Aula 13

Recorrências Lineares não Homogêneas

Definição 19. *Uma recorrência linear não homogênea é uma equação da forma*

$$f(n) = a_1 f(n-1) + a_2 f(n-2) + \ldots + a_k f(n-k) + g(n), \text{ para todo } n \geq k$$

onde $g\colon \mathbb{N} \to \mathbb{C}$.

Teorema 42. *Sejam* $f, g\colon \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ *tais que*

$$f(n) = a_1 f(n-1) + a_2 f(n-2) + \ldots + a_k f(n-k) + g(n), \text{ para todo } n \geq k,$$

Se g *satisfaz uma recorrência linear homogênea cujo polinômio característico é* G, *então* f *satisfaz uma recorrência linear homogênea cujo polinômio característico é*

$$G(X^k - a_1 X^{k-1} - \ldots - a_{k-2} X^2 - a_{k-1} X - a_k).$$

Teorema 43. *Se existem* $k \in \mathbb{N}$ *e* $c, r \in \mathbb{C}$ *tais que*

$$f(n) = c n^k r^n,$$

então f *satisfaz uma recorrência linear homogênea cujo polinômio característico é*

$$(X - r)^{k+1}.$$

Exemplo 11. *Seja* $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ *satisfazendo*

$$f(n) = f(n-1) + f(n-2) + 1, \text{ para todo } n \geq 2.$$

De acordo com a notação do Teorema 42 temos

$$\begin{aligned} a_1 &= 1 \\ a_2 &= 1 \\ g(n) &= 1, \text{ para todo } n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Como

$$g(n) = 1 = 1n^0 1^n,$$

então g satisfaz uma recorrência linear homogênea cujo polinômio característico é

$$G = (X-1)^{0+1}.$$

Pelo Teorema 42 temos que f pertence ao subespaço vetorial cujo polinômio característico é o produto

$$G(X^2 - X - 1) = (X-1)(X^2 - X - 1),$$

e, portanto, pelo Corolário 41, sabemos que

$$f(n) = \sum_{i=1}^{l} \sum_{j=0}^{m_i - 1} c_{i,j} n^j r_i^n, \text{ para todo } n \in \mathbb{N},$$

onde $r_i, i \in [1..l]$ são as distintas raízes de $(X-1)(X^2 - X - 1)$ com multiplicidades $m_i, i \in [1..l]$, respectivamente.

Fazendo

$$r_1 = 1,$$

e denotando por r_2 e r_3 as raízes de $X^2 - X - 1$, temos

$$\begin{aligned} l &= 3 \\ m_i &= 1, \text{ para todo } i \in [1..3] \end{aligned}$$

e portanto temos

$$f(n) = \sum_{i=1}^{3} \sum_{j=0}^{1-1} c_{i,j} n^j r_i^n, \text{ para todo } n \in \mathbb{N},$$

isto é,

$$f(n) = \sum_{i=1}^{3} c_{i,0} r_i^n, \text{ para todo } n \in \mathbb{N},$$

ou seja,

$$f(n) = c_{1,0}r_1^n + c_{2,0}r_2^n + c_{3,0}r_3^n, \text{ para todo } n \in \mathbb{N},$$

onde $\{c_{1,0}, c_{2,0}, c_{3,0}\}$ *é a solução do sistema*

$$f(a) = c_{1,0}r_1^a + c_{2,0}r_2^a + c_{3,0}r_3^a, 0 \leq a < 3,$$

isto é,

$$\begin{array}{rcl} f(0) & = & c_{1,0}r_1^0 + c_{2,0}r_2^0 + c_{3,0}r_3^0 \\ f(1) & = & c_{1,0}r_1^1 + c_{2,0}r_2^1 + c_{3,0}r_3^1 \\ f(2) & = & c_{1,0}r_1^2 + c_{2,0}r_2^2 + c_{3,0}r_3^2 \end{array}$$

ou seja,

$$\begin{array}{rcl} f(0) & = & c_{1,0} + c_{2,0} + c_{3,0} \\ f(1) & = & c_{1,0}r_1 + c_{2,0}r_2 + c_{3,0}r_3 \\ f(2) & = & c_{1,0}r_1^2 + c_{2,0}r_2^2 + c_{3,0}r_3^2. \end{array}$$

Como

$$f(2) = f(1) + f(0) + g(2) = f(1) + f(0) + 1,$$

fica

$$\begin{array}{rcl} f(0) & = & c_{1,0} + c_{2,0} + c_{3,0} \\ f(1) & = & c_{1,0}r_1 + c_{2,0}r_2 + c_{3,0}r_3 \\ f(0) + f(1) + 1 & = & c_{1,0}r_1^2 + c_{2,0}r_2^2 + c_{3,0}r_3^2. \end{array}$$

