



Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. И. Штогрин, Изометрические погружения конуса и цилиндра, *Изв. РАН. Сер. матем.*, 2009, том 73, выпуск 1, 187–224

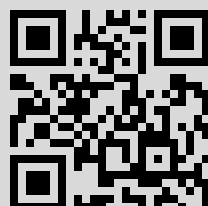
DOI: <https://doi.org/10.4213/im2628>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 109.252.17.64

8 мая 2018 г., 19:57:46



УДК 514.752.437

М. И. Штогрин

Изометрические погружения конуса и цилиндра

Дан подробный анализ метода, с помощью которого А. В. Погорелов построил кусочно гладкие трубчатые поверхности в \mathbb{R}^3 , изометричные поверхности прямого кругового цилиндра. Детально исследованы свойства прообразов ребристых линий произвольной трубчатой поверхности на ее развертке, расположенной на плоскости. Найдены условия, налагаемые на плоские кривые, расположенные на развертке, при которых они могут быть прообразами ребристых линий некоторой трубчатой поверхности. Сделано уточнение о количестве гладких кусков, составляющих кусочно гладкую трубчатую поверхность. Построено обобщение метода А. В. Погорелова с поверхности прямого кругового цилиндра на поверхность прямого кругового конуса.

Библиография: 7 наименований.

Ключевые слова: теория поверхностей, поверхности в трехмерном пространстве.

Введение

Рассматриваются специальные изометрические погружения, преимущественно вложения, поверхности прямого кругового цилиндра и поверхности прямого кругового конуса в трехмерное евклидово пространство.

Специальные изометрические преобразования поверхности прямого кругового цилиндра впервые исследовал А. В. Погорелов¹. Он рассматривал вложения поверхности кругового цилиндра в трехмерное евклидово пространство в виде некоторой *трубчатой поверхности*. Вложенная поверхность не является гладкой в целом, напротив, она является гладкой лишь *кусочно*. Значит, полученная трубчатая поверхность обязательно обладает *ребристыми линиями*. А. В. Погорелов эвристически указал общий вид ребристых линий трубчатой поверхности. В настоящей работе подробно исследованы свойства тех линий на поверхности кругового цилиндра, которые являются прообразами ребристых линий при специальном изометрическом отображении поверхности цилиндра в трубчатую поверхность. Точнее, прообразы ребристых линий трубчатой поверхности изучаются нами не на поверхности прямого кругового цилиндра, а на ее *развертке* $R \in \mathbb{R}^2$. (Как обычно, некоторые граничные стороны развертки $R \subset \mathbb{R}^2$ отождествлены друг с другом.)

¹ Алексей Васильевич Погорелов (1919–2002) – российский математик.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (гранты № 08-01-00565, 08-01-90102-Мол, 08-01-91202-ЯФ), Программы Президента РФ “Поддержка ведущих научных школ” (грант № НШ-4182.2006.1) и Государственной программы фундаментальных исследований ОМН РАН “Современные проблемы теоретической математики”.

Для развертки $R \subset \mathbb{R}^2$ кусочно гладкой трубчатой поверхности $Z \subset \mathbb{R}^3$, изометричной круговому цилиндру, найдены условия (налагаемые на испытываемые гладкие кривые), необходимые и достаточные для того, чтобы эти кривые были прообразами ребристых линий при специальном изометрическом отображении $f: R \rightarrow Z$, построенном А. В. Погореловым. Найденные условия будут приведены ниже в виде системы неравенств. Эти неравенства справедливы при любом специальном изометрическом преобразовании поверхности кругового цилиндра. Они просты и удобны с точки зрения их применения при практическом построении поверхности $Z \subset \mathbb{R}^3$ по заданной ее развертке $R \subset \mathbb{R}^2$. Более того, эти неравенства справедливы как для кусочно гладкой, так и для кусочно линейной поверхности, изометричной поверхности кругового цилиндра. Анализ специальных изометрических преобразований цилиндра привел нас к следующему основному результату: существуют специальные изометрические преобразования конуса, аналогичные преобразованиям цилиндра, построенным в работе [1]. Этот результат является не только интересным, но и очень важным. Он позволил значительно расширить класс поверхностей, допускающих специальные изометрические преобразования. Благодаря этому удалось доказать, что поверхности всех пяти платоновых тел допускают кусочно гладкие изометрические погружения (вложения) в трехмерное евклидово пространство \mathbb{R}^3 без каких-либо плоских кусков (см. [2], [3]).

Последнее верно для многих других трехмерных выпуклых многогранников. Для общего случая выскажем следующую гипотезу.

ГИПОТЕЗА. Поверхность любого замкнутого трехмерного выпуклого многогранника допускает вложение в \mathbb{R}^3 в виде изометричной ей невыпуклой кусочно гладкой поверхности без единого плоского куска.

После всестороннего анализа специальных изометрических преобразований прямого кругового цилиндра [4] удалось получить непосредственное обобщение метода А. В. Погорелова с поверхности прямого кругового цилиндра на поверхность прямого кругового конуса.

Для развертки $R \subset \mathbb{R}^2$ кусочно гладкой ворончатой поверхности $Z^* \subset \mathbb{R}^3$, изометричной круговому конусу, найдены условия (налагаемые на испытываемые гладкие кривые), необходимые и достаточные для того, чтобы эти кривые были прообразами ребристых линий при построенном нами специальном изометрическом отображении $f^*: R \rightarrow Z^*$. Найденные условия задаются в виде некоторой системы неравенств (см. [5]).

Обнаружение специальных изометрических преобразований кругового конуса является существенным продвижением с точки зрения обобщения метода А. В. Погорелова. По каким-то странным обстоятельствам специальные изометрические преобразования конуса не были обнаружены А. В. Погореловым.

Ниже исследованы также некоторые частные случаи специальных изометрических преобразований цилиндра, обладающие такими особенностями, которые не были свойственны случаям общих специальных изометрических преобразований. В частности, найдены такие кусочно гладкие изометрические вложения цилиндра в \mathbb{R}^3 , обладающие двоякой периодичностью, в которых множе-

ство гладких кусков является *считным* [4]. Такие вложения прямого кругового цилиндра в трехмерное евклидово пространство \mathbb{R}^3 в работе А. В. Погорелова [1] не рассматривались.

Отметим также, что в процессе нашего исследования попутно найден класс замкнутых выпуклых многогранников, ребра которых однозначно восстанавливаются по их заданным разверткам (см. § 6).

§ 1. Погружения поверхности кругового цилиндра

Представим краткое изложение результатов из работы [1, § 3, п. 1].

