25/08/09

Elementos de lógica Proposicional

Proposições são sentenças que podem assumir valor verdadeiro (V) ou falso (F)

Ex:

A: $2 \leq 3$ (V)

B: $x \leq 3$ p/ algum $x \in \mathbb{R}$ (V)

C: $x^2 \leq x$, p/ todo $0 \leq x \leq 1$ (V)

Conectivos

Definição: A negação de uma proposição P é a proposição <u>não</u> P cujo valor é o contrário do valor de P, isto é:

P	não P
V	F
F	V

A <u>disjunção</u> das proposições A e B é a proposição A ou B, cujo valor é V se A = V ou B = V, isto é,

A	B	A ou B
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

A conjunção das proposições A e B é a proposição A e B, cujo valor é V se A = V e B = V, isto é,

A	B	A e B
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

Teorema 1: Para quaisquer valores de A, B e C,

1. A ou (não A) : V

2. A e (não A): F
3. A ou F: A
4. A e V: A
5. A ou V: V
6. A e F: F
7. A e (B ou C): (A e B) ou (A e C)
8. A ou (B e C): (A ou B) e (A ou C)
9. não (A ou B): (não A) e (não B)
10. não (A e B): (não A) ou (não B)

Prova: Exercício 1 da lista

Predicados

Um predicado é uma "proposição parametrizada"

Ex:

$P(x): \quad x \leq x^2$

$P(x)$ é um predicado.

x é chamado de variável livre de P.

Predicados só assumem valor V ou F quando suas variáveis livres são especificadas.

$P(2) = V \quad , \quad P(\frac{1}{2}) = F$

Quantificadores

Se $P(x)$ é um predicado, $P(x)$, para todo $x \in X$, é uma proposição cujo valor é verdadeiro se a proposição $P(a)$ for verdadeira p/ todo $a \in X$.

Se $P(x)$ é um predicado,

$P(x)$, para algum $x \in X$

é uma proposição cujo valor é verdadeiro se a proposição $P(a)$ for verdadeira p/ algum $a \in X$.

Ex: $P(x)$: $\boxed{x \leq x^2}$

$P(x)$, p/ todo $x \in \mathbb{R}$ = F => $P(0,5)$ $0,5 \leq 0,2$

$P(x)$, p/ algum $x \in \mathbb{R}$ = V

$P(x)$, p/ todo $x > 2$ = V

$P(x)$, p/ todo $x < \frac{1}{2}$ = F

Teorema 2: Se $P(x)$ é um predicado,

não($P(x)$, p/ todo $x \in X$) = (não $P(x)$) p/ algum $x \in X$

não($P(x)$, p/ algum $x \in X$) = (não $P(x)$) p/ todo $x \in X$

Prova: exercício 2

Observe que se $X = \emptyset$

$P(x)$, p/ todo $x \in X$ = V

$P(x)$, p/ algum $x \in X$ = F

$P(x)$, p/ todo $x \in X$ => $P(x)$, p/ algum $x \in X$ desde que $X \neq \emptyset$

Exercício 3 - relacionado a quantificadores

Implicações

A implicação de A para B é a proposição $A \Rightarrow B$ cujo valor é V se $A = V$ e $B = V$ ou se $A = F$, isto é, $(A \Rightarrow B) = (A$ e $B)$ ou (não A)

A	B	A => B
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

Lê-se "A implica B" ou também "Se A então B"

A proposição A é chamada de antecedente da implicação e a proposição B é chamada de consequente da implicação.

Ex:

Para todo $n \in \mathbb{N}$, se n é par então n^2 é multiplo de 4.

Esquematicamente:

$P(n)$, p/ todo $n \in \mathbb{N}$

onde

$P(n)$: n é par $\Rightarrow n^2$ é múltiplo de 4

ou

$P(n)$: $A(n,2) \Rightarrow A(n^2,4)$

onde

$A(n,K)$: n é multiplo de K

$(A(n,2) \Rightarrow A(n^2,4))$, p/ todo $n \in \mathbb{N}$

Provas

Uma prova para uma proposição é um argumento que demonstra que a proposição é verdadeira.

Ex:

Temos que provar que se n é par então n^2 é múltiplo de 4, p/ todo $n \in \mathbb{N}$.

Seja n par,

Então $K = \frac{n}{2}$ é inteiro

Além disso, $n = 2K$

Então $n^2 = (2K)^2$

Então $n^2 = 4K^2$

como K é inteiro, K^2 tabém é inteiro

Então n^2 é o quádruplo de um inteiro.

Então n^2 é multiplo de 4

Portanto se n é par, então n^2 é multiplo de 4 p/ todo $n \in \mathbb{N}$

Esquematicamente, temos

Temos que provar que $A(x) \Rightarrow B(x)$ p/ todo $x \in X$

Seja $x \in X$ tal que $A(x) = V$

Então $B(x)$ é verdadeiro

Logo, $A(x) \Rightarrow B(x)$, p/ todo $x \in X$

Definição: A <u>contrapositiva</u> da implicação $A \Rightarrow B$ é a implicação

$$(\text{não } B) \Rightarrow (\text{não } A)$$

Teorema 3: Para qualquer valor de A, $(F \Rightarrow A) = V$

<u>Prova</u>: Exercício 5

Teorema 4: Uma implicação e sua contrapositiva sempre tem o mesmo valor, isto é, para quaisquer valores de A e B

$$(A \Rightarrow B) = ((\text{não } B) \Rightarrow (\text{não } A))$$

<u>Prova</u>: Exercício 4

Outra prova da proposição do exemplo anterior:

Temos que provar que

Se n é par então n^2 é múltiplo de 4, p/ todo $n \in \mathbb{N}$.

Vamos provar que <u>se n^2 não é múltiplo de 4, então n não é par</u> $(\text{não } B) \Rightarrow (\text{não } A)$

Seja $n \in \mathbb{N}$ tal que $\underbrace{n^2 \text{ não é múltiplo de } 4}_{\text{não } B}$.

Então $\frac{n^2}{4}$ não é inteiro

Como $\frac{n^2}{4} = \left(\frac{n}{2}\right)^2$

Então $\left(\frac{n}{2}\right)^2$ não é inteiro,

Então $\frac{n}{2}$ não é inteiro, pois o quadrado de um inteiro é sempre um inteiro

Logo, $\underbrace{n \text{ não é par}}_{\text{não } A}$.

Portanto, se n^2 não é multiplo de 4, então n não é par, p/ todo $n \in N$ (não B) => (não A)

Portanto, se n é par, n^2 é multiplo de 4, p/ todo $n \in \mathbb{N}$.

28/08/09

Teorema 5: Para quaisquer valores de A, B e C

$(A \Rightarrow B)$ e $(A \Rightarrow C) = (A \Rightarrow (B \text{ e } C))$

Prova exercício 4.

Teorema 6: Se $(A \Rightarrow F) = V$

então $A = F$

Prova: exercício 4.

Ex:

Se n é par, então n^2 é multiplo de 4 p/ todo $n \in \mathbb{N}$.

Prova:

Prova por Absurdo

Seja $c \in \mathbb{N}$ tal que c é par e c^2 não é multiplo de 4.

Como c é par, então $\frac{c}{2}$ é inteiro.

Como c é inteiro, então $c \cdot \frac{c}{2} = \frac{c^2}{2}$ é par.

Como c^2 não é multiplo de 4, então $\frac{c^2}{2}$ é ímpar.

Logo, se n é par, então n^2 é multiplo de 4, p/ todo $n \in \mathbb{N}$

Esquematicamente $A \Rightarrow B$

Temos que provar que $A = V$

Vamos provar que

(não A) => B

⋮

Portanto (não A) => B

Vamos provar que

(não A) => (não B)

⋮

Portanto, (não A) => (não B)

Logo, (não A) => (B e (não B))

ou seja, (não A) => F

e então não A = F e A = V

Teorema 7: Para quaisquer valores de A e B,

$(A \Rightarrow B) = ((\text{não } A) \text{ ou } B)$

Prova: Simplificando a definição

$A \Rightarrow B = (A \text{ E } B) \text{ ou } (\text{não } A)$

$= (A \text{ ou } (\text{não } A)) \text{ E } (B \text{ ou } (\text{não } A))$

$= V \text{ E } (B \text{ ou } (\text{não } A))$

$= B \text{ ou não } A$

Exercício 5

Corolário 8:

$(\text{não } (A \Rightarrow B)) = (A \text{ E } (\text{não } B))$

Prova:

$\text{não } (A \Rightarrow B) = \text{não } ((\text{não } A) \text{ ou } B)$

$= (\text{não } (\text{não } A)) \text{ E } (\text{não } B)$

$= A \text{ E } (\text{não } B)$ ■

Exercício 6

Corolário 9:

$\text{não } (A(x) \Rightarrow B(x), \text{ p/ todo } x \in X)$

$(A(x) \text{ E } (\text{não } B(x))), \text{ p/ algum } x \in X)$

Definição: A equivalência entre duas proposições A e B é a proposição $A \Leftrightarrow B$ cujo valor é o valor de $(A \Rightarrow B) \text{ E } (B \Rightarrow A)$

isto é

A	B	$(A \Rightarrow B) \text{ E } (B \Rightarrow A)$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

Lê-se "A se e somente se B"

Exercícios: 7, 8 e 9.

/ /

Conjuntos

$\emptyset$ denota o conjunto vazio

$a \in A$ denota o predicado

"a é elemento de A" ou "a pertence a A"

$a \notin A$ denota não $(a \in A)$

$A \subseteq B$ denota $a \in B$, p/ todo $a \in A$

$A \not\subseteq B$ denota não $(A \subseteq B)$

$A = B$ denota $(A \subseteq B)$ e $(B \subseteq A)$

$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ ou } x \in B\}$

$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ e } x \in B\}$

$|A|$ denota o número de elementos de A

2^A denota o conjunto dos subconjuntos de A, isto é,

$2^A = \{S \mid S \subseteq A\}$

Exercício 10

Teorema 10: A união de conjuntos é uma operação associativa. $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$

Prova: Exercício 11

Teorema 11: A interseção de conjuntos é uma operação associativa. $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$

Prova: exercício 12

Se $n \in \mathbb{N}$ e $A_1, \ldots, A_n$ são conjuntos então,

$\bigcup_{i=1}^{n} A_i$ denota $A_1 \cup \ldots \cup A_n$

$\bigcap_{i=1}^{n} A_i$ denota $A_1 \cap \ldots \cap A_n$

Se $n = 0$, então $\bigcup_{i=1}^{n} A_i = \emptyset = \bigcap_{i=1}^{n} A_i$

A <u>diferença</u> entre os conjuntos A e B é o conjunto

$$A - B = \{x \mid x \in A \text{ e } x \notin B\}$$

Exercício 13

Se $n > 0$ é um inteiro e $A_1, \ldots, A_n$ são conjuntos, o <u>produto</u> <u>cartesiano</u> de $A_1, \ldots, A_n$ é o conjunto das n-uplas ordenadas de elementos de $A_1, \ldots, A_n$, respectivamente, isto é,

$$A_1 \times \ldots \times A_n = \{(a_1, \ldots, a_n) \mid a_1 \in A_1 \text{ E} \ldots \text{E } A_n \in A_n\}$$

<u>Inteiros</u>

No que segue,

A: conjunto

$z, z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{Z}$

$q \in \mathbb{Q}$

$x \in \mathbb{R}$

Definição: O <u>intervalo inteiro</u> de z_1 a z_2 é o conjunto

$$[z_1 \ldots z_2] = \{z \in \mathbb{Z} \mid z_1 \leq z \leq z_2\}$$

O <u>mínimo</u> de A é um elemento $m \in A$ satisfazendo

$$m \leq a, \text{ p/ todo } a \in A$$

O <u>máximo</u> de A é um elemento $m \in A$ satisfazendo

$$m \geq a, \text{ p/ todo } a \in A$$

O mínimo e o máximo de A denotam-se, respectivamente por $\min A$ e $\max A$.

O <u>chão</u> de x é o maior inteiro menor ou igual a x, isto é, $\lfloor x \rfloor = \max\{z \in \mathbb{Z} \mid z \leq x\}$

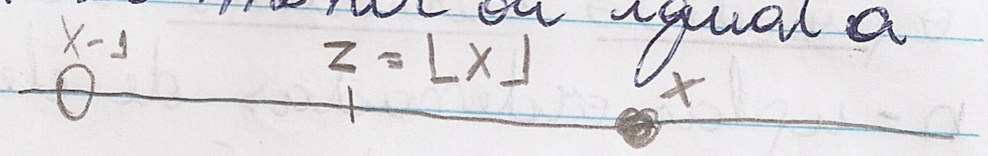
O <u>teto</u> de x é o menor inteiro maior ou igual a x, isto é, $\lceil x \rceil = \min\{z \in \mathbb{Z} \mid z \geq x\}$

Teorema 12: Para todo $x \in \mathbb{R}$, $\lfloor x \rfloor$ é o único inteiro que satisfaz $x - 1 < \lfloor x \rfloor \leq x$

Prova: É imediato que existe um único inteiro z no conjunto $\{y \in \mathbb{R} \mid x - 1 < y \leq x\}$

Consequentemente, todo inteiro maior ou igual a x será também maior ou igual a z.

Logo, z é o maior inteiro menor ou igual a z, isto é, $z = \lfloor x \rfloor$ ▨



Teorema 13: Para todo $x \in \mathbb{R}$, $\lceil x \rceil$ é o único inteiro satisfazendo $x \leq \lceil x \rceil < x + 1$

Prova: exercício 14

Corolário 14: Para todo $x \in \mathbb{R}$ e todo $z \in \mathbb{Z}$

$$\lfloor x \rfloor + z = \lfloor x + z \rfloor$$

Prova: Temos que provar que $\lfloor x \rfloor + z = \lfloor x + z \rfloor$, p/ todo $\in \mathbb{R}$ e $z \in \mathbb{Z}$

Sejam $x \in \mathbb{R}$, do teorema 12 temos $x - 1 < \lfloor x \rfloor \leq x$

Então, p/ todo $z \in \mathbb{Z}$,

$$(x - 1) + z < \lfloor x \rfloor + z \leq x + z$$

ou seja

$$(x + z) - 1 < \lfloor x \rfloor + z \leq (x + z)$$

Como $\lfloor x \rfloor + z$ é inteiro, pelo teorema 12 temos $\lfloor x \rfloor + z = \lfloor x + z \rfloor$

Portanto, $\lfloor x \rfloor + z = \lfloor x + z \rfloor$, p/ todo $x \in \mathbb{R}$ e $z \in \mathbb{Z}$ ▨

Teorema 15: Para todo $x \in \mathbb{R}$, $-\lceil x \rceil = \lfloor -x \rfloor$

Prova: Temos que mostrar que $-\lceil x \rceil = \lfloor -x \rfloor$, p/ todo $x \in \mathbb{R}$

Do teorema 13 temos $x \leq \lceil x \rceil < x + 1$

e portanto,

$$-x \geq -\lceil x \rceil > -(x + 1)$$

ou seja $(-x)-1 < -\lceil x \rceil \leq (-x)$
e daí, pelo teorema 12 concluímos que
$$-\lceil x \rceil = \lfloor -x \rfloor$$
Portanto, $-\lceil x \rceil = \lfloor -x \rfloor$, p/ todo $x \in \mathbb{R}$

Corolário 16: Para todo $x \in \mathbb{R}$ e todo $z \in \mathbb{Z}$,
$$z - \lfloor x \rfloor = \lceil z - x \rceil$$
Prova: Temos que provar que $z - \lfloor x \rfloor = \lceil z - x \rceil$, p/ todo $x \in \mathbb{R}$ e $z \in \mathbb{Z}$

Sejam $x \in \mathbb{R}$ e $z \in \mathbb{Z}$, pelo Corolário 14 temos que $\lfloor x \rfloor - z = \lfloor x - z \rfloor$
e Portanto,
$$z - \lfloor x \rfloor = -\lfloor x - z \rfloor$$
e daí, pelo Teorema 15,
$$-\lfloor x - z \rfloor = \lceil -(x-z) \rceil = \lceil z - x \rceil$$
Portanto, $z - \lfloor x \rfloor = \lceil z - x \rceil$, p/ todo $x \in \mathbb{R}$ e $z \in \mathbb{Z}$

Notação: $\lg x$ denota $\log_2 x$
Exercícios 15 e 16

Somatórios e Produtórios

Se que segue:
$f: A \to C$
$X \subseteq A$
$a, b \in \mathbb{Z}$
Notação: $\to \prod$ produto produto
$\sum_{x \in X} f(x)$ denota a soma de $f(x)$ p/ todo $x \in X$
$\prod \sum_{x \in X} f(x) = 1$
Se $X = \emptyset$, então $\sum_{x \in X} f(x) = 0$
$\prod \sum_{x=a}^{b} f(x)$, denota $\sum_{x \in [a \ldots b]} f(x)$

/ /

Teorema 17: Dados um conjunto X e $c \in \mathbb{C}$,

$$\sum_{x \in X} c = c|X|$$

Prova: exercício 17.

Teorema 18: Dados $f, g: A \to \mathbb{C}$ e $X \subseteq A$, finito

$$\sum_{x \in X} (f(x) + g(x)) = \left(\sum_{x \in X} f(x)\right) + \left(\sum_{x \in X} g(x)\right)$$

Teorema 19: Dada $f: A \to \mathbb{C}$, $X \subseteq A$ e $c \in \mathbb{C}$

$$\sum_{x \in X} c f(x) = c \sum_{x \in X} f(x)$$

Provas: Exercícios 18 e 19.

01/09/09 **Indução / Recurrão**

Seja $A \subseteq N$ tal que
1. $0 \in A$
2. $[0 \ldots a] \subseteq A \Rightarrow a+1 \in A$

Princípio da Indução Finita

Então $A \subseteq N$

$0 \in A$, por (1)
$1 \in A$, porque $[0..0] \subseteq A$ (2)
$2 \in A$, porque $[0..1] \subseteq A$ (2)
$3 \in A$, porque $[0..2] \subseteq A$ (2)
$4 \in A$, porque $[0..3] \subseteq A$ (2)

ou Melhor

Seja $A \subseteq \mathbb{N}$ tal que
1. $0 \in A$
2. $[0..a] \subseteq A \Rightarrow a+1 \in A$, p/ todo $a \in A$.

então $A = N$

$((0 \in A) \equiv ((([0..a] \subseteq A) \Rightarrow (a+1 \in A)), \text{ p/ todo } a \in A)) \Rightarrow (A = N)$

Teorema 20: A soma do n primeiros inteiros é $\frac{n.(n+1)}{2}$

Prova: Vamos provar que a soma dos n primeiro inteiros é $\frac{n.(n+1)}{2}$

isto é,

Vamos provar que $\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n.(n+1)}{2}$, p/ todo $n \in \mathbb{N}$

ou seja, vamos provar que $P(n)$, p/ todo $n \in \mathbb{N}$

onde $P(n)$ é o predicado: $\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n.(n+1)}{2}$

Vamos provar que $P(n)$, p/ todo $n \in \mathbb{N}$

Provando que $A = \mathbb{N}$

onde, $A = \{n \in \mathbb{N} \mid P(n) \text{ é verdadeiro}\}$

Vamos provar que $A = \mathbb{N}$

provando que

i) $0 \in A$

ii) $[0..a] \subseteq A \Rightarrow a+1 \in A$, p/ todo $a \in A$

i) Vamos provar que $\boxed{0 \in A}$ isto é que $\boxed{P(0) \text{ é verdadeiro}}$

ou seja que $\boxed{\sum_{i=1}^{0} i = \frac{0.(0+1)}{2}}$

Por um lado, $\sum_{i=1}^{0} i = 0$

Por outro lado, $\frac{0.(0+1)}{2} = 0$

$\mathbb{N} = A$ é matriz

Portanto, $\boxed{\sum_{i=1}^{0} i = \frac{0.(0+1)}{2}}$

Portanto, $\boxed{P(0) \text{ é verdadeiro}}$

Portanto, $\boxed{0 \in A}$

ii) Vamos provar que $[0..a] \subseteq A \Rightarrow a+1 \in A$, p/ todo $a \in A$

Seja $a \in A$ tal que $[0..a] \subseteq A$

Vamos provar que $a+1 \in A$, ou seja, que $P(a+1)$ é verdadeiro, ou seja, que $\sum_{i=1}^{a+1} i = \frac{(a+1).((a+1)+1)}{2}$

Como $[0..a] \subseteq A$.

Então $a \in A$,

isto é, $P(a)$ é verdadeiro,

ou seja, $\sum_{i=1}^{a} i = \frac{a(a+1)}{2}$

Por outro lado, $\sum_{i=1}^{a+1} i = \left(\sum_{i=1}^{a} i\right) + (a+1)$

e então, $\sum_{i=1}^{a+1} i = \frac{a(a+1)}{2} + (a+1)$

$$= \frac{a.(a+1) + 2.(a+1)}{2}$$

$$= \frac{(a+2).(a+1)}{2}$$

$$= \frac{(a+1).((a+1)+1)}{2}$$

Portanto, $\sum_{i=1}^{a+1} i = \frac{(a+1).((a+1)+1)}{2}$

Portanto $P(a+1)$ é verdadeiro

Portanto $a+1 \in A$.

Portanto, $[0..a] \subseteq A \Rightarrow a+1 \in A$, p/ todo $a \in A$

Portanto $A = \mathbb{N}$.

Portanto, $\{n \in \mathbb{N} \mid P(n) \text{ é verdadeiro}\} = \mathbb{N}$

ou seja,

$P(n)$, p/ todo $n \in \mathbb{N}$.

