Sobre los números normales y el espacio ${}^{\omega}2$

Angel Granado
angel.granado@correo.unimet.edu.ve
Universidad Metropolitana.

March 13, 2023

Definición. Sea $x \in [0,1]$ y $\{a_n\}_{n<\omega} \in {}^{\omega}2$ el desarrollo binaria de x. Sea $S_n(x)$ la cantidad de 1's en la expansión binaria de x en los primeros n términos. Decimos que x es un **número simplemente normal en base 2** si

$$\lim_{n\to\infty} \frac{S_n(x)}{n} = \frac{1}{2}$$

Denotaremos por N al conjunto de todos los números $x \in [0,1]$ que son *simplemente normales en base 2* y por $\mathcal{B}([0,1])$ a la σ-álgebra de Borel del $[0,1]$ dotado de la topología usual.

Unos de los resultados más célebres del **Teorema Fuerte de los Grandes Números** fue formulado por Borel (1909) términos de los números normales en base 2:

Teorema (Borel 1909). Todos los números en $[0,1]$ son simplemente normales en base 2, excepto en un conjunto de Borel de medida 0.

Es decir, si $m : \mathcal{L} \to [0,+\infty)$ es la medida de Lebesgue entonces $m(N) = 1$.

Definición. El **Espacio de Cantor** es el conjunto ${}^{\omega}2$ de todas las funciones $s : \omega \to 2$ cuya topología es el ω-producto del espacio $2 = \{0,1\}$, donde 2 está equipado con la topología discreta.

La topología del espacio de Cantor está generada por la base conformada por los conjuntos de la forma

$$B_s = \{t \in {}^{\omega}2 : s \subseteq t\}$$

donde s es una sucesión finita de 1's y 0's. Si $d : {}^{\omega}2 \times {}^{\omega}2 \to [0,+\infty)$ definida como

$$d(s,t) = \frac{1}{2^{\min\{n<\omega \,:\, s(n)\neq t(n)\}}}$$

para $s, t \in {}^{\omega}2$. Entonces, d es una métrica sobre el espacio de Cantor e induce la topología generada por los abiertos básicos B_s. Así que el espacio de Cantor es metrizable.

Para definir una medida sobre el espacio de Cantor, es necesario hacer uso del siguiente teorema:

Teorema 1 *(Halmos, P. 38B).* Si $\{(X_i, S_i, \mu_i)\}_{i<\omega}$ es una sucesión de espacios de medida tales que $\mu_i(X_i) = 1$ para $i < \omega$, entonces existe una única medida μ sobre la σ-álgebra $S = \bigotimes_{i<\omega} S_i$ con la propiedad que, para cada conjunto medible E de la forma $A \times X^{(n)}$, donde $X^{(n)} = \prod_{i>n} X_i$, se verifica

$$\mu(E) = (\mu_1 \times \cdots \times \mu_n)(A)$$

la medida μ se denomina el **producto** de las medidas μ_i, $\mu = \bigotimes_{i<\omega} \mu_i$. El espacio de medida

$$\left(\prod_{i<\omega} X_i, \bigotimes_{i<\omega} S_i, \bigotimes_{i<\omega} \mu_i\right)$$

es el **Producto Cartesiano** es los espacio de medida $\{(X_i, S_i, \mu_i)\}_{i<\omega}$.

Demostración. Halmos 1950, **Teorema 38B**[3]. $\square$

En virtud del **Teorema 1**, existe una única medida μ definida sobre la σ-álgebra de Borel sobre ${}^{\omega}2$, tal que si B_s es un abierto básico donde $s \in {}^{n}2$ entonces $\mu(B_s) = \frac{1}{2^n}$. Consideremos la familia

$$G = \{A \cup N | A \in \mathcal{B}({}^{\omega}2) \ \& \ (\exists Z \in \mathcal{B}({}^{\omega}2))(\mu(Z) = 0 \ \& \ N \subseteq Z)\}$$

Se puede probar que G es una σ-álgebra [3]. Ahora, definamos a $\overline{\mu} : G \to [0, 1]$ como

$$\overline{\mu} = \{(A \cup N, s) : \mu(A) = s \ \& \ A \in \mathcal{B}({}^{\omega}2) \ \& \ (\exists Z \in \mathcal{B}({}^{\omega}2))(\mu(Z) = 0 \ \& \ N \subseteq Z)\},$$

entonces $\overline{\mu}$ es la unica medida sobre G que extiende a μ, y se denomina la **completación** de μ. Denotaremos también por μ a la completación de la medida definida sobre el espacio de Cantor. De esta forma, los subconjuntos de ${}^{\omega}2$ para los cuales esta medida está definida se denominan subconjuntos *medibles* de ${}^{\omega}2$.

