Aula 17

Análise Assintótica: Motivação

E(x,n)

$r \leftarrow 1$
Enquanto $n > 0$
    $n \leftarrow n - 1$
    $r \leftarrow r \times x$
Devolva r

Fazendo

t_1: tempo de processamento para executar a linha 1

t_2: tempo de processamento para executar a linha 2

t_3: tempo de processamento para executar a linha 3

t_4: tempo de processamento para executar a linha 4

t_5: tempo de processamento para executar a linha 5

$T_1(n)$: tempo de processamento para executar $\mathsf{E}_1(x, n)$,

temos

$$T(n) = t_1 + t_2 + (t_2 + t_3 + t_4)n + t_5$$
$$= (t_1 + t_2 + t_5) + (t_2 + t_3 + t_4)n$$
$$= c_1 + c_2 n,$$

onde

$$\begin{aligned} c_1 &= t_1 + t_2 + t_5, \\ c_2 &= t_2 + t_3 + t_4. \end{aligned}$$

Observe que c_1 e c_2 são valores de tempo que dependem somente do dispositivo computacional que executa o algoritmo.

Esboçar o gráfico de $T(n)$.

Vamos fazer a mesma conta para

```
E'(x,n)
  r ← 1
  Enquanto n > 0
     Se n é ímpar
        r ← r × x
     n ← ⌊n/2⌋
     x ← x × x
  Devolva r
```

t'_1: tempo de processamento para executar a linha 1

t'_2: tempo de processamento para executar a linha 2

t'_3: tempo de processamento para executar a linha 3

t'_4: tempo de processamento para executar a linha 4

t'_5: tempo de processamento para executar a linha 5

t'_6: tempo de processamento para executar a linha 6

$T'(n)$: tempo de processamento para executar $\mathsf{E}'(x,n)$,

Então

$$\begin{aligned} T'(n) &= t'_1 + t'_2 + (t'_3 + t'_4 + t'_5)(\lfloor \lg n \rfloor + 1) + t'_6 \\ &= (t'_1 + t'_2 + t'_6 + t'_3 + t'_4 + t'_5) + (t'_3 + t'_4 + t'_5) \lfloor \lg n \rfloor \\ &= c'_1 + c'_2 \lfloor \lg n \rfloor , \end{aligned}$$

onde

$$\begin{aligned} c'_1 &= t'_1 + t'_2 + t'_6 + t'_3 + t'_4 + t'_5, \\ c'_2 &= t'_3 + t'_4 + t'_5. \end{aligned}$$

Esboçar o gráfico de $T'(n)$.

Quando é que

$$T'(n) \le T(n)?$$

Quando,

$$c_1' + c_2' \lfloor \lg n \rfloor \leq c_1 + c_2 n,$$

ou seja, quando

$$\lfloor \lg n \rfloor \leq \frac{c_1 - c_1'}{c_2'} + \frac{c_2}{c_2'} n$$

Ao trocar o dispositivo computacional, a única mudança acontece nos valores de c_1, c_2, c_1' e c_2'. Não importa o que aconteça, todos eles são positivos.

Esboçar os gráficos de $\lfloor \lg n \rfloor$ e $\frac{c_1 - c_1'}{c_2'} + \frac{c_2}{c_2'} n$

Então

$$T'(n) \leq T(n),$$

para quase todo $n \in \mathbb{N}$.

Mais precisamente, existe um $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$T'(n) \leq T(n), \text{ para todo } n \geq n_0,$$

ou, equivalentemente,

$T'(n) \leq T(n)$, exceto por um número finito de exceções, ou

$T'(n) \leq T(n)$, para "quase todo valor de n".

Quantificações como acima são chamadas de *assintóticas.*

Análise assintótica é a análise do comportamento assintótico de funções.

Notação assintótica é a notação utilizada na análise assintótica.

A notação assintótica é bastante apropriada para a análise de algoritmos.