El espacio dual de L^∞

Angel Granado
angel.granado@correo.unimet.edu.ve
Universidad Metropolitana.

March 8, 2023

1 Introducción

Sea (Ω, Σ, μ) un espacio de medida y $f : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$ una función $\Sigma - medible$. El *supremo esencial* de f sobre Ω está definido por

$$||f||_\infty := \inf\{c \in \mathbb{R} : \mu(\{\omega \in \Omega : f(\omega) > c\}) = 0\}$$

$\mathcal{L}^\infty(\Omega, \Sigma, \mu)$ es un espacio vectorial, pero $(\mathcal{L}^\infty(\Omega, \Sigma, \mu), ||\cdot||_\infty)$ no es un espacio normado. En efecto, sea $\omega_0 \in \Omega$ fijo y consideremos las funciones $g, h : \Omega \to \mathbb{R}$ definidas respectivamente por $g(\omega) = 0$ para toda $\omega \in \Omega$ y $h(\omega) = 0$ para toda $\omega \in \Omega \setminus \{\omega_0\}$ y $h(\omega_0) = 1$. Entonces, $||g - h||_\infty = 0$ pero $g \neq h$.

Para solucionar esto, consideremos la siguiente relación sobre $\mathcal{L}^\infty(\Omega, \Sigma, \mu)$:

$$f \sim g \quad \iff \quad \mu(\{\omega \in \Omega : f(\omega) \neq g(\omega)\}) = 0$$

.

La relación es de equivalencia. Si definimos a $L^\infty(\Omega, \Sigma, \mu)$ como $(\mathcal{L}^\infty(\Omega, \Sigma, \mu))/\sim$ entonces $(L^\infty(\Omega, \Sigma, \mu), ||\cdot||_\infty)$ sí es un espacio normado. Más aún, $(L^\infty(\Omega, \Sigma, \mu), ||\cdot||_\infty)$ es un espacio de Banach.

En análisis funcional, resulta interesante estudiar el espacio dual de un espacio normado ya que es posible determinar propiedades de los espacios a través de su espacio dual. Para el espacio $L^\infty(\Omega, \Sigma, \mu)$, su dual se define como el espacio de todos los funcionales lineales acotados $\phi : L^\infty(\Omega, \Sigma, \mu) \to \mathbb{R}$, y se denota por $(L^\infty(\Omega, \Sigma, \mu))^*$. Observe que se le puede dotar de una estructura de espacio normado si se define a $||\cdot|| : (L^\infty(\Omega, \Sigma, \mu))^* \to [0, \mathbb{R}^+)$ como

$$||\phi|| := \inf\{k \geq 0 : |\phi(f)| \leq k\,||f||_\infty\ (\forall f \in L^\infty(\Omega, \Sigma, \mu) \setminus \{0\})\}$$

Nuestro objetivo será demostrar que $(L^\infty(\Omega, \Sigma, \mu))^* \cong ba(\Omega, \Sigma, \mu)$. Para ello, primero estudiaremos algunas definiciones y verificar algunos resultados necesarios para realizar la demostración.

2 Medidas con signo finitamente aditiva

2.1 Definición

Sea Σ una álgebra de subconjuntos de Ω. Una función $\lambda : \Sigma \to \overline{\mathbb{R}}$ es una *medida con signo finitamente aditiva* si:

1. $\lambda(\emptyset) = 0$;
2. Dados $A, B \in \Sigma$ tales que $A \cap B$, se verifica que $\lambda(A \cup B) = \lambda(A) + \lambda(B)$.

2.2 Definición

Sea $\lambda : \Sigma \to \overline{\mathbb{R}}$ una medida con signo finitamente aditiva. Entonces, para cada $E \in \Sigma$, la *variación total de λ sobre E* se denota por $\nu(\lambda, E)$ y se define como

$$\nu(\lambda, E) := \sup \sum_{i=1}^{n} |\lambda(E_i)|$$

donde el supremo se toma sobre todas las colecciones finitas $\{E_i\}_{i=1}^{n} \subseteq \mathcal{P}(E)$ de conjuntos disjuntos que pertenecen a Σ.

Observación. En general, si λ es una medida con signo finitamente aditiva entonces se verifica que $|\lambda(E)| \leq \nu(\lambda, E)$ para cada $E \in \Sigma$. Si λ es no-negativa y acotada entonces se cumple que $|\lambda(E)| = \nu(\lambda, E)$.

2.3 Proposición

Sea $\lambda : \Sigma \to \overline{\mathbb{R}}$ una medida con signo finitamente aditiva. Entonces, la variación total de λ sobre E define una medida con signo finitamente aditiva $\nu_\lambda : \Sigma \to \overline{\mathbb{R}}$, $\nu_\lambda(E) := \nu(\lambda, E)$ para $E \in \Sigma$. Además, si λ es acotada entonces ν_λ también lo es.

Demostración. Primero demostremos que $\nu_\lambda : \Sigma \to \overline{\mathbb{R}}$ es una medida con signo finitamente aditiva:

1. Observe que si $\{E_i\}_{i=1}^{n} \subseteq \Sigma \cap \mathcal{P}(\emptyset)$ entonces $E_i = \emptyset$ para $i = 1, 2, \cdots, n$. Así que $\{E_i\}_{i=1}^{n} = \{\emptyset\}$,

y en consecuencia

$$\begin{aligned}\nu_\lambda(\emptyset) &= \sup \sum_{i=1}^{n} |\lambda(E_i)| \\ &= \sup \sum_{i=1}^{n} |\lambda(\emptyset)| \\ &= \sup 0 \\ &= 0\end{aligned}$$

2. Sean $A, B \in \Sigma$ tales que $A \cap B = \emptyset$. Primero verifiquemos que

$$\nu_\lambda(A \cup B) \leq \nu_\lambda(A) + \nu_\lambda(B) \tag{1}$$

Sea $\{E_i\}_{i=1}^n \subseteq \Sigma \cap \mathcal{P}(A \cup B)$ una colección finita de conjuntos disjuntos. Observe que $E_i = (E_i \cap A) \cup (E_i \cap B)$, como $(E_i \cap A) \cap (E_i \cap B) = \emptyset$ y λ es una medida con signo finitamente aditiva, se tiene

