EXERCÍCIOS DE ALGORITMOS E TEORIA DOS GRAFOS

JAIR DONADELLI

Lista 1

Exercício 1. Um químico deseja embarcar os produtos A, B, C, D, E, F, X usando o menor número de caixas. Alguns produtos não podem ser colocados numa mesma caixa porque reagem. Os produtos A, B, C, X reagem dois-a-dois; A reage com F e com D e vice-versa; E também reage com F e com D e vice-versa. Descreva o grafo que modela essa situação, mostre um diagrama desse grafo e use esse-o para descobrir o menor número de caixas necessárias para embarcar os produtos com segurança.

Exercício 2. Adaltina esperava as amigas Brandelina, Clodina, Dejaina e Edina para um lanche em sua casa. Enquanto esperava preparou as lanches: Bauru, Misto quente, Misto frio e X-salada. Brandelina gosta de Misto frio e de X-salada; Clodina de Bauru e X-salada; Dejaina gosta de Misto quente e Misto frio; Edina gosta de de Bauru e Misto quente. Descreva o grafo que modela essa situação, mostre um diagrama desse grafo e use-o para descobrir se é possível que cada amiga de Adaltina tenha o lanche que gosta.

Exercício 3. Para todo $n \in \mathbb{N}$, qual é o número máximo de arestas que pode ter um grafo com n vértices?

Exercício 4. O **complemento** de um grafo G, denotado por $\overline{G}$, é o grafo que tem o mesmo conjunto de vértices de G e dois vértices formam uma aresta em $\overline{G}$ se e somente se **não** formam uma aresta de G:

$$
\begin{aligned}
V(\overline{G}) &= V(G),\\
E(\overline{G}) &= = \binom{V(G)}{2} \setminus E(G) = \big\{\{u,v\} \subset V(G) \colon \{u,v\} \notin E(G)\big\}.
\end{aligned}
$$

Dê o complemento dos seguintes grafos

(i) G dado por

$$
\begin{aligned}
V(G) &= \{1,2,3,4,5\},\\
E(G) &= \{\{1,2\},\{1,3\},\{1,4\},\{1,5\},\{2,3\},\{2,4\},\{2,5\},\{3,4\},\{3,5\},\{4,5\}\}.
\end{aligned}
$$

(ii) H dado por

$$
\begin{aligned}
V(H) &= \{1,2,3,4,5,6,7\},\\
E(H) &= \{\{1,2\},\{1,3\},\{2,4\},\{2,5\},\{3,6\},\{3,7\}\}.
\end{aligned}
$$

(iii) B dado por

$$
\begin{aligned}
V(B) &= \{a,b,c,1,2,3\},\\
E(B) &= \{\{a,1\},\{a,2\},\{a,3\},\{b,1\},\{b,2\},\{b,3\},\{c,1\},\{c,2\},\{c,3\}\}.
\end{aligned}
$$

Exercício 5. Defina a **união** dos grafos G e H por

$$G \cup H = \Big(V(G) \cup V(H), E(G) \cup E(H)\Big).$$

A união $G \cup H$ é um grafo?

Exercício 6. Um grafo é chamado de **completo** sobre V se todo par de vértices de V é uma aresta do grafo, ou seja $E = \binom{V}{2}$. Um grafo completo com n vértices é denotado por $\mathbf{K^n}(V)$. Prove que

$$G \cup \overline{G} = K^n$$

onde $K^n = K^n(V(G))$.

Exercício 7. Considere o caso geral do exercício 1: Um químico deseja embarcar os produtos $p_1, p_2, \ldots, p_n$ usando o menor número de caixas. Alguns produtos não podem ser colocados num mesmo caixas porque reagem. Seja G o grafo que modela esse problema, onde vértices são produtos e arestas os pares que reagem, e denote por $\chi(G)$ o número de mínimo de caixas de modo que seja possível encaixotar os produtos com segurança. Prove que

$$\chi(G) \leq \frac{1}{2} + \sqrt{2m + \frac{1}{4}}$$

onde m é o número de pares de produtos que reagem.

Exercício 8. Chico e sua esposa foram a uma festa com três outros casais. No encontro deles houveram vários apertos de mão. Ninguém apertou a própria mão ou a mão da(o) esposa(o), e ninguém apertou a mão da mesma pessoa mais que uma vez.

Após os cumprimentos Chico perguntou para todos, inclusive para a esposa, quantas mãos cada um apertou e recebeu de cada pessoa uma resposta diferente. (i) Quantas mãos Chico apertou? (ii) Quantas mãos a esposa de Chico apertou?

Exercício 9. Prove que $\delta(G) \leq d(G) \leq \Delta(G)$ para todo grafo G.

Lista 2

Exercício 10. Decida se pode existir um grafo G com vértices que têm graus $2, 3, 3, 4, 4, 5$. E graus $2, 3, 4, 4, 5$?

Exercício 11. Seja G um grafo com 14 vértices e 25 arestas. Se todo vértice de G tem grau 3 ou 5, quantos vértices de grau 3 o grafo G possui?

Exercício 12.

Exercício 13. Para um número natural r, um grafo é r-**regular** se todos os vértices têm grau r. Para um grafo r-regular com n vértices e m arestas, expresse m em função de n e r.

Exercício 14. Dê exemplo de um grafo 3-regular que não é completo.