Рассмотрим вспомогательную правильную призму Π с горизонтальным $2n$ -угольным основанием и вертикальной осью симметрии. На боковой грани α_1 призмы Π возьмем произвольную гладкую кривую γ_1 , однозначно проектирующуюся на ось призмы Π . На смежной боковой грани α_2 построим кривую γ_2 , получающуюся из γ_1 при зеркальном отражении относительно плоскости β , проходящей через боковое ребро $\alpha_2 \cap \alpha_1$ и ось призмы Π . Аналогично построим кривую γ_3 на грани α_3 , смежной с α_2 , и т. д. Таким образом на каждой грани α_i , $i = 1, \dots, 2n$, получим кривую γ_i . Проведем теперь через кривые γ_1 и γ_2 цилиндрическую поверхность Z_{12} с горизонтальными образующими, перпендикулярными плоскости β . Аналогично строим цилиндрические поверхности Z_{23} , Z_{34} и т. д. Все вместе они составляют кусочно гладкую поверхность Z с ребристыми линиями γ_i , $i = 1, \dots, 2n$. В общем случае предполагается, что $\gamma_j \cap \gamma_i = \emptyset$ при всевозможных $j \neq i$. Не исключаются также частные случаи, когда $\gamma_j \cap \gamma_i \neq \emptyset$ при некоторых $j \neq i$, где $|j - i| = 1$ (по модулю $2n$). Четыре примера таких поверхностей изображены на рис. 1.

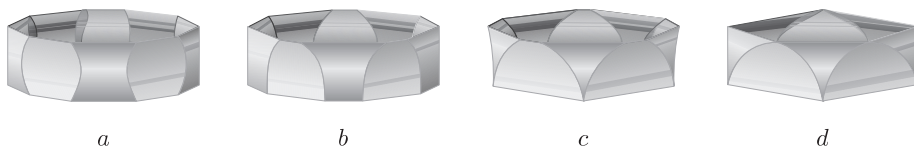


Рис. 1. Кусочно гладкая поверхность: $a, b - \forall \gamma_j \cap \gamma_i = \emptyset$; $c, d - \exists \gamma_j \cap \gamma_i \neq \emptyset$

Именно так в работе [1, с. 50–54] построил А. В. Погорелов введенную им *трубчатую* поверхность Z . Независимо от высоты призмы Π поверхность Z всегда изометрична прямому круговому цилиндру. В самом деле, цилиндрическая поверхность Z_{12} является развертывающейся. Цилиндрическая поверхность Z_{23} является зеркальным отражением относительно плоскости грани α_2 продолжения цилиндрической поверхности Z_{12} за ее край γ_2 . Поэтому объединение $Z_{12} \cup Z_{23}$ является развертывающейся поверхностью. Значит, наличие ребристой линии, например γ_2 , не является препятствием тому, чтобы поверхность Z оставалась развертывающейся. Далее, луч света, направленный вдоль образующей цилиндрической поверхности Z_{12} , дойдя до точки пересечения с кривой γ_2 , отразится от плоскости грани α_2 и направится вдоль

образующей цилиндрической поверхности Z_{23} , и т. д. После полного обхода вокруг оси луч замкнется. Таким образом полученные замкнутые ломаные лежат в параллельных плоскостях и имеют одну и ту же длину (см. [1, с. 52]). Они являются замкнутыми плоскими геодезическими трубчатой поверхности Z . Из этих соображений следует изометричность поверхности Z прямому круговому цилиндру. Радиус цилиндра, обозначим его через r , определяется из соотношения $2\pi r = L$ (см. [1, с. 51]), где L – длина замкнутой плоской геодезической поверхности Z . Высота цилиндра равна длине кривой $\tilde{\gamma} = \beta \cap Z_{12}$ (см. [1, с. 52]).

Пусть, далее, кривая γ_1 на грани α_1 призмы Π , с помощью которой получена трубчатая поверхность Z , произвольным образом деформируется. Тогда вместе с кривой γ_1 деформируется и соответствующая трубчатая поверхность Z . Если в процессе деформации длина кривой $\tilde{\gamma} = \beta \cap Z_{12}$ сохраняется, то поверхность Z геометрически изгибается. Именно так А. В. Погорелов получил изгибающуюся кусочно гладкую трубчатую поверхность Z с плавающими на ней ребристыми линиями (см. [1]).

Отметим, что А. В. Погорелов строил лишь такие трубчатые поверхности Z , которые обладают определенной правильностью строения. А именно, в случае неограниченной высоты они обладают двоякой периодичностью. Вдоль оси действует дискретная группа параллельных переносов. В окружном направлении действует конечная группа изометрий. Она порождается зеркальными отражениями (обозначаемыми через m) относительно двух плоскостей, составляющих двугранный угол π/n . В группе содержатся n зеркальных отражений m . Их плоскости проходят через поворотную ось. Порядок оси равен n . Порядок группы равен $2n$. Мы будем обозначать эту группу через ntm . В двух исключительных случаях, точнее при $n = 2$ и $n = 3$, в кристаллографии ее обозначают соответственно через $tm2$ и $3m$ (см. [6]).

Впредь наличие группы $G = ntm$ будет обязательным требованием, налагаемым на устройство кусочно гладкой поверхности Z как в случае неограниченной высоты, так и в случае ограниченной высоты.

Мы изложили результат, полученный А. В. Погореловым.

Приступим к анализу этого результата. При построении поверхности Z бралась вспомогательная правильная призма Π . На ее грани α_1 выбиралась гладкая кривая γ_1 , причем совершенно произвольно, лишь бы она однозначно проектировалась на ось призмы. Никаких других ограничений, налагаемых на устройство кривой γ_1 , в работе [1] не дано. Для поверхности Z , построенной методом А. В. Погорелова, кривая γ_1 оказалась ребристой линией. Как трансверсальное пересечение двух гладких цилиндрических поверхностей ребристая линия $\gamma_1 = Z_{2n1} \cap Z_{12}$ является гладкой кривой.

Наша ближайшая цель – дальнейшее исследование свойств ребристой линии γ_1 кусочно гладкой трубчатой поверхности Z , вложенной в \mathbb{R}^3 .

Для простоты мы будем рассматривать лишь общий случай, в котором имеют место равенства $\gamma_j \cap \gamma_i = \emptyset$ при всех $j \neq i$, где $i = 1, \dots, 2n$.

Через произвольную точку кривой γ_1 кусочно гладкой трубчатой поверхности $Z \subset \mathbb{R}^3$ проходят две прямолинейные образующие поверхности Z . Угол между кривой γ_1 и одной из образующих обозначим через φ . Величина угла φ

в \mathbb{R}^3 такая же, как и во внутренней метрике поверхности Z . Прямолинейный луч, касательный к γ_1 , и два луча, направленные вдоль образующих, являются ребрами некоторого трехгранного *гоноэдра*, т.е. трехгранного телесного угла в \mathbb{R}^3 . Плоские углы этого гоноэдра равны φ , $\pi - \varphi$ и $\pi - \pi/n$. Выписав для указанных плоских углов неравенства треугольника, получаем следующую систему неравенств [4]:

$$\frac{\pi}{2n} < \varphi < \pi - \frac{\pi}{2n}. \quad (1)$$

Здесь число n является фиксированным, а угол φ – переменным. Получены новые условия, налагаемые на ребристую линию γ_1 поверхности $Z \subset \mathbb{R}^3$. Эти условия задаются в виде системы неравенств (1).