Teorema 2.[6]

1. Para cada $t \in {}^{\omega}2$, la serie $\sum_{n<\omega} \frac{t_n}{2^{n+1}}$ converge y $0 \leq \sum_{n<\omega} \frac{t_n}{2^{n+1}} \leq 1$.
2. Para cada $x \in [0, 1]$ existe un $t \in {}^{\omega}2$ tal que $x = \sum_{n<\omega} \frac{t_n}{2^{n+1}}$.
3. Para s, $t \in {}^{\omega}2$ $\sum_{n<\omega} \frac{s_n}{2^{n+1}} < \sum_{n<\omega} \frac{t_n}{2^{n+1}}$ si y sólo si existe un $m < \omega$ tal que $s_n = t_n$ para $n < m$, $s_m = 0$ y $t_m = 1$, y existe un $n > m$ tal que $s_n = 0$ o $t_n = 1$.
4. Para $s, t \in {}^{\omega}2$, $\sum_{n<\omega} \frac{s_n}{2^{n+1}} = \sum_{n<\omega} \frac{t_n}{2^{n+1}}$ si y sólo si $s = t$, o si existe un $m < \omega$ tal que $s_n = t_n$ para $n < m$, $s_m \neq t_m$ y para toda $n > m$ se tiene que $s_n = t_m$ y $t_n = s_m$.

5. Para $x \in [0,1]$ existe un único $t \in {}^{\omega}2$ tal que $x = \sum_{n<\omega} \frac{t_n}{2^{n+1}}$, excepto en los casos donde $x > 0$ y tiene fracciones binarias finitas, en ese caso x tiene dos expresiones binarias.

6. La cardinalidad del conjunto de todos los $x \in [0,1]$ con fracciones binarias finitas es $\aleph_0$.

Definición. Sea $k : {}^{\omega}2 \to [0,1]$ la función dada por $k(t) = \sum_{n<\omega} \frac{t_n}{2^{n+1}}$, k se denomina el **mapeo estándar** de ${}^{\omega}2$ *sobre* $[0,1]$.

Lema 1. Sea k el mapeo estándar de ${}^{\omega}2$ sobre $[0,1]$. Si $B_s \subseteq {}^{\omega}2$ es un abierto básico, entonces

$$k[B_s] = \left[\sum_{i<n} \frac{s_i}{2^{i+1}}, \sum_{i<n} \frac{s_i}{2^{i+1}} + \frac{1}{2^n}\right]$$

Demostración. Sea $s \in {}^{n}2$ y $B_s = \{t \in {}^{\omega}2 : s \subseteq t\}$, si $x \in \left[\sum_{i<n} \dfrac{s_i}{2^{i+1}}, \sum_{i<n} \dfrac{s_i}{2^{i+1}} + \dfrac{1}{2^n}\right]$ entonces existe un $a \in {}^{\omega}2$ tal que

$$x = \sum_{i<\omega} \frac{t_i}{2^{i+1}} = \sum_{i<n} \frac{s_i}{2^{i+1}} + \sum_{i \geq n} \frac{t_i}{2^{i+1}}$$

Si $x \in k[B_s]$ entonces existe un $t \in B_s$ tal que

$$x = \sum_{i<\omega} \frac{t_i}{2^{i+1}} = \sum_{i<n} \frac{s_i}{2^{i+1}} + \sum_{i \geq n} \frac{t_i}{2^{i+1}}$$

Entonces,

$$x \leq \sum_{i<n} \frac{s_i}{2^{i+1}} + \frac{1}{2^n}$$

Además,

$$x = \sum_{i<n} \frac{s_i}{2^{i+1}} + \sum_{i \geq n} \frac{t_i}{2^{i+1}} \geq \sum_{i<n} \frac{s_i}{2^{i+1}}$$

