Matemática Discreta

Exercícios

9 de agosto de 2010

1. Prove que, se A e B são proposições, então as seguintes proposições são verdadeiras.
   (a) A $\textsf{ou}$ ($\textsf{não}$ A),
   (b) $\textsf{não}$ (A $\textsf{e}$ ($\textsf{não}$ A)),
   (c) A $\textsf{ou}$ V,
   (d) $\textsf{não}$ (A $\textsf{e}$ F),
2. Prove que, se A, B e C são proposições, então os seguintes pares de proposições são equivalentes.
   (a) $A \textsf{ ou } F \equiv A$,
   (b) $A \textsf{ e } V \equiv A$,
   (c) $A \textsf{ e } (B \textsf{ ou } C) \equiv (A \textsf{ e } B) \textsf{ ou } (A \textsf{ e } C)$,
   (d) $A \textsf{ ou } (B \textsf{ e } C) \equiv (A \textsf{ ou } B) \textsf{ e } (A \textsf{ ou } C)$,
   (e) $\textsf{não } (A \textsf{ ou } B) \equiv (\textsf{ não } A) \textsf{ e } (\textsf{ não } B)$,
   (f) $\textsf{não } (A \textsf{ e } B) \equiv (\textsf{ não } A) \textsf{ ou } (\textsf{ não } B)$,
3. Prove que se A, B e C são proposições, então
   (a) $F \Rightarrow A$.
   (b) $(A \Rightarrow B) \equiv ((\textsf{ não } B) \Rightarrow (\textsf{ não } A))$.
   (c) $(A \Rightarrow F) \equiv \textsf{ não } A$.
   (d) $((A \Rightarrow B) \textsf{ ou } (A \Rightarrow C)) \equiv (A \Rightarrow (B \textsf{ ou } C))$.
   (e) $((A \Rightarrow B) \textsf{ e } (A \Rightarrow C)) \equiv (A \Rightarrow (B \textsf{ e } C))$.
   (f) $((B \Rightarrow A) \textsf{ ou } (C \Rightarrow A)) \equiv ((B \textsf{ e } C) \Rightarrow A)$.

(g) $((B \Rightarrow A)$ e $(C \Rightarrow A)) \equiv ((B$ ou $C) \Rightarrow A)$.

4. Seja $P(x)$ um predicado e X um conjunto. Prove que são equivalentes

   (a) (não $(P(x)$, para todo $x \in X))$ e ((não $P(x))$, para algum $x \in X)$.

   (b) (não $(A(x)$, para algum $x \in X))$ e ((não $A(x))$, para todo $x \in X)$.

5. Justifique cada passagem da prova do Teorema 8 discutida em aula, apontando o respectivo item dos Teoremas 1 e 2 utilizados.

6. Justifique cada passagem da prova do Corolário 9 discutida em aula, apontando os respectivos itens dos Teoremas 1 e 2 utilizados.

7. Sejam $D(x, y, d)$ e $M(x, y)$ os seguintes predicados, respectivamente.

$$\begin{aligned} D(x, y, d) &= |x - y| \leq d, \\ M(x, y) &= x \geq y. \end{aligned}$$

   (a) Expresse o predicado $L_1(f, a, l)$ dado por

$$\lim_{x \to a} f(x) = l.$$

   usando o predicado $D(x, y, d)$.

   (b) Expresse o predicado $L_2(f, l)$ dado por

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = l.$$

   usando os predicados $M(x, y)$ e $D(x, y, d)$.

   (c) Expresse o predicado $L_3(f, a)$ dado por

$$\lim_{x \to a} f(x) = \infty.$$

   usando os predicados $M(x, y)$ e $D(x, y, d)$.

   (d) Expresse o predicado $L_4(f)$ dado por

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty.$$

   usando o predicado $M(x, y)$.

8. Prove que o conjunto vazio é subconjunto de qualquer conjunto.

9. Prove que a união de conjuntos é uma operação associativa.

10. Prove que a interseção de conjuntos é uma operação associativa.

11. A diferença entre conjuntos é uma operação associativa? Justifique.

12. Prove que $\lceil x \rceil$ é o único inteiro que satisfaz

$$x \leq \lceil x \rceil < x + 1,$$

para todo $x \in \mathbb{R}$.