Все цилиндрические поверхности Z_{12}, \dots, Z_{2n-1} имеют горизонтальные прямолинейные образующие. Разрежем цилиндр Z_{2n-1} плоскостью симметрии, т.е. одной из n плоскостей зеркальной симметрии поверхности $Z \subset \mathbb{R}^3$, и развернем разрезанную поверхность Z на евклидову плоскость \mathbb{R}^2 . Получим развертку кусочно гладкой поверхности Z в виде некоторого прямоугольника $R \subset \mathbb{R}^2$, обладающего парой эквивалентных сторон (рис. 2, а). Эти стороны развертки R имеют один и тот же образ на трубчатой поверхности $Z \subset \mathbb{R}^3$ при изометрическом отображении $f: R \rightarrow Z$.

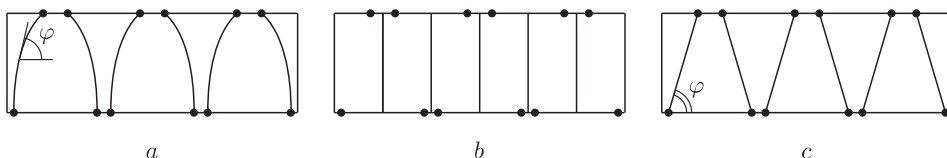


Рис. 2. Развертка R : a – прообразы γ_i ; b – следы зеркал; c – прообразы δ_i

На рис. 2 жирными точками обозначены прообразы вершин поверхности Z . На рис. 2, а изображена развертка $R \subset \mathbb{R}^2$ кусочно гладкой поверхности $Z \subset \mathbb{R}^3$, которая представлена на рис. 1, b при $n = 3$. Согласно [1] длина горизонтальной стороны прямоугольника R равна L , а длина вертикальной стороны прямоугольника R равна длине кривой $\tilde{\gamma} = \beta \cap Z_{12}$.

Необходимо отметить, что на образе и прообразе при изометрическом отображении $f: R \rightarrow Z$ углы между кривыми сохраняются по своей величине. Значит, прообраз ребристой линии γ_1 , расположенной на поверхности $Z \subset \mathbb{R}^3$, по наследству удовлетворяет той же системе неравенств (1), но уже относящейся к развертке $R \subset \mathbb{R}^2$. Таким образом, условия, налагаемые на образ и прообраз ребристой линии γ_1 поверхности Z , одинаково задаются как на самой поверхности $Z \subset \mathbb{R}^3$, так и на ее развертке $R \subset \mathbb{R}^2$. Эти условия имеют вид системы неравенств (1). Условия (1) являются очень удобными при построении кусочно гладкой трубчатой поверхности $Z \subset \mathbb{R}^3$ по заданной ее развертке $R \subset \mathbb{R}^2$.

Пусть развертка R кусочно гладкой поверхности Z расположена на плоскости \mathbb{R}^2 так, что прообразы всех прямолинейных образующих поверхности $Z \subset \mathbb{R}^3$ находятся на горизонтальных прямых. Тогда неравенства (1) означают, что графики прообразов гладких кривых γ_i на плоскости \mathbb{R}^2 являются не

слишком пологими. В частности, прообраз кривой γ_1 не может иметь горизонтальные касательные, хотя наличие горизонтальных касательных в некоторых точках² самой кривой γ_1 не исключалось (см. ниже рис. 13, *d*). Прообразы следов зеркальных плоскостей на трубчатой поверхности Z суть вертикальные отрезки. Они разбивают развертку $R \subset \mathbb{R}^2$ на $2n$ равных прямоугольников – прообразов фундаментальных областей группы $G = nmm$ при изометрическом отображении $f: R \rightarrow Z$ (см. рис. 2, *b*). В каждом из этих *фундаментальных прямоугольников* расположен прообраз соответствующей гладкой кривой γ_i , которая изначально задавалась на грани α_i , $i = 1, \dots, 2n$, призмы Π (см. рис. 2, *a*). Более того, в смежных фундаментальных прямоугольниках прообразы ребристых линий γ_i , $i = 1, \dots, 2n$, зеркально симметричны относительно их общей стороны (см. рис. 2, *a, b*). Это правило продиктовано наличием группы изометрий $G = nmm$.

Если в процессе изгибания во всех точках кривой γ_1 непрерывно уменьшать кривизну, устремив ее к нулю, то в пределе γ_1 выпрямится в прямолинейный отрезок δ_1 . В итоге кусочно гладкая поверхность Z превратится в изометричную ей кусочно линейную поверхность (см. рис. 1, *a–d* и соответственно рис. 3, *a–d*).

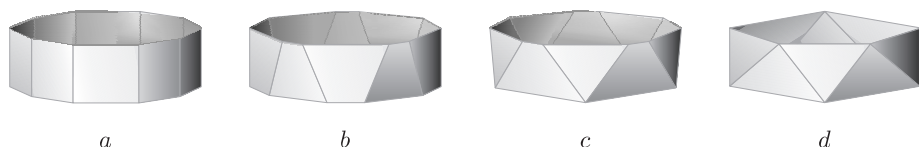


Рис. 3. Кусочно линейная поверхность: $a, b - \forall \delta_j \cap \delta_i = \emptyset$; $c, d - \exists \delta_j \cap \delta_i \neq \emptyset$

На рис. 2, *c* изображена развертка $R \subset \mathbb{R}^2$ кусочно линейной поверхности $\bar{Z} \subset \mathbb{R}^3$, которая представлена на рис. 3, *b* при $n = 3$.

К краям кусочно линейной поверхности \bar{Z} приклеим два выпуклых многоугольника (каждый есть выпуклая оболочка компоненты края). Получим выпуклый многогранник. Не умаляя общности³, мы будем предполагать, что $\delta_j \cap \delta_i = \emptyset$ при всех $j \neq i$, где $i = 1, \dots, 2n$ (по аналогии с условием $\gamma_j \cap \gamma_i = \emptyset$, $j \neq i$, принятым в [1]). Тогда все боковые грани многогранника являются трапециями. В любой вершине многогранника сходятся три плоских угла φ , $\pi - \varphi$ и $\pi - \varphi$. В силу неравенств треугольника имеем систему неравенств (1). Данная система неравенств уже была получена ранее для ребристой линии γ_1 кусочно гладкой поверхности $Z \subset \mathbb{R}^3$. В том случае вдоль γ_1 величина угла φ была переменной. Здесь вдоль ребра δ_1 величина угла φ является фиксированной. Система неравенств (1) справедлива и для развертки $R \subset \mathbb{R}^2$ в силу ее изометричности поверхности $\bar{Z} \subset \mathbb{R}^3$. Из неравенств (1) следует, например, что в случае поверхности \bar{Z} , изображенной на рис. 3, *d*, высота цилиндра не может быть сколь угодно малой, если задан радиус цилиндра и фиксировано n .

²В этих точках некоторые неравенства из (1) становятся равенствами.

³При удалении окрестностей краев поверхности, представленной на рис. 3, *d*, останется поверхность, приведенная на рис. 3, *b*.

Однако даже в этом случае на высоту призмы Π никаких ограничений не налагается.

Наша дальнейшая цель – доказать, что условия (1), которым удовлетворяет прообраз ребристой линии на развертке R , являются не только необходимыми, но и достаточными для того, чтобы существовала трубчатая поверхность \bar{Z} или же Z , изометричная данной развертке. Доказательство проведем отдельно для случая кусочно линейной поверхности $\bar{Z} \subset \mathbb{R}^3$ и для случая кусочно гладкой поверхности $Z \subset \mathbb{R}^3$.

