Aula 5

Indução

Definição 11. *Se $A \subseteq \mathbb{N}$ é tal que*

1. $0 \in A$ *e,*
2. $[0..a] \subseteq A \Rightarrow a + 1 \in A,$ para todo $a \in A$*,*

então $A = \mathbb{N}$.

Formalmente,

$$((0 \in A) \text{ e } (([0..a] \subseteq A \Rightarrow a + 1 \in A), \text{ para todo } a \in A)) \Rightarrow (A = \mathbb{N})$$

Teorema 23. *A soma dos n primeiros números naturais é $\dfrac{n(n+1)}{2}$.*

Demonstração. Vamos provar que a soma dos n primeiros números naturais é $\dfrac{n(n+1)}{2}$,

isto é,

vamos provar que

$$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}, \text{ para todo } n \in \mathbb{N}, \tag{5.1}$$

ou seja,

vamos provar que

$$P(n), \text{ para todo } n \in \mathbb{N},$$

onde

$$P(n) : \sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}. \tag{5.2}$$

Vamos provar que

$$P(n),\ \textsf{para todo}\ n \in \mathbb{N},$$

provando que

$$A = \mathbb{N},$$

onde

$$A = \{n \in \mathbb{N} \mid P(n)\}.$$

Vamos provar que $A = \mathbb{N}$ provando que

1. $0 \in A$;
2. $[0..a] \subseteq A \Rightarrow a + 1 \in A,\ \textsf{para todo}\ a \in A.$

1. Vamos provar que $0 \in A$,

   ou seja,

   vamos provar que a proposição $P(0)$ é verdadeira,

   isto é,

   vamos provar que

   $$\sum_{i=1}^{0} i = \frac{0(0+1)}{2}.$$

   Por um lado, temos que

   $$\sum_{i=1}^{0} i = 0.$$

   Por outro lado,

   $$\frac{0(0+1)}{2} = \frac{0}{2} = 0.$$

   E, portanto, é verdade que

   $$\sum_{i=1}^{0} i = \frac{0(0+1)}{2}.$$

   Portanto, a proposição $P(0)$ é verdadeira.

   Portanto, $0 \in A$.

2. Vamos provar que

$$[0..a] \subseteq A \Rightarrow a+1 \in A, \text{ para todo } a \in A.$$

Seja $a \in \mathbb{N}$ tal que $[0..a] \subseteq A$.

Vamos provar que $a+1 \in A$,

isto é,

vamos provar que a proposição $P(a+1)$ é verdadeira

ou seja,

vamos provar que

$$\sum_{i=1}^{a+1} i = \frac{(a+1)((a+1)+1)}{2}.$$

Por um lado, temos

$$\sum_{i=1}^{a+1} i = \left(\sum_{i=1}^{a} i\right) + (a+1).$$

Como $[0..a] \subseteq A$, então $a \in A$,

ou seja,

a proposição $P(a)$ é verdadeira, isto é,

$$\sum_{i=1}^{a} i = \frac{a(a+1)}{2}.$$

Como

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{a+1} i &= \left(\sum_{i=1}^{a} i\right) + (a+1) \\
&= \left(\frac{a(a+1)}{2}\right) + (a+1) \\
&= \frac{a(a+1)+2(a+1)}{2} \\
&= \frac{(a+2)(a+1)}{2} \\
&= \frac{(a+1)\left((a+1)+1\right)}{2},
\end{aligned}$$

ou seja,

$$\sum_{i=1}^{a+1} i = \frac{(a+1)\,((a+1)+1)}{2}.$$

Portanto a proposição $P(a+1)$ é verdadeira.

Portanto $a+1 \in A$.