Portanto, $\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$, p/ todo $n \in \mathbb{N}$

Esquematicamente,

Vamos provar que
$P(n)$, p/todo $n \in \mathbb{N}$

Provando que
$A = \mathbb{N}$

onde
$A = \{n \in \mathbb{N} \mid P(n) \text{ é verdadeiro}\}$

Vamos provar que $A = \mathbb{N}$

Provando que
i) $0 \in A$
ii) $[0..a] \subseteq A \Rightarrow a+1 \in A$, p/todo $a \in A$.

i) Vamos provar que $0 \in A$
⋮
Portanto, $0 \in A$

ii) Vamos provar que $[0..a] \subseteq A \Rightarrow a+1 \in A$, p/todo $a \in A$
Seja $a \in A$ tal que $[0..a] \in A$
⋮
Como $[0..a] \subseteq A$, então...
⋮
Portanto, $a+1 \in A$
← Portanto, $[0..a] \subseteq A \Rightarrow a+1 \in A$, p/todo $a \in A$
← Portanto, $A = \mathbb{N}$
Portanto, $P(n)$, p/todo $n \in \mathbb{N}$

Esquema Resumido

Vamos provar que
$P(n)$, p/todo $n \in \mathbb{N}$

Por indução em $\mathbb{N}$

Base) Vamos provar que $P(0)$
⋮
Portanto, $P(0)$.

exceções

H.I:

H.I: $P(k)$, p/ todo $0 \leq k \leq a$.

Passo) Vamos provar que $P(a+1)$

⋮

Pela H.I....

⋮

Portanto, $P(a+1)$.

Exercícios 21 e 22

Teorema 20:

$$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n.(n+1)}{2}, \text{ p/ todo } n \in N$$

Prova: Por indução em n

H.I. Seja $n \in N$ tal que $\sum_{i=1}^{n} i = \frac{k.(k+1)}{2}$, p/ todo $0 \leq k \leq n$

Passo: Vamos provar que $\sum_{i=1}^{n+1} = \frac{(n+1).((n+1)+1)}{2}$

Temos que $\sum_{i=1}^{n+1} i = \left(\sum_{i=1}^{n} i\right) + (n+1)$

Pela H.I. temos $\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n.(n+1)}{2}$

Então, $\sum_{i=1}^{n+1} i = \left(\sum_{i=1}^{n} i\right) + (n+1)$

$$= \frac{n.(n+1)}{2} + (n+1)$$

$$= \frac{n.(n+1) + 2.(n+1)}{2}$$

$$= \frac{(n+2).(n+1)}{2} = \frac{(n+1).((n+1)+1)}{2}$$

Portanto $\sum_{i=1}^{n+1} i = \frac{(n+1).((n+1)+1)}{2}$

Base da indução

Vamos provar que $\sum_{i=1}^{0} i = \frac{0.(0+1)}{2}$

Como $\sum_{i=1}^{0} i = 0$ e $\frac{0.(0+1)}{2} = 0$

Então, $\sum_{i=1}^{0} i = \frac{0.(0+1)}{2}$

Teorema 21: Para todo $x \in \{0,1\}$ e todo $n \in \mathbb{N}$

$$\sum_{i=0}^{n} x^i = \frac{x^{n+1}-1}{x-1}$$

Prova: Por indução em n.

H.I.: Seja $n \in \mathbb{N}$ tal que, p/todo $x \in \{0,1\}$

$$\sum_{i=0}^{k} x^i = \frac{x^{k+1}-1}{x-1}, \text{ p/todo } 0 \leq k \leq n$$

Passo: Vamos provar que $\sum_{i=0}^{n+1} x^i = \frac{x^{(n+1)+1}-1}{x-1}$

Seja $x \in \{0,1\}$

Então $\sum_{i=0}^{n+1} x^i = \left(\sum_{i=0}^{n} x^i\right) + x^{n+1}$

Como pela H.I. $\sum_{i=0}^{n} x^i = \frac{x^{n+1}-1}{x-1}$

Então $\sum_{i=0}^{n+1} x^i = \left(\sum_{i=0}^{n} x^i\right) + x^{n+1}$

$$= \frac{x^{n+1}-1}{x-1} + x^{n+1}$$

$$= \frac{x^{n+1}-1 + x^{n+1}.(x-1)}{x-1}$$

$$= \frac{x^{n+1}.(1+x-1)-1}{x-1}$$

$$= \frac{x^{n+1}.(x)-1}{x-1} = \frac{x^{n+2}-1}{x-1}$$

Logo, $\sum_{i=0}^{n+1} x^i = \frac{x^{(n+1)+1}-1}{x-1}$

Base: Vamos provar que $\sum_{i=0}^{0} x^i = \frac{x^{0+1}-1}{x-1}$

Como $\sum_{i=0}^{0} x^i = x^0 = 1$

E $\frac{x^{0+1}-1}{x-1} = \frac{x^1-1}{x-1} = \frac{x-1}{x-1} = 1$, então $\sum_{i=0}^{0} x^i = \frac{x^{0+1}-1}{x-1}$ $\square$

Teorema 22: $2^n < n!$, p/todo $n \geq 4$

Prova: Por indução em n.

Base: Vamos provar que $2^4 < 4!$

Como $2^4 = 16$

E $4! = 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$, então $2^4 < 4!$

H. I.: Seja $n \geq 4$ tal que, $2^k < k!$ p/ todo $4 \leq k \leq n$

1) **Passo:** Vamos provar que $2^{n+1} < (n+1)!$

Temos que $2^n . 2 = 2^{n+1}$ E $(n+1)! = (n+1).n!$

Pela H.I. temos que $2^n < n!$

Como $n \geq 4$,

Então $2 < (n+1)$

Logo, $2^{n+1} < (n+1)!$

ou

2) **Passo:** Vamos provar que $2^{n+1} < (n+1)!$

Temos que $2^{n+1} = 2.2^n$

E pela H.I. $2^n < n!$

Logo, $2^{n+1} < 2.n!$

Como, $(n+1)! = (n+1).n!$

E $n \geq 4$

Então, $(n+1)! \geq (4+1).n! = 5n!$

Como $2n! < 5n!$

Então $2^{n+1} < (n+1)!$

15/09/09

Descrições Indutivas

$l(n)$ = nº digitos na representação binária de n.

Ex: $l(1)=1$ $\quad l(2)=2$ (10) $\quad l(3)=2$ (11)

Se n escrito em Base 2 é:

$$d_1 d_2 \ldots d_{j-1} d_j$$

Então

$$d_1 d_2 \ldots d_{j-1}$$

é a representação de $\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$ em Base 2

Então $f(n) = f\left(\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor\right) + 1$, p/todo $n>0$

Está melhor $f(n) = \begin{cases} 0, & \text{se } n=0 \\ f\left(\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor\right)+1, & \text{se } n>0 \end{cases}$

Teorema 23: $l(n) = f(n)$ p/todo $n \in \mathbb{N}$

Prova: Por indução em n.

H.I.: Seja $n \in \mathbb{N}$ tal que $l(k)=f(k)$, p/todo $0 \le k \le n$

Passo: Vamos provar que $l(n+1) = f(n+1)$

Da definição de f temos

$f(n+1) = f\left(\left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor\right) + 1$

Como $\left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor \le n$

Pela H.I. temos $f\left(\left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor\right) = l\left(\left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor\right)$

E, portanto, $f(n+1) = l\left(\left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor\right) + 1$

Continuação do Passo

Seja então $j = l\left(\left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor\right)$

Então a representação de $\left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor$ em Base 2 é

$d_1 d_2 \ldots d_j$

Se $n+1$ é par, então $\left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor = \frac{n+1}{2}$

E $2\left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor = 2\left(\frac{n+1}{2}\right) = n+1$

Como a representação de $2\left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor$ em Base 2 é

$d_1 \ldots d_j 0$

Temos que $f\left(2\left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor\right) = l\left(\left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor\right) + 1$

E, Portanto $l(n+1) = l\left(\left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor\right) + 1$

E, Portanto $l(n+1) = f(n+1)$

Se $n+1$ é ímpar, então $\left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor = \frac{n}{2}$

E $2\left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor = 2\left(\frac{n}{2}\right) = n$

E, então $n+1 = 2\left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor + 1$

E a representação de $n+1$ em Base 2 será

$d_1 \ldots d_j 1$

E novamente $l(n+1) = l\left(\left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor\right) + 1$

E portanto $f(n+1) = l(n+1)$

Base: Vamos provar que $l(0) = f(0)$

Como a representação de 0 em qualquer base tem 0 dígitos, então $l(0) = 0$

Por outro lado, $f(0) = 0$, por definição

Logo, $f(0) = l(0)$ ■

Teorema 24: $l(n) = \lfloor \lg n \rfloor + 1$, p/ todo $n > 0$.

Prova: Prova exercício 29.

Seja $b(n)$ = nº de 1s na representação de n em Base 2.

$$f(n) = \begin{cases} 0, & \text{se } n = 0 \\ f\left(\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor\right) + (n \bmod 2), & \text{se } n > 0 \end{cases}$$

Teorema 26: $b(n) = f(n)$, p/ todo $n \in \mathbb{N}$

Prova: Exercício 30

Exercícios 31 a 36

22/09/09

Definição: Seja $f: A \to A$ uma função. Para todo $n \in \mathbb{N}$ definimos $f^n: A \to A$ como a função dada por:

$$f^n(a) = \begin{cases} a, & \text{se } n = 0 \\ f^{n-1}(f(a)), & \text{se } n > 0 \end{cases}$$

Ex:

Se $f(x) = x + 1$

Então

$f^0(\pi) = \pi$

$f^1(3) = f^0(f(3)) = f^0(4) = 4$

$f^2(3) = 5$

$f^0(x) = x$

$f^1(x) = f^0(f(x)) = f^0(x+1) = x+1$

$f^2(x) = f^1(f(x)) = f^1(x+1) = ((x+1)+1) = x+2$

$f^3(x) = x+3$

$f^4(x) = x+4$

$f^n(x) = x+n$

Ex2:

Se $f(x) = x+2$

Então

$f^0(x) = x$

$f^1(x) = x+2$

$f^2(x) = x+4$

$f^3(x) = x+6$

$f^n(x) = x+2.n$

Se $f(x) = x + 5$ ↗ constante

Então.

$f^n(x) = x + 5.n$

Se $f(x) = 3.x$

Então

$f^0(x) = x$

$f^1(x) = 3x$

$f^2(x) = 9x$

$f^3(x) = 27x$

$f^n(x) = 3^n x$

Se $f(x) = m.x$

Então

$f^n(x) = m^n.x$

Ex3:

Se

$f(x) = mx + s$

Então

$f^0(x) = x$

$f^1(x) = f^0(f(x)) = mx+s$

$f^2(x) = f^1(f(x)) = f^1(mx+s) = m.(mx+s)+s = m^2x + sm + s$

$f^3(x) = f^2(f(x)) = f^2(mx+s) = m^2.(mx+s) + sm + s = m^3x + m^2s + ms + s$

$$f^n(x) = m^n x + s.\sum_{i=0}^{n-1} m^i = m^n x + s.\left(\frac{m^n - 1}{m-1}\right)$$

Corolário 25: Para todo $n>0$ a representação binária de n tem $\lfloor \lg n \rfloor + 1$ dígitos

Teorema 27: Seja $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função contínua e crescente satisfazendo $f(x) \in \mathbb{Z} \Rightarrow x \in \mathbb{Z}$, p/todo $x \in \mathbb{R}$
Então

$$\lfloor f(\lfloor x \rfloor) \rfloor = \lfloor f(x) \rfloor$$

E

$$\lceil f(\lceil x \rceil) \rceil = \lceil f(x) \rceil$$

Prova: Seja $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ contínua e crescente satisfazendo $f(x) \in \mathbb{Z} \Rightarrow x \in \mathbb{Z}$, p/todo $x \in \mathbb{R}$, e seja $x \in \mathbb{R}$.
Vamos provar que $\lfloor f(\lfloor x \rfloor) \rfloor = \lfloor f(x) \rfloor$ E $\lceil f(\lceil x \rceil) \rceil = \lceil f(x) \rceil$

Se x é inteiro,
Então

$$\lfloor x \rfloor = x = \lceil x \rceil$$

E $f(\lfloor x \rfloor) = f(x) = f(\lceil x \rceil)$

E, portanto $\lfloor f(\lfloor x \rfloor) \rfloor = \lfloor f(x) \rfloor$

E $\lceil f(\lceil x \rceil) \rceil = \lceil f(x) \rceil$

Se x não é inteiro, então $\lfloor x \rfloor < x < \lceil x \rceil$
E como f é crescente, $f(\lfloor x \rfloor) < f(x) < f(\lceil x \rceil)$

Além disso, não pode haver um inteiro z tal que

$$f(\lfloor x \rfloor) < z < f(\lceil x \rceil)$$

Pois, como f é contínua, teríamos $z = f(a)$, p/algum $\lfloor x \rfloor < a < \lceil x \rceil$.
E, como o $f(a)$ é inteiro, tal a seria inteiro, o que não é possível.

Como x não é inteiro, $f(x)$ não pode ser inteiro e então, $\lfloor f(x) \rfloor < f(x) < \lceil f(x) \rceil$

E, portanto,

$$\lfloor f(\lfloor x \rfloor) \rfloor \leq \lfloor f(x) \rfloor < f(x) < \lceil f(x) \rceil \leq \lceil f(\lceil x \rceil) \rceil$$

Se $f(\lfloor x \rfloor)$ é inteiro, então $f(\lfloor x \rfloor) = \lfloor f(\lfloor x \rfloor) \rfloor$

Por um argumento análogo, se $f(\lceil x \rceil)$ é inteiro, podemos concluir $f(\lceil x \rceil) = \lceil f(\lceil x \rceil) \rceil$

Se $f(\lfloor x \rfloor)$ não é inteiro,
Então $\lfloor f(\lfloor x \rfloor) \rfloor$ é o maior inteiro menor ou igual a $f(\lfloor x \rfloor)$.

E então $\lfloor f(\lfloor x \rfloor) \rfloor = \lfloor f(x) \rfloor$

Por um argumento análogo,

Se $f(\lceil x \rceil)$ não é inteiro, podemos concluir que

$$\lceil f(\lceil x \rceil) \rceil = \lceil f(x) \rceil$$

$\square$

Corolário 28: Para todo $x \in \mathbb{R}$ e todo inteiro positivo K,

$$\left\lfloor \frac{\lfloor x \rfloor}{K} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{x}{K} \right\rfloor$$

E

$$\left\lceil \frac{\lceil x \rceil}{K} \right\rceil = \left\lceil \frac{x}{K} \right\rceil$$

Prova: Seja K um inteiro positivo e seja $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a função dada por $f(x) = x$

Basta provar que f é crescente e contínua satisfazendo $f(x) \in \mathbb{Z} \Rightarrow x \in \mathbb{Z}$ p/ todo $x \in \mathbb{R}$.

(Exercício 41)

Exercícios: 37 → 42

Recorrências

Seja $f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tal que $f(n) = f(n-1) + 1$, p/ todo $n > 0$

Queremos uma expressão não recursiva para f.

Se $n > 0$

$$\begin{aligned} f(n) &= f(n-1) + 1 \\ &= (f((n-1)-1)+1) + 1 = f(n-2) + 2 \\ &= (f((n-2)-1)+1) + 2 = f(n-3) + 3 \\ &\vdots \\ &= f(n-u) + u \end{aligned}$$

onde u é o menor inteiro tal que $n - u \leq 0$.

isto é, $u = \min\{k \in \mathbb{N} \mid n-k \leq 0\}$

Como $n-k \leq 0$

Se e somente se $k \geq n$

E portanto,

$$u = \min\{k \in \mathbb{N} \mid k \geq n\} = n$$

Então,

$$\begin{aligned} f(n) &= f(n-u) + u \\ &= f(n-n) + n \\ &= f(0) + n, \text{ p/ todo } n \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

$f(n) = f(h(n)) + 1$, p/ todo $n > 0$

onde $h: \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$

Se $h(n) > 0$

$$\begin{aligned} f(n) &= f(h(n)) + 1 \\ &= f(h(h(n)) + 1) + 1 = f(h^2(n)) + 2 \\ &= f(h(h^2(n))) + 1) + 2 = f(h^3(n)) + 3 \\ &\vdots \\ &= f(h^u(n)) + u \end{aligned}$$

onde

$$u = \min\{k \in \mathbb{N} \mid h^k(n) \leq 0\}$$

Se $f, h: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ são tais que

$f(n) = f(h(n)) + 1$, p/ todo $n > 0$

Então

$f(n) = f(h^u(n)) + u$, p/ todo $n \in \mathbb{N}$

onde

$$u = \min\{k \in \mathbb{N} \mid h^k(n) \leq 0\}$$

Ex: $f(n) = f(\lfloor \frac{n}{2} \rfloor) + 1$

$h(n) = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$

$h^k(n) = \left\lfloor \frac{n}{2^k} \right\rfloor$

$u = \min\{K \in \mathbb{N} \mid h^k(n) \leq 0\}$

Como $h^k(n) \leq 0$

se e somente se $\left\lfloor \frac{n}{2^k} \right\rfloor \leq 0$

ou seja, $\frac{n}{2^k} < 1$

isto é, $2^k > n$

ou seja,

$K > \lg n$

$u = \min\{K \in \mathbb{N} \mid K > \lg n\}$

$= \lfloor \lg n \rfloor + 1$

Então,

$$f(n) = f(h^u(n)) + u$$
$$= f\left(\left\lfloor \frac{n}{2^u} \right\rfloor\right) + u$$
$$= f\left(\left\lfloor \frac{n}{2^{\lfloor \lg n \rfloor + 1}} \right\rfloor\right) + \lfloor \lg n \rfloor + 1$$
$$= f\left(\left\lfloor \frac{n}{2n} \right\rfloor\right) + \lfloor \lg n \rfloor + 1$$
$$= f(0) + \lfloor \lg n \rfloor + 1$$

Se $f, h: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ e $n_0 \in \mathbb{N}$ são tais que

$f(n) = f(h(n)) + 1$, p/ todo $n > n_0$

Então

$f(n) = f(h^u(n)) + u$, p/ todo $n \in \mathbb{N}$

onde, $u = \min\{k \in \mathbb{N} \mid h^u(n) \leq n_0\}$

$$
\begin{aligned}
f(n) &= f(h(n)) + 1 \\
&= f(h^2(n)) + 2 \\
&= f(h^3(n)) + 3 \\
&\vdots \\
&= f(h^u(n)) + u.
\end{aligned}
$$

onde

$u = \min\{k \in \mathbb{N} \mid h^u(n) \leq n_0\}$

Ex: $f(n) = f(n-2) + 1$, p/ todo $n > 5$

$h(n) = n - 2$

$h^k = n - 2k$

$$
\begin{aligned}
u &= \min\{k \in \mathbb{N} \mid h^k(n) \leq 5\} \\
&= \min\{k \in \mathbb{N} \mid n - 2k \leq 5\} \\
&= \min\{k \in \mathbb{N} \mid k \geq \tfrac{n-5}{2}\} = \left\lceil \tfrac{n-5}{2} \right\rceil
\end{aligned}
$$

$n - 2k \leq 5$

$2k \geq n - 5$

$k \geq \dfrac{n-5}{2}$

$$
\begin{aligned}
f(n) &= f(h^u(n)) + u \\
&= f(n - 2u) + u \\
&= f\left(n - 2 \cdot \left\lceil \tfrac{n-5}{2} \right\rceil\right) + \left\lceil \tfrac{n-5}{2} \right\rceil
\end{aligned}
$$

Se n é ímpar

$\left\lceil \dfrac{n-5}{2} \right\rceil = \dfrac{n-5}{2}$ e $n - 2 \cdot \left\lceil \dfrac{n-5}{2} \right\rceil = n - 2 \cdot \dfrac{(n-5)}{2} = 5$

Se n é par

$$\left\lceil \frac{n-5}{2} \right\rceil = \frac{(n-5)+1}{2} = \frac{n-4}{2} \quad \text{e} \quad n-2\left\lceil \frac{n-5}{2} \right\rceil = n-2\cdot\frac{(n-4)}{2}-4$$

Então,

$$n-2\left\lceil \frac{n-5}{2} \right\rceil = 4+(n \bmod 2)$$

Então

$$f(n) = f(4+(n \bmod 2)) + \left\lceil \frac{n-5}{2} \right\rceil$$

Se $f, h : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ e $n_0 \in \mathbb{N}$ e $s : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ tais que

$$f(n) = f(h(n)) + s(n), \text{ p/ todo } n > n_0$$

Então

$$f(n) = f(h^u(n)) + \sum_{i=0}^{u-1} s(h^i(n)), \text{ p/ todo } n \in \mathbb{N}$$

onde

$$u = \min\{k \in \mathbb{N} \mid h^k(n) \leq n_0\}$$

$$\begin{aligned}
f(n) &= f(h(n)) + s(n) \\
&= (f(h(h(n))) + s(h(n))) + s(n) = f(h^2(n)) + s(h(n)) + s(n) \\
&= (f(h(h^2(n))) + s(h^2(n))) + s(h(n)) + s(n) = \\
&\quad f(h^3(n)) + s(h^2(n)) + s(h(n)) + s(h^0(n)) \\
&\quad \vdots \\
&= f(h^u(n)) + \sum_{i=0}^{u-1} s(h^i(n))
\end{aligned}$$

Ex:

Uma expressão aritmética de razão r é uma recorrência $f(n) = f(n-1) + r$, p/ todo $n > n_0$ na notação anterior

$h(n) = n-1$

$h^k(n) = n-k$

$s(n) = r$

Então

$$f(n) = f(n-u) + \sum_{i=0}^{u-1} r = f(n-u) + u.r$$

$$= f(n-(n-n_0)) + (n-n_0).r$$

$h^K(n) \leq n_0$ $\quad = f(n_0) + (n-n_0).r$

$n-K \leq n_0$

$K \geq n-n_0$

$u = n-n_0$

Exercício como ficará $f(n) = m(n).f(h(n))$, $n > n_0$

depois

$$f(n) = m(n)f(h(n)) + s(n), \quad n > 0$$

$$n > n_0$$

"Exercício 44"

29/09/09

Teorema 29: Sejam $n_0 \in \mathbb{N}$, $h: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ e $f, s: \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ tais que

$$f(n) = f(h(n)) + s(n), \text{ p/ todo } n > n_0.$$

Então

$$f(n) = f(h^u(n)) + \sum_{i=0}^{u-1} s(h^i(n)), \text{ p/ todo } n \in \mathbb{N},$$

onde $u = \min\{K \in \mathbb{N} \mid h^K(n) \leq n_0\}$

Prova: Exercício 43.