1. Рассмотрим случай кусочно линейной поверхности $\bar{Z} \subset \mathbb{R}^3$. Мы продолжаем предполагать, что $\delta_j \cap \delta_i = \emptyset$ при всех $j \neq i$, где $i = 1, \dots, 2n$.

Для характеристики расположения ребра δ_1 на кусочно линейной поверхности $\bar{Z} \subset \mathbb{R}^3$ была найдена система неравенств (1), в которой величина угла φ является фиксированной. Система неравенств (1) характеризует также и расположение прообраза ребра $\delta_1 \subset \bar{Z}$ на самой развертке $R \subset \mathbb{R}^2$, что следует из изометричности отображения $\bar{f}: R \rightarrow \bar{Z}$. Таким образом, условия (1) налагают ограничения не только на положение ребра δ_1 в фундаментальной области группы $G = nmm$ на трубчатой поверхности $\bar{Z} \subset \mathbb{R}^3$, но и на положение прообраза ребра δ_1 в фундаментальном прямоугольнике на развертке $R \subset \mathbb{R}^2$.

Короче, если дана кусочно линейная поверхность $\bar{Z} \subset \mathbb{R}^3$ (см. рис. 3, б), то для ее развертки $R \subset \mathbb{R}^2$ (см. рис. 2, с) выполняются неравенства (1).

Теперь докажем обратное утверждение: если для развертки $R \subset \mathbb{R}^2$ (см. рис. 2, с) выполняются неравенства (1), то существует кусочно линейная поверхность $\bar{Z} \subset \mathbb{R}^3$ (см. рис. 3, б при том же n) с данной разверткой R .

Схема доказательства состоит в следующем. С топологической точки зрения развертка R представляет собой сферу с двумя отверстиями. Заклеим оба отверстия выпуклыми плоскими многоугольниками M_1 и M_2 с углами $\pi - \pi/n$. В итоге получим развертку $M_1 \cup R \cup M_2$ неотрицательной кривизны, гомеоморфную сфере. По теореме А. Д. Александрова⁴ существует (и при том единственный) выпуклый многогранник, поверхность которого изометрична полученной развертке $M_1 \cup R \cup M_2$. Многоугольники M_1 и M_2 являются гранями выпуклого многогранника, расположенными в параллельных плоскостях, а сам этот многогранник имеет вид $M_1 \cup \bar{Z} \cup M_2$. Он однозначно восстанавливается по развертке. В частности, по развертке $R \subset \mathbb{R}^2$ восстановлена поверхность $\bar{Z} \subset \mathbb{R}^3$. Подробное доказательство изложено ниже, в § 6.

Отметим, что при доказательстве обратного утверждения существенно то, что развертка R имеет группу изометрий, изоморфную группе $G = nmm$ (см. § 6). Группу изометрий $G = nmm$ имеет поверхность \bar{Z} , построенная методом А. В. Погорелова с помощью обычного ребра $\gamma_1 = \delta_1$. (Здесь ребристая линия γ_1 является прямолинейным отрезком δ_1 . Исходное боковое ребро δ_1 поверхности \bar{Z} принадлежит грани α_1 вспомогательной призмы Π . При этом плоскость грани α_1 является одной из биссекториальных плоскостей двугранного угла, образованного плоскостями граней \bar{Z}_{2n-1} и \bar{Z}_{12} кусочно линейной трубчатой поверхности \bar{Z} , примыкающих к ребру δ_1 .)

⁴Александр Данилович Александров (1912–1999) – российский математик.

2. Рассмотрим случай кусочно гладкой поверхности $Z \subset \mathbb{R}^3$. Аналогично случаю 1 мы продолжаем предполагать, что $\gamma_j \cap \gamma_i = \emptyset$ при всех $j \neq i$, где $i = 1, \dots, 2n$. Напомним, что для характеристики расположения ребристой линии γ_1 на кусочно гладкой поверхности Z была найдена система неравенств (1). Здесь величина угла φ является переменной. Система неравенств (1) характеризует также и расположение прообраза ребристой линии γ_1 поверхности Z на ее развертке R , что следует из наличия изометричного отображения $f: R \rightarrow Z$. Таким образом, условия (1) налагают ограничения не только на положение ребристой линии $\gamma_1 \subset Z$ в фундаментальной области группы $G = nmt$ на трубчатой поверхности $Z \subset \mathbb{R}^3$, но и на положение прообраза ребристой линии γ_1 в фундаментальном прямоугольнике на ее развертке $R \subset \mathbb{R}^2$.

Короче, если дана кусочно гладкая поверхность $Z \subset \mathbb{R}^3$ (см. рис. 1, б), то для ее развертки $R \subset \mathbb{R}^2$ (см. рис. 2, а) выполнены неравенства (1).

Теперь докажем обратное утверждение: если для развертки $R \subset \mathbb{R}^2$ (см. рис. 2, а) выполнены неравенства (1), то существует кусочно гладкая поверхность $Z \subset \mathbb{R}^3$ (см. рис. 1, б), изометричная данной развертке R .

Рассмотрим внутри фундаментального прямоугольника развертки R гладкую кривую τ_1 , которая удовлетворяет условиям (1). Покажем, что τ_1 является прообразом ребристой линии γ_1 при некотором $f: R \rightarrow Z$.

В самом деле, разделим длину гладкой кривой τ_1 на 2^k равных частей. При любом $k \in \mathbb{N}$ заменим кривую τ_1 на вписанную ломаную (рис. 4).

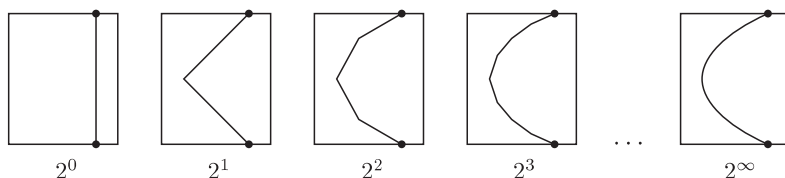


Рис. 4. Шаги предельного перехода от прообразу δ_1 к прообразу γ_1 на развертке $R \subset \mathbb{R}^2$ (в фундаментальном прямоугольнике)

Через вершины ломаной проведем горизонтальные прямые. Между любыми соседними горизонтальными прямыми мы получим частичную развертку (см. рис. 2, с). Если звенья вписанной ломаной достаточно малы, то все полученные 2^k разверток также удовлетворяют условиям (1). Для каждой из них при условиях (1) наличие кусочно линейной поверхности \bar{Z} уже доказано выше. В итоге мы получим кусочно линейную трубчатую поверхность, составленную из 2^k кусочно линейных трубчатых поверхностей \bar{Z} . Каждая из них соответствует своему звену ломаной. Устремим длины звеньев вписанной ломаной к нулю (см. рис. 4). В пределе получим кусочно гладкую поверхность Z с заданным прообразом τ_1 кривой γ_1 .

