposób — pokażemy, iż wzór (17.21) rzeczywiście jest poprawny oraz że stała  $C$  wynosi 1.

## Wyprowadzenie wzoru na prędkość z drugiej zasady dynamiki Newtona

Zamiast fali sinusoidalnej z rysunku 17.1b rozważmy pojedynczy symetryczny impuls, taki jak na rysunku 17.9, biegący wzdłuż liny z lewa na prawo z prędkością  $v$ . Dla wygody wybieramy układ odniesienia, w którym impuls jest stacjonarny, czyli poruszamy się razem z impulsem w taki sposób, by jego widok był niezmienny. W takim układzie odniesienia lina przesuwa się względem nas z prawa na lewo (rys. 17.9) z prędkością  $v$ .

Rozważmy znajdujący się wewnątrz impulsu mały odcinek liny o długości  $\Delta l$ , tworzący łuk okręgu o promieniu  $R$ , obejmujący kąt  $2\theta$  wokół środka tego



Rys. 17.9. Symetryczny impuls wiadany w układzie odniesienia, w którym impuls jest stacjonarny, a lina porusza się z prawa na lewo z prędkością  $v$ . Wyznaczamy prędkość  $v$  poprzez zastosowanie drugiej zasady dynamiki do znajdującego się na szczytach impulsu elementu liny o długości  $\Delta l$

okręgu. Rozważany odcinek liny rozciągany jest stycznie na obu jego końcach przez siły równe co do wartości naprężeniu liny  $\vec{T}$ . Poziome składowe tych sił zynoszą się wzajemnie, natomiast suma składowych pionowych daje radialną siłę  $\vec{F}$  o wartości

$$F = 2(T \sin \theta) \approx T(2\theta) = T \frac{\Delta l}{R} \quad (\text{siła}). \quad (17.22)$$

W tym wyrażeniu przybliżyliśmy  $\sin \theta$  przez  $\theta$ , co jest słuszne dla małych kątów  $\theta$ . Skorzystaliśmy również ze związku  $2\theta = \Delta l/R$ .

Masa elementu liny dana jest wzorem

$$\Delta m = \mu \Delta l \quad (\text{masa}), \quad (17.23)$$

gdzie  $\mu$  jest liniową gęstością liny.

W chwili przedstawionej na rysunku 17.9 element  $\Delta l$  liny porusza się po łuku okręgu. Zatem ma on przyspieszenie dośrodkowe skierowane do środka tego okręgu, dane wzorem

$$a = \frac{v^2}{R} \quad (\text{przyspieszenie}). \quad (17.24)$$

Wyrażenia (17.22), (17.23) i (17.24) opisują wielkości występujące w drugiej zasadzie dynamiki Newtona. Łącząc je zgodnie z tym prawem w postaci

$$\text{siła} = \text{masa} \cdot \text{przyspieszenie},$$

mamy

$$\frac{T \Delta l}{R} = (\mu \Delta l) \frac{v^2}{R}.$$

Rozwiązuje to równanie ze względu na prędkość  $v$ , otrzymujemy

$$v = \sqrt{\frac{T}{\mu}} \quad (\text{prędkość}), \quad (17.25)$$

co jest w pełni zgodne z wyrażeniem (17.21), o ile przyjmiemy, że stała  $C$  równa jest jedności. Wyrażenie (17.25) opisuje prędkość impulsu przedstawionego na rysunku 17.9, a także prędkość dowolnej innej fali w takiej samej linie przy takim samym jej naprężeniu.

Z wyrażenia (17.25) wynika, że

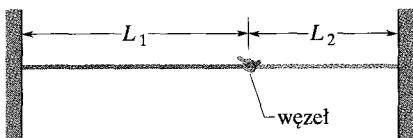
► Prędkość fali w idealnej napiętej linie zależy jedynie od naprężenia i gęstości liniowej liny, nie zależy natomiast od częstotliwości fali.

*Częstość fali* ustalona jest całkowicie przez to, co ją wytwarza (na przykład przez człowieka na rys. 17.1b). *Długość fali* jest określona zależnością (17.12) ( $\lambda = v/v$ ).

**SPRAWDZIAN 3:** Wytwarzamy falę biegącą wzdłuż pewnej linii, wprawiając jeden jej koniec w drgania. Jeżeli zwiększymy częstotliwość drgań, to czy a) prędkość fali oraz b) jej długość wzrosną, zmaleją, czy też pozostaną takie same? A gdy zwiększymy naprężenie liny, czy wówczas c) prędkość fali oraz d) jej długość wzrosną, zmaleją, czy też pozostaną takie same?

### Przykład 17.3

Na rysunku 17.10 przedstawiono dwie liny połączone razem za pomocą węzła i naciągnięte między dwoma sztywnymi wspornikami. Liniowe gęstości lin wynoszą odpowiednio  $\mu_1 = 1,4 \cdot 10^{-4} \text{ kg/m}$  oraz  $\mu_2 = 2,8 \cdot 10^{-4} \text{ kg/m}$ , a ich długości  $L_1 = 3 \text{ m}$  oraz  $L_2 = 2 \text{ m}$ . Naprężenie liny 1 wynosi  $400 \text{ N}$ . W obu liniach równocześnie wytworzono impulsy biegające od sztywnych wsporników w kierunku węzła. Który impuls najpierw dotrze do węzła?



Rys. 17.10. Przykład 17.3. Dwie liny o długościach  $L_1$  i  $L_2$  połączone razem za pomocą węzła i naciągnięte między dwoma sztywnymi wspornikami

#### ROZWIĄZANIE:

Skorzystamy z kilku wskazówek:

• 1. Czas  $t$ , w jakim impuls pokona odległość  $L$ , jest równy  $t = L/v$ , gdzie  $v$  jest stałą prędkością impulsu.

• 2. Prędkość impulsu w naciągniętej linie zależy od jej naprężenia  $T$  i gęstości liniowej  $\mu$ ; jest ona dana wzorem (17.25) ( $v = \sqrt{T/\mu}$ ).

• 3. Ponieważ obie liny były rozciagnięte razem, muszą mieć takie same naprężenia  $T$  ( $= 400 \text{ N}$ ).

Łącząc to razem i podstawiając odpowiednie dane, otrzymujemy czas, po jakim impuls w pierwszej linie dotrze do węzła

$$t_1 = \frac{L_1}{v_1} = L_1 \sqrt{\frac{\mu_1}{\tau}} = (3 \text{ m}) \sqrt{\frac{1,4 \cdot 10^{-4} \text{ kg/m}}{400 \text{ N}}} \\ = 1,77 \cdot 10^{-3} \text{ s.}$$

Podobnie, biorąc dane dla impulsu w linie 2, mamy

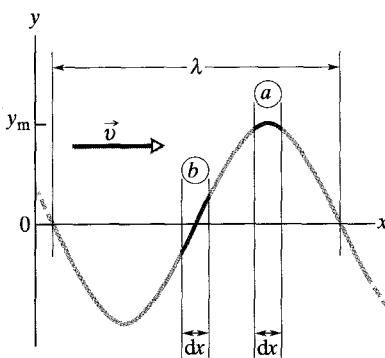
$$t_2 = L_2 \sqrt{\frac{\mu_2}{\tau}} = 1,67 \cdot 10^{-3} \text{ s.}$$

Tak więc do węzła dotrze najpierw impuls w linie 2.

Powróćmy teraz do punktu 2. Gęstość liniowa liny 2 jest większa niż liny 1, tak więc impuls w linie 2 musi być wolniejszy niż w linie 1. Czy moglibyśmy odgadnąć odpowiedź, korzystając tylko z tego faktu? Nie, gdyż z punktu 1 widać, że istotna jest również odległość pokonywana przez impulsy.

## 17.7. Energia i moc fali biegącej w linie

Gdy wytwarzamy falę w naciągniętej linie, musimy dostarczyć energii niezbędnej do ruchu liny. Fala biegąca przenosi tę energię w postaci energii zarówno kinetycznej, jak i potencjalnej. Przeanalizujmy kolejno obie postacie energii.



Rys. 17.11. Migawkowe zdjęcie fali biegającej w linii w chwili  $t = 0$ . Przesunięcie elementu  $a$  liny wynosi  $y = y_m$ , a elementu  $b$  wynosi  $y = 0$ . Energia kinetyczna każdego elementu liny zależy od jego prędkości poprzecznej. Energia potencjalna elementu zależy od stopnia naprężenia elementu liny w danej chwili

#### Energia kinetyczna

Fragment liny o masie  $dm$ , wykonujący poprzeczne drgania harmoniczne na skutek przechodzenia przezeń fali, ma energię kinetyczną związaną z jego prędkością poprzeczną  $\vec{u}$ . Gdy ten fragment w swoim ruchu przechodzi przez położenie  $y = 0$  (fragment  $b$  na rysunku 17.11), jego prędkość poprzeczna — i równocześnie energia kinetyczna — jest największa. Gdy zaś rozważany fragment znajduje się w skrajnym położeniu  $y = y_m$  (tak jak element  $a$  na rysunku), jego prędkość poprzeczną (i energię kinetyczną) jest równa zeru.

#### Energia potencjalna sprężystości

Fala sinusoidalna, wysyłana wzdłuż początkowo prostej liny, musi ją rozciągać. Skoro fragment liny o długości  $dx$  wykonuje drgania poprzeczne, jego długość musi okresowo rosnąć i maleć, w miarę jak dopasowuje się on do sinusoidalnego kształtu fali. Energia potencjalna związana jest z tymi właśnie zmianami długości, analogicznie jak w przypadku sprężyny.

Gdy fragment liny jest wychylony do położenia  $y = y_m$  (fragment  $a$  na rysunku 17.11), jego długość ma normalną niezaburzoną wartość  $dx$ , a więc jego energia potencjalna sprężystości równa jest zera. Natomiast gdy ten fragment przechodzi przez położenie  $y = 0$ , zostaje maksymalnie rozciągnięty, a jego energia potencjalna sprężystości osiąga maksimum.

## Przenoszenie energii

W punkcie  $y = 0$  drgający element liny uzyskuje zatem maksymalną energię zarówno potencjalną, jak i kinetyczną. Na migawkowym zdjęciu przedstawionym na rysunku 17.11 fragmenty liny o maksymalnym przemieszczeniu nie mają energii, a w obszarach o przemieszczeniu równym zera ich energia osiąga maksimum. Ponieważ fala porusza się wzdłuż liny, siły związane z naprężeniem liny w sposób ciągły wykonują pracę, dzięki czemu następuje przekazywanie energii z obszarów, gdzie energia występuje, do obszarów, gdzie jej nie ma.

Założymy, że w linie naciągniętej wzdłuż poziomej osi  $x$  wytworzyliśmy falę, dla której przemieszczenie liny opisane jest wzorem (17.2). Taką falę biegącą moglibyśmy wytworzyć, wprawiając jeden koniec liny w ciągłe drgania, tak jak na rysunku 17.1b. Czyniąc to, dostarczamy w sposób ciągły energię potrzebną do ruchu i rozciągania liny — gdy fragment liny drga prostopadle do osi  $x$ , ma energię kinetyczną i energię potencjalną sprężystości. Gdy fala dociera do fragmentu liny, który dotąd pozostawał w spoczynku, do tego fragmentu przekazywana jest również energia. Mówimy zatem, że fala *przenosi* energię wzdłuż liny.

## Szybkość przenoszenia energii

Energia kinetyczna  $dE_k$ , jaką ma element liny o masie  $dm$ , dana jest wzorem

$$dE_k = \frac{1}{2}dm u^2, \quad (17.26)$$

gdzie  $u$  jest prędkością poprzeczną drgającego elementu liny. Aby znaleźć  $u$ , zróżniczkujmy wzór (17.2) względem czasu przy stałym  $x$ :

$$u = \frac{\partial y}{\partial t} = -\omega y_m \cos(kx - \omega t). \quad (17.27)$$

Korzystając z tej zależności i podstawiając  $dm = \mu dx$ , przekształcamy wzór (17.26) do postaci

$$dE_k = \frac{1}{2}(\mu dx)(-\omega y_m)^2 \cos^2(kx - \omega t). \quad (17.28)$$

Dzieląc wyrażenie (17.28) przez  $dt$ , otrzymujemy szybkość zmian energii kinetycznej elementu liny, czyli szybkość, z jaką energia kinetyczna przenoszona jest przez falę. Stosunek  $dx/dt$ , jaki pojawia się po prawej stronie nowej postaci wzoru (17.28), jest prędkością fali  $v$ , tak więc mamy

$$\frac{dE_k}{dt} = \frac{1}{2}\mu v \omega^2 y_m^2 \cos^2(kx - \omega t). \quad (17.29)$$

*Średnia szybkość*, z jaką przenoszona jest energia kinetyczna, wynosi

$$\left( \frac{dE_k}{dt} \right)_{\text{śr}} = \frac{1}{2}\mu v \omega^2 y_m^2 [\cos^2(kx - \omega t)]_{\text{śr}} = \frac{1}{4}\mu v \omega^2 y_m^2. \quad (17.30)$$

Wzięliśmy tu średnią po całkowitej liczbie długości fal, wykorzystując fakt, iż średnia wartość kwadratu funkcji cosinus wzięta po całkowitej liczbie okresów równa jest 1/2.

Energia potencjalna sprężystości również jest przenoszona przez falę z taką samą średnią szybkoscią, daną wzorem (17.30). Co prawda nie podamy teraz ścisłego dowodu, ale pewnie pamiętasz, że w układzie drgającym, takim jak wahadło lub układ sprężyna-klocek, średnia energia kinetyczna i średnia energia potencjalna istotnie są sobie równe.

**Średnia moc**, czyli średnia szybkość, z jaką oba rodzaje energii są przenoszone przez falę, wynosi

$$P_{\text{sr}} = 2 \left( \frac{dE_k}{dt} \right)_{\text{sr}}, \quad (17.31)$$

czyli, uwzględniając zależność (17.30), otrzymujemy

$$P_{\text{sr}} = \frac{1}{2} \mu v \omega^2 y_m^2 \quad (\text{moc średnia}). \quad (17.32)$$

Czynniki  $\mu$  oraz  $v$  w tych wyrażeniach zależą od materiału i naprężenia liny. Z kolei czynniki  $\omega$  oraz  $y_m$  — od sposobu powstawania fali. Zależność średniej mocy fali od kwadratu jej amplitudy oraz od kwadratu częstotliwości kołowej ma charakter ogólny, jest ona słuszna dla wszystkich rodzajów fal.

## Przykład 17.4

Rozciągnięta lina o gęstości liniowej  $\mu = 525 \text{ g/m}$  została naprężona siłą  $T = 45 \text{ N}$ . Wytwarzamy falę sinusoidalną o częstotliwości  $v = 120 \text{ Hz}$  i amplitudzie  $y_m = 8,5 \text{ mm}$ , biegnącą wzdłuż liny od jednego z jej końców. Wyznacz średnią szybkość przenoszenia energii przez falę.

### ROZWIĄZANIE:

Średnia szybkość przenoszenia energii równa jest średniej mocy  $P_{\text{sr}}$  danej wzorem (17.32). Aby jednak skorzystać z tego wyrażenia, najpierw musimy obliczyć częstotliwość kołową  $\omega$  i prędkość  $v$  fali. Ze wzoru (17.9) mamy

$$\omega = 2\pi v = (2\pi)(120 \text{ Hz}) = 754 \text{ rad/s.}$$

Z wyrażenia (17.25) otrzymujemy

$$v = \sqrt{\frac{T}{\mu}} = \sqrt{\frac{45 \text{ N}}{0,525 \text{ kg/m}}} = 9,26 \text{ m/s.}$$

Zatem wzór (17.32) daje

$$\begin{aligned} P_{\text{sr}} &= \frac{1}{2} \mu v \omega^2 y_m^2 \\ &= \left(\frac{1}{2}\right)(0,525 \text{ kg/m})(9,26 \text{ m/s})(754 \text{ rad/s})^2(0,0085 \text{ m})^2 \\ &\approx 100 \text{ W.} \end{aligned} \quad (\text{odpowiedź})$$

**SPRAWDZIAN 4:** W powyższym przykładzie możemy modyfikować trzy parametry: naprężenie liny, częstotliwość fali i jej amplitudę. Czy średnia szybkość, z jaką energia jest przenoszona wzdłuż liny przez falę, wzrośnie, zmniejszy się, czy też pozostanie stała, gdy zwiększymy: a) naprężenie, b) częstotliwość lub c) amplitudę?

## 17.8. Zasada superpozycji fal

Często się zdarza, że dwie lub więcej fal przechodzi równocześnie przez ten sam obszar. Gdy na przykład słuchamy koncertu, do naszych uszu wpadają równocześnie fale dźwiękowe z wielu instrumentów. Elektryny w antenach naszych odbiorników radiowych i telewizyjnych wprawiane są w ruch przez wspólny wypadkowy efekt działania wielu fal elektromagnetycznych pochodzących z wielu

ośrodków nadawczych. Woda na jeziorze lub w porcie może być wzburzona przez fale pochodzące od wielu łodzi.

Załóżmy, że dwie fale biegą równocześnie wzdłuż tej samej napiętej linii. Niech  $y_1(x, t)$  i  $y_2(x, t)$  będą przemieszczeniami tej liny spowodowanymi przez każdą z fal osobno. Przesunięcie liny w sytuacji, gdy fale nakładają się, będzie ich sumą algebraiczną

$$y'(x, t) = y_1(x, t) + y_2(x, t). \quad (17.33)$$

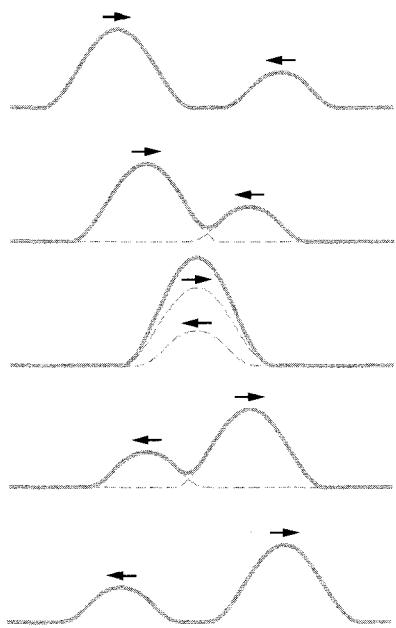
Sumowanie przemieszczeń wzdłuż liny oznacza, że

► Nakładające się fale dodają się algebraicznie, tworząc **falę wypadkową**.

Jest to jeszcze jeden przykład **zasady superpozycji**, która mówi, że gdy równocześnie pojawia się kilka efektów, ich wypadkowy skutek jest sumą skutków poszczególnych efektów.

Na rysunku 17.12 przedstawiono sekwencję zdjęć migawkowych dwóch impulsów poruszających się w przeciwnych kierunkach wzdłuż tej samej napiętej linii. Gdy impulsy nakładają się, wypadkowy impuls stanowi ich sumę. Co więcej, każdy impuls przechodzi przez drugi w taki sposób, jak gdyby tego drugiego nie było:

► Nakładające się fale w żaden sposób nie wpływają na siebie wzajemnie.



Rys. 17.12. Seria zdjęć migawkowych przedstawiających dwa impulsy poruszające się w przeciwnych kierunkach wzdłuż napiętej linii. Gdy impulsy nakładają się na siebie, stosujemy zasadę superpozycji

## 17.9. Interferencja fal

Załóżmy, że wysyłamy dwie fale sinusoidalne o takiej samej długości fali i amplitudzie biegące w tym samym kierunku wzdłuż napiętej linii. Zastosujmy do nich zasadę superpozycji. Jaka będzie fala wypadkowa w linii?

Wypadkowa fala zależy od tego, jaka jest względna *faza* obu fal, czyli od tego, o ile jedna fala jest przesunięta względem drugiej. Gdy fale są dokładnie zgodne w fazie (to znaczy, gdy grzbiety i doliny jednej fali dokładnie pokrywają się z grzbietami i dolinami drugiej), przemieszczenie wypadkowe jest dwukrotnie większe niż dla każdej z fal osobno. Jeżeli mają one fazy maksymalnie niezgodne (grzbiety jednej fali dokładnie pokrywają się z dolinami drugiej), pochodzące od nich przemieszczenia znoszą się w każdym punkcie i lina pozostaje wyprostowana. To zjawisko nazywamy **interferencją**, a o samych falach mówimy, że **interferują ze sobą**. (Pojęcie to dotyczy jedynie dodawania się przemieszczeń, a nie ma wpływu na ruch fal).

Zakładamy, że jedna z fal biegących wzdłuż napiętej linii opisana jest wzorem

$$y_1(x, t) = y_m \sin(kx - \omega t), \quad (17.34)$$

a druga, przesunięta w fazie względem pierwszej, wzorem

$$y_2(x, t) = y_m \sin(kx - \omega t + \phi). \quad (17.35)$$

Obie fale mają takie same częstotliwości kołowe  $\omega$  (i w konsekwencji takie same częstotliwości  $v$ ), takie same liczby falowe  $k$  (czyli również takie same długości fali  $\lambda$ ) oraz takie same amplitudy  $y_m$ . Obie biegną w dodatnim kierunku osi  $x$  z taką samą prędkością, daną wzorem (17.25). Różnią się jedynie w fazie o stały kąt  $\phi$ , który nazywamy **przesunięciem fazowym**. Mówimy, że *różnica faz* tych fal wynosi  $\phi$  lub że jedna fala jest *przesunięta w fazie* o kąt  $\phi$  względem drugiej.

Zgodnie z zasadą superpozycji, wyrażoną wzorem (17.33), fala wypadkowa stanowi sumę algebraiczną dwóch interferujących fal, a jej przemieszczenie wynosi

$$y'(x, t) = y_1(x, t) + y_2(x, t) = y_m \sin(kx - \omega t) + y_m \sin(kx - \omega t + \phi). \quad (17.36)$$

W dodatku E znajdujemy zależność, zgodnie z którą sumę sinusów dwóch kątów  $\alpha$  i  $\beta$  można przedstawić w postaci

$$\sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin \frac{1}{2}(\alpha + \beta) \cos \frac{1}{2}(\alpha - \beta). \quad (17.37)$$

Korzystając z tego związku, przekształcamy wyrażenie (17.36) do postaci

$$y'(x, t) = [2y_m \cos \frac{1}{2}\phi] \sin(kx - \omega t + \frac{1}{2}\phi). \quad (17.38)$$

$$\overbrace{y'(x, t)}^{\text{przesunięcie}} = \underbrace{[2y_m \cos \frac{1}{2}\phi]}_{\text{amplituda}} \underbrace{\sin(kx - \omega t + \frac{1}{2}\phi)}_{\text{częstotliwość oscylacyjna}}$$

Rys. 17.13. Wypadkowa fala, opisana wzorem (17.38), powstała w wyniku interferencji dwu sinusoidalnych fal poprzecznych również jest poprzeczną falą sinusoidalną

Jak widać z tego wzoru (patrz także rys. 17.13), fala wypadkowa również jest falą sinusoidalną biegnącą w dodatnim kierunku osi  $x$ . Jest to w istocie jedyna fala, jaką możesz zaobserwować w linie (nie możesz zobaczyć dwu interferujących fal opisanych wzorami (17.34) i (17.35)).

► Gdy dwie fale sinusoidalne o takich samych amplitudach i długościach fali biegną w tym samym kierunku wzduż naprężonej liny, interferują ze sobą, dając wypadkową falę sinusoidalną biegnącą w tym samym kierunku.

Fala wypadkowa różni się od fal interferujących pod dwoma względami: 1) jej przesunięcie fazowe równe jest  $\phi/2$ , a 2) jej amplituda opisana jest członem zawartym w nawiasach kwadratowych w wyrażeniu (17.38)

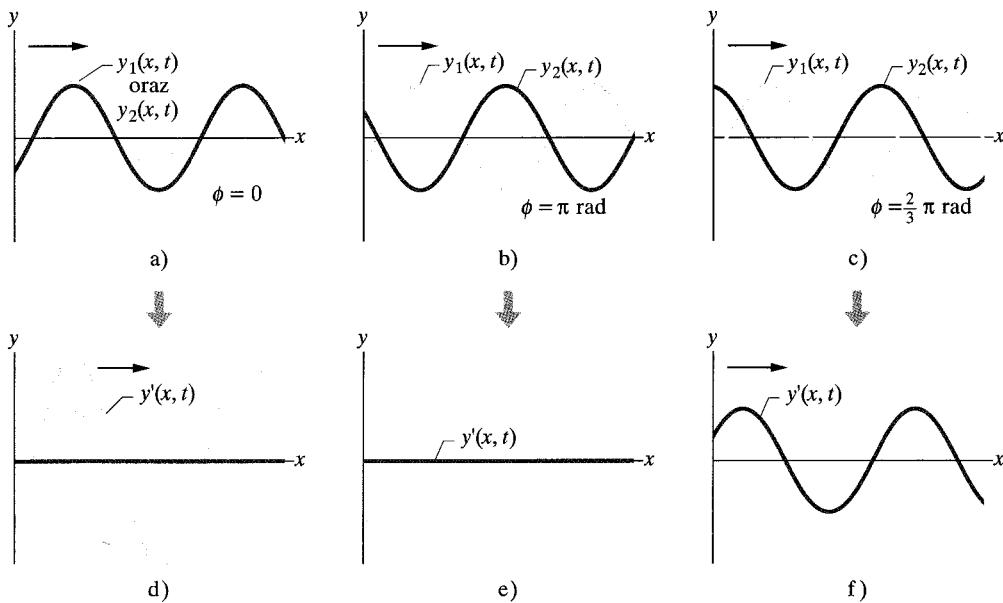
$$y'_m = 2y_m \cos \frac{1}{2}\phi \quad (\text{amplituda}). \quad (17.39)$$

Dla  $\phi = 0$  rad (czyli  $0^\circ$ ) obie interferujące fale są dokładnie w zgodnej fazie, jak na rysunku 17.14a. Wyrażenie (17.38) sprowadza się wówczas do postaci

$$y'(x, t) = 2y_m \sin(kx - \omega t) \quad (\phi = 0). \quad (17.40)$$

Taką falę wypadkową przedstawiono na rysunku 17.14d. Zauważmy — zarówno na tym rysunku, jak i we wzorze (17.40) — że amplituda fali wypadkowej jest dwukrotnie większa od amplitudy każdej z interferujących fal. Jest to maksymalna amplituda fali wypadkowej, jaką możemy uzyskać, gdyż człon zawierający cosinus we wzorach (17.38) i (17.39) osiąga największą wartość (równą jedności) dla  $\phi = 0$ . Interferencję, która daje największą możliwą wartość amplitudy, nazywamy *interferencją całkowicie konstruktywną*.

Dla  $\phi = \pi$  rad (czyli  $180^\circ$ ) obie interferujące fale mają fazy maksymalnie niezgodne, jak na rysunku 17.14b. Wówczas czynnik  $\cos(\phi/2)$  wynosi



Rys. 17.14. Dwie identyczne fale sinusoidalne  $y_1(x, t)$  i  $y_2(x, t)$  biegą wzdłuż liny w dodatnim kierunku osi  $x$ . W wyniku ich interferencji powstaje fala wypadkowa  $y'(x, t)$ . Jedynie ta fala wypadkowa może być zaobserwowana. Różnice faz  $\phi$  między interferującymi falami są następujące: a)  $0 \text{ rad}$ , czyli  $0^\circ$ , b)  $\pi \text{ rad}$ , czyli  $180^\circ$ , oraz c)  $2\pi/3 \text{ rad}$ , czyli  $120^\circ$ . Odpowiednie fale wypadkowe przedstawiono na rysunkach (d), (e) i (f).

$\cos(\pi/2) = 0$ , a amplituda fali wypadkowej, dana wzorem (17.39), równa jest zero. Dla wszystkich wartości  $x$  i  $t$  mamy wówczas

$$y'(x, t) = 0 \quad (\phi = \pi \text{ rad}). \quad (17.41)$$

Wypadkową falę przedstawiono na rysunku 17.14e. Pomimo że wzdłuż linii emitujemy dwie fale, nie obserwujemy żadnego jej ruchu. W tym przypadku interferencję nazywamy całkowicie destruktywną.

Ponieważ fala sinusoidalna powtarza swój kształt co  $2\pi \text{ rad}$ , różnica faz  $\phi = 2\pi \text{ rad}$  (czyli  $360^\circ$ ) odpowiada przesunięciu jednej fali względem drugiej na odległość równą jednej długości fali. Tak więc różnicę faz możemy opisywać za pomocą długości fali równie dobrze, jak za pomocą kątów. Na przykład o falach przedstawionych na rysunku 17.14b możemy powiedzieć, że są przesunięte względem siebie o 0,5 długości fali.

W tabeli 17.1 podano kilka innych przykładów różnicy faz oraz odpowiadających im typów interferencji. Zauważmy, że gdy interferencja nie jest ani

Tabela 17.1 Różnice faz i charakter interferencji<sup>a</sup>

Różnica faz		w stopniach	w radianach	wyrażona za pomocą długości fali	Amplituda fali wypadkowej	Charakter interferencji
0	0	0	0	0	$2y_m$	całkowicie konstruktywna
120	$2\pi/3$	120	0,33	0,33	$y_m$	pośrednia
180	$\pi$	180	0,5	0,5	0	całkowicie destruktywna
240	$4\pi/3$	240	0,67	0,67	$y_m$	pośrednia
360	$2\pi$	360	1	1	$2y_m$	całkowicie konstruktywna
865	15,1	865	2,4	2,4	$0,6y_m$	pośrednia

<sup>a</sup> Różnica faz dotyczy dwóch identycznych fal o amplitudach  $y_m$  poruszających się w tym samym kierunku.

całkowicie destruktynna, ani całkowicie konstruktywna, nazywamy ją *interferencją pośrednią*. W takim przypadku amplituda fali wypadkowej przyjmuje pewną wartość z przedziału od 0 do  $2y_m$ . Na przykład, jak widać z tabeli 17.1, gdy różnica faz między interferującymi falami równa jest  $120^\circ$  ( $\phi = 2\pi/3$  rad, co odpowiada 0,33 długości fali), amplituda fali wypadkowej równa jest amplitudzie fal interferujących (patrz rys. 17.14c i f).

Dwie fale o takich samych długościach są w zgodnej fazie, jeżeli różnica faz między nimi równa jest zeru lub odpowiada dowolnej całkowitej liczbie długości fali. Tak więc z różnicą faz wyrażoną przez długość fali zawsze możemy odrzucić część całkowitą. Na przykład różnica faz odpowiadająca 0,4 długości fali jest równoważna różnicy faz odpowiadającej 2,4 długości fali — a do obliczeń można użyć prostszej z obydwu tych liczb.

## Przykład 17.5

Dwie identyczne fale sinusoidalne, poruszające się w tym samym kierunku wzdłuż napiętej liny, interferują ze sobą. Amplituda  $y_m$  każdej z fal równa jest 9,8 mm, a różnica faz  $\phi$  między nimi wynosi  $100^\circ$ .

- a) Wyznacz amplitudę  $y'_m$  fali wypadkowej, powstającej w wyniku interferencji obu fal, i określ charakter interferencji.

### ROZWIĄZANIE:

**O** Mamy do czynienia z dwiema identycznymi falami sinusoidalnymi biegącymi wzdłuż linii w tym samym kierunku, zatem w wyniku ich interferencji również powstaje sinusoidalna fala biegąca. Ponieważ obie fale są identyczne, mają takie same amplitudy. Zatem amplituda  $y'_m$  fali wypadkowej dana jest wzorem (17.39)

$$y'_m = 2y_m \cos \frac{1}{2}\phi = (2)(9,8 \text{ mm}) \cos(100^\circ/2) \\ = 13 \text{ mm.} \quad (\text{odpowiedź})$$

Mamy tu do czynienia z interferencją pośrednią, co możemy stwierdzić na dwa sposoby. Różnica faz mieści się w przedziale od 0 do  $180^\circ$ , a amplituda  $y'_m$  — w przedziale od 0 do  $2y_m$  (= 19,6 mm).

- b) Wyznacz różnicę faz (w radianach i za pomocą długości fali), przy której amplituda fali wypadkowej jest równa 4,9 mm.

### ROZWIĄZANIE:

**O** Zaczynamy od tego samego wzoru co w punkcie (a), przy czym tym razem znamy amplitudę  $y'_m$ , a poszukujemy  $\phi$ . Ze wzoru (17.39)

$$y'_m = 2y_m \cos \frac{1}{2}\phi \\ \text{mamy}$$

$$4,9 \text{ mm} = (2)(9,8 \text{ mm}) \cos \frac{1}{2}\phi,$$

co daje nam (musimy przełączyć kalkulator w tryb wyrażania kątów w radianach)

$$\phi = 2 \arccos \frac{4,9 \text{ mm}}{(2)(9,8 \text{ mm})} = \pm 2,636 \text{ rad} \approx \pm 2,6 \text{ rad.}$$

(odpowiedź)

Mamy dwa rozwiązania, gdyż ten sam wynik możemy uzyskać, przyjmując, że pierwsza fala wyprzedza (biegnie przed) drugą albo też pozostaje za nią z tyłu o 2,6 rad. W przeliczeniu na długość fali  $\lambda$  różnica faz wynosi

$$\frac{\phi}{2\pi \text{ rad}/\lambda} = \frac{\pm 2,636 \text{ rad}}{2\pi \text{ rad}/\lambda} = \pm 0,42\lambda. \quad (\text{odpowiedź})$$

**SPRAWDZIAN 5:** Mamy cztery inne możliwe wartości różnicy faz między dwiema falami w powyższym przykładzie, wyrażone przez długość fali, a mianowicie:  $0,2\lambda$ ,  $0,45\lambda$ ,  $0,6\lambda$  oraz  $0,8\lambda$ . Uszereguj je w kolejności amplitud fal wypadkowych, zaczynając od największej.

## 17.10. Wskazy

Fał w linie (lub dowolny inny rodzaj fali) możemy przedstawić wektorowo za pomocą **wskazów**. Wskaz jest wektorem o długości równej amplitudzie fali, który obraca się wokół początku układu współrzędnych; prędkość kątowa wskazu jest równa częstości kołowej  $\omega$  fali. Na przykład falę

$$y_1(x, t) = y_{m1} \sin(kx - \omega t) \quad (17.42)$$

Rys. 17.15. a) Falę sinusoidalną reprezentuje wskaz o długości  $y_{m1}$  obracający się wokół początku układu współrzędnych z prędkością kątową  $\omega$ . Rzut  $y_1$  wskazu na oś pionową reprezentuje przemieszczenie punktu, przez który przechodzi fala. b) Drugi wskaz, również mający prędkość kątową  $\omega$ , ale długość  $y_{m2}$ , i obracający się, tworząc z pierwszym stały kąt  $\phi$ , reprezentuje drugą falę przesuniętą w fazie o  $\phi$ . c) Fala wypadkowa reprezentowana jest przez sumę wektorową  $y'_m$  tych dwóch wskazów. Rzut  $y'$  na oś pionową reprezentuje przemieszczenie punktu związane z przejściem takiej fali wypadkowej

reprezentuje wskaz przedstawiony na rysunku 17.15a. Długość wskazu równa jest amplitudzie fali  $y_{m1}$ . Ponieważ wskaz obraca się wokół początku układu współrzędnych z prędkością kątową  $\omega$ , jego rzut  $y_1$  na pionową oś zmienia się sinusoidalnie, od maksimum równego  $y_{m1}$  poprzez zero do minimum  $-y_{m1}$  i z powrotem do  $y_{m1}$ . Te zmiany odpowiadają sinusoidalnym zmianom przemieszczenia  $y_1$  dowolnego punktu liny, gdy przechodzi przez linię.

Gdy dwie fale biegły wzdłuż tej samej liny w tym samym kierunku, możemy je przedstawić — a także ich wypadkową — na *diagramie wskazów*. Wskazy na rysunku 17.15b przedstawiają falę opisaną wzorem (17.42) oraz drugą falę postaci

$$y_2(x, t) = y_{m2} \sin(kx - \omega t + \phi). \quad (17.43)$$

Druga fala przesunięta jest w fazie względem pierwszej o kąt  $\phi$ . Ponieważ wskazy obracają się z taką samą prędkością kątową  $\omega$ , kąt między nimi zawsze równy jest  $\phi$ . Jeżeli  $\phi$  jest wielkością dodatnią, to podczas obrotu wskaz fali 2 pozostaje w tyle za wskazem fali 1, tak jak na rysunku 17.15b. Gdy natomiast  $\phi$  jest wielkością ujemną, wówczas wskaz fali 2 wyprzedza wskaz fali 1.

Fale  $y_1$  i  $y_2$  mają takie same liczby falowe  $k$  i częstotliwości kołowe  $\omega$ , zatem — jak wynika ze wzoru (17.38) — ich wypadkowa ma postać

$$y'(x, t) = y'_m \sin(kx - \omega t + \beta), \quad (17.44)$$

gdzie  $y'_m$  jest amplitudą fali wypadkowej, a  $\beta$  — jej fazą początkową. Aby wyznaczyć wartości  $y'_m$  i  $\beta$ , musimy zsumować obie interferujące fale, podobnie jak przy prowadzaniu wzoru (17.38).

Aby zrobić to samo graficznie, dodajemy wektorowo dwa wskazy w dowolnym momencie podczas ich obrotu, tak jak na rysunku 17.15c, na którym wskaz  $y_{m2}$  został przesunięty na koniec wskazu  $y_{m1}$ . Długość otrzymanego wektora jest równa amplitudzie  $y'_m$  w wyrażeniu (17.44). Kąt między tym wektorem a wskazem fali  $y_1$  jest równy stałej  $\beta$  w tym wyrażeniu.

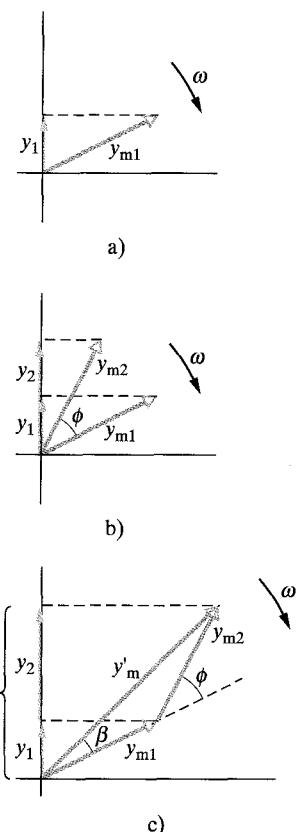
Zauważmy, że w przeciwieństwie do metody opisanej w paragrafie 17.9:

► Możemy posługiwać się wskazami do dodawania fal nawet wtedy, gdy mają one różne amplitudy.

## Przykład 17.6

Dwie fale sinusoidalne  $y_1(x, t)$  i  $y_2(x, t)$  mają takie same długości fal i biegły razem w tym samym kierunku wzdłuż liny. Amplitudy fal wynoszą  $y_{m1} = 4 \text{ mm}$  i  $y_{m2} = 3 \text{ mm}$ , a ich fazy

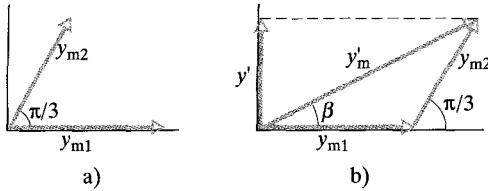
początkowe są równe odpowiednio  $0$  i  $\pi/3$  rad. Wyznacz amplitudę  $y'_m$  i fazę początkową  $\beta$  fali wypadkowej. Przedstaw falę wypadkową w postaci wzoru (17.44).



## ROZWIĄZANIE:

**O** 1. Obie fale mają szereg właściwości wspólnych. Ponieważ biegą wzdłuż tej samej linii, muszą mieć taką samą prędkość, określona przez naprężenie i liniową gęstość liny, zgodnie ze wzorem (17.25). Mając takie same długości fal, obie fale muszą mieć jednakowe liczby falowe  $k = 2\pi/\lambda$ . Skoro zaś mają takie same liczby falowe  $k$  i prędkości  $v$ , muszą mieć takie same częstotliwości kołowe  $\omega = kv$ .

**O** 2. Obie fale (nazwijmy je falą 1 i falą 2) mogą być reprezentowane przez wskazy obracające się z tą samą prędkością kątową  $\omega$  wokół początku układu współrzędnych. Ponieważ faza fali 2 jest większa od fazy fali 1 o  $\pi/3$ , wskaz 2 — obracając się zgodnie z kierunkiem ruchu wskazówek zegara — musi pozostać w tyle o kąt  $\pi/3$  rad za wskazem 1, jak to przedstawiono na rysunku 17.16a. Fala wypadkowa, jaka powstaje w wyniku interferencji fal 1 i 2, może być zatem reprezentowana przez wskaz będący sumą wektorową wskazów 1 i 2.



Rys. 17.16. Przykład 17.6. a) Dwa wskazy o długościach  $y_{m1}$  i  $y_{m2}$  i różnicę faz  $\pi/3$ . b) Sumowanie wektorowe tych wskazów w dowolnej chwili podczas ich obrotów daje długość  $y'_m$  wskazu fali wypadkowej

Dla uproszczenia sumowania wektorowego wskazy 1 i 2 na rysunku 17.16a zostały narysowane w chwili, gdy wskaz 1 jest równoległy do osi poziomej. Opóźniony wskaz 2 nachylony jest wówczas do osi poziomej pod dodatnim kątem  $\pi/3$  rad. Na rysunku 17.16b wskaz 2 został przesunięty w taki sposób, by jego początek znalazł się na końcu wskazu 1. Możemy teraz narysować wskaz  $y'_m$  fali wypadkowej, łącząc początek wskazu 1 z końcem wskazu 2. Faza początkowa  $\beta$  jest równa kątowi, jaki tworzy on ze wskazem 1.

Aby wyznaczyć wartości  $y'_m$  i  $\beta$ , możemy zsumować wskazy metodą dodawania składowych. Dla składowych poziomych mamy

$$\begin{aligned} y'_{m \text{ poz}} &= y_{m1} \cos 0 + y_{m2} \cos(\pi/3) \\ &= 4 \text{ mm} + (3 \text{ mm}) \cos(\pi/3) = 5,5 \text{ mm}. \end{aligned}$$

Dla składowych pionowych mamy

$$y'_{m \text{ pion}} = y_{m1} \sin 0 + y_{m2} \sin(\pi/3) = 0 + (3 \text{ mm}) \sin(\pi/3) = 2,6 \text{ mm}.$$

Tak więc fala wypadkowa ma amplitudę

$$y'_m = \sqrt{(5,5 \text{ mm})^2 + (2,6 \text{ mm})^2} = 6,1 \text{ mm} \quad (\text{odpowiedź})$$

oraz przesunięcie fazowe

$$\beta = \arctg \frac{2,6 \text{ mm}}{5,5 \text{ mm}} = 0,44 \text{ rad.} \quad (\text{odpowiedź})$$

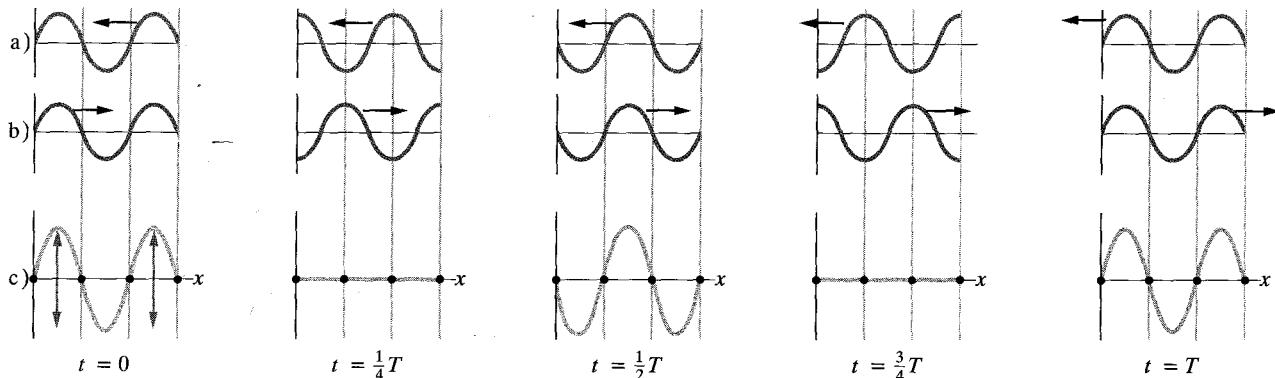
Z rysunku 17.16b widać, że faza początkowa  $\beta$  odpowiada dodatniemu kątowi względem wskazu 1. Zatem fala wypadkowa pozostała w tyle za falą 1; jest opóźniona o  $\beta = +0,44$  rad. Korzystając ze wzoru (17.44), zapisujemy falę wypadkową w postaci

$$y'(x, t) = (6,1 \text{ mm}) \sin(kx - \omega t + 0,44 \text{ rad}). \quad (\text{odpowiedź})$$

## 17.11. Fale stojące

W poprzednich dwóch paragrafach rozważaliśmy dwie fale sinusoidalne o takich samych długościach fal i amplitudach, biegące w tym samym kierunku wzdłuż napiętej liny. A co będzie w sytuacji, gdy fale biegą w przeciwnych kierunkach? W takim przypadku również możemy znaleźć falę wypadkową, korzystając z zasady superpozycji.

Na rysunku 17.17 zilustrowano taką sytuację w sposób graficzny. Przedstawiono na nim dwie interferujące fale, z których jedna biegnie w lewo (rys. 17.17a), a druga — w prawo (rys. 17.17b). Z kolei na rysunku 17.17c przedstawiono ich sumę, otrzymaną dzięki graficznemu zastosowaniu zasady superpozycji. Wyróżniającą cechą fali wypadkowej jest fakt, iż na linie są miejsca — nazywane **węzłami** — w których nie wykonuje ona żadnego ruchu. Na rysunku 17.17c widoczne są cztery takie węzły, oznaczone kropkami. W połowie między sąsiednimi węzłami znajdują się **strzałki** — miejsca, w których amplituda fali wypadkowej jest największa. Fale tego rodzaju jak na rysunku 17.17c nazywamy **falami stojącymi**, gdyż „kształt” fali nie przemieszcza się tu ani w lewo, ani w prawo — położenia maksimów i minimów nie ulegają zmianie.



► Gdy dwie fale sinusoidalne o takich samych amplitudach i długościach fali biegą w przeciwnych kierunkach wzduł napiętej liny, w wyniku ich interferencji powstaje fala stojąca.

W celu analizy fali stojącej weźmy dwie interferujące fale opisane wzorami

$$y_1(x, t) = y_m \sin(kx - \omega t) \quad (17.45)$$

oraz

$$y_2(x, t) = y_m \sin(kx + \omega t). \quad (17.46)$$

Z zasady superpozycji mamy,

$$y'(x, t) = y_1(x, t) + y_2(x, t) = y_m \sin(kx - \omega t) + y_m \sin(kx + \omega t).$$

Korzystając ze związku trygonometrycznego (17.37), otrzymujemy zależność

$$y'(x, t) = [2y_m \sin kx] \cos \omega t, \quad (17.47)$$

przedstawioną i opisaną na rysunku 17.18. Wyrażenie to nie opisuje fali biegającej, gdyż ma inną postać niż (17.16). Opisuje ono falę stojącą.

Wielkość  $2y_m \sin kx$  w nawiasach kwadratowych we wzorze (17.47) możemy uważać za amplitudę drgań elementu liny znajdującego się w punkcie  $x$ . Jednakże wobec tego, że amplituda jest zawsze dodatnia, a funkcja  $\sin kx$  może mieć wartości ujemne, za amplitudę w punkcie  $x$  przyjmujemy wartość bezwzględną wielkości  $2y_m \sin kx$ .

W przypadku biegnącej fali sinusoidalnej amplituda fali jest taka sama dla wszystkich elementów liny. Stwierdzenie to nie jest prawdziwe dla fali stojącej, w której *amplituda zmienia się wraz z położeniem*. Na przykład dla fali stojącej opisanej wzorem (17.47) mamy zerową amplitudę dla takich wartości  $kx$ , dla których zachodzi  $\sin kx = 0$ . Są to wartości spełniające warunek

$$kx = n\pi, \quad \text{gdzie } n = 0, 1, 2, \dots \quad (17.48)$$

Podstawiając do tego wyrażenia  $k = 2\pi/\lambda$  i przekształcając je, otrzymujemy położenia punktów o zerowej amplitudzie — węzłów — dla fali opisanej wzorem (17.47), a mianowicie

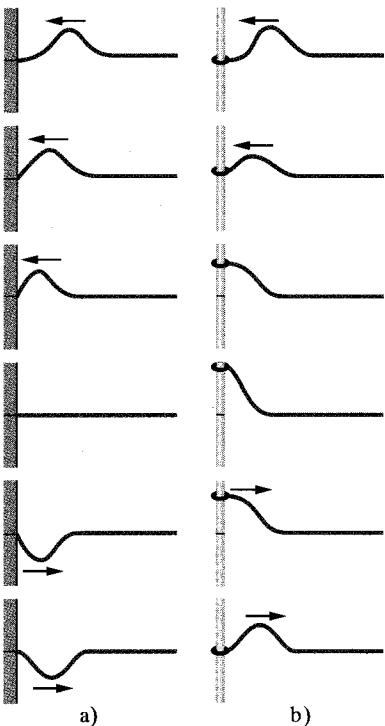
$$x = n\frac{\lambda}{2}, \quad \text{gdzie } n = 0, 1, 2, \dots \quad (\text{węzły}). \quad (17.49)$$

Zauważmy, że sąsiednie węzły oddalone są o  $\lambda/2$ , tj. o połowę długości fali.

Rys. 17.17. a) Pięć zdjęć migawkowych fali biegnącej w lewo, wykonanych w chwilach  $t$  opisanych pod częścią (c) rysunku ( $T$  jest okresem drgań). b) Pięć zdjęć migawkowych fali identycznej jak w części (a), ale biegnącej w prawo, wykonanych w tych samych chwilach  $t$ . c) Odpowiednie zdjęcia migawkowe dla superpozycji obu fal w tej samej linie. W chwilach  $t = 0, t = T/2, t = T$  mamy interferencję całkowicie konstruktywną, gdyż grzbieti pokrywają się z grzbietami, a doliny z dolinami. W chwilach  $t = T/4$  i  $t = 3T/4$  mamy interferencję całkowicie destruktyną, gdyż grzbieti pokrywają się z dolinami. W pewnych punktach (są to węzły — zaznaczone na rysunku kropkami) drgania nie zachodzą, a w innych punktach (są to strzałki) drgania są najsilniejsze

przemieszczenie  
 $y'(x, t) = \underbrace{[2y_m \sin kx]}_{\substack{\text{amplituda} \\ \text{w punkcie } x}} \underbrace{\cos \omega t}_{\substack{\text{czynnik} \\ \text{oszczędzający}}}$

Rys. 17.18. Fala wypadkowa dana wzorem (17.47) jest falą stojącą, powstałą w wyniku interferencji dwu fal sinusoidalnych o takich samych amplitudach i długościach, biegących w przeciwnych kierunkach



Rys. 17.19. a) Impuls padający z prawej strony odbija się od lewego końca liny umocowanej do ściany. Zauważmy, że impuls odbity jest odwrócony względem impulsu padającego. b) Na tym rysunku lewy koniec liny jest umocowany do pierścienia, który może się ślimać bez tarcia w góre i w dół wzdłuż pręta. W tym przypadku impuls nie ulega odwróceniu przy odbiciu

Amplituda fali stojącej (17.47) osiąga maksimum — równe  $2y_m$  — dla takich wartości  $kx$ , dla których zachodzi  $|\sin kx| = 1$ . Są to wartości spełniające warunek

$$kx = \pi/2, 3\pi/2, 5\pi/2, \dots = (n + 1/2)\pi, \quad \text{gdzie } n = 0, 1, 2, \dots \quad (17.50)$$

Podstawiając do tego wyrażenia  $k = 2\pi/\lambda$  i przekształcając je, otrzymujemy położenia punktów o maksymalnej amplitudzie — strzałek — dla fali opisanej wzorem (17.47), a mianowicie

$$x = \left(n + \frac{1}{2}\right) \frac{\lambda}{2}, \quad \text{gdzie } n = 0, 1, 2, \dots \quad (\text{strzałki}). \quad (17.51)$$

Strzałki oddalone są o  $\lambda/2$  i znajdują się w połowie odległości między parami węzłów.

### Odbicie od granicy

Możemy wytworzyć falę stojącą w napiętej linie, pozwalając, by fala biegnąca odbiła się od oddalonego końca liny i poruszała się z powrotem. W wyniku interferencji fali padającej (początkowej) i fali odbitej, opisanych odpowiednio wzorami (17.45) i (17.46), powstaje fala stojąca.

Na rysunku 17.19 posłużyliśmy się pojedynczym impulsem do zilustrowania, w jaki sposób zachodzi takie odbicie. Na rysunku 17.19a lina jest umocowana na lewym końcu. Gdy impuls dociera do tego końca liny, wywiera skierowaną w górę siłę na jej zamocowanie (na ścianę). Zgodnie z trzecią zasadą dynamiki ściana wywiera na linię przeciwnie skierowaną siłę o takiej samej wartości. Siła ta generuje impuls, który biegnie z powrotem wzdłuż liny — w przeciwnym kierunku niż impuls padający. W przypadku „twardego” odbicia, przy ścianie musi znajdować się węzeł, gdyż lina jest tu sztywno umocowana. Impulsy padający i odbity muszą mieć przeciwnie znaki, tak by się wzajemnie kompensowały w tym punkcie.

Na rysunku 17.19b lewy koniec liny umocowany jest do lekkiego pierścienia, który ślimaga się swobodnie bez tarcia wzdłuż pręta. Gdy pojawia się impuls padający, pierścień przesuwa się w górę pręta. Przesuwający się pierścień ciągnie linię, rozciągając ją i wytwarzając odbity impuls o takim samym znaku i amplitudzie co impuls padający. Zatem przy takim „miękkim” odbiciu impulsy padający i odbity wzmacniają się wzajemnie, tworząc strzałkę na końcu liny. Maksymalne przesunięcie pierścienia jest dwukrotnie większe od amplitudy każdego z tych impulsów.

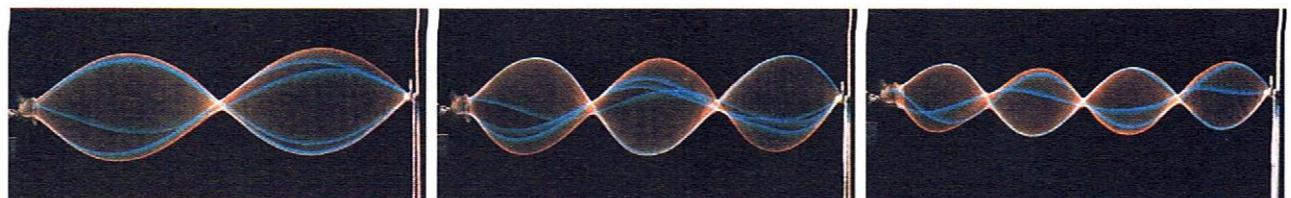
**SPRAWDZIAN 6:** Dwie fale o takich samych amplitudach i długościach interferują w trzech różnych sytuacjach, tworząc fale wypadkowe opisane wzorami:

- 1)  $y'(x, t) = 4 \sin(5x - 4t)$ ;
- 2)  $y'(x, t) = 4 \sin(5x) \cos(4t)$ ;
- 3)  $y'(x, t) = 4 \sin(5x + 4t)$ .

Określ, w którym przypadku fale interferujące poruszają się: a) w dodatnim kierunku osi  $x$ , b) w ujemnym kierunku osi  $x$ , c) w przeciwnych kierunkach.

## 17.12. Fale stojące i rezonans

Rozważmy strunę, taką jak w gitarze, rozpiętą między dwoma zaciskami. Założymy, że wytwarzamy ciągłą falę sinusoidalną o pewnej częstotliwości biegnącą



Rys. 17.20. Stroboskopowe fotografie przedstawiające (niedoskonałą) falę stojącą w strunie wprawianej w drgania za pomocą wibratora znajdującego się na jej lewym końcu. Taka fala pojawia się tylko przy pewnych częstotliwościach drgań

wzdłuż struny, powiedzmy w prawo. Gdy fala dociera do prawego końca, odbiła się i zaczyna biec w lewo. Ta fala biegąca w lewo nakłada się na falę, która nadal biegnie w prawo. Gdy fala biegąca w lewo dociera do lewego końca, ponownie odbija się i zaczyna biec w prawo, nakładając się na falę biegącą w lewo i pierwotną falę biegącą w prawo. Krótko mówiąc, bardzo szybko uzyskujemy wiele nakładających się na siebie fal, które ze sobą interferują.

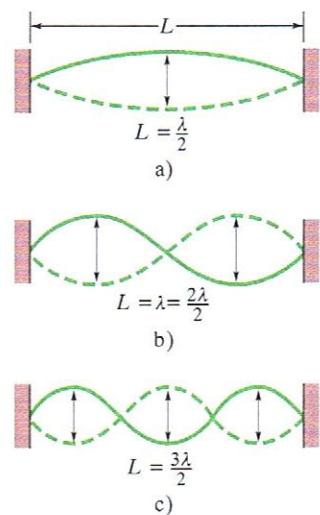
Przy pewnych częstotliwościach w wyniku interferencji powstaje fala stojąca o dużej amplitudzie, taka jak fala na rysunku 17.20. O takiej fali stojącej mówimy, że powstaje w wyniku **rezonansu**, o strunie zaś mówimy, iż *rezonuje* przy pewnych częstotliwościach, nazywanych **częstościami rezonansowymi** (lub częstotliwościami własnymi). Gdy struna drga z inną częstotliwością niż rezonansowa, fala stojąca się nie pojawia. Wówczas w wyniku interferencji fale biegących w lewo i w prawo powstają jedynie niewielkie (być może niedostrzegalne) drgania struny.

Założymy, że struna rozpięta jest między dwoma zaciskami znajdującymi się w ustalonej odległości  $L$  od siebie. Aby znaleźć wzór na częstotliwość rezonansową struny, zauważmy, że na obu jej końcach muszą znajdować się węzły, gdyż końce są umocowane i nie mogą drgać. Najprostszy schemat spełniający te wymagania przedstawiono na rysunku 17.21a, na którym widoczne są dwa największe wychylenia struny (zaznaczone linią ciągłą i linią przerywaną) tworzące pojedynczą „pętlę”. Mamy tu tylko jedną strzałkę, znajdująca się w środku struny. Zauważmy, że połowa długości fali jest równa długości struny  $L$ . Tak więc w tym przypadku  $\lambda/2 = L$ . Warunek ten oznacza, iż aby fale biegące w lewo i w prawo utworzyły w wyniku interferencji taką falę stojącą, muszą mieć długość równą  $\lambda = 2L$ .

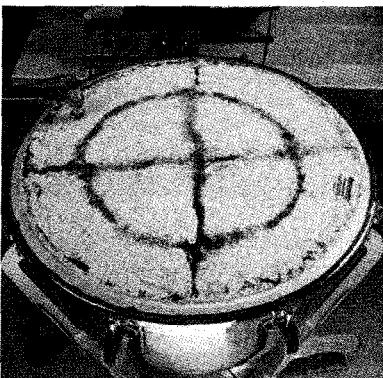
Drugą prostą falę stojącą spełniającą żądanie, by na końcach struny znajdowały się węzły, przedstawiono na rysunku 17.21b. Mamy tu trzy węzły i dwie strzałki, a drgania struny tworzą dwie „pętle”. Do uzyskania takiej fali stojącej fale biegące w lewo i w prawo muszą mieć długość  $\lambda = L$ . Trzeci z kolei schemat przedstawiono na rysunku 17.21c. W tym przypadku mamy cztery węzły, trzy strzałki, trzy pętle, a długość fali wynosi  $\lambda = 2L/3$ . Możemy kontynuować ciąg fal stojących, rysując coraz bardziej skomplikowane schematy. Każdy kolejny element ciągu powinien mieć o jeden węzeł i jedną strzałkę więcej niż poprzedni, przy czym w długości  $L$  struny powinna mieścić się kolejna połowa długości fali ( $\lambda/2$ ).

Tak więc fala stojąca w strunie o długości  $L$  może być utworzona przez fale o długości równej jednej z następujących wartości:

$$\lambda = \frac{2L}{n}, \quad \text{gdzie } n = 1, 2, 3, \dots \quad (17.52)$$



Rys. 17.21. Struna napięta między dwoma uchwytymi i wprawiona w drgania w postaci fali stojącej. a) Najprostszy możliwy kształt zawiera jedną „pętlę” utworzoną przez połączenie kształtów liny przy jej maksymalnych wychyleniach (linia ciągła i linia przerywana). b) Drugi w kolejności najprostszy schemat zawiera dwie pętle. c) Kolejny schemat zawiera trzy pętle



Rys. 17.22. Jedna z wielu możliwych fal stojących w membranie kotła, ujawniona dzięki posypyaniu membrany ciemnym proszkiem. Gdy w membranie wzbudzane są drgania o jednej częstotliwości za pomocą mechanicznego wibratora widocznego w lewym górnym rogu fotografii, proszek zbiera się w węzłach, które w tym dwuwymiarowym przykładzie mają postać okręgów i linii prostych

Częstości rezonansowe odpowiadające tym długościom fali, zgodnie ze wzorem (17.12), wynoszą

$$v = \frac{v}{\lambda} = n \frac{v}{2L}, \quad \text{gdzie } n = 1, 2, 3, \dots, \quad (17.53)$$

gdzie  $v$  jest prędkością fali biegnącej w strunie.

Z wyrażenia (17.53) wynika, że częstości rezonansowe są całkowitymi wielokrotnościami najniższej częstotliwości rezonansowej,  $v = v/2L$ , odpowiadającej  $n = 1$ . Organie własne o najniższej częstotliwości rezonansowej nazywamy *drganiem (modem) podstawowym* lub *pierwszą harmoniczną*. *Druga harmoniczna* to moda drgań przy  $n = 2$ . *Trzecia harmoniczna* — przy  $n = 3$  itd. Częstości związane z tymi modami oznaczane są często symbolami  $v_1, v_2, v_3$  i tak dalej. Zbiór wszystkich możliwych drgań własnych nazywamy **szeregiem harmonicznym**, a liczbę  $n$  nazywamy **liczbą harmoniczną** dla  $n$ -tej harmonicznej.

Zjawisko rezonansu występuje we wszystkich układach drgających; może występować również w dwóch lub trzech wymiarach. Na przykład na rysunku 17.22 przedstawiono dwuwymiarową falę stojącą w drgającej membranie kotła.

**SPRAWDZIAN 7:** W poniższym szeregu częstości rezonansowych brakuje jednej częstotliwości (mniejszej niż 400 Hz): 150 Hz, 255 Hz, 300 Hz, 375 Hz. a) Podaj brakującą częstotliwość. b) Wyznacz częstotliwość siódmej harmonicznej.

## Przykład 17.7

Strunę umocowaną do sinusoidalnego wibratora  $P$  i przerzuconą przez wspornik  $Q$  obciążono klockiem o masie  $m$  (rys. 17.23). Odległość  $L$  między punktami  $P$  i  $Q$  wynosi 1,2 m, liniowa gęstość struny równa jest 1,6 g/m, a częstotliwość wibratora  $v$  jest stała i wynosi 120 Hz. Amplituda ruchu w punkcie  $P$  jest na tyle mała, że możemy ten punkt potraktować jak węzeł. Węzeł również znajduje się w punkcie  $Q$ .

a) Przy jakiej masie  $m$  klocka wibrator może wzbudzić w linie czwartą harmoniczną?

### ROZWIĄZANIE:

1. Struna będzie rezonować jedynie przy pewnych częstotliwościach określonych przez prędkość  $v$  fali w strunie i długość  $L$  struny. Zgodnie ze wzorem (17.53) częstości rezonansowe wynoszą

$$v = n \frac{v}{2L}, \quad \text{gdzie } n = 1, 2, 3, \dots \quad (17.54)$$

Do wzbudzenia czwartej harmonicznej ( $n = 4$ ) musimy tak dobrą prawą stronę tego równania po podstawieniu  $n = 4$ , aby lewa strona była równa częstotliwości wibratora (120 Hz).

Wielkość  $L$  we wzorze (17.54) jest ustalona i nie możemy jej zmienić.

2. Jednakże możemy zmienić prędkość  $v$ , gdyż zależy ona od tego, jak dużą masę  $m$  zawiesimy na końcu struny. Zgodnie ze

wzorem (17.25) prędkość fali jest równa

$$v = \sqrt{T/\mu}.$$

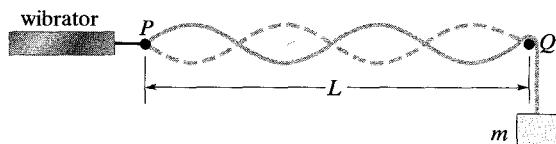
W naszym przypadku naprężenie  $T$  struny jest równe ciężarowi klocka  $mg$ , zatem

$$v = \sqrt{\frac{T}{\mu}} = \sqrt{\frac{mg}{\mu}}. \quad (17.55)$$

Podstawiając  $v$  ze wzoru (17.55) do (17.54), przyjmując dla czwartej harmonicznej  $n = 4$  oraz rozwiązuając otrzymane równanie ze względu na  $m$ , otrzymujemy

$$\begin{aligned} m &= \frac{4L^2 v^2 \mu}{n^2 g} \\ &= \frac{(4)(1,2 \text{ m})^2 (120 \text{ Hz})^2 (0,0016 \text{ kg/m})}{(4)^2 (9,8 \text{ m/s}^2)} \\ &= 0,846 \text{ kg} \approx 0,85 \text{ kg}. \end{aligned} \quad (\text{odpowiedź}) \quad (17.56)$$

b) Przyjmij masę klocka  $m = 1 \text{ kg}$ . Jaka fala stojąca zostanie wzbudzona w strunie?



Rys. 17.23. Przykład 17.7. Naprężona struna przyłączona jest do wibratora. Przy ustalonej częstotliwości wibratora fale stojące pojawiają się jedynie dla pewnych wartości naprężenia struny

## ROZWIĄZANIE:

Jeżeli podstawimy tę wartość masy do równania (17.56) i rozwiążemy je ze względu na  $n$ , otrzymamy wartość  $n = 3,7$ .

**O** Liczba  $n$  musi być całkowita, tak więc nie jest możliwa wartość  $n = 3,7$ . Zatem przy obciążeniu struny klockiem o masie 1 kg wibrator nie może w niej wzbudzić żadnej fali stojącej; wszelkie drgania będą małe, być może nawet niezauważalne.

## Sztuka rozwiązywania zadań

### Porad 2: Harmoniczne w strumie

Jeżeli potrzebujesz uzyskać informacje o pewnej harmonicznej w naprężonej strunie o danej długości  $L$ , zacznij od narysowania tej harmonicznej (jak na rysunku 17.21). Jeżeli badasz na przykład piątę harmoniczną, powinieneś narysować pięć pętli między punktami reprezentującymi sztywne wsporniki. Oznacza to, że pięć pętli, każda o długości  $\lambda/2$ , powinno wypełniać długość  $L$

struny. Tak więc  $5(\lambda/2) = L$ , skąd  $\lambda = 2L/5$ . Korzystając ze wzoru (17.12) ( $v = v/\lambda$ ), możemy wyznaczyć częstotliwość harmonicznej.

Pamiętaj, że dla harmonicznej długość fali zależy jedynie od długości struny  $L$ , podczas gdy jej częstotliwość zależy również od prędkości  $v$  fali, która z kolei jest określona przez naprężenie struny i jej gęstość liniową zgodnie ze wzorem (17.25).

## Podsumowanie

**Fale poprzeczne i podłużne** Fale mechaniczne mogą występuwać jedynie w ośrodku materialnym i podlegają zasadom dynamiki Newtona. **Poprzecznne fale mechaniczne**, takie jak fale w napiętej linie, to fale, w których cząstki ośrodka drgają prostopadle do kierunku rozchodzenia się fal. Fale, w których cząstki ośrodka drgają równolegle do kierunku rozchodzenia się fal, to **fale podłużne**.

**Fala sinusoidalna** Fala sinusoidalna biegąca w dodatnim kierunku osi  $x$  ma matematyczną postać

$$y(x, t) = y_m \sin(kx - \omega t), \quad (17.2)$$

gdzie  $y_m$  jest **amplitudą fali**,  $k$  — **liczbą falową**,  $\omega$  — **częstotliwością kołową**, a wyrażenie  $kx - \omega t$  jest jej **fazą**. **Długość fali**  $\lambda$  i liczbę falową  $k$  wiążą zależność

$$k = \frac{2\pi}{\lambda}. \quad (17.5)$$

**Okres**  $T$  i **częstotliwość**  $v$  fali są związane z jej częstotliwością kołową  $\omega$  zależnością

$$\frac{\omega}{2\pi} = v = \frac{1}{T}. \quad (17.9)$$

I na koniec, **prędkość fali**  $v$  jest związana z pozostałymi parametrami zależnością

$$v = \frac{\omega}{k} = \frac{\lambda}{T} = \lambda v. \quad (17.12)$$

**Równanie fali biegącej** Każda funkcja postaci

$$y(x, t) = h(kx \pm \omega t) \quad (17.16)$$

może reprezentować **falę biegącą**, której prędkość dana jest wzorem (17.12), a jej kształt — przez matematyczną postać funkcji  $h$ . Znak plus oznacza falę biegającą w ujemnym kierunku osi  $x$ , a znak minus — falę biegającą w dodatnim kierunku osi  $x$ .

**Prędkość fali w napiętej linie** Prędkość fali w napiętej linie określona jest przez własności liny. Prędkość w linie o naprężeniu

$T$  i gęstości liniowej  $\mu$  wynosi

$$v = \sqrt{\frac{T}{\mu}}. \quad (17.25)$$

**Moc Średnia moc**, czyli średnia szybkość, z jaką fala sinusoidalna w napiętej linie przenosi energię, dana jest wzorem

$$P_{sr} = \frac{1}{2} \mu v \omega^2 y_m^2. \quad (17.32)$$

**Superpozycja fal** Gdy dwie lub więcej fal porusza się w tym samym ośrodku, przemieszczenie każdej cząstki ośrodka stanowi sumę przemieszczeń, jakie byłyby wywoływane przez każdą falę z osobna.

**Interferencja fal** Dwie fale sinusoidalne w tej samej linie wykazują interferencję, wzmacniając się lub osłabiając zgodnie z zasadą superpozycji. Jeżeli obie biegą w tym samym kierunku i mają takie same amplitudy  $y_m$  i częstotliwości (a w konsekwencji i długości fali), różnią się zaś jedynie w fazie o kąt  $\phi$ , to w rezultacie otrzymujemy falę wypadkową o takiej samej częstotliwości opisaną wzorem

$$y'(x, t) = [2y_m \cos \frac{1}{2}\phi] \sin(kx - \omega t + \frac{1}{2}\phi). \quad (17.38)$$

Jeżeli  $\phi = 0$ , to fale są dokładnie w zgodnej fazie i ich interferencja jest całkowicie konstruktywna; gdy zaś  $\phi = \pi$ , fale mają dokładnie przeciwnie fazy i ich interferencja jest całkowicie destruktyna.

**Wskazy** Fala  $y(x, t)$  może być przedstawiona za pomocą **wskazu**. Jest to wektor o długości równej amplitudzie  $y_m$  fali, obracający się wokół początku układu współrzędnych z prędkością kątową równą częstotliwości kołowej  $\omega$  fali. Rzut obracającego się wskazu na oś pionową daje przemieszczenie  $y$  punktu, przez który przechodzi fala.

**Fala stojąca** W wyniku interferencji dwóch identycznych fal sinusoidalnych poruszających się w przeciwnych kierunkach powstaje **fala stojąca**. Dla liny z umocowanymi końcami fala stojąca opisana jest wzorem

$$y'(x, t) = [2y_m \sin kx] \cos \omega t. \quad (17.47)$$

Fala stojąca charakteryzuje się ustalonymi położeniami punktów, w których amplituda drgań jest równa零, nazywanych **węzłami**, oraz ustalonymi położeniami punktów, w których amplituda drgań jest największa, zwanych **strzałkami**.

**Rezonans** Fale stojące w linie można wzbudzić poprzez odbicie fal biegących od końców liny. Jeżeli jeden koniec liny jest

umocowany, to musi w nim być węzeł. Narzuca to warunek na częstotliwość, przy których w danej linie może być wzbudzona fala stojąca. Każdą możliwą częstotliwość nazywamy **częstością rezonansową**, a odpowiadającą jej falę stojącą — **drganiem własnym**. W przypadku napiętej liny o długości  $L$ , mającej umocowane końce, częstotliwości rezonansowe dane są wzorem

$$\nu = \frac{v}{\lambda} = n \frac{v}{2L}, \quad \text{gdzie } n = 1, 2, 3, \dots \quad (17.53)$$

Drganie własne odpowiadające  $n = 1$  nazywamy **drganiem (modem) podstawowym** lub **pierwszą harmonicką**; mod odpowiadający  $n = 2$  to **druga harmoniczna** i tak dalej.

## Pytania

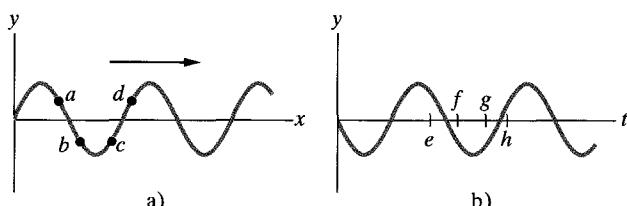
1. Ile wynosi długość (dziwnej) fali przedstawionej na rysunku 17.24, w której każdy segment ma długość  $d$ ?



Rys. 17.24. Pytanie 1

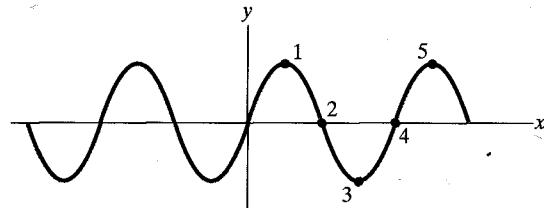
2. Na rysunku 17.25a przedstawiono migawkowe zdjęcie fali bieżącej wzdłuż napiętej liny w kierunku dodatnich wartości  $x$ . Cztery kropki oznaczone literami wskazują cztery elementy liny. Dla każdego z tych elementów określ, czy — w momencie wykonywania zdjęcia — porusza się w górę, w dół, czy też chwilowo pozostaje w spoczynku. (Wskazówka: Wyobraź sobie, w jaki sposób fala przechodzi przez te cztery elementy).

Na rysunku 17.25b przedstawiono zależność przemieszczenia od czasu dla elementu liny znajdującego się, powiedzmy, w punkcie  $x = 0$ . Czy w poszczególnych chwilach, oznaczonych literami, element ten porusza się w górę, w dół, czy też chwilowo pozostaje w spoczynku?



Rys. 17.25. Pytanie 2

3. Na rysunku 17.26 przedstawiono migawkowe zdjęcie fali sinusoidalnej, na którym zaznaczono pięć punktów. Podaj różnice faz drgań w punkcie 1 i a) punkcie 2, b) punkcie 3, c) punkcie 4 oraz d) punkcie 5. Odpowiedź wyraź w radianach, a także za pomocą długości fali. Na wykresie w punkcie  $x = 0$  mamy zerowe przemieszczenie. Kiedy — odpowiedź wyraź za pomocą okresu fali  $T$  — w punkcie  $x = 0$  znajdzie się e) grzbiet fali oraz f) następny

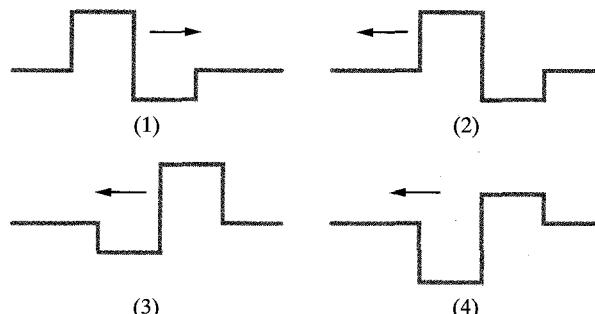


Rys. 17.26. Pytanie 3

punkt o zerowym przemieszczeniu? Załóż, że fala przesuwa się w prawo.

4. Poniższe cztery fale biegą wzdłuż czterech lin o jednakowych gęstościach liniowych ( $x$  jest wyrażone w metrach, a  $t$  — w sekundach). Uszereguj fale według ich: a) prędkości oraz b) naprężeń lin, po których biegą, zaczynając od największych:  
1)  $y_1 = (3 \text{ mm}) \sin(x - 3t)$ , 3)  $y_3 = (1 \text{ mm}) \sin(4x - t)$ ,  
2)  $y_2 = (6 \text{ mm}) \sin(2x - t)$ , 4)  $y_4 = (2 \text{ mm}) \sin(x - 2t)$ .

5. Na rysunku 17.27 fala 1 składa się z prostokątnego grzbietu o wysokości 4 jednostek i szerokości  $d$  oraz prostokątnej doliny o głębokości 2 jednostek i szerokości  $d$ . Fala 1 biegnie w prawo wzdłuż osi  $x$ . Fale 2, 3 i 4 o podobnym kształcie, o takich samych wysokościach, głębokościach i szerokościach biegą wzdłuż osi  $x$  w lewo naprzeciw fali 1. Która z tych fal, interferując z falą 1, utworzy w pewnym momencie: a) najgłębszą dolinę, b) płaską linię oraz c) jednopozymowy grzbiet o szerokości  $2d$ ?



Rys. 17.27. Pytanie 5

**6.** Początkowo mamy dwie fale sinusoidalne o takich samych amplitudach biegące w zgodnej fazie wzdłuż linii, a następnie w pewien sposób jedną z nich przesuwamy w fazie o 5,4 długości fali. Jaki rodzaj interferencji pojawi się w linii?

**7.** Amplitudy i przesunięcia fazowe czterech par fal o jednakowych długościach wynoszą: a) 2 mm, 6 mm i  $\pi$  rad; b) 3 mm, 5 mm i  $\pi$  rad; c) 7 mm, 9 mm i  $\pi$  rad; d) 2 mm, 2 mm i 0 rad. Każda para biegnie w tym samym kierunku po tej samej linii. Bez pisemnych obliczeń uszereguj te pary według amplitud fal wypadkowych, zaczynając od największej. (Wskazówka: Skonstruuj diagramy wskazów).

**8.** W linii wzbudzono siódmą harmoniczną. Określ: a) ile jest węzłów oraz b) co znajduje się w środku linii — węzeł, strzałka czy jakiś stan pośredni. Następnie wzbudzono szóstą harmoniczną. Określ: c) czy jej rezonansowa długość fali jest krótsza, czy dłuższa niż w przypadku siódmej harmonicznej, a także, d) czy częstotliwość rezonansowa jest większa, czy mniejsza.

**9.** Liny A i B mają jednakowe długości i gęstości liniowe, ale lina B jest bardziej naprężona niż lina A. Na rysunku 17.28 przedstawiono cztery przypadki, od (a) do (d), w których w obu linach wzbudzono fale stojące. W którym przypadku jest możliwe, by linie drgały z tą samą częstotliwością rezonansową?

**10.** a) Dana jest fala stojąca w linii opisana wzorem

$$y'(t) = (3 \text{ mm}) \sin(5x) \cos(4t).$$

Określ, czy w punkcie  $x = 0$  znajduje się węzeł, czy strzałka drgań linii. b) Dana jest fala stojąca w linii opisana wzorem

$$y'(t) = (3 \text{ mm}) \sin(5x + \pi/2) \cos(4t).$$

## Zadania

Rozwiążanie jest dostępne na stronie internetowej podręcznika: <http://www.wiley.com/college/hrw>

Rozwiążanie jest dostępne w postaci interaktywnej, wykorzystującej oprogramowanie Interactive Learning-Ware (na tej samej stronie)

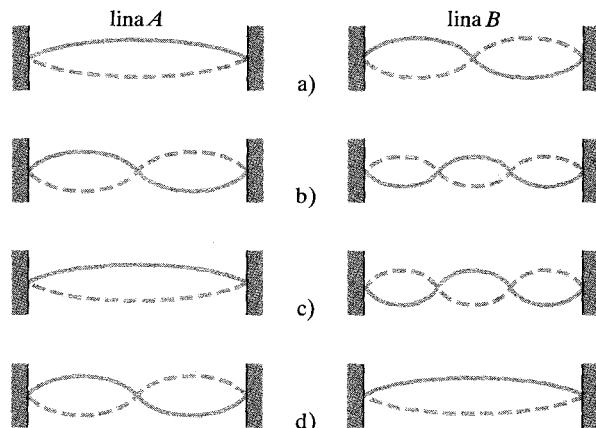
## 17.5 Prędkość fali biegącej

1. Fala ma częstotliwość kołowa 110 rad/s i długość fali 1,8 m. Oblicz a) liczbę falową i b) prędkość fali.

2. Prędkość fal elektromagnetycznych (obejmujących światło widzialne, fale radiowe i promieniowanie rentgenowskie) w próżni wynosi  $3,0 \cdot 10^8$  m/s. a) Światło widzialne obejmuje zakres fal o długościach fali od około 400 nm (fiolet) do około 700 nm (czerwień). Jaki jest zakres częstotliwości tych fal? b) Częstości krótkich i ultrakrótkich fal radiowych (obejmujących m.in. zakres FM w radiu oraz VHF w telewizji) leżą w przedziale od 1,5 MHz do 300 MHz. Określ odpowiadający im przedział długości fali.

Określ, czy w punkcie  $x = 0$  znajduje się węzeł, czy strzałka drgań linii.

**11.** Przeanalizujmy przedstawiony na rysunku 17.23 układ z przykładu 17.7. a) Jeżeli będziemy stopniowo zwiększać masę klocka (nie zmieniając częstotliwości wibratora), pojawią się nowe drgania własne. Określ, czy liczby harmoniczne nowych drgań własnych stają się coraz większe, czy coraz mniejsze. b) Określ, czy przejście od jednego drgania własnego do następnego zachodzi płynnie, czy też jedno drganie własne zanika znacznie wcześniej, niż pojawia się następne.



Rys. 17.28. Pytanie 9

c) Długości fali promieniowania rentgenowskiego leżą w przedziale od 5 nm do  $1 \cdot 10^{-2}$  nm. Podaj zakres częstotliwości dla tego promieniowania.

3. Sinusoidalna fala biegnie wzdłuż linii. Czas, w jakim poszczególne punkty przechodzą od swojego maksymalnego wychylenia do zera, wynosi 0,17 s. Wyznacz a) okres i b) częstotliwość. Długość fali jest równa 1,4 m; c) wyznacz prędkość fali.

4. Napisz wzór przedstawiający falę sinusoidalną biegącą w ujemnym kierunku wzdłuż osi  $x$ , mającą amplitudę 0,01 m, częstotliwość 550 Hz i prędkość 330 m/s.

5. Udowodnij, że wyrażenia

$$y = y_m \sin k(x - vt), \quad y = y_m \sin 2\pi \left( \frac{x}{\lambda} - \nu t \right),$$

$$y = y_m \sin \omega \left( \frac{x}{v} - t \right), \quad y = y_m \sin 2\pi \left( \frac{x}{\lambda} - \frac{t}{T} \right),$$

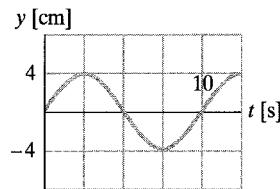
są równoważne wyrażeniu

$$y = y_m \sin(kx - \omega t).$$

6. Równanie fali poprzecznej biegnącej wzdłuż bardzo długiej liny ma postać  $y = 6 \sin(0,02\pi x + 4\pi)$ , gdzie  $x$  i  $t$  wyrażone są odpowiednio w centymetrach i sekundach. Wyznacz: a) amplitudę, b) długość fali, c) częstotliwość, d) prędkość, e) kierunek rozchodzenia się oraz f) maksymalną poprzeczną prędkość cząsteczek liny. g) Podaj poprzeczne przemieszczenie w punkcie  $x = 3,5$  cm w chwili  $t = 0,26$  s.

7. a) Zapisz równanie opisujące sinusoidalną falę poprzeczną o długości fali 10 cm, częstotliwości 400 Hz i amplitudzie 2 cm biegnącą wzdłuż sznura w kierunku  $+x$ . b) Podaj maksymalną prędkość punktów sznura. c) Wyznacz prędkość fali.

8. Poprzeczna fala sinusoidalna o długości fali 20 cm porusza się wzdłuż liny w dodatnim kierunku osi  $x$ . Na rysunku 17.29 przedstawiono zależność poprzecznego przemieszczenia elementu liny, znajdującego się w punkcie  $x = 0$ , od czasu. a) Naszkicuj w przybliżeniu obszar obejmujący jedną długość fali (od  $x = 0$  do  $x = 20$  cm) w chwili  $t = 0$ . b) Określ prędkość fali. c) Zapisz równanie fali zawierające wszystkie wyznaczone stałe. d) Podaj poprzeczną prędkość elementu liny w punkcie  $x = 0$  i w chwili  $t = 5$  s.



Rys. 17.29. Zadanie 8

9. Fala sinusoidalna o częstotliwości 500 Hz ma prędkość 350 m/s. a) Podaj odległość między punktami, dla których różnica faz wynosi  $\pi/3$  rad. b) Podaj różnicę faz dla dwóch przemieszczeń pewnego punktu w chwilach różniących się o 1 ms.

## 17.6 Prędkość fali w napiętej linie

10. Najgrubsza i najcięższa struna w pewnych skrzypcach mają gęstości liniowe równe odpowiednio 3 g/m i 0,29 g/m. Podaj stosunek średnic obu strun (grubszej do cieńszej) przy założeniu, że obie wykonane są z tego samego materiału.

11. Podaj prędkość fal poprzecznych w sznurze o długości 2 m i masie 60 g poddanym naprężeniu 500 N.

12. Naprężenie w drucie zamocowanym na obu końcach podwojono, nie zmieniając znacząco długości drutu pomiędzy zaciskami. Podaj stosunek prędkości fal poprzecznych w tym drucie przed i po tej zmianie.

13. Liniowa gęstość liny wynosi  $1,6 \cdot 10^{-4}$  kg/m. Fala poprzeczna w linie opisana jest wzorem

$$y = (0,021 \text{ m}) \sin[(2 \text{ m}^{-1})x + (30 \text{ s}^{-1})t].$$

Podaj: a) prędkość fali i b) naprężenie liny.

14. Dane jest równanie fali poprzecznej w linie

$$y = (2 \text{ mm}) \sin[(20 \text{ m}^{-1})x - (600 \text{ s}^{-1})t].$$

Naprężenie liny jest równe 15 N. a) Podaj prędkość fali. b) Znajdź liniową gęstość liny (w gramach na metr).

15. Masa przypadająca na jednostkę długości napiętej liny wynosi 5 g/cm, a jej naprężenie 10 N. W linie wzbudzono falę sinusoidalną o amplitudzie 0,12 mm i częstotliwości 100 Hz, biegnącą w kierunku ujemnych wartości  $x$ . Zapisz równanie tej fali.

16. Jaką najszybszą falę poprzeczną można wyemitować wzdłuż stalowego drutu? Dla zachowania bezpieczeństwa maksymalne naprężenie, jakim można poddać stalowy drut, wynosi  $7 \cdot 10^8 \text{ N/m}^2$ . Gęstość stali jest równa  $7800 \text{ kg/m}^3$ . Pokaż, że odpowiedź nie zależy od średnicy drutu.

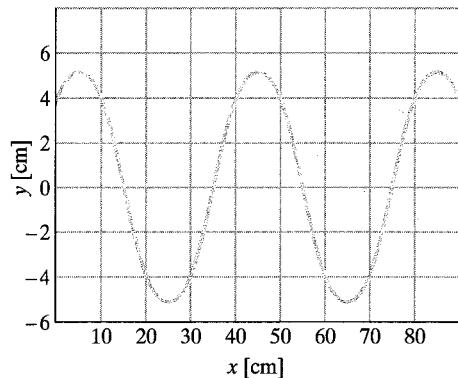
17. Sinusoidalna fala poprzeczna o amplitudzie  $y_m$  i długości fali  $\lambda$  biegnie wzdłuż napiętej liny. a) Znajdź stosunek maksymalnej prędkości cząstek liny (prędkości, z jaką pojedyncza cząstka liny porusza się poprzecznie względem fali) do prędkości fali. b) Czy powyższy stosunek prędkości zależy od materiału, z jakiego wykonana jest lina, na przykład z drutu lub nylonu?

18. Fala sinusoidalna biegnie wzdłuż liny z prędkością 40 cm/s. Stwierdzono, że przemieszczenie cząstek liny w punkcie  $x = 10$  cm zmienia się w czasie zgodnie z zależnością

$$y = (5 \text{ cm}) \sin[1 - (4 \text{ s}^{-1})t].$$

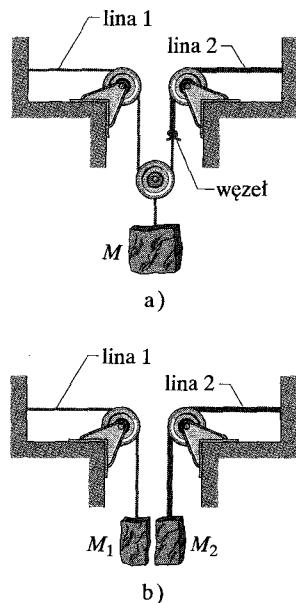
- Liniowa gęstość liny jest równa 4 g/cm. Podaj: a) częstotliwość i b) długość fali. c) Podaj ogólny wzór opisujący zależność poprzecznego przemieszczenia cząstek liny od położenia i czasu. d) Oblicz naprężenie liny.

19. Sinusoidalna fala poprzeczna biegnie wzdłuż liny w ujemnym kierunku osi  $x$ . Na rysunku 17.30 przedstawiono wykres zależności przemieszczenia od położenia w chwili  $t = 0$ ; w punkcie  $x = 0$  przemieszczenie jest równe 4 cm. Naprężenie liny wynosi 3,6 N, a jej gęstość liniowa 25 g/m. Wyznacz: a) amplitudę, b) długość fali, c) jej prędkość i d) okres. e) Znajdź maksymalną poprzeczną prędkość cząstek liny. f) Zapisz równanie opisujące falę biegnącą.



Rys. 17.30. Zadanie 19

**20.** Na rysunku 17.31a lina 1 ma gęstość liniową  $3 \text{ g/cm}$ , a lina 2 ma gęstość liniową  $5 \text{ g/cm}$ . Liny są naprężone dzięki zawieszeniu na nich klocka o masie  $M = 500 \text{ g}$ . Oblicz prędkość fali a) w linie 1 oraz b) w linie 2. (Wskazówka: Gdy lina jest owinięta wokół krążka wzdłuż połowy jego obwodu, działa na krążek siła dwukrotnie większą niż naprężenie liny). Następnie klocek podzielono na dwie części o masach  $M_1$  i  $M_2$  ( $M_1 + M_2 = M$ ), a całe urządzenie przebudowano zgodnie w rysunkiem 17.31b. Wyznacz takie masy klocków c)  $M_1$  i d)  $M_2$ , przy których prędkości fal w obu klockach są sobie równe.



Rys. 17.31. Zadanie 20

**21.** Drut o długości  $10 \text{ m}$  i masie  $100 \text{ g}$  naciągnięto siłą  $250 \text{ N}$ . Na każdym końcu drutu wygenerowano jeden impuls, w odstępie  $30 \text{ ms}$  jeden po drugim; znajdź miejsce pierwszego spotkania impulsów.

**22.** Gumowa taśma, jaka używana jest do wypełniania niektórych piłeczek do baseballa i golfa, spełnia prawo Hooke'a w szerokim zakresie wydłużen. Kawałek tego materiału ma (w stanie nie napiętym) długość  $l$  i masę  $m$ . Po przyłożeniu siły  $F$  taśma rozciąga się o dodatkową długość  $\Delta l$ . a) Wyznacz zależność prędkości fal poprzecznych w naciągniętej gumowej taśmie od  $m$ ,  $\Delta l$  i stałej sprężystości  $k$ . b) Korzystając z odpowiedzi do części (a), wykaż, że czas, w jakim poprzeczny impuls przebędzie całą długość gumowej taśmy, jest proporcjonalny do  $1/\sqrt{\Delta l}$ , gdy  $\Delta l \ll l$ , oraz jest stały, gdy  $\Delta l \gg l$ .

**23\*.** Jednorodna lina o masie  $m$  i długości  $L$  zwisa z sufitu. a) Wykaż, że prędkość fal poprzecznych w linie jest funkcją odległości  $y$  od dolnego końca liny i dana jest wzorem  $v = \sqrt{gy}$ . b) Wykaż, że czas, jakiego fala poprzeczna potrzebuje na przebycie całej długości liny, dany jest wzorem  $t = 2\sqrt{L/g}$ .

## 17.7 Energia i moc fali biegającej w linie

**24.** Lina, po której może biec fala, ma długość  $2,7 \text{ m}$  i masę  $260 \text{ g}$ . Naprężenie liny wynosi  $36 \text{ N}$ . Jaka musi być częstotliwość fali biegającej o amplitudzie  $7,7 \text{ mm}$ , aby jej średnia moc była równa  $85 \text{ W}$ ?

**25.** Poprzeczna fala sinusoidalna wytworzona jest na jednym końcu długiej poziomej liny za pomocą pręta poruszającego się w

góre i w dół na odcinku  $1 \text{ cm}$ . Ruch pręta jest ciągły i powtarza się regularnie 120 razy na sekundę. Lina ma gęstość liniową  $120 \text{ g/m}$  i jest napięta siłą  $90 \text{ N}$ . Wyznacz maksymalne wartości: a) prędkości poprzecznej  $u$  oraz b) poprzecznej składowej naprężenia  $T$ . (Wskazówka: Składowa poprzeczna równa jest  $T \sin \theta$ , gdzie  $\theta$  jest kątem, jaki lina tworzy z poziomem. Należy powiązać kąt  $\theta$  z wielkością  $dy/dx$ ). c) Udowodnij, że obie wyznaczone wyżej maksymalne wartości występują dla tych samych wartości fazy fali. Wyznacz poprzecznego przemieszczenie  $y$  liny dla tych faz. d) Wyznacz maksymalną szybkość przenoszenia energii wzdłuż liny. e) Podaj poprzeczne przemieszczenie  $y$  w chwili, gdy to przenoszenie jest największe. f) Wyznacz minimalną szybkość przenoszenia energii wzdłuż liny. g) Podaj poprzeczne przemieszczenie  $y$  w chwili, gdy to przenoszenie osiąga minimum.)

## 17.9 Interferencja fal

**26.** Jaka jest różnica faz między dwiema identycznymi falami biegącymi w tym samym kierunku wzdłuż napiętej liny, jeżeli ich wypadkowa ma amplitudę 1,5 razy większą niż amplituda każdej fali składowej? Odpowiedź wyraź: a) w stopniach, b) w radianach oraz c) za pomocą długości fali.

**27.** Dwie identyczne fale biegące w tym samym kierunku są przesunięte w fazie o  $\pi/2 \text{ rad}$ . Znajdź amplitudę fali wypadkowej i wyraź ją za pomocą amplitudy  $y_m$  fal składowych.

**28.** Dwie identyczne — z wyjątkiem fazy — fale sinusoidalne biegą w tym samym kierunku wzdłuż liny i interferują. W rezultacie powstaje fala opisana wzorem

$$y'(x, t) = (3 \text{ mm}) \sin(20x - 4t + 0,82 \text{ rad}),$$

gdzie  $x$  i  $t$  wyrażone są odpowiednio w metrach i sekundach. Wyznacz: a) długość fali  $\lambda$  obu fal składowych, b) różnicę faz między nimi oraz c) ich amplitudę  $y_m$ .

## 17.10 Wskazó

**29.** Określ amplitudę fali wypadkowej, powstałej w wyniku złożenia dwóch fal sinusoidalnych o takich samych częstotliwościach, biegących w tym samym kierunku wzdłuż tej samej liny, jeżeli ich amplitudy są równe  $3 \text{ cm}$  i  $4 \text{ cm}$ , a ich fazy początkowe wynoszą odpowiednio  $0$  i  $\pi/2 \text{ rad}$ .

**30.** Dwie fale sinusoidalne o takich samych okresach, mające amplitudy  $5 \text{ mm}$  i  $7 \text{ mm}$ , biegą w tym samym kierunku wzdłuż napiętej liny; w wyniku ich złożenia powstaje fala o amplitudzie  $9 \text{ mm}$ . Faza początkowa fali o amplitudzie  $5 \text{ mm}$  wynosi  $0$ . Wyznacz fazę początkową fali o amplitudzie  $7 \text{ mm}$ .

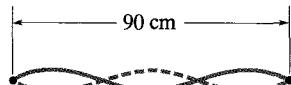
**31.** Trzy fale sinusoidalne o takich samych częstotliwościach biegą wzdłuż liny w dodatnim kierunku osi  $x$ . Ich amplitudy wynoszą  $y_1$ ,  $y_1/2$  i  $y_1/3$ , a fazy początkowe równe są odpowiednio  $0$ ,  $\pi/2$  oraz  $\pi$ . Wyznacz: a) amplitudę i b) fazę początkową fali wypadkowej. c) Narysuj kształt fali wypadkowej w chwili  $t = 0$  i zanalizuj jego zmiany w miarę upływu czasu  $t$ .

## 17.12 Fale stojące i rezonans

**32.** Lina naprężona siłą  $T_{\text{pocz}}$  drga z trzecią harmoniczną o częstotliwości  $v_3$ , przy czym fala wzbudzona w linie ma długość fali  $\lambda_3$ . Jeżeli naprężenie liny zwiększymy do wartości  $T_{\text{kofic}} = 4T_{\text{pocz}}$  i ponownie wzbudzimy trzecią harmoniczną, to jaka będzie: a) częstotliwość drgań wyrażona przez częstotliwość  $v_3$  oraz b) długość fali wyrażona przez  $\lambda_3$ ?

**33.** Nylonowa struna w gitarze ma gęstość liniową 7,2 g/m i jest naciągnięta siłą 150 N. Stałe punkty podparcia oddalone są od siebie o 90 cm. W strunie wzbudzono falę stojącą przedstawioną na rysunku 17.32.

Oblicz: a) prędkość, b) długość fali oraz c) częstotliwość fal biegących, tworzących w wyniku złożenia daną falę stojącą. 



Rys. 17.32. Zadanie 33

**34.** Dwie fale sinusoidalne o identycznych długościach i amplitudach biegą w przeciwnych kierunkach wzdłuż liny z prędkością 10 cm/s. Wyznacz ich długości fali, jeżeli odstęp czasu między chwilami, gdy lina jest płaska, wynosi 0,5 s.

**35.** Zamocowana na obu końcach lina ma długość 8,4 m i masę 0,12 kg. Lina została naciągnięta siłą 96 N i wprawiona w drgania. a) Określ prędkość fal w linie. b) Wyznacz największą możliwą długość fali stojącej. c) Podaj częstotliwość tej fali.

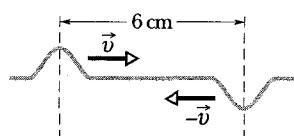
**36.** Lina o długości 125 cm i masie 2 g została naciągnięta siłą 7 N między dwoma sztywnymi wspornikami. a) Określ prędkość fali w linie. b) Podaj najmniejszą częstotliwość rezonansową dla tej liny.

**37.** Podaj trzy najmniejsze częstotliwości fal stojących w drucie o długości 10 m i masie 100 g, którego naprężenie wynosi 250 N.

**38.** Lina A jest rozcięgnięta między dwoma zaciskami znajdującymi się w odległości  $L$ . Lina B — o takiej samej gęstości liniowej i poddana takiemu samemu naprężeniu, co lina A — rozcięgnięta jest między dwoma zaciskami znajdującymi się w odległości  $4L$ . Rozważ osiem pierwszych harmonicznych liny B. Które z nich, o ile takie są, mają częstotliwości rezonansowe pokrywające się z częstotliwościami rezonansowymi liny A?

**39.** Lina rozpięta między dwoma sztywnymi wspornikami, znajdującymi się w odległości 75 cm od siebie, ma częstotliwości rezonansowe 420 Hz i 315 Hz, przy czym żadna pośrednia częstotliwość nie jest rezonansowa. Określ: a) najmniejszą częstotliwość rezonansową oraz b) prędkość fali. 

**40.** Na rysunku 17.33 przedstawiono dwa impulsy biegące wzdłuż liny w przeciwnych kierunkach. Prędkość fali  $v$  wynosi 2 m/s. W chwili  $t = 0$  odległość między impulsami jest



Rys. 17.33. Zadanie 33

równa 6 cm. a) Naszkicuj kształt liny dla  $t$  równego 5 ms, 10 ms, 15 ms, 20 ms i 25 ms. b) Jaką postać ma energia impulsów w chwili  $t = 15$  ms?

**41.** Lina drga zgodnie z wyrażeniem

$$y' = (0,5 \text{ cm}) \sin \left[ \left( \frac{\pi}{3} \text{ cm}^{-1} \right) x \right] \cos \left[ (40\pi \text{ s}^{-1}) t \right].$$

Podaj: a) amplitudę i b) prędkość dwóch fal (identycznych z wyjątkiem kierunku rozchodzenia się), których superpozycja daje takie drgania. c) Określ odległość między węzłami. d) Wyznacz prędkość częstek liny w punkcie  $x = 1,5$  cm w chwili  $t = 9/8$  s.

**42.** Fala stojąca powstaje w wyniku złożenia dwóch poprzecznych fal biegących, opisanych wzorami

$$y_1 = 0,05 \cos(\pi x - 4\pi t) \quad \text{oraz} \quad y_2 = 0,05 \cos(\pi x + 4\pi t),$$

gdzie wielkości  $x$ ,  $y_1$  i  $y_2$  wyrażone są w metrach, a  $t$  — w sekundach. a) Podaj najmniejszą dodatnią wartość  $x$  odpowiadającą węźlowi. b) Określ chwilę w przedziale czasu  $0 \leq t \leq 0,5$  s, w której częstka znajdująca się w punkcie  $x = 0$  ma prędkość równą zeru.

**43.** W linie o długości 3 m wzbudzono falę stojącą „o trzech pętlach”, mającą amplitudę równą 1 cm. Prędkość fali wynosi 100 m/s. a) Podaj częstotliwość fali. b) Zapisz równania dwóch fal, które w wyniku interferencji dają tę falę stojącą.

**44.** W doświadczeniu z falami stojącymi strunę o długości 90 cm przymocowano do jednego z ramion wzbudzanego elektrycznie kamertonu, drgającego prostopadle do osi struny z częstotliwością 60 Hz. Masa struny wynosi 0,044 kg. Jaką siłę należy naprężyć strunę (za pomocą ciężarka przyczepionego do drugiego końca), aby powstały drgania „o czterech pętlach”?

**45.** Drgania kamertonu o częstotliwości 600 Hz wzbudzają fale stojące w strunie umocowanej na obu końcach. Prędkość fali w strunie wynosi 400 m/s. Fala stojąca ma „cztery pętle” oraz amplitudę równą 2 mm. a) Wyznacz długość struny. b) Zapisz wyrażenie opisujące zależność przemieszczenia struny od położenia i czasu.

**46.** Sznur naciągnięty siłą 200 N i zamocowany na obu końcach wykonuje drgania odpowiadające drugiej harmonicznej fali stojącej. Przemieszczenie sznura opisane jest wzorem

$$y = (0,1 \text{ m}) (\sin \pi x / 2) \sin 12\pi t,$$

gdzie  $x = 0$  odpowiada jednemu końcowi sznura, a wielkości  $x$  i  $t$  wyrażone są odpowiednio w metrach i sekundach. Wyznacz:

- a) długość sznura,
- b) prędkość fali w sznurze oraz c) masę sznura.
- d) Określ częstotliwość drgań sznura odpowiadających trzeciej harmonicznej fali stojącej.

