Aula 14

Algumas Aplicações

14.1 Exercício 58

Em muitas situações de cálculo numérico trabalha-se com matrizes triangulares inferiores, isto é, matrizes quadradas cujos elementos acima da diagonal principal são todos nulos. Nesses casos é comum representar uma matriz triangular inferior de n linhas por um vetor contendo somente as posições não-nulas da matriz, o que resulta numa economia de espaço de quase 50%.

Suponha que a matriz triangular inferior M, de n linhas indexadas de 1 a n, será representada por um vetor $v[0..N(n)-1]$, onde $N(n)$ é o tamanho do vetor necessário para representar uma matriz triangular inferior de n linhas.

1. Descreva $N(n)$ através de uma recorrência.
2. Resolva esta recorrência.
3. Qual o índice de v que corresponde à posição $M[i,j]$?

Resposta:

1. $$N(n) = \begin{cases} 0, & \textsf{se } n = 0, \\ N(n-1) + n, & \textsf{se } n > 0. \end{cases}$$

2. $N(n)$ satisfaz uma $\textsf{RLnH}$ cujo $\textsf{PC}$ é

$$(X-1)P,$$

onde P é o PC de uma RLH satisfeita por

$$g(n) = n.$$

Como

$$n = n^1 1^n,$$

então g satisfaz uma RLH cujo PC é

$$P = (X - 1)^2,$$

e, portanto, N satisfaz uma RLH cujo PC é

$$(X - 1)(X - 1)^2 = (X - 1)^3,$$

e

$$N(n) = c_{10} 1^n + c_{11} n^1 1^n + c_{12} n^2 1^n = c_{10} + c_{11} n + c_{12} n^2,$$

onde c_{10}, c_{11} e c_{12} são dados por

$$\begin{array}{rcl} N(0) & = & c_{10} + c_{11} 0 + c_{12} 0^2, \\ N(1) & = & c_{10} + c_{11} 1 + c_{12} 1^2, \\ N(2) & = & c_{10} + c_{11} 2 + c_{12} 2^2, \end{array}$$

ou seja,

$$\begin{array}{rcl} 0 & = & c_{10}, \\ N(0) + 1 & = & c_{10} + c_{11} + c_{12}, \\ N(1) + 2 & = & c_{10} + 2c_{11} + 4c_{12}, \end{array}$$

ou seja,

$$\begin{array}{rcl} 0 & = & c_{10}, \\ 1 & = & c_{11} + c_{12}, \\ 3 & = & 2c_{11} + 4c_{12}, \end{array}$$

e portanto,

$$c_{12} = 1 - c_{11},$$

e

$$2c_{11} + 4(1 - c_{11}) = 3,$$

ou seja

$$-2c_{11} = -1,$$

e portanto,

$$c_{11} = \frac{1}{2},$$

e

$$c_{12} = 1 - c_{11} = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2},$$

e portanto,

$$N(n) = c_{10} + c_{11}n + c_{12}n^2 = 0 + \frac{1}{2}n + \frac{1}{2}n^2 = \frac{n(n+1)}{2}.$$

3. Seja $p(i,j)$ a posição de v ocupada por $M[i,j]$, isto é

$$v[p(i,j)] = M[i,j], \text{ para todo } 1 \leq i,j \leq n.$$

Claramente

$$p(i,i) = N(i) - 1, \text{ para todo } 1 \leq i \leq n,$$

e, em geral,

$$p(i,j) = p(i-1,i-1) + j, \text{ para todo } 1 \leq j \leq i \leq n,$$

e portanto,

$$p(i,j) = p(i-1,i-1)+j = N(i-1)-1+j = \frac{(i-1)((i-1)+1)}{2}+j-1 = \frac{i(i-1)}{2}+j-1,$$

e portanto,

$$p(i,j) = \begin{cases} \frac{i(i-1)}{2} + j - 1, & \text{se } 1 \leq j \leq i \leq n, \\ p(j,i), & \text{se } 1 \leq i < j \leq n \end{cases}$$

14.2 Árvores

Uma *árvore binária* T é uma *árvore vazia*, denotada por λ ou é um par $(E(T), D(T))$ onde $E(T)$ e $D(T)$ são árvores binárias, chamadas respectivamente de *subárvore esquerda* e *subárvore direita* de T. Vamos denotar por $\mathcal{B}$ o conjunto das árvores binárias.

