

# Sobre los números normales y el espacio ${}^\omega 2$

**Angel Granado**

angel.granado@correo.unimet.edu.ve  
Universidad Metropolitana.

March 13, 2023

**Definición.** Sea  $x \in [0, 1]$  y  $\{a_n\}_{n < \omega} \in {}^\omega 2$  el desarrollo binaria de  $x$ . Sea  $S_n(x)$  la cantidad de 1's en la expansión binaria de  $x$  en los primeros  $n$  términos. Decimos que  $x$  es un **número simplemente normal en base 2** si

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n(x)}{n} = \frac{1}{2}$$

Denotaremos por  $N$  al conjunto de todos los números  $x \in [0, 1]$  que son *simplemente normales en base 2* y por  $\mathcal{B}([0, 1])$  a la  $\sigma$ -álgebra de Borel del  $[0, 1]$  dotado de la topología usual.

Unos de los resultados más célebres del **Teorema Fuerte de los Grandes Números** fue formulado por Borel (1909) términos de los números normales en base 2:

**Teorema (Borel 1909).** Todos los números en  $[0, 1]$  son simplemente normales en base 2, excepto en un conjunto de Borel de medida 0.

Es decir, si  $m : \mathcal{L} \rightarrow [0, +\infty)$  es la medida de Lebesgue entonces  $m(N) = 1$ .

**Definición.** El **Espacio de Cantor** es el conjunto  ${}^\omega 2$  de todas las funciones  $s : \omega \rightarrow 2$  cuya topología es el  $\omega$ -producto del espacio  $2 = \{0, 1\}$ , donde 2 está equipado con la topología discreta.

La topología del espacio de Cantor está generada por la base conformada por los conjuntos de la forma

$$B_s = \{t \in {}^\omega 2 : s \subseteq t\}$$

donde  $s$  es una sucesión finita de 1's y 0's. Si  $d : {}^\omega 2 \times {}^\omega 2 \rightarrow [0, +\infty)$  definida como

$$d(s, t) = \frac{1}{2^{\min \{n < \omega : s(n) \neq t(n)\}}}$$

para  $s, t \in {}^\omega 2$ . Entonces,  $d$  es una métrica sobre el espacio de Cantor e induce la topología generada por los abiertos básicos  $B_s$ . Así que el espacio de Cantor es metrizable.

Para definir una medida sobre el espacio de Cantor, es necesario hacer uso del siguiente teorema:

**Teorema 1** (*Halmos, P. 38B*). Si  $\{(X_i, S_i, \mu_i)\}_{i < \omega}$  es una sucesión de espacios de medida tales que  $\mu_i(X_i) = 1$  para  $i < \omega$ , entonces existe una única medida  $\mu$  sobre la  $\sigma$ -álgebra  $S = \bigotimes_{i < \omega} S_i$  con la propiedad que, para cada conjunto medible  $E$  de la forma  $A \times X^{(n)}$ , donde  $X^{(n)} = \prod_{i > n} X_i$ , se verifica

$$\mu(E) = (\mu_1 \times \cdots \times \mu_n)(A)$$

la medida  $\mu$  se denomina el **producto** de las medidas  $\mu_i$ ,  $\mu = \bigotimes_{i < \omega} \mu_i$ . El espacio de medida

$$\left( \prod_{i < \omega} X_i, \bigotimes_{i < \omega} S_i, \bigotimes_{i < \omega} \mu_i \right)$$

es el **Producto Cartesiano** es los espacio de medida  $\{(X_i, S_i, \mu_i)\}_{i < \omega}$ .

**Demostración.** Halmos 1950, **Teorema 38B**[3]. □

En virtud del **Teorema 1**, existe una única medida  $\mu$  definida sobre la  $\sigma$ -álgebra de Borel sobre  ${}^\omega 2$ , tal que si  $B_s$  es un abierto básico donde  $s \in {}^n 2$  entonces  $\mu(B_s) = \frac{1}{2^n}$ . Consideremos la familia

$$G = \{A \cup N \mid A \in \mathcal{B}({}^\omega 2) \text{ \& } (\exists Z \in \mathcal{B}({}^\omega 2))(\mu(Z) = 0 \text{ \& } N \subseteq Z)\}$$

