Aula 15

Mais Aplicações

15.1 Árvores AVL

Definição 23. *AVL é o conjunto das árvores T satisfazendo*

$$E(T) \in \textsf{\textit{AVL}} \text{ e } D(T) \in \textsf{\textit{AVL}}.$$

e

$$|h(E(T)) - h(D(T))| \leq 1.$$

Dizemos que uma árvore T é AVL *se $T \in$ AVL.*

Definição 24. *Seja $t^-(n)$ o menor tamanho possível de uma árvore AVL.*

$$t^-(n) = \min\{|T| \mid T \in \textsf{\textit{AVL}} \text{ e } h(T) = n\}.$$

Então,

$$h(T) = n \Rightarrow t^-(n) \leq |T|, \text{ para todo } T \in \textsf{AVL},$$

ou seja,

$$t^-(h(T)) \leq |T|, \text{ para todo } T \in \textsf{AVL},$$

.

Como

$$\begin{aligned}
t^-(n) &= \min\{|T| \mid T \in \textsf{AVL} \text{ e } h(T) = n\} \\
&= \min\{|E(T)| + |D(T)| + 1 \mid T \in \textsf{AVL} \text{ e } h(T) = n\} \\
&= 1 + \min\{|E(T)| + |D(T)| \mid T \in \textsf{AVL} \text{ e } h(T) = n\} \\
&= 1 + \min\{|T| \mid T \in \textsf{AVL} \text{ e } h(T) = n-1\} + \min\{|T| \mid T \in \textsf{AVL} \text{ e } h(T) = n-2\} \\
&= 1 + t^-(n-1) + t^-(n-2),
\end{aligned}$$

então t^- satisfaz a RLnH

$$t^-(n) = 1 + t^-(n-1) + t^-(n-2),$$

e consequentemente, t^- satisfaz uma RLH cujo PC é $(X^2 - X - 1)(X - 1)$, cuja solução para $t^-(0) = 0$ e $t^-(1) = 1$ é

$$t^-(n) = \frac{5 - 3\sqrt{5}}{10}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n + \frac{5 + 3\sqrt{5}}{10}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - 1,$$

e portanto, para toda árvore AVL temos

$$t^-(n) = \frac{5 - 3\sqrt{5}}{10}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n + \frac{5 + 3\sqrt{5}}{10}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - 1.$$

Por conveniência, vamos definir

$$\begin{aligned} r_1 &:= \frac{1-\sqrt{5}}{2}, \\ r_1 &:= \frac{1+\sqrt{5}}{2}, \\ c_1 &:= \frac{5-3\sqrt{5}}{10}, \\ c_2 &:= \frac{5+3\sqrt{5}}{10}, \end{aligned}$$

, de forma que

$$t^-(n) \geq c_1 r_1^n + c_2 r_2^n - 1, \text{ para todo } T \in \text{AVL}.$$

Observe que

$$|r_1| = \left|\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right| < \left|\frac{1-2}{2}\right| < 1,$$

e

$$|r_2| = \left|\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right| > \left|\frac{1+2}{2}\right| > 1,$$

e portanto,

$$\begin{aligned} \lim r_1^n &= 0, \\ \lim r_2^n &= \infty, \end{aligned}$$

o que justifica escrever,

$$t^-(n) = c_1 r_1^n + c_2 r_2^n - 1 = c_2 r_2^n \left(1 - \frac{1 - c_1 r_1^n}{c_2 r_2^n}\right) = f(n) r_2^n$$

onde

$$f(n) := c_2 \left(1 - \frac{1 - c_1 r_1^n}{c_2 r_2^n}\right).$$

, isto é,

$$|T| \geq t^-(h(T)) = f(h(T)) r_2^{h(T)}, \text{ para todo } T \in \mathsf{AVL}.$$

Então, para toda árvore AVL,

$$f(h(T)) r_2^{h(T)} \leq |T|,$$

ou seja,

$$\lg f(h(T)) + h(T) \lg r_2 \leq |T|,$$

isto é,

$$h(T) \leq \frac{|T| - \lg f(h(T))}{\lg r_2} = \frac{1}{\lg r_2}|T| - \frac{\lg f(h(T))}{\lg r_2}$$

Como f é crescente, temos

$$f(n) \geq f(2), \text{ para todo } n \geq 2.$$

Como

$$f(2) = c_2 \left(1 - \frac{1 - c_1 r_1^2}{c_2 r_2^2}\right) = c_2 - \frac{1 - c_1 r_1^2}{r_2^2} = \ldots > 1,$$

então, para todo $n \geq 2$,

$$f(n) > 1,$$

e consequentemente

$$\lg f(n) > 0,$$

e portanto, se $h(T) \geq 2$, então

$$\frac{1}{\lg r_2}|T| - \frac{\lg f(h(T))}{\lg r_2} < \frac{1}{\lg r_2}|T|,$$

e consequentemente,

$$h(T) < \frac{1}{\lg r_2}|T| = \frac{1}{\lg \frac{1+\sqrt{5}}{2}}|T| = \frac{1}{\lg(1+\sqrt{5}) - 1}|T| < 1.4405|T|$$

Teorema 46. *Para toda árvore* AVL *de tamanho maior que* 1,

$$\lfloor \lg |T| \rfloor + 1 \leq h(T) < 1.4405 \lg |T|.$$

ou seja, a altura de uma árvore AVL nunca é mais que 44.05% maior que a da árvore binária do mesmo tamanho de menor altura possível.