Aula 9

Recorrências

Seja $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tal que

$$f(n) = f(n-1) + 1, \text{ para todo } n > 0.$$

Queremos uma expressão não recursiva para f.

Para todo $n > 0$,

$$\begin{aligned} f(n) &= f(n-1) + 1 \\ &= (f((n-1)-1) + 1) + 1 = f(n-2) + 2 \\ &= (f((n-2)-1) + 1) + 2 = f(n-3) + 3 \\ &= \dots \\ &= f(n-u) + u, \end{aligned}$$

onde u é o menor inteiro tal que

$$n - u \leq 0,$$

ou seja,

$$u = \min \{k \in \mathbb{N} \mid n - k \leq 0\}.$$

Como

$$n - k \leq 0$$

se e somente se

$$k \geq n,$$

então

$$u = n.$$

Então,

$$f(n) = f(n-u) + u = f(n-n) + n = f(0) + n.$$

Sejam $f, h\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tais que

$$f(n) = f(h(n)) + 1, \text{ para todo } n > 0.$$

Dado $n > 0$,

$$\begin{aligned} f(n) &= f(h(n)) + 1 \\ &= (f(h(h(n))) + 1) + 1 = f(h^2(n)) + 2 \\ &= (f(h(h^2(n)) + 1) + 2 = f(h^3(n)) + 3 \\ &= \dots \\ &= f(h^u(n)) + u, \end{aligned}$$

onde

$$u = \min\left\{k \in \mathbb{N} \mid\ h^k(n) \leq 0\right\}.$$

Por exemplo,

$$f(n) = f\left(\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor\right) + 1, \text{ para todo } n > 0.$$

Neste caso,

$$h(n) = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor,$$

e

$$h^k(n) = \left\lfloor \frac{n}{2^k} \right\rfloor.$$

Então

$$f(n) = f(h^u(n)) + u = f\left(\left\lfloor \frac{n}{2^u} \right\rfloor\right) + u.$$

onde

$$u = \min\left\{k \in \mathbb{N} \mid\ \left\lfloor \frac{n}{2^k} \right\rfloor \leq 0\right\}.$$

Como

$$h^u(n) \leq 0,$$

se e somente se

$$\left\lfloor \frac{n}{2^u} \right\rfloor \leq 0,$$

ou seja,

$$\frac{n}{2^u} < 1,$$

ou seja,

$$2^u > n$$

ou seja,

$$u > \lg n,$$

então

$$u = \min\left\{k \in \mathbb{N} \mid \left\lfloor \frac{n}{2^k} \right\rfloor \leq 0\right\} = \min\{k \in \mathbb{N} \mid u > \lg k\} = \lfloor \lg n \rfloor + 1.$$

Então

$$\begin{aligned} f(n) = f\left(\left\lfloor \frac{n}{2^u} \right\rfloor\right) + u \\ = f\left(\left\lfloor \frac{n}{2^{\lfloor \lg n \rfloor + 1}} \right\rfloor\right) + \lfloor \lg n \rfloor + 1 \\ = f\left(\left\lfloor \frac{n}{2n} \right\rfloor\right) + \lfloor \lg n \rfloor + 1 \\ = f\left(\left\lfloor \frac{1}{2} \right\rfloor\right) + \lfloor \lg n \rfloor + 1 \\ = f(0) + \lfloor \lg n \rfloor + 1. \end{aligned}$$

Sejam $n_0 \in \mathbb{N}$ e $f, h \colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tais que

$$f(n) = f(h(n)) + 1, \text{ para todo } n > n_0.$$

Para todo $n > 0$,

$$\begin{aligned} f(n) = f(h(n)) + 1 \\ = (f(h(h(n))) + 1) + 1 = f(h^2(n)) + 2 \\ = (f(h(h^2(n)) + 1) + 2 = f(h^3(n)) + 3 \\ = \ldots \\ = f(h^u(n)) + u, \end{aligned}$$

onde

$$u = \min\left\{k \in \mathbb{N} \mid h^k(n) \leq n_0\right\}.$$

Por exemplo,

$$f(n) = f(n-2) + 1, \text{ para todo } n > 5.$$

Neste caso,

$$\begin{aligned} h(n) &= n - 2, \\ n_0 &= 5. \end{aligned}$$

Então
$$h^k(n) = n - 2k,$$
e portanto,
$$f(n) = f(h^u(n)) + u = f(n-2u) + u,$$
onde
$$u = \min\{k \in \mathbb{N} \mid n - 2k \leq 5\}.$$

Como
$$n - 2k \leq 5$$
se e somente se
$$2k \geq n - 5,$$
ou seja,
$$k \geq \frac{n-5}{2},$$
então
$$u = \min\{k \in \mathbb{N} \mid n - 2k \leq 5\} = \min\left\{k \in \mathbb{N} \mid k \geq \frac{n-5}{2}\right\} = \left\lceil \frac{n-5}{2} \right\rceil.$$

Então
$$f(n) = f(n-2u) + u = f\left(n - 2\left\lceil \frac{n-5}{2} \right\rceil\right) + \left\lceil \frac{n-5}{2} \right\rceil.$$

Se n é ímpar,
$$\left\lceil \frac{n-5}{2} \right\rceil = \frac{n-5}{2},$$
e
$$n - 2\left\lceil \frac{n-5}{2} \right\rceil = n - 2\frac{n-5}{2} = n - (n-5) = 5.$$

Se n é par,
$$\left\lceil \frac{n-5}{2} \right\rceil = \frac{(n-5)+1}{2} = \frac{n-4}{2}$$
e
$$n - 2\frac{n-4}{2} = n - (n-4) = 4.$$

Então
$$\left\lceil \frac{n-5}{2} \right\rceil = 4 + (n \mod 2),$$

e

$$f(n) = f(4 + (n \mod 2)) + \left\lceil \frac{n-5}{2} \right\rceil.$$

Sejam $n_0 \in \mathbb{N}$, $h\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ e $f, s\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ tais que para todo $n > n_0$,

$$f(n) = f(h(n)) + s(n), \text{ para todo } n > n_0.$$

Então,

$$\begin{aligned} f(n) &= f(h(n)) + s(n) \\ &= f(h(h(n)) + s(n) + s(h(n)) \\ &= f(h^2(n)) + s(n) + s(h(n)) \\ &= f(h(h^2(n))) + s(n) + s(h(n)) + s(h^2(n)) \\ &= f(h^3(n)) + s(n) + s(h(n)) + s(h^2(n)) \\ &= \dots \\ &= f(h^u(n)) + \sum_{i=0}^{u-1} s(h^i(n)), \end{aligned}$$

onde

$$u = \min \left\{ k \in \mathbb{N} \mid h^k(n) \leq n_0 \right\}.$$

Por exemplo, uma progressão aritmética é uma recorrência da forma

$$f(n) = f(n-1) + r, \text{ para todo } n > n_0.$$

Então,

$$\begin{aligned} h(n) &= n - 1, \\ s(n) &= r, \end{aligned}$$

e

$$h^k(n) = n - k,$$

e

$$u = \min \{ k \in \mathbb{N} \mid n - k \leq n_0 \} = n - n_0,$$

e

$$h^u(n) = h^{n-n_0}(n) = n - (n - n_0) = n_0$$

e

$$
\begin{aligned}
f(n) &= f(h^u(n)) + \sum_{i=0}^{u-1} s(h^i(n)) \\
&= f(n_0) + \sum_{i=0}^{(n-n_0)-1} r \\
&= f(n_0) + (n-n_0)r.
\end{aligned}
$$