Aula 2

Elementos de Lógica

Uma *proposição* é uma afirmação. Toda proposição é verdadeira ou é falsa. Por exemplo,

- "$2 \leq 3$" é uma proposição verdadeira.
- "$10 > 20$" é uma proposição falsa.
- "$x^2 \leq x$" não é uma proposição, porque não é verdadeira nem falsa, uma vez que "não sabemos" o valor de x.

Duas proposições A e B são *equivalentes* se tem ambas o mesmo valor. Por exemplo, são equivalentes as proposições

- "$2 \leq 3$" e "$10 \leq 20$".
- "$2 > 3$" e "$10 > 20$".

O fato de que duas proposições A e B são equivalentes será denotado por $A \equiv B$.

Denotamos por $\mathbf{V}$ e $\mathbf{F}$, respectivamente, os valores de verdadeiro e falso.

Expressamos o fato de que a proposição A é verdadeira dizendo que "A é verdade" ou, mais abreviadamente, "A". Por exemplo, são equivalentes

- a proposição "$2 \leq 3$" é verdadeira,
- "$2 \leq 3$" é verdade,
- "$2 \leq 3$" $\equiv \mathbf{V}$, e

- "$2 \leq 3$".

Expressamos o fato de que a proposição A é falsa dizendo que "A é falso", "A não é verdade" ou, mais abreviadamente "não A". Por exemplo, são equivalentes as afirmações

- a proposição "$10 > 20$" é falsa,
- "$10 > 20$" é falso,
- "$10 > 20$" não é verdade,
- "$10 > 20$" $\equiv$ **F**, e
- não "$10 > 20$".

2.1 Conectivos

2.1.1 Negação, Conjunção e Disjunção

Definição 1. *Se A e B são proposições então*

não A *é uma proposição, chamada a* negação *de A.*

A proposição não A *é verdadeira quando a proposição A é falsa.*

A **e** B *é uma proposição, chamada a* conjunção *de A e B,*

A proposição A e *B é verdadeira quando A e B são ambas proposições verdadeiras.*

A **ou** B *é uma proposição, chamada a* disjunção *de A e B.*

A proposição A ou *B é verdadeira quando ao menos uma dentre as proposições A e B é verdadeira.*

Teorema 1. *Dadas duas proposições A e B, as seguintes proposições são verdadeiras.*

1. não (não A)
2. A ou (não A),
3. não (A e (não A)),

4. A *ou* $F \equiv A$,

5. A e $V \equiv A$,

6. A *ou* V,

7. *não* $(A$ e $F)$,

Demonstração. Exercicio 1 □

Teorema 2. *Se A, B e C são proposições, então são equivalentes*

1. A e $(B$ *ou* $C) \equiv (A$ e $B)$ *ou* $(A$ e $C)$,

2. A *ou* $(B$ e $C) \equiv (A$ *ou* $B)$ e $(A$ *ou* $C)$,

3. *não* $(A$ *ou* $B) \equiv ($ *não* $A)$ e $($ *não* $B)$,

4. *não* $(A$ e $B) \equiv ($ *não* $A)$ *ou* $($ *não* $B)$,

Demonstração. Exercicio 2 □

2.1.2 Implicação

Definição 2. *Se A e B são proposições então $A \Rightarrow B$ é uma proposição chamada* implicação *de A para B.*

Lê-se "se A então B" ou "A implica B" ou "B é consequência de A".

A proposição A é chamada de antecedente *da implicação e a proposição B é chamada de* conseqüente *da implicação.*

A proposição $A \Rightarrow B$ é verdadeira quando A e B são ambas proposições verdadeiras ou quando A for uma proposição falsa, isto é,

$$A \Rightarrow B \equiv (A \text{ e } B) \text{ ou } (\text{ não } A).$$

Por exemplo, são proposições verdadeiras

- $(1 < 2)$ e $(2 < 3) \Rightarrow (1 < 3)$,
- $(1 < 2) \Rightarrow (10 < 30)$,
- $1 > 2 \Rightarrow 2 < 3$,
- $1 > 2 \Rightarrow 2 > 3$.

Teorema 3. *Se A é uma proposição, então $F \Rightarrow A$.*

Demonstração. Exercicio 3. □

2.2 Dupla Implicação

Definição 3. *Se A e B são proposições então $A \Leftrightarrow B$ é uma proposição chamada* dupla implicação *entre A e B.*

Lê-se "A se e somente se *B".*

A proposição $A \Leftrightarrow B$ é verdadeira se as implicações $(A \Rightarrow B)$ e $(B \Rightarrow A)$ forem ambas verdadeiras.

$$A \Leftrightarrow B \equiv (A \Rightarrow B) \text{ e } (B \Rightarrow A).$$

2.3 Predicados

Um *predicado* é uma "proposição parametrizada". Por exemplo,

$P(x)$**:** $x \leq x^2$.

Neste exemplo, $P(x)$ é um predicado. O nome "predicado" vem da analogia com a gramática usual, onde x "faz o papel de sujeito" da afirmação. x recebe o nome de *variável livre* do predicado.

Predicados podem ter várias variáveis livres, como por exemplo

$Q(x, y)$**:** $x \leq y^2$.

Predicados não são verdadeiros nem falsos e por isso não são proposições.

Quando as variáveis livres de um predicado são "especificadas" ou "instanciadas", o resultado é uma proposição que, como tal, é verdadeira ou falsa. No exemplo acima,

- $P(2)$ é uma proposição verdadeira: "$2 \leq 2^2$".
- $P(1/2)$ é uma proposição falsa: "$1/2 \leq (1/2)^2$".
- $Q(1, 1)$ é uma proposição verdadeira: "$1 \leq 1^2$".
- $R(t) = Q(1, t)$ é um predicado com uma variável livre: "$1 \leq t^2$".

2.4 Quantificadores

Definição 4. *Se $P(x)$ é um predicado e X é um conjunto, então*

- $P(x)$, **para todo** $x \in X$, *e*
- $P(x)$, **para algum** $x \in X$,

são proposições.

"$P(x)$, **para todo** *$x \in X$" é uma proposição verdadeira se a proposição $P(x)$ for verdadeira para todo elemento $x \in X$.*

"$P(x)$, **para algum** *$x \in X$" é uma proposição verdadeira se a proposição $P(x)$ for verdadeira para algum elemento $x \in X$.*

Exemplo 1. *Se $P(x)$ é o predicado "$x \leq x^2$", então*

- *a proposição $P(x)$,* **para todo** *$x \in \mathbb{R}$ é falsa.*
- *a proposição $P(x)$,* **para algum** *$x \in \mathbb{R}$ é verdadeira.*
- *a proposição $P(x)$,* **para todo** *$x \geq 1$ é verdadeira.*
- *a proposição $P(x)$,* **para algum** *$x < 1$ é falsa.*

Teorema 4.

$$\begin{aligned} \textit{não}\ (P(x),\ \textit{para todo}\ x \in X) &\equiv (\ \textit{não}\ P(x)),\ \textit{para algum}\ x \in X, \\ \textit{não}\ (P(x),\ \textit{para algum}\ x \in X) &\equiv (\ \textit{não}\ P(x)),\ \textit{para todo}\ x \in X. \end{aligned}$$

Demonstração. Exercicio 4 □

Observe que se $X = \emptyset$, então $P(x)$, para algum $x \in X$ é uma proposição falsa, qualquer que seja o predicado $P(x)$.

Consequentemente, se $X = \emptyset$, então não $(P(x)$, para algum $x \in X)$ é uma proposição verdadeira ou equivalentemente, $P(x)$, para todo $x \in X$ é uma proposição verdadeira.