$f(n) = m(n).f(h(n))$, p/ todo $n > n_0$

$$f(n) = m(n).f(h(n))$$

$$= m(n).\left(m(h(n)).f(h(h(n)))\right) = m(n).m(h(n)).f(h^2(n))$$

$$= m(n)m(h(n)).\left(m(h^2(n))f(h(h^2(n)))\right) = m(n)m(h(n)).m(h^2(n))f(h^3(n))$$

$\vdots$

$$= f(h^u(n)) \cdot \prod_{i=0}^{u-1} m(h^i(n)), \text{ onde } u = \min\{k \in \mathbb{N} \mid h^k(n) \leq n_0\}$$

Ex:

Uma progressão geométrica é uma recorrência da forma $f(n) = r \cdot f(n-1)$, p/ todo $n > n_0$, onde $r \in \mathbb{R}$.

Na notação anterior:

$h(n) = n-1$

$m(n) = r$

Então

$$f(n) = f(h^u(n)) \prod_{i=0}^{u-1} m(h^i(n))$$

$$= f(h^u(n)) \prod_{i=0}^{u-1} r$$

$$= r^u f(h^u(n))$$

$h^k(n) \leq n_0$

$n - k \leq n_0$

$k \geq n - n_0$

E, portanto

$u = n - n_0$

E

$$f(n) = r^{n-n_0} f(h^{n-n_0}(n)) = r^{n-n_0} f(n-(n-n_0)) = f(n_0) r^{n-n_0}$$

Teorema 30: Sejam $n_0 \in \mathbb{N}$, $h: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ e $f, m: \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ tais que $f(n) = m(n) \cdot f(h(n))$, p/ todo $n > n_0$

Então

$$f(n) = f(h^u(n)) \prod_{i=0}^{u-1} m(h^i(n)), \text{ p/ todo } n \in \mathbb{N}$$

onde

$$u = \min\{k \in \mathbb{N} \mid h^k(n) \leq n_0\}$$

Prova: Exercício 44.

$f(n) = m(n) \cdot f(h(n)) + s(n)$, p/ todo $n > n_0$

$$
\begin{aligned}
f(n) &= m(n) \cdot f(h(n)) + s(n) \\
&= m(n) \cdot \left(m(h(n)) \cdot f(h(h(n))) + s(h(n)) \right) + s(n) \\
&= m(n) \cdot m(h(n)) \cdot f(h^2(n)) + m(n) \cdot s(h(n)) + s(n) \\
&= m(n) \cdot m(h(n)) \cdot \left(m(h^2(n)) \cdot f(h(h^2(n))) + s(h^2(n)) \right) + m(n) \cdot s(h(n)) \\
&\quad + s(n) \\
&= m(n) \cdot m(h(n)) \, m(h^2(n)) \cdot f(h^3(n)) + m(n) \cdot m(h(n)) \cdot s(h^2(n)) + \\
&\quad + m(n) \cdot s(h(n)) + s(n) \\
&\vdots \\
&= f(h^u(n)) \cdot \prod_{i=0}^{u-1} m(h^i(n)) + \sum_{i=0}^{u-1} s(h^i(n)) \cdot \prod_{j=0}^{i-1} m(h^j(n))
\end{aligned}
$$

onde

$u = \min\{k \in \mathbb{N} \mid h^k(n) \leq n_0\}$

Teorema 31: Sejam $n_0 \in \mathbb{N}$, $h: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ e $f, m, s: \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ tais que

$$f(n) = m(n) f(h(n)) + s(n), \text{ p/ todo } n > n_0$$

Então

$$f(n) = f(h^u(n)) \prod_{i=0}^{u-1} m(h^i(n)) + \sum_{i=0}^{u-1} s(h^i(n)) \cdot \prod_{j=0}^{i-1} m(h^j(n)),$$

p/ todo $n \in \mathbb{N}$

onde

$u = \min\{k \in \mathbb{N} \mid h^k(n) \leq n_0\}$.

Prova: Exercício 45

Notação: Se A e B são conjuntos, então B^A denota o conjunto das funções $A \to B$.

$\mathbb{C}^{\mathbb{N}} : \{ f : \mathbb{N} \to \mathbb{C} \}$

Definição: Sejam $f, g \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$, definimos $f+g : \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ como sendo a função dada por:

$(f+g)(n) = f(n) + g(n)$

$Z : \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ $\quad -f : \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ $\quad f+g = g+f$ $\quad f+(g+h) = (f+g)+h$

$n \longmapsto 0$ $\quad n \longmapsto -f(n)$

neutro

$(\mathbb{C}^{\mathbb{N}}, +)$ é um grupo comutativo.

Definição: Dados $z \in \mathbb{C}$ e $f \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ definimos a função $zf : \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ como sendo a função dada por:

$(zf)(n) = z \cdot f(n)$

$1f = f$ $\quad (z_1+z_2)f = z_1 f + z_2 f$ $\quad 0f = z$ $\quad z_1 \cdot (f+g) = z_1 f + z_1 g$

E 1 espaço vetorial

Fibonacci $f(n) = f(n-1) + f(n-2)$

$f_1, f_2 : \mathbb{N} \to \mathbb{C}$

$f_1(n) = f_1(n-1) + f_1(n-2)$

$f_2(n) = f_2(n-1) + f_2(n-2)$

$(f_1+f_2)(n) = f_1(n) + f_2(n)$

$= f_1(n-1) + f_1(n-2) + f_2(n-1) + f_2(n-1)$

$= (f_1(n-1) + f_2(n-1)) + (f_1(n-2) + f_2(n-2))$

$= (f_1+f_2)(n-1) + (f_1+f_2)(n-2)$

$Z : \mathbb{N} \to \mathbb{C}$

$n \longmapsto 0$

$z \in \mathbb{C}$

$(zf_1)(n) = z f_1(n)$

$= z(f_1(n-1) + f_1(n-2))$

$= z f_1(n-1) + z f_1(n-2) = (zf_1)(n-1) + (zf_1)(n-2)$

subespaço vetorial

/ /

a dimensão é 2, logo com duas funções independentes obtemos a base $\{b_1, b_2\}$

logo podemos obter os demais vetores do espaço como combinação linear $z_1 b_1 + z_2 b_2$

Base: $f_1(n) = r_1^n$, onde r_1 e r_2 são as raizes
$f_2(n) = r_2^n$ de $x^2 - x - 1$

$f(n) = f(n-1) + f(n-2)$

com

$f(n) = r^n$, p/ algum $r \in \mathbb{C}$

$r^n = r^{n-1} + r^{n-2}$

$r^n - r^{n-1} - r^{n-2} = 0$

$r^{n-2}(r^2 - r - 1) = 0$

$f(n) = c_1 r_1^n + c_2 r_2^n$

na sequência de fibonacci: $f(0) = 0$ e $f(1) = 1$

$0 = c_1 r_1^0 + c_2 r_2^0 = c_1 + c_2 \Rightarrow c_1 = -c_2 = -\frac{1}{r_2 - r_1}$

$1 = c_1 r_1 + c_2 r_2 = c_1 r_1 + c_2 r_2$

$= -c_2 r_1 + c_2 r_2$

$= c_2(r_2 - r_1) \Rightarrow r_2 = \frac{1}{r_2 - r_1}$

$$f(n) = \frac{1}{r_2 - r_1} r_2^n - \frac{1}{r_2 - r_1} r_1^n = \frac{r_2^n - r_1^n}{r_2 - r_1}$$

$r_1 = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$ e $r_2 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$ $\quad r_2 - r_1 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} - \frac{1 - \sqrt{5}}{2} = \frac{2\sqrt{5}}{2} = \sqrt{5}$

$\frac{1}{r_2 - r_1} = \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5}$

$$f(n) = \frac{\sqrt{5}}{5} \cdot \left(\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n \right)$$

Recorrências Lineares Homogêneas

02/10/09

Definição: Uma recorrência linear homogênea é uma recorrência da forma

$$f(n) = a_1 \cdot f(n-1) + a_2 \cdot f(n-2) + \dots a_k \cdot f(n-k),$$

p/ todo $n \geq k$

onde, $a_1, a_2, \dots, a_k \in \mathbb{C}$

Notação: Se A e B são conjuntos, B^A denota o conjunto das funções cujo domínio é A e cujo contradomínio é B, isto é,

$$B^A = \{f : A \to B \mid f \text{ é função}\}$$

Definição: Dadas $f, g \in \mathbb{C}^N$ e $z \in \mathbb{C}$, definimos $f+g \in \mathbb{C}^N$ e $z \cdot f \in \mathbb{C}^N$ como as funções dadas por:

$$(f+g)(n) = f(n) + g(n)$$

$$(zf)(n) = z \cdot f(n), \text{ p/ todo } n \in \mathbb{N}$$

Teorema 32: $(\mathbb{C}^N, +)$ é um conjunto comutativo.

Prova: Exercício 47.

Teorema 33: $(\mathbb{C}^N, +)$ é um espaço vetorial sobre $\mathbb{C}$.

Prova: Exercício 47

Definição: Dados $a_1, \dots, a_k \in \mathbb{C}$, o conjunto das funções $\mathbb{N} \to \mathbb{C}$ que satisfazem a recorrência

$$f(n) = a_1 \cdot f(n-1) + \dots + a_k \cdot f(n-k), \text{ p/ todo } n \geq k$$

é

$$R(a_1, \dots, a_k) = \{f \in \mathbb{C}^N \mid f(n) = a_1 f(n-1) + \dots + a_k f(n-k) \text{ p/ todo } n \geq k\}$$

Teorema 34: O conjunto $R(a_1, \dots, a_k)$ é um subespaço vetorial de $\mathbb{C}^N$, p/ todo $a_1, \dots, a_k \in \mathbb{C}^N$.

Prova: Exercício 48.

Definição: O polinômio característico de $R(a_1, \dots, a_k)$ é o polinômio:

$$X^k - a_1 X^{k-1} - a_2 X^{k-2} - \dots - a_{k-1} X^1 - a_k X^0$$

Teorema 35: $r^n \in R(a_1, \dots, a_k)$ se e somente se r é uma raiz do polinômio característico de $R(a_1, \dots, a_k)$, ou, equivalentemente, $(X - r)$ divide o polinômio característico de $R(a_1, \dots, a_k)$

Ou melhor

Teorema 35: $n^m \cdot r^n \in R(a_1, \dots, a_k)$ se e somente se r é uma raiz de multiplicidade maior que m, ou, equivalentemente $(X - r)^{m+1}$ divide o polinômio característico de $R(a_1, \dots, a_k)$.

Corolário 36: Se $r \in \mathbb{C}$ é uma raiz de multiplicidade m do polinômio característico de $R(a_1, \dots, a_k)$ então o conjunto, $\{ n^j r^n \mid 0 \leq j < n \}$ é linearmente independente em $R(a_1, \dots, a_k)$

Corolário 37: Sejam $r_1, \dots, r_l \in \mathbb{C}$ as distintas raízes do polinômio característico de $R(a_1, \dots, a_k)$, com multiplicidades $m_1, \dots, m_l$, respectivamente. Então, o conjunto $\{ n^j r_i^n \mid 1 \leq i \leq l \text{ e } 0 \leq j \leq m_i \}$ é uma base de $R(a_1, \dots, a_k)$

grau do P.C.

Corolário 38: Se $f: \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ satisfaz

$f(n) = a_1 \cdot f(n-1) + \dots + a_k f(n-k)$, p/ todo $n \geq k$

então $f(n) = \sum_{i=1}^{l} \sum_{j=0}^{m_i - 1} c_{ij} \, n^j \cdot r_i^n$, p/ todo $n \in \mathbb{N}$

onde r_i: $1 \leq i \leq l$ são as raízes distintas de
$$X^k - a_1 X^{k-1} - \dots - a_{k-1} X - a_k$$

m_i: é a multiplicidade de r_i.

$\{c_{ij} \in \mathbb{C} \mid 1 \leq i \leq l$ e $0 \leq j \leq m_i\}$ é a solução do sistema linear dado por:
$$f(a) = \sum_{i=1}^{l} \sum_{j=0}^{m_i - 1} c_{ij}\, a^j \cdot r_i^a, \quad 0 \leq a < k.$$

Ex: $f(n) = f(n-1) + f(n-2)$, p/ todo $n \geq 2$
com $f(0) = 0$ e $f(1) = 1$.

Usando a notação do corolário 38:
$K = 2$
$f(n) \in R(1,1)$
Uma base de $R(1,1)$ é $\{n^j r_i^n \mid 1 \leq i \leq l,\ 0 \leq j < m_i\}$
onde $r_1, \dots, r_l$ são as raízes distintas do polinômio característico de $R(1,1)$ e $x^2 - x - 1$
e tem duas raízes distintas, r_1 e r_2
de multiplicidades $m_1 = 1$ e $m_2 = 1$, respectivamente
Portanto uma base de $R(1,1)$ é
$\{n^j r_i^n \mid 1 \leq i \leq 2,\ 0 \leq j < m_i\} = \{n^j r_1^n, 0 \leq j < 1\} \cup \{n^j r_2^n, 0 \leq j < 1\} = \{n^0 r_1^n\} \cup \{n^0 r_2^n\} = \{r_1^n, r_2^n\}$

E
$$f(n) = \sum_{i=1}^{l} \sum_{j=0}^{m_i - 1} c_{ij}\, n^j r_i^n$$
$$= \sum_{i=1}^{2} \sum_{j=0}^{m_i - 1} c_{ij}\, n^j r_i^n$$
$$= \sum_{j=0}^{m_1 - 1} c_{1j}\, n^j r_1^n + \sum_{j=0}^{m_2 - 1} c_{2j}\, n^j r_2^n$$

$= c_{10} \cdot n^0 \cdot r_1^n + c_{20} n^0 \cdot r_2^n = c_{10} r_1^n + c_{20} r_2^n$

onde c_{10} e c_{20} são a solução do sistema

$$f(a) = \sum_{i=1}^{2} \sum_{j=0}^{m_i - 1} c_{ij} n^j r_i^n, \quad 0 \leq a < k$$

ou seja

$$f(a) = \sum_{i=1}^{2} \sum_{j=0}^{m_i - 1} c_{ij} n^j r_i^n, \quad 0 \leq a < k$$

ou seja

$f(0) = c_{10} r_1^0 + c_{20} r_2^0$

$f(1) = c_{10} r_1^1 + c_{20} r_2^1$

isto é

$0 = c_{10} + c_{20}$

$1 = c_{10} r_1 + c_{20} r_2$

cuja solução é $c_{10} = \dfrac{1}{r_2 - r_1}$ e $c_{20} = -\dfrac{1}{r_2 - r_1}$

onde $r_1 = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ e $r_2 = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$

E, portanto, $f(n) = \dfrac{1}{r_2 - r_1} \cdot \left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \dfrac{1}{r_2 - r_1} \cdot \left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$

$= \dfrac{\sqrt{5}}{2} \left(\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n \right)$, p/ todo $n \in \mathbb{N}$

Definição: A multiplicidade de uma raiz r de um polinômio P é o maior inteiro m tal que $(X-r)^m$ divide P.

Ex: $P = (x-1)^2 = x^2 - 2x + 1$

$\dfrac{x^2 - 2x + 1}{x - 1} = x - 1$, $\dfrac{x-1}{x-1} = 1$

Ex 2: $f(n) = 6f(n-1) - 13f(n-2) + 19f(n-3) - 14f(n-4) + 4f(n-5)$
p/ todo $n \geq 5$

P dinômio característico

$x^5 - 6x^4 + 13x^3 - 19x^2 + 14x - 4 = (x-3)^3 (x-2)^2$

Terminar até o sistema linear

06/10/09 Recorrências lineares não Homogêneas

Definição: Uma recorrência linear não homogênea é uma recorrência da forma

$f(n) = a_1 f(n-1) + a_2 f(n-2) + \dots + a_k f(n-k) + g(n)$,

onde

$g: \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ é uma função

Teorema 39: Sejam $f, g: \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ e $a_1, \dots, a_k \in \mathbb{C}$ tais que

$f(n) = a_1 f(n-1) + \dots + a_k f(n-k) + g(n)$, p/ todo $n \geq k$.

Se g satisfaz uma recorrência linear homogênea cujo polinômio característico é G, então f satisfaz uma recorrência linear homogênea cujo polinômio característico é $G(x^k - a_1 x^{k-1} - \dots - a_{k-1} x - a_k)$

Ex:

$f(n) = f(n-1) + f(n-2) + 1$, p/ todo $n \geq 2$

Usando a notação do Teorema 39 temos

$K = 2$, $a_1 = 1$, $a_2 = 1$, $g(1) = 1$

$\begin{cases} g(0) = 1 \\ g(n) = g(n-1) \\ G = (x-1) \end{cases}$ ou $\begin{array}{l} n^t r^n = 1 \\ t = 0 \\ r = 1 \\ n^0 \cdot 1^n = 1 \end{array}$ $(x-r)^{t+1}$

$(x-1)$

Então f satisfaz uma R.L.H cujo P.C é

$$G.(x^2-x-1) = (x-1).(x^2-x-1)$$
$$= (x-1).(x-r_1).(x-r_2)$$

onde

$$r_1 = \frac{1-\sqrt{5}}{2} \quad e \quad r_2 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

Então,

$$f(n) = c_{10}.1^n + c_{20}.r_1^n + c_{30}r_2^n, \text{ p/todo } n \in \mathbb{N}$$

onde c_{10}, c_{20} e c_{30} são dados por

$$f(0) = c_{10}1^0 + c_{20}r_1^0 + c_{30}r_2^0$$
$$f(1) = c_{10}1^1 + c_{20}r_1^1 + c_{30}r_2^1$$
$$f(2) = c_{10}1^2 + c_{20}r_1^2 + c_{30}r_2^2$$

ou seja

$$f(0) = c_{10} + c_{20} + c_{30}$$
$$f(1) = c_{10} + c_{20}.r_1 + c_{30}r_2$$
$$f(1) + f(0) + 1 = c_{10} + c_{20}r_1^2 + c_{30}r_2^2$$

Para $f(0) = 0$ e $f(1) = 1$

Temos

$$\begin{aligned} 0 &= c_{10} + c_{20} + c_{30} \\ 1 &= c_{10} + c_{20}r_1 + c_{30}r_2 \\ 2 &= c_{10} + c_{20}r_1^2 + c_{30}r_2^2 \end{aligned} \quad \left\{ \begin{aligned} c_{10} &= -(c_{20} + c_{30}) \\ 1 &= -(c_{20} + c_{30}) + c_{20}r_1 + c_{30}r_2 \\ 2 &= -(c_{20} + c_{30}) + c_{20}r_1^2 + c_{30}r_2^2 \end{aligned} \right.$$

$$1 = c_{20}.\left(-1 + \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) + c_{30}.\left(-1 + \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$$

$$1 = c_{20}.\left(\frac{-1-\sqrt{5}}{2}\right) + c_{30}.\left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)$$

$$c_{20} = 1 - c_{30}.\left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)$$

$$r_1^2 = \frac{1-2\sqrt{5}+5}{4} = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$$

$$r_2^2 = \frac{1+2\sqrt{5}+5}{4} = \frac{3+\sqrt{5}}{2}$$

$$2 = -\left(1 - \left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right) \cdot C_{30} + C_{30}\right) + \left(\left(1 - \left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right) C_3\right) \cdot \frac{1-2\sqrt{5}+5}{4}\right)$$

$$+ \frac{1+2\sqrt{5}+5}{4} \cdot C_{30}$$

Cuja Solução é $C_{10} = ?$ $C_{20} = ?$ $C_{30} = ?$

Corolário 40: Se existem $K \in \mathbb{N}$ e $r \in \mathbb{C}$ tais que $f(n) = n^k r^n$, p/ todo $n \in \mathbb{N}$.
então f satisfaz uma recorrência linear homogênea cujo polinômio característico é múltiplo de $(x-r)^{k+1}$

$$S(n) = \sum_{i=0}^{n} f(i)$$

$$S(n) = \sum_{i=0}^{n} f(i) = \sum_{i=0}^{n-1} f(i) + f(n)$$

$$= S(n-1) + f(n)$$

$$\sum_{i=0}^{n} i^3 = \sum_{i=0}^{n-1} i^3 + n^3 = n^3 = n^k \cdot r^n$$

$$= n^3 \cdot 1^n$$

$$S(n) = S(n-1) + n^3$$

$$S(n) - S(n-1) = f(n)$$

$$(x-1)^{3+1}$$

Se f satisfaz uma RLH cujo P.C. é F então $S(n)$ satisfaz uma R.L.H. cujo P.C. $F(x-1)$

Ex:

$$S(n) = \sum_{i=0}^{n} i^2$$

$f(n) = n^2$ satisfaz um RLH cujo PC é $(x-1)^3$

Então

$$S(n) = C_{10} 1^n + C_{11} n 1^n + C_{12} n^2 \cdot 1^n$$

$$= C_{10} + C_{11} n + C_{12} n^2$$

onde C_{10}, C_{11} e C_{12} são dados por

$$S(0) = C_{10} + C_{11} \cdot 0 + C_{12} \cdot 0^2$$

$$S(1) = C_{10} + C_{11} \cdot 1 + C_{12} \cdot 1^2$$

$$S(2) = C_{10} + C_{11} \cdot 2 + C_{12} \cdot 2^2$$

isto é $0 = c_{10}$

$1 = c_{10} + c_{11} + c_{12}$

$5 = c_{10} + 2c_{11} + 4c_{12}$

isto é

$c_{11} + c_{12} = 1$ $\quad$ $c_{11} = -\frac{1}{2}$ e $c_{12} = \frac{3}{2}$

$2c_{11} + 4c_{12} = 5$

Então

$S(n)$ satisfaz uma RLH cujo P.C $(x-1)^3 \cdot (x-1) = (x-1)^4$

e então

$S(n) = c_{10} \cdot 1^n + c_{11} \cdot n \cdot 1^n + c_{12} \cdot n^2 \cdot 1^n + c_{13} \cdot n^3 \cdot 1^n$

$= c_{10} + c_{11} \cdot n + c_{12} \cdot n^2 + c_{13} \cdot n^3$

onde $c_{11}, c_{12}, c_{13}, c_{10}$ são dados por

$S(0) = c_{10} + c_{11} \cdot 0 + c_{12} \cdot 0 + c_{13} \cdot 0$

$S(1) = c_{10} + c_{11} \cdot 1 + c_{12} \cdot 1^2 + c_{13} \cdot 1^3$

$S(2) = c_{10} + c_{11} \cdot 2 + c_{12} \cdot 2^2 + c_{13} \cdot 2^3$

$S(3) = c_{10} + c_{11} \cdot 3 + c_{12} \cdot 3^2 + c_{13} \cdot 3^3$

E, portanto

$c_{10} = 0$, $c_{11} = \frac{1}{6}$, $c_{12} = \frac{1}{2}$ e $c_{13} = \frac{1}{3}$

Entao,

$$\sum_{i=0}^{n} i^2 = \frac{1}{6} \cdot n + \frac{1}{2} \cdot n^2 + \frac{1}{3} \cdot n^3 = \frac{n(2n^2 + 3n + 1)}{6}$$

Exercícios 51 à 58

09/10/09

Teorema 40: Sejam $f: \mathbb{N} \to \mathbb{C}$, $k \in \mathbb{N}$ e $r \in \mathbb{C}$ tais que $f(n) = n^k r^n$, p/ todo $n \in \mathbb{N}$.