**47.** Generator znajdujący się na jednym końcu bardzo długiej liny wytwarza falę opisaną wzorem

$$y = (6 \text{ cm}) \cos \frac{\pi}{2} [(2 \text{ m}^{-1})x + (8 \text{ s}^{-1})t],$$

a generator na drugim końcu — falę

$$y = (6 \text{ cm}) \cos \frac{\pi}{2} [(2 \text{ m}^{-1})x - (8 \text{ s}^{-1})t].$$

Oblicz: a) częstotliwość, b) długość oraz c) prędkość obu fal. Wyznacz położenia d) węzłów i e) strzałkę.

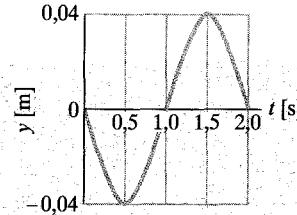
48. Fala stojąca w linie opisana jest wzorem

$$y(x, t) = 0,04 \sin 5\pi x \cos 40\pi t,$$

gdzie wielkości  $x$  i  $t$  wyrażone są odpowiednio w metrach i sekundach. a) Określ położenie wszystkich węzłów w obszarze  $0 \leq x \leq 0,4$  m. b) Podaj okres ruchu drgającego dowolnego (nie węzłowego) punktu liny. Wyznacz c) prędkość i d) amplitudę dwóch fal biegących, dających w wyniku interferencji taką falę stojącą. e) Określ, w jakich chwilach z przedziału czasu  $0 \leq t \leq 0,05$  s wszystkie punkty liny będą miały prędkość po przeczną równą zeru.

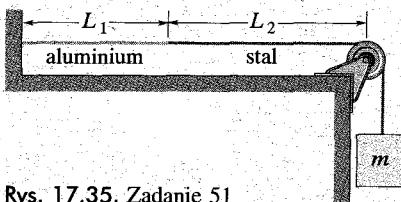
49. Wykaż, że maksimum energii kinetycznej w każdej z pętli fali stojącej tworzonej przez dwie fale biegące o identycznych amplitudach wynosi  $2\pi^2 \mu y_m^2 v v$ .

50. Dla pewnej fali stojącej w długiej linie mamy strzałkę w punkcie  $x = 0$  i węzeł w punkcie  $x = 0,1$  m. Na rysunku 17.34 przedstawiono przemieszczenie  $y(t)$  elementu liny znajdującego się w punkcie  $x = 0$ . Określ dla chwili  $t = 0,5$  s przemieszczenie elementów liny znajdujących się w punktach: a)  $x = 0,2$  m i b)  $x = 0,3$  m. Dla punktu  $x = 0,2$  m wyznacz poprzeczne prędkości elementów liny w chwilach c)  $t = 0,5$  s i d)  $t = 1$  s. e) Naszkicuj falę stojącą w chwili  $t = 0,5$  s w obszarze od  $x = 0$  do  $x = 0,4$  m.



Rys. 17.34. Zadanie 50

51. Drut aluminiowy o długości  $L_1 = 60$  cm, polu przekroju poprzecznego  $1 \cdot 10^{-2}$  cm $^2$  i gęstości 2,6 g/cm $^3$  połączono z drutem stalowym o gęstości 7,8 g/cm $^3$  i takim samym przekroju poprzecznym (rys. 17.35). Taki układ drutów, obciążony klockiem o masie  $m = 10$  kg, umocowano w taki sposób, by odległość  $L_2$  od punktu połączenia drutów do osi krążka była równa 86,6 cm. Za pomocą zewnętrznego źródła o zmiennej częstotliwości wzbudzono w drucie fale poprzeczne; przy krążku znajduje się węzeł fali. a) Wyznacz najmniejszą częstotliwość, dla której powstała fala stojąca ma jeden z węzłów w punkcie połączenia drutów. b) Podaj, ile węzłów obserwujemy przy tej częstotliwości.



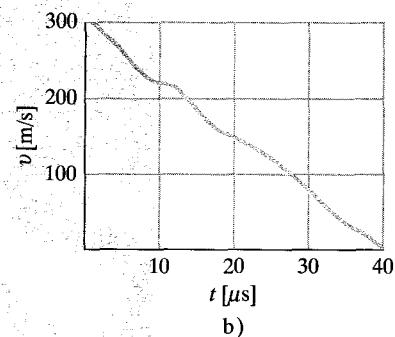
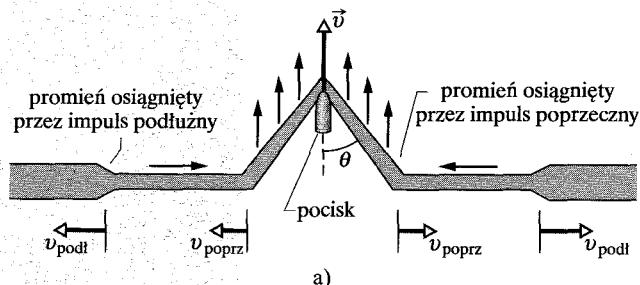
Rys. 17.35. Zadanie 51

### Zadanie dodatkowe

52. Kamizelka kuloodporna. Gdy pocisk o dużej prędkości (kula karabinowa lub odłamek bomby) uderza we współczesną kami-

zelkę kuloodporną, tkanina, z jakiej jest wykonana kamizelka, zatrzymuje pocisk i uniemożliwia penetrację poprzez szybkie rozproszenie jego energii na dużym obszarze. To rozproszenie zachodzi dzięki podłużnym i poprzecznym impulsom falowym poruszającym się promieniście od punktu uderzenia, w którym pocisk wypycha tkaninę, tworząc stożkowe wgniecenie. Impuls podłużny, biegący wzdłuż włókien tkaniny z prędkością  $v_{\text{podl}}$ , wyprzedza wgniecenie, powodując, iż tkanina staje się cieńska i naprężona przez materiał poruszający się promieniście w kierunku wgniecenia. Jedno z takich radialnych włókien przedstawiono na rysunku 17.36a. Część energii pocisku zużyta zostaje na taki ruch i związane z nim naprężenie. Impuls poprzeczny, poruszający się z mniejszą prędkością  $v_{\text{poprz}}$ , wywołany jest przez wgniecenie. W miarę jak pocisk powoduje zwiększenie głębokości wgniecenia, zwiększa się również jego promień, w wyniku czego materiał włókien porusza się w tym samym kierunku co pocisk (tj. prostopadle do kierunku ruchu impulsów poprzecznych). Pozostała część energii pocisku zużywana jest na ten właśnie ruch. Cała energia — oprócz części powodującej trwałą deformację włókien — w ostatecznym rachunku przekształca się w energię termiczną.

Na rysunku 17.36b przedstawiono zależność prędkości  $v$  od czasu  $t$  dla pocisku o masie 10,2 g wystrzelonego z rewolweru .38 Special wprost w kamizelkę kuloodporną. Przyjmij  $v_{\text{podl}} = 2000$  m/s oraz załóż, że połowa kąta rozwarcia stożkowego wgniecenia (kąt  $\theta$ ) wynosi 60°. Wyznacz a) promień obszaru o mniejszej grubości oraz b) promień wgniecenia pod koniec zderzenia (zakładamy, że osoba chroniona przez kamizelkę pozostaje w spoczynku).



Rys. 17.36. Zadanie 52

# 18 Fale II

Ten nietoperz podkowiec nie tylko może zlokalizować ćmę latającą w zupełnej ciemności, ale może również określić względną prędkość ćmy, by skierować się do owada.

W jaki sposób działa system detekcji u nietoperza? W jaki sposób ćma może „zagłuszyć” ten system lub zmniejszyć jego efektywność?

Odpowiedź znajdziesz w tym rozdziale.



## 18.1. Fale dźwiękowe

Jak widzieliśmy w rozdziale 17, fale mechaniczne to fale, które do swojego istnienia potrzebują ośrodka materialnego. Wyróżniamy dwa rodzaje fal mechanicznych: *fale poprzeczne*, w których drgania zachodzą prostopadle do kierunku rozchodzenia się fali, oraz *fale podłużne*, w których drgania są równoległe do kierunku rozchodzenia się fali.

W tej książce **falą dźwiękową** będziemy nazywać dowolną falę podłużną. Zespoły poszukiwawcze posługują się takimi falami do sondowania skorupy ziemskiej w celu poszukiwania złóż ropy naftowej. Na statkach instalowane są urządzenia echolokacyjne (sonary) do wykrywania przeszkoł podwodnych. W łodziach podwodnych używa się fal dźwiękowych do śledzenia innych łodzi podwodnych, przeważnie drogą nasłuchiwanie charakterystycznych szumów generowanych przez układy napędowe. Na rysunku 18.1 przedstawiającym komputerowo przetworzony obraz głowy i ramienia płodu widać, w jaki sposób fale dźwiękowe mogą być wykorzystywane do badania miękkich tkanek ludzkiego ciała. W tym rozdziale skupimy się na falach dźwiękowych, które biegą w powietrzu i są słyszalne przez ludzi.

Na rysunku 18.2 zilustrowano kilka pojęć, którymi będziemy się posługiwać w naszych rozważaniach. Punkt *S* reprezentuje małe źródło dźwięku — nazywane *źródłem punktowym* — wysyające fale dźwiękowe we wszystkich kierunkach. Kierunek rozchodzenia się fal dźwiękowych wskazują *czola fali* i *promienie*. **Czoła fali** (powierzchnie falowe) to powierzchnie, na których drgania powietrza, wywołane przez falę dźwiękową, mają taką samą fazę; na dwuwymiarowym wykresie dla punktowego źródła te powierzchnie reprezentowane są przez okręgi lub łuki okrągów. **Promienie** to linie prostopadłe do czół fali, wskazujące kierunek ruchu tych ostatnich. Widoczne na rysunku 18.2 krótkie podwójne strzałki nałożone na promienie wskazują, iż podłużne drgania powietrza są równoległe do promieni.

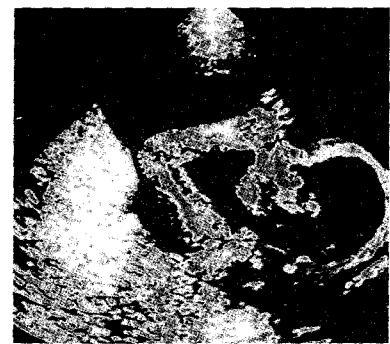
W pobliżu źródła punktowego (rys. 18.2) czola fali są sferyczne i rozprzestrzeniają się w trzech wymiarach — taką falę nazywamy *sferyczną*. W miarę jak czola fali oddalają się od źródła, ich promienie rosną, a zakrzywienie maleje. W dużej odległości od źródła czola fali przybliżamy przez płaszczyznę (na dwuwymiarowym wykresie — przez proste), a falę nazywamy *falą płaską*.

## 18.2. Prędkość dźwięku

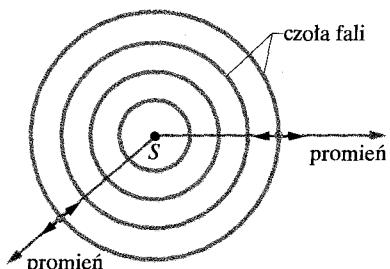
Prędkość dowolnej fali mechanicznej, poprzecznej lub podłużnej, zależy zarówno od inercyjnych właściwości ośrodka (gromadzących energię kinetyczną), jak i od jego właściwości sprężystych (gromadzących energię potencjalną). Możemy zatem uogólnić wzór (17.25), opisujący prędkość fal poprzecznych w napiętej linie

$$v = \sqrt{\frac{T}{\mu}} = \sqrt{\frac{\text{miara sprężystości}}{\text{miara bezwładności}}}, \quad (18.1)$$

gdzie (w przypadku fal poprzecznych) *T* jest naprężeniem liny, a *μ* — jej gęstością liniową. Jeżeli ośrodkiem jest powietrze, a fala jest podłużna, to można



Rys. 18.1. Obraz płodu poszukującego kciuka do ssania; obraz otrzymany za pomocą ultradźwięków mających częstotliwości większe od dźwięków słyszanych przez ludzkie ucho



Rys. 18.2. Fala dźwiękowa rozchodzi się z punktowego źródła *S* w trójwymiarowym ośrodku. Czoła fali są sferami o środkach w punkcie *S*; promienie wychodzą radialnie z punktu *S*. Krótkie podwójne strzałki wskazują, że elementy ośrodka drgają równolegle do promieni

się domyślisć, iż miarą bezwładności (odpowiednik gęstości liniowej  $\mu$ ) jest gęstość (objętościowa) powietrza  $\rho$ . A jaką wielkość powinniśmy przyjąć za miarę sprężystości?

W napiętej linie energia potencjalna związana jest z okresowym rozciąganiem elementów liny w wyniku przechodzenia przez nie fali. Gdy w powietrzu rozchodzi się fala dźwiękowa, energia potencjalna związana jest z okresowym sprężaniem i rozprężaniem małych objętości powietrza. Właściwością określającą, w jakim stopniu element ośrodka zmienia swoją objętość na skutek zmian wywieranego nań ciśnienia (siły na jednostkę powierzchni), jest **moduł ściśliwości**  $B$  zdefiniowany — zgodnie ze wzorem (13.27) — jako

$$B = -\frac{\Delta p}{\Delta V/V} \quad (\text{moduł ściśliwości}), \quad (18.2)$$

gdzie wielkość  $\Delta V/V$  jest względną zmianą objętości wywoływaną przez zmianę ciśnienia  $\Delta p$ . Jak wiemy z paragrafu 15.3, jednostką ciśnienia w układzie SI jest niuton na metr kwadratowy; jednostce tej nadano nazwę *pascal* i symbol Pa. Ze wzoru (18.2) widzimy, że jednostką modułu  $B$  również jest pascal. Przyrosty  $\Delta p$  i  $\Delta V$  zawsze mają przeciwnie znaki: gdy wzrasta ciśnienie wywierane na pewien element ( $\Delta p$  dodatnie), jego objętość się zmniejsza ( $\Delta V$  jest ujemne) i na odwrót. We wzorze (18.2) wprowadziliśmy znak minus, tak więc moduł  $B$  zawsze jest wielkością dodatnią. Zastępując we wzorze (18.1) wielkość  $T$  przez  $B$ , a wielkość  $\mu$  przez  $\rho$ , otrzymujemy wyrażenie opisujące prędkość dźwięku w ośrodku o module ściśliwości  $B$  i gęstości  $\rho$

$$v = \sqrt{\frac{B}{\rho}} \quad (\text{prędkość dźwięku}). \quad (18.3)$$

Niżej wykażemy, że jest to rzeczywiście poprawne wyrażenie. W tabeli 18.1 podano prędkości dźwięku w różnych ośrodkach.

Gęstość wody jest prawie 1000 razy większa od gęstości powietrza. Gdyby to była jedyna wielkość mająca znaczenie dla rozważanego zagadnienia, to na podstawie wzoru (18.3) oczekiwaliśmy, że prędkość dźwięku w wodzie powinna być znacznie mniejsza od prędkości dźwięku w powietrzu. Jednakże z tabeli 18.1 widzimy, że jest odwrotnie. Wnioskujemy stąd (znów korzystając ze wzoru (18.3)), iż moduł ściśliwości wody musi być ponad 1000 razy większy niż analogiczna wielkość dla powietrza. Rzeczywiście tak jest. Woda jest znacznie mniej ściśliwa niż powietrze, czyli innymi słowy (porównaj ze wzorem (18.2)) jej moduł ściśliwości jest znacznie większy.

### Wyprowadzenie wzoru (18.3)

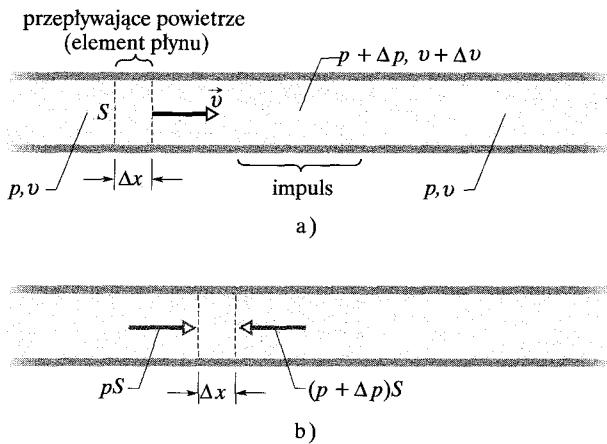
Wyprowadzimy teraz wzór (18.3), korzystając bezpośrednio z zasad dynamiki Newtona. Weźmy pojedynczy impuls, w którym następuje zagęszczenie (kompresja) ośrodka, biegący (z prawa na lewo) z prędkością  $v$  w powietrzu wypełniającym długą rurę, tak jak na rysunku 17.2. Założymy, że poruszamy się razem z tym impulsem z taką samą prędkością, tak by w naszym układzie odniesienia impuls pozostawał w spoczynku. Na rysunku 18.3a przedstawiono tę sytuację

Tabela 18.1. Prędkość dźwięku<sup>a</sup>

Ośrodek	Prędkość [m/s]
<i>Gazy</i>	
powietrze (0°C)	331
powietrze (20°C)	343
hel	965
wodór	1284
<i>Cieczy</i>	
woda (0°C)	1402
woda (20°C)	1482
woda morska <sup>b</sup>	1522
<i>Ciała stałe</i>	
aluminium	6420
stal	5941
granit	6000

<sup>a</sup> W temperaturze 0°C i pod ciśnieniem 1 atm, o ile nie podano inaczej.

<sup>b</sup> W temperaturze 20°C i przy zasoleniu 3,5%.



Rys. 18.3. Impuls zagęszczenia został wysłany wzdłuż długiej rury wypełnionej powietrzem. Układ odniesienia na rysunku wybrano w taki sposób, by impuls pozostawał w spoczynku, a powietrze przepływało z lewa na prawo. a) Warstwa powietrza o grubości  $\Delta x$  porusza się w kierunku impulsu z prędkością  $v$ . b) Powierzchnia czołowa warstwy dociera do impulsu. Przedstawiono siły (związane z ciśnieniem powietrza) działające na powierzchnię czołową i powierzchnię tylną warstwy

widzianą z naszego układu odniesienia. Impuls jest nieruchomy, a powietrze przepływa z prędkością  $v$  z lewa na prawo.

Niech ciśnienie niezaburzonego powietrza będzie równe  $p$ , a ciśnienie w czasie impulsu wynosi  $p + \Delta p$ , gdzie  $\Delta p$  jest wielkością dodatnią za względu na to, że gęstość ośrodka rośnie. Rozważmy warstwę powietrza o grubości  $\Delta x$  i polu powierzchni  $S$ , poruszającą się w kierunku impulsu z prędkością  $v$ . Gdy ta warstwa powietrza dociera do impulsu, jej powierzchnia czołowa napotyka obszar wyższego ciśnienia, w którym zmniejsza swoją prędkość do wartości  $v + \Delta v$ , gdzie  $\Delta v$  jest wielkością ujemną. To spowolnienie jest pełne, gdy tylna powierzchnia warstwy powietrza dociera do impulsu, co zachodzi po upływie czasu

$$\Delta t = \frac{\Delta x}{v}. \quad (18.4)$$

Zastosujmy teraz do rozważanej warstwy powietrza drugą zasadę dynamiki Newtona. W ciągu czasu  $\Delta t$  średnia siła działająca na tylną powierzchnię warstwy wynosi  $pS$  i jest skierowana w prawo, a średnia siła działająca na czołową powierzchnię warstwy wynosi  $(p + \Delta p)S$  i jest skierowana w lewo (rys. 18.3b). Zatem średnia siła wypadkowa działająca na warstwę w przedziale czasu  $\Delta t$  wynosi

$$F = pS - (p + \Delta p)S = -\Delta pS \quad (\text{siła wypadkowa}). \quad (18.5)$$

Znak minus oznacza, że siła wypadkowa działająca na warstwę powietrza skierowana jest w lewo (rys. 18.3b). Objętość warstwy wynosi  $S\Delta x$ , zatem — korzystając z (18.4) — jej masę możemy zapisać w postaci

$$\Delta m = \rho S \Delta x = \rho S v \Delta t \quad (\text{masa}). \quad (18.6)$$

Średnie przyspieszenie warstwy w czasie  $\Delta t$  wynosi

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} \quad (\text{przyspieszenie}). \quad (18.7)$$

Z drugiej zasady dynamiki Newtona ( $F = ma$ ) oraz ze wzorów (18.5), (18.6) i (18.7) otrzymujemy

$$-\Delta p S = (\rho S v \Delta t) \frac{\Delta v}{\Delta t},$$

co możemy zapisać w postaci

$$\rho v^2 = -\frac{\Delta p}{\Delta v/v}. \quad (18.8)$$

Powietrze, które na zewnątrz impulsu zajmowało objętość  $V (= S v \Delta t)$ , wewnętrz impulsu zostaje ściśnięte o  $\Delta V (= S \Delta v \Delta t)$ . Zatem

$$\frac{\Delta V}{V} = \frac{S \Delta v \Delta t}{S v \Delta t} = \frac{\Delta v}{v}. \quad (18.9)$$

Podstawiając kolejno (18.9) i (18.2) do (18.8), dochodzimy do równania

$$\rho v^2 = -\frac{\Delta p}{\Delta v/v} = -\frac{\Delta p}{\Delta V/V} = B.$$

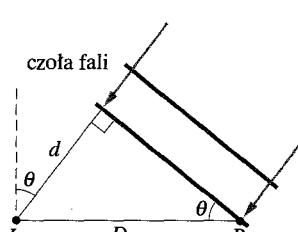
Rozwiązujeając to równanie względem  $v$ , otrzymujemy wzór (18.3) na prędkość powietrza przepływającego w prawo na rysunku 18.3, czyli na prędkość impulsu biegącego w lewo.

## Przykład 18.1

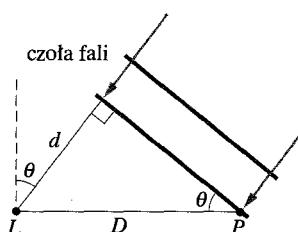
Jedną ze wskazówek wykorzystywanych przez twój mózg do określania kierunku, w jakim znajduje się źródło dźwięku, jest opóźnienie  $\Delta t$  między dotarciem dźwięku do ucha bliższego źródła dźwięku a dotarciem do drugiego ucha. Załóż, iż źródło jest na tyle odległe, że docierające do ciebie czoło fali jest w przybliżeniu płaskie. Przyjmij, że odległość między uszami równa jest  $D$ .

a) Znajdź wzór opisujący zależność  $\Delta t$  od odległości  $D$  i kąta  $\theta$  między kierunkiem do źródła a kierunkiem do przodu.

### ROZWIĄZANIE:

Sytuacja została przedstawiona (patrząc z góry) na rysunku 18.4, na którym czoła fali docierają do nas ze źródła znajdującego się z przodu po prawej.  Opóźnienie  $\Delta t$  związane jest z dodatkową drogą  $d$ , jaką każde czoło fali musi przebyć, aby dotrzeć do lewego ucha ( $L$ ), po tym, jak minie prawe ( $P$ ). Z rysunku 18.4 znajdujemy

$$\Delta t = \frac{d}{v} = \frac{D \sin \theta}{v} \quad (\text{odpowiedź}), \quad (18.10)$$



Rys. 18.4. Przykład 18.1. Czoło fali docierające do lewego ( $L$ ) ucha pokonuje większą odległość (o  $d = D \sin \theta$ ) niż czoło fali docierające do prawego ( $P$ ) ucha

gdzie  $v$  jest prędkością dźwięku w powietrzu. Opierając się na doświadczeniu, nasz mózg wiąże obserwowaną wartość  $\Delta t$  (od zera do wartości maksymalnej) z wartościąkąta  $\theta$  (od zera do  $90^\circ$ ) określającego kierunek źródła dźwięku.

b) Załóż, że jesteś zanurzony w wodzie o temperaturze  $20^\circ\text{C}$ , a czoło fali dociera do twojego prawego ucha wprost z prawej strony. Rozważając opóźnienie czoła fali, znajdź kąt  $\theta$  (względem kierunku do przodu), pod jakim pozornie znajduje się źródło.

### ROZWIĄZANIE:

 Tym razem za prędkość dźwięku przyjmujemy prędkość dźwięku w wodzie  $v_w$ , zatem zastępując we wzorze (18.10)  $v$  przez  $v_w$  i podstawiając  $\theta = 90^\circ$ , otrzymujemy

$$\Delta t_w = \frac{D \sin 90^\circ}{v_w} = \frac{D}{v_w}. \quad (18.11)$$

Ponieważ  $v_w$  jest około czterokrotnie większe od  $v$ , opóźnienie  $\Delta t_w$  stanowi około jednej czwartej maksymalnego opóźnienia w powietrzu. Opierając się na doświadczeniu, mózg przetworzy wartość opóźnienia w wodzie, jak gdyby powstało ono w powietrzu. Zatem będzie ci się wydawało, że źródło dźwięku znajduje się pod kątem  $\theta$ , mniejszym niż  $90^\circ$ . Aby znaleźć ten kąt, do wzoru (18.10) zamiast  $\Delta t$  podstawiamy opóźnienie  $D/v_w$  ze wzoru (18.11) i otrzymujemy

$$\frac{D}{v_w} = \frac{D \sin \theta}{v}. \quad (18.12)$$

Aby rozwiązać to równanie względem  $\theta$ , podstawiamy  $v = 343 \text{ m/s}$  oraz  $v_w = 1482 \text{ m/s}$  (z tabeli 18.1) i dostajemy

$$\sin \theta = \frac{v}{v_w} = \frac{343 \text{ m/s}}{1482 \text{ m/s}} = 0,231, \quad \text{skąd} \quad \theta = 13^\circ. \quad (\text{odpowiedź})$$

### 18.3. Biegnące fale dźwiękowe

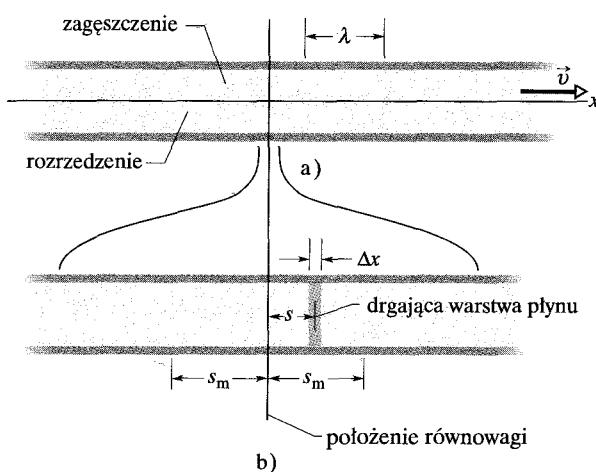
Zanalizujemy tutaj przemieszczenia i zmiany ciśnienia związane z sinusoidalną falą dźwiękową biegnącą w powietrzu. Na rysunku 18.5a przedstawiono taką falę biegnącą w prawo wzdłuż długiej rury wypełnionej powietrzem. Jak sobie przypominamy z rozdziału 17, taką falę możemy wytworzyć, poruszając sinusoidalnie tłem znajdująącym się na lewym końcu rury (jak na rysunku 17.2). Przesunięcie tła w prawo powoduje ruch sąsiadującego z nim elementu powietrza i w konsekwencji zagęszczenie powietrza; przesunięcie tła w lewo umożliwia powrót elementu powietrza w lewo i zmniejszenie ciśnienia. Ponieważ każdy element powietrza popycha kolejny sąsiadujący z nim element, drgania powietrza w prawo i w lewo oraz zmiany jego ciśnienia przemieszczają się wzdłuż rury jako fala dźwiękowa.

Rozważmy cienką warstwę powietrza o grubości  $\Delta x$ , której położenie wynosi  $x$ , mierząc wzdłuż rury. Przy ruchu fali ta warstwa powietrza porusza się ruchem harmonicznym w lewo i w prawo wokół swojego położenia równowagi (rys. 18.5b). Tak więc drgania każdej warstwy powietrza, spowodowane przez biegnącą falę dźwiękową, przypominają drgania elementów liny związanych z falą poprzeczną, wyjawszy fakt, iż drgania warstwy powietrza są *podłużne*, a nie *poprzeczne*. Ponieważ element liny drga równolegle do osi  $y$ , możemy jego przemieszczenie zapisać w postaci  $y(x, t)$ . Podobnie, warstwa powietrza drga równolegle do osi  $x$ , zatem jej przemieszczenie moglibyśmy zapisać w postaci  $x(x, t)$ . Jednakże będziemy unikać tej niezręcznej notacji i posłużymy się zapisem  $s(x, t)$ .

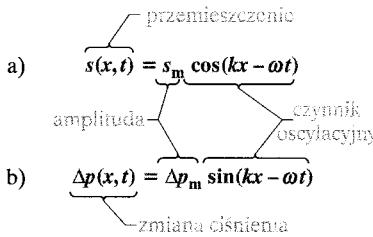
Aby przedstawić sinusoidalną zależność przemieszczenia  $s(x, t)$  od  $x$  i  $t$ , możemy posłużyć się funkcją zarówno sinus, jak i cosinus. W tym rozdziale posłużymy się funkcją cosinus, a mianowicie

$$s(x, t) = s_m \cos(kx - \omega t). \quad (18.13)$$

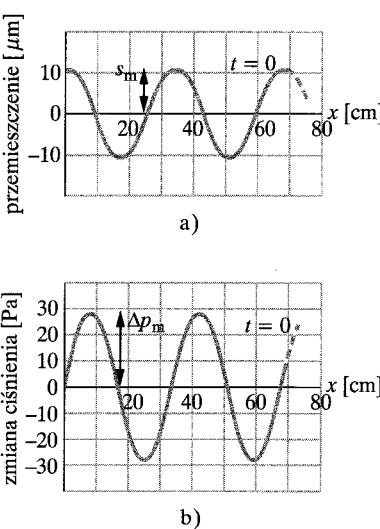
Na rysunku 18.6a przedstawiono ważniejsze elementy tego wyrażenia. Wielkość  $s_m$  to **amplituda przemieszczenia**, czyli maksymalne przemieszczenie warstwy



Rys. 18.5. a) Fala dźwiękowa biegnąca w długiej wypełnionej powietrzem rurze z prędkością  $v$  ma postać przemieszczającego się określonego układu obszarów zagęszczenia i rozrzedzenia powietrza. Na rysunku przedstawiono falę w pewnym dowolnie wybranym momencie. b) Rozciagnięty poziomo widok krótkiego odcinka rury. Podczas ruchu fali warstwa płynu o grubości  $\Delta x$  drga harmonicznie w lewo i w prawo wokół swojego położenia równowagi. Na rysunku przedstawiono moment, gdy rozważana warstwa przemieszczona jest w prawo na odległość  $s$  od położenia równowagi. Maksymalne przemieszczenie warstwy, zarówno w lewo, jak i w prawo, wynosi  $s_m$ .



Rys. 18.6. Funkcje opisujące a) przemieszczenie i b) zmianę ciśnienia w bieżącej fali dźwiękowej zawierają amplitudę i czynnik oscylacyjny



Rys. 18.7. a) Wykres przedstawia przemieszczenie w chwili  $t = 0$  (zgodnie ze wzorem (18.13)). b) Analogiczny wykres zmian ciśnienia (wzór (18.14)). Oba wykresy przedstawiają falę dźwiękową o częstotliwości 1000 Hz, której amplituda zmian ciśnienia odpowiada granicy bólu — patrz przykład 18.2

powietrza w każdą stronę względem położenia równowagi (patrz rysunek 18.5b). Liczba falowa  $k$ , częstość kołowa  $\omega$ , częstość  $v$ , długość fali  $\lambda$ , prędkość  $v$  i okres  $T$  fali dźwiękowej (podłużnej) są zdefiniowane i powiązane między sobą identycznie jak w przypadku fali poprzecznej, z tą różnicą, że długość fali dźwiękowej jest odległością (nadal mierzoną wzdłuż kierunku rozchodzenia się fali), w jakiej cały związek z falą układ zagęszczeń i rozrzedzeń powietrza zaczyna się powtarzać (patrz rysunek 18.5a). (Zakładamy, iż amplituda  $s_m$  jest znacznie mniejsza niż  $\lambda$ ).

Jak pokażemy niżej, podczas ruchu fali ciśnienie powietrza w każdym punkcie  $x$  na rysunku 18.5a zmienia się sinusoidalnie. Zmiany te opisujemy wzorem

$$\Delta p(x, t) = \Delta p_m \sin(kx - \omega t). \quad (18.14)$$

Na rysunku 18.6b przedstawiono ważniejsze elementy tego wyrażenia. Ujemna wartość  $\Delta p$  w wyrażeniu (18.14) odpowiada rozrzedzeniu powietrza, a wartość dodatnia — jego zagęszczeniu (kompresji). Wielkość  $\Delta p_m$  jest **amplitudą zmian ciśnienia**, czyli największym — spowodowanym przez falę — przyrostem lub ubytkiem ciśnienia; amplituda  $\Delta p_m$  zwykle jest znacznie mniejsza niż ciśnienie  $p$ , jakie występuje, gdy nie ma fali. Jak pokażemy, amplitudę zmian ciśnienia  $\Delta p_m$  oraz amplitudę przemieszczenia  $s_m$  ze wzoru (18.13) wiąże zależność

$$\Delta p_m = (v\rho\omega)s_m. \quad (18.15)$$

Na rysunku 18.7 przedstawiono wykresy zależności (18.13) i (18.14) dla chwili  $t = 0$ ; wraz z upływem czasu obie krzywe będą przesuwać się w prawo wzdłuż poziomych osi. Zauważmy, że przemieszczenie i zmiana ciśnienia są przesunięte w fazie o  $\pi/2$  rad (czyli  $90^\circ$ ). Tak więc zmiana ciśnienia  $\Delta p$  w dowolnym punkcie wzdłuż fali jest na przykład równa零, gdy przemieszczenie w tym punkcie jest maksymalne.

**SPRAWDZIAN 1:** Drgająca warstwa płynu (rys. 18.5b) przechodzi, poruszając się w prawo, przez punkt zerowego przemieszczenia. Czy ciśnienie w tej warstwie ma wartość równowagową, właśnie zaczyna rosnąć, czy też właśnie zaczyna maleć?

### Wyprowadzenie wzorów (18.14) i (18.15)

Na rysunku 18.5b przedstawiono drgającą warstwę powietrza o polu powierzchni  $S$  i grubości  $\Delta x$ , której środek przemieszczony jest względem jej położenia równowagi na odległość  $s$ .

Korzystając ze wzoru (18.2), zmianę ciśnienia w przemieszczonej warstwie możemy zapisać w postaci

$$\Delta p = -B \frac{\Delta V}{V}. \quad (18.16)$$

Wielkość  $V$  we wzorze (18.16) to objętość warstwy powietrza dana wzorem

$$V = S \Delta x. \quad (18.17)$$

Z kolei wielkość  $\Delta V$  we wzorze (18.16) jest zmianą objętości, z jaką mamy do czynienia, gdy warstwa jest przemieszczona. Ta zmiana objętości wynika z faktu,

że przemieszczenia obu zewnętrznych powierzchni warstwy nie są dokładnie takie same — różnią się o pewną wielkość  $\Delta s$ . Zatem zmianę objętości możemy zapisać jako

$$\Delta V = S \Delta s. \quad (18.18)$$

Podstawiając wyrażenia (18.17) i (18.18) do (18.16), a następnie przechodząc do granicy, otrzymujemy

$$\Delta p = -B \frac{\Delta s}{\Delta x} = -B \frac{\partial s}{\partial x}. \quad (18.19)$$

Symbol  $\partial$  oznacza, że pochodna we wzorze (18.19) jest pochodną cząstkową, która mówi nam o zmianach  $s$  wraz z  $x$  w ustalonej chwili  $t$ . Jeżeli zatem potraktujemy  $t$  jako stałą, ze wzoru (18.13) dostaniemy

$$\frac{\partial s}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} [s_m \cos(kx - \omega t)] = -ks_m \sin(kx - \omega t).$$

Podstawienie tego wyrażenia na pochodną cząstkową do wzoru (18.19) daje

$$\Delta p = Bks_m \sin(kx - \omega t).$$

Po wprowadzeniu oznaczenia  $\Delta p_m = Bks_m$  otrzymujemy wyrażenie (18.14), które mieliśmy wyprowadzić.

Korzystając ze wzoru (18.3), możemy zapisać

$$\Delta p_m = (Bk)s_m = (v^2 \rho k)s_m.$$

Po podstawieniu — zgodnie z zależnością (17.12) —  $\omega/v$  zamiast  $k$  natychmiast otrzymujemy wyrażenie (18.15), które również należało wyprowadzić.

## Przykład 18.2

Maksymalna amplituda zmian ciśnienia  $\Delta p_m$ , jaką ludzkie ucho może wytrzymać w postaci głośnego dźwięku, jest równa około 28 Pa (jest ona znacznie mniejsza od normalnego ciśnienia powietrza równego około  $10^5$  Pa). Znajdź amplitudę przemieszczenia  $s_m$  dla takiego dźwięku w powietrzu o gęstości  $\rho = 1,21 \text{ kg/m}^3$ , przy częstotliwości 1000 Hz i prędkości 343 m/s.

### ROZWIĄZANIE:

 Amplitudę przemieszczenia  $s_m$  fali dźwiękowej oraz amplitudę zmian ciśnienia  $\Delta p_m$  wiąże równanie (18.15). Rozwiążując je ze względu na  $s_m$ , otrzymujemy

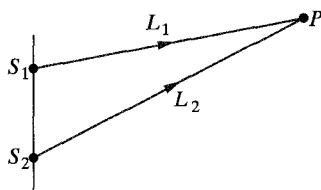
$$s_m = \frac{\Delta p_m}{v\rho\omega} = \frac{\Delta p_m}{v\rho(2\pi\nu)}.$$

Podstawienie wartości liczbowych daje

$$\begin{aligned} s_m &= \frac{28 \text{ Pa}}{(343 \text{ m/s})(1,21 \text{ kg/m}^3)(2\pi)(1000 \text{ Hz})} \\ &= 1,1 \cdot 10^{-5} \text{ m} = 11 \mu\text{m}. \end{aligned} \quad (\text{odpowiedź})$$

Otrzymana wartość jest równa mniej więcej jednej siódmej grubości tej kartki. Jak widać, amplituda przemieszczenia dla nawet najgłośniejszego dźwięku, jaki może znieść ludzkie ucho, jest bardzo mała.

Amplituda zmian ciśnienia  $\Delta p_m$  dla *najstarszego słyszanego* dźwięku o częstotliwości 1000 Hz wynosi  $2,8 \cdot 10^{-5}$  Pa. Powtarzając powyższe obliczenia, dla tej wartości otrzymujemy  $s_m = 1,1 \cdot 10^{-11} \text{ m} = 11 \text{ pm}$ . Ucho rzeczywiście jest czułym detektorem fali dźwiękowej.



Rys. 18.8. Dwa źródła punktowe  $S_1$  i  $S_2$  emitują kuliste fale dźwiękowe, będące w zgodnej fazie. Promienie przedstawiają fale przechodzące przez punkt  $P$

## 18.4. Interferencja

Podobnie jak fale poprzeczne, również fale dźwiękowe ulegają interferencji. Rozważmy w szczególności interferencję dwóch identycznych fal dźwiękowych biegących w tym samym kierunku. Na rysunku 18.8 przedstawiono takie fale pochodzące z dwóch źródeł punktowych  $S_1$  i  $S_2$  emitujących będące w zgodnej fazie fale dźwiękowe o jednakowej długości fali  $\lambda$ . Źródła emitują fale w zgodnej fazie, a zatem związane z tymi falami przemieszczenia na wyjściu ze źródeł są zawsze takie same. Zajmiemy się falami przechodzącymi przez zaznaczony na rysunku 18.8 punkt  $P$ . Założymy, że odległość do punktu  $P$  jest znacznie większa od odległości między źródłami, tak więc możemy w przybliżeniu przyjąć, iż fale w punkcie  $P$  poruszają się w tym samym kierunku.

Gdyby fale, aby dotrzeć do punktu  $P$ , przebywały drogi o identycznych długościach, byłyby w tym punkcie w zgodnej fazie. Podobnie jak w przypadku fal poprzecznych, oznacza to, że powinna tu nastąpić całkowicie konstruktywna interferencja. Jednakże na rysunku 18.8 droga  $L_2$ , jaką przebywa fala ze źródła  $S_2$ , jest dłuższa od drogi  $L_1$  przebytej przez falę ze źródła  $S_1$ . Występowanie tej różnicy dróg oznacza, że fale w punkcie  $P$  nie mogą być w zgodnej fazie. Innymi słowy, różnica faz obu fal  $\phi$  w punkcie  $P$  zależy od **różnicy dróg**  $\Delta L = |L_2 - L_1|$ .

Aby powiązać różnicę faz  $\phi$  z różnicą dróg  $\Delta L$ , przypomnijmy (patrz paragraf 17.4), że różnica faz równa  $2\pi$  rad odpowiada jednej długości fali. Możemy zatem zapisać proporcję

$$\frac{\phi}{2\pi} = \frac{\Delta L}{\lambda}, \quad (18.20)$$

skąd

$$\phi = \frac{\Delta L}{\lambda} 2\pi. \quad (18.21)$$

Całkowicie konstruktywna interferencja następuje wówczas, gdy różnica faz  $\phi$  równa jest  $0, 2\pi$  lub całkowitej wielokrotności  $2\pi$ . Możemy ten warunek zapisać w postaci

$$\phi = m(2\pi), \quad \text{gdzie } m = 0, 1, 2, \dots \quad (\text{interferencja całkowicie konstruktywna}). \quad (18.22)$$

Zgodnie ze wzorem (18.21) jest tak wtedy, gdy stosunek  $\Delta L / \lambda$  spełnia warunek

$$\frac{\Delta L}{\lambda} = 0, 1, 2, \dots \quad (\text{interferencja całkowicie konstruktywna}). \quad (18.23)$$

Na przykład, jeżeli różnica dróg  $L = |L_2 - L_1|$  na rysunku 18.8 równa jest  $2\lambda$ , to  $\Delta L / \lambda = 2$  i fale ulegają całkowicie konstruktywnej interferencji w punkcie  $P$ . W tej sytuacji interferencja jest całkowicie konstruktywna, gdyż fala ze źródła  $S_2$  jest przesunięta względem fali ze źródła  $S_1$  o  $2\lambda$ , tak więc obie fale są *dokładnie zgodne w fazie* w punkcie  $P$ .

Z kolei całkowicie destruktynna interferencja występuje wówczas, gdy różnica faz  $\phi$  jest równa nieparzystej wielokrotności  $\pi$  — ten warunek możemy

zapisać w postaci

$$\phi = (2m+1)\pi, \quad \text{gdzie } m = 0, 1, 2, \dots \quad (\text{interferencja całkowicie destruktywna}). \quad (18.24)$$

Zgodnie ze wzorem (18.21) jest tak wtedy, gdy stosunek  $\Delta L/\lambda$  spełnia warunek

$$\frac{\Delta L}{\lambda} = 0,5, 1,5, 2,5, \dots \quad (\text{interferencja całkowicie destruktywna}). \quad (18.25)$$

Na przykład, jeżeli różnica dróg  $\Delta L = |L_2 - L_1|$  na rysunku 18.8 równa jest  $2,5\lambda$ , to  $\Delta L/\lambda = 2,5$  i fale ulegają całkowicie destruktywnej interferencji w punkcie  $P$ . W tym przypadku interferencja jest całkowicie destruktywna, gdyż fala ze źródła  $S_2$  jest przesunięta względem fali ze źródła  $S_1$  o 2,5 długości fali, tak więc obie fale w punkcie  $P$  są mają fazy maksymalnie niezgodne.

Oczywiście fale mogą ulegać również pośrednim formom interferencji, gdy — powiedzmy —  $\Delta L/\lambda = 1,2$ . Ta sytuacja powinna być bliższa interferencji całkowicie konstruktywnej ( $\Delta L/\lambda = 1,0$ ) niż całkowicie destruktywnej ( $\Delta L/\lambda = 1,5$ ).

### Przykład 18.3

Na rysunku 18.9a przedstawiono dwa źródła punktowe  $S_1$  i  $S_2$ , znajdujące się w odległości  $D = 1,5\lambda$  od siebie. Źródła te emittują w zgodnej fazie identyczne fale dźwiękowe o długości  $\lambda$ .

a) Znajdź różnicę dróg pokonywanych przez fale ze źródeł  $S_1$  i  $S_2$  w punkcie  $P_1$  leżącym w płaszczyźnie symetrii odcinka  $S_1S_2$ , w odległości większej niż  $D$  od źródeł. Jaki rodzaj interferencji nastąpi w punkcie  $P_1$ ?

#### ROZWIĄZANIE:

— Aby dotrzeć do punktu  $P_1$ , obie fale pokonują takie same odległości, zatem ich różnica dróg wynosi

$$\Delta L = 0. \quad (\text{odpowiedź})$$

Ze wzoru (18.23) wynika, iż fale w punkcie  $P_1$  ulegają całkowicie konstruktywnej interferencji.

b) Znajdź różnicę dróg oraz rodzaj interferencji dla punktu  $P_2$  na rysunku 18.9a.

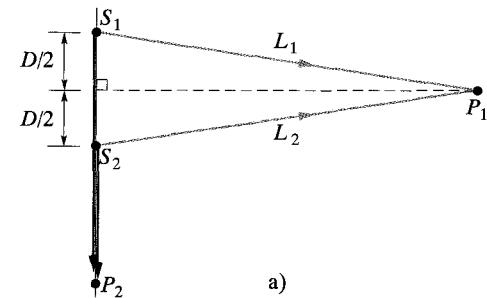
#### ROZWIĄZANIE:

— Fala ze źródła  $S_1$ , aby dotrzeć do punktu  $P_2$ , przebywa dodatkowo (w stosunku do fali ze źródła  $S_2$ ) drogę  $D = 1,5\lambda$ . Zatem różnica dróg wynosi

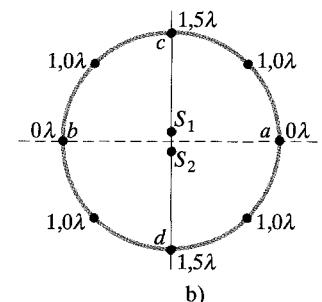
$$\Delta L = 1,5\lambda. \quad (\text{odpowiedź})$$

Ze wzoru (18.25) wynika, iż fale w punkcie  $P_2$  mają fazy maksymalnie niezgodne i ulegają całkowicie destruktywnej interferencji.

c) Na rysunku 18.9b przedstawiono okrąg o promieniu znacznie większym niż odległość  $D$ , umieszczony w taki sposób, by jego



a)



b)

Rys. 18.9. Przykład 18.3. a) Dwa źródła punktowe  $S_1$  i  $S_2$ , znajdujące się w odległości  $D$ , emitując w zgodnej fazie kuliste fale dźwiękowe. Aby dotrzeć do punktu  $P_1$ , fale pokonują jednako odległości. Punkt  $P_2$  znajduje się na przedłużeniu odcinka łączącego źródła  $S_1$  i  $S_2$ . b) Różnica dróg (wyrażona w długościach fal) między falami pochodzącymi ze źródeł  $S_1$  i  $S_2$  dla ośmiu punktów na dużym okręgu wokół źródeł

środek znajdował się pośrodku między źródłami  $S_1$  i  $S_2$ . Wyznacz liczbę  $N$  punktów na okręgu, w których zachodzi całkowicie konstruktywna interferencja.

## ROZWIĄZANIE:

Wyobraź sobie, że wychodzimy z punktu  $a$  i zgodnie z kierunkiem ruchu wskazówek zegara przesuwamy się wzdłuż okręgu do punktu  $d$ .

**O** 1. Gdy przesuwamy się do punktu  $d$ , różnica dróg  $\Delta L$  wzrasta i w konsekwencji zmienia się typ interferencji. Z części (a) wiemy, że w punkcie  $a$  różnica dróg wynosi  $\Delta L = 0\lambda$ . Z kolei z części (b) wiemy, że w punkcie  $d$  mamy  $\Delta L = 1,5\lambda$ . Zatem na okręgu pomiędzy punktami  $a$  i  $d$  musi znajdować się jeden punkt, w którym  $\Delta L = \lambda$  — patrz rysunek 18.9b. Ze wzoru (18.23) wynika, że w tym punkcie następuje interferencja całkowicie konstruktywna. Wynika również, że pomiędzy punktami  $a$

i  $d$  nie ma żadnego innego punktu, w którym mogłyby zajść interferencja konstruktywna, gdyż w przedziale od 0 do  $1,5$  nie ma innej liczby całkowitej niż 1.

**O** 2. Do znalezienia punktów całkowicie konstruktywnej interferencji w pozostałej części okręgu korzystamy z symetrii układu. Symetria względem linii  $cd$  daje punkt  $b$ , w którym  $\Delta L = 0\lambda$ . W podobny sposób otrzymujemy ponadto trzy inne punkty, gdzie  $\Delta L = \lambda$ . W sumie mamy

$$N = 6.$$

(odpowiedź)

**SPRAWDZIAN 2:** Powróćmy do powyższego przykładu. Gdyby odległość  $D$  między źródłami  $S_1$  i  $S_2$  była równa  $4\lambda$ , to jaka byłaby różnica dróg i jaki rodzaj interferencji zachodziłby a) w punkcie  $P_1$  i b) w punkcie  $P_2$ ?

## 18.5. Natężenie i głośność dźwięku

Każdy, kto próbował zasnąć, podczas gdy sąsiad puszczał głośną muzykę, ma świadomość, że dźwięk ma nie tylko częstotliwość, długość fali i prędkość. Ma również natężenie. **Natężenie  $I$**  fali dźwiękowej na pewnej powierzchni jest to średnia szybkość w przeliczeniu na jednostkę powierzchni, z jaką fala dostarcza energię do tej powierzchni (lub przenosi przez nią energię). Możemy tę definicję zapisać w postaci

$$I = \frac{P}{S}, \quad (18.26)$$

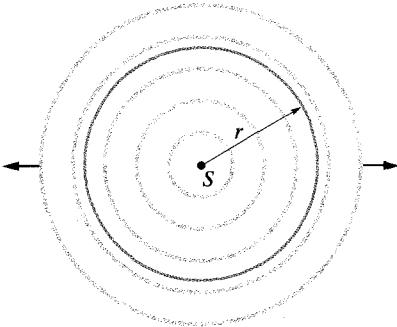
gdzie  $P$  jest szybkością przenoszenia energii (czyli mocą) fali dźwiękowej, a  $S$  — polem powierzchni odbierającej dźwięk. Jak pokażemy niżej, natężenie  $I$  oraz amplitudę przemieszczenia  $s_m$  fali dźwiękowej wiąże zależność

$$I = \frac{1}{2} \rho v \omega^2 s_m^2. \quad (18.27)$$

### Zależność natężenia od odległości

Sposób, w jaki natężenie zależy od odległości od rzeczywistego źródła dźwięku, często jest skomplikowany. Niektóre rzeczywiste źródła (np. głośniki) mogą emitować dźwięk jedynie w pewnych kierunkach, z kolei otoczenie zwykle wytwarza echo (odbite fale dźwiękowe), które nakładają się na fale dźwiękowe docierające bezpośrednio do odbiornika. Jednakże w pewnych sytuacjach możemy pominać echo i założyć, że źródło fali jest źródłem punktowym, emitującym dźwięk *izotropowo*, tzn. z jednakowym natężeniem we wszystkich kierunkach. Na rysunku 18.10 przedstawiono czoła fali rozchodzące się z takiego izotropowego źródła punktowego  $S$ .

Założymy, że gdy fale dźwiękowe rozchodzą się ze źródła, ich energia mechaniczna zostaje zachowana. Wyobraźmy sobie sféry o promieniu  $r$ , której środek znajduje się w źródle — patrz rysunek 18.10. Cała energia emitowana przez źródło musi przejść przez powierzchnię tej sfery. Zatem szybkość, z jaką fala dźwiękowa przenosi energię przez tę powierzchnię, musi być równa szybkości



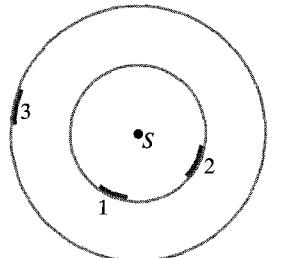
Rys. 18.10. Punktowe źródło  $S$  emituje fale dźwiękowe równomiernie we wszystkich kierunkach. Fale przechodzą przez sféry o promieniu  $r$  i środku w punkcie  $S$ .

emisji energii przez źródło (czyli mocy  $P_{\text{zr}}$  źródła). Ze wzoru (18.26) widać, że natężenie  $I$  na rozważanej sferze musi być równe

$$I = \frac{P_{\text{zr}}}{4\pi r^2}, \quad (18.28)$$

gdzie  $4\pi r^2$  jest polem powierzchni sfery. Równanie (18.28) mówi, że natężenie dźwięku z izotropowego źródła punktowego jest odwrotnie proporcjonalne do kwadratu odległości od źródła.

**SPRAWDZIAN 3:** Rysunek przedstawia trzy małe obszary 1, 2 i 3 leżące na dwóch powierzchniach sferycznych, w których środku umieszczono izotropowe punktowe źródło dźwięku  $S$ . Szybkości, z jakimi fale dźwiękowe przynoszą energię przez te obszary, są jednakowe. Uszereguj te obszary a) według natężenia dźwięku oraz b) według ich pola powierzchni, zaczynając od największych.



### Skala głośności

Jak widzieliśmy w przykładzie 18.2, amplituda przemieszczenia w ludzkim uchu przyjmuje wartości od około  $10^{-5}$  m dla najgłośniejszego tolerowalnego dźwięku do około  $10^{-11}$  m dla najsłabszego słyszalnego dźwięku; stosunek tych amplitud wynosi  $10^6$ . Zgodnie ze wzorem (18.27) natężenie dźwięku jest proporcjonalne do *kwadratu* amplitudy przemieszczenia, tak więc w przypadku ludzkiego narządu słuchu stosunek natężeń dla tych dwóch granic wynosi  $10^{12}$ . Ludzie mogą słyszeć w ogromnym zakresie natężeń.

Z tak ogromnym zakresem wartości uporamy się za pomocą logarytmów. Rozważmy zależność

$$y = \log x,$$

gdzie  $x$  i  $y$  — zmienne. Równanie to ma następującą właściwość: jeżeli pomnożymy  $x$  przez 10, to  $y$  wzrosnie o 1. Zapisujemy to w postaci

$$y' = \log(10x) = \log 10 + \log x = 1 + y.$$

Podobnie, gdy pomnożymy  $x$  przez  $10^{12}$ , wówczas  $y$  wzrosnie o 12.

Tak więc zamiast mówić o natężeniu  $I$  fali dźwiękowej, znacznie wygodniej jest mówić o **głośności dźwięku**  $\beta$ , zdefiniowanej jako

$$\beta = (10 \text{ dB}) \log \frac{I}{I_0}. \quad (18.29)$$

Symbol dB oznacza jednostkę głośności — **decybel** ( $= 0.1$  bela) — której nazwę wybrano w uznaniu prac Alexandra Grahama Bella. Wielkość  $I_0$  we wzorze (18.29) to standardowe natężenie odniesienia ( $I_0 = 10^{-12} \text{ W/m}^2$ ), wybrane w taki sposób, by było bliskie dolnej granicy słyszalności ludzkiego ucha. Dla  $I = I_0$  ze wzoru (18.29) otrzymujemy  $\beta = 10 \log 1 = 0$ , a więc nasz standarowy poziom odniesienia odpowiada zeru decybelom. Za każdym razem, gdy

Tabela 18.2. Głośności wybranych dźwięków [dB]

próg słyszalności	0
szum liści	10
rozmowa	60
koncert rockowy	110
granica bólu	120
silnik odrzutowy	130

natężenie dźwięku wzrasta o rząd wielkości (o czynnik 10), głośność  $\beta$  zwiększa się o 10 dB. Zatem  $\beta = 40$  dB odpowiada  $10^4$  razy większemu natężeniu od standardowego poziomu odniesienia. W tabeli 18.2 podano głośności wybranych dźwięków.

### Wyprowadzenie wzoru (18.27)

Rozważmy (rys. 18.5a) cienką warstwę powietrza o grubości  $dx$ , powierzchni  $S$  i masie  $dm$ , drgającą w przód i w tył w wyniku przechodzenia fali dźwiękowej opisanej wzorem (18.13). Energia kinetyczna  $dE_k$  warstwy powietrza wynosi

$$dE_k = \frac{1}{2} dm v_s^2. \quad (18.30)$$

W tym wzorze wielkość  $v_s$  nie jest prędkością fali, ale prędkością drgań elementu powietrza, którą otrzymujemy ze wzoru (18.13)

$$v_s = \frac{\partial s}{\partial t} = -\omega s_m \sin(kx - \omega t).$$

Korzystając z tej zależności i podstawiając  $dm = \rho S dx$ , przekształcamy równanie (18.30) do postaci

$$dE_k = \frac{1}{2} (\rho S dx) (-\omega s_m)^2 \sin^2(kx - \omega t). \quad (18.31)$$

Dzieląc wyrażenie (18.31) przez  $dt$ , otrzymujemy szybkość, z jaką fala przenosi energię kinetyczną. Jak widzieliśmy w rozdziale 17, dla fal poprzecznych  $dx/dt$  jest prędkością  $v$  fali, mamy zatem

$$\frac{dE_k}{dt} = \frac{1}{2} \rho S v \omega^2 s_m^2 \sin^2(kx - \omega t). \quad (18.32)$$

Średnia szybkość przenoszenia energii wynosi

$$\left( \frac{dE_k}{dt} \right)_{sr} = \frac{1}{2} \rho S v \omega^2 s_m^2 [\sin^2(kx - \omega t)]_{sr} = \frac{1}{4} \rho S v \omega^2 s_m^2. \quad (18.33)$$

Wykorzystaliśmy tu fakt, że średnia wartość kwadratu funkcji sinus (lub cosinus), wzięta po jednym pełnym okresie drgań, równa jest  $1/2$ .

Zakładamy, że energia *potencjalna* przenoszona jest przez falę z taką samą średnią prędkością. Zatem ze wzoru (18.33) wynika, że natężenie  $I$  fali, równe średniej szybkości w przeliczeniu na jednostkę powierzchni, z jaką fala przenosi obydwa rodzaje energii, jest równe

$$I = \frac{2(dE_k/dt)_{sr}}{S} = \frac{1}{2} \rho v \omega^2 s_m^2.$$

W ten sposób wyprowadziliśmy wzór (18.27).

### Przykład 18.4

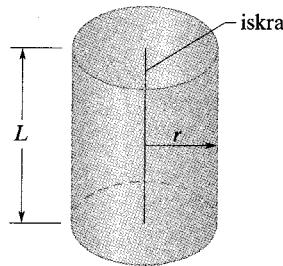
Iskra elektryczna przeskakuje wzdłuż odcinka o długości  $L = 10$  m, emitując impuls dźwiękowy, który rozchodzi się promieniście na zewnątrz. (O iskrze mówimy, że jest *liniowym źródłem* dźwięku). Moc emisji wynosi  $P_{izr} = 1,6 \cdot 10^4$  W.

a) Wyznacz natężenie  $I$  dźwięku w odległości  $r = 12$  m od iskry.

#### ROZWIĄZANIE:

Wyobraźmy sobie walec o promieniu  $r = 12$  m i długości  $L = 10$  m otaczający współosiowo iskrę, tak jak pokazano na rysunku 18.11.

**Rys. 18.11.** Przykład 18.4. Iskra przeskakująca wzduł odcinka o długości  $L$  emisuje fale dźwiękowe rozchodzące się radialnie. Fale przechodzą przez umowny walec o promieniu  $r$  i długości  $L$ , usytuowany współosiowo z iskrą



○ 1. Natężenie  $I$  na powierzchni walca jest równe stosunkowi szybkości przenoszenia  $P$  energii dźwiękowej przez powierzchnię do pola  $S$  tej powierzchni

○ 2. Zakładamy, że zasada zachowania energii stosuje się również do energii fali dźwiękowej. Oznacza to, iż szybkość  $P$ , z jaką energia jest przenoszona przez powierzchnię walca musi być równa szybkości  $P_{\text{dr}}$ , z jaką źródło emituje energię. Łącząc to razem i pamiętając, że powierzchnia walca wynosi  $S = 2\pi rL$ , otrzymujemy

$$I = \frac{P}{S} = \frac{P_{\text{dr}}}{2\pi rL}. \quad (18.34)$$

Wynik ten mówi, że natężenie dźwięku pochodzącego ze źródła liniowego jest odwrotnie proporcjonalna do odległości  $r$  (a nie do

kwadratu odległości  $r$ , jak w przypadku źródła punktowego). Po podstawieniu podanych w zadaniu wartości otrzymujemy

$$I = \frac{1,6 \cdot 10^4 \text{ W}}{2\pi(12 \text{ m})(10 \text{ m})} = 21,2 \text{ W/m}^2 \approx 21 \text{ W/m}^2. \quad (\text{odpowiedź})$$

b) Wyznacz szybkość odbioru energii  $P_d$  przez detektor akustyczny o polu powierzchni  $S_d = 2 \text{ cm}^2$ , umieszczony w odległości  $r = 12 \text{ m}$  od iskry.

### ROZWIĄZANIE:

Powracamy do rozwiązania części (a). ○ Natężenie dźwięku docierającego do detektora równe jest ilorazowi mocy  $P_d$  padającej na detektor do jego powierzchni  $S_d$ :

$$I = \frac{P_d}{S_d}. \quad (18.35)$$

Wyobraźmy sobie, że detektor leży na analogicznej powierzchni walcowej jak w części (a). Wówczas natężenie dźwięku docierającego do detektora jest równe natężeniu dźwięku na powierzchni walca, tj.  $I = 21,2 \text{ W/m}^2$ . Rozwiązujejąc równanie (18.35) względem  $P_d$ , otrzymujemy

$$P_d = (21,2 \text{ W/m}^2)(2 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2) = 4,2 \text{ mW}. \quad (\text{odpowiedź})$$

## Przykład 18.5

W roku 1976 zespół The Who dał rekordowo głośny koncert — głośność w odległości 46 m od głośników wynosiła  $\beta_2 = 120 \text{ dB}$ . Wyznacz stosunek natężenia dźwięku  $I_2$ , generowanego przez zespół na tym koncercie, do natężenia dźwięku  $I_1$  młota pneumatycznego pracującego z głośnością  $\beta_1 = 92 \text{ dB}$ .

### ROZWIĄZANIE:

○ W przypadku zarówno zespołu The Who, jak i młota pneumatycznego głośność  $\beta$  i natężenie  $I$  dźwięku wiążą ze sobą definicja głośności (18.29). Dla zespołu mamy

$$\beta_2 = (10 \text{ dB}) \log \frac{I_2}{I_0},$$

a dla młota pneumatycznego

$$\beta_1 = (10 \text{ dB}) \log \frac{I_1}{I_0}.$$

Różnica głośności wynosi

$$\beta_2 - \beta_1 = (10 \text{ dB}) \left( \log \frac{I_2}{I_0} - \log \frac{I_1}{I_0} \right). \quad (18.36)$$

Korzystając z tożsamości

$$\log \frac{a}{b} - \log \frac{c}{d} = \log \frac{ad}{bc},$$

zapisujemy wyrażenie (18.36) w postaci

$$\beta_2 - \beta_1 = (10 \text{ dB}) \log \frac{I_2}{I_1}. \quad (18.37)$$

Po przekształceniu i podstawieniu wartości danych w zadaniu otrzymujemy

$$\log \frac{I_2}{I_1} = \frac{\beta_2 - \beta_1}{10 \text{ dB}} = \frac{120 \text{ dB} - 92 \text{ dB}}{10 \text{ dB}} = 2,8.$$

Biorąc antylogarytm skrajnej lewej i skrajnej prawej części tego wyrażenia (na klawiaturze kalkulatora antylogarytm oznaczony jest prawdopodobnie symbolem  $10^x$ ), otrzymujemy

$$\frac{I_2}{I_1} = \log^{-1}(2,8) = 630. \quad (\text{odpowiedź})$$

Tak więc zespół The Who grał naprawdę *bardzo* głośno.

Chwilowe narażenie się na dźwięk o takim natężeniu, jak hałas młota pneumatycznego lub koncert zespołu The Who z 1976 roku, może wypołać czasowe osłabienie słuchu. Powtarzające się lub przedłużone narażenie na taki dźwięk może spowodować trwałą utratę słuchu. Utrata słuchu stanowi oczywiste ryzyko dla każdego, kto stale słucha, powiedzmy, zespołów heavy-metalowych „na cały regulator”, szczególnie przez słuchawki.

## 18.6. Źródła dźwięków w muzyce

Dźwięki muzyczne mogą być wytwarzane przez drgające struny (gitara, fortepian, skrzypce), membrany (kocioł, werbel), słupy powietrza (flet, obój, organy), drewniane klocki lub stalowe płytki (marimba, ksylofon) oraz wiele innych drgających ciał. Większość instrumentów zawiera więcej niż jeden element drgający. Na przykład w skrzypcach w generowaniu dźwięku biorą udział zarówno struny, jak i pudło instrumentu.

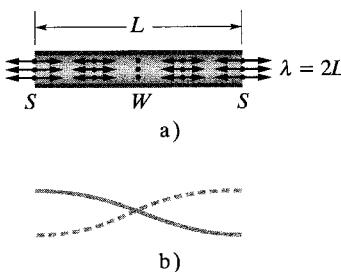
Jak pamiętamy z rozdziału 17, w naprężonej i umocowanej na obu końcach strunie mogą powstawać fale stojące, gdy fale biegnące wzdłuż struny odbijają się od jej końców. Jeżeli długość tych fal jest odpowiednio dopasowana do długości struny, to nakładające się na siebie fale biegnące w przeciwnych kierunkach wytwarzają falę stojącą (mod drgań). Wymagana do tego długość fali odpowiada częstotliwości rezonansowej struny. Korzyść z wytwarzania fal stojących polega na tym, że struna drga wówczas z dużą i niezanikającą amplitudą, popchając tam i z powrotem otaczające ją powietrze i wytwarzając w ten sposób falę dźwiękową o znacznym natężeniu i o tej samej częstotliwości co drgania struny. Taki sposób wytwarzania dźwięku ma z oczywistych powodów duże znaczenie na przykład dla gitarzysty.

W podobny sposób możemy wytworzyć falę stojącą w wypełnionej powietrzem rurze. Fale dźwiękowe biegnące w powietrzu wypełniającym rurę odbijają się na każdym jej końcu i biegą z powrotem. (Odbicie następuje nawet wtedy, gdy koniec rury jest otwarty, przy czym wówczas odbicie nie jest całkowite, jak w przypadku końca zamkniętego). Jeżeli długość fali dźwiękowej jest odpowiednio dopasowana do długości rury, to nakładające się na siebie fale biegnące przez rurę w przeciwnych kierunkach wytwarzają falę stojącą. Wymagana do tego długość fali dźwiękowej odpowiada częstotliwości rezonansowej rury. Korzyść z wytwarzania takich fal stojących polega na tym, że powietrze w rurze drga z dużą i niezanikającą amplitudą, emitując na każdym otwartym końcu falę dźwiękową o takiej samej częstotliwości co drgania w rurze. Taki sposób wytwarzania dźwięku ma z oczywistych powodów duże znaczenie na przykład dla organisty.

Stojące fale dźwiękowe w rurze pod wieloma względami są podobne do fal stojących w strunie. Zamknięty koniec rury, podobnie jak umocowany koniec struny, to miejsce, w którym musi być węzeł (zerowe przemieszczenie); z drugiej strony, otwarty koniec rury, analogicznie do końca struny połączonego ze swobodnie poruszającym się pierścieniem, jak na rysunku 17.19b, to miejsce, w którym musi być strzałka. (W istocie strzałka przy otwartym końcu rury lokalizowana jest nieco poza jej końcem, ale tutaj nie będziemy rozważać takich szczegółów).

Najprostszą falę stojącą, jaką można wytworzyć w rurze z dwoma otwartymi końcami, przedstawiono na rysunku 18.12a. Zgodnie z oczekiwaniem, na każdym otwartym końcu rury mamy strzałkę. Mamy również węzeł w środku rury. Prostszy sposób przedstawienia stojącej podłużnej fali dźwiękowej pokazano na rysunku 18.12b — można ją zaznaczyć jako analogiczną do niej poprzeczną falę stojącą w strunie.

Fałę stojącą przedstawioną na rysunku 18.12a nazywamy *modem podstawowym* lub *pierwszą harmoniczną*. Aby wytworzyć taką falę stojącą, fale dźwiękowe



Rys. 18.12. a) Najprostsza fala stojąca, tworzona przez fale dźwiękowe (podłużne) w rurze, ma strzałki (S) na obu otwartych końcach oraz wezel (W) w środku. (Podłużne przemieszczenia, oznaczone na rysunku podwójnymi strzałkami, są znacznie przesadzone). b) Analogiczna fala stojąca (poprzeczna) w strunie

w rurze o długości  $L$  muszą mieć długość określoną równaniem  $L = \lambda/2$ , czyli  $\lambda = 2L$ . Kilka innych stojących fal dźwiękowych w rurze o obu końcach otwartych przedstawiono — przez analogię do fal w strunie — na rysunku 18.13a. *Druga harmoniczna* odpowiada falom o długości  $\lambda = L$ , *trzecia harmoniczna* — falom o długości  $\lambda = 2L/3$  itd.

Mówiąc ogólnie, częstotliwości rezonansowe dla rury o długości  $L$ , mającej obydwia końce otwarte, odpowiadają długościom fali

$$\lambda = \frac{2L}{n}, \quad \text{gdzie } n = 1, 2, 3, \dots, \quad (18.38)$$

gdzie  $n$  — liczba harmoniczna. Zatem częstotliwości rezonansowe dla rury o dwóch końcach otwartych dane są wzorem

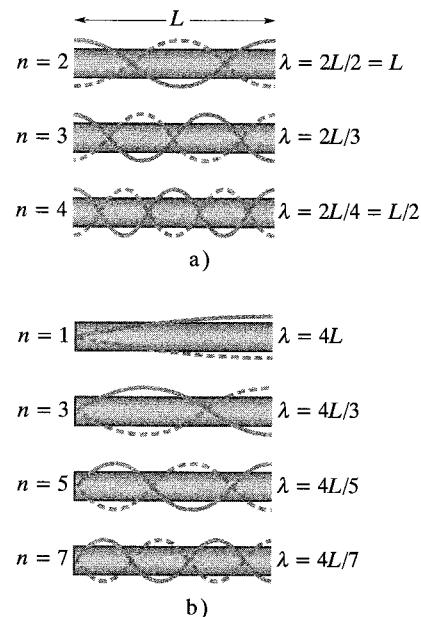
$$v = \frac{v}{\lambda} = \frac{nv}{2L}, \quad \text{gdzie } n = 1, 2, 3, \dots \quad (\text{rura o dwóch końcach otwartych}), \quad (18.39)$$

w którym  $v$  jest prędkością dźwięku.

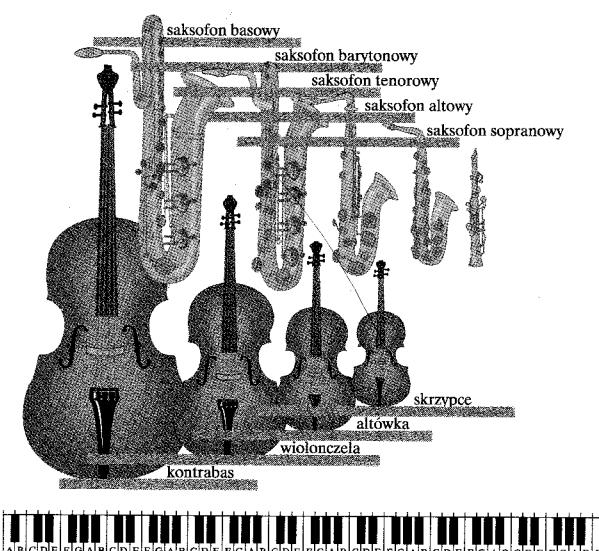
Na rysunku 18.13b przedstawiono — posługując się analogią do fal w strunie — kilka stojących fal dźwiękowych, jakie można wzbudzić w rurze mającej tylko jeden otwarty koniec. Zgodnie z oczekiwaniem przy otwartym końcu rury mamy strzałkę, a przy zamkniętym — węzeł. Najprostsza stojąca fala dźwiękowa musi mieć długość określoną przez równanie  $L = \lambda/4$ , zatem  $\lambda = 4L$ . Długość następnej z kolei fali stojącej dana jest równaniem  $L = 3\lambda/4$ , zatem wynosi  $\lambda = 4L/3$ .

Mówiąc ogólnie, częstotliwości rezonansowe dla rury o długości  $L$ , mającej tylko jeden koniec otwarty, odpowiadają długościom fali spełniającym warunek

$$\lambda = \frac{4L}{n}, \quad \text{gdzie } n = 1, 3, 5, \dots, \quad (18.40)$$



Rys. 18.13. Fale stojące w strunie narysowane na tle rur przedstawiają stojące fale dźwiękowe w rurach. a) Gdy *oba* końce rury są otwarte, możliwe jest wzbudzenie każdej harmonicznej (patrz także rysunek 18.12). b) Gdy otwarty jest jedynie *jeden* koniec rury, wzbudzić można jedynie nieparzyste harmoniczne



Rys. 18.14. Rodziny saksofonów i instrumentów smyczkowych pokazują związek między rozmiarami instrumentu a zakresem częstotliwości. Zakres częstotliwości każdego instrumentu przedstawiony jest w postaci poziomego paska wzdłuż skali częstotliwości na klawiaturze narysowanej u dołu rysunku; częstotliwość rośnie od lewej do prawej

w którym liczba harmoniczna  $n$  musi być nieparzysta. Zatem częstotliwości rezonansowe dane są wzorem

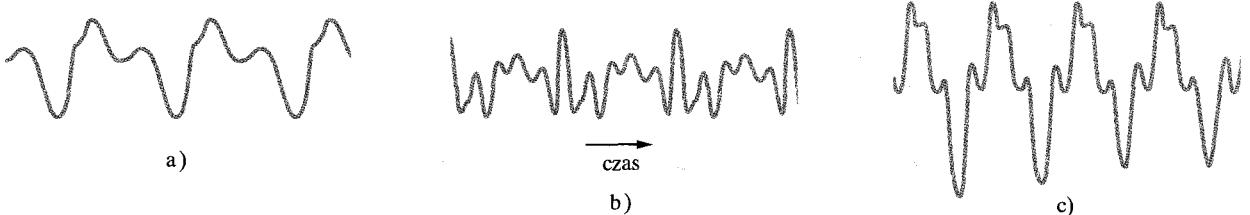
$$\nu = \frac{v}{\lambda} = \frac{n\nu}{4L}, \quad \text{gdzie } n = 1, 3, 5, \dots \text{ (rura o jednym końcu otwartym).}$$
(18.41)

Podkreślimy jeszcze raz, że w rurze o jednym końcu otwartym mogą występować jedynie nieparzyste harmoniczne. Na przykład w takiej rurze nie można wzbudzić drugiej harmonicznej, dla której  $n = 2$ . Zauważmy również, że w przypadku rury tego rodzaju liczebnik w wyrażeniu typu „trzecia harmoniczna” odnosi się ciągle do liczby harmonicznej  $n$  (nie chodzi tu o trzecią z kolei możliwą do wzbudzenia harmoniczną).

Rozmiary instrumentu muzycznego odzwierciedlają zakres częstotliwości, dla jakiego dany instrument został zaprojektowany; mniejsze rozmiary oznaczają większe częstotliwości. Na rysunku 18.14 przedstawiono jako przykład rodziny saksofonów i instrumentów smyczkowych oraz ich zakresy częstotliwości odniesione do klawiatury fortepianu. Zauważmy, że zakresy częstotliwości wszystkich instrumentów nakładają się na siebie.

W każdym układzie drgającym, wytwarzającym dźwięki muzyczne, czy to w strunie skrzypiec, czy też w powietrzu wypełniającym piszczałkę organową, zwykle jednocześnie generowane są mod podstawowy oraz jedna lub więcej wyższych harmonicznych. W konsekwencji słyszemy je razem jako falę wypadkową powstającą w wyniku ich nakładania się na siebie. Gdy na różnych instrumentach muzycznych gramy tę samą nutę, wytwarzamy tę samą częstotliwość podstawową oraz różniące się natężeńiami wyższe harmoniczne. Na przykład czwarta harmoniczna średkowego C w jednym instrumentie może być stosunkowo głośna, a w innym — stosunkowo cicha lub nawet może nie występować. Ponieważ różne instrumenty wytwarzają różne fale wypadkowe, brzmią one w różny sposób nawet wówczas, gdy gramy na nich tę samą nutę. Taką sytuację mamy dla przedstawionych na rysunku 18.15 trzech fal wypadkowych wytwarzanych przez różne instrumenty grające tę samą nutę.

**SPRAWDZIAN 4:** Mamy dwie rury, każda o obu końcach otwartych — rurę A o długości  $L$  oraz rurę B o długości  $2L$ . Która harmoniczna rury B ma taką samą częstotliwość jak mod podstawowy rury A?



Rys. 18.15. Fale generowane przez a) flet, b) obój i c) saksofon, gdy gramy na nich tę samą nutę; tzn. pierwsze harmoniczne mają taką samą częstotliwość

## Przykład 18.6

Słaby szum w pokoju wzbudza drganie podstawowe w kartonowej rurze o długości  $L = 67$  cm, mającej obydwa końce otwarte. Założ, że prędkość dźwięku w powietrzu wewnętrz rury wynosi  $343$  m/s.

a) Dźwięk o jakiej częstotliwości wydobywa się z rury?

### ROZWIĄZANIE:

W przypadku rury otwartej z obu stron mamy symetryczną sytuację, w której fala stojąca ma strzałki na obu końcach rury. Analogiczny schemat fali stojącej w strunie jest taki jak na rysunku 18.12b. Częstotliwość modu podstawowego określona jest równaniem (18.39) dla  $n = 1$ , a mianowicie

$$v = \frac{nv}{2L} = \frac{(1)(343 \text{ m/s})}{2(0,67 \text{ m})} = 256 \text{ Hz.} \quad (\text{odpowiedź})$$

Jeżeli szum wzbudza jakieś wyższe harmoniczne, na przykład drugą harmoniczną, będąmy również słyszeli częstotliwości będące całkowitymi wielokrotnościami  $256$  Hz.

b) Dźwięk o jakiej częstotliwości podstawowej usłyszyszmy z rury, jeżeli do jednego z jej końców przyciśniemy ucho?

### ROZWIĄZANIE:

Gdy ucho skutecznie zamknie jeden koniec rury, sytuacja staje się asymetryczna — przy otwartym końcu rury występuje strzałka, a przy drugim (zamkniętym) końcu węzeł. Powstaje fala stojąca, taka jak w najwyższej części rysunku 18.13b. Częstotliwość modu podstawowego określona jest przez równanie (18.41) dla  $n = 1$ , a mianowicie

$$v = \frac{nv}{4L} = \frac{(1)(343 \text{ m/s})}{4(0,67 \text{ m})} = 128 \text{ Hz.} \quad (\text{odpowiedź})$$

Jeżeli szum wzbudza jakieś wyższe harmoniczne, będą one nieparzystymi wielokrotnościami  $128$  Hz. Tak więc na przykład dźwięk o częstotliwości  $256$  Hz (będącej parzystą wielokrotnością) nie może zostać wzbudzony.

## 18.7. Dudnienia

Jeżeli słyszyszmy w odstępie kilku minut dwa dźwięki, których częstotliwości wynoszą, powiedzmy,  $552$  Hz i  $564$  Hz, większość z nas nie jest w stanie odróżnić ich od siebie. Jednakże, gdy oba dźwięki docierają do nas równocześnie, słyszyszmy dźwięk o częstotliwości  $558$  Hz, równej średniej arytmetycznej częstotliwości obu oddziałyujących fal. Słyszyszmy również powolne zmiany natężenia tego dźwięku — **dudnienia** — powtarzające się z częstotliwością  $12$  Hz, równą różnicę częstotliwości obu oddziałyujących fal. Zjawisko dudnień przedstawiono na rysunku 18.16.

Przyjmijmy, że zależność od czasu przemieszczeń związanych z dwiema falami dźwiękowymi w pewnym punkcie opisana jest wzorami

$$s_1 = s_m \cos \omega_1 t \quad \text{oraz} \quad s_2 = s_m \cos \omega_2 t, \quad (18.42)$$

przy czym  $\omega_1 > \omega_2$ . Dla uproszczenia założyliśmy, że fale mają takie same amplitudy. Zgodnie z zasadą superpozycji wypadkowe przemieszczenie wynosi

$$s = s_1 + s_2 = s_m (\cos \omega_1 t + \cos \omega_2 t).$$

Korzystając z tożsamości trygonometrycznej (patrz dodatek E)

$$\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \frac{1}{2}(\alpha - \beta) \cos \frac{1}{2}(\alpha + \beta),$$



a)



b)



c)

Rys. 18.16. a, b) Zmiany ciśnienia  $\Delta p$  wywołane przez dwie fale dźwiękowe słyszane osobno. Częstotliwości obu fal są prawie jednakowe. c) Wypadkowe zmiany ciśnienia w przypadku, gdy obie fale słyszane są równocześnie

możemy zapisać wypadkowe przemieszczenie jako

$$s = 2s_m \cos \frac{1}{2}(\omega_1 - \omega_2)t \cos \frac{1}{2}(\omega_1 + \omega_2)t. \quad (18.43)$$

Wprowadzając oznaczenia

$$\omega' = \frac{1}{2}(\omega_1 - \omega_2) \quad \text{oraz} \quad \omega = \frac{1}{2}(\omega_1 + \omega_2), \quad (18.44)$$

możemy zapisać wyrażenie (18.43) w postaci

$$s(t) = [2s_m \cos \omega' t] \cos \omega t. \quad (18.45)$$

Założymy teraz, że częstotliwości kołowe  $\omega_1$  i  $\omega_2$  obu oddziałujących fal są prawie jenakowe, co oznacza, iż w wyrażeniu (18.44) mamy  $\omega \gg \omega'$ . Możemy wówczas uważać wzór (18.45) za funkcję cosinus o częstotliwości kołowej  $\omega$  i o amplitudzie (która nie jest stała i zmienia się z częstotliwością kołową  $\omega'$ ) opisanej wyrażeniem w nawiasach kwadratowych.

Maksymalna amplituda występuje za każdym razem, gdy człon  $\cos \omega' t$  we wzorze (18.45) przyjmuje wartość +1 lub -1, co zachodzi dwukrotnie w każdym cyklu funkcji cosinus. Ponieważ człon  $\cos \omega' t$  zawiera częstotliwość kołową  $\omega'$ , częstotliwość kołowa  $\omega_{\text{dudn}}$  dudnień wynosi  $\omega_{\text{dudn}} = 2\omega'$ . Zatem, korzystając z (18.44), możemy zapisać

$$\omega_{\text{dudn}} = 2\omega' = (2)\left(\frac{1}{2}\right)(\omega_1 - \omega_2) = \omega_1 - \omega_2.$$

Ponieważ  $\omega = 2\pi\nu$ , możemy powyższe równanie przekształcić do postaci

$$v_{\text{dudn}} = v_1 - v_2 \quad (\text{częstotliwość dudnień}). \quad (18.46)$$

Muzycy wykorzystują zjawisko dudnień do strojenia swoich instrumentów. Jeżeli instrument brzmi niezgodnie z częstotliwością wzorcową (na przykład z wzorcowym tonem A pierwszego oboju), należy stroić go aż do zaniknięcia dudnień, a wówczas będzie dostrojony do wzorca. W tak muzycznym mieście jak Wiedeń wzorcowy ton A (440 Hz) dostępny jest dla wielu mieszkańców w tym mieście muzyków — zarówno profesjonalistów, jak i amatorów — jako usługa telefoniczna.

## Przykład 18.7

Chcesz dostroić dźwięk A<sub>3</sub> fortepianu do jego poprawnej częstotliwości 220 Hz, dysponując jedynie widełkami strojowymi (kamertonem) o częstotliwości 440 Hz. Jak powinieneś postąpić?

### ROZWIĄZANIE:

1. Obie częstotliwości są zbyt odległe od siebie, aby generować dudnienia.

2. Jednakże struna fortepianu może drgać nie tylko w momencie podstawowym (220 Hz po dostrojeniu), ale również z drugą

harmoniczną (440 Hz po dostrojeniu). Tak więc w przypadku nieco rozstrojonej struny jej druga harmoniczna będzie dawać dudnienia z drgiem widełek strojowych o częstotliwości 440 Hz. Aby nastroić strunę, należy słuchać tych dudnień, naciągając równocześnie lub luzując strunę tak, aby częstotliwość dudnień malała, aż do ich całkowitego zaniku.

**SPRAWDZIAN 5:** W powyższym przykładzie w wyniku naciągnięcia struny częstotliwość dudnień zwiększała się w stosunku do początkowej wartości 6 Hz. Czy w celu nastrojenia struny należy bardziej ją naciągnąć, czy też należy ją poluzować?

## 18.8. Zjawisko Dopplera

Policyjny radiowóz stoi na poboczu szosy z włączoną syreną wyającą z częstotliwości 1000 Hz. Jeżeli również parkujesz przy tej szosie, to słyszysz dźwięk o tej samej częstotliwości. Gdy natomiast poruszasz się względem radiowozu, albo zbliżając się do niego, albo oddalając, słyszysz dźwięk o innej częstotliwości. Na przykład, gdy *jedziesz w kierunku radiowozu z prędkością 120 km/h, słyszysz dźwięk o częstotliwości wyższej, równej 1096 Hz (tj. o 96 Hz większej)*. Gdy z kolei *oddalasz się od radiowozu z taką samą prędkością, słyszysz dźwięk o częstotliwości niższej, równej 904 Hz (tj. o 96 Hz mniejszej)*.

Te zmiany częstotliwości związane z ruchem są przykładami **zjawiska Dopplera**. Zjawisko to zostało przewidziane (choć nie w pełni opisane) w 1842 roku przez austriackiego fizyka Johanna Christiana Dopplera, a następnie w 1845 roku potwierdzone doświadczalnie w Holandii przez Buysa Ballota „z użyciem lokomotyw ciągnącej platformę z kilkoma trębaczami”.

Zjawisko Dopplera dotyczy nie tylko fal dźwiękowych, ale również fal elektromagnetycznych, w tym mikrofal, fal radiowych i światła. W tym paragrafie jednakże będziemy rozważali jedynie fale dźwiękowe, biorąc jako układ odniesienia powietrze — ośrodek, w którym te fale się rozchodzą. Oznacza to, że będziemy mierzyć prędkości źródła  $S$  fal dźwiękowych oraz ich detektora  $D$  względem tego ośrodka. (Będziemy najczęściej przyjmować, że powietrze jest nieruchome względem ziemi, tak więc prędkości możemy mierzyć również względem ziemi). Zakładamy, że źródło  $S$  i detektor  $D$  zbliżają się do siebie lub oddalają od siebie z prędkościami mniejszymi niż prędkość dźwięku.

Jeżeli detektor lub źródło (lub detektor i źródło jednocześnie) poruszają się, to częstotliwość emitowaną  $v$  i częstotliwość zarejestrowaną  $v'$  wiążą zależność

$$v' = v \frac{v \pm v_D}{v \mp v_S} \quad (\text{zjawisko Dopplera}), \quad (18.47)$$

gdzie  $v$  jest prędkością dźwięku w powietrzu,  $v_D$  — prędkością detektora względem powietrza, a  $v_S$  — prędkością źródła względem powietrza. Znaki plus lub minus wybieramy zgodnie z następującą regułą:

► Jeżeli detektor lub źródło zbliżają się do siebie, znaki ich prędkości należy wybrać w taki sposób, by uzyskać wzrost częstotliwości. Jeżeli zaś detektor lub źródło oddalają się od siebie, znaki ich prędkości należy wybrać w taki sposób, by uzyskać zmniejszenie częstotliwości.

Mówiąc krótko, *do siebie* oznacza wzrost częstotliwości, a *od siebie* oznacza zmniejszenie się częstotliwości.

Podamy teraz kilka przykładów zastosowania tej reguły. Jeżeli detektor porusza się w kierunku źródła, to aby uzyskać wzrost częstotliwości, należy w liczniku wyrażenia (18.47) postawić znak plus. Jeżeli detektor oddala się od źródła, to aby uzyskać zmniejszenie częstotliwości, stawiamy w liczniku znak minus. Gdy zaś jest on nieruchomy, podstawiamy wartość zero zamiast  $v_D$ . Jeżeli źródło porusza się w kierunku detektora, to aby uzyskać wzrost częstotliwości, należy w mianowniku

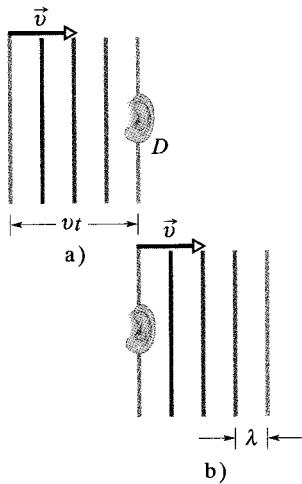
wyrażenia (18.47) postawić znak minus. Jeżeli źródło oddala się od detektora, to aby uzyskać zmniejszenie częstotliwości, stawiamy w mianowniku znak plus. Gdy zaś jest ono nieruchome, podstawiamy wartość zero za  $v_S$ .

Wyprowadzimy teraz wzory opisujące zjawisko Dopplera dla dwóch przypadków szczególnych, a następnie wyprowadzimy ogólny wzór (18.47). Oto te przypadki:

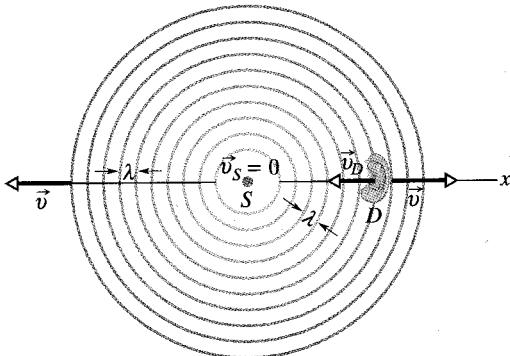
1. Gdy detektor porusza się względem powietrza, a źródło jest nieruchome, ruch powoduje zmianę częstotliwości, z jaką detektor napotyka czoła fali, i w konsekwencji zmianę rejestrowanej częstotliwości fali dźwiękowej.
2. Gdy źródło porusza się względem powietrza, a detektor pozostaje w spoczynku, ruch powoduje zmianę długości fali dźwiękowej i w konsekwencji zmianę rejestrowanej częstotliwości (jak pamiętamy, częstotliwość związana jest z długością fali).

### Ruchomy detektor, nieruchome źródło

Na rysunku 18.17 detektor  $D$  — symbolizowany przez ucho — porusza się z prędkością  $v_D$  w kierunku nieruchomego źródła  $S$ , wysyłającego falę kulistą o długości fali  $\lambda$  i częstotliwości  $v$ , rozchodząjącą się w powietrzu z prędkością dźwięku  $v$ . Na rysunku przedstawiono kolejne czoła fali odległe od siebie o jedną długość fali. Rejestrowana częstotliwość jest to szybkość, z jaką detektor  $D$  napotyka kolejne czoła fali (odległe od siebie o jedną długość fali). Gdyby detektor był nieruchomy, szybkość byłaby równa częstotliwości  $v$ , ale ponieważ porusza się on naprzeciw czołom fali, szybkość ich napotykania jest większa i, co za tym idzie, rejestrowana częstotliwość  $v'$  jest większa niż  $v$ .



Rys. 18.18. Czoła fali z rysunku 18.17 (zakładamy, że są płaskie) a) docierają do nieruchomego detektora  $D$  i b) mijają go; w przedziale czasu  $t$  czoła fali pokonują odległość  $vt$



Rys. 18.17. Nieruchome źródło dźwięku  $S$  emittuje fale o sferycznych czołach (przedstawionych na rysunku co jedną długość fali) rozchodzące się z prędkością  $v$ . Symbolizowany przez ucho detektor dźwięku  $D$  porusza się z prędkością  $v_D$  w kierunku źródła. Ze względu na swój ruch detektor rejestruje fale o większej częstotliwości

Rozpatrzmy na początek sytuację, gdy detektor jest nieruchomy (rys. 18.18). W czasie  $t$  czoła fali przesuną się w prawo o odległość  $vt$ . Liczba długości fali mieszczących się w odcinku  $vt$  równa jest liczbie czołów fali napotykanych przez detektor w przedziale czasu  $t$  i wynosi  $vt/\lambda$ . Szybkość, z jaką detektor napotyka kolejne czoła fali, czyli rejestrowana częstotliwość  $v$  dana jest wzorem

$$v = \frac{vt/\lambda}{t} = \frac{v}{\lambda}. \quad (18.48)$$

W takim przypadku, tj. gdy detektor jest nieruchomy, zjawisko Dopplera nie zachodzi — częstotliwość fali rejestrowana przez detektor  $D$  jest równa częstotliwości fali wysyłanej przez źródło  $S$ .

Powróćmy teraz do sytuacji, gdy detektor  $D$  porusza się w kierunku czół rozchodzącej się fali (rys. 18.19). W czasie  $t$  czoła fali przesuną się — jak poprzednio — w prawo na odległość  $vt$ , natomiast detektor przesunie się w lewo na odległość  $v_D t$ . Tak więc w czasie  $t$  czoła fali przesuną się względem detektora na odległość równą  $vt + v_D t$ . Liczba długości fali mieszących się w tym względnym przesunięciu  $vt + v_D t$  równa jest liczbie czół fali napotykanych przez detektor  $D$  w czasie  $t$  i wynosi  $(vt + v_D t)/\lambda$ . Szybkość, z jaką w tej sytuacji detektor napotyka kolejne długości fali, odpowiada częstotliwości  $v'$  danej wzorem

$$v' = \frac{(vt + v_D t)/\lambda}{t} = \frac{v + v_D}{\lambda}. \quad (18.49)$$

Ze wzoru (18.48) mamy  $\lambda = v/v$ . Zatem wyrażenie (18.49) możemy zapisać w postaci

$$v' = \frac{v + v_D}{v/v} = v \frac{v + v_D}{v}. \quad (18.50)$$

Zauważmy, iż w wyrażeniu (18.50) częstotliwość  $v'$  musi być większa niż  $v$ , chyba że  $v_D = 0$  (co odpowiada nieruchomemu detektorowi).

Podobnie możemy wyznaczyć częstotliwość obserwowaną przez detektor  $D$  odalający się od źródła. W tej sytuacji w czasie  $t$  czoła fali pokonują względem detektora odległość  $vt - v_D t$ , a częstotliwość  $v'$  dana jest wzorem

$$v' = v \frac{v - v_D}{v}. \quad (18.51)$$

Zauważmy, iż w wyrażeniu (18.51) częstotliwość  $v'$  musi być mniejsza niż  $v$ , chyba że  $v_D = 0$ .

Możemy połączyć wzory (18.50) i (18.51) i otrzymać

$$v' = v \frac{v \pm v_D}{v} \quad (\text{ruchomy detektor, nieruchome źródło}). \quad (18.52)$$

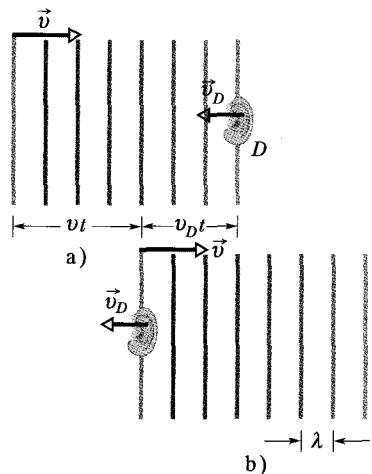
## Ruchome źródło, nieruchomy detektor

Niech detektor  $D$  będzie nieruchomy względem ośrodka i niech źródło  $S$  porusza się w kierunku detektora  $D$  z prędkością  $v_S$  (rys. 18.20). Ruch źródła  $S$  powoduje zmianę długości emitowanych przez nie fal dźwiękowych i w konsekwencji zmianę częstotliwości rejestrowanej przez detektor  $D$ .

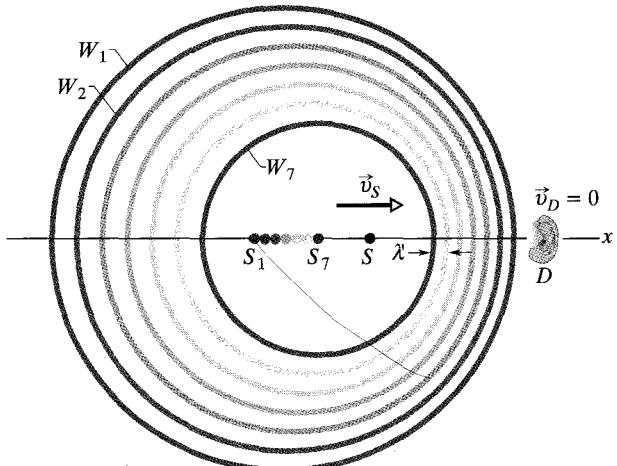
Skąd bierze się ta zmiana? Niech  $T = 1/v$  będzie czasem pomiędzy emisją dowolnej pary kolejnych czół fali  $W_1$  i  $W_2$ . W czasie  $T$  czoło fali  $W_1$  pokonuje odległość  $vT$ , a źródło przebywa drogę  $v_S T$ . Pod koniec przedziału czasu  $T$  wyemitowane zostaje czoło fali  $W_2$ . W tym kierunku, w którym porusza się źródło  $S$ , odstęp między  $W_1$  i  $W_2$  — równy długości fali  $\lambda'$  fal biegących w tym kierunku — wynosi  $vT - v_S T$ . Detektor  $D$  odbierający te fale zarejestruje częstotliwość  $v'$  daną wzorem

$$v' = \frac{v}{\lambda'} = \frac{v}{vT - v_S T} = \frac{v}{v/v - v_S/v} = v \frac{v}{v - v_S}. \quad (18.53)$$

Zauważmy, iż w wyrażeniu (18.53) częstotliwość  $v'$  musi być większa niż  $v$ , chyba że  $v_S = 0$ .



Rys. 18.19. Czoła fali: a) docierają do detektora  $D$ , poruszającego się im naprzeciw, i b) mijają go; w czasie  $t$  czoła fali pokonują odległość  $vt$  w prawo, a detektor  $D$  — odległość  $v_D t$  w lewo



Rys. 18.20. Detektor  $D$  jest nieruchomy, a źródło  $S$  porusza się w jego kierunku z prędkością  $v_S$ . Czoło fali  $W_1$  odpowiada chwili, gdy źródło znajdowało się w punkcie  $S_1$ , a czoło fali  $W_7$  — chwili, gdy źródło było w punkcie  $S_7$ . W chwili przedstawionej na rysunku źródło znajduje się w punkcie  $S$ . Detektor odbiera większą częstotliwość, gdyż poruszające się źródło, goniąc czoła wysyłanych przez siebie fal, wysyla w kierunku swojego ruchu fale o mniejszej długości ( $\lambda'$ )

W kierunku przeciwnym do ruchu źródła  $S$  długość fal  $\lambda'$  wynosi  $vT + v_S T$ . Detektor  $D$  odbierający te fale zarejestruje częstotliwość  $v'$  daną wzorem

$$v' = v \frac{v}{v + v_S}. \quad (18.54)$$

W tym przypadku częstotliwość  $v'$  musi być mniejsza niż  $v$ , chyba że  $v_S = 0$ .

Możemy połączyć wzory (18.53) i (18.54):

$$v' = v \frac{v}{v \mp v_S} \quad (\text{ruchome źródło, nieruchomy detektor}). \quad (18.55)$$

### Ogólny wzór dla zjawiska Dopplera

Wyprowadzimy teraz ogólny wzór dla zjawiska Dopplera, zastępując częstotliwość źródła  $v$  we wzorze (18.55) związaną z ruchem detektora częstotliwością  $v'$  ze wzoru (18.52). W rezultacie otrzymujemy ogólny wzór dla zjawiska Dopplera (18.47).

Ogólny wzór stosuje się nie tylko wtedy, gdy zarówno detektor, jak i źródło są w ruchu, ale także w obu omówionych wyżej przypadkach szczególnych. W przypadku gdy detektor jest w ruchu, a źródło w spoczynku, podstawienie  $v_S = 0$  sprowadza wzór (18.47) do wyprowadzonego wyżej wzoru (18.52). Z kolei, gdy źródło jest w ruchu, a detektor w spoczynku, podstawienie  $v_D = 0$  sprowadza wzór (18.47) do wyprowadzonego wyżej wzoru (18.55). Tak więc wzór (18.47) warto zapamiętać.

### Nawigacja nietoperza

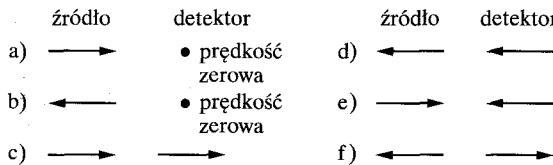
Nietoperze orientują się w przestrzeni i polują, wysyłając, a następnie odbierając odbite fale ultradźwiękowe. Są to fale o częstotliwościach wyższych niż dźwięki słyszalne przez człowieka. Na przykład nietoperz podkowiec emisuje fale o częstotliwości 83 kHz, czyli znacznie wyższej od granicy słyszalności ludzkiego ucha, wynoszącej około 20 kHz.

Fala wyemitowana przez nozdrza nietoperza może odbić się od ćmy, a następnie powrócić do ucha nietoperza. Ruch nietoperza i ćmy względem powietrza powoduje, że częstotliwość słyszana przez nietoperza różni się o kilka kiloherców

od częstotliwości, jaką on emitemuje. Nietoperz automatycznie przetwarza te różnicę na prędkość czymy względem niego samego i dzięki temu może nakierować się na czmy.

Niektóre czymy unikają złapania, odlatując w bok od kierunku, z którego słyszą fale ultradźwiękowe. Taki wybór toru lotu redukuje różnicę częstotliwości między falą emitowaną a słyszaną przez nietoperza, w wyniku czego nietoperz może nie zauważać echa. Z kolei niektóre inne czymy unikają złapania, generując własne fale ultradźwiękowe i zakłócając w ten sposób system detekcyjny nietoperza. (O dziwo czymy i nietoperze robią to, nie ukończywszy wcześniej studiów na fizyce).

**SPRAWDZIAN 6:** Na rysunku przedstawiono kierunki ruchu źródła dźwięku i detektora w nieruchomym powietrzu w sześciu różnych przypadkach. Dla każdego przypadku określ, czy zarejestrowana częstotliwość jest większa, czy mniejsza od częstotliwości emitowanej, czy też może do odpowiedzi na to pytanie potrzeba więcej informacji o prędkościach?



## Przykład 18.8

Rakieta leci z prędkością 242 m/s w kierunku nieruchomego masztu (w nieruchomym powietrzu), emitując fale dźwiękowe o częstotliwości  $v = 1250$  Hz.

a) Wyznacz częstotliwość  $v'$  zarejestrowaną przez detektor umocowany do masztu.