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n} |\lambda(E_i)| &= \sum_{i=1}^{n} |\ \lambda[(E_i \cap A) \cup (E_i \cap B)]\ | \\ &= \sum_{i=1}^{n} |\ \lambda(E_i \cap A) + \lambda(E_i \cap B)\ | \\ &\leq \sum_{i=1}^{n} |\ \lambda(E_i \cap A)| + \sum_{i=1}^{n} |\lambda(E_i \cap B)\ | \\ &\leq \nu_\lambda(A) + \nu_\lambda(B)\end{aligned}$$

Puesto que lo anterior se verifica para cualquier colección $\{E_i\}_{i=1}^n \subseteq \Sigma \cap \mathcal{P}(A \cup B)$ de conjuntos disjuntos, tomando supremo se obtiene

$$\nu_\lambda(A \cup B) \leq \nu_\lambda(A) + \nu_\lambda(B)$$

Lo que muestra (1). Ahora, probemos que

$$\nu_\lambda(A) + \nu_\lambda(B) \leq \nu_\lambda(A \cup B) \tag{2}$$

Sean $\{\widehat{E_i}\}_{i=1}^n \subseteq \Sigma \cap \mathcal{P}(A)$ y $\{\widetilde{E_i}\}_{i=1}^k \subseteq \Sigma \cap \mathcal{P}(B)$ colecciones finitas de conjuntos disjuntos. Consideremos los conjuntos

$$F_A^+ = \{i \in \mathbb{N} : \lambda(\widehat{E_i}) \geq 0\}; \qquad F_A^- = \{i \in \mathbb{N} : \lambda(\widehat{E_i}) < 0\}$$

$$F_B^+ = \{i \in \mathbb{N} : \lambda(\widetilde{E_i}) \geq 0\}; \qquad F_B^- = \{i \in \mathbb{N} : \lambda(\widetilde{E_i}) < 0\}$$

Como $\widehat{E_i} \cap \widetilde{E_j} = \emptyset$ para $i = 1,\, 2,\, \cdots,\, n$ y $j = 1,\, 2,\, \cdots,\, k$;

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} |\lambda(\widehat{E_i})| + \sum_{j=1}^{k} |\lambda(\widetilde{E_j})| &= \Big(\sum_{i \in F_A^+} \lambda(\widehat{E_i}) - \sum_{i \in F_A^-} \lambda(\widehat{E_i}) \Big) + \Big(\sum_{j \in F_B^+} \lambda(\widetilde{E_j}) - \sum_{j \in F_B^-} \lambda(\widetilde{E_j}) \Big) \\
&= \sum_{\substack{i \in F_A^+ \\ j \in F_B^+}} [\ \lambda(\widehat{E_i}) + \lambda(\widetilde{E_j})\ ] - \sum_{\substack{i \in F_A^- \\ j \in F_B^-}} [\ \lambda(\widehat{E_i}) + \lambda(\widetilde{E_j})\ ] \\
&= \sum_{\substack{i \in F_A^+ \\ j \in F_B^+}} \lambda(\widehat{E_i} \cup \widetilde{E_j}) - \sum_{\substack{i \in F_A^- \\ j \in F_B^-}} \lambda(\widehat{E_i} \cup \widetilde{E_j}) \\
&= \sum_{\substack{i = 1,\, 2,\, \cdots,\, n \\ j = 1,\, 2,\, \cdots,\, k}} |\ \lambda(\widehat{E_i} \cup \widetilde{E_j})\ | \\
&\leq \nu_\lambda(A \cup B)
\end{aligned}$$

Puesto que $\{\widehat{E_i} \cup \widetilde{E_j}\} \subseteq \Sigma \cap \mathcal{P}(A \cup B)$ es una colección finita de conjuntos disjuntos.

De lo anterior se obtiene que

$$\sum_{i=1}^{n} |\lambda(\widehat{E_i})| \leq \nu_\lambda(A \cup B) - \sum_{j=1}^{k} |\lambda(\widetilde{E_j})|$$

Tomando supremo sobre todas las colecciones finitas de conjuntos disjuntos contenidos en A,

$$\nu_\lambda(A) \leq \nu_\lambda(A \cup B) - \sum_{j=1}^{k} |\lambda(\widetilde{E_j})|$$

Como lo anterior se verifica para toda colección finita de conjuntos disjuntos que pertenecen a $\mathcal{P}(B)$, tomando supremo se tiene que

$$\nu_\lambda(B) \leq \nu_\lambda(A \cup B) - \nu_\lambda(A)$$

Lo que implica,

$$\nu_\lambda(A) + \nu_\lambda(B) \leq \nu_\lambda(A \cup B)$$

Lo que verifica (2). De (1) y (2) se deduce que

$$\nu_\lambda(A \cup B) = \nu_\lambda(A) + \nu_\lambda(B)$$

Así que ν_λ es una medida con signo finitamente aditiva.

Por último, mostremos que si λ es acotada entonces ν_λ también lo es. En efecto, supongamos que $|\lambda(A)| \leq M$ para toda $A \in \Sigma$. Sean $A \in \Sigma$ y $\{E_i\}_{i=1}^n \subseteq \Sigma \cap \mathcal{P}(A)$ una colección finita de conjuntos disjuntos. Entonces,

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} |\lambda(E_i)| &= \sum_{i \in F_A^+} \lambda(E_i) - \sum_{j \in F_A^-} \lambda(E_j) \\
&= \lambda\Big(\bigcup_{i \in F_A^+} E_i\Big) - \lambda\Big(\bigcup_{j \in F_A^-} E_j\Big) \\
&\leq \Big|\lambda\Big(\bigcup_{i \in F_A^+} E_i\Big)\Big| + \Big|\lambda\Big(\bigcup_{j \in F_A^-} E_j\Big)\Big| \\
&\leq 2M
\end{aligned}$$

Como $\{E_i\}_{i=1}^n \subseteq \Sigma \cap \mathcal{P}(A)$ una colección finita de conjuntos disjuntos arbitraria, lo anterior implica que $\nu_\lambda(A) \leq 2M$. lo que muestra que ν_λ es acotada. $\square$

3 El espacio *ba*

Sea (Ω, Σ, μ) un espacio de medida, el espacio $ba(\Omega, \Sigma, \mu)$ se define como el conjunto de todas las medidas con signo finitamente aditiva y acotada $\lambda : \Sigma \to \mathbb{R}$ que son absolutamente continuas con respecto a μ (i.e. $\lambda \ll \mu$).