Então f satisfaz uma recorrência linear homogênea cujo polinômio característico é

$$(X - r)^{k+1}$$

Corolário 41: Se $f: \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ satisfaz uma recorrência linear homogênea cujo polinômio característico é P,

Então $\sum_{i=0}^{n} f(i)$

satisfaz uma recorrência linear homogênea cujo polinômio característico é $P(X-1)$

Prova:

Seja $f: \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ tal que f satisfaz uma R.L.H. cujo P.C. é P, e seja $s: \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ dada por

$$s(n) = \sum_{i=0}^{n} f(i)$$

Observe que
$$s(n) = \sum_{i=0}^{n} f(i)$$
$$= \sum_{i=0}^{n-1} f(i) + f(n)$$
$$= s(n-1) + f(n)$$

E, portanto, s satisfaz a R.L.N.H.

$$s(n) = s(n-1) + f(n)$$

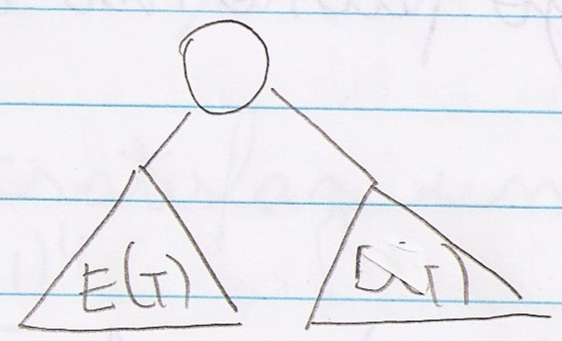
E daí (Teorema 39) s satisfaz uma R.L.H. cujo P.C. é $P(X-1)$ $\blacksquare$

13/10/09

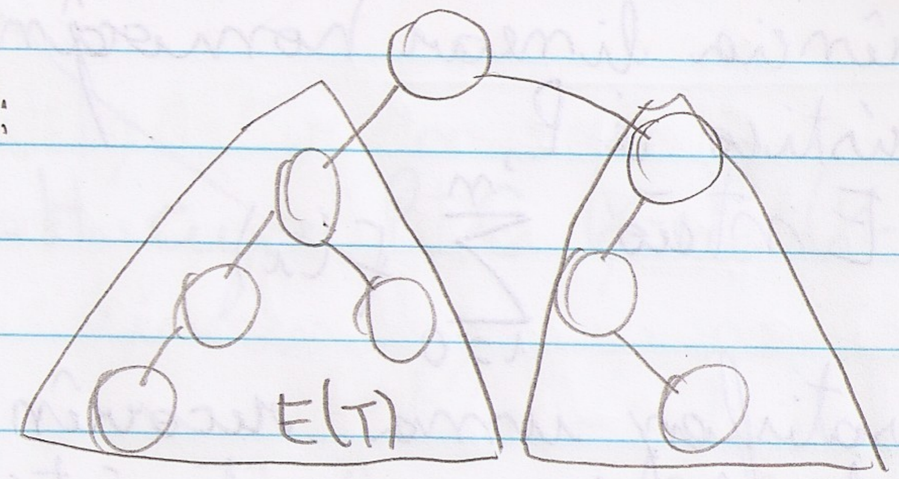
Árvores Binárias

Uma árvore binária T é uma árvore vazia (denotada por λ) ou é um par $(E(T), D(T))$ onde $E(T)$ e $D(T)$ são árvores, denominadas subárvore esquerda e subárvore direita de T

T:



T:



O tamanho de uma árvore T é

$$|T| = \begin{cases} 0, & \text{se } T = \lambda \\ |E(T)| + |D(T)| + 1, & \text{se } T \neq \lambda \end{cases}$$

A altura de T é

$$h(T) = \begin{cases} 0, & \text{se } T = \lambda \\ \max\{h(E(T)), h(D(T))\} + 1, & \text{se } T \neq \lambda \end{cases}$$

Ao usar uma árvore como estrutura de dados, o tamanho da árvore é o número de objetos armazenados na estrutura e a altura da árvore é o número máximo de comparações para recuperar um objeto na estrutura.

Vamos examinar a relação entre altura e tamanho das árvores.

Vamos definir, p/ todo $n \in \mathbb{N}$,

$h^-(n)$: A menor altura possível para uma árvore de tamanho n.

$h^+(n)$: A maior altura possível para uma árvore de tamho n.

isto é,

$$h^-(n) = \min\{h(T) \mid |T| = n\}$$
$$h^+(n) = \max\{h(T) \mid |T| = n\}$$

E, portanto

$$|T| = n \Rightarrow h^-(n) \leq h(T) \leq h^+(n), \text{ p/ toda } T \in B.$$

onde B é o conjunto de todas as árvores binárias.

ou equivalentemente,

$$h^-(|T|) \leq h(T) \leq h^+(|T|), \text{ p/ toda } T \in B.$$

Para todo $n > 0$

$$\begin{aligned} h^+(n) &= \max\{h(T) \mid |T| = n\} \\ &= \max\{\max\{h(E(T)), h(D(T))\} + 1 \mid |T| = n\} \\ &= 1 + \max\{h(E(T))\, h(D(T)) \mid |T| = n\} \\ &= 1 + \max\{h(T) \mid |T| < n\} \\ &= 1 + \max\{h^+(k) \mid k < n\} \\ &= 1 + h^+(n-1) \end{aligned}$$

Em resumo, h^+ satisfaz

$$h^+(n) = h^+(n-1) + 1, \text{ p/ todo } n > 0$$

Resolvendo

Então,

$$h^+(n) = h^+(f^u(n)) + \sum_{i=0}^{u-1} s(f^i(n))$$

onde

$$s(n) = 1 \qquad u = \min\{k \in \mathbb{N} \mid f^k(n) \leq 0\}$$

$$f(n) = n - 1$$

E, portanto

$$u = n \qquad f^u(n) = n - n = 0$$

E, $h^+(n) = h^+(0) + \sum_{i=0}^{n-1} 1$

Resolvendo de outra forma,

$h^+(n) = 1h^+(n) + n^0 . 1^n$, p/ todo $n > 0$

Então, h^+ satisfaz uma RLH, cujo P.C. é

$$(x-1).(x-1)^{0+1} = (x-1)^2$$

E portanto,

$$h^+(n) = c_{10} n^0 . 1^n + c_{11} n^1 1^n$$

$$= c_{10} + c_{11} . n$$

onde c_{10} e c_{11} são a solução de

$$h^+(0) = c_{10} + c_{11} . 0$$

$$= c_{10} + c_{11} . 1$$

isto é

$$0 = c_{10}$$

$$1 = c_{10} + c_{11} = c_{11}$$

E, portanto,

$$h^+(n) = c_{10} + c_{11} = 0 + 1n = n, \text{ p/ todo } n \geq 0.$$

E, portanto

$$h^+(n) = n, \text{ p/ todo } n \in \mathbb{N}$$

E, consequentemente,

$$h(T) \leq h^+(|T|) = |T|, \text{ p/ toda } T \in B.$$

Sejam $t^-(n)$: menor tamanho possível p/ uma árvore de altura n.

$t^+(n)$: maior tamanho possível p/ uma árvore de altura n.

ou seja,

$$t^-(n) = \min\{|T| \mid h(T) = n\}$$

$$t^+(n) = \max\{|T| \mid h(T) = n\}$$

Então

$$h(T) = n \Rightarrow t^-(n) \leq |T| \leq t^+(n)\} \text{ p/ toda } T \in B.$$

ou equivalentemente

$$t^-(h(T)) \leq |T| \leq t^+(h(T)), \text{ p/ toda } T \in B.$$

p/ todo $n > 0$

$$
\begin{aligned}
t^+(n) &= \max\{|T| \mid h(T) = n\} \\
&= \max\{|E(T)| + |D(T)| + 1, \mid h(T) = n\} \\
&= 1 + \max\{|E(T)| + |D(T)| \mid h(T) = n\} \\
&= 1 + \max\{|T| + |T|, \mid h(T) < n\} \\
&= 1 + \max\{2 \cdot |T|, \mid h(T) < n\} \\
&= 1 + 2 \cdot \max\{|T|, \mid h(T) < n\} \\
&= 1 + 2 \max\{t^+(k) \mid k < n\} \\
&= 1 + 2 \cdot t^+(n-1)
\end{aligned}
$$

Em resumo,

t^+ satisfaz

$$t^+(n) = 2t^+(n-1) + 1, \text{ p/ todo } n > 0$$

Resolvendo por iteração

Então,

$$
\begin{aligned}
t^+(n) &= 2^n t^+(0) + 2^n - 1 \\
&= 2^n - 1
\end{aligned}
$$

Resolvendo de outra forma

$$t^+(n) = 2t^+(n-1) + n^0 \cdot 1^n$$

então t^+ satisfaz uma RLH cujo P.C. é

$$(x-2) \cdot (x-1)$$

E, portanto

$$
\begin{aligned}
t^+(n) &= c_{10} \cdot n^0 \cdot 1 + c_{20} \cdot n^0 \cdot 2^n \\
&= c_{10} + c_{20} \cdot 2^n
\end{aligned}
$$

onde c_{10} e c_{20} são a solução de

$$
\begin{cases}
t^+(0) = c_{10} + c_{20} \cdot 2^0 \\
t^+(0) = c_{10} + c_{20} \cdot 2^1
\end{cases}
$$

isto é

$$
\begin{aligned}
0 &= c_{10} + c_{20} \\
1 &= c_{10} + 2c_{20}
\end{aligned}
\qquad
\begin{aligned}
c_{10} &= -1 \\
c_{20} &= 1
\end{aligned}
$$

Então

$$t^+(n) = -1 + 1 \cdot 2^n = 2^n - 1$$

Consequentemente

$$h(t) \leq |T| \leq t^+(h(T)) \leq 2^{h(T)} - 1$$

E, portanto

$$h(T) \leq |T| \leq 2^{h(t)} - 1, \text{ p/ toda } T \in B.$$

Consequentemente, como

$$|T| \leq 2^{h(t)} - 1 \leq 2^{|T|} - 1$$

Então

$$|T| + 1 \leq 2^{h(T)}$$

ou seja

$$\lg |T| + 1 \leq h(T)$$

ou seja

$$h(T) \geq \lg |T| + 1$$

Como $h(T)$ é inteiro,

$$h(T) \geq \lceil \lg |T| + 1 \rceil$$
$$= \lfloor \lg |T| + 1 \rfloor + 1$$

} exercícios 15 e 16

ou seja

$$h(T) \geq \lfloor \lg |T| \rfloor + 1, \text{ p/ toda } T \in B.$$

ou seja

$$\lfloor \lg |T| \rfloor + 1 \leq h(T)$$

ou seja,

$$0 < \frac{\lfloor \lg |T| \rfloor + 1}{h(T)} \leq 1$$

→ melhor a árvore

Seja

$$e(T) = \frac{\lfloor \lg |T| \rfloor + 1}{h(T)}$$

Ex: árvore com $e(T) \leq 1\%$

Árvores AVL

16/10/09

AVL é o conjunto das árvores binárias T satisfazendo

1) $T = \lambda$

ou

2) $E(T) \in D(T) \in AVL$

3) $|h(E(T)) - h(D(T))| \leq 1$

Dizemos que <u>T é AVL</u> se $T \in AVL$

Seja $t^-(n)$ o menor tamanho possível para uma árvore AVL de altura n, isto é,

$$t^-(n) = \min\{|T| \mid T \in AVL \text{ e } h(T) = n\}$$

Então

$$h(T) = n \Rightarrow t^-(n) \leq |T|, \text{ p/ toda } T \in AVL$$

ou seja

$$t^-(h(T)) \leq |T|, \text{ p/ toda } T \in AVL.$$

Então, se $n > 0$

$$\begin{aligned}
t^-(n) &= \min\{|T| \mid T \in AVL \text{ e } h(T) = n\} \\
&= \min\{|E(T)| + |D(T)| + 1 \mid T \in AVL \text{ e } h(T) = n\} \\
&= 1 + \min\{|E(T)| + |D(T)| \mid T \in AVL \text{ e } h(T) = n\} \\
&= 1 + \min\{|T| \mid T \in AVL \text{ e } h(T) = n-1\} + \min\{|T| \mid T \in AVL \text{ e } h(T) = n-2\} \\
&= 1 + t^-(n-1) + t^-(n-2)
\end{aligned}$$

Em resumo

$$t^-(n) = t^-(n-1) + t^-(n-2) + 1$$

E portanto t^- satisfaz um RLH-cujo PC é

$$\underbrace{(x^2 - x - 1)}_{\text{parte homogênea}} \cdot \underbrace{(x - 1)}_{\text{não homogênea} \to n^0 \cdot 1^n}$$

E, portanto

$$\begin{aligned}
t^-(n) &= c_{10} \cdot r_1^n + c_{20} \cdot r_2^n + c_{30} \cdot 1^n \\
&= c_{10} \cdot r_1^n + c_{20} \cdot r_2^n + c_{30}
\end{aligned}$$

onde $r_1 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ e $r_2 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$

e c_{10}, c_{20}, c_{30} são a solução do sistema

$t^-(0) = c_{10} \cdot r_1^0 + c_{20} \cdot r_2^0 + c_{30}$

$t^-(1) = c_{10} \cdot r_1^1 + c_{20} \cdot r_2^1 + c_{30}$

$t^-(2) = c_{10} \cdot r_1^2 + c_{20} \cdot r_2^2 + c_{30}$

isto é

$0 = c_{10} + c_{20} + c_{30}$

$1 = c_{10} \cdot r_1 + c_{20} \cdot r_2 + c_{30}$

$2 = c_{10} \cdot r_1^2 + c_{20} \cdot r_2^2 + c_{30}$

e

$c_{10} = \frac{5 - 3\sqrt{5}}{10}$, $c_{20} = \frac{5 + 3\sqrt{5}}{10}$ e $c_{30} = -1$

E portanto

$$t^-(n) = \left(\frac{5 - 3\sqrt{5}}{10}\right) \cdot \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n + \left(\frac{5 + 3\sqrt{5}}{10}\right) \cdot \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - 1$$

Por conveniência, vamos escrever

$t^-(n) = c_1 \cdot r_1^n + c_2 r_2^n - 1$

onde

$c_1 = c_{10} = \frac{5 - 3\sqrt{5}}{10}$ e $c_2 = c_{20} = \frac{5 + 3\sqrt{5}}{10}$

Observe que

$|r_2| = \left|\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right| > \frac{1+2}{2} = \frac{3}{2} > 1$

e

$|r_1| = \left|\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right| < \left|\frac{1-2}{2}\right| < 1$

E, portanto

$\lim r_1^n = 0$

$\lim r_2^n = \infty$

E então

$$t^-(n) = c_1 r_1^n + c_2 r_2^n - 1 \qquad \lim = 0$$

$$= c_2 r_2^n \cdot \left(1 - \frac{1 - c_1 r_1^n}{c_2 r_2^n}\right)$$

$$= r_2^n \cdot f(n)$$

onde

$$f(n) = c_2 \cdot \left(1 - \frac{1 - c_1 r_1^n}{c_2 r_2^n}\right)$$

Observe que

$$\lim f(n) = c_2 > 1$$

Então

$$t^-(n) = r_2^n \cdot f(n)$$

Como

$t^-(h(T)) \leq |T|$, p/ toda $T \in AVL$

então

$r_2^n f(n) \leq |T|$, p/ toda $T \in AVL$

E portanto, p/ toda $T \in AVL$

$$\lg(r_2^{h(T)} f(h(T))) \leq \lg |T|$$

ou seja

$$h(T) \lg r_2 + \lg f(h(T)) \leq \lg |T|$$

E portanto

$$h(T) \cdot \left(\lg r_2 + \frac{\lg f(h(T))}{h(T)}\right) \leq \lg |T|$$

ou seja

$$h(T) \leq \frac{1}{\lg r_2 + \frac{\lg f(h(T))}{h(T)}} \cdot \lg |T|$$

Preciso de

$$\frac{\lg f(h(T))}{h(T)} \geq 0$$

ou seja $\lg f(h(T)) \geq 0$

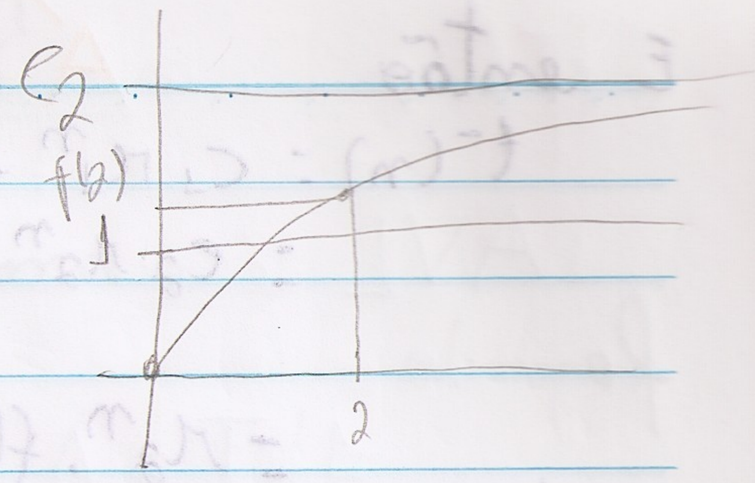
ou seja $f(h(T)) \geq 1$

Preciso

$$f(n) \geq 1$$

onde

$$f(n) = c_2\left(1 - \frac{1 - c_1 r_1^n}{c_2 r_2^n}\right)$$



Como $f(n)$ é crescente,
então

$$f(n) \geq f(K), \text{ p/ todo } n \geq K$$

Então

$$f(n) \geq f(2) > 1, \text{ p/ todo } n \geq 2$$

ou Melhor

Como f é crescente temos

$$f(n) \geq f(2), \text{ p/ todo } n \geq 2$$

Como $f(2) > 1$

Então

$$f(n) > 1, \text{ p/ todo } n \geq 2$$

E, consequentemente, p/ todo $n \geq 2$

$$\lg f(n) > 0$$

E, portanto

$$\frac{\lg f(n)}{n} > 0$$

E, portanto

$$\lg r_2 + \frac{\lg f(n)}{n} > \lg r_2$$

E, portanto

$$\frac{1}{\lg r_2 + \frac{\lg f(2)}{n}} < \frac{1}{\lg r_2}$$

Então, se $T \in AVL$ e $h(T) \geq 2$

Temos

$$h(T) \leq \frac{1}{\lg r_2 + \frac{\lg f(h(T))}{h(T)}} \cdot \lg |T|$$

$$< \frac{1}{\lg r_2} \cdot \lg|T|$$

$$= \frac{1}{\lg \frac{1+\sqrt{5}}{2}} \cdot \lg|T| = \frac{1}{\lg(1+\sqrt{5})-1} \cdot \lg|T|$$

$$< 1.4405 \lg|T|$$

Então p/ toda árvore AVL A de altura maior ou igual a 2 temos $h(A) < 1,4405 \lg|A|$

Como

$h(T) \geq \lfloor \lg|T| \rfloor + 1$, p/ toda árvore binária

Então, se $|A| = |T| = n$

$$\frac{h(A)}{h(T)} < \frac{1.4405 \cdot \lg n}{\lfloor \lg n \rfloor + 1}$$

$$< 1.4405$$

ou seja

$$h(A) < 1,4405 \cdot h(T)$$

Então, a altura de uma árvore AVL nunca ultrapassa 44,05% da altura da árvore binária de menor altura possível com o mesmo tamanho.