Exercício 15. Prove que se $|V(G)| \geq 3$ e $\delta(G) \geq \lfloor |V(G)|/2 \rfloor$ então existem vértices u e v em G distintos e tais que $N(u) \cap N(v) \neq \emptyset$.

Exercício 16. Dado G, o **grafo linha** de G, denotado por $\mathrm{L}G$, é o grafo cujos vértices são as arestas de G e um par de vértices define uma aresta em $\mathrm{L}G$ se, e somente se, esses vértices são arestas adjacentes em G. Dado G determine $|V(\mathrm{L}G)|$ e $|E(\mathrm{L}G)|$.

Lista 3

Exercício 17. Quantos subgrafos tem o grafo $\big(\{1,2,3,4,5,6\},\{\{1,2\}\}\big)$?

Exercício 18. Quantos subgrafos completos tem o grafo completo de ordem n?

Exercício 19. Sejam G um grafo e $M \subseteq E(G)$. Tome o subconjunto $U = \bigcup_{e\in M} e$ de vértices de G. Prove ou dê um contra-exemplo para $G[U] = G[M]$.

Exercício 20. Descubra um subgrafo induzido de

$$\begin{aligned} V(G) &= \{1,2,3,4,5,6,7,8\} \text{ e} \\ E(G) &= \{\{1,2\},\{1,3\},\{2,3\},\{2,5\},\{3,6\},\{8,5\},\{8,6\},\{5,6\},\{3,4\},\{5,7\}\} \end{aligned}$$

1-regular e com o maior número possível de arestas. (Qual a relação com a resolução do exercício 2?)

Exercício 21. Mostre que em *qualquer* grafo G com pelo menos 6 vértices vale: ou G tem um 3-clique e $\overline{G}$ tem um 3-conjunto-independente, ou G tem um 3-conjunto-independente e $\overline{G}$ tem um 3-clique. (Dica: exercício 6 e princípio da casa dos pombos sobre $E_{K^6}(v)$.)

Exercício 22. Dado um grafo G, denotamos por $\alpha(\mathbf{G})$ a cardinalidade do maior conjunto independente em G,

$$\alpha(G) = \max\big\{|A|\colon A \subset V(G) \text{ é um conjunto independente}\big\}.$$

Prove que se $d(G) > \alpha(G)$ então G contém triângulo, para todo G.

Exercício 23. Para todo grafo G, denotamos por $\omega(\mathbf{G})$ a cardinalidade do maior clique em G

$$\omega(G) = \max\big\{|A|\colon A \subset V(G) \text{ é um clique}\big\}.$$

Prove que $\omega(G) = \alpha(\overline{G})$.

Exercício 24. Redefina para todo grafo G o parâmetro $\chi(G)$ dado no exercício 7 em função dos conjuntos independentes de G. Esse parâmetro de um grafo é conhecido na literatura como número cromático do grafo.

Exercício 25. Prove que as duas desigualdades dadas a seguir valem para todo grafo G com pelo menos um vértice

$$\omega(G) \le \chi(G) \text{ e } \chi(G) \ge \frac{|V(G)|}{\alpha(G)}. \tag{1}$$

Exercício 26. Prove que $E(A,B) = E(B,A)$.

Exercício 27. Seja $G = (A \cup B, E)$ um grafo bipartido qualquer e suponha que $|A| < |B|$. É verdade que $\alpha(G) = |B|$? Determine $\omega(G)$.

Exercício 28. Prove que G é bipartido se e somente se $\chi(G) < 3$.

Exercício 29. Prove a afirmação

$$E(G) = E(G[A]) \cup E(G[\overline{A}]) \cup E(A,\overline{A}). \tag{2}$$

Exercício 30. Um grafo bipartido G com *partes* A e B é dito **completo** se

$$E(G) = \{\{a, b\} \subseteq V(G) \colon a \in A \text{ e } b \in B\}.$$

Um grafo bipartido completo sobre $\{A, B\}$ com partes de cardinalidade $|A| = n$ e $|B| = m$ é denotado por $\mathbf{K^{n,m}(A, B)}$.

Exercício 31. Dado um grafo G, defina para todo $U \subseteq V(G)$ a **vizinhança de** U, denotada $N_G(U)$, por

$$N_G(U) = \bigcup_{u \in U} N_G(u).$$

É verdade que $|E(U, \overline{U})| = |N_G(U)|$? Justifique.

Exercício 32. Um grafo G é dito k-**partido**, para $k \in \mathbb{N}$, se existem k conjuntos independentes A_1, A_2, $\ldots$, A_k que particionam $V(G)$, ou seja, $V(G) = A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_k$, o conjunto A_i é um conjunto independente em G para todo $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$ e $A_i \cap A_j = \emptyset$ para quaisquer i e j distintos. Prove que dentre os grafos k-partidos ($k \geq 3$) completos com n vértices o número máximo de arestas é atingido quando $|A_i| - |A_j| \leq 1$ para todos $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ distintos.

Exercício 33. Mostre que, se $n = kq + r$ com $0 \leq r < k$, então o número de arestas do grafo do exercício anterior é

$$\frac{1}{2}\left(\frac{k-1}{k}\right)(n^2 - r^2) + \binom{r}{2}$$

e que esse número é limitado por

$$\leq \frac{k-1}{k}\binom{n}{2}.$$

Lista 4

Exercício 34. Determine quais pares dentre os grafos abaixo são isomorfos.

