# Aula 4

# Conjuntos e Inteiros

## 4.1 Conjuntos

$A$, $B$: conjuntos

**Notação 1.** *$\emptyset$ denota o conjunto vazio.*

*$a \in A$ denota o predicado*

$$\text{“}a \text{ é elemento de } A\text{”}$$

*ou*

$$\text{“}a \text{ pertence a } A\text{”}.$$

*$a \notin A$ denota*

$$\text{não } (a \in A).$$

*$A \subseteq B$ denota $a \in B$, para todo $a \in A$.*

*$A \not\subseteq B$ denota não $(A \subseteq B)$.*

*$A = B$ denota $(A \subseteq B)$ e $(B \subseteq A)$.*

*$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ ou } x \in B\}$.*

*$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ e } x \in B\}$.*

*$|A|$ denota o número de elementos do conjunto $A$.*

*$2^A$ denota o conjunto de todos os subconjuntos de $A$, isto é*

$$2^A = \{S \mid S \subseteq A\}.$$

Exercício 8.

**Teorema 11.** *A união de conjuntos é uma operação associativa.*

*Demonstração.* Exercício 9 $\square$

**Comentário 2.** *Se a operação é associativa, não é necessário usar parênteses, pois*

$$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C = A \cup B \cup C.$$

**Notação 2.** *Se $n > 0$ é um inteiro e $A_1$, $A_2$, …, $A_n$ são conjuntos, denotamos*

$$\bigcup_{i=1}^{n} A_i = A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n$$

*Se $n = 0$,*

$$\bigcup_{i=1}^{n} A_i = \emptyset.$$

**Teorema 12.** *A interseção de conjuntos é uma operação associativa.*

*Demonstração.* Exercício 10 $\square$

**Notação 3.** *Se $n > 0$ é um inteiro e $A_1$, $A_2$, …, $A_n$ são conjuntos, denotamos*

$$\bigcap_{j=1}^{n} A_j = A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n$$

*Se $n = 0$,*

$$\bigcap_{j=1}^{n} A_j = \emptyset.$$

**Definição 6.** *A* diferença *entre os conjuntos $A$ e $B$, denotada por $A - B$, é o conjunto formado pelos elementos de $A$ que não são elementos de $B$, ou seja,*

$$A - B = \{a \mid a \in A \textsf{ e } a \notin B\},$$

Exercício 11.

**Definição 7.** *Se $n > 0$ é um inteiro e $A_1$, $A_2$, …, $A_n$ são conjuntos, o* produto cartesiano *de $A_1$, $A_2$, …, $A_n$ é o conjunto das $n$-uplas ordenadas de elementos de $A_1$, $A_2$, …, $A_n$ respectivamente, ou seja,*

$$\{(a_1, a_2, \ldots, a_n) \mid a_j \in A_j, \textit{ para todo } 1 \leq j \leq n\}.$$

*Denota-se*

$$A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n$$

*ou*

$$\prod_{j=1}^{n} A_j = A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n.$$

## 4.2 Inteiros

No que segue:

$$\begin{array}{rcl} A & : & \text{conjunto} \\ z_1, z_2, z_3 & \in & \mathbb{Z} \\ q & \in & \mathbb{Q} \\ x & \in & \mathbb{R} \end{array}$$

