Aula 12

Recorrências Lineares Homogêneas Passadas a Limpo

Definição 17. *Dados $a_1, a_2, \ldots, a_k \in \mathbb{C}$, denotamos por $\mathcal{R}(a_1, a_2, \ldots, a_k)$ o conjunto das funções $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ que satisfazem a recorrência*

$$f(n) = a_1 f(n-1) + a_2 f(n-2) + \ldots + a_k f(n-k), \text{ para todo } n \geq k,$$

isto é,

$$\begin{aligned}\mathcal{R}(a_1, a_2, \ldots, a_k) := \{f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{C} \mid \\ f(n) = a_1 f(n-1) + a_2 f(n-2) + \ldots + a_k f(n-k), \\ \text{para todo } n \geq k\}.\end{aligned}$$

Teorema 37. *Dados $a_1, a_2, \ldots, a_k \in \mathbb{C}$, o conjunto $\mathcal{R}(a_1, a_2, \ldots, a_k)$ é um subespaço vetorial de $(\mathbb{C}^{\mathbb{N}}, +)$.*

Demonstração. Exercício 47 □

Definição 18. *O* polinômio característico *do espaço vetorial $\mathcal{R}(a_1, a_2, \ldots, a_k)$ é o polinômio*

$$X^k - a_1 X^{k-1} - \ldots - a_{k-1} X^1 - a_k.$$

Exemplo 8. *O conjunto das funções $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ satisfazendo*

$$f(n) = 2f(n-1) - f(n-2), \text{ para todo } n \geq 2,$$

é o espaço vetorial $\mathcal{R}(2, -1)$, cujo polinômio característico é $X^2 - 2X + 1$.

O conjunto $\{r_1^n, r_2^n\}$, onde r_1 e r_2 são as raízes de $X^2 - 2X + 1$ é linearmente independente em $\mathcal{R}(2, -1)$.

Só que $r_1 = r_2$ ...

Teorema 38. *A função $n^{m-1}r^n$ pertence ao espaço vetorial $\mathcal{R}(a_1, a_2, \ldots, a_k)$ se e somente se $(X-r)^m$ divide o polinômio característico de $\mathcal{R}(a_1, a_2, \ldots, a_k)$.*

Teorema 39. *Se $r \in \mathbb{C}$ é uma raiz de multiplicidade m do polinômio característico de $\mathcal{R}(a_1, a_2, \ldots, a_k)$, então o conjunto*

$$\left\{n^j r^n \mid 0 \leq j < m\right\}$$

é linearmente independente em $\mathcal{R}(a_1, a_2, \ldots, a_k)$.

Exemplo 9. *O conjunto $\{n^0 r_1^n, n^1 r_1^n\}$, é linearmente independente em $\mathcal{R}(2, -1)$.*

Então toda função $f \in \mathcal{R}(2, -1)$ pode ser escrita como uma combinação linear de $n^0 r_1^n$ e $n^1 r_1^n$, isto é, existem $c_{1,0}, c_{1,1} \in \mathbb{C}$ tais que

$$f = c_{1,0} n^0 r_1^n + c_{1,1} n^1 r_1^n.$$

ou seja,

$$f = c_{1,0} r_1^n + c_{1,1} n r_1^n.$$

Os valores de $c_{1,0}$ e $c_{1,1}$ podem ser determinados pelo sistema

$$\begin{aligned} f(0) &= c_{1,0} r_1^0 + c_{1,1}(0) r_1^0, \\ f(1) &= c_{1,0} r_1^1 + c_{1,1}(1) r_1^1, \end{aligned}$$

ou seja,

$$\begin{aligned} f(0) &= c_{1,0}, \\ f(1) &= c_{1,0} r_1 + c_{1,1} r_1, \end{aligned}$$

e portanto,

$$\begin{aligned} c_{1,0} &= f(0), \\ c_{1,1} &= \frac{f(1)}{r_1} - f(0), \end{aligned}$$

e portanto,

$$f = f(0) r_1^n + \left(\frac{f(1)}{r_1} - f(0)\right) n r_1^n = \left(f(0) + \left(\frac{f(1)}{r_1} - f(0)\right) n\right) r_1^n$$

No exemplo tínhamos $r_1 = 1$ e portanto,

$$f = (f(1) - f(0))n + f(0),$$

ou seja,

$$f(n) = (f(1) - f(0))n + f(0), \text{ para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Corolário 40. *Sejam $r_1, r_2, \dots, r_l$ as distintas raízes do polinômio característico de $\mathcal{R}(a_1, a_2, \dots, a_k)$ com multiplicidades $m_1, m_2, \dots, m_l$, respectivamente. Então o conjunto*

$$\left\{n^j r_i^n \mid 1 \leq i \leq l \text{ e } 0 \leq j < m\right\}$$

é uma base de $\mathcal{R}(a_1, a_2, \dots, a_k)$.