(i) G_1 dado por $V(G_1) = \{v_1, u_1, w_1, x_1, y_1, z_1\}$ e
$E(G_1) = \{\{u_1, v_1\}, \{u_1, w_1\}, \{v_1, w_1\}, \{v_1, x_1\}, \{w_1, y_1\}, \{x_1, y_1\}, \{x_1, z_1\}\}$;

(ii) G_2 dado por $V(G_2) = \{v_2, u_2, w_2, x_2, y_2, z_2\}$ e
$E(G_2) = \{\{u_2, v_2\}, \{u_2, w_2\}, \{v_2, w_2\}, \{v_2, x_2\}, \{w_2, y_2\}, \{x_2, y_2\}, \{y_2, z_2\}\}$;

(iii) G_3 dado por $V(G_3) = \{v_3, u_3, w_3, x_3, y_3, z_3\}$ e
$E(G_3) = \{\{u_3, v_3\}, \{u_3, w_3\}, \{v_3, w_3\}, \{v_3, x_3\}, \{w_3, y_3\}, \{x_3, y_3\}, \{u_3, z_3\}\}$.

Exercício 35. Mostre que existem 11 grafos não-isomorfos com 4 vértices.

Exercício 36. Sejam G e H grafos isomorfos e $f\colon V(G) \to V(H)$ um isomorfismo. É verdade que $G[U]$ é isomorfo a $H[f(U)]$ para todo $U \subseteq V(G)$? Justifique.

Exercício 37. Mostre que o grafo de Petersen é isomorfo ao complemento do grafo linha do K^5.

Exercício 38. Um **automorfismo** de um grafo é um isomorfismo do grafo sobre ele mesmo. Quantos automorfismos tem um grafo completo?

Exercício 39. Mostre que o conjunto de automorfismos de um grafo com a operação de composição de funções definem um grupo grupo.

Exercício 40. Qual o número de grafos distintos sobre um conjunto de vértices V de tamanho n?

Exercício 41. Prove que há pelo menos $\frac{2^{\binom{n}{2}}}{n!}$ grafos não isomorfos sobre um conjunto de vértices de ordem n.

Exercício 42. Um grafo $G = (V, E)$ é **vértice-transitivo** se para quaisquer $u, v \in V$ existe um automorfismo f de G com $f(v) = u$. Analogamente, G é **aresta-transitivo** se para quaisquer arestas $\{x, y\}, \{z, w\} \in E$ existe um automorfismo f de G tal que $\{f(x), f(y)\} = \{z, w\}$.

Dê um exemplo de grafo vértice-transitivo. Dê um exemplo de grafo aresta-transitivo. Dê um exemplo de grafo aresta-transitivo mas não vértice-transitivo.

Exercício 43. Dê uma definição formal para multigrafo.

Exercício 44. Defina isomorfismo para grafos orientados.

Exercício 45. Formule uma versão do teorema 1 para grafos orientados.

Exercício 46. Mostre que se $f(n) = O(g(n))$ então $O(f(n)) + O(g(n)) = O(g(n))$.

Exercício 47. É verdade que para todo G vale que $|E(G)| = O(|V(G)|)$ para $|V(G)|$ suficientemente grande?

Exercício 48. É verdade que para todo G vale que $\log|E(G)| = O(\log|V(G)|)$ para $|V(G)|$ suficientemente grande?

Exercício 49. Sejam G um grafo, A a sua matriz de adjacências e $b(i, j)$ as entradas da matriz A^2. Que parâmetro de G está associado ao número $b(i, i)$, para cada $i \in \{1, 2, \ldots, |V(G)|\}$? Qual a relação entre $b(i, j)$ e, $N_G(i)$ e $N_G(j)$ quando $i \neq j$?

Exercício 50. Para um grafo dirigido dizemos que a aresta $(u, v) \in E$ *sai de* u e *chega em* v.

Os **vetores de incidências** de um grafo dirigido $D = (V, E)$ são os vetores S e C indexados por E tais que para $e = (u, v) \in E$ temos $S[e] = u$ e $C[e] = v$, e nesse caso dizemos que e *sai* de u e *chega* em v. Determine o tempo para:

(i) dados $e \in E$ e $v \in V$, determinar se e incide em v;

(ii) dado $e \in E$, determinar suas extremidades;

(iii) dado $v \in V$, determinar as arestas que saem de v e determinar as arestas que chegam em v.

Uma **matriz de incidências** de um grafo dirigido $D = (V, E)$ é uma matriz B de dimensão $|V| \times |E|$ (as linhas são indexadas por V e as colunas por E) tal que

$$B(i, j) = \begin{cases} -1 & \text{se a aresta } j \text{ sai do vértice } i, \\ 1 & \text{se a aresta } j \text{ chega no vértice } i, \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

(a) Determine o tempo para:

(i) dados $e \in E$ e $v \in V$, determinar se e incide em v;

(ii) dado $e \in E$, determinar suas extremidades;

(iii) dado $v \in V$ determinar as arestas que saem de v e determinar as arestas que chegam em v.

(b) Determine o que as entradas da matriz $|V| \times |V|$ dada por $B \cdot B^T$ representam, onde B^T é a matriz transposta de B.