**Definição 8.** *O* intervalo *de $z_1$ a $z_2$ é o conjunto dos inteiros entre $z_1$ e $z_2$, ou seja*

$$[z_1..z_2] = \{z \in \mathbb{Z} \mid z_1 \leq z \leq z_2\}.$$

**Definição 9.** *Dado $A \subseteq \mathbb{R}$,*

- *o* mínimo *de $A$ é um elemento $m$ de $A$ satisfazendo*

$$m \leq a, \text{ para todo } a \in A.$$

- *o* máximo *de $A$ de $A$ é um elemento $m$ de $A$ satisfazendo*

$$m \geq a, \text{ para todo } a \in A.$$

*O mínimo e o máximo de $A$ são denotados $\min A$ e $\max A$, respectivamente.*

**Comentário 3.** *Conjuntos podem não ter mínimo ou máximo, como por exemplo,*

$$A = \{x \in \mathbb{Q} \mid 0 < x < 1\}.$$

**Definição 10.** *Dado $x \in \mathbb{R}$,*

- *o* chão *de $x$ é o maior inteiro menor ou igual a $x$, ou seja,*

$$\lfloor x \rfloor = \max \{z \in \mathbb{Z} \mid z \leq x\}.$$

- *o* teto *de $x$ é o menor inteiro maior ou igual a $x$, ou seja,*

$$\lceil x \rceil = \min\{z \in \mathbb{Z} \mid z \geq x\}.$$

**Exemplo 3.**

$$\begin{aligned}
\lfloor 2 \rfloor &= 2; \\
\lceil 2 \rceil &= 2; \\
\lfloor z \rfloor &= z, \text{ para todo } z \in \mathbb{Z}; \\
\lceil z \rceil &= z, \text{ para todo } z \in \mathbb{Z}; \\
\left\lfloor \frac{35}{23} \right\rfloor &= 1; \\
\left\lceil \frac{35}{23} \right\rceil &= 2; \\
\left\lfloor \frac{-35}{23} \right\rfloor &= -2 \\
\left\lceil \frac{-35}{23} \right\rceil &= -1.
\end{aligned}$$

**Teorema 13.** *Para todo $x \in \mathbb{R}$, $\lfloor x \rfloor$ é o único inteiro que satisfaz*

$$x - 1 < \lfloor x \rfloor \leq x.$$

*Demonstração.* É imediato que existe um único inteiro $z$ no conjunto

$$\{y \in \mathbb{R} \mid x - 1 < y \leq x\}.$$

Conseqüentemente, todo inteiro maior que $z$ será também maior que $x$. Noutras palavras, $z$ é o maior inteiro menor ou igual a $x$ e, portanto, $z = \lfloor x \rfloor$. □

**Teorema 14.** *Para todo $x \in \mathbb{R}$, $\lceil x \rceil$ é o único inteiro que satisfaz*

$$x \leq \lceil x \rceil < x + 1.$$

*Demonstração.* Exercício 12 □

**Corolário 15.** *Para todo $x \in \mathbb{R}$ e todo $z \in \mathbb{Z}$ temos*

$$\lfloor x \rfloor + z = \lfloor x + z \rfloor.$$

*Demonstração.* Sejam $x \in \mathbb{R}$ e $z \in \mathbb{Z}$. Do Teorema 13 temos que

$$x - 1 < \lfloor x \rfloor \leq x,$$

e, portanto, para todo $z \in \mathbb{Z}$,

$$(x - 1) + z < \lfloor x \rfloor + z \leq x + z,$$

e, portanto,

$$(x + z) - 1 < \lfloor x \rfloor + z \leq x + z.$$

Como $\lfloor x \rfloor + z$ é inteiro, temos do Teorema 13 que

$$\lfloor x \rfloor + z = \lfloor x + z \rfloor.$$

□

**Teorema 16.** *Para todo* $x \in \mathbb{R}$ *temos*

$$-\lceil x \rceil = \lfloor -x \rfloor.$$

*Demonstração.* Seja $x \in \mathbb{R}$. Do Teorema 14 temos que

$$x \leq \lceil x \rceil < x + 1,$$

e, portanto,

$$-x \geq -\lceil x \rceil > -(x + 1),$$

ou seja,

$$(-x) - 1 < -\lceil x \rceil \leq -x,$$

e daí, do Teorema 13 temos que

$$-\lceil x \rceil = \lfloor -x \rfloor$$

□

**Corolário 17.** *Para todo* $x \in \mathbb{R}$ *e todo* $z \in \mathbb{Z}$ *temos*

$$z - \lfloor x \rfloor = \lceil z - x \rceil$$

*Demonstração.* Sejam $x \in \mathbb{R}$ e $z \in \mathbb{Z}$. Temos que

$$z - \lfloor x \rfloor = -(\lfloor x \rfloor - z).$$

Pelo Teorema 15 temos que

$$\lfloor x \rfloor - z = \lfloor x - z \rfloor$$

e, portanto,
$$z - \lfloor x \rfloor = - \lfloor x - z \rfloor ,$$
e daí, pelo Teorema 16
$$- \lfloor x - z \rfloor = \lceil -(x - z) \rceil = \lceil z - x \rceil .$$
$\square$