Nota: decimos que $\lambda \in ba(\Omega, \Sigma)$ es *absolutamente continua con respecto a la medida* μ si para cada $A \in \Sigma$ tal que $\mu(A) = 0$, se cumple $\lambda(A) = 0$.

3.1 Proposición

1. Si $\lambda \in ba(\Omega, \Sigma, \mu)$ entonces $\nu_\lambda \in (\Omega, \Sigma, \mu)$;

2. $ba(\Omega, \Sigma, \mu)$ es un espacio de Banach con la norma $||\lambda|| := \nu_\lambda(\Omega)$.

Demostración.

1. Si $\lambda \in ba(\Omega, \Sigma, \mu)$ entonces, por la **proposición 2.4**, ν_λ es una medida con signo finitamente aditiva y acotada. Falta verificar que $\nu_\lambda \ll \mu$. Procedamos por reduccion al absurdo. Supongamos que existe un $A \in \Sigma$ tal que $\mu(A) = 0$ y $\nu_\lambda(A) > 0$, entonces existe una colección $\{E_i\}_{i=1}^n \subseteq \Sigma \cap \mathcal{P}(A)$ de conjuntos disjuntos tal que $\sum_{i=1}^n |\lambda(E_i)| > 0$. Luego, como $E_i \subseteq A$ para $i = 1, \cdots, n$ y $\lambda \ll \mu$, tenemos que $\mu(E_i) = 0$ lo que implica que $\lambda(E_i) = 0$. En consecuencia,

$$\sum_{i=1}^{n} |\lambda(E_i)| = 0$$

   Pero $\sum_{i=1}^n |\lambda(E_i)| > 0$. Contradicción. Por lo tanto, $\nu_\lambda(A)$ para $A \in \Sigma$. Es decir, $\nu_\lambda \ll \mu$.

2. Sean $\lambda_1, \lambda_2 \in ba(\Omega, \Sigma, \mu)$ y $\alpha \in \mathbb{R}$, si se define las operaciones binarias $+ : ba(\Omega, \Sigma, \mu) \times ba(\Omega, \Sigma, \mu) \to b(\Omega, \Sigma, \mu)$ y $\cdot : \mathbb{R} \times ba(\Omega, \Sigma, \mu) \to ba(\Omega, \Sigma, \mu)$ como

$$(\forall A \in \Sigma) : \qquad (\lambda_1 + \lambda_2)(A) := \lambda_1(A) + \lambda_2(A)$$

$$(\forall A \in \Sigma) : \qquad (\alpha \cdot \lambda_1)(A) := \alpha(\lambda_1(A))$$

   Se puede verificar que $(ba(\Omega, \Sigma, \mu), +, \cdot)$ es un espacio vectorial sobre el cuerpo de los números reales, donde la identidad con respecto a la suma es la función de conjuntos $\mathbf{0} : \Sigma \to \mathbb{R}$ definida como $\mathbf{0}(A) := 0$ para toda $A \in \Sigma$, la cual es fácil ver que pertenece a $(ba(\Omega, \Sigma, \mu), +, \cdot)$.

   Ahora, veamos que $||\lambda|| = \nu_\lambda(\Omega)$ es un norma sobre $ba(\Omega, \Sigma, \mu)$. En efecto:

   (a) Es claro que $||\lambda|| \geq 0$ para cada $\lambda \in ba(\Omega, \Sigma, \mu)$. Probemos que $||\lambda|| = 0 \iff \lambda = \mathbf{0}$.

   ($\Longleftarrow$) Si $\lambda = \mathbf{0}$ entonces $\lambda(A) = 0$ para toda $A \in \Sigma$. En particular, si $\{E_i\}_{i=1}^\infty \subseteq \Sigma$ es una colección de conjuntos disjuntos entonces $|\lambda(E_i)| = 0$ para $i = 1, \cdots, n$. Lo que implica que $||\lambda|| = \nu_\lambda(\Omega) = 0$.

   ($\Longrightarrow$) Supongamos que $\lambda \in ba(\Omega, \Sigma, \mu)$ y $||\lambda|| = 0$. Sea $A \in \Sigma$, como ν_λ es una medida, se tiene

$$|\lambda(A)| \leq \nu_\lambda(A) \leq \nu_\lambda(\Omega) = 0$$

   de donde $\lambda(A) = 0$. En consecuencia, $\lambda = \mathbf{0}$.

(b) Si $\alpha \in \mathbb{R}$ y $\lambda \in ba(\Omega, \Sigma, \mu)$ entonces

$$
\begin{aligned}
||\alpha \cdot \lambda|| &= \nu_{\alpha\cdot\lambda}(\Omega) \\
&= \sup\left\{\sum_{i=1}^{n} |(\alpha \cdot \lambda)(E_i)| : \{E_i\}_{i=1}^{n} \subseteq \Sigma \quad \& \quad E_i \cap E_j = \emptyset \text{ para } i = 1, \cdots, n\right\} \\
&= \sup\left\{\sum_{i=1}^{n} |\alpha(\,\lambda(E_i)\,)| : \{E_i\}_{i=1}^{n} \subseteq \Sigma \quad \& \quad E_i \cap E_j = \emptyset \text{ para } i = 1, \cdots, n\right\} \\
&= \sup\left\{|\alpha| \cdot \sum_{i=1}^{n} |\lambda(E_i)| : \{E_i\}_{i=1}^{n} \subseteq \Sigma \quad \& \quad E_i \cap E_j = \emptyset \text{ para } i = 1, \cdots, n\right\} \\
&= |\alpha| \cdot \sup\left\{\sum_{i=1}^{n} |\lambda(E_i)| : \{E_i\}_{i=1}^{n} \subseteq \Sigma \quad \& \quad E_i \cap E_j = \emptyset \text{ para } i = 1, \cdots, n\right\} \\
&= |\alpha| \cdot \nu_{\lambda}(\Omega) \\
&= |\alpha| \cdot ||\lambda||
\end{aligned}
$$

(c) Si $\lambda_1, \lambda_2 \in ba(\Omega, \Sigma, \mu)$ entonces, como

$$|(\lambda_1 + \lambda_2)(A)| \leq |\lambda_1(A)| + |\lambda_2(A)|$$

para $A \in \Sigma$, se verifica lo siguiente:

$$
\begin{aligned}
||\lambda_1 + \lambda_2|| &= \nu_{\lambda_1+\lambda_2}(\Omega) \\
&= \sup \sum_{i=1}^{n} |(\lambda_1 + \lambda_2)(E_i)| \\
&= \sup \sum_{i=1}^{n} |\lambda_1(E_i) + \lambda_2(E_i)| \\
&\leq \sup \sum_{i=1}^{n} |\lambda_1(E_i)| + \sup \sum_{i=1}^{n} |\lambda_2(E_i)| \\
&= \nu_{\lambda_1}(\Omega) + \nu_{\lambda_2}(\Omega) \\
&= ||\lambda_1|| + ||\lambda_2||
\end{aligned}
$$

Por lo tanto, $(ba(\Omega, \Sigma, \mu), ||\cdot||)$ es un espacio normado.