Corolário 41. *Se $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ satisfaz*

$$f(n) = a_1 f(n-1) + a_2 f(n-2) + \ldots + a_k f(n-k), \text{ para todo } n \geq k,$$

então

$$f(n) = \sum_{i=1}^{l} \sum_{j=0}^{m_i-1} c_{i,j} n^j r_i^n, \text{ para todo } n \in \mathbb{N},$$

onde $r_1, r_2, \dots, r_l$ são as distintas raízes do polinômio característico de $\mathcal{R}(a_1, a_2, \dots, a_k)$ com multiplicidades $m_1, m_2, \dots, m_l$, respectivamente, e $\{c_{i,j} \mid 1 \leq i \leq l \text{ e } 0 \leq j < m\}$ é a solução do sistema

$$f(a) = \sum_{i=1}^{l} \sum_{j=0}^{m_i-1} c_{i,j} a^j r_i^a, 0 \leq a < k.$$

Exemplo 10. *A recorrência*

$$f(n) = 6f(n-1) - 13f(n-2) + 19f(n-3) - 14f(n-4) + 4f(n-5)$$

define o subespaço $\mathcal{R}(6, -13, 19, -14, 4)$ cujo polinômio característico é

$$X^5 - 6X^4 + 13X^3 - 19X^2 + 14X - 4 = (X-1)^3(X-2)^2,$$

que tem $l = 2$ raízes distintas,

$$\begin{aligned} r_1 &= 1 \\ r_2 &= 2, \end{aligned}$$

com multiplicidades

$$\begin{aligned} m_1 &= 3, \\ m_2 &= 2, \end{aligned}$$

respectivamente.

Pelo Corolário 41, temos que

$$\begin{aligned}
f(n) = \sum_{i=1}^{2}\sum_{j=0}^{m_i-1} c_{i,j} n^j r_i^n \\
&= \sum_{j=0}^{m_1-1} c_{1,j} n^j r_1^n + \sum_{j=0}^{m_2-1} c_{2,j} n^j r_2^n \\
&= \sum_{j=0}^{2} c_{1,j} n^j 1^n + \sum_{j=0}^{1} c_{2,j} n^j 2^n \\
&= c_{1,0} n^0 1^n + c_{1,1} n^1 1^n + c_{1,2} n^2 1^n + c_{2,0} n^0 2^n + c_{2,1} n^1 2^n \\
&= c_{1,0} + c_{1,1} n + c_{1,2} n^2 + c_{2,0} 2^n + c_{2,1} n 2^n,
\end{aligned}$$

onde $c_{i,j}\colon 1 \leq i \leq 2, 0 \leq j < m_i$ *são determinados pelo sistema*

$$\begin{aligned}
f(0) &= c_{1,0} + c_{1,1}0 + c_{1,2}0^2 + c_{2,0}2^0 + c_{2,1}02^0 \\
f(1) &= c_{1,0} + c_{1,1}1 + c_{1,2}1^2 + c_{2,0}2^1 + c_{2,1}12^1 \\
f(2) &= c_{1,0} + c_{1,1}2 + c_{1,2}2^2 + c_{2,0}2^2 + c_{2,1}22^2 \\
f(3) &= c_{1,0} + c_{1,1}3 + c_{1,2}3^2 + c_{2,0}2^3 + c_{2,1}32^3 \\
f(4) &= c_{1,0} + c_{1,1}4 + c_{1,2}4^2 + c_{2,0}2^4 + c_{2,1}42^4,
\end{aligned}$$

ou seja,

$$\begin{aligned}
f(0) &= c_{1,0} + c_{2,0} \\
f(1) &= c_{1,0} + c_{1,1} + c_{1,2} + 2c_{2,0} + 2c_{2,1} \\
f(2) &= c_{1,0} + 2c_{1,1} + 4c_{1,2} + 4c_{2,0} + 8c_{2,1} \\
f(3) &= c_{1,0} + 3c_{1,1} + 9c_{1,2} + 8c_{2,0} + 24c_{2,1} \\
f(4) &= c_{1,0} + 4c_{1,1} + 16c_{1,2} + 16c_{2,0} + 64c_{2,1}.
\end{aligned}$$

Exercícios 49, 50.