13. Prove que , para todo $x \in \mathbb{R}$,

    (a) $x - \lfloor x \rfloor \leq 1$.
    (b) $\lceil x \rceil - x \leq 1$.
    (c) $\lceil x \rceil - \lfloor x \rfloor \in \{0, 1\}$.
    (d) $\lfloor x \rfloor = \lceil x \rceil$ se e somente se $x \in \mathbb{Z}$

14. Prove que, para todo inteiro $n > 0$,

    (a) $\frac{n}{2} < 2^{\lfloor \lg n \rfloor} \leq n \leq 2^{\lceil \lg n \rceil} < 2n$.
    (b) $\lfloor \lg n \rfloor > \lfloor \lg(n-1) \rfloor$ se e somente se n é potência de 2.
    (c) $\lceil \lg n \rceil < \lceil \lg(n+1) \rceil$ se e somente se n é potência de 2.
    (d) $0 < \frac{n}{2^{\lceil \lg n \rceil}} \leq 1 \leq \frac{n}{2^{\lfloor \lg n \rfloor}} < 2$

15. Prove que se X é um conjunto finito e $c \in \mathbb{C}$, então

$$\sum_{x \in X} c = c|X|.$$

16. Prove que se $f, g \colon A \to \mathbb{C}$ e $X \subseteq A$, então

$$\sum_{x \in X} (f(x) + g(x)) = \sum_{x \in X} f(x) + \sum_{x \in X} g(x).$$

17. Prove que se $f \colon A \to \mathbb{C}$ e $X \subseteq A$, e $c \in \mathbb{C}$, então

$$\sum_{x \in X} c f(x) = c \sum_{x \in X} f(x).$$

18. Dados $f, g \colon A \to \mathbb{C}$ e $X \subseteq A$ e $c \in \mathbb{C}$, é verdade que

    (a)

$$\prod_{x \in X} c = c|X|?$$

(b)

$$\prod_{x \in X} (f(x) + g(x)) = \prod_{x \in X} f(x) + \prod_{x \in X} g(x)?$$

(c)

$$\sum_{x \in X} f(x)g(x) = \left(\sum_{x \in X} f(x)\right)\left(\sum_{x \in X} g(x)\right)?$$

Justifique.

19. Prove que qualquer valor maior ou igual a 4 reais pode ser obtido com cédulas de 2 e 5 reais.

20. Prove que $n^2 - 1$ é divisível por 8 para todo $n \in \mathbb{N}$ ímpar.

21. Prove que se $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ satisfaz

$$f(n) = f(n-1) + 1, \text{ para todo } n > 0,$$

então

$$f(n) = f(0) + n, \text{ para todo } n \geq 0.$$

22. Seja $a \in \mathbb{C}$. Prove que se $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ satisfaz

$$f(n) = f(n-1) + a, \text{ para todo } n > 0,$$

então

$$f(n) = f(0) + na, \text{ para todo } n \geq 0.$$

23. Seja $s\colon \mathbb{N} \to \mathbb{C}$. Prove que se $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ satisfaz

$$f(n) = f(n-1) + s(n), \text{ para todo } n > 0,$$

então

$$f(n) = f(0) + \sum_{i=1}^{n} s(i), \text{ para todo } n \geq 0.$$

24. Seja $a \in \mathbb{C}$. Prove que se $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ satisfaz

$$f(n) = af(n-1), \text{ para todo } n > 0,$$

então

$$f(n) = a^n f(0), \text{ para todo } n \geq 0.$$

25. Seja $m\colon \mathbb{N} \to \mathbb{C}$. Prove que se $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ satisfaz

$$f(n) = m(n)f(n-1), \text{ para todo } n > 0,$$

então

$$f(n) = f(0)\prod_{i=1}^{n} m(i), \text{ para todo } n \geq 0.$$

26. Sejam $m, s\colon \mathbb{N} \to \mathbb{C}$. Prove que se $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ satisfaz

$$f(n) = m(n)f(n-1) + s(n), \text{ para todo } n > 0,$$

então[1]

$$f(n) = f(0)\prod_{i=1}^{n} m(i) + \sum_{j=1}^{n}\left(s(j)\prod_{i=j+1}^{n} m(i)\right), \text{ para todo } n \geq 0.$$