23/10/09

Notação Assintótica

```
E(x, n)
1:   r ← 1
2:   enquanto n > 0
3:       n ← n-1
4:       r ← r.X
5:   Devolva r
```

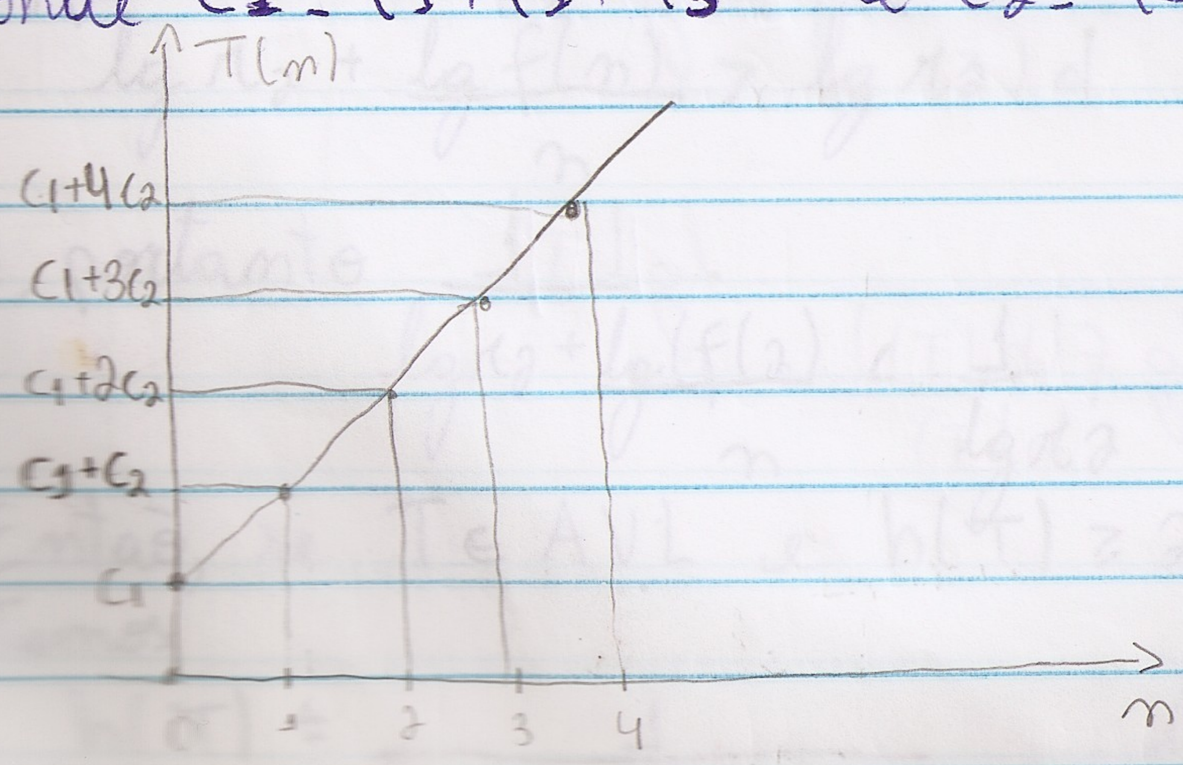
Qual o tempo de execução de E(x,n)?

t_1: tempo p/ execução da linha 1
t_2: " " " " " 2
t_3: " " " " " 3
t_4: " " " " " 4
t_5: " " " " " 5
$T(n)$: " " " de E(x,n)

Então,

$$T(n) = t_1 + t_2 + (t_3 + t_4 + t_2).n + t_5$$
$$= (t_1 + t_2 + t_5) + (t_3 + t_4 + t_2).n$$
$$= c_1 + c_2.n$$

onde $c_1 = t_1 + t_2 + t_5$ e $c_2 = t_3 + t_4 + t_2$



$E'(x, n)$

1: $r \leftarrow 1$

2: enquanto $n > 0$

3: Se n é ímpar
$r \leftarrow r \cdot x$

4: $n \leftarrow \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$

5: $x \leftarrow x \cdot x$

6: Devolva r

Qual o tempo de execução de $E'(x, n)$?

t'_1: tempo p/ execução da linha 1

t'_2: " " " " " 2

t'_3: " " " " " 3

t'_4: " " " " " 4

t'_5: " " " " " 5

t'_6: " " " " " 6

$T'(n)$: " " " " de $E'(x, n)$

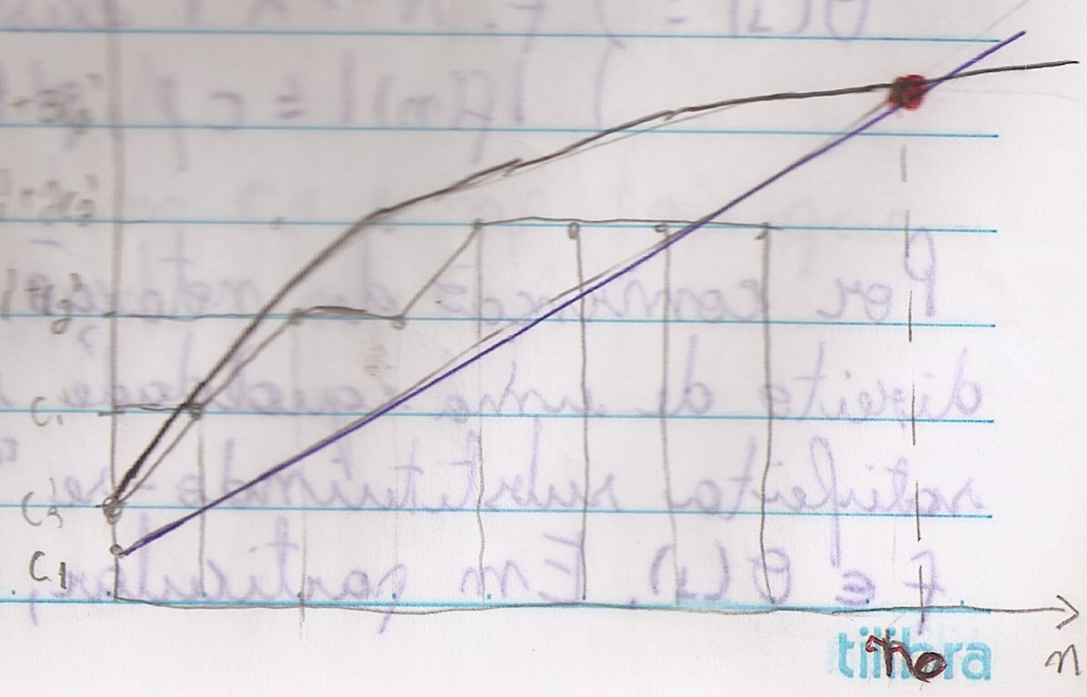
Então:

$$T'(n) = t'_1 + t'_2 + (t'_3 + t'_4 + t'_5 + t'_2) \cdot (\lfloor \lg n \rfloor + 1) + t'_6$$
$$= (t'_1 + 2t'_2 + t'_6 + t'_3 + t'_4 + t'_5) + (t'_2 + t'_3 + t'_4 + t'_5) \cdot \lfloor \lg n \rfloor$$
$$= c_1 + c_2 \lfloor \lg n \rfloor$$

onde, $c_1 = t'_1 + 2t'_2 + t'_6 + t'_3 + t'_4 + t'_5$

$c'_2 = t'_2 + t'_3 + t'_4 + t'_5$

$c'_3 = t'_1 + t'_2 + t'_6$



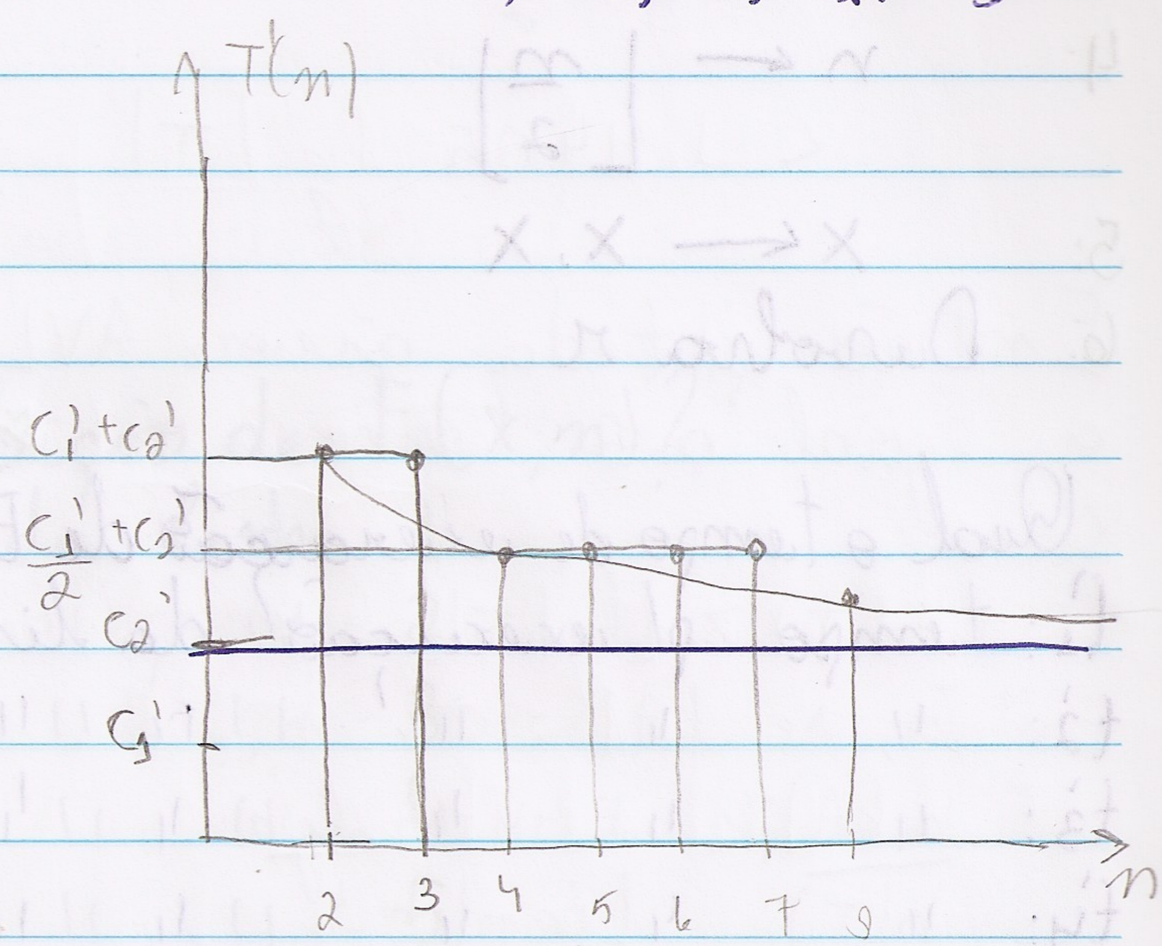
$T(n) < T'(n)$

$T(n) > T'(n)$

Existe $\underline{n_0} \in \mathbb{N}$ tal que $T'(n) \leq T(n)$, p/ todo $n \geq n_0$ quaisquer que sejam os valores de $c_1, c_2, c_1', c_2', c_3'$

Isto é,

$$\lim \frac{T'(n)}{T(n)} = 0$$



$$T'(n) = c_1' + c_2' \lfloor \lg n \rfloor$$

$$\frac{T'(n)}{\lfloor \lg n \rfloor} = \frac{c_1'}{\lfloor \lg n \rfloor} + c_2'$$

$$\lim \frac{T'(n)}{\lfloor \lg n \rfloor} = c_2'$$

27/10/09

Definição: Uma função $f: \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ é assintoticamente limitada superiormente por uma constante se existem $c_f > 0$ e $n_f \in \mathbb{N}$ tais que

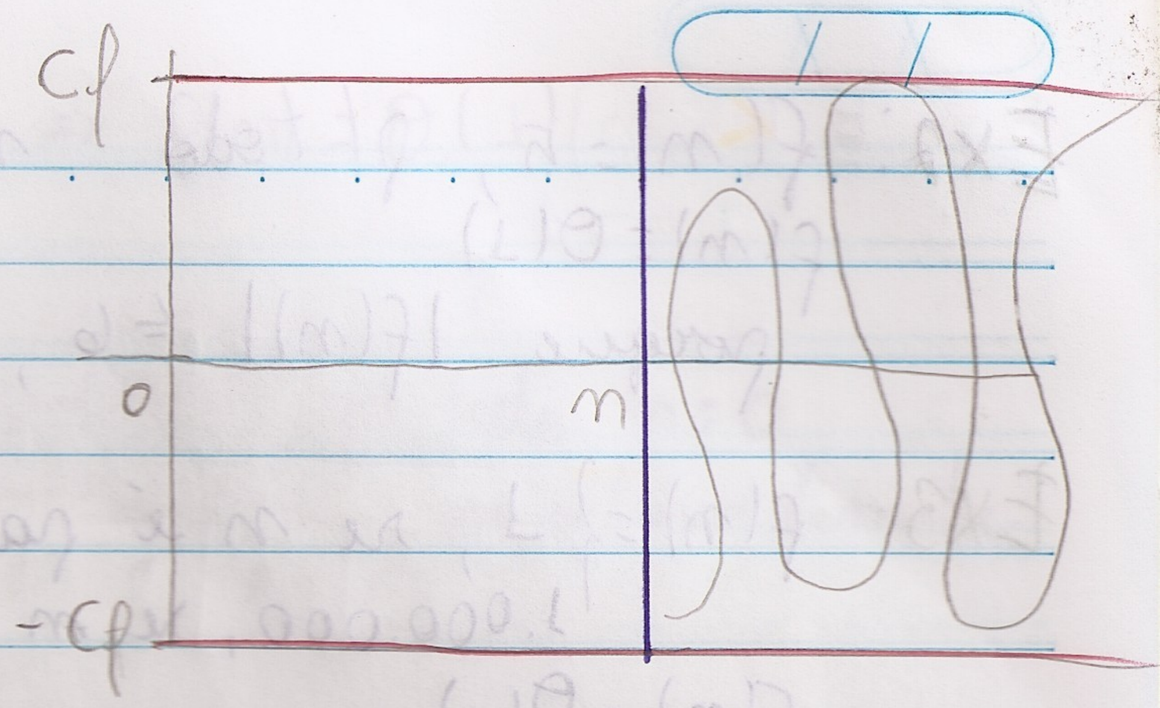
$$|f(n)| \leq c_f, \text{ p/ todo } n \geq n_f$$

O conjunto da funções assintoticamente limitadas superiormente por uma constante é denotado por $O(1)$, isto é,

$$O(1) = \left\{ f: \mathbb{N} \to \mathbb{R} \mid \text{existem } c_f > 0,\ n_f \in \mathbb{N} \mid |f(n)| \leq c_f, \text{ p/ todo } n \geq n_f \right\}$$

Por convenção de notação o uso de $O(1)$ do lado direito de uma igualdade significa que a igualdade é satisfeita substituindo-se "$O(1)$" por alguma $f \in O(1)$. Em particular, é mais comum escrever

$f(n) = \Theta(1)$
em vez de
$f(n) \in \Theta(1)$



Ex: $\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i} = \ln n + \Theta(1)$

Existe $f: \mathbb{N} \to \mathbb{R}$

1. $f(n) \in \Theta(1)$
2. $\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i} = \ln n + f(n)$

Por convenção de notação, o uso de $\Theta(1)$ do lado esquerdo de uma igualdade significa que a igualdade é satisfeita substituindo-se "$\Theta(1)$" por qualquer $f \in \Theta(1)$

Ex: $\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i} = \ln n + \Theta(1)$ ✓

p/ algum $f \in \Theta(1)$

$\ln n + \Theta(1) = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i}$ ✗

p/ todo $f \in \Theta(1)$

Exemplo:

$f(n) = 0$, p/ todo $n \in \mathbb{N}$

$f(n) = \Theta(1)$ porque existem c_f e n_f tais que

$|f(n)| \leq c_f$, p/ todo $n \geq n_f$

a saber

$c_f = 2$

$n_f = 0$

Ex2: $f(n) = 5$, p/ todo $n \in N$

$f(n) = \Theta(1)$

porque $|f(n)| \leq 6$, p/ todo $n \geq 0$

Ex3: $f(n) = \begin{cases} 1, & \text{se } n \text{ é par} \\ 1.000.000, & \text{se } n \text{ é ímpar} \end{cases}$

$f(n) = \Theta(1)$

$|f(n)| \leq 2.000.000$, p/ todo $n \geq 0$

Ex4: $f(n) = n \bmod 1234567$

$f(n) = \Theta(1)$

porque $|f(n)| \leq 1234568$, p/ todo $n \geq 0$

Ex5: $f(n) = \sqrt{n}$

$f(n)$ não é $\Theta(1)$

porque não existem $c_f > 0$ e $n_f \in N$ tais que

$|f(n)| \leq c_f$, p/ todo $n \geq n_f$

isto é,

para todo $c_f > 0$ e $n_f \in N$

$|f(n)| > c_f$, para algum $n \geq n_f$

pois

$|f(n)| > c_f$, para todo $n \geq c_f^2 + 1$

Então $\lim |f(n)| = \infty \Rightarrow f(n)$ não é $\Theta(1)$

Ex6: $f(n) = 1 - \frac{1}{n}$

$f(n) = \Theta(1)$

porque $|f(n)| \leq 1$, p/ todo $n > 0$

Ex7: $f(n) = \frac{1}{n}$

$f(n) = \Theta(1)$ porque $|f(n)| \leq 2$, p/ todo $n > 0$

Então, $\lim f(n) < \infty \Rightarrow f(n) = \Theta(1)$

Ex:

$f(n) = \operatorname{sen} n$

$f(n) = \Theta(1)$, porque $|f(n)| \leq 1$, p/ todo $n \geq 0$

É uma função limitada, mas que não tem limite.

Ex:

$f(n) = \lg n$

$f(n)$ não é $\Theta(1)$

porque p/ todo $c_p > 0$ e $n_p \in N$

$|f(n)| > c_p$, p/ todo $n \geq 2^{c_p} + 1$

Ex:

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i} = \ln n + \Theta(1)$$

Significa que existe $f(n) = \Theta(1)$ tal que

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i} = \ln n + f(n)$$

Ex:

$$n! = \Theta(1) \cdot \sqrt{2\pi \cdot n} \cdot \left(\frac{n}{e}\right)^n$$

Significa que existe $f(n) = \Theta(1)$ tal que

$$n! = f(n) \cdot \sqrt{2\pi \cdot n} \cdot \left(\frac{n}{e}\right)^n$$

Ex: $\Theta(1) + \Theta(1) = \Theta(1)$

Significa que p/ toda $f(n) = \Theta(1)$ e $g(n) = \Theta(1)$

existe $h(n) = \Theta(1)$, tal que $f(n) + g(n) = h(n)$

Ex: $E'(X, n)$

1: $r \leftarrow 1$

2: Enquanto $n > 0$

3: Se n é par, $r \leftarrow rX$

4: $n \leftarrow \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$

5: $X \leftarrow X.X$

6: Devolva r

$t'_i(n)$: tempo p/ a execução da linha i em $E'(X, n)$

$T'(n)$: tempo p/ execução de $E'(X, n)$

$$T'(n) = t'_1(n) + 2t'_2(n) + t'_3(n) + t'_4(n) + t'_5(n) + t'_6(n) + (t'_2(n) + t'_3(n) + t'_4(n) + t'_5(n)).\lfloor \lg n \rfloor$$

Como $t'_i(n) = \Theta(1)$

↳ o tempo de execução é limitado.