Exercício 51. Sejam G um grafo e A sua matriz de adjacências. Prove que se os autovalores de A são distintos então o grupo dos automorfismos é abeliano.

Exercício 52.

Exercício 53. Seja A uma matriz $n \times n$. Aprendemos na escola um algoritmo que determina o produto $A \cdot A$ com $O(n^3)$ operações aritméticas. Como $A^2(G)$ pode ser usado para determinar se um grafo G tem triângulo?

Em 1990, Coppersmith e Winograd mostraram um algoritmo que determina o produto de matrizes duas $n \times n$ usando $O(n^{2,376})$ operações aritméticas. Como esse pode ser usado para determinar se um grafo tem triângulo? Esse algoritmo é mais eficiente que o algoritmo do exercício anterior?

Exercício 54. O **traço** de uma matriz A, denotado por $\mathrm{tr}(A)$, é a soma dos elementos na diagonal da matriz. Quanto vale o traço de uma matriz de adjacências? Quanto vale $\mathrm{tr}(A^2)$ em função de $E(G)$?

Exercício 55. Por A ser uma matriz simétrica, sabemos da Álgebra Linear que todos os seus autovalores são números reais. Determine os autovalores da matriz de adjacências do grafo completo K^n. Mostre que se G é r-regular então r é uma autovalor de A.

Exercício 56. Dada uma representação por listas de adjacências de um grafo dirigido D descreva um algoritmo com tempo de execução $O(|V(D)| + |E(D)|)$ para computar a representação por listas de adjacências do grafo subjacente.

Exercício 57. Quando uma representação por uma matriz de adjacências é utilizada, muitos algoritmos sobre grafos gastam tempo $\Theta(|V|^2)$, mas existem algumas exceções. Mostre que determinar se um grafo orientado contém um *sorvedouro* — isto é, um vértice com grau de entrada $|V| - 1$ e grau de saída 0 — pode ser determinado em tempo $O(|V|)$ quando uma representação por matriz é utilizada.

Lista 5

Exercício 58. Prove que Percurso(G) visita cada vértice de G uma vez e cada aresta de G duas vezes.

```
Dado    : um grafo G.
Devolve: visita aos vértices e as arestas de G.

marque todos elementos de V(G) e de E(G) não-visitado;
enquanto há vértice não-visitado faça
    escolha v não-visitado;
    insira v em L e marque v visitado;
    enquanto L ≠ ∅ faça
        escolha u ∈ L;
        se em E_G(u) há aresta não-visitada a partir de u então
            escolha {u, w} em E_G(u) não-visitada a partir de u;
            marque {u, w} visitada a partir de u;
            se w é não-visitado então
                insira w em L e marque w visitado;
        senão
            remova u de L.
```

Algoritmo 1: Percurso(G).

Exercício 59. Justifique detalhadamente o custo $O(1)$ nas linhas 5 e 7 do algoritmo Visite(G, v).

Exercício 60. Prove que se G está representado por uma matriz de adjacências então o algoritmo Visite tem complexidade $O(|V(G)|^2)$.

Exercício 61. Seja G um grafo tal que todo vértice de G é alcançável a partir de qualquer vértice dado. Para cada vértice temos dois estados possíveis: *não-visitado* ou *visitado*. De início todos os vértices de G estão *não-visitado*. Prove ou refute: o seguinte algoritmo visita todos os vértices de G.

```
Dado    : um grafo G.
Devolve: visita aos vértices de G.

escolha um vértice v não-visitado;
insira v em L;
marque v visitado;
enquanto E(L, L̄) ≠ ∅ faça
    escolha uma aresta {u, w} ∈ E(L, L̄);
    insira {u, w} em M;
    v ← {u, w} ∩ L̄;
    insira v em L;
    marque v visitado.
```

Algoritmo 2: Visite_vértices(G).

Prove que, no final de execução do algoritmo, M contém $|V(G)| - 1$ arestas.

Exercício 62. Determine a complexidade do algoritmo do exercício anterior.

Exercício 63. Escreva uma versão não recursiva da busca em profundidade rotulada.

Exercício 64. Considere uma execução da busca rotulada $\mathrm{BP}(G, w)$. Para simplificar, considere que todo vértice de G é alcançável a partir de w.

(1) Prove as seguintes equivalências. Para quaisquer $u, v \in V(G)$

(a) $\big[chega[v], sai[v]\big] \cap \big[chega[u], sai[u]\big] = \emptyset$ se e somente se não existe $t \in \mathbb{N}$ tal que $pai^{(t)}[u] = v$ e não existe $t' \in \mathbb{N}$ tal que $pai^{(t')}[v] = u$;

(b) $\big[chega[v], sai[v]\big] \subset \big[chega[u], sai[u]\big]$ se e somente se existe $t \in \mathbb{N}$ tal que $pai^{(t)}[v] = u$;

(c) $\big[chega[v], sai[v]\big] \supset \big[chega[u] sai[u]\big]$ se e somente se existe $t \in \mathbb{N}$ tal que $pai^{(t)}[u] = v$.

(2) Prove que dados $u, v \in V(G)$ quaisquer, um e somente um dos itens (a), (b) e (c) acima vale para esse par de vértices.

Exercício 65. Escreva um algoritmo baseado na busca em largura para reconhecer grafos bipartidos. Prove que seu algoritmo funciona corretamente.