27. Seja $k \in bN$. Prove que se $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{N}$ é dada por

$$f(x) = \left\lfloor \frac{x}{k} \right\rfloor.$$

então

$$f^n(x) = \left\lfloor \frac{x}{k^n} \right\rfloor, \text{ para todo } n \in \mathbb{N}.$$

28. Seja $b\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ a função dada por

$$b(n) = \begin{cases} 0, & \text{se } n = 0, \\ b\left(\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor\right) + (n \mod 2) & \text{se } n > 0. \end{cases}$$

   (a) Prove que o número de dígitos 1 na representação binária de n é $b(n)$, para todo $n \geq 0$.

   (b) Prove que[2]

$$b(n) \leq \lfloor \lg n \rfloor + 1, \text{ para todo } n > 0.$$

[1] Note que os enunciados dos exercicios 21, 22, 23, 24, 25, são todos casos particulares do enunciado deste exercício.

[2] Sugestão: use o Exercício 27

29. Considere o Algoritmo $\mathsf{Exp}(x, n)$ dado por

Exp(x,n)

Se $n = 0$
    Devolva 1
$e \leftarrow \mathsf{Exp}(x, \lfloor n/2 \rfloor)$
$e \leftarrow e \times e$
Se n *é par*
    Devolva e
Devolva $x \times e$

(a) Execute $\mathsf{Exp}(2, n)$ para $n \in \{0, 1, 2, 5, 11, 15, 16, 20\}$ e, para cada execução, mostre o resultado do algoritmo e o número de multiplicações efetuadas.

(b) Prove que $\mathsf{Exp}(x, n) = x^n$ para todo $x \neq 0$ e todo $n \in \mathbb{N}$.

(c) Prove que a execução de $\mathsf{Exp}(x, n)$ efetua $\lfloor \lg(n) \rfloor + b(n) + 1$ multiplicações para todo $x \neq 0$ e todo $n \in \mathbb{N}$, onde b é a função definida no Exercício 28.

(d) Prove que a execução de $\mathsf{Exp}(x, n)$ efetua no máximo $2(\lfloor \lg(n) \rfloor + 1)$ multiplicações para todo $x \neq 0$ e todo $n \in \mathbb{N}$.

30. Considere o Algoritmo $\mathsf{Mínimo}(v, a, b)$ dado por

---

Mínimo(v,a,b)

Se $a = b$
    Devolva a
$m \leftarrow \left\lfloor \frac{a+b}{2} \right\rfloor$
$m_1 \leftarrow \mathsf{Mínimo}(v, a, m)$
$m_2 \leftarrow \mathsf{Mínimo}(v, m + 1, b)$
Se $v[m_1] \leq v[m_2]$
    Devolva m_1
Devolva m_2

Prove que se $a \leq b$, a execução de $\mathsf{Mínimo}(v, a, b)$ faz $b - a$ comparações.

31. Prove que o seguinte algoritmo devolve $\prod_{i=1}^{n} i$ para todo $n \in \mathbb{N}$

Fatorial(n)

Se $n = 0$
    Devolva 1
Devolva $n \times$ *Fatorial*$(n - 1)$

---

32. Prove que o seguinte algoritmo devolve $3^n - 2^n$ para todo n

A(n)
Se $n \leq 1$
Devolva n
Devolva $5 \times A(n-1) - 6 \times A(n-2)$

33. Considere o seguinte algoritmo

Multiplica(x,n)
Se $n = 0$
Devolva 0
Se n *é par*
Devolva *Multiplica*$(x + x, \frac{n}{2})$
Devolva *Multiplica*$(x + x, \frac{n-1}{2}) + x$

(a) Prove que Multiplica(x, n) devolve o valor de nx para todo $x \in \mathbb{C}$ e todo $n \in \mathbb{N}$.

(b) Enuncie e prove um teorema estabelecendo um limite superior em função de n para o número de somas efetuadas por Multiplica(x, n).

34. Use o fato de que se A e B são conjuntos finitos e disjuntos entre si então

$$|A \cup B| = |A| + |B|,$$

para provar que se $A_1, \ldots, A_n$ são conjuntos finitos dois a dois disjuntos entre si, então,

$$\left| \bigcup_{i=1}^{n} A_i \right| = \sum_{i=1}^{n} |A_i|$$

35. Seja k um inteiro positivo e seja $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a função dada por

$$f(x) = \frac{x}{k}.$$

Prove que

(a) f uma função contínua.

