

David
Halliday

Robert
Resnick

Jearl
Walker

3

Podstawy

FIZYK

WYDAWNICTWO NAUKOWE PWN

Wybrane właściwości fizyczne (wartości zaokrąglone)

Powietrze (suche, w temp. 20°C i pod ciśn. 1 atm)

| | |
|---|-------------------------|
| gęstość | 1,21 kg/m ³ |
| ciepło właściwe pod stałym ciśnieniem | 1010 J/(kg · K) |
| stosunek ciepł właściwych c_p/c_V | 1,40 |
| prędkość dźwięku | 343 m/s |
| natężenie pola elektrycznego przebiecia | 3 · 10 ⁶ V/m |
| efektywna masa molowa | 0,0289 kg/mol |

Woda

| | |
|--|------------------------|
| gęstość | 1000 kg/m ³ |
| prędkość dźwięku | 1460 m/s |
| ciepło właściwe pod stałym ciśnieniem | 4190 J/(kg · K) |
| ciepło topnienia (w temp. 0°C) | 333 kJ/kg |
| ciepło parowania (w temp. 100°C) | 2260 kJ/kg |
| współczynnik załamania ($\lambda = 589$ nm) | 1,33 |
| masa molowa | 0,0180 kg/mol |

Ziemia

| | |
|--|---|
| masa | 5,98 · 10 ²⁴ kg |
| średni promień | 6,37 · 10 ⁶ m |
| przyspieszenie grawitacyjne na powierzchni Ziemi | 9,8 m/s ² |
| standardowe ciśnienie atmosferyczne | 1,01 · 10 ⁵ Pa |
| okres ruchu sputnika na orbicie odległej od Ziemi o 100 km | 86,3 min |
| promień orbity geostacjonarnej | 42 200 km |
| prędkość ucieczki | 11,2 km/s |
| dipolowy moment magnetyczny | 8,0 · 10 ²² A · m ² |
| średnie pole elektryczne na powierzchni Ziemi | 150 V/m, skierowane w dół |

Odległości od Ziemi

| | |
|--|---------------------------|
| do Księżyca | 3,82 · 10 ⁸ m |
| do Słońca | 1,50 · 10 ¹¹ m |
| do najbliższej gwiazdy | 4,04 · 10 ¹⁶ m |
| do środka naszej Galaktyki | 2,2 · 10 ²⁰ m |
| do galaktyki Andromedy | 2,1 · 10 ²² m |
| do granicy obserwowalnego Wszechświata | ~ 10 ²⁶ m |

Nazwy przedrostków jednostek SI

| Czynnik | Przedrostek | Symbol | Czynnik | Przedrostek | Symbol |
|------------------|-------------|--------|-------------------|-------------|--------|
| 10 ²⁴ | jotta | Y | 10 ⁻¹ | decy | d |
| 10 ²¹ | zetta | Z | 10 ⁻² | centy | c |
| 10 ¹⁸ | eksa | E | 10 ⁻³ | mili | m |
| 10 ¹⁵ | peta | P | 10 ⁻⁶ | mikro | μ |
| 10 ¹² | tera | T | 10 ⁻⁹ | nano | n |
| 10 ⁹ | giga | G | 10 ⁻¹² | piko | p |
| 10 ⁶ | mega | M | 10 ⁻¹⁵ | femto | f |
| 10 ³ | kilo | k | 10 ⁻¹⁸ | atto | a |
| 10 ² | hektó | h | 10 ⁻²¹ | zepto | z |
| 10 ¹ | deka | da | 10 ⁻²⁴ | jokto | y |

Podstawy

FIZYKI

3

David
Halliday

Robert
Resnick

Jearl
Walker

3

Podstawy

FIZYKI

Z języka angielskiego tłumaczyli
Zygmunt Ajduk i Marek Jaworski



W A R S Z A W A 2 0 0 6
W Y D A W N I C T W O N A U K O W E P W N

Dane oryginalu:
David Halliday, Robert Resnick, Jearl Walker
FUNDAMENTALS OF PHYSICS, PART 3
John Wiley & Sons, Inc.

Authorized translation from English language edition published by John Wiley & Sons, Inc.
Copyright © 2001 by John Wiley & Sons, Inc.
All Rights Reserved

Projekt okładki i stron tytułowych **Joanna Sobieraj**

Przekład z języka angielskiego **Zygmunt Ajduk** (rozdziały 22–28)
Marek Jaworski (rozdziały 29–33)

Redaktor naukowy **Mirosław Łukaszewski**

Redaktor **Beata Mikołajek-Zielińska**

Korekta **Małgorzata Kopczyńska**

Copyright © for the Polish edition
by Wydawnictwo Naukowe PWN SA
Warszawa 2003

Wydawnictwo Naukowe PWN SA
00-251 Warszawa, ul. Miodowa 10
tel. 022 69 54 321
faks 022 69 54 031
e-mail: pwn@pwn.com.pl
www.pwn.pl

ISBN-13: 978-83-01-14076-2 t. 3
ISBN-10: 83-01-14076-3

ISBN-13: 978-83-01-13997-1 t. 1–5
ISBN-10: 83-01-13997-8

Wydawnictwo Naukowe PWN SA
Wydanie pierwsze, 2 dodruk
Arkuszy drukarskich 50,5
Skład i łamanie: ArtGraph, Warszawa
Druk ukończono w październiku 2006 r.
Druk i oprawa: GRAFMAR Sp. z o.o.
36-100 Kolbuszowa Dolna, ul. Wiejska 43

SPIS ZAWARTOŚCI WSZYSTKICH TOMÓW

TOM 1

- Rozdział 1. Pomiar
- Rozdział 2. Ruch prostoliniowy
- Rozdział 3. Wektory
- Rozdział 4. Ruch w dwóch i trzech wymiarach
- Rozdział 5. Siła i ruch I
- Rozdział 6. Siła i ruch II
- Rozdział 7. Energia kinetyczna i praca
- Rozdział 8. Energia potencjalna i zachowanie energii
- Rozdział 9. Układy cząstek
- Rozdział 10. Zderzenia
- Rozdział 11. Obroty
- Rozdział 12. Toczenie się ciał, moment siły i moment pędu

TOM 2

- Rozdział 13. Równowaga i sprężystość
- Rozdział 14. Grawitacja
- Rozdział 15. Płyny
- Rozdział 16. Drgania
- Rozdział 17. Fale I
- Rozdział 18. Fale II
- Rozdział 19. Temperatura, ciepło
i pierwsza zasada termodynamiki
- Rozdział 20. Kinetyczna teoria gazów
- Rozdział 21. Entropia i druga zasada termodynamiki

TOM 3

- Rozdział 22. Ładunek elektryczny
- Rozdział 23. Pole elektryczne
- Rozdział 24. Prawo Gaussa

- Rozdział 25. Potencjał elektryczny
- Rozdział 26. Pojemność elektryczna
- Rozdział 27. Prąd elektryczny i opór elektryczny
- Rozdział 28. Obwody elektryczne
- Rozdział 29. Pole magnetyczne
- Rozdział 30. Pole magnetyczne wywołane przepływem prądu
- Rozdział 31. Zjawisko indukcji i indukcyjność
- Rozdział 32. Magnetyzm materii; równanie Maxwella
- Rozdział 33. Drgania elektromagnetyczne i prąd zmienny

TOM 4

- Rozdział 34. Fale elektromagnetyczne
- Rozdział 35. Obrazy
- Rozdział 36. Interferencja
- Rozdział 37. Dyfrakcja
- Rozdział 38. Teoria względności

TOM 5

- Rozdział 39. Fotony i fale materii
- Rozdział 40. Jeszcze o falach materii
- Rozdział 41. Wszystko o atomach
- Rozdział 42. Przewodnictwo elektryczne ciał stałych
- Rozdział 43. Fizyka jądrowa
- Rozdział 44. Energia jądrowa
- Rozdział 45. Kwarki, leptony i Wielki Wybuch

Dodatek

Odpowiedzi do sprawdzianów oraz pytań i zadań
o numerach nieparzystych
Skorowidz

SPIS TABEL

- 22.1. Ładunki cząstek 11
- 23.1. Wybrane pola elektryczne 20
- 23.2. Niektóre wielkości określające rozkład ładunku elektrycznego 28
- 26.1. Niektóre właściwości dielektryków 116
- 27.1. Opór elektryczny właściwy dla niektórych substancji w temperaturze pokojowej (20°C) 137
- 27.2. Niektóre właściwości elektryczne miedzi i krzemu 146
- 28.1. Oporniki i kondensatory połączone szeregowo i równolegle 167
- 29.1. Przybliżone wartości indukcji magnetycznej 188
- 29.2. Wartości niektórych dipolowych momentów magnetycznych 209
- 32.1. Równania Maxwella 312
- 33.1. Porównanie energii w dwóch układach drgajcych 324
- 33.2. Zależności fazowe i amplitudowe dla zmiennych natężeń prądu i napięć 338

SPIS TREŚCI

ROZDZIAŁ 22

Ładunek elektryczny

Dlaczego cukierki wintergrinowe świecą?

- 22.1. Elekromagnetyzm 2
- 22.2. Ładunek elektryczny 2
- 22.3. Przewodniki i izolatory 4
- 22.4. Prawo Coulomba 5
- 22.5. Ładunek jest skwantowany 11
- 22.6. Ładunek jest zachowany 13
- Podsumowanie 14
- Pytania 14
- Zadania 16

ROZDZIAŁ 23

Pole elektryczne

Skąd biorą się potężne wyładowania elektryczne nad wulkanem?

- 23.1. Jeszcze o ładunkach i siłach 19
- 23.2. Pole elektryczne 19
- 23.3. Linie pola elektrycznego 21
- 23.4. Pole elektryczne ładunku punktowego 23
- 23.5. Pole elektryczne dipola elektrycznego 26
- 23.6. Pole elektryczne naładowanej linii 27
- 23.7. Pole elektryczne naładowanej tarczy 32
- 23.8. Ładunek punktowy w polu elektrycznym 33
- 23.9. Dipol w polu elektrycznym 36
- Podsumowanie 39
- Pytania 40
- Zadania 42

ROZDZIAŁ 24

Prawo Gaussa

Jak szeroka jest błyskawica?

- 24.1. Nowe spojrzenie na prawo Coulomba 47
- 24.2. Strumień 47
- 24.3. Strumień pola elektrycznego 48
- 24.4. Prawo Gaussa 51
- 24.5. Prawo Gaussa a prawo Coulomba 53
- 24.6. Izolowany przewodnik naładowany 55
- 24.7. Zastosowanie prawa Gaussa: symetria walcowa 58
- 24.8. Zastosowanie prawa Gaussa:
symetria płaszczyznowa 60
- 24.9. Zastosowanie prawa Gaussa: symetria sferyczna 63
- Podsumowanie 65
- Pytania 65
- Zadania 66

ROZDZIAŁ 25

Potencjał elektryczny

Dlaczego należy się bać, gdy nagle włosy stają nam na głowie?

- 25.1. Elektryczna energia potencjalna 73
- 25.2. Potencjał elektryczny 74
- 25.3. Powierzchnie ekwipotencjalne 77
- 25.4. Obliczanie potencjału na podstawie natężenia pola 79
- 25.5. Potencjał pola ładunku punktowego 81
- 25.6. Potencjał pola układu ładunków punktowych 82
- 25.7. Potencjał pola dipola elektrycznego 84
- 25.8. Potencjał pola ładunku o ciągłym rozkładzie 85
- 25.9. Obliczanie natężenia pola na podstawie potencjału 88

| | |
|---|----|
| 25.10. Elektryczna energia potencjalna układu ładunków punktowych | 89 |
| 25.11. Potencjał izolowanego naładowanego przewodnika | 91 |
| Podsumowanie | 93 |
| Pytania | 94 |
| Zadania | 96 |

ROZDZIAŁ 26

| | |
|---|-----|
| Pojemność elektryczna | |
| Jak można zatrzymać migotanie komór serca z dala od szpitala? | |
| 26.1. Zastosowanie kondensatorów | 102 |
| 26.2. Pojemność elektryczna | 102 |
| 26.3. Obliczanie pojemności elektrycznej | 104 |
| 26.4. Kondensatory połączone równolegle i szeregowo | 108 |
| 26.5. Energia zmagazynowana w polu elektrycznym | 113 |
| 26.6. Kondensator z dielektrykiem | 115 |
| 26.7. Dielektryki: obraz mikroskopowy | 118 |
| 26.8. Dielektryki i prawo Gaussa | 119 |
| Podsumowanie | 122 |
| Pytania | 123 |
| Zadania | 124 |

ROZDZIAŁ 27

| | |
|---|-----|
| Prąd elektryczny i opór elektryczny | |
| Dlaczego sterowiec Hindenburg stanął w płomieniach? | |
| 27.1. Ładunki w ruchu i prądy elektryczne | 129 |
| 27.2. Natężenie prądu elektrycznego | 129 |
| 27.3. Gęstość prądu elektrycznego | 132 |
| 27.4. Opór elektryczny i opór elektryczny właściwy | 135 |
| 27.5. Prawo Ohma | 140 |
| 27.6. Prawo Ohma — obraz mikroskopowy | 142 |
| 27.7. Moc w obwodach elektrycznych | 144 |
| 27.8. Półprzewodniki | 145 |
| 27.9. Nadprzewodniki | 147 |
| Podsumowanie | 148 |
| Pytania | 149 |
| Zadania | 150 |

ROZDZIAŁ 28

Obwody elektryczne

| | |
|--|-----|
| Jak węgorz elektryczny wytwarza prąd o dużym natężeniu? | |
| 28.1. „Pompowanie” ładunków | 155 |
| 28.2. Praca, energia i SEM | 155 |
| 28.3. Obliczanie natężenia prądu w obwodzie o jednym oczku | 157 |
| 28.4. Inne obwody o jednym oczku | 159 |
| 28.5. Różnice potencjałów | 162 |
| 28.6. Obwody o wielu oczkach | 164 |
| 28.7. Amperomierz i woltomierz | 171 |
| 28.8. Obwody RC | 171 |
| Podsumowanie | 176 |
| Pytania | 177 |
| Zadania | 178 |

ROZDZIAŁ 29

Pola magnetyczne

| | |
|---|-----|
| Dlaczego zorza jest szeroka i wysoka, lecz bardzo cienka? | |
| 29.1. Pole magnetyczne | 185 |
| 29.2. Definicja wektora \vec{B} | 185 |
| 29.3. Pola skrzyżowane: odkrycie elektronu | 190 |
| 29.4. Pola skrzyżowane: zjawisko Halla | 192 |
| 29.5. Ruch cząstek naładowanych po okręgu | 195 |
| 29.6. Cyklotrony i synchrotrony | 200 |
| 29.7. Siła magnetyczna działająca na przewodnik z prądem | 202 |
| 29.8. Moment siły działający na ramkę z prądem | 205 |
| 29.9. Dipolowy moment magnetyczny | 208 |
| Podsumowanie | 210 |
| Pytania | 211 |
| Zadania | 212 |

ROZDZIAŁ 30

Pola magnetyczne wywołane przepływem prądu

Jak można wytrzeć pojazd w przestrzeni kosmicznej?

| | |
|--|-----|
| 30.1. Obliczanie indukcji pola magnetycznego wywołanego przepływem prądu | 219 |
|--|-----|

- 30.2. Siły działające między dwoma równoległymi przewodami z prądem 226
 30.3. Prawo Ampère'a 228
 30.4. Solenoidy i toroidy 232
 30.5. Cewka z prądem jako dipol magnetyczny 235
 Podsumowanie 238
 Pytania 239
 Zadania 240

ROZDZIAŁ 31

Zjawisko indukcji i indukcyjność

Dlaczego użycie gitar elektrycznych zrewolucjonizowało muzykę rockową?

- 31.1. Dwa symetryczne przypadki 248
 31.2. Dwa doświadczenia 248
 31.3. Prawo indukcji Faradaya 249
 31.4. Reguła Lenza 252
 31.5. Zjawisko indukcji i przekazywanie energii 256
 31.6. Indukowane pola elektryczne 259
 31.7. Cewki i indukcyjność 264
 31.8. Samoindukcja 266
 31.9. Obwody RL 267
 31.10. Energia zmagazynowana w polu magnetycznym 271
 31.11. Gęstość energii pola magnetycznego 273
 31.12. Indukcja wzajemna 275
 Podsumowanie 278
 Pytania 279
 Zadania 281

ROZDZIAŁ 32

Magnetyzm materii: równania Maxwell'a

Jak żaba może lewitować w polu magnetycznym?

- 32.1. Magnesy 290
 32.2. Prawo Gaussa dla pól magnetycznych 290
 32.3. Magnetyzm ziemski 292
 32.4. Magnetyzm i elektrony 293
 32.5. Materiały magnetyczne 298
 32.6. Diamagnetyzm 299
 32.7. Paramagnetyzm 301
 32.8. Ferromagnetyzm 303

- 32.9. Indukowane pola magnetyczne 306
 32.10. Prąd przesunięcia 309
 32.11. Równania Maxwell'a 312
 Podsumowanie 313
 Pytania 314
 Zadania 315

ROZDZIAŁ 33

Drgania elektromagnetyczne i prąd zmienny

Dlaczego energię elektryczną przesyła się liniami o dużym potencjale, a nie o dużym natężeniu prądu?

- 33.1. Nowa fizyka — tradycyjna matematyka 320
 33.2. Drgania obwodu LC, opis jakościowy 320
 33.3. Analogiczne układy drgające: elektryczny i mechaniczny 324
 33.4. Drgania LC, opis ilościowy 325
 33.5. Drgania tłumione w obwodzie RLC 329
 33.6. Prąd zmienny 330
 33.7. Drgania wymuszone 332
 33.8. Trzy proste obwody 332
 33.9. Obwód szeregowy RLC 339
 33.10. Moc w obwodach prądu zmiennego 344
 33.11. Transformatory 347
 Podsumowanie 351
 Pytania 353
 Zadania 354

DODATKI

- A. Międzynarodowy Układ Jednostek (SI) A1
 B. Niektóre podstawowe stałe fizyczne A3
 C. Niektóre dane astronomiczne A5
 D. Współczynniki zamiany jednostek A7
 E. Wzory matematyczne A11
 F. Właściwości pierwiastków A14
 G. Układ okresowy pierwiastków A17

**Odpowiedzi do sprawdzianów
oraz pytań i zadań
o numerach nieparzystych B1**

Skorowidz

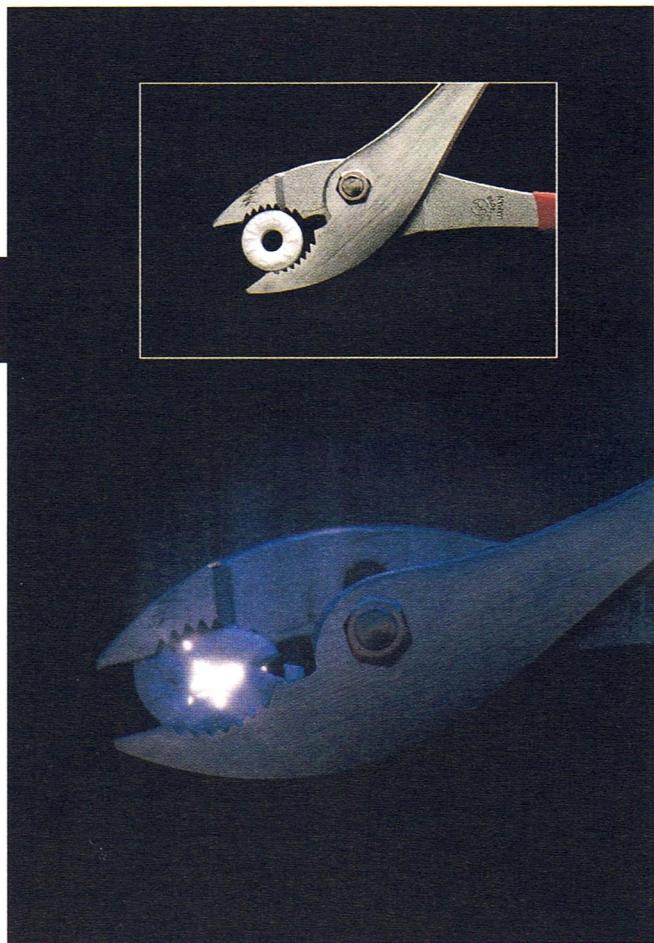
22 Ładunek elektryczny

Jeśli po 15-minutowej adaptacji oczu do ciemności spojrzysz na kolegę jedzącego cukierka wintergrinowego, to po każdym ugryzieniu przez niego cukierka dostrzeżesz w jego ustach słaby błysk niebieskiego światła.

(Aby nie uszkodzić zębów, można ścisnąć cukierka szczypcami, jak na fotografii).

Co jest przyczyną zjawiska, zwanego zwykle „iskrzeniem”?

Odpowiedź znajdziesz w tym rozdziale.



22.1. Elektromagnetyzm

Już starożytni filozofowie greccy wiedzieli, że potarty kawałek bursztynu prycziąga kawałczki słomy. Ta starodawna obserwacja jest początkiem drogi, prowadzącej do wieku elektroniki, w którym żyjemy. (Dowodem tego związku jest wyraz *elektron*, wywodzący się od greckiego słowa, oznaczającego bursztyn). To również Grecy zaobserwowali, że niektóre, występujące w przyrodzie „kamienie” (minerały zwane dzisiaj magnetytami) przyciągają żelazo.

Z tych skromnych doświadczeń powstała nauka o elektryczności i magnetyzmie, które to dziedziny przez wieki rozwijały się niezależnie, aż do 1820 r., kiedy Hans Christian Oersted znalazł między nimi związek: przepływ prądu elektrycznego w przewodniku może spowodować odchylenie igły magnetycznej kompasu. Warto dodać, że Oersted dokonał tego odkrycia, przygotowując pokaz do wykładu dla studentów fizyki.

Nowa nauka o *elektromagnetyzmie* (opisująca łącznie zjawiska elektryczne i magnetyczne) rozwinęła się dzięki pracy uczonych z wielu krajów. Wśród nich należy wymienić przede wszystkim Michaela Faradaya, prawdziwie utalentowanego eksperymentatora, obdarzonego intuicją fizyczną i wyobraźnią, czego dowodzi fakt, że jego notatki laboratoryjne nie zawierają ani jednego równania. W połowie XIX w. James Clerk Maxwell zapisał idee Faradaya w postaci matematycznej, wprowadzając dodatkowo wiele nowych pomysłów, i stworzył solidne podstawy teoretyczne elektromagnetyzmu.

Podstawowe równania elektromagnetyzmu, zwane obecnie równaniami Maxwella podane są w tabeli 32.1. W najbliższych jedenastu rozdziałach będziemy chcieli je wyprowadzić, lecz już teraz warto spojrzeć na nie, aby zobaczyć, do czego dążymy.

22.2. Ładunek elektryczny

Jeśli przejdziesz po suchym dywanie w czasie ładnej pogody, to po zbliżeniu palca do metalowej klamki możesz zobaczyć iskrę. Reklamy telewizyjne uświadamiają nam problem „statycznego przylegania” odzieży. Wszyscy znamy błyskawice. Każde z tych zjawisk jest drobnym przejawem ogromnych ilości *ładunku elektrycznego*, który jest zmagażynowany w otaczającym nas świecie i nawet w naszych ciałach. **Ładunek elektryczny** jest nieodłączną właściwością cząstek elementarnych, z których składają się wszystkie ciała, czyli właściwością, która stale towarzyszy tym cząstkom.

Ogromne ilości ładunku w każdym ciele są zwykle niewidoczne, gdyż ciało zawiera jednakowe ilości dwóch rodzajów ładunku: *ładunku dodatniego* i *ładunku ujemnego*. Przy takiej równości, czyli zrównoważeniu ładunku mówimy o ciele *elektrycznie obojętnym (neutralnym)*, czyli ciele o zerowym ładunku *wypadkowym*. Jeśli dwa rodzaje ładunku nie równoważą się, to ciało ma niezerowy ładunek wypadkowy. Mówimy, że ciało jest *naładowane*, jeśli ma niezrównoważony ładunek, czyli niezerowy ładunek wypadkowy. Ładunek wypadkowy jest zawsze bardzo mały w porównaniu z ilością ładunku dodatniego i ładunku ujemnego, znajdujących się w ciele.

Ciała naładowane wzajemnie na siebie oddziałują. Możesz to wykazać, elektryzując najpierw szklany pręt przez pocieranie jedwabiem jego jednego końca. W punktach styczności pręta z jedwabiem pewne ilości ładunku przenoszone są z jednego ciała na drugie, naruszając przy tym nieco elektryczną obojętność każdego z nich. (Pocieramy pręt jedwabiem, aby zwiększyć liczbę punktów styczności, a stąd i ilość przekazywanego ładunku). Zawies teraz naładowany pręt na nici, aby go odizolować elektrycznie od otoczenia, czyli zapobiec zmianie jego ładunku. Jeśli zbliżamy do niego podobnie naładowany pręt szklany (rys. 22.1a), to obydwa pręty odpychają się, czyli każdy pręt doznaje działania siły odpychającej go od drugiego pręta. Jeśli jednak potarty futrem pręt plastikowy zbliżymy do zawieszonego pręta szklanego (rys. 22.1b), to te dwa pręty będą się wzajemnie przyciągać, czyli każdy pręt dozna działania siły, przyciągającej go do drugiego pręta.

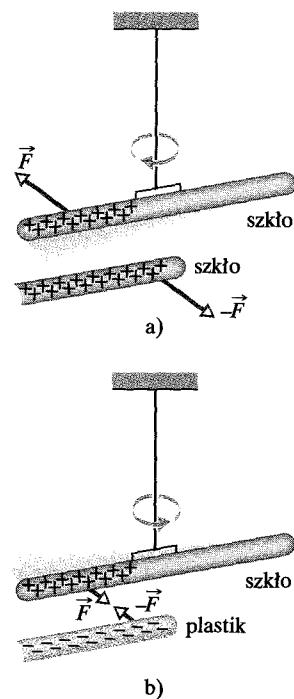
Ideę tych pokazów można wyjaśnić przez wprowadzenie dodatnich i ujemnych ładunków. Gdy szklany pręt pocieramy jedwabiem, szkło traci pewien ujemny ładunek elektryczny i uzyskuje mały, niezrównoważony ładunek dodatni (reprezentowany przez znaki plus na rysunku 22.1a). Gdy plastikowy pręt pocieramy futrem, wówczas pręt uzyskuje pewien niezrównoważony ładunek ujemny (reprezentowany przez znaki minus na rysunku 22.1b). Nasze dwa pokazy można podsumować w następujący sposób:

► Ładunki elektryczne o takich samych znakach odpychają się, a ładunki elektryczne o przeciwnych znakach się przyciągają.

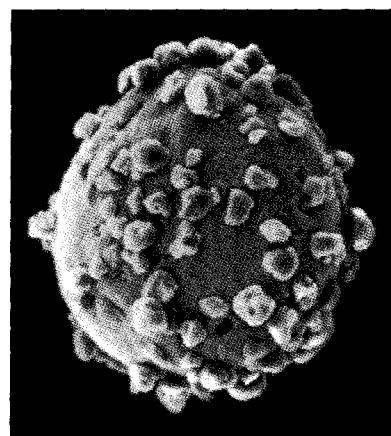
W paragrafie 22.4 zapiszemy tę regułę w postaci ilościowego prawa Coulomba dla siły elektrostatycznej (elektrycznej), działającej między ładunkami. Określenia elektrostatyczna używa się dla podkreślenia faktu, że ładunki albo spoczywają, albo poruszają się bardzo wolno.

Określenia „dodatni” i „ujemny”, czyli znaki dla ładunków elektrycznych zostały ustalone umownie przez Benjamina Franklina. Mógł on oczywiście zmienić nawzajem te określenia lub użyć innej pary przeciwnych określeń dla rozróżnienia dwóch rodzajów ładunku. (Franklin był uczonym, cieszącym się międzynarodowym uznaniem. Nawet uważa się, że jego sukcesy dyplomatyczne we Francji podczas amerykańskiej wojny o niepodległość były łatwiejsze do osiągnięcia, a może nawet w ogóle były zasługą tego, że tak bardzo poważano go jako uczzonego).

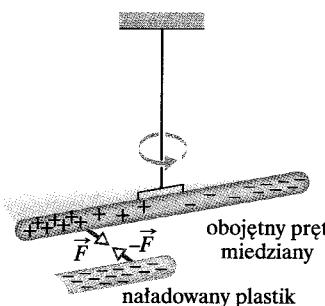
Wzajemne przyciąganie się i odpychanie ciał naładowanych ma wiele zastosowań przemysłowych, m. in.: przy malowaniu elektrostatycznym rozpyloną farbą, napyaniu warstwy proszku, osadzaniu się popiołów w kominach, bezdotykovym druku atramentowym i kserowaniu. Na rysunku 22.2 przedstawiono drobną kulę nośnika w kserokopiarce, pokrytą cząstками czarnego proszku (zwanego tonerem), które przylegają do niej z powodu działania sił elektrostatycznych. Ujemnie naładowane cząstki tonera są następnie przyciągane do obracającego się bębna, na którym znajduje się dodatnio naładowany obraz kopiowanego dokumentu. Naładowana kartka papieru przyciąga potem do siebie cząstki tonera z bębna, które na koniec są termicznie utrwalane, tworząc fotokopię.



Rys. 22.1. a) Dwa pręty naładowane ładunkami tego samego znaku się odpychają. b) Dwa pręty naładowane ładunkami o przeciwnych znakach się przyciągają. Znaki plus oznaczają wypadkowy ładunek dodatni, a znaki minus — wypadkowy ładunek ujemny



Rys. 22.2. Kulka nośnika z kserokopiarki pokryta jest cząstkami tonera, które do niej przylegają w wyniku przyciągania elektrostatycznego. Średnica kulki wynosi około 0,3 mm



22.3. Przewodniki i izolatory

W niektórych substancjach, np. metalach, wodzie z kranu i ciele ludzkim, niektóre ładunki ujemne mogą się dość swobodnie poruszać. Takie ośrodki materialne nazywamy **przewodnikami**. W innych substancjach, np. szkle, chemicznie czystej wodzie i plastiku nie ma ładunków, które mogą poruszać się swobodnie. Takie ośrodki materialne nazywamy **izolatorami**.

Pręta miedzianego, trzymanego w ręku, nie można naładować przez pocieranie wełną, ponieważ ciało ludzkie i pręt są przewodnikami. Pocieranie powoduje pojawienie się niezrównoważonego ładunku na pręcie. Jego nadmiar natychmiast odpływa z pręta przez ciało ludzkie do podłogi (połączonej z powierzchnią Ziemi) i pręt szybko staje się obojętny.

Ustanowienie przewodzącego połączenia między ciałem i powierzchnią Ziemi nazywamy *uziemieniem* ciała, a zubożeniem ciała (przez pozbycie się niezrównoważonego ładunku dodatniego lub ujemnego) nazywamy *rozładowaniem* ciała. Jeśli natomiast pręt miedziany trzymamy za pomocą izolowanej rączki, to eliminujemy drogę przewodzącą do Ziemi. Pręt można wtedy naładować przez pocieranie, jeśli tylko nie dotkniemy go bezpośrednio ręką.

Właściwości przewodników i izolatorów wynikają z budowy atomów i właściwości elektrycznych ich składników. Atomy zbudowane są z dodatnio naładowanych *protonów*, ujemnie naładowanych *elektronów* i elektrycznie obojętnych *neutronów*. Protony i neutrony są upakowane ściśle w *jądrze* znajdującym się w samym środku atomu.

Ładunek pojedynczego elektronu i ładunek pojedynczego protonu są sobie równe co do wartości bezwzględnej, ale mają przeciwny znak. Elektrycznie obojętny atom składa się więc z takiej samej liczby elektronów i protonów. Elektryny utrzymują się w pobliżu jądra, bo mają przeciwny znak ładunku niż protony w jądrze i dlatego są przyciągane przez jądro.

Gdy atomy przewodnika, np. miedzi, znajdują się blisko siebie, tworząc ciało stałe, niektóre z ich zewnętrznych (czyli najdłużej związanych) elektronów przestają być związane z poszczególnymi atomami i mogą swobodnie wędrować w całym ciele, pozostawiając dodatnio naładowane atomy (czyli *dodatnie jony*). Elektryny swobodne nazywamy *elektronami przewodnictwa*. W izolatorze jest ich bardzo mało lub nie ma ich wcale.

Z doświadczenia przedstawionego na rysunku 22.3 wynika, że w przewodniku istnieją ładunki swobodne. Ujemnie naładowany pręt plastikowy przyciąga którykolwiek koniec izolowanego obojętnego pręta miedzianego, gdyż elektryny przewodnictwa w bliższym końcu pręta miedzianego są odpychane przez ujemny ładunek pręta plastikowego. Przesuwają się one do dalszego końca pręta miedzianego, pozostawiając bliższy koniec bez elektronów, czyli z niezrównoważonym ładunkiem dodatnim. Ładunek dodatni przyciąga ujemny ładunek w przecie plastikowym. Chociaż pręt miedziany jako całość jest nadal obojętny, to ma *indukowane ładunki*, czyli część dodatnich i ujemnych ładunków pręta ulega rozdzieleniu wskutek obecności naładowanego pręta plastikowego w jego pobliżu.

Podobnie, jeśli do jednego z końców obojętnego pręta miedzianego zbliżymy dodatnio naładowany pręt szklany, to elektryny przewodnictwa w przecie

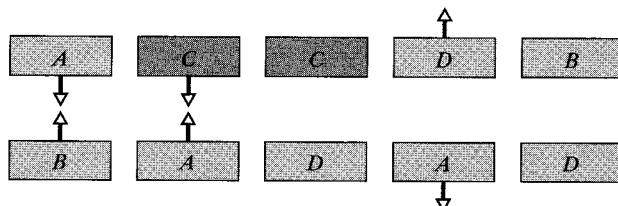
miedzianym zostaną przyciągnięte do tego końca. Ten koniec staje się ujemnie naładowany, a drugi — dodatnio, czyli znów w przecie pojawiają się ładunki indukowane. Chociaż pręt miedziany jako całość jest nadal obojętny, to pręt ten i pręt szklany się przyciągają. (Na rysunku 22.4 przedstawiono inne doświadczenie ilustrujące istnienie ładunków indukowanych).

Warto podkreślić, że tylko elektrony przewodnictwa, o ujemnych ładunkach, mogą się swobodnie poruszać; dodatnie jony pozostają nieruchome. Ciało staje się więc dodatnio naładowane tylko w wyniku *odpływów ładunków ujemnych*.

Półprzewodniki, np. krzem i german, są materiałami pośrednimi między przewodnikami i izolatorami. Rewolucja mikroelektroniczna, która tak wszechnie zmieniła nasze życie, jest oparta na przyrządach, zbudowanych z materiałów półprzewodnikowych.

Na koniec warto dodać, że istnieją także **nadprzewodniki**, których nazwa wiąże się z brakiem oporu przy przepływie w nich ładunku elektrycznego. Gdy ładunek porusza się w ośrodku materialnym, mówimy o istnieniu **prądu elektrycznego** w tym ośrodku. W zwykłych materiałach, nawet w dobrych przewodnikach, występuje opór przy przepływie w nich ładunku. Natomiast w nadprzewodniku opór nie jest po prostu mały — jest dokładnie równy零. Gdy w nadprzewodzącym pierścieniu wzbudzimy przód elektryczny, będzie on płynąć „zawsze”, bez potrzeby podtrzymywania go przez jakieś źródło energii.

SPRAWDZIAN 1: Na rysunku przedstawiono pięć par płyt: A, B i D są naładowanymi płytami plastиковymi, a C jest obojętną elektrycznie płytą miedzianą. Dla trzech par zaznaczono siły elektrostatyczne, działające między nimi. Czy w pozostałych dwóch parach płytki przyciągają się, czy odpychają?



22.4. Prawo Coulomba

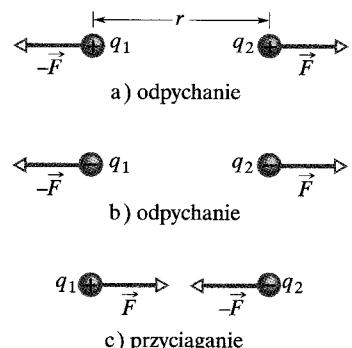
Jeśli dwie naładowane cząstki (zwane także *ładunkami punktowymi*) o ładunkach q_1 i q_2 znajdują się w odległości r , to **siła elektrostatyczna** przyciągania lub odpychania między nimi ma wartość:

$$F = k \frac{|q_1||q_2|}{r^2} \quad (\text{prawo Coulomba}), \quad (22.1)$$

gdzie k jest stałą. Każda z cząstek oddziałuje na drugą siłą o tej wartości; te dwie siły spełniają trzecią zasadę dynamiki. Jeśli cząstki *odpychają się*, to siła działająca na każdą cząstkę jest skierowana *od* drugiej cząstki (rys. 22.5a i 22.5b). Jeśli cząstki przyciągają się, to siła działająca na każdą cząstkę jest skierowana *do* drugiej cząstki (rys. 22.5c).



Rys. 22.4. To nie jest pokaz akrobacyjny, ale poważne doświadczenie wykonane w 1774 r., w celu udowodnienia, że ciało ludzkie jest przewodnikiem elektrycznym. Na rycinie przedstawiono osobę, zawieszoną na nieprzewodzących linach, którą ładuje się elektrycznie, używając naładowanego pręta (dotykając zapewne ciała, a nie spodni). Jeśli osoba zbliża twarz, lewą rękę lub przewodzącą kulę i pręt w prawej ręce do kawałków papieru na płytkach, to wskutek indukowania się na papierze ładunku kawałki papieru zaczynają wzrosnąć się do niej w powietrzu



Rys. 22.5. Dwie naładowane cząstki znajdujące się w odległości r odpychają się, jeśli ich ładunki są: a) obydwa dodatnie, b) obydwa ujemne. c) Cząstki przyciągają się, jeśli ich ładunki mają przeciwnie znaki. W każdym z tych trzech przypadków siła działająca na jedną cząstkę jest równa co do wartości siłie działającej na drugą cząstkę, lecz jest przeciwnie skierowana

Wzór (22.1) nosi nazwę **prawa Coulomba**, od nazwiska Charlesa Augustaina Coulomba, który doświadczalnie w 1785 roku doszedł do tego wzoru. Zauważ, że postać wzoru (22.1) jest taka sama, jak wzoru Newtona dla siły grawitacyjnej, działającej między dwiema cząstkami o masach m_1 i m_2 , znajdującymi się w odległości r :

$$F = G \frac{m_1 m_2}{r^2}, \quad (22.2)$$

gdzie G jest stałą grawitacyjną.

Stałą k we wzorze (22.1), przez analogię do stałej grawitacyjnej G ze wzoru (22.2), można nazywać stałą elektrostatyczną. W obydwu wzorach występuje w mianowniku kwadrat odległości, a w liczniku iloczyn wielkości, charakteryzujących oddziałyujące cząstki — mas w jednym przypadku, a ładunków w drugim. Różnica między nimi polega na tym, że siły grawitacyjne są zawsze siłami przyciągania, a siły elektrostatyczne, zależnie od znaków dwóch ładunków, mogą być siłami przyciągania lub odpychania. Różnica wynika stąd, że mamy tylko jeden rodzaj masy, ale dwa rodzaje ładunków (we wzorze (22.1) występują dlatego znaki wartości bezwzględnej, a we wzorze (22.2) nie).

Prawo Coulomba zostało wielokrotnie potwierdzone doświadczalnie i nigdy nie znaleziono od niego odstępstw. Pozostaje ono słuszne nawet dla atomu, opisując poprawnie siłę, działającą między dodatnio naładowanym jądrem i każdym z ujemnie naładowanych elektronów, chociaż w tym przypadku mechanika klasyczna Newtona zawodzi i trzeba ją zastąpić fizyką kwantową. To proste prawo pozwala również poprawnie określić siły wiążące atomy w cząsteczki oraz siły wiążące atomy i cząsteczki w ciała stałe i ciecze.

Ze względów praktycznych (związkowych z dokładnością pomiarów) jednostka ładunku elektrycznego w układzie SI jest jednostką pochodną jednostki natężenia prądu elektrycznego, którą jest amper (A). Jednostką ładunku jest **kulomb** (C): *jeden kulomb to ilość ładunku, przepływającego przez przekrój poprzeczny przewodnika w ciągu 1 sekundy, jeśli przez przewodnik płynie prąd o natężeniu 1 ampera.* W paragrafie 30.2 opisujemy, jak doświadczalnie zdefiniowany jest amper. W ogólności możemy napisać:

$$dq = Idt, \quad (22.3)$$

gdzie dq (w kulombach) jest ładunkiem, przenoszonym przez prąd o natężeniu I (w amperach) w przedziale czasu dt (w sekundach).

Z powodów historycznych (i ze względu na prostszą postać wielu innych wzorów) stałą elektrostatyczną k we wzorze (22.1) zapisuje się jako $1/(4\pi\epsilon_0)$. Wtedy prawo Coulomba przyjmuje postać

$$F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{|q_1||q_2|}{r^2} \quad (\text{prawo Coulomba}). \quad (22.4)$$

Stałe we wzorach (22.1) i (22.4) mają wartość

$$k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} = 8,99 \cdot 10^9 \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{C}^2. \quad (22.5)$$

Wielkość ϵ_0 , zwana **przenikalnością elektryczną próżni** (stałą elektryczną), występuje nieraz we wzorach samodzielnie i ma wartość:

$$\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12} \text{ C}^2/(\text{N} \cdot \text{m}^2). \quad (22.6)$$

Innym jeszcze podobieństwem między siłą grawitacyjną i siłą elektrostatyczną jest to, że obie siły spełniają zasadę superpozycji. Jeśli mamy n cząstek naładowanych, to oddziałują one niezależnie w parach i siła wypadkowa działająca na jakąkolwiek z nich, np. cząstce 1, jest równa sumie wektorowej:

$$\vec{F}_{1,\text{wyp}} = \vec{F}_{12} + \vec{F}_{13} + \vec{F}_{14} + \vec{F}_{15} + \cdots + \vec{F}_{1n}, \quad (22.7)$$

gdzie np. \vec{F}_{14} jest siłą oddziaływania cząstki 4 na cząstkę 1. Taki sam wzór jest słuszny dla siły grawitacyjnej.

Na koniec przypomnijmy sobie dwa twierdzenia o powłoce, których używaliśmy przy omawianiu zagadnień związanych z grawitacją, gdyż mają one swoje odpowiedniki w elektrostatyce:

- Jednorodnie naładowana powłoka kulista przyciąga lub odpycha naładowaną cząstkę znajdująca się na zewnątrz powłoki tak, jakby cały ładunek tej powłoki był skupiony w jej środku.
- Jeżeli cząstka naładowana znajduje się wewnętrz jednorodnie naładowanej powłoki kulistej, to wypadkowa siła elektrostatyczna oddziaływania powłoki na cząstkę jest równa零.

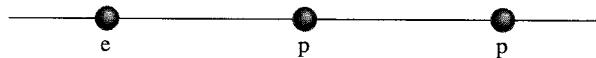
(W pierwszym twierdzeniu należy założyć, że ładunek na powłoce jest dużo większy od ładunku cząstki, gdyż wtedy można zaniedbać zmianę rozkładu ładunku na powłoce, spowodowaną obecnością ładunku cząstki).

Przewodniki kuliste

Nadmiarowy ładunek na kulistej powłoce z materiału przewodzącego rozkłada się jednorodnie na jej (zewnętrznej) powierzchni. Jeśli na przykład umieścimy nadmiarowe elektrony na kulistej powłoce metalowej, to elektrony, odpychając się, starają się od siebie oddalić i rozprzestrzeniają się po dostępnej powierzchni, aż rozłożą się na niej jednorodnie. Rozkład taki maksymalizuje odległości między parami nadmiarowych elektronów. Zgodnie z pierwszym twierdzeniem o powłoce, będzie ona wtedy przyciągać lub odpychać ładunki, znajdujące się na zewnątrz powłoki tak, jakby cały nadmiarowy ładunek był skupiony w jej środku.

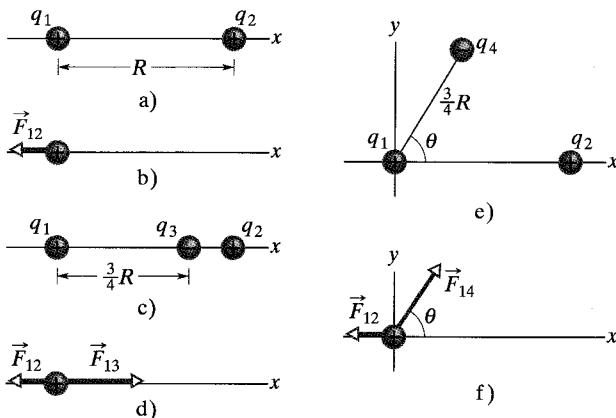
Po usunięciu pewnego ładunku ujemnego z kulistej powłoki metalowej powstały na powłoce ładunek dodatni jest także jednorodnie rozłożony na jej powierzchni. Jeśli np. usuniemy n elektronów, to powstanie n miejsc z ładunkiem dodatnim (miejsc pozbawionych elektronu), rozmiieszczonych jednorodnie na powłoce. Zgodnie z pierwszym twierdzeniem o powłoce, będzie ona znów przyciągać lub odpychać ładunek, znajdujący się na zewnątrz powłoki tak, jakby cały niezrównoważony ładunek powłoki znajdował się w jej środku.

SPRAWDZIAN 2: Na rysunku przedstawiono dwa protony (symbol p) i jeden elektron (symbol e), umieszczone na prostej. W jakim kierunku działają: a) siła elektrostatyczna oddziaływania elektronu na środkowy proton, b) siła elektrostatyczna oddziaływania drugiego protonu na środkowy proton, c) wypadkowa siła elektrostatyczna działająca na środkowy proton?



Przykład 22.1

a) Na rysunku 22.6a przedstawiono dwie dodatnio naładowane cząstki, umieszczone na osi x . Ładunki cząstek wynoszą $q_1 = 1,60 \cdot 10^{-19} \text{ C}$ i $q_2 = 3,20 \cdot 10^{-19} \text{ C}$, a odległość cząstek wynosi $R = 0,02 \text{ m}$. Jaka jest wartość i kierunek siły elektrostatycznej \vec{F}_{12} oddziaływania cząstki 2 na cząstkę 1?



Rys. 22.6. Przykład 22.1. a) Dwie naładowane cząstki o ładunkach q_1 i q_2 znajdują się na osi x w odległości R . b) Diagram sił dla cząstki 1 ilustruje działającą na nią siłę elektrostatyczną, pochodzącą od cząstki 2. c) Cząstka 3 znajduje się teraz na osi x , razem z cząstzkami 1 i 2. d) Diagram sił dla cząstki 1. e) Cząstka 4 znajduje się na linii, tworzącej kąt θ z osią x , na której nadal znajdują się cząstki 1 i 2. f) Diagram sił dla cząstki 1

ROZWIĄZANIE:

Obydwie cząstki są dodatnio naładowane, dlatego też cząstka 1 jest odpychana przez cząstkę 2, a wartość siły jest określona wzorem (22.4). Stąd też siła \vec{F}_{12} , działająca na cząstkę 1, jest skierowana *od* cząstki 2, w ujemnym kierunku osi x (zgodnie z diagramem sił na rysunku 22.6b). Używając wzoru (22.4), po podstawieniu odległości R zamiast r , możemy obliczyć wartość siły F_{12} :

$$\begin{aligned} F_{12} &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{|q_1||q_2|}{R^2} \\ &= (8,99 \cdot 10^9 \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{C}^2) \cdot \frac{(1,60 \cdot 10^{-19} \text{ C})(3,20 \cdot 10^{-19} \text{ C})}{(0,02 \text{ m})^2} \\ &= 1,15 \cdot 10^{-24} \text{ N}. \end{aligned}$$

Stąd siła \vec{F}_{12} ma następującą wartość i kierunek (względem dodatniego kierunku osi x):

$$1,15 \cdot 10^{-24} \text{ N i } 180^\circ. \quad (\text{odpowiedź})$$

Mogemy zapisać \vec{F}_{12} , używając wektorów jednostkowych:

$$\vec{F}_{12} = -(1,15 \cdot 10^{-24} \text{ N})\hat{i}. \quad (\text{odpowiedź})$$

b) Rysunek 22.6c jest identyczny z rysunkiem 22.6a poza tym, że teraz dodatkowo między cząstkami 1 i 2 znajduje się cząstka 3,

o ładunku $q_3 = -3,20 \cdot 10^{-19} \text{ C}$. Znajduje się ona w odległości $\frac{3}{4}R$ od cząstki 1. Ile wynosi wypadkowa siła elektrostatyczna $\vec{F}_{1,\text{wyp}}$ oddziaływanego cząstek 2 i 3 na cząstkę 1?

ROZWIĄZANIE:

1. Obecność cząstki 3 nie zmienia siły elektrostatycznej oddziaływania cząstki 2 na cząstkę 1. Stąd siła \vec{F}_{12} nadal działa na cząstkę 1. Podobnie siła \vec{F}_{13} oddziaływania cząstki 3 na cząstkę 1 nie zmienia się wskutek obecności cząstki 2. Cząstki 1 i 3 mają ładunki o przeciwnym znaku, dlatego też cząstka 1 jest przyciągana przez cząstkę 3. Stąd siła \vec{F}_{13} jest skierowana *do* cząstki 3 (zgodnie z diagramem sił na rysunku 22.6d).

Aby znaleźć wartość siły \vec{F}_{13} , przepisujemy wzór (22.4) w postaci:

$$\begin{aligned} F_{13} &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{|q_1||q_3|}{(\frac{3}{4}R)^2} \\ &= (8,99 \cdot 10^9 \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{C}^2) \cdot \frac{(1,60 \cdot 10^{-19} \text{ C})(3,20 \cdot 10^{-19} \text{ C})}{(\frac{3}{4})^2(0,02 \text{ m})^2} \\ &= 2,05 \cdot 10^{-24} \text{ N}. \end{aligned}$$

Mogemy także zapisać \vec{F}_{13} za pomocą wektorów jednostkowych:

$$\vec{F}_{13} = (2,05 \cdot 10^{-24} \text{ N})\hat{i}.$$

2. Siła wypadkowa $\vec{F}_{1,\text{wyp}}$, działająca na cząstkę 1 jest sumą wektorową sił \vec{F}_{12} i \vec{F}_{13} , czyli zgodnie ze wzorem (22.7) sił wypadkową $\vec{F}_{1,\text{wyp}}$ działającą na cząstkę 1 mogemy zapisać w postaci:

$$\begin{aligned} \vec{F}_{1,\text{wyp}} &= \vec{F}_{12} + \vec{F}_{13} \\ &= -(1,15 \cdot 10^{-24} \text{ N})\hat{i} + (2,05 \cdot 10^{-24} \text{ N})\hat{i} \\ &= (9 \cdot 10^{-25} \text{ N})\hat{i}. \end{aligned} \quad (\text{odpowiedź})$$

Stąd $\vec{F}_{1,\text{wyp}}$ ma następującą wartość i kierunek (względem dodatniego kierunku osi x):

$$9 \cdot 10^{-25} \text{ N i } 0^\circ. \quad (\text{odpowiedź})$$

c) Rysunek 22.6e jest identyczny z rysunkiem 22.6a poza tym, że teraz dodatkowo dodano w zaznaczonym miejscu cząstkę 4 o ładunku $q_4 = -3,20 \cdot 10^{-19} \text{ C}$. Znajduje się ona w odległości $\frac{3}{4}R$ od cząstki 1, na linii tworzącej kąt $\theta = 60^\circ$ z osią x . Ile wynosi wypadkowa siła elektrostatyczna $\vec{F}_{1,\text{wyp}}$ oddziaływania cząstek 2 i 4 na cząstkę 1?

ROZWIĄZANIE:

1. Siła wypadkowa $\vec{F}_{1,\text{wyp}}$ jest sumą wektorową siły \vec{F}_{12} i nowej siły \vec{F}_{14} oddziaływania cząstki 4 na cząstkę 1. Cząstki 1 i 4 mają ładunki przeciwnego znaku, dlatego też cząstka 1 jest przyciągana do cząstki 4. Stąd siła \vec{F}_{14} , działająca na cząstkę 1, jest skierowana *do* cząstki 4 pod kątem $\theta = 60^\circ$ (zgodnie z diagramem sił na rysunku 22.6f).

Aby znaleźć wartość siły \vec{F}_{14} , przepisujemy wzór (22.4) w postaci:

$$\begin{aligned} F_{14} &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{|q_1||q_4|}{(\frac{3}{4}R)^2} \\ &= (8,99 \cdot 10^9 \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{C}^2) \cdot \frac{(1,60 \cdot 10^{-19} \text{ C})(3,20 \cdot 10^{-19} \text{ C})}{(\frac{3}{4})^2(0,02 \text{ m})^2} \\ &= 2,05 \cdot 10^{-24} \text{ N}. \end{aligned}$$

Stąd na podstawie wzoru (22.7) możemy zapisać siłę wypadkową $\vec{F}_{1,\text{wyp}}$ działającą na cząstkę 1 w postaci

$$\vec{F}_{1,\text{wyp}} = \vec{F}_{12} + \vec{F}_{14}.$$

Otw 2. Siły \vec{F}_{12} i \vec{F}_{14} nie są skierowane wzdłuż tej samej osi, więc *nie możemy* ich zsumować przez proste dodanie ich wartości. Musimy je dodawać jak wektory, stosując jedną z następujących metod.

Metoda 1

Dodawanie przy zastosowaniu wektorów jednostkowych. Najpierw musimy zapisać \vec{F}_{14} w postaci:

$$\vec{F}_{14} = (F_{14} \cos \theta) \hat{i} + (F_{14} \sin \theta) \hat{j}.$$

Podstawiając $2,05 \cdot 10^{-24} \text{ N}$ za F_{14} i 60° za θ otrzymujemy:

$$\vec{F}_{14} = (1,025 \cdot 10^{-24} \text{ N}) \hat{i} + (1,775 \cdot 10^{-24} \text{ N}) \hat{j}.$$

Następnie dodajemy:

$$\begin{aligned} \vec{F}_{1,\text{wyp}} &= \vec{F}_{12} + \vec{F}_{14} \\ &= -(1,15 \cdot 10^{-24} \text{ N}) \hat{i} + (1,025 \cdot 10^{-24} \text{ N}) \hat{i} \\ &\quad + (1,775 \cdot 10^{-24} \text{ N}) \hat{j} \\ &\approx (-1,25 \cdot 10^{-25} \text{ N}) \hat{i} \\ &\quad + (1,78 \cdot 10^{-24} \text{ N}) \hat{j}. \end{aligned} \quad (\text{odpowiedź})$$

Sztuka rozwiązywania zadań

Poradka 1: Symbole oznaczające ładunek

Oto ogólny przewodnik po symbolach, oznaczających ładunek. Jeśli w zdaniu użyto symbolu q , ze wskaźnikiem lub bez, i nie podano żadnego znaku ładunku, to ładunek może być albo dodatni, albo ujemny. Znak ładunku jest nieraz wskazany bezpośrednio, przez użycie notacji $+q$ lub $-q$.

Przykład 22.2

Na rysunku 22.7a przedstawiono dwie cząstki: cząstkę o ładunku $q_1 = +8q$, umieszczoną w początku układu, i cząstkę o ładunku $q_2 = -2q$, umieszczoną w punkcie o współrzędnej $x = L$. W którym punkcie (poza nieskończonym odległym) należy umieścić proton, aby znalazła się w stanie równowagi (tzn. aby wypadkowa siła, działająca na proton, była równa zeru)? Czy jest to stan równowagi trwałej, czy nietrwałej?

Metoda 2

Sumowanie składowych sił. Suma składowych x wynosi

$$\begin{aligned} F_{1,\text{wyp},x} &= F_{12,x} + F_{14,x} = F_{12} + F_{14} \cos 60^\circ \\ &= -1,15 \cdot 10^{-24} \text{ N} + (2,05 \cdot 10^{-24} \text{ N})(\cos 60^\circ) \\ &= -1,25 \cdot 10^{-25} \text{ N}. \end{aligned}$$

Suma składowych y wynosi:

$$\begin{aligned} F_{1,\text{wyp},y} &= F_{12,y} + F_{14,y} = 0 + F_{14} \sin 60^\circ \\ &= (2,05 \cdot 10^{-24} \text{ N})(\sin 60^\circ) = 1,78 \cdot 10^{-24} \text{ N}. \end{aligned}$$

Siła wypadkowa $\vec{F}_{1,\text{wyp}}$ ma więc wartość

$$\begin{aligned} F_{1,\text{wyp}} &= \sqrt{F_{1,\text{wyp},x}^2 + F_{1,\text{wyp},y}^2} \\ &= 1,78 \cdot 10^{-24} \text{ N}. \end{aligned} \quad (\text{odpowiedź})$$

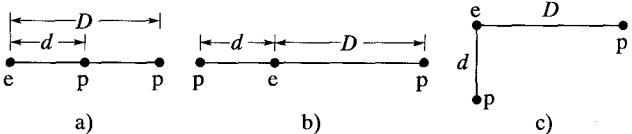
Aby znaleźć kierunek siły $\vec{F}_{1,\text{wyp}}$, obliczamy:

$$\theta = \arctg \frac{F_{1,\text{wyp},y}}{F_{1,\text{wyp},x}} = -86^\circ.$$

Jest to jednak wynik niezgodny z warunkami zadania, gdyż siła $\vec{F}_{1,\text{wyp}}$ musi mieć kierunek, mieszczący się między kierunkami sił \vec{F}_{12} i \vec{F}_{14} . Aby otrzymać taką wartość θ , dodajemy 180° i otrzymujemy

$$-86^\circ + 180^\circ = 94^\circ. \quad (\text{odpowiedź})$$

SPRAWDZIAN 3: Na rysunku przedstawiono trzy układy złożone z elektronu e i dwóch protonów p. a) Uszereguj układy zgodnie z wartością wypadkowej siły elektrostatycznej oddziaływania protonów na elektron, zaczynając od wartości największej. b) Czy dla układu (c) kąt między wypadkową siłą, działającą na elektron i prostą, oznaczoną przez (d), jest mniejszy, czy większy od 45° ?



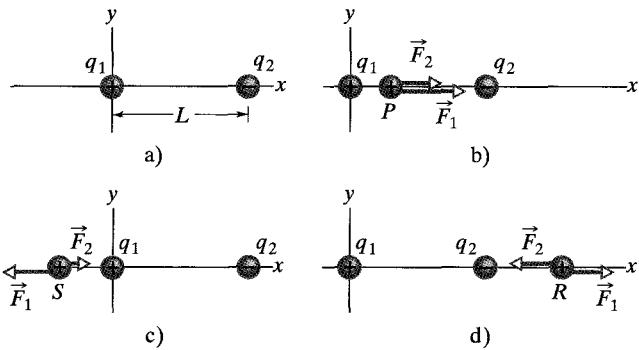
Gdy rozważamy więcej niż jedno ciało naładowane, ładunki mogą być określone jako wielokrotności wartości pewnego ładunku, na przykład $+2q$ oznacza dodatni ładunek o wartości dwa razy większej od pewnej wartości ładunku odniesienia q , a $-3q$ oznacza ujemny ładunek o wartości trzy razy większej od wartości ładunku odniesienia q .

ROZWIĄZANIE:

Otw 2. Jeśli \vec{F}_1 jest siłą oddziaływania ładunku q_1 na proton i \vec{F}_2 jest siłą oddziaływania ładunku q_2 na proton, to szukamy punktu, w którym $\vec{F}_1 + \vec{F}_2 = 0$. Warunek ten wymaga, aby:

$$\vec{F}_1 = -\vec{F}_2. \quad (22.8)$$

Oznacza to, że w poszukiwanym punkcie siły oddziaływania na proton dwóch innych cząstek muszą być przeciwnie skierowane



Rys. 22.7. Przykład 22.2. a) Dwie cząstki o ładunkach q_1 i q_2 znajdują się na osi x w odległości L . b)–d) Trzy możliwe położenia P , S i R protonu. W każdym położeniu \vec{F}_1 jest siłą oddziaływania cząstki 1 na proton, a \vec{F}_2 jest siłą oddziaływania cząstki 2 na proton

i mieć równe wartości:

$$F_1 = F_2. \quad (22.9)$$

Proton ma ładunek dodatni. Proton i cząstka o ładunku q_1 mają więc ten sam znak i siła \vec{F}_1 musi być skierowana od q_1 . Natomiast proton i cząstka o ładunku q_2 mają przeciwny znak i siła \vec{F}_2 , działająca na proton musi być skierowana do q_2 . Siły „od q_1 ” i „do q_2 ” mogą być skierowane w przeciwnych kierunkach tylko wtedy, gdy proton znajduje się na osi x .

Jeśli proton umieszczony jest na osi x w którymkolwiek punkcie między q_1 i q_2 , np. w punkcie P na rysunku 22.7b, to \vec{F}_1 i \vec{F}_2 są skierowane w tę samą stronę, a nie w przeciwną, jak potrzeba. Jeśli proton jest umieszczony w którymkolwiek punkcie na osi x na lewo od q_1 , np. w punkcie S na rysunku 22.7c, to \vec{F}_1 i \vec{F}_2 są skierowane przeciwnie. Ale ze wzoru (22.4) wynika, że \vec{F}_1

i \vec{F}_2 nie mogą mieć tam równych wartości: wartość F_1 musi być większa od wartości F_2 , bo F_1 odpowiada bliższemu ładunkowi (0 mniejszym r) o większej wartości ($8q$ w porównaniu z $2q$).

Na koniec, jeśli proton umieszczony jest w którymkolwiek punkcie na osi x na prawo od q_2 , na przykład w punkcie R na rysunku 22.7d, to \vec{F}_1 i \vec{F}_2 są także przeciwnie skierowane. Jednak, ponieważ teraz ładunek o większej wartości (q_1) jest umieszczony dalej od protonu niż ładunek o mniejszej wartości, to istnieje punkt, w którym wartość F_1 jest równa F_2 . Jeśli x jest współrzędną tego punktu i q_p jest ładunkiem protonu, to korzystając ze wzoru (22.4) możemy wzór (22.9) zapisać w postaci:

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{8qq_p}{x^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2qq_p}{(x-L)^2}. \quad (22.10)$$

(Zauważ, że we wzorze (22.10) występują tylko wartości ładunków). Po przekształceniu wzoru (22.10) otrzymujemy:

$$\left(\frac{x-L}{x}\right)^2 = \frac{1}{4}.$$

Wyciągając pierwiastek z obydwu stron pierwszego równania otrzymujemy:

$$\frac{x-L}{x} = \frac{1}{2},$$

co daje nam ostatecznie:

$$x = 2L. \quad (\text{odpowiedź})$$

Równowaga w punkcie $x = 2L$ jest nietrwała. Jeśli proton przesuniemy w lewo od punktu R , to F_1 i F_2 wzrastają, ale F_2 wzrasta bardziej (ponieważ q_2 jest bliżej niż q_1) i siła wypadkowa będzie przesuwać proton jeszcze bardziej w lewo. Jeśli proton przesuniemy w prawo, to F_1 i F_2 zmniejszą się, ale F_2 zmniejsza bardziej i siła wypadkowa będzie przesuwać proton jeszcze bardziej w prawo. W stanie równowagi trwałej, przy małym przesunięciu proton powróciłby z powrotem do położenia równowagi.

Sztuka rozwiązywania zadań

Porad 2: Rysowanie wektorów siły elektrostatycznej

Gdy mając dany rysunek, na którym przedstawiono cząstki naładowane, na przykład rysunek 22.6a, masz znaleźć wypadkową siłę elektrostatyczną, działającą na jedną z nich, zwykle trzeba narysować diagram sił, na którym naniesiesz tylko wybraną cząstkę i siły, jakie na nią działają (jak np. na rys. 22.6b). Gdy chcesz nanieść te siły na rysunek, na którym przedstawiono wszystkie

cząstki, musisz pamiętać, aby narysować wektory siły w ten sposób, żeby początek wektora (lepszy wybór) lub jego koniec były umieszczone na wybranej cząstce. Narysowanie tych wektorów w innym miejscu na rysunku prowadzi do nieporozumień — nieporozumienie jest pewne, jeśli narysujesz wektory przy cząstkach, które przyczyniają się do powstania sił działających na wybraną cząstkę.

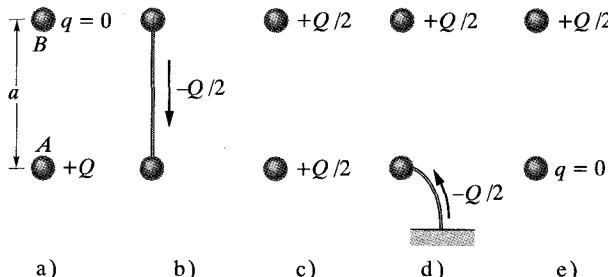
Przykład 22.3

Na rysunku 22.8a dwie identyczne, elektrycznie izolowane przewodzące kule A i B znajdują się w odległości a , dużej w porównaniu z promieniem kul (odległość mierzmy między środkami kul). Kula A ma ładunek dodatni $+Q$, a kula B jest elektrycznie obojętna. Początkowo siła elektrostatyczna działająca między kulami wynosi零. (Zakładamy, że na powierzchniach kul nie indukuje się ładunek, bo znajdują się one w dużej odległości od siebie).

a) Założymy, że kule połączono na chwilę przewodnikiem. Jest on na tyle cienki, że można pominać jakikolwiek wypadkowy ładunek na nim. Ile wynosić będzie siła elektrostatyczna oddziaływanego kul po usunięciu przewodnika?

ROZWIĄZANIE:

O 1. Gdy kule połączymy przewodnikiem, to (ujemne) elektrony przewodnictwa na kuli B , które zawsze się odpychają, mogą się oddalić od siebie (wzdłuż przewodnika do dodatnio naładowa-



Rys. 22.8. Przykład 22.3. Dwie małe przewodzące kulki A i B.
 a) Na początku kula A jest naładowana dodatnio. b) Między kulami przez łączący je przewód zostaje przekazany ładunek ujemny. c) Obie kulki są teraz naładowane dodatnio. d) Ujemny ładunek zostaje przekazany kuli A przez uziemiający przewód. e) Kula A jest teraz obojętna

nej kuli A, która je przyciąga) (zob. rys. 22.8b). Kula B traci ładunek ujemny i ładuje się dodatnio, a kula A zyskuje ładunek ujemny i staje się *mniej* naładowana dodatnio.

O 2. Kule ostatecznie będą mieć takie same ładunki, ponieważ są identyczne. Przepływ ładunku kończy się więc, gdy ładunek na kuli B osiągnie wartość $+Q/2$, a na kuli A zmniejsza się do $+Q/2$. Warunek ten zostaje osiągnięty, gdy przepłynie ładunek $-Q/2$.

Po usunięciu przewodnika (rys. 22.8c) możemy założyć, że ładunek na żadnej z kul nie zakłóca jednorodności rozkładu ładunku na drugiej kuli, bo promienie kul są małe w porównaniu z odległością między nimi. Możemy więc zastosować pierwsze twierdzenie o powłoce do każdej z kul. Ze wzoru (22.4), po podstawieniu $q_1 = q_2 = Q/2$ i $r = a$, otrzymujemy wartość siły elektrostatycznej oddziaływania kul:

$$F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{(Q/2)(Q/2)}{a^2} = \frac{1}{16\pi\epsilon_0} \left(\frac{Q}{a}\right)^2. \quad (\text{odpowiedź})$$

Kule, obecnie naładowane dodatnio, się odpychają.

b) Założymy teraz, że kula A zostanie na chwilę uziemiona, a następnie połączenie uziemiające zostanie usunięte. Ile wynosić będzie teraz siła elektrostatyczna, działająca między kulami?

ROZWIĄZANIE:

O Połączenie uziemiające pozwala elektronom o całkowitym ładunku $-Q/2$ przesunąć się z ziemi do kuli A (rys. 22.8d), w wyniku czego kula stanie się obojętna (rys. 22.8e). Pod nieobecność ładunku na kuli A siła elektrostatyczna oddziaływania dwóch kul (podobnie, jak na początku, rys. 22.8a) będzie równa zeru.

22.5. Ładunek jest skwantowany

W czasach Benjamina Franklina ładunek elektryczny uważano za ciągły płyn, co w wielu przypadkach było ideał przydatną. Obecnie wiemy, że materialne płyny, np. powietrze i woda, nie są ciągłe, bo są złożone z atomów i cząsteczek, a materia jest nieciągła (dyskretna). Z doświadczenia wynika, że „pływ elektryczny” także nie jest ciągły, a przyjmuje wartości będące wielokrotnością pewnego ładunku elementarnego. Każdy ładunek q , dodatni lub ujemny, można zapisać w postaci:

$$q = ne, \quad n = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots \quad (22.11)$$

gdzie **ładunek elementarny** e ma wartość

$$e = 1,60 \cdot 10^{-19} \text{ C.} \quad (22.12)$$

Ładunek elementarny e jest jedną z ważnych stałych fizycznych. Elektron i proton mają ładunek o wartości bezwzględnej e (tabela 22.1). (Kwarki, czyli cząstki, z których zbudowane są protony i neutrony, mają ładunki $\pm e/3$ lub $\pm 2e/3$, ale są one zawsze uwieńczone, tzn. nie mogą być indywidualnie obserwowane. Z tego powodu, a także ze względów historycznych, ich ładunków nie traktuje się jako ładunku elementarnego).

Często spotykamy się ze stwierdzeniami, np. „ładunek na kuli”, „przekazany ładunek”, „ładunek niesiony przez elektron”, które mogłyby sugerować, że ładunek jest substancją. (Faktycznie, takie zdania pojawiały się także w tym rozdziale). Powinniśmy jednak pamiętać, jaki był zamierzony sens tych stwierdzeń: substancją są cząstki, a ładunek jest jedynie jedną z ich właściwości, jaką jest na przykład masa.

Tabela 22.1. Ładunki cząstek

| Čąstka | Symbol | Ładunek |
|----------|---------------|---------|
| Elektron | e lub e^- | $-e$ |
| Proton | p | $+e$ |
| Neutron | n | 0 |

Jeśli wielkość fizyczna, jak na przykład ładunek elektryczny, może przyjmować tylko wartości z dyskretnego zbioru, a nie dowolne, to mówimy, że ta wielkość jest skwantowana. Można na przykład znaleźć cząstkę, która wcale nie ma ładunku, albo ma ładunek $+10e$ lub $-6e$, ale nie cząstkę z ładunkiem, powiedzmy, $3,57e$.

Kwant ładunku jest mały, na przykład przez włókno zwykłej żarówki o mocy 100 W w każdej sekundzie przepływa około 10^{19} ładunków elementarnych. Ziarnistość ładunku elektrycznego nie ujawnia się więc w takich zjawiskach makroskopowych (żarówka nie mruga, gdy przepływają przez nią kolejne elektrony), podobnie jak nie można wyczuć ręka pojedynczych cząsteczek wody.

Ziarnistość ładunku elektrycznego jest odpowiedzialna za niebieską poświatę, wysyłaną przez cukierek wintergrinowy przy jego ściskaniu. Gdy w cukierku kruszone są kryształy cukru (sacharozy), jedna część każdego pękniętego kryształu ma nadmiar elektronów, a druga nadmiar jonów dodatnich. Elektrony prawie natychmiast przeskakują przez szczelinę pęknięcia, aby zebrać obie strony. Podczas przeskoków elektrony zderzają się wtedy z cząsteczkami azotu w powietrzu, które dostało się do szczeliny.

Zderzenia powodują, że azot wysyła promieniowanie nadfioletowe, którego nie widzimy, i światło niebieskie (z widzialnego zakresu widma), które jest jednak za słabe, aby je zaobserwować. Olejek wintergrinowy w kryształach pochłania promieniowanie nadfioletowe i natychmiast wysyła niebieskie światło, które powoduje poświatę w ustach lub szczypcach. Pokaz nie udaje się jednak, jeśli cukierek jest zwilżony śliną, gdyż przewodząca śliną zubożenie obie części pękniętego kryształu, zanim pojawi się iskrzenie.

SPRAWDZIAN 4: Początkowo kula A ma ładunek $-50e$, a kula B ładunek $20e$. Kule są wykonane z materiału przewodzącego i mają identyczne rozmiary. Jaki będzie końcowy ładunek na kuli A po zetknięciu się kul?

Przykład 22.4

Jądro w atomie żelaza ma promień około $4 \cdot 10^{-15}$ m i zawiera 26 protonów.

a) Jaka jest wartość odpychającej siły elektrostatycznej, działającej między dwoma protonami, jeśli znajdują się one w odległości $4 \cdot 10^{-15}$ m?

ROZWIĄZANIE:

Protony można traktować jako cząstki naładowane, a więc wartość siły elektrostatycznej oddziaływania jednego protonu na drugi możesz obliczyć, korzystając z prawa Coulomba. Z tabeli 22.1 wynika, że ładunek protonu wynosi $+e$. Ze wzoru (22.4) otrzymujemy:

$$F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{r^2} = \frac{(8,99 \cdot 10^9 \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{C}^2)(1,60 \cdot 10^{-19} \text{ C})^2}{(4 \cdot 10^{-15} \text{ m})^2} = 14 \text{ N.}$$

(odpowiedź)

Byłaby to mała siła, gdyby działała na obiekt makroskopowy, na przykład melon, ale jest ogromną siłą w odniesieniu do protonu. Takie siły powinny być wystarczające, aby rozbić jądro dowolnego

pierwiastka poza wodorem (którego jądro ma tylko jeden proton). Tak się jednak nie dzieje nawet w jądrach o bardzo dużej liczbie protonów. Musi więc istnieć jakaś ogromna siła przyciągająca, przeciwstawiająca się ogromnej odpychającej sile elektrostatycznej.

b) Jaka jest wartość siły grawitacyjnej działającej między tymi dwoma protonami?

ROZWIĄZANIE:

Protony są cząstками, a więc wartość siły grawitacyjnej ich wzajemnego oddziaływania możesz obliczyć ze wzoru Newtona (22.2). Podstawiając masę protonu $m_p = 1,67 \cdot 10^{-27}$ kg, mamy:

$$F = G \frac{m_p^2}{r^2} = \frac{(6,67 \cdot 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{kg}^2)(1,67 \cdot 10^{-27} \text{ kg})^2}{(4 \cdot 10^{-15} \text{ m})^2} = 1,2 \cdot 10^{-35} \text{ N.}$$

(odpowiedź)

Wynik ten świadczy o tym, że (przyciągająca) siła grawitacyjna jest zbyt słaba, aby przeciwstać się odpychającym siłom elektrostatycznym między protonami w jądrze. Protony są w rzeczywistości związane ogromną siłą. Oddziaływanie cząstek w jądrze

nazywamy (trafnie) *oddziaływaniem silnym*. Jest to oddziaływanie między protonami (i neutronami), gdy są one blisko siebie, jak w jądrze.

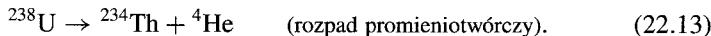
Chociaż siła grawitacyjna jest o wiele rzędów wielkości słabsza od siły elektrostatycznej, to jest ważniejsza w zjawiskach makroskopowych, ponieważ jest zawsze siłą przyciągania. Oznacza

to, że może ona skupić wiele małych ciał w ogromne ciała o wielkich masach (jak np. planety i gwiazdy), które mogą oddziaływać dużymi siłami grawitacyjnymi. Natomiast siła elektrostatyczna jest siłą odpchającą dla ładunków o tym samym znaku i dlatego nie można skupić dużych ilości dodatniego czy ujemnego ładunku, aby mogły pojawić się duże siły elektrostatyczne.

22.6. Ładunek jest zachowany

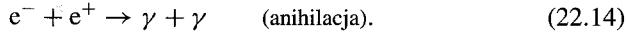
Przy pocieraniu pręta szklanego jedwabiem, na przecie pojawia się ładunek dodatni. Pomiar wykazuje, że ujemny ładunek o takiej samej wartości bezwzględnej pojawia się na jedwabiu. Oznacza to, że przy pocieraniu ładunek nie jest wytwarzany, lecz tylko przekazywany z jednego ciała do drugiego, co narusza obojętność elektryczną każdego z nich. Tę hipotezę **zachowania ładunku** jako pierwszy postawił Benjamin Franklin. Została ona potwierdzona dokładnymi badaniami zarówno dla dużych ciał naładowanych, jak i dla atomów, jąder i cząstek elementarnych. Nigdy nie znaleziono wyjątków. Dodajemy więc ładunek elektryczny do naszej listy wielkości (zawierającej energię, pęd i moment pędu), które spełniają zasadę zachowania.

Rozpad promieniotwórczy jądra, w którym samorzutnie przekształca się ono w inne jądra, dostarcza nam wielu przykładów zachowania ładunku w zjawiskach jądrowych. Na przykład uran-238 (^{238}U), występujący w naturalnej rudzie uranu, może rozпадać się przez emisję cząstki α (która jest jądrem helu ^4He), przekształcając się w tor ^{234}Th :



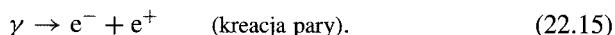
Liczba atomowa Z promieniotwórczego jądra *macierzystego* ^{238}U wynosi 92, co oznacza, że jądro zawiera 92 protony i ma ładunek $92e$. Emitowana cząstka α ma $Z = 2$, a jądro *pochodne* ^{234}Th ma $Z = 90$. Ilość ładunku przed rozpadem, $92e$, jest więc równa całkowitemu ładunkowi po rozpadzie, $90e + 2e$. Ładunek elektryczny jest zachowany.

Innym przykładem zachowania ładunku jest *proces anihilacji* elektronu e^- (o ładunku $-e$) i jego antycząstki, pozytonu e^+ (o ładunku $+e$), w którym cząstki te przekształcają się w dwa kwanty γ (promieniowania elektromagnetycznego o dużej energii):

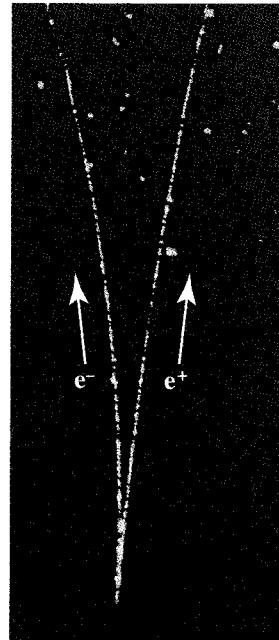


Stosując zasadę zachowania ładunku, musimy ładunki dodawać algebraicznie, uwzględniając ich znaki. W procesie anihilacji (22.14) wypadkowy ładunek układu jest równy zeru zarówno przed, jak i po anihilacji. Ładunek elektryczny jest więc zachowany.

W procesie *kreacji pary*, odwrotnym do anihilacji, ładunek jest także zachowany. W tym procesie kwant γ przekształca się w elektron i pozyton:



Na rysunku 22.9 przedstawiono proces kreacji pary w komorze pęcherzykowej. Kwant γ wpadł do komory z dołu i w pewnym punkcie przekształcił się



Rys. 22.9. Fotografia śladów, pozostawionych przez elektron i pozyton w postaci pęcherzyków w komorze pęcherzykowej. Para cząstek została wyтворzona, w wyniku procesu kreacji, z kwantem γ , który wpadł do komory z dołu. Obojętny elektrycznie kwant γ nie pozostawił śladu z pęcherzyków wzdłuż swej drogi, tak jak zrobiły to elektron i pozyton

w elektron i pozyton. Nowe cząstki były naładowane, a więc podczas ruchu każda z nich zostawiła ślad z drobnych pęcherzyków. (Ślady są zakrzywione, bo w komorze włączono pole magnetyczne). Kwant γ , będąc elektrycznie obojętny, nie pozostawił śladu. Można jednak dokładnie powiedzieć, gdzie nastąpiła kreacja pary, a mianowicie w punkcie, w którym zaczynają się ślady elektronu i pozytonu.

Podsumowanie

Ladunek elektryczny Wielkość oddziaływania elektrycznego cząstki z otaczającymi ją obiektami zależy od jej **ładunku elektrycznego**, który może być dodatni lub ujemny. Ładunki o tym samym znaku odpierają się, a ładunki o przeciwnych znakach się przyciągają. Ciało z równymi ilościami dwóch rodzajów ładunku jest obojętne elektrycznie, a z niezrównoważonym ładunkiem — naładowane elektrycznie.

Przewodniki są materiałami, w których znaczna liczba cząstek naładowanych (elektronów w metalu) może poruszać się swobodnie. Naładowane cząstki w **izolatorach** nie mogą się swobodnie poruszać. Gdy ładunek porusza się w przewodzie, mówimy, że w przewodzie płynie **prąd elektryczny**.

Kulomb i amper Jednostką ładunku elektrycznego w układzie SI jest **kulomb** (C). Jest on zdefiniowany za pomocą jednostki natężenia prądu elektrycznego, ampera (A), jako ładunek przepływający przez określona powierzchnię w ciągu 1 sekundy, jeśli natężenie prądu przepływającego przez tę powierzchnię jest równe 1 amperowi.

Prawo Coulomba Prawo Coulomba określa **siłę elektrostatyczną**, działającą między małymi (punktowymi) ładunkami elektrycznymi q_1 i q_2 , znajdującymi się w spoczynku w odległości r :

$$F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{|q_1||q_2|}{r^2} \quad (\text{prawo Coulomba}), \quad (22.4)$$

gdzie $\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12} \text{ C}^2/(\text{N} \cdot \text{m}^2)$ jest **przenikalnością elektryczną próżni** i $1/(4\pi\epsilon_0) = k = 8,99 \cdot 10^9 \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{C}^2$.

Siła przyciągania lub odpychania, działająca między ładunkami w spoczynku, działa wzdłuż prostej, łączącej dwa ładunki. Jeśli jest ich więcej niż dwa, to wzór (22.4) jest słuszny dla każdej pary ładunków. Siłę wypadkową działającą na każdy ładunek znajdujemy, korzystając z zasady superpozycji, jako sumę wektorową sił oddziaływania wszystkich innych ładunków na dany ładunek.

Dwa twierdzenia o powłoce dla elektrostatyki są następujące:

Jednorodnie naładowana powłoka kulista przyciąga lub odpycha naładowaną cząstkę, znajdująca się na zewnątrz powłoki tak, jakby cały ładunek powłoki był skupiony w jej środku.

Jeśli cząstka naładowana znajduje się wewnątrz jednorodnie naładowanej powłoki kulistej, to wypadkowa siła elektrostatyczna oddziaływania powłoki na cząstkę jest równa零.

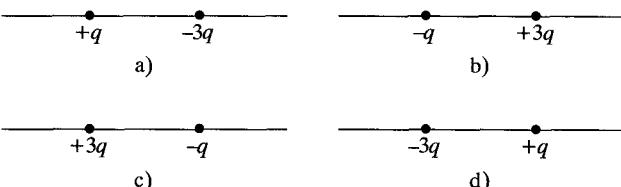
Ladunek elementarny Ładunek elektryczny jest **skwantowany**: dowolny ładunek można zapisać jako ne , gdzie n jest dodatnią lub ujemną liczbą całkowitą, a e jest stałą fizyczną zwaną **ładunkiem elementarnym** (w przybliżeniu $e = 1,60 \cdot 10^{-19} \text{ C}$). Ładunek elektryczny jest **zachowany**: algebraiczna suma ładunków w dowolnym odosobnionym układzie nie może ulegać zmianie.

Pytania

1. Czy prawo Coulomba jest słuszne dla wszystkich ciał naładowanych?

2. Cząstkę o ładunku q umieszczamy kolejno na zewnątrz następujących czterech metalowych ciał naładowanych jednorodnie ładunkiem Q : 1) dużej kuli, 2) dużej powłoki kulistej, 3) małej kuli i 4) małej powłoki kulistej. Odległość między cząstką i środkiem ciała jest taka sama, a ładunek q jest na tyle mały, że nie zmienia znacząco jednorodnego rozkładu ładunku Q . Uszereguj ciała według wartości siły ich oddziaływania na cząstkę, zaczynając od największej.

3. Na rysunku 22.10 przedstawiono na osi cztery układy cząstek naładowanych. W których układach istnieje punkt na lewo od cząstek, w którym elektron będzie w stanie równowagi?



Rys. 22.10. Pytanie 3

4. Na rysunku 22.11 przedstawiono na osi dwie naładowane cząstki. Cząstki te mogą się poruszać. Istnieje jednak jeden taki punkt, że po umieszczeniu w nim trzeciej naładowanej cząstki wszystkie trzy będą w stanie równowagi. a) Czy ten punkt jest na lewo od pierwszych dwóch cząstek, czy na prawo, czy między nimi? b) Czy trzecia cząstka powinna być naładowana dodatnio, czy ujemnie? c) Czy równowaga jest trwała, czy nie-trwała?

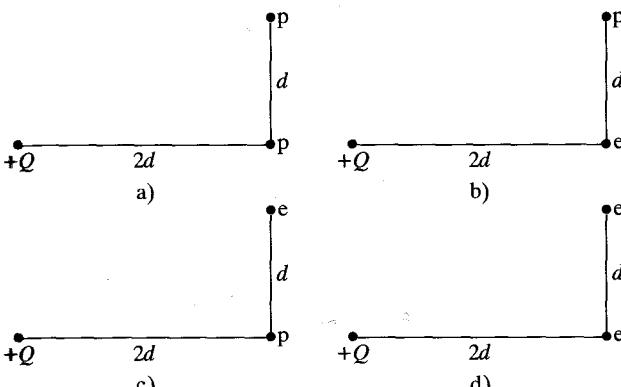




Rys. 22.11. Pytanie 4

5. Na rysunku 22.12 przedstawiono znajdującą się w środku cząstkę o ładunku $-q$, otoczoną przez dwa okręgi o promieniach r i R ($R > r$), z umieszczonymi na nich cząstками naładowanymi. Jaka jest wartość i kierunek wypadkowej siły elektrostatycznej oddziaływania pozostałych cząstek na cząstke środkową?

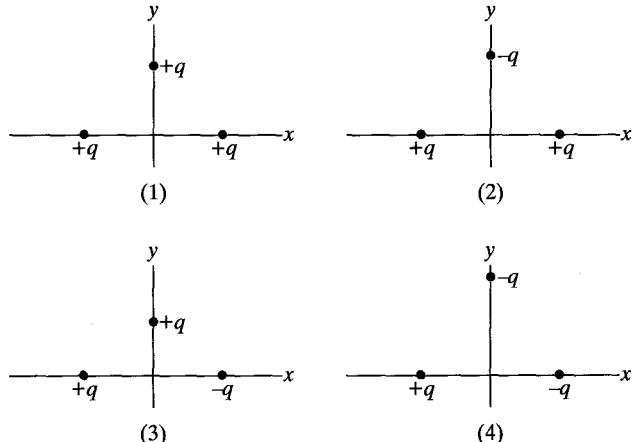
6. Na rysunku 22.13 przedstawiono cztery układy cząstek naładowanych. Uszereguj te układy według wartości wypadkowej siły elektrostatycznej, działającej na cząstkę o ładunku $+Q$, zaczynając od największej.



Rys. 22.13. Pytanie 6

7. Na rysunku 22.14 przedstawiono cztery układy cząstek o ładunku $+q$ lub $-q$, przy czym cząstki umieszczone na osi x są równoodległe od osi y . Rozważ najpierw środkową cząstkę w układzie 1; cząstka ta doznaje działania siły elektrostatycznej ze strony każdej z dwóch pozostałych cząstek. a) Czy wartości F tych sił są takie same, czy różne? b) Czy wartość siły wypadkowej działającej na środkową cząstkę jest równa $2F$, większa,

czy mniejsza od tej wartości? c) Czy składowe x tych dwóch sił dodają się, czy odejmują? d) Czy ich składowe y dodają się, czy odejmują? e) Czy kierunek siły wypadkowej działającej na środkową cząstkę odpowiada odejmowaniu się składowych, czy ich dodawaniu? f) Jaki jest kierunek tej siły wypadkowej? Rozważ teraz pozostałe układy. Jaki jest kierunek siły wypadkowej działającej na środkową cząstkę dla: g) układu 2, h) układu 3, i) układu 4. (Dla każdego układu rozważ symetrię rozkładu ładunku i określ, które składowe się dodają, a które odejmują).



Rys. 22.14 Pytanie 7

8. Dodatnio naładowana kula znajduje się w pobliżu obojętnego izolowanego przewodnika. Przewodnik zostaje uziemiony, gdy kula jest blisko przewodnika. Czy przewodnik naładowuje się dodatnio, ujemnie, czy pozostanie obojętny, jeśli: a) najpierw zaberzemy kulę, a potem usuniemy uziemienie, b) najpierw usuniemy uziemienie, a potem zaberzemy kulę?

9. a) Dodatnio naładowany pręt szklany przyciąga ciało zawieszone na nieprzewodzącej nici. Czy ciało jest na pewno naładowane ujemnie, czy tylko może być naładowane ujemnie? b) Dodatnio naładowany pręt szklany odpycha podobnie zawieszone ciało. Czy ciało jest na pewno naładowane dodatnio, czy jest tylko taka możliwość?

10. Na rysunku 22.3 przedstawiono sytuację, w której zbliżony (ujemnie naładowany) pręt plastikowy powoduje, że pewna liczba elektronów przewodnictwa w miedzi przesuwa się do bardziej odległego końca pręta miedzianego. Dlaczego przepływ elektronów przewodnictwa szybko się kończy? Przecież ogromna liczba elektronów może przesuwać się swobodnie do tego końca.

11. Osoba stojąca na elektrycznie izolowanej platformie dotyka naładowanego i elektrycznie izolowanego przewodnika. Czy przewodnik rozgałęzia się całkowicie?

Zadania

Rozwiązań jest dostępne na stronie internetowej podręcznika: <http://www.wiley.com/college/hrw>
 Rozwiązań jest dostępne w postaci interaktywnej, wykorzystującej oprogramowanie Interactive Learning Ware (na tej samej stronie)

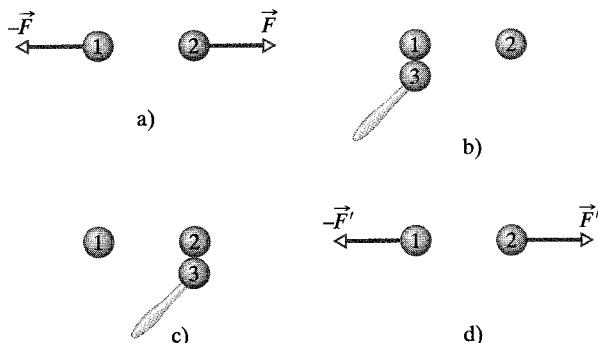
22.4. Prawo Coulomba

1. Ile wynosić musi odległość między ładunkiem punktowym $q_1 = 26 \mu\text{C}$ i ładunkiem punktowym $q_2 = -47 \mu\text{C}$, aby siła elektrostatyczna ich oddziaływania miała wartość 5,7 N?

2. Ładunek punktowy $+3 \cdot 10^{-6} \text{ C}$ jest odległy o 12 cm od drugiego ładunku punktowego $-1,5 \cdot 10^{-6} \text{ C}$. Oblicz wartość siły, działającej na każdy ładunek.

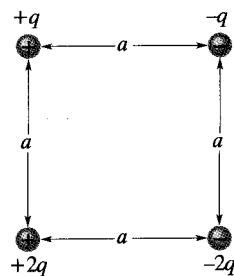
3. Dwie jednakowo naładowane cząstki, znajdujące się początkowo w spoczynku, w odległości $3,2 \cdot 10^{-3} \text{ m}$, zaczęły się poruszać. Zaobserwowano, że początkowe przyspieszenie pierwszej cząstki wynosiło 7 m/s^2 , a drugiej 9 m/s^2 . Jeśli masa pierwszej cząstki wynosi $6,3 \cdot 10^{-7} \text{ kg}$, to ile wynoszą: a) masa drugiej cząstki, b) wartość ładunku każdej cząstki?

4. Identyczne izolowane kule 1 i 2 mają jednakowe ładunki i znajdują się w odległości dużej, w porównaniu z ich średnicami (rys. 22.15a). Siła elektrostatyczna oddziaływania kuli 1 na kulę 2 wynosi \vec{F} . Załóż teraz, że trzecia identyczna kula 3, mająca izolującą rączkę i początkowo obojętną, dotknęła najpierw kuli 1 (rys. 22.15b), potem kuli 2 (rys. 22.15c), a na koniec została usunięta (rys. 22.15d). Wyraź przez F wartość siły elektrostatycznej \vec{F}' , która teraz działa na kulę 2.



Rys. 22.15. Zadanie 4

5. Dla układu ładunków z rysunku 22.16 znajdź: a) poziomą, b) pionową składową wypadkowej siły elektrostatycznej, działającą na naładowaną cząstkę w dolnym lewym rogu kwadratu, jeśli $q = 1 \cdot 10^{-7} \text{ C}$ i $a = 5 \text{ cm}$?

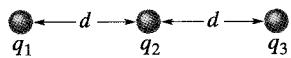


Rys. 22.16. Zadanie 5

6. Ładunki punktowe q_1 i q_2 znajdują się na osi x , odpowiednio w punktach $x = -a$ i $x = +a$. a) Jaki musi być związek między q_1 i q_2 , aby wypadkowa siła elektrostatyczna, działająca na ładunek punktowy $+Q$, umieszczony w punkcie $x = +a/2$ była równa zeru? b) Powtórz (a) dla ładunku $+Q$, umieszczonego w punkcie $x = +3a/2$.

7. Dwie identyczne przewodzące kule, których środki są odległe o 50 cm, przyciągają się wzajemnie siłą elektrostatyczną o wartości 0,108 N. Następnie kule połączono cienkim przewodnikiem. Po usunięciu przewodnika kule odpychają się wzajemnie siłą elektrostatyczną o wartości 0,036 N. Ile wynosiły początkowe ładunki na kulach?

8. Na rysunku 22.17 przedstawiono trzy naładowane cząstki, leżące na linii prostej, w odległościach d od siebie. Ładunki q_1 i q_2 są unieruchomione. Ładunek q_3 może się poruszać, ale okazuje się, że jest w stanie równowagi (działająca na ten ładunek siła wypadkowa jest równa零). Wyraź q_1 przez q_2 .



Rys. 22.17. Zadanie 8

9. Dwie cząstki (mogące się poruszać) o ładunkach $+q$ i $+4q$ znajdują się w odległości L od siebie. Trzecia cząstka została tak umieszczona, że cały układ jest w stanie równowagi. a) Znайдź położenie, wartość i znak trzeciego ładunku. b) Wykaż, że równowaga jest nietrwała.

10. Dwie unieruchomione cząstki o ładunkach $q_1 = +1 \mu\text{C}$ i $q_2 = -3 \mu\text{C}$ znajdują się w odległości 10 cm od siebie. W jakiej odległości od nich należy umieścić trzeci ładunek, aby działająca na niego wypadkowa siła elektrostatyczna była równa zero?

11. a) Jakie jednakowe ładunki dodatnie należy umieścić na Ziemi i na Księżycu, aby zrównoważyć ich przyciąganie grawitacyjne? Czy musisz znać odległość do Księżyca, aby rozwiązać to zadanie? Dlaczego? b) Ile kilogramów wodoru potrzeba, aby uzyskać ładunek dodatni, obliczony w punkcie (a)?

12. Ładunki i współrzędne dwóch cząstek naładowanych znajdujących się w płaszczyźnie xy wynoszą $q_1 = +3 \mu\text{C}$, $x_1 = 3,5 \text{ cm}$, $y_1 = 0,5 \text{ cm}$ i $q_2 = -4 \mu\text{C}$, $x_2 = -2 \text{ cm}$, $y_2 = 1,5 \text{ cm}$.

a) Znajdź wartość i kierunek siły elektrostatycznej działającej na q_2 . b) Gdzie należy umieścić trzeci ładunek $q_3 = +4 \mu\text{C}$, aby wypadkowa siła elektrostatyczna działająca na q_2 była równa zeru?

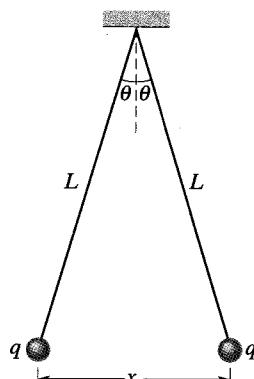
13. Pewien ładunek Q podzielono na dwie części q i $Q - q$, które rozsunięto na pewną odległość. Jakie musi być q (wyrażone za pomocą Q), aby odpchanie elektrostatyczne między tymi dwoma ładunkami było maksymalne?

14. W dwóch przeciwnie skierowanych wierzchołkach kwadratu znajdują się cząstki o ładunku Q , a cząstki o ładunku q znajdują się w pozostałych wierzchołkach. a) Jaki jest związek między Q i q , jeśli wypadkowa siła elektrostatyczna działająca na każdą cząstkę o ładunku Q jest równa零? b) Czy istnieje jakaś wartość q , dla której wypadkowa siła elektrostatyczna, działająca na każdą z czterech cząstek jest równa零? Odpowiedź uzasadnij.

15. Na rysunku 22.18 przedstawiono dwie małe kulki przewodzące o takich samych masach m i takich samych ładunkach q , wiszące na nieprzewodzących niciach o długości L . Założymy, że kąt θ jest tak mały, że $\tan \theta$ można zastąpić przez $\sin \theta$. a) Wykaż, że w stanie równowagi:

$$x = \left(\frac{q^2 L}{2\pi\epsilon_0 mg} \right)^{\frac{1}{3}},$$

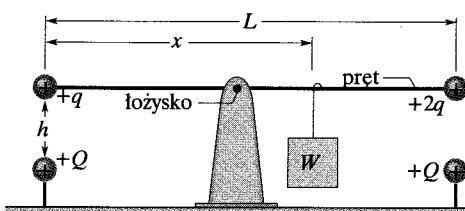
gdzie x jest odległością między kulkami. b) Jeśli $L = 120 \text{ cm}$, $m = 10 \text{ g}$ i $x = 5 \text{ cm}$, to jaką wartość ma q ?



Rys. 22.18. Zadanie 15

16. Wyjaśnij, co stanie się z kulkami z zadania 15(b), jeśli jedną z nich się rozładowuje (przekazując jej ładunek q do ziemi). Znajdź nową odległość x w stanie równowagi, używając podanych wartości L , m i obliczonej wartości q .

17. Na rysunku 22.19 przedstawiono długi, nieprzewodzący pręt o niskomo małej masie i długości L , o osi obrotu w środku, zrównoważony obciążnikiem o ciężarze W , w odległości x od lewego końca pręta. Na lewym i prawym końcu pręta umocowano małe przewodzące kule o dodatnich ładunkach, równych odpowiednio



Rys. 22.19. Zadanie 17

q i $2q$. W odległości h poniżej każdej z tych kul znajduje się kula o dodatnim ładunku Q . a) Znajdź odległość x , jeśli pręt jest poziomy i w stanie równowagi. b) Jaka powinna być odległość h , aby pionowa siła działająca na łożysko, gdy pręt jest poziomy i w stanie równowagi, była równa zero?

22.5 Ładunek jest skwantowany

18. Jaka jest wartość siły elektrostatycznej działającej między pojedynczo naładowanym jonom sodu (Na^+ o ładunku $+e$) i tworzącym mu pojedynczo naładowany jonom chloru (Cl^- o ładunku $-e$) w kryształu soli, jeśli ich odległość wynosi $2,82 \cdot 10^{-10} \text{ m}$?

19. Ile wynosi w kulombach całkowity ładunek 75 kg elektronów?

20. Ile megakulombów dodatniego (lub ujemnego) ładunku jest w 1 molu obojętnego cząsteczkowego wodoru (H_2)?

21. Wartość siły elektrostatycznej działającej między dwoma identycznymi jonami znajdującymi się w odległości $5 \cdot 10^{-10} \text{ m}$ wynosi $3,7 \cdot 10^{-9} \text{ N}$. a) Ile wynosi ładunek każdego z jonów? b) Ile elektronów „brakuje” w każdym z jonów (powodując niezrównoważony ładunek jona)?

22. Środki dwóch małych, kulistych kropel wody o identycznych ładunkach $-1 \cdot 10^{-16} \text{ C}$ znajdują się w odległości 1 cm . a) Jaka jest wartość siły elektrostatycznej, działającej między nimi? b) Ile nadmiarowych elektronów powodujących ten niezrównoważony ładunek znajduje się na każdej kropli?

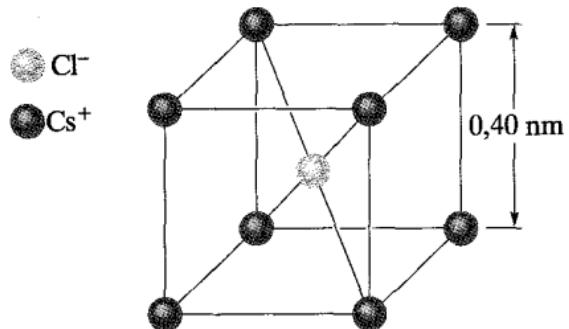
23. Ile elektronów trzeba usunąć z monety, aby uzyskała ładunek $+1 \cdot 10^{-7} \text{ C}$?

24. W próżni w pobliżu powierzchni Ziemi znajduje się elektron. Gdzie należałoby umieścić drugi elektron, aby siła elektrostatyczna działająca na pierwszy elektron równoważyła siłę grawitacyjną oddziaływanego Ziemi na pierwszy elektron?

25. Atmosfera Ziemi jest stale bombardowana protonami promieniowania kosmicznego, które powstają gdzieś w kosmosie. Gdyby wszystkie protony przeszły przez atmosferę, to na każdy m^2 powierzchni Ziemi padałoby 1500 protonów na sekundę. Jakie byłoby natężenie takiego prądu elektrycznego, przepływającego przez całą powierzchnię planety?

26. Oblicz w kulombach ładunek dodatni, znajdujący się w 250 cm^3 , czyli w szklance, (obojętnej) wody.

27. W komórce elementarnej kryształu chlorku cezu (CsCl) jony Cs^+ zajmują wierzchołki sześcianu, a jony Cl^- znajdują się w środku sześcianu (rys. 22.20). Długość krawędzi sześcianu wynosi $0,40 \text{ nm}$. Jonom Cs^+ brakuje jednego elektronu (i stąd każdy z nich ma ładunek $+e$), a jony Cl^- mają po jednym dodatkowym elektronie (i stąd każdy z nich ma ładunek $-e$). a) Jaka jest war-



Rys. 22.20. Zadanie 27

tość wypadkowej siły elektrostatycznej oddziaływania na jon Cl⁻ ośmiu jonów Cs⁺, znajdujących się w wierzchołkach sześcianu?
 b) Jeśli brakuje jednego z jonów Cs⁺, to mówimy o *defekcie* kryształu. Jaka jest wartość wypadkowej siły elektrostatycznej oddziaływania na jon Cl⁻ siedmiu pozostałych jonów Cs⁺? [www](#)

28. Wiemy, że wartości ujemnego ładunku elektronu i dodatniego ładunku protonu są równe. Przypuśćmy jednak, że te wartości róż-

nią się od siebie o 0,0001%. Jaką siłą odpychałyby się dwie miedziane monety, znajdujące się w odległości 1 m od siebie? Załóż, że każda moneta zawiera $3 \cdot 10^{22}$ atomów miedzi. (Wskazówka: Obojętny atom miedzi zawiera 29 protonów i 29 elektronów). Jaki wynika stąd wniosek?

22.6 Ładunek jest zachowany

29. Zidentyfikuj X w następujących reakcjach jądrowych (w pierwszej n oznacza neutron): a) ${}^1\text{H} + {}^9\text{Be} \rightarrow \text{X} + \text{n}$, b) ${}^{12}\text{C} + {}^1\text{H} \rightarrow \text{X}$, c) ${}^{15}\text{N} + {}^1\text{H} \rightarrow {}^4\text{He} + \text{X}$. Skorzystaj z dodatku F.

Zadanie dodatkowe

30. Do zadania 13 wstaw $q = \alpha Q$. a) Wyraź wartość siły F , działającej między ładunkami, przez α , Q i odległość d między ładunkami. b) Wykreśl F w zależności od α i znajdź graficznie wartości α , które dają: c) maksymalną wartość F , d) połowę maksymalnej wartości F .

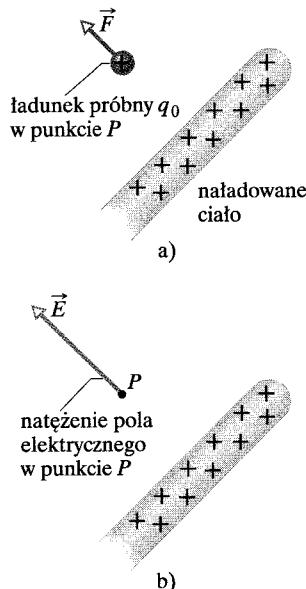
23 Pole elektryczne

Podczas częstych wybuchów wulkanu Sakurajima w Japonii, nad kraterem wulkanu powstają liczne wyładowania elektryczne (iskry), które rozświetlają niebo i wysyłają fale dźwiękowe przypominające grzmoty. Nie są to jednak błyskawice odpowiadające burzy z piorunami, z nanelektryzowanymi chmurami kropli wody, rozładowującymi się ku powierzchni ziemi. Jest to coś innego.

Jak elektryzuje się przestrzeń nad wulkanem i czy można ustalić, w której stronę lecą iskry: w górę (od krateru), czy w dół (do krateru)?

Odpowiedź znajdziesz w tym rozdziale.





Rys. 23.1. a) Dodatni ładunek próbny q_0 umieszczono w punkcie P w pobliżu naładowanego ciała. Na ładunek próbny działa siła elektrostatyczna \vec{F} . b) Natężenie pola elektrycznego \vec{E} , wytworzonego przez naładowane ciało w punkcie P

23.1. Jeszcze o ładunkach i siłach

Założymy, że umieszczałyśmy gdzieś punktowy ładunek dodatni q_1 i następnie zbliżyliśmy do niego drugi dodatni ładunek punktowy q_2 . Z prawa Coulomba wiemy, że q_1 oddziałuje na q_2 odpychającą siłą elektrostatyczną i mając potrzebne dane, możemy określić wartość i kierunek tej siły. Może jednak nękać nas pytanie: skąd ładunek q_1 „wie” o obecności ładunku q_2 ? Skoro ładunki się nie stykają, to jak q_1 może działać siłą na q_2 ?

Na pytanie o *działanie na odległość* można odpowiedzieć, że ładunek q_1 powoduje powstanie **pola elektrycznego** w otaczającej go przestrzeni. W dowolnym punkcie P przestrzeni pole to można scharakteryzować za pomocą wektora o określonej wartości i kierunku. Jego wartość zależy od wartości ładunku q_1 i odległości między punktem P i ładunkiem q_1 . Kierunek zależy od położenia punktu P względem ładunku q_1 i znaku ładunku q_1 . Gdy więc umieścimy ładunek q_2 w punkcie P , ładunek q_1 oddziałuje z ładunkiem q_2 za pośrednictwem pola elektrycznego w punkcie P . Wartość i kierunek wektora pola elektrycznego określają wartość i kierunek siły działającej na ładunek q_2 .

Inne pytanie, dotyczące oddziaływanego na odległość nasuwa się, gdy przesuniemy ładunek q_1 , powiedzmy, w kierunku ładunku q_2 . Na podstawie prawa Coulomba stwierdzamy, że gdy ładunek q_1 jest bliżej ładunku q_2 , to odpychająca siła elektrostatyczna, działająca na q_2 musi być większa, i tak jest. Może nas więc nękać kolejne pytanie: czy pole elektryczne w punkcie, w którym znajduje się ładunek q_2 , i stąd siła działająca na ładunek q_2 , zmieniają się natychmiast, wraz ze zmianą położenia źródła pola?

Odpowiedź na to pytanie jest przeciwna. Informacja o ruchu ładunku q_1 rozchodzi się od ładunku q_1 (we wszystkich kierunkach) w postaci fali elektromagnetycznej, z prędkością światła c . Zmiana wektora pola elektrycznego w punkcie, w którym znajduje się ładunek q_2 , a stąd i zmiana siły, działającej na ładunek q_2 pojawi się, gdy fala dotrze do ładunku q_2 .

23.2. Pole elektryczne

Temperatura w każdym punkcie pokoju ma określoną wartość. Można ją zmierzyć w dowolnym punkcie lub układzie punktów, umieszczając tam termometr. Otrzymany rozkład temperatur nazywamy *polem temperatury*. W podobny sposób można sobie wyobrazić *pole ciśnienia* w atmosferze: charakteryzuje je rozkład wartości ciśnienia powietrza, podający jego wartość w każdym punkcie atmosfery. Te dwa przykłady odpowiadają *polem skalarnym*, ponieważ temperatura i ciśnienie powietrza są wielkościami skalarnymi.

Pole elektryczne jest *polem wektorowym*, gdyż jego scharakteryzowanie wymaga określenia rozkładu wektorów, czyli podania wektora dla każdego punktu obszaru wokół naładowanego ciała, np. naładowanego pręta. Pole elektryczne w pewnym punkcie w pobliżu naładowanego ciała, np. punkcie P na rysunku 23.1a, możemy zdefiniować w następujący sposób: najpierw umieszczać *dodatni ładunek q_0* , zwany *ładunkiem próbny* w tym punkcie, a następnie mierzymy siłę elektrostatyczną \vec{F} , która działa na ładunek próbny. Natężenie pola elektrycznego \vec{E} , wytworzonego przez naładowane ciało w punkcie P definiujemy wtedy wzorem:

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q_0} \quad (\text{natężenie pola elektrycznego}). \quad (23.1)$$

Wartość natężenia pola elektrycznego \vec{E} w punkcie P wynosi więc $E = F/q_0$, a kierunek natężenia \vec{E} jest taki sam jak kierunek siły \vec{F} działającej na *dodatni* ładunek próbnego. Na rysunku 23.1b przedstawiono natężenie pola elektrycznego w punkcie P w postaci wektora o początku w punkcie P . Aby zdefiniować pole elektryczne w pewnym obszarze, należy podobnie zdefiniować jego natężenie we wszystkich punktach obszaru.

Jednostką natężenia pola elektrycznego w układzie SI jest niuton na kulomb (N/C). W tabeli 23.1 podano wartości natężeń pól elektrycznych, jakie występują w kilku sytuacjach fizycznych.

Chociaż do definicji natężenia pola elektrycznego naładowanego ciała używamy dodatniego ładunku próbnego, to pole istnieje niezależnie od tego ładunku. Pole w punkcie P na rysunku 23.1b istniało zarówno przed, jak i po umieszczeniu tam ładunku próbnego (rys. 23.1a). (Zakładamy, że obecność ładunku próbnego nie wpływa na rozkład ładunku w naładowanym ciele i stąd nie zmienia się natężenie definiowanego pola elektrycznego).

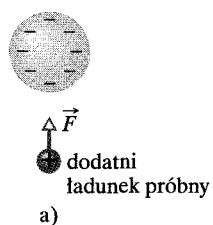
Badanie roli pola elektrycznego w oddziaływaniu między naładowanymi ciałami sprowadza się do dwóch zadań: 1) obliczenia natężenia pola elektrycznego wytworzonego przez dany rozkład ładunku i 2) obliczenia siły, jaką dane pole działa na umieszczony w nim ładunek. Pierwszym zadaniem dla kilku rozkładów ładunku zajmiemy się w paragrafach od 23.4 do 23.7, a drugim — w paragrafach 23.8 i 23.9, rozważając jeden lub dwa ładunki punktowe w polu elektrycznym. Najpierw jednak przedyskutujemy graficzny sposób przedstawiania pola elektrycznego.

23.3. Linie pola elektrycznego

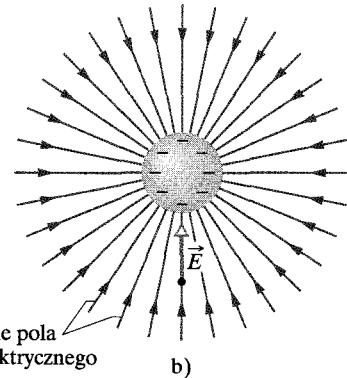
Michael Faraday, który wprowadził ideę pola elektrycznego w XIX w., wyobrażał sobie, że przestrzeń wokół naładowanego ciała jest jak gdyby wypełniona *liniami sił*. Chociaż nie przypisujemy tym liniom, zwanych obecnie **liniami pola elektrycznego**, realnego istnienia, to nadal ułatwiają one graficzne przedstawienie rozkładu natężenia pola elektrycznego.

Związek między liniami pola i wektorami natężenia pola elektrycznego jest następujący: 1) w dowolnym punkcie kierunek linii pola (gdy jest ona prostą) lub stycznej do linii pola (gdy linia jest zakrzywiona) określa kierunek wektora \vec{E} w tym punkcie, 2) linie pola są tak narysowane, że liczba linii na jednostkę powierzchni, mierzona w płaszczyźnie prostopadłej do linii, jest proporcjonalna do *wartości* wektora \vec{E} . Drugi związek oznacza, że tam, gdzie linie pola są blisko siebie, wartość E jest duża, a tam, gdzie są daleko od siebie, wartość E jest mała.

Na rysunku 23.2a przedstawiono kulę, na której znajduje się jednorodnie rozłożony ładunek ujemny. Jeśli umieścimy *dodatni* ładunek próbnego gdziekolwiek blisko kuli, to będzie na niego działać siła elektrostatyczna, skierowana *do środka* kuli, jak na rysunku. Innymi słowy, wektory natężenia pola elektrycznego we



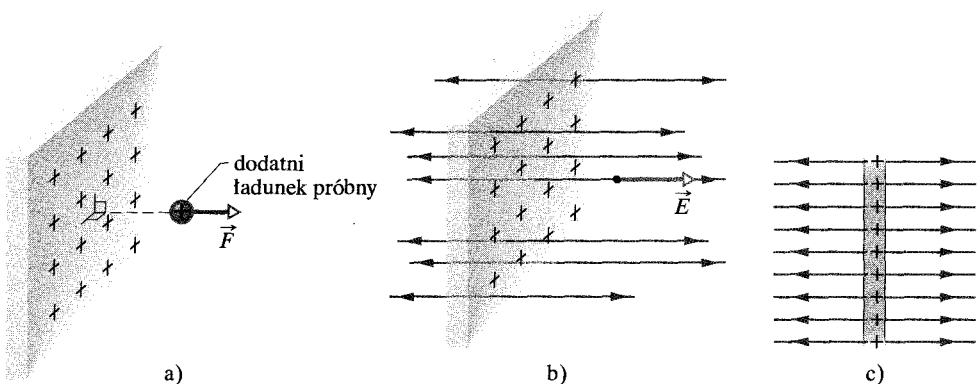
a)



linie pola elektrycznego

b)

Rys. 23.2. a) Na dodatni ładunek próbny znajdujący się w pobliżu jednorodnie ujemnie naładowanej kuli działa siła elektrostatyczna \vec{F} . b) Wektor natężenia pola elektrycznego \vec{E} w miejscu ładunku próbnego i linie pola elektrycznego w przestrzeni w pobliżu kuli. Linie pola skierowane są *do* ujemnie naładowanej kuli. (Zaczynają się one na odległych ładunkach dodatnich)



Rys. 23.3. a) Siła elektrostatyczna \vec{F} działająca na dodatni ładunek próbnego w pobliżu bardzo dużej nieprzewodzącej płyty o jednej powierzchni jednorodnie naładowanej ładunkiem dodatnim. b) Wektor natężenia pola elektrycznego \vec{E} w miejscu ładunku próbnego i linie pola elektrycznego w przestrzeni w pobliżu płyty. Linie pola wychodzą z dodatnio naładowanej płyty. c) Widok z boku sytuacji (b)

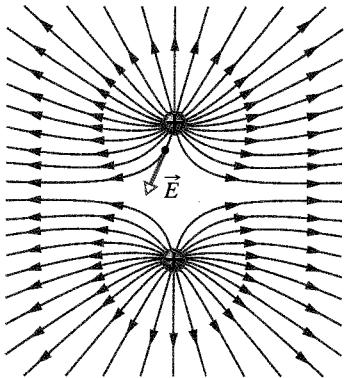
wszystkich punktach w pobliżu kuli są skierowane radialnie do jej środka. Rozkład wektorów przedstawiono na rysunku 23.2b przy zastosowaniu linii pola, których kierunki są takie same, jak kierunki sił i wektorów natężenia pola. Co więcej, oddalanie się od siebie linii pola wraz ze wzrostem odległości od kuli oznacza, że wartość natężenia pola maleje wraz z odległością od środka kuli.

Jeśli kula na rysunku 23.2 byłaby naładowana jednorodnie ładunkiem *dodatnim*, to wektory natężenia pola elektrycznego, a stąd i linie pola elektrycznego we wszystkich punktach w pobliżu kuli byłyby skierowane radialnie *od* kuli. Mamy więc następującą regułę:

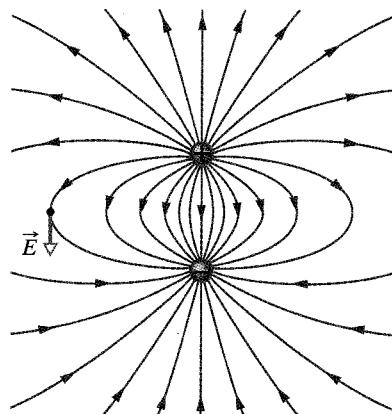
► Linie pola elektrycznego wychodzą od ładunku dodatniego (gdzie się zaczynają) i są skierowane ku ładunkowi ujemnemu (gdzie się kończą).

Na rysunku 23.3a przedstawiono fragment nieskończoności dużej, nieprzewodzącej płyty (*płaszczyzny*). Na jednej jej stronie umieszczono jednorodnie rozłożony ładunek dodatni. Jeśli umieścimy dodatni ładunek próbnego w dowolnym punkcie w pobliżu płyty z rys. 23.3a, to wypadkowa siła elektrostatyczna działająca na ładunek próbnego będzie prostopadła do płyty, ponieważ siły działające we wszystkich innych kierunkach znoszą się ze względu na symetrię zagadnienia. Ponadto, siła wypadkowa działająca na ładunek próbnego będzie skierowana od płyty, jak na rysunku. Stąd wektor natężenia pola elektrycznego w dowolnym punkcie przestrzeni po każdej stronie płaszczyzny jest także prostopadły do płyty i skierowany od niej (rys. 23.2b i c). Ładunek jest rozłożony równomiernie na całej płycie, dlatego też wszystkie wektory natężenia pola mają taką samą wartość. Pole elektryczne o takiej samej wartości i takim samym kierunku natężenia w każdym punkcie nazywamy *jednorodnym polem elektrycznym*.

Oczywiście, żadna nieprzewodząca płyta (np. płaska powierzchnia plastikowa) nie jest nieskończoność duża, ale jeśli rozważymy obszar w pobliżu środka rzeczywistej płyty, a nie przy jej brzegach, to linie pola w tym obszarze mają rozkład jak na rysunkach 23.3b i c.



Rys. 23.4. Linie pola dla dwóch jednakowych dodatnich ładunków punktowych. Ładunki odpychają się wzajemnie. (Linie kończą się na odległych ładunkach ujemnych). Aby „zobaczyć” rzeczywisty trójwymiarowy rozkład linii pola, należy w myśl obrócić rozkład tu pokazany wokół osi przechodzącej przez obydwa ładunki. Trójwymiarowy rozkład i reprezentowane przez niego pole elektryczne mają *symetrię obrotową* wokół tej osi. Pokazano wektor natężenia pola elektrycznego w jednym punkcie; widać, że jest on styczny do linii pola przechodzącej przez ten punkt



Rys. 23.5. Linie pola dla położonych blisko siebie dodatniego i ujemnego ładunku punktowego, o jednakowej wartości ładunków. Ładunki przyciągają się wzajemnie. Rozkład linii pola i reprezentowane przez niego pole elektryczne mają symetrię obrotową wokół osi, przechodzącej przez obydwa ładunki. Pokazano wektor natężenia pola elektrycznego w jednym punkcie; wektor ten jest styczny do linii pola, przechodzącej przez ten punkt

Na rysunku 23.4 przedstawiono linie pola dla dwóch jednakowych ładunków dodatnich, a na rysunku 23.5 — rozkład pola dla dwóch ładunków o jednakowych wartościach, ale o przeciwnych znakach, czyli dla układu, który nazywamy **dipolem elektrycznym**. Chociaż nie będziemy często używać linii pola do opisu ilościowego, to są one bardzo użyteczne do graficznego przedstawienia tego, co się dzieje. Czyż prawie nie „widać”, że ładunki odpychają się na rys. 23.4 i przyciągają się na rys. 23.5?

Przykład 23.1

Jak zmienia się wartość natężenia pola elektrycznego wraz z odlegością od środka jednorodnie naładowanej kuli z rysunku 23.2? Użyj argumentów, opartych na pojęciu linii pola elektrycznego.

ROZWIĄZANIE:

1. Linie pola są jednorodnie rozłożone wokół kuli i skierowane na zewnątrz od niej. Jeśli więc umieścimy współśrodkową powłokę sferyczną o promieniu r wokół naładowanej kuli,

to wszystkie linie kończące się na naładowanej kuli muszą przejść przez współśrodkową powłokę. Jeśli liczba linii pola wynosi N , to liczba linii przechodzących przez jednostkę powierzchni powłoki wynosi $N/(4\pi r^2)$, bo pole powierzchni sfery wynosi $4\pi r^2$.

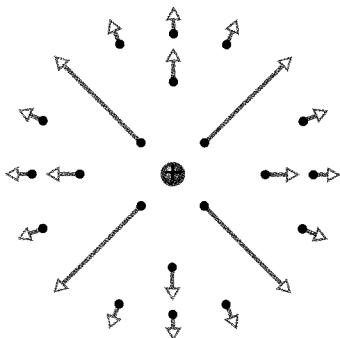
2. Wartość natężenia pola elektrycznego E jest proporcjonalna do liczby linii na jednostkę powierzchni prostopadłej do linii. Powłoka sferyczna jest prostopadła do linii pola, a więc wartość E jest proporcjonalna do $N/(4\pi r^2)$. Odległość r jest jedyną zmienną w tym wyrażeniu, a więc E maleje odwrotnie proporcjonalnie do kwadratu odległości od środka naładowanej kuli.

23.4. Pole elektryczne ładunku punktowego

Aby znaleźć pole ładunku punktowego q (czyli naładowanej cząstki) w dowolnym punkcie, w odległości r od ładunku punktowego, umieszczać w tym punkcie dodatni ładunek próbny q_0 . Z prawa Coulomb'a (22.4) wiesz, że wartość siły

elektrostatycznej, działającej na q_0 wynosi:

$$F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{|q||q_0|}{r^2}. \quad (23.2)$$



Rys. 23.6. Wektory natężenia pola elektrycznego w otoczeniu dodatniego ładunku punktowego

Siła \vec{F} jest skierowana od ładunku punktowego, jeśli q jest ładunkiem dodatnim, i do ładunku punktowego, jeśli q jest ładunkiem ujemnym. Wartość natężenia pola elektrycznego na podstawie wzoru (23.1) wynosi:

$$E = \frac{F}{q_0} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{|q|}{r^2} \quad (\text{lądunek punktowy}). \quad (23.3)$$

Kierunek natężenia \vec{E} jest taki sam, jak kierunek siły działającej na dodatni ładunek próbny: od ładunku punktowego, jeśli q jest ładunkiem dodatnim, i do niego, jeśli ładunek q jest ujemny.

Dla ładunku q_0 wybraliśmy dowolny punkt, a więc wzór (23.3) określa natężenie pola w dowolnym punkcie w otoczeniu ładunku q . Rozkład natężenia pola dla dodatniego ładunku punktowego przedstawiono na rysunku 23.6 za pomocą wektorów (a nie linii pola).

Możemy szybko znaleźć wypadkowe pole elektryczne, pochodzące od więcej niż jednego ładunku punktowego. Jeśli umieścimy dodatni ładunek próbny q_0 w pobliżu n ładunków punktowych q_1, q_2, \dots, q_n , to ze wzoru (22.7) siła wypadkowa \vec{F}_0 oddziaływania n ładunków punktowych na ładunek próbnego wynosi:

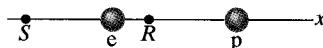
$$\vec{F}_0 = \vec{F}_{01} + \vec{F}_{02} + \dots + \vec{F}_{0n}.$$

Ze wzoru (23.1) możemy obliczyć wypadkowe natężenie pola elektrycznego w miejscu ładunku próbneg, które wynosi:

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}_0}{q_0} = \frac{\vec{F}_{01}}{q_0} + \frac{\vec{F}_{02}}{q_0} + \dots + \frac{\vec{F}_{0n}}{q_0} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \dots + \vec{E}_n, \quad (23.4)$$

gdzie \vec{E}_i jest natężeniem pola elektrycznego, jakie wytworzyły tylko sam ładunek punktowy q_i . Ze wzoru (23.4) widać, że zasada superpozycji stosuje się zarówno do natężeń pola elektrycznego, jak i sił elektrostatycznych.

SPRAWDZIAN 1: Na rysunku przedstawiono umieszczone na osi x proton p i elektron e . Jaki jest kierunek natężenia pola elektrycznego elektronu w : a) punkcie S , b) punkcie R ? Jaki jest kierunek wypadkowego natężenia pola elektrycznego w: c) punkcie R , d) punkcie S ?



Przykład 23.2

Na rysunku 23.7a przedstawiono trzy cząstki o ładunkach $q_1 = +2Q$, $q_2 = -2Q$ i $q_3 = -4Q$, z których każda znajduje się w odległości d od początku układu. Jakie jest wypadkowe natężenie pola elektrycznego \vec{E} w początku układu?

ROZWIĄZANIE:

Ładunki q_1, q_2 i q_3 wytwarzają w początku układu pole elektryczne o natężeniach odpowiednio \vec{E}_1, \vec{E}_2 i \vec{E}_3 , a wypadkowe natężenie pola elektrycznego jest sumą wektorową $\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \vec{E}_3$. Aby znaleźć tę sumę, musimy najpierw znaleźć wartości

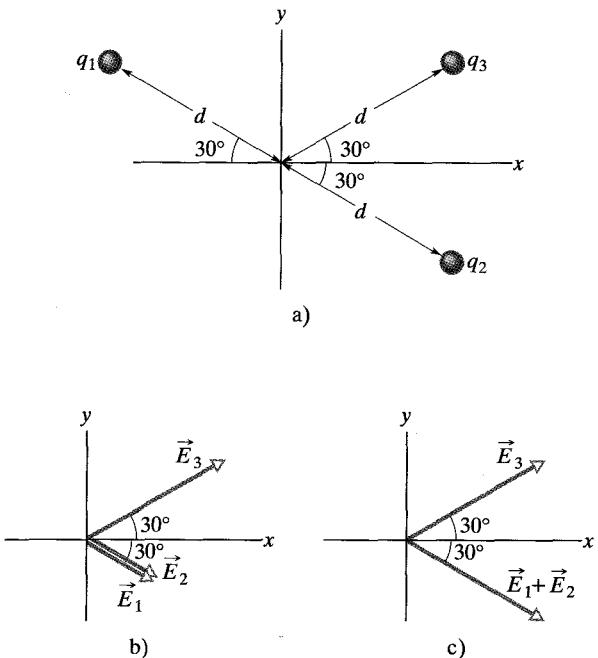
i kierunki tych trzech wektorów natężeń. Aby znaleźć wartość natężenia \vec{E}_1 , które jest wytworzone przez ładunek q_1 , korzystamy ze wzoru (23.3) i po podstawieniu d zamiast r i $2Q$ zamiast $|q|$ otrzymujemy:

$$E_1 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2Q}{d^2}.$$

Podobnie obliczamy wartości natężen \vec{E}_2 i \vec{E}_3 , które wynoszą:

$$E_2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2Q}{d^2} \quad \text{i} \quad E_3 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{4Q}{d^2}.$$

Następnie musimy znaleźć kierunki trzech wektorów natężenia pola elektrycznego w początku układu. Ładunek q_1 jest ładunkiem dodatnim, dlatego też natężenie wytwarzanego przez niego pola jest skierowane *od* niego. Ładunki q_2 i q_3 są ujemne, a więc natężenia odpowiadających im pól są skierowane *do* nich. Stąd natężenia pól elektrycznych, wytworzonych w środku układu przez te trzy naładowane cząstki mają kierunki przedstawione na rysunku 23.7b. (Uwaga: Początki wektorów umieściliśmy w punkcie, gdzie są obliczane natężenia pól — takie postępowanie zmniejsza prawdopodobieństwo pomyłki).



Możemy teraz dodać wektorowo natężenia, podobnie jak dodawaliśmy siły w przykładzie 22.1c. Warto tu jednak zastosować symetrię w celu uproszczenia obliczeń. Z rysunku 23.7b widzimy, że \vec{E}_1 i \vec{E}_2 mają ten sam kierunek. Stąd ich wektorowa suma ma ten sam kierunek, a jej wartość wynosi:

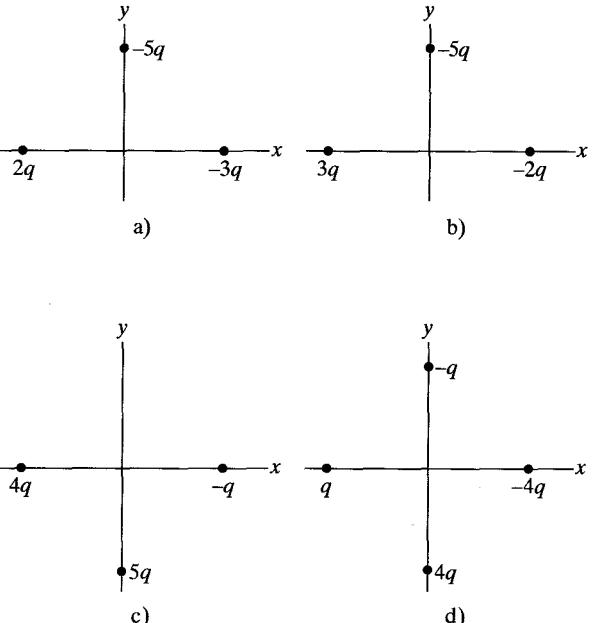
$$\vec{E}_1 + \vec{E}_2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2Q}{d^2} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2Q}{d^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{4Q}{d^2}.$$

Jest ona równa wartości natężenia \vec{E}_3 .

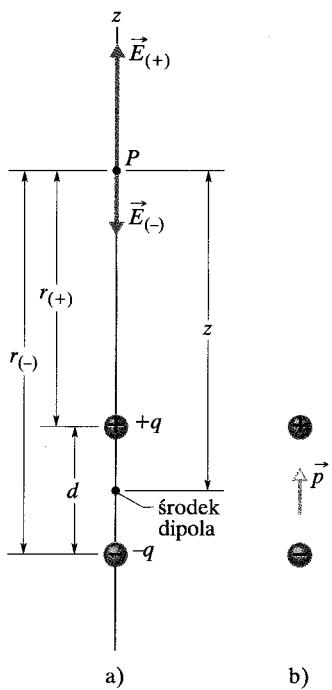
Musimy teraz dodać dwa wektory, \vec{E}_3 i sumę wektorową $\vec{E}_1 + \vec{E}_2$, które mają taką samą wartość i są skierowane symetrycznie względem osi x , jak pokazano na rysunku 23.7c. Korzystając z symetrii rysunku 23.7c, wnioskujemy, że składowe y naszych dwóch wektorów, jednakowe co do wartości bezwzględnej, znoszą się, a składowe x , jednakowe co do wartości bezwzględnej, się dodają. Stąd wypadkowe natężenie pola \vec{E} w początku układu jest skierowane w dodatnim kierunku osi x i ma wartość:

$$E = 2E_{3x} = 2E_3 \cos 30^\circ = (2) \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{4Q}{d^2} (0,866) \\ = \frac{6,93Q}{4\pi\epsilon_0 d^2}. \quad (\text{odpowiedź})$$

SPRAWDZIAN 2: Na rysunku przedstawiono cztery układy, w których naładowane cząstki są umieszczone w jednakowych odległościach od początku układu. Uszereguj te układy względem wartości wypadkowego natężenia pola elektrycznego w początku układu, zaczynając od największej.



Rys. 23.7. Przykład 23.2. a) Trzy cząstki o ładunkach q_1 , q_2 i q_3 znajdują się w takiej samej odległości d od początku układu. b) Wektory natężenia pola elektrycznego \vec{E}_1 , \vec{E}_2 i \vec{E}_3 w początku układu, pochodzącego od tych trzech cząstek. c) Wektor natężenia pola elektrycznego \vec{E}_3 i suma wektorowa $\vec{E}_1 + \vec{E}_2$ w początku układu



Rys. 23.8. a) Dipol elektryczny. Wektory natężenia pola elektrycznego $\vec{E}_{(+)}$ i $\vec{E}_{(-)}$ w punkcie P na osi dipola pochodzą od dwóch ładunków dipola. Punkt P znajduje się w odległości $r_{(+)}$ i $r_{(-)}$ od poszczególnych ładunków tworzących dipol. b) Moment dipolowy \vec{p} dipola jest skierowany od ładunku ujemnego do ładunku dodatniego

23.5. Pole elektryczne dipola elektrycznego

Na rysunku 23.8a przedstawiono dwie naładowane cząstki o takiej samej wartości ładunku q , ale przeciwnych znakach, znajdujące się w odległości d . Jak już wspomnieliśmy podczas omawiania rysunku 23.5, taki układ ładunków nazywamy **dipolem elektrycznym**. Znajdźmy pole elektryczne dipola z rysunku 23.8a w punkcie P , w odległości z od środkowego punktu dipola, na osi przechodzącej przez cząstki, zwanej *osią dipola*.

Korzystając z symetrii, wnioskujemy, że natężenie pola elektrycznego \vec{E} w punkcie P — a także natężenia pól $\vec{E}_{(+)}$ i $\vec{E}_{(-)}$ wytworzonych przez oddzielne ładunki tworzące dipol — muszą być skierowane wzdłuż osi dipola, którą wybraliśmy za oś z . Stosując zasadę superpozycji dla natężeń pól elektrycznych, znajdujemy wartość E natężenia pola elektrycznego w punkcie P :

$$\begin{aligned} E &= E_{(+)} - E_{(-)} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r_{(+)}^2} \frac{q}{r_{(+)}^2} - \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r_{(-)}^2} \frac{q}{r_{(-)}^2} \\ &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0(z - \frac{1}{2}d)^2} - \frac{q}{4\pi\epsilon_0(z + \frac{1}{2}d)^2}. \end{aligned} \quad (23.5)$$

Po algebraicznym przekształceniu wzór ten można zapisać w postaci:

$$E = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 z^2} \left[\left(1 - \frac{d}{2z}\right)^{-2} - \left(1 + \frac{d}{2z}\right)^{-2} \right]. \quad (23.6)$$

Jesteśmy zwykle zainteresowani polem dipola w dużych odległościach w porównaniu z wymiarami dipola, czyli dla $z \gg d$. Przy tak dużych odległościach we wzorze (23.6) mamy $d/(2z) \ll 1$. Możemy wtedy rozwinąć w szereg dwie wielkości w nawiasach w tym równaniu i po skorzystaniu ze wzoru dwumianowego (dodatek E) otrzymujemy:

$$\left[\left(1 + \frac{2d}{2z(1!)} + \dots\right) - \left(1 - \frac{2d}{2z(1!)} + \dots\right) \right].$$

Stąd:

$$E = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 z^2} \left[\left(1 + \frac{d}{z} + \dots\right) - \left(1 - \frac{d}{z} + \dots\right) \right]. \quad (23.7)$$

Wyrazy, które pominieliśmy, pisząc wzór (23.7), zawierają d/z kolejno w coraz wyższych potęgach. Wartości tych wyrazów są kolejno coraz mniejsze, ponieważ $d/z \ll 1$. Obliczając E dla dużych odległości, możemy je pominąć. W tym przybliżeniu możemy przepisać wzór (22.7) w postaci:

$$E = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 z^2} \frac{2d}{z} = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \frac{qd}{z^3}. \quad (23.8)$$

Iloczyn qd , który zawiera dwie wielkości charakteryzujące dipol, q i d , jest wartością p wielkości wektorowej zwanej **momentem dipolowym elektrycznym** \vec{p} dipola. (Jednostką momentu \vec{p} jest kulomb razy metr ($C \cdot m$)). Wzór (23.8) możemy więc zapisać w postaci:

$$E = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \frac{p}{z^3} \quad (\text{dipol elektryczny}). \quad (23.9)$$

Za kierunek momentu \vec{p} przyjmujemy kierunek od ujemnego do dodatniego ładunku dipola, zgodnie z rysunkiem 23.8b, dlatego też możemy używać \vec{p} do określania ustawienia dipola.

Ze wzoru (23.9) wynika, że jeśli mierzmy natężenie pola elektrycznego dipola tylko w odległych punktach, to nie możemy znaleźć oddziennie q i d , lecz tylko ich iloczyn. Natężenie pola w dużych odległościach nie ulegnie zmianie, jeśli na przykład podwoimy q i równocześnie dwukrotnie zmniejszymy d . Moment dipolowy elektryczny jest więc podstawową właściwością dipola.

Chociaż wzór (23.9) jest słuszny tylko dla odległych punktów na osi dipola, to okazuje się, że E dla dipola zmienia się proporcjonalnie do $1/r^3$ dla *wszystkich* odległych punktów, niezależnie od tego, czy leżą one na osi dipola, czy nie; wielkość r jest tu odlegością między rozważanym punktem i środkiem dipola.

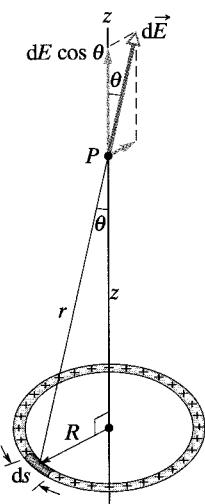
Analiza rysunku 23.8 i linii pola na rysunku 23.5 pokazuje, że natężenie \vec{E} dla odległych punktów na osi dipola, na przykład dla punktu P na rysunku 23.8a zarówno w górnej, jak i w dolnej części osi dipola ma kierunek wektora momentu dipolowego \vec{p} .

Ze wzoru (23.9) wynika, że jeśli podwoimy odległość punktu od dipola, to natężenie pola elektrycznego w tym punkcie zmala je ośmiokrotnie. Jeśli jednak podwoimy odległość od pojedynczego ładunku punktowego, to zgodnie ze wzorem (23.3) natężenie pola elektrycznego zmala je tylko czterokrotnie. Tak więc natężenie pola elektrycznego dipola maleje szybciej wraz z odległością, niż natężenie pola elektrycznego pojedynczego ładunku. Fizycznym powodem tego szybkiego spadku natężenia pola elektrycznego dipola jest to, że z odległych punktów dipol wygląda jak dwa równe co do wartości bezwzględnej, ale przeciwnie ładunki, które prawie, choć nie całkiem, się pokrywają. Stąd natężenia ich pola elektrycznego w odległych punktach prawie całkiem się znoszą.

23.6. Pole elektryczne naładowanej linii

Rozważaliśmy dotąd pole elektryczne wytwarzane przez jeden ładunek punktowy, lub co najwyżej kilka. Rozważamy obecnie rozkłady ładunków, składające się z bardzo wielu (np. miliardów) leżących blisko siebie ładunków punktowych, rozłożonych wzdłuż linii, na powierzchni, czy w pewnej objętości. Rozkłady takie nazywamy **ciągłymi**, w przeciwieństwie do dyskretnych. Takie rozkłady mogą zawierać ogromną liczbę ładunków punktowych, dlatego też wytwarzane przez nie pola elektryczne znajdujemy, korzystając z metod analizy matematycznej, a nie przez rozważanie poszczególnych ładunków punktowych. W tym paragrafie omówimy pole elektryczne naładowanej linii, w następnym paragrafie rozważymy naładowaną powierzchnię, a w kolejnym rozdziale wyznaczmy pole wewnątrz jednorodnie naładowanej kuli.

Gdy mamy do czynienia z ciągłymi rozkładami ładunku, to wygodnie jest wyrazić ładunek obiektu za pomocą *gęstości ładunku*, a nie całkowitego ładunku. Na przykład, dla naładowanej linii będziemy używać liniowej gęstości ładunku (czyli ładunku na jednostkę długości linii) λ , której jednostką w układzie SI jest kulomb na metr (C/m). W tabeli 23.2 przedstawiono także inne gęstości ładunku, jakich będziemy używać w tym rozdziale.



Rys. 23.9. Pierścień naładowany jednorodnie dodatnio. Element ładunku zajmuje długość ds (znacznie powiększoną dla lepszego obrazu). Element ten wytworzy pole elektryczne o natężeniu $d\vec{E}$ w punkcie P . Składowa natężenia $d\vec{E}$ wzdłuż osi pierścienia wynosi $dE \cos \theta$

Tabela 23.2. Niektóre wielkości określające rozkład ładunku elektrycznego

| Nazwa | Symbol | Jednostka SI |
|--------------------------------|-----------|------------------|
| Ładunek | q | C |
| Liniowa gęstość ładunku | λ | C/m |
| Powierzchniowa gęstość ładunku | σ | C/m ² |
| Objętościowa gęstość ładunku | ρ | C/m ³ |

Na rysunku 23.9 przedstawiono cienki pierścień o promieniu R , naładowany jednorodnie dodatnio o liniowej gęstości ładunku λ na całym obwodzie. Możemy sobie wyobrazić, że pierścień jest z plastiku, lub jakiegoś innego izolatora, i ładunki są umieszczone w poszczególnych jego punktach. Jakie jest natężenie pola elektrycznego \vec{E} w punkcie P , w odległości z od płaszczyzny pierścienia, leżącym na osi pierścienia?

Aby znaleźć odpowiedź, nie możemy bezpośrednio zastosować wzoru (23.3), który określa natężenie pola ładunku punktowego, gdyż ładunek rozmieszczony na pierścieniu nie jest oczywiście ładunkiem punktowym. Możemy jednak w myśli podzielić ładunek na pierścieniu na nieskończonie małe elementy, które zachowują się jak ładunki punktowe, i potem zastosować wzór (23.3) do każdego z nich. Możemy następnie dodać natężenia pola elektrycznego, wytworzonego w punkcie P przez poszczególne elementy. Suma wektorowa tych wszystkich natężeń daje nam natężenie pola, wytworzonego w punkcie P przez pierścień.

Niech ds będzie długością (wzdłuż łuku) elementu pierścienia. Ponieważ λ jest ładunkiem przypadającym na jednostkę długości, to taki element ma ładunek o wartości:

$$dq = \lambda ds. \quad (23.10)$$

Ten ładunek wytworza natężenie pola $d\vec{E}$ w punkcie P , który znajduje się w odległości r od elementu. Traktując ten element jak ładunek punktowy i korzystając ze wzoru (23.10), możemy napisać wzór (23.3) dla wartości $d\vec{E}$ w postaci:

$$dE = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq}{r^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda ds}{r^2}. \quad (23.11)$$

Zgodnie z rysunkiem 23.9 możemy zapisać wzór (23.11) jako:

$$dE = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda ds}{(z^2 + R^2)}. \quad (23.12)$$

Na rysunku 23.9 pokazano, że wektor $d\vec{E}$ jest skierowany pod kątem θ do osi, którą wybraliśmy jako osią z i ma składową prostopadłą i równoległą do tej osi.

Każdy element ładunku pierścienia wytworza natężenie pola $d\vec{E}$ w punkcie P , o wartości danej wzorem (23.12). Wszystkie wektory $d\vec{E}$ mają identyczne składowe równoległe do osi, zarówno co do wartości, jak i kierunku. Składowe prostopadłe wektorów $d\vec{E}$ są identyczne co do wartości, ale skierowane w różnych kierunkach. Dla każdej składowej prostopadłej skierowanej w danym kierunku istnieje inna skierowana przeciwnie. Suma takiej pary składowych, podobnie jak suma wszystkich innych par przeciwnie skierowanych składowych, jest równa zeru.

Składowe prostopadłe znoszą się więc i nie musimy ich brać pod uwagę. Pozostają składowe równoległe, które mają ten sam kierunek i wypadkowe natężenie pola w punkcie P jest ich sumą.

Składowa równoległa wektora $d\vec{E}$, pokazanego na rysunku 23.9, ma wartość $dE \cos \theta$. Z rysunku wynika także, że:

$$\cos \theta = \frac{z}{r} = \frac{z}{(z^2 + R^2)^{1/2}}. \quad (23.13)$$

Ze wzorów (23.13) i (23.12) dla składowej równoległej wektora $d\vec{E}$ otrzymujemy:

$$dE \cos \theta = \frac{z\lambda}{4\pi\epsilon_0(z^2 + R^2)^{3/2}} ds. \quad (23.14)$$

Aby dodać składowe równoległe $dE \cos \theta$, wytworzone przez wszystkie elementy, należy scałkować wzór (23.14) po obwodzie pierścienia od $s = 0$ do $s = 2\pi R$. Jedyną wielkością we wzorze (23.14), która zmienia się podczas całkowania, jest s , a więc pozostałe wielkości można wyłączyć przed znakiem całki. Całkowanie daje więc:

$$E = \int dE \cos \theta = \frac{z\lambda}{4\pi\epsilon_0(z^2 + R^2)^{3/2}} \int_0^{2\pi R} ds = \frac{z\lambda(2\pi R)}{4\pi\epsilon_0(z^2 + R^2)^{3/2}}. \quad (23.15)$$

Ponieważ λ jest ładunkiem przypadającym na jednostkę długości pierścienia, to człon $\lambda(2\pi R)$ we wzorze (23.15) jest równy całkowitemu ładunkowi q pierścienia. Wzór (23.15) możemy więc zapisać w postaci:

$$E = \frac{qz}{4\pi\epsilon_0(z^2 + R^2)^{3/2}} \quad (\text{naładowany pierścień}). \quad (23.16)$$

Jeśli ładunek umieszczony na pierścieniu jest ujemny, a nie dodatni, jak założyliśmy, to wartość natężenia pola w punkcie P jest w dalszym ciągu dana wzorem (23.16), ale wektor natężenia jest skierowany do pierścienia zamiast od pierścienia.

Sprawdźmy wzór (23.16) dla ładunku punktowego, umieszczonego na osi tak daleko, że $z \gg R$. Dla takiego punktu wyrażenie $z^2 + R^2$ we wzorze (23.16) można przybliżyć przez z^2 i wzór (23.16) przyjmuje postać:

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{z^2} \quad (\text{pole naładowanego pierścienia w dużej odległości}). \quad (23.17)$$

Jest to rozsądny wynik, ponieważ przy dużej odległości pierścień „wygląda” jak ładunek punktowy. Jeśli zastąpimy z przez r we wzorze (23.17), to mamy wzór (23.3) dla wartości natężenia pola elektrycznego ładunku punktowego.

Sprawdźmy następnie wzór (23.16) dla punktu, leżącego w środku pierścienia, czyli dla $z = 0$. Ze wzoru (23.16) wynika, że w tym punkcie $E = 0$. Jest to również rozsądny wynik, bo jeśli umieścimy ładunek próbny w środku pierścienia, to działająca na niego wypadkowa siła elektrostatyczna będzie równa zeru; siła pochodząca od dowolnego elementu pierścienia będzie się znosić z siłą od elementu po przeciwniej stronie pierścienia. Ze wzoru (23.1) i faktu, że siła w środku pierścienia jest równa zeru, wynika, że natężenie pola także jest równe zeru.

Przykład 23.3

Na rysunku 23.10a przedstawiono plastikowy pręt naładowany jednorodnie ładunkiem $-Q$. Pręt został wygięty tak, że tworzy łuk okręgu o promieniu r i rozwartości 120° . Oś układu współrzędnych wybieramy w taki sposób, że oś symetrii pręta pokrywa się z osią x , a środek układu znajduje się w środku krzywizny P pręta. Jak przez Q i r wyrazisz natężenie pola elektrycznego \vec{E} pręta w punkcie P ?

ROZWIĄZANIE:

Ze względu na ciągły rozkład ładunku w pręcie musimy znaleźć wyrażenie na natężenia pola, wytworzonego przez elementy pręta, a następnie dodać je przez całkowanie. Rozważmy element o długości ds umieszczony nad osią x pod kątem θ (rys. 23.10b). Jeśli λ oznacza liniową gęstość ładunku pręta, to nasz element ds ma ładunek o wartości:

$$dq = \lambda ds. \quad (23.18)$$

Taki element wywarza pole elektryczne o natężeniu $d\vec{E}$ w punkcie P , który znajduje się w odległości r od elementu. Traktując element jak ładunek punktowy, możemy przedstawić wzór (23.3) dla wartości wektora $d\vec{E}$ w postaci:

$$dE = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq}{r^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda ds}{r^2}. \quad (23.19)$$

Wektor $d\vec{E}$ jest skierowany do ds , bo ładunek dq jest ujemny.

Wybrany przez nas element ma symetrycznie położony element ds' (obraz zwierciadlany) w dolnej połowie pręta. Natężenie pola elektrycznego $d\vec{E}'$, wytworzonego w punkcie P przez ds' , ma znów wartość opisaną wzorem (23.19), ale wektor natężenia jest skierowany do ds' zgodnie z rysunkiem 23.10b. Jeśli rozłożymy wektory natężenia pola, pochodzącego od ds i ds' na składowe x i y , jak pokazano na rysunku 23.10b, to widzimy, że składowe y znoszą się (ponieważ mają jednakowe wartości i przeciwnie kierunki). Widzimy także, że składowe x mają jednakowe wartości i takie same kierunki.

Aby znaleźć natężenie pola elektrycznego pręta, należy więc zsumować (przez całkowanie) tylko składowe x natężzeń pola od wszystkich elementów pręta. Na podstawie rysunku 23.10b i wzoru (23.9) możemy zapisać składową dE_x od elementu ds w postaci:

$$dE_x = dE \cos \theta = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda}{r^2} \cos \theta ds. \quad (23.20)$$

Wzór (23.20) ma dwie zmienne: θ i s . Przed obliczeniem całki musimy pozbyć się jednej z nich. W tym celu zastosujemy związek: $ds = rd\theta$, w którym $d\theta$ jest kątem o wierzchołku w punkcie P , który odpowiada długości łuku ds (rys. 23.10c). Po tym podstawieniu możemy scałkować wzór (23.20) względem kąta θ , od $\theta = -60^\circ$ do $\theta = 60^\circ$. Otrzymujemy wartość natężenia pola elektrycznego w punkcie P :

$$\begin{aligned} E &= \int dE_x = \int_{-60^\circ}^{60^\circ} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda}{r^2} \cos \theta r d\theta = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0 r} \int_{-60^\circ}^{60^\circ} \cos \theta d\theta \\ &= \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0 r} [\sin \theta]_{-60^\circ}^{60^\circ} = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0 r} [\sin 60^\circ - \sin (-60^\circ)] = \frac{1,73\lambda}{4\pi\epsilon_0 r}. \end{aligned} \quad (23.21)$$

(Gdybyśmy przestawili granice całkowania, to otrzymalibyśmy ten sam wynik ze znakiem minus. Całkowanie daje tylko wartość wektora \vec{E} , a więc znak nie jest istotny).

W celu obliczenia λ zauważmy, że prętowi odpowiada kąt 120° , czyli $\frac{1}{3}$ kąta pełnego. Długość pręta wynosi więc $2\pi r/3$, a liniowa gęstość ładunku wynosi:

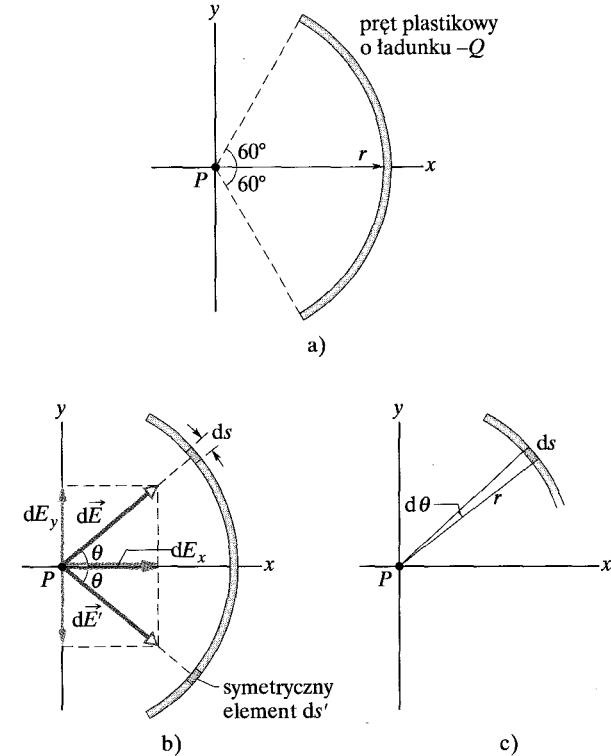
$$\lambda = \frac{\text{ładunek}}{\text{długość}} = \frac{Q}{2\pi r/3} = \frac{0,477 Q}{r}.$$

Podstawiając tę wartość do wzoru (23.21), otrzymujemy:

$$E = \frac{(1,73)(0,477 Q)}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{0,83 Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}. \quad (\text{odpowiedź})$$

Natężenie \vec{E} jest skierowane do pręta wzdłuż osi symetrii rozkładu ładunku. Używając wektorów jednostkowych, zapisujemy:

$$\vec{E} = \frac{0,83 Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{i}.$$



Rys. 23.10. Przykład 23.3. a) Pręt plastikowy o ładunku $-Q$ stanowi część łuku okręgu o promieniu r i kącie środkowym 120° ; punkt P jest w środku krzywizny pręta. b) Element w górnej części pręta, pod kątem θ do osi i długości ds , wywarza pole elektryczne o natężeniu $d\vec{E}$ w punkcie P . Element ds' , symetryczny do ds względem osi x , wywarza w punkcie P pole o takiej samej wartości natężenia $d\vec{E}'$. c) Elementowi długości łuku ds odpowiada kąt $d\theta$ o wierzchołku w punkcie P .

Pora 1: Obliczanie natężenia pola pochodzącego od naładowanej linii

Oto szczegółowy opis metody obliczania natężenia pola elektrycznego \vec{E} , wytwarzanego w punkcie P przez jednorodnie naładowaną linię, będącą łukiem okręgu lub odcinkiem prostej. Ogólna strategia polega na wybraniu elementu dq ładunku, znalezieniu $d\vec{E}$ od tego elementu i całkowaniu $d\vec{E}$ po całej naładowanej linii.

Krok 1. Jeśli naładowana linia jest łukiem okręgu, to jako ds należy wybrać długość łuku elementu rozkładu. Jeśli linia jest prostą biegącą wzdłuż osi x , to jako dx wybieramy długość elementu. Zaznaczamy ten element na rysunku.

Krok 2. Szukamy związku ładunku dq z długością elementu, zgodnie ze wzorem $dq = \lambda ds$ lub $dq = \lambda dx$. Rozważamy dq i λ dodatnie, nawet jeśli ładunek jest w rzeczywistości ujemny. (Znak ładunku weźmiemy pod uwagę w następnym kroku).

Krok 3. Wyrażamy natężenie pola $d\vec{E}$ wytworzonego w punkcie P przez ładunek dq , korzystając ze wzoru (23.3) i zastępując q w tym równaniu przez λds lub λdx . Jeśli ładunek na linii jest dodatni, to w punkcie P rysujemy wektor $d\vec{E}$ tak, aby był skierowany od dq . Jeśli ładunek jest ujemny, to rysujemy wektor skierowany do dq .

Krok 4. Zawsze szukamy symetrii w rozważanej sytuacji. Jeśli punkt P leży na osi symetrii rozkładu ładunku, to rozkładamy natężenie pola $d\vec{E}$, wytworzonego przez dq na składowe: prostopadłą i równoległą do osi symetrii. Rozważamy następnie drugi element dq' , który znajduje się symetrycznie do dq względem osi symetrii. W punkcie P rysujemy wektor natężenia pola $d\vec{E}'$ wytworzonego przez ten symetryczny element i rozkładamy go na składowe. Jedna ze składowych natężenia wytworzonego przez dq jest składową, która się znowu z odpowiednią składową natężenia pola, wytworzonego przez dq' i nie wymaga dalszych rozważań. Druga składowa natężenia pola wytworzonego przez dq dodaje się do składowej, wytworzonej przez dq' . Sumujemy składowe pochodzące od wszystkich elementów przez całkowanie.

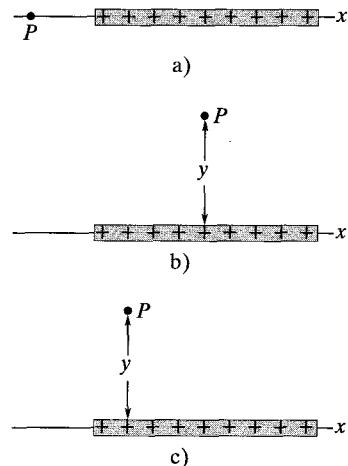
Krok 5. Niżej podajemy cztery ogólne typy jednorodnego rozkładu ładunku, z omówieniem strategii uproszczenia całki z kroku 4.

Pierścień, z punktem P leżącym na osi symetrii, jak na rysunku 23.9. W wyrażeniu na dE zastępujemy r^2 przez $z^2 + R^2$, jak we wzorze (23.12). Wyrażamy składowe natężenia $d\vec{E}$ przez θ , co wprowadza $\cos \theta$, ale θ jest identyczne dla wszystkich elementów i dlatego nie jest zmienną. Zastępujemy $\cos \theta$, jak we wzorze (23.13) i całkujemy względem s po całym obwodzie pierścienia.

Łuk okręgu z punktem P , leżącym w środku krzywizny, jak na rysunku 23.10. Wyrażamy składowe natężenia pola $d\vec{E}$ przez θ , co wprowadza $\sin \theta$ lub $\cos \theta$. Zastępując ds przez $rd\theta$, otrzymujemy jedną zmienną θ , zamiast dwóch

zmiennych s i θ . Całkujemy względem θ , jak w przykładzie 23.3, od jednego końca łuku do drugiego.

Odcinek prostej z punktem P na jego przedłużeniu, jak na rysunku 23.11a. W wyrażeniu na dE zastępujemy r przez x . Całkujemy względem x od jednego końca naładowanego odcinka do drugiego.

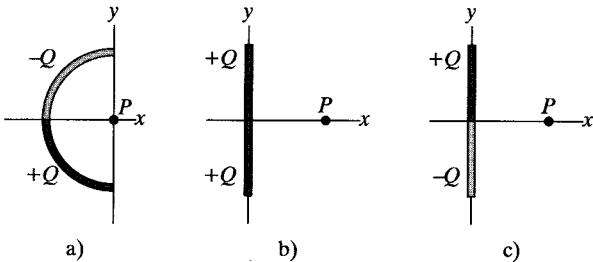


Rys. 23.11. a) Punkt P znajduje się na przedłużeniu naładowanego odcinka. b) Punkt P znajduje się na symetralnej naładowanego odcinka, w odległości y od odcinka. c) Punkt P znajduje się w odległości y od naładowanego odcinka, ale w przeciwnieństwie do (b) nie leży na jego symetralnej

Odcinek prostej z punktem P w odległości y od naładowanego odcinka, jak na rysunku 23.11b. W wyrażeniu na dE zastępujemy r wyrażeniem zawierającym x i y . Jeśli punkt P umieszczony jest na symetralnej naładowanego odcinka, to znajdujemy wyrażenie na dodające się składowe natężenia pola $d\vec{E}$, co wprowadza $\sin \theta$ lub $\cos \theta$. Przechodzimy od dwóch zmiennych x i θ do jednej zmiennej x przez zastąpienie funkcji trygonometrycznej definiującą ją wyrażeniem zawierającym x i y . Obliczamy całkę względem x od jednego do drugiego końca odcinka. Jeśli punkt P nie jest umieszczony na symetralnej, jak na rysunku 23.11c, to tworzymy całkę sumującą składowe dE_x i całkujemy względem x , aby znaleźć E_x . Następnie tworzymy całkę sumującą składowe dE_y i całkujemy względem x , aby znaleźć E_y . Wartość i kierunek natężenia pola \vec{E} wyznaczamy w standardowy sposób, ze składowych E_x i E_y .

Krok 6. Jeden z wybranych wariantów granic całkowania daje dodatni wynik. Przeciwny wybór daje ten sam wynik z przeciwnym znakiem — należy wtedy pominąć znak minus. Jeśli wynik chcemy wyrazić przez całkowity ładunek Q rozkładu, to zastępujemy λ przez Q/L , gdzie L jest długością naładowanej linii. Dla pierścienia L jest długością jego obwodu.

SPRAWDZIAN 3: Na rysunku przedstawiono trzy nieprzewodzące pręty: jeden kątowy i dwa proste. Każdy pręt jest jednorodnie naładowany ładunkiem o wartości bezwzględnej Q w górnej i dolnej połowie jak pokazano na rysunku. Jak skierowane jest wypadkowe natężenie pola elektrycznego w punkcie P w przypadku każdego pręta?



23.7. Pole elektryczne naładowanej tarczy

Na rysunku 23.12 przedstawiono kołową plastikową tarczę o promieniu R , której górną powierzchnię jest naładowana dodatnio, a gęstość powierzchniowa σ jest stała (zob. tabela 23.2). Ile wynosi natężenie pola elektrycznego w punkcie P , leżącym w odległości z od środka tarczy?

Podzielimy tarczę na współśrodkowe płaskie pierścienie i następnie obliczymy natężenie pola elektrycznego w punkcie P przez dodanie (scałkowanie) składników pochodzących od wszystkich pierścieni. Na rysunku 23.12 przedstawiono jeden taki pierścień o promieniu r i szerokości radialnej dr . Ponieważ σ jest ładunkiem przypadającym na jednostkę powierzchni, to ładunek na pierścieniu wynosi:

$$dq = \sigma dS = \sigma(2\pi r dr), \quad (23.22)$$

gdzie dS jest powierzchnią pierścienia.

Rozwiązaliśmy już problem natężenia pola elektrycznego naładowanego pierścienia. Podstawiając dq ze wzoru (23.22) zamiast q we wzorze (23.16) i zastępując R we wzorze (23.16) przez r , otrzymujemy wyrażenie na wartość natężenia pola elektrycznego dE w punkcie P , pochodzącego od naszego płaskiego pierścienia:

$$dE = \frac{z\sigma 2\pi r dr}{4\pi\epsilon_0(z^2 + r^2)^{3/2}},$$

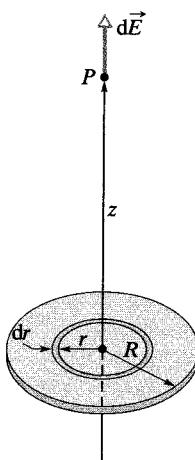
które można zapisać w postaci:

$$dE = \frac{\sigma z}{4\epsilon_0} \frac{2r dr}{(z^2 + r^2)^{3/2}}. \quad (23.23)$$

Mögemy teraz znaleźć E przez całkowanie wzoru (23.23) po powierzchni tarczy, czyli przez całkowanie względem zmiennej r , od $r = 0$ do $r = R$. Zauważ, że z pozostaje stałe przy tym całkowaniu. Otrzymujemy:

$$E = \int dE = \frac{\sigma z}{4\epsilon_0} \int_0^R (z^2 + r^2)^{-3/2} (2r) dr. \quad (23.24)$$

Aby obliczyć tę całkę, sprowadzamy ją do postaci $\int X^m dX$, podstawiając $X = (z^2 + r^2)$, $m = -\frac{3}{2}$ i $dX = (2r)dr$. Wartość takiej całki wynosi:



Rys. 23.12. Tarcza o promieniu R jest naładowana jednorodnie dodatnio. Pokazany pierścień o promieniu r i szerokości radialnej dr wytworzy pole elektryczne o natężeniu $d\vec{E}$ w punkcie P na osi tarczy

$$\int X^m dX = \frac{X^{m+1}}{m+1}$$

i wzór (23.24) przyjmuje postać:

$$E = \frac{\sigma z}{4\epsilon_0} \left[\frac{(z^2 + r^2)^{-1/2}}{-\frac{1}{2}} \right]_0^R. \quad (23.25)$$

Uwzględniając granice całkowania we wzorze (23.25), otrzymujemy po przekształceniu wyrażenie:

$$E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left(1 - \frac{z}{\sqrt{z^2 + R^2}} \right) \quad (\text{naładowana tarcza}) \quad (23.26)$$

na wartość natężenia pola elektrycznego, wytwarzanego przez płaską, kołową, naładowaną tarczę w punktach leżących na jej osi. (Przy obliczaniu całki przyjęliśmy $z \geq 0$).

Jeśli przyjmiemy, że $R \rightarrow \infty$ przy ustalonej skończonej wartości z , to drugi człon w nawiasach we wzorze (23.26) będzie dążył do zera i wzór ten sprowadzi się do postaci:

$$E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \quad (\text{neskończona płaszczyzna}). \quad (23.27)$$

Jest to wartość natężenia pola elektrycznego, wytwarzanego przez nieskończoną płaszczyznę, na przykład przez naładowaną jednorodnie z jednej strony płytę z izolatora takiego, jak plastik. Linie pola elektrycznego w takiej sytuacji są przedstawione na rysunku 23.3.

Wzór (23.27) otrzymujemy także, jeśli przyjmiemy $z \rightarrow 0$ we wzorze (23.26), przy ustalonym skończonym R . Wynik ten dowodzi, że w punktach bliskich tarczy natężenie pola elektrycznego wytwarzanego przez tarczę jest takie samo jak w przypadku tarczy o nieskończonym promieniu.

23.8. Ładunek punktowy w polu elektrycznym

W poprzednich czterech paragrafach zajmowaliśmy się pierwszym z naszych dwóch zadań: przy danym rozkładzie ładunku znajdowaliśmy natężenie pola elektrycznego, wytwarzanego przez ten ładunek w otaczającej go przestrzeni. Obecnie zajmiemy się drugim zadaniem: określeniem, co stanie się z naładowaną cząstką, gdy znajdzie się w polu elektrycznym, wytwarzonym przez inne stacjonarne lub powoli poruszające się ładunki.

Otoż na naładowaną cząstkę będzie działać siła elektrostatyczna, określona następującym wzorem:

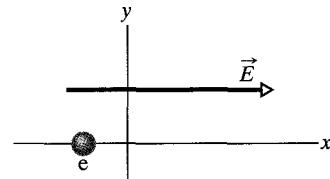
$$\vec{F} = q \vec{E}, \quad (23.28)$$

gdzie q jest ładunkiem cząstki (z uwzględnieniem jego znaku), a \vec{E} jest natężeniem pola elektrycznego, wytwarzanego przez pozostałe ładunki w miejscu, w którym znajduje się cząstka. (Natężenie to *nie* uwzględnia pola wytwarzonego przez samą cząstkę — aby odróżnić te dwa pola, pole działające na cząstkę we

wzorze (23.28) nazywa się często *polem zewnętrznym*. Naładowana cząstka (lub naładowane ciało) nie podlega oddziaływaniu swego własnego pola elektrycznego). Na podstawie wzoru (23.28) możemy powiedzieć, że:

- Siła elektrostatyczna \vec{F} , działająca na cząstkę umieszczoną w zewnętrznym polu elektrycznym o natężeniu \vec{E} ma kierunek natężenia \vec{E} , jeśli ładunek cząstki q jest dodatni, i ma przeciwny kierunek, jeśli ładunek q jest ujemny.

- ✓ **SPRAWDZIAN 4:** a) Jak skierowana jest siła elektrostatyczna działająca na elektron i pochodząca od pola elektrycznego o natężeniu przedstawionym na rysunku? b) W którym kierunku elektron będzie przyspieszany, jeśli przed wejściem w obszar pola elektrycznego poruszał się równolegle do osi y ? c) Jeśli elektron poruszał się początkowo w prawo, to czy jego prędkość wzrosnie, zmaleje, czy pozostanie stała?



Pomiar ładunku elementarnego

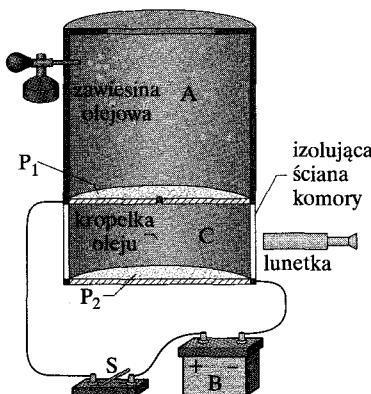
Równanie (23.28) stanowi podstawę pomiaru ładunku elementarnego e , jakiego dokonał fizyk amerykański Robert A. Millikan w latach 1910–1913. Na rysunku 23.13 przedstawiono używaną przez niego aparaturę. Gdy małe kropelki oleju zostaną wstrzyknięte do komory A, niektóre z nich zostaną w czasie tego procesu naładowane dodatnio lub ujemnie. Przeanalizujmy kropelkę, która przechodzi na dół przez mały otwór w płycie P_1 do komory C i założymy, że kropelka ma ujemny ładunek q .

Jeśli klucz S na rysunku 23.13 jest otwarty (jak w narysowanym położeniu), to źródło B nie wytwarza pola elektrycznego w komorze C. Jeśli jest zamknięty (istnieje połączenie między komorą C i dodatnim biegunem źródła), to powstaje nadmiarowy ładunek dodatni na płycie przewodzącej P_1 i nadmiarowy ładunek ujemny na płycie przewodzącej P_2 . W wyniku naładowania płyt, w komorze C powstaje pole elektryczne o natężeniu \vec{E} , skierowane w dół. Zgodnie ze wzorem (23.28) pole to działa siłą elektrostatyczną na każdą naładowaną kropelkę, która pojawi się w komorze, oraz wpływa na jej ruch. W szczególności, nasza ujemnie naładowana kropelka zacznie poruszać się do góry.

Analizując ruch kropelek oleju przy otwartym i zamkniętym kluczu Millikan określił wielkość ładunku q i odkrył, że wartości q były zawsze dane przez:

$$q = ne, \quad \text{dla } n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots, \quad (23.29)$$

gdzie e jest stałą podstawową, równą $1,60 \cdot 10^{-19} \text{ C}$ i zwaną *ładunkiem elementarnym*. Doświadczenie Millikana jest przekonującym dowodem skwantowania ładunku. Częściowo za tę pracę w 1923 roku Millikan otrzymał nagrodę Nobla w dziedzinie fizyki. Współczesne pomiary ładunku elementarnego opierają się na różnych powiązanych ze sobą doświadczeniach, znacznie dokładniejszych niż pionierski eksperyment Millikana.



Rys. 23.13. Aparatura do pomiaru ładunku elementarnego e w doświadczeniu Millikana z kropełkami oleju. Gdy naładowana kropełka oleju przejdzie do komory C przez otwór w płycie P_1 , na jej ruch wpływa zamknięcie lub otwarcie klucza S, czyli włączenie lub wyłączenie pola elektrycznego w komorze C. Lunetka służy tu do oglądania kropli i pozwala śledzić jej ruch

Drukarka atramentowa

Potrzeba bardzo szybkiego i dobrej jakości druku spowodowała poszukiwanie innego sposobu, niż stosowane w standardowych maszynach do pisania drukowanie uderzeniowe. Jednym z takich sposobów jest tworzenie liter przez wtryskiwanie maleńkich kropelek atramentu na papier.

Na rysunku 23.14 przedstawiono ujemnie naładowaną kropelkę, która porusza się między dwiema przewodzącymi płytami odchylającymi, między którymi wytworzono jednorodne pole elektryczne o natężeniu \vec{E} , skierowanym w dół. Kropelka jest odchylana do góry zgodnie ze wzorem (23.28) i pada na papier w punkcie, którego położenie jest określone przez wartość natężenia \vec{E} i ładunku q kropelki.

W praktyce wartość E jest stała i położenie kropelki jest określone przez ładunek q , przekazany kropelce w układzie ładowania, przez który kropelka musi przejść przed wejściem do układu odchylającego. Układ ładowania jest z kolei aktywowany elektronicznie, za pomocą sygnałów kodujących drukowany tekst czy rysunek.

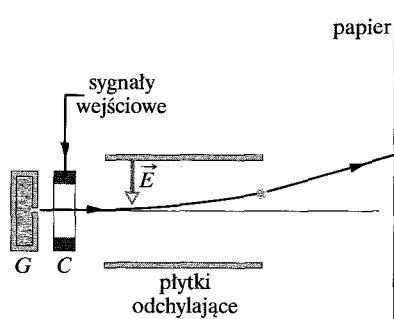
Błyski wulkanów

Podczas wybuchu wulkan Sakurajima, przedstawiony na fotografii na początku tego rozdziału, wyrzuca popioły do atmosfery. Popioły powstają wtedy, gdy para, w której zamienia się gwałtownie woda w wulkanie w wyniku przepływu gorącej lawy, kruszy skały ulegające następnie spaleniu. Przejście wody w parę i eksplozja skały powodują rozdzielenie się w niej dodatnich i ujemnych ładunków. Gdy para i popioły dostają się do atmosfery, tworzą obłok, w którym występują zarówno obszary z ładunkiem dodatnim, jak i ujemnym.

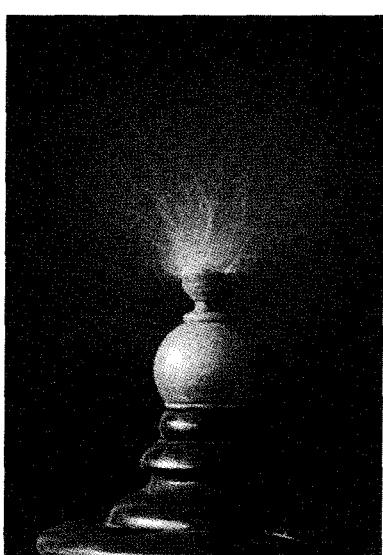
Przy wzroście wielkości tych obszarów rośnie natężenie pól elektrycznych między sąsiednimi obszarami i między nimi a kraterem wulkanu. Gdy natężenie osiągnie wartość około $3 \cdot 10^6 \text{ N/C}$, w powietrzu następuje *przebicie elektryczne* i zaczyna płynąć prąd elektryczny. Chwilowe tory przewodzące pojawiają się w powietrzu tam, gdzie pole elektryczne zjonizowało cząsteczki powietrza, uwalniając część ich elektronów. Elektrony te, przyspieszane przez pole, zderzają się na swej drodze z cząsteczkami powietrza, co powoduje, że cząsteczki emittują światło. Możemy zobaczyć te krótkie tory, zwane zwykle *iskrami*, właśnie w wyniku emisji światła. (*Iskrzenie* w małej skali możemy zauważać np. wokół naładowanej metalowej czaszy na rysunku 23.15).

Iskry nad wulkanem skierowane są od naładowanego obszaru do krateru lub w przeciwną stronę. Możemy określić kierunek iskry patrząc, jak rozchodzą się od niej ślepe odgałęzienia. Jeśli rozchodzą się one w dół, to iskra skierowana jest w dół. Jeśli odgałęzienia odchodzą do góry, to iskra też skierowana jest do góry. Czasem iskra skierowana w dół i iskra skierowana do góry się spotykają.

23.15. Metalowa czasza jest tak silnie naładowana, że wytworzone przez nią w otaczającej przestrzeni pole elektryczne prowadzi do przebicia w występującym tam powietrzu. Widoczne iskry wskazują, gdzie w powietrzu powstały chwilowe przewodzące tory, wzdłuż których pole elektryczne usunęło elektrony z cząsteczek powietrza i przyspieszyło je, doprowadzając do zderzeń z cząsteczkami

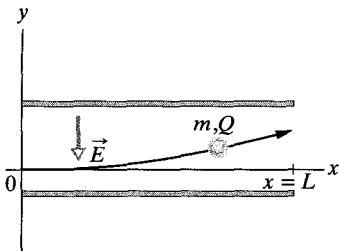


Rys. 23.14. Zasada działania drukarki atramentowej. Kropelki atramentu są wystrzeliane z generatora G i otrzymują ładunek w jednostce ładującej C . Sygnał pochodzący z komputera określa ładunek nadawany każdej kropelce i wpływa na efekt działania pola \vec{E} na kropelkę i położenie punktu na papierze, w którym kropelka wyląduje. Do wytworzenia pojedynczego znaku potrzeba około 100 drobnych kropelek



Przykład 23.4

Na rysunku 23.16 przedstawiono odchylające płytka drukarki atramentowej, z naniesionymi osiami układu współrzędnych. Kropelka atramentu o masie $m = 1,3 \cdot 10^{-10}$ kg i ujemnym ładunku o wartości $Q = 1,5 \cdot 10^{-13}$ C wpada w obszar między płytami, poruszając się początkowo wzdłuż osi x , z prędkością $v_x = 18$ m/s. Długość L płyt wynosi 1,6 cm. Płytki są naładowane i wytwarzają pole elektryczne we wszystkich punktach między nimi. Założź, że pole jest jednorodne, wektor natężenia pola \vec{E} jest skierowany w dół i ma wartość $1,4 \cdot 10^6$ N/C. Jakie jest pionowe odchylenie kropelki po przejściu przez całą długość płyty? (Siła grawitacyjna, działająca na kropelę jest mała w porównaniu z siłą elektrostatyczną i można ją pominać).



Rys. 23.16. Przykład 23.4. Kropelka atramentu o masie m i ładunku Q jest odchylana w polu elektrycznym drukarki atramentowej

ROZWIĄZANIE:

Kropelka jest naładowana ujemnie, a natężenie pola elektrycznego jest skierowane w dół. Zgodnie ze wzorem (23.28) na naładowaną kropelką działa stała siła elektrostatyczna o wartości QE , skierowana do góry. Kropelka, przesuwając się równolegle do osi x ze stałą prędkością v_x , zaczyna więc odchylać się do góry z pewnym stałym przyspieszeniem a_y . Zgodnie z drugą zasadą dynamiki Newtona ($F = ma$) dla składowych wzdłuż osi y otrzymujemy:

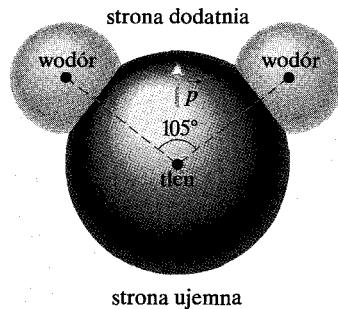
$$a_y = \frac{F}{m} = \frac{QE}{m}. \quad (23.30)$$

Oznaczmy przez t czas potrzebny kropelce na przejście obszaru między płytami. Po czasie t pionowe i poziome przesunięcia kropelki wynoszą odpowiednio:

$$y = \frac{1}{2}a_y t^2 \quad \text{i} \quad L = v_x t. \quad (23.31)$$

Eliminując t z tych równań i podstawiając wartość (23.30) na a_y , otrzymujemy:

$$\begin{aligned} y &= \frac{QEL^2}{2mv_x^2} \\ &= \frac{(1,5 \cdot 10^{-13} \text{ C})(1,4 \cdot 10^6 \text{ N/C})(1,6 \cdot 10^{-2} \text{ m})^2}{(2)(1,3 \cdot 10^{-10} \text{ kg})(18 \text{ m/s})^2} \\ &= 6,4 \cdot 10^{-4} \text{ m} = 0,64 \text{ mm}. \end{aligned} \quad (\text{odpowiedź})$$



Rys. 23.17. Cząsteczka H_2O , składająca się z trzech jąder (zaznaczonych kropkami) i obszarów, gdzie występują elektrony. Elektryczny moment dipolowy \vec{p} jest skierowany od (ujemnej) tlenowej do (dodatniej) wodorowej strony cząsteczki

23.9. Dipol w polu elektrycznym

Elektryczny moment dipolowy \vec{p} dipola elektrycznego zdefiniowaliśmy jako wektor skierowany od ujemnego do dodatniego ładunku dipola. Jak zobaczymy, zachowanie się dipola w jednorodnym zewnętrznym polu elektrycznym o natężeniu \vec{E} można w pełni opisać, używając dwóch wektorów \vec{E} i \vec{p} , bez potrzeby wnikania w strukturę dipola.

Cząsteczka wody (H_2O) jest dipolem elektrycznym, co przedstawiono na rysunku 23.17. Czarne kropki przedstawiają jądro tlenu (mające 8 protonów) i dwa jądra wodoru (mające po jednym protonie). Pokolorowane powierzchnie przedstawiają obszary w otoczeniu jąder, w których można znaleźć elektrony.

W cząsteczce wody dwa atomy wodoru i atom tlenu nie leżą na jednej prostej, ale proste, jakie można przez nie przeprowadzić, tworzą kąt równy około 105° , jak przedstawiono na rysunku 23.17. W wyniku tego cząsteczka ma określoną „stronę tlenową” i „stronę wodorową”. Co więcej, 10 elektronów cząsteczki ma skłonność do pozostawiania bliżej jądra tlenu niż jąder wodoru. Stąd strona tlenowa cząsteczki ma więcej ładunku ujemnego niż wodorowa, co prowadzi do powstania elektrycznego momentu dipolowego \vec{p} , skierowanego wzdłuż osi symetrii czą-

steczki, jak pokazano na rysunku. Jeśli cząsteczka wody znajdzie się w zewnętrznym polu elektrycznym, to zachowuje się jak dipol elektryczny z rysunku 23.8.

W celu zbadania tego zachowania rozważmy taki dipol, umieszczony w jednorodnym zewnętrznym polu elektrycznym o natężeniu \vec{E} (rys. 23.18a). Zakładamy, że dipol jest sztywnym układem, składającym się z dwóch przeciwnie naładowanych kulek, każda o ładunku q , które znajdują się w odległości d od siebie. Moment dipolowy \vec{p} tworzy kąt θ z kierunkiem natężenia pola \vec{E} .

Na naładowane końce dipola działają siły elektrostatyczne. Pole elektryczne jest jednorodne, a więc siły działają w przeciwnych kierunkach (jak pokazano na rysunku 23.18) i mają taką samą wartość $F = qE$. W jednorodnym polu elektrycznym wypadkowa siła oddziaływania pola na dipol jest więc równa zeru i środek masy dipola się nie porusza. Jednak siły działające na naładowane końce wytwarzają wypadkowy moment siły \vec{M} względem środka masy dipola. Środek masy leży na prostej, łączącej naładowane końce, w pewnej odległości x od jednego końca i w odległości $d - x$ od drugiego. Korzystając ze wzoru (11.31) ($M = rF \sin \phi$), możemy zapisać wartość wypadkowego momentu siły \vec{M} w postaci

$$M = Fx \sin \theta + F(d - x) \sin \theta = Fd \sin \theta. \quad (23.32)$$

Wartość momentu siły \vec{M} możemy także zapisać, używając wartości natężenia pola elektrycznego E i momentu dipolowego $p = qd$. W tym celu podstawimy qE za F i p/q za d do wzoru (23.32) i otrzymamy wyrażenie na wartość momentu siły:

$$M = pE \sin \theta. \quad (23.33)$$

Wzór ten możemy ogólnie zapisać w postaci wektorowej:

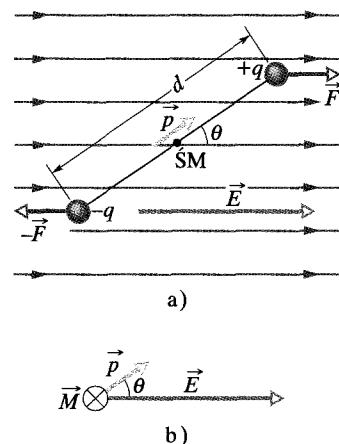
$$\vec{M} = \vec{p} \times \vec{E} \quad (\text{moment siły działający na dipol}). \quad (23.34)$$

Wektory \vec{p} i \vec{E} przedstawiono na rysunku 23.18b. Moment siły działający na dipol dąży do obrócenia \vec{p} (a stąd i dipola) w kierunku natężenia pola \vec{E} , czyli zmniejszenia kąta θ . Na rysunku 23.18 obrót taki jest zgodny z kierunkiem ruchu wskazówek zegara. W rozdziale 11 powiedzieliśmy, że dla momentu siły, prowadzącego do obrotu zgodnego z kierunkiem ruchu wskazówek zegara wygodnie jest włączyć znak minus do wartości momentu. Przy takim zapisie moment siły z rysunku 23.18 ma wartość:

$$M = -pE \sin \theta. \quad (23.35)$$

Energia potencjalna dipola elektrycznego

Energia potencjalna jest związana z ustawieniem dipola elektrycznego w polu elektrycznym. Dipol ma najmniejszą energię potencjalną, gdy jest w stanie równowagi, czyli gdy jego moment \vec{p} jest skierowany zgodnie z kierunkiem natężenia pola \vec{E} (wówczas $\vec{M} = \vec{p} \times \vec{E} = 0$). Dla każdego innego ustawienia dipol ma większą energię potencjalną. Podobnie jest dla wahadła, które ma swą najmniejszą grawitacyjną energię potencjalną w swym stanie równowagi, czyli w najniższym punkcie. Nadanie dipolowi lub wahadłu innego ustawienia (przez obrót) wymaga wykonania pracy przez siłę zewnętrzną.



Rys. 23.18. a) Dipol elektryczny w jednorodnym polu elektrycznym o natężeniu \vec{E} . Dwie kulki, o ładunkach jednakowych co do wartości, ale o przeciwnych znakach, znajdują się w odległości d . Linia między kulkami reprezentuje ich sztywne połączenie. b) Pole o natężeniu \vec{E} działa momentem siły o wartości M na dipol. Moment siły \vec{M} jest skierowany za kartkę, co zaznaczono symbolem \otimes

Możemy zawsze w całkiem dowolny sposób zdefiniować konfigurację o zeroowej energii potencjalnej, ponieważ fizyczne znaczenie mają tylko różnice energii potencjalnej. Okazuje się, że wyrażenie na energię potencjalną dipola elektrycznego w zewnętrznym polu elektrycznym jest najprostsze, jeśli wybierzemy zerową wartość energii potencjalnej dla kąta θ (rys. 23.18) równego 90° . Możemy teraz znaleźć energię potencjalną E_p dipola przy dowolnej innej wartości kąta θ , korzystając ze wzoru (8.1) ($\Delta E_p = -W$), tzn. obliczając pracę W , wykonaną przez pole, przy obróceniu dipola od ustawienia odpowiadającego wartości 90° do wartości θ . Ze wzoru (11.45) ($W = \int M d\theta$) i wzoru (23.35) znajdujemy, że energia potencjalna E_p przy dowolnym kącie θ wynosi:

$$E_p = -W = - \int_{90^\circ}^{\theta} M d\theta = \int_{90^\circ}^{\theta} p E \sin \theta d\theta. \quad (23.36)$$

Obliczenie całki prowadzi do wyniku:

$$E_p = -p E \cos \theta. \quad (23.37)$$

Wzór ten możemy zapisać ogólnie w postaci wektorowej:

$$\vec{E}_p = -\vec{p} \cdot \vec{E} \quad (\text{energia potencjalna dipola}). \quad (23.38)$$

Ze wzorów (23.37) i (23.38) wynika, że energia potencjalna dipola jest najmniejsza ($E_p = -pE$), gdy $\theta = 0$, czyli gdy \vec{p} i \vec{E} mają ten sam kierunek; energia potencjalna jest największa ($E_p = pE$), gdy $\theta = 180^\circ$, czyli gdy \vec{p} i \vec{E} są przeciwnie skierowane.

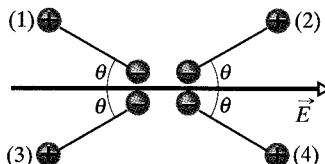
Gdy dipol obraca się od początkowego ustawienia θ_{pocz} do innego $\theta_{\text{końc}}$, praca W , wykonana przez pole elektryczne nad dipolem wynosi:

$$W = -\Delta E_p = -(E_{p \text{ końc}} - E_{p \text{ pocz}}), \quad (23.39)$$

gdzie $E_{p \text{ pocz}}$ i $E_{p \text{ końc}}$ można obliczyć ze wzoru (23.38). Jeśli zmiana ustawienia jest spowodowana przez zewnętrzny moment siły zewnętrznej, to praca $W_{\text{zewn.}}$, wykonana nad dipolem przez ten moment siły różni się znakiem od pracy, wykonanej nad dipolem przez pole, czyli:

$$W_{\text{zewn.}} = -W = (E_{p \text{ końc}} - E_{p \text{ pocz}}). \quad (23.40)$$

 **SPRAWDZIAN 5:** Na rysunku przedstawiono cztery ustawienia dipola elektrycznego w zewnętrznym polu elektrycznym. Uszereguj te ustawienia względem: a) wartości momentu siły działającego na dipol, b) energii potencjalnej dipola, zaczynając od wartości największej.



Przykład 23.5

Obojętna cząsteczka wody (H_2O) w stanie gazowym ma elektryczny moment dipolowy o wartości $6,2 \cdot 10^{-30} \text{ C} \cdot \text{m}$.

a) W jakiej odległości od siebie znajdują się środki dodatniego i ujemnego ładunku cząsteczki?

ROZWIĄZANIE:

O Moment dipolowy cząsteczki zależy od wartości q dodatniego lub ujemnego ładunku cząsteczki i odległości d ładunków. W obojętnej cząstecze wody jest 10 elektronów i 10 protonów i dlatego wartość jej momentu dipolowego wynosi:

$$p = qd = (10e)(d),$$

gdzie d jest poszukiwaną odlegością, a e ładunkiem elementarnym. Stąd:

$$\begin{aligned} d &= \frac{p}{10e} = \frac{(6,2 \cdot 10^{-30} \text{ C} \cdot \text{m})}{(10)(1,60 \cdot 10^{-19} \text{ C})} \\ &= 3,9 \cdot 10^{-12} \text{ m} = 3,9 \text{ pm}. \end{aligned} \quad (\text{odpowiedź})$$

Otrzymana odległość jest bardzo mała, mniejsza od promienia atomu wodoru.

b) Jakim maksymalnym momentem siły pole może oddziaływać na dipol, jeśli cząsteczka znajdzie się w polu elektrycznym o

natężeniu $1,5 \cdot 10^4 \text{ N/C}$ (pole o takim natężeniu można łatwo wytworzyć w laboratorium)?

ROZWIĄZANIE:

O Moment siły działający na dipol jest największy, gdy kąt między \vec{p} i \vec{E} wynosi 90° . Podstawiając tę wartość do wzoru (23.33), otrzymujemy:

$$\begin{aligned} M &= pE \sin \theta = (6,2 \cdot 10^{-30} \text{ C} \cdot \text{m})(1,5 \cdot 10^4 \text{ N/C}) \sin 90^\circ \\ &= 9,3 \cdot 10^{-26} \text{ N} \cdot \text{m}. \end{aligned} \quad (\text{odpowiedź})$$

c) Jaką pracę trzeba wykonać, aby obrócić tę cząsteczkę o 180° , zaczynając od równoległego ustawienia odpowiadającego $\theta = 0^\circ$?

ROZWIĄZANIE:

O Aby obrócić cząsteczkę, należy przyłożyć do niej zewnętrznny moment siły. Praca wykonana przez ten moment siły jest równa zmianie energii potencjalnej przy zmianie ustawienia cząsteczki. Ze wzoru (23.40) znajdujemy:

$$\begin{aligned} W_{\text{zewn}} &= E_p(180^\circ) - E_p(0^\circ) \\ &= (-pE \cos 180^\circ) - (-pE \cos 0^\circ) = 2pE \\ &= (2) \cdot (6,2 \cdot 10^{-30} \text{ C} \cdot \text{m}) \cdot (1,5 \cdot 10^4 \text{ N/C}) \\ &= 1,9 \cdot 10^{-25} \text{ J}. \end{aligned} \quad (\text{odpowiedź})$$

Podsumowanie

Pole elektryczne Jednym ze sposobów wyjaśnienia działania siły elektrostatycznej między dwoma ładunkami jest założenie, że każdy ładunek wytwarza w przestrzeni wokół siebie pole elektryczne. Siła elektrostatyczna działająca na dowolny ładunek jest wywołana polem elektrycznym, wytwarzonym przez inne ładunki w miejscu, w którym znajduje się rozważany ładunek.

Definicja natężenia pola elektrycznego Natężenie pola elektrycznego \vec{E} w dowolnym punkcie jest określone przez siłę elektrostatyczną \vec{F} , działającą na umieszczony w tym punkcie dodatni ładunek próbny q_0 :

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q_0}. \quad (23.1)$$

Linie pola elektrycznego Linie pola elektrycznego umożliwiają graficzne przedstawienie kierunku i wartości natężenia pola elektrycznego. Wektor natężenia pola elektrycznego w dowolnym punkcie jest styczny do linii pola przechodzącej przez ten punkt. Gęstość linii pola w dowolnym obszarze jest proporcjonalna do wartości natężenia pola w tym obszarze. Linie pola są skierowane od ładunków dodatnich do ujemnych.

Pole ładunku punktowego Wartość natężenia pola elektrycznego \vec{E} , wytwarzanego przez ładunek punktowy q , w odległości r od ładunku wynosi:

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{|q|}{r^2}. \quad (23.3)$$

Wektor natężenia pola \vec{E} jest skierowany od ładunku punktowego, jeśli ładunek jest dodatni i do ładunku punktowego, jeśli ładunek jest ujemny.

Pole dipola elektrycznego Dipol elektryczny składa się z dwóch cząstek o jednakowej wartości ładunku q , ale o przeciwnym znaku, znajdujących się w odległości d od siebie. Elektryczny moment dipolowy \vec{p} dipola ma wartość qd i jest skierowany od ładunku ujemnego do ładunku dodatniego. Wartość natężenia pola elektrycznego, wytwarzanego przez dipol, w odległym punkcie na osi dipola (prostej przechodzącej przez obydwa ładunki) wynosi:

$$E = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \frac{P}{z^3}, \quad (23.9)$$

gdzie z jest odlegością między punktem i środkiem dipola.

Pole ciąglego rozkładu ładunku Natężenie pola elektrycznego wytworzonego przez ładunek o rozkładzie ciągłym obliczamy, traktując elementy ładunku jak ładunki punktowe i następnie sumując przez całkowanie wektory natężenia pola elektrycznego, wytworzzonego przez wszystkie elementy ładunku.

Sila działająca na ładunek punktowy w polu elektrycznym
Gdy ładunek punktowy q znajduje się w polu elektrycznym o natężeniu \vec{E} wytworzonym przez inne ładunki, siła elektrostatyczna \vec{F} działająca na ładunek punktowy jest wyrażona wzorem:

$$\vec{F} = q \vec{E}. \quad (23.28)$$

Siła \vec{F} ma ten sam kierunek jak natężenie \vec{E} , jeśli ładunek q jest dodatni i przeciwny kierunek, jeśli ładunek q jest ujemny.

Dipol w polu elektrycznym Jeśli dipol elektryczny o momencie dipolowym \vec{p} znajduje się w polu elektrycznym o natężeniu \vec{E} , to pole działa na dipol momentem siły \vec{M}

$$\vec{M} = \vec{p} \times \vec{E}. \quad (23.34)$$

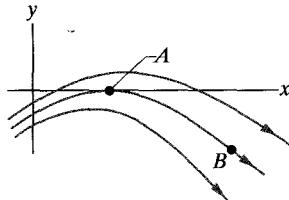
Dipol ma energię potencjalną E_p , związaną z jego ustawieniem w polu elektrycznym:

$$E_p = -\vec{p} \cdot \vec{E}. \quad (23.38)$$

Ta energia potencjalna jest tak określona, że przyjmuje wartość równą零, gdy moment \vec{p} jest prostopadły do natężenia \vec{E} ; jest najmniejsza ($E_p = -pE$), gdy moment \vec{p} ma kierunek zgodny z natężeniem \vec{E} , i największa ($E_p = pE$), gdy moment \vec{p} ma kierunek przeciwny do natężenia \vec{E} .

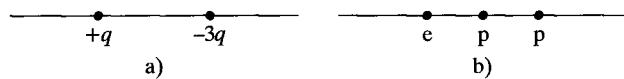
Pytania

1. Na rysunku 23.19 przedstawiono trzy linie pola elektrycznego. Jaki jest kierunek siły elektrostatycznej, działającej na dodatni ładunek próbny, umieszczony w: a) punkcie A, b) punkcie B? c) W którym punkcie, A czy B, przyspieszenie ładunku punktowego będzie większe, jeśli ładunek będzie mógł się poruszać?



Rys. 23.19. Pytanie 1

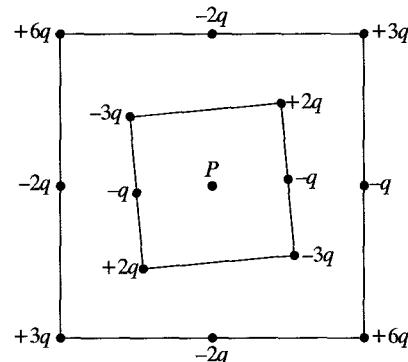
2. Na rysunku 23.20a przedstawiono dwie naładowane cząstki, umieszczone na osi. a) Gdzie na osi (w skończonej odległości) znajduje się punkt, w którym wypadkowe natężenie pola elektrycznego jest równe zero: między ładunkami, na lewo czy na prawo od nich? b) Czy istnieje punkt o zerowym natężeniu pola elektrycznego poza osią (w skończonej odległości)?



Rys. 23.20. Pytania 2 i 3

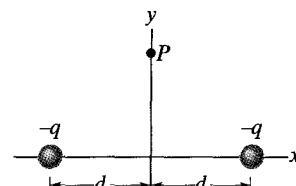
3. Na rysunku 23.20b przedstawiono dwa protony i elektron znajdujące się w równej odległości od siebie na osi. Gdzie na osi (w skończonej odległości) jest punkt, w którym wypadkowe natężenie pola elektrycznego jest równe zero: na lewo od cząstek, na prawo, między dwoma protonami, czy między elektronem i najbliższym protonem?

4. Na rysunku 23.21 przedstawiono dwa układy naładowanych cząstek. Boki zaznaczonych kwadratów nie są równoległe do siebie. Ładunki znajdują się w odległości d lub $d/2$ wzdłuż obwodów kwadratów. Jaka jest wartość i kierunek wypadkowego natężenia pola elektrycznego w punkcie P ?



Rys. 23.21. Pytanie 4

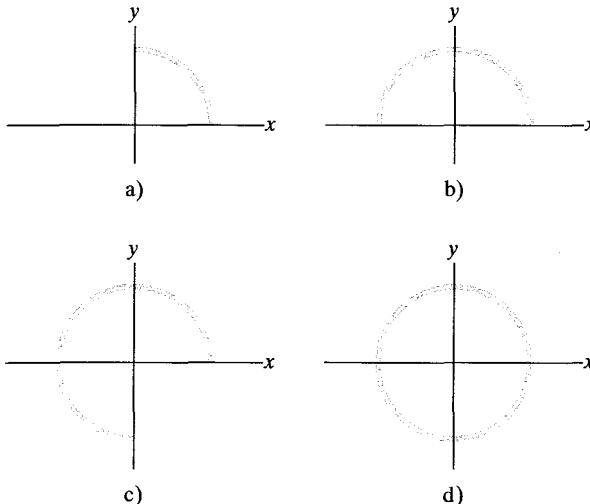
5. Na rysunku 23.22 dwie cząstki o ładunku $-q$ są rozmieszczone symetrycznie względem osi y ; każda z nich tworzy pole elektryczne w punkcie P , leżącym na tej osi. a) Czy wartości natężeń pól w punkcie P są równe? b) Czy każde pole elektryczne jest skierowane do, czy od ładunku go tworzącego? c) Czy wartość wypadkowego natężenia pola elektrycznego w punkcie P jest równa sumie wartości E natężeń tych dwóch pól (czyli czy jest równa $2E$)? d) Czy składowe x natężeń tych dwóch pól dodają się, czy odejmują? e) Czy ich składowe y dodają się, czy odejmują? f) Czy kierunek wypadkowego natężenia pola w punkcie P jest kierunkiem składowych, które się dodają? g) Jaki jest kierunek wypadkowego natężenia pola?



Rys. 23.22. Pytanie 5

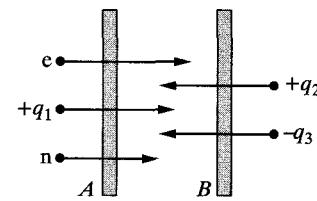
6. Trzy nieprzewodzące pręty o kształcie łuku o tym samym promieniu krzywizny są jednorodnie naładowane. Pręt A ma ładunek $+2Q$ i zajmuje łuk odpowiadający kątowi 30° , pręt B ma ładunek $+6Q$ i zajmuje łuk odpowiadający kątowi 90° , pręt C ma ładunek $+4Q$ i zajmuje łuk odpowiadający kątowi 60° . Uszereguj pręty według ich liniowej gęstości ładunku, zaczynając od największej.

7. Na rysunku 23.23a przedstawiono plastikowy pręt o kolistym kształcie, jednorodnie naładowany ładunkiem $+Q$, który tworzy pole elektryczne o wartości natężenia E w środku krzywizny pręta (w początku układu). Na rysunkach 23.23b, c i d przedstawiono inne pręty koliste, naładowane jednorodnie, z ładunkiem kolejno powiększanym o $+Q$, aż do wypełnienia całego okręgu. Piąty rozkład (który oznaczmy przez (e)) jest taki sam, jak w (d), ale pręt w czwartej ćwiartce ma ładunek $-Q$. Uszereguj te rozkłady zgodnie z wartością natężenia pola elektrycznego w środku krzywizny, zaczynając od największego.



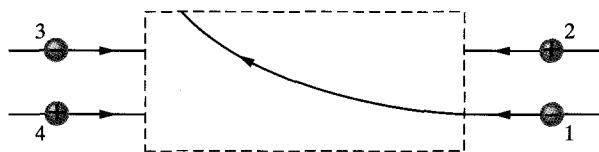
Rys. 23.23. Pytanie 7

8. Na rysunku 23.24 elektron e przechodzi przez mały otwór w płycie A, poruszając się w kierunku płyty B. Jednorodne pole elektryczne w obszarze między płytami spowalnia elektron bez odchylenia. a) Jaki jest kierunek natężenia pola? b) Cztery inne cząstki również przechodzą przez małe otwory w płycie A lub w płycie B, wpadając w obszar między płytami. Trzy z nich mają ładunki $+q_1$, $+q_2$ i $-q_3$, czwarta (oznaczona przez n) jest neutronem, który jest cząstką obojętną elektrycznie. Czy prędkość każdej z tych czterech cząstek rośnie, maleje, czy pozostaje taka sama w obszarze między płytami?



Rys. 23.24. Pytanie 8

9. Na rysunku 23.25 przedstawiono tor ujemnie naładowanej cząstki 1 w prostokątnym obszarze jednorodnego pola elektrycznego; cząstka jest odchylana do góry strony. a) Czy natężenie pola elektrycznego jest skierowane w lewo, w prawo, do góry, czy w dół strony? b) Na rysunku są przedstawione trzy inne cząstki naładowane, wpadające w obszar pola elektrycznego. Które cząstki zostaną odchylone do góry strony, a które w dół?



Rys. 23.25. Pytanie 9

10. a) Czy dla dipola ze sprawdzianu 5 przy obrocie od ustawienia 1 do ustawienia 2 praca wykonana nad nim przez pole jest dodatnia, ujemna, czy równa zeru? b) Jeśli dipol obraca się od ustawienia 1 do ustawienia 4, to czy praca wykonana przez pole jest większa, mniejsza, czy taka sama, jak w (a)?

11. Energie potencjalne związane z czterema ustawieniami dipola elektrycznego w polu elektrycznym wynoszą: 1) $-5E_{p_0}$, 2) $-7E_{p_0}$, 3) $3E_{p_0}$, 4) $5E_{p_0}$, gdzie wartość E_{p_0} jest dodatnia. Uszereguj ustawienia: a) zgodnie z wartością kąta między elektrycznym momentem dipolowym \vec{p} i natężeniem pola elektrycznego \vec{E} , b) według wartości momentu siły działającego na dipol elektryczny, zaczynając od wartości największych.

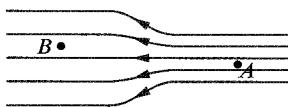
12. Jeśli przejdziemy po dywanie z pewnego materiału podczas suchego dnia i następnie dotknimy metalowej klamki w drzwiach lub (dla większej zabawy) czyjegoś karku, to możemy spowodować powstanie iskry. Dlaczego pojawia się iskra? (Jasność i głośność iskry można zwiększyć przez dotknięcie wyciągniętym palcem lub, nawet lepiej, końcem metalowego klucza).

Zadania

- www Rozwiążanie jest dostępne na stronie internetowej podręcznika: <http://www.wiley.com/college/hrw>
 ilw Rozwiążanie jest dostępne w postaci interaktywnej, wykorzystującej oprogramowanie Interactive Learning-Ware (na tej samej stronie)

23.3. Linie pola elektrycznego

1. Na rysunku 23.26 przedstawiono linie pola elektrycznego, których wzajemna odległość w lewej części rysunku jest dwa razy większa niż w prawej. a) Jeśli wartość natężenia pola w punkcie A wynosi 40 N/C , to jaka siła działa na proton w punkcie A? b) Jaka jest wartość natężenia pola w punkcie B?



Rys. 23.26. Zadanie 1

2. Naszkicuj linie pola elektrycznego w obszarach między i poza dwoma współśrodkowymi powłokami sferycznymi, gdy na wewnętrznej powłoce jest jednorodnie rozłożony ładunek dodatni q_1 , a na powłoce zewnętrznej jednorodnie rozłożony ładunek ujemny $-q_2$. Rozważ przypadki, gdy $q_1 > q_2$, $q_1 = q_2$ i $q_1 < q_2$.

3. Naszkicuj linie pola elektrycznego dla cienkiej, kołowej, jednorodnie naładowanej tarczy o promieniu R . (Wskazówka: Rozważ jako graniczne przypadki punkty leżące blisko tarczy, gdzie natężenie pola elektrycznego jest skierowane prostopadle do powierzchni i punkty bardzo odległe od niej, gdzie pole elektryczne przypomina pole ładunku punktowego).

23.4. Pole elektryczne ładunku punktowego

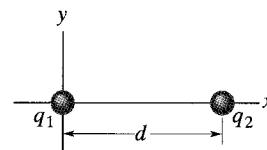
4. Jaka jest wartość ładunku punktowego, który tworzy pole elektryczne o natężeniu 1 N/C , w punktach odległych o 1 m ?

5. Jaka jest wartość ładunku punktowego, który w odległości 50 cm tworzy pole elektryczne o natężeniu 2 N/C ?

6. Dwie cząstki, których ładunki mają jednakowe wartości równe $2 \cdot 10^{-7} \text{ C}$, lecz przeciwny znaki, znajdują się w odległości 15 cm od siebie. Wyznacz wartość i kierunek wektora natężenia pola elektrycznego \vec{E} w środku odcinka łączącego cząstki.

7. Jądro atomu plutonu-239 o liczbie atomowej $Z = 94$ ma promień równy $6,64 \text{ fm}$. Zakładamy, że ładunek dodatni jest równomiernie rozłożony w obszarze jądra. Wyznacz wartość i kierunek wektora natężenia pola elektrycznego, tworzonego na powierzchni jądra przez ten ładunek dodatni.

8. Na rysunku 23.27 przedstawiono dwa ładunki punktowe $q_1 = +1 \cdot 10^{-6} \text{ C}$ i $q_2 = +3 \cdot 10^{-6} \text{ C}$, znajdujące się w odległości $d = 10 \text{ cm}$. Wykreś wypadkowe natężenie pola elektrycznego $E(x)$ w zależności od x dla dodatnich i ujemnych wartości x , przyjmując wartość E za dodatnią, jeśli wektor \vec{E} jest skierowany w prawo i za ujemną, jeśli wektor \vec{E} jest skierowany w lewo.

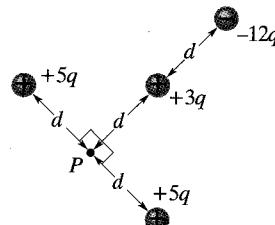


Rys. 23.27. Zadania 8 i 10

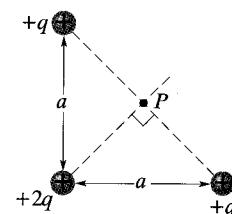
9. Dwa ładunki punktowe $q_1 = 2,1 \cdot 10^{-8} \text{ C}$ i $q_2 = -4q_1$ znajdują się w odległości 50 cm od siebie. Znajdź punkt na linii prostej, przechodzącej przez te ładunki, w którym natężenie pola elektrycznego jest równe零.

10. a) Na rysunku 23.27 przedstawiono dwa ładunki punktowe $q_1 = -5q$ i $q_2 = +2q$, znajdujące się w odległości d . Wyznacz położenie punktu (lub punktów), w którym wypadkowe natężenie pola elektrycznego, wytworzonego przez te dwa ładunki jest równe zero. b) Naszkicuj linie wypadkowego pola elektrycznego.

11. Jaką wartość w punkcie P ma natężenie pola elektrycznego, wytworzonego przez cztery ładunki punktowe, przedstawione na rysunku 23.28?

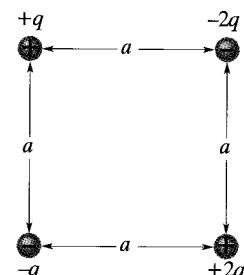


Rys. 23.28. Zadanie 11



Rys. 23.29. Zadanie 12

12. Wyznacz kierunek i oblicz wartość natężenia pola elektrycznego w punkcie P , wytworzonego przez trzy ładunki punktowe przedstawione na rysunku 23.29.



Rys. 23.30. Zadanie 13

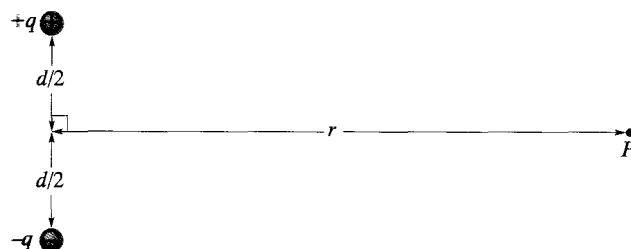
23.5. Pole elektryczne dipola elektrycznego

14. Przyjmij, że na rysunku 23.8 obydwa ładunki są dodatnie. Zakładając, że $z \gg d$ pokaż, że natężenie E w punkcie P na tym rysunku wynosi:

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2q}{z^2}.$$

15. Oblicz elektryczny moment dipolowy układu złożonego z elektronu i protonu znajdujących się w odległości 4,3 nm od siebie.

16. Znajdź wartość i kierunek natężenia pola elektrycznego w punkcie P , wytworzonym przez dipol elektryczny na rysunku 23.31. Punkt P znajduje się w odległości $r \gg d$ na symetrycznej odcinku łączącym ładunki. Skorzystaj z wartości i kierunku elektrycznego momentu dipolowego \vec{p} .

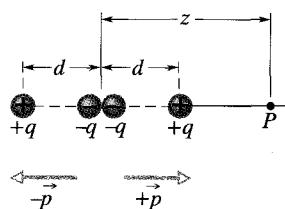


Rys. 23.31. Zadanie 16

17. * Kwadrupol elektryczny. Na rys. 23.32 przedstawiono kwadrupol elektryczny. Składa się on z dwóch dipoli o momentach dipolowych o takich samych wartościach i przeciwnych kierunkach. Pokaż, że wartość natężenia E na osi kwadrupola w punkcie P w odległości z od jego środka (przy założeniu $z \gg d$) wynosi:

$$E = \frac{3Q}{4\pi\epsilon_0 z^4},$$

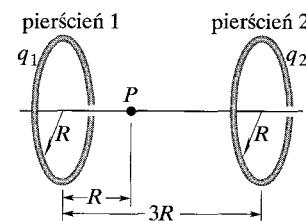
gdzie wielkość $Q (= 2qd^2)$ nosi nazwę elektrycznego momentu kwadrupolowego rozważanego rozkładu ładunków.



Rys. 23.32. Zadanie 17

23.6. Pole elektryczne naładowanej linii

18. Na rysunku 23.33 przedstawiono dwa równoległe nieprzewodzące pierścienie, których środki znajdują się na prostej, prostopadłej do obydwu pierścieni. Pierścień 1 o promieniu R jest jednorodnie naładowany ładunkiem q_1 ; pierścień 2 o tym samym promieniu jest jednorodnie naładowany ładunkiem q_2 . Pierścienie znajdują się w odległości $3R$. Wypadkowe natężenie pola elektrycznego w punkcie P na wspólnej osi, w odległości R od pierścienia 1 wynosi zero. Jaki jest stosunek ładunków q_1/q_2 ?



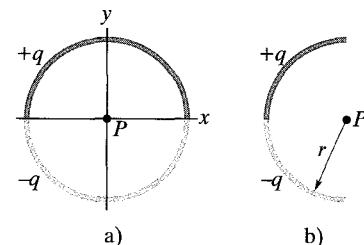
Rys. 23.33. Zadanie 18

19. Elektron może poruszać się wzduł osi symetrii naładowanego pierścienia o promieniu R , omawianego w paragrafie 23.6. Pokaż, że siła elektrostatyczna, działająca na elektron może spowodować jego drgania wokół środka pierścienia z częstością kołową równą:

$$\omega = \sqrt{\frac{eq}{4\pi\epsilon_0 m R^3}},$$

gdzie q jest ładunkiem pierścienia, a m — masą elektronu.

20. Na rysunku 23.34a przedstawiono dwa zakrzywione pręty plastikowe, jeden o ładunku $+q$ i drugi o ładunku $-q$, które tworzą okrąg o promieniu R w płaszczyźnie xy . Oś x przechodzi przez punkty łączące pręty. W obydwu prętach ładunek jest rozłożony jednorodnie. Jaką wartość i kierunek ma natężenie pola elektrycznego \vec{E} , wytworzonym w środku okręgu P ?



Rys. 23.34. Zadania 20 i 21

21. Cienki szklany pręt ma kształt półokręgu o promieniu r . Ładunek $+q$ jest rozłożony jednorodnie w górnej połowie, a ładunek $-q$ — w dolnej połowie (rys. 23.34b). Znajdź wartość i kierunek natężenia pola elektrycznego \vec{E} w środku półokręgu P .

22. Punkt P leży osi symetrii naładowanego jednorodnie pierścienia o promieniu R . W jakiej odległości od środka tego pierścienia powinien znajdować się punkt P , aby wartość natężenia pola elektrycznego wytworzonego przez ładunek na pierścieniu była w tym punkcie największa?

23. Na rysunku 23.35 przedstawiono nieprzewodzący pręt o długości L , naładowany jednorodnie ładunkiem $-q$. a) Ile wynosi liniowa gęstość ładunku pręta? b) Ile wynosi natężenie pola elektrycznego w punkcie P w odległości a od końca pręta? c) Jeśli



Rys. 23.35. Zadanie 23

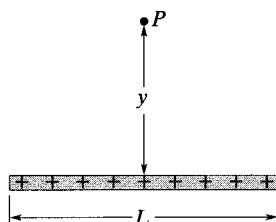
punkt P znajdowałby się bardzo daleko od pręta w porównaniu z L , to pręt przypominałby ładunek punktowy. Pokaż, że wynik z (b) redukuje się do pola elektrycznego ładunku punktowego dla $a \gg L$.

24. Cienki nieprzewodzący pręt o skończonej długości L jest naładowany jednorodnie ładunkiem q . Pokaż, że:

$$E = \frac{q}{2\pi\epsilon_0 y} \frac{1}{(L^2 + 4y^2)^{1/2}}$$

określa wartość natężenia E pola elektrycznego w punkcie P na symetrycznej pręta (rys. 23.36).

25*. Na rysunku 23.37 przedstawiono nieprzewodzący pręt w kształcie półprostej, naładowany jednorodnie z gęstością liniową λ . Pokaż, że natężenie pola elektrycznego w punkcie P tworzy kąt 45° z prętem i że wynik jest niezależny od odległości R . (Wskazówka: Znajdź niezależnie równoległą i prostopadłą (do pręta) składową natężenia pola elektrycznego w punkcie P i porównaj te składowe).



Rys. 23.36. Zadanie 24

23.7. Pole elektryczne naładowanej tarczy

26. Góra powierzchnia tarczy o promieniu $2,5$ cm jest naładowana z gęstością powierzchniową $5,3 \mu\text{C}/\text{m}^2$. Jaka jest wartość natężenia pola elektrycznego wytworzonego przez tarczę w punkcie leżącym na osi symetrii prostopadłej do tarczy, w odległości 12 cm od tarczy?

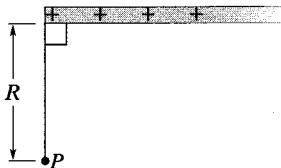
27. W jakiej odległości od środka jednorodnie naładowanej plastikowej tarczy o promieniu R (na jej osi symetrii) wartość natężenia pola elektrycznego jest równa połowie tej wartości w środku tarczy?

23.8. Ładunek punktowy w polu elektrycznym

28. W polu elektrycznym elektron porusza się w kierunku wschodnim z przyspieszeniem $1,8 \cdot 10^9 \text{ m/s}^2$. Określ wartość i kierunek natężenia pola elektrycznego.

29. Spoczywający początkowo elektron znalazł się w jednorodnym polu elektrycznym o natężeniu $2 \cdot 10^4 \text{ N/C}$. Oblicz przyspieszenie elektronu (pomiń siły ciężkości).

30. Cząstka α (jądro atomu helu) ma masę $6,64 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$ i ładunek $+2e$. Jaka jest wartość i kierunek natężenia pola elektrycznego, w którym siła elektrostatyczna zrównoważy siłę ciężkości działającą na tę cząstkę?



Rys. 23.37. Zadanie 25

31. Oblicz wartość siły oddziaływania dipola elektrycznego o momencie dipolowym $3,6 \cdot 10^{-29} \text{ C} \cdot \text{m}$ na elektron, znajdujący się na osi dipola, w odległości 25 nm od jego środka. Załóż, że ta odległość jest duża w porównaniu z odlegością ładunków dipola.