Por último, verifiquemos que $(ba(\Omega,\Sigma,\mu), ||\cdot||)$ es completo. Sea $\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq ba(\Omega,\Sigma,\mu)$ una sucesión de Cauchy, construyamos un $\lambda \in ba(\Omega,\Sigma,\mu)$ tal que $\lambda_n \to \lambda$ con respecto a la norma de $ba(\Omega,\Sigma,\mu)$. Sea $\varepsilon > 0$, existe un $N \in \mathbb{N}$ tal que si $n, m \geq N$ entonces

$$||\lambda_n - \lambda_m|| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Si $A \in \Sigma$ entonces,

$$\begin{aligned}
|\lambda_n(A) - \lambda_m(A)| &= |(\lambda_1 - \lambda_2)(A)| \\
&\leq \nu_{\lambda_n - \lambda_m}(A) \\
&\leq \nu_{\lambda_n - \lambda_m}(\Omega) \\
&= ||\lambda_n - \lambda_m|| \\
&< \frac{\varepsilon}{2} \quad (\forall n, m \geq N)
\end{aligned}$$

Es decir,

$$(\forall n, m \geq N)(\forall A \in \Sigma) \qquad |\lambda_n(A) - \lambda_m(A)| < \frac{\varepsilon}{2} \tag{3}$$

Entonces, por (3) podemos definir a $\lambda : \Sigma \to \mathbb{R}$ como $\lambda(A) := \lim_{n\to n} \lambda_n(A)$. Observe que $\lambda \in ba(\Omega,\Sigma,\mu)$, en efecto:

1. $$\lambda(\emptyset) = \lim_{n\to\infty} \lambda_n(\emptyset) = \lim_{n\to\infty} 0 = 0$$

2. Si $A, B \in \Sigma$ y $A \cap B = \emptyset$ entonces

   $$\lambda(A \cup B) = \lim_{n\to\infty} \lambda_n(A \cup B) = \lim_{n\to\infty} [\ \lambda_n(A) + \lambda_n(B)\ ] = \lim_{n\to\infty} \lambda_n(A) + \lim_{n\to\infty} \lambda_n(B) = \lambda(A) + \lambda(B)$$

3. Como $\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión de Cauchy, existe un $M \geq 0$ tal que $||\lambda_n|| \leq M$ para $n = 1, 2, \cdots$. En particular, si $n \geq N$ entonces para $A \in \Sigma$ se verifica

   $$|\lambda(A)| \leq |\lambda_n(A) - \lambda(A)| + |\lambda_n(A)| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \nu_{\lambda_n}(A) \leq \frac{\varepsilon}{2} + \nu_{\lambda_n}(\Omega) = \frac{\varepsilon}{2} + ||\lambda_n|| \leq \frac{\varepsilon}{2} + M$$

   Lo que muestra que λ es acotada.

4. Si $A \in \Sigma$ y $\mu(A) = 0$ entonces, como $\lambda_n \ll \mu$ para $n = 1, 2, \cdots$, tenemos que

   $$\lambda(A) = \lim_{n\to\infty} \lambda_n(A) = \lim_{n\to\infty} 0 = 0$$

   lo que muestra que $\lambda \ll \mu$.

En consecuencia, $\lambda \in ba(\omega, \Sigma, \mu)$. Por ultimo, mostremos que $\lambda_n \to \lambda$. En (3) si $m \to \infty$ entonces

$$(\forall n \geq N)(\forall A \in \Sigma) \qquad |\lambda_n(A) - \lambda(A)| \leq \frac{\varepsilon}{2} \tag{4}$$

Sea $E_{i\,i=1}^{\,n} \subseteq \Sigma$ una colección de conjuntos disjuntos, si $n \geq N$ entonces

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} |\lambda_n(E_i) - \lambda(E_i)| &= \sum_{i \in F_\Omega^+} [\, \lambda_n(E_i) - \lambda(E_i)\,] - \sum_{j \in F_\Omega^-} [\, \lambda_n(E_j) - \lambda(E_i)\,] \\
&= (\lambda_n - \lambda)\Big(\bigcup_{i \in F_\Omega^+} E_i \Big) - (\lambda_n - \lambda)\Big(\bigcup_{j \in F_\Omega^-} E_j \Big) \\
&\leq \Big| (\lambda_n - \lambda)\Big(\bigcup_{i \in F_\Omega^+} E_i \Big) \Big| + \Big| (\lambda_n - \lambda)\Big(\bigcup_{j \in F_\Omega^-} E_j \Big) \Big| \\
&\leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \qquad (Por (4)) \\
&= \varepsilon
\end{aligned}$$

Lo que implica que $\lim_{n\to\infty} ||\lambda_n - \lambda|| = 0$. Por lo tanto, $(ba(\Omega, \Sigma, \mu), ||\cdot||)$ es un espacio de Banach. $\square$

4 Integración

A partir de ahora, usaremos L^∞ y ba para referirnos a los espacios $L^\infty(\Omega, \Sigma, \mu)$ y $ba(\Omega, \Sigma, \mu)$ respectivamente.

4.1 Funciones simples

4.1.1 Definición

Una función $f \in L^\infty$ es una *función Σ-simple* si los elementos de su clase de equivalencia son de la forma

$$f = \sum_{i=1}^{n} x_i \, \chi_{E_i}$$

donde $x_i \in \mathbb{R}$, $E_i = f^{-1}[x_i]$, $i = 1, \cdots, n$ son conjuntos disjuntos que pertenecen a Σ y $\bigcup_{i=1}^{n} E_i = \Omega$. El espacio de todas las funciones Σ-simples se denota por $S(\Omega, \Sigma)$ o simplemente por S.

