Aula 6

Indução: Exemplos

Vamos reescrever a prova do Teorema 23.

Demonstração. Vamos provar que

$$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}, \text{ para todo } 0 \leq k \leq n,$$

por indução em n.

Hipótese da Indução: Seja $n \in \mathbb{N}$ tal que

$$\sum_{i=1}^{k} i = \frac{k(k+1)}{2}, \text{ para todo } 0 \leq k \leq n.$$

Passo da Indução: Vamos provar que

$$\sum_{i=1}^{n+1} i = \frac{(n+1)\left((n+1)+1\right)}{2}.$$

Temos que

$$\sum_{i=1}^{n+1} i = \left(\sum_{i=1}^{n} i\right) + (n+1).$$

Pela Hipótese da Indução temos que

$$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2},$$

e daí,

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n+1} i = \left(\sum_{i=1}^{n} i\right) + (n+1) \\
&= \left(\frac{n(n+1)}{2}\right) + (n+1) \\
&= \frac{n(n+1) + 2(n+1)}{2} \\
&= \frac{(n+2)(n+1)}{2} \\
&= \frac{(n+1)\left((n+1)+1\right)}{2},
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\sum_{i=1}^{n+1} i = \frac{(n+1)\left((n+1)+1\right)}{2}.$$

Base da Indução: Vamos provar que

$$\sum_{i=1}^{0} i = \frac{0(0+1)}{2}.$$

Por um lado, temos que

$$\sum_{i=1}^{0} i = 0.$$

Por outro lado,

$$\frac{0(0+1)}{2} = \frac{0}{2} = 0.$$

Portanto,

$$\sum_{i=1}^{0} i = \frac{0(0+1)}{2},$$

□

Comentário 4. *Uma maneira de olhar para uma prova por indução é vê-la como um* esquema de prova*, ou seja, um algoritmo recursivo para provar a proposição enunciada.*

Para cada $n \in \mathbb{N}$, a prova do Teorema 23 é uma prova de que

$$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Noutras palavras, uma prova por indução é um algoritmo recursivo para provar o enunciado.

Fazer o backtracking da prova para $n = 5$.

Teorema 24. *Para todo $x \neq 0$ e todo $n \in \mathbb{N}$*

$$\sum_{i=0}^{n} x^i = \frac{x^{n+1} - 1}{x - 1}.$$

Demonstração. Vamos provar que para todo $x \neq 0$ e todo $n \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{i=0}^{n} x^i = \frac{x^{n+1} - 1}{x - 1}.$$

por indução em n.

Hipótese de Indução: Seja $n \in \mathbb{N}$ tal que

$$\sum_{i=0}^{n} x^i = \frac{x^{n+1} - 1}{x - 1}, \text{ para todo } 0 \leq k \leq n,$$

e todo $x \neq 0$.

Passo da Indução: Vamos provar que

$$\sum_{i=0}^{n+1} x^i = \frac{x^{(a+1)+1} - 1}{x - 1}, \text{ para todo } x \neq 0.$$

Seja $x \neq 0$.

Temos que

$$\sum_{i=0}^{n+1} x^i = \left(\sum_{i=0}^{n} x^i \right) + x^{n+1}.$$

Da Hipótese de Indução temos que

$$\sum_{i=0}^{n} x^i = \frac{x^{n+1} - 1}{x - 1},$$

e, portanto,

$$
\begin{aligned}
\sum_{i=0}^{n+1} x^i &= \left(\sum_{i=0}^{n} x^i\right) + x^{n+1} \\
&= \left(\frac{x^{n+1}-1}{x-1}\right) + x^{n+1} \\
&= \frac{x^{n+1} - 1 + x^{n+1}(x-1)}{x-1} \\
&= \frac{x^{n+1}(1 + x - 1) - 1}{x-1} \\
&= \frac{x^{n+1}(x) - 1}{x-1} \\
&= \frac{x^{(n+1)+1} - 1}{x-1}.
\end{aligned}
$$

Portanto,

$$\sum_{i=0}^{n+1} x^i = \frac{x^{(n+1)+1}-1}{x-1}.$$

Base da Indução: Vamos provar que

$$\sum_{i=0}^{0} x^i = \frac{x^{0+1}-1}{x-1}, \text{ para todo } x \neq 0.$$

Seja $x \neq 0$.

Então,

$$\sum_{i=0}^{0} x^i = x^0 = 1.$$

e também,

$$\frac{x^{0+1}-1}{x-1} = \frac{x-1}{x-1} = 1.$$

Portanto,

$$\sum_{i=0}^{0} x^i = \frac{x^{0+1}-1}{x-1}.$$

□

Teorema 25.

$$2^n < n!, \text{ para todo } n \geq 4.$$

Demonstração. Vamos provar que

$$2^n < n!, \text{ para todo } n \geq 4.$$

por indução em n.