32. Wilgotne powietrze ulega przebibiciu (jego cząsteczki ulegają jonizacji) w polu elektrycznym o natężeniu $3 \cdot 10^6 \text{ N/C}$. Jaka jest wartość siły elektrostatycznej, działającej w takim polu na: a) elektron b) jon jednododatni?

33. Naładowana chmura wytwarza pole elektryczne w powietrzu nad powierzchnią Ziemi. Na cząstkę o ładunku $-2 \cdot 10^{-9} \text{ C}$, znajdującej się w tym polu, działa siła elektrostatyczna o wartości $3 \cdot 10^{-6} \text{ N}$, skierowana w dół. a) Jaka jest wartość natężenia pola elektrycznego? b) Jaka jest wartość i kierunek siły elektrostatycznej, działającej na proton umieszczony w tym polu? c) Jaka jest wartość siły grawitacyjnej działającej na proton? d) Ile wynosi stosunek wartości siły elektrostatycznej do wartości siły grawitacyjnej, działającej na proton?

34. W atmosferze w pobliżu powierzchni Ziemi natężenie pola elektrycznego \vec{E} o średniej wartości około 150 N/C jest skierowane w dół. Chcemy „zawiesić” w powietrzu kulę siarkową o ciężarze $4,4 \text{ N}$ przez jej naładowanie. a) Znajdź wartość i znak ładunku, jakiego trzeba użyć. b) Dlaczego taki eksperyment nie ma szerszego zastosowania?

35. Stosując pola elektryczne do przyspieszania protonów w „działach protonowych” można wytwarzać wiązki szybkich protonów. a) Jakiego przyspieszenia dozna proton, jeśli natężenie pola elektrycznego „działu” wynosi $2 \cdot 10^4 \text{ N/C}$? b) Jaką prędkość uzyska proton, jeśli pole będzie przyspieszało proton na drodze 1 cm ?

36. Elektron, którego prędkość jest równa $5 \cdot 10^8 \text{ cm/s}$, wpada w pole elektryczne o natężeniu $1 \cdot 10^3 \text{ N/C}$, poruszając się wzdłuż linii pola w kierunku, w którym jego ruch jest opóźniony. a) Jaką drogę przebywa elektron w polu do chwili zatrzymania? b) Ile czasu upłynie do tego momentu? c) Jeśli obszar pola elektrycznego ma tylko 8 mm długości (za mało do zatrzymania w nim elektronu), to jaka część początkowej energii kinetycznej elektronu zostanie w tym obszarze stracona?

37. W doświadczeniu Millikana kropelka oleju o promieniu $1,64 \mu\text{m}$ i gęstości $0,851 \text{ g/cm}^3$ zawisła w komorze C (rys. 23.13), gdy włączono pole elektryczne o natężeniu $1,92 \cdot 10^5 \text{ N/C}$, skierowane w dół. Znajdź ładunek kropelki jako wielokrotność e .

38. W jednym ze swych doświadczeń Millikan otrzymał między innymi następujące wartości ładunku, jaki w różnych chwilach znajdował się na pojedynczej kropelce:

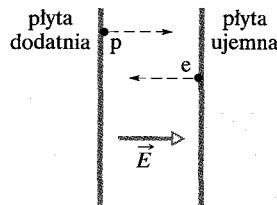
| | | |
|----------------------------------|----------------------------------|----------------------------------|
| $6,563 \cdot 10^{-19} \text{ C}$ | $13,13 \cdot 10^{-19} \text{ C}$ | $19,71 \cdot 10^{-19} \text{ C}$ |
| $8,204 \cdot 10^{-19} \text{ C}$ | $16,48 \cdot 10^{-19} \text{ C}$ | $22,89 \cdot 10^{-19} \text{ C}$ |
| $11,50 \cdot 10^{-19} \text{ C}$ | $18,08 \cdot 10^{-19} \text{ C}$ | $26,13 \cdot 10^{-19} \text{ C}$ |

Jaką wartość ładunku elementarnego e można przyjąć na podstawie tych danych?

39. W obszarze między dwiema przeciwnie naładowanymi płytami istnieje jednorodne pole elektryczne. Elektron, początkowo spoczywający przy ujemnie naładowanej płycie uderzył po czasie $1,5 \cdot 10^{-8}$ s w przeciwnie naładowaną płytę, znajdującej się w odległości 2 cm. a) Ile wynosiła prędkość elektronu w momencie, gdy zderzył się z drugą płytą? b) Jaka jest wartość natężenia pola elektrycznego \vec{E} ?

40. W pewnej chwili składowe prędkości elektronu, poruszającego się między dwiema naładowanymi równoległymi płytami wynoszą $v_x = 1,5 \cdot 10^5$ m/s i $v_y = 3 \cdot 10^3$ m/s. Załóż, że pole elektryczne między płytami jest dane przez $\vec{E} = (120 \text{ N/C})\hat{j}$. a) Ile wynosi przyspieszenie elektronu? b) Ile wynosić będzie prędkość elektronu, gdy jego współrzędna x zmieni się o 2 cm?

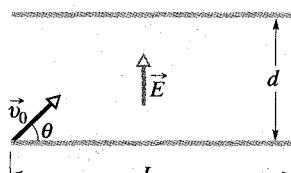
41. Dwie duże równoległe płyty miedziane znajdują się w odległości 5 cm od siebie, a między nimi wytworzone jest jednorodne pole elektryczne, przedstawione na rysunku 23.38. Spoczywający początkowo elektron opuszcza płytę ujemną w tej samej chwili, w której proton jest uwolniony z płyty dodatniej. Pomijając siłę oddziaływania wzajemnego cząstek, znajdź odległość cząstek od płyty dodatniej w chwili mijania się. (Czy nie jest dziwne, że przy rozwiązywaniu tego zadania nie musimy znać natężenia pola elektrycznego?)



Rys. 23.38. Zadanie 41

42. Klocek o masie 10 g i ładunku $+8 \cdot 10^{-5}$ C umieszczono w polu elektrycznym o natężeniu $\vec{E} = (3 \cdot 10^3)\hat{i} - 600\hat{j}$, gdzie składowe \vec{E} podano w newtonach na kulomb (N/C). a) Jaka jest wartość i kierunek siły, działającej na klocek? b) Jeśli klocek spoczywał (w chwili $t = 0$ s) w początku układu, to jakie będą jego współrzędne w chwili $t = 3$ s?

43. Przez naładowanie dolnej płyty dodatnio i górnej płyty ujemnie wytworzono jednorodne pole elektryczne o natężeniu $2 \cdot 10^3 \text{ N/C}$, skierowane do góry (rys. 23.39). Płyty mają długość $L = 10 \text{ cm}$ i znajdują się w odległości $d = 2 \text{ cm}$. Z lewej krawędzi dolnej płyty wystrzelono elektron w obszar między płytami. Początkowa prędkość \vec{v}_0 elektronu tworzy kąt $\theta = 45^\circ$ z dolną płytą i ma wartość $6 \cdot 10^6 \text{ m/s}$. a) Czy elektron uderzy w którąś płytę? b) Jeśli tak, to w którą płytę i w jakiej odległości, patrząc w kierunku poziomym, od lewej krawędzi płyty?



Rys. 23.39. Zadanie 43

23.9. Dipol w polu elektrycznym

44. Dipol elektryczny, składający się z ładunków o wartości $1,5 \text{ nC}$, znajdujących się w odległości $6,2 \mu\text{m}$ od siebie, umieszczony jest w polu elektrycznym o natężeniu 1100 N/C . a) Jaka jest wartość elektrycznego momentu dipolowego dipola? b) Jaka jest różnica między energiami potencjalnymi, odpowiadającymi równoleglemu i antyrównoleglemu ustawieniu dipola względem natężenia pola?

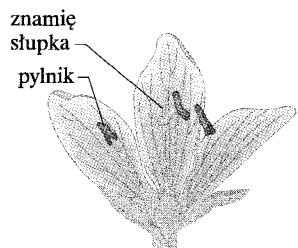
45. Dipol elektryczny, składający się z ładunków $+2e$ i $-2e$, umieszczonych w odległości $0,78 \text{ nm}$ od siebie, znajduje się w polu elektrycznym o natężeniu $3,4 \cdot 10^6 \text{ N/C}$. Oblicz wartość momentu siły działającego na dipol, jeśli moment dipolowy jest: a) równoległy, b) prostopadły, c) antyrównoległy do natężenia pola elektrycznego.

46. Znajdź pracę potrzebną do obrócenia dipola elektrycznego o 180° w jednorodnym polu elektrycznym o natężeniu \vec{E} — wynik wyraź przez wartość p momentu dipolowego, wartość E natężenia pola i początkowy kąt θ_0 między wektorami \vec{p} i \vec{E} .

47. Znajdź częstotliwość drgań dipola elektrycznego o momencie dipolowym \vec{p} i momencie bezwładności I dla małych amplitud drgań wokół jego położenia równowagi, w jednorodnym polu elektrycznym o wartości natężenia E .

Zadanie dodatkowe

48. Zapylanie kwiatów zależy od owadów, przenoszących ziarnka pyłku z kwiatu na kwiat. Jeden ze sposobów, w jaki pszczoły mogą to robić, polega na elektrycznym zbieraniu ziaren pyłku, gdyż pszczoły są zwykle dodatnio naładowane. Gdy pszczoła zwisa w pobliżu elektrycznie izolowanego pylnika kwiatu (rys. 23.40), ziarnka pyłku (umiarkowanie przewodzące) padają na pszczołę i są przez nią przenoszone do następnego kwiatu. Gdy pszczoła zbliży się do elektrycznie uziemionego (przez wnętrze kwiatu) znamienia słupka, ziarnka pyłku spadają z pszczoły na uziemione znamię i zapylają kwiat. a) Zakładając, że pszczoła z typowym ładunkiem 45 pC jest kulistym przewodnikiem, znajdź wartość natężenia pola elektrycznego pszczoły w obszarze pylnika, w odległości 2 cm od środka pszczoły. b) Czy pole to jest jednorodne, czy niejednorodne? c) Wyjaśnij, dlaczego ziarnka pyłku padają na pszczołę, przylegając do niej podczas lotu i potem spadają z pszczoły na uziemione znamię. (Wskazówka: Spójrz na rys. 22.5). Gdy ziarnko pyłku przylega się do pszczoły, to czy istnieje elektryczny kontakt pyłku z pszczołą, w wyniku czego ładunek ziarnka pyłku ulega zmianie?



Rys. 23.40. Zadanie 48

24 Prawo Gaussa

Wspaniale wyglądające błyskawice nad miastem podczas każdego uderzenia pioruna wysyłają około 10^{20} elektronów z chmury do ziemi.

Jak szeroka jest błyskawica?

Skoro błyskawicę można obserwować nawet z odległości kilku kilometrów, to czy szerokość jej jest równa na przykład szerokości samochodu?

Odpowiedź znajdziesz w tym rozdziale.



24.1. Nowe spojrzenie na prawo Coulomba

Srodek masy ziemniaka można wyznaczyć doświadczalnie lub wykonując żmudne obliczenia, zawierające numeryczne obliczenie całki potrójnej. Jeśli jednak ziemniak byłby jednorodną elipsoidą, to biorąc pod uwagę jej symetrię, bez żadnych obliczeń potrafimy określić dokładnie, gdzie jest srodek masy. Takie korzyści wynikają z symetrii. Symetria pojawia się we wszystkich działach fizyki; gdy tylko jest to możliwe, warto przekształcić prawa fizyki do postaci, która w pełni pozwoli wykorzystać ten fakt.

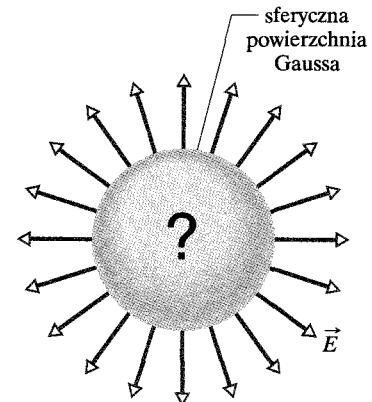
Prawo Coulomba jest podstawowym prawem elektrostatyki, ale nie jest wyrażone w postaci, która pozwalałaby w prostszy sposób wykonać obliczenia w przypadku występowania symetrii. W tym rozdziale poznasz nowe sformułowanie prawa Coulomba, wyprowadzone przez niemieckiego matematyka i fizyka Carla Friedricha Gaussa (1777–1855). Tego prawa, zwanego **prawem Gaussa**, można użyć do uwzględnienia szczególnej symetrii w rozważanym zagadnieniu. Dla zagadnień elektrostatyki jest ono w pełni równoważne prawu Coulomba; które z nich wybierzemy, zależy tylko od rozważanego zagadnienia.

Dla prawa Gaussa istotne jest wprowadzenie umownej zamkniętej powierzchni, zwanej **powierzchnią Gaussa**. Może mieć ona dowolny kształt, ale najbardziej użyteczny jest wybór powierzchni naśladującej symetrię rozważanego zagadnienia. Dlatego powierzchnia Gaussa będzie często sferą, powierzchnią walcową lub powierzchnią innej symetrycznej bryły. Musi być ona zawsze powierzchnią *zamkniętą*, tak aby można było wyraźnie rozróżnić punkty wewnętrz powierzchni, na powierzchni i na zewnątrz powierzchni.

Wyobraź sobie, że wybraliśmy powierzchnię Gaussa wokół rozkładu ładunków. Wtedy wkracza prawo Gaussa:

► Prawo Gaussa określa związek między natężeniem pola elektrycznego w punktach na (zamkniętej) powierzchni Gaussa i całkowitym ładunkiem objętym tą powierzchnią.

Na rysunku 24.1 przedstawiono prostą sytuację, w której powierzchnia Gaussa jest sferą. Założmy, że w każdym punkcie powierzchni jest określone natężenie pola elektrycznego i że wszystkie wektory natężenia mają taką samą wartość i są skierowane radialnie na zewnątrz. Nie wiedząc nic o prawie Gaussa, możemy się domyślać, że powierzchnia Gaussa musi wtedy obejmować pewien wypadkowy ładunek dodatni. Jeśli *znamy* prawo Gaussa, to możemy obliczyć wypadkowy ładunek dodatni, objęty przez powierzchnię Gaussa. Aby wykonać obliczenie, wystarczy tylko wiedzieć, „ile” pola elektrycznego przenika przez powierzchnię — miarą tego „ile” jest *strumień* pola elektrycznego, przenikający przez powierzchnię.

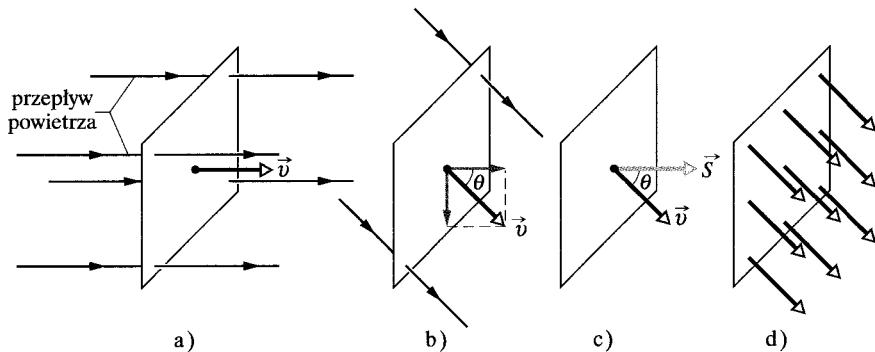


Rys. 24.1. Sferyczna powierzchnia Gaussa. Jeśli wektory natężenia pola elektrycznego mają jednakową wartość i są skierowane na zewnątrz we wszystkich punktach powierzchni, to można wnioskować, że wewnętrz powierzchni znajduje się wypadkowy dodatni rozkład ładunku, który ma symetrię sferyczną

24.2. Strumień

Założymy, że przez małą kwadratową ramkę o polu powierzchni S przepływa szeroki strumień powietrza o stałej prędkości \vec{v} (rys. 24.2a). Oznaczmy przez Φ szybkość przepływu przez powierzchnię, czyli objętość powietrza, przepływającego

Rys. 24.2. a) Jednorodny strumień powietrza o prędkości \vec{v} jest prostopadły do płaszczyzny kwadratowej ramki o polu powierzchni S . b) Składowa prędkości \vec{v} prostopadła do płaszczyzny ramki jest równa $v \cos \theta$, gdzie θ jest kątem między \vec{v} i normalną (prostopadłą) do płaszczyzny. c) Wektor powierzchni \vec{S} jest prostopadły do płaszczyzny ramki i tworzy kąt θ z \vec{v} . d) Pole prędkości na powierzchni ramki.



przez ramkę w jednostce czasu. Szybkość przepływu zależy od kąta między wektorem \vec{v} i płaszczyzną ramki. Jeśli prędkość \vec{v} jest prostopadła do płaszczyzny, to szybkość przepływu Φ jest równa vS .

Jeśli prędkość \vec{v} jest równoległa do płaszczyzny ramki, to powietrze wcale nie przechodzi przez ramkę i Φ jest równa zeru. Dla pośredniego kąta θ szybkość Φ zależy od składowej prędkości \vec{v} , prostopadłej do płaszczyzny ramki (rys. 24.2b). Składająca ta jest równa $v \cos \theta$, a więc szybkość przepływu przez powierzchnię wynosi:

$$\Phi = (v \cos \theta)S. \quad (24.1)$$

Ta szybkość przepływu przez powierzchnię jest przykładem **strumienia** — tutaj *strumienia objętościowego*. Zanim przedyskutujemy strumień występujący w elektrostatyce, napiszemy wzór (24.1), korzystając z wektorów.

W tym celu zdefiniujmy najpierw *wektor powierzchni* \vec{S} jako wektor, którego wartość jest równa polu powierzchni (tu polu powierzchni ograniczonej ramką) i który jest skierowany prostopadle do powierzchni (rys. 24.2c). Możemy wtedy napisać wzór (24.1) jako iloczyn skalarny wektora prędkości \vec{v} strumienia powietrza i wektora powierzchni \vec{S} ograniczonej ramką:

$$\Phi = vS \cos \theta = \vec{v} \cdot \vec{S}, \quad (24.2)$$

gdzie θ jest kątem między wektorami \vec{v} i \vec{S} .

Nazwa „strumień”, kojarzy się z „płynięciem”. Takie określenie jest całkiem naturalne, gdy mówimy o przepływie objętości powietrza przez ramkę. Wzór (24.2) można jednak traktować bardziej abstrakcyjnie. Zauważ, że każdemu punktowi strumienia powietrza, przechodzącego przez ramkę, możemy przypisać wektor prędkości (rys. 24.2d). Zbiór wszystkich takich wektorów tworzy *pole prędkości* i wzór (24.2) możemy interpretować, jako określenie *strumienia pola prędkości przez ramkę*. Przy tej interpretacji strumień nie oznacza, że coś przechodzi przez tę powierzchnię — oznacza właściwie iloczyn pola powierzchni i pola pewnej wielkości, określonej na tej powierzchni.

24.3. Strumień pola elektrycznego

W celu zdefiniowania strumienia pola elektrycznego rozważmy rysunek 24.3, na którym przedstawiono pewną dowolną (asymetryczną) powierzchnię Gaussa

w niejednorodnym polu elektrycznym. Podzielimy powierzchnię na małe kwadraty o polu powierzchni ΔS , wybierając każdy kwadrat na tyle mały, aby można było zaniedbać jego krzywiznę i rozważać poszczególne kwadraty jako płaskie. Każdy taki element powierzchni będziemy opisywać wektorem powierzchni $\Delta \vec{S}$, którego wartość jest równa polu powierzchni ΔS i który jest skierowany prostopadle do powierzchni Gaussa, na zewnątrz tej powierzchni.

Wybrałyśmy dowolnie małe kwadraty, więc natężenie pola elektrycznego możemy uważać za stałe na powierzchni danego kwadratu. Wektory $\Delta \vec{S}$ i \vec{E} dla każdego kwadratu tworzą ze sobą pewien kąt θ . Na rysunku 24.3 pokazano w powiększeniu trzy kwadraty (1, 2 i 3) na powierzchni Gaussa i kąt θ dla każdego z nich.

Zaczniemy od wstępnej definicji strumienia pola elektrycznego dla powierzchni Gaussa z rysunku 24.3:

$$\Phi = \sum \vec{E} \cdot \Delta \vec{S}. \quad (24.3)$$

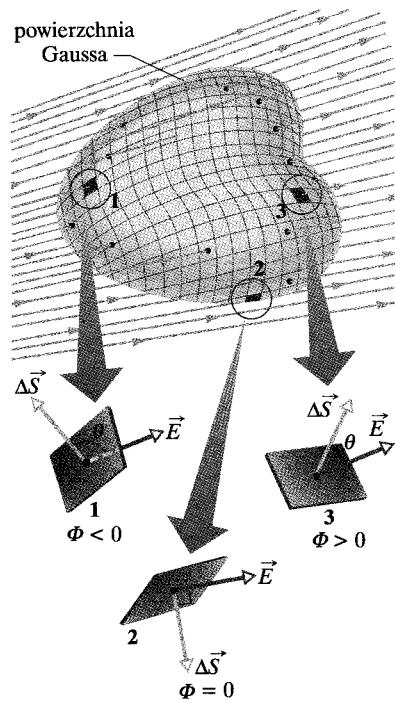
Ze wzoru tego wynika, że musimy wziąć pod uwagę każdy kwadrat na powierzchni Gaussa, obliczyć iloczyn skalarny $\vec{E} \cdot \Delta \vec{S}$ dwóch wektorów \vec{E} i $\Delta \vec{S}$ tam określonych i zsumować wyniki algebraicznie (czyli z uwzględnieniem znaków) dla wszystkich kwadratów, tworzących powierzchnię. Znak, jaki otrzymujemy przy obliczaniu każdego iloczynu skalarnego określa, czy strumień, przenikający przez dany kwadrat jest dodatni, ujemny, czy zerowy. Kwadraty (jak np. 1), dla których natężenie \vec{E} jest skierowane do wnętrza powierzchni, dają ujemny wkład do sumy ze wzoru (24.3). Kwadraty (jak 2), dla których wektor \vec{E} leży w płaszczyźnie kwadratu, dają wkład zerowy. Kwadraty (jak 3), dla których natężenie \vec{E} jest skierowane na zewnątrz powierzchni, dają wkład dodatni.

Dokładną definicję strumienia pola elektrycznego, przenikającego przez zamkniętą powierzchnię otrzymujemy przez przejście do coraz mniejszych pól powierzchni kwadratów (rys. 24.3), osiągając w granicy dS . Wektory powierzchni dążą wtedy do różniczek $d\vec{S}$. Suma ze wzoru (24.3) staje się całką i jako definicję strumienia elektrycznego otrzymujemy:

$$\Phi = \oint \vec{E} \cdot d\vec{S} \quad (\text{strumień elektryczny przez powierzchnię Gaussa}). \quad (24.4)$$

Całkę należy obliczyć po całej (zamkniętej) powierzchni (co zaznaczamy kółeczkami na całce). Strumień pola elektrycznego jest skalarem i jego jednostką w układzie SI jest niuton razy metr kwadratowy na kulomb ($N \cdot m^2/C$).

Wzór (24.4) możemy zinterpretować następująco: przypomnij sobie, że gęstość linii pola elektrycznego przechodzących przez powierzchnię jest proporcjonalna do natężenia pola \vec{E} na powierzchni. Oznacza to, że wartość E jest proporcjonalna do liczby linii pola elektrycznego na jednostkę powierzchni. Stąd iloczyn skalarny $\vec{E} \cdot d\vec{S}$ we wzorze (24.4) jest proporcjonalny do liczby linii pola elektrycznego, przechodzących przez powierzchnię $d\vec{S}$. Całkowanie we wzorze (24.4) odbywa się po powierzchni Gaussa, która jest zamknięta, a więc widzimy, że:

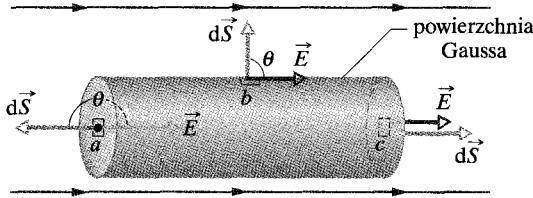


Rys. 24.3. Powierzchnia Gaussa dowolnego kształtu, znajdująca się w polu elektrycznym. Powierzchnia jest podzielona na małe kwadraty o polu powierzchni ΔS . Pokazano wektory natężenia pola \vec{E} i wektory powierzchni $\Delta \vec{S}$ dla trzech przykładowych kwadratów, oznaczonych 1, 2 i 3

► Strumień elektryczny Φ przenikający przez powierzchnię Gaussa jest proporcjonalny do całkowej liczby linii pola elektrycznego, przechodzących przez tę powierzchnię.

Przykład 24.1

Na rysunku 24.4 przedstawiono powierzchnię Gaussa w postaci powierzchni walca o promieniu R , umieszczonego w jednorodnym polu elektrycznym o natężeniu \vec{E} , przy czym oszwalca jest równoległa do kierunku natężenia pola. Ile wynosi strumień Φ pola elektrycznego, przenikającego przez tę zamkniętą powierzchnię?



Rys. 24.4. Przykład 24.1. Walcowa powierzchnia Gaussa, zamknięta przez denka, znajduje się w jednorodnym polu elektrycznym. Oś walca jest równoległa do kierunku natężenia pola

ROZWIĄZANIE:

→ Strumień elektryczny przez powierzchnię możemy znaleźć przez całkowanie iloczynu skalarnego $\vec{E} \cdot d\vec{S}$ po powierzchni Gaussa. Możemy to zrobić, przedstawiając strumień jako sumę trzech całek: po lewym denku a , po powierzchni bocznej walca b i po prawym denku c . Ze wzoru (24.4) mamy więc:

$$\Phi = \oint \vec{E} \cdot d\vec{S} = \int_a \vec{E} \cdot d\vec{S} + \int_b \vec{E} \cdot d\vec{S} + \int_c \vec{E} \cdot d\vec{S}. \quad (24.5)$$

Dla wszystkich punktów na lewym denku kąt θ między \vec{E} i $d\vec{S}$ wynosi 180° i wartość E natężenia pola jest stała. Stąd:

$$\int_a \vec{E} \cdot d\vec{S} = \int E(\cos 180^\circ) dS = -E \int dS = -ES,$$

Przykład 24.2

Niejednorodne pole elektryczne o natężeniu $\vec{E} = 3x\hat{i} + 4\hat{j}$ przenika przez sześcienną powierzchnię Gaussa, przedstawioną na rys. 24.5 (E jest wyrażone w niutonach na kulomb, a x w metrach). Oblicz strumień elektryczny, przenikający przez prawą ścianę, lewą ścianę i górną ścianę sześcianu.

ROZWIĄZANIE:

→ Strumień elektryczny Φ przez powierzchnię możemy obliczyć, całkując iloczyn skalarny $\vec{E} \cdot d\vec{S}$ po każdej ze ścian.

Prawa ściana: Wektor powierzchni \vec{S} jest zawsze prostopadły do powierzchni i skierowany na zewnątrz powierzchni Gaussa. Stąd wektor $d\vec{S}$ dla prawej ściany sześcianu musi być skierowany w kierunku dodatnim osi x . Zapisując to za pomocą wektorów jednostkowych mamy więc:

$$d\vec{S} = dS\hat{i}.$$

gdzie $\int dS$ daje pole powierzchni denka $S (= \pi R^2)$. Podobnie dla prawego denka, gdzie dla wszystkich punktów $\theta = 0^\circ$, mamy:

$$\int_c \vec{E} \cdot d\vec{S} = \int E(\cos 0^\circ) dS = ES.$$

Na koniec, dla powierzchni bocznej walca, gdzie we wszystkich punktach kąt $\theta = 90^\circ$, mamy:

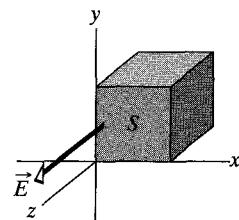
$$\int_b \vec{E} \cdot d\vec{S} = \int E(\cos 90^\circ) dS = 0.$$

Podstawiając te wyniki do wzoru (24.5), otrzymujemy ostatecznie:

$$\Phi = -ES + 0 + ES = 0. \quad (\text{odpowiedź})$$

Wynik ten raczej nie zaskakuje, gdyż wszystkie linie pola, które reprezentują pole elektryczne, całkowicie przechodzą przez powierzchnię Gaussa i dają wypadkowy strumień równy zeru, bo wchodzą przez lewe denko i wychodzą przez prawe.

SPRAWDZIAN 1: Przedstawiona na rysunku powierzchnia Gaussa, w postaci powierzchni sześcianu o polu powierzchni ściany S , jest umieszczona w jednorodnym polu elektrycznym o natężeniu \vec{E} , które jest skierowane w dodatnim kierunku osi z . Wyraź przez E i S strumień pola elektrycznego przenikający przez: a) przednią ścianę (leżącą w płaszczyźnie xy), b) tylną ścianę, c) górną ścianę, d) powierzchnię całego sześcianu.



Ze wzoru (24.4) strumień Φ_p , przenikający przez prawą ścianę wynosi więc:

$$\begin{aligned} \Phi_p &= \int \vec{E} \cdot d\vec{S} \\ &= \int (3x\hat{i} + 4\hat{j}) \cdot (dS\hat{i}) \\ &= \int [(3x)\hat{i} \cdot \hat{i} + (4)(dS)\hat{j} \cdot \hat{i}] \\ &= \int (3xdS + 0) = 3 \int x dS. \end{aligned}$$

Aby obliczyć całkę po prawej ścianie, skorzystajmy z faktu, że x ma taką samą wartość $x = 3$ m na całej ścianie. Możemy więc podstawić tę stałą wartość za x i otrzymamy:

$$\Phi_p = 3 \int 3dS = 9 \int dS.$$

Teraz całka daje nam po prostu pole powierzchni $S = 4 \text{ m}^2$ dla prawej ściany i ostatecznie:

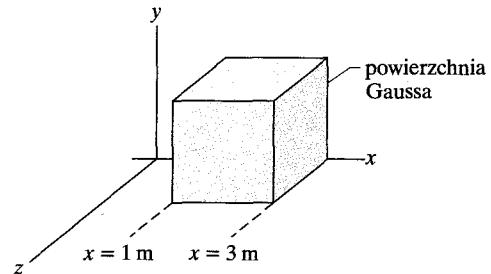
$$\Phi_p = (9 \text{ N/C})(4 \text{ m}^2) = 36 \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{C}. \quad (\text{odpowiedź})$$

Lewa ściana: Procedura obliczania strumienia, przenikającego przez lewą ścianę jest taka sama, jak dla prawej ściany. Jednak dwa czynniki ulegają zmianie. 1) Wektor powierzchni $d\vec{S}$ jest skierowany w kierunku ujemnym osi x i stąd $d\vec{S} = -d\hat{S}\hat{j}$. 2) W naszej calce znów występuje czynnik x , który ponownie jest stały na rozważanej ścianie. Obecnie, na lewej ścianie mamy jednak $x = 1 \text{ m}$. Po uwzględnieniu tych dwóch zmian strumień Φ_1 przez lewą ścianę wynosi

$$\Phi_1 = -12 \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{C}. \quad (\text{odpowiedź})$$

Górna ściana: Wektor powierzchni $d\vec{S}$ jest skierowany w dodatnim kierunku osi y i stąd $d\vec{S} = d\hat{S}\hat{j}$. Strumień Φ_g , przenikający przez górną ścianę wynosi więc:

$$\begin{aligned} \Phi_g &= \int (3x\hat{i} + 4\hat{j}) \cdot d\hat{S}\hat{j} = \int [(3x)\hat{i} \cdot \hat{j} + (4)(dS)\hat{j} \cdot \hat{j}] \\ &= \int (0 + 4dS) = 4 \int dS = 16 \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{C}. \quad (\text{odpowiedź}) \end{aligned}$$



Rys. 24.5. Przykład 24.2. Powierzchnia Gaussa w postaci powierzchni sześcianu o jednej krawędzi na osi x znajduje się w niejednorodnym polu elektrycznym

24.4. Prawo Gaussa

Prawo Gaussa opisuje związek między strumieniem Φ pola elektrycznego, przenikającym przez zamkniętą powierzchnię (powierzchnię Gaussa) i całkowitym ładunkiem q_{wewn} , zawartym *wewnątrz* tej powierzchni. Zgodnie z tym prawem:

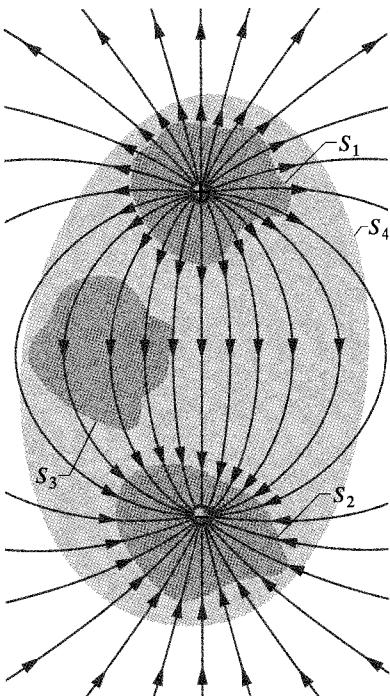
$$\epsilon_0 \Phi = q_{\text{wewn}} \quad (\text{prawo Gaussa}). \quad (24.6)$$

Po podstawieniu wzoru (24.4) definiującego strumień, prawo Gaussa możemy także zapisać w postaci:

$$\epsilon_0 \oint \vec{E} \cdot d\vec{S} = q_{\text{wewn}} \quad (\text{prawo Gaussa}). \quad (24.7)$$

Wzory (24.6) i (24.7) są słusne tylko wtedy, gdy ładunek znajduje się w próżni lub (co jest praktycznie tym samym) w powietrzu. W paragrafie 26.8 zmodyfikujemy prawo Gaussa, aby uwzględnić sytuacje, gdy rozważamy takie materiały, jak: mika, olej czy szkło.

We wzorach (24.6) i (24.7) ładunek q_{wewn} jest algebraiczną sumą wszystkich dodatnich i ujemnych ładunków zawartych wewnątrz tej powierzchni i może być dodatni, ujemny lub zerowy. Uwzględniamy znak ładunku, zamiast używać tylko jego bezwzględnej wartości, ponieważ znak zawiera istotną informację o wypadkowym strumieniu przenikającym przez powierzchnię Gaussa. Jeśli ładunek q_{wewn} jest dodatni, to przeważa strumień *na zewnątrz*; jeśli ładunek q_{wewn} jest ujemny, to przeważa strumień *do wewnątrz*.



Rys. 24.6. Dwa ładunki punktowe o jednakowej wartości, ale o przeciwnym znaku i linie pola, reprezentujące wypadkowe natężenie wytworzonego przez nie pola elektrycznego. Pokazano przekrój czterech powierzchni Gaussa. Powierzchnia S_1 otacza ładunek dodatni. Powierzchnia S_2 otacza ładunek ujemny. Powierzchnia S_3 nie otacza żadnego ładunku. Powierzchnia S_4 otacza obydwa ładunki. Całkowity ładunek jest równy zeru

Ladunek na zewnątrz powierzchni, bez względu na to, jak jest duży lub jak blisko się znajduje, nie jest włączony do członu q_{wewn} w prawie Gaussa. Dokładna postać rozkładu, czyli położenie ładunków wewnętrz powierzchni Gaussa także nie odgrywa roli; istotne po prawej stronie wzoru (24.7) są tylko wartość i znak wypadkowego ładunku, otoczonego powierzchnią Gaussa. Wielkość \vec{E} po lewej stronie wzoru (24.7) jest jednak natężeniem pola elektrycznego, wytworzonego przez wszystkie ładunki zarówno wewnętrz, jak i na zewnątrz powierzchni Gaussa. Może się wydawać, że to jest niekonsekwencja, ale przypomnij sobie wynik z przykładu 24.1: pole elektryczne, wytworzone przez ładunki na zewnątrz powierzchni Gaussa daje zerowy wypadkowy strumień przenikający przez tę powierzchnię, bo tyle samo linii pola wytworzonego przez te ładunki pada na powierzchnię, co ją opuszcza.

Zastosujmy te idee do rysunku 24.6, na którym przedstawiono linie pola elektrycznego, wytworzonego przez dwa ładunki punktowe o jednakowych wartościach, ale o przeciwnych znakach. Przedstawiono także w przekroju cztery powierzchnie Gaussa. Rozważmy po kolej każdą z nich.

Powierzchnia S_1 . We wszystkich punktach na tej powierzchni linie pola elektrycznego wychodzą na zewnątrz. Stąd strumień pola elektrycznego przenikający przez tę powierzchnię jest dodatni, dodatni jest też całkowity ładunek wewnętrz powierzchni, jak wymaga tego prawo Gaussa. (Zgodnie ze wzorem (24.6), jeśli strumień Φ jest dodatni, to taki musi być też ładunek q_{wewn}).

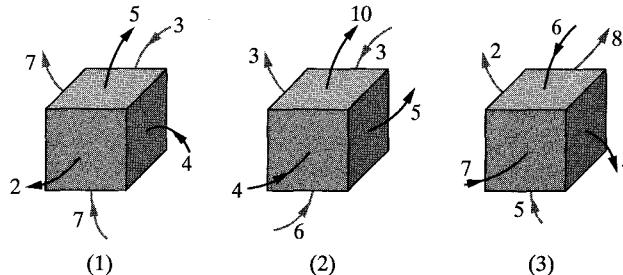
Powierzchnia S_2 . We wszystkich punktach na tej powierzchni linie pola elektrycznego wchodzą do wnętrza. Stąd strumień pola elektrycznego jest ujemny i taki jest też całkowity ładunek wewnętrz powierzchni, jak wymaga tego prawo Gaussa.

Powierzchnia S_3 . Ta powierzchnia nie otacza żadnego ładunku i stąd $q_{\text{wewn}} = 0$. Prawo Gaussa (wzór (24.6)) wymaga, aby wypadkowy strumień pola elektrycznego przez tę powierzchnię był równy零. Jest tak rzeczywiście, bo wszystkie linie pola przechodzą całkowicie przez powierzchnię, wchodząc u góry i wychodząc na dole.

Powierzchnia S_4 . Całkowity ładunek wewnętrz tej powierzchni jest równy zero, bo otaczane ładunki, dodatni i ujemny, mają jednakowe wartości. Prawo Gaussa wymaga, aby wypadkowy strumień pola elektrycznego przez tę powierzchnię był równy zero. Jest tak rzeczywiście, bo tyle samo linii opuszcza powierzchnię S_4 , co na nią pada.

Co się stanie, gdy w pobliżu powierzchni S_4 z rysunku 24.6 umieścimy na zewnątrz niej ogromny ładunek Q ? Rozkład linii pola z pewnością się zmieni, ale wypadkowy strumień dla każdej z czterech powierzchni Gaussa nie ulegnie zmianie. Jest to zrozumiałe, bo linie pola związane z dodanym ładunkiem Q będą całkowicie przechodziły przez każdą z czterech powierzchni Gaussa, nie dając wkładu do wypadkowego strumienia przez każdą z nich. Wartość Q nie jest uwzględniona w prawie Gaussa, bo Q leży na zewnątrz wszystkich czterech rozważanych powierzchni Gaussa.

SPRAWDZIAN 2: Na rysunku przedstawiono trzy sytuacje, w których sześcienna powierzchnia Gaussa znajduje się w polu elektrycznym. Strzałki i liczby wskazują kierunki linii pola i wartości (w $N \cdot m^2/C$) strumienia, przenikającego przez każdą ze ścian sześcianu. (Jaśniejsze strzałki dotyczą ścian niewidocznych). W których sytuacjach sześcian otacza: a) dodatni ładunek wypadkowy, b) ujemny ładunek wypadkowy, c) zerowy ładunek wypadkowy?



Przykład 24.3

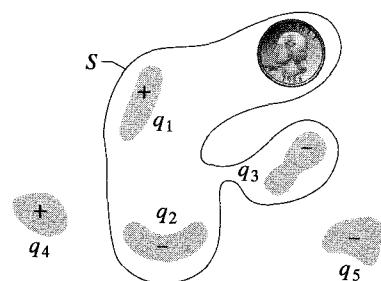
Na rysunku 24.7 przedstawiono pięć naładowanych kawałków plastiku i elektrycznie obojętną monetę oraz zaznaczono przekrój powierzchni Gaussa S . Jaki jest całkowity strumień elektryczny przez powierzchnię, jeśli $q_1 = q_4 = +3,1 \text{ nC}$, $q_2 = q_5 = -5,9 \text{ nC}$ i $q_3 = -3,1 \text{ nC}$?

ROZWIĄZANIE:

Całkowity strumień Φ przenikający przez powierzchnię zależy od całkowitego ładunku q_{wewn} , objętego przez powierzchnię S . Oznacza to, że moneta oraz ładunki q_4 i q_5 nie dają wkładu do Φ . Moneta nie daje wkładu, ponieważ jest obojętna, czyli zawiera jednakowe ilości ładunku dodatniego i ujemnego. Ładunki q_4 i q_5 nie dają wkładu, ponieważ znajdują się na zewnątrz powierzchni S . Stąd $q_{\text{wewn}} = q_1 + q_2 + q_3$ i wzór (24.6) daje nam

$$\begin{aligned} \Phi &= \frac{q_{\text{wewn}}}{\epsilon_0} = \frac{q_1 + q_2 + q_3}{\epsilon_0} \\ &= \frac{+3,1 \cdot 10^{-9} \text{ C} - 5,9 \cdot 10^{-9} \text{ C} - 3,1 \cdot 10^{-9} \text{ C}}{8,85 \cdot 10^{-12} \text{ C}^2 / (\text{N} \cdot \text{m}^2)} \\ &= -670 \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{C}. \quad (\text{odpowiedź}) \end{aligned}$$

Znak minus wskazuje, że przeważa strumień, przenikający przez powierzchnię do wewnętrz, bo wypadkowy ładunek objęty powierzchnią jest ujemny.

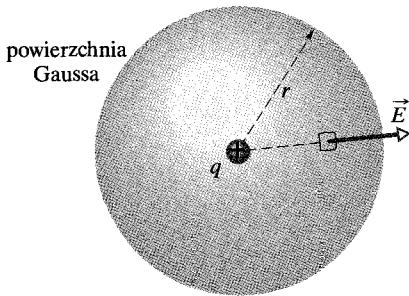


Rys. 24.7. Przykład 24.3. Pięć plastikowych naładowanych ciał i moneta o zerowym ładunku wypadkowym. Przedstawiono przekrój powierzchni Gaussa, która otacza trzy plastikowe ciała i monetę

24.5. Prawo Gaussa a prawo Coulomba

Jeśli prawo Gaussa i prawo Coulomba są sobie równoważne, to powinniśmy móc wyprowadzić jedno z drugiego. W tym paragrafie wyprowadzimy prawo Coulomba z prawa Gaussa. Skorzystamy przy tym z pewnych właściwości symetrii.

Na rysunku 24.8 przedstawiono dodatni ładunek punktowy q , wokół którego narysowano sferyczną powierzchnię Gaussa o promieniu r . Podzielmy tę powierzchnię na nieskończonie małe obszary o polu powierzchni dS . Z definicji,



Rys. 24.8. Sferyczna powierzchnia Gaussa, w której środku znajduje się w ładunek punktowy q

wektor powierzchni $d\vec{S}$ w dowolnym punkcie jest prostopadły do powierzchni i skierowany na zewnątrz. Z właściwości symetrii wynika, że w każdym punkcie natężenie pola elektrycznego \vec{E} również jest prostopadłe do powierzchni i skierowane na zewnątrz. Kąt θ między \vec{E} i $d\vec{S}$ jest równy零, więc wzór (24.7) możemy zapisać w postaci:

$$\varepsilon_0 \oint \vec{E} \cdot d\vec{S} = \varepsilon_0 \oint E dS = q_{\text{wewn}}, \quad (24.8)$$

gdzie $q_{\text{wewn}} = q$. Chociaż E zmienia się radialnie wraz z odległością od q , to ma taką samą wartość na całej powierzchni sferycznej. Całkę we wzorze (24.8) trzeba obliczyć po tej powierzchni, a więc natężenie E ma stałą wartość przy całkowaniu i można je wyłączyć przed znak całki:

$$\varepsilon_0 E \oint dS = q. \quad (24.9)$$

Całka jest teraz tylko sumą po polach powierzchni dS elementów sfery i jest równa polu powierzchni $4\pi r^2$. Po podstawieniu tej wartości otrzymujemy:

$$\varepsilon_0 E \cdot 4\pi r^2 = q,$$

czyli

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q}{r^2}. \quad (24.10)$$

Jest to dokładnie natężenie pola elektrycznego ładunku punktowego, znane nam ze wzoru (23.3), który otrzymaliśmy, używając prawa Coulomba. Prawo Gaussa jest więc równoważne prawu Coulomba.

SPRAWDZIAN 3: Wypadkowy strumień elektryczny, przenikający przez sferyczną powierzchnię Gaussa o promieniu r , otaczającą odosobnioną cząstkę naładowaną wynosi Φ_0 . Założmy, że zamieniliśmy otaczającą powierzchnię Gaussa na: a) większą sferę, b) powierzchnię sześcianu o długości krawędzi równej r , c) powierzchnię sześcianu o długości krawędzi równej $2r$. Czy wypadkowy strumień elektryczny, przenikający przez nową powierzchnię Gaussa będzie większy, mniejszy, czy równy Φ_0 w każdym z tych przypadków?

Sztuka rozwiązywania zadań

Porad 1: Wybór powierzchni Gaussa

Wyprowadzenie wzoru (24.10) przy zastosowaniu prawa Gaussa jest tylko ćwiczeniem przed wyprowadzeniami natężeń pól elektrycznych, wytwarzanych przez inne rozkłady ładunku i dlatego spróbujmy powtórzyć poszczególne kroki. Zaczeliśmy od dodatniego ładunku punktowego q ; wiemy, że linie pola elektrycznego wychodzą radialnie z q w sposób sferycznie symetryczny.

W celu wyznaczenia z prawa Gaussa (24.7) wartości E natężenia pola elektrycznego w odległości r , musimy umieścić wybraną zamkniętą powierzchnię Gaussa wokół q tak, aby przechodziła przez punkt, znajdujący się w odległości r od ładunku q . Następnie należy zsumować przez całkowanie wartości $\vec{E} \cdot d\vec{S}$ po całej powierzchni Gaussa. Aby uczynić tę całkę możliwie najprostszą, wybieramy sferyczną powierzchnię Gaussa (aby uwzględnić sferyczną symetrię pola elektrycznego). Wybór ten pozwala na następujące uproszczenia: 1) Iloczyn skalarny $\vec{E} \cdot d\vec{S}$ staje się

prosty do obliczenia, ponieważ we wszystkich punktach na powierzchni Gaussa kąt między \vec{E} i $d\vec{S}$ jest równy zero, czyli we wszystkich punktach mamy $\vec{E} \cdot d\vec{S} = EdS$. 2) Wartość natężenia pola elektrycznego E jest taka sama we wszystkich punktach sferycznej powierzchni Gaussa i dlatego wartość E jest stała, czyli przy całkowaniu można ją wynieść przed znak całki. 3) W wyniku otrzymujemy bardzo prostą całkę — sumę pól powierzchni elementów sfery, którą możemy zapisać jako $4\pi r^2$.

Warto podkreślić, że prawo Gaussa jest spełnione bez względu na kształt powierzchni Gaussa, jaką wybieramy wokół ładunku q_{wewn} . Jeśli jednak wybraliśmy, powiedzmy, sześcienną powierzchnię Gaussa, to nie moglibyśmy skorzystać z żadnego z tych trzech uproszczeń i całka z $\vec{E} \cdot d\vec{S}$ po tej powierzchni byłaby bardzo trudna do obliczenia. Wniosek jest taki, że należy wybrać powierzchnię Gaussa tak, aby całkowanie w prawie Gaussa najbardziej się upraszczało.

24.6. Izolowany przewodnik naładowany

Prawo Gaussa pozwala udowodnić ważne twierdzenie o izolowanych (odosobnionych) przewodnikach:

► Jeśli nadmiarowy ładunek zostaje umieszczony na izolowanym przewodniku, to ten ładunek przesuwa się całkowicie na powierzchnię przewodnika. We wnętrzu przewodnika nie ma żadnego nadmiarowego ładunku.

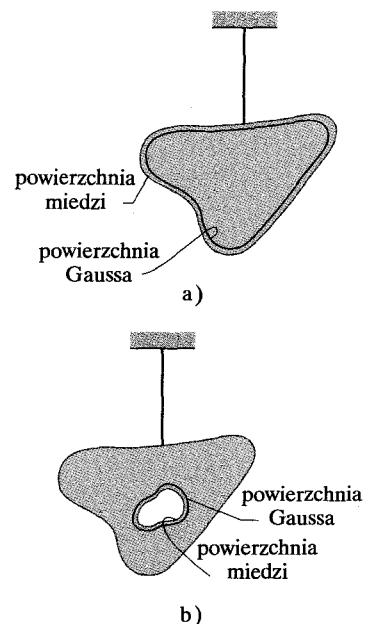
Fakt ten może wydawać się naturalny, bo ładunki o tym samym znaku odpychają się wzajemnie. Można stąd wywnioskować, że przesuwając się do powierzchni nadmiarowe ładunki oddalają się od siebie tak daleko, jak to jest tylko możliwe. Odwołamy się do prawa Gaussa, aby sprawdzić poprawność tego rozumowania.

Na rysunku 24.9a przedstawiono w przekroju izolowany kawałek miedzi, naładowany ładunkiem q i zawieszony na izolującej nici. Powierzchnię Gaussa umieszcza się wewnątrz powierzchni przewodnika.

Natężenie pola elektrycznego wewnątrz przewodnika musi być równe零. Gdyby tak nie było, to na (swobodne) elektrony przewodnictwa, które zawsze występują w przewodniku, działałyby siły i stąd w przewodniku istniałby prąd elektryczny, czyli ładunek przepływałby w przewodniku z miejsca na miejsce. W izolowanym przewodniku nie ma oczywiście takich ciągle płynących prądów i dlatego natężenie pól elektrycznych jest wewnątrz przewodnika zero.

(Wewnętrzne pole elektryczne występuje w przewodniku, gdy przewodnik jest ładowany. Jednak dodawany ładunek szybko rozmieszcza się w ten sposób, że wypadkowe natężenie pola elektrycznego — wektorowa suma natężeń pól elektrycznych, wytworzonych przez wszystkie ładunki, zarówno wewnątrz, jak i na zewnątrz przewodnika — jest równe zero. Wówczas ruch ładunków ustaje, ponieważ siła wypadkowa działająca na każdy ładunek jest równa zero — ładunki są wtedy w równowadze elektrostatycznej).

Jeśli natężenie \vec{E} jest równe zero w każdym punkcie wewnątrz miedzianego przewodnika, to musi być zerowe we wszystkich punktach powierzchni Gaussa, ponieważ ta powierzchnia, chociaż może znajdować się blisko powierzchni przewodnika, jest z pewnością wewnątrz przewodnika. Oznacza to, że strumień elektryczny przez powierzchnię Gaussa musi być zerowy. Z prawa Gaussa wynika wtedy, że ładunek wypadkowy wewnątrz powierzchni Gaussa musi być także równy zero. Nadmiarowego ładunku nie ma wewnątrz powierzchni Gaussa, dla tego też musi być na zewnątrz tej powierzchni, co oznacza, że znajduje się on na powierzchni przewodnika.



Rys. 24.9. a) Kawałek miedzi o ładunku q jest zawieszony na izolującej nici. Powierzchnia Gaussa została wybrana wewnątrz metalu, w pobliżu powierzchni przewodnika. b) Kawałek miedzi ma teraz wewnątrz wnękę. Powierzchnia Gaussa leży wewnątrz metalu, w pobliżu powierzchni wnęki

Izolowany przewodnik z wnęką

Na rysunku 24.9b przedstawiono ten sam wiszący na nici przewodnik, ale tym razem z wnęką, znajdująca się całkowicie w przewodniku. Uzasadnione wydaje się założenie, że gdy wycinamy elektrycznie obojętny materiał, aby utworzyć

wnękę, nie zmieniamy rozkładu ani ładunku, ani pola elektrycznego, istniejącego na rysunku 24.9a. Znów zastosujemy prawo Gaussa, aby przeprowadzić dowód ilościowy.

Narysujmy powierzchnię Gaussa otaczającą wnękę, bliską jej powierzchni, ale znajdująca się wewnętrznie przewodzącego ciała. Wewnętrzny przewodnik $\vec{E} = 0$, a więc strumień elektryczny przez tę nową powierzchnię Gaussa musi być równy zeru. Z prawa Gaussa wynika więc, że wnęka nie może zawierać wypadkowego ładunku. Wnioskujemy, że na ścianach wnęki nie ma wypadkowego ładunku — cały nadmiarowy ładunek pozostaje na zewnętrznej powierzchni przewodnika, jak na rysunku 24.9a.

Usunięcie przewodnika

Załóżmy, że w jakiś magiczny sposób nadmiarowe ładunki mogą zostać „zamrożone” na powierzchni przewodnika, na przykład przez pokrycie ich plastikową powłoką, tak że przewodnik można całkowicie usunąć. Jest to równoważne powiększeniu wnęki z rysunku 24.9b tak, aby wypełniała w całości przewodnik, pozostawiając tylko ładunki. Pole elektryczne nie ulegnie wtedy żadnej zmianie — pozostanie zerowe we wnętrzu cienkiej naładowanej powłoki i nie zmieni się w punktach na zewnątrz powłoki. Wynika stąd, że pole elektryczne jest wytworzone przez ładunki, a nie przez przewodnik. Przewodnik po prostu umożliwia tylko ładunkom zajęcie odpowiedniego położenia.

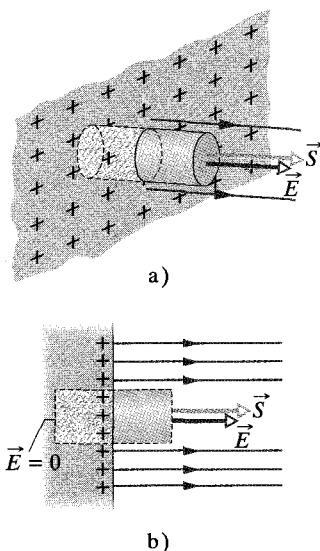
Zewnętrzne pole elektryczne

Wiesz już, że nadmiar ładunku na izolowanym przewodniku przesuwa się całkowicie na powierzchnię przewodnika. Jeśli jednak powierzchnia przewodnika nie jest sferyczna, to ładunek nie rozkłada się równomiernie. Innymi słowy, powierzchniowa gęstość ładunku σ (ładunek na jednostkę powierzchni) nie jest stała na powierzchni dowolnego przewodnika niesferycznego. Ta zmienność powoduje, że na ogół bardzo trudno jest wyznaczyć natężenie pola elektrycznego, wytworzonego przez ładunki powierzchniowe.

Korzystając z prawa Gaussa, można jednak łatwo określić natężenie pola elektrycznego tuż przy powierzchni przewodnika. Rozważmy w tym celu wycinek powierzchni na tyle mały, aby można było zaniedbać jakikolwiek jego krzywiznę, czyli aby można było uważać go za płaski. Wyobraźmy sobie następnie małą walcową powierzchnię Gaussa, zawierającą ten wycinek (rys. 24.10): jedno denko powierzchni znajduje się całkowicie wewnętrzny przewodnika, drugie całkowicie na zewnątrz przewodnika, a powierzchnia boczna walca jest prostopadła do powierzchni przewodnika.

Natężenie pola elektrycznego \vec{E} na powierzchni przewodnika i tuż nad nią musi być także prostopadłe do tej powierzchni. Gdyby nie było, to miałyby składową wzduż powierzchni przewodnika, która prowadziłaby do działania sił na ładunki powierzchniowe, powodujących ruch ładunków. Taki ruch naruszałby jednak nasze milczące założenie, że mamy do czynienia z równowagą elektrostaczną. Stąd natężenie \vec{E} jest prostopadłe do powierzchni przewodnika.

Zsumujemy obecnie strumień elektryczny przez powierzchnię Gaussa. Strumień przez wewnętrzne denko jest zerowy, bo natężenie pola elektrycznego



Rys. 24.10. Widok z ukosa (a) i z boku (b) drobnej części dużego odosobnionego przewodnika z nadmiarowym ładunkiem dodatnim na jego powierzchni. Zamknięta walcowa powierzchnia Gaussa wnika do przewodnika i jest do niego prostopadła, obejmując pewien ładunek. Linie pola elektrycznego przechodzą przez zewnętrzne denko walca, ale nie przez wewnętrzne denko. Zewnętrzne denko ma pole powierzchni S i wektor powierzchni \vec{S} .

w przewodniku wynosi zero. Strumień przez boczną powierzchnię walca także zniką, bo w części znajdującej się wewnętrz przewodnika nie ma pola elektrycznego, a w części znajdującej się na zewnątrz natężenie pola elektrycznego jest równoległe do elementu powierzchni Gaussa. Nie znika jedynie strumień przenikający przez zewnętrzne denko powierzchni Gaussa, gdzie natężenie \vec{E} jest prostopadłe do płaszczyzny denka. Zakładamy, że pole powierzchni S denka jest wystarczająco małe, aby wartość natężenia E była na denku stała. Strumień przenikający przez denko wynosi wtedy ES i taki jest wypadkowy strumień Φ przez powierzchnię Gaussa.

Ładunek q_{wewn} , objęty powierzchnią Gaussa znajduje się na powierzchni przewodnika o polu powierzchni S . Jeśli σ jest ładunkiem na jednostkę powierzchni, to q_{wewn} wynosi σS . Po podstawieniu σS za q_{wewn} i ES za Φ prawo Gaussa (24.6) przyjmuje postać:

$$\varepsilon_0 ES = \sigma S,$$

z której otrzymujemy:

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \quad (\text{powierzchnia przewodnika}). \quad (24.11)$$

Wartość natężenia pola elektrycznego tuż przy powierzchni przewodnika jest więc proporcjonalna do gęstości powierzchniowej ładunku w tym miejscu przewodnika. Jeśli ładunek na przewodniku jest dodatni, to natężenie pola elektrycznego jest skierowane na zewnątrz przewodnika, jak na rysunku 24.10. Jeśli ładunek jest ujemny, to natężenie pola elektrycznego jest skierowane do przewodnika.

Linie pola na rysunku 24.10 muszą się kończyć na ładunkach ujemnych, gdzieś w otoczeniu. Jeśli przesuniemy te ładunki w pobliże przewodnika, to gęstość ładunku w dowolnym miejscu na powierzchni przewodnika ulegnie zmianie. Zmieni się także natężenie pola elektrycznego. Związek między E i σ będzie jednak nadal określony wzorem (24.11).

Przykład 24.4

Na rysunku 24.11a przedstawiono przekrój sferycznej powłoki metalowej o wewnętrznym promieniu R . Ładunek punktowy $-5 \mu\text{C}$ umieszczono w odległości $R/2$ od środka powłoki. Jeśli powłoka jest elektrycznie obojętna, to jakie (indukowane) ładunki są na wewnętrznej i zewnętrznej powierzchni powłoki? Czy te ładunki są rozłożone równomiernie? Jaki jest rozkład pola wewnętrz i na zewnątrz powłoki?

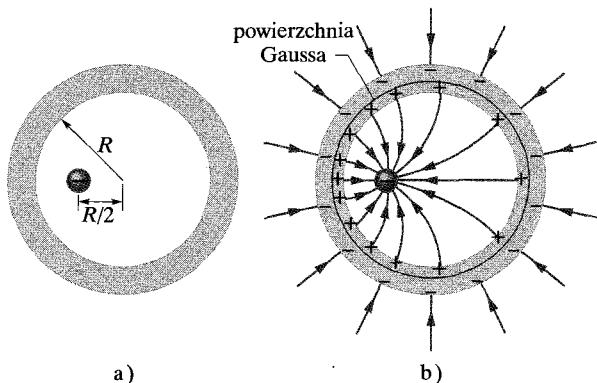
ROZWIĄZANIE:

Na rysunku 24.11b przedstawiono przekrój sferycznej powierzchni Gaussa wewnętrz metalu, tuż poza wewnętrzną powierzchnią powłoki.

O 1. Natężenie pola elektrycznego musi być równe zeru wewnętrz metalu (i stąd na powierzchni Gaussa wewnętrz metalu).

Oznacza to, że strumień elektryczny przez powierzchnię Gaussa musi być także równy零. Z prawa Gaussa wynika, że całkowity ładunek otoczony przez powierzchnię Gaussa musi być zerowy. Przy punktowym ładunku $-5 \mu\text{C}$ wewnętrz powłoki, na wewnętrznej powierzchni powłoki musi znajdować się ładunek $+5 \mu\text{C}$. Jeśli ładunek punktowy byłby w środku powłoki, to ten dodatni ładunek byłby rozłożony jednorodnie na powierzchni wewnętrznej. Jeśli jednak ładunek punktowy znajduje się poza środkiem, to rozkład ładunku dodatniego jest niejednorodny, jak przedstawiono na rysunku 24.11b, gdyż ładunek dodatni ma tendencję gromadzenia się na wycinkach wewnętrznej powierzchni, najbliższych (ujemnemu) ładunkowi punktowemu.

O 2. Ze względu na to, że powłoka jest elektrycznie obojętna, jej wewnętrzna powierzchnia może mieć ładunek $+5 \mu\text{C}$ tylko wtedy, gdy elektrony o całkowitym ładunku $-5 \mu\text{C}$ opuszczą wewnętrzną powierzchnię i przesuną się na zewnętrznej. Elektrony



Rys. 24.11. Przykład 24.4. a) Ujemny ładunek punktowy umieszczono wewnętrznej sferycznej powłoki metalowej, która jest elektrycznie obojętna. b) Na wewnętrznej powierzchni powłoki pojawił się wtedy niejednorodny rozkład ładunku dodatniego, a na zewnętrznej powierzchni — jednorodny rozkład ładunku ujemnego

rozkładają się tu jednorodnie, co zaznaczono na rysunku 24.11b. Ten rozkład ładunku ujemnego jest jednorodny, ponieważ powłoka jest sferyczna. Niejednorodny rozkład ładunku dodatniego na wewnętrznej powierzchni nie może wytworzyć takiego pola elektrycznego, które mogłoby wpływać na rozkład ładunku na zewnętrznej powierzchni.

Na rysunku 24.11b przedstawiono w przybliżeniu linie pola wewnętrz i na zewnątrz powłoki. Wszystkie linie pola przecinają powłokę prostopadle. Wewnętrz powłoki rozkład linii pola jest nierównomierny wskutek niejednorodności rozkładu ładunku dodatniego. Poza powłoką rozkład pola jest taki, jakby było wytworzone przez ładunek punktowy, umieszczony w środku powłoki i jakby powłoki nie było. Jest tak niezależnie od tego, gdzie wewnętrz powłoki umieszczono ładunek punktowy.

SPRAWDZIAN 4: Kulka o ładunku $-50e$ znajduje się w środku sferycznej powłoki metalowej o ładunku wypadkowym $-100e$. Jaki jest ładunek na: a) wewnętrznej, b) zewnętrznej powierzchni powłoki?

24.7. Zastosowanie prawa Gaussa: symetria walcowa

Na rysunku 24.12 przedstawiono fragment nieskończego długiego walcowego pręta plastikowego, naładowanego jednorodnie dodatnio z gęstością liniową λ . Znajdziemy teraz wyrażenie na wartość natężenia pola elektrycznego \vec{E} w odległości r od osi pręta.

Powierzchnia Gaussa powinna w tym przypadku odpowiadać walcowej symetrii zagadnienia. Wybieramy więc powierzchnię walca o promieniu r i wysokości h , wspólnego z prętem. Powierzchnia Gaussa musi być zamknięta i dlatego włączamy do niej dwa denka.

Wyobraź sobie teraz, że gdy nie patrzyliśmy, ktoś obrócił pręt plastikowy wokół jego osi podłużnej lub go odwrócił. Jeśli spojrzymy ponownie na pręt, to nie potrafimy dostrzec tej zmiany. Wnioskujemy więc, że jedynym jednoznacznym wyróżnionym kierunkiem w tym zagadnieniu jest kierunek radialny. Dlatego w każdym punkcie powierzchni bocznej walca natężenie \vec{E} musi mieć taką samą wartość E i (dla dodatnio naładowanego pręta) musi być skierowane na zewnątrz.

Pole powierzchni bocznej walca wynosi $2\pi rh$, ponieważ długość obwodu podstawy jest równa $2\pi r$, a wysokość jest równa h . Strumień natężenia \vec{E} przez powierzchnię walca wynosi:

$$\Phi = ES \cos \theta = E \cdot 2\pi rh \cdot \cos 0 = E \cdot 2\pi rh.$$

Strumień elektryczny, przenikający przez denka jest równy zeru, ponieważ natężenie pola elektrycznego \vec{E} , skierowane radialnie, jest równoległe do powierzchni denka w każdym jego punkcie.

Rys. 24.12. Powierzchnia Gaussa w postaci zamkniętej powierzchni walcowej otacza odcinek bardzo długiego, jednorodnie naładowanego, walcowego pręta plastikowego

Ładunek objęty rozważaną powierzchnią wynosi λh i prawo Gaussa:

$$\varepsilon_0 \Phi = q_{\text{wewn}}$$

sprowadza się do postaci:

$$\varepsilon_0 E \cdot 2\pi r h = \lambda h,$$

stąd otrzymujemy:

$$E = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r} \quad (\text{naładowana linia prosta}). \quad (24.12)$$

Wzór ten określa wartość natężenia pola elektrycznego pochodzącego od nieskończonie długiej, jednorodnie naładowanej linii prostej, w punkcie znajdującym się w odległości r od linii. Natężenie \vec{E} jest skierowane radialnie od linii, jeśli ładunek jest dodatni i do linii, jeśli ładunek jest ujemny. Wzór (24.12) określa także w przybliżeniu pole naładowanej nici o skończonej długości w punktach, które nie znajdują się zbyt blisko jej końców (w porównaniu z odległością od nici).

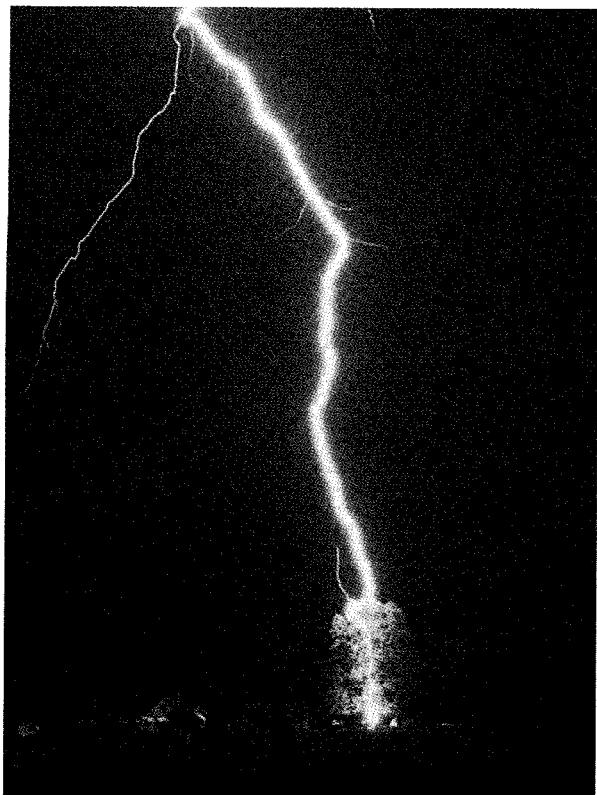
Przykład 24.5

Każda błyskawica poprzedzona jest niewidzialnym procesem, podczas którego strumień elektronów rozchodzi się w dół, od chmury do ziemi. Elektrony te pochodzą z chmury i cząsteczek powietrza, które ulegają jonizacji w obszarze strumienia. Liniowa gęstość ładunku λ wzdłuż strumienia jest zwykle równa $-1 \cdot 10^{-3} \text{ C/m}$. Gdy strumień dociera do ziemi, elektrony zaczynają szybko na nią spływać. Podczas tego przepływu zderzenia między poruszającymi się elektronami i cząsteczkami powietrza dają bardzo jasny błąsk światła (czyli samą błyskawicę). Jaki jest promień strumienia, jeśli cząsteczki powietrza ulegają jonizacji w polu elektrycznym o natężeniu większym od $3 \cdot 10^6 \text{ N/C}$?

ROZWIĄZANIE:

○ 1. Chociaż strumień nie jest ani prosty, ani nieskończonie długi, to można go przybliżyć przez naładowaną linię z rysunku 24.12. (Linia jest naładowana ujemnie, a więc natężenie \vec{E} jej pola jest skierowane radialnie do wnętrza). Zgodnie ze wzorem (24.12) wartość natężenia E maleje wraz z odległością od osi strumienia ładunku.

○ 2. Powierzchnia strumienia ładunku musi znajdować się w takiej odległości r od jej osi, w której wartość natężenia \vec{E} wynosi $3 \cdot 10^6 \text{ N/C}$, ponieważ cząsteczki powietrza wewnętrz obszaru o tym promieniu ulegają jonizacji, a znajdujące się dalej nie. Ze wzoru (24.12) wyznaczamy r i po podstawieniu znanych wielkości obliczamy promień strumienia:



Rys. 24.13. Piorun uderza w jawor o wysokości 20 m. Drzewo jest mokre, więc większość ładunku przepływa przez znajdującą się na nim wodę i drzewo pozostaje nieuszkodzone



Rys. 24.14. Prądy uziemienia od uderzenia pioruna wypaliły trawę na tym polu golfowym, odkrywając glebę

$$\begin{aligned}
 r &= \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 E} \\
 &= \frac{1 \cdot 10^{-3} \text{ C/m}}{(2\pi) \cdot (8,85 \cdot 10^{-12} \text{ C}^2/(\text{N} \cdot \text{m}^2)) \cdot (3 \cdot 10^6 \text{ N/C})} \\
 &= 6 \text{ m.} \quad (\text{odpowiedź})
 \end{aligned}$$

(Promień świecącego obszaru błyskawicy jest mniejszy, prawdopodobnie wynosi tylko 0,5 m. Szerokość tej można ocenić na podstawie rysunku 24.13). Chociaż promień strumienia wynosi tylko 6 m, to nie należy sądzić, że jesteśmy bezpieczni w większych odległościach od punktu uderzenia pioruna, bowiem elektryny spływające do ziemi rozchodzą się po jej powierzchni. Na rysunku 24.14 przedstawiono dowód istnienia takich prądów uziemienia. Prądy uziemienia są śmiertelnie groźne.

24.8. Zastosowanie prawa Gaussa: symetria płaszczyznowa

Płyta nieprzewodząca

Na rysunku 24.15 przedstawiono fragment cienkiej nieskończonej nieprzewodzącej płaskiej płyty, naładowanej jednorodnie dodatnio z gęstością powierzchniową σ . Arkusz cienkiej plastikowej folii, jednorodnie naładowany z jednej strony, może służyć jako prosty model takiej płyty. Znajdźmy natężenie pola elektrycznego \vec{E} w odległości r od płyty.

W tym zagadnieniu przydatną powierzchnią Gaussa jest przedstawiona na rysunku powierzchnia walcoła, zamknięta denkami o polu powierzchni S , przecinająca prostopadle płytę. Z symetrii zagadnienia wynika, że natężenie \vec{E} musi być prostopadłe do płyty i stąd do denek. Ponadto, ponieważ ładunek jest dodatni, to natężenie \vec{E} jest skierowane od płyty i stąd linie pola elektrycznego przecinają denka powierzchni Gaussa, wychodząc na zewnątrz. Linie pola nie przecinają powierzchni bocznej, dlatego też strumień elektryczny przez tę część powierzchni Gaussa jest równy零. Na powierzchni denek $\vec{E} \cdot d\vec{S}$ wynosi po prostu $E dS$ i prawo Gaussa:

$$\epsilon_0 \oint \vec{E} \cdot d\vec{S} = q_{\text{wewn}}$$

przyjmuje postać:

$$\epsilon_0 (ES + ES) = \sigma S,$$

gdzie σS jest ładunkiem objętym przez powierzchnię Gaussa. Mamy zatem:

$$E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \quad (\text{naładowana płaszczyzna}). \quad (24.13)$$

Rys. 24.15. Widok a) z ukosa, b) z boku fragmentu bardzo dużej, cienkiej płyty plastikowej, naładowanej jednorodnie z jednej strony z gęstością powierzchniową ładunku σ . Zamknięta walcoła powierzchnia Gaussa przenika przez płytę i jest prostopadła do niej.

Rozważamy tutaj nieskończoną płytę o jednorodnej gęstości ładunku, a więc wynik ten obowiązuje dla każdego punktu w skończonej odległości od płyty. Wzór (24.13) jest zgodny ze wzorem (23.27), który znaleźliśmy przez całkowanie składowych natężenia pola elektrycznego, wytworzonych przez poszczególne ładunki. (Warto powrócić do tego czasochłonnego i złożonego całkowania i zauważać, o ile łatwiej otrzymuje się ten wynik z prawa Gaussa. Jest to jeden z powodów poświęcenia całego rozdziału temu prawu: dla pewnych symetrycznych rozkładów ładunku łatwiej jest skorzystać z prawa Gaussa, niż całkować składowe natężenia pola).

Dwie przewodzące płyty

Na rysunku 24.16a przedstawiono przekrój cienkiej nieskończonej płyty przewodzącej, na której znajduje się nadmiar ładunku dodatniego. Z paragrafu 24.6 wiemy, że ten nadmiarowy ładunek znajduje się tylko na powierzchni płyty. Płyta jest bardzo cienka i bardzo duża, a więc możemy założyć, że cały nadmiarowy ładunek umieszczony jest w zasadzie na dwóch dużych ścianach płyty.

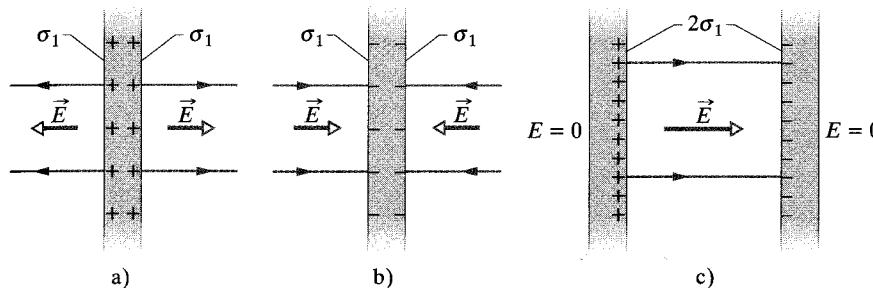
Jeśli nie ma zewnętrznego pola elektrycznego, które mogłoby spowodować szczególny rozkład ładunku, to ładunek rozłoży się na dwóch płaszczyznach, z jednorodną gęstością powierzchniową σ_1 . Ze wzoru (24.11) wiemy, że poza płytą taki ładunek wytwarza pole elektryczne o natężeniu równym $E = \sigma_1/\epsilon_0$. Nadmiarowy ładunek jest dodatni, a więc natężenie pola jest skierowane od płyty.

Na rysunku 24.16b przedstawiono identyczną płytę z nadmiarowym ładunkiem ujemnym, o takiej samej wartości gęstości powierzchniowej ładunku σ_1 . Wytworzone pole różni się jedynie tym, że jego natężenie jest teraz skierowane do płyty.

Założymy, że ustawiliśmy płyty z rysunku 24.16a i b blisko siebie i równolegle (rys. 24.16c). Płyty są przewodnikami, dlatego też po takim ich ustawnieniu ładunek nadmiarowy na jednej płycie przyciąga ładunek nadmiarowy na drugiej i cały nadmiarowy ładunek przesunie się na wewnętrzne powierzchnie płyt, jak pokazano na rysunku 24.16c. Przy dwukrotnie większym ładunku nowa gęstość powierzchniowa ładunku σ na każdej wewnętrznej powierzchni jest równa $2\sigma_1$. Stąd natężenie pola elektrycznego w dowolnym punkcie między płytami ma wartość:

$$E = \frac{2\sigma_1}{\epsilon_0} = \frac{\sigma}{\epsilon_0}. \quad (24.14)$$

Natężenie pola elektrycznego jest skierowane od płyty naładowanej dodatnio do płyty naładowanej ujemnie. Na zewnętrznych powierzchniach nie pozostał żaden nadmiarowy ładunek, więc natężenie na lewo i na prawo od płyt jest równe zeru.



Rys. 24.16. a) Cienka, bardzo duża płytka przewodząca z nadmiarowym ładunkiem dodatnim. b) Identyczna płytka z nadmiarowym ładunkiem ujemnym. c) Obie płyty ustawione równolegle i blisko siebie

Ładunki na płytach przesunęły się, gdy zbliżaliśmy płyty do siebie, a więc rysunek 24.16c nie jest złożeniem rysunków 24.16a i b: rozkład ładunku dla układu dwóch płyt nie jest sumą rozkładów ładunku dla pojedynczych płyt.

Może cię zastanawiać, dlaczego omawiamy szczegółowo tak nierealistyczne zagadnienia, jak pole wytworzone przez nieskończoną naładowaną linię, nieskończoną naładowaną płytę lub parę nieskończonych naładowanych płyt. Jednym z powodów jest to, że analiza takich sytuacji przy zastosowaniu prawa Gaussa jest łatwa. Ważniejszym powodem jest to, że analizy dla „nieskończonych” sytuacji stanowią dobre przybliżenie wielu zagadnień rzeczywistego świata. Wzór (24.13) opisuje więc dobrze pole dla skończonej nieprzewodzącej płyty, jeśli rozważamy punkty znajdujące się blisko niej i niezbyt blisko jej krawędzi. Wzór (24.14) obowiązuje dla pary skończonych przewodzących płyt, znajdujących się w niewielkiej odległości od siebie, jeśli rozważamy punkty niezbyt bliskie krawędzi płyt.

Nie zajmujemy się krawędziami płyt, ponieważ blisko krawędzi nie możemy już korzystać z symetrii płaszczyznowej, aby znaleźć wyrażenia dla natężeń pól. Linie pola są tu w rzeczywistości zakrzywione (mówimy zwykle o *zjawisku krawędziowym* lub *brzegowym*) i może być bardzo trudno podać wzory opisujące natężenia pól.

Przykład 24.6

Na rysunku 24.17a przedstawiono fragmenty dwóch dużych równoległych nieprzewodzących płyt, z których każda jest jednorodnie naładowana z jednej strony. Wartości gęstości powierzchniowej ładunku są równe $\sigma_{(+)} = 6,8 \mu\text{C/m}^2$ dla płyty naładowanej dodatnio i $\sigma_{(-)} = 4,3 \mu\text{C/m}^2$ dla płyty naładowanej ujemnie. Oblicz natężenie pola elektrycznego \vec{E} : a) na lewo od płyt, b) między płytami, c) na prawo od płyt.

ROZWIĄZANIE:

Przy danych ładunkach pole elektryczne płyt na rysunku 24.17a można znaleźć przez: a) znalezienie natężenia pola, pochodzącego od każdej płyty, jak gdyby tej drugiej nie było, b) algebraiczne dodanie natężeń pól tych płyt, przez zastosowanie zasady superpozycji. (Natężenia te możemy dodać algebraicznie, ponieważ są one równoległe do siebie). Zastosowanie wzoru (24.13) daje wartość $E_{(+)}$ natężenia pola elektrycznego dodatniej płyty w dowolnym punkcie przestrzeni

$$E_{(+)} = \frac{\sigma_{(+)}}{2\epsilon_0} = \frac{6,8 \cdot 10^{-6} \text{ C/m}^2}{(2)(8,85 \cdot 10^{-12} \text{ C}^2/(\text{N} \cdot \text{m}^2))} = 3,84 \cdot 10^5 \text{ N/C.}$$

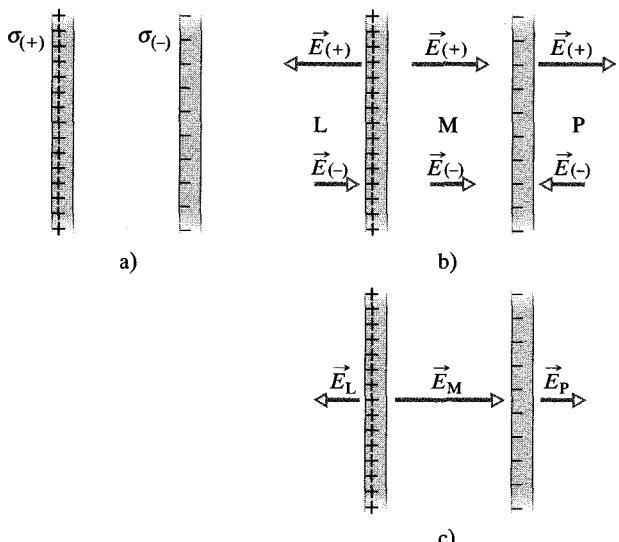
Podobnie wartość $E_{(-)}$ natężenia pola elektrycznego płyty ujemnej w dowolnym punkcie wynosi:

$$E_{(-)} = \frac{\sigma_{(-)}}{2\epsilon_0} = \frac{4,3 \cdot 10^{-6} \text{ C/m}^2}{(2)(8,85 \cdot 10^{-12} \text{ C}^2/(\text{N} \cdot \text{m}^2))} = 2,43 \cdot 10^5 \text{ N/C.}$$

Na rysunku 24.17b przedstawiono natężenia pól, wytworzonych przez płyty na lewo od płyt (L), między nimi (M) i na prawo od nich (P).

Wypadkowe natężenia pola w tych trzech obszarach wynikają z zasady superpozycji. Na lewo wartość natężenia wynosi:

$$E_L = E_{(+)} - E_{(-)} = 3,84 \cdot 10^5 \text{ N/C} - 2,43 \cdot 10^5 \text{ N/C} = 1,4 \cdot 10^5 \text{ N/C.} \quad (\text{odpowiedź})$$



Rys. 24.17. Przykład 24.6. a) Dwie duże równoległe płyty, jednorodnie naładowane z jednej strony. b) Natężenia pól elektrycznych wytworzonych przez każdą z płyt z osobna. c) Wypadkowe natężenie pola od obydwu naładowanych płyt, obliczone w wyniku zastosowania zasady superpozycji

Ponieważ $E_{(+)}$ jest większe od $E_{(-)}$, więc wypadkowe natężenie pola \vec{E}_L w tym obszarze jest skierowane w lewo, jak przedstawiono na rysunku 24.17c. Na prawo od płyt natężenie pola \vec{E}_P ma taką samą wartość, ale jest skierowane w prawo (rys. 24.17c).

Między płytami natężenia dwóch pól dodają się i mamy:

$$E_M = E_{(+)} + E_{(-)} = 3,84 \cdot 10^5 \text{ N/C} + 2,43 \cdot 10^5 \text{ N/C} \\ = 6,3 \cdot 10^5 \text{ N/C.}$$

(odpowiedź)

Natężenie pola \vec{E}_M jest skierowane w prawo.

24.9. Zastosowanie prawa Gaussa: symetria sferyczna

Zastosujemy teraz prawo Gaussa do udowodnienia dwóch twierdzeń o powłoce, przedstawionych bez dowodu w paragrafie 22.4:

- Powłoka sferyczna naładowana jednorodnie przyciąga lub odpiera cząstkę naładowaną, znajdująca się na zewnątrz powłoki tak, jakby cały ładunek powłoki był skupiony w środku powłoki.
- Powłoka sferyczna naładowana jednorodnie nie działa siłę elektrostatyczną na cząstkę naładowaną znajdującą się wewnątrz powłoki.

Na rysunku 24.18 przedstawiono naładowaną powłokę sferyczną o całkowitym ładunku q i promieniu R oraz dwie współśrodkowe sferyczne powierzchnie Gaussa S_1 i S_2 . Postępując według procedury opisanej w paragrafie 24.5 przy stosowaniu prawa Gaussa do powierzchni S_2 , dla której $r \geq R$, otrzymujemy:

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \quad (\text{powłoka sferyczna, pole dla } r \geq R). \quad (24.15)$$

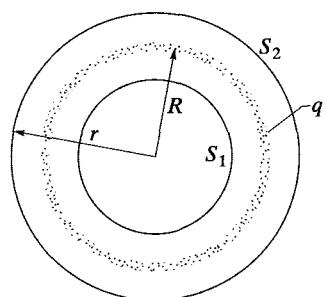
Jest to takie samo natężenie pola, jakie wytworzyłyby ładunek punktowy q , umieszczony w środku naładowanej powłoki. Stąd powłoka o ładunku q oddziałuje taką samą siłą na naładowaną cząstkę na zewnątrz powłoki, jak ładunek punktowy q , umieszczony w środku powłoki. Jest to dowód pierwszego twierdzenia o powłoce.

Stosując prawo Gaussa do powierzchni S_1 , dla której $r < R$, otrzymujemy:

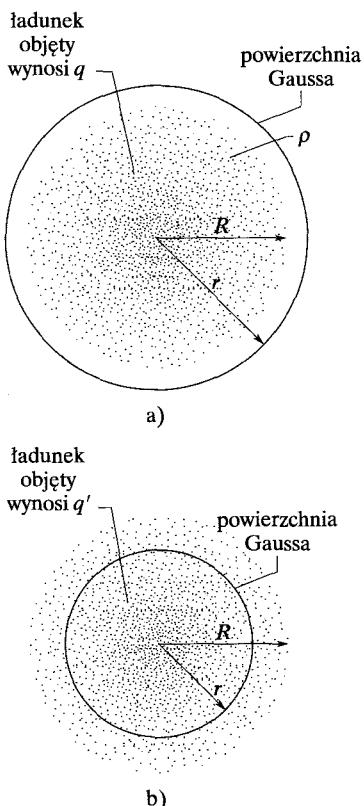
$$E = 0 \quad (\text{powłoka sferyczna, pole dla } r < R), \quad (24.16)$$

ponieważ powierzchnia Gaussa nie obejmuje żadnego ładunku. Jeśli więc cząstka naładowana znajdowałaby się wewnątrz powłoki, to powłoka nie działałaby na nią żadną wypadkową siłę. Jest to dowód drugiego twierdzenia o powłoce.

Dowolny sferycznie symetryczny rozkład ładunku, taki jak na rysunku 24.19 można utworzyć przez złożenie współśrodkowych powłok sferycznych. Aby można było zastosować dwa twierdzenia o powłoce, gęstość objętościowa ładunku ρ powinna mieć określzoną wartość dla każdej powłoki, ale wartości te nie muszą być takie same dla wszystkich powłok. Stąd dla sferycznie symetrycznego rozkładu ładunku gęstość ρ może zależeć tylko od odległości r od środka. Możemy



Rys. 24.18. Przekrój cienkiej, jednorodnie naładowanej powłoki sferycznej o całkowitym ładunku q . Widać także przekrój dwóch powierzchni Gaussa S_1 i S_2 . Powierzchnia S_2 obejmuje powłokę, a S_1 tylko puste wnętrze powłoki



Rys. 24.19. Kropki oznaczają sferycznie symetryczny rozkład ładunku o promieniu R , dla którego gęstość objętościowa ładunku ρ jest funkcją tylko odległości od środka. Naładowane ciało nie jest przewodnikiem. Zakładamy, że ładunki mają ustalone położenie. Przedstawiono także współśrodkową sferyczną powierzchnię Gaussa o $r > R$ (a) i podobną powierzchnię Gaussa o $r < R$ (b)

wtedy sumować „powłoka po powłoce” wkłady do pola, wytworzonego przez symetryczny rozkładu ładunku.

Na rysunku 24.19a cały ładunek znajduje się wewnętrz powierzchni Gaussa dla $r > R$. Natężenie pola elektrycznego, wytworzonego przez ładunek na tej powierzchni Gaussa jest takie, jakby ładunek był ładunkiem punktowym, znajdującym się w środku i wobec tego obowiązuje wzór (24.15). Na rysunku 24.19b przedstawiono powierzchnię Gaussa dla $r < R$. Aby znaleźć natężenie pola elektrycznego w punktach na powierzchni Gaussa, rozważmy dwa układy naładowanych powłok: jeden układ zawierający powłoki wewnętrz powierzchni Gaussa i drugi — na zewnątrz. Ze wzoru (24.16) wynika, że ładunek znajdujący się na zewnątrz powierzchni Gaussa zerowe wypadkowe natężenie pola elektrycznego na powierzchni Gaussa. Natomiast ze wzoru (24.15) wynika, że ładunek *objęty* przez powierzchnię Gaussa tworzy takie natężenie pola elektrycznego, jak gdyby objęty ładunek był skupiony w środku. Jeśli q' oznacza obejmowany ładunek, to wzór (24.15) możemy napisać w postaci:

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q'}{r^2} \quad (\text{rozkład sferyczny, pole dla } r \leq R). \quad (24.17)$$

Jeśli cały ładunek q zamknięty wewnętrz sfery o promieniu R jest rozłożony jednorodnie, to ładunek q' wewnętrz sfery o promieniu r na rysunku 24.19b jest proporcjonalny do q :

$$\frac{\text{lądunek wewnętrz sfery o promieniu } r}{\text{objętość wewnętrz sfery o promieniu } r} = \frac{\text{cały lądunek}}{\text{cała objętość}},$$

czyli:

$$\frac{q'}{\frac{4}{3}\pi r^3} = \frac{q}{\frac{4}{3}\pi R^3}. \quad (24.18)$$

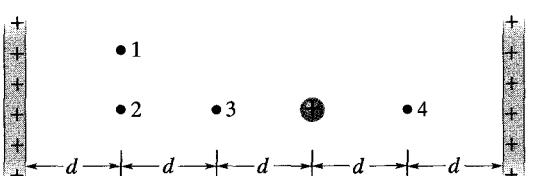
Otrzymujemy stąd:

$$q' = q \frac{r^3}{R^3} \quad (24.19)$$

i po podstawieniu do wzoru (24.17) otrzymujemy:

$$E = \left(\frac{q}{4\pi\epsilon_0 R^3} \right) r \quad (\text{jednorodny rozkład sferyczny, pole dla } r \leq R). \quad (24.20)$$

SPRAWDZIAN 5: Na rysunku przedstawiono dwie duże równoległe nieprzewodzące płyty, naładowane jednorodnie, z identycznymi (dodatnimi) gęstościami powierzchniowymi i kulę naładowaną jednorodnie, z (dodatnią) gęstością objętościową. Uszereguj wartości natężenia wypadkowego pola elektrycznego w czterech ponumerowanych punktach, zaczynając od największej.



Podsumowanie

Prawo Gaussa Prawo Gaussa i prawo Coulomba, chociaż mają różne postaci, są równoważnymi sposobami opisu związku między ładunkiem i natężeniem pola elektrycznego w sytuacjach statycznych. Prawo Gaussa ma postać:

$$\epsilon_0 \Phi = q_{\text{wewn}} \quad (\text{prawo Gaussa}), \quad (24.6)$$

gdzie q_{wewn} jest wypadkowym ładunkiem wewnętrz zamkniętej powierzchni (**powierzchni Gaussa**), a Φ jest wypadkowym **strumieniem** natężenia pola elektrycznego przez tę powierzchnię:

$$\Phi = \oint \vec{E} d\vec{S} \quad (\text{strumień elektryczny przez powierzchnię Gaussa}) \quad (24.4)$$

Prawo Coulomba można łatwo wyprowadzić z prawa Gaussa.

Zastosowanie prawa Gaussa Dla symetrycznych rozkładów ładunku, korzystając z prawa Gaussa, możemy wyprowadzić wiele ważnych związków elektrostatycznych. Oto niektóre z nich:

1. Ładunek nadmiarowy na *przewodniku* znajduje się tylko na zewnętrznej jego powierzchni.
2. Natężenie pola elektrycznego przy zewnętrznej *powierzchni naładowanego przewodnika* jest prostopadłe do tej powierzchni i ma wartość:

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \quad (\text{powierzchnia przewodnika}). \quad (24.11)$$

Wewnętrz przewodnika mamy $E = 0$.

3. Natężenie pola elektrycznego nieskończonej linii *naładowanej* z gęstością liniową ładunku λ jest w dowolnym punkcie

prostopadłe do naładowanej linii i ma wartość:

$$E = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r} \quad (\text{naładowana linia}), \quad (24.12)$$

gdzie r jest odległością punktu od naładowanej linii.

4. Natężenie pola elektrycznego *nieskończonej nieprzewodzącej płyty*, naładowanej jednorodnie z gęstością powierzchniową ładunku σ jest prostopadłe do płaszczyzny płyty i wynosi:

$$E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \quad (\text{naładowana płaszczyzna}). \quad (24.13)$$

5. Natężenie pola elektrycznego *na zewnątrz sferycznej jednorodnie naładowanej powłoki* o promieniu R i całkowitym ładunku q jest skierowane radialnie i ma wartość:

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \quad (\text{powłoka sferyczna, dla } r \geq R), \quad (24.15)$$

gdzie r jest odlegością od środka powłoki do punktu, w którym wartość E jest wyznaczana. (Dla punktów na zewnątrz powłoki ładunek zachowuje się tak, jakby był skupiony w środku sfery). Natężenie pola *wewnątrz sferycznej powłoki naładowanej jednorodnie* jest równe zero:

$$E = 0 \quad (\text{powłoka sferyczna, dla } r < R). \quad (24.16)$$

6. Natężenie pola elektrycznego *wewnątrz jednorodnie naładowanej kuli* jest skierowane radialnie i ma wartość:

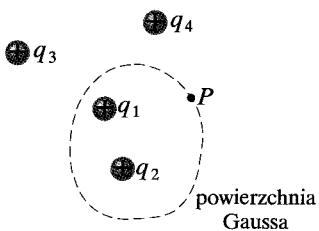
$$E = \left(\frac{q}{4\pi\epsilon_0 R^3} \right) r. \quad (24.20)$$

Pytania

1. Wektor powierzchni jest równy: $\vec{S} = (2\hat{i} + 3\hat{j}) \text{ m}^2$. Oblicz strumień elektryczny, przenikający przez tę powierzchnię, jeśli natężenie pola wynosi: a) $\vec{E} = 4\hat{i} \text{ N/C}$, b) $\vec{E} = 4\hat{k} \text{ N/C}$.

2. Ile wynosi $\int dS$ dla: a) kwadratu o boku a , b) koła o promieniu r , c) powierzchni bocznej walca o wysokości h i promieniu r ?

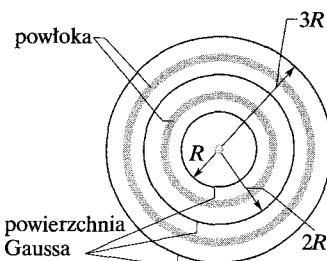
3. Na rysunku 34.20 zamknięta powierzchnia Gaussa obejmuje dwie z czterech dodatnio naładowanych części. a) Które z części dają wkład do natężenia pola elektrycznego w punkcie P na



Rys. 24.20. Pytanie 3

powierzchni? b) Który wypadkowy strumień natężenia pola elektrycznego przez powierzchnię jest większy: ten wywołany ładunkami q_1 i q_2 , czy ten wywołany wszystkimi czterema ładunkami?

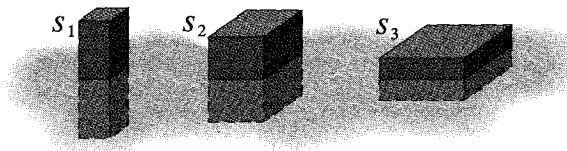
4. Na rysunku 24.21 przedstawiono w przekroju kulę metalową, dwie sferyczne powłoki metalowe i trzy sferyczne powierzchnie Gaussa o promieniach R , $2R$ i $3R$ — wszystkie mają wspólny środek. Jednorodnie rozłożone ładunki trzech ciel metalowych wynoszą: Q dla kulki, $3Q$ dla mniejszej powłoki i $5Q$ dla większej



Rys. 24.21. Pytanie 4

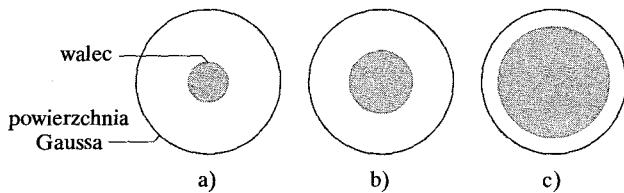
powłoki. Uszereguj powierzchnie Gaussa według wartości natężenia pola elektrycznego w dowolnym punkcie na powierzchni, zaczynając od wartości największej.

5. Na rysunku 24.22 przedstawiono trzy powierzchnie Gaussa, z których każda jest do połowy zagębiona w dużej, grubej, metalowej płycie, jednorodnie naładowanej powierzchniowo. Powierzchnia S_1 jest najwyższa i ma najmniejsze kwadratowe denka, powierzchnia S_3 jest najniższa i ma największe kwadratowe denka, a powierzchnia S_2 ma pośrednie wymiary. Uszereguj powierzchnie według: a) obejmowanego przez nie ładunku, b) wartości natężenia pola w punktach na ich górnych denkach, c) wypadkowego strumienia elektrycznego przez górną denkę, d) wypadkowego strumienia elektrycznego przez dolną denkę, zaczynając od wartości największej.



Rys. 24.22. Pytanie 5

6. Na rysunku 24.23 przedstawiono w przekroju trzy walce, każdy naładowany jednorodnie ładunkiem Q . Każdy z nich otoczony jest wspólną walcową powierzchnią Gaussa. Wszystkie te powierzchnie mają takie same promienie. Uszereguj powierzchnie Gaussa według wartości natężenia pola elektrycznego w dowolnym punkcie powierzchni, zaczynając od wartości największej.



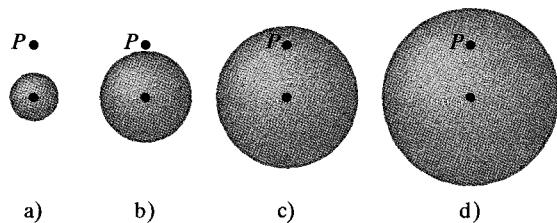
Rys. 24.23. Pytanie 6

7. Trzy nieskończoności nieprzewodzące płyty naładowane jednorodnie z gęstościami powierzchniowymi σ , 2σ i 3σ są ustawione równolegle, podobnie jak dwie płyty na rysunku 24.17a. W jakiej kolejności są one ustawione, od lewej do prawej, jeśli natężenie pola elektrycznego \vec{E} , wytworzonego przez ten układ, ma wartość $E = 0$ w jednym obszarze i $E = 2\sigma/\epsilon_0$ w drugim obszarze między nimi?

8. Mała naładowana kulka znajduje się wewnątrz metalowej sferycznej powłoki o promieniu R . Wypadkowe ładunki na kulce i powłoce wynoszą dla trzech sytuacji: 1) $+4q$, 0 ; 2) $-6q$, $+10q$; 3) $+16q$, $-12q$. Uszereguj te sytuacje według ładunku na: a) wewnętrznej powierzchni powłoki, b) zewnętrznej powierzchni powłoki, zaczynając od największego dodatniego ładunku.

9. Uszereguj sytuacje z pytania 8 według wartości natężenia pola elektrycznego: a) w połowie grubości powłoki, b) w punkcie odległym o $2R$ od środka powłoki, zaczynając od wartości największej.

10. Na rysunku 24.24 przedstawiono cztery kule, naładowane jednorodnie objętościowo ładunkiem Q każda. a) Uszereguj kule według ich gęstości objętościowej ładunku, zaczynając od największej. Na rysunku zaznaczono także punkt P dla każdej kuli, zawsze w tej samej odległości od jej środka. b) Uszereguj kule według wartości natężenia pola elektrycznego, wytwarzanego w punkcie P , zaczynając od największej.



Rys. 24.24. Pytanie 10

Zadania

- www Rozwiążanie jest dostępne na stronie internetowej podręcznika: <http://www.wiley.com/college/hrw>
- ilw Rozwiążanie jest dostępne w postaci interaktywnej, wykorzystującej oprogramowanie Interactive Learning Ware (na tej samej stronie)

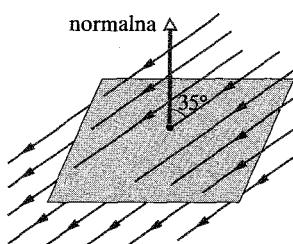
24.2. Strumień

1. Woda w rowie melioracyjnym o szerokości $w = 3,22$ m i głębokości $d = 1,04$ m płynie z prędkością $0,207$ m/s. Strumień masy

wody przez powierzchnię jest iloczynem gęstości wody (1000 kg/m^3) i jej strumienia objętości przez tę powierzchnię. Oblicz strumień masy przez następujące powierzchnie: a) powierzchnię o polu wd , zanurzoną całkowicie w wodzie i prostopadłą do kierunku przepływu, b) powierzchnię o polu $3wd/2$, z którego część wd jest w wodzie, prostopadłą do kierunku przepływu, c) powierzchnię o polu $wd/2$, całkowicie zanurzoną w wodzie, prostopadłą do kierunku przepływu, d) powierzchnię o polu wd , w połowie w wodzie i w połowie nad wodą, prostopadłą do kierunku przepływu, e) powierzchnię o polu wd , całkowicie zanurzoną w wodzie, o normalnej tworzącej kąt 34° z kierunkiem przepływu.

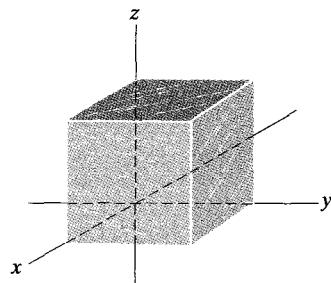
24.3. Strumień pola elektrycznego

2. Długość boku kwadratu przedstawionego na rysunku 24.25 wynosi 3,2 mm. Kwadrat znajduje się w jednorodnym polu elektrycznym o natężeniu $E = 1800 \text{ N/C}$. Linie pola tworzą kąt 35° z normalną do powierzchni kwadratu, jak przedstawiono na rysunku. Przyjmując, że ta normalna jest skierowana „na zewnątrz”, tak jakby powierzchnia stanowiła jedną ścianę pudełka, oblicz strumień elektryczny przez tę powierzchnię.



Rys. 24.25. Zadanie 2

3. Długość krawędzi sześcianu na rysunku 24.26 wynosi 1,40 m. Sześcian znajduje się w obszarze jednorodnego pola elektrycznego i jest ustawiony jak na rysunku. Znajdź strumień elektryczny, przenikający przez prawą ścianę, jeśli natężenie pola elektrycznego w niutonach na kolumn (N/C) wynosi: a) $6\hat{i}$, b) $-2\hat{j}$, c) $-3\hat{i} + 4\hat{k}$. d) Jaki jest całkowity strumień elektryczny przez powierzchnię sześcianu dla każdego z tych pól?



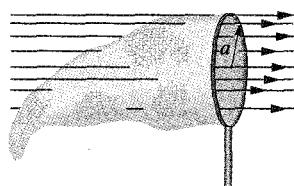
Rys. 24.26. Zadania 3, 7 i 10

24.4. Prawo Gaussa

4. Mamy cztery ładunki punktowe $2q$, q , $-q$ i $-2q$. Jeśli to możliwe opisz, jak powinna być umieszczona zamknięta powierzchnia, otaczająca przynajmniej ładunek $2q$ (i ewentualnie inne ładunki), aby wypadkowy strumień elektryczny przez tę powierzchnię wynosił: a) 0, b) $3q/\epsilon_0$, c) $-2q/\epsilon_0$.

5. Ładunek punktowy o wartości $1,8 \mu\text{C}$ znajduje się w środku sześcienniej powierzchni Gaussa. Jaki jest wypadkowy strumień elektryczny przez tę powierzchnię, jeśli długość krawędzi sześcianu wynosi 55 cm?

6. Na rysunku 24.27 siatka na motyle znajduje się w obszarze jednorodnego pola elektrycznego o natężeniu E . Obręcz w postaci okręgu o promieniu a jest ustawiona prostopadle do kierunku natężenia pola. Oblicz strumień elektryczny przenikający przez siatkę.



Rys. 24.27. Zadanie 6

7. Oblicz wypadkowy strumień elektryczny przez powierzchnię sześcianu z zadania 3 i rysunku 24.26, jeśli natężenie pola elektrycznego wynosi: a) $\vec{E} = 3y\hat{j}$, b) $\vec{E} = -4\hat{i} + (6+3y)\hat{j}$. Natężenie pola podane jest w niutonach na kolumn (N/C), a y w metrach (m). c) Jaki ładunek znajduje się wewnątrz sześcianu w obydwu przypadkach?

8. Jeśli włączymy natrysk w zamkniętej łazience, to woda rozpryskująca się na wannie może wypełnić powietrze ujemnie naładowanymi jonami i wytworzyć w powietrzu pole elektryczne o natężeniu do 1000 N/C . Wyobraź sobie łazienkę o wymiarach $2,5 \text{ m} \times 3 \text{ m} \times 2 \text{ m}$. Przyjmij, że przy suficie, podłodze i czterech ścianach natężenie pola elektrycznego jest stałe, skierowane prostopadle do powierzchni i ma wartość 600 N/C . Przyjmij, że te powierzchnie tworzą zamkniętą powierzchnię Gaussa. Jaka jest: a) objętościowa gęstość ładunku ρ , b) liczba nadmiarowych ładunków elementarnych e na metr sześcienny w powietrzu w łazience?

9. Stwierdzono doświadczalnie, że natężenie pola elektrycznego w pewnym obszarze atmosfery ziemskiej jest skierowane pionowo w dół. Na wysokości 300 m natężenie pola ma wartość 60 N/C , a na wysokości 200 m — wartość 100 N/C . Znajdź wypadkowy ładunek w sześcianie, którego długość krawędzi wynosi 100 m, a ściany poziome umieszczone na wysokości 200 i 300 m. Zanieśdź krzywiznę Ziemi.

10. W każdym punkcie na powierzchni sześcianu z rysunku 24.26 natężenie pola elektrycznego jest skierowane w dodatnim kierunku osi z . Długość krawędzi sześcianu wynosi 3 m. Na górnej ścianie sześcianu $\vec{E} = -34\hat{k} \text{ N/C}$, a na dolnej ścianie sześcianu $\vec{E} = +20\hat{k} \text{ N/C}$. Określ wypadkowy ładunek zawarty w sześcianie.

11. Ładunek punktowy q znajduje się w jednym z wierzchołków sześcianu o krawędzi a . Jaki strumień elektryczny przenika przez każdą ze ścian sześcianu? (Wskazówka: Zastosuj prawo Gaussa i właściwości symetrii).

24.6. Izolowany przewodnik naładowany

12. Natężenie pola elektrycznego tuż nad powierzchnią naładowanego bębna fotokopiarki ma wartość $E = 2,3 \cdot 10^5 \text{ N/C}$. Jaka jest gęstość powierzchniowa ładunku na bębnie? Załóż, że bęben jest przewodnikiem.

13. Jednorodnie naładowana przewodząca kula o średnicy 1,2 m ma gęstość powierzchniową ładunku $8,1 \mu\text{C/m}^2$. a) Znajdź wypadkowy ładunek na kuli. b) Jaki jest całkowity strumień elektryczny przez powierzchnię kuli?

14. Pojazdy kosmiczne przelatujące przez ziemskie pasy promieniowania mogą zbierać dużą liczbę elektronów. Powstały ładunek może uszkodzić elementy elektroniczne i uniemożliwić ich działanie. Załóżmy, że sferyczny metalowy satelita o średnicy 1,3 m zgromadził ładunek $2,4 \mu\text{C}$ w czasie jednego obiegu orbity. a) Znajdź powstałą gęstość powierzchniową ładunku. b) Oblicz wartość natężenia pola elektrycznego (wytworzonego przez ten ładunek powierzchniowy) tuż na zewnątrz satelity.

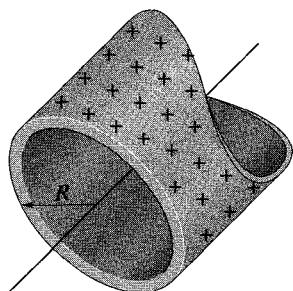
15. Izolowany przewodnik o dowolnym kształcie ma ładunek wypadkowy $+10 \cdot 10^{-6}$ C. Wewnątrz przewodnika jest wnęka, w której znajduje się ładunek punktowy $q = +3 \cdot 10^{-6}$ C. Jaki jest ładunek: a) na powierzchni wnęki, b) na zewnętrznej powierzchni przewodnika?

24.7. Zastosowanie prawa Gaussa: symetria walcowa

16. a) Bęben fotokopiarki z zadania 12 ma długość 42 cm i średnicę 12 cm. Oblicz całkowity ładunek znajdujący się na bębnie.
b) Wytwórca chce wyprodukować stołową wersję tej fotokopiarki, co wymaga zmniejszenia rozmiarów bębna do długości 28 cm i średnicy 8 cm. Natężenie pola elektrycznego przy powierzchni bębna nie może ulec zmianie. Jaki musi być ładunek na mniejszym bębnie?

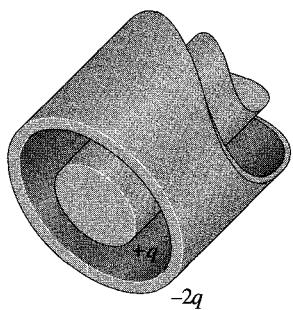
17. Nieskończona naładowana linia prosta wytwarza pole elektryczne o natężeniu $4,5 \cdot 10^4$ N/C, w odległości 2 m. Oblicz liniową gęstość ładunku.

18. Na rysunku 24.28 przedstawiono przekrój długiej metalowej rury o promieniu R i cienkich ściankach, naładowanej powierzchniowo ładunkiem λ , przypadającym na jednostkę długości rury. Wyprowadź wzór na natężenie pola E jako funkcji odległości r od osi rury, rozważając zarówno: a) $r > R$, jak i b) $r < R$. Wykreśl tę zależność dla zakresu od $r = 0$ do $r = 5$ cm zakładając, że $\lambda = 2 \cdot 10^{-8}$ C/m i $R = 3$ cm. (Wskazówka: Zastosuj walcowe powierzchnie Gaussa, współosiowe z metalową rurą).



Rys. 24.28. Zadanie 18

19. Bardzo długi walcowy pręt przewodzący o długości L i całkowitym ładunku $+q$ jest otoczony przewodzącą walcową powłoką (także o długości L), o całkowitym ładunku $-2q$ (rys. 24.29). Korzystając z prawa Gaussa, znajdź: a) natężenie pola elektrycznego w punktach, leżących na zewnątrz przewodzącej powłoki, b) rozkład ładunku na powłoce, c) natężenie pola elektrycznego w obszarze między powłoką i prętem.



Rys. 24.29. Zadanie 19

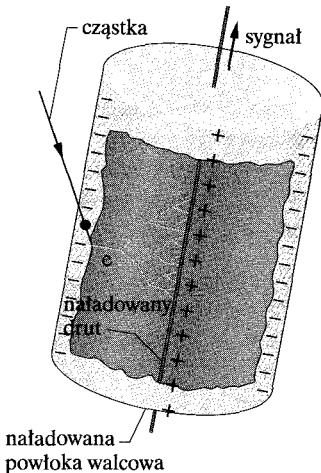
20. Długi prosty drut jest naładowany ujemnie z liniową gęstością ładunku $3,6 \text{ nC/m}$. Drut ma zostać otoczony cienką nieprzewodzącą powłoką walcową, współosiową z drutem, o zewnętrznym

promieniu 1,5 cm. Powłoka ma mieć dodatni ładunek na swej zewnętrznej powierzchni, rozłożony z taką gęstością powierzchniową σ , aby natężenie wypadkowego pola elektrycznego na zewnątrz powłoki było równe零. Oblicz gęstość σ .

21. Dwie naładowane długie współosiowe powierzchnie walcowe mają promienie 3 i 6 cm. Ładunek na jednostkę długości wynosi $5 \cdot 10^{-6}$ C/m na wewnętrznym walcu i $-7 \cdot 10^{-6}$ C/m na zewnętrznym walcu. Znajdź natężenie pola elektrycznego dla radialnej odległości od wspólnej osi: a) $r = 4$ cm, b) $r = 8$ cm.

22. Długi nieprzewodzący walec o promieniu 4 cm jest naładowany niejednorodnie, z objętościową gęstością ładunku ρ , która jest funkcją odległości radialnej r od osi walca, określoną wzorem $\rho = Ar^2$, gdzie $A = 2,5 \mu\text{C}/\text{m}^5$. Jaka jest wartość natężenia pola elektrycznego w odległości: a) 3 cm, b) 5 cm od osi walca?

23. Na rysunku 24.30 przedstawiono licznik Geigera–Müllera, czyli przyrząd używany do wykrywania promieniowania jonizującego (promieniowania powodującego jonizację atomów). Licznik składa się z cienkiego, dodatnio naładowanego drutu, otoczonego przez współosiową przewodzącą powłokę walcową, naładowaną takim samym co do wartości bezwzględnej ładunkiem ujemnym. Wewnątrz walca powstaje więc silne radialne pole elektryczne. Walec zawiera gaz szlachetny pod niskim ciśnieniem. Gdy cząstka promieniowania wpada przez walcową ściankę do licznika, jonizuje kilka atomów gazu. Powstałe elektrony swobodne (oznaczone przez e) są przyciągane do dodatnio naładowanego drutu. Pole elektryczne jest jednak na tyle silne, że między zderzeniami z innymi atomami gazu swobodne elektrony uzyskują energię, wystarczającą do zjonizowania tych atomów. Powstaje więc więcej elektronów swobodnych i proces się powtarza, aż elektrony dotrą do drutu. Powstała „lawina” elektronów jest zbierana przez drut, wytwarzając sygnał, który jest używany do zarejestrowania przejścia wywołującej ją cząstki promieniowania. Przyjmując, że promień drutu wynosi $25 \mu\text{m}$, promień powłoki walcowej $1,4 \text{ cm}$, długość rury 16 cm i natężenie pola elektrycznego przy wewnętrznej ścianie powłoki $2,9 \cdot 10^4 \text{ N/C}$, oblicz całkowity ładunek dodatni w drucie.



Rys. 24.30. Zadanie 23

24. Długi, cienki, nieprzewodzący pręt jest naładowany jednorodnie z gęstością liniową 2 nC/m . Pręt jest otoczony współosiową długą, przewodzącą powłoką walcową (o wewnętrznym promieniu 5 cm i zewnętrznym promieniu 10 cm). Wypadkowy ładunek na przewodniku wynosi zero. a) Jaka jest wartość natężenia

polu elektrycznego w odległości 15 cm od osi pręta? Jaka jest powierzchniowa gęstość ładunku na: a) wewnętrznej, c) zewnętrznej powierzchni przewodnika?

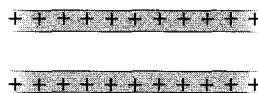
25. Nieskończony długi walec o promieniu R jest naładowany jednorodnie objętościowo. a) Wykaż, że w odległości r od osi walca (dla $r < R$) mamy:

$$E = \frac{\rho r}{2\epsilon_0},$$

gdzie ρ jest objętościową gęstością ładunku. b) Wyprowadź wyrażenie dla E , gdy $r > R$.

24.8. Zastosowanie prawa Gaussa: symetria płaszczyznowa

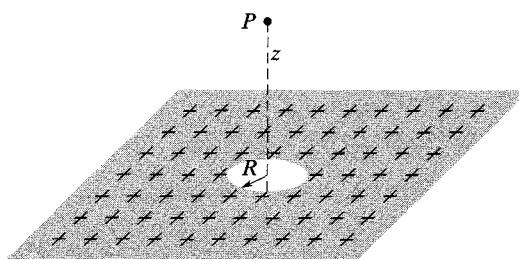
26. Na rysunku 24.31 przedstawiono przekroje przez dwie duże, równoległe, nieprzewodzące płyty z identycznymi rozkładami dodatniego ładunku, z gęstością powierzchniową σ . Jakie jest natężenie pola \vec{E} w punktach: a) nad płytami, b) między nimi, c) poniżej nich?



Rys. 24.31. Zadanie 26

27. Kwadratowa płyta metalowa o boku 8 cm i zaniedbywalnej grubości ma całkowity ładunek $6 \cdot 10^{-6}$ C. a) Oszacuj wartość E natężenia pola elektrycznego tuż nad środkiem płyty (powiedzmy w odległości 0,5 mm) zakładając, że ładunek jest rozłożony jednorodnie na obydwu powierzchniach płyty. b) Oszacuj wartość natężenia pola E w odległości 30 m (dużej w stosunku do rozmiarów płyty) przyjmując, że płyta jest ładunkiem punktowym.

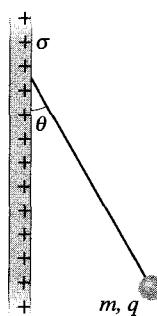
28. Duża, płaska, nieprzewodząca powierzchnia jest naładowana jednorodnie, z gęstością powierzchniową σ . W środku powierzchni wycięto mały okrągły otwór o promieniu R (rys. 24.32). Zaniedbując zakrzywienie linii pola w pobliżu wszystkich krawędzi, oblicz natężenie pola w punkcie P , w odległości z od środka otworu na jego osi. (Wskazówka: Zastosuj wzór (23.26) i zasadę superpozycji).



Rys. 24.32. Zadanie 28

29. Na rysunku 24.33 przedstawiono w przekroju małą nieprzewodzącą kulkę o masie $m = 1$ mg i ładunku $q = 2 \cdot 10^{-8}$ C (roz-

łożonym jednorodnie w całej jej objętości), zawieszoną na izolowanej nici, tworzącej kąt $\theta = 30^\circ$ z pionową, jednorodnie naładowaną nieprzewodzącą płytą. Uwzględniając siłę ciężkości, działającą na kulkę i zakładając, że płyta rozciąga się daleko w kierunku pionowym i poziomym, oblicz gęstość powierzchniową ładunku σ na płycie.



Rys. 24.33. Zadanie 29

30. Dwie duże cienkie płyty metalowe są ustawione równolegle blisko siebie (rys. 24.16c). Na swych wewnętrznych powierzchniach płyty mają nadmiarowe ładunki przeciwnego znaku o gęstości powierzchniowej o wartości $7 \cdot 10^{-22}$ C/m². Płyta naładowana ujemnie jest z lewej strony. Jaka jest wartość i kierunek natężenia pola elektrycznego \vec{E} : a) na lewo od płyt, b) na prawo od płyt, c) między płytami?

31. W kierunku prostopadłym do dużej metalowej płyty naładowanej ujemnie z gęstością powierzchniową ładunku $2 \cdot 10^{-6}$ C/m² wystrzelono elektron. Jeśli początkowa energia kinetyczna elektronu wynosi 100 eV i jeśli elektron ma się zatrzymać (ze względu na odpchanie elektrostatyczne od płyty) dokładnie w chwili dotarcia do płyty, to w jakiej odległości od płyty powinien zostać wystrzelony?

32. Dwie duże płyty metalowe, o polu powierzchni 1 m^2 znajdują się naprzeciw siebie, w odległości 5 cm i mają jednakowe co do wartości bezwzględnej, ale przeciwcze ładunki na swych wewnętrznych powierzchniach. Jeśli wartość E natężenia pola elektrycznego między płytami wynosi 55 N/C, to jaka jest wartość ładunku na każdej płycie? Zaniedbaj efekty krawędziowe.

33*. Płaska warstwa o grubości d jest naładowana jednorodnie z objętościową gęstością ładunku ρ . Znajdź wartość natężenia pola elektrycznego we wszystkich punktach przestrzeni: a) wewnętrz, b) na zewnątrz warstwy, w funkcji odległości x od płaszczyzny symetrii warstwy.

24.9. Zastosowanie prawa Gaussa: symetria sferyczna

34. Strumień elektryczny przenikający przez sferyczną powierzchnię Gaussa o promieniu 10 cm, wytworzony przez znajdujący się w jej środku ładunek punktowy wynosi $-750 \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{C}$. a) Jeśli podwoimy promień powierzchni Gaussa, to jak duży będzie strumień elektryczny przez tę powierzchnię? Jaka jest wartość ładunku punktowego?

35. Sfera przewodząca o promieniu 10 cm jest naładowana. Jeśli natężenie pola elektrycznego w odległości 15 cm od środka sfery ma wartość $3 \cdot 10^3 \text{ N/C}$ i jest skierowane radialnie do środka, to jaki jest wypadkowy ładunek sfery?

36. Dwie naładowane współśrodkowe sfery mają promienie 10 cm i 15 cm. Ładunek na wewnętrznej sferze wynosi $4 \cdot 10^{-8}$ C, a na zewnętrznej sferze $2 \cdot 10^{-8}$ C. Znajdź natężenie pola elektrycznego w odległości: a) $r = 12$ cm, b) $r = 20$ cm od środka sfer.

37. Ernest Rutherford napisał w swej pracy z 1911 r.: „Aby mieć jakieś wyobrażenie o siłach potrzebnych do odchylenia cząstki o duży kąt, rozważmy atom, jako układ złożony z punktowego dodatniego ładunku Ze w jego środku, otoczonego przez ładunek ujemny $-Ze$ jednorodnie rozłożony w kuli o promieniu R . Natężenie pola elektrycznego E [...] w odległości r od środka dla punktu *wewnątrz* atomu [wynosi]:

$$E = \frac{Ze}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r^2} - \frac{r}{R^3} \right).$$

Sprawdź ten wzór.

38. Wzór (24.11) ($E = \sigma/\epsilon_0$) określa natężenie pola elektrycznego w punktach w pobliżu naładowanej powierzchni przewodzącej. Zastosuj ten wzór do przewodzącej sfery o promieniu r i ładunku q i pokaż, że natężenie pola elektrycznego na zewnątrz sfery jest takie samo, jak natężenie pola ładunku punktowego, umieszczonego w środku sfery.

39. Proton o prędkości $v = 3 \cdot 10^5$ m/s porusza się po orbicie, znajdującej się tuż nad naładowaną sferą o promieniu $r = 1$ cm. Jaki jest ładunek na sferze?

40. Ładunek punktowy $+q$ znajduje się w środku elektrycznie obojętnej, sferycznej przewodzącej powłoki o wewnętrznym promieniu a i zewnętrznym promieniu b . Jaki ładunek występuje na: a) wewnętrznej, b) zewnętrznej powierzchni powłoki? Jakie jest natężenie wypadkowego pola elektrycznego w odległości r od środka powłoki, jeśli: c) $r < a$, d) $b > r > a$, e) $r > b$? Naszkicuj linie pola dla tych trzech obszarów. Jakie jest natężenie wypadkowego pola elektrycznego, wytworzonego dla $r > b$ przez: f) ładunek punktowy w środku i ładunek na powierzchni wewnętrznej, g) ładunek na powierzchni zewnętrznej? Na zewnątrz powłoki dodano teraz ładunek punktowy $-q$. Czy ten ładunek punktowy zmieni rozkład ładunku na: h) zewnętrznej, i) wewnętrznej powierzchni? Naszkicuj linie pola w obecnej sytuacji. j) Czy na ten drugi ładunek punktowy działa niezerowa siła elektrostatyczna? k) Czy na pierwszy ładunek punktowy działa niezerowa wypadkowa siła elektrostatyczna? l) Czy w tym przypadku została naruszona trzcia zasada dynamiki Newtona?

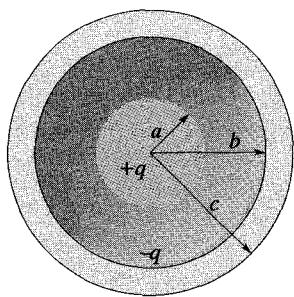
41. Nieprzewodząca kula o promieniu R jest niejednorodnie naładowana z gęstością objętościową $\rho = \rho_s r/R$, gdzie ρ_s jest stałą, a r jest odlegością od środka kuli. Pokaż: a) że całkowity ładunek kuli wynosi $Q = \pi\rho_s R^3$, b) że:

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{R^4} r^2$$

określa wartość natężenia pola elektrycznego wewnątrz kuli.

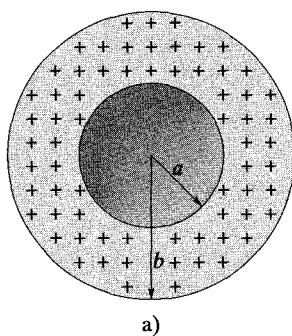
42. Atom wodoru można rozważyć jako układ złożony z punktowego protonu o dodatnim ładunku $+e$ w środku atomu i elektronu o ujemnym ładunku $-e$, rozłożonym wokół protonu z gęstością objętościową $\rho = A \exp(-2r/a_0)$, gdzie A jest stałą, $a_0 = 0,53 \cdot 10^{-10}$ m jest *promieniem Bohra*, a r jest odległością od środka atomu. a) Korzystając z faktu, że atom wodoru jest elektrycznie obojętny, znajdź A . b) Znajdź następnie natężenie pola elektrycznego, wytworzonego przez atom w odległości (od protonu) równej promieniowi Bohra.

43. Na rysunku 24.34 przedstawiono kulę o promieniu a i ładunku $+q$, naładowaną jednorodnie objętościowo i współśrodkową z nią sferyczną przewodzącą powłokę o wewnętrznym promieniu b i zewnętrznym promieniu c . Ładunek wypadkowy powłoki wynosi $-q$. Znajdź wzory określające natężenie pola elektrycznego w funkcji odległości r od środka: a) wewnątrz kuli ($r < a$), b) między kulą i powłoką ($a < r < b$), c) wewnątrz powłoki ($b < r < c$), d) na zewnątrz powłoki ($r > c$). e) Jakie są ładunki na wewnętrznej i zewnętrznej powierzchni powłoki?

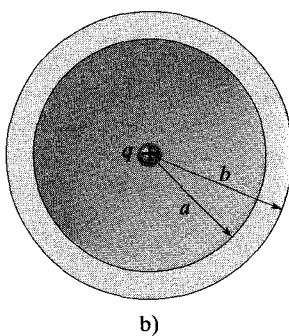


Rys. 24.34. Zadanie 43

44. Na rysunku 24.35a przedstawiono sferyczną powłokę naładowaną jednorodnie z gęstością objętościową ρ . Wykreśl zależność natężenia E pola, wytworzonego przez powłokę od odległości r od środka powłoki, w zakresie od 0 do 30 cm, przyjmując $\rho = 1 \cdot 10^{-6}$ C/m³, $a = 10$ cm i $b = 20$ cm.



a)

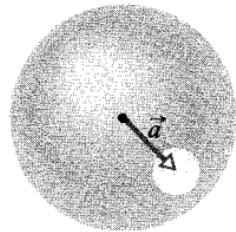


b)

Rys. 24.35. Zadania 44 i 45

45. Na rysunku 24.35b przedstawiono nieprzewodzącą sferyczną powłokę, o wewnętrznym promieniu a i zewnętrznym promieniu b , naładowaną dodatnio z gęstością objętościową $\rho = A/r$ (wewnątrz powłoki), gdzie A jest stałą, a r jest odlegością od środka powłoki. Dodatkowo w środku powłoki znajduje się dodatni ładunek punktowy q . Jaka powinna być wartość A , aby pole elektryczne w powłoce ($a \leq r \leq b$) było jednorodne? (Wskazówka: Stała A zależy od a , lecz nie zależy od b).

46*. Nieprzewodząca kula jest naładowana jednorodnie z gęstością objętościową ρ . Niech \vec{r} będzie wektorem od środka kuli do punktu P wewnętrz kuli. a) Pokaż, że natężenie pola elektrycznego w punkcie P jest dane wzorem $\vec{E} = \rho\vec{r}/(3\epsilon_0)$. (Zauważ, że wynik jest niezależny od promienia kuli). b) W kuli wycięto następnie kulistą wnękę, jak przedstawiono na rysunku 24.36. Korzystając z zasady superpozycji pokaż, że natężenie pola elektrycznego we wszystkich punktach wnęki jest jednakowe i równe $\vec{E} = \rho\vec{a}/(3\epsilon_0)$, gdzie \vec{a} jest wektorem położenia środka wnęki względem środka kuli. (Zauważ, że ten wynik jest niezależny od promienia kuli i promienia wnęki).



Rys. 24.36. Zadanie 46

47*. Sferycznie symetryczny, ale niejednorodny, objętościowy rozkład ładunku powoduje powstawanie pola elektrycznego o natężeniu $E = Kr^4$, skierowanego radialnie od środka sfery, gdzie r jest odległością od środka sfery i K jest stałą. Jaka jest gęstość objętościowa ρ tak rozłożonego ładunku?

Zadanie dodatkowe

48. Tajemnica proszku czekoladowego. Eksplozje, wywołane przez wyładowania elektrostatyczne (iskry), stanowią poważne

niebezpieczeństwo w urządzeniach przeładujących ziarno lub proszek. Eksplozja taka wystąpiła w proszku czekoladowym, w fabryce herbatników, w latach siedemdziesiątych XX wieku. W fabryce tej robotnicy zwykle opróżniali dostarczone worki z proszkiem do skrzyni ładunkowej, z której proszek był wdmuchiwany przez uziemione rury z polichlorku winylu do silosa. Gdzieś na tej drodze wystąpiły dwa warunki konieczne, aby nastąpiła eksplozja: 1) Wartość natężenia pola elektrycznego wyniosła $3 \cdot 10^6 \text{ N/C}$ lub więcej, tak że nastąpiło przebicie elektryczne i iskrzenie. 2) Energia iskry wyniosła 150 mJ lub więcej, tak że doszło do eksplozji proszku. Sprawdź, czy warunek (1) mógł być spełniony przy przepływie proszku przez rury z polichlorku winylu.

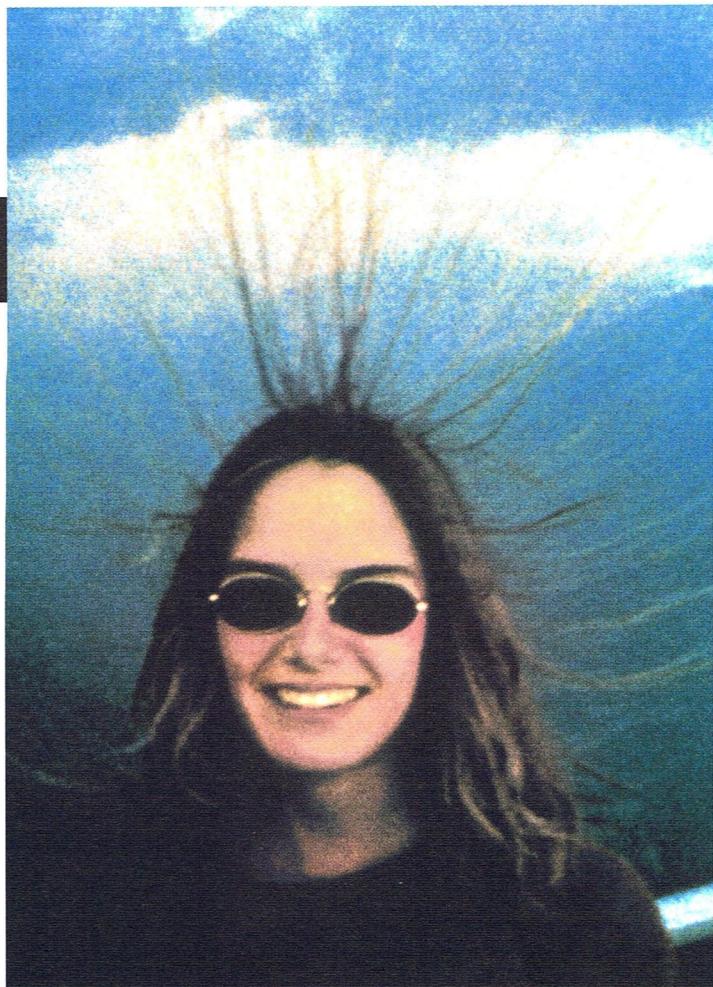
Załóż, że strumień *ujemnie* naładowanych ziarenek proszku jest wdmuchiwany przez walcową rurę o promieniu $R = 5 \text{ cm}$. Przyjmij, że proszek i jego ładunek są rozłożone jednorodnie w rurze z gęstością objętościową ładunku ρ . a) Korzystając z prawa Gaussa, znajdź wyrażenie na wartość natężenia pola elektrycznego \vec{E} w rurze, jako funkcję odległości r od osi rury. b) Czy wartość natężenia maleje, czy rośnie wraz ze wzrostem r ? c) Czy natężenie pola elektrycznego \vec{E} jest skierowane radialnie do osi, czy od osi? d) Przyjmując gęstość objętościową ładunku $\rho = 1,1 \cdot 10^{-3} \text{ C/m}^3$ (typową w fabryce herbatników), znajdź maksymalną wartość natężenia pola elektrycznego i określ, gdzie występuje ta maksymalna wartość. e) Czy iskrzenie mogło wystąpić, a jeśli tak, to gdzie? (Dalszy ciąg tej historii poznasz w zadaniu 57 w rozdziale 25).

25 Potencjał elektryczny

Oglądając z platformy widokowej Park Narodowy Sekwoi, kobieta poczuła, że podnoszą się jej włosy na głowie. Jej brat, rozbawiony tym widokiem, zrobił jej zdjęcie. Pięć minut po ich odejściu w platformę uderzył piorun, zabijając jedną osobę i raniąc siedem.

Co było przyczyną podniesienia się włosów na głowie kobiety?

Odpowiedź znajdziesz w tym rozdziale.



25.1. Elektryczna energia potencjalna

Prawo powszechnego ciążenia (Newtona) dla siły grawitacyjnej i prawo Coulomba dla siły elektrostatycznej są matematycznie identyczne. Stąd ogólne właściwości siły grawitacyjnej, jakie omawialiśmy wcześniej, powinny stosować się także do siły elektrostatycznej.

W szczególności uzasadniony jest wniosek, że siła elektrostatyczna jest *siłą zachowawczą*. Jeśli więc siła elektrostatyczna działa w jakimś układzie cząstek, między dwiema czy większą liczbą cząstek naładowanych, to układowi możemy przypisać **elektryczną energię potencjalną** E_p . Co więcej, jeśli układ zmienia swoją konfigurację ze stanu początkowego do innego stanu końcowego, to siła elektrostatyczna wykonuje pracę W nad cząstками. Ze wzoru (8.1) wynika wtedy, że odpowiadająca temu procesowi zmiana ΔE_p energii potencjalnej układu spełnia zależność:

$$\Delta E_p = E_p \text{ końc} - E_p \text{ pocz} = -W. \quad (25.1)$$

Podobnie, jak dla innych sił zachowawczych, praca wykonana przez siły elektrostatyczne jest *niezależna od toru cząstek*. Założymy, że cząstka naładowana, należąca do danego układu porusza się od punktu początkowego do punktu końcowego pod wpływem działającej na nią siły elektrostatycznej, wytworzonej przez resztę układu. Jeśli reszta układu jest nieruchoma, to praca W wykonana przez tę siłę jest taka sama dla *wszystkich* torów cząstki między punktami początkowym i końcowym.

Dla wygody, jako *konfigurację odniesienia* układu cząstek naładowanych wybieramy zwykle tę konfigurację, w której cząstki są nieskończenie od siebie oddalone. Przyjmujemy też zwykle, że *energia potencjalna odniesienia* jest równa零. Założymy, że kilka cząstek naładowanych, znajdujących się początkowo nieskończonym daleko od siebie (stan początkowy) zbliża się do siebie i tworzy układ cząstek, położonych w skończonych od siebie odległościach (stan końcowy). Niech początkowa energia potencjalna $E_p \text{ pocz}$ będzie równa zero i niech W_∞ reprezentuje pracę wykonaną przez siły elektrostatyczne przy ich zbliżaniu z nieskończoności. Na podstawie wzoru (25.1) końcowa energia potencjalna E_p układu jest więc równa:

$$E_p = -W_\infty. \quad (25.2)$$

Podobnie, jak inne rodzaje energii potencjalnej, elektryczną energię potencjalną uważa się za rodzaj energii mechanicznej. Przypomnij sobie z rozdziału 8, że jeśli w układzie izolowanym działają tylko siły zachowawcze, to energia mechaniczna układu jest zachowana. W dalszym ciągu tego rozdziału będziemy ten fakt często stosować.

Sztuka rozwiązywania zadań

Porad 1: Elektryczna energia potencjalna; praca wykonana przez pole elektryczne

Elektryczna energia potencjalna jest związana z układem cząstek jako całością. Spotkamy się jednak (poczynając od przykładu 25.1) ze stwierdzeniami, które wiążą ją tylko z jedną cząstką

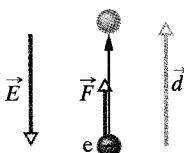
układu. Możemy na przykład przeczytać: „Elektron w polu elektrycznym ma energię potencjalną 10^{-7} J”. Takie stwierdzenia są często możliwe do zaakceptowania, ale trzeba zawsze pamiętać, że energia potencjalna jest w rzeczywistości związana z układem — w tym przypadku z elektronem i cząstki naładowanymi,

które wytwarzają pole elektryczne. Pamiętaj też, że ma sens przyznanie określonej wartości energii potencjalnej, jak 10^{-7} J w tym przypadku, cząstce czy nawet układowi *tylko wtedy*, gdy znana jest energia potencjalna odniesienia.

Jeśli energia potencjalna związana jest tylko z jedną cząstką układu, to spotkasz się często ze sformułowaniem, że pracę nad cząstką wykonuje *pole elektryczne*. Oznacza to, że praca jest wykonywana przez siłę oddziaływanego na cząstkę innych ładunków, które wytwarzają to pole.

Przykład 25.1

Elektrony są bezustannie wybijane z cząsteczek powietrza w atmosferze przez cząstki promieniowania kosmicznego. Każdy elektron po uwolnieniu doznaje działania siły elektrostatycznej \vec{F} , wskutek istnienia pola elektrycznego, wytwarzanego w atmosferze przez naładowane cząstki, znajdujące się już na Ziemi. W pobliżu powierzchni Ziemi natężenie pola elektrycznego ma wartość $E = 150 \text{ N/C}$ i jest skierowane w dół. Ile wynosi zmiana ΔE_p elektrycznej energii potencjalnej uwalnionego elektronu, gdy siła elektrostatyczna powoduje, że przemieszcza się on pionowo do góry, na odległość $d = 520 \text{ m}$ (rys. 25.1)?



Rys. 25.1. Przykład 25.1. Elektron w atmosferze doznaje przemieszczenia \vec{d} , skierowanego do góry, pod działaniem siły \vec{F} , związanej z polem elektrycznym o natężeniu \vec{E}

ROZWIĄZANIE:

○ 1. Zmiana ΔE_p elektrycznej energii potencjalnej elektronu związana jest z pracą W , wykonaną przez pole elektryczne nad elektronem, zgodnie ze wzorem (25.1) ($\Delta E_p = -W$).

○ 2. Praca wykonana przez stałą siłę \vec{F} nad cząstką, przesuwającą się o \vec{d} wynosi:

$$W = \vec{F} \cdot \vec{d}. \quad (25.3)$$

○ 3. Siła elektrostatyczna i natężenie pola elektrycznego są powiązane wzorem $\vec{F} = q\vec{E}$, gdzie q jest ładunkiem elektronu ($= -1,60 \cdot 10^{-19} \text{ C}$). Podstawiając wyrażenie na \vec{F} do wzoru (25.3) i obliczając iloczyn skalarny, otrzymujemy:

$$W = q\vec{E} \cdot \vec{d} = qEd \cos \theta, \quad (25.4)$$

gdzie θ jest kątem między kierunkami \vec{E} i \vec{d} . Natężenie pola \vec{E} jest skierowane w dół, a przemieszczenie \vec{d} do góry, więc $\theta = 180^\circ$. Po podstawieniu tej i innych danych do wzoru (25.4) otrzymujemy:

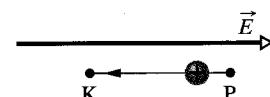
$$W = (-1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C})(150 \text{ N/C})(520 \text{ m}) \cos 180^\circ = 1,2 \cdot 10^{-14} \text{ J}.$$

Ze wzoru 25.1 wynika, że:

$$\Delta E_p = -W = -1,2 \cdot 10^{-14} \text{ J}. \quad (\text{odpowiedź})$$

Zgodnie z tym wynikiem elektryczna energia potencjalna elektronu po wzniesieniu się na wysokość 520 m *maleje* o $1,2 \cdot 10^{-14} \text{ J}$.

SPRAWDZIAN 1: Proton porusza się z punktu P do punktu K w jednorodnym polu elektrycznym skierowanym tak, jak pokazano na rysunku. a) Czy pole elektryczne wykonuje dodatnią, czy ujemną pracę nad protonem? b) Czy elektryczna energia potencjalna protonu wzrasta, czy maleje?



25.2. Potencjał elektryczny

Na podstawie przykładu 25.1 wniosujemy, że energia potencjalna cząstki naładowanej w polu elektrycznym zależy od wartości ładunku cząstki. Jednak energia potencjalna przypadająca na jednostkowy ładunek w dowolnym punkcie pola elektrycznego ma już wartość niezależną od ładunku tej cząstki.

Załóżmy, że na przykład umieściliśmy cząstkę próbную o dodatnim ładunku $1,60 \cdot 10^{-19} \text{ C}$ w punkcie pola elektrycznego, w którym elektryczna energia potencjalna cząstki jest równa $2,4 \cdot 10^{-17} \text{ J}$. Wtedy energia potencjalna przypadająca na jednostkowy ładunek wynosi:

$$\frac{2,4 \cdot 10^{-17} \text{ J}}{1,60 \cdot 10^{-19} \text{ C}} = 150 \text{ J/C}.$$

Jeśli teraz zastąpimy cząstkę próbna cząstką o dwa razy większym ładunku dodatnim, czyli $3,20 \cdot 10^{-19}$ C, to łatwo obliczyć, że druga cząstka ma elektryczną energię potencjalną $4,8 \cdot 10^{-17}$ J, czyli dwa razy większą niż pierwsza. Energia potencjalna na jednostkowy ładunek będzie jednak nadal taka sama i równa 150 J/C.

Energia potencjalna na jednostkowy ładunek, czyli E_p/q jest więc niezależna od ładunku q zastosowanej cząstki i jest *cechą charakterystyczną tylko pola elektrycznego*, którym się zajmujemy. Energia potencjalna na jednostkowy ładunek w wybranym punkcie pola elektrycznego nosi nazwę **potencjału elektrycznego** V (lub po prostu **potencjału**) w tym punkcie. Stąd:

$$V = \frac{E_p}{q}. \quad (25.5)$$

Zauważ, że potencjał elektryczny jest skalarem, a nie wektorem.

Różnica potencjałów elektrycznych ΔV między dwoma punktami początkowym i końcowym w polu elektrycznym jest równa różnicy energii potencjalnej na jednostkowy ładunek między tymi dwoma punktami:

$$\Delta V = V_{\text{konc}} - V_{\text{pocz}} = \frac{E_{\text{p konc}}}{q} - \frac{E_{\text{p pocz}}}{q} = \frac{\Delta E_p}{q}. \quad (25.6)$$

Po zastosowaniu wzoru (25.1) w celu zastąpienia ΔE_p przez $-W$ we wzorze (25.6) możemy zdefiniować różnicę potencjałów między punktami początkowym i końcowym jako:

$$\Delta V = V_{\text{konc}} - V_{\text{pocz}} = -\frac{W}{q} \quad (\text{definicja różnicy potencjałów}). \quad (25.7)$$

Różnica potencjałów między dwoma punktami jest równa wziętej z przeciwnym znakiem pracy wykonanej przez siłę elektrostatyczną, przy przesunięciu jednostkowego ładunku z jednego punktu do drugiego. Różnica potencjałów może być dodatnia, ujemna lub równa zeru, zależnie od znaków i wartości wielkości q i W .

Jeśli przyjmiemy $E_{\text{p pocz}} = 0$ w nieskończoności jako naszą energię potencjalną odniesienia, to na podstawie wzoru (25.5) potencjał elektryczny musi tam być też równy零. Wtedy ze względu na wzór (25.7) możemy zdefiniować potencjał elektryczny V w dowolnym punkcie pola elektrycznego wzorem:

$$V = -\frac{W_\infty}{q} \quad (\text{definicja potencjału}), \quad (25.8)$$

gdzie W_∞ jest pracą, wykonaną przez pole elektryczne nad cząstką naładowaną, gdy cząstka przesuwa się z nieskończoności do punktu końcowego. Potencjał V może być dodatni, ujemny lub równy zeru, zależnie od znaków i wartości q i W_∞ .

Zgodnie ze wzorem (25.8) jednostką potencjału w układzie SI jest dżul na kulomb. Taka jednostka pojawia się tak często, że używa się specjalnej nazwy

wolt (w skrócie V) dla tej jednostki i stąd:

$$1 \text{ wolt} = 1 \text{ dżul na koulomb}. \quad (25.9)$$

Ta nowa jednostka pozwala nam przyjąć inną jednostkę natężenia pola elektrycznego \vec{E} , które dotąd mierzyliśmy w niutonach na koulomb. Po dwóch przekształceniach jednostek otrzymujemy:

$$1 \text{ N/C} = \left(1 \frac{\text{N}}{\text{C}}\right) \left(\frac{1 \text{ V} \cdot \text{C}}{1 \text{ J}}\right) \left(\frac{1 \text{ J}}{1 \text{ N} \cdot \text{m}}\right) = 1 \text{ V/m}. \quad (25.10)$$

Czynnik przeliczeniowy w drugim nawiasie wynika ze wzoru (25.9), a w trzecim z definicji dżula. Odtąd będziemy wyrażać wartości natężenia pola elektrycznego w woltach na metr (V/m), a nie w niutonach na koulomb (N/C).

Na koniec możemy teraz zdefiniować jednostkę energii, która jest wygodna do pomiarów energii w obszarze atomowym i subatomowym: jeden *elektronowolt* (eV) jest energią równą pracy, potrzebnej do przesunięcia pojedynczego ładunku elementarnego e , na przykład elektronu czy protonu, między punktami o różnicy potencjałów równej jednemu woltovi. Ze wzoru (25.7) wynika, że wartość tej pracy wynosi $q\Delta V$, czyli:

$$1 \text{ eV} = e(1 \text{ V}) = (1,60 \cdot 10^{-19} \text{ C})(1 \text{ J/C}) = 1,60 \cdot 10^{-19} \text{ J}.$$

Sztuka rozwiązywania zadań

Poradą 2: Potencjał elektryczny i elektryczna energia potencjalna

Potencjał elektryczny V i elektryczna energia potencjalna E_p są różnymi wielkościami i nie należy ich mylić.

► **Potencjał elektryczny** jest właściwością pola elektrycznego bez względu na obecność w nim naładowanego ciała;

jest mierzony w dżulach na koulomb (J/C), czyli w woltach (V).

► **Elektryczna energia potencjalna** jest energią naładowanego ciała w zewnętrznym polu elektrycznym (lub bardziej precyzyjnie energią układu, składającego się z ciała i zewnętrznego pola elektrycznego); jest mierzona w dżulach (J).

Praca wykonana przez siłę zewnętrzną

Założymy, że przesuwamy cząstkę o ładunku q od punktu początkowego do punktu końcowego w polu elektrycznym, działając na nią siłą. Podczas ruchu nasza siła wykonuje pracę W_p nad ładunkiem, a pole elektryczne wykonuje nad nim pracę W . Ze związku pracy i energii kinetycznej (7.10) wynika, że zmiana ΔE_k energii kinetycznej cząstki wynosi:

$$\Delta E_k = E_{k \text{ końc}} - E_{k \text{ pocz}} = W_p + W. \quad (25.11)$$

Założymy teraz, że cząstka spoczywa przed wprawieniem w ruch i po jej zatrzymaniu. Wtedy $E_{k \text{ końc}}$ i $E_{k \text{ pocz}}$ są równe zeru i wzór (25.11) redukuje się do:

$$W_p = -W. \quad (25.12)$$

Jednym słowem, praca W_p , wykonana przez przyłożoną siłę podczas ruchu jest równa wziętej z przeciwnym znakiem pracy W , wykonanej przez pole elektryczne, jeśli nie nastąpiła zmiana energii kinetycznej.

Używając wzoru (25.12), w celu wprowadzenia W_p do wzoru (25.1), możemy powiązać pracę wykonaną przez przyłożoną przez nas siłę ze zmianą energii potencjalnej cząstki podczas ruchu. Otrzymujemy:

$$\Delta E_p = E_p \text{ końc} - E_p \text{ pocz} = W_p. \quad (25.13)$$

Podobnie, używając wzoru (25.12), w celu wprowadzenia W_p do wzoru (25.7), możemy powiązać pracę W_p z różnicą potencjałów elektrycznych ΔV między początkowym i końcowym położeniem cząstki. Otrzymujemy wtedy:

$$W_p = q \Delta V. \quad (25.14)$$

Praca W_p może być dodatnia, ujemna lub równa zeru, zależnie od znaków i wartości wielkości q i ΔV . Jest to praca, jaką musimy wykonać przy przesuwaniu cząstki o ładunku q , między punktami o różnicę potencjałów ΔV , bez spowodowania zmiany energii kinetycznej cząstki.

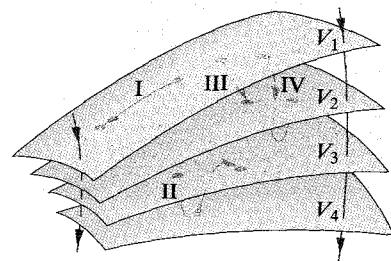
SPRAWDZIAN 2: W sprawdzianie 1 przesuwaliśmy proton z punktu początkowego do punktu końcowego w jednorodnym polu elektrycznym, skierowanym jak pokazano na rysunku. a) Czy nasza siła wykonuje przy tym dodatnią, czy ujemną pracę? b) Czy proton przesuwa się do punktu o większym, czy mniejszym potencjale?

25.3. Powierzchnie ekwipotencjalne

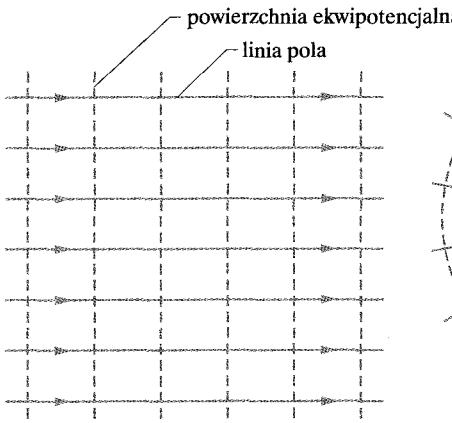
Sąsiadujące ze sobą punkty, które mają taki sam potencjał elektryczny, tworzą **powierzchnię ekwipotencjalną**, która może być albo wyobrażoną powierzchnią, albo rzeczywistą powierzchnią fizyczną. Jeśli cząstka porusza się między dwoma punktami początkowym i końcowym po tej samej powierzchni ekwipotencjalnej, to pole elektryczne nie wykonuje nad cząstką naładowaną żadnej pracy W . Wynika to ze wzoru (25.7), zgodnie z którym $W = 0$, jeśli $V_{\text{konc}} = V_{\text{pocz}}$. Z **niezależności** pracy (i stąd energii potencjalnej oraz potencjału) od drogi mamy $W = 0$ dla *dowolnej* linii łączącej punkty początkowy i końcowy leżące na powierzchni ekwipotencjalnej, bez względu na to, czy tor cząstki leży całkowicie na powierzchni ekwipotencjalnej.

Na rysunku 25.2 przedstawiono *rodzinę* powierzchni ekwipotencjalnych związanych z polem elektrycznym, wytworzonym przez pewien rozkład ładunków. Praca wykonywana przez pole elektryczne nad cząstką naładowaną, gdy cząstka porusza się po torach I i II, jest równa zeru, ponieważ każdy z tych torów zaczyna się i kończy na tej samej powierzchni ekwipotencjalnej. Praca wykonywana podczas ruchu naładowanej cząstki po torach III i IV nie jest równa zeru, ale ma taką samą wartość dla obydwu tych torów, ponieważ początkowe i końcowe potencjały są identyczne dla tych dwóch torów, czyli tory III i IV łączą tę samą parę powierzchni ekwipotencjalnych.

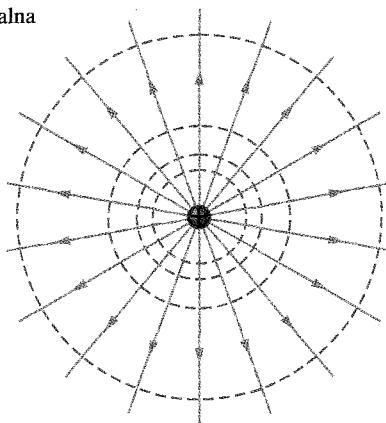
Ze względu na symetrię powierzchnie ekwipotencjalne pola wytworzonego przez ładunek punktowy lub sferycznie symetryczny rozkład ładunku są **współśrodkowymi** sferami. Dla jednorodnego pola elektrycznego powierzchnie ekwipotencjalne są płaszczyznami prostopadłymi do linii pola. Powierzchnie ekwipotencjalne są zawsze prostopadłe do linii pola elektrycznego i stąd do



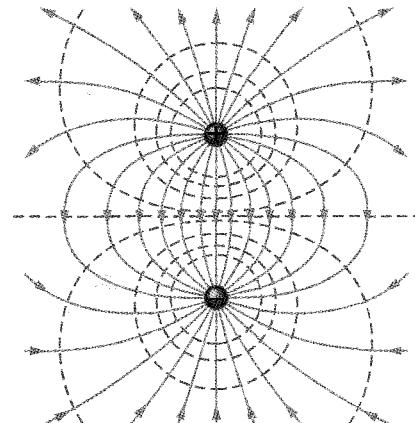
Rys. 25.2. Fragmenty czterech powierzchni ekwipotencjalnych, odpowiadających potencjałom elektrycznym $V_1 = 100 \text{ V}$, $V_2 = 80 \text{ V}$, $V_3 = 60 \text{ V}$ i $V_4 = 40 \text{ V}$. Przedstawiono cztery tory, po których może się poruszać ładunek próbny. Zaznaczono też dwie linie pola elektrycznego



a)

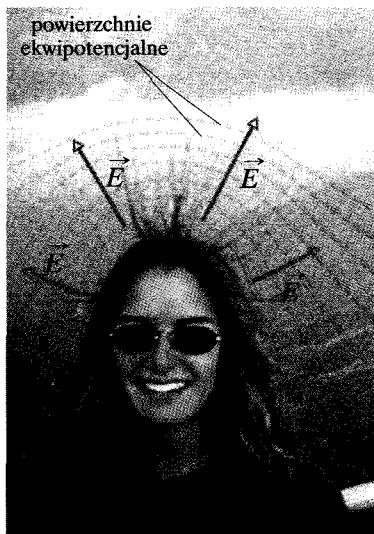


b)



c)

25.3. Linie pola elektrycznego (fioletowe) i przekroje powierzchni ekwipotencjalnych (złote) dla: a) pola jednorodnego, b) pola ładunku punktowego, c) pola dipola elektrycznego



Rys. 25.4. Na zdjęciu otwierającym ten rozdział przedstawiono skutki działania chmur wytwarzających silne pole elektryczne o natężeniu \vec{E} , w pobliżu głowy kobiety. Wiele włosów ułożyło się wzdłuż linii tego pola, które są prostopadłe do powierzchni ekwipotencjalnych; natężenie pola jest największe tam, gdzie te powierzchnie są najbliżej siebie, czyli tuż nad głową

natężenia \vec{E} , które jest zawsze styczne do tych linii. Jeśli natężenie \vec{E} nie byłoby prostopadłe do powierzchni ekwipotencjalnej, to miałoby składową leżącą wzdłuż tej powierzchni. Składowa ta wykonywałaby więc pracę nad cząstką naładowaną, przy jej ruchu po powierzchni. Jednak biorąc pod uwagę wzór (25.7), praca nie może być wykonywana, jeśli powierzchnia jest rzeczywiście ekwipotencjalna; wynika stąd jedyny możliwy wniosek, że natężenie \vec{E} musi być wszędzie prostopadłe do powierzchni ekwipotencjalnej. Na rysunku 25.3 przedstawiono linie pola elektrycznego i przekroje powierzchni ekwipotencjalnych dla jednorodnego pola elektrycznego, dla pola ładunku punktowego i dla pola dipola elektrycznego.

Powróćmy teraz do kobiety przedstawionej na fotografii otwierającej ten rozdział. Kobieta stała na platformie połączonej ze zboczem góry, miała zatem prawie ten sam potencjał, jak zbocze góry. Nad jej głową przesuwał się silnie naładowany układ chmur, który wytworzył wokół niej i wokół zbocza góry silne pole elektryczne o natężeniu \vec{E} , skierowanym na zewnątrz od niej i od góry. Siły elektrostatyczne, związane z tym polem przesunęły pewne elektrony przewodnictwa w ciele kobiety w dół, pozostawiając kosmyki jej włosów naładowane dodatnio. Wartość natężenia \vec{E} była oczywiście duża, ale mniejsza od wartości $3 \cdot 10^6$ V/m, która spowodowałaby przebicie elektryczne w powietrzu. (Wartość ta została przekroczena nieco później, gdy piorun uderzył w platformę).

Powierzchnie ekwipotencjalne otaczające kobietę na platformie można wyznaczyć z rozkładu jej włosów; kosmyki układają się wzdłuż kierunku natężenia \vec{E} i są stąd prostopadłe do powierzchni ekwipotencjalnych — na rysunku 25.4 przedstawiono te powierzchnie ekwipotencjalne. Wartość natężenia E była oczywiście największa (powierzchnie ekwipotencjalne były wyraźnie najbliższej siebie) tuż nad jej głową, ponieważ włosy podniosły się tam bardziej, niż włosy po bokach.

Wynika stąd prosty wniosek. Jeśli pole elektryczne powoduje powstanie włosów na głowie, to lepiej się gdzieś schronić niż pozować do zdjęcia.

25.4. Obliczanie potencjału na podstawie natężenia pola

Różnicę potencjałów między dowolnymi dwoma punktami początkowym P i końcowym K w polu elektrycznym możemy obliczyć, jeśli znamy wektor natężenia pola elektrycznego \vec{E} wzdłuż jakiejkolwiek drogi łączącej te punkty. W celu wykonania obliczeń wyznaczamy pracę, wykonaną przez pole nad dodatnim ładunkiem próbny przy przesuwaniu ładunku od punktu początkowego do punktu końcowego i następnie stosujemy wzór (25.7).

Rozważmy dowolne pole elektryczne, przedstawione na rysunku 25.5 przy zastosowaniu linii pola i dodatni ładunek próbny q_0 , który porusza się wzdłuż przedstawionego toru, od punktu początkowego do punktu końcowego. Dla nieukończenie małego przesunięcia $d\vec{s}$, w dowolnym punkcie toru na ładunek działa siła elektrostatyczna $q_0 \vec{E}$. Z rozdziału 7 wiemy, że praca dW , wykonana nad cząstką przez siłę \vec{F} , przy przesunięciu $d\vec{s}$ wynosi:

$$dW = \vec{F} \cdot d\vec{s}. \quad (25.15)$$

Dla sytuacji z rysunku 25.5 $\vec{F} = q_0 \vec{E}$ i wzór (25.15) przyjmuje postać:

$$dW = q_0 \vec{E} \cdot d\vec{s}. \quad (25.16)$$

Aby znaleźć całkowitą pracę W , wykonaną nad cząstką przez pole, podczas jej ruchu od punktu początkowego do punktu końcowego, sumujemy przez całkowanie prace, wykonane nad ładunkiem przy wszystkich przesunięciach $d\vec{s}$ wzdłuż toru:

$$W = q_0 \int_{\text{pocz}}^{\text{końc}} \vec{E} \cdot d\vec{s}. \quad (25.17)$$

Jeśli podstawimy całkowitą pracę W ze wzoru (25.17) do wzoru (25.4), to otrzymamy:

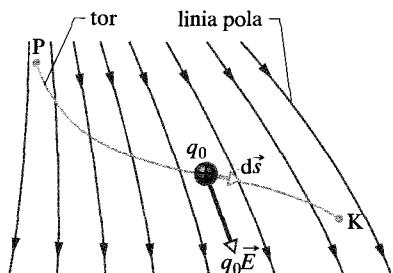
$$V_{\text{końc}} - V_{\text{pocz}} = - \int_{\text{pocz}}^{\text{końc}} \vec{E} \cdot d\vec{s}. \quad (25.18)$$

Stąd różnica potencjałów $V_{\text{końc}} - V_{\text{pocz}}$ między dowolnymi dwoma punktami początkowym i końcowym w polu elektrycznym jest równa wziętej ze znakiem minus całce krzywoliniowej (całce wzdłuż toru cząstki) z $\vec{E} \cdot d\vec{s}$ od punktu początkowego do punktu końcowego. Siła elektrostatyczna jest zachowawcza, dlatego też dla każdego toru otrzymujemy ten sam wynik (niezależnie od tego, czy całkę łatwo, czy trudno obliczyć).

Jeśli natężenie pola elektrycznego jest znane w pewnym obszarze, to wzór (25.18) pozwala obliczyć różnicę potencjałów między dowolnymi dwoma punktami tego obszaru. Jeśli wybierzymy potencjał V_{pocz} w punkcie początkowym równy零, to wzór (25.18) przyjmuje postać:

$$V = - \int_{\text{pocz}}^{\text{końc}} \vec{E} \cdot d\vec{s}, \quad (25.19)$$

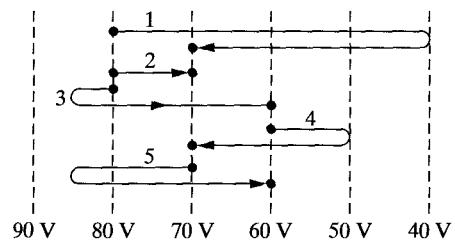
w której pominęliśmy wskaźnik przy $V_{\text{końc}}$. Wzór (25.19) daje nam potencjał V w dowolnym punkcie końcowym pola elektrycznego względem zerowego poten-



Rys. 25.5. Ładunek próbny q_0 porusza się od punktu początkowego P do punktu końcowego K wzdłuż przedstawionego toru w niejednorodnym polu elektrycznym. Na ładunek próbny przy przemieszczeniu o $d\vec{s}$ działa siła elektrostatyczna $q_0 \vec{E}$. Siła ta jest skierowana stycznie do linii pola w miejscu, w którym znajduje się ładunek próbny.

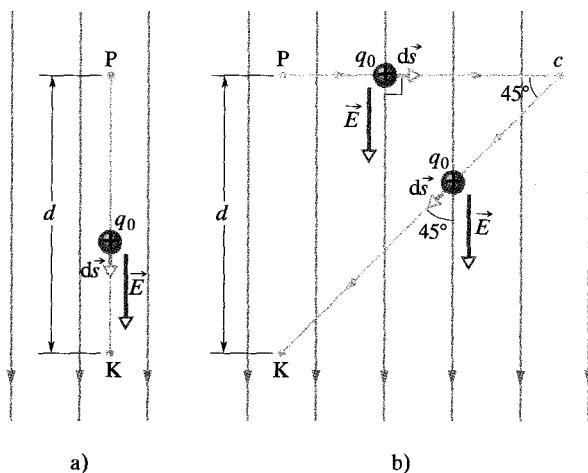
cjału w punkcie początkowym. Jeśli punkt początkowy wybierzemy w nieskończoności, to wzór (25.19) określa potencjał w dowolnym punkcie końcowym względem zerowego potencjału w nieskończoności.

SPRAWDZIAN 3: Na rysunku przedstawiono przekrój zbioru równoległych powierzchni ekwipotencjalnych i pięć torów, wzdłuż których będziemy przesuwać elektron z jednej powierzchni na drugą. a) Jaki jest kierunek natężenia pola elektrycznego na tych powierzchniach? b) Określ dla każdego toru, czy wykonywana praca jest dodatnia, ujemna, czy równa零. c) Uszereguj toru według wykonanej pracy, zaczynając od największej.



Przykład 25.2

a) Na rysunku 25.6a przedstawiono dwa punkty początkowy P i końcowy K w jednorodnym polu elektrycznym o natężeniu \vec{E} . Punkty te leżą na tej samej linii pola elektrycznego (nie pokazanej) i znajdują się w odległości d . Znajdź różnicę potencjałów $V_{\text{końc}} - V_{\text{pocz}}$ przez przesunięcie dodatniego ładunku próbnego q_0 od punktu P do punktu K wzdłuż przedstawionego toru, który jest równoległy do kierunku natężenia pola.



Rys. 25.6. Przykład 25.2. a) Ładunek próbny q_0 porusza się po linii prostej od punktu P do punktu K, wzdłuż linii jednorodnego pola elektrycznego. b) Ładunek q_0 porusza się wzdłuż toru $P \rightarrow c \rightarrow K$ w tym samym polu elektrycznym

ROZWIĄZANIE:

Możemy znaleźć różnicę potencjałów między dwoma dowolnymi punktami w polu elektrycznym przez obliczenie całki z \vec{E} po $d\vec{s}$ wzdłuż linii łączącej te dwa punkty, zgodnie ze wzorem (25.18). Zrobimy to, przesuwając w myśl ładunku próbnego q_0

wzdłuż tej linii od punktu początkowego P do punktu końcowego K. Przy przesuwaniu ładunku próbnego wzdłuż toru na rysunku 25.6a przesunięcie $d\vec{s}$ ma zawsze taki sam kierunek, jak \vec{E} . Stąd kąt θ między \vec{E} i $d\vec{s}$ jest równy zero i iloczyn skalarny we wzorze (25.18) wynosi:

$$\vec{E} \cdot d\vec{s} = Eds \cos \theta = Eds. \quad (25.20)$$

Wzory (25.18) i (25.20) dają nam wtedy:

$$V_{\text{końc}} - V_{\text{pocz}} = - \int_{\text{pocz}}^{\text{końc}} \vec{E} \cdot d\vec{s} = - \int_{\text{pocz}}^{\text{końc}} Eds. \quad (25.21)$$

Pole jest jednorodne, a więc natężenie E jest stałe wzdłuż toru i może zostać wyłączone przed całką, co daje:

$$V_{\text{końc}} - V_{\text{pocz}} = -E \int_{\text{pocz}}^{\text{końc}} ds = -Ed, \quad (\text{odpowiedź})$$

gdzie wartość całki jest po prostu długością d toru. Znak minus przy wyniku oznacza, że potencjał w punkcie końc na rysunku 25.6a jest mniejszy niż potencjał w punkcie pocz. Jest to wynik ogólny: potencjał zawsze maleje wzdłuż toru rozciągającego się w kierunku linii pola elektrycznego.

b) Znajdź teraz różnicę potencjałów $V_{\text{końc}} - V_{\text{pocz}}$ przez przesunięcie dodatniego ładunku próbnego q_0 z punktu początkowego do punktu końcowego wzdłuż linii $P \rightarrow c \rightarrow K$, przedstawionej na rysunku 25.6b.

ROZWIĄZANIE:

Ponownie zastosujemy podstawową ideę z punktu (a), ale teraz ładunek próbny porusza się wzdłuż toru, składającego się z dwóch linii $P \rightarrow c$ i $c \rightarrow K$. We wszystkich punktach wzdłuż linii $P \rightarrow c$ przesunięcie $d\vec{s}$ ładunku próbnego jest prostopadłe do \vec{E} . Stąd kąt θ między \vec{E} i $d\vec{s}$ jest równy 90° i iloczyn skalarny $\vec{E} \cdot d\vec{s}$ wynosi zero. Ze wzoru (25.18) wynika wtedy, że punkty P i c mają ten sam potencjał: $V_c - V_{\text{pocz}} = 0$.

Dla linii $c \rightarrow K$ mamy $\theta = 45^\circ$ i ze wzoru (25.18):

$$\begin{aligned} V_{\text{końc}} - V_{\text{pocz}} &= - \int_c^{\text{końc}} \vec{E} \cdot d\vec{s} \\ &= - \int_c^{\text{końc}} E(\cos 45^\circ) ds = -E \cdot \cos 45^\circ \int_c^{\text{końc}} ds. \end{aligned}$$

Ciąka w tym równaniu jest po prostu długością linii $c \rightarrow K$ i z rysunku 25.6b wynika, że długość ta wynosi $d / \sin 45^\circ$. Stąd:

$$V_{\text{końc}} - V_{\text{pocz}} = -E(\cos 45^\circ) \frac{d}{\sin 45^\circ} = -Ed. \quad (\text{odpowiedź})$$

Zgodnie z oczekiwaniem otrzymaliśmy taki sam wynik, jak w punkcie (a) — różnica potencjałów między dwoma punktami nie zależy od drogi między nimi. Wniosek: gdy chcemy znaleźć różnicę potencjałów między dwoma punktami, przez przesunięcie ładunku próbnego między nimi, możemy zaoszczędzić czas i pracę dzięki wyborowi drogi, który upraszcza zastosowanie wzoru (25.18).

25.5. Potencjał pola ładunku punktowego

Zastosujemy obecnie wzór (25.18) w celu wyprowadzenia wyrażenia na potencjał elektryczny V w przestrzeni wokół cząstki naładowanej, względem potencjału zerowego w nieskończoności. Rozważmy punkt P w odległości R od nieruchomej cząstki o dodatnim ładunku q (rys. 25.7). Aby skorzystać ze wzoru (25.18), wyobraźmy sobie, że przesuwamy dodatni ładunek próbny q_0 z punktu P do nieskończoności. Ponieważ nie jest istotny tor, jaki wybieramy, a więc wybierzmy najprostszy — wzdłuż prostej przechodzącej przez ładunek q i punkt P .

Aby zastosować wzór (25.18), musimy obliczyć iloczyn skalarny:

$$\vec{E} \cdot d\vec{s} = E \cos \theta ds. \quad (25.22)$$

Natężenie pola elektrycznego \vec{E} na rysunku 25.7 jest skierowane radialnie od wybranej cząstki. Stąd przesunięcie $d\vec{s}$ cząstki próbnej wzdłuż jej toru ma ten sam kierunek co \vec{E} . Oznacza to, że we wzorze (25.22) kąt $\theta = 0$ i $\cos \theta = 1$. Tor jest radialny, a więc możemy napisać $ds = dr$. Następnie podstawiając granice R i ∞ , możemy zapisać wzór (25.18) w postaci:

$$V_{\text{końc}} - V_{\text{pocz}} = - \int_R^{\infty} E dr. \quad (25.23)$$

Przyjmijmy teraz $V_{\text{końc}} = 0$ (w ∞) i $V_{\text{pocz}} = V$ (w odległości R). Następnie do wzoru na wartość natężenia pola elektrycznego w punkcie, w którym znajduje się ładunek próbny, podstawimy ze wzoru (23.3):

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2}. \quad (25.24)$$

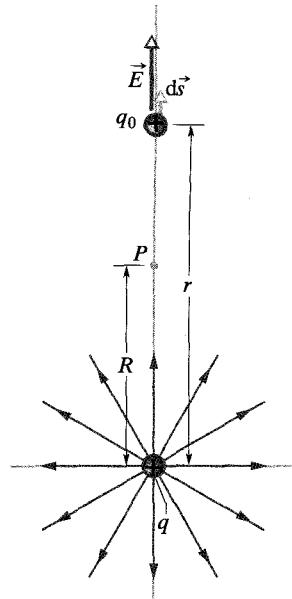
Po tych zmianach wzór (25.23) przyjmuje postać:

$$0 - V = - \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int_R^{\infty} \frac{1}{r^2} dr = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{r} \right]_R^{\infty} = - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{R}. \quad (25.25)$$

Wyznaczając V i zamieniając R na r , otrzymujemy:

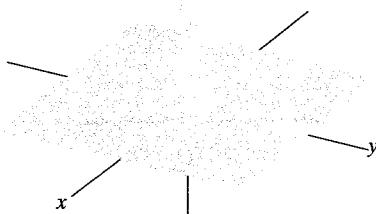
$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r} \quad (25.26)$$

jako wyrażenie na potencjał V pola wytworzonego przez cząstkę o ładunku q , w dowolnej odległości r od cząstki.



Rys. 25.7. Dodatni ładunek punktowy q wytwarza pole elektryczne o natężeniu \vec{E} i potencjał elektryczny V w punkcie P . Potencjał obliczamy, przesuwając ładunek próbny q_0 z punktu P do nieskończoności. Ładunek próbny jest przedstawiony w odległości r od ładunku punktowego; zaznaczono przemieszczenie $d\vec{s}$.

25.8. Komputerowy wykres potencjału elektrycznego $V(r)$ pola dodatniego ładunku punktowego, znajdującego się w początku płaskiego układu współrzędnych x - y . Potencjał w punktach tej płaszczyzny jest odłożony na osi pionowej. (Zakrzywione linie dodano dla uzyskania lepszej widoczności wykresu). Nieskończona wartość potencjału V przewidywana przez wzór (25.26) dla $r = 0$ nie została tu zaznaczona



Chociaż wyprowadziliśmy wzór (25.26) dla cząstki naładowanej dodatnio, to wyprowadzenie jest słuszne także dla cząstki naładowanej ujemnie, tzn. gdy q jest wielkością ujemną. Zauważ, że znak V jest taki sam, jak znak q :

► Cząstka dodatnio naładowana wytwarza dodatni potencjał elektryczny. Cząstka ujemnie naładowana wytwarza ujemny potencjał elektryczny.

Na rysunku 25.8 przedstawiono przestrzenny wykres zależności (25.26) dla dodatnio naładowanej cząstki — wartość V jest na osi pionowej. Zauważ, że wartość potencjału wzrasta, gdy r maleje. W rzeczywistości zgodnie ze wzorem (25.26) potencjał V staje się nieskończony przy $r = 0$, chociaż na rysunku 25.8 mamy w tym punkcie skończoną dużą wartość.

Wzór (25.26) określa również potencjał elektryczny *poza lub na zewnętrznej powierzchni* sferycznie symetrycznego rozkładu ładunku. Możemy to udowodnić, korzystając z jednego z twierdzeń o powłoce z paragrafów 22.4 i 24.9 do zastąpienia danego sferycznego rozkładu ładunku przez ładunek całkowity umieszczony w środku. Wtedy możemy powtórzyć wyprowadzenie, prowadzące do wzoru (25.26), jeśli tylko nie rozważamy punktu wewnętrz danego rozkładu.

Sztuka rozwiązywania zadań

Porada 3: Obliczanie różnicy potencjałów

W celu obliczenia różnicy potencjałów ΔV między dowolnymi dwoma punktami, w polu izolowanego ładunku punktowego, na-

leży obliczyć ze wzoru (25.26) potencjał w każdym punkcie i następnie odjąć wyniki. Ze względu na to odejmowanie wartości ΔV nie zależy od wyboru energii potencjalnej odniesienia.

25.6. Potencjał pola układu ładunków punktowych

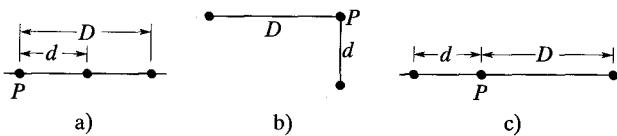
Wypadkowy potencjał układu ładunków punktowych w jakimś punkcie możemy obliczyć, korzystając z zasady superpozycji. Obliczamy oddzielnie potencjały, pochodzące od każdego ładunku w danym punkcie (przy zastosowaniu wzoru (25.26) z uwzględnieniem znaku ładunku) i następnie sumujemy te potencjały. Dla układu n ładunków wypadkowy potencjał wynosi:

$$V = \sum_{i=1}^n V_i = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^n \frac{q_i}{r_i} \quad (n \text{ ładunków punktowych}), \quad (25.27)$$

gdzie q_i jest wartością i -tego ładunku, a r_i jest odległością danego punktu od i -tego ładunku. Suma we wzorze (25.27) jest *sumą algebraiczną*, a nie sumą

wektorową, jak suma przy obliczaniu natężenia pola elektrycznego dla układu ładunków punktowych. Na tym polega przewaga rachunkowa potencjału nad natężeniem pola elektrycznego: łatwiej jest zsumować kilka wielkości skalarnych niż zsumować kilka wielkości wektorowych, dla których trzeba uwzględniać kierunki i składowe.

SPRAWDZIAN 4: Na rysunku przedstawiono trzy układy, zawierające po dwa protony. Uszereguj te układy według wypadkowego potencjału pola, tworzonego przez protony w punkcie P , zaczynając od największego.

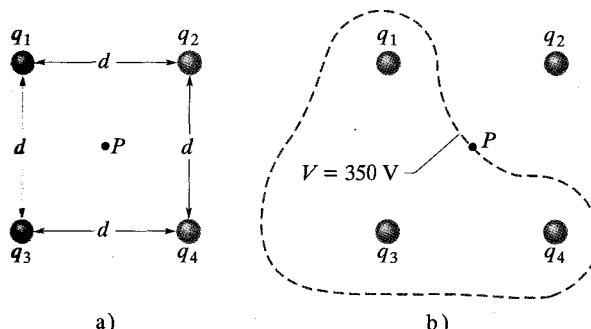


Przykład 25.3

Jaki jest potencjał elektryczny w punkcie P , znajdującym się w środku kwadratu, w którego wierzchołkach umieszczone są ładunki punktowe (rys. 25.9a)? Odległość d wynosi 1,3 m, a ładunki mają wartości:

$$q_1 = +12 \text{ nC}, \quad q_3 = +31 \text{ nC},$$

$$q_2 = -24 \text{ nC}, \quad q_4 = +17 \text{ nC}.$$



Rys. 25.9. Przykład 25.3. a) Cztery ładunki punktowe znajdują się w wierzchołkach kwadratu. b) Zamknięta krzywa jest przekrojem płaszczyzny rysunku i powierzchni ekwipotencjalnej, zawierającej punkt P . (Krzywa jest naszkicowana tylko orientacyjnie)

ROZWIĄZANIE:

○ Potencjał elektryczny V w punkcie P jest algebraiczną sumą potencjałów elektrycznych pochodzących od czterech ładunków punktowych. (Potencjał elektryczny jest skalarem, zatem nie jest ważne, który z ładunków znajduje się w którym wierzchołku). Stąd ze wzoru (25.27) mamy:

$$V = \sum_{i=1}^4 V_i = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{q_1}{r} + \frac{q_2}{r} + \frac{q_3}{r} + \frac{q_4}{r} \right).$$

Odległość r wynosi $d/\sqrt{2}$, czyli 0,919 m, a suma ładunków jest równa:

$$q_1 + q_2 + q_3 + q_4 = (12 - 24 + 31 + 17) \cdot 10^{-9} \text{ C} = 36 \cdot 10^{-9} \text{ C},$$

zatem:

$$V = \frac{(8,99 \cdot 10^9 \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{C}^2)(36 \cdot 10^{-9} \text{ C})}{0,919 \text{ m}} \approx 350 \text{ V}.$$

(odpowiedź)

W pobliżu każdego z trzech dodatnich ładunków na rysunku 25.9a potencjał ma bardzo duże wartości dodatnie. W pobliżu pojedynczego ładunku ujemnego potencjał ma bardzo duże wartości ujemne. Dlatego w kwadracie powinny znajdować się punkty, które mają taki sam potencjał, jak w punkcie P . Krzywa na rysunku 25.9b ilustruje przekrój płaszczyzny rysunku z powierzchnią ekwipotencjalną zawierającą punkt P . Dowolny punkt na tej krzywej ma taki sam potencjał, jak punkt P .

Przykład 25.4

a) Na rysunku 25.10a przedstawiono 12 elektronów (o ładunku $-e$), rozmieszczonych w jednakowych odległościach na okręgu o promieniu R . Jaki jest potencjał elektryczny i natężenie pola elektrycznego elektronów w środku C okręgu (względem $V = 0$ w nieskończoności)?

ROZWIĄZANIE:

○ 1. Potencjał elektryczny V w punkcie C jest sumą algebraiczną potencjałów elektrycznych, pochodzących od każdego elektronu. (Potencjał elektryczny jest skalarem, dlatego też miejsca elektronów nie odgrywają roli). Elektrony mają takie same ładunki $-e$ i wszystkie są umieszczone w takiej samej odległości

R od punktu C , a więc wzór (25.27) daje nam:

$$V = -12 \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e}{R}. \quad (\text{odpowiedź}) \quad (25.28)$$

2. Natężenie pola elektrycznego jest wielkością wektorową, dlatego też w tym przypadku miejsca elektronów są ważne. Ze względu na symetrię ustawienia na rysunku 25.10a wektor natężenia pola elektrycznego w punkcie C od dowolnego danego elektronu znosi się z wektorem natężenia pola od elektronu, leżącego na przeciwnym końcu średnicy i dlatego w punkcie C :

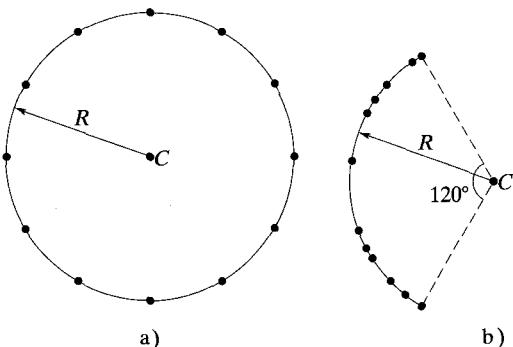
$$\vec{E} = 0. \quad (\text{odpowiedź})$$

b) Jeśli elektrony przesuniemy wzdłuż okręgu tak, że są one rozłożone nierównomiernie na łuku okręgu o kącie środkowym 120° (rys. 25.10b), to jaki będzie wtedy potencjał w punkcie C ? Jak zmieni się natężenie pola elektrycznego w punkcie C (jeśli się w ogóle zmieni)?

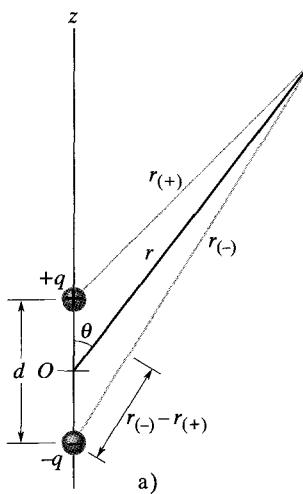
ROZWIĄZANIE:

Potencjał jest nadal opisany wzorem (25.28), ponieważ odległość od punktu C żadnego z elektronów nie uległa zmianie, a ich usta-

wienie jest nieistotne. Natężenie pola elektrycznego przestaje być równe零, ponieważ ustawienie elektronów nie jest już symetryczne. Niezerowe wypadkowe natężenie pola elektrycznego jest teraz skierowane w stronę ładunków.



Rys. 25.10. Przykład 25.4. a) Dwanaście elektronów rozłożono równomiernie na okręgu. b) Tutaj elektrony są rozmieszczone nierównomiernie na łuku tego samego okręgu



25.7. Potencjał pola dipola elektrycznego

Zastosujemy obecnie wzór (25.27) w celu obliczenia potencjału dipola elektrycznego w dowolnym punkcie P (rys. 25.11a). W punkcie P dodatni ładunek punktowy (znajdujący się w odległości $r_{(+)}$) tworzy potencjał $V_{(+)}$ i ujemny ładunek punktowy (w odległości $r_{(-)}$) tworzy potencjał $V_{(-)}$. Wypadkowy potencjał w punkcie P zgodnie ze wzorem (25.27) wynosi:

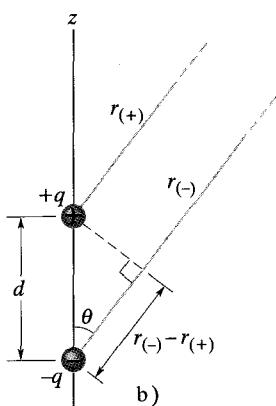
$$V = \sum_{i=1}^2 V_i = V_{(+)} + V_{(-)} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{q}{r_{(+)}} + \frac{-q}{r_{(-)}} \right) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{r_{(-)} - r_{(+)}}{r_{(-)}r_{(+)}}. \quad (25.29)$$

Dipole występujące w przyrodzie, na przykład odpowiadające wielu cząsteczkom, są całkiem małe i jesteśmy zwykle zainteresowani tylko punktami znajdującymi się w dużych odległościach od dipola, $r \gg d$, gdzie d jest odlegością między ładunkami. Przy tych warunkach z rysunku 25.11b wynikają następujące przybliżenia:

$$r_{(-)} - r_{(+)} \approx d \cos \theta \quad \text{i} \quad r_{(-)}r_{(+)} \approx r^2.$$

Jeśli podstawimy te wielkości do wzoru (25.29), to przybliżona wartość V będzie wynosić:

$$V = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{d \cos \theta}{r^2},$$



Rys. 25.11. a) Punkt P znajduje się w odległości r od środka O dipola. Prosta OP tworzy kąt θ z osią dipola. b) Jeśli punkt P znajduje się daleko od dipola, to odcinki o długościach $r_{(+)}$ i $r_{(-)}$ są w przybliżeniu równoległe do odcinka o długości r i odcinek czarnej linii przerywanej jest w przybliżeniu prostopadły do odcinka o długości $r_{(-)}$.

gdzie kąt θ jest mierzony od osi dipola jak na rysunku 25.11a. Wzór ten możemy teraz zapisać w postaci:

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{p \cos \theta}{r^2} \quad (\text{dipol elektryczny}), \quad (25.30)$$

gdzie p ($= qd$) jest wartością elektrycznego momentu dipolowego \vec{p} , zdefiniowanego w paragrafie 23.5. Wektor \vec{p} jest skierowany wzdłuż osi dipola, od ujemnego do dodatniego ładunku (dlatego też kąt θ jest mierzony od kierunku wektora \vec{p}).

SPRAWDZIAN 5: Założmy, że wybraliśmy trzy punkty w równych (dużych) odległościach r od środka dipola z rysunku 25.11: punkt a znajduje się na osi dipola, powyżej ładunku dodatniego, punkt b znajduje się na osi dipola, poniżej ładunku ujemnego i punkt c znajduje się w płaszczyźnie prostopadłej do dipola, przechodzącej przez środek dipola. Uszereguj punkty według odpowiadających im wartości potencjału elektrycznego dipola, zaczynając od największej dodatniej.

Indukowany moment dipolowy

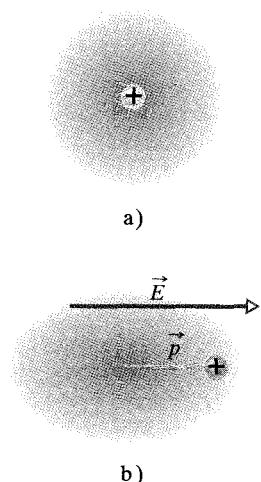
Wiele cząsteczek, na przykład cząsteczka wody, ma *trwały* elektryczny moment dipolowy. Dla innych cząsteczek (zwanych *cząsteczkami niepolarnymi*) i dla każdego odosobnionego atomu środki ładunku dodatniego i ujemnego pokrywają się (rys. 25.12a) i stąd nie powstaje żaden moment dipolowy. Jeśli jednak umieścimy atom lub cząsteczkę niepolarną w zewnętrznym polu elektrycznym, to pole odkształca orbity elektronu i rozsuwa środki ładunku dodatniego i ujemnego (rys. 25.12b). Elektrony są naładowane ujemnie, a więc ulegają przesunięciu w kierunku przeciwnym do kierunku natężenia pola. To przesunięcie prowadzi do powstania momentu dipolowego \vec{p} , skierowanego w kierunku natężenia pola. Taki moment dipolowy nazywamy *indukowanym* przez pole, a o atomie lub cząsteczce mówimy, że są *spolaryzowane* przez pole (jedna część jest naładowana dodatnio, a druga ujemnie). Gdy usuniemy pole, indukowany moment dipolowy i polaryzacja znikną.

25.8. Potencjał pola ładunku o ciągłym rozkładzie

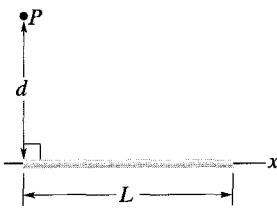
Jeśli rozkład ładunku q jest ciągły (jak np. dla jednorodnie naładowanego cienkiego pręta czy tarczy), to nie możemy zastosować sumowania ze wzoru (25.27) w celu obliczenia potencjału V w punkcie P . Zamiast tego musimy wybrać nieukończenie mały element ładunku dq , określić potencjał dV , wytworzony przez dq w punkcie P i potem scałkować go po całym rozkładzie ładunku.

Przymijmy ponownie, że potencjał jest równy零 w nieskończoności. Jeśli potraktujemy element ładunku dq jako ładunek punktowy, to możemy skorzystać ze wzoru (25.26), w celu wyrażenia potencjału dV , wytworzonego przez dq w punkcie P :

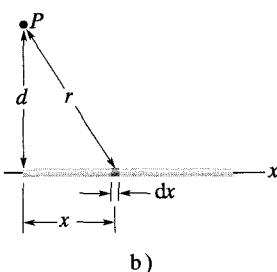
$$dV = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq}{r} \quad (\text{dodatnie lub ujemne } dq), \quad (25.31)$$



Rys. 25.12. a) Atom z dodatnio naładowanym jądrem (kolor zielony) i ujemnie naładowanymi elektronami (kolor złoty cieniowany). Środki ładunku dodatniego i ujemnego się pokrywają. b) Jeśli atom znajdzie się w zewnętrznym polu elektrycznym o natężeniu \vec{E} , to orbity elektronów ulegną takiemu odkształceniowi, że środki ładunku dodatniego i ujemnego przestaną się pokrywać. Pojawia się indukowany moment dipolowy \vec{p} . Odkształcenie zostało tu wyobrażone.



a)



b)

Rys. 25.13. a) Cienki, jednorodnie naładowany pręt wytworza potencjał elektryczny V w punkcie P . b) Element ładunku wytworza potencjał dV w punkcie P

gdzie r jest odległością między P i dq . W celu znalezienia całkowitego potencjału V w punkcie P , obliczamy całkę, aby zsumować potencjały wytworzone przez wszystkie elementy ładunku

$$V = \int dV = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{dq}{r}. \quad (25.32)$$

Całkę należy obliczyć po całym rozkładzie ładunku. Zauważ, że nie ma potrzeby rozważania we wzorze (25.32) żadnych składowych wektora, gdyż potencjał elektryczny jest skalarem.

Zbadamy teraz dwa ciągłe rozkładы ładunku: naładowaną linię i naładowaną tarczę.

Naładowana linia

Na rysunku 25.13a przedstawiono cienki, nieprzewodzący pręt o długości L , naładowany jednorodnie dodatnio z gęstością liniową λ . Określmy potencjał elektryczny V , wytworzony przez pręt w punkcie P , leżącym na prostej prostopadłej do pręta przechodzącej przez jego lewy koniec i odległym od lewego końca o d .

Rozważmy element dx pręta (rys. 25.13b). Ten (i każdy inny) element pręta ma ładunek:

$$dq = \lambda dx \quad (25.33)$$

i wytworza potencjał elektryczny dV w punkcie P , który znajduje się w odległości $r = (x^2 + d^2)^{1/2}$ od elementu. Traktując element jak ładunek punktowy, możemy skorzystać ze wzoru (25.31) do napisania potencjału dV w postaci:

$$dV = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq}{r} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda dx}{(x^2 + d^2)^{1/2}}. \quad (25.34)$$

Ladunek w pręcie jest dodatni i wybraliśmy $V = 0$ w nieskończoności; z paragrafu 25.5 wnioskujemy zatem, że potencjał dV we wzorze (25.34) musi być dodatni.

Znajdziemy teraz całkowity potencjał V , wytworzony przez pręt w punkcie P , przez scałkowanie wzoru (25.34) wzdłuż pręta, od $x = 0$ do $x = L$, z zastosowaniem całki 17 z dodatku E. Otrzymujemy:

$$\begin{aligned} V &= \int dV = \int_0^L \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda}{(x^2 + d^2)^{1/2}} dx \\ &= \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \int_0^L \frac{dx}{(x^2 + d^2)^{1/2}} \\ &= \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \left[\ln(x + (x^2 + d^2)^{1/2}) \right]_0^L \\ &= \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \left[\ln(L + (L^2 + d^2)^{1/2}) - \ln d \right]. \end{aligned}$$

Wynik ten możemy uprościć, stosując związek $\ln A - \ln B = \ln A/B$. Ostatecznie otrzymujemy:

$$V = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \ln \left[\frac{L + (L^2 + d^2)^{1/2}}{d} \right]. \quad (25.35)$$

Potencjał V jest sumą dodatnich wartości dV , a więc powinien być dodatni, ale czy wzór (25.35) daje dodatnie wartości V ? Argument logarytmu jest większy od jedności, więc logarytm jest liczbą dodatnią, zatem i potencjał V jest dodatni.

Naładowana tarcza

W paragrafie 23.7 obliczyliśmy wartość natężenia pola elektrycznego w punktach leżących na osi symetrii, prostopadłej do plastikowej tarczy o promieniu R , naładowanej jednorodnie powierzchniowo, z gęstością σ na jednej (np. górnej) powierzchni. Wyprowadzimy teraz wyrażenie na potencjał elektryczny $V(z)$ w dowolnym punkcie leżącym na osi symetrii.

Rozważmy nieskończoność mały element składający się z płaskiego pierścienia o promieniu R' i szerokości radialnej dR' (rys. 25.14). Ładunek pierścienia wynosi:

$$dq = \sigma(2\pi R')(dR'),$$

gdzie $2\pi R'dR'$ jest polem górnej powierzchni pierścienia. Wszystkie części tego naładowanego elementu znajdują się w takiej samej odległości r od punktu P na osi tarczy. Korzystając z rysunku 25.14, możemy zastosować wzór (25.31) w celu napisania przyczynku do potencjału elektrycznego w punkcie P , pochodzącego od tego pierścienia:

$$dV = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq}{r} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\sigma(2\pi R')(dR')}{\sqrt{z^2 + R'^2}}. \quad (25.36)$$

Wypadkowy potencjał w punkcie P znajdujemy przez dodanie (scałkowanie) przyczynków od wszystkich pierścieni, od $R' = 0$ do $R' = R$:

$$V = \int dV = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \int_0^R \frac{R'dR'}{\sqrt{z^2 + R'^2}} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} (\sqrt{z^2 + R^2} - z). \quad (25.37)$$

Zauważ, że zmienną w drugiej całce we wzorze (25.37) jest R' , a nie współrzędna z , która pozostaje stała przy całkowaniu po powierzchni tarczy. (Przy obliczaniu całki założyliśmy dodatkowo, że $z \geq 0$).

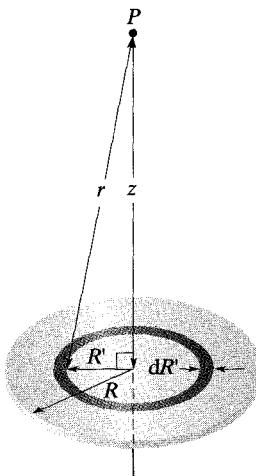
Sztuka rozwiązywania zadań

Poradka 4: Kłopoty ze znakami potencjału elektrycznego

Gdy obliczamy potencjał V od naładowanej linii czy dowolnego innego ciągłego rozkładu ładunku w pewnym punkcie P , mogą zdarzyć się kłopoty ze znakiem. Oto przepis, pozwalający właściwie ustalić znak.

Jeśli ładunek jest ujemny, to czy symbole dq i λ powinny reprezentować wielkości ujemne, czy też powinniśmy wyraźnie wskazać znaki, pisząc $-dq$ i $-\lambda$? Można stosować obie metody, ale trzeba pamiętać znaczenie wybranej postaci zapisu, aby móc w wyniku końcowym poprawnie interpretować znak V .

Gdy cały rozkład ładunku ma jednakowy znak, można przyjąć, że symbole dq i λ reprezentują tylko wartości bezwzględne. Wynik obliczeń daje tylko wartość bezwzględną potencjału V

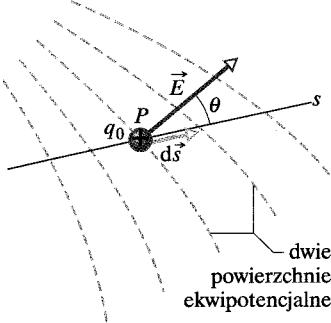


Rys. 25.14. Plastikowa tarcza o promieniu R jest jednorodnie naładowana na górnej powierzchni z gęstością powierzchniową ładunku σ . Chcemy znaleźć potencjał V w punkcie P na osi tarczy

w punkcie P i trzeba dodać znak przy V , zależnie od znaku ładunku. (Jeśli potencjał jest równy zeru w nieskończoności, to dodatni ładunek daje potencjał dodatni, a ładunek ujemny daje potencjał ujemny).

Jeśli przypadkowo zamienimy granice całkowania przy obliczaniu potencjału, to otrzymamy przeciwną wartość V . Wartość będzie poprawna po odrzuceniu znaku minus, a właściwy znak V należy ustalić, znając znak ładunku. Na przykład, otrzymalibyśmy znak minus we wzorze (25.35), jeśli zamienilibyśmy granice całkowania. Powinniśmy wtedy pominąć znak i zauważyc, że potencjał jest dodatni, ponieważ wytwarzający go ładunek jest dodatni.

25.9. Obliczanie natężenia pola na podstawie potencjału



Rys. 25.15. Ładunek próbny q_0 przesuwa się o $d\vec{s}$ z jednej powierzchni ekwipotencjalnej na drugą. (Odległość między powierzchniami została powiększona dla lepszego efektu). Przesunięcie $d\vec{s}$ tworzy kąt θ z kierunkiem natężenia pola elektrycznego \vec{E} .

W paragrafie 25.4 opisywaliśmy, jak znaleźć potencjał w punkcie końcowym, jeśli znamy natężenie pola elektrycznego wzdłuż toru od punktu odniesienia do punktu końcowego. W tym paragrafie postąpimy odwrotnie, będziemy obliczać natężenie pola elektrycznego, gdy znamy potencjał elektryczny. Jak pokazano na rysunku 25.3, rozwiązanie graficzne tego problemu jest proste. Jeśli znamy potencjał V we wszystkich punktach w pobliżu układu ładunków, to możemy narysować zbiór powierzchni ekwipotencjalnych. Linie pola elektrycznego, narysowane prostopadle do tych powierzchni ujawniają zmienność natężenia \vec{E} . Chcemy teraz znaleźć matematyczny równoważnik tej procedury graficznej.

Na rysunku 25.15 przedstawiono przekrój zbioru leżących blisko siebie powierzchni ekwipotencjalnych o różnicy potencjałów dV między każdą parą sąsiednich powierzchni. Zgodnie z rysunkiem natężenie pola \vec{E} w dowolnym punkcie P jest prostopadłe do powierzchni ekwipotencjalnej, przechodzącej przez punkt P .

Załóżmy, że dodatni ładunek próbny q_0 przesuwa się o $d\vec{s}$ z jednej powierzchni ekwipotencjalnej na sąsiednią. Ze wzoru (25.7) wynika, że praca pola elektrycznego nad ładunkiem próbnym podczas tego przemieszczenia wynosi $-q_0 dV$. Ze wzoru (25.16) i rysunku 25.15 wynika, że praca ta może być także zapisana w postaci iloczynu skalarnego $q_0 \vec{E} \cdot d\vec{s}$, czyli $q_0 E \cos \theta ds$. Przyrównując te dwa wyrażenia dla pracy, otrzymujemy:

$$-q_0 dV = q_0 E \cos \theta ds, \quad (25.38)$$

czyli:

$$E \cos \theta = -\frac{dV}{ds}. \quad (25.39)$$

Ponieważ $E \cos \theta$ jest składową natężenia \vec{E} w kierunku przemieszczenia $d\vec{s}$, to wzór (25.39) można zapisać w postaci:

$$E_s = -\frac{\partial V}{\partial s}. \quad (25.40)$$

Dodaliśmy tu wskaźnik przy E i przeszliśmy do symboli pochodnej cząstkowej, aby podkreślić, że wzór (25.40) zawiera tylko zmianę potencjału V wzdłuż szczególnej osi (tu osi s) i tylko składową natężenia \vec{E} wzdłuż tej osi. Wzór (25.40) (który jest w istocie odwrotnością wzoru (25.18)) można wyrazić słowami w następujący sposób:

Składowa natężenia \vec{E} w dowolnym kierunku jest wziętym ze znakiem minus stosunkiem zmiany potencjału elektrycznego przy przemieszczeniu w tym kierunku, do wartości tego przemieszczenia.

Jeśli wybierzemy jako os s kolejno osie x , y i z , to znajdziemy, że odpowiadające im składowe natężenia \vec{E} wynoszą:

$$E_x = -\frac{\partial V}{\partial x}, \quad E_y = -\frac{\partial V}{\partial y}, \quad E_z = -\frac{\partial V}{\partial z}. \quad (25.41)$$

Jeśli więc znamy V dla wszystkich punktów w obszarze wokół rozkładu ładunku, czyli jeśli znamy funkcję $V(x, y, z)$, to możemy znaleźć składowe natężenia \vec{E} (i stąd samo \vec{E}) w dowolnym punkcie, przez obliczenie pochodnych cząstkowych potencjału.

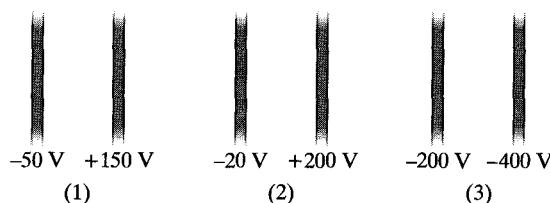
W prostym przypadku, gdy pole elektryczne jest jednorodne, wzór (25.40) przyjmuje postać:

$$E = -\frac{\Delta V}{\Delta s}, \quad (25.42)$$

gdzie oś s jest prostopadła do powierzchni ekwipotencjalnych. Składowa natężenia pola elektrycznego jest równa零 w dowolnym kierunku równoległym do powierzchni ekwipotencjalnych.

SPRAWDZIAN 6: Na rysunku przedstawiono trzy pary równoległych płyt w jednokowej odległości i potencjał każdej płyty. Pole elektryczne między płytami jest jednorodne i jego natężenie jest do nich prostopadłe. a) Uszereguj pary według wartości natężenia pola między płytami, zaczynając od największej. b) Dla której pary natężenie pola elektrycznego jest skierowane w prawo? c) Jeśli w połowie odległości między trzecią parą płyt zostanie uwolniony elektron, to czy

tam pozostanie, będzie poruszał się w prawo ze stałą prędkością, będzie poruszał się w lewo ze stałą prędkością, będzie przyspieszał w prawo, czy będzie przyspieszał w lewo?



Przykład 25.5

Potencjał elektryczny w dowolnym punkcie na osi symetrii prostopadłej do jednorodnie naładowanej tarczy jest określony wzorem (25.37):

$$V = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} (\sqrt{z^2 + R^2} - z).$$

Wychodząc z tego wzoru, wyprowadź wzór na natężenie pola elektrycznego w dowolnym punkcie na osi tarczy.

ROZWIAZANIE:

Chcemy obliczyć natężenie pola elektrycznego \vec{E} , w zależności od odległości z wzdłuż osi tarczy. Dla dowolnej wartości z natężenie

\vec{E} musi być skierowane wzdłuż tej osi, ponieważ tarcza ma symetrię obrotową względem niej. Wobec tego potrzebujemy obliczyć składową E_z natężenia \vec{E} w kierunku osi z . Ta składowa jest wziętą ze znakiem minus pochodną cząstkową potencjału elektrycznego względem odległości z . Korzystając z ostatniego równania we wzorze (25.41), możemy napisać:

$$E_z = -\frac{\partial V}{\partial z} = -\frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \frac{d}{dz}(\sqrt{z^2 + R^2} - z) \\ = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \left(1 - \frac{z}{\sqrt{z^2 + R^2}}\right). \quad (\text{odpowiedź})$$

Jest to identyczne wyrażenie, jak wyprowadzone przez całkowanie w paragrafie 23.7, przy zastosowaniu prawa Coulomba.

25.10. Elektryczna energia potencjalna układu ładunków punktowych

W paragrafie 25.1 przedyskutowaliśmy elektryczną energię potencjalną naładowanej cząstki, gdy działa na nią siła elektrostatyczna. Założyliśmy wtedy, że ładunki wytwarzające pole znajdują się w ustalonych punktach, tak że ani siła,

ani odpowiadające jej natężenie pola elektrycznego nie mogą zostać zmienione przez obecność ładunku punktowego. W tym paragrafie znajdziemy elektryczną energię potencjalną *układu* ładunków, odpowiadającą polu elektrycznemu wytwarzonemu przez te ładunki.

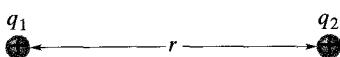
Dla prostego przykładu założymy, że zbliżamy do siebie dwa ciała, które mają ładunki o tym samym znaku. Praca, jaką musimy wykonać, jest zmagazynowana w postaci elektrycznej energii potencjalnej w układzie dwóch ciał (zakładając, że energia kinetyczna ciał nie ulega zmianie). Jeśli następnie uwolnimy ładunki, to możemy odzyskać tę zmagazynowaną energię, w całości lub w części, w postaci energii kinetycznej naładowanych ciał, gdyż będą się one od siebie oddalały.

Elektryczną energię potencjalną *układu ładunków punktowych*, utrzymywanych w ustalonych miejscach przez jakieś siły, definiujemy następująco:

► Elektryczna energia potencjalna układu unieruchomionych ładunków punktowych jest równa pracy, jaką musi wykonać siła zewnętrzna, aby utworzyć ten układ, przenosząc każdy ładunek z nieskończonej odległości.

Zakładamy, że ładunki są nieruchome zarówno w początkowej konfiguracji, gdy znajdują się w nieskończonej odległości, jak i w końcowej, gdy są skupione w układzie.

Na rysunku 25.16 przedstawiono dwa ładunki punktowe q_1 i q_2 , znajdujące się w odległości r od siebie



Rys. 25.16. Dwa ładunki, znajdujące się w odległości r od siebie

Pracę tę możemy obliczyć, korzystając ze wzoru (25.8), opuszczając znak minus (tak, że wzór określa pracę, jaką *my* wykonujemy, a nie pracę pola) i podstawiając q_2 zamiast q . Wtedy nasza praca jest równa $q_2 V$, gdzie V jest potencjałem, wytworzonym przez ładunek q_1 w punkcie, w którym umieszczamy ładunek q_2 . Ze wzoru (25.26) ten potencjał jest równy:

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1}{r}.$$

Stąd z naszej definicji elektryczna energia potencjalna pary ładunków punktowych z rysunku 25.16 wynosi:

$$E_p = W = q_2 V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r}. \quad (25.43)$$

Jeśli ładunki mają ten sam znak, to musimy wykonać dodatnią pracę przy ich zbliżaniu do siebie, ze względu na ich wzajemne odpychanie. Stąd zgodnie ze wzorem (25.43) energia potencjalna układu jest wtedy dodatnia. Jeśli ładunki mają przeciwnie znaki, to musimy wykonać ujemną pracę przy ich zbliżaniu,

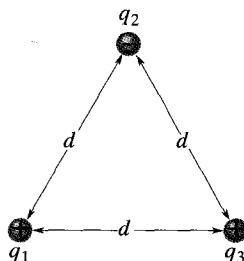
ze względem na ich przyciąganie się, jeśli w końcu mają być one nieruchome. Energia potencjalna układu jest wtedy ujemna. Z przykładu 25.6 wynika sposób rozszerzania tego rozumowania na więcej niż dwa ładunki.

Przykład 25.6

Na rysunku 25.17 przedstawiono trzy ładunki punktowe, utrzymywane w swych położeniach przez nie pokazane siły. Jaka jest elektryczna energia potencjalna E_p tego układu ładunków? Przyjmijmy, że $d = 12 \text{ cm}$ i że:

$$q_1 = +q, \quad q_2 = -4q \quad \text{i} \quad q_3 = 2q,$$

gdzie $q = 150 \text{ nC}$.



Rys. 25.17. Przykład 25.6. Trzy ładunki znajdują się w wierzchołkach trójkąta równobocznego

ROZWIĄZANIE:

O Energia potencjalna E_p układu jest równa pracy, jaką musimy wykonać przy tworzeniu układu, przesuwając każdy ładunek z nieskończoności. Spróbujmy więc w myśl zbudować układ z rysunku 25.17, zaczynając od jednego z ładunków punktowych, powiedzmy q_1 , na właściwym miejscu i pozostałych w nieskończoności. Następnie przesuwamy inny ładunek, powiedzmy q_2 , z nieskończoności na odpowiadające mu miejsce. Ze wzoru (25.43),

po podstawieniu d zamiast r , energia potencjalna E_{p12} , związana z parą ładunków punktowych q_1 i q_2 wynosi:

$$E_{p12} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{d}.$$

Następnie przenosimy ostatni ładunek punktowy q_3 z nieskończoności na jego miejsce. Praca, jaką musimy wykonać w tym ostatnim kroku, jest równa sumie pracy przy zbliżaniu q_3 do q_1 i pracy przy zbliżaniu q_3 do q_2 . Ze wzoru (25.43), po podstawieniu d zamiast r , suma ta wynosi:

$$W_{13} + W_{23} = E_{p13} + E_{p23} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_3}{d} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_2 q_3}{d}.$$

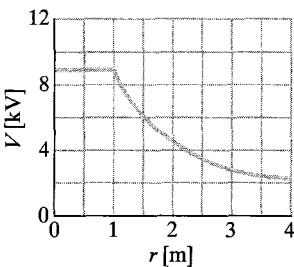
Całkowita energia potencjalna E_p układu trzech ładunków jest sumą energii potencjalnych, związanych z trzema parami ładunków. Ta suma (która jest niezależna od kolejności skupiania ładunków) wynosi:

$$\begin{aligned} E_p &= E_{p12} + E_{p13} + E_{p23} \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{(+q)(-4q)}{d} + \frac{(+q)(+2q)}{d} + \frac{(-4q)(+2q)}{d} \right) \\ &= -\frac{10q^2}{4\pi\epsilon_0 d} = -\frac{(8,99 \cdot 10^9 \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{C}^2)(10)(150 \cdot 10^{-9} \text{ C})^2}{0,12 \text{ m}} \\ &= -1,7 \cdot 10^{-2} \text{ J} = -17 \text{ mJ}. \end{aligned} \quad (\text{odpowiedź})$$

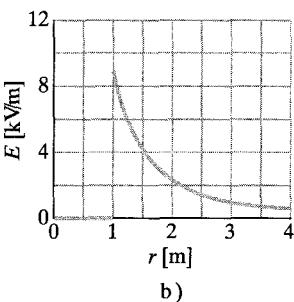
Ujemna energia potencjalna oznacza, że utworzenie układu wymaga wykonania ujemnej pracy, rozpoczynając od trzech ładunków w nieskończonych od siebie odległościach. Mówiąc inaczej, siła zewnętrzna musi wykonać 17 mJ pracy, aby rozdzielić całkowicie układ, kończąc na trzech ładunkach w nieskończonych od siebie odległościach.

25.11. Potencjał izolowanego naładowanego przewodnika

W paragrafie 24.6 doszliśmy do wniosku, że we wszystkich punktach wewnętrznych izolowanego przewodnika natężenie $\vec{E} = 0$. Zastosowaliśmy następnie prawo Gaussa, aby udowodnić, że ładunek nadmiarowy na odizolowanym przewodniku leży całkowicie na jego powierzchni. (Jest to prawda nawet wtedy, gdy przewód ma pustą wnękę). Teraz zastosujemy pierwszy z tych faktów, aby udowodnić ogólniejszą postać drugiego:



a)



b)

Rys. 25.18. a) Wykres potencjału $V(r)$ wewnętrz i na zewnątrz naładowanej sferycznej powłoki o promieniu 1 m.
b) Wykres natężenia $E(r)$ dla tej samej powłoki

► Nadmiar ładunku umieszczony na izolowanym przewodniku rozkłada się na powierzchni tego przewodnika tak, że wszystkie punkty przewodnika — zarówno wewnętrz, jak i na powierzchni — uzyskują ten sam potencjał. Jest to prawda nawet wtedy, gdy przewodnik ma wnękę i nawet, jeśli ta wnęka zawiera niezerowy ładunek wypadkowy.

Nasz dowód wynika natychmiast ze wzoru (25.18), który ma postać:

$$V_{\text{końc}} - V_{\text{pocz}} = - \int_{\text{pocz}}^{\text{końc}} \vec{E} \cdot d\vec{s}.$$

Ponieważ $\vec{E} = 0$ dla wszystkich punktów w przewodniku, to otrzymujemy bezpośrednio $V_{\text{końc}} = V_{\text{pocz}}$ dla wszystkich możliwych par punktów początkowego i końcowego w przewodniku.

Na rysunku 25.18a przedstawiono wykres potencjału, w zależności od odległości od środka izolowanej, sferycznej, przewodzącej powłoki o promieniu 1 m i ładunku $1 \mu\text{C}$. Dla punktów poza powłoką możemy obliczyć $V(r)$ ze wzoru (25.26), ponieważ ładunek q zachowuje się dla zewnętrznych punktów tak, jakby był skupiony w środku powłoki. Ten wzór jest słuszny aż do powierzchni powłoki. Teraz przesuniemy mały ładunek próbny przez powłokę — zakładając, że istnieje mały otworek — do jej środka. Nie jest potrzebna do tego żadna praca, ponieważ wewnętrz powłoki na ładunek próbny nie działa żadna wypadkowa siła elektrostatyczna. Stąd potencjał we wszystkich punktach wewnętrz powłoki ma taką samą wartość, jak na powierzchni, co przedstawiono na rysunku 25.18a.

Na rysunku 25.18b przedstawiono wykres natężenia pola elektrycznego, w zależności od odległości dla tej samej powłoki. Zauważ, że $E = 0$ w każdym punkcie wewnętrz powłoki. Krzywe z rysunku 25.18b można narysować na podstawie krzywej, przedstawionej na rysunku 25.18a, różniczkując ją względem r i stosując wzór (25.40) (dla przypomnienia, pochodna dowolnej stałej jest równa零). Krzywą z rysunku 25.18a można narysować na podstawie krzywych, przedstawionych na rysunku 25.18b, wykonując całkowanie względem r , i stosując wzór (25.19).

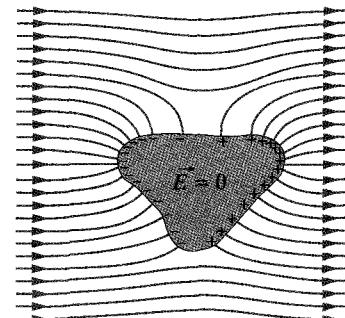
Na przewodnikach niesferycznych ładunek powierzchniowy nie rozkłada się jednorodnie na powierzchni przewodnika. Na ostrzach lub krawędziach gęstość powierzchniowa ładunku — i stąd natężenie pola elektrycznego w ich pobliżu, które jest do niej proporcjonalne — może osiągać bardzo duże wartości. Powietrze wokół takich ostrzy może zostać zjonizowane, tworząc wyładowanie koronowe, które golflści i alpinisi widują na końcach gałązek krzewów, końcach kijów golfowych i szczytach skał, gdy zbliża się burza z piorunami. Takie wyładowania koronowe, podobnie jak podnoszenie się włosów, są często zwiastunami uderzeń piorunów. W takich okolicznościach rozsądnie jest zamknąć się we wnęce wewnętrz przewodzącej powłoki, gdzie zagwarantowane jest zerowe natężenie pola elektrycznego. Samochód (jeśli tylko nie ma plastikowej karoserii lub składanego dachu) jest do tego celu prawie idealny (rys. 25.19).

Jeśli izolowany przewodnik umieścimy w zewnętrzny polu elektrycznym, jak na rysunku 25.20, to wszystkie punkty przewodnika nadal mają jednakowy potencjał, bez względu na to, czy przewodnik ma nadmiarowy ładunek. Swo-

badne elektryny przewodnictwa rozkładają się na powierzchni w ten sposób, że wytwarzane przez nie pole elektryczne w punktach wewnętrz przewodnika znosi zewnętrzne pole elektryczne, które w przeciwnym przypadku tam by się wytworzyło. Co więcej, rozkład elektronów powoduje, że wypadkowe natężenie pola elektrycznego we wszystkich punktach na powierzchni jest do niej prostopadłe. Jeśli przewodnik z rysunku 25.20 zostałby w jakiś sposób usunięty, lecz pozostałyby ładunki powierzchniowe, to rozkład natężenia pola elektrycznego pozostałby całkowicie bez zmian, zarówno wewnętrz, jak i na zewnątrz.



Rys. 25.19. Duża iskra uderza w karoserię samochodu i przehodzi do ziemi przez izolującą lewą przednią oponę (można tam dostrzec błysk). Osoba w samochodzie pozostaje nietknięta



Rys. 25.20. Nienaloadowany przewodnik umieszczono w zewnętrznym polu elektrycznym. Swobodne elektryny w przewodniku rozkładają się na powierzchni tak, aby zredukować do zera wypadkowe natężenie pola elektrycznego wewnętrz przewodnika i wytworzyć wypadkowe natężenie pola na powierzchni, prostopadłe do niej

Podsumowanie

Elektryczna energia potencjalna Zmiana ΔE_p elektrycznej energii potencjalnej E_p ładunku punktowego, przy jego przesunięciu z punktu początkowego do punktu końcowego w polu elektrycznym wynosi:

$$\Delta E_p = E_{p \text{ końc}} - E_{p \text{ pocz}} = -W, \quad (25.1)$$

gdzie W jest pracą, wykonaną przez siłę elektrostatyczną (związaną z polem elektrycznym) nad ładunkiem punktowym, przy przesunięciu z punktu początkowego do punktu końcowego. Jeśli energia potencjalna jest zdefiniowana tak, że jest równa零 dla ładunku w nieskończoności, to **elektryczna energia potencjalna** E_p ładunku punktowego w danym punkcie wynosi:

$$E_p = -W_\infty, \quad (25.2)$$

gdzie W_∞ jest pracą, wykonaną przez siłę elektrostatyczną nad ładunkiem punktowym, przy przesunięciu go z nieskończoności do rozważanego punktu.