Se puede probar que  $G$  es una  $\sigma$ -álgebra [3]. Ahora, definamos a  $\bar{\mu} : G \rightarrow [0, 1]$  como

$$\bar{\mu} = \{(A \cup N, s) : \mu(A) = s \text{ \& } A \in \mathcal{B}({}^\omega 2) \text{ \& } (\exists Z \in \mathcal{B}({}^\omega 2))(\mu(Z) = 0 \text{ \& } N \subseteq Z)\},$$

entonces  $\bar{\mu}$  es la única medida sobre  $G$  que extiende a  $\mu$ , y se denomina la **completación** de  $\mu$ . Denotaremos también por  $\mu$  a la completación de la medida definida sobre el espacio de Cantor. De esta forma, los subconjuntos de  ${}^\omega 2$  para los cuales esta medida está definida se denominan subconjuntos *medibles* de  ${}^\omega 2$ .

**Teorema 2.**[6]

1. Para cada  $t \in {}^\omega 2$ , la serie  $\sum_{n < \omega} \frac{t_n}{2^{n+1}}$  converge y  $0 \leq \sum_{n < \omega} \frac{t_n}{2^{n+1}} \leq 1$ .
2. Para cada  $x \in [0, 1]$  existe un  $t \in {}^\omega 2$  tal que  $x = \sum_{n < \omega} \frac{t_n}{2^{n+1}}$ .
3. Para  $s, t \in {}^\omega 2$   $\sum_{n < \omega} \frac{s_n}{2^{n+1}} < \sum_{n < \omega} \frac{t_n}{2^{n+1}}$  si y sólo si existe un  $m < \omega$  tal que  $s_n = t_n$  para  $n < m$ ,  $s_m = 0$  y  $t_m = 1$ , y existe un  $n > m$  tal que  $s_n = 0$  o  $t_n = 1$ .
4. Para  $s, t \in {}^\omega 2$ ,  $\sum_{n < \omega} \frac{s_n}{2^{n+1}} = \sum_{n < \omega} \frac{t_n}{2^{n+1}}$  si y sólo si  $s = t$ , o si existe un  $m < \omega$  tal que  $s_n = t_n$  para  $n < m$ ,  $s_m \neq t_m$  y para toda  $n > m$  se tiene que  $s_n = t_m$  y  $t_n = s_m$ .

5. Para  $x \in [0, 1]$  existe un único  $t \in {}^\omega 2$  tal que  $x = \sum_{n < \omega} \frac{t_n}{2^{n+1}}$ , excepto en los casos donde  $x > 0$  y tiene fracciones binarias finitas, en ese caso  $x$  tiene dos expresiones binarias.
6. La cardinalidad del conjunto de todos los  $x \in [0, 1]$  con fracciones binarias finitas es  $\aleph_0$ .

**Definición.** Sea  $k : {}^\omega 2 \rightarrow [0, 1]$  la función dada por  $k(t) = \sum_{n < \omega} \frac{t_n}{2^{n+1}}$ ,  $k$  se denomina el **mapeo estándar** de  ${}^\omega 2$  sobre  $[0, 1]$ .

**Lema 1.** Sea  $k$  el mapeo estándar de  ${}^\omega 2$  sobre  $[0, 1]$ . Si  $B_s \subseteq {}^\omega 2$  es un abierto básico, entonces

$$k[B_s] = \left[ \sum_{i < n} \frac{s_i}{2^{i+1}}, \sum_{i < n} \frac{s_i}{2^{i+1}} + \frac{1}{2^n} \right]$$

**Demostración.** Sea  $s \in {}^n 2$  y  $B_s = \{t \in {}^\omega 2 : s \subseteq t\}$ , si  $x \in \left[ \sum_{i < n} \frac{s_i}{2^{i+1}}, \sum_{i < n} \frac{s_i}{2^{i+1}} + \frac{1}{2^n} \right]$  entonces existe un  $a \in {}^\omega 2$  tal que

$$x = \sum_{i < \omega} \frac{t_i}{2^{i+1}} = \sum_{i < n} \frac{s_i}{2^{i+1}} + \sum_{i \geq n} \frac{t_i}{2^{i+1}}$$

Si  $x \in k[B_s]$  entonces existe un  $t \in B_s$  tal que

$$x = \sum_{i < \omega} \frac{t_i}{2^{i+1}} = \sum_{i < n} \frac{s_i}{2^{i+1}} + \sum_{i \geq n} \frac{t_i}{2^{i+1}}$$

