Aula 11

Recorrências Lineares Homogêneas

Definição 14. *Uma recorrência linear homogênea é uma equação da forma*

$$f(n) = a_1 f(n-1) + a_2 f(n-2) + \ldots + a_k f(n-k), \text{ para todo } n \geq k$$

onde $n \in \mathbb{N}$ *e* $a_1, a_2, \ldots, a_k \in \mathbb{C}$.

Notação 7. *Se* A *e* B *são conjuntos,* B^A *denota o conjunto das funções* $A \to B$*, ou seja,*

$$B^A = \{f \colon A \to B\}$$

Definição 15. *Dadas* $f, g \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ *definimos a função* $f + g \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ *como a função dada por*

$$(f + g)(n) = f(n) + g(n).$$

Teorema 35. $(\mathbb{C}^{\mathbb{N}}, +)$ *é um grupo comutativo.*

Demonstração. Exercicio 46. □

Definição 16. *Dados* $z \in \mathbb{C}$ *e* $f \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ *definimos a função* $zf \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ *como a função dada por*

$$(zf)(n) = zf(n).$$

Teorema 36. $(\mathbb{C}^{\mathbb{N}}, +)$ *é um espaço vetorial sobre* $\mathbb{C}$.

Demonstração. Exercicio 46. □

Exemplo 6. *Sejam $f, g\colon \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ e $z \in \mathbb{C}$ tais que*

$$\begin{aligned} f(n) &= f(n-1) + f(n-2), \\ g(n) &= g(n-1) + g(n-2), \end{aligned}$$

para todo $n \geq 1$.

Então, para todo $n \geq 1$,

$$\begin{aligned} (f+g)(n) &= f(n) + g(n) \\ &= (f(n-1) + f(n-2)) + (g(n-1) + g(n-2)) \\ &= (f(n-1) + g(n-1)) + (f(n-2) + g(n-2)) \\ &= (f+g)(n-1) + (f+g)(n-2) \end{aligned}$$

e

$$(zf)(n) = z(f(n)) = z(f(n-1) + f(n-2)) = (zf)(n-1) + (zf)(n-2).$$

Noutras palavras, se f e g satisfazem a recorrência de Fibonacci, então $f+g$ e zf também satisfazem a mesma recorrência.

Teorema 37. *Sejam $a_1, \ldots, a_k \in \mathbb{C}$. Se as funções $g, h\colon \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ satisfazem a recorrência*

$$f(n) = a_1 f(n-1) + a_2 f(n-2) + \ldots + a_k f(n-k), \text{ para todo } n \geq k,$$

então a função $g + h$ também satisfaz a mesma recorrência para todo $n \geq k$.

Demonstração. Exercício 47 □

Teorema 38. *Sejam $a_1, \ldots, a_k \in \mathbb{C}$. Se a função $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ satisfaz a recorrência*

$$f(n) = a_1 f(n-1) + a_2 f(n-2) + \ldots + a_k f(n-k), \text{ para todo } n \geq k,$$

então para todo $z \in \mathbb{C}$, a função zf também satisfaz a mesma recorrência para todo $n \geq k$.

Demonstração. Exercício 47 □

Corolário 39. *Dados $a_1, \ldots, a_k \in \mathbb{C}$, o conjunto das funções $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ que satisfazem a recorrência*

$$f(n) = a_1 f(n-1) + a_2 f(n-2) + \ldots + a_k f(n-k),$$

é um subespaço vetorial de $(\mathbb{C}^{\mathbb{N}}, +)$.

Demonstração. Exercício 47 $\square$

Exemplo 7. *O conjunto $\mathcal{R} \subseteq \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ das funções que satisfazem a recorrência de Fibonacci é um subespaço vetorial de $(\mathbb{C}^{\mathbb{N}}, +)$.*

Queremos encontrar uma base de $\mathcal{R}$.