Hipótese de Indução: Seja $n \geq 4$ tal que

$$2^k < k!, \text{ para todo } 0 \leq k \leq n.$$

Passo da Indução: Vamos provar que $2^{n+1} < (n+1)!$.

Temos que

$$2^{n+1} = 2 \times 2^n.$$

Da Hipótese de Indução temos que

$$2^n < n!,$$

e portanto,

$$2^{n+1} = 2 \times 2^n < 2 \times n!.$$

Por outro lado,

$$(n+1)! = (n+1) \times a!$$

e como $n \geq 4$ temos que

$$(n+1)! \geq (4+1) \times n! = 5 \times n!,$$

ou seja,

$$2^{n+1} < 2 \times n! < 5 \times n! < (n+1)!$$

Portanto,

$$2^{n+1} < (n+1)!.$$

Base da Indução: Vamos provar que

$$2^4 < 4!.$$

Por um lado,

$$2^4 = 16.$$

Por outro lado,

$$4! = 24,$$

Portanto,

$$2^4 < 4!.$$

$\square$

Definição 12. *A* sequência de Fibonacci *é a função* $F : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ *dada por*

$$F(n) = \begin{cases} n, & \textsf{se } n \leq 1, \\ F(n-2) + F(n-1), & \textsf{se } n > 1. \end{cases}$$

Teorema 26. *O n-ésimo número da sequência de Fibonacci é*

$$\frac{\sqrt{5}}{5}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right).$$

Demonstração. Vamos provar que o n-ésimo número da sequência de Fibonacci é

$$\frac{\sqrt{5}}{5}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right),$$

por indução em n, isto é, vamos provar que

$$F(n) = \frac{\sqrt{5}}{5}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right), \textsf{ para todo } n \in \mathbb{N},$$

por indução em n.

HI: Seja $n \in \mathbb{N}$ tal que

$$F(k) = \frac{\sqrt{5}}{5}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^k - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^k\right), \textsf{ para todo } k \in [0..n],$$

Passo: Vamos provar que

$$F(n+1) = \frac{\sqrt{5}}{5}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}\right).$$

Pela definição de F temos que para todo $n > 1$,

$$F(n+1) = F(n) + F(n-1).$$

Como $n \in [0..n]$, temos da HI que

$$F(n) = \frac{\sqrt{5}}{5}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right).$$

Como $n-1 \in [0..n]$, temos da HI que

$$F(n-1) = \frac{\sqrt{5}}{5}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}\right).$$

Então

$$\begin{aligned}
&F(n+1) = F(n) + F(n-1)\\
&= \frac{\sqrt{5}}{5}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n}\right) + \frac{\sqrt{5}}{5}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}\right)\\
&= \frac{\sqrt{5}}{5}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n} + \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}\right)\\
&= \frac{\sqrt{5}}{5}\left(\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n} + \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}\right) - \left(\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n} + \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}\right)\right)\\
&= \frac{\sqrt{5}}{5}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}\left(1+\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)\right) - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}\left(1+\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)\right)\right)\\
&= \frac{\sqrt{5}}{5}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{2} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{2}\right)\\
&= \frac{\sqrt{5}}{5}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}\right).
\end{aligned}$$

Base: Vamos provar que

$$F(n) = \frac{\sqrt{5}}{5}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n}\right), \text{ para todo } n \leq 1,$$

isto é, vamos provar que

$$\begin{aligned}
F(0) &= \frac{\sqrt{5}}{5}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{0} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{0}\right)\\
F(1) &= \frac{\sqrt{5}}{5}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{1}\right).
\end{aligned}$$

Por um lado,

$$\begin{aligned} F(0) &= 0, \\ F(1) &= 1. \end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\frac{\sqrt{5}}{5}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^0 - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^0\right) = \frac{\sqrt{5}}{5}(1-1) = \frac{\sqrt{5}}{5}(0) = 0,$$

e

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{5}}{5}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^1 - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^1\right) & \\ = \frac{\sqrt{5}}{5}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)\right) & \\ = \frac{\sqrt{5}}{5}\left(\frac{2\sqrt{5}}{2}\right) & \\ = \frac{5}{5} & \\ & = 1. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned} F(0) &= \frac{\sqrt{5}}{5}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^0 - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^0\right) \\ F(1) &= \frac{\sqrt{5}}{5}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^1 - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^1\right), \end{aligned}$$

ou seja,

$$F(n) = \frac{\sqrt{5}}{5}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right), \text{ para todo } n \leq 1,$$

$\square$