Así que $x \in \left[\sum_{i<n} \dfrac{s_i}{2^{i+1}}, \sum_{i<n} \dfrac{s_i}{2^{i+1}} + \dfrac{1}{2^n}\right]$, y en consecuencia,

$$k[B_s] \subseteq \left[\sum_{i<n} \frac{s_i}{2^{i+1}}, \sum_{i<n} \frac{s_i}{2^{i+1}} + \frac{1}{2^n}\right]$$

Por otra parte, si $x \in \left[\sum_{i<n} \dfrac{s_i}{2^{i+1}}, \sum_{i<n} \dfrac{s_i}{2^{i+1}} + \dfrac{1}{2^n}\right]$ entonces existe $t \in {}^{\omega}2$ tal que $x = k(t)$. Luego, por el **Teorema 2**, $t_i = s_i$ para $i < n$. En consecuencia, $t \in B_s$ y $x \in k[B_s]$.

$\square$

Definición. Sea $t \in {}^{\omega}2$, t es **eventualmente constante** si existe un $m < \omega$ tal que $t_m = t_n$ para $n > m$.

Observe que si $W = \{t \in {}^{\omega}2 : t \text{ no es eventualmente constante}\}$ entonces ${}^{\omega}2 \setminus W$ es numerable y en consecuencia, W y ${}^{\omega}2 \setminus W$ son borelianos.

Proposición 1. k es una función continua y sobreyectiva. Si W es el conjunto de los miembros de ${}^{\omega}2$ que no son eventualmente constantes, entonces $k \upharpoonright_W$ es un homeomorfismo de W sobre el conjunto de todos los $x \in [0,1]$ que no poseen fracciones binarias finita.

Demostración. Del **Teorema 2** se deduce de inmediato que k es sobreyectiva. Mostremos que k es continua sobre ${}^{\omega}2$. Sea $x \in [0,1]$ y $t \in {}^{\omega}2$ tal que $x = k(t)$. Sea U_x una vecindad abierta de x, tomemos un $m < \omega$ tal que

$$\left[x - \frac{1}{2^m},\, x + \frac{1}{2^m}\right] \subseteq U_x$$

Consideremos el conjunto

$$B_{t\upharpoonright m} = \{s \in {}^{\omega}2 : (t_0, \cdots, t_{m-1}) \subseteq s\}$$

Es claro que $B_{t\upharpoonright m}$ es un abierto básico. Entonces, para probar que k es continua, basta con mostrar que

$$k[B_{t\upharpoonright m}] \subseteq \left[x - \frac{1}{2^m},\, x + \frac{1}{2^m}\right] \tag{1}$$

Si $x = \sum_{i<\omega} \frac{t_i}{2^{i+1}}$ entonces definamos a $y := \sum_{i<m} \frac{t_i}{2^{i+1}}$. Observe que $y \leq x$, y

$$x = y + \sum_{i \geq m} \frac{t_i}{2^{i+1}} \leq y + \sum_{m \leq i < \omega} \frac{1}{2^{i+1}} \leq y + \frac{1}{2^m}$$

Así que

$$y \leq x \leq y + \frac{1}{2^m} \tag{2}$$

Luego, si $s \in B_{t\upharpoonright m}$ entonces para $i < m$ se tiene que $s_i = t_i$. En consecuencia,

$$y \leq k(s) = y + \sum_{m \leq i < \omega} \frac{s_i}{2^{i+1}} \leq y + \frac{1}{2^m} \tag{3}$$

De (2) y (3) se obtiene:

$$x - \frac{1}{2^m} \leq k(s) \leq x + \frac{1}{2^m}$$

Así que se verifica (1).

Ahora mostremos que $k\restriction_W\colon W\to k[W]$ es un homeomorfismo, es claro que $k\restriction_W$ es biyectiva y por lo demostrado anteriormente, $k\restriction_W$ es continua. Así que solo falta probar que $k^{-1}\restriction_{k[W]}$ es continua. Sea $t\in W$ y $x=k(t)$, y U_t una vecindad abierta de t entonces existe un $m<\omega$ tal que $B_{t\restriction m}\cap W\subseteq U_t$. Definamos $y:=\sum_{i<m}\frac{t_i}{2^{i+1}}$, veamos que $(y,y+\frac{1}{2^m})$ es una vecindad de x. Para ello, debemos probar que el intervalo contiene un abierto que pertenece a la topología del subespacio $k[W]$.