**Teorema 18.** *Se $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função crescente e contínua satisfazendo*
$$f(x) \in \mathbb{Z} \Rightarrow x \in \mathbb{Z}, \text{ para todo } x \in \mathbb{R},$$
*então*
$$\begin{aligned} \lfloor f(\lfloor x \rfloor) \rfloor &= \lfloor f(x) \rfloor , \\ \lceil f(\lceil x \rceil) \rceil &= \lceil f(x) \rceil , \end{aligned}$$
*para todo $x \in \mathbb{R}$.*

*Demonstração.* Seja $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função contínua e crescente satisfazendo
$$f(x) \in \mathbb{Z} \Rightarrow x \in \mathbb{Z}, \text{ para todo } x \in \mathbb{R},$$
e seja $x \in \mathbb{R}$. Vamos provar que
$$\begin{aligned} \lfloor f(\lfloor x \rfloor) \rfloor &= \lfloor f(x) \rfloor , \\ \lceil f(\lceil x \rceil) \rceil &= \lceil f(x) \rceil . \end{aligned}$$

Se $x$ é inteiro, então
$$\lfloor x \rfloor = x = \lceil x \rceil ,$$
e portanto,
$$\begin{aligned} f(\lfloor x \rfloor) &= f(x), \\ f(\lceil x \rceil) &= f(x). \end{aligned}$$
e
$$\begin{aligned} \lfloor f(\lfloor x \rfloor) \rfloor &= \lfloor f(x) \rfloor , \\ \lceil f(\lceil x \rceil) \rceil &= \lceil f(x) \rceil . \end{aligned}$$

Se $x$ não é inteiro, então
$$\lfloor x \rfloor < x < \lceil x \rceil ,$$

e como $f$ é crescente, então

$$f(\lfloor x \rfloor) < f(x) < f(\lceil x \rceil).$$

Além disso, não pode haver nenhum inteiro $z$ tal que

$$f(\lfloor x \rfloor) < z < f(\lceil x \rceil),$$

pois como $f$ é contínua, teríamos $z = f(a)$ para algum $a$ tal que

$$\lfloor x \rfloor < a < \lceil x \rceil \,,$$

e como $f(a)$ é inteiro, então $a$ seria inteiro, o que não é possível.

Como $x$ não é inteiro, então $f(x)$ não pode ser inteiro e então

$$\lfloor f(x) \rfloor < f(x) < \lceil f(x) \rceil \,,$$

Como $\lfloor f(x) \rfloor$ e $\lceil f(x) \rceil$ são inteiros, então

$$\lfloor f(x) \rfloor \leq f(\lfloor x \rfloor) < f(x) < f(\lceil x \rceil) \leq \lceil f(x) \rceil$$

e portanto,

$$\lfloor f(\lfloor x \rfloor) \rfloor \leq \lfloor f(x) \rfloor \leq f(\lfloor x \rfloor) < f(x) < f(\lceil x \rceil) \leq \lceil f(x) \rceil \leq \lceil f(\lceil x \rceil) \rceil \,.$$