Różnica potencjałów elektrycznych i potencjał elektryczny Różnicę potencjałów ΔV między punktami początkowym i końcowym w polu elektrycznym definiujemy wzorem:

$$\Delta V = V_{\text{konc}} - V_{\text{pocz}} = -\frac{W}{q}, \quad (25.7)$$

gdzie q jest ładunkiem cząstki, nad którą przez pole jest wykonywana praca. **Potencjał** w punkcie wynosi:

$$V = -\frac{W_\infty}{q}. \quad (25.8)$$

Jednostką potencjału w układzie SI jest **wolt**: 1 wolt = 1 dżul na kulomb (1 V = 1 J/C).

Potencjał i różnicę potencjałów można także zapisać, korzystając z elektrycznej energii potencjalnej E_p cząstki o ładunku q w polu elektrycznym:

$$V = \frac{E_p}{q}, \quad (25.5)$$

$$\Delta V = V_{\text{końc}} - V_{\text{pocz}} = \frac{E_p \text{ końc}}{q} - \frac{E_p \text{ pocz}}{q} = \frac{\Delta E_p}{q}. \quad (25.6)$$

Powierzchnie ekwipotencjalne Wszystkie punkty na powierzchni ekwipotencjalnej mają taki sam potencjał elektryczny. Praca wykonana nad ładunkiem próbnym przy przesuwaniu go z jednej takiej powierzchni na drugą jest niezależna od położenia punktów początkowego i końcowego na tych powierzchniach i drogi, po jakiej przesunięto ładunek. Natężenie pola elektrycznego \vec{E} jest zawsze skierowane prostopadle do powierzchni ekwipotencjalnych.

Obliczanie V na podstawie \vec{E} . Różnica potencjałów elektrycznych między dwoma punktami początkowym i końcowym wynosi:

$$V_{\text{końc}} - V_{\text{pocz}} = - \int_{\text{pocz}}^{\text{końc}} \vec{E} \cdot d\vec{s}, \quad (25.18)$$

gdzie całkę obliczamy po dowolnym torze łączącym te punkty. Jeśli wybierzemy $V_{\text{pocz}} = 0$, to dla potencjału w danym punkcie mamy:

$$V = - \int_{\text{pocz}}^{\text{końc}} \vec{E} \cdot d\vec{s}. \quad (25.19)$$

Potencjał pola ładunków punktowych Potencjał elektryczny pola pojedynczego ładunku punktowego, w odległości r od tego ładunku wynosi:

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r}. \quad (25.26)$$

Potencjał V ma taki sam znak, jak ładunek q . Potencjał pola, wytworzonygo przez układ ładunków punktowych wynosi:

$$V = \sum_{i=1}^n V_i = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^n \frac{q_i}{r_i}. \quad (25.27)$$

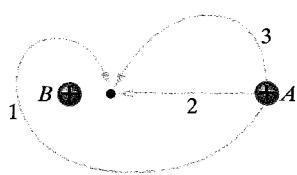
Potencjał pola dipola elektrycznego W odległości r od dipola elektrycznego o wartości elektrycznego momentu dipolowego $p = qd$, potencjał elektryczny dipola wynosi:

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{p \cos \theta}{r^2} \quad (25.30)$$

dla $r \gg d$, kąt θ jest zdefiniowany na rysunku 25.11.

Pytania

1. Na rysunku 25.21 przedstawiono trzy tory, wzdłuż których możemy zbliżać dodatnio naładowaną kulę A do dodatnio naładowanej kuli B , która jest nieruchoma. a) Czy kula A jest przesuwana w stronę większego, czy mniejszego potencjału elektrycznego? Czy praca wykonana: b) przez nas, c) przez pole elektryczne (wytwarzane przez



Rys. 25.21. Pytanie 1

Potencjał pola wytworzonego przez ładunek o ciągłym rozkładzie Dla ciągłego rozkładu ładunku wzór (25.27) przyjmuje postać:

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{dq}{r}, \quad (25.32)$$

gdzie całkę obliczamy po całym rozkładzie.

Obliczanie \vec{E} na podstawie V Składowa natężenia \vec{E} w dowolnym kierunku, jest wzięta z ujemnym znakiem pochodną potencjału względem przemieszczenia w tym kierunku:

$$E_s = - \frac{\partial V}{\partial s}. \quad (25.40)$$

Składowe E_x , E_y i E_z natężenia \vec{E} można wyznaczyć ze wzorów:

$$E_x = - \frac{\partial V}{\partial x}, \quad E_y = - \frac{\partial V}{\partial y}, \quad E_z = - \frac{\partial V}{\partial z}. \quad (25.41)$$

Dla pola jednorodnego o natężeniu \vec{E} wzór (25.40) upraszcza się do postaci:

$$E = - \frac{\Delta V}{\Delta s}, \quad (25.42)$$

gdzie przesunięcie s jest prostopadłe do powierzchni ekwipotencjalnych. Natężenie pola elektrycznego w kierunku równoległym do powierzchni ekwipotencjalnej jest równe zeru.

Elektryczna energia potencjalna układu ładunków punktowych Elektryczna energia potencjalna układu ładunków punktowych jest równa pracy, potrzebnej do utworzenia układu ładunków, będących początkowo w spoczynku i w nieskończonej odległości od siebie. Dla dwóch ładunków w odległości r mamy:

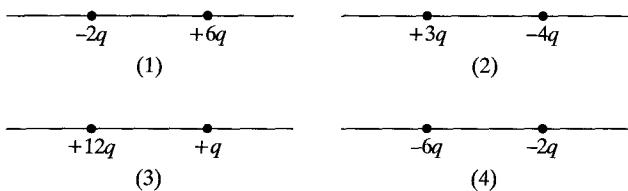
$$E_p = W = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r}. \quad (25.43)$$

Potencjał naładowanego przewodnika Nadmiarowy ładunek, znajdujący się na przewodniku, będzie w stanie równowagi rozłożony w całości na zewnętrznej powierzchni przewodnika. Ładunek rozłoży się w taki sposób, że cały przewodnik, włącznie z punktami, które znajdują się wewnątrz niego, ma taki sam potencjał.

drugą kulę) jest dodatnia, ujemna, czy równa零? d) Uszereguj tory według pracy, wykonanej przez nas, zaczynając od największej.

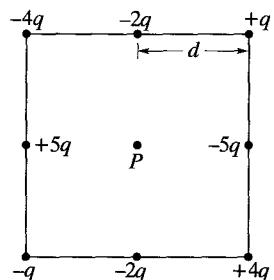
2. Na rysunku 25.22 przedstawiono cztery pary naładowanych cząstek. Załącz, że potencjał $V = 0$ w nieskończoności. Dla których par istnieje inny punkt o zerowym wypadkowym potencjałe elektrycznym na narysowanej osi: a) między cząstkom, b) na prawo od nich? c) Jeśli taki punkt zerowego potencjału istnieje, to czy natężenie wypadkowego pola elektrycznego \vec{E} , wytwarzanego przez cząstki w tym punkcie jest równe zero? d) Czy dla

poszczególnych par istnieją punkty poza osią (oczywiście inne niż w nieskończoności), gdzie $V = 0$?



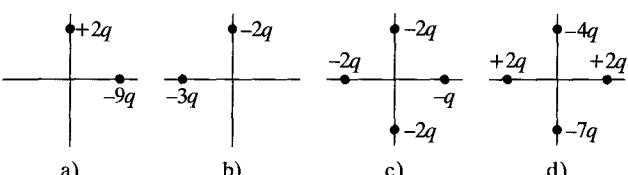
Rys. 25.22. Pytanie 2 i 8

3. Na rysunku 25.23 przedstawiono kwadrat, na którego bokach znajdują się naładowane cząstki, przy czym odległość między sąsiednimi cząstkom wynosi d . Jaki jest potencjał elektryczny w punkcie P w środku kwadratu, jeśli potencjał elektryczny w nieskończoności wynosi零?



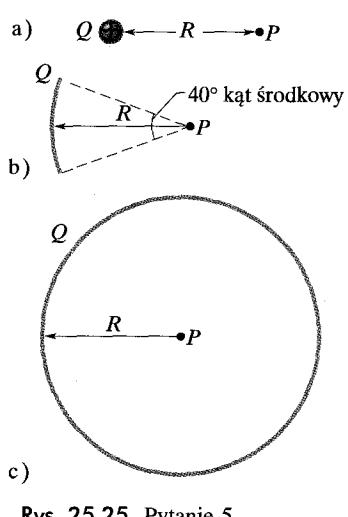
Rys. 25.23. Pytanie 3

4. Na rysunku 25.24 przedstawiono cztery układy naładowanych cząstek, znajdujących się w takiej samej odległości od początku układu współrzędnych. Uszereguj układy według wartości wykonalnego potencjału elektrycznego w początku układu współrzędnych, zaczynając od największego dodatniego. Przyjmij, że w nieskończoności potencjał jest równy zero.



Rys. 25.24. Pytanie 4

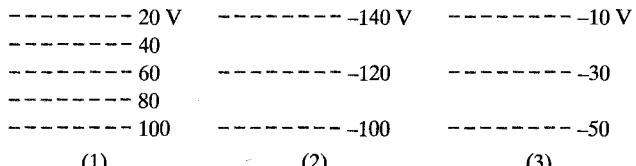
5. a) Jaki jest potencjał w punkcie P , pochodzący od ładunku Q znajdującego się w odległości R od punktu P (rys. 25.25a)? Przyjmij $V = 0$ w nieskończoności. b) Na rysunku 25.25b ten sam ładunek Q jest rozłożony jednorodnie na łuku okręgu o promieniu R i kącie środkowym 40° . Jaki jest potencjał w środku P krzywizny łuku? c) Na rysunku 25.25c ten sam ładunek Q został rozłożony jednorodnie na okręgu o promie-



Rys. 25.25. Pytanie 5

niu R . Jaki jest potencjał w środku P okręgu? d) Uszereguj te trzy rozkładów według wartości natężenia pola elektrycznego w punkcie P , zaczynając od największego.

6. Na rysunku 25.26 przedstawiono trzy układy przekrojów powierzchni ekwiapotencjalnych w obszarze przestrzeni o tych samych rozmiarach. a) Uszereguj te układy względem wartości natężenia pola elektrycznego w tym obszarze, zaczynając od największej. b) W którym układzie natężenie pola elektrycznego jest skierowane w dół strony?



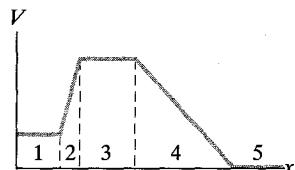
(1)

(2)

(3)

Rys. 25.26. Pytanie 6

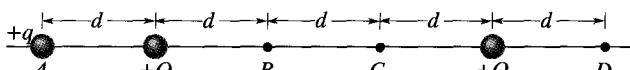
7. Na rysunku 25.27 przedstawiono wykres potencjału elektrycznego V w zależności od x . a) Uszereguj pięć obszarów według wartości składowej natężenia pola elektrycznego wzdłuż osi x , zaczynając od największej. Jaki jest kierunek natężenia pola wzdłuż osi x w: b) obszarze 2, c) obszarze 4?



Rys. 25.27. Pytanie 7

8. Na rysunku 25.22 przedstawiono cztery pary naładowanych cząstek znajdujących się w jednakowej odległości od siebie. a) Uporządkuj pary według ich elektrycznej energii potencjalnej, zaczynając od największej (dodatniej). b) Czy jeśli zwiększy się odległość między cząstkom w każdej z par, to energia potencjalna pary wzrośnie, czy zmaleje?

9. Na rysunku 25.28 przedstawiono układ trzech naładowanych cząstek. Jeśli przesuniemy cząstkę o ładunku $+q$ z punktu A do punktu D , to czy następujące wielkości są dodatnie, ujemne czy zerowe: a) zmiana elektrycznej energii potencjalnej układu trzech cząstek, b) praca wykonana przez wypadkową siłę elektrostatyczną nad przesuwana cząstką, c) praca wykonana przez nas? d) Jakie są odpowiedzi dla wielkości od (a) do (c) dla cząstki o ładunku $+q$ przesuwanej z punktu B do punktu C ?



Rys. 25.28. Pytania 9 i 10

10. Czy praca wykonana przez nas w sytuacji z pytania 9 jest dodatnia, ujemna, czy równa zero, jeśli cząstka o ładunku $+q$ porusza się: a) od A do B , b) od A do C , c) od B do D ? d) Uszereguj przemieszczenia (a), (b), (c) według wartości pracy wykonanej przez nas, zaczynając od największej.

Zadania

- www Rozwiążanie jest dostępne na stronie internetowej podręcznika: <http://www.wiley.com/college/hrw>
- ilw Rozwiążanie jest dostępne w postaci interaktywnej, wykorzystującej oprogramowanie Interactive Learning Ware (na tej samej stronie)

25.2. Potencjał elektryczny

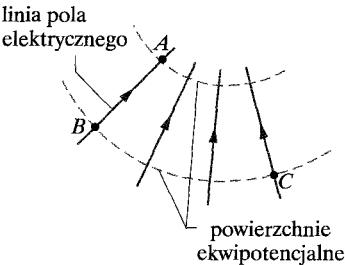
1. Rozważmy akumulator samochodowy o różnicy potencjałów 12 V, który może przesłać całkowity ładunek 84 Ah (amperogodzin) przez obwód z jednego bieguna do drugiego. a) Ile kulombów jest równy ten ładunek? (Wskazówka: Zastosuj wzór (22.3)). b) Jeśli różnica potencjałów jest cały czas równa 12 V, to jak duża energia jest związana z przejściem tego ładunku?

2. Różnica potencjałów elektrycznych między ziemią i chmurą podczas pewnej burzy wynosiła $1,2 \cdot 10^9$ V. Jaka jest wartość zmiany elektrycznej energii potencjalnej (w elektronowoltach) elektronu poruszającego się między ziemią i chmurą?

3. Dla pewnej błyskawicy różnica potencjałów między ziemią i chmurą wynosiła $1 \cdot 10^9$ V, a wartość przepływającego ładunku była równa 30 C. a) O ile zmalała energia tego ładunku? b) Jeśli można byłoby wykorzystać całą tę energię do przyspieszenia spoczywającego początkowo samochodu o masie 1000 kg, to jaka byłaby końcowa prędkość samochodu? c) Jeśli cała ta energia mogłaby zostać wykorzystana do stopienia lodu, to ile lodu mógłby zostać stopione przy 0°C ? Ciepło topnienia lodu wynosi $3,33 \cdot 10^5$ J/kg.

25.4. Obliczanie potencjału na podstawie natężenia pola

4. Gdy elektron porusza się od punktu A do punktu B , wzdłuż linii pola elektrycznego na rysunku 25.29, pole elektryczne wykonuje nad nim pracę $3,94 \cdot 10^{-19}$ J. Jakie są różnice potencjałów elektrycznych: a) $V_B - V_A$, b) $V_C - V_A$, c) $V_C - V_B$?



Rys. 25.29. Zadanie 4

5. Nieprzewodząca nieskończona płyta jest naładowana z jednej strony z gęstością powierzchniową $\sigma = 0,1 \mu\text{C}/\text{m}^2$. W jakiej odległości znajdują się powierzchnie ekwipotencjalne, których potencjały różnią się o 50 V?

6. Dwie duże, równoległe, przewodzące płyty są odległe od siebie o 12 cm i mają na powierzchniach wewnętrznych jednakowe ładunki o przeciwnych znakach. Na elektron umieszczony gdziekolwiek między tymi płytami działa siła elektrostatyczna

$3,9 \cdot 10^{-15}$ N. a) Znajdź natężenie pola elektrycznego w miejscu, w którym znajduje się elektron. b) Jaka jest różnica potencjałów między płytami? (Zaniedbij efekty brzegowe).

7. W liczniku Geigera–Müllera na osi metalowej rury o średnicy 2 cm napięty jest drut o średnicy $1,3 \cdot 10^{-4}$ cm. Jeśli różnica potencjałów między drutem i rurą wynosi 850 V, to jakie jest natężenie pola elektrycznego na powierzchni: a) drutu, b) rury? (Wskazówka: Skorzystaj z wyniku zadania 23 z rozdziału 24).

8. Natężenie pola elektrycznego wewnętrz nieprzewodzącej, jednorodnie naładowanej objętościowo kuli o promieniu R jest skierowane radialnie i ma wartość:

$$E(r) = \frac{qr}{4\pi\epsilon_0 R^3},$$

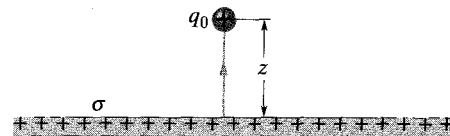
gdzie q jest całkowitym (dodatnim lub ujemnym) ładunkiem kuli, a r jest odlegością od środka kuli. a) Przyjmując $V = 0$ w środku kuli, znajdź potencjał elektryczny $V(r)$ wewnętrz kuli. b) Jaka jest różnica potencjałów elektrycznych między punktem na powierzchni kuli i środkiem kuli? c) Jeśli ładunek q jest dodatni, to któremu z tych punktów odpowiada większy potencjał?

9*. Ładunek q jest rozłożony jednorodnie objętościowo w kuli o promieniu R . a) Przyjmując $V = 0$ w nieskończoności, pokaż, że potencjał w odległości r od środka kuli ($r < R$) jest dany wzorem:

$$V = \frac{q(3R^2 - r^2)}{8\pi\epsilon_0 R^3}.$$

(Wskazówka: Zob. paragraf 24.9). b) Dlaczego wynik ten różni się od wyniku z punktu (a) w zadaniu 8? c) Jaka jest różnica potencjałów między punktem na powierzchni kuli i środkiem kuli? d) Dlaczego ten wynik nie różni się od wyniku z punktu (b) z zadania 8?

10. Na rysunku 25.30 przedstawiono z boku nieskończoną, nieprzewodzącą płytę, naładowaną dodatnio z jednej strony z gęstością powierzchniową σ . a) Korzystając ze wzorów (25.18) i (24.13), pokaż, że potencjał elektryczny tej nieskończonej płyty można zapisać wzorem $V = V_0 - (\sigma/(2\epsilon_0))z$, gdzie V_0 jest potencjałem elektrycznym powierzchni płyty, a z jest odlegością od płyty. b) Jaką pracę wykona pole elektryczne płyty przy przesuwaniu małego, dodatniego ładunku próbnego q_0 , z początkowego położenia na płycie, do końcowego położenia w odległości z od płyty?



Rys. 25.30. Zadanie 10

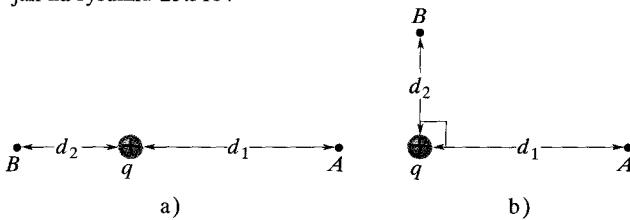
11*. Gruba powłoka sferyczna o promieniach r_1 i r_2 ($r_2 > r_1$) i ładunku Q jest naładowana jednorodnie objętościowo. Przyjmując $V = 0$ w nieskończoności, znajdź potencjał elektryczny V w za-

leżności od odległości r od środka powłoki, rozważając obszary: a) $r > r_2$, b) $r_2 > r > r_1$, c) $r < r_1$? d) Czy te rozwiązania są ze sobą zgodne przy $r = r_2$ i $r = r_1$? (Wskazówka: Zob. paragraf 24.9).

25.6. Potencjał pola układu ładunków punktowych

12. Podczas ruchu statku kosmicznego przez rozrzedzony zjonizowany gaz jonosfery ziemskiej potencjał statku zmienia się o -1 V w czasie jednego okrążenia Ziemi. Zakładając, że statek jest sferą o promieniu 10 m, oszacuj ładunek zbierany przez statek.

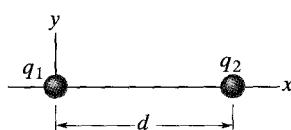
13. Rozważmy ładunek punktowy $q = 1 \mu\text{C}$, punkt A w odległości $d_1 = 2$ m od q i punkt B w odległości $d_2 = 1$ m. a) Jeśli te punkty są po przeciwnych stronach ładunku (rys. 25.31a), to jaka jest różnica potencjałów elektrycznych $V_A - V_B$? b) Jaka jest różnica potencjałów elektrycznych, jeśli punkty A i B są położone jak na rysunku 25.31b?



Rys. 25.31. Zadanie 13

14. Na rysunku 25.32 przedstawiono dwie naładowane cząstki umieszczone na osi x . Naszkicuj linie pola elektrycznego i powierzchnie ekwipotencjalne w płaszczyźnie strony dla: a) $q_1 = +q$ i $q_2 = +2q$, b) $q_1 = +q$ i $q_2 = -3q$.

15. Cząstki na rys. 25.32 mają ładunki $q_1 = +q$ i $q_2 = -3q$. Przyjmijmy, że $V = 0$ w nieskończoności. Wyznacz położenie (wyrażając je przez odległość d między ładunkami) punktu na osi x (w skończonej odległości od cząstek), w którym potencjał elektryczny pola tych dwóch cząstek jest równy零.



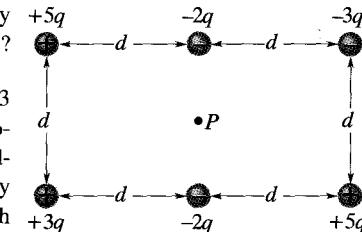
Rys. 25.32. Zadania 14, 15 i 16

16. Dwie cząstki o ładunkach q_1 i q_2 znajdują się w odległości d (rys. 25.32). Wypadkowe natężenie pola elektrycznego cząstek jest równe zero przy $x = d/4$. Przyjmując $V = 0$ w nieskończoności, znajdź położenie (wyrażając je przez d) punktu na osi x (w skończonej odległości od cząstek), w którym potencjał elektryczny pola tych dwóch cząstek jest równy zero.

17. Kulista kropla wody, obdarzona ładunkiem 30 pC , ma potencjał 500 V na swej powierzchni (przy $V = 0$ w nieskończoności). a) Jaki jest promień kropli? b) Jeśli dwie takie krople, o takim samym ładunku i promieniu połączą się, tworząc jedną kulistą kroplę, to jaki będzie potencjał na powierzchni nowej kropli? (Wskazówka: Ukaż kroplę jako sumę odizolowanego ładunku i dipola.)

18. Jakie są: a) ładunek, b) gęstość ładunku na powierzchni przewodzącej kuli o promieniu $0,15$ m, jeśli jej potencjał wynosi 200 V (przy $V = 0$ w nieskończoności)?

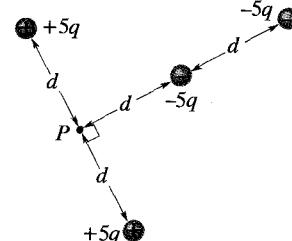
19. W pobliżu powierzchni Ziemi natężenie pola elektrycznego ma często wartość około 100 V/m. Jeśli takie byłoby natężenie na całej powierzchni, to jaki byłby potencjał elektryczny punktu na powierzchni (przy $V = 0$ w nieskończoności)?



Rys. 25.33. Zadanie 20

20. Na rysunku 25.33 punkt P leży w środku prostokąta. Jaki jest wypadkowy potencjał elektryczny pola sześciu naładowanych cząstek, w punkcie P (przy $V = 0$ w nieskończoności)?

21. Jaki jest wypadkowy potencjał w punkcie P pola układu czterech ładunków z rysunku 25.34, jeśli $V = 0$ w nieskończoności?



Rys. 25.34. Zadanie 21

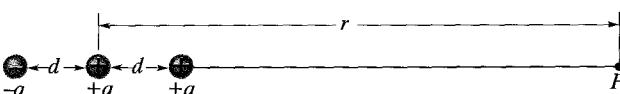
25.7. Potencjał pola dipola elektryczznego

22. Cząsteczka amoniaku NH_3 ma trwałego elektryczny moment dipolowy równy $1,47$ D, gdzie $1 \text{ D} = 1 \text{ debaj} = 3,34 \cdot 10^{-30} \text{ C} \cdot \text{m}$. Oblicz potencjał elektryczny cząsteczek amoniaku na osi dipola, w punkcie odległym o 52 nm (przy $V = 0$ w nieskończoności). (Wskazówka: Ukaż dipol jako sumę odizolowanego ładunku i dipola.)

23. Na rys. 25.35 przedstawiono trzy naładowane cząstki na osi poziomej. Dla punktów (jak np. punktu P) na osi, dla których $r \gg d$ wykaż, że potencjał elektryczny $V(r)$ jest dany wzorem:

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r} \left(1 + \frac{2d}{r} \right).$$

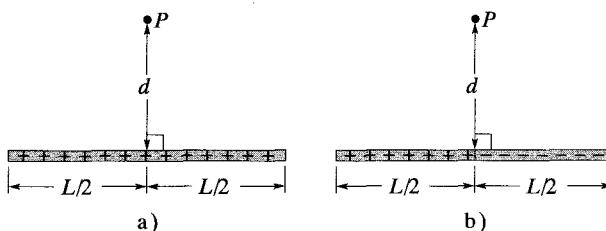
(Wskazówka: Układ ładunków potraktuj jako sumę odizolowanego ładunku i dipola.)



Rys. 25.35. Zadanie 23

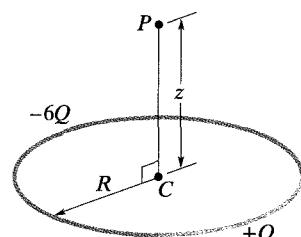
25.8. Potencjał pola ładunku o ciągłym rozkładzie

24. a) Na rysunku 25.36a przedstawiono dodatnio naładowany pręt plastikowy o długości L , naładowany jednorodnie z gęstością liniową λ . Przyjmując $V = 0$ w nieskończoności i korzystając z rysunku 25.13 i wzoru (25.35), znajdź potencjał elektryczny w punkcie P , bez obliczeń na papierze. b) Na rysunku 25.36b przedstawiono identyczny pręt, ale z prawą połową naładowaną ujemnie i lewą — dodatnio; obie połowy mają taką samą wartość jednorodnej liniowej gęstości ładunku λ . Ile wynosi potencjał elektryczny w punkcie P , jeśli $V = 0$ w nieskończoności?



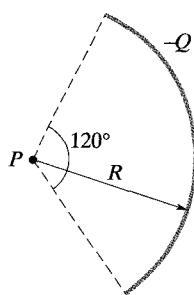
Rys. 25.36. Zadanie 24

25. Pręt plastikowy został wygięty w kształcie okręgu o promieniu R . Jest on jednorodnie naładowany ładunkiem dodatnim $+Q$ na jednej czwartej obwodu i ładunkiem ujemnym $-6Q$ na reszcie obwodu (rys. 25.37). Przyjmując $V = 0$ w nieskończoności, oblicz potencjał elektryczny:
a) w środku C okręgu,
b) w punkcie P na osi symetrii okręgu, w odległości z od środka.



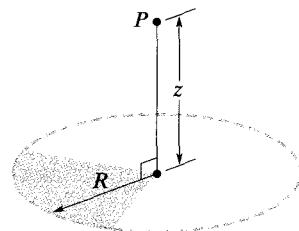
Rys. 25.37. Zadanie 25

26. Na rysunku 25.38 plastikowy pręt jednorodnie naładowany ładunkiem $-Q$ został wygięty w łuk okręgu o promieniu R i kącie środkowym 120° . Przyjmując $V = 0$ w nieskończoności, oblicz potencjał elektryczny w środku krzywizny P łuku.



Rys. 25.38. Zadanie 26

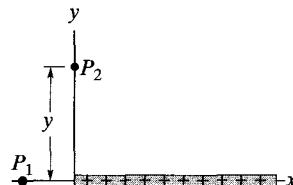
27. Po jednorodnym naładowaniu plastikowej tarczy z jednej strony z gęstością powierzchniową σ usunięto trzy ćwiartki tarczy. Pozostała ćwiartka jest przedstawiona na rysunku 25.39. Przyjmując $V = 0$ w nieskończoności, oblicz potencjał pola wytworzonego przez tę ćwiartkę w punkcie P na osi symetrii tarczy, w odległości z od jej środka.



Rys. 25.39. Zadanie 27

28. Na rysunku 25.40 przedstawiono plastikowy pręt o długości L , umieszczony na osi x , naładowany jednorodnie dodatnim ładunkiem Q . Przyjmując $V = 0$ w nieskończoności, znajdź potencjał elektryczny na osi x w punkcie P_1 , odległym o d od jednego z końców pręta.

29. Plastikowy pręt, przedstawiony na rysunku 25.40 ma długość L i jest naładowany niejednorodnie z gęstością liniową $\lambda = cx$, gdzie c jest dodatnią stałą. Przyjmując $V = 0$ w nieskończoności, znajdź potencjał elektryczny na osi x w punkcie P_1 , odległym o d od jednego z końców pręta.



Rys. 25.40. Zadania 28, 29, 34 i 35

25.9. Obliczanie natężenia pola na podstawie potencjału

30. Dwie duże, równoległe, metalowe płyty znajdują się w odległości 1,5 cm od siebie i mają równe co do wartości bezwzględnej, ale przeciwnie ładowane na wewnętrznych powierzchniach. Przyjmijmy potencjał ujemnej płyty za równy零. Jeśli potencjał w połowie odległości między płytami wynosi +5 V, to ile wynosi natężenie pola elektrycznego w obszarze między płytami?

31. Potencjał elektryczny w punktach płaszczyzny xy wynosi $V = (2 \text{ V/m}^2)x^2 - (3 \text{ V/m}^2)y^2$. Jaka jest wartość i kierunek natężenia pola elektrycznego w punkcie (3 m, 2 m)?

32. Potencjał elektryczny V w przestrzeni między dwiema plastikimi, równoległymi płytami wynosi $V = 1500x^2$, gdzie V jest wyrażone w voltach, jeśli odległość x od jednej z płyt jest wyrażona w metrach. Oblicz wartość i kierunek natężenia pola elektrycznego w punkcie, dla którego $x = 1,3 \text{ cm}$.

33. a) Korzystając ze wzoru (25.32) pokaż, że potencjał elektryczny na osi symetrii cienkiego pierścienia o promieniu R i ładunku q , w punkcie odległym o z od środka pierścienia wynosi:

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{\sqrt{z^2 + R^2}}.$$

b) Korzystając z otrzymanego wyniku, wyprowadź wyrażenie na E w punktach na osi pierścienia i porównaj wynik z natężeniem E , obliczonym w paragrafie 23.6.

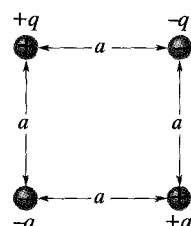
34. Pręt plastikowy o długości L , pokazany na rysunku 25.40, jest naładowany niejednorodnie, z gęstością liniową $\lambda = cx$, gdzie c jest stałą dodatnią. a) Przyjmując $V = 0$ w nieskończoności, znajdź potencjał elektryczny w punkcie P_2 na osi y , w odległości y od jednego z końców pręta. b) Korzystając z otrzymanego wyniku, znajdź składową E_y natężenia pola elektrycznego w punkcie P_2 . c) Dlaczego nie można znaleźć składowej E_x natężenia w punkcie P_2 , korzystając z wyniku otrzymanego w punkcie (a)?

35. a) Korzystając z wyniku, otrzymanego w zadaniu 28, znajdź składową E_x natężenia pola elektrycznego w punkcie P_1 na rys. 25.40. (Wskazówka: Najpierw za odległość d w wyniku podstaw zmienną x). b) Korzystając z symetrii określ składową E_y natężenia pola elektrycznego w punkcie P_1 .

25.10. Elektryczna energia potencjalna pola układu ładunków punktowych

36. a) Jaka jest elektryczna energia potencjalna dwóch elektronów, znajdujących się w odległości 2 nm? b) Czy energia potencjalna wzrasta, czy maleje, jeśli odległość wzrasta?

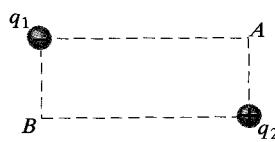
37. Wyprowadź wyrażenie na pracę, potrzebną do utworzenia konfiguracji czterech ładunków z rysunku 25.41 przy założeniu, że początkowo ładunki są od siebie nieskończonie odległe.



Rys. 25.41. Zadanie 37

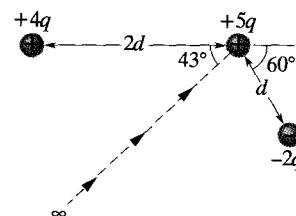
38. Jaka jest elektryczna energia potencjalna układu ładunków z rysunku 25.9a? Skorzystaj z wartości liczbowych z przykładu 25.3.

39. W dwóch wierzchołkach prostokąta na rysunku 25.42, o długościach boków 5 cm i 15 cm znajdują się ładunki $q_1 = -5 \mu\text{C}$ i $q_2 = +2 \mu\text{C}$. Przyjmując $V = 0$ w nieskończoności, oblicz potencjał elektryczny: a) w wierzchołku A , b) w wierzchołku B . c) Jaka praca jest potrzebna do przesunięcia trzeciego ładunku $q_3 = +3 \mu\text{C}$ z punktu B do punktu A , wzdłuż przekątnej prostokąta? d) Czy ta praca zwiększa, czy zmniejsza elektryczną energię potencjalną układu trzech ładunków? Czy praca przy przesunięciu ładunku q_3 wzdłuż toru: e) wewnątrz prostokąta, ale nie wzdłuż przekątnej, f) poza prostokątem jest większa, mniejsza, czy taka sama, jak wzdłuż przekątnej?



Rys. 25.42. Zadanie 39

40. Oblicz pracę, potrzebną do przesunięcia ładunku $+5q$ z nieskończoności, wzdłuż przedstawionej na rysunku 25.43 linii przerwanej, w pobliżu dwóch nieruchomych ładunków $+4q$ i $-2q$. Podstaw wartości: odległości $d = 1,4 \text{ cm}$ i ładunku $q = 1,60 \cdot 10^{-19} \text{ C}$.



Rys. 25.43. Zadanie 40

41. Cząstka o ładunku dodatnim Q znajduje się w punkcie P . Druga cząstka o masie m i ujemnym ładunku $-q$ porusza się ze stałą prędkością po okręgu o promieniu r_1 , o środku w punkcie P . Wyprowadź wyrażenie na pracę W , jaką musi wykonać siła zewnętrzna nad drugą cząstką, aby zwiększyć promień okręgu do r_2 .

42. Oblicz: a) potencjał elektryczny pola wytworzonego przez jądro atomu wodoru w średniej odległości ($r = 5,29 \cdot 10^{-11} \text{ m}$) elektronu od jądra w atomie (przyjmij $V = 0$ w nieskończonej odległości), b) elektryczną energię potencjalną atomu, z elektronem w tej odległości, c) energię kinetyczną elektronu, jeśli porusza się on po orbicie kołowej o tym promieniu wokół jądra atomu. d) Jaka energia jest potrzebna do zjonizowania atomu wodoru (czyli usunięcia elektronu przez oddalenie go na nieskończoną odległość)? Wyraź wszystkie energie w elektronowoltach.

43. Cząstka o ładunku q znajduje się w punkcie P . Druga cząstka o masie m i tym samym ładunku q znajduje się początkowo w odległości r_1 od punktu P , a następnie zostaje uwolniona. Określ jej prędkość, gdy znajdzie się ona w odległości r_2 od punktu P . Przyjmij wartości: $q = 3,1 \mu\text{C}$, $m = 20 \text{ mg}$, $r_1 = 0,9 \text{ mm}$ i $r_2 = 2,5 \text{ mm}$.

44. W płaszczyźnie yz leży cienki plastikowy pierścień o promieniu 1,5 m, o środku w początku układu, naładowany ładunkiem -9 nC . Na osi x , w odległości 3 m od początku układu umieszczono ładunek -6 pC . Oblicz pracę, jaka musi być wykonana nad ładunkiem punktowym przez zewnętrzna siłę przy przesuwaniu ładunku punktowego do początku układu.

45. Dwie cienkie sfery metalowe A i B o masach $m_A = 5 \text{ g}$ i $m_B = 10 \text{ g}$ mają takie same dodatnie ładunki $q = 5 \mu\text{C}$. Sfery są połączone nieprzewodzącym sznurkiem o znikomo małej masie, o długości $d = 1 \text{ m}$, znacznie większej od promieni sfer. a) Oblicz elektryczną energię potencjalną układu. b) Jakie jest przyspieszenie każdej ze sfer w momencie tuż po przecięciu sznurka? c) Jaka jest prędkość każdej ze sfer po długim czasie od przecięcia sznurka?

46. Cienka przewodząca powłoka sferyczna o promieniu R znajduje się na izolującej podkładce i jest naładowana do potencjału $-V$. Z punktu P , w odległości r od środka sfery ($r \gg R$)

wystrzelono elektron z początkową prędkością v_0 , w kierunku środka powłoki. Jaka musi być wartość v_0 , aby elektron dotarł do powłoki?

47. Dwa elektrony znajdują się w odległości 2 cm od siebie. Trzeci elektron, wystrzelony z nieskończoności, zatrzymał się w połowie odległości między nimi. Jaka była początkowa prędkość tego elektronu?

48. Dwie naładowane, równoległe, płaskie, przewodzące powierzchnie znajdują się w odległości $d = 1$ cm od siebie i wytwarzają różnicę potencjałów $\Delta V = 625$ V między sobą. Z jednej powierzchni wystrzelono elektron, prostopadle w kierunku drugiej. Jaka jest początkowa prędkość elektronu, jeśli zatrzymuje się on tuż przy drugiej powierzchni?

49. Z początkową prędkością $3,2 \cdot 10^5$ m/s wystrzelono elektron w kierunku nieruchomego protonu. Jeśli początkowo elektron znajdował się w dużej odległości od protonu, to w jakiej odległości od protonu chwilowa prędkość elektronu będzie dwukrotnie większa od początkowej wartości?

25.11. Potencjał izolowanego naładowanego przewodnika

50. Pusta sferyczna wnęka metalowa ma potencjał +400 V względem ziemi (o potencjale $V = 0$) i ładunek $5 \cdot 10^{-9}$ C. Znajdź potencjał elektryczny w środku sfery.

51. Jaki jest nadmiarowy ładunek na przewodzącej kuli o promieniu $r = 0,15$ m, jeśli potencjał kuli wynosi 1500 V dla $V = 0$ w nieskończoności?

52. Rozważ dwie przewodzące kule 1 i 2, znajdujące się w dużej odległości od siebie. Średnica drugiej kuli jest dwa razy większa niż pierwszej. Mniejsza kula mała początkowo ładunek dodatni q , a większa była nienalażona. Następnie połączono kule długim cienkim przewodnikiem. a) Jaki jest związek między końcowymi potencjalami V_1 i V_2 kul? b) Jakie są końcowe ładunki q_1 i q_2 na kulach, wyrażone przez q ? c) Jaki jest stosunek końcowej gęstości powierzchniowej ładunku na kuli 1, do gęstości na kuli 2?

53. Dwie metalowe kule, każda o promieniu 3 cm, mają środki oddalone o 2 m. Na jednej kuli jest ładunek $+1 \cdot 10^{-8}$ C, a na drugiej ładunek $-3 \cdot 10^{-8}$ C. Przyjmij, że duża odległość kul w stosunku do ich rozmiarów uzasadnia przyjęcie założenia o jednorodnym rozkładzie ładunku na każdej kuli (kule nie oddziałują na siebie nawzajem). Przy $V = 0$ w nieskończoności, oblicz: a) potencjał w punkcie, znajdującym się w połowie odległości między środkami kul, b) potencjał każdej kuli.

54. Naładowana kula metalowa o promieniu 15 cm ma całkowity ładunek $3 \cdot 10^{-8}$ C. a) Ile wynosi natężenie pola elektrycznego przy powierzchni kuli? b) Jeśli $V = 0$ w nieskończoności, to ile wynosi potencjał elektryczny na powierzchni kuli? c) W jakiej odległości od powierzchni kuli potencjał elektryczny jest o 500 V mniejszy?

55. a) Jeśli Ziemia miałaby gęstość powierzchniową ładunku równą ładunkowi elektronu na metr kwadratowy (bardzo sztuczne założenie), to ile wynosiłby jej potencjał, jeśli przyjmiemy $V = 0$ w nieskończoności? b) Ile wynosiłoby natężenie pola elektrycznego Ziemi tuż nad jej powierzchnią?

56. Dwie cienkie, izolowane, współśrodkowe, przewodzące sfery o promieniach R_1 i R_2 ($R_1 < R_2$) mają ładunki q_1 i q_2 . Przy $V = 0$ w nieskończoności, wyprowadź wyrażenia na $E(r)$ i $V(r)$, gdzie r jest odległością od środka sfer. Wykreśl zależność $E(r)$ i $V(r)$ od $r = 0$ do $r = 4$ m, przyjmując $R_1 = 0,5$ m, $R_2 = 1$ m, $q_1 = +2 \mu\text{C}$ i $q_2 = +1 \mu\text{C}$.

Zadanie dodatkowe

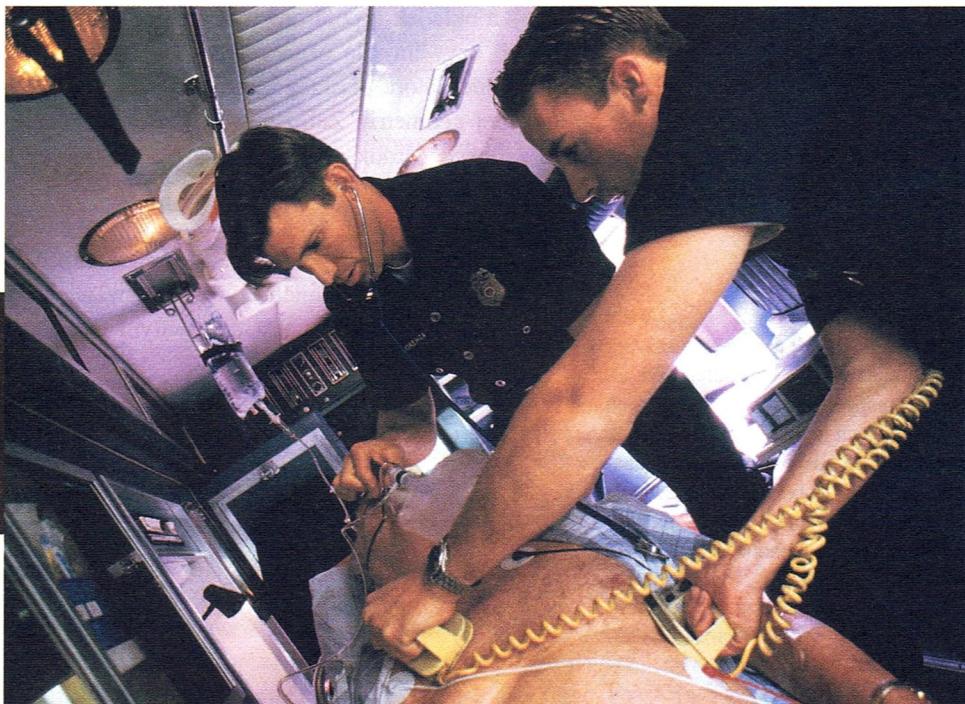
57. Tajemnica proszku czekoladowego. Historię rozpoczęliśmy w zadaniu 48 w rozdziale 24. a) Korzystając z odpowiedzi (a) z tego zadania, znajdź wyrażenie na potencjał elektryczny, w zależności od odległości r od osi rury. (Potencjał elektryczny jest równy零u na uziemionej ściance rury). b) Ile wynosi różnica potencjałów elektrycznych między osią rury i jej wewnętrzną ścianką dla typowej objętościowej gęstości ładunku $\rho = -1,1 \cdot 10^{-3} \text{ C/m}^3$? (Dalszy ciąg tej historii poznasz w zadaniu 48 w rozdziale 26).

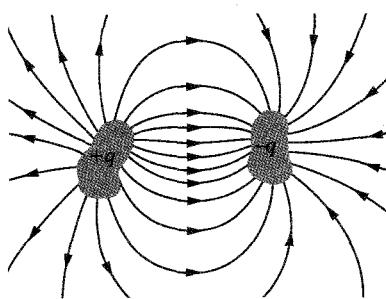
26 Pojemność elektryczna

Przy migotaniu (fibrylacji) komór serca, częściej postaci ataku serca, komory zaprzestają pompowania krwi, ponieważ ich włókna mięśniowe kurczą się i rozluźniają przypadkowo. Ratowanie ofiary migotania komór wymaga poddania mięśnia sercowego wstrząsowi, w celu przywrócenia mu normalnego rytmu. W tym celu przez klatkę piersiową trzeba przepuścić prąd o natężeniu 20 A, aby przekazać energię elektryczną 200 J w ciągu około 2 ms. Wymaga to mocy elektrycznej około 100 kW. Takie wymaganie można łatwo spełnić w szpitalu, ale nie na przykład przy zasilaniu elektrycznym w karetce pogotowia, przyjeżdżającej na ratunek choremu.

Jak można więc uzyskać moc konieczną do defibrylacji poza szpitalem?

Odpowiedź znajdziesz w tym rozdziale.





Rys. 26.1. Dwa przewodniki, odizolowane elektrycznie od siebie i od otoczenia, tworzą kondensator. Jeśli kondensator jest naładowany, to przewodniki, zwane okładkami mają ładunki o takich samych wartościach q , ale o przeciwnych znakach

26.1. Zastosowanie kondensatorów

Energię możemy magazynować w postaci energii potencjalnej przez: rozciąganie cięciwy luku, ściskanie sprężyny, sprężanie gazu lub podnoszenie w górę książki. Można także magazynować energię w postaci energii potencjalnej w polu elektrycznym i właśnie do tego celu służy **kondensator**.

Kondensator znajduje się np. w lampie błyskowej, zasilanej z przenośnego źródła. W przerwach między błyskami kondensator dość powoli gromadzi ładunek, wytwarzając coraz silniejsze pole elektryczne. Pole to i związane z nim energia jest utrzymywana do chwili, gdy zostaje nagle uwolniona, wyzwalając błąsk.

W dzisiejszej dobie elektroniki i mikroelektroniki kondensatory mają wiele innych zastosowań niż magazynowanie energii potencjalnej. Są one na przykład istotnymi elementami w obwodach, które służą do dostrajania nadawczej i odbiorczej aparatury radiowej i telewizyjnej. Mikroskopijne kondensatory tworzą pamięci komputerów. Te bardzo małe urządzenia są wtedy ważne nie ze względu na zmagazynowaną w nich energię, ale ze względu na informację binarną, jakiej dostarcza obecność lub brak pola elektrycznego.

26.2. Pojemność elektryczna

Na rysunku 26.1 przedstawiono podstawowe elementy kondensatora — dwa odosobnione przewodniki dowolnego kształtu. Przewodniki te bez względu na ich kształt, ich płaskość lub zakrzywienie, nazywamy **okładkami**.

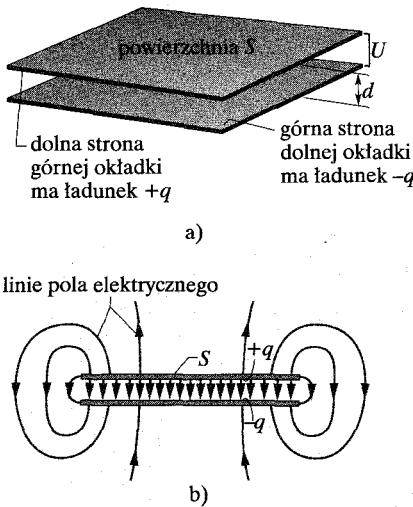
Na rysunku 26.2a przedstawiono mniej ogólny, ale bardzo typowy układ, zwany **kondensatorem płaskim**, który składa się z dwóch równoległych, przewodzących okładek o polu powierzchni S umieszczonych w odległości d . Symbol, jakiego używamy do oznaczenia kondensatora ($\text{--}||\text{--}$) wzorowany jest na budowie kondensatora płaskiego, lecz stosujemy go do oznaczania kondensatorów o dowolnej geometrii. Założymy na razie, że w obszarze między okładkami nie ma żadnego ośrodka materialnego (np. szkła czy plastiku). W paragrafie 26.6 zrezygnujemy z tego ograniczenia.

Gdy kondensator jest *naładowany*, jego okładki, mają ładunki $+q$ i $-q$ o jednakowych wartościach, lecz przeciwnych znakach. Będziemy jednak przez *ładunek kondensatora* rozumieli q , czyli bezwzględną wartość ładunków na okładkach. (Zauważ, że q nie jest całkowitym ładunkiem na kondensatorze, bo taki wynosi zero).

Okładki są przewodnikami, a więc są powierzchniami ekwipotencjalnymi: wszystkie punkty na okładce mają ten sam potencjał elektryczny. Co więcej, istnieje różnica potencjałów między dwiema okładkami. Odtąd bezwzględną wartość tej różnicy będziemy oznaczać przez U , a nie przez ΔV , jak to robiliśmy dotychczas.

Ladunek q i różnica potencjałów U (zwana *napięciem*) dla kondensatora są do siebie proporcjonalne, czyli:

$$q = CU. \quad (26.1)$$



Rys. 26.2. a) Kondensator płaski składa się z dwóch okładek o polu powierzchni S , znajdujących się w odległości d . Okładki mają na swych wewnętrznych powierzchniach ładunki o takich samych wartościach q , ale o przeciwnych znakach. b) Linie pola pokazują, że pole elektryczne wytwarzane przez naładowane okładki jest jednorodne w środkowym obszarze między okładkami. Jak widać z wygięcia linii pola przy krawędziach okładek, pole w pobliżu nich jest niejednorodne

Stałą proporcjonalności C nazywamy **pojemnością** kondensatora. Jej wartość zależy tylko od geometrii okładek, a nie od ich ładunku, czy różnicy potencjałów. Pojemność jest miarą ilości ładunku, jaki należy umieścić na okładkach, aby wytworzyć pewną różnicę potencjałów między nimi: *im większa jest pojemność, tym więcej potrzeba ładunku.*

Jednostką pojemności w układzie SI, wynikającą ze wzoru (26.1), jest kuhomb na wolt. Jednostka ta pojawia się tak często, że nadano jej specjalną nazwę *farad* (F):

$$1 \text{ farad} = 1 \text{ F} = 1 \text{ kuhomb na wolt} = 1 \text{ C/V}. \quad (26.2)$$

Jak się przekonasz, farad jest bardzo dużą jednostką. W praktyce bardziej wygodnymi jednostkami są podwielokrotności farada, jak na przykład mikrofarad ($1 \mu\text{F} = 10^{-6} \text{ F}$) lub pikofarad ($1 \text{ pF} = 10^{-12} \text{ F}$).

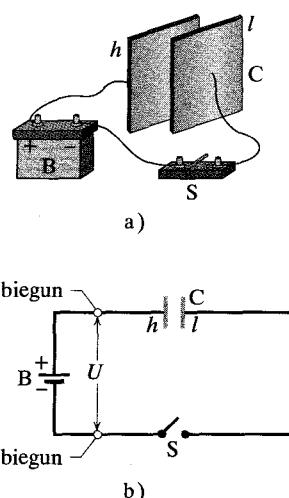
Ładowanie kondensatora

Jedną z metod ładowania kondensatora jest umieszczenie go w obwodzie elektrycznym, zawierającym źródło prądu. *Obwód elektryczny* stanowi drogę, wzdłuż której może przepływać ładunek. *Źródło prądu* jest urządzeniem, które utrzymuje stałą różnicę potencjałów między *biegunami* źródła (punktami, przez które ładunek może wpływać do źródła lub z niego wypływać); zwykle w tym celu wykorzystuje się wewnętrzne reakcje elektrochemiczne, w których siły elektryczne mogą przesuwać wewnętrzne ładunki.

Na rysunku 26.3a obwód tworzą: źródło B, klucz S, nienalałowany kondensator C i przewody łączące te elementy. Ten sam obwód jest przedstawiony na *schemacie* na rysunku 26.3b, gdzie źródło, klucz i kondensator zostały zastąpione symbolami. Źródło utrzymuje różnicę potencjałów U między swymi biegunami. Biegum o wyższym potencjale jest oznaczany znakiem + i zwykle bywa nazywany biegunem *dodatnim*; biegum o niższym potencjale jest oznaczany znakiem - i zwykle bywa nazywany biegunem *ujemnym*.

Obwód, przedstawiony na rysunkach 26.3a i b nazywamy *otwartym*, bo klucz S jest *otwarty*, czyli nie łączy elektrycznie przewodów do niego przyłączonych. Jeśli klucz zostanie *zamknięty*, łącząc elektrycznie te przewody, to obwód zostaje zamknięty i ładunek może przepływać przez klucz i przewody. Jak mówiliśmy w rozdziale 22, przepływ ładunku przez przewodnik metaliczny polega na przepływie elektronów. Gdy obwód z rysunku 26.3 zostanie zamknięty, pole elektryczne, wytworzone w przewodach przez źródło przesuwa elektrony wzdłuż przewodów. W szczególności elektrony z okładki h kondensatora są przesuwane przez pole do dodatniego biegunu źródła i stąd okładka h , tracąc elektrony, staje się naładowana dodatnio. Pole przesuwa także dokładnie tyle samo elektronów z biegu ujemnego źródła na okładkę l kondensatora i stąd okładka l , gromadząc elektrony, staje się naładowana ujemnie w *takim samym stopniu*, jak okładka h (tracąc elektrony) staje się naładowana dodatnio.

Początkowo, gdy okładki były nienalałowane, różnica potencjałów między nimi wynosiła zero. W miarę, jak okładki są przeciwnie ładowane, różnica potencjałów wzrasta, aż osiągnie wartość różnicy potencjałów U między biegunami źródła. Wtedy okładka h i dodatni biegum źródła mają taki sam potencjał i nie



Rys. 26.3. a) Źródło B, klucz S oraz okładki h i l kondensatora C tworzą po połączeniu obwód. b) Schemat z elementami obwodu przedstawionymi za pomocą ich symboli

ma pola elektrycznego w przewodzie między nimi. Podobnie, okładka l i ujemny biegun źródła mają taki sam potencjał i nie ma pola elektrycznego w przewodzie między nimi. Przy zerowym natężeniu pola nie ma więc dalszego przepływu elektronów. Mówimy, że kondensator jest wtedy *całkowicie naładowany* i ma różnicę potencjałów U oraz ładunek q , które powiązane są wzorem (26.1).

W tej książce zakładamy, że zarówno podczas ładowania kondensatora, jak i potem ładunek nie może przesunąć się z jednej okładki na drugą przez odstęp między nimi. Będziemy także zakładać, że kondensator może zachować (czy *zmagazynować*) ładunek nieskończonie długo, chyba że zostanie umieszczony w obwodzie, w którym może zostać *rozładowany*.

 **SPRAWDZIAN 1:** Czy pojemność C kondensatora wzrasta, maleje, czy pozostaje taka sama: a) jeśli ładunek q wzrośnie dwukrotnie, b) jeśli różnica potencjałów U wzrośnie trzykrotnie?

Sztuka rozwiązywania zadań

Porad 1: Potencjał V i różnica potencjałów U

W poprzednich rozdziałach symbol V oznaczał potencjał elektryczny w punkcie lub na powierzchni ekwipotencjalnej. W zagadnieniach dotyczących urządzeń elektrycznych U oznacza różnicę potencjałów (*napięcie*) między dwoma punktami lub dwiema powierzchniami ekwipotencjalnymi. Wzór (26.1) stanowi przykład takiego właśnie sposobu użycia tego symbolu. W paragrafie 26.3 spotkamy się z obydwoema oznaczeniami. Tam i w następnych rozdziałach trzeba zwracać uwagę na znaczenie tych symboli.

W tej książce i w innych miejscach można spotkać wiele zwrotów, dotyczących różnicy potencjałów. Różnicę potencjałów, a także „potencjał” lub „napięcie”, można przyłożyć do urządzenia lub mogą one występować *na* urządzeniu. Kondensator może być naładowany do różnicy potencjałów, na przykład „kondensator jest naładowany do 12 V.” Także źródło prądu może być scharakteryzowane przez różnicę potencjałów wytwarzaną przez źródło, na przykład „bateria 12-woltowa”. Trzeba zawsze pamiętać, co oznaczają takie zwroty: istnieje różnica potencjałów między dwoma punktami, takimi jak dwa punkty w obwodzie, czy na biegunkach urządzenia, na przykład źródła prądu.

26.3. Obliczanie pojemności elektrycznej

Będziemy teraz obliczać pojemności kondensatorów, znając ich geometrię. Rozważamy różne rodzaje kondensatorów, a więc sensowne jest przedstawienie ogólnego schematu pracy. Nasz plan jest następujący: 1) przyjmujemy, że na okładkach znajduje się ładunek q , 2) obliczamy odpowiadające temu ładunkowi natężenie pola elektrycznego \vec{E} między okładkami, korzystając z prawa Gaussa, 3) znając \vec{E} , obliczamy różnicę potencjałów U między okładkami ze wzoru (25.18), 4) obliczamy C ze wzoru (26.1).

Na początek, przez poczynienie pewnych założeń możemy uprościć obliczenie zarówno natężenia pola elektrycznego, jak i różnicy potencjałów. Przedyskujemy po kolej obliczanie każdej z tych wielkości.

Obliczanie natężenia pola elektrycznego

Do powiązania natężenia pola elektrycznego \vec{E} między okładkami kondensatora z ładunkiem q na każdej z okładek, będziemy stosować prawo Gaussa

$$\epsilon_0 \oint \vec{E} \cdot d\vec{S} = q, \quad (26.3)$$

gdzie q jest ładunkiem, obejmowanym przez powierzchnię Gaussa, a $\oint \vec{E} \cdot d\vec{s}$ jest wypadkowym strumieniem elektrycznym przez tę powierzchnię. We wszystkich rozważanych przez nas przypadkach powierzchnia Gaussa będzie taka, że jeśli przechodzi przez nią strumień elektryczny, to natężenie \vec{E} ma na niej jednakową wartość i wektory \vec{E} oraz $d\vec{s}$ są równoległe. Wzór (26.3) przyjmuje wtedy prostszą postać:

$$q = \epsilon_0 E S \quad (\text{szczególny przypadek wzoru (26.3)}), \quad (26.4)$$

gdzie S jest polem tej części powierzchni Gaussa, przez którą przenika strumień. Dla wygody będziemy zawsze rysować powierzchnię Gaussa w ten sposób, aby obejmowała całkowicie ładunek na dodatniej okładce (zob. np. rys. 26.4).

Obliczanie różnicy potencjałów

W oznaczeniach z rozdziału 25 (wzór (25.18)) różnica potencjałów między okładkami kondensatora jest związana z natężeniem pola elektrycznego \vec{E} wzorem:

$$V_{\text{końc}} - V_{\text{pocz}} = - \int_{\text{pocz}}^{\text{końc}} \vec{E} \cdot d\vec{s}, \quad (26.5)$$

gdzie całkę należy obliczyć po dowolnym torze, który zaczyna się na jednej okładce i kończy na drugiej. Będziemy zawsze wybierać tor wzdłuż linii pola elektrycznego, od okładki ujemnej do dodatniej. Dla takiego toru wektory \vec{E} i $d\vec{s}$ będą miały przeciwe kierunki i iloczyn skalarny $\vec{E} \cdot d\vec{s}$ będzie równy $-Eds$. Prawa strona wzoru (26.5) będzie więc dodatnia. Oznaczając przez U różnicę $V_{\text{końc}} - V_{\text{pocz}}$, wzór (26.5) możemy zapisać w postaci:

$$U = \int_{-}^{+} Eds \quad (\text{szczególny przypadek wzoru (26.5)}), \quad (26.6)$$

gdzie $-$ i $+$ przypominają nam, że nasz tor całkowania zaczyna się na okładce ujemnej i kończy na okładce dodatniej.

Jesteśmy teraz gotowi zastosować wzory (26.4) i (26.6) do pewnych szczególnych przypadek.

Kondensator płaski

Założymy, zgodnie z rysunkiem 26.4, że okładki naszego kondensatora płaskiego są tak duże i umieszczone tak blisko siebie, że możemy zaniedbać zakrzywienie linii pola przy krawędziach okładek i traktować natężenie \vec{E} jako stałe w całym obszarze między okładkami.

Narysujmy powierzchnię Gaussa, obejmującą ładunek q na okładce dodatniej (rys. 26.4). Ze wzoru (26.4) wynika wtedy wyrażenie:

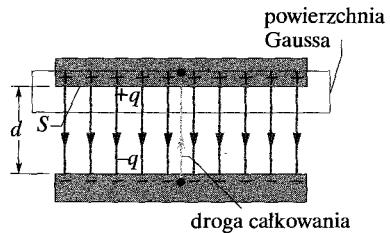
$$q = \epsilon_0 E S, \quad (26.7)$$

gdzie S jest polem powierzchni okładki.

Wzór (26.6) przyjmuje postać:

$$U = \int_{-}^{+} Eds = E \int_0^d ds = Ed. \quad (26.8)$$

We wzorze (26.8) natężenie E można wyłączyć przed całką, bo jest stałe; druga całka jest równa po prostu odległości d między okładkami.



Rys. 26.4. Naładowany kondensator płaski. Powierzchnia Gaussa obejmuje ładunek na okładce dodatniej. Całkowanie we wzorze (26.6) wykonujemy wzdłuż odcinka, od okładki ujemnej do okładki dodatniej

Jeśli teraz podstawimy q ze wzoru (26.7) i U ze wzoru (26.8) do związku $q = CU$ (wzór (26.1)), to otrzymamy:

$$C = \frac{\epsilon_0 S}{d} \quad (\text{kondensator płaski}). \quad (26.9)$$

Widzisz, że pojemność rzeczywiście zależy tylko od wielkości geometrycznych, a mianowicie pola powierzchni okładki S i odległości d między okładkami. Zauważ, że C wzrasta, jeśli zwiększymy pole powierzchni okładki S lub zmniejszymy odległość d .

Przy okazji podkreślimy, że wzór (26.9) wskazuje jeden z powodów zapisania stałej elektrostatycznej w prawie Coulomba w postaci $1/(4\pi\epsilon_0)$. Jeśli tego nie zrobilibyśmy, to wzór (26.9), który przez inżynierów jest częściej używany niż prawo Coulomba, nie miałby tak prostej postaci. Zauważ dalej, że wzór (26.9) pozwala wyrazić przenikalność ϵ_0 w jednostkach bardziej przydatnych do zagadnień, związanych z kondensatorami, a mianowicie:

$$\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12} \text{ F/m} = 8,85 \text{ pF/m}. \quad (26.10)$$

Poprzednio tę stałą wyrażaliśmy w innych jednostkach:

$$\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12} \text{ C}^2/(\text{N} \cdot \text{m}^2). \quad (26.11)$$

Kondensator walcowy

Na rysunku 26.5 przedstawiono w przekroju kondensator walcowy o długości L , zbudowany z dwóch współosiowych powierzchni walcowych, o promieniach a i b . Założymy, że $L \gg b$, co pozwoli nam zaniedbać zakrzywienie linii pola przy końcach powierzchni walcowych. Każda z okładek zawiera ładunek o wartości q . Jako powierzchnię Gaussa wybieramy powierzchnię walca (zamkniętego denkami) o długości L i promieniu r (rys. 26.5). Ze wzoru (26.4) mamy wtedy:

$$q = \epsilon_0 E S = \epsilon_0 E (2\pi r L),$$

gdzie $2\pi r L$ jest polem zakrzywionej części powierzchni Gaussa. Strumień elektryczny przez denka jest równy零. Wyznaczając stąd E , otrzymujemy:

$$E = \frac{q}{2\pi\epsilon_0 L r}. \quad (26.12)$$

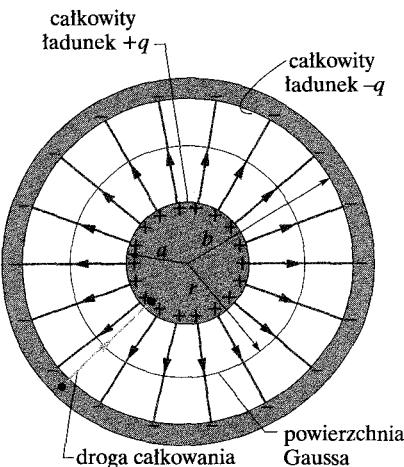
Podstawiając ten wynik do wzoru (26.6), mamy:

$$U = \int_{-}^{+} Eds = -\frac{q}{2\pi\epsilon_0 L} \int_b^a \frac{dr}{r} = \frac{q}{2\pi\epsilon_0 L} \ln\left(\frac{b}{a}\right), \quad (26.13)$$

gdzie zastosowaliśmy równość $ds = -dr$ (całkowaliśmy w kierunku malejącego r). Ze związku $C = q/U$ otrzymujemy ostatecznie:

$$C = 2\pi\epsilon_0 \frac{L}{\ln(b/a)} \quad (\text{kondensator walcowy}). \quad (26.14)$$

Widzisz, że pojemność kondensatora walcowego, podobnie jak kondensatora płaskiego, zależy tylko od wielkości geometrycznych, w tym przypadku od L , b i a .



Rys. 26.5. Przekrój długiego kondensatora walcowego, pokazujący walcową powierzchnię Gaussa o promieniu r (obejmującą dodatnią okładkę) i radialną drogę całkowania, wzdłuż której całkujemy według wzoru (26.6). Rysunek może także służyć jako ilustracja kondensatora kulistego w przekroju

Kondensator kulisty

Rysunek 26.6 może także ilustrować przekrój przez środek kondensatora, złożonego z dwóch współśrodkowych powłok sferycznych o promieniach a i b . Jako powierzchnię Gaussa wybieramy sferę o promieniu r , współśrodkową z dwiema powłokami i wtedy ze wzoru (26.4) mamy:

$$q = \epsilon_0 E S = \epsilon_0 E (4\pi r^2),$$

gdzie $4\pi r^2$ jest polem sferycznej powierzchni Gaussa. Wyznaczając z tego wzoru E , otrzymujemy:

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2}, \quad (26.15)$$

w czym rozpoznajemy wyrażenie na natężenie pola elektrycznego, wytworzonego przez ładunek o rozkładzie sferycznym (wzór (24.15)).

Jeśli podstawimy to wyrażenie do wzoru (26.6), otrzymamy:

$$U = \int_{-}^{+} Eds = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int_b^a \frac{dr}{r^2} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{b-a}{ab}, \quad (26.16)$$

gdzie znów podstawiliśmy $-dr$ zamiast ds . Jeśli teraz wstawimy wzór (26.16) do wzoru (26.1) i obliczymy C , to otrzymamy:

$$C = 4\pi\epsilon_0 \frac{ab}{b-a} \quad (\text{kondensator kulisty}). \quad (26.17)$$

Izolowana kula

Pojemność możemy też przypisać *pojedynczej* izolowanej kuli (lub sferze) przewodzącej, o promieniu R , zakładając, że druga okładka kondensatora jest sferą przewodzącą o nieskończonym promieniu. Linie pola, opuszczające powierzchnię dodatnio naładowanego izolowanego przewodnika muszą się przecież gdzieś kończyć; ściany pokoju, w którym znajduje się przewodnik, mogą efektywnie służyć za naszą sferę o nieskończonym promieniu.

W celu obliczenia pojemności izolowanego przewodnika, napiszemy najpierw wzór (26.17) w postaci:

$$C = 4\pi\epsilon_0 \frac{a}{1 - a/b}.$$

Jeśli następnie przejdziemy z $b \rightarrow \infty$ i podstawimy R za a , to otrzymamy:

$$C = 4\pi\epsilon_0 R \quad (\text{izolowana kula}). \quad (26.18)$$

Zauważ, że zarówno ten wzór, jak i inne wyprowadzone tu wzory na pojemność (wzory (26.9), (26.14) i (26.17)) zawierają stałą ϵ_0 , pomnożoną przez wielkość o wymiarze długości.

SPRAWDZIAN 2: Czy ładunek zmagazynowany na kondensatorach naładowanych przez to samo źródło wzrasta, maleje czy pozostaje taki sam w każdej z następujących sytuacji: a) odległość między okładkami kondensatora płaskiego wzrasta, b) promień wewnętrznej powierzchni walcowej kondensatora walcowego wzrasta, c) promień zewnętrznej powłoki sferycznej kondensatora kulistego wzrasta?

Przykład 26.1

Kondensator w układzie pamięci o swobodnym dostępie (RAM) ma pojemność 55 fF. Jeśli kondensator jest naładowany do różnicy potencjałów 5,3 V, to ile nadmiarowych elektronów znajduje się na jego ujemnej okładce?

ROZWIĄZANIE:

○ 1. Liczbę n nadmiarowych elektronów na ujemnej okładce możemy wyznaczyć, jeśli znamy całkowity ładunek nadmiarowy q na tej okładce. Wtedy $n = q/e$, gdzie e jest wartością ładunku każdego elektronu.

○ 2. Ładunek q jest związany z różnicą potencjałów U , do której jest naładowany kondensator, wzorem (26.1) ($q = CU$). Łącząc te dwa spostrzeżenia, otrzymujemy:

$$n = \frac{q}{e} = \frac{CU}{e} = \frac{(55 \cdot 10^{-15} \text{ F})(5,3 \text{ V})}{1,60 \cdot 10^{-19} \text{ C}} = 1,8 \cdot 10^6 \text{ elektronów.}$$

(odpowiedź)

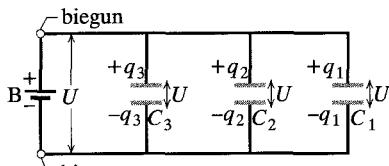
Jest to bardzo mała liczba elektronów. Małe pyłki kurzu zawiera około 10^{17} elektronów (i taką samą liczbę protonów).

26.4. Kondensatory połączone równolegle i szeregowo

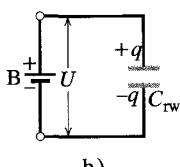
Jeśli w obwodzie występuje układ kondensatorów, to nierzaz możemy zastąpić ten układ **kondensatorem równoważnym**, czyli pojedynczym kondensatorem o taki samej pojemności, jak cały układ. Możemy w ten sposób uprościć obwód, otrzymując prostsze rozwiązania dla nieznanych wielkości w obwodzie. Przedyskutujemy tu dwa podstawowe układy kondensatorów, które umożliwiają takie zastąpienie.

Kondensatory połączone równolegle

Na rysunku 26.6a przedstawiono obwód elektryczny, w którym trzy kondensatory są podłączone *równolegle* do źródła B. Nazwa ta ma mało wspólnego z tym, jak zostały narysowane okładki kondensatorów. W rzeczywistości „równolegle” oznacza, że połączono przewodami bezpośrednio jedne okładki kondensatorów i podobnie drugie okładki, oraz że różnica potencjałów U jest przyłożona do tych dwóch połączonych przewodami okładek. Na każdym kondensatorze jest więc ta sama różnica potencjałów U , która wytwarza ładunek na kondensatorze. (Na rysunku 26.6a przyłożony potencjał jest stały, dzięki źródłu). Inaczej mówiąc:



a)



b)

Rys. 26.6. a) Trzy kondensatory połączone równolegle do źródła B. Źródło zapewnia różnicę potencjałów U na swych biegunkach i na *każdym* kondensatorze. b) Równoważny kondensator o pojemności C_{rw} zastępuje układ kondensatorów połączonych równolegle

► Jeśli różnica potencjałów U jest przyłożona do kilku kondensatorów połączonych równolegle, to taka sama różnica potencjałów U występuje na każdym kondensatorze. Całkowity ładunek q , zgromadzony w układzie jest sumą ładunków, zgromadzonych na poszczególnych kondensatorach.

Jeśli analizujemy obwód z kondensatorami połączonymi równolegle, to możemy go uprościć w następujący sposób:

► Kondensatory połączone równolegle można zastąpić równoważnym kondensatorem o takim samym całkowitym ładunku q i takiej samej różnicy potencjałów U , jak dla kondensatorów układu.

Na rysunku 26.6b przedstawiono kondensator równoważny (o równoważnej pojemności C_{rw}), którym zastąpiono trzy kondensatory (o pojemnościach C_1 , C_2 i C_3) z rysunku 26.6a. Aby wyprowadzić wyrażenie na C_{rw} z rysunku 26.6b, zastosujemy najpierw wzór (26.1) w celu obliczenia ładunku na każdym z trzech kondensatorów:

$$q_1 = C_1 U, \quad q_2 = C_2 U \quad \text{i} \quad q_3 = C_3 U.$$

Całkowity ładunek w układzie połączonych równolegle kondensatorów z rysunku 26.6a wynosi więc:

$$q = q_1 + q_2 + q_3 = (C_1 + C_2 + C_3)U.$$

Równoważna pojemność o takim samym, jak w układzie całkowitym ładunku i takiej samej przyłożonej różnicy potencjałów U wynosi więc:

$$C_{rw} = \frac{q}{U} = C_1 + C_2 + C_3,$$

co możemy łatwo rozszerzyć na dowolną liczbę n kondensatorów:

$$C_{rw} = \sum_{j=1}^n C_j \quad (n \text{ kondensatorów połączonych równolegle}). \quad (26.19)$$

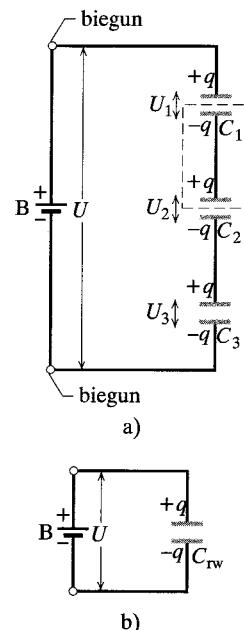
W celu obliczenia równoważnej pojemności układu kondensatorów połączonych równolegle, dodajemy więc po prostu ich pojemności.

Kondensatory połączone szeregowo

Na rysunku 26.7a przedstawiono trzy kondensatory podłączone *szeregowo* do źródła B. Nazwa ta ma mało wspólnego z tym, jak kondensatory zostały narysowane. W rzeczywistości „szeregowo” oznacza, że kondensatory są łączone ze sobą w szereg, jeden za drugim, i że różnica potencjałów U jest przyłożona do dwóch końców szeregu. (Na rysunku 26.7a ta różnica potencjałów jest utrzymywana przez źródło B). Różnice potencjałów, jakie pojawiają się na kondensatorach w szeregu, wytwarzają na nich jednakowe ładunki q .

Jeśli różnica potencjałów U jest przyłożona do kilku kondensatorów połączonych szeregowo, to kondensatory mają identyczne ładunki q . Suma różnic potencjałów na wszystkich kondensatorach jest równa przyłożonej różnicy potencjałów U .

Możesz sobie wyobrazić, że kondensatory uzyskują identyczne ładunki w wyniku *ciągu* zdarzeń, w którym ładowanie każdego kondensatora powoduje ładowanie następnego. Zaczniemy od kondensatora 3 i będziemy się przesuwać do kondensatora 1. Gdy źródło zostaje podłączone do kondensatorów połączonych szeregowo, wytwarza ładunek $-q$ na dolnej okładce kondensatora 3. Ten ładunek odpycha wtedy ładunek ujemny z górnej okładki kondensatora 3 (pozostaje ładunek $+q$). Odepchnięty ładunek ujemny przesuwa się do dolnej okładki kondensatora 2 (dając jej ładunek $-q$). Ładunek na dolnej okładce kondensatora 2 odpycha wtedy ładunek ujemny z górnej okładki kondensatora 2 (zostaje ładunek $+q$) do dolnej okładki kondensatora 1 (dając jej ładunek $-q$). Na koniec ładunek na dol-



Rys. 26.7. a) Trzy kondensatory podłączone szeregowo do źródła B. Źródło zapewnia różnicę potencjałów U między najwyższą i najniższą okładką układu kondensatorów połączonych szeregowo. b) Równoważny kondensator o pojemności C_{rw} zastępuje układ kondensatorów połączonych szeregowo

nej okładce kondensatora 1 powoduje przesunięcie ujemnego ładunku z górnej okładki kondensatora 1 do źródła, pozostawiając górną okładkę z ładunkiem $+q$.

Oto dwa istotne fakty dotyczące kondensatorów połączonych szeregowo:

1. Jeśli ładunek przesuwa się z jednego kondensatora na drugi, w kondensatorach połączonych szeregowo, to może się poruszać tylko po jednej linii, takiej jak na przykład z kondensatora 3 do kondensatora 2 na rysunku 26.7a. Jeśli istnieją dodatkowe połączenia przewodzące, to kondensatory nie są połączone szeregowo (zob. przykład 26.2).
2. Źródło wytwarza bezpośrednio ładunki tylko na tych dwóch okładkach, z którymi jest połączone (na dolnej okładce kondensatora 3 i górnej okładce kondensatora 1, na rys. 26.7a). Ładunki, wytwarzane na innych okładkach powstają w wyniku przesunięć ładunków tam istniejących. Na przykład na rysunku 26.7a część obwodu otoczona linią przerywaną jest elektrycznie odizolowana od reszty obwodu. Stąd ładunek wypadkowy tej części nie może zostać zmieniony przez źródło — ładunek w tej części może mieć tylko zmieniony rozkład.

Gdy analizujemy obwód z kondensatorami połączonymi szeregowo, możemy go uprościć w następujący sposób:

► Kondensatory połączone szeregowo można zastąpić równoważnym kondensatorem, który ma taki sam ładunek q i taką samą całkowitą różnicę potencjałów U , jak kondensatory połączone szeregowo.

Na rysunku 26.7b przedstawiono równoważny kondensator (o równoważnej pojemności C_{rw}), którym zastąpiono trzy kondensatory (o pojemnościach C_1 , C_2 i C_3) z rys. 26.7a.

W celu obliczenia wyrażenia na C_{rw} z rysunku 26.7b skorzystamy najpierw ze wzoru (26.1) i znajdziemy różnicę potencjałów na każdym z kondensatorów:

$$U_1 = \frac{q}{C_1}, \quad U_2 = \frac{q}{C_2} \quad \text{i} \quad U_3 = \frac{q}{C_3}.$$

Całkowita różnica potencjałów U , wytworzona przez źródło jest sumą tych trzech różnic potencjałów. Stąd:

$$U = U_1 + U_2 + U_3 = q \left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3} \right).$$

Równoważna pojemność wynosi więc:

$$C_{rw} = \frac{q}{U} = \frac{1}{1/C_1 + 1/C_2 + 1/C_3},$$

czyli:

$$\frac{1}{C_{rw}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3}.$$

Możemy łatwo rozszerzyć ten wynik na dowolną liczbę n kondensatorów:

$$\frac{1}{C_{rw}} = \sum_{j=1}^n \frac{1}{C_j} \quad (n \text{ kondensatorów połączonych szeregowo}). \quad (26.20)$$

Korzystając ze wzoru (26.20), można pokazać, że równoważna pojemność układu kondensatorów połączonych szeregowo jest zawsze *mniejsza* od najmniejszej pojemności rozważanego układu.

SPRAWDZIAN 3: Źródło o różnicy potencjałów U dostarczyło ładunek q układowi dwóch identycznych kondensatorów. Jaka jest różnica potencjałów i ładunek na każdym kondensatorze, jeśli kondensatory są połączone: a) równolegle, b) szeregowo?

Przykład 26.2

a) Oblicz równoważną pojemność dla układu kondensatorów, przedstawionego na rysunku 26.8a, do którego przyłożono różnicę potencjałów U . Przyjmij:

$$C_1 = 12 \mu\text{F}, \quad C_2 = 5,3 \mu\text{F} \quad \text{i} \quad C_3 = 4,5 \mu\text{F}.$$

ROZWIĄZANIE:

→ Dowolne kondensatory połączone szeregowo można zastąpić równoważnym im kondensatorem i dowolne kondensatory połączone równolegle można zastąpić równoważnym im kondensatorem. Dlatego powinniśmy najpierw sprawdzić, czy na rysunku 26.8a jakieś kondensatory są połączone równolegle lub szeregowo.

Kondensatory 1 i 3 są połączone jeden za drugim, ale czy są połączone szeregowo? Nie. Różnica potencjałów U , przyłożona do kondensatorów, wytwarza ładunek na dolnej okładce kondensatora 3. Ten ładunek powoduje przesunięcie ładunku z górnej okładki kondensatora 3. Zauważ jednak, że przesuwany ładunek może poruszać się do dolnych okładek zarówno kondensatora 1, jak i kondensatora 2. Istnieje więcej niż jedna droga dla przesuwanego ładunku, a więc kondensator 3 *nie* jest połączony szeregowo z kondensatorem 1 (czy kondensatorem 2).

Czy kondensatory 1 i 2 są połączone równolegle? Tak. Ich górne okładki są bezpośrednio połączone przewodem i ich dolne okładki są bezpośrednio połączone przewodem, a różnica potencjałów jest przyłożona między parę górnych okładek i parę dolnych okładek. Stąd kondensator 1 i kondensator 2 są połączone równolegle i ze wzoru (26.19) wynika, że równoważna pojemność C_{12} dla tej pary wynosi:

$$C_{12} = C_1 + C_2 = 12 \mu\text{F} + 5,3 \mu\text{F} = 17,3 \mu\text{F}.$$

Na rysunku 26.8b zastąpiliśmy kondensatory 1 i 2 równoważnym im kondensatorem, nazwijmy go kondensatorem 12 („jeden dwa”). (Połączenia w punktach A i B są dokładnie takie same na rysunkach 26.8a i 26.8b).

Czy kondensator 12 jest połączony szeregowo z kondensatorem 3? Stosując ponownie test dla kondensatorów połączonych szeregowo, dostrzeżesz, że ładunek przesuwany z górnej okładki kondensatora 3 musi przejść w całości na dolną okładkę kondensatora 12. Stąd kondensatory 12 i 3 są połączone szeregowo i możemy je zastąpić równoważnym im kondensatorem o pojemności C_{123} z rysunku 26.8c. Ze wzoru (26.20) otrzymujemy:

$$\frac{1}{C_{123}} = \frac{1}{C_{12}} + \frac{1}{C_3} = \frac{1}{17,3 \mu\text{F}} + \frac{1}{4,5 \mu\text{F}} = 0,28 \mu\text{F}^{-1},$$

skąd:

$$C_{123} = \frac{1}{0,28 \mu\text{F}^{-1}} = 3,57 \mu\text{F}. \quad (\text{odpowiedź})$$

b) Różnica potencjałów, przyłożona do zacisków wejściowych na rysunku 26.8a wynosi $U = 12,5$ V. Jaki jest ładunek na kondensatorze 1?

ROZWIĄZANIE:

→ 1. W celu obliczenia ładunku q_1 na kondensatorze 1 musimy teraz cofnąć się do tego kondensatora, zaczynając od kondensatora 123. Podana różnica potencjałów U ($= 12,5$ V) jest przyłożona do układu trzech kondensatorów z rysunku 26.8a, a więc jest także przyłożona do kondensatora 123 z rysunku 26.8c. Stąd wzór (26.1) ($q = CU$) daje nam:

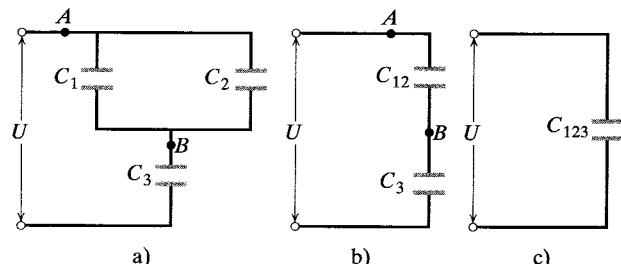
$$q_{123} = C_{123}U = (3,57 \mu\text{F}) \cdot (12,5 \text{ V}) = 44,6 \mu\text{C}.$$

→ 2. Połączone szeregowo kondensatory 12 i 3 z rysunku 26.8b mają taki sam ładunek, jak równoważny im kondensator 123. Stąd kondensator 12 ma ładunek $q_{12} = q_{123} = 44,6 \mu\text{C}$. Ze wzoru (26.1) różnica potencjałów na kondensatorze 12 musi wynosić:

$$U_{12} = \frac{q_{12}}{C_{12}} = \frac{44,6 \mu\text{C}}{17,3 \mu\text{F}} = 2,58 \text{ V}.$$

→ 3. Różnica potencjałów na połączonych równolegle kondensatorach 1 i 2 jest taka sama, jak na równoważnym im kondensatorze 12. Stąd różnica potencjałów na kondensatorze 1 $U_1 = U_{12} = 2,58$ V. Ze wzoru (26.1) ładunek kondensatora 1 musi więc wynosić:

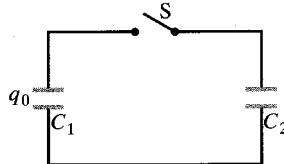
$$q_1 = C_1 U_1 = (12 \mu\text{F})(2,58 \text{ V}) = 31 \mu\text{C}. \quad (\text{odpowiedź})$$



Rys. 26.8. Przykład 26.2. a) Trzy kondensatory. b) Połączone równolegle kondensatory o pojemnościach C_1 i C_2 zastąpiono równoważnym kondensatorem o pojemności C_{12} . c) Połączone szeregowo kondensatory o pojemnościach C_{12} i C_3 zastąpiono równoważnym kondensatorem o pojemności C_{123}

Przykład 26.3

Kondensator 1 o pojemności $C_1 = 3,55 \mu\text{F}$ jest naładowany do różnicy potencjałów $U_0 = 6,3 \text{ V}$, przy użyciu źródła o takiżej różnicy potencjałów. Następnie źródło zostaje odłączone, a przyłączony zostaje nienalałowany kondensator 2 o pojemności $C_2 = 8,95 \mu\text{F}$ (rys. 26.9). Gdy klucz S zostaje zamknięty, ładunek przepływa między kondensatorami tak dugo, aż uzyskają one taką samą różnicę potencjałów U . Znajdź U .



Rys. 26.9. Przykład 26.3. Do kondensatora 1 przyłożono różnicę potencjałów U_0 i po naładowaniu kondensatora odłączono źródło. Następnie zamknięto klucz S i ładunek na kondensatorze 1 rozdzielił się między kondensatory 1 i 2

ROZWIĄZANIE:

Obecna sytuacja różni się od opisanej w poprzednim przykładzie tym, że układ nie zawiera źródła, które utrzymywałoby stałą różnicę potencjałów. Tuż po zamknięciu klucza różnica potencjałów przyłożona do kondensatora 2 pochodzi od kondensatora 1, a z czasem maleje. W tym przypadku nie możemy mówić ani

o szeregowym, ani o równoległym połączeniu kondensatorów, gdyż w układzie nie ma źródła.

→ Po zamknięciu klucza początkowy ładunek q_0 na kondensatorze 1 rozdzieli się między kondensatory 1 i 2. Po osiągnięciu równowagi (gdy ładunki przestaną przepływać) na kondensatorach zgromadzą się ładunki q_1 i q_2 , które możemy związać z ładunkiem q_0 wzorem:

$$q_0 = q_1 + q_2.$$

Stosując związek $q = CU$ do każdego z członów tego wzoru, otrzymujemy:

$$C_1 U_0 = C_1 U + C_2 U,$$

skąd

$$U = U_0 \frac{C_1}{C_1 + C_2} = \frac{(6,3 \text{ V})(3,55 \mu\text{F})}{3,55 \mu\text{F} + 8,95 \mu\text{F}} = 1,79 \text{ V} \text{ (odpowiedź)}$$

Gdy różnica potencjałów na kondensatorach osiągnie tę wartość, przepływ ładunku ustanie.

✓ **SPRAWDZIAN 4:** Założmy w poprzednim przykładzie, że kondensator 2 został zastąpiony układem kondensatorów 3 i 4, połączonych szeregowo. a) Jaki jest związek między początkowym ładunkiem q_0 , końcowym ładunkiem q_1 na kondensatorze 1 i ładunkiem q_{34} na równoważnym kondensatorze 34 po zamknięciu klucza i ustaniu przepływu ładunku? b) Czy ładunek q_3 na kondensatorze 3 jest większy, mniejszy, czy równy ładunkowi q_4 na kondensatorze 4, gdy $C_3 > C_4$?

Sztuka rozwiązywania zadań

Porad 2: Obwody z wieloma kondensatorami

Dokonajmy przeglądu metody rozwiązywania problemu z przykładu 26.2, w którym kilka kondensatorów zostało podłączonych do źródła. Aby znaleźć pojemność pojedynczego równoważnego kondensatora, upraszczamy wyjściowy układ kondensatorów, następując je krok po kroku równoważnymi kondensatorami i korzystając ze wzoru (26.19), gdy znajdziemy kondensatory połączone równolegle oraz wzoru (26.20), gdy znajdziemy kondensatory połączone szeregowo. Następnie w celu obliczenia ładunku zgromadzonego na tym pojedynczym równoważnym kondensatorze korzystamy ze wzoru (26.1) i różnicę potencjałów U przyłożonej ze źródła.

Ten wynik określa nam wypadkowy ładunek, zgromadzony na układzie kondensatorów. Aby jednak znaleźć ładunek czy różnicę potencjałów na określonym kondensatorze, musimy teraz zacząć rozumować odwrotnie. Przy każdym kroku powrotnym stosujemy następujące dwie reguły: gdy kondensatory są połączone równolegle, mają taką samą różnicę potencjałów, jak równoważny kondensator i możemy skorzystać ze wzoru (26.1) w celu obliczenia

ładunku na każdym kondensatorze; gdy kondensatory są połączone szeregowo, mają taki sam ładunek, jak równoważny kondensator i możemy skorzystać ze wzoru (26.1) w celu obliczenia różnicę potencjałów na każdym kondensatorze.

Porad 3: Źródła prądu i kondensatory

Źródło prądu utrzymuje pewną różnicę potencjałów na swoich biegunkach. Stąd, jeśli kondensator 1 z przykładu 26.3 zostanie podłączony do źródła o napięciu $6,3 \text{ V}$, to ładunek przepływa między kondensatorem i źródłem do momentu, aż kondensator uzyska taką samą różnicę potencjałów, jaką ma źródło.

Kondensator różni się od źródła tym, że w kondensatorze nie zachodzą reakcje elektrochemiczne potrzebne do uwolnienia cząstek naładowanych (elektronów) z atomów i cząsteczek. Stąd, gdy naładowany kondensator 1 z przykładu 26.3 zostanie odłączony od źródła i połączony z nienalałowanym kondensatorem 2 przy zamkniętym kluczu S, różnica potencjałów na kondensatorze 1 nie będzie stała. Wielkością, która jest zachowywana, jest ładunek q_0 układu dwóch kondensatorów, czyli zasada zachowania jest spełniona dla ładunku, a nie dla potencjału elektrycznego.

26.5. Energia zmagazynowana w polu elektrycznym

Aby naładować kondensator, konieczne jest wykonanie pracy przez siłę zewnętrzna. Rozpoczynając od nienalożanego kondensatora, wyobraź sobie, że — używając „magicznych szczypczyków” — usuwamy elektrony z jednej okładki i przenosimy je, jeden po drugim, na drugą okładkę. Pole elektryczne, powstające w obszarze między okładkami ma kierunek, który przeciwdziała dalszemu przesunięciu. W miarę, jak ładunek gromadzi się na okładkach kondensatora, musimy wykonywać coraz większą pracę przy przesunięciu dodatkowych elektronów. W rzeczywistości praca ta jest wykonywana nie przez „magiczne szczypczyki”, lecz przez źródło, kosztem zmagazynowanej w nim energii chemicznej.

Praca wykonana przy ładowaniu kondensatora zostaje zmagazynowana w postaci **elektrycznej energii potencjalnej** E_p , w polu elektrycznym między okładkami. Możemy odzyskać tę energię przez rozładowanie kondensatora w obwodzie, podobnie jak możemy odzyskać energię potencjalną, zmagazynowaną w napiętym łuku przez zwolnienie cięciwy, aby zamienić tę energię na energię kinetyczną strzały.

Załóżmy, że w pewnej chwili ładunek przeniesiony z jednej płytki kondensatora na drugą wynosi q' . Różnica potencjałów U' między okładkami była wtedy równa q'/C . Jeśli przeniesiemy następnie dodatkowy ładunek dq' , to zgodnie ze wzorem (25.7) praca przy tym wykonana wyniesie:

$$dW = U' dq' = \frac{q'}{C} dq'.$$

Praca, potrzebna do przeniesienia całkowitego ładunku q kondensatora jest równa:

$$W = \int dW = \frac{1}{C} \int_0^q q' dq' = \frac{q^2}{2C}.$$

Praca ta jest zmagazynowana jako energia potencjalna E_p w kondensatorze i stąd:

$$E_p = \frac{q^2}{2C} \quad (\text{energia potencjalna}). \quad (26.21)$$

Stosując wzór (26.1), możemy tę energię zapisać także w postaci:

$$E_p = \frac{1}{2} CU^2 \quad (\text{energia potencjalna}). \quad (26.22)$$

Wzory (26.21) i (26.22) są poprawne bez względu na geometrię kondensatora.

Aby zrozumieć, na czym polega magazynowanie energii, rozważmy dwa płaskie kondensatory, które są identyczne poza tym, że w kondensatorze 1 odległość między okładkami jest dwa razy większa niż w kondensatorze 2. Wtedy kondensator 1 ma dwa razy większą objętość obszaru między okładkami i, zgodnie ze wzorem (26.9), dwa razy mniejszą pojemność niż kondensator 2. Ze wzoru (26.4) wynika, że jeśli na obydwu kondensatorach znajdują się takie same ładunki q , to natężenia pól elektrycznych między ich okładkami są identyczne. Ze wzoru

(26.21) wynika, że energia potencjalna zmagazynowana w kondensatorze 1 jest dwa razy większa niż w kondensatorze 2. Dla dwóch prawie identycznych kondensatorów o takim samym ładunku i takim samym natężeniu pola kondensator o dwa razy większej objętości między okładkami ma więc zmagazynowaną dwa razy większą energię potencjalną. Takie argumenty potwierdzają nasze wcześniejsze założenie:

► Energia potencjalna naładowanego kondensatora jest zmagazynowana w polu elektrycznym między okładkami kondensatora.

Defibrylator medyczny

Zdolność kondensatora do magazynowania energii potencjalnej jest podstawą działania *defibrylatorów*, które są używane przez zespoły pogotowia ratunkowego do zatrzymania mitotania komór u ofiar ataku serca. W przenośnej wersji defibrylatora bateria ładuje kondensator do dużej różnicy potencjałów, magazynując dużą ilość energii w czasie krótkim niż minuta. Bateria utrzymuje tylko małą różnicę potencjałów, lecz obwód elektroniczny, korzystając z niej cyklicznie, wytwarza na kondensatorze dużo większą różnicę potencjałów. Moc, czyli szybkość przekazu energii, jest także mała w tym procesie.

Przewodzące elektrody umieszcza się na klatce piersiowej chorego. Gdy zostanie zamknięty obwód, kondensator przekazuje porcję zmagazynowanej energii ciała chorego. Na przykład, gdy kondensator $70 \mu\text{F}$ w defibrylatorze jest naładowany do 5000 V , zgodnie ze wzorem (26.22), energia zmagazynowana w kondensatorze wynosi:

$$E_p = \frac{1}{2}CU^2 = \frac{1}{2}(70 \cdot 10^{-6} \text{ F})(5000 \text{ V})^2 = 875 \text{ J.}$$

Około 200 J tej energii jest przekazywane człowiekowi podczas impulsu trwającego około 2 ms . Moc impulsu wynosi:

$$P = \frac{E_p}{t} = \frac{200 \text{ J}}{2 \cdot 10^{-3} \text{ s}} = 100 \text{ kW}$$

i jest dużo większa niż moc samego źródła. Ta sama technika zastosowania kondensatora powoli ładowającego się ze źródła, a następnie rozładowującego się z dużo większą mocą, jest powszechnie stosowana w fotografii błyskowej i stroboskopowej.

Gęstość energii

W płaskim kondensatorze, przy zaniedbaniu efektów brzegowych, natężenie pola elektrycznego ma taką samą wartość we wszystkich punktach między okładkami. Stąd **gęstość energii u** , czyli energia potencjalna na jednostkę objętości między okładkami, powinna także być stała. Możemy znaleźć u przez podzielenie całkowitej energii potencjalnej przez objętość Sd obszaru między okładkami. Po zastosowaniu wzoru (26.22) otrzymujemy:

$$u = \frac{E_p}{Sd} = \frac{CU^2}{2Sd}.$$

Po podstawieniu $C = \varepsilon_0 S/d$ zgodnie ze wzorem (26.9), powyższe równanie przyjmuje postać:

$$u = \frac{1}{2} \varepsilon_0 \left(\frac{U}{d} \right)^2.$$

Jak wynika ze wzoru (25.42) wielkość U/d jest równa wartości natężenia pola elektrycznego E , czyli:

$$u = \frac{1}{2} \varepsilon_0 E^2 \quad (\text{gęstość energii}). \quad (26.23)$$

Chociaż wzór ten wyprowadziliśmy dla szczególnego przypadku kondensatora płaskiego, to jest on prawdziwy bez względu na źródło pola elektrycznego. Jeśli w jakimś punkcie przestrzeni istnieje pole elektryczne o natężeniu \vec{E} , to możemy z tym punktem wiązać elektryczną energię potencjalną, a jej ilość na jednostkę objętości jest dana wzorem (26.23).

Przykład 26.4

Izolowana kula przewodząca o promieniu $R = 6,85$ cm ma ładunek $q = 1,25$ nC.

a) Jaka energia potencjalna jest zmagazynowana w polu elektrycznym tego naładowanego przewodnika?

ROZWIĄZANIE:

■ Energia E_p zmagazynowana w kondensatorze zależy, zgodnie ze wzorem (26.21), od ładunku q na kondensatorze i pojemności C kondensatora. Podstawiając do wzoru (26.18) wyrażenie na C , ze wzoru (26.21) otrzymujemy:

$$\begin{aligned} E_p &= \frac{q^2}{2C} = \frac{q^2}{8\pi\varepsilon_0 R} = \frac{(1,25 \cdot 10^{-9} \text{ C})^2}{(8\pi)(8,85 \cdot 10^{-12} \text{ F/m})(0,0685 \text{ m})} \\ &= 1,03 \cdot 10^{-7} \text{ J} = 103 \text{ nJ}. \end{aligned} \quad (\text{odpowiedź})$$

b) Jaka jest gęstość energii przy powierzchni kuli?

ROZWIĄZANIE:

■ Gęstość energii u zmagazynowanej w polu elektrycznym zależy od wartości E natężenia pola, zgodnie ze wzorem (26.23) ($u = \frac{1}{2} \varepsilon_0 E^2$), czyli musimy najpierw znaleźć E przy powierzchni kuli. Wartość ta jest dana wzorem (24.15):

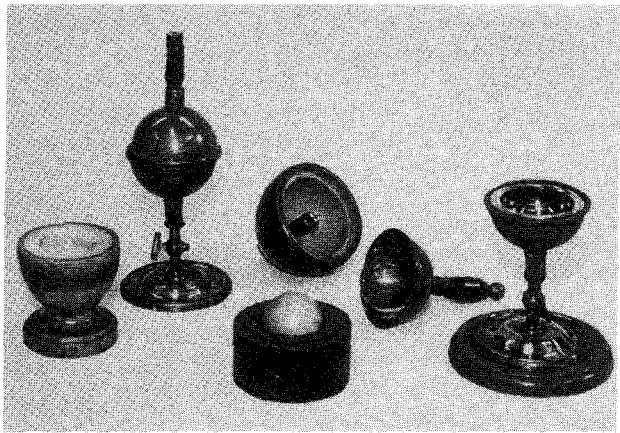
$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q}{R^2}.$$

Gęstość energii wynosi więc:

$$\begin{aligned} u &= \frac{1}{2} \varepsilon_0 E^2 = \frac{q^2}{32\pi^2\varepsilon_0 R^4} \\ &= \frac{(1,25 \cdot 10^{-9} \text{ C})^2}{(32\pi^2)(8,85 \cdot 10^{-12} \text{ C}^2/(\text{N} \cdot \text{m}^2))(0,0685 \text{ m})^4} \\ &= 2,54 \cdot 10^{-5} \text{ J/m}^3 = 25,4 \mu\text{J/m}^3. \end{aligned} \quad (\text{odpowiedź})$$

26.6. Kondensator z dielektrykiem

Co stanie się z pojemnością kondensatora, jeśli przestrzeń między jego okładkami wypełnimy dielektrykiem, czyli materiałem izolującym, na przykład olejem mineralnym lub plastikiem? Pierwszy przeanalizował ten problem w 1837 r. Michael Faraday, któremu w dużym stopniu zawdzięczamy pojęcie pojemności i na cześć którego jednostkę pojemności w układzie SI nazwano faradem. Korzystając z prostych przyrządów, pokazanych na rys. 26.10 odkrył on, że pojemność kondensatora wzrasta o czynnik liczbowy ϵ_r , który nazywamy **przenikalnością elektryczną względową** materiału izolującego. W tabeli 26.1 podano wartości przenikalności elektrycznych dla kilkunastu materiałów dielektrycznych. Przenikalność elektryczna próżni jest z definicji równa jedności, dla powietrza zaś



Rys. 26.10. Prosta aparatura elektrostatyczna używana przez Faradaya. Złożony przyrząd (drugi od lewej) jest sferycznym kondensatorem, składającym się z zewnętrznej mosiężnej powłoki i znajdującej się wewnątrz mosiężnej kuli. W przestrzeni między kulą i powłoką Faraday umieszczał materiały dielektryczne

| Materiał | Przenikalność elektryczna względna ϵ_r | Wytrzymałość na przebicie [kV/mm] |
|-----------------------|---|-----------------------------------|
| Powietrze (1 atm) | 1,00054 | 3 |
| Polistyren | 2,6 | 24 |
| Papier | 3,5 | 16 |
| Olej transformatorowy | 4,5 | |
| Pyreks | 4,7 | 14 |
| Mika | 5,4 | |
| Porcelana | 6,5 | |
| Krzem | 12 | |
| German | 16 | |
| Etanol | 25 | |
| Woda (20°C) | 80,4 | |
| Woda (25°C) | 78,5 | |
| Ceramika tytanowa | 130 | |
| Tytanian strontu | 310 | 8 |

Dla próżni $\epsilon_r = 1$

^a mierzzone (poza wodą) w temperaturze pokojowej.

(jest to głównie pusta przestrzeń) zmierzona wartość przenikalności elektrycznej względnej jest tylko nieco większa od jedności.

Inną konsekwencją wprowadzenia dielektryka jest konieczność ograniczenia różnicy potencjałów, jaka może być przyłożona do okładek, do pewnej wartości U_{\max} , zwanej *napięciem przebicia*. Jeśli tę wartość istotnie przekroczymy, to nastąpi przebicie materiału dielektrycznego i między okładkami powstanie przewodzącej ścieżka. Każdy materiał dielektryczny ma charakterystyczną *wytrzymałość na przebicie*, która jest maksymalną wartością natężenia pola elektrycznego, jakie dielektryk może wytrzymać bez przebicia. Kilka takich wartości podano w tabeli 26.1.

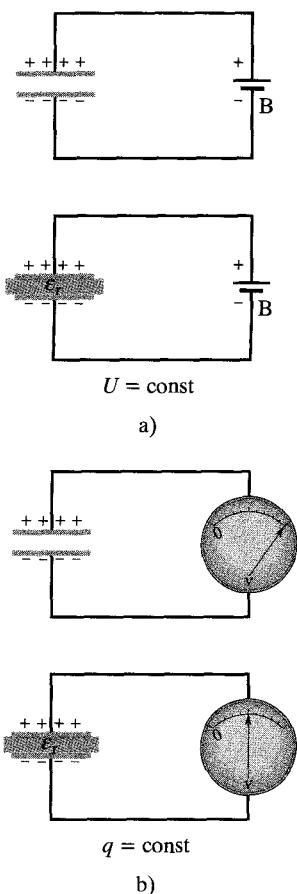
Zgodnie z dyskusją przy wzorze (26.18), pojemność dowolnego kondensatora można wyrazić wzorem:

$$C = \epsilon_0 \mathcal{L}, \quad (26.24)$$

gdzie \mathcal{L} ma wymiar długości i np. $\mathcal{L} = S/d$ dla kondensatora płaskiego. Odkrycie Faradaya polegało na tym, że po całkowitym wypełnieniu dielektrykiem obszaru między okładkami kondensatora wzór (26.24) przyjmuje postać:

$$C = \epsilon_r \epsilon_0 \mathcal{L} = \epsilon_r C_{\text{pow}}, \quad (26.25)$$

gdzie C_{pow} jest wartością pojemności dla kondensatora z powietrzem (ściślej próżnią) między okładkami.



Rys. 26.11. a) Jeśli różnica potencjałów między okładkami kondensatora jest utrzymywana, na przykład przez źródło B, to wsunięcie dielektryka zwiększa ładunek na okładkach. b) Jeśli ładunek na okładkach kondensatora jest stały (jak w tej sytuacji), to wsunięcie dielektryka zmniejsza różnicę potencjałów między okładkami. Pokazana skala jest skalą *woltomierza*, czyli przyrządu używanego do pomiaru różnic potencjałów (w tym przypadku między okładkami). Kondensator nie może rozładować się przez woltomierz

Analiza rysunku 26.11 pozwala zrozumieć doświadczenia Faradaya. Na rysunku 26.11a bateria zapewnia stałą różnicę potencjałów U między okładkami kondensatora. Gdy między okładki włożymy płytę dielektryczną, ładunek q na okładkach zwiększy się o czynnik ϵ_r ; dodatkowy ładunek do okładek kondensatora zostaje dostarczony przez źródło prądu. Na rysunku 26.13b nie ma źródła i dlatego ładunek q musi pozostać stały przy wsuwaniu płyty dielektrycznej; różnica potencjałów U między okładkami maleje więc o czynnik ϵ_r . Obie te obserwacje są zgodne ze wzrostem pojemności, spowodowanym przez dielektryk (wiemy, że $q = CU$).

Porównanie wzorów (26.24) i (26.25) wskazuje, że wpływ dielektryka można podsumować następująco:

► W obszarze wypełnionym całkowicie materiałem dielektrycznym o względnej przewodniczości elektrycznej ϵ_r wszystkie równania elektrostatyki, zawierające przenikalność elektryczną próżni ϵ_0 należy zmodyfikować, zastępując ϵ_0 przez $\epsilon_r \epsilon_0$.

Ładunek punktowy wewnętrz dielektryka wytwarza więc pole elektryczne, którego natężenie zgodnie z prawem Coulomba ma wartość:

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_r\epsilon_0} \frac{q}{r^2}. \quad (26.26)$$

Wyrażenie na natężenie pola elektrycznego przy powierzchni izolowanego przewodnika, otoczonego dielektrykiem (zob. wzór (24.11)) wynosi wtedy:

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon_r\epsilon_0}. \quad (26.27)$$

Obydwa te równania pokazują, że dla ustalonego rozkładu ładunków wpływ dielektryka polega na osłabieniu natężenia pola elektrycznego w stosunku do sytuacji bez dielektryka.

Przykład 26.5

Kondensator płaski, którego pojemność C wynosi $13,5 \text{ pF}$, jest naładowany przez źródło do różnicy potencjałów między okładkami $U = 12,5 \text{ V}$. Po odłączeniu źródła między okładki kondensatora wsunięto porcelanową płytę ($\epsilon_r = 6,5$). Jaka jest energia potencjalna układu kondensator-płyta przed wsunięciem płyty i po nim?

ROZWIĄZANIE:

► 1. Energię potencjalną E_p kondensatora możemy powiązać z pojemnością C i z różnicą potencjałów U (wzór (26.22)), albo z ładunkiem q (wzór (26.21)):

$$E_{p \text{ pocz}} = \frac{1}{2} C U^2 = \frac{q^2}{2C}.$$

Znamy początkową różnicę potencjałów $U = 12,5 \text{ V}$, więc ze wzoru (26.22) znajdziemy początkową energię, zmagazynowaną w kondensatorze:

$$\begin{aligned} E_{p \text{ pocz}} &= \frac{1}{2} C U^2 = \frac{1}{2} \cdot 13,5 \cdot 10^{-12} \text{ F} \cdot (12,5 \text{ V})^2 \\ &= 1,055 \cdot 10^{-9} \text{ J} = 1055 \text{ pJ} \approx 1100 \text{ pJ}. \quad (\text{odpowiedź}) \end{aligned}$$

Znajdzimy obecnie końcową energię potencjalną $E_{p \text{ końc}}$ kondensatora (po włożeniu płyty).

► 2. Źródło zostało odłączone, więc ładunek na kondensatorze nie może ulec zmianie przy wsuwaniu dielektryka. Zmiana ulega natomiast różnica potencjałów. Musimy więc teraz użyć wzoru (26.21) (zawierającego q), aby wypisać wzór na końcową energię potencjalną $E_{p \text{ końc}}$. Teraz w kondensatorze jest płyta, a więc jego pojemność wynosi $\epsilon_r C$. Otrzymujemy więc:

$$E_{p \text{ końc}} = \frac{q^2}{2\epsilon_r C} = \frac{E_{p \text{ pocz}}}{\epsilon_r} = \frac{1055 \text{ pJ}}{6,5} = 162 \text{ pJ} \approx 160 \text{ pJ}. \quad (\text{odpowiedź})$$

Po wsunięciu płyty energia potencjalna maleje o czynnik ϵ_r .

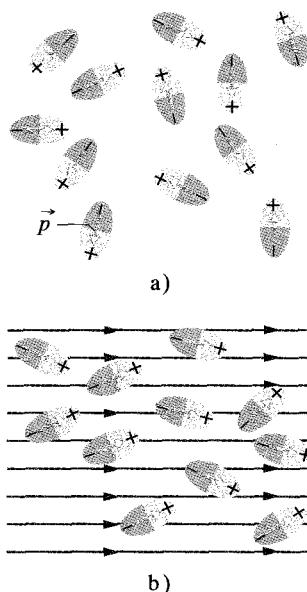
Źródło „brakujące” energii jest oczywiste dla osoby, która wsuwała płytę. Kondensator wciągał lekko płytę i wykonał nad nią pracę

$$W = E_{p \text{ pocz}} - E_{p \text{ końc}} = (1055 - 162) \text{ pJ} = 893 \text{ pJ}.$$

Jeśliby nie przytrzymywać płyty między okładkami, to płyta oscylowałaby między nimi tam i z powrotem ze stałą energią mechaniczną 893 pJ i energia ta zmieniałaby się okresowo z energii kinetycznej poruszającej się płyty, na energię potencjalną, zmagazynowaną w polu elektrycznym.

SPRAWDZIAN 5: Gdyby źródło w powyższym przykładzie było nadal podłączone, to czy: a) różnica potencjału między okładkami kondensatora, b) pojemność, c) ładunek na kondensatorze, d) energia potencjalna układu, e) natężenie pola elektrycznego między płytami wzrosłyby, zmalałyby, czy pozostałyby bez zmiany? (Wskazówka: W punkcie (e) należy zwrócić uwagę na to, że ładunek nie jest stały).

26.7. Dielektryki: obraz mikroskopowy



Rys. 26.12. a) Cząsteczki obdarzone elektrycznym momentem dipolowym przy braku zewnętrznego pola elektrycznego mają przypadkowe ustawienia. b) Przyłożenie pola elektrycznego prowadzi do częściowego uporządkowania dipoli. Całkowitemu uporządkowaniu przeszkadza ruch termiczny

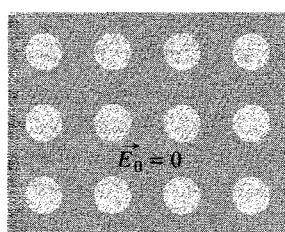
Co się dzieje z atomami i cząsteczkami, gdy włożymy dielektryk w pole elektryczne? Są dwie możliwości, zależnie od rodzaju cząsteczek.

1. *Dielektryki polarne.* Cząsteczki pewnych dielektryków, np. wody, mają trwałe elektryczne momenty dipolowe. W takich materiałach (zwanych *dielektrykami polarnymi*) dipole elektryczne mają tendencję do ustawiania się wzdłuż zewnętrznego pola elektrycznego, jak na rysunku 26.12. Wskutek swego przypadkowego ruchu termicznego cząsteczki ciągle się potrafią nawzajem, a więc uporządkowanie nie jest całkowite, ale staje się coraz pełniejsze wraz ze wzrostem wartości natężenia przyłożonego pola (lub zmniejszeniem temperatury, a stąd liczby zderzeń). Uporządkowane dipole elektryczne tworzą pole elektryczne o natężeniu skierowanym przeciwko do przyłożonego pola i mniejszej wartości.
2. *Dielektryki niepolarne.* Bez względu na to, czy cząsteczki mają trwałe elektryczne momenty dipolowe, czy też nie, po umieszczeniu w zewnętrznym polu elektrycznym zyskują indukowane momenty dipolowe. W paragrafie 25.7 (zob. rys. 25.12) pokazaliśmy, że dzieje się tak, ponieważ zewnętrzne pole ma tendencję do „rozciągania” cząsteczek i przesuwa nieco środki ładunku dodatniego i ujemnego.

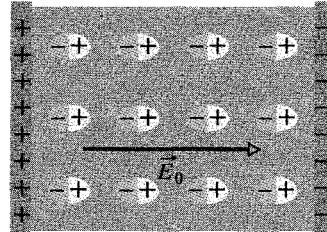
Na rysunku 26.13a przedstawiono płytę z niepolarnego dielektryka, bez zewnętrznego pola elektrycznego. Następnie przyłożono pole elektryczne o natężeniu \vec{E}_0 , przez umieszczenie płyty w kondensatorze, którego okładki były naładowane (rys. 26.13b). W wyniku tego nastąpiło małe przesunięcie środków rozkładów dodatniego i ujemnego ładunku w płycie, co doprowadziło do powstania się ładunku dodatniego na jednej ścianie płyty (wskutek występowania tam dodatnich końców dipoli) i ładunku ujemnego na przeciwnej ścianie (wskutek występowania tam ujemnych końców dipoli). Płyta jako całość pozostała obojętna, a wewnątrz niej nie ma nadmiarowego ładunku w żadnym makroskopowym elemencie objętości.

Na rysunku 26.13c pokazano, że indukowane ładunki powierzchniowe na ścianach płyty wytwarzają pole elektryczne o natężeniu \vec{E}' , skierowanym przeciwko do natężenia przyłożonego pola elektrycznego \vec{E}_0 . Wypadkowe natężenie pola \vec{E} wewnątrz dielektryka (suma wektorowa natężeń \vec{E}_0 i \vec{E}') ma kierunek natężenia \vec{E}_0 , ale ma mniejszą wartość.

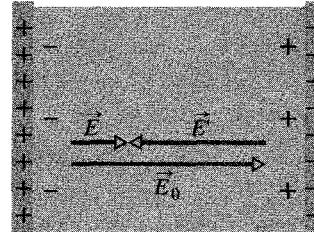
Natężenie pola \vec{E}' , wytworzonego zarówno przez ładunki powierzchniowe na rysunku 26.13c, jak i przez trwałe dipole elektryczne z rysunku 26.12 jest tak



a)



b)



c)

Rys. 26.13. a) Płyta z niepolarnego dielektryka. Koła przedstawiają elektrycznie obojętne atomy w płycie. b) Przyłożenie pola elektrycznego przez naładowanie okładek kondensatora; pole częściowo rozcina atomy, rozsuwając środki dodatniego i ujemnego ładunku. c) Rozsumienie wytwarza ładunki powierzchniowe na ścianach płyty. Ładunki te wytwarzają pole o natężeniu \vec{E}' , które jest skierowane przeciwnie do natężenia przyłożonego pola \vec{E}_0 . Wypadkowe natężenie pola \vec{E} wewnętrz dielektryka (suma wektorowa natężeń \vec{E}_0 i \vec{E}') ma ten sam kierunek, jak wektor \vec{E}_0 , ale mniejszą wartość

samo skierowane — ma ono kierunek przeciwny do natężenia przyłożonego pola \vec{E}_0 . Stąd zarówno w dielektrykach polarnych, jak i w niepolarnych natężenie dowolnego przyłożonego do nich pola ulega osłabieniu, podobnie jak między okładkami kondensatora.

Możesz teraz zrozumieć, dlaczego dielektryczna płyta porcelanowa w przykładzie 26.5 jest wciągana do kondensatora: przy wchodzeniu w obszar między okładkami, pojawiające się na każdej ścianie płyty ładunki powierzchniowe mają znak przeciwny niż ładunek na pobliskiej okładce kondensatora i dla tego płyta i okładki przyciągają się nawzajem.

26.8. Dielektryki i prawo Gaussa

W naszej dyskusji prawa Gaussa w rozdziale 24 założyliśmy, że ładunki znajdują się w próżni. Teraz zobaczysz, jak zmodyfikować i uogólnić to prawo, gdy występują materiały dielektryczne, np. podane w tabeli 26.1. Na rysunku 26.14 przedstawiono płaski kondensator z okładkami o polu powierzchni S , zarówno z dielektrykiem, jak i bez niego. Założymy, że ładunek q na okładkach kondensatora jest w obydwu przypadkach taki sam. Pole między okładkami indukuje ładunki na ścianach dielektryka w jeden z dwóch sposobów, opisanych w paragrafie 26.7.

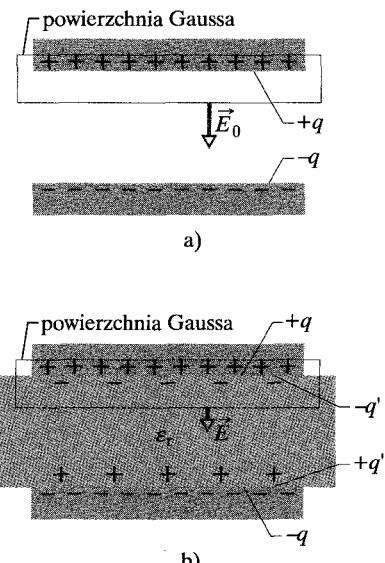
Dla przypadku przedstawionego na rys. 26.14a, czyli bez dielektryka, natężenie pola elektrycznego \vec{E}_0 między okładkami możemy znaleźć tak, jak zrobiliśmy to na rys. 26.5: otaczamy ładunek $+q$ na górnej okładce powierzchnią Gaussa i następnie stosujemy prawo Gaussa. Jeśli E_0 oznacza wartość natężenia pola, to

$$\varepsilon_0 \oint \vec{E} \cdot d\vec{S} = \varepsilon_0 E_0 S = q, \quad (26.28)$$

czyli

$$E_0 = \frac{q}{\varepsilon_0 S}. \quad (26.29)$$

Na rysunku 26.14b, czyli z dielektrykiem między okładkami, możemy znaleźć natężenie pola elektrycznego między okładkami (czyli wewnątrz dielektryka)



Rys. 26.14. Kondensator płaski a) bez płyty, b) z wsuniętą płytą dielektryczną. Ładunek q na okładkach jest założenia taki sam w obydwu przypadkach

przy zastosowaniu tej samej powierzchni Gaussa. Teraz jednak powierzchnia ta obejmuje również ładunek indukowany $-q'$ na górnej ścianie dielektryka. Ładunek na płycie przewodzącej nazywamy *ładunkiem swobodnym*, ponieważ może się on przesunąć, jeśli zmienimy potencjał elektryczny okładki; ładunek indukowany na powierzchni dielektryka nie jest swobodny, bo nie może opuścić tej powierzchni.

Całkowity ładunek, otoczony przez powierzchnię Gaussa na rysunku 26.14b wynosi $q - q'$ i prawo Gaussa daje teraz:

$$\varepsilon_0 \oint \vec{E} \cdot d\vec{S} = \varepsilon_0 E S = q - q', \quad (26.30)$$

czyli

$$E = \frac{q - q'}{\varepsilon_0 S}. \quad (26.31)$$

Obecność dielektryka powoduje osłabienie wartości natężenia przyłożonego pola E_0 o czynnik ε_r , czyli możemy napisać

$$E = \frac{E_0}{\varepsilon_r} = \frac{q}{\varepsilon_r \varepsilon_0 S}. \quad (26.32)$$

Porównanie wzorów (26.31) i (26.32) pokazuje, że:

$$q - q' = \frac{q}{\varepsilon_r}. \quad (26.33)$$

Wzór (26.33) określa poprawnie, że wartość q' indukowanego ładunku powierzchniowego jest mniejsza od wartości ładunku swobodnego q i jest równa zeru przy braku dielektryka (wtedy $\varepsilon_r = 1$ we wzorze (26.33)).

Po podstawieniu do wzoru (26.30) wyrażenia na $q - q'$ ze wzoru (26.33), możemy zapisać prawo Gaussa w postaci

$$\varepsilon_0 \oint \varepsilon_r \vec{E} \cdot d\vec{S} = q \quad (\text{prawo Gaussa w dielektryku}). \quad (26.34)$$

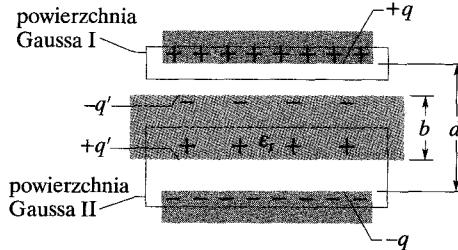
To ważne równanie, wyprowadzone przez nas dla płaskiego kondensatora, jest najogólniejszą postacią, w jakiej można zapisać prawo Gaussa. Zauważ, że:

1. Całka strumienia zawiera obecnie $\varepsilon_r \vec{E}$, a nie \vec{E} . (Wektor $\varepsilon_0 \varepsilon_r \vec{E}$ jest nie raz nazywany *indukcją elektryczną* \vec{D} i wzór (26.34) można wtedy zapisać w postaci $\oint \vec{D} \cdot d\vec{S} = q$).
2. Ładunek q otoczony przez powierzchnię Gaussa jest teraz *tylko ładunkiem swobodnym*. Indukowany ładunek powierzchniowy pomijamy z prawej strony wzoru (26.34), biorąc go pod uwagę przez wprowadzenie przenikalności elektrycznej względnej ε_r z lewej strony.
3. Wzór (26.34) różni się od wzoru (24.7), naszego oryginalnego sformułowania prawa Gaussa, tylko tym, że stała ε_0 w tym ostatnim równaniu została zastąpiona przez $\varepsilon_r \varepsilon_0$. Pozostawiliśmy ε_r pod całką we wzorze (26.34), aby uwzględnić przypadki, gdy wielkość ε_r nie jest stała na całej powierzchni Gaussa.

Przykład 26.6

Na rysunku 26.15 przedstawiono kondensator płaski o polu powierzchni okładki S i odległości między okładkami d . Do okładek przyłożono różnicę potencjałów U_0 . Następnie odłączono źródło i między okładki wsunięto płytę o grubości b i przenikalności elektrycznej względnej ϵ_r , jak pokazano na rysunku. Przymijmy

$$S = 115 \text{ cm}^2, \quad d = 1,24 \text{ cm}, \quad U_0 = 85,5 \text{ V}, \\ b = 0,78 \text{ cm}, \quad \epsilon_r = 2,61.$$



Rys. 26.15. Przykład 26.6. Kondensator płaski z płytą dielektryczną, która tylko częściowo wypełnia obszar między okładkami

a) Ile wynosi pojemność C_0 kondensatora przed włożeniem płyty dielektrycznej?

ROZWIĄZANIE:

Ze wzoru (26.9) mamy:

$$C_0 = \frac{\epsilon_0 S}{d} = \frac{(8,85 \cdot 10^{-12} \text{ F/m})(115 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2)}{1,24 \cdot 10^{-2} \text{ m}} \\ = 8,21 \cdot 10^{-12} \text{ F} = 8,21 \text{ pF}. \quad (\text{odpowiedź})$$

b) Jaki ładunek swobodny znajduje się na okładkach?

ROZWIĄZANIE:

Ze wzoru (26.1) mamy:

$$q = C_0 U_0 = (8,21 \cdot 10^{-12} \text{ F})(85,5 \text{ V}) = 7,02 \cdot 10^{-10} \text{ C} = 702 \text{ pC}. \quad (\text{odpowiedź})$$

Źródło zostało odłączone przed wsunięciem płyty, a więc ładunek swobodny pozostaje niezmieniony przy wsuwaniu płyty.

c) Ile wynosi natężenie pola elektrycznego E_0 w szczeelinach między okładkami i płytą dielektryczną?

ROZWIĄZANIE:

O 1. Należy zastosować prawo Gaussa w postaci wzoru (26.34) do powierzchni Gaussa I na rysunku 26.15 — powierzchnia ta przechodzi przez szczelinę i otacza *tylko* ładunek swobodny na górnjej okładce kondensatora. Dla części powierzchni, od której pochodzi niezerowy wkład do całki, wektor powierzchni $d\vec{S}$

i natężenie pola \vec{E}_0 są obydwa skierowane w dół, a więc iloczyn skalarny we wzorze (26.34) wynosi:

$$\vec{E}_0 \cdot d\vec{S} = E_0 dS \cos 0^\circ = E_0 dS.$$

Wzór (26.34) przyjmuje postać:

$$\epsilon_0 \epsilon_r E_0 \int dS = q.$$

Całka daje nam po prostu powierzchnię S okładki i dlatego otrzymujemy

$$\epsilon_0 \epsilon_r E_0 S = q,$$

czyli:

$$E_0 = \frac{q}{\epsilon_0 \epsilon_r S}.$$

O 2. Aby obliczyć E_0 , musimy podstawić $\epsilon_r = 1$, ponieważ powierzchnia Gaussa I nie przechodzi przez dielektryk. Mamy stąd:

$$E_0 = \frac{q}{\epsilon_0 \epsilon_r S} = \frac{7,02 \cdot 10^{-10} \text{ C}}{(8,85 \cdot 10^{-12} \text{ F/m})(1)(115 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2)}$$

$$= 6900 \text{ V/m} = 6,9 \text{ kV/m}. \quad (\text{odpowiedź})$$

Zauważ, że wartość E_0 nie zmienia się przy wprowadzaniu płyty, ponieważ ilość ładunku otoczonego powierzchnią Gaussa I na rysunku 26.15 się nie zmienia.

d) Ile wynosi natężenie pola elektrycznego E_1 w płytcie dielektrycznej?

ROZWIĄZANIE:

O Należy zastosować wzór (26.34) do powierzchni Gaussa II z rysunku 26.15. Ta powierzchnia otacza ładunek swobodny $-q$ i ładunek indukowany $+q'$, ale ten ostatni pomijamy przy stosowaniu wzoru (26.34). Znajdujemy więc:

$$\epsilon_0 \oint \epsilon_r \vec{E} \cdot d\vec{S} = -\epsilon_0 \epsilon_r E_1 S = -q. \quad (26.35)$$

(Pierwszy znak minus w tym wzorze pochodzi z iloczynu skalarnego $\vec{E}_1 \cdot d\vec{S}$, ponieważ teraz natężenie pola \vec{E}_1 jest skierowane w dół, a wektor powierzchni $d\vec{S}$ jest skierowany do góry). Wzór (26.35) daje nam:

$$E_1 = \frac{q}{\epsilon_0 \epsilon_r S} = \frac{E_0}{\epsilon_r} = \frac{6,9 \text{ kV/m}}{2,61} = 2,64 \text{ kV/m}. \quad (\text{odpowiedź})$$

e) Ile wynosi różnica potencjałów U między okładkami kondensatora po wsunięciu płyty?

ROZWIĄZANIE:

O Należy znaleźć U przez całkowanie natężenia wzdłuż odcinka prostej prostopadłej do okładek, od dolnej okładki do górnej okładki. W dielektryku długość odcinka prostej wynosi b

i natężenie pola jest równe E_1 . W dwóch szczelinach powyżej i poniżej dielektryka długość odcinka prostej wynosi łącznie $d-b$ i natężenie pola jest równe E_0 . Wzór (26.6) daje zatem:

$$\begin{aligned} U &= \int_{-}^{+} Eds = E_0(d-b) + E_1b \\ &= (6900 \text{ V/m})(0,0124 \text{ m} - 0,0078 \text{ m}) \\ &\quad + (2640 \text{ V/m})(0,00780 \text{ m}) \\ &= 52,3 \text{ V}, \end{aligned} \quad (\text{odpowiedź})$$

czyli różnica potencjałów jest mniejsza od początkowej różnicy potencjałów 85,5 V.

f) Ile wynosi pojemność kondensatora z płytą dielektryczną między okładkami?

ROZWIĄZANIE:

► Pojemność C jest związana z ładunkiem swobodnym i różnicą potencjałów U wzorem (26.1), takim samym, jak przy braku dielektryka. Biorąc q z punktu (b) i U z punktu (e), otrzymujemy:

$$C = \frac{q}{U} = \frac{7,02 \cdot 10^{-10} \text{ C}}{52,3 \text{ V}} = 1,34 \cdot 10^{-11} \text{ F} = 13,4 \text{ pF}. \quad (\text{odpowiedź})$$

Pojemność kondensatora z dielektrykiem jest więc większa niż początkowa pojemność 8,21 pF.

SPRAWDZIAN 6: Czy w opisany wyżej przykładzie, wraz ze wzrostem grubości b płyty wzrastają, maleją, czy pozostają bez zmian: a) natężenie pola elektrycznego E_1 , b) różnica potencjałów między okładkami, c) pojemność kondensatora?

Podsumowanie

Kondensator, pojemność Kondensator składa się z dwóch odizolowanych przewodników (okładek) o ładunkach $+q$ i $-q$, o takich samych wartościach i przeciwnych znakach. Jego pojemność C jest zdefiniowana wzorem:

$$q = CU, \quad (26.1)$$

gdzie U jest różnicą potencjałów (napięciem) między okładkami. Jednostką pojemności w układzie SI jest farad (1 farad = 1 kuhomb na wolt = 1 F = 1 C/V).

Obliczanie pojemności Pojemność kondensatora o określonej konfiguracji obliczamy w następujący sposób: 1) zakładamy, że na okładkach umieszczono ładunek q , 2) znajdujemy natężenie pola elektrycznego \vec{E} , wytworzonego przez ten ładunek, 3) obliczamy różnicę potencjałów U , 4) wyznaczamy C ze wzoru (26.1). Oto kilka szczególnych wyników:

Kondensator płaski o płaskich równoległych okładkach, o polu powierzchni S i odległości d między nimi ma pojemność:

$$C = \frac{\epsilon_0 S}{d}. \quad (26.9)$$

Kondensator walcowy w postaci dwóch długich współosiowych powierzchni walcowych o długości L i promieniach a i b ma pojemność:

$$C = 2\pi\epsilon_0 \frac{L}{\ln(b/a)}. \quad (26.14)$$

Kondensator kulisty o współśrodkowych sferycznych okładkach o promieniach a i b ma pojemność:

$$C = 4\pi\epsilon_0 \frac{ab}{b-a}. \quad (26.17)$$

Jeśli przyjmiemy $b \rightarrow \infty$ i $a = R$ we wzorze (26.17), to otrzymamy pojemność izolowanej kuli o promieniu R :

$$C = 4\pi\epsilon_0 R. \quad (26.18)$$

Kondensatory połączone równolegle i szeregowo Pojemności równoważne C_{rw} układów kondensatorów połączonych równolegle i szeregowo można obliczyć ze wzorów:

$$C_{rw} = \sum_{j=1}^n C_j \quad (n \text{ kondensatorów połączonych równolegle}), \quad (26.19)$$

$$\frac{1}{C_{rw}} = \sum_{j=1}^n \frac{1}{C_j} \quad (n \text{ kondensatorów połączonych szeregowo}). \quad (26.20)$$

Pojemności równoważne można zastosować także do obliczenia pojemności przy bardziej skomplikowanych połączeniach szeregowo-równoległych.

Energia potencjalna i gęstość energii Elektryczna energia potencjalna E_p naładowanego kondensatora

$$E_p = \frac{q^2}{2C} = \frac{1}{2}CU^2 \quad (26.21, 26.22)$$

jest równa pracy, potrzebnej do jego naładowania. Energię tę można powiązać z natężeniem pola elektrycznego \vec{E} w kondensatorze i wyciągnąć stąd wniosek, że energia ta jest zmagazynowana w polu elektrycznym. W próżni gęstość energii u , czyli energia potencjalna na jednostkę objętości, w obszarze pola elektrycznego o wartości natężenia E wynosi:

$$u = \frac{1}{2}\epsilon_0 E^2. \quad (26.23)$$

Kondensator z dielektrykiem Jeśli przestrzeń między okładkami kondensatora jest wypełniona całkowicie materiałem dielektrycznym, to pojemność C kondensatora jest większa o czynnik ϵ_r , zwany **przenikalnością elektryczną względną**, która charakteryzuje materiał. W obszarze całkowicie wypełnionym dielektrykiem wszystkie równania elektrostatyki, zawierające ϵ_0 muszą być zmodyfikowane przez zastąpienie ϵ_0 przez $\epsilon_r \epsilon_0$.

Efekt dodania dielektryka można zrozumieć, analizując działanie pola elektrycznego na trwałe lub indukowane dipole elektryczne w dielektryku, w wyniku czego powstają indukowane ładunki na powierzchniach dielektryka, prowadzące przy ustalonym

ładunku swobodnym na okładkach do osłabienia pola w dielektryku.

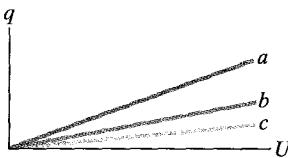
Prawo Gaussa w dielektryku Dla dielektryka prawo Gaussa można uogólnić do postaci:

$$\oint \epsilon_r \vec{E} \cdot d\vec{S} = q, \quad (26.34)$$

gdzie q jest ładunkiem swobodnym; cały indukowany ładunek powierzchniowy jest uwzględniony przez wstawienie przenikalności elektrycznej ϵ_r do całki.

Pytania

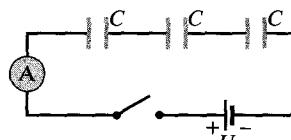
1. Na rysunku 26.16 przedstawiono wykresy ładunku w zależności od różnicy potencjałów dla trzech kondensatorów płaskich, których pola powierzchni okładek i odległości między nimi zostały podane w tabeli. Które wykresy odpowiadają którym kondensatorom?



Rys. 26.16. Pytanie 1

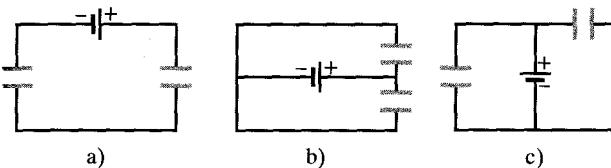
| Kondensator | Pole powierzchni | Odległość |
|-------------|------------------|-----------|
| 1 | S | d |
| 2 | $2S$ | d |
| 3 | S | $2d$ |

2. Na rysunku 26.17 przedstawiono obwód z otwartym kluczem, źródłem o różnicy potencjałów U , amperomierzem A i trzema takimi samymi nienalożonymi kondensatorami o pojemności C . Jeśli zamknemy klucz i obwód osiągnie stan równowagi, to jakie będą: a) różnica potencjałów na każdym kondensatorze, b) ładunek na lewej okładce każdego kondensatora? c) Jaki wypadkowy ładunek przepływa przez amperomierz podczas procesu ładowania?



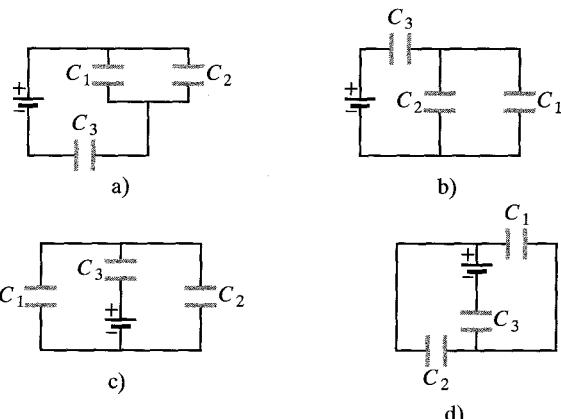
Rys. 26.17. Pytanie 2

3. Czy kondensatory w obwodach na rysunku 26.18 połączone są szeregowo, równolegle, czy w żaden z tych sposobów?



Rys. 26.18. Pytanie 3

4. a) Czy na rysunku 26.19a kondensatory C_1 i C_3 są połączone szeregowo? b) Czy kondensatory C_1 i C_2 na tym samym rysunku są połączone równolegle? c) Uszereguj pojemności równoważne czterech obwodów na rysunku 26.19, zaczynając od największej.



Rys. 26.19. Pytanie 4

5. Jaka jest pojemność równoważna dla trzech kondensatorów, każdy o pojemności C , jeśli są one podłączone do źródła: a) szeregowo, b) równolegle? c) Na którym kondensatorze równoważnym jest największy ładunek?

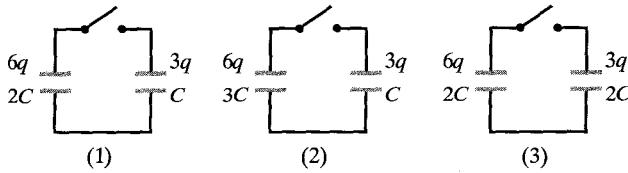
6. Do źródła podłączamy kondensatory o pojemnościach C_1 i C_2 , $C_1 > C_2$, najpierw pojedynczo, potem szeregowo i następnie równolegle. Uszereguj te układy ze względu na zmagazynowany ładunek, zaczynając od największego.

7. Początkowo do źródła podłączony jest kondensator o pojemności C_1 . Następnie zostaje dołączony kondensator o pojemności C_2 i oba kondensatory są połączone równolegle. Czy: a) różnica potencjałów na kondensatorze C_1 , b) ładunek q_1 na kondensatorze C_1 są teraz większe, mniejsze, czy takie same jak poprzednio? c) Pojemność równoważna C_{12} dla kondensatorów C_1 i C_2 jest większa, mniejsza czy równa pojemności C_1 ? d) Czy całkowity ładunek zgromadzony na kondensatorach C_1 i C_2 razem

jest większy, mniejszy czy równy ładunkowi zmagazynowanemu poprzednio na kondensatorze C_1 ?

8. Odpowiedz na pytania 7, jeśli kondensator C_2 dołączono szeregowo, a nie równolegle.

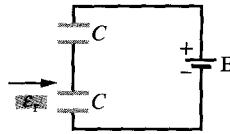
9. Na rysunku 26.20 przedstawiono trzy obwody, każdy składający się z klucza i dwóch kondensatorów, naładowanych początkowo jak na rysunku (na którym podano również ich pojemność). W którym obwodzie (może w żadnym) po zamknięciu klucza ładunek na lewym kondensatorze a) wzrośnie, b) zmaleje, c) pozostanie taki sam?



Rys. 26.20. Pytanie 9

10. Dwie odizolowane metalowe kule A i B mają odpowiednio promień R i $2R$ i taki sam ładunek q . a) Czy pojemność kuli A jest większa, mniejsza, czy równa pojemności kuli B? b) Czy gęstość energii tuż przy powierzchni kuli A jest większa, mniejsza, czy równa gęstości przy powierzchni kuli B? c) Czy gęstość energii w odległości $3R$ od środka kuli A jest większa, mniejsza, czy równa gęstości w tej samej odległości od środka kuli B? d) Czy całkowita energia pola elektrycznego, wytworzona przez kulę A jest większa, mniejsza, czy równa całkowitej energii dla kuli B?

11. Czy po włożeniu płyty dielektrycznej między okładki jednego z dwóch identycznych kondensatorów na rys. 26.21: a) pojemność, b) ładunek, c) różnica potencjałów, d) energia potencjalna tego kondensatora wzrosną, zmaleją, czy pozostaną takie same? e) Czy i jak zmienią się wymienione wyżej wielkości drugiego kondensatora?



Rys. 26.21. Pytanie 11

Zadania

Rozwiążanie jest dostępne na stronie internetowej podręcznika: <http://www.wiley.com/college/hrw>
Rozwiążanie jest dostępne w postaci interaktywnej, wykorzystującej oprogramowanie Interactive Learning-Ware (na tej samej stronie)

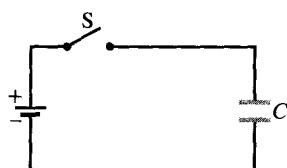
26.2. Pojemność

1. Elektrometr jest przyrządem używanym do pomiaru ładunku statycznego — nieznany ładunek umieszcza się na okładkach kondensatora elektrometru i mierzy się różnicę potencjałów. Jaki minimalny ładunek może zostać zmierzony za pomocą elektrometru z kondensatorem o pojemności 50 pF , przy czułości pomiaru na napięcia $0,15 \text{ V}$?

2. Dwa metalowe przedmioty na rys. 26.22 mają wypadkowe ładunki $+70 \text{ pC}$ i -70 pC , co prowadzi do różnicę potencjałów 20 V między nimi. a) Ile wynosi pojemność układu? b) Jeśli ładunki zmienimy na $+200 \text{ pC}$ i -200 pC , to jaka będzie pojemność? c) Jaka będzie różnica potencjałów?



Rys. 26.22. Zadanie 2



Rys. 26.23. Zadanie 3

3. Kondensator na rys. 26.23 ma pojemność $25 \mu\text{F}$ i jest początkowo nienalożony. Bateria ma różnicę potencjałów 120 V . Jaki ładunek przepłynie przez przełącznik S po jego zamknięciu?

26.3. Obliczanie pojemności

4. Jeśli wyznaczysz stałą ϵ_0 z równania (26.9), to zauważysz, że jej wymiarem jest farad na metr (F/m). Pokaż, że ta jednostka jest równoważna poprzednio otrzymanej jednostce dla ϵ_0 , a mianowicie kulombowi do kwadratu na niuton razy metr kwadrat ($\text{C}^2/(\text{N} \cdot \text{m}^2)$).

5. Kondensator płaski ma kołowe okładki o promieniu $8,2 \text{ cm}$ umieszczone w odległości $1,3 \text{ mm}$. a) Oblicz jego pojemność. b) Jaki ładunek znajdzie się na okładkach, jeśli przyłożymy do nich różnicę potencjałów 120 V ?

6. Masz dwie płaskie okładki metalowe, każda o polu powierzchni 1 m^2 i chcesz zbudować z nich kondensator płaski. Jeśli pojemność kondensatora ma wynosić 1 F , to jaka musi być odległość między okładkami? Czy taki kondensator można w rzeczywistości zbudować?

7. Kulista kropla rtęci o promieniu R ma pojemność, określona wzorem $C = 4\pi\epsilon_0 R$. Jeśli dwie takie krople połączą się w jedną większą kroplę, to jaka będzie jej pojemność?

8. Okładki kondensatora kulistego mają promień 38 mm i 40 mm . a) Oblicz jego pojemność. b) Jakie jest pole powierzchni okładek kondensatora płaskiego o takiej samej odległości okładek i takiej samej pojemności?

9. Załóż, że dwie powłoki sferyczne kondensatora kulistego mają w przybliżeniu jednakowe promienie. W tych warunkach urządzenie to można potraktować jako kondensator płaski, dla którego $b - a = d$. Pokaż, że wzór (26.17) rzeczywiście sprowadza się do wzoru (26.9) w tym przypadku.

26.4. Kondensatory połączone równolegle i szeregowo

10. Znajdź pojemność równoważną układu kondensatorów, przedstawionego na rysunku 26.24. Przyjmij $C_1 = 10 \mu\text{F}$, $C_2 = 5 \mu\text{F}$ i $C_3 = 4 \mu\text{F}$.

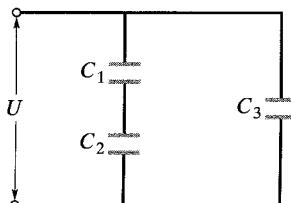
11. Ile kondensatorów o pojemności $1 \mu\text{F}$ trzeba połączyć równolegle, aby zmagazynować ładunek 1 C po przyłożeniu różnicy potencjałów 110 V ?

12. Każdy z nienalożonych kondensatorów na rysunku 26.25 ma pojemność $25 \mu\text{F}$. Po zamknięciu klucza pojawiła się na nich różnica potencjałów 4200 V . Jaki ładunek przepływał przez amperomierz A?

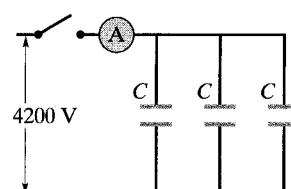
13. Znajdź równoważną pojemność układu, przedstawionego na rysunku 26.26. Przyjmij $C_1 = 10 \mu\text{F}$, $C_2 = 5 \mu\text{F}$ i $C_3 = 4 \mu\text{F}$.

14. Załóż, że w kondensatorze 3 na rysunku 26.26 następuje przebiecie elektryczne, czyli pojawia się ścieżka przewodząca. Jak zmieni się: a) ładunek, b) różnica potencjałów na kondensatorze 1? Przyjmij $U = 100 \text{ V}$.

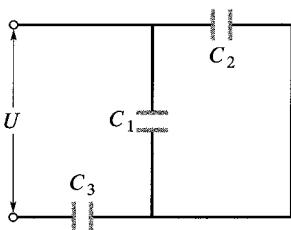
15. Na rysunku 26.27 przedstawiono dwa kondensatory połączone szeregowo; część środkową o długości b można przesuwać w kierunku pionowym. Wykaż, że pojemność równoważna tego układu jest niezależna od położenia środkowej części i wynosi $C = \epsilon_0 S / (a - b)$, gdzie S jest polem powierzchni okładki.



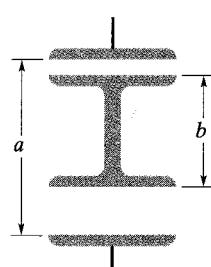
Rys. 26.24. Zadanie 10 i 30



Rys. 26.25. Zadanie 12

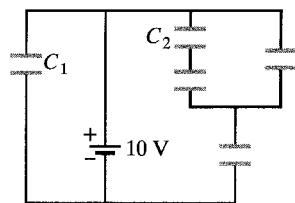


Rys. 26.26. Zadania 13, 14 i 28



Rys. 26.27. Zadanie 15

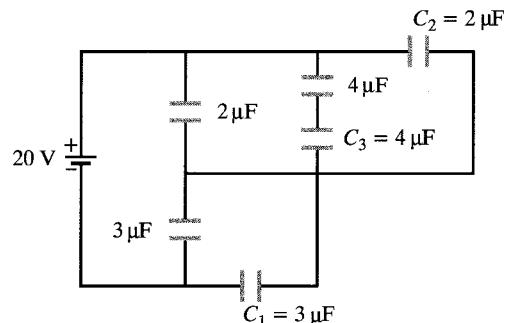
16. Na rysunku 26.28 bateria ma różnicę potencjałów 10 V , a każdy z pięciu kondensatorów ma pojemność $10 \mu\text{F}$. Jaki jest ładunek na a) kondensatorze 1, b) kondensatorze 2?



Rys. 26.28. Zadanie 16

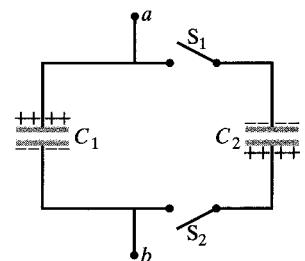
17. Kondensator o pojemności 100 pF naładowano do różnicy potencjałów 50 V , a następnie źródło odłączono. Kondensator ten połączono równolegle z drugim (początkowo nienalożonym) kondensatorem. Jeśli różnica potencjałów na pierwszym kondensatorze zmalała do 35 V , to jaka jest pojemność drugiego kondensatora?

18. Na rysunku 26.29 bateria ma różnicę potencjałów 20 V . Znajdź: a) równoważną pojemność wszystkich kondensatorów, b) ładunek zmagazynowany na kondensatorze równoważnym. Oblicz różnicę potencjałów i ładunek na: c) kondensatorze 1, d) kondensatorze 2, e) kondensatorze 3.



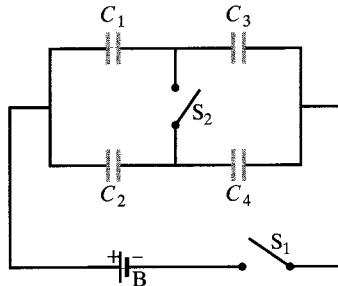
Rys. 26.29. Zadanie 18

19. Na rysunku 26.30 kondensatory o pojemnościach $C_1 = 1 \mu\text{F}$ i $C_2 = 3 \mu\text{F}$ naładowano do różnicy potencjałów o wartości $U = 100 \text{ V}$, ale przeciwnym znaku, co zaznaczono na rysunku. Następnie zamknięto klucze S_1 i S_2 . a) Jaka jest teraz różnica potencjałów między punktami a i b ? Jakie są teraz ładunki na kondensatorach b) 1, c) 2?



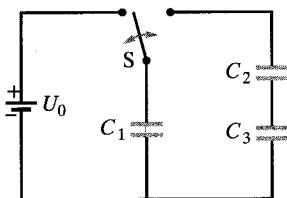
Rys. 26.30. Zadanie 19

20. Na rysunku 26.31 bateria B dostarcza różnicę potencjałów 12 V . Znajdź ładunek na każdym kondensatorze: a) po zamknięciu tylko klucza S_1 , b) po zamknięciu także klucza S_2 . Przyjmij $C_1 = 1 \mu\text{F}$, $C_2 = 2 \mu\text{F}$, $C_3 = 3 \mu\text{F}$ i $C_4 = 4 \mu\text{F}$.



Rys. 26.31. Zadanie 20

21. Gdy na rysunku 26.32 klucz S jest przesunięty na lewo, okładki kondensatora 1 uzyskują różnicę potencjałów U_0 . Kondensatory 2 i 3 są początkowo nienalożone. Następnie klucz zostaje przesunięty w prawo. Jakie są końcowe ładunki q_1 , q_2 i q_3 na kondensatorach?



Rys. 26.32. Zadanie 21

26.5. Energia zmagazynowana w polu elektrycznym

22. Ile energii jest zmagazynowanej w metrze sześciennym powietrza przy dobrej pogodzie, w polu elektrycznym o wartości natężenia 150 V/m ?

23. Jaka pojemność jest potrzebna do zmagazynowania energii 10 kWh , przy różnicy potencjałów 1000 V ?

24. Płaski kondensator powietrzny o polu powierzchni okładek 40 cm^2 i ich odległości 1 mm jest naładowany do różnicy potencjałów 600 V . Znajdź: a) pojemność, b) wartość ładunku na każdej okładce, c) zmagazynowaną energię, d) natężenie pola elektrycznego między okładkami, e) gęstość energii między okładkami.

25. Dwa kondensatory o pojemnościach $2 \mu\text{F}$ i $4 \mu\text{F}$ są połączone równolegle i jest do nich przyłożona różnica potencjałów 300 V . Oblicz całkowitą energię zmagazynowaną w kondensatorach.

26. Układ połączonych równolegle kondensatorów o pojemności $5 \mu\text{F}$ służy do magazynowania energii. Ile kosztuje naładowanie 2000 kondensatorów układu do 50000 V , jeśli cena energii elektrycznej wynosi $0,3 \text{ zł/kWh}$?

27. Kondensator jest ładowany do momentu zmagazynowania w nim energii 4 J . Następnie zostaje do niego dołączony równolegle drugi, nienalożony kondensator. a) Jeśli ładunek rozłoży się równo, to jaka będzie teraz całkowita energia, zmagazynowana w polach elektrycznych? b) Co stało się z nadwyżką energii?

28. Znajdź: a) ładunek, b) różnicę potencjałów, c) zmagazynowaną energię dla każdego z kondensatorów na rysunku 26.26. Przyjmij wartości liczbowe z zadania 13 oraz $U = 100 \text{ V}$.

29. Kondensator płaski ma okładki o polu powierzchni S w odległości d i jest naładowany do różnicy potencjałów U . Bateria ładowająca została odłączona i okładki rozsunięto na odległość $2d$. Wyraź przez S , d i U : a) różnicę potencjałów, b) początkową E_p pocz i końcową E_p koń energię zmagazynowaną w kondensatorze, c) pracę potrzebną do rozsunięcia okładek.

30. Oblicz: a) ładunek, b) różnicę potencjałów, c) energię zmagazynowaną dla każdego kondensatora na rysunku 26.24. Przyjmij wartości liczbowe z zadania 10 oraz $U = 100 \text{ V}$.

31. Kondensator walcowy ma okładki o promieniach a i b (rys. 26.4). Pokaż, że połowa zmagazynowanej elektrycznej energii potencjalnej znajduje się w walcu o promieniu $r = \sqrt{ab}$.

32. Izolowana naładowana kula metalowa o średnicy 10 cm ma potencjał 8000 V względem $V = 0$ w nieskończoności. Oblicz gęstość energii w polu elektrycznym, przy powierzchni kuli.

33. a) Pokaż, że okładki kondensatora płaskiego przyciągają się nawzajem siłą $F = q^2/(2\epsilon_0 S)$. Oblicz w tym celu pracę, potrzebną do zwiększenia odległości między okładkami z x do $x + dx$, przy ustalonym ładunku q . b) Pokaż następnie, że naprężenie elektrostatyczne (siła na jednostkę powierzchni), działające na każdą okładkę kondensatora wynosi $\frac{1}{2}\epsilon_0 E^2$. (W rzeczywistości jest to siła na jednostkę powierzchni dowolnego przewodnika o dowolnym kształcie, znajdującego się w polu elektrycznym o natężeniu \vec{E} przy powierzchni przewodnika).

26.6. Kondensator z dielektrykiem

34. Płaski kondensator powietrzny ma pojemność $1,3 \text{ pF}$. Odległość między płytami zwiększo dwukrotnie i włożono między nie wosk. Nowa pojemność wynosi $2,6 \text{ pF}$. Znajdź względną przewinikalność elektryczną wosku.

35. Mając kondensator powietrzny o pojemności $7,4 \text{ pF}$, chcesz przekształcić go w kondensator mogący zmagazynować energię do $7,4 \mu\text{J}$ przy maksymalnej różnicy potencjałów 652 V . Którego dielektryka z tabeli 26.1 mógłbyś użyć do wypełnienia przestrzeni w kondensatorze?

36. Płaski kondensator powietrzny ma pojemność 50 pF . a) Ile wynosi odległość między okładkami, jeśli każda z nich ma pole powierzchni $0,35 \text{ m}^2$? b) Ile wynosić będzie jego pojemność, jeśli obszar między okładkami zostanie wypełniony materiałem o $\epsilon_r = 5,6$?

37. Kabel koncentryczny (współosiowy) używany w linii presyjowej ma promień wewnętrzny $0,1 \text{ mm}$ i promień zewnętrzny $0,6 \text{ mm}$. Oblicz pojemność kabla, przypadającą na metr jego długości. Załóż, że przestrzeń między przewodnikami jest wypełniona polistyrenem.

38. Masz za zadanie skonstruować kondensator o pojemności około 1 nF i napięciu przebicia ponad 10000 V . Zamierzysz użyć

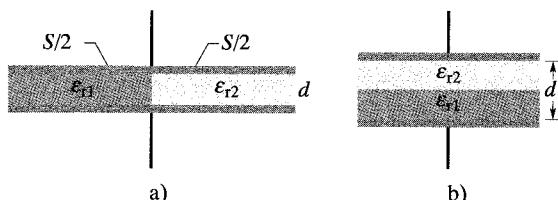
ścianek wysokiej szklanki z pyreku jako dielektryka, pokrywając boczne ścianki wewnętrz i na zewnątrz folią aluminiową, i w ten sposób otrzymać okładki. Szklanka ma wysokość 15 cm, promień wewnętrzny 3,6 cm i zewnętrzny 3,8 cm. Jaka jest: a) pojemność, b) napięcie przebicia tego kondensatora?

39. Pewna substancja ma względną przenikalność elektryczną równą 2,8 i wytrzymałość na przebicie 18 MV/m. Jeśli użyjesz jej jako materiału dielektrycznego w kondensatorze płaskim, to jakie minimalne pole powierzchni muszą mieć okładki kondensatora, aby otrzymać pojemność $7 \cdot 10^{-2} \mu\text{F}$ i kondensator mógł wytrzymać różnicę potencjałów 4 kV?

40. Kondensator płaski o polu powierzchni okładek S jest wypełniony dwoma dielektrykami, jak na rys. 26.33a. Pokaż, że pojemność tego kondensatora wynosi

$$C = \frac{\varepsilon_0 S (\varepsilon_{r1} + \varepsilon_{r2})}{d}.$$

Sprawdź ten wynik dla granicznych przypadków. (Wskazówka: Czy możesz uzasadnić traktowanie tego układu jako dwóch kondensatorów połączonych równolegle?)



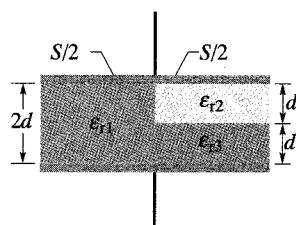
Rys. 26.33. Zadania 40 i 41

41. Kondensator płaski o polu powierzchni okładek S jest wypełniony dwoma dielektrykami jak na rysunku 26.33b. Pokaż, że pojemność tego kondensatora wynosi:

$$C = \frac{2\varepsilon_0 S}{d} \frac{\varepsilon_{r1}\varepsilon_{r2}}{\varepsilon_{r1} + \varepsilon_{r2}}.$$

Sprawdź ten wynik dla granicznych przypadków. (Wskazówka: Czy możesz uzasadnić traktowanie tego układu jako dwóch kondensatorów połączonych szeregowo?)

42. Ile wynosi pojemność kondensatora o polu powierzchni okładek S , przedstawionego na rys. 26.34? (Wskazówka: Zob. zadania 40 i 41.)



Rys. 26.34. Zadanie 42

26.8. Dielektryki i prawo Gaussa

43. Kondensator płaski ma pojemność 100 pF, pole powierzchni okładek 100 cm^2 i szczelinę między okładkami, wypełnioną całkowicie miką ($\varepsilon_r = 5,4$). Dla różnicy potencjałów 50 V oblicz: a) wartość natężenia pola elektrycznego E w mice, b) wartość

ładunku swobodnego na okładkach, c) wartość indukowanego ładunku powierzchniowego w mice.

44. Załóż w przykładzie 26.6, że bateria pozostaje podłączona podczas wkładania płyty dielektrycznej. Oblicz: a) pojemność, b) ładunek na okładkach kondensatora, c) natężenie pola elektrycznego w pustej przestrzeni między okładkami, d) natężenie pola elektrycznego w płycie po jej włożeniu.

45. Przestrzeń między dwiema współśrodkowymi przewodzącymi powłokami sferycznymi o promieniach b i a (gdzie $b > a$) jest wypełniona substancją o względnej przenikalności elektrycznej ε_r . Między wewnętrzną i zewnętrzną powłoką istnieje różnica potencjałów U . Oblicz: a) pojemność układu, b) ładunek swobodny q na wewnętrznej powłoce, c) ładunek q' , indukowany przy powierzchni wewnętrznej powłoki.

46. Na równoległych płytach o polu powierzchni 100 cm^2 znajdują się ładunki o jednakowej wartości $8,9 \cdot 10^{-7} \text{ C}$, ale o przeciwnych znakach. Natężenie pola elektrycznego w materiale dielektrycznym, wypełniającym przestrzeń między płytami ma wartość $1,4 \cdot 10^6 \text{ V/m}$. a) Oblicz względną przenikalność elektryczną materiału. b) Oblicz wartość ładunku indukowanego na każdej powierzchni dielektryka.

47. Płyty dielektryczna o grubości b włożono między okładki kondensatora o odległości d między okładkami. Pokaż, że pojemność kondensatora wynosi:

$$C = \frac{\varepsilon_r \varepsilon_0 S}{\varepsilon_r d - b(\varepsilon_r - 1)}.$$

(Wskazówka: Wzór ten można wyprowadzić, korzystając z metody przedstawionej w przykładzie 26.6). Czy wzór ten przewiduje poprawną wartość liczbową dla przykładu 26.6? Sprawdź, że wzór daje rozsądne wyniki dla szczególnych przypadków $b = 0$, $\varepsilon_r = 1$ i $b = d$.

Zadanie dodatkowe

48. Tajemnica proszku czekoladowego. Jest to ciąg dalszy historii, opisanej w zadaniu 48 w rozdziale 24 i w zadaniu 57 w rozdziale 25. Podczas badania przyczyn wybuchu w fabryce herbatników zmierzono potencjały elektryczne robotników pracujących przy opróżnianiu worków z proszkiem czekoladowym do luku ładowni, gdy wokół nich powstawała chmura pyłu. Każdy robotnik miał potencjał elektryczny około 7 kV względem ziemi, dla której przyjęto potencjał równy零. a) Zakładając, że każdy robotnik stanowił efektywnie kondensator o typowej pojemności 200 pF, znajdź energię zmagazynowaną w tym efektywnym kondensatorze. Jeśli pojedyncza iskra między robotnikiem i jakimkolwiek uziemionym przewodnikiem zneutralizowałaby robotnika, to energia ta byłaby uwolniona za pośrednictwem iskry. Iskra, która mogłaby zapalić chmurę proszku czekoladowego i spowodować eksplozję, zgodnie z pomiarami musiałaby mieć energię przynajmniej 150 mJ. b) Czy iskra, pochodząca od robotnika mogła spowodować eksplozję chmury proszku w luku ładowni? (Dalszy ciąg tej historii znajdziesz w zadaniu 44 w rozdziale 27).

27 Prąd elektryczny i opór elektryczny

Sterowiec *Hindenburg*, duma Niemiec i cud techniki swoich czasów, miał długość trzech boisk piłkarskich i był największą maszyną latającą, jaką kiedykolwiek zbudowano. Chociaż utrzymywał się w górze dzięki szesnastu komorom z bardzo palnym wodorem w stanie gazowym, to bez wypadku odbył wiele podróży transatlantycznych. Niemieckie sterowce, a wszystkie wykorzystywały wodór, nigdy w rzeczywistości nie uległy wypadkowi z tego powodu. Jednak w dniu 6 maja 1937 r. tuż po godzinie 19.21, gdy *Hindenburg* przygotowywał się do lądowania w bazie lotnictwa morskiego w Lakehurst w stanie New Jersey (USA), stanął w płomieniach. Jego załoga czekała na zmniejszenie się ulewy, gdy tuż po zrzuceniu do personelu naziemnego lin cumowniczych dostrzeżono zmarszczki na zewnętrznej powłoce statku, w jednej trzeciej długości od rufy. Kilka sekund później z obszaru tego wybuchł płomień i czerwony żar oświetlił wnętrze statku. W ciągu 32 sekund palący się statek spadł na ziemię.

Dlaczego sterowiec stanął w płomieniach, mimo że sterowce napолнione wodorem odbyły tyle udanych lotów?



27.1. Ładunki w ruchu i prądy elektryczne

Rozdziały od 22 do 26 poświęcone były głównie *elektrostatyce*, czyli dotyczyły ładunków w spoczynku. Od tego rozdziału zaczniemy rozważać **prądy elektryczne**, czyli ładunki w ruchu.

Można podać wiele przykładów prądów elektrycznych, od dużych prądów tworzących błyskawice, do małutkich prądów w nerwach regulujących aktywność naszych mięśni. Wszystkim nam znane są prądy w sieci domowej, w żarówkach i urządzeniach elektrycznych. Wiązka elektronów, czyli też prąd elektryczny, przepływa w próżni w lampie kineskopowej zwykłego odbiornika telewizyjnego. Naładowane cząstki *obydwu* znaków płyną w zjonizowanych gazach lamp fluorescencyjnych, w bateriach zasilających radia i akumulatorach samochodowych. Prądy elektryczne płyną także w półprzewodnikowych elementach komputerów i w elektronicznych układach scalonych, sterujących kuchenkami mikrofalowymi i zmywarkami elektrycznymi.

W skali globu naładowane cząstki schwytyane w pasy radiacyjne Van Allena poruszają się nad atmosferą między północnym i południowym biegunem magnetycznym. W skali Układu Słonecznego ogromne prądy protonów, elektronów i jonów wypływają radialnie ze Słońca w postaci *wiatru słonecznego*. W skali galaktycznej promienie kosmiczne, które są głównie protonami o dużej energii, przebywają Drogę Mleczną i niektóre docierają do Ziemi.

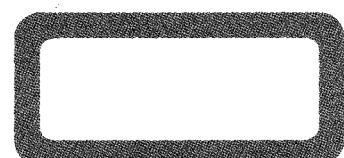
Chociaż prąd elektryczny jest strumieniem poruszających się ładunków, to nie wszystkie poruszające się ładunki tworzą prąd elektryczny. Jeśli przez daną powierzchnię ma przepływać prąd elektryczny, to musi być wypadkowy przepływ ładunku przez tę powierzchnię. Podane niżej dwa przykłady wyjaśniają, co mamy tu na myśli.

1. Elektrony swobodne (elektrony przewodnictwa) w izolowanym kawałku przewodnika miedzianego poruszają się chaotycznie z prędkościami rzędu 10^6 m/s. Jeśli poprowadzimy umowną płaszczyznę przez taki przewodnik, to elektrony przewodnictwa przechodzą przez nią w *obydwu kierunkach* i stąd w przewodniku nie występuje *wypadkowy przepływ ładunku i nie ma prądu elektrycznego*. Jeśli jednak podłączymy końce przewodnika do źródła, to zakłócimy nieco przepływ w jednym kierunku i w wyniku tego nastąpi wypadkowy przepływ ładunku, czyli przepływ prądu elektrycznego w przewodniku.
2. Przepływ wody przez wąż ogrodowy jest ukierunkowanym przepływem ładunku dodatniego (protonów w cząsteczkach wody), z szybkością rzędu kilku milionów kulombów na sekundę. Nie ma jednak wypadkowego przepływu ładunku, ponieważ istnieje jednoczesny przepływ ujemnego ładunku (elektronów w cząsteczkach wody), o tej samej wielkości, w tym samym kierunku.

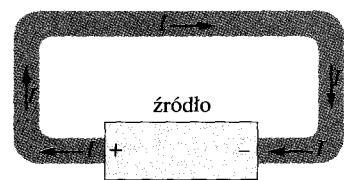
W rozdziale tym ograniczymy się głównie do zbadania, w ramach fizyki klasycznej, stałych prądów elektronów przewodnictwa, poruszających się w metalicznych przewodnikach, np. w drutach miedzianych.

27.2. Natężenie prądu elektrycznego

Rysunek 27.1a przypomina nam, że izolowana ramka przewodząca ma wszędzie taki sam potencjał, bez względu na to, czy ma nadmiarowy ładunek. Żadne pole

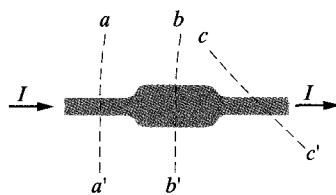


a)



b)

Rys. 27.1. a) Ramka miedziana w równowadze elektrostatycznej. Cała ramka ma taki sam potencjał i we wszystkich punktach w miedzi natężenie pola elektrycznego jest równe零. b) Dodanie źródła wprowadza różnicę potencjałów między końcami ramki, połączonymi z biegunami źródła. Źródło wytwarza więc pole elektryczne w ramce, i pole powoduje ruch ładunków wzdłuż ramki. Ten ruch ładunków odpowiada prądowi o natężeniu I



Rys. 27.2. Natężenie prądu I w przewodniku ma taką samą wartość dla płaszczyzn aa' , bb' i cc'

elektryczne nie może istnieć w jej wnętrzu, czy wzdłuż jej powierzchni. Chociaż występują w niej elektryny przewodnictwa, to nie działa na nie wypadkowa siła elektryczna i dlatego nie płynie prąd.

Jeśli do ramki podłączymy źródło (rys. 27.1b), to ramka przewodząca przestanie mieć stały potencjał. Wewnętrz materiał ramki działa pole elektryczne, które oddziałuje siłami na elektryny przewodnictwa i powoduje ich ruch, wywołując prąd elektryczny. Po krótkiej chwili przepływ prądu ustala się i mamy do czynienia z prądem *stałym* (nie zmieniającym się w czasie).

Na rysunku 27.2 przedstawiono przekrój przewodnika (części przewodzącej ramki), w którym płynie prąd elektryczny. Jeśli ładunek dq przechodzi przez umowną płaszczyznę (np. aa') w czasie dt , to natężenie prądu I przez tę płaszczyznę jest zdefiniowane wzorem

$$I = \frac{dq}{dt} \quad (\text{definicja natężenia prądu}). \quad (27.1)$$

Ladunek przepływający przez płaszczyznę w przedziale czasu od 0 do t możemy znaleźć przez całkowanie:

$$q = \int dq = \int_0^t I dt, \quad (27.2)$$

przy czym natężenie prądu I może się zmieniać w czasie.

Dla prądu stałego natężenie prądu jest takie samo dla płaszczyzn aa' , bb' i cc' i dla wszystkich płaszczyzn przecinających całkowicie przewodnik, bez względu na ich położenie i orientację. Wynika to z zasady zachowania ładunku. W stanie ustalonym pewien elektron musi przejść przez płaszczyznę aa' , jeśli inny elektron przechodzi przez płaszczyznę cc' . Podobnie dla ustalonego przepływu wody przez wąż ogrodowy kropla wody musi opuścić końcówkę węża, jeśli inna kropla weszła do węża na drugim końcu. Ilość wody w wężu jest wielkością stałą.

Jednostką natężenia prądu w układzie SI jest *amper* (A), czyli kulomb na sekundę:

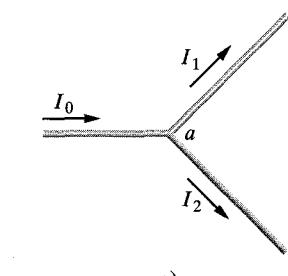
$$1 \text{ amper} = 1 \text{ A} = 1 \text{ kulomb na sekundę} = 1 \text{ C/s.}$$

Amper należy do podstawowych jednostek układu SI, kulomb zaś jest jednostką pochodną, zdefiniowaną za pomocą ampera (mówiliśmy o tym w rozdziale 22). Definicja ampera jest przedstawiona w rozdziale 30.

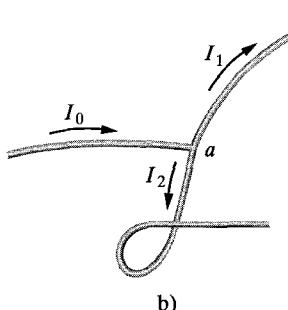
Natężenie prądu, zdefiniowane wzorem (27.1), jest skalarem, ponieważ w tym wzorze zarówno ładunek, jak i czas są scalarami. Mimo to prąd przedstawiamy często przy użyciu strzałki, jak na rysunku 27.1b, aby pokazać ruch ładunku. Takie strzałki nie odpowiadają jednak wektorom i dlatego przy dodawaniu natężzeń prądu nie stosujemy reguły dodawania wektorowego. Na rysunku 27.3a przedstawiono przewodnik z prądem o natężeniu I_0 , rozdzielającym się w węźle na dwie gałęzie. Ładunek jest zachowany, a więc suma wartości natężień prądów w gałęziach musi być równa natężeniu prądu w głównym przewodniku, czyli:

$$I_0 = I_1 + I_2. \quad (27.3)$$

Zgodnie z rysunkiem 27.3b zagięcie czy zmiana ułożenia przewodników nie



a)



b)

Rys. 27.3. Związek $I_0 = I_1 + I_2$ jest słuszny w węźle a bez względu na ustawienia trzech przewodów w przestrzeni. Natężenia prądu są scalarami, a nie wektorami

wpływ na słuszność wzoru (27.3). Strzałki pokazują tylko kierunek przepływu wzdłuż przewodnika, a nie kierunek w przestrzeni.

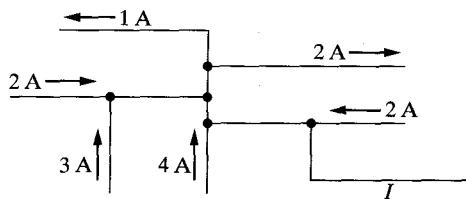
Kierunek prądu elektrycznego

Na rysunku 27.1b zaznaczyliśmy strzałki prądu w kierunku, w którym w ramce pod działaniem pola elektrycznego poruszałyby się cząstki naładowane dodatnio. Takie dodatnie nośniki ładunku, jak często się je nazywa, poruszałyby się od dodatniego bieguna baterii do ujemnego. W rzeczywistości nośnikami ładunku w ramce miedzianej na rys. 27.1b są elektrony, czyli cząstki naładowane ujemnie. Pole elektryczne wymusza ich ruch w kierunku przeciwnym do strzałek prądu, od ujemnego do dodatniego bieguna. Z historycznych względów używamy jednak następującej umowy:

Strzałka prądu jest narysowana w kierunku, w którym poruszałyby się dodatnio naładowane nośniki, nawet jeśli rzeczywiste nośniki ładunku są ujemne i poruszają się w przeciwnym kierunku.

Możemy przyjąć tę umowę, ponieważ w większości sytuacji przyjęty ruch dodatnio naładowanych nośników w jednym kierunku ma ten sam efekt, jak rzeczywisty ruch ujemnie naładowanych nośników w przeciwnym kierunku. (Gdy efekt nie jest taki sam, to oczywiście odstąpimy od tej umowy i będziemy opisywać ruch rzeczywisty).

SPRAWDZIAN 1: Na rysunku przedstawiono wycinek obwodu. Jaka jest wartość natężenia I i kierunek prądu w dolnym przewodniku z prawej strony?



Rzutka 27.1

wąż ogrodowy przepływa strumień objętościowy wody $\frac{V}{dt} = 450 \text{ cm}^3/\text{s}$. Ile wynosi natężenie prądu ładunku ujemnego?

DZIAŁANIE:

Natężenie prądu I ładunku ujemnego pochodzi od elektronów cząsteczkach wody, poruszających się wzdłuż węża. Natężenie prądu jest równe ilości ujemnego ładunku, przepływającego jednostce czasu przez dowolną płaszczyznę, przecinającą całkowitą wąż. Oto Możemy więc powiązać natężenie prądu z liczbą cząsteczek, przepływających przez taką płaszczyznę w ciągu se-

$$I = (\text{ładunek elektronu}) \cdot (\text{liczba elektronów w cząsteczce})$$

• (liczba cząsteczek na sekundę),

czyli:

$$I = (e)(10) \frac{dN}{dt}.$$

Liczba elektronów w cząsteczce wynosi 10, ponieważ cząsteczka wody (H_2O) zawiera 8 elektronów w atomie tlenu i po 1 elektronie w każdym z dwóch atomów wodoru.

Liczبę cząsteczek, przepływających w jednostce czasu dN/dt możemy wyrazić przez strumień objętościowy, pisząc:

(liczba cząsteczek na sekundę) = (liczba cząsteczek w molu)

• (liczba moli w jednostce masy) · (masa w jednostce objętości)

• (objętość na sekundę).

Liczba cząsteczek w molu jest liczbą Avogadra N_A . Liczba moli w jednostce masy jest odwrotnością masy, przypadającej na mol, czyli masy molowej M wody. Masa na jednostkę objętości jest gęstością ρ wody. Objętość na sekundę jest to strumień objętościowy dV/dt . Mamy więc:

$$\frac{dN}{dt} = N_A \left(\frac{1}{M} \right) \rho \left(\frac{dV}{dt} \right) = \frac{N_A \rho}{M} \frac{dV}{dt}.$$

Po podstawieniu tej wielkości do wzoru na I otrzymujemy

$$I = 10e N_A M^{-1} \rho \frac{dV}{dt}.$$

Masę molową wody możemy obliczyć z mas molowych, podanych w dodatku F: dodajemy masę molową tlenu (16 g/mol)

do podwojonej masy molowej wodoru (1 g/mol), otrzymując $18 \text{ g/mol} = 0,018 \text{ kg/mol}$. Ponieważ $N_A = 6,02 \cdot 10^{23}$ cząsteczek/mol, czyli $6,02 \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1}$, a $\rho = 1000 \text{ kg/m}^3$, to

$$\begin{aligned} I &= (10)(1,60 \cdot 10^{-19} \text{ C})(6,02 \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1}) \\ &\quad \cdot (0,018 \text{ kg/mol}^{-1})^{-1}(1000 \text{ kg/m}^3) \\ &\quad \cdot (450 \cdot 10^{-6} \text{ m}^3/\text{s}) = 2,41 \cdot 10^7 \text{ C/s} = 2,41 \cdot 10^7 \text{ A} \\ &= 24,1 \text{ MA}. \end{aligned} \quad (\text{odpowiedź})$$

Ten prąd ładunku ujemnego jest dokładnie skompensowany przez prąd ładunku dodatniego, związanego z jądrami trzech atomów, które tworzą cząsteczkę wody. Przez wąż nie przepływa więc wypadkowy ładunek.

27.3. Gęstość prądu elektrycznego

Często interesuje nas tylko natężenie prądu I w konkretnym przewodniku. Nieraz analizujemy jednak sytuację lokalnie i badamy przepływ ładunku przez przekrój przewodnika w jakimś wybranym punkcie. Do takiego opisu możemy zastosować **gęstość prądu elektrycznego** \vec{J} , która ma taki sam kierunek jak prędkość poruszających się ładunków, jeśli są dodatnie, i przeciwny kierunek, jeśli są ujemne. Dla każdego elementu przekroju wartość J jest równa natężeniu prądu, przepływającego przez ten element, przypadającego na jednostkę pola jego powierzchni. Natężenie prądu przez element możemy zapisać w postaci $\vec{J} \cdot d\vec{S}$, gdzie $d\vec{S}$ jest wektorem elementu powierzchni, do niej prostopadłym. Całkowite natężenie prądu, przepływającego przez powierzchnię wynosi więc:

$$I = \int \vec{J} \cdot d\vec{S}. \quad (27.4)$$

Jeśli przepływ prądu przez powierzchnię jest stały i zachodzi prostopadle do $d\vec{S}$, to gęstość prądu \vec{J} jest także stała i równoległa do $d\vec{S}$. Wtedy wzór (27.4) przyjmuje postać:

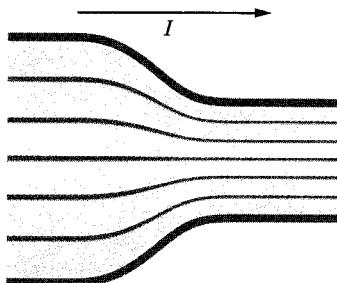
$$I = \int J dS = J \int dS = JS,$$

czyli

$$J = \frac{I}{S}, \quad (27.5)$$

gdzie S jest całkowitym polem powierzchni. Ze wzorów (27.4) i (27.5) wynika, że jednostką gęstości prądu elektrycznego w układzie SI jest amper na metr kwadratowy (A/m^2).

W rozdziale 23 pokazaliśmy, że pole elektryczne możemy przedstawić za pomocą linii pola elektrycznego. Na rysunku 27.4 pokazano, jak gęstość prądu elektrycznego można przedstawić za pomocą podobnego układu linii, który będziemy nazywać *liniami prądu*. Prąd, który na rys. 27.4 przepływa w prawo, przechodzi z szerszego przewodnika z lewej strony do węższego przewodnika



Rys. 27.4. Linie prądu odzwierciedlają gęstość prądu przy jego przepływie przez zwężający się przewodnik

z prawej. Ładunek jest zachowany przy tym przejściu, a więc ilość ładunku, a stąd i natężenie prądu nie może się zmienić. Zmienia się jednak gęstość prądu elektrycznego — jest ona większa w węższym przewodniku. Odstęp między liniami prądu zawiera informację o wartości gęstości prądu — jeśli linie są bliżej siebie, to gęstość prądu jest większa.

Prędkość unoszenia

Gdy w przewodniku nie płynie prąd elektryczny, elektrony przewodnictwa poruszają się w nim przypadkowo i brak jest uporządkowanego ruchu w jakimkolwiek kierunku. Gdy przez przewodnik płynie prąd, elektrony w rzeczywistości nadal poruszają się przypadkowo, ale teraz *przemieszczają się z prędkością unoszenia (dryfu) v_d* w kierunku przeciwnym do natężenia przyłożonego pola elektrycznego, które wywołuje przepływ prądu. Prędkość unoszenia jest bardzo mała w porównaniu z prędkościami w ruchu przypadkowym, np. w miedzianych przewodnikach sieci domowej prędkości unoszenia elektronu wynoszą około 10^{-5} czy 10^{-4} m/s, a prędkości ruchu przypadkowego około 10^6 m/s.

Korzystając z rysunku 27.5, powiążemy prędkość unoszenia v_d elektronów przewodnictwa dla prądu, płynącego wzdłuż przewodnika, z wartością gęstości prądu J w przewodniku. Dla uproszczenia, na rys. 27.5 przedstawiono równoważne przesunięcie nośników o ładunku *dodatnim*, w kierunku natężenia \vec{E} przyłożonego pola elektrycznego. Założymy, że wszystkie nośniki ładunku poruszają się z taką samą prędkością unoszenia v_d i że gęstość prądu J jest jednorodna w przekroju przewodnika o polu powierzchni S . Liczba nośników ładunku przewodnika o długości L wynosi nSL , gdzie n jest liczbą nośników na jednostkę objętości. Całkowity ładunek nośników, z których każdy ma ładunek e , przewodnika o długości L wynosi więc:

$$q = (nSL)e.$$

Wszystkie nośniki poruszają się wzdłuż przewodnika z prędkością v_d , dlatego też cały ten ładunek przepływa przez dowolny przekrój przewodnika w przedziale czasu:

$$t = \frac{L}{v_d}.$$

Z wzoru (27.1) wynika, że natężenie prądu I jest równe stosunkowi ładunku, przepływającego przez przekrój, do czasu, czyli:

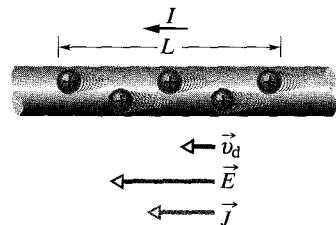
$$I = \frac{q}{t} = \frac{nSLe}{L/v_d} = nSev_d. \quad (27.6)$$

Wyznaczając stąd v_d i uwzględniając wzór (27.5) ($J = I/S$), otrzymujemy

$$v_d = \frac{I}{nSe} = \frac{J}{ne},$$

czyli po przejściu do postaci wektorowej:

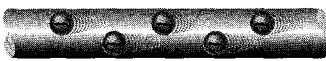
$$\vec{J} = (ne)\vec{v}_d. \quad (27.7)$$



Rys. 27.5. Nośniki ładunku dodatniego przemieszczają się z prędkością v_d w kierunku natężenia pola elektrycznego \vec{E} . Kierunek gęstości prądu \vec{J} i strzałka prądu są zwykle rysowane w tym samym kierunku

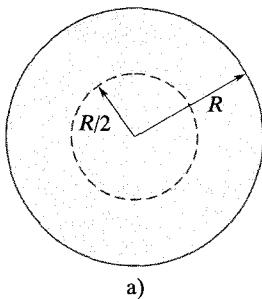
We wzorze tym iloczyn ne , którego jednostką w układzie SI jest koulomb na metr sześcienny (C/m^3), jest gęstością ładunku nośników. Dla dodatnich nośników iloczyn ne jest dodatni i zgodnie ze wzorem (27.7) wielkości \vec{J} i \vec{v}_d mają taki sam kierunek. Dla ujemnych nośników iloczyn ne jest ujemny i wtedy \vec{J} i \vec{v}_d mają kierunki przeciwe.

SPRAWDZIAN 2: Na rysunku przedstawiono elektryny przewodnictwa, poruszające się w przewodniku w lewo. Czy: a) natężenie prądu I , b) gęstość prądu \vec{J} , c) natężenie pola elektrycznego \vec{E} są skierowane w lewo, czy w prawo?

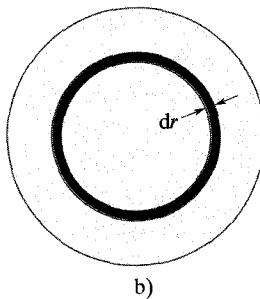


Przykład 27.2

a) Gęstość prądu w przewodniku o kształcie walca o promieniu $R = 2 \text{ mm}$ jest jednakowa na całym przekroju przewodnika i równa $J = 2 \cdot 10^5 \text{ A/m}^2$. Ile wynosi natężenie prądu, przepływającego przez zewnętrzną warstwę przewodnika w obszarze między odległościami radialnymi $R/2$ i R (rys. 27.6a)?



a)



b)

Rys. 27.6. Przykład 27.2. a) Przekrój poprzeczny przewodnika o promieniu R . b) Wąski pierścień o szerokości dr i obwodzie $2\pi r$ ma pole powierzchni $dS = 2\pi r dr$

ROZWIĄZANIE:

Ze względu na jednorodność gęstości prądu na całym przekroju przewodnika gęstość prądu J , natężenie prądu I i pole przekroju S są powiązane wzorem (27.5) ($J = I/S$). Chcemy jednak obliczyć natężenie prądu, płynącego tylko przez powierzchnię przekroju o mniejszym polu S' (a nie przez cały przekrój), gdzie:

$$\begin{aligned} S' &= \pi R^2 - \pi \left(\frac{R}{2}\right)^2 = \pi \left(\frac{3R^2}{4}\right) \\ &= \frac{3\pi}{4} (0,002 \text{ m})^2 = 9,424 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2. \end{aligned}$$

Napiszemy teraz wzór (27.5) w postaci:

$$I = JS'$$

i po podstawieniu danych otrzymamy

$$I = (2 \cdot 10^5 \text{ A/m}^2)(9,424 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2) = 1,9 \text{ A. (odpowiedź)}$$

b) Założymy teraz, że gęstość prądu przez powierzchnię przekroju zależy od odległości radialnej r zgodnie ze wzorem $J = ar^2$, gdzie $a = 3 \cdot 10^{11} \text{ A/m}^4$ i r wyrażone jest w metrach. Ile wynosi obecnie natężenie prądu, przepływającego przez tę samą zewnętrzną warstwę przewodnika?

ROZWIĄZANIE:

Ze względu na niejednorodność gęstości prądu w całym przekroju przewodnika musimy powrócić do wzoru (27.4) ($I = \int \vec{J} \cdot d\vec{S}$) i całkować gęstość prądu po części przekroju przewodnika, od $r = R/2$ do $r = R$. Wektor gęstości prądu \vec{J} (wzdłuż przewodnika) i wektor powierzchni $d\vec{S}$ (prostopadły do przekroju przewodnika) mają taki sam kierunek. Stąd:

$$\vec{J} \cdot d\vec{S} = J dS \cos 0 = J dS.$$

Musimy teraz zastąpić pole dS powierzchni przez coś, co będziemy całkować w granicach od $r = R/2$ do $r = R$. Najprostszym podstawieniem (ze względu na zależność J tylko od r) jest pole $2\pi r dr$ wąskiego pierścienia o obwodzie $2\pi r$ i szerokości dr (rys. 27.6b). Obliczamy następnie całkę, w której r jest zmienną całkowania i zgodnie ze wzorem (27.4) otrzymujemy:

$$\begin{aligned} I &= \int \vec{J} \cdot d\vec{S} = \int J dS = \int_{R/2}^R ar^2 2\pi r dr \\ &= 2\pi a \int_{R/2}^R r^3 dr = 2\pi a \left[\frac{r^4}{4} \right]_{R/2}^R \\ &= \frac{\pi a}{2} \left[R^4 - \frac{R^4}{16} \right] = \frac{15}{32} \pi a R^4 \\ &= \frac{15}{32} \pi (3 \cdot 10^{11} \text{ A/m}^4) (0,002 \text{ m})^4 \\ &= 7,1 \text{ A. (odpowiedź)} \end{aligned}$$

Przykład 27.3

Ile wynosi prędkość unoszenia elektronów przewodnictwa w przewodniku miedzianym o promieniu $r = 900 \mu\text{m}$, w którym płynie stały prąd o natężeniu $I = 17 \text{ mA}$? Przyjmij, że każdy atom miedzi dostarcza jednego elektronu przewodnictwa, a gęstość prądu jest stała na całym przekroju drutu.

ROZWIĄZANIE:

○ 1. Prędkość unoszenia v_d jest związana z gęstością prądu \bar{J} i liczbą n elektronów przewodnictwa na jednostkę objętości wzorem (27.7), który dla wartości wektorów przyjmuje postać $J = nev_d$.

○ 2. Gęstość prądu jest stała, a więc wartość J jest związana z podanym natężeniem prądu I i rozmiarami przewodnika wzorem (27.5) ($J = I/S$, gdzie S jest polem przekroju przewodnika).

○ 3. Przyjęliśmy jeden elektron przewodnictwa na atom, więc liczba n elektronów przewodnictwa w jednostce objętości jest taka sama, jak liczba atomów w jednostce objętości.

Zacznijmy od trzeciego punktu:

$$\begin{aligned} n &= (\text{liczba atomów w jednostce objętości}) \\ &= (\text{liczba atomów w molu}) \\ &\quad \cdot (\text{liczba moli w jednostce masy}) \\ &\quad \cdot (\text{masa na jednostkę objętości}). \end{aligned}$$

Liczba atomów w molu jest po prostu liczbą Avogadra $N_A = 6,02 \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1}$. Liczba moli w jednostce masy jest odwrotnością masy na mol, czyli masy molowej M miedzi. Masa na jednostkę objętości jest gęstością ρ miedzi. Stąd:

$$n = N_A \left(\frac{1}{M} \right) \rho = \frac{N_A \rho}{M}.$$

Odczytując masę molową M i gęstość ρ z dodatku F, otrzymujemy (po zamianie jednostek):

$$\begin{aligned} n &= \frac{(6,02 \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1})(8,96 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3)}{63,54 \cdot 10^{-3} \text{ kg/mol}} \\ &= 8,49 \cdot 10^{28} \text{ elektronów/m}^3, \end{aligned}$$

czyli

$$n = 8,49 \cdot 10^{28} \text{ m}^{-3}.$$

Następnie skorzystamy z dwóch pierwszych punktów, pisząc:

$$\frac{I}{S} = nev_d.$$

Podstawiając $S = \pi r^2 (= 2,54 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2)$ i wyznaczając v_d , mamy:

$$\begin{aligned} v_d &= \frac{I}{ne(\pi r^2)} = \frac{17 \cdot 10^{-3} \text{ A}}{(8,49 \cdot 10^{28} \text{ m}^{-3})(1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C})(2,54 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2)} \\ &= 4,9 \cdot 10^{-7} \text{ m/s}, \end{aligned}$$

(odpowiedź)

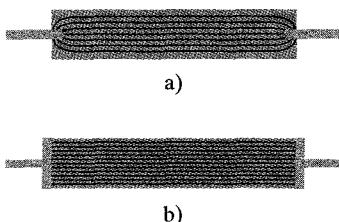
czyli elektrony przemieszczają się z prędkością zaledwie 1,8 mm/h, czyli wolniej niż ślimak.

Nasuwa się więc pytanie: „Jeśli elektrony przemieszczają się tak wolno, to dlaczego światło w pokoju zapala się tak szybko po włączeniu przełącznika?” Nieporozumienie wynika tu z niezrozumiania prędkości przemieszczania się elektronów i prędkości, z jaką zmiany konfiguracji pola elektrycznego rozchodzą się wzdłuż przewodów. Ta ostatnia prędkość jest bliska prędkości światła — elektrony w którymkolwiek punkcie przewodnika, włącznie z żarówkami, zaczynają przemieszczać się prawie natychmiast. Podobnie, jeśli otworzymy zawór przy węźlu ogrodowym napełnionym wodą, to fala ciśnienia przesuwa się wzdłuż węza z prędkością dźwięku w wodzie. Prędkość przepływu samej wody w węźlu (możemy ją zmierzyć przez zabarwienie w jakimś miejscu) jest znacznie mniejsza.

27.4. Opór elektryczny i opór elektryczny właściwy

Jeśli przyłożymy tę samą różnicę potencjałów do końców prętów miedzianych i szklanych o podobnych kształtach, to popłyną prądy o bardzo różnych natężeniach. Ma to związek z charakterystyczną właściwością przewodnika, zwaną **oporem elektrycznym** (rezystancją). Opór elektryczny między dwoma dowolnymi punktami przewodnika określamy przez przyłożenie różnicy potencjałów U między tymi punktami i pomiar natężenia I powstałego prądu. Opór elektryczny R jest określony wzorem:

$$R = \frac{U}{I} \quad (\text{definicja oporu } R). \quad (27.8)$$



Rys. 27.7. Dwa sposoby przyłożenia różnicy potencjałów do przewodzącego prądu. Ciemnoszare złącza mają z założenia znikomo mały opór. W sytuacji (a) mierzony opór jest większy niż w sytuacji (b)

Jednostką oporu elektrycznego w układzie SI, wynikającą ze wzoru (27.8), jest wolt na amper. Taka kombinacja występuje często, dlatego też wprowadzono dla niej specjalną nazwę **om** (symbol Ω), czyli

$$1 \text{ om} = 1 \Omega = 1 \text{ wolt na amper} = 1 \text{ V/A}. \quad (27.9)$$

Element obwodu, którego rolą jest zapewnienie określonego oporu, nazywamy **opornikiem** (rezystorem). Na schemacie obwodu opornik o określonym oporze przedstawiamy za pomocą symbolu Wr . Jeśli wzór (27.8) zapiszemy w postaci:

$$I = \frac{U}{R},$$

to widzimy, że nazwa „opór” została wprowadzona trafnie. Im większy jest opór przy przepływie prądu dla danej różnicy potencjałów, tym mniejsze jest natężenie prądu.

Opór przewodnika zależy od sposobu, w jaki przyłożono do niego różnicę potencjałów. Na rysunku 27.7 przedstawiono dwa różne sposoby przyłożenia danej różnicy potencjałów do tego samego przewodnika. Linie gęstości prądu wskazują, że w tych dwóch przypadkach natężenia prądu, a stąd i mierzone opory, będą różne. Jeśli specjalnie tego nie zaznaczono, będziemy zakładać, że dana różnica potencjałów jest przyłożona, jak na rysunku 27.8b.

Podobnie, jak w wielu innych sytuacjach, chcemy często rozważyć ogólny problem i zająć się nie poszczególnymi ciałami, ale materiałami. Skupimy się dlatego nie na różnicach potencjałów U na określonym oporniku, ale na natężeniu pola elektrycznego \vec{E} w jakimś punkcie materiału przewodnika. Podobnie zamiast natężenia prądu I płynącego przez przewodnik, rozważmy gęstość prądu \vec{J} w rozważanym punkcie. Zamiast oporu R rozważmy **opór elektryczny właściwy** (rezystwność) ρ materiału:

$$\rho = \frac{E}{J} \quad (\text{definicja oporu właściwego } \rho). \quad (27.10)$$

(Porównaj ten wzór ze wzorem (27.8)).

Zgodnie ze wzorem (27.10) jednostką oporu właściwego ρ w układzie SI jest om razy metr ($\Omega \cdot \text{m}$)

$$\frac{\text{jednostka } (E)}{\text{jednostka } (J)} = \frac{\text{V/m}}{\text{A/m}^2} = \frac{\text{V}}{\text{A}} \cdot \text{m} = \Omega \cdot \text{m}.$$

W tabeli 27.1 podano opory właściwe kilkunastu materiałów.

Wzór (27.10) możemy zapisać w postaci wektorowej jako

$$\vec{E} = \rho \vec{J}. \quad (27.11)$$

Wzory (27.10) i (27.11) są prawdziwe tylko dla materiałów *izotropowych*, czyli materiałów, których właściwości elektryczne są takie same we wszystkich kierunkach.

Często mówimy o **przewodności elektrycznej właściwej** (konduktywności) σ materiału. Jest ona po prostu odwrotnością jego oporu właściwego, czyli:

$$\sigma = \frac{1}{\rho} \quad (\text{definicja przewodności właściwej } \sigma). \quad (27.12)$$

Tabela 27.1. Opór elektryczny właściwy dla niektórych substancji w temperaturze pokojowej (20°C)

| Materiał | Opór elektryczny właściwy ρ [$\Omega \cdot \text{m}$] | Współczynnik temperaturowy oporu właściwego α [K^{-1}] |
|------------------------------|---|---|
| <i>Typowe metale</i> | | |
| Srebro | $1,62 \cdot 10^{-8}$ | $4,1 \cdot 10^{-3}$ |
| Miedź | $1,69 \cdot 10^{-8}$ | $4,3 \cdot 10^{-3}$ |
| Glin | $2,75 \cdot 10^{-8}$ | $4,4 \cdot 10^{-3}$ |
| Wolfram | $5,25 \cdot 10^{-8}$ | $4,5 \cdot 10^{-3}$ |
| Żelazo | $9,68 \cdot 10^{-8}$ | $6,5 \cdot 10^{-3}$ |
| Platyna | $10,6 \cdot 10^{-8}$ | $3,9 \cdot 10^{-3}$ |
| Manganin ^a | $4,82 \cdot 10^{-8}$ | $0,002 \cdot 10^{-3}$ |
| <i>Typowe półprzewodniki</i> | | |
| Czysty krzem | $2,5 \cdot 10^3$ | $-70 \cdot 10^{-3}$ |
| Krzem typu n ^b | $8,7 \cdot 10^{-4}$ | |
| Krzem typu p ^c | $2,8 \cdot 10^{-3}$ | |
| <i>Typowe izolatory</i> | | |
| Szkło | $10^{10}-10^{14}$ | |
| Stopiony kwarc | $\sim 10^{16}$ | |

^a Specjalnie przygotowany stop o małej wartości współczynnika temperaturowego α .

^b Czysty krzem domieszkowany fosforem do otrzymania koncentracji nośników ładunku 10^{23} m^{-3} .

^c Czysty krzem domieszkowany glinem do otrzymania koncentracji nośników ładunku 10^{23} m^{-3} .

Jednostką przewodności właściwej w układzie SI jest simens ($1 \text{ S} = 1/(\Omega \cdot \text{m})$). Definicja przewodności właściwej σ pozwala napisać wzór (27.11) w innej postaci:

$$\vec{J} = \sigma \vec{E}. \quad (27.13)$$

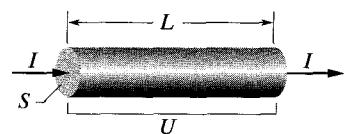
Obliczanie oporu elektrycznego na podstawie oporu elektrycznego właściwego

Dokonaliśmy ważnego rozróżnienia:

► Opór elektryczny jest właściwością ciała. Opór elektryczny właściwy jest właściwością materiału.

Jeśli znamy opór właściwy substancji, np. miedzi, to możemy obliczyć opór przewodnika miedzianego. Założymy, że S jest polem przekroju poprzecznego przewodnika, L jego długością i U różnicą potencjałów na końcach przewodnika (rys. 27.8). Jeśli linie gęstości prądu są rozłożone jednorodnie w przewodniku, to natężenie pola elektrycznego i gęstość prądu będą stałe we wszystkich punktach przewodnika i na podstawie wzorów (25.42) i (27.5) możemy obliczyć ich wartości:

$$E = U/L \quad \text{i} \quad J = I/S. \quad (27.14)$$



Rys. 27.8. Różnica potencjałów U została przyłożona do końców przewodnika o długości L i polu przekroju poprzecznego S , tworząc prąd o natężeniu I .

Ze wzorów (27.10) i (27.14) otrzymujemy wtedy:

$$\rho = \frac{E}{J} = \frac{U/L}{I/S}. \quad (27.15)$$

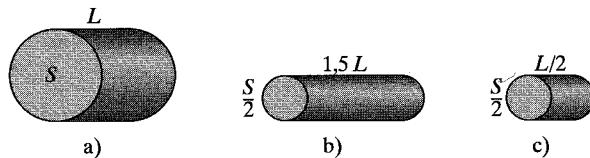
Wielkość U/I jest oporem R , co pozwala napisać wzór (27.15) w postaci:

$$R = \rho \frac{L}{S}. \quad (27.16)$$

Wzór (27.16) można stosować tylko do jednorodnego izotropowego przewodnika o stałym przekroju poprzecznym, jeśli przyłożono do niego różnicę potencjałów tak, jak na rysunku 27.7b.

Wielkości makroskopowe U , I i R są najbardziej interesujące wtedy, gdy dokonujemy pomiarów elektrycznych na konkretnych przewodnikach. Są to wielkości, których wartości odczytujemy bezpośrednio na miernikach. Do wielkości mikroskopowych E , J i ρ przechodzimy wtedy, gdy jesteśmy zainteresowani podstawowymi właściwościami elektrycznymi materiałów.

SPRAWDZIAN 3: Na rysunku przedstawiono trzy walcowe przewodniki miedziane o podanych przekrojach poprzecznego i długościach. Uszereguj je według wartości natężenia prądu, płynącego przez nie po przyłożeniu tej samej różnicy potencjałów U do ich podstaw, zaczynając od wartości największej.



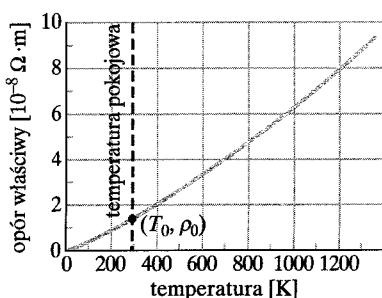
Zależność od temperatury

Wiele wielkości fizycznych zmienia się wraz z temperaturą i opór właściwy nie stanowi tu wyjątku. Na rysunku 27.9 przedstawiono np. zmiany oporu właściwego miedzi w szerokim zakresie temperatury. Zależność oporu właściwego od temperatury dla miedzi — i w ogólności dla metali — jest w przybliżeniu liniowa w szerokim zakresie temperatury. Dla takich liniowych zależności możemy napisać przybliżony wzór empiryczny, wystarczająco poprawny dla większości zastosowań technicznych:

$$\rho - \rho_0 = \rho_0 \alpha (T - T_0), \quad (27.17)$$

gdzie T_0 jest wybraną temperaturą odniesienia i ρ_0 jest oporem właściwym w tej temperaturze. Zwykle wybieramy $T_0 = 293$ K (co odpowiada temperaturze pokojowej) i wtedy dla miedzi $\rho_0 = 1,69 \cdot 10^{-8} \Omega \cdot \text{m}$.

We wzorze (27.17) występuje tylko różnica temperatury, a więc nie ma znaczenia, czy używamy w tym wzorze skali Celsjusza, czy Kelvina, ponieważ różnice temperatury w stopniach dla tych skali są identyczne. Wielkość α we wzorze (27.17), zwana *współczynnikiem temperaturowym oporu właściwego*, jest



Rys. 27.9. Opór właściwy miedzi w zależności od temperatury. Kropka na krzywej odpowiada wygodnemu punktowi odniesienia przy temperaturze $T_0 = 293$ K i oporze właściwym $\rho_0 = 1,69 \cdot 10^{-8} \Omega \cdot \text{m}$

dobrana tak, aby wzór był zgodny z doświadczeniem dla wybranego zakresu temperatury. W tabeli 27.1 podano wartości α dla kilku metali.

Hindenburg

Gdy sterowiec *Hindenburg* przygotowywał się do lądowania, personelowi na ziemiennu rzucano liny cumownicze. Pod wpływem deszczu liny stały się mokre (i mogły przewodzić prąd elektryczny). W tych warunkach liny „uziemiły” metalową podstawę sterowca, do której były przymocowane, czyli mokre liny utworzyły przewodzącą ścieżkę między podstawą sterowca i ziemią, wyrównując potencjał podstawy z potencjałem ziemi. Powinna zostać uziemiona także zewnętrzna powłoka sterowca. Jednak *Hindenburg* był pierwszym sterowcem, którego zewnętrzna powłoka została pokryta warstwą substancji uszczelniającej o dużym oporze właściwym. Powłoka miała więc nadal potencjał elektryczny atmosfery na wysokości około 43 m, na jakiej znajdował się sterowiec i wskutek burzy potencjał ten był duży względem potencjału ziemi.

Manipulacja linami doprowadziła widocznie do uszkodzenia jednej z komór wodorowych i wypływu wodoru z tej komory, co spowodowało zaobserwowane pomarszczenie powłoki. Powstała więc niebezpieczna sytuacja: powłoka była namoczona przez przewodzącą wodę deszczową i miała potencjał znacznie różniący się od potencjału podstawy sterowca. Prawdopodobnie wzduż mokrej powłoki popłynął ładunek i do metalowej podstawy otoczonej uwolnionym wodorem przeskoczyła iskra, która spowodowała zapalenie się wodoru. Pożar przeniósł się błyskawicznie do komory wodoru w sterowcu, co spowodowało jego spadek. Gdyby warstwa uszczelniająca na zewnętrznej powłoce *Hindenberga* miała mniejszy opór właściwy (jak we wcześniejszych i późniejszych sterowcach), katastrofa *Hindenberga* pewnie nigdy by się nie wydarzyła.

Przykład 27.4

Prostopadłościenna sztabka żelazna ma wymiary $1,2 \text{ cm} \times 1,2 \text{ cm} \times 15 \text{ cm}$. Do dwóch równoległych ścian przyłożono różnicę potencjałów tak, że te ściany są powierzchniami ekwipotencjalnymi (jak na rys. 27.8b). Ile wynosi opór sztabki, jeśli tymi dwiema równoległymi ścianami są: 1) kwadratowe podstawy (o wymiarach $1,2 \text{ cm} \times 1,2 \text{ cm}$), 2) prostokątne ściany (o wymiarach $1,2 \text{ cm} \times 15 \text{ cm}$)?

ROZWIĄZANIE:

Opór R ciała zależy od sposobu przyłożenia do niego różnicę potencjałów. W szczególności zależy od stosunku L/S , zgodnie ze wzorem (27.16) ($R = \rho L/S$), gdzie S jest polem powierzchni, do których przyłożono różnicę potencjałów, a L jest odległością między tymi powierzchniami. W przypadku 1 mamy:

$$L = 15 \text{ cm} = 0,15 \text{ m} \text{ i}$$

$$S = (1,2 \text{ cm})^2 = 1,44 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2.$$

Podstawiając te wartości i opór właściwy ρ z tabeli 27.1, otrzymujemy w przypadku 1:

$$R = \frac{\rho L}{S} = \frac{(9,68 \cdot 10^{-8} \Omega \cdot \text{m})(0,15 \text{ m})}{(1,44 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2)} = 1 \cdot 10^{-4} \Omega \\ = 100 \mu\Omega. \quad (\text{odpowiedź})$$

Podobnie w przypadku 2, podstawiając odległość $L = 1,2 \text{ cm}$ i pole powierzchni $S = (1,2 \text{ cm})(15 \text{ cm})$, otrzymujemy:

$$R = \frac{\rho L}{S} = \frac{(9,68 \cdot 10^{-8} \Omega \cdot \text{m})(1,2 \cdot 10^{-2} \text{ m})}{(1,8 \cdot 10^{-3} \text{ m}^2)} = 6,5 \cdot 10^{-7} \Omega \\ = 0,65 \mu\Omega. \quad (\text{odpowiedź})$$

27.5. Prawo Ohma

Jak już mówiliśmy w paragrafie 27.4, opornik jest przewodnikiem o określonym oporze elektrycznym. W tym przypadku opór nie zależy od wartości i kierunku (polaryzacji) przyłożonej różnicy potencjałów. Inne ciała przewodzące (np. niektóre przyrządy) mogą mieć opory zależne od przyłożonej różnicy potencjałów.

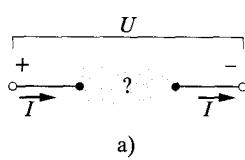
Na rysunku 27.10a przedstawiono sposób rozróżniania takich ciał. Do badanego elementu obwodu przykładamy różnicę potencjałów U i mierzmy natężenie I prądu, powstały w elemencie, zmieniając wartość i polaryzację wielkości U . Polaryzację U przyjmujemy z umowy za dodatnią, jeśli lewy zacisk ciała ma większy potencjał niż prawy zacisk. Kierunkowi powstałego prądu (z lewej strony na prawą) przypisujemy umownie znak plus. Odwrotna polaryzacja różnicy potencjałów U (o większym potencjale na prawym zacisku) jest wtedy ujemna; natężeniu powstałego prądu przypisujemy znak minus.

Na rysunku 27.10b przedstawiono wykres natężenia I w zależności od U dla pewnego elementu obwodu. Wykres jest linią prostą, przechodzącą przez początek układu współrzędnych, czyli stosunek I/U (nachylenie linii prostej) jest taki sam dla wszystkich wartości U . Oznacza to, że opór $R = U/I$ tego elementu jest niezależny od wartości i polaryzacji przyłożonej różnicy potencjałów U .

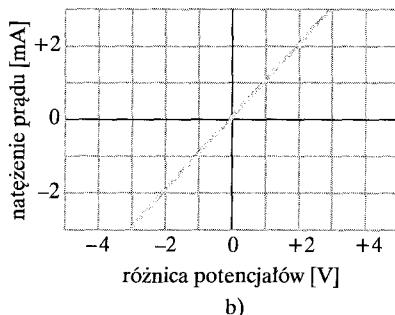
Na rysunku 27.10c przedstawiono wykres dla innego elementu przewodzącego. Prąd przez ten element może płynąć tylko wtedy, gdy polaryzacja różnicy potencjałów U jest dodatnia i przyłożona różnica potencjałów jest większa od około 1,5 V. Zależność natężenia I płynącego prądu od U jest nieliniowa i stosunek I/U zależy od przyłożonej różnicy potencjałów U .

Te dwa rodzaje przewodników rozróżniamy mówiąc, że w pierwszym przypadku spełnione jest prawo Ohma, a w drugim nie.

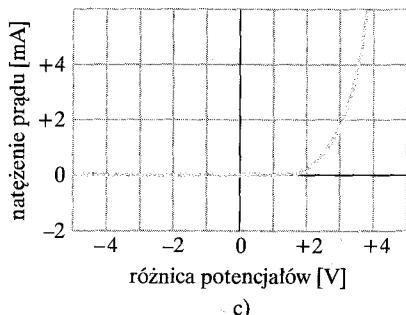
► Prawo Ohma brzmi: natężenie prądu, płynącego przez przewodnik jest zawsze wprost proporcjonalne do różnicy potencjałów, przyłożonej do przewodnika.



a)



b)



c)

Rys. 27.10. a) Po przyłożeniu różnicy potencjałów U do zacisków badanego elementu powstaje prąd o natężeniu I . b) Wykres natężenia prądu I w zależności od przyłożonej różnicy potencjałów U , gdy elementem obwodu jest opornik o oporze 1000Ω . c) Podobny wykres, gdy elementem obwodu jest dioda półprzewodnikowa ze złączem p-n

(Mimo że stwierdzenie to jest słusze tylko w pewnych sytuacjach, to z powodów historycznych używamy określenia „prawo”). Element obwodu z rysunku 27.10b — które jest opornikiem o oporze $1000\ \Omega$ — spełnia prawo Ohma. Element obwodu z rysunku 27.10c — które jest złączem p-n (diodej) — nie spełnia prawa Ohma.

► Element obwodu spełnia prawo Ohma, gdy jego opór nie zależy od wartości i polaryzacji przyłożonej różnicy potencjałów.

Współczesna mikroelektronika — w istotnym stopniu nadająca charakter naszej obecnej cywilizacji technicznej — oparta jest prawie całkowicie na elementach, które *nie* spełniają prawa Ohma, np. komputer zawiera mnóstwo takich elementów.

Często spotykamy się ze stwierdzeniem, że wzór $U = IR$ wyraża prawo Ohma. Nie jest to prawda! Wzór ten jest definicją oporu i stosuje się do wszystkich przewodników niezależnie od tego, czy spełniają prawo Ohma, czy nie. Jeśli zmierzmy różnicę potencjałów U , przyłożoną do dowolnego ciała (nawet do diody ze złączem p-n) i natężenie I powstałe w ciele prądu, to możemy obliczyć opór $R = U/I$ przy tej wartości różnicy potencjałów U . Istotą prawa Ohma jest jednak to, że wykres natężenia I w zależności od U jest liniowy, czyli że opór R nie zależy od U .

Prawo Ohma możemy sformułować ogólniej, jeśli weźmiemy pod uwagę *materiały* przewodzące, a nie *elementy obwodu*. Odpowiednim związkiem jest wtedy wzór (27.11) ($\vec{E} = \rho \vec{J}$), który jest odpowiednikiem wzoru $U = RI$.

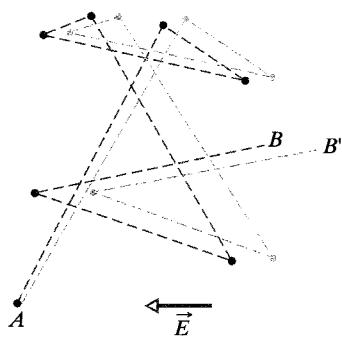
► Materiał przewodzący spełnia prawo Ohma, gdy opór właściwy materiału nie zależy od wartości i kierunku przyłożonego pola elektrycznego.

Wszystkie jednorodne materiały, niezależnie od tego, czy są przewodnikami, jak miedź, czy półprzewodnikami, jak czysty krzem lub krzem z odpowiednimi domieszkami, spełniają prawo Ohma w pewnym zakresie wartości natężenia pola elektrycznego. Jeśli jednak natężenie pola jest dostatecznie duże, to zawsze pojawiają się odstępstwa od prawa Ohma.

SPRAWDZIAN 4: W tabeli podano natężenie prądu I (w amperach) dla kilku wartości różnicy potencjałów U (w voltach), przyłożonej do dwóch elementów obwodu. Określ na podstawie tych danych, który element nie spełnia prawa Ohma.

| Element 1 | | Element 2 | |
|-----------|------|-----------|------|
| U | I | U | I |
| 2,00 | 4,50 | 2,00 | 1,50 |
| 3,00 | 6,75 | 3,00 | 2,20 |
| 4,00 | 9,00 | 4,00 | 2,80 |

27.6. Prawo Ohma — obraz mikroskopowy



Rys. 27.11. Szare linie ilustrują ruch elektronu od punktu A do punktu B z sześcioma zderzeniami po drodze. Zielone linie pokazują, jak mógłby wyglądać tor w obecności przyłożonego pola elektrycznego o natężeniu \vec{E} . Zauważ stałe przesunięcie w kierunku $-\vec{E}$. (W rzeczywistości zielone linie byłyby nieco zakrzywione, przypominałyby odcinki parabol, po których elektrony poruszają się między zderzeniami pod wpływem pola elektrycznego)

Wyjaśnienie, dlaczego pewne materiały spełniają prawo Ohma, wymaga szczegółowego zbadania procesu przewodzenia na poziomie atomowym. Rozważmy tu przewodzenie tylko w metalach, takich jak miedź. Nasza analiza opiera się na *modelu elektronów swobodnych*, w którym zakładamy, że elektrony przewodnictwa w metalu mogą poruszać się swobodnie w całej objętości próbki, podobnie, jak cząsteczki w gazie w zamkniętym zbiorniku. Założymy także, że elektrony zderzają się tylko z atomami metalu, a nie z innymi elektronami.

Zgodnie z fizyką klasyczną, elektrony powinny mieć maxwellowski rozkład prędkości, podobnie jak cząsteczki w gazie. Przy takim rozkładzie (zob. paragraf 20.7) wartość średnia prędkości elektronu jest proporcjonalna do pierwiastka kwadratowego z temperatury bezwzględnej. Ruchem elektronów rządzą jednak nie prawa fizyki klasycznej, ale fizyki kwantowej. Okazuje się, że założeniem dużo bliższym rzeczywistości jest przyjęcie, że elektrony przewodnictwa w metalu poruszają się efektywnie z jednakową prędkością v_{ef} i że ta prędkość w zasadzie nie zależy od temperatury. Dla miedzi $v_{\text{ef}} \approx 1,6 \cdot 10^6 \text{ m/s}$.

Gdy do próbki metalu przyłożymy pole elektryczne, elektrony zmieniają nieco swoje ruchy przypadkowe i przesuwają się bardzo powoli — w kierunku przeciwnym do kierunku natężenia pola — ze średnią prędkością unoszenia v_d . Jak widzieliśmy w przykładzie 27.3, wartość prędkości unoszenia w typowym przewodniku metalicznym wynosi około $5 \cdot 10^{-7} \text{ m/s}$ i jest o wiele rzędów wielkości mniejsza od wartości prędkości efektywnej ($1,6 \cdot 10^6 \text{ m/s}$). Na rysunku 27.11 można dostrzec związek między tymi dwiema wartościami prędkości. Szare linie ilustrują możliwe tory elektronu przy braku zewnętrznego pola; elektron przemieszcza się z punktu A do punktu B, doznając sześciu zderzeń na swej drodze. Linie zielone ilustrują wyniki tych samych zdarzeń po przyłożeniu pola elektrycznego o natężeniu \vec{E} . Widzimy, że elektron przesuwa się stale w prawo, kończąc swoją drogę w punkcie B' , a nie w punkcie B. Na rysunku 27.11 przyjęto, że $v_d \approx 0,02 v_{\text{ef}}$. Przesunięcie na rysunku jest wyobrażymione, bo rzeczywista wartość prędkości unoszenia wynosi $v_d \approx (10^{-13})v_{\text{ef}}$.

Ruch elektronów przewodnictwa w polu elektrycznym o natężeniu \vec{E} jest więc złożeniem ruchu, wynikającego z przypadkowych zderzeń i ruchu wywołanego polem \vec{E} . Gdy rozważymy wszystkie elektrony swobodne, ich przemieszczenia przypadkowe uśredniają się do zera i nie dają wkładu do prędkości unoszenia. Prędkość unoszenia jest wynikiem oddziaływanego pola elektrycznego na elektrony.

