Aula 8

Funções Iteradas

Definição 13. *Seja* $f\colon A \to A$. *Para todo* $n \in \mathbb{N}$ *definimos* $f^n\colon A \to A$ *como a função dada por*

$$f^n(a) = \begin{cases} a, & \text{se } n = 0, \\ f\left(f^{n-1}(a)\right), & \text{se } n > 0. \end{cases}$$

Exemplo 4. $f, s, m\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$f(x) = x + 1$*:* $f^n(x) = x + n$

$f(x) = x + 2$*:* $f^n(x) = x + 2n$

$f(x) = x + 3$*:* $f^n(x) = x + 3n$

$f(x) = x + s$*:* $f^n(x) = x + ns$

$f(x) = 2x$*;* $f^n(x) = 2^n x$

$f(x) = 3x$*;* $f^n(x) = 3^n x$

$f(x) = s + mx$*;*

$$f^n(x) = m^n x + s\sum_{i=0}^{n-1} m^i,$$

e, se $m \neq 1$*,*

$$\sum_{i=0}^{n-1} m^i = s\frac{m^n - 1}{m - 1},$$

e, portanto,

$$f^n(x) = m^n x + s\frac{m^n - 1}{m - 1}.$$

$f(x) = \left\lfloor \frac{x}{2} \right\rfloor$*;*

Corolário 31. *Seja $k \in bN$. Se $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{N}$ é dada por*

$$f(x) = \left\lfloor \frac{x}{k} \right\rfloor.$$

então

$$f^n(x) = \left\lfloor \frac{x}{k^n} \right\rfloor, \text{ para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Demonstração. Exercício 41 □

Exercícios 13, 36, 37, 38, 39, 40