Entonces,

$$x \leq \sum_{i < n} \frac{s_i}{2^{i+1}} + \frac{1}{2^n}$$

Además,

$$x = \sum_{i < n} \frac{s_i}{2^{i+1}} + \sum_{i \geq n} \frac{t_i}{2^{i+1}} \geq \sum_{i < n} \frac{s_i}{2^{i+1}}$$

Así que  $x \in \left[ \sum_{i < n} \frac{s_i}{2^{i+1}}, \sum_{i < n} \frac{s_i}{2^{i+1}} + \frac{1}{2^n} \right]$ , y en consecuencia,

$$k[B_s] \subseteq \left[ \sum_{i < n} \frac{s_i}{2^{i+1}}, \sum_{i < n} \frac{s_i}{2^{i+1}} + \frac{1}{2^n} \right]$$

Por otra parte, si  $x \in \left[ \sum_{i < n} \frac{s_i}{2^{i+1}}, \sum_{i < n} \frac{s_i}{2^{i+1}} + \frac{1}{2^n} \right]$  entonces existe  $t \in {}^\omega 2$  tal que  $x = k(t)$ . Luego, por el **Teorema 2**,  $t_i = s_i$  para  $i < n$ . En consecuencia,  $t \in B_s$  y  $x \in k[B_s]$ . □

**Definición.** Sea  $t \in {}^\omega 2$ ,  $t$  es **eventualmente constante** si existe un  $m < \omega$  tal que  $t_m = t_n$  para  $n > m$ .

Observe que si  $W = \{t \in {}^\omega 2 : t \text{ no es eventualmente constante}\}$  entonces  ${}^\omega 2 \setminus W$  es numerable y en consecuencia,  $W$  y  ${}^\omega 2 \setminus W$  son borelianos.

**Proposición 1.**  $k$  es una función continua y sobreyectiva. Si  $W$  es el conjunto de los miembros de  ${}^\omega 2$  que no son eventualmente constantes, entonces  $k \upharpoonright_W$  es un homeomorfismo de  $W$  sobre el conjunto de todos los  $x \in [0, 1]$  que no poseen fracciones binarias finita.

**Demostración.** Del **Teorema 2** se deduce de inmediato que  $k$  es sobreyectiva. Mostremos que  $k$  es continua sobre  ${}^\omega 2$ . Sea  $x \in [0, 1]$  y  $t \in {}^\omega 2$  tal que  $x = k(t)$ . Sea  $U_x$  una vecindad abierta de  $x$ , tomemos un  $m < \omega$  tal que

$$\left[x - \frac{1}{2^m}, x + \frac{1}{2^m}\right] \subseteq U_x$$

Consideremos el conjunto

$$B_{t \upharpoonright m} = \{s \in {}^\omega 2 : (t_0, \dots, t_{m-1}) \subseteq s\}$$

Es claro que  $B_{t \upharpoonright m}$  es un abierto básico. Entonces, para probar que  $k$  es continua, basta con mostrar que

$$k[B_{t \upharpoonright m}] \subseteq \left[x - \frac{1}{2^m}, x + \frac{1}{2^m}\right] \quad (1)$$

Si  $x = \sum_{i < \omega} \frac{t_i}{2^{i+1}}$  entonces definamos a  $y := \sum_{i < m} \frac{t_i}{2^{i+1}}$ . Observe que  $y \leq x$ , y

$$x = y + \sum_{i \geq m} \frac{t_i}{2^{i+1}} \leq y + \sum_{m \leq i < \omega} \frac{1}{2^{i+1}} \leq y + \frac{1}{2^m}$$

Así que

$$y \leq x \leq y + \frac{1}{2^m} \quad (2)$$

Luego, si  $s \in B_{t \upharpoonright m}$  entonces para  $i < m$  se tiene que  $s_i = t_i$ . En consecuencia,

$$y \leq k(s) = y + \sum_{m \leq i < \omega} \frac{s_i}{2^{i+1}} \leq y + \frac{1}{2^m} \quad (3)$$

De (2) y (3) se obtiene:

$$x - \frac{1}{2^m} \leq k(s) \leq x + \frac{1}{2^m}$$

Así que se verifica (1).