Seja $r \in \mathbb{C}$ e seja$f : \mathbb{N} \to \mathcal{R}$ dada por

$$f(n) = r^n.$$

Se f é uma função da base de $\mathcal{R}$, então f satisfaz a recorrência de Fibonacci, isto é,

$$f(n) = f(n-1) + f(n-2), \text{ para todo } n \geq 1,$$

ou seja

$$r^n = r^{n-1} + r^{n-2}, \text{ para todo } n \geq 1,$$

e portanto,

$$r^n - r^{n-1} - r^{n-2} = 0, \text{ para todo } n \geq 1,$$

e portanto,

$$r^{n-2}(r^2 - r - 1) = 0, \text{ para todo } n \geq 1,$$

e consequentemente,

$$r^{n-2} = 0, \text{ para todo } n \geq 1,$$

ou

$$r^2 - r - 1 = 0,$$

ou seja,

$$r = 0,$$

ou

$$r \in \left\{ \frac{1-\sqrt{5}}{2}, \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right\}.$$

Então existem 2 funções não nulas do tipo

$$f(n) = r^n,$$

que satisfazem a recorrência de Fibonacci, a saber

$$\begin{aligned} f_1(n) &= r_1^n = \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n, \\ f_2(n) &= r_2^n == \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n. \end{aligned}$$

Como f_1 *e* f_2 *são linearmente independentes em* $(\mathbb{C}^{\mathbb{N}}, +)$ *(Exercício 48) e* $\mathcal{R}$ *é um subespaço vetorial de dimensão 2 de* $(\mathbb{C}^{\mathbb{N}}, +)$*, concluímos que o conjunto* $\{f_1, f_2\}$ *forma uma base de* $\mathcal{R}$*.*

Consequentemente, toda função $F \in \mathcal{R}$ *pode ser escrita como combinação linear das funções* f_1 *e* f_2*.*

Noutras palavras, se F *satisfaz a recorrência de Fibonacci, então existem* $c_1, c_2 \in \mathbb{C}$ *tais que*

$$F = c_1 f_1 + c_2 f_2,$$

ou seja,

$$F(n) = c_1 f_1(n) + c_2 f_2(n), \text{ para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Em particular,

$$\begin{aligned} F(0) &= c_1 f_1(0) + c_2 f_2(0) \\ F(1) &= c_1 f_1(1) + c_2 f_2(1), \end{aligned}$$

isto é,

$$\begin{aligned} F(0) &= c_1 r_1^0 + c_2 r_2^0 \\ F(1) &= c_1 r_1^1 + c_2 r_2^1, \end{aligned}$$

ou seja,

$$\begin{aligned} F(0) &= c_1 + c_2 \\ F(1) &= c_1 r_1 + c_2 r_2. \end{aligned}$$

No caso da sequência de Fibonacci temos

$$\begin{aligned} F(0) &= 0 \\ F(1) &= 1, \end{aligned}$$

e portanto,

$$\begin{aligned} 0 &= c_1 + c_2 \\ 1 &= c_1 r_1 + c_2 r_2, \end{aligned}$$

e, portanto,

$$c_1 = -c_2,$$

e, conseqüentemente,

$$1 = -c_2 r_1 + c_2 r_2 = c_2(r_2 - r_1),$$

e, portanto,

$$c_2 = \frac{1}{r_2 - r_1},$$

e, conseqüentemente,

$$c_1 = -c_2 = \frac{1}{r_1 - r_2}.$$

Portanto, para todo $n \in \mathbb{N}$,

$$F(n) = c_1 f_1(n) + c_2 f_2(n) = \frac{1}{r_1 - r_2} r_1^n + \frac{1}{r_2 - r_1} r_2^n.$$

Como

$$r_2 > r_1,$$

fica melhor

$$F(n) = \frac{1}{r_2 - r_1} \left(r_2^n - r_1^n \right),$$

isto é,

$$F(n) = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right) = \frac{\sqrt{5}}{5} \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right)$$