Exercício 66. Adapte o algoritmo do exercício 61 para que o percurso seja uma busca em largura. Repita para busca em profundidade.

Lista 6

Exercício 67. É verdade que todo grafo com pelo menos três vértices, exatamente dois vértices de grau 1 e os demais vértices com grau 2 é um caminho?

Exercício 68. Escreva um algoritmo que recebe uma grafo G e decide se G é um caminho. Determine a complexidade do algoritmo.

Exercício 69. Sejam $P = u_1, u_2, \ldots, u_k$ e $Q = v_1, v_2, \ldots, v_\ell$ duas seqüências de vértices de um grafo. Definimos a **concatenação** dessas seqüências como a seqüência dos vértices de P seguidos dos vértices de Q, denotada $P, Q = u_1, u_2, \ldots, u_k, v_1, v_2, \ldots, v_\ell$. Supondo que P e concatenação de caminhos Q sejam caminhos no grafo, sob que condições a seqüência P, Q é caminho?

Exercício 70.

Exercício 71. Prove que o seguinte algoritmo (que está baseado numa busca em largura) funciona corretamente. Determine a complexidade do algoritmo.

Dado : um grafo G e um vértice $w \in V(G)$.
Devolve: $\text{dist}_G(w, v)$ para todo $v \in V(G)$.

declare todos os vértices desmarcados;
marque w;
enfilere w em L;
$d[w] \leftarrow 0$;
enquanto $L \neq \emptyset$ **faça**
    tome u o primeiro elemento da fila L;
    para cada $v \in N_G(u)$ **faça**
        se v *não está marcado* **então**
            marque v;
            enfilere v em L;
            $d[v] \leftarrow d[u] + 1$;
    remova u de L;
devolva $d[\,]$.

Algoritmo 3: Distância(G, w).

Exercício 72. Escreva um algoritmo baseado na busca em largura para reconhecer grafos bipartidos. Prove que seu algoritmo funciona corretamente.

Exercício 73. Seja G um grafo onde a distância entre qualquer par de vértices é finita. Mostre que se existem $w \in V(G)$ e $\{u, v\} \in E(G)$ tais que $\text{dist}(w, u) = \text{dist}(w, v)$ então $\text{cin}(G) \leq \text{dist}(w, u) + \text{dist}(w, v) + 1$.

Exercício 74. Mostre que a relação $e \sim f$ em $E(G)$ dada por $e = f$ ou existe um circuito $C \subset G$ tal que e e f pertencem a $E(C)$ é uma relação de equivalência.

Exercício 75. Seja k um número natural. O k**-cubo** é o grafo cujo conjunto de vértices são as seqüencias binárias de k bits e dois vértices são adjacentes se e somente se as k-tuplas correspondentes diferem exatamente em uma posição. Determine o número de vértices, arestas, o diâmetro e a cintura do k-cubo. Determine os parâmetros α, ω e χ do k-cubo.

Exercício 76. Seja p um número primo e tome $V = \{0, 1, \ldots, p-1\}$. Defina o grafo bipartido 3-regular $G = (A \cup B, E)$ com $A = V \times \{a\}$ e $B = V \times \{b\}$ (o que queremos é que A e B sejam duas cópias disjuntas de V, note que isso não é possível tomando $A = V$ e $B = V$). Cada vértice $(x, a) \in A$ é adjacente aos vértices (x, b), $(x+1, b)$ e $(x+t, b)$ de B onde $t \neq 0, 1$ é fixo e a soma é feita módulo p.

Prove que qualquer subgrafo induzido de G de ordem $p+1$ contém um caminho de comprimento 2 quando $t = 2, (p+1)/2, p-1$.

Exercício 77. Seja G um grafo nas condições do exercício 61. Seja M o conjunto construído pela execução do algoritmo 2. Prove que $G[M]$ não contém circuito.

Lista 7

Exercício 78. Seja G um grafo com pesos nas arestas e s um vértice de G. Prove a seguinte variante da desigualdade triangular para todo $\{v,u\} \in E(G)$

$$\mathrm{dist}_G(s,u) \leq \mathrm{dist}_G(s,v) + \rho(\{v,u\}). \tag{3}$$

Exercício 79. Suponha que $P = v_1, v_2, \ldots, v_k$ é um caminho mínimo num grafo D. Prove que $P_{i,j} = v_i, \ldots, v_j$ é um caminho mínimo com extremos v_i e v_j em D para quaisquer i, j com $1 \leq i < j \leq k$.

Exercício 80. Dados (V,E,ρ) e $s \in V$ considere o problema de determinar $\mathrm{dist}(s,x)$ para todo $x \in V$ com a seguinte estratégia: declare s visitado e em cada passo visite o vértice não visitado mais próximo de um vértice já visitado. Construa um exemplo de grafo com pesos nas arestas que mostre que essa estratégia não funciona.

Exercício 81. Construa um grafo com pesos que podem ser negativos e no qual algoritmo de Dijkstra devolve resposta errada.

Exercício 82. Suponha que o teste na linha 7 do algoritmos de Dijkstra seja mudado para $|Q| > 1$, o que faria o laço ser executado $|V| - 1$ vezes ao invés de $|V|$. O funcionamento do algoritmo estaria correto?