Como $t\in W$, podemos tomar un $p<\omega$ tal que $t_m\neq t_p$. Si $y:=\sum_{i<m}\frac{t_i}{2^{i+1}}$ entonces por el **Teorema 2**,

$$y+\frac{1}{2^{p+1}}\leq x\leq y+\frac{1}{2^m}-\frac{1}{2^{p+1}} \tag{4}$$

consideremos el conjunto

$$\left(x-\frac{1}{2^{p+1}},\, x+\frac{1}{2^{p+1}}\right)\cap k[W]$$

observe que el conjunto es un abierto en el subespacio $k[W]$. Además, si z pertenece al conjunto, entonces por (4),

$$y\leq x-\frac{1}{2^{p+1}}<z<x+\frac{1}{2^{p+1}}\leq y+\frac{1}{2^m}$$

lo que implica que $z\in(y,y+\frac{1}{2^m})$ y en consecuencia,

$$\left(x-\frac{1}{2^{p+1}},\, x+\frac{1}{2^{p+1}}\right)\cap k[W]\subseteq\left(y,y+\frac{1}{2^m}\right)$$

Lo que muestra que $(y,y+\frac{1}{2^m})$ es una vecindad de x. Luego, como $y=k((t_0,\,t_1,\,\cdots,t_{m-1},\,0,\cdots))$, $y+\frac{1}{2^m}=k((t_0,\,t_1,\,\cdots,t_{m-1},\,1,\cdots))$; en virtud del **Teorema 2**, si $z\in(y,\,y+\frac{1}{2^m})\cap k[W]$ entonces $k^{-1}(z)\in B_{t\restriction m}\cap W$. Por lo tanto,

$$k^{-1}\restriction_{k[W]}\left[\left(y,\,y+\frac{1}{2^m}\right)\cap k[W]\right]\subseteq B_{t\restriction m}\cap W\subseteq U_t$$

Lo que muestra que $k^{-1}\restriction_{k[W]}$ es continua. □

Proposición 2. Sea $k:{}^{\omega}2\to[0,1]$ y $B\subseteq{}^{\omega}2$, $B\in\mathcal{B}({}^{\omega}2)$ si y sólo si $k[B]\in\mathcal{B}([0,1])$.

Demostración. $(\Rightarrow)$ Supongamos que $B\in\mathcal{B}({}^{\omega}2)$. Sea W el conjunto de todos los elementos de ${}^{\omega}2$ que no son *eventualmente constantes*. Como $|\,{}^{\omega}2\setminus W\,|=\omega$, entonces ${}^{\omega}2\setminus W\in\mathcal{B}({}^{\omega}2)$ y en consecuencia $W\in\mathcal{B}({}^{\omega}2)$. Así que $B\cap W$ y $B\cap({}^{\omega}2\setminus W)$ son borelianos. Luego,

$$k[B]=k[B\cap W]\cup k[B\cap({}^{\omega}2\setminus W)]$$

Entonces, para probar que $k[B]\in\mathbf{B}([0,1])$, basta con mostrar que $k[B\cap W]$ y $k[B\cap({}^{\omega}2\setminus W)]$ son borelianos.

Como k es sobreyectiva,

$$|\, k[B\cap(\,^{\omega}2\setminus W)]\,| \leq |B\cap(\,^{\omega}2\setminus W)| \leq \omega,$$

entonces $k[B\cap(\,^{\omega}2\setminus W)] \in \mathcal{B}([0,1])$. Por otra parte, como $k^{-1}\restriction_{k[W]}\colon k[W]\to W$ es continua, entonces

$$(k^{-1}\restriction_{k[W]})^{-1}[B\cap W] \in \mathcal{B}([0,1])\restriction k[W],$$

así que existe un $A\in\mathcal{B}([0,1])$ tal que

$$(k^{-1}\restriction_{k[W]})^{-1}[B\cap W] = A\cap k[W]$$

Puesto que $k^{-1}\restriction_{k[W]}$ es biyectiva,

$$(k^{-1}\restriction_{k[W]})^{-1}[B\cap W] = k\restriction_W [B\cap W] = k[B\cap W]$$

entonces $k[B\cap W]\in\mathcal{B}([0,1])$, lo que muestra que $k[B]\in\mathcal{B}([0,1])$.