Jeśli elektron o masie m znajdzie się w polu elektrycznym o wartości natężenia E , to doznaje przyspieszenia, określonego przez drugą zasadę dynamiki Newtona:

$$a = \frac{F}{m} = \frac{eE}{m}. \quad (27.18)$$

Natura zderzeń elektronów przewodnictwa jest taka, że po typowym zderzeniu każdy elektron, można powiedzieć, traci całkowicie swą pamięć o poprzedniej prędkości unoszenia. Każdy elektron po każdym zderzeniu „zaczyna wszystko od nowa”, poruszając się w przypadkowym kierunku. W średnim czasie τ między zderzeniami, elektron uzyska średnio prędkość unoszenia $v_d = a\tau$. Co więcej, jeśli zmierzlibyśmy wartości prędkości unoszenia wszystkich elektronów

w dowolnej chwili, to ich średnia wartość prędkości unoszenia okazałaby się równa $a\tau$. W dowolnej chwili elektryny mają więc średnio wartość prędkości unoszenia $v_d = a\tau$. Ze wzoru (27.18) otrzymujemy wtedy:

$$v_d = a\tau = \frac{eE\tau}{m}. \quad (27.19)$$

Korzystając ze wzoru (27.7) ($\vec{J} = ne\vec{v}_d$), możemy napisać, że dla wartości wektorów mamy:

$$v_d = \frac{J}{ne} = \frac{eE\tau}{m},$$

co można zapisać w postaci:

$$E = \left(\frac{m}{e^2 n \tau} \right) J.$$

Porównując ten wynik ze wzorem (27.11) ($\vec{E} = \rho \vec{J}$), otrzymujemy:

$$\rho = \frac{m}{e^2 n \tau}. \quad (27.20)$$

Wykażemy, że dla metali spełnione jest prawo Ohma, gdy udowodnimy, że ich opór właściwy ρ , określony wzorem (27.20), jest stały, czyli niezależny od natężenia przyłożonego pola elektrycznego \vec{E} . Wielkości n , m i e są stałe, a więc wystarczy wykazać, że τ , średni czas między zderzeniami (czyli *średni czas swobodny*), jest stały, niezależny od natężenia przyłożonego pola elektrycznego. Wielkość τ można rzeczywiście uważać za stałą, ponieważ wartość prędkości unoszenia v_d , która jest wywołana polem, jest o rzędu wielkości mniejsza od wartości prędkości efektywnej v_{ef} ; zmiana prędkości elektronu — a stąd i τ — przez pole jest niezauważalna.

Przykład 27.5

a) Ile wynosi średni czas swobodny τ między zderzeniami dla elektronów przewodnictwa w miedzi?

ROZWIĄZANIE:

Średni czas swobodny τ dla miedzi jest w przybliżeniu stały i nie zależy od pola elektrycznego, przyłożonego do próbki miedzi. Nie musimy więc rozważać żadnej szczególnej wartości natężenia przyłożonego pola elektrycznego. Zauważ jednak, że opór właściwy ρ miedzi zależy od τ , zatem średni czas swobodny możemy znaleźć ze wzoru (27.20) ($\rho = m/(e^2 n \tau)$). Zgodnie z tym wzorem:

$$\tau = \frac{m}{ne^2 \rho}.$$

Wartość n , liczby elektronów przewodnictwa na jednostkę objętości w miedzi, podaliśmy w przykładzie 27.3, a wartość ρ w tabeli 27.1. Mianownik przyjmuje wartość:

$$(8,49 \cdot 10^{28} \text{ m}^{-3})(1,60 \cdot 10^{-19} \text{ C})^2(1,69 \cdot 10^{-8} \Omega \cdot \text{m}) \\ = 3,67 \cdot 10^{-17} \text{ C}^2 \cdot \Omega / \text{m}^2 = 3,67 \cdot 10^{-17} \text{ kg/s},$$

gdzie dokonaliśmy następującego przekształcenia jednostek:

$$\frac{\text{C}^2 \cdot \Omega}{\text{m}^2} = \frac{\text{C}^2 \cdot \text{V}}{\text{m}^2 \cdot \text{A}} = \frac{\text{C}^2 \cdot \text{J/C}}{\text{m}^2 \cdot \text{C/s}} = \frac{\text{kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}^2}{\text{m}^2/\text{s}} = \frac{\text{kg}}{\text{s}}.$$

Korzystając z tych wyników i podstawiając wartość masy elektronu m , otrzymujemy:

$$\tau = \frac{9,1 \cdot 10^{-31} \text{ kg}}{3,67 \cdot 10^{-17} \text{ kg/s}} = 2,5 \cdot 10^{-14} \text{ s}. \quad (\text{odpowiedź})$$

b) Średnia droga swobodna λ elektronów przewodnictwa w przewodniku jest średnią odległością, przebywaną przez elektron między zderzeniami. (Definicja ta jest analogiczna do przedstawionej w paragrafie 20.6 definicji średniej drogi swobodnej cząsteczek w gazie). Jaka jest wartość λ dla elektronów przewodnictwa w miedzi, jeśli wartość ich prędkości efektywnej v_{ef} wynosi $1,6 \cdot 10^6 \text{ m/s}$?

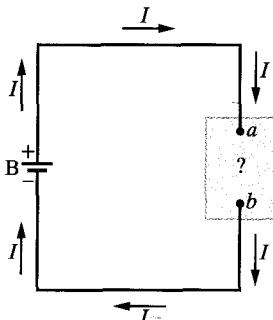
ROZWIĄZANIE:

Droga d , jaką przebywa cząstka o stałej prędkości v , w pewnym czasie t wynosi $d = vt$. Dla elektronów w miedzi otrzymujemy stąd:

$$\lambda = v_{ef} \tau = (1,6 \cdot 10^6 \text{ m/s})(2,5 \cdot 10^{-14} \text{ s}) = 4 \cdot 10^{-8} \text{ m} = 40 \text{ nm}, \quad (\text{odpowiedź})$$

co jest równe około 150 odległościom między leżącymi najbliżej siebie atomami miedzi w sieci. Średnio więc każdy elektron przewodnictwa miją wiele atomów miedzi, zanim w końcu uderzy w jeden z nich.

27.7. Moc w obwodach elektrycznych



Rys. 27.12. Źródło B wytwarza prąd o natężeniu I w obwodzie z nieznanym elementem przewodzącym

Na rysunku 27.12 przedstawiono obwód, składający się ze źródła B połączonego przewodnikami o znikomo małym oporze z pewnym przewodzącym elementem obwodu. Element ten może być opornikiem, akumulatorem (baterią odnawialną), silnikiem lub jakimś przyrządem elektrycznym. Źródło utrzymuje różnicę potencjałów o wartości U między biegunami, a więc i (za pośrednictwem przewodów) na zaciskach elementu, o większym potencjale na zacisku a niż na zacisku b .

Istnienie drogi przewodzącej między biegunami źródła i podtrzymywanie przez źródło różnicy potencjałów powodują, że w obwodzie powstaje stały prąd o natężeniu I , skierowany od zacisku a do zacisku b . Ilość ładunku dq , przeniesiona między tymi zaciskami w przedziale czasu dt wynosi Idt . Ruchowi ładunku dq towarzyszy spadek potencjału o wartości U i stąd wartość elektrycznej energii potencjalnej maleje o:

$$dE_p = dq \cdot U = Idt \cdot U.$$

Zgodnie z zasadą zachowania energii zmniejszaniu się elektrycznej energii potencjalnej przy przesunięciu ładunku z a do b towarzyszy jej zamiana w inny rodzaj energii. Moc P , związana z tym przekazem energii jest równa dE_p/dt i wynosi

$$P = IU \quad (\text{energia elektryczna przekazana w jednostce czasu}). \quad (27.21)$$

Moc P jest także równa ilości energii, przekazanej ze źródła do rozważanego elementu, w jednostce czasu. Jeśli tym elementem jest silnik, połączony z jakimś urządzeniem mechanicznym, to energia jest zamieniana na energię mechaniczną. Jeśli elementem jest akumulator, który jest ładowany, to energia jest zamieniana na energię chemiczną w akumulatorze. Jeśli elementem jest opornik, to energia jest zamieniana na energię wewnętrzną, co prowadzi do wzrostu temperatury opornika (mówimy też, że wydziela się ciepło Joule'a).

Jednostką mocy, jaka wynika ze wzoru (27.21), jest volt razy amper ($V \cdot A$). Jednostka ta jest równa watowi (W), gdyż:

$$1 V \cdot A = \left(1 \frac{J}{C}\right) \left(1 \frac{C}{s}\right) = 1 \frac{J}{s} = 1 W.$$

Ruch elektronu w oporniku o stałej wartości prędkości unoszenia przypomina ruch kamienia, spadającego w wodzie z prędkością graniczną. Uśredniona energia kinetyczna elektronu pozostaje stała, a tracona przez elektron elektryczna energia potencjalna pojawia się w postaci energii wewnętrznej (termicznej) w oporniku i jego otoczeniu. Na poziomie mikroskopowym energia ta jest przekazywana podczas zderzeń elektronu z cząsteczkami opornika, co prowadzi do wzrostu temperatury opornika. Energia mechaniczna, zamieniona na energię termiczną jest tracona (ulega *rozproszeniu*), bo tego przekazu energii nie można odwrócić.

Dla opornika lub innego ciała o oporze R możemy połączyć wzory (27.8) ($R = U/I$) i (27.21) i otrzymujemy wtedy następujące wzory na moc, czyli ilość energii ulegającej rozproszeniu w jednostce czasu:

$$P = I^2 R \quad (\text{rozpraszanie energii w oporniku}) \quad (27.22)$$

lub

$$P = \frac{U^2}{R} \quad (\text{rozpraszanie energii w oporniku}). \quad (27.23)$$

Uwaga: Musimy być ostrożni i odróżniać te dwa wzory od wzoru (27.21): wzór $P = IU$ stosuje się do dowolnych przekazów energii elektrycznej; wzory $P = I^2 R$ i $P = U^2/R$ możemy stosować tylko do zamiany elektrycznej energii potencjalnej na energię termiczną w przewodniku o określonym oporze.

SPRAWDZIAN 5: Różnica potencjałów U przyłożona do elementu przewodzącego o oporze R powoduje przepływ prądu o natężeniu I przez ten element. Uszereguj następujące zmiany szybkości rozpraszania energii wskutek istnienia oporu, gdy: a) wartość U zostaje podwojona bez zmiany R , b) wartość I zostaje podwojona bez zmiany R , c) wartość R zostaje podwojona bez zmiany U , d) wartość R zostaje podwojona bez zmiany I , zaczynając od największej.

Przykład 27.6

Kawałek jednorodnego drutu grzejnego ze stopu nikiel-chrom-żelazo, zwanego chromonikieliną, ma opór $R = 72 \Omega$. Oblicz szybkość rozpraszania energii w każdej sytuacji: 1) różnica potencjałów 120 V jest przyłożona do całej długości drutu, 2) drut został przecięty na pół i różnica potencjałów 120 V jest przyłożona do każdej połówki?

ROZWIĄZANIE:

Prąd w materiale z oporem zamienia energię mechaniczną na termiczną; szybkość tej zamiany jest określona wzorami (27.21)–(27.23). Znamy różnicę potencjałów U i opór R , więc używamy wzoru (27.23), który w sytuacji 1 daje:

$$P = \frac{U^2}{R} = \frac{(120 \text{ V})^2}{72 \Omega} = 200 \text{ W}. \quad (\text{odpowiedź})$$

W sytuacji 2 opór każdej połówki drutu wynosi $(72 \Omega)/2$, czyli 36Ω . Szybkość rozpraszania energii dla każdej połówki wynosi więc:

$$P' = \frac{(120 \text{ V})^2}{36 \Omega} = 400 \text{ W}$$

i dla dwóch połówek otrzymujemy:

$$P = 2P' = 800 \text{ W}, \quad (\text{odpowiedź})$$

czyli szybkość cztery razy większą niż dla całej długości drutu. Można by więc wnioskować, że można kupić spiralę grzejną, przeciąć ją na połowy i po podłączeniu uzyskać cztery razy większą moc. Dlaczego jest to nierozsądne? (Jak zmieni się natężenie prądu w spirali?)

27.8. Półprzewodniki

Przyrządy półprzewodnikowe stanowią podstawę rewolucji mikroelektronicznej, która wprowadziła nas w wiek informacji. W tabeli 27.2 porównano właściwości krzemu — typowego półprzewodnika — i miedzi — typowego przewodnika metalicznego. Widzimy, że krzem ma dużo mniej nośników ładunku, dużo większy opór właściwy oraz duży i ujemny współczynnik temperaturowy oporu właściwego. Opór właściwy miedzi rośnie więc wraz z temperaturą, a opór czystego krzemu maleje.

Tabela 27.2. Niektóre właściwości elektryczne miedzi i krzemu^a

| Właściwość | Miedź | Krzem |
|--|--------------------|--------------------|
| Typ materiału | metal | półprzewodnik |
| Koncentracja nośników ładunku, m^{-3} | $9 \cdot 10^{28}$ | $1 \cdot 10^{16}$ |
| Opór właściwy, $\Omega \cdot m$ | $2 \cdot 10^{-8}$ | $3 \cdot 10^3$ |
| Współczynnik temperaturowy oporu właściwego, K^{-1} | $+4 \cdot 10^{-3}$ | $-7 \cdot 10^{-3}$ |

^a Wartości zaokrąglone do jednej cyfry znaczącej dla łatwiejszego porównania.

Czysty krzem ma tak duży opór właściwy, że właściwie jest izolatorem i dlatego też nie ma dużego zastosowania w obwodach mikroelektronicznych. Jednak jego opór właściwy można znacznie zmniejszyć w kontrolowany sposób, przez dodanie niewielu określonych atomów domieszkowych, w procesie zwanym *domieszkowaniem*. W tabeli 27.1 podano typowe wartości oporu właściwego krzemu, przed domieszkowaniem i po domieszkowaniu fosforem oraz glinem.

Różnice w oporze właściwym (a stąd i w przewodności właściwej) między półprzewodnikami, izolatorami i przewodnikami metalicznymi możemy z grubszą wyjaśnić, rozważając energie ich elektronów. (Bardziej szczegółowe wyjaśnienie wymaga zastosowania fizyki kwantowej). W przewodnikach metalicznych, takich jak drut miedziany, większość elektronów jest na stałe związane w cząsteczkach i potrzebna byłaby duża energia, aby po uwolnieniu mogły się poruszać i uczestniczyć w przepływie prądu elektrycznego. Jednak istnieją także elektrony słabo związane, które wymagają małej energii, aby stać się elektronami swobodnymi. Energia ta może pochodzić zarówno od energii termicznej, jak i od pola elektrycznego, przyłożonego do przewodnika. Pole nie tylko może uwolnić te słabo związane elektrony, ale także wprawić je w ruch wzdłuż przewodnika — pole pozwala kierować prądem przepływającym przez przewodnik.

W izolatorze potrzebna jest znacznie większa energia do uwolnienia elektronów, aby mogły się poruszać w materiale. Energia termiczna nie jest wystarczająca, nie może tego także dokonać przyłożone do izolatora pole elektryczne o umiarkowanej wartości natężenia. Nie ma więc żadnych elektronów, które mogłyby poruszać się przez izolator i stąd nie pojawia się żaden prąd, nawet po przyłożeniu pola elektrycznego.

Półprzewodnik jest podobny do izolatora z tym wyjątkiem, że energia potrzebna do uwolnienia niektórych elektronów nie jest tak duża. Co ważniejsze, domieszkowanie może dostarczyć elektronów lub dodatkowych nośników ładunku, które są słabo związane i można je łatwo uwolnić. Co więcej, przez odpowiednie domieszkowanie półprzewodnika możemy wpływać na koncentrację nośników ładunku, które mogą mieć wpływ na przepływ prądu, i wobec tego otrzymywać pożądane właściwości elektryczne półprzewodnika. Większość przyrządów półprzewodnikowych, takich jak tranzystory i diody złączowe, wytwarza się przez selektywne domieszkowanie różnych obszarów krzemu atomami domieszek różnego rodzaju.

Spójrzmy ponownie na wzór (27.20) dla oporu właściwego przewodnika:

$$\rho = \frac{m}{e^2 n \tau}, \quad (27.24)$$

gdzie n jest liczbą nośników ładunku, przypadających na jednostkę objętości, a τ jest średnim czasem między zderzeniami nośników ładunku. (Wzór ten wyprowadziliśmy dla przewodników, ale można go stosować także do półprzewodników). Rozważmy, jak wielkości n i τ zmieniają się wraz ze wzrostem temperatury.

W przewodniku wartość n jest duża i w bardzo dobrym przybliżeniu stała przy zmianie temperatury. Wzrost oporu właściwego wraz ze wzrostem temperatury dla metali (rys. 27.10) wynika ze wzrostu liczby zderzeń nośników ładunku, co we wzorze (27.24) ujawnia się w zmniejszaniu się średniego czasu między zderzeniami τ .

W półprzewodniku wartość n jest mała, ale rośnie bardzo szybko wraz ze wzrostem temperatury, gdyż dzięki większej energii ruchu termicznego liczba dostępnych nośników ładunku jest większa. Ten fakt powoduje *zmniejszenie* oporu właściwego wraz ze wzrostem temperatury, co ujawnia się w postaci ujemnego współczynnika temperaturowego oporu właściwego dla krzemu, podanego w tabeli 27.2. Dla półprzewodników występuje także taki sam wzrost liczby zderzeń, jak dla przewodników, ale jego wpływ jest niewielki, ze względu na szybszy wzrost liczby nośników ładunku.

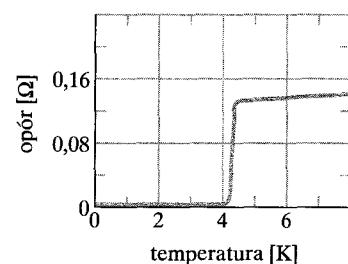
27.9. Nadprzewodniki

W 1911 r. holenderski fizyk Heike Kamerlingh Onnes odkrył, że opór właściwy rtęci znika całkowicie przy temperaturze mniejszej niż 4 K (rys. 27.13). To zjawisko **nadprzewodnictwa** ma ogromne potencjalne znaczenie w technice, ponieważ oznacza, że ładunek może płynąć przez nadprzewodnik bez strat w postaci energii termicznej. Prądy, wytworzone w pierścieniu nadprzewodzącym mogą więc płynąć przez wiele lat bez zmniejszenia się ich natężenia; elektryny, powodujące przepływy prądu, wymagają siły i źródła energii tylko w chwili początkowej, ale nie potem.

Przed 1986 r. zastosowanie nadprzewodnictwa w technice było utrudnione przez wysokie koszty wytwarzania bardzo niskich temperatur, koniecznych do uzyskania nadprzewodnictwa. W 1986 r. odkryto jednak nowe materiały ceramiczne, które stają się nadprzewodnikami przy wyraźnie wyższych temperaturach. Wykorzystanie elementów nadprzewodzących w temperaturze pokojowej może w końcu okazać się możliwe.

Nadprzewodnictwo jest zjawiskiem bardzo różnym od przewodnictwa. Okazuje się, że najlepsze przewodniki, jak srebro i miedź, nie mogą stać się nadprzewodnikami przy żadnej temperaturze, a nowe nadprzewodniki ceramiczne są w normalnych warunkach dobrymi izolatorami.

Nadprzewodnictwo wyjaśniamy zwykle w następujący sposób. Elektryny tworzące prąd poruszają się w skorelowanych parach. Jeden z elektronów pary podczas swego ruchu zaburza elektrycznie strukturę cząsteczkową materiału nadprzewodzącego, wytwarzając w swym otoczeniu chwilowo ładunek dodatni. Drugi elektron pary jest wtedy przyciągany do tego dodatniego ładunku. Zgodnie z teorią, taka korelacja między elektronami zabezpiecza je przed zderzeniami z cząsteczkami materiału i dlatego eliminuje opór elektryczny. Teoria ta dobrze wyjaśnia zjawisko nadprzewodnictwa zachodzące w niskich temperaturach (znane przed 1986 r.), ale dla nadprzewodników wysokotemperaturowych potrzebne są nowe teorie.



Rys. 27.13. Opór rtęci maleje do zera przy temperaturze około 4 K

Podsumowanie

Natężenie prądu elektrycznego Natężenie prądu elektrycznego w przewodniku jest zdefiniowane wzorem:

$$I = \frac{dq}{dt}, \quad (27.1)$$

gdzie dq jest ilością ładunku (dodatniego), przepływającego w czasie dt przez powierzchnię przekroju poprzecznego przewodnika. Kierunek prądu elektrycznego wybieramy umownie jako kierunek, w którym poruszałyby się dodatnie nośniki ładunku. Jednostką natężenia prądu elektrycznego w układzie SI jest **amper** (A): $1 \text{ A} = 1 \text{ C/s}$.

Gęstość prądu elektrycznego Natężenie prądu elektrycznego (skalar) jest powiązane z **gęstością prądu elektrycznego** \vec{J} (wektorem) wzorem:

$$I = \int \vec{J} \cdot d\vec{S}, \quad (27.4)$$

gdzie $d\vec{S}$ jest wektorem prostopadłym do elementu powierzchni o polu dS i całkę obliczamy po dowolnej powierzchni przekroju poprzecznego przewodnika. Wektor \vec{J} ma taki sam kierunek, jak prędkość poruszających się ładunków, jeśli są one dodatnie, i przeciwny do prędkości, jeśli są ujemne.

Prędkość unoszenia nośników ładunku Gdy w przewodniku istnieje pole elektryczne o natężeniu \vec{E} , nośniki ładunku uzyskują **prędkość unoszenia** v_d w kierunku natężenia pola \vec{E} , jeśli są dodatnie (lub w przeciwnym kierunku, jeśli są ujemne); prędkość \vec{v}_d jest powiązana z gęstością prądu wzorem:

$$\vec{J} = ne\vec{v}_d, \quad (27.7)$$

gdzie ne jest koncentracją nośników ładunku.

Opór elektryczny przewodnika Opór elektryczny (rezystancja) R przewodnika zdefiniowany jest wzorem:

$$R = \frac{U}{I} \quad (\text{definicja oporu } R), \quad (27.8)$$

gdzie U jest różnicą potencjałów na końcach przewodnika i I natężeniem prądu. Jednostką oporu w układzie SI jest **om** (Ω): $1 \Omega = 1 \text{ V/A}$. Analogiczne wzory definiują **opór właściwy** (rezystywność) ρ i **przewodność właściwą** (konduktywność) σ materiału:

$$\rho = \frac{1}{\sigma} = \frac{E}{J} \quad (\text{definicje } \rho \text{ i } \sigma), \quad (27.12, 27.10)$$

gdzie E jest wartością natężenia przyłożonego pola elektrycznego. Jednostką oporu właściwego w układzie SI jest om razy metr ($\Omega \cdot \text{m}$). Wzór (27.10) odpowiada wzorowi wektorowemu:

$$\vec{E} = \rho \vec{J}. \quad (27.11)$$

Opór R przewodnika o długości L i jednorodnym przekroju poprzecznym wynosi:

$$R = \rho \frac{L}{S}, \quad (27.16)$$

gdzie S jest polem przekroju poprzecznego.

Zależność oporu właściwego ρ od temperatury Opór właściwy ρ dla większości materiałów zmienia się wraz z temperaturą. Dla wielu materiałów, także dla metali, związek między ρ i temperaturą T ma w przybliżeniu postać:

$$\rho - \rho_0 = \rho_0 \alpha (T - T_0), \quad (27.17)$$

gdzie T_0 jest temperaturą odniesienia, ρ_0 jest oporem właściwym w temperaturze T_0 , a α jest współczynnikiem temperaturowym oporu właściwego materiału.

Prawo Ohma Dane ciało (przewodnik, opornik lub inny element obwodu) spełnia prawo Ohma, jeśli jego opór R , zdefiniowany wzorem (27.8) ($R = U/I$), jest niezależny od przyłożonej różnicy potencjałów U . Dany materiał spełnia prawo Ohma, jeśli jego opór właściwy, zdefiniowany wzorem (27.10), jest niezależny od wartości i kierunku natężenia przyłożonego pola elektrycznego \vec{E} .

Opór właściwy metalu Zakładając, że elektrony przewodnictwa w metalu są swobodne i mogą poruszać się jak cząsteczki gazu, możemy wyprowadzić wyrażenie na opór właściwy metalu:

$$\rho = \frac{m}{e^2 n \tau}, \quad (27.20)$$

gdzie n jest liczbą elektronów swobodnych w jednostce objętości i τ jest średnim czasem między zderzeniami elektronu z atomami metalu. Metale spełniają prawo Ohma, ponieważ czas τ jest prawie niezależny od wartości natężenia E pola elektrycznego, przyłożonego do metalu.

Moc elektryczna Moc P , czyli ilość energii przenoszonej w jednostce czasu, w danym przewodniku, na którym utrzymuje się przyłożona różnica potencjałów U , wynosi:

$$P = IU \quad (\text{moc elektryczna}). \quad (27.21)$$

Rozproszenie energii w oporniku Dla opornika możemy zapisać wzór (27.21) w postaci:

$$P = I^2 R = \frac{U^2}{R} \quad (\text{moc w oporniku}). \quad (27.22, 27.23)$$

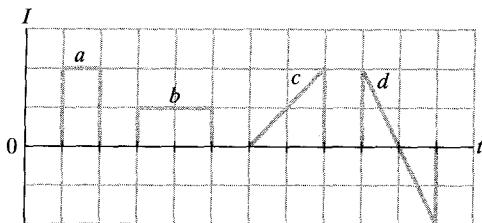
W oporniku elektryczna energia potencjalna zamienia się na energię wewnętrzną w wyniku zderzeń między nośnikami ładunku i atomami.

Półprzewodniki Półprzewodniki są materiałami z małą liczbą elektronów przewodnictwa, ale mogą stać się przewodnikami, gdy są domieszkowane innymi atomami, które dostarczają swobodnych elektronów.

Nadprzewodniki Nadprzewodniki są materiałami, dla których opór elektryczny zanika przy niskich temperaturach. Ostatnio odkryto materiały, które są nadprzewodzące przy zaskakującą wysokości temperaturach.

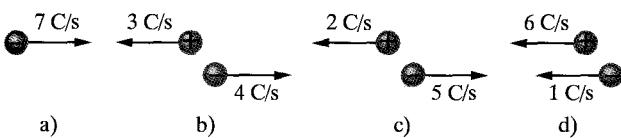
Pytania

1. Na rysunku 27.14 przedstawiono wykresy natężenia prądu I , płynącego przez przewodnik o pewnym przekroju poprzecznym, w czterech różnych przedziałach czasu. Uszereguj te przedziały zgodnie z wartością wypadkowego ładunku, jaki w tym przedziale przepływa przez przekrój poprzeczny przewodnika, zaczynając od największej.



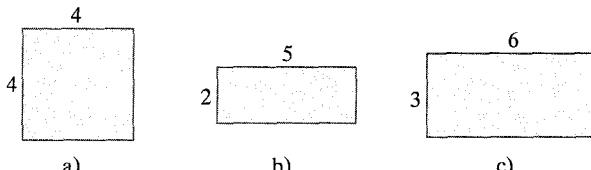
Rys. 27.14. Pytanie 1

2. Na rysunku 27.15 przedstawiono cztery sytuacje, w których dodatnie i ujemne ładunki poruszają się poziomo w pewnym obszarze. Podano wartości ładunków, przepływających w jednostce czasu. Uszereguj te sytuacje, zgodnie z efektywnym natężeniem prądu przepływającego przez te obszary, zaczynając od największego.



Rys. 27.15. Pytanie 2

3. Na rysunku 27.16 przedstawiono przekroje poprzeczne trzech przewodników o jednakowej długości i wykonanych z tego samego materiału. Na rysunku podano także długość każdego boku przekroju w milimetrach. Uszereguj przewodniki zgodnie z ich oporami (dla prądów płynących wzdłuż długości przewodnika, od końca do końca), zaczynając od największego.

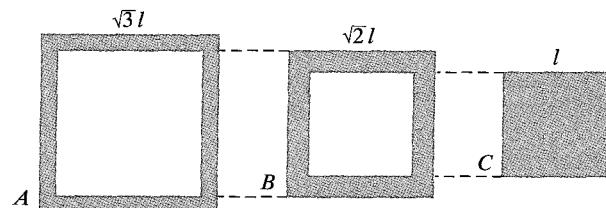


Rys. 27.16. Pytanie 3

4. Czy opór walcowego przewodnika (dla prądu płynącego wzdłuż jego długości, od końca do końca) wzrośnie, zmaleje, czy się nie zmieni, jeśli rozciągniemy przewodnik bez zmiany kształtu przekroju?

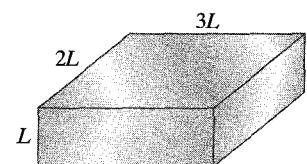
5. Na rysunku 27.17 przedstawiono przekroje poprzeczne i ich wymiary dla trzech długich przewodników tej samej długości i wykonanych z tego samego materiału. Przewodnik B mieści się

dokładnie wewnątrz przewodnika A i przewodnik C mieści się dokładnie wewnątrz przewodnika B . Uszereguj te przewodniki i ich układy $A + B$, $B + C$ i $A + B + C$ zgodnie z ich oporami, od końca do końca, zaczynając od największego.



Rys. 27.17. Pytanie 5

6. Na rysunku 27.18 przedstawiono prostopadłościenny przewodnik o długościach krawędzi L , $2L$ i $3L$. Pewna różnica potencjałów U zostanie przyłożona między pary leżących naprzeciwko ścian przewodnika, jak na rys. 27.7b: lewą i prawą, górną i dolną oraz przednią i tylną. Uszereguj te pary zgodnie z: a) wartością natężenia pola elektrycznego w przewodniku, b) gęstością prądu w przewodniku, c) natężeniem prądu, przepływającego przez przewodnik, d) prędkością unoszenia elektronów w przewodniku, zaczynając od największej wartości.



Rys. 27.18. Pytanie 6

7. W tabeli niżej podano długości trzech miedzianych prętów, ich średnice i różnice potencjałów między ich końcami. Uszereguj pręty zgodnie z wartością: a) natężenia pola elektrycznego, b) gęstości prądu, c) prędkości unoszenia elektronów w prętach, zaczynając od największej.

| Pręt | Długość | Średnica | Różnica potencjałów |
|------|---------|----------|---------------------|
| 1 | L | $3d$ | U |
| 2 | $2L$ | d | $2U$ |
| 3 | $3L$ | $2d$ | $2U$ |

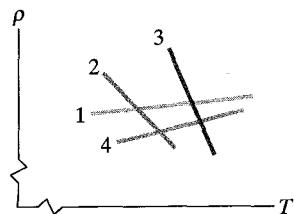
8. W tabeli niżej podano przewodność właściwą i koncentrację elektronów przewodnictwa dla materiałów A , B , C i D . Uszereguj materiały zgodnie ze średnim czasem między zderzeniami elektronów przewodnictwa z atomami materiałów, zaczynając od największego.

| | A | B | C | D |
|----------------------------------|----------|-----------|-----------|----------|
| Przewodność właściwa | σ | 2σ | 2σ | σ |
| Liczba elektronów/m ³ | n | $2n$ | n | $2n$ |

9. Trzy przewodniki o tej samej średnicy podłączone po kolejno między dwa punkty o ustalonej różnicy potencjałów. Oporы właściwe i długości przewodników wynoszą ρ i L (przewodnik A), $1,2\rho$ i $1,2L$ (przewodnik B) oraz $0,9\rho$ i L (przewodnik C). Uszereguj przewodniki w zależności od szybkości rozpraszania w nich energii termicznej, zaczynając od największej.

10. Na rysunku 27.19 przedstawiono opory właściwe czterech materiałów, w zależności od temperatury. a) Które z materiałów są przewodnikami, a które półprzewodnikami? W których materiałach wzrost temperatury prowadzi do: b) wzrostu liczby elek-

tronów przewodnictwa na jednostkę objętości, c) wzrostu liczby zderzeń elektronów przewodnictwa na jednostkę czasu?



Rys. 27.19. Pytanie 10

Zadania

www.wiley.com/college/hrw
Rozwiązań jest dostępne na stronie internetowej podręcznika: <http://www.wiley.com/college/hrw>

[ilovit](http://www.wiley.com/college/hrw)
Rozwiązań jest dostępne w postaci interaktywnej, wykorzystującej oprogramowanie Interactive Learning Ware (na tej samej stronie)

27.2. Natężenie prądu elektrycznego

1. Prąd o natężeniu 5 A płynie przez opornik o oporze 10 Ω przez 4 minuty. Ile: a) kuluów, b) elektronów przechodzi przez dowolny przekrój poprzeczny opornika w tym czasie?

2. Naładowany pas o szerokości 50 cm przesuwa się z prędkością 30 m/s, między źródłem ładunku i sferą. Pas przenosi ładunek na sferę z natężeniem $100 \mu\text{A}$. Oblicz gęstość powierzchniową ładunku na pasie.

3. Izolowana kula przewodząca ma promień 10 cm. Jednym przewodnikiem dopływa do niej prąd o natężeniu $1,000002 \text{ A}$. Innym przewodnikiem odpływa z niej prąd o natężeniu $1,000000 \text{ A}$. Po jakim czasie sfera zwiększy swój potencjał o 1000 V?

27.3. Gęstość prądu elektrycznego

4. Mały, ale mierzalny prąd o natężeniu $1,2 \cdot 10^{-10} \text{ A}$ płynie przez przewodnik miedziany o średnicy 2,5 mm. Przyjmując, że natężenie prądu jest stałe, oblicz: a) gęstość prądu, b) prędkość unoszenia elektronów. (Zob. przykład 27.3).

5. Wiązka zawiera $2 \cdot 10^8$ podwójnie naładowanych jonów dodatnich w centymetrze sześciennym, które poruszają się na północ, z prędkością $1 \cdot 10^5 \text{ m/s}$. a) Jaka jest wartość i kierunek gęstości prądu J ? b) Czy można obliczyć całkowite natężenie prądu I w tej wiązce jonów? Jeśli nie, to jaka dodatkowa informacja jest potrzebna?

6. W tabeli podano fragment Narodowej Normy Elektrycznej z USA, która ustala maksymalne natężenia bezpiecznych prądów

dla izolowanych drutów miedzianych o różnych średnicach. Wykreślnią gęstość bezpiecznego prądu w zależności od średnicy. Który drut ma największą bezpieczną gęstość prądu?

| Kaliber | 4 | 6 | 8 | 10 | 12 | 14 | 16 | 18 |
|-------------------------------|-----|-----|-----|-----|----|----|----|----|
| Średnica, 10^{-3} cala | 204 | 162 | 129 | 102 | 81 | 64 | 51 | 40 |
| Bezpieczne natężenie prądu, A | 70 | 50 | 35 | 25 | 20 | 15 | 6 | 3 |

7. Bezpiecznik w obwodzie elektrycznym jest drutem, który dobiera się tak, aby stopił się i otworzył obwód, jeśli natężenie prądu przekroczy określona wartość. Założmy, że materiał zastosowany w bezpieczniku topi się, gdy gęstość prądu osiąga wartość 440 A/cm^2 . Jaka powinna być średnica walcowego drutu dla bezpiecznika, który ogranicza prąd do natężenia $0,5 \text{ A}$?

8. W pobliżu Ziemi koncentracja protonów w wietrze słonecznym (strumieniu cząstek ze Słońca) wynosi $8,7 \text{ cm}^{-3}$, a ich prędkość 470 km/s. a) Znajdź gęstość prądu tych protonów. b) Jeśli pole magnetyczne Ziemi nie odchylałoby tych protonów, to uderzyłyby w nią. Ile wynosiłoby całkowite natężenie prądu dopływającego do Ziemi?

9. Cząstki α ($q = +2e$) poruszają się w stacjonarnej wiązce ze stałą energią kinetyczną 20 MeV, przenosząc prąd o natężeniu $0,25 \mu\text{A}$. a) Jeśli wiązka jest prostopadła do płaskiej powierzchni, to ile cząstek α uderza w powierzchnię w ciągu 3 s? b) Ile cząstek α znajduje się w wiązce o długości 20 cm w dobowej chwili? c) Jakiej różnicy potencjałów trzeba użyć do przyspieszenia cząstki α ze stanu spoczynku do energii 20 MeV?

10. a) Gęstość prądu wzdłuż walcowego przewodnika o promieniu R zmienia się zgodnie ze wzorem:

$$J = J_0 \left(1 - \frac{r}{R}\right),$$

gdzie r jest odległością od osi walca. Gęstość prądu osiąga maksymalną wartość J_0 na tej osi ($r = 0$) i maleje liniowo do zera na powierzchni ($r = R$). Oblicz natężenie prądu, wyrażając je przez

J_0 i pole przekroju poprzecznego przewodnika $S = \pi R^2$. b) Załóż teraz, że gęstość prądu osiąga maksimum J_0 na powierzchni walca i maleje liniowo do zera na osi: $J = J_0 r/R$. Oblicz natężenie prądu. Dlaczego wynik jest różny od wyniku z punktu (a)?

11. Po jakim czasie elektryny docierają z akumulatora samochodowego do silnika? Przyjmij, że natężenie prądu wynosi 300 A i elektryny poruszają się w przewodniku miedzianym o polu przekroju poprzecznego $0,21 \text{ cm}^2$ i długości 0,85 m. (Zob. przykład 27.3).

27.4. Opór elektryczny i opór elektryczny właściwy

12. W przewodniku chromonikielinowym (czyli ze stopu nikel-chrom-żelazo, używanego powszechnie w elementach grzejnych) o długości 1 m i polu przekroju poprzecznego 1 mm^2 płynie prąd o natężeniu 4 A przy różnicy potencjałów 2 V, przyłożonej do jego końców. Oblicz przewodność właściwą chromonikielininy.

13. Przewodzący drut ma średnicę 1 mm, długość 2 m i opór $50 \text{ m}\Omega$. Jaki jest opór właściwy tego drutu?

14. Stalowa szyna tramwajowa ma przekrój poprzeczny o polu 56 cm^2 . Ile wynosi opór szyny o długości 10 km? Opór właściwy stali wynosi $3 \cdot 10^{-7} \Omega \cdot \text{m}$.

15. Człowiek może zostać porażony nawet przez tak słaby prąd, jak prąd o natężeniu 50 mA, jeśli przepływa on blisko serca. Elektryk, pracujący ze spoonymi rękami ma dobry kontakt z dwoma przewodnikami, trzymanymi po jednym w każdej ręce. Jeśli jego opór wynosi 2000Ω , to ile wynosi śmiertelna różnica potencjałów?

16. Przewodnik o długości 4 m i średnicy 6 mm ma opór $15 \text{ m}\Omega$. Do końców przewodnika przyłożono różnicę potencjałów 23 V. a) Ile wynosi natężenie prądu w przewodniku? b) Ile wynosi gęstość prądu? c) Oblicz opór właściwy materiału przewodnika i zidentyfikuj go, korzystając z tabeli 27.1.

17. Spirale utworzono przez nawinięcie 250 zwojów izolowanego drutu miedzianego o średnicy 1,3 mm, w jednej warstwie, na walcowym rdzeniu o promieniu 12 cm. Ile wynosi opór spirali? Możesz zaniedbać grubość izolacji. (Skorzystaj z tabeli 27.1).

18. a) W jakiej temperaturze opór przewodnika miedzianego będzie dwa razy większy od oporu w temperaturze 20°C ? (Przyjmij temperaturę 20°C jako punkt odniesienia we wzorze (27.17); porównaj odpowiedź z rys. 27.10). b) Czy ta temperatura jest taka sama dla wszystkich przewodników miedzianych, niezależnie od ich kształtu czy rozmiarów?

19. Przewodnik o oporze 6Ω rozcięgnięto za pomocą gwintownika, tak że jego nowa długość jest trzy razy większa niż początkowa. Znajdź opór wydłużonego drutu, przyjmując, że opór właściwy i gęstość materiału się nie zmieniły.

20. Pewien przewód ma opór R . Ile wynosi opór drugiego przewodu, zrobionego z tego samego materiału, o dwukrotnie mniejszej długości i dwukrotnie mniejszej średnicy?

21. Dwa przewodniki z tego samego materiału mają tę samą długość. Przewodnik A jest pełnym drutem o średnicy 1 mm. Przewodnik B jest rurką o średnicy zewnętrznej 2 mm i średnicy wewnętrznej 1 mm. Ile wynosi stosunek oporów R_A/R_B , mierzonych między końcami przewodników?

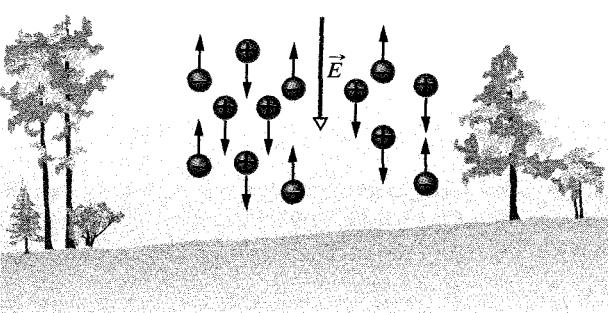
22. Przewód elektryczny składa się ze 125 żyłek z cienkiego drutu, każda o oporze $2,65 \mu\Omega$. Taka sama różnica potencjałów została przyłożona między końcami wszystkich żyłek, powodując przepływ prądu o całkowitym natężeniu 0,75 A. a) Ile wynosi natężenie prądu w każdej żyłce? b) Ile wynosi przyłożona różnica potencjałów? c) Ile wynosi opór przewodu?

23. Gdy między końcami przewodnika o długości 10 m i promieniu 0,3 mm przyłożono różnicę potencjałów 115 V, gęstość prądu wyniosła $1,4 \cdot 10^4 \text{ A/m}^2$. Znajdź opór właściwy przewodnika.

24. Prostopadłościenny klocek ma pole przekroju $3,5 \text{ cm}^2$, długość 15,8 cm i opór 935Ω . Materiał, z którego wykonano klocka, ma $5,33 \cdot 10^{22}$ elektronów przewodnictwa na m^3 . Między przednią i tylną ścianą utrzymywana jest różnica potencjałów 35,8 V. a) Ile wynosi natężenie prądu w klocku? b) Jeśli gęstość prądu jest stała, to jaka jest jej wartość? c) Ile wynosi prędkość unoszenia elektronów przewodnictwa? d) Jaka jest wartość natężenia pola elektrycznego w klocku?

25. W żarówce latarki płynie (podczas jej działania) prąd 0,3 A przy różnicy potencjałów 2,9 V. Jeśli opór włókna żarówki w temperaturze pokojowej (20°C) wynosi $1,1 \Omega$, to jaka jest temperatura włókna świecącej żarówki? Włókno jest wykonane z wolframu.

26. Dolna warstwa atmosfery Ziemi zawiera ujemne i dodatnie jony, wytwarzane przez pierwiastki promieniotwórcze znajdujące się w glebie i promieniowanie kosmiczne. W pewnym obszarze natężenie pola elektrycznego w atmosferze wynosi 120 V/m i jest skierowane pionowo w dół. Pole to powoduje, że pojedynczo



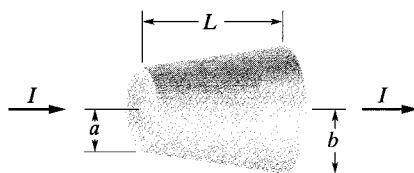
Rys. 27.20. Zadanie 26

naładowane jony dodatnie o koncentracji $620/\text{cm}^3$ przemieszczają się w dół, a pojedynczo naładowane jony ujemne o koncentracji $550/\text{cm}^3$ przemieszczają się w górę (rys. 27.20). Mierzona przewodność właściwa powietrza w tym obszarze wynosi $2,7 \cdot 10^{-14} (\Omega \cdot \text{m})^{-1}$. Oblicz: a) prędkość unoszenia jonów (przy założeniu, że jest taka sama dla jonów dodatnich i ujemnych), b) gęstość prądu.

27. Gdy pręt metalowy jest ogrzewany, zmienia się nie tylko jego opór, ale także długość i pole przekroju poprzecznego. Ze związką $R = \rho L/S$ wynika, że wszystkie trzy czynniki należy wziąć pod uwagę przy pomiarze ρ w różnych temperaturach. a) Jeśli temperatura zmienia się o 1°C , to jakie są w procentach zmiany wielkości R , L i S dla miedzianego przewodnika? b) Współczynnik rozszerzalności liniowej miedzi wynosi $1,7 \cdot 10^{-5} \text{ K}^{-1}$. Jaki można wysnuć stąd wniosek?

28. Jeśli kaliber drutu wzrasta o 6, to jego średnica maleje dwukrotnie; jeśli kaliber drutu wzrasta o 1, to średnica maleje o czynnik $2^{1/6}$ (zob. tabelę w zadaniu 6). Wiedząc o tym i wiedząc, że 300 m drutu miedzianego kalibru 10 ma w przybliżeniu opór 1Ω , oszacuj opór drutu miedzianego kalibru 22 o długości 7,5 m.

29. Opornik ma kształt ściegatego stożka obrotowego (rys. 27.21). Promienie podstaw wynoszą a i b , a wysokość L . Jeśli różnica między a i b jest niewielka, to możemy założyć, że gęstość prądu jest stała w każdym przekroju poprzecznym. a) Oblicz opór tego opornika. b) Wykaż, że wynik redukuje się do $\rho(L/S)$ dla szczególnego przypadku $a = b$.



Rys. 27.21. Zadanie 29

27.6. Prawo Ohma — obraz mikroskopowy

30. Pokaż, że zgodnie z modelem elektronów swobodnych dla przewodnictwa w metalach i fizyką klasyczną, opór właściwy metali powinien być proporcjonalny do \sqrt{T} , gdzie T jest temperaturą bezwzględną. (Zob. wzór 20.31).

27.7. Moc w obwodach elektrycznych

31. W pewnej lampie rentgenowskiej płynie prąd o natężeniu 7 mA, przy różnicy potencjałów 80 kV. Ile wynosi jej moc w watach?

32. Student słuchał ustawnionego na pełną głośność radia o mocy 7 W, zasilanego ze źródła o różnicy potencjałów 9 V od 9.00 wieczorem do 2.00 w nocy. Jaki ładunek przepłynął przez radio?

33. Do ogrzewacza pokojowego, którego opór, gdy jest gorący, wynosi 14Ω , przyłożono różnicę potencjałów 120 V. a) Z jaką mocą energia elektryczna jest zamieniana na energię termiczną? b) Jaki jest koszt działania ogrzewacza w ciągu 5 h, przy cenie 0,3 zł/kWh?

34. W oporniku, przez który płynie prąd o natężeniu 3 A, rozpraszają się energią termiczną z mocą 100 W. Ile wynosi jego opór?

35. Nieznany opornik podłączono do biegunków źródła prądu o różnicy potencjałów 3 V. Energia rozprasza się w nim z szybkością 0,54 W. Ten sam opornik podłączono następnie do biegunków źródła prądu o różnicy potencjałów 1,5 V. Z jaką szybkością rozprasza się teraz energia?

36. Ogrzewacz pokojowy, podłączony do różnicy potencjałów 120 V, wytwarza energię termiczną z mocą 500 W. a) Ile wynosi opór ogrzewacza podczas jego działania? b) Ile elektronów przepływa w jednostce czasu przez dowolny przekrój poprzecznego elementu grzejnego ogrzewacza?

37. Ogrzewacz promiennikowy o mocy 1250 W przystosowano do pracy przy 115 V. a) Ile wynosi natężenie prądu w ogrzewaczu? b) Ile wynosi opór spirali grzejnej? c) Ile energii termicznej wytwarza ogrzewacz w ciągu 1 h?

38. Element grzejny, podłączony do źródła o różnicy potencjałów 75 V, wykonano z drutu chromonikielinowego o polu przekroju poprzecznego $2,6 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2$. Opór właściwy chromonikieliny wynosi $5 \cdot 10^{-7} \Omega \cdot \text{m}$. a) Ile wynosi długość elementu, jeśli wytwarza on energię termiczną z mocą 5000 W? b) Jaka musiałaby być długość elementu, gdyby do wytwarzania energii termicznej z tą mocą użyć różnicy potencjałów 100 V?

39. Chromonikielinowy ogrzewacz wydziela energię termiczną z mocą 500 W, jeśli zastosowana różnica potencjałów wynosi 110 V, a temperatura drutu jest równa 800°C . Jaka byłaby moc wytwarzania energii termicznej, jeśli drut byłby utrzymywany w temperaturze 200°C , przez zanurzenie go w oleju? Zastosowana różnica potencjałów pozostaje bez zmian, a α dla chromonikieliny przy 800°C wynosi $4 \cdot 10^{-4} \text{ K}^{-1}$.

40. Żarówkę o mocy 100 W podłączono do gniazdka sieci elektrycznej 120 V. a) Jaki jest miesięczny koszt używania tej żarówki, jeśli świeci ona ciągle? Cenę energii elektrycznej przyjmij równą 0,3 zł/kWh. b) Ile wynosi opór żarówki? c) Ile wynosi natężenie prądu, płynącego w żarówce? Czy opór żarówki jest inny, gdy się ją wyłączy?

41. Akcelerator liniowy wytwarza impulsowo wiązkę elektronów. W czasie impulsu, trwającego 0,1 μs natężenie prądu wynosi 0,5 A. a) Ile elektronów jest przyspieszanych podczas jednego impulsu? b) Ile wynosi średnie natężenie prądu dla akceleratora, pracującego przy 500 impulsach/s? c) Ile wynosi średnia i maksymalna moc akceleratora, jeśli elektrony są przyspieszane do energii 50 MeV?

42. Walcowy opornik o promieniu 5 mm i długości 2 cm wykonano z materiału o oporze właściwym $3,5 \cdot 10^{-5} \Omega \cdot \text{m}$. Ile wynoszą: a) gęstość prądu, b) różnica potencjałów, gdy w oporniku energia ulega rozproszeniu z mocą 1 W?

43. W przewodniku miedzianym o polu przekroju poprzecznego $2 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2$ i długości 4 m płynie przez cały przekrój stały prąd o natężeniu 2 A. a) Jaka jest wartość natężenia pola elektrycznego w przewodniku? b) Jaka ilość energii elektrycznej zamienia się w energię termiczną w ciągu 30 minut?

Zadania dodatkowe

44. Tajemnica proszku czekoladowego. Jest to ciąg dalszy historii z zadania 48 w rozdziale 24, kontynuowanej w rozdziałach 25 i 26. Proszek czekoladowy przesypywano do silosu rurą o promieniu R ze stałą prędkością v i stałą gęstością ładunku ρ . a) Znajdź wyrażenie na natężenie prądu I , przepływającego przez przekrój poprzeczny rury. b) Oblicz I dla warunków występujących w fabryce: promień rury $R = 5 \text{ cm}$, prędkość $v = 2 \text{ m/s}$ i gęstość ładunku $\rho = 1,1 \cdot 10^{-3} \text{ C/m}^3$.

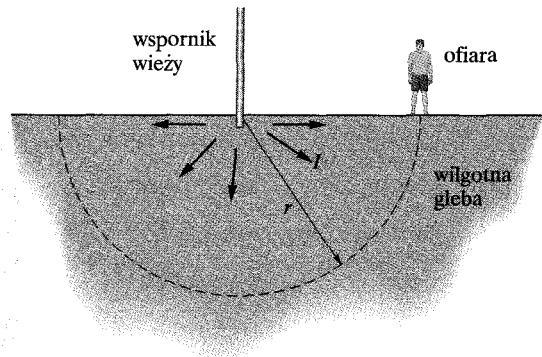
Gdyby proszek poruszał się w obszarze o różnicy potencjałów U , to energia pola mogłaby zostać przekazana iskrze z mocą $P = IU$. c) Czy występuje taki przekaz w rurze, w związku z radialną różnicą potencjałów, omawianą w zadaniu 57 z rozdziału 25?

Gdy proszek dotarł rurą do silosu, potencjał elektryczny proszku się zmienił. Wielkość tej zmiany była równa przynajmniej radialnej różnicy potencjałów w rurze (zgodnie z obliczeniami w zadaniu 57 w rozdziale 25). d) Przyjmując te wartości różnicy potencjałów i natężenia prądu, które zostały znalezione wyżej w punkcie b), znajdź moc, z jaką energia mogłaby być przekazywana od proszku do iskry, gdy proszek opuszcza rurę. e) Ile energii zostałoby przekazane iskrze, jeśli iskra pojawiłaby się przy wylocie rury i trwała 0,2 s (co wydaje się rozsądnym założeniem)?

Przypomnij sobie z zadania 48 w rozdziale 24, że do wywołania eksplozji potrzebny jest przekaz energii minimum 150 mJ. f) Gdzie najprawdopodobniej wystąpił wybuch proszku: w chmurze proszku przy rozładowaniu (co rozważaliśmy w zadaniu 48 w rozdziale 26), w rurze, czy przy wylocie rury w silosie?

45. Atak serca czy śmiertelne porażenie prądem elektrycznym? Pewnego ranka mężczyznę, wracającego boso z pikniku, siedząc po

wilgotnej ziemi w pobliżu wieży, podtrzymującej elektryczne linie przesyłowe i nagle upadł. Jego krewni, siedzący przy stole na pikniku, zauważyli upadek i dotarłszy do niego kilka sekund później, stwierdzili u niego migotanie komór serca. Mężczyzna zmarł, zanim ekipa pogotowia dotarła do niego z aparaturą defibrylacyjną. Rodzina wyczytała później proces zakładowi energetycznemu, twierdząc, że ofiara uległa śmiertelnemu porażeniu prądem elektrycznym wskutek działania przypadkowego prądu upływowego z wieży. Wyobraź sobie, że zostałeś wynajęty przez sąd, jako biegły do zbadania przyczyny śmierci — czy był to atak serca, czy porażenie elektryczne?



Rys. 27.22. Zadanie 45

Badanie dokumentów zakładu energetycznego wykazało, że tego ranka rzeczywiście miał miejsce *upływ prądu z wieży* — przez około 1 s prąd o natężeniu I przepływał ze wspornika do ziemi. Założmy, że prąd rozprzynał się w ziemi jednorodnie (półkuliste) (rys. 27.22). Niech ρ będzie oporem właściwym gruntu, a r odległością od wspornika. Znajdź wyrażenia na: a) gęstość prądu, b) wartość natężenia pola elektrycznego w zależności od r . Dolny koniec wspornika miał kształt półkuli o promieniu b . c) Z wyrażenia na wartość natężenia pola elektrycznego znajdź wyrażenie na różnicę potencjałów U między dolnym końcem wspornika i punktem, znajdującym się w odległości r . Badania wykazały, że $I = 100 \text{ A}$, $\rho = 100 \Omega \cdot \text{m}$ i $b = 1 \text{ cm}$ oraz że ofiara znajdowała się w odległości $r = 10 \text{ m}$. Ile wynosiła: d) gęstość prądu, e) wartość natężenia pola elektrycznego, f) różnica potencjałów U w miejscu znajdowania się ofiary? (Dalszy ciąg tej historii opowie my w zadaniu 56 w rozdziale 28).

28 Obwody elektryczne

W rzekach Ameryki Południowej żyje węgorz elektryczny (*Electrophorus*), który poluje na ryby, zabijając je impulsami prądu. Węgorz ten wytwarza różnicę potencjałów o wartości kilkuset woltów wzdłuż swej długości; natężenie prądu w otaczającej go wodzie, w obszarze od głowy węgorza do ogona, może sięgać jednego ampera. Jeśli, pływając, otarłbyś się o tego węgorza, to (po przyjściu do siebie po bardzo bolesnym wstrząsie) mógłbyś zadać sobie pytanie:

Jak to stworzenie potrafi wytworzyć tak duży prąd, nie porażając siebie?

Odpowiedź znajdziesz w tym rozdziale.



28.1. „Pompowanie” ładunków

Jeśli chcemy spowodować przepływ nośników ładunku przez opornik, to musimy wytworzyć różnicę potencjałów między końcami opornika. Jednym ze sposobów jest podłączenie każdego z końców opornika do okładek naładowanego kondensatora. Kłopot przy takim rozwiążaniu polega na tym, że przepływ ładunku powoduje rozładowanie kondensatora i doprowadza szybko okładki do tego samego potencjału. Gdy do tego dochodzi, znika pole elektryczne w oporniku i ustaje przepływ ładunku.

Aby wytworzyć stały przepływ ładunku, potrzebujemy „pompy ładunku” — urządzenia, które wykonując pracę nad nośnikami ładunku, utrzymuje różnicę potencjałów między parą swych zacisków. Urządzenie takie nazywamy **źródłem siły elektromotorycznej** (**źródłem SEM**); powiedzenie, że źródło dostarcza **siły elektromotorycznej** \mathcal{E} , oznacza, że wykonuje ono pracę nad nośnikami ładunku. Określenie **siła elektromotoryczna**, czy w skrócie **SEM**, wprowadzono, zanim uczeni dokładnie zrozumieli działanie źródła siły elektromotorycznej.

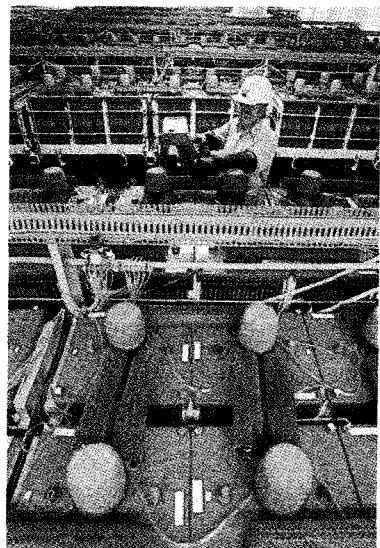
W rozdziale 27 omawialiśmy ruch nośników ładunku wzdłuż obwodu pod wpływem pola elektrycznego wytworzzonego w obwodzie — pole wytwarza siły, które wprawiają w ruch nośniki ładunku. W tym rozdziale zajmiemy się innym podejściem: omówimy ruch nośników ładunku przy zastosowaniu pojęcia energii — źródło SEM wykonując pracę, dostarcza ładunkom energii.

Powszechnie stosowanym źródłem SEM jest *ogniwo elektryczne* (*bateria elektryczna*), używane do zasilania wielu różnych urządzeń, od zegarków ręcznych do łodzi podwodnych. Źródłem SEM, które najbardziej wpływa na nasze życie codzienne, jest *prądnica elektryczna*, która za pośrednictwem połączeń elektrycznych z elektrownią wytwarza różnicę potencjałów w naszych domach czy miejscach pracy. Źródła SEM zwane *ogniwami słonecznymi*, znane od dawna w postaci paneli (podobnych do skrzydeł) na statkach kosmicznych pojawiają się także w naszym otoczeniu. Mniej znanymi źródłami SEM są *ogniwa paliwowe*, które zasilają statki kosmiczne, i *termoogniwa*, które dostarczają pokładowej energii elektrycznej statkom kosmicznym, stacjom badawczym na Antarktydzie i gdzie indziej. Źródło SEM nie musi być przyrządem — układy biologiczne, od węgorzy elektrycznych i istot ludzkich po rośliny, mają fizjologiczne źródła SEM.

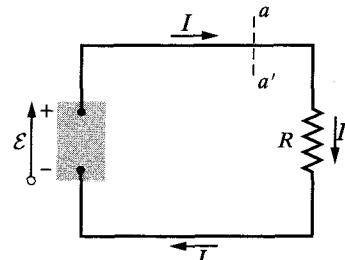
Chociaż wymienione źródła SEM różnią się zasadą działania, to wszystkie spełniają tę samą podstawową funkcję — wykonują pracę nad nośnikami ładunku i wobec tego utrzymują różnicę potencjałów między swymi zaciskami (biegunami).

28.2. Praca, energia i SEM

Na rysunku 28.1 przedstawiono źródło SEM (np. ognivo), jako część prostego obwodu, zawierającego dodatkowo pojedynczy opornik o oporze R (symbolem oporu i opornika jest VVV). Jeden zacisk źródła SEM (zwany biegunem dodatnim i oznaczany zwykle przez +) ma większy potencjał niż drugi zacisk (zwany biegunem ujemnym i oznaczanym przez -). SEM źródła możemy przedstawić,



Największa na świecie bateria, znajdująca się w Chino w Kalifornii, może dostarczyć mocy 10 MW. Bateria tej używa się podczas szczytu energetycznego w obwodzie energetycznym, obsługiwany przez zakłady Southern California Edison. Bateria wykonuje pracę nad nośnikami ładunku, więc jest źródłem SEM.



Rys. 28.1. Prosty obwód elektryczny, w którym źródło SEM \mathcal{E} wykonuje pracę nad nośnikami ładunku i utrzymuje stały prąd o natężeniu I w oporniku o oporze R .

stosując strzałkę skierowaną od bieguna ujemnego do bieguna dodatniego (jak na rysunku 28.1). Małe kółko na początku strzałki odróżnia ją od strzałek, wskazujących kierunek przepływu prądu.

Gdy źródło SEM nie jest włączone w obwód, jego wewnętrzne procesy chemiczne nie powodują w nim żadnego wypadkowego przepływu nośników ładunku. Gdy jednak jest włączone w obwód, jak na rysunku 28.1, wewnętrzne procesy chemiczne powodują w nim wypadkowy przepływ dodatnich nośników ładunku, od ujemnego do dodatniego bieguna, w kierunku strzałki SEM. Ten przepływ jest częścią prądu, powstającego wzdłuż obwodu i płynącego w tym samym kierunku (zgodnie z ruchem wskazówek zegara na rysunku 28.1).

Wewnątrz źródła SEM dodatnie nośniki ładunku przemieszczają się z obszaru małego potencjału i stąd mają elektrycznej energii potencjalnej (przy biegunie ujemnym) do obszaru o większym potencjale elektrycznym i większej elektrycznej energii potencjalnej (przy biegunie dodatnim). Kierunek tego ruchu jest dokładnie przeciwny do kierunku, w jakim natężenie pola elektrycznego między biegunami (skierowane od bieguna dodatniego do bieguna ujemnego) powodowałoby przepływ nośników ładunku.

W źródle SEM musi więc istnieć pewne źródło energii, wykonujące pracę nad ładunkami, przez wymuszenie ich odpowiedniego ruchu. Źródło energii może być chemiczne, jak w baterii czy ogniwie paliwowym. Może wykorzystywać siły mechaniczne, jak w prądnicy elektrycznej. Różnice temperatury mogą także dostarczyć energii, jak w termoogniwie. Może też jej dostarczyć Słońce, jak w ogniwie słonecznym.

Przeanalizujmy obwód z rysunku 28.1, z punktu widzenia pracy i przekazu energii. W dowolnym przedziale czasu dt ładunek dq przechodzi przez dowolny przekrój poprzeczny, np. aa' tego obwodu. Ta sama ilość ładunku musi wejść do źródła SEM przy biegunie o mniejszym potencjale i wyjść przy biegunie o większym potencjale. Źródło musi wykonać pracę dW nad ładunkiem, aby zmusić go do takiego ruchu. Siłę elektromotoryczną źródła SEM definiujemy, korzystając z tej pracy:

$$\mathcal{E} = \frac{dW}{dq} \quad (\text{definicja SEM}). \quad (28.1)$$

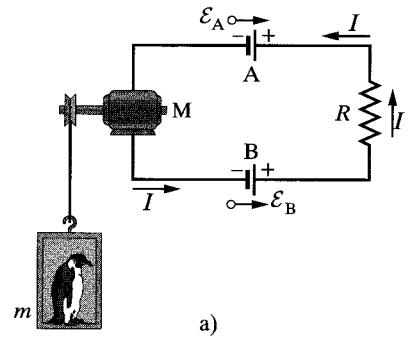
Można to wyrazić następująco: siła elektromotoryczna źródła SEM jest pracą, przypadającą na jednostkę ładunku, jaką wykonuje źródło, przenosząc ładunek z bieguna o mniejszym potencjale, do bieguna o większym potencjale. Jednostką siły elektromotorycznej w układzie SI jest dżul na kulomb; w rozdziale 25 jednostkę tę zdefiniowaliśmy jako *wolt* (V).

Doskonałym źródłem SEM jest źródło, które nie wykazuje żadnego oporu wewnętrznego podczas ruchu ładunku przez ogniwo, od bieguna do bieguna. Różnica potencjałów między biegunami doskonałego źródła SEM jest równa SEM źródła, na przykład doskonała bateria o SEM 12 V ma zawsze między biegunami różnicę potencjałów 12 V.

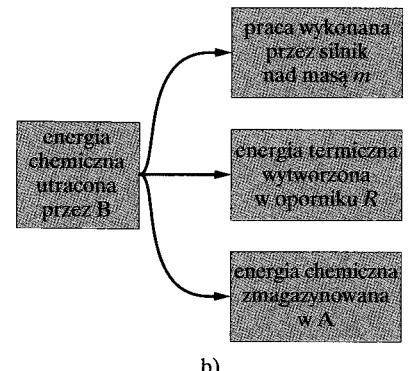
Rzeczywiste źródło SEM, takie jak dowolna rzeczywista bateria, wykazuje wewnętrzny opór podczas ruchu ładunku przez ogniwo. Gdy rzeczywiste źródło

SEM nie jest włączone w obwód, a zatem nie płynie przez nie prąd, wtedy różnica potencjałów między biegunami baterii jest równa jej SEM. Gdy jednak przez źródło płynie prąd, różnica potencjałów między jej biegunami różni się od jej SEM. Takie rzeczywiste baterie omówimy w paragrafie 28.4.

Jeśli źródło SEM jest włączone w obwód, to przekazuje ono energię przechodzącym przez nie nośnikom ładunku. Ta energia może zostać potem przekazana przez nośniki ładunku innym elementom obwodu, na przykład może wywołać świecenie żarówki. Na rysunku 28.2a przedstawiono obwód, zawierający dwie doskonałe odnawialne baterie (*akumulatory*) A i B, opornik o oporze R i silnik elektryczny M, który może podnieść jakieś ciało, korzystając z energii, jaką otrzymuje od nośników ładunku w obwodzie. Zauważ, że baterie są połączone tak, że dają do wysyłania ładunków wzdłuż obwodu w przeciwnych kierunkach. Rzeczywisty kierunek prądu w obwodzie jest określony przez baterię o większej SEM, którą jest bateria B, tak że energia chemiczna w baterii B maleje, gdy energia jest przekazywana przechodzącym przez nią nośnikom ładunku. Jednak energia chemiczna w baterii A wzrasta, ponieważ prąd jest skierowany od dodatniego bieguna do ujemnego bieguna. Dlatego też bateria B ładuje baterię A. Bateria B dostarcza także energii silnikowi M i energii ulegającej rozproszeniu (zamianie na energię termiczną) w oporniku o oporze R . Na rysunku 28.2b przedstawiono wszystkie trzy procesy przekazywania energii z baterii B; każdy z tych procesów obniża energię chemiczną tej baterii.



a)



b)

Rys. 28.2. a) W obwodzie $\mathcal{E}_B > \mathcal{E}_A$, a więc kierunek prądu jest wyznaczony przez źródło B. b) Przemiany energii w obwodzie przy założeniu, że w silniku nie wydziela się energię termiczną

28.3. Obliczanie natężenia prądu w obwodzie o jednym oczku

Omówimy teraz dwa równoważne sposoby obliczania natężenia prądu w prostym obwodzie *o jednym oczku* z rysunku 28.3; pierwsza metoda oparta jest na rozważeniu zasady zachowania energii, a druga na pojęciu potencjału. Obwód składa się z doskonałej baterii B o SEM \mathcal{E} , opornika o oporze R i dwóch łączących je przewodów. (Jeśli nie powiedziano inaczej, zakładamy, że przewody w obwodach mają znikomo mały opór. Ich funkcją jest więc tylko zapewnienie dróg, wzdłuż których mogą się poruszać nośniki ładunku).

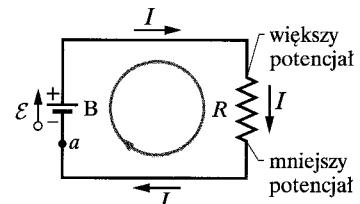
Metoda energetyczna

Zgodnie ze wzorem (27.22) ($P = I^2 R$), w przedziale czasu dt w oporniku z rysunku 28.3 energia $I^2 R$ zamienia się na energię termiczną. (Zakładamy, że przewody mają znikomo mały opór, a więc nie występuje w nich rozpraszanie energii). W tym samym czasie ładunek o wartości $dq = Idt$ przepływie przez baterię B i praca, wykonana przez baterię nad tym ładunkiem wynosi zgodnie ze wzorem (28.1):

$$dW = \mathcal{E} dq = \mathcal{E} Idt.$$

Z zasady zachowania energii wynika, że praca wykonana przez (doskonałą) baterię musi być równa energii termicznej wytworzonej w oporniku:

$$\mathcal{E} Idt = I^2 R dt.$$



Rys. 28.3. Obwód o jednym oczku, w którym opornik o oporze R połączony jest ze źródłem B o SEM równej \mathcal{E} . Prąd ma takie samo natężenie I wzdłuż całego obwodu

Otrzymujemy stąd:

$$\mathcal{E} = IR.$$

SEM \mathcal{E} jest energią, przypadającą na jednostkę ładunku, przekazaną przez baterię poruszającym się ładunkom. Wielkość IR jest energią przypadającą na jednostkę ładunku, przekazaną przez poruszające się ładunki na rzecz energii wewnętrznej w oporniku. Wzór ten oznacza więc, że energia na jednostkę ładunku przekazana poruszającym się ładunkom jest równa energii na jednostkę ładunku, przekazanej przez te ładunki. Wyznaczając I , otrzymujemy:

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R}. \quad (28.2)$$

Analiza potencjałów

Założymy, że wychodząc z jakiegoś punktu obwodu z rysunku 28.3 przesuwamy się w myśl wzdłuż obwodu w dowolnym kierunku, dodając algebraicznie napotykane różnice potencjałów. Gdy powrócimy do punktu wyjściowego, musimy powrócić także do wyjściowego potencjału. Sformułujemy najpierw ten wniosek w postaci prawa, które jest słuszne nie tylko dla obwodów o jednym oczku, jak na rysunku 28.3, ale także dla dowolnego pełnego oczka w obwodzie z wieloma oczkami, jakie będziemy omawiać w paragrafie 28.6:

► **Drugie prawo Kirchhoffa:** Algebraiczna suma zmian potencjału napotykanych przy pełnym obejściu dowolnego oczka musi być równa zeru.

Nazwa tego prawa pochodzi od nazwiska niemieckiego fizyka Gustava Roberta Kirchhoffa. Prawo to jest równoważne stwierdzeniu, że każdy punkt na zboczu góry ma tylko jedną wartość wysokości nad poziomem morza. Jeśli wyjdziemy z jakiegoś punktu i powrócimy do niego po obejściu góry, to algebraiczna suma zmian pokonywanych wysokości musi być równa zeru.

Zacznijmy na rys. 28.3 od punktu a o potencjale V_a i przejdźmy w myśl wzdłuż obwodu, zgodnie z ruchem wskazówek zegara, zwracając uwagę na napotykane zmiany potencjału. Nasz punkt startowy odpowiada malemu potencjałowi ujemnego bieguna baterii. Bateria jest doskonała, a więc różnica potencjałów między jej biegunami wynosi \mathcal{E} . Gdy przejdziemy przez baterię do bieguna dodatniego (o większym potencjale), wówczas zmiana potencjału wyniesie $+\mathcal{E}$.

Idąc wzdłuż przewodu do górnego końca opornika, nie napotykamy żadnej zmiany potencjału, ponieważ przewód ma znikomo mały opór; ma on zatem ten sam potencjał, co dodatni biegun baterii i górny koniec opornika. Gdy przejdziemy przez opornik, potencjał ulegnie zmianie zgodnie ze wzorem (27.8) (który możemy zapisać w postaci $U = IR$). Co więcej, potencjał musi zmaleć, ponieważ poruszamy się od końca opornika o większym potencjale. Zmiana potencjału wynosi więc $-IR$.

Powracamy do punktu a , przesuwając się wzdłuż dolnego przewodu. Przewód ten ma znikomo mały opór, a więc nie napotykamy żadnej zmiany potencjału.

Po dotarciu do punktu a napotykamy znów potencjał V_a . Okrążyliśmy pełne oczko, a więc początkowy potencjał, po uwzględnieniu zmian potencjału wzdłuż drogi, musi być równy potencjałowi końcowemu, czyli:

$$V_a + \mathcal{E} - IR = V_a.$$

Wartość V_a redukuje się w tym równaniu i otrzymujemy:

$$\mathcal{E} - IR = 0.$$

Wyznaczając z tego wzoru I , otrzymujemy ten sam wynik $I = \mathcal{E}/R$, jak przy zastosowaniu metody energetycznej (wzór (28.2)).

Jeśli zastosujemy drugie prawo Kirchhoffa do pełnego przejścia wzdłuż oczka w kierunku przeciwnym do ruchu wskazówek zegara, to otrzymamy:

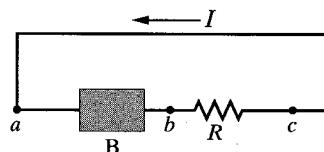
$$-\mathcal{E} + IR = 0$$

i ponownie znajdujemy, że $I = \mathcal{E}/R$. Drugie prawo Kirchhoffa możemy stosować przy obchodzeniu oczka w dowolnym kierunku.

W celu przygotowania się do obwodów bardziej złożonych niż na rysunku 28.3, wypiszmy dwie reguły znajdowania różnic potencjałów napotykanych przy obchodzeniu obwodu:

- **Reguła oporu:** Gdy przemieszczamy się (w myśl) wzdłuż opornika w kierunku przepływu prądu, zmiana potencjału wynosi $-IR$, przy ruchu w przeciwną stronę wynosi $+IR$.
- **Reguła SEM:** W doskonałym źródle SEM zmiana potencjału wynosi $+\mathcal{E}$, gdy poruszamy się (w myśl) zgodnie z kierunkiem strzałki SEM, a przy ruchu w przeciwną stronę wynosi $-\mathcal{E}$.

SPRAWDZIAN 1: Na rysunku zilustrowano przepływ prądu o natężeniu I w obwodzie o jednym oczku, ze źródłem B i opornikiem o oporze R (oraz przewodem o znikomo małym oporze). a) Czy strzałkę SEM w baterii B trzeba narysować w lewo, czy w prawo? Uszereguj wartości: b) natężenia prądu, c) potencjału elektrycznego, d) elektrycznej energii potencjalnej nośników ładunku, w punktach a , b i c zaczynając od największych.

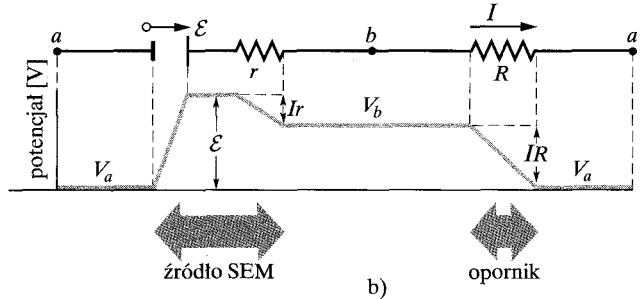
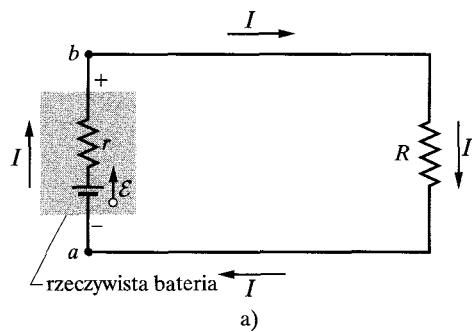


28.4. Inne obwody o jednym oczku

W tym paragrafie uzupełnimy prosty obwód z rysunku 28.3 na dwa sposoby.

Opór wewnętrzny

Na rysunku 28.4a przedstawiono rzeczywistą baterię o oporze wewnętrznym r , połączoną przewodnikami z opornikiem elektrycznym o oporze R . Wewnętrzny opór baterii jest oporem elektrycznym jej elementów i nieodłączną cechą baterii. Na rysunku 28.4a narysowaliśmy jednak baterię tak, jakby można było podzielić ją na doskonale źródło o SEM równej \mathcal{E} i na opornik o oporze r . Kolejność, w której te symbole są narysowane, nie odgrywa roli.



Rys. 28.4. a) Obwód o jednym oczku, zawierający rzeczywiste źródło o oporze wewnętrznym r i SEM równej \mathcal{E} . b) Ten sam obwód przedstawiony jako linia. Na wykresie przedstawiono potencjały, jakie napotykamy obchodząc obwód w kierunku zgodnym z ruchem wskazówek zegara i rozpoczynając od punktu a . Potencjałowi V_a przypisaliśmy umownie wartość zero, a pozostałe potencjały w obwodzie zostały narysowane względem V_a

Jeśli zastosujemy drugie prawo Kirchhoffa obchodząc obwód w kierunku ruchu wskazówek zegara, rozpoczynając od punktu a , to otrzymamy zmiany potencjału:

$$\mathcal{E} - Ir - IR = 0, \quad (28.3)$$

skąd dla natężenia prądu otrzymujemy:

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R + r}. \quad (28.4)$$

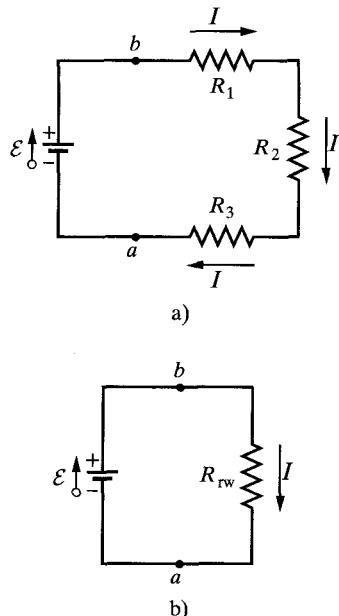
Zauważ, że wzór ten redukuje się do wzoru (28.2) dla źródła doskonałego, gdy $r = 0$.

Na rysunku 28.4b przedstawiono graficznie zmiany potencjału elektrycznego wzdłuż obwodu. (Aby lepiej powiązać rysunek 28.4b z zamkniętym obwodem z rysunku 28.4a, możemy w myśl nawinięć wykres na walec tak, aby punkt a z lewej strony pokrył się z punktem a z prawej strony). Zwróć uwagę, że ruch wzdłuż obwodu przypomina spacer po górze i powrót do punktu wyjściowego, czyli zarazem do początkowej wysokości.

W tej książce, jeśli tego wyraźnie nie podkreślimy, np. przez zaznaczenie oporu wewnętrznego na schemacie obwodu, będziemy zawsze przyjmować, że źródło jest doskonałe. W rzeczywistości źródła są zawsze niedoskonałe i mają opór wewnętrzny.

Oporniki połączone szeregowo

Na rysunku 28.5a przedstawiono trzy oporniki połączone szeregowo i podłączone do doskonałego źródła o SEM \mathcal{E} . Określenie połączenia ma mało wspólnego z tym, jak narysowane są opory. W rzeczywistości „szeregowo” oznacza, że oporniki ustawione jeden za drugim są połączone przewodnikami, a różnica potencjałów U jest przyłożona do dwóch końców szeregu. Na rysunku 28.5a połączono opory ustawione jeden za drugim między punktami a i b , a różnica potencjałów między punktami a i b jest utrzymywana przez źródło. Różnice potencjałów, jakie istnieją na oporach w szeregu, wytwarzają w nich prądy o jednakowym natężeniu I .



Rys. 28.5. a) Trzy oporniki połączone szeregowo między punktami a i b . b) Równoważny obwód z trzema opornikami zastąpionymi przez opornik o równoważnym oporze R_{rw}

► Jeśli różnica potencjałów U jest przyłożona do oporników połączonych szeregowo, to przez oporniki płyną prądy o jednakowym natężeniu I . Suma różnic potencjałów na opornikach jest równa przyłożonej różnicy potencjałów.

Zauważ, że ładunek w opornikach połączonych szeregowo może poruszać się tylko jedną drogą. Jeśli są dodatkowe drogi, tak że prądy w różnych opornikach mają różne natężenia, to oporniki nie są połączone szeregowo.

► Oporniki połączone szeregowo można zastąpić równoważnym opornikiem R_{rw} , w którym płynie prąd o takim samym natężeniu I przy takiej samej całkowitej różnicy potencjałów U , jak na rozważanych opornikach.

Na rysunku 28.5b przedstawiono obwód równoważny, w którym opornik R_{rw} zastępuje trzy oporniki z rysunku 28.5a.

Aby wyprowadzić wyrażenie na R_{rw} z rys. 28.5b, zastosujemy drugie prawo Kirchhoffa do obydwu obwodów. Na rysunku 28.5a, zaczynając od punktu a i przechodząc zgodnie z ruchem wskazówek zegara wokół obwodu, otrzymujemy:

$$\mathcal{E} - IR_1 - IR_2 - IR_3 = 0,$$

czyli

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R_1 + R_2 + R_3}. \quad (28.5)$$

Na rysunku 28.5b w obwodzie z trzema opornikami zastąpionymi jednym równoważnym opornikiem R_{rw} mamy:

$$\mathcal{E} - IR_{rw} = 0,$$

czyli

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R_{rw}}. \quad (28.6)$$

Porównanie wzorów (28.5) i (28.6) prowadzi do wzoru:

$$R_{rw} = R_1 + R_2 + R_3.$$

Rozszerzenie na n oporów jest proste i ma postać:

$$R_{rw} = \sum_{j=1}^n R_j \quad (n \text{ oporników połączonych szeregowo}). \quad (28.7)$$

Zauważ, że gdy oporniki są połączone szeregowo, równoważny opór jest większy od oporu dowolnego opornika w szeregu.

SPRAWDZIAN 2: Na rysunku 28.5a mamy $R_1 > R_2 > R_3$. Uszereguj trzy oporniki według wartości: a) natężenia płynącego w nich prądu, b) różnic potencjałów na nich, zaczynając od największej wartości.

28.5. Różnice potencjałów

Często chcemy znaleźć różnicę potencjałów między dwoma punktami obwodu. Ile wynosi różnica potencjałów, np. między punktami b i a na rys. 28.4a? Aby ją obliczyć, przeanalizujmy obwód zgodnie z ruchem wskazówek zegara od punktu b do punktu a , przechodząc przez opornik o oporze R . Jeśli V_a i V_b są potencjałami odpowiednio w punktach a i b , to mamy:

$$V_b - IR = V_a,$$

ponieważ (zgodnie z regułą oporu) obserwujemy zmniejszanie się potencjału przy przechodzeniu przez opór w kierunku przepływu prądu. Wynik ten możemy zapisać w postaci:

$$V_b - V_a = +IR, \quad (28.8)$$

czyli punkt b ma większy potencjał niż punkt a . Łącząc wzór (28.8) ze wzorem (28.4), mamy:

$$V_b - V_a = \mathcal{E} \frac{R}{R+r}, \quad (28.9)$$

gdzie r jest oporem wewnętrznym źródła SEM.

► Aby znaleźć różnicę potencjałów między dwoma punktami obwodu, należy rozpocząć analizę w jednym punkcie, przejść wzduż obwodu do drugiego, dowolną drogą, i dodać algebraicznie napotkane zmiany potencjału.

Obliczmy ponownie $V_b - V_a$, wychodząc z punktu b , lecz przechodząc teraz do punktu a przez źródło (tzn. poruszając się w kierunku przeciwnym do kierunku ruchu wskazówek zegara). Otrzymujemy:

$$V_b + Ir - \mathcal{E} = V_a,$$

czyli

$$V_b - V_a = \mathcal{E} - Ir. \quad (28.10)$$

Podstawiając do tego wzoru I z równania (28.4), otrzymujemy ponownie wzór (28.9).

Wielkość $V_b - V_a$ na rysunku 28.4 jest różnicą potencjałów wytwarzanych przez źródło na jego zaciskach. Jak już zauważaliśmy wcześniej, różnica $V_b - V_a$ jest równa SEM \mathcal{E} źródła tylko wtedy, gdy źródło nie ma wewnętrznego oporu ($r = 0$ we wzorze (28.9)) lub jeśli obwód jest otwarty ($I = 0$ we wzorze (28.10)).

Założymy, że na rysunku 28.4 $\mathcal{E} = 12 \text{ V}$, $R = 10 \Omega$ i $r = 2 \Omega$. Ze wzoru (28.9) wynika, że różnica potencjałów na biegunkach źródła wynosi:

$$V_b - V_a = (12 \text{ V}) \frac{10 \Omega}{10 \Omega + 2 \Omega} = 10 \text{ V}.$$

„Pompując” przez siebie ładunek, źródło wykonuje pracę, której wartość przypadająca na jednostkę ładunku wynosi $\mathcal{E} = 12 \text{ J/C}$, czyli 12 V. Jednak ze względu na swój opór wewnętrzny wytwarza ono różnicę potencjałów między biegunkami równą tylko 10 V, czyli 10 J/C.

Moc, potencjał i SEM

Jeśli bateria lub inne źródło SEM wykonuje pracę nad nośnikami ładunku, wytwarzając prąd o natężeniu I , to przekazuje nośnikom ładunku energię ze źródła

energii (np. źródła chemicznego w baterii). Rzeczywiste źródło SEM ma opór wewnętrzny r , a więc energia jest w nim także zamieniana na wewnętrzną energię termiczną, czyli ulega omówionemu w paragrafie 27.7 rozproszeniu na oporze wewnętrznym. Postarajmy się połączyć te zmiany energii.

Wypadkowa szybkość P procesu przekazywania energii ze źródła SEM nośnikom ładunku (moc) jest dana wzorem (27.21):

$$P = IU, \quad (28.11)$$

gdzie U jest różnicą potencjałów między biegunami źródła SEM. Ze wzoru (28.10) możemy podstawić $U = \mathcal{E} - Ir$ do wzoru (28.11), otrzymując

$$P = I(\mathcal{E} - Ir) = I\mathcal{E} - I^2r. \quad (28.12)$$

Widzimy, że człon I^2r we wzorze (28.12) jest szybkością zamiany energii na energię termiczną w źródle SEM:

$$P_r = I^2r \quad (\text{moc rozproszona w źródle}). \quad (28.13)$$

Człon $I\mathcal{E}$ we wzorze (28.12) jest więc mocą P_{SEM} przekazu energii przez źródło zarówno nośnikom ładunku, jak i na rzecz wewnętrznej energii termicznej, czyli:

$$P_{\text{SEM}} = I\mathcal{E} \quad (\text{moc źródła SEM}). \quad (28.14)$$

Jeśli źródło jest *ładowane* przez przepuszczenie przez nie prądu „w przeciwną stronę”, to następuje przekaz energii *od* nośników ładunku *do* źródła, czyli zamiana energii zarówno na energię chemiczną źródła, jak i na energię termiczną w oporze wewnętrznym r . Szybkość zamiany na energię chemiczną jest określona wzorem (28.14), szybkość rozpraszania wzorem (28.13), a szybkość dostarczania energii przez ładunki wzorem (28.11).

Przykład 28.1

W obwodzie na rysunku 28.6a SEM i opory mają następujące wartości:

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_1 &= 4,4 \text{ V}, & \mathcal{E}_2 &= 2,1 \text{ V}, \\ r_1 &= 2,3 \Omega, & r_2 &= 1,8 \Omega, & R &= 5,5 \Omega. \end{aligned}$$

a) Ile wynosi natężenie prądu I w obwodzie?

ROZWIĄZANIE:

Wyrażenie na natężenie prądu I w obwodzie o jednym oczku można otrzymać, korzystając z drugiego prawa Kirchhoffa. Chociaż znajomość kierunku prądu nie jest konieczna, możemy go łatwo określić ze znajomości SEM dwóch źródeł. Ponieważ \mathcal{E}_1 jest większa od \mathcal{E}_2 , to źródło 1 wyznacza kierunek prądu i kierunek ten jest zgodny z kierunkiem ruchu wskazówek zegara. Jeśli zastosujemy więc drugie prawo Kirchhoffa, przechodząc w kierunku przeciwnym do ruchu wskazówek zegara, czyli przeciwnym do kierunku przepływu prądu, i rozpoczynając w punkcie a , to otrzymamy:

$$-\mathcal{E}_1 + Ir_1 + IR + Ir_2 + \mathcal{E}_2 = 0.$$

Latwo sprawdzić, że wzór ten otrzymuje się także wtedy, gdy drugie prawo Kirchhoffa zastosujemy w kierunku zgodnym z ruchem wskazówek zegara lub gdy rozpoczniemy w punkcie innym niż a . Warto porównać ten wzór, człon po członie, z rysunkiem 28.6b, przedstawiającym graficznie zmiany potencjału (przy potencjale w punkcie a przyjętym umownie za zero).

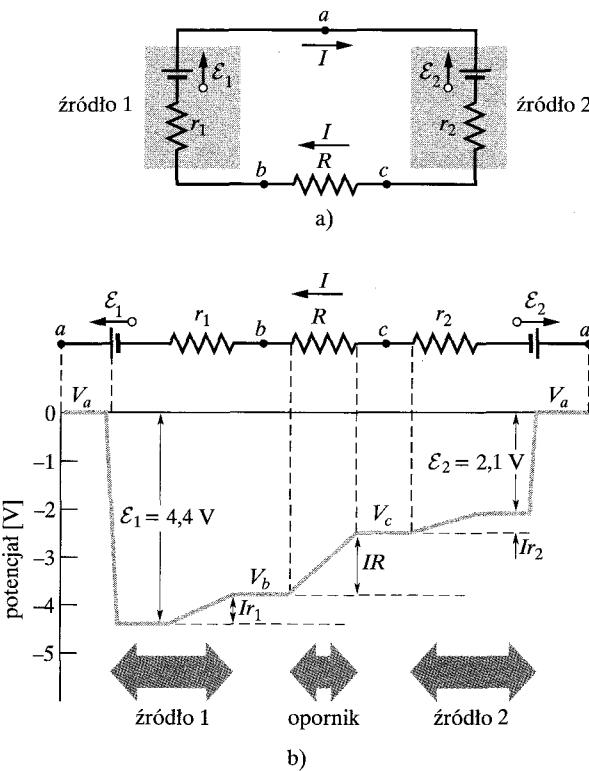
Wyznaczając z powyższego wzoru natężenie prądu I , otrzymujemy:

$$\begin{aligned} I &= \frac{\mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_2}{R + r_1 + r_2} = \frac{4,4 \text{ V} - 2,1 \text{ V}}{5,5 \Omega + 2,3 \Omega + 1,8 \Omega} = 0,24 \text{ A} \\ &\approx 240 \text{ mA}. \end{aligned} \quad (\text{odpowiedź})$$

b) Ile wynosi różnica potencjałów między biegunami źródła 1 na rysunku 28.6a?

ROZWIĄZANIE:

Należy zsumować różnice potencjałów między punktami a i b . Jeśli rozpoczniemy w punkcie b (czyli od ujemnego bieguna źródła 1) i przejdziemy przez źródło zgodnie z kierunkiem ruchu wskazówek zegara do punktu a (do dodatniego bieguna źródła),



Rys. 28.6. Przykład 28.1. a) Obwód o jednym oczku, zawierający dwa rzeczywiste źródła i opornik. Źródła są połączone przeciwnie względem siebie, czyli wytwarzają w oporniku prądy o przeciwnych kierunkach. b) Wykres potencjału, przy obchodzeniu obwodu, zaczynając od punktu a , przy założeniu, że wartość potencjału w punkcie a wynosi zero. (Aby lepiej powiązać wykres z obwodem, możemy w myśl rozciągnięcia obwodu w a i odgałęzić lewą stronę na lewo, a prawą stronę obwodu na prawo)

to uwzględniając zmiany potencjału, otrzymamy:

$$V_b - Ir_1 + \mathcal{E}_1 = V_a,$$

co daje nam:

$$V_a - V_b = -Ir_1 + \mathcal{E}_1 = -(0,2396 \text{ A})(2,3 \Omega) + 4,4 \text{ V} = +3,84 \text{ V}$$

(odpowiedź)

Wynika stąd, że różnica potencjałów jest mniejsza od SEM źródła. Wynik ten możemy sprawdzić, rozpoczynając analizę w punkcie b na rysunku 28.6a i analizując obwód w kierunku przeciwnym do kierunku ruchu wskazówek zegara, do punktu a .

SPRAWDZIAN 3: Źródło ma SEM równą 12 V i opór wewnętrzny 2Ω . Czy różnica potencjałów między biegunami źródła jest większa, mniejsza, czy równa 12 V, jeśli prąd w źródle płynie: a) od ujemnego do dodatniego bieguna, b) od dodatniego do ujemnego bieguna, c) jeśli jego natężenie jest równe zeru?

Sztuka rozwiązywania zadań

Porad 1: Kierunek przepływu prądu

Przy rozwiązywaniu zadań z obwodami nie musimy z góry znać kierunku przepływu prądu. Możemy po prostu założyć pewien kierunek przepływu prądu, choć może to wymagać pewnej „odwagi fizycznej”. Aby się o tym przekonać założmy, że prąd na rysunku 28.6a płynie w kierunku przeciwnym do ruchu wskazówek zegara, czyli przeciwnym do pokazanego za pomocą strzałek. Stosując drugie prawo Kirchhoffa w kierunku przeciwnym do ru-

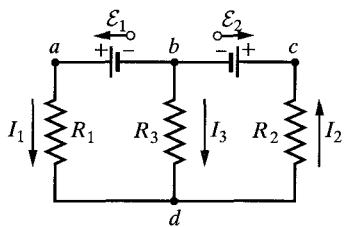
chu wskazówek zegara, od punktu a , otrzymujemy teraz:

$$-\mathcal{E}_1 - Ir_1 - IR - Ir_2 + \mathcal{E}_2 = 0,$$

czyli

$$I = -\frac{\mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_2}{R + r_1 + r_2}.$$

Podstawiając wartości liczbowe z przykładu 28.1, otrzymujemy natężenie prądu $I = -240 \text{ mA}$. Znak minus oznacza, że prąd płynie w kierunku przeciwnym do przyjętego.



Rys. 28.7. Obwód o wielu oczkach, składający się z trzech gałęzi: lewej gałęzi bad , prawej gałęzi bcd i środkowej gałęzi bd . Obwód składa się także z trzech oczek: lewego oczka $badb$, prawnego oczka $bcdb$ i dużego oczka $badcb$.

28.6. Obwody o wielu oczkach

Na rysunku 28.7 przedstawiono obwód składający się z więcej niż jednego oczka. Dla uproszczenia założymy, że źródła są doskonałe. W tym obwodzie są dwa węzły, b i d , i trzy gałęzie, łączące te węzły. Gałęziami są: lewa gałąź (bad), prawa gałąź (bcd) i środkowa gałąź (bd). Ile wynoszą natężenia prądów w tych trzech gałęziach?

Prądy oznaczmy, używając innego wskaźnika dla każdej gałęzi. Prąd o natężeniu I_1 ma tę samą wartość wszędzie w gałęzi bad , I_2 ma tę samą wartość wszędzie w gałęzi bcd i I_3 jest natężeniem prądu płynącego przez gałąź bd . Kierunki prądów są przyjęte dowolnie.

Rozważmy na chwilę węzeł d : ładunek wpływa do tego węzła z wpływającymi prądami o natężeniach I_1 i I_3 , a wypływa z wypływającym prądem I_2 . Ładunek w węźle nie zmienia się, a więc całkowite natężenie prądów wpływających do węzła musi być równe całkowitemu natężeniu prądów z niego wypływających:

$$I_1 + I_3 = I_2. \quad (28.15)$$

Można łatwo sprawdzić, że zastosowanie tego warunku do węzła b prowadzi dokładnie do tego samego wzoru. Ze wzoru (28.15) wynika więc ogólna zasada:

Pierwsze prawo Kirchhoffa. Suma natężeń prądów wpływających do dowolnego węzła musi być równa sumie natężeń prądów wypływających z tego węzła.

Jest to po prostu stwierdzenie zachowania ładunku przy stacjonarnym jego przepływie — w węźle ładunek nie może ani rosnąć, ani maleć. Naszymi podstawowymi narzędziami, służącymi do rozwiązywania złożonych obwodów są więc: *drugie prawo Kirchhoffa* (wynikające z zasady zachowania energii) i *pierwsze prawo Kirchhoffa* (wynikające z zasady zachowania ładunku).

Wzór (28.15) jest równaniem z trzema niewiadomymi. Aby je rozwiązać (czyli znaleźć natężenia trzech prądów), potrzebujemy dwóch dodatkowych równań, zawierających te same niewiadome. Otrzymujemy je przez dwukrotnie zastosowanie pierwszego prawa Kirchhoffa. W obwodzie z rysunku 28.7 spośród trzech oczek możemy wybrać: lewe oczko ($badb$), prawe oczko ($bcdb$) i duże oczko ($badcb$). Nie ma znaczenia, które dwa oczka wybierzemy — wybierzmy na przykład małe oczko i prawe oczko.

Jeśli analizujemy małe oczko w kierunku przeciwnym do ruchu wskazówek zegara, rozpoczynając od punktu b , to drugie prawo Kirchhoffa daje nam:

$$\mathcal{E}_1 - I_1 R_1 + I_3 R_3 = 0. \quad (28.16)$$

Jeśli analizujemy prawe oczko w kierunku przeciwnym do ruchu wskazówek zegara, rozpoczynając od punktu b , to drugie prawo Kirchhoffa daje nam:

$$-I_3 R_3 - I_2 R_2 - \mathcal{E}_2 = 0. \quad (28.17)$$

Mamy teraz trzy równania (wzory (28.15), (28.16) i (28.17)) z trzema nieznanymi natężeniami prądów. Możemy je rozwiązać na wiele sposobów.

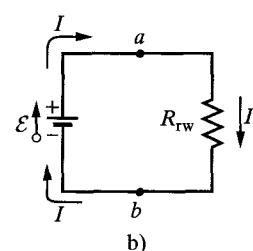
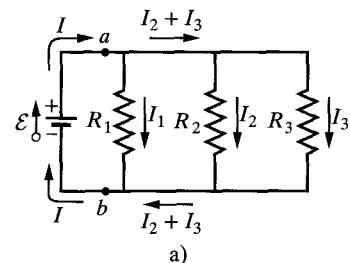
Jeśli zastosowalibyśmy drugie prawo Kirchhoffa do dużego oczka, to otrzymalibyśmy (poruszając się w kierunku przeciwnym do ruchu wskazówek zegara i rozpoczynając od punktu b) wzór:

$$\mathcal{E}_1 - I_1 R_1 - I_2 R_2 - \mathcal{E}_2 = 0.$$

Może się wydawać, że równanie to zawiera dodatkową informację, ale w rzeczywistości jest tylko sumą równań (28.16) i (28.17). (Można je oczywiście zastosować łącznie ze wzorem (28.15) i albo (28.16), albo (28.17)).

Oporniki połączone równolegle

Na rysunku 28.8a przedstawiono trzy oporniki połączone *równolegle* i podłączone do doskonałego źródła o SEM równej \mathcal{E} . Określenie „równolegle” oznacza, że



Rys. 28.8. a) Trzy oporniki połączone równolegle. b) Równoważny obwód z opornikami, zastąpiony przez równoważny im opór R_{rw}

oporniki są razem połączone za pomocą przewodów z jednej strony i z drugiej strony, i że różnica potencjałów U jest przyłożona do pary połączonych końcówek. Stąd na wszystkich trzech opornikach mamy taką samą różnicę potencjałów U , która wytwarza prąd w każdym z oporników:

► Gdy różnica potencjałów U jest przyłożona do oporników połączonych równolegle, na wszystkich opornikach jest taka sama różnica potencjałów U .

Na rysunku 28.8a przyłożona różnica potencjałów U jest utrzymywana przez źródło. Na rysunku 28.8b trzy połączone równolegle oporniki zastąpiono równoważnym opornikiem R_{rw} .

► Oporniki połączone równolegle można zastąpić równoważnym opornikiem R_{rw} , do którego końców jest przyłożona taka sama różnica potencjałów U i przez który przepływa prąd o natężeniu I równym sumie natężeń prądów w opornikach połączonych równolegle.

Aby wyprowadzić wyrażenie na R_{rw} na rysunku 28.8b, zapiszmy najpierw wartość natężenia prądu w każdym z oporników na rysunku 28.8a:

$$I_1 = \frac{U}{R_1}, \quad I_2 = \frac{U}{R_2} \quad \text{i} \quad I_3 = \frac{U}{R_3},$$

gdzie U jest różnicą potencjałów między punktami a i b . Jeśli zastosujemy pierwsze prawo Kirchhoffa w punkcie a z rys. 28.8a i podstawimy te wartości, to znajdziemy:

$$I = I_1 + I_2 + I_3 = U \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} \right). \quad (28.18)$$

Jeśli zastąpilibyśmy oporniki połączone równolegle opornikiem równoważnym R_{rw} (rys. 28.8b), to mielibyśmy:

$$I = \frac{U}{R_{rw}}. \quad (28.19)$$

Porównanie wzorów (28.18) i (28.19) prowadzi do wzoru:

$$\frac{1}{R_{rw}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}. \quad (28.20)$$

Uogólniając ten wynik na przypadek n oporników, mamy:

$$\frac{1}{R_{rw}} = \sum_{j=1}^n \frac{1}{R_j} \quad (n \text{ oporników połączonych równolegle}). \quad (28.21)$$

W przypadku dwóch oporników opornik równoważny ma opór równy iloczynowi oporów oporników podzielonemu przez ich sumę, czyli:

$$R_{rw} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}. \quad (28.22)$$

Jeśliomyłkowato za opór równoważny podstawisz sumę podzieloną przez iloczyn, to jak możesz łatwo zauważyc, otrzymasz wynik niepoprawny wymiarowo.

Zauważ, że gdy dwa lub więcej oporników jest połączonych równolegle, to opór równoważny jest mniejszy od każdego z oporów łączonych. W tabeli 28.1 podsumowano związki dla oporników i kondensatorów połączonych szeregowo i równolegle.

Tabela 28.1. Oporniki i kondensatory połączone szeregowo i równolegle

| Szeregowo | Równolegle |
|---|--|
| <i>Oporniki</i> | |
| $R_{rw} = \sum_{j=1}^n R_j$ (28.7) | $\frac{1}{R_{rw}} = \sum_{j=1}^n \frac{1}{R_j}$ (28.21) |
| Takie samo natężenie prądu we wszystkich opornikach | Taka sama różnica potencjałów na wszystkich opornikach |
| <i>Kondensatory</i> | |
| $\frac{1}{C_{rw}} = \sum_{j=1}^n \frac{1}{C_j}$ (26.20) | $C_{rw} = \sum_{j=1}^n C_j$ (26.19) |
| Taki sam ładunek na wszystkich kondensatorach | Taka sama różnica potencjałów na wszystkich kondensatorach |

SPRAWDZIAN 4: Źródło o różnicy potencjałów U jest podłączone do układu dwóch identycznych oporników i powstaje w nim prąd o natężeniu I . Ile wynoszą różnice potencjałów i natężenia prądu dla każdego opornika, jeśli są one połączone: a) szeregowo, b) równolegle?

Przykład 28.2

Na rysunku 28.9a przedstawiono obwód o wielu oczkach zawierający jedno doskonałe źródło i cztery oporniki, przy czym:

$$R_1 = 20 \Omega, \quad R_2 = 20 \Omega, \quad \mathcal{E} = 12 \text{ V}, \\ R_3 = 30 \Omega, \quad R_4 = 8 \Omega.$$

a) Ile wynosi natężenie prądu, płynącego przez źródło?

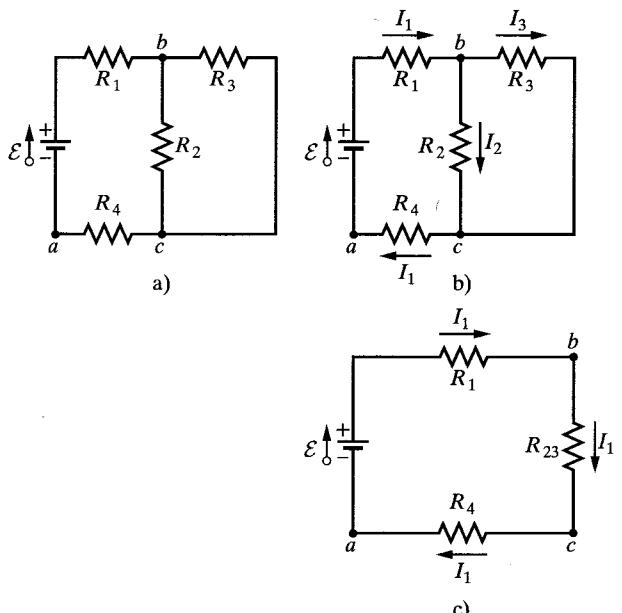
ROZWIĄZANIE:

Zauważmy najpierw, że prąd płynący przez źródło jest równocześnie prądem, płynącym przez opornik R_1 .

1. Możemy znaleźć jego natężenie, przez zastosowanie drugiego prawa Kirchhoffa do oczka zawierającego R_1 , ponieważ natężenie to pojawi się w wyrażeniu na różnicę potencjałów na oporniku R_1 . Możemy wybrać albo lewe oczko, albo duże oczko. Zauważając, że strzałka SEM baterii jest skierowana do góry, czyli prąd wytwarzany przez baterię ma kierunek zgodny z ruchem wskazówek zegara, zastosujemy drugie prawo Kirchhoffa do lewego oczka. Obwód będziemy analizować zgodnie z ruchem wskazówek zegara, rozpoczynając w punkcie a . Jeśli I jest natężeniem prądu płynącego przez źródło, to spróbujmy napisać:

$$+\mathcal{E} - IR_1 - IR_2 - IR_4 = 0 \quad (\text{wzór błędny}).$$

Wzór ten jest jednak błędny, ponieważ zakłada takie samo natężenie prądu I przepływającego przez oporniki R_1 , R_2 i R_4 .



Rys. 28.9. Przykład 28.2. a) Obwód o wielu oczkach z doskonałym źródłem o SEM równej \mathcal{E} i czterema opornikami. b) Wybór kierunków prądów płynących przez oporniki. c) Uproszczenie obwodu przez zastąpienie oporników R_2 i R_3 oporem równoważnym R_{23} . Natężenie prądu płynącego przez opór równoważny R_{23} jest równe natężeniu prądu płynącego przez oporniki R_1 i R_4 .

Przez oporniki R_1 i R_4 przepływa taki sam prąd, ponieważ prąd, przepływający przez opornik R_4 musi przepływać przez źródło i następnie przez opornik R_1 bez zmiany wartości. Prąd ten rozdziela się jednak w węźle b — tylko część przepływa przez opornik R_2 , a reszta przez opornik R_3 .

Aby odróżnić kilka prądów, przepływających w obwodzie, musimy każdy z nich indywidualnie oznać, jak na rysunku 28.9b. Wtedy, przesuwając się z punktu a wzdłuż obwodu, możemy napisać drugie prawo Kirchhoffa dla lewego oczka w postaci:

$$+\mathcal{E} - I_1 R_1 - I_2 R_2 - I_1 R_4 = 0.$$

Niestety, równanie to zawiera dwie niewiadome, I_1 i I_2 ; będziemy potrzebować przynajmniej jeszcze jednego równania, aby je wyznaczyć.

O 2. Łatwiejszą metodą jest uproszczenie obwodu z rys. 28.9b przez znalezienie oporów równoważnych. Zauważ, że oporniki R_1 i R_2 nie są połączone szeregowo i tych oporów nie można zastąpić opornikiem równoważnym. Natomiast oporniki R_2 i R_3 są połączone równolegle i dlatego możemy zastosować wzór (28.21) lub (28.22), aby znaleźć opór równoważny R_{23} . Z ostatniego wzoru wynika, że:

$$R_{23} = \frac{R_2 R_3}{R_2 + R_3} = \frac{(20 \Omega)(30 \Omega)}{50 \Omega} = 12 \Omega.$$

Mogliśmy teraz przerysować obwód w postaci rysunku 28.9c; zauważ, że prąd, płynący przez opornik R_{23} musi być pradem o natężeniu I_1 , ponieważ ładunek, przepływający przez oporniki R_1 i R_4 musi także przepływać przez opornik R_{23} . Dla tego prostego obwodu o jednym oczku drugie prawo Kirchhoffa (przy analizie obwodu zgodnie z ruchem wskazówek zegara, od punktu a) ma postać:

$$+\mathcal{E} - I_1 R_1 - I_1 R_{23} - I_1 R_4 = 0.$$

Po podstawieniu podanych wartości otrzymujemy:

$$12 \text{ V} - I_1(20 \Omega) - I_1(12 \Omega) - I_1(8 \Omega) = 0,$$

Przykład 28.3

Na rysunku 28.10 przedstawiono obwód, którego elementy mają następujące parametry:

$$\mathcal{E}_1 = 3 \text{ V}, \quad \mathcal{E}_2 = 6 \text{ V},$$

$$R_1 = 2 \Omega, \quad R_2 = 4 \Omega.$$

Wszystkie trzy źródła są źródłami doskonałymi. Znajdź natężenie i kierunek prądu w każdej z trzech gałęzi.

ROZWIĄZANIE:

Nie warto podejmować próby uproszczenia tego obwodu, gdyż żadne dwa oporniki nie są połączone równolegle, a dla oporników połączonych szeregowo (w prawej lub lewej gałęzi) możemy od razu obliczyć opór równoważny. **O** Należy więc zastosować pierwsze i drugie prawo Kirchhoffa.

skąd

$$I_1 = \frac{12 \text{ V}}{40 \Omega} = 0,30 \text{ A}. \quad (\text{odpowiedź})$$

b) Ile wynosi natężenie prądu I_2 , przepływającego przez opornik R_2 ?

ROZWIĄZANIE:

O Powróćmy do obwodu równoważnego z rysunku 28.9c, w którym oporniki o oporach R_1 i R_2 połączone równolegle zostały zastąpione opornikiem o oporze R_{23} . **O** Oporы R_2 i R_3 są połączone równolegle, a więc różnica potencjałów na tych opornikach jest taka sama, jak na równoważnym im oporniku R_{23} . Wiemy, że natężenie prądu, płynącego przez R_{23} wynosi $I_1 = 0,3 \text{ A}$. Mogliśmy zatem zastosować wzór (27.8) ($R = U/I$) w celu obliczenia różnicy potencjałów U_{23} na oporniku R_{23}

$$U_{23} = I_1 R_{23} = (0,3 \text{ A})(12 \Omega) = 3,6 \text{ V}.$$

Różnica potencjałów na oporniku R_2 wynosi więc $3,6 \text{ V}$, czyli natężenie prądu I_2 , płynącego przez opornik R_2 jest na podstawie wzoru (27.8) równe:

$$I_2 = \frac{U_2}{R_2} = \frac{3,6 \text{ V}}{30 \Omega} = 0,18 \text{ A}. \quad (\text{odpowiedź})$$

c) Ile wynosi natężenie prądu I_3 płynącego przez opornik R_3 ?

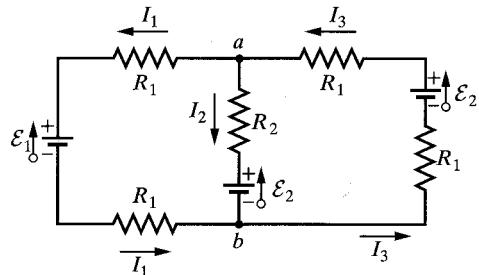
ROZWIĄZANIE:

Odpowiedź możemy znaleźć, postępując jak w punkcie (b). **O** Inną metodą jest skorzystanie z pierwszego prawa Kirchhoffa: w punkcie b na rysunku 28.9b prąd wpływający I_1 i prądy wypływające I_2 i I_3 są powiązane wzorem:

$$I_1 = I_2 + I_3,$$

skąd:

$$I_3 = I_1 - I_2 = 0,3 \text{ A} - 0,18 \text{ A} = 0,12 \text{ A}. \quad (\text{odpowiedź})$$



Rys. 28.10. Przykład 28.3. Obwód o wielu oczkach z trzema doskonałymi źródłami i pięcioma opornikami

Wybieramy dowolnie kierunki prądów, jak na rys. 28.10 i stosujemy pierwsze prawo Kirchhoffa w punkcie a pisząc:

$$I_3 = I_1 + I_2. \quad (28.23)$$

Zastosowanie pierwszego prawa Kirchhoffa dla węzła b daje takie samo równanie, zastosujemy więc następnie drugie prawo Kirchhoffa dla dwóch oczek, dowolnie wybranych spośród trzech możliwych. Najpierw wybierzymy lewe oczko i rozpoczynając od punktu a przeanalizujemy je w kierunku przeciwnym do ruchu wskazówek zegara, otrzymując:

$$-I_1 R_1 - \mathcal{E}_1 - I_1 R_1 + \mathcal{E}_2 + I_2 R_2 = 0.$$

Podstawiając dane wartości, mamy:

$$I_1(4 \Omega) - I_2(4 \Omega) = 3 \text{ V}. \quad (28.24)$$

Jako drugie oczko wybieramy oczko prawe, analizując je w kierunku zgodnym z ruchem wskazówek zegara, rozpoczynając od punktu a , i otrzymujemy:

$$+I_3 R_1 - \mathcal{E}_2 + I_3 R_1 + \mathcal{E}_2 + I_2 R_2 = 0.$$

Podstawiając znane wartości, mamy:

$$I_2(4 \Omega) + I_3(4 \Omega) = 0. \quad (28.25)$$

Po zastosowaniu wzoru (28.23) w celu wyeliminowania I_3 ze wzoru (28.25) i uproszczeniu, otrzymujemy:

$$I_1(4 \Omega) + I_2(8 \Omega) = 0. \quad (28.26)$$

Przykład 28.4

Ryba elektryczna potrafi wytworzyć prąd w swych komórkach biologicznych, zwanych *płytkami elektrycznymi*, które są fizjologicznymi źródłami SEM. Płytki elektryczne węgorza z Ameryki Południowej, przedstawionego na fotografii otwierającej ten rozdział, są rozmieszczone w 140 rzędach, ułożonych poziomo wzdłuż ciała, z których każdy zawiera 5000 płytkek elektrycznych. Cały układ jest schematycznie przedstawiony na rys. 28.11a; każda płytka elektryczna ma SEM $\mathcal{E} = 0,15 \text{ V}$ i opór wewnętrzny $r = 0,25 \Omega$. Woda, otaczająca węgorza, domyka obwód między dwoma końcami układu płytkek elektrycznych, jednym na głowie zwierzęcia i drugim w pobliżu jego ogona.

a) Jakie natężenie prądu może wytworzyć węgorz w wodzie, jeśli woda otaczająca węgorza ma opór $R_w = 800 \Omega$?

ROZWIĄZANIE:

O Obwód z rys. 28.11a można uprościć, zastępując układ SEM i oporów wewnętrznych przez równoważne SEM i opory. Najpierw rozważymy pojedynczy rzad. Całkowita SEM \mathcal{E}_{rz} rzędu 5000 płytkek elektrycznych jest sumą SEM płytkek:

$$\mathcal{E}_{rz} = 5000\mathcal{E} = (5000)(0,15 \text{ V}) = 750 \text{ V}.$$

Całkowity opór R_{rz} rzędu jest sumą oporów wewnętrznych 5000 płytkek:

$$R_{rz} = 5000r = (5000)(0,25 \Omega) = 1250 \Omega.$$

Mogliśmy teraz zastąpić każdy ze 140 identycznych rzędów przez pojedynczą SEM \mathcal{E}_{rz} i pojedynczy opór R_{rz} , jak na rysunku 28.11b.

Mamy teraz do rozwiązyania układ dwóch równań (28.24) i (28.26) z dwiema niewiadomymi I_1 i I_2 ; możemy to zrobić bezpośrednio (co w tym przypadku jest całkiem łatwe) lub korzystając z metod rozwiązywania układów równań np. metody Cramera, przedstawionej w dodatku E. Znajdujemy:

$$I_2 = -0,25 \text{ A}.$$

(Znak minus oznacza, że wybrany przez nas kierunek przepływu prądu I_2 na rys. 28.10 jest błędny; prąd I_2 płynie w rzeczywistości w kierunku od \mathcal{E}_2 do R_2). Podstawiając $I_2 = -0,25 \text{ A}$ do wzoru (28.26) i wyznaczając I_1 , otrzymujemy:

$$I_1 = 0,50 \text{ A}. \quad (\text{odpowiedź})$$

Po zastosowaniu wzoru (28.23) mamy wtedy:

$$I_3 = I_1 + I_2 = 0,25 \text{ A}. \quad (\text{odpowiedź})$$

Dodatnie wartości, otrzymane dla I_1 i I_3 oznaczają, że nasz wybór kierunków dla tych prądów był poprawny. Możemy teraz poprawić kierunek prądu I_2 i zapisać jego natężenie w postaci

$$I_2 = 0,25 \text{ A}. \quad (\text{odpowiedź})$$

Na rysunku 28.11b SEM między punktami a i b w każdym rzędzie wynosi $\mathcal{E}_{rz} = 750 \text{ V}$. Rzędy są identyczne i połączone z lewej strony na rysunku 28.11b, a więc wszystkie punkty b na rysunku mają ten sam potentiał elektryczny. Możemy więc potraktować te punkty jako połączone i założyć, że jest tylko jeden punkt b . SEM między punktem a i tym pojedynczym punktem b wynosi $\mathcal{E}_{rz} = 750 \text{ V}$. Możemy więc narysować obwód, jak na rysunku 28.11c.

Między punktami b i c na rysunku 28.11c znajduje się 140 oporników $R_{rz} = 1250 \Omega$, połączonych równolegle. Równoważny opór R_{rw} tego układu jest określony wzorem (28.21):

$$\frac{1}{R_{rw}} = \sum_{j=1}^{140} \frac{1}{R_j} = 140 \frac{1}{R_{rz}},$$

czyli:

$$R_{rw} = \frac{R_{rz}}{140} = \frac{1250 \Omega}{140} = 8,93 \Omega.$$

Zastępując układ połączonych równolegle oporników przez R_{rw} , otrzymujemy uproszczony obwód z rysunku 28.11d. Stosując drugie prawo Kirchhoffa dla tego obwodu, w kierunku przeciwnym do ruchu wskazówek zegara i rozpoczynając od punktu b , mamy:

$$\mathcal{E}_{rz} - IR_w - IR_{rw} = 0.$$

Wyznaczając stąd I i podstawiając znane wartości, otrzymujemy:

$$I = \frac{\mathcal{E}_{rz}}{R_w + R_{rw}} = \frac{750 \text{ V}}{800 \Omega + 8,93 \Omega} = 0,927 \text{ A} \approx 0,93 \text{ A}. \quad (\text{odpowiedź})$$

Jeśli inną ryba jest blisko głowy lub ogona węgorza, to część tego prądu może przejść wąskim kanałem przez rybę, porażając ją lub zabijając.

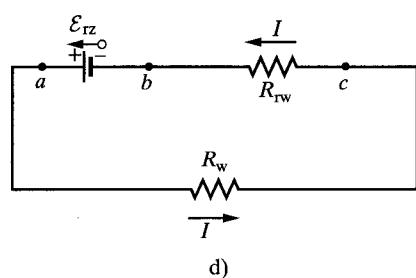
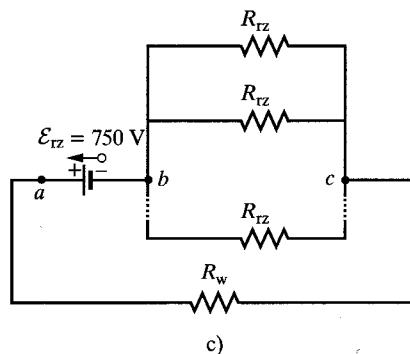
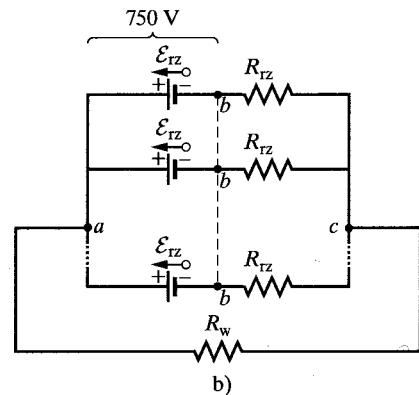
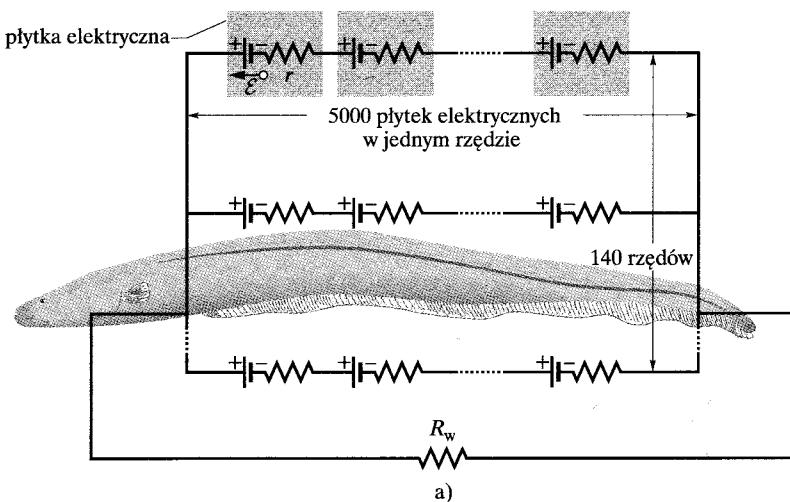
b) Ile wynosi natężenie prądu I_{rz} , przepływającego przez każdy rzząd z rysunku 28.11a?

$$I_{rz} = \frac{I}{140} = \frac{0,927 \text{ A}}{140} = 6,6 \cdot 10^{-3} \text{ A.} \quad (\text{odpowiedź})$$

ROZWIĄZANIE:

 Rzędy są identyczne, a więc prąd wpływający i wypływający z węgorza dzieli się równo między rzędy:

Jak widać, prąd, przepływający przez każdy rzząd jest mały, ponad dwa rzędy wielkości mniejszy niż prąd, przepływający przez wodę. Prąd jest więc rozłożony na całe ciało węgorza i w przeciwieństwie do ryby nie zostaje on porażony ani zabity.



Rys. 28.11. Przykład 28.4. a) Model obwodu elektrycznego węgorza w wodzie. Każda płytka elektryczna węgorza ma SEM równą \mathcal{E} i opór wewnętrzny r . Wzdłuż każdego ze 140 rzędów rozciągających się od głowy do ogona znajdują się 5000 płytka elektrycznych. Opór otaczającej wody wynosi R_w . b) SEM \mathcal{E}_{rz} i opór R_{rz} każdego rzędu. c) SEM między punktami a i b wynosi \mathcal{E}_{rz} . Między punktami b i c jest 140 oporów R_{rz} połączonych równolegle. d) Obwód uproszczony z oporem R_{rw} zastępującym układ oporów połączonych równolegle

Sztuka rozwiązywania zadań

Porada 2: Analiza obwodów ze źródłami i opornikami

Przedstawimy teraz dwa sposoby analizowania obwodów, czyli obliczania nieznanych natężeń prądów i różnic potencjałów.

- Jeśli obwód można uprościć, zastępując połączone szeregowo lub równolegle oporniki przez oporniki równoważne, to trzeba to zrobić. Jeśli można obwód zredukować do ob-

wodu z jednym oczkiem, to można znaleźć natężenie prądu, przepływającego przez źródło w tym oczku, jak w przykładzie 28.2a. Czasami należy potem odwrócić proces upraszczania obwodu, aby znaleźć natężenie prądu lub różnicę potencjałów dla poszczególnych oporników, jak w przykładzie 28.2b.

2. Jeśli obwodu nie można uproszczyć do pojedynczego oczka, to należy zastosować pierwsze i drugie prawo Kirchhoffa w celu ułożenia układu równań, jak w przykładzie 28.3. Należy wziąć tylko tyle niezależnych równań, ile jest niewiadomych w tych równaniach. Jeśli chcemy znaleźć natężenie prądu lub różnicę potencjałów dla konkretnego opornika, trzeba zadbać, aby to natężenie lub różnica potencjałów pojawiały się w równaniach, przez wybór przynajmniej jednego oczka z tym konkretnym opornikiem.

Porada 3: *Możliwości wyboru przy rozwiązywaniu zadań z obwodami*

W przykładzie 28.3 poczyniliśmy kilka dowolnych założeń. 1) Przyjęliśmy dowolnie kierunki przepływu prądów na rysunku 28.10. 2) Wybraliśmy dowolne oczka, które uwzględnimy przy

wypisywaniu równań. 3) Wybraliśmy dowolnie kierunek, w którym analizujemy każde oczko. 4) Wybraliśmy dowolnie punkt rozpoczęcia i zakończenia każdej analizy obwodu.

Ta dowolność wyboru często niepokoi osobę poczynającą w analizowaniu obwodów, ale osoba doświadczona wie, że nie ma to znaczenia. Trzeba pamiętać zawsze o dwóch zasadach. Po pierwsze, wybrane oczko należy analizować rzeczywiście dokoła. Po drugie, wybrany kierunek przepływu prądu, należy trzymać się go, aż do otrzymania wartości liczbowych wszystkich natężeń. Jeśli wybraliśmy zły kierunek, to z wyliczeń otrzymamy znak minus. Można wtedy dokonać poprawki przez równoczesną zmianę znaku w wyniku i odwrócenie strzałki reprezentującej ten prąd na schemacie obwodu. Jednak *nie należy robić tej poprawki przed ukończeniem wszystkich potrzebnych obliczeń dla obwodu*; poprawnie zrobiliśmy to w przykładzie 28.3.

28.7. Amperomierz i woltomierz

Przyrząd używany do pomiaru natężenia prądu nazywamy *amperomierzem*. Aby zmierzyć natężenie prądu w przewodniku, należy przewodnik przeciąć i wstawić amperomierz tak, żeby mierzony prąd przepływał przez miernik. (Na rysunku 28.12 amperomierz A jest włączony w obwód tak, aby służył do pomiaru natężenia prądu I).

Istotne jest, aby opór R_A amperomierza był bardzo mały w porównaniu z innymi oporami w obwodzie. W przeciwnym wypadku sama obecność miernika zmieni natężenie mierzonego prądu.

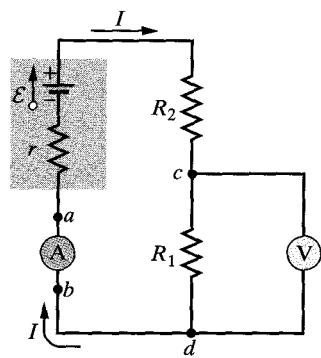
Miernik używany do pomiaru różnicy potencjałów nazywamy *woltomierzem*. Aby znaleźć różnicę potencjałów między dowolnymi dwoma punktami, należy zaciski woltomierza podłączyć do tych punktów, bez przecinania przewodu. (Na rysunku 28.12 woltomierz V jest włączony w obwód tak, aby służył do pomiaru różnicy potencjałów na oporniku R_1).

Istotne jest, aby opór R_V woltomierza był bardzo duży w porównaniu z oporem elementu obwodu, do którego woltomierz jest podłączony. W przeciwnym wypadku sam miernik staje się ważnym elementem obwodu i zmienia różnicę potencjałów, którą mamy zmierzyć.

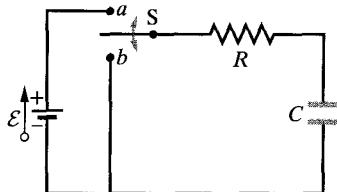
Często pojedynczy miernik jest tak zbudowany, że przy użyciu przełącznika można spowodować, że będzie nam służył albo jako amperomierz, albo jako woltomierz, a zwykle także jako *omomierz*, czyli miernik do pomiaru oporu dowolnego elementu, podłączonego do jego zacisków. Taki uniwersalny miernik nazywamy *multimetrem*.

28.8. Obwody RC

W poprzednich paragrafach zajmowaliśmy się tylko obwodami, w których płyną prądy stałe, czyli prądy o natężeniach nie ulegających zmianie w czasie. Teraz rozpoczęniemy analizę obwodów, w których płyną prądy zmienne, czyli prądy o natężeniach zmieniających się w czasie.



Rys. 28.12. Obwód o jednym oczku, w który włączono amperomierz (A) i woltomierz (V)



Rys. 28.13. Jeśli klucz S ustawimy w punkcie *a*, to kondensator ładuje się przez opornik. Jeśli klucz następnie ustawimy w punkcie *b*, to kondensator rozładowuje się przez opornik

Ładowanie kondensatora

Kondensator o pojemności C na rys. 28.13 jest początkowo nienalożony. Aby go naładować, przesuwamy klucz S do punktu *a*. Powstaje wtedy obwód szeregowy RC , składający się z kondensatora, doskonałego źródła o SEM \mathcal{E} i opornika o oporze R .

Z paragrafu 26.2 wiemy już, że z chwilą zamknięcia obwodu zaczyna przepływać ładunek (przepływ ładunku to prąd) między okładką kondensatora i biegunem baterii po każdej stronie kondensatora. Ten prąd zwiększa ładunek q na okładkach i różnicę potencjałów $U_C (= q/C)$ na kondensatorze. Gdy różnica potencjałów stanie się równa różnicy potencjałów na źródle (równiej tu SEM \mathcal{E}), natężenie prądu stanie się równe零. Zgodnie ze wzorem (26.1) ($q = CU$) sta-cjonarny (końcowy) ładunek na całkowicie naładowanym kondensatorze wynosi $C\mathcal{E}$.

Chcemy teraz zbadać proces ładowania. W szczególności chcemy wiedzieć, jak podczas ładowania zmieniają się w czasie: ładunek $q(t)$ na okładkach kondensatora, różnicę potencjałów $U_C(t)$ na kondensatorze i natężenie prądu $I(t)$ w obwodzie. Zacznijmy od zastosowania do obwodu drugiego prawa Kirchhoffa przechodząc w kierunku zgodnym z ruchem wskazówek zegara, od ujemnego bieguna baterii. Otrzymujemy wtedy:

$$\mathcal{E} - IR - \frac{q}{C} = 0. \quad (28.27)$$

Ostatni wyraz po lewej stronie równania przedstawia różnicę potencjałów na kondensatorze. Wyraz ten jest ujemny, ponieważ góra okładka kondensatora, połączona z dodatnim biegiem baterii, ma większy potencjał niż dolna okładka. Istnieje więc spadek potencjału, bo przechodzimy przez kondensator w kierunku w dół.

Nie możemy bezpośrednio rozwiązać równania (28.27), ponieważ zawiera ono dwie zmienne I i q . Jednak zmienne te są zależne i powiązane wzorem:

$$I = \frac{dq}{dt}. \quad (28.28)$$

Po podstawieniu wyrażenia na I do wzoru (28.27) i przestawieniu wyrazów, otrzymujemy:

$$R \frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} = \mathcal{E} \quad (\text{równanie ładowania}). \quad (28.29)$$

Powyższe równanie różniczkowe opisuje zależność od czasu ładunku q na kondensatorze, na rysunku 28.13. Aby je rozwiązać, musimy znaleźć funkcję $q(t)$, która spełnia to równanie oraz warunek początkowy, że kondensator jest początkowo nienalożony, czyli $q = 0$ dla $t = 0$.

Pokażemy wkrótce, że rozwiązaniem równania (28.29) jest:

$$q = C\mathcal{E}(1 - e^{-t/(RC)}) \quad (\text{ładowanie kondensatora}), \quad (28.30)$$

gdzie $e = 2,718\dots$ jest podstawą logarytmów naturalnych, a nie symbolem elektronu. Zauważ, że funkcja ze wzoru (28.30) rzeczywiście spełnia nasz warunek

początkowy, ponieważ dla $t = 0$ wyraz $e^{-t/(RC)}$ jest równy jedności i zgodnie ze wzorem otrzymujemy wtedy $q = 0$. Zauważ też, że gdy czas dąży do nieskończoności, wyraz $e^{-t/(RC)}$ dąży do zera i wzór daje poprawną wartość końcowego (stacjonarnego) ładunku na kondensatorze $q = C\mathcal{E}$. Wykres $q(t)$ dla procesu ładowania jest przedstawiony na rys. 28.14a.

Pochodna funkcji $q(t)$ względem czasu jest równa natężeniu prądu $I(t)$, ładującego kondensator

$$I = \frac{dq}{dt} = \left(\frac{\mathcal{E}}{R}\right)e^{-t/(RC)} \quad (\text{ładowanie kondensatora}). \quad (28.31)$$

Wykres funkcji $I(t)$ dla procesu ładowania jest przedstawiony na rys. 28.14b. Zauważ, że wartość początkowa natężenia prądu wynosi \mathcal{E}/R i że natężenie maleje do zera, gdy kondensator zostanie całkowicie naładowany.

► Ładowany kondensator początkowo zachowuje się przy przepływie prądu jak zwykły przewodnik bez oporu, a po upływie długiego czasu jak przerwa w obwodzie.

Stosując wzory (26.1) ($q = CU$) i (28.30), znajdujemy różnicę potencjałów $U_C(t)$ na kondensatorze podczas ładowania:

$$U_C = \frac{q}{C} = \mathcal{E}(1 - e^{-t/(RC)}) \quad (\text{ładowanie kondensatora}) \quad (28.32)$$

Z otrzymanego wzoru widzimy, że $U_C = 0$ dla $t = 0$ i że $U_C = \mathcal{E}$ dla $t \rightarrow \infty$, gdy kondensator zostanie całkowicie naładowany.

Stała czasowa

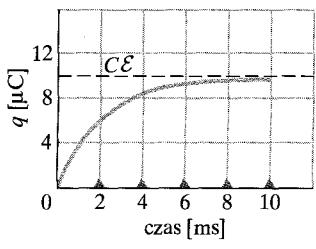
Iloczyn RC występujący we wzorach (28.30), (28.31) i (28.32) ma wymiar czasu (bo argument funkcji wykładniczej musi być bezwymiarowy, a $1 \Omega \cdot 1 \text{ F} = 1 \text{ s}$). Wielkość RC nazywamy **pojemnościową stałą czasową** obwodu i oznaczamy symbolem τ :

$$\tau = RC \quad (\text{stała czasowa}). \quad (28.33)$$

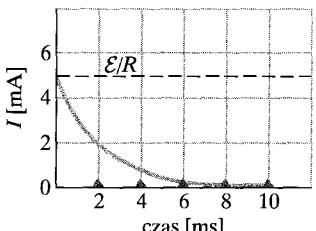
Ze wzoru (28.30) widzimy teraz, że w chwili $t = \tau (= RC)$ ładunek na początkowo nienalażowanym kondensatorze z rys. 28.13 wzrasta od zera do wartości:

$$q = C\mathcal{E}(1 - e^{-1}) = 0,63C\mathcal{E}. \quad (28.34)$$

Innymi słowy, w ciągu czasu, równego stałej czasowej τ ładunek wzrasta od zera do 63% końcowej wartości $C\mathcal{E}$. Na rysunku 28.14 małe trójkąty na osi czasu oznaczają kolejne przedziały czasu, równe stałej czasowej w procesie ładowania kondensatora. Czasy ładowania kondensatora wyrażamy często przez podanie τ ; im większą wartość ma τ , tym dłuższy jest czas ładowania.



a)



b)

Rys. 28.14. a) Wykres zależności ze wzoru (28.30) opisującej narastanie ładunku na kondensatorze z rysunku 28.13. b) Wykres zależności ze wzoru (28.31), opisującej zmniejszanie się prądu ładowania w obwodzie z rysunku 28.13. Krzywe zostały wykreślone dla $R = 2000 \Omega$, $C = 1 \mu\text{F}$ i $\mathcal{E} = 10 \text{ V}$; małe trójkąty oznaczają kolejne wielokrotności stałej czasowej τ

Rozładowanie kondensatora

Załóżmy teraz, że kondensator na rys. 28.13 jest całkowicie naładowany do różnicy potencjałów U_0 , równej SEM \mathcal{E} źródła i w chwili $t = 0$ klucz S przestawiamy z punktu a do punktu b . Kondensator może się więc rozładowywać przez opornik R . Jak ładunek $q(t)$ na kondensatorze i natężenie prądu $I(t)$ płynącego przez obwód, zawierający kondensator i opornik, zmieniają się w czasie?

Równanie różniczkowe, opisujące $q(t)$ jest identyczne z równaniem (28.29), lecz teraz nie ma w obwodzie źródła, czyli należy przyjąć $\mathcal{E} = 0$. Stąd:

$$R \frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} = 0 \quad (\text{równanie rozładowania}). \quad (28.35)$$

Rozwiążanie tego równania różniczkowego ma postać:

$$q = q_0 e^{-t/(RC)} \quad (\text{rozładowanie kondensatora}), \quad (28.36)$$

gdzie $q_0 (= CU_0)$ jest początkowym ładunkiem na kondensatorze. Przez podstawienie można sprawdzić, że funkcja ze wzoru (28.36) jest rzeczywiście rozwiązaniem równania (28.35).

Ze wzoru (28.36) wynika, że ładunek q maleje wykładniczo w czasie, z szybkością zależną od pojemnościowej stałej czasowej $\tau = RC$. W chwili $t = \tau$ ładunek na kondensatorze wynosi qe^{-1} , czyli 37% początkowej wartości. Zauważ, że większa stała τ oznacza dłuższy czas rozładowania.

Przez różniczkowanie funkcji $q(t)$ ze wzoru (28.36) względem czasu otrzymamy natężenie prądu $I(t)$

$$I = \frac{dq}{dt} = -\left(\frac{q_0}{RC}\right)e^{-t/(RC)} \quad (\text{rozładowanie kondensatora}). \quad (28.37)$$

Z otrzymanego wzoru wynika, że natężenie prądu także maleje wykładniczo w czasie z szybkością określoną przez τ . Początkowo natężenie prądu jest równe $I_0 = q_0/(RC)$. Zauważ, że I_0 możemy znaleźć, stosując drugie prawo Kirchhoffa dla obwodu w chwili $t = 0$; wtedy początkowa różnica potencjałów U_0 jest również różnicą potencjałów na oporniku R , czyli natężenie prądu musi wynosić $I_0 = U_0/R = (q_0/C)/R = q_0/(RC)$. Znak minus we wzorze (28.37) oznacza, że prąd rozładowania kondensatora płynie w kierunku przeciwnym niż prąd jego ładowania.

Wyprowadzenie wzoru (28.30)

Aby rozwiązać równanie (28.29), przepiszemy je najpierw w postaci:

$$\frac{dq}{dt} + \frac{q}{RC} = \frac{\mathcal{E}}{R}. \quad (28.38)$$

Ogólne rozwiązanie tego równania różniczkowego ma postać:

$$q = q_p + K e^{-at}, \quad (28.39)$$

gdzie q_p jest *rozwiązaniem szczególnym* równania różniczkowego, K jest stałą, którą trzeba obliczyć z warunków początkowych, a $a = 1/(RC)$ jest współczynnikiem przy q w równaniu (28.38). Aby znaleźć q_p , podstawiamy $dq/dt = 0$ we wzorze (28.38) (co odpowiada warunkowi końcowemu, jakim jest brak dalszego ładowania), wstawiamy $q = q_p$ i jako rozwiązanie otrzymujemy:

$$q_p = C\mathcal{E}. \quad (28.40)$$

Aby obliczyć K , podstawiamy otrzymany wynik do wzoru (28.39):

$$q = C\mathcal{E} + K e^{-at}$$

i uwzględniając warunek początkowy $q = 0$ dla $t = 0$, mamy:

$$0 = C\mathcal{E} + K,$$

czyli $K = -C\mathcal{E}$. Po podstawieniu otrzymanych wartości q_p , a i K do wzoru (28.39) otrzymujemy:

$$q = C\mathcal{E} - C\mathcal{E}e^{-t/(RC)},$$

co odpowiada wzorowi (28.30).

SPRAWDZIAN 5: W tabelce podano cztery zestawy wartości parametrów obwodu z rys. 28.13. Uszereguj je zgodnie z wartościami: a) początkowego natężenia prądu (po przesunięciu klucza do punktu a), b) czasu, potrzebnego na zmniejszenie natężenia prądu do połowy początkowej wartości, zaczynając od wartości największych.

| | 1 | 2 | 3 | 4 |
|-----------------------|----|----|-----|----|
| \mathcal{E} [V] | 12 | 12 | 10 | 10 |
| R [Ω] | 2 | 3 | 10 | 5 |
| C [μF] | 3 | 2 | 0,5 | 2 |

Przykład 28.5

Kondensator o pojemności C rozładowuje się przez opornik o oporze R .

a) Kiedy ładunek kondensatora zmaleje do połowy początkowej wartości (odpowiedź wyraź przez stałą czasową $\tau = RC$)?

ROZWIĄZANIE:

Ładunek na kondensatorze zmienia się zgodnie ze wzorem (28.36):

$$q = q_0 e^{-t/(RC)},$$

gdzie q_0 jest ładunkiem początkowym. Mamy znaleźć czas t , w którym $q = \frac{1}{2}q_0$, czyli w którym:

$$\frac{1}{2}q_0 = q_0 e^{-t/(RC)}. \quad (28.41)$$

Zauważamy, że poszukiwany czas t występuje w wykładniku i możemy skrócić q_0 . Aby obliczyć czas t ze wzoru (28.41), obliczymy logarytmy naturalne z obydwu stron równania. (Logarytm

naturalny jest funkcją odwrotną do funkcji wykładniczej o podstawie e). Otrzymujemy:

$$\ln \frac{1}{2} = \ln(e^{-t/(RC)}) = -\frac{t}{RC},$$

czyli

$$t = \left(-\ln \frac{1}{2} \right) RC = 0,69 RC = 0,69\tau. \quad (\text{odpowiedź})$$

b) Kiedy energia, zmagazynowana w kondensatorze, zmaleje do połowy początkowej wartości?

ROZWIĄZANIE:

1. Energia E_p , zmagazynowana w kondensatorze, jest związana z ładunkiem q na kondensatorze wzorem (26.21) ($E_p = Q^2/(2C)$).

2. Ładunek maleje zgodnie ze wzorem (28.36). Łącząc te dwie informacje, otrzymujemy:

$$E_p = \frac{q^2}{2C} = \frac{q_0^2}{2C} e^{-2t/(RC)} = E_{p0} e^{-2t/(RC)},$$

gdzie E_{p_0} jest początkową wartością zmagazynowanej energii. Mamy znaleźć czas, w którym $E_p = \frac{1}{2}E_{p_0}$, czyli w którym:

$$\frac{1}{2}E_{p_0} = E_{p_0} e^{-2t/(RC)}.$$

Skracając E_{p_0} i obliczając logarytmy naturalne z obydwu stron, otrzymujemy:

$$\ln \frac{1}{2} = -\frac{2t}{RC},$$

czyli

$$t = -RC \frac{\ln \frac{1}{2}}{2} = 0,35RC = 0,35\tau. \quad (\text{odpowiedź})$$

Potrzeba więcej czasu ($0,69\tau$ w stosunku do $0,35\tau$), aby ładunek zmalał do połowy swej początkowej wartości, niż aby zmagazynowana energia zmalała do połowy swej początkowej wartości. Czy to cię nie dziwi?

Podsumowanie

SEM Źródło SEM wykonuje pracę nad ładunkami, aby utrzymać różnicę potencjałów między biegunami źródła. Jeśli dW jest pracą, wykonaną przez źródło przy przesuwaniu dodatniego ładunku dq od ujemnego do dodatniego bieguna, to **SEM** źródła (praca na jednostkę ładunku) wynosi:

$$\mathcal{E} = \frac{dW}{dq} \quad (\text{definicja SEM}). \quad (28.1)$$

Jednostką SEM w układzie SI, podobnie jak różnicy potencjałów, jest wolt (V). **Doskonałym źródłem SEM** jest źródło nie mające oporu wewnętrznego. Różnica potencjałów między biegunami takiego źródła jest równa SEM. **Rzeczywiste źródło SEM** ma opór wewnętrzny. Różnica potencjałów między jego biegunami jest równa SEM tylko wtedy, gdy przez źródło nie płynie żaden prąd.

Analiza obwodów Zmiana potencjału przy przechodzeniu przez opornik R w kierunku przepływu prądu wynosi $-IR$, a w przeciwnym kierunku $+IR$. Zmiana potencjału przy przechodzeniu przez doskonale źródło SEM w kierunku strzałki SEM wynosi $+\mathcal{E}$, a w przeciwnym $-\mathcal{E}$. Z zasady zachowania energii wynika drugie prawo Kirchhoffa:

Drugie prawo Kirchhoffa. Algebraiczna suma zmian potencjałów przy pełnym obejściu dowolnego oczka musi być równa zeru.

Z zasady zachowania ładunku wynika pierwsze prawo Kirchhoffa:

Pierwsze prawo Kirchhoffa. Suma natężen prądów wpływających do dowolnego węzła musi być równa sumie natężen prądów wypływających z tego węzła.

Obwody o jednym oczku. Natężenie prądu w obwodzie o jednym oczku, zawierającym pojedynczy opornik R i źródło o SEM równej \mathcal{E} i o wewnętrznym oporze r , wynosi:

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R + r}, \quad (28.4)$$

co redukuje się do $I = \mathcal{E}/R$ dla doskonalego źródła SEM o oporze wewnętrznym $r = 0$.

Moc Jeśli rzeczywiste źródło o SEM równej \mathcal{E} i wewnętrznym oporze r wykonuje pracę nad nośnikami ładunku przepływającego przez nią prądu o natężeniu I , to moc źródła (szybkość przekazywania energii nośnikom ładunku) wynosi

$$P = IU, \quad (28.11)$$

gdzie U jest różnicą potencjałów między biegunami źródła. Moc P_r zamiany energii na energię termiczną w źródle wynosi:

$$P_r = I^2 r. \quad (28.13)$$

Szybkość zmiany energii chemicznej P_{SEM} w źródle wynosi:

$$P_{\text{SEM}} = I \mathcal{E}. \quad (28.14)$$

Oporniki połączone szeregowo Jeśli oporniki są połączone szeregowo, to płynie przez nie prąd o tym samym natężeniu. Opór równoważny, który zastępuje układ połączonych szeregowo oporników, wynosi:

$$R_{\text{rw}} = \sum_{j=1}^n R_j \quad (n \text{ oporników połączonych szeregowo}). \quad (28.7)$$

Oporniki połączone równolegle Jeśli oporniki są połączone równolegle, to różnica potencjałów na nich jest taka sama. Opór równoważny, który zastępuje oporniki połączone równolegle, jest określony wzorem:

$$\frac{1}{R_{\text{rw}}} = \sum_{j=1}^n \frac{1}{R_j} \quad (n \text{ oporników połączonych równolegle}). \quad (28.21)$$

Obwody RC Jeśli SEM o wartości \mathcal{E} jest przyłożona do opornika o oporze R i kondensatora o pojemności C połączonych szeregowo, jak na rysunku (28.13), z kluczem w punkcie a , to ładunek na kondensatorze wzrasta zgodnie ze wzorem:

$$q = C\mathcal{E}(1 - e^{-t/(RC)}) \quad (\text{ladowanie kondensatora}), \quad (28.30)$$

w którym $C\mathcal{E} = q_0$ jest stacjonarnym (końcowym) ładunkiem, a $RC = \tau$ jest pojemnościową stałą czasową obwodu. Podczas ładowania natężenie prądu wynosi:

$$I = \frac{dq}{dt} = \left(\frac{\mathcal{E}}{R} \right) e^{-t/(RC)} \quad (\text{ladowanie kondensatora}). \quad (28.31)$$

Jeśli kondensator rozładowuje się przez opornik R , to ładunek na kondensatorze maleje zgodnie ze wzorem:

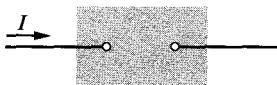
$$q = q_0 e^{-t/(RC)} \quad (\text{rozładowanie kondensatora}). \quad (28.36)$$

Natężenie prądu podczas rozładowywania kondensatora wynosi:

$$I = \frac{dq}{dt} = -\left(\frac{q_0}{RC} \right) e^{-t/(RC)} \quad (\text{rozładowanie kondensatora}). \quad (28.37)$$

Pytania

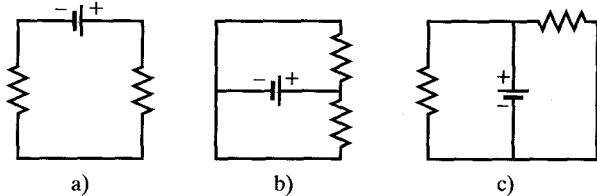
1. Na rysunku 28.15 przedstawiono przepływ prądu o natężeniu I przez źródło. W tabeli podano cztery zestawy wartości: natężenia I oraz SEM ε i oporu wewnętrznego r źródła; podano także polaryzację (orientację biegunów) źródła. Uszereguj układy według mocy przekazywania energii ze źródła do nośników ładunku, zaczynając od największego przekazu do nośników i kończąc na największym przekazie od nośników.



Rys. 28.15. Pytanie 1

| \mathcal{E} | r | I | Polaryzacja |
|---------------|-------------------|-------|-------------|
| (1) | $15\mathcal{E}_1$ | 0 | I_1 |
| (2) | $10\mathcal{E}_1$ | 0 | $2I_1$ |
| (3) | $10\mathcal{E}_1$ | 0 | $2I_1$ |
| (4) | $10\mathcal{E}_1$ | r_1 | $2I_1$ |

2. Czy oporniki w każdym z obwodów na rysunku 28.16 są połączone szeregowo, równolegle, czy w inny sposób?



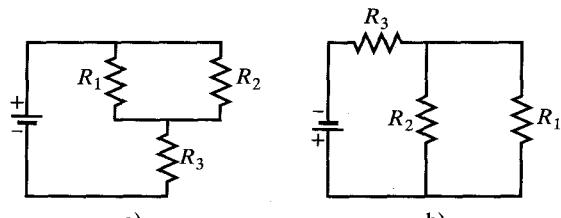
Rys. 28.16. Pytanie 2

3. a) Czy na rysunku 28.17a oporniki R_1 i R_3 są połączone szeregowo? b) Czy oporniki R_1 i R_2 są połączone równolegle? c) Uszereguj równoważne opory czterech obwodów, przedstawionych na rysunku 28.17, zaczynając od największego.

4. a) Czy na rysunku 28.17a różnica potencjałów na oporniku R_2 jest większa, mniejsza, czy równa różnicy potencjałów na oporniku R_1 , jeśli $R_1 > R_2$? b) Czy natężenie prądu płynącego przez opornik R_2 jest większe, mniejsze, czy równe natężeniu prądu płynącego przez opornik R_1 ?

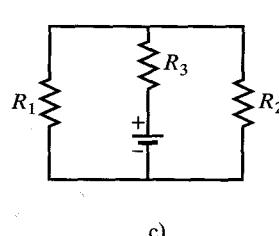
5. Mamy połączyć oporniki R_1 i R_2 , ($R_1 > R_2$), ze źródłem, najpierw pojedynczo, potem szeregowo i na końcu równolegle. Uszereguj te układy według natężenia prądu, płynącego przez źródło, zaczynając od największego.

6. Monstralny labirynt z oporników. Na rysunku 28.18 wszystkie oporniki mają opór 4Ω i wszystkie (doskonałe) źródła mają



a

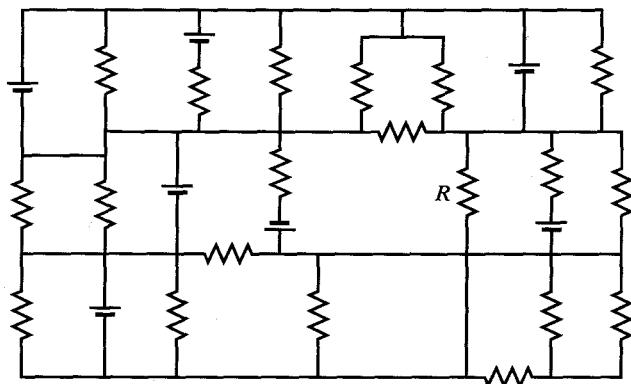
b



c

d

Rys. 28.17. Pytania 3 i 4

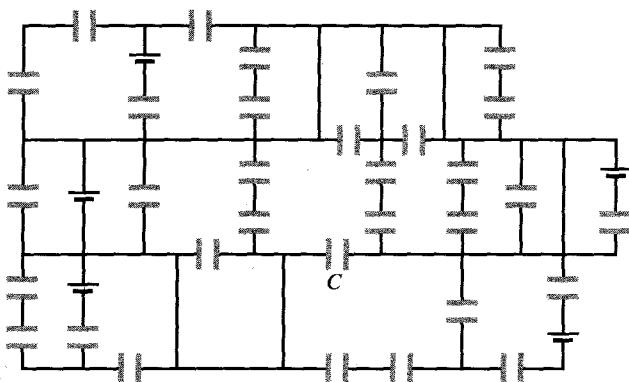


Rys. 28.18. Pytanie 6

SEM 4 V. Ile wynosi natężenie prądu, płynącego przez opornik R ? (Jeśli znajdziesz właściwe oczko w tym labiryncie, to możesz odpowiedzieć na pytanie po kilku sekundach obliczeń w pamięci).

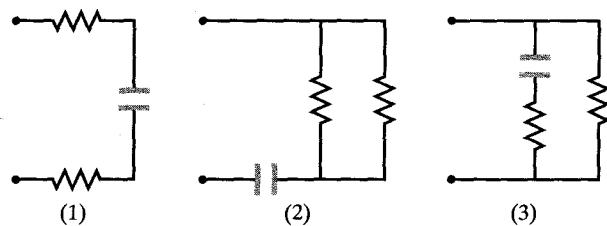
7. Początkowo do źródła podłączono pojedynczy opornik R_1 . Potem dołączono równolegle opornik R_2 . Czy a) różnica potencjałów na oporniku R_1 , b) natężenie prądu I_1 płynącego przez opornik R_1 były większe, mniejsze, czy takie same, jak poprzednio? c) Czy opór równoważny R_{12} dla R_1 i R_2 jest większy, mniejszy, czy równy R_1 ? d) Czy natężenie całkowitego prądu przepływającego przez oporniki R_1 i R_2 jest większe, mniejsze czy równe natężeniu prądu, przepływającego przez opornik R_1 poprzednio?

8. Monstralny labirynt z kondensatorów. Na rysunku 28.19 wszystkie kondensatory mają pojemność $6 \mu\text{F}$ i wszystkie źródła mają SEM 10 V. Ile wynosi ładunek na kondensatorze C ? (Jeśli znajdziesz właściwe oczko w tym labiryncie, to możesz odpowiedzieć na pytanie po kilku sekundach obliczeń w pamięci).



Rys. 28.19. Pytanie 8

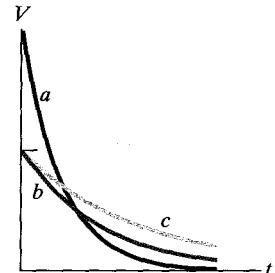
9. Opornik R_1 podłączono do źródła, a następnie dołączono szeregowo opornik R_2 . Czy a) różnica potencjałów na oporniku R_1 , b) natężenie prądu I_1 , przepływającego przez opornik R_1 są teraz większe, mniejsze, czy takie same, jak poprzednio? c) Czy opór równoważny R_{12} dla R_1 i R_2 jest większy, mniejszy czy równy oporowi R_1 ?



Rys. 28.20. Pytanie 10

10. Na rysunku 28.20 przedstawiono trzy fragmenty obwodu, które kolejno będą podłączane do tego samego źródła przez klucz, jak na rysunku 28.13. Wszystkie oporniki są identyczne, podobnie jak kondensatory. Uszereguj fragmenty według wartości: a) końcowego (stacjonarnego) ładunku na kondensatorze, b) czasu, potrzebnego do osiągnięcia przez kondensator 50% jego końcowego ładunku, zaczynając od wartości największych.

11. Na rysunku 28.21 przedstawiono wykresy $U(t)$ dla trzech kondensatorów, które rozładowują się (oddzielnie) przez ten sam opornik. Uszereguj wykresy według pojemności kondensatorów, zaczynając od największej.



Rys. 28.21. Pytanie 11

Zadania

www Rozwiązań jest dostępne na stronie internetowej podręcznika: <http://www.wiley.com/college/hrw>
ilw Rozwiązań jest dostępne w postaci interaktywnej, wykorzystującej oprogramowanie Interactive Learning-Ware (na tej samej stronie)

28.5. Różnica potencjałów

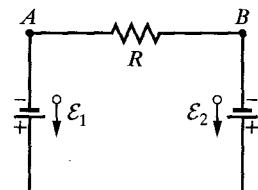
1. Standardowa bateria do latarki może dostarczyć około 2 Wh energii, zanim się rozładowuje. a) Jaki będzie koszt działania żarówki 100 W przez 8 h, przy zastosowaniu takich baterii, jeśli jedna bateria kosztuje 3 zł? b) Jaki jest ten koszt, jeśli energia jest dostarczana w cenie 0,3 zł za kilowatogodzinę?

2. Prąd o natężeniu 5 A płynął przez obwód z akumulatorem o SEM równej 6 V. O ile zmniejszyła się energia chemiczna akumulatora?

3. Pewien akumulator samochodowy o SEM równej 12 V ma początkowy ładunek 120 Ah (nazywany potocznie „pojemnością”

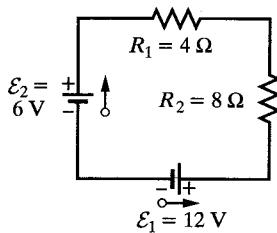
akumulatora). Oblicz jak długo może on dostarczać energii z mocą 100 W, przyjmując, że różnica potencjałów na biegunach akumulatora pozostaje stała, aż do całkowitego rozładowania akumulatora.

4. Na rysunku 28.22 $\mathcal{E}_1 = 12 \text{ V}$ i $\mathcal{E}_2 = 8 \text{ V}$. a) Jaki jest kierunek prądu, płynącego przez opornik? b) Które źródło wykonuje dodatnią pracę? c) Który punkt, A czy B, ma większy potencjał?



Rys. 28.22. Zadanie 4

5. Założymy, że źródła na rysunku 28.23 mają zaniedbywalne opory wewnętrzne. Znajdź: a) natężenie prądu w obwodzie, b) moc z jaką energia jest zamieniana na energię termiczną w każdym oporniku, c) moc każdego źródła ze stwierdzeniem, czy energia jest dostarczana, czy absorbowana przez źródło.



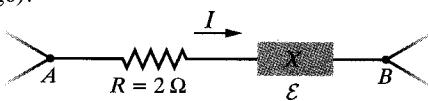
Rys. 28.23. Zadanie 5

6. Przewodnik o oporze 5Ω jest połączony ze źródłem, którego SEM wynosi 2 V , a opór wewnętrzny 1Ω . a) Ile energii przekształca się z chemicznej w elektryczną w ciągu 2 minut , b) ile energii wydziela się w przewodniku w postaci energii termicznej w tym samym czasie? c) Wyjaśnij, dlaczego odpowiedzi na pytania (a) i (b) są różne.

7. Akumulator samochodowy o SEM równej 12 V i oporze wewnętrznym $0,04 \Omega$ jest ładowany prądem o natężeniu 50 A . a) Ile wynosi różnica potencjałów na jego biegunkach? b) Ile wynosi moc, z jaką energia zamienia się na energię termiczną w akumulatorze? c) Ile wynosi moc przekształcania energii elektrycznej w energię chemiczną? d) Jakie będą odpowiedzi na pytania (a) i (b), gdy akumulator będzie dostarczać prąd o natężeniu 50 A do rozrusznika silnika?

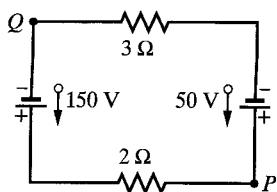
8. Przyjmij, że na rysunku 28.4a $\mathcal{E} = 2 \text{ V}$ i $r = 100 \Omega$. Wykreśl: a) natężenie prądu, b) różnicę potencjałów na oporniku w zależności od R w przedziale od 0 do 500Ω . Obydwa wykresy zrób na tym samym rysunku. c) Zrób trzeci wykres przez pomnożenie dla różnych wartości R odpowiednich współrzędnych dwóch wykreślonych krzywych. Jaki jest sens fizyczny tego trzeciego wykresu?

9. Na rysunku 28.24 część AB obwodu absorbuje energię z mocą 50 W przy przepływie prądu o natężeniu $I = 1 \text{ A}$ we wskazanym kierunku. a) Ile wynosi różnica potencjałów między A i B ? b) Ile wynosi SEM źródła X , jeśli nie ma ono oporu wewnętrznego? c) Jaka jest jego *polaryzacja* (położenie biegunków dodatniego i ujemnego)?



Rys. 28.24. Zadanie 9

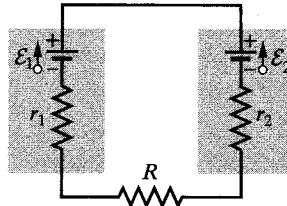
10. Ile wynosi potencjał w punkcie Q obwodu na rysunku 28.25, jeśli potencjał w punkcie P wynosi 100 V ?



Rys. 28.25. Zadanie 10

11. Oblicz różnicę potencjałów między punktami a i c na rys. 28.6a, rozważając odcinek z R , r_1 i \mathcal{E}_1 .

12. a) Jaką wartość musi mieć opór R na rys. 28.26, jeśli prąd w obwodzie ma mieć natężenie 1 mA ? Przyjmij wartości: $\mathcal{E}_1 = 2 \text{ V}$, $\mathcal{E}_2 = 3 \text{ V}$ i $r_1 = r_2 = 3 \Omega$. b) Z jaką mocą rozpraszają się energią w oporniku?



Rys. 28.26. Zadanie 12

13. Natężenie prądu w obwodzie o jednym oczku z jednym opornikiem R wynosi 5 A . Po szeregowym podłączeniu do R dodatkowego opornika o oporze 2Ω natężenie prądu zmalało do 4 A . Ile wynosi opór R ?

14. Uruchamiany silnik samochodu obraca się zbyt wolno i mechanik musi zdecydować, czy wymienić silnik, przewód, czy akumulator. Według instrukcji producenta opór wewnętrzny akumulatora 12 V nie powinien być większy niż $0,02 \Omega$, opór silnika większy niż $0,2 \Omega$ i opór przewodu większy niż $0,04 \Omega$. Mechanik włączył silnik i zmierzył natężenie prądu 50 A i różnicę potencjałów $11,4 \text{ V}$ na akumulatorze oraz 3 V na przewodzie. Która część jest wadliwa?

15. Dwa źródła, mające tę samą SEM, ale różne opory wewnętrzne r_1 i r_2 ($r_1 > r_2$), są połączone szeregowo ze sobą i z zewnętrznym opornikiem R . a) Wyznacz wartość R , która daje zerową różnicę potencjałów na biegunkach jednego źródła. b) Które to jest źródło?

16. Ogniwko słoneczne wytwarza różnicę potencjałów $0,1 \text{ V}$, gdy jest do niego podłączony opornik o oporze 500Ω , i różnicę potencjałów $0,15 \text{ V}$, gdy opornik ma opór 1000Ω . Ile wynosi: a) opór wewnętrzny, b) SEM ogniwka słonecznego? c) Pole powierzchni ogniwka wynosi 5 cm^2 i moc absorbowanej energii światowej na jednostkę powierzchni wynosi 2 mW/cm^2 . Ile wynosi sprawność ogniwka, przekształcającego energię światową na energię termiczną w zewnętrznym oporniku o oporze 1000Ω ?

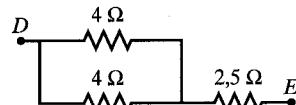
17. a) Wykaż, że na rysunku 28.4a szybkość zamiany energii w oporniku R na energię termiczną jest maksymalna, gdy $R = r$. b) Wykaż, że ta maksymalna moc wynosi $P = \mathcal{E}^2/(4r)$.

28.6. Obwody o wielu oczkach

18. Przy zastosowaniu tylko dwóch oporników — włączonych pojedynczo lub połączonych szeregowo albo równolegle — możemy otrzymać opory $3, 4, 12$ i 16Ω . Jakie opory mają te dwa oporniki?

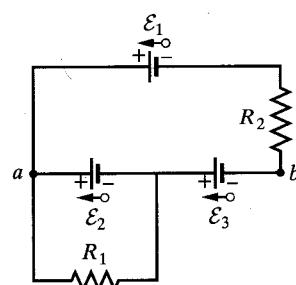
19. Cztery oporniki o oporach 18Ω połączono równolegle i dołączono do doskonalego źródła o SEM równej 25 V . Ile wynosi natężenie prądu płynącego przez źródło?

20. Znajdź opór równoważny między punktami D i E na rys. 28.27. (Wskazówka: Wyobraź sobie, że do punktów D i E dołączone jest źródło).



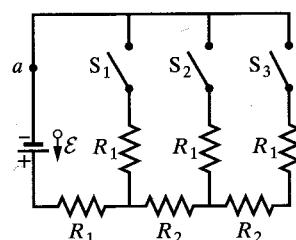
Rys. 28.27. Zadanie 20

21. Znajdź natężenie prądu, płynącego przez każdy opornik i różnicę potencjałów między punktami a i b na rysunku 28.28. Przyjmij $\mathcal{E}_1 = 6 \text{ V}$, $\mathcal{E}_2 = 5 \text{ V}$, $\mathcal{E}_3 = 4 \text{ V}$, $R_1 = 100 \Omega$ i $R_2 = 50 \Omega$.



Rys. 28.28. Zadanie 21

22. Na rysunku 28.29 przedstawiono obwód z trzema klawiszami, oznaczonymi przez S_1 , S_2 i S_3 . Znajdź natężenie prądu w punkcie a dla wszystkich możliwych kombinacji ustawień kluczy. Przyjmij $\mathcal{E} = 120 \text{ V}$, $R_1 = 20 \Omega$ i $R_2 = 10 \Omega$. Załóż, że bateria nie ma oporu wewnętrznego.



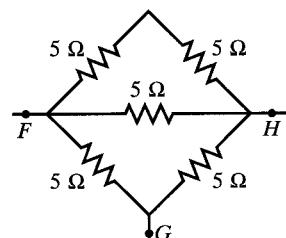
Rys. 28.29. Zadanie 22

23. Dwie żarówki, jedna o oporze R_1 i druga o oporze R_2 , gdzie $R_1 > R_2$, są podłączone do źródła: a) równolegle, b) szeregowo. Która żarówka świeci jaśniej w każdym przypadku?

24. Oblicz różnicę potencjałów między punktami c i d na rysunku 28.7, po przeanalizowaniu wszystkich możliwych dróg. Przyjmij $\mathcal{E}_1 = 4 \text{ V}$, $\mathcal{E}_2 = 1 \text{ V}$, $R_1 = R_2 = 10 \Omega$ i $R_3 = 5 \Omega$.

25. Dziewięć drutów miedzianych o długości l i średnicy d połączono równolegle, tak że tworzą jeden złożony przewodnik o oporze R . Jaka musi być średnica D pojedynczego drutu miedzianego o długości l , jeśli ma on mieć taki sam opór?

26. Oblicz równoważny opór między punktami: a) F i H . b) F i G na rysunku 28.30. (Wskazówka: Wyobraź sobie dla każdej pary punktów, że podłączone jest do nich źródło).

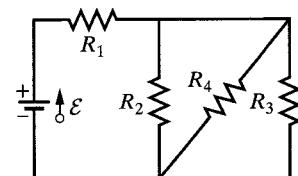


Rys. 28.30. Zadanie 26

27. Masz kilka oporników 10Ω , w każdym z nich może wydzieć się energia termiczna z mocą 1 W bez ich zniszczenia. Jaka jest minimalna liczba takich oporników, aby przy ich połącze-

niu szeregowym lub równoległy uzyskać opór 10Ω , w którym energia termiczna może się wydzieć z mocą przynajmniej 5 W ?

28. a) Ile wynosi równoważny opór sieci, przedstawionej na rysunku 28.31?

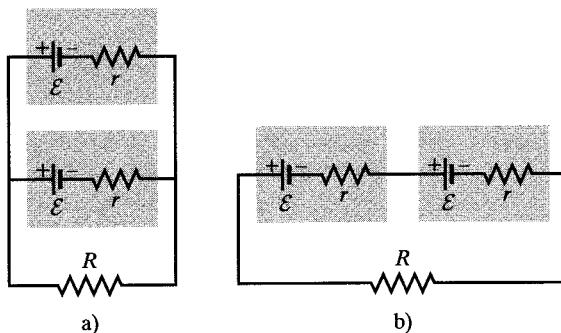


Rys. 28.31. Zadanie 28

b) Ile wynosi natężenie prądu, płynącego przez każdy opornik? Przyjmij, że źródło jest doskonałe oraz $R_1 = 100 \Omega$, $R_2 = R_3 = 50 \Omega$, $R_4 = 75 \Omega$ i $\mathcal{E} = 6 \text{ V}$.

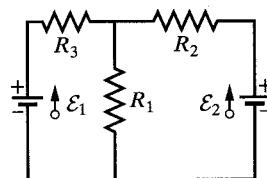
29. Dwa źródła o SEM równej \mathcal{E} i oporze wewnętrznym r są połączone równolegle i jest do nich dołączony opornik o oporze R (rys. 28.32a). a) Dla jakiej wartości R moc, z jaką energia elektryczna w oporniku zamienia się na energię termiczną, jest maksymalna? b) Ile wynosi ta maksymalna moc?

30. Dwa źródła o SEM równej \mathcal{E} i oporze wewnętrznym r mogą być połączone albo równolegle (jak na rysunku 28.32a), albo szeregowo (jak na rysunku 28.32b), aby wytworzyć prąd w oporniku R . a) Wyprowadź wyrażenia na natężenie prądu, płynącego przez opornik R dla obydwu konfiguracji. Dla której z nich natężenie prądu będzie większe, gdy: b) $R > r$, c) $R < r$?



Rys. 28.32. Zadania 29 i 30

31. Na rysunku 28.33 $\mathcal{E}_1 = 3 \text{ V}$, $\mathcal{E}_2 = 1 \text{ V}$, $R_1 = 5 \Omega$, $R_2 = 2 \Omega$, $R_3 = 4 \Omega$ i oba źródła są doskonałe. Jaka jest moc zamiany energii na energię termiczną w: a) R_1 , b) R_2 , c) R_3 ? Jaka jest moc źródła d) \mathcal{E}_1 , e) \mathcal{E}_2 ?



Rys. 28.33. Zadanie 31

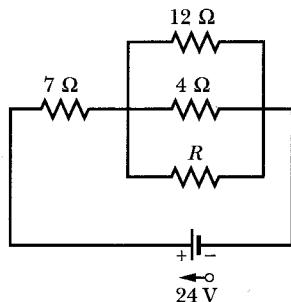
32. Dla jakiej wartości R w obwodzie na rysunku 28.34 z doskonałym źródłem moc źródła: a) wyniesie 60 W , b) będzie maksymalna?

malna, c) będzie minimalna?
d) Jaka jest ta maksymalna i minimalna moc?

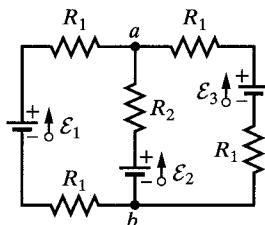
33. a) Oblicz natężenie prądu, płynącego przez każde źródło doskonałe na rysunku 28.35. Przyjmij $R_1 = 1 \Omega$, $R_2 = 2 \Omega$, $\mathcal{E}_1 = 2 \text{ V}$ i $\mathcal{E}_2 = \mathcal{E}_3 = 4 \text{ V}$. b) Oblicz $V_a - V_b$.

34. W obwodzie na rysunku 28.36 SEM ma stałą wartość, a opór R można zmieniać. Znajdź wartość R , dla której w tym oporniku wydziela się najwięcej energii termicznej. Źródło jest doskonałe.

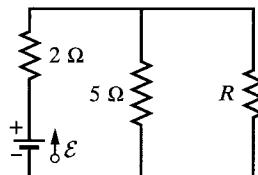
35. Drut miedziany o promieniu $a = 0,25 \text{ mm}$ ma płaszcz aluminiowy o zewnętrznym promieniu $b = 0,38 \text{ mm}$. a) W tym złożonym przewodzie płynie prąd o natężeniu $I = 2 \text{ A}$. Korzystając z tabeli 27.1, oblicz natężenie prądu w każdym z materiałów. b) Jaka jest długość tego złożonego przewodu, jeśli prąd jest wytworzany przez różnicę potencjałów $U = 12 \text{ V}$ na końcach przewodu?



Rys. 28.34. Zadanie 32



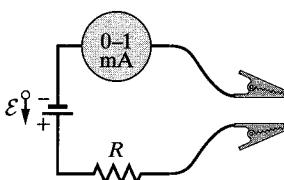
Rys. 28.35. Zadanie 33



Rys. 28.36. Zadanie 34

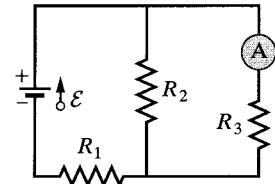
28.7. Amperomierz i woltomierz

36. Na rysunku 28.37 przedstawiono prosty omomierz, skonstruowany przez połączenie szeregowo baterii $1,5 \text{ V}$ (od latarki), opornika R i amperomierza o zakresie od 0 do 1 mA . Opór R jest tak dobrany, że przy zwarciu zacisków miernik wskazuje maksymalne natężenie 1 mA . Jakiemu zewnętrznemu oporowi między zaciskami odpowiada wskazanie: a) $0,1 \text{ mA}$, b) $0,5 \text{ mA}$, c) $0,9 \text{ mA}$? d) Jaka jest wartość R , jeśli amperomierz ma opór 20Ω i opór wewnętrzny źródła jest zaniedbywalny?



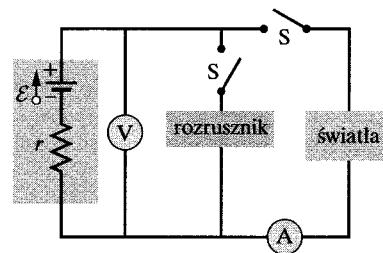
Rys. 28.37. Zadanie 36

37. a) Określ wskazanie amperomierza na rysunku 28.38, jeśli $\mathcal{E} = 5 \text{ V}$ (i źródło jest doskonałe), $R_1 = 2 \Omega$, $R_2 = 4 \Omega$ i $R_3 = 6 \Omega$. b) Zamieniono teraz położenie amperomierza i źródła SEM. Wykaż, że wskazania amperomierza się nie zmienią.



Rys. 28.38. Zadanie 37

38. Gdy włączono światła samochodu, woltomierz wskazał na nich różnicę potencjałów 12 V , a podłączony szeregowo amperomierz wskazał natężenie 10 A (rys. 28.39). Gdy następnie włączono rozrusznik, wskazanie amperomierza zmalało do 8 A i światła przyciemniły się nieco. Jakie są: a) SEM akumulatora, b) natężenie prądu płynącego przez rozrusznik przy zapalonych światłach, jeśli opór wewnętrzny akumulatora wynosi $0,05 \Omega$, a opór amperomierza jest znikomo mały?



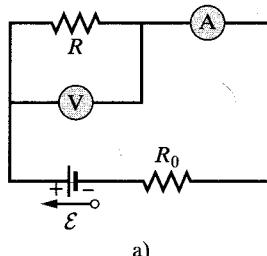
Rys. 28.39. Zadanie 38

39. Na rysunku 28.12 przyjmij $\mathcal{E} = 3 \text{ V}$, $r = 100 \Omega$, $R_1 = 250 \Omega$ i $R_2 = 300 \Omega$. Jaki błąd (w procentach) wprowadza do pomiaru różnicy potencjałów na oporniku R_1 fakt, że opór woltomierza $R_V = 5 \text{ k}\Omega$? Zaniedbij obecność amperomierza.

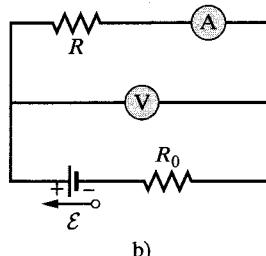
40. Do obwodu włączono woltomierz (o oporze R_V) i amperomierz (o oporze R_A), aby zmierzyć opór R (rys. 28.40a). Opór jest określony wzorem $R = U/I$, gdzie U jest wskazaniem woltomierza, a I jest natężeniem prądu, przepływającego przez opornik R . Amperomierz rejestruje prąd o natężeniu I' , lecz część tego prądu przepływa przez woltomierz, tak że stosunek wskazań mierników ($= U/I'$) daje tylko przybliżoną wartość oporu R' . Wykaż, że R i R' są powiązane wzorem:

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R'} - \frac{1}{R_V}.$$

Zwrócić uwagę, że $R' \rightarrow R$, gdy $R_V \rightarrow \infty$.



a)



b)

Rys. 28.40. Zadania 40–42

41. Jeśli amperomierz i woltomierz mają zostać zastosowane do pomiaru oporu (zob. zadanie 40), to mogą być także połączone jak na rysunku 28.40b. Znów stosunek wskazań mierników daje tylko przybliżony opór R'' . Wykaż, że R'' jest powiązane z R wzorem:

$$R = R'' - R_A,$$

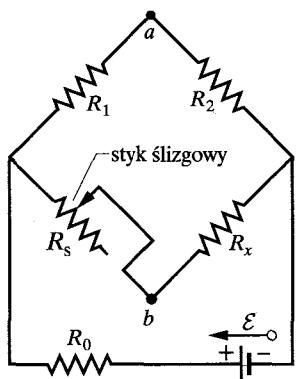
gdzie R_A jest oporem amperomierza. Zwróć uwagę, że $R'' \rightarrow R$, gdy $R_A \rightarrow 0$.

42. (Zob. zadania 40 i 41). Na rysunku 28.40 opory amperomierza i woltomierza wynoszą odpowiednio 3Ω i 300Ω . Przyjmij $\mathcal{E} = 12\text{ V}$ dla doskonałego źródła i $R_0 = 100\Omega$. a) Jakie będą wskazania mierników dla dwóch różnych połączeń (rysunki 28.40a i b), jeśli $R = 85\Omega$? b) Ile wyniesie przybliżona wartość oporu R , jaką otrzymamy w każdym z tych przypadków?

43. Na rysunku 28.41 opór R_s dobieramy przez przesuwanie styku ślimakowego tak, aby punkty a i b uzyskały ten sam potencjał. (Warunek ten można sprawdzić przez podłączenie na chwilę do punktów a i b czułego amperomierza; jeśli te punkty mają ten sam potencjał, to wskazówka amperomierza się nie wychyli). Wykaż, że w takim ustawieniu zachodzi związek:

$$R_x = R_s \left(\frac{R_2}{R_1} \right).$$

Układ ten, zwany mostkiem Wheatstone'a, pozwala zmierzyć nieznany opór (R_x), gdy znamy opór wzorcowy (R_s).



Rys. 28.41. Zadanie 43

28.8. Obwody RC

44. Kondensator o początkowym ładunku q_0 rozładowuje się przez opornik. Po jakim czasie ładunek kondensatora zmniejszy się o: a) jedną trzecią początkowego ładunku, b) dwie trzecie początkowego ładunku? Wynik wyraź przez stałą czasową τ .

45. Ile stałych czasowych musi minąć, aby początkowo nienalożony kondensator w obwodzie szeregowym RC naładował się do 99% ładunku stacjonarnego?

46. W obwodzie szeregowym RC mamy $\mathcal{E} = 12\text{ V}$, $R = 1,4\text{ M}\Omega$ i $C = 1,8\text{ }\mu\text{F}$. a) Oblicz stałą czasową obwodu. b) Znajdź

maksymalny ładunek, jaki znajdzie się na kondensatorze podczas ładowania. c) Jak długo będzie ładować się kondensator do ładunku $16\text{ }\mu\text{C}$?

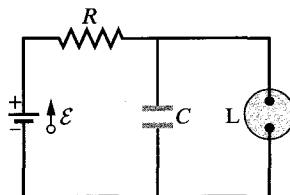
47. Opornik o oporze $15\text{ k}\Omega$ i kondensator zostały połączone szeregowo i następnie nagle przyłożono do nich różnicę potencjałów 12 V . Różnica potencjałów na kondensatorze wzrosła do 5 V w ciągu $1,3\text{ }\mu\text{s}$. a) Oblicz stałą czasową obwodu. b) Znajdź pojemność kondensatora.

48. Wyobraź sobie, że masz niedoskonały kondensator, w którym ładunek przepływa z jednej okładki do drugiej. Różnica potencjałów między okładkami tego kondensatora o pojemności $2\text{ }\mu\text{F}$ spada do jednej czwartej początkowej wartości w ciągu 2 s . Jaki jest wobec tego opór obszaru między jego okładkami?

49. Opornik o oporze $3\text{ M}\Omega$ i kondensator o pojemności $1\text{ }\mu\text{F}$ połączono ze sobą szeregowo i w pewnej chwili dołączono do doskonałego źródła o SEM $\mathcal{E} = 4\text{ V}$. Jakie po upływie 1 s od połączenia są szybkości: a) wzrostu ładunku na kondensatorze, b) wzrostu energii kondensatora, c) wydzielania się energii termicznej w oporniku, d) dostarczania energii przez źródło?

50. Nienalożony początkowo kondensator C zostaje całkowicie nafładowany ze źródła SEM połączonym szeregowo z opornikiem o oporze R . a) Wykaż, że końcowa energia zmagazynowana w kondensatorze jest równa połowie energii dostarczonej przez źródło SEM. b) Przez scałkowanie wielkości I^2R po czasie ładowania wykaż, że energia rozproszona w postaci energii termicznej w oporniku stanowi także połowę energii dostarczanej przez źródło SEM.

51. Kondensator, na którym początkowa różnica potencjałów wynosi 100 V , rozładowuje się przez opornik po zamknięciu klucza w chwili $t = 0$. W chwili $t = 10\text{ s}$ różnica potencjałów na kondensatorze wynosi 1 V . a) Jaka jest stała czasowa obwodu? b) Jaka jest różnica potencjałów na kondensatorze w chwili $t = 17\text{ s}$?



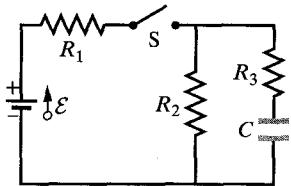
Rys. 28.42. Zadanie 52

52. Na rysunku 28.42 przedstawiono obwód lampy migającej (podobnej do lamp ostrzegawczych w rejonie prac drogowych). Lampa jarzeniowa L (o zniskomo małej pojemności) jest podłączona równolegle do kondensatora C obwodu RC . Prąd płynie przez lampa tylko wtedy, gdy różnica potencjałów na niej osiąga napięcie przebicia U_L ; w tym przypadku kondensator rozładowuje się całkowicie przez lampa i lampa świeci przez krótki czas. Założmy, że potrzebne są dwa błyski na sekundę. Jaki powinien być

opór R dla lampy o napięciu przebicia $U_L = 72$ V, podłączonej do doskonałego źródła o SEM równej 95 V i kondensatora o pojemności $0,15 \mu\text{F}$?

53. Kondensator o pojemności $1 \mu\text{F}$, w którym początkowo zamagazynowano energię $0,5 \text{ J}$, rozładowuje się przez opornik o oporze $1 \text{ M}\Omega$. a) Ile wynosi początkowy ładunek na kondensatorze? b) Ile wynosi natężenie prądu płynącego przez opornik, gdy zaczyna się rozładowanie? c) Oblicz różnice potencjałów U_C na kondensatorze i U_R na oporniku, w zależności od czasu. d) Wyznacz szybkość wytwarzania energii termicznej, w zależności od czasu.

54. Kontroler gry elektronicznej składa się z opornika o zmiennym oporze, połączonego z okładkami kondensatora o pojemności $0,22 \mu\text{F}$. Kondensator jest ładowany do 5 V , a następnie rozładowywany przez opornik. Czas zmniejszenia się różnicy potencjałów na okładkach do $0,8 \text{ V}$ jest mierzony przez zegar w grze. Jaki musi być zakres zmienności oporu opornika, aby uzyskać czasy rozładowania z przedziału od $10 \mu\text{s}$ do 6 ms ?



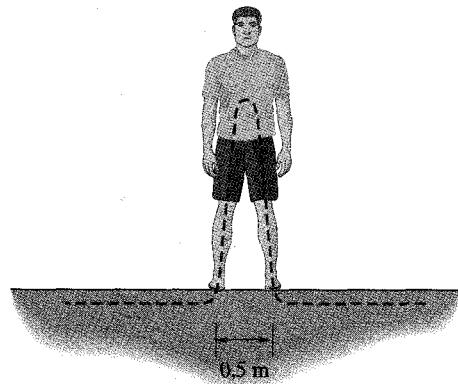
Rys. 28.43. Zadanie 55

55*. W obwodzie na rysunku 28.43 $\mathcal{E} = 1,2 \text{ kV}$, $C = 6,5 \mu\text{F}$, $R_1 = R_2 = R_3 = 0,73 \text{ M}\Omega$. Przy całkowicie rozładowanym kondensatorze zamknięto nagle klucz S (w chwili $t = 0$). a) Wyznacz natężenie prądu w każdym oporniku w chwili $t = 0$ i dla $t \rightarrow \infty$. b) Naszkicuj wykres różnicy potencjałów U_2 na oporniku R_2 jako funkcji czasu, od $t = 0$ do $t = \infty$. c) Jakie są liczbowe wartości

U_2 w chwili $t = 0$ i dla $t \rightarrow \infty$? d) Jaki jest w tym przypadku sens fizyczny określenia „ $t \rightarrow \infty$ ”?

Zadanie dodatkowe

56. *Atak serca czy porażenie prądem elektrycznym?* Historię tę zaczęliśmy opowiadać w zadaniu 45 w rozdziale 27. Na rysunku 28.44 przedstawiono drogę przepływu prądu elektrycznego, od jednej stopy ofiary w góre, przez tułów (w tym serce) i w dół przez drugą stopę. a) Na podstawie danych znajdź różnicę potencjałów między stopami mężczyzny, jeśli jedna stopa była $0,5 \text{ m}$ bliżej wsparnika niż druga. b) Załóż, że opór stopy na mokrej glebie ma typową wartość 300Ω , a opór tułowia powszechnie przyjmowaną wartość 1000Ω . Znajdź natężenie prądu, płynącego przez tułów ofiary. c) Migotanie komórek serca człowieka może nastąpić pod wpływem przepływu przez tułów prądu o natężeniu od $0,1 \text{ A}$ do 1 A . Czy prąd upływu ze wsparnika mógł wywołać migotanie komórek serca ofiary?



Rys. 28.44. Zadanie 56

29 Pole magnetyczne

Jeśli ciemną nocą spojrzysz na niebo w pobliżu koła podbiegunowego, to być może zobaczysz na tle nieba bajeczną, świętlistą zasłonę, zwaną zorzą polarną. Nie jest to zjawisko lokalne; zorza może rozciągać się nad Ziemią łukiem o wysokości kilkuset kilometrów i o długości kilku tysięcy kilometrów, lecz grubość zorzy jest mniejsza niż 1 km.

Jaka jest przyczyna tego zjawiska i co powoduje, że zorza jest tak cienka?

Odpowiedź znajdziesz w tym rozdziale.



29.1. Pole magnetyczne

Mówiliśmy poprzednio, że naładowany pręt z plastiku wytwarza wektorowe pole elektryczne, we wszystkich punktach otaczającej go przestrzeni. W podobny sposób magnes wytwarza wektorowe **pole magnetyczne**, we wszystkich punktach otaczającej go przestrzeni. Z polem magnetycznym stykasz się, przyczepiając kartkę z notatkami do drzwi lodówki za pomocą małego magnesu lub przypadkowo wymazując zawartość dyskietki, podczas zbliżania jej do magnesu. Magnes działa na drzwi lub na dyskietkę *za pośrednictwem* swojego pola magnetycznego.

W dobrze znanym rodzaju magnesu — w **elektromagnesie** — prąd elektryczny jest przepuszczany przez cewkę z drutu, nawiniętą na rdzeń z żelaza; o tym, jak silne jest pole magnetyczne, decyduje wartość natężenia prądu. W przemyśle takich elektromagnesów używa się między innymi do sortowania złomu. Prawdopodobnie częściej spotykasz **magnesy trwałe**, które nie wymagają prądu elektrycznego do wytworzenia pola magnetycznego, na przykład magnesy, używane do przyczepiania karteczek na drzwiach lodówki.

W rozdziale 23 dowiedziałeś się, że *ładunek elektryczny* wytwarza pole elektryczne, które z kolei może oddziaływać na inne ładunki elektryczne. Teraz mamy podstawy oczekiwania, że *ładunek magnetyczny* wytwarza pole magnetyczne, które następnie może oddziaływać na inne ładunki magnetyczne. Chociaż takie ładunki magnetyczne, nazywane *monopolami magnetycznymi*, są przewidywane w niektórych teoriach, to ich istnienie nie zostało dotychczas potwierdzone.

Jak zatem wytworzyć pole magnetyczne? Można to zrobić dwoma sposobami. 1) Naładowane elektrycznie cząstki, poruszające się w postaci prądu elektrycznego w przewodniku, wytwarzają pole magnetyczne. 2) Cząstki elementarne, np. elektrony, wytwarzają swoje *własne* pole magnetyczne, które jest podstawową cechą tych cząstek, podobnie jak ich masa i ładunek elektryczny (lub jego brak). Jak zobaczyłeś w rozdziale 32, pola magnetyczne elektronów w niektórych materiałach sumują się, wytwarzając wokół nich wypadkowe pole magnetyczne. Takie zjawisko występuje w magnesach trwałych (co jest korzystne, gdyż magnesy mogą utrzymywać karteczki z notatkami na drzwiach lodówki). W innych materiałach pola magnetyczne wszystkich elektronów wzajemnie się znoszą, nie wytwarzając na zewnątrz wypadkowego pola magnetycznego. Takie zjawisko występuje w substancjach, z których składa się twoje ciało (co jest również korzystne, gdyż w przeciwnym razie mógłbyś uderzać się o drzwi lodówki, ilekroć przechodziłbyś obok niej).

Z doświadczenia wiemy, że jeśli naładowana cząstka (pojedyncza lub będąca nośnikiem prądu elektrycznego) porusza się w polu magnetycznym, to na tę cząstkę działa siła, wynikająca z istnienia pola. W tym rozdziale zajmiemy się przede wszystkim związkiem między polem magnetycznym a tą siłą.

29.2. Definicja wektora \vec{B}

Natężenie pola elektrycznego \vec{E} w pewnym punkcie określiliśmy, umieszczając w tym punkcie cząstkę próbную o ładunku q , pozostającą w spoczynku, i mierząc

się elektryczną \vec{F}_E , działającą na tę cząstkę. Następnie zdefiniowaliśmy \vec{E} jako:

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}_E}{q}. \quad (29.1)$$

Gdyby istniały monopole magnetyczne, moglibyśmy w podobny sposób zdefiniować wektor \vec{B} , będący miarą tego, jak silne jest pole magnetyczne. Jednak takie cząstki nie zostały odkryte, dlatego też musimy określić \vec{B} inaczej, w zależności od siły \vec{F}_B , działającej na poruszającą się naładowaną cząstkę próbną.

Teoretycznie moglibyśmy to zrobić, wystrzelując naładowaną cząstkę tak, aby przechodziła w różnych kierunkach i z różnymi prędkościami przez punkt, w którym mamy zdefiniować wektor \vec{B} . Następnie moglibyśmy zmierzyć siłę \vec{F}_B , działającą na cząstkę w tym punkcie. Po wielu takich próbach okazałoby się, że siła \vec{F}_B jest równa zeru, gdy wektor prędkości cząstki \vec{v} jest skierowany wzdłuż pewnej wyróżnionej osi. Dla wszystkich innych kierunków wektora prędkości \vec{v} wartość siły \vec{F}_B jest zawsze proporcjonalna do $v \sin \phi$, gdzie ϕ jest kątem między wyróżnioną osią a kierunkiem \vec{v} . Ponadto kierunek siły \vec{F}_B jest zawsze prostopadły do kierunku wektora prędkości \vec{v} . (Te wyniki wskazują, że mamy do czynienia z iloczynem wektorowym).

Możemy zatem zdefiniować wielkość \vec{B} , która nazywa się indukcją magnetyczną danego pola, jako wielkość wektorową, skierowaną wzdłuż wyróżnionej osi, na której siła działająca na cząstkę jest równa zeru. Możemy następnie zmierzyć wartość siły \vec{F}_B , gdy wektor prędkości \vec{v} jest skierowany prostopadle do tej osi i zdefiniować wartość bezwzględną B , w zależności od wartości siły:

$$B = \frac{F_B}{|q|v},$$

gdzie q jest ładunkiem cząstki.

Wszystkie dotychczasowe wyniki mogą być zebrane w postaci równania wektorowego:

$$\vec{F}_B = q\vec{v} \times \vec{B}, \quad (29.2)$$

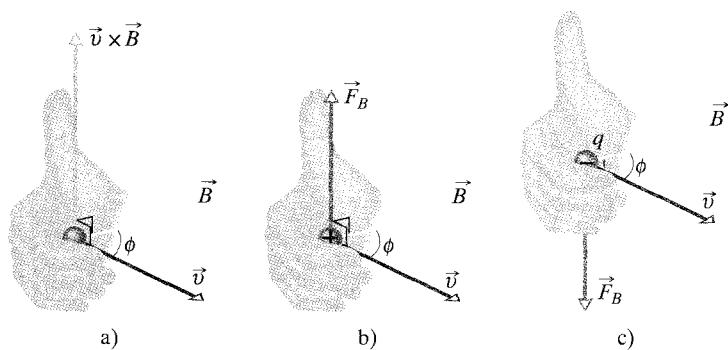
zgodnie z którym siła \vec{F}_B działająca na cząstkę (nosząca nazwę siły Lorentza), jest równa ładunkowi cząstki pomnożonemu przez iloczyn wektorowy jej prędkości \vec{v} i indukcji magnetycznej \vec{B} (wszystkie wielkości są mierzone w tym samym układzie odniesienia). Korzystając z równania (3.20) określającego iloczyn wektorowy, możemy zapisać wartość \vec{F}_B jako:

$$F_B = |q|vB \sin \phi, \quad (29.3)$$

gdzie ϕ oznacza kąt między kierunkami wektorów prędkości \vec{v} i indukcji magnetycznej \vec{B} .

Wyznaczanie siły działającej na cząstkę w polu magnetycznym

Z równania (29.3) wynika, że wartość siły \vec{F}_B , działającej na cząstkę w polu magnetycznym jest proporcjonalna do ładunku q i wartości prędkości v cząstki.



Rys. 29.1. a) Reguła prawej dłoni pozwala określić kierunek $\vec{v} \times \vec{B}$ zgodny z kierunkiem kciuka, jeżeli obracamy wektor \vec{v} w stronę wektora \vec{B} o mniejszy kąt ϕ między tymi wektorami. b) Jeżeli ładunek q jest dodatni, to kierunek siły $\vec{F}_B = q\vec{v} \times \vec{B}$ jest zgodny z kierunkiem $\vec{v} \times \vec{B}$. c) Jeżeli ładunek q jest ujemny, to kierunek siły \vec{F}_B jest przeciwny do kierunku $\vec{v} \times \vec{B}$

Tak więc siła jest równa零, gdy ładunek jest równy zero lub gdy cząstka jest w spoczynku. Z tego samego równania wiemy, że siła jest równa zero, gdy wektory \vec{v} i \vec{B} są albo równoległe ($\phi = 0^\circ$), albo antyrównoległe ($\phi = 180^\circ$), natomiast siła jest największa, gdy wektory \vec{v} i \vec{B} są do siebie prostopadłe.

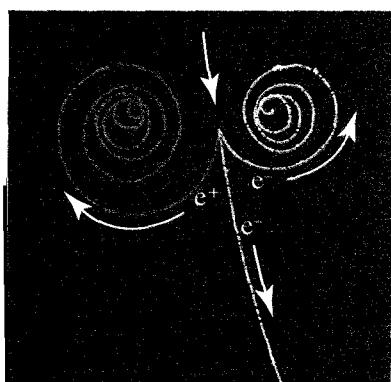
Z równania (29.2) możemy określić także kierunek siły \vec{F}_B . Na podstawie paragrafu 3.7 wiemy, że iloczyn wektorowy $\vec{v} \times \vec{B}$ w równaniu (29.2) jest wektorem prostopadłym do wektorów \vec{v} i \vec{B} . Zgodnie z regułą prawej dłoni (rys. 29.1a) kciuk prawej dłoni wskazuje kierunek $\vec{v} \times \vec{B}$, jeśli pozostałe palce pokazują kierunek obrotu wektora \vec{v} w kierunku wektora \vec{B} . Jeżeli ładunek q jest dodatni, to zgodnie z równaniem (29.2) siła \vec{F}_B ma taki sam znak, jak iloczyn wektorowy $\vec{v} \times \vec{B}$ i dlatego musi być tak samo skierowana. Oznacza to, że dla dodatniego ładunku q , siła \vec{F}_B jest skierowana wzdłuż kciuka (rys. 29.1b). Jeżeli ładunek q jest ujemny, to siła \vec{F}_B i iloczyn wektorowy $\vec{v} \times \vec{B}$ mają przeciwnie znaki i dlatego muszą być skierowane przeciwnie. Dla ujemnego ładunku q , siła \vec{F}_B jest skierowana przeciwnie niż kciuk (rys. 29.1c).

Jednak niezależnie od znaku ładunku:

➤ Siła \vec{F}_B działająca na naładowaną cząstkę, która porusza się z prędkością \vec{v} w polu magnetycznym o indukcji \vec{B} , jest zawsze prostopadła do wektorów \vec{v} i \vec{B} .

Zatem siła \vec{F}_B nie ma nigdy składowej równoległej do wektora \vec{v} . Oznacza to, że siła \vec{F}_B nie może zmienić wartości prędkości v cząstki (a więc nie może zmienić energii kinetycznej cząstki). Siła ta może zmienić tylko kierunek prędkości \vec{v} (a więc kierunek ruchu) i tylko w tym znaczeniu siła \vec{F}_B może przyspieszać cząstkę.

Aby zrozumieć sens równania (29.2) spójrzmy na rysunek 29.2, na którym przedstawiono kilka śladów, pozostawionych przez naładowane cząstki, poruszające się z dużą prędkością w komorze pęcherzykowej w Lawrence Berkeley Laboratory. Komora wypełniona jest ciekłym wodorem i umieszczona w silnym jednorodnym polu magnetycznym, skierowanym prostopadle przed płaszczyznę rysunku



Rys. 29.2. Ślady dwóch elektronów (e^-) i pozytonu (e^+) w komorze pęcherzykowej, umieszczonej w jednorodnym polu magnetycznym, które jest skierowane prostopadle przed płaszczyznę rysunku

rysunku. Cząstka promieniowania γ wpadającą do komory nie zostawia śladu, gdyż nie jest naładowana. Cząstka ta wybija elektron z atomu wodoru (długi ślad zaznaczony e^-), rozpadając się jednocześnie na elektron (spiralny ślad zaznaczony e^-) i pozyton (spiralny ślad zaznaczony e^+). Korzystając z równania (29.2) i rysunku 29.1 sprawdź, że trzy ślady, pozostawione przez dwie ujemne cząstki i jedną dodatnią zakrzywiają się we właściwych kierunkach.

Tabela 29.1. Przybliżone wartości indukcji magnetycznej

| | |
|--|--------------|
| na powierzchni gwiazdy neutronowej | 10^8 T |
| w pobliżu dużego elektromagnesu | 1,5 T |
| w pobliżu małego magnesu sztabkowego | 10^{-2} T |
| na powierzchni Ziemi | 10^{-4} T |
| w przestrzeni międzygwiezdnej | 10^{-10} T |
| najmniejsza wartość w pomieszczeniu ekranowanym magnetycznie | 10^{-14} T |

Jednostką indukcji magnetycznej \vec{B} w układzie SI, wynikającą z równań (29.2) i (29.3) jest niuton na kulomb razy metr na sekundę. Dla wygody nazwano tę jednostkę **tesłą** (T):

$$1 \text{ tesla} = 1 \text{ T} = 1 \frac{\text{niuton}}{(\text{kulomb})(\text{metr}/\text{sekunda})}.$$

Pamiętając, że kulomb na sekundę to amper, otrzymujemy

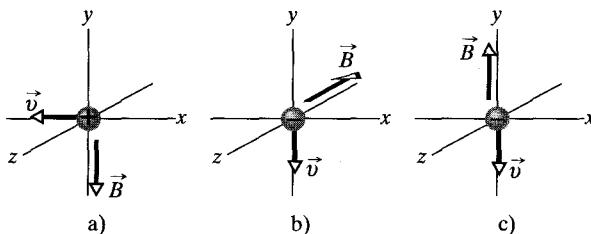
$$1 \text{ T} = 1 \frac{\text{niuton}}{(\text{kulomb}/\text{sekunda})(\text{metr})} = 1 \frac{\text{N}}{\text{A} \cdot \text{m}}. \quad (29.4)$$

Starszą, ale wciąż używaną jednostką indukcji \vec{B} (spoza układu SI) jest **gaus** (Gs), przy czym:

$$1 \text{ tesla} = 10^4 \text{ gausów}. \quad (29.5)$$

W tabeli 29.1 podano wartości indukcji magnetycznej w różnych sytuacjach fizycznych. Zauważ, że ziemskie pole magnetyczne w pobliżu powierzchni Ziemi ma indukcję około 10^{-4} T (= 100 μT lub 1 gaus).

SPRAWDZIAN 1: Na rysunku przedstawiono trzy przypadki, w których naładowana cząstka porusza się z prędkością \vec{v} w jednorodnym polu magnetycznym o indukcji \vec{B} . Jaki jest kierunek siły magnetycznej \vec{F}_B w każdym z tych przypadków?

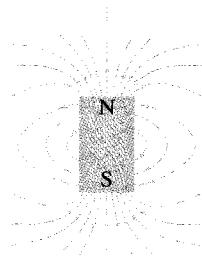


Linie pola magnetycznego

Pole magnetyczne możemy zilustrować za pomocą linii pola, podobnie jak zrobiliśmy to w przypadku pola elektrycznego. Obowiązują przy tym podobne zasady, czyli: 1) kierunek stycznej do linii pola magnetycznego w danym punkcie jest kierunkiem indukcji magnetycznej \vec{B} w tym punkcie, 2) odległość między liniami określa wartość wektora indukcji \vec{B} — pole magnetyczne jest silniejsze tam, gdzie linie przebiegają bliżej siebie i na odwrót.

Na rysunku 29.3a pokazano, w jaki sposób pole magnetyczne w pobliżu magnesu sztabkowego (magnesu trwałego w kształcie sztabki) może być przedstawione za pomocą linii pola magnetycznego. Wszystkie linie przechodzą przez magnes i wszystkie tworzą zamknięte pętle (również te linie, które na rysunku nie są zamknięte). Oddziaływanie magnetyczne na zewnątrz magnesu sztabkowego jest najsielniejsze w pobliżu jego końców, gdzie gęstość linii jest największa. Tak więc pole magnetyczne magnesu sztabkowego, pokazanego na rysunku 29.3b

Rys. 29.3. a) Linie pola magnetycznego magnesu sztabkowego. b) „Krowi magnes” — magnes sztabkowy, przeznaczony do umieszczenia w pierwszym żołądku krowy, aby zabezpieczyć jelita przed przypadkowo połknietymi kawałkami żelaza. Żelazne opinki na końcach magnesu układają się wzduż linii pola magnetycznego



a)



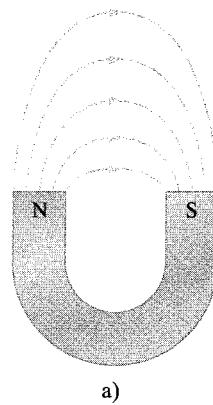
b)

powoduje, że opinki żelaza gromadzą się głównie w pobliżu obydwu końców magnesu.

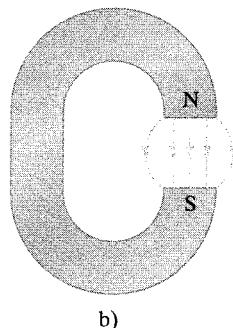
Zamknięte linie pola są skierowane do magnesu z jednego końca, a od magnesu z drugiego. Koniec magnesu, z którego linie wychodzą, nazywamy *biegunem północnym* magnesu; przeciwny koniec, do którego linie wchodzą, nazywany jest *biegunem południowym*. Magnesy, których używamy do przytrzymywania kartek z notatkami na lodówce, są krótkimi magnesami sztabkowymi. Na rysunku 29.4 przedstawiono dwa inne, często spotykane kształty magnesów: *magnes podkwiasty* oraz magnes wygięty w kształcie litery C, w taki sposób, że jego bieguny znajdują się naprzeciwko siebie. (Pole magnetyczne między biegunami jest więc w przybliżeniu jednorodne). Jeżeli umieścimy dwa magnesy blisko siebie, to niezależnie od ich kształtu przekonamy się, że:

► Różnoimienne bieguny magnetyczne przyciągają się, a jednoimienne bieguny magnetyczne się odpinają.

Wokół Ziemi istnieje pole magnetyczne, którego źródłem jest jej jądro, lecz mechanizm jego powstawania jest wciąż nieznany. Na powierzchni Ziemi obecność pola magnetycznego możemy wykryć za pomocą kompasu, który jest w istocie wydłużonym magnesem sztabkowym obracającym się swobodnie wokół osi. Ten magnes sztabkowy w kształcie igły ustawia się w określonym położeniu, gdyż jego biegun północny jest przyciągany w kierunku obszaru arktycznego Ziemi. Zatem w Arktyce musi znajdować się biegun ziemskiego pola magnetycznego, który zgodnie z logiką powinniśmy nazwać biegunem *południowym*. Jednakże kierunek ten nazywamy północą, więc znaleźliśmy się w pułapce i aby z niej wybrnąć mówimy, że Ziemia ma w tym obszarze *geomagnetyczny biegun północny*.



a)



b)

Rys. 29.4. a) Magnes podkwiasty i b) magnes w kształcie litery C. (Pokazane są tylko niektóre linie pola na zewnątrz magnesu)

Dokładniejsze pomiary wskazują, że na półkuli północnej linie ziemskiego pola magnetycznego skierowane są w dół, w stronę powierzchni Ziemi i jednocześnie w stronę Arktyki. Na półkuli południowej linie pola są skierowane w górę, od powierzchni Ziemi i od Antarktydy, czyli od *geomagnetycznego biegunu południowego* Ziemi.

Przykład 29.1

W jednorodnym polu magnetycznym wektor indukcji \vec{B} o wartości 1,2 mT jest skierowany pionowo w góre. W obszarze tego pola znajduje się komora pomiarowa. Proton o energii kinetycznej 5,3 MeV wpada do komory, poruszając się w kierunku poziomym z południa na północ. Ile wynosi wartość siły odchylającej proton, gdy wpada on do komory? Masa protonu jest równa $1,67 \cdot 10^{-27}$ kg. (Pomiń ziemskie pole magnetyczne).

ROZWIĄZANIE:

Proton obdarzony jest ładunkiem i porusza się w polu magnetycznym, a więc może działać na niego siła magnetyczna \vec{F}_B .

O 1. \vec{F}_B nie jest równe zeru, gdyż początkowa prędkość protonu nie jest skierowana wzdłuż linii pola magnetycznego. Do wyznaczenia wartości \vec{F}_B możemy zastosować równanie (29.3) pod warunkiem, że obliczymy najpierw prędkość v protonu. Prędkość v można wyznaczyć, znając energię kinetyczną, gdyż $E_k = \frac{1}{2}mv^2$. Otrzymujemy:

$$v = \sqrt{\frac{2E_k}{m}} = \sqrt{\frac{(2)(5,3 \text{ MeV})(1,60 \cdot 10^{-13} \text{ J/MeV})}{1,67 \cdot 10^{-27} \text{ kg}}} \\ = 3,2 \cdot 10^7 \text{ m/s.}$$

Równanie (29.3) daje zatem:

$$F_B = |q|vB \sin \phi \\ = (1,60 \cdot 10^{-19} \text{ C})(3,2 \cdot 10^7 \text{ m/s})(1,2 \cdot 10^{-3} \text{ T})(\sin 90^\circ) \\ = 6,1 \cdot 10^{-15} \text{ N.} \quad (\text{odpowiedź})$$

Może się wydawać, że to niewielka siła, ale działa ona na cząstkę o małej masie, nadając jej duże przyspieszenie, a mianowicie:

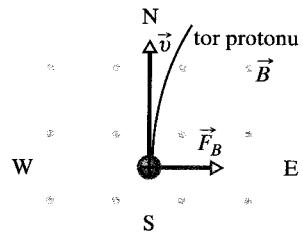
$$a = \frac{F_B}{m} = \frac{6,1 \cdot 10^{-15} \text{ N}}{1,67 \cdot 10^{-27} \text{ kg}} = 3,7 \cdot 10^{12} \text{ m/s}^2.$$

Aby znaleźć kierunek \vec{F}_B , skorzystamy z faktu, że

O 2. Siła \vec{F}_B jest skierowana wzdłuż prostej wyznaczonej przez iloczyn wektorowy $q\vec{v} \times \vec{B}$. Ładunek q jest dodatni, a więc \vec{F}_B musi mieć taki sam kierunek, jak wektor $\vec{v} \times \vec{B}$, którego kierunek można określić na podstawie reguły prawej dłoni dla ilocznego wektorowego (jak na rysunku 29.2b). Wiemy, że \vec{v} jest skierowane poziomo, z południa na północ, a \vec{B} jest skierowane pionowo do góry. Reguła prawej dłoni wskazuje, że siła odchylająca \vec{F}_B musi być skierowana poziomo, z zachodu na wschód, jak przedstawiono na rysunku 29.5. (Regularnie ułożone kropki na rysunku przedstawiają pole magnetyczne, skierowane prostopadle przed płaszczyznę rysunku. Regularny układ znaków X oznaczałby pole magnetyczne, skierowane za tę płaszczyznę).

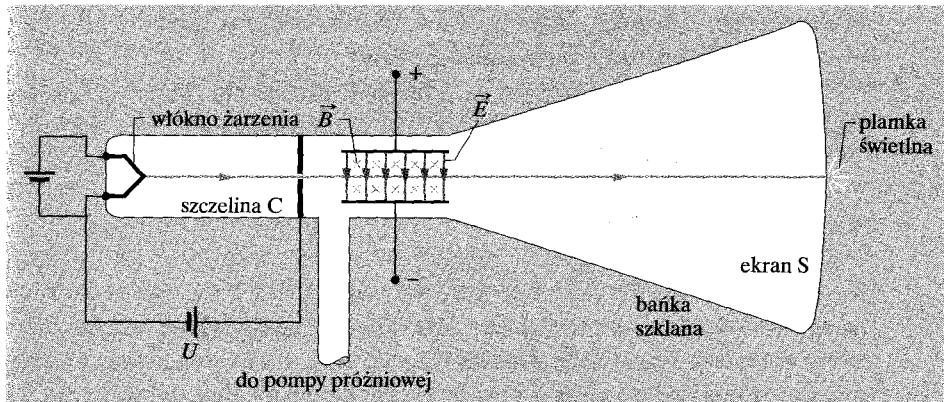
Gdyby cząstka miała ładunek ujemny, magnetyczna siła odchylająca byłaby skierowana przeciwnie — tzn. poziomo, ze wschodu na zachód. Wynika to bezpośrednio z równania (29.2), jeśli podstawimy ujemną wartość q .

Rys. 29.5. Przykład 29.1. Proton poruszający się w komorze, z południa na północ, z prędkością \vec{v} (widok z góry). Pole magnetyczne jest skierowane pionowo w góre komory, co zaznaczono na rysunku regularnym układem kropiek, przypominających groty strzał. Tor protonu jest odchylony ku wschodowi



29.3. Pola skrzyżowane: odkrycie elektronu

Zarówno pole elektryczne \vec{E} , jak i pole magnetyczne \vec{B} mogą działać siłą na naładowaną cząstkę. Kiedy wektory tych dwóch pól są wzajemnie prostopadłe, mówimy, że są to *pola skrzyżowane*. Zbadamy teraz, co się stanie z naładowanymi cząstками (np. z elektronami) podczas ruchu w polach skrzyżowanych. Jako przykład omówimy doświadczenie, które doprowadziło w 1897 r. do odkrycia elektronu przez J. J. Thomsona z Uniwersytetu w Cambridge.



Rys. 29.6. Współczesna wersja aparatury J. J. Thomsona, służącej do pomiaru stosunku masy do ładunku dla elektronu. Pole elektryczne o natężeniu \vec{E} powstaje w wyniku dołączenia baterii do płytek odchyłających, natomiast pole magnetyczne o indukcji \vec{B} jest wytworzone przez prąd, płynący w układzie cewek (nie pokazanych na rysunku). Wektory \vec{B} są skierowane za płaszczyznę rysunku, co przedstawiono jako regularny układ znaków X, przypominający upierzone ogony strzał

Na rysunku 29.6 przedstawiono schemat współczesnej wersji aparatury doświadczalnej, używanej przez Thomsona — lampę oscyloskopową (podobną do lampy kineskopowej w typowym odbiorniku telewizyjnym). Naładowane cząstki (o których teraz wiemy, że są elektronami) emitowane są przez rozżarzone włókno w tylnej części lampy próżniowej i przyspieszane przez przyłożoną różnicę potencjałów U . Po przejściu przez szczelinę C cząstki tworzą wąską wiązkę. Następnie przechodzą przez obszar skrzyżowanych pól \vec{E} i \vec{B} , kierując się w stronę ekranu fluorescencyjnego S, na którym wywołują świecenie w postaci plamki (na ekranie telewizyjnym plamka jest częścią obrazu). Siły działające w obszarze skrzyżowanych pól na naładowane cząstki mogą odchylić je od środka ekranu. Zmieniając wartości i kierunki wektorów pól, Thomson mógł więc zmieniać położenie plamki świetlnej na ekranie. Przypomnij sobie, że pole elektryczne działa na naładowaną ujemnie cząstkę siłą, skierowaną przeciwnie do kierunku pola. Zatem w układzie, jak na rysunku 29.6, pole elektryczne \vec{E} odchyla elektrony w górę, a pole magnetyczne \vec{B} w dół. Oznacza to, że siły te są *przeciwne skierowane*. Doświadczenie Thomsona mógłbyś przeprowadzić następująco:

1. Dla $E = 0$ i $B = 0$ zaznacz na ekranie S położenie plamki świetlnej, wywołanej przez nieodchyloną wiązkę.
2. Włącz pole elektryczne \vec{E} i zmierz odchylenie wiązki.
3. Utrzymując wartość natężenia pola elektrycznego \vec{E} bez zmian, włącz pole magnetyczne \vec{B} i dobierz wartość jego indukcji tak, aby wiązka powróciła do położenia nieodchylonego. (Siły są przeciwnie skierowane, zatem można je dobrać tak, aby się równoważyły).

W przykładzie 23.4 omawialiśmy odchylenie toru naładowanej cząstki, poruszającej się w polu elektrycznym o natężeniu \vec{E} między dwiema płytami (p. 2 w doświadczeniu Thomsona). Wyznaczyliśmy odchylenie cząstki na końcu płytek:

$$y = \frac{qEL^2}{2mv^2}, \quad (29.6)$$

gdzie v jest prędkością cząstki, m jej masą, q jej ładunkiem, a L długością płyt. To samo równanie można zastosować do wiązki elektronów na rysunku 29.6; w razie potrzeby moglibyśmy zmierzyć przemieszczenie wiązki na ekranie, a następnie obliczyć odchylenie y na końcu płyt. (Kierunek odchylenia zależy

od znaku ładunku cząstki, a więc Thomson mógł wykazać, że cząstki wywołujące świecenie na ekranie były naładowane ujemnie).

Gdy dwa pola na rysunku 29.7 są dobrane w taki sposób, że siły odchylające równoważą się (p. 3), ze wzorów (29.1) i (29.3) otrzymujemy:

$$|q|E = |q|vB \sin(90^\circ) = |q|vB,$$

czyli:

$$v = \frac{E}{B}. \quad (29.7)$$

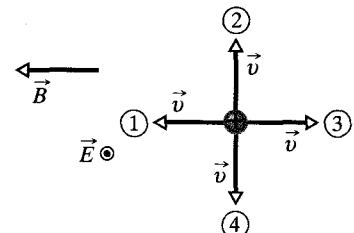
Zatem możliwy jest pomiar prędkości naładowanej cząstki, przechodzącej przez obszar pól skrzyżowanych. Po podstawieniu wyrażenia (29.7) w miejsce v w równaniu (29.6) otrzymujemy:

$$\frac{m}{q} = \frac{B^2 L^2}{2yE}, \quad (29.8)$$

gdzie wszystkie wielkości po prawej stronie mogą być zmierzone. Tak więc pola skrzyżowane pozwalają nam zmierzyć stosunek m/q dla cząstek poruszających się w aparaturze Thomsona.

Thomson twierdził, że te cząstki znajdują się we wszystkich substancjach. Twierdził także, że są one lżejsze ponad tysiąc razy od najlżejszego znanego atomu (wodoru). (Później wykazano, że dokładna wartość tego stosunku jest równa 1836,15). Pomiar stosunku m/q w połączeniu ze śmiałością obydwoj stwierdzeń Thomsona uważany jest za „odkrycie elektronu”.

SPRAWDZIAN 2: Na rysunku przedstawiono cztery kierunki wektora prędkości \vec{v} dodatnio naładowanej cząstki, która porusza się w jednorodnym polu elektrycznym o natężeniu \vec{E} (skierowanym przed płaszczyznę rysunku i oznaczonym kropką w kółku) oraz w jednorodnym polu magnetycznym o indukcji \vec{B} . a) Uszereguj kierunki 1, 2 i 3 pod względem wartości wypadkowej siły, działającej na cząstkę, poczynając od największej wartości. b) Dla którego spośród wszystkich kierunków prędkości wypadkowa siła może być równa零?



29.4. Pola skrzyżowane: zjawisko Halla

Jak wiesz, wiązka elektronów w próżni może być odchylona za pomocą pola magnetycznego. Czy elektrony przewodnictwa, poruszające się w drucie miedzianym, mogą być również odchylone przez pole magnetyczne? W 1879 roku Edwin H. Hall, wówczas 24-letni magistrant w Johns Hopkins University wykazał, że takie zjawisko rzeczywiście zachodzi. To **zjawisko Halla** pozwala sprawdzić, czy nośniki w przewodniku są naładowane dodatnio, czy ujemnie. Ponadto możemy zmierzyć liczbę takich nośników, przypadającą na jednostkę objętości przewodnika, czyli koncentrację nośników.

Na rysunku 29.7a pokazano pasek miedziany o szerokości d , w którym płynie prąd o natężeniu I w kierunku umownym od góry rysunku ku dołowi. Nośnikami

ładunku są elektrony, które, jak wiemy, poruszają się z prędkością unoszenia v_d w kierunku przeciwnym, czyli z dołu do góry. W chwili przedstawionej na rysunku 29.8a włączono właśnie zewnętrzne pole magnetyczne o indukcji \vec{B} , skierowane za płaszczyznę rysunku. Jak widać z równania (29.2), siła magnetyczna \vec{F}_B będzie działać na każdy poruszający się elektron, odchylając go w kierunku prawego brzegu paska.