4.1.2 Definición

Sea $f \in S$ y $\lambda \in ba$. Si $f = \sum_{i=1}^{n} x_i \chi_{E_i}$ donde $E_i = f^{-1}[x_i]$, $i = 1, \cdots, n$ son conjuntos disjuntos que pertenecen a Σ y $\bigcup_{i=1}^{n} E_i = \Omega$. Sea $E \in \Sigma$, la *integral de f sobre E* se define como

$$\int_E f \, d\lambda := \sum_{i=1}^{n} x_i \lambda(E \cap E_i) \in \mathbb{R}$$

4.1.3 Proposición

Sean $f \in S$, $\lambda \in ba$ y $E \in \Sigma$. Se verifica las siguientes proposiciones:

1. La integral está bien definida;
2. S es denso en L^∞;
3. $f \mapsto \int_E f \, d\lambda$ es un trasformación lineal de S en $\mathbb{R}$;
4. Si f y λ son no-negativas, entonces $\int_E f \, d\lambda$ es no-negativa;
5. $\left| \int_E f \, d\lambda \right| \leq \int_E |f| \, d\nu_\lambda$.
6. La función $\xi : \Sigma \to \mathbb{R}$, $\xi(E) := \int_E f \, d\lambda$ pertenece a ba.

Demostración.

1. Supongamos que

$$f = \sum_{i=1}^{k} x_i \chi_{A_i} = \sum_{i=1}^{n} y_i \chi_{B_i}$$

Como $\bigcup_{i=1}^{k} A_i = \bigcup_{i=1}^{n} B_i = \Omega$,

$$A_i = \bigcup_{j=1}^{n} (A_i \cap B_j) \text{ y } B_j = \bigcup_{i=1}^{k} (A_i \cap B_j)$$

Entonces,

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{k} x_i \lambda(A_i \cap E) &= \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{n} x_i \lambda(A_i \cap B_j \cap E) \\
&= \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{k} y_i \lambda(A_i \cap B_j \cap E) \\
&= \sum_{i=1}^{n} y_i \lambda(B_j \cap E)
\end{aligned}$$

En consecuencia,

$$\sum_{i=1}^{k} x_i \lambda(A_i \cap E) = \sum_{i=1}^{n} y_i \lambda(B_i \cap E)$$

2. Por el *Teorema de Aproximación Simple*, podemos tomar una $\{f_n\}_{n=1}^{\infty} \rightrightarrows f$ casi en todas partes, esto implica que si $\varepsilon > 0$ entonces existe un $N \in \mathbb{N}$ tal que para toda $n \geq N$ se verifica $\mu(\{\omega \in \Omega : |f_n - f| \geq \varepsilon/2\}) = 0$. En consecuencia,

$$(\forall n \geq N) \qquad ||f - f_n||_{\infty} < \varepsilon$$

Lo que muestra que S es denso en L^{∞}.

3. Sean $f = \sum_{i=1}^{k} x_i \chi_{A_i}$, $g = \sum_{i=1}^{n} y_i \chi_{B_i}$ y $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, como $\bigcup_{i=1}^{k} A_i = \bigcup_{i=1}^{n} B_i = E$,

$$A_i = \bigcup_{j=1}^{n} (A_i \cap B_j) \text{ y } B_j = \bigcup_{i=1}^{k} (A_i \cap B_j)$$

Entonces,

$$f = \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{n} x_i \chi_{A_i \cap B_j} \text{ y } g = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{k} y_i \chi_{A_i \cap B_j}$$

Así que,

$$\begin{aligned}
\int_E (\alpha \cdot f + \beta \cdot g)\, d\lambda &= \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{n} (\alpha \cdot x_i + \beta \cdot y_i) \lambda(A_i \cap B_j \cap E) \\
&= \alpha \cdot \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{n} x_i \lambda(A_i \cap B_j \cap E) + \beta \cdot \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{k} y_i \lambda(A_i \cap B_j \cap E) \\
&= \alpha \cdot \sum_{i=1}^{k} x_i \lambda(A_i \cap E) + \beta \cdot \sum_{j=1}^{n} y_i \lambda(B_j \cap E) \\
&= \alpha \cdot \int_E f\, d\lambda + \beta \cdot \int_E g\, d\lambda
\end{aligned}$$

Lo que muestra que $f \mapsto \int_E f\, d\lambda$ es una transformación lineal de S en $\mathbb{R}$.

4. Si f es no-negativa entonces $x_i \geq 0$ para $i = 1, \cdots, n$, y si λ es no negativa entonces $\lambda(E \cap E_i)$ para $i = 1, \cdots, n$. Esto implica que $x_i \lambda(E \cap E_i) \geq 0$. En consecuencia,

$$\int_E f\, d\lambda = \sum_{i=1}^{n} x_i \lambda(E \cap E_i) \geq 0$$

5.

$$\begin{aligned}
\left|\int_E f\ d\lambda\right| &= \left|\sum_{i=1}^{n} x_i\lambda(E\cap E_i)\right| \\
&\leq \sum_{i=1}^{n} |x_i|\ \cdot\ |\lambda(E\cap E_i)| \\
&\leq \sum_{i=1}^{n} |x_i|\ \cdot\ \nu_\lambda(E\cap E_i) \\
&= \int_E |f|\, d\nu_\lambda
\end{aligned}$$

6. Primero vea que $\xi \in ba$.

   (a) Es claro que $\xi(\emptyset) = 0$.

   (b) Sean $A, B \in \Sigma$ tales que $A \cap B = \emptyset$. Si $f = \sum_{i=1}^{n} x_i \chi_{E_i}$ entonces, como $(E_i \cap A) \cap (E_i \cap B) = \emptyset$ para $i = 1, \cdots, n$ y $\lambda \in ba$,

$$\begin{aligned}
\xi(A\cup B) &= \int_{A\cup B} f\ d\lambda \\
&= \sum_{i=1}^{n} x_i\lambda[E_i\cap(A\cup B)] \\
&= \sum_{i=1}^{n} x_i\lambda[(E_i\cap A)\cup(E_i\cap B)] \\
&= \sum_{i=1}^{n} x_i[\lambda(E_i\cap A)+\lambda(E_i\cap B)] \\
&= \sum_{i=1}^{n} x_i\lambda(E_i\cap A)+\sum_{i=1}^{n} x_i\lambda(E_i\cap \\
&= \int_A f\ d\lambda+\int_B f\ d\lambda \\
&= \xi(A)+\xi(B)
\end{aligned}$$

   Lo que muestra que es finitamente aditiva.