($\Leftarrow$) Supongamos que $k[B]\in\mathbf{B}([0,1])$ donde $B\subseteq\,^{\omega}2$, mostremos que $B\in\mathcal{B}([0,1])$.Como k es continua, $k^{-1}[k[B]]\in\mathcal{B}([0,1])$. Luego, si

$$A=\{t\in\,^{\omega}2 : t \text{ es eventualmente constante } \,\&\, t\notin B\}$$

entonces $B=k^{-1}[k[B]]\setminus A$. Como A es numerable, $A\in\mathcal{B}(\,^{\omega}2)$ y en consecuencia $B\in\mathcal{B}(\,^{\omega}2)$. $\square$

Proposición 3. Sea k el mapeo estándar de $^{\omega}2$ sobre $[0,1]$ y $B\in\mathcal{B}(\,^{\omega}2)$. Entonces,

$$m(k[B])=\mu(B)$$

Demostración. Sea $s\in\,^{n}2$, consideremos el abierto básico $B_s=\{t\in\,^{\omega}2 : s\subseteq t\}$, entonces $\mu(B_s)=\dfrac{1}{2^n}$. Luego, por el **Lema 1**

$$k[B_s]=\Big[\sum_{i<n}\frac{s_i}{2^{i+1}},\ \sum_{i<n}\frac{s_i}{2^{i+1}}+\frac{1}{2^n}\Big]$$

En consecuencia, $\mu(B_s)=\dfrac{1}{2^n}=k[B_s]$. Ahora consideremos a $\overline{\mu}:\mathcal{B}(\,^{\omega}2)\to[0,1]$, definida como $\overline{\mu}(B)=m(k[B])$ para $B\in\mathcal{B}(\,^{\omega}2)$. Por la **Proposición 2**, $K[B]\in B([0,1])$ lo que implica que $\overline{\mu}$ está bien definida. Luego, observe que:

1. Es claro que
$$\overline{\mu}(\emptyset)=m(k[\emptyset])=m(\emptyset)=0$$

2. Sea $\{A_n\}_{n<\omega}$ es una sucesión de conjuntos de Borel de ${}^{\omega}2$ disjuntos dos a dos. Sea Z el conjunto de todos los $x \in [0,1]$ que poseen un desarrollo binario finito, como Z es numerable entonces $m(Z_A) = 0$. Además, puesto que Z y $k[A_n]$ son conjuntos de Borel para $n < \omega$, $\{k[A_n] \setminus Z\}_{n<\omega}$ es una sucesión de conjuntos de Borel disjunta dos a dos. En consecuencia,

$$\begin{aligned}
\overline{\mu}\Big(\bigcup_{i<\omega} A_n\Big) &= m\Big(k\Big[\bigcup_{i<\omega} A_n\Big]\Big) - \underbrace{m(Z)}_{=0} \\
&= m\Big(\bigcup_{i<\omega}(k[A_n] \setminus Z)\Big) \\
&= \sum_{i<\omega} m(k[A_n] \setminus Z) \\
&= \sum_{i<\omega}[\underbrace{m(k[A_n])}_{=\overline{\mu}(A_n)} - \underbrace{m(Z)}_{=0}] \\
&= \sum_{i<\omega} \overline{\mu}(A_n)
\end{aligned}$$

Así que $\overline{\mu}$ es una medida sobre $\mathcal{B}({}^{\omega}2)$.

Si $s \in {}^{n}2$ entonces, por construcción, se verifica que $\overline{\mu}(B_s) = \dfrac{1}{2^n} = m(k[B_s])$. En virtud del **Teorema 1**, $\overline{\mu} = \mu$. Lo que muestra que $\mu(B) = m(k[B])$ para todo subconjunto de Borel $B \subseteq {}^{\omega}2$.