(b) f uma função crescente.

(c) $f(x) \in \mathbb{Z} \Rightarrow x \in \mathbb{Z}$, para todo $x \in \mathbb{R}$.

36. Seja $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ dada por

$$f(n) = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor.$$

(a) Calcule $f^k(n)$ para $k \in [0..5]$ e $n \in [0..16]$.

(b) Prove que

$$f^k(n) = \left\lfloor \frac{n}{2^k} \right\rfloor, \text{ para todo } k, n \in \mathbb{N}.$$

(c) Prove que

$$f^{\lfloor \lg n \rfloor}(n) = 1, \text{ para todo } n > 0.$$

(d) Prove que $f^k(n) = 0$ se e somente se $k > \lfloor \lg n \rfloor$.

37. Seja $f\colon A \to A$. Para todo $n \in \mathbb{N}$ definimos $f^{(n)}\colon A \to A$ como a função dada por

$$f^{(n)}(a) = \begin{cases} a, & \text{se } n = 0, \\ f^{n-1}\left(f(a)\right), & \text{se } n > 0. \end{cases}$$

Prove que $f^{(n)} = f^n$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

38. Seja $f\colon A \to A$ uma função bijetora. Prove que

(a) f^n é uma função bijetora para todo $n \in \mathbb{N}$.

(b) $(f^n)^{-1} = (f^{-1})^n$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

39. Sejam $c \in \mathbb{N}$ e $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tais que

$$f(n) < n, \text{ para todo } n \geq c.$$

Prove que, para todo $n \geq c$

$$f^k(n) < c, \text{ para algum } k \in \mathbb{N}.$$

40. Prove que se $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ satisfaz

$$f(n) = f(n-2) + 1,$$

para todo $n > 5$, então

$$f(n) = f(4 + n \mod 2) + \left\lceil \frac{n-5}{2} \right\rceil,$$

para todo $n \geq 5$.

41. Prove que se $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ satisfaz

$$f(n) = f\left(\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor\right) + 1, \text{ para todo } n > 0,$$

então

$$f(n) = f(0) + \lfloor \lg n \rfloor + 1, \text{ para todo } n > 0.$$

42. Sejam $n_0 \in \mathbb{N}$, $h\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ e $f, s\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ tais que para todo $n > n_0$,

$$f(n) = f(h(n)) + s(n).$$

Prove que para todo $n \in \mathbb{N}$,

$$f(n) = f(h^u(n)) + \sum_{i=0}^{u-1} s(h^i(n)),$$

onde

$$u = \min\left\{k \in \mathbb{N} \mid h^k(n) \leq n_0\right\}.$$

43. Sejam $n_0 \in \mathbb{N}$, $h\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ e $f, m\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ tais que para todo $n > n_0$,

$$f(n) = m(n) f(h(n)).$$

Prove que para todo $n \in \mathbb{N}$,

$$f(n) = f(h^u(n)) \prod_{i=0}^{u-1} m(h^i(n)),$$

onde

$$u = \min\left\{k \in \mathbb{N} \mid h^k(n) \leq n_0\right\}.$$

44. Sejam $n_0 \in \mathbb{N}$, $h\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ e $f, m, s\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ tais que para todo $n > n_0$,

$$f(n) = m(n) f(h(n)) + s(n).$$

Prove que para todo $n \in \mathbb{N}$,

$$f(n) = f(h^u(n)) \prod_{i=0}^{u-1} m(h^i(n)) + \sum_{i=0}^{u-1} s(h^i(n)) \prod_{j=0}^{i-1} m(h^j(n)),$$

onde

$$u = \min\left\{k \in \mathbb{N} \mid h^k(n) \leq n_0\right\}.$$

45. Resolva as seguintes recorrências.

(a) $f(n) = 2f(n-1) + n,$ para todo $n > 1,$

(b) $f(n) = 3f(n-1) + 2,$ para todo $n > 1,$

(c) $f(n) = 3f(n-1) - 15,$ para todo $n > 1,$

(d) $f(n) = f(n-1) + n - 1,$ para todo $n > 1,$

(e) $f(n) = f(n-1) + 2n - 3,$ para todo $n > 1,$

(f) $f(n) = 2f(n-1) + n - 1,$ para todo $n > 1,$

(g) $f(n) = 2f(n-1) + 3n + 1,$ para todo $n > 1,$

(h) $f(n) = f(n) = 2f(n-1) + n^2,$ para todo $n > 1,$

(i) $f(n) = 2f\left(\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor\right) + 6n - 1,$ para todo $n > 1,$