Exercício 83. Na estimativa de $T_3(u)$ dissemos que $T_3(u) = O(\log(|\overline{S}|))$ e depois superestimamos tomando $T_3(u) = O(\log|V|)$ para todo u. Usando a primeira estimativa, obteríamos

$$\sum_{u \in V} T_3(u) = \sum_{i=1}^{|V|} O(\log i).$$

Prove que, assintoticamente, a alternativa usada não é superestimada, isto é, prove que

$$\sum_{i=1}^{n} O(\log i) = \Theta(n \log n).$$

Exercício 84. Dado um grafo D com pesos $\rho\colon E(D) \to [0,1]$ que representam a probabilidade de uma aresta não falhar. Escreva um algoritmo para descobrir o caminho mais seguro entre dois vértices.

Exercício 85. Seja $D = (V,E,\rho)$ um grafo com peso $\rho\colon E \to \{0,1,\ldots,m\}$ nas arestas, $m \in \mathbb{N}$. Modifique Dijkstra para computar caminhos mínimos em tempo $O(m|V| + |E|)$.

Exercício 86. Considere o seguinte algoritmo que recebe um grafo com pesos nas arestas e um par w, v de vértices desse grafo e devolve uma seqüência de vértices $w = v_1, v_2, \ldots, v_k = v$.

Dado : um grafo G vértices $w, v \in V(G)$.
Devolve: caminho mínimo com extremos w e v, quando existe.

Dijkstra'(G, w);
enquanto $p[v] \neq nil$ **faça**
  empilhe v em L;
  $v \leftarrow p[v]$;
imprima w; **enquanto** $L \neq \emptyset$ **faça**
  imprima (desempilhe(L)).

Algoritmo 4: Imprime_caminho_minimo(G, w, v).

onde

Dado : um grafo G com pesos ρ nas arestas e um vértice $s \in V(G)$.
Devolve: $\mathrm{dist}_G(s, v)$ para todo $v \in V(G)$.

seja S subconjunto vazio de $V(G)$;
para cada $v \in V(G)$ **faça**
  $d[v] \leftarrow \infty$;
  $p[v] \leftarrow nil$;
$d[s] \leftarrow 0$;
$p[s] \leftarrow nil$;
construa uma fila de prioridades Q indexada por $V(G)$ e com as prioridades dadas por $d[\,]$;
enquanto Q *não-vazio* **faça**
  $u \leftarrow$ extrai mínimo de Q;
  insira u em S;
  para cada $t \in N(u)$ **faça**
    se $d[t] > d[u] + \rho(\{u, t\})$ **então**
      $d[t] \leftarrow d[u] + \rho(\{u, t\})$;
      $p[t] \leftarrow u$.

Algoritmo 5: Dijkstra'(G, s).

Prove que a resposta de Imprime_caminho_minimo(G, w, v) é um caminho mínimo com extremos w e v.

Exercício 87. A seguinte versão do algoritmo de Floyd–Warshall funciona corretamente?

Dado : um grafo G com peso ρ nas arestas.
Devolve: $\mathrm{dist}_G(i, j)$ para todos $i, j \in V(G)$.

para cada $(i, j) \in V \times V$ **faça**
  $\mathrm{dist}(i, j) \leftarrow a_{i,j}$;
para cada k *de* 1 *até* $|V|$ **faça**
  para cada $i \in V$ **faça**
    para cada $j \in V$ **faça**
      $\mathrm{dist}(i, j) \leftarrow \min\{\mathrm{dist}(i, j), \mathrm{dist}(i, k) + \mathrm{dist}(k, j)\}$;

Algoritmo 6: Floyd–Warshall(G)

Lista 8

Exercício 88. Dado $G = (V, E)$ escrevemos $u \sim v$, para quaisquer vértices u e v de G, se e somente se $u = v$ ou existe um caminho com extremos u e v em G. Mostre que $\sim$ é uma relação de equivalência sobre V e caracterize as classes de equivalência dessa relação.

Exercício 89. Mostre que se $G = (V, E)$ é conexo então $\mathbf{G} - \mathbf{e} = (V, E \setminus \{e\})$ é conexo para toda aresta e que pertence a algum circuito de G.

Exercício 90. Mostre que se $\Delta(G) \leq 2$ então os componentes conexos de G ou são caminhos ou são circuitos.

Exercício 91. Seja H um subgrafo gerador de G. Mostre que se H é conexo então G é conexo.

Exercício 92. Seja G um grafo com n vértices. Considere os graus dos vértices em ordem crescente, $\delta(G) = d_1 \leq d_2 \leq \cdots \leq d_n = \Delta(G)$. Mostre que se $d_k \geq k$ vale para todo k com $0 < k < n - \Delta(G)$, então G é conexo.

Exercício 93. Seja G o grafo definido sobre o conjunto de vértices $\{0, 1, \ldots, n-1\}$ com $\{u, v\} \in E(G)$ se, e somente se, $u - v \equiv \pm k \mod n$.

(1) Dê um condição necessária e suficiente sobre n e k para que G seja conexo.
(2) Determine o número de componentes conexos em função de n e k.

Exercício 94. Mostre que se G é conexo então $\mathrm{L}G$ (veja exercício 16) é conexo.

Exercício 95. Escreva um algoritmo com complexidade $O(|V| + |E|)$ que determine os componentes biconexos de um grafo.