W miarę upływu czasu elektrony przemieszczają się w prawo, gromadząc się głównie przy prawym brzegu paska i pozostawiając nieskompensowane ładunki dodatnie w ustalonych położeniach przy lewym brzegu. Rozdzielenie dodatnich i ujemnych ładunków powoduje powstanie wewnątrz paska pola elektrycznego o natężeniu \vec{E} , skierowanego od lewej strony do prawej, jak pokazano na rysunku 29.7b. To pole działa siłą elektryczną \vec{F}_E na każdy elektron, dążąc do przemieszczenia go w lewo.

Układ szybko dąży do stanu równowagi, a siła elektryczna, działająca na każdy elektron rośnie do chwili, w której zrównoważy siłę magnetyczną. W tym momencie, zgodnie z rysunkiem 29.7b, siły pochodzące od pola magnetycznego i pola elektrycznego wzajemnie się równoważą. Elektrony poruszają się wtedy z prędkością \vec{v}_d wzdłuż paska w góre rysunku. Nie występuje przy tym dalsze gromadzenie się elektronów przy prawym brzegu, a więc i dalszy wzrost natężenia pola elektrycznego \vec{E} .

Z tym polem elektrycznym, działającym w poprzek paska o szerokości d związana jest różnica potencjałów (napięcie) Halla U . Zgodnie z równaniem (25.42) wartość tego napięcia wynosi

$$U = Ed. \quad (29.9)$$

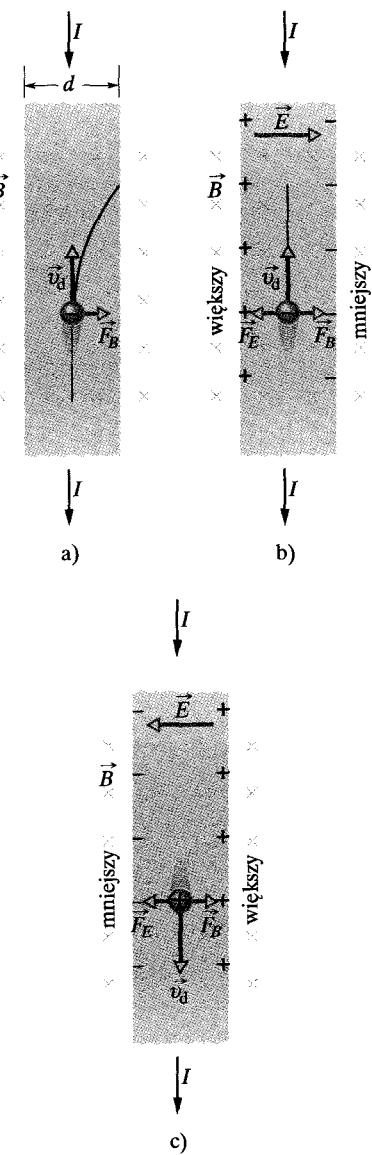
Dołączając woltomierz do długich boków paska, możemy zmierzyć różnicę potencjałów między dwoma jego brzegami. Ponadto woltomierz pozwala określić, który brzeg paska ma większy potencjał. Dla przypadku, przedstawionego na rysunku 29.7a okazałoby się, że lewy brzeg ma większy potencjał, co jest zgodne z naszym założeniem, że nośniki ładunku są ujemne.

Przymijmy chwilowo przeciwnie założenie, że nośniki ładunku, tworzące prąd o natężeniu I są dodatnie (rys. 29.7c). Możesz się przekonać, że podczas ruchu z góry na dół paska, nośniki te są odchylane przez siłę \vec{F}_B w kierunku prawego brzegu, a zatem prawy brzeg paska ma większy potencjał. To ostatnie stwierdzenie jest sprzeczne z odczytem na woltomierzu, zatem nośniki muszą być ujemne.

Zajmijmy się teraz ilościową stroną zjawiska. Gdy siły elektryczne i magnetyczne się równoważą (rys. 29.7b), równania (29.1) i (29.3) dają nam:

$$eE = ev_d B. \quad (29.10)$$

Rys. 29.7. Pasek miedziany, w którym płynie prąd o natężeniu I , jest umieszczony w polu magnetycznym o indukcji \vec{B} . a) Sytuacja bezpośrednio po włączeniu pola magnetycznego. Pokazany jest zakrzywiony tor, po którym będzie się poruszał elektron. b) Stan równowagi, który zostaje osiągnięty w krótkim czasie. Zauważ, że ładunki ujemne gromadzą się po prawej stronie paska, pozostawiając nieskompensowane ładunki dodatnie po lewej stronie. Zatem lewa strona ma większy potencjał niż prawa. c) Gdyby nośniki ładunku były naładowane dodatnio, dla tego samego kierunku prądu gromadziłyby się one po prawej stronie, a więc prawa strona miałaby większy potencjał



Zgodnie z równaniem (27.7) prędkość unoszenia v_d jest równa:

$$v_d = \frac{J}{ne} = \frac{I}{neS}, \quad (29.11)$$

gdzie $J (= I/S)$ jest gęstością prądu w pasku, S jest polem powierzchni przekroju poprzecznego paska, n jest koncentracją nośników ładunku (czyli ich liczbą w jednostce objętości).

Podstawiając w równaniu (29.10) E z równania (29.9) oraz v_d z równania (29.11), otrzymujemy:

$$n = \frac{BI}{Ule}, \quad (29.12)$$

gdzie $l (= S/d)$ jest grubością paska. Za pomocą tego równania możemy wyznaczyć n z wielkości, które potrafimy zmierzyć.

Istnieje również możliwość zastosowania zjawiska Halla do bezpośredniego pomiaru prędkości unoszenia v_d , która, jak pamiętamy, jest rzędu centymetrów na godzinę. W tym pomysłowym doświadczeniu metalowy pasek jest przesuwany mechanicznie w polu magnetycznym, w kierunku przeciwnym do kierunku prędkości unoszenia nośników ładunku. Prędkość, z jaką porusza się pasek, jest następnie tak dobrana, aby napięcie Halla było równe零. W tych warunkach, gdy nie występuje napięcie Halla, prędkość nośników ładunku w laboratoryjnym układzie odniesienia musi być równa zero, tak więc prędkość paska i prędkości ujemnych nośników ładunku muszą być równe co do wartości, ale przeciwnie skierowane.

Przykład 29.2

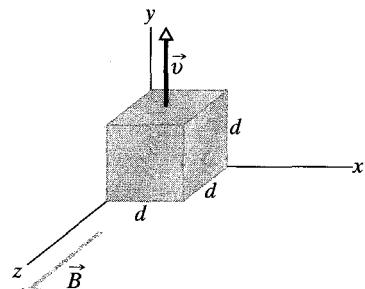
Na rysunku 29.8 przedstawiono pełny sześcian metalowy o krawędzi $d = 1,5$ cm, poruszający się w dodatnim kierunku osi y ze stałą prędkością 4 m/s. Sześcian przemieszcza się w jednorodnym polu magnetycznym, którego indukcja \vec{B} ma wartość 0,05 T oraz dodatni kierunek osi z .

- a) Która ściana sześcianu, w wyniku ruchu w polu magnetycznym, ma mniejszy potencjał, a która większy?

ROZWIĄZANIE:

1. Sześcian porusza się w polu magnetycznym o indukcji \vec{B} , a więc na jego naładowane cząstki, łącznie z elektronami przewodnictwa, działa siła magnetyczna \vec{F}_B .

2. Musimy więc zbadać, w jaki sposób \vec{F}_B wytwarza różnicę potencjałów między niektórymi ścianami sześcianu. Gdy sześcian rozpoczyna ruch w polu magnetycznym, razem z nim zaczynają się też poruszać elektryny. Każdy elektron ma ładunek q i porusza się z prędkością \vec{v} , zatem siła \vec{F}_B , działająca na elektron jest dana równaniem (29.2). Kierunek iloczynu wektorowego $\vec{v} \times \vec{B}$ jest zgodny z dodatnim kierunkiem osi x na rysunku 29.8, natomiast



Rys. 29.8. Przykład 29.2. Sześcienny klocek metalowy o krawędzi d , poruszający się ze stałą prędkością \vec{v} w jednorodnym polu magnetycznym o indukcji \vec{B}

kierunek siły \vec{F}_B jest przeciwny, gdyż q jest ujemne. Zatem siła \vec{F}_B działa w ujemnym kierunku osi x , w stronę lewej ściany sześcianu (która nie jest widoczna na rysunku 29.8).

Większość elektronów ma ustalone położenia w cząsteczkach, z których zbudowany jest sześcian. Jednak wykonany jest on z metalu, zawiera więc swobodnie poruszające się elektryny przewodnictwa. Niektóre z tych elektronów są odchylane przez siłę \vec{F}_B w stronę lewej ściany sześcianu, powodując, że lewa ściana jest naładowana ujemnie, a na prawej ściana pozostaje ładunek

dodatni. W wyniku takiego rozdzielenia ładunku powstaje pole elektryczne o natężeniu \vec{E} , skierowane od prawej ściany naładowanej dodatnio do lewej ściany naładowanej ujemnie. Tak więc lewa ściana ma mniejszy potencjał, a prawa — większy.

b) Ile wynosi różnica potencjałów między ścianami o większym i mniejszym potencjałem?

ROZWIĄZANIE:

Bierzemy pod uwagę następujące fakty:

O 1. Pole elektryczne o natężeniu \vec{E} , wytworzone w wyniku rozdzielenia ładunków działa na każdy elektron siłą $\vec{F}_E = q\vec{E}$. Ładunek q ma wartość ujemną, zatem siła ta jest skierowana przeciwnie do wektora natężenia pola \vec{E} , czyli w prawą stronę. Tak więc siła \vec{F}_E działa na każdy elektron w prawo, a siła \vec{F}_B — w lewo.

O 2. Gdy sześciian zaczyna poruszać się w polu magnetycznym i następuje rozdzielenie ładunków, natężenie pola elektrycznego \vec{E} rośnie od wartości równej零. Zatem wartość siły \vec{F}_E również zaczyna rosnąć od zera, ale jest początkowo mniejsza od wartości siły \vec{F}_B . Dlatego na początku, o wypadkowej sile działającej na dowolny elektron decyduje siła \vec{F}_B . Pod wpływem działania tej siły następuje ciągłe przemieszczanie dodatkowych elektrowni w kierunku lewej ściany, co zwiększa stopień rozdzielenia ładunku.

O 3. Jednakże w miarę rozdzielania ładunku wartość siły F_E staje się w końcu równa wartości siły F_B . Zatem wypadkowa siła, działająca na dowolny elektron jest wówczas równa zero i żaden dodatkowy elektron nie jest już odchylany. Wartość siły \vec{F}_E nie może dalej rosnąć, a elektryny osiągają stan równowagi.

Szukamy różnicy potencjałów U między lewą a prawą ścianą sześciianu, po osiągnięciu stanu równowagi (co następuje szybko). Możemy otrzymać U z równania (29.9) ($U = Ed$), jeśli najpierw

znajdziemy wartość E natężenia pola elektrycznego w równowadze. Zastosujemy w tym celu równanie równowagi sił ($F_E = F_B$). Za F_E podstawiamy $|q|E$, a za F_B podstawiamy $|q|vB \sin \phi$ z równania (29.3). Z rysunku 29.9 wynika, że kąt ϕ między wektorami \vec{v} i \vec{B} jest równy 90° , tak więc $\sin \phi = 1$, a równanie $F_E = F_B$ daje:

$$|q|E = |q|vB \sin 90^\circ = |q|vB.$$

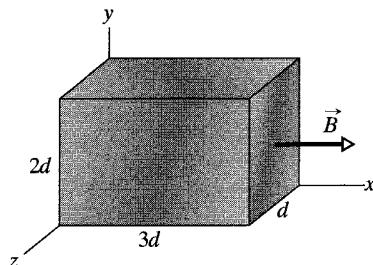
Stąd otrzymujemy $E = vB$, a równanie (29.9) ($U = Ed$) przyjmuje postać:

$$U = vBd. \quad (29.13)$$

Podstawiając znane wartości, otrzymujemy:

$$U = (4 \text{ m/s})(0,05 \text{ T})(0,015 \text{ m}) = 0,003 \text{ V} = 3 \text{ mV}. \quad (\text{odpowiedź})$$

SPRAWDZIAN 3: Na rysunku przedstawiono metalowy prostopadłościan, który może poruszać się z pewną prędkością v w jednorodnym polu magnetycznym o indukcji \vec{B} . Wymiary bryły są wielokrotnościami d , jak pokazano na rysunku. Masz sześć możliwości wyboru kierunku prędkości: równolegle do osi x , y lub z , w kierunku dodatnim lub ujemnym. a) Uszereguj te możliwości pod względem różnicy potencjałów, jaka powstaje między ścianami bryły, zaczynając od największej. b) W którym przypadku przednia ściana będzie miała mniejszy potencjał?

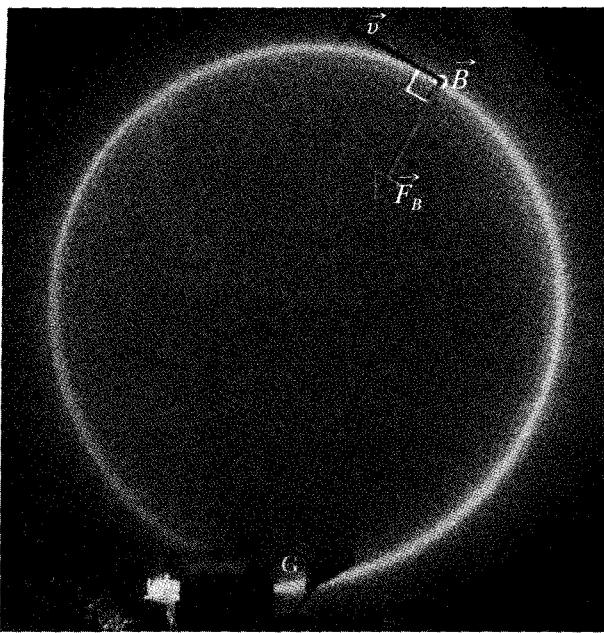


29.5. Ruch cząstek naładowanych po okręgu w polu magnetycznym

Jeżeli cząstka porusza się po okręgu z prędkością o stałą wartość, to możemy być pewni, że wypadkowa siła, działająca na cząstce ma stałą wartość i jest skierowana do środka okręgu, zawsze prostopadle do wektora prędkości cząstki. Wyobraź sobie kamień, przywiązanego do sznurka i wprawionego w ruch wirowy na gładkiej poziomej powierzchni lub satelitę krążącego po orbicie kołowej wokół Ziemi. W pierwszym przypadku naprężenie sznurka zapewnia niezbędną siłę i przyspieszenie dośrodkowe. W drugim przypadku siła i przyspieszenie pochodzą od przyciągania grawitacyjnego Ziemi.

Na rysunku 29.9 przedstawiono inny przykład: Wiązka elektronów jest wstrzeliwana do komory za pomocą *działka elektronowego* G. Elektrony wpadają do komory, w płaszczyźnie rysunku, z prędkością o wartości v , a następnie

Rys. 29.9. Elektrony krążące w komorze wypełnionej gazem pod niskim ciśnieniem (ich torem jest świecący okrąg). Komora znajduje się w jednorodnym polu magnetycznym o wektorze indukcji \vec{B} , skierowanym prostopadle przed płaszczyznę rysunku. Zauważ, że siła Lorentza \vec{F}_B jest skierowana wzdłuż promienia okręgu; aby ruch odbywał się po okręgu, siła \vec{F}_B musi być skierowana do środka okręgu. Zastosuj regułę prawej dłoni dla iloczynu wektorowego, aby sprawdzić, że $\vec{F}_B = q\vec{v} \times \vec{B}$ określa właściwy kierunek \vec{F}_B . (Nie zapomnij o znaku q)



poruszają się w obszarze jednorodnego pola magnetycznego o indukcji \vec{B} , skierowanej prostopadle przed płaszczyznę rysunku. W wyniku tego siła $\vec{F}_B = q\vec{v} \times \vec{B}$ przez cały czas odchyla elektrony, a ponieważ \vec{v} i \vec{B} są zawsze wzajemnie prostopadłe, elektrony poruszają się po okręgu. Tor ich ruchu jest widoczny na zdjęciu, gdyż atomy gazu w komorze emittują światło pod wpływem zderzeń z krążącymi elektronami.

Chcielibyśmy określić parametry ruchu po okręgu dla tych elektronów lub (ogólniej) dla dowolnej cząstki o ładunku q i masie m , poruszającej się z prędkością v , prostopadle do kierunku wektora indukcji \vec{B} w jednorodnym polu magnetycznym. Z równania (29.3) wynika, że na cząstkę działa siła o wartości qvB . Z drugiej zasady dynamiki ($\vec{F} = m\vec{a}$), zastosowanej do ruchu jednostajnego po okręgu (równanie (6.18)):

$$F = m \frac{v^2}{r} \quad (29.14)$$

otrzymujemy:

$$qvB = \frac{mv^2}{r}. \quad (29.15)$$

Rozwiązuje to równanie względem r , wyznaczamy promień toru cząstki:

$$r = \frac{mv}{qB} \quad (\text{promień}). \quad (29.16)$$

Okres T (czyli czas jednego pełnego obiegu) jest równy długości obwodu, podzielonej przez wartość bezwzględną prędkości:

$$T = \frac{2\pi r}{v} = \frac{2\pi mv}{qB} = \frac{2\pi m}{qB} \quad (\text{okres}). \quad (29.17)$$

Częstość ν (czyli liczba obiegów w jednostce czasu), nazywana częstością cyklotronową, wynosi:

$$\nu = \frac{1}{T} = \frac{qB}{2\pi m} \quad (\text{częstość}). \quad (29.18)$$

Częstość kołowa ω ruchu jest więc równa:

$$\omega = 2\pi\nu = \frac{qB}{m} \quad (\text{częstość kołowa}). \quad (29.19)$$

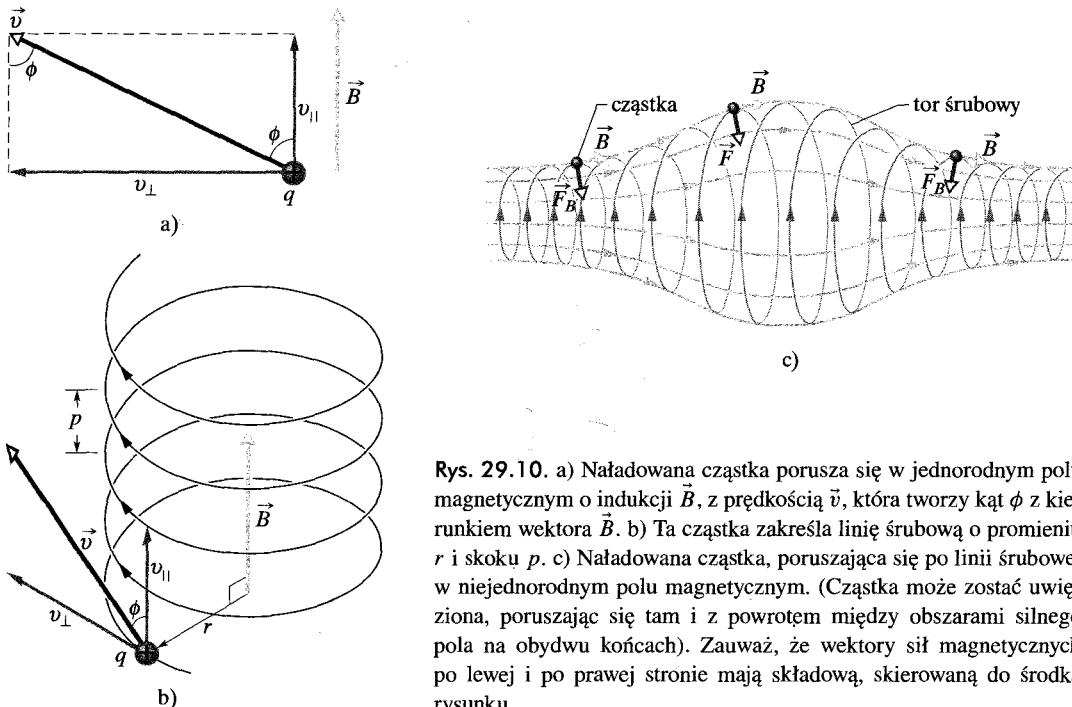
Wielkości T , ν i ω nie zależą od prędkości cząstki (pod warunkiem, że prędkość ta jest znacznie mniejsza od prędkości światła). Szybkie cząstki poruszają się po dużych okręgach, a wolne cząstki po małych, ale czas T jednego pełnego obiegu, czyli okres, jest taki sam dla wszystkich cząstek o takim samym stosunku ładunku do masy q/m . Korzystając z równania (29.2), możesz sprawdzić, że jeśli patrzysz w kierunku wektora \vec{B} , to kierunek ruchu cząstki dodatniej jest zawsze przeciwny do ruchu wskazówek zegara, natomiast kierunek ruchu cząstki ujemnej — zgodny z ruchem wskazówek zegara.

Tory śrubowe

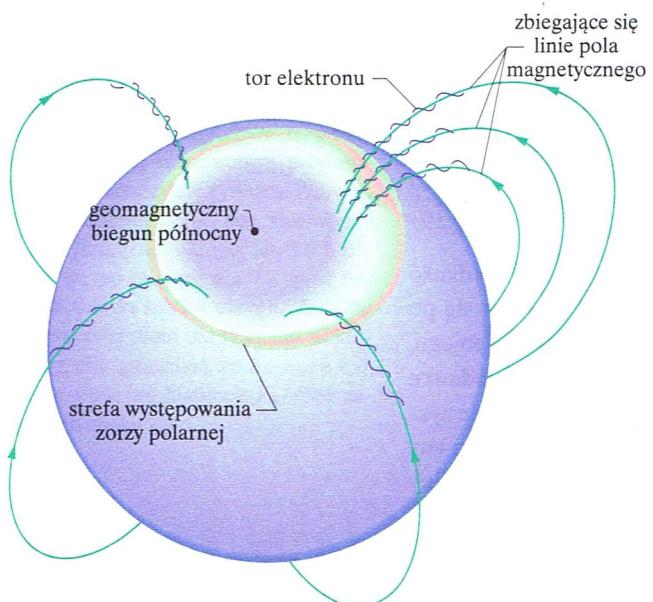
Jeżeli prędkość naładowanej cząstki, wchodzącej w obszar jednorodnego pola magnetycznego ma składową równoległą do kierunku tego pola, to cząstka będzie się poruszać po linii śrubowej wokół kierunku wektora \vec{B} . Na rysunku 29.10a pokazano przykładowy wektor prędkości \vec{v} takiej cząstki, rozłożony na dwie składowe, jedną równoległą do wektora \vec{B} , a drugą — prostopadłą:

$$v_{||} = v \cos \phi \quad \text{i} \quad v_{\perp} = v \sin \phi. \quad (29.20)$$

Składowa równoległa określa *skok p* linii śrubowej, tzn. odległość między sąsied-



Rys. 29.10. a) Naładowana cząstka porusza się w jednorodnym polu magnetycznym o indukcji \vec{B} , z prędkością \vec{v} , która tworzy kąt ϕ z kierunkiem wektora \vec{B} . b) Ta cząstka zakreśla linię śrubową o promieniu r i skoku p . c) Naładowana cząstka, poruszająca się po linii śrubowej w niejednorodnym polu magnetycznym. (Cząstka może zostać uwiezione, poruszając się tam i z powrotem między obszarami silnego pola na obydwu końcach). Zauważ, że wektory sił magnetycznych po lewej i po prawej stronie mają składową, skierowaną do środka rysunku



Rys. 29.11. Ovalna strefa występowania zorzy polarnej, otaczająca geomagnetyczny biegum północny Ziemi (w północno-zachodniej Grenlandii). Linie pola magnetycznego zbiegają się w kierunku tego bieguna. Elektrony, poruszające się w kierunku Ziemi, zostają „schwycone” i biegną wokół tych linii po torze śrubowym, osiągając atmosferę na dużej szerokości geograficznej i wywołując zorzę polarną.



Rys. 29.12. Obraz zorzy polarnej w północnej strefie (barwa obrazu nie odpowiada rzeczywistości). Obraz został zarejestrowany przez satelitę *Dynamic Explorer*, przy użyciu promieniowania nadfioletowego, emitowanego przez atomy tlenu wzbudzone w zorzy. Część Ziemi oświetlona światłem słonecznym jest widoczna w postaci półksiężyca po lewej stronie

nimi zwojami (rys. 29.10b). Składowa prostopadła określa promień linii śrubowej i jest wielkością, którą należy podstawić zamiast v w równaniu (29.16).

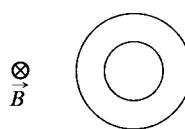
Na rysunku 29.10c przedstawiono cząstkę naładowaną, poruszającą się po linii śrubowej w niejednorodnym polu magnetycznym. Zagęszczenie linii pola po lewej i prawej stronie rysunku wskazuje, że pole jest tam silniejsze. Gdy pole na jednym końcu obszaru jest dostatecznie silne, cząstka „odbije się” od tego końca. Jeżeli cząstka odbija się od obydwu końców, to mówimy, że jest uwięziona w *butelce magnetycznej*.

Elektrony i protony są w ten sposób wychwytywane przez ziemskie pole magnetyczne; uwięzione cząstki tworzą wysoko ponad atmosferą *pasy radiacyjne Van Allena*, w kształcie pętli, między północnym a południowym biegunem geomagnetycznym. Te cząstki odbijają się tam i z powrotem, przebywając w ciągu kilku sekund drogę od jednego do drugiego końca butelki magnetycznej.

Gdy silne rozbłyski na Słońcu wysyłają w kierunku pasów radiacyjnych dodatkowe elektrony i protony o dużej energii, w obszarach, w których elektrony zwykle są odbijane, pojawia się pole elektryczne. Pole to przeciwdziała odbiciu i kieruje elektrony w dół do atmosfery, gdzie zderzają się one z atomami i cząsteczkami gazów powietrza, powodując ich świecenie. W ten sposób powstaje zorza polarna — kurtyna świetlna, która rozpościera się w dół, do wysokości około 100 km. Światło zielone jest emitowane przez atomy tlenu, a światło różowe — przez cząsteczki azotu, ale często świecenie jest na tyle słabe, że widzimy je jako światło białe.

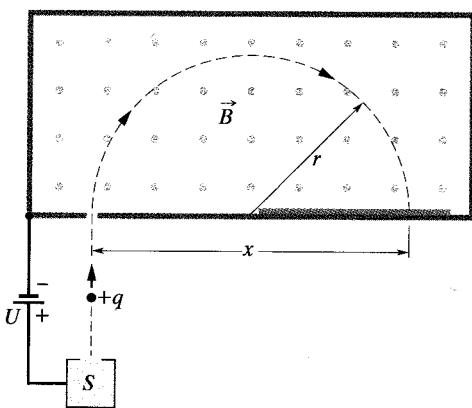
Zorza polarna rozpościera się nad Ziemią w postaci łuków i może występuć w obszarze, zwany *strefą zorzy*, przedstawionym na rysunkach 29.11 i 29.12 w obrazie z przestrzeni kosmicznej. Choć zorza jest rozległa, jej grubość (mierzona z północy na południe) jest mniejsza niż 1 km, ponieważ tory wywołujące ją elektronów zbiegają się, gdy elektrony poruszają się po linii śrubowej wokół zbiegających się linii pola (rys. 29.11).

SPRAWDZIAN 4: Na rysunku pokazano kołowe tory dwóch cząstek, które poruszają się z taką samą prędkością w jednorodnym polu magnetycznym o indukcji \vec{B} , skierowanej prostopadle za płaszczyznę rysunku. Jedną cząstką jest proton, a drugą elektron (który ma mniejszą masę). a) Która cząstka porusza się po okręgu o mniejszym promieniu? b) Czy ta cząstka porusza się zgodnie, czy przeciwnie do ruchu wskaźówek zegara?



Przykład 29.3

Na rysunku 29.13 przedstawiono zasadnicze elementy spektrometru mas, który może służyć do pomiaru masy jonu. Jon o masie m (które chcemy zmierzyć) i ładunku q jest wytwarzany przez źródło S . Jon, który w chwili początkowej znajduje się w stanie spoczynku, jest przyspieszany przez pole elektryczne, wywołane różnicą potencjałów U . Jon opuszcza źródło i wpada do komory separatora, w której jednorodne pole magnetyczne o indukcji \vec{B} jest przyłożone prostopadle do kierunku ruchu jonu. Pole magnetyczne powoduje, że jon porusza się po półokręgu, uderzając w płytę światłoczułą (i pozostawiając w niej ślad) w odległości x od szczeliny wejściowej. Przypuśćmy, że podczas pewnego pomiaru $B = 80 \text{ mT}$, $U = 1000 \text{ V}$, a jony o ładunku $q = +1,6022 \cdot 10^{-19} \text{ C}$ uderzają w płytę, w odległości $x = 1,6254 \text{ m}$. Jaka jest masa m pojedynczego jonu, wyrażona w atomowych jednostkach masy ($1 \text{ u} = 1,6605 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$)?



Rys. 29.13. Przykład 29.3. Zasadnicze elementy spektrometru mas. Jon dodatni, wytwarzony przez źródło S , po przyspieszeniu przez różnicę potencjałów U , wpada do komory, umieszczonej w jednorodnym polu magnetycznym o indukcji \vec{B} . Tam porusza się po półokręgu o promieniu r i uderza w płytę światłoczęsną, w odległości x od punktu wejścia do komory

ROZWIAZANIE:

1. Jednorodne pole magnetyczne powoduje, że naładowany jon porusza się po okręgu, zatem możemy znaleźć związek między masą jona m a promieniem okręgu r , stosując równanie (29.16) ($r = mv/qB$). Z rysunku 29.13 wynika, że $r = x/2$, a wartość indukcji B jest dana. Jednakże nie znamy prędkości jona v w polu magnetycznym, osiągniętej po przyspieszeniu go przez różnicę potencjałów U .

2. Aby znaleźć zależność między v i U , korzystamy z faktu, że energia mechaniczna ($E_{\text{mech}} = E_k + E_p$) jest zachowana w czasie przyspieszania jona. Gdy jon opuszcza źródło, jego energia kinetyczna jest w przybliżeniu równa zeru, natomiast pod koniec procesu przyspieszania jego energia kinetyczna wynosi $\frac{1}{2}mv^2$. Jon dodatni jest przyspieszany w obszarze, w którym potencjał zmienia się o $-U$, a ponieważ jon ma ładunek dodatni q , więc jego energia potencjalna zmienia się o $-qU$. Jeżeli zapiszemy teraz warunek zachowania energii mechanicznej jako:

$$\Delta E_k + \Delta E_p = 0,$$

to otrzymamy:

$$\frac{1}{2}mv^2 - qU = 0$$

czyli

$$v = \sqrt{\frac{2qU}{m}}. \quad (29.21)$$

Podstawienie tego wyrażenia do równania (29.16) daje nam:

$$r = \frac{mv}{qB} = \frac{m}{qB} \sqrt{\frac{2qU}{m}} = \frac{1}{B} \sqrt{\frac{2mU}{q}}.$$

Zatem

$$x = 2r = \frac{2}{B} \sqrt{\frac{2mU}{q}}.$$

Rozwiążając to równanie względem m i podstawiając dane, otrzymujemy:

$$m = \frac{B^2qx^2}{8U} = \frac{(0,08 \text{ T})^2 (1,6022 \cdot 10^{-19} \text{ C}) (1,6254 \text{ m})^2}{8(1000 \text{ V})} = 3,3863 \cdot 10^{-25} \text{ kg} = 203,93 \text{ u}. \quad (\text{odpowiedź})$$

Przykład 29.4

Elektron o energii kinetycznej 22,5 eV wpada w obszar jednorodnego pola magnetycznego, dla którego wektor indukcji \vec{B} ma wartość $4,55 \cdot 10^{-4}$ T. Kąt między kierunkiem wektora \vec{B} , a kierunkiem prędkości elektronu \vec{v} jest równy $65,5^\circ$. Ile wynosi skok linii śrubowej, po której porusza się elektron?

ROZWIĄZANIE:

O 1. Skok p jest odległością, przebytą przez elektron w kierunku równoległym do wektora indukcji magnetycznej \vec{B} podczas jednego okresu T .

O 2. Okres T jest dany równaniem (29.17) i nie zależy od kąta między kierunkami wektorów \vec{v} i \vec{B} (pod warunkiem, że

kąt nie jest równy zeru, gdyż wtedy elektron nie poruszałby się po linii śrubowej). Zatem korzystając z równań (29.20) i (29.17), znajdujemy:

$$p = v_{\parallel} T = (v \cos \phi) \frac{2\pi m}{qB}. \quad (29.22)$$

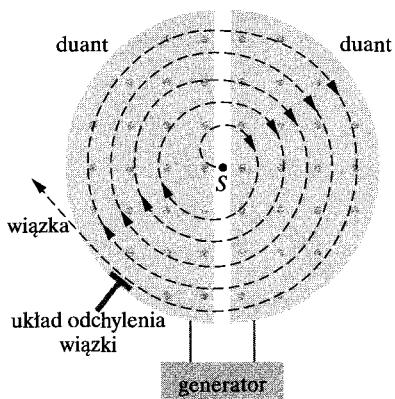
Możemy obliczyć prędkość elektronu, znając jego energię kinetyczną, tak jak zrobiliśmy to dla protonu w przykładzie 29.1. W ten sposób otrzymujemy $v = 2,81 \cdot 10^6$ m/s. Podstawiając tę wartość i pozostałe dane do równania (29.22), otrzymujemy:

$$p = (2,81 \cdot 10^6 \text{ m/s})(\cos 65,5^\circ) \frac{2\pi(9,11 \cdot 10^{-31} \text{ kg})}{(1,60 \cdot 10^{-19} \text{ C})(4,55 \cdot 10^{-4} \text{ T})} = 9,16 \text{ cm.} \quad (\text{odpowiedź})$$

29.6. Cyklotrony i synchrotryony

Jaka jest budowa materii w najmniejszej skali? To pytanie zawsze intrygowało fizyków. Jednym ze sposobów uzyskania odpowiedzi jest bombardowanie litej tarczy naładowanymi cząstками o wielkiej energii (np. protonami). Jeszcze lepiej, gdy dwa takie wysokoenergetyczne protony zderzą się czołowo. Analizując skutki wielu zderzeń, możemy badać naturę cząstek materii w skali subatomowej. Nagrody Nobla w dziedzinie fizyki w latach 1976 i 1984 zostały przyznane właśnie za takie badania.

W jaki sposób możemy dostarczyć protonowi dostatecznie dużo energii kinetycznej, potrzebnej do wykonania tego typu doświadczeń? Metoda bezpośrednią polega na przyspieszeniu protonu przez przyłożenie różnicy potencjałów U i zwiększeniu w ten sposób jego energii kinetycznej o eU . Jednak gdy potrzebujemy coraz większych energii, coraz trudniej jest wytworzyć potrzebną do tego różnicę potencjałów. Lepszą metodą jest wykorzystanie ruchu okrężnego protonów w polu magnetycznym i nadawanie im niewielkiego przyspieszenia podczas każdego okrążenia. Na przykład, jeśli proton wykonuje 100 okrżeń w polu magnetycznym, a jego energia zwiększa się o 100 keV przy każdym pełnym okrążeniu, to osiągnie on w końcu energię kinetyczną (100)(100 keV), czyli 10 MeV. Na tej zasadzie działają dwa bardzo użyteczne urządzenia przyspieszające.



Rys. 29.14. Części składowe cyklotronu: źródło cząstek S i duanty. Jednorodne pole magnetyczne jest skierowane prostopadle przed płaszczyzną rysunku. Krążące protony poruszają się od środka po linii spiralnej wewnątrz wydrążonych duantów, uzyskując dodatkową energię za każdym razem, gdy przekraczają szczele między duantami

Cyklotron

Na rysunku 29.14 przedstawiono widok z góry tej części cyklotronu, w której krążą cząstki (np. protony). Dwa wydrążone elementy w kształcie litery D (otwarte wzdłuż prostych krawędzi) są wykonane z płyt miedzianych. Te elementy, zwane *duantami*, połączone są z generatorem, który wytwarza zmienne napięcie w szczelinie między nimi. Napięcie między duantami zmienia okresowo swój znak, a więc pole elektryczne w szczelinie zmienia kierunek, najpierw jest skierowane do jednego duantu, potem do drugiego itd. Duanty są umieszczone

w polu magnetycznym ($B = 1,5$ T), skierowanym prostopadle przed płaszczyznę rysunku i wytworzonym przez silny elektromagnes.

Wyobraź sobie, że proton wychodzący ze źródła S w środku cyklotronu na rysunku 29.14, początkowo porusza się w kierunku ujemnie naładowanego duantu. Proton zostanie przyspieszony w kierunku tego duantu, a kiedy znajdzie się w środku, będzie ekranowany od pól elektrycznych przez miedziane ściany, gdyż pole elektryczne nie wnika do wnętrza duantu. Jednakże pole magnetyczne nie jest ekranowane przez niemagnetyczny miedziany duant, więc proton będzie się poruszać po okręgu, którego promień zależy od prędkości i jest dany równaniem (29.16) ($r = mv/qB$).

Załóżmy teraz, że napięcie między duantami zmienia znak w chwili, w której proton opuszcza pierwszy duant i pojawia się w szczeelinie. Tak więc proton znów ma przed sobą ujemnie naładowany duant i znów zostaje przyspieszony. Ten proces trwa dalej, a krążący proton dotrzymuje kroku zmianom potencjału. W końcu proton, poruszając się po linii spiralnej, osiąga brzeg układu duantów, gdzie płytka odchylająca kieruje go na zewnątrz przez otwór wyjściowy.

Podstawą działania cyklotronu jest warunek, że częstotliwość v , z jaką proton krąży w polu, a która *nie* zależy od jego prędkości, musi być równa częstotliwości v_{gen} generatora elektrycznego, czyli:

$$v = v_{\text{gen}} \quad (\text{warunek rezonansu}). \quad (29.23)$$

Ten *warunek rezonansu* informuje nas o tym, że jeśli energia krążącego protonu ma wzrastać, to energia musi być dostarczana z częstotliwością v_{gen} , równą częstotliwości v , z jaką proton krąży w polu magnetycznym.

Łącząc równania (29.18) i (29.23), możemy zapisać warunek rezonansu w postaci:

$$qB = 2\pi mv_{\text{gen}}. \quad (29.24)$$

Dla protonu wartości q i m są ustalone. Zakładamy, że generator został zaprojektowany tak, aby działał przy jednej ustalonej częstotliwości v_{gen} . Możemy więc „dostroić” cyklotron, zmieniając wartość indukcji B , aż równanie (29.24) będzie spełnione i wtedy protony krążące w polu magnetycznym utworzą wiązkę na wyjściu cyklotronu.

Synchrotron protonów

Przy energii protonów przekraczającej 50 MeV tradycyjne cyklotrony zaczynają zawodzić, ponieważ jedno z założeń, przyjętych przy projektowaniu — to, że częstotliwość ruchu naładowanej cząstki w polu magnetycznym nie zależy od jej prędkości — jest spełnione tylko dla prędkości znacznie mniejszych od prędkości światła. Dla dużych prędkości protonu (powyżej ok. 10% prędkości światła) musimy traktować problem relatywistycznie. Zgodnie z teorią względności, gdy prędkość krążącego protonu zbliża się do prędkości światła, częstotliwość ruchu protonu stopniowo maleje. Zatem protony nie nadążają za generatorem cyklotronu o stałej częstotliwości v_{gen} i w końcu energia krążącego protonu przestaje rosnąć.

Jest jeszcze inną trudność. Dla protonu o energii 500 GeV w polu magnetycznym o indukcji 1,5 T promień toru jest równy 1,1 km. Odpowiedni magnes dla tradycyjnego cyklotronu o takich rozmiarach byłby nieprawdopodobnie kosztowny, gdyż powierzchnia jego biegunów musiała być równa około $4 \cdot 10^6 \text{ m}^2$.

Synchrotron protonów został zaprojektowany tak, aby poradzić sobie z tymi trudnościami. Indukcja B i częstotliwość generatora v_{gen} nie są stałe, jak w typowym cyklotronie, ale mogą się zmieniać w czasie cyklu przyspieszania. Gdy te wartości zostaną właściwie dobrane, to: 1) protony cały czas krążą w takt zmian napięcia generatora, 2) protony poruszają się po torze kołowym, a nie po spirali. Tak więc magnes musi być umieszczony tylko wzdłuż tego kołowego toru, a nie na obszarze ok. $4 \cdot 10^6 \text{ m}^2$. Jednak tor cząstki musi być nadal długi, jeżeli chcemy osiągnąć duże energie. Synchrotron protonów w Fermi National Accelerator Laboratory (Fermilab) w stanie Illinois ma obwód 6,3 km i może wytwarzać protony o energii około 1 TeV ($= 10^{12} \text{ eV}$).

Przykład 29.5

Założmy, że cyklotron działa z częstotliwością generatora 12 MHz, a promień duantu wynosi $R = 53 \text{ cm}$.

a) Jaka wartość indukcji jest potrzebna do przyspieszenia deuteronu w tym cyklotronie? Deuteron jest jądrem deuteru, izotopu wodoru. Składa się z protonu i neutronu, ma więc taki sam ładunek jak proton. Jego masa jest równa $m = 3,34 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$.

ROZWIĄZANIE:

■ Dla danej częstotliwości generatora v_{gen} , wartość indukcji magnetycznej B , potrzebna do przyspieszenia dowolnej cząstki w cyklotronie zależy, zgodnie z równaniem (29.24), od stosunku masy do ładunku m/q tej cząstki. Dla deuteronu i częstotliwości generatora $v_{\text{gen}} = 12 \text{ MHz}$, otrzymujemy:

$$B = \frac{2\pi mv_{\text{gen}}}{q} = \frac{(2\pi)(3,34 \cdot 10^{-27} \text{ kg})(12 \cdot 10^6 \text{ s}^{-1})}{1,60 \cdot 10^{-19} \text{ C}} = 1,57 \text{ T} \approx 1,6 \text{ T.} \quad (\text{odpowiedź})$$

Zauważ, że wartość indukcji B musiała być dwukrotnie mniejsza, aby przyspieszyć protony przy tej samej ustalonej częstotliwości generatora, równej 12 MHz.

b) Jaka jest końcowa energia kinetyczna deuteronów?

ROZWIĄZANIE:

■ 1. Energia kinetyczna ($\frac{1}{2}mv^2$) deuteronu, opuszczającego cyklotron jest równa jego energii kinetycznej bezpośrednio przed opuszczeniem cyklotronu, gdy deuteron porusza się po torze kołowym o promieniu w przybliżeniu równym promieniowi R duantu.

■ 2. Prędkość v deuteronu, poruszającego się po tym torze możemy obliczyć z równania (29.16) ($r = mv/qB$). Rozwiązuje to równanie względem v , podstawiając R w miejsce r , a następnie podstawiając dane, otrzymujemy:

$$v = \frac{RqB}{m} = \frac{(0,53 \text{ m})(1,60 \cdot 10^{-19} \text{ C})(1,57 \text{ T})}{3,34 \cdot 10^{-27} \text{ kg}} = 3,99 \cdot 10^7 \text{ m/s.}$$

Ta prędkość odpowiada energii kinetycznej

$$E_k = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}(3,34 \cdot 10^{-27} \text{ kg})(3,99 \cdot 10^7 \text{ m/s})^2 = 2,7 \cdot 10^{-12} \text{ J,} \quad (\text{odpowiedź})$$

czyli około 17 MeV.

29.7. Siła magnetyczna działająca na przewodnik z prądem

Omawiając zjawisko Halla, pokazaliśmy, że pole magnetyczne wytwarza siłę poziomą, która działa na elektrony poruszające się w przewodniku. Ta siła musi też działać na cały przewodnik, ponieważ elektrony przewodnictwa nie mogą się z niego wydostać.

Rys. 29.15. Giętki przewodnik przechodzi między biegunami magnesu (pokazany jest tylko biegun, znajdujący się dalej). a) Gdy prąd nie płynie, przewodnik jest prosty. b) Gdy prąd płynie do góry, przewodnik odchyla się w prawo. c) Gdy prąd płynie w dół, przewodnik odchyla się w lewo. Połączenia doprowadzające prąd do jednego końca przewodnika i odprowadzające prąd z drugiego końca nie są pokazane

Na rysunku 29.15a przedstawiono pionowy przewodnik, w którym nie płynie prąd elektryczny. Przewodnik umocowany jest na obydwu końcach i przechodzi przez szczelinę między pionowymi biegunami magnesu. Pole magnetyczne między biegunami jest skierowane przed płaszczyznę rysunku. Na rysunku 29.15b prąd płynie do góry, a przewodnik odchyla się w prawo. Na rysunku 29.15c kierunek przepływu prądu jest przeciwny, przewodnik zaś odchyla się w lewo.

Na rysunku 29.16 pokazano, co dzieje się we wnętrzu przewodnika, przedstawionego na rysunku 29.15. Widzisz jeden z elektronów przewodnictwa, poruszający się w dół z prędkością unoszenia v_d . Równanie (29.3), w którym należy podstawić $\phi = 90^\circ$, informuje nas, że na każdy taki elektron musi działać siła \vec{F}_B o wartości $ev_d B$. Z równania (29.2) wynika, że ta siła jest skierowana w prawo. Spodziewamy się więc, że na cały przewodnik będzie działała siła, skierowana w prawo, zgodnie z rysunkiem 29.15b.

Jeśli na rysunku 29.16 zmienilibyśmy *albo* kierunek wektora indukcji, *albo* kierunek prądu, to siła działająca na przewodnik zmieniłaby się na przeciwną, skierowaną teraz w lewo. Zauważ, że nie ma znaczenia, czy rozważamy ładunki ujemne, poruszające się w dół (jak obecnie), czy ładunki dodatnie, poruszające się do góry. Kierunek siły odchylającej przewodnik będzie taki sam. Możemy więc równie dobrze przyjąć, że prąd składa się z ładunków dodatnich.

Rozważmy fragment przewodnika o długości L , przedstawiony na rysunku 29.16. Wszystkie elektrony przewodnictwa, znajdujące się w tym obszarze, przejdą przez płaszczyznę xx na rysunku 29.16 w czasie $t = L/v_d$. Tak więc ładunek, przepływający w tym czasie przez płaszczyznę xx , jest równy:

$$q = It = I \frac{L}{v_d}.$$

Podstawiając to wyrażenie do równania (29.3), otrzymujemy:

$$F_B = q v_d B \sin \phi = \frac{IL}{v_d} v_d B \sin 90^\circ,$$

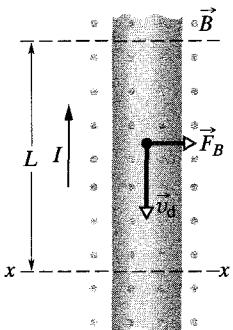
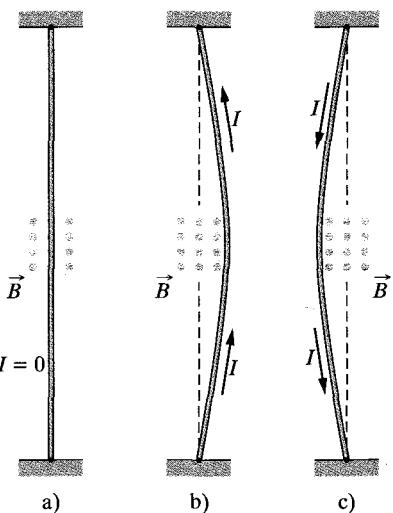
czyli:

$$F_B = ILB. \quad (29.25)$$

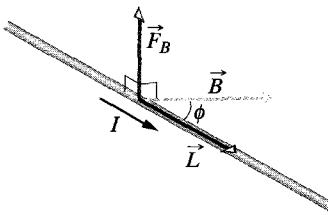
To równanie określa siłę magnetyczną, działającą na odcinek przewodnika o długości L , w którym płynie prąd o natężeniu I i który jest umieszczony w polu magnetycznym o wektorze indukcji \vec{B} , prostopadłym do przewodnika.

Jeżeli pole magnetyczne *nie* jest prostopadłe do przewodnika, jak na rysunku 29.17, to siła magnetyczna jest określona równaniem, będącym uogólnieniem równania (29.25).

$$\vec{F}_B = I \vec{L} \times \vec{B} \quad (\text{siła działająca na przewodnik z prądem}). \quad (29.26)$$



Rys. 29.16. Widziany z bliska fragment przewodnika, przedstawionego na rysunku 29.16b. Prąd płynie do góry rysunku, co oznacza, że elektrony poruszają się w dół. Pole magnetyczne o indukcji \vec{B} , skierowane przed płaszczyznę rysunku powoduje, że elektrony wraz z przewodnikiem są odchylane w prawo



Rys. 29.17. Przewodnik, w którym płynie prąd o natężeniu I , tworzy kąt ϕ z kierunkiem wektora indukcji magnetycznej \vec{B} . W polu znajduje się odcinek o długości L , a wektor \vec{L} jest zo-orientowany zgodnie z kierunkiem prądu. Na przewodnik działa siła magnetyczna $\vec{F}_B = I\vec{L} \times \vec{B}$

\vec{L} oznacza tutaj wektor *długości*, który ma wartość bezwzględną równą L i jest skierowany wzdłuż odcinka przewodnika, zgodnie z umownym kierunkiem prądu. Wartość siły F_B jest równa:

$$F_B = ILB \sin \phi, \quad (29.27)$$

gdzie ϕ jest kątem między kierunkami \vec{L} i \vec{B} . Kierunek siły \vec{F}_B jest zgodny z kierunkiem iloczynu wektorowego $\vec{L} \times \vec{B}$, ponieważ przyjmujemy, że natężenie prądu I jest wielkością dodatnią. Z równania (29.26) wynika, że wektor siły \vec{F}_B jest zawsze prostopadły do płaszczyzny, wyznaczonej przez wektory \vec{L} i \vec{B} , jak pokazano na rysunku 29.17.

Równanie (29.26) jest równoważne równaniu (29.2) w tym sensie, że każde z nich może być definicją indukcji magnetycznej \vec{B} . W praktyce określamy indukcję \vec{B} z równania (29.26), gdyż jest znacznie łatwiej zmierzyć siłę magnetyczną, działającą na przewodnik niż na pojedynczy, poruszający się ładunek.

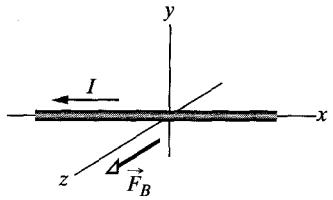
Jeżeli przewodnik nie jest prosty lub pole nie jest jednorodne, to możemy podzielić w myśl przewodnik na małe odcinki i zastosować do każdego z nich równanie (29.26). Siła, działająca na cały przewodnik będzie sumą wektorową wszystkich sił, działających na poszczególne odcinki. Możemy napisać:

$$d\vec{F}_B = Id\vec{L} \times \vec{B}, \quad (29.28)$$

a następnie wyznaczyć wypadkową siłę, działającą na dowolny układ odcinków z prądem, przez całkowanie równania (29.28).

Stosując równanie (29.28), pamiętaj, że nie istnieje oddzielny odcinek przewodnika o długości dL , w którym płynie prąd. Prąd musi być zawsze w jakiś sposób doprowadzony do odcinka przewodnika na jednym jego końcu i odprowadzony na drugim.

SPRAWDZIAN 5: Na rysunku przedstawiono prąd o natężeniu I , który płynie w przewodniku, umieszczonym w jednorodnym polu magnetycznym o indukcji \vec{B} . Pokazano również siłę magnetyczną \vec{F}_B , działającą na przewodnik. Wektor indukcji jest skierowany tak, że siła ma wartość maksymalną. Jaki jest kierunek wektora indukcji?

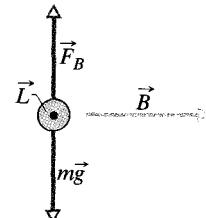


Przykład 29.6

W prostym poziomym odcinku przewodu miedzianego płynie prąd o natężeniu $I = 28$ A. Określ najmniejszą wartość i kierunek wektora indukcji magnetycznej \vec{B} , potrzebnego do „lewitacji” przewodu, tzn. do zrównoważenia działającej na niego siły ciężkości. Gęstość liniowa (masa na jednostkę długości) przewodu wynosi $46,6$ g/m.

ROZWIĄZANIE:

1. Jeżeli odcinek przewodu, w którym płynie prąd elektryczny, umieścimy w polu magnetycznym o indukcji \vec{B} , to na



Rys. 29.18. Przykład 29.6. Przewód (pokazany w przekroju), w którym płynie prąd, może „unosić się” w polu magnetycznym. Prąd w przewodzie płynie przed płaszczyznę rysunku, a wektor indukcji jest skierowany w prawą stronę

odcinek ten będzie działać siła magnetyczna \vec{F}_B . Aby zrównoważyć siłę ciężkości \vec{F}_g , działającą w dół, siła \vec{F}_B musi być skierowana do góry (rys. 29.18).

O 2. Zgodnie z równaniem (29.26) kierunek siły \vec{F}_B zależy od kierunków wektorów \vec{B} i \vec{L} . Ponieważ \vec{L} jest skierowane poziomo, a natężenie prądu jest wielkością dodatnią, z równania (29.26) i z reguły prawej dłoni dla iloczynu wektorowego wynika, że wektor \vec{B} musi być skierowany poziomo w prawą stronę (na rysunku 29.18), aby siła \vec{F}_B miała wymagany kierunek w góre.

Wartość siły \vec{F}_B wynika z równania (29.27) ($F_B = ILB \sin \phi$). Wektor \vec{F}_B ma zrównoważyć wektor \vec{F}_g , więc:

$$ILB \sin \phi = mg, \quad (29.29)$$

gdzie mg jest wartością \vec{F}_g , a m masą odcinka przewodu. Chceliśmy także, aby wartość B , potrzebna do zrównoważenia wek-

torów \vec{F}_B i \vec{F}_g była jak najmniejsza, dlatego $\sin \phi$ w równaniu (29.29) musi być jak największy. Aby to uzyskać, podstawiamy $\phi = 90^\circ$, tym samym wybierając kierunek wektora \vec{B} prostopadłe do odcinka przewodu. Mamy więc $\sin \phi = 1$, a z równania (29.29) otrzymujemy:

$$B = \frac{mg}{IL \sin \phi} = \frac{(m/L)g}{I}. \quad (29.30)$$

Zapisaliśmy wynik w ten sposób, gdyż znamy m/L , czyli gęstość liniową przewodu. Podstawiając dane, otrzymujemy

$$B = \frac{(46,6 \cdot 10^{-3} \text{ kg/m})(9,8 \text{ m/s}^2)}{28 \text{ A}} = 1,6 \cdot 10^{-2} \text{ T.} \quad (\text{odpowiedź})$$

Jest to pole około 160 razy silniejsze od pola magnetycznego Ziemi.

29.8. Moment siły działający na ramkę z prądem

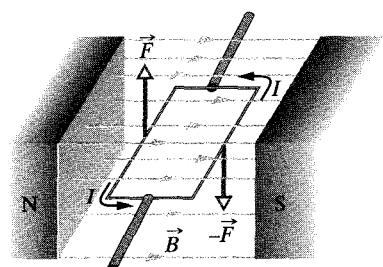
Większość pracy wykonują na całym świecie silniki elektryczne. Siły, dzięki którym ta praca jest wykonywana, to siły magnetyczne, które badaliśmy w poprzednim paragrafie, czyli siły działające na przewodnik z prądem umieszczony w polu magnetycznym.

Na rysunku 29.19 przedstawiono prosty silnik, składający się z pojedynczej ramki z prądem, umieszczonej w polu magnetycznym o indukcji \vec{B} . Dwie siły magnetyczne \vec{F} i $-\vec{F}$ wytwarzają moment siły, który działa na ramkę, usiłując ją obrócić wokół osi. Mimo braku wielu istotnych szczegółów, z rysunku można odczytać, w jaki sposób działanie pola magnetycznego na ramkę z prądem wywołuje ruch obrotowy. Spróbujmy przeanalizować ten problem.

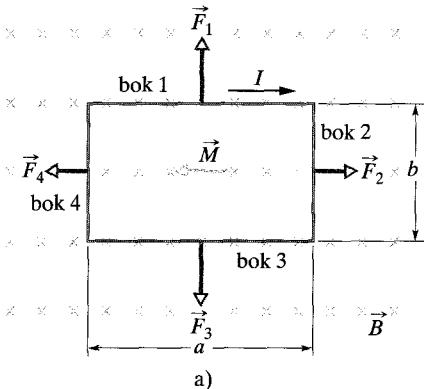
Na rysunku 29.20a przedstawiono w rzucie prostokątną ramkę o bokach a i b , w której płynie prąd o natężeniu I . Ramka umieszczona jest w jednorodnym polu magnetycznym o indukcji \vec{B} w taki sposób, że jej dłuższe boki, oznaczone jako 1 i 3, są prostopadłe do kierunku wektora indukcji (skierowanego za płaszczyznę rysunku), natomiast krótsze boki, oznaczone jako 2 i 4, nie są prostopadłe do kierunku wektora indukcji. Przewody, doprowadzające prąd do ramki są potrzebne, ale dla uproszczenia nie zostały pokazane.

Do określenia ustawienia ramki w polu magnetycznym używamy wektora normalnego \vec{n} , który jest prostopadły do płaszczyzny ramki. Na rysunku 29.20b przedstawiono regułę prawej dłoni, zastosowaną w celu znalezienia kierunku \vec{n} . Ułóż lub zegnij palce prawej dłoni tak, aby wskazywały kierunek prądu w dowolnym punkcie ramki. Twój wyciągnięty kciuk wskaże wtedy kierunek wektora normalnego \vec{n} .

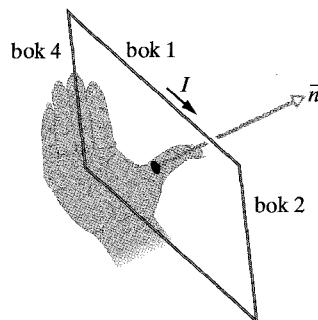
Na rysunku 29.20c przedstawiona jest ramka, której wektor normalny jest skierowany pod pewnym kątem θ do kierunku wektora indukcji magnetycznej \vec{B} . Dla takiego ustawienia ramki chcemy wyznaczyć wypadkową siłę i wypadkowy moment siły, działający na ramkę.



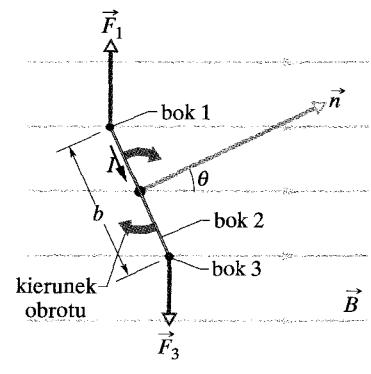
Rys. 29.19. Części składowe silnika elektrycznego. Prostokątna ramka, w której płynie prąd elektryczny i która może się swobodnie obracać wokół stałej osi, umieszczona jest w polu magnetycznym. Siły magnetyczne, działające na przewód wytwarzają moment siły, który powoduje obrót ramki. Komutator (nie pokazany na rysunku) odwraca kierunek prądu co pół obrotu, tak aby moment siły działał zawsze w tę samą stronę.



a)



b)



c)

Rys. 29.20. Prostokątna ramka długości a i szerokości b , w której płynie prąd o natężeniu I , jest umieszczona w jednorodnym polu magnetycznym. Moment siły M usiłuje ustawić wektor normalny \vec{n} wzdłuż linii pola. a) Ramka widziana wzdłuż linii pola magnetycznego. b) Widok perspektywiczny, pokazujący, w jaki sposób reguła prawej dłoni pozwala określić kierunek wektora \vec{n} , prostopadłego do płaszczyzny ramki. c) Ramka widziana od strony boku 2. Ramka obraca się, jak pokazano na rysunku

Wypadkowa siła, działająca na ramkę jest wektorową sumą sił, działających na jej cztery boki. Dla boku 2 kierunek wektora \vec{L} w równaniu (29.26) jest zgodny z kierunkiem przepływu prądu, a jego wartość jest równa b . Kąt między wektorami \vec{L} i \vec{B} (patrz rysunek 29.20c) wynosi $90^\circ - \theta$. Tak więc wartość siły, działającej na ten bok jest równa:

$$F_2 = IbB \sin(90^\circ - \theta) = IbB \cos \theta. \quad (29.31)$$

Możesz wykazać, że siła \vec{F}_4 , działająca na bok 4 ma taką samą wartość, jak siła \vec{F}_2 , ale jest przeciwnie skierowana. Tak więc siły \vec{F}_2 i \vec{F}_4 równoważą się, tzn. ich wypadkowa jest równa零. Siły działają wzdłuż tej samej prostej, przechodzącej przez środek ramki, dlatego związany z nimi wypadkowy moment siły jest równy zero.

Inaczej jest w przypadku boków 1 i 3, gdyż wektor \vec{L} jest prostopadły do wektora \vec{B} , a siły \vec{F}_1 i \vec{F}_3 mają taką samą wartość Iab . Siły te są skierowane przeciwnie, a więc nie powodują przesunięcia ramki ani w góre, ani w dół. Jednakże, jak pokazano na rysunku 29.20c, te dwie siły *nie* działają wzdłuż tej samej prostej, tak więc powstaje wypadkowy moment siły. Moment ten usiłuje obrócić ramkę tak, aby ustawić jej wektor normalny \vec{n} wzdłuż kierunku wektora indukcji magnetycznej \vec{B} . Ramiona tych sił względem osi obrotu ramki wynoszą $(b/2) \sin \theta$. Wartość momentu siły M' , wywołanego działaniem sił \vec{F}_1 i \vec{F}_3 jest więc równa (patrz rysunek 29.20c):

$$M' = \left(Iab \frac{b}{2} \sin \theta \right) + \left(Iab \frac{b}{2} \sin \theta \right) = IabB \sin \theta. \quad (29.32)$$

Przypuśćmy, że pojedynczą ramkę, w której płynie prąd, zastąpimy *cewką*, składającą się z N zwojów. Następnie założymy, że zwoje są nawinięte tak ciasno, że można przyjąć w przybliżeniu, iż mają te same wymiary i leżą w tej samej płaszczyźnie. Zatem zwoje tworzą *plaską cewkę*, a moment siły M' , o wartości danej równaniem (29.32), działa na każdy zwoj. Całkowity moment siły, działa-

jący na cewkę ma więc wartość

$$M = NM' = NIabB \sin \theta = (NIS)B \sin \theta, \quad (29.33)$$

gdzie $S (= ab)$ jest polem powierzchni objętej przez cewkę. Wielkości w nawiasach (NIS) występują razem, ponieważ opisują właściwości cewki: liczbę zwojów, pole powierzchni i natężenie prądu. Równanie (29.33) jest słusze dla wszystkich płaskich cewek, niezależnie od ich kształtu, pod warunkiem, że pole magnetyczne jest jednorodne.

Zamiast skupiać się na ruchu cewki, łatwiej jest analizować położenie wektora \vec{n} , który jest prostopadły do płaszczyzny cewki. Równanie (29.33) wskazuje, że płaska cewka z prądem, umieszczona w polu magnetycznym, będzie usiłowała się obrócić tak, aby kierunek wektora \vec{n} był zgodny z kierunkiem wektora indukcji magnetycznej.

W silniku elektrycznym kierunek prądu w cewce zmienia się na przeciwny w chwili, w której kierunek wektora \vec{n} pokrywa się z kierunkiem wektora indukcji; w ten sposób moment siły nadal obraca cewkę. Ta automatyczna zmiana kierunku prądu jest uzyskiwana za pomocą komutatora, który elektrycznie łączy obracającą się cewkę z nieruchomymi stykami przewodów doprowadzających prąd ze źródła.

Przykład 29.7

Działanie analogowych woltomierzy i amperomierzy polega na pomiarze momentu siły, wywieranego przez pole magnetyczne na cewkę z prądem. Odczytu dokonujemy za pomocą wskazówki, przesuwającej się nad skalą. Na rysunku 29.21 przedstawiono za-

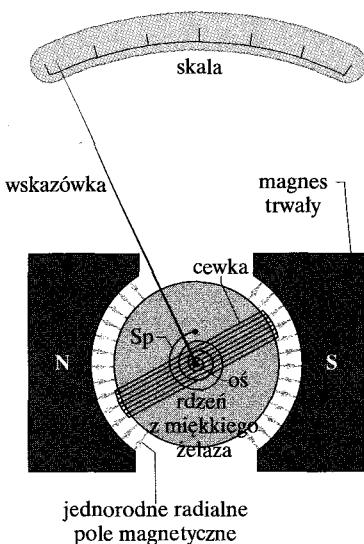
sadnicze części galwanometru, który jest podstawowym składnikiem zarówno woltomierza, jak i amperomierza analogowego. Założymy, że cewka ma wymiary $2,1 \text{ cm} \times 1,2 \text{ cm}$, 250 zwojów i jest umocowana w taki sposób, że może obracać się wokół osi (prostopadłej do płaszczyzny rysunku) w jednorodnym polu *radialnym* o wartości indukcji $B = 0,23 \text{ T}$. Dla dowolnego położenia cewki w takim polu działa na nią moment siły dążący do jej obrócenia. Sprzęzyna Sp wytwarza moment siły, który działa w przeciwnym kierunku i równoważy moment siły, pochodzący od pola magnetycznego, tak aby określone natężenie prądu I , płynącego przez cewkę powodowało określone wychylenie kątowe ϕ . Im większe natężenie prądu, tym większe wychylenie, a zatem tym większy moment siły, wywierany przez sprężynę. Jaki musi być moment kierujący (κ) sprężyny, występujący we wzorze (16.22) ($M = -\kappa\phi$), jeżeli prąd o natężeniu $100 \mu\text{A}$ powoduje wychylenie kątowe 28° ?

ROZWIĄZANIE:

Jeżeli przez przyrząd płynie prąd stały, to moment siły, wynikający z działania pola magnetycznego (równanie (29.33)) jest równoważony przez moment siły sprężyny. Tak więc wartości tych momentów są sobie równe:

$$NISB \sin \theta = \kappa\phi. \quad (29.34)$$

ϕ oznacza tutaj kątowe wychylenie cewki i wskazówki, a $S (= 2,52 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2)$ jest polem powierzchni objętej przez cewkę. Kąt $\theta = 90^\circ$ dla dowolnego położenia wskazówki, gdyż boki cewki równoległe do osi obrotu są zawsze prostopadłe do linii pola magnetycznego.



Rys. 29.21. Przykład 29.7. Części składowe galwanometru. W zależności od rodzaju obwodu zewnętrznego, przyrząd ten może być używany jako woltomierz lub amperomierz

Rozwiążując równanie (29.34) względem κ znajdujemy:

$$\begin{aligned}\kappa &= \frac{NISB \sin \theta}{\phi} \\ &= (250)(100 \cdot 10^{-6} \text{ A})(2,52 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2) \frac{(0,23 \text{ T})(\sin 90^\circ)}{28^\circ} \\ &= 5,2 \cdot 10^{-8} \text{ N} \cdot \text{m}/\text{stopień.} \quad (\text{odpowiedź})\end{aligned}$$

Wiele nowoczesnych amperomierzy i woltomierzy to przyrządy cyfrowe o bezpośrednim odczycie, w których nie jest stosowana ruchoma cewka.

29.9. Dipolowy moment magnetyczny

Cewka, przez którą płynie prąd, omawiana w poprzednim paragrafie, może być opisana za pomocą pojedynczego wektora $\vec{\mu}$, noszącego nazwę **dipolowego momentu magnetycznego**. Kierunek wektora $\vec{\mu}$ wybieramy zgodnie z kierunkiem wektora normalnego \vec{n} , prostopadłego do płaszczyzny cewki, jak pokazano na rysunku 29.20c. Natomiast wartość bezwzględną wektora $\vec{\mu}$ definiujemy jako:

$$\mu = NIS \quad (\text{moment magnetyczny}), \quad (29.35)$$

gdzie N jest liczbą zwojów cewki, I — natężeniem prądu płynącego przez cewkę, a S — polem powierzchni, objętej przez każdy zwoj cewki. (Z równania (29.35) wynika, że jednostką $\vec{\mu}$ jest amper razy metr kwadratowy). Stosując $\vec{\mu}$, możemy zapisać równanie (29.33), które określa moment siły, działający na cewkę pod wpływem pola magnetycznego jako:

$$M = \mu B \sin \theta, \quad (29.36)$$

gdzie θ jest kątem między wektorami $\vec{\mu}$ i \vec{B} .

Równanie to może być zapisane w ogólniejszej postaci jako zależność wektorowa:

$$\vec{M} = \vec{\mu} \times \vec{B}, \quad (29.37)$$

która bardzo przypomina analogiczne równanie dla momentu siły, wywieranego przez pole **elektryczne** na dipol **elektryczny**, a mianowicie równanie (23.34):

$$\vec{M} = \vec{p} \times \vec{E}.$$

W obydwu przypadkach moment siły wywierany przez pole — magnetyczne lub elektryczne — jest równy iloczynowi wektorowemu odpowiedniego momentu dipolowego i wektora pola.

Dipol magnetyczny ma w zewnętrznym polu magnetycznym **magnetyczną energię potencjalną**, która zależy od ustawienia dipola w polu magnetycznym. Wykazaliśmy, że dla dipola elektrycznego (równanie (23.38)):

$$E_p(\theta) = -\vec{p} \cdot \vec{E}.$$

W przypadku magnetycznym można napisać analogicznie:

$$E_p(\theta) = -\vec{\mu} \cdot \vec{B}. \quad (29.38)$$

Dipol magnetyczny ma najmniejszą energię ($= -\mu B \cos 0^\circ = -\mu B$), gdy moment magnetyczny $\vec{\mu}$ jest ustawiony zgodnie z kierunkiem wektora indukcji \vec{B} (rys. 29.22). Dipol ma największą energię ($= -\mu B \cos 180^\circ = +\mu B$), gdy wektor $\vec{\mu}$ jest ustawiony przeciwnie do kierunku wektora indukcji pola.

Gdy dipol magnetyczny obraca się od pewnego początkowego ustawienia θ_{pocz} do innego ustawienia θ_{konec} , praca W , wykonana nad dipolem przez pole magnetyczne jest równa:

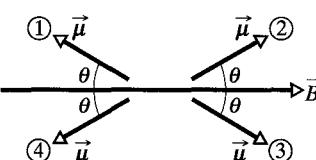
$$W = -\Delta E_p = -(E_{p \text{ konec}} - E_{p \text{ pocz}}), \quad (29.39)$$

gdzie $E_{p \text{ konec}}$ i $E_{p \text{ pocz}}$ są wyznaczone z równania (29.38). Jeżeli zewnętrzny moment siły działa na dipol podczas zmiany ustawienia, to wykonuje on nad dipolem pracę W_{zewn} . Jeżeli dipol jest w spoczynku przed i po zmianie ustawienia, to praca W_{zewn} jest równa pracy wykonanej nad dipolem przez pole, wziętej ze znakiem przeciwnym. Tak więc:

$$W_{\text{zewn}} = -W = E_{p \text{ konec}} - E_{p \text{ pocz}}. \quad (29.40)$$

Dotychczas z dipolem magnetycznym była utożsamiana tylko cewka z prądem. Jednakże zwykły magnes sztabkowy jest również dipolem magnetycznym, podobnie jak obracająca się naładowana kula. Ziemię można też traktować w przybliżeniu jako dipol magnetyczny. Wreszcie większość cząstek elementarnych, w tym elektron, proton i neutron, ma dipolowe momenty magnetyczne. Jak zobaczyłeś w rozdziale 32, wszystkie te układy zachowują się jak ramki z prądem. W tabeli 29.2 porównano przybliżone wartości niektórych dipolowych momentów magnetycznych.

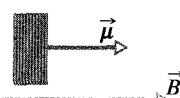
SPRAWDZIAN 6: Na rysunku pokazano cztery ustawienia dipolowego momentu magnetycznego $\vec{\mu}$, tworzącego kąt θ z kierunkiem pola magnetycznego. Uszereguj ustawienia pod względem: a) wartości momentu siły, działającego na dipol, b) energii potencjalnej dipola, rozpoczynając od największej wartości.



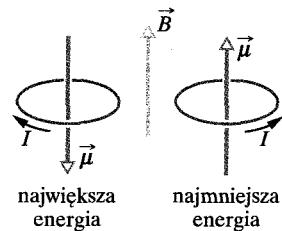
Przykład 29.8

Na rysunku 29.23 przedstawiono okrągłą cewkę o polu powierzchni S , równym $2,52 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2$, składającą się z 250 zwojów, przez które płynie prąd o natężeniu $100 \mu\text{A}$. Cewka jest w spoczynku, w jednorodnym polu magnetycznym o indukcji $B = 0,85 \text{ T}$, a jej dipolowy moment magnetyczny $\vec{\mu}$ jest ustawiony zgodnie z kierunkiem wektora \vec{B} .

a) Jaki jest kierunek prądu w cewce na rysunku 29.23?



Rys. 29.23. Przykład 29.8. Widok z boku okrągłej cewki z prądem, której dipolowy moment magnetyczny $\vec{\mu}$ jest ustawiony zgodnie z kierunkiem wektora \vec{B}



Rys. 29.22. Ustawienia dipola magnetycznego (w tym przypadku ramki z prądem) w zewnętrznym polu magnetycznym \vec{B} , odpowiadające największej i najmniejszej energii. Kierunek dipolowego momentu magnetycznego $\vec{\mu}$ określony jest przez kierunek prądu I , zgodnie z regułą prawej dłoni, pokazaną na rysunku 29.20b dla wektora \vec{n}

Tabela 29.2. Wartości niektórych dipolowych momentów magnetycznych

| | |
|-----------------------|----------------------------------|
| mały magnes sztabkowy | 5 J/T |
| Ziemia | $8,0 \cdot 10^{22} \text{ J/T}$ |
| proton | $1,4 \cdot 10^{-26} \text{ J/T}$ |
| elektron | $9,3 \cdot 10^{-24} \text{ J/T}$ |

ROZWIĄZANIE:

○ Zastosuj regułę prawej dłoni w następujący sposób: wyobraź sobie, że obejmujesz zwoje cewki prawą dlonią tak, aby twój prawy kciuk był wyciągnięty w kierunku wektora $\vec{\mu}$. Kierunek, w którym twoje palce zginają się wokół zwojów, jest kierunkiem prądu w cewce. Tak więc w zwojach biegących po bliższej stronie cewki (widocznych na rysunku 29.23) prąd płynie z góry na dół.

b) Jaką pracę musi wykonać nad cewką moment siły, przyłożony z zewnątrz, obracając ją o 90° w stosunku do ustawienia początkowego tak, aby $\vec{\mu}$ było prostopadłe do wektora \vec{B} , a cewka była znowu w spoczynku?

ROZWIĄZANIE:

○ Praca W_{zewn} , wykonana przez przyłożony moment siły, jest równa zmianie energii potencjalnej cewki, związaną ze zmianą

jej ustawienia. Z równania (29.40) ($W_{\text{zewn}} = E_p \text{ końc} - E_p \text{ pocz}$) wynika, że:

$$\begin{aligned} W_{\text{zewn}} &= E_p(90^\circ) - E_p(0^\circ) = -\mu B \cos 90^\circ - (-\mu B \cos 0^\circ) \\ &= 0 + \mu B = \mu B. \end{aligned}$$

Podstawiając w miejsce μ wyrażenie (29.35) ($\mu = NIS$), otrzymujemy:

$$\begin{aligned} W_{\text{zewn}} &= (NIS)B = (250)(100 \cdot 10^{-6} \text{ A})(2,52 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2)(0,85 \text{ T}) \\ &= 5,356 \cdot 10^{-6} \text{ J} \approx 5,4 \text{ } \mu\text{J}. \end{aligned}$$

(odpowiedź)

Podsumowanie

Indukcja magnetyczna \vec{B} Indukcja magnetyczna \vec{B} jest zdefiniowana za pomocą siły \vec{F}_B , która działa na cząstkę próbnej o ładunku q , poruszającą się w polu z prędkością \vec{v} :

$$\vec{F}_B = q\vec{v} \times \vec{B}. \quad (29.2)$$

Jednostką indukcji \vec{B} w układzie SI jest **tesla (T)**: $1 \text{ T} = 1 \text{ N}/(\text{A} \cdot \text{m}) = 10^4 \text{ gausów}$.

Zjawisko Halla Kiedy przewodzący pasek o grubości l , w którym płynie prąd o natężeniu I , zostanie umieszczony w jednorodnym polu magnetycznym o indukcji \vec{B} , to nośniki o ładunku e zaczynają się gromadzić na brzegu paska, wytwarzając poprzeczne napięcie U . Znak napięcia między brzegami paska wskazuje na znak nośników ładunku; koncentracja n nośników ładunku może być obliczona z równania:

$$n = \frac{BI}{Ule}. \quad (29.12)$$

Naładowana cząstka poruszająca się w polu magnetycznym Naładowana cząstka o masie m i ładunku q , wpadająca z prędkością \vec{v} w jednorodne pole magnetyczne prostopadłe do kierunku wektora indukcji \vec{B} , będzie poruszała się po okręgu. Stosując drugą zasadę dynamiki dla ruchu po okręgu otrzymujemy:

$$qvB = \frac{mv^2}{r}, \quad (29.15)$$

skąd wyznaczamy promień okręgu:

$$r = \frac{mv}{qB}. \quad (29.16)$$

Częstość w ruchu po okręgu v , częstość kołowa ω i okres T są dane wzorami:

$$\nu = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{T} = \frac{qB}{2\pi nm}. \quad (29.19, 29.18, 29.17)$$

Cyklotrony i synchrotry Cyklotron jest akceleratorem cząstek, w którym pole magnetyczne jest wykorzystane do utrzymania naładowanej cząstki na orbicie kołowej o zwiększającym się promieniu, tak aby niewielki potencjał przyspieszający mógł wielokrotnie działać na cząstkę, nadając jej dużą energię. Istnieje

górną granicę energii możliwych do osiągnięcia w cyklotronie, gdyż poruszająca się cząstka przestaje nadążać za zmianami napięcia generatora, w miarę jak jej prędkość zbliża się do prędkości światła. W synchrotronie ta wada została usunięta. Można zaprogramować okresowe zmiany zarówno indukcji B , jak i częstotliwości generatora v_{gen} w taki sposób, aby cząstki nie tylko uzyskiwały duże energie, ale mogły je osiągnąć, krążąc po orbitach o stałym promieniu.

Sила magnetyczna, działająca na przewodnik z prądem Na prostoliniowy przewodnik, w którym płynie prąd o natężeniu I , umieszczony w jednorodnym polu magnetycznym, działa siła:

$$\vec{F}_B = I\vec{L} \times \vec{B}. \quad (29.26)$$

Siła działająca w polu magnetycznym na element prądu $Id\vec{L}$ wynosi:

$$d\vec{F}_B = Id\vec{L} \times \vec{B}. \quad (29.28)$$

Kierunek wektora \vec{L} lub $d\vec{L}$ jest zgodny z kierunkiem przepływu prądu I .

Moment siły działający na cewkę z prądem Na cewkę (obejmującą powierzchnię o polu S , składającą się z N zwojów, przez które płynie prąd o natężeniu I) umieszczoną w jednorodnym polu magnetycznym o indukcji \vec{B} działa moment siły \vec{M} równy:

$$\vec{M} = \vec{\mu} \times \vec{B}. \quad (29.37)$$

$\vec{\mu}$ oznacza tutaj **dipolowy moment magnetyczny** cewki o wartości $\mu = NIS$ i kierunku określonym za pomocą reguły prawej dłoni.

Energia dipola magnetycznego związanego z jego ustawieniem **Magnetyczna energia potencjalna** dipola magnetycznego, znajdującego się w polu magnetycznym jest równa:

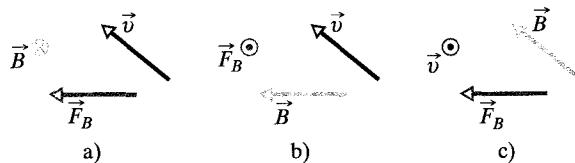
$$E_p(\theta) = -\vec{\mu} \cdot \vec{B}. \quad (29.38)$$

Jeżeli dipol magnetyczny obraca się od pewnego początkowego ustawienia θ_{pocz} do innego ustawienia $\theta_{\text{końc}}$, to praca W wykonana nad dipolem przez pole magnetyczne jest równa:

$$W = -\Delta E_p = -(E_p \text{ końc} - E_p \text{ pocz}). \quad (29.39)$$

Pytania

1. Na rysunku 29.24 przedstawiono trzy przypadki, w których siła magnetyczna \vec{F}_B działa na dodatnio naładowaną cząstkę, poruszającą się z prędkością \vec{v} w jednorodnym polu magnetycznym o indukcji \vec{B} . Dla każdego przypadku sprawdź, czy kierunki wektorów są poprawne.



Rys. 29.24. Pytanie 1

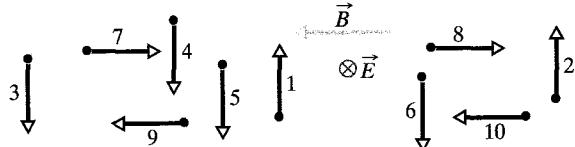
2. Niżej podana jest chwilowa prędkość \vec{v} protonu, poruszającego się w jednorodnym polu magnetycznym o indukcji \vec{B} , w czterech następujących przypadkach:

- a) $\vec{v} = 2\hat{i} - 3\hat{j}$ i $\vec{B} = 4\hat{k}$,
- b) $\vec{v} = 3\hat{i} + 2\hat{j}$ i $\vec{B} = -4\hat{k}$,
- c) $\vec{v} = 3\hat{j} - 2\hat{k}$ i $\vec{B} = 4\hat{i}$,
- d) $\vec{v} = 20\hat{i}$ i $\vec{B} = -4\hat{i}$.

Bez przeprowadzania pisemnych obliczeń uszereguj powyższe przypadki pod względem wartości siły magnetycznej, działającej na proton, rozpoczynając od największej.

3. W paragrafie 29.3 omawialiśmy ruch naładowanej cząstki w skrzyżowanych polach, w przypadku, gdy siły \vec{F}_E i \vec{F}_B były skierowane przeciwnie. Okazało się, że cząstka porusza się po linii prostej (tzn. obie siły się równoważą), gdy prędkość cząstki jest dana równaniem (29.7) ($v = E/B$). Która z dwóch sił jest większa, jeżeli zamiast tego równania prędkość cząstki spełnia nierówność: a) $v < E/B$, b) $v > E/B$?

4. Na rysunku 29.25 przedstawiono skrzyżowane jednorodne pola elektryczne i magnetyczne (\vec{E} i \vec{B}) oraz wektory prędkości, pokazane w pewnej chwili dla 10 cząstek, wymienionych w tabeli



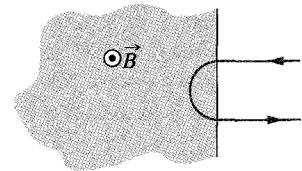
Rys. 29.25. Pytanie 4

Tabela 29.3. Pytanie 4

| cząstka | ładunek | prędkość | cząstka | ładunek | prędkość |
|---------|---------|----------|---------|---------|----------|
| 1 | + | mniejsza | 6 | - | większa |
| 2 | + | większa | 7 | + | mniejsza |
| 3 | + | mniejsza | 8 | + | większa |
| 4 | + | większa | 9 | - | mniejsza |
| 5 | - | mniejsza | 10 | - | większa |

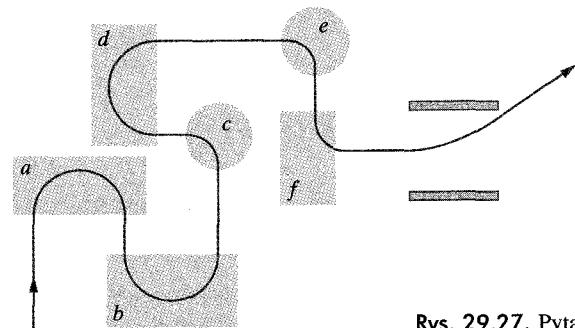
29.3 (wektory nie są narysowane w skali). W tabeli podano znaki ładunków oraz prędkości cząstek. Prędkości są podane albo jako mniejsze, albo większe od E/B (patrz pytanie 3). Które cząstki będą, wraz z upływem czasu, poruszać się zza płaszczyzny rysunku w twoją stronę?

5. Na rysunku 29.26 naładowana cząstka wpada z prędkością v_0 w obszar jednorodnego pola magnetycznego o indukcji \vec{B} , zakreśl półokrąg w czasie T_0 , a następnie opuszcza obszar pola. a) Czy ładunek cząstki jest dodatni, czy ujemny? b) Czy końcowa prędkość cząstki jest większa, mniejsza, czy równa v_0 ? c) Czy czas przebywania w obszarze pola \vec{B} byłby większy, mniejszy, czy równy T_0 , gdyby początkowa prędkość była równa $0,5v_0$? d) Czy tor cząstki byłby wówczas półokręgiem, czy też większą lub mniejszą od niego częścią okręgu?



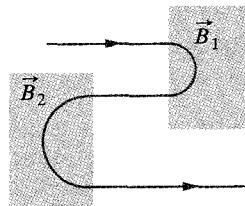
Rys. 29.26. Pytanie 5

6. Na rysunku 29.27 przedstawiono tor cząstki, przechodzącej przez sześć obszarów jednorodnego pola magnetycznego, w których odcinki toru są albo półokręgami, albo ćwiartkami okręgu. Po opuszczeniu ostatniego obszaru cząstka przelatuje między dwiema naładowanymi równoległymi płytami i jest odchylana w kierunku płytka o większym potencjale. Jakie są kierunki wektora indukcji w sześciu obszarach?

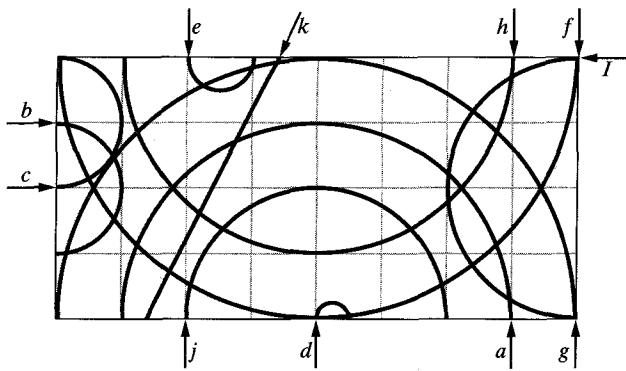


Rys. 29.27. Pytanie 6

7. Na rysunku 29.28 przedstawiono tor elektronu, przechodzącego przez dwa obszary jednorodnego pola magnetycznego o wartościach indukcji B_1 i B_2 . Tor elektronu w każdym obszarze jest półokręgiem. a) Które pole jest silniejsze? b) Jakie są kierunki wektorów indukcji? c) Czy czas przebywania elektronu w obszarze pola B_1 jest większy, mniejszy, czy taki sam, jak czas przebywania w obszarze pola B_2 ?



Rys. 29.28. Pytanie 7



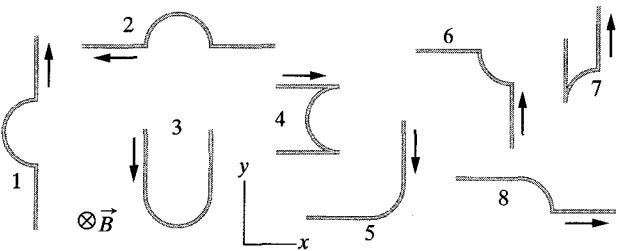
Rys. 29.29. Pytanie 8

8. Karuzela cząstek. Na rysunku 29.29 przedstawiono 11 torów cząstek w obszarze jednorodnego pola magnetycznego. Jeden tor jest linią prostą, pozostałe są półokręgami. W tabeli 29.4 podano masy, ładunki i prędkości 11 cząstek, które poruszają się w polu po tych torach w zaznaczonych kierunkach. Przyporządkuj tory na rysunku poszczególnym cząstkom w tabeli.

Tabela 29.4 Pytanie 8

| cząstka | masa | ładunek | prędkość |
|---------|-------|---------|----------|
| 1 | $2m$ | q | v |
| 2 | m | $2q$ | v |
| 3 | $m/2$ | q | $2v$ |
| 4 | $3m$ | $3q$ | $3v$ |
| 5 | $2m$ | q | $2v$ |
| 6 | m | $-q$ | $2v$ |
| 7 | m | $-4q$ | v |
| 8 | m | $-q$ | v |
| 9 | $2m$ | $-2q$ | $8v$ |
| 10 | m | $-2q$ | $8v$ |
| 11 | $3m$ | 0 | $3v$ |

9. Na rysunku 29.30 przedstawiono osiem przewodów, umieszczone w tym samym jednorodnym polu magnetycznym (skierowanym za płaszczyznę rysunku). W ośmiu oddzielnych doświadczeniach przez każdy przewód przepuszczamy prąd o takim samym natężeniu. Każdy przewód składa się z dwóch odcinków o długości L (albo równoległych, albo prostopadłych do osi x i y , pokazanych na rysunku) oraz jednego łuku okręgu o promieniu krzywizny R . Kierunki prądu są zaznaczone za pomocą strzałek obok przewodów. a) Dla każdego przewodu podaj kierunek wypadkowej siły magnetycznej, określony za pomocą kąta, mierzonego od dodatniej osi x w kierunku przeciwnym do ruchu wskazówek zegara. b) Uszereguj przewody od 1 do 4 pod względem wartości wypadkowej siły magnetycznej, która na nie działa, rozpoczynając od największej wartości. c) Powtórz to samo dla przewodów od 5 do 8.



Rys. 29.30. Pytanie 9

10. a) Jeżeli w sprawdzianie 6 moment magnetyczny $\vec{\mu}$ obraca się od ustawienia 1 do ustawienia 2, to czy praca wykonana nad dipolem *przez pole magnetyczne* jest dodatnia, ujemna, czy równa零? **b)** Uszereguj pracę wykonaną nad dipolem przez pole magnetyczne dla obrotów od ustawienia 1 do: 1) ustawienia 2, 2) ustawienia 3, 3) ustawienia 4, rozpoczynając od największej wartości.

Zadania

www Rozwiążanie jest dostępne na stronie internetowej podręcznika: <http://www.wiley.com/college/hrw>

ilw Rozwiążanie jest dostępne w postaci interaktywnej, wykorzystującej oprogramowanie Interactive Learning-Ware (na tej samej stronie)

29.2. Definicja wektora \vec{B}

1. Cząstka α porusza się z prędkością \vec{v} o wartości 550 m/s w jednorodnym polu magnetycznym, którego indukcja \vec{B} ma wartość $0,045 \text{ T}$. (Cząstka α ma ładunek $+3,2 \cdot 10^{-19} \text{ C}$ i masę $6,6 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$). Kąt między wektorami \vec{v} i \vec{B} jest równy 52° . Jakią są wartości bezwzględne: a) siły \vec{F}_B , wywieranej na cząstkę przez pole;

b) przyspieszenia cząstki, wynikającego z działania siły \vec{F}_B ? c) Czy prędkość cząstki rośnie, maleje, czy pozostaje równa 550 m/s ?

2. Elektron w lampie analizującej kamery telewizyjnej porusza się z prędkością $7,2 \cdot 10^6 \text{ m/s}$ w polu magnetycznym o indukcji 83 mT . a) Co możesz powiedzieć, nie znając kierunku wektora indukcji, o największej i najmniejszej wartości siły, jaką pole działa na elektron? b) W pewnym punkcie elektron ma przyspieszenie o wartości $4,9 \cdot 10^{14} \text{ m/s}^2$. Jaki jest w tym punkcie kąt między kierunkiem wektora prędkości a kierunkiem wektora indukcji?

3. Na proton, poruszający się pod kątem 23° do kierunku wektora indukcji o wartości $2,6 \text{ mT}$ działa siła magnetyczna o wartości $6,5 \cdot 10^{-17} \text{ N}$. Oblicz: a) prędkość protonu, b) jego energię kinetyczną w elektronowoltach. ilw

4. Elektron porusza się z prędkością:

$$\vec{v} = (2 \cdot 10^6 \text{ m/s})\hat{i} + (3 \cdot 10^6 \text{ m/s})\hat{j}$$

w polu magnetycznym o indukcji $\vec{B} = (0,03 \text{ T})\hat{i} - (0,15 \text{ T})\hat{j}$.
a) Oblicz wartość siły działającej na elektron. b) Powtóż obliczenia dla protonu o takiej samej prędkości.

5. Każdy elektron w wiązce w lampie kineskopowej ma energię kinetyczną 12 keV. Lampa jest ustawiona w taki sposób, że elektrony poruszają się poziomo, w kierunku od geomagnetycznego bieguna południowego do geomagnetycznego bieguna północnego. Składowa pionowa indukcji ziemskiego pola magnetycznego jest skierowana w dół i ma wartość $55 \mu\text{T}$. a) W którym kierunku odchyli się wiązka? b) Jakie jest przyspieszenie pojedynczego elektronu, spowodowane działaniem pola magnetycznego? c) Jak daleko odchyli się wiązka po przebyciu 20 cm wzdłuż lampy kineskopowej?

29.3. Pola skrzyżowane: odkrycie elektronu

6. Proton porusza się w jednorodnym polu elektrycznym oraz w jednorodnym polu magnetycznym o indukcji $\vec{B} = -2,5\hat{i} \text{ mT}$. W pewnej chwili prędkość protonu wynosi $\vec{v} = 2000\hat{j} \text{ m/s}$. Jaka jest wartość wypadkowej siły, działającej wtedy na proton, jeśli natężenie pola elektrycznego jest równe: a) $4\hat{k} \text{ V/m}$, b) $-4\hat{k} \text{ V/m}$, c) $4\hat{i} \text{ V/m}$?

7. Elektron o energii kinetycznej 2,5 keV wpada poziomo w obszar, w którym istnieje skierowane w dół pole elektryczne o natężeniu 10 kV/m . a) Jaką minimalną wartość i kierunek powinien mieć w tym obszarze wektor indukcji, aby elektron nadal poruszał się poziomo? Pomiń siłę ciężkości, która jest niewielka, b) Czy możliwe jest, żeby proton poruszał się w tym układzie pól bez odchylenia? c) Jeżeli tak, to jakie muszą być spełnione warunki?

8. Pole elektryczne o natężeniu $1,5 \text{ kV/m}$ i pole magnetyczne o indukcji $0,4 \text{ T}$ działają na poruszający się elektron siłą wypadkową, równą zeru. a) Oblicz minimalną wartość prędkości elektronu. b) Narysuj wektory \vec{E} , \vec{B} i \vec{v} .

9. Elektron jest przyspieszany przez różnicę potencjałów 1 kV a następnie skierowany w obszar między dwiema równoległymi płytami, odległymi o 20 mm , między którymi występuje różnica potencjałów 100 V . Elektron porusza się prostopadle do kierunku wektora natężenia pola elektrycznego, gdy dostaje się w obszar między płytami. Jaka powinna być wartość wektora indukcji jednorodnego pola magnetycznego, przyłożonego prostopadle zarówno do toru elektronu, jak i do kierunku wektora natężenia pola elektrycznego, aby elektron poruszał się wzdłuż linii prostej?

10. Elektron ma prędkość początkową $(12\hat{j} + 15\hat{k}) \text{ km/s}$ i stałe przyspieszenie $(2 \cdot 10^{12} \text{ m/s}^2)\hat{i}$ w obszarze, w którym istnieją jednorodne pola elektryczne i magnetyczne. Wyznacz natężenie pola elektrycznego \vec{E} , jeśli indukcja wynosi $\vec{B} = (400 \mu\text{T})\hat{i}$.

11. Źródło jonów wytwarza jony ${}^6\text{Li}$ o masie $= 6 \text{ u}$ i ładunku $+e$. Jony są przyspieszane przez różnicę potencjałów 10 kV i wpadają

poziomo w obszar, w którym istnieje jednorodne pole magnetyczne o indukcji $B = 1,2 \text{ T}$. Oblicz najmniejszą wartość natężenia pola elektrycznego, które należałoby przyłożyć w tym samym obszarze, aby jony ${}^6\text{Li}$ poruszały się bez odchylenia.

29.4. Pola skrzyżowane: zjawisko Halla

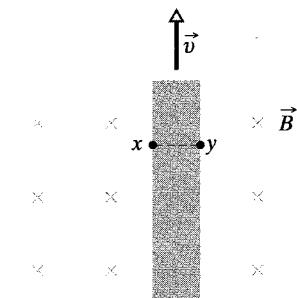
12. Pasek miedziany o szerokości $150 \mu\text{m}$ umieszczono w jednorodnym polu magnetycznym o indukcji $0,65 \text{ T}$, skierowanym prostopadle do paska. Następnie przez pasek przepuszczono prąd o natężeniu $I = 23 \text{ A}$, co spowodowało pojawienie się napięcia Halla U . Oblicz U . (Dla miedzi liczba nośników ładunku na jednostkę objętości wynosi $8,47 \cdot 10^{28} \text{ elektronów/m}^3$).

13. a) Dla układu, przedstawionego na rysunku 29.7 wykaż, że stosunek wartości natężenia pola elektrycznego Halla E do wartości natężenia pola elektrycznego E_C , powodującego ruch ładunku (przepływu prądu) wzdłuż paska wynosi:

$$\frac{E}{E_C} = \frac{B}{ne\rho},$$

gdzie ρ jest oporem właściwym materiału, a n jest koncentracją nośników ładunku. b) Oblicz ten stosunek dla danych z zadania 12. (Patrz tabela 27.1).

14. Pasek metalowy długości $6,5 \text{ cm}$, szerokości $0,85 \text{ cm}$ i grubości $0,76 \text{ mm}$ porusza się ze stałą prędkością \vec{v} w jednorodnym polu magnetycznym o indukcji $B = 1,2 \text{ mT}$, skierowanym prostopadle do paska, jak na rysunku 29.31. Między punktami x i y zmierzono różnicę potencjałów $3,9 \mu\text{V}$. Oblicz wartość bezwzględna prędkości v .



Rys. 29.31. Zadanie 14

29.5. Ruch cząstek naładowanych po okręgu w polu magnetycznym

15. Jaka powinna być wartość indukcji jednorodnego pola magnetycznego, przyłożonego prostopadle do wiązki elektronów, poruszających się z prędkością $1,3 \cdot 10^6 \text{ m/s}$, aby elektrony krążyły po łuku okręgu o promieniu $0,35 \text{ m}$?

16. Elektron, znajdujący się początkowo w spoczynku, jest przyspieszany przez różnicę potencjałów 350 V . Następnie dostaje się w obszar jednorodnego pola magnetycznego o wartości indukcji 200 mT , przy czym jego prędkość jest prostopadła do kierunku pola. Oblicz: a) prędkość elektronu, b) promień toru elektronu w polu magnetycznym.

17. Elektron o energii kinetycznej $1,2 \text{ keV}$ krąży w płaszczyźnie prostopadłej do kierunku wektora indukcji w jednorodnym polu magnetycznym. Promień orbity jest równy 25 cm . Oblicz:

a) prędkość elektronu, b) indukcję magnetyczną, c) częstotliwość, d) okres ruchu po okręgu.

18. Fizyk S. A. Goudsmit opracował metodę wyznaczania mas ciężkich jonów przez pomiar okresu ruchu w polu magnetycznym o znanej wartości indukcji. Jednoujemny jon jodu wykonuje 7 obiegów w czasie 1,29 ms w polu o indukcji 45 mT. Oblicz masę jonu w atomowych jednostkach masy. (W rzeczywistości metoda ta umożliwia pomiar masy ze znacznie większą dokładnością, niż wynikałoby to z powyższych przybliżonych wartości).

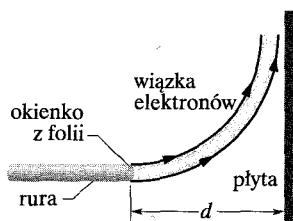
19. a) Oblicz częstotliwość cyklotronową elektronu o energii 100 eV w jednorodnym polu magnetycznym o indukcji 35 μ T. b) Oblicz promień toru tego elektronu, jeśli wektor jego prędkości jest prostopadły do wektora indukcji.

20. Cząstka α ($q = +2e$, $m = 4$ u) porusza się po okręgu o promieniu 4,5 cm w jednorodnym polu magnetycznym o indukcji $B = 1,2$ T. Oblicz: a) prędkość cząstki, b) okres w ruchu po okręgu, c) energię kinetyczną w elektronowoltach, d) różnicę potencjałów, która przyspieszyła cząstkę aż do osiągnięcia przez nią takiej samej energii, jak w przypadku ruchu po okręgu.

21. Wiązka elektronów o energii kinetycznej E_k wychodzi z rury akceleratora przez „okienko” z cienkiej folii. W odległości d od okienka, prostopadle do kierunku wiązki (rys. 29.32) umieszczona jest metalowa płyta. Wykaż, że możemy zapobiec uderzeniu elektronów w płytę, jeżeli przyłożymy jednorodne pole magnetyczne o indukcji \vec{B} spełniające nierówność:

$$B \geq \sqrt{\frac{2mE_k}{e^2d^2}},$$

gdzie m i e oznaczają masę i ładunek elektronu. Jaki powinien być kierunek wektora indukcji magnetycznej \vec{B} ?



Rys. 29.32. Zadanie 21

22. Źródło wysyła elektron o prędkości $v = 1,5 \cdot 10^7$ m/s w obszar jednorodnego pola magnetycznego o indukcji $B = 1 \cdot 10^{-3}$ T. Kierunek wektora prędkości elektronu tworzy kąt $\theta = 10^\circ$ z kierunkiem wektora indukcji magnetycznej. Oblicz odległość d od punktu początkowego do punktu, w którym tor elektronu ponownie przetnie linię pola, przechodzącą przez punkt początkowy.

23. W pewnym doświadczeniu proton o energii kinetycznej 1 MeV porusza się po okręgu w jednorodnym polu magnetycznym. Jaka musi być energia: a) cząstki α ($q = +2e$, $m = 4$ u), b) deuteronu ($q = +e$, $m = 2$ u), jeśli mają one poruszać się po tym samym okręgu?

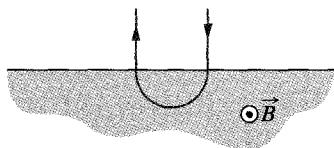
24. Proton, deuterон ($q = +e$, $m = 2$ u) i cząstka α ($q = +2e$, $m = 4$ u) o tej samej energii kinetycznej dostają się w obszar jednorodnego pola magnetycznego, poruszając się prostopadle do wektora indukcji \vec{B} . Porównaj promienie ich torów.

25. Pewien dostępny na rynku spektrometr mas (patrz przykład 29.3) jest używany do oddzielania jonów uranu o masie $3,92 \cdot 10^{-25}$ kg i ładunku $3,20 \cdot 10^{-19}$ C od jonów podobnego rodzaju. Jony są przyspieszane przez różnicę potencjałów 100 kV, a następnie dostają się w obszar jednorodnego pola magnetycznego, gdzie ich tor jest łukiem okręgu o promieniu 1 m. Po zmianie kierunku o 180° i przejściu przez szczelinę o szerokości 1 mm i wysokości 1 cm, jony są zbierane w zbiorniku. a) Jaka jest wartość wektora indukcji magnetycznej w separatorze? Jeżeli urządzenie jest wykorzystywane do oddzielania 100 mg materiału w ciągu godziny, oblicz: b) natężenie prądu jonów uranu, c) energię termiczną wydzielaną w zbiorniku w ciągu 1 h.

26. Proton o ładunku $+e$ i masie m wpada w jednorodne pole magnetyczne o indukcji $\vec{B} = B\hat{i}$ z prędkością początkową $\vec{v} = v_{0x}\hat{i} + v_{0y}\hat{j}$. Używając wektorów jednostkowych, wyprowadź wzór, określający prędkość protonu \vec{v} w dowolnej późniejszej chwili t .

27. Pozyton o energii kinetycznej 2 keV dostaje się w obszar jednorodnego pola magnetycznego o indukcji 0,1 T, a jego wektor prędkości tworzy kąt 89° z kierunkiem wektora indukcji \vec{B} . Oblicz: a) okres ruchu, b) skok p , c) promień linii śrubowej, po której porusza się pozyton.

28. Na rysunku 29.33 naładowana cząstka wpada w obszar jednorodnego pola magnetycznego, zakreśla półokrąg, a następnie opuszcza ten obszar. Cząstka jest albo protonem, albo elektronem (musisz to rozstrzygnąć) i przebywa w obszarze pola przez 130 ns. a) Jaka jest wartość wektora indukcji \vec{B} ? b) Jeżeli cząstka zostanie powtórnie skierowana w obszar pola magnetycznego (wzdłuż tego samego początkowego toru), ale jej energia będzie dwa razy większa, to jak długo będzie przebywała w obszarze pola?



Rys. 29.33. Zadanie 28

29. Obojętna cząstka jest w spoczynku w jednorodnym polu magnetycznym. W chwili $t = 0$ cząstka rozpadła się na dwie naładowane cząstki, każda o masie m . a) Jeżeli ładunek jednej z dwóch cząstek jest równy $+q$, to jaki jest ładunek drugiej cząstki? b) Obie cząstki zaczynają poruszać się po oddzielnych torach, leżących w płaszczyźnie prostopadłej do wektora indukcji \vec{B} . Po pewnym czasie cząstki się zderzają. Wyznacz czas, jaki upłynął od rozpadu do zderzenia, w zależności od m , B i q .

29.6. Cyklotrony i synchrotrony

30. W pewnym cyklotronie proton porusza się po okręgu o promieniu 0,5 m. Wartość indukcji magnetycznej wynosi 1,2 T. a) Jaka jest częstotliwość generatora? b) Jaka jest energia kinetyczna protonu, wyrażona w elektronowoltach?

31. Oszacuj całkowitą drogę, przebytą przez deuteron podczas całego procesu przyspieszania w cyklotronie, omawianym w przykładzie 29.5. Przyjmij, że przyspieszająca różnica potencjałów między duantami jest równa 80 kV.

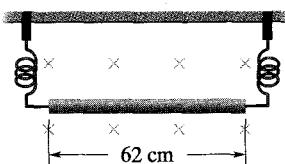
32. Częstość generatora w cyklotronie omawianym w przykładzie 29.5 została dobrana tak, aby przyspieszać deuterony ($q = +e$, $m = 2 \text{ u}$). a) Jeżeli zamiast deuteronów wprowadzimy do cyklotronu protony, to do jakiej energii mogą być one przyspieszone przy tej samej częstotliwości generatora? b) Jaka wartość indukcji magnetycznej byłaby wtedy wymagana? c) Jaką energię kinetyczną mogłyby osiągnąć protony, gdyby wartość indukcji była taka sama, jak dla deuteronów? d) Jaka częstość generatora byłaby wtedy wymagana? e) Odpowiedź na te same pytania w przypadku cząstek α ($q = +2e$, $m = 4 \text{ u}$).

29.7. Siła magnetyczna działająca na przewodnik z prądem

33. W poziomym przewodzie, będącym częścią energetycznej linii przesyłowej, płynie z południa na północ prąd o natężeniu 5000 A. Ziemskie pole magnetyczne ($60 \mu\text{T}$) jest skierowane na północ i nachylone w dół, pod kątem 70° do poziomu. Wyznacz wartość i kierunek siły magnetycznej, działającej na 100 m przewodu w ziemskim polu magnetycznym.

34. Przewód o długości 1,8 m, w którym płynie prąd o natężeniu 13 A, tworzy kąt 35° z kierunkiem linii jednorodnego pola magnetycznego o indukcji $B = 1,5 \text{ T}$. Oblicz siłę magnetyczną, działającą na ten przewód.

35. Przewód o długości 62 cm i masie 13 g jest zawieszony na dwóch giętkich doprowadzeniach w jednorodnym polu magnetycznym o indukcji $0,44 \text{ T}$ (rys. 29.34). Jaka powinna być wartość natężenia prądu i jego kierunek, aby usunąć naprężenie w przewodach doprowadzających?



Rys. 29.34. Zadanie 35

36. Przewód o długości 50 cm, ułożony wzdłuż osi x , znajduje się w jednorodnym polu magnetycznym o indukcji $\vec{B} = (0,003 \text{ T})\hat{j} + (0,01 \text{ T})\hat{k}$. W przewodzie płynie prąd o natężeniu 0,5 A w dodatnim kierunku osi x . Wyznacz siłę magnetyczną, działającą na przewód.

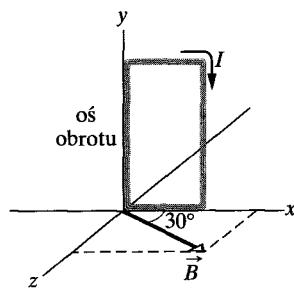
37. Pręt miedziany o masie 1 kg leży na dwóch poziomych szynach, odległych od siebie o 1 m. Przez pręt płynie prąd o natężeniu 50 A z jednej szyny do drugiej. Współczynnik tarcia statycznego między prętem a szynami wynosi 0,6. Jaka jest najmniejsza wartość wektora indukcji magnetycznej (niekoniecznie skierowanego pionowo), która spowoduje, że pręt będzie się ślizgał po szynach?

38. Rozważ możliwość zbudowania pociągu elektrycznego nowego typu. Silnik jest napędzany siłą, jaką pionowa składowa

ziemskiego pola magnetycznego działa na oś przewodzącą prąd elektryczny. Aby wytworzyć tę siłę, prąd jest przesyłany wzdłuż jednej szyny, następnie płynie przez przewodzące koło, oś, drugie przewodzące koło i wraca drugą szyną do źródła. a) Jakie natężenie prądu jest potrzebne do uzyskania niewielkiej siły 10 kN? Przyjmij pionową składową ziemskiego pola magnetycznego $10 \mu\text{T}$, a długość osi 3 m. b) Jaka moc byłaby tracona na każdym odcinku szyny o oporze 1Ω ? c) Czy pomysł zbudowania takiego pociągu jest całkiem nierealny, czy też bliski zrealizowania?

29.8. Moment siły działającej na ramkę z prądem

39. Na rysunku 29.35 przedstawiono prostokątną cewkę o wymiarach 10 cm na 5 cm, składającą się z 20 zwojów. W cewce, która może się obracać wokół jednego z jej dłuższych boków, płynie prąd o natężeniu 0,1 A. Cewka znajduje się w płaszczyźnie xy , w obszarze jednorodnego pola magnetycznego o wektorze indukcji mającym wartość $0,5 \text{ T}$ i tworzącym kąt 30° z osią x . Wyznacz wartość i kierunek momentu siły, działającego na cewkę względem danej osi obrotu.



Rys. 29.35. Zadanie 39

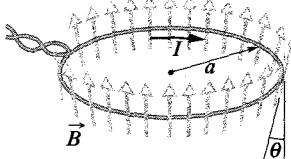
40. Pojedyncza ramka, przez którą płynie prąd o natężeniu 4 A, ma kształt trójkąta prostokątnego o bokach 50, 120 i 130 cm. Ramka znajduje się w jednorodnym polu magnetycznym o indukcji 75 mT , a kierunek wektora indukcji jest równoległy do kierunku prądu w boku ramki o długości 130 cm. a) Oblicz wartość siły magnetycznej, działającej na każdy z trzech boków trójkąta. b) Wykaż, że całkowita siła magnetyczna, działająca na ramkę jest równa zeru.

41. Przez odcinek przewodu o długości L płynie prąd o natężeniu I . Wykaż, że jeśli przewód jest zwinięty w kształcie okrągłej cewki, to moment siły w danym polu magnetycznym osiąga maksimum, gdy cewka ma tylko jeden zwój, a maksymalna wartość momentu siły wynosi $M = L^2 I B / 4\pi$.

42. Udowodnij, że wzór $M = NISB \sin \theta$ obowiązuje dla zamkniętych ramek o dowolnych kształtach, a nie tylko dla ramek prostokątnych, jak na rysunku 29.21. (Wskazówka: Zastąp ramkę o dowolnym kształcie układem przylegających do siebie długich, wąskich, ramek prostokątnych, które są w przybliżeniu równoważne ramce o dowolnym kształcie, jeżeli chodzi o rozkład prądu).

43. Na rysunku 29.36 przedstawiono przewód w kształcie pierścienia o promieniu a , ustawiony prostopadle do osi symetrii rozbieżnego pola magnetycznego. W każdym punkcie pierścienia pole magnetyczne ma taką samą wartość wektora indukcji, a jego kierunek tworzy kąt θ z prostą prostopadłą do płaszczyzny

pierścienia. Skręcone przewody doprowadzające nie mają wpływu na warunki zadania. Wyznacz wartość i kierunek siły, jaką pole działa na pierścień, jeżeli w pierścieniu płynie prąd o natężeniu I .



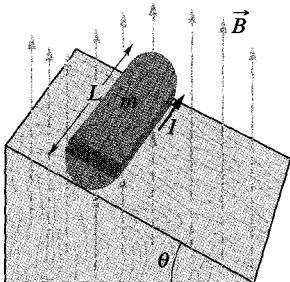
Rys. 29.36. Zadanie 43

44. Zamknięta ramka z drutu, w której płynie prąd o natężeniu I , znajduje się w jednorodnym polu magnetycznym, a płaszczyzna ramki tworzy kąt θ z kierunkiem wektora indukcji \vec{B} . Wykaż, że całkowita siła magnetyczna, działająca na ramkę jest równa zeru. Czy twoje rozumowanie jest słusne również dla niejednorodnego pola magnetycznego?

45. Cewka pewnego galwanometru (patrz przykład 29.7) ma opór $75,3 \Omega$. Przy pełnym wychyleniu wskazówki przez cewkę płynie prąd o natężeniu $1,62 \text{ mA}$. a) Oblicz wartość dodatkowego oporu, potrzebnego do tego, aby galwanometr działał jako voltmierz wskazujący 1 V przy pełnym wychyleniu wskazówki. Jak należy dołączyć ten opór? b) Oblicz wartość dodatkowego oporu, potrzebnego do tego, aby galwanometr działał jako amperomierz wskazujący 50 mA przy pełnym wychyleniu wskazówki. Jak należy dołączyć ten opór?

46. Cząstka o ładunku q porusza się po okręgu o promieniu a z prędkością v . Traktując tor cząstki jako ramkę, w której płynie prąd stały równy średniemu prądowi związanemu z ruchem cząstki, wyznacz maksymalny moment siły, wywierany na ramkę przez jednorodne pole magnetyczne o indukcji B .

47. Na rysunku 29.37 przedstawiono drewniany walec o mase $m = 0,25 \text{ kg}$ i długości $L = 0,1 \text{ m}$. Cewka składająca się z $N = 10$ zwojów drutu została nawinięta na walcu w taki sposób, że osi walca leży w płaszczyźnie cewki. Jaka jest najmniejsza wartość natężenia prądu I , który powinien płynąć przez cewkę, aby walec nie stoczył się po równi pochyłej, nachylonej pod kątem θ do poziomu? Jednorodne pole magnetyczne o indukcji $0,5 \text{ T}$ jest skierowane pionowo do góry, a płaszczyzna cewki jest równoległa do płaszczyzny równi.



Rys. 29.37. Zadanie 47

29.9. Dipolowy moment magnetyczny

48. Dipolowy moment magnetyczny Ziemi jest równy $8 \cdot 10^{22} \text{ J/T}$. Przyjmij, że moment ten powstaje w wyniku ruchu ładunków w zewnętrznej części płynnego jądra Ziemi. Oblicz natę-

żenie prądu, wytworzonego przez poruszające się ładunki, jeżeli promień kołowego toru ładunków wynosi 3500 km .

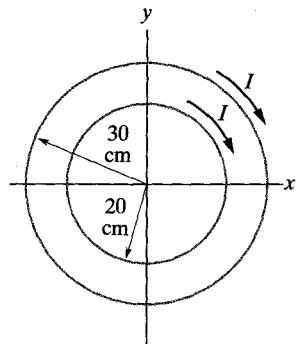
49. Okrągła cewka o 160 zwojach ma promień $1,9 \text{ cm}$. a) Oblicz natężenie prądu, który wytwarza dipolowy moment magnetyczny $2,3 \text{ A} \cdot \text{m}^2$. b) Oblicz maksymalny moment siły, działający na cewkę, w której płynie prąd o tym natężeniu, w jednorodnym polu magnetycznym o indukcji 35 mT .

50. W kołowej ramce o promieniu 15 cm płynie prąd o natężeniu $2,6 \text{ A}$. Ramka jest umieszczona w jednorodnym polu magnetycznym tak, aby normalna do jej płaszczyzny tworzyła kąt 41° z kierunkiem wektora indukcji o wartości 12 T . a) Oblicz dipolowy moment magnetyczny ramki. b) Jaki moment siły działa na ramkę?

51. Ramka, przez którą płynie prąd o natężeniu 5 A , ma kształt trójkąta prostokątnego o bokach 30 , 40 i 50 cm . Ramka znajduje się w jednorodnym polu magnetycznym o indukcji 80 mT , której kierunek jest równoległy do kierunku prądu, przepływającego przez bok trójkąta o długości 50 cm . Wyznacz wartość: a) dipolowego momentu magnetycznego ramki, b) momentu siły działającego na ramkę.

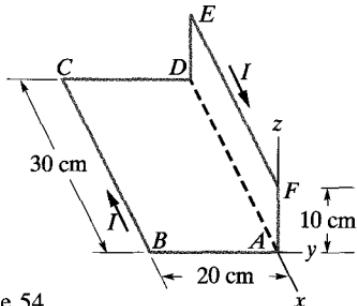
52. Okrągły zegarścienny ma tarczę o promieniu 15 cm . Sześć zwojów drutu nawinięto wokół obwodu tarczy, a prąd o natężeniu 2 A płynie przez to uzwojenie w kierunku zgodnym z ruchem wskazówek zegara. W miejscu, w którym znajduje się zegar, istnieje stałe jednorodne zewnętrzne pole magnetyczne o indukcji 70 mT (mimo to zegar wciąż wskazuje dokładny czas). Dokładnie o godzinie 13.00 wskazówka godzinowa zegara wskazuje kierunek zewnętrznego pola magnetycznego. a) Po ilu minutach wskazówka minutowa pokaże kierunek momentu siły, wywieranego przez pole na uzwojenie? b) Oblicz wartość momentu siły.

53. Dwie współśrodkowe okrągłe ramki z drutu, o promieniach 20 i 30 cm , są umieszczone w płaszczyźnie xy . W każdej z nich płynie prąd o natężeniu 7 A , w kierunku zgodnym z ruchem wskazówek zegara (rys. 29.38). a) Wyznacz wypadkowy dipolowy moment magnetyczny tego układu. b) Powtórz obliczenia dla przeciwnego kierunku prądu wewnętrznej ramce.



Rys. 29.38. Zadanie 53

54. Na rysunku 29.39 przedstawiono ramkę $ABCDEF$, w której płynie prąd o natężeniu $I = 5 \text{ A}$. Boki ramki są równoległe do osi układu współrzędnych, przy czym $AB = 20 \text{ cm}$, $BC = 30 \text{ cm}$, a $FA = 10 \text{ cm}$. Oblicz wartość i kierunek dipolowego momentu magnetycznego tej ramki. (Wskazówka: Wyobraź sobie, że prądy o takich samych natężeniach I , ale o przeciwnych kierunkach



Rys. 29.39. Zadanie 54

płyną przez odcinek AD ; następnie weź pod uwagę dwie prostokątne ramki $ABCDA$ i $ADEFA$.

55. W kołowej ramce o promieniu 8 cm płynie prąd o natężeniu 0,2 A. Wektor jednostkowy, równoległy do momentu magnetycznego $\vec{\mu}$, jest równy $0,6\hat{i} - 0,8\hat{j}$. Jeżeli ramka znajduje się w jednorodnym polu magnetycznym o indukcji $\vec{B} = (0,25 \text{ T})\hat{i} + (0,3 \text{ T})\hat{k}$, oblicz: a) moment siły, działający na ramkę (używając wektorów jednostkowych), b) magnetyczną energię potencjalną ramki.

Zadania dodatkowe

56. W przewodzie leżącym wzdłuż osi y , od $y = 0$ do $y = 0,25 \text{ cm}$, płynie prąd o natężeniu 2 mA w ujemnym kierunku osi y . Przewód znajduje się w niejednorodnym polu magnetycznym o indukcji:

$$\vec{B} = (0,3 \text{ T/m})y\hat{i} + (0,4 \text{ T/m})y\hat{j}.$$

Używając wektorów jednostkowych, wyznacz siłę magnetyczną, działającą na: a) element dy przewodu w punkcie y , b) cały przewód.

57. Proton porusza się wzdłuż osi x ze stałą prędkością $+50 \text{ m/s}$ w obszarze skrzyżowanych pól: elektrycznego i magnetycznego. Indukcja magnetyczna jest równa $\vec{B} = (2 \text{ mT})\hat{j}$. Ile wynosi natężenie pola elektrycznego?

58. Dipol magnetyczny, którego moment magnetyczny ma wartość $0,02 \text{ J/T}$, a prędkość początkowa jest równa zeru, zaczyna obracać się w jednorodnym polu magnetycznym o indukcji 52 mT . Obrót dipola spowodowany działaniem pola magnetycznego odbywa się bez przeszkód. W chwili, gdy ustalenie momentu magnetycznego dipola jest zgodne z kierunkiem wektora indukcji, energia kinetyczna dipola jest równa $0,8 \text{ mJ}$. a) Jaki jest początkowy kąt między momentem magnetycznym dipola a wektorem indukcji? b) Pod jakim kątem będzie ustawiony dipol, gdy jego prędkość chwilowa stanie się ponownie równa zeru?

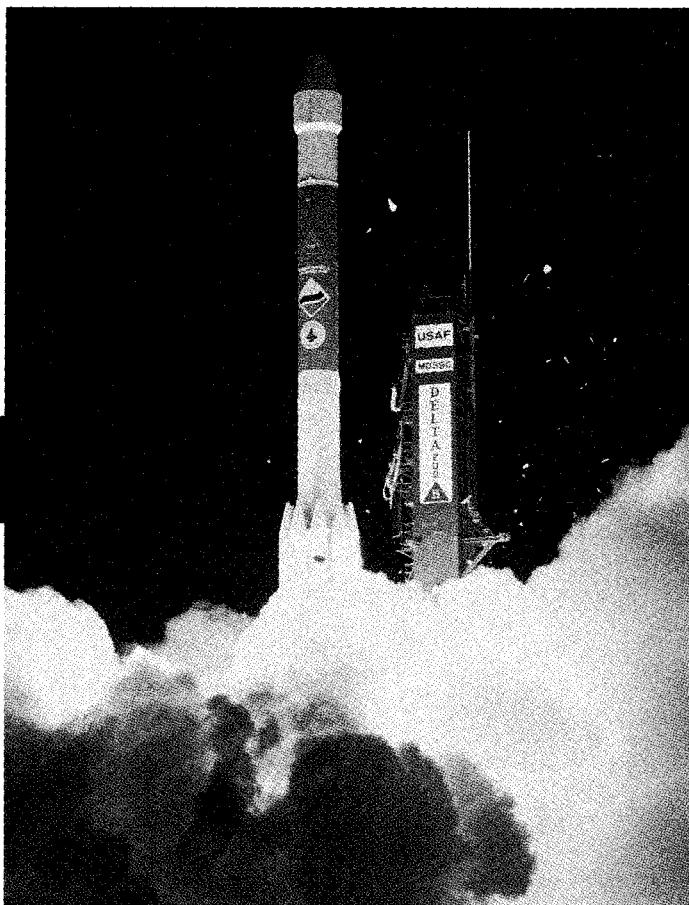
59. Elektron porusza się w jednorodnym polu magnetycznym o indukcji $\vec{B} = B_x\hat{i} + (3B_x)\hat{j}$. W pewnej chwili elektron ma prędkość $\vec{v} = (2\hat{i} + 4\hat{j}) \text{ m/s}$, a działająca na niego siła magnetyczna jest równa $(6,4 \cdot 10^{-19} \text{ N})\hat{k}$. Oblicz B_x .

30 Pole magnetyczne wywołane przepływem prądu

Obecnie wysyłamy wiele różnych obiektów w przestrzeń kosmiczną. Jednak gdy zaczniemy eksploatować złoża Księżyca i planetoid, a w kosmosie nie będzie źródeł paliwa do konwencjonalnych rakiet, potrzebne nam będą bardziej wydajne sposoby przenoszenia surowców. Rozwiązaniem mogłyby być wyrzutnia elektromagnetyczna. Mały prototyp, elektromagnetyczne działa szynowe, może przyspieszyć pocisk od stanu spoczynku do prędkości 10 km/s (36 000 km/h) w ciągu 1 ms.

W jaki sposób można osiągnąć tak duże przyspieszenie?

Odpowiedź znajdziesz w tym rozdziale.



30.1. Obliczanie indukcji magnetycznej pola wywołanego przepływem prądu

Jak już mówiliśmy w paragrafie 29.1, jednym ze sposobów wytworzenia pola magnetycznego jest wykorzystanie poruszających się ładunków, czyli prądu elektrycznego. Naszym zadaniem w tym rozdziale będzie wyznaczenie indukcji magnetycznej pola wytworzonego przez prądy o danym rozkładzie. Zastosujemy w tym celu taką samą metodę, jaką zastosowaliśmy w rozdziale 23 do wyznaczenia natężenia pola elektrycznego wytworzonego przez naładowane cząstki o danym rozkładzie ładunku.

Przypomnijmy krótko tę metodę. Najpierw dzielimy w myśl ładunek na elementy dq , jak to zostało zrobione na rysunku 30.1a dla rozkładu ładunku o dowolnym kształcie. Następnie obliczamy natężenie $d\vec{E}$ pola, wytworzonego w pewnym punkcie P przez odpowiedni element ładunku. Natężenia pól elektrycznych, pochodzących od różnych elementów dodają się do siebie, zatem obliczamy natężenie wypadkowe pola \vec{E} w punkcie P sumując, za pomocą całkowania, przyczynki $d\vec{E}$ od wszystkich elementów.

Przypomnijmy, że wartość $d\vec{E}$ jest wyrażona wzorem:

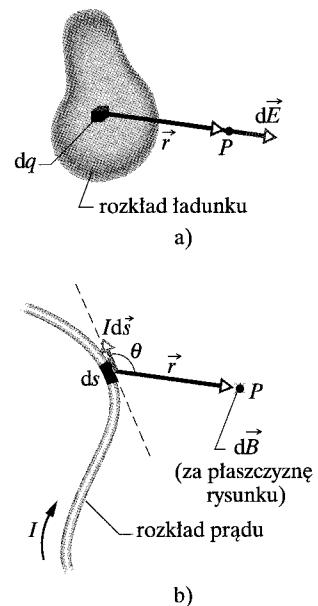
$$d\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq}{r^2}, \quad (30.1)$$

gdzie r jest odległością między elementem ładunku dq a punktem P . Dla dodatniego elementu ładunku kierunek $d\vec{E}$ jest zgodny z kierunkiem \vec{r} , gdzie \vec{r} jest wektorem skierowanym od elementu ładunku dq do punktu P . Wprowadzając \vec{r} do równania (30.1) możemy je zapisać w postaci wektorowej:

$$d\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq}{r^3} \vec{r}, \quad (30.2)$$

która wskazuje, że kierunek wektora $d\vec{E}$, wytworzonego przez dodatnio naładowany element, jest zgodny z kierunkiem wektora \vec{r} . Zauważ, że w równaniu (30.2) $d\vec{E}$ jest odwrotnie proporcjonalne do r^2 , mimo trzeciej potęgi w mianowniku. Ten wykładnik pojawił się w równaniu tylko dlatego, że licznik pomnożyliśmy przez wektor o wartości bezwzględnej równej r .

Zastosujemy teraz tę samą metodę do obliczenia indukcji magnetycznej pola wytworzonego przez przepływ prądu. Na rysunku 30.1b przedstawiono przewodnik dowolnego kształtu, w którym płynie prąd o natężeniu I . Chcemy wyznaczyć wektor \vec{B} w punkcie P , położonym w niewielkiej odległości od przewodnika. Najpierw dzielimy w myśl przewodnika na elementy ds , a następnie definiujemy wektorowy element $d\vec{s}$, który ma długość ds , a jego kierunek jest zgodny z kierunkiem przepływu prądu w elemencie ds . Możemy następnie zdefiniować *element prądu* jako $Id\vec{s}$. Naszym celem będzie wyznaczenie indukcji $d\vec{B}$ pola wytworzonego w punkcie P przez odpowiedni element prądu. Wiemy z doświadczenia, że wektory \vec{B} , podobnie jak wektory natężeń pól elektrycznych dodają się do siebie. Zatem możemy obliczyć wypadkowy wektor \vec{B} w punkcie P , sumując, za pomocą całkowania, przyczynki $d\vec{B}$ od wszystkich elementów prądu. Jednakże to sumowanie jest bardziej skomplikowane i wymaga większego wysiłku, niż w przypadku pól elektrycznych. Podczas gdy element ładunku dq , wytwarzający



Rys. 30.1. a) Element ładunku dq wytwarza przyczynkę $d\vec{E}$ do pola elektrycznego w punkcie P . b) Element prądu Ids wytwarza przyczynkę $d\vec{B}$ do pola magnetycznego w punkcie P . Zielony znak \times (przypominający ogon strzały) umieszczony w punkcie P wskazuje, że $d\vec{B}$ jest skierowane prostopadle za płaszczyznę rysunku

pole elektryczne jest wielkością skalarną, element prądu $I d\vec{s}$, wytwarzający pole magnetyczne, jest iloczynem skalara i wektora.

Okazuje się, że wartość wektora $d\vec{B}$ pola, wytworzzonego w punkcie P przez element prądu $I d\vec{s}$ jest równa:

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I d\vec{s} \sin \theta}{r^2}, \quad (30.3)$$

gdzie θ jest kątem między kierunkami $d\vec{s}$ i \vec{r} , a wektor \vec{r} jest skierowany od $d\vec{s}$ do punktu P . Symbol μ_0 jest stałą, zwaną *przenikalnością magnetyczną próżni* (stałą magnetyczną), której wartość jest równa:

$$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ T} \cdot \text{m/A} \approx 1,26 \cdot 10^{-6} \text{ T} \cdot \text{m/A}. \quad (30.4)$$

Kierunek wektora $d\vec{B}$, prostopadły do płaszczyzny rysunku 30.1b, jest kierunkiem iloczynu wektorowego $d\vec{s} \times \vec{r}$. Możemy więc zapisać równanie (30.3) w postaci wektorowej jako

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I d\vec{s} \times \vec{r}}{r^3} \quad (\text{prawo Biota-Savarta}). \quad (30.5)$$

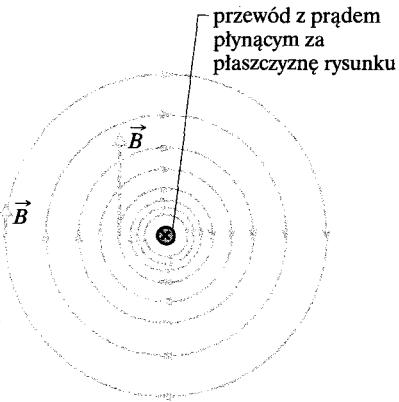
To równanie wektorowe i jego skalarna postać (30.3) znane są jako **prawo Biota-Savarta**. To prawo, które zostało wykryte doświadczalnie, opisuje odwrotną proporcjonalność indukcji i kwadratu promienia (wykładnik w mianowniku w równaniu (30.5) jest równy 3 z powodu czynnika \vec{r} w liczniku). Zastosujemy to prawo do obliczenia wypadkowej indukcji \vec{B} pola wytworzonego w punkcie P przez prądy o różnych rozkładach.

Pole magnetyczne wytworzone przez prąd płynący w długim przewodzie prostoliniowym

Wkrótce wykażemy, stosując prawo Biota-Savarta, że wartość indukcji magnetycznej pola w odległości R od długiego prostoliniowego przewodu, przez który płynie prąd o natężeniu I , jest dana wzorem:

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi R} \quad (\text{długi przewód prostoliniowy}). \quad (30.6)$$

Wartość wektora indukcji B w równaniu (30.6) zależy tylko od natężenia prądu i odległości R danego punktu od przewodu. Wyprowadzając ten wzór, wykażemy, że linie pola \vec{B} tworzą współśrodkowe okręgi wokół przewodu. Pokazano to na rysunku 30.2, a także za pomocą opiórków żelaza na rysunku 30.3. Odległość między liniami na rysunku 30.2 rośnie wraz ze wzrostem odległości od przewodu. Odpowiada to zmniejszaniu się wartości indukcji \vec{B} , zgodnie z zależnością $1/R$, przewidzianą w równaniu (30.6). Długości dwóch wektorów \vec{B} na tym rysunku również wykazują malejącą zależność od R .



Rys. 30.2. Linie pola magnetycznego, wytworzonego przez prąd, płynący w długim prostoliniowym przewodzie, tworzą współśrodkowe okręgi wokół przewodu. W tym przypadku prąd płynie za płaszczyznę rysunku, jak pokazuje znak ×

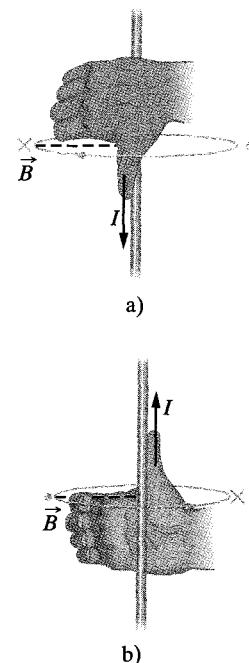


Rys. 30.3. Opinki żelazne, rozrzucone na kartonie układają się wzdłuż współśrodkowych okręgów, gdy w przewodzie płynie prąd. To ułożenie, wzdłuż linii pola magnetycznego, jest wynikiem działania pola magnetycznego, wytworzonego przez prąd płynący w przewodzie

Oto prosta reguła prawej dłoni, służąca do wyznaczania kierunku wektora indukcji magnetycznej pola, wytworzonego przez element prądu, taki jak odcinek długiego przewodu:

Reguła prawej dłoni: Uchwyć element prawą ręką, tak aby twój kciuk wskazywał kierunek prądu. Twoje palce będą wtedy wskazywać kierunek linii pola magnetycznego, wytworzonego przez ten element.

Wynik zastosowania reguły prawej dłoni do prądu, płynącego w prostoliniowym przewodzie, jak na rysunku 30.2, jest pokazany na rysunku 30.4a. Aby wyznaczyć kierunek wektora indukcji magnetycznej \vec{B} pola, wytworzonego przez ten prąd w dowolnym punkcie, uchwyć (w myśl) przewód prawą ręką, tak aby twój kciuk wskazywał kierunek prądu. Niech czubki dwóch palców przechodzą przez wybrany punkt; kierunek, jaki pokazują, jest wtedy zgodny z kierunkiem wektora indukcji magnetycznej w tym punkcie. Jak widać na rysunku 30.2, wektor indukcji \vec{B} w dowolnym punkcie jest *styczny do linii pola magnetycznego*; z rysunku 30.4 wynika, że wektor indukcji pola jest *prostopadły do odcinka, zaznaczonego linią przerywaną, łączącą wybrany punkt i przewód z prądem*.



Rys. 30.4. Reguła prawej dłoni wskazuje kierunek linii pola magnetycznego, wytworzonego przez prąd w przewodzie. a) Przypadek przedstawiony na rysunku 30.2 widziany z boku. Wektor \vec{B} w dowolnym punkcie po lewej stronie przewodu jest prostopadły do odcinka zaznaczonego linią przerywaną i skierowany za płaszczyznę rysunku, w kierunku czubków palców, jak pokazuje znak ×. b) Jeżeli zmienimy kierunek prądu na przeciwny, to wektor \vec{B} w dowolnym punkcie po lewej stronie przewodu będzie nadal prostopadły do odcinka zaznaczonego linią przerywaną, ale teraz będzie skierowany przed płaszczyznę rysunku, jak pokazuje kropka

Wyprowadzenie wzoru (30.6)

Na rysunku 30.5 zilustrowano zadanie, które mamy wykonać; szukamy wektora indukcji magnetycznej \vec{B} w punkcie P , w odległości R od przewodu. Rysunek 30.5 jest w istocie bardzo podobny do rysunku 30.1b, z wyjątkiem tego, że teraz przewód jest prosty i nieskończonie dług. Wartość przyczynku do indukcji magnetycznej pola, wytworzonego w punkcie P przez element prądu $I ds$, znajdujący się w odległości r od punktu P , jest dana równaniem (30.3):

$$dB = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I ds \sin \theta}{r^2}.$$

Wektor $d\vec{B}$ na rysunku 30.5 jest skierowany tak, jak wektor $ds \times \vec{r}$ — a mianowicie prostopadle za płaszczyznę rysunku.

Zauważ, że $d\vec{B}$ w punkcie P ma taki sam kierunek dla wszystkich elementów prądu, na jakie można podzielić przewód. Tak więc wartość indukcji magnetycznej pola, wytworzonego w punkcie P przez elementy prądu w górnej połowie nieskończonie długiego przewodu, może być obliczona przez całkowanie dB w równaniu (30.3) od zera do nieskończoności.

Rozważmy teraz element prądu w dolnej połowie przewodu, położony w taki odległość w dół od punktu P , w jakiej ds znajduje się powyżej punktu P . Ze wzoru (30.5) wynika, że wektor indukcji magnetycznej pola wytworzonego w punkcie P przez ten element ma taką samą wartość i kierunek, jak wektor indukcji pola, pochodzącego od elementu $I ds$ na rysunku 30.5. Zatem indukcja pola wytworzona przez dolną połowę przewodu jest dokładnie taka sama, jak indukcja pola wytworzona przez górną połowę. Aby znaleźć wartość indukcji magnetycznej \vec{B} całkowitego pola w punkcie P , wystarczy więc pomnożyć wynik naszego całkowania przez 2. Stąd otrzymujemy:

$$B = 2 \int_0^\infty dB = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \int_0^\infty \frac{\sin \theta ds}{r^2}. \quad (30.7)$$

Zmienne θ , s i r w tym równaniu nie są niezależne, ale (patrz rys. 30.5) związane są zależnościami:

$$r = \sqrt{s^2 + R^2}$$

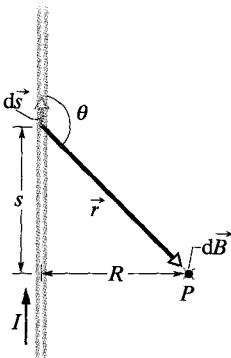
oraz

$$\sin \theta = \sin(\pi - \theta) = \frac{R}{\sqrt{s^2 + R^2}}.$$

Po wykorzystaniu tych związków i zastosowaniu całki 19 z dodatku E, z równania (30.7) otrzymujemy:

$$\begin{aligned} B &= \frac{\mu_0 I}{2\pi} \int_0^\infty \frac{R ds}{(s^2 + R^2)^{3/2}} \\ &= \frac{\mu_0 I}{2\pi R} \left[\frac{s}{(s^2 + R^2)^{1/2}} \right]_0^\infty = \frac{\mu_0 I}{2\pi R}, \end{aligned} \quad (30.8)$$

czyli zależność, którą mieliśmy wyprowadzić. Zauważ, że indukcja magnetyczna w punkcie P pola, pochodzącego albo od dolnej, albo od górnej połowy nie-



Rys. 30.5. Obliczanie indukcji magnetycznej pola, wytworzonego przez prąd o natężeniu I , płynący w długim prostoliniowym przewodzie. Jak pokazano na rysunku, $d\vec{B}$ w punkcie P , związane z elementem prądu $I ds$ jest skierowane za płaszczyznę rysunku

skończonego przewodu na rysunku 30.5, jest równa połowie tego wyrażenia, tzn.:

$$B = \frac{\mu_0 I}{4\pi R} \quad (\text{prostoliniowy przewód ograniczony z jednej strony}). \quad (30.9)$$

Pole magnetyczne wytworzone przez prąd płynący w przewodzie o kształcie łuku okręgu

Aby wyznaczyć indukcję magnetyczną pola, wytworzonego w pewnym punkcie przez prąd płynący w zagiętym przewodzie, moglibyśmy znów zastosować równanie (30.3) i zapisać wartość indukcji pola, pochodzącego od pojedynczego elementu prądu. Następnie moglibyśmy obliczyć całkę i wyznaczyć wypadkową indukcję pola, wytworzonego przez wszystkie elementy prądu. W zależności od kształtu przewodu takie całkowanie może być trudne. Jest ono jednak całkiem proste, gdy przewód ma kształt łuku okręgu, a dany punkt znajduje się w środku krzywizny.

Na rysunku 30.6a przedstawiono przewód w kształcie łuku o kącie środkowym ϕ , promieniu R i środku C . W przewodzie płynie prąd o natężeniu I . W punkcie C każdy element prądu przewodu $Id\vec{s}$ wywarza pole magnetyczne o wartości indukcji danej równaniem (30.3). Ponadto, jak pokazano na rysunku 30.6b, bez względu na to, w którym miejscu przewodu znajduje się element prądu, kąt θ między wektorami $d\vec{s}$ i r jest równy 90° , a także $r = R$. Zatem podstawiając R zamiast r oraz 90° zamiast θ , otrzymujemy z równania (30.3):

$$dB = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{Ids \sin 90^\circ}{R^2} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{Ids}{R^2}. \quad (30.10)$$

Taką wartość ma w punkcie C indukcja pola pochodzącego od elementu prądu. Zastosowanie reguły prawej dłoni w dowolnym punkcie łuku (jak na rysunku 30.6c) prowadzi do wniosku, że wszystkie przyczynki $d\vec{B}$ mają w punkcie C ten sam kierunek — prostopadle przed płaszczyznę rysunku. Tak więc całkowita indukcja pola w punkcie C jest po prostu sumą (otrzymaną przez całkowanie) wszystkich przyczynków $d\vec{B}$. Korzystamy z tożsamości $ds = Rd\phi$, aby zmienić zmienną całkowania z ds na $d\phi$, i otrzymujemy z równania (30.10):

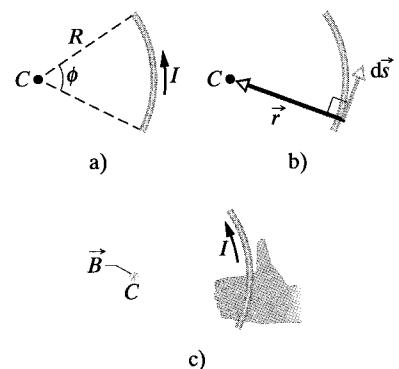
$$B = \int dB = \int_0^\phi \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{IRd\phi}{R^2} = \frac{\mu_0 I}{4\pi R} \int_0^\phi d\phi.$$

Całkując, otrzymujemy:

$$B = \frac{\mu_0 I \phi}{4\pi R} \quad (\text{w środku łuku okręgu}). \quad (30.11)$$

Zwróc uwagę, że to równanie pozwala na wyznaczenie indukcji pola magnetycznego tylko w środku krzywizny łuku okręgu, wzdłuż którego płynie prąd. Kiedy podstawiamy dane do równania, musimy pamiętać, aby wyrazić ϕ w radianach, a nie w stopniach. Na przykład, aby znaleźć indukcję magnetyczną pola w środku pełnego okręgu, wzdłuż którego płynie prąd, powinniśmy podstać 2π radianów za ϕ w równaniu (30.11), otrzymując:

$$B = \frac{\mu_0 I (2\pi)}{4\pi R} = \frac{\mu_0 I}{2R} \quad (\text{w środku okręgu}). \quad (30.12)$$



Rys. 30.6. a) W przewodzie w kształcie łuku okręgu o środku C płynie prąd o natężeniu I . b) Kąt między kierunkami $d\vec{s}$ i \vec{r} jest równy 90° dla dowolnego elementu łuku. c) Wyznaczanie kierunku indukcji magnetycznej pola w punkcie C , wytworzonego przez prąd w przewodzie. Wektor \vec{B} jest skierowany przed płaszczyznę rysunku, a jego kierunek pokazują czubki palców, co zaznaczono kolorową kropką w punkcie C .

Przykład 30.1

Przewód na rysunku 30.7a, w którym płynie prąd o natężeniu I , składa się z łuku okręgu o promieniu R i kącie środkowym $\pi/2$ rad oraz z dwóch odcinków, których przedłużenia przecinają się w środku C okręgu. Ile wynosi wartość indukcji magnetycznej \vec{B} pola, wytworzonego w punkcie C przez prąd w przewodzie?

ROZWIĄZANIE:

1. Możemy wyznaczyć indukcję magnetyczną \vec{B} w punkcie C , stosując prawo Biota–Savarta w postaci wzoru (30.5).

2. Zastosowanie wzoru (30.5) można uprościć, obliczając \vec{B} oddzielnie dla trzech różnych części przewodu, czyli dla: 1) odcinka po lewej stronie, 2) odcinka po prawej stronie, 3) łuku okręgu.

Odcinki. Dla dowolnego elementu prądu w odcinku (1) kąt θ między $d\vec{s}$ i \vec{r} jest równy zero (rys. 30.7b), tak więc ze wzoru (30.3) wynika:

$$dB_1 = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{Ids \sin \theta}{r^2} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{Ids \sin 0}{r^2} = 0.$$

Wobec tego prąd płynący przez cały odcinek (1) przewodu nie wytwarza pola magnetycznego w punkcie C :

$$B_1 = 0.$$

Takie samo rozumowanie można przeprowadzić w przypadku odcinka prostego (2), gdzie kąt θ między $d\vec{s}$ i \vec{r} dla dowolnego elementu prądu jest równy 180° . Zatem:

$$B_2 = 0.$$

Łuk okręgu. **1.** Zastosowanie prawa Biota–Savarta do wyznaczenia indukcji magnetycznej pola w środku łuku okręgu prowadzi do równania (30.11) ($B = \mu_0 I \phi / 4\pi R$). W naszym przykładzie kąt środkowy ϕ łuku jest równy $\pi/2$ radianów, tak więc z równania (30.11) wynika, że wartość indukcji magnetycznej \vec{B}_3 pola w środku C łuku jest równa:

$$B_3 = \frac{\mu_0 I (\pi/2)}{4\pi R} = \frac{\mu_0 I}{8R}.$$

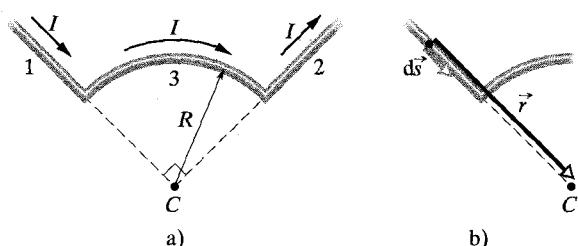
Aby wyznaczyć kierunek \vec{B}_3 , stosujemy regułę prawej dłoni, przedstawioną na rysunku 30.4. Uchwyć w myśli łuk okręgu prawą ręką, jak na rysunku 30.7c, tak aby twój kciuk wskazywał kierunek prądu. Kierunek, w którym twoje palce obejmują przewód, wskazuje kierunek wektora indukcji magnetycznej pola wokół przewodu. W otoczeniu punktu C (wewnętrzny łuk okręgu) czubki dwóch palców wskazują kierunek za płaszczyznę rysunku. Zatem \vec{B}_3 jest skierowane za tę płaszczyznę.

Pole wypadkowe. W ogólnym przypadku, gdy mamy wyznaczyć wypadkowy wektor indukcji magnetycznej pola, będącego

sumą dwóch (lub większej liczby) pól magnetycznych, musimy dodać wektory indukcji, a nie po prostu ich wartości. Jednak w tym przykładzie tylko przewód w kształcie łuku wywarza pole magnetyczne w punkcie C . Możemy więc zapisać wypadkową wartość indukcji \vec{B} jako:

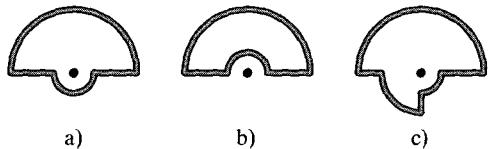
$$B = B_1 + B_2 + B_3 = 0 + 0 + \frac{\mu_0 I}{8R} = \frac{\mu_0 I}{8R}. \quad (\text{odpowiedź})$$

Kierunek wektora \vec{B} jest zgodny z kierunkiem wektora \vec{B}_3 — jest to kierunek za płaszczyznę rysunku 30.7.



Rys. 30.7. Przykład 30.1 a) Przewód składa się z dwóch odcinków prostych (1 i 2) oraz łuku okręgu (3). W przewodzie płynie prąd o natężeniu I . b) Dla elementu prądu w odcinku (1) kąt między $d\vec{s}$ i \vec{r} jest równy零. c) Wyznaczenie kierunku indukcji magnetycznej \vec{B}_3 pola wytworzonego w punkcie C , przez prąd, płynący wzdłuż łuku okręgu; pole jest skierowane w tym przypadku za płaszczyznę rysunku

SPRAWDZIAN 1: Na rysunku przedstawiono trzy obwody, składające się ze współśrodkowych łuków okręgów i odcinków prostych, skierowanych wzdłuż promienia. Łuki są albo połówkami, albo ćwiartkami okręgów o promieniach r , $2r$ i $3r$. W każdym obwodzie płynie prąd o takim samym natężeniu. Uszereguj obwody pod względem wartości wektora \vec{B} w środku krzywizny łuków (zaznaczonym kropką), zaczynając od największej wartości.



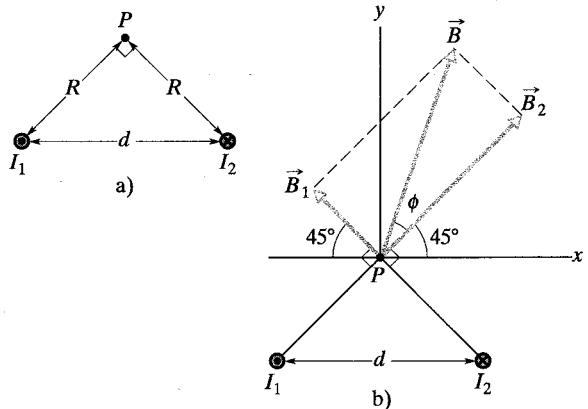
Przykład 30.2

Na rysunku 30.8a przedstawiono dwa długie równoległe przewody, w których płyną w przeciwnych kierunkach prądy o natężeniach I_1 i I_2 . Jaka jest wartość i kierunek wypadkowego wektora indukcji magnetycznej \vec{B} w punkcie P ? Przymij następujące wartości: $I_1 = 15 \text{ A}$, $I_2 = 32 \text{ A}$, $d = 5,3 \text{ cm}$.

ROZWIĄZANIE:

Oznaczenie. 1. Wypadkowy wektor indukcji magnetycznej \vec{B} pola w punkcie P jest wektorową sumą wektorów indukcji magnetycznych pól pochodzących od przewodów w obydwu przewodach.

Oznaczenie. 2. Indukcję magnetyczną pola wytworzonego przez dowolny prąd można obliczyć, stosując prawo Biota–Savarta. Dla punktów w otoczeniu długiego prostego przewodu, w którym płynie prąd, z tego prawa otrzymaliśmy równanie (30.6).



Rys. 30.8. Przykład 30.2. a) W dwóch przewodach płyną w przeciwnych kierunkach prądy o natężeniach I_1 i I_2 (przed i za płaszczyznę rysunku). Zwróć uwagę na kąt prosty w punkcie P . b) Suma wektorowa obliczonych oddzielnie wektorów indukcji \vec{B}_1 i \vec{B}_2 daje w wyniku wypadkowy wektor indukcji \vec{B}

Na rysunku 30.8a punkt P znajduje się w odległości R zarówno od przewodu z prądem o natężeniu I_1 , jak i od przewodu z prądem o natężeniu I_2 . Zgodnie ze wzorem (30.6) te prądy wytwarzają w punkcie P pole magnetyczne \vec{B}_1 i \vec{B}_2 o wartościach indukcji:

$$B_1 = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi R} \quad \text{oraz} \quad B_2 = \frac{\mu_0 I_2}{2\pi R}.$$

Zauważ, że na rysunku 30.8a obydwa kąty przy podstawie (między bokami R i d) trójkąta prostokątnego są równe 45° . Możemy więc napisać $\cos 45^\circ = R/d$ i zastąpić R przez $d \cos 45^\circ$. Zatem wartości indukcji B_1 i B_2 można zapisać jako:

$$B_1 = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi d \cos 45^\circ} \quad \text{oraz} \quad B_2 = \frac{\mu_0 I_2}{2\pi d \cos 45^\circ}.$$

Chcemy obliczyć sumę wektorów \vec{B}_1 i \vec{B}_2 , która jest wypadkowym wektorem indukcji \vec{B} w punkcie P . Aby określić kierunki wektorów \vec{B}_1 i \vec{B}_2 , stosujemy regułę prawej dłoni (rys. 30.4) do każdego przewodu na rysunku 30.8a. Dla przewodu 1, z prądem płynącym przed płaszczyznę rysunku, obejmujemy w myśl przewód prawą ręką z kciukiem skierowanym zgodnie z kierunkiem prądu. Zagięte palce wskazują wtedy, że linie pola biegą w kierunku przeciwnym do ruchu wskazówek zegara. W szczególności w pobliżu punktu P linie te są skierowane w góre i w lewo. Przypomnij sobie, że linie pola magnetycznego w dowolnym punkcie w otoczeniu długiego prostego przewodu z prądem muszą być skierowane prostopadle do prostej, łączącej ten punkt i przewód. Zatem wektor \vec{B}_1 musi być skierowany do góry i w lewo, jak pokazano na rysunku 30.8b. (Zwróć uwagę na zaznaczony kąt prosty między wektorem \vec{B}_1 a prostą, łączącą punkt P i przewód 1).

Powtarzając to rozumowanie dla przewodu 2, dochodzimy do wniosku, że wektor \vec{B}_2 jest skierowany do góry i w prawo, jak pokazano na rysunku 30.8b. (Zwróć uwagę na zaznaczony kąt prosty między wektorem \vec{B}_2 a prostą, łączącą punkt P i przewód 2).

Możemy teraz dodać wektorowo \vec{B}_1 i \vec{B}_2 i wyznaczyć w ten sposób wypadkowy wektor indukcji magnetycznej \vec{B} pola w punkcie P . Można to zrobić, rozkładając wektory na składowe i następnie wyznaczając \vec{B} z jego składowych. Istnieje też inny sposób, przedstawiony na rysunku 30.8b. Ponieważ wektory \vec{B}_1 i \vec{B}_2 są wzajemnie prostopadłe, są one przyprostokątnymi trójkąta prostokątnego, którego przeciwprostokątną jest wektor \vec{B} . Z twierdzenia Pitagorasa otrzymujemy:

$$\begin{aligned} B &= \sqrt{B_1^2 + B_2^2} = \frac{\mu_0}{2\pi d (\cos 45^\circ)} \sqrt{I_1^2 + I_2^2} \\ &= \frac{(4\pi \cdot 10^{-7} \text{ T} \cdot \text{m}/\text{A}) \sqrt{(15 \text{ A})^2 + (32 \text{ A})^2}}{(2\pi)(5,3 \cdot 10^{-2} \text{ m})(\cos 45^\circ)} \\ &= 1,89 \cdot 10^{-4} \text{ T} \approx 190 \text{ } \mu\text{T}. \end{aligned} \quad (\text{odpowiedź})$$

Kąt ϕ między kierunkami wektorów \vec{B}_1 i \vec{B}_2 na rysunku 30.8b wynika z zależności:

$$\phi = \arctg \frac{B_1}{B_2},$$

co dla B_1 i B_2 obliczonych wyżej daje:

$$\phi = \arctg \frac{I_1}{I_2} = \arctg \frac{15 \text{ A}}{32 \text{ A}} = 25^\circ.$$

Kąt między kierunkiem wektora \vec{B} i osią x , pokazany na rysunku 30.8b jest więc równy:

$$\phi + 45^\circ = 25^\circ + 45^\circ = 70^\circ. \quad (\text{odpowiedź})$$

Porad 1: Reguły prawej dłoni

Reguła prawej dłoni dla iloczynu wektorowego. Reguła ta, wprowadzona w paragrafie 3.7, umożliwia wyznaczenie kierunku wektora, który jest wynikiem mnożenia wektorowego. Ułóż palce prawej dłoni tak, aby obrócić pierwszy wektor, występujący w iloczynie, w kierunku drugiego wektora, o mniejszy kąt między tymi wektorami. Twój wyciągnięty kciuk wskaże kierunek wektora, który jest wynikiem mnożenia wektorowego. W rozdziale 12 zastosowaliśmy tę regułę do wyznaczenia kierunku wektora momentu siły i momentu pędu; w rozdziale 29 zastosowaliśmy ją do wyznaczenia kierunku siły działającej na przewodnik z prądem w polu magnetycznym.

Reguły prawej dłoni w magnetyzmie. W wielu sytuacjach związanych z magnetyzmem, chcielibyśmy znaleźć związek międ-

dzy elementem „zgiętym” i „prostym”. Można to zrobić za pomocą (zgiętych) palców i (wyprostowanego) kciuka. W paragrafie 29.8 widzieliśmy już przykład, w którym określiliśmy związek między prądem płynącym wzdłuż pętli (element zgięty) a kierunkiem wektora normalnego \vec{n} pętli (element prosty). Jeżeli obejmiesz palcami prawej dłoni pętlę, zgodnie z kierunkiem prądu, to twój wyciągnięty kciuk wskaże kierunek \vec{n} . Jest to jednocześnie kierunek dipolowego momentu magnetycznego $\vec{\mu}$ pętli.

W tym paragrafie zapoznajesz się z drugą regułą prawej dłoni podobnego typu. Aby znaleźć kierunek linii pola magnetycznego wokół elementu prądu, skieruj wyciągnięty kciuk prawej dłoni wzdłuż kierunku prądu. Pozostałe palce obejmą wtedy element prądu, wskazując kierunek linii pola.

30.2. Siły działające między dwoma równoległymi przewodami z prądem

Dwa długie równoległe przewody, w których płyną prądy, działają na siebie siłami. Na rysunku 30.9 przedstawiono dwa takie przewody, odległe o d , w których płyną prądy o natężeniach I_a i I_b . Zbadajmy siły, jakimi przewody te działają wzajemnie na siebie.

Najpierw szukamy siły, działającej na przewód b na rysunku 30.9, wywołanej przez prąd, płynący w przewodzie a . Ten prąd wytworza pole magnetyczne o indukcji \vec{B}_a i właśnie to pole magnetyczne powoduje powstawanie poszukiwanej siły. Aby wyznaczyć siłę, musimy zatem znać wartość i kierunek wektora indukcji \vec{B}_a w miejscu, w którym znajduje się przewód b . Ze wzoru (30.6) wynika, że wartość \vec{B}_a w każdym punkcie przewodu b jest równa:

$$B_a = \frac{\mu_0 I_a}{2\pi d}. \quad (30.13)$$

Z reguły prawej dłoni wynika, że wektor indukcji \vec{B}_a w miejscu, w którym znajduje się przewód b , jest skierowany w dół, jak pokazano na rysunku 30.9.

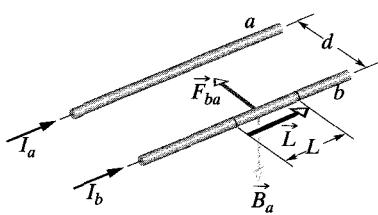
Znamy już indukcję, możemy zatem teraz wyznaczyć siłę, jaką pole działa na przewód b . Zgodnie z równaniem (29.27), siła \vec{F}_{ba} , wytworzona przez zewnętrzne pole o indukcji \vec{B}_a i działającą na odcinek przewodu b o długości L jest równa:

$$\vec{F}_{ba} = I_b \vec{L} \times \vec{B}_a, \quad (30.14)$$

gdzie \vec{L} jest wektorem długości przewodu. Na rysunku 30.9 wektory \vec{L} i \vec{B}_a są prostopadłe, tak więc stosując wzór (30.9) możemy napisać:

$$F_{ba} = I_b L B_a \sin 90^\circ = \frac{\mu_0 L I_a I_b}{2\pi d}. \quad (30.15)$$

Kierunek wektora \vec{F}_{ba} jest zgodny z kierunkiem iloczynu wektorowego $\vec{L} \times \vec{B}_a$. Stosując regułę prawej dłoni dla iloczynu wektorowego do wektorów \vec{L} i \vec{B}_a , pokazanych na rysunku 30.9, widzimy, że wektor \vec{F}_{ba} jest skierowany w stronę przewodu a .



Rys. 30.9. Dwa równoległe przewody, w których płyną prądy w tym samym kierunku, wzajemnie się przyciągają. \vec{B}_a jest wektorem indukcji magnetycznej pola w miejscu, w którym znajduje się przewód b , a wytworzonego przez prąd w przewodzie a . \vec{F}_{ba} jest siłą, która działa na przewód b , gdyż płynie w nim prąd, a przewód znajduje się w polu o indukcji \vec{B}_a .

Ogólny sposób postępowania przy wyznaczaniu siły, działającej na przewód z prądem, może być przedstawiony następująco:

► Aby znaleźć siłę, działającą na przewód z prądem, wywołaną przepływem prądu w drugim przewodzie, najpierw wyznacz pole, pochodzące od prądu w drugim przewodzie, w miejscu, w którym znajduje się pierwszy przewód. Następnie wyznacz siłę, jaką to pole działa na pierwszy przewód.

Moglibyśmy teraz zastosować tę procedurę do obliczenia siły, działającej na przewód a , wywołanej przepływem prądu w przewodzie b . Okazałoby się, że siła działa w kierunku przewodu b ; tak więc dwa przewody, w których prądy płyną równolegle, wzajemnie się przyciągają. Gdyby dwa prądy płynęły antyrównolegle (czyli w kierunkach przeciwnych), moglibyśmy podobnie wykazać, że obydwa przewody wzajemnie się odpychają. Zatem:

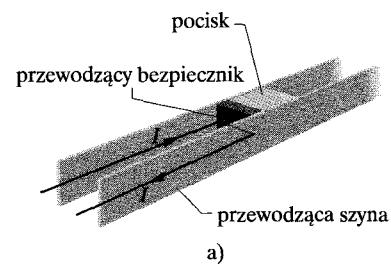
► Przewody, w których płyną prądy równolegle, przyciągają się, a te, w których płyną prądy antyrównolegle, się odpchajają.

Siła, działająca między przewodami, w których płyną prądy równolegle, jest podstawą definicji ampera, który jest jedną z siedmiu podstawowych jednostek w układzie SI. Definicja przyjęta w 1946 r. jest następująca: 1 amper oznacza natężenie prądu stałego, który płynąc w dwóch równoległych prostoliniowych, nieskończonymi długimi przewodach o znikomo małym przekroju poprzecznym, umieszczonych w próżni w odległości 1 m, wywołuje między tymi przewodami siłę o wartości $2 \cdot 10^{-7}$ N na każdy metr długości przewodu.

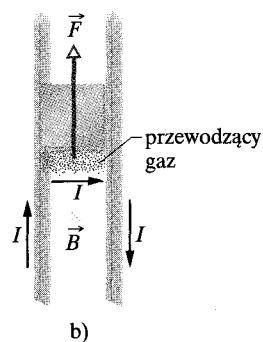
Działo szynowe

Działo szynowe jest urządzeniem, w którym pole magnetyczne może przyspieszać pocisk, nadając mu dużą prędkość w krótkim czasie. Schemat działa szynowego jest przedstawiony na rysunku 30.10. Prąd o dużym natężeniu płynie przez jedną z dwóch równoległych przewodzących szyn, następnie przez przewodzący „bezpicienik” (np. cienki kawałek miedzi) i w końcu wraca do źródła przez drugą przewodzącą szynę. Pocisk, który mamy wystrzelić, znajduje się po zewnętrznej stronie bezpiecznika i może się swobodnie poruszać między szynami. Tuż połączeniu prądu bezpiecznik topi się i wyparowuje, wytwarzając w tym miejscu warstwę przewodzącego gazu.

Reguła prawej dłoni (rys. 30.4) pokazuje, że prądy w szynach na rysunku 30.10a wytwarzają pola magnetyczne, o liniach skierowanych w dół w obszarze między szynami. Wypadkowe pole magnetyczne o indukcji \vec{B} działa na warstwę gazu siłą \vec{F} , wynikającą z przepływu prądu I (rys. 30.10b). Zgodnie z równaniem (30.14) i regułą prawej dłoni dla iloczynu wektorowego dochodzimy do wniosku, że siła \vec{F} jest skierowana na zewnątrz, równolegle do szyn. Gaz, który przesuwa się wzdłuż szyn, popycha pocisk, nadając mu w ciągu 1 ms przyspieszenie $5 \cdot 10^6$ g, a następnie wystrzeliuje go z prędkością 10 km/s.



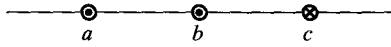
a)



b)

Rys. 30.10. a) Działo szynowe, przez które płynie prąd I . Przepływ prądu powoduje gwałtowne wyparowanie bezpiecznika. b) Prąd wytwarza pole magnetyczne między szynami, a pole powoduje, że siła \vec{F} działa na przewodzący gaz, który jest częścią obwodu prądowego. Gaz napędza pocisk wzdłuż szyn, powodując jego wystrzelanie

✓ SPRAWDZIAN 2: Na rysunku przedstawiono trzy długie, równoległe prostoliniowe przewody umieszczone w ten sposób, że środkowy przewód jest jednakowo odległy od obu pozostałych. W przewodach płyną prądy o takich samych natężeniach, skierowane bądź za płaszczyznę, bądź przed płaszczyznę rysunku. Uszereguj przewody pod względem wartości siły, jaka działa na nie wskutek przepływu prądu w pozostałych dwóch przewodach, zaczynając od największej wartości.



30.3. Prawo Ampère'a

Możemy wyznaczyć wypadkowe pole elektryczne, wytworzone przez *dowolny* układ ładunków, korzystając ze wzoru (30.2) określającego przyczynek $d\vec{E}$. Jeżeli układ ładunków jest skomplikowany, być może będziemy musieli skorzystać z komputera. Przypomnij sobie, że jeśli rozkład ładunku ma symetrię płaszczyznową, walcową, lub sferyczną, to można zastosować prawo Gaussa i wyznaczyć wypadkowe pole elektryczne, wkładając w to znacznie mniej wysiłku.

Podobnie możemy wyznaczyć wypadkowe pole magnetyczne wytworzone przez *dowolny* układ prądów, korzystając ze wzoru (30.5) określającego przyczynek $d\vec{B}$, ale znów być może będziemy musieli skorzystać z komputera dla skomplikowanego układu prądów. Jeżeli jednak układ prądów ma pewną symetrię, będziemy mogli zastosować **prawo Ampère'a** i wyznaczyć wypadkowe pole magnetyczne, wkładając w to znacznie mniej wysiłku. To prawo, które można wyprowadzić z prawa Biota–Savarta, jest zwyczajowo przypisywane André Marie Ampère'owi (1775–1836), na którego cześć nazwano jednostkę natężenia prądu w układzie SI. Jednakże prawo to zostało w rzeczywistości sformułowane ściśle przez angielskiego fizyka Jamesa Clerka Maxwella.

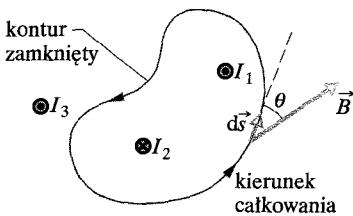
Prawo Ampère'a ma postać:

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = \mu_0 I_p \quad (\text{prawo Ampère'a}). \quad (30.16)$$

Kółko w znaku całki oznacza, że iloczyn skalarny $\vec{B} \cdot d\vec{s}$ ma być całkowany wzdłuż *zamkniętego* konturu. Natężenie prądu I_p po prawej stronie jest *całkowitym* natężeniem prądu przecinającego powierzchnię ograniczoną przez kontur całkowania.

Aby dostrzec, jakie znaczenie ma iloczyn skalarny $\vec{B} \cdot d\vec{s}$ i jego całka, zastosujmy najpierw prawo Ampère'a w przypadku ogólnym, przedstawionym na rysunku 30.11. Na rysunku pokazano przekrój poprzeczny trzech długich, prostoliniowych przewodów, w których płyną prądy I_1 , I_2 i I_3 , skierowane albo za płaszczyznę, albo przed płaszczyznę rysunku. Pewien kontur zamknięty, leżący w płaszczyźnie rysunku, obejmuje dwa przewody, ale nie obejmuje trzeciego. Kierunek przeciwny do ruchu wskazówek zegara, zaznaczony na konturze, wskazuje dowolnie wybrany kierunek całkowania w równaniu (30.16).

Aby zastosować prawo Ampère'a, dzielimy w myśl kontur na elementy wektorowe $d\vec{s}$, które są w każdym punkcie skierowane wzdłuż stycznej do konturu w kierunku całkowania. Założymy, że w miejscu, w którym znajduje się element



Rys. 30.11. Prawo Ampère'a zastosowane do dowolnego konturu, który obejmuje dwa długie prostoliniowe przewody, ale nie obejmuje trzeciego przewodu. Zwróć uwagę na kierunki prądów

$d\vec{s}$, pokazany na rysunku 30.11, wypadkowy wektor indukcji magnetycznej pola, wytworzonego przez trzy prądy jest równy \vec{B} . Przewody są prostopadłe do płaszczyzny rysunku, więc wektor indukcji magnetycznej pola wytworzonego przez każdy z prądów w miejscu zajmowanym przez element $d\vec{s}$, leży w płaszczyźnie rysunku 30.11. Zatem wypadkowy wektor indukcji \vec{B} w miejscu $d\vec{s}$ musi również leżeć w tej płaszczyźnie. Nie znamy jednak kierunku wektora \vec{B} na płaszczyźnie, dlatego na rysunku 30.11 narysowano wektor \vec{B} pod dowolnym kątem θ do kierunku $d\vec{s}$.

Iloczyn skalarny $\vec{B} \cdot d\vec{s}$ po lewej stronie równania (30.16) jest równy $B \cos \theta ds$. Tak więc prawo Ampère'a może być zapisane jako:

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = \oint B \cos \theta ds = \mu_0 I_p. \quad (30.17)$$

Możemy przyjąć, że iloczyn skalarny $\vec{B} \cdot d\vec{s}$ jest iloczynem elementu ds konturu i składowej indukcji pola $B \cos \theta$, stycznej do konturu. Natomiast całkowanie traktujemy jako sumowanie wszystkich takich iloczynów wokół całego konturu.

Gdy potrafimy rzeczywiście wykonać takie całkowanie, nie musimy wcześniej znać kierunku wektora \vec{B} . Zamiast tego przyjmujemy dowolnie wektor \vec{B} w kierunku całkowania (jak na rysunku 30.11). Następnie stosujemy następującą regułę prawej dłoni, aby przypisać znak plus lub minus każdemu prądowi, który wchodzi w skład prądu całkowitego I_p , objętego konturem:

► Ułóż prawą rękę wzdłuż konturu, tak aby palce wskazywały kierunek całkowania. Jeżeli prąd przepływa przez kontur w kierunku wyciągniętego kciuka, to przypisujemy mu znak plus. Gdy prąd płynie w kierunku przeciwnym — przypisujemy mu znak minus.

W końcu obliczamy wartość wektora \vec{B} z równania (30.17). Jeżeli otrzymamy dodatnią wartość B , to znaczy, że przyjęty kierunek wektora \vec{B} jest poprawny. Jeżeli otrzymana wartość jest ujemna, to odrzucamy znak minus i oznaczamy \vec{B} na rysunku w kierunku przeciwnym.

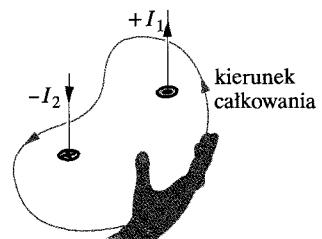
Na rysunku 30.12 reguła prawej dłoni dla prawa Ampère'a została zastosowana dla przypadku, przedstawionego na rysunku 30.11. Dla wskazanego kierunku całkowania, przeciwnego do ruchu wskazówek zegara, wypadkowe natężenie prądu, objętego konturem jest równe:

$$I_p = I_1 - I_2.$$

(Prąd I_3 nie jest objęty konturem). Możemy zatem napisać równanie (30.17) w postaci:

$$\oint B \cos \theta ds = \mu_0 (I_1 - I_2). \quad (30.18)$$

Być może jesteś ciekaw, dlaczego natężenie prądu I_3 nie występuje po prawej stronie równania (30.18), mimo że wartość indukcji B po lewej stronie zależy również od tego prądu. Odpowiedź wynika z faktu, że przyczynki do pola magnetycznego, pochodzące od prądu I_3 kompensują się, gdyż całkowanie w równaniu 30.18 jest wykonywane wokół całego konturu. W przeciwnieństwie do tego, przyczynki do pola magnetycznego, pochodzące od prądu objętego konturem się nie kompensują.

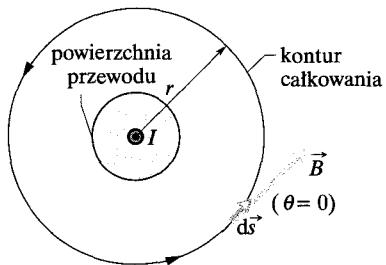


Rys. 30.12. Reguła prawej dłoni dla prawa Ampère'a, służąca do określenia znaków prądów objętych konturem. Sytuacja odpowiada przedstawionej na rysunku 30.11

W ogólnym przypadku, przedstawionym na rysunku 30.11, nie potrafimy rozwiązać równania (30.18) względem wartości B , ponieważ nie mamy dostatecznej informacji, która pozwoliłaby uprościć i obliczyć całkę. Znamy jednak wynik całkowania; musi on być równy wartości wyrażenia $\mu_0(I_1 - I_2)$, które określa wypadkowe natężenie prądu przecinającego powierzchnię ograniczoną konturem.

Zastosujemy teraz prawo Ampère'a dla dwóch przypadków, w których symetria pozwala nam na uproszczenie i obliczenie całki, a więc na wyznaczenie indukcji magnetycznej.

Pole magnetyczne na zewnątrz długiego prostoliniowego przewodu z prądem



Rys. 30.13. Zastosowanie prawa Ampère'a do wyznaczenia indukcji magnetycznej pola, wytworzonego przez prąd o natężeniu I , płynący w długim prostoliniowym przewodzie. Konturem całkowaniem jest okrąg, leżący na zewnątrz przewodu

Na rysunku 30.13 przedstawiono długий prostoliniowy przewód, w którym prąd o natężeniu I płynie przed płaszczyznę rysunku. Z równania (30.6) wynika, że indukcja magnetyczna \vec{B} pola, wytworzonego przez ten prąd ma taką samą wartość we wszystkich punktach, znajdujących się w odległości r od środka przewodu; innymi słowy pole \vec{B} ma symetrię walcową względem osi przewodu. Możemy wykorzystać tę symetrię do uproszczenia całki, występującej w prawie Ampère'a (równania (30.16) i (30.17)), jeżeli otoczymy przewód zamkniętym konturem w kształcie wspólnego okręgu o promieniu r , jak pokazano na rysunku 30.13. Indukcja \vec{B} ma wtedy taką samą wartość B w każdym punkcie konturu. Będziemy obliczać całkę w kierunku przeciwnym do ruchu wskazówek zegara, więc $d\vec{s}$ ma kierunek, pokazany na rysunku 30.13.

Wyrażenie $B \cos \theta$ w równaniu (30.17) można dalej uprościć, jeśli zauważymy, że wektor \vec{B} jest styczny do konturu w każdym jego punkcie, podobnie jak $d\vec{s}$. Zatem wektory \vec{B} i $d\vec{s}$ są albo równoległe, albo antyrównoległe w każdym punkcie konturu i przyjmujemy (w sposób dowolny) tę pierwszą możliwość. Wobec tego w każdym punkcie konturu kąt θ między wektorami $d\vec{s}$ i \vec{B} jest równy 0° , a $\cos \theta = \cos 0^\circ = 1$. Całka w równaniu (30.17) przyjmuje więc postać:

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = \oint B \cos \theta ds = B \oint ds = B(2\pi r).$$

Zauważ, że ostatnia całka w powyższym równaniu oznacza sumowanie wszystkich elementów liniowych ds po konturze w kształcie okręgu; otrzymujemy więc w wyniku długość okręgu $2\pi r$.

Z reguły prawej dłoni otrzymujemy znak plus dla prądu na rysunku 30.13. Wyrażenie po prawej stronie prawa Ampère'a przyjmuje postać $+\mu_0 I$ i otrzymujemy wówczas:

$$B(2\pi r) = \mu_0 I,$$

czyli

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}. \quad (30.19)$$

Przy niewielkiej zmianie oznaczeń jest to równanie (30.6), które wyprowadziliśmy wcześniej z prawa Biota–Savarta, wkładając w to znacznie więcej wysiłku. Ponadto, ponieważ otrzymaliśmy dodatnią wartość B , wiemy, że kierunek wektora \vec{B} , pokazany na rysunku 30.13 został wybrany poprawnie.

Pole magnetyczne wewnętrz długiego prostoliniowego przewodu z prądem

Na rysunku 30.14 przedstawiono przekrój poprzeczny długiego prostoliniowego przewodu o promieniu R . W przewodzie płynie równomiernie rozłożony prąd o natężeniu I , skierowany przed płaszczyznę rysunku. Ze względu na równomierny rozkład prądu w przekroju poprzecznym przewodu, pole magnetyczne wytwarzane przez ten prąd musi mieć symetrię walcową. Tak więc, aby wyznaczyć indukcję magnetyczną pola wewnętrz przewodu, możemy znów wykorzystać kontur o promieniu r , przyjmując teraz $r < R$, jak pokazano na rysunku 30.14. Z symetrii wynika ponownie, że wektor \vec{B} jest styczny do konturu, tak więc lewa strona prawa Ampère'a przyjmuje postać:

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = B \oint ds = B(2\pi r). \quad (30.20)$$

Aby uzyskać prawą stronę prawa Ampère'a, zauważmy, że ze względu na równomierny rozkład prądu, natężenie prądu I_p , objętego konturem jest proporcjonalne do pola powierzchni wewnętrz tego konturu, czyli:

$$I_p = I \frac{\pi r^2}{\pi R^2}. \quad (30.21)$$

Z reguły prawej dłoni wynika, że I_p ma znak dodatni. Wobec tego z prawa Ampère'a otrzymujemy:

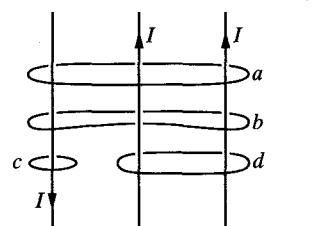
$$B(2\pi r) = \mu_0 I \frac{\pi r^2}{\pi R^2},$$

czyli

$$B = \left(\frac{\mu_0 I}{2\pi R^2} \right) r. \quad (30.22)$$

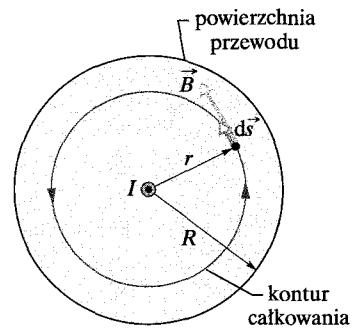
Zatem wartość indukcji magnetycznej B wewnętrz przewodu jest proporcjonalna do r . Wartość ta jest równa零 w środku i osiąga maksimum na powierzchni przewodu, gdzie $r = R$. Zauważ, że z równań (30.19) i (30.22) otrzymujemy tę samą wartość B dla $r = R$. Innymi słowy, wyrażenia określające indukcję magnetyczną na zewnątrz i wewnętrz przewodu dają taki sam wynik na powierzchni przewodu.

SPRAWDZIAN 3: Na rysunku przedstawiono trzy przewody, w których płyną prądy o takich samych natężeniach I i kierunkach zaznaczonych na rysunku, oraz cztery kontury zamknięte. Uszereguj kontury pod względem wartości całki $\oint \vec{B} \cdot d\vec{s}$ po każdym z nich, zaczynając od największej wartości.



Przykład 30.3

Na rysunku 30.15a przedstawiono przekrój poprzeczny długiego przewodzącego walca o promieniu wewnętrznym $a = 2$ cm i promieniu zewnętrznym $b = 4$ cm. Przez walec płynie prąd skierowany przed płaszczyznę rysunku, a gęstość prądu w przekroju poprzecznym jest dana wyrażeniem $J = cr^2$, gdzie $c = 3 \cdot 10^6$ A/m⁴, a r jest wyrażone w metrach. Ile wynosi wartość indukcji magnetycznej \vec{B} w punkcie oddalonym o 3 cm od osi walca?



Rys. 30.14. Zastosowanie prawa Ampère'a do wyznaczenia indukcji magnetycznej pola, które powstaje wewnątrz długiego prostoliniowego przewodu o przekroju kołowym, w wyniku przepływu prądu o natężeniu I . Prąd jest równomiernie rozłożony w przekroju poprzecznym przewodu i płynie przed płaszczyznę rysunku. Kontur całkowania znajduje się wewnątrz przewodu

rowany przed płaszczyznę rysunku, a gęstość prądu w przekroju poprzecznym jest dana wyrażeniem $J = cr^2$, gdzie $c = 3 \cdot 10^6$ A/m⁴, a r jest wyrażone w metrach. Ile wynosi wartość indukcji magnetycznej \vec{B} w punkcie oddalonym o 3 cm od osi walca?

ROZWIĄZANIE:

Punkt, w którym chcemy wyznaczyć \vec{B} , znajduje się wewnątrz przewodzącego walca, między jego wewnętrzną i zewnętrzną powierzchnią boczną. Widzimy, że rozkład prądu ma symetrię cylindryczną (dla danego promienia gęstość prądu w przekroju jest taka sama).

1. Symetria pozwala nam zastosować prawo Ampère'a do wyznaczenia wartości \vec{B} w danym punkcie. Najpierw wybieramy kontur całkowania, pokazany na rysunku 30.15b. Kontur jest okręgiem współśrodkowym z walcem i ma promień $r = 3 \text{ cm}$, ponieważ naszym zadaniem jest wyznaczenie indukcji \vec{B} w tej właśnie odległości od osi walca.

2. Następnym krokiem jest obliczenie natężenia prądu I_p , objętego konturem. Jednakże *nie możemy założyć proporcjonalności*, jak w równaniu (30.21), ponieważ teraz prąd nie jest rozłożony równomiernie. Zamiast tego, postępując jak w przykładzie 27.2b, musimy scałkować gęstość prądu od wewnętrznego promienia walca a do promienia konturu r :

$$I_p = \int J dS = \int_a^r cr^2 (2\pi r dr) = 2\pi c \int_a^r r^3 dr \\ = 2\pi c \left[\frac{r^4}{4} \right]_a^r = \frac{\pi c(r^4 - a^4)}{2}.$$

Kierunek całkowania, zaznaczony na rysunku 30.15b został wybrany dowolnie jako zgodny z ruchem wskazówek zegara. Stosując do tego konturu regułę prawej dłoni dla prawa Ampère'a, dochodzimy do wniosku, że powinniśmy przyjąć ujemną wartość I_p , ponieważ prąd jest skierowany przed płaszczyznę rysunku, a kciuk wskazuje kierunek za płaszczyznę rysunku.

Następnie obliczamy lewą stronę prawa Ampère'a dokładnie tak samo, jak dla rysunku 30.14 i znów otrzymujemy wzór (30.20). Zatem z prawa Ampère'a:

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = \mu_0 I_p$$

wynika, że:

$$B(2\pi r) = -\frac{\mu_0 \pi c}{2} (r^4 - a^4).$$

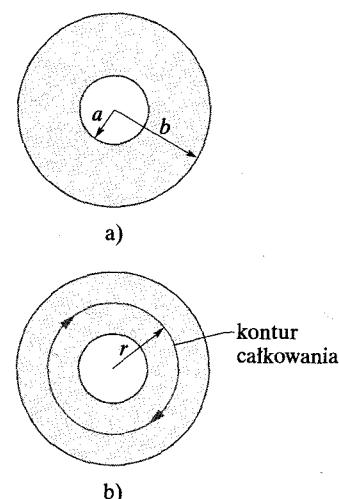
Wyznaczając B i podstawiając dane, otrzymujemy:

$$B = -\frac{\mu_0 c}{4r} (r^4 - a^4) \\ = -\frac{(4\pi \cdot 10^{-7} \text{ T} \cdot \text{m}/\text{A})(3 \cdot 10^6 \text{ A}/\text{m}^4)}{4(0,03 \text{ m})} [(0,03 \text{ m})^4 - (0,02 \text{ m})^4] \\ = -2 \cdot 10^{-5} \text{ T}.$$

Tak więc indukcja magnetyczna \vec{B} pola w punkcie odległym od osi o 3 cm ma wartość:

$$B = 2 \cdot 10^{-5} \text{ T} \quad (\text{odpowiedź})$$

a linie pola magnetycznego są skierowane przeciwnie do naszego kierunku całkowania, a więc przeciwnie do ruchu wskazówek zegara na rysunku 30.15b.



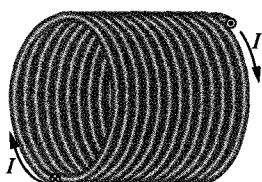
Rys. 30.15. Przykład 30.3. a) Przekrój poprzeczny przewodzącego walca o wewnętrznym promieniu a i zewnętrznym promieniu b . b) Kontur całkowania o promieniu r wybrany w celu obliczenia indukcji magnetycznej w punktach oddalonych o r od osi walca

30.4. Solenoidy i toroidy

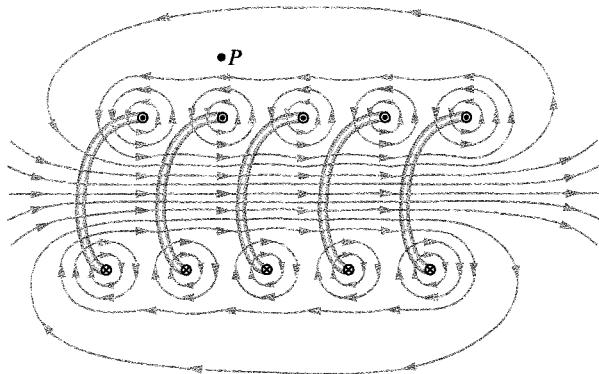
Pole magnetyczne solenoidu

Zwrócićmy teraz uwagę na inny przypadek, w którym prawo Ampère'a okazuje się przydatne. Dotyczy on pola magnetycznego wytworzonego przez prąd płynący w długiej cewce, ciasno nawiniętej wzdłuż linii śrubowej. Taką cewkę nazywamy **solenoidem** (rys. 30.16). Zakładamy przy tym, że długość solenoidu jest znacznie większa od jego średnicy.

Na rysunku 30.17 przedstawiono przekrój fragmentu solenoidu z rozsuniętymi zwojami. Pole magnetyczne solenoidu jest superpozycją pól, wytwarzanych przez pojedyncze zwoje, z których składa się solenoid. Dla punktów położonych bardzo blisko uwijenia, każdy zwój zachowuje się pod względem magnetycz-



Rys. 30.16. Solenoid, w którym płynie prąd o natężeniu I



Rys. 30.17. Pionowy przekrój przechodzący przez osię solenoidu z rozsuniętymi zwojami. Pokazane są części pięciu zwojów położone z tyłu, a także linie pola magnetycznego, wytworzzonego przez prąd płynący w solenoidzie. Wokół każdego zwoju powstają kołowe linie pola. W pobliżu osi solenoidu linie skierowane są wzdłuż osi. Ułożone blisko siebie linie wskazują, że pole w pobliżu osi jest silne. Na zewnątrz solenoidu odległości między liniami są duże; oznacza to, że pole tam jest bardzo słabe

nym prawie tak, jak długi prostoliniowy przewód, a linie pola tworzą prawie współśrodkowe okręgi. Z rysunku 30.17 wnioskujemy, że pola między sąsiednimi zwojami niemal całkowicie się znoszą, natomiast wewnętrz solenoidu i dość daleko od uzwojenia wektor \vec{B} jest w przybliżeniu równoległy do osi solenoidu. W granicznym przypadku *idealnego solenoidu*, który jest nieskończennie długi i składa się ze ścisłe ułożonych zwojów o przekroju kwadratowym, pole wewnętrz solenoidu jest jednorodne, a jego linie są równoległe do osi solenoidu.

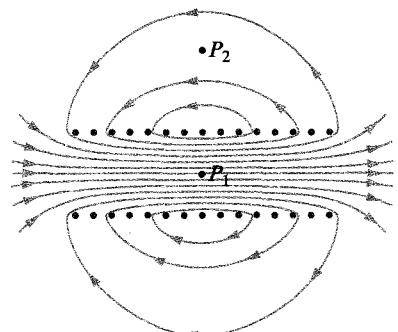
W punktach położonych powyżej solenoidu, takich jak punkt P na rysunku 30.17, pole wytworzone przez górne części zwojów (zaznaczone \odot) jest skierowane w lewo (jak narysowano w pobliżu P) i znowu się częściowo z polem pochodząącym od dolnych części zwojów (zaznaczonych \otimes) i skierowanym w prawo (pole to nie zostało zaznaczone na rysunku). W granicznym przypadku solenoidu idealnego indukcja magnetyczna na zewnątrz solenoidu jest równa零. Dla rzeczywistego solenoidu możemy również przyjąć, że indukcja na zewnątrz solenoidu jest równa zero. Założenie to jest spełnione, jeśli długość solenoidu jest znacznie większa od jego średnicy, a rozważamy punkty, takie jak punkt P , tzn. położone dostatecznie daleko od końców solenoidu. Kierunek wektora indukcji magnetycznej pola wzdłuż osi solenoidu wynika z reguły prawej dłoni: uchwyć solenoid prawą ręką, tak aby twoje palce wskazywały kierunek prądu w uzwojeniu; twój wyciągnięty kciuk wskazuje wtedy kierunek wektora indukcji magnetycznej, zgodny z osią solenoidu.

Na rysunku 30.18 przedstawiono linie pola \vec{B} w rzeczywistym solenoidzie. Odległości między liniami w środkowym obszarze wskazują, że pole wewnętrz cewki jest dość silne i jednorodne w przekroju poprzecznym. Pole na zewnątrz solenoidu jest natomiast stosunkowo słabe.

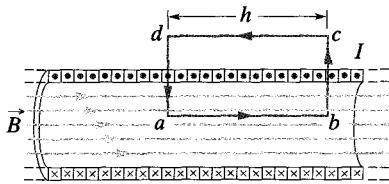
Zastosujmy teraz prawo Ampère'a:

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = \mu_0 I_p \quad (30.23)$$

do idealnego solenoidu, przedstawionego na rysunku 30.19. Pole \vec{B} jest



Rys. 30.18. Linie pola magnetycznego w rzeczywistym solenoidzie o skończonej długości. Pole jest silne i jednorodne w punktach leżących wewnątrz solenoidu, takich jak punkt P_1 , natomiast stosunkowo słabe w punktach leżących na zewnątrz, takich jak punkt P_2



Rys. 30.19. Zastosowanie prawa Ampère'a do odcinka długiego idealnego solenoidu, w którym płynie prąd o natężeniu I . Kontur całkowania jest prostokątem $abcd$

jednorodne wewnątrz solenoidu, a jego indukcja jest równa zeru na zewnątrz. Wykorzystując prostokątny kontur całkowania $abcd$, możemy zapisać całkę $\oint \vec{B} \cdot d\vec{s}$ w postaci sumy czterech całek, po jednej dla każdego odcinka konturu:

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = \int_a^b \vec{B} \cdot d\vec{s} + \int_b^c \vec{B} \cdot d\vec{s} + \int_c^d \vec{B} \cdot d\vec{s} + \int_d^a \vec{B} \cdot d\vec{s}. \quad (30.24)$$

Pierwsza całka po prawej stronie równania (30.24) jest równa Bh , gdzie B jest wartością indukcji jednorodnego pola \vec{B} wewnątrz solenoidu, a h jest dowolnie wybraną długością odcinka łączącego a i b . Druga i czwarta całka są równe零, gdyż dla każdego elementu $d\vec{s}$ tych odcinków wektor \vec{B} jest albo prostopadły do $d\vec{s}$, albo równy zeru, a więc iloczyn skalarny $\vec{B} \cdot d\vec{s}$ jest równy zeru. Trzecia całka, która jest obliczana wzdłuż odcinka zewnętrznego, jest również równa零, gdyż $B = 0$ we wszystkich punktach leżących na zewnątrz solenoidu. Zatem całka $\oint \vec{B} \cdot d\vec{s}$ dla całego prostokątnego konturu ma wartość Bh .

Całkowite natężenie prądu I_p , obejmowanego prostokątnym konturem na rysunku 30.19, nie jest równe natężeniu prądu I w uzwojeniu solenoidu, gdyż kontur całkowania obejmuje więcej niż jeden zwój. Założymy, że n jest liczbą zwojów, przypadających na jednostkę długości; wówczas kontur obejmuje nh zwojów i wobec tego:

$$I_p = I(nh).$$

Z prawa Ampère'a otrzymujemy więc:

$$Bh = \mu_0 I_p nh,$$

czyli:

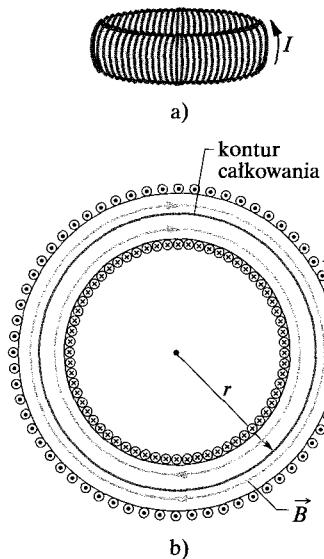
$$B = \mu_0 In \quad (\text{solenoid idealny}) \quad (30.25)$$

Choć wyprowadziliśmy wzór (30.25) dla nieskończego długiego idealnego solenoidu, jest on całkiem dobrze spełniony dla rzeczywistych solenoidów, jeśli tylko zastosujemy go do punktów, położonych dostatecznie daleko od końców solenoidu. Wzór (30.25) jest zgodny z faktem stwierdzonym doświadczalnie, że wartość indukcji magnetycznej B pola wewnątrz solenoidu nie zależy od jego średnicy ani długości, i jest stała w przekroju poprzecznym solenoidu. Solenoid umożliwia więc w praktyce wytworzenie, w celach doświadczalnych, jednorodnego pola magnetycznego o zadanej wartości indukcji, podobnie jak płaski kondensator umożliwia w praktyce uzyskanie jednorodnego pola elektrycznego o zadanej wartości natężenia.

Pole magnetyczne toroidu

Na rysunku 30.20a przedstawiono **toroid**, czyli solenoid zwinięty w koło, przypominający kształtem pusty w środku obwarzanek. Jakie pole magnetyczne \vec{B} powstaje w punktach wewnątrz toroidu (czyli w pustym wnętrzu obwarzanka)? Możemy się tego dowiedzieć, stosując prawo Ampère'a i wykorzystując symetrię toroidu.

Z właściwości symetrii wynika, że linie pola \vec{B} tworzą wewnątrz toroidu współśrodkowe okręgi i są skierowane, jak na rysunku 30.20b. Wybierzmy okrąg



Rys. 30.20. a) Toroid, przez który płynie prąd o natężeniu I . b) Poziomy przekrój toroidu. Pole magnetyczne wewnątrz rury w kształcie obwarzanku może być wyznaczone za pomocą prawa Ampère'a i konturu całkowania, pokazanego na rysunku

o promieniu r jako kontur całkowania i przyjmijmy kierunek całkowania zgodny z ruchem wskazówek zegara. Prawo Ampère'a (równanie (30.16)) daje nam:

$$(B)(2\pi r) = \mu_0 I N,$$

gdzie I jest natężeniem prądu w uzwojeniu toroidu, a N — całkową liczbą zwojów (zakładamy, że kierunek prądu jest dodatni dla zwojów objętych konturem całkowania). Stąd otrzymujemy:

$$B = \frac{\mu_0 I N}{2\pi} \frac{1}{r} \quad (\text{toroid}). \quad (30.26)$$

Inaczej niż w solenoidzie, indukcja nie jest stała w przekroju toroidu. Można łatwo wykazać na podstawie prawa Ampère'a, że $B = 0$ w punktach położonych na zewnątrz idealnego toroidu (czyli idealnego solenoidu zwiniętego w koło).

Kierunek wektora indukcji magnetycznej pola wewnętrz toroidu wynika z reguły prawej dłoni. Uchwycić toroid palcami swojej prawej dłoni, zagiętymi w kierunku, w którym płynie prąd w uzwojeniu; twój wyciągnięty kciuk wskaże kierunek wektora indukcji magnetycznej.

Przykład 30.4

Przez solenoid o długości $L = 1,23$ m i o średnicy wewnętrznej $d = 3,55$ cm płynie prąd o natężeniu $I = 5,57$ A. Solenoid składa się z pięciu ciasno nawiniętych warstw, z których każda zawiera 850 zwojów na odcinku L . Ile wynosi indukcja B w środku solenoidu?

ROZWIĄZANIE:

O 1. Zgodnie z równaniem (30.25) wartość indukcji magnetycznej B w środku solenoidu zależy od natężenia prądu I płynącego w uzwojeniu i liczby zwojów n na jednostkę długości.

O 2. B nie zależy od średnicy solenoidu, więc wartość n dla pięciu identycznych warstw jest po prostu pięć razy większa od wartości dla pojedynczej warstwy. Wobec tego z równania (30.25) otrzymujemy:

$$B = \mu_0 I n = (4\pi \cdot 10^{-7} \text{ T} \cdot \text{m/A})(5,57 \text{ A}) \frac{5 \cdot 850 \text{ zwojów}}{1,23 \text{ m}} \\ = 2,42 \cdot 10^{-2} \text{ T} = 24,2 \text{ mT}. \quad (\text{odpowiedź})$$

30.5. Cewka z prądem jako dipol magnetyczny

Dotychczas omówiliśmy pole magnetyczne, wytwarzane przez prąd, płynący w długim prostoliniowym przewodzie, w solenoidzie i w toroidzie. Zwrócimy teraz uwagę na pole, wytworzone przez cewkę, w której płynie prąd. Widzieliśmy w paragrafie 29.9, że taka cewka zachowuje się jak dipol magnetyczny. Jeżeli umieścimy cewkę w zewnętrznym polu magnetycznym o indukcji \vec{B} , to będzie działać na nią moment siły:

$$\vec{M} = \vec{\mu} \times \vec{B}. \quad (30.27)$$

W tym równaniu $\vec{\mu}$ oznacza dipolowy moment magnetyczny cewki, który ma wartość NIS , gdzie N jest liczbą zwojów, I jest natężeniem prądu płynącego w każdym zwoju, a S oznacza pole powierzchni, otoczonej przez każdy zwój.

Przypomnij sobie, że kierunek $\vec{\mu}$ wynika z reguły prawej dłoni: Uchwyć użwojenie cewki w taki sposób, aby palce twojej prawej dłoni wskazywały kierunek prądu; twój wyciągnięty kciuk wskaże kierunek momentu dipolowego $\vec{\mu}$.

Pole magnetyczne cewki

Zajmiemy się teraz inną cechą cewki z prądem jako dipola magnetycznego. Jaki pole magnetyczne wywarza taka cewka w otaczającej ją przestrzeni? Symetria takiego układu jest niewystarczająca, aby skorzystać z prawa Ampère'a. Musimy zatem zastosować prawo Biota–Savarta. Dla ułatwienia rozpatrzmy najpierw cewkę w postaci pojedynczego okrągłego zwoju oraz punkty, znajdujące się na osi symetrii, którą oznaczymy jako oś z . Wykażemy, że wartość indukcji magnetycznej pola w tych punktach jest równa:

$$B(z) = \frac{\mu_0 I R^2}{2(R^2 + z^2)^{3/2}}, \quad (30.28)$$

gdzie R jest promieniem cewki, a z jest odległością danego punktu od środka cewki. Ponadto kierunek wektora indukcji \vec{B} jest taki sam, jak kierunek dipolowego momentu magnetycznego $\vec{\mu}$ cewki.

Dla punktów na osi, położonych daleko od cewki, możemy przyjąć $z \gg R$ w równaniu (30.28). Przy takim przybliżeniu równanie to redukuje się do:

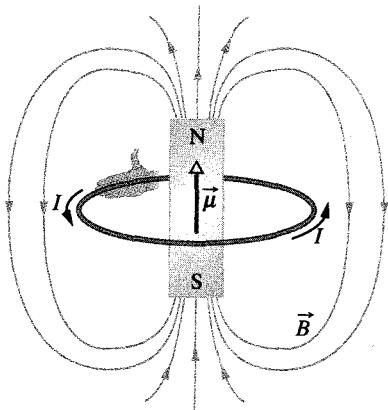
$$B(z) \approx \frac{\mu_0 I R^2}{2z^3}.$$

Pamiętając, że πR^2 jest polem powierzchni S cewki i uogólniając wynik na przypadek cewki o N zwojach, możemy zapisać to równanie w postaci:

$$B(z) = \frac{\mu_0 NIS}{2\pi z^3}.$$

Co więcej, ponieważ wektory \vec{B} i $\vec{\mu}$ mają ten sam kierunek, możemy zapisać to równanie w postaci wektorowej, korzystając z zależności $\mu = NIS$:

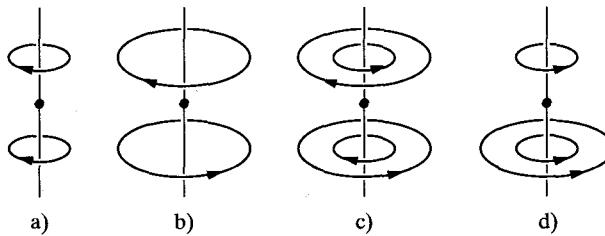
$$\vec{B}(z) = \frac{\mu_0 \vec{\mu}}{2\pi z^3} \quad (\text{cewka z prądem}). \quad (30.29)$$



Rys. 30.21. Pętla z prądem wywarza pole magnetyczne, podobne do pola magnesu sztabkowego, dlatego można skojarzyć z pętlą biegun północny i południowy. Dipolowy moment magnetyczny $\vec{\mu}$ pętli, wyznaczony za pomocą reguły prawej dłoni, jest skierowany od bieguna południowego do północnego, zgodnie z kierunkiem linii pola \vec{B} wewnątrz pętli

Tak więc możemy traktować cewkę z prądem jako dipol magnetyczny w dwojakim sposobie: 1) cewka umieszczona w zewnętrznym polu magnetycznym doznaje działania momentu siły; 2) cewka wywarza swoje własne pole magnetyczne, opisywane równaniem (30.29) dla punktów na osi cewki, położonych dostatecznie daleko. Na rysunku 30.21 przedstawiono pole magnetyczne pojedynczej pętli z prądem. Jedna strona pętli odgrywa rolę bieguna północnego (w kierunku $\vec{\mu}$), a druga — bieguna południowego, co ilustruje magnes, naszkicowany na rysunku.

SPRAWDZIAN 4: Na rysunku przedstawiono cztery układy okrągłych pętli o promieniach r lub $2r$. Pętle mają wspólną pionową oś (prostopadłą do nich) i płyną w nich we wskazanych kierunkach prądy o takich samych natężeniach. Uszereguj układy pod względem wartości indukcji wypadkowego pola magnetycznego w punkcie oznaczonym kropką, leżącym na osi w połowie między pętlami, zaczynając od największej wartości.



Wyprowadzenie wzoru (30.28)

Na rysunku 30.22 przedstawiono w rzucie połowej okrągłą ramkę o promieniu R , w której płynie prąd o natężeniu I . Rozważmy punkt P na osi ramki, leżący w odległości z od jej płaszczyzny i zastosujmy prawo Biota–Savarta do elementu ds ramki, położonego po jej lewej stronie. Wektorowy element długości $d\vec{s}$ jest skierowany prostopadle przed płaszczyznę rysunku. Kąt θ między $d\vec{s}$ a \vec{r} na rysunku 30.22 jest równy 90° . Płaszczyzna, wyznaczona przez te dwa wektory, jest prostopadła do płaszczyzny rysunku i zawiera zarówno $d\vec{s}$, jak i \vec{r} . Z prawa Biota–Savarta (i z reguły prawej dłoni) wynika, że wektor $d\vec{B}$ pola wytwarzanego w punkcie P przez element $d\vec{s}$ jest prostopadły do płaszczyzny zawierającej wektory $d\vec{s}$ i \vec{r} , a więc leży w płaszczyźnie rysunku i jest skierowany prostopadle do \vec{r} , jak pokazano na rysunku 30.22.

Rozłożymy $d\vec{B}$ na dwie składowe: $dB_{||}$, skierowaną wzdłuż osi ramki oraz dB_{\perp} , prostopadłą do osi. Z symetrii wynika, że wektorowa suma wszystkich prostopadłych składowych dB_{\perp} , pochodzących od wszystkich elementów ramki ds , jest równa零. Pozostaje więc tylko składowa osiowa $dB_{||}$ i mamy:

$$B = \int dB_{||}.$$

Dla elementu $d\vec{s}$ na rysunku 30.22 prawo Biota–Savarta mówi, że indukcja magnetyczna w odległości r jest równa:

$$dB = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{Ids \sin 90^\circ}{r^2}.$$

Wiemy również, że:

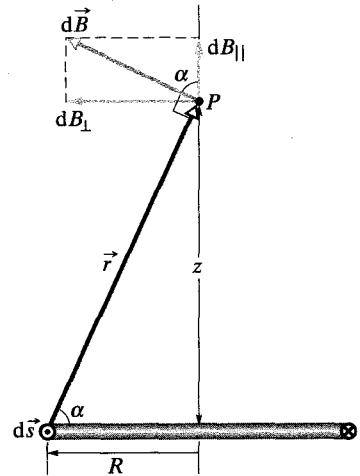
$$dB_{||} = dB \cos \alpha.$$

Łącząc te dwie zależności, otrzymujemy:

$$dB_{||} = \frac{\mu_0 I \cos \alpha ds}{4\pi r^2}. \quad (30.30)$$

Na rysunku 30.22 widać, że r i α nie są niezależne, ale są ze sobą związane. Spróbujmy wyrazić obie te wielkości w funkcji zmiennej z , czyli odległości między punktem P a środkiem ramki. Otrzymujemy następujące zależności:

$$r = \sqrt{R^2 + z^2} \quad (30.31)$$



Rys. 30.22. Ramka o promieniu R , w której płynie prąd. Płaszczyzna ramki jest prostopadła do płaszczyzny rysunku. Pokazana jest tylko połowa ramki, położona z tyłu. Stosujemy prawo Biota–Savarta do wyznaczenia indukcji w punkcie P na osi ramki

oraz:

$$\cos \alpha = \frac{R}{r} = \frac{R}{\sqrt{R^2 + z^2}}. \quad (30.32)$$

Podstawiając wyrażenia (30.31) i (30.32) do równania (30.30), otrzymujemy:

$$dB_{\parallel} = \frac{\mu_0 I R}{4\pi(R^2 + z^2)^{3/2}} ds.$$

Zauważ, że I , R i z przyjmują te same wartości dla wszystkich elementów ds wokół ramki, więc całkując to wyrażenie, otrzymamy:

$$B = \int dB_{\parallel} = \frac{\mu_0 I R}{4\pi(R^2 + z^2)^{3/2}} \int ds,$$

czyli biorąc pod uwagę, że $\int ds$ jest po prostu obwodem $2\pi R$ ramki:

$$B(z) = \frac{\mu_0 I R^2}{2(R^2 + z^2)^{3/2}}.$$

Jest to właśnie równanie (30.28), które mieliśmy wyprowadzić.

Podsumowanie

Prawo Biota–Savarta Indukcja magnetyczna pola wytworzonego przez prąd płynący w przewodniku może być wyznaczona z prawa Biota–Savarta. A z tego prawa wynika, że przyczynek $d\vec{B}$ do indukcji pola, wytworzonego przez element prądu $I d\vec{s}$ w punkcie P , odległym o r od tego elementu jest równy:

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I d\vec{s} \times \vec{r}}{r^3} \quad (\text{prawo Biota–Savarta}). \quad (30.5)$$

W tym równaniu \vec{r} jest wektorem, skierowanym od elementu prądu do punktu P . Wielkość μ_0 , zwana przenikalnością magnetyczną próżni (stałą magnetyczną) jest równa $4\pi \cdot 10^{-7} \text{ T} \cdot \text{m/A} \approx 1,26 \cdot 10^{-6} \text{ T} \cdot \text{m/A}$.

Pole magnetyczne długiego prostoliniowego przewodu Zgodnie z prawem Biota–Savarta, dla długiego prostoliniowego przewodu, w którym płynie prąd o natężeniu I , wartość indukcji magnetycznej w odległości R od przewodu jest równa

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi R} \quad (\text{długi przewód prostoliniowy}). \quad (30.6)$$

Pole magnetyczne przewodu w kształcie łuku okręgu Wartość indukcji magnetycznej w środku łuku okręgu o promieniu R i kącie środkowym ϕ (w radianach) jest równa:

$$B = \frac{\mu_0 I \phi}{4\pi R} \quad (\text{w środku łuku okręgu}), \quad (30.11)$$

gdzie I jest natężeniem prądu, płynącego wzdłuż łuku.

Sila działająca między równoległymi przewodami, w których płyną prądy Równolegle przewody, w których płyną prądy w tym

samym kierunku, przyciągają się, a równoległe przewody, w których płyną prądy w kierunkach przeciwnych, się odpadają. Wartość siły działającej na odcinek o długości L któregośkolwiek z dwóch przewodów jest równa:

$$F_{ba} = I_b L B_a \sin 90^\circ = \frac{\mu_0 L I_a I_b}{2\pi d}, \quad (30.15)$$

gdzie d jest odlegością przewodów, a I_a i I_b oznaczają natężenia prądów w przewodach.

Prawo Ampère'a Prawo Ampère'a stwierdza, że:

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = \mu_0 I_p \quad (\text{prawo Ampère'a}). \quad (30.16)$$

Całka krzywoliniowa w tym równaniu jest obliczana wzdłuż zamkniętego konturu. Natężenie prądu I_p jest całkowitym natężeniem prądu przecinającego powierzchnię ograniczoną przez kontur całkowania. Dla pewnych rozkładów prądów, łatwiej jest zastosować równanie (30.16) niż (30.5), aby obliczyć indukcję magnetyczną pola wytworzonego przez prąd.

Pola solenoidu i toroidu Wewnątrz długiego solenoidu, przez który płynie prąd o natężeniu I , wartość B indukcji magnetycznej w punktach oddalonych od końców solenoidu, jest równa:

$$B = \mu_0 I n \quad (\text{solenoid idealny}), \quad (30.25)$$

gdzie n jest liczbą zwojów na jednostkę długości. W punkcie leżącym wewnątrz toroidu wartość indukcji B jest równa:

$$B = \frac{\mu_0 I N}{2\pi} \frac{1}{r} \quad (\text{toroid}), \quad (30.26)$$

gdzie r jest odległością danego punktu od środka toroidu.

Pole dipola magnetycznego Pole magnetyczne, wytworzone przez cewkę z prądem (która jest w istocie *dipolem magnetycznym*) w punkcie P , położonym na osi cewki w odległości z od

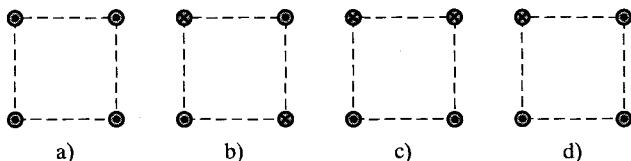
płaszczyzny ramki jest skierowane równolegle do osi i dane wyrażeniem:

$$\vec{B}(z) = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{\vec{\mu}}{z^3}, \quad (30.29)$$

gdzie $\vec{\mu}$ jest dipolowym momentem magnetycznym cewki. To równanie jest słusze tylko wtedy, gdy odległość z jest znacznie większa od wymiarów cewki.

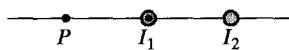
Pytania

1. Na rysunku 30.23 przedstawiono cztery układy długich równoległych przewodów, w których płyną prądy o takim samym natężeniu, za lub przed płaszczyznę rysunku. Przewody znajdują się w wierzchołkach identycznych kwadratów. Uszereguj układy pod względem wartości indukcji magnetycznej wypadkowego pola w środku kwadratu, zaczynając od największej wartości.



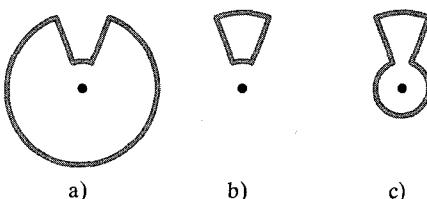
Rys. 30.23. Pytanie 1

2. Na rysunku 30.24 przedstawiono przekrój poprzeczny dwóch prostoliniowych przewodów. W przewodzie po lewej stronie płynie prąd o natężeniu I_1 , skierowany przed płaszczyznę rysunku. Jeżeli wypadkowe pole, wytworzone przez obydwa prądy ma być równe zeru w punkcie P , to: a) czy prąd o natężeniu I_2 w przewodzie po prawej stronie powinien być skierowany za, czy przed płaszczyznę rysunku, b) czy natężenie prądu I_2 powinno być większe, mniejsze, czy równe natężeniu prądu I_1 ?



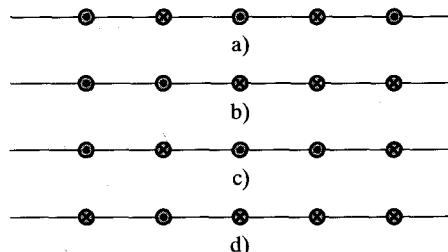
Rys. 30.24. Pytanie 2

3. Na rysunku 30.25 przedstawiono trzy obwody, z których każdy składa się z dwóch współśrodkowych łuków, jednego o promieniu r , a drugiego o większym promieniu R , oraz z dwóch odcinków radialnych. W każdym obwodzie płynie prąd o takim samym natężeniu, a odcinki radialne tworzą taki sam kąt. Uszereguj obwody pod względem wartości indukcji wypadkowego pola magnetycznego w środku, zaczynając od największej wartości.



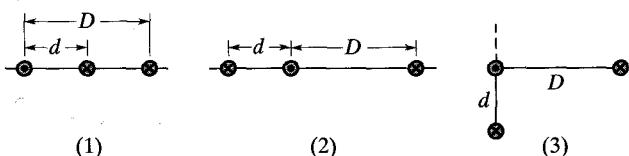
Rys. 30.25. Pytanie 3

4. Na rysunku 30.26 przedstawiono cztery układy długich, równoległych i równoodległych przewodów, w których płyną prądy o takich samych natężeniach, skierowane za lub przed płaszczyznę rysunku. Uszereguj układy pod względem wartości wypadkowej siły, działającej na przewód środkowy, wywołanej przepływem prądu w pozostałych przewodach, zaczynając od największej wartości.



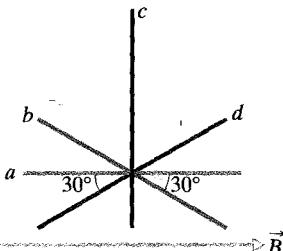
Rys. 30.26. Pytanie 4

5. Na rysunku 30.27 przedstawiono trzy układy trzech długich prostoliniowych przewodów, w których płyną prądy o takich samych natężeniach, skierowane za lub przed płaszczyznę rysunku. a) Uszereguj układy pod względem wartości wypadkowej siły, działającej na przewód z prądem, płynącym przed płaszczyznę rysunku, wywołanej przepływem prądu w pozostałych przewodach, zaczynając od największej wartości. b) Czy kąt między kierunkiem siły, działającą na ten przewód w układzie 3, a linią przerywaną jest równy, mniejszy, czy większy od 45° ?



Rys. 30.27. Pytanie 5

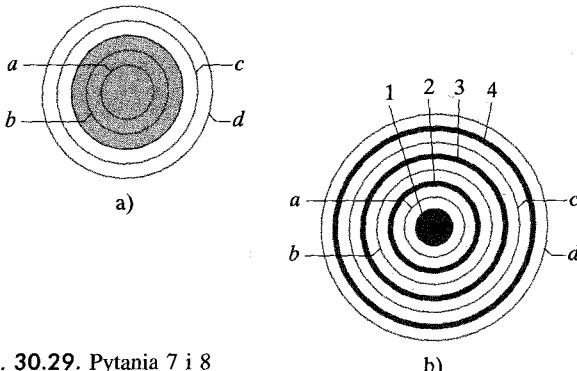
6. Na rysunku 30.28 przedstawiono jednorodne pole magnetyczne o indukcji \vec{B} i cztery prostoliniowe drogi całkowania o różnych długościach. Uszereguj drogi pod względem wartości całki



Rys. 30.28. Pytanie 6

$\int \vec{B} \cdot d\vec{s}$, obliczonej wzdłuż tych dróg, zaczynając od największej wartości.

7. Na rysunku 30.29a przedstawiono cztery kontury całkowania w kształcie okręgów, ułożonych współśrodkowo z przewodem, w którym prąd płynie przed płaszczyznę rysunku. Prąd jest rozłożony równomiernie w przekroju poprzecznym przewodu. Uszereguj kontury pod względem wartości całki $\int \vec{B} \cdot d\vec{s}$, obliczonej wzdłuż każdego konturu, zaczynając od największej wartości.