### ROZWIĄZANIE:

Do znalezienia częstotliwości  $v'$  posłużymy się ogólnym wzorem dla zjawiska Dopplera (18.47). Skoro źródłem dźwięku (rakieta) porusza się w powietrzu w kierunku nieruchomego detektora na maszcie, musimy wybrać znak prędkości  $v_s$  w taki sposób, by zwiększyć częstotliwość dźwięku. Zatem w mianowniku wyrażenia (18.47) stawiamy znak minus. Podstawiamy następnie wartości liczbowe:  $v_D = 0$  dla prędkości detektora,  $v_s = 242$  m/s dla prędkości źródła,  $v = 343$  m/s dla prędkości dźwięku (z tabeli 18.1) oraz  $v = 1250$  Hz dla emitowanej częstotliwości. Otrzymujemy

$$v' = v \frac{v + v_D}{v - v_s} = (1250 \text{ Hz}) \frac{343 \text{ m/s} + 0}{343 \text{ m/s} - 242 \text{ m/s}} \\ = 4245 \text{ Hz} \approx 4250 \text{ Hz}, \quad (\text{odpowiedź})$$

czyli rzeczywiście wartość większą od częstotliwości emitowanej.

b) Część dźwięku docierającego do masztu odbija się i powraca do rakiety jako echo. Jaka częstotliwość  $v''$  tego echa zarejestruje detektor umieszczony w rakiety?

### ROZWIĄZANIE:

1. W tym przypadku źródłem dźwięku jest maszt (gdyż jest on źródłem echa), a detektorem — detektor w rakiety (gdyż to on odbiera echo).

2. Częstotliwość dźwięku emitowanego przez źródło (maszt) równa jest częstotliwości  $v'$  dźwięku docierającego do masztu i przezeń odbijanego.

Dla częstotliwości źródła  $v'$  i częstotliwości rejestrowanej  $v''$  wzór (18.47) przybiera postać

$$v'' = v' \frac{v \pm v_D}{v \mp v_s}. \quad (18.56)$$

3. Skoro detektor (w rakiety) porusza się w powietrzu w kierunku nieruchomego źródła, musimy wybrać znak prędkości  $v_D$  w taki sposób, aby otrzymać większą częstotliwość dźwięku. Zatem w liczniku wyrażenia (18.56) stawiamy znak plus. Podstawiamy następnie  $v_D = 242$  m/s,  $v_s = 0$ ,  $v = 343$  m/s oraz  $v' = 4245$  Hz. Otrzymujemy

$$v'' = (4245 \text{ Hz}) \frac{343 \text{ m/s} + 242 \text{ m/s}}{343 \text{ m/s} - 0} = 7240 \text{ Hz}, \quad (\text{odpowiedź})$$

czyli wartość częstotliwości większą od częstotliwości dźwięku odbitego od masztu.

**SPRAWDZIAN 7:** Jeżeli powietrze w powyższym przykładzie porusza się w kierunku masztu z prędkością 20 m/s, to a) jakiej wartości prędkości źródła  $v_s$  należy użyć, aby rozwiązać część (a) przykładu, oraz b) jakiej wartości prędkości detektora  $v_D$  należy użyć, aby rozwiązać część (b) przykładu?

## 18.9. Prędkości naddźwiękowe; fale uderzeniowe

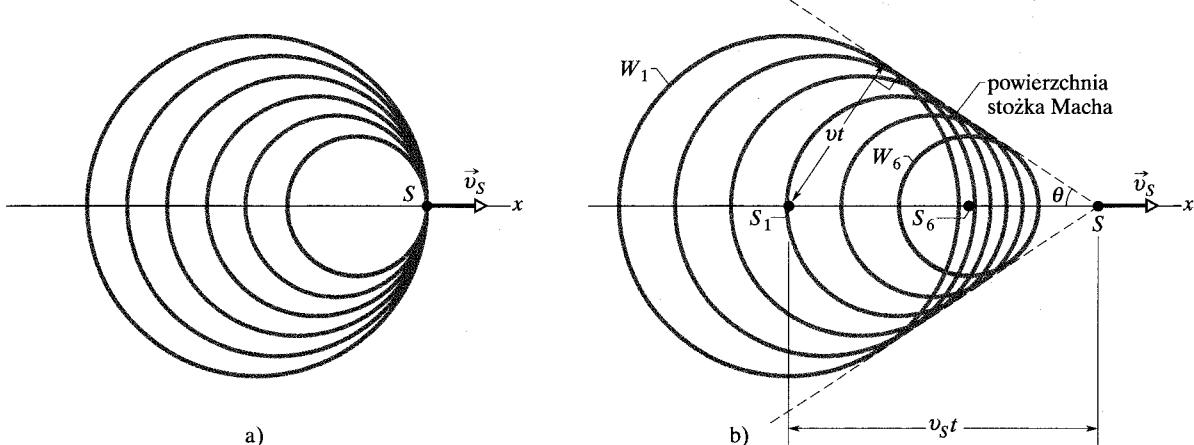
Gdy źródło porusza się w kierunku nieruchomego detektora z prędkością równą prędkości dźwięku — tzn. gdy  $v_s = v$  — z równań (18.47) i (18.55) wynika, że obserwowana częstość  $\nu'$  będzie nieskończoność wielka. Oznacza to, iż źródło porusza się tak szybko, że dotrzymuje kroku sferycznym czołom fali wysydanym przez siebie — rysunek 18.21a. Co się stanie, gdy prędkość źródła przekroczy prędkość dźwięku?

Przy takich prędkościach *naddźwiękowych* równania (18.47) i (18.55) się nie stosują. Na rysunku 18.21b przedstawiono sferyczne czoła fal wysyłanych ze źródła znajdującego się w różnych punktach. Promień każdego czoła fali na tym rysunku wynosi  $vt$ , gdzie  $v$  jest prędkością dźwięku, a  $t$  — czasem, jaki upłynął od chwili, gdy źródło wysłało falę reprezentowaną przez dane czoło. Zauważmy, iż w rzucie na płaszczyznę pokazanym na rysunku 18.21b czoła wszystkich fal skupiają się wzdłuż obwiedni w kształcie litery V. W rzeczywistości czoła fali rozciągają się na trzy wymiary, a ich rzeczywiste skupienie tworzy stożek zwany *stożkiem Macha*. Mówimy, że na powierzchni tego stożka występuje *fala uderzeniowa*, gdyż skupienie czołów fali powoduje nagły skok lub spadek ciśnienia powietrza, gdy powierzchnia stożka przechodzi przez jakiś punkt. Z rysunku 18.21b widzimy, że kąt  $\theta$  (równy połowie kąta wierzchołkowego stożka), zwany *kątem Macha*, dany jest wzorem

$$\sin \theta = \frac{vt}{v_s t} = \frac{v}{v_s} \quad (\text{kąt Macha}). \quad (18.57)$$

Iloraz  $v_s/v$  nazywamy *liczbą Macha*. Jeżeli usłyszyszmy, że jakiś samolot leciał z prędkością 2,3 M (czyli liczba Macha wynosiła 2,3), oznacza to, iż podczas lotu jego prędkość była 2,3-razy większa od prędkości dźwięku w powietrzu. Fala uderzeniowa generowana przez samolot naddźwiękowy lub pocisk (rys. 18.22) wytwarza silny impuls dźwiękowy, zwany *gromem dźwiękowym*, w którym ciśnienie powietrza gwałtownie rośnie, a następnie gwałtownie spada poniżej normalnej wartości, po czym powraca do normalnego poziomu. Dźwięk słyszany podczas wystrzału z broni palnej częściowo pochodzi z gromu dźwiękowego generowanego przez pocisk. Grom dźwiękowy można również usłyszeć

Rys. 18.21. a) Źródło dźwięku  $S$  porusza się z prędkością  $v_s$  równą prędkości dźwięku, czyli z taką samą prędkością, jak generowana przezeń fala. b) Źródło dźwięku  $S$  porusza się z prędkością  $v_s$  większą od prędkości dźwięku, czyli szybciej niż czoła fali. Gdy źródło znajdowało się w punkcie  $S_1$ , wygenerowało falę o czole  $W_1$ , a w położeniu  $S_6$  — falę o czole  $W_6$ . Wszystkie fale rozchodzą się z prędkością  $v$ , a ich sferyczne czoła skupiają się na powierzchni stożkowej zwanej stożkiem Macha, tworząc falę uderzeniową. Powierzchnia stożka jest styczna do wszystkich czołów fali, a kąt rozwarcia tego stożka wynosi  $2\theta$





Rys. 18.22. Fala uderzeniowa wytwarzana przez skrzydła odrzutowca Navy FA 18. Jest ona widoczna, gdyż gwałtowny spadek ciśnienia powietrza w fali uderzeniowej powoduje kondensację cząsteczek wody w powietrzu i powstanie mgły

przy strzelaniu z bata; w końcowej fazie tej sztuczki koniec bata porusza się szybciej niż dźwięk i wytwarza niewielki grom dźwiękowy — strzał z bata.

## Podsumowanie

**Fale dźwiękowe** Fale dźwiękowe to podłużne fale mechaniczne biegające w ciałach stałych, cieczach lub gazach. Prędkość w dźwięku w ośrodku mającym moduł ściśliwości  $B$  oraz gęstość  $\rho$  dana jest wzorem

$$v = \sqrt{\frac{B}{\rho}} \quad (\text{prędkość dźwięku}). \quad (18.3)$$

W temperaturze  $20^\circ\text{C}$  prędkość dźwięku w powietrzu wynosi  $343 \text{ m/s}$ .

Fala dźwiękowa wywołuje podłużne przemieszczenie  $s$  elementu masy ośrodka dane wzorem

$$s = s_m \cos(kx - \omega t), \quad (18.13)$$

gdzie  $s_m$  jest **amplitudą przemieszczenia** (czyli maksymalnym przemieszczeniem) względem położenia równowagi,  $k = 2\pi/\lambda$  oraz  $\omega = 2\pi\nu$ , przy czym  $\lambda$  i  $v$  są odpowiednio długością fali dźwiękowej i jej częstością. Fala dźwiękowa wywołuje również zmiany ciśnienia  $\Delta p$  ośrodka względem ciśnienia równowagowego

$$\Delta p = \Delta p_m \sin(kx - \omega t), \quad (18.14)$$

gdzie **amplituda zmian ciśnienia** wynosi

$$\Delta p_m = (v\rho\omega)s_m. \quad (18.15)$$

**Interferencja** Interferencja dwóch fal dźwiękowych o jednakowej długości fali przechodzących przez ten sam punkt zależy od ich różnicy faz  $\phi$  w tym punkcie. Jeżeli fale dźwiękowe zostały wyemitowane w zgodnej fazie i biegą w przybliżeniu w tym samym kierunku, różnica  $\phi$  dana jest wzorem

$$\phi = \frac{\Delta L}{\lambda} 2\pi, \quad (18.21)$$

gdzie  $\Delta L$  jest **różnicą dróg** (tzn. różnicą odległości pokonanych przez fale, aby dotrzeć do wspólnego punktu). Całkowicie konstruktywna interferencja zachodzi wówczas, gdy różnica faz  $\phi$  równa jest całkowitej wielokrotności  $2\pi$ , tj. gdy

$$\phi = m(2\pi), \quad \text{gdzie } m = 0, 1, 2, \dots \quad (18.22)$$

lub, co jest równoważne, różnicę  $\Delta L$  i długość fali  $\lambda$  wiąże warunek

$$\frac{\Delta L}{\lambda} = 0, 1, 2, \dots \quad (18.23)$$

Całkowicie destruktynna interferencja zachodzi wówczas, gdy różnica faz  $\phi$  równa jest nieparzystej wielokrotności  $\pi$

$$\phi = (2m + 1)\pi, \quad \text{gdzie } m = 0, 1, 2, \dots \quad (18.24)$$

lub, co jest równoważne, różnicę  $\Delta L$  i długość fali  $\lambda$  wiąże warunek

$$\frac{\Delta L}{\lambda} = 0,5, 1,5, 2,5, \dots \quad (18.25)$$

**Natężenie dźwięku** Natężenie  $I$  fali dźwiękowej na pewnej powierzchni jest to średnia szybkość w przeliczeniu na jednostkę pola powierzchni, z jaką fala dostarcza energię do tej powierzchni (lub przenosi przez nią). Możemy tę definicję zapisać w postaci

$$I = \frac{P}{S}. \quad (18.26)$$

gdzie  $P$  jest to szybkość przenoszenia energii (czyli moc) fali dźwiękowej, a  $S$  jest polem powierzchni odbierającej dźwięk. Natężenie  $I$  oraz amplitudę przemieszczenia  $s_m$  fali dźwiękowej wiąże zależność

$$I = \frac{1}{2} \rho v \omega^2 s_m^2. \quad (18.27)$$

Natężenie w odległości  $r$  od źródła punktowego, emitującego falę dźwiękową o mocy  $P_{ir}$ , wynosi

$$I = \frac{P_{ir}}{4\pi r^2}. \quad (18.28)$$

**Skala głośności** Głośność dźwięku  $\beta$  wyrażona w decybelach (dB) definiowana jest jako

$$\beta = (10 \text{ dB}) \log \frac{I}{I_0}, \quad (18.29)$$

gdzie  $I_0 = 10^{-12} \text{ W/m}^2$  to natężenie odniesienia, z którym porównujemy wszystkie inne wartości natężenia. Każde zwiększenie natężenia dźwięku o czynnik 10 oznacza wzrost głośności o 10 dB.

**Fale stojące w rurach** W rurach można wzbudzić fale stojące. Rura o dwóch końcach otwartych rezonuje przy częstotliwościach

$$v = \frac{v}{\lambda} = \frac{n v}{2L}, \quad n = 1, 2, 3, \dots, \quad (18.39)$$

gdzie  $v$  jest prędkością dźwięku w powietrzu wypełniającym rurę. Dla rury o jednym końcu zamkniętym, a drugim otwartym, częstotliwości rezonansowe dane są wzorem

$$v = \frac{v}{\lambda} = \frac{n v}{4L}, \quad n = 1, 3, 5, \dots \quad (18.41)$$

**Dudnienia** Dudnienia powstają wtedy, gdy dwie fale o nieco różnych częstotliwościach  $v_1$  i  $v_2$  rejestrowane są razem. Częstość dud-

nień wynosi

$$v_{\text{dudn}} = v_1 - v_2. \quad (18.46)$$

**Zjawisko Dopplera** Zjawisko Dopplera polega na zmianie rejestrowanej częstotliwości fali, gdy źródło lub detektor poruszają się względem ośrodka, w którym rozchodzą się fale (np. powietrza). W przypadku dźwięku rejestrowaną częstotliwość  $v'$  i częstotliwość źródła  $v$  wiążą zależność

$$v' = v \frac{v \pm v_D}{v \mp v_S} \quad (\text{zjawisko Dopplera}), \quad (18.47)$$

gdzie  $v_D$  jest prędkością detektora względem ośrodka,  $v_S$  — prędkością źródła, a  $v$  — prędkością dźwięku w ośrodku. Znaki wybieramy w taki sposób, by częstotliwość  $v'$  była większa w przypadku zbliżenia się do siebie detektora i źródła, oraz mniejsza w przypadku oddalania się ich od siebie.

**Fale uderzeniowe** Jeżeli prędkość źródła względem ośrodka przewyższa prędkość dźwięku w tym ośrodku, równanie Dopplera przestaje być słusze. W takim przypadku powstaje fala uderzeniowa. Kąt  $\theta$  (równy połowie kąta wierzchołkowego stożka Macha), zwany kątem Macha, dany jest wzorem

$$\sin \theta = \frac{v}{v_S} \quad (\text{kąt Macha}). \quad (18.57)$$

## Pytania

1. Na rysunku 18.23 przedstawiono torы dwóch impulsów dźwięku, wysłanych w tej samej chwili i biegących w powietrzu po torach równoległych. Jedeną różnicą między tymi torami polega na tym, że tor 2 przechodzi przez obszar ciepłego powietrza (o mniej gęstości). Który impuls wygra ten „wyścig”?

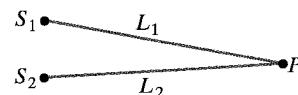


Rys. 18.23. Pytanie 1

2. Fala dźwiękowa o długości  $\lambda$  i amplitudzie  $s_m$  zaczyna rozchodzić się wzdłuż kanału dźwiękowego (rura, kanał słuchowy w uchu itp.). Wyobraź sobie, że gdy umieszczony w tym kanale mały detektor wykryje tę falę, wyemituje on drugą falę dźwiękową (nazywając ją „antydźwiękiem”), wygaszającą pierwszą falę, w wyniku czego na odległym końcu kanału nic nie słyszać. Określ: a) jaki kierunek rozchodzenia się musi mieć druga fala, b) jaką musi mieć długość fali oraz c) jaką musi mieć amplitudę, aby mogło nastąpić takie wygaszenie. d) Jaka musi być różnica faz między tymi dwiema falami? (Tego typu urządzenie emitujące „antydźwięki” używane są do eliminowania niepożądanych dźwięków w zaszułonym otoczeniu).

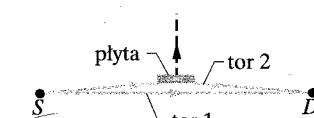
3. Przedstawione na rysunku 18.24 dwa źródła punktowe  $S_1$  i  $S_2$  emittują identyczne fale dźwiękowe o długości fali 2 m będące w

zgodnej fazie. Ile długościom fali odpowiada różnica faz między tymi falami w punkcie  $P$  dla: a)  $L_1 = 38 \text{ m}$  i  $L_2 = 34 \text{ m}$  oraz b)  $L_1 = 39 \text{ m}$  i  $L_2 = 36 \text{ m}$ ? c) Zakładając, że odległość między źródłami jest znacznie mniejsza niż  $L_1$  i  $L_2$ , określ, jaki rodzaj interferencji zachodzi w punkcie  $P$  w przypadku (a) oraz w przypadku (b).



Rys. 18.24. Pytanie 3

4. Na rysunku 18.25 przedstawiono fale dźwiękowe o długości fali  $\lambda$ , emitowane przez punktowe źródło  $S$  i biegające do detektora  $D$  bezpośrednio wzdłuż toru 1 oraz z odbiciem od płyty wzdłuż toru 2. Początkowo płyta znajduje się prawie na torze 1 i fale docierające do detektora  $D$  wzdłuż obu torów są prawie zgodne w fazie. Następnie, jak pokazano na rysunku, płyta zostaje odsunięta się od toru 1 aż do położenia, w którym fale docierające do detektora  $D$  będą maksymalnie niezgodne w fazie. Jaka będzie wówczas różnica dróg  $\Delta L$  wzdłuż obu torów?

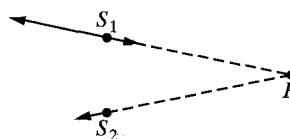


Rys. 18.25. Pytanie 4

5. Przedstawione na rysunku 18.26 dwa źródła punktowe  $S_1$  i  $S_2$  emittują w zgodnej fazie identyczne fale dźwiękowe o długości  $\lambda$ ,

punkt  $P$  zaś jest jednakowo oddalony od obu źródeł. Następnie źródło  $S_2$  przesunięto, zwiększąc jego odległość od punktu  $P$  o  $\lambda/4$ . Określ, czy fale w punkcie  $P$  będą zgodne w fazie, maksymalnie niezgodne w fazie, czy też w jakimś stanie pośrednim:

- gdy źródło  $S_1$  zostanie również przesunięte o  $\lambda/4$  w kierunku punktu  $P$  oraz b)
- gdy źródło  $S_1$  zostanie od- sunięte od punktu  $P$  o  $3\lambda/4$ .



Rys. 18.26. Pytanie 5

6. W przykładzie 18.3 (rys. 18.9a) fale docierające do punktu  $P_1$  leżącego na symetrycznej odcinku łączącej źródła  $S_1$  i  $S_2$  fali są dokładnie zgodne w fazie, czyli fale pochodzące ze źródeł  $S_1$  i  $S_2$  zawsze dążą do przesunięcia elementu powietrza w punkcie  $P_1$  w tym samym kierunku. Umieścmy punkt  $P_3$  na przecięciu symetrycznej oraz linii łączącej źródła  $S_1$  i  $S_2$ . a) Czy fale docierające do punktu  $P_3$  są dokładnie zgodne w fazie, maksymalnie niezgodne w fazie, czy też w jakimś stanie pośrednim? b) Jaka będzie odpowiedź, jeżeli odległość między źródłami zwiększymy do  $1,7\lambda$ ?

7. Fala stojąca w rurze ma pięć węzłów i pięć strzałek. a) Określ, ile ta rura ma otwartych końców. b) Podaj liczbę harmoniczną  $n$  dla tej fali stojącej.

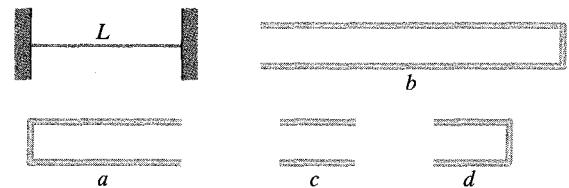
8. W rurze wzbudzono szóstą harmoniczną. a) Ile otwartych końców ma ta piszczałka (ma co najmniej jeden)? b) Co znajduje się w środkowym punkcie piszczałki: węzeł, strzałka, czy też ani jedno, ani drugie?

9. a) Gdy orkiestra się rozgrzewa, ciepły oddech muzyków podnosi temperaturę powietrza wewnątrz instrumentów dętych (a zatem zmniejsza gęstość tego powietrza). Czy częstotliwości rezonansowe instrumentów rosną wtedy, czy maleją? b) Jeżeli wysuniemy suwak puzonu, to czy jego częstotliwość rezonansowa wzrośnie, czy zmaleje?

10. W pewnej rurze można wzbudzić sześć częstotliwości harmonicznych mniejszych niż 1000 Hz. Niżej podano cztery spośród nich: 300 Hz, 600 Hz, 750 Hz i 900 Hz. Jakich dwu częstotliwości brakuje na tej liście?

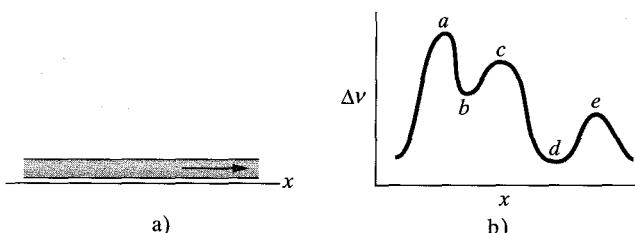
11. Piszczałka A ma długość  $L$  i jeden koniec otwarty. Piszczałka B ma długość  $2L$  oraz obydwa końce otwarte. Które harmoniczne piszczałki B mają częstotliwości równe częstotliwości rezonansowej piszczałki A?

12. Na rysunku 18.27 przedstawiono naprężoną strunę o długości  $L$  oraz piszczałki a, b, c i d o długościach odpowiednio  $L$ ,  $2L$ ,  $L/2$  oraz  $L/2$ . Naprężenie struny zostało dobrane w taki sposób, by prędkość fal w strunie była równa prędkości dźwięku w powietrzu. Następnie w strunie wzbudzono podstawowy mod drgań. W której piszczałce dźwięk emitowany przez strunę wywoła rezonans i który mod drgań zostanie wzbudzony?



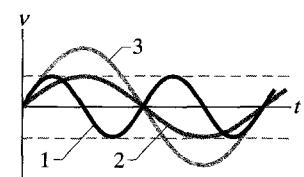
Rys. 18.27. Pytanie 12

13. Fale dźwiękowe o częstotliwości  $v$  są odbijane przez płyn przepływający przez cienką rurę umieszczoną wzdłuż osi  $x$  (rys. 18.28a). Wewnętrzna średnica rury zmienia się wraz ze współrzędną  $x$ . Przesunięcie częstotliwości  $\Delta\nu$ , związane ze zjawiskiem Dopplera, również się zmienia wraz ze współrzędną  $x$ , tak jak przedstawiono na rysunku 18.28b. Uszereguj pięć zaznaczonych obszarów w zależności od wewnętrznej średnicy rury, zaczynając od największej. (Wskazówka: Patrz paragraf 15.10).



Rys. 18.28. Pytanie 13

14. Twój kolega jeździ kolejno na trzech różnych karuzelach, mając ze sobą źródło emitujące izotropowo dźwięk o pewnej częstotliwości. Stojąc z dala od karuzeli, podczas jej obrotów słyszysz zmiany częstotliwości emitowanego dźwięku. Trzy krzywe na rysunku 18.29 przedstawiają zmiany częstotliwości dla trzech karuzeli. Uszereguj te krzywe według: a) prędkości liniowej  $v$  źródła dźwięku, b) prędkości kątowej  $\omega$  karuzeli oraz c) promienia  $r$  karuzeli, zaczynając od największych.



Rys. 18.29. Pytanie 14

# Zadania

Rozwiązań jest dostępne na stronie internetowej podręcznika: <http://www.wiley.com/college/hrw>

Rozwiązań jest dostępne w postaci interaktywnej, wykorzystującej oprogramowanie Interactive Learning-Ware (na tej samej stronie)

O ile nie zaznaczono inaczej, w poniższych zadaniach wykorzystujemy następujące wartości:

$$\text{prędkość dźwięku w powietrzu} = 343 \text{ m/s}$$

$$\text{gęstość powietrza} = 1,21 \text{ kg/m}^3.$$

## 18.2 Prędkość dźwięku

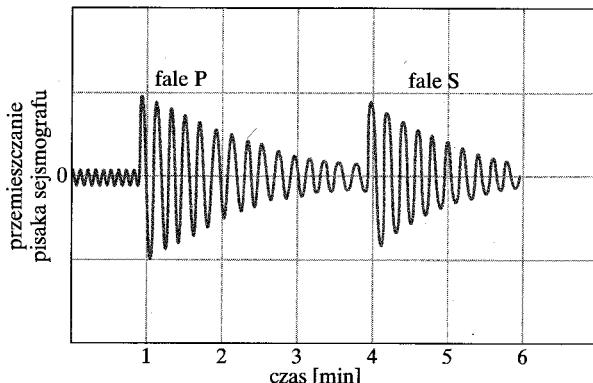
1. Podaj regułę na wyznaczanie odległości (w kilometrach) od błyskawicy metodą odliczania sekund upływających od zobaczenia błysku do usłyszenia grzmotu. Zakładamy, że dźwięk biegnie do nas po linii prostej.

2. Znajdujesz się na wielkim koncercie na świeżym powietrzu i siedzisz w odległości 300 m od głośników. Koncert transmityowany jest również na żywo przez satelitę (z prędkością światła  $3 \cdot 10^8 \text{ m/s}$ ). Pewien słuchacz słucha transmisji w odległości 5000 km. Kto i o ile wcześniej usłyszy muzykę, ty czy ten słuchacz?

3. Dwóch kibiców piłki nożnej na stadionie Montjuic widzi, a chwilę później słyszy, kopnięcie piłki na płycie boiska. Dla jednego kibica opóźnienie wynosi 0,23 s, a dla drugiego 0,12 s. Linie poprowadzone od kibiców do piłkarza przecinają się pod kątem  $90^\circ$ . a) Podaj odległość od każdego kibica do piłkarza. b) Podaj odległość między kibicami.

4. Kolumna żołnierzy maszeruje z prędkością 120 kroków na minutę zgodnie z tempem podawanym przez dobosza znajdującego się na czele kolumny. Obserwujemy, że żołnierz maszerujący na końcu kolumny wyrzucają naprzód lewą nogę, w chwili gdy dobosz — prawą. Określ przybliżoną długość kolumny.

5. Trzęsienia ziemi wywołują fale dźwiękowe we wnętrzu Ziemi. Inaczej niż w gazie w skorupie ziemskiej mogą występować zarówno poprzeczne (S), jak i podłużne (P) fale dźwiękowe. W typowym przypadku prędkość fal S wynosi około  $4,5 \text{ km/s}$ , a prędkość fal P —  $8,0 \text{ km/s}$ . Sejsmograf rejestruje fale P i S z pewnego trzęsienia ziemi. Początek fali P został zarejestrowany o 3 min wcześniej niż początek fali S (rys. 18.30). Zakładając, że fale biegły po liniach prostych, określ, w jakiej odległości nastąpiło trzęsienie ziemi.



Rys. 18.30. Zadanie 5

6. Prędkość dźwięku w pewnym metalu wynosi  $V$ . Uderzamy w jeden koniec wykonanej z tego metalu rury o długości  $L$ . Słuchacz znajdujący się na jej drugim końcu słyszy dwa dźwięki, jeden pochodzący od fali biegnącej wzdłuż rury, a drugi — od fali biegnącej przez powietrze. a) Zakładając, że prędkość dźwięku w powietrzu równa jest  $v$ , określ odstęp czasu  $t$ , jaki upływa między obydwooma dźwiękami. b) Przyjmując  $t = 1 \text{ s}$  i zakładając, że naszym metalem jest stal, wyznacz długość  $L$ .

7. Wrzucono kamień do studni. Po upływie 3 s usłyszano plusk. Podaj głębokość studni.

## 18.3 Biegające fale dźwiękowe

8. W przypadku normalnego słuchu zakres częstości słyszalnych rozciąga się od około  $20 \text{ Hz}$  do  $20 \text{ kHz}$ . Jakie długości fal dźwiękowych odpowiadają tym częstościom?

9. Diagnostyka ultradźwiękowa (USG) przy częstotliwości  $4,5 \text{ MHz}$  wykorzystywana jest do badania nowotworów w miękkich tkankach. a) Jaka jest długość takiej fali dźwiękowej w powietrzu? b) Jaka jest długość fali w tkance, jeżeli jej prędkość w tkance wynosi  $1500 \text{ m/s}$ ?

10. a) Wzdłuż bardzo długiej spiralnej sprężyny jest wysyłana ciągła sinusoidalna fala podłużna wytwarzana przez przy mocowane do niej drgające źródło. Częstość drgań źródła wynosi  $25 \text{ Hz}$ , przy czym w każdej chwili odległość między kolejnymi punktami maksymalnego rozciągnięcia sprężyny równa jest  $24 \text{ cm}$ . Wyznacz prędkość fali. b) Zapisz równanie fali dla przypadku, gdy maksymalne podłużne przemieszczenie segmentu sprężyny równe jest  $0,3 \text{ cm}$ , a fala biegnie w ujemnym kierunku osi  $x$ . Przyjmij, że oś  $x$  zaczyna się w źródle ( $x = 0$ ) oraz że w chwili  $t = 0$  przemieszczenie jest tam równe零.

11. Ciśnienie w bieżącej fali dźwiękowej dane jest wzorem

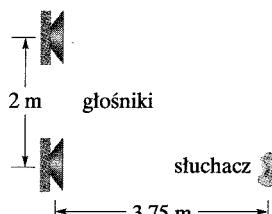
$$\Delta p = (1,5 \text{ Pa}) \sin \pi [(0,9 \text{ m}^{-1})x - (315 \text{ s}^{-1})t].$$

Znajdź: a) amplitudę zmian ciśnienia, b) częstotliwość, c) długość fali oraz d) jej prędkość.

## 18.4 Interferencja

12. Dwa punktowe źródła fal dźwiękowych o jednakowych długościach fali  $\lambda$  i amplitudach znajdują się w odległości  $D = 2\lambda$  od siebie. Źródła drgają w zgodnej fazie. a) Ile punktów maksymalnego sygnału (czyli maksimów interferencji konstruktywnej) leży na dużym okręgu wokół źródeł? b) Ile punktów minimalnego sygnału (czyli punktów interferencji destruktywnej) leży na tym okręgu?

13. Na rysunku 18.31 przedstawiono dwa głośniki, oddalone od siebie o 2 m i drgające w zgodnej fazie. Założ, że amplitudy dźwięku z obu głośników w miejscu, gdzie znajduje się słuchacz, tj. 3,75 m na wprost jednego z głośników, są w przybliżeniu takie same. a) Przy jakich częstotliwościach z zakresu słyszalności (od 20 Hz do 20 kHz) słuchacz słyszy minimum sygnału? b) Przy jakich częstotliwościach sygnał jest maksymalny?

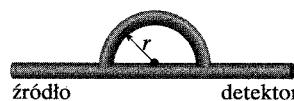


Rys. 18.31. Zadanie 13

14. Dwie fale dźwiękowe pochodzące z dwóch różnych źródeł o takiej samej częstotliwości 540 Hz biegły w tym samym kierunku z prędkością 330 m/s. Źródła drgają w zgodnej fazie. Jaka jest różnica faz tych fal w punkcie odległym od jednego źródła o 4,4 m, a od drugiego o 4,0 m?

15. Dwa głośniki umieszczone na estradzie w odległości 3,35 m od siebie. Widz znajduje się w odległości 18,3 m od jednego głośnika i 19,5 m od drugiego. Podczas kontroli ustawił generator sygnałowy zasila obydwa głośniki sygnałem o takiej samej amplitudzie i częstotliwości oraz o jednakowej fazie. Częstotliwość generatora przemiata zakres słyszalności (od 20 Hz do 20 kHz). a) Jakie są trzy najniższe częstotliwości, przy których słuchacz prawie nie słyszy dźwięku ze względu na interferencję destruktywną? b) Jakie są trzy najniższe częstotliwości, przy których słuchacz słyszy dźwięk o maksymalnym natężeniu?

16. Na rysunku 18.32 fala dźwiękowa o długości fali 40 cm biegnie w prawo ze źródła przez rurę złożoną z odcinka prostego oraz połowy okręgu. Część fali dźwiękowej biegnie przez odcinek łuku, po czym ponownie łączy się z resztą fali, która biegnie przez odcinek prostoliniowy. W wyniku połączenia fal zachodzi interferencja. Jaki jest najmniejszy promień łuku  $r$ , przy którym mamy minimum natężenia zarejestrowanego przez detektor?



Rys. 18.32. Zadanie 16

## 18.5 Natężenie i głośność dźwięku

17. Źródło emisji izotropowo fale dźwiękowe. Natężenie fal w odległości 2,5 m od źródła wynosi  $1,91 \cdot 10^{-4} \text{ W/m}^2$ . Zakładając, że energia fal jest zachowana, wyznacz moc źródła.

18. Źródło punktowe o mocy 1 W emisji izotropowo fale dźwiękowe. Zakładając, że energia fal jest zachowana, wyznacz natężenie dźwięku w odległości: a) 1 m oraz b) 2,5 m od źródła.

19. Fala dźwiękowa o częstotliwości 300 Hz ma natężenie  $1 \mu\text{W/m}^2$ . Jaka jest amplituda drgań powietrza spowodowanych przez tę falę?

20. Dwa dźwięki różnią się głośnością o 1 dB. Jaki jest stosunek większego natężenia do mniejszego?

21. Poziom głośności pewnego źródła dźwięku wzrosł o 30 dB. O jaki czynnik wzrosły jego a) natężenie oraz b) amplituda zmian ciśnienia?

22. Źródło fali dźwiękowej ma moc  $1 \mu\text{W}$ . Zakładając, że jest to źródło punktowe, wyznacz: a) natężenie dźwięku w odległości 3 m od źródła oraz b) wyrażoną w decybelach głośność w tej samej odległości.

23. a) Jeżeli dwie fale dźwiękowe, jedna w powietrzu, a druga w wodzie, mają takie same natężenia, to jaki jest stosunek amplitudy zmian ciśnienia fali w wodzie do amplitudy zmian ciśnienia fali w powietrzu? Założ, że temperatura wody i powietrza wynosi  $20^\circ\text{C}$  (patrz tabela 15.1). b) Jaki jest stosunek natężen obu fal, jeżeli ich amplitudy zmian ciśnienia są jednakowe?

24. Założmy, że hałaśliwy pociąg towarowy poruszający się po prostoliniowym torze wysyła cylindrycznie rozchodząjącą się falę dźwiękową. Założmy również, że powietrze nie pochłania energii. Jaka jest amplituda  $s_m$  tej fali w zależności od radialnej odległości  $r$  od źródła?

25. a) Pokaż, że natężenie  $I$  fali jest iloczynem gęstości energii  $u$  fali (energii przypadającej na jednostkę objętości) i jej prędkości  $v$ . b) Fale radiowe biegły z prędkością  $3 \cdot 10^8 \text{ m/s}$ . Wyznacz gęstość energii  $u$  fal radiowych w odległości 480 km od źródła o mocy 50 000 W, zakładając, iż czoła fali są sferyczne.

26. Wyznacz stosunki (większych wartości do mniejszych): a) natężeń, b) amplitud zmian ciśnienia oraz c) amplitud przemieszczenia dla dwóch fal dźwiękowych, których głośności różnią się o 37 dB.

27. Fala dźwiękowa rozchodzi się ze źródła punktowego równomiernie we wszystkich kierunkach. a) Wyprowadź poniższy wzór opisujący przemieszczenie  $s$  ośrodka, w którym rozchodzi się fala, w dowolnej odległości  $r$  od źródła:

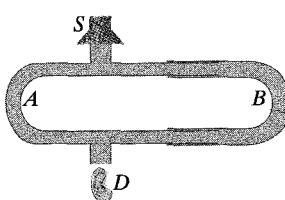
$$s = \frac{b}{r} \sin k(r - vt),$$

gdzie  $b$  — stała. Rozważ prędkość, kierunek rozchodzenia się, okresowość i natężenie tej fali. b) Jaki jest wymiar stałej  $b$ ?

**28.** Punktowe źródło wysyła izotropowo falę dźwiękową o mocy 30 W. Mały mikrofon o powierzchni  $0,75 \text{ cm}^2$  zbiera dźwięk w odległości 200 m od źródła. Oblicz: a) natężenie fali dźwiękowej w tym miejscu oraz b) moc odbieraną przez mikrofon.

**29\*.** Na rysunku 18.33 przedstawiono wypełniony powietrzem interferometr akustyczny, wykorzystywany do pokazu interferencji fal dźwiękowych. Źródłem dźwięku  $S$  jest drgająca membrana;  $D$  jest detektorem dźwięku, takim jak ucho lub mikrofon. Drogę  $SBD$  można zmieniać, natomiast droga  $SAD$  jest ustalona. W punkcie  $D$  fala dźwiękowa przychodząca drogą  $SBD$  interferuje z falą przychodzącą drogą  $SAD$ . W pewnym okresie natężenie dźwięku w punkcie  $D$  ma minimalną wartość równą 100 jednostek przy pewnym położeniu ruchomego ramienia i w sposób ciągły wzrasta do maksymalnej wartości równej 900 jednostek, gdy ruchome ramię zostaje przesunięte na odległość 1,65 cm. Znajdź:

a) częstotliwość dźwięku wysyłanego przez źródło oraz b) stosunek amplitud fali  $SAD$  i fali  $SBD$  w punkcie  $D$ . c) Jak to się dzieje, że te fale mają różne amplitudy, mimo iż pochodzą z tego samego źródła?



Rys. 18.33. Zadanie 29

## 18.6 Źródła dźwięków w muzyce

**30.** Umocowana na obu końcach struna skrzypcowa o długości 15 cm drga w swoim modzie o  $n = 1$ . Prędkość dźwięku w strunie równa jest 250 m/s, a prędkość dźwięku w powietrzu 348 m/s. Wyznacz: a) częstotliwość i b) długość wysyłanej fali dźwiękowej.

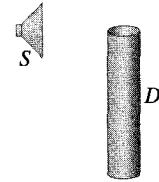
**31.** Otwarta na obydwoj stronach piszczałka organowa  $A$  ma częstotliwość podstawową 300 Hz. Trzecia harmoniczna piszczałki organowej  $B$ , mającej jeden koniec otwarty, ma taką samą częstotliwość jak druga harmoniczna piszczałki  $A$ . Wyznacz: a) długość piszczałki  $A$  oraz b) długość piszczałki  $B$ .

**32.** Poziom wody w pionowej szklanej rurze o długości 1 m można umieścić na dowolnej wysokości. Tuż przy otwartym górnym koncu rury umieszczono drgające z częstotliwością 686 Hz wiadki strojowe, aby w jej górnej — wypełnionej powietrzem — części wzbudzić stojącą falę dźwiękową. (Ta wypełniona powietrzem część działa jak rura z jednym końcem zamkniętym, a drugim otwartym). Dla jakiego położenia poziomu słupa wody wystąpi rezonans?

**33.** a) Wyznacz prędkość fal w strunie skrzypcowej o masie 800 mg i długości 22 cm, wiedząc, że częstotliwość podstawowa wynosi 920 Hz. b) Podaj naprężenie struny. Dla częstotliwości podstawowej wyznacz: c) długość fali w strunie oraz d) długość fali dźwiękowej emitowanej przez strunę.

**34.** Pewna struna skrzypcowa ma długość 30 cm pomiędzy punktami zamocowania oraz masę 2 g. Nie przytrzymywana palcem struna wydaje dźwięk A (440 Hz). a) W którym miejscu struny należy umieścić palec, aby zagrać dźwięk C (523 Hz)? b) Jaki jest stosunek długości fali fal w strunie potrzebnych do zagrania dźwięku A i dźwięku C? c) Jaki jest stosunek długości fali fal dźwiękowych odpowiadających dźwiękowi A i dźwiękowi C?

**35.** Na rysunku 18.34 symbolem  $S$  oznaczono mały głośnik podłączony do generatora akustycznego i wzmacniacza, strojonych w zakresie częstotliwości od 1000 Hz do 2000 Hz. Cylindryczna rura  $D$  wykonana jest z blachy, ma długość 45,7 cm i obydwa końce otwarte. a) Zakładając, że w pewnej temperaturze prędkość dźwięku w powietrzu wynosi 344 m/s, wyznacz częstotliwości, przy których w rurze pojawia się rezonans, gdy częstotliwość emitowaną przez głośnik zmieniamy w zakresie od 1000 Hz do 2000 Hz. b) Dla każdej częstotliwości rezonansowej naszkicuj falę stojącą (w podobny sposób jak na rysunku 18.12b).



Rys. 18.34. Zadanie 35

**36.** Struna wiolonczeli ma długość  $L$ , której odpowiada częstotliwość podstawowa  $v$ . a) O jaką długość  $l$  należy skrócić strunę, przyciskając ją palcem, aby zmienić częstotliwość podstawową do wartości  $rv$ ? b) Oblicz wartość  $l$  dla  $L = 0,8 \text{ m}$  i  $r = 1,2$ . c) Dla  $r = 1,2$  oblicz stosunek zmienionej długości fali dźwiękowej emitowanej przez strunę do długości fali emitowanej przed skróceniem.

**37.** Studnia o pionowych ścianach z wodą na dnie rezonuje przy częstotliwości 7 Hz i nie rezonuje przy niższych częstotliwościach. (Wypełniona powietrzem część studni działa jak rura z jednym końcem zamkniętym, a drugim otwartym). Powietrze w studni ma gęstość  $1,1 \text{ kg/m}^3$  i moduł ściśliwości  $1,33 \cdot 10^5 \text{ Pa}$ . Na jakiej głębokości znajduje się lustro wody?

**38.** Rura o długości 1,20 m jest zamknięta na jednym końcu. W pobliżu jej otwartego końca umieszczono naciągnięty drut. Długość drutu wynosi 0,33 m, a masa 9,6 g. Drut jest zamocowany na obu końcach i drga w swoim modzie podstawowym. W słupie powietrza w rurze wzbudzają się w rezonansie drgania o częstotliwości równej częstotliwości podstawowej dla tego słupa. Wyznacz: a) tę częstotliwość oraz b) naprężenie drutu.

**39.** Okres pulsacji (drgań) gwiazdy zmiennej można oszacować, zakładając, że gwiazda wykonuje radialne drgania podłużne w podstawowym modzie fali stojącej; to znaczy że promień gwiazdy zmienia się okresowo z czasem, przy czym strzałka przemieszczenia znajduje się na powierzchni gwiazdy. a) Czego należy oczekwać w środku gwiazdy — wzęła czy strzałki przemieszczenia? b) Przez analogię do piszczałki o jednym koncu otwartym udowodnij, że okres drgań  $T$  dany jest wzorem

$$T = \frac{4R}{v},$$

gdzie  $R$  — promień gwiazdy w położeniu równowagi,  $v$  — średnia prędkość dźwięku w materii gwiazdy. c) Typowe białe karły zbudowane są z materii o module sprężystości objętościowej  $1,33 \cdot 10^{22}$  Pa i gęstości  $10^{10}$  kg/m<sup>3</sup>. Mają one promienie równe  $9 \cdot 10^{-3}$  promienia Słońca. Jaki jest przybliżony okres pulsacji białego karła?

**40.** Piszczałka  $A$  o długości 1,2 m i obu końcach otwartych drga z częstotliwością trzeciej harmonicznej. Piszczałka jest wypełniona powietrzem, w którym prędkość dźwięku jest równa 343 m/s. Piszczałka  $B$  o jednym końcu otwartym drga z częstotliwością drugiej harmonicznej. Tak się składa, że częstotliwości drgań obu piszczałek  $A$  i  $B$  są jednakowe. a) Wzdłuż piszczałki  $A$  prowadzimy oś  $x$  w taki sposób, by w punkcie  $x = 0$  znajdował się jeden koniec piszczałki. W jakich punktach na osi  $x$  znajdą się węzły przemieszczenia? b) Jaka jest długość piszczałki  $B$ ? c) Jaka jest najniższa częstotliwość harmoniczna piszczałki  $A$ ?

**41.** Strunę skrzypcową o długości 30 cm i gęstości liniowej 0,65 g/m umieszczonego w pobliżu głośnika podłączonego do generatora akustycznego o zmiennej częstotliwości. Stwierdzono, że gdy częstotliwość generatora zmieniamy w zakresie od 500 Hz do 1500 Hz, drgania struny wzbudzają się jedynie przy częstotliwościach 880 Hz i 1320 Hz. Wyznacz siłę napinającą strunę.

## 18.7 Dudnienia

**42.** Struna A w skrzypcach jest nieco zbyt mocno naciągnięta. Gdy struna drga jednocześnie z widełkami strojowymi dającymi dokładnie dźwięk A (440 Hz), słyszmy cztery dudnienia na sekundę. Wyznacz okres drgań struny.

**43.** Widełki strojowe o nieznanej częstotliwości, drgając jednocześnie ze standardowymi widełkami o częstotliwości 384 Hz, dają trzy dudnienia na sekundę. Częstotliwość dudnień zmniejsza się, gdy na końcu pierwszych widełek umieścimy mały kawałek wosku. Wyznacz częstotliwość tych widełek.

**44.** Mamy pięć par widełek strojowych drgających z bliskimi, ale różnymi częstotliwościami. Określ: a) największą oraz b) najmniejszą liczbę różnych częstotliwości dudnień, jakie można wytworzyć, wzbudzając dwie pary widełek równocześnie, w zależności od tego, jak różnią się między sobą częstotliwości drgań widełek.

**45.** Dwie identyczne struny fortepianowe, naciągnięte taką samą siłą, mają częstotliwość podstawową równą 600 Hz. Jaki wzajemny wzrost napięcia jednej ze strun doprowadzi — przy równoczesnym drganiu obu strun — do pojawienia się 6 dudnień na sekundę?

## 18.8 Zjawisko Dopplera

**46.** Policjant  $B$  goni pirata drogowego  $A$  na prostym odcinku drogi. Obaj poruszają się z prędkością 160 km/h. Policjant  $B$ , nie mogąc dogonić pirata, włącza syrenę. Przyjmujemy, że prędkość dźwięku w powietrzu wynosi 343 m/s, a częstotliwość źródła równa

jest 500 Hz. Określ dopplerowskie przesunięcie częstotliwości słyszanej przez pirata  $A$ .

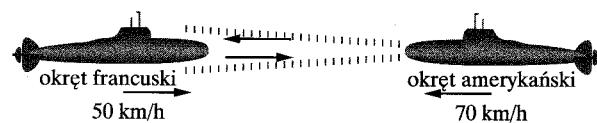
**47.** Turbiny w silnikach samolotu odrzutowego lecącego z prędkością 200 m/s wyją z częstotliwością 16 000 Hz. Jaką częstotliwość słyszy pilot drugiego samolotu, który próbuje wyprzedzić pierwszy z prędkością 250 m/s?

**48.** Ambulans z syreną wydającą dźwięk o częstotliwości 1600 Hz do gania i wyprzedza rowerzystę pedałującego z prędkością 2,44 m/s. Po wyprzedzeniu rowerzysta słyszy częstotliwość 1590 Hz. Wyznacz prędkość ambulansu.

**49.** Gwizdek wysyłający dźwięk o częstotliwości 540 Hz porusza się po okręgu o promieniu 60 cm z prędkością kątową 15 rad/s. Jaką: a) najmniejszą i b) największą częstotliwość słyszy obserwator znajdujący się w dużej odległości i pozostający w spoczynku względem środka okręgu? ilw

**50.** Stacjonarny detektor ruchu wysyła falę dźwiękową o częstotliwości 0,15 MHz w kierunku ciężarówki nadjeżdżającej z prędkością 45 km/h. Jaka jest częstotliwość fali odbitej w kierunku detektora?

**51.** Podczas manewrów okręty podwodne, francuski i amerykański, płyną naprzeciw siebie w nieruchomej wodzie Północnego Atlantyku (rys. 18.35). Okręt francuski płynie z prędkością 50 km/h, a amerykański — z prędkością 70 km/h. Okręt francuski wysyła za pomocą sonaru impuls (fal dźwiękową w wodzie) o częstotliwości 1000 Hz. Fala ta biegnie z prędkością 5470 km/h. a) Jaka jest częstotliwość sygnału odbieranego przez okręt amerykański? b) Jaka jest częstotliwość odbieranego na okręcie francuskim sygnału odbitego od okrętu amerykańskiego?



Rys. 18.35. Zadanie 51

**52.** Źródło dźwięku  $A$  i reflektor  $B$  poruszają się naprzeciw siebie. Prędkość źródła  $A$  względem powietrza wynosi 29,9 m/s, prędkość reflektora  $B$  wynosi 65,8 m/s, a prędkość dźwięku równa jest 329 m/s. Źródło emisuje falę o częstotliwości 1200 Hz, mierzonej w układzie odniesienia związanym ze źródłem. W układzie odniesienia związanym z reflektorem wyznacz: a) częstotliwość i b) długość docierającej fali dźwiękowej. W układzie odniesienia związanym ze źródłem wyznacz: c) częstotliwość i d) długość powracającej do źródła fali dźwiękowej odbitej od reflektora.

**53.** Akustyczny alarm przeciwwłamaniowy zawiera źródło emisujące fale o częstotliwości 28 kHz. Jaka jest częstotliwość dudnień powstających przy oddziaływaniu fali ze źródłem i fali odbitej od intruza oddalającego się od źródła ze średnią prędkością 0,95 m/s? ilw

**54.** Nietoperz lata po jaskini, wykorzystując do nawigacji piski ultradźwiękowe. Załóż, że nietoperz emmituje dźwięki o częstotliwości 39 000 Hz. Podczas szybkiego lotu w kierunku płaskiej powierzchni ściany nietoperz porusza się z prędkością równą 0,025 prędkości dźwięku w powietrzu. Ile wynosi częstotliwość dźwięku odbitego od ściany, który słyszy nietoperz?

**55.** Dziewczyna siedzi przy otwartym oknie w pociągu jadącym na wschód z prędkością 10 m/s. Jej wuj stoi na peronie i obserwuje odjeżdżający pociąg. Gwizdek lokomotywy emmituje dźwięk o częstotliwości 500 Hz. Nie ma wiatru. a) Ile wynosi częstotliwość dźwięku, którą słyszy wuj? b) Ile wynosi częstotliwość dźwięku, którą słyszy dziewczyna? Ze wschodu zaczyna wieć wiatr z prędkością 10 m/s. Dźwięk o jakiej częstotliwości usłyszy teraz c) wuj, d) dziewczyna?

**56.** Syrena o częstotliwości 2000 Hz oraz urządnik obrony cywilnej znajdują się w spoczynku względem ziemi. Dźwięk o jakiej częstotliwości słyszy urządnik, jeżeli wiatr wieje z prędkością 12 m/s w kierunku: a) od źródła do urządzenia oraz b) od urządzenia do źródła?

**57.** Dwa pociągi jadą naprzeciw siebie z prędkością 30,5 m/s względem ziemi. Jeden pociąg wydaje gwizd o częstotliwości 500 Hz.

a) Gwizd o jakiej częstotliwości słyszać w drugim pociągu przy bezwietrznej pogodzie? b) Gwizd o jakiej częstotliwości słyszać w drugim pociągu, gdy wiatr wieje z prędkością 30,5 m/s od słuchacza do gwizdka? c) A przy przeciwnym kierunku wiatru?

### 18.9 Prędkości naddźwiękowe; fale uderzeniowe

**58.** Pocisk wystrzelono z prędkością 685 m/s. Wyznacz kąt, jaki stożek fali uderzeniowej tworzy z kierunkiem lotu pocisku.

**59.** Nad nami na wysokości 5000 m przelatuje samolot odrzutowy z prędkością 1,5 Ma. a) Oblicz kąt Macha. b) Po jakim czasie od momentu przelotu samolotu bezpośrednio nad nami dotrze do nas fala uderzeniowa? Przyjmij prędkość dźwięku równą 331 m/s.

**60.** Samolot leci z prędkością 1,25 razy większą od prędkości dźwięku. Grom dźwiękowy dociera do człowieka stojącego na ziemi po upływie 1 min od chwili przelotu samolotu bezpośrednio nad nim. Na jakiej wysokości leci samolot? Załóż, że prędkość dźwięku wynosi 330 m/s.

# 19 Temperatura, ciepło i pierwsza zasada termodynamiki

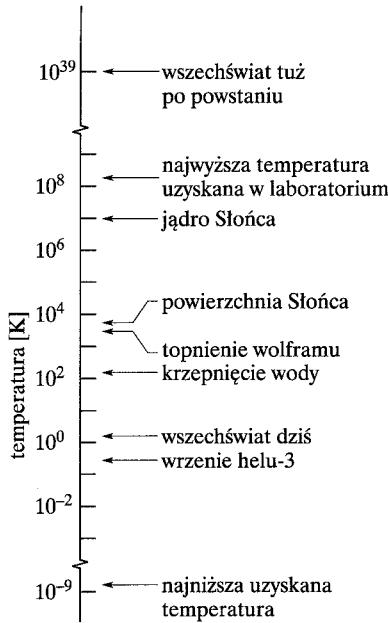
Wielkie szerszenie z gatunku *Vespa mandarinia japonica* żywią się japońskimi pszczołami. Kiedy jednak jeden z szerszeni próbuje dostać się do wnętrza ula, natychmiast zwartą warstwą otacza go kilkaset pszczół. Po mniej więcej 20 minutach szerszeń jest już martwy, mimo że pszczoły nie żądlą go, nie gryzą, nie zgniatają ani nie duszą.

Co jest więc przyczyną śmierci szerszenia?

Odpowiedź znajdziesz w tym rozdziale.



## 19.1. Termodynamika



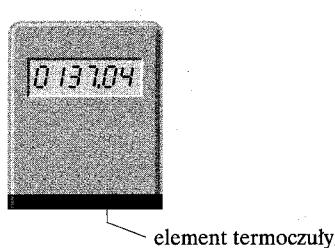
Rys. 19.1. Wybrane wartości temperatury w skali Kelvina. Temperatura  $T = 0$  odpowiada punktowi  $10^{-\infty}$  i dla tego nie może być przedstawiona na skali logarytmicznej

Ten i dwa następne rozdziały poświęcimy **termodynamice** — działowi fizyki, który zajmuje się *energią termiczną* (często nazywaną też *energią wewnętrzną*) układu. Podstawowym pojęciem termodynamiki jest temperatura. Słowo to spotykamy tak często, że większość z nas, kierując się własnym wrażeniem ciepła i zimna, nie zawsze używa go poprawnie. Nasz zmysł „odczuwania temperatury” nie zawsze jest wiarygodny. W mroźny, zimowy dzień stalowa sztaba wydaje się chłodniejsza niż sztachety drewnianego ogrodzenia, mimo że w rzeczywistości obydwa te przedmioty mają taką samą temperaturę. Myli nas to, że stal znacznie szybciej niż drewno pobiera energię z naszych palców. Dlatego postaramy się teraz od podstaw rozwinać pojęcie temperatury, nie odwołując się przy tym do naszych zmysłów.

Temperatura jest jedną z siedmiu podstawowych wielkości układu SI. Fizycy mierzą temperaturę, korzystając ze **skali Kelvina**, w jednostkach nazywanych *kelwinami*. (W języku polskim najczęściej można spotkać nazwę **bezwzględna skala temperatury**. Temperatura wyrażona w tej skali to **temperatura bezwzględna**). Chociaż wydaje się oczywiste, że temperatura ciała nie ma żadnych ograniczeń od góry, to jednak jest ona ograniczona od dołu. Przyjmujemy, że zero na skali Kelvina odpowiada dolnemu ograniczeniu temperatury. Temperatura pokojowa to około 290 kelwinów, czyli — jak piszemy — 290 K powyżej *zero bezwzględnego*. Na rysunku 19.1 przedstawiono szeroki zakres różnych wartości temperatury, które możemy mierzyć lub wyznaczać pośrednio.

Kiedy Wszechświat powstawał jakieś 10 czy 20 miliardów lat temu, jego temperatura wynosiła około  $10^{39}$  K. Wszechświat rozszerzając się, stawał się coraz chłodniejszy, aż wreszcie osiągnął obecną średnią temperaturę zblzoną do 3 K. Na Ziemi jest nieco cieplej tylko dlatego, że mamy szczęście żyć w pobliżu gwiazdy. Gdyby nie nasze Słońce, też mielibyśmy na Ziemi temperaturę 3 K, co oznacza, że my nie istnielibyśmy.

## 19.2. Zerowa zasada termodynamiki



Rys. 19.2. Termoskop. Liczba na wyświetlaczu rośnie, kiedy przyrząd jest ogrzewany, i maleje, kiedy jest on chłodzony. Jako elementu termoczułego można użyć na przykład zwoju drutu i mierzyć jego opór

Właściwości wielu ciał zmieniają się wraz ich temperaturą. Łatwo to zauważyc, kiedy wyjmujemy jakiś produkt z zamrażalnika i wkładamy go do nagrzanego piekarnika. Oto kilka innych przykładów: wraz ze wzrostem temperatury zwiększa się objętość cieczy i długość metalowego pręta, rośnie opór elektryczny przewodów oraz ciśnienie gazu zamkniętego w zbiorniku. Każde z tych zjawisk możemy wykorzystać do budowy przyrządu, który pozwoli nam uściślić pojęcie temperatury.

Taki przyrząd przedstawiono na rysunku 19.2. Mógłby go zaprojektować i wykonać każdy pomysłowy inżynier, wykorzystując właściwości ciał, które wymieniliśmy. Nasz przyrząd wyposażono w odczyt cyfrowy, a jego zachowanie można opisać tak: w wyniku ogrzewania go (na przykład za pomocą palnika Bunsena) liczba na wyświetlaczu zwiększa się; po umieszczeniu przyrządu w lodówce jego wskazanie maleje. Przyrząd nie został w żaden sposób wykalibrowany

i wyświetlane liczby nie mają na razie żadnego fizycznego znaczenia. Dlatego nasz przyrząd nazywamy (na razie) *termoskopem*, a nie *termometrem*.

Wyobraźmy sobie teraz, że — jak widać na rysunku 19.3a — umieszczaemy termoskop (który będziemy nazywać ciałem *T*) w bezpośrednim kontakcie z innym ciałem (ciałem *A*). Cały nasz układ znajduje się w izolującym pudle o grubych ściankach. Początkowo cyfry na wyświetlaczu termoskopu szybko przeskakują, aż wreszcie wskazanie ustala się (powiedzmy, że wyświetlana jest wartość „137,04”) i nie obserwujemy już żadnych zmian. W rzeczy samej, będziemy zakładać, że dowolna mieralna właściwość ciała *T* i ciała *A* przyjęła trwałą, niezmieniącą wartość. Powiemy wtedy, że ciała *A* i *T* znajdują się w stanie *równowagi termodynamicznej*. Mimo że wskazania ciała *T* nie zostały wykalibrowane, możemy wywnioskować, że ciała *A* i *T* mają taką samą (nieznaną) temperaturę.

Wyobraźmy sobie teraz, że ciało *T* umieszczaemy w kontakcie z ciałem *B* (rys. 19.3b) i stwierdzamy, że obydwa te ciała osiągają stan równowagi termodynamicznej przy tym samym wskazaniu termoskopu co poprzednio. Oznacza to, że ciała *T* i *B* mają taką samą (nadal nieznaną) temperaturę. Czy jeżeli doprowadzimy teraz do wzajemnego kontaktu ciała *A* i *B* (rys. 19.3c), będą one od razu w stanie równowagi termodynamicznej? Na drodze doświadczalnej możemy przekonać się, że tak właśnie będzie.

Wyniki doświadczenia przedstawionego na rysunku 19.3 streszcza **zerowa zasada termodynamiki**:

Jeżeli ciała *A* i *B* są w stanie równowagi termodynamicznej z第三 ciałem *T*, to są one także w stanie równowagi termodynamicznej ze sobą nawzajem.

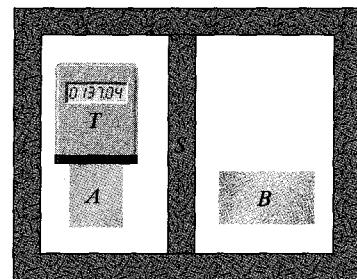
Używając mniej sformalizowanego języka, można wyrazić to tak: „Każde ciało ma pewną właściwość, którą nazywamy **temperaturą**. Kiedy dwa ciała znajdują się w stanie równowagi termodynamicznej, ich temperatury są równe. I na odwrót”. Ta obserwacja pozwala nam przekształcić nasz termoskop (ciało *T*) w termometr, ponieważ mamy prawo sądzić, że jego wskazania mają fizyczne znaczenie. Pozostało nam tylko przeprowadzenie kalibracji.

Zerowa zasada termodynamiki jest często wykorzystywana w praktyce laboratoryjnej. Jeżeli chcemy sprawdzić, czy ciecze w dwóch zlewkach mają taką samą temperaturę, mierzmy temperaturę każdej z nich termometrem. Nie musimy doprowadzać do kontaktu cieczy i badać, czy są one ze sobą w stanie równowagi termodynamicznej.

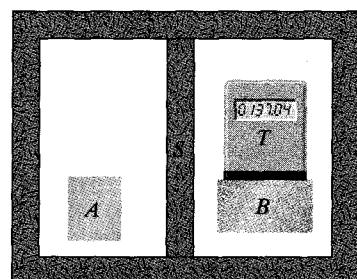
Zerową zasadę termodynamiki sformułowano dopiero w latach trzydziestych, długi czas po odkryciu i nazwaniu pierwszej i drugiej zasady termodynamiki. Ponieważ w obydwu tych zasadach temperatura odgrywa kluczową rolę, uznano, że zasada, która dotyczy podstawowych właściwości temperatury, powinna mieć numer najniższy, czyli zerowy.

## 19.3. Pomiary temperatury

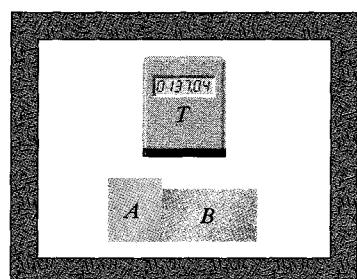
Na początek zdefiniujemy skalę Kelvina i opiszemy, jak wykorzystać ją do mierzenia temperatury. Następnie wykalibrujemy termoskop, dzięki czemu zmieni się on w termometr.



a)



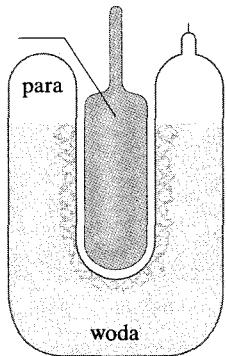
b)



c)

Rys. 19.3. a) Ciało *T* (termoskop) i ciało *A* są w stanie równowagi termodynamicznej. (Ciało *S* to przegroda izolująca). b) Ciało *T* i ciało *B* również są w stanie równowagi termodynamicznej przy tym samym wskazaniu termoskopu. c) Jeżeli prawdziwe są sytuacje z rysunków (a) oraz (b), to zgodnie z zerową zasadą termodynamiki także ciała *A* i *B* są w stanie równowagi termodynamicznej

zbiornik termometru gazowego



Rys. 19.4. Komora punktu potrójnego, w której stały lód, ciekła woda i para wodna współistnieją ze sobą w stanie równowagi termodynamicznej. Zgodnie z międzynarodową umową punktowi potrójnemu wody odpowiada temperatura 273,16 K. Na rysunku przedstawiono także umieszczony we wnętrzu komory termometr gazowy o stałej objętości

## Punkt potrójny wody

Aby zdefiniować skalę temperatury, trzeba wybrać jakieś powtarzalne, zależne od temperatury zjawisko i przypisać mu — całkowicie dowolnie — pewną wartość temperatury bezwzględnej. W ten sposób wybieramy *stały punkt standardowy*, któremu przypisujemy *temperaturę* stałego punktu standardowego. Moglibyśmy na przykład wykorzystać zjawisko zamarzania lub wrzenia wody, ale z różnych przyczyn technicznych wybieramy **punkt potrójny wody**.

Trzy postacie wody — ciecz, ciało stałe (lód) i gaz (para) — mogą współistnieć ze sobą w równowadze termodynamicznej tylko dla jednej wartości ciśnienia i temperatury. Na rysunku 19.4 przedstawiono naczynie, w którym można w laboratorium wytworzyć warunki punktu potrójnego. Zawierając międzynarodowe porozumienia, ustalone, że punktowi potrójnemu wody odpowiada temperatura stałego punktu standardowego równa 273,16 K. Tę wartość wykorzystuje się do kalibracji termometrów. Mamy więc

$$T_3 = 273,16 \text{ K} \quad (\text{punkt potrójny wody}). \quad (19.1)$$

Indeks „3” wskazuje, że chodzi nam właściwie o punkt potrójny. Przyjęte porozumienie ustala także wartość kelwina jako 1/273,16 różnicę pomiędzy temperaturą punktu potrójnego wody a zerem bezwzględnym.

Zwróćcie uwagę, że podając temperaturę w kelwinach, nie korzystamy z symbolu stopnia. Piszymy więc 300 K (nie 300°K), co czytamy „300 kelwinów” (nie „300 stopni kelwina”). W razie potrzeby stosujemy standardowe przedrostki, jak w przypadku innych jednostek układu SI. Możemy więc wyrazić 0,0035 K jako 3,5 mK. Nie wprowadzamy też żadnych rozróżnień, podając wartości temperatur i ich różnice. Mówimy więc: „temperatura wrzenia siarki wynosi 717,8 K” oraz „temperaturę łaźni zwiększoną o 8,5 K”.

## Termometr gazowy o stałej objętości

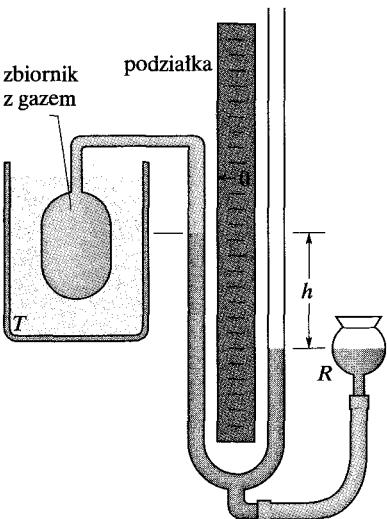
Wzorcowy termometr, względem którego kalibruje się wszystkie inne termometry, wykorzystuje zmiany ciśnienia gazu zamkniętego w zbiorniku o stałej objętości. Na rysunku 19.5 przedstawiono budowę takiego **termometru gazowego o stałej objętości**. Podstawowym jego elementem jest wypełniony gazem zbiornik połączony rurką z manometrem rtęciowym. Podnosząc lub opuszczając zbiorniczek z rtcią  $R$ , można ustawić poziom rtęci w lewym ramieniu manometru tak, aby pokrywał się z zerem pionowej skali. W ten sposób zapewniamy stałą objętość gazu (zmiany objętości mają wpływ na pomiary temperatury).

Temperaturę dowolnego ciała znajdującego się w kontakcie termicznym z wypełnionym gazem zbiornikiem (na przykład cieczy na rysunku 19.5) definiuje się jako

$$T = Cp, \quad (19.2)$$

gdzie  $p$  oznacza ciśnienie gazu, a  $C$  jest pewną stałą. Z równania (15.10) wynika, że ciśnienie  $p$  jest równe

$$p = p_0 - \rho gh, \quad (19.3)$$



Rys. 19.5. Termometr gazowy o stałej objętości. Zbiornik zanurzono w cieczy, której temperatura  $T$  jest mierzona

gdzie  $p_0$  oznacza ciśnienie atmosferyczne,  $\rho$  — gęstość rtęci w manometrze, a  $h$  — różnicę poziomów rtęci w obydwu ramionach manometru.<sup>1</sup>

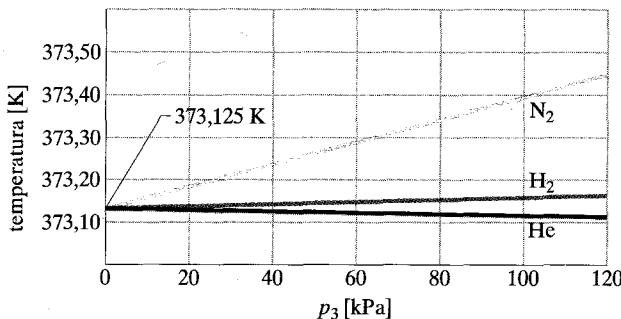
Jeżeli umieścimy teraz zbiornik z gazem w naczyniu, w którym współistnieją trzy fazy wody (rys. 19.4), zmierzona temperatura będzie równa

$$T_3 = Cp_3, \quad (19.4)$$

przy czym  $p_3$  oznacza tym razem ciśnienie gazu odpowiadające punktowi potrójnemu. Eliminując stałą  $C$  z równań (19.2) i (19.4), otrzymamy wartość temperatury

$$T = T_3 \left( \frac{p}{p_3} \right) = (273,16 \text{ K}) \left( \frac{p}{p_3} \right) \quad (\text{tymczasowo}). \quad (19.5)$$

Musimy rozwiązać jeszcze jeden problem, który napotkamy, posługując się naszym termometrem. Jeżeli na przykład użylibyśmy go do zmierzenia temperatury wrzącej wody, okazałoby się, że wypełniając zbiornik różnymi gazami, otrzymalibyśmy nieco różne wyniki. Gdybyśmy jednak coraz bardziej zmniejszali ilość gazu w termometrze, to okazałoby się, że uzyskiwane wyniki dążą do jednej wartości, niezależnej od rodzaju użytego gazu. Wykres z rysunku 19.6 pokazuje wspomnianą zbieżność dla trzech różnych gazów.



Rys. 19.6. Wyniki pomiaru temperatury uzyskane za pomocą termometru gazowego o stałej objętości, którego zbiornik zanurzono w naczyniu z wrzącą wodą. Ciśnienie  $p_3$  potrzebne do obliczenia temperatury z równania (19.5) zmierzono dla punktu potrójnego wody. Trzy różne gazy, których użyto do wypełnienia termometru, dają na ogół różne temperatury dla tej samej wartości ciśnienia. Jeżeli jednak zmniejsza się ilość gazu w termometrze (przy czym maleje wartość  $p_3$ ), wszystkie trzy krzywe zbiegają do wartości 373,125 K

Przepis pozwalający mierzyć temperaturę termometrem gazowym można więc sformułować tak:

$$T = (273,16 \text{ K}) \left( \lim_{\text{ilość gazu} \rightarrow 0} \frac{p}{p_3} \right). \quad (19.6)$$

Widzimy więc, jak mamy postępować, mierząc nieznaną temperaturę  $T$ : Wypełnimy termometr dowolną ilością *jakiegokolwiek* gazu (na przykład azotu) i wyznaczamy ciśnienie gazu  $p_3$  dla punktu potrójnego wody oraz  $p$  dla temperatury, którą mierzmy. (Cały czas trzeba utrzymywać stałą objętość gazu). Obliczamy stosunek  $p/p_3$ . Następnie wielokrotnie powtarzamy te czynności, używając za każdym razem mniejszej ilości gazu. Postępujemy tak aż do chwili, kiedy będzie możliwa ekstrapolacja wartości ilorazu  $p/p_3$  do liczby, którą użyjemy, gdyby zbiornik termometru praktycznie nie zawierał gazu. Obliczamy

<sup>1</sup>Ciśnienie będziemy podawać w jednostkach wprowadzonych w paragrafie 15.3. W układzie SI jednostką ciśnienia jest niuton na metr kwadratowy, nazywany paskalem (Pa). Paskal jest związany z innymi często używanymi jednostkami zależnościami  $1 \text{ atm} = 1,01 \cdot 10^5 \text{ Pa} = 760 \text{ Tr}$ .

temperaturę  $T$ , podstawiając ekstrapolowaną wartość stosunku  $p/p_3$  do równania (19.6). (Uzyskaną temperaturę nazywamy *temperaturą gazu doskonałego*).

## 19.4. Skale Celsjusza i Fahrenheita

Do tej pory mówiliśmy jedynie o skali Kelvina, używanej w badaniach naukowych. W większości krajów świata w zastosowaniach codziennych, a częściowo i w naukowych do pomiaru temperatury wykorzystuje się skalę Celsjusza. Temperaturę w skali Celsjusza podaje się w stopniach, które swoją wielkością odpowiadają kelwinom. Jednakże zero na skali Celsjusza jest przesunięte do wartości wygodniejszej niż zero bezwzględne. Jeżeli symbol  $T_C$  oznacza temperaturę w skali Celsjusza, a  $T$  temperaturę w skali Kelvina, zależność między nimi można zapisać w postaci

$$T_C = (T - 273,15)^\circ\text{C}. \quad (19.7)$$

Podając temperaturę w skali Celsjusza, korzystamy z symbolu „stopnia”. W przypadku skali Celsjusza piszemy więc  $20^\circ\text{C}$ , ale w skali Kelvina  $293,15\text{ K}$ .

W przypadku skali Fahrenheita, używanej w Stanach Zjednoczonych, stopnie są mniejsze, a zero skali jest przesunięte względem zera skali Celsjusza. Patrząc na termometr, na którym zaznaczono obydwie te skale, z łatwością dostrzeżemy różnice między nimi. Skalę Celsjusza i Fahrenheita łączy relacja

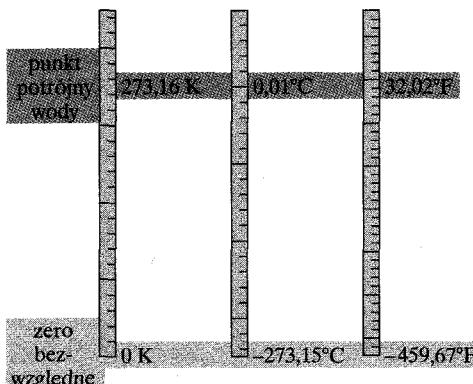
$$T_F = \left(\frac{9}{5}T_C + 32\right)^\circ\text{F}, \quad (19.8)$$

gdzie  $T_F$  oznacza temperaturę w skali Fahrenheita. Można z łatwością przeliczać temperaturę z jednej skali na drugą, jeżeli zapamiętamy wartości temperatury odpowiadające kilku charakterystycznym punktom, takim jak temperatura krzepnięcia i wrzenia wody (tabela 19.1). Na rysunku 19.7 porównano ze sobą skale Kelvina, Celsjusza i Fahrenheita.

Aby rozróżnić stopnie Celsjusza i Fahrenheita, posługujemy się oznaczeniami C i F. Piszemy więc

$0^\circ\text{C}$  odpowiada  $32^\circ\text{F}$ ,

co oznacza, że  $0^\circ$  w skali Celsjusza to  $32^\circ$  w skali Fahrenheita. Natomiast różnica temperatury 5 stopni Celsjusza jest równoważna różnicy temperatury 9 stopni Fahrenheita (patrz wzór (19.8)).



Rys. 19.7. Porównanie skali Kelvina, Celsjusza i Fahrenheita

Tabela 19.1. Wybrane temperatury w skali Celsjusza i Fahrenheita

Temperatura	${}^\circ\text{C}$	${}^\circ\text{F}$
Wrzenie wody <sup>a</sup>	100	212
Normalna temperatura ciała ludzkiego	37,0	98,6
Komfortowa temperatura otoczenia	20	68
Krzepnięcie wody <sup>a</sup>	0	32
Zero skali Fahrenheita	$\approx -18$	0
Wspólny punkt obydwu skali	-40	-40

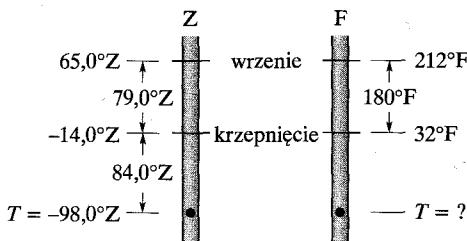
<sup>a</sup> Ścisłe biorąc temperatura wrzenia wody w skali Celsjusza jest równa  $99,975^\circ\text{C}$ , a temperatura krzepnięcia wody  $0,00^\circ\text{C}$ . Dlatego różnica temperatury między obydwoma punktami jest nieco mniejsza niż  $100^\circ\text{C}$ .

## Przykład 19.1

Wyobraź sobie, że w twoje ręce wpadły jakieś stare zapiski naukowe odwołujące się do pomiarów w pewnej skali temperatury Z. W skali tej woda wrze w temperaturze  $65^{\circ}\text{Z}$ , a krzepnie w  $-14^{\circ}\text{Z}$ . Jakiej wartości w skali Fahrenheita odpowiada temperatura  $T_Z = -98^{\circ}\text{Z}$ ? Załóż, że skala Z jest liniowa, to znaczy wielkość stopnia w skali Z jest taka sama w każdym jej punkcie.

### ROZWIĄZANIE:

Zauważmy, że temperaturę  $T_Z$  można powiązać z dowolną z dwóch charakterystycznych temperatur na skali Z. Ponieważ wartość  $T_Z = -98^{\circ}\text{Z}$  jest bliższa temperatury krzepnięcia wody  $T_{\text{Zkrzep}} = -14^{\circ}\text{Z}$ , nasze obliczenia będziemy wykonywać względem tego punktu. Łatwo się przekonać, że temperatura  $T_Z$  jest niższa od temperatury krzepnięcia wody o  $\Delta T_Z = T_{\text{Zkrzep}} - T_Z = -14^{\circ}\text{Z} - (-98^{\circ}\text{Z}) = 84^{\circ}\text{Z}$  (rys. 19.8).



Rys. 19.8. Przykład 19.1. Nieznana skala temperatury w zestawieniu ze skalą Fahrenheita

Zauważmy też, że możemy wyznaczyć współczynnik umożliwiający przeliczenie obliczonej różnicy temperatur w skali Z na skalę Fahrenheita. W tym celu musimy skorzystać

z *obydwu* charakterystycznych punktów na skali Z i odpowiednich punktów na skali Fahrenheita. Według skali Z różnica między temperaturą wrzenia  $T_{\text{Zwrz}}$  a temperaturą krzepnięcia  $T_{\text{Zkrzep}}$  wody jest równa  $\Delta T_{\text{Zwrz}-\text{krzep}} = 65^{\circ}\text{Z} - (-14^{\circ}\text{Z}) = 79^{\circ}\text{Z}$ . Odpowiednia wartość w skali Fahrenheita jest równa  $\Delta T_{\text{Fwrz}-\text{krzep}} = 212^{\circ}\text{F} - 32^{\circ}\text{F} = 180^{\circ}\text{F}$ . Widzimy więc, że różnica temperatur  $\Delta T_{\text{Zwrz}-\text{krzep}} = 79^{\circ}\text{Z}$  w skali Z jest równoważna różnicy  $\Delta T_{\text{Fwrz}-\text{krzep}} = 180^{\circ}\text{F}$  w skali Fahrenheita (rys. 19.8) i dlatego iloraz  $\Delta T_{\text{Fwrz}-\text{krzep}} / \Delta T_{\text{Zwrz}-\text{krzep}} = (180^{\circ}\text{F}) / (79^{\circ}\text{Z})$  jest współczynnikiem przeliczania obydwu skali.

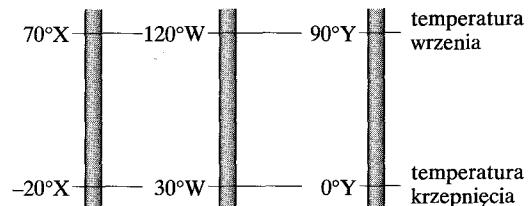
Ponieważ temperatura  $T_Z$  jest o  $\Delta T_Z = 84^{\circ}\text{Z}$  niższa od temperatury krzepnięcia wody, w skali Fahrenheita różnica ta wynosi

$$\Delta T_F = \Delta T_Z \frac{\Delta T_{\text{Fwrz}-\text{krzep}}}{\Delta T_{\text{Zwrz}-\text{krzep}}} = (84^{\circ}\text{Z}) \frac{180^{\circ}\text{F}}{79^{\circ}\text{Z}} = 191^{\circ}\text{F}.$$

Ponieważ temperatura krzepnięcia wody w skali Fahrenheita jest równa  $32^{\circ}\text{F}$ , więc

$$T_F = T_{\text{Fkrzep}} - \Delta T_F = 32^{\circ}\text{F} - 191^{\circ}\text{F} = -159^{\circ}\text{F}. \quad (\text{odpowiedź})$$

**SPRAWDZIAN 1:** Na zamieszczonym niżej rysunku przedstawiono trzy skale temperatury z zaznaczonymi na nich punktami krzepnięcia i wrzenia wody. a) Uszereguj stopnie na skali według ich wielkości, zaczynając od największej. b) Uszereguj od najwyższej do najniższej następujące wartości temperatury:  $50^{\circ}\text{X}$ ,  $50^{\circ}\text{W}$  i  $50^{\circ}\text{Y}$ .



### Sztuka rozwiązywania zadań

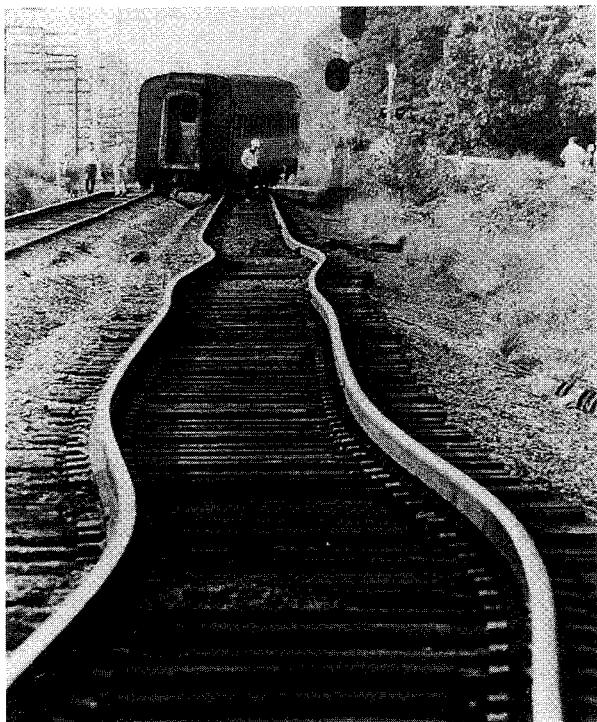
#### Porad 1: Zmiany temperatury

Różnica między temperaturą wrzenia i krzepnięcia wody jest równa 100 kelwinów i 100 stopni Celsjusza. Zmiana temperatury o 1 kelwin odpowiada zmianie o 1 stopień Celsjusza. Z tego faktu lub z równania (19.7) wynika, że zmiana temperatury wyraża się taką samą liczbą niezależnie, czy obliczenia wykonujemy w kelwinach, czy w stopniach Celsjusza. Na przykład zmiana temperatury o 10 K jest dokładnie równoważna zmianie temperatury o  $10^{\circ}\text{C}$ .

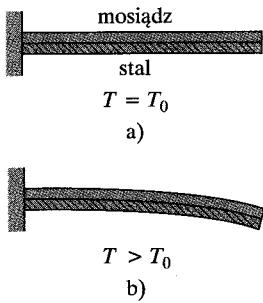
W skali Fahrenheita różnica między temperaturą wrzenia i krzepnięcia wody wynosi 180 stopni. Widzimy więc, że  $180^{\circ}\text{F}$  odpowiada 100 K, a więc zmiana temperatury o stopień Fahrenheita odpowiada zmianie temperatury o  $100/180$ , czyli  $5/9$  kelwina. Z tego faktu, tzn. z równania (19.8) wynika, że dowolna zmiana

temperatury wyrażona w stopniach Fahrenheita musi być  $\frac{5}{9}$  razy większa niż ta sama zmiana temperatury w kelwinach lub stopniach Celsjusza. Tak więc w skali Fahrenheita zmiana temperatury o 10 K jest równa  $(9/5)(10\text{ K})$ , czyli  $18^{\circ}\text{F}$ .

Trzeba uważać, aby nie pomylić *temperatury* z jej *zmianą* lub *różnicą*. Temperatura 10 K z pewnością nie jest tym samym co  $10^{\circ}\text{C}$  lub  $18^{\circ}\text{F}$ , ale zmiana temperatury równa 10 K oznacza to samo co zmiana temperatury równa  $10^{\circ}\text{C}$  lub  $18^{\circ}\text{F}$ . Rozróżnienie to jest kluczowe w równaniach, w których występuje temperatura  $T$ , a nie różnica lub przyrost temperatury, jak na przykład  $T_2 - T_1$ . Temperatura  $T$  powinna być na ogół wyrażana w kelwinach, a nie w stopniach Celsjusza lub Fahrenheita. Mówiąc krótko, zachowajcie szczególną ostrożność, jeżeli widzicie symbol  $T$  bez żadnego wskaźnika.



Rys. 19.9. Tory kolejowe w Asbury Park w stanie New Jersey (USA) w pewien bardzo upalny lipcowy dzień uległy odkształceniu na skutek rozszerzalności cieplnej



Rys. 19.10. a) Bimetal składa się z blaszki mosiężnej i stalowej połączonych ze sobą w temperaturze  $T_0$ . b) Po ogrzaniu do temperatury wyższej niż  $T_0$  pasek wygina się w jedną stronę, a po oziębieniu — w przeciwną. Tak działa wiele termostatów, w których zależnie od zmiany temperatury czujnik bimetaliczny zamyka lub przerywa obwód elektryczny

## 19.5. Rozszerzalność cieplna

Łatwiej odkręcić metalową przykrywkę słoika, jeżeli ogrzejemy ją w strumieniu gorącej wody. Zarówno metal, z którego jest wykonana przykrywka, jak i szkło słoika rozszerzają się, kiedy gorąca woda przekazuje energię atomom. (Dzięki dostarczanej energii atomy, na które działają siły sprężyste utrzymujące ciało stałe w całości, mogą nieco bardziej oddalać się od siebie). Ponieważ zmiana jest większa w przypadku atomów w metalu, przykrywka rozszerza się bardziej niż słoik i dlatego łatwiej ją odkręcić.

Jak pokazano na rysunku 19.9, **rozszerzalność cieplna** nie zawsze jest zjawiskiem pożądanym. Aby zapobiec wygięciu konstrukcji w upalne dni, mosty i wiadukty są wyposażane w szczeliny dylatacyjne. Materiały dentystyczne używane do wypełniania ubytków muszą mieć dokładnie taką samą rozszerzalność cieplną jak szkliwo zębów — w przeciwnym razie spożywanie gorącej kawy lub zimnych lodów sprawiałoby ból. Kiedy jednak buduje się samoloty, wówczas nity lub inne elementy spajające często ochładza się w suchym lodzie przed umieszczeniem ich w otworach, aby po rozszerzeniu połączenie było mocniejsze.

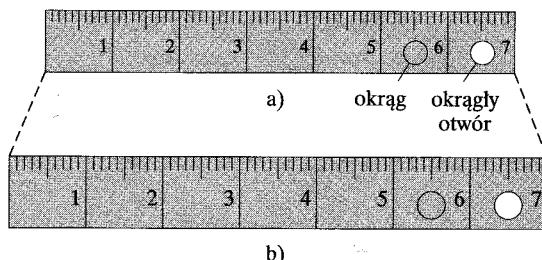
Termometry oraz czujniki temperatury można konstruować, wykorzystując różnice rozszerzalności cieplnej dwóch pasków z różnych materiałów połączonych jak na rysunku 19.10 i tworzących tzw. *bimetal*. Także powszechnie stosowane termometry cieczowe działają dzięki temu, że ciecz, taka jak rtęć czy alkohol, rozszerza się bardziej niż szkło naczynia, w którym ją umieszczono.

## Rozszerzalność liniowa

Jeżeli temperatura pręta metalowego, którego długość wynosi  $L$ , wzrośnie o  $\Delta T$ , pręt wydłuży się o  $\Delta L$ . Stwierdzono, że przyrost długości można obliczyć ze wzoru

$$\Delta L = L\alpha \Delta T, \quad (19.9)$$

gdzie  $\alpha$  oznacza pewną stałą nazywaną **współczynnikiem rozszerzalności liniowej**. Współczynnik  $\alpha$  jest wyrażany w jednostkach „na stopień” lub „na kelwin” i zależy od rodzaju materiału. Chociaż jego wartość zmienia się nieco z temperaturą, w praktyce można przyjąć, że dla konkretnego materiału jest stała. W tabeli 19.2 podano wartości współczynnika rozszerzalności cieplnej dla kilku wybranych materiałów. Zauważcie, że jednostki  $^{\circ}\text{C}$  można by z powodzeniem zastąpić jednostkami K.



Rys. 19.11. Ta sama miarka stalowa w dwóch różnych temperaturach. Gdy się ona rozszerza, jej grubość, a także podziałka, cyfry, średnica okręgu i okrągłego otworu zwiększą się w takim samym stosunku. (Aby rysunek był wyraźny, znacznie przesadzono zmianę rozmiarów miarki)

Rozszerzalność cieplna ciał stałych przypomina (trójwymiarowe) powiększenie fotograficzne. Rysunek 19.11b przedstawia (znacznie przesadzoną) zmianę rozmiarów stalowej miarki po ogrzaniu jej w stosunku do temperatury odpowiadającej rysunkowi 19.11a. Równanie (19.9) odnosi się do wszystkich rozmiarów liniowych miarki, a więc długości jej krawędzi, grubości, przekątnych, średnicy wytrawionego okręgu, a także wyciętego otworu. Jeżeli wycięte koło pasuje do pozostałoego po nim otworu, będzie także pasować po zmianie temperatury obydwu tych elementów o tę samą wartość.

## Rozszerzalność objętościowa

Jeżeli wszystkie rozmiary ciała stałego zwiększą się wraz z temperaturą, wzrasta także objętość. Jeżeli temperaturę ciała stałego lub cieczy o objętości  $V$  zwiększymy o  $\Delta T$ , to objętość wzrośnie o wartość  $\Delta V$  równą

$$\Delta V = V\beta\Delta T, \quad (19.10)$$

gdzie  $\beta$  oznacza **współczynnik rozszerzalności objętościowej** ciała stałego lub cieczy. W przypadku ciała stałego współczynnik rozszerzalności objętościowej

Tabela 19.2 Wartości współczynnika rozszerzalności liniowej wybranych substancji<sup>a</sup>

Substancja	$\alpha [10^{-6}/^{\circ}\text{C}]$	Substancja	$\alpha [10^{-6}/^{\circ}\text{C}]$
Lód ( $0^{\circ}\text{C}$ )	51	Stal	11
Ołów	29	Szkło (zwykłe)	9
Aluminium	23	Szkło (pyrex)	3,2
Mosiądz	19	Diament	1,2
Miedź	17	Invar <sup>b</sup>	0,7
Beton	12	Kwarc	0,5

<sup>a</sup> Wszystkie wartości podano dla temperatury pokojowej (z wyjątkiem lodu).

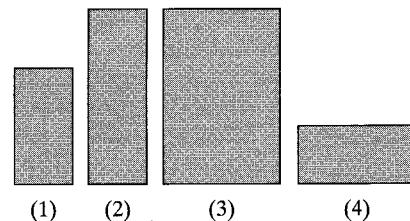
<sup>b</sup> Stop ten zaprojektowano, aby zminimalizować wartość współczynnika rozszerzalności cieplnej. Nazwa pochodzi od łacińskiego słowa *invariabilis* = niezmiennej.

$$\beta = 3\alpha. \quad (19.11)$$

Najczęściej spotykana ciecz — woda — nie zachowuje się tak jak inne ciecze. Powyżej  $4^{\circ}\text{C}$  woda zgodnie z oczekiwaniemi rozszerza się wraz ze wzrostem temperatury. Jednakże w przedziale od 0 do  $4^{\circ}\text{C}$  woda się kurczy, chociaż temperatura rośnie. Mniej więcej w temperaturze  $4^{\circ}\text{C}$  woda osiąga największą gęstość. Dla każdej innej temperatury gęstość wody jest mniejsza.

To właśnie dzięki temu zbiorniki wodne zamarzają od powierzchni w głąb, a nie od dna w górę. Gdy woda na powierzchni ochładza się na przykład od  $10^{\circ}\text{C}$ , jej gęstość początkowo wzrasta i dlatego opada ona w kierunku dna. Jednakże, kiedy temperatura spadnie poniżej  $4^{\circ}\text{C}$ , dalsze ochładzanie spowoduje zmniejszenie się gęstości wody i jej wypływanie na powierzchnię, gdzie pozostanie aż do zamarznięcia. Dlatego właśnie powierzchnia zamarza, a w głębi zostaje ciecz. Jeżeli zbiorniki wodne zamarzałyby od dna, powstały tam lód nie topiłby się latem, gdyż izolowałaby go powierzchniowa warstwa wody. Po kilku latach znaczną część zbiorników wodnych w umiarkowanych strefach klimatycznych zamarzłaby całkowicie, a lód w nich nie topiłby się przez cały rok. W zamarzniętych zbiornikach nie mogłoby istnieć życie w znanej nam postaci.

**SPRAWDZIAN 2:** Na zamieszczonym obok rysunku przedstawiono cztery prostokątne płytki metalowe, których boki mają długości:  $L$ ,  $2L$  lub  $3L$ . Wszystkie wykonano z tego samego materiału, a ich temperaturę zwiększo o taką samą wartość. Uszereguj płytki według przewidywanej zmiany a) rozmiaru pionowego i b) pola powierzchni. W obydwu przypadkach zaczni od wartości największej.



## Przykład 19.2

W Las Vegas pewnego upalnego dnia wlano do cysterny 37 000 l oleju napędowego. Kiedy cysterna dotarła do Peyson w stanie Utah, temperatura była o  $23\text{ K}$  mniejsza niż podczas załadunku w Las Vegas. Ile litrów paliwa przywiózła cysterna? Współczynnik rozszerzalności objętościowej oleju napędowego wynosi  $9,5 \cdot 10^{-4}/^{\circ}\text{C}$ , a współczynnik rozszerzalności liniowej stali, z której wykonano zbiornik, jest równy  $11 \cdot 10^{-6}/^{\circ}\text{C}$ .

### ROZWIĄZANIE:

Zauważmy, że objętość oleju napędowego zależy od jego temperatury. Ponieważ temperatura obniżała się, objętość trans-

portowanego paliwa zmalała. Równanie (19.10) pozwala wyznaczyć zmianę objętości

$$\Delta V = V\beta\Delta T$$

$$= (37\,000\text{ l})(9,5 \cdot 10^{-4}/^{\circ}\text{C})(-23\text{ K}) = -808\text{ l}.$$

Objętość dostarczonego oleju napędowego wynosi więc

$$V_{\text{dost}} = V + \Delta V = 37\,000\text{ l} - 808\text{ l}$$

$$= 36\,190\text{ l.}$$

(odpowiedź)

Zwrócić uwagę, że rozszerzalność cieplna zbiornika nie ma tu znaczenia. Pozostaje pytanie: Kto zapłacił za „brakujący” olej napędowy?

## 19.6. Temperatura i ciepło

Kiedy wyjmujesz z lodówki puszkę coli istawiasz ją na stole w kuchni, jej temperatura wzrasta — początkowo bardzo szybko, potem coraz wolniej — aż w końcu staje się równa temperaturze pomieszczenia (osiągany jest stan równowagi termodynamicznej). Tak samo maleje temperatura filiżanki z gorącą kawą, aż do chwili, kiedy zówna się z temperaturą otoczenia.

Uogólniając tę sytuację, możemy powiedzieć, że cola lub kawa to pewien *układ* (o temperaturze  $T_U$ ), a kuchnia to *otoczenie* (o temperaturze  $T_O$ ). Nasze obserwacje mówią nam, że jeżeli temperatura układu  $T_U$  jest różna od temperatury otoczenia  $T_O$ , to temperatura układu  $T_U$  będzie się zmieniać ( $T_O$  też może ulec pewnej zmianie) aż obydwie temperatury będą sobie równe i zostanie osiągnięty stan równowagi termodynamicznej.

Obserwowana zmiana temperatury jest wynikiem przepływu energii termicznej pomiędzy układem a jego otoczeniem. (*Energia termiczna* to energia wewnętrzna, na którą składa się energia kinetyczna i potencjalna atomów, cząsteczek i innych mikroskopowych ciał tworzących układ). Przekazywana energia jest nazywana **ciepłem** i oznaczana symbolem  $Q$ . Ciepło uważa się za *dodatnie*, jeżeli energia jest przekazywana z otoczenia do układu (mówimy, że układ pobiera ciepło) i wzrasta jego energia termiczna. Ciepło jest ujemne, jeżeli układ zmniejsza swoją energię termiczną, przekazując jej część do otoczenia (mówimy, że układ oddaje ciepło).

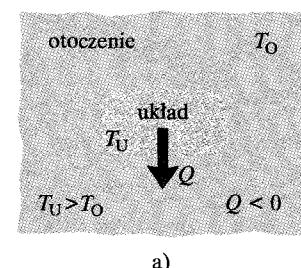
Taki przepływ energii zilustrowano na rysunku 19.12. W sytuacji z rysunku 19.12a, kiedy  $T_U > T_O$ , energia jest przekazywana z układu do otoczenia, a więc ciepło  $Q$  ma wartość ujemną. W przypadku rysunku 19.12b, kiedy  $T_U = T_O$ , nie ma wymiany energii, ciepło  $Q$  jest równe zeru, a więc nie obserwujemy ani oddawania, ani pobierania ciepła. W sytuacji z rysunku 19.12c mamy  $T_U < T_O$  i energia jest przekazywana z otoczenia do układu i dlatego  $Q$  ma wartość dodatnią.

W ten sposób dochodzimy do następującej definicji ciepła:

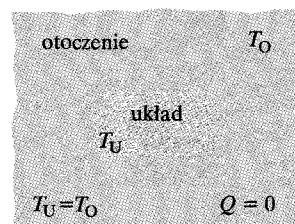
► Ciepło jest energią przekazywaną między układem a jego otoczeniem na skutek istniejącej między nimi różnicy temperatury.

Pamiętajcie, że energia może być także przekazywana pomiędzy układem a jego otoczeniem w postaci *pracy*  $W$ , za pośrednictwem siły działającej na układ. Ciepło i praca w odróżnieniu od temperatury, ciśnienia i objętości nie są właściwościami układu. Mają one sens tylko wtedy, kiedy opisujemy przekazywanie energii do lub z układu. Przykładem poprawnego wyrażania się są więc stwierdzenia: „W ciągu ostatnich 3 minut układ pobrał z otoczenia 15 J ciepła” lub też „W ciągu ostatniej minuty otoczenie wykonało nad układem pracę o wartości 12 J”. Nie ma sensu mówienie, że „Układ zawiera 450 J ciepła” lub „Układ zawiera 385 J pracy”.

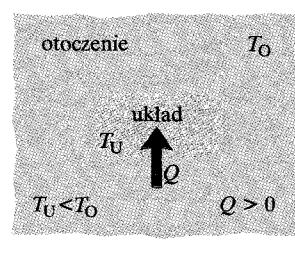
Zanim uczeni zrozumieli, że ciepło to przekazywana energia, jego wielkość wyrażano jako zdolność do zwiększenia temperatury wody. Dlatego kalorię (1 cal) zdefiniowano jako ilość ciepła, która podnosi temperaturę 1 g wody od 14,5°C do 15,5°C. W brytyjskim układzie miar jednostką ciepła była tzw. brytyjska jednostka cieplna (British thermal unit — Btu), zdefiniowana jako ilość ciepła niezbędną do podniesienia temperatury 1 lb (1 funta) wody od 63°F do 64°F.



a)



b)



c)

Rys. 19.12. Jeżeli temperatura układu jest większa niż temperatura jego otoczenia (a), układ oddaje do otoczenia ciepło  $Q$  aż do chwili, kiedy osiągnięta zostanie równowaga termodynamiczna (b). c) Jeżeli temperatura układu jest niższa niż temperatura otoczenia, układ pochłania ciepło do chwili osiągnięcia równowagi termodynamicznej

W roku 1948 społeczność naukowa zdecydowała, że ponieważ ciepło (tak jak praca) jest formą przekazywania energii, jego jednostką w układzie SI powinna być jednostka energii, a więc **dżul**. Obecnie definiuje się wartość kalorii jako równą dokładnie  $4,1860 \text{ J}$ , nie odwołując się przy tym do ogrzewania wody. („Kalorie” używane do określania wartości energetycznej żywności pisane czasami z dużej litery — Kalorie (Cal) — odpowiadają w rzeczywistości kilokaloriom). Różne jednostki ciepła wiążą ze sobą zależność

$$1 \text{ cal} = 3,969 \cdot 10^{-3} \text{ Btu} = 4,1860 \text{ J}. \quad (19.12)$$

## 19.7. Pochłanianie ciepła przez ciało stałe i cieczę

### Pojemność cieplna

**Pojemność cieplna**  $C$  pewnego ciała jest stałą proporcjonalności pomiędzy ciepłem  $Q$  pobieranym lub oddawanym przez to ciało, a spowodowaną tym procesem zmianą temperatury  $\Delta T$ . Mamy więc

$$Q = C \Delta T = C(T_{\text{końc}} - T_{\text{pocz}}), \quad (19.13)$$

gdzie  $T_{\text{pocz}}$  i  $T_{\text{końc}}$  oznaczają odpowiednio temperaturę początkową i końcową ciała. Jednostką pojemności cieplnej  $C$  jest jednostka energii na stopień lub na kelwin. I tak pojemność cieplna płyty ceramicznej używanej w opiekaczach wynosi  $179 \text{ cal}/^{\circ}\text{C}$ , co można też zapisać jako  $179 \text{ cal}/\text{K}$  lub  $749 \text{ J}/\text{K}$ .

Używane w tym kontekście słowo „pojemność” może wprowadzać w błąd, ponieważ sugeruje analogię do pojemności wiadra, które można wypełniać wodą. Ta analogia jest całkowicie fałszywa i nie powinniście nigdy wyobrażać sobie, że ciało „zawiera” ciepło albo coś ogranicza jego zdolność do pobierania ciepła. Przepływ energii w postaci ciepła może się odbywać bez żadnych ograniczeń tak dugo, jak dugo występuje różnica temperatury. Oczywiście jest możliwe, że w wyniku tego procesu ciało stopi się lub wyparuje.

### Ciepło właściwe

Pojemności cieplne dwóch ciał wykonanych z tego samego materiału — powiedzmy z marmuru — są proporcjonalne do ich mas. Wygodnie jest więc zdefiniować „pojemność cieplną na jednostkę masy”, czyli **ciepło właściwe**  $c$ , które nie jest związane z konkretnym ciałem, lecz z jednostką masy substancji, z której jest ono zbudowane. Równanie (19.13) można więc zapisać w postaci

$$Q = cm \Delta T = cm(T_{\text{końc}} - T_{\text{pocz}}). \quad (19.14)$$

Wykonując odpowiednie pomiary, przekonamy się, że chociaż pojemność cieplna pewnej płytki marmurowej wynosi  $179 \text{ cal}/^{\circ}\text{C}$  (czyli  $749 \text{ J}/\text{K}$ ), to ciepło właściwe marmuru (z którego wykonano tę płytke lub jakikolwiek inny przedmiot) wynosi  $0,21 \text{ cal}/(\text{g} \cdot ^{\circ}\text{C})$  (czyli  $880 \text{ J}/(\text{kg} \cdot \text{K})$ ).

