Aula 3

Provas

A *prova de uma proposição* é um argumento que demostra que a proposição é verdadeira. Por exemplo, seja P a proposição

P: "n é par $\Rightarrow n^2$ é múltiplo de 4, para todo $n \in \mathbb{N}$."

3.1 Prova Direta

Uma prova da proposição P do exemplo anterior poderia ser como segue.

Demonstração. Vamos provar que

se n é par então n^2 é múltiplo de 4, para todo $n \in \mathbb{N}$.

Seja $n \in \mathbb{N}$ um número par.
Vamos provar que n^2 é múltiplo de 4.
Como n é par, então $k = n/2$ é inteiro.
Além disso, $n = 2k$.
Então $n^2 = (2k)^2 = 4k^2$.
Como k é inteiro, então k^2 também é um inteiro.
Então n^2 é o quádruplo de um inteiro.
Então n^2 é múltiplo de 4.
Portanto,

se n é par então n^2 é múltiplo de 4, para todo $n \in \mathbb{N}$.

$\square$

Comentário 1. *Todas as provas começam com*

> *Vamos provar que*
>
> > *proposição*

e terminam com

> *Portanto,*
>
> > *proposição*

A proposição P do exemplo anterior é da forma

$$A(x) \Rightarrow B(x), \text{ para todo } x \in X,$$

onde

$A(x)$ é o predicado "x é par",

$B(x)$ é o predicado "x^2 é múltiplo de 4",

X é o conjunto $\mathbb{N}$.

Esquematicamente a prova acima tem a seguinte estrutura

Demonstração. Vamos provar que

$$A(x) \Rightarrow B(x), \text{ para todo } x \in X.$$

Seja $x \in X$ tal que $A(x)$.
Vamos provar que $B(x)$.
...
Então $B(x)$.
Portanto,

$$A(x) \Rightarrow B(x), \text{ para todo } x \in X.$$

$\square$

O trecho indicado por "..." é chamado de *argumento* da prova.
Muitas vezes a prova é abreviada como no seguinte esquema.

Demonstração. Vamos provar que

$$A(x) \Rightarrow B(x), \text{ para todo } x \in X.$$

Seja $x \in X$ tal que $A(x)$.
Vamos provar que $B(x)$.
...
Então $B(x)$. □

3.2 Contrapositiva

Definição 5. *A* contrapositiva *da implicação $A \Rightarrow B$ é a implicação (não B) $\Rightarrow$ (não A).*

Corolário 5. *Uma implicação e sua contrapositiva são equivalentes, isto é,*

$$A \Rightarrow B \equiv (\text{ não } B) \Rightarrow (\text{ não } A),$$

quaisquer que sejam as proposições A e B.

Demonstração. Exercicio 3 □

Exemplo 2. *A contrapositiva da implicação*

se n é par então n^2 é múltiplo de 4,

é

se n^2 não é múltiplo de 4 então n não é par.

A *prova por contrapositiva* de uma implicação é a prova direta da contrapositiva dessa implicação.

Demonstração. Vamos provar que

se n é par então n^2 é múltiplo de 4, para todo $n \in \mathbb{N}$.

provando que

se n^2 não é múltiplo de 4 então n não é par, para todo $n \in \mathbb{N}$.

Seja $n \in bN$ tal que n^2 não é múltiplo de 4.

Vamos provar que n não é par.

Como n^2 não é múltiplo de 4, então $n^2/4$ não é inteiro.

Como $n^2/4 = (n/2)^2$, então $(n/2)^2$ não é inteiro.

Como o quadrado de um inteiro também é inteiro, e $(n/2)^2$ não é inteiro e, consequentemente, $n/2$ não pode ser inteiro.

Como $n/2$ não é inteiro, então n não é par.

Portanto,

$$\text{se } n^2 \text{ não é múltiplo de 4 então } n \text{ não é par, para todo } n \in \mathbb{N}.$$

e, consequentemente,

$$\text{se } n \text{ é par então } n^2 \text{ é múltiplo de 4, para todo } n \in \mathbb{N}.$$

□

Esquematicamente a prova acima tem a seguinte estrutura

Demonstração. Vamos provar que

$$A(x) \Rightarrow B(x), \text{ para todo } x \in X,$$

provando que

$$\text{não } B(x) \Rightarrow \text{ não } A(x), \text{ para todo } x \in X.$$

Seja $x \in X$ tal que não $B(x)$

...

Então não $A(x)$.