Então,

$$T'(n) = \Theta(1) + \Theta(1) + \Theta(1) + \Theta(1) + \Theta(1) + \Theta(1) + (\Theta(1) + \Theta(1) + \Theta(1) + \Theta(1)).\lfloor \lg n \rfloor$$

isto é,

existem $f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6, f_7, f_8, f_9, f_{10}$ tais que

$f_1(n) = \Theta(1)$

$\vdots$

$f_{10}(n) = \Theta(1)$

E

$$T'(n) = f_1(n) + f_2(n) + f_3(n) + f_4(n) + f_5(n) + f_6(n) + (f_7(n) + f_8(n) + f_9(n) + f_{10}(n)).\lfloor \lg n \rfloor$$

E, como,

$\Theta(1) + \Theta(1) = \Theta(1)$ ⇒ (Teorema 51)

Então

$T'(n) = \Theta(1) + \Theta(1).\lfloor \lg n \rfloor$

Ou seja,

exist em $f_1(n) = \Theta(1)$ e $f_2(n) = \Theta(1)$
tais que

$$T'(n) = f_1(n) + f_2(n) \cdot \lfloor \lg n \rfloor$$

Ex:

$$\frac{\lfloor \lg n \rfloor}{\lg n} = \Theta(1)$$

porque $\left| \frac{\lfloor \lg n \rfloor}{\lg n} \right| \leq 1$, p/ todo $n \geq 2$

pois

$$0 \leq \lfloor \lg n \rfloor \leq \lg n$$

Então

$$\frac{\lfloor f(n) \rfloor}{f(n)} = \Theta(1)$$

porque $\left| \frac{\lfloor f(n) \rfloor}{f(n)} \right| \leq 1$, p/ todo n tal que $f(n) \neq 0$

pois

$$0 \leq \lfloor f(n) \rfloor \leq f(n)$$

ou seja,

existe $f(n) = \Theta(1)$ tal que $\frac{\lfloor \lg n \rfloor}{\lg n} = f(n)$

E, portanto,

existe $f(n) = \Theta(1)$ tal que $\lfloor \lg n \rfloor = f(n) \lg n$

ou seja

$$\lfloor \lg n \rfloor = \Theta(1)$$

Como

$$T'(n) = \Theta(1) + \Theta(1) \cdot \lfloor \lg n \rfloor$$

$$T'(n) = \Theta(1) + \Theta(1) \cdot \Theta(1) \cdot \lg n$$

Como $\Theta(1) \cdot \Theta(1) = \Theta(1)$ → Teorema 53

Então

$$T'(n) = \Theta(1) + \Theta(1) \cdot \lg n$$

ou seja,

existem $f_1(n) = \Theta(1)$ e $f_2(n) = \Theta(1)$ tais que
$T'(n) = f_1(n) + f_2(n) \cdot \lg n$
E, portanto,
$$T'(n) = \left(\frac{f_1(n)}{\lg n} + f_2(n)\right) \cdot \lg n$$
ou seja
$$T'(n) = \left(\frac{\Theta(1)}{\lg n} + \Theta(1)\right) \cdot \lg n$$
Como, $\frac{\Theta(1)}{\lg n} = \Theta(1)$
Então,
$$T'(n) = (\Theta(1) + \Theta(1)) \cdot \lg n$$
$$= \Theta(1) \cdot \lg n$$
Ou seja, existe $f(n) = \Theta(1)$ tal que $T'(n) = f(n) \cdot \lg n$

03/11/09

Teorema 43: Se a imagem de $f: N \to \mathbb{R}$ é finita, então $f(n) = \Theta(1)$

Prova:

Seja $f: N \to \mathbb{R}$ com imagem finita, Vamos provar que $f(n) = \Theta(1)$, isto é, que existem $c_f > 0$ e $n_f \in N$ tais que $|f(n)| \leq c_f$, p/ todo $n \geq n_f$

Como a imagem de f é um conjunto finito, então o conjunto $\{|f(n)| \mid n \in N\}$ é finito e não é vazio e, conseqüentemente, tem um máximo.

Seja $m = \max\{|f(n)| \mid n \in N\}$.

Então,

$|f(n)| \leq m$, p/ todo $n \in N$, e portanto, existem $c_f > 0$ e $n_f \in N$ tal que $|f(n)| \leq c_f$ p/ todo $n \geq n_f$

A saber, $|f(n)|$ nunca atinge $m+1$

$c_f = m+1$ e $n_f = 0$

Logo, $f(n) = \Theta(1)$

Teorema 44: Se $f(n) = \Theta(1)$ e $g(n) = \Theta(1)$, então, $f(n) + g(n) = \Theta(1)$

Prova:

Sejam $f(n) = \Theta(1)$ e $g(n) = \Theta(1)$,

Vamos provar que $f(n) + g(n) = \Theta(1)$.

Isto é, que existem $c > 0$ e $n_0 \in N$ tais que $|f(n) + g(n)| \leq c$, p/ todo $n \geq n_0$.

Como $f(n) = \Theta(1)$, então existem $c_f > 0$ e $n_f \in N$ tais que $|f(n)| \leq c_f$, p/ todo $n \geq n_f$.

Como $g(n) = \Theta(1)$,

Então, existem $c_g > 0$ e $n_g \in N$ tais que $|g(n)| \leq c_g$ p/ todo $n \geq n_g$

Então, para todo $n \geq \max\{n_f, n_g\}$

Temos

$$|f(n)| + |g(n)| \leq c_f + c_g$$

Como

$$|f(n) + g(n)| \leq |f(n)| + |g(n)|, \text{ p/ todo } n \in N.$$

Então,

$$|f(n) + g(n)| \leq c_f + c_g, \text{ p/ todo } n \geq \max\{c_f, c_g\}$$

E, portanto,

$$f(n) + g(n) = \Theta(1)$$

Teorema 46: Se $f(n) = \Theta(1)$ e $g(n) = \Theta(1)$

Então, $f(n) \cdot g(n) = \Theta(1)$

Prova:

É igual a prova anterior ($g(n) + f(n)$), só troca + por multiplicação.

Teorema 45: Para toda $f: \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ temos
$\lfloor f(n) \rfloor = \Theta(1) \cdot f(n)$

Prova: Seja $f: \mathbb{N} \to \mathbb{R}$. Vamos provar que
$$\lfloor f(n) \rfloor = \Theta(1) \cdot f(n)$$
Isto é, que existe $g(n) = \Theta(1)$ tal que
$$\lfloor f(n) \rfloor = g(n) \cdot f(n)$$
Seja,
$g(n): \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ dada por
$$g(n) = \begin{cases} 1, & \text{se } f(n) = 0, \\ \dfrac{\lfloor f(n) \rfloor}{f(n)}, & \text{se } f(n) \neq 0. \end{cases}$$
Então, p/ todo $n \in \mathbb{N}$ temos
$$g(n) \cdot f(n) = \begin{cases} 1 \cdot f(n), & \text{se } f(n) = 0 \\ \dfrac{\lfloor f(n) \rfloor \cdot f(n)}{f(n)}, & \text{se } f(n) \neq 0 \end{cases}$$
E, portanto,
$g(n) \cdot f(n) = \lfloor g(n) \rfloor$, p/ todo $n \in \mathbb{N}$.

Basta, então provar que $g(n) = \Theta(1)$,
isto é, que existem $c_g > 0$ e $n_g \in \mathbb{N}$ tais que
$|g(n)| \leq c_g$, p/ todo $n \geq n_g$
Como p/ todo $n \in \mathbb{N}$ temos
$\lfloor f(n) \rfloor \leq f(n)$,
Então, p/ todo n tal que $f(n) \neq 0$ temos
$$\frac{\lfloor f(n) \rfloor}{f(n)} \leq 1$$
Então,
$|g(n)| \leq 1$, p/ todo $n \geq 0$.
E portanto, $g(n) = \Theta(1)$.
Logo, $\lfloor f(n) \rfloor = \Theta(1) \cdot f(n)$.

06/11/09

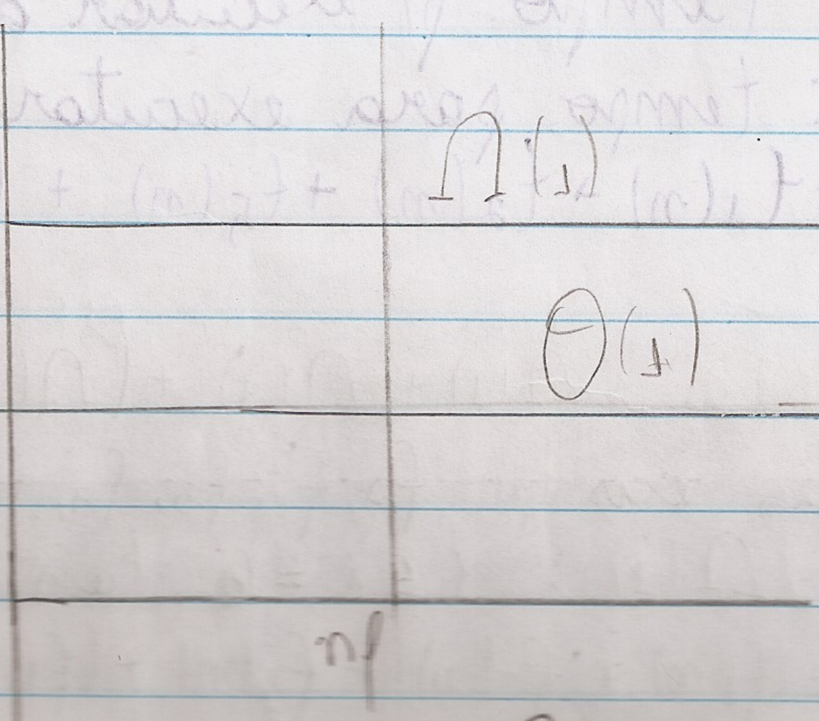
Definição: Uma função $f: \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ é assintoticamente limitada inferiormente por uma constante se existem $c_f > 0$ e $n_f \in \mathbb{N}$ tais que
$|f(n)| \geq c_f$, p/ todo $n \geq n_f$

O conjunto das funções A.L.I.p.v.c. é denotado por $\Omega(1)$, isto é,
$\Omega(1) = \{f: \mathbb{N} \to \mathbb{R} \mid$ existem $c_f > 0$ e $n_f \in \mathbb{N} \mid$
$|f(n)| \geq c_f$ p/ todo $n \geq n_f\}$

O uso de $\Omega(1)$ em expressões obedece às mesmas convenções que regem o uso de $O(1)$ em expressões.

Exemplos:

$f(n) = 5$, p/ todo $n \in \mathbb{N}$
$f(n) = \Omega(1)$? sim
porque $|f(n)| \geq 5$ p/ todo $n \geq 0$
Observe que $f(n) = \Omega(1)$ e $f(n) = O(1)$ c/ c_f



$f(n) = 0$ p/ todo $n \in \mathbb{N}$
$f(n) = \Omega(1)$? não.
porque não existem $c_f > 0$
$n_f \in \mathbb{N}$ tal que $|f(n)| \geq c_f$, p/ todo $n \geq n_f$ $-c_f$

$f(n) = \frac{1}{n}$, p/ todo $n > 0$
$f(n) = \Omega(1)$? não, pq $\lim f(n) = 0$, e, portanto, p/ todo $n_f \in \mathbb{N}$, existe $n \geq n_f$ tal que $|f(n)| < c_f$, por exemplo, $n = \lceil \max\{n_f, c_f\} \rceil$
$f(n) = n$ p/ todo $n \in \mathbb{N}$
$f(n) = \Omega(1)$ porque $|f(n)| \geq 1$ p/ todo $n \geq 1$

$$f(n) = \begin{cases} 0, & \text{se } n \text{ é primo} \\ n, & \text{se } n \text{ não é primo} \end{cases}$$

$f(n) = \Omega(1)$? não, porque p/ todo $c_f > 0$ e todo $n_f \in \mathbb{N}$, existe

$n \geq n_f$ t.q. $|f(n)| < c_f$, por exemplo o produto por primos, menores ou iguais a n_f, mais 1.

$$f(n) = \begin{cases} -\frac{1}{n}, & \text{se } n \text{ é primo} \\ n, & \text{se } n \text{ não é primo.} \end{cases}$$

$f(n)$ não é $\Omega(1)$, mesmo motivo da anterior.

E(x, n)

1: $r \leftarrow 1$

2: Enquanto $n > 0$

3: $n \leftarrow n-1$

4: $r \leftarrow r x$

5: Devolva r

$t_i(n)$: tempo p/ executar a linha i

$T(n)$: tempo para executar $E(x, n)$

$T(n) = t_1(n) + t_2(n) + t_5(n) + (t_2(n) + t_3(n) + t_4(n)) \cdot n$

Então

$T(n) = \Omega(1) + \Omega(1) + \Omega(1) + (\Omega(1) + \Omega(1) + \Omega(1)) \cdot n$,

ou seja, existem $f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6 : N \to \mathbb{R}$, com $f_i(n) = \Omega(1)$: $1 \leq i \leq 6$, tais que

$T(n) = f_1(n) + f_2(n) + f_3(n) + (f_4(n) + f_5(n) + f_6(n)) \cdot n$

pois, $t_i(n) > 0$ p/ todo $n > 0$ E a imagem de t_i é finita.

Como,

$$\left.\begin{array}{l} f(n) = \Omega(1) \\ g(n) = \Omega(1) \\ f(n) \cdot g(n) > 0 \end{array}\right\} \Rightarrow f(n) + g(n) = \Omega(1)$$

Então

$T(n) = \Omega(1) + \Omega(1) \cdot n$

ou seja, que existem $f(n) = \Omega(1)$ e $g(n) = \Omega(1)$ tais que

$T(n) = f(n) + g(n) \cdot n$

E, daí,

$T(n) = \left(\frac{f(n)}{n} + g(n)\right) \cdot n$

ou seja,

$T(n) = \left(\frac{\Omega(1)}{n} + \Omega(1)\right) \cdot n$

Como

$T(n) = t_1(n) + t_2(n) + t_5(n) + (t_2(n) + t_3(n) + t_4(n)) \cdot n$

e como já vimos

$t_1(n) + t_2(n) + t_5(n) = \Theta(1)$

$t_2(n) + t_3(n) + t_4(n) = \Omega(1)$

Então

$T(n) = \Theta(1) + \Omega(1) \cdot n$

ou seja,

existem $f(n) = \Theta(1)$ e $g(n) = \Omega(1)$ tais que

$T(n) = f(n) + g(n) \cdot n$

17/11/09

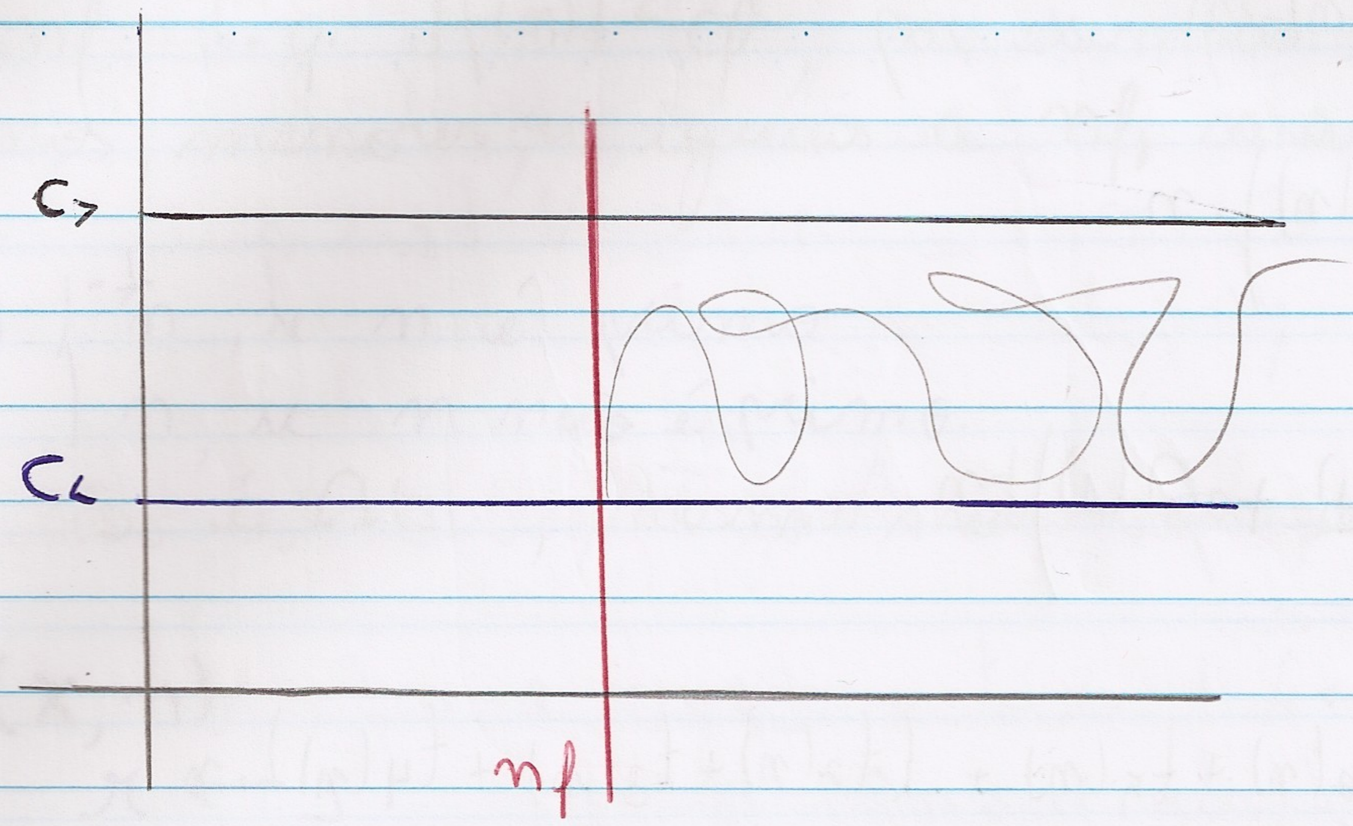
Notação: O conjunto das funções assintoticamente limitadas tanto superior como inferiormente por uma constante é denotado por $\Theta(1)$, isto é,

$\Theta(1) = \Theta(1) \cap \Omega(1)$.

ou, equivalentemente

$$\Theta(1) = \left\{ f: \mathbb{N} \to \mathbb{R} \text{ t.q. existem } c_< > 0,\ c_> > 0 \text{ e } n_0 \in \mathbb{N} \text{ t.q. } c_< \leq |f(n)| \leq c_> \text{ p/ todo } n \geq n_0 \right.$$

O uso de $\Theta(1)$ em igualdades segue convenção análoga à do uso de $O(1)$ e $\Omega(1)$ em igualdades.

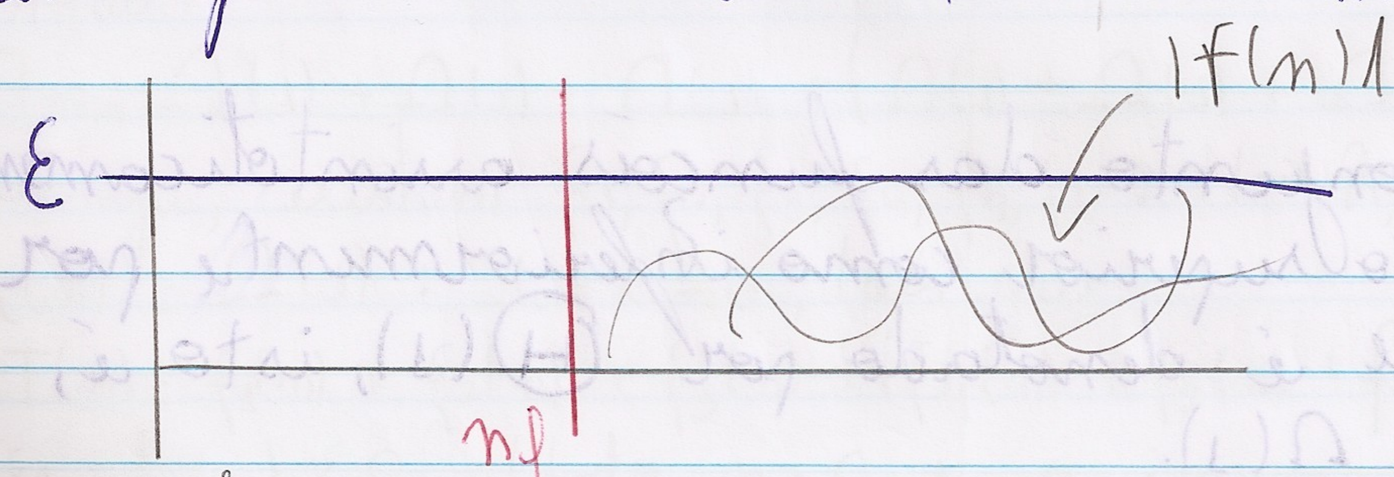


Definição: Uma função $f: \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ é assintoticamente nula, se $\lim f(n) = 0$

O conjunto das funções assintoticamente nulas é denotado por $o(1)$, isto é, ou equivalentemente

$$o(1) = \{ f: \mathbb{N} \to \mathbb{R} \text{ T.Q. } \lim f(n) = 0 \}$$

O uso de $o(1)$ em igualdades segue convenção análoga à do uso de $O(1)$ e $\Omega(1)$ em igualdades.