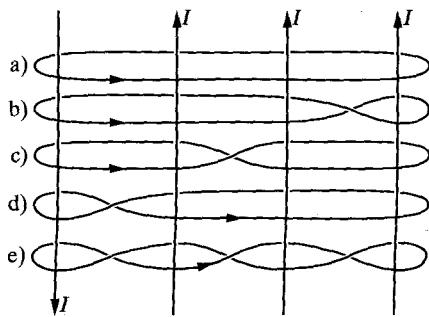


Rys. 30.29. Pytania 7 i 8

8. Na rysunku 30.29b przedstawiono cztery kontury całkowania w kształcie okręgów (zaznaczone na czerwono) i cztery długie walcowe przewody (zaznaczone na niebiesko). Wszystkie kontury i przewody są współśrodkowe. Trzy z przewodów mają kształt walców pustych w środku, a przewód położony w środku jest pełnym walcem. Prądy w przewodach mają następujące natężenia

i kierunki: 4 A przed płaszczyznę rysunku (1), 9 A za płaszczyznę rysunku (2), 5 A przed płaszczyznę rysunku (3), 3 A za płaszczyznę rysunku (4). Uszereguj kontury całkowania pod względem wartości całki $\int \vec{B} \cdot d\vec{s}$, obliczonej wzdłuż każdego konturu, zaczynając od największej wartości.

9. Na rysunku 30.30 przedstawiono cztery przewody z prądem o takich samych natężeniach I oraz pięć zamkniętych konturów, obejmujących te przewody. Uszereguj kontury pod względem wartości całki $\int \vec{B} \cdot d\vec{s}$, obliczonej we wskazanych kierunkach, zaczynając od największej (dodatniej), a kończąc na najmniejszej (ujemnej) wartości całki.



Rys. 30.30. Pytanie 9

10. W tabeli podano liczbę zwojów n na jednostkę długości oraz natężenie prądu I w sześciu idealnych solenoidach o różnych promieniach. Chciałbyś ustawić kilka z nich współśrodkowo w taki sposób, aby wypadkowy wektor indukcji magnetycznej wzdłuż osi był równy零. Czy można to uzyskać za pomocą a) dwóch, b) trzech, c) czterech, d) pięciu solenoidów? Jeżeli tak, to wymień solenoindy, których trzeba użyć i wskaż kierunki prądów.

| Solenoid: | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|-----------|---|---|---|---|----|---|
| $n:$ | 5 | 4 | 3 | 2 | 10 | 8 |
| $I:$ | 5 | 3 | 7 | 6 | 2 | 3 |

Zadania

www Rozwiązań jest dostępne na stronie internetowej podręcznika: <http://www.wiley.com/college/hrw>

ikw Rozwiązań jest dostępne w postaci interaktywnej, wykorzystującej oprogramowanie Interactive Learning Ware (na tej samej stronie)

30.1. Obliczanie indukcji magnetycznej pola wywołanego przepływem prądu

1. Geodeta używa kompasu w miejscu znajdującym się 6,1 m poniżej linii energetycznej, w której płynie prąd stały o natężeniu

100 A. a) Jakie pole magnetyczne wytwarza linia energetyczna w miejscu, w którym znajduje się kompas? b) Czy to pole będzie w sposób istotny zakłócało wskazania kompasu? Pozioma składowa indukcji magnetycznej ziemskiego pola w tym miejscu jest równa $20 \mu T$.

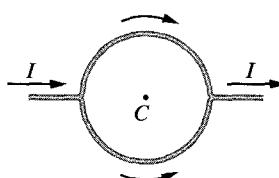
2. Działo elektronowe w tradycyjnej lамpie kineskopowej wysyła w kierunku ekranu elektrony o energii kinetycznej 25 keV , tworzące wiązkę o przekroju kołowym i średnicy $0,22 \text{ mm}$. W każdej sekundzie do ekranu dociera $5,6 \cdot 10^{14}$ elektronów. Oblicz indukcję magnetyczną pola, wytwarzanego przez wiązkę w punkcie oddalonym o $1,5 \text{ mm}$ od jej osi.

3. W pewnym miejscu na Filipinach ziemskie pole magnetyczne o indukcji $39 \mu\text{T}$ jest poziome i skierowane na północ. Przypuśćmy, że wypadkowa indukcja pola jest równa zeru dokładnie 8 cm nad długim, prostoliniowym, poziomym przewodem, w którym płynie prąd stały. Wyznacz: a) natężenie, b) kierunek prądu.

4. Długi przewód, w którym płynie prąd o natężeniu 100 A, jest umieszczony w zewnętrznym, jednorodnym polu magnetycznym o indukcji 5 mT. Przewód jest ułożony prostopadle do kierunku linii tego pola. Wyznacz położenie punktów, w których wypadkowa indukcja magnetyczna jest równa zeru.

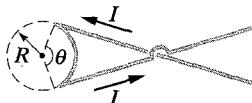
5. Dodatnio naładowana cząstka o ładunku q znajduje się w odległości d od długiego prostoliniowego przewodu, w którym płynie prąd o natężeniu I . Cząstka porusza się prostopadle do przewodu z prędkością v . Jaki jest kierunek i wartość siły działającej na cząstkę, jeżeli: a) porusza się ona w kierunku przewodu, b) odala się od przewodu?

6. Prosty przewód, w którym płynie prąd o natężeniu I , rozgałęzia się na dwa takie same półokręgi, jak pokazano na rysunku 30.31. Ile wynosi indukcja magnetyczna w środku C utworzonej w ten sposób pętli?



Rys. 30.31. Zadanie 6

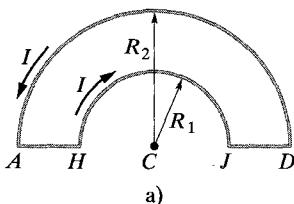
7. Przewód, w którym płynie prąd o natężeniu I , jest ułożony, jak na rysunku 30.32. Dwie półproste, styczne do tego samego okręgu, są połączone łukiem o kącie środkowym θ . Wszystkie elementy obwodu leżą w jednej płaszczyźnie. Jaka musi być wartość kąta θ , aby indukcja B w środku okręgu była równa零?



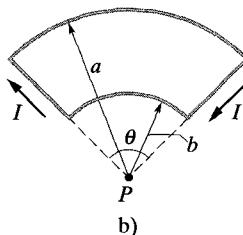
Rys. 30.32. Zadanie 7

8. Zastosuj prawo Biota-Savarta do obliczenia indukcji magnetycznej \vec{B} w punkcie C , będącym wspólnym środkiem półkolistych łuków AD i HJ , pokazanych na rysunku 30.33a. Te dwa łuki, o promieniach równych odpowiednio R_2 i R_1 , tworzą część obwodu $A H J D A$, w którym płynie prąd o natężeniu I .

9. Na rysunku 30.33b zakrzywione elementy obwodu są łukami okręgów o promieniach a i b , o wspólnym środku w punkcie P .

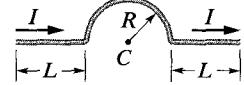


Rys. 30.33. Zadania 8 i 9



Proste elementy są ułożone wzdłuż promieni tych okręgów. Oblicz wartość indukcji magnetycznej \vec{B} pola w punkcie P , przyjmując, że w obwodzie płynie prąd o natężeniu I .

10. W przewodzie, pokazanym na rysunku 30.34 płynie prąd o natężeniu I . Oblicz indukcję magnetyczną \vec{B} pola w środku C półokręgu, wytworzonego przez: a) każdy odcinek prosty o długości L , b) półokrąg o promieniu R , c) cały przewód.

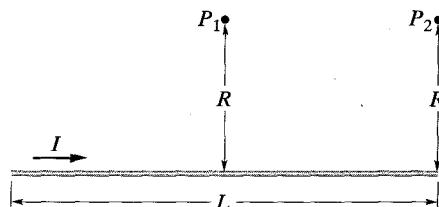


Rys. 30.34. Zadanie 10

11. W prostym przewodzie o długości L , pokazanym na rysunku 30.35, płynie prąd o natężeniu I . Wykaż, że wartość indukcji magnetycznej \vec{B} pola, wytworzonego przez ten przewód w punkcie P_1 , położonym na symetrycznej odcinku w odległości R , wynosi:

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi R} \frac{L}{(L^2 + 4R^2)^{1/2}}.$$

Wykaż, że to wyrażenie dla B redukuje się do wyniku oczekiwaneego dla $L \rightarrow \infty$.



Rys. 30.35. Zadania 11 i 13

12. W przewodzie w kształcie kwadratowej ramki o boku a płynie prąd o natężeniu I . Korzystając z zadania 11, wykaż, że wartość indukcji magnetycznej pola, wytworzonego w środku ramki jest równa:

$$B = \frac{2\sqrt{2}\mu_0 I}{\pi a}.$$

13. W prostym przewodzie na rysunku 30.35 płynie prąd o natężeniu I . Wykaż, że:

$$B = \frac{\mu_0 I}{4\pi R} \frac{L}{(L^2 + R^2)^{1/2}}.$$

jest wartością indukcji magnetycznej \vec{B} pola, wytworzonego przez ten przewód w zaznaczonym na rysunku punkcie P_2 .

14. Korzystając z zadania 11, wykaż, że wartość indukcji magnetycznej pola, wytworzonego w środku prostokątnej ramki o długości L i szerokości W , w której płynie prąd o natężeniu I , wynosi:

$$B = \frac{2\mu_0 I}{\pi} \frac{(L^2 + W^2)^{1/2}}{LW}.$$

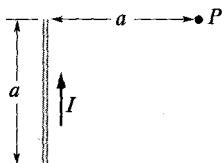
15. W przewodzie w kształcie kwadratowej ramki o boku a płynie prąd o natężeniu I . Korzystając z zadania 11 wykaż, że wartość in-

dukci magnetycznej w punkcie położonym na osi symetrii ramki prostopadłej do jej płaszczyzny, w odległości x od tej płaszczyzny, wynosi:

$$B(x) = \frac{4\mu_0 I a^2}{\pi(4x^2 + a^2)(4x^2 + 2a^2)^{1/2}}.$$

Wykaż, że wynik ten jest zgodny z wynikiem zadania 12.

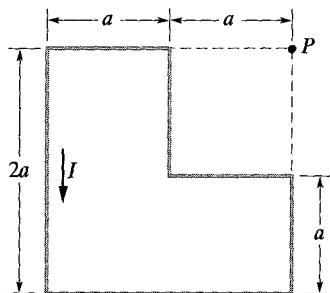
16. W prostym odcinku przewodu długości a , pokazanym na rysunku 30.36, płynie prąd o natężeniu I . Wykaż, że wartość indukcji magnetycznej pola, wytworzonego przez prąd w punkcie P jest równa $B = \sqrt{2}\mu_0 I / 8\pi a$.



Rys. 30.36. Zadanie 16

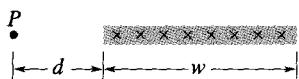
17. Z dwóch przewodów takiej samej długości L utworzono okrąg i kwadrat. W każdym przewodzie płynie prąd o takim samym natężeniu I . Wykaż, że indukcja magnetyczna w środku kwadratu jest większa od indukcji magnetycznej w środku okręgu. (Patrz zadanie 12).

18. Wyznacz indukcję magnetyczną \vec{B} w punkcie P na rysunku 30.37. (Patrz zadanie 16).



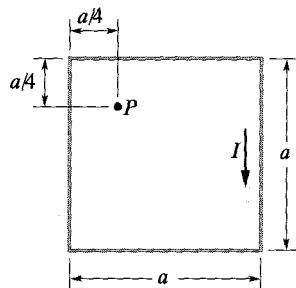
Rys. 30.37. Zadanie 18

19. Na rysunku 30.38 przedstawiono przekrój długiej cienkiej taśmy szerokości w , w której płynie równomiernie rozłożony prąd o całkowitym natężeniu I , skierowany za płaszczyznę rysunku. Oblicz wartość i kierunek indukcji magnetycznej \vec{B} w punkcie P , położonym w płaszczyźnie taśmy, w odległości d od jej brzegu. (Wskazówka: Wyobraź sobie, że taśma składa się z wielu długich cienkich drutów, ułożonych równolegle). *ilw.*



Rys. 30.38. Zadanie 19

20. Oblicz indukcję magnetyczną \vec{B} w punkcie P na rysunku 30.39 dla $I = 10$ A i $a = 8$ cm. (Patrz zadania 13 i 16)



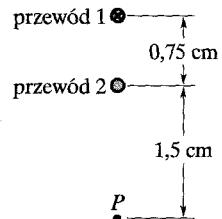
Rys. 30.39. Zadanie 20

30.2. Siły działające między dwoma równoległymi przewodami z prądem

21. Dwa długie równoległe przewody znajdują się w odległości 8 cm od siebie i płyną w nich prądy o takich samych natężeniach. Jakie muszą być wartości tych natężeń, aby indukcja magnetyczna pola w połowie odległości między przewodami miała wartość 300 μ T? Podaj odpowiedź dla prądów płynących: a) w tym samym kierunku, b) w przeciwnych kierunkach.

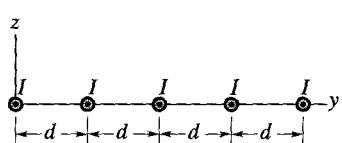
22. W dwóch długich równoległych przewodach, znajdujących się w odległości d od siebie, płyną w tym samym kierunku prądy o natężeniach I i $3I$. Znajdź punkt lub punkty, w których wytworzane przez nie pola magnetyczne się znoszą.

23. Dwa długie, prostoliniowe, równoległe przewody, znajdujące się w odległości 0,75 cm od siebie, są prostopadłe do płaszczyzny rysunku 30.40. W przewodzie 1 płynie prąd o natężeniu 6,5 A, skierowany za płaszczyznę rysunku. Wyznacz natężenie i kierunek prądu w przewodzie 2, tak aby wypadkowa indukcja magnetyczna pola w punkcie P była równa零.



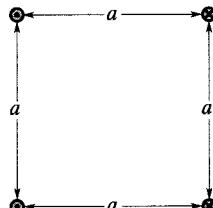
Rys. 30.40. Zadanie 23

24. Na rysunku 30.41 przedstawiono pięć długich równoległych przewodów, leżących w płaszczyźnie xy . W każdym przewodzie płynie prąd o natężeniu $I = 3$ A w dodatnim kierunku osi x . Odległość między sąsiednimi przewodami jest równa $d = 8$ cm. Używając wektorów jednostkowych, wyznacz siłę magnetyczną na jednostkę długości, wywieraną na każdy z tych pięciu przewodów przez pozostałe.



Rys. 30.41. Zadanie 24

25. Cztery długie przewody miedziane są ułożone równolegle do siebie, w ten sposób, że w przekroju poprzecznym wyznaczają wierzchołki kwadratu o boku $a = 20$ cm. W każdym przewodzie płynie prąd o natężeniu 20 A, w kierunku pokazanym na rysunku 30.42. Jaka jest wartość i kierunek wektora \vec{B} w środku kwadratu?



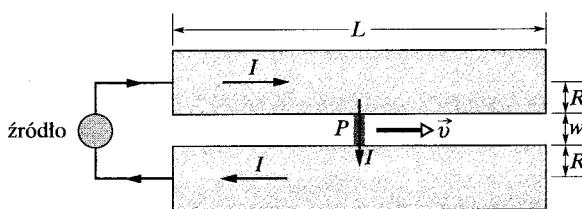
Rys. 30.42. Zadania 25, 26 i 27

26. Cztery płynące równolegle prądy o natężeniu I przecinają płaszczyznę w wierzchołkach kwadratu o boku a , jak na rysunku 30.42, przy czym wszystkie są skierowane przed płaszczyznę rysunku. Wyznacz wartość i kierunek siły na jednostkę długości, działającej na każdy przewód.

27. Wyznacz wartość i kierunek siły na jednostkę długości, działającej na lewy dolny przewód na rysunku 30.42, jeżeli prądy płyną w kierunkach wskazanych na tym rysunku. Natężenia prądów są równe I .

28. Na rysunku 30.43 przedstawiono schemat działa szynowego. Pocisk P znajduje się między dwiema szerokimi szynami o kołowym przekroju poprzecznym. Prąd ze źródła płynie przez szyny i przewodzący pocisk (bezpiecznik nie jest używany). a) Niech w oznacza odległość między szynami, R — promień szyny, a I — natężenie prądu. Wykaż, że siła działająca na pocisk jest skierowana wzdłuż szyn w prawo i jest dana przybliżonym wzorem:

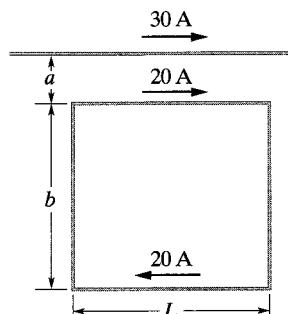
$$F = \frac{I^2 \mu_0}{2\pi} \ln \frac{w+R}{R}.$$



Rys. 30.43. Zadanie 28

b) Załóż, że początkowo pocisk spoczywa w lewym końcu szyn, i wyznacz prędkość v , z jaką jest wystrzeliwany po prawej stronie. Przyjmij, że $I = 450$ kA, $w = 12$ mm, $R = 6,7$ cm, $L = 4$ m, a masa pocisku jest równa $m = 10$ g.

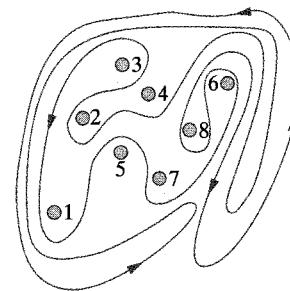
29. W długim prostym przewodzie na rysunku 30.44 płynie prąd o natężeniu 30 A, a w prostokątnej ramce prąd o natężeniu 20 A. Oblicz wypadkową siłę, działającą na ramkę. Przyjmij $a = 1$ cm, $b = 8$ cm i $L = 30$ cm.



Rys. 30.44. Zadanie 29

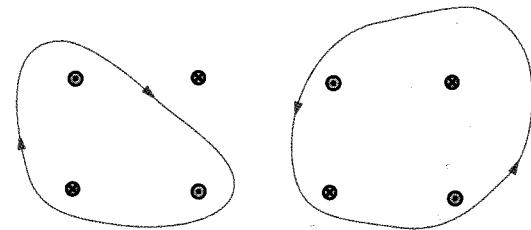
30.3. Prawo Ampère'a

30. Osiem przewodów przecina prostopadle płaszczyznę rysunku w punktach, pokazanych na rysunku 30.45. W przewodzie oznaczonym liczbą całkowitą k ($k = 1, 2, \dots, 8$) płynie prąd o natężeniu kI . W przewodach, oznaczonych nieparzystą liczbą k prąd płynie przed płaszczyznę rysunku, natomiast w przewodach, oznaczonych parzystą liczbą k prąd płynie za płaszczyznę rysunku. Oblicz wartość całki $\oint \vec{B} \cdot d\vec{s}$ wzdłuż zamkniętego konturu, w kierunku wskazanym na rysunku.



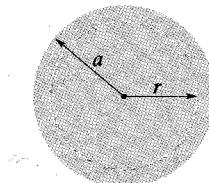
Rys. 30.45. Zadanie 30

31. W każdym z ośmiu przewodów na rysunku 30.46 płynie prąd o natężeniu 2 A, skierowany za lub przed płaszczyznę rysunku. Zaznaczono dwa kontury całkowania dla całki krzywoliniowej $\oint \vec{B} \cdot d\vec{s}$. Jaka jest wartość całki dla konturu: a) po lewej stronie, b) po prawej stronie?



Rys. 30.46. Zadanie 31

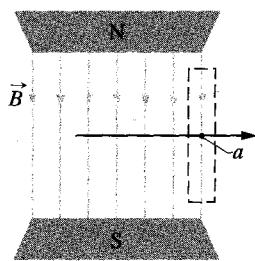
32. Na rysunku 30.47 przedstawiono przekrój poprzeczny długiego cylindrycznego przewodnika o promieniu a , w którym płynie równomierne rozłożony prąd o natężeniu I . Przyjmij $a = 2$ cm, $I = 100$ A i sporządź wykres $B(r)$ w zakresie $0 < r < 6$ cm.



Rys. 30.47. Zadanie 32

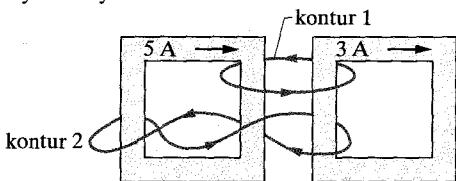
33. Wykaż, że wartość indukcji magnetycznej \vec{B} pola jednorodnego nie może nagle spaść do zera (jak mógłby na to wskazywać brak linii na prawo od punktu a na rysunku 30.48), gdy poruszamy się prostopadle do wektora \vec{B} , np. wzdłuż poziomej strzałki na rysunku. (Wskazówka: Zastosuj prawo Ampère'a do pro-

stokątnego konturu, zaznaczonego linią przerywaną). W rzeczywistych magnesach zawsze występuje pole rozproszone, co oznacza, że indukcja \vec{B} zmiera do zera stopniowo. Zmodyfikuj przebieg linii pola magnetycznego, tak aby rysunek przedstawiał bardziej realną sytuację.



Rys. 30.48. Zadanie 33

34. W dwóch kwadratowych przewodzących ramkach płyną prądy o natężeniach 5 A i 3 A, jak pokazano na rysunku 30.49. Jaka jest wartość całki $\oint \vec{B} \cdot d\vec{s}$ dla każdego z dwóch zamkniętych konturów zaznaczonych na rysunku?



Rys. 30.49. Zadanie 34

35. Gęstość prądu wewnętrz długiego, pełnego, walcowego przewodu o promieniu a jest skierowana wzdłuż osi i zmienia się liniowo wraz z odległością r od osi, zgodnie z zależnością $J = J_0 r/a$. Wyznacz wartość indukcji magnetycznej pola wewnętrz przewodu.

36. W długim prostym przewodzie o promieniu 3 mm płynie prąd stały, rozłożony równomiernie w przekroju prostopadłym do osi przewodu. Jeżeli gęstość prądu wynosi 100 A/m^2 , to jaka jest wartość indukcji magnetycznej pola w odległości: a) 2 mm od osi, b) 4 mm od osi?

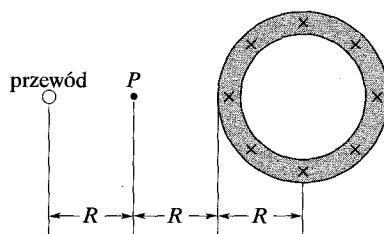
37. Na rysunku 30.50 przedstawiono przekrój długiego walcowego przewodnika o promieniu a , zawierającego długie walcowe wydrążenie o promieniu b . Osie przewodnika i wydrążenia są równoległe i znajdują się w odległości d od siebie. Prąd o natężeniu I jest równomiernie rozłożony na zaciemnionej powierzchni. a) Zastosuj zasadę superpozycji, aby wykazać, że wartość indukcji magnetycznej w środku wydrążenia jest równa:

$$B = \frac{\mu_0 I d}{2\pi(a^2 - b^2)}.$$

b) Omów dwa przypadki szczególne $b = 0$ i $d = 0$. c) Zastosuj prawo Ampèrea, aby wykazać, że pole magnetyczne w wydrążeniu jest jednorodne. (Wskazówka: Potraktuj walcowe wydrążenie

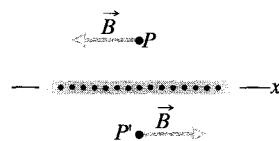
jako wynik nałożenia pełnego walca (bez wydrążenia), w którym płynie prąd w jednym kierunku, i walca o promieniu b , w którym płynie prąd w przeciwnym kierunku, przy czym gęstość prądu w obydwu walcach jest taka sama).

38. W długiej okrągłej rurze o zewnętrznym promieniu równym R płynie równomiernie rozłożony prąd o natężeniu I , skierowany za płaszczyznę rysunku 30.51. Przewód biegnie równolegle do rury w odległości $3R$, licząc od środka rury do środka przewodu. Wyznacz wartość i kierunek prądu płynącego w przewodzie, tak aby indukcja magnetyczna wypadkowego pola w punkcie P miała taką samą wartość, jak wypadkowego pola magnetycznego w środku rury, ale była przeciwnie skierowana.



Rys. 30.51. Zadanie 38

39. Na rysunku 30.52 przedstawiono przekrój przez nieskończoną przewodzącą płytę, w której płynie prąd o gęstości liniowej λ , mierzonej w kierunku osi x . Prąd płynie prostopadle przed płaszczyznę rysunku. a) Zastosuj prawo Biota-Savarta i symetrię, aby wykazać, że dla wszystkich punktów P , znajdujących się nad płytą i dla wszystkich punktów P' pod nią, wektory indukcji \vec{B} są równoległe do płyty i skierowane, jak na rysunku. b) Zastosuj prawo Ampèrea, aby wykazać, że $B = \frac{1}{2}\mu_0\lambda$ we wszystkich punktach P i P' .



Rys. 30.52. Zadania 39 i 44

30.4. Solenoidy i toroidy

40. W solenoidzie o długości 95 cm i promieniu 2 cm, składającym się z 1200 zwojów, płynie prąd o natężeniu 3,6 A. Oblicz wartość indukcji magnetycznej wewnętrz solenoidu.

41. W solenoidzie o 200 zwojach, mającym długość 25 cm i średnicę 10 cm, płynie prąd o natężeniu 0,3 A. Oblicz wartość indukcji magnetycznej \vec{B} wewnętrz solenoidu.

42. W solenoidzie o długości 1,3 m i średnicy 2,6 cm płynie prąd o natężeniu 18 A. Wartość indukcji magnetycznej wewnętrz solenoidu jest równa 23 mT. Oblicz długość drutu, z którego nawinięty jest solenoid.

43. „Toroid” o przekroju w kształcie kwadratu o boku 5 cm i promieniu wewnętrznym 15 cm ma 500 zwojów, przez które płynie prąd o natężeniu 0,8 A. („Toroid” powstał z „kwadratowego solenoidu” — a nie okrągłego, jak na rysunku 30.16 — zgiętego w kształcie obwarzanki). Ile wynosi indukcja magnetyczna pola wewnętrz „toroidu” w odległości od środka równej: a) promieniowi wewnętrznemu, b) promieniowi zewnętrznemu?

44. Potraktuj idealny solenoid jako cienki walcowy przewodnik, w którym prąd przypadający na jednostkę długości, mierzoną równolegle do osi walca, ma gęstość liniową λ . a) Stosując takie przybliżenie, wykaż, że wartość indukcji magnetycznej wewnętrz idealnego solenoidu może być zapisana jako $B = \mu_0\lambda$. Wartość ta jest równa zmianie indukcji \vec{B} , jaką obserwujemy, przechodząc przez ściankę solenoidu od wnętrza na zewnątrz. b) Wykaż, że taka sama zmiana występuje, gdy przechodzimy przez nieskończoną płaską płytę przewodzącą prąd, jak na rysunku 30.52 (patrz zadanie 39). Czydziwi cię taka zgodność?

45. W paragrafie 30.4 wykazaliśmy, że indukcja magnetyczna pola wewnętrz toroidu w dowolnej odległości r od jego środka jest równa:

$$B = \frac{\mu_0 IN}{2\pi r}.$$

Wykaż, że w miarę poruszania się od dowolnego punktu, znajdującego się tuż przy ścianie wewnętrz toroidu, do punktu tuż przy ścianie na zewnątrz, napotkasz zmianę indukcji pola \vec{B} równą dokładnie $\mu_0\lambda$. Wielkość λ oznacza tutaj gęstość liniową prądu, mierzoną wzdłuż obwodu okręgu o promieniu r wewnętrz toroidu. Porównaj ten wynik z podobnym wynikiem, otrzymanym w zadaniu 44. Czy taka zgodność nie jest zaskakująca?

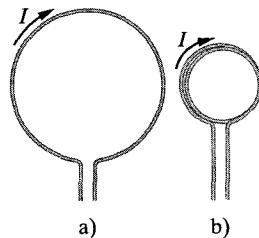
46. Długi solenoid ma 100 zwojów/cm i płynie w nim prąd o natężeniu I . Elektron porusza się wewnętrz solenoidu po okręgu o promieniu 2,3 cm w płaszczyźnie prostopadłej do osi solenoidu. Prędkość elektronu wynosi 0,046c (c — prędkość światła). Oblicz natężenie prądu I w solenoidzie.

47. W długim solenoidzie o 10 zwojach/cm i promieniu 7 cm płynie prąd o natężeniu 20 mA, natomiast w prostym przewodzie, ułożonym wzdłuż osi solenoidu płynie prąd o natężeniu 6 A. W jakiej odległości od osi linie wypadkowego pola magnetycznego tworzą kąt 45° z kierunkiem osi? b) Jaka jest tam wartość indukcji magnetycznej pola?

30.5. Cewka z prądem jako dipol magnetyczny

48. Na rysunku 30.53a przedstawiono odcinek przewodu, w którym płynie prąd o natężeniu I . Przewód został wygięty w taki sposób, że tworzy okrągłą cewkę o jednym zwoju. Na rysunku 30.53b taki sam odcinek przewodu został zagięty ciasniej, tworząc

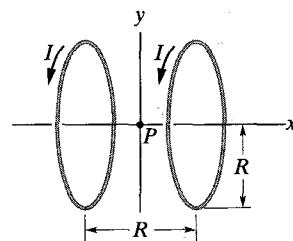
cewkę o dwóch zwojach i o promieniu dwa razy mniejszym. a) Jeżeli B_a i B_b są wartościami indukcji magnetycznej w środku każdej z cewek, to jaki jest stosunek B_b/B_a ? b) Jaki jest stosunek momentów dipolowych μ_b/μ_a obydwu cewek?



Rys. 30.53. Zadanie 48

49. Jaki jest dipolowy moment magnetyczny $\vec{\mu}$ solenoidu, opisanego w zadaniu 41?

50. Na rysunku 30.54 przedstawiono układ zwany cewkami Helmholtza. Układ ten składa się z dwóch cewek w kształcie okręgów o promieniu R , umieszczonych współosiowo w odległości R od siebie. Każda z cewek ma N zwojów i płyną w nich w tych samych kierunkach prądy o takim samym natężeniu I . Oblicz wartość wypadkowej indukcji magnetycznej w punkcie P , położonym w połowie odległości między cewkami.



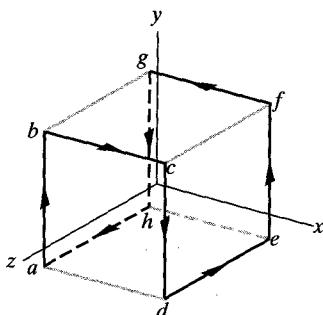
Rys. 30.54. Zadania 50, 53 i 55

51. Student zbudował krótki elektromagnes, nawijając 300 zwojów drutu na drewniany walec o średnicy $d = 5$ cm. Po dołączeniu źródła w uzwojeniu płynie prąd o natężeniu 4 A. a) Jaki jest moment magnetyczny tego urządzenia? b) W jakiej odległości $z \gg d$, mierzonej wzdłuż osi, indukcja magnetyczna pola tego dipola będzie miała wartość $5 \mu T$ (czyli w przybliżeniu jedną dziesiątą indukcji magnetycznej pola ziemskiego)?

52. Wartość $B(x)$ indukcji magnetycznej w punktach położonych na osi kwadratowej ramki o boku a jest podana w zadaniu 15. a) Wykaż, że to pole magnetyczne jest dla $x \gg a$ takie samo, jak pole dipola magnetycznego (patrz równanie (30.29)). b) Jaki jest dipolowy moment magnetyczny tej ramki?

53. W dwóch cewkach, z których każda ma 300 zwojów i promień R , płynie prąd o natężeniu I . Cewki są ustawione w odległości R od siebie, jak na rysunku 30.54. Dla $R = 5$ cm i $I = 50$ A narysuj wykres wartości wypadkowej indukcji magnetycznej B , w funkcji odległości x , mierzonej wzdłuż osi x , w zakresie od $x = -5$ cm do $x = 5$ cm, przyjmując $x = 0$ w punkcie P , leżącym w połowie odległości między cewkami. (Takie cewki wytwarzają w punkcie P pole magnetyczne o szczególnie dużej jednorodności). (Wskazówka: Patrz równanie (30.28)).

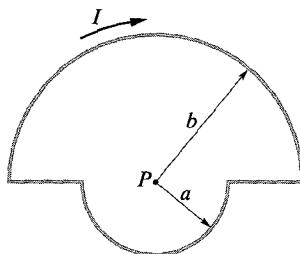
54. Prąd o natężeniu 6 A płynie w zamkniętym obwodzie $abcdefgha$ wzdłuż ośmiu spośród dwunastu krawędzi sześcianu o długości 10 cm, jak pokazano na rysunku 30.55. a) Dlaczego można traktować ten obwód jako superpozycję trzech kwadratowych ramek $bcfgb$, $abgha$ i $cdefc$? (Wskazówka: Narysuj prądy, płynące w tych kwadratowych ramkach). b) Skorzystaj z tego faktu, aby wyznaczyć wartość i kierunek dipolowego momentu magnetycznego $\vec{\mu}$ dla całego obwodu zamkniętego. c) Oblicz \vec{B} w punktach o współrzędnych $(x, y, z) = (0, 5 \text{ m}, 0)$ i $(5 \text{ m}, 0, 0)$.



Rys. 30.55. Zadanie 54

55. Przyjmij, że w zadaniu 50 (rys. 30.54) odległość między cewkami jest zmienną s , niekoniecznie równą promieniowi cewki R . a) Wykaż, że pierwsza pochodna wartości indukcji wypadkowej pola magnetycznego cewek (dB/dx) jest równa zero w punkcie P , położonym w połowie odległości między cewkami, niezależnie od wartości s . Dlaczego można spodziewać się tego na podstawie symetrii układu? b) Wykaż, że druga pochodna (d^2B/dx^2) jest również równa零 w punkcie P , ale pod warunkiem, że $s = R$. To tłumaczy jednorodność pola B w otoczeniu punktu P dla tej szczególnej odległości między cewkami.

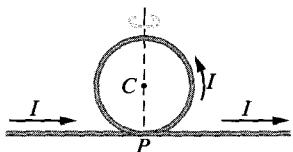
56. Z kawałka drutu wykonano zamknięty obwód pokazany na rysunku 30.56. W obwodzie płynie prąd o natężeniu I . a) Wyznacz wartość i kierunek indukcji magnetycznej \vec{B} w punkcie P . b) Wyznacz dipolowy moment magnetyczny obwodu.



Rys. 30.56. Zadanie 56

57. W pętli o kształcie okręgu o promieniu 12 cm płynie prąd o natężeniu 15 A. Płaska cewka o promieniu 0,82 cm i 50 zwojach, w której płynie prąd o natężeniu 1,3 A, jest umieszczona w środku pętli. a) Wyznacz wektor \vec{B} pola wytwarzanego przez cewkę w jej środku. b) Jaki moment siły działa na cewkę? Przyjmij, że płaszczyzny pętli i cewki są wzajemnie prostopadłe i że pole magnetyczne, wytworzone przez pętlę jest w przybliżeniu jednorodne w obszarze zajętym przez cewkę.

58. a) Długi przewód wygięto w pętlę w sposób pokazany na rysunku 30.57, przy czym w punkcie P części przewodu się nie stykają. Promień okrągłej części jest równy R . Wyznacz wartość i kierunek indukcji \vec{B} w środku C okrągłej części, gdy prąd o natężeniu I płynie we wskazanym kierunku. b) Wyobraź sobie, że okrągłą część obwodu obracamy bez zmiany kształtu wokół zaznaczonej średnicy, aż do momentu, w którym płaszczyzna okręgu będzie prostopadła do prostych odcinków obwodu. Dipolowy moment magnetyczny związany z okrągłą częścią obwodu będzie teraz zgodny z kierunkiem prądu w odcinkach prostych. Wyznacz w tym przypadku indukcję \vec{B} w punkcie C .



Rys. 30.57. Zadanie 58

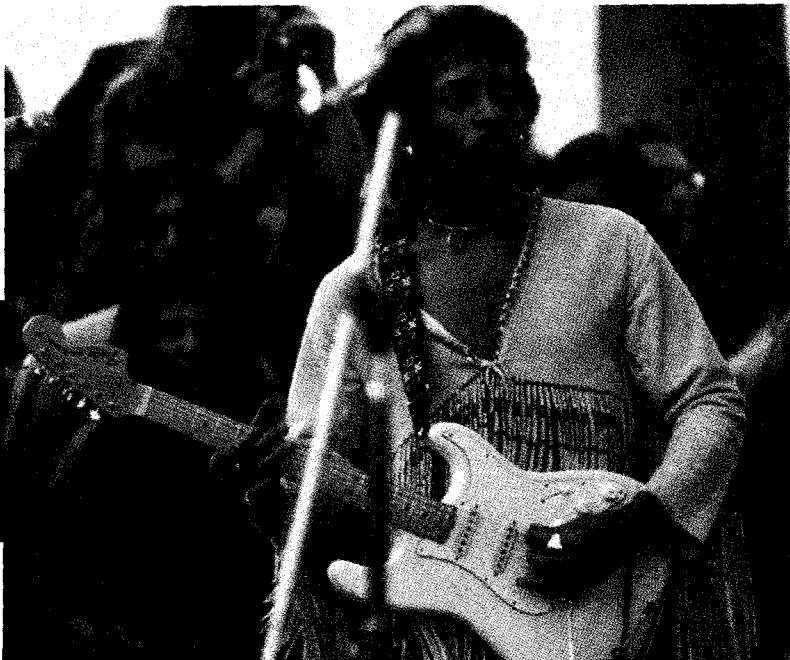
31

Zjawisko indukcji i indukcyjność

Wkrótce po pojawieniu się w połowie lat pięćdziesiątych muzyki rockowej, gitarzyści zastąpili gitary akustyczne gitarami elektrycznymi. Jednak dopiero Jimi Hendrix, który pojawił się na scenie w latach sześćdziesiątych, po raz pierwszy potraktował gitarę elektryczną jak instrument elektroniczny. Hendrix przeciągał kostką wzduż strun, ustawał się ze swoją gitarą przed głośnikiem, aby podtrzymać sprzążenie zwrotne, a następnie dokładał do tego akordy. Hendrix wytyczył kierunek rozwoju muzyki rockowej, od prostych melodii śpiewanych przez Buddy'ego Holly'ego przez muzykę psychodeliczną późnych lat sześćdziesiątych, aż do wczesnego heavy metalu Led Zeppelin i nieokielznanej ekspresji Joy Division w latach siedemdziesiątych. Pomyły Hendrixa oddziałują na muzykę rockową do dnia dzisiejszego.

Co gitarę elektryczną odróżnia od gitary akustycznej i co umożliwiło Hendrixowi tak szerokie wykorzystanie tego instrumentu elektronicznego?

Odpowiedź znajdziesz w tym rozdziale.



31.1. Dwa symetryczne przypadki

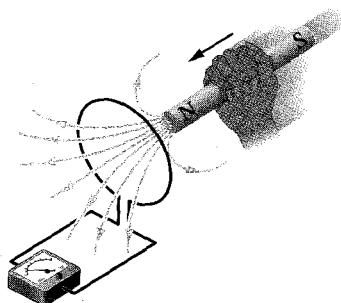
W paragrafie 29.8 powiedzieliśmy, że jeżeli umieścimy zamkniętą przewodzącą pętlę w polu magnetycznym i następnie przepuścimy przez nią prąd, to siły wynikające z działania pola magnetycznego wytworzą moment, który będzie usiłował obrócić pętlę:

$$\text{pięta z prądem} + \text{pole magnetyczne} \Rightarrow \text{moment siły}. \quad (31.1)$$

Przypuśćmy teraz, że obracamy pętlę ręcznie przy wyłączonym prądzie. Czy wystąpi zjawisko przeciwe do opisanego równaniem (31.1)? Innymi słowy, czy w takiej sytuacji pojawi się prąd w pętli:

$$\text{moment siły} + \text{pole magnetyczne} \Rightarrow \text{prąd?} \quad (31.2)$$

Odpowiedź jest twierdząca — w pętli rzeczywiście popłynie prąd. Przypadki opisane równaniami (31.1) i (31.2) są symetryczne. Prawo fizyczne, z którego wynika równanie (31.2), nazywamy *prawem indukcji Faradaya*. Podczas gdy równanie (31.1) jest podstawą działania silnika elektrycznego, równanie (31.2) i prawo Faradaya stanowią podstawę działania prądnicy. W tym rozdziale zajmiemy się prawem Faradaya i zjawiskiem, które jest przez nie opisane.



Rys. 31.1. Miernik wskazuje przepływ prądu w pętli z drutu, gdy magnes porusza się względem tej pętli

31.2. Dwa doświadczenia

Wykonajmy dwa proste doświadczenia, aby przygotować się do omówienia prawa indukcji Faradaya.

Pierwsze doświadczenie. Na rysunku 31.1 przedstawiono przewodzącą pętlę, połączoną z czułym miernikiem prądu. W układzie nie ma żadnego innego źródła siły elektromotorycznej (SEM), zatem prąd w obwodzie nie płynie. Jeżeli jednak będziemy przesuwać magnes sztabkowy w kierunku pętli, nagle w obwodzie pojawi się prąd. Prąd znika, gdy magnes przestaje się poruszać. Jeżeli teraz zaczniemy odsuwać magnes od pętli, prąd znów popłynie, ale tym razem w przeciwnym kierunku. Wykonując takie doświadczenia przez pewien czas, odkrylibyśmy, że:

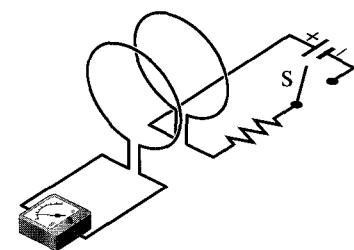
1. Prąd pojawia tylko wtedy, gdy występuje wzajemny ruch pętli i magnesu (tzn. jeden z tych elementów porusza się względem drugiego). Prąd znika, gdy pętla i magnes przestają się poruszać względem siebie.
2. Szybszy ruch wytwarza prąd o większym natężeniu.
3. Jeżeli przybliżanie północnego bieguna magnesu do pętli wytwarza prąd płynący np. w kierunku zgodnym z ruchem wskazówek zegara, to oddalenie tego bieguna powoduje przepływ prądu w kierunku przeciwnym. Przybliżanie lub oddalenie bieguna południowego do pętli również wywołuje przepływ prądu, ale w kierunkach przeciwnych niż przy ruchu bieguna północnego.

Prąd wytwarzany w pętli nazywamy **prądem indukowanym**, pracę przypadającą na jednostkę ładunku, wykonaną w celu wytworzenia prądu (czyli ruchu elektronów przewodnictwa, które tworzą ten prąd) nazywamy **indukowaną siłą**.

elektromotoryczną (SEM), a zjawisko wytwarzania prądu i SEM nazywamy **zjawiskiem indukcji elektromagnetycznej**.

Drugie doświadczenie. To doświadczenie wykonamy za pomocą układu, przedstawionego na rysunku 31.2 i złożonego z dwóch przewodzących pętli, które znajdują się blisko siebie, ale się nie stykają. Jeżeli zamknimy klucz S, włączając prąd w pętli po prawej stronie, to miernik wskaże nagły, ale krótkotrwały przepływ prądu — prądu indukowanego — w pętli po lewej stronie. Jeżeli teraz otworzymy klucz, to w pętli po lewej stronie pojawi się znów nagły i krótkotrwały prąd indukowany, tym razem jednak płynący w przeciwnym kierunku. Otrzymujemy prąd indukowany (a więc i SEM indukowaną) tylko wtedy, gdy natężenie prądu w pętli po prawej stronie się zmienia (podczas włączania lub wyłączania), a nie wtedy, gdy natężenie jest stałe (nawet gdy jest duże).

Indukowana SEM i indukowany prąd w tych doświadczeniach powstają najwyraźniej wtedy, gdy coś się zmienia — ale co jest tym „czymś”? Faraday znalazł odpowiedź na to pytanie.



Rys. 31.2. Miernik wskazuje przepływ prądu w pętli po lewej stronie w momencie, gdy klucz S jest zamykany (aby włączyć prąd w pętli po prawej stronie) lub otwierany (aby wyłączyć prąd w pętli po prawej stronie). Obie cewki są nieruchome

31.3. Prawo indukcji Faradaya

Faraday uświadomił sobie, że SEM i prąd mogą być indukowane w pętli, jak w naszych dwóch doświadczeniach, gdy zmienia się „ilość” pola magnetycznego przechodzącego przez pętlę. Faraday doszedł następnie do wniosku, że „ilość” pola magnetycznego może być zilustrowana za pomocą linii pola magnetycznego, przechodzących przez pętlę. **Prawo indukcji Faradaya**, sformułowane na podstawie naszych doświadczeń, brzmi następująco:

► SEM jest indukowana w pętli po lewej stronie rysunków 31.1 i 31.2, gdy zmienia się liczba linii pola magnetycznego, przechodzących przez pętlę.

Rzeczywista liczba linii pola, przechodzących przez pętlę nie ma znaczenia. Wartości indukowanej SEM i natężenia indukowanego prądu zależą od *szybkości*, z jaką ta liczba się zmienia.

W naszym pierwszym doświadczeniu (rys. 31.1) linie pola magnetycznego rozchodzą się z bieguna północnego magnesu. Tak więc w miarę przybliżania bieguna północnego do pętli, liczba linii pola przechodzących przez pętlę rośnie. Ten wzrost najwidoczniej wywołuje ruch elektronów przewodnictwa w pętli (indukowany prąd) i dostarcza energii dla tego ruchu (indukowana SEM). Gdy magnes przestaje się poruszać, liczba linii pola przechodzących przez pętlę przestaje się zmieniać, a indukowany prąd i indukowana SEM znikają.

W naszym drugim doświadczeniu (rys. 31.2), gdy klucz jest otwarty, prąd nie płynie i nie ma pola magnetycznego. Jednakże, gdy włączymy prąd w prawej pętli, wzrastające natężenie prądu wytwarza pole magnetyczne wokół tej pętli, a także pętli po lewej stronie. Gdy indukcja magnetyczna rośnie, liczba linii pola magnetycznego, przechodzących przez pętlę po lewej stronie również rośnie. Podobnie, jak w pierwszym doświadczeniu, ten wzrost najwidoczniej indukuje tam prąd i SEM. Gdy natężenie prądu w pętli po prawej stronie osiągnie końcową stałą

wartość, liczba linii pola przechodzących przez pętlę po lewej stronie przestaje się zmieniać, a indukowany prąd i indukowana SEM znikają.

Prawo Faradaya nie wyjaśnia, *dłaczego* prąd i SEM są indukowane w każdym z doświadczeń, jest to po prostu stwierdzenie, które pomaga nam zilustrować zjawisko indukcji.

Opis ilościowy

Aby zrobić użytek z prawa Faradaya, musimy wiedzieć, jak obliczyć „ilość pola magnetycznego” przechodzącego przez pętlę. W rozdziale 24, w podobnym przypadku obliczyliśmy „ilość pola elektrycznego” przechodzącego przez pewną powierzchnię. W tym celu zdefiniowaliśmy strumień elektryczny $\Phi_E = \int \vec{E} \cdot d\vec{S}$. Teraz zdefiniujemy *strumień magnetyczny*: Wyobraź sobie, że pętla obejmująca powierzchnię S jest umieszczona w polu magnetycznym o indukcji \vec{B} . Strumień magnetyczny jest wtedy równy:

$$\Phi_B = \int \vec{B} \cdot d\vec{S} \quad (\text{strumień magnetyczny przez powierzchnię } S). \quad (31.3)$$

Podobnie jak w rozdziale 24, $d\vec{S}$ jest wektorem o wartości dS i kierunku prostopadłym do elementu powierzchni dS .

Zastosujmy równanie (31.3) do przypadku szczególnego, w którym pętla leży w pewnej płaszczyźnie, a linie pola magnetycznego są prostopadłe do tej płaszczyzny. Możemy wtedy zapisać iloczyn skalarny w równaniu (31.3) jako $BdS \cos 0^\circ = BdS$. Jeżeli ponadto pole magnetyczne jest jednorodne, to B może być wyniesione przed znak całki, a wyrażenie $\int dS$, które pozostało, jest po prostu polem powierzchni S pętli. Zatem równanie (31.3) sprowadza się do:

$$\Phi_B = BS \quad (\vec{B} \perp S, \vec{B} \text{ jednorodne}). \quad (31.4)$$

Z równań (31.3) i (31.4) wynika, że jednostką strumienia magnetycznego w układzie SI jest tesla razy metr kwadratowy. Taka jednostka nosi nazwę *webera* (w skrócie Wb):

$$1 \text{ weber} = 1 \text{ Wb} = 1 \text{ T} \cdot \text{m}^2. \quad (31.5)$$

Stosując pojęcie strumienia magnetycznego, możemy sformułować prawo Faradaya w bardziej ilościowy i użyteczny sposób:

► Wartość SEM \mathcal{E} indukowanej w przewodzącej pętli jest równa szybkości, z jaką strumień magnetyczny, przechodzący przez tę pętlę zmienia się w czasie.

Jak zobaczymy w następnym paragrafie, indukowana SEM \mathcal{E} usiłuje przeciwdziałać zmianie strumienia, tak więc prawo Faradaya możemy zapisać jako:

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi_B}{dt} \quad (\text{prawo Faradaya}), \quad (31.6)$$

gdzie znak minus oznacza przeciwdziałanie. Często jednak pomijamy znak minus w równaniu (31.6), gdy poszukujemy tylko wartości bezwzględnej indukowanej SEM.

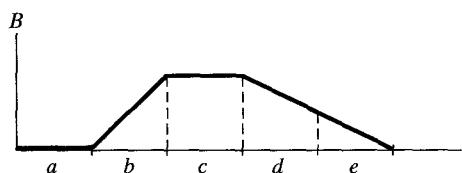
Jeżeli zmieniamy strumień pola magnetycznego w cewce złożonej z N zwojów, to indukowana SEM pojawia się w każdym zwoju i całkowita SEM, indukowana w cewce jest sumą tych cząstkowych indukowanych SEM. Jeżeli cewka jest ciasno nawinięta, tak że ten sam strumień pola magnetycznego Φ_B przenika przez wszystkie zwoje, to całkowita SEM indukowana w cewce jest równa:

$$\mathcal{E} = -N \frac{d\Phi_B}{dt} \quad (\text{cewka o } N \text{ zwojach}). \quad (31.7)$$

Strumień magnetyczny przechodzący przez cewkę możemy zmienić w następujący sposób:

1. Przez zmianę wartości indukcji magnetycznej B pola w cewce.
2. Przez zmianę powierzchni cewki lub tej części powierzchni, która znajduje się w polu magnetycznym (np. powiększanie rozmiarów cewki lub przesuniwanie jej względem obszaru, gdzie istnieje pole).
3. Przez zmianę kąta między kierunkiem wektora indukcji magnetycznej \vec{B} a powierzchnią cewki (np. obracanie cewki, tak aby wektor indukcji \vec{B} był najpierw prostopadły do płaszczyzny cewki, a następnie znalazł się w tej płaszczyźnie).

SPRAWDZIAN 1: Na wykresie przedstawiono wartości $B(t)$ dla jednorodnego pola magnetycznego, przechodzącego przez przewodzącą pętlę i prostopadłego do płaszczyzny pętli. Uszereguj pięć przedziałów czasu na wykresie pod względem wartości SEM indukowanej w pętli, zaczynając od największej wartości.



Przykład 31.1

Długi solenoid S, pokazany w przekroju na rysunku 31.3, ma 220 zwojów/cm i płynie w nim prąd o natężeniu $I = 1,5$ A. Średnica solenoidu D jest równa 3,2 cm. W jego środku umieszczamy cewkę C o średnicy $d = 2,1$ cm, składającą się ze 130 ciasno ułożonych zwojów. Natężenie prądu w solenoidzie zmniejszamy do zera ze stałą szybkością, w ciągu 25 ms. Jaka jest wartość SEM, indukowanej w cewce C, podczas zmiany natężenia prądu w solenoidzie?

ROZWIĄZANIE:

Bierzemy pod uwagę następujące fakty:

1. Cewka C, umieszczona we wnętrzu solenoidu, znajduje się w polu magnetycznym, wytworzonym przez prąd płynący

w solenoidzie. Istnieje więc strumień magnetyczny Φ_B , przechodzący przez cewkę.

2. Natężenie prądu I maleje, zatem strumień Φ_B również maleje.

3. W miarę zmniejszania się Φ_B , w cewce C indukuje się SEM \mathcal{E} zgodnie z prawem Faradaya.

Cewka składa się z więcej niż jednego zwoju, stosujemy więc prawo Faradaya w postaci równania (31.7) ($\mathcal{E} = -Nd\Phi_B/dt$), gdzie liczba zwojów N jest równa 130, a $d\Phi_B/dt$ jest szybkością zmian strumienia w każdym zwoju.

Natężenie prądu w solenoidzie zmienia się ze stałą szybkością, a więc strumień Φ_B również zmienia się ze stałą szybkością i dlatego możemy zapisać $d\Phi_B/dt$ jako $\Delta\Phi_B/\Delta t$. Tak więc, aby obliczyć $\Delta\Phi_B$, wystarczy znać końcową i początkową wartość strumienia. Końcowy strumień $\Phi_{B,\text{konc}}$ jest równy zeru, gdyż

końcowe natężenie prądu w solenoidzie jest równe zero. Aby wyznaczyć początkowy strumień $\Phi_{B,\text{pocz}}$, musimy взять pod uwagę dwa dodatkowe fakty:

O 4. Strumień, przenikający przez każdy zwój cewki C, zależy od pola powierzchni S i ustawienia tego zwoju w polu magnetycznym \vec{B} solenoidu. Pole \vec{B} jest jednorodne, a jego linie są skierowane prostopadle do powierzchni S , zatem strumień można obliczyć ze wzoru (31.4) ($\Phi_B = BS$).

O 5. Wartość indukcji magnetycznej B we wnętrzu solenoidu zależy od natężenia prądu I płynącego w solenoidzie oraz od liczby zwojów n na jednostkę długości, zgodnie z równaniem (30.25) ($B = \mu_0 In$).

Dla przypadku pokazanego na rysunku 31.3, S jest równe $\frac{1}{4}\pi d^2$ ($= 3,46 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2$), a n wynosi 220 zwojów/cm, czyli 22 000 zwojów/m. Podstawiając równanie (30.25) do równania (30.4), otrzymujemy:

$$\begin{aligned}\Phi_{B,\text{pocz}} &= BS = (\mu_0 In)S \\ &= (4\pi \cdot 10^{-7} \text{ T} \cdot \text{m}/\text{A})(1,5 \text{ A})(22000 \text{ zwojów}/\text{cm}) \\ &\quad \cdot (3,46 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2) = 1,44 \cdot 10^{-5} \text{ Wb}.\end{aligned}$$

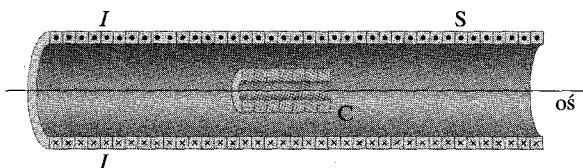
Możemy teraz napisać:

$$\begin{aligned}\frac{d\Phi_B}{dt} &= \frac{\Delta\Phi_B}{\Delta t} = \frac{\Phi_{B,\text{kofc}} - \Phi_{B,\text{pocz}}}{\Delta t} \\ &= \frac{(0 - 1,44 \cdot 10^{-5} \text{ Wb})}{25 \cdot 10^{-3} \text{ s}} = -5,76 \cdot 10^{-4} \text{ Wb/s} \\ &= -5,76 \cdot 10^{-4} \text{ V}.\end{aligned}$$

Interesuje nas tylko wartość bezwzględna, więc pomijajmy znak minus w tym równaniu i w równaniu (31.7), pisząc:

$$\mathcal{E} = N \frac{d\Phi_B}{dt} = (130 \text{ zwojów})(5,76 \cdot 10^{-4} \text{ V}) = 7,5 \cdot 10^{-2} \text{ V}$$

(odpowiedź)



Rys. 31.3. Przykład 31.1. Cewka C umieszczona jest we wnętrzu solenoidu S, w którym płynie prąd o natężeniu I

31.4. Reguła Lenza

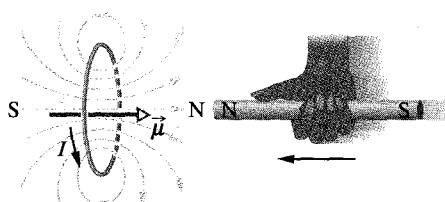
Wkrótce po odkryciu przez Faradaya prawa indukcji, Heinrich Friedrich Lenz sformułował regułę — zwaną obecnie **regułą Lenza** — umożliwiającą wyznaczenie kierunku prądu indukowanego w obwodzie:

► Prąd indukowany płynie w takim kierunku, że pole magnetyczne wytworzone przez ten prąd przeciwdziała zmianie strumienia pola magnetycznego, która ten prąd indukuje.

Ponadto kierunek indukowanej SEM jest taki jak kierunek prądu indukowanego. Aby zorientować się, co wynika z reguły Lenza, przeanalizujemy dwiema różnymi, ale równoważnymi metodami przypadek przedstawiony na rysunku 31.4, gdzie bieguna północny magnesu jest przesuwany w kierunku przewodzącej pętli.

1. *Przeciwdziałanie ruchowi magnesu.* Przybliżanie północnego bieguna magnesu na rysunku 31.4 zwiększa strumień pola magnetycznego w pętli i w ten sposób indukuje w niej prąd. Wiemy na podstawie rysunku 30.21, że taka pętla zachowuje się jak dipol magnetyczny, który ma swój biegum północny i południowy, a magnetyczny moment dipolowy $\vec{\mu}$ jest skierowany od

Rys. 31.4. Reguła Lenza. Magnes przesuwany w kierunku pętli indukuje w niej prąd. Prąd ten tworzy swoje własne pole magnetyczne, a dipolowy moment magnetyczny $\vec{\mu}$ jest zorientowany tak, aby przeciwdziałać ruchowi magnesu. Tak więc prąd indukowany musi płynąć w kierunku przeciwnym do ruchu wskaźówek zegara, jak pokazano na rysunku



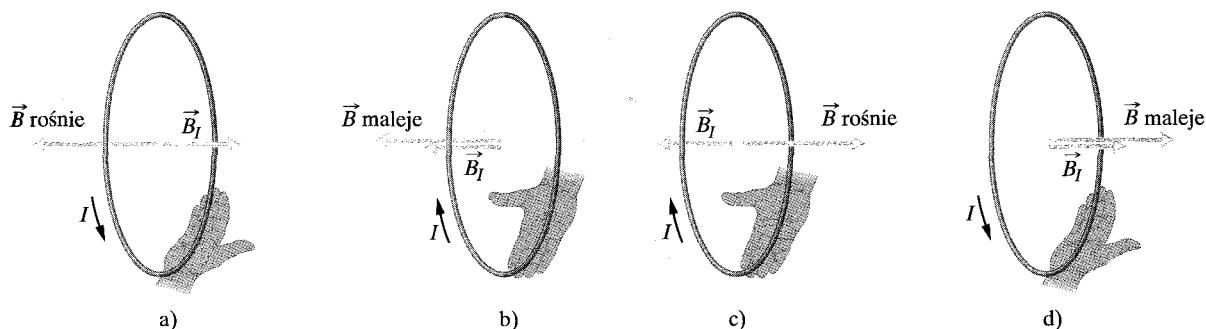
bieguna południowego do północnego. Aby przeciwdziałać wzrostowi strumienia pola magnetycznego, spowodowanego przybliżaniem magnesu, po stronie przybliżającego się bieguna północnego magnesu musi powstać biegun północny pętli, tak aby go odpychać (rys. 31.4). Zgodnie z regułą prawej dłoni dla $\vec{\mu}$ (rys. 30.21), prąd indukowany w pętli na rysunku 31.4 musi więc płynąć przeciwnie do ruchu wskazówek zegara.

Jeżeli natomiast zaczniemy odsuwać magnes od pętli, będzie w niej nadal płynął prąd indukowany. Teraz jednak po stronie oddalającego się bieguna północnego magnesu powstanie biegun południowy pętli, tak aby przeciwdziałać ruchowi magnesu. Prąd indukowany będzie więc płynąć zgodnie z ruchem wskazówek zegara.

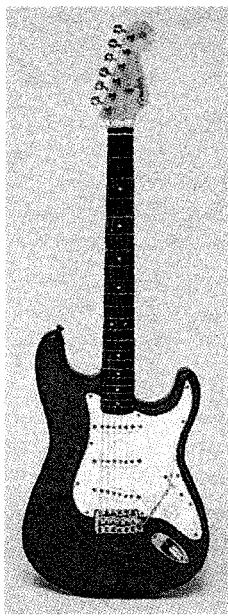
2. **Przeciwdziałanie zmianie strumienia.** Gdy magnes na rysunku 31.4 znajduje się początkowo w dużej odległości od pętli, strumień magnetyczny przechodzący przez pętlę jest znikomo mały. Gdy magnes zbliża się do pętli, strumień przenikający przez pętlę rośnie (na rysunku 31.4 zbliżamy do pętli biegun północny magnesu, a zatem linie jego pola magnetycznego są skierowane w lewo). Aby przeciwdziałać temu wzrostowi strumienia, prąd o natężeniu I musi wytworzyć swoje własne pole \vec{B}_I , skierowane wewnątrz pętli w prawo, jak pokazano na rysunku 31.5a. Tak więc skierowany w prawo strumień pola \vec{B}_I przeciwdziała zwiększeniu się strumienia pola \vec{B} , skierowanego w lewo. Zgodnie z regułą prawej dłoni (rys. 30.21) prąd I na rysunku 31.5a musi więc płynąć przeciwnie do ruchu wskazówek zegara.

Zwrócić uwagę, że strumień pola \vec{B}_I zawsze przeciwdziała zmianie strumienia pola \vec{B} , ale nie zawsze znaczy to, że \vec{B}_I jest skierowane przeciwnie do \vec{B} . Jeśli na przykład będziemy odsuwać magnes od pętli, strumień Φ_B wytworzony przez magnes będzie nadal skierowany w lewo, ale jego wartość będzie teraz mała. Strumień \vec{B}_I musi więc być skierowany wewnątrz pętli w lewo, aby przeciwdziałać zmniejszaniu się strumienia Φ_B , jak pokazano na rysunku 31.5b. Zatem \vec{B}_I i \vec{B} będą teraz skierowane zgodnie.

Na rysunkach 31.5c i d przedstawiono przypadki, w których południowy biegun magnesu odpowiednio przybliża się i oddala od pętli.



Rys. 31.5. Prąd o natężeniu I , indukowany w pętli, ma taki kierunek, że pole magnetyczne \vec{B}_I wytworzone przez ten prąd przeciwdziała zmianie pola magnetycznego \vec{B} , która ten prąd indukuje. Wektor indukcji \vec{B}_I jest zawsze skierowany przeciwnie do wzrastającego wektora indukcji pola \vec{B} (a) i (c), natomiast jest zawsze zgodny z kierunkiem malejącego wektora indukcji pola \vec{B} (b) i (d). Reguła prawej dłoni wskazuje kierunek prądu indukowanego, w zależności od kierunku indukowanego pola



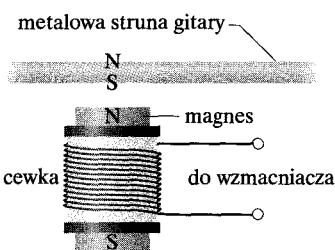
Gitary elektryczne

Na rysunku 31.6 przedstawiono gitarę elektryczną Fender Stratocaster, używaną przez Jimiego Hendrixa i wielu innych muzyków. Podczas gdy dźwięk drgających strun gitary akustycznej jest wzmacniany w pudle instrumentu, gitara elektryczna jest instrumentem wykonanym z litego materiału, w którym nie ma pudła. Zamiast tego, drgania metalowych strun są odbierane przez przetworniki elektryczne, które wysyłają sygnał do wzmacniacza i zestawu głośników.

Konstrukcja przetwornika została przedstawiona na rysunku 31.7. Przewód, który łączy instrument ze wzmacniaczem, jest nawinięty wokół małego magnesu. Pole magnetyczne magnesu indukuje biegun północny i południowy w odcinku metalowej struny tuż nad magnesem. Ten odcinek struny wytwarza więc swoje własne pole magnetyczne. Kiedy struna zostanie szarpnięta i pobudzona do drgań, jej ruch względem cewki zmienia strumień magnetyczny, przechodzący przez cewkę, indukując w niej prąd. Struna drga, zbliżając się i oddalając od cewki, zatem prąd indukowany zmienia kierunek z taką samą częstotliwością, jak częstotliwość drgań struny. Do wzmacniacza i głośnika przekazywany jest sygnał o tej częstotliwości.

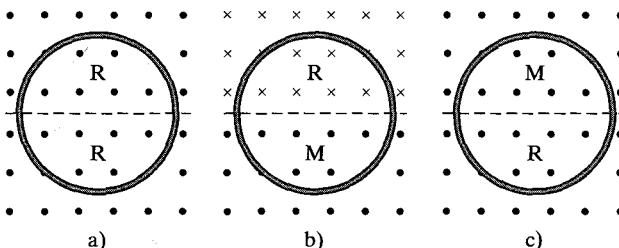
Gitara Stratocaster ma trzy zestawy przetworników, umieszczonych w pobliżu dolnego końca strun (w szerokiej części korpusu). Zestaw, znajdujący się najbliżej dolnego końca, lepiej odbiera drgania strun o wysokich częstotliwościach, natomiast zestaw położony najdalej konia lepiej odbiera drgania o niskich częstotliwościach. Zmieniając położenie dźwigni przełącznika, muzyk może wybrać jeden lub kilka zestawów przetworników, które będą przekazywać drgania do wzmacniacza i głośników.

Aby uzyskać ciekawsze brzmienie muzyki, Hendrix czasem zmieniał liczbę zwojów w cewkach przetworników swojej gitary. W ten sposób zmieniał wielkość SEM indukowanej w cewkach, a więc względową czułość przetworników. Nawet bez stosowania tych dodatkowych środków gitara elektryczna daje znacznie większe w porównaniu z gitarą akustyczną możliwości wpływania na wytwarzane przez nią dźwięki.



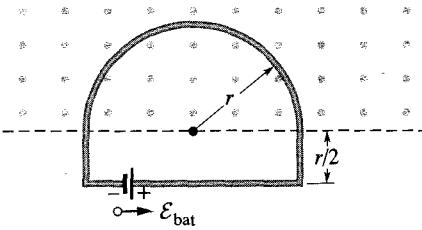
Rys. 31.7. Widok z boku przetwornika gitary elektrycznej. Pobudzenie do drgań metalowej struny (która zachowuje się jak magnes), powoduje zmianę strumienia magnetycznego, która indukuje prąd w cewce

SPRAWDZIAN 2: Na rysunku przedstawiono trzy przypadki, w których identyczne przewodzące okrągłe pętle znajdują się w obszarach jednorodnego pola magnetycznego, którego wartość indukcji albo rośnie (R), albo maleje (M) z tą samą szybkością. W każdym przypadku linia przerywana pokrywa się ze średnicą. Uszereguj przypadki pod względem wartości natężenia prądu indukowanego w pętli, zaczynając od największej wartości.



Przykład 31.2

Na rysunku 31.8 przedstawiono przewodzącą pętlę, składającą się z półokręgu o promieniu $r = 0,2 \text{ m}$ i trzech odcinków. Półokrąg znajduje się w jednorodnym polu magnetycznym o indukcji \vec{B} , skierowanym przed płaszczyznę rysunku. Wartość indukcji jest daną wzorem $B = 4t^2 + 2t + 3$, gdzie B jest wyrażone w teslach, a t w sekundach. Do pętli dołączone jest źródło doskonałe o SEM $\mathcal{E}_{\text{bat}} = 2 \text{ V}$. Opór pętli wynosi 2Ω .



Rys. 31.8. Przykład 31.2. Źródło jest dołączone do przewodzącej pętli, której część stanowi półokrąg o promieniu r , umieszczony w jednorodnym polu magnetycznym. Wektor indukcji magnetycznej jest skierowany przed płaszczyznę rysunku, a jego wartość zmienia się w czasie

a) Jaka jest wartość i kierunek SEM \mathcal{E}_{ind} , indukowanej w pętli przez pole \vec{B} w chwili $t = 10 \text{ s}$?

ROZWIĄZANIE:

O- 1. Zgodnie z prawem Faradaya wartość \mathcal{E}_{ind} jest równa szybkości $d\Phi_B/dt$, z jaką zmienia się strumień magnetyczny, przechodzący przez pętlę.

O- 2. Strumień przechodzący przez pętlę zależy od pola powierzchni S pętli oraz od jej ustawienia w polu magnetycznym \vec{B} . Pole \vec{B} jest jednorodne, a wektor \vec{B} jest prostopadły do płaszczyzny pętli, zatem strumień dany jest wzorem (31.4) ($\Phi_B = BS$). Korzystając z tego równania i biorąc pod uwagę, że tylko wartość indukcji pola B zmienia się w czasie (a nie pole powierzchni S), możemy napisać prawo Faradaya (31.6) w postaci:

$$\mathcal{E}_{\text{ind}} = \frac{d\Phi_B}{dt} = \frac{d(BS)}{dt} = S \frac{dB}{dt}.$$

O- 3. Strumień przenika przez pętlę tylko wewnętrz obszaru półkolistego, więc pole powierzchni S w tym równaniu jest równe $\frac{1}{2}\pi r^2$. Podstawiając ten wynik oraz wyrażenie dla B , otrzymujemy:

$$\mathcal{E}_{\text{ind}} = S \frac{dB}{dt} = \frac{\pi r^2}{2} \frac{d}{dt}(4t^2 + 2t + 3) = \frac{\pi r^2}{2}(8t + 2).$$

Zatem w chwili $t = 10 \text{ s}$:

$$\mathcal{E}_{\text{ind}} = \frac{\pi(0,2 \text{ m})^2}{2}[8(10) + 2] = 5,152 \text{ V} \approx 5,2 \text{ V}. \text{ (odpowiedź)}$$

Aby wyznaczyć kierunek \mathcal{E}_{ind} , zauważ najpierw, że strumień przechodzący przez pętlę na rysunku 31.8 jest skierowany przed płaszczyznę rysunku, a jego wartość rośnie w czasie. Zatem O- pole indukowane B_I (wytworzone przez prąd indukowany) musi przeciwdziałać temu wzrostowi i dlatego musi być skierowane za płaszczyznę rysunku. Stosując regułę prawej dłoni (rys. 30.7c), dochodzimy do wniosku, że prąd indukowany musi płynąć w pętli zgodnie z ruchem wskazówek zegara. Tak więc indukowana SEM \mathcal{E}_{ind} musi być skierowana również zgodnie z ruchem wskazówek zegara.

b) Ile wynosi natężenie prądu, płynącego w pętli w chwili $t = 10 \text{ s}$?

ROZWIĄZANIE:

O- Dwie SEM powodują ruch ładunków wokół pętli. Indukowana SEM \mathcal{E}_{ind} wytwarza w pętli prąd, płynący w kierunku zgodnym z ruchem wskazówek zegara, natomiast SEM źródła \mathcal{E}_{bat} wytwarza prąd, płynący w kierunku przeciwnym. Wartość \mathcal{E}_{ind} jest większa niż \mathcal{E}_{bat} , zatem wypadkowa SEM \mathcal{E}_{wyp} jest skierowana zgodnie z ruchem wskazówek zegara, podobnie jak całkowity prąd w pętli. Aby obliczyć natężenie prądu dla $t = 10 \text{ s}$, korzystamy z równania (28.2) ($I = \mathcal{E}/R$):

$$I = \frac{\mathcal{E}_{\text{wyp}}}{R} = \frac{\mathcal{E}_{\text{ind}} - \mathcal{E}_{\text{bat}}}{R} = \frac{5,152 \text{ V} - 2 \text{ V}}{2 \Omega} = 1,58 \text{ A} \approx 1,6 \text{ A}. \text{ (odpowiedź)}$$

Przykład 31.3

Na rysunku 31.9 przedstawiono prostokątną ramkę z drutu, umieszczoną w niejednorodnym i zmieniającym się w czasie polu magnetycznym \vec{B} . Wektor indukcji \vec{B} jest skierowany prostopadły za płaszczyznę rysunku, a jego wartość wynosi $B = 4t^2x^2$, gdzie B jest wyrażone w teslach, t w sekundach, a x w metrach. Szerokość ramki jest równa $W = 3 \text{ m}$, a wysokość $H = 2 \text{ m}$. Jaka jest wartość i kierunek SEM \mathcal{E}_{ind} indukowanej w ramce w chwili $t = 0,1 \text{ s}$?

ROZWIĄZANIE:

O- Wartość indukcji magnetycznej \vec{B} zmienia się w czasie, zatem strumień magnetyczny Φ_B przechodzący przez ramkę również zmienia się w czasie. O- Zmienny w czasie strumień indukuje w ramce SEM \mathcal{E} , zgodnie z prawem Faradaya, które możemy zapisać (pomijając znak), jako $\mathcal{E} = d\Phi_B/dt$.

Aby zastosować to prawo, musimy znać wyrażenie, określające strumień Φ_B w dowolnej chwili t . Jednakże, O- nie możemy w tym celu zastosować równania (31.4) ($\Phi_B = BS$), gdyż

pole \vec{B} nie jest jednorodne w obszarze objętym pętlą. Zamiast tego musimy zastosować równanie (31.3) ($\Phi_B = \int \vec{B} \cdot d\vec{S}$).

Na rysunku 31.9 wektor \vec{B} jest prostopadły do płaszczyzny ramki (a zatem równoległy do wektora powierzchni $d\vec{S}$), tak więc iloczyn skalarny w równaniu (31.3) jest równy BdS . Pole magnetyczne jest funkcją współrzędnej x , ale nie jest funkcją y , zatem za element powierzchni dS możemy przyjąć pole powierzchni pionowego paska o wysokości H i szerokości dx (jak pokazano na rysunku 31.9). Wtedy $dS = Hdx$, a strumień, przenikający przez ramkę jest równy:

$$\Phi_B = \int \vec{B} \cdot d\vec{S} = \int BdS = \int BHdx = \int 4t^2x^2Hdx.$$

Traktując w tym całkowaniu t jako stałą i podstawiając granice całkowania $x = 0$ i $x = 3$ m, otrzymujemy:

$$\Phi_B = 4t^2H \int_0^3 x^2dx = 4t^2H \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^3 = 72t^2,$$

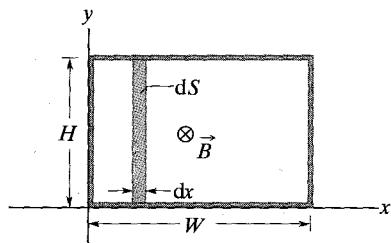
gdzie podstawiliśmy $H = 2$ m, a wartość Φ_B jest wyrażona w weberach. Możemy teraz zastosować prawo Faradaya do obliczenia wartości bezwzględnej \mathcal{E} w dowolnej chwili t :

$$\mathcal{E} = \frac{d\Phi_B}{dt} = \frac{d(72t^2)}{dt} = 144t,$$

gdzie \mathcal{E} jest wyrażone w woltach. Dla $t = 0,1$ s

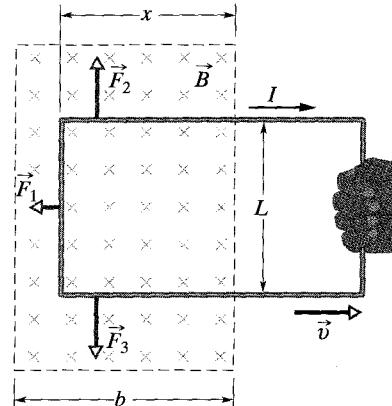
$$\mathcal{E} = (144 \text{ V/s})(0,1 \text{ s}) \approx 14 \text{ V.} \quad (\text{odpowiedź})$$

Strumień pola \vec{B} , przechodzący przez pętlę, jest skierowany za płaszczyznę rysunku 31.9, a jego wartość rośnie, gdyż wartość indukcji pola B rośnie w czasie. Zgodnie z regułą Lenza, pole B_t , wytworzone przez prąd indukowany musi się przeciwstawić temu wzrostowi i dlatego jest skierowane przed płaszczyznę rysunku. Reguła prawej dłoni przedstawiona na rysunku 31.5 mówi zatem, że prąd indukowany płynie w pęli w kierunku przeciwnym do ruchu wskazówek zegara, a więc tak samo skierowana jest indukowana SEM \mathcal{E} .



Rys. 31.9. Przykład 31.3. Zamknięta przewodząca ramka, o szerokości W i wysokości H , znajduje się w niejednorodnym, zmieniającym w czasie polu magnetycznym, o wektorze indukcji skierowanym za płaszczyznę rysunku. Aby zastosować prawo Faradaya, posłużymy się pionowym paskiem o wysokości H , szerokości dx i polu powierzchni dS

31.5. Zjawisko indukcji i przekazywanie energii



Rys. 31.10. Zamknięta przewodząca ramka jest wyciągana ze stałą prędkością v z obszaru, w którym istnieje pole magnetyczne. Podczas ruchu ramki indukuje się w niej prąd o natężeniu I , płynący w kierunku zgodnym z ruchem wskazówek zegara. Na odcinkach ramki znajdujących się nadal w polu magnetycznym działają siły F_1 , F_2 i F_3 .

Zgodnie z regułą Lenza, niezależnie od tego, czy przyblizasz, czy oddalasz magnes od pętli na rysunku 31.1, siła magnetyczna przeciwwstawia się ruchowi magnesu. Oznacza to, że siła, jaką działasz, wykonuje pracę dodatnią. Jednocześnie w przewodniku, z którego wykonana jest pętla, wydziela się energia termiczna, gdyż prąd, indukowany w pęli w wyniku ruchu magnesu, napotyka opór elektryczny materiału. Innymi słowy energia, którą przekazujesz do zamkniętego układu *pętla + magnes*, działając siłą, przekształca się w końcu w energię termiczną. (Pomijamy tutaj energię wypromienowaną przez pętlę podczas zjawiska indukcji w postaci fal elektromagnetycznych). Im szybciej przesuwasz magnes, tym szybciej siła, którą przykładasz, wykonuje pracę, a więc tym większa jest szybkość, z jaką dostarczona przez ciebie energia jest przekształcana w energię termiczną w pętli. Oznacza to, że przekazywana wtedy moc jest większa.

Niezależnie od tego, w jaki sposób prąd jest indukowany w pętli, energia jest zawsze przekształcana podczas tego procesu w energię termiczną, gdyż w pętli istnieje opór elektryczny. (Wyjątkiem jest przypadek, gdy pętla jest wykonana z nadprzewodnika). Na przykład na rysunku 31.2, gdy zamykamy klucz S, a prąd jest przez chwilę indukowany w pęci po lewej stronie, energia dostarczona ze źródła jest przekształcana w energię termiczną w pętli.

Na rysunku 31.10 przedstawiono inny przypadek, w którym powstaje prąd indukowany. Część prostokątnej przewodzącej ramki o szerokości L znajduje się

w jednorodnym polu magnetycznym, o wektorze indukcji skierowanym prostopadle do płaszczyzny ramki za tę płaszczyznę. Takie pole może być wytworzone np. przez duży elektromagnes. Linie przerywane na rysunku 31.10 wskazują umowne granice obszaru pola magnetycznego; pola rozproszone na brzegach tego obszaru są pominięte. Twoim zadaniem jest przesuwanie ramki w prawo ze stałą prędkością \vec{v} .

Sytuacje przedstawione na rysunkach 31.10 i 31.1 nie różnią się od siebie w istotny sposób. W obydwu przypadkach pole magnetyczne i przewodząca ramka poruszają się względem siebie, a strumień pola, przechodzący przez ramkę, zmienia się w czasie. Prawdą jest, że na rysunku 31.1 strumień ulega zmianie, gdyż zmienia się wektor \vec{B} , natomiast na rysunku 31.10 strumień ulega zmianie, gdyż zmienia się ta część powierzchni ramki, która wciąż znajduje się w polu magnetycznym. Ta różnica nie jest jednak istotna, natomiast zasadniczą różnicą między dwoma układami jest to, że dla układu na rysunku 31.10 obliczenia wykonuje się znacznie łatwiej. Obliczmy więc teraz szybkość, z jaką wykonujesz pracę mechaniczną, gdy przesuwasz ramkę ruchem jednostajnym, jak na rysunku 31.10.

Jak zobaczyłeś, należy przyłożyć stałą siłę \vec{F} do ramki, aby przesuwać ją ze stałą prędkością \vec{v} , gdyż przeciwstawia się temu siła magnetyczna o takiej samej wartości, działająca na ramkę w przeciwnym kierunku. Z równania (7.48) wynika, że szybkość, z jaką wykonywana jest praca (moc) jest równa:

$$P = Fv, \quad (31.8)$$

gdzie F jest wartością przyłożonej siły. Chcielibyśmy znaleźć wyrażenie opisujące P , w zależności od wartości indukcji magnetycznej B i właściwości ramki, a mianowicie jej rozmiaru L i oporu R stawianego prądowi.

W miarę przesuwania ramki w prawo na rysunku 31.10 maleje część jej powierzchni, znajdująca się w polu magnetycznym. Tak więc strumień przechodzący przez ramkę również maleje i w ramce powstaje prąd indukowany. To właśnie obecność tego prądu jest przyczyną powstawania siły, która zgodnie z regułą Lenza przeciwstawia się ruchowi ramki.

Aby wyznaczyć natężenie prądu, zastosujemy najpierw prawo Faradaya. Jeśli x oznacza długość tej części ramki, która wciąż znajduje się w polu magnetycznym, to pole powierzchni tej części jest równe Lx . Zatem zgodnie z równaniem (31.4), wartość strumienia przechodzącego przez ramkę jest równa:

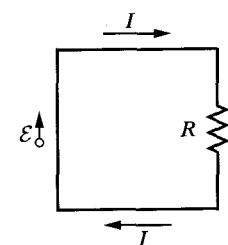
$$\Phi_B = BS = BLx. \quad (31.9)$$

Gdy x maleje, maleje również strumień. Zgodnie z prawem Faradaya zmniejszanie się strumienia indukuje SEM w pętli. Pomijając znak minus w równaniu (31.6) i stosując równanie (31.9), możemy zapisać wartość SEM jako:

$$\mathcal{E} = \frac{d\Phi_B}{dt} = \frac{d}{dt}(BLx) = BL \frac{dx}{dt} = BLv, \quad (31.10)$$

gdzie dx/dt zastąpiliśmy prędkością v , z jaką porusza się ramka.

Na rysunku 31.11 pokazano ramkę jako obwód elektryczny: indukowana SEM \mathcal{E} przedstawiona jest po lewej stronie, a całkowity opór R ramki — po prawej stronie rysunku. Kierunek prądu indukowanego o natężeniu I wynika z reguły prawej dloni, jak na rysunku 31.5b. SEM o wartości \mathcal{E} musi mieć ten sam kierunek.



Rys. 31.11. Obwód zastępczy poruszającej się ramki, przedstawionej na rysunku 31.10

Aby wyznaczyć wartość natężenia prądu indukowanego, nie możemy zastosować drugiego prawa Kirchhoffa, ponieważ, jak zobaczymy w paragrafie 31.6, dla indukowanej SEM nie możemy zdefiniować różnicy potencjałów. Możemy jednak zastosować równanie $I = \mathcal{E}/R$, podobnie jak zrobiliśmy to w przykładzie 31.2. Wykorzystując równanie (31.10), otrzymujemy:

$$I = \frac{BLv}{R}. \quad (31.11)$$

Trzy odcinki ramki na rysunku 31.10, przez które płynie prąd, znajdują się w polu magnetycznym, zatem na te odcinki będą działały siły do nich prostopadłe. Wiemy z równania 29.26, że siły te mogą być zapisane w postaci:

$$\vec{F}_{\hat{B}} = I\vec{L} \times \vec{B}. \quad (31.12)$$

Siły działające na trzy odcinki ramki na rysunku 31.10 są oznaczone jako \vec{F}_1 , \vec{F}_2 i \vec{F}_3 . Zauważ jednak, że ze względu na symetrię, siły \vec{F}_2 i \vec{F}_3 mają jednakowe wartości i są przeciwnie skierowane, a więc wzajemnie się równoważą. Pozostaje tylko siła \vec{F}_1 , która jest skierowana przeciwnie do siły \vec{F} , jaką działasz na ramkę. Tak więc $\vec{F} = -\vec{F}_1$.

Zauważ, że kąt między wektorem \vec{B} i wektorem długości \vec{L} jest równy 90° dla odcinka po lewej stronie ramki. Biorąc to pod uwagę oraz korzystając z równania (31.12) w celu wyznaczenia wartości \vec{F}_1 , możemy napisać:

$$F = F_1 = ILB \sin 90^\circ = ILB. \quad (31.13)$$

Podstawiając równanie (31.11) do równania (31.13), otrzymujemy więc

$$F = \frac{B^2 L^2 v}{R}. \quad (31.14)$$

Ponieważ B , L i R są stałymi, więc prędkość v , z jaką przesuwamy ramkę, będzie stała, o ile wartość siły, jaką działamy na ramkę, będzie również stała.

Podstawiając równanie (31.14) do równania (31.8), możemy znaleźć szybkość, z jaką wykonujesz pracę, starając się wyciągnąć ramkę z obszaru pola magnetycznego:

$$P = Fv = \frac{B^2 L^2 v^2}{R} \quad (\text{szybkość wykonywania pracy}). \quad (31.15)$$

Na zakończenie naszych rozważań, wyznaczmy szybkość wydzielania się energii termicznej w ramce, podczas wyciągania jej ze stałą prędkością z obszaru pola magnetycznego. Obliczamy ją z równania (27.22):

$$P = I^2 R. \quad (31.16)$$

Podstawiając zamiast I wyrażenie (31.11), otrzymujemy:

$$P = \left(\frac{BLv}{R} \right)^2 R = \frac{B^2 L^2 v^2}{R} \quad (\text{szybkość wydzielania się energii termicznej}), \quad (31.17)$$

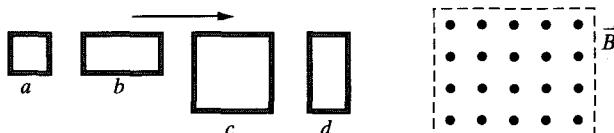
czyli wyrażenie dokładnie równe szybkości wykonywania pracy nad ramką (równanie (31.15)). Tak więc praca, wykonywana podczas przesuwania ramki w polu magnetycznym ulega w całości przekształceniu w energię termiczną w ramce.

Prądy wirowe

Wyobraź sobie, że przewodzącą ramkę z rysunku 31.10 zastąpiliśmy litą przewodzącą płytą. Jeżeli teraz spróbujemy usunąć płytę z obszaru pola magnetycznego, podobnie jak zrobiliśmy to z ramką (rys. 31.12a), to w wyniku względnego ruchu pola i płyty popłynie w niej prąd indukowany. Tak więc znów, w wyniku istnienia prądów indukowanych, napotkamy siłę przeciwdziałającą ruchowi płyty i będziemy musieli wykonać pracę. Jednakże elektryny przewodnictwa, które tworzą prąd indukowany w płycie, nie muszą poruszać się wzduż jednego toru, jak w przypadku pętli. Elektryny krążą wewnętrz płyty, jak gdyby znalazły się w wirze wodnym. Taki prąd nazywamy *prądem wirowym*. Możemy go przedstawić, jak na rysunku 31.12a, jak gdyby płynął wzduż pojedynczego toru.

Podobnie jak w przypadku przewodzącej pętli (rys. 31.10), prąd indukowany w płycie powoduje, że energia mechaniczna zostaje rozproszona w postaci energii termicznej. Rozpraszczenie jest bardziej widoczne w układzie przedstawionym na rysunku 31.12b. Przewodząca płyta, która może swobodnie obracać się wokół osi, waha się, przechodząc przez obszar pola magnetycznego. Za każdym razem, gdy płyta dostaje się w obszar pola lub go opuszcza, część energii mechanicznej płyty przekształcana jest w energię termiczną. Po kilku wahaniach cała energia mechaniczna zostaje zużyta, a ogrzana płyta po prostu pozostaje bez ruchu zawieszona na osi.

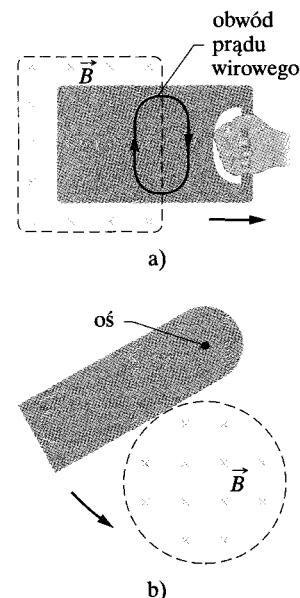
SPRAWDZIAN 3: Na rysunku przedstawiono cztery ramki z drutu, o długości boków równej albo L , albo $2L$. Wszystkie cztery ramki poruszają się z taką samą stałą prędkością, przechodząc przez obszar jednorodnego pola magnetycznego \vec{B} , o indukcji skierowanej przed płaszczyznę rysunku. Uszereguj cztery ramki pod względem maksymalnej wartości indukowanej SEM w czasie ich ruchu w polu, zaczynając od największej wartości.



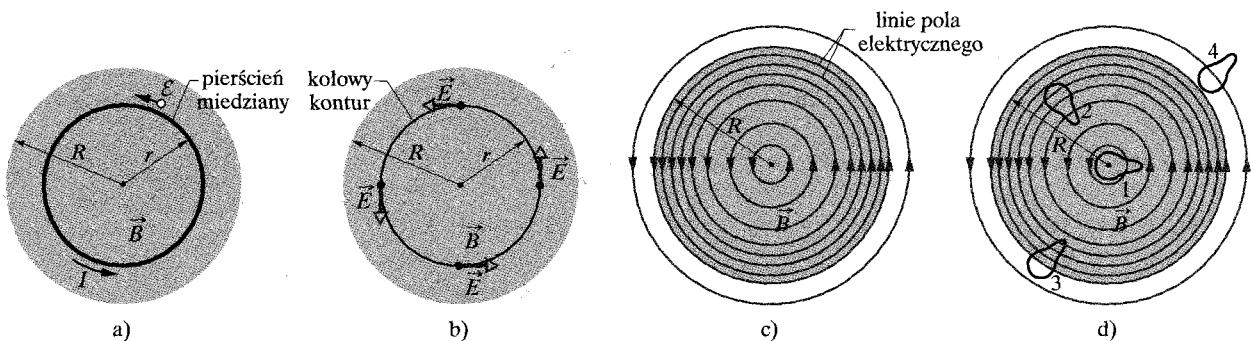
31.6. Indukowane pola elektryczne

Wyobraź sobie, że pierścień miedziany o promieniu r umieszczać w jednorodnym zewnętrznym polu magnetycznym, jak pokazano na rysunku 31.13a. Pole zajmuje walcowy obszar o promieniu R , przy czym pomijamy pola rozproszone. Przypuśćmy, że zwiększamy ze stałą szybkością wartość indukcji magnetycznej, być może zwiększając odpowiednio natężenie prądu w uzwojeniu elektromagnesu, który to pole wytwarza. Strumień magnetyczny wewnętrz pierścienia będzie się również zmieniał ze stałą szybkością i zgodnie z prawem Faradaya w pierścieniu pojawi się indukowana SEM, a więc popłynie prąd indukowany. Na podstawie reguły Lenza możemy wywnioskować, że kierunek prądu indukowanego na rysunku 31.13a będzie przeciwny do ruchu wskaźówek zegara.

Jeżeli w pierścieniu miedzianym płynie prąd, to wzduż tego pierścienia musi istnieć pole elektryczne, które jest potrzebne, aby wykonać pracę przy przemieszczaniu elektronów przewodnictwa. Co więcej, źródłem tego pola elektrycznego



Rys. 31.12. a) Podczas usuwania przewodzącej płyty z obszaru pola magnetycznego indukują się w niej *prądy wirowe*. Pokazano umowny obwód zamknięty, w którym płynie prąd wirowy.
b) Przewodząca płyta może wachać się wokół osi, przechodząc przez obszar pola magnetycznego. Gdy płyta dostaje się w obszar pola lub go opuszcza, indukują się w niej prądy wirowe



Rys. 31.13. a) Gdy indukcja magnetyczna zwiększa się ze stałą szybkością, w pierścieniu miedzianym o promieniu r pojawia się prąd indukowany o stałym natężeniu. b) Indukowane pole elektryczne istnieje nawet wtedy, gdy usuniemy pierścień. Pole elektryczne pokazane jest w czterech punktach. c) Całkowity rozkład pola elektrycznego, przedstawiony w postaci linii pola. d) Cztery podobne kontury zamkniete o takim samym polu powierzchni. Wzdłuż konturów 1 i 2, które leżą całkowicie w obszarze zmieniającego się pola magnetycznego, indukują się jednakowe SEM. Mniejsza SEM jest indukowana wzdłuż konturu 3, który tylko częściowo leży w tym obszarze. Natomiast SEM nie jest indukowana wzdłuż konturu 4, który znajduje się całkowicie poza obszarem pola magnetycznego

musi być zmienny strumień magnetyczny. To **indukowane pole elektryczne** \vec{E} rzeczywiście istnieje, podobnie jak pole elektryczne, wytworzone przez ładunki nieruchome. Obydwu pola działają siłą $q_0 \vec{E}$ na cząstkę o ładunku q_0 .

Rozumując w ten sposób, dochodzimy do użytecznego i pouczającego sformułowania prawa indukcji Faradaya:

► Zmienne pole magnetyczne wytwarza pole elektryczne.

Uderzającą cechą tego sformułowania jest to, że pole elektryczne jest indukowane nawet wtedy, gdy nie ma pierścienia miedzianego.

Aby uściślić te pojęcia, przeanalizujmy rysunek 31.13b, który jest bardzo podobny do rysunku 31.13a, z wyjątkiem tego, że miedziany pierścień został zastąpiony kołowym konturem o promieniu r . Podobnie jak poprzednio zakładamy, że wartość indukcji magnetycznej \vec{B} rośnie ze stałą szybkością $d\vec{B}/dt$. Z właściwości symetrii wynika, że wektor natężenia pola elektrycznego, indukowanego w różnych punktach konturu musi być do niego styczny, jak pokazano na rysunku 31.13b¹. Zatem kołowy kontur jest jednocześnie linią pola. Kontur o promieniu r nie jest czymś szczególnym, tak więc linie pola elektrycznego wytworzonego przez zmieniające się pole magnetyczne muszą tworzyć układ współśrodkowych okręgów, jak pokazano na rysunku 31.13c.

Gdy wartość indukcji magnetycznej rośnie w czasie, istnieje pole elektryczne, przedstawione na rysunku 31.13c w postaci linii pola o kształcie okręgów. Gdy wartość indukcji magnetycznej jest stała w czasie, pole elektryczne nie jest indukowane. Gdy wartość indukcji magnetycznej maleje w czasie (ze stałą szybkością), linie pola elektrycznego są znów współśrodkowymi okręgami, jak na rysunku 31.13c, ale tym razem są skierowane przeciwnie. To właśnie mamy na myśli, mówiąc: „Zmienne pole magnetyczne wytwarza pole elektryczne”.

¹Z właściwości symetrii wynika, że możliwe jest także, aby linie pola \vec{E} były skierowane radialnie, a nie stycznie do konturu. Jednakże istnienie takich radialnych linii oznaczałoby, że wokół osi symetrii istnieją rozłożone symetrycznie swobodne ładunki, na których mogłyby się zaczynać i kończyć linie pola elektrycznego. Takich ładunków jednak nie ma.

Nowe sformułowanie prawa Faradaya

Wyobraźmy sobie cząstkę o ładunku q_0 , poruszającą się po kołowym torze, przedstawionym na rysunku 31.13b. Praca W , wykonana nad cząstką przez indukowane pole elektryczne, podczas jednego okrążenia wynosi $\mathcal{E}q_0$, gdzie \mathcal{E} jest indukowaną SEM, równą pracy na jednostkę ładunku, wykonanej podczas ruchu ładunku próbnego po okręgu. Z drugiej strony praca jest równa:

$$\int \vec{F} \cdot d\vec{s} = (q_0 E)(2\pi r), \quad (31.18)$$

gdzie $q_0 E$ jest wartością siły, działającej na ładunek próbny, a $2\pi r$ jest długością drogi, wzdłuż której ta siła działa. Porównując obydwa wyrażenia określające pracę W i skracając q_0 po obydwu stronach, otrzymujemy:

$$\mathcal{E} = 2\pi r E. \quad (31.19)$$

Możemy napisać równanie (31.18) w bardziej ogólnej postaci, która umożliwia obliczenie pracy, wykonanej nad cząstką o ładunku q_0 , poruszającą się wzdłuż dowolnego konturu zamkniętego:

$$W = \oint \vec{F} \cdot d\vec{s} = q_0 \oint \vec{E} \cdot d\vec{s}. \quad (31.20)$$

(Kółko oznacza, że należy wykonać całkowanie wzdłuż konturu zamkniętego). Podstawiając $\mathcal{E}q_0$ zamiast W , otrzymujemy:

$$\mathcal{E} = \oint \vec{E} \cdot d\vec{s}. \quad (31.21)$$

Ta całka redukuje się do wyrażenia (31.19), jeśli obliczymy ją w szczególnym przypadku, przedstawionym na rysunku 31.13b.

Równanie (31.21) pozwala na rozszerzenie pojęcia indukowanej SEM. Dotychczas indukowana SEM oznaczała pracę na jednostkę ładunku, wykonaną w celu podtrzymywania prądu, indukowanego przez zmienny strumień magnetyczny. Indukowana SEM mogła również oznaczać pracę na jednostkę ładunku, wykonaną nad naładowaną cząstką, poruszającą się po torze zamkniętym, w zmiennym polu magnetycznym. Jednakże z równania (31.21) i z rysunku 31.13b wynika, że indukowana SEM może istnieć również wtedy, gdy nie ma prądu ani cząstki. Indukowana SEM jest sumą (a właściwie całką) wielkości $\vec{E} \cdot d\vec{s}$, obliczoną wzdłuż zamkniętego konturu, gdzie \vec{E} jest polem elektrycznym, indukowanym przez zmienne pole magnetyczne, a $d\vec{s}$ jest wektorowym elementem długości wzdłuż konturu zamkniętego.

Łącząc równanie (31.21) oraz prawo Faradaya (31.6) ($\mathcal{E} = -d\Phi_B/dt$), możemy napisać to prawo w postaci:

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{s} = -\frac{d\Phi_B}{dt} \quad (\text{prawo Faradaya}). \quad (31.22)$$

To równanie oznacza po prostu, że zmienne pole magnetyczne indukuje pole elektryczne. Zmienne pole magnetyczne występuje po prawej stronie tego równania, a pole elektryczne — po lewej.

Prawo Faradaya w postaci równania (31.22) może być zastosowane do *dowolnego* zamkniętego konturu, który można narysować w zmiennym polu magnetycznym. Na rysunku 31.13d przedstawiono przykładowo cztery takie kontury, o takim samym kształcie i polu powierzchni, umieszczone w różnych miejscach w zmiennym polu magnetycznym. Dla konturów 1 i 2 indukowane SEM \mathcal{E} ($= \oint \vec{E} \cdot d\vec{s}$) są takie same, gdyż obydwa kontury leżą całkowicie w obszarze pola magnetycznego i dlatego $d\Phi_B/dt$ ma w obydwu przypadkach taką samą wartość. Ten wniosek jest prawdziwy, mimo iż wektory natężenia pola elektrycznego w punktach, położonych wzdłuż każdego z konturów są różne, jak wskazują kształty linii pola elektrycznego na rysunku. Dla konturu 3 indukowana SEM ma mniejszą wartość, gdyż wartość strumienia Φ_B , objętego konturem (a więc i wartość $d\Phi_B/dt$) jest mniejsza. Dla konturu 4 indukowana SEM jest równa zeru, mimo iż w każdym punkcie konturu istnieje pole elektryczne.

Nowe spojrzenie na potencjał elektryczny

Indukowane pola elektryczne są wytwarzane nie przez ładunki nieruchome (stacyczne), tylko przez zmienny strumień magnetyczny. Choć pola elektryczne, wytwarzane tymi dwoma sposobami, działają tak samo na cząstki naładowane, istnieje między nimi ważna różnica. Najprostszym przejawem tej różnicy jest fakt, że linie indukowanego pola elektrycznego tworzą zamknięte pętle, jak na rysunku 31.13c, natomiast linie pola wytworzonych przez ładunki statyczne nigdy nie są zamknięte, gdyż muszą zaczynać się na ładunkach dodatnich, a kończyć na ładunkach ujemnych.

Ogólnie mówiąc, różnica między polami elektrycznymi, wytwarzanymi przez indukcję i przez ładunki statyczne może być określona następująco:

- Potencjał elektryczny można zdefiniować tylko dla pól elektrycznych wytwarzanych przez ładunki statyczne. Nie można go zdefiniować dla pól elektrycznych wytwarzanych przez indukcję.

To stwierdzenie może być zrozumiałe, jeśli rozważymy, co dzieje się z naładowaną cząstką, która wykonuje jedno okrążenie po kołowym torze, przedstawionym na rysunku 31.13b. Cząstka wyruszyła z pewnego punktu i po powrocie do tego samego punktu okazało się, że działała na nią SEM \mathcal{E} o wartości np. 5 V. Oznacza to, że nad cząstką została wykonana praca, równa 5 J na każdy 1 C jej ładunku ($1 \text{ V} = 1 \text{ J}/1 \text{ C}$), a więc cząstka powinna znaleźć się teraz w punkcie o potencjale większym o 5 V. Jednakże jest to niemożliwe, gdyż cząstka znajduje się z powrotem w tym samym punkcie, w którym potencjał nie może mieć przecież jednocześnie dwóch różnych wartości. Wynika stąd wniosek, że potencjału nie można zdefiniować dla pól elektrycznych, wytworzonych przez zmienne pola magnetyczne.

Możemy spojrzeć na to bardziej ogólnie, przytaczając równanie (25.18), które definiuje różnicę potencjałów między punktem początkowym a końcowym w polu elektrycznym \vec{E} :

$$V_{\text{końc}} - V_{\text{pocz}} = - \int_{\text{pocz}}^{\text{końc}} \vec{E} \cdot d\vec{s}. \quad (31.23)$$

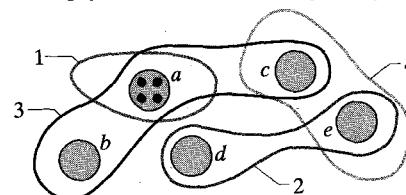
W rozdziale 25 nie mówiliśmy jeszcze o prawie indukcji Faradaya, tak więc pola elektryczne, zastosowane do wyprowadzenia równania (25.18) pochodziły od ładunków statycznych. Jeśli w równaniu (31.23) punkt początkowy pokrywa się z punktem końcowym, to łączący je kontur jest zamkniętą pętlą, wartości V_{pocz} i $V_{\text{końc}}$ są takie same, a równanie (31.23) redukuje się do:

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{s} = 0. \quad (31.24)$$

Jednakże w obecności zmiennego strumienia magnetycznego ta całka *nie jest* równa零, ale zgodnie z równaniem (31.22) jest równa $-d\Phi_B/dt$. Zatem przypisanie potencjału elektrycznego indukowanemu polu elektrycznemu doprowadziło nas do sprzeczności. Wynika stąd wniosek, że potencjał elektryczny nie ma sensu fizycznego dla pól elektrycznych, związanych ze zjawiskiem indukcji.

SPRAWDZIAN 4: Na rysunku przedstawiono pięć oznaczonych literami obszarów, w których istnieje jednorodne pole magnetyczne, skierowane albo przed płaszczyznę rysunku (jak w obszarze a), albo za płaszczyznę rysunku. Wartość indukcji magnetycznej rośnie z tą samą stałą szybkością we wszystkich pięciu obszarach. Przekroje wszystkich obszarów mają jednakowe pola. Na rysunku przedstawiono również cztery po numerowane tory, wzdłuż których całka $\oint \vec{E} \cdot d\vec{s}$ ma wartość podaną niżej w pewnych jednostkach. Ustal, czy pola magnetyczne w obszarach $b-e$ są skierowane za, czy przed płaszczyznę rysunku.

| Tor: | 1 | 2 | 3 | 4 |
|--------------------------------|--------|--------|--------|---|
| $\oint \vec{E} \cdot d\vec{s}$ | 1 jed. | 2 jed. | 3 jed. | 0 |



Przykład 31.4

Przyjmij, że na rysunku 31.13b $R = 8,5$ cm, a $dB/dt = 0,13$ T/s.

a) Znajdź wyrażenie, określające wartość natężenia E indukowanego pola elektrycznego w punktach, znajdujących się w obszarze pola magnetycznego, w odległości r od środka. Oblicz wartość tego wyrażenia dla $r = 5,2$ cm.

ROZWIAZANIE:

Zgodnie z prawem Faradaya, pole elektryczne jest indukowane przez zmienne pole magnetyczne. Aby obliczyć wartość natężenia pola E , stosujemy prawo Faradaya w postaci równania (31.22). Naszym celem jest wyznaczenie natężenia E w punktach, leżących w obszarze pola magnetycznego, dlatego wybieramy kołowy kontur całkowania o promieniu $r \leq R$. Korzystając z właściwości symetrii, można przyjąć, że natężenie pola \vec{E} na rysunku 31.13b jest w każdym punkcie styczne do konturu. Wektorowy element długości $d\vec{s}$ jest również wszędzie styczny do konturu, więc iloczyn skalarny $\vec{E} \cdot d\vec{s}$ w równaniu (31.22) musi mieć wartość Eds we wszystkich punktach tego konturu. Możemy także przyjąć, korzystając z właściwości symetrii, że natężenie E ma

taką samą wartość we wszystkich punktach kołowego konturu całkowania. Zatem lewa strona równania (31.22) przyjmuje postać:

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{s} = \oint Eds = E \oint ds = E(2\pi r). \quad (31.25)$$

(Całka $\oint ds$ jest równa obwodowi $2\pi r$ kołowego konturu całkowania).

W kolejnym etapie musimy obliczyć prawą stronę równania (31.22). Indukcja \vec{B} pola, przechodzącego przez powierzchnię S , objętą konturem całkowania jest stała i skierowana prostopadle do tej powierzchni, zatem strumień magnetyczny jest dany równaniem (31.4):

$$\Phi_B = BS = B(\pi r^2). \quad (31.26)$$

Podstawiając to równanie oraz równanie (31.25) do równania (31.22) i opuszczając znak minus, otrzymujemy:

$$E(2\pi r) = (\pi r^2) \frac{dB}{dt},$$

czyli

$$E = \frac{r}{2} \frac{dB}{dt}. \quad (\text{odpowiedź}) \quad (31.27)$$

Równanie (31.27) określa wartość natężenia pola elektrycznego w dowolnym punkcie, dla którego $r \leq R$, czyli w obszarze, w którym istnieje pole magnetyczne. Podstawiając dane, otrzymujemy wartość natężenia pola \vec{E} dla $r = 5,2$ cm:

$$E = \frac{(5,2 \cdot 10^{-2} \text{ m})}{2} (0,13 \text{ T/s}) = 0,0034 \text{ V/m} = 3,4 \text{ mV/m}. \quad (\text{odpowiedź})$$

b) Znajdź wyrażenie, określające wartość natężenia E indukowanego pola elektrycznego w punktach, znajdujących się poza obszarem pola magnetycznego, w odległości r od środka. Oblicz wartość tego wyrażenia dla $r = 12,5$ cm.

ROZWIĄZANIE:

1. Możemy również tutaj zastosować rozumowanie przedstawione w punkcie (a), z tym wyjątkiem, że wybieramy kontur całkowania o promieniu $r \geq R$, gdyż zamierzamy obliczyć wartość natężenia E w punktach, znajdujących się poza obszarem pola magnetycznego. Postępując, jak w punkcie (a), otrzymamy znów równanie (31.25), jednak równanie (31.26) przyjmuje inną postać, gdyż kontur całkowania znajduje się teraz poza obszarem pola magnetycznego.

2. Wykorzystujemy więc fakt, że strumień magnetyczny, objęty przez nowy kontur jest strumieniem przechodzącym przez powierzchnię πR^2 obszaru pola magnetycznego. Dlatego:

$$\Phi_B = BS = B(\pi R^2). \quad (31.28)$$

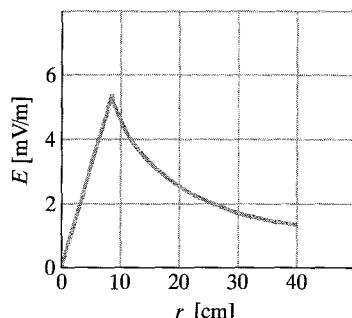
Podstawiając to równanie i równanie (31.25) do równania (31.22) (bez znaku minus), a następnie rozwiązuje je względem E , otrzymujemy

$$E = \frac{R^2}{2r} \frac{dB}{dt}. \quad (\text{odpowiedź}) \quad (31.29)$$

Ponieważ E nie jest równe零, widzimy, że pole elektryczne jest indukowane również w punktach poza obszarem zmiennego pola magnetycznego. Jest to ważny wynik, dzięki któremu (jak się przekonamy w paragrafie 33.11) możliwe jest działanie transformatora. Po podstawieniu danych, z równania (31.29) otrzymujemy wartość E dla $r = 12,5$ cm:

$$E = \frac{(8,5 \cdot 10^{-2} \text{ m})^2}{(2)(12,5 \cdot 10^{-2} \text{ m})} (0,13 \text{ T/s}) = 3,8 \cdot 10^{-3} \text{ V/m} \\ = 3,8 \text{ mV/m}. \quad (\text{odpowiedź})$$

Równania (31.27) i (31.29) muszą dać i oczywiście dają ten sam wynik dla $r = R$. Na rysunku 31.14 przedstawiono wykres $E(r)$, wykonany na podstawie tych dwóch równań.



Rys. 31.14. Wykres natężenia indukowanego pola elektrycznego $E(r)$ dla danych jak w przykładzie 31.4

31.7. Cewki i indukcyjność

Przekonaliśmy się w rozdziale 26, że kondensator może służyć do wytworzenia pola elektrycznego o zadanej z góry wartości natężenia. Przyjęliśmy wtedy układ równoległych płyt, jako podstawowy rodzaj kondensatora. Podobnie **cewka**, oznaczona na schemacie obwodu symbolem , może być zastosowana do wytworzenia pola magnetycznego o zadanej wartości indukcji. Będziemy traktować długi solenoid (dokładniej: krótki odcinek w pobliżu środka długiego solenoidu) jako podstawowy rodzaj cewki.

Jeżeli przepuścimy prąd o natężeniu I przez uzwojenie cewki (solenoidu), to prąd wytworzy strumień magnetyczny Φ_B w środkowej części cewki. **Indukcyjność** cewki definiujemy jako:

$$L = \frac{N\Phi_B}{I} \quad (\text{definicja indukcyjności}), \quad (31.30)$$

gdzie N jest liczbą zwojów. O uzwojeniu cewki mówimy, że jest *sprzężone* przez wspólny strumień, a iloczyn $N\Phi_B$ nazywamy *magnetycznym strumieniem*.

sprzężonym. Indukcyjność L jest zatem miarą strumienia sprzężonego, wytworzzonego przez cewkę na jednostkę natężenia prądu.

Jednostką strumienia magnetycznego w układzie SI jest tesla razy metr kwadratowy, zatem jednostką indukcyjności jest tesla razy metr kwadratowy na amper ($T \cdot m^2/A$). Taka jednostka nosi nazwę **henr** (H), od nazwiska amerykańskiego fizyka Josepha Henry'ego, niezależnego odkrywcy prawa indukcji, współczesnego Faradayowi. Zatem:

$$1 \text{ henr} = 1 \text{ H} = 1 \text{ T} \cdot \text{m}^2/\text{A}. \quad (31.31)$$

Do końca tego rozdziału będziemy zakładać, że w pobliżu wszystkich omawianych cewek, niezależnie od ich układu przestrzennego, nie ma żadnych materiałów magnetycznych, takich jak żelazo. Takie materiały mogłyby zwiększać pole magnetyczne cewki.

Indukcyjność solenoidu

Przeanalizujmy długi solenoid o polu przekroju równym S . Ile wynosi indukcyjność na jednostkę długości w pobliżu środka tego solenoidu?

Aby zastosować równanie (31.30), definiujące indukcyjność, musimy obliczyć strumień sprzężony, wytworzony przez prąd o danym natężeniu, płynący w uzwojeniu solenoidu. Rozważmy odcinek solenoidu o długości l , znajdujący się w pobliżu jego środka. Strumień sprzężony w tej części solenoidu jest równy:

$$N\Phi_B = (nl)(BS),$$

gdzie n jest liczbą zwojów na jednostkę długości solenoidu, a B jest wartością indukcji magnetycznej we wnętrzu solenoidu.

Wartość indukcji B jest dana równaniem (30.25):

$$B = \mu_0 In,$$

tak więc z równania (31.30) otrzymujemy:

$$L = \frac{N\Phi_B}{I} = \frac{(nl)(BS)}{I} = \frac{(nl)(\mu_0 In)(S)}{I} = \mu_0 n^2 l S. \quad (31.32)$$

Zatem indukcyjność na jednostkę długości dla długiego solenoidu w pobliżu jego środka wynosi:

$$\frac{L}{l} = \mu_0 n^2 S \quad (\text{solenoid}). \quad (31.33)$$

Indukcyjność, podobnie jak pojemność, zależy tylko od kształtu elementu. Zależność od kwadratu liczby zwojów na jednostkę długości jest czymś, czego należało się spodziewać. Jeżeli np. zwiększymy trzykrotnie n , to nie tylko zwiększymy trzykrotnie liczbę zwojów, ale również zwiększymy trzykrotnie strumień ($\Phi_B = BS = \mu_0 In S$) przechodzący przez każdy zwój, mnożąc w ten sposób strumień sprzężony, a więc i indukcyjność L , przez czynnik 9.

Jeżeli długość solenoidu jest znacznie większa od jego promienia, to wyrażenie (31.32) jest dobrym przybliżeniem indukcyjności solenoidu. To przybliżenie nie uwzględnia rozchodzenia się linii pola magnetycznego w pobliżu końców

solenoidu, tak samo jak wzór na pojemność kondensatora płaskiego ($C = \varepsilon_0 S/d$) nie uwzględnia rozproszonych pól elektrycznych w pobliżu brzegów płytka kondensatora.

Pamiętając, że n jest liczbą zwojów na jednostkę długości, wnioskujemy z równania (31.32), że indukcyjność może być zapisana jako iloczyn przenikalności magnetycznej μ_0 i wielkości o wymiarze długości. Oznacza to, że μ_0 może być wyrażone w henrach na metr:

$$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ T} \cdot \text{m/A} = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ H/m}. \quad (31.34)$$

31.8. Samoindukcja

Jeżeli dwie cewki znajdują się blisko siebie, to prąd o natężeniu I , płynący w jednej z nich wytwarza strumień magnetyczny Φ_B , przechodzący również przez drugą cewkę. Przekonaliśmy się, że jeśli zmienimy ten strumień, zmieniając natężenie prądu, to zgodnie z prawem Faradaya w drugiej cewce pojawi się indukowana SEM. Jednak indukowana SEM pojawi się również w pierwszej cewce.

Indukowana SEM \mathcal{E}_L występuje w każdej cewce, w której natężenie prądu się zmienia.

Takie zjawisko (patrz rys. 31.15) nazywamy **samoindukcją**, a pojawiającą się SEM jest nazywana **SEM samoindukcji**. Podlega ona prawu Faradaya tak samo jak każda indukowana SEM. Z równania (31.30) wynika, że dla dowolnej cewki:

$$N\Phi_B = LI. \quad (31.35)$$

Z prawa Faradaya wynika, że:

$$\mathcal{E}_L = -\frac{d(N\Phi_B)}{dt}. \quad (31.36)$$

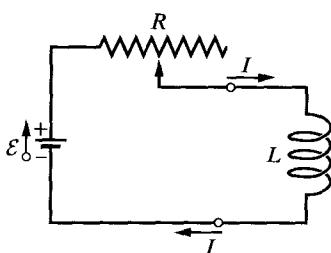
Łącząc równania (31.35) i (31.36), możemy napisać:

$$\mathcal{E}_L = -L \frac{dI}{dt} \quad (\text{SEM samoindukcji}). \quad (31.37)$$

Tak więc w dowolnej cewce, solenoidzie lub toroidzie pojawi się SEM samoindukcji, jeżeli tylko natężenie prądu zmienia się w czasie. Wartość natężenia prądu nie wpływa na wartość indukowanej SEM, istotna jest natomiast szybkość zmian natężenia prądu.

Kierunek SEM samoindukcji wynika z reguły Lenza. Znak minus w równaniu (31.37) wskazuje, że zgodnie z tą regułą SEM samoindukcji \mathcal{E}_L ma taki kierunek, aby przeciwdziałać zmianie natężenia prądu I . Znak minus możemy opuścić, jeżeli interesuje nas tylko wartość bezwzględna \mathcal{E}_L .

Przypuśćmy, że natężenie I prądu płynącego w cewce rośnie w czasie z szybkością dI/dt (rys. 31.16a). Zgodnie z regułą Lenza ten wzrost natężenia prądu jest „zmianą”, której musi przeciwdziałać się samoindukcja. Aby takie przeciwdziałanie mogło wystąpić, w cewce musi pojawić się SEM samoindukcji,



Rys. 31.15. Jeżeli zmieniamy natężenie prądu w cewce, przesuwając suwak opornika, to podczas zmiany natężenia prądu pojawi się w cewce SEM samoindukcji \mathcal{E}_L

skierowana tak jak na rysunku, aby przeciwwieścić się wzrostowi natężenia prądu. Jeżeli natężenie prądu będzie mało (rys. 31.16b), to SEM samoindukcji będzie skierowana tak, aby przeciwwieścić się spadkowi natężenia prądu czyli tak jak przedstawiono na rysunku.

Przekonaliśmy się w paragrafie 31.6, że nie możemy zdefiniować potencjału elektrycznego dla pola elektrycznego (a więc i SEM), jeśli te wielkości są indukowane przez zmienny strumień magnetyczny. Oznacza to, że w przypadku SEM samoindukcji, powstającej w cewce na rysunku 31.15, nie możemy określić potencjału wewnętrz cewki, czyli tam, gdzie strumień się zmienia. Jednak nadal możemy definiować potencjał w punktach obwodu, znajdujących się poza cewką, czyli tam, gdzie pola elektryczne zostały wytworzone przez ładunki i związane z nimi potencjały elektryczne.

W szczególności możemy zdefiniować wynikającą z samoindukcji różnicę potencjałów U_L z *obydwu stron cewki*, czyli między jej doprowadzeniami, o których zakładamy, że znajdują się poza obszarem zmieniającego się strumienia. Jeżeli cewka jest *cewką idealną* (o znikomo małym oporze), to wartość U_L jest równa wartości SEM samoindukcji \mathcal{E}_L .

Jeżeli natomiast uzwojenie cewki ma opór r , zastępujemy w myśli cewkę cewką idealną o SEM samoindukcji równej \mathcal{E}_L oraz opornikiem r (który znajduje się poza obszarem zmieniającego się strumienia). Podobnie, jak w przypadku rzeczywistego źródła o SEM \mathcal{E} i oporze wewnętrznym r , różnica potencjałów na zaciskach rzeczywistej cewki różni się od jej SEM. Jeżeli nie powiemy wprost, że cewki są rzeczywiste, to będziemy zakładać, że cewki omawiane tutaj są cewkami idealnymi.

SPRAWDZIAN 5: Na rysunku przedstawiono SEM \mathcal{E} indukowaną w cewce. Który z podpunktów opisuje poprawnie prąd płynący w cewce: a) stały i skierowany w prawo, b) stały i skierowany w lewo, c) rosnący i skierowany w prawo, d) malejący i skierowany w prawo, e) rosnący i skierowany w lewo, f) malejący i skierowany w lewo?



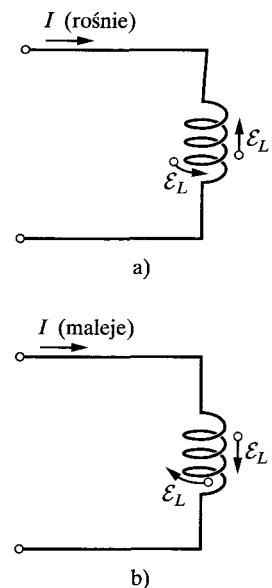
31.9. Obwody RL

Z paragrafu 28.8 dowiedziałeś się, że jeśli nagle przyłożymy SEM \mathcal{E} do obwodu o jednym oczku zawierającym opornik R i kondensator C , to ładunek na kondensatorze nie osiągnie natychmiast swojej wartości $C\mathcal{E}$ w stanie równowagi, ale będzie zmierzał do niej w sposób wykładniczy:

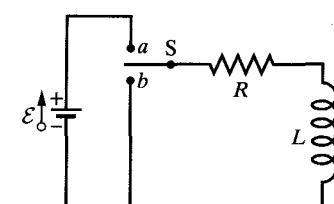
$$q = C\mathcal{E}(1 - e^{-t/\tau_C}). \quad (31.38)$$

Szybkość gromadzenia się ładunku jest określona pojemnościową stałą czasową τ_C , zdefiniowaną w równaniu (28.33) jako:

$$\tau_C = RC. \quad (31.39)$$



Rys. 31.16. a) Natężenie prądu I rośnie, a w cewce powstaje SEM samoindukcji \mathcal{E}_L i ma taki kierunek, że przeciwwieścić się wzrostowi natężenia prądu. Strzałkę oznaczającą \mathcal{E}_L możemy narysować wzduż pojedynczego zwoju cewki lub obok cewki. Obie możliwości są pokazane na rysunku. b) Natężenie prądu I maleje, a SEM samoindukcji ma taki kierunek, że przeciwwieścić się spadkowi natężenia prądu



Rys. 31.17. Obwód RL . Gdy klucz S jest połączony z punktem a , natężenie prądu rośnie i dąży do granicznej wartości \mathcal{E}/R

Jeżeli nagle odłączymy SEM od tego samego obwodu, to ładunek nie zniknie natychmiast, ale będzie zmierał do zera w sposób wykładniczy:

$$q = q_0 e^{-t/\tau_C}. \quad (31.40)$$

Stała czasowa τ_C opisuje zarówno zanikanie, jak i gromadzenie się ładunku.

Podobne opóźnienie wzrostu (lub spadku) natężenia prądu pojawi się podczas włączania (lub wyłączania) SEM \mathcal{E} w obwodzie o jednym oczku złożonym z opornika R i cewki L . Na przykład gdy klucz S na rysunku 31.17 zamyka obwód w punkcie a , natężenie prądu w oporniku zaczyna rosnąć. Gdyby nie było cewki, natężenie prądu wzrosłoby bardzo szybko do stałej wartości \mathcal{E}/R . Jednak ze względu na obecność cewki, w obwodzie pojawia się SEM samoindukcji \mathcal{E}_L . Zgodnie z regułą Lenza, ta SEM przeciwwstawia się wzrostowi natężenia prądu, co oznacza, że jest przeciwnie skierowana niż SEM źródła. Tak więc prąd w oporniku płynie pod wpływem różnicy dwóch SEM, jednej stałej \mathcal{E} źródła i drugiej zmiennej $\mathcal{E}_L (= -LdI/dt)$, wynikającej z samoindukcji. Tak długo, jak długo istnieje \mathcal{E}_L , natężenie prądu płynącego przez opornik będzie mniejsze niż \mathcal{E}/R .

Wraz z upływem czasu natężenie prądu rośnie coraz wolniej, a wartość SEM samoindukcji, proporcjonalna do dI/dt , maleje. Zatem natężenie prądu w obwodzie zmierza asymptotycznie do wartości \mathcal{E}/R .

Możemy uogólnić ten wynik w sposób następujący:

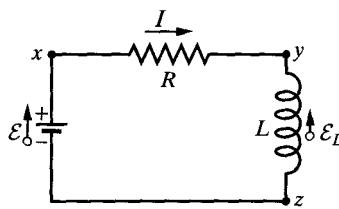
► Początkowo cewka przeciwdziała zmianom natężenia płynącego przez nią prądu. Po dłuższym czasie cewka działa jak zwykły przewód, łączący elementy obwodu.

Zbadamy teraz to zjawisko od strony ilościowej. Jeżeli klucz na rysunku 31.17 zamyka obwód w punkcie a , to obwód jest równoważny obwodowi, przedstawionemu na rysunku 31.18. Zastosujemy do tego obwodu drugie prawo Kirchhoffa, wychodząc z punktu x na rysunku i poruszając się, podobnie jak płynie prąd o natężeniu I , w kierunku zgodnym z ruchem wskazówek zegara.

- Opornik.* Poruszamy się wzduż opornika, zgodnie z kierunkiem prądu o natężeniu I , tak więc potencjał elektryczny maleje o IR . Zatem przechodząc od punktu x do punktu y , obserwujemy zmianę potencjału, równą $-IR$.
- Cewka.* Natężenie prądu I ulega zmianie, tak więc w cewce pojawia się SEM samoindukcji \mathcal{E}_L . Wartość bezwzględna \mathcal{E}_L wynika z równania (31.37) i wynosi LdI/dt . Na rysunku 31.18 \mathcal{E}_L jest skierowane do góry, gdyż prąd płynie w dół przez cewkę, a jego natężenie I rośnie. Zatem przechodząc od punktu y do punktu z , a więc przeciwnie do kierunku \mathcal{E}_L , obserwujemy zmianę potencjału, równą $-LdI/dt$.
- Źródło.* Wracając od punktu z do punktu wyjścia x , obserwujemy zmianę potencjału, równą $+\mathcal{E}$, związaną z SEM źródła.

Tak więc z drugiego prawa Kirchhoffa wynika, że:

$$-IR - L \frac{dI}{dt} + \mathcal{E} = 0,$$



Rys. 31.18. Obwód przedstawiony na rysunku 31.17, z kluczem, ustalonym w położeniu a . Stosujemy drugie prawo Kirchhoffa w kierunku zgodnym z ruchem wskazówek zegara, zaczynając w punkcie x .

czyli

$$L \frac{dI}{dt} + RI = \mathcal{E} \quad (\text{obwód } RL). \quad (31.41)$$

Równanie (31.41) jest równaniem różniczkowym zawierającym zmienną I oraz jej pierwszą pochodną dI/dt . Aby rozwiązać to równanie, poszukujemy takiej funkcji $I(t)$, która po podstawieniu $I(t)$ i jej pierwszej pochodnej spełnia równanie (31.41), a także spełnia warunek początkowy $I(0) = 0$.

Równanie (31.41), wraz z warunkiem początkowym, ma dokładnie taką samą postać, jak równanie (28.29), opisujące obwód RC , jeżeli q zastąpimy przez I , R przez L , a $1/C$ przez R . Rozwiązywanie równania (31.41) musi więc mieć dokładnie taką samą postać jak rozwiązanie równania (28.30), jeśli dokonamy tych samych podstawiennień. To rozwiązanie jest dane wyrażeniem:

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R}(1 - e^{-Rt/L}), \quad (31.42)$$

które możemy napisać jako:

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R}(1 - e^{-t/\tau_L}), \quad (\text{wzrost natężenia prądu}). \quad (31.43)$$

Indukcyjna stała czasowa τ_L jest równa:

$$\tau_L = \frac{L}{R} \quad (\text{stała czasowa}). \quad (31.44)$$

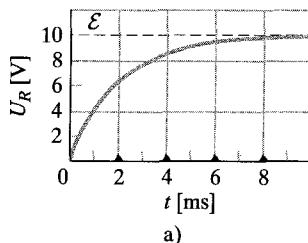
Przeanalizujmy wyrażenie (31.43) w dwóch przypadkach: w chwili zamknięcia klucza ($t = 0$) oraz po upływie długiego czasu od zamknięcia klucza ($t \rightarrow \infty$). Jeżeli podstawimy $t = 0$ do równania (31.43), to funkcja wykładnicza przyjmie wartość $e^{-0} = 1$. Tak więc z równania (31.43) wynika, że natężenie prądu jest w chwili początkowej równe $I = 0$, czego należało się spodziewać. Jeśli następnie będziemy zmierzać z t do nieskończoności, to funkcja wykładnicza będzie zmierzać do $e^{-\infty} = 0$. Zatem z równania (31.43) wynika, że natężenie prądu zmierza do wartości stanu ustalonego \mathcal{E}/R .

Mozemy także przeanalizować różnice potencjałów, występujące w obwodzie. Na rysunku 31.19 pokazano, jak zmienia się w czasie różnica potencjałów U_R ($= IR$) na oporniku i różnica potencjałów U_L ($= LdI/dt$) na cewce, dla pewnych szczególnych wartości \mathcal{E} , L i R . Porównaj ten rysunek z analogicznym rysunkiem dla obwodu RC (rys. 28.14).

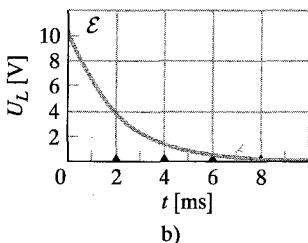
Aby wykazać, że wielkość τ_L ($= L/R$) ma wymiar czasu, przekształcamy jednostkę henr na om w następujący sposób:

$$1 \frac{\text{H}}{\Omega} = 1 \frac{\text{H}}{\Omega} \left(\frac{1 \text{ V} \cdot \text{s}}{1 \text{ H} \cdot \text{A}} \right) \left(\frac{1 \text{ } \Omega \cdot \text{A}}{1 \text{ V}} \right) = 1 \text{ s.}$$

Wyrażenie w pierwszym nawiasie jest wspólnikiem przeliczeniowym, wynikającym z równania (31.37), natomiast wyrażenie w drugim nawiasie jest wspólnikiem przeliczeniowym, wynikającym z zależności $U = IR$.



a)



b)

Rys. 31.19. Zależność od czasu: a) różnicy potencjałów U_R na oporniku, w obwodzie przedstawionym na rysunku 31.18, b) różnicy potencjałów U_L na cewce w tym samym obwodzie. Małe trójkątki przedstawiają kolejne przedziały czasowe, równe indukcyjnej stałej czasowej $\tau_L = L/R$. Wykres został sporządzony dla $R = 2000 \Omega$, $L = 4 \text{ H}$ oraz $\mathcal{E} = 10 \text{ V}$

Fizyczne znaczenie stałej czasowej wynika z równania (31.43). Jeżeli podstawiemy do tego równania $t = \tau_L = L/R$, to otrzymamy:

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R}(1 - e^{-1}) \approx 0,63 \frac{\mathcal{E}}{R}. \quad (31.45)$$

Tak więc stała czasowa τ_L oznacza czas, jaki musi upływać, aby natężenie prądu w obwodzie osiągnęło około 63% swojej końcowej wartości w stanie ustalonym \mathcal{E}/R . Różnica potencjałów U_R na oporniku jest proporcjonalna do natężenia prądu I , zatem wykres natężenia prądu rosnącego w funkcji czasu ma taki sam kształt, jak wykres U_R na rysunku 31.19a.

Załóżmy, że klucz S zamyka obwód w punkcie a dostatecznie długo, tak aby natężenie prądu osiągnęło stan ustalony \mathcal{E}/R . Jeżeli teraz przestawimy klucz w położenie b , to źródło zostanie odłączone od obwodu. (Przełączenie do punktu b musi w rzeczywistości nastąpić na chwilę przed przerwaniem połączenia z punktem a). Taki klucz jest nazywany kluczem *bezprzerwowym*.

Przy braku źródła, natężenie prądu płynącego przez opornik będzie się zmniejszało. Prąd nie może jednak przestać płynąć natychmiast; jego natężenie będzie stopniowo maleać do zera. Równanie różniczkowe, opisujące zmniejszanie się natężenia można wyprowadzić, podstawiając $\mathcal{E} = 0$ w równaniu (31.41):

$$L \frac{dI}{dt} + IR = 0. \quad (31.46)$$

Rozwiązywanie tego równania różniczkowego, spełniające warunki początkowe $I(0) = I_0 = \mathcal{E}/R$, może być napisane przez analogię do równań (28.35) i (28.36):

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R} e^{-t/\tau_L} = I_0 e^{-t/\tau_L} \quad (\text{zmniejszanie się natężenia prądu}). \quad (31.47)$$

Widzisz, że ta sama stała czasowa τ_L decyduje zarówno o zwiększeniu się natężenia prądu (równanie (31.43)), jak i jego zmniejszaniu (równanie (31.47)).

W równaniu (31.47) I_0 oznacza natężenie prądu w chwili $t = 0$. W naszym przypadku było to \mathcal{E}/R , ale równie dobrze może to być jakakolwiek inna wartość początkowa.

Przykład 31.5

Na rysunku 31.20a przedstawiono obwód, składający się z trzech identycznych oporników o oporze $R = 9 \Omega$, dwóch identycznych cewek o indukcyjności $L = 2 \text{ mH}$ i źródła doskonałego o SEM $\mathcal{E} = 18 \text{ V}$.

- a) Jakie będzie natężenie prądu I , płynącego przez źródło tuż po zamknięciu klucza?

ROZWIĄZANIE:

→ Tuż po zamknięciu klucza, każda cewka będzie usiłowała przeciwdziałać zmianie natężenia płynącego przez nią prądu. Natężenie prądu w każdej z cewek jest równe zeru przed zamknięciem klucza, a więc będzie ono także równe zeru chwilę później. Zatem bezpośrednio po zamknięciu klucza cewka zachowuje się

jak przerwa w obwodzie, co pokazano na rysunku 31.20b. Mamy więc obwód o jednym oczku, dla którego drugie prawo Kirchhoffa daje:

$$\mathcal{E} - IR = 0.$$

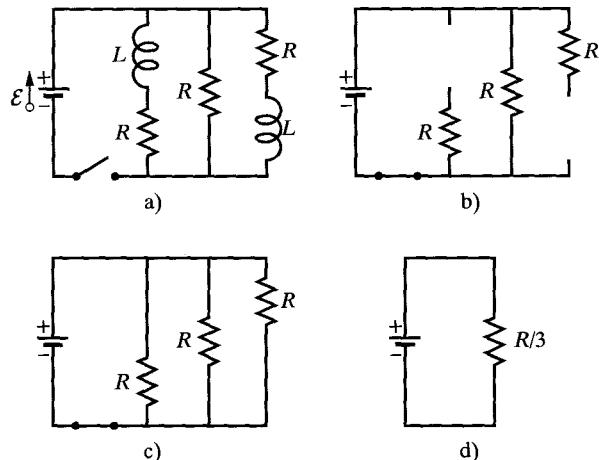
Podstawiając dane, otrzymujemy:

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R} = \frac{18 \text{ V}}{9 \Omega} = 2 \text{ A}. \quad (\text{odpowiedź})$$

- b) Jakie będzie natężenie prądu I , płynącego przez źródło po długim czasie od zamknięcia klucza?

ROZWIĄZANIE:

→ Po długim czasie od zamknięcia klucza natężenia prądów osiągają stan ustalony, a cewki działają jak zwykłe przewody

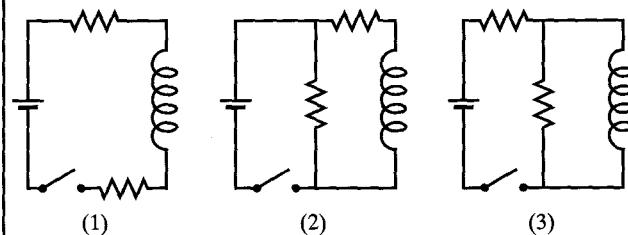


Rys. 31.20. Przykład 31.5. a) Obwód RL o wielu oczkach, z otwartym kluczem. b) Obwód równoważny tuż po zamknięciu klucza. c) Obwód równoważny po upływie długiego czasu. d) Obwód o jednym oczku równoważny obwodowi (c)

połączeniowe, co pokazano na rysunku 31.20c. Mamy więc obwód z trzema identycznymi opornikami, połączonymi równolegle. Z równania (28.20) wynika, że opór równoważny wynosi $R_{rw} = R/3 = (9 \Omega)/3 = 3 \Omega$. Drugie prawo Kirchhoffa dla obwodu równoważnego, pokazanego na rysunku 31.20d, daje $E - IR_{rw} = 0$, stąd:

$$I = \frac{E}{R_{rw}} = \frac{18 \text{ V}}{3 \Omega} = 6 \text{ A.} \quad (\text{odpowiedź})$$

SPRAWDZIAN 6: Na rysunku przedstawiono trzy obwody, składające się z takich samych źródeł, cewek i oporników. Uszereguj obwody ze względu na natężenia prądu płynącego przez źródło: a) tuż po zamknięciu klucza, b) po upływie długiego czasu, rozpoczynając od największej wartości.



Przykład 31.6

Solenoid ma indukcyjność 53 mH i opór $0,37 \Omega$. Ile czasu upłynie do momentu, w którym natężenie prądu osiągnie połowę końcowej wartości w stanie ustalonym, jeżeli solenoid dołączymy do źródła?

ROZWIAZANIE:

○ 1. Możemy w myśl podzielić solenoid na opór i indukcyjność, połączone szeregowo ze źródłem, jak na rysunku 31.18. Zastosowanie drugiego prawa Kirchhoffa prowadzi wtedy do równania (31.41), którego rozwiązaniem jest wyrażenie (31.43), opisujące natężenie prądu I w obwodzie.

○ 2. Zgodnie z tym rozwiązaniami, natężenie prądu I rośnie wykładniczo od zera do końcowej wartości w stanie ustalonym E/R . Niech t_0 oznacza czas potrzebny do tego, aby natężenie prądu I osiągnęło połowę wartości końcowej. Z równania (31.43) otrzymujemy wówczas:

$$\frac{1}{2} \frac{E}{R} = \frac{E}{R} (1 - e^{-t_0/\tau_L}).$$

Rozwiązujeśmy to równanie względem t_0 , skracając E/R , przenosząc funkcję wykładniczą na jedną stronę i obliczając logarytm naturalny z obydwu stron. Otrzymujemy wtedy:

$$t_0 = \tau_L \ln 2 = \frac{L}{R} \ln 2 = \frac{53 \cdot 10^{-3} \text{ H}}{0,37 \Omega} \ln 2 = 0,1 \text{ s.} \quad (\text{odpowiedź})$$

31.10. Energia zmagazynowana w polu magnetycznym

Gdy odsuwamy od siebie dwie cząstki naładowane różnoimiennie, możemy powiedzieć, że w polu elektrycznym, wytwarzanym przez te cząstki, gromadzona jest elektryczna energia potencjalna. Energię tę można odzyskać, jeżeli pozwolimy, aby cząstki znów zbliżyły się do siebie. W ten sam sposób możemy rozpatrywać energię zmagazynowaną w polu magnetycznym.

Aby wyprowadzić wzór, opisujący ilościowo zmagazynowaną energię, przeanalizujmy ponownie rysunek 31.18, na którym przedstawiono źródło SEM \mathcal{E}

połączone z opornikiem R i cewką L . Równanie (31.41), które przytaczamy tu jeszcze raz:

$$\mathcal{E} = L \frac{dI}{dt} + IR, \quad (31.48)$$

jest równaniem różniczkowym, opisującym wzrost natężenia prądu w tym obwodzie. Przypominamy, że równanie to wynika bezpośrednio z drugiego prawa Kirchhoffa, które z kolei wyraża zasadę zachowania energii w obwodzie o jednym oczku. Jeżeli pomnożymy obie strony równania (31.48) przez I , to otrzymamy równanie:

$$\mathcal{E}I = LI \frac{dI}{dt} + I^2 R, \quad (31.49)$$

które ma następującą interpretację fizyczną dotyczącą pracy i energii:

1. Jeżeli ładunek dq przepływa przez źródło SEM o wartości \mathcal{E} w czasie dt , to źródło wykonuje nad tym ładunkiem pracę $\mathcal{E}dq$. Szybkość, z jaką źródło wykonuje pracę, wynosi $(\mathcal{E}dq)/dt$, czyli $\mathcal{E}I$. Tak więc lewa strona równania (31.49) wyraża szybkość, z jaką źródło SEM dostarcza energii do pozostałych części obwodu.
2. Ostatni składnik po prawej stronie równania (31.49) wyraża szybkość, z jaką energia wydziela się na oporniku w postaci energii termicznej.
3. Z zasady zachowania energii wynika, że energia, która jest dostarczona do obwodu, ale nie wydziela się w postaci energii termicznej, musi być zmagażynowana w polu magnetycznym cewki. Równanie (31.49) opisuje zasadę zachowania energii w obwodach RL , a więc środkowy składnik musi wyrażać szybkość dE_B/dt gromadzenia energii w polu magnetycznym.

Tak więc:

$$\frac{dE_B}{dt} = LI \frac{dI}{dt}. \quad (31.50)$$

Możemy napisać to równanie w postaci:

$$dE_B = LI dI.$$

Całkując obie strony, otrzymujemy:

$$\int_0^{E_B} dE_B = \int_0^I LI dI,$$

czyli:

$$E_B = \frac{1}{2} LI^2 \quad (\text{energia magnetyczna}). \quad (31.51)$$

Jest to wyrażenie, określające całkowitą energię zmagażynowaną w cewce L , w której płynie prąd o natężeniu I . Zauważ podobieństwo tego wyrażenia do analogicznego wyrażenia określającego energię zmagażynowaną w kondensatorze o pojemności C i ładunku q

$$E_E = \frac{q^2}{2C}. \quad (31.52)$$

(Zmienna I^2 jest odpowiednikiem q^2 , a stała L jest odpowiednikiem $1/C$).

Przykład 31.7

Cewka ma indukcyjność 53 mH i opór 0,35 Ω.

- a) Ile wynosi energia zmagazynowana w polu magnetycznym cewki, gdy przyłożymy do niej SEM 12 V, a natężenie prądu osiągnie stan ustalony?

ROZWIĄZANIE:

Energia zmagazynowana w dowolnej chwili w polu magnetycznym cewki zależy od natężenia prądu, płynącego przez cewkę w tej samej chwili, zgodnie z równaniem (31.51) ($E_B = \frac{1}{2}LI^2$). Tak więc, aby wyznaczyć energię $E_{B\infty}$, zgromadzoną w stanie ustalonym, musimy najpierw obliczyć natężenie prądu w tym stanie. Z równania (31.43) wynika, że natężenie prądu w stanie ustalonym jest równe:

$$I_\infty = \frac{\mathcal{E}}{R} = \frac{12 \text{ V}}{0,35 \Omega} = 34,3 \text{ A.} \quad (31.53)$$

Stąd po podstawieniu otrzymujemy:

$$E_{B\infty} = \frac{1}{2}LI_\infty^2 = \left(\frac{1}{2}\right)(53 \cdot 10^{-3} \text{ H})(34,3 \text{ A})^2 = 31 \text{ J.} \quad (\text{odpowiedź})$$

- b) Po jakim czasie, licząc w stałych czasowych, w polu magnetycznym zostanie zmagazynowana energia równa połowie energii w stanie ustalonym?

ROZWIĄZANIE:

Stosujemy rozumowanie, jak w części (a). Teraz jednak musimy odpowiedzieć na pytanie: dla jakiego czasu t spełnione

jest równanie:

$$E_B = \frac{1}{2}E_{B\infty}.$$

Korzystając dwukrotnie z równania (31.51), możemy napisać ten warunek w następującej postaci:

$$\frac{1}{2}LI^2 = \left(\frac{1}{2}\right)\frac{1}{2}LI_\infty^2,$$

czyli

$$I = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)I_\infty. \quad (31.54)$$

Jednakże I jest wyznaczone w równaniu (31.43), a I_∞ (patrz równanie (31.53)) jest równe \mathcal{E}/R , tak więc równanie (31.54) przyjmuje postać:

$$\frac{\mathcal{E}}{R}(1 - e^{-t/\tau_L}) = \frac{\mathcal{E}}{\sqrt{2}R}.$$

Po skróceniu \mathcal{E}/R i przekształceniu tego równania możemy napisać:

$$e^{-t/\tau_L} = 1 - \frac{1}{\sqrt{2}} = 0,293,$$

skąd otrzymujemy:

$$\frac{t}{\tau_L} = -\ln 0,293 = 1,23,$$

czyli

$$t \approx 1,2\tau_L. \quad (\text{odpowiedź})$$

Zatem energia zmagazynowana w cewce osiągnie połowę wartości w stanie ustalonym po upływie 1,2 stałych czasowych od momentu przyłożenia SEM.

31.11. Gęstość energii pola magnetycznego

Rozważmy odcinek l w pobliżu środka długiego solenoidu o polu przekroju S . Przez solenoid płynie prąd o natężeniu I , a objętość solenoidu o długości l jest równa Sl . Energia E_B zmagazynowana przez odcinek solenoidu o długości l musi znajdować się całkowicie w tej objętości, gdyż pole magnetyczne na zewnątrz solenoidu jest w przybliżeniu równe zero. Ponadto zmagazynowana energia musi być rozłożona równomiernie we wnętrzu solenoidu, gdyż pole magnetyczne jest tam (w przybliżeniu) jednorodne.

Zatem energia zmagazynowana w jednostce objętości wynosi:

$$u_B = \frac{E_B}{Sl}.$$

Ponieważ

$$E_B = \frac{1}{2}LI^2,$$

więc

$$u_B = \frac{LI^2}{2Sl} = \frac{L}{l} \frac{I^2}{2S}.$$

L oznacza tutaj indukcyjność odcinka solenoidu długości l .

Podstawiając wyrażenie L/l z równania (31.33), otrzymujemy:

$$u_B = \frac{1}{2} \mu_0 n^2 I^2, \quad (31.55)$$

gdzie n jest liczbą zwojów na jednostkę długości. Korzystając z równania (30.25) ($B = \mu_0 I n$), możemy zapisać gęstość energii jako:

$$u_B = \frac{B^2}{2\mu_0} \quad (\text{gęstość energii magnetycznej}). \quad (31.56)$$

To równanie określa gęstość zmagazynowanej energii w dowolnym punkcie, w którym indukcja magnetyczna jest równa B . Choć wyprowadziliśmy to równanie, rozpatrując szczególny przypadek solenoidu, równanie (31.56) jest słuszne dla wszystkich pól magnetycznych, bez względu na to, w jaki sposób zostały wytworzone. Równanie to można porównać z równaniem (26.23):

$$u_E = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2, \quad (31.57)$$

które określa gęstość energii (w próżni) w dowolnym punkcie w polu elektrycznym. Zauważ, że zarówno u_B , jak i u_E są proporcjonalne do kwadratów wielkości opisujących odpowiednio pola B i E .

SPRAWDZIAN 7: W tabeli podano liczby zwojów na jednostkę długości, natężenie prądu i pole przekroju dla trzech solenoidów. Uszereguj solenoidy pod względem gęstości energii magnetycznej wewnętrz w każdym z nich, zaczynając od największej wartości.

| Solenoid | Liczba zwojów na jednostkę długości | Natężenie prądu | Pole przekroju |
|----------|-------------------------------------|-----------------|----------------|
| a | $2n_1$ | I_1 | $2S_1$ |
| b | n_1 | $2I_1$ | S_1 |
| c | n_1 | I_1 | $6S_1$ |

Przykład 31.8

Długi kabel koncentryczny (rys. 31.21) składa się z dwóch cienkościennych współśrodkowych przewodów w kształcie walców o promieniach a i b . W przewodzie wewnętrznym płynie prąd o natężeniu I , a przewód zewnętrzny stanowi drogę powrotną dla tego prądu.

a) Oblicz energię, zmagazynowaną w polu magnetycznym w odcinku kabla o długości l .

ROZWIAZANIE:

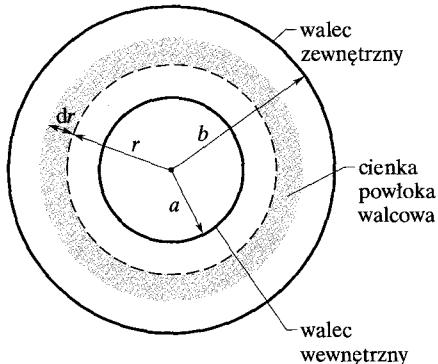
Rozwiązuje to niełatwwe zadanie, bierzemy pod uwagę następujące fakty:

1. Całkowita energia E_B , zmagazynowana w polu magnetycznym, może być obliczona z gęstości energii u_B pola.

2. Gęstość energii zależy od wartości indukcji magnetycznej, zgodnie z równaniem (31.56) ($u_B = B^2/2\mu_0$).

3. Ze względu na symetrię walcową kabla, możemy obliczyć indukcję B z prawa Ampère'a dla danego natężenia prądu I .

Obliczenie indukcji B : Aby wykorzystać powyższe fakty, najpierw zastosujemy prawo Ampère'a, wybierając kołowy kontur całkowania o promieniu r takim, że $a < r < b$ (kontur znajduje się między dwoma przewodami, jak pokazuje linia przerywana na rysunku 31.21). Jedynym prądem objętym konturem jest prąd o natężeniu I płynący w przewodzie wewnętrznym. Zatem prawo



Rys. 31.21. Przykład 31.8. Przekrój poprzeczny długiego kabla koncentrycznego, składającego się z dwóch cienkościennych przewodzących walców, wewnętrznego o promieniu a i zewnętrznego o promieniu b

Ampère'a można zapisać w postaci:

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = \mu_0 I. \quad (31.58)$$

Następnie możemy uprościć całkę, gdyż ze względu na symetrię walcową wektor indukcji \vec{B} jest styczny do konturu i ma taką samą wartość w każdym jego punkcie. Wybierzmy kierunek całkowania zgodnie z kierunkiem linii pola magnetycznego wzdłuż konturu. Możemy wtedy zastąpić $\vec{B} \cdot d\vec{s}$ wyrażeniem $B ds \cos 0 = B ds$ i wynieść B przed znakiem całki. Pozostaje więc całka $\oint ds$, która daje po prostu obwód $2\pi r$ konturu. Zatem równanie (31.58) upraszcza się do postaci:

$$B(2\pi r) = \mu_0 I,$$

czyli:

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}. \quad (31.59)$$

Obliczenie u_B : Aby otrzymać gęstość energii, podstawiamy równanie (31.59) do równania (31.56):

$$u_B = \frac{B^2}{2\mu_0} = \frac{\mu_0 I^2}{8\pi^2 r^2}. \quad (31.60)$$

Obliczenie E_B : Zauważ, że u_B nie jest stałe w obszarze między dwoma walcowymi przewodami, lecz zależy od odległości r od osi. Tak więc aby wyznaczyć całkowitą energię E_B , zma-

gazynowaną między przewodami, musimy scałkować u_B w tym obszarze.

Obszar między przewodami ma symetrię walcową względem osi kabla, zatem rozważmy objętość dV walcowej powłoki, umieszczonej między przewodami. Powłoka ma promień wewnętrzny r , promień zewnętrzny $r + dr$ (rys. 31.21) i długość l . Pole przekroju poprzecznego powłoki jest iloczynem jej obwodu $2\pi r$ i grubości dr . Zatem objętość dV powłoki jest równa $(2\pi r)(dr)(l)$, tzn. $dV = 2\pi r l dr$.

Wszystkie punkty powłoki znajdują się w przybliżeniu w taki samej odległości r od osi, a więc gęstość energii we wszystkich tych punktach jest w przybliżeniu taka sama. Tak więc całkowita energia dE_B , zawarta w powłoce o objętości dV jest opisana wzorem:

$$\text{energia} = \left(\begin{array}{c} \text{energia na} \\ \text{jednostkę objętości} \end{array} \right) (\text{objętość})$$

czyli

$$dE_B = u_B dV.$$

Podstawiając wyrażenie (31.60) w miejsce u_B oraz $2\pi r l dr$ w miejsce dV , otrzymujemy:

$$dE_B = \frac{\mu_0 I^2}{8\pi^2 r^2} (2\pi r l) dr = \frac{\mu_0 I^2 l}{4\pi} \frac{dr}{r}.$$

Aby wyznaczyć całkowitą energię, zgromadzoną między przewodami, całkujemy to równanie w obszarze między przewodami:

$$E_B = \int dE_B = \frac{\mu_0 I^2 l}{4\pi} \int_a^b \frac{dr}{r} = \frac{\mu_0 I^2 l}{4\pi} \ln \frac{b}{a}. \quad (\text{odpowiedź}) \quad (31.61)$$

Energia nie jest gromadzona na zewnątrz przewodu zewnętrznego, ani wewnątrz przewodu wewnętrznego, ponieważ indukcja magnetyczna jest równa零 w obydwu tych obszarach, co można wykazać za pomocą prawa Ampère'a.

b) Oblicz energię zmagazynowaną na jednostkę długości kabla, jeżeli $a = 1,2 \text{ mm}$, $b = 3,5 \text{ mm}$, a $I = 2,7 \text{ A}$.

ROZWIĄZANIE:

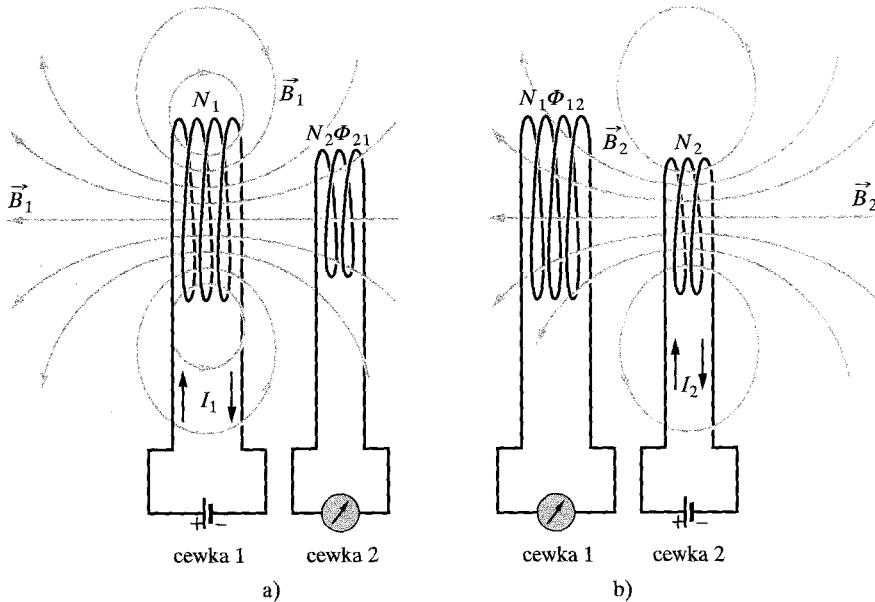
Z równania (31.61) otrzymujemy:

$$\begin{aligned} \frac{E_B}{l} &= \frac{\mu_0 I^2}{4\pi} \ln \frac{b}{a} = \frac{(4\pi \cdot 10^{-7} \text{ H/m})(2,7 \text{ A})^2}{4\pi} \ln \frac{3,5 \text{ mm}}{1,2 \text{ mm}} \\ &= 7,8 \cdot 10^{-7} \text{ J/m} = 780 \text{ nJ/m}. \quad (\text{odpowiedź}) \end{aligned}$$

31.12. Indukcja wzajemna

W tym paragrafie powrócimy do przypadku dwóch oddziałujących ze sobą cewek, omawianego po raz pierwszy w paragrafie 31.2. Teraz potraktujemy ten przypadek w sposób trochę bardziej ogólny. Widzieliśmy już, że jeśli dwie cewki znajdują się blisko siebie, jak na rysunku 31.2, to prąd stały o natężeniu I w jednej

Rys. 31.22. Indukcja wzajemna. a) Jeżeli natężenie prądu w cewce 1 będzie się zmieniać, to w cewce 2 powstanie indukowana SEM. b) Jeżeli natężenie prądu w cewce 2 będzie się zmieniać, to w cewce 1 powstanie indukowana SEM



cewce wytwarza strumień magnetyczny Φ , który przenika przez drugą cewkę (sprzęgając się z drugą cewką). Jeżeli natężenie prądu I zmienia się w czasie, to zgodnie z prawem Faradaya w drugiej cewce pojawi się SEM \mathcal{E} . Nazywamy to zjawisko **indukcją wzajemną**, aby wskazać na wzajemne oddziaływanie dwóch cewek, w odróżnieniu od *samoindukcji*, występującej w jednej cewce.

Spójrzmy teraz na zjawisko indukcji wzajemnej z ilościowego punktu widzenia. Na rysunku 31.22a przedstawiono dwie okrągłe, ciasno nawinięte cewki, położone blisko siebie i mające wspólną oś symetrii. W cewce 1, dołączonej do zewnętrznego źródła, płynie stały prąd o natężeniu I_1 , który wytwarza pole magnetyczne, przedstawione na rysunku za pomocą linii pola \vec{B}_1 . Cewka 2 jest dołączona do czulego miernika, ale nie jest zasilana ze źródła. Strumień magnetyczny Φ_{21} (czyli strumień przechodzący przez cewkę 2, ale związany z prądem w cewce 1) sprzęga się z N_2 zwojami cewki 2.

Definiujemy indukcyjność wzajemną M_{21} cewki 2 względem cewki 1 za pomocą równania:

$$M_{21} = \frac{N_2 \Phi_{21}}{I_1}, \quad (31.62)$$

które ma taką samą postać, jak równanie (31.30) ($L = N\Phi/I$), będące definicją indukcyjności. Równanie (31.62) może być zapisane jako:

$$M_{21} I_1 = N_2 \Phi_{21}.$$

Jeżeli teraz w jakiś sposób spowodujemy, że natężenie prądu I_1 będzie się zmieniać w czasie, to:

$$M_{21} \frac{dI_1}{dt} = N_2 \frac{d\Phi_{21}}{dt}.$$

Prawa strona tego równania, zgodnie z prawem Faradaya, jest równa wartości bezwzględnej SEM \mathcal{E}_2 , która pojawia się w cewce 2, w wyniku zmiany natężenia prądu w cewce 1. Zatem przy uwzględnieniu znaku minus, wskazującego

kierunek SEM, otrzymujemy równanie:

$$\mathcal{E}_2 = -M_{21} \frac{dI_1}{dt}, \quad (31.63)$$

które można porównać z równaniem (31.37), opisującym samoindukcję ($\mathcal{E} = -LdI/dt$).

Zamieńmy teraz rolami cewki 1 i 2, jak na rysunku 31.22b. Innymi słowy, dołączamy cewkę 2 do źródła zewnętrznego, a prąd o natężeniu I_2 , płynący w tej cewce, tworzy strumień magnetyczny Φ_{12} , sprzężony z cewką 1. Jeżeli natężenie prądu I_2 będzie się zmieniać w czasie, to rozumując jak poprzednio, otrzymamy:

$$\mathcal{E}_1 = -M_{12} \frac{dI_2}{dt}. \quad (31.64)$$

Widzimy więc, że SEM indukowana w jednej z cewek jest proporcjonalna do szybkości zmian natężenia prądu w drugiej cewce. Mogłoby się wydawać, że stałe proporcjonalności M_{21} i M_{12} są różne. Przymajemy jednak bez dowodu, że są one w istocie takie same, więc wskaźniki nie będą już potrzebne. (Ten wniosek jest prawdziwy, ale wcale nie jest oczywisty). Mamy więc:

$$M_{21} = M_{12} = M, \quad (31.65)$$

a równania (31.63) i (31.64) możemy napisać jako:

$$\mathcal{E}_2 = -M \frac{dI_1}{dt} \quad (31.66)$$

oraz

$$\mathcal{E}_1 = -M \frac{dI_2}{dt}. \quad (31.67)$$

Indukcja jest więc rzeczywiście wzajemna. Jednostką M (podobnie jak L) w układzie SI jest henr.

Przykład 31.9

Na rysunku 31.23 przedstawiono dwie okrągle ciasno nawinięte cewki. Mniejsza cewka (o promieniu R_2 i o N_2 zwojach) umieszczona jest współosiowo i w jednej płaszczyźnie z większą cewką (o promieniu R_1 i o N_1 zwojach).

a) Wyprowadź wzór, opisujący inducyjność wzajemną M tego układu cewek przy założeniu, że $R_1 \gg R_2$.

ROZWIĄZANIE:

 1. Indukcyjność wzajemna M tego układu cewek jest równa stosunkowi strumienia sprzężonego ($N\Phi$) w jednej z cewek do natężenia prądu I w drugiej cewce, tworzącego ten strumień. Powinniśmy zatem założyć, że w cewkach płyną prądy, a następnie obliczyć strumień sprzężony w jednej z cewek.

Pole magnetyczne, wytworzone przez mniejszą cewkę, a obejmujące większą cewkę jest niejednorodne — nie ma stałej wielkości ani kierunku. Tak więc strumień przenikający przez większą cewkę, a wytworzony przez mniejszą cewkę jest niejednorodny i trudny do obliczenia. Natomiast mniejsza cewka jest dostatecznie mała, aby przyjąć, że przenikające przez nią pole magnetyczne wytworzone przez większą cewkę jest w przybliżeniu jednorodne. Zatem strumień przepływający przez mniejszą cewkę, a wytworzony przez większą cewkę jest również w przybliżeniu jednorodny. Stąd, aby wyznaczyć M , zakładamy, że w większej cewce płynie prąd o natężeniu I_1 i obliczamy strumień sprzężony $N_2\Phi_{21}$ w mniejszej cewce:

$$M = \frac{N_2\Phi_{21}}{I_1}. \quad (31.68)$$

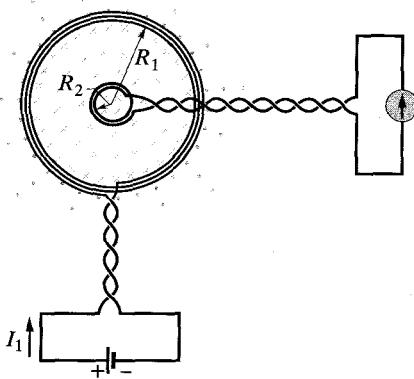
 2. Z równania (31.4) wynika, że strumień Φ_{21} przepływający przez każdy zwoj mniejszej cewki jest równy:

$$\Phi_{21} = B_1 S_2,$$

gdzie B_1 jest wartością indukcji magnetycznej pola, wytworzonego przez większą cewkę w miejscu, gdzie znajduje się mniejsza cewka, a $S_2 (= \pi R_2^2)$ jest polem powierzchni jednego zwoju. Tak więc strumień sprzężony w mniejszej cewce (o N_2 zwojach) jest równy:

$$N_2 \Phi_{21} = N_2 B_1 S_2. \quad (31.69)$$

3. Aby wyznaczyć B_1 w miejscu zajmowanym przez mniejszą cewkę, możemy zastosować równanie (31.28), podstawiając z równe zero, gdyż obie cewki znajdują się w jednej płaszczyźnie. Zgodnie z tym równaniem, każdy zwój większej cewki tworzy pole magnetyczne o indukcji $\mu_0 I_1 / 2R_1$ w miejscu, w którym znajduje się mniejsza cewka. Zatem wartość indukcji całkowitego pola magnetycznego wytworzonego w tym miejscu przez większą



Rys. 31.23. Przykład 31.9. Mała cewka jest umieszczona w środku dużej cewki. Możemy wyznaczyć indukcyjność wzajemną cewek, gdy założymy, że w dużej cewce płynie prąd o natężeniu I_1

cewki (o N_1 zwojach) wynosi:

$$B_1 = N_1 \frac{\mu_0 I_1}{2R_1}. \quad (31.70)$$

Podstawienie wyrażeń (31.70) w miejsce B_1 oraz πR_2^2 w miejsce S_2 w równaniu (31.69) daje:

$$N_2 \Phi_{21} = \frac{\pi \mu_0 N_1 N_2 R_2^2 I_1}{2R_1}.$$

Podstawiając ten wynik do równania (31.68), otrzymujemy więc:

$$M = \frac{N_2 \Phi_{21}}{I_1} = \frac{\pi \mu_0 N_1 N_2 R_2^2}{2R_1}. \quad (\text{odpowiedź}) \quad (31.71)$$

b) Jaka jest wartość M dla $N_1 = N_2 = 1200$ zwojów, $R_2 = 1,1$ cm, a $R_1 = 15$ cm?

ROZWIĄZANIE:

Z równania (31.71) wynika, że:

$$M = \frac{(\pi)(4\pi \cdot 10^{-7} \text{ H/m})(1200)(1200)(0,011 \text{ m})^2}{(2)(0,15 \text{ m})} \\ = 2,29 \cdot 10^{-3} \text{ H} \approx 2,3 \text{ mH}. \quad (\text{odpowiedź})$$

Rozważmy teraz przypadek, w którym zamieniamy cewki rolami, tzn. zakładamy, że w mniejszej cewce płynie prąd o natężeniu I_2 i usiłujemy obliczyć M z równania (31.62) w postaci:

$$M = \frac{N_1 \Phi_{12}}{I_2}.$$

Obliczenie Φ_{12} , czyli niejednorodnego strumienia pola magnetycznego mniejszej cewki, przenikającego przez większą cewkę, nie jest rzeczą łatwą. Gdybyśmy wykonali obliczenia numeryczne za pomocą komputera, otrzymalibyśmy jednak, jak poprzednio, M równe $2,3$ mH! Zapamiętaj jednak, że równość (31.65) ($M_{21} = M_{12} = M$) wcale nie jest tak łatwo wykazać.

Podsumowanie

Strumień magnetyczny Strumień magnetyczny Φ_B , przechodzący przez powierzchnię S w polu magnetycznym \vec{B} jest zdefiniowany jako:

$$\Phi_B = \int \vec{B} \cdot d\vec{S}, \quad (31.3)$$

gdzie całka jest obliczana po powierzchni. Jednostką strumienia magnetycznego w układzie SI jest weber, przy czym $1 \text{ Wb} = 1 \text{ T} \cdot \text{m}^2$. Jeżeli \vec{B} jest prostopadłe do powierzchni i jednorodne w obrębie tej powierzchni, to równanie (31.3) przyjmuje postać:

$$\Phi_B = BS \quad (\vec{B} \perp S, \vec{B} \text{ jednorodne}). \quad (31.4)$$

Prawo indukcji Faradaya Jeżeli strumień magnetyczny Φ_B , przechodzący przez powierzchnię ograniczoną zamkniętą prowadzącą pętlą, zmienia się w czasie, to w pętli pojawia się prąd oraz SEM. To zjawisko nazywamy *indukcją elektromagnetyczną*. Indukowana SEM wynosi:

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi_B}{dt} \quad (\text{prawo Faradaya}). \quad (31.6)$$

Jeżeli zastąpimy pętlę ciasno nawiniętą cewką o N zwojach, to otrzymamy indukowaną SEM równą

$$\mathcal{E} = -N \frac{d\Phi_B}{dt}. \quad (31.7)$$

Reguła Lenza Prąd indukowany ma taki kierunek, że pole magnetyczne *wytwarzane przez ten prąd* przeciwstawia się zmianie strumienia magnetycznego, która indukuje prąd. Indukowana SEM ma taki sam kierunek, jak prąd indukowany.

SEM i indukowane pole elektryczne SEM jest indukowana przez zmienny strumień magnetyczny nawet wtedy, gdy ramka, wewnętrznej której strumień się zmienia, jest hipotetyczną krzywą, a nie rzeczywistym przewodnikiem. Zmienny strumień magnetyczny indukuje pole elektryczne \vec{E} w każdym punkcie krzywej, a indukowana SEM jest związana z wektorem \vec{E} zależnością:

$$\mathcal{E} = \oint \vec{E} \cdot d\vec{s}, \quad (31.21)$$

gdzie całkujemy wzdłuż zamkniętej krzywej. Korzystając z równania (31.21), możemy zapisać prawo Faradaya w najbardziej ogólnej postaci:

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{s} = -\frac{d\Phi_B}{dt} \quad (\text{prawo Faradaya}). \quad (31.22)$$

Istotą prawa Faradaya jest to, że zmienne pole magnetyczne indukuje pole elektryczne \vec{E} .

Cewki Cewka jest elementem, który może być wykorzystany dotworzenia w pewnym obszarze pola magnetycznego o znanej indukcji. Jeżeli w każdym z N zwojów cewki płynie prąd o natężeniu I , to strumień magnetyczny spręga te zwoje. **Indukcyjność** L cewki jest zdefiniowana jako:

$$L = \frac{N\Phi_B}{I} \quad (\text{definicja indukcyjności}). \quad (31.30)$$

Jednostką indukcyjności w układzie SI jest **henr**, przy czym:

$$1 \text{ henr} = 1 \text{ H} = 1 \text{ T} \cdot \text{m}^2/\text{A}. \quad (31.31)$$

Dla długiego solenoïdu o polu powierzchni przekroju S i n zwojach na jednostkę długości, indukcyjność na jednostkę długości w pobliżu środka solenoïdu wynosi:

$$\frac{L}{l} = \mu_0 n^2 S \quad (\text{solenoid}). \quad (31.33)$$

Samoindukcja Jeżeli natężenie prądu I , płynącego przez cewkę zmienia się w czasie, to w cewce jest indukowana SEM. Ta SEM

samoindukcji jest równa:

$$\mathcal{E}_L = -L \frac{dI}{dt} \quad (\text{SEM samoindukcji}). \quad (31.37)$$

Kierunek \mathcal{E}_L możemy wyznaczyć na podstawie reguły Lenza: SEM samoindukcji działa tak, aby przeciwstać się zmianie, która ją wywołała.

Szeregowo obwody RL Jeżeli przyłożymy stałą SEM do obwodu o jednym oczku, zawierającego opór R i indukcyjność L , to natężenie prądu będzie rosło do wartości stacjonarnej \mathcal{E}/R zgodnie z równaniem:

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R} (1 - e^{-t/\tau_L}) \quad (\text{wzrost natężenia prądu}). \quad (31.43)$$

Wielkość $\tau_L (= L/R)$ decyduje o szybkości narastania natężenia prądu i jest nazywana **indukcyjną stałą czasową**. Gdy odłączymy źródło stałej SEM, natężenie prądu będzie zanikać, począwszy od wartości I_0 , zgodnie z równaniem:

$$I = I_0 e^{-t/\tau_L} \quad (\text{zmniejszanie się natężenia prądu}). \quad (31.47)$$

Energia magnetyczna Jeżeli w cewce o indukcyjności L płynie prąd o natężeniu I , to w polu magnetycznym cewki zmagazynowana jest energia:

$$E_B = \frac{1}{2} L I^2 \quad (\text{energia magnetyczna}). \quad (31.51)$$

Jeżeli B oznacza wartość indukcji magnetycznej w dowolnym punkcie (wewnętrz cewki lub gdzie indziej), to gęstość zmagazynowanej energii jest w tym punkcie równa:

$$u_B = \frac{B^2}{2\mu_0} \quad (\text{gęstość energii magnetycznej}). \quad (31.56)$$

Indukcja wzajemna Jeżeli dwie cewki (oznaczone jako 1 i 2) znajdują się blisko siebie, to prąd o zmiennym natężeniu w jednej z cewek indukuje SEM w drugiej cewce. Indukcja wzajemna jest opisana równaniami:

$$\mathcal{E}_2 = -M \frac{dI_1}{dt}. \quad (31.66)$$

oraz

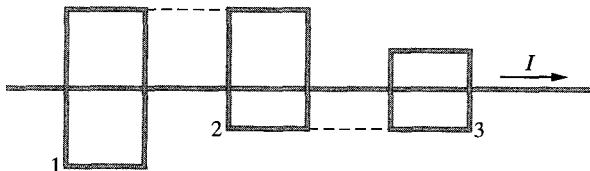
$$\mathcal{E}_1 = -M \frac{dI_2}{dt}, \quad (31.67)$$

gdzie M (mierzone w henrach) jest indukcyjnością wzajemną układu cewek.

Pytania

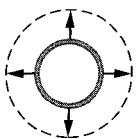
- Na rysunku 31.24 przedstawiono długi prosty przewód, w którym płynie prąd o natężeniu I . Przewód biegnie obok trzech prostokątnych ramek o długościach boków L , $1,5L$ i $2L$, nie stykając się z nimi. Ramki są umieszczone w takiej odległości, aby nawzajem

na siebie nie oddziaływały. Ramki 1 i 3 są położone symetrycznie w stosunku do długiego przewodu. Uszereguj ramki pod względem indukowanego w nich natężenia prądu, zaczynając od największej wartości, jeżeli natężenie prądu I : a) jest stałe, b) rośnie.



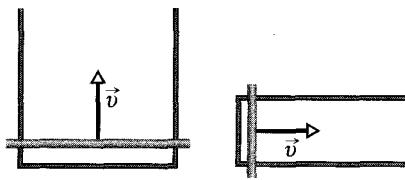
Rys. 31.24. Pytanie 1

2. Jeżeli kołowy przewód na rysunku 31.25, znajdujący się w jednorodnym polu magnetycznym, zwiększy swoją średnicę na skutek rozszerzalności cieplnej, to prąd indukowany płynie w nim w kierunku zgodnym z kierunkiem ruchu wskazówek zegara. Czy pole magnetyczne jest skierowane za, czy przed płaszczyzną rysunku?



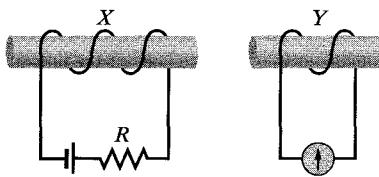
Rys. 31.25. Pytanie 2

3. Na rysunku 31.26 przedstawiono dwa obwody, w których przewodzący przet jest przesuwany wzdłuż przewodu w kształcie litery U z taką samą prędkością v , w takim samym jednorodnym polu magnetycznym. Równolegle odcinki przewodu są od siebie odległe o $2L$ w obwodzie 1 i o L w obwodzie 2. Prąd indukowany w obwodzie 1 płynie w kierunku przeciwnym do ruchu wskazówek zegara. a) Czy pole magnetyczne jest skierowane za, czy przed płaszczyzną rysunku? b) Czy prąd indukowany w obwodzie 2 płynie zgodnie, czy przeciwnie do ruchu wskazówek zegara? c) Czy SEM indukowana w obwodzie 1 jest większa, mniejsza, czy taka sama, jak w obwodzie 2?



Rys. 31.26. Pytanie 3 (1) (2)

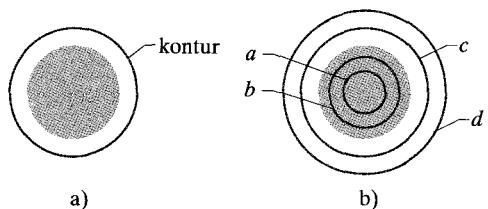
4. Na rysunku 31.27 przedstawiono dwie cewki nawinięte wokół nieprzewodzących przetów. Cewka X jest dołączona do źródła i opornika o regulowanym oporze. Jaki jest kierunek prądu indukowanego, płynącego przez amperomierz dołączony do cewki Y, gdy: a) cewka Y jest przesuwana w kierunku cewki X, b) natężenie prądu w cewce X jest zmniejszane, a względne położenia obydwu cewek pozostają bez zmian?



Rys. 31.27. Pytanie 4

5. Na rysunku 31.28a przedstawiono obszar w kształcie koła, w którym jednorodne pole magnetyczne o wartości indukcji rosnącej w czasie jest skierowane przed płaszczyznę rysunku. Przedstawiono również kołowy kontur, wzduż którego mamy obliczyć wartość całki $\oint \vec{E} \cdot d\vec{s}$. W tabeli podano (dla trzech różnych przypadków) początkową wartość indukcji magnetycznej, przyrost tej wartości oraz czas, w którym ten przyrost nastąpił. Uszereguj przypadki pod względem wartości natężenia pola elektrycznego, indukowanego wzdłuż konturu, zaczynając od największej wartości.

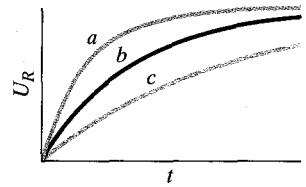
| Przypadek | Indukcja początkowa | Przyrost | Czas |
|-----------|---------------------|----------------|----------------|
| a | B_1 | ΔB_1 | Δt_1 |
| b | $2B_1$ | $\Delta B_1/2$ | Δt_1 |
| c | $B_1/4$ | ΔB_1 | $\Delta t_1/2$ |



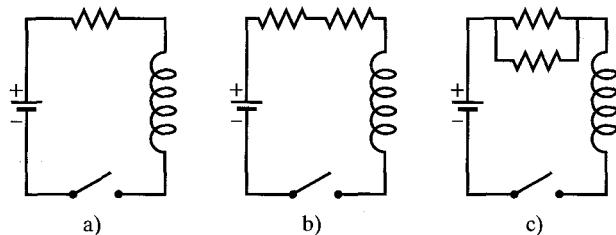
Rys. 31.28. Pytania 5 i 6

6. Na rysunku 31.28b przedstawiono obszar w kształcie koła, w którym jednorodne pole magnetyczne o wartości indukcji malejącej w czasie jest skierowane przed płaszczyznę rysunku. Przedstawiono również cztery kontury w kształcie okręgów. Uszereguj kontury całkowania pod względem wartości $\oint \vec{E} \cdot d\vec{s}$, zaczynając od największej wartości.

7. Na rysunku 31.29 przedstawiono zależność od czasu różnicy potencjałów U_R na oporniku w trzech obwodach, połączonych jak na rysunku 31.18. Obwody zawierają taki sam opór R i SEM \mathcal{E} , ale różnią się wartością indukcyjności L . Uszereguj obwody pod względem wartości L , zaczynając od największej.



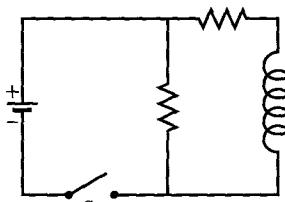
Rys. 31.29. Pytanie 7



Rys. 31.30. Pytanie 8

8. Na rysunku 31.30 przedstawiono trzy obwody, składające się z jednakowych źródeł, cewek i oporników. Uszereguj obwody pod względem czasu, jaki musi upływać od momentu zamknięcia klucza do momentu, gdy natężenie prądu osiągnie 50% wartości w stanie ustalonym, zaczynając od najdłuższego czasu.

9. Na rysunku 31.31 przedstawiono obwód, zawierający dwa takie same oporniki i cewkę idealną. Czy natężenie prądu płynącego przez środkowy opornik będzie mniejsze, większe, czy takie samo, jak w drugim oporniku: a) tuż po zamknięciu klucza S, b) po upływie długiego czasu od zamknięcia klucza S, c) tuż po ponownym otwarciu klucza S, d) po upływie długiego czasu od ponownego otwarcia klucza S?



Rys. 31.31. Pytanie 9

Zadania

Rozwiązanie jest dostępne na stronie internetowej podręcznika: <http://www.wiley.com/college/hrw>

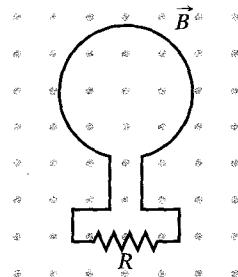
Rozwiązanie jest dostępne w postaci interaktywnej, wykorzystującej oprogramowanie Interactive Learning-Ware (na tej samej stronie)

31.4 Reguła Lenza

1. Antena telewizyjna, pracująca w zakresie UHF ma kształt ramki o średnicy 11 cm. Pole magnetyczne sygnału telewizyjnego jest skierowane prostopadle do płaszczyzny ramki, a w pewnej chwili wartość indukcji magnetycznej zmienia się z szybkością 0,16 T/s. Pole magnetyczne jest jednorodne. Jaka SEM jest indukowana w antenie?

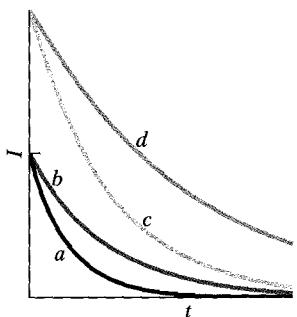
2. Mała pętla o polu powierzchni S znajduje się wewnętrz długiego solenoidu o n zwojach na jednostkę długości, w którym płynie prąd o natężeniu I . Oś symetrii pętli pokrywa się z osią solenoidu. Oblicz SEM indukowaną w pętli, jeżeli $I = I_0 \sin \omega t$.

3. Strumień magnetyczny, przenikający przez pętlę, pokazaną na rysunku 31.33 rośnie zgodnie z zależnością $\Phi_B = 6t^2 + 7t$, gdzie Φ_B jest wyrażone w milibaberach, a t w sekundach. a) Jaka jest wartość SEM indukowanej w pętli, gdy $t = 2$ s? b) W jakim kierunku płynie prąd przez opornik R ?



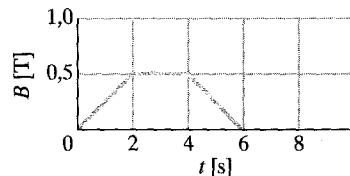
Rys. 31.33. Zadania 3 i 11

10. Klucz w obwodzie na rysunku 31.17 został połączony z punktem a , a następnie, po dłuższym czasie, został przełączony do punktu b . Natężenie prądu płynącego w cewce w wyniku tego przełączenia jest przedstawione na rysunku 31.32, dla czterech zestawów wartości oporu R i indukcyjności L : 1) R_0 i L_0 , 2) $2R_0$ i L_0 , 3) R_0 i $2L_0$, 4) $2R_0$ i $2L_0$. Przyporządkuj zestawy danych poszczególnym wykresom.



Rys. 31.32. Pytanie 10

4. Jednorodna ramka z drutu, o promieniu 12 cm i oporze $8,5 \Omega$, znajduje się w polu magnetycznym, o indukcji zmieniającej się w czasie w sposób pokazany na rysunku 31.34. Oblicz SEM w ramce jako funkcję czasu. Weź pod uwagę przedziały czasu: a) od $t = 0$ do $t = 2$ s, b) od $t = 2$ s do $t = 4$ s, (c) od $t = 4$ s do $t = 6$ s. Jednorodne pole magnetyczne jest prostopadłe do płaszczyzny ramki.



Rys. 31.34. Zadanie 4

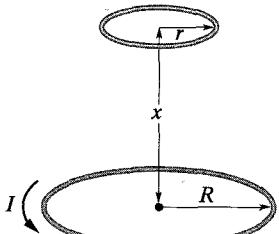
5. Jednorodne pole magnetyczne jest prostopadłe do płaszczyzny kołowej ramki o średnicy 10 cm, wykonanej z drutu miedzianego o średnicy 2,5 mm. a) Oblicz opór drutu (patrz tabela 27.1.) b) Z jaką szybkością pole magnetyczne powinno się zmieniać w czasie, aby w ramce pojawił się prąd indukowany o natężeniu 10 A?

6. Natężenie prądu w solenoidzie z przykładu 31.1 zmienia się nie tak, jak w tym przykładzie, ale zgodnie z zależnością $I = 3t + 1t^2$, gdzie I jest wyrażone w amperach, a t w sekundach. a) Wykreś SEM, indukowaną w cewce jako funkcję czasu od $t = 0$ do $t = 4$ s. b) Opór cewki wynosi $0,15 \Omega$. Ile wynosi natężenie prądu w cewce w chwili $t = 2$ s?

7. Na rysunku 31.35 cewka o 120 zwojach, promieniu 1,8 cm i oporze $5,3 \Omega$ jest umieszczona na zewnątrz solenoidu z przykładu 31.1. Jakie będzie natężenie prądu indukowanego w cewce, jeżeli

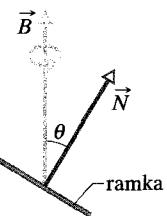
natężenie prądu w soleno-
idzie będzie się zmieniać,
jak w tym przykładzie?

8. Elastyczny przewód zo-
stał rozciągnięty i tworzy
kołową ramkę o promieniu
12 cm. Płaszczyzna ramki
jest prostopadła do jedno-
rodnego pola magnetycznego o wartości indukcji 0,8 T. Po zwol-
nieniu naciągu promień ramki zaczyna się zmniejszać z chwilową
prędkością 75 cm/s. Jaka SEM jest w tym momencie indukowana
w ramce?

9. Na rysunku 31.36 przedstawiono dwie równoległe ramki o
wspólnej osi. Mniejsza ramka (o promieniu r) znajduje się nad
większą ramką (o promieniu R), tak że ich środki znajdują się
w odległości $x \gg R$. Wskutek tego pole magnetyczne, wy-
tworzone przez prąd o natężeniu I , płynący w większej ramce,
jest niemal jednorodne, w obszarze zajmowanym przez mniejszą
ramkę. Założmy, że x rośnie
ze stałą prędkością $dx/dt = v$. a) Wyznacz strumień magnetyczny przenikający
przez powierzchnię ograniczoną mniejszą ramką jako
funkcję x . (Wskazówka:
Patrz równanie (30.29)). W
mniejszej ramce wyznacz:
b) indukowaną SEM, c) kie-
runek prądu indukowanego.


Rys. 31.36. Zadanie 9

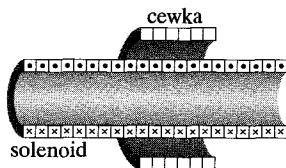
10. Kołowa ramka o średnicy 10 cm (widziana z boku na
rysunku 31.37) jest umieszczona w taki sposób, że jej nor-
malna \vec{N} tworzy kąt $\theta = 30^\circ$ z kierunkiem jednorodnego
poli magnetycznego o war-
tości indukcji 0,5 T. Ramka
jest obracana w taki sposób,
że \vec{N} zakreśla powierzchnię stożka wokół kierunku pola,
ze stałą szybkością 100 obrotów/min. Kąt θ po-
zostaje stały podczas tego
ruchu. Jaka jest SEM indu-
kowana w ramce?



Rys. 31.37. Zadanie 10

11. Załóż, że strumień magnetyczny przechodzący przez ramkę
na rysunku 31.33 jest równy $\Phi_B(0)$ w chwili $t = 0$. Przyjmij
następnie, że zarówno wartość, jak i kierunek wektora indukcji
magnetycznej \vec{B} zmienia się w bliżej nieokreślony, ale ciągły
sposób, tak że w chwili t strumień jest równy $\Phi_B(t)$. a) Wykaż, że
całkowity ładunek $q(t)$, przepływający przez opornik R w czasie
 t wynosi:

$$q(t) = \frac{1}{R} [\Phi_B(0) - \Phi_B(t)]$$



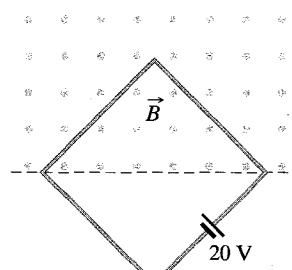
Rys. 31.35. Zadanie 7

i nie zależy od sposobu, w jaki zmienia się \vec{B} . b) Jeżeli w szcze-
gólnym przypadku $\Phi_B(t) = \Phi_B(0)$, to $q(t) = 0$. Czy natężenie
prądu indukowanego musi być równe zeru w całym przedziale
czasu od 0 do t ?

12. Mała kołowa ramka o polu powierzchni 2 cm^2 jest umieszczo-
na w płaszczyźnie dużej kołowej ramki o promieniu 1 m, tak
że ich środki się pokrywają. Natężenie prądu w dużej ramce jest
zmieniane równomiernie od 200 A do -200 A (co oznacza także
zmianę kierunku prądu) w ciągu 1 s, rozpoczynając od $t = 0$.
a) Ile wynosi indukcja magnetyczna w środku małej ramki, pola
wytworzzonego przez prąd płynący w dużej ramce w chwili $t = 0$,
 $t = 0,5 \text{ s}$ i $t = 1 \text{ s}$? b) Jaka SEM jest indukowana w małej ramce
w chwili $t = 0,5 \text{ s}$? (Wewnętrzna ramka jest mała, więc przyjmij,
że pole \vec{B} , pochodzące od dużej ramki jest jednorodne w obszarze
zajmowanym przez małą ramkę).

13. Sto zwojów izolowanego drutu miedzianego nawinięto na
drewniany walcowy rdzeń o polu przekroju poprzecznego rów-
nym $1,2 \cdot 10^{-3} \text{ m}^2$. Końce uzwojenia są dołączone do opornika.
Całkowity opór obwodu jest równy 13Ω . Ile ładunku przepłynie
przez obwód, jeżeli indukcja przyłożonego z zewnątrz, jednorod-
nego, podłużnego pola magnetycznego w rdzeniu zmieni się od
1,6 T w jednym kierunku do 1,6 T w kierunku przeciwnym?
(Wskazówka: Patrz zadanie 11). 

14. W pewnym miejscu wektor indukcji magnetycznej pola ziem-
skiego ma wartość $B = 0,59$ gausów i jest nachylony w dół pod
kątem 70° do poziomu. Płaska, ułożona poziomo cewka z drutu
ma promień 10 cm, 1000 zwojów i całkowity opór 85 Ω . Do
cewki jest dołączony miernik o oporze 140 Ω . Cewkę obrócono
wokół średnicy o pół obrotu, tak że znów jest ułożona poziomo. Ile
ładunku przepłynęło przez miernik podczas obrotu cewki? (Wsk-
ażówka: Patrz zadanie 11).

15. Ramka z drutu w kształcie kwadratu o boku 2 m jest uło-
żona prostopadle do linii jednorodnego pola magnetycznego, przy
czym połowa powierzchni ramki znajduje się w polu, jak pokazano na rysunku 31.38. W obwodzie ramki znajduje się źródło o
SEM równej 20 V i o zni-
komo małym oporze we-
wnętrzny. Jeżeli wartość
indukcji pola zmienia się w
czasie zgodnie z zależno-
ścią $B = 0,042 - 0,87t$,
gdzie B jest wyrażone w tes-
lach, a t w sekundach, to:
a) jaka jest całkowita SEM
w obwodzie, b) w którym
kierunku płynie prąd przez
źródło?


Rys. 31.38. Zadanie 15

16. Kawałek drutu został wygięty w kształcie trzech łuków,
każdy o promieniu $r = 10 \text{ cm}$, jak pokazano na rysunku 31.39.
Każdy łuk jest ćwiartką okręgu, przy czym ab leży w płaszczyźnie xy ,
 bc w płaszczyźnie yz , a ca w płaszczyźnie zx . a) Je-

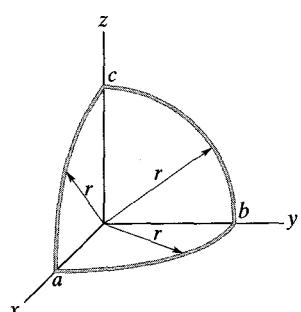
śli kierunek wektora indukcji magnetycznej jednorodnego pola jest zgodny z dodatnim kierunkiem osi x , to jaka jest wartość SEM, wytworzonej w obwodzie, gdy B rośnie z szybkością 3 mT/s? b) Jaki jest kierunek prądu w łuku bc ?

17. Prostokątna cewka o N zwojach, długości a i szerokości b jest obracana z częstotliwością v w jednorodnym polu magnetycznym \vec{B} , jak pokazano na rysunku 31.40. Cewka jest połączona z obracającymi się wraz z nią pierścieniami, po których ślizgają się metalowe szczotki w celu zapewnienia kontaktu elektrycznego. a) Wykaż, że SEM indukowana w cewce jest funkcją czasu postaci:

$$\mathcal{E} = 2\pi v NabB \sin(2\pi vt) = \mathcal{E}_0 \sin(2\pi vt).$$

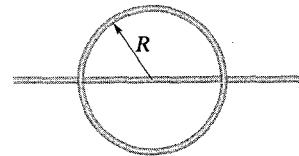
Tak właśnie działają powszechnie używane prądnice prądu zmienego. b) Zaprojektuj ramkę, która będzie wytworzać SEM $\mathcal{E}_0 = 300$ V podczas wirowania z prędkością 50 obrotów/s w jednorodnym polu magnetycznym o indukcji 1,2 T.

Rys. 31.39. Zadanie 16



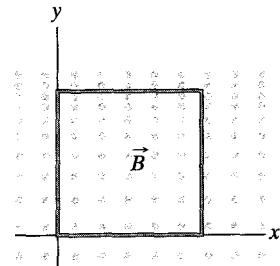
Jaka jest maksymalna wartość wytwarzanej SEM, gdy pętla wifuje z prędkością 1000 obrotów/min wokół osi prostopadłej do kierunku \vec{B} ?

20. Na rysunku 31.42 przedstawiono zamkniętą przewodzącą ramkę z drutu, w kształcie okręgu o promieniu $R = 2$ m. Ramka ma opór 4Ω , a środek okręgu znajduje się w punkcie, przez który przechodzi długi prosty przewód. W chwili $t = 0$ prąd w przewodzie płynie w prawo, a jego natężenie jest równe 5 A. Później natężenie prądu zmienia się zgodnie z zależnością $I = 5 \text{ A} - (2 \text{ A/s}^2)^2$. (Prosty przewód jest izolowany, tak więc nie ma połączenia elektrycznego między nim a ramką). Jakie jest natężenie i kierunek prądu indukowanego w ramce dla $t > 0$?



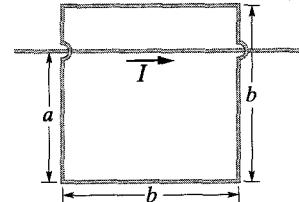
Rys. 31.42. Zadanie 20

21. Na rysunku 31.43 przedstawiono kwadratową przewodzącą ramkę, której boki mają długość 2 cm. Pole magnetyczne jest skierowane przed płaszczyznę rysunku; wartość jego indukcji jest dana wzorem $B = 4t^2 y$, gdzie B jest wyrażone w teslach, t w sekundach, a y w metrach. Wyznacz SEM w ramce dla $t = 2,5$ s i podaj jej kierunek.



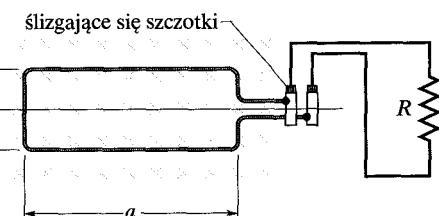
Rys. 31.43. Zadanie 21

22. W układzie, pokazanym na rysunku 31.44, $a = 12$ cm, $b = 16$ cm. Natężenie prądu w długim prostym przewodzie jest dane zależnością $I = 4,5t^2 - 10t$, gdzie I jest wyrażone w amperach, t w sekundach. a) Oblicz SEM w kwadratowej ramce dla $t = 3$ s. b) Jaki jest kierunek prądu indukowanego w ramce?



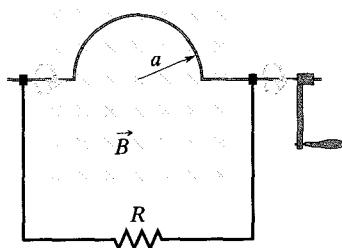
Rys. 31.44. Zadanie 22

- 23*. W dwóch długich równoległych przewodach miedzianych o średnicy 2,5 mm płyną w przeciwnych kierunkach prądy o natężeniu 10 A. a) Zakładając, że osie przewodów są oddalone o 20 mm, oblicz strumień magnetyczny na metr, istniejący w obszarze między tymi osiami. b) Jaka część strumienia znajduje się wewnętrz przewodów? c) Wykonaj polecenie z punktu (a) dla prądów płynących w tym samym kierunku.



Rys. 31.40. Zadanie 17

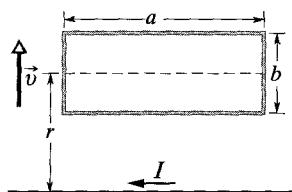
18. Sztynny przewód wygięty w kształcie półkola jest obracany z częstotliwością v w jednorodnym polu magnetycznym, jak pokazano na rysunku 31.41. Jaka jest: a) częstotliwość, b) amplituda zmiennej SEM, indukowanej w obwodzie?



Rys. 31.41. Zadanie 18

19. Prądnica składa się ze 100 zwojów drutu, nawiniętych w kształcie prostokątnej ramki o bokach 50 cm i 30 cm, umieszczonej w jednorodnym polu magnetycznym o indukcji $B = 3,5$ T.

rysunku 31.45. Odległość od przewodu do osi ramki jest równa r . Oblicz: a) wartość strumienia magnetycznego przechodzącego przez ramkę, b) natężenie prądu w ramce, gdy oddala się ona od długiego przewodu z prędkością v .



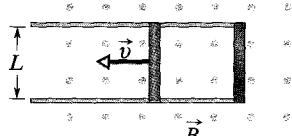
Rys. 31.45. Zadanie 24

31.5 Zjawisko indukcji i przekazywanie energii

25. Odcinek drutu miedzianego o długości 50 cm i o średnicy 1 mm tworzy kołową ramkę, umieszczoną prostopadle do kierunku wektora indukcji, którego wartość rośnie ze stałą szybkością 10 mT/s. Z jaką szybkością wydzieła się w ramce energia termiczna?

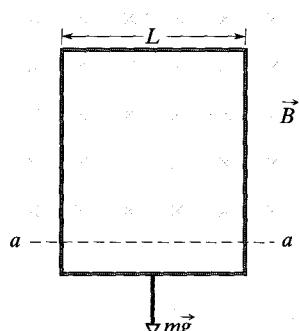
26. Antena w kształcie ramki o polu powierzchni S i oporze R jest ustawiona prostopadle do kierunku wektora indukcji jednorodnego pola magnetycznego \vec{B} . Wartość indukcji maleje liniowo do zera w przedziale czasu Δt . Wyprowadź wzór, określający całkowitą energię, rozpraszana w ramce.

27. Metalowy pręt jest przesuwany z prędkością \vec{v} po dwóch metalowych szynach, połączonych na jednym końcu metalowym paskiem, jak pokazano na rysunku 31.46. Pole magnetyczne o indukcji $B = 0,35 \text{ T}$ jest skierowane przed płaszczyznę rysunku. a) Jaka SEM jest indukowana w obwodzie, jeśli szyny są oddalone o 25 cm, a prędkość pręta jest równa 55 cm/s? b) Ile wynosi natężenie prądu płynącego w pręcie, jeśli ma on opór 18Ω , a opór szyn i paska jest znikomo mały? c) Z jaką szybkością energia jest przekształcana w energię termiczną?



Rys. 31.46. Zadania 27 i 29

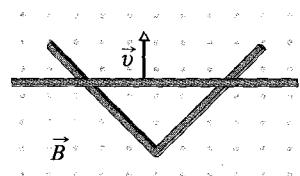
28. Na rysunku 31.47 dłużna prostokątna przewodząca ramka o szerokości L , oporze R i masie m jest początkowo zawieszona w jednorodnym polu magnetycznym \vec{B} , skierowanym poziomo za płaszczyznę rysunku. Pole istnieje tylko powyżej linii aa' . Gdy ramka zaczyna spadać, porusza się ruchem przyspieszonym, aż do osiągnięcia pewnej prędkości granicznej v_g . Pomijając opór powietrza, oblicz prędkość graniczną.



Rys. 31.47. Zadanie 28

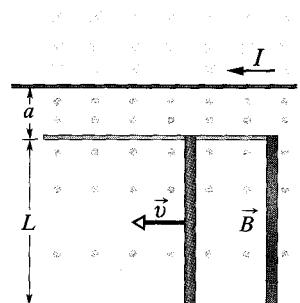
29. Przewodzący pręt, pokazany na rysunku 31.46, ma długość L i jest przesuwany bez tarcia ze stałą prędkością v po poziomych przewodzących szynach. Szyny połączone są na jednym końcu metalowym paskiem. Jednorodne pole magnetyczne o indukcji \vec{B} , skierowane przed płaszczyznę rysunku, przenika przez obszar, w którym porusza się pręt. Przyjmij, że $L = 10 \text{ cm}$, $v = 5 \text{ m/s}$, a $B = 1,2 \text{ T}$. a) Jaka jest wartość i kierunek SEM, indukowanej w pręcie? b) Ile wynosi natężenie prądu, płynącego w obwodzie? Przyjmij, że opór pręta jest równy $0,4 \Omega$, a opór szyn i paska metalowego jest znikomo mały. c) Z jaką szybkością wydzieła się energia termiczna w pręcie? d) Jaka siła musi być przyłożona z zewnątrz do pręta, aby jego ruch odbywał się ze stałą prędkością? e) Z jaką szybkością siła zewnętrzna wykonuje pracę nad prętem? Porównaj ten wynik z wynikiem, otrzymanym w punkcie (c).

30. Dwie proste przewodzące szyny tworzą kąt prosty w punkcie, w którym ich końce się łączą. Przewodzący pręt, połączony elektrycznie z szynami rozpoczęta ruch w wierzchołku kąta w chwili $t = 0$ i porusza się ze stałą prędkością $5,2 \text{ m/s}$, jak pokazano na rysunku 31.48. Pole magnetyczne o indukcji $B = 0,35 \text{ T}$ jest skierowane przed płaszczyznę rysunku. Oblicz: a) strumień magnetyczny, przechodzący przez trójkąt, utworzony z szyn i pręta w chwili $t = 3 \text{ s}$, b) SEM wzdłuż obwodu trójkąta w tej samej chwili. c) Jeżeli zapiszemy SEM jako $\mathcal{E} = at^n$, gdzie a i n są stałymi, to jaka jest wartość n ?



Rys. 31.48. Zadanie 30

31. Na rysunku 31.49 przedstawiono pręt długości L , poruszany ze stałą prędkością v wzdłuż poziomych przewodzących szyn. Pole magnetyczne, w którym porusza się pręt, nie jest jednorodne, ale jest wytworzone przez prąd o natężeniu I , płynący w długim przewodzie równoległym do szyn. Przyjmij, że $v = 5 \text{ m/s}$, $a = 10 \text{ mm}$, $L = 10 \text{ cm}$, a $I = 100 \text{ A}$. a) Oblicz SEM indukowaną w pręcie? b) Ile wynosi natężenie prądu płynącego w przewodzącej ramce? Przyjmij, że opór pręta jest równy $0,4 \Omega$, a opór szyn i paska metalowego łączącego je po prawej stronie jest znikomo mały. c) Z jaką szybkością energia termiczna jest wydzielana w pręcie? d) Jaka siła zewnętrzna musi działać na pręt, aby jego ruch zachodził ze stałą prędkością? e) Z jaką szybkością siła zewnętrzna wykonuje pracę nad prętem? Porównaj ten wynik z wynikiem otrzymanym w punkcie (c).

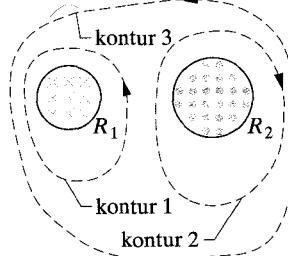


Rys. 31.49. Zadanie 31

31.6 Indukowane pola elektryczne

32. Na rysunku 31.50 przedstawiono dwa obszary R_1 i R_2 w kształcie kół o promieniach $r_1 = 20 \text{ cm}$ i $r_2 = 30 \text{ cm}$. W obszarze R_1

istnieje jednorodne pole magnetyczne o indukcji $B_1 = 50 \text{ mT}$, skierowane za płaszczyznę rysunku, a w obszarze R_2 — jednorodne pole magnetyczne o indukcji $B_2 = 75 \text{ mT}$ skierowane przed płaszczyznę rysunku (pomiń jakiekolwiek pola rozproszone). Wartości indukcji obydwu pól maleją z szybkością $8,5 \text{ mT/s}$. Oblicz całkę $\oint \vec{E} \cdot d\vec{s}$ wzdłuż każdego z trzech konturów, zaznaczonych linią przerywaną.

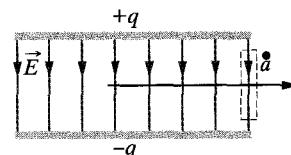


Rys. 31.50. Zadanie 32

33. Długi solenoid ma średnicę 12 cm. Prąd o natężeniu I , płynący w użwojeniu solenoidu wytwarza w jego wnętrzu jednorodne pole magnetyczne o indukcji $B = 30 \text{ mT}$. Zmniejszanie natężenia prądu I powoduje zmniejszanie indukcji magnetycznej z szybkością $6,5 \text{ mT/s}$. Oblicz wartość natężenia indukowanego pola elektrycznego w odległości: a) $2,2 \text{ cm}$, b) $8,2 \text{ cm}$ od osi solenoidu.

34. Na początku 1981 roku, naukowcy z Francis Bitter National Magnet Laboratory w Massachusetts Institute of Technology uruchomili walcowy magnes o średnicy $3,3 \text{ cm}$, który wytworzał pole o indukcji 30 T . Było to wtedy najsilniejsze na świecie stałe pole magnetyczne. Wartość indukcji pola mogła być zmieniana sinusoidalnie w zakresie od $29,6 \text{ T}$ do 30 T z częstością 15 Hz . Jeżeli pole zmienia się w taki sposób, to jaka jest maksymalna wartość natężenia indukowanego pola elektrycznego, w odległości $1,6 \text{ cm}$ od osi magnesu? (Wskazówka: Patrz przykład 31.4).

35. Wykaż, że natężenie pola elektrycznego \vec{E} w naładowanym kondensatorze płaskim nie może nagle spaść do zera (na przykład w punkcie a jak mógłby na to wskazywać rysunek 31.51), gdy przesuwamy się prostopadle do kierunku natężenia pola, np. wzdłuż poziomej strzałki na rysunku. W rzeczywistych kondensatorach zawsze występują pola rozproszone, co oznacza, że wartość wektora \vec{E} zmierza do zera stopniowo i w sposób ciągły. (Patrz zadanie 33 w rozdziale 30). (Wskazówka: Zastosuj prawo Faradaya do prostokątnego konturu, zaznaczonego na rysunku linią przerywaną).



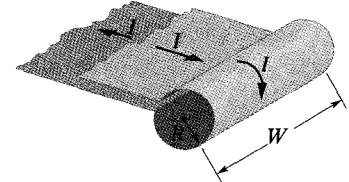
Rys. 31.51. Zadanie 35

31.7 Cewki i indukcyjność

36. Okrągła cewka o promieniu 10 cm składa się z 30 ciasno nawiniętych zwojów. Zewnętrzne pole magnetyczne o wartości indukcji $2,6 \text{ mT}$ jest skierowane prostopadle do płaszczyzny cewki. a) Jaki strumień magnetyczny przenika przez zwoje cewki, jeżeli nie płynie w niej prąd? b) Gdy w cewce płynie w pewnym kierunku prąd o natężeniu $3,8 \text{ A}$, wówczas wypadkowy strumień, przenikający przez cewkę jest równy zeru. Ile wynosi indukcyjność cewki?

37. Indukcyjność ciasno nawiniętej cewki o 400 zwojach wynosi 8 mH . Oblicz strumień magnetyczny, przenikający przez cewkę, jeżeli natężenie prądu jest równe 5 mA .

38. Pasek miedziany o szerokości W jest wygięty w taki sposób, że tworzy rurkę o promieniu R oraz dwie płaskie równoległe części, jak pokazano na rysunku 31.52. W pasku płynie prąd o natężeniu I , rozłożony równomiernie w całej szerokości. W ten sposób tworzy się cewka o jednym zwoju. a) Wyrowadź wzór określający wartość indukcji magnetycznej \vec{B} w części walcowej (z dala od krawędzi). (Wskazówka: Przyjmij, że pole magnetyczne na zewnątrz tej cewki o jednym zwoju jest znacznie małe). b) Oblicz indukcyjność tej cewki o jednym zwoju, pomijając dwie płaskie części.



Rys. 31.52. Zadanie 38

39. W dwóch długich równoległych przewodach płyną w przeciwnych kierunkach prądy o takich samych natężeniach. Każdy z przewodów ma promień a , a ich środki znajdują się w odległości d od siebie. Wykaż, że przy zaniedbywalnie małym strumieniu wewnętrznym przewodów, indukcyjność takiej pary przewodów o długości l jest równa:

$$L = \frac{\mu_0 l}{\pi} \ln \frac{d-a}{a}$$

(Wskazówka: Oblicz strumień, przechodzący przez prostokąt, którego przeciwległymi bokami są odcinki przewodów).

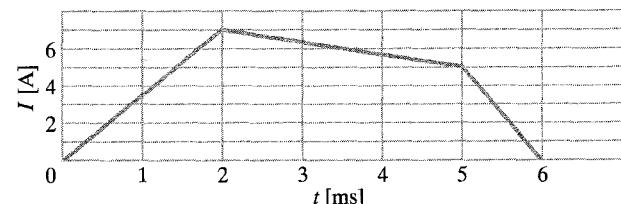
31.8 Samoindukcja

40. W pewnej chwili natężenie prądu i SEM samoindukcji są skierowane jak pokazano na rysunku 31.53. a) Czy natężenie prądu rośnie, czy maleje? b) Indukowana SEM wynosi 17 V , a szybkość zmian natężenia prądu jest równa 25 kA/s . Oblicz indukcyjność cewki.



Rys. 31.53. Zadanie 40

41. W cewce o indukcyjności 12 H płynie prąd stały o natężeniu 2 A . W jaki sposób można wytworzyć w cewce indukowaną SEM o wartości 60 V ?



Rys. 31.54. Zadanie 42

42. Prąd o natężeniu I , płynący w cewce o indukcyjności 4,6 H zmienia się w czasie, w sposób pokazany na rysunku 31.54. Cewka ma opór 12 Ω . Oblicz wartość indukowanej SEM w przedziałach czasu: a) od $t = 0$ do $t = 2$ ms, b) od $t = 2$ ms do $t = 5$ ms, c) od $t = 5$ ms do $t = 6$ ms. (Nie bierz pod uwagę zmian natężenia na końcach przedziałów).

43. Połączenie szeregowo cewek. Dwie cewki o indukcyjnościach L_1 i L_2 są połączone szeregowo i znajdują się w dużej odległości od siebie. a) Wykaż, że indukcyjność równoważna jest równa:

$$L_{rw} = L_1 + L_2.$$

(Wskazówka: Przypomnij sobie wyprowadzenie wzorów dla połączenia szeregowego oporników i kondensatorów. Który przypadek odpowiada omawianemu tutaj?) b) Dlaczego odległość między cewkami musi być duża, aby ta zależność była prawdziwa? c) Jak można uogólnić wzór z punktu (a) na przypadek N cewek, połączonych szeregowo?

44. Połączenie równoległe cewek. Dwie cewki o indukcyjnościach L_1 i L_2 są połączone równolegle i znajdują się w dużej odległości od siebie. a) Wykaż, że indukcyjność równoważna jest równa:

$$1/L_{rw} = 1/L_1 + 1/L_2.$$

(Wskazówka: Przypomnij sobie wyprowadzenie wzorów dla połączenia równoległego oporników i kondensatorów. Który przypadek odpowiada omawianemu tutaj?) b) Dlaczego odległość między cewkami musi być duża, aby ta zależność była prawdziwa? c) Jak można uogólnić wzór z punktu (a) na przypadek N cewek, połączonych równolegle?

31.9 Obwody RL

45. Jak długo (w jednostkach τ_L) musimy czekać, aby natężenie prądu w obwodzie RL różniło się o 0,1% od wartości w stanie ustalonym?

46. W ciągu 5 s natężenie prądu w obwodzie RL wzrasta do jednej trzeciej wartości w stanie ustalonym. Wyznacz indukcyjną stałą czasową.

47. Natężenie prądu w obwodzie RL zmniejsza się od 1 A do 10 mA w ciągu pierwszej sekundy po odłączeniu źródła od obwodu. Oblicz opór R w obwodzie, jeśli L jest równe 10 H.

48. Przeanalizuj obwód RL , przedstawiony na rysunku 31.17. Używając SEM źródła \mathcal{E} jako jednostki, oblicz: a) SEM samoindukcji \mathcal{E}_L tuż po połączeniu klucza z punktem a , b) SEM \mathcal{E}_L , gdy $t = 2\tau_L$, c) Po jakim czasie (wyrażonym w jednostkach τ_L) \mathcal{E}_L będzie równe dokładnie połowie SEM źródła \mathcal{E} ?

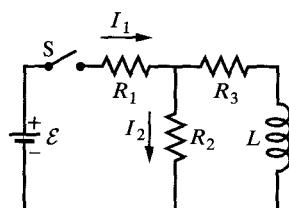
49. Solenoid o indukcyjności 6,3 μH jest połączony szeregowo z opornikiem 1,2 k Ω . a) Jeżeli dołączymy do obwodu źródło o SEM 14 V, to po jakim czasie natężenie prądu w oporniku osiągnie 80% wartości końcowej? b) Jakie jest natężenie prądu w oporniku dla $t = \tau_L$?

50. Wyobraź sobie, że SEM źródła w obwodzie na rysunku 31.18 zmienia się w czasie w taki sposób, że natężenie prądu jest dane zależnością $I(t) = 3 + 5t$, gdzie I jest wyrażone w amperach, a t w sekundach. Przyjmij $R = 4 \Omega$, $L = 6 \text{ H}$ i wyprowadź wzór, określający SEM źródła jako funkcję czasu. (Wskazówka: Zastosuj drugie prawo Kirchhoffa).

51. W chwili $t = 0$ do cewki o indukcyjności $L = 50 \text{ mH}$ i oporze $R = 180 \Omega$ przyłożono nagle różnicę potencjałów 45 V. Z jaką szybkością rośnie natężenie prądu w chwili $t = 1,2 \text{ ms}$?

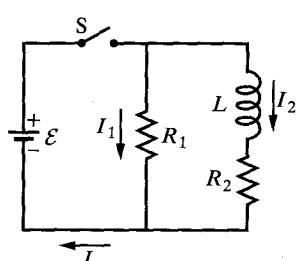
52. Drewniany rdzeń o przekroju kwadratowym tworzy pierścień o wewnętrznej średnicy 10 cm i zewnętrznej średnicy 12 cm. Na takim rdzeniu nawinięto jedną warstwę drutu o średnicy 1 mm i oporze na jednostkę długości 0,02 Ω/m . Dla otrzymanego w ten sposób „toroidu” oblicz: a) indukcyjność, b) indukcyjną stałą czasową. Pomiń grubość izolacji drutu.

53. Na rysunku 31.55 $\mathcal{E} = 100 \text{ V}$, $R_1 = 10 \Omega$, $R_2 = 20 \Omega$, $R_3 = 30 \Omega$, a $L = 2 \text{ H}$. Wyznacz wartości I_1 i I_2 : a) bezpośrednio po zamknięciu klucza S , b) po długim czasie, c) bezpośrednio po ponownym otwarciu klucza, d) po upływie długiego czasu od ponownego otwarcia klucza.



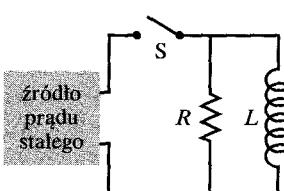
Rys. 31.55. Zadanie 53

54. W obwodzie na rysunku 31.56 $\mathcal{E} = 10 \text{ V}$, $R_1 = 5 \Omega$, $R_2 = 10 \Omega$, a $L = 5 \text{ H}$. Dla dwóch oddzielnych przypadków (I) tuż po zamknięciu klucza i (II) po długim czasie od zamknięcia klucza, oblicz: a) natężenie prądu I_1 w oporniku R_1 , b) natężenie prądu I_2 w oporniku R_2 , c) natężenie prądu I , płynącego przez klucz, d) różnicę potencjałów na oporniku R_2 , e) różnicę potencjałów na cewce L , f) szybkość zmian dI_2/dt .



Rys. 31.56. Zadanie 54

55*. W obwodzie, przedstawionym na rysunku 31.57 klucz S został zamknięty w chwili $t = 0$. Od tego czasu źródło prądu stałego, zmieniając swoją SEM, utrzymuje stałe natężenie prądu I przepływającego przez zamknięty



Rys. 31.57. Zadanie 55

klucz. a) Wyprowadź wzór, określający natężenie prądu w cewce jako funkcję czasu. b) Wykaż, że w chwili $t = (L/R) \ln 2$ natężenie prądu w oporniku jest równe natężeniu prądu w cewce.

31.10. Energia zmagazynowana w polu magnetycznym

56. Przeanalizuj obwód, przedstawiony na rysunku 31.18. Po jakim czasie (wyrażonym w jednostkach indukcyjnej stałej czasowej) od dołączenia źródła, energia zgromadzona w polu magnetycznym cewki będzie równa połowie wartości w stanie ustalonym?

57. Przypuśćmy, że indukcyjna stała czasowa dla obwodu, przedstawionego na rysunku 31.18, wynosi 37 ms, a natężenie prądu w obwodzie jest równe zeru w chwili $t = 0$. Po jakim czasie szybkość, z jaką energia jest zamieniana na energię termiczną w oporniku, będzie równa szybkości, z jaką energia jest gromadzona w cewce?

58. Cewka o indukcyjności 2 H i oporze 10Ω została nagle dołączona do źródła o SEM $\mathcal{E} = 100$ V i oporze wewnętrznym równym zero. Dla $t = 0,1$ s, licząc od momentu dołączenia źródła, oblicz szybkość, z jaką: a) energia jest gromadzona w polu magnetycznym, b) energia termiczna jest wydzielana w oporniku, c) energia jest dostarczana przez źródło.

59. Cewka jest połączona szeregowo z opornikiem $10 \text{ k}\Omega$. Po dołączeniu baterii o SEM 50 V do tych dwóch elementów, natężenie prądu osiąga wartość 2 mA po upływie 5 ms. a) Oblicz indukcyjność cewki. b) Oblicz energię zmagazynowaną w cewce w tej chwili.

60. W obwodzie, przedstawionym na rysunku 31.18, przyjmij, że $\mathcal{E} = 10$ V, $R = 6,7 \Omega$, a $L = 5,5$ H. Źródło zostaje dołączone w chwili $t = 0$. a) Ile energii dostarcza źródło podczas pierwszych 2 s? b) Jak część tej energii jest zmagazynowana w polu magnetycznym cewki? c) Jaka część tej energii jest zamieniana na energię termiczną w oporniku?

61. Udowodnij, że po przełączeniu klucza S na rysunku 31.17, z punktu *a* do punktu *b*, cała energia zmagazynowana w cewce zostanie w końcu wydzielona w oporniku, w postaci energii termicznej.

31.11 Gęstość energii pola magnetycznego

62. Toroidalna cewka o indukcyjności 90 mH obejmuje obszar o objętości $0,02 \text{ m}^3$. Ile wynosi natężenie prądu płynącego w cewce, jeżeli średnia gęstość energii wewnętrz toroidu jest równa 70 J/m^3 ?

63. Solenoid długości 85 cm ma pole przekroju poprzecznego równe 17 cm^2 . Solenoid składa się z 950 zwojów, w których płynie prąd o natężeniu 6,6 A. a) Oblicz gęstość energii pola magnetycznego wewnętrz solenoidu. b) Wyznacz całkowitą energię, zmagazynowaną w polu magnetycznym (pomiń straty energii na końcach solenoidu).