Portanto,

$$\text{não } B(x) \Rightarrow \text{ não } A(x), \text{ para todo } x \in X,$$

e consequentemente,

$$A(x) \Rightarrow B(x), \text{ para todo } x \in X.$$

□

Esse esquema de demonstração é conhecido como "prova pela contrapositiva" e usualmente é abreviado como segue.

Demonstração. Vamos provar que

$$A(x) \Rightarrow B(x), \text{ para todo } x \in X,$$

por contrapositiva.

Seja $x \in X$ tal que não $B(x)$.

Vamos provar que não $A(x)$

...

Então não $A(x)$. □

3.3 Contradição

Teorema 6. *Para quaisquer valores de A, B e C,*

$$(A \Rightarrow B) \text{ e } (A \Rightarrow C)) \equiv A \Rightarrow (B \text{ e } C).$$

Demonstração. Exercicio 3. □

Teorema 7. *Se $A \Rightarrow F$ então não A.*

Demonstração. Exercicio 3. □

Outra prova da proposição P é como segue.

Demonstração. Vamos provar que a proposição

se n é par então n^2 é múltiplo de 4, para todo $n \in \mathbb{N}$,

é verdadeira, provando que a sua negação é falsa, isto é, que a proposição

não (se n é par então n^2 é múltiplo de 4, para todo $n \in \mathbb{N}$,)

é falsa, ou, equivalentemente, provando que a proposição

(não (se n é par então n^2 é múltiplo de 4)), para algum $n \in \mathbb{N}$,

é falsa ou, equivalentemente, provando que a proposição

n é par e não n^2 é múltiplo de 4, para algum $n \in \mathbb{N}$, é falsa.

Seja $n \in \mathbb{N}$ tal que n é par e n^2 não é múltiplo de 4.

Como n é par, então $n/2$ é inteiro.

Como n é par e $n/2$ é inteiro, então $n(n/2)$ é par.

Em resumo, se n é par e n^2 não é múltiplo de 4, então $n^2/2$ é par.

Por outro lado, como n^2 não é múltiplo de 4, então $n^2/2$ é ímpar.

Em resumo, se n é par e n^2 não é múltiplo de 4, então $n^2/2$ não é par.

Noutras palavras, se n é par e n^2 não é múltiplo de 4 então $n^2/2$ é par e $n^2/2$ não é par.

Portanto, a proposição

n é par e não n^2 é múltiplo de 4, para algum $n \in \mathbb{N}$,

é falsa e, consequentemente, sua negação que é a proposição

se n é par então n^2 é múltiplo de 4, para todo $n \in \mathbb{N}$,

é verdadeira. □

Esquematicamente a prova acima tem a seguinte estrutura

Demonstração. Vamos provar que A, provando que não (não A).

Suponha que não A.

Então $\ldots B$ e, portanto, não $A \Rightarrow B$.

Por outro lado, como não A, então $\ldots$ não B, isto é não $A \Rightarrow$ não B.

Então, não $A \Rightarrow$ (B e não B) (Teorema 6), ou seja, não $A \Rightarrow F$ e portanto (Teorema 7), não (não A) e consequentemente A. □

3.4 Contra Exemplos

Teorema 8.

$$(A \Rightarrow B) \equiv ((\textit{ não } A) \textit{ ou } B)$$

Demonstração. Simplificando a definição,

$$\begin{aligned} A \Rightarrow B &\equiv (A \text{ e } B) \text{ ou } (\text{ não } A) \\ &\equiv (A \text{ ou } (\text{ não } A)) \text{ e } (B \text{ ou } (\text{ não } A)) \\ &\equiv V \text{ e } (B \text{ ou } (\text{ não } A)) \\ &\equiv (\text{ não } A) \text{ ou } B. \end{aligned}$$

(ver Exercício 5) $\square$

Duas consequências diretas do Teorema 8, que são chamados de "contra-exemplos".

Corolário 9.

$$(\textit{ não } (A \Rightarrow B)) \equiv (A \textit{ e } \textit{ não } B).$$

Demonstração.

$$\text{não } (A \Rightarrow B) \equiv \text{ não } (\text{ não } A \text{ ou } B) \equiv (\text{ não } (\text{ não } A)) \text{ e } \text{ não } B \equiv A \text{ e } \text{ não } B.$$

(ver Exercício 6) $\square$

Corolário 10.

$$\textit{não } ((A(x) \Rightarrow B(x)), \textit{ para todo } x \in X) \equiv (A(x) \textit{ e } \textit{ não } B(x)), \textit{ para algum } x \in X.$$

3.5 Lição de Casa

Exercício 7 (limite).