Получив поверхность Z посредством предельного перехода, фиксируем ее положение в пространстве. Найдём уравнение гладкой ребристой линии γ_1 . Кривая γ_1 является пересечением двух цилиндрических поверхностей Z_{2n-1} и Z_{12} с горизонтальными образующими. Обозначим через S произвольную

точку кривой γ_1 , а через A – ее начало (рис. 5). Прямолинейные образующие, проходящие через точку S , параллельны образующим, проходящим через точку A . Три луча, выходящие из точки S , два из которых направлены по образующим и один направлен по касательной к кривой γ_1 , являются ребрами трехгранного гоноэдра. Плоские углы гоноэдра равны φ , $\pi - \varphi$ и $\pi - \pi/n$. Здесь углы φ и $\pi - \varphi$ точно такие же, какие составляет с горизонтальной прямой касательная к кривой $\tau_1 = f^{-1}(\gamma_1)$ в точке $f^{-1}(S)$, где $f: R \rightarrow Z$ – предельное изометрическое отображение.

Зафиксируем в пространстве \mathbb{R}^3 направления прямолинейных образующих в точке A . Они составляют наперед заданный угол $\pi - \pi/n$.

(Можно зафиксировать не эти два направления, а тесно связанную с ними ортонормированную систему координат, направив оси абсцисс и ординат по биссектрисам вертикальных углов между прямолинейными образующими.)

Зная направления прямолинейных образующих поверхности Z в точке A , мы получаем направления прямолинейных образующих в любой точке S , $S \in \gamma_1$, так как они параллельны образующим в точке A . Далее, зная углы φ и $\pi - \varphi$ в точке $f^{-1}(S)$ развертки $R \subset \mathbb{R}^2$, мы находим единичный вектор \mathbf{t} , направленный вдоль касательной к кривой γ_1 в точке S поверхности $Z \subset \mathbb{R}^3$, так как касательная составляет с прямолинейными образующими те же углы φ и $\pi - \varphi$ (см. рис. 5, c, a).

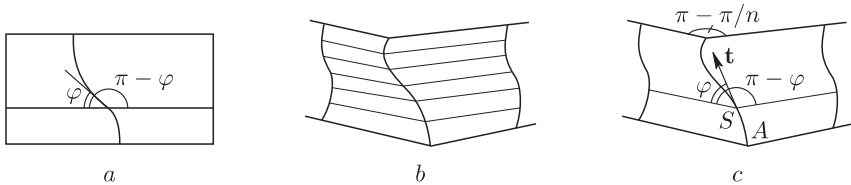


Рис. 5. Поверхность Z : a – фундаментальный прямоугольник на развертке R ; b – фундаментальная область группы $G = nmm$ на поверхности Z ; c – ребристая линия γ_1 , касательный вектор \mathbf{t} и образующие, выходящие из точки S

Вектор \mathbf{t} зависит от φ . Угол φ является переменным. Его величина зависит от точки S . Длину дуги кривой γ_1 от A до S (см. рис. 5, c) обозначим через s и примем в качестве параметра. В таком случае во всех точках кривой γ_1 нами определен касательный вектор \mathbf{t} или вектор-функция $\mathbf{t} = \mathbf{t}(s)$. Далее, вектор с началом A и концом S обозначим через \mathbf{r} . Тогда \mathbf{r} представляет собой еще одну вектор-функцию $\mathbf{r}(s)$, зависящую от параметра s . Ее годографом служит ребристая линия γ_1 . Для нахождения вектор-функции $\mathbf{r} = \mathbf{r}(s)$ мы имеем общеизвестное дифференциальное уравнение

$$\frac{d\mathbf{r}}{ds} = \mathbf{t}(s) \quad (2)$$

с начальным условием $\mathbf{r}(0) = \mathbf{0}$. Для обеспечения должной дифференцируемости правой части дифференциального уравнения (2) выбранная кривая τ_1

на развертке, удовлетворяющая условиям (1), должна быть гладкой, причем в достаточной степени (точно так же, как интегральная кривая γ дифференциального уравнения (*) в [1, с. 54]). В таком случае решение $\mathbf{r} = \mathbf{r}(s)$ дифференциального уравнения (2) не только существует, но и является единственным при заданном начальном условии $\mathbf{r}(0) = \mathbf{0}$.

В итоге нами получено искомое уравнение ребристой линии $\gamma_1 = f(\tau_1)$. Ей соответствует некоторая фиксированная кусочно гладкая трубчатая поверхность Z , построенная методом А. В. Погорелова.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. При выводе дифференциального уравнения (2) для ребристой линии предельной поверхности были использованы два фиксированных в \mathbb{R}^3 направления, составляющих угол $\pi - \pi/n$, и два угла φ и $\pi - \varphi$, которые составляет вектор \mathbf{t} с данными направлениями. Значит, правая часть уравнения (2) зависит лишь от фиксированного угла $\pi - \pi/n$, а также от двух переменных углов φ и $\pi - \varphi$, заданных на развертке R .

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Последовательность ломаных, вписанных в кривую τ_1 , можно выбирать по-разному, лишь бы длины всех звеньев ломаных в пределе стремились к нулю. Однако полученная при этом предельная поверхность Z не зависит от способа выбора допредельной последовательности ломаных, вписанных в τ_1 , что следует из замечания 1.

ТЕОРЕМА 1. *Каждая не слишком полая гладкая кривая на развертке R (см. (1)), содержащаяся внутри фундаментального прямоугольника, является прообразом некоторой гладкой кривой γ_1 , взятой на грани α_1 призмы Π и порождающей соответствующую ей кусочно гладкую трубчатую поверхность Z , построенную методом А. В. Погорелова.*

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. *Кусочно гладкая поверхность $Z \subset \mathbb{R}^3$ однозначно восстанавливается по своей развертке $R \subset \mathbb{R}^2$, на которой заданы прообразы всех ребристых линий и прямолинейных образующих при изометрическом отображении $f: R \rightarrow Z$. Опираясь на решение уравнения (2), поверхность Z можно построить непосредственно по кривой $\gamma_1 = f(\tau_1)$, используя метод А. В. Погорелова, не прибегая к предельному переходу.*

ЗАМЕЧАНИЕ 3 (о разворачивании поверхности Z). В каждой точке кривой γ_i угол между прямолинейными образующими поверхности $Z \subset \mathbb{R}^3$ фиксирован и равен $\pi - \pi/n$. Как оказалось, существует изометрическая деформация разрезанной поверхности Z , при которой все прямолинейные образующие сохраняются горизонтальными, а угол между ними непрерывно меняется. Эта деформация зависит от непрерывного параметра t , $0 \leq t \leq 1$. В любой точке каждой кривой γ_i , $i = 1, \dots, 2n$, угол между сходящимися в ней прямолинейными образующими в процессе деформации равен θ , где $\theta = \theta(t) \equiv \pi - \pi/n + t\pi/n$. В частности, при $t = 0$ мы получаем исходную поверхность $Z \subset \mathbb{R}^3$. С ростом параметра t разрезанная нами поверхность постепенно разгибается (распрямляется), превращаясь при $t = 1$ в развертку $R \subset \mathbb{R}^2$. В итоге нами получен практически удобный процесс разворачивания поверхности Z , при котором кривые γ_i , $i = 1, \dots, 2n$, остаются неизменными на деформирующейся поверхности

с точки зрения неизменной ее внутренней метрики. Однако в объемлющем пространстве \mathbb{R}^3 ребристые линии γ_i изменяются (оставаясь при этом плоскими). Нами получено уравнение (2) гладкой кривой γ_1 в трехмерном евклидовом пространстве \mathbb{R}^3 при $t = 0$. Уравнение (2) записывается в фиксированной ортонормированной системе координат. Начало кривой γ_1 служит началом координат. Оси абсцисс и ординат направлены по биссектрисам вертикальных углов между прямолинейными образующими, проходящими через начало. При любом другом фиксированном значении параметра t , $0 < t < 1$, уравнение (2) выводится точно так же, как и при $t = 0$.