64. Indukcja magnetyczna w przestrzeni międzygwiazdnej naszej galaktyki ma wartość około 10^{-10} T. Oblicz energię zmagazynowaną w tym polu, w sześcianie o krawędzi 10 lat świetlnych. (Dla porównania zauważ, że odległość do najbliższej gwiazdy jest równa 4,3 lat świetlnych, a promień naszej galaktyki wynosi około $8 \cdot 10^4$ lat świetlnych).

65. Jaka musi być wartość natężenia jednorodnego pola elektrycznego, jeżeli ma ono mieć taką samą gęstość energii, jak pole magnetyczne o indukcji 0,5 T?

66. W kołowej ramce o promieniu 50 mm płynie prąd o natężeniu 100 A. a) Oblicz wartość indukcji magnetycznej pola w środku ramki. b) Oblicz gęstość energii w środku ramki.

67. W kawałku drutu miedzianego płynie prąd o natężeniu 10 A, rozłożony równomiernie w przekroju poprzecznym. Oblicz gęstość energii: a) pola magnetycznego, b) pola elektrycznego na powierzchni drutu. Średnica drutu jest równa 2,5 mm, a jego opór na jednostkę długości — $3,3 \Omega/\text{km}$.

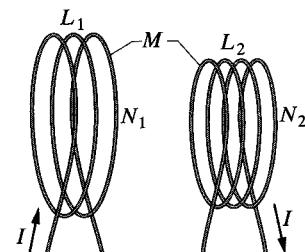
31.12 Indukcja wzajemna

68. Cewka 1 ma indukcyjność $L_1 = 25 \text{ mH}$ i $N_1 = 100$ zwojów. Cewka 2 ma indukcyjność $L_2 = 40 \text{ mH}$ i $N_2 = 200$ zwojów. Cewki są sztywno umocowane względem siebie, a ich indukcyjność wzajemna M wynosi 3 mH. Prąd o natężeniu 6 mA, płynący w pierwszej cewce zmienia się z szybkością 4 A/s. a) Jaki strumień magnetyczny Φ_{12} przenika przez cewkę 1 i jaka powstaje tam SEM samoindukcji? b) Jaki strumień magnetyczny Φ_{21} przenika przez cewkę 2 i jaka powstaje tam SEM indukcji wzajemnej?

69. Dwie cewki mają ustalone położenia. Gdy w cewce 1 nie płynie prąd, a natężenie prądu w cewce 2 rośnie z szybkością 15 A/s, SEM w cewce 1 wynosi 25 mV. a) Jaka jest indukcyjność wzajemna cewek? b) Jaki strumień przechodzi przez cewkę 2, gdy nie płynie w niej prąd, a natężenie prądu w cewce 1 jest równe 3,6 A?

70. Dwa solenoidy są częścią cewki zaplonowej w samochodzie. Gdy natężenie prądu w jednym solenoidzie maleje od wartości 6 A do zera, w drugim solenoidzie jest indukowana SEM o wartości 30 kV. Ile wynosi indukcyjność wzajemna obydwu solenoidów?

71. Dwie cewki, połączone jak na rysunku 31.58, mają indukcyjności L_1 i L_2 . Ich indukcyjność wzajemna wynosi M . a) Wykaż, że to połączenie może być zastąpione jedną cewką o indukcyjności równoważnej:



$$L_{rw} = L_1 + L_2 + 2M.$$

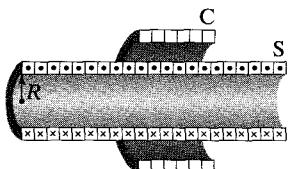
Rys. 31.58. Zadanie 71

b) Jak powinny być połączone cewki na rysunku 31.58, aby ich indukcyjność równoważna była równa:

$$L_{\text{rw}} = L_1 + L_2 - 2M?$$

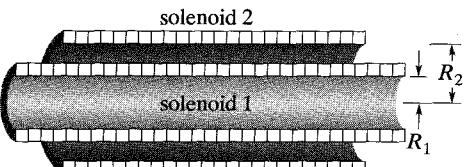
(To zadanie jest podobne do zadania 43, ale bardziej ogólne, bo nie wymagamy, aby cewki znajdowały się daleko od siebie).

72. Cewka C o N zwojach otacza długi solenoid S o promieniu R i n zwojach na jednostkę długości, jak pokazano na rysunku 31.59. Wykaż, że indukcyjność wzajemna układu cewka–solenoid wyrażona jest wzorem $M = \mu_0 \pi R^2 n N$. Wytniecz, dlaczego M nie zależy od kształtu i wymiarów cewki, a także od tego, czy cewka jest ciasno, czy luźno nawinięta.



Rys. 31.59. Zadanie 72

73. Na rysunku 31.60 przedstawiono dwa współosiowe solenoidy w przekroju. Wykaż, że indukcyjność wzajemna M odcinka o długości l tego układu dwóch solenoidów wyrażona jest wzorem

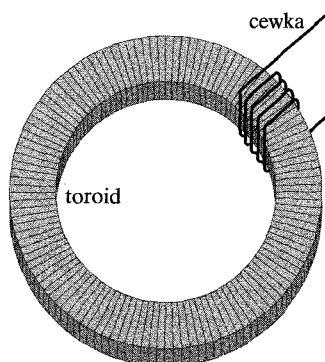


Rys. 31.60. Zadanie 73

$M = \pi R_1^2 l \mu_0 n_1 n_2$, gdzie n_1 i n_2 oznaczają liczbę ich zwojów na jednostkę długości, a R_1 jest promieniem wewnętrznego solenoidu. Dlaczego M zależy od R_1 , a nie zależy od R_2 ?

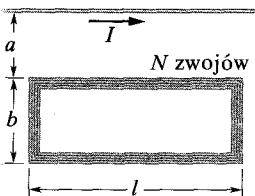
74. Na rysunku 31.61 przedstawiono cewkę o N_2 zwojach, nawiniętą, jak pokazano, wokół części toroidu o N_1 zwojach. Wewnętrzny promień toroidu jest równy a , jego zewnętrzny promień — b , a wysokość — h . Wykaż, że indukcyjność wzajemna tego układu toroid–cewka wynosi:

$$M = \frac{\mu_0 N_1 N_2 h}{2\pi} \ln \frac{b}{a}.$$



Rys. 31.61. Zadanie 74

75. Prostokątna ramka o N ciasno nawiniętych zwojach jest umieszczona w pobliżu długiego prostego przewodu, jak pokazano na rysunku 31.62. a) Ile wynosi indukcyjność wzajemna układu ramka–przewód? b) Oblicz wartość M dla $N = 100$, $a = 1 \text{ cm}$, $b = 8 \text{ cm}$ i $l = 30 \text{ cm}$.



Rys. 31.62. Zadanie 75

32 Magnetyzm materii: równania Maxwell'a

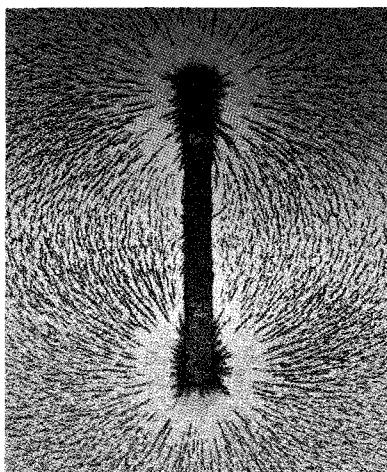
Oto widziana z góry żaba, która unosi się w polu magnetycznym wytworzonym przez prąd płynący w umieszczonym pod nią pionowym solenoidzie. Siła magnetyczna solenoidu działająca na żabę do góry równoważy siłę grawitacyjną działającą na żabę w dół. (Nie jest to dla żaby uciążliwe, gdyż sprawia wrażenie, jakby pływała w wodzie, a to żaby bardzo lubią). Jednakże żaba nie ma właściwości magnetycznych (np. nie może utrzymać się na drzwiach lodówki jak magnes).

Jak w takim razie siła magnetyczna może działać na żabę?

Odpowiedź znajdziesz w tym rozdziale.



32.1. Magnesy



Rys. 32.1. Magnes sztabkowy jest dipolem magnetycznym. Opiłki żelaza pokazują układ linii pola magnetycznego. (Tło jest oświetlone światłem barwnym)

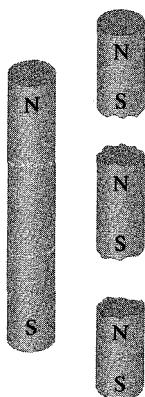
Pierwszymi znanimi magnesami były kawałki *magnetytu*, czyli minerału, który został *namagnesowany* w sposób naturalny. Gdy starożytni Grecy i Chińczycy odkryli ten rzadko występujący minerał, wydało im się zabawne, że magnetyt może, jak gdyby w czarodziejski sposób, przyciągać kawałki metalu. Jednak dopiero znacznie później nauczono się wykorzystywać magnetyt (a także namagnesowane kawałki żelaza) do określania kierunku za pomocą kompasu.

Dzisiaj magnesy i materiały magnetyczne są obecne wszędzie. Znajdujemy je w magnetowidach kasetowych, kasetach magnetofonowych, kartach bankomatowych i kredytowych, a nawet w tuszu, używanym do drukowania banknotów. W rzeczywistości niektóre rodzaje płatków śniadaniowych, które są „wzbogacone żelazem”, zawierają drobne kawałki materiałów magnetycznych (możesz je wyłowić z papki płatków i wody za pomocą magnesu). Co ważniejsze jednak, współczesny przemysł elektroniczny (łącznie z branżą muzyczną i informatyczną) nie mógłby istnieć bez materiałów magnetycznych.

Właściwości magnetyczne materiałów pochodzą od ich struktury atomowej i elektronowej. Najpierw zajmiemy się jednak magnesem sztabkowym, przedstawionym na rysunku 32.1. Jak już widzieliśmy, opilki żelaza rozsypane wokół takiego magnesu ustawiają się zgodnie z kierunkiem wektora indukcji magnetycznej pola pochodzącego od magnesu, a ich układ pokazuje przebieg linii pola magnetycznego. Zagęszczenie linii przy końcach magnesu pozwala wnioskować, że linie te wychodzą z jednego końca magnesu, a zbiegają się do drugiego końca. Zgodnie z umową, źródło linii nazywamy *biegunem północnym* magnesu, a przeciwny koniec — *biegunem południowym*. Możemy powiedzieć, że magnes, ze względu na dwa bieguny, jest przykładem **dipola magnetycznego**.

Wyobraź sobie teraz, że łamiemy magnes sztabkowy w taki sposób, w jaki można złamać kawałek kredy (rys. 32.2). Wydawałoby się, że możemy wyodrębnić w ten sposób pojedynczy biegun, czyli *monopol magnetyczny*. Jednakże nie potrafimy tego zrobić, nawet gdybyśmy podzielili magnes na pojedyncze atomy, a następnie elektryny i jądra atomowe. Każda część ma biegun północny i południowy. Tak więc:

➤ Najprostszą strukturą magnetyczną, która może istnieć, jest dipol magnetyczny. Nie stwierdzono istnienia monopolii magnetycznych.



Rys. 32.2. Jeżeli złamiemy magnes, każda część staje się osobnym magnesem, mającym swój biegun północny i południowy

32.2. Prawo Gaussa dla pól magnetycznych

To, że monopole magnetyczne nie istnieją, wynika z prawa Gaussa. Zgodnie z tym prawem, wypadkowy strumień magnetyczny Φ_B przez dowolną zamkniętą powierzchnię jest równy零:

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0 \quad (\text{prawo Gaussa dla pól magnetycznych}). \quad (32.1)$$

Porównajmy to prawo z prawem Gaussa dla pól elektrycznych:

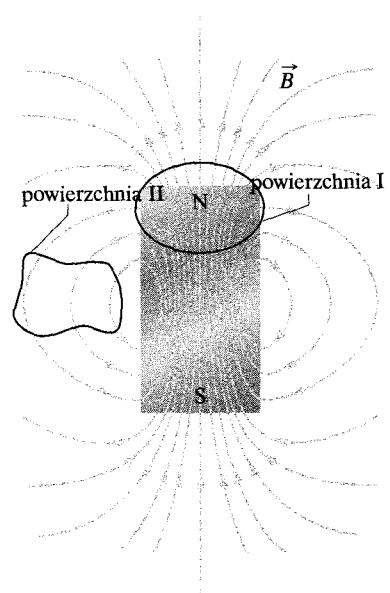
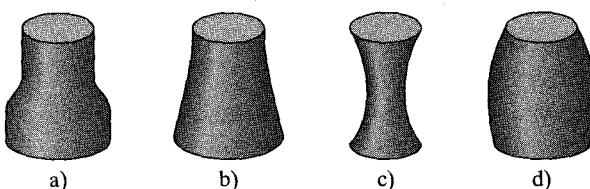
$$\Phi_E = \oint \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{q_{\text{wewn}}}{\epsilon_0} \quad (\text{prawo Gaussa dla pól elektrycznych}).$$

W obydwu równaniach całka jest obliczana po zamkniętej powierzchni Gaussa. Z prawa Gaussa dla pól elektrycznych wynika, że ta całka (równa wypadkowemu strumieniowi elektrycznemu przenikającemu przez powierzchnię) jest proporcjonalna do wypadkowego ładunku elektrycznego q_{wewn} , znajdującego się wewnętrz powierzchni. Z prawa Gaussa dla pól magnetycznych wynika natomiast, że wypadkowy strumień magnetyczny, przenikający przez powierzchnię zamkniętą jest równy zeru, gdyż nie ma wypadkowego „ładunku magnetycznego”, czyli pojedynczych biegunków magnetycznych, otoczonych przez tę powierzchnię. Najprostszą strukturą magnetyczną, która może istnieć, a więc znajdować się wewnątrz powierzchni Gaussa, jest dipol, złożony zarówno ze źródła linii pola, jak i miejsca, do którego linie pola się zbiegają. Zatem zawsze tyle samo strumienia magnetycznego wpływa do obszaru ograniczonego powierzchnią, ile z niego wypływa, a wypadkowy strumień magnetyczny musi zawsze równać się zeru.

Prawo Gaussa dla pól magnetycznych obowiązuje także dla struktur bardziej skomplikowanych niż dipol magnetyczny. Jest ono słuszne nawet wtedy, gdy powierzchnia Gaussa nie obejmuje całego układu. Powierzchnia Gaussa II w pobliżu magnesu sztabkowego na rysunku 32.3 nie obejmuje żadnych biegunków i możesz z łatwością zauważyc, że wypadkowy strumień magnetyczny przenikający przez tę powierzchnię jest równy zeru. Powierzchnia Gaussa I sprawia więcej trudności. Mogłoby się wydawać, że otacza ona tylko północny biegun magnesu, gdyż obejmuje tylko jego górną część, a nie obejmuje dolnej. Jednakże dolnej granicy powierzchni musimy przypisać biegun południowy, gdyż linie pola magnetycznego tam właśnie dochodzą. (Część magnesu otoczona powierzchnią przypomina kawałek złamanej magnesu na rysunku 32.2). Tak więc w rzeczywistości powierzchnia Gaussa I obejmuje dipol magnetyczny, a wypadkowy strumień magnetyczny przez powierzchnię jest równy zeru.

SPRAWDZIAN 1: Na rysunku przedstawiono cztery zamknięte powierzchnie o płaskich ścianach górnych (g) i dolnych (d) i zakrzywionych ścianach bocznych. W tabeli podano wartości pól powierzchni S ścian górnych i dolnych oraz wartości B indukcji magnetycznej jednorodnych pól, przecinających prostopadle te ściany. Jednostki S i B są dowolne, ale zgodne ze sobą. Uszereguj powierzchnie pod względem wartości strumienia magnetycznego, przenikającego ściany boczne, zaczynając od największej wartości.

| powierzchnia | S_g | B_g | S_d | B_d |
|--------------|-------|----------------|-------|----------------|
| a | 2 | 6, na zewnątrz | 4 | 3, do wewnątrz |
| b | 2 | 1, do wewnątrz | 4 | 2, do wewnątrz |
| c | 2 | 6, do wewnątrz | 2 | 8, na zewnątrz |
| d | 2 | 3, na zewnątrz | 3 | 2, na zewnątrz |



Rys. 32.3. Linie pola magnetycznego krótkiego magnesu sztabkowego. Krzywe zamknięte zaznaczone na czerwono są przekrojami trójwymiarowych powierzchni Gaussa

32.3. Magnetyzm ziemski

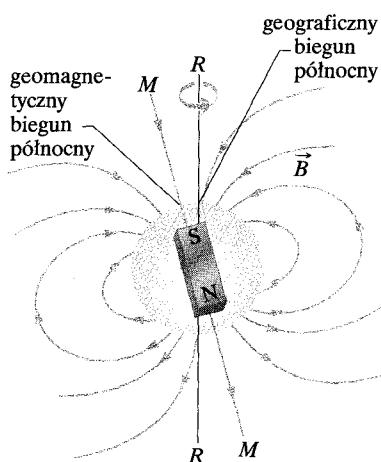
Ziemia jest ogromnym magnesem; w miejscach znajdujących się w pobliżu powierzchni Ziemi pole magnetyczne może być traktowane w przybliżeniu jako pole pochodzące od wielkiego magnesu sztabkowego (dipola magnetycznego), który usadowił się w środku naszej planety. Na rysunku 32.4 w sposób uproszczony zilustrowano symetryczne pole dipola, bez uwzględnienia zniekształceń, spowodowanych przez naładowane cząstki docierające do Ziemi od Słońca.

Ziemskie pole magnetyczne jest polem, pochodzącym od dipola magnetycznego, a więc związany jest z nim dipolowy moment magnetyczny $\vec{\mu}$. Dla idealnego pola, jak na rysunku 32.4, wartość $\vec{\mu}$ wynosi $8 \cdot 10^{22} \text{ J/T}$, a kierunek $\vec{\mu}$ tworzy kąt $11,5^\circ$ z osią obrotu (RR) Ziemi. Oś dipola (MM na rysunku 32.4) pokrywa się z kierunkiem wektora $\vec{\mu}$ i przecina powierzchnię Ziemi na *geomagnetycznym biegunie północnym* w północno-zachodniej Grenlandii i na *geomagnetycznym biegunie południowym* na Antarktydzie. Linie pola magnetycznego \vec{B} wybiegają z wnętrza Ziemi na półkuli południowej i zbiegają się na półkuli północnej. Tak więc biegun magnetyczny na półkuli północnej, znany jako „magnetyczny biegun północny”, jest w rzeczywistości *biegunem południowym ziemskiego dipola magnetycznego*.

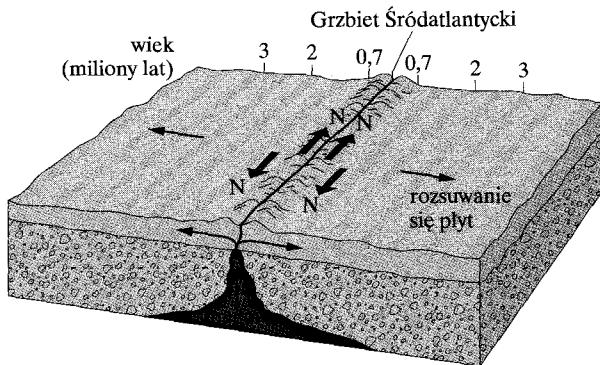
Kierunek wektora indukcji magnetycznej w dowolnym miejscu na powierzchni Ziemi jest zwykle określany za pomocą dwóch kątów. **Deklinacja magnetyczna** jest kątem (mierzonym w prawo lub w lewo) między kierunkiem północy geograficznej (znajdującej się w punkcie o szerokości geograficznej 90°), a kierunkiem poziomej składowej wektora indukcji. **Inklinacja magnetyczna**, zwana również nachyleniem magnetycznym, jest kątem (mierzonym w góre lub w dół) między płaszczyzną poziomą a kierunkiem wektora indukcji.

Za pomocą magnetometrów można zmierzyć te kąty i wyznaczyć indukcję magnetyczną z dużą dokładnością. Możemy sobie jednak całkiem dobrze poradzić, używając tylko kompasu i miernika inklinacji (inklinometru). Kompass jest to po prostu magnes w kształcie igły, umocowany w taki sposób, że może obracać się swobodnie wokół osi pionowej. Gdy igła znajduje się w płaszczyźnie poziomej, jej północny biegun wskazuje geomagnetyczny biegun północny (który, jak pamiętamy, jest w rzeczywistości biegunem południowym). Kąt między kierunkiem igły a północą geograficzną jest równy deklinacji magnetycznej. Inklinometr jest podobnym magnesem, który może obracać się swobodnie wokół osi poziomej. Jeśli pionowa płaszczyzna obrotu jest ustawiona zgodnie z kierunkiem wskazywanym przez kompas, to kąt między igłą miernika a płaszczyzną poziomą jest równy inklinacji magnetycznej.

W każdym punkcie na powierzchni Ziemi wartość i kierunek zmierzonej indukcji magnetycznej mogą się znacznie różnić od tych dla idealnego pola dipola na rysunku 32.4. W rzeczywistości punkt, w którym wektor indukcji jest skierowany prostopadle do wnętrza Ziemi, nie znajduje się na geomagnetycznym biegunie północnym w Grenlandii, jak by można oczekiwać. Ten punkt, zwany *inklinacyjnym biegunem północnym*, jest położony daleko od Grenlandii, na Wyspach Królowej Elżbiety w północnej Kanadzie.



Rys. 32.4. Pole magnetyczne Ziemi przedstawione jako pole dipola. Oś dipola MM tworzy kąt $11,5^\circ$ z osią obrotu Ziemi RR . Południowy biegun dipola znajduje się na półkuli północnej



Rys. 32.5. Magnetyczny profil dna morskiego po obydwu stronach Grzbietu Śródatlantycznego. Magma pokrywająca dno morskie, wypchnięta przez szcze- linę w grzbiecie i rozsuwająca się wraz z płytami tektonicznymi, pokazuje za- pis magnetycznej historii jądra Ziemi. Kierunek pola magnetycznego wytwo- rzonego przez jądro zmienia się na prze- ciwny w przybliżeniu co milion lat

Ponadto pole obserwowane w wielu miejscach na powierzchni Ziemi zmienia się w czasie. Zmiany kilkuletnie są niewielkie, natomiast zmiany zachodzące w okresie np. stu lat mogą być znaczne. Na przykład między rokiem 1580 a 1820 kierunek wskazywany przez kompas w Londynie zmienił się o 35° .

Pomimo takich lokalnych zmian, średnie pole dipola zmienia się powoli w ta- kich stosunkowo krótkich okresach czasu. Zmiany zachodzące w dłuższym czasie mogą być badane za pomocą pomiaru słabego magnetyzmu dna oceanu po obu stronach Grzbietu Śródatlantycznego (rys. 32.5). Dno zostało uformowane przez stopionąмагmę, która przesączała się z wnętrza Ziemi przez pęknięcie w grzbie- cie, zestalała się, a następnie była odsuwana od grzbietu przez ruch płyt tekto- nicznych z szybkością kilku centymetrów na rok. W czasie krzepnięcia magma zostało słabo namagnesowane w kierunku zgodnym z ówczesnym kierunkiem ziemskiego pola magnetycznego. Badania zestalonej magmy na dnie oceanu wy- kazały, że pole ziemskie zmieniało swoją *biegunowość* (czyli kierunek bieguna północnego i południowego) w przybliżeniu co milion lat. Przyczyna tych zmian nie jest znana, a mechanizm powstawania ziemskiego pola magnetycznego jest w dalszym ciągu nie do końca zrozumiałý.

32.4. Magnetyzm i elektryny

Materiały magnetyczne, od magnetytu po taśmy wideo, mają właściwości ma- gnetyczne, gdyż znajdują się w nich elektryny. Zapoznaliśmy się już z jednym ze sposobów wytwarzania pola magnetycznego przez elektryny: jeżeli elektryny poruszają się w przewodzie w postaci prądu elektrycznego, to ich ruch wywołuje pole magnetyczne wokół przewodu. Są jeszcze dwa inne sposoby, a każdy z nich związany jest z dipolowym momentem magnetycznym, który tworzy pole ma- gnetyczne w otaczającej go przestrzeni. Wyjaśnienie tych zjawisk wymaga jednak znajomości fizyki kwantowej, która wykracza poza zakres materiału zawarty w tej książce, dlatego przedstawimy tutaj tylko wyniki.

Spinowy moment magnetyczny

Elektron ma swój własny moment pędu, nazywany **spinowym momentem pędu** (albo po prostu **spinem**) \vec{S} . Z tym spinem związany jest własny **spinowy moment**

magnetyczny $\vec{\mu}_s$. (Słowo *własny* oznacza, że \vec{S} i $\vec{\mu}_s$ są podstawowymi cechami charakterystycznymi elektronu, tak jak jego masa i ładunek elektryczny). \vec{S} i $\vec{\mu}_s$ są związane równaniem

$$\vec{\mu}_s = -\frac{e}{m} \vec{S}, \quad (32.2)$$

w którym e jest ładunkiem elementarnym ($1,60 \cdot 10^{-19}$ C), a m — masą elektronu ($9,11 \cdot 10^{-31}$ kg). Znak minus oznacza, że $\vec{\mu}_s$ i \vec{S} są skierowane przeciwnie.

Spin \vec{S} różni się od momentów pędu omawianych w rozdziale 12 pod dwoma względami:

1. Nie możemy zmierzyć wektora \vec{S} . Możemy jednak zmierzyć jego składową wzdłuż dowolnej osi.
2. Mierzona składowa wektora \vec{S} jest *skwantowana*, co jest ogólnym terminem oznaczającym, że może ona przyjmować tylko pewne wartości. Składowa wektora \vec{S} może mieć tylko dwie wartości różniące się znakiem.

Założymy, że składowa spinu S_z jest mierzona wzdłuż osi z układu współrzędnych. Składowa S_z może przyjmować tylko dwie wartości:

$$S_z = m_s \frac{h}{2\pi}, \quad \text{dla } m_s = \pm \frac{1}{2}, \quad (32.3)$$

gdzie m_s jest *magnetyczną spinową liczbą kwantową*, a h ($= 6,63 \cdot 10^{-34}$ J · s) jest stałą Plancka, wszechobecną stałą fizyki kwantowej. Znaki w równaniu (32.3) mają związek z kierunkiem S_z wzdłuż osi z . Gdy S_z jest równoległe do osi z , m_s jest równe $+\frac{1}{2}$, a o elektronie mówimy, że ma *spin* skierowany *w górę*. Gdy S_z jest antyrównoległe do osi z , m_s jest równe $-\frac{1}{2}$, a o elektronie mówimy, że ma *spin* skierowany *w dół*.

Nie możemy również zmierzyć spinowego momentu magnetycznego $\vec{\mu}_s$. Możemy tylko zmierzyć jego składową wzdłuż dowolnej osi i ta składowa także jest skwantowana, przyjmując dwie możliwe wartości, równe co do wartości bezwzględnej, ale różniące się znakiem. Można znaleźć związek składowej $\mu_{s,z}$, mierzonej wzdłuż osi z , ze składową S_z , przepisując równanie (32.2) dla składowych z -owych:

$$\mu_{s,z} = -\frac{e}{m} S_z.$$

Podstawiając S_z z równania (32.3), otrzymujemy:

$$\mu_{s,z} = \mp \frac{e h}{4\pi m}, \quad (32.4)$$

gdzie znak plus lub minus oznacza $\mu_{s,z}$, skierowane odpowiednio równolegle lub antyrównolegle do osi z .

Wielkość po prawej stronie równania (32.4) nazywamy *magnetonem Bohra* μ_B :

$$\mu_B = \frac{e h}{4\pi m} = 9,27 \cdot 10^{-24} \text{ J/T} \quad (\text{magneton Bohra}). \quad (32.5)$$

Spinowe momenty magnetyczne elektronów i innych cząstek elementarnych mogą być wyrażone w jednostkach μ_B . Dla elektronu wartość bezwzględna mierzonej

składowej z -owej $\vec{\mu}$ jest równa:

$$\mu_{s,z} = \mu_B. \quad (32.6)$$

(Zgodnie z teorią kwantową, zwana *elektrodynamiką kwantową* (QED, od ang. *quantum electrodynamics*), $\mu_{s,z}$ jest w rzeczywistości nieco większe niż μ_B , ale będziemy pomijać ten fakt).

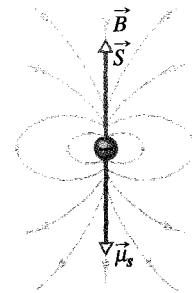
Gdy elektron jest umieszczony w zewnętrznym polu magnetycznym \vec{B}_{zewn} , jego energia potencjalna E_p może być związana z ustawieniem spinowego momentu magnetycznego $\vec{\mu}_s$, podobnie jak energia potencjalna jest związana z ustawieniem dipolowego momentu magnetycznego $\vec{\mu}$ ramki z prądem, umieszczonej w polu \vec{B}_{zewn} . Zgodnie z równaniem (29.38), energia potencjalna elektronu jest równa:

$$E_p = -\vec{\mu}_s \cdot \vec{B}_{\text{zewn}} = -\mu_{s,z} B_{\text{zewn}}, \quad (32.7)$$

gdzie os z pokrywa się z kierunkiem \vec{B}_{zewn} .

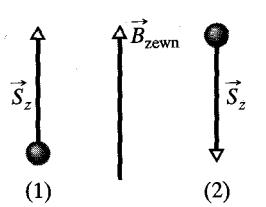
Jeżeli wyobrażimy sobie elektron jako kulkę o rozmiarach mikroskopowych (która w rzeczywistości nie jest), to możemy przedstawić spin \vec{S} , spinowy moment magnetyczny $\vec{\mu}_s$ i związane z nim pole dipola magnetycznego o indukcji \vec{B} , jak na rysunku 32.6. Chociaż używamy tu słowa „spin” (które oznacza wirowanie), elektron w rzeczywistości nie wiruje jak bąk. Jak wobec tego coś może mieć moment pędu bez wykonywania ruchu wirowego? Aby odpowiedzieć na to pytanie, znów musielibyśmy skorzystać z praw fizyki kwantowej.

Protony i neutrony również mają swój własny moment pędu zwany spinem i związany z nim własny spinowy moment magnetyczny. Dla protonu te dwa wektory mają taki sam kierunek, a dla neutronu ich kierunki są przeciwe. Nie będziemy badać przyczynków od tych momentów magnetycznych do pola magnetycznego atomów, gdyż ich wartości są około tysiąc razy mniejsze od wartości spinowego momentu magnetycznego elektronu.



Rys. 32.6. Spin \vec{S} , spinowy moment magnetyczny $\vec{\mu}_s$ i wektor indukcji pola \vec{B} dipola magnetycznego dla elektronu przedstawionego jako kulka o rozmiarach mikroskopowych

SPRAWDZIAN 2: Na rysunku przedstawiono ustawienie spinu dla dwóch cząstek, umieszczonych w zewnętrznym polu magnetycznym o indukcji \vec{B}_{zewn} . a) Jeżeli cząstki są elektronami, to które ustawienie spinu odpowiada mniejszej energii potencjalnej? b) Jeżeli natomiast cząstki są protonami, to które ustawienie spinu odpowiada mniejszej energii potencjalnej?



Orbitalny moment magnetyczny

Elektron w atomie ma także moment pędu, zwany **orbitalnym momentem pędu** \vec{L}_{orb} , oraz towarzyszący mu **orbitalny moment magnetyczny** $\vec{\mu}_{\text{orb}}$. Te dwie wielkości są związane równaniem:

$$\vec{\mu}_{\text{orb}} = -\frac{e}{2m} \vec{L}_{\text{orb}}. \quad (32.8)$$

Znak minus oznacza, że $\vec{\mu}_{\text{orb}}$ i \vec{L}_{orb} są skierowane przeciwnie.



Nie możemy zmierzyć orbitalnego momentu pędu \vec{L}_{orb} . Możemy tylko zmierzyć jego składową wzdłuż dowolnej osi i ta składowa jest skwantowana. Na przykład składowa wzdłuż osi z może przyjmować tylko wartości:

$$L_{\text{orb},z} = m_l \frac{\hbar}{2\pi}, \quad \text{dla } m_l = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm (\text{wartość maksymalna}), \quad (32.9)$$

gdzie m_l jest nazywane *magnetyczną orbitalną liczbą kwantową*, a „wartość maksymalna” oznacza największą dozwoloną całkowitą wartość m_l . Znaki w równaniu (32.9) odnoszą się do kierunku $L_{\text{orb},z}$ wzdłuż osi z .

Orbitalny moment magnetyczny $\vec{\mu}_{\text{orb}}$ elektronu również nie może być zmierzony. Możemy zmierzyć tylko jego składową wzdłuż dowolnej osi i ta składowa także jest skwantowana. Zapisując równanie (32.8) dla składowej wzdłuż tej samej osi z , a następnie podstawiając $L_{\text{orb},z}$ z równania (32.9), możemy zapisać składową z -ową $\mu_{\text{orb},z}$ orbitalnego momentu magnetycznego:

$$\mu_{\text{orb},z} = -m_l \frac{e\hbar}{4\pi m} \quad (32.10)$$

lub używając magnetonu Bohra jako jednostki:

$$\mu_{\text{orb},z} = -m_l \mu_B. \quad (32.11)$$

Gdy umieścimy atom w zewnętrznym polu magnetycznym \vec{B}_{zewn} , jego energia potencjalna E_p może być związana z ustawieniem orbitalnego momentu magnetycznego każdego elektronu w atomie. Wartość energii jest równa:

$$E_p = -\vec{\mu}_{\text{orb}} \cdot \vec{B}_{\text{zewn}} = -\mu_{\text{orb},z} B_{\text{zewn}}, \quad (32.12)$$

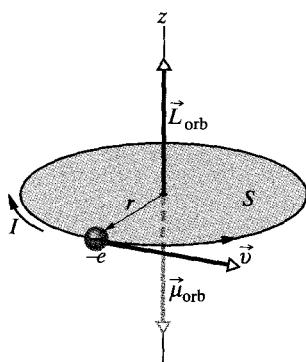
gdy os z pokrywa się z kierunkiem \vec{B}_{zewn} .

Chociaż używamy tu słów „orbita” i „orbitalny”, elektrony w rzeczywistości nie krążą wokół jądra atomowego po orbitach, jak planety wokół Słońca. Jak zatem elektrony mogą mieć orbitalny moment pędu, nie krążąc po orbitach w potocznym sensie tego słowa? I znów można to wyjaśnić tylko za pomocą fizyki kwantowej.

Model pętli z prądem dla orbit elektronowych

Równanie (32.8) można wyprowadzić, nie korzystając z praw fizyki kwantowej, w sposób przedstawiony niżej. Zakładamy przy tym, że elektron krąży po kołowym torze o promieniu znacznie większym od promienia atomu (stąd nazwa „model pętli z prądem”). Jednakże to wyprowadzenie nie może być stosowane do elektronów w atomie, gdyż do takich elektronów potrzebne jest podejście kwantowe.

Wyobraź sobie, że elektron krąży ze stałą prędkością v po kołowym torze o promieniu r , w kierunku przeciwnym do ruchu wskazówek zegara, jak pokazano na rysunku 32.7. Ruch ujemnie naładowanego elektronu jest równoważny przepływowi umownego prądu o natężeniu I (składającego się z ładunków dodatnich), w kierunku zgodnym z ruchem wskazówek zegara, co również pokazano na rysunku 32.7. Wartość orbitalnego momentu magnetycznego dla takiej pętli



Rys. 32.7. Elektron porusza się ze stałą prędkością v po kołowym torze o promieniu r , obejmującym powierzchnię S . Elektron ma orbitalny moment pędu \vec{L}_{orb} i związany z nim orbitalny moment magnetyczny $\vec{\mu}_{\text{orb}}$. Prąd o natężeniu I , składający się z ładunków dodatnich i płynący zgodnie z ruchem wskazówek zegara jest równoważny ruchowi ujemnie naładowanego elektronu w kierunku przeciwnym

z prądem możemy otrzymać z równania (29.35) dla $N = 1$:

$$\mu_{\text{orb}} = IS, \quad (32.13)$$

gdzie S jest polem powierzchni, którą obejmuje pętla. Z reguły prawej dloni (patrz rys. 30.21) wynika, że dipolowy moment magnetyczny na rysunku 32.7 jest skierowany w dół.

Aby obliczyć wartość wyrażenia (32.13), musimy znać natężenie prądu I . Zgodnie z definicją natężenie prądu zależy od czasu, w jakim dany ładunek przepływa przez pewien punkt obwodu. W naszym modelu ładunek o wartości e wykonuje pełne okrążenie (od pewnego punktu, z powrotem do tego samego punktu) w czasie $T = 2\pi r/v$, tak więc:

$$I = \frac{\text{ładunek}}{\text{czas}} = \frac{e}{2\pi r/v}. \quad (32.14)$$

Podstawiając tę wielkość i pole powierzchni pętli $S = \pi r^2$ do równania (32.13), otrzymujemy:

$$\mu_{\text{orb}} = \frac{e}{2\pi r/v} \pi r^2 = \frac{evr}{2}. \quad (32.15)$$

Aby wyznaczyć orbitalny moment pędu \vec{L}_{orb} elektronu, korzystamy z równania (12.18), $\vec{l} = m(\vec{r} \times \vec{v})$. Ponieważ \vec{r} i \vec{v} są prostopadłe, wartość \vec{L}_{orb} wynosi:

$$L_{\text{orb}} = mr v \sin 90^\circ = mr v. \quad (32.16)$$

\vec{L}_{orb} jest skierowane w góre na rysunku 32.7 (patrz rysunek 12.11). Łącząc równania (32.15) i (32.16), zapisując je w postaci wektorowej i zaznaczając przeciwnie kierunki wektorów za pomocą znaku minus, otrzymujemy:

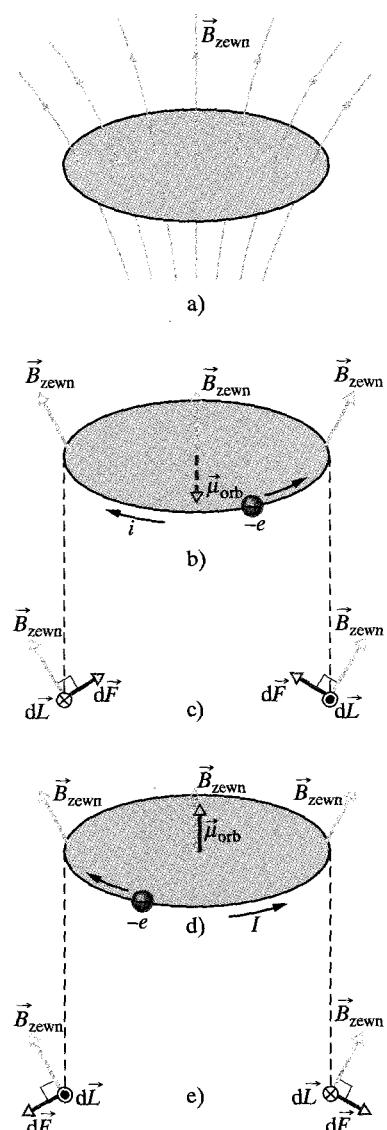
$$\vec{\mu}_{\text{orb}} = -\frac{e}{2m} \vec{L}_{\text{orb}},$$

czyli równanie (32.8). W ten sposób stosując analizę klasyczną (tzn. niekwantową) otrzymaliśmy taką samą wartość i kierunek orbitalnego momentu magnetycznego, jak w podejściu kwantowym. Być może jesteś ciekaw, dlaczego wyprowadzenie to nie może być stosowane do elektronu w atomie, skoro otrzymaliśmy poprawny wynik dla omówionego przypadku. Okazuje się, że inne wyniki uzyskane za pomocą takiego rozumowania są sprzeczne z doświadczeniem.

Model pętli z prądem w polu niejednorodnym

W dalszym ciągu traktujemy orbitę elektronu jak pętlę z prądem, przedstawioną na rysunku 32.7. Teraz jednak umieszczamy pętlę w niejednorodnym polu magnetycznym \vec{B}_{zewn} , jak na rysunku 32.8a. (Może to być np. rozwodzące się w różnych kierunkach pole w pobliżu północnego bieguna magnesu z rysunku 32.3). Wprowadziliśmy tę zmianę, aby przygotować się do kilku następnych paragrafów, w których będziemy omawiać siły działające na materiały magnetyczne umieszczone w niejednorodnym polu magnetycznym. Omówimy te siły zakładając, że orbity elektronów w materiałach są mikroskopijnymi pętlami z prądem, jak na rysunku 32.8a.

Zakładamy, że wektory indukcji magnetycznej w każdym punkcie kołowego toru elektronu mają taką samą wartość i tworzą taki sam kąt z kierunkiem pionowym, jak pokazano na rysunkach 32.8b i d. Zakładamy także, że wszystkie



Rys. 32.8. a) Model pętli z prądem dla elektronu kraczącego w atomie, umieszczonym w niejednorodnym polu magnetycznym \vec{B}_{zewn} . b) Ładunek $-e$ porusza się w kierunku przeciwnym do ruchu wskazówek zegara; związany z tym umowny prąd o natężeniu I płynie zgodnie z ruchem wskazówek zegara. c) Sily magnetyczne $d\vec{F}$ po lewej i prawej stronie pętli, widziane w płaszczyźnie pętli. Wypadkowa siła działająca na pętelę jest skierowana do góry. d) Ładunek $-e$ porusza się teraz zgodnie z ruchem wskazówek zegara. e) Wypadkowa siła działająca na pętelę jest skierowana w dół

elektrony w atomie poruszają się przeciwnie (rys. 32.8b) albo zgodnie (rys. 32.8d) z ruchem wskazówek zegara. Związany z tym umowny prąd o natężeniu I , płynący wokół pętli, oraz orbitalny moment magnetyczny $\vec{\mu}_{\text{orb}}$, wytworzony przez ten prąd, przedstawiono na rysunku dla każdego z kierunków ruchu elektronu.

Na rysunkach 32.8c i e przedstawiono elementy długości $d\vec{L}$ po przeciwnych stronach pętli, zorientowane zgodnie z kierunkiem prądu i widziane w płaszczyźnie orbity. Pokazano również pole \vec{B}_{zewn} i siłę magnetyczną $d\vec{F}$, działającą na $d\vec{L}$. Przypomnijmy, że zgodnie z równaniem (29.28) na ładunki płynące wzduż elementu $d\vec{L}$ w polu magnetycznym \vec{B}_{zewn} działa siła magnetyczna $d\vec{F}$:

$$d\vec{F} = Id\vec{L} \times \vec{B}_{\text{zewn}}. \quad (32.17)$$

Z równania (32.17) wynika, że po lewej stronie rysunku 32.8c siła $d\vec{F}$ jest skierowana do góry i w prawo. Po prawej stronie siła $d\vec{F}$ ma dokładnie taką samą wartość i jest skierowana do góry i w lewo. Kąty, pod jakimi działają siły są takie same, a więc ich składowe poziome się znoszą, a składowe pionowe dodają. Taki sam wynik otrzymamy dla dowolnych dwóch innych, symetrycznie położonych punktów pętli. Zatem wypadkowa siła działająca na pętlę z prądem na rysunku 32.8b musi być skierowana do góry. Analogiczne rozumowanie prowadzi do wniosku, że wypadkowa siła, działająca na pętlę na rysunku 32.8d jest skierowana w dół. Wkrótce skorzystamy z tych dwóch wyników, gdy będziemy badać zachowanie się materiałów magnetycznych w niejednorodnych polach magnetycznych.

32.5. Materiały magnetyczne

Każdy elektron w atomie ma orbitalny moment magnetyczny i spinowy moment magnetyczny, które dodają się wektorowo. Wypadkowa tych dwóch wielkości dodaje się wektorowo do podobnych wektorów wypadkowych dla wszystkich innych elektronów w atomie. Ponadto wypadkowy wektor dla każdego atomu dodaje się do wypadkowych wektorów dla wszystkich innych atomów w próbce materiału. Jeżeli suma tych wszystkich momentów magnetycznych wytwarza pole magnetyczne, to o materiale mówimy, że ma właściwości magnetyczne. Są trzy główne rodzaje magnetyzmu: diamagnetyzm, paramagnetyzm i ferromagnetyzm.

- Diamagnetyzm** wykazują wszystkie powszechnie spotykane materiały, ale jest to zjawisko tak słabe, że jest niedostrzegalne, jeśli materiał wykazuje również magnetyzm jednego z dwóch pozostałych rodzajów. W materiałach diamagnetycznych słabe momenty magnetyczne są indukowane w atomach, gdy materiał jest umieszczony w zewnętrznym polu magnetycznym \vec{B}_{zewn} . Suma tych wszystkich indukowanych momentów magnetycznych wytwarza w całym materiale słabe wypadkowe pole magnetyczne. Momenty magnetyczne, wraz z ich wypadkowym polem znikają, gdy usuniemy \vec{B}_{zewn} . Termin *materiał diamagnetyczny* zwykle odnosi się do materiałów, które wykazują tylko diamagnetyzm.
- Paramagnetyzm** wykazują materiały zawierające pierwiastki przejściowe, pierwiastki ziem rzadkich (lantanowce) oraz aktynowce (patrz dodatek G). Każdy atom takiego materiału ma trwał wypadkowy moment magnetyczny, ale momenty są zorientowane przypadkowo i materiał jako całość

nie wytwarza wypadkowego pola magnetycznego. Jednakże zewnętrzne pole magnetyczne \vec{B}_{zewn} może częściowo uporządkować momenty magnetyczne atomów, wytwarzając wypadkowe pole magnetyczne w materiale. Uporządkowanie i związane z nim pole znika, gdy usuniemy \vec{B}_{zewn} . Termin *materiał paramagnetyczny* zwykle odnosi się do materiałów, dla których paramagnetyzm jest dominującą właściwością.

3. **Ferromagnetyzm** jest właściwością żelaza, niklu i niektórych innych pierwiastków (a także związków i stopów tych pierwiastków). Momenty magnetyczne niektórych elektronów w tych materiałach są uporządkowane, dzięki czemu powstają obszary o dużym momencie magnetycznym. Zewnętrzne pole \vec{B}_{zewn} może wówczas porządkować momenty magnetyczne tych obszarów, wytwarzając silne pole magnetyczne w próbce materiału. To pole się częściowo utrzymuje, gdy usuniemy \vec{B}_{zewn} . Zwykle używamy terminu *materiał ferromagnetyczny* lub nawet terminu potocznego *materiał magnetyczny*, gdy odnosimy się do materiałów, dla których ferromagnetyzm jest dominującą właściwością.

W następnych trzech paragrafach zbadamy te trzy rodzaje magnetyzmu.

32.6. Diamagnetyzm

Nie możemy na razie omówić diamagnetyzmu, stosując prawa fizyki kwantowej, ale możemy dostarczyć klasycznego wyjaśnienia tego zjawiska na podstawie modelu pętli z prądem, przedstawionego na rysunkach 32.7 i 32.8. Na wstępie przyjmijmy, że w atomie materiału diamagnetycznego każdy elektron może krążyć po orbicie zgodnie (jak na rysunku 32.8d) lub przeciwnie (jak na rysunku 32.8b) do ruchu wskazówek zegara. Aby wytlumaczyć brak właściwości magnetycznych pod nieobecność zewnętrznego pola magnetycznego \vec{B}_{zewn} , zakładamy, że atom nie ma wypadkowego momentu magnetycznego. Oznacza to, że przed przyłożeniem \vec{B}_{zewn} tyle samo elektronów krążyło w każdym z kierunków, a więc całkowity moment magnetyczny atomu skierowany do góry był równy całkowitemu momentowi magnetycznemu skierowanemu w dół.

Przyźródmy teraz niejednorodne pole \vec{B}_{zewn} , jak na rysunku 32.8a, na którym wektor \vec{B}_{zewn} jest skierowany do góry, a linie pola się rozbiegają. Możemy to zrobić, zwiększąc natężenie prądu w elektromagnesie lub przesuwając północny biegum magnesu od dołu w kierunku orbity elektronu. Gdy wartość \vec{B}_{zewn} rośnie od zera aż do końcowej, maksymalnej wartości w stanie ustalonym, zgodnie z prawem Faradaya i regułą Lenza wzduż każdej orbity elektronu indukuje się pole elektryczne, skierowane zgodnie z ruchem wskazówek zegara. Zobaczmy teraz, jak to indukowane pole elektryczne wpływa na ruch elektronów po orbicie, na rysunkach 32.8b i d.

Na rysunku 32.8b elektron, poruszający się przeciwnie do ruchu wskazówek zegara, jest przyspieszany przez pole elektryczne zgodne z ruchem wskazówek zegara. Tak więc, gdy indukcja magnetyczna \vec{B}_{zewn} osiąga wartość maksymalną, prędkość elektronu również osiąga maksimum. Oznacza to, że rośnie zarówno natężenie prądu I , jak i skierowany w dół moment magnetyczny $\vec{\mu}$, związany z tym prądem.

Na rysunku 32.8d elektron, poruszający się zgodnie z ruchem wskazówek zegara, jest spowalniany przez pole elektryczne, skierowane również zgodnie z ruchem wskazówek zegara. Zatem w tym przypadku *maleje* zarówno prędkość elektronu, jak i prąd o natężeniu I oraz skierowany w góre moment magnetyczny $\vec{\mu}$, związany z tym prądem. Tak więc włączając pole \vec{B}_{zewn} , wytworzyliśmy w atomie *wypadkowy* moment magnetyczny skierowany do dołu. Takie samo zjawisko zachodziłoby, gdyby zewnętrzne pole magnetyczne było jednorodne.

Niejednorodność pola \vec{B}_{zewn} oddziałuje również na atomy materiału diamagnetycznego. Natężenie prądu I na rysunku 32.8b rośnie, a więc siły magnetyczne $d\vec{F}$, skierowane do góry na rysunku 32.8c, również rosną, podobnie jak skierowana do góry wypadkowa siła działająca na pętlę z prądem. Natężenie prądu I na rysunku 32.8d maleje, a więc siły magnetyczne $d\vec{F}$, skierowane w dół na rysunku 32.8e również maleją, podobnie jak skierowana w dół wypadkowa siła, działająca na pętlę z prądem. Tak więc włączając *niednorodne* pole \vec{B}_{zewn} wytworzyliśmy wypadkową siłę, działającą na atom. Ponadto siła ta jest skierowana *od* obszaru, w którym pole magnetyczne jest silniejsze.

Nasze rozumowanie dotyczyło fikcyjnych orbit elektronów (pętli z prądem), ale uzyskaliśmy w końcu dokładny opis tego, co dzieje się z materiałem diamagnetycznym. Jeżeli przyłożymy pole magnetyczne z rysunku 32.8, to w próbce materiału powstaje moment magnetyczny skierowany w dół, a siła działająca na próbkę jest skierowana do góry. Gdy usuniemy pole, znika zarówno moment magnetyczny, jak i siła. Wektor indukcji pola zewnętrznego nie musi być skierowany tak, jak na rysunku; podobne rozumowanie można przeprowadzić dla innego ustawienia wektora \vec{B}_{zewn} . Mówiąc ogólnie:

► W materiale diamagnetycznym umieszczonym w zewnętrznym polu magnetycznym \vec{B}_{zewn} powstaje moment magnetyczny skierowany przeciwnie do \vec{B}_{zewn} . Jeżeli pole jest niednorodne, to materiał diamagnetyczny jest wypychany z obszaru silniejszego pola magnetycznego *do* obszaru słabszego pola.

Żaba pokazana na zdjęciu na początku tego rozdziału ma właściwości diamagnetyczne (podobnie jak inne zwierzęta). Gdy żabę umieścimy w niejednorodnym polu magnetycznym w pobliżu górnego końca pionowego solenoidu zasilanego prądem, każdy atom, z którego składa się ciało żaby, był odpychany do góry, coraz dalej od obszaru silniejszego pola magnetycznego. Żaba poruszała się więc ku górze, w stronę coraz słabszego pola magnetycznego aż do chwili, w której siła magnetyczna skierowana do góry zrównoważyła siłę ciężkości i wtedy żaba „zawiązała” nieruchomo w powietrzu. Gdybyśmy zbudowali dostatecznie duży solenoid, moglibyśmy w podobny sposób umieścić nad nim człowieka, który unosiłby się w powietrzu dzięki swoim właściwościom diamagnetycznym.

SPRAWDZIAN 3: Na rysunku przedstawiono dwie diamagnetyczne kulki, umieszczone w pobliżu południowego bieguna magnesu sztabkowego. Czy: a) siły magnetyczne działające na kulki, b) momenty magnetyczne kulek są skierowane *do*, czy *od* magnesu? c) Czy siła magnetyczna działająca na kulkę 1 jest większa, mniejsza, czy taka sama, jak działająca na kulkę 2?



32.7. Paramagnetyzm

W materiałach paramagnetycznych spinowe i orbitalne momenty magnetyczne elektronów w każdym atomie nie kompensują się, ale dodają się wektorowo, wytwarzając w atomie wypadkowy (i trwał) moment magnetyczny $\vec{\mu}$. Pod nieobecność zewnętrznego pola magnetycznego te atomowe momenty magnetyczne są zorientowane przypadkowo, a całkowity moment magnetyczny materiału jest równy零. Gdy jednak umieścimy próbkę materiału w zewnętrznym polu magnetycznym \vec{B}_{zewn} , momenty magnetyczne ustawiają się wzdłuż kierunku wektora indukcji pola, w wyniku czego w próbce powstaje wypadkowy moment magnetyczny. To uporządkowanie w kierunku wektora indukcji pola zewnętrznego jest przeciwe do tego, które obserwowaliśmy w materiałach diamagnetycznych.

► W materiale paramagnetycznym umieszczonym w zewnętrznym polu magnetycznym

\vec{B}_{zewn} powstaje moment magnetyczny skierowany zgodnie z \vec{B}_{zewn} . Jeżeli pole jest niejednorodne, to materiał paramagnetyczny jest przyciągany do obszaru silniejszego pola magnetycznego z obszaru słabszego pola.

Próbka paramagnetyczna składająca się z N atomów miałaby moment magnetyczny o wartości $N\mu$, gdyby uporządkowanie dipoli atomowych było całkowite. Jednak podczas przypadkowych zderzeń atomów, zachodzących na skutek ich ruchu termicznego między atomami przekazywana jest energia, niszącą ich uporządkowanie, a więc zmniejszając moment magnetyczny próbki.

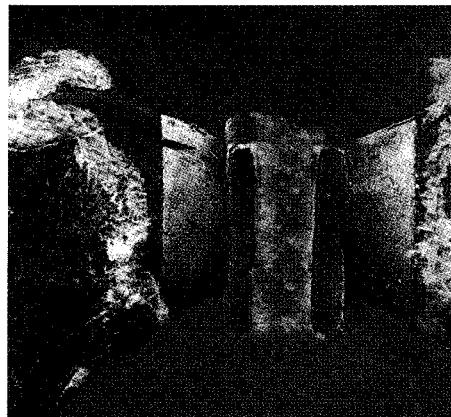
Znaczenie zderzeń atomów może być ocenione przez porównanie dwóch energii. Jedna z nich, wynikająca z równania (20.24), jest średnią energią kinetyczną w ruchu postępowym $E_k (= \frac{3}{2}kT)$ dla atomu w temperaturze T , gdzie k jest stałą Boltzmanna ($1,38 \cdot 10^{-23}$ J/K), a T jest wyrażone w kelwinach (a nie w stopniach Celsjusza). Druga energia, wynikająca z równania (29.38), jest równa różnicy energii $\Delta E_B (= 2\mu B_{\text{zewn}})$ odpowiadających równoległemu i antyrównoległemu ustawieniu momentu magnetycznego atomu w polu zewnętrznym. Jak wykażemy niżej, dla typowych wartości temperatury i indukcji magnetycznej $E_k \gg \Delta E_B$. Tak więc przekazywanie energii podczas zderzeń może znacznie zaburzyć uporządkowanie atomowych momentów magnetycznych, powodując, że moment magnetyczny próbki jest znacznie mniejszy od $N\mu$.

Stopień namagnesowania próbki paramagnetycznej możemy wyrazić, obliczając stosunek momentu magnetycznego próbki do jej objętości. Tę wektorową wielkość, moment magnetyczny na jednostkę objętości, nazywamy **namagnesowaniem** \vec{M} próbki, a jej wartość wynosi:

$$M = \frac{\text{zmierzony moment magnetyczny}}{V} \quad (32.18)$$

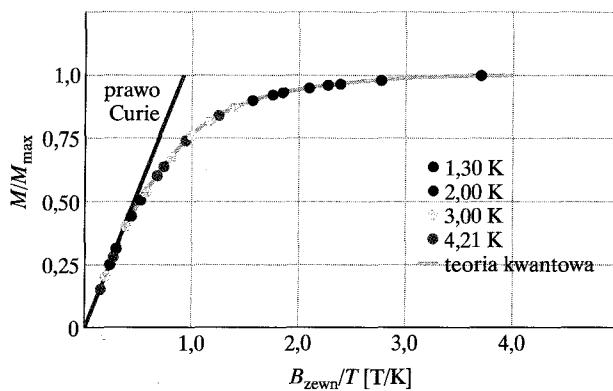
Jednostką \vec{M} jest amper razy metr kwadratowy na metr sześcienny, czyli amper na metr (A/m). Całkowite uporządkowanie atomowych momentów magnetycznych, zwane *nasyceniem* próbki, odpowiada maksymalnej wartości $M_{\max} = N\mu/V$.

W roku 1895 Piotr Curie wykazał doświadczalnie, że namagnesowanie próbki paramagnetycznej jest wprost proporcjonalne do indukcji magnetycznej \vec{B}_{zewn}



Próbka ciekłego tlenu unosi się między dwoma nabiegunkami magnesu, gdyż ciecz wykazuje właściwości paramagnetyczne i dlatego jest przyciągana przez magnes

Rys. 32.9. Krzywa magnesowania dla siarczanu chromowo-potasowego (soli paramagnetycznej). Na wykresie przedstawiono stosunek namagnesowania M soli do maksymalnego możliwego do osiągnięcia namagnesowania M_{\max} , jako funkcję stosunku indukcji magnetycznej B_{zewn} przyłożonego pola do temperatury T . Dane po lewej stronie wykresu są zgodne z prawem Curie; wszystkie dane są zgodne z teorią kwantową (z pracy W. E. Henry'ego)



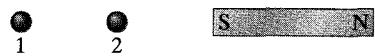
i odwrotnie proporcjonalne do temperatury T , mierzonej w kelwinach, czyli:

$$M = C \frac{B_{\text{zewn}}}{T}. \quad (32.19)$$

Równanie (32.19) znane jest jako *prawo Curie*, a C nazywamy *stałą Curie*. Prawo Curie można uzasadnić tym, że zwiększenie B_{zewn} powoduje wzrost uporządkowania atomowych momentów magnetycznych w próbce, a więc wzrost M , podczas gdy zwiększenie T powoduje zwiększenie liczby zderzeń, które zakłócają uporządkowanie i zmniejszają M . Jednak prawo Curie jest w rzeczywistości przybliżeniem, które jest słuszne tylko wtedy, gdy stosunek B_{zewn}/T jest niezbyt duży.

Na rysunku 32.9 przedstawiono wykres stosunku M/M_{\max} jako funkcji B_{zewn}/T , dla próbki soli, siarczanu chromowo-potasowego — w której jony chromu są substancją paramagnetyczną. Wykres taki nazywamy *krzywą magnesowania*. Linia prosta, przedstawiająca prawo Curie, jest zgodna z danymi doświadczalnymi po lewej stronie wykresu, dla B_{zewn}/T poniżej około 0,5 T/K. Krzywa, zgodna ze wszystkimi punktami doświadczalnymi, wynika z teorii kwantowej. Dane po prawej stronie wykresu, w pobliżu nasycenia, jest bardzo trudno otrzymać, gdyż wymagają bardzo silnych pól magnetycznych (około 100 000 razy większych od ziemskiego pola magnetycznego) nawet w bardzo niskich temperaturach.

SPRAWDZIAN 4: Na rysunku przedstawiono dwie paramagnetyczne kulki, umieszczone w pobliżu południowego bieguna magnesu sztabkowego. Czy: a) siły magnetyczne działające na kulki, b) momenty magnetyczne kulek są skierowane *do*, czy *od* magnesu? c) Czy siła magnetyczna, działająca na kulkę 1 jest większa, mniejsza, czy taka sama, jak działająca na kulkę 2?



Przykład 32.1

Paramagnetyczny gaz, znajdujący się w temperaturze pokojowej ($T = 300$ K), jest umieszczony w zewnętrznym jednorodnym polu magnetycznym o indukcji $B = 1,5$ T; atomy gazu mają moment magnetyczny $\mu = \mu_B$. Oblicz średnią energię kinetyczną ruchu postępowego E_k dla atomu gazu oraz różnicę energii ΔE_B równoległego i antyrównoległego ustawnienia momentu magnetycznego atomu w polu zewnętrznym.

ROZWIĄZANIE:

1. Średnia energia kinetyczna ruchu postępowego E_k dla atomu gazu zależy od jego temperatury. Z równania (20.24) otrzymujemy:

$$E_k = \frac{3}{2}kT = \frac{3}{2}(1,38 \cdot 10^{-23} \text{ J/K})(300 \text{ K}) = 6,2 \cdot 10^{-21} \text{ J} \\ = 0,039 \text{ eV.} \quad (\text{odpowiedź})$$

2. Energia potencjalna E_{pB} dipola magnetycznego $\vec{\mu}$ w zewnętrznym polu magnetycznym o indukcji \vec{B} zależy od kąta θ między kierunkami $\vec{\mu}$ i \vec{B} . Na podstawie równania (29.38) ($E_{pB} = -\vec{\mu} \cdot \vec{B}$) możemy zapisać różnicę energii ΔE_{pB} ustawienia równoległego ($\theta = 0^\circ$) i antyrównoległego ($\theta = 180^\circ$) jako:

$$\begin{aligned}\Delta E_{pB} &= -\mu B \cos 180^\circ - (-\mu B \cos 0^\circ) = 2\mu B = 2\mu_B B \\ &= 2(9,27 \cdot 10^{-24} \text{ J/T})(1,5 \text{ T}) = 2,8 \cdot 10^{-23} \text{ J} \\ &= 0,00017 \text{ eV.}\end{aligned}$$

(odpowiedź)

W tym przypadku E_k jest około 230 razy większa od ΔE_{pB} , tak więc wymiana energii między atomami podczas wzajemnych zderzeń może łatwo zmienić ustalenie momentu magnetycznego na inne, niż zgodne z kierunkiem linii zewnętrznego pola magnetycznego. Moment magnetyczny, wykazywany przez gaz paramagnetyczny, musi więc wynikać z krótkotrwałego częściowego uporządkowania atomowych momentów magnetycznych.

32.8. Ferromagnetyzm

Kiedy w języku potocznym mówimy o magnetyzmie, niemal zawsze mamy na myśli magnes sztabkowy lub magnes w kształcie krążka, być może przyczepiony do drzwi lodówki. Innymi słowy, wyobrażamy sobie wówczas materiał ferromagnetyczny o silnych i trwałych właściwościach magnetycznych, a nie materiał diamagnetyczny lub paramagnetyczny, którego właściwości magnetyczne są słabe i nietrwałe.

Żelazo, kobalt, nikiel, gadolin, dysproz i stopy zawierające te pierwiastki wykazują ferromagnetyzm; jego źródłem jest zjawisko kwantowe, zwane *oddziaływaniem wymiennym*, podczas którego spiny elektronów w jednym atomie oddziałują ze spinami elektronów w sąsiednich atomach. W wyniku tego pojawia się uporządkowanie momentów magnetycznych atomów, mimo iż zderzenia między atomami dają do ich przypadkowego ustalenia. To trwałe uporządkowanie pociąga za sobą trwałe właściwości magnetyczne substancji ferromagnetycznych.

Jeżeli temperatura materiału ferromagnetycznego przekracza pewną krytyczną wartość, zwaną *temperaturą Curie*, to ferromagnetyzm substancji zanika. Większość takich materiałów staje się wtedy po prostu paramagnetykami — ich momenty magnetyczne usiłują nadal ustawać się zgodnie z polem zewnętrznym, lecz jest to zjawisko znacznie słabsze, a zderzenia atomów mogą łatwiej zniszczyć uporządkowanie. Temperatura Curie dla żelaza jest równa 1043 K (= 770°C).

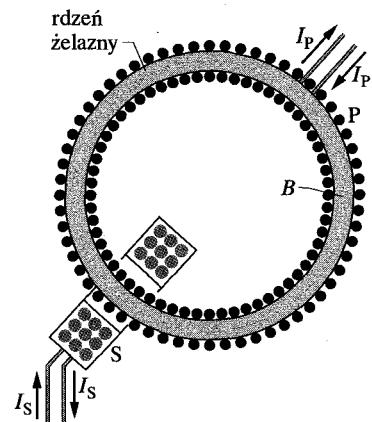
Namagnesowanie materiału ferromagnetycznego, takiego jak żelazo, możemy badać w układzie zwanym *pierścieniem Rowlanda* (rys. 32.10). Badany materiał ma kształt cienkiego toroidalnego rdzenia o przekroju kołowym. W cewce pierwotnej P, mającej n zwojów na jednostkę długości i nawiniętej na rdzeniu, płynie prąd o natężeniu I_P . (Cewka jest w istocie długim solenoidem, któremu nadano kształt pierścienia). Gdyby nie było rdzenia żelaznego, wartość indukcji magnetycznej wewnętrz cewki byłaby równa, zgodnie ze wzorem (30.25):

$$B_0 = \mu_0 I_P n. \quad (32.20)$$

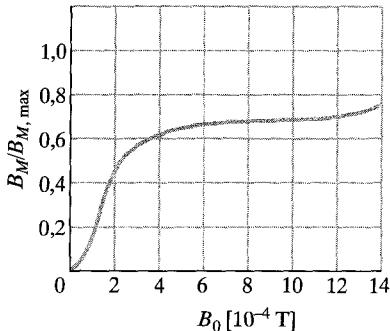
Jednakże w obecności rdzenia żelaznego, indukcja magnetyczna \vec{B} wewnętrz cewki jest zazwyczaj znacznie większa niż B_0 . Jej wartość może być zapisana jako:

$$B = B_0 + B_M, \quad (32.21)$$

gdzie B_M jest wartością indukcji magnetycznej pola, pochodzącego od rdzenia żelaznego. Ten przyczynek wynika z uporządkowania atomowych momentów



Rys. 32.10. Pierścień Rowlanda. Prąd o natężeniu I_P płynie w cewce pierwotnej P, której rdzeniem jest badany materiał ferromagnetyczny (w naszym przypadku żelazo), magnesowany w wyniku przepływu prądu. (Zwoje cewki przedstawione są w postaci czarnych kropiek). Stopień namagnesowania rdzenia wyznacza całkowitą indukcję \vec{B} w cewce P. Indukcję pola \vec{B} można zmierzyć za pomocą cewki wtórnej S



Rys. 32.11. Krzywa magnesowania dla rdzenia z materiału ferromagnetycznego umieszczonego w pierścieniu Rowlanda, jak na rysunku 32.10. Liczba 1 na osi pionowej odpowiada całkowitemu uporządkowaniu dipoli atomowych (nasyceniu) wewnętrz materiał

magnetycznych w żelazie, zachodzącego pod wpływem oddziaływania wymienionego i przyłożonego pola magnetycznego B_0 . Przyczyną B_M jest proporcjonalny do namagnesowania M żelaza, jest więc proporcjonalny do momentu magnetycznego żelaza na jednostkę objętości. Aby wyznaczyć B_M , mierzmy B za pomocą cewki wtórnej S, obliczamy B_0 z równania (32.20) i odejmujemy te dwie wielkości zgodnie z równaniem (32.21).

Na rysunku 32.11 przedstawiono krzywą magnesowania dla materiału ferromagnetycznego, umieszczonego w pierścieniu Rowlanda. Stosunek $B_M/B_{M,\max}$, gdzie $B_{M,\max}$ jest maksymalną możliwą wartością B_M , odpowiadającą nasyceniu, został wykreślony w funkcji B_0 . Ten wykres przypomina rysunek 32.9, czyli krzywą magnesowania dla substancji paramagnetycznej. Obie krzywe pokazują, do jakiego stopnia przyłożone pole magnetyczne może uporządkować atomowe momenty magnetyczne w materiale.

W rdzeniu ferromagnetycznym, którego dotyczy rysunek 32.11, uporządkowanie momentów magnetycznych dla $B_0 \approx 1 \cdot 10^{-3}$ T wynosi około 70% uporządkowania całkowitego. Gdyby zwiększyć B_0 do 1 T, uporządkowanie byłoby niemal całkowite (niestety, pole o indukcji $B_0 = 1$ T, odpowiadające niemal całkowitemu nasyceniu, jest dość trudno osiągnąć).

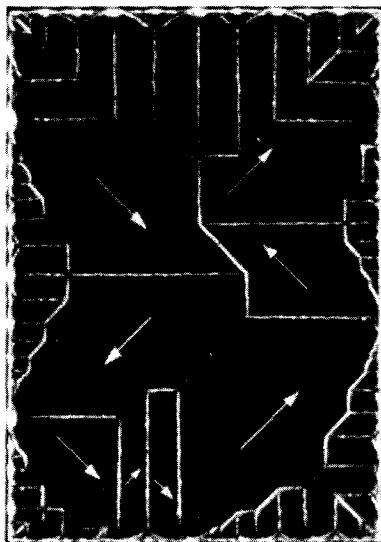
Domeny magnetyczne

Oddziaływanie wymienne wytwarza silne uporządkowanie sąsiednich dipoli atomowych w materiale ferromagnetycznym o temperaturze niższej od temperatury Curie. Dlaczego więc ten materiał nie jest w stanie nasycenia, nawet gdy nie ma przyłożonego pola magnetycznego B_0 ? Innymi słowy, dlaczego nie każdy kawałek żelaza, taki jak gwóźdź, jest naturalnym silnym magnesem?

Aby to zrozumieć, weźmy pod uwagę próbkę materiału ferromagnetycznego, np. żelaza, w postaci monokryształu. Oznacza to, że układ atomów, czyli sieć krystaliczna, rozciąga się z niezakłóconą regularnością w całej objętości próbki. Taki kryształ w normalnych warunkach składa się z wielu *domen magnetycznych*. Są to obszary kryształu, w których uporządkowanie dipoli atomowych jest w istocie całkowite. Jednak domeny nie są uporządkowane. W całym krysztale domeny są zorientowane w taki sposób, że ich wpływ na zjawiska magnetyczne na zewnątrz kryształu w dużym stopniu się znosi.

Rysunek 32.12 jest powiększonym zdjęciem takiego układu domen w monokrysztale niklu. Zdjęcie zostało zrobione po spryskaniu powierzchni kryształu koloidalną zawiesiną drobno sproszkowanego tlenku żelaza. Granice domen są wąskimi obszarami, w których uporządkowanie elementarnych dipoli zmienia się od pewnego ustawnienia w jednej domenie do innego ustawnienia w drugiej domenie. Na granicach domen występują silnie zlokalizowane i niejednorodne pola magnetyczne o dużej indukcji. Cząstki zawiesiny koloidalnej są przyciągane do tych granic i pojawiają się na zdjęciu jako białe linie (nie wszystkie granice domen są widoczne na rysunku 32.12). Choć dipole atomowe w każdej domenie są całkowicie uporządkowane, co pokazano za pomocą strzałek, kryształ jako całość może mieć bardzo mały wypadkowy moment magnetyczny.

W rzeczywistości kawałek żelaza, z jakim mamy zwykle do czynienia, nie jest monokryształem, ale *polikryształem*, czyli zbiorem wielu małych, przypad-



Rys. 32.12. Zdjęcie układu domen w monokrysztale niklu. Białe linie wskazują granice domen. Białe strzałki, nałożone na zdj. pokazują ustawienie dipoli magnetycznych wewnętrz domen, a więc ustawienie wypadkowych dipoli magnetycznych domen. Kryształ jako całość nie jest namagnesowany, jeśli wypadkowy wektor indukcji magnetycznej (czyli suma wektorowa po wszystkich domenach) równa się zeru

kowo ułożonych kryształków. Natomiast każdy kryształek składa się z różnie zorientowanych domen, jak na rysunku 32.12. Jeżeli będziemy magnesować taką próbkę, umieszczając ją w zewnętrznym polu magnetycznym o stopniowo rosnącej wartości indukcji, to wywołamy dwa zjawiska, które łącznie doprowadzą do powstania krzywej magnesowania o kształcie pokazanym na rysunku 32.11. Jednym ze zjawisk jest wzrost rozmiarów domen, zorientowanych wzdłuż pola zewnętrznego, kosztem domen zorientowanych w innych kierunkach. Drugie zjawisko polega na zmianie ustawienia dipoli wewnętrz domeny jako całości, tak aby to ustawienie było zbliżone do kierunku wektora indukcji pola.

Oddziaływanie wymienne i zmiany orientacji domen dają następujący wynik:

► W materiale ferromagnetycznym umieszczonym w zewnętrznym polu magnetycznym \vec{B}_{zewn} powstaje silny moment magnetyczny, skierowany zgodnie z \vec{B}_{zewn} . Jeżeli pole jest niejednorodne, to materiał ferromagnetyczny jest przyciągany do obszaru silniejszego pola magnetycznego z obszaru słabszego pola.

Możesz nawet usłyszeć dźwięk powstający przy zmianie orientacji domen: Włącz magnetofon kasetowy w pozycji odtwarzania, nie wkładając kasety (lub włożyć czystą kasetę) i ustaw regulator głośności w pozycji maksimum. Następnie przybliż silny magnes do głowicy odtwarzającej (która jest ferromagnetyczna). Pole magnetyczne powoduje, że domeny magnetyczne w głowicy gwałtownie zmieniają orientację, co zmienia indukcję magnetyczną w cewce nawiniętej wokół głowicy. Powstające prądy, indukowane w cewce, są wzmacniane i przesyłane do głośnika, który wytwarza syczący dźwięk.

Przykład 32.2

Igła kompasu, wykonana z czystego żelaza (o gęstości 7900 kg/m^3), ma długość L równą 3 cm, szerokość 1 mm i grubość 0,5 mm. Wartość dipolowego momentu magnetycznego atomu żelaza wynosi $\mu_{\text{Fe}} = 2,1 \cdot 10^{-23} \text{ J/T}$. Jeżeli namagnesowanie igły jest równoważne uporządkowaniu 10% atomów w igle, to jaka jest wartość dipolowego momentu magnetycznego $\vec{\mu}$ igły?

ROZWIĄZANIE:

► 1. Uporządkowanie wszystkich N atomów igły daoby wartość magnetycznego momentu dipolowego $\vec{\mu}$ igły, równą $N\mu_{\text{Fe}}$. Jednakże tylko 10% atomów igły jest uporządkowanych, a przypadkowe ustawienie pozostałych atomów nie daje przyczynka do $\vec{\mu}$. Zatem:

$$\mu = 0,1N\mu_{\text{Fe}}. \quad (32.22)$$

► 2. Możemy obliczyć liczbę atomów N w igle na podstawie jej masy:

$$N = \frac{\text{masa igły}}{\text{masa atomowa żelaza}}. \quad (32.23)$$

W dodatku F nie jest wymieniona masa atomowa żelaza, ale jest tam masa molowa M . Zatem:

$$\text{masa atomowa żelaza} = \frac{\text{masa molowa żelaza } M}{\text{liczba Avogadra } N_A}. \quad (32.24)$$

Równanie (32.23) przyjmuje więc postać:

$$N = \frac{mN_A}{M}. \quad (32.25)$$

Masa igły m jest iloczynem jej gęstości i objętości. Obliczenie objętości daje wynik $1,5 \cdot 10^{-8} \text{ m}^3$, możemy więc napisać:

$$\begin{aligned} \text{masa igły } m &= (\text{gęstość igły})(\text{objętość igły}) \\ &= (7900 \text{ kg/m}^3)(1,5 \cdot 10^{-8} \text{ m}^3) = 1,185 \cdot 10^{-4} \text{ kg}. \end{aligned}$$

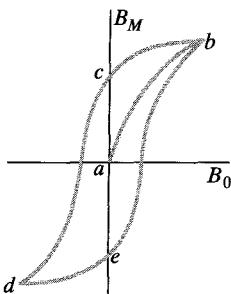
Podstawiając do równania (32.25) wartość m oraz $M = 55,847 \text{ g/mol} (= 0,055 847 \text{ kg/mol})$ i $N_A = 6,02 \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1}$, otrzymujemy:

$$N = \frac{(1,185 \cdot 10^{-4} \text{ kg})(6,02 \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1})}{0,055 847 \text{ kg/mol}} = 1,2774 \cdot 10^{21}.$$

Podstawienie tej wartości oraz wartości μ_{Fe} do równania (32.22) daje:

$$\begin{aligned} \mu &= (0,1)(1,2774 \cdot 10^{21})(2,1 \cdot 10^{-23} \text{ J/T}) = 2,682 \cdot 10^{-3} \text{ J/T} \\ &\approx 2,7 \cdot 10^{-3} \text{ J/T}. \end{aligned} \quad (\text{odpowiedź})$$

Histereza



Rys. 32.13. Krzywa magnesowania (ab) dla próbki ferromagnetyka i związana z nią pętla histerezy (bcdeb)

Krzywe magnesowania dla materiałów ferromagnetycznych nie wracają do punktu początkowego, gdy zwiększamy, a następnie zmniejszamy indukcję zewnętrznego pola magnetycznego B_0 . Na rysunku 32.13 przedstawiono wykres B_M jako funkcji B_0 , otrzymany podczas następujących pomiarów, wykonanych w pierścieniu Rowlanda: 1) Zaczynając od nienamagnesowanego żelaza (punkt a) zwiększamy natężenie prądu w toroidzie, aż B_0 ($= \mu_0 I_n$) osiągnie wartość odpowiadającą punktowi b ; 2) zmniejszamy natężenie prądu w uzwojeniu toroidu (a więc B_0) z powrotem do zera (punkt c); 3) zmieniamy kierunek prądu w toroidzie na przeciwny i zwiększamy natężenie prądu, aż B_0 osiągnie wartość, odpowiadającą punktowi d ; 4) ponownie zmniejszamy natężenie prądu do zera (punkt e); 5) jeszcze raz odwracamy kierunek prądu aż do osiągnięcia ponownie punktu b .

Brak powtarzalności, pokazany na rysunku 32.13, nazywamy **histerezą**, a krzywą $bcdeb$ nazywamy **pętlą histerezy**. Zauważ, że w punktach c i e rdzeń żelazny jest namagnesowany, chociaż prąd nie płynie w uzwojeniu toroidu. Jest to znane zjawisko trwałego namagnesowania.

Histerezę można zrozumieć, biorąc pod uwagę pojęcie domen magnetycznych. Okazuje się, że ruchy granic domen i zmiany ich ustawienia nie są całkowicie odwracalne. Gdy indukcja B_0 przyłożonego pola rośnie, a następnie maleje do wartości początkowej, domeny nie wracają całkowicie do początkowego ulożenia, ale zachowują pewną „pamięć” uporządkowania po początkowym wzroście pola. Ta pamięć materiałów magnetycznych jest podstawową właściwością wykorzystywaną do magnetycznego gromadzenia informacji, na przykład w kasetach magnetofonowych i dyskach komputerowych.

Pamięć uporządkowania domen może także wystąpić w naturze. Gdy uderzenie pioruna wywołuje prądy, płynące w ziemi licznymi krętymi drogami, silne pola magnetyczne, które wtedy powstają, mogą namagnesować materiały ferromagnetyczne, znajdujące się w pobliskich skałach. Z powodu histerezy taki materiał skalny zachowuje częściowo swoje namagnesowanie po uderzeniu pioruna (i po ustaniu przepływu prądów). Odłamki skały, wystawione później na działanie wietrzenia, pokruszone i rozdrobnione, są kawałkami magnetu.

32.9. Indukowane pole magnetyczne

W rozdziale 31 dowiedzieliśmy się, że zmienny strumień magnetyczny indukuje pole elektryczne i otrzymaliśmy prawo indukcji Faradaya w postaci:

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{s} = -\frac{d\Phi_B}{dt} \quad (\text{prawo indukcji Faradaya}). \quad (32.26)$$

\vec{E} jest tutaj natężeniem pola elektrycznego, indukowanego wzdłuż zamkniętego konturu przez zmienny strumień magnetyczny Φ_B , objęty tym konturem. Właściwości symetrii są bardzo ważne w fizyce, dlatego też mamy ochotę zapytać, czy zjawisko indukcji może zachodzić w przeciwnym kierunku, tzn. czy zmienny strumień elektryczny może indukować pole magnetyczne?

Odpowiedź jest twierdząca; co więcej, równanie opisujące indukowanie pola magnetycznego jest niemal symetrycznym odbiciem równania (32.26). Możemy je zapisać jako:

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{d\Phi_E}{dt} \quad (\text{indukowane pole magnetyczne}). \quad (32.27)$$

\vec{B} jest tutaj indukcją magnetyczną pola indukowanego wzdłuż zamkniętego konturu przez zmienny strumień elektryczny Φ_E , objęty tym konturem.

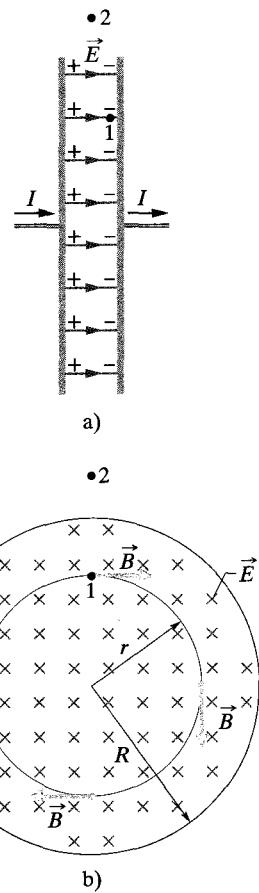
Jako przykład tego typu zjawiska indukcji, rozważmy proces ładowania kondensatora płaskiego o kołowych okładkach (rys. 32.14a). (Chociaż skupimy się teraz na tym szczególnym układzie, zmienny strumień elektryczny, kiedykolwiek się pojawi, będzie zawsze indukował pole magnetyczne). Zakładamy, że prąd stały o natężeniu I , płynący w doprowadzeniach kondensatora, zwiększa ze stałą szybkością ładunek na jego okładkach. Zatem wartość natężenia pola elektrycznego między okładkami musi również rosnąć ze stałą szybkością.

Na rysunku 32.14b przedstawiono prawą okładkę kondensatora z rysunku 32.14a, widzianą od strony obszaru między okładkami. Natężenie pola elektrycznego jest skierowane za płaszczyznę rysunku. Rozważmy kontur w kształcie okręgu, przechodzący przez punkt 1. Środek konturu leży na osi łączącej środki okładek kondensatora, a jego promień jest mniejszy od promienia okładek. Ponieważ natężenie pola elektrycznego przechodzącego przez kontur zmienia się, musi się zmieniać również strumień elektryczny, przechodzący przez ten kontur. Zgodnie z równaniem (32.27) ten zmienny strumień indukuje pole magnetyczne wzdłuż konturu.

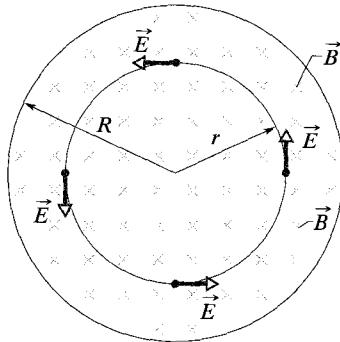
Mogą wykazać doświadczalnie, że pole magnetyczne \vec{B} istotnie jest indukowane wzdłuż takiego konturu i skierowane tak, jak pokazano na rysunku. Indukcja magnetyczna tego pola ma taką samą wartość w każdym punkcie konturu, ma więc symetrię walcową wokół osi kondensatora.

Jeżeli teraz rozważymy większy kontur, przechodzący np. przez punkt 2 na zewnątrz okładek na rysunku 32.14a i b, to przekonamy się, że pole magnetyczne będzie indukowane również wzdłuż tego konturu. Zatem gdy pole elektryczne się zmienia, pole magnetyczne jest indukowane między okładkami, zarówno wewnętrz, jak i na zewnątrz szczeliny kondensatora. Gdy pole elektryczne przestaje się zmieniać, indukowane pole magnetyczne znika.

Choć równanie (32.27) jest podobne do równania (32.26), równania te różnią się pod dwoma względami. Po pierwsze, w równaniu (32.27) występują dwie dodatkowe wielkości μ_0 i ϵ_0 , ale ich obecność jest wyłącznie skutkiem tego, że używamy jednostek układu SI. Po drugie, w równaniu (32.27) nie ma znaku minus, który występuje w równaniu (32.26). Oznacza to, że indukowane pole elektryczne \vec{E} jest skierowane przeciwnie niż indukowane pole magnetyczne \vec{B} , wytwarzane w podobnych warunkach. Aby zauważać tę różnicę, przypatrzmy się rysunkowi 32.15, na którym rosnące pole magnetyczne \vec{B} , skierowane za płaszczyznę rysunku, indukuje pole elektryczne \vec{E} . Indukowane pole \vec{E} jest skierowane przeciwnie do ruchu wskazówek zegara, a więc przeciwnie do kierunku indukowanego pola \vec{B} na rysunku 32.14b.



Rys. 32.14. a) Kondensator płaski, pokazany z boku, jest ładowany stałym prądem o natężeniu I . b) Widok zewnętrzny kondensatora w kierunku prawej okładki. Pole elektryczne jest jednorodne i skierowane za płaszczyznę rysunku (czyli do okładki), a jego natężenie rośnie, gdy zwiększa się ładunek na okładkach kondensatora. Pole magnetyczne \vec{B} , indukowane przez to zmienne pole elektryczne jest pokazane w czterech punktach, leżących na okręgu o promieniu r , mniejszym od promienia okładki R .



Rys. 32.15. Jednorodne pole magnetyczne \vec{B} w obszarze w kształcie koła. Pole jest skierowane za płaszczyznę rysunku, a jego indukcja rośnie. Pole elektryczne \vec{E} , indukowane przez zmienne pole magnetyczne, jest pokazane w czterech punktach leżących na okręgu wspólnym z kołowym obszarem. Porównaj ten przypadek z przypadkiem, przedstawionym na rysunku 32.14b

Uogólnione prawo Ampère'a

Przypomnij sobie teraz, że lewa strona równania (32.27), czyli całka z iloczynu skalarnego $\vec{B} \cdot d\vec{s}$ wzduż zamkniętego konturu, pojawia się również w innym równaniu, a mianowicie w prawie Ampère'a:

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = \mu_0 I_p \quad (\text{prawo Ampère'a}), \quad (32.28)$$

gdzie I_p jest natężeniem prądu, objętego konturem całkowania. Zatem nasze dwa równania, które opisują pole magnetyczne wytworzone sposobami innymi niż użycie materiału magnetycznego (tzn. przez przepływ prądu lub zmienne pole elektryczne), zawierają pole magnetyczne, wyrażone dokładnie w tej samej postaci. Możemy więc połączyć te dwa równania, otrzymując:

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{d\Phi_E}{dt} + \mu_0 I_p \quad (\text{uogólnione prawo Ampère'a}). \quad (32.29)$$

Gdy istnieje prąd, a nie ma zmiany strumienia elektrycznego (jak w przypadku przewodu, w którym płynie prąd stały), pierwszy składnik po prawej stronie równania (32.29) jest równy零, a równanie (32.29) redukuje się do prawa Ampère'a (32.28). Gdy zmienia się strumień elektryczny, ale nie płynie prąd (jak wewnętrz lub na zewnątrz szczeliny ładowanego kondensatora), drugi składnik po prawej stronie równania (32.29) jest równy zero, a równanie (32.29) redukuje się do równania indukcji (32.27).

Przykład 32.3

Kondensator płaski o kołowych okładkach jest ładowany, jak na rysunku 32.14a.

- a) Wyprowadź wzór, określający indukcję magnetyczną pola w odległości r od osi symetrii, dla $r \leq R$.

ROZWIĄZANIE:

O Pole magnetyczne może powstać w wyniku przepływu prądu albo w wyniku indukcji, spowodowanej zmennym strumieniem elektrycznym. Obydwa zjawiska są uwzględnione w równaniu (32.29). Między okładkami kondensatora na rysunku 32.14 nie płynie prąd, ale zmienia się tam strumień elektryczny. Zatem równanie (32.29) redukuje się do:

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{d\Phi_E}{dt}. \quad (32.30)$$

Obliczymy oddzielnie lewą i prawą stronę tego równania.

Lewa strona równania (32.30): Wybieramy kołowy kontur całkowania o promieniu $r \leq R$, jak pokazano na rysunku 32.14, gdyż chcemy obliczyć indukcję magnetyczną dla $r \leq R$, tzn. wewnątrz kondensatora. Wektor indukcji magnetycznej \vec{B} jest w każdym punkcie styczny do konturu, podobnie jak wektorowy ele-

ment długości $d\vec{s}$. Zatem \vec{B} i $d\vec{s}$ są albo równoległe, albo antyrównoległe w każdym punkcie konturu. Dla uproszczenia założymy, że są one równoległe (ten wybór nie zmienia wyniku końcowego):

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = \oint B ds \cos 0^\circ = \oint B ds.$$

Dzięki osiowej symetrii okładek możemy także przyjąć, że \vec{B} ma taką samą wartość w każdym punkcie konturu. Ta więc możemy wynieść B przed znak całki po prawej stronie powyższego równania. Całka, która pozostaje, jest równa $\oint ds$, czyli po prostu obwodowi $2\pi r$ konturu. Lewa strona równania (32.30) jest więc równa $(B)(2\pi r)$.

Prawa strona równania (32.30): Zakładamy, że pole elektryczne \vec{E} jest jednorodne między okładkami kondensatora i skierowane prostopadle do okładek. Wtedy strumień elektryczny Φ_E , przenikający przez kontur jest równy ES , gdzie S jest polem powierzchni, objętej konturem, znajdującym się w polu elektrycznym. Tak więc prawa strona równania (32.30) jest równa $\mu_0 \epsilon_0 d(ES)/dt$.

Podstawiając do równania (32.30) wyniki dla lewej i prawej strony, otrzymujemy:

$$(B)(2\pi r) = \mu_0 \epsilon_0 \frac{d(ES)}{dt}.$$

Ponieważ S jest stałe, możemy zapisać $d(ES)$ jako SdE , więc:

$$(B)(2\pi r) = \mu_0 \epsilon_0 S \frac{dE}{dt}. \quad (32.31)$$

Skorzystamy teraz z następującego faktu: Pole powierzchni S , ograniczone konturem znajdującym się w polu elektrycznym jest równe całemu polu πr^2 wewnątrz konturu, gdyż promień konturu r jest mniejszy od promienia okładki R (lub jemu równy). Podstawiając S równe πr^2 do równania (32.31) i wyznaczając B , otrzymujemy dla $r \leq R$:

$$B = \frac{\mu_0 \epsilon_0 r}{2} \frac{dE}{dt}. \quad (\text{odpowiedź}) \quad (32.32)$$

Z tego równania wynika, że wewnątrz kondensatora wartość B rośnie liniowo wraz ze wzrostem r odległości od osi, od zera w środku okładki aż do wartości maksymalnej przy brzegu okładki (gdy $r = R$).

b) Oblicz wartość indukcji B dla $r = R/5 = 11$ mm i $dE/dt = 1,5 \cdot 10^{12}$ V/(m · s).

ROZWIĄZANIE:

Z odpowiedzi do punktu (a) mamy:

$$\begin{aligned} B &= \frac{1}{2} \mu_0 \epsilon_0 r \frac{dE}{dt} \\ &= \frac{1}{2} (4\pi \cdot 10^{-7} \text{ T} \cdot \text{m}/\text{A})(8,85 \cdot 10^{-12} \text{ C}^2/(\text{N} \cdot \text{m}^2)) \\ &\quad \times (11 \cdot 10^{-3} \text{ m})(1,5 \cdot 10^{12} \text{ V}/(\text{m} \cdot \text{s})) \\ &= 9,18 \cdot 10^{-8} \text{ T}. \end{aligned} \quad (\text{odpowiedź})$$

c) Wyprowadź wzór, określający wartość indukcji magnetycznej indukowanego pola dla $r \geq R$.

ROZWIĄZANIE:

Postępujemy analogicznie, jak w punkcie (a), z tym że teraz wybieramy kontur o promieniu r większym od promienia okładek R , gdyż chcemy wyznaczyć indukcję B na zewnątrz kondensatora. Obliczając lewą i prawą stronę równania (32.30), znów otrzymujemy równanie (32.31). Jednak teraz powinieneś zauważyć, że

pole elektryczne istnieje tylko między okładkami kondensatora, a nie na zewnątrz okładek. Zatem pole powierzchni S , ograniczone konturem w polu elektrycznym *nie* jest równe całemu polu πr^2 wewnątrz konturu, ale jest równe polu powierzchni okładek πR^2 .

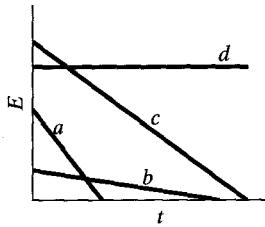
Podstawiając πR^2 zamiast S do równania (32.31) i rozwiązując je względem B , otrzymujemy dla $r \geq R$:

$$B = \frac{\mu_0 \epsilon_0 R^2}{2r} \frac{dE}{dt}. \quad (\text{odpowiedź}) \quad (32.33)$$

Z równania tego wynika, że na zewnątrz kondensatora B maleje wraz ze wzrostem odległości r od osi, przyjmując wartość maksymalną przy brzegu okładki (gdzie $r = R$). Podstawiając $r = R$ do równań (32.32) i (32.33), możemy stwierdzić, że te równania są ze sobą zgodne, tzn. dają taką samą maksymalną wartość indukcji B na brzegu okładki.

Wartość indukcji magnetycznej indukowanego pola, obliczona w punkcie (b), jest tak mała, że z trudem może być zmierzona za pomocą zwykłych przyrządów. W przeciwieństwie do tego, wartości natężen indukowanych (zgodnie z prawem Faradaya) pól elektrycznych mogą być łatwo zmierzane. Ta różnica w możliwościach pomiarowych istnieje częściowo dlatego, że indukowana SEM może być łatwo zwielokrotniona przy zastosowaniu cewki o wielu zwojach. Nie istnieje metoda o porównywalnej prostocie, która umożliwiałaby zwielokrotnienie indukowanego pola magnetycznego. Jednakże doświadczenie przedstawione w tym przykładzie zostało wykonane, a obecność indukowanego pola magnetycznego została ilościowo potwierdzona.

SPRAWDZIAN 5: Na rysunku przedstawiono wykresy natężenia pola elektrycznego E jako funkcji czasu t dla czterech przypadków jednorodnych pól elektrycznych, istniejących wewnątrz identycznych obszarów w kształcie koła, jak na rysunku 32.14b. Uszereguj pola pod względem wartości indukcji magnetycznej pól indukowanych na brzegu obszaru, zaczynając od największej wartości.



32.10. Prąd przesunięcia

Jeśli porównamy dwa składniki po prawej stronie równania (32.29), to zobaczymy, że iloczyn $\epsilon_0(d\Phi_E/dt)$ musi mieć wymiar natężenia prądu. Rzeczywiście, ten iloczyn jest traktowany jako natężenie I_{prz} fikcyjnego prądu, zwanego **prądem przesunięcia**:

$$I_{\text{prz}} = \epsilon_0 \frac{d\Phi_E}{dt} \quad (\text{natężenie prądu przesunięcia}). \quad (32.34)$$

„Przesunięcie” nie jest dobrym określeniem, gdyż nic tu nie zostaje przesunięte, ale używamy tego słowa zwyczajowo. Możemy zatem napisać równanie (32.29) w postaci:

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = \mu_0 I_{\text{prz,p}} + \mu_0 I_p \quad (\text{uogólnione prawo Ampère'a}), \quad (32.35)$$

gdzie $I_{\text{prz,p}}$ jest natężeniem prądu przesunięcia objętego konturem całkowaniem.

Zwróć ponownie uwagę na proces ładowania kondensatora o kołowych okładkach, jak na rysunku 32.16a. Rzeczywisty prąd o natężeniu I , który ładuje okładki, powoduje zmianę natężenia pola elektrycznego \vec{E} między okładkami. Fikcyjny prąd przesunięcia o natężeniu I_{prz} , występujący między okładkami, jest związany z tym zmieniającym się polem \vec{E} . Spróbujmy znaleźć zależność między natężeniami tych prądów.

Ładunek q znajdujący się w pewnej chwili na okładkach jest związany równaniem (26.4) z wartością natężenia E pola między okładkami w tej samej chwili:

$$q = \epsilon_0 S E, \quad (32.36)$$

gdzie S jest polem powierzchni okładek. Aby otrzymać natężenie rzeczywistego prądu I , różniczkujemy równanie (32.36) względem czasu:

$$\frac{dq}{dt} = I = \epsilon_0 S \frac{dE}{dt}. \quad (32.37)$$

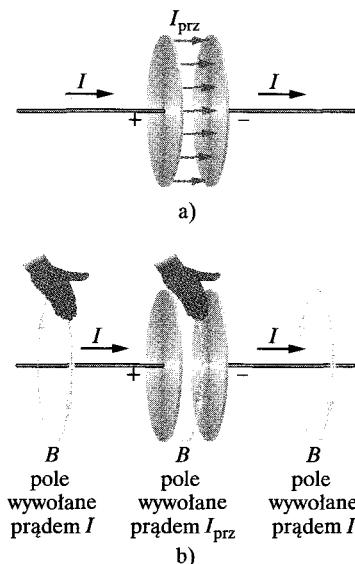
Aby otrzymać natężenie prądu przesunięcia I_{prz} , korzystamy z równania (32.34). Zakładając, że pole elektryczne \vec{E} między dwiema okładkami jest jednorodne (pomijamy jakiekolwiek pola rozproszone), możemy zastąpić strumień elektryczny Φ_E w tym równaniu przez wyrażenie ES . Zatem równanie (32.34) przyjmuje postać:

$$I_{\text{prz}} = \epsilon_0 \frac{d\Phi_E}{dt} = \epsilon_0 \frac{d(ES)}{dt} = \epsilon_0 S \frac{dE}{dt}. \quad (32.38)$$

Porównując równania (32.37) i (32.38), widzimy, że natężenie fikcyjnego prądu przesunięcia I_{prz} między okładkami jest równe natężeniu rzeczywistego prądu I , ładującego kondensator:

$$I_{\text{prz}} = I \quad (\text{natężenie prądu przesunięcia w kondensatorze}). \quad (32.39)$$

Rys. 32.16. a) Prąd przesunięcia o natężeniu I_{prz} między okładkami kondensatora, który jest ładowany prądem o natężeniu I . b) Reguła prawej dłoni, służąca do wyznaczania kierunku indukcji magnetycznej pola wokół przewodu, w którym płynie rzeczywisty prąd (jak po lewej stronie rysunku), wskazuje również kierunek indukcji magnetycznej pola wokół prądu przesunięcia (jak w środku rysunku)



Tak więc możemy traktować fikcyjny prąd przesunięcia o natężeniu I_{prz} po prostu jako kontynuację rzeczywistego prądu o natężeniu I , z jednej okładki, przez szczelinę kondensatora, do drugiej okładki. Pole elektryczne jest równomiernie rozłożone na powierzchni okładek, a więc to samo można powiedzieć o natężeniu fikcyjnego prądu przesunięcia I_{prz} , co pokazuje ułożenie strzałek prądu na rysunku 32.16a. Chociaż w rzeczywistości żaden ładunek nie przechodzi przez szczelinę między okładkami, pojęcie fikcyjnego prądu przesunięcia I_{prz} jest przydatne do szybkiego wyznaczania kierunku i wartości indukcji magnetycznej indukowanego pola. Przekonamy się o tym w następnym paragrafie.

Wyznaczanie indukowanego pola magnetycznego

W rozdziale 30, stosując regułę prawej dłoni (rys. 30.4), wyznaczyliśmy kierunek wektora indukcji magnetycznej pola wytworzonego przez rzeczywisty prąd o natężeniu I . Możemy zastosować tę samą regułę do wyznaczenia kierunku wektora indukcji magnetycznej indukowanego pola wytworzonego przez fikcyjny prąd przesunięcia o natężeniu I_{prz} , jak pokazano w środkowej części rysunku 32.16b w przypadku kondensatora.

Możemy również zastosować I_{prz} do wyznaczenia wartości indukcji magnetycznej pola indukowanego podczas ładowania kondensatora płaskiego, składającego się z równoległych, kołowych okładek o promieniu R . Po prostu traktujemy obszar między okładkami jako hipotetyczny przewód o przekroju kołowym i promieniu R , w którym płynie fikcyjny prąd o natężeniu I_{prz} . Z równania (30.22) wynika, że wartość indukcji magnetycznej w punkcie znajdującym się wewnątrz kondensatora, w odległości r od osi jest równa:

$$B = \left(\frac{\mu_0 I_{\text{prz}}}{2\pi R^2} \right) r \quad (\text{wewnątrz kondensatora o kołowych okładkach}). \quad (32.40)$$

Podobnie z równania (30.19) wynika, że wartość indukcji magnetycznej pola w punkcie znajdującym się na zewnątrz kondensatora w odległości r od osi jest równa:

$$B = \frac{\mu_0 I_{\text{prz}}}{2\pi r} \quad (\text{na zewnątrz kondensatora o kołowych okładkach}). \quad (32.41)$$

Przykład 32.4

Kondensator płaski o kołowych okładkach, omówiony w przykładzie 32.3, jest ładowany prądem o natężeniu I .

a) Jaka jest wartość całki $\oint \vec{B} \cdot d\vec{s}$ w obszarze między okładkami i w odległości $r = R/5$ od środka, wyrażona przez μ_0 i I ?

ROZWIĄZANIE:

1. Metoda zastosowana w przykładzie 32.3a jest słuszna także tutaj, jednak teraz możemy zastąpić iloczyn $\varepsilon_0 d\Phi_E/dt$ w równaniu (32.29) przez natężenie fikcyjnego prądu przesunięcia I_{prz} . Wówczas całka $\oint \vec{B} \cdot d\vec{s}$ jest dana równaniem (32.35). Rzeczywisty prąd o natężeniu I nie płynie jednak między okładkami, dlatego też równanie to redukuje się do:

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = \mu_0 I_{\text{prz,p}}. \quad (32.42)$$

Chcemy obliczyć $\oint \vec{B} \cdot d\vec{s}$ dla promienia $r = R/5$ (wewnątrz kondensatora), więc kontur całkowania obejmuje tylko część $I_{\text{prz,p}}$ całkowitego natężenia prądu I_{prz} .

2. Zakładamy, że prąd o natężeniu I_{prz} jest równomiernie rozłożony na całej powierzchni okładki. Zatem część natężenia prądu przesunięcia objętego konturem jest proporcjonalna do pola powierzchni objętej tym konturem:

$$\left(\frac{\text{natężenie prądu przesunięcia}}{I_{\text{prz,p}} \text{ objętego konturem}} \right) = \left(\frac{\text{pole powierzchni}}{\text{objętej konturem } \pi r^2} \right).$$

$$\left(\frac{\text{całkowite natężenie}}{\text{prądu przesunięcia } I_{\text{prz}}} \right) = \left(\frac{\text{całkowite pole powierzchni okładek}}{\pi R^2} \right).$$

Stąd:

$$I_{\text{prz,p}} = I_{\text{prz}} \frac{\pi r^2}{\pi R^2}.$$

Podstawiając to wyrażenie do równania (32.42), otrzymujemy:

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = \mu_0 I_{\text{prz}} \frac{\pi r^2}{\pi R^2}. \quad (32.43)$$

Podstawienie $I_{\text{prz}} = I$ (z równania (32.39)) oraz $r = R/5$ do równania (32.43) prowadzi teraz do:

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = \mu_0 I \frac{(R/5)^2}{R^2} = \frac{\mu_0 I}{25}. \quad (\text{odpowiedź})$$

b) Jaka jest wartość indukcji magnetycznej pola, indukowanego w punkcie $r = R/5$ wewnątrz kondensatora, wyrażona przez maksymalną wartość indukcji magnetycznej indukowanego pola?

ROZWIĄZANIE:

Kondensator ma równolegle kołowe okładki, a więc możemy potraktować obszar między okładkami jako fikcyjny przewód o promieniu R , w którym płynie fikcyjny prąd o natężeniu I_{prz} . Następnie możemy skorzystać z równania (32.40), aby wyznaczyć wartość indukcji magnetycznej indukowanego pola w dowolnym punkcie wewnątrz kondensatora. Dla $r = R/5$, otrzymujemy:

$$B = \left(\frac{\mu_0 I_{\text{prz}}}{2\pi R^2} \right) r = \frac{\mu_0 I_{\text{prz}}(R/5)}{2\pi R^2} = \frac{\mu_0 I_{\text{prz}}}{10\pi R}. \quad (32.44)$$

Maksymalna wartość indukcji magnetycznej B_{\max} występuje dla $r = R$ i jest równa:

$$B_{\max} = \left(\frac{\mu_0 I_{\text{prz}}}{2\pi R^2} \right) R = \frac{\mu_0 I_{\text{prz}}}{2\pi R}. \quad (32.45)$$

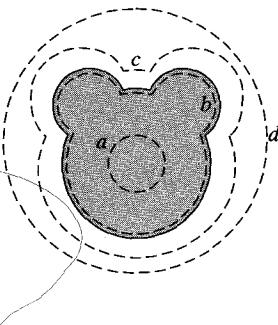
Dzieląc równanie (32.44) przez równanie (32.45) i przekształcając wynik, otrzymujemy:

$$B = \frac{B_{\max}}{5}. \quad (\text{odpowiedź})$$

Ten sam wynik moglibyśmy otrzymać za pomocą prostego rozumowania, przy mniejszym nakładzie pracy. Z równania (32.40) wynika, że wewnątrz kondensatora indukcja B rośnie liniowo wraz z r . Dlatego w punkcie położonym w odległości równej $\frac{1}{5}$ promienia okładki R , gdzie występuje B_{\max} , indukcja B powinna być równa $\frac{1}{5} B_{\max}$.

SPRAWDZIAN 6:

Na rysunku przedstawiono jedną okładkę kondensatora płaskiego, wizualizującą z wnętrza kondensatora. Linie przerywane ozaczają cztery kontury całkowania (kontur b biegnie wzduż brzegu okładki). Uszereguj kontury pod względem wartości całki $\oint \vec{B} \cdot d\vec{s}$ wzduż konturu, obliczonej podczas rozładowania kondensatora, zaczynając od największej wartości.



32.11. Równania Maxwell'a

Równanie (32.29) jest ostatnim spośród czterech podstawowych równań elektromagnetyzmu, nazywanych *równaniami Maxwell'a* i przedstawionych w tabeli 32.1. Te cztery równania wyjaśniają zjawiska w bardzo zróżnicowanym zakresie, poczynając od pytania, dlaczego kompas wskazuje kierunek północny, a kończąc na pytaniu, dlaczego samochód rusza, gdy przekrzesz kluczyk w stacyjce. Równania te są podstawą działania takich urządzeń elektromagnetycznych, jak: silnik elektryczny, cyklotron, nadajnik i odbiornik telewizyjny, telefon, faks, radar i kuchenka mikrofalowa.

Równania Maxwell'a są podstawą do wyprowadzenia wielu równań, z którymi zetknęliśmy się już, począwszy od rozdziału 22. Są one również punktem wyjścia wielu równań, będących wprowadzeniem do optyki, a które będą omówione w rozdziałach od 34 do 37.

Tabela 32.1. Równania Maxwell'a¹

| Nazwa | Równanie | |
|---------------------------------|--|--|
| prawo Gaussa dla elektryczności | $\oint \vec{E} \cdot d\vec{s} = q_{\text{wewn}}/\epsilon_0$ | wiąże wypadkowy strumień elektryczny z wypadkowym ładunkiem elektrycznym objętym powierzchnią Gaussa |
| prawo Gaussa dla magnetyzmu | $\oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = 0$ | wiąże wypadkowy strumień magnetyczny z wypadkowym ładunkiem magnetycznym objętym powierzchnią Gaussa |
| prawo Faradaya | $\oint \vec{E} \cdot d\vec{s} = -\frac{d\Phi_B}{dt}$ | wiąże indukowane pole elektryczne ze zmiennym strumieniem magnetycznym |
| uogólnione prawo Ampère'a | $\oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{d\Phi_E}{dt} + \mu_0 I_p$ | wiąże indukowane pole magnetyczne ze zmiennym strumieniem elektrycznym oraz z prądem |

¹ zapisane przy założeniu, że nie występują materiały dielektryczne ani magnetyczne.

Podsumowanie

Prawo Gaussa dla pól magnetycznych Najprostszymi układami magnetycznymi są dipole magnetyczne. Monopole magnetyczne nie istnieją. **Prawo Gaussa dla pól magnetycznych:**

$$\Phi_B = \oint \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0. \quad (32.1)$$

Ze wzoru tego wynika, że wypadkowy strumień magnetyczny, przenikający przez dowolną (zamkniętą) powierzchnię Gaussa jest równy零. Możemy wyciągnąć stąd wniosek, że monopole magnetyczne nie istnieją.

Ziemskie pole magnetyczne Ziemskie pole magnetyczne może być traktowane w przybliżeniu jako pole dipola magnetycznego, którego moment magnetyczny tworzy kąt $11,5^\circ$ z osią obrotu Ziemi, przy czym południowy biegun tego dipola znajduje się na półkuli północnej. Kierunek lokalnego pola magnetycznego w dowolnym punkcie na powierzchni Ziemi jest określony *deklinacją magnetyczną* (czyli kątem mierzonym w lewo lub w prawo od kierunku północy geograficznej) oraz *inklinacją magnetyczną* (czyli kątem mierzonym w góre lub w dół od płaszczyzny poziomej).

Spinowy moment magnetyczny Elektron ma swój własny moment pędu, zwany *spinowym momentem pędu* (lub *spinem*) \vec{S} , z którym związany jest własny *spinowy moment magnetyczny* $\vec{\mu}_s$:

$$\vec{\mu}_s = -\frac{e}{m} \vec{S}. \quad (32.2)$$

Sam spin \vec{S} nie może być zmierzony, można natomiast zmierzyć dowolną jego składową. Jeśli pomiar jest dokonywany wzdłuż osi z układu współrzędnych, składowa S_z może przyjmować tylko wartości dane wzorem:

$$S_z = m_s \frac{h}{2\pi}, \quad \text{dla } m_s = \pm \frac{1}{2}, \quad (32.3)$$

gdzie $h (= 6,63 \cdot 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s})$ jest stałą Plancka. Podobnie spinowy moment magnetyczny $\vec{\mu}_s$ elektronu nie może być zmierzony, ale można zmierzyć jego składową. Składowa wzdłuż osi z jest równa:

$$\mu_{s,z} = \mp \frac{eh}{4\pi m} = \mp \mu_B, \quad (32.4, 32.6)$$

gdzie μ_B oznacza *magneton Bohra*:

$$\mu_B = \frac{eh}{4\pi m} = 9,27 \cdot 10^{-24} \text{ J/T}. \quad (32.5)$$

Energia potencjalna E_p , związana z ustawieniem spinowego momentu magnetycznego w zewnętrznym polu magnetycznym \vec{B}_{zewn} jest równa:

$$E_p = -\vec{\mu}_s \cdot \vec{B}_{zewn} = -\mu_{s,z} B_{zewn}. \quad (32.7)$$

Orbitalny moment magnetyczny Elektron w atomie ma także moment pędu zwany *orbitalnym momentem pędu* \vec{L}_{orb} , z którym

związany jest *orbitalny moment magnetyczny* $\vec{\mu}_{orb}$:

$$\vec{\mu}_{orb} = -\frac{e}{2m} \vec{L}_{orb}. \quad (32.8)$$

Składowa orbitalnego momentu pędu jest skwantowana i może przyjmować tylko wartości:

$$L_{orb,z} = m_l \frac{h}{2\pi}, \quad \text{dla } m_l = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm (\text{wartość maksymalna}). \quad (32.9)$$

Zatem wartość składowej orbitalnego momentu magnetycznego jest równa:

$$\mu_{orb,z} = -m_l \frac{eh}{4\pi m} = -m_l \mu_B. \quad (32.10, 32.11)$$

Energia potencjalna E_p , związana z ustawieniem orbitalnego momentu magnetycznego w zewnętrznym polu magnetycznym \vec{B}_{zewn} jest równa:

$$E_p = -\vec{\mu}_{orb} \cdot \vec{B}_{zewn} = -\mu_{orb,z} B_{zewn}. \quad (32.12)$$

Diamagnetyzm Materiały *diamagnetyczne* nie wykazują właściwości magnetycznych, dopóki nie zostaną umieszczone w zewnętrznym polu magnetycznym \vec{B}_{zewn} . Powstaje w nich wtedy moment magnetyczny, skierowany przeciwko do \vec{B}_{zewn} . Jeżeli pole jest niejednorodne, materiał *diamagnetyczny* jest wypychany z obszaru silniejszego pola magnetycznego.

Paramagnetyzm W materiale *paramagnetycznym* każdy atom ma trwałego dipolowy moment magnetyczny $\vec{\mu}$, ale momenty magnetyczne są zorientowane przypadkowo i materiał, jako całość, nie tworzy pola magnetycznego. Jednakże zewnętrzne pole magnetyczne \vec{B}_{zewn} może częściowo uporządkować momenty magnetyczne, wytwarzając w materiale wypadkowy dipolowy moment magnetyczny w kierunku \vec{B}_{zewn} . Jeżeli \vec{B}_{zewn} jest niejednorodne, to materiał *paramagnetyczny* jest wciągany do obszaru silniejszego pola magnetycznego.

Uporządkowanie atomowych momentów dipolowych rośnie wraz ze wzrostem indukcji \vec{B}_{zewn} i maleje wraz ze wzrostem temperatury T . Stopień, do jakiego próbka o objętości V jest namagnesowana, jest określony przez wektor *namagnesowania* \vec{M} , którego wartość jest równa:

$$M = \frac{\text{zmierzony moment magnetyczny}}{V}. \quad (32.18)$$

Całkowite uporządkowanie wszystkich N atomowych dipoli magnetycznych w próbce, zwane *nasyceniem* próbki, odpowiada maksymalnej wartości namagnesowania $M_{\max} = N\mu/V$. Dla małych wartości stosunku B_{zewn}/T mamy zależność przybliżoną:

$$M = C \frac{B_{zewn}}{T} \quad (\text{prawo Curie}), \quad (32.19)$$

gdzie C jest nazywane *stałą Curie*.

Ferromagnetyzm Pod nieobecność zewnętrznego pola magnetycznego, niektóre z elektronów w materiale ferromagnetycznym wykazują uporządkowanie swoich dipolowych momentów magnetycznych, wynikające z kwantowego oddziaływanie, zwanego *odziaływaniem wymiennym*. W ten sposób powstają obszary (domeny) wewnętrz materialu, wykazujące duży moment magnetyczny. Zewnętrzne pole \vec{B} może uporządkować dipolowe momenty magnetyczne tych obszarów, wytwarzając duży wypadkowy moment magnetyczny w całym materiale, zorientowany w kierunku \vec{B}_{zewn} . Ten wypadkowy moment magnetyczny może się częściowo utrzymywać, gdy usuniemy pole \vec{B}_{zewn} . Jeżeli \vec{B}_{zewn} jest niejednorodne, to materiał ferromagnetyczny jest wciągany do obszaru silniejszego pola magnetycznego. Ferromagnetyzm substancji znika, gdy temperatura przekracza *temperaturę Curie*, i wtedy próbka wykazuje tylko paramagnetyzm.

Uogólnione prawo Ampère'a Zmienny strumień elektryczny indukuje pole magnetyczne \vec{B} . To prawo:

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{d\Phi_E}{dt} \quad (32.27)$$

wiąże pole magnetyczne, indukowane wzdłuż zamkniętego konturu, ze zmiennym strumieniem elektrycznym Φ_E , przenikającym przez ten kontur. Prawo Ampère'a $\oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = \mu_0 I_p$ (równanie

(32.28)) określa pole magnetyczne, wytworzone przez prąd o natężeniu I_p , objęty zamkniętym konturem. Równanie (32.27) i prawo Ampère'a mogą być zapisane w postaci jednego równania:

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{d\Phi_E}{dt} + \mu_0 I_p \quad (\text{uogólnione prawo Ampère'a}) \quad (32.29)$$

Prąd przesunięcia Definiujemy natężenie fikcyjnego *prądu przesunięcia*, wywołanego zmiennym polem elektrycznym jako:

$$I_{\text{prz}} = \epsilon_0 \frac{d\Phi_E}{dt} \quad (32.34)$$

Równanie (32.29) przyjmuje wtedy postać:

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = \mu_0 I_{\text{prz},p} + \mu_0 I_p \quad (\text{uogólnione prawo Ampère'a}), \quad (32.35)$$

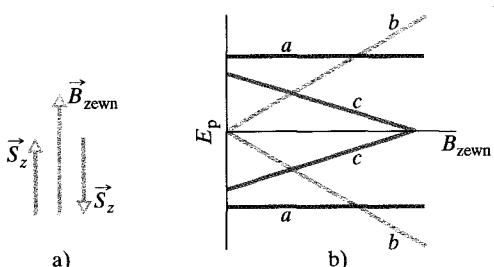
gdzie $I_{\text{prz},p}$ jest natężeniem prądu przesunięcia, objętego konturem całkowania. Idea prądu przesunięcia pozwala zachować pojęcie ciągłości prądu, płynącego przez kondensator. Jednakże prąd przesunięcia *nie* oznacza przemieszczenia ładunku.

Równania Maxwella Równania Maxwella, przedstawione w tabeli 32.1, są podsumowaniem elektromagnetyzmu, a jednocześnie tworzą jego podstawę.

Pytania

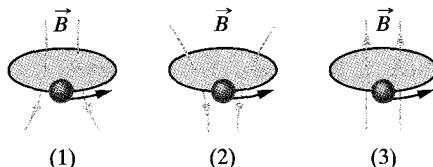
1. Elektron, znajdujący się w zewnętrznym polu magnetycznym o indukcji \vec{B}_{zewn} ma spinowy moment pędu S_z , skierowany antyrównolegle do wektora \vec{B}_{zewn} . Jeżeli w elektronie następuje *odwrócenie spinu*, tak że S_z jest równoległe do \vec{B}_{zewn} , to czy wtedy elektron zyskuje, czy traci energię?

2. Na rysunku 32.17a przedstawiono dwa przeciwnie skierowane ustawienia spinu dla elektronu w zewnętrznym polu magnetycznym \vec{B}_{zewn} . Na rysunku 32.17b przedstawiono trzy wykresy energii potencjalnej, związanej z tymi ustawieniami, jako funkcji wartości indukcji pola \vec{B}_{zewn} . Wykresy b i c składają się z przecinających się linii, a wykres a — z równoległych linii. Który wykres jest poprawny?



Rys. 32.17. Pytanie 2

3. Na rysunku 32.18 przedstawiono elektron, krążący po orbicie w polu magnetycznym, w kierunku przeciwnym do ruchu wskazówek zegara. Pole jest niejednorodne w przypadku 1 i 2, natomiast jednorodne w przypadku 3. Czy następujące wielkości: a) dipolowy moment magnetyczny pętli, b) siła magnetyczna działająca na pętlę, są dla danego przypadku skierowane do góry, w dół, czy są równe zeru?



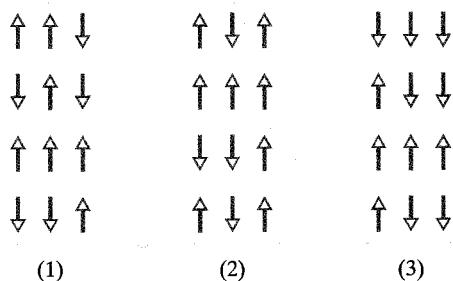
Rys. 32.18. Pytania 3, 5 i 6

4. Czy wartość wypadkowej siły działającej na pętlę na rysunku 32.8a i b wzrośnie, zmaleje, czy pozostanie taka sama, jeżeli zwiększymy: a) wartość \vec{B}_{zewn} , b) rozbieżność \vec{B}_{zewn} ?

5. W pytaniu 3 i na rysunku 32.18 zastąp pętle z prądem kulami diamagnetycznymi. Czy następujące wielkości: a) dipolowy moment magnetyczny kulki, b) siła magnetyczna, działająca na kulę, będą dla danego przypadku skierowane do góry, w dół, czy będą równe zeru?

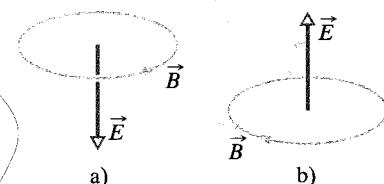
6. W pytaniu 3 i na rysunku 32.18 zastąp pętle z prądem kulkami paramagnetycznymi. Czy następujące wielkości: a) dipolowy moment magnetyczny kulki, b) siła magnetyczna, działająca na kulkę, będą dla danego przypadku skierowane do góry, w dół, czy będą równe zeru?

7. Na rysunku 32.19 przedstawiono trzy przykładowe ustawienia dipoli magnetycznych w materiale diamagnetycznym. (Dla uproszczenia przyjęto, że momenty magnetyczne są skierowane tylko w góre lub w dół strony). Te trzy przypadki różnią się wartością indukcji magnetycznej pola przyłożonego do materiału. a) Czy w poszczególnych przypadkach przyłożone pole jest skierowane w górę, czy w dół strony? b) Uszereguj trzy przypadki pod względem: b) wartości przyłożonego pola, c) namagnesowania materiału, zaczynając od największej wartości.



Rys. 32.19. Pytanie 7

8. Na rysunku 32.20 przedstawiono w dwóch przypadkach wektor natężenia pola elektrycznego i linię indukowanego pola magnetycznego. Czy w poszczególnych przypadkach wartość \vec{E} rośnie, czy maleje?



Rys. 32.20. Pytanie 8

Zadania

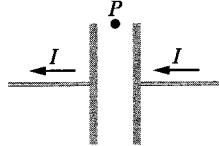
Rozwiązań jest dostępne na stronie internetowej podręcznika: <http://www.wiley.com/college/hrw>

Rozwiązań jest dostępne w postaci interaktywnej, wykorzystującej oprogramowanie Interactive Learning-Ware (na tej samej stronie)

32.2. Prawo Gaussa dla pól magnetycznych

1. Wyobraź sobie, że zwiniałeś kartkę papieru w rurkę i umieściliś w pobliżu jej końca magnes sztabkowy, jak pokazano na rysunku

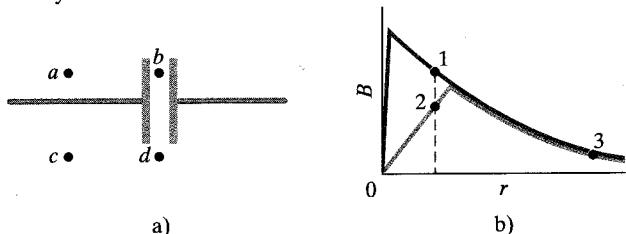
9. Na rysunku 32.21 przedstawiono kondensator płaski oraz prąd płynący w doprowadzeniach, rozładowujący kondensator. Czy: a) wektor natężenia pola elektrycznego \vec{E} , b) prąd przesunięcia o natężeniu I_{prz} , są skierowane w lewo, czy w prawo między okładkami kondensatora? c) Czy pole magnetyczne w punkcie P jest skierowane za, czy przed płaszczyznę rysunku?



Rys. 32.21. Pytanie 9

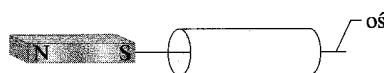
10. Kondensator płaski o prostokątnych okładkach jest rozładowywany. Prostokątna ramka, wstawiona w obszar między okładkami, ma wymiary L i $2L$. Wymiary okładek wynoszą $2L$ i $4L$. Jaka część prądu przesunięcia jest objęta ramką, jeżeli prąd jest rozłożony równomiernie?

11. Na rysunku 32.22a przedstawiono kondensator o kołowych okładkach, który jest ładowany. Punkt a (w pobliżu jednego z przewodów doprowadzających) i punkt b (wewnętrz szczeliny kondensatora) znajdują się w tej samej odległości od osi, podobnie jak punkt c (nieco dalej od przewodu) i punkt d (między okładkami, ale na zewnątrz szczeliny). Jeden z wykresów na rysunku 32.22b ilustruje zależność wartości indukcji magnetycznej od odległości r , zarówno wewnętrz, jak i na zewnątrz przewodu. Drugi z wykresów ilustruje zależność wartości indukcji magnetycznej od odległości r , wewnętrz i na zewnątrz szczeliny kondensatora. Obydwa wykresy częściowo się pokrywają. Przyporządkuj każdy z punktów na rysunku 32.22a jednemu z trzech punktów na wykresie.



Rys. 32.22. Pytanie 11

32.23. a) Naszkicuj linie pola magnetycznego, które przecinają cylindryczną powierzchnię kartki. b) Co możesz powiedzieć o znaku wyrażenia $\vec{B} \cdot d\vec{S}$ dla każdego elementu $d\vec{S}$ na powierzchni? c) Zastanow się, czy jest to sprzeczne z prawem Gaussa dla pól magnetycznych.



Rys. 32.23. Zadanie 1

2. Strumień magnetyczny, przenikający przez jedną z pięciu ścianek kostki do gry, jest dany wzorem $\Phi_B = \pm N \text{ Wb}$, gdzie N ($= 1$ do 5) oznacza liczbę oczek na ściance. Strumień jest dodatni (skierowany na zewnątrz) dla N parzystych i ujemny (skierowany do wewnętrza) dla N nieparzystych. Wyznacz strumień, przechodzący przez szóstą ściankę kostki.

3. Powierzchnia gaussowska, składająca się z powierzchni walca o przekroju kołowym oraz dwóch denek ma promień 12 cm i długość 80 cm . Przez jedno z denek przenika strumień magnetyczny o wartości $25 \mu\text{Wb}$, skierowany do wewnętrza. Przy drugim denku istnieje jednorodne pole magnetyczne o indukcji $1,6 \text{ mT}$, prostopadłe do powierzchni i skierowanej na zewnątrz. Jaki jest wypadkowy strumień magnetyczny przechodzący przez powierzchnię boczną walca? www...

32.3. Magnetyzm ziemski

4. Przyjmij, że średnia wartość pionowej składowej ziemskiego pola magnetycznego wynosi $43 \mu\text{T}$ (w dół) dla całego stanu Arizona, który ma powierzchnię $2,95 \cdot 10^5 \text{ km}^2$. Oblicz całkowity strumień magnetyczny przez pozostałą część powierzchni Ziemi (tzn. przez całą powierzchnię z wyjątkiem stanu Arizona). Czy ten wypadkowy strumień jest skierowany na zewnątrz, czy do wewnętrza Ziemi?

5. W stanie New Hampshire średnia wartość poziomej składowej ziemskiego pola magnetycznego była równa $16 \mu\text{T}$ w 1912 roku, a średnia inklinacja wynosiła 73° . Jaka była wtedy wartość indukcji magnetycznej całkowitego ziemskiego pola?

6. Ziemske pole magnetyczne może być w przybliżeniu traktowane jako pole magnetyczne dipola. Pozioma (h) i pionowa (v) składowa tego pola, w punkcie położonym w odległości r od środka Ziemi, jest dana wzorem:

$$B_h = \frac{\mu_0 \mu}{4\pi r^3} \cos \lambda_m, \quad B_v = \frac{\mu_0 \mu}{4\pi r^3} \sin \lambda_m,$$

gdzie λ_m jest szerokością magnetyczną (mierzoną od równika geomagnetycznego w kierunku północnego lub południowego biegunu geomagnetycznego). Przyjmij, że dipolowy moment magnetyczny Ziemi jest równy $\mu = 8 \cdot 10^{22} \text{ A} \cdot \text{m}^2$. a) Wykaż, że wartość indukcji magnetycznej ziemskiego pola na szerokości λ_m jest dana wyrażeniem:

$$B = \frac{\mu_0 \mu}{4\pi r^3} \sqrt{1 + 3 \sin^2 \lambda_m}.$$

b) Wykaż, że inklinacja ϕ_i pola magnetycznego jest związana z szerokością magnetyczną równaniem:

$$\operatorname{tg} \phi_i = 2 \operatorname{tg} \lambda_m.$$

7. Skorzystaj z wyników przedstawionych w zadaniu 6 do oszacowania ziemskiego pola magnetycznego (zarówno wartości indukcji, jak i inklinacji): a) na równiku geomagnetycznym, b) w punkcie o szerokości magnetycznej 60° , c) na północnym biegunie geomagnetycznym.

8. Korzystając z przybliżeń podanych w zadaniu 6 wyznacz: a) wysokość nad powierzchnią Ziemi, gdzie wartość indukcji ziemskiego pola magnetycznego stanowi 50% wartości na powierzchni, na tej samej szerokości magnetycznej, b) maksymalną wartość indukcji magnetycznej pola na granicy między jądrem a płaszczyzną Ziemi, 2900 km pod powierzchnią Ziemi, c) wartość indukcji magnetycznej i inklinację pola ziemskiego na geograficznym biegunie północnym. Wyjaśnij, dlaczego wartości obliczone w punkcie (c) różnią się od wartości zmierzonych.

32.4. Magnetyzm i elektrony

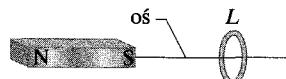
9. Jaka jest zmierzona wartość składowej orbitalnego momentu magnetycznego elektronu dla: a) $m_l = 1$, b) $m_l = -2$?

10. Ile wynosi różnica energii ustwienia równoległego i antyrównoległego z -owej składowej spinowego momentu magnetycznego elektronu, w zewnętrznym polu magnetycznym o indukcji $0,25 \text{ T}$, skierowanym równolegle do osi z ?

11. Jaka jest wartość składowej: a) $L_{\text{orb},z}$, b) $\mu_{\text{orb},z}$, jeżeli elektron w atomie ma orbitalny moment pędu różny od zera, a $m_l = 0$? Jeżeli taki atom znajduje się w zewnętrznym polu magnetycznym \vec{B} o indukcji 35 mT , skierowanym wzduł osi z , to jaka energia potencjalna związana jest z orientacją: c) orbitalnego momentu magnetycznego elektronu, d) spinowego momentu magnetycznego elektronu? e) Wykonaj polecenia od (a) do (d) dla $m_l = -3$.

32.6. Diamagnetyzm

12. Na rysunku 32.24 przedstawiono pętlę z prądem L , która jest modelem materiału diamagnetycznego. a) Naszkicuj linie pola magnetycznego, przechodzące przez materiał i wokół niego, pochodzące od magnesu sztabkowego. b) Jaki jest kierunek dipolowego momentu magnetycznego $\vec{\mu}$ pętli i umownego prądu o natężeniu I , płynącego w pętli? c) Jaki jest kierunek siły magnetycznej, działającej na pętlę?



Rys. 32.24. Zadania 12 i 16

13*. Przypuśćmy, że elektron o masie m i wartością bezwzględnej ładunku e porusza się po kołowej orbicie wokół jądra. Prostopadle do płaszczyzny orbity zostaje przyłożone jednorodne pole magnetyczne o indukcji \vec{B} . Zakładając dodatkowo, że promień orbity się nie zmienia, a zmiana prędkości elektronu spowodowana polem \vec{B} jest mała, wyprowadź wzór określający zmianę orbitalnego momentu magnetycznego elektronu wywołaną przyłożonym polem.

32.7. Paramagnetyzm

14. Pole magnetyczne o indukcji $0,5 \text{ T}$ działa na gaz paramagnetyczny, którego atomy mają własny dipolowy moment magnetyczny równy $1 \cdot 10^{-23} \text{ J/T}$. W jakiej temperaturze średnia energia kinetyczna ruchu postępowego atomów gazu będzie równa energii potrzebnej do odwrócenia dipola o 180° w tym polu magnetycznym?

15. Magnes w kształcie walcowego pręta ma długość 5 cm i średnicę 1 cm. Jego namagnesowanie jest jednorodne i wynosi $5,3 \cdot 10^3$ A/m. Ile wynosi dipolowy moment magnetyczny pręta?

16. Powtórz zadanie 12 dla przypadku, gdy pętla L stanowi model materiału paramagnetycznego.

17. Próbka soli paramagnetycznej, której krzywa magnesowania jest przedstawiona na rysunku 32.9, ma być zbadana w celu sprawdzenia, czy stosuje się do niej prawo Curie. Próbka znajduje się w jednorodnym polu magnetycznym o stałej wartości indukcji 0,5 T, a jej namagnesowanie M jest mierzone w zakresie temperatur od 10 do 300 K. Czy w tych warunkach okaże się, że prawo Curie jest spełnione?

18. Próbka soli paramagnetycznej, której krzywa magnesowania jest przedstawiona na rysunku 32.9, jest utrzymywana w temperaturze pokojowej (300 K). Dla jakiej wartości indukcji magnetycznej przyłożonego pola stopień nasycenia magnetycznego próbki będzie wynosił: a) 50%, b) 90%? Czy takie pola są osiągalne w warunkach laboratoryjnych?

19. Elektron o energii kinetycznej E_{ke} porusza się po kołowym torze, którego płaszczyzna jest prostopadła do kierunku jednorodnego pola magnetycznego. Ruch elektronu podlega tylko działaniu siły wywołanej polem. a) Wykaż, że dipolowy moment magnetyczny elektronu, wynikający z jego ruchu po orbicie, ma wartość $\mu = E_{ke}/B$ i jest skierowany przeciwnie do \vec{B} . b) Jaka jest wartość i kierunek dipolowego momentu magnetycznego jonu dodatniego o energii E_{kj} w tych samych warunkach? c) Zjonizowany gaz składa się z $5,3 \cdot 10^{21}$ elektronów/m³ i takiej samej liczby jonów, przypadających na m³. Przyjmij, że średnia energia kinetyczna elektronu wynosi $6,2 \cdot 10^{-20}$ J, a średnia energia kinetyczna jona $7,6 \cdot 10^{-21}$ J. Oblicz namagnesowanie gazu, gdy znajduje się on w polu magnetycznym o indukcji 1,2 T.

32.8. Ferromagnetyzm

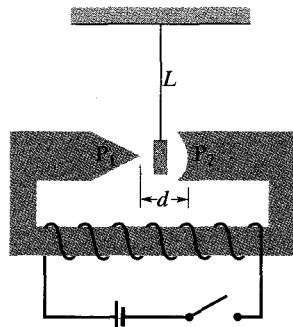
20. Pomiary w kopalniach i otworach wiertniczych wykazują, że temperatura wnętrza Ziemi rośnie wraz z głębokością średnio o 30°C/km. Przyjmując temperaturę na powierzchni równą 10°C, oblicz głębokość, dla której żelazo przestaje być ferromagnetykiem. (Temperatura Curie żelaza zmienia się bardzo nieznacznie wraz z ciśnieniem).

21. Oddziaływanie wymienne, wspomniane w paragrafie 32.8 jako przyczyna ferromagnetyzmu, nie jest wzajemnym oddziaływaniem magnetycznym między dwoma elementarnymi dipolami magnetycznymi. Aby to wykazać, oblicz a) wartość indukcji magnetycznej pola w odległości 10 nm (mierzonej wzdłuż osi dipola) od atomu o dipolowym momencie magnetycznym równym $1,5 \cdot 10^{-23}$ J/T (kobalt), b) minimalną wartość energii, potrzebnej do odwrócenia o 180° drugiego takiego dipola w tym polu magnetycznym. Jaki wniosek możesz wyciągnąć, porównując ten wynik z wynikiem otrzymanym w przykładzie 32.1?

22. Moment magnetyczny, związany z atomem żelaza w żelaznej sztabce, jest równy $2,1 \cdot 10^{-23}$ J/T. Przypuśćmy, że wszystkie atomy w sztabce, która ma długość 5 cm i pole przekroju 1 cm², mają momenty magnetyczne ustawione równolegle. a) Ile wynosi moment magnetyczny sztabki? b) Jaki moment siły należy przyłożyć, aby utrzymać ten magnes prostopadle do zewnętrznego pola o indukcji 1,5 T? (Gęstość żelaza wynosi 7,9 g/cm³).

23. Namagnesowanie nasycenia M_{\max} ferromagnetycznego metalu (niklu) jest równe $4,7 \cdot 10^5$ A/m. Oblicz moment magnetyczny pojedynczego atomu niklu. (Gęstość niklu wynosi 8,9 g/cm³, a jego masa molowa 58,71 g/mol).

24. Na rysunku 32.25 przedstawiono urządzenie, używane podczas wykładów do poglądowego przedstawienia zjawisk paramagnetyzmu i diamagnetyzmu. Próbka materiału magnetycznego jest zawieszona na długiej strunie w niejednorodnym polu magnetycznym ($d = 2$ cm) między biegunami silnego elektromagnesu. Nabiegunnik P_1 jest ostro zakończony, a nabiegunnik P_2 jest zaokrąglony, jak pokazano na rysunku. Słuchacze mogą obserwować odchylenie struny od pozycji pionowej dzięki optycznemu układowi projekcyjnemu (nie pokazanemu na rysunku). a) Najpierw badana jest próbka bizmutu, który jest materiałem silnie diamagnetycznym. Po włączeniu elektromagnesu można zaobserwować, że próbka odchyla się nieznacznie (około 1 mm) w kierunku jednego z nabiegunników. Jaki jest kierunek tego odchylenia? b) Następnie badana jest próbka glinu, który jest materiałem paramagnetycznym i przewodzącym. Po włączeniu elektromagnesu obserwuje się najpierw silne odchylenie (około 1 cm) w kierunku jednego nabiegunka, trwające około sekundy, a następnie umiarkowane odchylenie (kilka milimetrów) w kierunku drugiego nabiegunka. Wyjaśnij i wskaż kierunki tych odchylen. (Wskazówka: Próbka glinu jest przewodnikiem, do którego stosuje się reguła Lenza). c) Co by się stało, gdyby zastosowano próbkę materiału ferromagnetycznego?



Rys. 32.25. Zadanie 24

25. Dipolowy moment magnetyczny Ziemi wynosi $8 \cdot 10^{22}$ J/T. a) Gdyby źródłem magnetyzmu ziemskiego była namagnesowana kula z żelaza, to jaki byłby jej promień? b) Jaką część objętości Ziemi zajmowałaby taka kula? Przyjmij, że dipole są całkowicie uporządkowane. Gęstość wewnętrznego jądra Ziemi wynosi 14 g/cm³. Dipolowy moment magnetyczny atomu żelaza jest równy $2,1 \cdot 10^{-23}$ J/T. (Uwaga: Uważa się, że istotnie wewnętrzne jądro Ziemi znajduje się zarówno w stanie ciekłym, jak i stałym i składa się częściowo z żelaza. Jednak różne argumenty wykluczają istnienie magnesu trwałego jako źródła magnetyzmu ziemskiego. Przede wszystkim temperatura we wnętrzu Ziemi jest z pewnością wyższa od temperatury Curie). ilw

32.9. Indukowane pole magnetyczne

26. W przykładzie 32.3 opisano ładowanie kondensatora płaskiego, mającego kołowe okładki o promieniu 55 mm. Dla jakich odległości r od osi kondensatora, wartość indukcji magnetycznej indukowanego pola stanowi 50% jej wartości maksymalnej?

27. Indukcja magnetyczna indukowanego pola między okładkami kołowego kondensatora płaskiego w odległości 6 mm od jego osi wynosi $2 \cdot 10^{-7}$ T. Promień okładek jest równy 3 mm. Jaka jest szybkość zmian $d\vec{E}/dt$ pola elektrycznego między okładkami?

28. Przypuśćmy, że kondensator płaski ma okładki w kształcie koła o promieniu $R = 30$ mm, a odległość między nimi wynosi 5 mm. Przypuśćmy także, że do okładek kondensatora przyłożono napięcie o maksymalnej wartości 325 V i częstotliwości 50 Hz, tzn.

$$U = (325 \text{ V}) \sin[2\pi(50 \text{ Hz})t].$$

a) Oblicz $B_{\max}(R)$, czyli maksymalną wartość indukcji magnetycznej indukowanego pola, która występuje dla $r = R$. b) Narysuj wykres $B_{\max}(r)$ dla $0 < r < 10$ cm.

32.10. Prąd przesunięcia

29. Wykaż, że natężenie prądu przesunięcia w kondensatorze płaskim o pojemności C może być zapisane w postaci $I_{\text{prz}} = C(dU/dt)$, gdzie U jest różnicą potencjałów między okładkami.

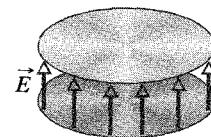
30. Z jaką szybkością musi się zmieniać różnica potencjałów między okładkami kondensatora płaskiego o pojemności $2 \mu\text{F}$, aby wytworzyć prąd przesunięcia o natężeniu 1,5 A?

31. Dla przypadku omówionego w przykładzie 32.3 wykaż, że gęstość prądu przesunięcia jest równa $J_{\text{prz}} = \epsilon_0(dE/dt)$ dla $r \leq R$.

32. Kondensator płaski, mający kołowe okładki o promieniu 0,1 m, jest rozładowywany. Pętla w kształcie okręgu o promieniu 0,2 m jest ułożona równolegle do okładek w taki sposób, że jej środek leży na prostej łączącej środki okładek kondensatora i znajduje się w połowie odległości między okładkami. Natężenie prądu przesunięcia, przechodzącego przez pętlę wynosi 2 A. Z jaką szybkością zmienia się natężenie pola elektrycznego między okładkami?

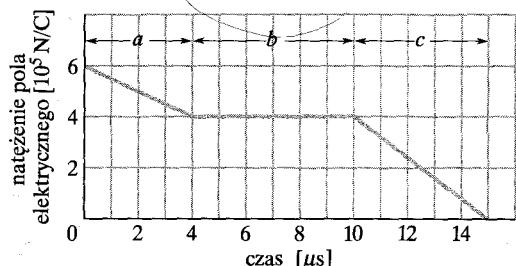
33. Kondensator płaski, mający kołowe okładki o średnicy 20 cm, jest ładowany. Gęstość prądu przesunięcia w obszarze między okładkami jest stała i ma wartość 20 A/m^2 . a) Oblicz wartość indukcji magnetycznej B w odległości $r = 50$ mm od osi symetrii tego obszaru. b) Oblicz dE/dt w tym obszarze.

34. Wartość natężenia pola elektrycznego między dwiema równoległyymi kołowymi płytami wynosi $E = 4 \cdot 10^5 - 6 \cdot 10^4 t$, gdzie E jest wyrażone w woltach na metr, a t w sekundach. W chwili $t = 0$ pole jest skierowane do góry, jak pokazano na rysunku 32.26. Pole powierzchni każdej płyty jest równe $4 \cdot 10^{-2} \text{ m}^2$. Zakładając, że $t \geq 0$ oblicz: a) jaka jest wartość natężenia i kierunek prądu przesunięcia między płytami? b) Czy kierunek wektora indukcji magnetycznej pola, indukowanego wokół płyt jest zgodny, czy przeciwny do ruchu wskazówek zegara?



Rys. 32.26. Zadanie 34

35. Natężenie jednorodnego pola elektrycznego maleje do zera od początkowej wartości $6 \cdot 10^5 \text{ N/C}$ w czasie $15 \mu\text{s}$, w sposób pokazany na rysunku 32.27. Oblicz wartość natężenia prądu przesunięcia, płynącego przez powierzchnię $1,6 \text{ m}^2$, prostopadłą do kierunku pola, podczas każdego z przedziałów czasu a , b i c , pokazanych na wykresie. (Pomin efekty na granicach przedziałów).

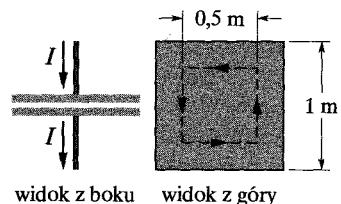


Rys. 32.27. Zadanie 35

36. Kondensator płaski, którego okładki mają kształt koła, jest ładowany. Rozważ kołową pętlę o środku na osi kondensatora, umieszczoną między okładkami. Promień pętli jest równy 0,2 m, promień okładki — 0,1 m, a natężenie prądu przesunięcia płynącego przez pętlę wynosi 2 A. Z jaką szybkością zmienia się pole elektryczne między okładkami kondensatora?

37. Kondensator płaski ma kwadratowe okładki o boku 1 m, jak pokazano na rysunku 32.28. Prąd o natężeniu 2 A ładowuje kondensator, tworząc jednorodne pole elektryczne \vec{E} między okładkami, skierowane prostopadle do nich. a) Jakie jest natężenie prądu przesunięcia I_{prz} w obszarze między okładkami?

- b) Jaka jest wartość dE/dt w tym obszarze? c) Jakie jest natężenie prądu przesunięcia między okładkami, płynącego wewnątrz kwadratowego konturu, zaznaczoną linią przerywaną? d) Jaka jest wartość całki $\oint \vec{B} \cdot d\vec{s}$ wzduż tego konturu?



Rys. 32.28. Zadanie 37

38. Kondensator, mający równoległe kołowe okładki o promieniu R , jest rozładowywany prądem o natężeniu 12 A. Wyobraź sobie pętlę o promieniu $R/3$ i środku na osi kondensatora, umieszczoną między okładkami. a) Ile wynosi natężenie prądu przesunięcia objętego pętlą? Maksymalna wartość indukcji magnetycznej indukowanego pola B_{\max} wynosi 12 mT. b) W jakiej odległości od osi okładki wartość B jest równa 3 mT?

33 Drgania elektromagnetyczne i prąd zmieniający

Gdy linia przesyłowa wysokiego napięcia wymaga naprawy, zakład energetyczny nie może po prostu jej wyłączyć, pozbawiając być może całe miasto energii elektrycznej. Naprawa musi być wykonana „pod napięciem”. Widoczny na zdjęciu człowiek, znajdujący się na zewnątrz helikoptera,

właśnie wymienił ręcznie rozpórkę między przewodami o napięciu 500 kV. Czynność taka wymaga nie lada umiejętności.

W jaki sposób można naprawić linię przesyłową, nie ulegając przy tym porażeniu?

Odpowiedź znajdziesz w tym rozdziale.



33.1. Nowa fizyka — ta sama matematyka

W tym rozdziale zobaczysz, jak ładunek elektryczny q zmienia się w czasie w obwodzie, składającym się z cewki L , kondensatora C i opornika R . Patrząc z innej perspektywy, zastanowimy się, w jaki sposób energia przepływa tam i z powrotem między polem magnetycznym cewki a polem elektrycznym kondensatora, ulegając jednocześnie stopniowemu rozproszeniu w postaci energii termicznej, wydzielonej na oporniku.

Drgania omawiane poprzednio dotyczyły innej sytuacji fizycznej. W rozdziale 16 pokazaliśmy, jak przemieszczenie x zmienia się w czasie w mechanicznym układzie drgającym, złożonym z klocka o masie m i sprężyny o stałej sprężystości k , umieszczonych w lepkim ośrodku, np. w oleju. Taki układ przedstawiony jest na rysunku 16.15. Pokazaliśmy także, w jaki sposób energia kinetyczna drgającego klocka przekształca się w energię potencjalną sprężyny (i przeciwnie), ulegając jednocześnie stopniowemu rozproszeniu w postaci energii termicznej.

Analogia między tymi dwoma układami jest całkowita, a opisujące je równania różniczkowe są identyczne. Tak więc nie musimy się uczyć nowej matematyki; możemy po prostu zmienić oznaczenia i skupić się całkowicie na fizycznej stronie zjawiska.

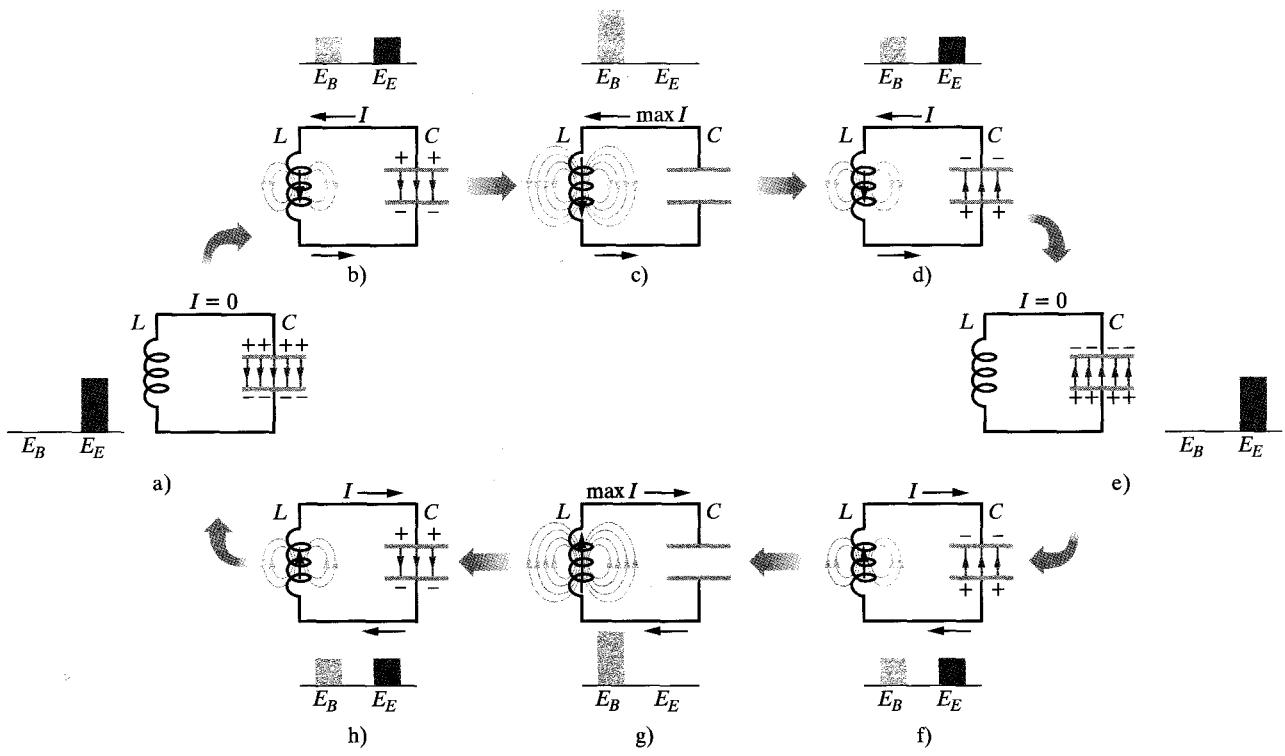
33.2. Drgania obwodu LC , opis jakościowy

Spośród dwuelementowych obwodów elektrycznych, składających się z opornika R , kondensatora C lub cewki L , dotychczas omówiliśmy połączenie szeregowe RC (w paragrafie 28.8) oraz RL (w paragrafie 31.9). Okazało się, że wartości ładunku, natężenia prądu i różnicy potencjałów, występujących w tych dwóch rodzajach obwodów, rosną lub maleją wykładniczo. Skala czasowa tego wzrostu lub zaniku określona jest stałą czasową τ , która może być albo pojemnościowa, albo indukcyjna.

Zbadamy teraz dwuelementową kombinację LC . Zobaczysz, że w tym przypadku ładunek, natężenie prądu i różnica potencjałów nie zanikają wykładniczo w czasie, ale zmieniają się sinusoidalnie (z okresem T i częstością kołową ω). Powstające w wyniku tego drgania pola elektrycznego w kondensatorze i pola magnetycznego w cewce nazywamy **drganiami elektromagnetycznymi**, a obwód elektryczny LC nazywamy obwodem drgającym.

Rysunki 33.1, od (a) do (h) ilustrują kolejne fazy drgań w prostym obwodzie LC . Z równania (26.21) wynika, że energia zmagażynowana w polu elektrycznym

Metoda usuwania usterek w linii wysokiego napięcia, pokazana na zdjęciu otwierającym ten rozdział została opatentowana przez Scotta H. Yenzera, a wyłączne zezwolenie na jej stosowanie uzyskała firma Haverfield Corporation z Gettysburga w stanie Pensylwania. Gdy monter zbliża się do linii wysokiego napięcia, pole elektryczne wokół linii powoduje, że potencjał jego ciała staje się niemal równy potencjałowi linii. W celu wyrównania obydwu potencjałów monter dołącza do linii przewodzący prąd. Aby uniknąć porażenia, monter musi być odizolowany od wszystkiego, co ma elektryczne połączenie z ziemią. Ma on na sobie przewodzący kombinezon, kaptur i rękawice, połączone elektrycznie z linią, za pomocą przewodzącego prądu. Dzięki temu ciało montera ma taki sam potencjał, jak linia, przy której pracuje.



kondensatora w dowolnej chwili jest równa:

$$E_E = \frac{q^2}{2C}, \quad (33.1)$$

gdzie q jest ładunkiem na okładkach kondensatora w tej właśnie chwili. Z równania (31.51) wynika natomiast, że energia zmagazynowana w polu magnetycznym cewki w dowolnej chwili jest równa:

$$E_B = \frac{LI^2}{2}, \quad (33.2)$$

gdzie I jest natężeniem prądu płynącego wtedy przez cewkę.

Założymy, że w chwili początkowej ładunek q na okładkach kondensatora na rysunku 33.1 ma wartość maksymalną q_{\max} i że natężenie prądu płynącego przez cewkę jest równe零. Ten początkowy stan obwodu jest pokazany na rysunku 33.1a. Załączone wykresy słupkowe energii wskazują, że w momencie, w którym prąd nie płynie przez cewkę, a ładunek na kondensatorze osiąga maksimum, energia E_B pola magnetycznego jest równa zero, a energia E_E pola elektrycznego ma wartość maksymalną.

Kondensator zaczyna teraz rozładowywać się przez cewkę, a dodatnie nośniki ładunku poruszają się w kierunku przeciwnym do ruchu wskazówek zegara, jak

Rys. 33.1. Osiem faz jednego cyklu drgań w obwodzie LC , w którym brak oporu elektrycznego. Wykresy słupkowe przy każdym rysunku ilustrują ilość zmagazynowanej energii pola magnetycznego i elektrycznego. Pokazane są również linie pola magnetycznego cewki i linie pola elektrycznego kondensatora.

- a) Maksymalny ładunek na kondensatorze, prąd nie płynie.
- b) Kondensator rozładowuje się, natężenie prądu rośnie.
- c) Kondensator całkowicie rozładowany, natężenie prądu osiąga maksimum.
- d) Kondensator ładowuje się w kierunku przeciwnym niż w punkcie (a), natężenie prądu maleje.
- e) Kondensator całkowicie naładowany ze znakiem przeciwnym niż w punkcie (a), prąd nie płynie.
- f) Kondensator rozładowuje się, prąd płynie w przeciwnym kierunku niż w punkcie (b), natężenie prądu rośnie.
- g) Kondensator całkowicie rozładowany, natężenie prądu osiąga maksimum.
- h) Kondensator ładowuje się, natężenie prądu maleje.

pokazano na rysunku 33.1b. Oznacza to, że powstaje prąd elektryczny I , równy dq/dt , który płynie w dół cewki. W miarę zmniejszania się ładunku na okładkach kondensatora, energia zmagazynowana w polu elektrycznym kondensatora również maleje. Energia ta jest przekazywana polu magnetycznemu, które pojawia się wokół cewki w wyniku przepływu prądu. Tak więc natężenie pola elektrycznego maleje, a indukcja magnetyczna wzrasta, w miarę jak energia przepływa od pola elektrycznego do pola magnetycznego.

W końcu kondensator traci całkowicie swój ładunek (rys. 33.1c), a zatem również traci pole elektryczne i energię w nim zmagazynowaną. Tak więc energia zostaje całkowicie przekazana polu magnetycznemu cewki. Indukcja magnetyczna osiąga maksimum, a natężenie prądu płynącego przez cewkę osiąga maksymalną wartość I_{\max} .

Chociaż ładunek na okładkach kondensatora jest teraz równy zeru, prąd musi nadal płynąć w kierunku przeciwnym do ruchu wskazówek zegara, gdyż cewka nie pozwala na gwałtowny zanik natężenia prądu. Prąd, płynąc przez obwód, nadal przenosi dodatnie ładunki z górnej okładki kondensatora do dolnej (rys. 33.1d). Energia przekazywana jest teraz z powrotem od cewki do kondensatora, w miarę, jak natężenie pola elektrycznego we wnętrzu kondensatora rośnie. Podczas tego przepływu energii natężenie prądu stopniowo maleje. Gdy energia zostanie w końcu w całości przekazana do kondensatora (rys. 33.1e), natężenie prądu spadnie do zera. Stan przedstawiony na rysunku 33.1e jest więc podobny do stanu początkowego, z wyjątkiem tego, że kondensator jest teraz naładowany przeciwnie.

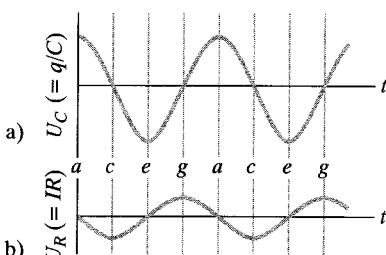
Następnie kondensator zaczyna się znowu rozładowywać, tym razem jednak prąd płynie w kierunku zgodnym z ruchem wskazówek zegara (rys. 33.1f). Rozumując jak poprzednio, widzimy, że natężenie prądu, płynącego zgodnie z ruchem wskazówek zegara, wzrasta do maksimum (rys. 33.1g), a następnie maleje (rys. 33.1h), aż w końcu obwód powraca do stanu początkowego (rys. 33.1a). Następnie cały cykl powtarza się z częstotliwością ν , a więc z częstotliwością kołową $\omega = 2\pi\nu$. W idealnym obwodzie LC , nie zawierającym oporu, przepływ energii zachodzi wyłącznie między polem elektrycznym kondensatora a polem magnetycznym cewki. Dzięki zachowaniu energii drgania powtarzają się bez końca. Nie muszą się one zaczynać w momencie, w którym cała energia jest zgromadzona w polu elektrycznym; dowolna faza cyklu drgań może być stanem początkowym.

Aby wyznaczyć zależność ładunku q od czasu, możemy dołączyć voltmierz i zmierzyć zmienną w czasie różnicę potencjałów (czyli napięcie) U_C między okładkami kondensatora C . Z równania 26.1 wynika, że:

$$U_C = \left(\frac{1}{C} \right) q,$$

co pozwala znaleźć q . Aby zmierzyć natężenie prądu, możemy połączyć szeregowo z kondensatorem i cewką opornik o niewielkim oporze R i zmierzyć zmieniającą się w czasie różnicę potencjałów U_R między jego końcówkami; U_R jest proporcjonalne do I zgodnie z zależnością:

$$U_R = IR.$$

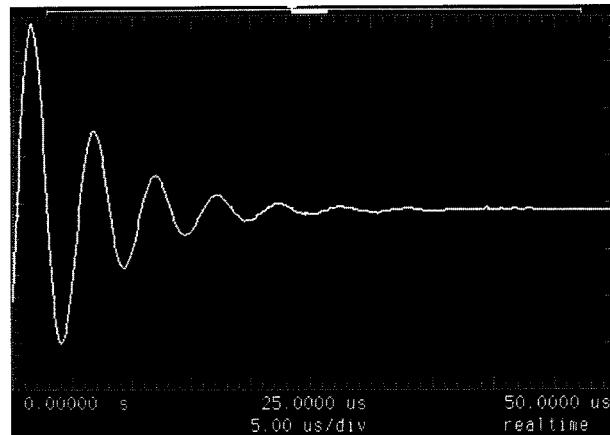


Rys. 33.2. a) Różnica potencjałów między okładkami kondensatora w obwodzie na rysunku 33.1 jako funkcja czasu. Ta wielkość jest proporcjonalna do ładunku na okładkach kondensatora. b) Różnica potencjałów proporcjonalna do natężenia prądu w obwodzie na rysunku 33.1. Litery odnoszą się do faz cyklu drgań oznaczonych na rysunku 33.1

Zakładamy tutaj, że opór R jest tak mały, iż jego wpływ na zachowanie obwodu można pominąć. Zmiany w czasie U_C i U_R , a zatem q i I pokazane są na rysunku 33.2. Wszystkie cztery wielkości zmieniają się sinusoidalnie.

W rzeczywistym obwodzie LC drgania nie będą zachodzić bez końca, gdyż zawsze istnieje pewien opór elektryczny, który odbiera energię od pola elektrycznego i magnetycznego, powodując jej rozpraszanie w postaci energii termicznej (obwód może się nawet rozgrzać). Drgania wzbudzone w obwodzie będą zanikać, jak ilustruje to rysunek 33.3. Porównaj ten rysunek z rysunkiem 16.16, na którym przedstawiono zanik drgań mechanicznych, spowodowany tarciem w układzie klocek–sprzęzyna.

Rys. 33.3. Przebieg na ekranie oscyloscopu pokazujący, że drgania w obwodzie RLC w rzeczywistości zanikają, gdyż energia jest rozpraszana na oporniku w postaci energii termicznej



SPRAWDZIAN 1: Naładowany kondensator i cewka są połączone szeregowo w chwili $t = 0$. Używając okresu drgań T jako jednostki określ, po jakim czasie następujące wielkości osiągną maksimum: a) ładunek na okładkach kondensatora; b) napięcie między okładkami kondensatora, o znaku jak na początku cyklu; c) energia zmagazynowana w polu elektrycznym; d) natężenie prądu.

Przykład 33.1

Kondensator o pojemności $1,5 \mu\text{F}$ został naładowany do różnicy potencjałów 57 V za pomocą źródła. Następnie źródło odłączono, a do kondensatora dołączono cewkę o indukcyjności 12 mH , tworząc w ten sposób obwód drgający LC . Jaka jest maksymalna wartość natężenia prądu w cewce? Przyjmij, że obwód nie zawiera oporu elektrycznego.

ROZWIAZANIE:

Zadanie rozwiązuje się, biorąc pod uwagę następujące fakty:

1. W obwodzie nie występuje opór elektryczny, zatem całkowita energia elektromagnetyczna obwodu jest zachowana, gdy energia przekazywana jest tam i z powrotem między polem elektrycznym kondensatora a polem magnetycznym cewki.

2. W dowolnej chwili t energia $E_B(t)$ pola magnetycznego związana jest z równaniem (33.2) z natężeniem prądu $I(t)$,

płynącego przez cewkę ($E_B = LI^2/2$). Gdy cała energia jest zmagazynowana w postaci energii pola magnetycznego, natężenie prądu osiąga maksymalną wartość I_{\max} , a energia ta wynosi $E_{B,\max} = LI_{\max}^2/2$.

3. W dowolnej chwili t energia $E_E(t)$ pola elektrycznego zależy od ładunku $q(t)$ na kondensatorze, zgodnie z równaniem (33.1) ($E_E = q^2/2C$). Gdy cała energia jest zmagazynowana w postaci energii pola elektrycznego, ładunek osiąga maksymalną wartość q_{\max} , a energia ta wynosi $E_{E,\max} = q_{\max}^2/2C$.

Zatem możemy napisać teraz zasadę zachowania energii, jako:

$$E_{B,\max} = E_{E,\max}$$

czyli:

$$LI_{\max}^2/2 = q_{\max}^2/2C.$$

Rozwiążając ostatnie równanie względem I_{\max} , otrzymujemy:

$$I_{\max} = \sqrt{\frac{q_{\max}^2}{LC}}.$$

Wartości L i C są dane, ale nie znamy q_{\max} . Jednakże, korzystając z równania (26.1) ($q = CU$), możemy znaleźć związek między

q_{\max} a maksymalną różnicą potencjałów U_{\max} na okładkach kondensatora, która jest równa początkowej różnicy potencjałów 57 V. Tak więc, podstawiając $q_{\max} = CU_{\max}$, otrzymujemy:

$$\begin{aligned} I_{\max} &= U_{\max} \sqrt{\frac{C}{L}} = 57 \text{ V} \sqrt{\frac{1,5 \cdot 10^{-6} \text{ F}}{12 \cdot 10^{-3} \text{ H}}} \\ &= 0,637 \text{ A} \approx 640 \text{ mA}. \end{aligned} \quad (\text{odpowiedź})$$

33.3. Analogiczne układy drgające: elektryczny i mechaniczny

Przypatrzmy się bliżej obwodowi drgającemu, przedstawionemu na rysunku 33.1 i układowi drgającemu klocek–sprężyna. W układzie klocka i sprężyny występują dwa rodzaje energii. Jedną jest energia potencjalna ściskanej lub rozciąganej sprężyny, drugą — energia kinetyczna poruszającego się klocka. Te dwa rodzaje energii opisane są przez dobrze znane wyrażenia, umieszczone w kolumnie energii po lewej stronie tabeli 33.1.

W kolumnie energii po prawej stronie tabeli przedstawione są dwa rodzaje energii, występujące w obwodzie drgającym LC . Porównując obie kolumny, możemy zauważać analogię między wyrażeniami, określającymi dwie pary energii — mechaniczne energie układu klocek–sprężyna i elektromagnetyczne energie obwodu LC . Równania dla v i I , umieszczone na dole tabeli, pozwalają zobaczyć tę analogię bardziej szczegółowo. Wynika z nich, że q jest odpowiednikiem x , a I — odpowiednikiem v (w obydwu równaniach różniczkujemy dwie pierwsze z tych wielkości, aby otrzymać dwie kolejne). Z tej analogii wynika więc, że w wyrażenях opisujących energię $1/C$ jest odpowiednikiem k , a L — odpowiednikiem m . Zatem:

q odpowiada x , $1/C$ odpowiada k ,

I odpowiada v , L odpowiada m .

Nasuwa się więc myśl, że w obwodzie LC kondensator od strony matematycznej odgrywa rolę sprężyny w układzie klocek–sprężyna, natomiast cewka odgrywa rolę klocka.

Tabela 33.1. Porównanie energii w dwóch układach drgających

| Układ klocek–sprężyna | | Obwód LC | |
|-----------------------|--------------------------------|-------------|------------------------------------|
| element | energia | element | energia |
| sprzęzyna | potencjalna, $\frac{1}{2}kx^2$ | kondensator | elektryczna, $\frac{1}{2}(1/C)q^2$ |
| klocek | kinetyczna, $\frac{1}{2}mv^2$ | cewka | magnetyczna, $\frac{1}{2}LI^2$ |
| $v = dx/dt$ | | $I = dq/dt$ | |

W paragrafie 16.3 podaliśmy, że częstotliwość kołowa drgań w układzie klocek–sprężyna (bez tarcia) wynosi:

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (\text{układ klocek–sprężyna}). \quad (33.3)$$

Zgodnie z wymienionymi wyżej analogiami, aby znaleźć częstość kołową drgań w obwodzie LC (bez oporu elektrycznego), należy zamiast k podstawić $1/C$, a zamiast m podstawić L , otrzymując:

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad (\text{obwód } LC). \quad (33.4)$$

Wyprowadzimy to równanie w następnym paragrafie.

33.4. Drgania LC , opis ilościowy

W tym paragrafie pokażemy, że równanie (33.4), określające częstość kołową drgań w obwodzie LC jest poprawne. Jednocześnie zbadamy jeszcze dokładniej analogię między drganiami w obwodzie LC a drganiami klocka i sprężyny. Na początku rozszerzymy nieco nasze wcześniejsze wiadomości, dotyczące mechanicznego układu klocek-sprężyna.

Układ drgający klocek-sprężyna

W rozdziale 16 analizowaliśmy drgania w układzie klocek-sprężyna, używając pojęcia przepływu energii. W trakcie wstępnych rozważań nie wyprowadziliśmy podstawowego równania różniczkowego, opisującego te drgania. Zrobimy to właśnie teraz.

Całkowita energia E układu klocek-sprężyna może być zapisana w dowolnej chwili jako:

$$E = E_k + E_s = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2, \quad (33.5)$$

gdzie E_k i E_s oznaczają odpowiednio energię kinetyczną poruszającego się klocka i energię potencjalną rozciąganej lub ściskanej sprężyny. Jeżeli założymy, że układ porusza się bez tarcia, to całkowita energia E nie będzie się zmieniała w czasie, mimo że v i x ulegają zmianie. Inaczej mówiąc, $dE/dt = 0$, co prowadzi do:

$$\frac{dE}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2\right) = mv\frac{dv}{dt} + kx\frac{dx}{dt} = 0. \quad (33.6)$$

Jednakże $v = dx/dt$, a $dv/dt = d^2x/dt^2$. Podstawiając te wyrażenia do równania (33.6), otrzymujemy:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + kx = 0 \quad (\text{drgania w układzie klocek-sprężyna}). \quad (33.7)$$

Równanie (33.7) jest podstawowym *równaniem różniczkowym*, opisującym drgania układu klocek-sprężyna, bez uwzględnienia tarcia.

Rozwiążanie ogólne równania (33.7), czyli funkcja $x(t)$, opisująca drgania układu klocek-sprężyna, to (por. równanie (16.3))

$$x = x_{\max} \cos(\omega t + \phi) \quad (\text{przemieszczenie}), \quad (33.8)$$

gdzie x_{\max} jest amplitudą drgań mechanicznych (oznaczoną przez x_m w rozdziale 16), ω oznacza częstotliwość kątową drgań, a ϕ jest fazą początkową.

Obwód drgający LC

Rozważmy teraz drgania w obwodzie LC , bez uwzględnienia oporu elektrycznego, postępując dokładnie tak, jak w przypadku układu klocek–sprężyna. Całkowita energia E w obwodzie drgającym LC , w dowolnej chwili dana jest wzorem:

$$E = E_B + E_E = \frac{LI^2}{2} + \frac{q^2}{2C}, \quad (33.9)$$

gdzie E_B jest energią zmagazynowaną w polu magnetycznym cewki, a E_E jest energią zmagazynowaną w polu elektrycznym kondensatora. Założyliśmy brak oporu elektrycznego w obwodzie, więc energia nie ulega przekształceniu w energię termiczną i E nie zmienia się w czasie. Inaczej mówiąc, dE/dt musi się równać zeru, co prowadzi do:

$$\frac{dE}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{LI^2}{2} + \frac{q^2}{2C} \right) = LI \frac{dI}{dt} + \frac{q}{C} \frac{dq}{dt} = 0. \quad (33.10)$$

Jednakże $I = dq/dt$, a $dI/dt = d^2q/dt^2$. Podstawiając te zależności do równania (33.10), otrzymujemy:

$$L \frac{d^2q}{dt^2} + \frac{1}{C}q = 0 \quad (\text{drgania w obwodzie } LC). \quad (33.11)$$

Jest to *równanie różniczkowe*, które opisuje drgania w obwodzie LC , bez uwzględnienia oporu elektrycznego. Równania (33.11) i (33.7) mają dokładnie taką samą postać matematyczną.

Zmiany ładunku i natężenia prądu

Rozwiązania identycznych równań różniczkowych muszą być matematycznie identyczne. Ponieważ q jest odpowiednikiem x , więc rozwiązanie ogólne równania (33.11) może być napisane przez analogię do równania (33.8):

$$q = q_{\max} \cos(\omega t + \phi) \quad (\text{lądunek}), \quad (33.12)$$

gdzie q_{\max} oznacza amplitudę zmian ładunku, ω jest częstotliwością kątową drgań elektromagnetycznych, a ϕ jest fazą początkową.

Różniczkując równanie (33.12) względem czasu, otrzymujemy natężenie prądu w obwodzie LC :

$$I = \frac{dq}{dt} = -\omega q_{\max} \sin(\omega t + \phi) \quad (\text{natężenie prądu}). \quad (33.13)$$

Amplituda I_{\max} zmieniającego się sinusoidalnie natężenia prądu wynosi:

$$I_{\max} = \omega q_{\max}, \quad (33.14)$$

możemy więc przepisać równanie (33.13) w postaci:

$$I = -I_{\max} \sin(\omega t + \phi). \quad (33.15)$$

Częstości kołowe

Możemy sprawdzić, czy wyrażenie (33.12) jest rozwiązaniem równania (33.11), podstawiając je i jego drugą pochodną względem czasu do równania (33.11). Pierwsza pochodna wyrażenia (33.12) jest dana równaniem (33.13), natomiast druga pochodna wynosi:

$$\frac{d^2q}{dt^2} = -\omega^2 q_{\max} \cos(\omega t + \phi).$$

Podstawiając q i d^2q/dt^2 do równania (33.11), otrzymujemy:

$$-L\omega^2 q_{\max} \cos(\omega t + \phi) + \frac{1}{C} q_{\max} \cos(\omega t + \phi) = 0.$$

Po skróceniu przez $q_{\max} \cos(\omega t + \phi)$ i przekształceniach otrzymujemy ostatecznie:

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}.$$

Tak więc równanie (33.12) jest rzeczywiście rozwiązaniem równania (33.11), jeżeli ω przyjmuje stałą wartość $1/\sqrt{LC}$. Zauważ, że to wyrażenie, określające ω jest dokładnie równe wyrażeniu (33.4), które otrzymaliśmy, badając analogie elektryczno-mechaniczne.

Faza początkowa ϕ w równaniu (33.12) jest określona przez warunki, które istnieją w pewnej chwili, np. $t = 0$. Jeżeli z tych warunków wynika, że $\phi = 0$ dla $t = 0$, to z równania (33.12) otrzymujemy $q = q_{\max}$, natomiast z równania (33.13) otrzymujemy $I = 0$; są to właśnie warunki początkowe, odpowiadające drganiom na rysunku 33.1a.

Zmiany energii elektrycznej i magnetycznej

Z równań (33.1) i (33.12) wynika, że energia elektryczna zmagazynowana w obwodzie LC w dowolnej chwili t jest równa:

$$E_E = \frac{q^2}{2C} = \frac{q_{\max}^2}{2C} \cos^2(\omega t + \phi). \quad (33.16)$$

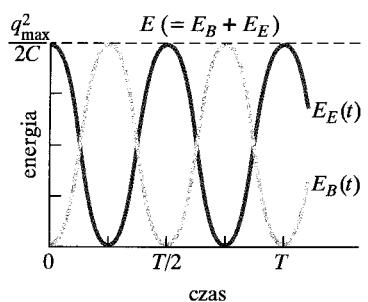
Zgodnie z równaniami (33.2) i (33.13) energia magnetyczna jest równa:

$$E_B = \frac{1}{2}LI^2 = \frac{1}{2}L\omega^2 q_{\max}^2 \sin^2(\omega t + \phi).$$

Podstawiając ω z równania (33.4), otrzymujemy więc:

$$E_B = \frac{q_{\max}^2}{2C} \sin^2(\omega t + \phi). \quad (33.17)$$

Na rysunku 33.4 przedstawiono wykresy $E_E(t)$ i $E_B(t)$ dla przypadku $\phi = 0$.



Rys. 33.4. Energia magnetyczna i elektryczna, zmagazynowana w obwodzie, przedstawionym na rysunku 33.1, zilustrowana jako funkcja czasu. Zauważ, że suma energii pozostaje stała. T oznacza okres drgań

Zauważ, że:

1. Wartości maksymalne E_E i E_B są jednakowe i wynoszą $q_{\max}^2/2C$.
2. W dowolnej chwili suma E_E i E_B ma stałą wartość, równą $q_{\max}^2/2C$.
3. Gdy E_E osiąga maksymalną wartość, E_B jest równe zeru, i na odwrót.

SPRAWDZIAN 2: Maksymalna wartość różnicy potencjałów na kondensatorze w obwodzie drgającym LC wynosi 17 V, a maksymalna wartość energii pola elektrycznego w kondensatorze — 160 μJ . W pewnej chwili różnica potencjałów na kondensatorze wynosi 5 V, a energia 10 μJ . Ile wynosi wtedy: a) siła elektromotoryczna (SEM), indukowana w cewce, b) energia zgromadzona w polu magnetycznym?

Przykład 33.2

Dla przypadku, opisanego w przykładzie 33.1 założmy, że cewka zostaje dołączona do naładowanego kondensatora w chwili $t = 0$. W wyniku tego powstaje obwód LC , jak na rysunku 33.1.

a) W jaki sposób różnica potencjałów $U_L(t)$ na cewce zależy od czasu?

ROZWIĄZANIE:

1. Natężenie prądu i różnica potencjałów w obwodzie zmieniają się sinusoidalnie.

2. Do obwodu drgającego możemy zastosować drugie prawo Kirchhoffa dokładnie w taki sam sposób, jak robiliśmy to w rozdziale 28, omawiając obwody prądu stałego. W dowolnej chwili t z drugiego prawa Kirchhoffa wynika, że w obwodzie na rysunku 33.1:

$$U_L(t) = U_C(t), \quad (33.18)$$

czyli różnica potencjałów U_L na cewce musi być zawsze równa różnicy potencjałów U_C na kondensatorze, tak aby całkowita różnica potencjałów w obwodzie była równa零. Zatem wyznaczmy $U_L(t)$, jeśli będziemy potrafieli wyznaczyć $U_C(t)$, a $U_C(t)$ możemy obliczyć, znając $q(t)$ i wykorzystując równanie (26.1) ($q = CU$).

Gdy drgania rozpoczynają się w chwili $t = 0$, napięcie $U_C(t)$ ma maksymalną wartość, a więc ładunek q na okładkach kondensatora musi również osiągać maksimum. Zatem faza początkowa ϕ musi być równa zero, a z równania (33.12) otrzymujemy:

$$q = q_{\max} \cos \omega t. \quad (33.19)$$

(Zauważmy, że ta cosinusidalna zależność rzeczywiście daje maksymalną wartość $q (= q_{\max})$, gdy $t = 0$). Aby obliczyć różnicę potencjałów $U_C(t)$, dzielimy obie strony równania (33.19) przez C :

$$\frac{q}{C} = \frac{q_{\max}}{C} \cos \omega t,$$

i stosujemy równanie (26.1), aby napisać:

$$U_C = U_{C\max} \cos \omega t. \quad (33.20)$$

$U_{C\max}$ oznacza tutaj amplitudę zmian napięcia U_C między okładkami kondensatora.

Następnie podstawiając $U_C = U_L$ z równania (33.18), otrzymujemy:

$$U_L = U_{C\max} \cos \omega t. \quad (33.21)$$

Wartości liczbowe po prawej stronie tego równania możemy obliczyć, jeśli zauważymy, że amplituda $U_{C\max}$ jest równa początkowemu (maksymalnemu) napięciu 57 V na kondensatorze. Następnie, wstawiając wartości L i C z przykładu 33.1, obliczamy ω z równania (33.4):

$$\begin{aligned}\omega &= \frac{1}{\sqrt{LC}} = \frac{1}{[(0,012 \text{ H})(1,5 \cdot 10^{-6} \text{ F})]^{0.5}} \\ &= 7454 \text{ rad/s} \approx 7500 \text{ rad/s}\end{aligned}$$

Zatem równanie (33.21) przyjmuje postać:

$$U_L = (57 \text{ V}) \cos[(7500 \text{ rad/s})t]. \quad (\text{odpowiedź})$$

b) Jaka jest maksymalna szybkość $(dI/dt)_{\max}$ zmian natężenia prądu I , płynącego w obwodzie?

ROZWIĄZANIE:

Jeżeli ładunek na okładkach kondensatora zmienia się zgodnie z równaniem (33.12), to natężenie prądu dane jest równaniem (33.13). Ponieważ $\phi = 0$, więc równanie to przyjmuje postać:

$$I = -\omega q_{\max} \sin \omega t.$$

Zatem:

$$\frac{dI}{dt} = \frac{d}{dt}(-\omega q_{\max} \sin \omega t) = -\omega^2 q_{\max} \cos \omega t.$$

Mogliśmy uprościć to równanie, podstawiając $C U_{C\max}$ zamiast q_{\max} (gdyż znamy C i $U_{C\max}$, ale nie znamy q_{\max}) oraz $1/\sqrt{LC}$ zamiast ω , zgodnie ze wzorem (33.4). Otrzymujemy wtedy:

$$\frac{dI}{dt} = -\frac{1}{LC} C U_{C\max} \cos \omega t = -\frac{U_{C\max}}{L} \cos \omega t.$$

Widzisz więc, że szybkość zmian natężenia prądu jest również funkcją zmieniającą się sinusoidalnie, a maksymalna szybkość zmian jest równa:

$$\frac{U_{C\max}}{L} = \frac{57 \text{ V}}{0,012 \text{ H}} = 4750 \text{ A/s} \approx 4800 \text{ A/s}. \quad (\text{odpowiedź})$$

33.5. Drgania tłumione w obwodzie RLC

Obwód zawierający opór, indukcyjność i pojemność nazywamy *obwodem RLC*. W tym paragrafie będziemy zajmować się tylko *szeregowymi obwodami RLC*, podobnymi do obwodu, przedstawionego na rysunku 33.5. Jeśli w obwodzie występuje opór elektryczny, to całkowita *energia elektromagnetyczna E* (suma energii elektrycznej i magnetycznej) nie jest już stała, ale maleje w czasie, gdyż jest przekształcana na oporniku w energię termiczną. Z powodu strat energii, amplitudy drgań ładunku, natężenia prądu i różnicy potencjałów stopniowo maleją; takie drgania nazywamy drganiami *tłumionymi*. Jak się przekonasz, są one tłumione dokładnie w taki sam sposób, jak drgania tłumionego układu klocek–sprzęzyna, omówionego w paragrafie 16.8.

Aby zbadać drgania w obwodzie *RLC*, zapiszmy wyrażenie, określające całkowitą energię elektromagnetyczną *E* w dowolnej chwili. Energia elektromagnetyczna nie jest gromadzona na oporniku, możemy zatem zastosować wzór (33.9):

$$E = E_B + E_E = \frac{LI^2}{2} + \frac{q^2}{2C}. \quad (33.22)$$

Teraz jednak całkowita energia elektromagnetyczna maleje, gdyż jest przekształcana w energię termiczną. Zgodnie z równaniem (27.22) szybkość tej zmiany wynosi:

$$\frac{dE}{dt} = -I^2 R, \quad (33.23)$$

gdzie znak minus wskazuje, że *E* maleje. Różniczkując równanie (33.22) względem czasu, a następnie podstawiając wynik do równania (33.23), otrzymujemy:

$$\frac{dE}{dt} = LI \frac{dI}{dt} + \frac{q}{C} \frac{dq}{dt} = -I^2 R.$$

Podstawiając dq/dt za *I* oraz d^2q/dt^2 za dI/dt , otrzymujemy:

$$L \frac{d^2q}{dt^2} + R \frac{dq}{dt} + \frac{1}{C} q = 0 \quad (\text{obwód RLC}). \quad (33.24)$$

Jest to równanie różniczkowe, opisujące drgania tłumione w obwodzie *RLC*. Rozwiązaniem równania (33.24) jest wyrażenie:

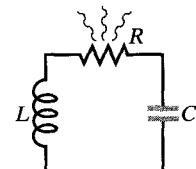
$$q = q_{\max} e^{-Rt/2L} \cos(\omega' t + \phi), \quad (33.25)$$

w którym:

$$\omega' = \sqrt{\omega^2 - (R/2L)^2}, \quad (33.26)$$

gdzie $\omega = 1/\sqrt{LC}$, jak w układzie nietłumionym. Równanie (33.25) określa, w jaki sposób ładunek na okładkach kondensatora zmienia się w tłumionym obwodzie *RLC*; to równanie jest odpowiednikiem równania (16.40), które określa przemieszczenie w tłumionym układzie klocek–sprzęzyna.

Równanie (33.25) opisuje drgania sinusoidalne (wyrażone funkcją cosinus) o malejącej wykładniczo amplitudzie $q_{\max} e^{-Rt/2L}$ (czyli czynnika przy funkcji cosinus). Częstość kołowa ω' drgań tłumionych jest zawsze mniejsza niż częstość ko-



Rys. 33.5. Szeregowy obwód *RLC*. Gdy ładunek zgromadzony w obwodzie przepływa tam i z powrotem przez opornik, energia elektromagnetyczna ulega rozproszeniu w postaci energii termicznej, tłumiąc drgania (czyli zmniejszając ich amplitudę)

łowa ω drgań nietłumionych; jednak będziemy tu zajmować się tylko przypadkami, w których R jest na tyle małe, że częstość ω' jest w przybliżeniu równa częstości ω .

Znajdziemy teraz wyrażenie, określające całkowitą energię elektromagnetyczną E obwodu jako funkcję czasu. Jedną z metod może być obliczenie energii pola elektrycznego w kondensatorze, danej równaniem (33.1) ($E_E = q^2/2C$). Podstawiając wyrażenie (33.25) do równania (33.1), otrzymujemy:

$$E_E = \frac{q^2}{2C} = \frac{[q_{\max} e^{-Rt/2L} \cos(\omega't + \phi)]^2}{2C} = \frac{q_{\max}^2 e^{-Rt/L} \cos^2(\omega't + \phi)}{2C}. \quad (33.27)$$

Tak więc energia pola elektrycznego zmienia się okresowo, zgodnie z funkcją cosinus do kwadratu, a amplituda tych zmian maleje wykładniczo w czasie.

Przykład 33.3

Szeregowy obwód RLC zawiera indukcyjność $L = 12 \text{ mH}$, pojemność $C = 1,6 \mu\text{F}$ i opór $R = 1,5 \Omega$.

- a) Po jakim czasie t amplituda drgań ładunku w obwodzie osiągnie 50% swojej początkowej wartości?

ROZWIĄZANIE:

Amplituda zmian ładunku maleje wykładniczo w funkcji czasu t . Zgodnie ze wzorem (33.25) amplituda ładunku w dowolnej chwili t wynosi $q_{\max} e^{-Rt/2L}$, gdzie q_{\max} jest amplitudą w chwili $t = 0$. Chcemy określić moment, w którym amplituda zmaleje do wartości $0,5q_{\max}$, czyli:

$$q_{\max} e^{-Rt/2L} = 0,5q_{\max}.$$

Skracając q_{\max} i obliczając logarytm naturalny z obydwu stron równania, mamy:

$$-\frac{Rt}{2L} = \ln 0,5.$$

Wyznaczając t i podstawiając dane, otrzymujemy:

$$t = -\frac{2L}{R} \ln 0,5 = -\frac{(2)(12 \cdot 10^{-3} \text{ H})(\ln 0,5)}{1,5 \Omega} = 0,0111 \text{ s} \approx 11 \text{ ms.} \quad (\text{odpowiedź})$$

- b) Ile pełnych drgań wykona obwód w tym czasie?

ROZWIĄZANIE:

Czas jednego pełnego cyklu drgań jest równy okresowi $T = 2\pi/\omega$, gdzie częstość kołowa drgań w obwodzie LC jest dana wzorem (33.4) ($\omega = 1/\sqrt{LC}$). Zatem w przedziale czasu $\Delta t = 0,0111 \text{ s}$ liczba pełnych drgań jest równa:

$$\frac{\Delta t}{T} = \frac{\Delta t}{2\pi\sqrt{LC}} = \frac{0,0111 \text{ s}}{2\pi[(12 \cdot 10^{-3} \text{ H})(1,6 \cdot 10^{-6} \text{ F})]^{1/2}} \approx 13. \quad (\text{odpowiedź})$$

Tak więc w czasie około 13 pełnych drgań amplituda zmaleje o 50%. Tłumienie to jest słabsze niż pokazane na rysunku 33.3, gdzie w czasie jednego cyklu drgań amplituda maleje nieco więcej niż o 50%.

33.6. Prąd zmienny

Drgania w obwodzie RLC nie będą zanikać, jeśli zewnętrzne źródło SEM dostarczy dostatecznie dużo energii, aby uzupełnić straty spowodowane rozpraszaniem energii w oporniku R . Instalacje elektryczne w mieszkaniach, biurach i fabrykach, zawierające niezliczone obwody RLC , pobierają energię z lokalnych elektrowni. W większości krajów energia jest dostarczana przy użyciu napięć i natężen prądu, zmieniających się w czasie — taki prąd nazywamy **prądem zmiennym** (w skrócie **ac** od ang. **alternating current**). Prąd, wytwarzany w baterii, nie zmienia się w czasie i nazywamy go prądem stałym (**dc** od ang. **direct current**). Te zmienne napięcia i natężenia prądu zależą sinusoidalnie od czasu, zmieniając kierunek (w

Europie 100 razy na sekundę, co odpowiada częstotliwości 50 Hz; w Ameryce Północnej częstotliwość zmian napięcia i natężenia prądu w sieci elektrycznej wynosi 60 Hz).

Na pierwszy rzut oka taki sposób przesyłania energii może wydawać się dziwny. Widzieliśmy już, że prędkość unoszenia elektronów przewodnictwa w domowej instalacji elektrycznej jest równa w typowych warunkach $4 \cdot 10^{-5}$ m/s. Jeżeli teraz zmieniamy kierunek ruchu elektronów co 1/100 sekundy, to w ciągu połowy okresu takie elektrony mogą przebyć drogę równą zaledwie $4 \cdot 10^{-7}$ m. W takim tempie typowy elektron może przemieścić się obok około 10 atomów w przewodzie elektrycznym, zanim zacznie się poruszać w przeciwnym kierunku. Być może jesteś ciekaw, jak w takim razie elektron może gdziekolwiek dotrzeć?

Tym pytaniem, choć kłopotliwym, nie musimy się jednak zajmować, gdyż elektrony przewodnictwa nie muszą „gdziekolwiek dotrzeć”. Kiedy mówimy, że natężenie prądu w przewodniku wynosi jeden amper, oznacza to, że ładunki przemieszczają się w tempie jednego kulomba na sekundę przez dowolną płaszczyznę, przecinającą ten przewodnik. Szybkość, z jaką ładunki przechodzą przez tę płaszczyznę, nie ma w istocie znaczenia; jeden amper może odpowiadać wielu ładunkom, poruszającym się bardzo wolno lub zaledwie kilku, ale poruszającym się bardzo szybko. Ponadto sygnał wysyłany do elektronów, aby zmieniły swój kierunek ruchu — pochodzący od zmiennej SEM, dostarczanej przez prądnicę elektrowni — rozchodzi się wzduż przewodnika z prędkością bliską prędkości światła. Wszystkie elektrony, niezależnie od tego, gdzie się znajdują, otrzymują instrukcję zmiany kierunku niemalże w tej samej chwili. W końcu zauważmy, że w wielu urządzeniach, takich jak żarówki lub tosty, kierunek ruchu jest nieistotny, jeśli tylko elektrony poruszają się i dostarczają energię do urządzenia, zderzając się z jego atomami.

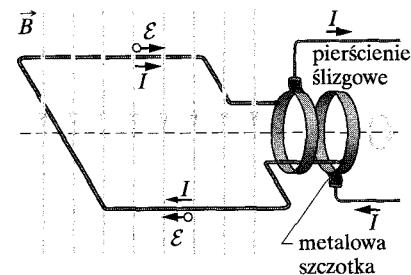
Podstawową korzyścią ze stosowania prądu zmiennego jest to, że zmiany natężenia prądu powodują zmiany pola magnetycznego, otaczającego przewodnik. Dzięki temu możliwe jest zastosowanie prawa indukcji Faradaya, co oznacza między innymi, że możemy dowolnie podwyższać (zwiększać) lub obniżać (zmniejszać) amplitudę napięcia zmiennego, korzystając z urządzenia zwanego transformatorem. Przekonamy się o tym jeszcze w tym rozdziale. Dodatkową korzyścią jest to, że prąd zmienny jest łatwiejszy (niż prąd stały) do stosowania w obrotowych urządzeniach elektrycznych, takich jak prądnice i silniki.

Na rysunku 33.6 pokazano prosty model prądnicy prądu zmiennego. Przewodząca ramka jest obracana w zewnętrznym polu magnetycznym o indukcji \vec{B} , zatem w ramce indukuje się sinusoidalnie zmienna SEM:

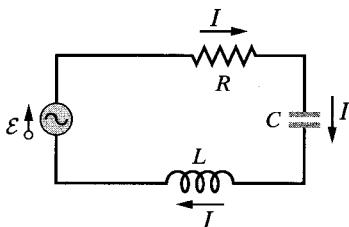
$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_{\max} \sin \omega_w t. \quad (33.28)$$

Częstość kołowa ω_w SEM jest równa prędkości kątowej, z jaką ramka porusza się w polu magnetycznym; faza SEM jest równa $\omega_w t$, natomiast amplituda jest równa \mathcal{E}_{\max} , gdzie indeks max oznacza wartość maksymalną. Gdy obracającą się ramkę jest częścią obwodu zamkniętego, SEM wytwarza (wymusza) w obwodzie prąd sinusoidalnie zmienny o tej samej częstości kołowej ω_w , która nazywana jest dlatego częstotliwością kołową drgań wymuszonych. Natężenie prądu można zapisać w postaci:

$$I = I_{\max} \sin(\omega_w t - \phi), \quad (33.29)$$



Rys. 33.6. Podstawowym elementem prądnicy prądu zmiennego jest przewodząca ramka, obracająca się w zewnętrznym polu magnetycznym. W praktyce zmienna SEM indukowana w cewce składającej się z wielu zwojów jest odbierana dzięki pierścieniom ślizgowym, przymocowanym do obracającego się uzwojenia. Każdy pierścień dołączony jest do jednego końca uzwojenia i jest połączony elektrycznie z resztą obwodu prądnicy za pomocą przewodzących szczotek, które ślizgają się po pierśceniach podczas obracania się uzwojenia



Rys. 33.7. Obwód o jednym oczku zawierający opornik, kondensator i cewkę. Źródło, oznaczone sinusoidalną falą w kółku, wytwarza zmienną SEM, która powoduje przepływ prądu zmiennego; kierunki SEM i prądu zaznaczone są w pewnej wybranej chwili.

gdzie I_{\max} jest amplitudą natężenia prądu wymuszonego. (Faza początkowa natężenia prądu jest zwyczajowo zapisywana ze znakiem minus). Wprowadzamy fazę początkową ϕ w równaniu (33.29), gdyż natężenie prądu I może być przesunięte w fazie względem SEM E . (Jak się przekonamy, faza początkowa zależy od tego, do jakiego obwodu dołączona jest prądnica). Możemy również zapisać natężenie prądu I za pomocą częstotliwości drgań wymuszonych ν_w , podstawiając $2\pi\nu_w$ zamiast ω_w w równaniu (33.29).

33.7. Drgania wymuszone

Przekonaliśmy się, że jeśli pobudzimy do drgań ładunek, napięcie i natężenie prądu, to zarówno w nietłumionym obwodzie LC , jak i w tłumionym obwodzie RLC (z dostatecznie małym oporem R) drgania te zachodzą z częstotliwością kołową $\omega = 1/\sqrt{LC}$. Takie drgania nazywamy *drganiami swobodnymi* (niezależnymi od jakiekolwiek zewnętrznej SEM), a częstotliwość kołowa ω jest nazywana **częstotliwością kołową drgań swobodnych** obwodu.

Jeśli jednak do obwodu RLC dołączona jest zewnętrzna zmienna SEM, dana wzorem (33.28), to drgania ładunku, napięcia i natężenia prądu nazywamy *drganiami wymuszonymi*. Te drgania zawsze zachodzą z częstotliwością kołową drgań wymuszonych ω_w :

► Niezależnie od częstotliwości drgań swobodnych obwodu, wymuszone drgania ładunku, napięcia i natężenia prądu zawsze zachodzą z częstotliwością kołową drgań wymuszonych ω_w .

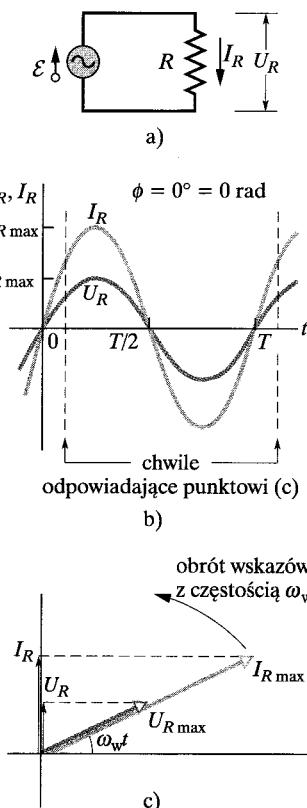
Jednakże, jak zobaczyłeś w paragrafie 33.9, amplituda drgań w bardzo dużym stopniu zależy od tego, jak bliska częstotliwości kołowej drgań swobodnych ω jest częstotliwość kołowa drgań wymuszonych ω_w . Gdy obie częstotliwości kołowe się pokrywają, amplituda I_{\max} natężenia prądu w obwodzie osiąga maksimum, a taki przypadek nazywamy **rezonansem**.

33.8. Trzy proste obwody

W dalszej części tego rozdziału dołączymy zewnętrzne źródło zmiennej SEM do szeregowego obwodu RLC , pokazanego na rysunku 33.7. Następnie znajdziemy wyrażenie, opisujące amplitudę I_{\max} i fazę początkową ϕ natężenia prądu zmiennego jako funkcji amplitudy E_{\max} i częstotliwości kołowej ω_w zewnętrznej SEM. Najpierw jednak przeanalizujmy trzy prostsze obwody, z których każdy składa się z zewnętrznego źródła SEM i tylko jednego elementu obwodu: R , L lub C . Zaczniemy od obwodu zawierającego tylko opornik R , a więc od obciążenia czysto *oporowego*.

Obciążenie oporowe

Na rysunku 33.8a przedstawiono obwód, składający się z opornika o oporze R i źródła prądu zmiennego o SEM wyrażonej wzorem (33.28). Zgodnie z drugim



Rys. 33.8. a) Opornik połączony jest ze źródłem prądu zmiennego. b) Zależności czasowe natężenia prądu I_R i napięcia U_R na oporniku, przedstawione są na tym samym wykresie. Obie te wielkości drgają w zgodnej fazie i wykonują jeden pełny cykl drgań w ciągu jednego okresu T . c) Diagram wskazowy pokazujący sytuację opisaną w punkcie (b)

prawem Kirchhoffa mamy:

$$\mathcal{E} - U_R = 0.$$

Podstawiając równanie (33.28), otrzymujemy:

$$U_R = \mathcal{E}_{\max} \sin \omega_w t.$$

Amplituda $U_{R\max}$ różnicy potencjałów (czyli napięcia) na końcach opornika jest równa amplitudzie \mathcal{E}_{\max} zmiennej SEM, możemy więc napisać:

$$U_R = U_{R\max} \sin \omega_w t. \quad (33.30)$$

Korzystając z definicji oporu ($R = U/I$), możemy teraz wyrazić natężenie prądu I_R płynącego przez opornik jako:

$$I_R = \frac{U_R}{R} = \frac{U_{R\max}}{R} \sin \omega_w t. \quad (33.31)$$

Korzystając z równania (33.29), to samo natężenie prądu możemy również zapisać w postaci:

$$I_R = I_{R\max} \sin(\omega_w t - \phi), \quad (33.32)$$

gdzie $I_{R\max}$ oznacza amplitudę natężenia prądu I_R płynącego przez opornik. Porównując równania (33.31) i (33.32), zauważymy, że dla obciążenia czysto oporowego faza początkowa jest równa $\phi = 0^\circ$. Widzimy również, że amplitudy napięcia i natężenia prądu są związane zależnością:

$$U_{R\max} = I_{R\max} R \quad (\text{opornik}). \quad (33.33)$$

Chociaż wyprowadziliśmy tę zależność dla obwodu z rysunku 33.8a, jest ona słuszna dla dowolnego opornika w dowolnym obwodzie prądu zmiennego.

Porównując wzory (33.30) i (33.31), widzimy, że obie zmieniające się w czasie wielkości U_R i I_R zależą od czasu jak funkcja $\sin \omega_w t$, a ich faza początkowa wynosi $\phi = 0^\circ$. Zatem obie te wielkości drgają w zgodnej fazie, co oznacza, że ich odpowiadające sobie maksima (i minima) występują w tej samej chwili. Ilustruje to rysunek 33.8b, który jest wykresem funkcji $U_R(t)$ i $I_R(t)$. Zauważ, że drgania U_R i I_R nie zanikają, ponieważ źródło dostarcza energii do obwodu, aby wyrównać straty energii rozpraszanej na oporniku R .

Zmieniające się w czasie wielkości U_R i I_R mogą być również przedstawione geometrycznie jako wskazy. Przypomnij sobie, że w paragrafie 17.10 zdefiniowaliśmy wskazy jako wektory obracające się wokół początku układu współrzędnych. Na rysunku 33.8c pokazane są wskazy, które przedstawiają napięcie i natężenie prądu w oporniku z rysunku 33.8a w pewnej chwili t . Te wskazy mają następujące właściwości:

Prędkość kątowa: Obydwa wskazy obracają się wokół początku układu współrzędnych, w kierunku przeciwnym do ruchu wskazówek zegara, z prędkością kątową równą częstości kołowej ω_w napięcia U_R i natężenia prądu I_R .

Długość: Długość każdego wskazu odpowiada amplitudzie wielkości zależnej od czasu, czyli $U_{R\max}$ w przypadku napięcia, a $I_{R\max}$ w przypadku natężenia prądu.

Rzut: Rzut wskazu na oś pionową przedstawia wartość chwilową (w chwili t) wielkości zależnej od czasu, czyli U_R w przypadku napięcia, a I_R w przypadku natężenia prądu.

Kąt obrotu: Kąt obrotu każdego wskazu jest równy fazie wielkości zmieniającej się w czasie, określonej w chwili t . Na rysunku 33.8c napięcie ma taką samą fazę jak natężenie prądu. Oznacza to, że obydwa wskazy mają zawsze tę samą fazę $\omega_w t$ i ten sam kąt obrotu, a więc obracają się razem.

Podążaj w myśl za obracającymi się wskazami. Czy widzisz, że po obrocie o kąt $\omega_w t = 90^\circ$ wskazy są skierowane pionowo w góre i pokazują, że wtedy $U_R = U_{R \max}$, a $I_R = I_{R \max}$? Taki sam wynik dają równania (33.30) i (33.32).

Przykład 33.4

Obciążenie czysto oporowe. Na rysunku 33.8a opór R jest równy 200Ω , a źródło wytwarza sinusoidalnie zmienną SEM o amplitudzie $\mathcal{E}_{\max} = 36 \text{ V}$ i częstotliwości $v_w = 50 \text{ Hz}$.

a) Jakie jest napięcie $U_R(t)$ na oporniku R jako funkcji czasu i jaka jest amplituda $U_{R \max}$ funkcji $U_R(t)$?

ROZWIĄZANIE:

Jeżeli zastosujemy drugie prawo Kirchhoffa do obwodu na rysunku 33.8a, to przekonamy się, że w obwodzie z czysto oporowym obciążeniem napięcie $U_R(t)$ na oporze jest zawsze równe SEM $\mathcal{E}(t)$, wytwarzanej w źródle. Tak więc $U_R(t) = \mathcal{E}(t)$ i $U_{R \max} = \mathcal{E}_{\max}$. Ponieważ \mathcal{E}_{\max} jest dane, możemy napisać:

$$U_{R \max} = \mathcal{E}_{\max} = 36 \text{ V}. \quad (\text{Odpowiedź})$$

W celu znalezienia $U_R(t)$ stosujemy równanie (33.28) i zapisujemy:

$$U_R(t) = \mathcal{E}(t) = \mathcal{E}_{\max} \sin \omega_w t, \quad (33.34)$$

a następnie podstawiamy $\mathcal{E}_{\max} = 36 \text{ V}$ i:

$$\omega_w = 2\pi v_w = 2\pi(50 \text{ Hz}) = 100\pi,$$

otrzymując:

$$U_R(t) = (36 \text{ V}) \sin(100\pi t). \quad (\text{odpowiedź})$$

Dla wygody możemy pozostawić argument funkcji sinus w tej postaci. Możemy również zapisać go jako $(314 \text{ rad/s})t$ lub $(314 \text{ s}^{-1})t$.

b) Jakie jest natężenie prądu $I_R(t)$ płynącego przez opór i amplituda $I_{R \max}$ natężenia prądu $I_R(t)$?

ROZWIĄZANIE:

W obwodzie prądu zmiennego z czysto oporowym obciążeniem zmienne natężenie prądu $I_R(t)$ płynącego przez opór jest zgodne w fazie ze zmiennym napięciem $U_R(t)$ na tym oporze, tzn. faza początkowa ϕ dla natężenia prądu jest równa zeru. Możemy więc zapisać równanie (33.29) w postaci:

$$I_R = I_{R \max} \sin(\omega_w t - \phi) = I_{R \max} \sin \omega_w t. \quad (33.35)$$

Z równania (33.33) wyznaczamy amplitudę $I_{R \max}$

$$I_{R \max} = \frac{U_{R \max}}{R} = \frac{36 \text{ V}}{200 \Omega} = 0,18 \text{ A}. \quad (\text{odpowiedź})$$

Podstawiając tę wartość oraz $\omega_w = 2\pi v_w = 100\pi$ do równania (33.35), otrzymujemy:

$$I_R = (0,18 \text{ A}) \sin(100\pi t). \quad (\text{odpowiedź})$$

SPRAWDZIAN 3: Jeżeli zwiększymy częstotliwość SEM w obwodzie z obciążeniem czysto oporowym, to czy: a) amplituda $U_{R \max}$, b) amplituda $I_{R \max}$ zwiększy się, zmniejszy, czy pozostanie taka sama?

Obciążenie pojemnościowe

Na rysunku 33.9a przedstawiono obwód, składający się z kondensatora i źródła prądu zmiennego o SEM wyrażonej wzorem (33.28). Stosując drugie prawo Kirchhoffa i postępując, jak przy wyprowadzaniu wzoru (33.30), znajdujemy napięcie na okładkach kondensatora:

$$U_C = U_{C \max} \sin \omega_w t, \quad (33.36)$$

gdzie $U_{C \max}$ jest amplitudą zmiennego napięcia na kondensatorze. Z definicji pojemności wynika:

$$q_C = CU_C = CU_{C \max} \sin \omega_w t. \quad (33.37)$$

Interesuje nas jednak natężenie prądu, a nie ładunek. Dlatego różniczkujemy równanie (33.37) i otrzymujemy:

$$I_C = \frac{dq_C}{dt} = \omega_w C U_{C \max} \cos \omega_w t. \quad (33.38)$$

Dokonamy teraz dwóch modyfikacji równania (33.38). Po pierwsze, aby zachować symetrię oznaczeń, wprowadzamy wielkość X_C , nazywaną **reaktancją pojemnościową** kondensatora i zdefiniowaną jako:

$$X_C = \frac{1}{\omega_w C} \quad (\text{reaktancja pojemnościowa}). \quad (33.39)$$

Jej wartość zależy nie tylko od pojemności, ale także od częstotliwości kołowej drgań wymuszonych ω_w . Wiemy z definicji pojemnościowej stałej czasowej ($\tau = RC$), że jednostka pojemności C może być wyrażona w układzie SI jako sekunda podzielona przez om. Podstawienie tej jednostki do wzoru (33.39) prowadzi do wniosku, że jednostką X_C w układzie SI jest *om*, dokładnie tak, jak dla oporu R .

Po drugie, zastępujemy $\cos \omega_w t$ w równaniu (33.38) funkcją sinus, przesuniętą w fazie:

$$\cos \omega_w t = \sin(\omega_w t + 90^\circ).$$

Możesz sprawdzić tę tożsamość, przesuwając wykres funkcji sinus o 90° w kierunku ujemnym.

Po tych dwóch modyfikacjach równanie (33.38) przyjmuje postać:

$$I_C = \left(\frac{U_{C \max}}{X_C} \right) \sin(\omega_w t + 90^\circ). \quad (33.40)$$

Korzystając z równania (33.29), możemy również zapisać natężenie prądu I_C płynącego przez kondensator C jako:

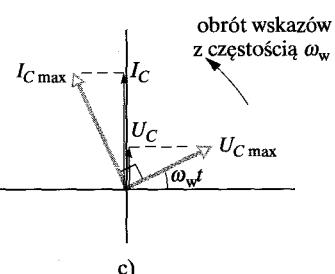
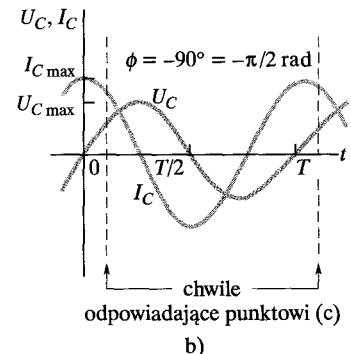
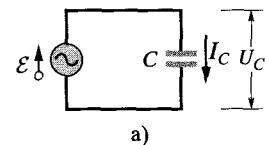
$$I_C = I_{C \max} \sin(\omega_w t - \phi), \quad (33.41)$$

gdzie $I_{C \max}$ jest amplitudą I_C . Porównując równania (33.40) i (33.41), widzimy, że dla czysto pojemnościowego obciążenia faza początkowa natężenia prądu jest równa -90° . Widzimy również, że amplitudy napięcia i natężenia prądu związane są zależnością:

$$U_{C \max} = I_{C \max} X_C \quad (\text{kondensator}) \quad (33.42)$$

Chociaż wyprowadziliśmy tę zależność dla obwodu z rysunku 33.9a, jest ona słuszna dla dowolnej pojemności w dowolnym obwodzie.

Porównanie wzorów (33.36) i (33.40) lub rzut oka na rysunek 33.9b wskazuje, że wielkości U_C i I_C są przesunięte w fazie o 90° , co odpowiada jednej czwartej okresu. Widzimy ponadto, że I_C wyprzedza U_C . Oznacza to, że gdybyśmy śledzili natężenie prądu U_C i napięcie U_C w obwodzie na rysunku 33.9a, to okazałoby się, że I_C osiąga maksimum ćwierć okresu przed U_C .



Rys. 33.9. a) Kondensator dołączony jest do źródła prądu zmiennego. b) Natężenie prądu w kondensatorze wyprzedza napięcie o 90° ($= \pi/2$ rad). c) Diagram wskazowy pokazujący tę samą sytuację

Ten związek między I_C i U_C pokazany jest w postaci diagramu wskazowego na rysunku 33.9c. Gdy wskazy przedstawiające te dwie wielkości obracają się w kierunku przeciwnym do ruchu wskazówek zegara, wskaz oznaczony jako $I_{C \max}$ rzeczywiście wyprzedza wskaz oznaczony jako $U_{C \max}$ o kąt równy 90° . Oznacza to, że wskaz $I_{C \max}$ pokryje się z osią pionową ćwierć okresu przed wskazem $U_{C \max}$. Przekonaj się, że diagram wskazowy na rysunku 33.9c jest zgodny ze wzorami (33.36) i (33.40).

SPRAWDZIAN 4: Na rysunku (a) pokazano wykres funkcji $S(t) = \sin(\omega_w t)$ i trzech innych krzywych sinusoidalnych $A(t)$, $B(t)$, $C(t)$ o postaci $\sin(\omega_w t - \phi)$. a) Uszereguj te trzy krzywe według wartości ϕ , zaczynając od największej (dodatniej) wartości, a kończąc na najmniejszej (ujemnej). b) Przyporządkuj poszczególne krzywe wskazom na rysunku (b). c) Która krzywa wyprzedza pozostałe?

Przykład 33.5

Ociążenie czysto pojemnościowe. Na rysunku 33.9a pojemność C jest równa $18 \mu\text{F}$, a źródło wytwarza sinusoidalnie zmienną SEM o amplitudzie $\mathcal{E}_{\max} = 36 \text{ V}$ i częstości $\nu_w = 50 \text{ Hz}$.

a) Jakie jest napięcie $U_C(t)$ na kondensatorze i amplituda $U_{C \max}$ napięcia $U_C(t)$?

ROZWIĄZANIE:

Jeżeli zastosujemy drugie prawo Kirchhoffa do obwodu na rysunku 33.9a, to przekonamy się, że w obwodzie z obciążeniem czysto pojemnościowym napięcie $U_C(t)$ na kondensatorze jest zawsze równe SEM $\mathcal{E}(t)$, wytwarzanej przez źródło. Tak więc, $U_C(t) = \mathcal{E}(t)$ i $U_{C \max} = \mathcal{E}_{\max}$. Ponieważ \mathcal{E}_{\max} jest dane, możemy napisać:

$$U_{C \max} = \mathcal{E}_{\max} = 36 \text{ V.} \quad (\text{odpowiedź})$$

W celu znalezienia $U_C(t)$ stosujemy równanie (33.28) i zapisujemy:

$$U_C(t) = \mathcal{E}(t) = \mathcal{E}_{\max} \sin \omega_w t, \quad (33.43)$$

a następnie podstawiamy $\mathcal{E}_{\max} = 36 \text{ V}$ i $\omega_w = 2\pi\nu_w = 2\pi(50 \text{ Hz}) = 100\pi$ do równania (33.43), otrzymując:

$$U_C(t) = (36 \text{ V}) \sin(100\pi t). \quad (\text{odpowiedź})$$

b) Jakie jest natężenie prądu $I_C(t)$ w obwodzie i amplituda $I_{C \max}$ natężenia prądu $I_C(t)$?

ROZWIĄZANIE:

1. W obwodzie prądu zmiennego z czysto pojemnościowym obciążeniem zmienne natężenie prądu $I_C(t)$, płynącego przez kondensator, wyprzedza zmienne napięcie $U_C(t)$ o 90° , tzn. faza początkowa ϕ dla natężenia prądu jest równa -90° , czyli $-\pi/2$ rad. Możemy więc zapisać równanie 33.29 w postaci:

$$I_C = I_{C \max} \sin(\omega_w t - \phi) = I_{C \max} \sin(\omega_w t + \pi/2). \quad (33.44)$$

2. Amplitudę $I_{C \max}$ można znaleźć z równania (33.42) ($I_{C \max} = I_{C \max} X_C$), jeśli najpierw obliczymy reaktancję pojemnościową X_C . Z równania (33.39) ($X_C = 1/\omega_w C$), pamiętając że $\omega_w = 2\pi\nu_w$, otrzymujemy:

$$X_C = \frac{1}{2\pi\nu_w C} = \frac{1}{(2\pi)(50 \text{ Hz})(18 \cdot 10^{-6} \text{ F})} = 177 \Omega.$$

Zatem z równania (33.42) wynika, że amplituda natężenia prądu wynosi:

$$I_{C \max} = \frac{U_{C \max}}{X_C} = \frac{36 \text{ V}}{177 \Omega} = 0,203 \text{ A.} \quad (\text{odpowiedź})$$

Podstawiając tę wartość i $\omega_w = 2\pi\nu_w = 100\pi$ do równania (33.44), otrzymujemy:

$$I_C = (0,203 \text{ A}) \sin(100\pi t + \pi/2). \quad (\text{odpowiedź})$$

SPRAWDZIAN 5: Jeżeli zwiększymy częstotliwość źródła w obwodzie z obciążeniem czysto pojemnościowym, to czy:
a) amplituda $U_{C \max}$, b) amplituda $I_{C \max}$ zwiększy się, zmniejszy, czy pozostanie taka sama?

Obciążenie indukcyjne

Na rysunku 33.10a przedstawiono obwód, składający się z cewki i źródła prądu zmiennego o SEM wyrażonej wzorem (33.28). Stosując drugie prawo Kirchhoffa i postępując, jak przy wyprowadzaniu wzoru (33.30), znajdujemy napięcie na cewce:

$$U_L = U_{L \max} \sin \omega_w t, \quad (33.45)$$

gdzie $U_{L \max}$ jest amplitudą U_L . Napięcie na cewce o indukcyjności L , w której natężenie prądu zmienia się z szybkością dI_L/dt , może być zapisane na podstawie wzoru (31.37) jako:

$$U_L = L \frac{dI_L}{dt}. \quad (33.46)$$

Łącząc równania (33.45) i (33.46), otrzymujemy:

$$\frac{dI_L}{dt} = \frac{U_{L \max}}{L} \sin \omega_w t. \quad (33.47)$$

Interesuje nas jednak natężenie prądu, a nie jego pochodna względem czasu. Dlatego całkujemy równanie (33.47), aby otrzymać:

$$I_L = \int dI_L = \frac{U_{L \max}}{L} \int \sin \omega_w t dt = - \left(\frac{U_{L \max}}{\omega_w L} \right) \cos \omega_w t. \quad (33.48)$$

Dokonamy teraz dwóch modyfikacji tego równania. Po pierwsze, aby zachować symetrię oznaczeń, wprowadzamy wielkość X_L , nazywaną **reaktancją indukcyjną** cewki i zdefiniowaną jako:

$$X_L = \omega_w L \quad (\text{reaktancja indukcyjna}). \quad (33.49)$$

Wartość X_L zależy od częstości kołowej źródła ω_w . Jednostka indukcyjnej stałej czasowej τ_L wskazuje, że jednostką X_L w układzie SI jest *om*, dokładnie tak, jak dla X_C i R .

Po drugie, zastępujemy $-\cos \omega_w t$ w równaniu (33.48) funkcją sinus przesuniętą w fazie:

$$-\cos \omega_w t = \sin(\omega_w t - 90^\circ).$$

Możesz sprawdzić tę tożsamość, przesuwając wykres funkcji sinus o 90° w kierunku dodatnim.

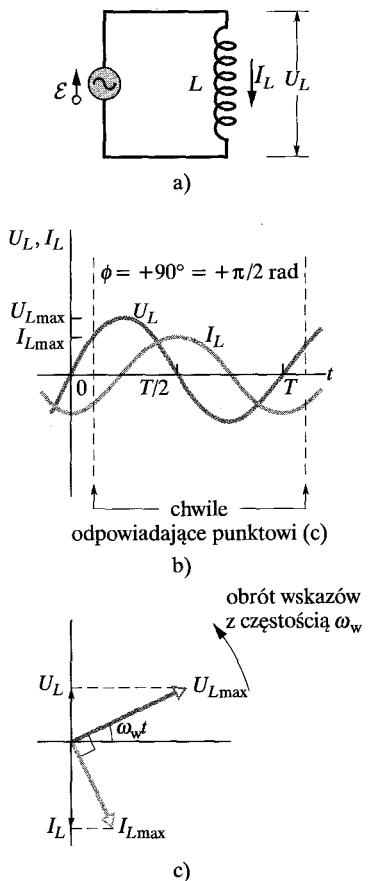
Po tych dwóch modyfikacjach równanie (33.48) przyjmuje postać:

$$I_L = \left(\frac{U_{L \max}}{X_L} \right) \sin(\omega_w t - 90^\circ). \quad (33.50)$$

Stosując równanie (33.29), możemy również zapisać natężenie prądu I_L płynącego przez cewkę jako:

$$I_L = I_{L \max} \sin(\omega_w t - \phi), \quad (33.51)$$

gdzie $I_{L \max}$ jest amplitudą I_L . Porównując równania (33.50) i (33.51), widzimy, że dla czysto indukcyjnego obciążenia faza początkowa natężenia prądu jest równa $+90^\circ$. Widzimy również, że amplitudy napięcia i natężenia prądu związane są zależnością:



Rys. 33.10. a) Cewka dołączona jest do źródła prądu zmiennego. b) Natężenie prądu w cewce opóźnia się względem napięcia o 90° ($= \pi/2$ rad). c) Diagram wskazowy pokazujący tę samą sytuację

$$U_{L \max} = I_{L \max} X_L \quad (\text{cewka}). \quad (33.52)$$

Chociaż wyprowadziliśmy tę zależność dla obwodu na rysunku 33.10a, jest ona słuszna dla dowolnej indukcyjności w dowolnym obwodzie.