Ahora mostremos que  $k \upharpoonright_W: W \rightarrow k[W]$  es un homeomorfismo, es claro que  $k \upharpoonright_W$  es biyectiva y por lo demostrado anteriormente,  $k \upharpoonright_W$  es continua. Así que solo falta probar que  $k^{-1} \upharpoonright_{k[W]}$  es continua. Sea  $t \in W$  y  $x = k(t)$ , y  $U_t$  una vecindad abierta de  $t$  entonces existe un  $m < \omega$  tal que  $B_{t \upharpoonright m} \cap W \subseteq U_t$ . Definamos  $y := \sum_{i < m} \frac{t_i}{2^{i+1}}$ , veamos que  $(y, y + \frac{1}{2^m})$  es una vecindad de  $x$ . Para ello, debemos probar que el intervalo contiene un abierto que pertenece a la topología del subespacio  $k[W]$ .

Como  $t \in W$ , podemos tomar un  $p < \omega$  tal que  $t_m \neq t_p$ . Si  $y := \sum_{i < m} \frac{t_i}{2^{i+1}}$  entonces por el **Teorema 2**,

$$y + \frac{1}{2^{p+1}} \leq x \leq y + \frac{1}{2^m} - \frac{1}{2^{p+1}} \quad (4)$$

consideremos el conjunto

$$\left(x - \frac{1}{2^{p+1}}, x + \frac{1}{2^{p+1}}\right) \cap k[W]$$

observe que el conjunto es un abierto en el subespacio  $k[W]$ . Además, si  $z$  pertenece al conjunto, entonces por (4),

$$y \leq x - \frac{1}{2^{p+1}} < z < x + \frac{1}{2^{p+1}} \leq y + \frac{1}{2^m}$$

lo que implica que  $z \in (y, y + \frac{1}{2^m})$  y en consecuencia,

$$\left(x - \frac{1}{2^{p+1}}, x + \frac{1}{2^{p+1}}\right) \cap k[W] \subseteq \left(y, y + \frac{1}{2^m}\right)$$

Lo que muestra que  $(y, y + \frac{1}{2^m})$  es una vecindad de  $x$ . Luego, como  $y = k((t_0, t_1, \dots, t_{m-1}, 0, \dots))$ ,  $y + \frac{1}{2^m} = k((t_0, t_1, \dots, t_{m-1}, 1, \dots))$ ; en virtud del **Teorema 2**, si  $z \in (y, y + \frac{1}{2^m}) \cap k[W]$  entonces  $k^{-1}(z) \in B_{t \upharpoonright m} \cap W$ . Por lo tanto,

$$k^{-1} \upharpoonright_{k[W]} \left[ \left(y, y + \frac{1}{2^m}\right) \cap k[W] \right] \subseteq B_{t \upharpoonright m} \cap W \subseteq U_t$$

Lo que muestra que  $k^{-1} \upharpoonright_{k[W]}$  es continua. □

**Proposición 2.** Sea  $k: {}^\omega 2 \rightarrow [0, 1]$  y  $B \subseteq {}^\omega 2$ ,  $B \in \mathcal{B}({}^\omega 2)$  si y sólo si  $k[B] \in \mathcal{B}([0, 1])$ .

**Demostración.** ( $\Rightarrow$ ) Supongamos que  $B \in \mathcal{B}({}^\omega 2)$ . Sea  $W$  el conjunto de todos los elementos de  ${}^\omega 2$  que no son *eventualmente constantes*. Como  $|{}^\omega 2 \setminus W| = \omega$ , entonces  ${}^\omega 2 \setminus W \in \mathcal{B}({}^\omega 2)$  y en consecuencia  $W \in \mathcal{B}({}^\omega 2)$ . Así que  $B \cap W$  y  $B \cap ({}^\omega 2 \setminus W)$  son borelianos. Luego,

$$k[B] = k[B \cap W] \cup k[B \cap ({}^\omega 2 \setminus W)]$$

Entonces, para probar que  $k[B] \in \mathbf{B}([0, 1])$ , basta con mostrar que  $k[B \cap W]$  y  $k[B \cap ({}^\omega 2 \setminus W)]$  son borelianos.