(j) $f(n) = 2f\left(\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor\right) + 3n + 2,$ para todo $n > 1,$

(k) $f(n) = 6f\left(\left\lfloor \frac{n}{6} \right\rfloor\right) + 2n + 3,$ para todo $n > 1,$

(l) $f(n) = 6f\left(\left\lfloor \frac{n}{6} \right\rfloor\right) + 3n - 1,$ para todo $n > 1,$

(m) $f(n) = 4f\left(\left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor\right) + 2n - 1,$ para todo $n > 1,$

(n) $f(n) = 4f\left(\left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor\right) + 3n - 5,$ para todo $n > 1,$

(o) $f(n) = 3f\left(\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor\right) + n^2 - n,$ para todo $n > 1,$

(p) $f(n) = 3f\left(\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor\right) + n^2 - 2n + 1,$ para todo $n > 1,$

(q) $f(n) = 3f\left(\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor\right) + n - 2,$ para todo $n > 1,$

(r) $f(n) = 3f\left(\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor\right) + 5n - 7,$ para todo $n > 1,$

(s) $f(n) = 4f\left(\left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor\right) + n^2,$ para todo $n > 1,$

(t) $f(n) = 4f\left(\left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor\right) + n^2 - 7n + 5,$ para todo $n > 1,$

(u) $f(n) = 4f\left(\left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor\right) + \sqrt{n} + 1,$ para todo $n > 3,$

(v) $f(n) = f(n-2) + 3n + 4,$ para todo $n > 1,$

(w) $f(n) = f(n-2) + n,$ para todo $n > 1,$

(x) $f(n) = f(n-3) + 5n - 9,$ para todo $n > 3,$

(y) $f(n) = 2f(n-1) + n^2 - 2n + 1,$ para todo $n > 1,$

(z) $f(n) = nf(n-1) + n,$ para todo $n > 1,$

46. Seja $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ o conjunto das funções $\mathbb{N} \to \mathbb{C}$. Dados $f, g \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ e $z \in \mathbb{C}$, definimos $f + g \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ e $zf \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ como as funções dadas por

$$\begin{aligned}(f+g)(n) &= f(n) + g(n),\\ (zf)(n) &= zf(n).\end{aligned}$$

(a) Prove que $(\mathbb{C}^{\mathbb{N}}, +)$ é um grupo comutativo.

(b) Prove que $(\mathbb{C}^{\mathbb{N}}, +)$ é um espaço vetorial sobre $\mathbb{C}$.

47. Sejam[3] $a_1, \ldots, a_k \in \mathbb{C}$.

(a) Prove que se $g, h \colon \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ satisfazem a recorrência

$$f(n) = a_1 f(n-1) + a_2 f(n-2) + \ldots + a_k f(n-k), \text{ para todo } n \geq k,$$

então a função $g + h$ também satisfaz a mesma recorrência para todo $n \geq k$.

(b) Prove que se $f \colon \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ satisfaz a recorrência

$$f(n) = a_1 f(n-1) + a_2 f(n-2) + \ldots + a_k f(n-k), \text{ para todo } n \geq k,$$

então para todo $z \in \mathbb{C}$, a função zf também satisfaz a mesma recorrência para todo $n \geq k$.

(c) Prove que o conjunto das funções $f \colon \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ que satisfazem a recorrência

$$f(n) = a_1 f(n-1) + a_2 f(n-2) + \ldots + a_k f(n-k), \text{ para todo } n \geq k,$$

é um subespaço vetorial de $(\mathbb{C}^{\mathbb{N}}, +)$.

