Aula 10

Mais Recorrências

Teorema 32. *Sejam* $n_0 \in \mathbb{N}$, $h\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ *e* $f, s\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ *tais que*

$$f(n) = f(h(n)) + s(n), \text{ para todo } n > n_0.$$

Então

$$f(n) = f(h^u(n)) + \sum_{i=0}^{u-1} s(h^i(n)), \text{ para todo } n \in \mathbb{N}.$$

onde

$$u = \min \left\{ k \in \mathbb{N} \mid h^k(n) \leq n_0 \right\}.$$

Demonstração. Exercicio 42 □

$$f(n) = m(n)f(h(n)), \text{ para todo } n > n_0.$$

Então,

$$\begin{aligned} f(n) &= m(n)f(h(n)) \\ &= m(n)m(h(n))f(h(h(n)) \\ &= m(n)m(h(n))f(h^2(n)) \\ &= m(n)m(h(n))m(h^2(n))f(h(h^2(n))) \\ &= m(n)m(h(n))m(h^2(n))f(h(h^2(n)))f(h^3(n)) \\ &= \ldots = f(h^u(n)) \prod_{i=0}^{u-1} m(h^i(n)), \end{aligned}$$

onde

$$u = \min \left\{ k \in \mathbb{N} \mid h^k(n) \leq n_0 \right\}.$$

Exemplo 5. *Uma progressão geométrica é uma recorrência da forma*

$$f(n) = rf(n-1), \text{ para todo } n > n_0.$$

Então

$$\begin{aligned} h(n) &= n-1, \\ m(n) &= r, \end{aligned}$$

e

$$h^k(n) = n - k,$$

e

$$u = \min\{k \in \mathbb{N} \mid n - k \leq n_0\} = n - n_0,$$

e

$$h^u(n) = h^{n-n_0}(n) = n - (n - n_0) = n_0$$

e

$$\begin{aligned} f(n) = f(h^u(n)) \prod_{i=0}^{u-1} m(h^i(n)) & \\ &= f(n_0) \prod_{i=0}^{(n-n_0)-1} r \\ &= f(n_0) \prod_{i=0}^{(n-n_0)-1} r \\ &= f(n_0) r^{n-n_0}. \end{aligned}$$

Teorema 33. *Sejam $n_0 \in \mathbb{N}$, $h \colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ e $f, m \colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ tais que*

$$f(n) = m(n)f(h(n)), \text{ para todo } n > n_0.$$

Então

$$f(n) = f(h^u(n)) \prod_{i=0}^{u-1} m(h^i(n)) \text{ para todo } n \in \mathbb{N},$$

onde

$$u = \min\left\{k \in \mathbb{N} \mid h^k(n) \leq n_0\right\}.$$

Demonstração. Exercicio 43. □

$$f(n) = m(n)f(h(n)) + s(n), \text{ para todo } n > n_0.$$

Então,

$$\begin{aligned}
f(n) &= m(n)f(h(n)) + s(n) \\
&= m(n)(m(h(n))f(h^2(n) + s(h(n)))) + s(n) \\
&= m(n)m(h(n))f(h^2(n) + m(n)s(h(n)) + s(n) \\
&= m(n)m(h(n))(m(h^2(n))f(h^3(n)) + s(h^3(n)))) + m(n)s(h(n)) + s(n) \\
&= m(n)m(h(n))m(h^2(n))f(h^3(n)) + m(n)m(h(n))s(h^3(n)) + m(n)s(h(n)) + s(n) \\
&= \dots \\
&= f(h^u(n))\prod_{i=0}^{u-1} m(h^i(n)) + \sum_{i=0}^{u-1} s(h^i(n))\prod_{j=0}^{i-1} m(h^j(n)),
\end{aligned}$$

onde

$$u = \min\left\{k \in \mathbb{N} \mid h^k(n) \leq n_0\right\}.$$

Teorema 34. *Sejam $n_0 \in \mathbb{N}$, $h\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ e $f, m, s\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ tais que*

$$f(n) = m(n)f(h(n)) + s(n), \text{ para todo } n > n_0.$$

Então

$$f(n) = f(h^u(n))\prod_{i=0}^{u-1} m(h^i(n)) + \sum_{i=0}^{u-1} s(h^i(n))\prod_{j=0}^{i-1} m(h^j(n)), \text{ para todo } n \in \mathbb{N},$$

onde

$$u = \min\left\{k \in \mathbb{N} \mid h^k(n) \leq n_0\right\}.$$

Demonstração. Exercicio 44 $\square$