Porównanie wzorów (33.45) i (33.50) lub przyjrzenie się rysunkowi 33.10b wskazuje, że wielkości I_L i U_L są przesunięte w fazie o 90° . W tym przypadku jednak I_L opóźnia się w stosunku do U_L . Oznacza to, że gdybyśmy śledzili natężenie prądu I_L i napięcie U_L w obwodzie na rysunku 33.10a, to okazałoby się, że I_L osiąga maksimum czwierć okresu po U_L .

Tę samą informację zawiera również diagram wskazowy, przedstawiony na rysunku 33.10c. Gdy wskazy obracają się razem w kierunku przeciwnym do ruchu wskazówek zegara, wskaz oznaczony jako $I_{L \max}$ rzeczywiście opóźnia się o kąt równy 90° względem wskazu oznaczonego jako $U_{L \max}$. Przekonaj się, że rysunek 33.10c odpowiada równaniom (33.45) i (33.50).

Sztuka rozwiązywania zadań

Porad 1: Przesunięcie fazy w obwodach prądu zmiennego

W tabeli 33.2 zestawiono zależności między natężeniem prądu I a napięciem U dla każdego z trzech dotychczas omówionych rodzajów obwodów. Kiedy przyłożone zmienne napięcie powoduje

przepływ prądu zmiennego, natężenie prądu ma taką samą fazę jak napięcie na oporniku, wyprzedza napięcie na kondensatorze, a opóźnia się względem napięcia na cewce.

Tabela 33.2. Zależności fazowe i amplitudowe dla zmiennych natężeń prądu i napięć

| Element obwodu | Symbol | Opór lub reaktancja | Natężenie prądu | Faza początkowa ϕ | Związek amplitud |
|----------------|--------|----------------------|--|------------------------------------|-------------------------------|
| opornik | R | R | w takiej samej fazie jak U_R | $0^\circ (= 0 \text{ rad})$ | $U_{R \max} = I_{R \max} R$ |
| kondensator | C | $X_C = 1/\omega_w C$ | wyprzedza U_C o $90^\circ (= \pi/2 \text{ rad})$ | $-90^\circ (= -\pi/2 \text{ rad})$ | $U_{C \max} = I_{C \max} X_C$ |
| cewka | L | $X_L = \omega_w L$ | opóźnia się względem U_L o $90^\circ (= \pi/2 \text{ rad})$ | $+90^\circ (= +\pi/2 \text{ rad})$ | $U_{L \max} = I_{L \max} X_L$ |

Przykład 33.6

Obciążenie czysto indukcyjne. Na rysunku 33.10a indukcyjność L jest równa 276 mH , a źródło wytwarza sinusoidalnie zmienną SEM o amplitudzie $\mathcal{E}_{\max} = 36 \text{ V}$ i częstotliwości $\nu_w = 50 \text{ Hz}$.

a) Jakie jest napięcie $U_L(t)$ na cewce i amplituda $U_{L \max}$ napięcia $U_L(t)$?

ROZWIĄZANIE:

Jeżeli zastosujemy drugie prawo Kirchhoffa do obwodu na rysunku 33.10a, to przekonamy się, że w obwodzie z obciążeniem czysto indukcyjnym napięcie $U_L(t)$ na cewce jest zawsze równe SEM $\mathcal{E}(t)$ wytwarzanej przez źródło. Tak więc, $U_L(t) = \mathcal{E}(t)$ i $U_{L \max} = \mathcal{E}_{\max}$. Ponieważ \mathcal{E}_{\max} jest dane, możemy

nапisać:

$$U_{L \max} = \mathcal{E}_{\max} = 36 \text{ V}. \quad (\text{odpowiedź})$$

W celu znalezienia $U_L(t)$ stosujemy równanie (33.28) i zapisujemy:

$$U_L(t) = \mathcal{E}(t) = \mathcal{E}_{\max} \sin \omega_w t, \quad (33.53)$$

a następnie podstawiamy $\mathcal{E}_{\max} = 36 \text{ V}$ i $\omega_w = 2\pi\nu_w = 2\pi(50 \text{ Hz}) = 100\pi$ do równania (33.53), otrzymując:

$$U_L(t) = (36 \text{ V}) \sin(100\pi t). \quad (\text{odpowiedź})$$

b) Jakie jest natężenie prądu $I_L(t)$ w obwodzie i amplituda $I_{L \max}$ natężeń prądu $I_L(t)$?

ROZWIĄZANIE:

O 1. W obwodzie prądu zmiennego z czysto indukcyjnym obciążeniem zmiennym natężenie prądu $I_L(t)$ płynącego przez cewkę

opóżnia się względem zmiennego napięcia $U_L(t)$ o 90° . Tak więc faza początkowa ϕ dla natężenia prądu jest równa $+90^\circ$, czyli $+\pi/2$ rad i równanie (33.29) możemy zapisać w postaci:

$$I_L = I_{L\max} \sin(\omega_w t - \phi) = I_{L\max} \sin(\omega_w t - \pi/2). \quad (33.54)$$

2. Amplitudę $I_{L\max}$ możemy obliczyć z równania (33.52) ($U_{L\max} = I_{L\max} X_L$), jeśli najpierw obliczymy reaktancję indukcyjną X_L . Z równania (33.49) ($X_L = \omega_w L$), pamiętając, że $\omega_w = 2\pi\nu_w$, otrzymujemy:

$$X_L = 2\pi\nu_w L = (2\pi)(50 \text{ Hz})(276 \cdot 10^{-3} \text{ H}) = 86,7 \Omega.$$

Zatem z równania (33.52) wynika, że amplituda natężenia prądu wynosi:

$$I_{L\max} = \frac{U_{L\max}}{X_L} = \frac{36 \text{ V}}{86,7 \Omega} = 0,415 \text{ A}. \quad (\text{odpowiedź})$$

Podstawiając tę wartość i $\omega_w = 2\pi\nu_w = 100\pi$ do równania (33.54), otrzymujemy:

$$I_L = (0,415 \text{ A}) \sin(100\pi t - \pi/2). \quad (\text{odpowiedź})$$

SPRAWDZIAN 6: Jeżeli zwiększymy częstotliwość źródła w obwodzie z obciążeniem czysto indukcyjnym, to czy: a) amplituda $U_{L\max}$, b) amplituda $I_{L\max}$ zwiększy się, zmniejszy, czy pozostanie taka sama?

33.9. Obwód szeregowy RLC

Jesteśmy teraz przygotowani do tego, aby zmienną SEM, opisaną wzorem (33.28):

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_{\max} \sin \omega_w t \quad (\text{przyłożona SEM}) \quad (33.55)$$

przyłożyć do pełnego obwodu RLC, przedstawionego na rysunku 33.7. Elementy R , L i C są połączone szeregowo, a więc przez każdy z nich płynie ten sam prąd o natężeniu:

$$I = I_{\max} \sin(\omega_w t - \phi). \quad (33.56)$$

Naszym zadaniem jest wyznaczenie amplitudy I_{\max} i początkowej fazy ϕ natężenia prądu. Rozwiążanie ułatwia nam diagramy wskazowe.

Amplituda natężenia prądu

Przeanalizujmy najpierw rysunek 33.11a, na którym przedstawiono wskaz odpowiadający natężeniu prądu, określonym wzorem (33.56) w pewnej chwili t . Długość wskazu oznacza amplitudę I_{\max} , rzut wskazu na oś pionową — wartość natężenia prądu I w chwili t , a kąt obrotu wskazu — fazę $\omega_w t - \phi$ natężenia prądu w chwili t .

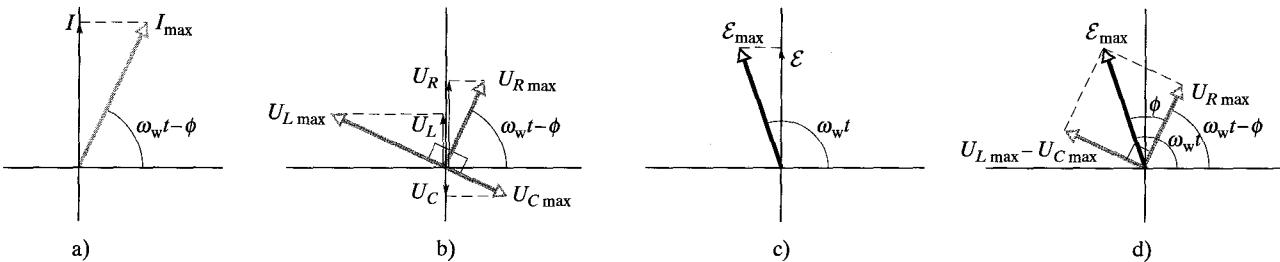
Na rysunku 33.11b przedstawiono wskazy odpowiadające napięciom na elementach R , L i C w tej samej chwili t . Kąt, jaki tworzy każdy z nich ze wskazem, odpowiadającym natężeniu prądu I_{\max} (rys. 33.11a) jest zgodny z tabelą 33.2:

Opornik: Natężenie prądu ma taką samą fazę co napięcie, tak więc kąt obrotu wskazu napięcia $U_{R\max}$ jest taki sam, jak kąt obrotu wskazu I_{\max} .

Kondensator: Natężenie prądu wyprzedza napięcie o 90° , tak więc kąt obrotu wskazu napięcia $U_{C\max}$ jest o 90° mniejszy od kąta obrotu wskazu I_{\max} .

Cewka: Natężenie prądu opóźnia się względem napięcia o 90° , tak więc kąt obrotu wskazu napięcia $U_{L\max}$ jest o 90° większy od kąta obrotu wskazu I_{\max} .

Na rysunku 33.11b pokazano także chwilowe wartości napięć U_R , U_C i U_L na elementach R , C i L w chwili t . Te napięcia są określone rzutami odpowiednich wskazów na oś pionową wykresu.



Rys. 33.11. a) Wskaź odpowiadający natężeniu prądu zmiennej w obwodzie RLC na rysunku 33.7 w chwili t . Pokazana jest amplituda I_{\max} , wartość chwilowa I i faza ($\omega_w t - \phi$). b) Wskaź odpowiadające napięciom na cewce, oporniku i kondensatorze, zorientowane w stosunku do wskaźu natężenia prądu na rysunku (a). c) Wskaź odpowiadający zmiennej SEM wytworzającej prąd o natężeniu przedstawionym na rysunku (a). d) Wskaź SEM jest równy wektorowej sumie trzech wskaźów napięcia z rysunku (b). Dodano tutaj wskaź $U_{L \max} - U_{C \max}$, aby otrzymać wskaź wypadkowy ($U_{L \max} - U_{C \max}$)

Na rysunku 33.11c przedstawiono wskaź odpowiadający przyłożonej SEM (wzór (33.55)). Długość wskaźu oznacza amplitudę SEM \mathcal{E}_{\max} , rzut wskaźu na os pionową — wartość \mathcal{E} w chwili t , a kąt obrotu wskaźu — fazę $\omega_w t$ SEM w chwili t .

Z drugiego prawa Kirchhoffa wynika, że w dowolnej chwili suma napięć U_R , U_C i U_L jest równa przyłożonej SEM \mathcal{E} :

$$\mathcal{E} = U_R + U_C + U_L. \quad (33.57)$$

Tak więc w chwili t rzut \mathcal{E} na rysunku 33.11c jest równy algebraicznej sumie rzutów U_R , U_C i U_L na rysunku 33.11b. Równość ta jest spełniona w każdej chwili, gdyż wskaźy wirują wspólnie. Oznacza to, że wskaź \mathcal{E}_{\max} na rysunku 33.11c musi być równy wektorowej sumie trzech wskaźów napięcia $U_{R \max}$, $U_{C \max}$ i $U_{L \max}$ na rysunku 33.11b.

Ten warunek zilustrowano na rysunku 33.11d, gdzie wskaź \mathcal{E}_{\max} jest narysowany jako suma wskaźów $U_{R \max}$, $U_{L \max}$ i $U_{C \max}$. Wskaź $U_{L \max}$ i $U_{C \max}$ są skierowane przeciwnie, obliczenie sumy wektorowej możemy zatem uprościć, dodając najpierw wskaź $U_{L \max}$ i $U_{C \max}$, aby otrzymać pojedynczy wskaź $U_{L \max} - U_{C \max}$. Następnie dodajemy ten pojedynczy wskaź i wskaź $U_{R \max}$, otrzymując wskaź wypadkowy. Ten wskaź wypadkowy jest oczywiście równy \mathcal{E}_{\max} .

Obydwa trójkąty na rysunku 33.11d są trójkątami prostokątnymi. Stosując twierdzenie Pitagorasa do którychkolwiek z nich, otrzymujemy:

$$\mathcal{E}_{\max}^2 = U_{R \max}^2 + (U_{L \max} - U_{C \max})^2. \quad (33.58)$$

Biorąc pod uwagę związki amplitud zamieszczone w tabeli 33.2, równanie to można napisać jako:

$$\mathcal{E}_{\max}^2 = (I_{\max} R)^2 + (I_{\max} X_L - I_{\max} X_C)^2, \quad (33.59)$$

a następnie przekształcić do postaci:

$$I_{\max} = \frac{\mathcal{E}_{\max}}{\sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}}. \quad (33.60)$$

Mianownik wyrażenia (33.60) nazywamy **impedancją** Z obwodu, dla określonej częstości kołowej drgań wymuszonych ω_w :

$$Z = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2} \quad (\text{definicja impedancji}). \quad (33.61)$$

Możemy więc zapisać równanie (33.60) jako:

$$I_{\max} = \frac{\mathcal{E}_{\max}}{Z}. \quad (33.62)$$

Jeżeli podstawimy za X_C i X_L wyrażenia (33.39) i (33.49), to równanie (33.60) może być zapisane w sposób bardziej czytelny:

$$I_{\max} = \frac{\mathcal{E}_{\max}}{\sqrt{R^2 + (\omega_w L - 1/\omega_w C)^2}} \quad (\text{amplituda natężenia prądu}). \quad (33.63)$$

W tym momencie nasze zadanie zostało wykonane w połowie: znaleźliśmy wyrażenie określające amplitudę natężenia prądu I_{\max} jako funkcję przyłożonej SEM i elementów obwodu szeregowego RLC .

Wartość I_{\max} zależy od różnicy między $\omega_w L$ a $1/\omega_w C$ w równaniu (33.63) lub, co jest równoważne, od różnicy między X_L a X_C w równaniu (33.60). W obydwu równaniach nie ma przy tym znaczenia, która z dwóch wielkości jest większa, ponieważ ich różnica jest zawsze podniesiona do kwadratu.

Prąd omawiany w tym paragrafie jest prądem w *stanie ustalonym*, czyli prądem, który ustala się w obwodzie, gdy zmenna SEM jest przyłożona przez pewien czas. Bezpośrednio po dołączeniu SEM do obwodu pojawia się krótkotrawny *stan przejściowy*. W tym stanie elementy indukcyjne i pojemościowe „zaczynają działać”, a czas trwania stanu przejściowego (przed osiągnięciem stanu ustalonego) jest określony stałymi czasowymi $\tau_L = L/R$ i $\tau_C = RC$. Natężenie prądu w stanie przejściowym może być duże i może na przykład uszkodzić silnik elektryczny podczas jego uruchamiania, jeżeli stanów przejściowych nie uwzględniono przy projektowaniu obwodów silnika.

Faza początkowa

Analizując trójkąt, utworzony przez wskazy po prawej stronie rysunku 33.11d i korzystając z tabeli 33.2, możemy napisać:

$$\operatorname{tg}\phi = \frac{U_{L\max} - U_{C\max}}{U_{R\max}} = \frac{I_{\max}X_L - I_{\max}X_C}{I_{\max}R}, \quad (33.64)$$

skąd

$$\operatorname{tg}\phi = \frac{X_L - X_C}{R} \quad (\text{faza początkowa}). \quad (33.65)$$

To jest druga połowa naszego zadania: równanie określające fazę początkową ϕ w szeregowym obwodzie RLC , pobudzanym sinusoidalnie. W istocie równanie to daje nam trzy różne wyniki dla fazy początkowej, w zależności od względnych wartości X_L i X_C :

$X_L > X_C$: o takim obwodzie mówimy, że ma *charakter indukcyjny*. Z równania (33.65) wynika, że w tym przypadku faza ϕ jest dodatnia, co oznacza, że wskaz I_{\max} wiruje za wskazem \mathcal{E}_{\max} (rys. 33.12a). Wykres \mathcal{E} i I jako funkcji czasu jest podobny do przedstawionego na rysunku 33.12b. (Rysunki 33.11c i d zostały wykonane przy założeniu, że $X_L > X_C$).

$X_C > X_L$: o takim obwodzie mówimy, że ma *charakter pojemościowy*. Z równania (33.65) wynika, że w tym przypadku faza ϕ jest ujemna, co oznacza, że wskaz I_{\max} wiruje przed wskazem \mathcal{E}_{\max} (rys. 33.12c). Wykres \mathcal{E} i I jako funkcji czasu jest podobny do przedstawionego na rysunku 33.12d.

$X_C = X_L$: o takim obwodzie mówimy, że jest w *rezonansie*, czyli w stanie, który omówimy za chwilę. Z równania (33.65) wynika, że w tym przypadku $\phi = 0^\circ$, co oznacza, że wskazuje \mathcal{E}_{\max} i I_{\max} wirują razem (rys. 33.12e). Wykres \mathcal{E} i I jako funkcji czasu jest podobny do przedstawionego na rysunku 33.12f.

Jako przykład przeanalizujmy dwa krańcowe przypadki: W obwodzie *czysto indukcyjnym* na rysunku 33.10a, gdzie X_L jest różne od zera, a $X_C = R = 0$, z równania (33.65) wynika, że $\phi = +90^\circ$ (największa możliwa wartość ϕ), zgodnie z rysunkiem 33.10c. W obwodzie *czysto pojemnościowym* na rysunku 33.9a, gdzie X_C jest różne od zera, a $X_L = R = 0$, z równania (33.65) wynika, że $\phi = -90^\circ$ (najmniejsza możliwa wartość ϕ), zgodnie z rysunkiem 33.9c.

Rezonans

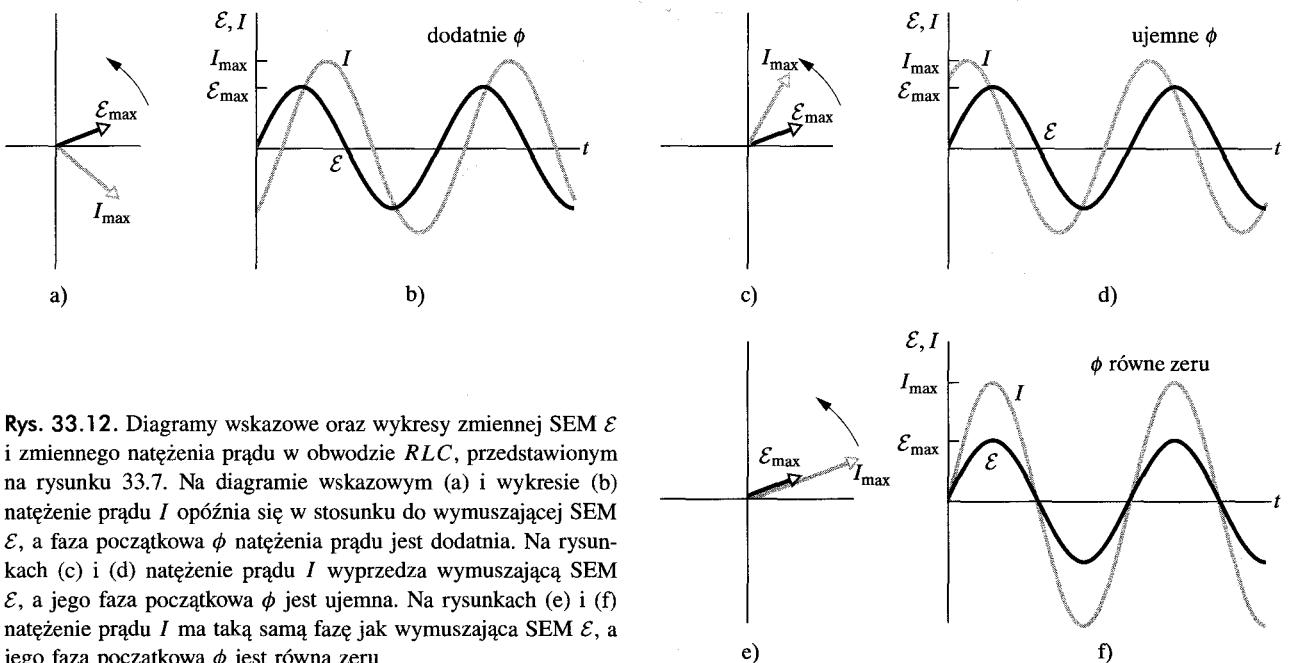
Równanie (33.63) przedstawia amplitudę I_{\max} natężenia prądu w obwodzie *RLC* jako funkcję częstości kołowej ω_w zewnętrznego źródła zmiennej SEM. Dla danego oporu R amplituda osiąga maksimum, gdy wyrażenie $\omega_w L - 1/\omega_w C$ w mianowniku jest równe zeru, tzn. wtedy, gdy:

$$\omega_w L = \frac{1}{\omega_w C},$$

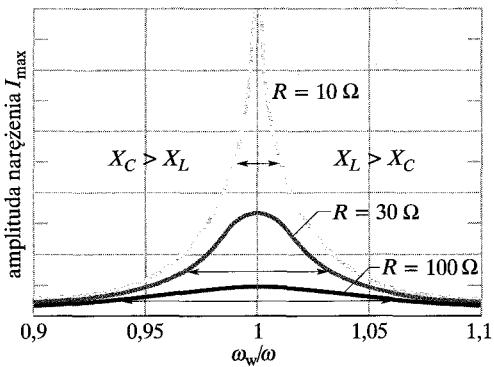
czyli

$$\omega_w = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad (\text{maksimum } I). \quad (33.66)$$

Częstość kołowa drgań swobodnych ω w obwodzie *RLC* jest także równa $1/\sqrt{LC}$, zatem maksymalna wartość I_{\max} występuje wtedy, gdy częstość kołowa drgań wymuszonych odpowiada częstości kątowej drgań swobodnych, tzn. w rezonansie.



Rys. 33.12. Diagramy wskazowe oraz wykresy zmiennej SEM \mathcal{E} i zmennego natężenia prądu w obwodzie *RLC*, przedstawionym na rysunku 33.7. Na diagramie wskazowym (a) i wykresie (b) natężenie prądu I opóźnia się w stosunku do wymuszającej SEM \mathcal{E} , a faza początkowa ϕ natężenia prądu jest dodatnia. Na rysunkach (c) i (d) natężenie prądu I wyprzedza wymuszającą SEM \mathcal{E} , a jego faza początkowa ϕ jest ujemna. Na rysunkach (e) i (f) natężenie prądu I ma taką samą fazę jak wymuszającą SEM \mathcal{E} , a jego faza początkowa ϕ jest równa zero



Rys. 33.13. Krzywe rezonansowe obwodu RLC z rysunku 33.7, otrzymane dla $L = 100 \mu\text{H}$, $C = 100 \text{ pF}$ i trzech wartości R . Amplituda I_{\max} natężenia prądu zależy od tego, jak bliska częstotliwości kołowej drgań swobodnych ω jest częstotliwość kołowa drgań wymuszonych ω_w . Poziome strzałki przy każdej krzywej wskazują jej szerokość w połowie maksimum, co jest miarą ostrości rezonansu. Po lewej stronie punktu $\omega_w/\omega = 1$ obwód ma charakter pojemnościowy ($X_C > X_L$), po prawej zaś — charakter indukcyjny ($X_L > X_C$).

nansie. Zatem w obwodzie RLC rezonans i maksimum amplitudy I_{\max} natężenia prądu występuje dla:

$$\omega_w = \omega = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad (\text{rezonans}). \quad (33.67)$$

Na rysunku 33.13 pokazano trzy *krzywe rezonansowe* dla drgań sinusoidalnych, w trzech szeregowych obwodach RLC , różniących się tylko wartością R . Każda krzywa osiąga maksimum amplitudy I_{\max} natężenia prądu, gdy stosunek ω_w/ω jest równy 1. Jednakże maksymalna wartość I_{\max} maleje wraz ze wzrostem R (maksymalna wartość I_{\max} jest zawsze równa \mathcal{E}/R ; aby zobaczyć, że tak jest, podstaw równanie (33.61) do równania (33.62)). Ponadto szerokość krzywych wzrasta wraz ze wzrostem R (szerokość krzywych na rysunku 33.13 jest mierzona w połowie maksymalnej wartości I_{\max}).

Aby zrozumieć sens fizyczny rysunku 33.13, zastanówmy się, jak zmieniają się wartości reaktancji X_L i X_C , gdy zwiększamy częstotliwość kołową drgań wymuszonych ω_w , zaczynając od wartości znacznie mniejszych od częstotliwości kołowej drgań swobodnych ω . Dla małych wartości ω_w reaktancja X_L ($= \omega_w L$) jest mała, a reaktancja X_C ($= 1/\omega_w C$) jest duża. Tak więc obwód ma charakter pojemnościowy, a o impedancji decyduje duża wartość X_C , która powoduje, że natężenie prądu jest małe.

Gdy zwiększamy ω_w , reaktancja X_C ciągle przeważa, ale jej wartość maleje, podczas gdy wartość reaktancji X_L rośnie. Zmniejszenie wartości ich różnicę X_C powoduje zmniejszenie impedancji, a zatem wzrost natężenia prądu, co widzimy po lewej stronie każdej krzywej rezonansowej na rysunku 33.13. Gdy rosnąca reaktancja X_L i malejąca reaktancja X_C osiągną taką samą wartość, natężenie prądu osiąga maksimum, a obwód jest w rezonansie, co zachodzi przy $\omega_w = \omega$.

Jeśli dalej będziemy zwiększać ω_w , to rosnąca reaktancja X_L zaczyna przeważać nad malejącą reaktancją X_C . Całkowita impedancja rośnie na skutek wzrostu ich różnicę, a natężenie prądu maleje, co widać po prawej stronie każdej krzywej rezonansowej na rysunku 33.13. Podsumowując: dla małych częstotliwości kołowych o przebiegu krzywej rezonansowej decyduje reaktancja pojemnościowa, dla dużych częstotliwości kołowych decyduje reaktancja indukcyjna, a rezonans występuje dla średnich częstotliwości (gdy reaktancje X_L i X_C są sobie równe).

SPRAWDZIAN 7: Dla trzech pobudzanych sinusoidalnie szeregowych obwodów RLC impedancje pojemnościowe i indukcyjne wynoszą odpowiednio: 1) 50Ω , 100Ω ; 2) 100Ω , 50Ω ; 3) 50Ω , 50Ω . a) Czy w danym obwodzie natężenie prądu wyprzedza przyłożoną SEM, opóźnia się w stosunku do niej, czy obie wielkości mają jednakową fazę? b) Który obwód jest w rezonansie?

Przykład 33.7

Przyjmijmy, że na rysunku 33.7 $R = 200 \Omega$, $C = 18 \mu\text{F}$, $L = 276 \text{ mH}$, $\nu_w = 50 \text{ Hz}$, a $\mathcal{E}_{\max} = 36 \text{ V}$. (Są to dane, z których korzystaliśmy poprzednio w przykładach 33.4, 33.5 i 33.6).

a) Jaka jest amplituda I_{\max} natężenia prądu?

ROZWIĄZANIE:

— Zgodnie z równaniem (33.62) amplituda I_{\max} natężenia prądu zależy od amplitudy \mathcal{E}_{\max} wymuszającej SEM i od impedancji Z w obwodzie ($I_{\max} = \mathcal{E}_{\max}/Z$). Zatem powinniśmy obliczyć Z w zależności od oporu R , reaktancji pojemnościowej X_C i reaktancji indukcyjnej X_L obwodu.

Całkowitym oporem w obwodzie jest znany opór R . Całkowita reaktancja pojemnościowa obwodu wynika ze znanej pojemności i wynosi $X_C = 177 \Omega$ (przykład 33.5). Całkowita reaktancja indukcyjna obwodu wynika ze znanej indukcyjności i wynosi $X_L = 86,7 \Omega$ (przykład 33.6). Tak więc impedancja obwodu jest równa:

$$Z = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}$$

$$= \sqrt{(200 \Omega)^2 + (86,7 \Omega - 177 \Omega)^2} = 219 \Omega.$$

Stąd:

$$I_{\max} = \frac{\mathcal{E}_{\max}}{Z} = \frac{36 \text{ V}}{219 \Omega} = 0,164 \text{ A.} \quad (\text{odpowiedź})$$

b) Jaka jest faza początkowa ϕ natężenia prądu w obwodzie, w stosunku do wymuszającej SEM?

ROZWIĄZANIE:

— Zgodnie z równaniem (33.65) faza początkowa zależy od reaktancji indukcyjnej, reaktancji pojemnościowej i oporu obwodu. Rozwiązuając to równanie względem ϕ , otrzymujemy:

$$\phi = \arctg \frac{X_L - X_C}{R} = \arctg \frac{86,7 \Omega - 177 \Omega}{200 \Omega} \\ = -24,3^\circ = -0,424 \text{ rad.} \quad (\text{odpowiedź})$$

Ujemna wartość fazy początkowej jest zgodna z tym, że obciążenie ma charakter pojemnościowy, tzn. $X_C > X_L$. Natężenie prądu wyprzedza SEM źródła.

33.10. Moc w obwodach prądu zmiennego

W obwodzie RLC , przedstawionym na rysunku 33.7, energia jest dostarczana przez źródło prądu zmiennego. Pewna część dostarczonej energii jest gromadzona w polu elektrycznym kondensatora, inna część — w polu magnetycznym cewki, jeszcze inna jest rozpraszana na oporniku jako energia termiczna. W rozważanym przez nas stanie ustalonym średnia energia, gromadzona łącznie w kondensatorze i w cewce, pozostaje stała. Tak więc energia elektromagnetyczna przekazywana jest od źródła do opornika, gdzie ulega rozproszeniu w postaci energii termicznej.

Stosując równania (27.22) i (33.29) chwilową szybkość rozpraszania energii na oporniku (czyli moc chwilową) można zapisać jako:

$$P = I^2 R = [I_{\max} \sin(\omega_w t - \phi)]^2 R = I_{\max}^2 R \sin^2(\omega_w t - \phi), \quad (33.68)$$

natomiast średnia szybkość rozpraszania energii na oporniku (czyli moc średnia) jest równa uśrednionej w czasie wartości wyrażenia (33.68). W czasie jednego pełnego okresu średnia wartość funkcji $\sin^2 \theta$, gdzie θ może oznaczać dowolną zmienną, jest równa zeru (rys. 33.14a), ale średnia wartość funkcji $\sin^2 \theta$ wynosi $\frac{1}{2}$ (rys. 33.14b). (Zauważ na rys. 33.14b, że zaciemnowane obszary pod krzywą,

znajdujące się nad prostą poziomą, oznaczoną $+1/2$, wypełniają dokładnie niezaciennowane miejsca pod tą prostą). Tak więc na podstawie równania (33.68) możemy napisać:

$$P_{\text{sr}} = \frac{I_{\max}^2 R}{2} = \left(\frac{I_{\max}}{\sqrt{2}} \right)^2 R. \quad (33.69)$$

Wyrażenie $I_{\max}/\sqrt{2}$ nazywamy **wartością skuteczną** natężenia prądu I :

$$I_{\text{sk}} = \frac{I_{\max}}{\sqrt{2}} \quad (\text{wartość skuteczna natężenia prądu}). \quad (33.70)$$

Możemy teraz napisać równanie (33.69) w postaci:

$$P_{\text{sr}} = I_{\text{sk}}^2 R \quad (\text{moc średnia}). \quad (33.71)$$

Równanie (33.71) jest bardzo podobne do równania (27.22) ($P = I^2 R$); stąd wniosek, że używając wartości skutecznej natężenia prądu możemy obliczyć średnią szybkość rozpraszania energii w obwodach prądu zmiennego (moc średnią) dokładnie w taki sam sposób, jak w obwodach prądu stałego.

Można również zdefiniować wartości skuteczne napięć i SEM w obwodach prądu zmiennego:

$$U_{\text{sk}} = \frac{U_{\max}}{\sqrt{2}} \quad \text{i} \quad \mathcal{E}_{\text{sk}} = \frac{\mathcal{E}_{\max}}{\sqrt{2}} \quad (\text{wartości skuteczne napięcia i SEM}). \quad (33.72)$$

Przyrządy pomiarowe prądu zmiennego, takie jak amperomierze i voltmierze, pokazują zwykle wartości skuteczne I_{sk} , U_{sk} i \mathcal{E}_{sk} . Jeśli więc włączysz voltmierz prądu zmiennego do domowego gniazdka sieciowego i odczytasz 230 V, oznacza to napięcie skuteczne. Maksymalna wartość napięcia w gniazdku wynosi $\sqrt{2} \cdot (230 \text{ V})$, czyli 325 V.

Współczynnik proporcjonalności $1/\sqrt{2}$ we wzorach (33.70) i (33.72) jest taki sam dla wszystkich trzech zmiennych, zatem równania (33.62) i (33.60) mogą być zapisane jako:

$$I_{\text{sk}} = \frac{\mathcal{E}_{\text{sk}}}{Z} = \frac{\mathcal{E}_{\text{sk}}}{\sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}}, \quad (33.73)$$

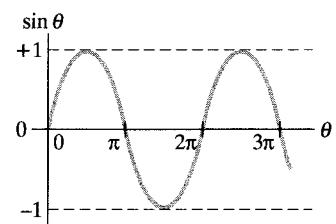
i w istocie jest to postać, jakiej prawie zawsze używamy.

Możemy zastosować związek $I_{\text{sk}} = \mathcal{E}_{\text{sk}}/Z$, aby przekształcić równanie (33.71) do równoważnej i użytecznej postaci:

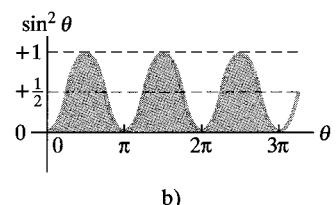
$$P_{\text{sr}} = \frac{\mathcal{E}_{\text{sk}}}{Z} I_{\text{sk}} R = \mathcal{E}_{\text{sk}} I_{\text{sk}} \frac{R}{Z}. \quad (33.74)$$

Z rysunku 33.11d, tabeli 33.2 i równania (33.62) wynika jednak, że R/Z jest równe cosinusowi fazy początkowej ϕ :

$$\cos \phi = \frac{U_{R \max}}{\mathcal{E}_{\max}} = \frac{I_{\max} R}{I_{\max} Z} = \frac{R}{Z}. \quad (33.75)$$



a)



b)

Rys. 33.14. a) Wykres funkcji $\sin \theta$. Wartość uśredniona po okresie jest równa zera. b) Wykres funkcji $\sin^2 \theta$. Wartość uśredniona po okresie jest równa $\frac{1}{2}$

Równanie (33.74) przyjmuje więc postać:

$$P_{\text{sr}} = \mathcal{E}_{\text{sk}} I_{\text{sk}} \cos \phi \quad (\text{moc średnia}), \quad (33.76)$$

gdzie czynnik $\cos \phi$ nazywamy **współczynnikiem mocy**. Ponieważ $\cos \phi = \cos(-\phi)$, wyrażenie (33.76) nie zależy od znaku fazy początkowej ϕ .

Aby uzyskać maksymalną szybkość przekazywania energii do obciążenia oporowego w obwodzie RLC (czyli maksymalną moc), współczynnik mocy $\cos \phi$ powinien być możliwie bliski jedności. Jest to równoważne wymaganiu, aby faza początkowa ϕ w równaniu (33.29) była możliwie bliska zera. Jeśli obwód ma na przykład charakter silnie indukcyjny, to warto włączyć szeregowo dodatkową pojemność do obwodu. Przypomnijmy, że włączenie szeregowo dodatkowej pojemności zmniejsza wypadkową pojemność C_{rw} całego układu. Zmniejszenie C_{rw} powoduje zmniejszenie fazy początkowej i wzrost współczynnika mocy we wzorze (33.76). Aby to osiągnąć, zakłady energetyczne umieszczały szeregowo kondensatory w swoich systemach przesyłowych.

SPRAWDZIAN 8: a) Założmy, że w pobudzanym sinusoidalnie obwodzie RLC natężenie prądu wyprzedza SEM. Czy powinniśmy zwiększyć, czy zmniejszyć pojemność, aby zwiększyć szybkość przekazywania energii do obciążenia oporowego? b) Czy taka zmiana spowoduje przesunięcie rezonansowej częstotliwości kołowej obwodu w kierunku częstotliwości kołowej SEM, czy też w kierunku przeciwnym?

Przykład 33.8

Szeregowy obwód RLC , zasilany SEM $\mathcal{E}_{\text{sk}} = 230 \text{ V}$ o częstotliwości $v_w = 50 \text{ Hz}$, składa się z oporu $R = 200 \Omega$, indukcyjności o reaktancji $X_L = 80 \Omega$ i pojemności o reaktancji $X_C = 150 \Omega$.

a) Jaki jest współczynnik mocy $\cos \phi$ i faza początkowa ϕ tego obwodu?

ROZWIĄZANIE:

Współczynnik mocy $\cos \phi$ może być obliczony ze wzoru (33.75), jeśli znamy opór R i impedancję Z ($\cos \phi = R/Z$). Do obliczenia Z zastosujemy równanie (33.61):

$$\begin{aligned} Z &= \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2} \\ &= \sqrt{(200 \Omega)^2 + (80 \Omega - 150 \Omega)^2} = 211,9 \Omega. \end{aligned}$$

Równanie (33.75) daje nam wtedy:

$$\cos \phi = \frac{R}{Z} = \frac{200 \Omega}{211,9 \Omega} = 0,9438 \approx 0,944. \quad (\text{odpowiedź})$$

Wyznaczając stąd ϕ , otrzymujemy:

$$\phi = \arccos 0,944 = \pm 19,3^\circ.$$

Tak więc 0,944 jest wartością zarówno cosinusa kąta $+19,3^\circ$, jak i $-19,3^\circ$. Aby rozstrzygnąć, który znak jest poprawny, musimy się zastanowić, czy natężenie prądu wyprzedza, czy opóźnia się w fazie w stosunku do przyłożonej SEM. Ponieważ $X_C > X_L$, obwód ma charakter pojemnościowy, a więc natężenie prądu wyprzedza

SEM. Zatem ϕ musi być ujemne:

$$\phi = -19,3^\circ. \quad (\text{odpowiedź})$$

Moglibyśmy znaleźć ϕ z równania (33.65). Na kalkulatorze otrzymalibyśmy wtedy wartość ujemną kąta.

b) Z jaką średnią szybkością P_{sr} energia jest rozpraszana na oporniku?

ROZWIĄZANIE:

Jedna z metod rozwiązania polega na tym, że przy założeniu stanu stacjonarnego w obwodzie, szybkość rozpraszania energii na oporniku jest równa szybkości, z jaką energia jest dostarczana do obwodu, zgodnie z równaniem (33.76) ($P_{\text{sk}} = \mathcal{E}_{\text{sk}} I_{\text{sk}} \cos \phi$).

Wartość skuteczna SEM \mathcal{E}_{sk} jest dana, a wartość $\cos \phi$ została już obliczona w części (a). Aby wyznaczyć I_{sk} , wykorzystujemy fakt, że wartość skuteczna natężenia prądu jest określona przez wartość skuteczną przyłożonej SEM i przez impedancję obwodu (która jest znana), zgodnie ze wzorem (33.73):

$$I_{\text{sk}} = \frac{\mathcal{E}_{\text{sk}}}{Z}.$$

Podstawiając to wyrażenie do równania (33.76), otrzymujemy:

$$P_{\text{sr}} = \mathcal{E}_{\text{sk}} I_{\text{sk}} \cos \phi = \frac{\mathcal{E}_{\text{sk}}^2}{Z} \cos \phi = \frac{(230 \text{ V})^2}{211,9 \Omega} (0,9438) = 235,6 \text{ W}. \quad (\text{odpowiedź})$$

Inną metodą rozwiązania jest wykorzystanie faktu, że zgodnie z równaniem (33.71) szybkość rozpraszania energii na oporniku R zależy od kwadratu wartości skutecznej natężenia prądu

I_{sk} , płynącego przez ten opornik. Otrzymujemy więc:

$$P_{sr} = I_{sk}^2 R = \frac{\mathcal{E}_{sk}^2}{Z^2} R = \frac{(230 \text{ V})^2}{(211,9 \Omega)^2} (200 \Omega) = 235,6 \text{ W.}$$

(odpowiedź)

c) Jaka powinna być pojemność C_n , aby uzyskać maksymalną wartość P_{sr} , jeżeli pozostałe parametry obwodu pozostają bez zmiany?

ROZWIĄZANIE:

○ 1. Średnia szybkość P_{sr} , z jaką energia jest dostarczana i rozpraszana, osiąga wartość maksymalną, gdy obwód jest w rezonansie z przyłożoną SEM.

○ 2. Rezonans występuje dla $X_C = X_L$. Z danych zadania wynika, że $X_C > X_L$, tak więc musimy zmniejszyć X_C , aby

uzyskać rezonans. Jak widać z równania (33.39) ($X_C = 1/\omega_w C$), oznacza to, że musimy zwiększyć wartość C tak, aby otrzymać wartość C_n .

Stosując równanie (33.39), możemy zapisać warunek $X_C = X_L$ w postaci:

$$\frac{1}{\omega_w C_n} = X_L.$$

Podstawiając $2\pi\nu_w$ zamiast ω_w (gdyż dane jest ν_w , a nie ω_w), a następnie rozwiązując równanie względem C_n , znajdujemy:

$$C_n = \frac{1}{2\pi\nu_w X_L} = \frac{1}{(2\pi)(50 \text{ Hz})(80 \Omega)} \\ = 3,98 \cdot 10^{-5} \text{ F} = 39,8 \mu\text{F.}$$

(odpowiedź)

Postępując jak w części (b), można wykazać, że dla wartości C_n , P_{sr} osiągnęłoby maksymalną wartość 264,5 W.

33.11. Transformatory

Warunki transmisji energii

Gdy obwód prądu zmiennego ma tylko obciążenie oporowe, współczynnik mocy w równaniu (33.76) jest równy $\cos 0^\circ = 1$, a wartość skuteczna przyłożonej SEM \mathcal{E}_{sk} jest równa wartości skutecznej napięcia U_{sk} na obciążeniu. Zatem dla natężenia prądu I_{sk} , płynącego przez obciążenie, energia jest dostarczana i rozpraszana ze średnią szybkością:

$$P_{sr} = \mathcal{E}I = IU. \quad (33.77)$$

(W równaniu (33.77) i w dalszej części tego paragrafu postępujemy zgodnie z ustaloną praktyką i opuszczamy wskaźniki, oznaczające wartości skuteczne. Inżynierowie i naukowcy przyjmują, że wszystkie zmienne natężenia prądu i napięcia są określane za pomocą wartości skutecznych; takie są też wskazania mierników). Z równania (33.77) wynika, że mamy pewien zakres swobody w spełnieniu wymagań, dotyczących mocy, od stosunkowo dużego natężenia prądu I i stosunkowo małego napięcia U , do sytuacji wręcz przeciwej, pod warunkiem, że iloczyn IU ma wymaganą wartość.

W systemie przesyłania energii elektrycznej pożądane jest, aby napięcia były stosunkowo niskie zarówno w miejscu wytwarzania (w elektrowni), jak i w miejscu odbioru (w domu lub w fabryce). Jest to spowodowane względami bezpieczeństwa, a także ułatwia projektowanie wyposażenia elektrycznego. Nikt nie chciałby, aby toster elektryczny lub elektryczna kolejka dla dzieci działały, powiedzmy, pod napięciem 10 kV. Z drugiej strony, przy przesyłaniu energii elektrycznej z elektrowni do użytkownika chciałibyśmy stosować jak najmniejsze natężenia prądu (a co za tym idzie jak najwyższe napięcia), aby zmniejszyć do minimum straty I^2R (zwane często *stratami omowymi*) w linii przesyłowej.

Jako przykład przeanalizujmy linię o napięciu 735 kV, wykorzystywaną do przesyłania energii elektrycznej z hydroelektrowni La Grande 2 w Quebecu do odległego o 1000 km Montrealu. Przypuśćmy, że natężenie prądu wynosi 500 A,

a współczynnik mocy jest bliski jedności. Z równania (33.77) wynika, że średnia szybkość przesyłania energii, czyli moc średnia wynosi:

$$P_{\text{sr}} = \mathcal{E}I = (7,35 \cdot 10^5 \text{ V})(500 \text{ A}) = 368 \text{ MW}.$$

Opór linii przesyłowej wynosi około $0,220 \Omega/\text{km}$; zatem całkowity opór odcinka linii o długości 1000 km jest równy około 220Ω . W wyniku istnienia tego oporu szybkość rozpraszania energii, czyli moc tracona wynosi:

$$P_{\text{sr}} = I^2 R = (500 \text{ A})^2(220 \Omega) = 55 \text{ MW},$$

co odpowiada niemal 15% mocy dostarczanej.

Wyobraź sobie, co by się stało, gdybyśmy dwukrotnie zwiększyli natężenie prądu i dwukrotnie zmniejszyli napięcie. Moc dostarczana przez elektrownię byłaby nadal równa 368 MW, ale teraz moc tracona wynosiłaby około:

$$P_{\text{sr}} = I^2 R = (1000 \text{ A})^2(220 \Omega) = 220 \text{ MW},$$

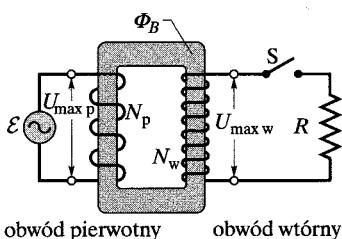
co stanowi prawie 60% mocy dostarczanej. Stąd wynika ogólna zasada przesyłania energii elektrycznej: Stosuj jak największe napięcia i jak najmniejsze natężenia prądu.

Transformator idealny

Powyższa zasada przesyłania energii prowadzi do zasadniczej niezgodności między wymaganiem skutecznego przesyłania (tzn. przy wysokim napięciu), a potrzebą bezpiecznego wytwarzania i używania energii (tzn. przy niskim napięciu). Potrzebne jest więc urządzenie, za pomocą którego moglibyśmy podwyższać (w celu przesyłania) lub obniżać (w celu zastosowania) napięcie zmienne w obwodzie, utrzymując możliwie stałą wartość iloczynu: natężenie prądu \times napięcie. Takim urządzeniem jest **transformator**. Nie ma on ruchomych części, działa na zasadzie prawa Faradaya i nie ma prostego odpowiednika w obwodach prądu stałego.

Transformator idealny, przedstawiony na rysunku 33.15, składa się z dwóch cewek o różnych liczbach zwojów, nawiniętych na wspólnym rdzeniu z żelaza. (Cewki są izolowane od rdzenia). W czasie pracy transformatora uzwojenie pierwotne o N_p zwojach połączone jest ze źródłem prądu zmiennego, którego SEM w dowolnej chwili t jest dana wzorem:

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_{\text{max}} \sin \omega t. \quad (33.78)$$



Rys. 33.15. Typowy obwód zawierający transformator idealny, czyli dwie cewki nawinięte na wspólnym rdzeniu z żelaza. Źródło prądu zmiennego wytwarza prąd w cewce po lewej stronie (*w uzwojeniu pierwotnym*). Cewka po prawej stronie (*uzwojenie wtórne*) jest połączona z obciążeniem oporowym R , gdy klucz S jest zamknięty

Uzwojenie wtórne o N_w zwojach jest połączone z oporem obciążenia R , ale zakładamy chwilowo, że klucz S jest otwarty. Tak więc obwód wtórny jest otwarty, a zatem prąd w uzwojeniu wtórnym nie płynie. Przyjmujemy ponadto, że w transformatorze idealnym opór uzwojenia pierwotnego i wtórnego jest znikomo mały, podobnie jak straty energii, związane z histerezą magnetyczną w rdzeniu żelaznym. Dla dobrze zaprojektowanych transformatorów o dużej wydajności straty energii mogą być nie większe od 1%, tak więc nasze założenia są uzasadnione.

W przyjętych przez nas warunkach uzwojenie pierwotne ma charakter czysto indukcyjny, a obwód pierwotny podobny jest do obwodu na rysunku 33.10a. Zatem *prąd pierwotny* (zwany również *prądem magnesującym* I_{mag}) o bardzo ma-

żym natężeniu jest opóźniony w fazie o 90° w stosunku do napięcia pierwotnego U_p . Współczynnik mocy w obwodzie pierwotnym ($= \cos \phi$ w równaniu (33.76)) jest równy zeru, więc moc nie jest przekazywana ze źródła do transformatora.

Jednakże zmienny prąd o małym natężeniu I_{mag} , płynący w uzwojeniu pierwotnym, indukuje zmienny strumień magnetyczny Φ_B w rdzeniu. Ten indukowany strumień przenika również przez uzwojenie wtórne, które jest nawinięte na tym samym rdzeniu. Z prawa Faradaya (równanie (31.6)) wynika, że indukowana SEM \mathcal{E}_z , przypadająca na jeden zwój, jest taka sama zarówno w uzwojeniu pierwotnym, jak i wtórnym. Ponadto napięcie U_p na uzwojeniu pierwotnym jest równe SEM indukowanej w tym uzwojeniu, a napięcie U_w na uzwojeniu wtórnym jest równe SEM, indukowanej w tym uzwojeniu. Wobec tego możemy napisać:

$$\mathcal{E}_z = \frac{d\Phi_B}{dt} = \frac{U_p}{N_p} = \frac{U_w}{N_w}$$

stąd:

$$U_w = U_p \frac{N_w}{N_p} \quad (\text{transformacja napięcia}). \quad (33.79)$$

Jeśli $N_w > N_p$, to transformator nazywamy *transformatorem podwyższającym* napięcie, ponieważ *podwyższa* pierwotne napięcie U_p do wyższego napięcia U_w . Podobnie, jeśli $N_w < N_p$, to transformator nazywamy *transformatorem obniżającym* napięcie.

Dopóki klucz S jest otwarty, dopóty energia nie jest dostarczana ze źródła do pozostały części obwodu. Zamknijmy teraz klucz S, dołączając uzwojenie wtórne do obciążenia oporowego R . (W ogólnym przypadku obciążenie mogłoby składać się także z elementów indukcyjnych i pojemnościowych, ale tutaj rozpatrujemy tylko opór R). Okazuje się, że teraz energia *jest* pobierana ze źródła. Zobaczmy, dlaczego tak się dzieje.

Gdy zamknimy klucz S, możemy zaobserwować następujące zjawiska:

1. W obwodzie wtórnym pojawia się prąd zmienny o natężeniu I_w , a moc tracona w obciążeniu oporowym jest równa $I_w^2 R$ ($= U_w^2 / R$).
2. Prąd ten wytwarza swój własny zmienny strumień magnetyczny w rdzeniu, a zgodnie z prawem Faradaya i regułą Lenza ten strumień indukuje w uzwojeniu pierwotnym SEM skierowaną przeciwnie do SEM źródła.
3. Napięcie U_p na uzwojeniu pierwotnym nie może jednak ulec zmianie pod wpływem indukowanej SEM, ponieważ musi być ono zawsze równe SEM \mathcal{E} , dostarczanej przez źródło. Zamknięcie klucza niczego tu nie zmienia.
4. W celu podrzymania U_p źródło wytwarza teraz w obwodzie pierwotnym, oprócz I_{mag} , prąd zmienny o natężeniu I_p . Amplituda i faza względna prądu I_p są dokładnie takie, aby SEM, indukowana przez I_p , znosiła się z SEM, indukowaną tam przez I_w . Faza początkowa I_p nie jest równa 90° , jak było w przypadku I_{mag} , a więc prąd o natężeniu I_p może dostarczać energię do obwodu pierwotnego.

Zamierzamy teraz znaleźć związek między I_w a I_p . Jednak zamiast szczebliowej analizy powyższego złożonego procesu zastosujemy po prostu zasadę zachowania energii. Moc przekazywana przez źródło do obwodu pierwotnego

jest równa $I_p U_p$. Z kolei moc przekazywana z obwodu pierwotnego do wtórnego (przez zmienne pole magnetyczne sprzągające obie cewki) wynosi $I_w U_w$. Zakładamy, że energia nie jest tracona podczas tego procesu, zatem z zasady zachowania energii wynika:

$$I_p U_p = I_w U_w.$$

Podstawiając U_w z równania (33.79), otrzymujemy:

$$I_w = I_p \frac{N_p}{N_w} \quad (\text{transformacja prądów}). \quad (33.80)$$

Z równania tego wynika, że natężenie prądu I_w w obwodzie wtórnym może różnić się od natężenia prądu I_p w obwodzie pierwotnym, w zależności od stosunku liczby zwojów N_p/N_w . Odwrotność tego stosunku nazywamy *przekładnią transformatora*.

Prąd o natężeniu I_p zaczyna płynąć w obwodzie pierwotnym na skutek istnienia obciążenia oporowego R w obwodzie wtórnym. Aby wyznaczyć I_p , podstawiamy do równania (33.80) najpierw $I_w = U_w/R$, a następnie podstawiamy U_w z równania (33.79). Otrzymujemy:

$$I_p = \frac{1}{R} \left(\frac{N_w}{N_p} \right)^2 U_p. \quad (33.81)$$

Równanie to ma postać $I_p = U_p/R_{rw}$, gdzie opór równoważny R_{rw} jest równy:

$$R_{rw} = \left(\frac{N_p}{N_w} \right)^2 R. \quad (33.82)$$

R_{rw} jest oporem obciążenia „widzianym” przez źródło, które wytwarza napięcie U_p i prąd o natężeniu I_p , jak gdyby było dołączone bezpośrednio do oporu R_{rw} .

Dopasowanie impedancji

Równanie (33.82) wskazuje na jeszcze jedno zastosowanie transformatora. Aby uzyskać maksymalne przekazywanie energii ze źródła prądu stałego do obciążenia oporowego, opór wewnętrzny źródła i opór obciążenia muszą być jednakowe. Taka sama zasada obowiązuje w obwodach prądu zmiennego, z tą różnicą, że *impedancja* (a nie po prostu opór) źródła musi być dopasowana do impedancji obciążenia. Często ten warunek nie jest spełniony. Na przykład w urządzeniu odtwarzającym dźwięk wzmacniacz ma dużą impedancję, a zestaw głośników — małą. Możemy dopasować impedancje obydwu urządzeń, łącząc je za pomocą transformatora o odpowiednim stosunku liczby zwojów N_p/N_w .

SPRAWDZIAN 9: Źródło prądu zmiennego ma mniejszy opór niż obciążenie. Aby zwiększyć wydajność przekazywania energii ze źródła do obciążenia, łączymy te dwa elementy za pomocą transformatora. a) Czy N_w powinno być większe, czy mniejsze od N_p ? b) Czy jest to transformator podwyższający, czy obniżający napięcie?

Przykład 33.9

Transformator na słupie energetycznym dostosowany jest do napięcia $U_p = 8,5 \text{ kV}$ po stronie pierwotnej i dostarcza energię elektryczną o napięciu $U_w = 230 \text{ V}$ do kilku pobliskich domów, przy czym wartości obydwu napięć są wartościami skutecznymi. Zakładamy, że transformator obniżający napięcie jest transformatorem idealnym, obciążenie jest czysto oporowe, a współczynnik mocy jest równy jedności.

a) Jaki jest stosunek liczby zwojów N_p/N_w transformatora?

ROZWIĄZANIE:

→ Równanie (33.79) wiąże stosunek liczby zwojów N_p/N_w z wartościami skutecznymi napięć w obwodzie pierwotnym i wtórnym. Równanie to możemy napisać w postaci:

$$\frac{U_w}{U_p} = \frac{N_w}{N_p}.$$

Zauważ, że prawa strona tego równania jest przekładnią transformatora. Odwracając obydwa ułamki, otrzymujemy:

$$\frac{N_p}{N_w} = \frac{U_p}{U_w} = \frac{8,5 \cdot 10^3 \text{ V}}{230 \text{ V}} = 36,96 \approx 37. \quad (\text{odpowiedź})$$

b) Moc średnia, zużywana w domach, do których ten transformator dostarcza napięcie, jest równa 78 kW . Jakie są wartości skuteczne natężenia prądów w obwodzie pierwotnym i wtórnym transformatora?

ROZWIĄZANIE:

→ Dla obciążenia czysto oporowego współczynnik mocy $\cos \phi$ jest równy jedności. Zatem dostarczana i zużywana moc średnia dana jest równaniem (33.77). W obwodzie pierwotnym dla $U_p = 8,5 \text{ kV}$ z równania (33.77) wynika:

$$I_p = \frac{P_{\text{sr}}}{U_p} = \frac{78 \cdot 10^3 \text{ W}}{8,5 \cdot 10^3 \text{ V}} = 9,176 \text{ A} \approx 9,2 \text{ A}. \quad (\text{odpowiedź})$$

Natomiast w obwodzie wtórnym:

$$I_w = \frac{P_{\text{sr}}}{U_w} = \frac{78 \cdot 10^3 \text{ W}}{230 \text{ V}} = 339 \text{ A}. \quad (\text{odpowiedź})$$

Możesz sprawdzić, że $I_w = I_p(N_p/N_w)$, zgodnie z równaniem (33.80).

c) Jakie jest obciążenie oporowe R_w w obwodzie wtórnym? Jakie jest odpowiadające temu obciążenie oporowe R_p w obwodzie pierwotnym?

ROZWIĄZANIE:

→ 1. Dla obydwu obwodów możemy za pomocą równania $U = IR$ znaleźć związek między obciążeniem oporowym a wartościami skutecznymi napięcia i natężenia prądu. Dla obwodu wtórnego mamy:

$$R_w = \frac{U_w}{I_w} = \frac{230 \text{ V}}{339 \text{ A}} = 0,678 \Omega \approx 0,68 \Omega. \quad (\text{odpowiedź})$$

Podobnie dla obwodu pierwotnego otrzymujemy:

$$R_p = \frac{U_p}{I_p} = \frac{8,5 \cdot 10^3 \text{ V}}{9,176 \text{ A}} = 926 \Omega \approx 930 \Omega. \quad (\text{odpowiedź})$$

→ 2. Innym sposobem wyznaczenia R_p jest zastosowanie równania (33.82), zgodnie z którym R_p jest oporem równoważnym „widzianym” od strony pierwotnej transformatora. Jeśli podstawimy R_p zamiast R_{rw} i R_w zamiast R , to otrzymamy z tego równania:

$$R_p = \left(\frac{N_p}{N_w} \right)^2 R_{rw} = (36,96)^2 (0,678 \Omega) = 926 \Omega \approx 930 \Omega. \quad (\text{odpowiedź})$$

Podsumowanie

Przekazywanie energii w obwodach LC W obwodzie drgającym LC energia jest przekazywana okresowo między polem elektrycznym kondensatora a polem magnetycznym cewki. Wartości chwilowe obydwu postaci energii są równe:

$$E_E = \frac{q^2}{2C} \quad \text{oraz} \quad E_B = \frac{LI^2}{2}, \quad (33.1, 33.2)$$

gdzie q jest wartością chwilową ładunku na okładkach kondensatora, a I jest wartością chwilową natężenia prądu, płynącego przez cewkę. Całkowita energia $E (= E_E + E_B)$ pozostaje stała.

Zmiany ładunku i natężenia prądu w obwodach LC Z zasady zachowania energii wynika równanie:

$$L \frac{d^2q}{dt^2} + \frac{1}{C} q = 0 \quad (\text{drgania } LC), \quad (33.11)$$

czyli równanie różniczkowe, opisujące drgania w obwodzie LC , nie zawierającym oporu. Rozwiązaniem równania (33.11) jest:

$$q = q_{\max} \cos(\omega t + \phi) \quad (\text{lądunek}), \quad (33.12)$$

gdzie q_{\max} jest amplitudą ładunku (maksymalną wartością la-

dunku na okładkach kondensatora), a częstotliwość ω drgań jest równa:

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}. \quad (33.4)$$

Faza początkowa ϕ w równaniu (33.12) jest określona przez warunki początkowe (w chwili $t = 0$):

Natężenie prądu I w obwodzie, w dowolnej chwili t jest równe:

$$I = -\omega q_{\max} \sin(\omega t + \phi) \quad (\text{natężenie prądu}), \quad (33.13)$$

gdzie ωq_{\max} jest amplitudą natężenia prądu I_{\max} .

Drgania tłumione Drgania w obwodzie LC są tłumione, gdy w obwodzie występuje również element R , na którym energia jest rozpraszana. Wtedy:

$$L \frac{d^2q}{dt^2} + R \frac{dq}{dt} + \frac{1}{C}q = 0 \quad (\text{obwód } RLC). \quad (33.24)$$

Rozwiązaniem tego równania różniczkowego jest:

$$q = q_{\max} e^{-Rt/2L} \cos(\omega' t + \phi), \quad (33.25)$$

gdzie

$$\omega' = \sqrt{\omega^2 - (R/2L)^2}. \quad (33.26)$$

Rozpatrujemy wyłącznie przypadki, gdy R jest małe, a zatem tłumienie jest również małe. Wtedy $\omega' \approx \omega$.

Prądy zmienne; drgania wymuszone Szeregowy obwód RLC może być pobudzony do drgań wymuszonych z częstotliwością kołową ω_w , przez przyłożenie zewnętrznej zmiennej SEM:

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_{\max} \sin \omega_w t. \quad (33.28)$$

Natężenie prądu wywołanego w obwodzie przez SEM wynosi:

$$I = I_{\max} \sin(\omega_w t - \phi), \quad (33.29)$$

gdzie ϕ jest fazą początkową natężenia prądu.

Rezonans Amplituda natężenia prądu I_{\max} w szeregowym obwodzie RLC , zasilanym przez zewnętrzną sinusoidalną SEM, osiąga maksimum ($I_{\max} = \mathcal{E}_{\max}/R$), gdy częstotliwość kołowa drgań wymuszonych ω_w jest równa częstotliwości kołowej drgań swobodnych ω obwodu (czyli układ jest w rezonansie). Wtedy $X_C = X_L$, $\phi = 0$, a natężenie prądu jest zgodne w fazie z SEM.

Obwody z jednym elementem Zmienne napięcie na oporniku ma amplitudę $U_{R\max} = I_{\max} R$; natężenie prądu jest zgodne w fazie z napięciem.

Dla kondensatora $U_{C\max} = I_{\max} X_C$, gdzie $X_C = 1/\omega_w C$ jest reaktancją pojemnościową; natężenie prądu w tym przypadku wyprzedza napięcie o 90° ($\phi = -90^\circ = -\pi/2$ rad).

Dla cewki $U_{L\max} = I_{\max} X_L$, gdzie $X_L = \omega_w L$ jest reaktancją indukcyjną; natężenie prądu opóźnia się w fazie względem napięcia o 90° ($\phi = +90^\circ = +\pi/2$ rad).

Obwody szeregowe RLC Dla obwodu szeregowego RLC , gdy zewnętrzna SEM jest dana wzorem (33.28), a natężenie prądu dane wzorem (33.29), możemy zapisać:

$$\begin{aligned} I_{\max} &= \frac{\mathcal{E}_{\max}}{\sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}} \\ &= \frac{\mathcal{E}_{\max}}{\sqrt{R^2 + (\omega_w L - 1/\omega_w C)^2}} \quad (\text{amplituda natężenia prądu}). \end{aligned} \quad (33.60, 33.63)$$

i

$$\operatorname{tg}\phi = \frac{X_L - X_C}{R} \quad (\text{faza początkowa}). \quad (33.65)$$

Zdefiniowanie impedancji Z obwodu jako:

$$Z = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2} \quad (\text{impedancja}) \quad (33.61)$$

pozwala na zapisanie równania (33.60) w postaci $I_{\max} = \mathcal{E}_{\max}/Z$.

Moc W obwodzie szeregowym RLC moc średnia P_{sr} źródła jest równa szybkości, z jaką energia termiczna jest wytwarzana w oporniku:

$$P_{\text{sr}} = I_{\text{sk}}^2 R = \mathcal{E}_{\text{sk}} I_{\text{sk}} \cos \phi. \quad (33.71, 33.76)$$

Wskaźnik sk oznacza tutaj wartość skuteczną; wartości skuteczne są związane z wartościami maksymalnymi zależnościami $I_{\text{sk}} = I_{\max}/\sqrt{2}$, $U_{\text{sk}} = U_{\max}/\sqrt{2}$ i $\mathcal{E}_{\text{sk}} = \mathcal{E}_{\max}/\sqrt{2}$. Czynnik $\cos \phi$ jest zwany współczynnikiem mocy.

Transformatory Transformator (o którym zakładamy, że jest idealny) składa się z rdzenia żelaznego, na który nawinięte jest uwojenie pierwotne o N_p zwojach i uwojenie wtórne o N_w zwojach. Jeżeli uwojenie pierwotne jest połączone ze źródłem prądu zmiennego, to napięcia w obwodzie pierwotnym i wtórnym są związane równaniem:

$$U_w = U_p \frac{N_w}{N_p} \quad (\text{transformacja napięcia}). \quad (33.79)$$

Natężenia prądów płynących przez uwojenia są związane równaniem:

$$I_w = I_p \frac{N_p}{N_w} \quad (\text{transformacja prądów}), \quad (33.80)$$

a opór równoważny widziany przez źródło jest równy:

$$R_{rw} = \left(\frac{N_p}{N_w} \right)^2 R, \quad (33.82)$$

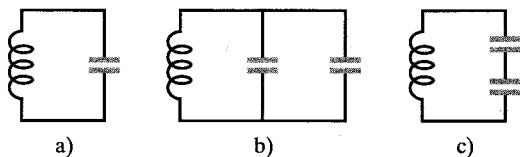
gdzie R jest obciążeniem oporowym w obwodzie wtórnym. Stosunek N_w/N_p nazywamy przekładnią transformatora.

Pytania

1. Naładowany kondensator zostaje połączony z cewką w chwili $t = 0$. Używając okresu T drgań jako jednostki, określ po jakim czasie następujące wielkości osiągną po raz pierwszy maksimum:
a) E_B , b) strumień magnetyczny w cewce, c) dI/dt , d) SEM w cewce?

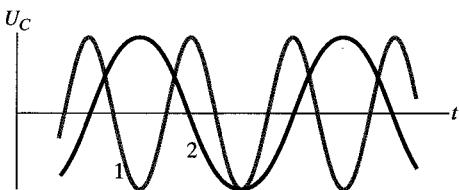
2. Dla jakich wartości fazy początkowej ϕ w równaniu (33.12), przypadki (a), (c), (e) i (g), przedstawione na rysunku 33.1 mogą zachodzić w chwili $t = 0$?

3. Na rysunku 33.16 przedstawiono trzy obwody drgające LC , złożone z identycznych cewek i kondensatorów. Uszereguj obwody w zależności od czasu, potrzebnego do całkowitego rozładowania kondensatorów podczas drgań, zaczynając od najdłuższego czasu.



Rys. 33.16. Pytanie 3

4. Na rysunku 33.17 przedstawiono wykresy napięcia U_C na kondensatorze w obwodach LC 1 i 2, które zawierają identyczne pojemności i mają taki sam maksymalny ładunek q_{\max} . Czy: a) indukcyjność L , b) maksymalne natężenie prądu I_{\max} w obwodzie 1 są większe, mniejsze, czy takie same jak w obwodzie 2?



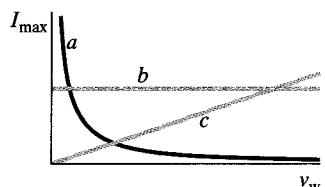
Rys. 33.17. Pytanie 4

5. Ładunki na okładkach kondensatorów w trzech obwodach drgających LC zmieniają się w następujący sposób: 1) $q = 2 \cos 4t$, 2) $q = 4 \cos t$, 3) $q = 3 \cos 4t$ (gdzie q jest wyrażone w kolumnbach, a t w sekundach). Uszereguj obwody w zależności od:
a) amplitudy natężenia prądu, b) okresu, zaczynając od największej wartości.

6. W obwodzie drgającym LC zwiększyłeś indukcyjność L przy danym maksymalnym ładunku q_{\max} . Czy: a) amplituda natężenia prądu I_{\max} , b) maksymalna energia magnetyczna E_B wzrosła, zmalała, czy pozostała taka sama?

7. Źródło zmiennej SEM o pewnej amplitudzie dołączamy kolejno do opornika, kondensatora i cewki. Po dołączeniu SEM do każdego z elementów zmieniamy częstotliwość źródła v_w , a następnie mierzmy i wykreślmy amplitudę I_{\max} natężenia prądu, płynącego przez ten element jako funkcji v_w .

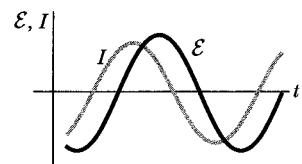
Któremu z trzech elementów odpowiadają poszczególne wykresy na rysunku 33.18?



Rys. 33.18. Pytanie 7

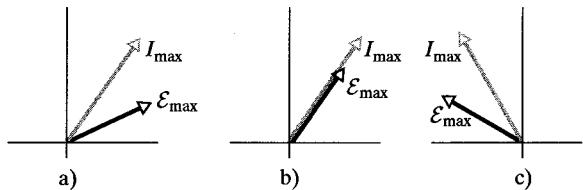
8. Wartości fazy początkowej ϕ dla czterech pobudzanych sinusoidalnie szeregowych obwodów RLC wynoszą odpowiednio: 1) -15° , 2) $+35^\circ$, 3) $\pi/3$ rad, 4) $-\pi/6$ rad. a) W którym obwodzie obciążenie ma charakter pojemnościowy? b) W którym obwodzie natężenie prądu opóźnia się w stosunku do zmiennej SEM?

9. Na rysunku 33.19 przedstawiono wykres natężenia prądu I i przyłożonej SEM \mathcal{E} w szeregowym obwodzie RLC .
a) Czy natężenie prądu wyprzedza, czy opóźnia się w stosunku do SEM? b) Czy obciążenie w obwodzie ma charakter pojemnościowy, czy indukcyjny? c) Czy częstotliwość kołowa SEM ω_w jest większa, czy mniejsza od częstotliwości kołowej drgań swobodnych ω ?



Rys. 33.19. Pytania 9 i 11

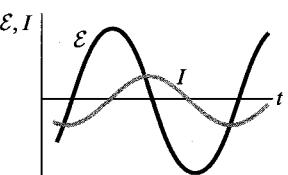
10. Na rysunku 33.20 przedstawiono trzy przypadki, podobne do pokazanych na rysunku 33.12. Dla każdego przypadku sprawdź, czy częstotliwość kołowa drgań wymuszonych jest większa, mniejsza, czy równa rezonansowej częstotliwości kołowej obwodu.



Rys. 33.20. Pytanie 10

11. Na rysunku 33.19 przedstawiono wykres natężenia prądu I i przyłożonej SEM \mathcal{E} w szeregowym obwodzie RLC . Czy wykres natężenia prądu przesunie się w lewo, czy w prawo w stosunku do wykresu SEM, a amplituda tego wykresu wzrośnie, czy zmniejszy się, jeśli zwiększymy nieco: a) L , b) C , c) ω_w ?

12. Na rysunku 33.21 przedstawiono wykres natężenia prądu I i przyłożonej SEM \mathcal{E} w szeregowym obwodzie RLC . a) Czy faza początkowa natężenia prądu jest dodatnia, czy ujemna? b) Czy należy zwiększyć, czy zmniejszyć L , aby zwiększyć szybkość przepływu energii do obciążenia oporowego? c) Czy w tym samym celu należy zwiększyć, czy zmniejszyć C ?



Rys. 33.21. Pytanie 12

Zadania

Rozwiązań jest dostępne na stronie internetowej podręcznika: <http://www.wiley.com/college/hrw>
Rozwiązań jest dostępne w postaci interaktywnej, wykorzystującej oprogramowanie Interactive Learning-Ware (na tej samej stronie)

33.2. Drgania obwodu LC, opis jakościowy

1. Jaka jest pojemność obwodu drgającego LC , jeśli maksymalny ładunek na okładkach kondensatora wynosi $1,6 \mu\text{C}$, a całkowita energia jest równa $140 \mu\text{J}$?
2. W obwodzie drgającym LC , $L = 1,1 \text{ mH}$, a $C = 4 \mu\text{F}$. Maksymalny ładunek na okładkach kondensatora jest równy $3 \mu\text{C}$. Oblicz maksymalną wartość natężenia prądu.

3. Obwód drgający LC składa się z cewki o indukcyjności 75 mH i kondensatora o pojemności $3,6 \mu\text{F}$. Oblicz: a) całkowitą energię w obwodzie, b) maksymalne natężenie prądu, jeśli maksymalny ładunek na okładkach kondensatora jest równy $2,9 \mu\text{C}$.

4. W pewnym obwodzie drgającym LC energia zamienia się z energii elektrycznej na kondensatorze na energię magnetyczną w cewce w ciągu $1,5 \mu\text{s}$. a) Ile wynosi okres drgań? b) Ile wynosi częstotliwość drgań? c) Po jakim czasie od momentu, w którym energia magnetyczna miała wartość maksymalną, osiągnie ona znów maksimum?

5. Częstotliwość drgań pewnego obwodu LC jest równa 200 kHz . W chwili $t = 0$ ładunek dodatni na okładce A kondensatora ma maksymalną wartość. Po jakim czasie $t > 0$: a) ładunek dodatni na okładce A osiągnie ponownie maksimum, b) ładunek dodatni na drugiej okładce kondensatora osiągnie maksimum, c) indukcja magnetyczna pola w cewce osiągnie maksymalną wartość?

33.3. Analogiczne układy elektryczny i mechaniczny

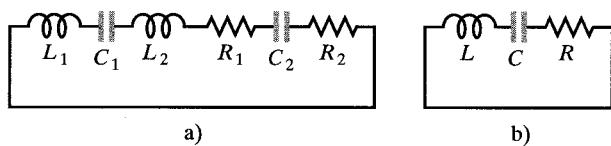
6. Ciało o masie $0,5 \text{ kg}$ wykonuje drgania harmoniczne na sprężynie, która po rozciągnięciu o 2 mm od stanu równowagi działa siłą zwrotną 8 N . a) Ile wynosi częstotliwość kołowa drgań? b) Ile wynosi okres drgań? c) Oblicz pojemność w obwodzie LC o tym samym okresie drgań, jeżeli L ma wartość 5 H .

7. W obwodzie drgającym LC , zawierającym cewkę o indukcyjności $1,25 \text{ H}$, energia jest równa $5,7 \mu\text{J}$. Maksymalny ładunek na okładkach kondensatora wynosi $175 \mu\text{C}$. Oblicz: a) masę, b) współczynnik sprężystości sprężyny, c) maksymalne przemieszczenie, d) maksymalną prędkość w układzie mechanicznym o tym samym okresie drgań.

33.4. Drgania LC , opis ilościowy

8. Układy drgające LC są używane w obwodach elektrycznych, połączonych z głośnikami i służących do wytwarzania pewnych dźwięków w muzyce elektronicznej. Jaka indukcyjność należy połączyć z kondensatorem o pojemności $6,7 \mu\text{F}$, aby uzyskać częstotliwość 10 kHz , bliską środka zakresu częstotliwości słyszalnych?
9. W obwodzie drgającym LC , zawierającym $L = 50 \text{ mH}$ i $C = 4 \mu\text{F}$, w chwili początkowej natężenie prądu ma wartość maksymalną. Po jakim czasie kondensator zostanie po raz pierwszy całkowicie naładowany?

10. Obwód zamknięty o jednym oczku składa się z cewek (L_1, L_2, \dots), kondensatorów (C_1, C_2, \dots) i oporników (R_1, R_2, \dots), połączonych szeregowo, np. jak pokazano na rysunku 33.22a. Wykaż, że niezależnie od kolejności tych elementów, obwód będzie się zachowywał tak, jak prosty obwód LC , pokazany na rysunku 33.22b. (Wskazówka: Zastosuj drugie prawo Kirchhoffa i zatrzyj do zadania 43 w rozdziale 31).

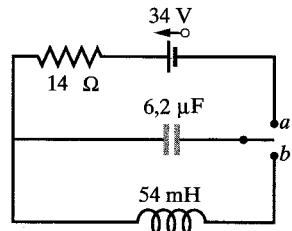


Rys. 33.22. Zadanie 10

11. W obwodzie drgającym LC , składającym się z kondensatora o pojemności 1 nF i cewki o indukcyjności 3 mH maksymalne napięcie wynosi 3 V . a) Ile wynosi maksymalny ładunek na okładkach kondensatora? b) Ile wynosi maksymalne natężenie prądu w obwodzie? c) Ile wynosi maksymalna energia, zmagazynowana w polu magnetycznym cewki?

12. W obwodzie drgającym LC o pojemności $C = 4 \mu\text{F}$ maksymalne napięcie na kondensatorze wynosi $1,5 \text{ V}$, a maksymalne natężenie prądu w cewce — 5 mA . a) Ile wynosi indukcyjność L ? b) Ile wynosi częstotliwość drgań? c) Ile czasu potrzeba, aby ładunek kondensatora wzrosł od zera do wartości maksymalnej?

13. W obwodzie, pokazanym na rysunku 33.23, klucz znajduje się przez dłuższy czas w położeniu a, a następnie zostaje przełączony do położenia b. a) Oblicz częstotliwość drgań natężenia prądu. b) Ile wynosi amplituda drgań natężenia prądu?



Rys. 33.23. Zadanie 13

14. Masz do dyspozycji cewkę o indukcyjności 10 mH i dwa kondensatory o pojemnościach $5 \mu\text{F}$ i $2 \mu\text{F}$. Jakie częstotliwości drgań

możesz uzyskać przez połączenie tych elementów w różnych kombinacjach?

15. Kondensator o regulowanej pojemności, obejmującej zakres od 10 do 365 pF, tworzy wraz z cewką obwód LC o zmiennej częstotliwości, używany do dostrajania radioodbiornika do sygnału wejściowego. a) Ile wynosi stosunek maksymalnej i minimalnej częstotliwości, przy zastosowaniu takiego kondensatora? b) Jeżeli ten obwód ma być użyty do otrzymywania częstotliwości od 0,54 MHz do 1,60 MHz, to stosunek częstotliwości obliczony w punkcie (a) jest za duży. Zakres zmian może być odpowiednio dobrany przez dodanie kondensatora, połączonego równolegle z kondensatorem o zmiennej pojemności. Jaka powinna być pojemność tego dodatkowego kondensatora i jakiej indukcyjności należy użyć, aby uzyskać poszczególny zakres częstotliwości?

16. W obwodzie drgającym LC energia zmagazynowana w polu magnetycznym cewki stanowi w pewnej chwili 75% całkowitej energii obwodu. a) Jaką część maksymalnego ładunku kondensatora stanowi ładunek, znajdujący się w tej samej chwili na okładkach kondensatora? b) Jaką część maksymalnego natężenia prądu w cewce stanowi natężenie prądu płynącego w tej samej chwili przez cewkę?

17. W obwodzie drgającym LC $L = 25 \text{ mH}$, a $C = 7,8 \mu\text{F}$. W chwili $t = 0$ natężenie prądu wynosi $9,2 \text{ mA}$, ładunek na okładkach kondensatora jest równy $3,8 \mu\text{C}$, a kondensator się ładowuje. a) Jaka jest całkowita energia w obwodzie? b) Ile wynosi maksymalny ładunek na okładkach kondensatora? c) Ile wynosi maksymalne natężenie prądu? d) Jeżeli ładunek na okładkach kondensatora jest dany wzorem $q = q_{\max} \cos(\omega t + \phi)$, to ile wynosi faza początkowa ϕ ? e) Przyjmij, że w chwili $t = 0$ kondensator się rozładowuje, a pozostałe dane pozostają bez zmian. Jaka wtedy będzie faza początkowa ϕ ?

18. Cewka jest dołączona do kondensatora, którego pojemność może być zmieniana za pomocą pokrętła. Chcielibyśmy, aby częstotliwość drgań obwodu LC zmieniała się liniowo w funkcji kąta obrotu pokrętła, obejmując zakres $2 \cdot 10^5$ do $4 \cdot 10^5 \text{ Hz}$, gdy pokrętło obracane jest w zakresie od zera do 180° . Wykreś wartości wymaganej pojemności jako funkcji kąta obrotu pokrętła dla $L = 1 \text{ mH}$.

19. W obwodzie drgającym LC $L = 3 \text{ mH}$, a $C = 2,7 \mu\text{F}$. W chwili $t = 0$ ładunek na okładkach kondensatora jest równy zeru, a natężenie prądu jest równe 2 A . a) Ile wynosi maksymalny ładunek, który pojawi się na okładkach kondensatora? b) Używając okresu drgań T jako jednostki, określ, ile czasu upłynie od chwili $t = 0$ do momentu, w którym energia zmagazynowana w kondensatorze będzie się zwiększała najszybciej? c) Jaka jest maksymalna szybkość przekazywania energii do kondensatora?

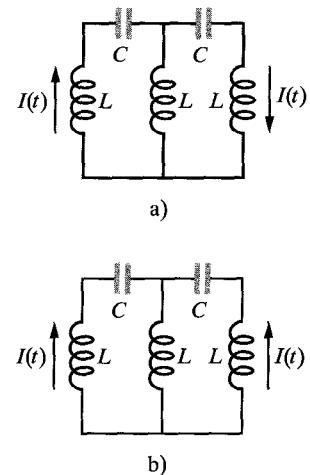
20. Obwód szeregowy, zawierający indukcyjność L_1 i pojemność C_1 , wykonuje drgania o częstotliwości kołowej ω . Drugi obwód szeregowy, zawierający indukcyjność L_2 i pojemność C_2 , wykonuje drgania o tej samej częstotliwości kołowej. Oblicz jako funkcję ω częstotliwość drgań obwodu szeregowego zawierającego wszystkie cztery elementy. (Wskazówka: Zastosuj wzory dla pojemności

równoważnej i indukcyjności równoważnej: patrz paragraf 26.4 i zadanie 43 w rozdziale 31).

21. W obwodzie drgającym LC , zawierającym pojemność $C = 64 \mu\text{F}$, natężenie prądu dane jest następującą funkcją czasu: $I = (1,6) \sin(2500t + 0,68)$, gdzie t jest wyrażone w sekundach, I w amperach, a faza początkowa w radianach. a) Kiedy, licząc od chwili $t = 0$, natężenie prądu osiągnie maksymalną wartość? Jaka jest: b) indukcyjność L , c) całkowita energia w obwodzie?

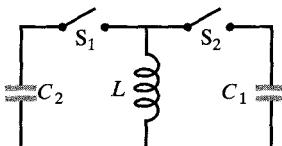
22. Trzy identyczne cewki L i dwa identyczne kondensatory C tworzą obwód, składający się z dwóch oczek, jak pokazano na rysunku 33.24. a) Przyjmij, że prądy płyną w kierunkach pokazanych na rysunku 33.24a. Ile wynosi natężenie prądu płynącego przez środkową cewkę? Z drugiego prawa Kirchhoffa wyprowadź równania dla tego obwodu i wykaż, że są one spełnione, jeśli obwód wykonuje drgania z częstotliwością kołową $\omega = 1/\sqrt{LC}$.

b) Przyjmij teraz, że prądy płyną w kierunkach, pokazanych na rysunku 33.24b. Ile wynosi natężenie prądu, płynącego przez środkową cewkę? Z drugiego prawa Kirchhoffa wyprowadź równania dla tego obwodu i wykaż, że są one spełnione, jeśli obwód wykonuje drgania z częstotliwością kołową $\omega = 1/\sqrt{3LC}$. Obwód może wykonywać drgania o dwóch różnych częstotliwościach, zatem nie możemy zastąpić go równoważnym obwodem o jednym oczku.



Rys. 33.24. Zadanie 22

23*. Na rysunku 33.25 kondensator 1 o pojemności $C_1 = 900 \mu\text{F}$ jest początkowo naładowany do napięcia 100 V , a kondensator 2 jest rozładowany. Cewka ma indukcyjność 10 H . Wyjaśnij szczegółowo, w jaki sposób można naładować kondensator 2 do napięcia 300 V , używając klawiszy S_1 i S_2 .



Rys. 33.25. Zadanie 23

33.5. Drgania tłumione w obwodzie RLC

24. Masz do czynienia z obwodem tłumionym RLC . a) Wykaż, że czynnik tłumiący $e^{-Rt/2L}$ (zawierający L , ale nie C) może być zapisany w bardziej symetrycznej postaci (zawierającej L i C) jako $e^{-\pi R(\sqrt{C/L})t/T}$. T oznacza tutaj okres drgań przy pominięciu oporu. b) Korzystając z punktu (a), wykaż, że jednostką $\sqrt{L/C}$ w układzie SI jest om. c) Korzystając z punktu (a), wykaż, że warunkiem, aby względna strata energii w czasie jednego cyklu była mała, jest $R \ll \sqrt{L/C}$.

25. Jaki opór R należy połączyć szeregowo z indukcyjnością $L = 220 \text{ mH}$ i pojemnością $C = 12 \mu\text{F}$, aby maksymalny ładunek na kondensatorze zmniejszył się do 99% swojej początkowej wartości w czasie 50 cykli drgań? (Przyjmij, że $\omega' \approx \omega$). 

26. Obwód o jednym oczku składa się z opornika o oporze $7,2 \Omega$, cewki o indukcyjności 12 H i kondensatora o pojemności $3,2 \mu\text{F}$. W chwili początkowej kondensator ma ładunek $6,2 \mu\text{C}$, a natężenie prądu jest równe zeru. Oblicz ładunek na kondensatorze po N całkowitych cyklach drgań, gdy $N = 5, 10$ i 100 .

27. Dla szeregowego obwodu drgającego RLC oblicz czas, po którym maksymalna energia, zgromadzona na kondensatorze w czasie drgań spadnie do połowy wartości początkowej. Przyjmij $q = q_{\max}$ dla $t = 0$.

28. W chwili $t = 0$ w szeregowym obwodzie RLC ładunek na kondensatorze jest równy zeru, natomiast przez cewkę płynie prąd o natężeniu I_{\max} . a) Oblicz fazę początkową ϕ w równaniu (33.25) dla tego obwodu. b) Wyprowadź wzory, określające ładunek q w kondensatorze jako funkcję czasu t , zależną od amplitudy natężenia prądu i częstotliwości kołowej drgań ω' .

29*. Wykaż, że względna wartość energii $\Delta E/E$, traconej w szeregowym obwodzie drgającym RLC , w czasie jednego cyklu drgań, jest z dobrym przybliżeniem opisana wyrażeniem $2\pi R/\omega L$. Wielkość $\omega L/R$ jest często nazywana *dobrocią* Q obwodu. Obwody o dużej dobroci mają mały opór i małą względową wartość energii ($= 2\pi/Q$), traconej w czasie jednego cyklu. 

33.8. Trzy proste obwody

30. Kondensator o pojemności $1,5 \mu\text{F}$ jest połączony, jak na rysunku 33.9a, ze źródłem prądu zmiennego o $\mathcal{E}_{\max} = 30 \text{ V}$. Ile wynosi amplituda natężenia prądu zmiennego, jeżeli częstotliwość SEM jest równa: a) 1 kHz , b) 8 kHz ?

31. Cewka o indukcyjności 50 mH jest połączona, jak na rysunku 33.10a, ze źródłem prądu zmiennego o $\mathcal{E}_{\max} = 30 \text{ V}$. Ile wynosi amplituda natężenia prądu zmiennego, jeżeli częstotliwość SEM jest równa: a) 1 kHz , b) 8 kHz ? 

32. Opornik o oporze 50Ω jest połączony, jak na rysunku 33.8a, ze źródłem prądu zmiennego o $\mathcal{E}_{\max} = 30 \text{ V}$. Ile wynosi amplituda natężenia prądu zmiennego, jeżeli częstotliwość SEM jest równa: a) 1 kHz , b) 8 kHz ?

33. a) Przy jakiej częstotliwości cewka o indukcyjności 6 mH i kondensator o pojemności $10 \mu\text{F}$ będą miały tę samą reaktancję? b) Ile wynosić będzie ta reaktancja? c) Wykaż, że ta częstotliwość jest częstotością własną obwodu drgającego złożonego z tych samych elementów L i C .

34. Źródło prądu zmiennego ma SEM $\mathcal{E} = \mathcal{E}_{\max} \sin \omega_w t$, gdzie $\mathcal{E}_{\max} = 25 \text{ V}$, a $\omega_w = 377 \text{ rad/s}$. Źródło to dołączono do cewki

o indukcyjności $12,7 \text{ mH}$. a) Ile wynosi maksymalna wartość natężenia prądu? b) Ile wynosi SEM źródła, gdy natężenie prądu osiąga wartość maksymalną? c) Ile wynosi natężenie prądu, gdy SEM źródła jest równa $-12,5 \text{ V}$, a jej wartość bezwzględna rośnie?

35. Źródło prądu zmiennego ma SEM $\mathcal{E} = \mathcal{E}_{\max} \sin(\omega_w t - \pi/4)$, gdzie $\mathcal{E}_{\max} = 30 \text{ V}$, a $\omega_w = 350 \text{ rad/s}$. Natężenie prądu płynącego w obwodzie dołączonym do źródła, wynosi $I(t) = I_{\max} \sin(\omega_w t - 3\pi/4)$, gdzie $I_{\max} = 620 \text{ mA}$. a) Po jakim czasie, licząc od $t = 0$, SEM osiągnie po raz pierwszy wartość maksymalną? b) Po jakim czasie, licząc od $t = 0$, natężenie prądu osiągnie po raz pierwszy maksimum? c) Obwód składa się z jednego elementu i źródła. Czy jest to kondensator, cewka, czy opornik? Uzasadnij odpowiedź. d) Zależnie od odpowiedzi w punkcie (c) określ, jaka jest wartość pojemności, indukcyjności lub oporu.

36. Źródło prądu zmiennego z zadania 34 dołączono do kondensatora o pojemności $4,15 \mu\text{F}$. a) Ile wynosi maksymalna wartość natężenia prądu? b) Ile wynosi SEM źródła, gdy natężenie prądu osiąga maksimum? c) Ile wynosi natężenie prądu, gdy SEM źródła jest równa $-12,5 \text{ V}$, a jej wartość bezwzględna rośnie?

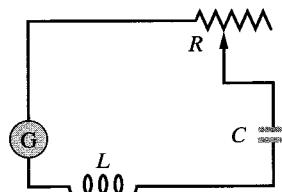
33.9. Obwód szeregowy RLC

37. a) Oblicz Z , ϕ i I_{\max} dla obwodu, jak w przykładzie 33.7, ale bez kondensatora, podczas gdy pozostałe parametry obwodu pozostają bez zmian. b) Dla tego przypadku narysuj (w skali) diagram wskazowy, analogiczny do przedstawionego na rysunku 33.11d.

38. a) Oblicz Z , ϕ i I_{\max} dla obwodu, jak w przykładzie 33.7, ale bez cewki, podczas gdy pozostałe parametry obwodu pozostają bez zmian. b) Dla tego przypadku narysuj (w skali) diagram wskazowy, analogiczny do przedstawionego na rysunku 33.11d.

39. a) Oblicz Z , ϕ i I_{\max} dla obwodu, jak w przykładzie 33.7, ale z kondensatorem o pojemności $C = 70 \mu\text{F}$, podczas gdy pozostałe parametry obwodu pozostają bez zmian. b) Dla tego przypadku narysuj diagram wskazowy, analogiczny do przedstawionego na rysunku 33.11d i porównaj dokładnie obydwa wykresy. 

40. Na rysunku 33.26 źródło G o regulowanej częstotliwości jest dołączane do opornika o zmiennym oporze R , kondensatora o pojemności $C = 5,5 \mu\text{F}$ i cewki o indukcyjności L . Amplituda natężenia prądu, wytworzonego w obwodzie przez źródło jest równa połowie wartości maksymalnej, gdy częstotliwość źródła wynosi $1,3$ lub $1,5 \text{ kHz}$. a) Jaka jest wartość L ? b) Jak zmienia się częstotliwość, przy których amplituda natężenia prądu jest równa połowie wartości maksymalnej, jeżeli zwiększymy wartość R ?



Rys. 33.26. Zadanie 40

41. Czy w obwodzie RLC amplituda napięcia na cewce może być większa od amplitudy SEM źródła? Rozważ obwód RLC , w

którym $\mathcal{E}_{\max} = 10 \text{ V}$, $R = 10 \Omega$, $L = 1 \text{ H}$, a $C = 1 \mu\text{F}$. Wyznacz amplitudę napięcia na cewce w warunkach rezonansu.

42. Dla maksymalnej wartości SEM źródła w przykładzie 33.7 oblicz napięcie na: a) źródle, b) oporze, c) pojemności, d) indukcyjności. e) Sumując te napięcia z odpowiednimi znakami, sprawdź, czy drugie prawo Kirchhoffa jest spełnione.

43. Cewkę o indukcyjności 88 mH i nieznanym oporze oraz kondensator o pojemności $0,94 \mu\text{F}$ połączono szeregowo ze źródłem zmiennej SEM o częstotliwości 930 Hz . Ile wynosi opór cewki, jeżeli różnica faz między przyłożonym napięciem a natężeniem prądu wynosi 75° ?

44. Źródło prądu zmiennego o $\mathcal{E}_{\max} = 220 \text{ V}$ i częstotliwości 400 Hz wywołuje drgania szeregowego obwodu RLC , w którym $R = 220 \Omega$, $L = 150 \text{ mH}$, a $C = 24 \mu\text{F}$. Oblicz: a) reaktancję pojemnościową X_C , b) impedancję Z , c) amplitudę natężenia prądu I_{\max} . Do obwodu dołączono szeregowo drugi kondensator o takiej samej pojemności. Określ, czy wartości d) X_C , e) Z , f) I_{\max} wzrosły, zmalały, czy pozostały takie same.

45. Obwód RLC , taki jak na rysunku 33.7, ma $R = 5 \Omega$, $C = 20 \mu\text{F}$, $L = 1 \text{ H}$ i $\mathcal{E}_{\max} = 30 \text{ V}$. a) Przy jakiej częstotliwości kołowej ω_w amplituda natężenia prądu osiągnie wartość maksymalną, jak na rysunku 33.13? b) Jaka jest ta maksymalna wartość? c) Przy jakich dwóch częstotliwościach kołowych ω_{w1} i ω_{w2} amplituda natężenia prądu będzie równa połowie wartości maksymalnej? d) Jaka jest względna szerokość połówkowa [= $(\omega_{w1} - \omega_{w2})/\omega$] krzywej rezonansowej dla tego obwodu?

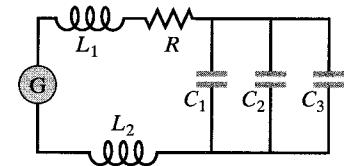
46. Źródło prądu zmiennego ma być połączone szeregowo z cewką o indukcyjności $L = 2 \text{ mH}$ i kondensatorem o pojemności C . Możesz otrzymać pojemność C , używając razem lub oddzielnie kondensatorów o pojemnościach $C_1 = 4 \mu\text{F}$ i $C_2 = 6 \mu\text{F}$. Jaka może być częstotliwość rezonansowa obwodu w zależności od tego, w jaki sposób użyjesz kondensatorów C_1 i C_2 ?

47. Wykaż, że względna szerokość połówkowa (patrz zadanie 45) krzywej rezonansowej jest dana wzorem:

$$\frac{\Delta\omega_w}{\omega} = \sqrt{\frac{3C}{L}} R,$$

gdzie ω jest częstotliwością kołową w rezonansie, a $\Delta\omega_w$ jest szerokością krzywej rezonansowej w połowie maksymalnej wartości amplitud. Zauważ, że $\Delta\omega_w/\omega$ rośnie wraz ze wzrostem R , jak pokazano na rysunku 33.13. Skorzystaj z tego wzoru, aby sprawdzić odpowiedź do zadania 45d.

48. Na rysunku 33.27 źródło G o regulowanej częstotliwości drgań jest połączone z oporem $R = 100 \Omega$, indukcyjnościami $L_1 = 1,7 \text{ mH}$ i $L_2 = 2,3 \text{ mH}$ oraz pojemnościami $C_1 = 4 \mu\text{F}$, $C_2 = 2,5 \mu\text{F}$ i $C_3 = 3,5 \mu\text{F}$. a) Jaka jest częstotliwość rezonansowa obwodu? (Wskaźówka: Zobacz zadanie 43 w rozdziale 31). Jak zmieni się częstotliwość rezonansowa, jeśli: b) zwiększymy wartość R , c) zwiększymy wartość L_1 , d) usuniemy z obwodu pojemność C_3 ?



Rys. 33.27. Zadanie 48

33.10. Moc w obwodach prądu zmiennego

49. Oblicz natężenie prądu stałego, który wytwarza w pewnym oporniku taką samą ilość energii termicznej, jak prąd zmienny o maksymalnym natężeniu $2,6 \text{ A}$.

50. Voltomierz prądu zmiennego o dużej impedancji dołączono kolejno do cewki, kondensatora i opornika w szeregowym obwodzie, zasilanym zmienną SEM o wartości skutecznej 100 V . Za każdym razem odczytano tę samą wartość napięcia. Jakie było wskazanie voltmierza?

51. Jaka jest maksymalna wartość napięcia zmiennego, którego wartość skuteczna jest równa 100 V ?

52. a) Czy dla danych z zadania 34c źródło dostarcza energię, czy odbiera ją z pozostałej części obwodu? b) Powtórz obliczenia dla danych z zadania 36c.

53. Oblicz średnią szybkość rozpraszania energii w obwodach omawianych w zadaniach 31, 32, 37 i 38.

54. Wykaż, że średnia szybkość, z jaką energia jest dostarczana do obwodu przedstawionego na rysunku 33.7, może być również napisana w postaci $P_{\text{sr}} = \mathcal{E}_{\text{sk}}^2 R/Z^2$. Wykaż, że to wyrażenie, określające moc średnią, daje poprawne wyniki dla obwodu o charakterze czysto oporowym, dla obwodu RLC w rezonansie, dla obwodu o charakterze czysto pojemnościowym i czysto indukcyjnym.

55. Klimatyzator podłączony do sieci o napięciu skutecznym 230 V może być przedstawiony jako szeregowe połączenie oporu 24Ω i reaktancji indukcyjnej 3Ω . a) Oblicz impedancję klimatyzatora. b) Wyznacz średnią szybkość, z jaką energia jest dostarczana do tego urządzenia.

56. W szeregowym obwodzie drgającym RLC : $R = 16 \Omega$, $C = 31,2 \mu\text{F}$, $L = 9,2 \text{ mH}$ i $\mathcal{E} = \mathcal{E}_{\max} \sin \omega_w t$, gdzie $\mathcal{E}_{\max} = 45 \text{ V}$, a $\omega_w = 3000 \text{ rad/s}$. Dla chwili $t = 0,442 \text{ ms}$ oblicz: a) szybkość, z jaką energia jest dostarczana przez źródło, b) szybkość, z jaką zmienia się energia w kondensatorze, c) szybkość, z jaką zmienia się energia w cewce, d) szybkość, z jaką energia jest rozpraszana w oporniku. e) Co oznacza wynik ujemny dla któregokolwiek z punktów (a), (b) i (c)? f) Wykaż, że suma wyników z punktów (b), (c) i (d) jest równa wynikowi z punktu (a).

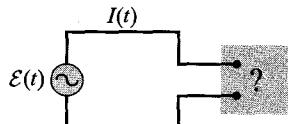
57. Na rysunku 33.28 przedstawiono źródło prądu zmiennego, dołączone za pomocą pary zacisków do „czarnej skrzynki”. Skrzynka zawiera obwód RLC o nieznanych elementach i połączeniach, być może nawet obwód o wielu oczkach. Pomiary wykonane na zewnątrz skrzynki wykazują, że:

$$\mathcal{E}(t) = (75 \text{ V}) \sin \omega_w t$$

oraz

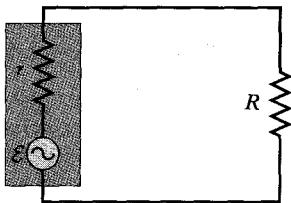
$$I(t) = (1,2 \text{ A}) \sin(\omega_w t + 42^\circ)$$

- a) Jaki jest współczynnik mocy? b) Czy natężenie prądu wyprzedza, czy opóźnia się względem SEM? c) Czy obwód w skrzynce ma charakter indukcyjny, czy pojemnościowy? d) Czy obwód w skrzynce jest w rezonansie? e) Czy w skrzynce musi znajdować się kondensator, cewka, opornik? f) Jaka jest średnia szybkość dostarczania energii ze źródła do skrzynki? g) Dlaczego nie musisz znać częstości kołowej ω_w , aby odpowiedzieć na te wszystkie pytania?



Rys. 33.28. Zadanie 57

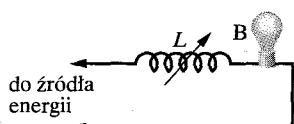
58. Wykaż, że w układzie przedstawionym na rysunku 33.29 średnia szybkość rozpraszania energii w oporze R jest największa, gdy R jest równe wewnętrznemu oporowi r źródła prądu zmiennego. (W dyskusji w tekście założymy milcząco, że $r = 0$).



Rys. 33.29. Zadanie 58 i 65

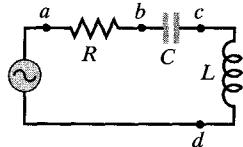
59. W obwodzie RLC , jak na rysunku 33.7, przyjmij, że $R = 5 \Omega$, $L = 86,4 \text{ mH}$, $v_w = 50 \text{ Hz}$, a $E_{\max} = 30 \text{ V}$. Dla jakiej wartości pojemności średnia szybkość rozpraszania energii w oporze będzie: a) największa, b) najmniejsza? c) Jakie są te maksymalne i minimalne wartości szybkości rozpraszania energii? Jakie są: d) odpowiadające tym wartościom fazy początkowe, e) współczynniki mocy?

60. Do przyśiemniania światel na scenie teatru używa się układu złożonego z cewki o zmiennej indukcyjności L (regulowanej od zera do L_{\max}), połączonej szeregowo z żarówką B, jak przedstawiono na rysunku 33.30. Obwód jest zasilany napięciem o wartości skutecznej 230 V i częstotliwości 50 Hz, a żarówka jest oznaczona jako „230 V, 1000 W”. a) Jaka jest wymagana wartość L_{\max} , jeżeli szybkość rozpraszania energii w żarówce ma się zmieniać w zakresie od górnej granicy 1000 W do wartości 5 razy mniejszej? Przyjmij, że opór żarówki nie zależy od temperatury. b) Czy zamiast cewki można użyć opornika o zmiennym oporze (regulowanym od zera do R_{\max})? Jeżeli tak, to jaka wartość R_{\max} byłaby potrzebna? Dlaczego nie stosuje się takiego rozwiązania?



Rys. 33.30. Zadanie 60

61. Na rysunku 33.31, $R = 15 \Omega$, $C = 4,7 \mu\text{F}$, a $L = 25 \text{ mH}$. Źródło wytwarza sinusoidalne napięcie o wartości skutecznnej 75 V i częstotliwości $v = 550 \text{ Hz}$. a) Oblicz wartość skuteczną natężenia prądu. b) Oblicz wartości skuteczne napięć U_{ab} , U_{bc} , U_{cd} , U_{bd} , U_{ad} . c) Z jaką średnią szybkością energia jest rozpraszana w każdym z trzech elementów obwodu?



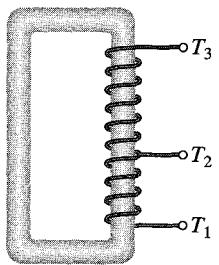
Rys. 33.31. Zadanie 61

33.11. Transformatory

62. Źródło dostarcza napięcia zmiennego o wartości 100 V do uwojenia pierwotnego transformatora o 50 zwojach. Jakie jest napięcie w obwodzie wtórnym, jeżeli uwojenie wtórne ma 500 zwojów?

63. Transformator ma 500 zwojów w obwodzie pierwotnym i 10 zwojów w obwodzie wtórnym. a) Jakie jest napięcie U_w przy otwartym obwodzie wtórnym, jeżeli wartość skuteczna napięcia U_p wynosi 230 V? b) Jakie są natężenia prądów w obwodzie pierwotnym i wtórnym, jeżeli obwód wtórnego jest obciążony oporem 23Ω ?

64. Na rysunku 33.32 przedstawiono autotransformator, który składa się z pojedynczej cewki, nawiniętej na rdzeniu z żelaza. Autotransformator ma trzy zaciski. Między zaciskami T_1 i T_2 znajduje się 200 zwojów, a między zaciskami T_2 i T_3 — 800 zwojów. Dowolne dwa zaciski mogą być traktowane jako „zaciski pierwotne” i dowolne dwa zaciski — jako „zaciski wtórne”. Wymień wszystkie możliwe stosunki napięcia wtórnego do napięcia pierwotnego.



Rys. 33.32. Zadanie 64

65. Niech prostokąt po lewej stronie rysunku 33.29 oznacza wyjście wzmacniacza akustycznego o dużej impedancji i oporze $r = 1000 \Omega$. Niech $R = 10 \Omega$ oznacza cewkę głośnika o małej impedancji. Aby uzyskać maksymalne przekazywanie energii do obciążenia R , musimy mieć $R = r$, co w tym przypadku nie jest spełnione. Jednakże możemy zastosować transformator do „przekształcania” oporów, aby zachowywały się tak, jak gdyby były większe lub mniejsze niż są w rzeczywistości. Naszkicuj uwojenia pierwotne i wtórne transformatora, który mógłby być włączony między wzmacniaczem a głośnikiem na rys. 33.29, tak aby dopasować do siebie impedancje. Jaka powinna być przekładnia takiego transformatora?

DODATEK A

Międzynarodowy Układ Jednostek (SI)*

1. Jednostki podstawowe SI

| Wielkość | Nazwa | Symbol | Definicja |
|-------------------------------|----------|--------|--|
| długość | metr | m | „długość drogi przebytej przez światło w próżni w czasie 1/299 792 458 sekundy” (1983) |
| masa | kilogram | kg | „ten prototyp [pewien walec z platyny i irydu] będzie odtąd uważany za jednostkę masy” (1889) |
| czas | sekunda | s | „czas trwania 9 192 631 770 okresów fali promieniowania odpowiadającego przejściu między dwoma poziomami nad-subtelnymi stanu podstawowego atomu cezu-133” (1967) |
| natężenie prądu elektrycznego | amper | A | „natężenie stałego prądu elektrycznego, który — płynąc w dwóch równoległych, nieskończonymi długimi, prostoliniowymi przewodach o znikomo małym, kołowym przekroju, umieszczonych w próżni w odległości 1 metra od siebie — wywołuje między tymi przewodami siłę równą $2 \cdot 10^{-7}$ newtona na każdy metr długości przewodu” (1946) |
| temperatura termodynamiczna | kelwin | K | „1/273,16 część temperatury termodynamicznej punktu potrójnego wody” (1967) |
| ilość substancji | mol | mol | „ilość substancji układu zawierającego liczbę cząstek równą liczbie atomów zawartych w 0,012 kilograma węgla-12” (1971) |
| światłość | kandela | cd | „światłość, jaką ma w danym kierunku źródło emitujące promieniowanie elektromagnetyczne o częstotliwości $540 \cdot 10^{12}$ herców i którego natężenie promieniowania w tym kierunku jest równe 1/683 wata na steradian” (1979) |

* Na podstawie pracy „The International System of Units (SI)”. National Bureau of Standards Special Publication 330, 1972 edition. Przytoczone definicje zostały przyjęte przez Konferencję Ogólną ds. Miar i Wag (ciało międzynarodowe) w podanych w tabeli latach. Kandela nie jest używana w niniejszej książce.

2. Niektóre jednostki pochodne SI

| Wielkość | Nazwa jednostki | Symbol |
|--|-------------------------------------|---------------------------------------|
| pole powierzchni | metr kwadratowy | m^2 |
| objętość | metr sześcienny | m^3 |
| częstość | herc | Hz |
| gęstość | kilogram na metr sześcienny | kg/m^3 |
| prędkość | metr na sekundę | m/s |
| prędkość kątowa | radian na sekundę | rad/s |
| przyspieszenie | metr na sekundę kwadrat | m/s^2 |
| przyspieszenie kątowe | radian na sekundę kwadrat | rad/s^2 |
| siła | niuton | N |
| ciśnienie | paskal | Pa |
| praca, energia, ciepło | dżul | J |
| moc | wat | W |
| ładunek elektryczny | kulomb | C |
| napięcie elektryczne, różnica potencjałów, siła elektromotoryczna | wolt | V |
| natężenie pola elektrycznego | wolt na metr (lub niuton na kulomb) | V/m |
| opór elektryczny | om | Ω |
| pojemność elektryczna | farad | F |
| strumień magnetyczny | weber | Wb |
| indukcyjność | henr | H |
| indukcja magnetyczna | tesla | T |
| natężenie pola magnetycznego | amper na metr | A/m |
| entropia | dżul na kelwin | J/K |
| ciepło właściwe | dżul na kilogram i kelwin | $\text{J}/(\text{kg} \cdot \text{K})$ |
| przewodność cieplna | wat na metr i kelwin | $\text{W}/(\text{m} \cdot \text{K})$ |
| natężenie promieniowania | wat na steradian | W/sr |

3. Jednostki uzupełniające SI

| Wielkość | Nazwa jednostki | Symbol |
|-------------|-----------------|--------|
| kąt płaski | radian | rad |
| kąt bryłowy | steradian | sr |

DODATEK B

Niektóre podstawowe stałe fizyczne*

| Stała | Symbol | Wartość zaokrąglona | Wartość najbardziej dokładna ^a (1998) | Niepewność względna ^b |
|---|--------------|---|--|----------------------------------|
| prędkość światła w próżni | c | $3.00 \cdot 10^8$ m/s | 2.997 924 58 | (dokładnie) |
| ładunek elementarny | e | $1.60 \cdot 10^{-19}$ C | 1.602 176 462 | 0.039 |
| stała grawitacyjna | G | $6.67 \cdot 10^{-11}$ m ³ /(s ² · kg) | 6.673 | 1500 |
| uniwersalna stała gazowa | R | 8.31 J/(mol · K) | 8.314 472 | 1.7 |
| stała Avogadra | N_A | $6.02 \cdot 10^{23}$ mol ⁻¹ | 6.022 141 99 | 0.079 |
| stała Boltzmanna | k | $1.38 \cdot 10^{-23}$ J/K | 1.380 650 3 | 1.7 |
| stała Stefana–Boltzmanna | σ | $5.67 \cdot 10^{-8}$ W/(m ² · K ⁴) | 5.670 400 | 7.0 |
| objętość molowa gazu doskonałego ^c | V_m | $2.27 \cdot 10^{-2}$ m ³ /mol | 2.271 098 1 | 1.7 |
| stała elektryczna | ϵ_0 | $8.85 \cdot 10^{-12}$ F/m | 8.854 187 817 62 | (dokładnie) |
| stała magnetyczna | μ_0 | $1.26 \cdot 10^{-6}$ H/m | 1.256 637 061 43 | (dokładnie) |
| stała Plancka | h | $6.63 \cdot 10^{-34}$ J · s | 6.626 068 76 | 0.078 |
| masa elektronu ^d | m_e | $9.11 \cdot 10^{-31}$ kg | 9.109 381 88 | 0.079 |
| | | $5.49 \cdot 10^{-4}$ u | 5.485 799 110 | 0.0021 |
| masa protonu ^d | m_p | $1.67 \cdot 10^{-27}$ kg | 1.672 621 58 | 0.079 |
| | | 1.0073 u | 1.007 276 466 88 | $1.3 \cdot 10^{-4}$ |
| stosunek masy protonu do masy elektronu | m_p/m_e | 1840 | 1836.152 667 5 | 0.0021 |
| stosunek ładunku elektronu do masy elektronu | e/m_e | $1.76 \cdot 10^{11}$ C/kg | 1.758 820 174 | 0.040 |
| masa neutronu ^d | m_n | $1.68 \cdot 10^{-27}$ kg | 1.674 927 16 | 0.079 |
| | | 1.0087 u | 1.008 664 915 78 | $5.4 \cdot 10^{-4}$ |
| masa atomu wodoru ^d | $m_{^1H}$ | 1.0078 u | 1.007 825 031 6 | 0.0005 |
| masa atomu deuteru ^d | $m_{^2H}$ | 2.0141 u | 2.014 101 777 9 | 0.0005 |
| masa atomu helu-4 ^d | $m_{^4He}$ | 4.0026 u | 4.002 603 2 | 0.067 |

* Wartości zebrane w tej tabeli wybrano z wartości zalecanych przez CODATA w 1998 r. (patrz: www.physics.nist.gov).

cd.

| Stała | Symbol | Wartość zaokrąglona | Wartość najbardziej dokładna ^a (1998) | Niepewność względna ^b |
|-------------------------------------|-------------|-----------------------------------|--|----------------------------------|
| masa mionu | m_μ | $1,88 \cdot 10^{-28}$ kg | 1,883 531 09 | 0,084 |
| moment magnetyczny elektronu | μ_e | $9,28 \cdot 10^{-24}$ J/T | 9,284 763 62 | 0,040 |
| moment magnetyczny protonu | μ_p | $1,41 \cdot 10^{-26}$ J/T | 1,410 606 663 | 0,041 |
| magneton Bohra | μ_B | $9,27 \cdot 10^{-24}$ J/T | 9,274 008 99 | 0,040 |
| magneton jądrowy | μ_N | $5,05 \cdot 10^{-27}$ J/T | 5,050 783 17 | 0,040 |
| promień Bohra | a_B | $5,29 \cdot 10^{-11}$ m | 5,291 772 083 | 0,0037 |
| stała Rydberga | R | $1,10 \cdot 10^7$ m ⁻¹ | 1,097 373 156 854 8 | $7,6 \cdot 10^{-6}$ |
| comptonowska długość fali elektronu | λ_C | $2,43 \cdot 10^{-12}$ m | 2,426 310 215 | 0,0073 |

^a Wartości w tej kolumnie należy pomnożyć przez tą samą potęgę liczby 10 i jednostkę co odpowiednie wartości zaokrąglone.^b W jednostkach 10^{-6} (millionowych częściach całości).^c W warunkach normalnych temperatury (0°C) i ciśnienia (1,0 atm, czyli 0,1 MPa).^d Atomowa jednostka masy 1 u = 1,660 538 73 · 10^{-27} kg.

DODATEK C

Niektóre dane astronomiczne

Wybrane odległości od Ziemi

| | | | |
|---|------------------------|--|-----------------------|
| do Księżyca ^a | $3,82 \cdot 10^8$ m | do środka naszej Galaktyki | $2,2 \cdot 10^{20}$ m |
| do Słońca ^a | $1,50 \cdot 10^{11}$ m | do galaktyki Andromedy | $2,1 \cdot 10^{22}$ m |
| do najbliższej gwiazdy (Proxima Centauri) | $4,04 \cdot 10^{16}$ m | do granicy obserwowlanego Wszechświata | $\sim 10^{26}$ m |

^a Odległość średnia.

Słońce, Ziemia i Księżyce

| Właściwość | Jednostka | Słońce | Ziemia | Księżyce |
|--|-------------------|--|----------------------|----------------------|
| masa | kg | $1,99 \cdot 10^{30}$ | $5,98 \cdot 10^{24}$ | $7,36 \cdot 10^{22}$ |
| średni promień | m | $6,96 \cdot 10^8$ | $6,37 \cdot 10^6$ | $1,74 \cdot 10^6$ |
| średnia gęstość | kg/m ³ | 1410 | 5520 | 3340 |
| przyspieszenie grawitacyjne na powierzchni | m/s ² | 274 | 9,81 | 1,67 |
| prędkość ucieczki | km/s | 618 | 11,2 | 2,38 |
| okres obrotu ^a | | 37 d na biegunach ^b , 26 d na równiku ^b | 23 h 56 min | 27,3 d |
| całkowita moc promieniowania ^c | W | $3,90 \cdot 10^{26}$ | | |

^a Mierzony względem odległych gwiazd.

^b Słońce — będące kulą gazu — nie obraca się jak ciało sztywne.

^c Tuż nad atmosferą Ziemi energia słoneczna dociera do powierzchni prostopadłej do kierunku padania z szybkością 1340 W/m².

Wybrane właściwości planet

| | Merkury | Venus | Ziemia | Mars | Jowisz | Saturn | Uran | Neptun | Pluton |
|--|---------|-------------------|--------|--------|-----------------|-----------------|---------------------|----------------|--------|
| średnia odległość od Słońca, 10^6 km | 57,9 | 108 | 150 | 228 | 778 | 1430 | 2870 | 4500 | 5900 |
| okres obiegu, lat | 0,241 | 0,615 | 1,00 | 1,88 | 11,9 | 29,5 | 84,0 | 165 | 248 |
| okres obrotu ^a , d | 58,7 | -243 ^b | 0,997 | 1,03 | 0,409 | 0,426 | -0,451 ^b | 0,658 | 6,39 |
| prędkość na orbicie, km/s | 47,9 | 35,0 | 29,8 | 24,1 | 13,1 | 9,64 | 6,81 | 5,43 | 4,74 |
| nachylenie osi względem płyaszczyny orbity | < 28° | ≈ 3° | 23,4° | 25,0° | 3,08° | 26,7° | 97,9° | 29,6° | 57,5° |
| nachylenie orbity względem orbity Ziemi | 7,00° | 3,39° | | 1,85° | 1,30° | 2,49° | 0,77° | 1,77° | 17,2° |
| mimośród orbity | 0,206 | 0,0068 | 0,0167 | 0,0934 | 0,0485 | 0,0556 | 0,0472 | 0,0086 | 0,250 |
| średnica równika, km | 4880 | 12 100 | 12 800 | 6790 | 143 000 | 120 000 | 51 800 | 49 500 | 2300 |
| masa (masa Ziemi = 1) | 0,0558 | 0,815 | 1,000 | 0,107 | 318 | 95,1 | 14,5 | 17,2 | 0,002 |
| gęstość (gęstość wody = 1) | 5,60 | 5,20 | 5,52 | 3,95 | 1,31 | 0,704 | 1,21 | 1,67 | 2,03 |
| przyspieszenie grawitacyjne na powierzchni ^c , m/s ² | 3,78 | 8,60 | 9,78 | 3,72 | 22,9 | 9,05 | 7,77 | 11,0 | 0,5 |
| prędkość ucieczki ^c , km/s | 4,3 | 10,3 | 11,2 | 5,0 | 59,5 | 35,6 | 21,2 | 23,6 | 1,1 |
| liczba znanych satelitów | 0 | 0 | 1 | 2 | 16 ^d | 18 ^e | 17 ^e | 8 ^e | 1 |

^a Mierzony względem odległych gwiazd.

^b Wenus i Uran obracają się w kierunku przeciwnym do ruchu po orbicie.

^c Przyspieszenie grawitacyjne jest mierzone na równiku planety.

^d + pierścienie.

^e + pierścienie.

DODATEK D

Współczynniki zamiany jednostek

Współczynniki przeliczeniowe można bezpośrednio odczytać z tabeli. Na przykład $1 \text{ stopień} = 2.778 \cdot 10^{-3}$ obrotów, a zatem $16,7^\circ = 16,7 \cdot 2,778 \cdot 10^{-3}$ obrotów. Jednostki SI zapisano czcionką półgrubą. Tabele zostały przygotowane częściowo na podstawie pracy: G. Shortley, D. Williams, *Elements of Physics*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1971.

Kąt płaski

| ° | ' | " | radianów | obrotów |
|---|-----------------------|--------------------|-----------------------|-----------------------|
| $1 \text{ stopień} = 1$ | 60 | 3600 | $1,745 \cdot 10^{-2}$ | $2,778 \cdot 10^{-3}$ |
| $1 \text{ minuta} = 1,667 \cdot 10^{-2}$ | 1 | 60 | $2,909 \cdot 10^{-4}$ | $4,630 \cdot 10^{-5}$ |
| $1 \text{ sekunda} = 2,778 \cdot 10^{-4}$ | $1,667 \cdot 10^{-2}$ | 1 | $4,848 \cdot 10^{-6}$ | $7,716 \cdot 10^{-7}$ |
| $1 \text{ radian} = 57,30$ | 3438 | $2,063 \cdot 10^5$ | 1 | 0.1592 |
| $1 \text{ obrót} = 360$ | $2,16 \cdot 10^4$ | $1,296 \cdot 10^6$ | 6.283 | 1 |

Kąt bryłowy

$$1 \text{ pełny kąt bryłowy} = 4\pi \text{ steradianów} = 12,57 \text{ steradianów}$$

Długość

| cm | metrów | km | cali | stóp | mil |
|--|-----------------------|-----------------------|--------------------|-----------------------|-----------------------|
| $1 \text{ centymetr} = 1$ | 10^{-2} | 10^{-5} | 0,3937 | 3,281 | $6,214 \cdot 10^{-6}$ |
| $1 \text{ metr} = 100$ | 1 | 10^{-3} | 39,37 | 3,281 | $6,214 \cdot 10^{-4}$ |
| $1 \text{ kilometr} = 10^5$ | 1000 | 1 | $3,937 \cdot 10^4$ | 3281 | 0,6214 |
| $1 \text{ cal (in)} = 2,540$ | $2,540 \cdot 10^{-2}$ | $2,540 \cdot 10^{-5}$ | 1 | $8,333 \cdot 10^{-2}$ | $1,578 \cdot 10^{-5}$ |
| $1 \text{ stopa (ft)} = 30,48$ | 0,3048 | $3,048 \cdot 10^{-4}$ | 12 | 1 | $1,894 \cdot 10^{-4}$ |
| $1 \text{ mila (lądowa)} = 1,609 \cdot 10^5$ | 1609 | 1,609 | $6,336 \cdot 10^4$ | 5280 | 1 |

$$1 \text{ angstrom} = 10^{-10} \text{ m}$$

$$1 \text{ mila morska} = 1852 \text{ m} = 1.151 \text{ mil} = 6076 \text{ stóp}$$

$$1 \text{ fermi} = 10^{-15} \text{ m}$$

$$1 \text{ rok świetlny} = 9,460 \cdot 10^{12} \text{ km}$$

$$1 \text{ parsek} = 3,084 \cdot 10^{13} \text{ km}$$

$$1 \text{ sażen} = 6 \text{ stóp}$$

$$1 \text{ promień Bohra} = 5,292 \cdot 10^{-11} \text{ m}$$

$$1 \text{ jard} = 3 \text{ stopy}$$

$$1 \text{ nm} = 10^{-9} \text{ m}$$

Pole powierzchni

| | m^2 | cm^2 | ft^2 | in^2 |
|--|--------------|-----------------------|---------------|---------------|
| 1 metr kwadratowy = 1 | 10^4 | 10,76 | 1550 | |
| 1 centymetr kwadratowy = 10^{-4} | 1 | $1,076 \cdot 10^{-3}$ | 0,1550 | |
| 1 stopa kwadratowa = $9,290 \cdot 10^{-2}$ | 929,0 | 1 | 144 | |
| 1 cal kwadratowy = $6,452 \cdot 10^{-4}$ | 6,452 | $6,944 \cdot 10^{-3}$ | 1 | |

1 mila kwadratowa = $2,788 \cdot 10^7 \text{ ft}^2$ = 640 akrów
 1 barn = 10^{-28} m^2

1 akr = 43 560 ft^2
 1 hektar = 10^4 m^2 = 2.471 akrów

Objętość

| | m^3 | cm^3 | l (litrów) | ft^3 | in^3 |
|--|--------------------|-----------------------|-----------------------|-----------------------|---------------|
| 1 metr sześcienny = 1 | 10^6 | 1000 | 35,31 | $6,102 \cdot 10^4$ | |
| 1 centymetr sześcienny = 10^{-6} | 1 | $1,000 \cdot 10^{-3}$ | $3,531 \cdot 10^{-5}$ | $6,102 \cdot 10^{-2}$ | |
| 1 litr = $1,000 \cdot 10^{-3}$ | 1000 | 1 | $3,531 \cdot 10^{-2}$ | 61,02 | |
| 1 stopa sześcienna = $2,832 \cdot 10^{-2}$ | $2,832 \cdot 10^4$ | 28,32 | 1 | 1728 | |
| 1 cal sześcienny = $1,639 \cdot 10^{-5}$ | 16,39 | $1,639 \cdot 10^{-2}$ | $5,787 \cdot 10^{-4}$ | 1 | |

1 galon amerykański = 4 kwarty = 231 in^3

1 galon angielski = 277,4 in^3 = 1,201 galonów amerykańskich

Masa

| | g | kg | u | uncji | funtów |
|---|------------------------|-----------------------|------------------------|------------------------|--------|
| 1 gram = 1 | 0,001 | $6,022 \cdot 10^{23}$ | $3,527 \cdot 10^{-2}$ | $2,205 \cdot 10^{-3}$ | |
| 1 kilogram = 1000 | 1 | $6,022 \cdot 10^{26}$ | 35,27 | 2,205 | |
| 1 atomowa jednostka masy = $1,661 \cdot 10^{-24}$ | $1,661 \cdot 10^{-27}$ | 1 | $5,857 \cdot 10^{-26}$ | $3,662 \cdot 10^{-27}$ | |
| 1 uncja handlowa (oz) = 28,35 | $2,835 \cdot 10^{-2}$ | $1,718 \cdot 10^{25}$ | 1 | $6,250 \cdot 10^{-2}$ | |
| 1 funt handlowy (lb) = 453,6 | 0,4536 | $2,732 \cdot 10^{26}$ | 16 | 1 | |

Gęstość

| | kg/m^3 | g/cm^3 | lb/ft^3 | lb/in^3 |
|---|-----------------------|-----------------------|-----------------------|------------------|
| 1 kg/m^3 = 1 | 0,001 | $6,243 \cdot 10^{-2}$ | $3,613 \cdot 10^{-5}$ | |
| 1 g/cm^3 = 1000 | 1 | 62,43 | $3,613 \cdot 10^{-2}$ | |
| 1 lb/ft^3 = 16,02 | $1,602 \cdot 10^{-2}$ | 1 | $5,787 \cdot 10^{-4}$ | |
| 1 lb/in^3 = $2,768 \cdot 10^4$ | 27,68 | 17,28 | 1 | |

Czas

| a | d | h | min | s |
|-----------------------------------|-----------------------|-----------------------|-----------------------|--------------------|
| 1 rok = 1 | 365,25 | $8,766 \cdot 10^3$ | $5,259 \cdot 10^5$ | $3,156 \cdot 10^7$ |
| 1 doba = $2,738 \cdot 10^{-3}$ | 1 | 24 | 1440 | $8,640 \cdot 10^4$ |
| 1 godzina = $1,141 \cdot 10^{-4}$ | $4,167 \cdot 10^{-2}$ | 1 | 60 | 3600 |
| 1 minuta = $1,901 \cdot 10^{-6}$ | $6,944 \cdot 10^{-4}$ | $1,667 \cdot 10^{-2}$ | 1 | 60 |
| 1 sekunda = $3,169 \cdot 10^{-8}$ | $1,157 \cdot 10^{-5}$ | $2,778 \cdot 10^{-4}$ | $1,667 \cdot 10^{-2}$ | 1 |

Prędkość

| km/h | m/s | cm/s | mil/h | ft/s |
|------------------------------|--------|-------|-----------------------|-----------------------|
| 1 km/h = 1 | 0,2778 | 27,78 | 0,6214 | 0,9113 |
| 1 m/s = 3,6 | 1 | 100 | 2,237 | 3,281 |
| 1 cm/s = $3,6 \cdot 10^{-2}$ | 0,01 | 1 | $2,237 \cdot 10^{-2}$ | $3,281 \cdot 10^{-2}$ |
| 1 mila/h = 1,609 | 0,4470 | 44,70 | 1 | 1,467 |
| 1 stopa/s = 0,097 | 0,3048 | 30,48 | 0,6818 | 1 |

1 węzeł = 1 mila morska/h = 1,688 ft/s

Sila

| dyn | N | G | kG | funtów |
|-----------------------------|-----------------------|-----------------------|-----------------------|-----------------------|
| 1 dyna = 1 | 10^{-5} | $1,020 \cdot 10^{-3}$ | $1,020 \cdot 10^{-6}$ | $2,248 \cdot 10^{-6}$ |
| 1 N = 10^5 | 1 | 102,0 | 0,1020 | 0,2248 |
| 1 G = 980,7 | $9,807 \cdot 10^{-3}$ | 1 | 0,001 | $2,205 \cdot 10^{-3}$ |
| 1 kG = $9,807 \cdot 10^5$ | 9,807 | 1000 | 1 | 2,205 |
| 1 funt = $4,448 \cdot 10^5$ | 4,448 | 453,6 | 0,4536 | 1 |

Jednostki: gram-sila (G), kilogram-sila (kG) i funt (jednostka siły) są obecnie rzadko stosowane. Są one zdefiniowane następująco: 1 gram-sila jest to siła ciężkości działająca na ciało o masie 1 g w standardowych warunkach ciążenia (tzn. gdy $g = 9,80665 \text{ m/s}^2$); analogicznie dla kilograma-sily i funta.

Ciśnienie

| atm | dyn/cm ² | cali wody | cm Hg | Pa | funtów/in ² | funtów/ft ² |
|---|---------------------|-----------------------|-----------------------|--------------------|------------------------|------------------------|
| 1 atmosfera = 1 | $1,013 \cdot 10^6$ | 406,8 | 76 | $1,013 \cdot 10^5$ | 14,70 | 2116 |
| 1 dyna/cm ² = $9,869 \cdot 10^{-7}$ | 1 | $4,015 \cdot 10^{-4}$ | $7,501 \cdot 10^{-5}$ | 0,1 | $1,405 \cdot 10^{-5}$ | $2,089 \cdot 10^{-3}$ |
| 1 cal wody ^a w temp. 4°C = $2,458 \cdot 10^{-3}$ | 2491 | 1 | 0,1868 | 249,1 | $3,613 \cdot 10^{-2}$ | 5,202 |
| 1 cm rtęci ^a w temp. 0°C = $1,316 \cdot 10^{-2}$ | $1,333 \cdot 10^4$ | 5,353 | 1 | 1333 | 0,1934 | 27,85 |
| 1 paskal = $9,869 \cdot 10^{-6}$ | 10 | $4,015 \cdot 10^{-3}$ | $7,501 \cdot 10^{-4}$ | 1 | $1,450 \cdot 10^{-4}$ | $2,089 \cdot 10^{-2}$ |
| 1 funt/in ² = $6,805 \cdot 10^{-2}$ | $6,895 \cdot 10^4$ | 27,68 | 5,171 | $6,895 \cdot 10^3$ | 1 | 144 |
| 1 funt/ft ² = $4,725 \cdot 10^{-4}$ | 478,8 | 0,1922 | $3,591 \cdot 10^{-2}$ | 47,88 | $6,944 \cdot 10^{-3}$ | 1 |

^a W standardowych warunkach ciążenia (tzn. gdy $g = 9,80665 \text{ m/s}^2$).

1 bar = $10^6 \text{ dyn/cm}^2 = 0,1 \text{ MPa}$ 1 milibar = $10^3 \text{ dyn/cm}^2 = 10^2 \text{ Pa}$ 1 tor = 1 mm Hg

Energia, praca, ciepło

Dwie ostatnie jednostki nie są — ściśle rzecz biorąc — jednostkami energii, lecz zostały włączone do tabeli dla wygody. Odpowiadające im wartości współczynników przeliczeniowych wynikają z relatywistycznej równoważności masy i energii, $E = mc^2$, i wyrażają energię wypuszczaną przy całkowitej zamianie na energię masy jednego kilograma lub atomowej jednostki masy u (dwa ostatnie wiersze) oraz masę, która po całkowitej zamianie na energię daje odpowiednią energię jednostkową (dwie ostatnie kolumny tabeli).

| erg | J | cal | kWh | eV | MeV | kg | u |
|---|--|------------------------|------------------------|------------------------|-----------------------|------------------------|----------------------------------|
| $1 \text{ erg} = 1$ | 10^{-7} | $2,389 \cdot 10^{-8}$ | $2,778 \cdot 10^{-14}$ | $6,242 \cdot 10^{11}$ | $6,242 \cdot 10^5$ | $1,113 \cdot 10^{-24}$ | 670,2 |
| $1 \text{ dżul} = 10^7$ | 1 | 0,2389 | $2,778 \cdot 10^{-7}$ | $6,242 \cdot 10^{18}$ | $6,242 \cdot 10^{12}$ | $1,113 \cdot 10^{-17}$ | $6,702 \cdot 10^9$ |
| $1 \text{ kaloria} = 4,186 \cdot 10^7$ | 4,186 | 1 | $1,163 \cdot 10^{-6}$ | $2,613 \cdot 10^{19}$ | $2,613 \cdot 10^{13}$ | $4,660 \cdot 10^{-17}$ | $2,806 \cdot 10^{10}$ |
| $1 \text{ kilowatogodzina} = 3,600 \cdot 10^{13}$ | $3,600 \cdot 10^6$ | $8,600 \cdot 10^5$ | 1 | $2,247 \cdot 10^{25}$ | $2,247 \cdot 10^{19}$ | $4,007 \cdot 10^{-11}$ | $2,413 \cdot 10^{16}$ |
| $1 \text{ elektronowolt} = 1,602 \cdot 10^{-12}$ | $1,602 \cdot 10^{-19}$ | $3,827 \cdot 10^{-20}$ | $4,450 \cdot 10^{-26}$ | 1 | 10^{-6} | $1,783 \cdot 10^{-36}$ | $1,074 \cdot 10^{-9}$ |
| $1 \text{ megaelektronowolt} =$ | | | | | | | |
| | $= 1,602 \cdot 10^{-6}$ | $1,602 \cdot 10^{-13}$ | $3,827 \cdot 10^{-14}$ | $4,450 \cdot 10^{-20}$ | 10^{-6} | 1 | $1,783 \cdot 10^{-30}$ |
| | $1 \text{ kilogram} = 8,987 \cdot 10^{23}$ | $8,987 \cdot 10^{16}$ | $2,146 \cdot 10^{16}$ | $2,497 \cdot 10^{10}$ | $5,610 \cdot 10^{35}$ | $5,610 \cdot 10^{29}$ | $1 \text{ } 6,022 \cdot 10^{26}$ |
| $1 \text{ atomowa jednostka masy} =$ | | | | | | | |
| | $= 1,492 \cdot 10^{-3}$ | $1,492 \cdot 10^{-10}$ | $3,564 \cdot 10^{-11}$ | $4,146 \cdot 10^{-17}$ | $9,320 \cdot 10^8$ | 932,0 | $1,661 \cdot 10^{-27}$ |
| | | | | | | | 1 |

Moc

| KM | cal/s | kW | W |
|--|--------|-----------------------|-------|
| $1 \text{ koń mechaniczny} = 1$ | 178,1 | 0,7457 | 745,7 |
| $1 \text{ kaloria na sekundę} = 5,615 \cdot 10^{-3}$ | 1 | $4,186 \cdot 10^{-3}$ | 4,186 |
| $1 \text{ kilowat} = 1,341$ | 238,9 | 1 | 1000 |
| $1 \text{ wat} = 1,341 \cdot 10^{-3}$ | 0,2389 | 0,001 | 1 |

Indukcja magnetyczna

| Gs | T | mGs |
|------------------------------------|-----------|--------|
| $1 \text{ gaus (Gs)} = 1$ | 10^{-4} | 1000 |
| $1 \text{ tesla (T)} = 10^4$ | 1 | 10^7 |
| $1 \text{ miligaus (mGs)} = 0,001$ | 10^{-7} | 1 |

$$1 \text{ tesla} = 1 \text{ weber/m}^2$$

Strumień magnetyczny

| maksweli | weberów |
|--------------------------|-----------|
| $1 \text{ makswel} = 1$ | 10^{-8} |
| $1 \text{ weber} = 10^8$ | 1 |

DODATEK E

Wzory matematyczne

GEOMETRIA

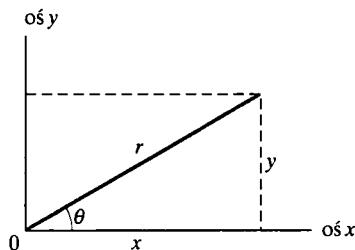
Koło o promieniu r : obwód = $2\pi r$; pole powierzchni = πr^2 .
 Kula o promieniu r : pole powierzchni = $4\pi r^2$; objętość = $\frac{4}{3}\pi r^3$.
 Walec obrotowy o promieniu podstawy r i wysokości h : pole powierzchni = $2\pi r^2 + 2\pi r h$; objętość = $\pi r^2 h$.
 Trójkąt o podstawie a i wysokości h : pole powierzchni = $\frac{1}{2}ah$.

RÓWNANIE KWADRATOWE I JEGO ROZWIĄZANIE

Jeśli $ax^2 + bx + c = 0$, to $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$.

FUNKCJE TRYGONOMETRYCZNE KĄTA θ

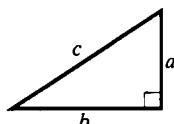
$$\begin{aligned}\sin \theta &= \frac{y}{r} & \cos \theta &= \frac{x}{r} \\ \operatorname{tg} \theta &= \frac{y}{x} & \operatorname{ctg} \theta &= \frac{x}{y} \\ \sec \theta &= \frac{r}{x} & \operatorname{cosec} \theta &= \frac{r}{y}\end{aligned}$$



TWIERDZENIE PITAGORASA

W trójkącie prostokątnym (oznaczenia jak na rysunku)

$$a^2 + b^2 = c^2.$$



TRÓJKĄTY

Kąty: A, B, C .

Boki im przeciwnielegle: a, b, c .

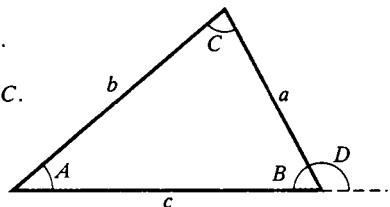
$$A + B + C = 180^\circ.$$

$$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}.$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C.$$

Kąt zewnętrzny

$$D = A + C.$$



SYMBOLE MATEMATYCZNE

$=$ równa się

\approx równa się w przybliżeniu

\sim jest tego samego rzędu wielkości

\neq nie jest równe

\equiv jest równe tożsamościowo, jest zdefiniowane jako

$>$ jest większe niż (\gg jest dużo większe niż)

$<$ jest mniejsze niż (\ll jest dużo mniejsze niż)

\geq jest większe lub równe (czyli nie mniejsze niż)

\leq jest mniejsze lub równe (czyli nie większe niż)

\pm plus albo minus

\propto jest proporcjonalne do

\sum suma

$x_{\text{śr}}$ wartość średnia x

TOŻSAMOŚCI TRYGONOMETRYCZNE

$$\sin(90^\circ - \theta) = \cos \theta$$

$$\cos(90^\circ - \theta) = \sin \theta$$

$$\sin \theta / \cos \theta = \operatorname{tg} \theta$$

$$\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$$

$$\sec^2 \theta - \operatorname{tg}^2 \theta = 1$$

$$\operatorname{cosec}^2 \theta - \operatorname{ctg}^2 \theta = 1$$

$$\sin 2\theta = 2 \sin \theta \cos \theta$$

$$\cos 2\theta = \cos^2 \theta - \sin^2 \theta = 2 \cos^2 \theta - 1 = 1 - 2 \sin^2 \theta$$

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin \alpha \cos \beta \pm \cos \alpha \sin \beta$$

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos \alpha \cos \beta \mp \sin \alpha \sin \beta$$

$$\operatorname{tg}(\alpha \pm \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha \pm \operatorname{tg} \beta}{1 \mp \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta}$$

$$\sin \alpha \pm \sin \beta = 2 \sin \frac{1}{2}(\alpha \pm \beta) \cos \frac{1}{2}(\alpha \mp \beta)$$

$$\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \frac{1}{2}(\alpha + \beta) \cos \frac{1}{2}(\alpha - \beta)$$

$$\cos \alpha - \cos \beta = -2 \sin \frac{1}{2}(\alpha + \beta) \sin \frac{1}{2}(\alpha - \beta)$$

ROZWINIĘCIA FUNKCJI W SZEREGI POTĘGOWE

$$(1+x)^n = 1 + \frac{nx}{1!} + \frac{n(n-1)x^2}{2!} + \dots \quad (x^2 < 1)$$

(wzór dwumianowy)

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \dots \quad (|x| < 1)$$

$$\sin \theta = \theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - \dots \quad (\theta \text{ w radianach})$$

$$\cos \theta = 1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} - \dots \quad (\theta \text{ w radianach})$$

$$\operatorname{tg} \theta = \theta + \frac{\theta^3}{3} + \frac{2\theta^5}{15} + \dots \quad (\theta \text{ w radianach})$$

WZORY CRAMERA

Układ równań z dwiema niewiadomymi x i y

$$a_1x + b_1y = c_1 \quad \text{oraz} \quad a_2x + b_2y = c_2$$

ma rozwiązanie

$$x = \frac{\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}} = \frac{c_1b_2 - c_2b_1}{a_1b_2 - a_2b_1}$$

oraz

$$y = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}} = \frac{a_1c_2 - a_2c_1}{a_1b_2 - a_2b_1}.$$

ILOCZINY WEKTORÓW

Niech \hat{i}, \hat{j} i \hat{k} będą wektorami jednostkowymi kierunków x, y i z .

Zachodzą związki:

$$\hat{i} \cdot \hat{i} = \hat{j} \cdot \hat{j} = \hat{k} \cdot \hat{k} = 1, \quad \hat{i} \cdot \hat{j} = \hat{j} \cdot \hat{k} = \hat{k} \cdot \hat{i} = 0,$$

$$\hat{i} \times \hat{i} = \hat{j} \times \hat{j} = \hat{k} \times \hat{k} = 0,$$

$$\hat{i} \times \hat{j} = \hat{k}, \quad \hat{j} \times \hat{k} = \hat{i}, \quad \hat{k} \times \hat{i} = \hat{j}.$$

Dowolny wektor \vec{a} o składowych wzdłuż osi x, y i z równych a_x, a_y i a_z można przedstawić w postaci

$$\vec{a} = a_x \hat{i} + a_y \hat{j} + a_z \hat{k}.$$

Niech \vec{a}, \vec{b} i \vec{c} będą dowolnymi wektorami o długościach (modułach) a, b i c . Zachodzą związki:

$$\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = (\vec{a} \times \vec{b}) + (\vec{a} \times \vec{c}),$$

$$(s\vec{a}) \times \vec{b} = \vec{a} \times (s\vec{b}) = s(\vec{a} \times \vec{b}) \quad (s \text{ — skalar}).$$

Niech θ będzie mniejszym z kątów między wektorami \vec{a} i \vec{b} .
Zachodzą związki:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z = ab \cos \theta,$$

$$\begin{aligned} \vec{a} \times \vec{b} &= -\vec{b} \times \vec{a} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} \\ &= \hat{i} \begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix} - \hat{j} \begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix} + \hat{k} \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix} \\ &= (a_y b_z - b_y a_z) \hat{i} + (a_z b_x - b_z a_x) \hat{j} + (a_x b_y - b_x a_y) \hat{k}. \end{aligned}$$

$$|\vec{a} \times \vec{b}| = ab \sin \theta,$$

$$\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b} \cdot (\vec{c} \times \vec{a}) = \vec{c} \cdot (\vec{a} \times \vec{b}).$$

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = (\vec{a} \cdot \vec{c})\vec{b} - (\vec{a} \cdot \vec{b})\vec{c}.$$

POCHODNE I CAŁKI

W poniższych wzorach u i v są dowolnymi funkcjami zmiennej x , a a i m są stałymi. Do każdej z całek nieoznaczonych należy dodać dowolną stałą całkowania. Obszerniejsze tablice zawiera *Handbook of Chemistry and Physics* (CRC Press Inc.).

1. $\frac{dx}{dx} = 1$
2. $\frac{d}{dx}(au) = a \frac{du}{dx}$
3. $\frac{d}{dx}(u + v) = \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dx}$
4. $\frac{d}{dx}x^m = mx^{m-1}$
5. $\frac{d}{dx}\ln x = \frac{1}{x}$
6. $\frac{d}{dx}(uv) = u \frac{dv}{dx} + v \frac{du}{dx}$
7. $\frac{d}{dx}e^x = e^x$
8. $\frac{d}{dx}\sin x = \cos x$
9. $\frac{d}{dx}\cos x = -\sin x$
10. $\frac{d}{dx}\operatorname{tg} x = \sec^2 x$
11. $\frac{d}{dx}\operatorname{ctg} x = -\operatorname{cosec}^2 x$
12. $\frac{d}{dx}\sec x = \operatorname{tg} x \sec x$
13. $\frac{d}{dx}\operatorname{cosec} x = -\operatorname{ctg} x \operatorname{cosec} x$
14. $\frac{d}{dx}e^u = e^u \frac{du}{dx}$
15. $\frac{d}{dx}\sin u = \cos u \frac{du}{dx}$
16. $\frac{d}{dx}\cos u = -\sin u \frac{du}{dx}$
1. $\int dx = x$
2. $\int a u dx = a \int u dx$
3. $\int (u + v) dx = \int u dx + \int v dx$
4. $\int x^m dx = \frac{x^{m+1}}{m+1} \quad (m \neq -1)$
5. $\int \frac{dx}{x} = \ln|x|$
6. $\int u \frac{dv}{dx} dx = uv - \int v \frac{du}{dx} dx$
7. $\int e^x dx = e^x$
8. $\int \sin x dx = -\cos x$
9. $\int \cos x dx = \sin x$
10. $\int \operatorname{tg} x dx = \ln|\sec x|$
11. $\int \sin^2 x dx = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\sin 2x$
12. $\int e^{-ax} dx = -\frac{1}{a}e^{-ax}$
13. $\int x e^{-ax} dx = -\frac{1}{a^2}(ax + 1)e^{-ax}$
14. $\int x^2 e^{-ax} dx = -\frac{1}{a^3}(a^2 x^2 + 2ax + 2)e^{-ax}$
15. $\int_0^\infty x^n e^{-ax} dx = \frac{n!}{a^{n+1}}$
16. $\int_0^\infty x^{2n} e^{-ax^2} dx = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{2^{n+1} a^n} \sqrt{\frac{\pi}{a}}$
17. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a^2}} = \ln(x + \sqrt{x^2 + a^2})$
18. $\int \frac{x dx}{(x^2 + a^2)^{3/2}} = -\frac{1}{(x^2 + a^2)^{1/2}}$
19. $\int \frac{dx}{(x^2 + a^2)^{3/2}} = \frac{x}{a^2(x^2 + a^2)^{1/2}}$
20. $\int_0^\infty x^{2n+1} e^{-ax^2} dx = \frac{n!}{2a^{n+1}} \quad (a > 0)$
21. $\int \frac{x dx}{x+d} = x - d \ln(x+d)$

DODATEK F

Właściwości pierwiastków

O ile nie podano inaczej, wszystkie dane odnoszą się do ciśnienia 1 atm.

| Pierwiastek | Symbol | Liczba atomowa Z | Masa molowa [g/mol] | Gęstość [g/cm ³] w temp. 20°C | Temperatura topnienia [°C] | Temperatura wrzenia [°C] | Ciepło właściwe [J/(g · °C)] |
|-------------|--------|------------------|---------------------|---|----------------------------|--------------------------|------------------------------|
| aktyn | Ac | 89 | (227) | 10,06 | 1323 | (3473) | 0,092 |
| ameryk | Am | 95 | (243) | 13,67 | 1541 | — | — |
| antymon | Sb | 51 | 121,75 | 6,691 | 630,5 | 1380 | 0,205 |
| argon | Ar | 18 | 39,948 | 1,6626 · 10 ⁻³ | -189,4 | -185,8 | 0,523 |
| arsen | As | 33 | 74,9216 | 5,78 | 817 (28 atm) | 613 | 0,331 |
| astat | At | 85 | (210) | — | (302) | — | — |
| azot | N | 7 | 14,0067 | 1,1649 · 10 ⁻³ | -210 | -195,8 | 1,03 |
| bar | Ba | 56 | 137,34 | 3,594 | 729 | 1640 | 0,205 |
| berkel | Bk | 97 | (247) | 14,79 | — | — | — |
| beryl | Be | 4 | 9,0122 | 1,848 | 1287 | 2770 | 1,83 |
| bizmut | Bi | 83 | 208,980 | 9,747 | 271,37 | 1560 | 0,122 |
| bohr | Bh | 107 | 262,12 | — | — | — | — |
| bor | B | 5 | 10,811 | 2,34 | 2030 | — | 1,11 |
| brom | Br | 35 | 79,909 | 3,12 (ciecz) | -7,2 | 58 | 0,293 |
| cer | Ce | 58 | 140,12 | 6,768 | 804 | 3470 | 0,188 |
| cez | Cs | 55 | 132,905 | 1,873 | 28,40 | 690 | 0,243 |
| chlor | Cl | 17 | 35,453 | 3,214 · 10 ⁻³ (0°C) | -101 | -34,7 | 0,486 |
| chrom | Cr | 24 | 51,996 | 7,19 | 1857 | 2665 | 0,448 |
| cyna | Sn | 50 | 118,69 | 7,2984 | 231,868 | 2270 | 0,226 |
| cynk | Zn | 30 | 65,37 | 7,133 | 419,58 | 906 | 0,389 |
| cyrkon | Zr | 40 | 91,22 | 6,506 | 1852 | 3580 | 0,276 |
| dubn | Db | 105 | 262,114 | — | — | — | — |
| dysproz | Dy | 66 | 162,50 | 8,55 | 1409 | 2330 | 0,172 |
| einstein | Es | 99 | (254) | — | — | — | — |
| erb | Er | 68 | 167,26 | 9,15 | 1522 | 2630 | 0,167 |
| europ | Eu | 63 | 151,96 | 5,243 | 817 | 1490 | 0,163 |
| ferm | Fm | 100 | (237) | — | — | — | — |
| fluor | F | 9 | 18,9984 | 1,696 · 10 ⁻³ (0°C) | -219,6 | -188,2 | 0,753 |
| fosfor | P | 15 | 30,9738 | 1,83 | 44,25 | 280 | 0,741 |
| frans | Fr | 87 | (223) | — | (27) | — | — |
| gadolin | Gd | 64 | 157,25 | 7,90 | 1312 | 2730 | 0,234 |

| Pierwiastek | Symbol | Liczba atomowa Z | Masa molowa [g/mol] | Gęstość [g/cm³] w temp. 20°C | Temperatura topnienia [°C] | Temperatura wrzenia [°C] | Ciepło właściwe [J/(g · °C)] |
|-------------|--------|------------------|---------------------|------------------------------|----------------------------|--------------------------|------------------------------|
| gal | Ga | 31 | 69,72 | 5,907 | 29,75 | 2237 | 0,377 |
| german | Ge | 32 | 72,59 | 5,323 | 937,25 | 2830 | 0,322 |
| alin | Al | 13 | 26,9815 | 2,699 | 660 | 2450 | 0,900 |
| hafn | Hf | 72 | 178,49 | 13,31 | 2227 | 5400 | 0,144 |
| has | Hs | 108 | (265) | — | — | — | — |
| hel | He | 2 | 4,0026 | $0,1664 \cdot 10^{-3}$ | -269,7 | -268,9 | 5,23 |
| holm | Ho | 67 | 164,930 | 8,79 | 1470 | 2330 | 0,165 |
| ind | In | 49 | 114,82 | 7,31 | 156,634 | 2000 | 0,233 |
| iryd | Ir | 77 | 192,2 | 22,5 | 2447 | (5300) | 0,130 |
| terb | Yb | 70 | 173,04 | 6,965 | 824 | 1530 | 0,155 |
| tr | Y | 39 | 88,905 | 4,469 | 1526 | 3030 | 0,297 |
| iod | I | 53 | 126,9044 | 4,93 | 113,7 | 183 | 0,218 |
| kadm | Cd | 48 | 112,40 | 8,65 | 321,03 | 765 | 0,226 |
| kaliforn | Cf | 98 | (251) | — | — | — | — |
| cur | Cm | 96 | (247) | 13,3 | — | — | — |
| kobalt | Co | 27 | 58,9332 | 8,85 | 1495 | 2900 | 0,423 |
| krypton | Kr | 36 | 83,80 | $3,488 \cdot 10^{-3}$ | -157,37 | -152 | 0,247 |
| krzem | Si | 14 | 28,086 | 2,33 | 1412 | 2680 | 0,712 |
| ksenon | Xe | 54 | 131,30 | $5,495 \cdot 10^{-3}$ | -111,79 | -108 | 0,159 |
| antan | La | 57 | 138,91 | 6,189 | 920 | 3470 | 0,195 |
| lit | Li | 3 | 6,939 | 0,534 | 180,55 | 1300 | 3,58 |
| lorens | Lr | 103 | (257) | — | — | — | — |
| lutet | Lu | 71 | 174,97 | 9,849 | 1663 | 1930 | 0,155 |
| magnez | Mg | 12 | 24,312 | 1,738 | 650 | 1107 | 1,03 |
| mangan | Mn | 25 | 54,9380 | 7,44 | 1244 | 2150 | 0,481 |
| meitner | Mt | 109 | (266) | — | — | — | — |
| mendelew | Md | 101 | (256) | — | — | — | — |
| miedź | Cu | 29 | 63,54 | 8,96 | 1083,40 | 2595 | 0,385 |
| molibden | Mo | 42 | 95,94 | 10,22 | 2617 | 5560 | 0,251 |
| neodym | Nd | 60 | 144,24 | 7,007 | 1016 | 3180 | 0,188 |
| neon | Ne | 10 | 20,183 | $0,8387 \cdot 10^{-3}$ | -248,597 | -246,0 | 1,03 |
| neptun | Np | 93 | (237) | 20,25 | 637 | — | 1,26 |
| nikiel | Ni | 28 | 58,71 | 8,902 | 1453 | 2730 | 0,444 |
| niob | Nb | 41 | 92,906 | 8,57 | 2468 | 4927 | 0,264 |
| nobel | No | 102 | (255) | — | — | — | — |
| otów | Pb | 82 | 207,19 | 11,35 | 327,45 | 1725 | 0,129 |
| osm | Os | 76 | 190,2 | 22,59 | 3027 | 5500 | 0,130 |
| pallad | Pd | 46 | 106,4 | 12,02 | 1552 | 3980 | 0,243 |
| platyna | Pt | 78 | 195,09 | 21,45 | 1769 | 4530 | 0,134 |
| pluton | Pu | 94 | (244) | 19,8 | 640 | 3235 | 0,130 |
| polon | Po | 84 | (210) | 9,32 | 254 | — | — |
| potas | K | 19 | 39,102 | 0,862 | 63,20 | 760 | 0,758 |
| prazeodym | Pr | 59 | 140,907 | 6,773 | 931 | 3020 | 0,197 |
| promet | Pm | 61 | (145) | 7,22 | (1027) | — | — |
| protaktyn | Pa | 91 | (231) | 15,37 (oszacowanie) | (1230) | — | — |

| Pierwiastek | Symbol | Liczba atomowa Z | Masa molowa [g/mol] | Gęstość [g/cm ³] w temp. 20°C | Temperatura topnienia [°C] | Temperatura wrzenia [°C] | Ciepło właściwe [J/(g · °C)] |
|-------------|--------|------------------|---------------------|---|----------------------------|--------------------------|------------------------------|
| rad | Ra | 88 | (226) | 5,0 | 700 | — | — |
| radon | Rn | 86 | (222) | 9,96 · 10 ⁻³ (0°C) | (-71) | -61,8 | 0,092 |
| ren | Re | 75 | 186,2 | 21,02 | 3180 | 5900 | 0,134 |
| rod | Rh | 45 | 102,905 | 12,41 | 1963 | 4500 | 0,243 |
| rteć | Hg | 80 | 200,59 | 13,55 | -38,87 | 357 | 0,138 |
| rubid | Rb | 37 | 85,47 | 1,532 | 39,49 | 688 | 0,364 |
| ruten | Ru | 44 | 101,107 | 12,37 | 2250 | 4900 | 0,239 |
| rutherford | Rf | 104 | 261,11 | — | — | — | — |
| samar | Sm | 62 | 150,35 | 7,52 | 1072 | 1630 | 0,197 |
| seaborg | Sg | 106 | 263,118 | — | — | — | — |
| selen | Se | 34 | 78,96 | 4,79 | 221 | 685 | 0,318 |
| siarka | S | 16 | 32,064 | 2,07 | 119,0 | 444,6 | 0,707 |
| skand | Sc | 21 | 44,956 | 2,99 | 1539 | 2730 | 0,569 |
| sód | Na | 11 | 22,9898 | 0,9712 | 97,85 | 892 | 1,23 |
| srebro | Ag | 47 | 107,870 | 10,49 | 960,8 | 2210 | 0,234 |
| stront | Sr | 38 | 87,62 | 2,54 | 768 | 1380 | 0,737 |
| tal | Tl | 81 | 204,37 | 11,85 | 304 | 1457 | 0,130 |
| tantal | Ta | 73 | 180,948 | 16,6 | 3014 | 5425 | 0,138 |
| technet | Tc | 43 | (99) | 11,46 | 2200 | — | 0,209 |
| tellur | Te | 52 | 127,60 | 6,24 | 449,5 | 990 | 0,201 |
| terb | Tb | 65 | 158,924 | 8,229 | 1357 | 2530 | 0,180 |
| tlen | O | 8 | 15,9994 | 1,3318 · 10 ⁻³ | -218,80 | -183,0 | 0,913 |
| tor | Th | 90 | (232) | 11,72 | 1755 | (3850) | 0,117 |
| tul | Tm | 69 | 168,934 | 9,32 | 1545 | 1720 | 0,159 |
| tytan | Ti | 22 | 47,9 | 4,54 | 1670 | 3260 | 0,523 |
| uran | U | 92 | (238) | 18,95 | 1132 | 3818 | 0,117 |
| wanad | V | 23 | 50,942 | 6,11 | 1902 | 3400 | 0,490 |
| wapń | Ca | 20 | 40,08 | 1,55 | 838 | 1440 | 0,624 |
| węgiel | C | 6 | 12,01115 | 2,26 | 3727 | 4830 | 0,691 |
| wodór | H | 1 | 1,00797 | 0,08375 · 10 ⁻³ | -259,19 | -252,7 | 14,4 |
| wolfram | W | 74 | 183,85 | 19,3 | 3380 | 5930 | 0,134 |
| złoto | Au | 79 | 196,967 | 19,32 | 1064,43 | 2970 | 0,131 |
| żelazo | Fe | 26 | 55,847 | 7,874 | 1536,5 | 3000 | 0,447 |
| ununnil | Uun | 110 | (269) | — | — | — | — |
| ununun | Uuu | 111 | (272) | — | — | — | — |
| ununbi | Unb | 112 | (264) | — | — | — | — |
| ununtri | Unt | 113 | — | — | — | — | — |
| ununkwad | Unq | 114 | (285) | — | — | — | — |
| ununpent | Unp | 115 | — | — | — | — | — |
| ununheks | Unh | 116 | (292) | — | — | — | — |

Dla pierwiastków promieniotwórczych w rubryce „masa molowa” podano w nawiasach wartości liczby masowej izotopu o najdłuższym czasie życia.

Podane w nawiasach wartości temperatury topnienia i wrzenia są niepewne.

Dane dla gazów odnoszą się do ich normalnej postaci cząsteczkowej, jak H₂, He, O₂, Ne itd. Wartości ciepła właściwego gazów odpowiadają przemianie pod stałym ciśnieniem.

Źródło: J. Emsley, *The Elements*, wyd. III. Clarendon Press, Oxford 1998. Istnieje tłum. polskie: *Chemia. Przewodnik po pierwiastkach*, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 1997. Informacje o najnowszych danych i nowoodkrytych pierwiastkach można znaleźć na stronie: www.webelements.com.

DODATEK G

Układ okresowy pierwiastków

| OKRESY POZIOME | metale alkaliczne | | | | | | | | | | | | | | | | | | gazy szlachetne | |
|----------------|-------------------|-----|--------------------|--------------------|----|----|----|----|----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|---|-----------------|----|
| | IA | | metale przejściowe | | | | | | | | | | | | | | | | 0 | |
| 1 | H | IIA | | metale przejściowe | | | | | | | | | | | | | | | | He |
| 2 | Li | Be | metale przejściowe | | | | | | | | | | | | | | | | 0 | |
| 3 | Na | Mg | metale przejściowe | | | | | | | | | | | | | | | | 0 | |
| 4 | K | Ca | Sc | Ti | V | Cr | Mn | Fe | Co | Ni | Cu | Zn | Ga | Ge | As | Se | Br | 0 | | |
| 5 | Rb | Sr | Y | Zr | Nb | Mo | Tc | Ru | Rh | Pd | Ag | Cd | In | Sn | Sb | Te | I | 0 | | |
| 6 | Cs | Ba | 57-71 | Hf | Ta | W | Re | Os | Ir | Pt | Au | Hg | Tl | Pb | Bi | Po | At | 0 | | |
| 7 | Fr | Ra | 89-103 | Rf | Db | Sg | Bh | Hs | Mt | 110 | 111 | 112 | 113 | 114 | 115 | 116 | 117 | 0 | | |
| lantanowce * | | 57 | 58 | 59 | 60 | 61 | 62 | 63 | 64 | 65 | 66 | 67 | 68 | 69 | 70 | 71 | 0 | | | |
| aktynowce † | | 89 | 90 | 91 | 92 | 93 | 94 | 95 | 96 | 97 | 98 | 99 | 100 | 101 | 102 | 103 | 0 | | | |

Nazwy pierwiastków o liczbie atomowej od 104 do 109 (rutherford, dubn, seaborg, bohr, has i meitner) zostały ustalone przez Międzynarodową Unię Chemii Czystej i Stosowanej (IUPAC) w 1997 roku. Pierwiastki o liczbie atomowej 110, 111, 112, 114 i 116 zostały już odkryte, lecz nie nadano im jeszcze nazw. Informacje o najnowszych danych i nowo odkrytych pierwiastkach można znaleźć na stronie: www.webelements.com.

ODPOWIEDZI

do sprawdzianów oraz pytań i zadań o numerach nieparzystych

Rozdział 22

SPRAWDZIANY

1. C i D przyciągają się; B i D przyciągają się. 2. a) w lewo; b) w lewo; c) w lewo. 3. a) a, c, b; b) mniejszy. 4. $-15e$ (wypadkowy ładunek $-30e$ rozdzieli się równo).

PYTANIA

1. nie, tylko dla cząstek naładowanych, obiektów podobnych do cząstek naładowanych i powłok sferycznych (łącząc kule) naładowanych jednorodnie. 3. a i b. 5. $2q^2/(4\pi\epsilon_0 r^2)$, w góry strony. 7. a) takie same; b) mniejsza; c) odejmują się; d) dodawaniu się; e) dodających się składowych; f) dodatni kierunek osi y; g) ujemny kierunek osi y; h) dodatni kierunek osi x; i) ujemny kierunek osi x. 9. a) tylko może; b) na pewno. 11. nie (ładunek dzieli się między osobę i przewodnik).

ZADANIA

1. 1,38 m. 3. a) $4,9 \cdot 10^{-7}$ kg; b) $7,1 \cdot 10^{-11}$ C. 5. a) 0,17 N; b) $-0,046$ N. 7. albo $-1,0 \mu\text{C}$ i $3,0 \mu\text{C}$, albo $+1,0 \mu\text{C}$ i $-3,0 \mu\text{C}$. 9. a) ładunek $-4q/9$ musi zostać umieszczony na prostej łączącej dwa ładunki dodatnie w odległości $L/3$ od ładunku $+q$. 11. a) $5,7 \cdot 10^{13}$ C, nie; b) $6,0 \cdot 10^5$ kg. 13. $q = Q/2$. 15. b) $\pm 2,4 \cdot 10^{-8}$ C. 17. a) $\frac{L}{2} \left(1 + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qQ}{Wh^2}\right)$; b) $\sqrt{3qQ/(4\pi\epsilon_0 W)}$. 19. $-1,32 \cdot 10^{13}$ C. 21. a) $3,2 \cdot 10^{-19}$ C; b) dwa. 23. $6,3 \cdot 10^{11}$. 25. 122 mA. 27. a) 0; b) $1,9 \cdot 10^{-9}$ N. 29. a) ${}^9\text{B}$; b) ${}^{13}\text{N}$; c) ${}^{12}\text{C}$.

Rozdział 23

SPRAWDZIANY

1. a) w prawo; b) w lewo; c) w lewo; d) w prawo (p i e mają tę samą wartość ładunku i p jest dalej). 2. wszystkie równe. 3. a) w dodatnim kierunku osi y; b) w dodatnim kierunku osi x; c) w ujemnym kierunku osi y. 4. a) w lewo; b) w lewo; c) zmalaże. 5. a) wszystkie równe; b) 1 i 3 równe, 2 i 4 równe.

PYTANIA

1. a) dodatni kierunek osi x; b) w dół i w prawo; c) A. 3. dwa punkty: jeden na lewo od cząstek, drugi między protonami. 5. a) tak; b) do ładunku; c) nie (wektory pola nie są skierowane wzdłuż tej samej prostej); d) znoszą się; e) dodają się; f) dodające się składowe; g) ujemny kierunek osi y. 7. e, b, a i c równe, d

(równe zero). 9. a) w dół; b) 2 i 4 w dół, 3 do góry. 11. a) 4, 3, 1, 2; b) 3, 1 i 2 równe, 2.

ZADANIA

1. a) $6,4 \cdot 10^{-18}$ N; b) 20 N/C. 5. 56 pC. 7. $3,07 \cdot 10^{21}$ N/C, radialnie na zewnątrz. 9. 50 cm od q_1 i 100 cm od q_2 . 11. 0. 13. $1,02 \cdot 10^5$ N/C, do góry. 15. $6,88 \cdot 10^{-28}$ C · m. 21. $q/(\pi^2\epsilon_0 r^2)$, pionowo w dół. 23. a) $-q/L$; b) $q/(4\pi\epsilon_0 a(L+a))$. 27. $R/\sqrt{3}$. 29. $3,51 \cdot 10^{15}$ m/s². 31. $6,6 \cdot 10^{-15}$ N. 33. a) $1,5 \cdot 10^3$ N/C; b) $2,4 \cdot 10^{-16}$ N, w góre; c) $1,6 \cdot 10^{-26}$ N; d) $1,5 \cdot 10^{10}$. 35. a) $1,92 \cdot 10^{12}$ m/s²; b) $1,96 \cdot 10^5$ m/s. 37. -5e. 39. a) $2,7 \cdot 10^6$ m/s; b) 1000 N/C. 41. 27 μm. 43. a) tak; b) w górnej płycie, 2,73 cm. 45. a) 0; b) $8,5 \cdot 10^{-22}$ N · m; c) 0. 47. $(1/2\pi)\sqrt{pE/I}$.

Rozdział 24

SPRAWDZIANY

1. a) $+ES$; b) $-ES$; c) 0; d) 0. 2. a) 2; b) 3; c) 1. 3. a) równe; b) równe; c) równe. 4. a) $+50e$; b) $-150e$. 5. 3 i 4 równe, 2, 1.

PYTANIA

1. a) $8 \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{C}$; b) 0. 3. a) wszystkie cztery; b) żaden (są równe). 5. a) S_3, S_2, S_1 ; b) wszystkie równe; c) S_3, S_2, S_1 ; d) wszystkie równe (zero). 7. $2\sigma, \sigma, 3\sigma$ lub $3\sigma, \sigma, 2\sigma$. 9. a) wszystkie równe ($E = 0$); b) wszystkie równe.

ZADANIA

1. a) 693 kg/s; b) 693 kg/s; c) 347 kg/s; d) 347 kg/s; e) 575 kg/s. 3. a) 0; b) $-3,92 \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{C}$; c) 0; d) 0 dla każdego pola. 5. $2,0 \cdot 10^5 \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{C}$. 7. a) $8,23 \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{C}$; b) $8,23 \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{C}$; c) 72,8 pC w każdym przypadku. 9. $3,54 \mu\text{C}$. 11. 0 przez każdą z trzech ścian spotykających się w q, $q/(24\epsilon_0)$ przez każdą z pozostałych ścian. 13. a) $37 \mu\text{C}$; b) $4,1 \cdot 10^6 \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{C}$. 15. a) $-3,0 \cdot 10^{-6}$ C; b) $+1,3 \cdot 10^{-5}$ C. 17. $5,0 \mu\text{C}/\text{m}$. 19. a) $E = q/(2\pi\epsilon_0 LR)$, radialnie do środka; b) $-q$ na wewnętrznej i zewnętrznej powierzchni; c) $E = q/(2\pi\epsilon_0 Lr)$, radialnie na zewnątrz. 21. a) $2,3 \cdot 10^6 \text{ N/C}$, radialnie na zewnątrz; b) $4,5 \cdot 10^5 \text{ N/C}$, radialnie do środka. 23. $3,6 \text{ nC}$. 25. b) $\rho R^2/(2\epsilon_0 r)$; 27. a) $5,3 \cdot 10^7 \text{ N/C}$; b) 60 N/C . 29. $5,0 \text{ nC/m}^2$. 31. 0,44 mm. 33. a) $\rho x/\epsilon_0$; b) $\rho d/(2\epsilon_0)$. 35. $-7,5 \text{ nC}$. 39. $-1,04 \text{ nC}$. 43. a) $E = qr/(4\pi\epsilon_0 a^3)$; b) $E = q/(4\pi\epsilon_0 r^2)$; c) 0; d) 0; e) na wewnętrznej, $-q$; na zewnętrznej, 0. 45. $q/(2\pi a^2)$. 47. $6K\epsilon_0 r^3$.

Rozdział 25

SPRAWDZIANY

1. a) ujemną; b) wzrasta. 2. a) dodatnią; b) większym. 3. a) w prawo; b) 1, 2, 3, 5: dodatnia; 4, ujemna; c) 3, potem 1, 2 i 5 równe; 4. 4. wszystkie równe. 5. a, c (zero), b. 6. a) 2; b) 3; c) będzie przyspieszał w lewo.

PYTANIA

1. a) większego; b) dodatnia; c) ujemna; d) wszystkie równe. 3. $-4q/(4\pi\epsilon_0 d)$. 5. a)-c) $Q/(4\pi\epsilon_0 R)$; d) a, b, c. 7. a) 2, 4, 1 i 3 równe, 5 ($E = 0$); b) ujemny kierunek osi x ; c) dodatni kierunek osi x . 9. a)-d) zerowa.

ZADANIA

1. a) $3,0 \cdot 10^5$ C; b) $3,6 \cdot 10^6$ J. 3. a) $3,0 \cdot 10^{10}$ J; b) $7,7$ km/s; c) $9,0 \cdot 10^4$ kg. 5. 8,8 mm. 7. a) 136 MV/m; b) 8,82 kV/m. 9. b) ponieważ punkt $V = 0$ został wybrany inaczej; c) $q/(8\pi\epsilon_0 R)$; d) różnice potencjałów są niezależne od wyboru punktu $V = 0$. 11. a) $Q/(4\pi\epsilon_0 r)$; b) $(\rho/3\epsilon_0)[\frac{3}{2}r_2^2 - \frac{1}{2}r^2 - (r_1^3/r)]$, $\rho = Q/[(4\pi/3)(r_2^3 - r_1^3)]$; c) $(\rho/2\epsilon_0)(r_2^2 - r_1^2)$ z ρ jak w b); d) tak. 13. a) $-4,5$ kV; b) $-4,5$ kV. 15. $x = d/4$ i $x = -d/2$. 17. a) 0,54 mm; b) 790 V. 19. $6,4 \cdot 10^8$ V. 21. $2,5q/(4\pi\epsilon_0 d)$. 25. a) $-5Q/(4\pi\epsilon_0 R)$; b) $-5Q/[4\pi\epsilon_0(z^2 + R^2)^{1/2}]$. 27. $(\sigma/8\epsilon_0)[(z^2 + R^2)^{1/2} - z]$. 29. $(c/(4\pi\epsilon_0))[L - d \ln(1 + L/d)]$. 31. 17 V/m pod kątem 135° przeciwne do ruchu wskazówek zegara od osi $+x$. 35. a) $Q/[4\pi\epsilon_0 d(d + L)]$, w lewo; b) 0. 37. $-0,21q^2/(\epsilon_0 a)$. 39. a) $+6,0 \cdot 10^4$ V; b) $-7,8 \cdot 10^5$ V; c) 2,5 J; d) zwiększa; e) taka sama; f) taka sama. 41. $W = (qQ/(8\pi\epsilon_0))(1/r_1 - 1/r_2)$. 43. 2,5 km/s. 45. a) 0,225 J; b) A, $45,0 \text{ m/s}^2$; B, $22,5 \text{ m/s}^2$; c) A, $7,75 \text{ m/s}$; B, $3,87 \text{ m/s}$. 47. 0,32 km/s. 49. $1,6 \cdot 10^{-9}$ m. 51. $2,5 \cdot 10^{-8}$ C. 53. a) -180 V; b) 2700 V, -8900 V. 55 a) $-0,12$ V; b) $1,8 \cdot 10^{-8}$ N/C, radialnie do środka.

Rozdział 26

SPRAWDZIANY

1. a) pozostaje taka sama; b) pozostaje taka sama. 2. a) maleje; b) wzrasta; c) maleje. 3. a) $U, q/2$; b) $U/2, q$. 4. a) $q_0 = q_1 + q_{34}$; b) równy (C_3 i C_4 są połączone szeregowo). 5. a) takie same; b)-d) wzrastałyby; e) takie same (taka sama różnica potencjałów przy takiej samej odległości okładek). 6. a) bez zmian; b) maleje; c) wzrasta.

PYTANIA

1. a; 2; b, 1; c, 3. 3. a, szeregowo; b, równolegle; c, równolegle. 5. a) $C/3$; b) $3C$; c) przy połączeniu równoległy. 7. a) taka sama; b) taki sam; c) większa; d) większy. 9. a) 2; b) 3; c) 1. 11. a) wzrośnie; b) wzrośnie; c) zmaleje; d) zmaleje; e) pozostaje taka sama, wzrośnie, wzrośnie, wzrośnie.

ZADANIA

1. 7,5 pC. 3. 3,0 mC. 5. a) 140 pF; b) 17 nC. 7. $5,04\pi\epsilon_0 R$. 11. 9090. 13. 3,16 μF . 17. 43 pF. 19. a) 50 V; b) $5,0 \cdot 10^{-5}$ C; c) $1,5 \cdot 10^{-4}$ C. 21. $q_1 = (C_1C_2 + C_1C_3)C_1U_0/(C_1C_2 + C_1C_3 + C_2C_3)$, $q_2 = q_3 = C_2C_3C_1U_0/(C_1C_2 + C_1C_3 + C_2C_3)$.

23. 72 F. 25. 0,27 J. 27. a) 2,0 J; b) $E_p \text{ pocz} = \epsilon_0 SU^2/(2d)$, $E_p \text{ końc} = 2E_p \text{ pocz}$; c) $\epsilon_0 SV^2/(2d)$. 35. Pyreksu. 37. 81 pF/m. 39. 0,63 m². 43. a) 10 kV/m; b) 5,0 nC; c) 4,1 nC. 45. a) $C = 4\pi\epsilon_0\epsilon_r(ab/(b-a))$; b) $q = 4\pi\epsilon_0\epsilon_r U(ab/(b-a))$; c) $q' = q(1 - 1/\epsilon_r)$.

Rozdział 27

SPRAWDZIANY

1. 8 A, w prawo. 2. a)-c) w prawo. 3. a i c równe, b. 4. element 2. 5. a) i b) równe, d), c).

PYTANIA

1. a, b i c równe, potem d (zero). 3) b, a, c. 5. równe A, B i C, równe A+B i B+C, A+B+C. 7. a)-c) 1 i 2 równe, 3. 9. C, A, B.

ZADANIA

1. a) 1200 C; b) $7,5 \cdot 10^{21}$. 3. 5,6 ms. 5. a) $6,4 \text{ A/m}^2$, na północ; b) nie, pole przekroju. 7. 0,38 mm. 9. a) $2 \cdot 10^{12}$; b) 5000; c) 10 MV. 11. 13 min. 13. $2,0 \cdot 10^{-8} \Omega \cdot \text{m}$. 15. 100 V. 17. 2,4 Ω . 19. 54 Ω . 21. 3,0. 23. $8,2 \cdot 10^{-4} \Omega \cdot \text{m}$. 25. 2000 K. 27. a) 0,43%, 0,0017%, 0,0034% 29. a) $R = \rho L/(\pi ab)$. 31. 560 W. 33. a) 1,0 kW; b) 1,5 zł; 35. 0,135 W. 37. a) 10,9 A; b) $10,6 \Omega$; c) 4,5 MJ. 39. 660 W. 41. a) $3,1 \cdot 10^{11}$; b) 25 μA ; c) 1300 W, 25 MW. 43. a) 17 mV/m; b) 243 J. 45. a) $J = I/(2\pi r^2)$; b) $E = \rho I/(2\pi r^2)$; c) $\Delta U = \rho I(1/r - 1/b)/(2\pi)$; d) $0,16 \text{ A/m}^2$; e) 16 V/m; f) 0,16 MV.

Rozdział 28

SPRAWDZIANY

1. a) w prawo; b) wszystkie równe; c) b, równe a i c; d) b, równe a i c. 2. a) wszystkie równe; b) R_1, R_2, R_3 . 3. a) mniejsza; b) większa; c) równa. 4. a) $U/2, I$; b) $U, I/2$. 5. a) 1, 2, 4, 3; b) 4, równe 1 i 2, 3.

PYTANIA

1. 3, 4, 1, 2. 3. a) nie; b) tak; c) wszystkie równe. 5. równolegle, R_2, R_1 , szeregowo. 7. a) taka sama; b) takie samo; c) mniejszy; d) większe. 9. a) mniejsza; b) mniejsze; c) większy. 11. c, b, a.

ZADANIA

1. a) 1200 zł; b) 24 grosze. 3. 14 h 24 min. 5. a) 0,50 A; b) $P_1 = 1 \text{ W}$, $P_2 = 2 \text{ W}$; c) dostarczana $P_1 = 6 \text{ W}$; absorbowana $P_2 = 3 \text{ W}$. 7. a) 14 V; b) 100 W; c) 600 W; d) 10 V, 100 W. 9. a) 50 V; b) 48 V; c) B jest połączone z biegunkiem ujemnym. 11. 2,5 V. 13. 8,0 Ω . 15. a) $r_1 - r_2$; b) źródło z r_1 . 19. 5,56 A. 21. $I_1 = 50 \text{ mA}$, $I_2 = 60 \text{ mA}$, $U_{ab} = 9,0 \text{ V}$. 23. a) żarówka 2; b) żarówka 1. 25. 3d. 27. dziewięć. 29. a) $R = r/2$; b) $P_{\text{maks}} = \mathcal{E}^2/(2r)$. 31. a) 0,346 W; b) 0,050 W; c) 0,709 W; d) 1,26 W; e) $-0,158 \text{ W}$. 33. a) źródło 1, 0,67 A w dół; źródło 2, 0,33 A w górze; źródło 3, 0,33 A w górze; b) 3,3 V. 35. a) Cu: 1,11 A, Al: 0,893 A; b) 126 m. 37. 0,45 A. 39. -3,0%. 45. 4,6. 47. a) 2,41 μs ; b) 161 pF. 49. a) 0,955 $\mu\text{C/s}$; b) 1,08 μW ; c) 2,74 μW ; d) 3,82 μW . 51. a) 2,17 s; b) 39,6 mV. 53. a) $1,0 \cdot 10^{-3}$ C; b) 10^{-3} A; c) $U_C = 10^3 e^{-t} \text{ V}$, $U_R = 10^3 e^{-t} \text{ V}$; d) $P = e^{-2t} \text{ W}$. 55. a) w t =

0: $I_1 = 1,1$ mA, $I_2 = I_3 = 0,55$ mA; w $t = \infty$: $I_1 = I_2 = 0,82$ mA, $I_3 = 0$; c) w $t = 0$: $U_2 = 400$ V; w $t = \infty$: $U_2 = 600$ V; d) po upływie kilku stałych czasowych ($\tau = 7,1$ s).

Rozdział 29

SPRAWDZIANY

1. a) $+z$; b) $-x$; c) $\vec{F}_B = 0$. 2. a) 2, następnie 1 i 3 razem (zero); b) 4. 3. a) $+z$ i $-z$ razem, następnie $+y$ i $-y$ razem, następnie $+x$ i $-x$ razem (zero); b) $+y$. 4. a) elektron; b) zgodnie. 5. $-y$. 6. a) wszystkie razem; b) 1 i 4 razem, następnie 2 i 3 razem.

PYTANIA

1. a) nie, \vec{v} i \vec{F}_B muszą być prostopadłe; b) tak; c) nie, \vec{B} i \vec{F}_B muszą być prostopadłe. 3. a) \vec{F}_E ; b) \vec{F}_B . 5. a) ujemny; b) równa; c) równe; d) tor byłby półokręgiem. 7. a) \vec{B}_1 ; b) B_1 za płaszczyznę rysunku, B_2 przed płaszczyzną rysunku; c) mniejszy. 9. a) 1, 180° ; 2, 270° ; 3, 90° ; 4, 0° ; 5, 315° ; 6, 225° ; 7, 135° ; 8, 45° ; b) 1 i 2 razem, następnie 3 i 4 razem; c) 8, następnie 5 i 6 razem, następnie 7.

ZADANIA

1. a) $6,2 \cdot 10^{-18}$ N; b) $9,5 \cdot 10^8$ m/s²; c) pozostaje równa 550 m/s. 3. a) 400 km/s; b) 835 eV. 5. a) w kierunku wschodnim; b) $6,28 \cdot 10^{14}$ m/s²; c) 2,98 mm. 7. a) $3,4 \cdot 10^{-4}$ T, poziomo i w lewą stronę, patrząc wzduż \vec{v}_0 ; b) tak, jeżeli jego prędkość jest taka sama, jak prędkość elektronu. 9. 0,27 mT. 11. 680 kV/m. 13. b) $2,84 \cdot 10^{-3}$. 15. 21 μ T. 17. a) $2,05 \cdot 10^7$ m/s; b) 467 μ T; c) 13,1 MHz; d) 76,3 ns. 19. a) 0,978 MHz; b) 96,4 cm. 23. a) 1,0 MeV; b) 0,5 MeV. 25. a) 495 mT; b) 22,7 mA; c) 8,17 MJ. 27. a) 0,36 ns; b) 0,17 mm; c) 1,5 mm. 29. a) $-q$; b) $\pi m/(qB)$. 31. 240 m. 33. 28,2 N, poziomo w kierunku zachodnim. 35. 467 mA, od lewej strony do prawej. 37. 0,10 T, pod kątem 31° do kierunku pionowego. 39. $4,3 \cdot 10^{-3}$ N · m, w ujemnym kierunku osi y . 43. $2\pi aIB \sin \theta$, prostopadle do płaszczyzny pierścienia (w góre). 45. a) 540 Ω , szeregowo z galwanometrem; b) 2,52 Ω , równolegle do galwanometru. 47. 2,45 A. 49. a) 12,7 A; b) 0,0805 N · m. 51. a) 0,30 J/T; b) 0,024 N · m. 53. a) $2,86 \text{ A} \cdot \text{m}^2$; b) $1,10 \text{ A} \cdot \text{m}^2$. 55. a) $(8,0 \cdot 10^{-4} \text{ N} \cdot \text{m})(-1,2\hat{i} - 0,90\hat{j} + 1,0\hat{k})$; b) $-6,0 \cdot 10^{-4} \text{ J}$. 57. $-(0,10 \text{ V/m})\hat{k}$. 59. $-2,0 \text{ T}$.

Rozdział 30

SPRAWDZIANY

1. a, c, b. 2. b, c, a. 3. d, razem a i c, następnie b. 4. d, a, razem b i c (zero).

PYTANIA

1. c, d, następnie razem a i b. 3. c, a, b. 5. a) 1, 3, 2; b) mniejszy. 7. c i d razem, następnie b, a. 9. d, następnie a i e razem, następnie b, c.

ZADANIA

1. a) 3,3 μ T; b) tak. 3. a) 16 A; b) z zachodu na wschód. 5. a) $\mu_0 qvI/(2\pi d)$, antyrównolegle do I ; b) ta sama wartość, równolegle do I . 7. 2 rad. 9. $\mu_0 I\theta/(4\pi)(1/b - 1/a)$, przed płaszczyznę rysunku. 19. $(\mu_0 I/2\pi w) \ln(1 + w/d)$, w góre.

21. a) nie jest możliwe, aby pole B miało wartość różną od zera w połowie odległości między przewodami; b) 30 A. 23. 4,3 A, przed płaszczyznę rysunku. 25. 80 μ T, w góre rysunku. 27. $0,791\mu_0 I^2/(\pi a)$, 162° od linii poziomej w kierunku przeciwnym do ruchu wskazówek zegara. 29. 3,2 mN, w kierunku przewodu. 31. a) $(-2,0 \text{ A})\mu_0$; b) 0. 35. $\mu_0 J_0 r^2/3a$. 41. 0,30 mT. 43. a) 533 μ T; b) 400 μ T. 7. a) 4,77 cm; b) 35,5 μ T. 49. 0,47 A · m². 51. a) $2,4 \text{ A} \cdot \text{m}^2$; b) 46 cm. 57. a) 79 μ T; b) $1,1 \cdot 10^{-6} \text{ N} \cdot \text{m}$.

Rozdział 31

SPRAWDZIANY

1. b, następnie d i e razem, następnie a i c razem (zero). 2. a i b razem, następnie c (zero). 3. c i d razem, następnie a i b razem. 4. b, przed; c, przed; d, za; e, za. 5. d i e. 6. a) 2, 3, 1 (zero); b) 2, 3, 1. 7. a i b razem, następnie c.

PYTANIA

1. a) wszystkie razem (zero); b) 2, następnie 1 i 3 razem. 3. a) za płaszczyznę rysunku; b) przeciwnie; c) większa. 5. c, a, b. 7. c, b, a. 9. a) większe; b) takie samo; c) takie samo; d) takie samo (zero).

ZADANIA

1. 1,5 mV. 3. a) 31 mV; b) od prawej strony do lewej. 5. a) $1,1 \cdot 10^{-3} \Omega$; b) 1,4 T/s. 7. 30 mA. 9. a) $\mu_0 I R^2 \pi r^2/(2x^3)$; b) $3\mu_0 I \pi R^2 r^2 v/(2x^4)$; c) taki sam, jak w większej pętli. 11. b) nie. 13. 29,5 mC. 15. a) 21,7 V; b) przeciwnie do ruchu wskazówek zegara. 17. (b) zaprojektuj pętlę tak, aby $Nab = (5/2\pi) \text{ m}^2$. 19. 5,50 kV. 21. 80 μ V, w kierunku zgodnym z ruchem wskazówek zegara. 23. a) 13 μ Wb/m; b) 17%; c) 0. 25. 3,66 μ W. 27. a) 48,1 mV; b) 2,67 mA; c) 0,128 mW. 29. a) 600 mV, do góry rysunku; b) 1,5 A, w kierunku zgodnym z ruchem wskazówek zegara c) 0,90 W; d) 0,18 N; e) z taką samą, jak w punkcie c). 31. a) 240 μ V; b) 0,600 mA; c) 0,144 μ W; d) $2,88 \cdot 10^{-8}$ N; e) z taką samą, jak w punkcie (c). 33. a) 71,5 μ V/m; b) 143 μ V/m. 37. 0,10 μ Wb. 41. natężenie prądu powinno się zmieniać z szybkością 5,0 A/s. 43. b) zmieniające się pole magnetyczne jednej cewki nie może indukować prądu w drugiej cewce; c) $L_{rw} = \sum_{j=1}^N L_j$. 45. $6,91\tau_L$. 47. 46 Ω . 49. a) 8,45 ns; b) 7,37 mA. 51. 12,0 A/s. 53. a) $I_1 = I_2 = 3,33$ A; b) $I_1 = 4,55$ A, $I_2 = 2,73$ A; c) $I_1 = 0$, $I_2 = 1,82$ A (w przeciwnym kierunku); $I_1 = I_2 = 0$. 55. a) $I(1 - e^{-Rt})$. 57. 25,6 ms. 59. a) 97,9 H; b) 0,196 mJ. 63. a) $34,2 \text{ J/m}^3$; b) 49,4 mJ. 65. $1,5 \cdot 10^8$ V/m. 67. a) $1,0 \text{ J/m}^3$; b) $4,8 \cdot 10^{-15} \text{ J/m}^3$. 69. a) 1,67 mH; b) 6,00 mWb. 71. b) uwojenia solenoidów powinny być nawinięte w przeciwnych kierunkach. 73. pole magnetyczne istnieje tylko wewnętrz solenoidu 1. 75. a) $\mu_0 NI/(2\pi) \ln(1 + b/a)$; b) 13 μ H.

Rozdział 32

SPRAWDZIANY

1. d, b, c, a (zero). 2. (a) 2; b) 1. 3. a) od magnesu; b) od magnesu; c) mniejsza. 4. a) do magnesu; b) do magnesu; c) mniejsza. 5. a, c, b, d (zero). 6. b, c i d razem, następnie a.

PYTANIA

1. zyskuje. 3. a) wszystkie w dół; (b) 1 do góry, 2 w dół, 3 zero.
5. a) 1 do góry, 2 do góry, 3 w dół; b) 1 w dół, 2 do góry, 3 zero.
7. a) 1, w góre; 2, w górę; 3, w dół; b) i c) 2, następnie 1 i 3 razem.
9. a) w prawo; b) w lewo; c) do płaszczyzny rysunku.
11. 1, a; 2, b; 3, c i d.

ZADANIA

1. b) znak jest ujemny; c) nie, istnieje dodatni strumień przez otwarty koniec rurki w pobliżu magnesu. 3. 47,4 μ Wb, skierowany do wnętrza. 5. 55 μ T. 7. a) 31 μ T, 0°; b) 55,9 μ T, 73,9°; c) 62 μ T, 90°. 9. a) $-9,3 \cdot 10^{-24}$ J/T; b) $1,9 \cdot 10^{-23}$ J/T. 11. a) 0; b) 0; c) 0; d) $\pm 3,2 \cdot 10^{-25}$ J; e) $-3,2 \cdot 10^{-34}$ J · s, $2,8 \cdot 10^{-23}$ J/T, $+9,7 \cdot 10^{-25}$ J, $\pm 3,2 \cdot 10^{-25}$ J. 13. $\Delta\mu = e^2 r^2 B / (4m)$.
15. 20,8 mJ/T. 17. tak. 19. b) E_j/B , w kierunku przeciwnym do pola; c) 310 A/m. 21. a) 3 μ T; b) $5,6 \cdot 10^{-10}$ eV. 23. $5,15 \cdot 10^{-24}$ A · m². 25. a) 180 km; b) $2,3 \cdot 10^{-5}$. 27. 2,4 · 10^{13} V/m · s. 33. a) 0,63 μ T; b) $2,3 \cdot 10^{12}$ V/m · s; 35. a) 710 mA; b) 0; c) 1,1 A. 37. a) 2A; b) $2,3 \cdot 10^{11}$ V/m · s; c) 0,5 A; d) 0,63 μ T · m.

Rozdział 33

SPRAWDZIANY

1. a) $T/2$, b) T , c) $T/2$, d) $T/4$. 2. a) 5 V; b) 150 μ J. 3. a) pozostanie taka sama; b) pozostanie taka sama. 4. a) C , B , A ; b) 1, A ; 2, B ; 3, S ; 4, C ; c) A . 5. a) pozostanie taka sama; b) zwiększy się. 6. a) pozostanie taka sama; b) zmniejszy się. 7. a) 1, opóżnia się; 2, wyprzedza; 3, jest w fazie; b) 3 ($\omega_w = \omega$, gdy $X_L = X_C$). 8. a) zwiększyć (obwód ma charakter pojemnościowy; należy zwiększyć C , aby zmniejszyć X_C i być bliżej rezonansu dla osiągnięcia maksimum P_{rnr} ; b) bliżej. 9. a) większe; b) podwyższającej napięcie.

PYTANIA

1. a) $T/4$; b) $T/2$ (patrz rysunek 33.2); d) $T/2$ (patrz równanie (31.37). 3. b, a, c. 5. a) 3, 1, 2; b) 2, 1 i 3 razem. 7. a, cewka; b opornik; c kondensator. 9. a) wyprzedza; b) pojemnościowy; c) mniejsza. 11. a) w prawo, wzrośnie (X_L wzrośnie, bliżej rezonansu); b) w prawo, wzrośnie (X_C zmaleje, bliżej rezonansu); c) w prawo, wzrośnie (ω_w/ω wzrośnie, bliżej rezonansu).

ZADANIA

1. 9,14 nF. 3. a) 1,17 μ J; b) 5,58 mA. 5. dla n całkowitego dodatniego: a) $t = n(5,00 \mu\text{s})$; b) $t = (2n - 1)(2,50 \mu\text{s})$; c) $t = (2n - 1)(1,25 \mu\text{s})$. 7. a) 1,25 kg; b) 372 N/m; c) $1,75 \cdot 10^{-4}$ m; d) 3,02 mm/s. 9. $7,0 \cdot 10^{-4}$ s. 11. a) 3 nC; b) 1,7 mA; c) 4,5 nJ. 13. a) 275 Hz; b) 364 mA. 15. a) 6,0:1; b) 36 pF, 0,22 mH. 17. a) 1,98 μ J; b) 5,56 μ C; c) 12,6 mA; d) $-46,9^\circ$; e) $+46,9^\circ$. 19. a) 0,18 mC; b) $T/8$; c) 66,7 W. 21. a) 356 μ s; b) 2,50 mH; c) 3,20 mJ. 23. Niech T_2 (= 0,596 s) oznacza okres drgań cewki i kondensatora o pojemności 900 μ F, a T_1 (= 0,199 s) — okres drgań cewki i kondensatora o pojemności 100 μ F. Zamknij S_2 , poczekaj $T_2/4$; zamknij szybko S_1 , następnie otwórz S_2 ; poczekaj $T_1/4$ i wtedy otwórz S_1 . . . 25. 8,66 m Ω . 27. $(L/R) \ln 2$. 31. a) 0,0955 A; b) 0,0119 A. 33. a) 0,65 kHz; b) 24 Ω . 35. a) 6,73 ms; b) 11,2 ms; c) cewka; d) 138 mH. 37. a) $X_C = 0$, $X_L = 86,7 \Omega$, $Z = 182 \Omega$, $I = 198$ mA, $\phi = 28,5^\circ$. 39. a) $X_C = 37,9 \Omega$, $X_L = 86,7 \Omega$, $Z = 167 \Omega$, $I = 216$ mA, $\phi = 17,1^\circ$. 41. 1000 V. 43. 89 Ω . 45. a) 224 rad/s; b) 6,00 A; c) 228 rad/s. 219 rad/s; d) 0,040. 49. 1,84 A. 51. 141 V. 53. 0, 9,00 W, 3,14 W, 1,82 W. 55. a) 24,2 Ω ; b) 2,17 kW. 57. a) 0,743; b) wyprzedza; c) pojemnościowy; d) nie; e) tak, nie, tak; f) 33,4 W. 59. a) 117 μ F; b) 0; c) 90,0 W, 0; d) 0°, 90°; e) 1, 0. 61. a) 2,59 A; b) 38,8 V, 159 V, 224 V, 64,2 V, 75,0 V; c) 100 W dla R , 0 dla L i C . 63. a) 4,6 V; b) 4 mA, 0,2 A. 65. 10.

AUTORZY ZDJĘĆ

ROZDZIAŁ 22

Strona 1 — Michael Watson. Strona 3 — Druk za zgodą: Xerox Corporation. Strona 5 — Johann Gabriel Doppelmayr, *Neuentdeckte Phaenomena von Bewünderswürdigen Würckungen der Natur*, Nuremberg, 1744. Strona 13 — Druk za zgodą: Lawrence Berkeley Laboratory.

ROZDZIAŁ 23

Strona 35 — Russ Kinne/© Comstock, Inc.

ROZDZIAŁ 24

Strona 59 — C. Johnny Autery. Strona 60 — Druk za zgodą: E. Philip Krider, Institute for Atmospheric Physics, University of Arizona, Tucson.

ROZDZIAŁ 25

Strona 72 — Druk za zgodą: NOAA. Strona 78 — Druk za zgodą: NOAA. Strona 93 — Druk za zgodą: Westinghouse Corporation.

ROZDZIAŁ 26

Strona 101 — Bruce Ayres/Tony Stone Images/© New York, Inc. Strona 116 — © The Royal Institute, England

ROZDZIAŁ 27

Strona 128 — UPI/Corbis Images.

ROZDZIAŁ 28

Strona 154 — Hans Reinhard/© Bruce Coleman, Inc. Strona 155 — Druk za zgodą: Southern California Edison Company.

ROZDZIAŁ 29

Strona 184 — Johnny Johnson/Tony Stone Images/© New York, Inc. Strona 187 — Lawrence Berkeley Laboratory/© Photo Researchers. Strona 189 — Druk za zgodą: dr Richard Cannon, Southeast Missouri State University, Cape Girardeau. Strona 196 — Druk za zgodą: John Le P. Webb, Sussex University, England. Strona 198 — Druk za zgodą: dr L.A. Frank, University of Iowa.

ROZDZIAŁ 30

Strona 218 — Michael Brown/Florida Today/Gamma Liaison. Strona 221 — Druk za zgodą: Education Development Center.

ROZDZIAŁ 31

Strona 247 — Dan McCoy/© Black Star. Strona 254 — Druk za zgodą: Fender Musical Instruments Corporation.

ROZDZIAŁ 32

Strona 289 — Druk za zgodą: A. K. Geim, High Field Magnet Laboratory, University of Nijmegen, The Netherlands. Strona 290 — Runk/Schoenberger/© Grant Heilman Photography. Strona 301 — Peter Lerman. Strona 304 — Druk za zgodą: Ralph W. DeBlois.

ROZDZIAŁ 33

Strona 319 — Rick Diaz; druk za zgodą: Haverfield Helicopter Co. Strona 323 — Druk za zgodą: Agilent Technologies.

SKOROWIDZ

A

akumulator 157
amper 6, 14, 130, 148, 226
amperomierz 171
anihilacja elektronu 13
aparatura Thomsona 191

B

biegun magnetyczny 189
butelka magnetyczna 198

C

cewka 264–266, 268, 279, 339
— z prądem 235–238
ciało elektrycznie obojętne 2
Coulomb Ch.A. 6
cyklotron 200–202, 209
cząstki naładowane 194–198, 210
częstość kołowa 197, 327
— — drgań swobodnych 332
— — — wymuszonych 331

D

defibrylator medyczny 114
deklinacja magnetyczna 292
diamagnetyzm 298, 299–300, 312
dielektryk 118–120
— niepolarny 118
— polarny 119
— , właściwości 116
dipol elektryczny 23, 85
— magnetyczny 209, 235–238, 239, 290
— w polu elektrycznym 36–38, 40
długość 333
domeny magnetyczne 304–305
domieszkowanie 146
doświadczenie Faradaya 117
— Millikana 34–
— Thomsona 191

drgania elektromagnetyczne 319–352
— obwodu LC 320–323, 325–327
— tłumione 329–330
— wymuszone 332, 352
Droga Mleczna 129
duanty 199
dziełko elektronowe 195
działo szynowe 227

E

elektrodynamika kwantowa 295
elektromagnes 185
elektron 2, 4, 11, 13, 293–298
— , odkrycie 190–192
— przewodnictwa 4, 5
— swobodny 129
elektryczność 2
energia 13, 155–157
— potencjalna dipola elektrycznego 37–38
— — elektryczna 73–74, 76, 93, 113, 122
— — — układu ładunków punktowych 89–91, 94
— — magnetyczna 208, 210
— zmagazynowana w polu elektrycznym 113–115
— — — — magnetycznym 271–272

F

fala elektromagnetyczna 20
farad 103
Faraday M. 2, 21, 115
faza początkowa 352
ferromagnetyzm 299, 303–306
fotokopia 3
Franklin B. 3, 11, 13

G

galwanometr 207
Gauss F. 47
gęstość energii 114–115, 122
— — pola magnetycznego 273–274, 279
— linii pola elektrycznego 49
— ładunku 27
— — liniowa 28
— — objętościowa 28
— — powierzchniowa 28
— — nośników 134
— prądu elektrycznego 132–134, 148

H

Hall E.H. 192
henr 265, 277, 279
Henry J. 265
histereza 306

I

impedancja 340, 352
—, dopasowanie 350
indukcja 247–279
— elektryczna 120
— magnetyczna 210, 219–220
— wzajemna 275–277, 279
indukcyjność 247, 264–266, 279
inklinacja magnetyczna 292
inklinometr 292
iskrzenie 12, 35
izolator 4–5, 14

J

jądro 4
— macierzyste 13
— pochodne 13

K

- Kamerlingh-Onnes H. 147
kąt obrotu 334
kompas 292
kondensator 102–104, 107–110, 121, 339
— kulisty 107
—, ładowanie 103–104, 172–173, 176
— płaski 105–106
—, pojemność 103, 104–107, 115, 122
—, połączenie równoległe 108–109, 122
— — szeregowo 109–111, 121
—, rozładowanie 174–175, 176
— walcowy 106
— z dielektrykiem 115–117, 123
kreacja pary 13
krzywa magnesowania 302, 306
krzywe rezonansowe obwodu *RLC* 343
kulomb 6, 14
kwant ładunku 12
kwark 11

L

- lampa oscyloskopowa 191
Lenz H.F. 252
liczba atomowa 13
— kwantowa magnetyczna spinowa 294
linie pola elektrycznego 21–23, 39, 78
— — magnetycznego 188–190, 221

Ł

- ładunek elektryczny 2–3, 11, 14, 20, 28
— — dodatni 2, 3
— — elementarny 11, 14, 34
— — indukowany 4, 5
— —, pomiar 34
— —, pompowanie 155
— — próbnny 21
— — punktowy 5, 40, 81–83
— — — w polu elektrycznym 33–36, 40
— — skwantowany 11–12, 14, 34
— — stacjonarny 172
— — swobodny 120
— — ujemny 2, 3
— — w ruchu 129
— — wypadkowy 2

M

- magnes 290
— podkwiasty 189
— sztabkowy 188
— trwały 185
magnetometr 292
magneton Bohra 294

magnetyzm 2, 289–314

- ziemski 292–293
materiał magnetyczny 298–299
— przewodzący 141
Maxwell J.C. 2, 228
mechanika klasyczna Newtona 6
miernik inklinacji 292
moc 162–163, 176, 352
— elektryczna 144–145, 148
— średnia 345, 352
— w obwodach prądu zmiennego 344–346
model elektronów swobodnych 142
— pętli z prądem dla orbit elektronowych 296–297
— — — w polu niejednorodnym 297–298
moment dipolowy 37, 39
— — elektryczny 26, 27, 36
— — magnetyczny 208–209, 210, 292
— — magnetyczny orbitalny 295–296, 313
— — spinowy 293–295, 313
— pęd 13
— — orbitalny 295
— — spinowy 293
— siły 37, 205–208, 210
— — działający na dipol 37
monokryształ 304
monopol magnetyczny 290
multimetr 171

N

- nadprzewodnik 5, 147, 148
naładowana linia 86–87
— tarcza 32–33, 87
namagnesowanie 301
napięcie Halla 193
— przebiega 116
nasycenie 301
natężenie pola 79–80, 88–89
— — elektrycznego 20, 21, 24, 37, 39, 104–105
— — — wypadkowe 24
— prądu elektrycznego 129–131, 148, 326–327, 352
— — —, amplituda 339–341, 352
— — — w obwodzie o jednym oczku 157–159
— — — przesunięcia 309
neutron 4, 11
nośnik ładunku 133

O

- obciążenie indukcyjne 337–338

— oporowe 332–334

- pojemnościowe 334–336
obraz mikroskopowy 118–119
obwód elektryczny 103, 154–177
— — o jednym oczku 159–161, 176
— — o wielu oczkach 164–167
— *LC* 351
— *RC* 171–175, 176
— *RL* 267–270, 279
— *RLC* 329–330, 352
— — — szeregowy 339–344, 352
odpływ ładunków ujemnych 5
Oersted H.Ch. 2
ogniwo elektryczne 155
— paliwowe 155
— słoneczne 155
om 136, 148
omomierz 171
opornik 136, 268, 333, 339
oporniki połączone równolegle 165–167, 176
— — szeregowo 160–161, 176
opór elektryczny 128–148
— —, obliczanie 137–138
— — właściwy 135–138, 148
— —, zależność od temperatury 138, 148
— wewnętrzny 159–160
oś dipola 26

P

- paramagnetyzm 298–299, 301–302, 313
pasy radiacyjne Van Allena 198
ped 13
pętla histerezy 306
pierścień naładowany 29
— —, pole 29
— Rowlanda 303, 306
płyta nieprzewodząca 60–61, 62
— przewodząca 61–62
pojemność elektryczna 102–123
pole skrzyżowane 190–194
pole ciągłego rozkładu ładunku 40
— ciśnienia 20
— elektryczne 20–40
— — dipola elektrycznego 26–27, 39
— — — indukowane 259–263, 279
— — jednorodne 22, 37
— — ładunku punktowego 23–24, 39
— — naładowanej linii 27–29
— — — tarczy 32–33
— — — zewnętrzne 56–57

- magnetyczne 184–239
 - cewki 236–238
 - dipola magnetycznego 235–238, 239
 - , indukowane 306–307, 311
 - długiego prostoliniowego przewodu 230–232
 - przewodu o kształcie łuku okręgu 223, 238
 - toroidu 234–235
 - wywołane przepływem prądu 218–239
 - Ziemi 292, 313
 - zmienne 260
 - prędkości 48
 - skalarnie 20
 - temperatury 20
 - wektorowe 20
 - zewnętrzne 34
 - polikryształ 304
 - potencjał elektryczny 72, 79–80, 88–89, 93, 162–163, 262–263
 - izolowanego naładowanego przewodnika 91–93, 94
 - pola ładunku o ciągłym rozkładzie 85–87, 94
 - dipola elektrycznego 84–85, 94
 - ładunku punktowego 81–83, 94
 - powierzchnia Gaussa 47–49, 52, 64, 65, 104, 120, 291
 - ekwipotentialna 77–78, 94
 - przewodnika 57, 65
 - zamknięta 47
 - powłoka sferyczna 63, 65
 - pozyton 13
 - półprzewodnik 5, 145–147, 148
 - praca 76–77, 154–156
 - prawo Ampére'a 228–230, 233, 236, 238
 - uogólnione 308, 310, 312, 314
 - Biota–Savarta 220, 230, 236, 238
 - Coulomba 3, 5–7, 14, 20, 23, 47, 53–54, 117
 - Curie 302, 313
 - Faradaya 312
 - Gaussa 46–66, 118–119, 123, 312
 - dla elektryczności 312
 - — pól elektrycznych 291
 - — magnetycznych 290–291, 313
 - , zastosowanie 58–65
 - indukcji Faradaya 248, 249–251, 278, 306
 - Kirchhoffa drugie 158, 160, 334
 - pierwsze 165, 176
 - Ohma 140–143, 148
 - —, obraz mikroskopowy 142–143
 - prąd elektryczny 2, 5, 14, 35, 128–131
 - — indukowany 248
 - —, kierunek 131
 - — pierwotny 348
 - — przesunięcia 309–310, 314
 - — zmienny 330–352
 - prądnica elektryczna 155
 - prądy uziemienia 60
 - wirowe 259
 - prędkość kątowa 333
 - światła 20
 - unoszenia 133–134, 148
 - promieniowanie elektromagnetyczne 13
 - nadfioletowe 12
 - proton 4, 11
 - przebiecie elektryczne 35
 - przekazywanie energii 256–258
 - przekładnia transformatora 350, 352
 - przemieszczenie 325
 - przenikalność elektryczna próżni 6, 14
 - — względna 115, 123
 - — magnetyczna próżni 220
 - przewodnik 4–5, 14
 - izolowany naładowany 55–57
 - — z wnęką 55
 - kulisty 7
 - przewodność elektryczna właściwa 136, 148
- R**
- reaktancja indukcyjna 337, 351
 - pojemnościowa 335, 352
 - reguła Lenza 252–253, 279
 - oporu 159
 - prawej dłoni 187, 221, 227, 229, 230, 231
 - SEM 159
 - rezonans 332, 342–343, 352
 - rozkład ciągły 27
 - dyskretny 27
 - ładunku 85–87, 94
 - sferyczny 64
 - rozładowanie 4
 - rozpad promieniotwórczy 13
 - rozproszenie energii 145–146, 148
 - równania Maxwella 2, 312–314
 - równowaga elektrostatyczna 55
 - różnica potencjałów 105, 162–163
 - ruch cząstek naładowanych po okręgu 195–199
 - rzut 333
- S**
- samoindukcja 266–267, 279
 - silnik elektryczny 157
- siła 20
 - elektromotoryczna (SEM) 155–158, 162–163, 176
 - — indukowana 248–249, 278
 - — samoindukcji 266, 279
 - elektrostatyczna 3, 5, 7, 14, 20, 24, 34
 - — wypadkowa 22
 - grawitacyjna 6, 7
 - magnetyczna 202–204, 210
 - odpychania 14
 - przyciągania 14
 - — wypadkowa 14
 - zewnętrzna 37, 76–77
 - solenoid 232–235, 238
 - idealny 233
 - stała Curie 302
 - czasowa 173, 319
 - — indukcyjna 279
 - — — pojemnościowa 173, 176
 - elektrostatyczna 6
 - grawitacyjna 6
 - Plancka 294
 - strumień 47–50
 - elektryczny przez powierzchnię Gaussa 49, 50, 65
 - magnetyczny 250, 251, 265, 278
 - — sprzężony 264–265
 - objętościowy 48
 - pola elektrycznego 48–50, 52
 - — prędkości 48
 - symetria płaszczyznowa 60–62
 - sferyczna 63–64
 - walcowa 58–59
 - synchrotron 200–202, 209
 - protonów 201–202
 - szynkość przepływu przez powierzchnię 47
- Ś**
- światło niebieskie 12
 - zielone 197
- T**
- temperatura Curie 303
 - termoogniwo 155
 - tesla 188, 210
 - Thomson J.J. 190
 - toroid 232–235, 238
 - tor śrubowy 197–199
 - transformacja napięcia 349, 352
 - prądów 350, 352
 - transformator 347–350, 352
 - idealny 348–350
 - obniżający napięcie 349

transformator podwyższający napięcie
349

transmisja energii 347–348

trzecia zasada dynamiki Newtona 5

U

Układ Słoneczny 129

układy drgające 324–325

uziemienie 4

W

wartość skuteczna napięcia 345

— — natężenia prądu 345, 352

— — SEM 345, 352

warunek rezonansu 201

weber 250

wiatr słoneczny 129

wolt 76, 156

woltomierz 171

współczynnik mocy 346, 352

— temperaturowy oporu właściwego 137,
138

Z

zachowanie ładunku 13–14

zasada superpozycji 14, 24, 26

— zachowania energii 144, 165

— — ładunku 165

zjawisko Halla 192–194, 210

— indukcji 256–258

— krawędziowe (brzegowe) 62

zmiana energii elektrycznej 327–328

— — magnetycznej 327–328

— ładunku 326–327, 351

zorza polarna 198, 199

Ź

źródło 268

— prądu 103

— siły elektromotorycznej 155, 176

— — — doskonałe 156, 176

— — — rzeczywiste 156, 176

Wybrane stałe fizyczne*

| | | |
|-------------------------------|--------------|---|
| prędkość światła | c | $3,00 \cdot 10^8$ m/s |
| stała grawitacyjna | G | $6,67 \cdot 10^{-11}$ m ³ /(s ² · kg) |
| stała Avogadra | N_A | $6,02 \cdot 10^{23}$ mol ⁻¹ |
| uniwersalna stała gazowa | R | 8,31 J/(mol · K) |
| energetyczny równoważnik masy | c^2 | $8,99 \cdot 10^{16}$ J/kg 931,5 MeV/u |
| stała elektryczna | ϵ_0 | $8,85 \cdot 10^{-12}$ F/m |
| stała magnetyczna | μ_0 | $1,26 \cdot 10^{-6}$ H/m |
| stała Plancka | h | $6,63 \cdot 10^{-34}$ J · s $4,14 \cdot 10^{-15}$ eV · s |
| stała Boltzmanna | k | $1,38 \cdot 10^{-23}$ J/K $8,62 \cdot 10^{-5}$ eV/K |
| ładunek elementarny | e | $1,60 \cdot 10^{-19}$ C |
| masa elektronu | m_e | $9,11 \cdot 10^{-31}$ kg |
| masa protonu | m_p | $1,67 \cdot 10^{-27}$ kg |
| masa neutronu | m_n | $1,68 \cdot 10^{-27}$ kg |
| masa deuteronu | m_d | $3,34 \cdot 10^{-27}$ kg |
| promień Bohra | r_B | $5,29 \cdot 10^{-11}$ m |
| magneton Bohra | μ_B | $9,27 \cdot 10^{-24}$ J/T $5,79 \cdot 10^{-5}$ eV/T |
| stała Rydberga | R | 0,01097 nm ⁻¹ |

* Obszerniejszy spis stałych fizycznych, zawierający także wartości najbardziej dokładne oraz ich niepewności, przedstawiony jest w dodatku B.

Wybrane współczynniki zamiany jednostek*

Masa i gęstość

$$1 \text{ kg} = 1000 \text{ g} = 6,02 \cdot 10^{26} \text{ u}$$

$$1 \text{ u} = 1,66 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$$

$$1 \text{ kg/m}^3 = 10^{-3} \text{ g/cm}^3$$

Prędkość

$$1 \text{ m/s} = 3,28 \text{ ft/s} = 2,24 \text{ mili/h}$$

$$1 \text{ km/h} = 0,621 \text{ mili/h} = 0,278 \text{ m/s}$$

Długość i objętość

$$1 \text{ m} = 100 \text{ cm} = 39,4 \text{ in} = 3,28 \text{ ft}$$

$$1 \text{ mila} = 1,61 \text{ km} = 5280 \text{ ft}$$

$$1 \text{ in} = 2,54 \text{ cm}$$

$$1 \text{ nm} = 10^{-9} \text{ m} = 10 \text{ Å}$$

$$1 \text{ pm} = 10^{-12} \text{ m} = 1000 \text{ fm}$$

$$1 \text{ rok świetlny (y)} = 9,46 \cdot 10^{15} \text{ m}$$

$$1 \text{ m}^3 = 1000 \text{ l} = 35,3 \text{ ft}^3 \\ = 264 \text{ galony amerykańskie}$$

Siła i ciśnienie

$$1 \text{ N} = 10^5 \text{ dyn} = 0,225 \text{ funta}$$

$$1 \text{ Pa} = 1 \text{ N/m}^2 = 10 \text{ dyn/cm}^2$$

$$1 \text{ atm} = 1,01 \cdot 10^5 \text{ Pa} = 76 \text{ cm Hg}$$

Energia i moc

$$1 \text{ J} = 10^7 \text{ ergów} = 0,239 \text{ cal}$$

$$1 \text{ kWh} = 3,6 \cdot 10^6 \text{ J}$$

$$1 \text{ cal} = 4,19 \text{ J}$$

$$1 \text{ eV} = 1,60 \cdot 10^{-19} \text{ J}$$

$$1 \text{ KM} = 746 \text{ W}$$

Czas

$$1 \text{ d} = 86\,400 \text{ s}$$

$$1 \text{ a} = 365 \frac{1}{4} \text{ d} = 3,16 \cdot 10^7 \text{ s}$$

Magnetyzm

$$1 \text{ T} = 1 \text{ Wb/m}^2 = 10^4 \text{ Gs}$$

Miara łukowa kąta

$$1 \text{ rad} = 57,3^\circ = 0,159 \text{ obrotu}$$

$$\pi \text{ rad} = 180^\circ = \frac{1}{2} \text{ obrotu}$$

* Obszerniejszy spis przedstawiony jest w dodatku D.

David **Halliday**
Robert **Resnick**
Jearl **Walker**

3

Podstawy fizyki

RESNICK • HALLIDAY reaktywacja

- kompletny, nowoczesny podręcznik fizyki nareszcie po polsku !
- aparat matematyczny ograniczony do niezbędnego minimum
- teoria poparta licznymi przykładami
- pytania i zadania sprawdzające po każdym rozdziale
- przejrzysty układ tekstu
- wspaniała szata graficzna
- kolorowe, sugestywne ilustracje wzbogacające i uzupełniające wykład
- nowość: najważniejsze zagadnienia fizyki współczesnej !

Podstawowy podręcznik dla studentów i uczniów

Nieoceniona pomoc dla nauczycieli

Tom 3

zawiera zagadnienia z następujących dziedzin:

- elektryczność
- magnetyzm

t. 3

ISBN-13: 978-83-01-14076-2
ISBN-10: 83-01-14076-3



03

03

t. 1-5

ISBN-13: 978-83-01-13997-1
ISBN-10: 83-01-13997-8



9 788301 139971