Como $r_1 = 1$, *podemos simplificar para*

$$\begin{array}{rcl} f(0) & = & c_{1,0} + c_{2,0} + c_{3,0} \\ f(1) & = & c_{1,0} + c_{2,0}r_2 + c_{3,0}r_3 \\ f(0) + f(1) + 1 & = & c_{1,0} + c_{2,0}r_2^2 + c_{3,0}r_3^2. \end{array}$$

No caso em que

$$\begin{array}{rcl} f(0) & = & 0, \\ f(1) & = & 1, \end{array}$$

fica

$$\begin{array}{rcl} 0 & = & c_{1,0} + c_{2,0} + c_{3,0} \\ 1 & = & c_{1,0} + c_{2,0}r_2 + c_{3,0}r_3 \\ 2 & = & c_{1,0} + c_{2,0}r_2^2 + c_{3,0}r_3^2, \end{array}$$

e, portanto

$$\begin{aligned} c_{1,0} &= -1, \\ c_{2,0} &= \frac{5-3\sqrt{5}}{10}, \\ c_{3,0} &= \frac{5+3\sqrt{5}}{10}, \end{aligned}$$

e

$$f(n) = \frac{5-3\sqrt{5}}{10}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n + \frac{5+3\sqrt{5}}{10}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - 1.$$

Corolário 44. *Se $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ satisfaz uma recorrência linear cujo polinômio característico é P, então*

$$s(n) = \sum_{i=0}^{n} f(i)$$

satisfaz uma recorrência linear cujo polinômio característico é $(X-1)P$.

Demonstração. Seja $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ tal que f satisfaz uma recorrência linear cujo polinômio característico é P e seja $s\colon \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ dada por

$$s(n) = \sum_{i=0}^{n} f(i).$$

A função s satisfaz a recorrência

$$s(n) = s(n-1) + f(n),$$

e daí, pelo Teorema 42 temos que s satisfaz uma recorrência linear homogênea cujo polinômio característico é $(X-1)P$. □

Exemplo 12.

$$\sum_{i=0}^{n} n^2.$$

Usando a notação do Corolário 44 temos

$$s(n) = \sum_{i=0}^{n} n^2,$$

com

$$f(n) = n^2.$$

Como
$$f(n) = n^2 1^n$$
podemos concluir que a função f satisfaz uma recorrência linear homogênea cujo polinômio característico é $(X-1)^3$.

Pelo Corolário 44, a função
$$s(n) = \sum_{i=0}^{n} n^2,$$
satisfaz uma recorrência linear homogênea cujo polinômio característico é
$$(X-1)^3(X-1) = (X-1)^4.$$

Pelo Teorema 41, temos
$$s(n) = c_{1,0}1^n + c_{1,1}n^1 1^n + c_{1,2}n^2 1^n + c_{1,3}n^3 1^n = c_{1,0} + c_{1,1}n + c_{1,2}n^2 + c_{1,3}n^3,$$
onde
$$\begin{aligned} s(0) &= c_{1,0} \\ s(1) &= c_{1,0} + c_{1,1} + c_{1,2} + c_{1,3} \\ s(2) &= c_{1,0} + 2c_{1,1} + 4c_{1,2} + 8c_{1,3} \\ s(3) &= c_{1,0} + 3c_{1,1} + 9c_{1,2} + 27c_{1,3}. \end{aligned}$$

Da definição de s temos
$$\begin{aligned} s(0) &= \sum_{i=0}^{0} i^2 = 0 \\ s(1) &= \sum_{i=0}^{1} i^2 = 1 \\ s(2) &= \sum_{i=0}^{2} i^2 = 5 \\ s(3) &= \sum_{i=0}^{3} i^2 = 14, \end{aligned}$$
então temos
$$\begin{aligned} 0 &= c_{1,0} \\ 1 &= c_{1,0} + c_{1,1} + c_{1,2} + c_{1,3} \\ 5 &= c_{1,0} + 2c_{1,1} + 4c_{1,2} + 8c_{1,3} \\ 14 &= c_{1,0} + 3c_{1,1} + 9c_{1,2} + 27c_{1,3}, \end{aligned}$$

e, portanto,

$$\begin{aligned}
1 &= c_{1,1} + c_{1,2} + c_{1,3} \\
5 &= 2c_{1,1} + 4c_{1,2} + 8c_{1,3} \\
14 &= 3c_{1,1} + 9c_{1,2} + 27c_{1,3},
\end{aligned}$$

cuja solução é

$$\begin{aligned}
c_{1,1} &= \frac{1}{6} \\
c_{1,2} &= \frac{1}{2} \\
c_{1,3} &= \frac{1}{3},
\end{aligned}$$

e, portanto,

$$s(n) = \sum_{i=0}^{n} i^2 = \frac{n}{6} + \frac{n^2}{2} + \frac{n^3}{3} = \frac{2n^3 + 3n^2 + n}{6} = \frac{n(2n^2 + 3n + 1)}{6}.$$

Exercícios 51, 52, 53, 54, 55, 56, 57, 58.