48. Resolva as seguintes recorrências.

(a)

$$f(n) = \begin{cases} 3, & \text{se } n \leq 1,\\ 7, & \text{se } n = 2,\\ 3f(n-1) - f(n-2) + 3f(n-3), & \text{se } n \geq 3.\end{cases}$$

[3] Este exercício usa a notação do Exercício 46

(b)

$$f(n) = \begin{cases} n, & \text{se } n \leq 1, \\ 5f(n-1) - 6f(n-2), & \text{se } n > 1. \end{cases}$$

(c)

$$f(n) = \begin{cases} n, & \mathsf{se}\ n \leq 1, \\ 4f(n-1) + 3f(n-2), & \mathsf{se}\ n \geq 2. \end{cases}$$

(d)

$$f(n) = \begin{cases} 1, & \mathsf{se}\ n = 0, \\ 2, & \mathsf{se}\ n = 1, \\ 2f(n-1) + 4f(n-2), & \mathsf{se}\ n \geq 2. \end{cases}$$

(e)

$$f(n) = \begin{cases} n, & \mathsf{se}\ n \leq 1, \\ 2f(n-1) - f(n-2), & \mathsf{se}\ n \geq 2. \end{cases}$$

(f)

$$f(n) = \begin{cases} 1, & \mathsf{se}\ n \leq 1, \\ 2f(n-1) - f(n-2), & \mathsf{se}\ n \geq 2. \end{cases}$$

(g)

$$f(n) = \begin{cases} n, & \mathsf{se}\ n \leq 1, \\ f(n-1) - f(n-2), & \mathsf{se}\ n \geq 2. \end{cases}$$

(h)

$$2f(n) = 3f(n-1) - 3f(n-2) + f(n-3), \ \mathsf{para\ todo}\ n \geq 3,$$

com

$$f(n) = n, \ \mathsf{para\ todo}\ n < 3.$$

49. Resolva as seguintes recorrências.

(a)

$$f(n) = \begin{cases} n, & \mathsf{se}\ n \leq 1, \\ nf(n-1) + n(n-1)f(n-2), & \mathsf{se}\ n \geq 2. \end{cases}$$

Sugestão: Considere a função

$$g(n) = \frac{f(n)}{n!}.$$

(b)

$$f(n) = \begin{cases} n+1, & \textsf{se } n \leq 1, \\ \sqrt{f(n-1)f(n-2)}, & \textsf{se } n \geq 2. \end{cases}$$

Sugestão: Considere a função

$$g(n) = \lg f(n).$$

(c)

$$f(n) = \begin{cases} 0, & \textsf{se } n = 0, \\ \sqrt{1 + f(n-1)^2}, & \textsf{se } n \geq 1. \end{cases}$$

Sugestão: Considere a função

$$g(n) = f(n)^2.$$

(d)

$$f(n) = \begin{cases} n+1, & \textsf{se } n \leq 1, \\ f(n) = f(n-1)f(n-2), & \textsf{se } n \geq 2. \end{cases}$$

Sugestão: Considere a função

$$g(n) = \lg f(n).$$

50. Resolva as seguintes recorrências.

(a)

$$f(n) = \begin{cases} 0, & \textsf{se } n = 0, \\ f(n-1) + n, & \textsf{se } n > 0. \end{cases}$$

(b)

$$f(n) = \begin{cases} 0, & \textsf{se } n = 0, \\ 2f(n-1) + 1, & \textsf{se } n > 0. \end{cases}$$

51. Calcule o valor dos seguintes somatórios.

(a)

$$\sum_{i=0}^{n} i^3.$$

(b)

$$\sum_{i=0}^{n} i(i-1).$$

(c)

$$\sum_{i=0}^{n} i2^i.$$

(d)

$$\sum_{i=0}^{n} \frac{i}{2^i}.$$

(e)

$$\sum_{i=0}^{n} i^2 3^i.$$

52. Seja $f(n)$ o número de seqüências binárias de comprimento n.

    (a) Descreva $f(n)$ como uma recorrência.

    (b) Resolva esta recorrência.

53. Um dado honesto de 6 faces é lançado e o lançamento se repete até que dois números 6 consecutivos ocorram. Para cada $n > 0$ seja $p(n)$ a probabilidade de o n-ésimo lançamento ser o último.

    (a) Descreva $p(n)$ como uma recorrência;

    (b) Resolva essa recorrência.