$\square$

Definición. Sea $A \subseteq \mathbb{N}$, la **densidad asintótica superior** de A se define como

$$\overline{d(A)} = \limsup_{n\to\infty} \frac{|A \cap n|}{n}$$

De forma análoga, se define la **densidad asintótica inferior** de A como

$$\underline{d(A)} = \liminf_{n\to\infty} \frac{|A \cap n|}{n}$$

Decimos que A tiene **densidad asintótica** $d(A)$ si $\underline{d(A)} = \overline{d(A)}$, y en ese caso:

$$d(A) = \underline{d(A)} = \overline{d(A)}$$

Propiedades:

1. $\underline{d}(A)$ y $\overline{d(A)}$ siempre existen y $0 \leq \underline{d}(A) \leq \overline{d(A)} \leq 1$.
2. Si $A \subseteq \mathbb{N}$ y $d(A)$ existe entonces $0 \leq d(A) \leq 1$.
3. Si $A \subseteq \mathbb{N}$ es finito entonces $d(A) = 0$ y $d(\mathbb{N} \setminus A) = 1$.

Ejemplos:

1. Si $A \subseteq \mathbb{N}$ es un conjunto finito entonces $d(A) = 0$.
2. Si $A = \{n^2 : n < \omega\}$ entonces $d(A) = 0$.
3. Si $A = \{n < \omega : n \mod 2 = 0\}$ entonces $d(A) = \frac{1}{2}$ y $d(\mathbb{N} \setminus A) = \frac{1}{2}$.
4. Si P es el conjunto de todos los números primos, entonces $d(P) = 0$.

Lema 1. Sea $x \in [0,1]$, $a \in {}^{\omega}2$ tal que $x = k(a)$ y $A = \{i < \omega : a_i = 1\}$. Entonces, x es simplemente normal en base 2 si y sólo si A tiene densidad asintótica igual a $\dfrac{1}{2}$.

Demostración. ($\Rightarrow$) Supongamos que $x \in [0,1]$ es un número simplemente normal en base 2. Entonces,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{S_n(x)}{n} = \frac{1}{2} \tag{5}$$

Luego, existe un $a \in {}^{\omega}2$ tal que $x = k(A)$. Sea $A = \{i < \omega : a_i = 1\}$, entonces

$$\frac{S_n(x)}{n} = \frac{\sum_{i<n} a_i}{n} = \frac{|A \cap n|}{n}$$

Por (1), se tiene que

$$\underline{d(A)} = \liminf_{n\to\infty} \frac{|A \cap n|}{n} = \liminf_{n\to\infty} \frac{S_n(x)}{n} = \frac{1}{2}$$

y

$$\overline{d(A)} = \limsup_{n\to\infty} \frac{|A \cap n|}{n} = \limsup_{n\to\infty} \frac{S_n(x)}{n} = \frac{1}{2}$$

Lo que implica que la densidad asintótica de A existe y es igual a $\dfrac{1}{2}$.

($\Leftarrow$) De forma reciproca. Si $a \in {}^{\omega}2$, $A = \{i < \omega : a_i = 1\}$ y $d(A) = \dfrac{1}{2}$ entonces, como $\dfrac{S_n(x)}{n} = \dfrac{|A \cap n|}{n}$, tenemos que

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{S_n(x)}{n} = \liminf_{n\to\infty} \frac{|A \cap n|}{n} = \frac{1}{2} \text{ y } \limsup_{n\to\infty} \frac{S_n(x)}{n} = \limsup_{n\to\infty} \frac{|A \cap n|}{n} = \frac{1}{2} \tag{6}$$

Por (3), obtenemos que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{S_n(x)}{n} = \frac{1}{2}$$

En consecuencia, x es un número simplemente normal. $\square$

Lema 2. Sea $k : {}^{\omega}2 \to [0,1]$ el mapeo estándar de ${}^{\omega}2$ sobre el intervalo $[0,1]$. Si

$$N = \left\{x \in [0,1] : \lim_{n\to\infty} \frac{S_n(x)}{n} = \frac{1}{2}\right\} \text{ y } Char_{[0,1]} = \left\{\chi_A \in {}^{\omega}2 : d(A) = \frac{1}{2}\right\},$$

entonces $k[Char_{[0,1]}] = N$.