Z pierwotnej definicji kalorii i brytyjskiej jednostki cieplnej wynika, że ciepło właściwe wody jest równe

$$c = 1 \text{ cal}/(\text{g} \cdot ^\circ\text{C}) = 1 \text{ Btu}/(\text{lb} \cdot ^\circ\text{F}) = 4190 \text{ J}/(\text{kg} \cdot \text{K}). \quad (19.15)$$

W tabeli 19.3 podano zmierzone w temperaturze pokojowej wartości ciepła właściwego kilku wybranych substancji. Zwróćcie uwagę, że ciepło właściwe wody ma stosunkowo dużą wartość. Ciepło właściwe dowolnej substancji zależy w pewnym stopniu od jej temperatury, ale wartości podane w tabeli 19.3 dobrze wyrażają właściwości substancji w temperaturze niewiele różnej od pokojowej.

**SPRAWDZIAN 3:** Dostarczając pewną ilość ciepła  $Q$ , ogrzewamy 1 g substancji A o  $3^\circ\text{C}$ , a 1 g substancji B o  $4^\circ\text{C}$ . Która z substancji ma większe ciepło właściwe?

### Molowe ciepło właściwe

W wielu przypadkach najwygodniej jest wyrażać ilość substancji w molach:

$$1 \text{ mol} = 6,02 \cdot 10^{23} \text{ jednostek elementarnych}$$

dowolnej substancji. Widzimy więc, że 1 mol glinu to  $6,02 \cdot 10^{23}$  atomów glinu (w tym przypadku elementarną jednostką jest atom), a 1 mol tlenku glinu —  $6,02 \cdot 10^{23}$  cząsteczek tlenku glinu (ponieważ elementarną jednostką związku jest cząsteczka).

Jeżeli ilość substancji podajemy w molach, ciepło właściwe musi odnosić się do jednego mola (a nie jednostkowej masy). W takim przypadku mówimy o molowym cieple właściwym. W tabeli 19.3 podano wyznaczone w temperaturze pokojowej wartości molowego ciepła właściwego pierwiastków w stanie stałym.

### Ważna uwaga

Wyznaczając, a następnie korzystając z wartości ciepła właściwego dowolnej substancji, musimy znać warunki, w których dostarczamy ciepło. W przypadku ciał stałych i cieczy zwykle zakładamy, że znajdują się one pod stałym ciśnieniem (najczęściej atmosferycznym). Jest także możliwe, że podczas ogrzewania próbki będziemy utrzymywać w stałej objętości. Oznacza to, że rozszerzanie się ciał związane z ogrzewaniem trzeba skompensować, zwiększając zewnętrzne ciśnienie. W przypadku ciał stałych i cieczy bardzo trudno zrealizować to na drodze doświadczalnej, ale można wykonać odpowiednie obliczenia, które mówią, że wartości ciepła właściwego przy stałym ciśnieniu i w stałej objętości dla ciał stałych i cieczy różnią się nie więcej niż o kilka procent. Nieco później przekonasz się, że w przypadku gazów sytuacja wygląda inaczej — wartości ciepła właściwego przy stałej objętości i przy stałym ciśnieniu są wyraźnie różne.

### Ciepło przemiany

Ciała stałe lub ciecze, które pobierają energię w postaci ciepła, nie muszą wcale zwiększać swej temperatury. Zamiast tego substancja może zmieniać swoją fazę (stan). Materia może występować w trzech powszechnie spotykanych stanach skupienia: w stanie stałym cząsteczki dzięki wzajemnym oddziaływaniom tworzą

Tabela 19.3. Wartości ciepła właściwego wybranych substancji w temperaturze niewiele różnej od pokojowej

Substancja	Ciepło właściwe		Molowe ciepło właściwe
	cal g · K	J kg · K	
<i>Pierwiastki w stanie stałym</i>			
Ołów	0,0305	128	26,5
Wolfram	0,0321	134	24,8
Srebro	0,0564	236	25,5
Miedź	0,0923	386	24,5
Glin	0,215	900	24,4
<i>Inne ciała stałe</i>			
Mosiądz	0,092	380	
Granit	0,19	790	
Szkło	0,20	840	
Lód ( $-10^\circ\text{C}$ )	0,530	2220	
<i>Ciecze</i>			
Rtęć	0,033	140	
Alkohol			
etylowy	0,58	2430	
Woda morska	0,93	3900	
Woda	1,00	4190	

dość sztywną strukturę. W *stanie ciekłym* cząsteczki mają nieco więcej energii i pewną swobodę ruchu. Mogą one też tworzyć niewielkie zespoły cząsteczek (tzw. klastery), ale próbka jako całość nie ma sztywnej struktury i może płynąć lub dopasowywać się do kształtu zbiornika, w którym się znajduje. W *stanie gazowym* cząsteczki mają jeszcze większą energię i swobodę ruchu. Dlatego mogą wypełnić całą objętość zbiornika.

*Stopienie* ciała stałego oznacza zmianę jego stanu ze stałego na ciekły. Proces ten wymaga dostarczenia energii, ponieważ cząsteczki ciała stałego trzeba wyzwolić z ich sztywnej struktury. Dobrze znanym ci przykładem takiej przemiany jest topnienie kostki lodu. *Krzepnięcie (zestalanie)* cieczy jest procesem odwrotnym do topnienia i wymaga odebrania od cieczy energii, tak aby cząsteczki mogły utworzyć sztywną strukturę.

*Parowanie* cieczy oznacza zmianę stanu z ciekłego na gazowy. Również ten proces, podobnie jak topnienie, wymaga dostarczenia energii, ponieważ cząsteczki muszą oderwać się od klasterek, które tworzyły. Przykładem jest doprowadzenie do wrzenia wody w celu zamiany jej w parę. *Skraplanie (kondensacja)* gazu do stanu ciekłego jest procesem odwrotnym do parowania; energię trzeba odebrać od gazu tak, aby jego cząsteczki mogły zgromadzić się w klastery, a nie poruszały się niezależnie od siebie.

Ilość energii, którą w postaci ciepła trzeba przekazać jednostkowej masie substancji, aby uległa ona przemianie fazowej, jest nazywana **ciepłem przemiany**  $c_{\text{przem}}$ . Jeżeli więc próbka o masie  $m$  ulega w całości przemianie fazowej, należy dostarczyć do niej ciepło równe

$$Q = c_{\text{przem}}m. \quad (19.16)$$

Jeżeli przemiana fazowa zachodzi między cieczą a gazem (w takim przypadku próbka musi pochłaniać ciepło), ciepło przemiany jest nazywane **ciepłem parowania**  $c_{\text{par}}$ . W przypadku wody wrzącej pod ciśnieniem normalnym

$$c_{\text{par}} = 539 \text{ cal/g} = 40,7 \text{ kJ/mol} = 2256 \text{ kJ/kg}. \quad (19.17)$$

W przypadku przemiany zachodzącej między ciałem stałym a cieczą (próbka pochłania ciepło) lub między cieczą a ciałem stałym (próbka oddaje ciepło) ciepło przemiany fazowej nazywamy **ciepłem topnienia**  $c_{\text{top}}$ . Dla wody krzepiącej pod

Tabela 19.4. Wartości ciepła przemiany wybranych substancji

Substancja	Topnienie		Wrzenie	
	Temperatura topnienia [K]	Ciepło topnienia $c_{\text{top}}$ [kJ/kg]	Temperatura wrzenia [K]	Ciepło parowania $c_{\text{par}}$ [kJ/kg]
Wodór	14,0	58,0	20,3	455
Tlen	54,8	13,9	90,2	213
Rtęć	234	11,4	630	296
Woda	273	333	373	2256
Ołów	601	23,2	2017	858
Srebro	1235	105	2323	2336
Miedź	1356	207	2868	4730

ciśnieniem normalnym

$$c_{\text{top}} = 79,5 \text{ cal/g} = 6,01 \text{ kJ/mol} = 333 \text{ kJ/kg.} \quad (19.18)$$

W tabeli 19.4 podano wartości ciepła przemiany dla kilku wybranych substancji.

### Przykład 19.3

a) Ile ciepła musi pobrać lód o masie  $m = 720 \text{ g}$  i temperaturze  $-10^\circ\text{C}$ , aby zamienił się w wodę o temperaturze  $15^\circ\text{C}$ ?

#### ROZWIĄZANIE:

Zauważmy najpierw, że lód proces ogrzewania zachodzi w trzech etapach:

**Etap 1.** Lód nie może ulec stopieniu w temperaturze niższej od temperatury topnienia, a więc początkowo cała energia dostarczana w postaci ciepła będzie zużywana na zwiększenie temperatury lodu. Ciepło  $Q_1$  potrzebne do ogrzania lodu od temperatury początkowej  $T_{\text{pocz}} = -10^\circ\text{C}$  do temperatury końcowej  $T_{\text{końc}} = 0^\circ\text{C}$  (w której topnieje lód) dane jest równaniem (19.14) ( $Q = cm\Delta T$ ). Podstawiając wartość ciepła właściwego lodu  $c_{\text{lod}}$  podaną w tabeli 19.3, otrzymamy

$$\begin{aligned} Q_1 &= c_{\text{lod}}m(T_{\text{końc}} - T_{\text{pocz}}) \\ &= (2220 \text{ J/(kg} \cdot \text{K})(0,72 \text{ kg})[0^\circ\text{C} - (-10^\circ\text{C})] \\ &= 15\,984 \text{ J} \approx 15,98 \text{ kJ.} \end{aligned}$$

**Etap 2.** Zauważmy z kolei, że temperatura nie może wzrosnąć powyżej  $0^\circ\text{C}$ , aż cały lód nie zostanie stopiony — a więc całe ciepło dostarczane do lodu jest zużywane na jego stopienie. Ilość ciepła  $Q_2$  niezbędną do stopienia całego lodu wyraża równanie (19.16) ( $Q = c_{\text{przem}}m$ ). Symbol  $c_{\text{przem}}$  oznacza tu ciepło topnienia  $c_{\text{top}}$ , którego wartość podano w równaniu (19.18) i w tabeli 19.4. Możemy obliczyć, że ciepło  $Q_2$  jest równe

$$Q_2 = c_{\text{top}}m = (333 \text{ kJ/kg})(0,72 \text{ kg}) \approx 239,8 \text{ kJ.}$$

**Etap 3.** Mamy już ciekłą wodę o temperaturze  $0^\circ\text{C}$ . Dlatego ciepło dostarczane teraz do wody w całości będzie służyć zwiększeniu temperatury cieczy. Ciepło  $Q_3$  niezbędnne do ogrzania wody od temperatury początkowej  $T_{\text{pocz}} = 0^\circ\text{C}$  do temperatury końcowej  $T_{\text{końc}} = 15^\circ\text{C}$  jest dane równaniem

### Przykład 19.4

Krążek miedzi o masie  $m_{\text{Cu}} = 75 \text{ g}$  ogrzano w piecyku do temperatury  $T = 312^\circ\text{C}$ . Następnie wrzucono go do szklanej zlewki zawierającej  $220 \text{ g}$  wody. Pojemność cieplna zlewki  $C_z$  wynosi  $45 \text{ cal/K}$ . Temperatura początkowa zlewki i wody jest równa  $12^\circ\text{C}$ . Wyznacz temperaturę końcową układu po osiągnięciu przez niego stanu równowagi termodynamicznej. Zakładamy,

(19.14) (zamiast ciepła właściwego podstawiamy wartość dla wody w stanie ciekłym  $c_{\text{ciecz}}$ ):

$$\begin{aligned} Q_3 &= c_{\text{ciecz}}m(T_{\text{końc}} - T_{\text{pocz}}) \\ &= (4190 \text{ J/(kg} \cdot \text{K})(0,72 \text{ kg})(15^\circ\text{C} - 0^\circ\text{C}) \\ &= 45\,252 \text{ J} \approx 45,25 \text{ kJ.} \end{aligned}$$

Całkowite ciepło jest sumą wartości obliczonych dla kolejnych trzech etapów:

$$\begin{aligned} Q_{\text{całk}} &= Q_1 + Q_2 + Q_3 \\ &= 15,98 \text{ kJ} + 239,8 \text{ kJ} + 45,25 \text{ kJ} \\ &\approx 300 \text{ kJ.} \end{aligned} \quad (\text{odpowiedź})$$

Zauważcie, że ilość ciepła potrzebna do stopienia lodu jest o wiele większa niż ilości ciepła niezbędne do ogrzania lodu i wody.

b) Jak wyglądałby stan końcowy i jaka byłaby temperatura wody, gdyby do lodu dostarczyć (w postaci ciepła)  $210 \text{ kJ}$  energii?

#### ROZWIĄZANIE:

Z obliczeń dla etapu 1 wynika, że do ogrzania lodu do temperatury topnienia wystarczy  $15,98 \text{ kJ}$  ciepła. Pozostała część ciepła  $Q_{\text{poz}}$  jest więc równa  $210 \text{ kJ} - 15,98 \text{ kJ}$ , czyli około  $194 \text{ kJ}$ . Z obliczeń dla etapu 2 widzimy, że ciepło to nie wystarcza do stopienia całego lodu. Możemy więc zauważać, że lód nie ulegnie całkowitemu stopieniu i w stanie końcowym otrzymamy mieszaninę wody i lodu, o temperaturze równej temperaturze krzepnięcia, czyli  $0^\circ\text{C}$ .

Znając ilość dostępnego ciepła  $Q_{\text{poz}}$ , możemy za pomocą równania (19.16) obliczyć masę lodu  $m$ , który ulegnie stopieniu:

$$m = \frac{Q_{\text{poz}}}{c_{\text{top}}} = \frac{194 \text{ kJ}}{333 \text{ kJ/kg}} = 0,583 \text{ kg} \approx 580 \text{ g.}$$

Pozostały lód ma więc masę  $720 \text{ g} - 580 \text{ g}$ , czyli  $140 \text{ g}$ . Dlatego w stanie końcowym będziemy mieć

$580 \text{ g}$  wody i  $140 \text{ g}$  lodu o temperaturze  $0^\circ\text{C}$ . (odpowiedź)

że krążek, zlewka i woda tworzą układ izolowany oraz że można zaniedbać parowanie wody.

#### ROZWIĄZANIE:

Zauważmy najpierw, że w układzie izolowanym energia wewnętrzną przepływa tylko pomiędzy różnymi częściami układu. Możemy wskazać trzy procesy, w których energia jest przekazy-

wana jako ciepło. Krążek oddaje ciepło, woda i zlewnia je pobierają. Zauważmy też, że w wspomnianym przepływie energii w postaci ciepła nie towarzyszą przemiany fazowe, a jedynie zmiany temperatury. Aby powiązać ze sobą ilość przekazywanego ciepła i zmianę temperatury, skorzystamy z równań (19.13) i (19.14)

$$\text{dla wody: } Q_w = c_w m_w (T_{\text{końc}} - T_{\text{pocz}}); \quad (19.19)$$

$$\text{dla zlewni: } Q_z = C_z (T_{\text{końc}} - T_{\text{pocz}}); \quad (19.20)$$

$$\text{dla miedzi: } Q_{\text{Cu}} = c_{\text{Cu}} m_{\text{Cu}} (T_{\text{końc}} - T). \quad (19.21)$$

Musimy też zauważyć, że układ jest izolowany, a więc jego całkowita energia się nie zmienia. Oznacza to, że dodając zmiany energii różnych jego części, musimy otrzymać zero:

$$Q_w + Q_z + Q_{\text{Cu}} = 0. \quad (19.22)$$

Podstawiając równania od (19.19) do (19.21) do równania (19.22), otrzymamy

$$c_w m_w (T_{\text{końc}} - T_{\text{pocz}}) + C_z (T_{\text{końc}} - T_{\text{pocz}}) + c_{\text{Cu}} m_{\text{Cu}} (T_{\text{końc}} - T) = 0. \quad (19.23)$$

W równaniu (19.23) temperatury występują jedynie w postaci różnic. W takim przypadku nie ma znaczenia, czy będziemy posługiwać się skalą Celsjusza, czy Kelvina i możemy dowolnie wybrać

jedną z nich. Rozwiązujejąc równanie względem  $T_{\text{końc}}$ , otrzymamy

$$T_{\text{końc}} = \frac{c_{\text{Cu}} m_{\text{Cu}} T + C_z T_{\text{pocz}} + c_w m_w T_{\text{pocz}}}{c_w m_w + C_z + c_{\text{Cu}} m_{\text{Cu}}}.$$

Wybierając skalę Celsjusza i korzystając z wartości ciepła właściwego miedzi  $c_{\text{Cu}}$  i wody  $c_w$ , możemy obliczyć wartość liczbową licznika

$$(0,0923 \text{ cal}/(\text{g} \cdot \text{K})) (75 \text{ g}) (312^\circ\text{C}) + (45 \text{ cal}/\text{K}) (12^\circ\text{C}) \\ + (1 \text{ cal}/(\text{g} \cdot \text{K})) (220 \text{ g}) (12^\circ\text{C}) = 5339,8 \text{ cal}$$

oraz mianownika

$$(1 \text{ cal}/(\text{g} \cdot \text{K})) (220 \text{ g}) + 45 \text{ cal}/\text{K} \\ + (0,0923 \text{ cal}/(\text{g} \cdot \text{K})) (75 \text{ g}) = 271,9 \text{ cal}/^\circ\text{C}.$$

Dzieląc przez siebie obydwie liczby, otrzymujemy

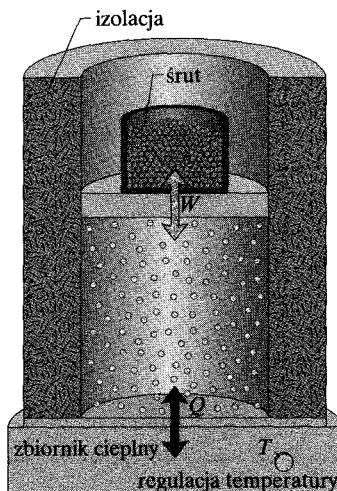
$$T_{\text{końc}} = \frac{5339,8 \text{ cal}}{271,9 \text{ cal}/^\circ\text{C}} = 19,6^\circ\text{C} \approx 20^\circ\text{C}. \quad (\text{odpowiedź})$$

Możemy też obliczyć ilości ciepła przekazywanego w poszczególnych procesach

$$Q_w \approx 1670 \text{ cal}, \quad Q_z \approx 342 \text{ cal}, \quad Q_{\text{Cu}} \approx -2020 \text{ cal}.$$

Z dokładnością do błędów wynikających z zaokrągleń liczby te zgodnie z równaniem (19.22) dają w wyniku zero.

## 19.8. Bliższe spojrzenie na ciepło i pracę



Rys. 19.13. Gaz zamknięty w cylindrze z ruchomym tłokiem. Ciepło można dostarczać do gazu lub odbierać od niego, zmieniając temperaturę  $T$  regułowanego zbiornika cieplnego. Praca  $W$  jest wykonywana dzięki podnoszeniu lub opuszczaniu tłoka

Przyjrzymy się teraz nieco dokładniej, jak energia w postaci pracy i ciepła może być wymieniana między układem a jego otoczeniem. Przyjmijmy, że nasz układ to gaz zamknięty w cylindrze wyposażonym w ruchomy tłok, tak jak na rysunku 19.13. Skierowana do góry siła działająca na tłok, która jest skutkiem ciśnienia gazu, równoważy ciężar ołowianego śrutu w pojemniku nad tłokiem. Ściany cylindra wykonano z materiału izolującego, który całkowicie uniemożliwia przepływ ciepła. Od spodu cylinder znajduje się w kontakcie ze zbiornikiem cieplnym (może nim być na przykład gorąca płyta) o regulowanej temperaturze.

Układ (gaz) znajduje się w *stanie początkowym* o parametrach: ciśnienie  $p_{\text{pocz}}$ , objętość  $V_{\text{pocz}}$  i temperatura  $T_{\text{pocz}}$ . Celem jest przeprowadzenie układu do *stanu końcowego* wyznaczonego przez ciśnienie  $p_{\text{końc}}$ , objętość  $V_{\text{końc}}$  i temperaturę  $T_{\text{końc}}$ . Działania, które umożliwią nam przeprowadzenie układu od stanu początkowego do końcowego, nazywamy *przemianą termodynamiczną (procesem termodynamicznym)*. W jej trakcie energia może być przekazywana do układu ze zbiornika cieplnego (ciepło dodatnie) lub odwrotnie (ciepło ujemne). Układ może także wykonywać pracę, podnosząc tłok (praca dodatnia) lub opuszczając go (praca ujemna). Założymy, że wszystkie te procesy zachodzą bardzo wolno, dzięki czemu układ jest zawsze (w przybliżeniu) w stanie równowagi termodynamicznej (to znaczy każda część układu jest zawsze w stanie równowagi termodynamicznej z innymi jego częściami).

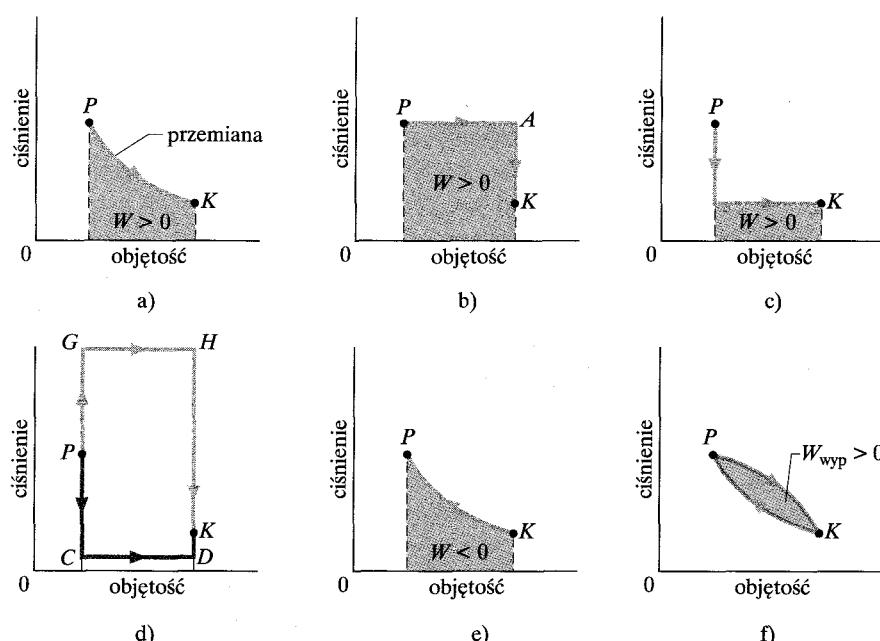
Wyobraźmy sobie, że zabieramy kilka ziarenek śrutu z pojemnika obciążającego tłok (rys. 19.13), pozwalając, aby gaz, działając siłą  $\vec{F}$ , przesunął tłok i resztę śrutu w górę na bardzo małą odległość  $d\vec{s}$ . Ponieważ przemieszczenie jest bardzo małe, możemy założyć, że siła  $\vec{F}$  jest w jego trakcie stała. Siła  $\vec{F}$  ma wartość  $pS$ , gdzie  $p$  oznacza ciśnienie gazu w cylindrze, a  $S$  — powierzchnię tłoka. Praca  $dW$  wykonana przez gaz w wyniku tego przemieszczenia jest równa

$$\begin{aligned} dW &= \vec{F} \cdot d\vec{s} = p(Sd\vec{s}) \\ &= pdV, \end{aligned} \quad (19.24)$$

gdzie  $dV$  oznacza zmianę objętości gazu związaną z przemieszczeniem tłoka. Jeżeli zabierzemy dostatecznie dużo ziarenek śrutu, objętość gazu wzrośnie od  $V_{\text{pocz}}$  do  $V_{\text{końc}}$ , a całkowita praca wykonana przez gaz będzie równa

$$W = \int dW = \int_{V_{\text{pocz}}}^{V_{\text{końc}}} pdV. \quad (19.25)$$

Jeżeli zmienia się objętość gazu, może również zmienić się jego ciśnienie i temperatura. Aby obliczyć wartość całki w równaniu (19.25), musimy wiedzieć, jak



Rys. 19.14. a) Zacienniowany obszar oznacza pracę  $W$ , którą wykonuje układ, przechodząc od stanu początkowego  $P$  do stanu końcowego  $K$ . Praca  $W$  jest dodatnia, ponieważ objętość układu wzrasta. b) Praca  $W$  jest dodatnia, ale tym razem ma większą wartość. c) Praca  $W$  jest nadal dodatnia, ale tym razem jej wartość jest mniejsza. d) Praca  $W$  może mieć mniejszą ( $PCDK$ ) lub większą ( $PGHK$ ) wartość. e) Układ przechodzi od stanu  $K$  do  $P$ . Gaz jest sprężany do mniejszej objętości przez siłę zewnętrzną. Praca  $W$  wykonana przez układ jest ujemna. f) Zacienniane pole wyraża wypadkową pracę  $W_{\text{wyp}}$  wykonaną przez układ w trakcie pełnego cyklu

ciśnienie zależy od objętości w procesie przeprowadzającym układ ze stanu początkowego do stanu końcowego.

W praktyce jest wiele różnych sposobów przeprowadzenia gazu od stanu początkowego  $P$  do stanu końcowego  $K$ . Jedną z możliwości zilustrowano na wykresie z rysunku 19.14a, przedstawiającym zależność ciśnienia gazu od jego objętości (tak zwany wykres  $p$ - $V$ ). Krzywa z wykresu 19.14a pokazuje, że ciśnienie maleje wraz ze wzrostem objętości. Wartość całki (19.25) (a więc praca wykonana przez gaz) jest równa polu zaciennowanego obszaru pod krzywą między punktami  $P$  i  $K$ . Niezależnie od tego, co robimy, aby zrealizować przemianę opisaną tą krzywą, widzimy, że wykonana praca jest większa od zera, ponieważ gaz zwiększył swą objętość, przesuwając tłok w góre.

Inną możliwość przejścia od stanu  $P$  do stanu  $K$  przedstawiono na wykresie z rysunku 19.14b. Proces zachodzi w dwóch etapach — najpierw od stanu  $P$  do stanu  $A$ , a potem od stanu  $A$  do  $K$ . Przemiana  $PA$  zachodzi przy stałym ciśnieniu, co znaczy, że nie zmieniamy liczby ziarenek śrutu obciążającego tłok (rys. 19.13). Zmianę objętości gazu (od  $V_{\text{pocz}}$  do  $V_{\text{końc}}$ ) osiągamy, kręcząc wolno regulator temperatury, dzięki czemu gaz ogrzewa się do temperatury  $T_A$ . (Zwiększenie temperatury powoduje wzrost siły wywieranej przez gaz na tłok, który dzięki temu przesuwa się w górę). W procesie tym rozszerzający się gaz wykonuje dodatnią pracę (podnosi obciążony tłok), a układ pobiera ciepło ze zbiornika cieplnego (reaguje na dowolnie małe różnice temperatury, wyoływanie zwiększeniem temperatury zbiornika). Ciepło ma wartość dodatnią, ponieważ zwiększa energię układu.

Przemiana  $AK$  z rysunku 19.14b zachodzi przy stałej objętości, co oznacza, że trzeba zablokować tłok, aby nie mógł się dalej poruszać. Następnie, korzystając z regulatora temperatury, można zmniejszyć ciśnienie gazu od wartości  $p_A$  do  $p_{\text{końc}}$ . W procesie tym układ oddaje ciepło do zbiornika.

W całej przemianie  $PAK$  układ wykonuje pracę  $W$  tylko w procesie  $PA$ . Ma ona wartość dodatnią, która odpowiada polu zaciennowanego obszaru pod krzywą. Ciepło jest wymieniane w obydwu procesach  $PA$  i  $AK$ , a jego wypadkowa ilość jest równa  $Q$ .

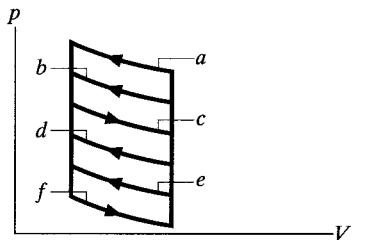
Krzywa z wykresu 19.14c opisuje proces składający się z tych samych etapów co poprzednio, lecz przeprowadzonych w odwrotnej kolejności. Praca  $W$  ma w tym przypadku mniejszą wartość niż w przemianie z rysunku 19.14b. Mniejsza jest również ilość ciepła pochłoniętego przez układ. Z rysunku 19.14d widać, że wartość wykonywanej pracy można dowolnie zmniejszyć (poruszając się po krzywej  $PCDK$ ) albo też zwiększyć (wybierając ścieżkę  $PGHK$ ).

Podsumowując: układ można przeprowadzić od stanu początkowego do stanu końcowego, wybierając jeden z nieskończonym wielu możliwych procesów. Ciepło może być dostarczane do układu lub nie, a każdemu z możliwych procesów odpowiadają różne wartości wykonywanej pracy  $W$  i pochłoniętego ciepła  $Q$ . Praca i ciepło są wielkościami zależącymi od sposobu, w jaki dokonuje się przemiany.

Na rysunku 19.14e przedstawiono przykład procesu, w którym praca wykonywana przez układ jest ujemna, ponieważ pewna zewnętrzna siła ściska gaz, zmniejszając jego objętość. Wartość bezwzględna wykonywanej pracy jest nadal równa polu powierzchni pod krzywą, lecz jest ujemna, ponieważ gaz jest sprężany.

Na rysunku 19.14f przedstawiono *cykl termodynamiczny*, który polega na przeprowadzeniu układu od stanu początkowego  $P$  do stanu końcowego  $K$ , a następnie z powrotem do stanu  $P$ . Wypadkowa praca wykonana przez układ w trakcie cyklu jest sumą *dodatniej* pracy w trakcie rozprężania i *ujemnej* pracy podczas sprężania. W cyklu przedstawionym na rysunku 19.14f wypadkowa praca jest dodatnia, ponieważ pole powierzchni pod krzywą opisującą rozprężanie (od  $P$  do  $K$ ) ma większą wartość niż pod krzywą opisującą sprężanie (od  $K$  do  $P$ ).

**SPRAWDZIAN 4:** Zamieszczony obok wykres  $p$ - $V$  przedstawia sześć krzywych (połączonych pionowymi odcinkami), opisujących przemiany, którym poddawany jest gaz. Któż parę krzywych wybierzesz, aby praca wykonana przez gaz w cyklu miała największą wartość dodatnią?



## 19.9. Pierwsza zasada termodynamiki

Przekonaliśmy się właśnie, że w przypadku układu, który jest poddawany przemianie od stanu początkowego do stanu końcowego, ilości wykonywanej pracy  $W$  i pobieranego ciepła  $Q$  zależą od rodzaju przemiany. Wykonując doświadczenia, można jednak odkryć zdumiewający fakt. Okazuje się, że *różnica  $Q - W$  jest dla wszystkich procesów jednakowa*. Jej wartość zależy jedynie od stanu początkowego i stanu końcowego, ale nie zależy od sposobu przeprowadzenia układu między tymi stanami. Wszystkie inne wyrażenia utworzone ze zmiennych  $Q$  i  $W$ , w tym takie same wielkości  $Q + W$  oraz na przykład  $Q + W$  i  $Q - 2W$ , zależą od sposobu realizacji procesu; tylko różnica  $Q - W$  jest od tego niezależna.

Widzimy więc, że różnica  $Q - W$  musi odpowiadać zmianie pewnej wielkości opisującej układ. Wielkość tę nazywamy *energią wewnętrzną*  $E_w$  i zapisujemy

$$\Delta E_w = E_{w,\text{końc}} - E_{w,\text{pocz}} = Q - W \quad (\text{pierwsza zasada termodynamiki}). \quad (19.26)$$

Równanie (19.26) wyraża **pierwszą zasadę termodynamiki**. Jeżeli układ termodynamiczny ulega nieznacznej przemianie, pierwszą zasadę zapisujemy w postaci<sup>2</sup>

$$dE_w = dQ - dW \quad (\text{pierwsza zasada termodynamiki}). \quad (19.27)$$

**► Energia wewnętrzna układu  $E_w$  wzrasta, jeżeli układ pobiera energię w postaci ciepła  $Q$ , i maleje, kiedy wykonuje on pracę  $W$ .**

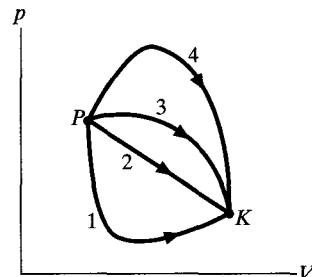
<sup>2</sup>Wielkości  $dQ$  i  $dW$ , w przeciwnieństwie do  $dE_w$ , nie oznaczają prawdziwych różniczek, ponieważ nie istnieją funkcje  $Q(p, V)$  i  $W(p, V)$ , których wartość zależy tylko od stanu układu. Fakt, że  $dQ$  i  $dW$  nie są różniczkami zupełnymi podkreśla się zwykle, używając do ich zapisu symboli  $dQ$  oraz  $dW$ . W naszym przypadku będziemy przyjmować, że  $dQ$  i  $dW$  oznaczają nieskończonie małe zmiany energii.

W rozdziale 8 omawialiśmy zasadę zachowania energii dla układów izolowanych, czyli takich, które nie pobierają ani nie oddają energii na zewnątrz. Pierwsza zasada termodynamiki jest rozszerzeniem tej zasady na układy, które *nie* są izolowane. W takich przypadkach energia może być przekazywana układowi lub zabierana z układu w postaci ciepła  $Q$  i pracy  $W$ . W naszym, podanym właśnie sformułowaniu pierwsiowej zasady termodynamiki przyjęliśmy, że układ jako całość nie zmienia swojej energii kinetycznej ani potencjalnej, to znaczy  $\Delta E_k = \Delta E_p = 0$ .

Aż do tego rozdziału terminu *praca* i symbolu  $W$  używaliśmy na ogół wtedy, gdy praca była wykonywana *nad* układem. Począwszy od równania (19.24) przez dwa następne rozdziały poświęcone termodynamice będziemy zajmować się przede wszystkim pracą wykonywaną przez układ, jak w przypadku zilustrowanym na rysunku 19.13.

Praca wykonywana *nad* układem ma zawsze wartość przeciwną niż praca wykonywana *przez* układ i dlatego wstawiając do równania (19.26) pracę nad układem, musimy napisać  $\Delta E_w = Q + W_{\text{nad}}$ . Wynika stąd, że energia wewnętrzna układu rośnie, jeżeli pobiera on ciepło lub jest wykonywana *nad* nim dodatnia praca. Odwrotnie, energia wewnętrzna maleje, jeżeli układ oddaje ciepło lub praca wykonana *nad* nim jest ujemna.

**SPRAWDZIAN 5:** Zamieszczony obok wykres we współrzędnych  $p$ - $V$  przedstawia cztery krzywe opisujące możliwe przemiany gazu od stanu  $P$  do stanu  $K$ . Uszereguj krzywe według odpowiadającej im: a) zmiany energii wewnętrznej  $\Delta E_w$ , b) wartości pracy  $W$  wykonanej przez gaz i c) wartości ciepła  $Q$  przekazanego do układu. W każdym przypadku zaczynaj od wartości największej.



## 19.10. Niektóre szczególne przypadki pierwszej zasady termodynamiki

Przyjrzymy się teraz czterem różnym procesom termodynamicznym, w których na układ nałożono pewne ograniczenia. Następnie przekonamy się, jakie wnioski wynikają z zastosowania do opisu tych procesów pierwszej zasady termodynamicznej. Uzyskane wyniki streszcza tabela 19.5.

Tabela 19.5. Pierwsza zasada termodynamiki: cztery przypadki szczególne

I zasada termodynamiki:  $\Delta E_w = Q - W$  (równanie (19.26))

Przemiana	Warunek	Wynik
Adiabatyczna	$Q = 0$	$\Delta E_w = -W$
Stała objętość	$W = 0$	$\Delta E_w = Q$
Cykł zamknięty	$\Delta E_w = 0$	$Q = W$
Rozprężanie swobodne	$Q = W = 0$	$\Delta E_w = 0$

- 1. Przemiana adiabatyczna.** Przemianę nazywamy adiabatyczną, jeżeli zachodzi ona gwałtownie lub układ jest tak dobrze izolowany, że *nie wymienia energii w postaci ciepła* z otoczeniem. Podstawiając do pierwszej zasady termodynamiki (równanie (19.26))  $Q = 0$ , otrzymujemy

$$\Delta E_w = -W \quad (\text{przemiana adiabatyczna}). \quad (19.28)$$

Widzimy, że jeżeli praca jest wykonana *przez* układ (to znaczy wartość  $W$  jest dodatnia), to energia wewnętrzna układu maleje o wartość wykonanej pracy. Odwrotnie, jeżeli praca jest wykonywana *nad* układem (to znaczy wartość  $W$  jest ujemna), to energia wewnętrzna układu wzrasta o wartość pracy.

Na rysunku 19.15 przedstawiono układ, w którym zachodzi przemiana adiabatyczna. Ciepło nie może dotrzeć do układu ani go opuścić ze względu na obecność izolacji termicznej. Dlatego jedynym sposobem wymiany energii z otoczeniem jest praca. Jeżeli usuniemy ziarenko śrutu z pojemnika obciążającego tłok i pozwolimy, aby gaz zwiększył swą objętość, to praca, którą wykona układ, będzie dodatnia, a więc energia wewnętrzna gazu zmniejszy się. Jeżeli zamiast tego dorzucimy nieco śrutu, praca wykonana przez układ będzie ujemna, a więc energia wewnętrzna gazu wzrośnie.

- 2. Przemiana przy stałej objętości.** Jeżeli objętość układu (na przykład gazu) jest stała, to znaczy, że nie wykonuje on pracy. Podstawiając do pierwszej zasady termodynamiki (równanie (19.26))  $W = 0$ , otrzymujemy

$$\Delta E_w = Q \quad (\text{przemiana przy stałej objętości}). \quad (19.29)$$

Jeżeli ciepło jest pobierane przez układ (to znaczy wartość  $Q$  jest dodatnia), energia wewnętrzna układu wzrasta. Odwrotnie, jeżeli w wyniku procesu układ oddaje ciepło (wartość  $Q$  jest ujemna), jego energia wewnętrzna maleje.

- 3. Proces cykliczny.** Istnieją procesy, w których układ, wymieniając ciepło i wykonując pracę, powraca do swego stanu początkowego. W takim przypadku żadna z wielkości opisujących stan układu — w tym także energia wewnętrzna — nie ulega zmianie. Podstawiając do pierwszej zasady termodynamiki (równanie (19.26))  $\Delta E_w = 0$ , otrzymamy

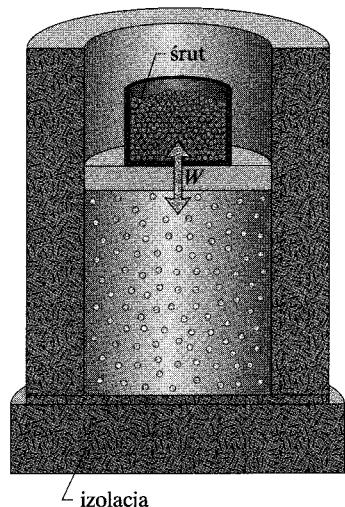
$$Q = W \quad (\text{proces cykliczny}). \quad (19.30)$$

Widzimy, że wypadkowa praca wykonana przez układ w procesie cyklicznym musi być dokładnie równa energii pobranej z otoczenia w postaci ciepła. W ten sposób energia wewnętrzna układu nie ulega zmianie. Proces cykliczny na wykresie  $p$ - $V$  jest opisany zamkniętą krzywą — rysunek 19.14f. Procesy tego typu omówimy dokładniej w rozdziale 21.

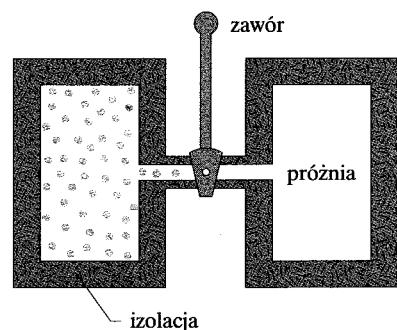
- 4. Rozprężanie swobodne.** Jest to przemiana adiabatyczna, w której układ nie wymienia ciepła z otoczeniem i jednocześnie nie wykonuje pracy. Z warunku  $Q = W = 0$  oraz z pierwszej zasady termodynamiki wynika, że

$$\Delta E_w = 0 \quad (\text{rozprężanie swobodne}). \quad (19.31)$$

Na rysunku 19.16 pokazano, jak można zrealizować rozprężanie swobodne. Gaz w stanie równowagi termodynamicznej wypełnia początkowo jedną



Rys. 19.15. Rozprężanie adiabatyczne można zrealizować, usuwając powoli ziarenka śrutu obciążające tłok. Dodając śrut można w dowolnej chwili odwrócić przebieg procesu

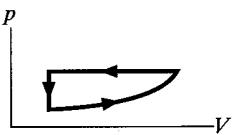


Rys. 19.16. Otwarcie zaworu między dwiema komorami powoduje swobodne rozprężenie gazu. Gaz wypełnia obydwie komory i w końcu osiąga stan równowagi

z dwóch komór zbiornika odizolowanego termicznie od otoczenia. Komory łączyc rurka z zaworem, który w chwili początkowej jest zamknięty. W drugiej komorze panuje próżnia. W pewnej chwili otwieramy zawór i gaz rozpręża się, wypełniając obydwa zbiorniki. Ponieważ są one izolowane termicznie, nie zachodzi wymiana ciepła z otoczeniem. Gaz nie wykonuje żadnej pracy, ponieważ rozpręża się do próżni i nie napotyka ciśnienia, które by się temu przeciwstawiło.

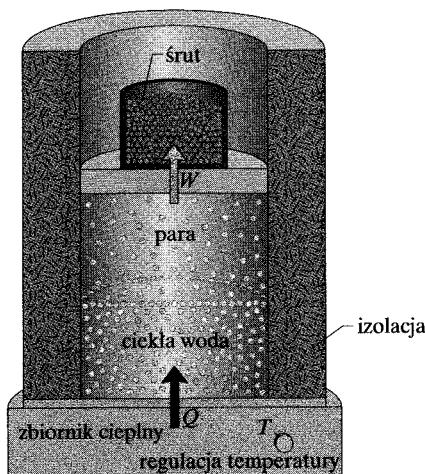
Rozprężanie swobodne różni się od innych rozważanych procesów tym, że nie można zrealizować go powoli i w sposób kontrolowany. W rezultacie w żadnej chwili tego procesu gaz nie jest w stanie równowagi termodynamicznej, a jego ciśnienie różni się od punktu do punktu. Dlatego na wykresie  $p$ - $V$  możemy przedstawić stan początkowy i końcowy układu, ale nie da się wykreślić krzywej opisującej sam proces.

**SPRAWDZIAN 6:** Zamieszczony obok wykres  $p$ - $V$  przedstawia pewną przemianę cykliczną. Czy w jednym pełnym cyklu a) zmiana energii wewnętrznej układu i b) wypadkowa energia wymieniana w postaci ciepła  $Q$  przez układ z otoczeniem mają wartość dodatnią, ujemną, czy równą zeru?



## Przykład 19.5

Zamieniamy 1 kg wody o temperaturze  $100^{\circ}\text{C}$  w parę o temperaturze również  $100^{\circ}\text{C}$ , pozwalając wodzie wrzeć pod normalnym ciśnieniem atmosferycznym (1 atm, czyli  $1,01 \cdot 10^5 \text{ Pa}$ ) w układzie przedstawionym na rysunku 19.17. Objętość wody zmienia się od początkowej wartości  $1 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3$  dla cieczy do  $1,671 \text{ m}^3$ , kiedy ma ona postać pary.



Rys. 19.17. Przykład 19.5. Woda wrze pod stałym ciśnieniem. Energia w postaci ciepła przepływa ze zbiornika cieplnego do cylindra do chwili, kiedy ciekła woda całkowicie zamieni się w parę. Rozszerzający się gaz, podnosząc obciążony tlenek, wykonuje pracę

a) Jaką pracę wykonuje układ w tym procesie?

### ROZWIĄZANIE:

Zauważmy, że praca wykonywana przez układ jest dodatnia, ponieważ jego objętość wzrasta. W ogólnym przypadku trzeba by obliczyć pracę, całkując ciśnienie po objętości (równanie (19.25)). Jednak w naszym przypadku ciśnienie ma stałą wartość równą  $1,01 \cdot 10^5 \text{ Pa}$ , co pozwala nam wyciągnąć symbol  $p$  przed całkę. Dzięki temu mamy

$$\begin{aligned} W &= \int_{V_{\text{pocz}}}^{V_{\text{konec}}} p dV = p \int_{V_{\text{pocz}}}^{V_{\text{konec}}} dV = p(V_{\text{konec}} - V_{\text{pocz}}) \\ &= (1,01 \cdot 10^5 \text{ Pa})(1,671 \text{ m}^3 - 1 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3) \\ &= 1,69 \cdot 10^5 \text{ J} = 169 \text{ kJ}. \end{aligned} \quad (\text{odpowiedź})$$

b) Jaką energię otrzymuje układ podczas ogrzewania?

### ROZWIĄZANIE:

Zauważmy, że ciepło jest zużywane jedynie do przemiany fazowej, ponieważ temperatura układu nie ulega zmianie. Ilość dostarczonego ciepła można więc obliczyć, korzystając z równania (19.16) ( $Q = c_{\text{przem}} m$ ). Ponieważ przemiana zachodzi między fazą ciekłą a gazową, zamiast ciepła przemiany  $c_{\text{przem}}$  trzeba podstawić ciepło parowania  $c_{\text{par}}$ , którego wartość podano w równaniu (19.17) oraz w tabeli 19.4. Podstawiając odpowiednie wartości, obliczamy

$$\begin{aligned} Q &= c_{\text{par}} m = (2256 \text{ kJ/kg})(1 \text{ kg}) \\ &= 2256 \text{ kJ} \approx 2260 \text{ kJ}. \end{aligned} \quad (\text{odpowiedź})$$

c) Ile wynosi zmiana energii wewnętrznej układu w rozważanym procesie?

$$\Delta E_w = Q - W = 2256 \text{ kJ} - 169 \text{ kJ}$$

$$\approx 2090 \text{ kJ} = 2,09 \text{ MJ.}$$

(odpowiedź)

## ROZWIĄZANIE:

Zauważmy, że zmiana energii wewnętrznej układu jest związana z pobranym ciepłem (w tym przypadku energia jest przekazywana do układu) i wykonaną pracą (w tym przypadku energia jest odbierana od układu) za pomocą pierwszej zasadę termodynamiki (równanie (19.26)). Możemy więc napisać

Obliczona wartość jest dodatnia, co oznacza, że energia wewnętrzna wody wzrasta w wyniku jej parowania. Energia ta pozwala oddzielić od siebie cząsteczki  $\text{H}_2\text{O}$ , które w stanie ciekłym mocno ze sobą oddziałują. Widzimy, że kiedy woda zamienia się w parę, mniej więcej 7,5% ( $= 169 \text{ kJ}/2260 \text{ kJ}$ ) dostarczanej energii jest zużywane na „odepcchnięcie” atmosfery. Pozostała część ciepła zostaje zużyta na zwiększenie energii wewnętrznej układu.

## 19.11. Mechanizmy przekazywania ciepła

Omawialiśmy już wymianę energii w postaci ciepła między układem a jego otoczeniem, ale nie zastanawialiśmy się jeszcze, jak się ona dokonuje. Można wymienić trzy mechanizmy odpowiedzialne za przepływ ciepła: przewodnictwo, konwekcja i promieniowanie.

### Przewodnictwo cieplne

Jeżeli włożymy koniec metalowego pogrzebacza w palenisko, to po pewnym czasie jego rączka stanie się gorąca. Energia będzie przekazywana od znajdującego się w ogniu czubka do uchwytu dzięki **przewodnictwu cieplnemu**, które zachodzi w pogrzebaczu. Amplituda drgań atomów i elektronów w metalu włożonym w ogień jest znaczna ze względu na wysoką temperaturę. Zwiększoną amplitudą drgań i związana z tym energia jest następnie przekazywana wzdłuż pogrzebacza dzięki zderzeniom sąsiednich atomów. W ten sposób obszar zwiększonej temperatury rozciąga się wzdłuż pogrzebacza od jego czubka aż po rękęjeś.

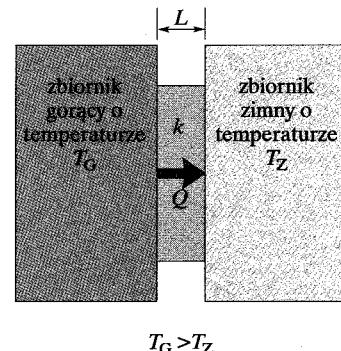
Zastanówmy się teraz, jak opisać przewodnictwo płytki o grubości  $L$ , której przeciwległe ścianki o polu powierzchni  $S$  są utrzymywane w temperaturze odpowiednio  $T_G$  i  $T_Z$  przez dwa zbiorniki cieplne — gorący i zimny (rys. 19.18). Niech  $Q$  oznacza energię przenoszoną w postaci ciepła przez płytke od powierzchni gorącej do zimnej w czasie  $t$ . Doświadczenie pokazuje, że strumień ciepła  $P_{\text{przew}}$  (ilość energii przepływającej w jednostce czasu) wynosi

$$P_{\text{przew}} = \frac{Q}{t} = kS \frac{T_G - T_Z}{L}, \quad (19.32)$$

gdzie współczynnik  $k$  nosi nazwę *przewodności cieplnej właściwej* materiału, z którego wykonano płytke. *Dobrymi przewodnikami ciepła* nazywamy materiały, przez które łatwo na drodze przewodnictwa przedostaje się energia; ich wartość  $k$  jest duża. W tabeli 19.6 podano wartości przewodności cieplnej właściwej dla niektórych często spotykanych metali, gazów i materiałów budowlanych.

### Opór cieplny

Jeżeli chcesz dobrze ocieplić swój dom lub sprawić, aby puszcza coli zabrana na piknik jak najdłużej pozostała zimna, będziesz rozglądać się raczej za złymi,



Rys. 19.18. Przewodnictwo cieplne. Energia przepływa w postaci ciepła od zbiornika o temperaturze  $T_G$  do chłodniejszego zbiornika o temperaturze  $T_Z$  przez przewodzącą ciepło płytę o grubości  $L$  i przewodności cieplnej właściwej  $k$

Tabela 19.6. Wartości przewodności cieplnej właściwej wybranych substancji

Substancja	$k$ [W/(m · K)]
<i>Metale</i>	
Stal nierdzewna	14
Ołów	35
Aluminium	235
Miedź	401
Srebro	428
<i>Gazy</i>	
Powietrze (suche)	0,026
Hel	0,15
Wodór	0,18
<i>Materiały budowlane</i>	
Pianka poliuretanowa	0,024
Wełna mineralna	0,043
Wata szklana	0,048
Drewno sosnowe	0,11
Szkło okienne	1,0

a nie dobrymi przewodnikami ciepła. Właśnie dlatego użyteczne jest pojęcie *oporu cieplnego*  $R$ . Wartość oporu cieplnego  $R$  dla płytki o grubości  $L$  i polu powierzchni  $S$  definiujemy jako

$$R = \frac{L}{kS}. \quad (19.33)$$

Im mniejsza jest wartość przewodności cieplnej właściwej materiału, z którego wykonano płytę, tym większy jest opór cieplny płytki. Mówiąc inaczej, coś, co ma duży opór cieplny, jest *złym przewodnikiem ciepła*, a więc *dobrym izolatorem cieplnym*.

Zwróćcie uwagę, że wartość  $R$  jest związana — przez jej grubość i powierzchnię — z konkretną płytą, a nie tylko materiałem, z którego ją wykonano. Jednostką oporu cieplnego jest kelwin/wat.

### Przewodzenie ciepła przez płytę wielowarstwową

Na rysunku 19.19 przedstawiono płytę złożoną z dwóch warstw materiałów o grubościach  $L_1$  i  $L_2$  oraz różnych wartościach przewodności cieplnej właściwej  $k_1$  i  $k_2$ . Temperatury zewnętrznych powierzchni płytki są odpowiednio równe  $T_G$  i  $T_Z$ . Pole powierzchni płytki jest równe  $S$ . Wyprowadzimy teraz równanie pozwalające obliczyć strumień ciepła przez taką płytę w procesie *stacjonarnym*, czyli takim, w którym rozkład temperatury i wartość strumienia nie zmienia się w czasie.

W warunkach stacjonarnych strumienie ciepła przez obydwie warstwy muszą być sobie równe. Mówiąc inaczej, energia, która przepływa w pewnym czasie  $t$  przez jedną warstwę materiału, musi w takim samym czasie przepływać przez drugą warstwę. Gdyby tak nie było, temperatura we wnętrzu płytki ulegałaby zmianom i stan nie byłby stacjonarny. Założymy, że temperatura na granicy warstwy obydwu materiałów jest równa  $T_X$ . Korzystając z równania (19.32), możemy napisać

$$P_{\text{przew}} = \frac{k_2 S(T_G - T_X)}{L_2} = \frac{k_1 S(T_X - T_Z)}{L_1}. \quad (19.34)$$

Rozwiążanie równania (19.34) względem  $T_X$  jest stosunkowo prostym zadaniem z algebra; otrzymujemy

$$T_X = \frac{k_1 L_2 T_Z + k_2 L_1 T_G}{k_1 L_2 + k_2 L_1}. \quad (19.35)$$

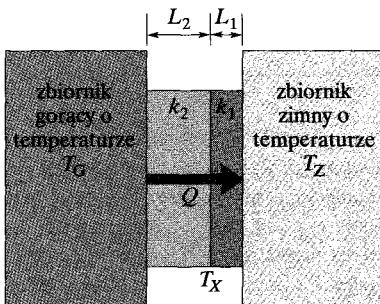
Podstawiając uzyskaną wartość  $T_X$  do jednego z członów równania (19.34), otrzymamy

$$P_{\text{przew}} = \frac{S(T_G - T_Z)}{\frac{L_1}{k_1} + \frac{L_2}{k_2}}. \quad (19.36)$$

Równanie (19.36) możemy uogólnić na płytę zawierającą dowolną liczbę  $n$  warstw:

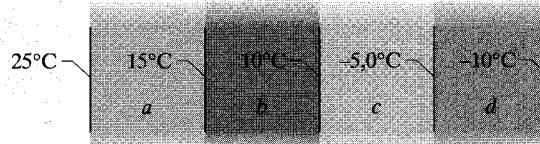
$$P_{\text{przew}} = \frac{S(T_G - T_Z)}{\sum(L_i/k_i)}. \quad (19.37)$$

Znak sumowania występujący w mianowniku oznacza, że musimy dodać do siebie wartości  $L/k$  dla wszystkich warstw płytki.



Rys. 19.19. Stacjonarny strumień ciepła przez wielowarstwową płytę wykonaną z dwóch różnych materiałów o różnych grubościach i różnych wartościach przewodności cieplnej. W stanie stacjonarnym temperatura na granicy obydwu materiałów ma wartość  $T_X$

**SPRAWDZIAN 7:** Płytką jest złożona z czterech warstw o jednakowej grubości, ale wykonanych z różnych materiałów. Na rysunku podano wartości temperatury zmierzone dla stacjonarnego strumienia ciepła na powierzchni płytki i na granicach jej warstw. Uszereguj warstwy według ich przewodności cieplnej właściwej, zaczynając od jej największej wartości.



## Konwekcja

Kiedy wpatrujemy się w płomień świecy lub zapałki, możemy zauważyc, że energia termiczna jest przenoszona w górę dzięki **konwekcji**. Taki transport energii następuje wtedy, kiedy płyn, taki jak powietrze czy woda, znajdzie się w kontakcie z ciałem o wyższej temperaturze. Ta część płynu, która bezpośrednio przylega do gorącego ciała, ogrzewa się i — w większości przypadków — zwiększa swoją objętość, co powoduje spadek gęstości. Ponieważ jest ona teraz lżejsza niż otaczające ją chłodniejsze warstwy, zaczyna się poruszać w górę dzięki sile wyporu. Pewna część chłodniejszego płynu z otoczenia zajmuje teraz miejsce w pobliżu gorącego ciała i proces trwa dalej.

Konwekcję często obserwujemy w przyrodzie. Konwekcja zachodząca w atmosferze jest bardzo ważna dla klimatu na Ziemi i codziennych zmian pogody. Piloci szybowców i ptaki szukają wznoszących prądów termicznych (konwekcyjnych strumieni gorącego powietrza), które pozwalają im kontynuować lot. Taki sam mechanizm odpowiada za procesy wymiany olbrzymiej energii w oceanie. I wreszcie energia z pieca jądrowego, jakim jest jądro Słońca, jest przenoszona w kierunku jego powierzchni w obrębie olbrzymich granul, w których gorący gaz wznaosi się w centrum i po oddaniu ciepła opada po ścianach.

## Promieniowanie

Trzeci mechanizm wymiany energii w postaci ciepła między ciałem a jego otoczeniem to pośrednictwo fal elektromagnetycznych (przykładem takich fal jest światło). Ten sposób przekazywania sygnałów energii jest często nazywany **promieniowaniem cieplnym**, aby odróżnić go od przekazywania sygnałów za pomocą fal elektromagnetycznych (używanych w radio i telewizji) i od promieniowania jądrowego (energii i cząstek emitowanych przez jądra). („Promieniować” znaczy tyle co wysyłać). Kiedy stoiemy obok dużego ogniska, czujemy ciepło, ponieważ pochłaniamy promieniowanie cieplne pochodzące od ognia. Oznacza to, że nasza energia wewnętrzna wzrasta, a maleje energia termiczna ognia. Nie trzeba żadnego ośrodku, aby przekazywać ciepło za pośrednictwem promieniowania — rozchodzi się ono w próżni, na przykład pomiędzy Słońcem a Ziemią.

Moc promieniowania  $P_{\text{prom}}$  emitowanego przez ciało w postaci fal elektromagnetycznych zależy od pola powierzchni  $S$  ciała i temperatury jego powierzchni  $T$  wyrażonej w kelwinach. Wielkości te łączy zależność

$$P_{\text{prom}} = \sigma \varepsilon S T^4. \quad (19.38)$$



Rys. 19.20. Termogram uwidacznia za pomocą umownie przyjętych kolorów moc wy promieniowywaną przez domy stojące wzdłuż ulicy. Kolory: biały, czerwony, różowy, niebieski i czarny odpowiadają kolejno mocy promieniowania od wartości największej do najmniejszej. Na tej podstawie można stwierdzić, gdzie w ścianach domów umieszczono izolację, w których oknach wiszą grube zasłony oraz w których domach na piętrze pod sufitem jest cieplejsze powietrze

W podanym równaniu  $\sigma = 5,6703 \cdot 10^{-8} \text{ W}/(\text{m}^2 \cdot \text{K}^4)$  oznacza stałą *Stefana–Boltzmana* nazwaną tak dla uczczenia Josefa Stefana (który w 1879 r. odkrył na drodze doświadczalnej prawo zapisane w równaniu) oraz Ludwiga Boltzmanna (który wkrótce potem wyprowadził je teoretycznie). Symbol  $\varepsilon$  wyraża zdolność emisyjną powierzchni ciała, która może przyjmować wartości z przedziału od 0 do 1, zależnie od rodzaju powierzchni. Ciało, na którego powierzchni zdolność emisyjna przyjmuje maksymalną wartość 1, nazywamy ciałem doskonale czarnym. Jest to jednak przypadek graniczny, który nie występuje w przyrodzie. Zwróćcie uwagę, że temperatura występująca w równaniu (19.38) musi być wyrażona w kelwinach, tak aby zero bezwzględne oznaczało całkowity brak promieniowania. Zauważcie też, że każde ciało, którego temperatura jest wyższa niż 0 K — także i ty — emituje promieniowanie cieplne (patrz rysunek 19.20).

Moc absorbowana  $P_{\text{abs}}$  przez ciało z otoczenia w wyniku promieniowania cieplnego zależy od (jak zakładamy — stałej) temperatury otoczenia  $T_{\text{otocz}}$  wyrażonej w kelwinach

$$P_{\text{abs}} = \sigma \varepsilon S T_{\text{otocz}}^4. \quad (19.39)$$

Zdolność emisyjna  $\varepsilon$  występująca w równaniu (19.39) jest tą samą wielkością co w równaniu (19.38). Ciało doskonale czarne o zdolności emisyjnej  $\varepsilon$  równej 1 pochłania całą energię padającego nań promieniowania (nie odbija ani nie rozprasza padającego promieniowania).

Ponieważ ciało pochłaniające promieniowanie docierające z otoczenia jest zarazem jego źródłem, wypadkowa moc  $P_{\text{wyp}}$  charakteryzująca wymianę z otoczeniem energii w postaci promieniowania cieplnego jest równa

$$P_{\text{wyp}} = P_{\text{abs}} - P_{\text{prom}} = \sigma \varepsilon S (T_{\text{otocz}}^4 - T_{\text{prom}}^4). \quad (19.40)$$

Moc  $P_{\text{wyp}}$  jest dodatnia, jeżeli ciało pochłania energię na drodze promieniowania, a ujemna, jeżeli ciało traci energię.

## Przykład 19.6

Na rysunku 19.21 przedstawiono przekrój ściany wykonanej z warstwy drewna sosnowego o grubości  $L_a$  i muru ceglano-go o grubości  $L_d$  ( $= 2L_a$ ), rozdzielonych dwiema warstwami o jednakowej grubości i takiej samej przewodności cieplnej właściwej, wykonanymi z nieznanego materiału. Przewodność cieplna właściwa drewna sosnowego jest równa  $k_a$ , a cegiel  $k_d$  ( $= 5k_a$ ). Pole powierzchni ściany  $S$  nie jest znane. Wiadomo, że strumień ciepła przechodzący przez ścianę osiągnął stan stacjonarny. Jedyne znane temperatury na różnych powierzchniach granicznych są równe  $T_1 = 25^\circ\text{C}$ ,  $T_2 = 20^\circ\text{C}$  i  $T_5 = -10^\circ\text{C}$ . Jaką wartość ma temperatura  $T_4$ ?

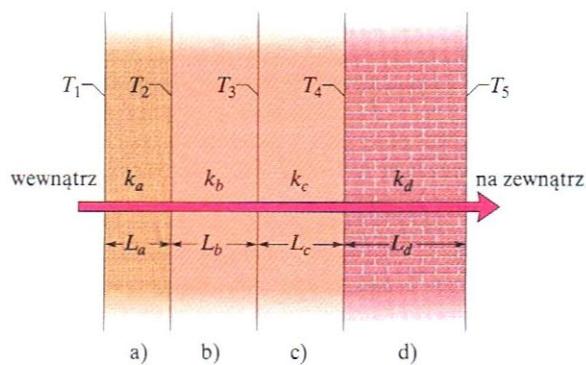
### ROZWIĄZANIE:

Zauważmy najpierw, że znając temperaturę  $T_4$ , moglibyśmy wyznaczyć strumień ciepła  $P_d$  przenikającego przez mur ceglany, korzystając z równania (19.32). Brakuje nam jednak danych, aby je rozwiązać względem  $T_4$ . Po wtóre możemy zauważać, że w warunkach stacjonarnych strumień ciepła  $P_d$  przenikający przez mur ceglany musi być równy strumieniu ciepła  $P_a$  przechodzącemu przez warstwę drewna sosnowego. Korzystając z równań (19.32) i (19.21), możemy napisać

$$P_a = k_a S \frac{T_1 - T_2}{L_a}$$

oraz

$$P_d = k_d S \frac{T_4 - T_5}{L_d}.$$



Rys. 19.21. Przykład 19.6. Ściana składa się z czterech warstw, przez które przepływa stacjonarny strumień ciepła

Uwzględniając fakt, że  $P_a = P_d$ , i rozwiązując wynikające stąd równanie względem  $T_4$ , dostajemy

$$T_4 = \frac{k_a L_d}{k_d L_a} (T_1 - T_2) + T_5.$$

Podstawiając  $L_d = 2L_a$  i  $k_d = 5k_a$  oraz znane wartości temperatury, otrzymujemy

$$\begin{aligned} T_4 &= \frac{k_a (2L_a)}{(5k_a)L_a} (25^\circ\text{C} - 20^\circ\text{C}) + (-10^\circ\text{C}) \\ &= -8^\circ\text{C}. \end{aligned} \quad (\text{odpowiedź})$$

## Przykład 19.7

Setki japońskich pszczół zbierających się w zwartą kulę wokół potężnego szerszenia, który próbuje wtargnąć do ich gniazda, mogą w krótkim czasie podnieść swą temperaturę z  $35^\circ\text{C}$  do  $47\text{--}48^\circ\text{C}$ . Tak wysoka temperatura jest zabójcza dla szerszenia, ale nie dla pszczół (rys. 19.22). Przyjmijmy następujące dane: 500 pszczół

tworzy kulę o promieniu 2 cm przez czas  $t = 20$  min. Z zakładamy, że straty energii są głównie wynikiem promieniowania cieplnego, a zdolność emisyjna kuli utworzonej przez pszczoły wynosi  $\varepsilon = 0.8$ . Temperatura kuli jest jednorodna. Jaką dodatkową energię musi przeciętnie wytworzyć każda z pszczół w ciągu 20 minut, aby otrzymać temperaturę kuli równą  $47^\circ\text{C}$ ?

### ROZWIĄZANIE:

Zauważmy, że temperatura powierzchni kuli utworzonej przez pszczoły wzrasta, a więc musi się również zwiększyć moc promieniowania. W ten sposób pszczoły na skutek promieniowania cieplnego tracą pewną dodatkową energię. Mogemy powiązać temperaturę powierzchni z mocą promieniowania (energią przypadającą na jednostkę czasu), korzystając z równania (19.38) ( $P_{\text{prom}} = \sigma \varepsilon S T^4$ ), gdzie  $S$  oznacza pole powierzchni kuli, a  $T$  jej temperaturę w kelwinach. Wy promieniowywana moc jest równa

$$P_{\text{prom}} = \frac{E}{t}.$$

Ilość energii  $E$  wypromieniowywanej w czasie  $t$  wynosi więc  $E = P_{\text{prom}} t$ .



Rys. 19.22. Przykład 19.7. Pszczołom nie szkodzi podwyższona temperatura ich ciał, która jest zabójcza dla szerszenia

W temperaturze  $T_1 = 35^\circ\text{C}$  moc promieniowania jest równa  $P_{r1}$ , a energia wypromieniowywana w czasie  $t$  wynosi  $E_1 = P_{r1}t$ . W temperaturze  $T_2 = 47^\circ\text{C}$  promieniowanie ma większą moc  $P_{r2}$ , a energia wypromieniowywana w czasie  $t$  (również większa) wynosi  $E_2 = P_{r2}t$ . Dlatego, aby utrzymać podwyższoną temperaturę  $T_2$  kuli przez czas  $t$ , pszczoły muszą razem wytworzyć dodatkową energię  $\Delta E = E_2 - E_1$ . Możemy więc napisać

$$\begin{aligned}\Delta E &= E_2 - E_1 = P_{r2}t - P_{r1}t \\ &= (\sigma \varepsilon S T_2^4)t - (\sigma \varepsilon S T_1^4)t \\ &= \sigma \varepsilon S t (T_2^4 - T_1^4).\end{aligned}\quad (19.41)$$

W równaniach tych temperatura *musi* być wyrażona w kelwinach; dlatego zapisujemy je w postaci

$$T_2 = (47 + 273) \text{ K} = 320 \text{ K}$$

oraz

$$T_1 = (35 + 273) \text{ K} = 308 \text{ K}.$$

Pole powierzchni kuli  $S$  jest równe

$$S = 4\pi R^2 = (4\pi)(0,02 \text{ m})^2 = 5,027 \cdot 10^{-3} \text{ m}^2,$$

a czas  $t = 20 \text{ min} = 1200 \text{ s}$ . Podstawiając wartości liczbowe do równania (19.41), stwierdzamy, że

$$\begin{aligned}\Delta E &= (5,6703 \cdot 10^{-8} \text{ W}/(\text{m}^2 \cdot \text{K}^4))(0,8)(5,027 \cdot 10^{-3} \text{ m}^2) \\ &\quad \times (1200 \text{ s})[(320 \text{ K})^4 - (308 \text{ K})^4] \\ &= 406,8 \text{ J}.\end{aligned}$$

Jeżeli kulę tworzy 500 pszczół, to każda z nich musi wytworzyć dodatkową energię

$$\frac{\Delta E}{500} = \frac{406,8 \text{ J}}{500} = 0,81 \text{ J}. \quad (\text{odpowiedź})$$

## Podsumowanie

**Temperatura. Termometry** Temperatura jest wielkością podstawową układu SI, związaną z odczuwaniem przez nas ciepła i zimna. Jest mierzona za pomocą termometru zawierającego substancję roboczą obdarzoną pewną mierzalną właściwością, jak na przykład długość lub ciśnienie, która zmienia się jednoznacznie, gdy staje się ona cieplejsza lub chłodniejsza.

**Zerowa zasada termodynamiki** Kiedy termometr i pewne inne ciało znajdują się w kontakcie cieplnym ze sobą, po pewnym czasie osiągną stan równowagi termodynamicznej. Temperaturę, którą wskazuje wtedy termometr, uznajemy za temperaturę ciała. Procedura taka, która umożliwia przeprowadzenie spójnych i użytecznych pomiarów temperatury, jest oparta na **zerowej zasadzie termodynamiki**: Jeżeli dwa ciała  $A$  i  $B$  znajdują się w stanie równowagi termodynamicznej z trzecim ciałem  $C$  (termometrem), to ciała  $A$  i  $B$  znajdują się także w stanie równowagi termodynamicznej ze sobą.

**Skala temperatury Kelvina** W układzie SI temperatura jest wyrażana w skali Kelvina, zdefiniowanej z wykorzystaniem punktu potrójnego wody ( $273,16 \text{ K}$ ). Inne temperatury można zmierzyć termometrem gazowym o stałej objętości, w którym próbka gazu jest utrzymywana w stałej objętości, dzięki czemu jej ciśnienie jest proporcjonalne do temperatury. Temperaturę mierzoną termometrem gazowym definiujemy jako

$$T = (273,16 \text{ K}) \left( \lim_{\text{ilość gazu} \rightarrow 0} \frac{p}{p_3} \right). \quad (19.6)$$

We wzorze tym  $T$  oznacza temperaturę w kelwinach, a  $p_3$  i  $p$  — odpowiednio ciśnienie gazu w temperaturze punktu potrójnego wody ( $273,16 \text{ K}$ ) i w temperaturze mierzonej.

**Skala Celsjusza i Fahrenheita** Temperaturę w skali Celsjusza definiujemy jako

$$T_C = (T - 273,15)^\circ\text{C}, \quad (19.7)$$

gdzie  $T$  oznacza temperaturę wyrażoną w kelwinach. Temperaturę w skali Fahrenheita definiujemy jako

$$T_F = \left( \frac{9}{5} T_C + 32 \right)^\circ\text{F}. \quad (19.8)$$

**Rozszerzalność cieplna** Wszystkie ciała zmieniają swoje rozmiary wraz ze zmianami temperatury. Jeżeli temperatura zmienia się o  $\Delta T$ , dowolny liniowy rozmiar ciała  $L$  zmienia się o wartość  $\Delta L$  daną wzorem

$$\Delta L = L\alpha\Delta T, \quad (19.9)$$

gdzie  $\alpha$  oznacza **współczynnik rozszerzalności liniowej**. Zmiana objętości  $\Delta V$  ciała stałego lub cieczy o objętości  $V$  jest równa

$$\Delta V = V\beta\Delta T, \quad (19.10)$$

gdzie  $\beta = 3\alpha$  jest **współczynnikiem rozszerzalności objętościowej** ciała.

**Ciepło** Ciepło  $Q$  to energia wymieniana pomiędzy układem a jego otoczeniem na skutek różnicy temperatury między nimi. Ciepło jest wyrażane w dzjach (J), kaloriach (cal), kilokaloriach (Cal lub kcal) lub w brytyjskich jednostkach cieplnych, przy czym

$$1 \text{ cal} = 3,969 \cdot 10^{-3} \text{ Btu} = 4,1860 \text{ J}. \quad (19.12)$$

**Pojemność cieplna i ciepło właściwe** Jeżeli pewne ciało pochłonie ciepło  $Q$ , zmiana jego temperatury  $T_{\text{końc}} - T_{\text{pocz}}$  będzie powiązana z wartością  $Q$  równaniem

$$Q = C(T_{\text{końc}} - T_{\text{pocz}}), \quad (19.13)$$

gdzie  $C$  oznacza **pojemność cieplną** ciała. Jeżeli ciało ma masę  $m$ , to zależność tę możemy zapisać w postaci

$$Q = cm(T_{\text{końc}} - T_{\text{pocz}}), \quad (19.14)$$

gdzie  $c$  oznacza **ciepło właściwe** substancji, z której zbudowane jest ciało. **Molowe ciepło właściwe** substancji definiujemy jako pojemność cieplną jednego mola tej substancji, czyli  $6,02 \cdot 10^{23}$  jej jednostek elementarnych.

**Ciepło przemiany** Gdy substancja pochłonie ciepło, może zmienić się jej stan skupienia, na przykład ciało stałe może stać się cieczą, a ciecz — gazem. Ilość ciepła niezbędną do zmiany fazy jednostkowej masy substancji (bez zmiany przy tym jej temperatury) jest nazywana **ciepłem przemiany**  $c_{\text{przem}}$ . Mamy więc

$$Q = c_{\text{przem}}m. \quad (19.16)$$

**Ciepło parowania**  $c_{\text{par}}$  to ilość energii na jednostkę masy, która musi być dostarczona, aby zamienić ciecz w parę, lub pobrana, aby skroplić parę. **Ciepłem topnienia**  $c_{\text{top}}$  substancji nazywamy ilość energii, którą trzeba dostarczyć jednostkowej masie tej substancji w postaci ciała stałego, aby spowodować jej stopienie, lub odebrać od jednostkowej jej masy w postaci cieczy, aby spowodować jej zestalenie.

**Praca związana ze zmianą objętości** Gaz może wymieniać energię ze swoim otoczeniem, wykonując pracę. Pracę wykonaną przez gaz, który zwiększa lub zmniejsza swą objętość od  $V_{\text{pocz}}$  do  $V_{\text{końc}}$ , można obliczyć za pomocą równania

$$W = \int dW = \int_{V_{\text{pocz}}}^{V_{\text{końc}}} pdV. \quad (19.25)$$

Niezbędne jest całkowanie, ponieważ ciśnienie gazu w procesie może zmieniać się wraz ze zmianą objętości.

**Pierwsza zasada termodynamiki** Zasada zachowania energii dla procesów termodynamicznych przybiera postać **pierwszej zasady termodynamiki**, którą można zależnie od potrzeb zapisać

za pomocą jednego z równań

$$\Delta E_w = E_{w,\text{końc}} - E_{w,\text{pocz}} = Q - W \quad (\text{pierwsza zasada termodynamiki}) \quad (19.26)$$

lub

$$dE_w = dQ - dW \quad (\text{pierwsza zasada termodynamiki}). \quad (19.27)$$

gdzie  $E_w$  oznacza energię wewnętrzną substancji zależną jedynie od stanu substancji (temperatury, ciśnienia i objętości).  $Q$  oznacza energię wymienianą między układem a otoczeniem w postaci ciepła;  $Q$  ma wartość dodatnią, jeżeli układ pobiera ciepło, i ujemną, jeżeli układ oddaje ciepło.  $W$  oznacza pracę wykonywaną przez układ;  $W$  ma wartość dodatnią, jeżeli układ zwiększa swoją objętość, działając przeciw pewnej sile zewnętrznej, a wartość ujemną, jeżeli układ zmniejsza swoją objętość z powodu działania siły zewnętrznej. *Wartości ciepła  $Q$  i pracy  $W$  zależą od sposobu przeprowadzenia przemiany, a wartość  $\Delta E_w$  nie.*

**Zastosowania pierwszej zasady termodynamiki** Pierwsza zasada termodynamiki przybiera w niektórych procesach szczególną postać:

*przemiana adiabatyczna:  $Q = 0, \Delta E_w = -W$*

*przemiana przy stałej objętości:  $W = 0, \Delta E_w = Q$*

*proces cykliczny:  $\Delta E_w = 0, Q = W$*

*rozprężanie swobodne:  $Q = W = \Delta E_w = 0$*

**Przewodnictwo, konwekcja i promieniowanie** Strumień ciepła  $P_{\text{przew}}$  przenikającego przez płytę, której powierzchnie są utrzymywane w temperaturze  $T_G$  i  $T_Z$ , jest równy

$$P_{\text{przew}} = \frac{Q}{t} = kS \frac{T_G - T_Z}{L}, \quad (19.32)$$

gdzie  $S$  i  $L$  oznaczają odpowiednio pole powierzchni i grubość płytki, a  $k$  jest przewodnością cieplną właściwą materiału.

**Konwekcję** nazywamy przepływ energii związany z ruchem spowodowanym różnicą temperatury w płynie. **Promieniowanie** to przepływ energii w wyniku promieniowania elektromagnetycznego. Moc promieniowania cieplnego ciała jest dana równaniem

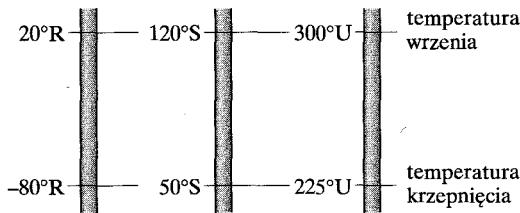
$$P_{\text{prom}} = \sigma \varepsilon S T^4, \quad (19.38)$$

gdzie  $\sigma (= 5,6703 \cdot 10^{-8} \text{ W}/(\text{m}^2 \cdot \text{K}^4))$  jest stałą Stefan-Boltzmanna,  $\varepsilon$  — zdolnością emisyjną powierzchni ciała,  $S$  — polem powierzchni ciała, a  $T$  — jego temperaturą bezwzględną. Moc absorbowana  $P_{\text{abs}}$  z otoczenia o stałej temperaturze  $T_{\text{otocz}}$  (w kelwinach) dzięki promieniowaniu cieplnemu jest równa

$$P_{\text{abs}} = \sigma \varepsilon S T_{\text{otocz}}^4. \quad (19.39)$$

## Pytania

1. Na rysunku 19.23 przedstawiono trzy liniowe skale temperatury. Na każdej z nich zaznaczono temperaturę krzepnięcia i wrzenia wody. Uszereguj od największej do najmniejszej wartości zmiany temperatury:  $25^{\circ}\text{R}$ ,  $25^{\circ}\text{S}$  i  $25^{\circ}\text{U}$ .



Rys. 19.23. Pytanie 1

2. W tabeli podano początkową długość  $L$ , zmianę temperatury  $\Delta T$  i zmianę długości  $\Delta L$  czterech prętów. Uszereguj pręty według ich współczynnika rozszerzalności cieplnej, zaczynając od jego największej wartości.

Pręt	$L$ [m]	$\Delta T$ [ $^{\circ}\text{C}$ ]	$\Delta L$ [m]
a	2	10	$4 \cdot 10^{-4}$
b	1	20	$4 \cdot 10^{-4}$
c	2	10	$8 \cdot 10^{-4}$
d	4	5	$4 \cdot 10^{-4}$

3. W izolowanym cieplnie zbiorniku umieszczono obok siebie próbki substancji A o masie  $m$  oraz próbkę substancji B o tej samej masie  $m$ , lecz wyższej temperaturze. Gdy ustalił się stan równowagi termodynamicznej, stwierdzono, że temperatura substancji A i B zmieniła się odpowiednio o  $\Delta T_A$  i  $\Delta T_B$ . Następnie powtórzono to samo doświadczenie, zestawiając próbkę substancji A z próbkami innych materiałów o tej samej masie  $m$ . Wyniki umieszczone w tabeli. Uszereguj cztery substancje użyte w doświadczeniu według ich ciepła właściwego, zaczynając od jego największej wartości.

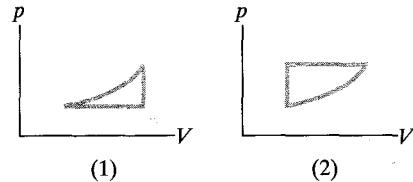
Doświadczenie	Zmiana temperatury	
1	$\Delta T_A = +50^{\circ}\text{C}$	$\Delta T_B = -50^{\circ}\text{C}$
2	$\Delta T_A = +10^{\circ}\text{C}$	$\Delta T_C = -20^{\circ}\text{C}$
3	$\Delta T_A = +2^{\circ}\text{C}$	$\Delta T_D = -40^{\circ}\text{C}$

4. Każda z substancji A, B i C znajduje się w swojej temperaturze topnienia. Stopienie 4 kg substancji A wymaga dostarczenia 200 J, 5 kg substancji B 300 J, a 6 kg substancji C również 300 J. Uszereguj te substancje według ich ciepła topnienia, zaczynając od wartości największej.

5. Na rysunku 19.24 przedstawiono wykonane we współrzędnych  $p$ - $V$  wykresy dwóch procesów cyklicznych gazu. Trzy odcinki krzywych składających się na cykl 1 mają dokładnie te same

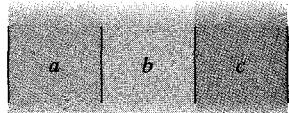
ksztalty i długości, jak dla cyklu 2. W jakim kierunku (zgodnie czy przeciwnie do ruchu wskazówek zegara) należy przeprowadzić te cykle, aby: a) całkowita praca  $W$  wykonana przez gaz miała wartość dodatnią i b) całkowite ciepło  $Q$  oddane do otoczenia przez gaz było dodatnie?

6. Który z cykli przedstawionych na rysunku 19.24 przeprowadzony w kierunku zgodnym z ruchem wskazówek zegara wiąże się z: a) wykonaniem większej pracy  $W$  i b) oddaniem większego ciepła  $Q$ ?



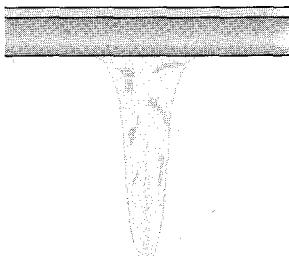
Rys. 19.24. Pytania 5 i 6

7. Na rysunku 19.25 przedstawiono płytę złożoną z trzech warstw o jednakowej grubości, ale wykonanych z różnych materiałów  $a$ ,  $b$  i  $c$  o przewodności cieplnej właściwej  $k_b > k_a > k_c$ . Załóżmy, że przez płytę przenika różny od zera, stacjonarny strumień ciepła. Uszereguj poszczególne warstwy według różnicy temperatury  $\Delta T$  na ich ścianach, zaczynając od wartości największej.



Rys. 19.25. Pytanie 7

8. Podczas wzrostu sopla lodu jego zewnętrzna powierzchnia jest pokryta cienką warstwą wody, która stopniowo spływa w dół i zbiera się w postaci pojedynczych kropelek na czubku sopla (rys. 19.26). Każda kropla znajduje się na końcu cienkiego kanałka z wodą biegącą w góre w kierunku nasady sopla (chociaż nie do samego końca). Podczas stopniowego krzepnięcia wody w górnym odcinku kanałka wydzielana jest energia. Czy energia ta jest przewodzona przez lód w kierunku radialnym na zewnątrz sopla, w dół przez wodę w kierunku kropli, czy w górę w kierunku nasady sopla? (Załącz, że temperatura powietrza jest niższa niż  $0^{\circ}\text{C}$ ).

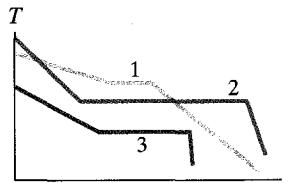


Rys. 19.26. Pytanie 8

9. Sześcian o krawędzi  $r$ , kula o promieniu  $r$  i półkula o promieniu  $r$  wykonane z tego samego materiału są utrzymywane w tem-

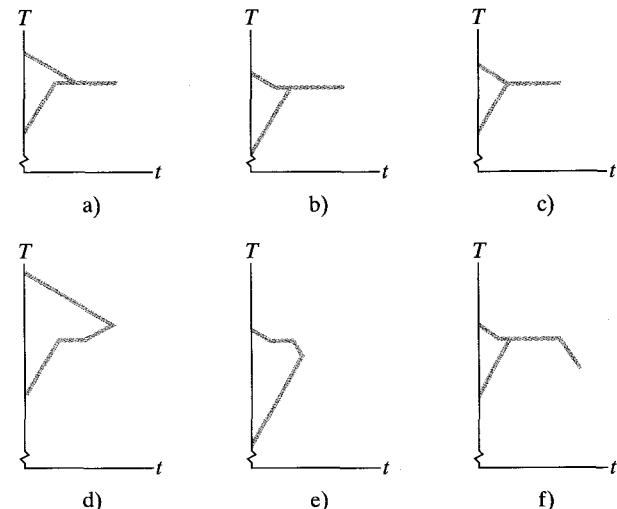
peraturze 300 K w otoczeniu, którego temperatura wynosi 350 K. Uszereguj wymienione ciała według wypadkowej mocy promieniowania cieplnego wymienianego przez nie z otoczeniem.

10. Trzy próbki różnych substancji o jednakowej masie są po kolej umieszczane w specjalnej chłodzarce o stałej mocy chłodzenia. Na początku procesu chłodzenia każda substancja znajduje się w stanie ciekłym, a na końcu w stanie stałym. Na rysunku 19.27 przedstawiono wykresy zależności temperatury  $T$  od czasu  $t$  dla wspomnianych trzech substancji. a) Czy w przypadku substancji 1 ciepło właściwe w stanie ciekłym jest większe, czy mniejsze niż w stanie stałym? Uszereguj substancje według ich: b) temperatury topnienia, c) ciepła właściwego w stanie ciekłym, d) ciepła właściwego w stanie stałym i e) ciepła topnienia. W każdym przypadku zacznij od największej wartości.



Rys. 19.27. Pytanie 10

11. Próbkę A wody i próbkę B lodu o jednakowej masie umieszczone w izolowanym cieplnie pojemniku, pozwalając im osiągnąć stan równowagi termodynamicznej. Na rysunku 19.28a naszkicowano zależność temperatury  $T$  próbek od czasu  $t$ . a) Czy w stanie równowagi temperatura jest wyższa, niższa, czy równa temperaturze krzepnięcia wody? b) Czy w stanie równowagi próbka wody jest częściowo zamarznięta, całkowicie zamarznięta, czy całkowicie ciekła? c) Czy w stanie równowagi termodynamicznej próbka lodu stopiła się częściowo, całkowicie, czy w ogóle się nie stopiła?



Rys. 19.28. Pytania 11 i 12

12. Ciąg dalszy pytania 11. Na rysunku 19.28 znajduje się 6 wykresów zależności temperatury  $T$  od czasu  $t$ . Przynajmniej jeden nie może odpowiadać sytuacji rzeczywistej. a) Który to wykres i dlaczego? b) Określ, czy na wykresach opisujących sytuacje realne temperatura równowagi jest wyższa, niższa, czy równa temperaturze krzepnięcia wody. c) Czy w przypadkach realnych w stanie równowagi próbka wody jest częściowo zamarznięta, całkowicie zamarznięta, czy całkowicie ciekła? Czy w przypadkach realnych w stanie równowagi próbka lodu stopiła się częściowo, całkowicie, czy w ogóle się nie stopiła?

## Zadania

Rozwiążanie jest dostępne na stronie internetowej podręcznika: <http://www.wiley.com/college/hrw>

Rozwiążanie jest dostępne w postaci interaktywnej, wykorzystującej oprogramowanie Interactive Learning-Ware (na tej samej stronie)

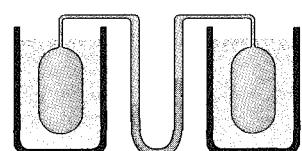
## 19.3 Pomiary temperatury

1. Zbudowano dwa termometry gazowe o stałej objętości. Jeden z nich wypełniono azotem, a drugi wodorem. Obydwa zawierają taką ilość gazu, że jego ciśnienie w temperaturze punktu potrójnego wody  $p_3$  wynosi 80 kPa. Jaka będzie różnica ciśnień w obydwu termometrach w temperaturze wrzenia wody? (Wskazówka: Patrz rysunek 19.6). Który gaz będzie mieć wyższe ciśnienie?

2. Założmy, że temperatura gazu w punkcie wrzenia wody jest równa 373,15 K. Ile wynosi graniczna wartość stosunku ciśnień gazu w temperaturze wrzenia wody i w temperaturze punktu po-

trójnego wody? (Przymij założenie, że w obydwu temperaturach gaz zajmuje identyczną objętość).

3. Pewien termometr gazowy jest zbudowany z dwóch zbiorników zanurzonych w łaźniach wodnych, jak na rysunku 19.29. Różnica ciśnień w obydwu zbiornikach jest mierzona manometrem rtęciowym w sposób pokazany na rysunku. Dodatkowe, nie narysowane zbiorniczki zapewniają zachowanie stałej objętości gazu w obydwu zbiornikach głównych. Kiedy obydwa zbiorniki znajdują się temperaturze punktu potrójnego wody, nie występuje w nich różnica ciśnień. Jeżeli jeden zbiornik ma temperaturę punktu potrójnego wody, a drugi temperaturę wrzenia wody, różnica ciśnień wynosi 120 torów. Kiedy jeden zbiornik jest w temperaturze punktu potrójnego, a drugi w nieznanej, mierzonej temperaturze, różnica ciśnień jest równa 90 torów. Ile wynosi ta temperatura?



Rys. 19.29. Zadanie 3

## 19.4 Skale Celsjusza i Fahrenheita

4. Dla jakiej temperatury w skali Fahrenheita wskazanie termometru jest a) dwa razy większe i b) dwa razy mniejsze niż w skali Celsjusza?

5. Dla jakiej temperatury (o ile to w ogóle możliwe) następujące pary skali temperatury dają ten sam wynik: a) skala Fahrenheita i Celsjusza (sprawdź dane w tabeli 19.1), b) skala Fahrenheita i Kelvina oraz c) skala Celsjusza i Kelvina?

6. a) W roku 1964 temperatura w syberyjskiej wiosce Ojmiakon osiągnęła wartość  $-71^{\circ}\text{C}$ . Jaka jest odpowiednia wartość temperatury w skali Fahrenheita? b) Najwyższa oficjalnie zarejestrowana temperatura w kontynentalnej części Stanów Zjednoczonych to  $134^{\circ}\text{F}$  w Dolinie Śmierci w Kalifornii. Jakiej wartości w skali Celsjusza odpowiada ta temperatura?

7. Nasze codzienne doświadczenie mówi nam, że gorące i zimne przedmioty stygają lub ogrzewają się do temperatury swojego otoczenia. Jeżeli różnica temperatury pomiędzy przedmiotem a jego otoczeniem  $\Delta T = T_{\text{przedm}} - T_{\text{otocz}}$  nie jest zbyt duża, szybkość chłodzenia lub ogrzewania jest w przybliżeniu proporcjonalna do tej różnicy temperatury, czyli

$$\frac{d\Delta T}{dt} = -A(\Delta T),$$

gdzie  $A$  jest stałą. (Znak minus bierze się stąd, że różnica temperatury  $\Delta T$  zmniejsza się z czasem, jeżeli  $\Delta T$  ma wartość dodatnią, i wzrasta, jeżeli  $\Delta T$  ma wartość ujemną). Zależność ta jest znana jako *prawo ostygania Newtona*. a) Od jakich czynników zależy wartość stałej  $A$ ? Jaki jest jej wymiar? b) Wykaż, że jeżeli w pewnej chwili  $t = 0$  różnica temperatury ma wartość  $\Delta T_0$ , to w późniejszej chwili  $t$

$$\Delta T = \Delta T_0 e^{-At}.$$

8. Pewnego dnia, kiedy temperatura na zewnątrz wynosiła  $7^{\circ}\text{C}$ , popsuło się ogrzewanie budynku. W rezultacie w czasie 1 h temperatura wewnętrzna spadła z  $22^{\circ}\text{C}$  do  $18^{\circ}\text{C}$ . Właścicielka naprawiła ogrzewanie, a następnie ociepliła budynek. Innego dnia, kiedy temperatura na zewnątrz również wynosiła  $7^{\circ}\text{C}$ , stwierdziła ona, że po wyłączeniu ogrzewania temperatura wewnętrzna maleje od  $22^{\circ}\text{C}$  do  $18^{\circ}\text{C}$  w czasie dwukrotnie dłuższym. Jaki jest stosunek wartości stałej  $A$  w równaniu wyrażającym prawo ostygania Newtona (patrz zadanie 7) po i przed ociepleniem budynku?

9. Założmy, że w pewnej liniowej skali temperatury X woda wrze w temperaturze  $-53,5^{\circ}\text{X}$  i zamarza w  $-170^{\circ}\text{X}$ . Jakiej wartości w skali X odpowiada temperatura  $340\text{ K}$ ?

## 19.5 Rozszerzalność cieplna

10. Aluminiowy maszt ma wysokość 33 m. O ile zmieni się jego długość, jeżeli temperatura powietrza zmieni się o  $15^{\circ}\text{C}$ ?

11. Zwierciadło teleskopu w obserwatorium Mount Palomar wykonane ze szkła pyreksowego ma średnicę 200 cali. Temperatura

powietrza waha się od  $-10^{\circ}\text{C}$  do  $50^{\circ}\text{C}$ . Ile wynosi największa zmiana średnicy zwierciadła przy założeniu, że szkło może się swobodnie rozszerzać i kurczyć?

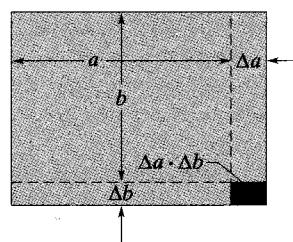
12. Pręt wykonany ze stopu aluminium ma w temperaturze  $20^{\circ}\text{C}$  długość 10,000 cm. W temperaturze wrzenia wody jego długość wzrasta do 10,015 cm. a) Ile wynosi długość pręta w temperaturze krzepnięcia wody? b) Ile wynosi temperatura, w której pręt ma długość 10,009 cm?

13. Okrągły otwór w płytce aluminiowej ma w temperaturze  $0^{\circ}\text{C}$  średnicę 2,725 cm. Jaka będzie jego średnica, jeżeli płytka zostanie ogrzana do  $100^{\circ}\text{C}$ ?

14. Ile wynosi objętość kuli ołowianej w temperaturze  $30^{\circ}\text{C}$ , jeżeli w temperaturze  $60^{\circ}\text{C}$  ma ona objętość  $50\text{ cm}^3$ ?

15. Oblicz, jak zmieni się objętość kuli aluminiowej o początkowym promieniu 10 cm po ogrzaniu jej od temperatury  $0^{\circ}\text{C}$  do  $100^{\circ}\text{C}$ .

16. Pole powierzchni  $S$  prostokątnej płytki jest równe  $ab$ . Współczynnik rozszerzalności liniowej materiału wynosi  $\alpha$ . Po ogrzaniu płytka o  $\Delta T$  bok  $a$  wydłużył się o  $\Delta a$ , a bok  $b$  o  $\Delta b$  (rys. 19.30). Wykaż, że jeżeli wartość  $(\Delta a \Delta b)/ab$  jest na tyle mała, by można ją zaniedbać, to  $\Delta S = 2\alpha S \Delta T$ .



Rys. 19.30. Zadanie 16

17. Naczynie aluminiowe o pojemności  $100\text{ cm}^3$  jest całkowicie wypełnione gliceryną o temperaturze  $22^{\circ}\text{C}$ . Ile gliceryny rozleje się (jeżeli się rozleje) po ogrzaniu naczynia i gliceryny do  $28^{\circ}\text{C}$ ? (Współczynnik rozszerzalności cieplnej gliceryny jest równy  $5,1 \cdot 10^{-4}/\text{K}$ ).

18. Długość pręta zmierzona w temperaturze  $20^{\circ}\text{C}$  stalową miarką wynosi 20,05 cm. Następnie pręt i miarkę umieszczone w piecu o temperaturze  $270^{\circ}\text{C}$ . Odczytana w tych warunkach długość pręta była równa 20,11 cm. Ile wynosi współczynnik rozszerzalności cieplnej materiału, z którego wykonano pręt?

19. Średnica stalowego pręta w temperaturze  $25^{\circ}\text{C}$  wynosi 3,000 cm. Wewnętrzna średnica mosiężnego pierścienia zmierzona również w temperaturze  $25^{\circ}\text{C}$  jest równa 2,992 cm. W jakiej temperaturze pierścień będzie można nałożyć na pręt?

20. Po ogrzaniu metalowego walca od  $0^{\circ}\text{C}$  do  $100^{\circ}\text{C}$  jego wysokość wzrosła o 0,23%. a) Oblicz zmianę gęstości walca w procentach. b) Z jakiego metalu wykonano walec? Skorzystaj z tabeli 19.2.

**21.** Wykaż, że w przypadku gdy ciśnienie ma stałą wartość, a temperatura wzrasta o  $\Delta T$ , poziom cieczy użytej w barometrze zmieni się o  $\Delta h = \beta h \Delta T$ , gdzie  $\beta$  jest współczynnikiem objętościowej rozszerzalności cieplnej. Pomiń rozszerzalność cieplną rurki szklanej.

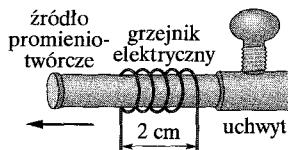
**22.** W wyniku ogrzania miedzianej monety o  $100^{\circ}\text{C}$  jej średnica wzrasta o 0,18%. Podaj procentowy przyrost: a) powierzchni, b) grubości, c) objętości i d) masy monety z dokładnością do dwóch cyfr znaczących. e) Oblicz współczynnik liniowej rozszerzalności cieplnej monety.

**23.** Wykonane z mosiądu wahadło zegara zaprojektowano tak, aby zegar dokładnie odmierzał czas w temperaturze  $20^{\circ}\text{C}$ . Ile wynosi błąd wskazań zegara w sekundach na godzinę, jeżeli znajduje się on w temperaturze  $0^{\circ}\text{C}$ ? Czy zegar w tych warunkach spieszy się, czy póżni?

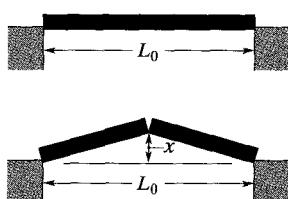
**24.** W pewnym doświadczeniu niewielkie źródło promieniotwórcze musi poruszać się z określona, bardzo małą prędkością. W praktyce zrealizowano to, mocując źródło na końcu aluminiowego pręta, ogrzewanego w kontrolowany sposób w swojej środkowej części (rys.

19.31). Przyjmijmy, że długość ogrzewanego odcinka jest równa 2 cm. Z jaką stałą szybkością musi wzrosnąć temperatura pręta, aby źródło poruszało się ze stałą prędkością  $100 \text{ nm/s}$ ?

**25.** W wyniku ogrzania o  $32^{\circ}\text{C}$  pręt z pęknięciem po środku wygią się w górę (rys. 19.32). Przyjmijmy, że stała odległość  $L_0$  pomiędzy końcami pręta wynosi  $3,77 \text{ m}$ , a współczynnik liniowej rozszerzalności cieplnej jest równy  $25 \cdot 10^{-6}/\text{C}$ . Na jaką wysokość  $x$  uniesie się środek pręta?



Rys. 19.31. Zadanie 24



Rys. 19.32. Zadanie 25

## 19.7 Pochłanianie ciepła przez ciało stałe i cieczę

**26.** Pewien dietetyk zachęca swoich pacjentów, aby pili lodowatą wodę. Według jego teorii organizm zużywa tłuszcz, aby ogrzać wodę od  $0^{\circ}\text{C}$  do temperatury ciała, czyli  $37^{\circ}\text{C}$ . Ile takiej wody trzeba by wypić, aby „spalić”  $454 \text{ g}$  tłuszczu, zakładając, że wymaga to oddania wodzie  $3500 \text{ Cal ciepła}$ ? Dlaczego stosowanie takiej diety nie jest rozsądne? (W obliczeniach przyjmij, że  $1 \text{ litr} = 10^3 \text{ cm}^3$ . Gęstość wody wynosi  $1 \text{ g/cm}^3$ ).

**27.** Masa molowa pewnej substancji wynosi  $50 \text{ g/mol}$ . Dostarczenie próbce tej substancji, o masie  $30 \text{ g}$  i temperaturze  $25^{\circ}\text{C}$ ,  $314 \text{ J}$  energii w postaci ciepła powoduje jej ogrzanie do  $45^{\circ}\text{C}$ . Ile wynosi a) ciepło właściwe i b) molowe ciepło właściwe tej substancji? c) Ile moli substancji zawiera próbka?

**28.** Jaka część z  $260 \text{ g}$  wody znajdującej się w temperaturze krzepnięcia nie zamarznie, jeżeli odbierzemy jej  $50,2 \text{ kJ}$  ciepła?

**29.** Oblicz minimalną energię (w dżulach) potrzebną do całkowitego stopienia  $130 \text{ g}$  srebra o temperaturze początkowej  $15^{\circ}\text{C}$ .

**30.** Pokój oświetlają cztery żarówki o mocy  $100 \text{ W}$  każda. (Moc  $100 \text{ W}$  oznacza szybkość zamiany energii elektrycznej na ciepło i światło). Ile ciepła ogrzewa pokój w czasie  $1 \text{ h}$ , jeżeli w ciepło zamienia się  $90\%$  energii elektrycznej?

**31.** Atleta potrafi zużyć całą energię zawartą w diecie o wartości  $4000 \text{ Cal/d}$ . Założymy, że atleta zużywa energię ze stałą szybkością. Porównaj jego moc z mocą żarówki o mocy  $100 \text{ W}$ . (Moc  $100 \text{ W}$  oznacza szybkość, z jaką żarówka zamienia energię elektryczną na ciepło i światło).

**32.** Ile gramów masła o wartości energetycznej  $6 \text{ Cal/g}$  ( $= 6000 \text{ cal/g}$ ) jest równoważne zmianie grawitacyjnej energii potencjalnej człowieka o masie  $73 \text{ kg}$ , który wszedł z poziomu morza na szczyt Mt. Everest o wysokości  $8,84 \text{ km}$ ? Przyjmij, że średnia wartość przyspieszenia ziemskiego  $g$  jest równa  $9,80 \text{ m/s}^2$ .

**33.** Wywiercenie dziury w bloku miedzi o masie  $1,6 \text{ funta}$  wymaga mocy  $0,4 \text{ KM}$  dostarczanej przez  $2 \text{ min}$ . a) Ile ciepła (w  $\text{Btu}$ ) wydziela się, jeżeli założymy, że wspomniana moc jest równa szybkości wytwarzania energii termicznej? b) O ile wzrośnie temperatura miedzi, jeżeli pochłonie ona  $75\%$  wyтворzonego ciepła? (W celu zamiany jednostek energii skorzystaj z danych w dodatku D oraz ze wzoru (19.12)).

**34.** Jednym ze sposobów zapobieżenia zbyt silnemu wychłodzeniu garażu w czasie silnego mrozu jest umieszczenie w nim zbiornika wypełnionego wodą. Przyjmij, że zbiornik zawiera  $125 \text{ kg}$  wody o temperaturze początkowej  $20^{\circ}\text{C}$ . a) Ile energii musi oddać do otoczenia ta ilość wody, aby w całości zamarznąć? b) Jaka będzie najniższa możliwa temperatura otoczenia i wody przed jej całkowitym zamarznięciem?

**35.** Niewielka grzałka elektryczna służy podgrzaniu  $100 \text{ g}$  wody w celu przyrządzenia filiżanki kawy rozpuszczalnej. Na grzałce widnieje napis „ $200 \text{ W}$ ”, co oznacza, że zamienia ona energię elektryczną na ciepło z taką właśnie szybkością. Oblicz, jak długo potrwa podgrzanie podanej ilości wody od  $23^{\circ}\text{C}$  do  $100^{\circ}\text{C}$ , jeżeli zaniedba się straty ciepła.