54. O **"Triângulo de Cantor"**, (batizado em homenagem ao Georg Cantor), é uma "tabela infinita" triangular em que cada par $(i, j) \in \mathbb{N}^2$ ocupa uma posição de maneira que, para todo $n \in \mathbb{N}$, a n-ésima linha do triângulo é formada por todos os pares $(i, j) \in \mathbb{N}^2$ satisfazendo $i + j = n$.

    As linhas, colunas e posições começam a contar a partir de 0, de cima para baixo e da esquerda para direita. Assim, por exemplo, $(0, 0)$ ocupa a posição 0 (linha 0, coluna 0); $(0, 1)$ ocupa a posição 1 (linha 1, coluna 0); $(1, 0)$ ocupa a posição 2 (linha 1, coluna 1); $(0, 2)$ ocupa a posição 3 (linha 2, coluna 0) e assim por diante. As 7 primeiras linhas do Triângulo de Cantor são

$$\begin{array}{lllllll}
(0,0) & & & & & & \\
(0,1) & (1,0) & & & & & \\
(0,2) & (1,1) & (2,0) & & & & \\
(0,3) & (1,2) & (2,1) & (3,0) & & & \\
(0,4) & (1,3) & (2,2) & (3,1) & (4,0) & & \\
(0,5) & (1,4) & (2,3) & (3,2) & (4,1) & (5,0) & \\
(0,6) & (1,5) & (2,4) & (3,3) & (4,2) & (5,1) & (6,0)
\end{array}$$

(a) Seja $l(n)$ o número de pares na n-ésima linha do Triângulo de Cantor

i. Descreva $l(n)$ como uma recorrência.

ii. Resolva essa recorrência.

(b) Seja $t(n)$ o número de pares no Triângulo de Cantor até a n-ésima

i. Descreva $t(n)$ como uma recorrência.

ii. Resolva essa recorrência.

(c) Seja $p(i, j)$ a posição ocupada pelo par (i, j) no Triângulo de Cantor. Dê uma expressão não recorrente para $p(i, j)$.

55. O seguinte algoritmo devolve o n-ésimo termo da sequência de Fibonacci.

```
F(n)
-------------------------
  Se n ≤ 1
      Devolva n
  Devolva F(n − 1) + F(n − 2)
```

Para cada $n \in \mathbb{N}$, seja $S(n)$ o número de somas efetuado na execução de $\mathsf{F}(n)$.

(a) Expresse $S(n)$ por uma recorrência.

(b) Resolva essa recorrência.

56. Para todo $n \geq 0$, um n-cubo é um diagrama composto por pontos e linhas que ligam pares de pontos entre si. O 0-cubo tem um ponto e nenhuma linha. Para todo $n > 0$, o n-cubo é o diagrama obtido desenhando-se lado a lado duas cópias do $(n-1)$-cubo e ligando cada ponto de uma das cópias ao seu correspondente na outra cópia por uma linha.

(a) Descreva o número de pontos de um n-cubo através de uma recorrência.

(b) Resolva esta recorrência.

(c) Descreva o número de linhas de um n-cubo através de uma recorrência.

(d) Resolva esta recorrência.

57. Em muitas situações de cálculo numérico trabalha-se com matrizes triangulares inferiores, isto é, matrizes quadradas cujos elementos acima da diagonal principal são todos nulos. Nesses casos é comum representar uma matriz triangular inferior de n linhas por um vetor contendo somente as posições não-nulas da matriz, o que resulta numa economia de espaço de quase 50%.

    Suponha que a matriz triangular inferior M, de n linhas indexadas de 1 a n, será representada por um vetor $v[0..N-1]$, onde $N = N(n)$ é o tamanho do vetor necessário para representar uma matriz triangular inferior de n linhas.

    (a) Descreva $N(n)$ através de uma recorrência.

    (b) Resolva esta recorrência.

    (c) Qual o índice de v que corresponde à posição $M[i, j]$?

58. Prove que
$$\log_b n = \Theta(\log n), \text{ para todo } b > 1.$$

59. Sejam $f(n) = O(\log n)$ e $g(n) = \Omega(n)$.

    Prove que $f(n) = O(g(n))$ e que $g(n)$ não é $O(f(n))$.