Exemplo: Vimos que:

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i} = \ln n + O(1)$$

isto é, existe $f(n) = O(1)$ tal que

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i} = \ln n + f(n)$$

E portanto, $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i} = \ln n \left(1 + \frac{f(n)}{\ln n} \right)$

Mas como $f(n) = O(1)$
E $\lim \frac{1}{\ln n} = 0$, então

$$\lim \frac{f(n)}{\ln n} = \lim f(n) \cdot \frac{1}{\ln n} = 0$$

ou seja,

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i} = (1 + o(1)) \cdot \ln n$$

isto é, existe $f(n) = o(1)$ tal que

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i} = (1 + f(n)) \cdot \ln n$$

E daí,

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i}}{\ln n} = 1 + f(n)$$

E portanto

$$\lim \frac{\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i}}{\ln n} = \lim (1 + f(n)) = 1$$

Notação: Dizemos que $f(n) \sim g(n)$ se $f(n) = (1 + o(1)) \cdot g(n)$, ou seja, se existe $\varepsilon(n) = o(1)$ tal que $f(n) = (1 + \varepsilon(n)) \cdot g(n)$

Teorema 48: Se $f(n) = O(1)$ e $g(n) = o(1)$, então $f(n) g(n) = o(1)$

Prova: Cálculo I:
$f(n)$ é limitada e $\lim g(n) = 0$,
ou seja,
$O(1) \cdot o(1) = o(1)$
isto é, p/ toda $f(n) = O(1)$ e toda $g(n) = o(1)$,

existe $h(n) = o(1)$ tal que
$f(n) \cdot g(n) = h(1)$

Exemplo 2:
Aproximação de Stirling
$$n! = \Theta(1)\sqrt{2\pi \cdot n} \cdot \left(\frac{n}{e}\right)^n$$

ou seja, existe $f(n) = \Theta(1)$ tal que
$$n! = f(n)\sqrt{2\pi \cdot n} \cdot \left(\frac{n}{e}\right)^n$$

E portanto,
$$\log n! = \log f(n) + \frac{1}{2}(\log 2\pi + \log n) + n(\log n - \log e)$$
$$= n\log n - n\log e + \frac{\log n}{2} + \log f(n) + \log\frac{2\pi}{2}$$
$$= n \cdot \log n + \Theta(1) \cdot n + \Theta(1)\log n + \Theta(1) + \Theta(1)$$

Então,
$$\log n! = n\log n + \Theta(1) \cdot n + \Theta(1)\log n + \Theta(1)$$

E portanto,
$$\log n! = n\log n\left(1 + \Theta(1) \cdot \frac{\cancel{n}}{\cancel{n} \cdot \log n} + \Theta(1)\frac{\cancel{\log n}}{n\cancel{\log n}} + \Theta(1) \cdot \frac{1}{n\log n}\right)$$
$$= n \cdot \log n\left(1 + \Theta(1) \cdot o(1) + \Theta(1) \cdot o(1) + \Theta(1) \cdot o(1)\right)$$

isto é,
$$\log n! = n \cdot \log n\left(1 + o(1) + o(1) + o(1)\right)$$

Teorema 49: Se $f(n) = o(1)$ e $g(n) = o(1)$
então $f(n) + g(n) = o(1)$

Prova: Calculo I:
Se $\lim f(n) = l_f$
e $\lim g(n) = l_g$
Então $\lim f(n) + g(n) = l_f + l_g$

E, portanto,

$\log n! = (1 + o(1)) \cdot n \log n$

ou, equivalentemente

$\log n! \sim n \log n$

Como

$$\log n! = \log n \cdot (n-1) \cdot \ldots (2) \cdot (1)$$
$$= \log n + \log(n-1) + \ldots + \log 2 + \log 1$$
$$= \sum_{i=1}^{n} \log i$$

E, portanto

$$\sum_{i=1}^{n} \log i = (1 + o(1)) \cdot n \log n$$

20/11/09

Notação: Sejam $f, g : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$

$g(n) = O(f(n))$ denota $g(n) = O(1) \cdot f(n)$

$g(n) = \Omega(f(n))$ denota $g(n) = \Omega(1) \cdot f(n)$

$g(n) = \Theta(f(n))$ denota $g(n) = \Theta(1) \cdot f(n)$

$g(n) = o(f(n))$ denota $g(n) = o(1) \cdot f(n)$

Ex:

$\frac{n^2}{2} = O(n^2)$? , Sim, porque $\frac{n^2}{2} = \frac{1}{2} \cdot n^2$ e $\frac{1}{2} = O(1)$

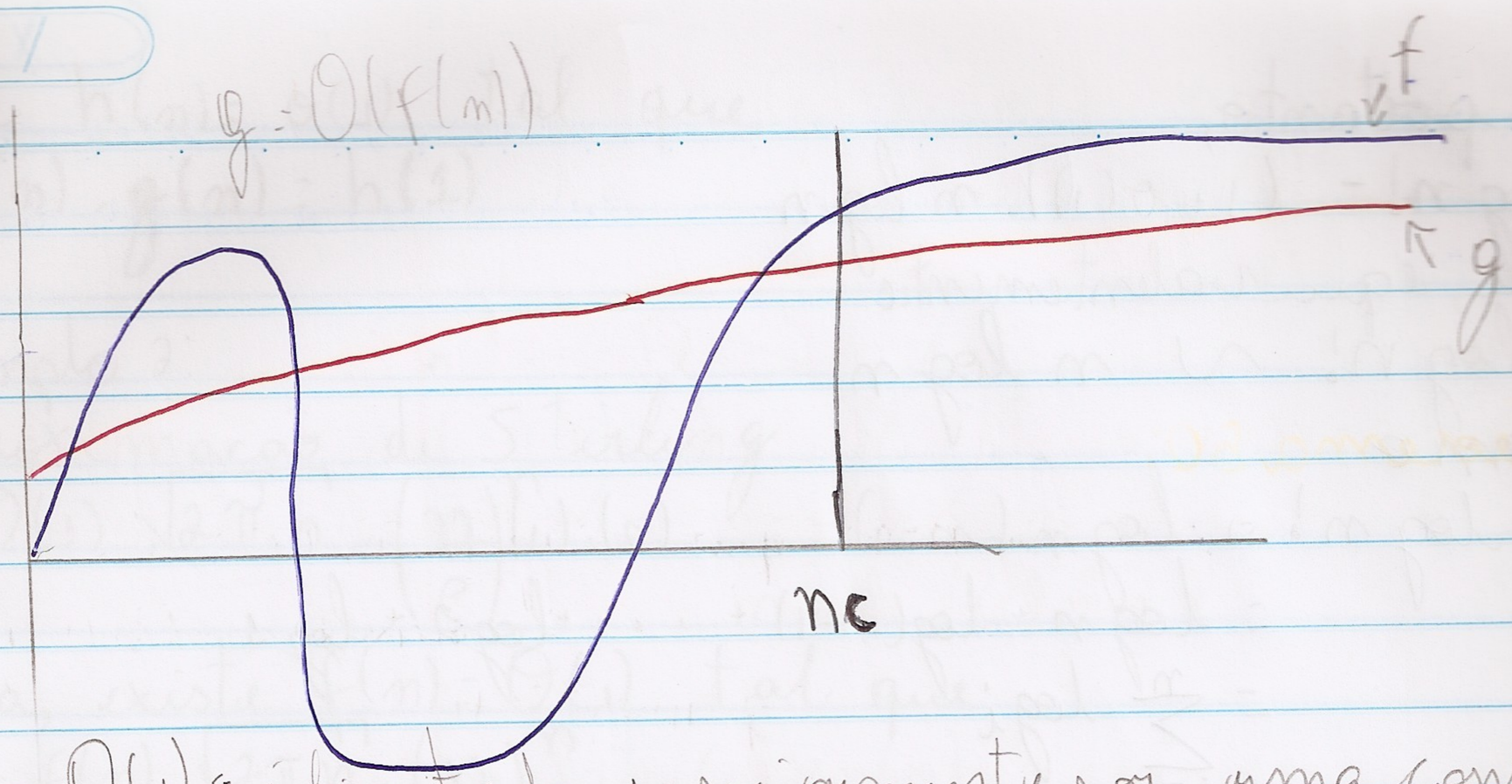
$\frac{n^2}{2} = \Omega(n^2)$? , Sim, porque $\frac{n^2}{2} = \frac{1}{2} \cdot n^2$ e $\frac{1}{2} = \Omega(1)$

$\frac{n^2}{2} = \Theta(n^2)$? , Sim, porque $\frac{n^2}{2} = \frac{1}{2} \cdot n^2$ e $\frac{1}{2} = \Theta(1)$, pois

$\frac{1}{2} = O(1)$ e $\frac{1}{2} = \Omega(1)$

$n = o(n^2)$ porque $n = \frac{1}{n} \cdot n^2$ e $\frac{1}{n} = o(1)$.

$g = O(f(n))$



$\frac{g(n)}{f(n)} = O(1)$ ← é limitada superiormente por uma constante

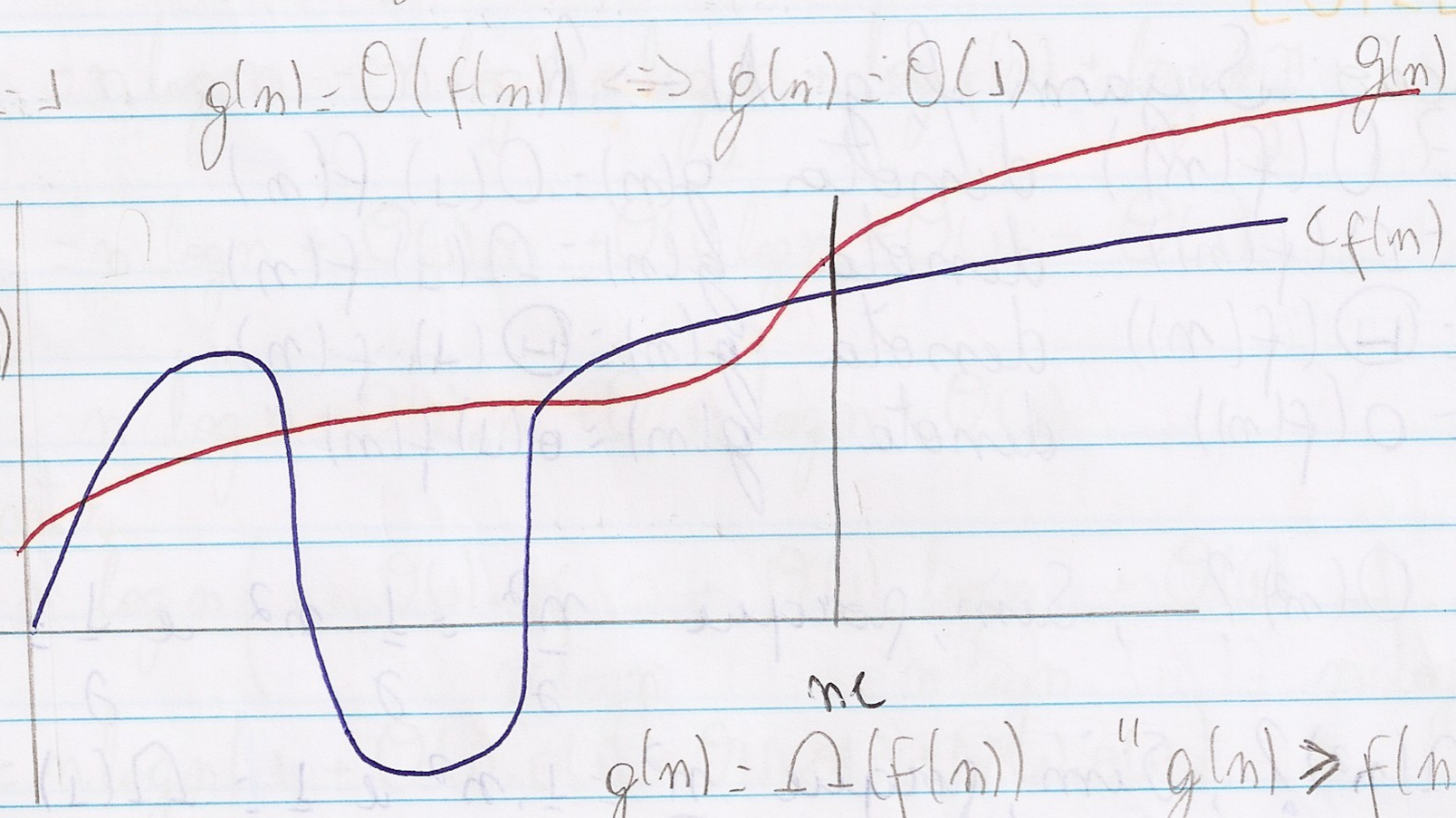
$g(n)$ é limitada superiormente por $f(n)$, ou seja,

$g(n) = O(f(n))$, "$g(n)$" $\leq$ "$cf(n)$"

Ex:

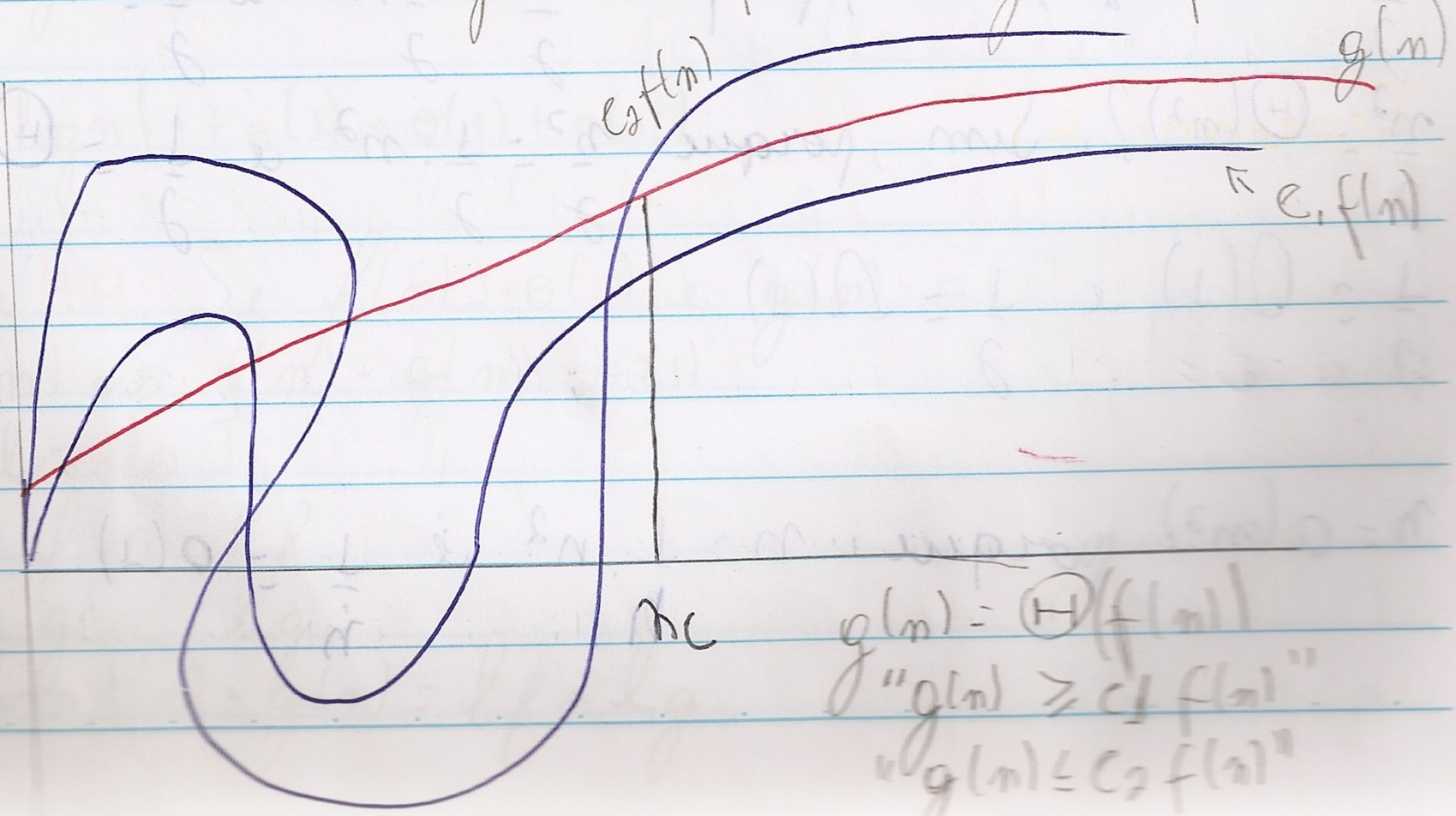
$f(n) = 1$ $\quad g(n) = O(f(n)) \Rightarrow g(n) = O(1)$

$g(n) = \Omega(f(n))$



$g(n) = \Omega(f(n))$ "$g(n) \geq f(n)$"

$g(n) = \Theta(f(n))$



$g(n) = \Theta(f(n))$

"$g(n) \geq c_1 f(n)$"

"$g(n) \leq c_2 f(n)$"

O uso de $O(f(n))$, $\Omega(f(n))$, $\Theta(f(n))$, $o(f(n))$ em expressões obedece convenções análogas às do uso de $O(1)$ em expressões.

Teorema 50: $\Omega(1) \cdot \Omega(1) = \Omega(1)$

Prova: Vamos provar que $\Omega(1) \cdot \Omega(1) = \Omega(1)$ isto é, que $f(n) \cdot g(n) = \Omega(1)$, p/ toda $f(n) = \Omega(1)$, $g(n) = \Omega(1)$.

Sejam $f(n) = \Omega(1)$ e $g(n) = \Omega(1)$.

Vamos provar que $f(n) \cdot g(n) = \Omega(1)$

ou seja, que existem $c > 0$ e $n_c \in \mathbb{N}$ tais que $|f(n) \cdot g(n)| \geq c$, p/ todo $n \geq n_c$

Como $f(n) = \Omega(1)$, então existem $c_f > 0$ e $n_f \in \mathbb{N}$ tal que $|f(n)| \geq c_f$, p/ todo $n \geq n_f$

Como $g(n) = \Omega(1)$, então existem $c_g > 0$ e $n_g \in \mathbb{N}$ t.q. $|g(n)| \geq c_g$, p/ todo $n \geq n_g$

Então,

$|f(n)| \cdot |g(n)| \geq c_f c_g$, p/ todo $n \geq \max\{n_f, n_g\}$

ou seja,

$|f(n) \cdot g(n)| \geq c$, p/ todo $n \geq n_c$

onde

$c = c_f \cdot c_g$ e $n_c = \max\{n_f, n_g\}$

E Portanto

$f(n) g(n) = \Omega(1)$

Teorema 51: $\Theta(1) \cdot \Theta(1) = \Theta(1)$

Prova: Vamos provar que $\Theta(1) \cdot \Theta(1) = \Theta(1)$

isto é,

$f(n) \cdot g(n) = \Theta(1)$, p/ toda $f(n) = \Theta(1)$, $g(n) = \Theta(1)$

Sejam $f(n) = \Theta(1)$ e $g(n) = \Theta(1)$.

Vamos provar que $f(n) \cdot g(n) = \Theta(1)$

ou seja que $f(n) \cdot g(n) = O(1)$ e $f(n) g(n) = \Omega(1)$

Como $f(n) = \Theta(1)$, então

$f(n) = \Omega(1)$ e $f(n) = O(1)$

Como $g(n) = \Theta(1)$, então

$g(n) = \Omega(1)$ e $g(n) = O(1)$

Então, $f(n) = \Omega(1)$ e $g(n) = \Omega(1)$

E daí pelo Teorema 50, $f(n) \cdot g(n) = \Omega(1)$

Do mesmo modo, como $f(n) = O(1)$ e $g(n) = O(1)$

Então pelo Teorema 46.

$f(n) \cdot g(n) = O(1)$

Logo,

$$f(n) \cdot g(n) = \Theta(1) \quad \blacksquare$$

Teorema 52: Se $f(n) = 1 + o(1)$, então $\lim f(n) = 1$

Prova: Seja $f(n) = 1 + o(1)$.

Vamos provar que $\lim f(n) = 1$

Como $f(n) = 1 + o(1)$, então existe $\varepsilon(n) = o(1)$ tal que $f(n) = 1 + \varepsilon(n)$

Então

$$\lim f(n) = \lim (1 + \varepsilon(n))$$
$$= 1 + \lim \varepsilon(n) = 1 + 0 = 1 \quad \blacksquare$$

Teorema 53: $1 + o(1) = O(1)$

Prova: Vamos provar que $1 + o(1) = O(1)$

ou seja, que

$1 + f(n) = O(1)$ p/ toda $f(n) = o(1)$

Seja $f(n) = o(1)$. Vamos provar que $1 + f(n) = O(1)$, provando que $g(n) = O(1)$, onde $g(n) = 1 + f(n)$

Como $f(n) = o(1)$, então (T. 52)

$\lim g(n) = 1$, e portanto,

Para todo $\varepsilon > 0$ existe $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$, t.q. $|g(n) - 1| \leq \varepsilon$, p/ todo $n \geq n_\varepsilon$.

Em particular, para $\varepsilon = 1$, existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tal que $|g(n) - 1| \leq 1$, p/ todo $n \geq n_1$

E portanto

$-1 \leq g(n) - 1 \leq 1$, p/ todo $n \geq n_1$

ou seja,

$0 \leq g(n) \leq 2$ p/ todo $n \geq n_1$

E, portanto

$|g(n)| \leq 2$, p/ todo $n \geq n_1$, ou seja $g(n) = O(1)$

Teorema 54: $1 + o(1) = \Omega(1)$

Prova: Vamos provar que $1 + o(1) = \Omega(1)$

ou seja, que

$1 + f(n) = \Omega(1)$, p/ toda $f(n) = o(1)$

Seja $f(n) = o(1)$. Vamos provar que $1 + f(n) = \Omega(1)$, provando que $g(n) = \Omega(1)$ onde $g(n) = 1 + f(n)$

Como $f(n) = o(1)$, então (T.52)

$\lim g(n) = 1$, e portanto, p/ todo $\varepsilon > 0$ existe $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$, t.q. $|g(n) - 1| \leq \varepsilon$, p/ todo $n \geq n_\varepsilon$

Em particular, para $\varepsilon = \frac{1}{2}$, existe $n_{\frac{1}{2}} \in \mathbb{N}$ t.q. $|g(n) - 1| \leq \frac{1}{2}$, p/ todo $n \geq n_{\frac{1}{2}}$

E portanto,

$-\frac{1}{2} \leq g(n) - 1 \leq \frac{1}{2}$, p/ todo $n \geq n_{\frac{1}{2}}$

ou seja,

$\frac{1}{2} \leq g(n) \leq \frac{3}{2}$, p/ todo $n \geq n_{\frac{1}{2}}$

E, portanto

$|g(n)| \geq \frac{1}{2}$, p/ todo $n \geq n_{\frac{1}{2}}$ ou seja $g(n) = \Omega(1)$

Teorema 55: $1 - o(1) = \Theta(1)$

Teorema 56: $o(f(n)) + o(f(n)) = o(f(n))$

Prova: Vamos provar que $o(f(n)) + o(f(n)) = o(f(n))$

isto é que

$g(n) + h(n) = \Theta(f(n))$, p/ toda $g = \Theta(f(n))$ e $h = \Theta(f(n))$

Sejam $g(n) = \Theta(f(n))$ e $h(n) = \Theta(f(n))$

Então

$$g(n) + h(n) = \Theta(1) f(n) + \Theta(1) . f(n)$$

ou seja, existem $\varepsilon_g(n) = \Theta(1)$ e $\varepsilon_h(n) = \Theta(1)$ tais que

$g(n) + h(n) = \varepsilon_g(n) . f(n) + \varepsilon_h(n) . f(n)$

E então,

$$g(n) + h(n) = (\varepsilon_g(n) + \varepsilon_h(n)) . f(n)$$

ou seja

$$g(n) + h(n) = (\Theta(1) + \Theta(1)) f(n)$$

E daí pelo Teorema?