Como  $k$  es sobreyectiva,

$$|k[B \cap ({}^\omega 2 \setminus W)]| \leq |B \cap ({}^\omega 2 \setminus W)| \leq \omega,$$

entonces  $k[B \cap ({}^\omega 2 \setminus W)] \in \mathcal{B}([0, 1])$ . Por otra parte, como  $k^{-1} \upharpoonright_{k[W]}: k[W] \rightarrow W$  es continua, entonces

$$(k^{-1} \upharpoonright_{k[W]})^{-1}[B \cap W] \in \mathcal{B}([0, 1]) \upharpoonright k[W],$$

así que existe un  $A \in \mathcal{B}([0, 1])$  tal que

$$(k^{-1} \upharpoonright_{k[W]})^{-1}[B \cap W] = A \cap k[W]$$

Puesto que  $k^{-1} \upharpoonright_{k[W]}$  es biyectiva,

$$(k^{-1} \upharpoonright_{k[W]})^{-1}[B \cap W] = k \upharpoonright_W [B \cap W] = k[B \cap W]$$

entonces  $k[B \cap W] \in \mathcal{B}([0, 1])$ , lo que muestra que  $k[B] \in \mathcal{B}([0, 1])$ .

( $\Leftarrow$ ) Supongamos que  $k[B] \in \mathbf{B}([0, 1])$  donde  $B \subseteq {}^\omega 2$ , mostremos que  $B \in \mathcal{B}({}^\omega 2)$ . Como  $k$  es continua,  $k^{-1}[k[B]] \in \mathcal{B}([0, 1])$ . Luego, si

$$A = \{t \in {}^\omega 2 : t \text{ es eventualmente constante} \ \& \ t \notin B\}$$

entonces  $B = k^{-1}[k[B]] \setminus A$ . Como  $A$  es numerable,  $A \in \mathcal{B}({}^\omega 2)$  y en consecuencia  $B \in \mathcal{B}({}^\omega 2)$ .  $\square$

**Proposición 3.** Sea  $k$  el mapeo estándar de  ${}^\omega 2$  sobre  $[0, 1]$  y  $B \in \mathcal{B}({}^\omega 2)$ . Entonces,

$$m(k[B]) = \mu(B)$$

**Demostración.** Sea  $s \in {}^n 2$ , consideremos el abierto básico  $B_s = \{t \in {}^\omega 2 : s \subseteq t\}$ , entonces  $\mu(B_s) = \frac{1}{2^n}$ . Luego, por el **Lema 1**

$$k[B_s] = \left[ \sum_{i < n} \frac{s_i}{2^{i+1}}, \sum_{i < n} \frac{s_i}{2^{i+1}} + \frac{1}{2^n} \right]$$

En consecuencia,  $\mu(B_s) = \frac{1}{2^n} = k[B_s]$ . Ahora consideremos a  $\bar{\mu}: \mathcal{B}({}^\omega 2) \rightarrow [0, 1]$ , definida como  $\bar{\mu}(B) = m(k[B])$  para  $B \in \mathcal{B}({}^\omega 2)$ . Por la **Proposición 2**,  $K[B] \in \mathcal{B}([0, 1])$  lo que implica que  $\bar{\mu}$  está bien definida. Luego, observe que:

1. Es claro que

$$\bar{\mu}(\emptyset) = m(k[\emptyset]) = m(\emptyset) = 0$$

2. Sea  $\{A_n\}_{n < \omega}$  es una sucesión de conjuntos de Borel de  ${}^\omega 2$  disjuntos dos a dos. Sea  $Z$  el conjunto de todos los  $x \in [0, 1]$  que poseen un desarrollo binario finito, como  $Z$  es numerable entonces  $m(Z_A) = 0$ . Además, puesto que  $Z$  y  $k[A_n]$  son conjuntos de Borel para  $n < \omega$ ,  $\{k[A_n] \setminus Z\}_{n < \omega}$  es una sucesión de conjuntos de Borel disjunta dos a dos. En consecuencia,

$$\begin{aligned}
\bar{\mu}\left(\bigcup_{i < \omega} A_n\right) &= m\left(k\left[\bigcup_{i < \omega} A_n\right]\right) - \underbrace{m(Z)}_{=0} \\
&= m\left(\bigcup_{i < \omega} (k[A_n] \setminus Z)\right) \\
&= \sum_{i < \omega} m(k[A_n] \setminus Z) \\
&= \sum_{i < \omega} [\underbrace{m(k[A_n])}_{=\bar{\mu}(A_n)} - \underbrace{m(Z)}_{=0}] \\
&= \sum_{i < \omega} \bar{\mu}(A_n)
\end{aligned}$$

Así que  $\bar{\mu}$  es una medida sobre  $\mathcal{B}({}^\omega 2)$ .