**36.** Naczynie miedziane o masie  $150 \text{ g}$  zawiera  $220 \text{ g}$  wody. Woda i naczynie mają taką samą temperaturę  $20^{\circ}\text{C}$ . Do naczynia wrzucono rozgrzany walec miedziany o masie  $300 \text{ g}$ . W rezul-

tacie woda zaczęła wrzeć, a 5 g zmieniło się w parę. Końcowa temperatura układu wynosi  $100^{\circ}\text{C}$ . Zaniedbaj wymianę energii z otoczeniem. a) Ile ciepła (w kaloriach) zostało przekazane wodzie? b) Ile ciepła otrzymała naczynie? c) Jaka była początkowa temperatura walca?

**37.** Kucharz stwierdził, że jego kuchenka popsuła się, postanowił zagotować wodę na kawę dla żony, potrząsając termosem. Założmy, że woda z kranu ma temperaturę  $15^{\circ}\text{C}$ , podczas każdego potrząśnięcia termosem woda spada z wysokości 30 cm, a kucharz może w ciągu minuty 30 razy potrząsnąć termosem. Zaniedbując wymianę energii z otoczeniem, oblicz jak długo kucharz musi potrząsać termosem, aby woda osiągnęła temperaturę  $100^{\circ}\text{C}$ .

**38.** Jak długo grzejnik o mocy  $59 \text{ kW}$  musi ogrzewać  $150 \text{ l}$  wody, aby jej temperatura wzrosła od  $21^{\circ}\text{C}$  do  $38^{\circ}\text{C}$ ?

**39.** Alkohol etylowy wrze w temperaturze  $78^{\circ}\text{C}$ , a krzepnie przy  $-114^{\circ}\text{C}$ , jego ciepło parowania wynosi  $879 \text{ kJ/kg}$ , ciepło krzepnięcia  $109 \text{ kJ/kg}$ , a ciepło właściwe  $2,43 \text{ kJ/(kg} \cdot \text{K)}$ . Ile energii trzeba odebrać od  $0,51 \text{ kg}$  alkoholu etylowego, który z początku jest gazem o temperaturze  $78^{\circ}\text{C}$ , aby zamienić go w ciało stałe o temperaturze  $-114^{\circ}\text{C}$ ?

**40.** Samochód o masie  $1500 \text{ kg}$  jadący z prędkością  $90 \text{ km/h}$  zaczyna hamować i poruszając się ruchem jednostajnie opóźnionym bez poślizgu, zatrzymuje się na odcinku  $80 \text{ m}$ . W jakim tempie hamulce zamieniają energię mechaniczną w energię termiczną?

**41.** Ciepło właściwe pewnej substancji zmienia się z temperaturą zgodnie ze wzorem  $c = 0,2 + 0,14T + 0,023T^2$ , gdzie temperatura  $T$  jest wyrażona w  $^{\circ}\text{C}$ , a ciepło właściwe  $c$  w  $\text{cal}/(\text{g} \cdot \text{K})$ . Oblicz energię potrzebną do ogrzania dwóch gramów tej substancji od  $5^{\circ}\text{C}$  do  $15^{\circ}\text{C}$ .

**42.** W słonecznym podgrzewaczu wody energia słoneczna jest absorbowana przez wodę krążącą w rurach kolektora zamontowanego na dachu. Woda jest następnie przepompowywana do zbiornika. Przyjmij, że sprawność tego procesu wynosi  $20\%$ , tzn.  $80\%$  energii słonecznej jest tracone w układzie. Jaka musi być powierzchnia kolektora, aby w ciągu  $1 \text{ h}$  można było ogrzać  $200 \text{ l}$  wody, zwiększając jej temperaturę od  $20^{\circ}\text{C}$  do  $40^{\circ}\text{C}$ , przy założeniu, że natężenie promieniowania słonecznego wynosi  $700 \text{ W/m}^2$ ?

**43.** Ile pary wodnej o temperaturze  $100^{\circ}\text{C}$  trzeba wpuścić do izolowanego cieplnie zbiornika zawierającego  $150 \text{ g}$  lodu o temperaturze topnienia, aby w stanie końcowym otrzymać wodę o temperaturze  $50^{\circ}\text{C}$ ?

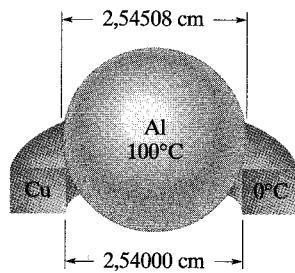
**44.** Pewna osoba przyrządza mrozoną herbatę, miesząc  $500 \text{ g}$  gorącej herbaty (będącej niemal w całości wodą) z taką samą masą lodu o temperaturze topnienia. Jaka będzie temperatura końcowa herbaty i ile lodu będzie w niej pływać, jeżeli założymy, że gorąca herbata miała temperaturę a)  $90^{\circ}\text{C}$  i b)  $70^{\circ}\text{C}$ ? Zaniedbaj wymianę ciepła z otoczeniem.

**45.** a) Dwie kostki lodu o masie  $50 \text{ g}$  każda wrzucono do termosu zawierającego  $200 \text{ g}$  wody. Jaka będzie temperatura końcowa po osiągnięciu przez układ równowagi termodynamicznej,

jeżeli woda miała początkowo temperaturę  $25^{\circ}\text{C}$ , a lód wyjęto z zamrażarki, w której panowała temperatura  $-15^{\circ}\text{C}$ ? b) Jaka byłaby temperatura końcowa w przypadku, gdyby wzięto tylko jedną kostkę lodu?

**46.** W termosie znajduje się  $130 \text{ cm}^3$  gorącej kawy o temperaturze  $80^{\circ}\text{C}$ . W celu ochłodzenia kawy wrzucasz do termosu kostkę lodu o masie  $12 \text{ g}$  i temperaturze równej temperaturze topnienia. O ile stopni spadnie temperatura kawy po stopieniu lodu? Uznaj, że kawa jest czystą wodą i zaniedbaj wymianę energii z otoczeniem.

**47.** Pierścień miedziany o masie  $20 \text{ g}$  ma temperaturę  $0^{\circ}\text{C}$  i średnicę  $2,54000 \text{ cm}$ . Kula z glinu ma temperaturę  $100^{\circ}\text{C}$  i średnicę  $2,54508 \text{ cm}$ . Kulę kładziemy na pierścieniu (rys. 19.33) i pozwalamy, aby obydwa ciała osiągnęły stan równowagi termodynamicznej, nie wymieniając ciepła z otoczeniem. W chwili osiągnięcia równowagi termodynamicznej kula przechodzi przez środek pierścienia. Ile wynosi jej masa?

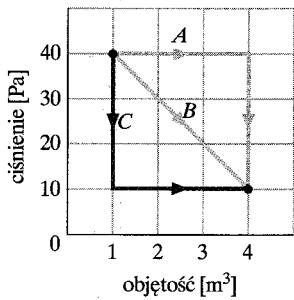


Rys. 19.33. Zadanie 47

### 19.10 Niektóre szczególne przypadki pierwszej zasady termodynamiki

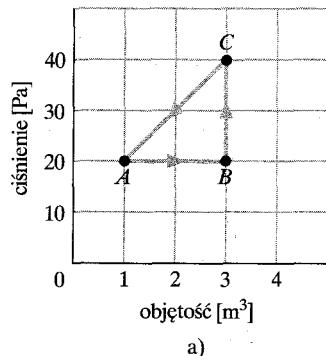
**48.** Nad pewnym układem wykonano pracę równą  $200 \text{ J}$  i odebrano z niego  $70 \text{ cal}$  ciepła. Jaką wartość (i znak, zgodnie z konwencją przyjętą w pierwszej zasadzie termodynamiki) ma: a) praca  $W$ , b) ciepło  $Q$  i c) zmiana energii wewnętrznej  $\Delta E_w$ ?

**49.** Próbka gazu zwiększa swoją objętość od  $1 \text{ m}^3$  do  $4 \text{ m}^3$ , a jednocześnie jej ciśnienie maleje od  $40 \text{ Pa}$  do  $10 \text{ Pa}$ . Jaką pracę wykoną gaz, jeżeli ciśnienie będzie się zmieniać ze zmianą objętości w sposób opisany trzema wykresami we współrzędnych  $p$ - $V$ , przedstawionymi na rysunku 19.34?



Rys. 19.34. Zadanie 49

**50.** Układ termodynamiczny został przeprowadzony od stanu początkowego  $A$  do innego stanu  $B$ , a następnie z powrotem do stanu  $A$  przez stan  $C$ , zgodnie z linią  $ABC$  widoczną na wykresie  $p$ - $V$  z rysunku 19.35a. a) Uzupełnij tabelę z rysunku 19.35b, wpisując znak + lub - odzwierciedlający charakter zmiany odpowiadających zmianom parametrów.



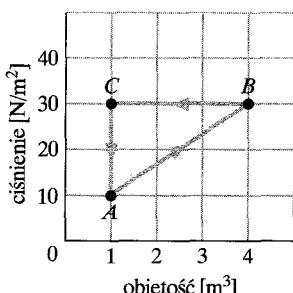
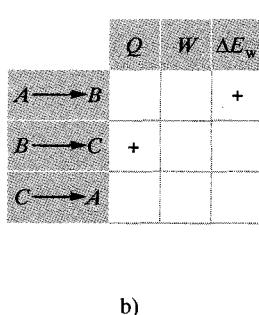
Rys. 19.35. Zadanie 50

wiednych wartości w każdym z procesów cząstkowych. b) Oblicz wartość liczbową całkowitej pracy wykonanej przez układ w cyklu  $ABCA$ .

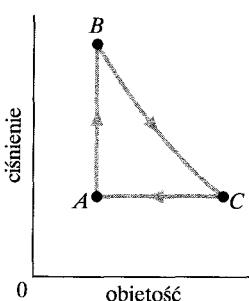
51. Gaz w zamkniętej komorze został poddany przemianie cyklicznej przedstawionej na wykresie  $p$ - $V$  z rysunku 19.36. Oblicz łączną wartość ciepła dostarczonego do układu w całym cyklu.

52. Gaz zamknięty w komorze został poddany przemianie cyklicznej zilustrowanej wykresem z rysunku 19.37. Oblicz, ile ciepła oddał układ w procesie  $CA$ , jeżeli ciepło dostarczone do układu w procesie  $AB$  było równe 20 J, w procesie  $BC$  energia nie była wymieniana w postaci ciepła, a wypadkowa praca wykonana przez układ w czasie całego cyklu wyniosła 15 J.

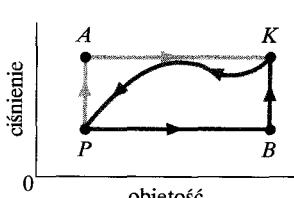
53. W przypadku gdy pewien układ jest przeprowadzany od stanu początkowego  $P$  do stanu końcowego  $K$  wzduż krzywej  $PAK$  widocznej na wykresie  $p$ - $V$  z rysunku 19.38, ciepło  $Q$  ma wartość 50 cal, a praca  $W$  20 cal. Jeżeli proces zostanie przeprowadzony w sposób opisany krzywą  $PBK$ , to  $Q = 36$  cal. a) Jaką pracę  $W$  wykona układ w przemianie  $PBK$ ? b) Jaka była



Rys. 19.36. Zadanie 51



Rys. 19.37. Zadanie 52



Rys. 19.38. Zadanie 53

wartość ciepła  $Q$ , jeżeli w procesie odwrotnym  $KP$  układ wykonał pracę  $W = -13$  cal? c) Załóż, że energia wewnętrzna układu w stanie początkowym  $E_{w,pocz}$  jest równa 10 cal. Ile wynosi energia wewnętrzna układu  $E_{w,końc}$  w stanie końcowym? d) Załóż, że energia wewnętrzna układu  $E_{w,B}$  w punkcie  $B$  wynosi 22 cal. Jakią są wartości ciepła dostarczonego do układu w procesach  $PB$  i  $BK$ ?

### 19.11 Mechanizmy przekazywania ciepła

54. Na obszarze Ameryki Północnej średnia szybkość przenoszenia energii z wnętrza na powierzchnię Ziemi na drodze przewodnictwa cieplnego jest równa  $54 \text{ mW/m}^2$ . Średnia przewodność cieplna właściwa przypowierzchniowej warstwy skorupy ziemskiej wynosi  $2,5 \text{ W/(m} \cdot \text{K)}$ . Oblicz, jaka temperatura panuje na głębokości 35 km (czyli w pobliżu dna skorupy ziemskiej), jeżeli temperatura na powierzchni wynosi  $10^\circ\text{C}$ . Zaniedbaj ciepło wytwarzane na skutek rozpadu pierwiastków promieniotwórczych.

55. Opór cieplny  $R$  metra kwadratowego pokrycia dachu domku jednorodzinnego w chłodnej strefie klimatycznej powinien być zbliżony do  $30 \text{ K/W}$ . Jak gruba musi być odpowiednia warstwa izolacyjna wykonana z: a) pianki poliuretanowej i b) srebra?

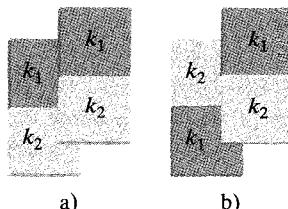
56. a) Oblicz strumień ciepła uciekającego z organizmu narciarza przez jego ubranie, jeżeli przyjmie się następujące dane: pole powierzchni ciała  $1,8 \text{ m}^2$ ; grubość ubrania  $1 \text{ cm}$ , temperatura skóry  $33^\circ\text{C}$ ; temperatura powietrza  $1^\circ\text{C}$  i przewodność cieplna właściwa ubrania  $0,04 \text{ W/(m} \cdot \text{K)}$ . b) Jak zmieniłby się wynik uzyskany w punkcie (a), jeżeli w wyniku upadku kombinezon narciarza nasiąkłyby wodą, której przewodność cieplna właściwa wynosi  $0,6 \text{ W/(m} \cdot \text{K)}$ ?

57. Rozważmy płytkę przedstawioną na rysunku 19.18. Założymy, że wykonano ją z miedzi oraz że jej grubość  $L = 25 \text{ cm}$ , a pole powierzchni  $S = 90 \text{ cm}^2$ . Przymijmy ponadto, że  $T_G = 125^\circ\text{C}$ ,  $T_Z = 10^\circ\text{C}$  i osiągnięty został stan stacjonarny. Oblicz, ile wynosi strumień ciepła przenikającego przez płytke.

58. Wyobraź sobie, że miałbyś odbyć krótki spacer w przestrzeni kosmicznej, w dużej odległości od Słońca, bez odpowiedniego kombinezonu. Odczułbyś wtedy chłód kosmiczny — twoje ciało wypromieniowałoby energię, nie pochłaniając prawie żadnej z otoczenia. a) Z jaką szybkością traciłbyś energię? b) Ile energii straciłbyś w ciągu 30 s? Przymij, że zdolność emisyjna ciała jest równa 0,9 i oszacuj wartości pozostałych wielkości niezbędnych do obliczeń.

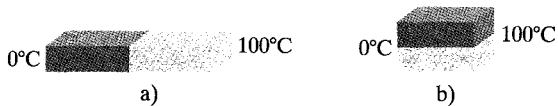
59. Walcowy pręt miedziany o długości  $1,2 \text{ m}$  i polu przekroju poprzecznego  $4,8 \text{ cm}^2$  jest starannie izolowany, aby ciepło nie uciekało przez boczne ścianki. Końce pręta umieszczonej odpowiednio w mieszaninie wody z lodem i w parze nad wrzącą wodą, dzięki czemu utrzymywana jest między nimi stała różnica temperatury  $100^\circ\text{C}$ . a) Oblicz strumień ciepła wzduż pręta. b) Oblicz, w jakim tempie będzie topić się lód w pobliżu zimnego końca pręta.

**60.** W celu wykonania pokrywy do prostokątnego otworu o polu powierzchni  $2S$  masz do dyspozycji cztery kwadratowe kawałki izolacji o tej samej grubości i polu powierzchni  $S$  z dwóch różnych materiałów. Pokrywę można wykonać na dwa różne sposoby przedstawione na rysunku 19.39. Który z układów (a) czy (b) da mniejszy przepływ energii przy założeniu, że  $k_2 \neq k_1$ ?



Rys. 19.39. Zadanie 60

**61.** Dwa identyczne prety o przekroju prostokątnym, połączone ze sobą jak na rysunku 19.40a, przewodzą w stanie stacjonarnym w czasie 2 min 10 J ciepła. W jakim czasie przepłynie 10 J ciepła, jeżeli prety zostaną połączone tak, jak na rysunku 19.40b?

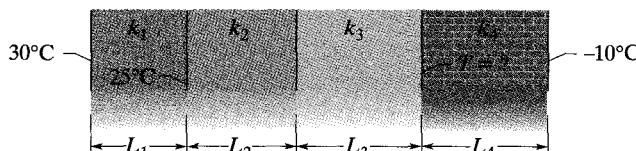


Rys. 19.40. Zadanie 61

**62.** Kulę o promieniu 0,5 m, temperaturze  $27^\circ\text{C}$  i zdolności emisyjnej 0,85 umieszczono w otoczeniu o temperaturze  $77^\circ\text{C}$ . Z jaką szybkością kula: a) emituje i b) pochłania promieniowanie cieplne? c) Jaka jest wypadkowa szybkość wymiany energii przez kulę?

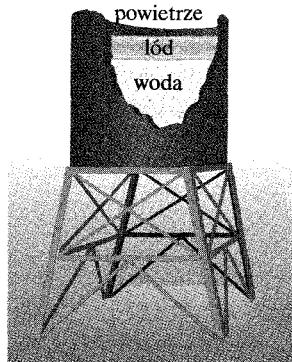
**63.** Z jaką szybkością (w watach na metr kwadratowy) ucieka energia przez szklaną szybę o grubości 3 mm, jeżeli temperatura na zewnątrz wynosi  $-20^\circ\text{F}$ , a wewnętrzna  $+72^\circ\text{F}$ ? b) Jaka będzie szybkość strat energii, jeżeli równolegle do pierwszej szyby, w odległości 7,5 cm od niej zostanie umieszczona druga taka sama szyba? Przyjmij, że przewodnictwo jest jedynym istotnym mechanizmem odpowiadającym za straty energii.

**64.** Na rysunku 19.41 przedstawiono przekrój ściany składającej się z czterech warstw. Znane są wartości przewodności cieplnej właściwej:  $k_1 = 0,06 \text{ W}/(\text{m} \cdot \text{K})$ ,  $k_3 = 0,04 \text{ W}/(\text{m} \cdot \text{K})$  i  $k_4 = 0,12 \text{ W}/(\text{m} \cdot \text{K})$  (wartość  $k_2$  nie jest znana). Warstwy mają grubości:  $L_1 = 1,5 \text{ cm}$ ,  $L_3 = 2,8 \text{ cm}$  i  $L_4 = 3,5 \text{ cm}$  (grubość  $L_2$  nie jest znana). Strumień ciepła przez ścianę osiągnął wartość stacjonarną. Ile wynosi temperatura  $T$  na oznaczonej granicy warstw?



Rys. 19.41. Zadanie 64

**65.** Woda w zbiorniku pokryła się w czasie mroźnej pogody warstwą lodu o grubości 5 cm (rys. 19.42). Powietrze nad lodem ma temperaturę  $-10^\circ\text{C}$ . Oblicz szybkość przystącania grubości lodu (w centymetrach na godzinę). Przyjmij, że przewodność cieplna i gęstość lodu są odpowiednio równe  $0,004 \text{ cal}/(\text{s} \cdot \text{cm} \cdot {}^\circ\text{C})$  oraz  $0,92 \text{ g}/\text{cm}^3$ . Przyjmij założenie, że nie ma przepływu ciepła przez ścianki boczne ani podstawę zbiornika.



Rys. 19.42. Zadanie 65

**66.** Powierzchnię płytkego stawu pokryła warstwa lodu. Strumień ciepła przez tę warstwę ma wartość stacjonarną. Powietrze nad lodem ma temperaturę  $-5^\circ\text{C}$ , a woda na dnie stawu  $4^\circ\text{C}$ . Jak gruba jest warstwa lodu, jeżeli całkowita grubość układu lód + woda wynosi 1,4 m? (Przyjmij, że lód i woda mają przewodność cieplną odpowiednio 0,4 i  $0,12 \text{ cal}/(\text{s} \cdot \text{cm} \cdot {}^\circ\text{C})$ ).

### Zadania dodatkowe

**67.** Do na wpół tajnego klubu „300 F” działającego w stacji Amundsena i Scotta na biegunie południowym można przystąpić tylko wtedy, kiedy temperatura na zewnątrz spada poniżej  $-70^\circ\text{C}$ . Aby to uczynić, trzeba najpierw przebywać w gorącej saunie, a następnie odbyć bieg na zewnątrz budynku, mając na sobie jedynie buty. (Jest to wprawdzie bardzo niebezpieczne, ale cel jest szczytny — chodzi o protest przeciwko mrozom na biegunie południowym).

Przyjmij założenie, że bezpośrednio po opuszczeniu sauny temperatura twojej skóry wynosi  $102^\circ\text{F}$ , a ściany, sufit i podłoga sauny mają temperaturę  $30^\circ\text{C}$ . Oszacuj powierzchnię swojego ciała i przyjmij, że ma ono zdolność emisyjną 0,8. a) Jaka jest przybliżona szybkość strat energii z twojego ciała we wnętrzu pomieszczenia? Założymy teraz, że kiedy wybierasz na zewnątrz, połowa twojego ciała wymienia energię z niebem o temperaturze  $-25^\circ\text{C}$ , a druga połowa ze śniegiem i lodem o temperaturze  $-80^\circ\text{C}$ . Ile wynosi przybliżona moc strat twojej energii na rzecz b) nieba i c) śniegu i lodu?

**68.** Pingwiny cesarskie, których wygląd kojarzy się z angielskimi kamerdynerami, wychowują potomstwo nawet podczas mroźnej antarktycznej zimy. Po złożeniu przez samicę jaja samiec utrzymuje je na stopach, aby zapobiec jego wychłodzeniu. Musi to robić bez przerwy przez okres aż do wylęgu, co trwa od 105 do 115 dni, nie mogąc w tym czasie jeść, gdyż jego pokarm znajduje się w wodzie. Tak długi okres bez pożywienia pingwin może przetrwać tylko wtedy, gdy zdoła znacznie ograniczyć swoje zapotrzebowanie na energię. Jeżeli przebywa sam, utrzymanie stałej

temperatury wymaga zbyt wiele energii i w końcu musi porzucić jajo, aby zdobyć pokarm. Aby chronić się nawzajem przed stratami energii, samce skupiają się w grupy liczące kilka tysięcy osobników. Oprócz innych korzyści pozwala to zmniejszyć straty energii na skutek wymiany promieniowania cieplnego.

Założymy, że pingwin jest walcem o polu podstawy  $a$ , wysokości  $h$ , temperaturze powierzchni  $T$  i zdolności emisyjnej  $\varepsilon$ .  
a) Znайдź równanie wyrażające moc  $P_i$ , z którą pojedynczy samiec wypromieniuje energię przez powierzchnię górnej podstawy i powierzchnię boczną.

Jeżeli  $N$  samców znajdowałoby się w dużych odległościach od siebie, całkowita energia tracona w wyniku promieniowania byłaby równa  $NP_i$ . Wyobraźmy sobie teraz, że skupiają się one ści-

śle, tworząc walec o polu podstawy  $Na$  i wysokości  $h$ . b) Znайдź równanie pozwalające obliczyć moc  $P_g$  strat energii grupy pingwinów w wyniku promieniowania.

c) Przyjmując wartości  $a = 0,34 \text{ m}^2$  i  $h = 1,1 \text{ m}$  oraz korzystając z wyprowadzonych równań na  $P_i$  i  $P_g$ , wykonaj wykres przedstawiający zależność  $P_g/NP_i$  od  $N$ . Oczywiście pingwiny nie wiedzą nic na temat algebry i wykresów, ale instynkt nakazuje im zbierać się w grupy, aby z jak największej liczby jaj mogły wykluć się pisklęta. Na podstawie wykresów (prawdopodobnie musisz wykonać kilka wersji) odpowiedz, ile pingwinów musi zebrać się w grupę, aby stosunek  $P_g/NP_i$  zmalał do: d) 0,5, e) 0,4, f) 0,3, g) 0,2 i h) 0,15. i) Ile wynosi dla przyjętych wartości dolna granica stosunku  $P_g/NP_i$ ?

# 20 Kinetyczna teoria gazów

Wokół wylotu otwieranej butelki ze schłodzonym szampanem, wodą sodową lub innym napojem gazowanym tworzy się delikatna mgiełka, a część cieczy wyplynąca na zewnątrz. (Na zdjęciu mgiełka jest widoczna w postaci białej chmurki otaczającej korek, poprzecinanej strugami cieczy).

**Co powoduje powstawanie mgiełki?**

Odpowiedź znajdziesz w tym rozdziale.



## 20.1. Nowe spojrzenie na gazy

Termodynamika klasyczna — temat, któremu poświęciliśmy poprzedni rozdział — nie wspomina o atomach. Jej prawa opisują tylko wielkości makroskopowe, jak ciśnienie, objętość i temperatura. Wiemy jednak, że gaz tworzą poruszające się atomy lub cząsteczki (związane grupy atomów). Jest oczywiste, że ciśnienie wywierane przez gaz musi być skutkiem zderzeń cząsteczek ze ściankami zbiornika, zdolność gazu do wypełnienia całej objętości zbiornika jest konsekwencją swobody ruchu cząsteczek, a temperatura i energia wewnętrzna zależą od energii kinetycznej tych cząsteczek. Możemy więc dowiedzieć się czegoś na temat gazów, analizując problem z cząsteczkowego punktu widzenia. Podejście takie jest istotą **kinetycznej teorii gazów**, której poświęcimy obecny rozdział.

## 20.2. Liczba Avogadra

Kiedy zajmujemy się cząsteczkami, wygodnie jest wyrażać wielkość próbki w molach. W ten sposób łatwo upewnić się, czy mamy do czynienia z próbками zawierającymi te same liczby atomów lub cząsteczek. *Mol* to jedna z siedmiu podstawowych jednostek układu SI. Definiujemy ją następująco:

► Jeden mol to liczba atomów w próbce węgla-12 o masie 12 g.

Nasuwa się oczywiście pytanie: „Ile atomów lub cząsteczek stanowi jeden mol?” Odpowiedź można uzyskać na drodze doświadczalnej. Jak wiesz z rozdziału 19,

$$N_A = 6,02 \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1} \quad (\text{liczba Avogadra}), \quad (20.1)$$

gdzie  $\text{mol}^{-1}$  oznacza odwrotność mola, co wypowiadamy „na mol”. Liczba  $N_A$  jest nazywana **liczbą Avogadra**. Upamiętniono tak włoskiego fizyka Amadea Avogadre (1776–1856), który pierwszy zasugerował, że wszystkie gazy zajmujące taką samą objętość w tych samych warunkach temperatury i ciśnienia zawierają taką samą liczbę cząsteczek.

Liczba moli  $n$  w próbce dowolnej substancji jest równa ilorazowi liczby cząsteczek  $N$  w tej próbce i liczby cząsteczek w 1 molu  $N_A$ :

$$n = \frac{N}{N_A}. \quad (20.2)$$

(*Uwaga:* Trzy symbole występujące w tym równaniu łatwo ze sobą pomylić i dla tego powinniście już teraz dobrze zrozumieć ich znaczenie, aby nie pogubić się w gąszczu symboli  $N$ ). Liczbę moli  $n$  w próbce możemy wyznaczyć, znając masę próbki  $M_{\text{pr}}$  i jej masę molową  $M$  (masę 1 mola) lub masę cząsteczkową  $m$  (masę jednej cząsteczki):

$$n = \frac{M_{\text{pr}}}{M} = \frac{M_{\text{pr}}}{m N_A}. \quad (20.3)$$

Zapisując równanie (20.3), skorzystaliśmy z faktu, że masa jednego mola  $M$  jest iloczynem masy jednej cząsteczki  $m$  i liczby cząsteczek  $N_A$  w 1 molu:

$$M = mN_A. \quad (20.4)$$

## Sztuka rozwiązywania zadań

### Porad 1: Liczba Avogadra — czego to jest liczba?

W równaniu (20.1) liczbę Avogadra zapisaliśmy w jednostkach  $\text{mol}^{-1}$ , będących odwrotnością mola, czyli 1/mol. Równie dobrze moglibyśmy wprost podać jednostkę odpowiednią dla konkret-

nej sytuacji. Na przykład, jeżeli rozważanymi elementami byłyby atomy, moglibyśmy napisać  $N_A = 6,02 \cdot 10^{23}$  atomów/mol. Jeżeli elementami byłyby cząsteczki, napisalibyśmy  $N_A = 6,02 \cdot 10^{23}$  cząsteczek/mol.

## 20.3. Gazy doskonałe

Celem, który postawiliśmy sobie w tym rozdziale, jest opisanie makroskopowych właściwości gazu — takich jak ciśnienie i temperatura — na podstawie zachowania się tworzących go cząsteczek. Nasuwa się jednak pytanie: jaki właściwie gaz mamy opisywać? Czy ma to być wodór, tlen, metan, a może sześciiofluorek uranu? Z pewnością są to różne gazy. Na drodze doświadczalnej można się jednak przekonać, że jeżeli weźmiemy próbki o wielkości 1 mola każdego z tych gazów, zamkniemy je w zbiornikach o jednakowej objętości, które umieścimy w takiej samej temperaturze, to zmierzone ciśnienia będą niemal — chociaż nie dokładnie — identyczne. Jeżeli będziemy powtarzać te same pomiary dla gazów o coraz mniejszej gęstości, niewielkie różnice ciśnienia jeszcze bardziej zmaleją. Doświadczenie pokazuje, że wszystkie gazy rzeczywiste przy dostatecznie małej gęstości można opisać jednym równaniem

$$pV = nRT \quad (\text{równanie stanu gazu doskonałego}), \quad (20.5)$$

gdzie  $p$  oznacza bezwzględną wartość ciśnienia,  $n$  — liczbę moli gazu w próbce, a  $T$  — temperaturę bezwzględną gazu. Symbol  $R$  oznacza pewną stałą nazywaną **stałą gazową**, która ma tę samą wartość dla wszystkich gazów

$$R = 8,31 \text{ J/(mol} \cdot \text{K}). \quad (20.6)$$

Równanie (20.5) nazywamy **równaniem stanu gazu doskonałego**. Jeżeli gęstość jest dostatecznie mała, obowiązuje ono zarówno dla gazu jednoskładnikowego, jak i dla mieszaniny gazów. (W przypadku mieszaniny  $n$  oznacza całkowitą liczbę moli w mieszaninie).

Równanie (20.5) przepiszymy teraz w innej postaci, wprowadzając doń **stałą Boltzmanna**  $k$ , zdefiniowaną jako

$$k = \frac{R}{N_A} = \frac{8,31 \text{ J/(mol} \cdot \text{K)}}{6,02 \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1}} = 1,38 \cdot 10^{-23} \text{ J/K}. \quad (20.7)$$

Dzięki temu możemy napisać  $R = kN_A$ . Z równania (20.2) ( $n = N/N_A$ ) wynika, że

$$nR = Nk. \quad (20.8)$$

Podstawiając tę zależność do równania (20.5), otrzymujemy inną postać równania stanu gazu doskonałego:

$$pV = NkT \quad (\text{równanie gazu doskonałego}). \quad (20.9)$$

(Uwaga: Zwróćcie uwagę na różnicę między obydwoma postaciami równania stanu gazu doskonałego — w równaniu (20.5) występuje liczba moli  $n$ , a w równaniu (20.9) liczba cząsteczek  $N$ ).

Z pewnością korsi was, aby zapytać: „Co to takiego jest *gaz doskonały* i co w nim jest ‘doskonałego’?” Odpowiedzią jest prostota równań (20.5) i (20.9), które opisują jego makroskopowe właściwości. Przekonacie się, że korzystając z tych równań, z łatwością wydedukujemy szereg dalszych właściwości gazu doskonałego. Chociaż w przyrodzie nie istnieje gaz doskonały, to *wszystkie gazy rzeczywiste*, o ile ich gęstość jest dostatecznie mała — to znaczy cząsteczki znajdujące się na tyle daleko od siebie, że można zaniedbać oddziaływanie między nimi — zachowują się w przybliżeniu jak gaz doskonały. Wprowadzając model gazu doskonałego, możemy badać zachowanie gazów rzeczywistych w granicznym przypadku małych gęstości.

### Praca wykonywana przez gaz doskonały w stałej temperaturze

Wyobraźmy sobie, że umieszczaemy gaz doskonały w cylindrze zamkniętym tłem tak, jak to opisywaliśmy w rozdziale 19. Założmy też, że pozwalamy, aby gaz rozszerzał się od początkowej objętości  $V_{\text{pocz}}$  do objętości końcowej  $V_{\text{kofc}}$ , podczas gdy my cały czas utrzymujemy go w stałej temperaturze  $T$ . Taki proces przeprowadzany przy *stałej temperaturze* nazywamy **rozprężaniem izotermicznym** (przemiana odwrotna to **sprężanie izotermiczne**).

Na wykresie we współrzędnych  $p$ - $V$  izoterma jest krzywą łączącą punkty odpowiadające tej samej temperaturze. Dlatego przedstawia ona zmiany ciśnienia w zależności od objętości dla gazu utrzymywanego w stałej temperaturze  $T$ . W przypadku  $n$  moli gazu doskonałego izoterma jest opisana równaniem

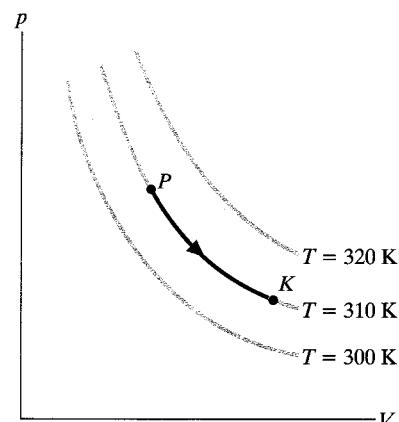
$$p = nRT \frac{1}{V} = (\text{pewna stała}) \cdot \frac{1}{V}. \quad (20.10)$$

Wykres z rysunku 20.1 przedstawia trzy izotermy, każda odpowiadająca innej (stałej) temperaturze  $T$ . (Zwróćcie uwagę, że temperatura  $T$  dla izoterm wzrasta, kiedy te układają się coraz wyżej i w prawo). Na środkowej izotermie zaznaczono odcinek opisujący rozprężanie gazu od objętości  $V_{\text{pocz}}$  do  $V_{\text{kofc}}$  w temperaturze 310 K.

Aby obliczyć pracę wykonywaną przez gaz doskonały w procesie rozprężania izotermicznego, skorzystamy z równania (19.25)

$$W = \int_{V_{\text{pocz}}}^{V_{\text{kofc}}} pdV. \quad (20.11)$$

Jest to ogólne wyrażenie na pracę wykonywaną przez gaz zmieniający swoją objętość. W przypadku gazu doskonałego równanie (20.5) pozwala wyrazić zależność



Rys. 20.1. Trzy izotermy we współrzędnych  $p$ - $V$ . Odcinek na środkowej izotermie opisuje izotermiczne rozprężanie gazu od stanu początkowego  $P$  do stanu końcowego  $K$ . Odcinek izotermy od stanu  $K$  do  $P$  opisowałby proces odwrotny, tj. izotermiczne sprężanie gazu

ciśnienia od objętości

$$W = \int_{V_{\text{pocz}}}^{V_{\text{konc}}} \frac{nRT}{V} dV. \quad (20.12)$$

Ponieważ interesuje nas rozprężanie izotermiczne, wartość  $T$  jest stała i dlatego możemy wyciągnąć ją przed znak całki

$$W = nRT \int_{V_{\text{pocz}}}^{V_{\text{konc}}} \frac{dV}{V} = nRT [\ln V]_{V_{\text{pocz}}}^{V_{\text{konc}}}. \quad (20.13)$$

Obliczając wartość wyrażenia w nawiasie w granicach całkowania i korzystając z zależności  $\ln a - \ln b = \ln(a/b)$ , otrzymujemy wynik w postaci

$$W = nRT \ln \frac{V_{\text{konc}}}{V_{\text{pocz}}} \quad (\text{gaz doskonały, przemiana izotermiczna}). \quad (20.14)$$

Przypominamy, że symbol  $\ln$  oznacza *logarytm naturalny*, czyli taki, którego podstawą jest liczba  $e$ .

W przypadku rozprężania objętość  $V_{\text{konc}}$  jest większa niż  $V_{\text{pocz}}$ , a więc iloraz  $V_{\text{konc}}/V_{\text{pocz}}$  w równaniu (20.14) jest większy od jedności. Logarytm naturalny liczby większej niż 1 jest liczbą dodatnią, a więc — zgodnie z naszymi oczekiwaniami — praca wykonana przez gaz w wyniku rozprężania izotermicznego jest dodatnia. W przypadku sprężania objętość  $V_{\text{konc}}$  jest mniejsza niż  $V_{\text{pocz}}$ , co oznacza, że stosunek objętości w równaniu (20.14) jest mniejszy od jedności. Logarytm naturalny jest liczbą ujemną, a więc wykonana praca — znowu zgodnie z oczekiwaniami — jest ujemna.

### Praca wykonywana przy stałej objętości i przy stałym ciśnieniu

Równanie (20.14) nie wyraża pracy wykonywanej przez gaz podczas *dowolnego* procesu termodynamicznego. Pozwala ono jedynie obliczyć pracę podczas przemiany, w której utrzymywana jest stała temperatura. Jeżeli temperatura się zmienia, to jej symbolu  $T$  w równaniu (20.12) nie można wyciągnąć przed znak całki, jak uczyniliśmy to w (20.13), i dlatego nie uzyskamy wtedy zależności (20.14).

Możemy jednak skorzystać z równania (20.11), aby obliczyć pracę  $W$  wykonywaną przez gaz doskonały (lub dowolny inny gaz) podczas dwóch innych przemian — przy stałej objętości i przy stałym ciśnieniu. Jeżeli objętość gazu jest stała, to bezpośrednio z równania (20.11) otrzymujemy

$$W = 0 \quad (\text{przemiana przy stałej objętości}). \quad (20.15)$$

Jeżeli zmienia się objętość, a ciśnienie  $p$  jest stałe, to z równania (20.11) otrzymamy

$$W = p(V_{\text{konc}} - V_{\text{pocz}}) = p\Delta V \quad (\text{przemiana przy stałym ciśnieniu}). \quad (20.16)$$

**SPRAWDZIAN 1:** Gaz doskonały, którego początkowe ciśnienie wynosi 3 jednostki ciśnienia, zajmuje objętość równą 4 jednostkom objętości. W tabeli podano wartości ciśnienia i objętości gazu (w pewnych jednostkach) na zakończenie pięciu różnych procesów. Dla którego z procesów punkty odpowiadające stanowi początkowemu i końcowemu leżą na tej samej izotermie?

	a	b	c	d	e
p	12	6	5	4	1
V	1	2	7	3	12

## Przykład 20.1

W cylindrze znajduje się 12 l tlenu o temperaturze 20°C pod ciśnieniem 15 atm. Następnie gaz ogrzewamy do temperatury 35°C i sprężamy do objętości 8,5 l. Jakie jest końcowe ciśnienie gazu wyrażone w atmosferach?

### ROZWIAZANIE:

Rozważany gaz uznajemy za doskonały, a więc jego ciśnienie, objętość, temperatura i ilość wyrażona w molach dla stanu początkowego i końcowego (po zakończeniu przemiany) są powiązane ze sobą równaniem stanu gazu doskonałego. Korzystając z równania (20.5), możemy więc napisać

$$p_{\text{pocz}} V_{\text{pocz}} = nRT_{\text{pocz}} \quad \text{oraz} \quad p_{\text{końc}} V_{\text{końc}} = nRT_{\text{końc}}$$

Dzieląc drugie z tych równań przez pierwsze i rozwiązuając otrzymaną równość względem  $p_{\text{końc}}$ , otrzymamy

$$p_{\text{końc}} = \frac{p_{\text{pocz}} T_{\text{końc}} V_{\text{pocz}}}{T_{\text{pocz}} V_{\text{końc}}} \quad (20.17)$$

Zwróc uwagę, że gdybyśmy zdecydowali się wyrazić objętość początkową i końcową w jednostkach układu SI, czyli w metrach sześciennych, nie wpłynęłoby to na wynik końcowy (20.17). Podobnie byłoby, gdybyśmy chcieli wyrazić ciśnienie w pascalach, a nie w atmosferach. Swobody takiej nie mamy jednak w odniesieniu do temperatury, którą musimy wyrazić w kelwinach. Otrzymujemy

$$T_{\text{pocz}} = (273 + 20) \text{ K} = 293 \text{ K}$$

oraz

$$T_{\text{końc}} = (273 + 35) \text{ K} = 308 \text{ K}.$$

Podstawiając dane liczbowe do równania (20.17), otrzymujemy

$$p_{\text{końc}} = \frac{(15 \text{ atm})(308 \text{ K})(12 \text{ l})}{(293 \text{ K})(8,5 \text{ l})} = 22 \text{ atm.} \quad (\text{odpowiedź})$$

## Przykład 20.2

Jeden mol tlenu (założymy, że jest on gazem doskonałym) jest rozprężany izotermicznie w temperaturze 310 K od objętości początkowej  $V_{\text{pocz}} = 12 \text{ l}$  do objętości końcowej  $V_{\text{końc}} = 19 \text{ l}$ . Jaka pracę wykoną gaz podczas rozprężania?

### ROZWIAZANIE:

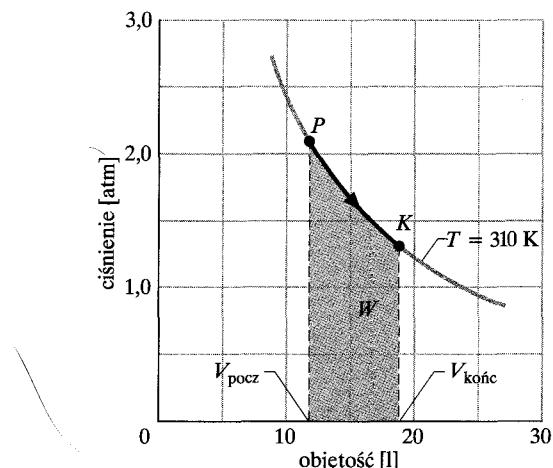
W ogólnym przypadku pracę wykonywaną przez gaz obliczamy, całkując jego ciśnienie po objętości zgodnie z równaniem (20.11). Ponieważ jednak rozważamy gaz doskonały i rozpręża się on izotermicznie, całkowanie prowadzi do równania (20.14). Możemy więc napisać

$$\begin{aligned} W &= nRT \ln \frac{V_{\text{końc}}}{V_{\text{pocz}}} \\ &= (1 \text{ mol})(8,31 \text{ J}/(\text{mol} \cdot \text{K}))(310 \text{ K}) \ln \frac{19 \text{ l}}{12 \text{ l}} \\ &= 1180 \text{ J.} \end{aligned} \quad (\text{odpowiedź})$$

Rozprężanie ilustruje graficznie wykres  $p$ - $V$  z rysunku 20.2. Praca wykonana przez gaz podczas rozprężania jest równa polu pod krzywą  $PK$ .

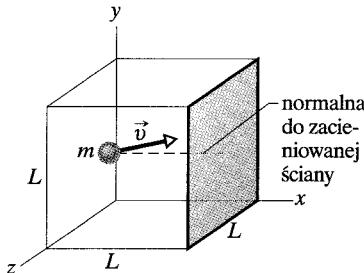
Możesz wykazać, że gdybyśmy zechcieli przeprowadzić proces odwrotny, to znaczy sprężyć izotermicznie gaz od objętości

19 l do 12 l, praca wykonana przez gaz byłaby równa  $-1180 \text{ J}$ . Dlatego musiałaby działać pewna siła zewnętrzna, która wykonałaby pracę 1180 J nad gazem, sprężając go.



Rys. 20.2. Przykład 20.2. Zacienniony obszar odpowiada pracy wykonywanej przez 1 mol tlenu, który w stałej temperaturze  $T$  równej 310 K rozszerza się od objętości  $V_{\text{pocz}}$  do  $V_{\text{końc}}$

## 20.4. Ciśnienie, temperatura i prędkość średnia kwadratowa



Rys. 20.3. Zbiornik w kształcie sześcianu o krawędzi  $L$  zawiera  $n$  moli gazu doskonałego. Cząsteczka o masie  $m$  i prędkości  $\vec{v}$  za chwilę zderzy się z zaciennowaną ścianą o powierzchni  $L^2$ . Na rysunku zaznaczono normalną do ściany

Zajmiemy się teraz naszym pierwszym zagadnieniem w ramach teorii kinetycznej. Wyobraźmy sobie, że  $n$  moli gazu doskonałego zamknięto w sześciennym zbiorniku o objętości  $V$  (rys. 20.3). Ściany zbiornika mają stałą temperaturę  $T$ . W jaki sposób ciśnienie  $p$  wywierane przez gaz na ścianki zbiornika zależy od prędkości jego cząsteczek?

Cząsteczki gazu zamknięte w zbiorniku poruszają się we wszystkich kierunkach z różnymi prędkościami, zderzając się ze sobą nawzajem i odbijając się od ścianek, niczym piłeczką podczas gry w squasha. Zapomnijmy (na razie) o zderzeniach zachodzących między cząsteczkami i zajmijmy się tylko ich sprężystymi zderzeniami ze ściankami.

Na rysunku 20.3 pokazano cząsteczkę o masie  $m$  i prędkości  $\vec{v}$ , która za chwilę zderzy się z zaciennowaną ścianką zbiornika. Ponieważ zakładamy, że wszystkie zderzenia cząsteczek ze ściankami są sprężyste, w wyniku zderzenia z tą ścianką zmienia się tylko składowa prędkości w kierunku osi  $x$ , która przyjmuje wartość przeciwną. Widzimy, że tym samym zmienia się jedynie składowa pędu cząsteczki w kierunku osi  $x$ . Zmiana ta jest równa

$$\Delta p_x = (-mv_x) - (-mv_x) = -2mv_x.$$

Widzimy więc, że pęd, który otrzymuje ściana w wyniku zderzenia, jest równy  $+2mv_x$ . (Ponieważ w naszym podręczniku używamy symbolu  $p$  zarówno do oznaczenia pędu, jak i ciśnienia, musimy pamiętać, że w tym przypadku  $p$  oznacza pęd i jest wielkością wektorową).

Cząsteczka z rysunku 20.3 regularnie zderza się z zaciennowaną ścianą. Po między kolejnymi zderzeniami upływa czas  $\Delta t$  potrzebny cząsteczce poruszającej się z prędkością  $v_x$  na przebycie drogi do przeciwej ściany i z powrotem ( $2L$ ). Czas  $\Delta t$  jest więc równy  $2L/v_x$ . (Zwróć uwagę, że wynik ten jest poprawny nawet wtedy, kiedy cząsteczka odbija się po drodze od innej ścianki. Ponieważ ścianka taka jest równoległa do osi  $x$ , zderzenie z nią nie zmienia składowej  $v_x$  prędkości cząsteczki). Średnia szybkość, z jaką rozważana cząstka przekazuje pęd zaciennowanej ścianie, jest więc równa

$$\frac{\Delta p_x}{\Delta t} = \frac{2mv_x}{2L/v_x} = \frac{mv_x^2}{L}.$$

Z drugiej zasady dynamiki Newtona ( $\vec{F} = d\vec{p}/dt$ ) wiemy, że szybkość przekazywania pędu ścianie to po prostu siła działająca na ścianę. Aby obliczyć wypadkową siłę działającą na ścianę, musimy zsumować wklady pochodzące od wszystkich uderzających w nią cząsteczek, dopuszczając możliwość, że każda z nich ma inną prędkość. Dzieląc wartość siły wypadkowej  $F_x$  przez pole powierzchni ściany ( $= L^2$ ), otrzymujemy ciśnienie  $p$  wywierane na tę ścianę. (Od tej chwili, aż do końca prowadzonych rozważań symbol  $p$  będzie oznaczać ciśnienie). Korzystając z uzyskanego wcześniej wyrażenia na  $\Delta p_x/\Delta t$ , możemy wyrazić ciśnienie za pomocą następującego równania:

$$p = \frac{F_x}{L^2} = \frac{mv_{x1}^2/L + mv_{x2}^2/L + \dots + mv_{xN}^2/L}{L^2} \\ = \left( \frac{m}{L^3} \right) (v_{x1}^2 + v_{x2}^2 + \dots + v_{xN}^2), \quad (20.18)$$

gdzie  $N$  oznacza liczbę cząsteczek w zbiorniku.

Ponieważ  $N = nN_A$ , drugi z nawiasów w równaniu (20.18) zawiera  $nN_A$  składników. Możemy go zastąpić wielkością  $nN_A(v_x^2)_{\text{sr}}$ , gdzie  $(v_x^2)_{\text{sr}}$  jest średnim kwadratem składowych prędkości w kierunku  $x$  dla wszystkich cząsteczek. W ten sposób równanie (20.18) przybiera postać

$$p = \frac{nmN_A}{L^3} (v_x^2)_{\text{sr}}.$$

Zauważmy, że  $mN_A$  to masa molowa  $M$  gazu (masa jednego mola gazu). Ponadto  $L^3$  to nic innego, jak objętość zbiornika, zatem

$$p = \frac{nM(v_x^2)_{\text{sr}}}{V}. \quad (20.19)$$

Dla dowolnej cząsteczki mamy  $v^2 = v_x^2 + v_y^2 + v_z^2$ . Ponieważ liczba cząsteczek w zbiorniku jest olbrzymia, a wszystkie poruszają się w przypadkowych kierunkach, średnie wartości kwadratów składowych prędkości są sobie równe, a więc  $(v_x^2)_{\text{sr}} = \frac{1}{3}(v^2)_{\text{sr}}$ . W ten sposób równanie (20.19) przybiera postać

$$p = \frac{nM(v^2)_{\text{sr}}}{3V}. \quad (20.20)$$

Pierwiastek kwadratowy z wyrażenia  $(v^2)_{\text{sr}}$  jest pewną średnią prędkością, nazywaną **prędkością średnią kwadratową** cząsteczek i oznaczoną symbolem  $v_{\text{sr.kw.}}$ . Nazwa doskonale tłumaczy, jak obliczyć jej wartość. Podnosimy wszystkie prędkości do kwadratu, obliczamy ich średnią, a na koniec bierzemy pierwiastek kwadratowy obliczonej wartości. Korzystając z oznaczenia  $\sqrt{(v^2)_{\text{sr}}} = v_{\text{sr.kw.}}$ , możemy przepisać równanie (20.20) w postaci

$$p = \frac{nMv_{\text{sr.kw.}}^2}{3V}. \quad (20.21)$$

Równanie (20.21) jest charakterystyczne dla kinetycznej teorii gazów. Mówiąc nam, że ciśnienie gazu (wielkość makroskopowa) zależy od prędkości cząsteczek (wielkości mikroskopowej).

Odwróćmy sytuację i za pomocą równania (20.21) obliczmy wartość  $v_{\text{sr.kw.}}$ . Korzystając również z równania stanu gazu doskonałego ( $pV = nRT$ ), otrzymamy

$$v_{\text{sr.kw.}} = \sqrt{\frac{3RT}{M}}. \quad (20.22)$$

W tabeli 20.1 podano przykładowe wartości prędkości średniej kwadratowej cząsteczek obliczone na podstawie równania (20.22). Są one zaskakująco duże. Dla cząsteczek wodoru w temperaturze pokojowej (300 K) prędkość średnia kwadratowa jest równa 1920 m/s, a więc jest większa niż prędkość pocisku karabino-wego. Na powierzchni Słońca, gdzie temperatura jest bliska  $2 \cdot 10^6$  K, prędkość

Tabela 20.1. Przykładowe prędkości cząsteczek w temperaturze pokojowej ( $T = 300$  K)<sup>a</sup>

Gaz	Masa molowa [ $10^3$ kg/mol]	$v_{\text{sr.kw.}}$ [m/s]
Wodór (H <sub>2</sub> )	2,02	1920
Hel (He)	4,0	1370
Para wodna (H <sub>2</sub> O)	18,0	645
Azot (N <sub>2</sub> )	28,0	517
Tlen (O <sub>2</sub> )	32,0	483
Dwutlenek węgla (CO <sub>2</sub> )	44,0	412
Dwutlenek siarki (SO <sub>2</sub> )	64,1	342

<sup>a</sup> Dla wygody często przyjmujemy, że temperatura pokojowa = 300 K, chociaż 27°C w pokoju odczuwalibyśmy jako gorąco.

średnia kwadratowa cząsteczek wodoru byłaby 82 razy większa niż w temperaturze pokojowej, gdyby nie to, że cząsteczki wcześniej rozpadają się w wyniku zderzeń między nimi. Mużycie pamiętać, że prędkość średnia kwadratowa to tylko pewna prędkość średnia; niektóre z cząsteczek poruszają się wyraźnie szybciej, a inne znacznie wolniej.

Z prędkością średnią kwadratową cząsteczek jest ściśle związana prędkość dźwięku w gazie. W fali dźwiękowej zaburzenie jest przekazywane od cząsteczek do cząsteczek dzięki ich zderzeniom. Fala nie może więc rozchodzić się szybciej niż „przeciętna” prędkość cząsteczek. Wydaje się oczywiste, że prędkość fali musi być nieco mniejsza niż prędkość średnia cząsteczek, ponieważ nie wszystkie cząsteczki poruszają się w tym samym kierunku co fala. Na przykład w temperaturze pokojowej prędkości średnie kwadratowe cząsteczek wodoru i azotu są odpowiednio równe 1920 m/s i 517 m/s. W podanej temperaturze prędkości dźwięku w obydwu tych gazach wynoszą odpowiednio 1350 m/s i 350 m/s.

Nasuwa się pytanie: „Skoro cząsteczki gazów poruszają się tak szybko, to dlaczego musi upływać minuta, nim poczujemy zapach, gdy ktoś w drugim końcu pokoju otworzy flakonik perfum?” Jest tak, ponieważ na skutek nieustannych zderzeń z innymi cząsteczkami cząsteczki perfum nie poruszają się bezpośrednio w poprzek pokoju. Wyjaśnimy to dokładniej w paragrafie 20.6.

## Przykład 20.3

Oto pięć liczb: 5, 11, 32, 67 i 89.

a) Ile wynosi średnia  $n_{\text{sr}}$  tych liczb?

**ROZWIĄZANIE:**

Średnią liczb obliczamy ze wzoru

$$n_{\text{sr}} = \frac{5 + 11 + 32 + 67 + 89}{5} = 40,8. \quad (\text{odpowiedź})$$

b) Ile wynosi średnia kwadratowa  $n_{\text{sr.kw.}}$  tych samych liczb?

**ROZWIĄZANIE:**

Wynik obliczamy na podstawie wzoru

$$n_{\text{sr.kw.}} = \sqrt{\frac{5^2 + 11^2 + 32^2 + 67^2 + 89^2}{5}} = 52,1. \quad (\text{odpowiedź})$$

Średnia kwadratowa jest większa niż średnia arytmetyczna, ponieważ — dzięki podniesieniu do kwadratu — więcej ważą w niej duże liczby. Aby się o tym przekonać, zastąpmy liczbę 89 liczbą 300. Średnia nowej piątki liczb jest 2 razy większa niż poprzednio. Jednakże wartość średnia kwadratowa wzrasta 2,7 razy.

## 20.5. Energia kinetyczna ruchu postępowego

Powróćmy raz jeszcze do ruchu pojedynczej cząsteczki gazu z rysunku 20.3, dopuszczając teraz możliwość zmiany jej prędkości w wyniku zderzeń z innymi cząsteczkami. W dowolnej chwili energia kinetyczna ruchu postępowego cząsteczki jest równa  $\frac{1}{2}mv^2$ . Średnia energia kinetyczna ruchu postępowego cząsteczki w pewnym przedziale czasu wynosi

$$E_{k\text{sr}} = \left(\frac{1}{2}mv^2\right)_{\text{sr}} = \frac{1}{2}m(v^2)_{\text{sr}} = \frac{1}{2}mv_{\text{sr,kw}}^2. \quad (20.23)$$

Założyliśmy, że średnia prędkość cząsteczki w pewnym przedziale czasu jest taka sama, jak średnia prędkość wszystkich cząsteczek w danej chwili. (Jest to uzasadnione, o ile całkowita energia gazu nie zmienia się, a my dostatecznie długo badamy ruch cząsteczek). Podstawiając wartość  $v_{\text{sr,kw}}$  daną wzorem (20.22), otrzymujemy

$$E_{k\text{sr}} = \left(\frac{1}{2}m\right) \frac{3RT}{M}.$$

Jak wiadomo, iloraz masy molowej i masy cząsteczkowej  $M/m$  to po prostu liczba Avogadra. Dlatego

$$E_{k\text{sr}} = \frac{3RT}{2N_A}.$$

Korzystając z równania (20.7) ( $k = R/N_A$ ), możemy napisać

$$E_{k\text{sr}} = \frac{3}{2}kT. \quad (20.24)$$

Równanie to mówi nam coś zaskakującego:

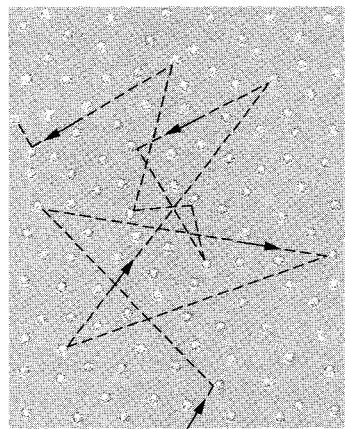
► W danej temperaturze  $T$  wszystkie cząsteczki gazu doskonalego — niezależnie od swojej masy — mają taką samą średnią energię kinetyczną ruchu postępowego, równą  $\frac{3}{2}kT$ . Mierząc temperaturę gazu, wyznaczamy jednocześnie średnią energię kinetyczną ruchu postępowego jego cząsteczek.

✓ **SPRAWDZIAN 2:** Mieszanka gazów zawiera cząsteczki typu 1, 2 i 3, których masy cząsteczkowe spełniają nierówność  $m_1 > m_2 > m_3$ . Uszereguj te cząsteczki według ich a) średniej energii kinetycznej i b) prędkości średniej kwadratowej. W każdym przypadku zaczynaj od wartości największej.

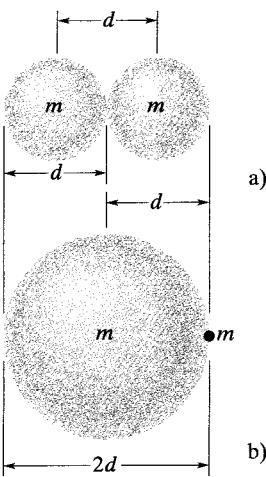
## 20.6. Średnia droga swobodna

Kontynuujmy rozważania nad ruchem cząsteczek gazu doskonałego. Na rysunku 20.4 przedstawiono tor typowej cząsteczki gazu, która w wyniku zderzeń z przystych z innymi cząsteczkami zmienia wartość swojej prędkości oraz kierunek ruchu. Chociaż na rysunku zaznaczono pozostałe cząsteczki tak, jakby spoczywały, to w rzeczywistości wszystkie poruszają się w podobny sposób.

Jednym z użytecznych parametrów, które pozwalają scharakteryzować ten przypadkowy ruch cząsteczek, jest **średnia droga swobodna**  $\lambda$ . Jak sugeruje sama nazwa, parametr  $\lambda$  mówi, jaką drogę pokonuje średnio cząsteczka między



Rys. 20.4. Poruszająca się cząsteczka gazu zderza się wzduż swojego toru z innymi cząsteczkami. Cząsteczki te przedstawiono na rysunku jako nieruchome, chociaż w rzeczywistości poruszają się one w podobny sposób



Rys. 20.5. a) Zderzenie zachodzi, gdy środki dwóch cząsteczek znajdują się w odległości  $d$  mniejszej lub równej średnicy cząsteczkii. b) Równoważne, chociaż wygodniejsze rozumowanie polega na wyobrażeniu sobie, że jedna cząsteczka ma *promień*  $d$ , a pozostałe cząsteczki są punktami. Nie zmienia to kryterium zderzenia

swoimi kolejnymi zderzeniami. Spodziewamy się, że wartość  $\lambda$  powinna maleć ze wzrostem liczby cząsteczek w jednostce objętości  $N/V$  (koncentracji cząsteczek). Im większy iloraz  $N/V$ , tym częstsze są zderzenia i tym krótszą drogę przebywa cząsteczka w dzielącym je czasie. Spodziewamy się też, że średnia droga swobodna  $\lambda$  powinna maleć ze wzrostem rozmiarów cząsteczek, na przykład ich średnicy  $d$ . (Jeżeliby cząsteczki były punktowe, nigdy nie zderzałyby się ze sobą, a ich średnia droga swobodna byłaby nieskończona). Im większe są cząsteczki, tym krótsza ich droga swobodna. Możemy się spodziewać, że  $\lambda$  powinno być odwrotnie proporcjonalne do *kwadratu* średnicy cząsteczkii  $d$ , ponieważ to pole przekroju cząsteczkii, a nie jej średnica, wyznacza jej wymiar jako tarczy.

Jak się okazuje, średnia droga swobodna cząsteczkii jest opisana wzorem

$$\lambda = \frac{1}{\sqrt{2\pi d^2 N/V}} \quad (\text{średnia droga swobodna}). \quad (20.25)$$

Aby zrozumieć, skąd się bierze równanie (20.25), skupmy uwagę na pojedynczej cząsteczkii i założymy — zgodnie z tym, co sugeruje rysunek 20.4 — że nasza cząsteczka porusza się ze stałą prędkością  $v$  oraz że wszystkie pozostałe cząsteczki spoczywają. Później zrezygnujemy z tego założenia.

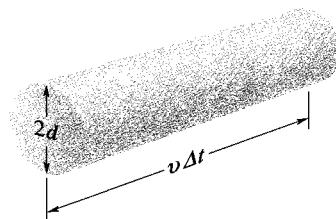
Przyjmiemy ponadto, że cząsteczki są kulami o średnicy  $d$ . Zderzenie nastąpi więc, jeżeli odległość pomiędzy środkami dwóch cząsteczek będzie równa  $d$  (rys. 20.5a). Wygodniej jednak założyć, że jedna poruszająca się cząsteczka ma *promień*  $d$ , a wszystkie pozostałe cząsteczki są punktami (rys. 20.5b). Nie zmienia to przyjętego przez nas kryterium zderzenia.

Nasza cząsteczka, poruszając się zygzakiem przez gaz, „zamiata” między kolejnymi zderzeniami walec o polu przekroju  $\pi d^2$ . Jeżeli będziemy obserwować cząsteczkę przez czas  $\Delta t$ , okaże się, że przebędzie drogę  $v\Delta t$ , gdzie  $v$  oznacza jej prędkość. Jeżeli poskładamy wszystkie krótkie walce wycięte przez cząsteczkę w czasie  $\Delta t$ , uzyskamy jeden walec o wysokości  $v\Delta t$  i objętości  $(\pi d^2)(v\Delta t)$  (rys. 20.6). Liczba zderzeń cząsteczkii, które nastąpiły w czasie  $\Delta t$ , jest równa liczbie punktowych cząsteczek, które znalazły się wewnątrz walca.

Ponieważ  $N/V$  oznacza liczbę cząsteczek w jednostce objętości, liczba cząsteczek we wnętrzu walca jest równa iloczynowi  $N/V$  i objętości walca, czyli  $(N/V)(\pi d^2)(v\Delta t)$ . Jest to także liczba zderzeń w czasie  $\Delta t$ . Średnia droga swobodna cząsteczkii jest ilorazem przebytej przez nią drogi (wysokości walca) i liczby cząsteczek mieszących się w walcu:

$$\begin{aligned} \lambda &= \frac{\text{droga cząsteczkii w czasie } \Delta t}{\text{liczba zderzeń w czasie } \Delta t} \approx \frac{v\Delta t}{\pi d^2 v \Delta t N/V} \\ &= \frac{1}{\pi d^2 N/V}. \end{aligned} \quad (20.26)$$

Równanie to jest tylko przybliżeniem, ponieważ założyliśmy, że wszystkie cząsteczki — poza jedną — spoczywają. W rzeczywistości wszystkie cząsteczki poruszają się. Jeżeli uwzględnilibyśmy ten fakt, otrzymalibyśmy równanie (20.25). Zauważmy, że różni się ono od wyprowadzonego przez nas przybliżonego równania (20.26) tylko obecnością czynnika  $1/\sqrt{2}$ .



Rys. 20.6. W czasie  $\Delta t$  poruszająca się cząsteczka „przemiata” walec o wysokości  $v\Delta t$  i promieniu  $d$

Postarajmy się lepiej zrozumieć, skąd bierze się przybliżony charakter równania (20.26). Prędkości  $v$  występujące w liczniku i mianowniku nie są dokładnie tymi samymi prędkościami. W liczniku mamy  $v_{\text{sr}}$ , średnią prędkość cząsteczki *względem zbiornika*. Prędkość  $v$  w mianowniku to w rzeczywistości  $v_{\text{wzgl}}$  — względna prędkość średnia naszej cząsteczki *mierzona w odniesieniu do pozostałych*, poruszających się *cząsteczką*. Ta właśnie prędkość wyznacza liczbę zderzeń z innymi cząsteczkami. Szczegółowe obliczenia z uwzględnieniem rzeczywistego rozkładu prędkości dają wynik  $v_{\text{wzgl}} = \sqrt{2}v_{\text{sr}}$  i stąd obecność czynnika  $\sqrt{2}$ .

Średnia droga swobodna cząsteczek powietrza na poziomie morza wynosi około  $0,1 \mu\text{m}$ . Na wysokości 100 km gęstość powietrza maleje tak bardzo, że średnia droga swobodna cząsteczek wzrasta do 16 cm. Na wysokości 300 km średnia droga swobodna jest już równa 20 km. Ci, którzy zechcieliby zajmować się fizyką i chemią górnych warstw atmosfery w warunkach laboratoryjnych, napotkali by problem polegający na braku dostatecznie dużych zbiorników, by móc symulować warunki panujące na dużej wysokości. Nie zmienia to faktu, że badanie stężenia freonu, dwutlenku węgla i ozonu w górnych warstwach atmosfery ma kluczowe znaczenie dla życia na Ziemi.

## Przykład 20.4

a) Ile wynosi średnia droga swobodna  $\lambda$  cząsteczek tlenu w temperaturze  $T = 300 \text{ K}$  pod ciśnieniem  $p = 1 \text{ atm}$ ? W obliczeniach przyjmij, że cząsteczki mają średnicę  $d = 290 \text{ pm}$  i tworzą gaz doskonąły.

### ROZWIĄZANIE:

Zauważmy, że ~~co~~ każda cząsteczka tlenu porusza się wśród innych *poruszających się* cząsteczek po zygzkowatym torze, będącym wynikiem zderzeń. Możemy więc obliczyć średnią drogę swobodną, korzystając z równania (20.25). Musimy jednak znaleźć liczbę cząsteczek w jednostce objętości  $N/V$ . Ponieważ założyliśmy, że gaz jest doskonąły, na podstawie równania stanu gazu doskonałego w postaci (20.9) ( $pV = NkT$ ) możemy napisać  $N/V = p/kT$ . Podstawiając tę wartość do równania (20.25), otrzymujemy

$$\begin{aligned}\lambda &= \frac{1}{\sqrt{2\pi d^2 N/V}} = \frac{kT}{\sqrt{2\pi d^2 p}} \\ &= \frac{(1,38 \cdot 10^{-25} \text{ J/K})(300 \text{ K})}{\sqrt{2\pi}(2,9 \cdot 10^{-10} \text{ m})^2(1,01 \cdot 10^5 \text{ Pa})} \\ &= 1,1 \cdot 10^{-7} \text{ m.} \quad (\text{odpowiedź})\end{aligned}$$

Wynik odpowiada mniej więcej 380 średnicom cząsteczek.

b) Przyjmijmy, że prędkość średnia cząsteczki tlenu wynosi  $v = 450 \text{ m/s}$ . Ile wynosi średni czas  $t$  pomiędzy kolejnymi zderzeniami cząsteczek? Z jaką częstością  $v$  następują zderzenia?

### ROZWIĄZANIE:

Aby obliczyć czas pomiędzy zderzeniami, zauważmy, że ~~co~~ cząsteczka poruszająca się z prędkością  $v$  przebywa pomiędzy zderzeniami średnio drogę  $\lambda$ . Średni czas dzielący kolejne zderzenia wynosi więc

$$\begin{aligned}t &= \frac{\text{droga}}{\text{prędkość}} = \frac{\lambda}{v} = \frac{1,1 \cdot 10^{-7} \text{ m}}{450 \text{ m/s}} \\ &= 2,44 \cdot 10^{-10} \text{ s} \approx 0,24 \text{ ns.} \quad (\text{odpowiedź})\end{aligned}$$

Widzimy więc, że między kolejnymi zderzeniami dowolnej cząsteczki tlenu upływa mniej niż 1 ns.

Aby wyznaczyć częstość  $v$  zderzeń, zauważmy, że ~~co~~ średnia szybkość, czyli inaczej częstość zderzeń równa jest odwrotnością czasu  $t$  pomiędzy zderzeniami. Mamy więc

$$v = \frac{1}{t} = \frac{1}{2,44 \cdot 10^{-10} \text{ s}} = 4,1 \cdot 10^9 \text{ s}^{-1}. \quad (\text{odpowiedź})$$

Jak widzimy, przeciętna cząsteczka tlenu w podanych warunkach zderza się z innymi przeszło 4 miliardy razy w ciągu każdej sekundy.

**SPRAWDZIAN 3:** W pewnym zbiorniku umieszczono 1 mol gazu A, którego cząsteczki mają średnicę  $2d_0$  i poruszają się z prędkością  $v_0$ . W identycznym zbiorniku umieszczono 1 mol gazu B, którego cząsteczki mają średnicę  $d_0$  i poruszają się z prędkością  $2v_0$  (cząsteczki gazu B są mniejsze, lecz poruszają się szybciej). Dla którego z gazów częstość zderzeń jest większa?

## 20.7. Rozkład prędkości cząsteczek

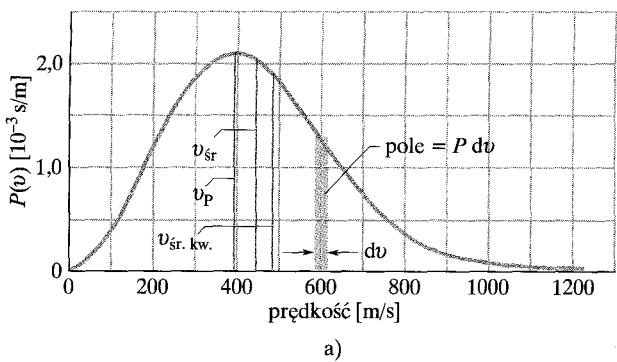
Prędkość średnia kwadratowa  $v_{\text{sr.kw.}}$  jest miarą prędkości cząsteczek gazu w określonej temperaturze. Często chcielibyśmy jednak wiedzieć coś więcej. Na przykład, jaka część wszystkich cząsteczek porusza się z prędkością większą niż  $v_{\text{sr.kw.}}$ ? Albo z prędkością dwa razy większą niż  $v_{\text{sr.kw.}}$ ? Aby odpowiedzieć na te i podobne pytania, musimy wiedzieć, jaki jest rozkład prędkości cząsteczek. Na rysunku 20.7a przedstawiono rozkład prędkości cząsteczek tlenu w temperaturze pokojowej ( $T = 300 \text{ K}$ ). Na rysunku 20.7b porównano ten rozkład z rozkładem prędkości dla temperatury  $T = 80 \text{ K}$ .

Problem polegający na wyznaczeniu prędkości cząsteczek gazu pierwszy rozwiązał szkocki fizyk James Clerk Maxwell w roku 1852. Uzyskany przez niego wynik, znany jako **rozkład Maxwella** prędkości cząsteczek gazu, wyraża się równaniem

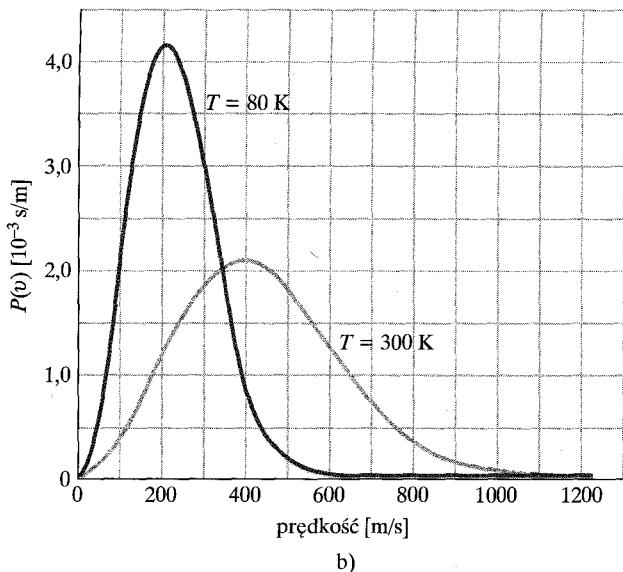
$$P(v) = 4\pi \left( \frac{M}{2\pi RT} \right)^{3/2} v^2 e^{-Mv^2/2RT}. \quad (20.27)$$

W równaniu tym  $v$  oznacza prędkość cząsteczek,  $T$  — temperaturę gazu,  $M$  — jego masę molową, a  $R$  — stałą gazową. Równanie to przedstawiono w postaci wykresu na rysunkach 20.7a,b. Wielkość  $P(v)$  w równaniu (20.27) i na rysunku 20.7 to *funkcja rozkładu prawdopodobieństwa*: dla dowolnej prędkości  $v$  iloczyn  $P(v)dv$  (wielkość bezwymiarowa) wskazuje, jaki ułamek cząsteczek ma prędkości z przedziału o szerokości  $dv$  i środku w punkcie  $v$ .

Jak widzimy na rysunku 20.7a, ten ułamek jest równy polu powierzchni paska o wysokości  $P(v)$  i szerokości  $dv$ . Całkowite pole powierzchni pod krzywą rozkładu określa, jaka część cząsteczek ma prędkości z przedziału od zera do nieskończoności. Stwierdzenie to obejmuje wszystkie cząsteczki, a więc całkowite



a)



b)

Rys. 20.7. a) Rozkład Maxwell'a dla prędkości cząsteczek tlenu w temperaturze  $T = 300 \text{ K}$ . Na wykresie zaznaczono trzy prędkości charakterystyczne. b) Kształt krzywych dla  $300 \text{ K}$  i  $80 \text{ K}$ . Zauważ, że w niższej temperaturze cząsteczki poruszają się wolniej. Ponieważ krzywe opisują prawdopodobieństwo, pole pod każdą z nich musi być równe jedności

pole powierzchni jest równe 1, czyli

$$\int_0^{\infty} P(v)dv = 1. \quad (20.28)$$

Ułamek cząsteczek o prędkościach z przedziału od  $v_1$  do  $v_2$  jest dany wzorem

$$\text{ułamek cząsteczek o prędkości od } v_1 \text{ do } v_2 = \int_{v_1}^{v_2} P(v)dv. \quad (20.29)$$

### Prędkość średnia, prędkość średnia kwadratowa i prędkość najbardziej prawdopodobna

**Prędkość średnią**  $v_{sr}$  cząsteczek gazu możemy wyznaczyć, postępując zgodnie z następującą procedurą: każdej prędkości  $v$  w rozkładzie przypisujemy pewną wagę. Oznacza to, że mnożymy ją przez wartość  $P(v)dv$ , która określa, jaką część cząsteczek ma prędkość z przedziału o szerokości  $dv$  ze środkiem w punkcie  $v$ . Następnie sumujemy wszystkie wartości  $vP(v)dv$ . Jako wynik otrzymujemy prędkość średnią  $v_{sr}$ . W praktyce trzeba obliczyć całkę

$$v_{sr} = \int_0^{\infty} v P(v)dv. \quad (20.30)$$

Podstawiając zamiast  $P(v)$  funkcję rozkładu daną równaniem (20.27) i korzystając z całki 20 z tabeli całek zamieszczonej w dodatku E, stwierdzamy, że

$$v_{sr} = \sqrt{\frac{8RT}{\pi M}} \quad (\text{prędkość średnia}). \quad (20.31)$$

Podobnie postępujemy w celu wyznaczenia średniego kwadratu prędkości  $(v^2)_{sr}$

$$(v^2)_{sr} = \int_0^{\infty} v^2 P(v)dv. \quad (20.32)$$

Podstawiając ponownie funkcję rozkładu daną równaniem (20.27) i korzystając tym razem z całki 16 z tabeli całek zamieszczonej w dodatku E, stwierdzamy, że

$$(v^2)_{sr} = \frac{3RT}{M}. \quad (20.33)$$

Pierwiastek kwadratowy z  $(v^2)_{sr}$  to **prędkość średnia kwadratowa**  $v_{sr,kw.}$ . Widzimy więc, że

$$v_{sr,kw.} = \sqrt{\frac{3RT}{M}} \quad (\text{prędkość średnia kwadratowa}), \quad (20.34)$$

co zgadza się z równaniem (20.22).

**Prędkość najbardziej prawdopodobna**  $v_p$  to prędkość, dla której funkcja rozkładu  $P(v)$  osiąga maksimum (patrz rysunek 20.7a). Aby obliczyć wartość  $v_p$ ,

musimy skorzystać z warunku  $dP/dv = 0$  (pochodna funkcji w jej maksimum ma wartość 0) i rozwiązać otrzymane w ten sposób równanie względem  $v$ . Jako wynik otrzymujemy

$$v_p = \sqrt{\frac{2RT}{M}} \quad (\text{prędkość najbardziej prawdopodobna}). \quad (20.35)$$

Jest najbardziej prawdopodobne, że cząsteczka będzie miała właśnie prędkość  $v_p$ . Jednakże wiele cząsteczek będzie poruszać się z prędkościami wielokrotnie przekraczającymi  $v_p$ . Tworzą one na wykresie, takim jak ten z rysunku 20.7a, „ogon” cząsteczek o dużej prędkości. Powinniśmy się cieszyć, że takie cząsteczki są obecne, ponieważ to dzięki nim mamy zarówno deszcz, jak i światło słoneczne (bez których nie moglibyśmy istnieć). Wy tłumaczymy teraz, dlaczego tak się dzieje.

**Deszcz:** Rozkład prędkości cząsteczek wody w stawie w gorący letni dzień można opisać za pomocą rozkładu przypominającego ten z rysunku 20.7a. Większość cząsteczek ma zbyt małą energię kinetyczną, by móc uciec ze zbiornika, przesadając się przez powierzchnię. Mamy jednak niewielką liczbę cząsteczek poruszających się z prędkościami z ogona rozkładu, które są zdolne do ucieczki. To właśnie te cząsteczki parują i dzięki nim tworzą się chmury i pada deszcz.

Kiedy bardzo prędkie cząsteczki wody uciekają z powierzchni, unosząc ze sobą energię, temperatura pozostałe części wody może pozostać stała dzięki wymianie ciepła z otoczeniem. W ten sposób — w wyniku zderzeń — kolejne cząsteczki uzyskują szybko duże prędkości, zastępując te, które uciekły. Rozkład prędkości się nie zmienia.

**Światło słoneczne:** Rozkład z rysunku 20.7a opisuje też prędkości protonów w jądrze Słońca. Energia powstaje tam dzięki reakcji syntezy jądrowej, której pierwszym etapem jest połączenie się dwóch protonów. Jak wiadomo, protony są cząsteczkami naładowanymi elektrycznie i dlatego się odpychają. Protony poruszające się ze średnimi prędkościami nie mogą zbliżyć się do siebie na tyle, by się połączyć. Jest to jednak możliwe w przypadku bardzo prędkich protonów z ogona rozkładu. Dlatego Słońce świeci.

## Przykład 20.5

Zbiornik wypełniony tlenem znajduje się w temperaturze pokojowej (300 K). Jaka część wszystkich cząsteczek tlenu ma prędkości z przedziału od 599 m/s do 601 m/s? Masa molowa tlenu jest równa 0,032 kg/mol.

### ROZWIĄZANIE:

Zauważmy, że:

1. Prędkości cząsteczek mieszczą się w szerokim zakresie wartości, a ich rozkład  $P(v)$  jest opisany równaniem (20.27).

2. Ułamek wszystkich cząsteczek poruszających się z prędkościami mieszczącymi się w przedziale o szerokości  $dv$  jest równy  $P(v)dv$ .

3. W przypadku przedziału o większej szerokości odpowiedni ułamek obliczamy, wykonując całkowanie w tym przedziale.

4. Zwrómy jednak uwagę, że szerokość interesującego nas przedziału  $\Delta v = 2$  m/s jest mała w porównaniu z prędkością wyznaczającą jego środek  $v = 600$  m/s.

Dzięki temu możemy skorzystać z przybliżenia, które pozwala uniknąć całkowania:

$$\text{ułamek} = P(v)\Delta v = 4\pi \left( \frac{M}{2\pi RT} \right)^{3/2} v^2 e^{-Mv^2/2RT} \Delta v.$$

Funkcję  $P(v)$  przedstawiono na wykresie z rysunku 20.7a. Całkowite pole powierzchni pod krzywą określa, jaki ułamek odpowiada wszystkim cząsteczkom (czyli jedności). Pole powierzchni wąskiego złotego paska wyraża ułamek, który chcemy wyznaczyć.

Aby obliczyć szukaną wartość, zapiszemy nasz ułamek w postaci

$$\text{ułamek} = 4\pi(A)(v^2)(e^B)(\Delta v). \quad (20.36)$$

Parametry  $A$  i  $B$  w tym równaniu są równe

$$A = \left( \frac{M}{2\pi RT} \right)^{3/2} = \left( \frac{0,032 \text{ kg/mol}}{(2\pi)(8,31 \text{ J/(mol} \cdot \text{K)})(300 \text{ K})} \right)^{3/2} \\ = 2,92 \cdot 10^{-9} \text{ s}^3/\text{m}^3$$

## Przykład 20.6

Masa molowa  $M$  tlenu wynosi 0,032 kg/mol.

a) Ile wynosi prędkość średnia cząsteczek tlenu w temperaturze  $T = 300 \text{ K}$ ?

### ROZWIĄZANIE:

Zauważmy, że chcąc obliczyć prędkość średnią, musimy wartość  $v$  pomnożyć przez funkcję rozkładu  $P(v)$  daną równaniem (20.27) i scałkować otrzymane wyrażenie w pełnym zakresie prędkości, czyli od 0 do  $\infty$ . Postępując w ten sposób, otrzymujemy wzór (20.31), z którego obliczamy prędkość średnią

$$v_{\text{sr}} = \sqrt{\frac{8RT}{\pi M}} = \sqrt{\frac{8(8,31 \text{ J/(mol} \cdot \text{K)})(300 \text{ K})}{\pi(0,032 \text{ kg/mol})}} \\ = 445 \text{ m/s.} \quad (\text{odpowiedź})$$

b) Jaką wartość ma prędkość średnia kwadratowa  $v_{\text{sr,kw}}$  w temperaturze 300 K?

### ROZWIĄZANIE:

Zauważmy, że w celu obliczenia prędkości średniej kwadratowej musimy wyznaczyć średnią kwadratu prędkości  $(v^2)_{\text{sr}}$ , mnożąc  $v^2$  przez funkcję rozkładu i całkując otrzymane wyrażenie w pełnym zakresie prędkości. Takie postępowanie prowadzi

oraz

$$B = -\frac{Mv^2}{2RT} = -\frac{(0,032 \text{ kg/mol})(600 \text{ m/s})^2}{(2)(8,31 \text{ J/(mol} \cdot \text{K)})(300 \text{ K})} = -2,31.$$

Podstawiając wartości  $A$  i  $B$  do równania (20.36), otrzymujemy

$$\text{ułamek} = (4\pi)(A)(v^2)(e^B)(\Delta v) \\ = (4\pi)(2,92 \cdot 10^{-9} \text{ s}^3/\text{m}^3)(600 \text{ m/s})^2(e^{-2,31})(2 \text{ m/s}) \\ = 2,62 \cdot 10^{-3}. \quad (\text{odpowiedź})$$

Widzimy, że w temperaturze pokojowej 0,262% wszystkich cząsteczek porusza się z prędkościami zawierającymi się w wąskim przedziale od 599 m/s do 601 m/s. Jeżeli złoty pasek na rysunku 20.7a mieilibyśmy przedstawić w rzeczywistej skali, byłby on naprawdę bardzo wąski.

do wzoru (20.34)

$$v_{\text{sr,kw}} = \sqrt{\frac{3RT}{M}} \\ = \sqrt{\frac{3(8,31 \text{ J/(mol} \cdot \text{K)})(300 \text{ K})}{0,032 \text{ kg/mol}}} = 483 \text{ m/s.} \quad (\text{odpowiedź})$$

Wynik przedstawiono na rysunku 20.7a. Uzyskana wartość jest większa niż prędkość średnia  $v_{\text{sr}}$ , ponieważ duże prędkości dają większy wkład do całki z iloczynu  $v^2$  i funkcji rozkładu niż do całki z iloczynu  $v$  i funkcji rozkładu.

c) Ile wynosi prędkość najbardziej prawdopodobna w temperaturze  $T = 300 \text{ K}$ ?

### ROZWIĄZANIE:

Zauważmy, że prędkość najbardziej prawdopodobna odpowiada maksimum funkcji rozkładu  $P(v)$ , które możemy wyznaczyć, przyrównując do zera pochodną  $dP/dv$  i rozwiązując otrzymane równanie względem  $v$ . Doprowadzi nas to do wzoru (20.35)

$$v_p = \sqrt{\frac{2RT}{M}} \\ = \sqrt{\frac{2(8,31 \text{ J/(mol} \cdot \text{K)})(300 \text{ K})}{0,032 \text{ kg/mol}}} = 395 \text{ m/s.} \quad (\text{odpowiedź})$$

Wynik ten także zaznaczono na rysunku 20.7a.

## 20.8. Molowe ciepła właściwe gazu doskonałego

W tym paragrafie dzięki rozważaniom nad zachowaniem się cząsteczek wyprodowadzimy wyrażenie opisujące energię wewnętrzną  $E_w$  gazu doskonałego. Innymi słowy chcemy stwierdzić, jak przypadkowy ruch atomów lub cząsteczek two-

rzących gaz przekłada się na energię gazu. Uzyskane wyrażenie posłuży nam w dalszej kolejności do wyznaczenia wartości molowego ciepła właściwego gazu doskonałego.

### Energia wewnętrzna $E_w$

Załóżmy na początek, że rozważamy jednoatomowy gaz doskonały (tworzą go pojedyncze atomy, a nie cząsteczki). Przykładem takiego gazu jest hel, neon lub argon. Założymy ponadto, że energia wewnętrzna gazu doskonałego jest po prostu sumą energii kinetycznych związanych z ruchem postępowym tworzących go atomów. (Zgodnie z fizyką kwantową pojedyncze atomy nie mają energii kinetycznej związanej z ruchem obrotowym).

Średnia energia kinetyczna ruchu postępowego pojedynczego atomu zależy tylko od temperatury gazu i zgodnie z równaniem (20.24) wynosi  $E_{k\text{sr}} = \frac{3}{2}kT$ . Próbka  $n$  moli gazu zawiera  $nN_A$  atomów. Energia wewnętrzna  $E_w$  próbki jest więc równa

$$E_w = (nN_A)E_{k\text{sr}} = (nN_A)\frac{3}{2}kT. \quad (20.37)$$

Korzystając z równania (20.7) ( $k = R/N_A$ ), możemy przepisać ten wzór w postaci

$$E_w = \frac{3}{2}nRT \quad (\text{jednoatomowy gaz doskonały}). \quad (20.38)$$

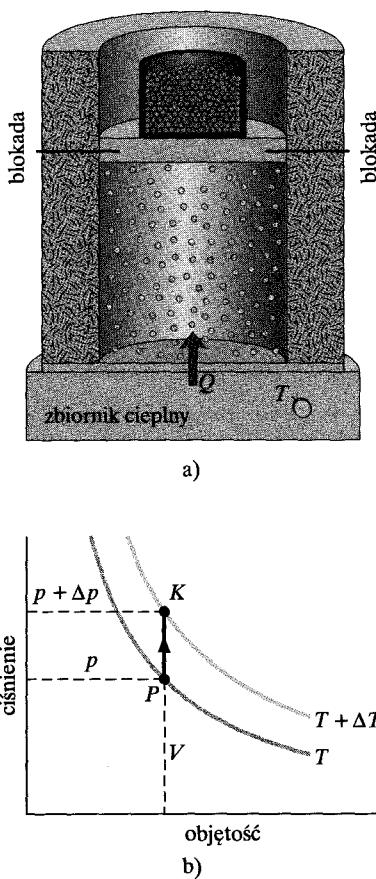
Widzimy więc, że

► Energia wewnętrzna  $E_w$  gazu doskonałego zależy tylko od temperatury gazu; nie zależy ona od żadnej innej wielkości opisującej jego stan.

Uzbrojeni w oręź, jakim jest równanie (20.38), możemy już wyprowadzić wyrażenie na molowe ciepło właściwe gazu doskonałego. W rzeczywistości wyprowadzimy dwa wyrażenia. Jedno będzie odpowiadać przypadkowi, w którym objętość gazu się nie zmienia, kiedy gaz otrzymuje lub oddaje energię w postaci ciepła. Drugie będzie opisywać sytuację, w której stałe jest ciśnienie gazu wymieniącego z otoczeniem energię w postaci ciepła. Obydwa te ciepła molowe oznaczane są odpowiednio symbolami  $C_V$  i  $C_p$ . (Przyjęto, że obydwa te ciepła są oznaczane wielką literą  $C$ , chociaż  $C_V$  i  $C_p$  to ciepła właściwe, a nie pojemności cieplne).

### Molowe ciepło właściwe przy stałej objętości

Na rysunku 20.8a przedstawiono cylinder o stałej objętości  $V$  zawierający  $n$  moli gazu doskonałego pod ciśnieniem  $p$  i w temperaturze  $T$ . Stan początkowy  $P$  gazu zaznaczono na wykresie  $p$ - $V$  przedstawionym na rysunku 20.8b. Wyobraźmy sobie teraz, że do gazu dostarczamy niewielką porcję energii w postaci ciepła  $Q$ . W tym celu zwiększamy powoli temperaturę zbiornika cieplnego, który jest w kontakcie z gazem. Temperatura i ciśnienie gazu rosną nieco, osiągając odpowiednio wartości  $T + \Delta T$  oraz  $p + \Delta p$ . Wartości te opisują stan końcowy  $K$ .



Rys. 20.8. a) Gaz doskonały w zbiorniku o stałej objętości jest ogrzewany od temperatury  $T$  do  $T + \Delta T$ . Ciepło jest dostarczane do układu, który nie wykonuje pracy. b) Wykres  $p$ - $V$  dla tej przemiany

Wykonując takie doświadczenia, przekonalibyśmy się, że dostarczone ciepło wiąże ze zmianą temperatury gazu relacja

$$Q = nC_V \Delta T \quad (\text{stała objętość}), \quad (20.39)$$

gdzie  $C_V$  oznacza **molowe ciepło właściwe gazu przy stałej objętości**. Podstawiając to wyrażenie zamiast ciepła  $Q$  do równania (19.26) ( $\Delta E_w = Q - W$ ) wyrażającego pierwszą zasadę termodynamiki, otrzymamy

$$\Delta E_w = nC_V \Delta T - W. \quad (20.40)$$

Ponieważ objętość zbiornika jest stała, gaz nie może się rozprężać i dlatego nie wykonuje on pracy. Mamy więc  $W = 0$  i przekształcając równanie (20.40), możemy napisać

$$C_V = \frac{\Delta E_w}{n \Delta T}. \quad (20.41)$$

Jak pamiętamy (równanie (20.38)), energia wewnętrzna  $E_w$  gazu jednoatomowego jest równa  $\frac{3}{2}nRT$ , a więc zmiana energii musi być równa

$$\Delta E_w = \frac{3}{2}nR\Delta T. \quad (20.42)$$

Podstawiając ten wynik do równania (20.41), otrzymujemy

$$C_V = \frac{3}{2}R = 12,5 \text{ J/(mol} \cdot \text{K}) \quad (\text{gaz jednoatomowy}). \quad (20.43)$$

W tabeli 20.2 pokazano, że wynik osiągnięty dzięki teorii kinetycznej (dla gazu doskonałego) bardzo dobrze zgadza się z wynikami pomiarów dla jednoatomowych gazów rzeczywistych. Teoretyczne i doświadczalne wartości  $C_V$  dla *dwoatomowych i wieloatomowych* gazów doskonałych (których cząsteczki są zbudowane z więcej niż dwóch atomów) są większe niż w przypadku gazów jednoatomowych z przyczyn, które omówimy w paragrafie 20.9.

Możemy teraz uogólnić równanie (20.38) tak, aby wyrażało ono energię wewnętrzną dowolnego gazu doskonałego, zastępując czynnik  $\frac{3}{2}R$  molowym ciepłem właściwym przy stałej objętości. W rezultacie otrzymamy

$$E_w = nC_V T \quad (\text{dowolny gaz doskonały}). \quad (20.44)$$

Tabela 20.2. Molowe ciepła właściwe przy stałej objętości

Cząsteczka	Gaz	$C_V$ [J/(mol · K)]
Jednoatomowa doskonały rzeczywiste:	He	$\frac{3}{2}R = 12,5$
	Ar	12,5 12,6
Dwuatomowa doskonały rzeczywiste:	N <sub>2</sub>	$\frac{5}{2}R = 20,8$
	O <sub>2</sub>	20,7 20,8
Wieloatomowa doskonały rzeczywiste:	NH <sub>4</sub>	$3R = 24,9$
	CO <sub>2</sub>	29,0 29,7

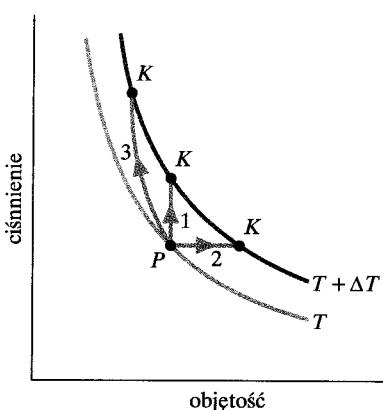
Równanie to jest prawdziwe nie tylko dla jednoatomowego gazu doskonałego, lecz także dla dwuatomowych i wieloatomowych gazów doskonałych, o ile tylko podstawimy właściwą wartość  $C_V$ . Tak jak w przypadku równania (20.38), widzimy, że energia wewnętrzna gazu doskonałego zależy od jego temperatury, ale nie zależy od ciśnienia ani gęstości.

Zmiana energii wewnętrznej gazu doskonałego zamkniętego w zbiorniku, związana ze zmianą jego temperatury o  $\Delta T$ , jest konsekwencją równania (20.41) lub (20.44) i wynosi

$$\Delta E_w = nC_V \Delta T \quad (\text{gaz doskonały, dowolny proces}). \quad (20.45)$$

Z równania tego wynika, że

➤ Zmiana energii wewnętrznej gazu doskonałego zamkniętego w zbiorniku zależy tylko od zmiany temperatury gazu, *nie zależy* natomiast od typu procesu, w wyniku którego nastąpiła zmiana temperatury.



Rys. 20.9. Trzy wykresy dla trzech różnych procesów, które przeprowadzają gaz doskonały ze stanu początkowego  $P$  o temperaturze  $T$  do stanu końcowego  $K$  o temperaturze  $T + \Delta T$ . We wszystkich tych przemianach zmiana energii wewnętrznej  $\Delta E_w$  gazu ma tę samą wartość, podobnie jak w każdym innym procesie, który powoduje taką samą zmianę temperatury

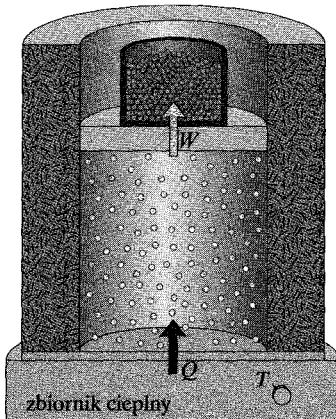
Jako przykład przeanalizujmy trzy ścieżki łączące dwie izotermy na wykresie  $p$ -V z rysunku 20.9. Ścieżka 1 opisuje przemianę przy stałej objętości. Ścieżka 2 opisuje przemianę przy stałym ciśnieniu (wkrótce zajmiemy się nią dokładniej). Ścieżka 3 opisuje proces, w którym układ nie wymienia ciepła z otoczeniem (omówimy go w paragrafie 20.11). Chociaż wartości ciepła  $Q$  i pracy  $W$  w każdej z tych przemian są różne, podobnie jak ciśnienie  $p_{\text{końc}}$  i objętość  $V_{\text{końc}}$  w stanie końcowym, zmiany energii wewnętrznej  $\Delta E_w$  we wszystkich trzech przypadkach są takie same, ponieważ za każdym razem zmiana temperatury wynosi  $\Delta T$ . Zmianę energii wewnętrznej określa równanie (20.45). Nie ma więc znaczenia, jak zrealizujemy przemianę powodującą zmianę temperatury od wartości  $T$  do  $T + \Delta T$ . Możemy zawsze przyjąć, że jest to przemiana 1, co pozwoli nam łatwo obliczyć zmianę energii wewnętrznej  $\Delta E_w$ .

### Molowe ciepło właściwe przy stałym ciśnieniu

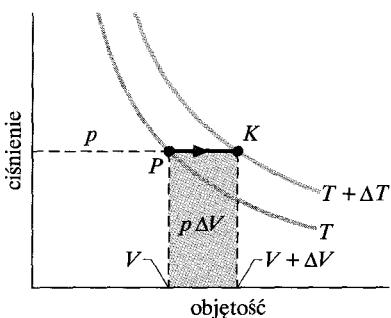
Wyobraźmy sobie teraz, że tak jak poprzednio zwiększamy temperaturę gazu doskonałego o niewielką wartość  $\Delta T$ , ale tym razem dostarczamy energię (ciepło  $Q$ ), utrzymując stałe ciśnienie gazu. Odpowiedni układ doświadczalny pokazano na rysunku 20.10a; wykres  $p$ -V dla takiego procesu przedstawia rysunek 20.10b. Z doświadczenia wynika, że dostarczane ciepło wiąże ze zmianą temperatury relacja

$$Q = nC_p \Delta T \quad (\text{stałe ciśnienie}), \quad (20.46)$$

gdzie  $C_p$  oznacza **molowe ciepło właściwe przy stałym ciśnieniu**. Wartość  $C_p$  jest *większa* niż wartość molowego ciepła właściwego przy stałej objętości  $C_V$ , ponieważ w tym przypadku dostarczana energia nie tylko powoduje wzrost temperatury gazu, ale jest także wykorzystywana w celu wykonania pracy przez gaz — podniesienia obciążonego tłoka (rysunek 20.10a).



a)



b)

Aby znaleźć związek molowego ciepła właściwego przy stałym ciśnieniu  $C_p$  z molowym ciepłem właściwym przy stałej objętości  $C_V$ , skorzystamy z pierwszej zasady termodynamiki (równanie (19.26)):

$$\Delta E_w = Q - W, \quad (20.47)$$

a następnie każdą z występujących w równaniu wielkości zastąpimy odpowiednim wyrażeniem. Zmiana energii wewnętrznej  $\Delta E_w$  jest określona równaniem (20.45). Zamiast ciepła  $Q$  podstawiamy wyrażenie (20.46). Aby zastąpić odpowiednim wyrażeniem pracę  $W$ , trzeba najpierw zauważyć, że ciśnienie gazu jest stałe. Z równania (20.16) wynika więc, że pracę można wyrazić w postaci  $W = p\Delta V$ . Korzystając następnie z równania stanu gazu doskonałego ( $pV = nRT$ ), możemy napisać

$$W = p\Delta V = nR\Delta T. \quad (20.48)$$

Jeżeli wszystkie te wyrażenia podstawimy do równania (20.48), a następnie podzielimy obydwie jego strony przez  $n\Delta T$ , przekonamy się, że

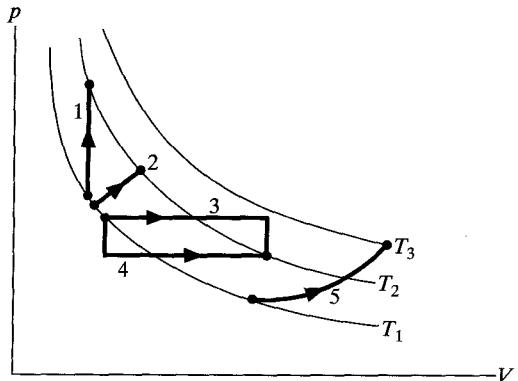
$$C_V = C_p - R,$$

czyli

$$C_p = C_V + R. \quad (20.49)$$

Ten wniosek z teorii kinetycznej dobrze się zgadza z wynikami eksperymentalnymi nie tylko dla gazów jednoatomowych, ale dla wszystkich gazów, o ile ich gęstości są dostatecznie małe, by można je było uważać za gazy doskonałe.

Rys. 20.10. a) Gaz doskonały jest ogrzewany pod stałym ciśnieniem od temperatury  $T$  do  $T + \Delta T$ . Ciepło jest dostarczane do układu, który wykonuje pracę, podnosząc obciążony tłok. b) Wykres  $p$ - $V$  tej przemiany. Praca  $p\Delta V$  jest równa polu zacienionego prostokąta na wykresie



**SPRAWDZIAN 4:** Zamieszczony obok wykres przedstawia we współrzędnych  $p$ - $V$  pięć możliwych przemian gazu. Uszereguj je według zmiany energii wewnętrznej poddawanego im gazu, zaczynając od wartości największej.

## Przykład 20.7

Pęcherzyk zawierający 5 moli helu jest zanurzony w wodzie na pewnej głębokości. Następnie temperatura helu i otaczającej go wody rośnie o  $\Delta T = 20^\circ\text{C}$ , przy czym ciśnienie jest cały czas stałe. W rezultacie pęcherzyk zwiększa swą objętość. Hel jest gazem jednoatomowym i doskonałym.

a) Ile energii trzeba dostarczyć do helu podczas jego rozszerzania się?

### ROZWIĄZANIE:

Zauważmy najpierw, że  $\text{O} \rightarrow$  ciepło  $Q$  dostarczane do gazu zależy od zmiany temperatury i molowego ciepła właściwego. Ponieważ w rozpatrywanym procesie ciśnienie jest stałe, ciepło obliczamy, korzystając z molowego ciepła właściwego przy stałym ciśnieniu  $C_p$  oraz z równania (20.46):

$$Q = nC_p\Delta T. \quad (20.50)$$

Aby obliczyć wartość  $C_p$ , sięgamy do równania (20.49), z którego wynika, że dla dowolnego gazu doskonałego  $C_p = C_V + R$ . Z równania (20.43) wiemy, że dla dowolnego gazu jednoatomowego (jakim jest hel)  $C_V = \frac{3}{2}R$ . Równanie (20.50) prowadzi nas do wyniku

$$\begin{aligned} Q &= n(C_V + R)\Delta T = n\left(\frac{3}{2}R + R\right)\Delta T = n\left(\frac{5}{2}R\right)\Delta T \\ &= (5 \text{ mol})(2,5)(8,31 \text{ J}/(\text{mol} \cdot \text{K}))(20 \text{ K}) \\ &= 2077,5 \text{ J} \approx 2080 \text{ J}. \end{aligned} \quad (\text{odpowiedź})$$

b) O ile wzrośnie energia  $\Delta E_w$  wewnętrzna ogrzewanego helu?