ЗАМЕЧАНИЕ 4 (о погружениях цилиндра). В предложении 1 речь идет о вложении $Z \subset \mathbb{R}^3$. Для построения рассматриваемой поверхности Z по заданной развертке R мы воспользуемся деформацией разрезанной поверхности, описанной в замечании 3. Однако теперь мы обратим вспять время разворачивания поверхности. В таком случае от развертки R , которая получилась в момент $t = 1$, мы вернемся обратно к исходной поверхности Z , которая имела в момент $t = 0$. Именно так по заданной развертке $R \subset \mathbb{R}^2$ мы строим трубчатую поверхность $Z \subset \mathbb{R}^3$. Как оказалось, при некоторых более сильных условиях, налагаемых на прообраз ребристой линии, расположенной на развертке, процесс обращения времени можно продолжить далее. А именно, пусть при некотором натуральном k , $2 \leq k \leq n - 1$, взамен условий (1) выполняются следующие усиленные неравенства:

$$\frac{k\pi}{2n} < \varphi < \pi - \frac{k\pi}{2n}.$$

Таким образом, на данной развертке R в качестве прообраза ребристой линии γ_1 новой поверхности Z выбирается более крутая кривая τ_1 . Тогда в момент $t = 1 - k$ мы получим поверхность, которая обходит ось симметрии k раз. Действительно, всякая ломаная, составленная из $2n$ образующих, углы в вершинах которой равны $\theta(1 - k)$, замкнется в плоский $2n$ -угольник, что подтверждается следующими равенствами:

$$\begin{aligned} \theta(t) &= \pi + (t - 1)\frac{\pi}{n}, & \theta(1 - k) &= \pi - \frac{k\pi}{n}, \\ \pi - \theta(1 - k) &= \frac{k\pi}{n}, & 2n(\pi - \theta(1 - k)) &= 2\pi k. \end{aligned}$$

Каждая из этих поверхностей погружена в \mathbb{R}^3 . Никакие другие погружения поверхности прямого кругового цилиндра в трехмерное евклидово пространство мы не рассматриваем. При каждом $k = 2, \dots, n - 1$ погруженная поверхность строится по развертке точно так же, как строилась выше вложенная поверхность $Z \in \mathbb{R}^3$ при $k = 1$.

Если кусочно гладкая поверхность $Z \subset \mathbb{R}^3$ и кусочно линейная поверхность $\bar{Z} \subset \mathbb{R}^3$ изометричны, то их развертки также изометричны. В таком случае развертки можно наложить друг на друга. Ниже мы будем предполагать, что на общей развертке $R \subset \mathbb{R}^2$ прообразы ребристой линии γ_i и ребра δ_i обладают общими концами (см. рис. 2, а, с).

Теперь мы предъявим вариацию прообраза ребра δ_1 на развертке R . Прообраз ребристой линии γ_1 нам еще не известен, но мы уже знаем, что на развертке R он подчиняется вполне определенным условиям: для него выполняется система неравенств (1).

Будем предполагать, что на развертке $R \subset \mathbb{R}^2$ варьируемая⁵ кривая⁶, обозначим ее через τ_1 , зависит от одного непрерывного параметра t , $0 \leq t \leq 1$. В процессе вариации выполняются следующие четыре условия:

- (i) концы варьируемой кривой τ_1 остаются неподвижными, они совпадают с концами прообраза ребра δ_1 (см. рис. 2, c, a);
- (ii) при вариации кривая τ_1 остается в том же фундаментальном прямоугольнике, что и δ_1 (см. рис. 2, b);
- (iii) варьируемая кривая τ_1 является гладкой;
- (iv) угол, который составляет касательная к варьируемой кривой τ_1 в произвольной ее точке с горизонтальной прямой, удовлетворяет неравенствам (1).

Далее, во всех $2n$ прямоугольниках развертки R (см. рис. 2, b) построим варьируемые гладкие кривые τ_i , $i = 1, \dots, 2n$, конгруэнтные рассматриваемой варьируемой гладкой кривой τ_1 . Здесь при каждом фиксированном t , $0 \leq t \leq 1$, нами используется единственное правило: в смежных фундаментальных прямоугольниках (см. рис. 2, b) варьируемые гладкие кривые τ_i должны быть зеркально симметричны относительно их общей стороны (см. рис. 2, a).

СЛЕДСТВИЕ 1. *Не слишком пологая вариация прообраза прямолинейного ребра δ_1 (см. (1)) всегда сопровождается вариацией ребристой линии $\gamma_1 = f(\tau_1)$, задающей изгибание кусочно гладкой трубчатой поверхности Z .*

Все сказанное выше является всего лишь иным изложением работы А. В. Погорелова [1], в котором, по существу, используется развертка $R \subset \mathbb{R}^2$ кусочно гладкой трубчатой поверхности $Z \subset \mathbb{R}^3$ или изометричной ей кусочно линейной трубчатой поверхности $\bar{Z} \subset \mathbb{R}^3$. Любой вариации гладкой кривой τ_1 на заданной развертке $R \subset \mathbb{R}^2$, сохраняющей τ_1 не слишком пологий (1), соответствует изгибание кусочно гладкой трубчатой поверхности $Z \subset \mathbb{R}^3$. Поверхность $Z \subset \mathbb{R}^3$ изометрична прямому круговому цилиндру, высота которого совпадает с высотой развертки $R \subset \mathbb{R}^2$. В процессе деформации высота поверхности $Z \subset \mathbb{R}^3$, равная длине проекции кривой $\tilde{\gamma} = \beta \cap Z_{12}$ на вертикальную ось, может меняться. Однако длина самой кривой $\tilde{\gamma} = \beta \cap Z_{12}$, равная высоте кругового цилиндра, является постоянной – она совпадает с высотой развертки $R \subset \mathbb{R}^2$.

§ 2. Вложение поверхности сжатого тетраэдра

Рассмотрим произвольный прямоугольник. отождествим точки любой его стороны, симметричные относительно ее середины. Получим развертку поверхности трехмерного симплекса с группой⁷ симметрии $\bar{4}2m$ (рис. 6, a). Этот

⁵При описании вариации кривой используют прямоугольник деформации.

⁶Это прообраз будущей ребристой линии γ_1 , нам еще не известной.

⁷Данное здесь обозначение группы симметрии см. в [6].