$g(n) + h(n) = \Theta(1) . f(n)$

ou seja

$g(n) + h(n) = \Theta(f(n))$ ▨

Teorema 57: Se $f(n) = o(g(n))$

Então

$$O(f(n)) = o(g(n))$$

Prova: Seja $f(n) = o(g(n))$

Vamos provar que $O(f(n)) = o(g(n))$

ou seja, que

$h(n) = o(g(n))$, p/ toda $h(n) = O(f(n))$

Seja $h(n) = O(f(n))$

Então,

$$h(n) = O(1) f(n)$$

e como $f(n) = o(g(n))$

Então

$$h(n) = O(1) o(g(n))$$

ou seja

$$h(n) = O(1) o(1) . g(n)$$

E portanto pelo Teorema?

$h(n) = o(1) \cdot g(n)$, ou seja, $h(n) = o(g(n))$

29/11/09

$f(n) = \Theta(g(n))$: "$f(n) \leq g(n)$"

$f(n) = \Omega(g(n))$: "$f(n) \geq g(n)$"

$f(n) = \Theta(g(n))$: "$f(n) = g(n)$"

$f(n) = o(g(n))$: "$f(n) << g(n)$"

↳ muito menor

$\log n = O(\lg n)$, pois $\log n \leq 10 \cdot \lg n$, p/ todo $n \geq 1$

$\log n = \Omega(\lg n)$

$\log n = \Theta(\lg n)$, pois $\log n = \frac{1}{\lg 10} \cdot \lg n = \Theta(\lg n)$

Teorema 58: $\log_b n = \Theta(\log n)$, p/ todo $0 < b \neq 1$

Prova: Seja $0 < b \neq 1$

Vamos provar que $\log_b n = \Theta(\log n)$

Isto é, que $\log_b n = \Theta(1) \cdot \log n$

Como, $\log_b n = \frac{\log n}{\log b} = \left(\frac{1}{\log b}\right) \cdot \log n$

Então, $\log_b n = \Theta(1) \cdot \log n$ ∎

$\log n = o(n^\alpha)$, p/ todo $\alpha > 1$

e/ se $0 < \alpha < 1$?

27/11/09

Teorema 59: $\log n = n^{\frac{\log \cdot \log n}{\log n}}$, p/ todo $n \neq 1$.

Prova: Seja $n \neq 1$. Vamos provar que $\log n = n^{\frac{\log \log n}{\log n}}$, provando que $\log n^{\frac{\log \log n}{\log n}} = \log \log n$

Como,

$$\log n^{\frac{\log \cdot \log n}{\log n}} = \frac{\log \log n \cdot \log n}{\log n}$$

$$= \log \log n,$$

Então,

$$\log n = n^{\frac{\log \log n}{\log n}} \quad \blacksquare$$

Teorema 60: $n^{\alpha} = o(1)$ se e somente se $\alpha < 0$

Prova: Cálculo I.

Corolário 61: $\frac{1}{n^{\alpha + o(1)}} = o(1)$, p/ todo $\alpha > 0$

Prova: Exercício 66.

Teorema 62: $\log n = o(n^{\alpha})$, p/ todo $\alpha > 0$.

é muito menor que n^{α}

Prova: Seja $\alpha > 0$.

Vamos provar que $\log n = o(n^{\alpha})$, provando que $\frac{\log n}{n^{\alpha}} = o(1)$.

Pelo Teorema 59 temos $\log n = n^{o(1)}$

E consequentemente $\frac{\log n}{n^{\alpha}} = \frac{n^{o(1)}}{n^{\alpha}}$

E portanto $\frac{\log n}{n^{\alpha}} = \frac{1}{n^{\alpha + o(1)}}$

E daí, pelo corolário 61 $\frac{\log n}{n^{\alpha}} = o(1)$ $\blacksquare$

muito menor

Corolário 63: $n^\alpha = o(n^\beta)$, se e somente se $\alpha < \beta$

$1 << \log n << n^\alpha$

$\frac{n^\alpha}{n^\beta} = n^{\alpha-\beta} = o(1)$, se e somente se $\alpha < \beta$

Prova: Vamos provar que $n^\alpha = o(n^\beta)$, se e somente se $\alpha < \beta$, provando que $\frac{n^\alpha}{n^\beta} = o(1)$ se e somente se $\alpha < \beta$

Como $\frac{n^\alpha}{n^\beta} = n^{\alpha-\beta}$

Temos pelo Teorema 60 que $n^{\alpha-\beta}$ sse $\alpha - \beta < 0$

ou seja, $\frac{n^\alpha}{n^\beta} = o(1)$, se e somente se $\alpha < \beta$.

Corolário 64: Se $f(n) = a_0 . n^0 + \dots + a_d . n^d$ é um polinômio de grau d, então $f(n) = a_d . n^d . (1 + o(1))$

Prova: Seja $f(n) = a_0 . n^0 + \dots + a_d . n^d$ um polinômio de grau d.

Vamos provar que $f(n) = (1 + o(1)) . a_d . n^d$

Como, $f(n) = a_d . n^d + a_{d-1} . n^{d-1} + \dots + a_2 . n^2 + a_1 . n^1 + a_0$

então, pelo corolário 63,

$f(n) = a_d . n^d + o(n^d) + \dots + o(n^d) + o(n^d)$

E daí pelo Teorema 56, $f(n) = a_d . n^d + o(n^d)$

E portanto (exercício 68)

$f(n) = (1 + o(1)) a_d . n^d$

Ex:

$f(n) = 17 n^{53} + 14 n^{49} + 15 n^{49} + 16 (n^{50})$

$f(n) = 17 n^{53} + o(n^{53}) + o(n^{53}) + o(n^{53})$ ou $17 n^{53} \left(1 + \frac{14}{n^{49}} + \frac{15}{n^{49}} + \frac{16}{n^{50}}\right)$

$o(1)$

$f(n) = 17 . n^{53} . (1 + o(1))$

Corolário 65: Se $f(n)$ é um polinômio de grau d, então, $f(n) = \Theta(n^d)$

Prova: Seja $f(n)$ um polinômio de grau d, então corolário (64)

$f(n) = a_d \cdot n^d (1 + o(1))$

e daí (corolário 55)

$f(n) = \Theta(n^d)$

Teorema 66: $\alpha^n = o(1)$ se e somente se $|\alpha| < 1$.

Prova: Cálculo 1.

Ex:

α^n e β^n $\quad \frac{\alpha^n}{\beta^n} = \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^n = o(1)$ sse $\left|\frac{\alpha}{\beta}\right| < 1$ ou seja $|\alpha| < |\beta|$

Corolário 67: Se $|\alpha| < 1$, então $\alpha^{n + o(n)} = o(1)$

Prova: Exercício 67.

Teorema 68: $n^\alpha = o((1+\beta)^n)$, p/ todo $\beta > 0$.

Prova: Sejam $\alpha \in \mathbb{R}$ e $\beta > 0$

Vamos provar que $n^\alpha = o((1+\beta)^n)$, provando que

$$\frac{n^\alpha}{(1+\beta)^n} = o(1)$$

Como, $n^\alpha = (1+\beta)^{\log_{1+\beta} n^\alpha}$

$$= (1+\beta)^{\alpha \log_{1+\beta} n}$$

Então,

$$\frac{n^\alpha}{(1+\beta)^n} = \frac{(1+\beta)^{\alpha \log_{1+\beta} n}}{(1+\beta)^n} = \frac{1}{(1+\beta)^{n - \alpha \log_{1+\beta} n}}$$

$$= \left(\frac{1}{1+\beta}\right)^{n + o(n)}$$

Como $\beta > 0$, então $\frac{1}{1+\beta} < 1$

E daí (corolário 67), $\frac{n^\alpha}{(1+\beta)^n} = o(1)$ ▨.

Teorema 69: $\alpha^n = o(n!)$, p/ todo $\alpha \in \mathbb{R}$.

Prova: Seja $\alpha \in \mathbb{R}$. Vamos provar que $\alpha^n = o(n!)$, provando que $\frac{\alpha^n}{n!} = o(1)$

Com o,

$$n! = \prod_{i=1}^{n} i > \prod_{2\alpha \le i \le n} i \geq \prod_{2\alpha \le i \le n} \lceil 2\alpha \rceil = \lceil 2\alpha \rceil^{n-2\alpha} \geq (2\alpha)^{n-2\alpha}$$

$$= \frac{(2\alpha)^n}{(2\alpha)^{2\alpha}} = \frac{1}{(2\alpha)^{2\alpha}} \cdot (2\alpha)^n = \Omega((2\alpha)^n)$$

Então,

$$\frac{\alpha^n}{n!} < \frac{\alpha^n}{\frac{(2\alpha)^n}{(2\alpha)^{2\alpha}}} = (2\alpha)^{2\alpha} \cdot \frac{\alpha^n}{2^\alpha \cdot \alpha^n} = \frac{(2\alpha)^{2\alpha}}{2^n} = o(1)$$

Teorema 70: $n! = o(n^n)$

Prova: Vamos provar que $n! = o(n^n)$, provando que $\frac{n!}{n^n} = o(1)$

Como,

$$\frac{n!}{n^n} = \frac{\prod_{i=1}^{n} i}{\prod_{i=1}^{n} n} = \prod_{i=1}^{n} \frac{i}{n} = \frac{1}{n} \cdot \prod_{i=2}^{n} \frac{i}{n} < \frac{1}{n} = o(1) \blacksquare$$

01/12/09

Ex: Dois algoritmos p/ um mesmo problema computacional (Exponenciação): E e E'

$T(n)$: tempo para execução de $E(x,n)$

$T'(n)$: tempo para execução de $E'(x,n)$.

$T(n) = c_1 + c_2 n$

$T'(n) = c'_1 + c'_2 \lfloor \lg n \rfloor$

onde c_1, c_2, c'_1 e c'_2 são constantes cujos valores de

/ /

pendem somente do dispositivo computacional que executa cada algoritmo

Em notação assintótica

$T(n) = \Theta(1) + \Theta(1).n$

$T'(n) = \Theta(1) + \Theta(1) \lfloor \lg n \rfloor$

E portanto

$T(n) = \Omega(n)$

$T'(n) = \Theta(\log)$

E; como

$\log(n) = o(n)$

E

$T(n) = \Omega(n)$ e $T' = \Theta(\log n)$

Então

$T'(n) = o(T(n))$

E portanto, p/ todo $c > 0$, existe $n_c \in N$ tal que $T'(n) \leq \frac{T(n)}{c}$, p/ todo $n \geq n_c$

ou seja,

Exceto por um número <u>Finito</u> de "exceções", a execução de $E'(X, n)$ é pelo menos c vezes mais rápida que a execução de $E(X, n)$.

Ordenação:

	Comparações	Trocas	Cópias
Inserção: Seq	$n-1$ à $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$	0 à $\frac{n(n-1)}{2}$	0 - $\frac{n(n-1)}{2}$
Bin	$\sum_{i=1}^{n} \lfloor \lg i \rfloor$ à $\sum_{i=1}^{n} (\lfloor \lg i \rfloor + 1)$	"	
Seleção:	$\frac{n(n-1)}{2}$	0 à $n-1$	0 à $n-1$

Comparações

Merge Sort: $\frac{n\lfloor \lg n \rfloor + n}{2} - 2^{\lfloor \lg n \rfloor} - \frac{1}{2}$ à $n\lfloor \lg n \rfloor + n - 2^{\lfloor \lg n \rfloor + 1}$

Troca —

Cópias: $n\lfloor \lg n \rfloor + 4n - 2^{\lfloor \lg n \rfloor + 1} - 3$ à $2n\lfloor \lg n \rfloor + 4n - 2^{\lfloor \lg n \rfloor + 3} - 2$

Quick Sort: Comp: $n\lfloor \lg n \rfloor - 2^{\lfloor \lg n \rfloor + 1} + 1$ à $\frac{n.(n+1)}{2}$

Trocas: $n+1$ à $\frac{n(n-1)}{2}$

Cópias: $3(n+1)$ à $\frac{3n(n-1)}{2}$

Em Notação Assintótica

	Comp	Trocas	Cópias
Ord. Seq:	$n-1$ à $\frac{n^2}{2} + \Theta(n)$	0 à $\frac{n^2}{2} + \Theta(n)$	0 à $\frac{n^2}{2} + \Theta(n)$
Ord. Bin:	$n\lfloor \lg n \rfloor + \Theta(n)$		
Seleção:	$\frac{n^2}{2} + \Theta(n)$	0 à $n-1$	0 à $3(n-1)$
Merge:	$\frac{n\lfloor \lg n \rfloor}{2} + \Theta(n)$ à $n\lfloor \lg n \rfloor + \Theta(n)$	—	$n\lfloor \lg n \rfloor + \Theta(n)$ à $2n\lfloor \lg n \rfloor + \Theta(n)$
Quick:	$n\lfloor \lg n \rfloor + \Theta(n)$ à $\frac{n^2}{2} + \Theta(n)$	$n-1$ à $\frac{n^2}{2} + \Theta(n)$	$3(n-1)$ à $\frac{3n^2}{2} + \Theta(n)$

Resumo

Ord. Seq: $\Omega(n)$ à $O(n^2)$

Ord. Bin: $\Omega(n \log n)$ à $O(n^2)$

Seleção: $\Theta(n^2)$

Merge: $\Theta(n \log n)$

Quick: $\Omega(n \log n)$ à $O(n^2)$

Árvores AVL

$t^-(n)$: menor tamanho possível p/ uma árvore AVL de altura n

Temos

$$t^-(n) = t^-(n-1) + t^-(n-2) + 1$$

E daí

$$t^-(n) = c_1 r_1^n + c_2 r_2^n - 1$$

onde

$$c_1 = \frac{5 - 3\sqrt{5}}{2} \quad e \quad c_2 = \frac{5 + 3\sqrt{5}}{2}$$

$$r_1 = \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \quad e \quad r_2 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$

Como $|r_1| < |r_2|$

então

$$c_1 r_1^n = o(c_2 r_2^n)$$

E

$$t^-(n) = c_2 r_2^n + o(r_2^n) + o(r_2^n)$$

E portanto

$$t^-(n) = (1 + o(1)) \cdot c_2 r_2^n$$

E portanto

$$t^-(n) = \Theta(r_2^n)$$

Então para toda árvore AVL T

$$t^-(h(T)) \leq |T|$$

Então

$$|T| = \Theta(r_2^{h(T)})$$

ou equivalentemente

$$\lg |T| = \lg \Theta(r_2^{h(T)})$$

ou seja

$$\lg |T| = \lg \Theta(1) + h(T) \cdot \lg r_2$$

isto é, $\lg |T| = \Theta(1) + \Theta(1) \cdot h(T)$

ou seja, $\lg |T| = \Theta(h(T))$

ou equivalentemente
$h(T) = \Theta(\log |T|)$ $\boxtimes$

Se $|h(E(T)) - h(D(T))| = O(1)$

$\Downarrow$

$h(T) = O(\log |T|)$

04/12/09

~~$g(n) = O(f(n))$~~
~~se e somente se~~
~~existem $c > 0$ e $n_c \in N$ t.q.~~
~~$|g(n)| \leq c.|f(n)|$, p/ todo $n \geq n_c$~~

~~ou~~
~~$g(n) = O(f(n))$ se $g(n) = O(1).f(n)$~~
~~ou seja, existe $h(n) = O(1)$~~
~~t.q. $g(n) =$~~

Teorema 71:
$g(n) = O(f(n))$
se e somente se
existem $c > 0$ e $n_c \in N$ t.q.
$|g(n)| = c|f(n)|$, p/ todo $n \geq n_c$
$f(n) = 0 \Rightarrow g(n) = 0$, p/ todo $n < n_c$

Prova: Vamos provar que $g(n) = O(f(n))$ se e somente se existem $c > 0$ e $n_c \in N$ t.q.
(1) $|g(n)| \leq c.|f(n)|$, p/ todo $n \geq n_c$
(2) $f(n) = 0 \Rightarrow g(n) = 0$, p/ todo $n < n_c$

/A/

ou seja,

$g(n) = O(1)\ f(n)$ se e somente se

existem $c > 0$ e $n_c \in \mathbb{N}$ t.q. (1) e (2)

ou seja, que existe $h(n) = O(1)$ tal que $g(n) = h(n).f(n)$

se e somente se

existem $c > 0$ e $n_c \in \mathbb{N}$ t.q. (1) e (2)

ou seja, que

(A) Se existe $h(n) = O(1)$ t.q.

$g(n) = h(n).f(n)$, então

existem $c > 0$ e $n_c \in \mathbb{N}$ t.q. (1) e (2).

(B) Se existem $c > 0$ e $n_c \in \mathbb{N}$ tal que (1) e (2)

então,

existe $h(n) = O(1)$ t.q. $g(n) = h(n).f(n)$.

(A) Vamos provar que se Existe $h(n) = O(1)$ t.q.

$g(n) = h(n).f(n)$, então

existem $c > 0$ e $n_c \in \mathbb{N}$ t.q. (1) e (2).

Seja $h(n) = O(1)$ t.q. $g(n) = h(n).f(n)$.

Como $h(n) = O(1)$, então existem $c > 0$ e $n_c \in \mathbb{N}$ t.q.

$|h(n)| \leq c$, p/ todo $n \geq n_c$.

e consequentemente, p/ todo $n \geq n_c$

$|g(n)| = |h(n).f(n)| = |h(n)|.|f(n)|$

$\leq c.|f(n)|$

E portanto, (1) é satisfeita.

Como, $g(n) = h(n).f(n)$, p/ todo $n \in \mathbb{N}$,

então, $g(n) = h(n).f(n)$, p/ todo $n < n_c$

e daí, se $f(n) = \emptyset$ p/ algum $n < n_c$,

então, $g(n) = h(n).\emptyset = \emptyset$

E portanto, (2) é satisfeita.

(B) Vamos provar que se existem $c > 0$ e $n_c \in \mathbb{N}$ t.q. (1) e (2). Então,
existem $h(n) = O(1)$ t.q. $g(n) = h(n) \cdot f(n)$

Sejam $c > 0$ e $n_c \in \mathbb{N}$ t.q. (1) e (2).
Vamos provar que existe $h(n) = O(1)$ t.q. $g(n) = h(n) \cdot f(n)$.
Seja $h: \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ dada por

$$h(n) = \begin{cases} 1, & \text{se } f(n) = 0 \\ \frac{g(n)}{f(n)}, & \text{se } f(n) \neq 0 \end{cases}$$

Vamos provar que
(a) $g(n) = h(n) \cdot f(n)$
(b) $h(n) = O(1)$

(a) Vamos provar que $g(n) = h(n) f(n)$, para todo $n \in \mathbb{N}$ t.q. $f(n) \neq 0$ temos $h(n) \cdot f(n) = \frac{g(n)}{f(n)} \cdot f(n) = g(n)$

Para todo $n \geq n_c$ tal que $f(n) = 0$ temos que, por (1) $|g(n)| \leq c \cdot |f(n)| = c \cdot |0| = 0$
E, portanto, $g(n) = 0$, e consequentemente $g(n) = h(n) \cdot f(n)$

Finalmente, por (2) temos $f(n) = 0 \Rightarrow g(n) = 0$ para todo $n < n_c$,
E portanto, para todo $n < n_c$ t.q. $f(n) = 0$ temos $g(n) = 0 = 1 \cdot (0) = h(n) \cdot f(n)$.
Logo, $g(n) = h(n) f(n)$ p/ todo $n \in \mathbb{N}$

(b): Vamos provar que $h(n) = O(1)$, isto é, que existem $c_h > 0$ e $n_h \in N$ t.q.

$|h(n)| \leq c_h$, para todo $n \geq n_h$

Para todo $n \geq n_c$ t.q. $f(n) \neq \emptyset$ temos de (1) que $|g(n)| \leq c.|f(n)|$

E portanto

$$\frac{|g(n)|}{|f(n)|} \leq c, \text{ ou seja,}$$

$|h(n)| \leq c$, para todo $n \geq n_c$ t.q. $f(n) \neq \emptyset$

Como $|h(n)| \leq 1$ para todo $n \geq n_c$ t.q. $f(n) = 0$, então,

$$|h(n)| \leq c_h, \text{ para todo } n \geq n_h.$$

onde,

$$c_h = \max\{c, 1\}$$
$$n_h = n_c.$$

E portanto, $h(n) = O(1)$ ▨

Definições nos livros

$g(n) = \Omega(f(n))$

se existem $c > 0$ e $n_c \in N$ t.q.

$|g(n)| \geq c.|f(n)|$, para todo $n \geq n_c$.

$g(n) = \Theta(f(n))$

se $g(n) = O(f(n))$ e $g(n) = \Omega(f(n))$

ou seja, se existem $c_< > \emptyset$, $c_> > \emptyset$ e $n_c \in N$ t.q.

$c_< |f(n)| \leq |g(n)| \leq c_> |f(n)|$, p/ todo $n \geq n_c$.

$g(n) = o(f(n))$

se, para todo $\varepsilon > \emptyset$, existe $n_\varepsilon \in N$ t.q.

$|g(n)| \leq \varepsilon.|f(n)|$, p/ todo $n \geq n_\varepsilon$