Exercício 96. Mostre que se u não é articulação num grafo conexo G então toda aresta que incide em u pertence a um circuito de G.

Exercício 97. Prove ou dê um contra-exemplo para: dado $n \in \mathbb{N}$ existe $\delta_n \in \mathbb{N}$ tal que todo grafo com n e grau mínimo δ_n é biconexo.

Exercício 98. Se u é uma articulação de um grafo conexo G então $G[N(u)]$ é conexo?

Exercício 99. Prove que se G é conexo, não é completo e não é um circuito ímpar então

$$\chi(G) \leq \Delta(G).$$

Lista 9

Exercício 100. Determine o número de arestas de uma floresta com n vértices e com k componentes conexos, em função de n e k.

Exercício 101. Desenhe todas as árvores não-isomorfas com 5 vértices e todas as árvores não-isomorfas com 7 vértices e com grau máximo pelo menos 4.

Exercício 102. Mostre que toda árvore T tem pelo menos $\Delta(T)$ folhas.

Exercício 103. Prove que o conjunto de arestas $\{pai[v], v\}$ definido por uma busca em profundidade rotulada induz uma árvore.

Exercício 104. Seja G um grafo. Mostre que as seguintes afirmações são equivalentes:
(a) G é conexo e $|E(G)| = |V(G)| - 1$;
(b) $|E(G)| = |V(G)| - 1$ e G não contém circuito.
(c) G é uma árvore;

Exercício 105. Uma floresta é um grafo acíclico. Considere uma floresta F com n vértices e m arestas.
(a) Qual é o número máximo de vértices num componente conexo de F?
(b) Mostre que há pelo menos $\max\{n - 2m, 0\}$ vértices de grau zero.
(c) Mostre que se $m < n/2$ então resta pelo menos um vértice de grau zero.

Exercício 106. Dizemos que essa árvore foi obtida por uma **operação elementar** a partir da árvore T.

Exercício 107. Sejam $T_1, T_2 \subset G$ árvores geradoras distintas de um grafo conexo G. Mostre que T_2 pode ser obtida a partir de T_1 através de uma seqüência de operações elementares.

Exercício 108. Seja G conexo e $e \in E(G)$. Dizemos que e é uma **aresta de corte** em G se $G - e$ é desconexo. Prove que se uma aresta é corte em G então ela pertence a todas as árvores geradoras de G.

Exercício 109. Seja T uma árvore com t vértices. Mostre que qualquer grafo com grau mínimo pelo menos $t - 1$ contém um subgrafo isomorfo a T.

Lista 10

Exercício 110. Prove que se e é uma aresta de peso mínimo em G então e pertence a alguma árvore geradora mínima.

Exercício 111. Prove que para qualquer $U \subset V(G)$ não-vazio, a aresta de menor custo em $E(U, \overline{U})$ tem que pertencer a toda árvore geradora de G.

Exercício 112. Considere a seguinte estratégia para computar uma árvore geradora de custo mínimo: dado um grafo *conexo* $G = (V, E, \rho)$, mantemos um conjunto S (inicialmente vazio) de arestas e a cada passo escolhemos em $\{u, v\} \in E \setminus S$ uma aresta *boa* para S, onde aresta *boa* para S significa que $S \cup \{\{u, v\}\}$ está contido no conjunto de arestas de alguma árvore geradora mínima de G. O objetivo desse exercício e mostrar que no final as arestas de S induzem uma árvore geradora mínima de G.

Dado : um grafo conexo G com pesos nas arestas.
Devolve: árvore geradora de custo mínimo.

$S \leftarrow \emptyset$;
enquanto $G[S]$ *não é árvore geradora* **faça**
  descubra uma aresta f boa para S em $E(G) \setminus S$;
  insira f em S;
devolva(S).

Algoritmo 7: AGM(G)

Suponha que sempre existe pelo menos uma aresta boa pra ser escolhida em cada iteração do `enquanto`. Prove que *para qualquer G conexo,* AGM(G) *constrói uma árvore geradora mínima de G.* (Dica: use o invariante *S é subconjunto de alguma árvore geradora mínima de G* antes de cada iteração do laço.)

Exercício 113. Agora, o objetivo é provar a hipótese assumida acima de que sempre há uma aresta boa pra ser escolhida. Prove que *se T é uma árvore geradora mínima de G e $S \subset E(T)$ então para todo $U \subset V(G)$ tal que o corte $E(U, \overline{U})$ não contém arestas de S vale o seguinte: uma aresta $\{u, v\}$ de custo mínimo no corte $E(U, \overline{U})$ é boa para S.* (Dica: dados G, S, T como no enunciado, tome U e $e \in E(U, \overline{U})$ como enunciado e considere 2 casos, se $e \in E(T)$ e se $e \notin E(T)$.)

Exercício 114. Seja $T \subset G$ uma árvore geradora de um grafo G com peso nas arestas. Mostre que T é uma árvore geradora mínima se e somente se para toda $e \in E(G) \setminus E(T)$, o único circuito C de $T + e$ é tal que todas as arestas de C custam não mais que $\rho(e)$.

Exercício 115.

Exercício 116. Use o resultado do exercício 113 para dar uma prova da correção dos algoritmos de Prim e Kruskal.