### ROZWIĄZANIE:

Ponieważ pęcherzyk gazu się rozszerza, z pewnością nie jest to proces przy stałej objętości. Jednakże hel jest zamknięty w pewnego rodzaju zbiorniku, którym jest pęcherzyk. Wobec tego  $\text{O} \rightarrow$  przyrost energii wewnętrznej  $\Delta E_w$  gazu jest taki sam, jaki byłby w przypadku procesu zachodzącego przy stałej objętości, w którym temperatura wzrastałaby o tę samą wartość  $\Delta T$ . Zmianę energii wewnętrznej gazu  $\Delta E_w$  w procesie zachodzącym przy

stałej objętości możemy z łatwością obliczyć za pomocą równania (20.45):

$$\begin{aligned} \Delta E_w &= nC_V\Delta T = n\left(\frac{3}{2}R\right)\Delta T \\ &= (5 \text{ mol})(1,5)(8,31 \text{ J}/(\text{mol} \cdot \text{K}))(20 \text{ K}) \\ &= 1246,5 \text{ J} \approx 1250 \text{ J}. \end{aligned} \quad (\text{odpowiedź})$$

c) Jaką pracę wykonuje rozszerzający się gaz przeciwko parciu otaczającemu go wody?

### ROZWIĄZANIE:

Zauważmy, że  $\text{O} \rightarrow$  praca wykonywana przez jakikolwiek rozszerzający się gaz przeciwko parciu otoczenia jest dana równaniem (20.11), które każe nam obliczyć całkę z wyrażenia  $p dV$ . Jeżeli ciśnienie jest stałe, sytuacja się upraszcza i mamy  $W = p\Delta V$ . Jeżeli gaz jest gazem doskonałym (jak w naszym przypadku), możemy posłużyć się równaniem stanu gazu doskonałego (równanie (20.5)), aby napisać  $p\Delta V = nR\Delta T$ . Prowadzi nas to do wyniku

$$\begin{aligned} W &= nR\Delta T \\ &= (5 \text{ mol})(8,31 \text{ J}/(\text{mol} \cdot \text{K}))(20 \text{ K}) \\ &= 831 \text{ J}. \end{aligned} \quad (\text{odpowiedź})$$

Ponieważ tak się składa, że znamy zarówno ciepło  $Q$  dostarczone do gazu, jak i zmianę jego energii wewnętrznej  $\Delta E_w$ , możemy dojść do odpowiedzi w inny sposób. Zauważmy, że  $\text{O} \rightarrow$  wymiana energii gazu z otoczeniem jest opisana za pomocą pierwszej zasady termodynamiki:

$$\begin{aligned} W &= Q - \Delta E_w = 2077,5 \text{ J} - 1246,5 \text{ J} \\ &= 831 \text{ J}. \end{aligned} \quad (\text{odpowiedź})$$

Zauważ, że w omówionym procesie tylko część (1250 J) ciepła dostarczonego do helu (2080 J) zwiększa jego energię wewnętrzną, a tym samym temperaturę. Pozostała część (831 J) hel oddaje na zewnątrz w postaci pracy wykonanej podczas rozszerzania się. Jeżeli woda byłaby zamarznięta, rozszerzanie gazu nie byłoby możliwe. W takim przypadku identyczna zmiana temperatury o  $20^\circ\text{C}$  wymagałaby dostarczenia jedynie 1250 J ciepła, ponieważ ogrzewany hel nie wykonywałby pracy.

## 20.9. Stopnie swobody a molowe ciepła właściwe

Z tabeli 20.2 wynika, że przewidywana przez teorię kinetyczną wartość ciepła właściwego przy stałej objętości  $C_V = \frac{3}{2}R$  zgadza się z wynikami pomiarów dla gazów jednoatomowych, ale nie jest prawdziwa w przypadku gazów dwuatomowych lub wieloatomowych.

Na rysunku 20.11 przedstawiono modele helu (częsteczka jednoatomowa — pojedynczy atom), tlenu (częsteczka dwuatomowa — zbudowana z dwóch ato-

mów) i metanu (cząsteczka *wieloatomowa*). Patrząc na te modele, widzimy, że cząsteczki wszystkich trzech rodzajów mogą uczestniczyć w ruchu postępowym (np. z lewej strony w prawą lub z góry w dół) i w ruchu obrotowym (wirując wokół osi jak bąk). Dodatkowo w przypadku cząsteczek dwuatomowych lub wieloatomowych możliwy jest ruch drgający, który polega na zbliżaniu i oddalaniu się atomów tak, jakby łączyły je sprężynki. Aby opisać, jak energia jest przechowywana w gazie, James Clerk Maxwell wprowadził zasadę **ekwipartycji energii** (czyli równego jej podziału):

► Każdy rodzaj cząsteczek charakteryzuje pewna liczba *stopni swobody*  $f$ , które dają cząsteczce niezależne sposoby przechowywania energii. Na każdy stopień swobody przypada — średnio — energia równa  $\frac{1}{2}kT$  na cząsteczkę (lub  $\frac{1}{2}RT$  w przeliczeniu na mol).

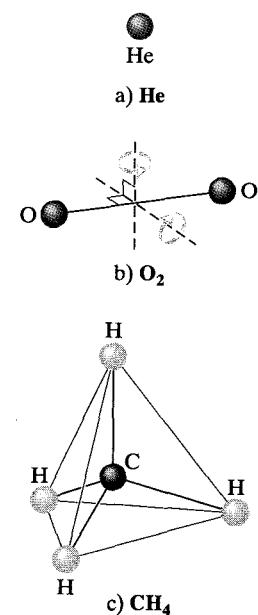
Zastosujmy teraz zasadę ekwipartycji energii do ruchu postępowego i obrotowego cząsteczek z rysunku 20.11. (Ruchem drgającym zajmiemy się w następnym paragrafie). Aby przyjrzeć się ruchowi postępowemu, wprowadźmy układ współrzędnych  $x$ ,  $y$ ,  $z$ . Na ogół cząsteczki mają składowe prędkości wzdłuż wszystkich trzech osi. Dlatego niezależnie od typu cząsteczek mamy trzy stopnie swobody związane z ruchem postępowym (trzy niezależne kierunki ruchu), a więc na jedną cząsteczkę przypada średnio energia  $3(\frac{1}{2}kT)$ .

Przechodząc do ruchu obrotowego, założymy, że początek układu odniesienia  $x$ ,  $y$ ,  $z$  znajduje się w środku każdej cząsteczki z rysunku 20.11. Wydawać by się mogło, że w gazie każda cząsteczka będzie mogła obracać się z pewną prędkością kątową wokół każdej z trzech osi. Mielibyśmy więc trzy stopnie swobody związane z ruchem obrotowym, tzn. na każdą cząsteczkę przypadałaby dodatkowa energia  $3(\frac{1}{2}kT)$ . Jednakże pomiary wykazują, że jest to prawdę tylko w przypadku cząsteczek wieloatomowych. Fizyka kwantowa mówi, że cząsteczka jednoatomowa nie obraca się, a więc nie ma też energii związanej z ruchem obrotowym (pojedynczy atom nie może wirować jak bąk). Cząsteczka dwuatomowa może obracać się jedynie wokół osi prostopadłych do linii łączącej atomy, które ją tworzą (zaznaczono je na rysunku 20.11b), ale nie wokół wspomnianej linii. Dlatego cząsteczka dwuatomowa ma tylko dwa stopnie swobody związane z ruchem obrotowym, co odpowiada energii  $2(\frac{1}{2}kT)$  na cząsteczkę.

Aby uogólnić nasze rozważania dotyczące wartości molowego ciepła właściwego ( $C_p$  i  $C_V$  — paragraf 20.8) na przypadek dwu- i wieloatomowych gazów doskonałych, musimy powrócić do pewnych szczegółów wyprowadzenia. Po pierwsze, zastąpimy równanie (20.38) ( $E_w = \frac{3}{2}nRT$ ) równaniem  $E_w = (f/2)nRT$ , gdzie  $f$  oznacza liczbę stopni swobody podaną w tabeli 20.3. Prowadzi nas to do molowego ciepła właściwego przy stałej objętości w postaci

$$C_V = \left( \frac{f}{2} \right) R = 4,16f \text{ J/(mol} \cdot \text{K}), \quad (20.51)$$

która jest oczywiście zgodna z równaniem (20.43) opisującym przypadek gazu jednoatomowego ( $f = 3$ ). Z tabeli 20.2 wynika, że przewidywanie to jest także zgodne z wynikami pomiarów dla gazu dwuatomowego ( $f = 5$ ), ale daje zbyt małą wartość dla gazów wieloatomowych.



Rys. 20.11. Modele cząsteczek występujących w teorii kinetycznej: a) hel — przykład cząsteczki jednoatomowej, b) tlen — przykład cząsteczki dwuatomowej i c) metan — przykład cząsteczki wieloatomowej. Kule oznaczają atomy, a linie między nimi — wiązania. Dla cząsteczek tlenu zaznaczono dwie osie obrotu

Tabela 20.3. Liczba stopni swobody dla różnych cząsteczek

Cząsteczka	Przykład	Liczba stopni swobody			Przewidywane molowe ciepła właściwe	
		Ruch postępowy	Ruch obrotowy	Łącznie ( $f$ )	$C_V$ (równ. (20.51))	$C_p = C_V + R$
Jednoatomowa	He	3	0	3	$\frac{3}{2}R$	$\frac{5}{2}R$
Dwutatomowa	O <sub>2</sub>	3	2	5	$\frac{5}{2}R$	$\frac{7}{2}R$
Wieloatomowa	CH <sub>4</sub>	3	3	6	$3R$	$4R$

## Przykład 20.8

Powietrze zawarte w pokoju o objętości  $V$  ma temperaturę początkową  $T_1$  (przymijmy, że powietrze jest dwutatomowym gazem doskonałym). Po włączeniu kominka pomieszczenie ogrzewa się do temperatury  $T_2$ . Jak zmieni się energia wewnętrzna  $\Delta E_w$  powietrza w pokoju?

### ROZWIĄZANIE:

W wyniku ogrzewania pokoju ciśnienie wypełniającego go powietrza nie wzrasta, lecz pozostaje równe ciśnieniu na zewnątrz. Dzieje się tak, ponieważ pokój nie jest idealnie szczelny i powietrze może wypływać na zewnątrz (nie jest zamknięte w zbiorniku). Podczas ogrzewania cząsteczki powietrza mogą wydostawać się na zewnątrz różnymi szparami i dlatego liczba moli powietrza w pokoju się zmniejsza. Widzimy więc, że O→ nie można w tym przypadku obliczyć zmiany energii wewnętrznej  $\Delta E_w$  gazu w pokoju, posługując się równaniem (20.45) ( $\Delta E_w = nC_V \Delta T$ ), które można stosować pod warunkiem, że liczba moli  $n$  gazu jest stała.

Zauważmy jednak, że O→ dzięki równaniu (20.44) ( $E_w = nC_V T$ ) potrafimy powiązać zmianę energii wewnętrznej  $\Delta E_w$  gazu ze zmianą jego liczby moli  $n$  i temperatury  $T$ . Możemy

napisać

$$\Delta E_w = \Delta(nC_V T) = C_V \Delta(nT).$$

Następnie, korzystając z równania stanu gazu doskonałego (równanie (20.5)  $pV = nRT$ ), zastępujemy iloczyn  $nT$  przez  $pV/R$ , co prowadzi nas do równania

$$\Delta E_w = C_V \Delta \left( \frac{pV}{R} \right). \quad (20.52)$$

Ponieważ wielkości  $p$ ,  $V$  i  $R$  są stałe, z równania (20.52) wynika, że

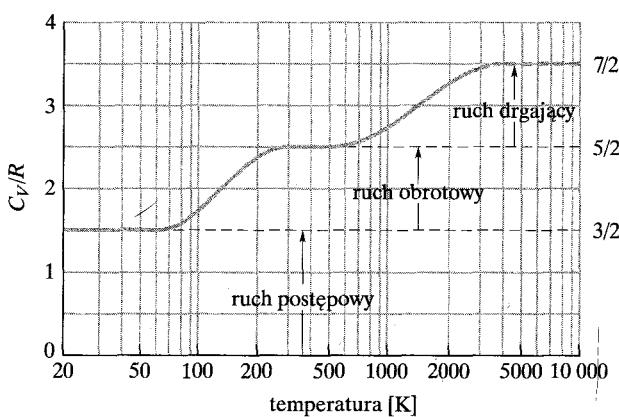
$$\Delta E_w = 0, \quad (\text{odpowiedź})$$

choćż temperatura w pomieszczeniu rośnie.

Dlaczego więc wolimy przebywać w pokoju, w którym jest ciepło? Można podać przynajmniej dwie przyczyny: 1) Następuje wymiana promieniowania elektromagnetycznego (promieniowania cieplnego) między twoim ciałem a ścianami pokoju i 2) zachodzi wymiana energii między tobą a cząsteczkami powietrza w wyniku zderzeń. Dzięki ogrzaniu pomieszczenia rośnie 1) natężenie promieniowania emitowanego przez ściany i pochłaniane przez ciebie oraz 2) energia przekazywana tobie przez cząsteczki powietrza podczas zderzeń.

## 20.10. Nieco fizyki kwantowej

Zgodność kinetycznej teorii gazów z wynikami doświadczalnymi możemy jeszcze poprawić, uwzględniając drgania atomów w cząsteczkach dwu- lub wieloatomowych. Na przykład dwa atomy tworzące cząsteczkę tlenu O<sub>2</sub> przedstawioną na rysunku 20.11b mogą zbliżać się i oddalać od siebie, a wiązanie między nimi zachowuje się jak sprężyna. Jednakże doświadczenia wykazują, że takie oscylacje zachodzą jedynie w stosunkowo wysokich temperaturach gazu — ruch taki pojawi się dopiero wtedy, kiedy energie cząsteczek są dostatecznie duże. Podobny efekt obserwujemy także w przypadku ruchu obrotowego, chociaż zachodzi on w niższych temperaturach.



Rys. 20.12. Wykres zależności stosunku  $C_V/R$  od temperatury dla dwuatomowego wodoru. Ponieważ ruch obrotowy i drgający cząsteczek wymaga przekroczenia pewnych progów energii, w najniższych temperaturach jest możliwy tylko ruch postępowy. Gdy temperatura rośnie, cząsteczki zaczynają wykonywać ruch obrotowy. W jeszcze wyższej temperaturze zaczyna się ich ruch drgający

Wykres z rysunku 20.12 pomoże ci dostrzec pojawienie się ruchu obrotowego i drgającego. Na wykresie przedstawiono zależność stosunku  $C_V/R$  od temperatury dla cząsteczkowego gazowego wodoru ( $H_2$ ). Temperaturę przedstawiono w skali logarytmicznej, aby zakres jej zmian obejmował kilka rzędów wielkości. Widzimy, że poniżej 80 K iloraz  $C_V/R$  jest równy 1,5. Wartość ta wskazuje, że ciepło właściwe jest związane tylko z trzema stopniami swobody dla ruchu postępowego.

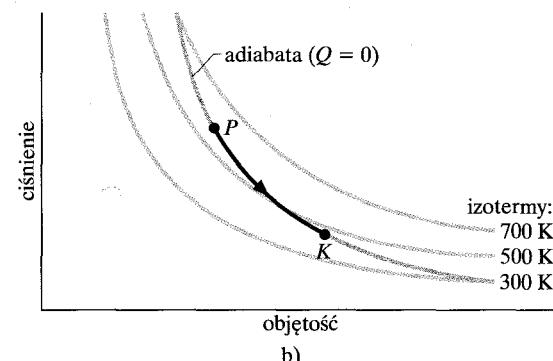
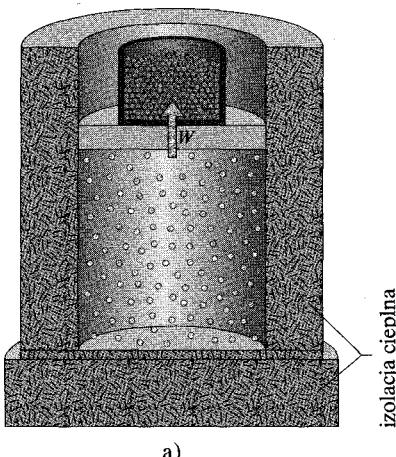
Wraz ze wzrostem temperatury, stosunek  $C_V/R$  stopniowo rośnie do 2,5, co wskazuje na to, że zaczynamy mieć do czynienia z dwoma dodatkowymi stopniami swobody. W ramach fizyki kwantowej można wykazać, że te dwa stopnie swobody są związane z ruchem obrotowym cząsteczek wodoru oraz że ruch ten wymaga pewnej minimalnej energii. W bardzo niskich temperaturach (poniżej 80 K) cząsteczki nie mają dostatecznej energii, aby zachodził ich ruch obrotowy. Gdy temperatura przekracza 80 K i stopniowo rośnie, z początku pojedyncze, a następnie coraz liczniejsze cząsteczki zyskują energię pozwalającą im wirować i dlatego wartość  $C_V/R$  wzrasta aż do 2,5, co oznacza, że wszystkie cząsteczki poruszają się ruchem obrotowym.

Podobnie mechanika kwantowa pokazuje, że ruch drgający też wymaga pewnej minimalnej (ale większej) energii. Energię tę cząsteczki uzyskują dopiero wtedy, kiedy temperatura gazu zbliża się do 1000 K, co widać na wykresie z rysunku 20.12. Gdy temperatura wzrasta powyżej 1000 K, coraz więcej cząsteczek ma energię dostateczną, aby drgać, i dlatego stosunek  $C_V/R$  również rośnie aż do wartości 3,5, w której wszystkie cząsteczki uczestniczą w ruchu drgającym. (Krzywa na wykresie z rysunku 20.12 urywa się w temperaturze 3200 K, ponieważ wtedy drgania osiągają intensywność, która powoduje zerwanie wiązania łączącego atomy wodoru i dysocjacje cząsteczek na dwa osobne atomy).

## 20.11. Rozprężanie adiabatyczne gazu doskonałego

Z paragrafu 18.3 wiemy, że fale dźwiękowe rozchodzą się w powietrzu i innych gazach w postaci ciągu zaguszczeń i rozrzedzeń gazu. Zaburzenia te w ośrodku, w którym fala się rozchodzi, następują tak szybko, że energia nie zdąży przepływać między tymi obszarami. W paragrafie 19.10 powiedzieliśmy już, że proces,

Rys. 20.13. a) Objętość gazu doskonałego zwiększa się w wyniku zmniejszenia obciążenia tłoka. Jest to proces adiabatyczny ( $Q = 0$ ).  
 b) We współrzędnych  $p$ - $V$  wykresem przemiany przebiegającej od stanu  $P$  do stanu  $K$  jest linia nazywana adiabatą



w którym nie zachodzi wymiana ciepła ( $Q = 0$ ), nazywamy *przemianą adiabatyczną*. Warunek braku przepływu ciepła można spełnić, przeprowadzając proces bardzo szybko (jak w przypadku fal dźwiękowych) lub w dobrze izolowanym zbiorniku (szybkość nie ma wtedy znaczenia). Zobaczmy, co o przemianie adiabatycznej ma do powiedzenia teoria kinetyczna.

Na rysunku 20.13a przedstawiono nasz odizolowany i wypełniony gazem doskonałym cylinder, który tym razem umieszczono na izolującej podstawie. Zdejmując z tłoka obciążenie, pozwalamy, aby gaz rozprężał się adiabatycznie. Ze wzrostem objętości zmniejsza się jednocześnie ciśnienie i temperatura gazu. Wykażemy, że ciśnienie i objętość gazu poddawanego przemianie adiabatycznej wiążą zależność

$$pV^\gamma = \text{const} \quad (\text{przemiana adiabatyczna}), \quad (20.53)$$

gdzie wykładnik  $\gamma = C_p/C_V$  wyraża stosunek wartości molowych ciepł właściwych gazu przy stałym ciśnieniu i przy stałej objętości. Na wykresie  $p$ - $V$  (rys. 20.13b) przemianę adiabatyczną reprezentuje linia (zwana *adiabatą*) opisana równaniem  $p = \text{const}/V^\gamma$ . Ponieważ gaz ulega przemianie od stanu początkowego  $P$  do stanu końcowego  $K$ , zgodnie z równaniem (20.53) możemy napisać

$$p_{\text{pocz}} V_{\text{pocz}}^\gamma = p_{\text{końc}} V_{\text{końc}}^\gamma \quad (\text{przemiana adiabatyczna}). \quad (20.54)$$

Równanie przemiany adiabatycznej możemy także zapisać, przyjmując jako zmienne temperaturę  $T$  i objętość  $V$ . W tym celu musimy odwoać się do równania stanu gazu doskonałego ( $pV = nRT$ ) i korzystając z niego, wyeliminować z równania (20.53) ciśnienie  $p$ . Otrzymamy

$$\left( \frac{nRT}{V} \right)^{\gamma} = \text{const}.$$

Ponieważ zarówno  $n$  jak i  $R$  są stałymi, możemy uzyskać równanie przepisać w innej postaci

$$TV^{\gamma-1} = \text{const} \quad (\text{przemiana adiabatyczna}), \quad (20.55)$$

przy czym stała ma inną wartość niż w równaniu (20.53). Dla gazu ulegającego przemianie od stanu początkowego  $P$  do stanu końcowego  $K$  możemy napisać

$$T_{\text{pocz}} V_{\text{pocz}}^{\gamma-1} = T_{\text{końc}} V_{\text{końc}}^{\gamma-1} \quad (\text{przemiana adiabatyczna}). \quad (20.56)$$

Jesteśmy teraz gotowi, aby odpowiedzieć na pytanie postawione na początku tego rozdziału. Nad powierzchnią gazowanego napoju w zamkniętej butelce znajduje się mieszanka dwutlenku węgla i pary wodnej. Ponieważ w butelce ciśnienie jest większe od ciśnienia atmosferycznego, po jej otwarciu gaz rozpręża się, co oznacza, że wykonyuje on pracę przeciwko ciśnieniu atmosferycznemu. Ponieważ dzieje się to bardzo szybko, przemianę można uznać za adiabatyczną, a więc praca jest wykonywana kosztem energii wewnętrznej gazu. Ponieważ maleje energia wewnętrzna, obniża się także temperatura gazu, co sprawia, że para wodna w gazie ulega kondensacji, tworząc małe kropelki, widoczne w postaci mgiełki. (Zauważcie, że także z równania (20.56) wynika, że temperatura podczas rozprężania adiabatycznego musi się obniżyć. Ponieważ objętość końcowa  $V_{\text{końc}}$  jest większa niż objętość początkowa  $V_{\text{pocz}}$ , więc temperatura końcowa  $T_{\text{końc}}$  musi być mniejsza od temperatury początkowej  $T_{\text{pocz}}$ ).

### Wyprowadzenie równania (20.53)

Wyobraźmy sobie, że zabieramy część śrutu obciążającego tłok zamkający cylinder (rys. 20.13), pozwalając, aby gaz doskonali popchnął w górę tłok i resztę śrutu, zwiększając swą objętość o  $dV$ . Ponieważ zmiana objętości jest bardzo mała, możemy założyć, że ciśnienie  $p$  gazu w cylindrze jest stałe. Założenie to pozwala nam powiedzieć, że praca  $dW$  wykonana przez rozprężający się gaz jest równa  $pdV$ . Korzystając z równania (19.27), możemy zapisać pierwszą zasadę termodynamiki w postaci

$$dE_w = Q - pdV. \quad (20.57)$$

Ponieważ gaz jest izolowany cieplnie (rozprężanie jest adiabatyczne), przyjmujemy, że ciepło  $Q$  jest równe 0. Następnie, odwołując się do równania (20.45), zastępujemy  $dE_w$  wyrażeniem  $nC_VdT$ . Po dokonaniu podstawień i drobnych przekształceń otrzymujemy

$$ndT = -\left(\frac{p}{C_V}\right)dV. \quad (20.58)$$

Różniczkując równanie stanu gazu doskonalego ( $pV = nRT$ ), dostajemy

$$pdV + Vdp = nRdT. \quad (20.59)$$

Zastępując w równaniu (20.59) stałą gazową  $R$  różnicą  $C_p - C_V$ , mamy

$$ndT = \frac{pdV + Vdp}{C_p - C_V}. \quad (20.60)$$

Porównując ze sobą prawe strony równań (20.58) i (20.60) oraz dokonując niezbędnych przekształceń, mamy

$$\frac{dp}{p} + \left(\frac{C_p}{C_V}\right)\frac{dV}{V} = 0.$$

Jeżeli zastąpimy teraz stosunek molowych ciepł wewnętrznych przez  $\gamma$  i scałku-

jemy równanie (całka 5 z dodatku E), to otrzymamy

$$\ln p + \gamma \ln V = \text{const.}$$

Lewą stronę tego równania możemy zapisać w postaci  $\ln(pV^\gamma)$ , a więc biorąc antylogarytm tego równania, dostajemy

$$pV^\gamma = \text{const}, \quad (20.61)$$

co mieliśmy wykazać.

### Rozprężanie swobodne

Jak widzieliśmy w paragrafie 19.10, rozprężanie swobodne jest przemianą adiabatyczną, w której gaz nie wykonuje żadnej pracy, ani żadna praca nie jest wykonywana nad gazem. Dlatego nie zmienia się energia wewnętrzna gazu. Rozprężanie swobodne jest więc całkowicie odmiennym procesem niż przemiana adiabatyczna opisana równaniami od (20.53) do (20.61), w której gaz wykonuje pracę, a więc zmienia swoją energię wewnętrzną. Wspomniane równania *nie mają* więc zastosowania w odniesieniu do rozprężania swobodnego, chociaż jest ono rozprężaniem adiabatycznym.

Przypomnijmy, że w trakcie rozprężania swobodnego gaz znajduje się w równowadze termodynamicznej tylko w stanie początkowym i końcowym. Na wykresie  $p$ - $V$  możemy więc przedstawić tylko te dwa punkty, ale nie możemy wykreślić łączącej ich linii. Co więcej, ponieważ nie zmienia się energia wewnętrzna  $\Delta E_w = 0$ , temperatura w stanie końcowym musi być równa temperaturze w stanie początkowym. Dlatego na wykresie  $p$ - $V$  stan początkowy i końcowy muszą znajdować się na tej samej izotermie. Zamiast równania (20.56) mamy więc

$$T_{\text{pocz}} = T_{\text{końc}} \quad (\text{rozprężanie swobodne}). \quad (20.62)$$

Jeżeli założymy ponadto, że gaz jest doskonały (a więc  $pV = nRT$ ), to ze względu na stałą temperaturę mamy też stałą wartość iloczynu  $pV$ . Widzimy, że w przypadku rozprężania swobodnego równanie (20.53) należy zastąpić przez

$$p_{\text{pocz}} V_{\text{pocz}} = p_{\text{końc}} V_{\text{końc}} \quad (\text{rozprężanie swobodne}). \quad (20.63)$$

---

### Przykład 20.9

W przykładzie 20.2 rozpatrywaliśmy zachodzące w temperaturze 310 K rozprężenie izotermiczne 1 mola tlenu od objętości początkowej 12 l do objętości końcowej 19 l. (Założyliśmy, że tlen jest gazem doskonałym).

a) Ile wynosiłaby temperatura końcowa gazu, gdyby rozpręgał się on do tej samej objętości w procesie adiabatycznym? Tlen ( $O_2$ ) jest gazem dwuatomowym i jego cząsteczki uczestniczą w ruchu obrotowym, lecz nie uczestniczą w ruchu drgającym.

#### ROZWIĄZANIE:

Zauważmy, że:

1. Rozprężający się gaz wykonuje pracę przeciwko sile parcia, którą działa na niego otoczenie.

2. W procesie adiabatycznym (nie ma wymiany ciepła z otoczeniem) gaz wykonuje pracę kosztem swojej energii wewnętrznej.

3. Ponieważ zmniejsza się energia wewnętrzna gazu, maleje też jego temperatura  $T$ .

Początkowe i końcowe wartości temperatury i objętości gazu można powiązać ze sobą za pomocą równania (20.56):

$$T_{\text{pocz}} V_{\text{pocz}}^{\gamma-1} = T_{\text{końc}} V_{\text{końc}}^{\gamma-1}. \quad (20.64)$$

Ponieważ cząsteczki są dwuatomowe i uczestniczą w ruchu obrotowym, ale nie drgają, możemy wziąć wartości molowych ciepł właściwych podane w tabeli 20.3. Otrzymamy w ten sposób war-

tość współczynnika  $\gamma$

$$\gamma = \frac{C_p}{C_V} = \frac{\frac{7}{2}R}{\frac{5}{2}R} = 1,4.$$

Rozwiążając równanie (20.64) względem  $T_{\text{końc}}$  i podstawiając znane wartości, dostajemy

$$T_{\text{końc}} = \frac{T_{\text{pocz}} V_{\text{pocz}}^{\gamma-1}}{V_{\text{końc}}^{\gamma-1}} = \frac{(310 \text{ K})(12 \text{ l})^{1,4-1}}{(19 \text{ l})^{1,4-1}} = (310 \text{ K}) \left(\frac{12}{19}\right)^{0,4} = 258 \text{ K.} \quad (\text{odpowiedź})$$

b) Jaka byłaby końcowa wartość temperatury i ciśnienia, gdyby gaz rozpreżał się swobodnie do podanej objętości? Przyjmijmy, że początkowe ciśnienie jest równe 2 Pa.

### ROZWIĄZANIE:

Zauważmy, że w procesie rozpreżania swobodnego temperatura gazu nie ulega zmianie:

$$T_{\text{pocz}} = T_{\text{końc}} = 310 \text{ K.} \quad (\text{odpowiedź})$$

Końcową wartość ciśnienia obliczamy ze wzoru (20.63)

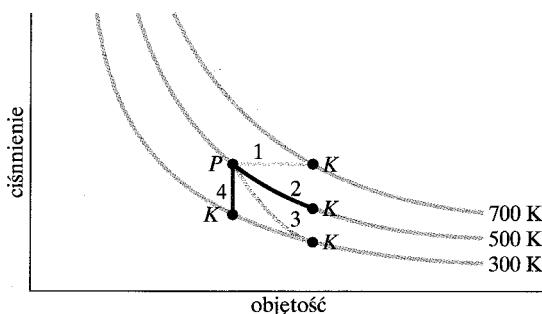
$$p_{\text{końc}} = p_{\text{pocz}} \frac{V_{\text{pocz}}}{V_{\text{końc}}} = (2 \text{ Pa}) \frac{12 \text{ l}}{19 \text{ l}} = 1,3 \text{ Pa.} \quad (\text{odpowiedź})$$

### Sztuka rozwiązywania zadań

#### Porad 2: Przedstawienie graficzne czterech rodzajów przemian gazowych

W rozdziale tym omówiliśmy cztery szczególne przemiany, którym może być poddawany gaz doskonały. Przykładową linię opisującą każdy z procesów przedstawiono na wykresie  $p$ - $V$  z rysunku 20.14.

W tabeli 20.4 podaną krótką charakterystykę każdej z przemian łącznie z ich nazwami (izobaryczna, izotermiczna), których w tej książce nie używamy, chociaż często można je spotkać w innych podręcznikach.



Rys. 20.14. Cztery różne przemiany gazu doskonałego na wykresie  $p$ - $V$ . Szczegóły procesów podano w tabeli 20.4

Tabela 20.4. Cztery szczególne przemiany ( $\Delta E_w = Q - W = nC_V \Delta T$ )

Przemiana na rys. 20.14	Wielkość stała	Nazwa przemiany	Równania
1	$p$	izobaryczna	$Q = nC_p \Delta T$ $W = p\Delta V$
2	$T$	izotermiczna	$Q = W$ $= nRT \ln(V_{\text{końc}}/V_{\text{pocz}})$ $\Delta E_w = 0$
3	$pV^\gamma, TV^{\gamma-1}$	adiabatyczna	$Q = 0; W = -\Delta E_w$
4	$V$	izochoryczna	$Q = \Delta E_w$ $= nC_V \Delta T;$ $W = 0$

**SPRAWDZIAN 5:** Uszereguj zaznaczone na wykresie (rys. 20.14) przemiany 1, 2 i 3 według ilości ciepła przekazywanego do gazu. Zacznij od największej wartości.

### Podsumowanie

**Kinetyczna teoria gazów** Kinetyczna teoria gazów wiąże właściwości makroskopowe gazu (na przykład ciśnienie i temperaturę) z właściwościami mikroskopowymi cząsteczek gazu (na przykład ich prędkością i energią kinetyczną).

**Liczba Avogadra** Jeden mol substancji zawiera  $N_A$  (liczba Avogadra) jej elementarnych jednostek (zwykle atomów lub cząstec-

czek). Na drodze doświadczalnej można stwierdzić, że

$$N_A = 6,02 \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1} \quad (\text{liczba Avogadra}). \quad (20.1)$$

Masę molową  $M$  substancji definiujemy jako masę jednego mola tej substancji. Jest ona związana z masą  $m$  cząsteczek tej substancji za pomocą równania

$$M = m N_A. \quad (20.4)$$

Próbka substancji o masie  $M_{\text{pr}}$ , złożona z  $N$  cząsteczek zawiera  $n$  moli tej substancji

$$n = \frac{N}{N_A} = \frac{M_{\text{pr}}}{M} = \frac{M_{\text{pr}}}{m N_A}. \quad (20.2, 20.3)$$

**Gaz doskonały** Gaz doskonały to gaz, którego ciśnienie  $p$ , objętość  $V$  i temperaturę  $T$  wiążą zależność

$$pV = nRT \quad (\text{równanie stanu gazu doskonałego}). \quad (20.5)$$

W równaniu tym  $n$  oznacza liczbę moli gazu, a  $R$  stałą gazową ( $8,31 \text{ J/(mol} \cdot \text{K)}$ ). Równanie stanu gazu doskonałego można także zapisać w postaci

$$pV = NkT, \quad (20.9)$$

gdzie  $k$  oznacza stałą Boltzmanna

$$k = \frac{R}{N_A} = 1,38 \cdot 10^{-23} \text{ J/K}. \quad (20.7)$$

**Praca w przemianie izotermicznej** Praca wykonywana przez gaz doskonały w wyniku **izotermicznego** (przy stałej temperaturze) rozprężania od objętości  $V_{\text{pocz}}$  do  $V_{\text{końc}}$  jest określona równaniem

$$W = nRT \ln \frac{V_{\text{końc}}}{V_{\text{pocz}}} \quad (\text{gaz doskonały, przemiana izotermiczna}). \quad (20.14)$$

**Ciśnienie, temperatura i prędkość cząsteczek** Ciśnienie wywierane przez  $n$  moli gazu doskonałego jest związane z prędkością jego cząsteczek równaniem

$$p = \frac{n M v_{\text{sr.kw.}}^2}{3V}, \quad (20.21)$$

gdzie  $v_{\text{sr.kw.}} = \sqrt{(v^2)_{\text{sr}}}$  oznacza **prędkość średnią kwadratową** cząsteczek gazu. Uwzględniając równanie stanu gazu doskonałego, można podać jej wartość w postaci

$$v_{\text{sr.kw.}} = \sqrt{\frac{3RT}{M}}. \quad (20.22)$$

**Temperatura i energia kinetyczna** Średnia energia kinetyczna  $E_{\text{k(sr)}}$  ruchu postępowego przypadająca na jedną cząsteczkę gazu doskonałego jest równa

$$E_{\text{k(sr)}} = \frac{3}{2} kT. \quad (20.24)$$

**Średnia droga swobodna** Średnia droga swobodna  $\lambda$  cząsteczek gazu to przeciętna odległość pokonywana przez cząsteczkę pomiędzy kolejnymi zderzeniami. Wynosi ona

$$\lambda = \frac{1}{\sqrt{2\pi d^2 N/V}} \quad (\text{średnia droga swobodna}), \quad (20.25)$$

gdzie  $N/V$  oznacza liczbę cząsteczek przypadających na jednostkę objętości, a  $d$  — średnicę cząsteczek.

**Rozkład prędkości Maxwell'a** Iloczyn  $P(v)dv$  funkcji opisującej **rozkład prędkości Maxwell'a**  $P(v)$  i szerokością wąskiego przedziału prędkości  $dv$  pozwala obliczyć, jaki ułamek cząsteczek porusza się z prędkościami z przedziału  $dv$  o środku w punkcie  $v$ :

$$P(v) = 4\pi \left( \frac{M}{2\pi RT} \right)^{3/2} v^2 e^{-Mv^2/2RT}. \quad (20.27)$$

Trzy używane miary prędkości cząsteczek gazu to

$$v_{\text{sr}} = \sqrt{\frac{8RT}{\pi M}} \quad (\text{prędkość średnia}), \quad (20.31)$$

$$v_p = \sqrt{\frac{2RT}{M}} \quad (\text{prędkość najbardziej prawdopodobna}) \quad (20.35)$$

oraz prędkość średnia kwadratowa zdefiniowana za pomocą równania (20.22).

**Molowe ciepła właściwe** Molowe ciepło właściwe gazu przy stałej objętości  $C_V$  jest zdefiniowane jako

$$C_V = \frac{1}{n} \frac{Q}{\Delta T} = \frac{1}{n} \frac{\Delta E_w}{\Delta T}, \quad (20.39, 20.41)$$

gdzie  $Q$  oznacza ciepło potrzebne do ogrzania próbki zawierającej  $n$  moli gazu doskonałego,  $\Delta T$  — zmianę temperatury gazu, a  $\Delta E_w$  — zmianę energii wewnętrznej gazu. Dla jednoatomowego gazu doskonałego

$$C_V = \frac{3}{2} R = 12,5 \text{ J/(mol} \cdot \text{K}). \quad (20.43)$$

Molowe ciepło właściwe przy stałym ciśnieniu  $C_p$  jest zdefiniowane jako

$$C_p = \frac{1}{n} \frac{Q}{\Delta T}, \quad (20.46)$$

gdzie  $Q$ ,  $n$  i  $\Delta T$  mają takie samo znaczenie jak w definicji  $C_V$ . Molowe ciepło właściwe przy stałym ciśnieniu  $C_p$  jest także dane równaniem

$$C_p = C_V + R. \quad (20.49)$$

Dla  $n$  moli gazu doskonałego

$$E_w = nC_V T \quad (\text{gaz doskonały}). \quad (20.44)$$

Jeżeli temperatura  $n$  moli zamkniętego w naczyniu gazu doskonałego wzrasta w wyniku **dowolnego** procesu o  $\Delta T$ , to zmiana energii wewnętrznej gazu jest dana równaniem

$$\Delta E_w = nC_V \Delta T \quad (\text{gaz doskonały, dowolny proces}). \quad (20.45)$$

W równaniu tym trzeba podstawić wartość  $C_V$  właściwą dla danego rodzaju gazu doskonałego.

**Stopnie swobody i wartość  $C_V$**  Wartość ciepła właściwego przy stałej objętości  $C_V$  można określić na podstawie zasadysy ekwiptyacji energii, która mówi, że każdemu stopniowi swobody cząsteczk (niezależnemu rodzajowi ruchu) można przypisać średnią energię  $\frac{1}{2}kT$  w przeliczeniu na cząsteczkę ( $\frac{1}{2}RT$  na mol gazu). Jeżeli przez  $f$  oznaczmy liczbę stopni swobody, to energia wewnętrzna oraz ciepło właściwe przy stałej objętości są

odpowiednio równe

$$E_w = (f/2)nRT$$

oraz

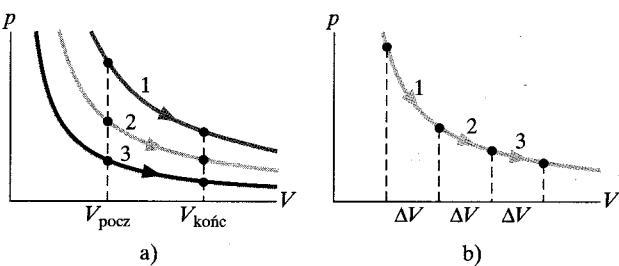
$$C_V = \left(\frac{f}{2}\right)R = 4,16f \text{ J/(mol} \cdot \text{K).} \quad (20.51)$$

Dla gazu jednoatomowego  $f = 3$  (trzy stopnie swobody w ruchu postępowym). Dla gazu dwuatomowego  $f = 5$  (trzy stopnie swobody dla ruchu postępowego i dwa dla ruchu obrotowego).

## Pytania

1. Wyobraźmy sobie, że gaz doskonały zamknięty w zbiorniku o stałej objętości jest ogrzewany od temperatury  $20^\circ\text{C}$  do  $40^\circ\text{C}$ . Czy ciśnienie gazu wzrośnie dwa razy, mniej niż dwa razy, czy więcej niż dwa razy?

2. Wykres z rysunku 20.15a przedstawia trzy przemiany izotermiczne tego samego gazu, których skutkiem jest identyczna zmiana jego objętości (od  $V_{\text{pocz}}$  do  $V_{\text{konec}}$ ), zrealizowane w różnych temperaturach. Uszereguj te przemiany według: a) pracy wykonanej przez gaz, b) zmian energii wewnętrznej gazu i c) energii pobranej przez gaz w postaci ciepła. Za każdym razem zaczynaj od największej wartości.



Rys. 20.15. Pytanie 2

Na wykresie  $p$ - $V$  z rysunku 20.15b przedstawiono trzy przemiany leżące na jednej izotermie. W każdej z nich gaz zmienia swą objętość o  $\Delta V$ . Uszereguj te przemiany według: d) pracy wykonanej przez gaz, e) zmian energii wewnętrznej gazu i f) energii pochłoniętej przez gaz w postaci ciepła. Za każdym razem zaczynaj od największej wartości.

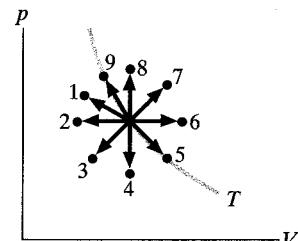
3. Objętość i liczba cząsteczek gazu w czterech różnych układach wynosi odpowiednio: a)  $2V_0$  i  $N_0$ , b)  $3V_0$  i  $3N_0$ , c)  $8V_0$  i  $4N_0$  i d)  $3V_0$  i  $9N_0$ . Uszereguj te układy według długości drogi swobodnej cząsteczek gazu, zaczynając od jej największej wartości.

4. Ile energii w postaci ciepła dostarczono do układu w sytuacji opisanej w przykładzie 20.2?

**Przemiana adiabatyczna** Jeżeli gaz doskonały jest poddany powolnemu, adiabatycznemu ( $Q = 0$ ) sprężaniu lub rozprężaniu, jego ciśnienie i objętość są związane zależnością

$$pV^\gamma = \text{const} \quad (\text{przemiana adiabatyczna}), \quad (20.53)$$

gdzie  $\gamma (= C_p/C_V)$  jest stosunkiem molowych ciepł w właściwych dla danego gazu. Dla rozprężania swobodnego mamy  $pV = \text{const}$ .



Rys. 20.16. Pytanie 5

	a	b	c	d
$Q$	-50	+35	-50	+20
$W$	-50	+35		

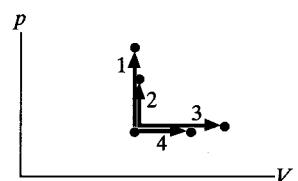
$W_{\text{nad gazem}}$  -40 +40

6. W tabelce podano wartości ciepła przekazanego do układu i pracy wykonanej przez gaz lub nad gazem w czterech różnych przemianach. Uszereguj te przemiany według zmiany temperatury gazu, zaczynając od największej wartości dodatniej, a kończąc na najmniejszej wartości ujemnej.

7. Ogrzanie pewnej ilości gazu doskonałego o  $\Delta T_1$  w stałej objętości wymaga dostarczenia  $30 \text{ J}$  ciepła. Taka sama zmiana temperatury gazu przy stałym ciśnieniu wymaga dostarczenia  $50 \text{ J}$  ciepła. Ile wynosi praca wykonana przez gaz w drugim przypadku?

8. Dwuatomowy gaz doskonały, którego cząsteczki uczestniczą w ruchu obrotowym, ale nie uczestniczą w ruchu drgającym, oddaje ciepło  $Q$ . Czy energia wewnętrzna gazu zmniejszy się bardziej, kiedy przemiana będzie zachodzić przy stałej objętości, czy przy stałym ciśnieniu?

9. 1 mol jednoatomowego gazu doskonałego otrzymuje pewną energię a) przy stałym ciśnieniu i b) przy stałej objętości. Taką samą energię otrzymuje 1 mol dwuatomowego gazu doskonałego c) przy stałym ciśnieniu i d) przy stałej objętości. Na wykresie  $p$ - $V$  z rysunku 20.17 zaznaczono wspomniane cztery procesy, które zaczynają się w tym samym stanie



Rys. 20.17. Pytanie 9

początkowym i kończą w czterech różnych stanach końcowych. Przyporządkuj linie poszczególnym procesom. e) Czy cząsteczki gazu dwuatomowego uczestniczą w ruchu obrotowym?

**10.** Czy w następujących procesach temperatura gazu doskonałego wzrośnie, zmniejszy się, czy nie ulegnie zmianie: a) rozprężanie izotermiczne, b) rozprężanie przy stałym ciśnieniu, c) rozprężanie adiabatyczne i d) zwiększenie ciśnienia przy stałej objętości?

**11.** a) Uszereguj cztery procesy z rysunku 20.14 według pracy wykonanej przez gaz, zaczynając od jej największej wartości. b) Uszereguj przemiany 1, 2 i 3 według zmiany energii wewnętrznej gazu, zaczynając od największej wartości dodatniej.

## Zadania

Rozwiązań jest dostępne na stronie internetowej podręcznika: <http://www.wiley.com/college/hrw>

Rozwiązań jest dostępne w postaci interaktywnej, wykorzystującej oprogramowanie Interactive Learning-Ware (na tej samej stronie)

### 20.2 Liczba Avogadra

**1.** Oblicz masę (w kilogramach)  $7,5 \cdot 10^{24}$  atomów arsenu. Masa molowa arsenu wynosi 74,9 g/mol.

**2.** Masa molowa złota wynosi 197 g/mol. a) Ile moli złota zawiera czysta próbka tego pierwiastka o masie 2,5 g? b) Ile atomów zawiera próbka?

**3.** Wyobraź sobie, że cząsteczki znajdujące się w 1 g wody zostały równomiernie rozłożone na powierzchni Ziemi. Ile cząsteczek znalazły się na powierzchni  $1 \text{ cm}^2$ ?

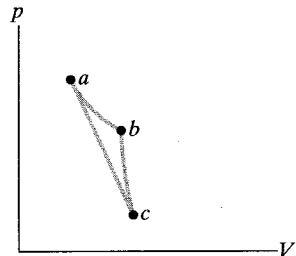
**4.** Pewien wybitny naukowiec napisał: „Atrament zużyty do napisania jednej litery tego zdania zawiera dostatecznie wiele cząsteczek, że wystarczyłoby po jednej nie tylko dla każdego mieszkańca Ziemi, lecz dla wszystkich stworzeń zamieszkujących naszą Galaktykę, nawet gdyby wokół każdej gwiazdy kłały planeta równie gęsto zaludniona jak Ziemia”. Sprawdź poprawność tego stwierdzenia. Przyjmij, że masa molowa atramentu wynosi 18 g/mol, do napisania jednej litery potrzeba 1  $\mu\text{g}$  atramentu, na Ziemi żyje  $5 \cdot 10^9$  ludzi, a liczba gwiazd w Galaktyce jest równa  $10^{11}$ .

### 20.3 Gazy doskonałe

**5.** Wyznacz: a) liczbę moli i b) liczbę cząsteczek w  $1 \text{ cm}^3$  gazu doskonałego pod ciśnieniem 100 Pa i w temperaturze 220 K.

**6.** Najwyższa próżnia uzyskana w laboratorium odpowiada ciśnieniu  $1 \cdot 10^{-18}$  atm, czyli  $1,01 \cdot 10^{-13}$  Pa. Ile cząsteczek gazu mieści

12. W przemianie izotermicznej  $ab$  przedstawionej na wykresie  $p$ - $V$  (rys. 20.18) gaz wykonuje pracę 5 J, a w przemianie adiabatycznej  $bc$  pracę 4 J. Ile wynosi zmiana energii wewnętrznej gazu, jeżeli jest on poddany przemianie, którą reprezentuje prosty odcinek łączący punkty  $a$  i  $c$ ?



Rys. 20.18. Pytanie 12

się w centymetrze sześciennym przy takim ciśnieniu w temperaturze 293 K?

**7.** Gazowy tlen, który w temperaturze 40°C pod ciśnieniem  $1,01 \cdot 10^5$  Pa zajmuje objętość  $1000 \text{ cm}^3$ , rozpręża się do  $1500 \text{ cm}^3$ . Jednocześnie ciśnienie osiąga wartość  $1,06 \cdot 10^5$  Pa. Oblicz: a) liczbę moli tlenu i b) temperaturę końcową próbki.

**8.** Opona samochodu o objętości  $1,64 \cdot 10^{-2} \text{ m}^3$  zawiera powietrze pod ciśnieniem 165 kPa mierzonym względem ciśnienia atmosferycznego w temperaturze 0°C. Ile wynosi ciśnienie w oponie mierzone względem ciśnienia atmosferycznego, jeżeli jej temperatura wzrośnie do 27°C, a objętość do  $1,67 \cdot 10^{-2} \text{ m}^3$ ? Przyjmij, że ciśnienie atmosferyczne jest równe  $1,01 \cdot 10^5$  Pa.

**9.** Pewna ilość gazu doskonałego o temperaturze 10°C pod ciśnieniem 100 kPa zajmuje objętość  $2,5 \text{ m}^3$ . a) Ile moli zawiera ta ilość gazu? b) Wyobraź sobie, że ciśnienie wzrasta do 300 kPa, a temperatura do 30°C. Jaką objętość zajmuje teraz gaz? Załóż, że nie ma żadnych nieszczytelności.

**10.** Oblicz pracę wykonaną przez siłę zewnętrzną podczas izotermicznego sprężania 1 mola tlenu do objętości końcowej 16,8 l, jeżeli w stanie początkowym w temperaturze 0°C i pod ciśnieniem 1 atm zajmuje on objętość 22,4 l.

**11.** Ciśnienie  $p$ , objętość  $V$  i temperaturę  $T$  dla pewnej substancji wiążą zależność

$$p = \frac{AT - BT^2}{V},$$

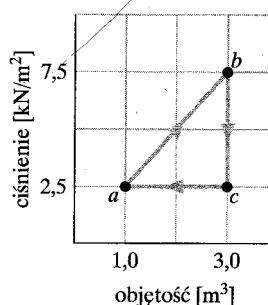
gdzie  $A$  i  $B$  są stałymi. Znajdź równanie, które opisuje pracę wykonaną przez tę substancję, gdy jej temperatura przy stałym ciśnieniu zmienia się od  $T_1$  do  $T_2$ .

**12.** W zbiorniku znajduje się mieszanina dwóch gazów doskonałych, która zawiera 2 mole gazu o masie molowej  $M_1$  oraz 0,5 mola gazu o masie molowej  $M_2 = 3M_1$ . Jaki ułamek całkowitego ciśnienia wywieranego przez gaz na ścianki zbiornika

jest związany z drugim gazem? (Rozpatrując w ramach kinetycznej teorii gazów przyczyny ciśnienia, dochodzimy do odkrytego doświadczalnie prawa ciśnień parcjonalnych dla mieszaniny gazów, które nie wchodzą w reakcje chemiczne między sobą: *Całkowite ciśnienie mieszaniny gazów w zbiorniku jest równe sumie ciśnień, które niezależnie od siebie wywieratyby poszczególne jej składniki, gdyby każdy z nich zajmował całą objętość zbiornika.*)

**13.** Powietrze, które w stanie początkowym pod ciśnieniem 103,0 kPa mierzonym względem ciśnienia atmosferycznego zajmuje objętość  $0,14 \text{ m}^3$ , ulega rozprężeniu izotermicznemu. Koncowe ciśnienie (mierzone w ten sam sposób) ma wartość 101,3 kPa. Następnie powietrze jest chłodzone pod stałym ciśnieniem, aż osiągnie objętość początkową. Oblicz pracę wykonaną przez powietrze.

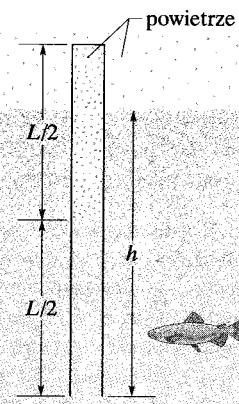
**14.** Próbkę gazu doskonałego poddano przemianie cyklicznej *abca* przedstawionej we współrzędnych *p-V* na rysunku 20.19. W punkcie *a* temperatura  $T = 200 \text{ K}$ . a) Ile moli gazu zawiera próbka? Ile wynosi: b) temperatura gazu w punkcie *b*, c) temperatura gazu w punkcie *c* i d) sumaryczne ciepło dostarczone do gazu w trakcie całego cyklu?



Rys. 20.19. Zadanie 14

**15.** Pęcherzyk powietrza o objętości  $20 \text{ cm}^3$  znajduje się na dnie jeziora na głębokości 40 m w wodzie o temperaturze  $4^\circ\text{C}$ . Pęcherzyk wznosi się w kierunku powierzchni jeziora, gdzie panuje temperatura  $20^\circ\text{C}$ . Przymijmy, że temperatura powietrza w pęcherzyku jest taka sama jak temperatura wody. Jaka będzie objętość pęcherzyka w chwili, kiedy osiągnie on powierzchnię?

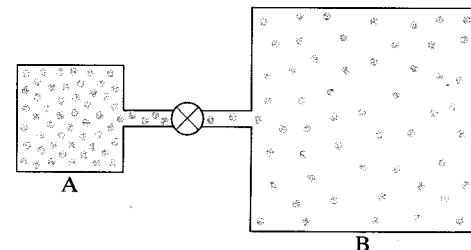
**16.** Otwartą z jednej strony rurę o długości 25 m wypełnia powietrze pod ciśnieniem atmosferycznym. Następnie rurę zanurzamy w jeziorze, aż do chwili, kiedy woda wypełnia jej wnętrze do połowy (rys. 20.20). Na jakiej głębokości *h* znajdzie się wtedy dolny koniec rury? Załóż, że temperatura jest wszędzie taka sama i nie ulega zmianie.



Rys. 20.20. Zadanie 16

**17.** Zbiornik A z rysunku 20.21 wypełnia gaz doskonały pod ciśnieniem  $5 \cdot 10^5 \text{ Pa}$  i o temperaturze  $300 \text{ K}$ . Zbiornik ten jest

połączony za pomocą cienkiej rurki przez zamknięty zawór ze zbiornikiem B o objętości cztery razy większej niż zbiornik A. W zbiorniku B znajduje się taki sam gaz doskonały pod ciśnieniem  $1 \cdot 10^5 \text{ Pa}$  i o temperaturze  $400 \text{ K}$ . W pewnej chwili otwieramy zawór, umożliwiając wyrównanie się ciśnień w obydwu zbiornikach, które jednak cały czas są utrzymywane w temperaturach początkowych. Ile wyniesie ciśnienie w połączonych zbiornikach?



Rys. 20.21. Zadanie 17

#### 20.4 Ciśnienie, temperatura i prędkość średnia kwadratowa

**18.** Oblicz prędkość średnią kwadratową atomów w helu o temperaturze  $1000 \text{ K}$ . Potrzebną masę molową helu znajdziesz w dodatku F.

**19.** Najmniejsza możliwa temperatura w przestrzeni kosmicznej wynosi  $2,7 \text{ K}$ . Ile wynosi prędkość średnia kwadratowa atomów wodoru w tej temperaturze? (Masę molową cząsteczek wodoru ( $\text{H}_2$ ) podano w tabeli 20.1).

**20.** Wyznacz prędkość średnią kwadratową atomów argonu w temperaturze  $313 \text{ K}$ . Masę molową argonu znajdziesz w dodatku F.

**21.** Temperatura i ciśnienie w atmosferze Słońca są odpowiednio równe  $2 \cdot 10^6 \text{ K}$  i  $0,03 \text{ Pa}$ . Oblicz prędkość średnią kwadratową elektronów swobodnych (masa elektronu  $9,11 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$ ), zakładając, że tworzą one gaz doskonały.

**22.** a) Oblicz prędkość średnią kwadratową cząsteczek azotu w temperaturze  $20^\circ\text{C}$ . Masę molową cząsteczek azotu ( $\text{N}_2$ ) podano w tabeli 20.1. W jakiej temperaturze prędkość średnia kwadratowa będzie b) dwa razy mniejsza i c) dwa razy większa?

**23.** Wiązka cząsteczek wodoru ( $\text{H}_2$ ) uderza w ścianę pod kątem  $55^\circ$  względem normalnej. Każda cząsteczka w wiązce ma masę  $3,3 \cdot 10^{-24} \text{ g}$  i porusza się z prędkością  $1 \text{ km/s}$ . Cząsteczki uderzają w ścianę o powierzchni  $2 \text{ cm}^2$  z częstością  $10^{23} \text{ s}^{-1}$ . Jakie ciśnienie wywiera wiązka na ścianę?

**24.** Gęstość pewnego gazu o temperaturze  $273 \text{ K}$ , pod ciśnieniem  $1 \cdot 10^{-2} \text{ atm}$ , wynosi  $1,24 \cdot 10^{-5} \text{ g/cm}^3$ . a) Oblicz prędkość średnią kwadratową  $v_{\text{sr.kw.}}$  cząsteczek tego gazu. b) Oblicz masę molową gazu i zidentyfikuj go. (Wskazówka: Gaz ten wymieniono w tabeli 20.1).

## 20.5 Energia kinetyczna ruchu postępowego

25. Ile wynosi średnia energia kinetyczna ruchu postępowego cząsteczek azotu w temperaturze 1600 K?

26. Wyznacz średnią energię kinetyczną ruchu postępowego cząsteczek gazu doskonałego w temperaturze a) 0°C i b) 100°C. Ile wynosi energia kinetyczna ruchu postępowego mola cząsteczek gazu doskonałego w temperaturze c) 0°C i d) 100°C?

27. Woda o temperaturze 32°C paruje, ponieważ ucieka część cząsteczek znajdujących się na powierzchni. Ciepło parowania (539 cal/g) jest w przybliżeniu równe  $\varepsilon n$ , gdzie  $\varepsilon$  oznacza średnią energię uciekających cząsteczek, a  $n$  jest liczbą cząsteczek na gram. a) Oblicz wartość  $\varepsilon$ . b) Ile wynosi stosunek wartości  $\varepsilon$  do średniej energii kinetycznej cząsteczek H<sub>2</sub>O, przy założeniu, że zależy ona od temperatury tak samo, jak w przypadku gazów? 

28. Wykaż, że równanie stanu gazu doskonałego (20.5) można zapisać w alternatywnej postaci  $p = \rho RT/M$ , gdzie  $\rho$  jest gęstością (masą jednostkowej objętości) gazu, a  $M$  jego masą molową.

29. *Prawo Avogadra* mówi, że w tych samych warunkach temperatury i ciśnienia jednakowe objętości gazu zawierają taką samą liczbę cząsteczek. Czy prawo to jest równoważne równaniu stanu gazu doskonałego? Uzasadnij swoją odpowiedź.

## 20.6 Średnia droga swobodna

30. Średnia droga swobodna cząsteczek wodoru w temperaturze 0°C pod ciśnieniem 1 atm wynosi  $0,8 \cdot 10^{-5}$  cm. Koncentracja cząsteczek w tych warunkach jest równa  $2,7 \cdot 10^{19}$  cm<sup>-3</sup>. Jaka jest średnica cząsteczkii?

31. Na wysokości 2500 km nad powierzchnią Ziemi koncentracja cząsteczek w atmosferze wynosi w przybliżeniu 1 cm<sup>-3</sup>. a) Ile wynosi średnia droga swobodna obliczona na podstawie równania (20.25) i b) jaki sens ma ta wielkość w podanych warunkach? W obliczeniach przyjmij, że średnica cząsteczkii wynosi  $2 \cdot 10^{-8}$  cm.

32. Przy jakiej częstotliwości długość fali dźwiękowej w powietrzu byłaby równa średniej drodze swobodnej cząsteczek tlenu w pod ciśnieniem 1 atm i w temperaturze 0°C? Przyjmij, że średnica cząsteczkii wynosi  $3 \cdot 10^{-8}$  cm.

33. Ile wynosi średnia droga swobodna 15 kulistych cukierków w intensywne potrząsanej torbie? Objętość torby jest równa 1 l, a średnica cukierka 1 cm. (Uwzględnij tylko zderzenia między cukierkami, a nie między cukierkami i torbą).

34. W temperaturze 20°C i pod ciśnieniem 750 torów wartości średniej drogi swobodnej w argonie (Ar) i azocie (N<sub>2</sub>) są odpowiednio równe  $\lambda_{\text{Ar}} = 9,9 \cdot 10^{-6}$  cm i  $\lambda_{\text{N}_2} = 27,5 \cdot 10^{-6}$  cm. a) Wyznacz stosunek efektywnej średnicy atomu argonu i azotu. Ile wynosi średnia droga swobodna w argonie b) dla 20°C i 150 torów oraz c) -40°C i 750 torów?

35. W pewnym akceleratorze cząstek protony biegły po torze kolistym o średnicy 23 m wewnątrz odpompowanej komory, w której wewnętrz panuje ciśnienie  $1 \cdot 10^{-6}$  tora i temperatura 295 K. a) Oblicz, ile cząsteczek znajduje się w centymetrze sześciennym gazu pod tym ciśnieniem. b) Ile wynosi średnia droga swobodna cząsteczek gazu, jeżeli ich średnica jest równa  $2 \cdot 10^{-8}$  cm?

## 20.7 Rozkład prędkości cząsteczek

36. Tabela zawiera liczbę  $N_i$  cząstek o prędkości  $v_i$  dla zbioru 22 cząstek.

$N_i$	2	4	6	8	2
$v_i$ [cm/s]	1	2	3	4	5

a) Oblicz prędkość średnią  $v_{\text{sr}}$  cząstek. b) Oblicz prędkość średnią kwadratową  $v_{\text{sr.kw.}}$  cząstek. c) Która z pięciu podanych prędkości jest prędkością najbardziej prawdopodobną  $v_p$ ?

37. Prędkości 10 cząstek są równe 2, 3, 4, ..., 11 km/s. a) Ile wynosi prędkość średnia cząstek? b) Ile wynosi ich prędkość średnia kwadratowa?

38. a) Dziesięć cząstek porusza się z następującymi prędkościami: cztery z prędkością 200 m/s, dwie z 500 m/s i cztery z 600 m/s. Oblicz ich prędkość średnią i prędkość średnią kwadratową. Czy  $v_{\text{sr.kw.}} > v_{\text{sr}}$ ? b) Wymyśl swój własny rozkład prędkości dla 10 cząstek i udowodnij, że także dla tego rozkładu  $v_{\text{sr.kw.}} \geq v_{\text{sr}}$ . c) Pod jakim warunkiem (jeżeli to możliwe) zachodzi równość  $v_{\text{sr.kw.}} = v_{\text{sr}}$ ?

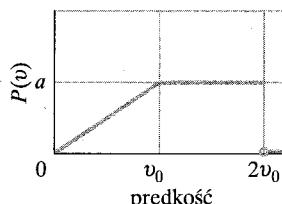
39. Oblicz temperaturę, w której prędkość średnia kwadratowa a) wodoru cząsteczkowego i b) tlenu cząsteczkowego jest równa prędkości ucieczki z powierzchni Ziemi. c) Powtóż te same obliczenia dla prędkości ucieczki z powierzchni Księżyca, zakładając, że przyspieszenie grawitacyjne na Księżyku jest równe 0,16g. d) Temperatura w wysokich warstwach atmosfery jest bliska 1000 K. Czy można się tam spodziewać dużych ilości wodoru? Dużych ilości tlenu? Uzasadnij swoją odpowiedź. 

40. Można się przekonać, że prędkość najbardziej prawdopodobna w gazie, który ma (jednorodną) temperaturę  $T_2$  jest taka sama, jak prędkość średnia kwadratowa w tym samym gazie o (jednorodnej) temperaturze  $T_1$ . Oblicz stosunek  $T_2/T_1$ .

41. Cząsteczka wodoru (średnica  $1 \cdot 10^{-8}$  cm) poruszająca się z prędkością średnią kwadratową opuszcza piecyk ( $T = 4000$  K) i dostaje się do wnętrza komory zawierającej atomy zimnego argonu (średnica  $3 \cdot 10^{-8}$  cm) o koncentracji  $4 \cdot 10^{19}$  cm<sup>-3</sup>. a) Ile wynosi prędkość cząsteczkii wodoru? b) Jaka jest najmniejsza odległość między środkiem cząsteczkii wodoru i atomu argonu podczas ich zderzenia przy założeniu, że obydwie cząsteczkii mają kształt kulisty? c) Jaka jest poczatkowa częstotliwość zderzeń (na sekundę), w których uczestniczy cząsteczka wodoru? (Wskazówka: Załóż, że atomy zimnego argonu są nieruchome. W takim przypadku średnia droga swobodna cząsteczkii wodoru będzie określona równaniem (20.26), a nie (20.25)).

42. Dwa zbiorniki znajdują się w tej samej temperaturze. Pierwszy zawiera gaz o ciśnieniu  $p_1$ , masie cząsteczkowej  $m_1$  i prędkości średniej kwadratowej  $v_{\text{sr},\text{kw},1}$ . Drugi zbiornik zawiera gaz o ciśnieniu  $2p_1$ , masie cząsteczkowej  $m_2$  i prędkości średniej  $v_{\text{sr},2} = 2v_{\text{sr},\text{kw},1}$ . Wyznacz stosunek mas cząsteczkowych  $m_1/m_2$ .

43. Wykres z rysunku 20.22 przedstawia hipotetyczny rozkład prędkości w próbce zawierającej  $N$  cząsteczek gazu (zwróć uwagę, że  $P(v) = 0$  dla  $v > 2v_0$ ). a) Wyraź wartość parametru  $a$  w zależności od  $N$  i  $v_0$ . b) Ile cząsteczek ma prędkości z przedziału od  $1,5v_0$  do  $2v_0$ ? c) Wyraź prędkość średnią cząsteczek jako funkcję  $v_0$ . d) Oblicz  $v_{\text{sr},\text{kw}}$ .



Rys. 20.22. Zadanie 43

## 20.8 Molowe ciepła właściwe gazu doskonałego

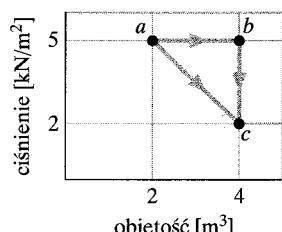
44. Ile wynosi energia wewnętrzna 1 mola jednoatomowego gazu doskonałego o temperaturze  $T = 273$  K?

45. Jeden mol gazu doskonałego rozpręża się izotermicznie. Oblicz w zależności od objętości początkowej i końcowej oraz temperatury, ile ciepła dostarczono do gazu? (Wskazówka: Skorzystaj z pierwszej zasady termodynamiki).

46. W wyniku dostarczenia do gazu 20,9 J energii w postaci ciepła jego objętość wzrosła od  $50 \text{ cm}^3$  do  $100 \text{ cm}^3$ . Ciśnienie było stałe i miało wartość 1 atm. a) O ile wzrosła energia wewnętrzna gazu? Wyznacz molowe ciepło właściwe gazu b) przy stałym ciśnieniu i c) przy stałej objętości, jeżeli w przemianie uczestniczyło  $2 \cdot 10^{-3}$  mola gazu.

47. W zbiorniku znajduje się mieszanina trzech nie reagujących ze sobą gazów:  $n_1$  moli gazu o molowym ciepłe właściwym przy stałej objętości  $C_1$  itd. Wyznacz molowe ciepło właściwe przy stałej objętości mieszaniny gazów w zależności od wartości molowego ciepła właściwego i ilości poszczególnych składników.

48. Jeden mol dwuatomowego gazu doskonałego ulega przemianie od stanu  $a$  do  $c$  wzdłuż przekątnej widocznej na wykresie z rysunku 20.23. a) Ile wynosi zmiana energii wewnętrznej gazu i b) ile ciepła dostarczono do gazu podczas przemiany? c) Ile ciepła trzeba dostarczyć do gazu w przemianie od stanu  $a$  do  $c$  wzdłuż linii  $abc$ ?



Rys. 20.23. Zadanie 48

49. Masę cząsteczkę gazu można obliczyć na podstawie jego ciepła właściwego przy stałej objętości  $c_V$ . Przymij, że dla argonu  $c_V = 0,075 \text{ cal/(g} \cdot ^\circ\text{C)}$  i oblicz a) masę atomu argonu i b) masę molową argonu.

## 20.9 Stopnie swobody a molowe ciepła właściwe

50. Do gazu dwuatomowego rozprężającego się przy stałym ciśnieniu dostarczono 70 J energii w postaci ciepła. Cząsteczki uczestniczą w ruchu obrotowym, ale nie wykonują ruchu drgającego. O ile wzrosnie energia wewnętrzna gazu?

51. Jeden mol tlenu ( $\text{O}_2$ ) o temperaturze początkowej  $0^\circ\text{C}$  ogrzewamy przy stałym ciśnieniu. Ile ciepła trzeba dostarczyć do gazu, aby podwoiła się jego objętość? (Cząsteczki uczestniczą w ruchu obrotowym, ale nie wykonują ruchu drgającego).

52. Założymy, że próbka 12 g tlenu ( $\text{O}_2$ ) ogrzewamy od temperatury  $25^\circ\text{C}$  do  $125^\circ\text{C}$  pod stałym ciśnieniem atmosferycznym. a) Ile moli gazu zawiera próbka? (Masę molową znajdziesz w tabeli 20.1). b) Ile ciepła trzeba dostarczyć do tlenu? (Cząsteczki uczestniczą w ruchu obrotowym, ale nie wykonują ruchu drgającego). c) Jaka część dostarczonego ciepła zwiększa energię wewnętrzną tlenu?

53. Założymy, że 4 mole dwuatomowego gazu doskonałego, którego cząsteczki uczestniczą w ruchu obrotowym, ale nie uczestniczą w ruchu drgającym, ogrzano o  $60 \text{ K}$  przy stałym ciśnieniu. a) Ile ciepła dostarczono do gazu? b) O ile wzrosła energia wewnętrzna gazu? c) Jaką pracę wykonał gaz? d) O ile wzrosła energia kinetyczna ruchu postępowego cząsteczek gazu?

## 20.11 Rozprężanie adiabatyczne gazu doskonałego

54. a) Jeden litr gazu, dla którego parametr  $\gamma$  jest równy 1,3, ma w stanie początkowym temperaturę  $273 \text{ K}$  i ciśnienie 1 atm. Gaz sprężono do połowy początkowej objętości. Oblicz: ciśnienie i temperaturę gazu na końcu tej przemiany. b) Następnie gaz przy stałym ciśnieniu ochłodzono do jego początkowej temperatury  $273 \text{ K}$ . Jaką objętość zajmuje gaz w stanie końcowym?

55. Pewien gaz pod ciśnieniem 1,2 atm i w temperaturze  $310 \text{ K}$  zajmował objętość  $4,3 \text{ l}$ . Następnie sprężono go adiabatycznie do objętości  $0,76 \text{ l}$ . Oblicz a) ciśnienie końcowe i b) temperaturę końcową, przyjmując, że jest to gaz doskonały, dla którego parametr  $\gamma = 1,4$ .

56. Wiadomo, że dla przemiany adiabatycznej  $pV^\gamma = \text{const}$ . Oblicz wartość stałej dla przemiany adiabatycznej, podczas której 2 mole gazu mają w pewnej chwili ciśnienie  $p = 1 \text{ atm}$  i temperaturę  $T = 300 \text{ K}$ . Przymijmy, że jest to gaz dwuatomowy, którego cząsteczki uczestniczą w ruchu obrotowym, ale nie uczestniczą w ruchu drgającym.

57. Wyobraźmy sobie, że  $n$  moli gazu doskonałego poddano przemianie adiabatycznej, w której temperatura początkowa jest

równa  $T_1$ , a końcowa  $T_2$ . Wykaż, że praca wykonana przez gaz jest równa  $nC_V(T_1 - T_2)$ , gdzie  $C_V$  jest molowym ciepłem właściwym przy stałej objętości. (Wskazówka: Skorzystaj z pierwszej zasady termodynamiki).

**58.** Wykaż, że dla przemiany adiabatycznej gazu doskonałego a) moduł ściśliwości jest dany wzorem

$$B = -V \frac{dp}{dV} = \gamma p,$$

i b) prędkość dźwięku w gazie jest równa

$$v_{\text{dż}} = \sqrt{\frac{\gamma p}{\rho}} = \sqrt{\frac{\gamma RT}{M}}.$$

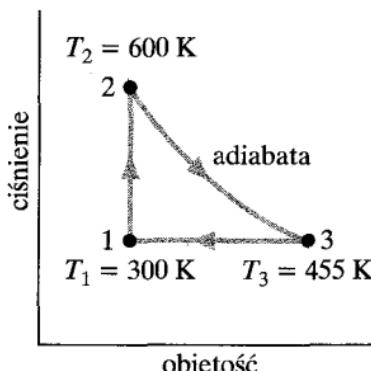
Skorzystaj z równań (18.2) i (18.3).

**59.** Powietrze w temperaturze  $0^\circ\text{C}$  i pod ciśnieniem 1 atm ma gęstość  $1,29 \cdot 10^{-3} \text{ g/cm}^3$ . Prędkość dźwięku w powietrzu w tej temperaturze wynosi 331 m/s. Korzystając z tych danych, oblicz stosunek  $\gamma$  wartości molowego ciepła właściwego przy stałym ciśnieniu i przy stałej objętości dla powietrza. (Wskazówka: Patrz zadanie 58).

**60.** a) Gaz doskonały o początkowym ciśnieniu  $p_0$  rozpręża się swobodnie do objętości 3 razy większej od objętości początkowej.

Ile wynosi ciśnienie końcowe gazu? b) Następnie gaz jest powoli sprężany adiabatycznie do objętości początkowej. Ciśnienie gazu po zakończeniu tej przemiany jest równe  $3^{1/3} p_0$ . Czy rozważany gaz jest jedno-, dwu-, czy wieloatomowy? c) Jak zmienia się średnia energia kinetyczna przypadająca na cząsteczkę w stanie końcowym w porównaniu ze stanem początkowym?

**61.** Jeden mol jednoatomowego gazu doskonałego jest poddany cyklicznej przemianie przedstawionej na rysunku 20.24. Przemiana 1 → 2 zachodzi przy stałej objętości, przemiana 2 → 3 jest adiabatyczna, a przemiana 3 → 1 zachodzi przy stałym ciśnieniu. a) Oblicz ciepło  $Q$ , zmianę energii wewnętrznej  $\Delta E_w$  i pracę  $W$  dla każdej z tych przemian osobno oraz dla całego cyklu. b) Ciśnienie początkowe w punkcie 1 wynosi 1 atm. Oblicz ciśnienie i objętość w punktach 2 i 3. Przyjmij, że 1 atm =  $1,013 \cdot 10^5 \text{ Pa}$  oraz  $R = 8,314 \text{ J/(mol} \cdot \text{K)}$ .



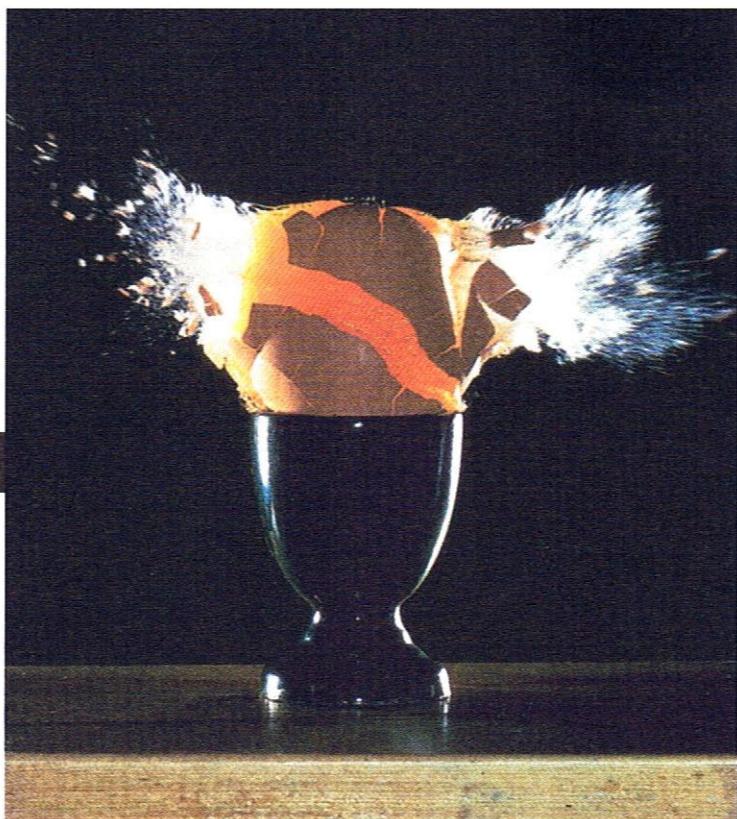
Rys. 20.24. Zadanie 61

# 21 Entropia i druga zasada termodynamiki

Anonimowe graffiti na ścianie Pecan Street Cafe w Austin w Teksasie głosi: „Czas to narzędzie Boga, które uniemożliwia, by wszystko działało się jednocześnie”. Czas ma także kierunek — niektóre zdarzenia zachodzą w określonej kolejności i nigdy nie mogą następować w odwrotnym porządku. Na przykład jajko, które przypadkowo wyślizgnęło się ręki i wpadło do kieliszka — rozbija się. Proces odwrotny, w którym rozbite jajko stałoby się całe i z powrotem zajęło miejsce w dłoni, nigdy nie nastąpi sam z siebie. Dlaczego tak jest? Dlaczego proces ten nie może zajść w przeciwnym kierunku, jak taśma wideo odtwarzana wstecz?

## Co wyznacza kierunek czasu?

Odpowiedź znajdziesz w tym rozdziale.



## 21.1. Kilka przemian nieodwracalnych

Wyobraź sobie, że wracasz do domu w mroźny dzień i chcąc rozgrzać zamarznięte ręce, trzymasz w nich kubek z gorącym kakao. Twoje ręce stają się cieplejsze, a kubek chłodniejszy. Nigdy jednak nie obserwujesz przeciwnego zjawiska: twoje ręce nie marzną jeszcze bardziej, a kubek się nie rozgrzewa.

Układ, który tworzą twoje dlonie i kubek, jest *układem zamkniętym*, czyli odizolowanym od otoczenia. Oto kilka innych przykładów procesów jednokierunkowych w układach zamkniętych: 1. Skrzynia, która ślizga się po podłożu, w końcu zatrzyma się, ale nikt nie widział, by spoczywająca skrzynia samoczynnie zaczęła się poruszać. 2. Jeśli upuszczasz kulkę ulepioną z kitu, ta upada na podłogę. Nieruchoma kulka kitu nie podskoczy jednak spontanicznie w górę. 3. Jeżeli w pokoju przedziurawisz balon wypełniony helem, gaz rozprłynie się po pomieszczeniu. Atomy helu nie zbiorą się jednak same z powrotem w powłoce balonu. Te i inne przemiany jednokierunkowe nazywamy **nieodwracalnymi**, co znaczy, że nie można odwrócić ich kierunku za pomocą niewielkich zmian w otoczeniu.

Nieodwracalność wymienionych przemian jest tak wyraźna, że uważamy ją za coś oczywistego. Gdyby procesy zachodziły spontanicznie (bez udziału zewnętrznych czynników) w „złym” kierunku, byłibyśmy zdumieni. *Jednakże żaden z takich przebiegających w złym kierunku procesów nie łamałby zasady zachowania energii.* Nie stwierdzilibyśmy żadnej sprzeczności, gdyby energia w postaci ciepła przepływała z dłoni do kubka. Energia byłaby zachowana, gdyby skrzynia lub kulka kitu nagle zamieniły część swojej energii termicznej na energię kinetyczną i zaczęły się poruszać. Tak samo byłoby, gdyby atomy helu, które wydostały się z dziurawego balonu, z powrotem zebrały się razem.

Widzimy więc, że to nie energia wyznacza kierunek procesów nieodwracalnych przebiegających w układzie zamkniętym. Decyduje o nim zmiana innej wielkości, którą zajmiemy się w tym rozdziale — zmiana entropii  $\Delta S$  układu. Zmianę entropii układu zdefiniujemy w następnym paragrafie, a teraz ograniczymy się do sformułowania jej głównej właściwości, która czasami jest nazywana *postulatem entropii*:

► Przemiana nieodwracalna w układzie zamkniętym powoduje zawsze wzrost entropii  $S$  układu — nigdy jej spadek

Entropia różni się od energii tym, że *nie ma* zasady jej zachowania. Energia układu zamkniętego jest zachowana — zawsze pozostaje stała. W przemianach nieodwracalnych *entropia* układu zamkniętego zawsze rośnie. Ze względu na tę właściwość zmianę entropii czasami nazywamy „strzałką czasu”. Na przykład rozbijające się jajko, które widzimy na zdjęciu otwierającym rozdział, wiążemy z czasem płynącym do przodu i wzrostem entropii. Czas biegący wstecz (jak na taśmie wideo puszczonej w odwrotnym kierunku) oznaczałby, że rozbite jajko z powrotem stanie się całym jajkiem i uniesie się w górę. Taki odwrotny proces byłby związany ze zmniejszeniem się entropii i dlatego nigdy go nie obserwujemy.

Mamy dwa równoważne sposoby definiowania zmiany entropii układu: 1) w zależności od temperatury układu i energii, którą układ absorbuje lub oddaje w postaci ciepła, oraz 2) na drodze liczenia możliwych kombinacji ułożenia atomów lub cząsteczek tworzących układ. Pierwszy sposób wykorzystamy w następnym paragrafie, a drugi w paragrafie 21.7.

## 21.2. Zmiana entropii

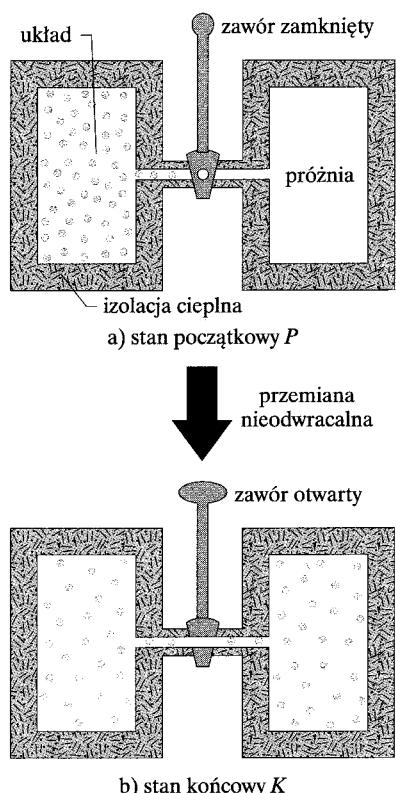
Spróbujmy zdefiniować *zmianę entropii*, odwołując się do przemiany, którą opisywaliśmy już w paragrafach 19.10 i 20.11, czyli do rozprężania swobodnego gazu doskonałego. Na rysunku 21.1a przedstawiono gaz w początkowym stanie równowagi  $P$ , zamknięty za pomocą zaworu w lewej części izolowanego cieplnie zbiornika. Kiedy otwieramy zawór, gaz wypełnia także prawą część zbiornika i po pewnym czasie ustala się końcowy stan równowagi  $K$  jak na rysunku 21.1b. Proces ten jest nieodwracalny; cząsteczki gazu nie zgromadzą się samorzutnie w lewej części zbiornika.

Wykres  $p$ - $V$  dla tego procesu (rys. 21.2) przedstawia ciśnienie i objętość gazu w stanie początkowym  $P$  i końcowym  $K$ . Ciśnienie i objętość są *parametrami stanu* — zależą tylko od stanu gazu i nie zależą od tego, w jaki sposób ten stan został osiągnięty. Inne parametry stanu to temperatura i energia. Założymy teraz, że gaz ma jeszcze jeden parametr stanu — swoją entropię. **Zmianę entropii** układu  $S_{\text{końc}} - S_{\text{pocz}}$  dla przemiany, która przeprowadza układ od stanu początkowego  $P$  do stanu końcowego  $K$ , zdefiniujemy za pomocą równania

$$\Delta S = S_{\text{końc}} - S_{\text{pocz}} = \int_{\text{pocz}}^{\text{końc}} \frac{dQ}{T} \quad (\text{definicja zmiany entropii}). \quad (21.1)$$

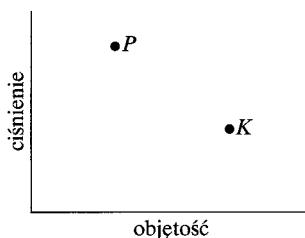
$Q$  oznacza energię pobieraną lub oddawaną w postaci ciepła przez układ w trakcie procesu, a  $T$  — temperaturę układu w kelwinach. Widzimy więc, że zmiana entropii zależy nie tylko od energii przekazywanej w postaci ciepła, ale także od temperatury, w której ta przemiana zachodzi. Ponieważ temperatura  $T$  jest zawsze dodatnia, zmiana entropii  $\Delta S$  ma taki sam znak jak ciepło  $Q$ . Z równania (21.1) wynika, że jednostkę entropii i zmiany entropii w układzie SI jest dżel na kelwin.

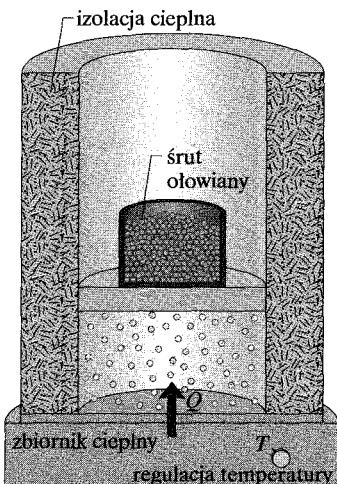
Zastosowanie równania (21.1) do rozprężania swobodnego napotyka pewną trudność. Gdy gaz gwałtownie wypływa z jednej części zbiornika i wypełnia całą jego objętość, ciśnienie, temperatura i objętość zmieniają się w sposób niemożliwy do ustalenia. Innymi słowy, między stanem początkowym  $P$  a stanem



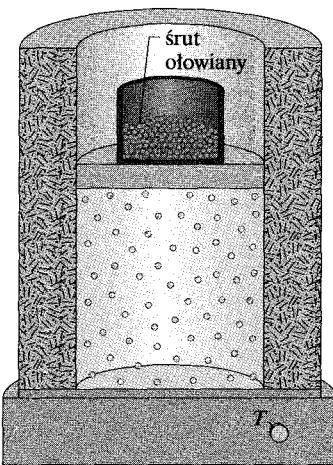
Rys. 21.1. Rozprężanie swobodne gazu doskonałego. a) Gaz jest zamknięty w lewej części izolowanego cieplnie zbiornika. b) Po otwarciu zaworu gaz gwałtownie wypełnia całą objętość zbiornika. Przemiana ta jest nieodwracalna. Oznacza to, że gaz nie zbierze się samorzutnie w lewej części zbiornika

Rys. 21.2. Wykres  $p$ - $V$ , na którym zaznaczono stan początkowy  $P$  i końcowy  $K$  dla procesu rozprężania swobodnego z rysunku 21.1. Stany pośrednie przyjmowane przez gaz nie są stanami równowagi i dlatego nie mogą być przedstawione na wykresie





a) stan początkowy  $P$



b) stan końcowy  $K$

Rys. 21.3. Przeprowadzane w sposób odwracalny rozprężanie izotermiczne gazu doskonałego. Gaz ma taki sam stan początkowy  $P$  i taki sam stan końcowy  $K$ , jak w przypadku rozprężania swobodnego z rysunków 21.1 i 21.2.

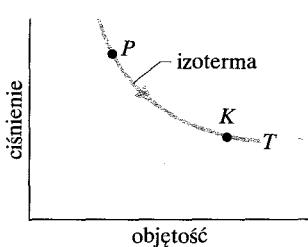
końcowym  $K$  nie ma ciągu pośrednich stanów równowagi, opisanych przez dobrze określone parametry. Nie możemy więc w przypadku rozprężania swobodnego podążać wzdłuż pewnej linii wykresie  $p$ - $V$  (rys. 21.2) opisującej zależność ciśnienia od objętości. Co gorsza, nie da się wyznaczyć zależności  $Q$  od  $T$ , która pozwalałaby obliczyć całkę w równaniu (21.1).

Jeżeli jednak entropia jest prawdziwą właściwością stanu, to jej różnica pomiędzy stanami  $P$  i  $K$  zależy tylko od tych stanów, a nie od przemiany, która przeprowadziła układ od jednego stanu do drugiego. Założymy więc, że zastępujemy przemianę nieodwracalną, jaką jest rozprężanie swobodne przedstawione na rysunku 21.1, przemianą odwracalną między stanami  $P$  i  $K$ . W przypadku przemiany odwracalnej możemy śledzić zależność ciśnienia od objętości na wykresie  $p$ - $V$  i wyznaczyć związek łączący ciepło z temperaturą, co pozwoli skorzystać z równania (21.1) do obliczenia zmiany entropii.

W paragrafie 20.11 przekonaliśmy się, że temperatura gazu doskonałego nie zmienia się w wyniku rozprężania swobodnego:  $T_{\text{pocz}} = T_{\text{konc}} = T$ . Widzimy więc, że stan początkowy  $P$  i końcowy  $K$  na wykresie  $p$ - $V$  (rys. 21.2) muszą leżeć na tej samej izoterme. Wygodnie będzie więc zastąpić rozprężanie swobodne odwracalnym rozprężaniem izotermicznym między stanem  $P$  a stanem  $K$ , które na wykresie reprezentuje izoterma. Ponieważ w trakcie rozprężania izotermicznego temperatura jest stała, obliczenie całki (21.1) nie sprawia trudności.

Na rysunku 21.3 pokazano, jak można przeprowadzić odwracalne rozprężanie izotermiczne. Wyobraźmy sobie, że gaz znajduje się w cylindrze, o izolowanych ściankach, którego podstawa jest w kontakcie ze zbiornikiem cieplnym utrzymywany w stałej temperaturze  $T$ . Na początek obciążamy tłem zamkujący cylinder taką ilością śrutu ołowianego, aby ciśnienie i objętość gazu były takie, jak w stanie początkowym  $P$  z rysunku 21.1a. Następnie powoli zabieramy śrut (ziarnko po ziarnku), aż do chwili, kiedy objętość i ciśnienie gazu będą takie same, jak w stanie końcowym  $K$  z rysunku 21.1b. Temperatura gazu nie zmienia się, ponieważ podczas całego procesu gaz jest w kontakcie ze zbiornikiem cieplnym.

Odwracalne rozprężanie izotermiczne przedstawione na rysunku 21.3 pod względem fizycznym jest całkowicie różne od rozprężania swobodnego z rysunku 21.1. Jednakże obydwie przemiany mają taki sam stan początkowy i końcowy i dlatego muszą powodować taką samą zmianę entropii. Ponieważ śrut obciążający tłem zabieraliśmy powoli, pośrednie stany gazu są stanami równowagi i dlatego możemy przedstawić je na wykresie  $p$ - $V$  (rys. 21.4).



Rys. 21.4. Wykres  $p$ - $V$  dla procesu odwracalnego, jakim jest izotermiczne rozprężanie gazu z rysunku 21.3. Zaznaczono stany pośrednie, które tym razem są stanami równowagi

Stosując równanie (21.1) do rozprężania izotermicznego, możemy wyciągnąć stałą temperaturę  $T$  przed znak całki

$$\Delta S = S_{\text{końc}} - S_{\text{pocz}} = \frac{1}{T} \int_{\text{pocz}}^{\text{końc}} dQ.$$

Ponieważ  $\int dQ = Q$ , gdzie  $Q$  oznacza całkowitą energię przekazaną podczas procesu w postaci ciepła, mamy

$$\Delta S = S_{\text{końc}} - S_{\text{pocz}} = \frac{Q}{T} \quad (\text{zmiana entropii w przemianie izotermicznej}). \quad (21.2)$$

Aby podczas rozprężania izotermicznego z rysunku 21.3 zachować stałą temperaturę gazu, trzeba ze zbiornika cieplnego do gazu dostarczyć energię w postaci ciepła  $Q$ . Widzimy więc, że  $Q$  ma wartość dodatnią, a więc w wyniku rozprężania izotermicznego i rozprężania swobodnego z rysunku 21.1 entropia gazu *rośnie*.

Możemy podsumować to tak:

**►** Aby wyznaczyć zmianę entropii w przemianie nieodwracalnej zachodzącej w układzie zamkniętym, należy zastąpić tę przemianę dowolną przemianą odwracalną, która ma taki sam stan początkowy i końcowy. Zmianę entropii dla tej przemiany odwracalnej obliczamy, korzystając z równania (21.1).

Jeżeli zmiana temperatury układu jest mała w porównaniu z jego temperaturą bezwzględną na początku i końcu przemiany, to przybliżoną zmianę entropii można obliczyć z równania

$$\Delta S = S_{\text{końc}} - S_{\text{pocz}} = \frac{Q}{T_{\text{śr}}}, \quad (21.3)$$

gdzie  $T_{\text{śr}}$  oznacza średnią temperaturę bezwzględną układu w rozważanym procesie.

**SPRAWDZIAN 1:** Woda jest ogrzewana za pomocą kuchenki. Uszereguj od największej do najmniejszej zmiany entropii wody w następujących przedziałach temperatury:  
a) od 20°C do 30°C, b) od 30°C do 35°C i c) od 80°C do 85°C.

## Przykład 21.1

W lewej części zbiornika na rysunku 21.1a znajduje się jeden mol gazowego azotu. Po otwarciu zaworu objętość zajmowana przez gaz podwaja się. Ile wynosi zmiana entropii w opisanej przemianie nieodwracalnej? Przymij, że azot jest gazem doskonałym.

### ROZWIĄZANIE:

Poczyńmy dwa spostrzeżenia:

**►► 1.** Zmianę entropii w przemianie nieodwracalnej możemy wyznaczyć, rozważając przemianę odwracalną, która powoduje tę samą zmianę objętości.

**►► 2.** Temperatura gazu nie zmienia się w wyniku rozprężania swobodnego. Przemianą odwracalną, którą możemy zastąpić

rozprężanie swobodne, jest więc rozprężanie izotermiczne (patrz rys. 21.3 i 21.4).

Z tabeli 20.4 wynika, że energia  $Q$  dostarczona do gazu w postaci ciepła podczas izotermicznego rozprężania od objętości początkowej  $V_{\text{pocz}}$  do objętości końcowej  $V_{\text{końc}}$  w temperaturze  $T$  jest równa

$$Q = nRT \ln \frac{V_{\text{końc}}}{V_{\text{pocz}}},$$

gdzie  $n$  oznacza liczbę moli gazu, który ulega przemianie. Zmiana entropii w odwracalnej przemianie izotermicznej jest dana równaniem (21.2)

$$\begin{aligned} \Delta S_{\text{odwr}} &= \frac{Q}{T} = \frac{nRT \ln(V_{\text{końc}}/V_{\text{pocz}})}{T} \\ &= nR \ln \frac{V_{\text{końc}}}{V_{\text{pocz}}}. \end{aligned}$$

Podstawiając wartości liczbowe  $n = 1 \text{ mol}$  oraz  $V_{\text{kofic}}/V_{\text{pocz}} = 2$ , stwierdzamy, że

$$\Delta S_{\text{odwr}} = nR \ln \frac{V_{\text{kofic}}}{V_{\text{pocz}}} = (1 \text{ mol})(8,31 \text{ J/(mol} \cdot \text{K}))(\ln 2) \\ = +5,76 \text{ J/K.}$$

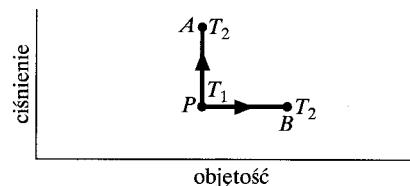
Widzimy więc, że zmiana entropii w wyniku rozprężania swo-

godnego (i każdej innej przemiany zachodzącej między stanem początkowym i końcowym zaznaczonym na rysunku 21.2) jest równa

$$\Delta S_{\text{nieodwr}} = \Delta S_{\text{odwr}} = +5,76 \text{ J/K.} \quad (\text{odpowiedź})$$

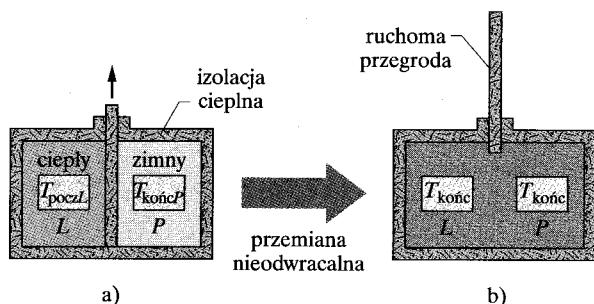
Wartość  $\Delta S$  jest dodatnia, a więc entropia wzrasta zgodnie z postulatem sformułowanym w paragrafie 21.1.

**SPRAWDZIAN 2:** Gaz doskonały w stanie początkowym  $P$  zaznaczonym na zamieszczonym obok wykresie  $p$ - $V$  ma temperaturę  $T_1$ . W stanach końcowych  $A$  i  $B$ , które gaz może osiągnąć w wyniku przemian zaznaczonych na wykresie, jego temperatura  $T_2$  jest większa niż w stanie początkowym. Czy zmiana entropii w przemianie prowadzącej do stanu  $A$  jest większa, taka sama, czy mniejsza niż w przemianie prowadzącej do stanu  $B$ ?



## Przykład 21.2

Na rysunku 21.5a przedstawiono dwa identyczne bloki miedzi o masie  $m = 1,5 \text{ kg}$ . Blok  $L$  ma temperaturę początkową  $T_{\text{pocz}L} = 60^\circ\text{C}$ . Blok  $P$  ma temperaturę początkową  $T_{\text{pocz}P} = 20^\circ\text{C}$ . Obydwa bloki umieszczone w izolowanym cieplnie pojemniku i rozdzielono izolującą przegrodą. Po usunięciu przegrody obydwa bloki osiągają po pewnym czasie wspólną temperaturę końcową  $T_{\text{kofic}} = 40^\circ\text{C}$  (rys. 21.5b). Ile wynosi zmiana entropii układu dwóch bloków w opisanej przemianie nieodwracalnej? Ciepło właściwe miedzi jest równe  $386 \text{ J/(kg} \cdot \text{K)}$ .

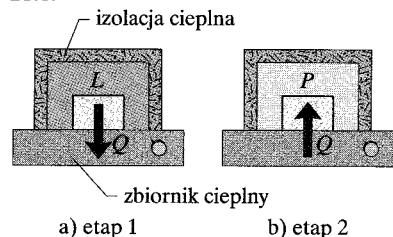


Rys. 21.5. Przykład 21.2. a) W stanie początkowym dwa miedziane bloki  $L$  i  $P$ , które różnią się tylko temperaturą, umieszczone w dwóch, rozdzielonych izolującą przegrodą, częściach odizolowanego pojemnika. b) Po usunięciu przegrody bloki wymieniają energię w postaci ciepła i po pewnym czasie osiągają stan równowagi termodynamicznej o jednakowej temperaturze  $T_{\text{kofic}}$

### ROZWIĄZANIE:

Zauważmy, że w celu obliczenia zmiany entropii układu musimy znaleźć przemianę odwracalną, która przeprowadzi układ od stanu początkowego (rys. 21.5a) do stanu końcowego (rys. 21.5b). Dzięki temu będziemy mogli wyznaczyć za pomocą równania (21.1) zmianę entropii  $\Delta S_{\text{odwr}}$  w przemianie odwracalnej i zmianę entropii w przemianie nieodwracalnej, która jest równa

$\Delta S_{\text{odwr}}$ . Aby przeprowadzić przemianę odwracalną, musimy mieć zbiornik cieplny, którego temperaturę można powoli zmieniać (na przykład kręcząc jakąś gałkę). Następnie poddamy bloki procesowi, który będzie składać się z dwóch etapów przedstawionych na rysunku 21.6.



Rys. 21.6. Bloki z rysunku 21.5 można przeprowadzić w odwracalny sposób od stanu początkowego do stanu końcowego, wykorzystując zbiornik o regulowanej temperaturze, aby a) odwracalnie odebrać ciepło od bloku  $L$  i b) odwracalnie dostarczyć ciepło do bloku  $P$

**Etap 1.** Ustawiamy temperaturę zbiornika tak, aby była równa  $60^\circ\text{C}$  i stykamy z nim blok  $L$ . (Ponieważ zbiornik i blok mają taką samą temperaturę, znajdują się w stanie równowagi termodynamicznej). Następnie powoli zmniejszamy temperaturę zbiornika i bloku do  $40^\circ\text{C}$ . Podczas każdej zmiany temperatury o  $dT$  z bloku do zbiornika przepływa w postaci ciepła energia  $dQ$ . Korzystając z równania (19.14), możemy obliczyć ilość przekazywanej energii  $dQ = mc dT$ , gdzie  $c$  oznacza ciepło właściwe miedzi. Zgodnie z równaniem (21.1) zmiana entropii  $\Delta S_L$  bloku  $L$  w całej przemianie od temperatury początkowej  $T_{\text{pocz}L}$  ( $= 60^\circ\text{C} = 333 \text{ K}$ ) do temperatury końcowej  $T_{\text{kofic}}$  ( $40^\circ\text{C} = 313 \text{ K}$ ) jest równa

$$\Delta S_L = \int_{\text{pocz}}^{\text{kofic}} \frac{dQ}{T} = \int_{T_{\text{pocz}L}}^{T_{\text{kofic}}} \frac{mc dT}{T} = mc \int_{T_{\text{pocz}L}}^{T_{\text{kofic}}} \frac{dT}{T} \\ = mc \ln \frac{T_{\text{kofic}}}{T_{\text{pocz}L}}.$$

Podstawiając dane liczbowe, otrzymujemy

$$\Delta S_L = (1,5 \text{ kg})(386 \text{ J/(kg} \cdot \text{K}) \ln \frac{313 \text{ K}}{333 \text{ K}} = -35,86 \text{ J/K.}$$

**Etap 2.** Ustawiamy teraz temperaturę zbiornika cieplnego tak, aby była ona równa 20°C i stykamy z nim blok  $P$ . Następnie powoli zwiększamy temperaturę zbiornika i bloku, aż osiągnie ona 40°C. Powtarzając to samo rozumowanie, co w przypadku obliczania  $\Delta S_L$ , można wykazać, że zmiana entropii  $\Delta S_P$  bloku  $P$  w przedstawionej przemianie jest równa

$$\Delta S_P = (1,5 \text{ kg})(386 \text{ J/(kg} \cdot \text{K}) \ln \frac{313 \text{ K}}{293 \text{ K}} = +38,23 \text{ J/K.}$$

Łączna zmiana entropii  $\Delta S_{\text{odwr}}$  obydwu bloków w dwuetapowej odwracalnej przemianie wyrównywania ich temperatury jest równa

$$\begin{aligned}\Delta S_{\text{odwr}} &= \Delta S_L + \Delta S_P \\ &= -35,86 \text{ J/K} + 38,23 \text{ J/K} \\ &= 2,4 \text{ J/K.}\end{aligned}$$

Łączna zmiana entropii układu dwóch bloków w rzeczywistej przemianie nieodwracalnej wynosi więc

$$\Delta S_{\text{nieodwr}} = \Delta S_{\text{odwr}} = 2,4 \text{ J/K.} \quad (\text{odpowiedź})$$

Wynik jest dodatni zgodnie z postulatem sformułowanym w paragrafie 21.1.