(c) Ahora veamos que es acotada. Sea $A \in \Sigma$ y sea $M = \max\{x_1,\, x_2,\, \cdots, x_n\}$. Como $\lambda \in ba$, existe un $K \in \mathbb{R}^+$ tal que $|\lambda(E)| \leq K$ para toda $E \in \Sigma$. Entonces,

$$\begin{aligned}
|\xi(A)| &\leq \int_A |f|\; d\lambda \\
&= \sum_{i=1}^{n} |x_i| \lambda(E_i \cap A) \\
&\leq M \sum_{i=1}^{n} \lambda(E_i \cap A) \\
&= M\lambda\Big(\bigcup_{i=1}^{n} E_i \cap A\Big) \\
&= M\lambda(\Omega \cap A) \\
&\leq MK
\end{aligned}$$

Puesto que lo anterior se cumple para cualquier $A \in \Sigma$, se tiene que ξ es acotada.

(d) Por último, verifiquemos que $\xi \ll \mu$. Sea $A \in \Sigma$ tal que $\mu(A) = 0$. Como $E_i \cap A \in \Sigma$ y $E_i \cap A \subseteq A$, $\mu(E_i \cap A) = 0$. Lo que implica que $\lambda(E_i \cap A) = 0$ para $i = 1, \cdots, n$. En consecuencia,

$$\xi(A) = \int_A f\; d\lambda = \sum_{i=1}^{n} x_i \lambda(E_i \cap A) = 0$$

Lo que muestra que $\xi \ll \mu$.

Por lo tanto, $\xi \in ba$.

$\square$

4.2 Interacción en $L^\infty(\Omega, \Sigma, \mu)$

4.2.1 Definición

Sean $f \in L^\infty$ y $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ una sucesión de funciones simples que converge a f. Se define la integral de f sobre $E \in \Sigma$ como

$$\int_E f\, d\lambda = \lim_{n\to\infty} \int_E f_n\, d\lambda$$

4.2.2 Proposición

Dado $f \in L^\infty$, $\lambda \in ba$ y $E \in \Sigma$. Se verifica:

1. La integral está bien definida;
2. $f \mapsto \int_E f\, d\lambda$ es un trasformación lineal;
3. Si f y λ son no-negativas, entonces $\int_E f\, d\lambda$ es no-negativa;
4. $\left|\int_E f\, d\lambda\right| \leq \int_E |f|\, d\nu_\lambda$;
5. La función $\xi : \Sigma \to \mathbb{R}$, $\xi(E) := \int_E f\, d\lambda$ pertenece a ba.
6. La función $f \mapsto \int_E f\, d\lambda$ pertenece a $(L^\infty)^*$

Demostración.

1. Sin perdida de generalidad, supongamos que $\nu_\lambda(\Omega) > 0$. Sean $\{f_n\}_{n=1}^\infty$, $\{g_n\}_{n=1}^\infty \in S$ tales que $f_n \to f$ y $g_n \to f$. Sea $\varepsilon > 0$, tomemos un $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$||f_n - f||_\infty < \frac{\varepsilon}{2\nu_\lambda(\Omega)} \text{ y } ||g_n - f||_\infty < \frac{\varepsilon}{2\nu_\lambda(\Omega)}$$

para toda $n \geq N$. Entonces,

$$||f_n - g_n||_\infty \leq ||f_n - f||_\infty + ||g_n - f||_\infty < \frac{\varepsilon}{\nu_\lambda(\Omega)}$$

para $n \geq N$. Así que,

$$\left|\int_E f_n\, d\lambda - \int_E g_n\, d\lambda\right| = \left|\int_E (f_n - g_n)\, d\lambda\right| \leq \int_E |f_n - g_n|\, d\lambda \leq ||f_n - g_n||_\infty \nu_\lambda(\Omega) < \varepsilon$$

En consecuencia,

$$\lim_{n\to\infty} \int_E f_n\, d\lambda = \lim_{n\to\infty} \int_E g_n\, d\lambda$$

Lo que muestra que la integral está bien definida.

2. Sean $f, g \in L^\infty$ y $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Consideremos las sucesiones $\{f_n\}_{n=1}^\infty, \{g_n\}_{n=1}^\infty \in S$ tales que $f_n \to f$ y $g_n \to g$. Como $\alpha \cdot f_n + \beta \cdot g_n \to \alpha \cdot f + \beta \cdot g$, se tiene:

$$\begin{aligned}
\int_E (\alpha \cdot f + \beta \cdot g)\, d\lambda &= \lim_{n\to\infty} \int_E (\alpha \cdot f_n + \beta \cdot g_n)\, d\lambda \\
&= \lim_{n\to\infty} \Big(\alpha \int_E f_n\, d\lambda + \beta \int_E g_n\, d\lambda \Big) \\
&= \alpha \Big(\lim_{n\to\infty} \int_E f_n\, d\lambda \Big) + \beta \Big(\lim_{n\to\infty} \int_E g_n\, d\lambda \Big) \\
&= \alpha \int_E f\, d\lambda + \beta \int_E g\, d\lambda
\end{aligned}$$

Lo que muestra que $f \mapsto \int_E f\, d\lambda$ es una transformación lineal.

3. Si $f \in L^\infty$ y es no-negativa, por el *Teorema de la Aproximación Simple*, podemos tomar una sucesión $\{f_n\}_{n=1}^\infty \in S^+$ tal que $f_n \uparrow f$. Luego, si λ es no-negativa, por la **proposición 4.1.3.4** se tiene

$$\int_E f_n\, d\lambda \geq 0$$

para $n = 1, 2, \cdots$ y $E \in \Sigma$. Entonces, si $n \to \infty$

$$\int_E f\, d\lambda = \lim_{n\to\infty} \int_E f_n\, d\lambda \geq 0$$

Lo que muestra que la integral es no-negativa.