Demostración. Sea $x \in k[Char_{[0,1]}]$, entonces existe un $t \in Char_{[0,1]}$ tal que $x = \sum_{i<\omega} \dfrac{t_i}{2^{(i+1)}}$ y $d(\{i < \omega : t_i = 1\}) = \frac{1}{2}$. Luego, en virtud del **Lema 1**, $x = k(A) \in N$. Así que

$$Char_{[0,1]} \subseteq N \tag{7}$$

Sea $x \in N$ entonces existe un $a \in {}^{\omega}2$ tal que $x = k(a)$. Sea $A_x = \{i < \omega : a_i = 1\}$, entonces por el **Lema 1**, $d(A_x) = \frac{1}{2}$ y en consecuencia $a \in Char_{[0,1]}$. Esto implica que $x = k(a) \in k[Char_{[0,1]}]$. Entonces,

$$N \subseteq Char_{[0,1]} \tag{8}$$

De (4) y (5) obtenemos:

$$k[Char_{[0,1]}] = N$$

$\square$

Proposición 4. N es un conjunto de Borel.

Demostración. Observe que $x \in N$ si y sólo si

$$\forall k \in \mathbb{N}\, \exists N \in \mathbb{N}\, \forall n \geq N \quad \Big(\Big| \frac{S_n(x)}{n} - \frac{1}{2} \Big| < \frac{1}{k+2} \Big)$$

Si definimos

$$A_{n,k} = \Big\{ x \in [0,1] : \Big| \frac{S_n(x)}{n} - \frac{1}{2} \Big| < \frac{1}{k+2} \Big\},$$

entonces

$$N = \bigcap_{k<\omega} \bigcup_{N<\omega} \bigcap_{n \geq N} A_{n,k} \in \mathcal{B}([0,1])$$

Así que basta con probar que $A_{n,k} \in \mathcal{B}([0,1])$. Note que

$$\Big| \frac{S_n(x)}{n} - \frac{1}{2} \Big| < \frac{1}{k+2} \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{nk}{2(k+2)} < S_n(x) < \frac{n(k+4)}{2(k+2)} \tag{9}$$

Entonces la cantidad de valores posibles de $S_n(\cdot)$ que satisfacen (6) está dado por

$$m = \Big| \Big(\frac{nk}{2(k+2)}, \frac{n(k+4)}{2(k+2)} \Big) \cap \mathbb{N} \Big| < \omega$$

Sean $v_1, \cdots, v_m$ tales valores de $S_n(\cdot)$, entonces,

$$A_{n,k} = \bigcup_{j=1}^{m} \{ x \in [0,1] : S_n(x) = v_i \}$$

Ahora, consideremos los *intervalos diádicos:*

$$I_1^{(n)} = \Big[0, \frac{1}{2^n} \Big],$$

$$I_j^{(n)} = \Big(\frac{j}{2^n}, \frac{j+1}{2^n} \Big], \quad \textit{para } j = 2, \cdots 2^n - 1$$

Entonces $\{I_j^{(n)}\}_{j=1}^{2^n}$ es una partición del intervalo $[0,1]$. Por el **Teorema 2**, si $x, y \in I_j^{(n)}$ entonces $S_n(x) = S_n(y)$. Es decir que $S_n(\cdot)$ es constante sobre los intervalos $I_j^{(n)}$.