Si  $s \in {}^n 2$  entonces, por construcción, se verifica que  $\bar{\mu}(B_s) = \frac{1}{2^n} = m(k[B_s])$ . En virtud del **Teorema 1**,  $\bar{\mu} = \mu$ . Lo que muestra que  $\mu(B) = m(k[B])$  para todo subconjunto de Borel  $B \subseteq {}^\omega 2$ .

□

**Definición.** Sea  $A \subseteq \mathbb{N}$ , la **densidad asintótica superior** de  $A$  se define como

$$\overline{d(A)} = \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{|A \cap n|}{n}$$

De forma análoga, se define la **densidad asintótica inferior** de  $A$  como

$$\underline{d(A)} = \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{|A \cap n|}{n}$$

Decimos que  $A$  tiene **densidad asintótica**  $d(A)$  si  $\underline{d(A)} = \overline{d(A)}$ , y en ese caso:

$$d(A) = \underline{d(A)} = \overline{d(A)}$$

**Propiedades:**

1.  $\underline{d}(A)$  y  $\overline{d}(A)$  siempre existen y  $0 \leq \underline{d}(A) \leq \overline{d}(A) \leq 1$ .
2. Si  $A \subseteq \mathbb{N}$  y  $d(A)$  existe entonces  $0 \leq d(A) \leq 1$ .
3. Si  $A \subseteq \mathbb{N}$  es finito entonces  $d(A) = 0$  y  $d(\mathbb{N} \setminus A) = 1$ .

**Ejemplos:**

1. Si  $A \subseteq \mathbb{N}$  es un conjunto finito entonces  $d(A) = 0$ .
2. Si  $A = \{n^2 : n < \omega\}$  entonces  $d(A) = 0$ .
3. Si  $A = \{n < \omega : n \bmod 2 = 0\}$  entonces  $d(A) = \frac{1}{2}$  y  $d(\mathbb{N} \setminus A) = \frac{1}{2}$ .
4. Si  $P$  es el conjunto de todos los números primos, entonces  $d(P) = 0$ .

**Lema 1.** Sea  $x \in [0, 1]$ ,  $a \in {}^\omega 2$  tal que  $x = k(a)$  y  $A = \{i < \omega : a_i = 1\}$ . Entonces,  $x$  es simplemente normal en base 2 si y sólo si  $A$  tiene densidad asintótica igual a  $\frac{1}{2}$ .

**Demostración.** ( $\Rightarrow$ ) Supongamos que  $x \in [0, 1]$  es un número simplemente normal en base 2. Entonces,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n(x)}{n} = \frac{1}{2} \quad (5)$$

Luego, existe un  $a \in {}^\omega 2$  tal que  $x = k(A)$ . Sea  $A = \{i < \omega : a_i = 1\}$ , entonces

$$\frac{S_n(x)}{n} = \frac{\sum_{i < n} a_i}{n} = \frac{|A \cap n|}{n}$$

Por (1), se tiene que

$$\underline{d}(A) = \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{|A \cap n|}{n} = \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n(x)}{n} = \frac{1}{2}$$

y

$$\overline{d}(A) = \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{|A \cap n|}{n} = \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n(x)}{n} = \frac{1}{2}$$

Lo que implica que la densidad asintótica de  $A$  existe y es igual a  $\frac{1}{2}$ .



( $\Leftarrow$ ) De forma reciproca. Si  $a \in {}^\omega 2$ ,  $A = \{i < \omega : a_i = 1\}$  y  $d(A) = \frac{1}{2}$  entonces, como  $\frac{S_n(x)}{n} = \frac{|A \cap n|}{n}$ , tenemos que

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n(x)}{n} = \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{|A \cap n|}{n} = \frac{1}{2} \text{ y } \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n(x)}{n} = \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{|A \cap n|}{n} = \frac{1}{2} \quad (6)$$

Por (3), obtenemos que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n(x)}{n} = \frac{1}{2}$$

En consecuencia,  $x$  es un número simplemente normal.  $\square$

**Lema 2.** Sea  $k : {}^\omega 2 \rightarrow [0, 1]$  el mapeo estándar de  ${}^\omega 2$  sobre el intervalo  $[0, 1]$ . Si

$$N = \left\{ x \in [0, 1] : \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n(x)}{n} = \frac{1}{2} \right\} \text{ y } Char_{[0,1]} = \left\{ \chi_A \in {}^\omega 2 : d(A) = \frac{1}{2} \right\},$$

entonces  $k[Char_{[0,1]}] = N$ .