O *tamanho* de uma árvore T é

$$|T| = \begin{cases} 0, & \text{se } T = \lambda, \\ |E(T)| + |D(T)| + 1, & \text{caso contrário .} \end{cases}$$

A *altura* de uma árvore T é

$$h(T) = \begin{cases} 0, & \text{se } T = \lambda, \\ \max\{h(E(T)), h(D(T))\} + 1, & \text{se } T \neq \lambda. \end{cases}$$

Ao usar uma árvore binária como estrutura de dados o tamanho da árvore é o número de elementos armazenado, e sua altura é o número máximo de comparações necessárias para localizar um elemento.

Vamos estudar a relação entre altura e tamanho de uma árvore.

Sejam $h^-, h^+ : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ as alturas mínima e máxima de uma árvore binária de tamanho n respectivamente, isto é,

$$\begin{aligned} h^-(n) &= \min\{h(T) \mid |T| = n\}, \\ h^+(n) &= \max\{h(T) \mid |T| = n\}. \end{aligned}$$

Então,

$$|T| = n \Rightarrow h^-(n) \leq h(T) \leq h^+(n), \text{ para todo } T \in \mathcal{B},$$

ou seja,

$$h^-(|T|) \leq h(T) \leq h^+(|T|), \text{ para todo } T \in \mathcal{B}.$$

Para todo $n > 0$, temos

$$\begin{aligned} h^+(n) &= \max\{h(T) \mid |T| = n\} \\ &= \max\{\max\{h(E(T)), h(D(T))\} + 1 \mid |T| = n\} \\ &= \max\{1 + \max\{h(E(T)), h(D(T))\} \mid |T| = n\} \\ &= 1 + \max\{h(E(T)), h(D(T)) \mid |T| = n\} \\ &= 1 + \max\{h(T) \mid |T| < n\} \\ &= 1 + \max\left\{h^+(k) \mid k < n\right\} \\ &= 1 + h^+(n-1), \end{aligned}$$

e portanto, h^+ satsfaz a RLnH

$$h^+(n) = h^+(n-1) + 1,$$

cuja solução com $h^+(0) = 0$ é

$$h^+(n) = n.$$

Sejam $t^-, t^+ : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ dadas por

$$\begin{aligned} t^-(n) &= \min\{|T| \mid h(T) = n\}, \\ t^+(n) &= \max\{|T| \mid h(T) = n\}. \end{aligned}$$

Então

$$t^-(h(T)) \leq |T| \leq t^+(h(T)), \text{ para todo } T \in \mathcal{B}.$$

Observe que

$$\max\{|E(T)| + |D(T))| \mid h(T) = n\} = \max\{|T| + |T| \mid h(T) = n-1\} = \max\{2|T| \mid h(T) = n-1$$

e daí,

$$\begin{aligned} t^+(n) = \max\{|T| \mid h(T) = n\} \\ &= \max\{|E(T)| + |D(T))| + 1 \mid h(T) = n\} \\ &= \max\{|E(T)| + |D(T))| \mid h(T) = n\} + 1 \\ &= 1 + 2t^+(n-1), \end{aligned}$$

e portanto, t^+ satsfaz a RLnH

$$t^+(n) = 2t^+(n-1) + 1,$$

cuja solução com $t^+(0) = 0$ é

$$t^+(n) = 2^n - 1.$$

Definição 20. *Sejam $h^-, h^+, t^-, t^+ : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ dadas por*

$$\begin{aligned} h^-(n) &= \min\{h(T) \mid |T| = n\}, \\ h^+(n) &= \max\{h(T) \mid |T| = n\}, \\ t^-(n) &= \min\{|T| \mid h(T) = n\}, \\ t^+(n) &= \max\{|T| \mid h(T) = n\}. \end{aligned}$$