Portanto,

$$[0..a] \subseteq A \Rightarrow a+1 \in A, \text{ para todo } a \in A.$$

Então $A = \mathbb{N}$, isto é,

$$\{n \in \mathbb{N} \mid P(n) = V\} = \mathbb{N},$$

e portanto a proposição

$$P(n), \text{ para todo } n \in \mathbb{N},$$

é verdadeira, ou seja

$$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}, \text{ para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Portanto, a soma dos n primeiros números naturais é $\dfrac{n(n+1)}{2}$. $\square$

Esquematicamente temos um predicado $P(n)$ e queremos uma prova da proposição

$$P(n), \text{ para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Demonstração. Vamos provar que

$$P(n), \text{ para todo } n \in \mathbb{N}.$$

provando que

$$A = \mathbb{N},$$

onde

$$A = \{n \in \mathbb{N} \mid P(n) = V\}.$$

Vamos provar que $A = \mathbb{N}$ provando que,

1. $0 \in A$

2. $[0..a] \subseteq A \Rightarrow a+1 \in A, \text{ para todo } a \in A.$

1. Vamos provar que $0 \in A$.

   ...

   Portanto, $0 \in A$.

2. Vamos provar que

   $$[0..a] \subseteq A \Rightarrow a+1 \in A, \text{ para todo } a \in A.$$

   Seja $a \in \mathbb{N}$ tal que $[0..a] \subseteq A$.

   Vamos provar que $a+1 \in A$.

   ...

   Como $[0..a] \subseteq A$, então,

   ...

   Portanto, $a+1 \in A$.

Portanto,

$$A = \mathbb{N}.$$

Portanto,

$$P(n), \text{ para todo } n \in \mathbb{N}.$$

□

O conjunto A é desnecessário.

Demonstração. Vamos provar que

$$P(n), \text{ para todo } n \in \mathbb{N}.$$

provando que

1. A proposição $P(0)$ é verdadeira e,
2. $(P(k), \text{ para todo } k \in [0..a] \Rightarrow P(a+1)), \text{ para todo } a \in A.$

1. Vamos provar que a proposição $P(0)$ é verdadeira.

   ...

   Portanto a proposição $P(0)$ é verdadeira.

2. Vamos provar que

$$P(k),\ \textsf{para todo}\ k \in [0..a] \Rightarrow P(a+1),\ \textsf{para todo}\ a \in A.$$

Seja $a \in \mathbb{N}$ tal que $P(k),\ \textsf{para todo}\ k \in [0..a]$.

Vamos provar que a proposição $P(a+1)$ é verdadeira.

...

Como a proposição $P(k)$ é verdadeira para todo $k \in [0..a]$, então,

...

Portanto, a proposição $P(a+1)$ é verdadeira.

Portanto,

$$P(k),\ \textsf{para todo}\ k \in [0..a] \Rightarrow P(a+1),\ \textsf{para todo}\ a \in A.$$

Portanto,

$$P(n),\ \textsf{para todo}\ n \in \mathbb{N}.$$

□

O esquema usual é o seguinte.

Demonstração. Vamos provar que

$$P(n),\ \textsf{para todo}\ n \in \mathbb{N},$$

por indução em n.

1. Vamos provar que $P(0)$.

   ...

   Portanto, $P(0)$.

2. Seja $a \in \mathbb{N}$ tal que $P(k),\ \textsf{para todo}\ 0 \le k \le a$.

   Vamos provar que $P(a+1)$.

   ...

   Como $P(k),\ \textsf{para todo}\ 0 \le k \le a$ então ...

   ...

   Portanto, $P(a+1)$.

Portanto,

$$P(n), \text{ para todo } n \in \mathbb{N}.$$

$\square$

Nosso esquema será o seguinte.

Demonstração. Vamos provar que

$$P(n), \text{ para todo } n \in \mathbb{N},$$

por indução em n.

Hipótese de Indução: $P(k)$, para todo $0 \leq k \leq a$.

Passo da Indução: Vamos provar que $P(a+1)$.

...

Da hipótese de indução temos que ...

...

Portanto $P(a+1)$.

Base da Indução: Vamos provar que $P(0)$.

...

Portanto $P(0)$.

Portanto,

$$P(n), \text{ para todo } n \in \mathbb{N}.$$

$\square$

Lição de Casa:

Exercícios 16, 17 e 18 por indução em $|X|$.

Exercícios 20, 21.

Exercícios 22, 23, 24, 25, 26, 27.