**Demostración.** Sea  $x \in k[Char_{[0,1]}]$ , entonces existe un  $t \in Char_{[0,1]}$  tal que  $x = \sum_{i < \omega} \frac{t_i}{2^{(i+1)}}$  y  $d(\{i < \omega : t_i = 1\}) = \frac{1}{2}$ . Luego, en virtud del **Lema 1**,  $x = k(A) \in N$ . Así que

$$Char_{[0,1]} \subseteq N \quad (7)$$

Sea  $x \in N$  entonces existe un  $a \in {}^\omega 2$  tal que  $x = k(a)$ . Sea  $A_x = \{i < \omega : a_i = 1\}$ , entonces por el **Lema 1**,  $d(A_x) = \frac{1}{2}$  y en consecuencia  $a \in Char_{[0,1]}$ . Esto implica que  $x = k(a) \in k[Char_{[0,1]}]$ . Entonces,

$$N \subseteq k[Char_{[0,1]}] \quad (8)$$

De (4) y (5) obtenemos:

$$k[Char_{[0,1]}] = N$$

$\square$

**Proposición 4.**  $N$  es un conjunto de Borel.

**Demostración.** Observe que  $x \in N$  si y sólo si

$$\forall k \in \mathbb{N} \exists N \in \mathbb{N} \forall n \geq N \left( \left| \frac{S_n(x)}{n} - \frac{1}{2} \right| < \frac{1}{k+2} \right)$$

Si definimos

$$A_{n,k} = \left\{ x \in [0, 1] : \left| \frac{S_n(x)}{n} - \frac{1}{2} \right| < \frac{1}{k+2} \right\},$$

entonces

$$N = \bigcap_{k < \omega} \bigcup_{N < \omega} \bigcap_{n \geq N} A_{n,k} \in \mathcal{B}([0, 1])$$

Así que basta con probar que  $A_{n,k} \in \mathcal{B}([0, 1])$ . Note que

$$\left| \frac{S_n(x)}{n} - \frac{1}{2} \right| < \frac{1}{k+2} \iff \frac{nk}{2(k+2)} < S_n(x) < \frac{n(k+4)}{2(k+2)} \quad (9)$$

Entonces la cantidad de valores posibles de  $S_n(\cdot)$  que satisfacen (6) está dado por

$$m = \left| \left( \frac{nk}{2(k+2)}, \frac{n(k+4)}{2(k+2)} \right) \cap \mathbb{N} \right| < \omega$$

Sean  $v_1, \dots, v_m$  tales valores de  $S_n(\cdot)$ , entonces,

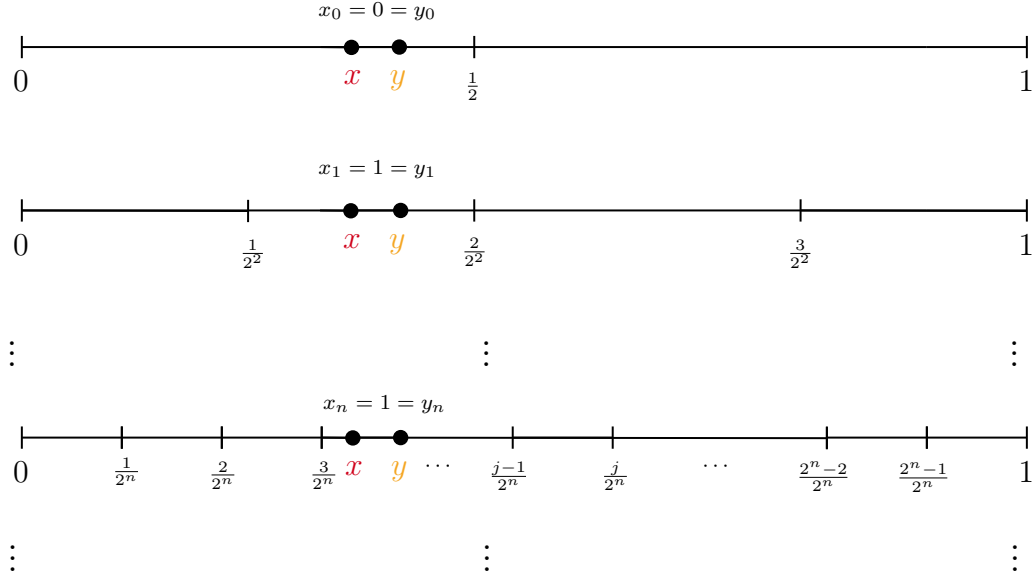
$$A_{n,k} = \bigcup_{j=1}^m \{x \in [0, 1] : S_n(x) = v_i\}$$