Então

$$|T| = n \Rightarrow h^-(n) \leq h(T) \leq h^+(n), \text{ para todo } T \in \mathcal{B},$$

ou seja

$$h^-(|T|) \leq h(T) \leq h^+(|T|), \text{ para todo } T \in \mathcal{B}.$$

Do mesmo modo,

$$h(T) = n \Rightarrow t^-(n) \leq |T| \leq t^+(n), \text{ para todo } T \in \mathcal{B},$$

ou seja,

$$t^-(h(T)) \leq |T| \leq t^+(h(T)), \text{ para todo } T \in \mathcal{B}.$$

Uma árvore T é tão mais eficiente como estrutura de dados quanto mais próxima estiver sua altura do limite $h^-(|T|)$.

Definição 21. *A* eficiência *de uma árvore não vazia T é a razão entre a altura de uma árvore minimal de tamanho $|T|$ e a altura de T, isto é*

$$e(T) = \frac{h^-(|T|)}{h(T)}.$$

Observe que

$$0 < e(T) \leq 1, \text{ para todo } T \neq \lambda \in \mathcal{B}.$$

Definição 22. *Uma árvore T é*

minimal *se toda árvore de tamanho menor que o de T tem altura menor que a de T, isto é,*

$$|T'| < |T| \Rightarrow h(T') < h(T), \text{ para todo } T \in \mathcal{B}.$$

maximal *se toda árvore de tamanho maior que o de T tem altura maior que a de T, isto é,*

$$|T'| > |T| \Rightarrow h(T') > h(T), \text{ para todo } T' \in \mathcal{B}.$$

Temos

$$\max\{h(E(T)), h(D(T)) \mid |T| = n\} = \max\{h(T) \mid |T| = n-1\}.$$

Para todo $n > 0$, temos

$$\begin{aligned}
h^+(n) &= \max\{h(T) \mid |T| = n\} \\
&= \max\{\max\{h(E(T)), h(D(T))\} + 1 \mid |T| = n\} \\
&= \max\{\max\{h(E(T)), h(D(T))\} \mid |T| = n\} + 1 \\
&= 1 + \max\{h(E(T)), h(D(T)) \mid |T| = n\} \\
&= 1 + \max\{h(T) \mid |T| < n\} \\
&= 1 + \max\left\{h^+(k) \mid k < n\right\} \\
&= 1 + h^+(n-1),
\end{aligned}$$

e portanto,

$$h^+(n) = n,$$

ou seja,

$$h(T) \leq |T|, \text{ para todo } T \in \mathcal{B}.$$

Do mesmo modo

$$
\begin{aligned}
t^+(n) &= \max\{|T| \mid h(T) = n\} \\
&= \max\{|E(T)| + |D(T))| + 1 \mid h(T) = n\} \\
&= \max\{|E(T)| + |D(T))| \mid h(T) = n\} + 1 \\
&= 1 + \max\{|T| + |T| \mid h(T) < n\} \\
&= 1 + \max\{2|T| \mid h(T) < n\} \\
&= 1 + 2\max\{|T| \mid h(T) < n\} \\
&= 1 + 2\max\left\{t^+(k) \mid k < n\right\} \\
&= 1 + 2t^+(n-1),
\end{aligned}
$$

e portanto, t^+ satsfaz a RLnH

$$t^+(n) = 2t^+(n-1) + 1,$$

cuja solução com $t^+(0) = 0$ é

$$t^+(n) = 2^n - 1,$$

ou seja,

$$|T| \leq 2^{h(T)} - 1, \text{ para todo } T \in \mathcal{B}.$$

Juntando as duas desigualdades temos, para toda $T \in \mathcal{B}$,

$$h(T) \leq |T| \leq 2^{h(T)} - 1,$$

e consequentemente,

$$\lg(|T| + 1) \leq h(T),$$

e portanto,

$$h(T) \leq \lg(|T| + 1),$$

e como $h(T)$ é inteiro, então

$$h(T) \geq \lceil \lg(|T| + 1) \rceil = \lfloor \lg |T| \rfloor + 1,$$

(Exercício 15a).

Teorema 45. *Para toda árvore binária T,*

$$\lfloor \lg |T| \rfloor + 1 \leq h(T) \leq |T|.$$