## Entropia jako funkcja stanu

Przyjęliśmy założenie, że entropia, podobnie jak ciśnienie, energia czy temperatura, jest parametrem stanu układu, czyli nie zależy od sposobu osiągnięcia tego stanu. To, że entropia jest w rzeczywistości *funkcją stanu* (tzn. zależy od stanu układu), można wywnioskować tylko na drodze doświadczalnej. Jednak dla szczególnego, ale bardzo ważnego przypadku, jakim jest gaz doskonale poddawany przemianie odwracalnej, możemy udowodnić, że entropia jest funkcją stanu.

Aby zapewnić odwracalność przemiany, przeprowadza się ją bardzo wolno w wielu małych krokach, tak że gaz na końcu każdej z nich znajduje się w stanie równowagi termodynamicznej. W każdym z tych małych kroków energia dostarczona do gazu lub odebrana od niego w postaci ciepła jest równa  $dQ$ , praca wykonana przez gaz jest równa  $dW$ , a zmiana energii wewnętrznej gazu  $dE_w$ . Wielkości te wiążą ze sobą pierwsza zasada termodynamiki w postaci różniczkowej (równanie (19.27))

$$dE_w = dQ - dW.$$

Ponieważ poszczególne etapy przemiany są odwracalne, a gaz znajduje się w stanie równowagi termodynamicznej, możemy skorzystać z równania (19.24) i zastąpić pracę  $dW$  przez  $p dV$ , a także posłużyć się równaniem (20.45) i zastąpić  $dE_w$  przez  $nC_V dT$ . Rozwiązujejąc otrzymane równanie względem  $dQ$ , dostajemy

$$dQ = pdV + nC_V dT.$$

Korzystając z równania stanu gazu doskonałego, możemy w tym równaniu zastąpić  $p$  przez  $nRT/V$ . Dzieląc następnie całe równanie przez  $T$ , otrzymamy

$$\frac{dQ}{T} = nR \frac{dV}{V} + nC_V \frac{dT}{T}.$$

Scałkujmy teraz równanie między pewnym dowolnym stanem początkowym  $P$  a dowolnym stanem końcowym  $K$

$$\int_{\text{pocz}}^{\text{końc}} \frac{dQ}{T} = \int_{\text{pocz}}^{\text{końc}} nR \frac{dV}{V} + \int_{\text{pocz}}^{\text{końc}} nC_V \frac{dT}{T}.$$

Wielkość z lewej strony równania to zmiana entropii  $\Delta S$  ( $= S_{\text{końc}} - S_{\text{pocz}}$ ) zde-

finiowana za pomocą równania (21.1). Korzystając z tej definicji i wykonując całkowanie po prawej stronie równania, otrzymujemy

$$\Delta S = S_{\text{końc}} - S_{\text{pocz}} = nR \ln \frac{V_{\text{końc}}}{V_{\text{pocz}}} + nC_V \ln \frac{T_{\text{końc}}}{T_{\text{pocz}}}. \quad (21.4)$$

Zwróć uwagę, że całkując, nie musieliszy odwoływać się do żadnej szczególnej przemiany odwracalnej. Dlatego otrzymany wynik ma zastosowanie do każdej przemiany odwracalnej, która przeprowadza gaz od stanu  $P$  do stanu  $K$ . Wobec tego zmiana entropii  $\Delta S$  pomiędzy stanem początkowym a stanem końcowym gazu doskonałego zależy tylko od właściwości stanu początkowego ( $V_{\text{pocz}}$  i  $T_{\text{pocz}}$ ) oraz właściwości stanu końcowego ( $V_{\text{końc}}$  i  $T_{\text{końc}}$ ). Zmiana entropii  $\Delta S$  nie zależy od tego, jak zachodziła przemiana między tymi stanami.

### 21.3. Druga zasada termodynamiki

A oto zagadka. W przykładzie 21.1 stwierdziliśmy, że jeżeli przeprowadzamy przemianę odwracalną od stanu (a) do stanu (b) (rys. 21.3), to zmiana entropii gazu, który stanowi nasz układ, jest dodatnia. Ale nasza przemiana jest odwracalna, więc można przeprowadzić ją w odwrotnym kierunku, od stanu (b) do (a), dorzucając stopniowo ziarenka śrutu obciążające tłok (rys. 21.3b) aż do chwili, kiedy objętość gazu zmniejszy się do wartości początkowej. W takiej odwrotnej przemianie energia w postaci ciepła musi być odbierana *od gazu*, aby zapobiec wzrostowi jego temperatury. Ciepło  $Q$  ma wartość ujemną, a więc entropia wyrażona równaniem (21.2) musi maleć.

Czy takie zmniejszanie się entropii gazu nie narusza postulatu sformułowanego w paragrafie 21.1, który stwierdza, że entropia zawsze rośnie? Nie, ponieważ postulat ten dotyczy tylko *przemian nieodwracalnych* w układach zamkniętych. Opisany proces nie spełnia tych założeń. *Nie jest* bowiem przemianą nieodwracalną i układ, który obejmuje tylko gaz, *nie jest* zamknięty (ponieważ energia przepływa w postaci ciepła od gazu do zbiornika cieplnego).

Jeżeli jednak uznamy, że zbiornik cieplny i gaz są częściami jednego układu, będziemy mieć do czynienia z układem zamkniętym. Sprawdźmy teraz, jak zmienia się entropia układu *gaz + zbiornik* w wyniku przemiany, która przeprowadza gaz od stanu (b) do (a) (rys. 21.3). W trakcie tej odwracalnej przemiany energia w postaci ciepła przepływa z gazu do zbiornika — czyli z jednej części układu do innej. Niech  $|Q|$  oznacza wartość bezwzględną przepływającego ciepła. Dzięki równaniu (21.2) możemy osobno obliczyć zmianę entropii gazu (który oddaje ciepło  $|Q|$ ) oraz zbiornika (który ciepło  $|Q|$  pobiera). Mamy więc

$$\Delta S_{\text{gaz}} = -\frac{|Q|}{T}$$

oraz

$$\Delta S_{\text{zbior}} = +\frac{|Q|}{T}.$$

Zmiana entropii układu zamkniętego jest sumą obydwu wielkości, a więc *jest równa零*.

Wiedząc o tym, możemy rozszerzyć postulat z paragrafu 21.1, aby obejmował on zarówno przemiany odwracalne, jak i nieodwracalne:

► Entropia układu *zamkniętego* wzrasta w przemianach nieodwracalnych i nie zmienia się w przemianach odwracalnych. Entropia nigdy nie maleje.

Chociaż entropia może maleć w pewnej części układu zamkniętego, to entropia pozostałej części tego układu wzrasta o tę samą lub większą wartość, tak że entropia całego układu nie zmniejsza się. Stwierdzenie to jest jednym ze sformułowań **drugiej zasady termodynamiki**, którą można zapisać w postaci

$$\Delta S \geq 0 \quad (\text{druga zasada termodynamiki}), \quad (21.5)$$

przy czym znak „większy niż” odnosi się do przemian nieodwracalnych, a znak „równa się” do przemian odwracalnych. Nierówność (21.5) ma zastosowanie jedynie do układów zamkniętych.

W rzeczywistym świecie wszystkie przemiany są w zasadzie nieodwracalne ze względu na obecność tarcia, turbulencji itd., a więc entropia wszystkich rzeczywistych układów zamkniętych rośnie. Procesy, w których entropia układu zachowuje stałą wartość, zawsze są idealizacją.

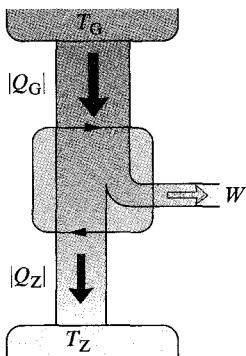
## 21.4. Entropia w świecie rzeczywistym: silniki

**Silnik cieplny** lub w skrócie **silnik** to urządzenie, które ze swego otoczenia pobiera energię w postaci ciepła i wykonuje użyteczną pracę. Podstawowe znaczenie dla działania każdego silnika ma *substancja robocza*. W silniku parowym substancją roboczą jest woda, zarówno w postaci pary, jak i cieczy. W silniku samo-chodowym substancją roboczą jest mieszanina benzyny i powietrza. Jeżeli silnik ma wykonywać pracę w sposób ciągły, jego działanie musi być oparte na stale powtarzającym się *cyklu*, w którym substancja robocza jest poddana zamkniętemu ciągowi przemian termodynamicznych nazywanych *suwami*. Zobaczmy teraz, co na temat działania silników mówią nam prawa termodynamiki.

### Silnik Carnota

Przekonaliśmy się już, że wiele informacji o gazach rzeczywistych możemy uzyskać, rozważając gaz doskonały, który spełnia proste równanie stanu  $pV = nRT$ . Jest to cenne spostrzeżenie, ponieważ niezależnie od faktu, że gaz doskonały nie istnieje, każdy gaz rzeczywisty zachowuje się w przybliżeniu jak gaz doskonały, o ile jego gęstość jest dostatecznie mała. Możemy zatem analizować pracę silników rzeczywistych na podstawie działania **silnika idealnego**.

► W silniku idealnym wszystkie przebiegające procesy są odwracalne i nie ma strat związanych z niepożądanymi przemianami energii spowodowanymi tarciem lub turbulencjami.



Skoncentrujemy uwagę na szczególnym silniku idealnym nazwanym **silnikiem Carnota** dla uczczenia francuskiego naukowca i inżyniera N.L. Sadiego Carnota, który pierwszy w 1824 roku wysunął ideę takiego silnika. Silnik Carnota to taki silnik idealny, który osiąga największą sprawność w zamianie ciepła na użyteczną pracę. Co ciekawe, Carnot zdołał przeanalizować działanie takiego silnika, zanim jeszcze sformułowano pierwszą zasadę termodynamiki i wprowadzono pojęcie entropii.

Na rysunku 21.7 zilustrowano zasadę działania silnika Carnota. W trakcie każdego cyklu substancja robocza pobiera ze zbiornika cieplnego o stałej temperaturze  $T_G$  — grzejnika — energię (w postaci ciepła)  $|Q_G|$  i oddaje do zbiornika cieplnego o stałej, niższej temperaturze  $T_Z$  — chłodnicy — energię (w postaci ciepła)  $|Q_Z|$ .

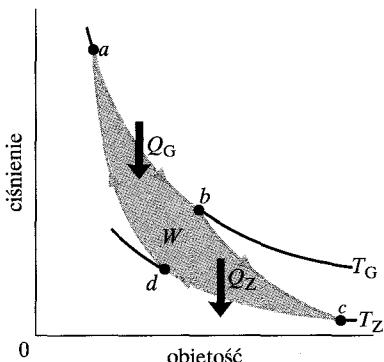
Wykres  $p$ - $V$  z rysunku 21.8 przedstawia procesy składające się na cykl *Carnota* — cykl, któremu poddawana jest substancja robocza. Jak pokazują strzałki, cykl jest realizowany w kierunku zgodnym z ruchem wskazówek zegara. Wyobraźmy sobie, że substancją roboczą jest gaz umieszczony w cylinderze o izolowanych ścianach bocznych, zamkniętym izolowanym, obciążonym i ruchomym tłokiem. Cylinder można umieszczać na jednym z dwóch zbiorników cieplnych (jak na rysunku 21.3) lub na izolującej podstawie. Z rysunku 21.8 wynika, że kiedy cylinder jest w kontakcie ze zbiornikiem o temperaturze  $T_G$ , substancja robocza *pobiera* z tego zbiornika ciepło  $|Q_G|$  i ulega *rozprężaniu* izotermicznemu od objętości  $V_a$  do objętości  $V_b$ . Podobnie, kiedy substancja robocza jest w kontakcie ze zbiornikiem cieplnym o temperaturze  $T_Z$ , oddaje ona ciepło  $|Q_Z|$  do zbiornika o niskiej temperaturze i jednocześnie ulega izotermicznemu *sprężaniu* od objętości  $V_c$  do objętości  $V_d$ .

Zakładamy, że w silniku przedstawionym na rysunku 21.7 wymiana ciepła między jednym ze zbiorników a substancją roboczą zachodzi *tylko* podczas izotermicznych przemian *ab* i *cd* (rys. 21.8). Dlatego przemiany *bc* i *da*, które na wspomnianym wykresie łączą dwie izotermy dla temperatur  $T_G$  i  $T_Z$ , muszą być (odwrotnymi) przemianami adiabatycznymi, czyli takimi, w których ciepło nie jest wymieniane z otoczeniem. W tym celu w trakcie tych procesów cylinder stawiamy na izolującej podstawie.

W następujących po sobie przemianach *ab* i *bc* (rys. 21.8) substancja robocza zwiększa swą objętość, a więc wykonuje dodatnią pracę, podnosząc obciążony tłok. Wykonana praca odpowiada na wykresie z rysunku 21.8 polu powierzchni pod krzywą *abc*. W następujących po sobie dwóch przemianach *cd* i *da* substancja robocza jest sprężana, co oznacza, że wykonuje ona pracę ujemną nad otoczeniem lub — co jest temu równoważne — otoczenie wykonuje nad nią pracę, gdy obciążony tłok się obniża. Wielkość tej pracy odpowiada polu pod krzywą *cda*. *Łączna praca wykonana podczas jednego cyklu*, oznaczona na rysunkach 21.7 i 21.8 symbolem  $W$ , odpowiada różnicy obydwu pól, ma wartość dodatnią i jest równa polu powierzchni obszaru ograniczonego krzywymi składającymi się na cykl *abcd* na rysunku 21.8. Praca ta jest wykonywana nad pewnym zewnętrznym ciałem, na przykład ciężarkiem, który ma być podniesiony.

Z równania (21.1) ( $\Delta S = \int dQ/T$ ) wynika, że każdy przekaz energii w postaci ciepła wiąże się ze zmianą entropii. Aby przedstawić zmiany en-

Rys. 21.7. Schemat silnika. Dwie czarne strzałki na pętli w środkowej części rysunku wskazują, że substancja robocza jest poddana przemianie cyklicznej, podobnie jak na wykresie  $p$ - $V$ . Ze zbiornika o wysokiej temperaturze  $T_G$  do substancji roboczej przepływa energia w postaci ciepła  $|Q_G|$ . Substancja robocza oddaje do zbiornika o niskiej temperaturze  $T_Z$  energię w postaci ciepła  $|Q_Z|$ . Silnik (aściel mówiąc substancja robocza) wykonuje nad pewnym elementem otoczenia pracę  $W$ .



Rys. 21.8. Cykl przemian substancji roboczej silnika Carnota z rysunku 21.7 przedstawiony we współrzędnych  $p$ - $V$ . Cykl składa się z dwóch izoterm (*ab* i *cd*) oraz dwóch adiabat (*bc* i *da*). Pole zacienionego obszaru ograniczonego wykresem jest równe pracy  $W$  wykonywanej przez silnik Carnota w trakcie jednego cyklu.

tropii dla silnika Carnota, możemy wykreślić cykl Carnota we współrzędnych temperatura-entropia ( $T$ - $S$ ) — rysunek 21.9. Punkty  $a$ ,  $b$ ,  $c$  i  $d$  na tym rysunku odpowiadają punktom oznaczonym tymi samymi literami na rysunku 21.8. Dwie poziome linie na rysunku 21.9 to dwie przemiany izotermiczne występujące w cyklu Carnota (temperatura jest stała). Proces  $ab$  jest rozprężaniem izotermicznym. Gdy substancja robocza, rozszerzając się (odwracalnie) w stałej temperaturze  $T_G$ , pobiera energię w postaci ciepła  $|Q_G|$ , jej entropia wzrasta. Podobnie w wyniku izotermicznego sprężania  $cd$ , substancja robocza w stałej temperaturze  $T_Z$  oddaje (odwracalnie) energię w postaci ciepła  $|Q_Z|$ , a jej entropia maleje.

Dwie pionowe linie na rysunku 21.9 reprezentują dwie przemiany adiabatyczne występujące w cyklu Carnota. Ponieważ w obydwu tych procesach nie ma przepływu energii w postaci ciepła, nie zmienia się też entropia substancji roboczej.

**Praca:** Aby obliczyć wypadkową pracę wykonaną przez silnik Carnota w czasie całego cyklu, zastosujmy do substancji roboczej równanie (19.26) wyrażające pierwszą zasadę termodynamiki ( $\Delta E_w = Q - W$ ). Substancja ta w kolejnych cyklach musi dowolnie wiele razy wracać do każdego stanu w cyklu. Jeżeli przez  $X$  oznaczymy dowolną funkcję stanu substancji roboczej, jak na przykład ciśnienie, temperaturę, objętość, energię wewnętrzną czy entropię, to dla każdego cyklu musi być spełniony warunek  $\Delta X = 0$ . W szczególności dla pełnego cyklu przemian substancji roboczej mamy  $\Delta E_w = 0$ . Pamiętając, że w równaniu (19.26)  $Q$  oznacza *wypadkowe* ciepło dostarczone do układu w trakcie całego cyklu, a  $W$  *wypadkową* pracę wykonaną przez układ w tym samym czasie, możemy napisać pierwszą zasadę termodynamiki dla cyklu Carnota w postaci równania

$$W = |Q_G| - |Q_Z|. \quad (21.6)$$

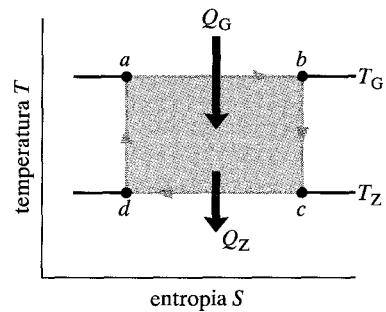
**Zmiana entropii:** W silniku Carnota mamy *dwie* (i tylko dwie) przemiany odwracalne, w których następuje przepływ energii w postaci ciepła. Tylko w tych dwóch procesach — pierwszym w temperaturze  $T_G$  i drugim w temperaturze  $T_Z$  — zmienia się entropia. Wypadkowa zmiana entropii w pełnym cyklu jest więc równa

$$\Delta S = \Delta S_G + \Delta S_Z = \frac{|Q_G|}{T_G} - \frac{|Q_Z|}{T_Z}. \quad (21.7)$$

Wartość  $\Delta S_G$  jest dodatnia, ponieważ energia  $|Q_G|$  jest *dostarczana* do substancji roboczej (entropia wzrasta), a wartość  $\Delta S_Z$  jest ujemna, ponieważ energia  $|Q_Z|$  jest *odbierana* w postaci ciepła od substancji roboczej (entropia maleje). Ponieważ entropia jest funkcją stanu, dla pełnego cyklu musi być spełniony warunek  $\Delta S = 0$ . Stosując ten warunek do równania (21.7), otrzymamy

$$\frac{|Q_G|}{T_G} = \frac{|Q_Z|}{T_Z}. \quad (21.8)$$

Ponieważ mamy  $T_G > T_Z$ , więc musi zachodzić nierówność  $|Q_G| > |Q_Z|$ , co oznacza, że energia pobierana w postaci ciepła ze zbiornika o wyższej temperaturze jest większa niż energia oddawana w postaci ciepła do zbiornika o niższej temperaturze.



Rys. 21.9. Cykl Carnota z rysunku 21.8 przedstawiony we współrzędnych temperatura-entropia. W przemianach  $ab$  i  $cd$  temperatura jest stała. W przemianach  $bc$  i  $da$  entropia jest stała

Skorzystamy teraz z równań (21.6) i (21.8), aby wyprowadzić wzór na sprawność silnika Carnota.

### Sprawność silnika Carnota

Celem dowolnego silnika jest zamiana na pracę jak największej części pobranej energii  $|Q_G|$ . Miarą tego, na ile nam się to udało, jest tak zwana **sprawność cieplna silnika**  $\eta$ , zdefiniowana jako stosunek pracy wykonanej przez silnik podczas cyklu („energii, którą otrzymujemy”) do energii dostarczonej do silnika w postaci ciepła w tym samym cyklu („energii, za którą płacimy”):

$$\eta = \frac{\text{energia uzyskana}}{\text{energia dostarczona}} = \frac{|W|}{|Q_G|} \quad (\text{sprawność dowolnego silnika}). \quad (21.9)$$

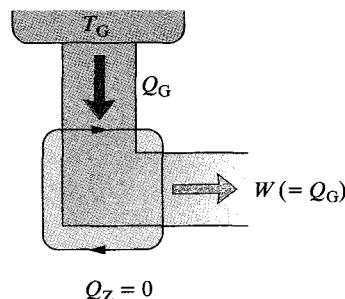
W przypadku silnika Carnota pracę  $W$  występującą w definicji (21.9) możemy zastąpić wartością wyznaczoną z równania (21.6). W ten sposób otrzymamy

$$\eta_C = \frac{|Q_G| - |Q_Z|}{|Q_G|} = 1 - \frac{|Q_Z|}{|Q_G|}. \quad (21.10)$$

Korzystając z równania (21.8), możemy uzyskany wynik zapisać w postaci

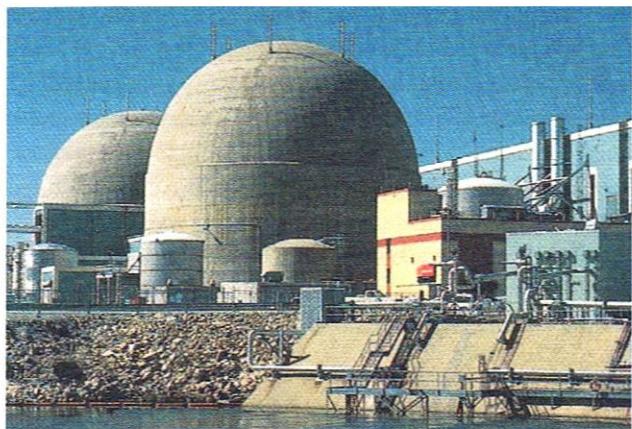
$$\eta_C = 1 - \frac{T_Z}{T_G} \quad (\text{sprawność silnika Carnota}), \quad (21.11)$$

gdzie temperatury  $T_Z$  i  $T_G$  są wyrażone w kelwinach. Ponieważ  $T_Z < T_G$ , więc silnik Carnota ma sprawność cieplną mniejszą od jedności, czyli od 100%. Ilustruje to rysunek 21.7, na którym zaznaczono, że tylko część energii pobranej ze zbiornika cieplnego o wyższej temperaturze jest zużywana na wykonanie pracy. Pozostała część jest oddawana do zbiornika o niższej temperaturze. W paragrafie 21.6 wykażemy, że żaden silnik rzeczywisty nie może mieć większej sprawności cieplnej, niż obliczona na podstawie równania (21.11).



Rys. 21.10. Schemat silnika doskonałego, który ze sprawnością 100% zamienia ciepło  $Q_G$  pobrane z grzejnika na pracę  $W$

Konstruktorzy nieustannie usiłują zwiększyć sprawność silników, zmniejszając energię  $|Q_Z|$ , która jest „tracona” podczas każdego cyklu. Marzeniem wynalazców jest zbudowanie *silnika doskonałego*, przedstawionego schematycznie na rysunku 21.10, w którym energię  $|Q_Z|$  zmniejszono by do zera, a więc cała energia  $|Q_G|$  uległaby przemianie w użyteczną pracę. Taki silnik zainstalowany na przykład w statku transoceanicznym czerpałby ciepło z wody i wykorzystywał je do poruszania śrub napędowych, bez potrzeby ponoszenia kosztów związanych z zakupem paliwa. Samochód wyposażony w taki silnik czerpałby energię z otaczającego go powietrza, a więc jeździłby bez potrzeby płacenia za paliwo. Niestety, silnik doskonały jest tylko marzeniem. Przyglądając się równaniu (21.11), zauważymy, że sprawność byłaby równa 100% ( $\eta = 1$ ) tylko wtedy, kiedy  $T_Z = 0$  lub  $T_G \rightarrow \infty$ , czego nie można osiągnąć. Gromadzone latami doświadczenie inżynierów doprowadziło do innego sformułowania drugiej zasady termodynamiki:



Rys. 21.11. Elektrownia jądrowa North Anna w pobliżu Charlottesville w stanie Wirginia (USA), która dostarcza energię elektryczną o mocy 900 MW. Pracując, odprowadza ona do przepływającej w pobliżu rzeki energię z szybkością 2100 MW. Ta i wszystkie jej podobne elektrownie oddają do otoczenia więcej energii niż jest przetwarzane na użyteczną pracę. Tak wygląda w rzeczywistości silnik idealny z rysunku 21.7

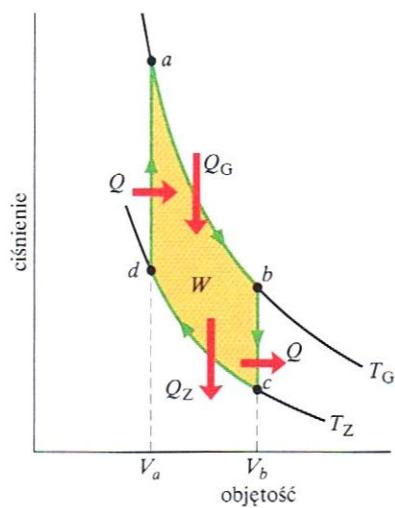
► Nie jest możliwy żaden ciąg przemian, którego jedynym skutkiem byłoby pobranie ciepła i całkowita zamiana go na pracę.

Mówiąc krótko, *nie istnieją silniki doskonale*.

Podsumujmy to następująco: Sprawność cieplna dana równaniem (21.11) stosuje się jedynie do silnika Carnota. Silniki rzeczywiste, w których na cykl pracy składają się procesy nieodwracalne, mają mniejsze sprawności. Jeżeli twój samochód byłby napędzany silnikiem Carnota, jego sprawność obliczona na podstawie równania (21.11) byłaby równa około 55%; w rzeczywistości jej wartość jest bliska 25%. Elektrownia jądrowa (rys. 21.11), wzięta jako całość, również jest silnikiem. Pobiera ona energię w postaci ciepła z rdzenia reaktora, wykonuje pracę, napędzając turbiny, i odprowadza pozostałą energię w postaci ciepła do rzeki. Jeżeli elektrownia działałaby jak silnik Carnota, jej sprawność sięgałaby około 40%; rzeczywista sprawność jest zbliżona do 30%. Projektując jakikolwiek typ silników, nie da się w żaden sposób pokonać ograniczenia wynikającego z równania (21.11).

### Silnik Stirlinga

Równanie (21.11) nie stosuje się do wszystkich silników idealnych (odwracalnych), lecz tylko do takich silników, których działanie opisuje wykres z rysunku 21.8 — czyli silników Carnota. Na przykład wykres z rysunku 21.12 przedstawia cykl Stirlinga dla silnika idealnego. Porównując jego działanie z cyklem Carnota przedstawionym na rysunku 21.8, widzimy, że w obydwu silnikach wymiana ciepła z otoczeniem zachodzi w przemianach izotermicznych w temperaturze  $T_G$  i  $T_Z$ . Jednakże w przeciwieństwie do silnika Carnota, w którym izotermy były połączone adiabatami, w silniku Stirlinga łączą je izochory — linie opisujące przemianę przy stałej objętości (rys. 21.12). Aby w odwracalnym procesie w stałej objętości zwiększyć temperaturę od  $T_Z$  do  $T_G$  (odcinek  $da$  na rysunku 21.12), trzeba pobrać energię w postaci ciepła ze zbiornika cieplnego, którego temperaturę można zmieniać w sposób ciągły między skrajnymi temperaturami cyklu. Przepływ ciepła w drugą stronę następuje w procesie  $bc$ . Widzimy więc,



Rys. 21.12. Wykonany we współrzędnych  $p$ - $V$  wykres cyklu substancji roboczej idealnego silnika Stirlinga. Dla uproszczenia przyjęto, że substancją roboczą jest gaz doskonały

że odwracalne przepływy ciepła (i związane z tym zmiany entropii) zachodzą we wszystkich czterech przemianach składających się na cykl Stirlinga, a nie w dwóch jak w przypadku silnika Carnota. Dlatego wyprowadzenia, które doprowadziły nas do równania (21.11), nie można powtórzyć w przypadku idealnego silnika Stirlinga. Wydajność idealnego silnika Stirlinga jest mniejsza niż w przypadku silnika Carnota pracującego ze zbiornikami o tych samych temperaturach. Rzeczywiste silniki Stirlinga mają jeszcze mniejsze wydajności.

Silnik Stirlinga został opracowany w 1816 roku przez Roberta Stirlinga. Silnik ten, przez długi czas niedoceniany, jest obecnie adaptowany do napędu samochodów i statków kosmicznych. Udało się już zbudować silnik Stirlinga o mocy 5000 KM (czyli 3,7 MW).

 **SPRAWDZIAN 3:** Trzy silniki Carnota współpracują ze zbiornikami cieplnymi o temperaturach: a) 400 i 500 K, b) 600 i 800 K oraz c) 400 i 600 K. Uszereguj te silniki według ich sprawności, zaczynając od jej największej wartości.

### Przykład 21.3

Wyobraź sobie silnik Carnota pracujący ze zbiornikami cieplnymi o temperaturach  $T_G = 850\text{ K}$  oraz  $T_Z = 300\text{ K}$ . W każdym cyklu, który trwa 0,25 s, silnik wykonuje pracę równą 1200 J.

a) Ile wynosi sprawność tego silnika?

#### ROZWIĄZANIE:

Zauważmy, że dla silnika Carnota sprawność  $\eta$  zależy tylko od stosunku temperatur  $T_Z/T_G$  (w kelwinach) zbiorników cieplnych wykorzystywanych przez silnik. Z równania (21.11) mamy więc

$$\eta = 1 - \frac{T_Z}{T_G} = 1 - \frac{300\text{ K}}{850\text{ K}} = 0,647 \approx 65\%. \quad (\text{odpowiedź})$$

b) Ile wynosi średnia moc tego silnika?

#### ROZWIĄZANIE:

Zauważmy, że średnia moc  $P$  silnika jest równa stosunkowi pracy wykonywanej przez silnik w trakcie cyklu do czasu trwania cyklu. Dla rozważanego silnika Carnota mamy

$$P = \frac{W}{t} = \frac{1200\text{ J}}{0,25\text{ s}} = 4800\text{ W} = 4,8\text{ kW}. \quad (\text{odpowiedź})$$

c) Ile ciepła  $|Q_G|$  jest pobierane w każdym cyklu ze zbiornika o wyższej temperaturze?

#### ROZWIĄZANIE:

Zauważmy, że dla każdego silnika — w tym także dla silnika Carnota — sprawność  $\eta$  jest zdefiniowana jako stosunek pracy wykonywanej w trakcie cyklu do energii  $|Q_G|$  pobieranej w postaci ciepła ze zbiornika o wyższej temperaturze ( $\eta = W/|Q_G|$ ). Mamy więc

$$|Q_G| = \frac{W}{\eta} = \frac{1200\text{ J}}{0,647} = 1855\text{ J}. \quad (\text{odpowiedź})$$

d) Jaka energia  $|Q_Z|$  jest odprowadzana w każdym cyklu do zbiornika o niższej temperaturze?

#### ROZWIĄZANIE:

Zauważmy, że dla silnika Carnota praca  $W$  wykonywana w trakcie cyklu jest równa różnicy energii pobieranej i oddawanej w postaci ciepła:  $|Q_G| - |Q_Z|$  (równanie (21.6)). Dlatego

$$|Q_Z| = |Q_G| - W = 1855\text{ J} - 1200\text{ J} = 655\text{ J}. \quad (\text{odpowiedź})$$

e) Ile wynosi zmiana entropii substancji roboczej związana z pobraniem przez nią energii w postaci ciepła ze zbiornika o wyższej temperaturze? Ile wynosi zmiana entropii wynikająca z oddania w postaci ciepła energii do zbiornika o niższej temperaturze?

#### ROZWIĄZANIE:

Zauważmy, że zmiana entropii  $\Delta S$  podczas przepływu energii  $Q$  w postaci ciepła w stałej temperaturze  $T$  wyraża się równaniem (21.2) ( $\Delta S = Q/T$ ). Dlatego w przypadku *dopływu* energii  $Q_G$  ze zbiornika o temperaturze  $T_G$  entropia substancji roboczej zmienia się o

$$\Delta S_G = \frac{Q_G}{T_G} = \frac{1855\text{ J}}{850\text{ K}} = +2,18\text{ J/K}. \quad (\text{odpowiedź})$$

Podobnie w przypadku *odpływu* energii  $Q_Z$  do zbiornika cieplnego o temperaturze  $T_Z$  mamy

$$\Delta S_Z = \frac{Q_Z}{T_Z} = \frac{-655\text{ J}}{300\text{ K}} = -2,18\text{ J/K}. \quad (\text{odpowiedź})$$

Zwróć uwagę, że wypadkowa zmiana entropii substancji roboczej w trakcie jednego cyklu jest równa zeru, o czym wspominaliśmy już, wyprowadzając równanie (21.8).

## Przykład 21.4

Pewien wynalazca twierdzi, że zbudował silnik, który, współpracując ze zbiornikami cieplnymi o temperaturze wrzenia i krzepnięcia wody, osiąga sprawność 75%. Czy jest to możliwe?

### ROZWIĄZANIE:

Zauważmy, że ~~o~~ sprawność silnika rzeczywistego (w którym zachodzą procesy nieodwracalne i następują straty energii) musi

być mniejsza niż sprawność silnika Carnota korzystającego ze zbiorników cieplnych o takich samych temperaturach. Z równania (21.11) wynika, że sprawność silnika Carnota działającego ze zbiornikami o temperaturze wrzenia i krzepnięcia wody wynosi

$$\eta = 1 - \frac{T_Z}{T_G} = 1 - \frac{(0 + 273) \text{ K}}{(100 + 273) \text{ K}} = 0,268 \approx 27\%.$$

Dlatego silnik współpracujący ze zbiornikami o podanej temperaturze nie może osiągnąć sprawności 75%.

## Sztuka rozwiązywania zadań

### Porad 1: Język termodynamiki

W tekstuach naukowych i technicznych poświęconych termodynamice używa się bogatego, chociaż czasem wprowadzającego w błąd języka. Możecie na przykład znaleźć stwierdzenia, że ciepło jest dodawane, odejmowane, absorbowane, pochłaniane, oddawane, tracone, zyskiwane, dostarczane, rozpraszane, przekazywane, odprowadzane, a także, że przepływa ono od jednego do drugiego ciała (jakby było cieczą). Możecie także spotkać wypowiedzi, że ciała mają ciepło (jakby ciepło można było mieć lub utrzymywać) lub że ciepło rośnie, wzrasta, maleje lub spada. Musicie jednak zawsze pamiętać, co mamy na myśli, kiedy korzystamy z terminu *ciepło*:

► Ciepło to energia przekazywana przez jedno ciało drugiemu w wyniku różnicy temperatur między tymi ciałami.

Kiedy stwierdzamy, że jakieś ciało jest częścią naszego układu, każdy taki przepływ energii  $Q$  do układu uznajemy za ciepło dodatnie, a taki wypływ energii  $Q$  z układu za ciepło ujemne.

Używanie terminu *praca* także wymaga zachowania ostrożności. Możecie bowiem przeczytać, że praca jest wykonywana, generowana lub ciepło ulega przemianie w pracę. Oto jak należy rozumieć termin *praca*:

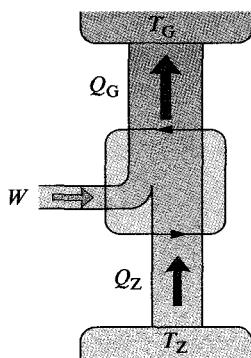
► Praca to energia przekazywana przez jedno ciało drugiemu za pośrednictwem siły działającej między tymi ciałami.

Kiedy stwierdzamy, że jakieś ciało jest częścią rozważanego układu, dowolny tego rodzaju przepływ energii poza układ oznacza dodatnią pracę  $W$  wykonaną przez układ lub ujemną pracę  $W$  wykonaną nad układem. Jakkolwiek tego typu przepływ energii do układu oznacza ujemną pracę  $W$  wykonaną przez układ lub dodatnią pracę  $W$  wykonaną nad układem. (Musisz uważać, czy użyto przyimka *przez* czy *nad*). Bez wątpienia może to być mylące — zawsze, kiedy spotkasz słowo praca, musisz uważnie przeczytać, w jakim kontekście zostało ono użyte.

## 21.5. Entropia w świecie rzeczywistym: chłodziarki

Chłodziarka jest urządzeniem, które wykorzystuje pracę, aby spowodować przepływ energii od zbiornika o niższej temperaturze do zbiornika o wyższej temperaturze, powtarzając w tym celu cykl procesów termodynamicznych. W domowych lodówkach pracę wykonuje zasilana prądem elektrycznym sprężarka, a energia przepływa z komory przeznaczonej do przechowywania żywności (zbiornik o niższej temperaturze) do pomieszczenia (zbiornik o wyższej temperaturze).

Urządzenia klimatyzacyjne i pompy cieplne to także chłodziarki. Różnica między nimi tkwi tylko w tym, co jest zbiornikiem ciepłym, a co zimnym. W przypadku klimatyzatora zbiornikiem o niższej temperaturze jest ochładzane pomieszczenie, a zbiornikiem o wyższej temperaturze — cieplejsze — powietrze na zewnątrz budynku. Pompa cieplna służy natomiast do ogrzewania zamkniętego pomieszczenia; w tym przypadku pokój jest zbiornikiem o wyższej temperaturze, do którego ciepło przepływa z chłodniejszego otoczenia. Można więc ją nazwać klimatyzatorem działającym „w drugą stronę”.



Rys. 21.13. Schemat chłodziarki. Dwie czarne strzałki na pętli w środkowej części rysunku pokazują, że substancja robocza jest poddana przemianie cyklicznej, podobnie jak na wykresie  $p$ - $V$ . Substancja robocza pobiera ze zbiornika o niższej temperaturze energię w postaci ciepła  $Q_Z$  i oddaje energię w postaci ciepła  $Q_G$  do zbiornika o wyższej temperaturze. Pewne urządzenie znajdujące się w otoczeniu wykonuje nad chłodziarką (nad substancją roboczą) pracę  $W$

Zajmijmy się teraz chłodziarką idealną:

► W idealnej chłodziarce wszystkie procesy są odwracalne i nie ma rozpraszania energii wynikającego na przykład z tarcia lub turbulencji.

Na rysunku 21.13 przedstawiono idealną chłodziarkę, która działa odwrotnie niż silnik Carnota z rysunku 21.7. Innymi słowy wszystkie przepływy energii — zarówno w postaci ciepła, jak i pracy — zachodzą w kierunkach przeciwnych niż w silniku Carnota. Taką idealną chłodziarkę nazywamy **chłodziarką Carnota**.

Zadaniem konstruktora chłodziarki jest pobranie jak największej energii  $|Q_Z|$  ze zbiornika cieplnego o niskiej temperaturze (energia odebrana), wykonując przy tym jak najmniejszą pracę  $|W|$  („energia, za którą płacimy”). Wydajność chłodziarki możemy zdefiniować następująco:

$$K = \frac{\text{energia odebrana}}{\text{energia dostarczona}} = \frac{|Q_Z|}{|W|} \quad (\text{współczynnik wydajności dowolnej chłodziarki}), \quad (21.12)$$

gdzie  $K$  oznacza **współczynnik wydajności**. Dla chłodziarki Carnota, odwołując się do pierwszej zasady termodynamiki, możemy napisać  $|W| = |Q_G| - |Q_Z|$ , gdzie  $|Q_G|$  oznacza energię przekazaną w postaci ciepła do zbiornika o wyższej temperaturze. Równanie (21.12) przybiera wtedy postać

$$K_C = \frac{|Q_Z|}{|Q_G| - |Q_Z|}. \quad (21.13)$$

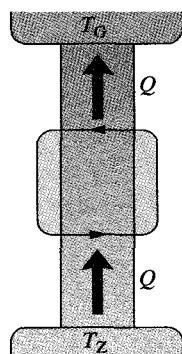
Ponieważ chłodziarka Carnota to silnik Carnota działający w odwrotnym kierunku, możemy połączyć ze sobą równania (21.8) i (21.13). Po dokonaniu pewnych przekształceń otrzymamy

$$K_C = \frac{T_Z}{T_G - T_Z} \quad (\text{współczynnik wydajności chłodziarki Carnota}). \quad (21.14)$$

Współczynnik wydajności  $K$  dla typowych klimatyzatorów pokojowych ma wartość bliską 2,5. Dla lodówek domowych  $K \approx 5$ . Zauważ, że wartość  $K$  jest tym większa, im mniej różni się temperatura obydwu zbiorników cieplnych. Właśnie dlatego bompy cieplne są bardziej efektywne w klimacie umiarkowanym, niż w takim, w którym zachodzą znaczne wahania temperatury.

Byłoby miło mieć chłodziarkę, która nie wymaga wykonywania żadnej pracy — nie trzeba by podłączać jej do kontaktu. Na rysunku 21.14 przedstawiono takie „marzenie konstruktorów”, którym jest **chłodziarka doskonała**; pobiera ona ciepło  $Q$  ze zbiornika o niskiej temperaturze, oddaje do zbiornika o wyższej temperaturze i nie wymaga wykonywania pracy. Ponieważ urządzenia tego typu pracują cyklicznie, entropia substancji roboczej nie ulega zmianie w trakcie pełnego cyklu. Jednakże entropia obydwu zbiorników cieplnych się zmienia. Zmiana entropii jest równa  $-|Q|/T_Z$  dla zbiornika zimnego oraz  $+|Q|/T_G$  dla zbiornika gorącego. Łączna zmiana entropii całego układu jest więc równa

$$\Delta S = -\frac{|Q|}{T_Z} + \frac{|Q|}{T_G}.$$



Rys. 21.14. Schemat chłodziarki doskonałej, która pobiera energię w postaci ciepła ze zbiornika chłodnego i oddaje ją do zbiornika gorącego bez potrzeby wykonywania jakiekolwiek pracy

Ponieważ  $T_G > T_Z$ , prawa strona tego równania ma wartość ujemną i dochodzimy do wniosku, że wypadkowa zmiana entropii układu zamkniętego *chłodziarka + zbiorniki cieplne* w pełnym cyklu pracy jest ujemna. Ponieważ zmniejszanie się entropii jest sprzeczne z drugą zasadą termodynamiki (równanie (21.5)), nie można zbudować chłodziarki doskonałej. (Jeśli chcesz, żeby chłodziarka działała, musisz podłączyć ją do kontaktu).

Otrzymany wynik prowadzi nas do jeszcze jednego (równoważnego) sformułowania drugiej zasady termodynamiki:

► Nie można przeprowadzić ciągu procesów, których jedynym rezultatem jest oddanie energii w postaci ciepła przez ciało chłodniejsze ciału cieplejszemu.

Mówiąc krótko, *chłodziarka doskonała nie istnieje*.

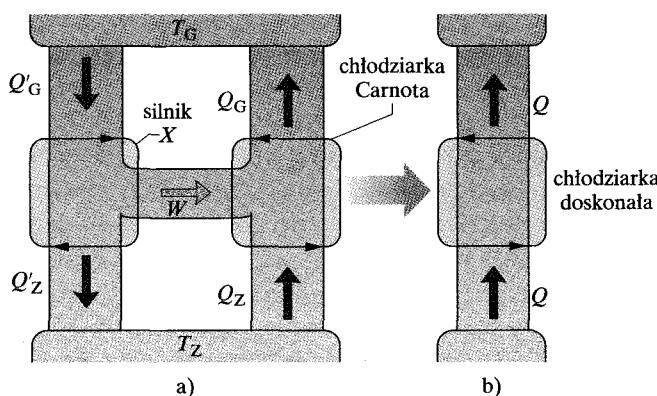
✓ **SPRAWDZIAN 4:** Wyobraź sobie, że chcesz zwiększyć współczynnik wydajności chłodziarki idealnej. Czy możesz to osiągnąć: a) podnosząc nieco temperaturę komory chłodniczej, b) obniżając nieco temperaturę komory chłodniczej, c) przenosząc chłodziarkę do cieplejszego pomieszczenia, czy d) przenosząc ją do chłodniejszego pomieszczenia? Założmy, że każda z tych operacji wiąże się z taką samą bezwzględną zmianą temperatury. Uszereguj te operacje według współczynnika wydajności, zaczynając od jego największej wartości.

## 21.6. Sprawność silników rzeczywistych

Niech  $\eta_C$  oznacza sprawność silnika Carnota współpracującego z dwoma zbiornikami cieplnymi o ustalonych temperaturach. W tym paragrafie udowodnimy, że żaden silnik rzeczywisty korzystający z tych samych zbiorników cieplnych nie może mieć sprawności większej niż  $\eta_C$ . Jeżeli silnik miałby większą sprawność, byłoby to sprzeczne z drugą zasadą termodynamiki.

Założymy, że pewien wynalazca, pracując w swoim garażu, skonstruował silnik  $X$ , który — jak twierdzi — ma sprawność  $\eta_X$  większą niż  $\eta_C$ :

$$\eta_X > \eta_C \quad (\text{twierdzenie wynalazcy}). \quad (21.15)$$



Rys. 21.15. a) Silnik  $X$  napędza chłodziarkę Carnota. b) Jeżeli silnik  $X$  ma naprawdę większą sprawność niż silnik Carnota, jak twierdzi jego wynalazca, to układ z rysunku (a) jest równoważny przedstawionej tu chłodzarce doskonałej. Narusza to drugą zasadę termodynamiki, co pozwala wywnioskować, że sprawność silnika  $X$  nie może być większa od sprawności silnika Carnota

Połączmy teraz silnik  $X$  z chłodziarką Carnota, tak jak pokazano na rysunku 21.15a. Dopasujemy suwy chłodziarki Carnota w taki sposób, aby praca potrzebna w ciągu jednego cyklu była dokładnie równa pracy dostarczanej przez silnik  $X$ . W ten sposób nasz układ *silnik + chłodziarka* (rys. 21.15a) nie wymaga żadnej pracy dostarczanej z zewnątrz.

Jeżeli nierówność (21.15) jest prawdziwa, to z definicji sprawności (równanie (21.9)) mamy

$$\frac{|W|}{|Q'_G|} > \frac{|W|}{|Q_G|},$$

gdzie symbol prim odnosi się do silnika  $X$ , a wyrażenie po prawej stronie nierówności jest sprawnością chłodziarki Carnota wykorzystanej w roli silnika. Relacja ta wymaga, aby była spełniona nierówność

$$|Q_G| > |Q'_G|. \quad (21.16)$$

Ponieważ praca wykonywana przez silnik  $X$  jest równa pracy nad chłodziarką Carnota, z pierwszej zasady termodynamiki (równanie (21.6)) wynika, że

$$|Q_G| - |Q_Z| = |Q'_G| - |Q'_Z|,$$

co możemy przepisać w postaci

$$|Q_G| - |Q'_G| = |Q_Z| - |Q'_Z| = Q. \quad (21.17)$$

Ze względu na relację (21.16) wartość  $Q$  w równaniu (21.17) musi być dodatnia.

Porównując zależności (21.15) i (21.17), widzimy, że efektem pracy układu złożonego z silnika  $X$  i chłodziarki Carnota jest przepływ energii w postaci ciepła  $Q$  od zbiornika zimnego do zbiornika gorącego, który nie wymaga wykonywania pracy. Oznacza to, że rozważany układ pracowałby jako doskonała chłodziarka z rysunku 21.14, której istnienie jest jednak sprzeczne z drugą zasadą termodynamiki.

Widzimy więc, że coś jest nie tak przynajmniej z jednym z naszych założeń. Problem może dotyczyć jedynie relacji (21.15). Możemy więc wywnioskować, że żaden silnik rzeczywisty nie może mieć sprawności większej niż silnik Carnota współpracujący ze zbiornikami cieplnymi o tych samych temperaturach. Co najwyżej sprawność obydwu silników może być jednakowa. W takim przypadku silnik  $X$  jest silnikiem Carnota.

## 21.7. Statystyczne spojrzenie na entropię

W rozdziale 20 przekonaliśmy się, że makroskopowe właściwości gazów można opisać, odwołując się do zjawisk mikroskopowych, w których uczestniczą cząsteczki. Przypomnij sobie, że ciśnienie wywierane przez gaz na ścianki zbiornika można było wyrazić przez pęd, który przekazują ściankom odbijające się od nich cząsteczki gazu. Dziedziną fizyki, w której w ten sposób opisuje się właściwości układów cząstek, nazywa się **mechaniką statystyczną**.

Skoncentrujemy teraz naszą uwagę na zagadnienniu rozkładu liczby cząstek gazu w dwóch połówkach izolowanego zbiornika. Problem ten, który stosunkowo łatwo przeanalizować, pozwala wykorzystać mechanikę statystyczną do obliczenia

zmiany entropii gazu doskonałego w procesie rozprężania swobodnego. Zapoznając się z przykładem 21.6, przekonasz się, że mechanika statystyczna prowadzi do takiej samej wartości zmiany entropii, jak uzyskana z rozważań termodynamicznych w przykładzie 21.2.

Na rysunku 21.16 widzimy zbiornik zawierający sześć identycznych (a więc nieroróżnialnych) cząsteczek gazu. W dowolnej chwili dana cząsteczka może znajdować się albo w lewej, albo w prawej połowie zbiornika. Ponieważ objętości połówek zbiornika są takie same, jednakowe są także prawdopodobieństwa znalezienia się cząsteczki w każdej z nich.

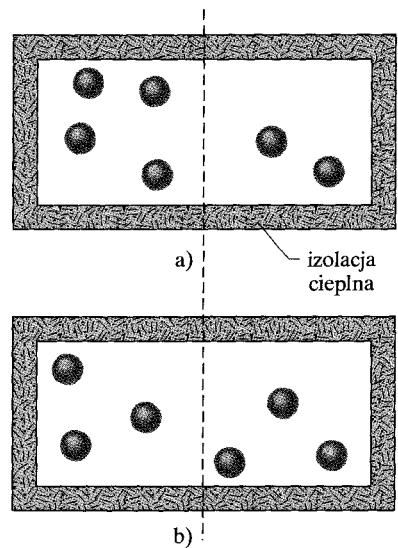
Tabela 21.1. Sześć cząsteczek w zbiorniku

Konfiguracja Oznaczenie	$n_1$	$n_2$	Wielokrotność $W$ (liczba mikrostanów)	Obliczenie $W$ (równanie (21.18))	Entropia [ $10^{-23}$ J/K] (równanie (21.19))
I	6	0	1	$6!/(6! \cdot 0!) = 1$	0
II	5	1	6	$6!/(5! \cdot 1!) = 6$	2,47
III	4	2	15	$6!/(4! \cdot 2!) = 15$	3,74
IV	3	3	20	$6!/(3! \cdot 3!) = 20$	4,13
Łączna liczba mikrostanów = 64					

W tabeli 21.1 wymieniono cztery z siedmiu możliwych *konfiguracji*, które może utworzyć sześć cząsteczek gazu. Każdą konfigurację oznaczono cyframi rzymskimi. I tak w konfiguracji I wszystkie sześć cząsteczek znalazły się w lewej połówce zbiornika ( $n_1 = 6$ ) i żadna w prawej ( $n_2 = 0$ ). Trzy konfiguracje nie wymienione w tabeli to: V — podział (2, 4), VI — podział (1, 5) oraz VII — podział (0, 6). Widzimy, że na ogół daną konfigurację można zrealizować na wiele sposobów. Różne możliwe układy cząsteczek będziemy nazywać *mikrostanami*. Przyjrzyjmy się teraz, jak możemy obliczyć liczbę mikrostanów odpowiadających danej konfiguracji.

Założymy, że mamy  $N$  cząsteczek rozłożonych tak, że  $n_1$  cząsteczek znajduje się w lewej połówce zbiornika, a  $n_2$  w prawej (przy czym  $n_1 + n_2 = N$ ). Wyobraźmy sobie teraz, że każdorazowo „ręcznie” umieszczamy cząsteczki w jednej lub drugiej części zbiornika. Jeżeli  $N = 6$ , to pierwszą cząsteczkę możemy wybrać na sześć niezależnych sposobów, czyli mówiąc inaczej, bierzemy którykolwiek z sześciu cząsteczek. Drugą cząsteczkę możemy wybrać na pięć sposobów, to znaczy bierzemy jedną z pięciu pozostałych cząsteczek itd. Łączna liczba możliwości wyboru sześciu cząsteczek jest iloczynem dostępnej liczby cząsteczek w każdym etapie, czyli  $6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 720$ . W matematyce taki iloczyn kolejnych liczb zapisujemy  $6! = 720$  i czytamy „sześć silnia”. Być może twój kalkulator pozwala obliczać wartości silni. Przyjmuje się ponadto — co przyda ci się później — że  $0! = 1$ . (Sprawdź ten wynik za pomocą swojego kalkulatora).

Ponieważ jednak cząsteczki są nieroróżnialne, nie wszystkie spośród 720 ich układów są różne. Na przykład, kiedy  $n_1 = 4$  i  $n_2 = 2$  (konfiguracja III z tabeli 21.1), kolejność wkładania czterech cząsteczek do lewej połowy zbiornika nie ma znaczenia, ponieważ po dokonaniu wyboru nie da się już określić, w jakiej kolejności wkładano cząsteczki. Liczba sposobów, w jaki można otrzymać dany układ czterech cząsteczek, jest równa  $4!$ , czyli 24. Podobnie liczba sposobów



Rys. 21.16. Izolowany cieplnie zbiornik zawiera sześć cząsteczek gazu. Każda cząsteczka z jednakowym prawdopodobieństwem może się znaleźć w lewej lub prawej połówce zbiornika. Układ z rysunku (a) odpowiada konfiguracji III z tabeli 21.1, a układ z rysunku (b) — konfiguracji IV

umieszczenia dwóch cząsteczek w prawej połówce zbiornika jest równa  $2!$ , czyli po prostu  $2$ . Aby otrzymać liczbę *różnych* układów cząstek prowadzących do podziału  $(4, 2)$ , jak w konfiguracji III, musimy podzielić  $720$  przez  $24$ , a następnie przez  $2$ . Otrzymaną wartość, która określa liczbę mikrostanów odpowiadających danej konfiguracji, nazywamy *wielokrotnością konfiguracji*. Dla konfiguracji III mamy więc

$$W_{\text{III}} = \frac{6!}{4! \cdot 2!} = \frac{720}{24 \cdot 2} = 15.$$

Z tabeli 21.1 wynika, że istnieje  $15$  niezależnych mikrostanów odpowiadających konfiguracji III. Z tabeli 21.1 wynika też, że łączna liczba mikrostanów dla  $6$  cząsteczek w siedmiu możliwych konfiguracjach jest równa  $64$ .

Uogólniając rozważania dla  $6$  cząsteczek na przypadek  $N$  cząsteczek, mamy

$$W = \frac{N!}{n_1! \cdot n_2!} \quad (\text{wielokrotność konfiguracji}). \quad (21.18)$$

Powinieneś sprawdzić, że równanie (21.18) daje poprawne wielokrotności wszystkich konfiguracji wymienionych w tabeli 21.1.

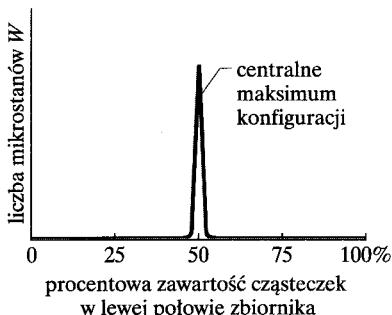
Podstawowe założenie mechaniki statystycznej brzmi:

► Wszystkie mikrostany są tak samo prawdopodobne.

Oznacza to, że jeżeli wykonalibyśmy bardzo dużo fotografii sześciu cząsteczek poruszających się po zbiorniku z rysunku 21.16 i policzylibyśmy, ile razy zaobserwowaliśmy dowolny z mikrostanów, okazałoby się, że każdy z  $64$  mikrostanów występował równie często. Mówiąc jeszcze inaczej, stwierdzilibyśmy, że układ tyle samo czasu przebywa w każdym z  $64$  mikrostanów.

Ponieważ mikrostany są jednakowo prawdopodobne, ale różnym konfiguracjom odpowiadają różne liczby mikrostanów, konfiguracje *nie* są równie prawdopodobne. Z tabeli 21.1 wynika, że konfigurację IV tworzy  $20$  mikrostanów i dlatego jest to *najbardziej prawdopodobna konfiguracja*, o prawdopodobieństwie wystąpienia  $20/64 = 0,313$ . Otrzymany wynik oznacza, że układ spędza  $31,3\%$  czasu w konfiguracji IV. Konfiguracje I i VII, w których wszystkie cząsteczki przebywają w jednej z połówek zbiornika, są najmniej prawdopodobne. Prawdopodobieństwo wystąpienia każdej z nich to  $1/64 = 0,016$ , czyli  $1,6\%$ . Nie powinno nas dziwić, że najbardziej prawdopodobna jest ta konfiguracja, w której cząsteczki rozkładają się po równo między dwiema połówkami zbiornika, ponieważ właśnie tego spodziewamy się w stanie równowagi termodynamicznej. *Dziwi* jednak, że jest *niezerowe*, chociaż małe prawdopodobieństwo zgromadzenia się wszystkich cząstek w jednej z połówek zbiornika, podczas gdy druga połowa pozostaje pusta. W przykładzie 21.5 wykażemy, że jest tak, ponieważ sześć cząsteczek to bardzo mało.

Dla wielkich wartości  $N$  liczby mikrostanów są olbrzymie, ale prawie wszystkie mikrostany odpowiadają konfiguracjom, w których cząsteczki są równomierne rozłożone między obydwie połówki zbiornika (rys. 21.17). Choć mierzone wartości ciśnienia i temperatury są stałe, gaz w zbiorniku nieustannie „kotuje



Rys. 21.17. Wykres liczby mikrostanów  $W$  w zależności od procentowej zawartości cząsteczek w lewej połowie zbiornika w przypadku *wielkiej* liczby cząsteczek w zbiorniku. Niemal wszystkie mikrostany odpowiadają w przybliżeniu równemu rozkładowi liczby cząstek w obydwu połówkach zbiornika. Wspomniane mikrostany dają na wykresie maksimum *centralne*. Dla  $N \approx 10^{22}$  cząsteczek szerokość maksimum jest zbyt mała, by możliwe było przedstawienie jej na tym wykresie

się”, a jego cząsteczki z równym prawdopodobieństwem „odwiedzają” wszystkie możliwe mikrostany. Ponieważ tylko nieliczne mikrostany leżą poza maksimum centralnym (rys. 21.17), możemy z powodzeniem przyjąć, że cząsteczki gazu równomiernie dzielą się pomiędzy dwie połówki zbiornika. Jak się przekonamy, konfiguracji tej odpowiada największa entropia.

## Przykład 21.5

Wyobraźmy sobie, że w zbiorniku z rysunku 21.16 znajduje 100 nieroróżnialnych cząsteczek. Ile mikrostanów odpowiada konfiguracji  $n_1 = 50$  i  $n_2 = 50$ ? A ile konfiguracji  $n_1 = 100$  i  $n_2 = 0$ ? Zinterpretuj uzyskane wyniki w odniesieniu do względnego prawdopodobieństwa wystąpienia obydwu konfiguracji.

### ROZWIĄZANIE:

Zauważmy, że wielokrotność  $W$  konfiguracji nieroróżnialnych cząsteczek w zamkniętym zbiorniku zgodnie z równaniem (21.18) jest równa liczbie niezależnych mikrostanów dla tej konfiguracji. Dla konfiguracji  $(n_1, n_2) = (50, 50)$  mamy

$$W = \frac{N!}{n_1! \cdot n_2!} = \frac{100!}{50! \cdot 50!} = \frac{9,33 \cdot 10^{157}}{(3,04 \cdot 10^{64})(3,04 \cdot 10^{64})} = 1,01 \cdot 10^{29}. \quad (\text{odpowiedź})$$

Podobnie dla konfiguracji  $(100, 0)$  mamy

$$\begin{aligned} W &= \frac{N!}{n_1! \cdot n_2!} \\ &= \frac{100!}{100! \cdot 0!} = \frac{1}{0!} = \frac{1}{1} = 1. \quad (\text{odpowiedź}) \end{aligned}$$

Widzimy, że prawdopodobieństwo wystąpienia konfiguracji  $(50, 50)$  jest około  $1 \cdot 10^{29}$  (liczba, którą trudno sobie wyobrazić) razy większe niż konfiguracji  $(100, 0)$ . Jeżeli potrafilibyśmy liczyć mikrostany z szybkością 1 na nanosekundę, obliczenie liczby wszystkich mikrostanów odpowiadających konfiguracji  $(50, 50)$  zajęłoby około  $3 \cdot 10^{12}$  lat, czyli z grubsza 750 razy dłużej niż istnieje Wszechświat. Jest tak, chociaż 100 cząsteczek to *nadal* bardzo mało. Postaraj się wyobrazić sobie, jakie wyniki uzyskalibyśmy, rozważając mniej więcej mol cząsteczek (np.  $N = 10^{24}$ ). Nie musimy się więc obawiać, że wszystkie cząsteczki powietrza w pokoju znajdą się nagle w jednym jego kącie!

## Prawdopodobieństwo i entropia

W roku 1877 austriacki fizyk Ludwig Boltzmann (ten sam, którego nazwiskiem nazwano stałą Boltzmanna) wyprowadził związek pomiędzy entropią  $S$  i wielokrotnością  $W$  dla danej konfiguracji. Zależność ta ma postać

$$S = k \ln W \quad (\text{wzór Boltzmanna na entropię}). \quad (21.19)$$

Ten słynny wzór został wyryty na nagrobku Boltzmanna.

Jest zrozumiałe, że entropia  $S$  powinna być związana z wielokrotnością  $W$  funkcją logarytmiczną. Całkowita entropia dwóch układów jest sumą entropii tych układów. Prawdopodobieństwo jednoczesnego znalezienia się dwóch układów w pewnych konfiguracjach jest równe iloczynowi niezależnych prawdopodobieństw wystąpienia tych konfiguracji. Ponieważ wiadomo, że  $\ln ab = \ln a + \ln b$ , logarytm wydaje się logicznym powiązaniem obydwu wymienionych wielkości.

W tabeli 21.1 podano entropie różnych konfiguracji układu sześciu cząsteczek z rysunku 21.16, obliczone na podstawie równania (21.19). Konfiguracja IV o największej wielokrotności ma także największą entropię.

Obraczenie wielokrotności  $W$  na podstawie równania (21.18) wymaga wyznaczania wartości silni. Jeżeli wpiszecie liczbę bliską 100, kalkulator najpraw-

dopodobniej zasygnalizuje błąd wynikający z przepełnienia. Na szczęście mamy bardzo dobre przybliżenie, zwane **wzorem Stirlinga**, które pozwala wyznaczyć wartość wprawdzie nie  $N!$ , ale  $\ln N!$ , czyli wielkości, która występuje w równaniu (21.19). Wzór Stirlinga ma postać

$$\ln N! \approx N(\ln N) - N \quad (\text{wzór Stirlinga}). \quad (21.20)$$

Stirling — autor tego wzoru nie jest tą samą osobą, co pomysłodawca silnika Stirlinga.

 **SPRAWDZIAN 5:** Zbiornik zawiera jeden mol gazu. Rozważ dwie konfiguracje: a) każda połowa zbiornika zawiera połowę cząsteczek i b) każda jedna trzecia zbiornika zawiera jedną trzecią cząsteczek. W której z konfiguracji jest więcej mikrostanów?

## Przykład 21.6

W przykładzie 21.1 wykazaliśmy, że kiedy  $n$  moli gazu doskonalego na drodze rozprężania swobodnego dwukrotnie zwiększa zajmowaną objętość, wzrost entropii od stanu początkowego  $P$  do stanu końcowego  $K$  jest równy  $S_K - S_P = nR \ln 2$ . Wyprowadź to równanie, korzystając z mechaniki statystycznej.

### ROZWIAZANIE:

Zauważmy, że:

 1. Dzięki równaniu (21.19) ( $S = k \ln W$ ) możemy powiązać entropię  $S$  dowolnej konfiguracji cząsteczek gazu z wielokrotnością  $W$  tej konfiguracji. Interesują nas dwie konfiguracje: końcowa  $K$  (cząsteczki gazu zajmują pełną objętość zbiornika — rysunek 21.1b) i początkowa  $P$  (cząsteczki zajmują lewą połowę zbiornika).

 2. Ponieważ cząsteczki znajdują się w zamkniętym zbiorniku, możemy obliczyć wielokrotności mikrostanów, korzystając z równania (21.18). W  $n$  molach gazu mamy  $N$  cząsteczek. Początkowo wszystkie cząsteczki znajdują się w lewej połowie zbiornika, a więc ich konfigurację  $(n_1, n_2)$  można zapisać jako  $(N, 0)$ . Równanie (21.18) pozwala stwierdzić, że wielokrotność jest równa

$$W_{\text{pocz}} = \frac{N!}{N! \cdot 0!} = 1.$$

W stanie końcowym, kiedy cząsteczki zajmują całą objętość, konfigurację można zapisać w postaci  $(N/2, N/2)$ . Równanie (21.18) daje więc wielokrotność

$$W_{\text{końc}} = \frac{N!}{(N/2)! \cdot (N/2)!}.$$

Z równania (21.19) wynika, że entropia dla stanu początkowego i końcowego ma odpowiednio wartości

$$S_{\text{pocz}} = k \ln W_{\text{pocz}} = k \ln 1 = 0$$

oraz

$$S_{\text{końc}} = k \ln W_{\text{końc}} = k \ln(N!) - 2k \ln[(N/2)!]. \quad (21.21)$$

Zapisując równanie (21.21), skorzystaliśmy z tożsamości

$$\ln \frac{a}{b^2} = \ln a - 2 \ln b.$$

Teraz, korzystając z przybliżenia (21.20), przystępujemy do przekształcenia równania (21.21)

$$\begin{aligned} S_{\text{końc}} &= k \ln(N!) - 2k \ln[(N/2)!] \\ &= k[N(\ln N) - N] - 2k[(N/2) \ln(N/2) - (N/2)] \\ &= k[N(\ln N) - N - N \ln(N/2) + N] \\ &= k[N(\ln N) - N(\ln N - \ln 2)] = Nk \ln 2. \end{aligned} \quad (21.22)$$

Z paragrafu 20.3 wiemy, że iloczyn  $Nk$  można zastąpić przez  $nR$ , gdzie  $R$  jest stałą gazową. Dzięki temu równanie (21.22) przybiera postać

$$S_{\text{końc}} = nR \ln 2.$$

Zmiana entropii między stanem początkowym a końcowym jest więc równa

$$S_{\text{końc}} - S_{\text{pocz}} = nR \ln 2 - 0 = nR \ln 2, \quad (\text{odpowiedź})$$

czyli dokładnie taka, jak chcieliśmy to wykazać. W przykładzie 21.1 wyznaczyliśmy przyrost entropii dla rozprężania swobodnego, szukając równoważnego procesu odwracalnego i obliczając zmianę entropii w tym procesie w zależności od zmiany temperatury i ilości przekazywanego ciepła. W obecnym przykładzie, w ramach mechaniki statystycznej uzyskaliśmy ten sam przyrost entropii, odwołując się do faktu, że układ składa się z cząsteczek.

## Podsumowanie

**Przemiana nieodwracalna** Przemiany tej nie można przeprowadzić w odwrotnym kierunku, dokonując niewielkich zmian w otoczeniu. Kierunek przemiany nieodwracalnej wyznacza zmiana entropii  $\Delta S$  układu, w którym ta przemiana zachodzi. Entropia jest parametrem stanu (funkcją stanu) układu. Oznacza to, że entropia zależy tylko od stanu układu, a nie zależy od tego, w jaki sposób układ osiągnął ten stan. Postulat entropii mówi między innymi, że: *W wyniku przemiany nieodwracalnej zachodzącej w układzie zamkniętym entropia tego układu wzrasta.*

**Obliczanie zmiany entropii** Zmiana entropii  $\Delta S$  będąca wynikiem przemiany nieodwracalnej, która przeprowadza układ od stanu początkowego  $P$  do stanu końcowego  $K$ , jest dokładnie równa zmianie entropii  $\Delta S$  w *dowolnej przemianie odwracalnej*, która przeprowadza układ od jednego stanu do drugiego. Zmianę entropii w przemianie odwracalnej można obliczyć, korzystając z równania

$$\Delta S = S_{\text{końc}} - S_{\text{pocz}} = \int_{\text{pocz}}^{\text{końc}} \frac{dQ}{T}, \quad (21.1)$$

gdzie  $Q$  oznacza energię przekazywaną w postaci ciepła do lub z układu, a  $T$  jest temperaturą układu w trakcie przemiany, wyrażoną w kelwinach.

Dla odwracalnej przemiany izotermicznej równanie (21.1) upraszcza się do postaci

$$\Delta S = S_{\text{końc}} - S_{\text{pocz}} = \frac{Q}{T}. \quad (21.2)$$

W przypadku kiedy zmiana temperatury układu w wyniku przemiany jest mała w porównaniu z temperaturą układu, przybliżoną zmianę entropii można obliczyć za pomocą równania

$$\Delta S = S_{\text{końc}} - S_{\text{pocz}} \approx \frac{Q}{T_{\text{sr}}}, \quad (21.3)$$

gdzie  $T_{\text{sr}}$  jest średnią temperaturą układu podczas przemiany.

Zmiana entropii  $\Delta S$  gazu doskonałego poddanego odwracalnej przemianie od stanu początkowego  $P$  (temperatura  $T_{\text{pocz}}$  i objętość  $V_{\text{pocz}}$ ) do stanu końcowego  $K$  (temperatura  $T_{\text{końc}}$  i objętość  $V_{\text{końc}}$ ) jest równa

$$\Delta S = S_{\text{końc}} - S_{\text{pocz}} = nR \ln \frac{V_{\text{końc}}}{V_{\text{pocz}}} + nC_V \ln \frac{T_{\text{końc}}}{T_{\text{pocz}}}. \quad (21.4)$$

**Druga zasada termodynamiki** Zasada ta jest rozwinięciem postulatu entropii. Mówiąc, że: *Jeżeli przemiana zachodzi w układzie zamkniętym, to entropia układu wzrasta w przypadku przemiany nieodwracalnej i nie zmienia się w przypadku przemiany odwracalnej. Entropia nigdy nie maleje.* Drugą zasadę termodynamiki można zapisać w postaci nierówności

$$\Delta S \geq 0. \quad (21.5)$$

**Silniki Silnik** Silnik jest urządzeniem pracującym cyklicznie, które pobiera energię w postaci ciepła  $|Q_G|$  ze zbiornika o wyższej temperaturze i wykonuje pewną pracę  $|W|$ . Sprawność  $\eta$  dowolnego silnika definiujemy jako

$$\eta = \frac{\text{energia uzyskana}}{\text{energia dostarczona}} = \frac{|W|}{|Q_G|}. \quad (21.9)$$

W **silniku idealnym** wszystkie przemiany są odwracalne i nie występuje rozpraszanie energii w wyniku na przykład tarcia lub turbulencji. **Silnik Carnota** jest silnikiem idealnym, który działa w cyklu przedstawionym na rysunku 21.8. Sprawność silnika Carnota jest równa

$$\eta_C = 1 - \frac{|Q_Z|}{|Q_G|} = 1 - \frac{T_Z}{T_G}, \quad (21.10, 21.11)$$

gdzie  $T_G$  i  $T_Z$  oznaczają odpowiednio temperaturę gorącego i zimnego zbiornika. Sprawność silników rzeczywistych jest zawsze mniejsza niż obliczona na podstawie równania (21.11). Sprawność silników idealnych, które nie są silnikami Carnota, również jest mniejsza niż określona równaniem (21.11).

**Silnik doskonały** jest pewnym abstrakcyjnym urządzeniem, które całą energię pobraną w postaci ciepła zamienia na pracę. Takie działanie naruszałoby jednak drugą zasadę termodynamiki, której alternatywne sformułowanie brzmi: Nie jest możliwy żaden ciąg procesów, którego jedynym wynikiem byłoby pobranie ze zbiornika energii w postaci ciepła i całkowita zamiana jej na pracę.

**Chłodziarki** Chłodziarka jest urządzeniem, które pracując cyklicznie, wykorzystuje wykonaną nad nim pracę  $W$ , aby ze zbiornika chłodnego pobrać energię w postaci ciepła  $|Q_Z|$ . Współczynnik wydajności  $K$  chłodziarki definiujemy jako

$$K = \frac{\text{energia odebrana}}{\text{energia dostarczona}} = \frac{|Q_Z|}{|W|}. \quad (21.12)$$

**Chłodziarka Carnota** to silnik Carnota pracujący w odwrotnym cyklu. Dla chłodziarki Carnota równanie (21.12) przybiera postać

$$K_C = \frac{|Q_Z|}{|Q_G| - |Q_Z|} = \frac{T_Z}{T_G - T_Z}. \quad (21.13, 21.14)$$

**Chłodziarka doskonała** to abstrakcyjne urządzenie, które ze zbiornika chłodnego pobiera energię w postaci ciepła i w całości oddaje ją także w postaci ciepła do zbiornika o wyższej temperaturze, nie wymagając przy tym wykonywania jakiegokolwiek pracy. Takie działanie naruszałoby drugą zasadę termodynamiki, której alternatywne sformułowanie brzmi: Nie ma takich przemian, których jedynym rezultatem jest przekazanie energii w postaci ciepła od ciała chłodniejszego do ciała cieplejszego.

**Entropia w ujęciu statystycznym** Entropię układu można zdefiniować, odwołując się do liczby możliwych rozkładów tworzących

go cząsteczek. W przypadku cząsteczek nieroróżnialnych każdy możliwy ich rozkład nazywamy **mikrostanem** układu. Wszystkie równoważne mikrostanły zebrane razem nazywamy **konfiguracją** układu. Liczba mikrostanów tworzących konfigurację to **wielokrotność**  $W$  konfiguracji.

W przypadku układu zawierającego  $N$  cząsteczek, które można rozdzielić między dwie połowy zbiornika, wielokrotność jest dana równaniem

$$W = \frac{N!}{n_1! \cdot n_2!}, \quad (21.18)$$

gdzie  $n_1$  oznacza liczbę cząsteczek w jednej połówce zbiornika, a  $n_2$  — liczbę cząsteczek w drugiej połówce zbiornika. Podstawowym założeniem mechaniki statystycznej jest jednakowe praw-

dopodobieństwo występowania wszystkich mikrostanów. Dlatego konfiguracje układu o dużej wielokrotności występują częściej. Kiedy  $N$  jest bardzo dużą liczbą (na przykład  $N = 10^{22}$  lub więcej), cząsteczki prawie cały czas przebywają w konfiguracji, w której  $n_1 = n_2$ .

Wielokrotność konfiguracji  $W$  i entropia  $S$  układu dla danej konfiguracji są powiązane wzorem Boltzmanna

$$S = k \ln W, \quad (21.19)$$

gdzie  $k = 1,38 \cdot 10^{-23}$  J/K jest stałą Boltzmanna.

Jeżeli  $N$  jest bardzo dużą liczbą (co zwykle jest prawdą), to wartość  $\ln N!$  można obliczyć za pomocą wzoru Stirlinga:

$$\ln N! \approx N(\ln N) - N. \quad (21.20)$$

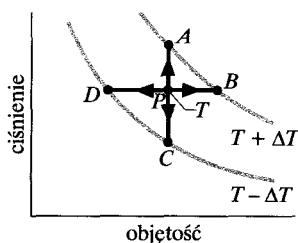
## Pytania

1. Gaz zamknięty w izolowanym cylindrze sprężamy adiabatycznie do połowy jego objętości. Czy w wyniku tego procesu entropia gazu wzrasta, zmniejsza się, czy się nie zmienia?

2. W czterech doświadczeniach dwa bloki  $A$  i  $B$  o różnych temperaturach początkowych są umieszczane we wnętrzu izolowanego pojemnika w kontakcie cieplnym ze sobą (tak jak w przykładzie 21.2). Po pewnym czasie osiągają one jednakową temperaturę końcową. W załączonej tabeli podano zmiany entropii we wspomnianych doświadczeniach wyrażone w dzulach na kelwin, nie zachowując jednak tej samej kolejności dla obydwu bloków. Dopasuj do siebie zmiany entropii bloku  $A$  i bloku  $B$ .

Blok	Wartości				
$A$	8	5	3	9	
$B$	-3	-8	-5	-2	

3. Punkt  $P$  na rysunku 21.18 oznacza stan początkowy gazu doskonałego o temperaturze  $T$ . Uwzględniając znaki, uszereguj zmiany entropii gazu związane z odwracalnymi przemianami, które przeprowadzają gaz od stanu  $P$  do stanu  $A$ ,  $B$ ,  $C$  i  $D$ . Zaczni od wartości największej.

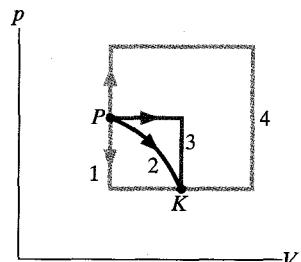


Rys. 21.18. Pytanie 3

4. Gaz doskonały znajdujący się w kontakcie cieplnym ze zbiornikiem o regulowanej temperaturze można przeprowadzić od stanu  $P$  do stanu  $K$  za pomocą czterech odwracalnych przemian zaznaczonych na rysunku 21.19. Uszereguj te przemiany według zmiany entropii: a) gazu, b) zbiornika cieplnego i c) układu gaz–zbiornik

cieplny. Za każdym razem zaczni od największej wartości.

5. Gaz ulega rozprężeniu swobodnemu od objętości  $V$  do  $2V$ . Następnie gaz rozpręga się swobodnie od objętości  $2V$  do  $3V$ . Czy łączna zmiana entropii w dwóch kolejnych przemianach jest większa, mniejsza, czy taka sama, jak w przypadku, gdyby gaz od razu uległ swobodnemu rozprężeniu od objętości  $V$  do  $3V$ ?



Rys. 21.19. Pytanie 4

6. Trzy silniki Carnota współpracują ze zbiornikami cieplnymi o temperaturach: a) 400 K i 500 K, b) 500 K i 600 K oraz c) 400 K i 600 K. Każdy silnik w ciągu jednego cyklu pobiera ze zbiornika gorącego taką samą ilość energii. Uszereguj silniki według pracy, jaką wykonują w trakcie jednego cyklu. Zaczni od wartości największej.

7. Czy w trakcie jednego cyklu: a) silnika Carnota, b) silnika rzeczywistego i c) silnika doskonałego (którego oczywiście nie można zbudować) entropia wzrasta, maleje, czy też pozostaje stała?

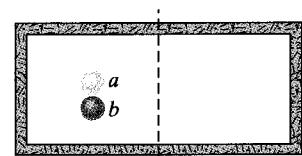
8. Wyobraź sobie, że pozostawiasz na kilka godzin otwarte drzwi lodówki. Czy temperatura w kuchni wzrosnie, zmaleje, czy nie ulegnie zmianie? Przyjmij założenie, że kuchnia jest pomieszczeniem zamkniętym i dobrze izolowanym.

9. Czy w trakcie jednego cyklu: a) chłodziarki Carnota, b) chłodziarki rzeczywistej i c) chłodziarki doskonałej (której oczywiście nie można zbudować) entropia wzrasta, maleje, czy też pozostaje stała?

10. Zbiornik zawiera 100 atomów, które są rozłożone tak, że obydwie połówki zbiornika zawierają po 50 atomów. Założymy, że korzystając z superkomputera możesz liczyć mikrostany związane z tą konfiguracją z szybkością 100 miliardów na sekundę. Nie wykonując pisemnych obliczeń, odpowiedz, jak długo musiałoby trwać takie liczenie — dzień, rok czy dłużej niż rok?

11. Na rysunku 21.20 przedstawiono wykonane w chwili  $t = 0$  zdjęcie cząsteczek  $a$  i  $b$  umieszczonych w zbiorniku, takim jak ten z rysunku 21.16. Cząsteczki mają takie same masy i prędkości  $v$ , a ich zderzenia ze sobą nawzajem i ze ściankami zbiornika są sprężyste. Jakie jest prawdopodobieństwo, że zdjęcia wykonane w chwili: a)  $t = 0,1 L/v$  i b)  $t = 10 L/v$  wykażą, że cząsteczka  $a$

znajduje się w lewej części zbiornika, a cząsteczka  $b$  w części prawej? c) Jakie jest prawdopodobieństwo, że w pewnej późniejszej chwili cząsteczki znajdujące się w prawej części zbiornika mają energią kinetyczną równą połowie całkowitej energii kinetycznej cząsteczek?



Rys. 21.20. Pytanie 11

## Zadania

www Rozwiążanie jest dostępne na stronie internetowej podręcznika: <http://www.wiley.com/college/hrw>

ilw Rozwiążanie jest dostępne w postaci interaktywnej, wykorzystującej oprogramowanie Interactive Learning-Ware (na tej samej stronie)

### 21.2 Zmiana entropii

1. Próbka gazu doskonałego o wielkości 2,5 mola jest poddana odwracalnemu rozprężaniu izotermicznemu w temperaturze 360 K, które powoduje dwukrotny wzrost jej objętości. O ile wzrasta entropia gazu?

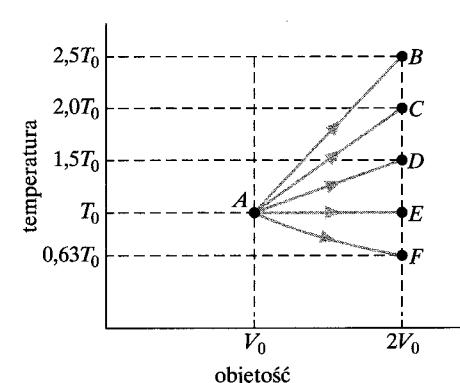
2. Jaka ilość ciepła została dostarczona próbce gazu doskonałego, jeżeli jej entropia w wyniku odwracalnego rozprężenia izotermicznego w temperaturze 132°C wzrosła o 46 J/K?

3. Cztery mole gazu doskonałego zostały poddane w temperaturze  $T = 400$  K odwracalnemu rozprężaniu izotermicznemu od objętości  $V_1$  do objętości  $V_2 = 2V_1$ . Oblicz: a) pracę wykonaną przez gaz i b) zmianę entropii gazu. c) Ile wyniesie zmiana entropii gazu, jeżeli zamiast rozprężania izotermicznego poddamy gaz odwracalnemu rozprężaniu adiabatycznemu?

4. Gaz doskonały ulega w temperaturze 77°C odwracalnemu rozprężaniu izotermicznemu, w wyniku czego zwiększa swą objętość od 1,3 l do 3,4 l. Zmiana entropii gazu wynosi 22 J/K. Ile moli gazu poddano przemianie?

5. Oblicz: a) energię pobraną w postaci ciepła i b) zmianę entropii bloku miedzi o masie 2 kg, który ogrzano od 25°C do 100°C. Ciepło właściwe miedzi jest równe 386 J/(kg · K).

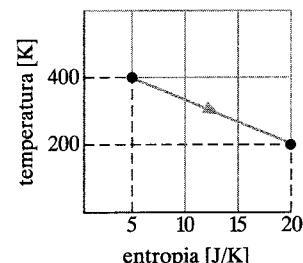
6. Jednoatomowy gaz doskonały o temperaturze początkowej  $T_0$  (w kelwinach) ulega rozprężeniu od objętości  $V_0$  do objętości  $2V_0$  w pięciu procesach przedstawionych na wykresie  $T$ - $V$



Rys. 21.21. Zadanie 6

7. a) Ile wynosi zmiana entropii kostki lodu o masie 12 g, która ulega całkowitemu stopieniu w wiadrze wody o temperaturze minimalnie większej od temperatury topnienia lodu? b) Ile wynosi zmiana entropii łyżki wody o masie 5 g, która w całości wyparowuje po wylaniu jej na płytę o temperaturze minimalnie większej od temperatury wrzenia wody?

8. Próbka jednoatomowego gazu doskonałego o wielkości 2 moli ulega odwracalnej przemianie przedstawionej na wykresie z rysunku 21.22. a) Ile energii w postaci ciepła pobiera gaz? b) Ile wynosi zmiana energii wewnętrznej gazu? c) Jaką pracę wykonuje gaz podczas tej przemiany?



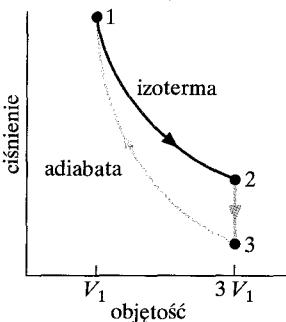
Rys. 21.22. Zadanie 8

**9.** W pewnym doświadczeniu zmieszano w starannie izolowanym naczyniu 200 g aluminium (ciepło właściwe 900 J/(kg · K)) o temperaturze 100°C z 50 g wody o temperaturze 20°C. a) Ile wynosi temperatura mieszaniny w stanie równowagi? Ile wynosi zmiana entropii: b) aluminium, c) wody i d) układu woda–aluminium?

**10.** Przyjmij, że początkowe temperatury bloków  $L$  i  $P$  w nieodwracalnej przemianie z rysunku 21.5 są równe odpowiednio 305,5 K oraz 294,5 K. Przyjmij też, że ustalenie się równowagi termodynamicznej pomiędzy blokami wymaga przepływu między nimi 215 J energii. Wyobraź sobie następnie, że bloki te ulegają przemianie z rysunku 21.6. Ile wynosi zmiana entropii: a) bloku  $L$ , b) jego zbiornika cieplnego, c) bloku  $P$ , d) jego zbiornika cieplnego, e) układu składającego się z dwóch bloków i f) układu składającego się z dwóch bloków i ich zbiorników cieplnych?

**11.** Wykorzystaj układ z rysunku 21.6, aby wykazać, że w przypadku gdyby przemiana z rysunku 21.5 przebiegała w odwrotnym kierunku, entropia układu zmalałaby, co byłoby sprzeczne z drugą zasadą termodynamiki.

**12.** Dwuatomowy gaz doskonały, którego cząsteczki mogą uczestniczyć w ruchu obrotowym, ale nie wykonują drgań, poddano procesowi cyklicznemu z rysunku 21.23. Przyjmując jako znane wartości  $p_1$ ,  $V_1$ ,  $T_1$  i  $R$ , oblicz: a)  $p_2$ ,  $p_3$  i  $T_3$  oraz b) pracę  $W$ , ciepło  $Q$ , zmianę energii wewnętrznej  $\Delta E_w$  i zmianę entropii  $\Delta S$  na mol gazu we wszystkich trzech przemianach cyklu.



Rys. 21.23. Zadanie 12

**13.** Blok miedzi o masie 50 g i temperaturze 400 K umieszczono w izolowanym pojemniku wraz z blokiem ołowiu o masie 100 g i temperaturze 200 K. a) Ile wynosi temperatura równowagi układu dwóch bloków? b) Ile wynosi zmiana energii wewnętrznej układu dwóch bloków przy przejściu ze stanu początkowego do stanu równowagi? c) Ile wynosi zmiana entropii układu dwóch bloków? (Patrz tabela 19.3.)

**14.** Jeden mol jednoatomowego gazu doskonałego przeprowadzono od stanu początkowego (ciśnienie  $p$  i objętość  $V$ ) do stanu końcowego (ciśnienie  $2p$  i objętość  $2V$ ), podając go dwóm różnym przemianom: (I) Gaz rozpręża się izotermicznie do chwili, kiedy jego objętość wzrośnie dwukrotnie, a następnie jego ciśnienie jest zwiększane przy stałej objętości do ciśnienia końcowego. (II) Gaz jest sprężany izotermicznie, aż jego ciśnienie wzrośnie dwukrotnie, a następnie rozprężany przy stałym ciśnieniu do objętości końcowej. a) Przedstaw każdą z przemian na wykresie  $p$ - $V$ . b) energię pobraną przez gaz w postaci ciepła w każdym etapie prze-

miany, c) pracę wykonaną przez gaz podczas każdego etapu przemiany, d) zmianę energii wewnętrznej gazu  $E_{w,konc} - E_{w,pocz}$  oraz e) zmianę entropii gazu  $S_{konc} - S_{pocz}$ .

**15.** Kostkę lodu o masie 10 g i temperaturze  $-10^\circ\text{C}$  wrzucono do jeziora, którego temperatura jest równa  $15^\circ\text{C}$ . Oblicz zmianę entropii układu kostka lód–jezioro do chwili, kiedy lód osiągnie równowagę termodynamiczną z jeziorem. Ciepło właściwe lodu wynosi 2220 J/(kg · K). (Wskazówka: Czy lód wpłynie na temperaturę jeziora?)

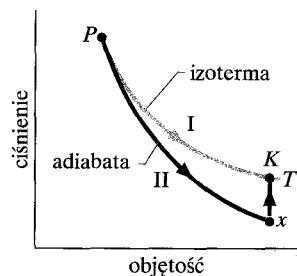
**16.** Kostkę lodu o masie 8 g i temperaturze  $-10^\circ\text{C}$  umieszczono w termosie zawierającym  $100 \text{ cm}^3$  wody o temperaturze  $20^\circ\text{C}$ . O ile zmieni się entropia układu lód–woda do chwili, kiedy osiągnie on stan równowagi termodynamicznej? Ciepło właściwe lodu wynosi 2220 J/(kg · K).

**17.** Mieszanina 1773 g wody i 227 g lodu znajduje się początkowo w stanie równowagi termodynamicznej w temperaturze  $0^\circ\text{C}$ . Następnie w przemianie odwracalnej mieszanina jest przeprowadzana do innego stanu równowagi, w którym w temperaturze  $0^\circ\text{C}$  stosunek wagowy wody i lodu wynosi 1:1. a) Oblicz zmianę entropii układu w opisanym procesie. (Ciepło topnienia lodu wynosi 333 kJ/kg.) b) Następnie w przemianie nieodwracalnej (na przykład za pomocą palnika Bunsena) zostaje przywrócony stan początkowy układu. Oblicz zmianę entropii układu w tym procesie. c) Czy udzielone odpowiedzi są zgodne z drugą zasadą termodynamiki?

**18.** Cylinder zawiera  $n$  moli jednoatomowego gazu doskonałego. Zmiana entropii gazu w wyniku odwracalnego rozprężania izotermicznego od objętości początkowej  $V_{pocz}$  do objętości końcowej  $V_{konc}$  opisanego krzywą I na wykresie  $p$ - $V$  z rysunku 21.24 wynosi  $\Delta S = nR \ln(V_{konc}/V_{pocz})$ . (Patrz przykład 21.1). Rozważmy teraz przemianę opisaną krzywą II z rysunku 21.24, która polega na przeprowadzeniu gazu od stanu początkowego  $P$  do stanu  $x$  na drodze odwracalnego rozprężania adiabatycznego, a następnie w odwracalnej przemianie izochorycznej (w stałej objętości) od stanu  $x$  do tego samego co poprzednio stanu końcowego  $K$ . a) Opisz, jak można przeprowadzić obydwie przemiany opisane krzywą II. b) Wykaż, że w stanie  $x$  temperatura gazu jest równa

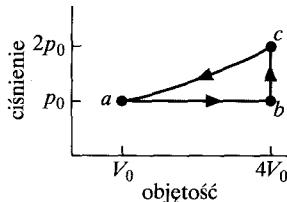
$$T_x = T_{pocz}(V_{pocz}/V_{konc})^{2/3}.$$

c) Ile ciepła  $Q_I$  jest dostarczane w procesie I? Ile ciepła  $Q_{II}$  jest dostarczane w procesie II? Czy obydwie uzyskane wartości są sobie równe? d) Ile wynosi zmiana entropii w procesie II? Czy zmiana entropii w procesie I jest taka sama? e) Oblicz wartości  $T_x$ ,  $Q_I$ ,  $Q_{II}$  i  $\Delta S$ , przyjmując  $n = 1$ ,  $T_{pocz} = 500 \text{ K}$  oraz  $V_{konc}/V_{pocz} = 2$ .



Rys. 21.24. Zadanie 18

**19.** Jeden mol jednoatomowego gazu doskonałego został poddany przemianie cyklicznej przedstawionej na rysunku 21.25. a) Jaką pracę wykonuje gaz, przechodząc od stanu *a* do stanu *c* wzdłuż krzywej *abc*? Ile wynosi zmiana energii wewnętrznej oraz entropii b) w procesie od stanu *b* do *c* i c) w pełnym cyklu? Podaj wyniki w zależności od ciśnienia  $p_0$ , objętości  $V_0$  i temperatury  $T_0$  dla stanu *a*.



Rys. 21.25. Zadanie 19

**20.** Jeden mol jednoatomowego gazu doskonałego o ciśnieniu początkowym 5 kPa i temperaturze początkowej 600 K zwiększa swą objętość od wartości początkowej  $V_{\text{pocz}} = 1 \text{ m}^3$  do wartości końcowej  $V_{\text{kofc}} = 2 \text{ m}^3$ . W trakcie tego procesu ciśnienie  $p$  i objętość gazu  $V$  są związane zależnością  $p = 5 \exp[(V_{\text{pocz}} - V)/a]$ , gdzie  $p$  jest wyrażone w kilopaskalach,  $V_{\text{pocz}}$  i  $V$  w metrach sześciennych, a stała  $a$  ma wartość  $1 \text{ m}^3$ . Ile wynosi a) ciśnienie końcowe i b) temperaturę końcową gazu? c) Jaką pracę wykonuje gaz, zwiększając swą objętość? d) Ile wynosi zmiana entropii w tym procesie? (Wskazówka: Wyznacz zmianę entropii, odwołując się do dwóch prostych przemian odwracalnych).

#### 21.4 Entropia w świecie rzeczywistym: silniki

**21.** Silnik Carnota w każdym cyklu pobiera z grzejnika 52 kJ energii w postaci ciepła i oddaje do chłodnicy 36 kJ energii w postaci ciepła. Oblicz a) sprawność silnika i b) pracę (w kilodżulach), jaką wykonuje on podczas cyklu.

**22.** Silnik Carnota, którego chłodnica ma temperaturę 17°C, wykazuje sprawność 40%. O ile trzeba zwiększyć temperaturę grzejnika, aby sprawność silnika wzrosła do 50%?

**23.** Silnik Carnota, współpracujący ze zbiornikami cieplnymi o temperaturach 235°C i 115°C, w trakcie jednego cyklu pobiera z grzejnika  $6,3 \cdot 10^4 \text{ J}$  energii w postaci ciepła. a) Ile wynosi sprawność silnika? b) Jaką pracę może w jednym cyklu wykonać ten silnik?

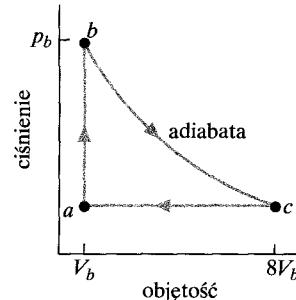
**24.** W hipotetycznym reaktorze termojądrowym paliwem jest gazowy deuter o temperaturze około  $7 \cdot 10^8 \text{ K}$ . Założmy, że taki gaz można by wykorzystać w silniku Carnota o temperaturze chłodnicy  $T_z = 100^\circ\text{C}$ . Ile wynosiłaby sprawność takiego silnika?

**25.** Silnik Carnota ma sprawność 22%. Różnica temperatury pomiędzy dwoma zbiornikami cieplnymi, z którymi on współpracuje, wynosi 75°C. Jaką temperaturę mają obydwa zbiorniki?

**26.** Silnik Carnota ma moc 500 W. Współpracuje on z dwoma zbiornikami cieplnymi o stałych temperaturach równych  $100^\circ\text{C}$

oraz  $60^\circ\text{C}$ . Z jaką szybkością (w kilodżulach na sekundę) silnik a) pobiera i b) oddaje ciepło?

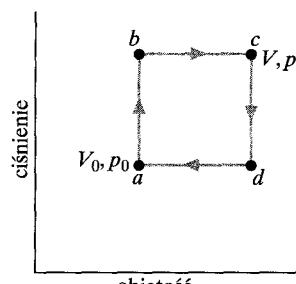
**27.** Jeden mol jednoatomowego gazu doskonałego jest poddany odwracalnej przemianie cyklicznej przedstawionej na rysunku 21.26. Proces *bc* jest rozprężaniem adiabatycznym. W punkcie *b* mamy ciśnienie  $p_b = 10 \text{ atm}$  i objętość  $V_b = 1 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3$ . Oblicz: a) energię pobraną przez gaz w postaci ciepła z grzejnika, b) energię oddaną przez gaz w postaci ciepła do chłodnicy, c) wypadkową pracę wykonywaną przez gaz i d) sprawność cyklu.



Rys. 21.26. Zadanie 27

**28.** Wykaż, że pole powierzchni ograniczone wykresem cyklu Carnota we współrzędnych temperatura-entropia (rys. 21.9) odpowiada wypadkowej energii przekazanej w postaci ciepła substancji roboczej w trakcie jednego cyklu.

**29.** Jeden mol jednoatomowego gazu doskonałego został poddany przemianie cyklicznej przedstawionej na rysunku 21.27. Przyjmijmy, że  $p = 2p_0$ ,  $V = 2V_0$ , gdzie  $p_0 = 1,01 \cdot 10^5 \text{ Pa}$  oraz  $V_0 = 0,0225 \text{ m}^3$ . Oblicz: a) pracę wykonywaną podczas cyklu, b) ciepło dostarczane w procesie *abc* i c) sprawność cyklu. d) Ile wynosiłaby sprawność silnika Carnota pracującego pomiędzy najwyższą i najniższą temperaturą tego cyklu? Jak ma się ta sprawność do wartości obliczonej w punkcie (c)?



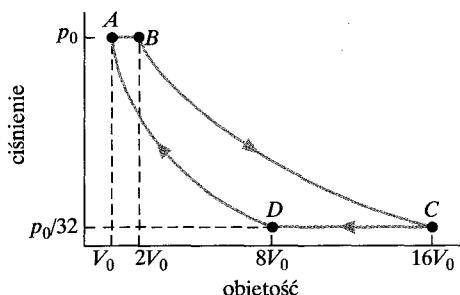
Rys. 21.27. Zadanie 29

**30.** Pierwszy stopień dwustopniowego silnika Carnota pobiera z grzejnika o temperaturze  $T_1$  energię w postaci ciepła  $Q_1$ , wykonuje pracę  $W_1$  i oddaje do chłodnicy o temperaturze  $T_2$  energię w postaci ciepła  $Q_2$ . Drugi stopień pobiera energię  $Q_2$ , wykonuje pracę  $W_2$  i oddaje do chłodnicy o jeszcze niższej temperaturze  $T_3$  energię  $Q_3$ . Udowodnij, że sprawność dwustopniowego silnika jest równa  $(T_1 - T_3)/T_1$ .

**31.** Wyobraź sobie, że w skorupie ziemskiej w pobliżu jednego z biegunków, gdzie temperatura na powierzchni wynosi  $-40^\circ\text{C}$ , wywiercono szyb sięgający głębokości, na której panuje temperatura  $800^\circ\text{C}$ . a) Jaka jest największa teoretyczna sprawność silnika pracującego między tymi temperaturami? b) Z jaką szybkością byłaby wytwarzana woda w postaci cieczy o temperaturze  $0^\circ\text{C}$ ,

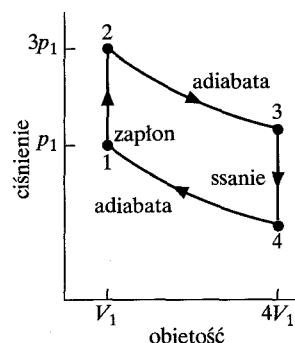
jeżeli cała energia oddawana w postaci ciepła do zbiornika o niskiej temperaturze przez elektrownię o mocy 100 MW (potraktuj ją jako silnik) byłaby zużywana do stopienia lodu o temperaturze początkowej  $-40^{\circ}\text{C}$ ? Ciepło właściwe lodu jest równe 2220 J/(kg  $\cdot$  K); ciepło topnienia lodu wynosi 333 kJ/kg. (Zwróc uwagę, że w takim przypadku silnik może działać jedynie pomiędzy temperaturą  $0^{\circ}\text{C}$  i  $800^{\circ}\text{C}$ . Energia oddawana w temperaturze  $-40^{\circ}\text{C}$  nie może być użyta do ogrzania czegokolwiek cieplejszego niż  $-40^{\circ}\text{C}$ ).

32. Jeden mol gazu doskonałego użycie jako substancji roboczej w silniku pracującym według cyklu z rysunku 21.28. Linie  $BC$  i  $DA$  reprezentują odwrotnie przemiany adiabatyczne. a) Czy gaz jest jedno-, dwu-, czy wieloatomowy? b) Ile wynosi sprawność silnika?



Rys. 21.28. Zadanie 32

33. Działanie benzynowego silnika spalinowego przedstawia cykl z rysunku 21.29. Załóż, że mieszanina benzyna-powietrze jest gazem doskonałym i przyjmij, że ulega sprężaniu w stosunku  $4 : 1$  ( $V_4 = 4V_1$ ). Przyjmij także, że  $p_2 = 3p_1$ . a) Oblicz ciśnienie i temperaturę w każdym z wierzchołków wykresu cyklu we współrzędnych  $p$ - $V$ , w zależności od ciśnienia  $p_1$ , temperatury  $T_1$  i stosunku  $\gamma$  wartości molarowej ciepła właściwego gazu przy stałym ciśnieniu i przy stałej objętości. b) Ile wynosi sprawność cyklu?



Rys. 21.29. Zadanie 33

## 21.5 Entropia w świecie rzeczywistym: chłodziarki

34. Chłodziarka Carnota wymaga 200 J pracy, aby pobrać 600 J ciepła z komory chłodzenia. a) Ile wynosi współczynnik wydajności chłodziarki? b) Ile energii w postaci ciepła jest odprowadzane do kuchni w jednym cyklu?

35. Klimatyzator pracujący w odwrotnym cyklu Carnota pobiera energię z pomieszczenia o temperaturze  $70^{\circ}\text{F}$  i odprowadza ją na

zewnętrz, gdzie panuje temperatura  $96^{\circ}\text{F}$ . Ile dżuli energii pobranej z pokoju przypada na jeden dżul energii elektrycznej dostarczanej do klimatyzatora?

36. Silnik elektryczny napędza pompę cieplną, która przekazuje ciepło z zewnątrz budynku, gdzie panuje temperatura  $-5^{\circ}\text{C}$ , do pomieszczenia, w którym jest  $17^{\circ}\text{C}$ . Załóż, że pompa cieplna jest pompą cieplną Carnota (pracuje w odwrotnym cyklu Carnota). Ile dżuli ciepła doprowadzonego do pokoju przypada na każdy dżul zużytej energii elektrycznej?

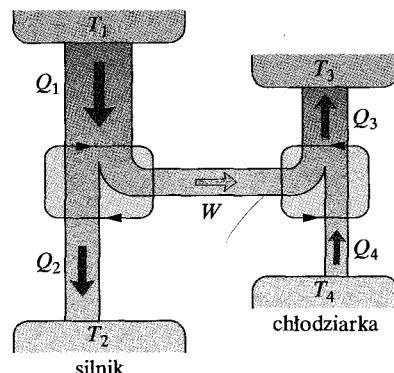
37. Pompa cieplna służy do ogrzewania budynku. Na zewnątrz jest  $-5^{\circ}\text{C}$ , a wewnątrz należy utrzymywać temperaturę  $22^{\circ}\text{C}$ . Pompa w ciągu każdej godziny dostarcza do budynku 7,54 MJ energii w postaci ciepła, a jej współczynnik wydajności jest równy 3,8. Przyjmijmy, że pompa pracuje w odwrotnym cyklu Carnota. Z jaką szybkością trzeba wykonywać pracę nad pompą?

38. Jakiej pracy wymaga chłodziarka Carnota, aby przekazać 1 dżul energii w postaci ciepła pomiędzy zbiornikami o temperaturach: a)  $7^{\circ}\text{C}$  i  $27^{\circ}\text{C}$ , b)  $-73^{\circ}\text{C}$  i  $27^{\circ}\text{C}$ , c)  $-173^{\circ}\text{C}$  i  $27^{\circ}\text{C}$  oraz d)  $-223^{\circ}\text{C}$  i  $27^{\circ}\text{C}$ ?