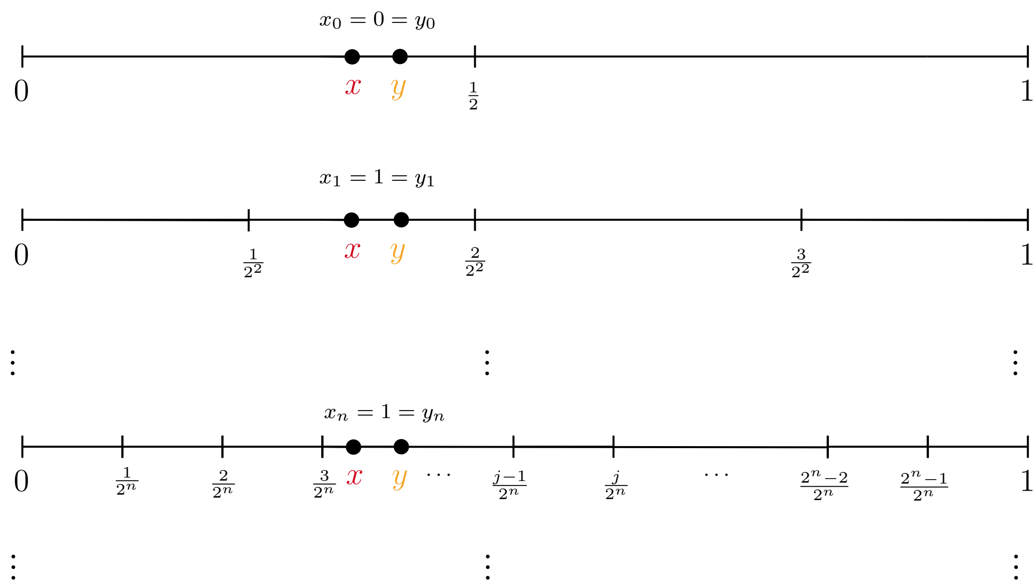

Figura 1. Descomposición en intervalos diádicos.
Si $x, y \in I_3^n$ entonces $x_i = y_i$ para $i \leq n$.

Si $S_n(\cdot) = v_i$ entonces

$$\{x \in [0,1] : S_n(x) = v_i\}$$

es el conjunto de todas $x \in [0,1]$ que tienen v_i 1's y $n - v_i$ 0's en los primeros n términos de la expansión binaria. Así que existen $C_i = \binom{n}{v_i}$ intervalos diádicos donde $S_n(\cdot) = v_i$. Esto implica que

$$\{x \in [0,1] : S_n(x) = v_i\} = \bigcup_{l=0}^{C_i} I_{j_l}^{(n)}$$

Como cada intervalo diádico $I_{j_l}^{(n)} \in \mathcal{B}([0,1]$, tenemos que cada conjunto $\{x \in [0,1] : S_n(x) = v_i\}$ es un boreliano. Así que cada $A_{n,k} \in \mathcal{B}([0,1])$ y en consecuencia

$$N = \bigcap_{k<\omega} \bigcup_{N<\omega} \bigcap_{n \geq N} A_{n,k} \in \mathcal{B}([0,1])$$

$\square$

Como consecuencia inmediata del **Lema 2** y de la **Proposición 3**, el **Teorema de Borel** sobre los números simplemente normales en base 2 puede ser formulado en términos de la densidad asintótica:

Teorema 3 Sean

$$N = \left\{x \in [0,1] : \lim_{n\to\infty} \frac{S_n(x)}{n} = \frac{1}{2}\right\} \text{ y } Char_{[0,1]} = \left\{\chi_A \in {}^{\omega}2 : d(A) = \frac{1}{2}\right\}.$$

Entonces, $m(N) = 1$ si y sólo si $\mu(Char_{[0,1]}) = 1$.

Demostración. Por el **Lema 2**, $k[Char_{[0,1]}] = N$. Como $N \in \mathcal{B}([0,1])$, en virtud de la **Proposición 2**, $Char_{[0,1]} \in \mathcal{B}({}^{\omega}2)$. Luego, por la **Proposición 3**,

$$m(N) = \mu(Char_{[0,1]})$$

Lo que termina la demostración. □

References

[1] Patrick Billingsley. *Probability and Measure*. 3rd ed. Wiley Series in Probability and Mathematical Statistics. New York: John Wiley & Sons, 1995.

[2] Gerald B. Folland. *Real Analysis: Modern Techniques and Their Applications*. 2nd edition. New York: John Wiley & Sons, 1999.

[3] Paul R. Halmos. *Measure Theory*. New York: Van Nostrand, 1950.

[4] Alexander S. Kechris. *Classical Descriptive Set Theory*. 1st ed. Vol. 156. Graduate Texts in Mathematics. Springer-Verlag, 1995. DOI: `10.1007/978-1-4612-4190-4`.

[5] Tom Ki Haseo; Linton. "Normal numbers and subsets of N with given densities". In: *Fundamenta Mathematicae* 144.2 (1994), pp. 163–179. URL: `http://eudml.org/doc/212021`.

[6] Azriel Levy. *Basic Set Theory*. 1st ed. Dover Books on Mathematics. Dover Publications, 1979.