Se $f(\lfloor x \rfloor)$ é inteiro, então

$$f(\lfloor x \rfloor) = \lfloor f(\lfloor x \rfloor)) \rfloor$$

e consequentemente,

$$\lfloor f(\lfloor x \rfloor) \rfloor = \lfloor f(x) \rfloor$$

Por um argumento análogo, podemos concluir que se Se $f(\lceil x \rceil)$ é inteiro, então

$$\lceil f(\lceil x \rceil) \rceil = \lceil f(x) \rceil \,.$$

Se $f(\lfloor x \rfloor)$ não é inteiro, então $\lfloor f(\lfloor x \rfloor) \rfloor$ é o maior inteiro menor que $f(\lfloor x \rfloor)$, e neste caso temos

$$\lfloor f(\lfloor x \rfloor) \rfloor = \lfloor f(x) \rfloor \,.$$

Por um argumento análogo, podemos concluir que se Se $f(\lceil x \rceil)$ é inteiro, então

$$\lceil f(\lceil x \rceil) \rceil = \lceil f(x) \rceil \,.$$

$\square$

**Corolário 19.** *Para todo $x \in \mathbb{R}$ e todo inteiro positivo $k$*

$$\begin{aligned} \left\lfloor \frac{\lfloor x \rfloor}{k} \right\rfloor &= \left\lfloor \frac{x}{k} \right\rfloor, \\ \left\lceil \frac{\lceil x \rceil}{k} \right\rceil &= \left\lceil \frac{x}{k} \right\rceil. \end{aligned}$$

*Demonstração.* Seja $k$ um inteiro positivo e seja $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a função dada por

$$f(x) = \frac{x}{k}.$$

Basta provar (Exercício 35) que $f$ é uma função crescente e contínua satisfazendo

$$f(x) \in \mathbb{Z} \Rightarrow x \in \mathbb{Z}, \text{ para todo } x \in \mathbb{R},$$

e daí, pelo Teorema 18 temos

$$\begin{aligned} \lfloor f(\lfloor x \rfloor) \rfloor &= \lfloor f(x) \rfloor, \\ \lceil f(\lceil x \rceil) \rceil &= \lceil f(x) \rceil. \end{aligned}$$

ou seja

$$\begin{aligned} \frac{\lfloor x \rfloor}{k} &= \left\lfloor \frac{x}{k} \right\rfloor, \\ \frac{\lceil x \rceil}{k} &= \left\lceil \frac{x}{k} \right\rceil. \end{aligned}$$

□

**Notação 4.** $\lg x$ *denota* $\log_2 x$.

Exercícios 13 e 14.

## 4.3 Somatórios e Produtórios

$f\colon A \to \mathbb{C}$

$X$**:** subconjunto de $A$.

$a, b$**:** inteiros.

**Notação 5.**

$$\sum_{x \in X} f(x)$$

*denota a soma de $f(x)$ para todo $x \in X$.*

*Se $X = \emptyset$, então*

$$\sum_{x \in X} f(x) = 0.$$

$$\sum_{i=a}^{b} f(i)$$

*denota*

$$\sum_{x \in [a..b]} f(x).$$

**Teorema 20.** *Dados um conjunto $X$ e $c \in \mathbb{C}$,*

$$\sum_{x \in X} c = c|X|.$$

*Demonstração.* Exercicio 15 □

**Teorema 21.** *Dados $f, g \colon A \to \mathbb{C}$ e $X \subseteq A$,*

$$\sum_{x \in X} (f(x) + g(x)) = \sum_{x \in X} f(x) + \sum_{x \in X} g(x).$$

*Demonstração.* Exercicio 16 □

**Teorema 22.** *Dada $f \colon A \to \mathbb{C}$, $X \subseteq A$ e $c \in \mathbb{C}$,*

$$\sum_{x \in X} cf(x) = c \sum_{x \in X} f(x).$$

*Demonstração.* Exercicio 17 □

**Notação 6.**

$$\prod_{x \in X} f(x)$$

*denota o produto de $f(x)$ para todo $x \in X$.*

*Se $X = \emptyset$, então*

$$\prod_{x \in X} f(x) = 1.$$

$$\prod_{i=a}^{b} f(i)$$

*denota*

$$\prod_{x \in [a..b]} f(x),$$

Exercício 18.