Lista 11

Exercício 117. Determine o número de arestas num emparelhamento máximo nos grafos: K^n, C^n, P^n e $K^{m,n}$.

Exercício 118. Prove que uma árvore qualquer tem no máximo um emparelhamento perfeito.

Exercício 119. Considere um grafo qualquer G de n vértices. Mostre que um emparelhamento em G tem no máximo $n/2$ arestas.

Exercício 120. Mostre que o k-cubo admite emparelhamento perfeito, para todo $k \geq 2$.

Exercício 121. Duas pessoas jogam um jogo sobre um grafo G alternadamente selecionando vértices distintos $v_0, v_1, v_2, \ldots$ tais que, para $i > 0$, v_i é adjacente a v_{i-1}. O último jogador que conseguir selecionar um vértice vence o jogo.

Mostre que o primeiro jogador tem uma estratégia para vencer o jogo se e somente se o grafo G não tem um emparelhamento perfeito.

Exercício 122. Mostre que $\mu(G) = \alpha(\mathrm{L}G)$ (veja a definição de LG no exercício 16).

Exercício 123. Prove que se M é emparelhamento em G então existe um emparelhamento máximo que cobre todos os vértices cobertos por M.

Exercício 124. Denotemos $c_i(G)$ o número de componentes conexos do grafo G com um número ímpar de vértices. Mostre que se G tem um emparelhamento perfeito então $c_i(G-S) \leq |S|$ para todo conjunto S de vértices. Vale a recíproca dessa afirmação?

Exercício 125.

Exercício 126. Prove que se G é bipartido e regular então G tem emparelhamento perfeito.

Exercício 127. Seja $G = (A \cup B, E)$ um grafo bipartido com $|A| = |B| = n$. Mostre que se não existe um emparelhamento perfeito em G então existe um subconjunto S com $|S| \leq \lceil n/2 \rceil$ tal que $|N(S)| = |S| - 1$ e ou $S \subset A$ ou $S \subset B$.(Dica: considere um conjunto T minimal violando a condição de Hall, dada pela equação de Hall.)

Exercício 128. Prove o corolário do Teorema de Hall.

Exercício 129. Prove que se o grafo bipartido $G = (A \cup B, E)$ é conexo e contém exatamente um emparelhamento perfeito, então G contém uma aresta de corte.

Exercício 130. Seja $G = (A \cup B, E)$ um grafo bipartido e $\{A_1, A_2\}$ uma partição de A e $\{B_1, B_2\}$ uma partição de B. Mostre que se $N(A_1) \subseteq B_1$ então $N(B_2) \subseteq A_2$ e $B_1 \cup A_2$ é uma cobertura.

Exercício 131. Seja $G = (A \cup B, E)$ um grafo bipartido e M um emparelhamento em G. Seja $U \subset V(G)$ o conjunto dos vértices cobertos por M e W o conjunto dos vértices de todos os caminhos M-alternantes que têm um dos extremos em $A \setminus U$. Prove que $(B \cap W) \cup (A \setminus W)$ é uma cobertura em G.

Exercício 132. Prove que todo emparelhamento máximo em $G = (A \cup B, E)$ tem cardinalidade
$$\min_{U \subseteq A} |A| - |U| + |N(U)|.$$

Exercício 133. O **permanente** de uma matriz quadrada $M = M(u, v)$ é o número
$$\operatorname{perm}(M) = \sum_{\pi} \prod_{u} M(u, \pi(u)),$$
onde a soma se estende a todas as bijeções $\pi\ A \to B$.

Seja $G = (A \cup B, E)$ um grafo bipartido tal que $|A| = |B|$. Seja M a matriz indexada por $A \times B$ e definida por $M(u, v) = 1$ se $\{u, v\}$ é uma aresta de G e $M(u, v) = 0$ caso contrário. Mostre que o permanente de M é igual ao número de emparelhamentos perfeitos em G.

Exercício 134. Na primeira prova que apresentamos do teorema de Hall deduzimos o resultado do teorema de König. Esses teoremas são, de fato, equivalentes. Demonstre o teorema de König ($\mu > \nu$) a partir do teorema de Hall.

Exercício 135. Refaça os exercícios 2 e 20.

Exercício 136. Faça uma análise detalhada da complexidade do algoritmo de Edmonds.

Exercício 137. Modifique o algoritmo Edmonds(A, B, E) para que ele devolva um emparelhamento máximo.

Exercício 138. Seja B um grafo bipartido com bipartição A, B. Construa um grafo orientado D a partir de B orientando as arestas no sentido de X para Y. Agora, acrescente aos vértices de D dois novos vértices s e t, com s adjacente a todos os vértices de X, no sentido de s para X, e com t adjacente a todos os vértices de Y no sentido de Y para t.

Suponha que esse grafo orientado D que você construiu modela uma rede de computadores onde cada aresta tem a capacidade de 1 unidade de transmissão. Mostre que o fluxo máximo de s para t é igual ao número máximo de arestas num emparelhamento em B.

Exercício 139. Como foi dito, determinar $\alpha(G)$ é um problema NP-difícil. Suponha que exista um algoritmo que recebe um grafo G e computa $\nu(G)$ em tempo polinomial e mostre como computar $\alpha(G)$ em tempo polinomial.

Escreva um algoritmo polinomial para computar $\alpha(G)$ quando G bipartido.