симплекс получается при сжатии тетраэдра вдоль оси второго порядка. На рис. 6 отношение⁸ горизонтальной стороны прямоугольника к вертикальной равно $\pi : 2$. Тогда два противоположных ребра симплекса имеют длину 2, а четыре оставшихся ребра имеют длину $\sqrt{\pi^2 + 4}/2$.

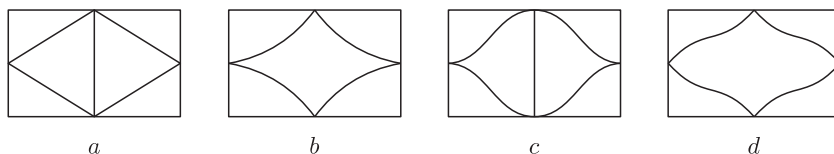


Рис. 6. Изометричные развертки: a – поверхности симплекса; b, c, d – кусочно гладких поверхностей

На рис. 6, $b-d$ даны развертки трех кусочно гладких трубчатых поверхностей Z , изометричных поверхности заданного симплекса. Следует отметить, что на этих развертках прообразы прямолинейных образующих являются вертикальными. Однако соответствующая штриховка разверток не сделана, чтобы излишне не перегружать рисунки.

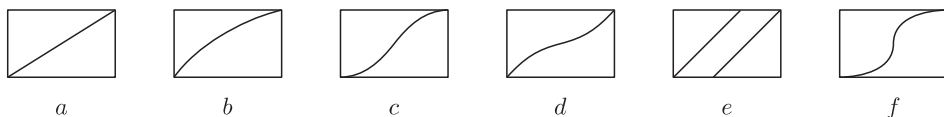


Рис. 7. Четверти разверток: $a-d$ – взяты из рис. 6; e – ограничитель на кривую; f – пример запрещенной кривой

На рис. 7, $a-d$ изображены только четверти разверток. Отрезем от каждой из них два равнобедренных прямоугольных треугольника. Останется вписанный параллелограмм с острым углом $\pi/4$ (см. рис. 7, e). Длинная диагональ параллелограмма совпадает с диагональю четверти развертки – прообразом ребра δ_1 исходного симплекса (см. рис. 7, a). На рис. 7, $b-d$ диагональ заменена на гладкую кривую τ_1 , обладающую общими концами с ней. Угол φ наклона кривой τ_1 к прообразу прямолинейной образующей должен удовлетворять системе неравенств $\pi/4 < \varphi < 3\pi/4$, которая в точности совпадает с системой неравенств (1) при $n = 2$.

ЗАМЕЧАНИЕ 5. Между рис. 6 и рис. 2 имеется небольшое расхождение⁹. При выводе системы неравенств (1) прообраз прямолинейной образующей был расположен горизонтально. Поэтому кривая τ_1 была не слишком пологой. На рис. 6, $b-d$ прообраз образующей расположен вертикально; здесь кривая τ_1 должна быть наклонена не слишком круто относительно горизонтали.

Каждая кривая τ_1 , представленная на рис. 7, $b-d$, для наших целей подходит, так как для нее условия (1) выполнены. Более того, из теоремы Лагранжа

⁸Для развертки правильного тетраэдра это отношение равно $\sqrt{3} : 1$.

⁹Надемся, что это расхождение никаких недоразумений не вызовет.

о конечных приращениях следует, что кривая τ_1 всегда расположена внутри параллелограмма (см. рис. 7, *e*). Однако будучи необходимым ограничением последнее условие не является достаточным. В самом деле, изображенная на рис. 7, *f* кривая для наших целей не подходит, так как угол наклона этой кривой в центре прямоугольника является слишком большим.

Размножим выбранную кривую τ_1 зеркалами прямоугольника (см. рис. 7, *b-d* и рис. 6, *b-d*). Получим развертку кусочно гладкой поверхности, изометричной развертке симплекса (см. рис. 7, *a* и рис. 6, *a*). В силу выполнения условий (1) имеет место следующая теорема.

ТЕОРЕМА 2. *Поверхность симплекса, полученного при сжатии тетраэдра вдоль оси второго порядка, допускает вложение в \mathbb{R}^3 в виде кусочно гладкой поверхности без всякого плоского куска.*

Для построения модели из листа бумаги имеется наиболее показательное отношение сторон прямоугольника $\pi : 2$, когда в качестве кривой τ_1 можно взять выпуклый участок стандартной синусоиды¹⁰ от точки перегиба до точки максимума (см. рис. 7, *b*). Тогда при кусочно гладком изометрическом вложении модели в \mathbb{R}^3 все три гладкие куска этой модели окажутся на поверхностях прямых круговых цилиндров с единичным радиусом. При этом отображении в \mathbb{R}^3 по два малых куска развертки, изображенной на рис. 6, *b*, будут расположены на одном и том же цилиндре, они объединятся в один более крупный кусок. Развертка, представленная на рис. 6, *b*, на которой прообразы прямолинейных образующих вертикальны, изометрична развертке, приведенной на рис. 8, *a*, на которой прообразы прямолинейных образующих горизонтальны. На рис. 8, *b* показан общий вид модели (см. также рис. 1, *d* при $n = 2$). На рис. 8, *c* представлен эпюр. На развертке $R \subset \mathbb{R}^2$, изображенной на рис. 8, *a*, указаны прообразы всех ребристых линий при изометрическом отображении $f: R \rightarrow Z$, взятых на модели $Z \subset \mathbb{R}^3$, где Z представляет собой кусочно гладкую поверхность с разверткой R . Прообразы прямолинейных образующих горизонтальны.

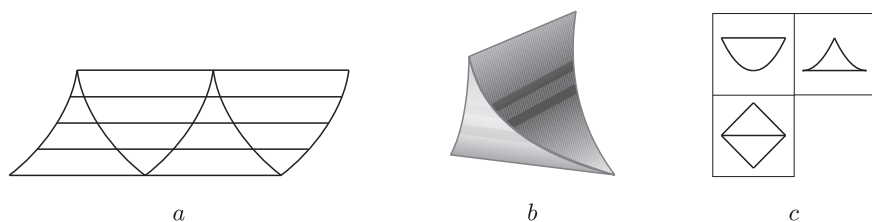


Рис. 8. Модель: *a* – развертка; *b* – общий вид; *c* – эпюр

Если угловой коэффициент касательных к выбранной кривой τ_1 в ее концах равен 1 (см. рис. 7, *d* и рис. 6, *d*), то кусочно гладкая поверхность имеет лишь две гладкие криволинейные грани. (Это минимальное число гладких криволинейных граней даже при всех возможных кусочно гладких погружениях произвольных замкнутых многогранных поверхностей в трехмерное

¹⁰Оси абсцисс и ординат переставлены для узнаваемости графика.

евклидово пространство \mathbb{R}^3 .) Если расположенная в четверти развертки кривая центрально-симметрична, то группа симметрии $\bar{4}2m$ кусочно гладкой поверхности сохранится (см. рис. 7, *c, d*). Последний случай (см. рис. 7, *d*) рассмотрим особо. Если отношение горизонтальной стороны развертки к вертикальной устремить к 1, то получится развертка, которая соответствует удвоению квадрата. Тогда параллелограмм сплюснется в диагональ. Вместе с ним в диагональ превратится и содержащаяся в нем кривая γ_1 . Соответствующее изометрическое отображение развертки в \mathbb{R}^3 не является погружением. Отношение горизонтальной стороны к вертикальной нельзя уменьшить: если оно меньше 1, то развертка с указанными на ней гладкими кривыми (и вертикальной штриховкой) не допускает погружения в \mathbb{R}^3 , при котором эти кривые (и вертикальные отрезки) стали бы прообразами ребристых линий (и прямолинейных образующих) погруженной кусочно гладкой поверхности.