39. Klimatyzator chłodzący pomieszczenie o temperaturze  $93^{\circ}\text{F}$  oddaje ciepło w temperaturze  $70^{\circ}\text{F}$  i ma zdolność chłodzącą 4000 Btu/h. Jego współczynnik wydajności jest równy 27% wartości, którą miałaby chłodziarka Carnota pracująca pomiędzy tymi samymi temperaturami. Jaka jest moc silnika napędzającego klimatyzator (w koniach mechanicznych)?

40. Silnik lodówki ma moc 200 W. Ile wynosi maksymalna energia, którą lodówka może w ciągu 10 minut odprowadzić z komory chłodniczej, jeżeli panuje w niej temperatura  $270\text{ K}$ , temperatura powietrza na zewnątrz wynosi  $300\text{ K}$ , a współczynnik wydajności jest taki sam jak w przypadku chłodziarki Carnota?

41. Grzejnik i chłodnica silnika Carnota mają odpowiednio temperaturę  $T_1$  i  $T_2$ . Silnik napędza chłodziarkę Carnota, która chłodzi komorę o temperaturze  $T_3$  i oddaje ciepło w temperaturze  $T_4$  (rys. 21.30). Wyznacz stosunek  $Q_3/Q_1$  w zależności od wartości temperatury  $T_1$ ,  $T_2$ ,  $T_3$  i  $T_4$ .



Rys. 21.30. Zadanie 41

## 21.7 Statystyczne spojrzenie na entropię

42. Wykonaj tabelę podobną do tabeli 21.1 opisującą konfiguracje ośmiu cząsteczek w zbiorniku.

43. Wykaż, że liczba mikrostanów, zdefiniowanych jako znalezienie się cząsteczki w lewej lub prawej połowie zbiornika zawierającego  $N$  cząsteczek, jest równa  $2^N$ . Sprawdź tę zależność dla przypadku opisanego tabelą 21.1.

44. Zbiornik zawiera  $N$  cząsteczek gazu rozłożonych po równo w obydwóch jego połowach. Przyjmijmy, że  $N = 50$ . a) Ile wynosi wielokrotność takiej „centralnej” konfiguracji? b) Ile wynosi całkowita liczba mikrostanów układu? (Wskazówka: Patrz zadanie 43). c) Ile czasu (procentowo) spędza układ w konfiguracji centralnej? d) Powtórz obliczenia z punktów (a)–(c) dla przypadku

$N = 100$ . e) Powtórz obliczenia z punktów (a)–(c) dla przypadku  $N = 200$ . f) Możesz stwierdzić, że wraz ze wzrostem  $N$  układ przebywa *krócej* (a nie dłużej) w konfiguracji środkowej. Wyjaśnij, dlaczego tak jest.

45. Zbiornik zawiera  $N$  cząsteczek gazu. Wyobraź sobie, że jest on podzielony na trzy równe części. a) Uogólnij równanie (21.18), aby wyrażało ono wielokrotność dowolnej konfiguracji. b) Rozważ dwie konfiguracje: konfigurację  $A$  — identyczna liczba cząsteczek we wszystkich trzech jednakowych częściach zbiornika i konfigurację  $B$  — identyczna liczba cząsteczek w połowach zbiornika. Ile wynosi stosunek wielokrotności obydwu konfiguracji  $W_A / W_B$ ? c) Oblicz stosunek  $W_A / W_B$  dla  $N = 100$ . (Ponieważ liczba 100 nie jest podzielna przez 3, w przypadku konfiguracji  $A$  umieść w jednej z trzech części zbiornika 34 cząsteczki, a w dwóch pozostałych po 33 cząsteczki).

# DODATEK A

## Międzynarodowy Układ Jednostek (SI)\*

### 1. Jednostki podstawowe SI

Wielkość	Nazwa	Symbol	Definicja
długość	metr	m	„długość drogi przebytej przez światło w próżni w czasie 1/299 792 458 sekundy” (1983)
masa	kilogram	kg	„ten prototyp [pewien walec z platyny i irydu] będzie odtąd uważany za jednostkę masy” (1889)
czas	sekunda	s	„czas trwania 9 192 631 770 okresów fali promieniowania odpowiadającego przejściu między dwoma poziomami nad-subtelnymi stanu podstawowego atomu cezu-133” (1967)
natężenie prądu elektrycznego	amper	A	„natężenie stałego prądu elektrycznego, który — płynąc w dwóch równoległych, nieskończonymi długich, prostolinowych przewodach o znikomo małym, kołowym przekroju, umieszczonych w próżni w odległości 1 metra od siebie — wywołuje między tymi przewodami siłę równą $2 \cdot 10^{-7}$ newtona na każdy metr długości przewodu” (1946)
temperatura termodynamiczna	kelwin	K	„1/273,16 część temperatury termodynamicznej punktu potrójnego wody” (1967)
ilość substancji	mol	mol	„ilość substancji układu zawierającego liczbę cząstek równą liczbie atomów zawartych w 0,012 kilograma węgla-12” (1971)
światłość	kandela	cd	„światłość, jaką ma w danym kierunku źródło emitujące promieniowanie elektromagnetyczne o częstotliwości $540 \cdot 10^{12}$ herców i którego natężenie promieniowania w tym kierunku jest równe 1/683 wata na steradian” (1979)

\* Na podstawie pracy „The International System of Units (SI)”, National Bureau of Standards Special Publication 330, 1972 edition. Przytoczone definicje zostały przyjęte przez Konferencję Ogólną ds. Miar i Wag (ciało międzynarodowe) w podanych w tabeli latach. Kandela nie jest używana w niniejszej książce.

## 2. Niektóre jednostki pochodne SI

Wielkość	Nazwa jednostki	Symbol
pole powierzchni	metr kwadratowy	$\text{m}^2$
objętość	metr sześcienny	$\text{m}^3$
częstość	herc	Hz
gęstość	kilogram na metr sześcienny	$\text{kg}/\text{m}^3$
prędkość	metr na sekundę	$\text{m}/\text{s}$
prędkość kątowa	radian na sekundę	$\text{rad}/\text{s}$
przyspieszenie	metr na sekundę kwadrat	$\text{m}/\text{s}^2$
przyspieszenie kątowe	radian na sekundę kwadrat	$\text{rad}/\text{s}^2$
siła	niuton	N
ciśnienie	paskal	Pa
praca, energia, ciepło	dżul	J
moc	wat	W
ładunek elektryczny	kulomb	C
napięcie elektryczne, różnica potencjałów, siła elektromotoryczna	wolt	V
natężenie pola elektrycznego	wolt na metr (lub niuton na kulomb)	V/m
opór elektryczny	om	$\Omega$
pojemność elektryczna	farad	F
strumień magnetyczny	weber	Wb
indukcyjność	henr	H
indukcja magnetyczna	tesla	T
natężenie pola magnetycznego	amper na metr	A/m
entropia	dżul na kelwin	J/K
ciepło właściwe	dżul na kilogram i kelwin	J/(kg · K)
przewodność cieplna	wat na metr i kelwin	W/(m · K)
natężenie promieniowania	wat na steradian	W/sr

## 3. Jednostki uzupełniające SI

Wielkość	Nazwa jednostki	Symbol
kąt płaski	radian	rad
kąt bryłowy	steradian	sr

# DODATEK B

## Niektóre podstawowe stałe fizyczne\*

Stała	Symbol	Wartość zaokrąglona	Wartość najbardziej dokładna <sup>a</sup> (1998)	Niepewność względna <sup>b</sup>
prędkość światła w próżni	$c$	$3,00 \cdot 10^8$ m/s	2,997 924 58	(dokładnie)
ładunek elementarny	$e$	$1,60 \cdot 10^{-19}$ C	1,602 176 462	0,039
stała grawitacyjna	$G$	$6,67 \cdot 10^{-11}$ m <sup>3</sup> /(s <sup>2</sup> · kg)	6,673	1500
uniwersalna stała gazowa	$R$	8,31 J/(mol · K)	8,314 472	1,7
stała Avogadra	$N_A$	$6,02 \cdot 10^{23}$ mol <sup>-1</sup>	6,022 141 99	0,079
stała Boltzmanna	$k$	$1,38 \cdot 10^{-23}$ J/K	1,380 650 3	1,7
stała Stefana–Boltzmanna	$\sigma$	$5,67 \cdot 10^{-8}$ W/(m <sup>2</sup> · K <sup>4</sup> )	5,670 400	7,0
objętość molowa gazu doskonałego <sup>c</sup>	$V_m$	$2,27 \cdot 10^{-2}$ m <sup>3</sup> /mol	2,271 098 1	1,7
stała elektryczna	$\epsilon_0$	$8,85 \cdot 10^{-12}$ F/m	8,854 187 817 62	(dokładnie)
stała magnetyczna	$\mu_0$	$1,26 \cdot 10^{-6}$ H/m	1,256 637 061 43	(dokładnie)
stała Plancka	$h$	$6,63 \cdot 10^{-34}$ J · s	6,626 068 76	0,078
masa elektronu <sup>d</sup>	$m_e$	$9,11 \cdot 10^{-31}$ kg $5,49 \cdot 10^{-4}$ u	9,109 381 88 5,485 799 110	0,079 0,0021
masa protonu <sup>d</sup>	$m_p$	$1,67 \cdot 10^{-27}$ kg $1,0073$ u	1,672 621 58 1,007 276 466 88	0,079 $1,3 \cdot 10^{-4}$
stosunek masy protonu do masy elektronu	$m_p/m_e$	1840	1836,152 667 5	0,0021
stosunek ładunku elektronu do masy elektronu	$e/m_e$	$1,76 \cdot 10^{11}$ C/kg	1,758 820 174	0,040
masa neutronu <sup>d</sup>	$m_n$	$1,68 \cdot 10^{-27}$ kg $1,0087$ u	1,674 927 16 1,008 664 915 78	0,079 $5,4 \cdot 10^{-4}$
masa atomu wodoru <sup>d</sup>	$m_{^1H}$	1,0078 u	1,007 825 031 6	0,0005
masa atomu deuteru <sup>d</sup>	$m_{^2H}$	2,0141 u	2,014 101 777 9	0,0005
masa atomu helu-4 <sup>d</sup>	$m_{^4He}$	4,0026 u	4,002 603 2	0,067

\* Wartości zebrane w tej tabeli wybrano z wartości zalecanych przez CODATA w 1998 r.  
(patrz: [www.physics.nist.gov](http://www.physics.nist.gov)).

cd.

Stała	Symbol	Wartość zaokrąglona	Wartość najbardziej dokładna <sup>a</sup> (1998)	Niepewność wzgledna <sup>b</sup>
masa mionu	$m_\mu$	$1,88 \cdot 10^{-28}$ kg	1,883 531 09	0,084
moment magnetyczny elektronu	$\mu_e$	$9,28 \cdot 10^{-24}$ J/T	9,284 763 62	0,040
moment magnetyczny protonu	$\mu_p$	$1,41 \cdot 10^{-26}$ J/T	1,410 606 663	0,041
magneton Bohra	$\mu_B$	$9,27 \cdot 10^{-24}$ J/T	9,274 008 99	0,040
magneton jądrowy	$\mu_N$	$5,05 \cdot 10^{-27}$ J/T	5,050 783 17	0,040
promień Bohra	$a_B$	$5,29 \cdot 10^{-11}$ m	5,291 772 083	0,0037
stała Rydberga	$R$	$1,10 \cdot 10^7$ m <sup>-1</sup>	1,097 373 156 854 8	$7,6 \cdot 10^{-6}$
comptonowska długość fali elektronu	$\lambda_C$	$2,43 \cdot 10^{-12}$ m	2,426 310 215	0,0073

<sup>a</sup> Wartości w tej kolumnie należy pomnożyć przez tę samą potęgę liczby 10 i jednostkę co odpowiednie wartości zaokrąglone.<sup>b</sup> W jednostkach  $10^{-6}$  (milionowych częściach całości).<sup>c</sup> W warunkach normalnych temperatury (0°C) i ciśnienia (1,0 atm, czyli 0,1 MPa).<sup>d</sup> Atomowa jednostka masy 1 u = 1,660 538 73 ·  $10^{-27}$  kg.

# DODATEK C

## Niektóre dane astronomiczne

### Wybrane odległości od Ziemi

do Księżyca <sup>a</sup>	$3,82 \cdot 10^8$ m	do środka naszej Galaktyki	$2,2 \cdot 10^{20}$ m
do Słońca <sup>a</sup>	$1,50 \cdot 10^{11}$ m	do galaktyki Andromedy	$2,1 \cdot 10^{22}$ m
do najbliższej gwiazdy (Proxima Centauri)	$4,04 \cdot 10^{16}$ m	do granicy obserwowlanego Wszechświata	$\sim 10^{26}$ m

<sup>a</sup> Odległość średnia.

### Słońce, Ziemia i Księżyc

Właściwość	Jednostka	Słońce	Ziemia	Księżyc
masa	kg	$1,99 \cdot 10^{30}$	$5,98 \cdot 10^{24}$	$7,36 \cdot 10^{22}$
średni promień	m	$6,96 \cdot 10^8$	$6,37 \cdot 10^6$	$1,74 \cdot 10^6$
średnia gęstość	kg/m <sup>3</sup>	1410	5520	3340
przyspieszenie grawitacyjne na powierzchni	m/s <sup>2</sup>	274	9,81	1,67
prędkość ucieczki	km/s	618	11,2	2,38
okres obrotu <sup>a</sup>		37 d na biegunach <sup>b</sup> , 26 d na równiku <sup>b</sup>	23 h 56 min	27,3 d
całkowita moc promieniowania <sup>c</sup>	W	$3,90 \cdot 10^{26}$		

<sup>a</sup> Mierzony względem odległych gwiazd.

<sup>b</sup> Słońce — będące kulą gazu — nie obraca się jak ciało sztywne.

<sup>c</sup> Tuż nad atmosferą Ziemi energia słoneczna dociera do powierzchni prostopadłej do kierunku padania z szybkością 1340 W/m<sup>2</sup>.

## Wybrane właściwości planet

	Merkury	Venus	Ziemia	Mars	Jowisz	Saturn	Uran	Neptun	Pluton
średnia odległość od Słońca, $10^6$ km	57,9	108	150	228	778	1430	2870	4500	5900
okres obiegu, lat	0,241	0,615	1,00	1,88	11,9	29,5	84,0	165	248
okres obrotu <sup>a</sup> , d	58,7	-243 <sup>b</sup>	0,997	1,03	0,409	0,426	-0,451 <sup>b</sup>	0,658	6,39
prędkość na orbicie, km/s	47,9	35,0	29,8	24,1	13,1	9,64	6,81	5,43	4,74
nachylenie osi względem płaszczyzny orbity	< 28°	≈ 3°	23,4°	25,0°	3,08°	26,7°	97,9°	29,6°	57,5°
nachylenie orbity względem orbity Ziemi	7,00°	3,39°		1,85°	1,30°	2,49°	0,77°	1,77°	17,2°
mimośród orbity	0,206	0,0068	0,0167	0,0934	0,0485	0,0556	0,0472	0,0086	0,250
średnica równika, km	4880	12 100	12 800	6790	143 000	120 000	51 800	49 500	2300
masa (masa Ziemi = 1)	0,0558	0,815	1,000	0,107	318	95,1	14,5	17,2	0,002
gęstość (gęstość wody = 1)	5,60	5,20	5,52	3,95	1,31	0,704	1,21	1,67	2,03
przyspieszenie grawitacyjne na powierzchni <sup>c</sup> , m/s <sup>2</sup>	3,78	8,60	9,78	3,72	22,9	9,05	7,77	11,0	0,5
prędkość ucieczki <sup>c</sup> , km/s	4,3	10,3	11,2	5,0	59,5	35,6	21,2	23,6	1,1
liczba znanych satelitów	0	0	1	2	16 <sup>d</sup>	18 <sup>e</sup>	17 <sup>e</sup>	8 <sup>e</sup>	1

<sup>a</sup> Mierzony względem odległych gwiazd.

<sup>b</sup> Venus i Uran obracają się w kierunku przeciwnym do ruchu po orbicie.

<sup>c</sup> Przyspieszenie grawitacyjne jest mierzone na równiku planety.

<sup>d</sup> + pierścień.

<sup>e</sup> + pierścienie.

# DODATEK D

## Współczynniki zamiany jednostek

Współczynniki przeliczeniowe można bezpośrednio odczytać z tabel. Na przykład  $1 \text{ stopień} = 2,778 \cdot 10^{-3}$  obrotów, a zatem  $16,7^\circ = 16,7 \cdot 2,778 \cdot 10^{-3}$  obrotów. Jednostki SI zapisano czcionką półgrubą. Tabele zostały przygotowane częściowo na podstawie pracy: G. Shortley, D. Williams, *Elements of Physics*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1971.

### Kąt płaski

	$\circ$	'	"	radianów	obrotów
$1 \text{ stopień} = 1$	60		3600	$1,745 \cdot 10^{-2}$	$2,778 \cdot 10^{-3}$
$1 \text{ minuta} = 1,667 \cdot 10^{-2}$	1		60	$2,909 \cdot 10^{-4}$	$4,630 \cdot 10^{-5}$
$1 \text{ sekunda} = 2,778 \cdot 10^{-4}$	$1,667 \cdot 10^{-2}$		1	$4,848 \cdot 10^{-6}$	$7,716 \cdot 10^{-7}$
$1 \text{ radian} = 57,30$	3438		$2,063 \cdot 10^5$	1	0,1592
$1 \text{ obrót} = 360$	$2,16 \cdot 10^4$		$1,296 \cdot 10^6$	6,283	1

### Kąt bryłowy

$$1 \text{ pełny kąt bryłowy} = 4\pi \text{ steradianów} = 12,57 \text{ steradianów}$$

### Długość

	cm	metrów	km	cali	stóp	mil
$1 \text{ centymetr} = 1$	$10^{-2}$	$10^{-5}$	$0,3937$	3,281	$6,214 \cdot 10^{-6}$	
$1 \text{ metr} = 100$	1	$10^{-3}$	39,37	3,281	$6,214 \cdot 10^{-4}$	
$1 \text{ kilometr} = 10^5$	1000	1	$3,937 \cdot 10^4$	3281	0,6214	
$1 \text{ cal (in)} = 2,540$	$2,540 \cdot 10^{-2}$	$2,540 \cdot 10^{-5}$	1	$8,333 \cdot 10^{-2}$	$1,578 \cdot 10^{-5}$	
$1 \text{ stopa (ft)} = 30,48$	0,3048	$3,048 \cdot 10^{-4}$	12	1	$1,894 \cdot 10^{-4}$	
$1 \text{ mila (lądowa)} = 1,609 \cdot 10^5$	1609	1,609	$6,336 \cdot 10^4$	5280	1	

$$1 \text{ angstrom} = 10^{-10} \text{ m}$$

$$1 \text{ mila morska} = 1852 \text{ m} = 1,151 \text{ mil} = 6076 \text{ stóp}$$

$$1 \text{ fermi} = 10^{-15} \text{ m}$$

$$1 \text{ rok świetlny} = 9,460 \cdot 10^{12} \text{ km}$$

$$1 \text{ parsek} = 3,084 \cdot 10^{13} \text{ km}$$

$$1 \text{ sażen} = 6 \text{ stóp}$$

$$1 \text{ promień Bohra} = 5,292 \cdot 10^{-11} \text{ m}$$

$$1 \text{ jard} = 3 \text{ stopy}$$

$$1 \text{ nm} = 10^{-9} \text{ m}$$

## Pole powierzchni

	<b>m<sup>2</sup></b>	<b>cm<sup>2</sup></b>	<b>ft<sup>2</sup></b>	<b>in<sup>2</sup></b>
<b>1 metr kwadratowy = 1</b>	$10^4$	10,76	1550	
1 centymetr kwadratowy = $10^{-4}$	1	$1,076 \cdot 10^{-3}$	0,1550	
1 stopa kwadratowa = $9,290 \cdot 10^{-2}$	929,0	1	144	
1 cal kwadratowy = $6,452 \cdot 10^{-4}$	6,452	$6,944 \cdot 10^{-3}$	1	

1 mila kwadratowa =  $2,788 \cdot 10^7$  ft<sup>2</sup> = 640 akrów

1 barn =  $10^{-28}$  m<sup>2</sup>

1 akr = 43 560 ft<sup>2</sup>

1 hektar =  $10^4$  m<sup>2</sup> = 2,471 akrów

## Objętość

	<b>m<sup>3</sup></b>	<b>cm<sup>3</sup></b>	<b>l (litrów)</b>	<b>ft<sup>3</sup></b>	<b>in<sup>3</sup></b>
<b>1 metr sześcienny = 1</b>	$10^6$	1000	35,31	$6,102 \cdot 10^4$	
1 centymetr sześcienny = $10^{-6}$	1	$1,000 \cdot 10^{-3}$	$3,531 \cdot 10^{-5}$	$6,102 \cdot 10^{-2}$	
1 litr = $1,000 \cdot 10^{-3}$	1000	1	$3,531 \cdot 10^{-2}$	61,02	
1 stopa sześcienna = $2,832 \cdot 10^{-2}$	$2,832 \cdot 10^4$	28,32	1	1728	
1 cal sześcienny = $1,639 \cdot 10^{-5}$	16,39	$1,639 \cdot 10^{-2}$	$5,787 \cdot 10^{-4}$	1	

1 galon amerykański = 4 kwarty = 231 in<sup>3</sup>

1 galon angielski = 277,4 in<sup>3</sup> = 1,201 galonów amerykańskich

## Masa

	<b>g</b>	<b>kg</b>	<b>u</b>	<b>uncji</b>	<b>funtów</b>
1 gram = 1	0,001	$6,022 \cdot 10^{23}$	$3,527 \cdot 10^{-2}$	$2,205 \cdot 10^{-3}$	
1 kilogram = 1000	1	$6,022 \cdot 10^{26}$	35,27	2,205	
1 atomowa jednostka masy = $1,661 \cdot 10^{-24}$	$1,661 \cdot 10^{-27}$	1	$5,857 \cdot 10^{-26}$	$3,662 \cdot 10^{-27}$	
1 uncja handlowa (oz) = 28,35	$2,835 \cdot 10^{-2}$	$1,718 \cdot 10^{25}$	1	$6,250 \cdot 10^{-2}$	
1 funt handlowy (lb) = 453,6	0,4536	$2,732 \cdot 10^{26}$	16	1	

## Gęstość

	<b>kg/m<sup>3</sup></b>	<b>g/cm<sup>3</sup></b>	<b>lb/ft<sup>3</sup></b>	<b>lb/in<sup>3</sup></b>
1 kg/m <sup>3</sup> = 1	0,001	$6,243 \cdot 10^{-2}$	$3,613 \cdot 10^{-5}$	
1 g/cm <sup>3</sup> = 1000	1	62,43	$3,613 \cdot 10^{-2}$	
1 lb/ft <sup>3</sup> = 16,02	$1,602 \cdot 10^{-2}$	1	$5,787 \cdot 10^{-4}$	
1 lb/in <sup>3</sup> = $2,768 \cdot 10^4$	27,68	17,28	1	

## Czas

	<b>a</b>	<b>d</b>	<b>h</b>	<b>min</b>	<b>s</b>
1 rok = 1	365,25	$8,766 \cdot 10^3$	$5,259 \cdot 10^5$	$3,156 \cdot 10^7$	
1 doba = $2,738 \cdot 10^{-3}$	1	24	1440	$8,640 \cdot 10^4$	
1 godzina = $1,141 \cdot 10^{-4}$	$4,167 \cdot 10^{-2}$	1	60	3600	
1 minuta = $1,901 \cdot 10^{-6}$	$6,944 \cdot 10^{-4}$	$1,667 \cdot 10^{-2}$	1	60	
1 sekunda = $3,169 \cdot 10^{-8}$	$1,157 \cdot 10^{-5}$	$2,778 \cdot 10^{-4}$	$1,667 \cdot 10^{-2}$	1	

km/h	m/s	cm/s	mil/h	ft/s
1 km/h = 1	0,2778	27,78	0,6214	0,9113
1 m/s = 3,6	1	100	2,237	3,281
1 cm/s = $3,6 \cdot 10^{-2}$	0,01	1	$2,237 \cdot 10^{-2}$	$3,281 \cdot 10^{-2}$
1 mila/h = 1,609	0,4470	44,70	1	1,467
1 stopa/s = 1,097	0,3048	30,48	0,6818	1

1 węzeł = 1 mila morska/h = 1,688 ft/s

## Siła

dyn	N	G	kG	funtów
1 dyna = 1	$10^{-5}$	$1,020 \cdot 10^{-3}$	$1,020 \cdot 10^{-6}$	$2,248 \cdot 10^{-6}$
1 N = $10^5$	1	102,0	0,1020	0,2248
1 G = 980,7	$9,807 \cdot 10^{-3}$	1	0,001	$2,205 \cdot 10^{-3}$
1 kG = $9,807 \cdot 10^5$	9,807	1000	1	2,205
1 funt = $4,448 \cdot 10^5$	4,448	453,6	0,4536	1

Jednostki: gram-sila (G), kilogram-sila (kG) i funt (jednostka siły) są obecnie rzadko stosowane. Są one zdefiniowane następująco: 1 gram-sila jest to siła ciężkości działająca na ciało o masie 1 g w standardowych warunkach ciążenia (tzn. gdy  $g = 9,80665 \text{ m/s}^2$ ); analogicznie dla kilograma-sily i funta.

## Ciśnienie

atm	dyn/cm <sup>2</sup>	cali wody	cm Hg	Pa	funtów/in <sup>2</sup>	funtów/ft <sup>2</sup>
1 atmosfera = 1	$1,013 \cdot 10^6$	406,8	76	$1,013 \cdot 10^5$	14,70	2116
1 dyna/cm <sup>2</sup> = $9,869 \cdot 10^{-7}$	1	$4,015 \cdot 10^{-4}$	$7,501 \cdot 10^{-5}$	0,1	$1,405 \cdot 10^{-5}$	$2,089 \cdot 10^{-3}$
1 cal wody <sup>a</sup> w temp. 4°C = $2,458 \cdot 10^{-3}$	2491	1	0,1868	249,1	$3,613 \cdot 10^{-2}$	5,202
1 cm rtęci <sup>a</sup> w temp. 0°C = $1,316 \cdot 10^{-2}$	$1,333 \cdot 10^4$	5,353	1	1333	0,1934	27,85
1 paskal = $9,869 \cdot 10^{-6}$	10	$4,015 \cdot 10^{-3}$	$7,501 \cdot 10^{-4}$	1	$1,450 \cdot 10^{-4}$	$2,089 \cdot 10^{-2}$
1 funt/in <sup>2</sup> = $6,805 \cdot 10^{-2}$	$6,895 \cdot 10^4$	27,68	5,171	$6,895 \cdot 10^3$	1	144
1 funt/ft <sup>2</sup> = $4,725 \cdot 10^{-4}$	478,8	0,1922	$3,591 \cdot 10^{-2}$	47,88	$6,944 \cdot 10^{-3}$	1

<sup>a</sup> W standardowych warunkach ciążenia (tzn. gdy  $g = 9,80665 \text{ m/s}^2$ ).

1 bar =  $10^6 \text{ dyn/cm}^2 = 0,1 \text{ MPa}$       1 milibar =  $10^3 \text{ dyn/cm}^2 = 10^2 \text{ Pa}$       1 tor = 1 mm Hg

## KIERNIA, PRAWO, CIĘŻKO

Dwie ostatnie jednostki nie są — ściśle rzecz biorąc — jednostkami energii, lecz zostały włączone do tabeli dla wygody. Odpowiadające im wartości współczynników przeliczeniowych wynikają z relatywistycznej równoważności masy i energii,  $E = mc^2$ , i wyrażają energię wypuszczaną przy całkowitej zamianie na energię masy jednego kilograma lub atomowej jednostki masy u (dwa ostatnie wiersze) oraz masę, która po całkowitej zamianie na energię daje odpowiednią energię jednostkową (dwie ostatnie kolumny tabeli).

erg	J	cal	kWh	eV	MeV	kg	u
$1 \text{ erg} = 1$	$10^{-7}$	$2,389 \cdot 10^{-8}$	$2,778 \cdot 10^{-14}$	$6,242 \cdot 10^{11}$	$6,242 \cdot 10^5$	$1,113 \cdot 10^{-24}$	$670,2$
$1 \text{ dżul} = 10^7$	1	0,2389	$2,778 \cdot 10^{-7}$	$6,242 \cdot 10^{18}$	$6,242 \cdot 10^{12}$	$1,113 \cdot 10^{-17}$	$6,702 \cdot 10^9$
$1 \text{ kaloria} = 4,186 \cdot 10^7$	4,186	1	$1,163 \cdot 10^{-6}$	$2,613 \cdot 10^{19}$	$2,613 \cdot 10^{13}$	$4,660 \cdot 10^{-17}$	$2,806 \cdot 10^{10}$
$1 \text{ kilowatogodzina} = 3,600 \cdot 10^{13}$	$3,600 \cdot 10^6$	$8,600 \cdot 10^5$	1	$2,247 \cdot 10^{25}$	$2,247 \cdot 10^{19}$	$4,007 \cdot 10^{-11}$	$2,413 \cdot 10^{16}$
$1 \text{ elektronowolt} = 1,602 \cdot 10^{-12}$	$1,602 \cdot 10^{-19}$	$3,827 \cdot 10^{-20}$	$4,450 \cdot 10^{-26}$	1	$10^{-6}$	$1,783 \cdot 10^{-36}$	$1,074 \cdot 10^{-9}$
$1 \text{ megaelektronowolt} =$							
	$= 1,602 \cdot 10^{-6}$	$1,602 \cdot 10^{-13}$	$3,827 \cdot 10^{-14}$	$4,450 \cdot 10^{-20}$	$10^{-6}$	1	$1,783 \cdot 10^{-30}$
$1 \text{ kilogram} = 8,987 \cdot 10^{23}$	$8,987 \cdot 10^{16}$	$2,146 \cdot 10^{16}$	$2,497 \cdot 10^{10}$	$5,610 \cdot 10^{35}$	$5,610 \cdot 10^{29}$	1	$6,022 \cdot 10^{26}$
$1 \text{ atomowa jednostka masy} =$							
	$= 1,492 \cdot 10^{-3}$	$1,492 \cdot 10^{-10}$	$3,564 \cdot 10^{-11}$	$4,146 \cdot 10^{-17}$	$9,320 \cdot 10^8$	932,0	$1,661 \cdot 10^{-27}$

## WŁASNOŚCI

KM	cal/s	kW	W
$1 \text{ koń mechaniczny} = 1$	178,1	0,7457	745,7
$1 \text{ kaloria na sekundę} = 5,615 \cdot 10^{-3}$	1	$4,186 \cdot 10^{-3}$	4,186
$1 \text{ kilowat} = 1,341$	238,9	1	1000
$1 \text{ wat} = 1,341 \cdot 10^{-3}$	0,2389	0,001	1

## WŁASNOŚCI MAGNETYCZNE

Gs	T	mGs
$1 \text{ gaus (Gs)} = 1$	$10^{-4}$	1000
$1 \text{ tesla (T)} = 10^4$	1	$10^7$
$1 \text{ miligaus (mGs)} = 0,001$	$10^{-7}$	1
$1 \text{ tesla} = 1 \text{ weber/m}^2$		

## SYSTEMLI MAGNETYCZNY

maksieli	weberów
$1 \text{ maksweli} = 1$	$10^{-8}$
$1 \text{ weber} = 10^8$	1

# DODATEK E

## Wzory matematyczne

### GEOMETRIA

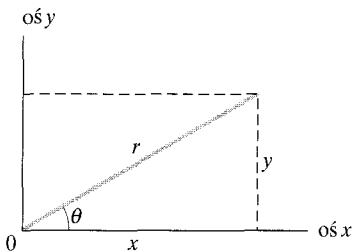
Koło o promieniu  $r$ : obwód =  $2\pi r$ ; pole powierzchni =  $\pi r^2$ .  
 Kula o promieniu  $r$ : pole powierzchni =  $4\pi r^2$ ; objętość =  $\frac{4}{3}\pi r^3$ .  
 Walec obrotowy o promieniu podstawy  $r$  i wysokości  $h$ : pole powierzchni =  $2\pi r^2 + 2\pi rh$ ; objętość =  $\pi r^2 h$ .  
 Trójkąt o podstawie  $a$  i wysokości  $h$ : pole powierzchni =  $\frac{1}{2}ah$ .

### RÓWNANIE KWADRATOWE I JEGO ROZWIĄZANIE

Jeśli  $ax^2 + bx + c = 0$ , to  $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ .

### FUNKCJE TRYGONOMETRYCZNE KATA $\theta$

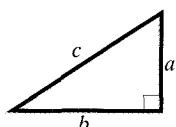
$$\begin{aligned}\sin \theta &= \frac{y}{r} & \cos \theta &= \frac{x}{r} \\ \operatorname{tg} \theta &= \frac{y}{x} & \operatorname{ctg} \theta &= \frac{x}{y} \\ \sec \theta &= \frac{r}{x} & \operatorname{cosec} \theta &= \frac{r}{y}\end{aligned}$$



### TWIERDZENIE PITAGORASA

W trójkącie prostokątnym (oznaczenia jak na rysunku)

$$a^2 + b^2 = c^2.$$



### TRÓJKĄTY

Kąty:  $A, B, C$ .

Boki im przeciwnie:  $a, b, c$ .

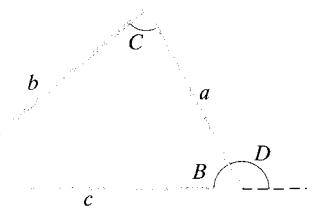
$$A + B + C = 180^\circ.$$

$$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}.$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C.$$

Kąt zewnętrzny

$$D = A + C.$$



### SYMBOLE MATEMATYCZNE

$=$  równa się

$\approx$  równa się w przybliżeniu

$\sim$  jest tego samego rzędu wielkości

$\neq$  nie jest równe

$\equiv$  jest równe tożsamościowo, jest zdefiniowane jako

$>$  jest większe niż ( $\gg$  jest dużo większe niż)

$<$  jest mniejsze niż ( $\ll$  jest dużo mniejsze niż)

jest większe lub równe (czyli nie mniejsze niż)

jest mniejsze lub równe (czyli nie większe niż)

$\pm$  plus albo minus

$\propto$  jest proporcjonalne do

$\sum$  suma

$x_{\text{sr}}$  wartość średnia  $x$

### TOŻSAMOŚCI TRYGONOMETRYCZNE

$$\sin(90^\circ - \theta) = \cos \theta$$

$$\cos(90^\circ - \theta) = \sin \theta$$

$$\sin \theta / \cos \theta = \operatorname{tg} \theta$$

$$\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$$

$$\sec^2 \theta - \operatorname{tg}^2 \theta = 1$$

$$\operatorname{cosec}^2 \theta - \operatorname{ctg}^2 \theta = 1$$

$$\sin 2\theta = 2 \sin \theta \cos \theta$$

$$\cos 2\theta = \cos^2 \theta - \sin^2 \theta = 2 \cos^2 \theta - 1 = 1 - 2 \sin^2 \theta$$

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin \alpha \cos \beta \pm \cos \alpha \sin \beta$$

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos \alpha \cos \beta \mp \sin \alpha \sin \beta$$

$$\operatorname{tg}(\alpha \pm \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha \pm \operatorname{tg} \beta}{1 \mp \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta}$$

$$\sin \alpha \pm \sin \beta = 2 \sin \frac{1}{2}(\alpha \pm \beta) \cos \frac{1}{2}(\alpha \mp \beta)$$

$$\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \frac{1}{2}(\alpha + \beta) \cos \frac{1}{2}(\alpha - \beta)$$

$$\cos \alpha - \cos \beta = -2 \sin \frac{1}{2}(\alpha + \beta) \sin \frac{1}{2}(\alpha - \beta)$$

## ROZWINIĘCIA FUNKCJI W SZEREGI POTĘGOWE

$$(1+x)^n = 1 + \frac{nx}{1!} + \frac{n(n-1)x^2}{2!} + \dots \quad (x^2 < 1)$$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$$

(wzór dwumianowy)

$$\ln(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \dots \quad (|x| < 1)$$

$$\sin \theta = \theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - \dots \quad (\theta \text{ w radianach})$$

$$\cos \theta = 1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} - \dots \quad (\theta \text{ w radianach})$$

$$\operatorname{tg} \theta = \theta + \frac{\theta^3}{3} + \frac{2\theta^5}{15} + \dots \quad (\theta \text{ w radianach})$$

## WZORY CRAMERA

Układ równań z dwiema niewiadomymi  $x$  i  $y$

$$a_1x + b_1y = c_1 \quad \text{oraz} \quad a_2x + b_2y = c_2$$

ma rozwiązanie

$$x = \frac{\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}} = \frac{c_1b_2 - c_2b_1}{a_1b_2 - a_2b_1}$$

oraz

$$y = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}} = \frac{a_1c_2 - a_2c_1}{a_1b_2 - a_2b_1}.$$

## ILOCZINY WEKTORÓW

Niech  $\hat{i}, \hat{j}$  i  $\hat{k}$  będą wektorami jednostkowymi kierunków  $x, y$  i  $z$ . Zachodzą związki:

$$\hat{i} \cdot \hat{i} = \hat{j} \cdot \hat{j} = \hat{k} \cdot \hat{k} = 1, \quad \hat{i} \cdot \hat{j} = \hat{j} \cdot \hat{k} = \hat{k} \cdot \hat{i} = 0,$$

$$\hat{i} \times \hat{i} = \hat{j} \times \hat{j} = \hat{k} \times \hat{k} = 0,$$

$$\hat{i} \times \hat{j} = \hat{k}, \quad \hat{j} \times \hat{k} = \hat{i}, \quad \hat{k} \times \hat{i} = \hat{j}.$$

Dowolny wektor  $\vec{a}$  o składowych wzdłuż osi  $x, y$  i  $z$  równych  $a_x, a_y$  i  $a_z$  można przedstawić w postaci

$$\vec{a} = a_x \hat{i} + a_y \hat{j} + a_z \hat{k}.$$

Niech  $\vec{a}, \vec{b}$  i  $\vec{c}$  będą dowolnymi wektorami o długościach (modułach)  $a, b$  i  $c$ . Zachodzą związki:

$$\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = (\vec{a} \times \vec{b}) + (\vec{a} \times \vec{c}),$$

$$(s\vec{a}) \times \vec{b} = \vec{a} \times (s\vec{b}) = s(\vec{a} \times \vec{b}) \quad (s \text{ — skalar}).$$

Niech  $\theta$  będzie mniejszym z kątów między wektorami  $\vec{a}$  i  $\vec{b}$ . Zachodzą związki:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z = ab \cos \theta,$$

$$\begin{aligned} \vec{a} \times \vec{b} &= -\vec{b} \times \vec{a} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} \\ &= \hat{i} \begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix} - \hat{j} \begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix} + \hat{k} \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix} \\ &= (a_y b_z - b_y a_z) \hat{i} + (a_z b_x - b_z a_x) \hat{j} + (a_x b_y - b_x a_y) \hat{k}, \end{aligned}$$

$$|\vec{a} \times \vec{b}| = ab \sin \theta,$$

$$\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b} \cdot (\vec{c} \times \vec{a}) = \vec{c} \cdot (\vec{a} \times \vec{b}),$$

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = (\vec{a} \cdot \vec{c})\vec{b} - (\vec{a} \cdot \vec{b})\vec{c}.$$

## POCHODNE I CAŁKI

W poniższych wzorach  $u$  i  $v$  są dowolnymi funkcjami zmiennej  $x$ , a  $a$  i  $m$  są stałymi. Do każdej z całek nieoznaczonych należy dodać dowolną stałą całkowania. Obszerniejsze tablice zawiera *Handbook of Chemistry and Physics* (CRC Press Inc.).

1.  $\frac{dx}{dx} = 1$
2.  $\frac{d}{dx}(au) = a \frac{du}{dx}$
3.  $\frac{d}{dx}(u + v) = \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dx}$
4.  $\frac{d}{dx}x^m = mx^{m-1}$
5.  $\frac{d}{dx}\ln x = \frac{1}{x}$
6.  $\frac{d}{dx}(uv) = u \frac{dv}{dx} + v \frac{du}{dx}$
7.  $\frac{d}{dx}e^x = e^x$
8.  $\frac{d}{dx}\sin x = \cos x$
9.  $\frac{d}{dx}\cos x = -\sin x$
10.  $\frac{d}{dx}\tg x = \sec^2 x$
11.  $\frac{d}{dx}\ctg x = -\operatorname{cosec}^2 x$
12.  $\frac{d}{dx}\sec x = \tg x \sec x$
13.  $\frac{d}{dx}\operatorname{cosec} x = -\ctg x \operatorname{cosec} x$
14.  $\frac{d}{dx}e^u = e^u \frac{du}{dx}$
15.  $\frac{d}{dx}\sin u = \cos u \frac{du}{dx}$
16.  $\frac{d}{dx}\cos u = -\sin u \frac{du}{dx}$
1.  $\int dx = x$
2.  $\int audx = a \int u dx$
3.  $\int (u + v)dx = \int u dx + \int v dx$
4.  $\int x^m dx = \frac{x^{m+1}}{m+1} \quad (m \neq -1)$
5.  $\int \frac{dx}{x} = \ln|x|$
6.  $\int u \frac{dv}{dx} dx = uv - \int v \frac{du}{dx} dx$
7.  $\int e^x dx = e^x$
8.  $\int \sin x dx = -\cos x$
9.  $\int \cos x dx = \sin x$
10.  $\int \tg x dx = \ln|\sec x|$
11.  $\int \sin^2 x dx = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\sin 2x$
12.  $\int e^{-ax} dx = -\frac{1}{a}e^{-ax}$
13.  $\int x e^{-ax} dx = -\frac{1}{a^2}(ax + 1)e^{-ax}$
14.  $\int x^2 e^{-ax} dx = -\frac{1}{a^3}(a^2x^2 + 2ax + 2)e^{-ax}$
15.  $\int_0^\infty x^n e^{-ax} dx = \frac{n!}{a^{n+1}}$
16.  $\int_0^\infty x^{2n} e^{-ax^2} dx = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{2^{n+1}a^n} \sqrt{\frac{\pi}{a}}$
17.  $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a^2}} = \ln(x + \sqrt{x^2 + a^2})$
18.  $\int \frac{x dx}{(x^2 + a^2)^{3/2}} = -\frac{1}{(x^2 + a^2)^{1/2}}$
19.  $\int \frac{dx}{(x^2 + a^2)^{3/2}} = \frac{x}{a^2(x^2 + a^2)^{1/2}}$
20.  $\int_0^\infty x^{2n+1} e^{-ax^2} dx = \frac{n!}{2a^{n+1}} \quad (a > 0)$
21.  $\int \frac{xdx}{x+d} = x - d \ln(x+d)$

# DODATEK F

## Właściwości pierwiastków

O ile nie podano inaczej, wszystkie dane odnoszą się do ciśnienia 1 atm.

Pierwiastek	Symbol	Liczba atomowa Z	Masa molowa [g/mol]	Gęstość [g/cm <sup>3</sup> ] w temp. 20°C	Temperatura topnienia [°C]	Temperatura wrzenia [°C]	Ciepło właściwe [J/(g · °C)]
aktyn	Ac	89	(227)	10,06	1323	(3473)	0,092
ameryk	Am	95	(243)	13,67	1541	—	—
antymon	Sb	51	121,75	6,691	630,5	1380	0,205
argon	Ar	18	39,948	1,6626 · 10 <sup>-3</sup>	-189,4	-185,8	0,523
arsen	As	33	74,9216	5,78	817 (28 atm)	613	0,331
astat	At	85	(210)	—	(302)	—	—
azot	N	7	14,0067	1,1649 · 10 <sup>-3</sup>	-210	-195,8	1,03
bar	Ba	56	137,34	3,594	729	1640	0,205
berkel	Bk	97	(247)	14,79	—	—	—
beryl	Be	4	9,0122	1,848	1287	2770	1,83
bizmut	Bi	83	208,980	9,747	271,37	1560	0,122
bohr	Bh	107	262,12	—	—	—	—
bor	B	5	10,811	2,34	2030	—	1,11
brom	Br	35	79,909	3,12 (ciecz)	-7,2	58	0,293
cer	Ce	58	140,12	6,768	804	3470	0,188
cez	Cs	55	132,905	1,873	28,40	690	0,243
chlor	Cl	17	35,453	3,214 · 10 <sup>-3</sup> (0°C)	-101	-34,7	0,486
chrom	Cr	24	51,996	7,19	1857	2665	0,448
cyna	Sn	50	118,69	7,2984	231,868	2270	0,226
cynk	Zn	30	65,37	7,133	419,58	906	0,389
cyrkon	Zr	40	91,22	6,506	1852	3580	0,276
dubn	Db	105	262,114	—	—	—	—
dysproz	Dy	66	162,50	8,55	1409	2330	0,172
einstein	Es	99	(254)	—	—	—	—
erb	Er	68	167,26	9,15	1522	2630	0,167
europ	Eu	63	151,96	5,243	817	1490	0,163
ferm	Fm	100	(237)	—	—	—	—
fluor	F	9	18,9984	1,696 · 10 <sup>-3</sup> (0°C)	-219,6	-188,2	0,753
fosfor	P	15	30,9738	1,83	44,25	280	0,741
frans	Fr	87	(223)	—	(27)	—	—
gadolin	Gd	64	157,25	7,90	1312	2730	0,234

Pierwiastek	Symbol	Liczba atomowa Z	Masa molowa [g/mol]	Gęstość [g/cm <sup>3</sup> ] w temp. 20°C	Temperatura topnienia [°C]	Temperatura wrzenia [°C]	Ciepło właściwe [J/(g · °C)]
gal	Ga	31	69,72	5,907	29,75	2237	0,377
german	Ge	32	72,59	5,323	937,25	2830	0,322
glin	Al	13	26,9815	2,699	660	2450	0,900
hafn	Hf	72	178,49	13,31	2227	5400	0,144
has	Hs	108	(265)	—	—	—	—
hel	He	2	4,0026	0,1664 · 10 <sup>-3</sup>	-269,7	-268,9	5,23
holm	Ho	67	164,930	8,79	1470	2330	0,165
ind	In	49	114,82	7,31	156,634	2000	0,233
iryd	Ir	77	192,2	22,5	2447	(5300)	0,130
iterb	Yb	70	173,04	6,965	824	1530	0,155
itr	Y	39	88,905	4,469	1526	3030	0,297
jod	I	53	126,9044	4,93	113,7	183	0,218
kadm	Cd	48	112,40	8,65	321,03	765	0,226
kaliforn	Cf	98	(251)	—	—	—	—
kiur	Cm	96	(247)	13,3	—	—	—
kobalt	Co	27	58,9332	8,85	1495	2900	0,423
krypton	Kr	36	83,80	3,488 · 10 <sup>-3</sup>	-157,37	-152	0,247
krzem	Si	14	28,086	2,33	1412	2680	0,712
ksenon	Xe	54	131,30	5,495 · 10 <sup>-3</sup>	-111,79	-108	0,159
lantan	La	57	138,91	6,189	920	3470	0,195
lit	Li	3	6,939	0,534	180,55	1300	3,58
lorens	Lr	103	(257)	—	—	—	—
lutet	Lu	71	174,97	9,849	1663	1930	0,155
magnez	Mg	12	24,312	1,738	650	1107	1,03
mangan	Mn	25	54,9380	7,44	1244	2150	0,481
meitner	Mt	109	(266)	—	—	—	—
mendelew	Md	101	(256)	—	—	—	—
miedź	Cu	29	63,54	8,96	1083,40	2595	0,385
molibden	Mo	42	95,94	10,22	2617	5560	0,251
neodym	Nd	60	144,24	7,007	1016	3180	0,188
neon	Ne	10	20,183	0,8387 · 10 <sup>-3</sup>	-248,597	-246,0	1,03
neptun	Np	93	(237)	20,25	637	—	1,26
nikiel	Ni	28	58,71	8,902	1453	2730	0,444
niob	Nb	41	92,906	8,57	2468	4927	0,264
nobel	No	102	(255)	—	—	—	—
ołów	Pb	82	207,19	11,35	327,45	1725	0,129
osm	Os	76	190,2	22,59	3027	5500	0,130
pallad	Pd	46	106,4	12,02	1552	3980	0,243
platyna	Pt	78	195,09	21,45	1769	4530	0,134
pluton	Pu	94	(244)	19,8	640	3235	0,130
polon	Po	84	(210)	9,32	254	—	—
potas	K	19	39,102	0,862	63,20	760	0,758
prazeodym	Pr	59	140,907	6,773	931	3020	0,197
promet	Pm	61	(145)	7,22	(1027)	—	—
protaktyn	Pa	91	(231)	15,37 (oszacowanie)	(1230)	—	—

Pierwiastek	Symbol	Liczba atomowa Z	Masa molowa [g/mol]	Gęstość [g/cm <sup>3</sup> ] w temp. 20°C	Temperatura topnienia [°C]	Temperatura wrzenia [°C]	Ciepło właściwe [J/(g · °C)]
rad	Ra	88	(226)	5,0	700	—	—
radon	Rn	86	(222)	9,96 · 10 <sup>-3</sup> (0°C)	(−71)	−61,8	0,092
ren	Re	75	186,2	21,02	3180	5900	0,134
rod	Rh	45	102,905	12,41	1963	4500	0,243
rteć	Hg	80	200,59	13,55	−38,87	357	0,138
rubid	Rb	37	85,47	1,532	39,49	688	0,364
ruten	Ru	44	101,107	12,37	2250	4900	0,239
rutherford	Rf	104	261,11	—	—	—	—
samar	Sm	62	150,35	7,52	1072	1630	0,197
seaborg	Sg	106	263,118	—	—	—	—
selen	Se	34	78,96	4,79	221	685	0,318
siarka	S	16	32,064	2,07	119,0	444,6	0,707
skand	Sc	21	44,956	2,99	1539	2730	0,569
sód	Na	11	22,9898	0,9712	97,85	892	1,23
srebro	Ag	47	107,870	10,49	960,8	2210	0,234
stront	Sr	38	87,62	2,54	768	1380	0,737
tal	Tl	81	204,37	11,85	304	1457	0,130
tantal	Ta	73	180,948	16,6	3014	5425	0,138
technet	Tc	43	(99)	11,46	2200	—	0,209
tellur	Te	52	127,60	6,24	449,5	990	0,201
terb	Tb	65	158,924	8,229	1357	2530	0,180
tlen	O	8	15,9994	1,3318 · 10 <sup>−3</sup>	−218,80	−183,0	0,913
tor	Th	90	(232)	11,72	1755	(3850)	0,117
tul	Tm	69	168,934	9,32	1545	1720	0,159
tytan	Ti	22	47,9	4,54	1670	3260	0,523
uran	U	92	(238)	18,95	1132	3818	0,117
wanad	V	23	50,942	6,11	1902	3400	0,490
wapń	Ca	20	40,08	1,55	838	1440	0,624
węgiel	C	6	12,01115	2,26	3727	4830	0,691
wodór	H	1	1,00797	0,08375 · 10 <sup>−3</sup>	−259,19	−252,7	14,4
wolfram	W	74	183,85	19,3	3380	5930	0,134
złoto	Au	79	196,967	19,32	1064,43	2970	0,131
żelazo	Fe	26	55,847	7,874	1536,5	3000	0,447
ununnil	Uun	110	(269)	—	—	—	—
ununun	Uuu	111	(272)	—	—	—	—
ununbi	Unb	112	(264)	—	—	—	—
ununtri	Unt	113	—	—	—	—	—
unkwad	Unq	114	(285)	—	—	—	—
ununpent	Unp	115	—	—	—	—	—
ununheks	Unh	116	(292)	—	—	—	—

Dla pierwiastków promieniotwórczych w rubryce „masa molowa” podano w nawiasach wartości liczby masowej izotopu o najdłuższym czasie życia.

Podane w nawiasach wartości temperatury topnienia i wrzenia są niepewne.

Dane dla gazów odnoszą się do ich normalnej postaci cząsteczkowej, jak H<sub>2</sub>, He, O<sub>2</sub>, Ne itd. Wartości ciepła właściwego gazów odpowiadają przemianie pod stałym ciśnieniem.

Źródło: J. Emsley, *The Elements*, wyd. III, Clarendon Press, Oxford 1998. Istnieje tłum. polskie: *Chemia. Przewodnik po pierwiastkach*, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 1997. Informacje o najnowszych danych i nowoodkrytych pierwiastkach można znaleźć na stronie: [www.webelements.com](http://www.webelements.com).

# DODATEK G

## Układ okresowy pierwiastków

OKRESY POZIOME	metale przejściowe																		gazy szlachetne		
	metale alkaliczne IA		metale przejściowe														gazy szlachetne 0				
1	H	IIA																He	Ne		
2	Li	Be															III A	IV A	V A	VIA	VII A
3	Na	Mg															5	6	7	8	9
4	K	Ca	Sc	Ti	V	Cr	Mn	Fe	Co	Ni	Cu	Zn	Ga	Ge	As	31	32	33	34	35	36
5	Rb	Sr	Y	Zr	Nb	Mo	Tc	Ru	Rh	Pd	Ag	Cd	In	Sn	Sb	50	51	52	53	54	Xe
6	Cs	Ba	57-71	Hf	Ta	W	Re	Os	Ir	Pt	Au	Hg	Tl	Pb	Bi	83	84	85	86	87	Rn
7	Fr	Ra	89-103	Rf	Db	Sg	Bh	Hs	Mt	110	111	112	113	114	115	116	117	118			
lantanowce *		57	58	59	60	61	62	63	64	65	66	67	68	69	70	71	Lu				
aktynowce †		89	90	91	92	93	94	95	96	97	98	99	100	101	102	103					

Nazwy pierwiastków o liczbie atomowej od 104 do 109 (rutherford, dubn, seaborg, bohr, has i meitner) zostały ustalone przez Międzynarodową Unię Chemii Czystej i Stosowanej (IUPAC) w 1997 roku. Pierwiastki o liczbie atomowej 110, 111, 112, 114 i 116 zostały już odkryte, lecz nie nadano im jeszcze nazw. Informacje o najnowszych danych i nowo odkrytych pierwiastkach można znaleźć na stronie: [www.webelements.com](http://www.webelements.com).

# ODPOWIEDZI

## do sprawdzianów oraz pytań i zadań o numerach nieparzystych

### Rozdział 13

#### SPRAWDZIANY

1. c; e i f 2. wprost pod pretem (w tym położeniu moment siły działającej na jabłko względem osi obrotu, związany z siłą  $\vec{F}_g$ , jest równy zeru) 3. a) nie; b) w punkcie przyłożenia siły  $\vec{F}_1$ , prostopadle do płaszczyzny rysunku; c) 45 N 4. a) w punkcie C (aby siły przyłożone w tym punkcie nie wystąpiły w warunku równowagi momentów sił); b) plus; c) minus; d) taka sama 5. d 6. a) taka sama; b) B; c) B

#### PYTANIA

1. a) tak; b) tak; c) tak; d) nie 3. a i c (równoważą się siły i momenty siły) 5.  $m_2 = 12 \text{ kg}$ ,  $m_3 = 3 \text{ kg}$ ,  $m_4 = 1 \text{ kg}$  7. a) 15 N (kluczem do rozwiązań jest równowaga krążka, na którym jest zawieszony konik o ciężarze 10 N; b) 10 N 9. A, potem B i C razem

#### ZADANIA

1. a) 2; b) 7 3. a)  $(-27\hat{i} + 2\hat{j}) \text{ N}$ ; b)  $176^\circ$  w kierunku przeciwnym do ruchu wskazówek zegara względem kierunku  $+x$  5. 7920 N 7. a)  $(mg/L)\sqrt{L^2 + r^2}$ ; b)  $mgr/L$  9. a) 1160 N, w dół; b) 1740 N, w górę; c) lewy; d) prawy 11. 74 g 13. a) 280 N; b) 880 N,  $71^\circ$  w górę od poziomu 15. a) 8010 N; b) 3,65 kN; c) 5,66 kN 17. 71,7 N 19. a) 5 N; b) 30 N; c) 1,3 m 21.  $mg\sqrt{2rh - h^2/(r-h)}$  23. a) 192 N; b) 96,1 N; c) 55,5 N 25. a) 6630 N; b) 5740 N; c) 5960 N 27. 2,2 m 29. 0,34 31. a) 211 N; b) 534 N; c) 320 N 33. a) 445 N; b) 0,5; c) 315 N 35. a) ześlizguje się dla kąta  $31^\circ$ ; b) przewraca się dla kąta  $34^\circ$  37. a)  $6,5 \cdot 10^6 \text{ N/m}^2$ ; b)  $1,1 \cdot 10^{-5} \text{ m}$  39. a) 867 N; b) 143 N; c) 0,165 41. a)  $51^\circ$ ; b)  $0,64Mg$

### Rozdział 14

#### SPRAWDZIANY

1. wszystkie razem 2. a) 1, potem 2 i 4 razem, potem 3; b) odcinka d 3. kierunek ujemny osi y 4. a) rośnie; b) ujemną 5. a) 2; b) 1 6. a) 1 (mniejsze, czyli bardziej ujemne E daje mniejsze a), b) mniejszy (mniejsze a daje mniejsze T)

#### PYTANIA

1. a) między częstotliwościami i bliżej lżejszej z nich; b) nie; c) nie (o ile jego odległość od danych częstotliwości jest skończona) 3.  $3GM^2/d^2$ , w

lewo 5. a) 1 i 2 razem, potem 3 i 4 razem; b) 1, 2, 3, 4 7.  $E_{p,\text{pocz}}$ /4 9. a) wszystkie razem; b) wszystkie razem 11. a-d) równe zeru

#### ZADANIA

1. 19 m 3. 29 pN 5.  $1/2$  7.  $2,6 \cdot 10^5 \text{ km}$  9. 0,017 N, w kierunku kuli o masie 300 kg 11.  $3,2 \cdot 10^{-7} \text{ N}$  13.  $\frac{GmM}{d^2} \left[ 1 - \frac{1}{8(1-R/2d)^2} \right]$  15.  $2,6 \cdot 10^6 \text{ m}$  17. b)  $1,9 \text{ h}$  21.  $4,7 \cdot 10^{24} \text{ kg}$  23. a)  $(3 \cdot 10^{-7} \text{ N/kg})m$ , b)  $(3,3 \cdot 10^{-7} \text{ N/kg})m$ , c)  $(6,7 \cdot 10^{-7} \text{ N/kg})m$ ) $mr$  25. a)  $9,83 \text{ m/s}^2$ ; b)  $9,84 \text{ m/s}^2$ ; c)  $9,79 \text{ m/s}^2$  27. a)  $-1,3 \cdot 10^{-4} \text{ J}$ ; b) mniejsza; c) dodatnia; d) ujemna 29. a) 0,74; b)  $3,7 \text{ m/s}^2$ ; c)  $5 \text{ km/s}$  31. a)  $5 \cdot 10^{-11} \text{ J}$ ; b)  $-5 \cdot 10^{-11} \text{ J}$  35. a) 1700 m/s; b) 250 km; c) 1400 m/s 37. a) 82 km/s; b)  $1,8 \cdot 10^4 \text{ km/s}$  39.  $2,5 \cdot 10^4 \text{ km}$  41.  $6,5 \cdot 10^{23} \text{ kg}$  43.  $5 \cdot 10^{10}$  45. a) 7,82 km/s; b) 87,5 min 47. a) 6640 km; b) 0,0136 49. a)  $1,9 \cdot 10^{13} \text{ m}$ ; b)  $3,5R_P$  53. 0,71 lat 55.  $\sqrt{GM/L}$  57. a) 2,8 lat; b)  $1 \cdot 10^{-4}$  61. a) nie; b) takiej samej; c) tak 63. a) 7,5 km/s; b) 97 min; c) 410 km; d) 7,7 km/s; e) 92 min; f)  $3,2 \cdot 10^{-3} \text{ N}$ ; g) nie; h) tak, jeśli układ satelita-Ziemia uznamy za izolowany

### Rozdział 15

#### SPRAWDZIANY

1. wszystkie razem 2. a) wszystkie razem (działająca na pingwiną siła ciężkości jest taka sama); b)  $0,95\rho_0$ ,  $\rho_0$ ,  $1,1\rho_0$  3.  $13 \text{ cm}^3/\text{s}$ , na zewnątrz rury 4. a) wszystkie razem; b) 1, potem 2 i 3 razem, potem 4 (im szersza rura, tym mniejsza prędkość); c) 4, 3, 2, 1 (im szersza rura i mniejsza jej wysokość, tym większe ciśnienie)

#### PYTANIA

1. e, potem b i d razem, potem a i c razem 3. a) 2; b) 1 – mniejsza, 3 – równa, 4 – większa 5. a) opadnie na dno; b) opadnie na dno 7. wszystkie razem 9. a) opuści się; b) opuści się; c) pozostanie nie zmieniony

#### ZADANIA

1.  $1,1 \cdot 10^5 \text{ Pa}$ , czyli  $1,1 \text{ atm}$  3.  $2,9 \cdot 10^4 \text{ N}$  5. 0,074 7. b) 26 kN 9.  $5,4 \cdot 10^4 \text{ Pa}$  11. a)  $5,3 \cdot 10^6 \text{ N}$ ; b)  $2,8 \cdot 10^5 \text{ N}$ ; c)  $7,4 \cdot 10^5 \text{ N}$ ; d) nie 13.  $7,2 \cdot 10^5 \text{ N}$  15.  $\frac{1}{4}\rho g S(h_2 - h_1)^2$  17. 1,7 km 19. a)  $\rho g WD^2/2$ ; b)  $\rho g WD^3/6$ ; c)  $D/3$  21. a) 7,9 km; b) 16 km 23. 4,4 mm 25. a)  $2,04 \cdot 10^{-2} \text{ m}^3$ ; b) 1570 N 27. a)  $670 \text{ kg/m}^3$ ; b)  $740 \text{ kg/m}^3$  29. a) 1,2 kg; b)  $1300 \text{ kg/m}^3$  31. 57,3 cm 33. 0,126  $\text{m}^3$  35. a) 45 m<sup>2</sup>; b) tak, samochód należy postawić w pobliżu środka tafli, aby była ona pozioma 37. a) 9,4 N; b) 1,6 N 39. 8,1 m/s 41. 66

- W 43.** a) 2,5 m/s; b)  $2,6 \cdot 10^5$  Pa **45.** a) 3,9 m/s; b) 88 kPa **47.** a)  $1,6 \cdot 10^{-3}$  m<sup>3</sup>/s; b) 0,90 m **49.** 116 m/s **51.** a) 6,4 m<sup>3</sup>; b) 5,4 m/s; c)  $9,8 \cdot 10^4$  Pa **53.** a) 74 N; b) 150 m<sup>3</sup> **55.** b)  $2 \cdot 10^{-2}$  m<sup>3</sup>/s **57.** b) 63,3 m/s **59.** a) 180 kN; b) 81 kN; c) 20 kN; d) 0, e) 78 kPa, f) nie **61.** a) 0,05; b) 0,41; c) nie; d) położ się na plecach, powoli wyciągnij nogi z płynu i przetocz się na brzeg

## Rozdział 16

### SPRAWDZIANY

- 1.** (naszkicuj zależność  $x$  od  $t$ ). a)  $-x_m$ ; b)  $+x_m$ ; c)  $x = 0$  **2.** a ( $F$  musi mieć postać zgodną ze wzorem (6.10)) **3.** a) 5 J; b) 2 J; c) 5 J **4.** wszystkie okresy są jednakowe (we wzorze (16.29)  $m$  jest ukryte w  $I$ ) **5.** 1, 2, 3 (istotny jest stosunek  $m/b$ , wartość  $k$  nie ma znaczenia)

### PYTANIA

- 1.** c **3.** a) 2; b) dodatnia; c) w przedziale od 0 do  $x_m$  **5.** a) w kierunku  $-x_m$ ; b) w kierunku  $+x_m$ ; c) w przedziale od  $-x_m$  do 0; d) w przedziale od  $-x_m$  do 0; e) maleje; f) rośnie **7.** a)  $\pi$  rad; b)  $\pi$  rad; c)  $\pi/2$  rad **9.** a) zmienne; b) zmienna; c)  $x = \pm x_m$ ; d) bardziej prawdopodobny **11.** b (okres nieskończenie długi, brak drgań), c, a **13.** jeden układ:  $k = 1500$  N/m,  $m = 500$  kg; drugi układ:  $k = 1200$  N/m,  $m = 400$  kg; ten sam stosunek  $k/m = 3$  daje rezonans obu układów

### ZADANIA

- 1.** a) 0,5 s; b) 2 Hz; c) 18 cm **3.** a) 0,5 s; b) 2 Hz; c) 12,6 rad/s; d) 79 N/m; e) 4,4 m/s; f) 27,6 N **5.**  $v > 500$  Hz **7.** a)  $6,28 \cdot 10^5$  rad/s; b) 1,59 mm **9.** a) 1 mm; b) 0,75 m/s; c) 570 m/s<sup>2</sup> **11.** a)  $1,29 \cdot 10^5$  N/m; b) 2,68 Hz **13.** 7,2 m/s **15.** 2,08 h **17.** 3,1 cm **19.** a) 5,58 Hz; b) 0,325 kg; c) 0,4 m **21.** a) 2,2 Hz; b) 56 cm/s; c) 0,1 kg; d) 20 cm poniżej  $y_{\text{pocz}}$  **23.** a) 0,183 A; b) w tym samym kierunku **29.** a)  $(n+1)k/n$ ; b)  $(n+1)k$ ; c)  $\sqrt{(n+1)/nv}$ ; d)  $\sqrt{n+1}v$ . **31.** 37 mJ **33.** a) 2,25 Hz; b) 125 J; c) 250 J; d) 86,6 cm **35.** a) 130 N/m; b) 0,62 s; c) 1,6 Hz; d) 5 cm; e) 0,51 m/s **37.** a) 3/4; b) 1/4; c)  $x_m/\sqrt{2}$  **39.** a) 16,7 cm; b) 1,23% **41.** a) 39,5 rad/s; b) 34,2 rad/s; c) 124 rad/s<sup>2</sup> **43.** 99 cm **45.** 5,6 cm **47.** a)  $2\pi\sqrt{\frac{L^2+12d^2}{12gd}}$ ; b) wzrośnie dla  $d < L/\sqrt{12}$ , zmaleje dla  $d > L/\sqrt{12}$ ; c) rośnie; d) nie zmieni się **49.** a)  $0,205 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ ; b) 47,7 cm; c) 1,5 s **53.**  $2\pi\sqrt{m/3k}$  **55.** a) 0,35 Hz; b) 0,39 Hz; c) 0 **57.** b) mniejsza **59.** 0,39 **61.** a) 14,3 s; b) 5,27 **63.** a)  $F_m/b\omega$ ; b)  $F_m/b$

## Rozdział 17

### SPRAWDZIANY

- 1.** a, 2; b, 3; c, 1 (porównaj z fazą w wyrażeniu (17.2), następnie patrz wzór (17.5)) **2.** a) 2, 3, 1 (patrz wzór (17.12)); b) 3, następnie 1 i 2 razem (znajdź amplitudę wielkości  $dy/dt$ ) **3.** a) pozostało taka sama (jest niezależna od  $v$ ); b) zmaleje ( $\lambda = v/v$ ); c) wzrośnie; d) wzrośnie **4.** a) wzrośnie; b) wzrośnie; c) wzrośnie **5.** 0,2 i 0,8 razem, a następnie 0,6, 0,45 **6.** a) 1; b) 3; c) 2 **7.** a) 75 Hz; b) 525 Hz

### PYTANIA

- 1.** 7d **3.** a)  $\pi/2$  rad, czyli  $0,25\lambda$ ; b)  $\pi$  rad, czyli  $0,5\lambda$ ; c)  $3\pi/2$  rad, czyli  $0,75\lambda$ ; d)  $2\pi$  rad, czyli  $1\lambda$ ; e)  $3T/4$ ; f)  $T/2$ . **5.** a) 4; b) 4; c) 3 **7.** a i d razem, następnie b i c razem **9.** d **11.** a) coraz mniejsze; b) zanika znacznie wcześniej

### ZADANIA

- 1.** a)  $3,49 \text{ m}^{-1}$ ; b) 31,5 m/s **3.** a) 0,68 s; b) 1,47 Hz; c) 2,06 m/s **7.** a)  $y(x, t) = 2 \sin 2\pi(0,1x - 400t)$ , gdzie  $x$  i  $y$  jest wyrażone w cm, a  $t$  w s; b) 50 m/s; c) 40 m/s **9.** a) 11,7 cm; b)  $\pi$  rad **11.** 129 m/s **13.** a) 15 m/s; b) 0,036 N **15.**  $y(x, t) = 0,12 \sin(141x + 628t)$ , gdzie  $y$  jest wyrażone w mm,  $x$  w m, a  $t$  w s **17.** a)  $2\pi y_m/\lambda$ ; b) nie **19.** a) 5 cm; b) 40 cm; c) 12 m/s; d) 0,033 s; e) 9,4 m/s; f)  $5\sin(16x + 190t + 0,93)$ , gdzie  $x$  jest wyrażone w m,  $y$  w cm, a  $t$  w s **21.** 2,63 m od tego końca drutu, z którego wygenerowano późniejszy impuls **25.** a) 3,77 m/s; b) 12,3 N; c) 0; d) 46,3 W; e) 0; f) 0; g)  $\pm 0,5$  cm **27.**  $1,4y_m$  **29.** 5 cm **31.** a)  $0,83y_t$ ; b)  $37^\circ$  **33.** a) 140 m/s; b) 60 cm; c) 240 Hz **35.** a) 82 m/s; b) 16,8 m; c) 4,88 Hz **37.** 7,91 Hz, 15,8 Hz, 23,7 Hz **39.** a) 105 Hz; b) 158 m/s **41.** a) 0,25 cm; b) 120 cm/s; c) 3 cm; d) 0 **43.** a) 50 Hz; b)  $y = 0,5 \sin[\pi(x \pm 100t)]$ , gdzie  $x$  jest wyrażone w m,  $y$  w cm, a  $t$  w s **45.** a) 1,3 m; b)  $y = 0,002 \sin(9,4x) \cos(3800t)$ , gdzie  $x$  i  $y$  jest wyrażone w m, a  $t$  w s **47.** a) 2 Hz; b) 200 cm; c) 400 cm/s; d) 50 cm, 150 cm, 250 cm itd.; e) 0 cm, 100 cm, 200 cm itd. **51.** a) 323 Hz; b) osiem

## Rozdział 18

### SPRAWDZIANY

- 1.** Zaczyna maleć (przykład: wyobraź sobie ruch krzywych na rys. 18.7 na prawo przez punkt  $x = 42$  cm) **2.** a) 0, całkowicie konstruktywna; b)  $4\lambda$ , całkowicie konstruktywna **3.** a) 1 i 2 razem, następnie 3 (patrz wzór (18.28)); b) 3, następnie 1 i 2 razem (patrz wzór (18.26)) **4.** druga (patrz wzory (18.39) i (18.41)) **5.** poluzować **6.** a) większa; b) mniejsza; c) nic nie można powiedzieć; d) nic nie można powiedzieć; e) większa; f) mniejsza **7.** (prędkości należy mierzyć względem powietrza) a) 222 m/s; b) 222 m/s.

### PYTANIA

- 1.** impuls wzduł drogi **2.** **3.** a) 2 długości fal; b) 1,5 długości fal; c) całkowicie konstruktywna (a), całkowicie destruktynwa (b) **5.** a) maksymalnie niezgodne w fazie; b) maksymalnie niezgodne w fazie **7.** a) 1; b) 9 **9.** a) wzrosną; b) zmaleje **11.** wszystkie nieparzyste harmoniki **13.** d, e, b, c, a

### ZADANIA

- 1.** należy podzielić liczbę sekund przez trzy **3.** a) 79 m, 41 m; b) 89 m **5.** 1900 km **7.** 40,7 m **9.** a) 0,0762 mm; b) 0,333 mm **11.** a) 1,5 Pa; b) 158 Hz; c) 2,22 m; d) 350 m/s **13.** a)  $343(1+2m)$  Hz, gdzie  $m$  liczba całkowita z przedziału od 0 do 28; b) 686 m Hz, gdzie  $m$  liczba całkowita z przedziału od 1 do 29 **15.** a) 143 Hz, 429 Hz, 715 Hz; b) 286 Hz, 572 Hz, 858 Hz **17.** 15 mW **19.** 36,8 nm **21.** a) 1000; b) 32 **23.** a) 59,7; b)  $2,81 \cdot 10^{-4}$  **25.** b)  $5,76 \cdot 10^{-17}$  J/m<sup>3</sup> **27.** b)  $(\text{długość})^2$  **29.** a) 5200 Hz;

- b) amplituda<sub>SAD</sub>/amplituda<sub>SBD</sub> = 2   **31.** a) 57,2 cm; b) 42,9 cm  
**33.** a) 405 m/s; b) 596 N; c) 44 cm; d) 37,3 cm   **35.** a) 1129, 1506 i 1882 Hz   **37.** 12,4 m   **39.** a) węzła; c) 22 s   **41.** 45,3 N   **43.** 387 Hz  
**45.** 0,02   **47.** 17,5 kHz   **49.** a) 526 Hz; b) 555 Hz   **51.** a) 1,02 kHz; b) 1,04 kHz   **53.** 155 Hz   **55.** a) 485,8 Hz; b) 500 Hz; c) 486,2 Hz; d) 500 Hz   **57.** a) 598 Hz; b) 608 Hz; c) 589 Hz   **59.** a) 42°; b) 11 s

## Rozdział 19

### SPRAWDZIANY

- 1.** a) wszystkie równe; b) 50°X, 50°Y, 50°W   **2.** a) 2 i 3 równe, następnie 1, na koniec 4; b) 3, 2, następnie 1 i 4 równe (na podstawie równań (19.9) i (19.10) zakładamy, że zmiana powierzchni jest proporcjonalna do powierzchni początkowej)   **3.** A (patrz równanie (19.14))   **4.** c i e (przy przejściu zgodnym z kierunkiem ruchu wskazówek zegara ograniczają największą powierzchnię)  
**5.** a) wszystkie ( $\Delta E_w$  zależy tylko od stanów P i K, a nie od sposobu realizacji przemiany); b) 4, 3, 2, 1 (porównaj powierzchnie pod krzywymi); c) 4, 3, 2, 1 (patrz równanie (19.26))   **6.** a) 0 (cykl zamknięty); b) ujemną ( $W$  ma wartość ujemną; patrz równanie (19.26))   **7.** b i d równe, następnie a, c (strumień  $P_{\text{przew}}$  ma taką samą wartość dla wszystkich warstw; patrz równanie (19.32))

### PYTANIA

- 1.** 25°S, 25°U, 25°R   **3.** A i B równe, następnie C, D   **5.** a) obydwa zgodnie z kierunkiem ruchu wskazówek zegara; b) obydwa zgodnie z kierunkiem ruchu wskazówek zegara   **7.** c, a, b   **9.** kula, półkula, sześciian   **11.** a) równa; b) całkowicie ciekła; c) częściowo

### ZADANIA

- 1.** 0,05 kPa, azot   **3.** 348 K   **5.** a) -40°; b) 575°; c) skale Celsjusza i Kelvina nie mogą dać tego samego odczytu   **7.** a) wymiar to odwrotność czasu   **9.** -92,1°X   **11.** 960 μm   **13.** 2,731 cm  
**15.** 29 cm<sup>3</sup>   **17.** 0,26 cm<sup>3</sup>   **19.** 360°C   **23.** 0,68 s/h, spieszyszy się   **25.** 7,5 cm   **27.** a) 523 J/(kg · K); b) 26,2 J/(mol · K); c) 0,6 mola   **29.** 42,7 kJ   **31.** 1,9 razy większa   **33.** a) 33,9 Btu; b) 172°F  
**35.** 160 s   **37.** 2,8 dnia   **39.** 742 kJ   **41.** 82 cal   **43.** 33 g   **45.** a) 0°C; b) 2,5°C   **47.** 8,72 g   **49.** A: 120 J, B: 75 J, C: 30 J   **51.** -30 J  
**53.** a) 6 cal; b) -43 cal; c) 40 cal; d) 18 cal, 18 cal   **55.** a) 0,13 m; b) 2,3 km   **57.** 1660 J/s   **59.** a) 16 J/s; b) 0,048 g/s   **61.** 0,5 min  
**63.** a) 17 kW/m<sup>2</sup>; b) 18 W/m<sup>2</sup>   **65.** 0,4 cm/h   **67.** a) 90 W; b) 230 W; c) 330 W

## Rozdział 20

### SPRAWDZIANY

- 1.** wszystkie oprócz c   **2.** a) wszystkie razem; b) 3, 2, 1   **3.** dla gazu A   **4.** 5 (największa zmiana  $T$ ), następnie jednakowe zmiany dla 1, 2, 3 i najmniejsza dla 4   **5.** 1, 2, 3 ( $Q_3 = 0$ ,  $Q_2$  powoduje wykonanie pracy  $W_2$ , ale  $Q_1$  powoduje wykonanie większej pracy  $W_1$  i wzrost temperatury gazu)

### PYTANIA

1. wzrasta mniej niż dwa razy   **3.** największa w przypadku a i c, następnie b, na koniec d   **5.** od 1 do 4   **7.** 20 J   **9.** a) 3; b) 1; c) 4; d) 2; e) tak   **11.** a) 1, 2, 3, 4; b) 1, 2, 3

### ZADANIA

- 1.** 0,933 kg   **3.** 6560   **5.** a)  $5,47 \cdot 10^{-8}$  mol; b)  $3,29 \cdot 10^{16}$    **7.** a) 0,0388 mol; b) 220°C   **9.** a) 106; b) 0,892 m<sup>3</sup>   **11.**  $A(T_2 - T_1) - B(T_2^2 - T_1^2)$    **13.** 5600 J   **15.** 100 cm<sup>3</sup>   **17.**  $2 \cdot 10^5$  Pa  
**19.** 180 m/s   **21.**  $9,53 \cdot 10^6$  m/s   **23.** 1,9 kPa   **25.**  $3,3 \cdot 10^{-20}$  J  
**27.** a)  $6,75 \cdot 10^{-20}$  J; b) 10,7   **31.** a)  $6 \cdot 10^9$  km   **33.** 15 cm  
**35.** a)  $3,27 \cdot 10^{10}$ ; b) 172 m   **37.** a) 6,5 km/s; b) 7,1 km/s  
**39.** a)  $1 \cdot 10^4$  K; b)  $1,6 \cdot 10^5$  K; c) 440 K, 7000 K; d) wodoru — nie; tlenu — tak   **41.** a) 7 km/s; b)  $2 \cdot 10^{-8}$  cm; c)  $3,5 \cdot 10^{10}$  zderzeń/s   **43.** a)  $\frac{2}{3}v_0$ ; b)  $N/3$ ; c)  $122v_0$ ; d)  $1,31v_0$   
**45.**  $RT \ln(V_{\text{kofc}}/V_{\text{pocz}})$    **47.**  $(n_1C_1 + n_2C_2 + n_3C_3)/(n_1 + n_2 + n_3)$   
**49.** a)  $6,6 \cdot 10^{-26}$  kg; b) 40 g/mol   **51.** 8000 J   **53.** a) 6980 J; b) 4990 J; c) 1990 J; d) 2990 J   **55.** a) 14 atm; b) 620 K   **59.** 1,40  
**61.** a) W dżułach, w kolejności Q,  $\Delta E_w$ , W: 1→2: 3740, 3740, 0; 2→3: 0, -1810, 1810; 3→1: -3220, -1930, -1290; Cykl: 520, 0, 520; b)  $V_2 = 0,0246$  m<sup>3</sup>,  $p_2 = 2$  atm,  $V_3 = 0,0373$  m<sup>3</sup>,  $p_3 = 1$  atm

## Rozdział 21

### SPRAWDZIANY

- 1.** a, b, c   **2.** mniejsza ( $Q$  ma mniejszą wartość)   **3.** c, b, a   **4.** a, d, c, b   **5.** b

### PYTANIA

1. nie zmienia się   **3.** b, a, c, d   **5.** taka sama   **7.** a) pozostaje stała; b) wzrasta; c) maleje   **9.** a) pozostaje stała; b) wzrasta; c) maleje   **11.** a) 0; b) 0,25; c) 0,5

### ZADANIA

- 1.** 14,4 J/K   **3.** a) 9220 J; b) 23 J/K; c) 0   **5.** a)  $5,79 \cdot 10^4$  J; b) 173 J/K   **7.** a) 14,6 J/K; b) 30,2 J/K   **9.** a) 57°C; b) -22,1 J/K; c) +24,9 J/K; d) +2,8 J/K   **13.** a) 320 K; b) 0; c) +1,72 J/K  
**15.**  $+0,75$  J/K   **17.** a) -943 J/K; b) +943 J/K; c) tak   **19.** a)  $3p_0V_0$ ; b)  $\Delta E_w = 6RT_0$ ,  $\Delta S = \frac{3}{2}R \ln 2$ ; c) obydwie wielkości nie ulegają zmianie   **21.** a) 31%; b) 16 kJ   **23.** a) 23,6%; b)  $1,49 \cdot 10^4$  J   **25.** 266 K i 341 K   **27.** a) 1470 J; b) 554 J; c) 918 J; d) 62,4%   **29.** a) 2270 J; b) 14 800 J; c) 15,4%; d) 75%, większa   **31.** a) 78%; b) 81 kg/s  
**33.** a)  $T_2 = 3T_1$ ,  $T_3 = 3T_1/4^{Y-1}$ ,  $T_4 = T_1/4^{Y-1}$ ,  $p_2 = 3p_1$ ,  $p_3 = 3p_1/4^Y$ ,  $p_4 = p_1/4^Y$ ; b)  $1 - 4^{1-Y}$    **35.** 21 J   **37.** 440 W   **39.** 0,25 KM   **41.**  $[1 - (T_2/T_1)]/[1 - (T_4/T_3)]$    **45.** a)  $W = N!/(n_1!n_2!n_3!)$ ; b)  $[(N/2)!(N/2)!]/[(N/3)!(N/3)!]$ ; c)  $4,2 \cdot 10^{16}$

# AUTORZY ZDJĘĆ

## ROZDZIAŁ 13

Strona 1 — Pascal Tournaire/Vandystadt/© Allsport. Rys. 13.1 — Fred Hirschmann/Allstosk/© Tony Stone Images/New York, Inc. Rys. 13.3 — Andy Levin/© Photo Researchers. Rys. 13.14 — Druk za zgodą: Micro-Measurements Division, Measurements Group, Inc., Raleigh, North Carolina.

## ROZDZIAŁ 14

Strona 27 — Druk za zgodą: Lund Observatory. Rys. 14.1 — Druk za zgodą: NASA. Strona 47 — Druk za zgodą: NASA. Rys. 14.21 — Druk za zgodą: National Radio Astronomy Observatory. Rys. 14.38 — Druk za zgodą: NASA.

## ROZDZIAŁ 15

Strona 60 — Colin Prior/Tony Stone Images/New York, Inc. Strona 72 — T. Orban/Sygma. Rys. 15.11 — Will McIntyre/© Photo Researchers. Rys. 15.12 — Druk za zgodą: D. H. Peregrine, University of Bristol. Rys. 15.13 — Druk za zgodą: Volvo North America Corporation.

## ROZDZIAŁ 16

Strona 93 — T. Campion/Sygma. Rys. 16.27 — Druk za zgodą: NASA.

## ROZDZIAŁ 17

Strona 122 — John Visser/Bruce Coleman, Inc. Rys. 17.20 — Richard Megna/© Fundamental Photographs. Rys. 17.22 — Druk za zgodą: T.D. Rossing, Northern Illinois University.

## ROZDZIAŁ 18

Strona 154 — Stephen Dalton/ Animals Animals. Rys. 18.1 — Howard Sochurak/The Stock Market. Rys. 18.22 — Zdjęcie U.S. Navy, wykonane przez: John Gay.

## ROZDZIAŁ 19

Strona 187 — Druk za zgodą: dr Mosato Ono, Tamagawa University. Rys. 19.9 — AP/© Wide World Photos. Rys. 19.20 — Druk za zgodą: Daedalus Enterprises, Inc. Rys. 19.22 — Druk za zgodą: dr Masato Ono, Tamagawa University.

## ROZDZIAŁ 20

Strona 224 — Tom Branch.

## ROZDZIAŁ 21

Strona 259 — Steven Dalton/© Photo Researchers. Rys. 21.11 — Richard Ustinich/The Image Bank.

# SKOROWIDZ

△

- amplituda 95, 113, 126, 147
  - fali stojącej 144
  - — wypadkowej 139
  - przemieszczenia 159, 179
  - zmian ciśnienia 160, 179
  - — kąta 105
  - — prędkości 114
  - — przyspieszenia 114
  - Avogadro A. 225

R

- Ballot B. 173  
 barometr rtęciowy 67–68  
 Bell A.G. 165  
 Bernoulli D. 80  
 bezwładność 98  
 bimetal 194  
 Boltzmann L. 212, 279  
 Brabec T. 42

1

- Carnot N.L.S. 268
  - chłodziarka 273–275, 281
  - Carnota 274, 281
  - — , współczynnik wydajności 274
  - doskonała 274
  - cieło doskonale czarne 212
  - rozciągłe 6
  - ciążenie (gravitacja) 28, 51
  - ciepło 187–215
    - parowania 200, 215
    - przemiany 199–201, 215
    - topnienia 200, 215
    - właściwe 198–199, 215
    - — molowe 199, 215, 242–243, 244, 252
    - — — gazu doskonałego 239–243

- — — — — przy stałej objętości  
 240–242  
 — — — — — przy stałym ciśnieniu  
 242–243  
 ciężar pozorny 73–74,  
 ciśnienie 61, 63, 64, 66, 67–69, 83, 190,  
 230–232, 252  
 — atmosferyczne 66, 67, 191  
 — hydrostatyczne 64  
 cykl 94, 267  
 — Carnota 268  
 — termodynamiczny 205  
 czarna dziura 27  
 czas 126  
 czasoprzestrzeń 49  
 cząsteczka 124  
 cząstka 123  
 — elementarna 124  
 częstość 94, 113, 127–128, 160  
 — dudnień 172  
 — fali 125–128, 133, 147  
 — kołowa 96, 98, 105, 113, 114, 127–128,  
 147, 159  
 — rezonansowa 145, 148, 168  
 czoło fali 155

**D**

decybel 165, 180  
 detektor 174–176  
 długość fali 125–128, 133, 147, 160  
 Doppler J.Ch. 173  
 drgania 94–114  
 — swobodne 112  
 — tłumione 94, 110  
 — wymuszone 112–113, 114  
 droga 39–40  
 Droga Mleczna 27, 28  
 dudnienie 171–172, 180  
 dżur 198

12

- Einstein A. 48  
 ekwipartycja energii 245  
 elektron 124  
 energia 46–47, 52, 114  
   — fali biegnącej w linie 134–136  
   — kinetyczna 46, 47, 134, 252  
   — — ruchu postępowego 233  
   — mechaniczna 46, 47  
   — potencjalna 40, 46, 51  
   — — grawitacyjna 37–41  
   — — sprężystości 134–135  
   — termiczna 80, 188, 197  
   — wewnętrzna 205, 240  
   — w ruchu harmonicznym 100–102  
 entropia 259, 265–266, 273, 281

四

- fala 122–180

  - biegnąca 125, 143, 147
  - dźwiękowa 123, 155, 178
  - — biegnąca 159–161
  - elektromagnetyczna 123
  - materii 124
  - mechaniczna 123, 155
  - podłużna 124–125, 146, 154
  - poprzeczna 124–125, 146, 154
  - radarowa 123
  - radiowa 123
  - sejsmiczna 123
  - sferyczna 155
  - sinusoidalna 124, 147
  - — wypadkowa 138
  - stojąca 142–146, 148, 180
  - światlna 123
  - telewizyjna 123
  - uderzeniowa 178–180
  - wypadkowa 137, 143

faza 96, 126, 147

— początkowa 96, 113

fizyka kwantowa 246–247

French A.P. 108

## G

Galaktyka 27, 28

Galileusz 108

gaz doskonały 226–229, 240, 242, 252

— jednoatomowy 240

— , rozprężanie adiabatyczne 247–250

gęstość 16, 62–63, 83

— liniowa 132

— objętościowa 156

— Ziemi 33

głośność dźwięku 164–166

granica sprężystości 15, 16

grawitacja 27–52

— w pobliżu powierzchni Ziemi 32–35

— według Einsteina 48–51, 52

— wewnętrz Ziemi 36–37

gwiazda neutronowa 41

## H

harmoniczne 146, 168, 169

herc 95

## I

impuls 124

interferencja 143, 162–163, 179

— destruktwna 139, 163

— fal 137–140, 147

— konstruktywna 138, 162

— pośrednia 140

izoterna 227, 262

## J

Jowisz 41, 44

## K

kaloria 198

kąt Macha 178, 180

— odchylenia 105

Kepler J. 42

kelwin 188

kinetyczna teoria gazów 224–253

konfiguracja 277, 279

konwekcja 211, 215

krzepnięcie 200

krzywizna przestrzeni 49–51

Książyc 27, 28

— Ziemi 41

kwazar 50

## L

lepkosć 75

liczba Avogadra 225–226, 251

— falowa 126, 127, 160

— harmoniczna 146

— Macha 178

linie prądu 76, 84

Lokalna Grupa Galaktyk 28

## M

manometr otwarty 68–69

— rtęciowy 190

Mars 42, 44

masa 61, 133, 157

— cząsteczkowa 225

— molowa 225

Maxwell J.C. 236, 245

mechanika statystyczna 276

Merkury 44

metoda Heimlicha 69

mikrofale 123

mikrostan 282

mimośród 42

moc 212

— absorbowana 212

— fali biegającej w linie 134–136, 147

moduł sprężystości 15, 18

— ścinania 16, 19

— ściśliwości 16–17, 19, 156, 179

— Younga 15, 16, 19

mol 225

moment kierujący 102

— pędu 2

## N

nadciśnienie 66

naprężenie 15, 18

— niszące 15, 16

— objętościowe 14, 15, 16–17, 19

— rozciągające 14, 15

— ścinające 14, 15, 16, 19

natężenie dźwięku 164–166, 179

Neptun 44

Newton I. 28, 42

## O

odbiście od granicy 144

odkształcenie 15, 18

ogólna teoria względności 49, 52

ogniskowanie grawitacyjne 50

okres 95, 98, 105, 113, 114, 127–128,

147, 160

opór cieplny 209

orbita 46–47

— eliptyczna 47

— kołowa 47

oscylator harmoniczny 98, 114

— — kątowy 102

— tłumione 110

## P

parowanie 200

Pascal B. 69

paskal 191

pęd 2, 3, 4

planet 42–44

Pluton 44

plyny 60–84

— doskonałe 75–76, 80, 84

— rzeczywiste 75

— w spoczynku 64–66

pływanie ciał 73

pochłanianie ciepła 198–201

pojemność cieplna 198, 215

położenie 126

półos wielka 42

praca 39–40, 202–205, 206, 215, 227–228, 252, 269

prasa hydrauliczna 70–71

prawo Archimedesa 71–74, 84

— Hooke'a 98

— Keplera 42–44, 52

— Pascala 69–71, 84

— powszechnego ciążenia 28–30, 40, 42, 51

prędkość 133, 160

— cząsteczek 252

— dźwięku 155–158, 179

— fali 133, 147

— — biegającej 128–129

— — w napiętej linie 131–133, 147

— kątowa 43

— naddźwiękowa 178–179

— najbardziej prawdopodobna 237–238

— średnia 237–238

— — kwadratowa 230–232, 237–238, 252

— światła 123

— ucieczki 40–41, 52

— w ruchu harmonicznym 96–97, 114

proces cykliczny 207, 215

promieniowanie 211–212, 215

— rentgenowskie 123

proton 124

przekazywanie ciepła 209–212

przemiana adiabatyczna 206–207, 215, 248, 253

— nieodwracalna 260–261, 266, 281

— przy stałej objętości 207, 215

— termodynamiczna 202

przemieszczenie 95, 96, 113, 126, 127

przenoszenie energii 135  
przepływ bezwirowy 76  
— nielepkie 75  
— nieściśliwy 75  
— nieustalony (turbulentny) 75  
— ustalony 75, 76  
przestrzeń międzygalaktyczna 28  
przesunięcie fazowe 138  
przewodnictwo cieplne 209, 215  
przewodzenie ciepła przez płytke wielo-warstwową 210–211  
przyspieszenie 133, 157  
— dośrodkowe 44, 47  
— grawitacyjne (ziemskie) 33, 51, 106  
— w ruchu harmonicznym 97, 114  
punkt potrójny wody 190

## R

rezonans 112–113, 114, 144–146, 148  
rozciąganie 15–16, 18  
rozkład Maxwella 236, 252  
— prędkości cząsteczek 236–238  
rozprężanie izotermiczne 227  
— swobodne 207, 215, 250  
rozszerzalność cieplna 194–196, 214  
— liniowa 195  
— — , współczynnik 195, 214  
— objętościowa 195–196  
— — , współczynnik 195, 214  
równanie Bernoulliego 79–82, 84  
— ciągłości 76–78, 80, 84  
— stanu gazu doskonałego 226  
równowaga 2–3  
— momentów sił 4, 18  
— sił 3, 4, 18  
— statyczna 2, 7, 18, 65  
— — nietrwała 2  
— — trwała 2  
— , warunki 3–4  
różnica faz 138, 139  
ruch harmoniczny 94, 108–109, 113, 114  
— — prosty 94–97  
— — tłumiony 110–111, 114  
— jednostajny po okręgu 108–109, 114  
— obrotowy 3  
— okresowy 95  
— postępowy 3

## S

satelita 42–47  
Saturn 44  
silnik 267–272, 279  
— Carnota 267–270  
— — , sprawność 270–271

— idealny 267, 281  
— Stirlinga 271–272  
siła 40, 61, 133  
— ciężkości 5, 28, 51  
— — wypadkowa 30, 36, 51  
— lepkości 80  
— normalna 34  
— oporu 110  
— — lepkiego 75  
— tarcia 12  
— w ruchu harmonicznym 98  
— wypadkowa 157  
— wyporu 71, 73, 74  
skala Celsjusza 192, 214  
— Fahrenheita 192, 214  
— głośności 165–166, 180  
— Kelvina 188, 189, 214  
skraplanie 200  
Słońce 27, 41  
sprawność cieplna silnika 270  
— silników rzeczywistych 275–276  
sprężanie izotermiczne 227  
sprężystość 14–19, 98  
stała Boltzmanna 226, 252  
— gazowa 226, 252  
— grawitacyjna 29, 51  
— Stefana–Boltzmanna 212  
— tłumienia 110  
Stefan J. 212  
stopnie swobody 244–246, 252  
stożek Macha 177, 180  
struga prądu 78, 84  
strumień masy 78, 84  
— objętościowy 78, 84  
substancja robocza 267  
Supergromada Lokalna 28  
suw 267  
Syriusz 41  
szereg harmoniczny 146  
szybkość przenoszenia energii 135–136  
— przepływu masy 78, 84  
— — objętości 78, 84

## Ś

ściskanie 15–16, 18  
— objętościowe 17  
średnia droga swobodna 233–235,  
252  
środek ciężkości 5–7, 18  
— masy 5  
światło nadfioletowe 123  
— słoneczne 238  
— widzialne 123

## T

temperatura 187–215, 230–232, 252  
— bezwzględna 188  
— , pomiar 189–192  
teoria grawitacji 48  
— sprężystości 13  
termodynamika 188  
termometr 189, 214  
— gazowy 190–192  
termoskop 188, 189

## U

Układ Słoneczny 27  
układy nieoznaczone 12–13  
Uran 44

## W

wahadło 103–106, 114  
— fizyczne 105–106, 114  
— matematyczne 104–105, 114  
— torsyjne 102, 114  
Wenus 44  
węzły 142, 148  
Wielka Mgławica w Andromedzie 28  
Wielki Atraktor 28  
— Obłok Magellana 28  
wskaźny 140–141, 147  
Wszechświat 28  
wzór Boltzmanna 277  
— Stirlinga 280

## Z

zapadanie grawitacyjne 27  
zasada równoważności 48–49, 52  
— superpozycji 30, 51  
— — fal 136–137, 147  
— zachowania momentu pędu 43, 44  
zasady dynamiki Newtona 3, 29, 132–133  
— termodynamiki 187–215, 259–282  
zderzenie 234  
zdolność emisyjna 212  
zero bezwzględne 188  
zerowa zasada termodynamiki 188–189,  
214

Ziemia 27, 41, 44

zjawisko Dopplera 173–177, 180  
zmiana entropii 261–263, 269, 281

## Ż

źródło 174–176  
— dźwięków 168–170  
— punktowe 155

# FASCYNUJĄCY ŚWIAT FIZYKI W WYDANIU MULTIMEDIALNYM

David **Halliday** Robert **Resnick** Jearl **Walker**  
**PODSTAWY FIZYKI, t. 1-5**

## aneks internetowy

[http://aneksy.pwn.pl/podstawy\\_fizyki](http://aneksy.pwn.pl/podstawy_fizyki)

**Doskonale uzupełnienie i rozszerzenie  
materiału zawartego w podręczniku.**

### Działy aneksu

**Pajęczyna fizyki** – schemat powiązań między różnymi działami fizyki

**Wyprowadzenia i dowody, których nie znajdziesz w książce**

– nowe, niekonwencjonalne wyprowadzenia wzorów i dowodów

**Linki edukacyjne** – lista różnych adresów ciekawych stron internetowych związanych z tematyką książki

**Zadaniowy wypas** – zabawnie i ciekawie sformułowane zadania i problemy do rozwiązymania

**Dla wykładowców** – do wykorzystania na wykładach: rysunki, zdjęcia, tabele, schematy ilustrujące zagadnienia z podręcznika

**Zapytaj Matrixa** – forum dyskusyjne

**Słowniczek polsko-angielski** – słownik pojęć i terminów fizycznych ułatwiający poruszanie się po angielskojęzycznych stronach internetowych

## Wybrane stałe fizyczne\*

prędkość światła	$c$	$3,00 \cdot 10^8$ m/s
stała grawitacyjna	$G$	$6,67 \cdot 10^{-11}$ m <sup>3</sup> /(s <sup>2</sup> · kg)
stała Avogadra	$N_A$	$6,02 \cdot 10^{23}$ mol <sup>-1</sup>
uniwersalna stała gazowa	$R$	8,31 J/(mol · K)
energetyczny równoważnik masy	$c^2$	$8,99 \cdot 10^{16}$ J/kg
		931,5 MeV/u
stała elektryczna	$\epsilon_0$	$8,85 \cdot 10^{-12}$ F/m
stała magnetyczna	$\mu_0$	$1,26 \cdot 10^{-6}$ H/m
stała Plancka	$h$	$6,63 \cdot 10^{-34}$ J · s
		$4,14 \cdot 10^{-15}$ eV · s
stała Boltzmanna	$k$	$1,38 \cdot 10^{-23}$ J/K
		$8,62 \cdot 10^{-5}$ eV/K
ładunek elementarny	$e$	$1,60 \cdot 10^{-19}$ C
masa elektronu	$m_e$	$9,11 \cdot 10^{-31}$ kg
masa protonu	$m_p$	$1,67 \cdot 10^{-27}$ kg
masa neutronu	$m_n$	$1,68 \cdot 10^{-27}$ kg
masa deuteronu	$m_d$	$3,34 \cdot 10^{-27}$ kg
promień Bohra	$r_B$	$5,29 \cdot 10^{-11}$ m
magneton Bohra	$\mu_B$	$9,27 \cdot 10^{-24}$ J/T
		$5,79 \cdot 10^{-5}$ eV/T
stała Rydberga	$R$	0,01097 nm <sup>-1</sup>

\* Obszerniejszy spis stałych fizycznych, zawierający także wartości najbardziej dokładne oraz ich niepewności, przedstawiony jest w dodatku B.

## Wybrane współczynniki zamiany jednostek\*

### Masa i gęstość

$$\begin{aligned}1 \text{ kg} &= 1000 \text{ g} = 6,02 \cdot 10^{26} \text{ u} \\1 \text{ u} &= 1,66 \cdot 10^{-27} \text{ kg} \\1 \text{ kg/m}^3 &= 10^{-3} \text{ g/cm}^3\end{aligned}$$

### Długość i objętość

$$\begin{aligned}1 \text{ m} &= 100 \text{ cm} = 39,4 \text{ in} = 3,28 \text{ ft} \\1 \text{ mila} &= 1,61 \text{ km} = 5280 \text{ ft} \\1 \text{ in} &= 2,54 \text{ cm} \\1 \text{ nm} &= 10^{-9} \text{ m} = 10 \text{ Å} \\1 \text{ pm} &= 10^{-12} \text{ m} = 1000 \text{ fm} \\1 \text{ rok świetlny (y)} &= 9,46 \cdot 10^{15} \text{ m} \\1 \text{ m}^3 &= 1000 \text{ l} = 35,3 \text{ ft}^3 \\&\quad = 264 \text{ galony amerykańskie}\end{aligned}$$

### Czas

$$\begin{aligned}1 \text{ d} &= 86\,400 \text{ s} \\1 \text{ a} &= 365\frac{1}{4} \text{ d} = 3,16 \cdot 10^7 \text{ s}\end{aligned}$$

### Miara łukowa kąta

$$\begin{aligned}1 \text{ rad} &= 57,3^\circ = 0,159 \text{ obrotu} \\ \pi \text{ rad} &= 180^\circ = \frac{1}{2} \text{ obrotu}\end{aligned}$$

### Prędkość

$$\begin{aligned}1 \text{ m/s} &= 3,28 \text{ ft/s} = 2,24 \text{ mili/h} \\1 \text{ km/h} &= 0,621 \text{ mili/h} = 0,278 \text{ m/s}\end{aligned}$$

### Siła i ciśnienie

$$\begin{aligned}1 \text{ N} &= 10^5 \text{ dyn} = 0,225 \text{ funta} \\1 \text{ Pa} &= 1 \text{ N/m}^2 = 10 \text{ dyn/cm}^2 \\1 \text{ atm} &= 1,01 \cdot 10^5 \text{ Pa} = 76 \text{ cm Hg}\end{aligned}$$

### Energia i moc

$$\begin{aligned}1 \text{ J} &= 10^7 \text{ ergów} = 0,239 \text{ cal} \\1 \text{ kWh} &= 3,6 \cdot 10^6 \text{ J} \\1 \text{ cal} &= 4,19 \text{ J} \\1 \text{ eV} &= 1,60 \cdot 10^{-19} \text{ J} \\1 \text{ KM} &= 746 \text{ W}\end{aligned}$$

### Magnetyzm

$$1 \text{ T} = 1 \text{ Wb/m}^2 = 10^4 \text{ Gs}$$

\* Obszerniejszy spis przedstawiony jest w dodatku D.

David **Halliday**  
Robert **Resnick**  
Jearl **Walker**

2

# Podstawy fizyki

**RESNICK • HALLIDAY** reaktywacja

- kompletny, nowoczesny podręcznik fizyki nareszcie po polsku !
- aparat matematyczny ograniczony do niezbędnego minimum
- teoria poparta licznymi przykładami
- pytania i zadania sprawdzające po każdym rozdziale
- przejrzysty układ tekstu
- wspaniała szata graficzna
- kolorowe, sugestywne ilustracje wzbogacające i uzupełniające wykład
- nowość: najważniejsze zagadnienia fizyki współczesnej !

**Podstawowy podręcznik dla studentów i uczniów**

**Nieoceniona pomoc dla nauczycieli**

## **Tom 2**

zawiera zagadnienia z następujących dziedzin:

- mechanika klasyczna cd.
- drgania
- fale
- termodynamika

t. 2

ISBN-13: 978-83-01-14107-3  
ISBN-10: 83-01-14107-7

0 3  
9 788301 141073

t. 1-5

ISBN-13: 978-83-01-13997-1  
ISBN-10: 83-01-13997-8

9 788301 139971