4. Sea $\{f_n\}_{n=1}^\infty \in S$ tal que $f_n \to f$. Por la **proposición 4.1.3.5**, se verifica que

$$\Big| \int_E f_n\, d\lambda \Big| \leq \int_E |f_n|\, d\nu_\lambda$$

para $n = 1, 2, \cdots$ y $E \in \Sigma$. Luego, por la continuidad del valor absoluto, si $n \to \infty$,

$$\Big| \int_E f\, d\lambda \Big| = \lim_{n\to\infty} \Big| \int_E f_n\, d\lambda \Big| \leq \lim_{n\to\infty} \int_E |f_n|\, d\nu_\lambda = \int_E |f|\, d\nu_\lambda$$

5. Primero veamos que $\xi \in ba$. Sin pérdida de generalidad, supongamos que f es no negativa. Por el *Teorema de Aproximación Simple*, podemos tomar una sucesión $\{f_n\}_{n=1}^\infty \subseteq S$ tal que $f_n \rightrightarrows f$. Entonces,

(a)

$$\xi(\emptyset) = \int_\emptyset f\, d\lambda = \lim_{n\to\infty} \int_\emptyset f_n\, d\lambda = \lim_{n\to\infty} 0 = 0$$

(b) Si $A, B \in \Sigma$ y $A \cap B = \emptyset$,

$$\begin{aligned}
\xi(A \cup B) &= \int_{A\cup B} f \, d\lambda \\
&= \lim_{n\to\infty} \int_{A\cup B} f_n \, d\lambda \\
&= \lim_{n\to\infty} \Big[\int_A f_n \, d\lambda + \int_B f_n \, d\lambda \Big] \\
&= \lim_{n\to\infty} \int_A f_n \, d\lambda + \lim_{n\to\infty} \int_B f_n \, d\lambda \\
&= \int_A f \, d\lambda + \int_B f \, d\lambda \\
&= \xi(A) + \xi(B)
\end{aligned}$$

(c) Si $A \in \Sigma$, por la **proposición 4.2.2.4**,

$$|\xi(A)| = \Big| \int_A f \, d\lambda \Big| \leq \int_A |f| \, d\nu_\lambda \leq ||f||_\infty \cdot \nu_\lambda(A) \leq ||f||_\infty \cdot \nu_\lambda(\Omega)$$

Lo que muestra que ξ es acotada.

(d) Si $A \in \Sigma$ y $\mu(A) = 0$ entonces, como $\lambda \ll \mu$,

$$\begin{aligned}
\xi(A) &= \int_A f \, d\lambda \\
&= \lim_{n\to\infty} \int_A f_n \, d\lambda \\
&= \lim_{n\to\infty} \Big[\sum_{i=1}^{n} x_i^{(n)} \lambda(A \cap E_i^{(n)}) \Big] \\
&= \lim_{n\to\infty} 0 \\
&= 0
\end{aligned}$$

Así que $\xi \ll \mu$.

6. Por la **proposición 4.2.2.2**, se deduce que $f \to \int_E f \, d\lambda$ es un funcional lineal. Queda probar que es acotada. Por la **proposición 4.2.2.4**,

$$\Big| \int_\Omega f \, d\lambda \Big| \leq \int_\Omega |f| \, d\nu_\lambda \leq ||f||_\infty \cdot \nu_\lambda(\Omega)$$

Como la desigualdad anterior se cumple para toda $f \in (L^\infty)^*$, tenemos que $f \to \int_E f \ d\lambda$ pertenece al dual de L^∞.

$\square$

5 El dual de $L(\Omega, \Sigma, \mu)$

5.1 Teorema *(Dunford-Schwartz)*

Existe un isomorfismo isométrico T entre $ba(\Omega, \Sigma, \nu)$ y $(L^\infty(\Omega, \Sigma, \nu))^*$, definido por

$$T(\lambda) = T_\lambda(f) := \int_\Omega f \ d\lambda \qquad f \in L^\infty(\Omega, \Sigma, \nu)$$

Demostración. Por la **proposición 4.2.2.6**, T_λ es un funcional lineal sobre L^∞ para cada $\lambda \in ba$. Luego, por la **proposición 4.2.2.4**, se tiene:

$$\Big|\int_\Omega f \ d\lambda\Big| \leq \int_\Omega |f| \ d\nu_\lambda \leq ||f||_\infty \cdot \nu_\lambda(\Omega) \tag{5}$$

para toda $f \in L^\infty$ y $\lambda \in ba$. Esto implica que cada T_λ es un funcional lineal acotado, así que $T_\lambda \in (L^\infty)^*$.

Ahora, probemos que T es una isometría. Sea $\lambda \in ba$, por (5) se tiene que $|T(\lambda)| \leq ||f||_\infty \cdot \nu_\lambda(\Omega)$. Entonces,

$$||T(\lambda)|| = \inf \Big\{ k \geq 0 : \Big|\int_\Omega f \ d\lambda\Big| \leq k \cdot ||f||_\infty \quad (\forall f \in L^\infty \setminus \{\mathbf{0}\}) \Big\} \leq \nu_\lambda(\Omega) = ||\lambda||$$

Así que

$$||T(\lambda)|| \leq ||\lambda|| \tag{6}$$

Luego, si $\varepsilon > 0$ entonces tomemos una partición finita de Ω, $\{E_i\}_{i=1}^n \subseteq \Sigma$ tal que

$$\sum_{i=1}^n |\lambda(E_i)| > \nu_\lambda(\Omega) - \varepsilon$$

Definamos a $f : \Omega \to \mathbb{R}$ como $f := \sum_{i=1}^n \alpha_i \chi_{E_i}$ donde $\alpha_i = sgn(\lambda(E_i))$. Asi que $f \in L^\infty$ y $||f||_\infty = 1$. Observe que $\alpha_i \lambda(E_i) = |\lambda(E_i)|$, entonces

$$||T(\lambda)|| \geq \Big|\int_\Omega f \ d\lambda\Big| = \Big|\sum_{i=1}^n \alpha_i \lambda(E_i)\Big| = \Big|\sum_{i=1}^n |\lambda(E_i)|\Big| = \sum_{i=1}^n |\lambda(E_i)| > \nu_\lambda(\Omega) - \varepsilon = ||\lambda|| - \varepsilon$$

como lo anterior se verifica para $\varepsilon > 0$, se obtiene

$$||\lambda|| \leq ||T(\lambda)|| \tag{7}$$

por (6) y (7) se deduce que T es una isometría.

Ahora, veamos que T es 1-1. Si $T(\lambda_1) = T(\lambda_2)$ entonces $\int_\Omega f\ d\lambda_1 = \int_\Omega f\ d\lambda_2$ para toda $f \in L^\infty$. Sea $A \in \Sigma$, como $\chi_A \in L^\infty$, lo anterior implica:

$$\lambda_1(A) = \int_A \chi_A\ d\lambda_1 = \int_A \chi_A\ d\lambda_2 = \lambda_2(A)$$

Así que $\lambda_1 = \lambda_2$.