Ahora, consideremos los *intervalos diádicos*:

$$I_1^{(n)} = \left[ 0, \frac{1}{2^n} \right],$$

$$I_j^{(n)} = \left[ \frac{j}{2^n}, \frac{j+1}{2^n} \right], \quad \text{para } j = 2, \dots, 2^n - 1$$

Entonces  $\{I_j^{(n)}\}_{j=1}^{2^n}$  es una partición del intervalo  $[0, 1]$ . Por el **Teorema 2**, si  $x, y \in I_j^{(n)}$  entonces  $S_n(x) = S_n(y)$ . Es decir que  $S_n(\cdot)$  es constante sobre los intervalos  $I_j^{(n)}$ .



**Figura 1.** Descomposición en intervalos diádicos.

Si  $x, y \in I_3^n$  entonces  $x_i = y_i$  para  $i \leq n$ .

Si  $S_n(\cdot) = v_i$  entonces

$$\{x \in [0, 1] : S_n(x) = v_i\}$$

es el conjunto de todas  $x \in [0, 1]$  que tienen  $v_i$  1's y  $n - v_i$  0's en los primeros  $n$  términos de la expansión binaria. Así que existen  $C_i = \binom{n}{v_i}$  intervalos diádicos donde  $S_n(\cdot) = v_i$ . Esto implica que

$$\{x \in [0, 1] : S_n(x) = v_i\} = \bigcup_{l=0}^{C_i} I_{j_l}^{(n)}$$

Como cada intervalo diádico  $I_{j_l}^{(n)} \in \mathcal{B}([0, 1])$ , tenemos que cada conjunto  $\{x \in [0, 1] : S_n(x) = v_i\}$  es un boreliano. Así que cada  $A_{n,k} \in \mathcal{B}([0, 1])$  y en consecuencia

$$N = \bigcap_{k < \omega} \bigcup_{N < \omega} \bigcap_{n \geq N} A_{n,k} \in \mathcal{B}([0, 1])$$

□

Como consecuencia inmediata del **Lema 2** y de la **Proposición 3**, el **Teorema de Borel** sobre los números simplemente normales en base 2 puede ser formulado en términos de la densidad asintótica:

**Teorema 3** Sean

$$N = \left\{ x \in [0, 1] : \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n(x)}{n} = \frac{1}{2} \right\} \text{ y } Char_{[0,1]} = \left\{ \chi_A \in {}^\omega 2 : d(A) = \frac{1}{2} \right\}.$$

Entonces,  $m(N) = 1$  si y sólo si  $\mu(Char_{[0,1]}) = 1$ .

**Demostración.** Por el **Lema 2**,  $k[Char_{[0,1]}] = N$ . Como  $N \in \mathcal{B}([0,1])$ , en virtud de la **Proposición 2**,  $Char_{[0,1]} \in \mathcal{B}({}^\omega 2)$ . Luego, por la **Proposición 3**,

$$m(N) = \mu(Char_{[0,1]})$$

Lo que termina la demostración. □

## References

- [1] Patrick Billingsley. *Probability and Measure*. 3rd ed. Wiley Series in Probability and Mathematical Statistics. New York: John Wiley & Sons, 1995.
- [2] Gerald B. Folland. *Real Analysis: Modern Techniques and Their Applications*. 2nd edition. New York: John Wiley & Sons, 1999.
- [3] Paul R. Halmos. *Measure Theory*. New York: Van Nostrand, 1950.
- [4] Alexander S. Kechris. *Classical Descriptive Set Theory*. 1st ed. Vol. 156. Graduate Texts in Mathematics. Springer-Verlag, 1995. DOI: 10.1007/978-1-4612-4190-4.
- [5] Tom Ki Haseo; Linton. “Normal numbers and subsets of  $\mathbb{N}$  with given densities”. In: *Fundamenta Mathematicae* 144.2 (1994), pp. 163–179. URL: <http://eudml.org/doc/212021>.
- [6] Azriel Levy. *Basic Set Theory*. 1st ed. Dover Books on Mathematics. Dover Publications, 1979.