Ahora verifiquemos que T es sobreyectiva. Sea $\phi \in (L^\infty)^*$, construyamos un $\lambda_\phi \in ba$ tal que $\phi = T_{\lambda_\phi}$. Entonces, definamos a $\lambda_\phi : \Sigma \to \mathbb{R}$ como $\lambda_\phi(A) := \phi(\chi_A)$. Observe que, en efecto, $\lambda_\phi \in ba$:

1. $$\lambda_\phi(\emptyset) = \phi(\chi_\emptyset) = \phi(\mathbf{0}) = 0$$

2. Si $A, B \in \Sigma$ y $A \cap B = \emptyset$, entonces $\chi_{A \cup B} = \chi_A + \chi_B$ y en consecuencia:

$$\lambda_\phi(A \cup B) = \phi(\chi_{A\cup B}) = \phi(\chi_A + \chi_B) + \phi(\chi_A) + \phi(\chi_B) = \lambda(A) + \lambda(B)$$

3. Si $A \in \Sigma$ entonces:

$$|\lambda_\phi(A)| = |\phi(\chi_A)| \leq ||\phi|| \cdot ||\chi_A||_\infty \leq ||\phi||$$

   Lo que muestra que λ_ϕ es acotada.

4. Por último, si $A \in \Sigma$ y $\mu(A) = 0$ entonces $\phi \in \overline{\mathbf{0}}$. Así que

$$\lambda_\phi(A) = \phi(\chi_A) = \phi(\mathbf{0}) = 0$$

   Lo que muestra que $\lambda_\phi \ll \mu$.

Sea $f \in L^\infty$, para probar que $\phi(f) = T_{\lambda_\phi}(f)$, distinguimos tres casos:

Caso 1: Si $f = \chi_A$ con $A \in \Sigma$ entonces se deduce de inmediato que

$$T_{\lambda_\phi}(f) = \int_\Omega f\ d\lambda_\phi = \lambda_\phi(A) = \phi(f)$$

Caso 2: Si f es una función simple entonces por linealidad y en virtud del caso anterior, se deduce que $T_{\lambda_\phi}(f) = \phi(f)$. En efecto,

$$T_{\lambda_\phi}(f) = \int_\Omega f \, d\lambda_\phi = \sum_{i=1}^{n} x_i \lambda_\phi(E_i) = \sum_{i=1}^{n} x_i \phi(\chi_{E_i}) = \phi\Big(\sum_{i=1}^{n} x_i \chi_{E_i}\Big) = \phi(f)$$

Caso 3: Si $f \in L^\infty$ y es no-negativa entonces por el *Teorema de la Aproximación Simple*, existe una sucesión $\{f_n\}_{n=1}^\infty \subseteq L^\infty$ tal que $f_n \uparrow f$ sobre Ω. Luego, en virtud del *Teorema de la Convergencia Monótona*, por el caso 3 y por la continuidad de ϕ; se obtiene]

$$T_{\lambda_\phi}(f) = \int_\Omega f \, d\lambda_\phi = \lim_{n\to\infty} \int_\Omega f_n \, d\lambda_\phi = \lim_{n\to\infty} \phi(f_n) = \phi(f)$$

Caso 4: Por último, si $f \in L^\infty$ entonces $f = f^+ - f^-$ y por el caso anterior, se deduce que $T_{\lambda_\phi}(f) = \phi(f)$.

Por lo tanto, $T_{\lambda_\phi} = \phi$. Lo que muestra que T es sobreyectiva.

Por último, que verificar que T es un isomorfismo. Para ello, basta con mostrar

$$T_{\alpha\cdot\lambda_1+\beta\cdot\lambda_2}(f) = \alpha \cdot T_{\lambda_1}(f) + \beta \cdot T_{\lambda_2}(f)$$

para λ_1, $\lambda_2 \in ba$ y α, $\beta \in \mathbb{R}$. Sea $f \in L^\infty$. Entonces, por el *Teorema de Aproximación Simple* existe una sucesión $\{f_n\}_{n=1}^\infty \in L^\infty$ que converge af. Luego, observe que para cada f_n se verifica:

$$\begin{aligned}
T_{\alpha\cdot\lambda_1+\beta\cdot\lambda_2}(f_n) &= \int_\Omega f_n \, d(\alpha\cdot\lambda_1 + \beta\cdot\lambda_2) \\
&= \sum_{i=1}^{k} x_i^{(n)} (\alpha\cdot\lambda_1 + \beta\cdot\lambda_2)(E_i^{(n)}) \\
&= \sum_{i=1}^{k} x_i^{(n)} \alpha\cdot\lambda_1(E_i^{(n)}) + \sum_{i=1}^{k} x_i^{(n)} \beta\cdot\lambda_2(E_i^{(n)}) \\
&= \alpha \int_E f_n \, d\lambda_1 + \beta \cdot \int_E f_n \, d\lambda_2 \\
&= \alpha \cdot T_{\lambda_1}(f_n) + \beta \cdot T_{\lambda_2}(f_n)
\end{aligned}$$

En virtud de la continuidad de T_λ, si $n \to \infty$ se obtiene:

$$T_{\alpha\cdot\lambda_1+\beta\cdot\lambda_2}(f) = \alpha \cdot T_{\lambda_1}(f) + \beta \cdot T_{\lambda_2}(f)$$

Lo que muestra que T es un isomorfismo. Por lo tanto, $ba(\Omega, \Sigma, \nu) \cong (L^\infty(\Omega, \Sigma, \mu))^*$. $\square$

6 Referencias

[1] Dunford, N., & Schwart, J. (1958). *Linear Operators. Part I.* New York: Interscience.

[2] Iribarren, I. (2006). *Introducción a la Teoría de la Medida.* Caracas: Consejo de Desarrollo Científico y Humanístico (UCV).

[3] Rao, B. K., & Rao, B. M. (1983). *Theory of Charges. A Study of Finitely Additive Measure.* Academic Press.

[4] Royden, H., & Fitzpatrick, P. (2010). *Real Analysis, Fourth Edition.* Pearson Education Asia Limited.

[5] Zapata, J. M. (2013). Dual Space of L^∞