§ 3. Погружение поверхности кругового конуса

Теперь приступим к обобщению метода А. В. Погорелова с поверхности прямого кругового цилиндра на поверхность прямого кругового конуса.

Исследуются некоторые специальные изометрические погружения, преимущественно вложения, поверхности прямого кругового конуса в трехмерное евклидово пространство \mathbb{R}^3 . Строение погруженной конической поверхности обладает двоякой периодичностью. В окружном направлении действует конечная группа изометрий $G = nmm$. По высоте действует дискретная группа гомотетий с центром в вершине конуса. В качестве периода относительно группы гомотетий можно взять, например, поверхность усеченной правильной пирамиды. Гомотетия, переводящая одно основание усеченной пирамиды в другое, порождает упомянутую группу гомотетий. Размножив боковую поверхность усеченной пирамиды всеми элементами этой группы гомотетий, получим боковую поверхность бесконечной правильной пирамиды. Она изометрична поверхности прямого кругового конуса. В полном соответствии со сказанным ниже исследуются специальные изометрические погружения, преимущественно вложения, боковой поверхности усеченной правильной пирамиды в трехмерное евклидово пространство \mathbb{R}^3 .

Для удобства сопоставления наших дальнейших построений с построениями, сделанными в работе [1], мы используем те же обозначения, которые ввел А. В. Погорелов. Однако теперь в качестве Π мы подразумеваем не правильную призму, а усеченную правильную *пирамиду*, причем также с горизонтальным $2n$ -угольным основанием и вертикальной осью симметрии. На боковой грани α_1 вспомогательной пирамиды Π возьмем произвольную гладкую кривую γ_1 , однозначно проектирующуюся на ось пирамиды. На смежной боковой грани α_2 возьмем кривую γ_2 , получающуюся из γ_1 при зеркальном отражении относительно плоскости β , проходящей через боковое ребро $\alpha_2 \cap \alpha_1$ и ось пирамиды. Аналогично построим кривую γ_3 на грани α_3 , смежной с α_2 , и т. д. Таким образом на каждой грани α_i , $i = 1, \dots, 2n$, получим кривую γ_i . Проведем

теперь через кривые γ_1 и γ_2 цилиндрическую поверхность Z_{12} с образующими, перпендикулярными плоскости β . Аналогично построим цилиндрические поверхности Z_{23} , Z_{34} и т. д. Все вместе они составляют *кусочно гладкую* поверхность Z с ребристыми линиями γ_i , $i = 1, \dots, 2n$. Полученные гладкие куски $Z_{12}, Z_{23}, \dots, Z_{2n-1}$ поверхности Z суть цилиндрические поверхности с горизонтальными прямолинейными образующими.

Именно так строил А. В. Погорелов оригинальную кусочно гладкую трубчатую поверхность Z в том случае, когда в качестве Π фигурировала правильная призма (см. [1, § 3, п. 1]), а не пирамида.

Если Π является пирамидой, то поверхность Z не является развертывающейся. В самом деле, луч света, направленный вдоль образующей цилиндрической поверхности Z_{12} , дойдя до точки пересечения с кривой γ_2 , отразится от плоскости грани α_2 , но теперь он не направится вдоль образующей цилиндрической поверхности Z_{23} , так как плоскость грани α_2 не параллельна оси пирамиды Π . Никакая достаточно малая окрестность точки ребристой¹¹ линии γ_i , $i = 1, \dots, 2n$, на поверхности Z не изометрична евклидову кругу. Без всякого сомнения, этот факт был известен А. В. Погорелову, но такие кусочно гладкие поверхности Z выходили за рамки исследований в его книге [1]. Впредь такие поверхности мы также не будем рассматривать.

Однако если Π – пирамида, а ребра γ_i – прямолинейные отрезки (обозначим их через δ_i , $i = 1, \dots, 2n$, соответственно), то поверхность Z не просто кусочно гладкая, она *кусочно линейная*. Обозначим ее через \bar{Z} . Она не имеет внутренних вершин. На поверхности \bar{Z} любая точка ребра δ_i имеет окрестность, состоящую из двух полукругов. Значит, поверхность \bar{Z} *развертывающаяся*. Кроме того, поверхность \bar{Z} *ворончатая*.

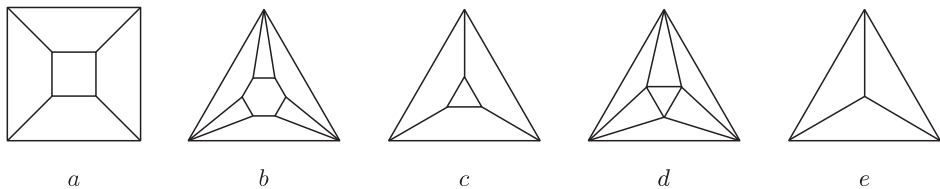


Рис. 9. Примеры кусочно линейных поверхностей: a – для $G = 2mt$; $b-e$ – для $G = 6mt$

Некоторые примеры кусочно линейных ворончатых поверхностей \bar{Z} представлены на рис. 9, где изображены проекции поверхностей на плоскость, перпендикулярную оси n группы изометрий $G = nmt$. Это усеченная пирамида (см. рис. 9, a, c), комбинация двух усеченных пирамид (см. рис. 9, b, d) и обычная пирамида (как предел бесконечной последовательности усеченных пирамид; см. рис. 9, e). В случаях, представленных на рис. 9, c, e , имеет место равенство $\delta_2 = \delta_1$, которое в [1] не рассматривалось.

¹¹Исследование произвольной развертывающейся поверхности вблизи ее ребристой линии продолжается, однако оно выходит за рамки настоящей работы (см. [7]).

Как оказалось, каждая кусочно линейная ворончатая поверхность \bar{Z} с прямолинейными ребрами δ_i , взятыми на гранях α_i усеченной пирамиды Π , обладающая группой $G = nmm$, допускает кусочно гладкие изометрические вложения в трехмерное евклидово пространство \mathbb{R}^3 .

Наша дальнейшая цель – реально предъявить такие вложения.

Заметим, что поверхность $\bar{Z} \subset \mathbb{R}^3$ представляет собой боковую поверхность усеченной правильной пирамиды, если δ_1 – ось симметрии грани α_1 . Однако мы будем рассматривать более общий случай.

К краям кусочно линейной ворончатой поверхности \bar{Z} приклеим два выпуклых многоугольника с углами $\pi - \pi/n$. Получим выпуклый многогранник. Как и в случае призмы, для простоты мы будем предполагать, что $\delta_j \cap \delta_i = \emptyset$ при $j \neq i$, где $i = 1, \dots, 2n$. Тогда в любой вершине нижнего основания сходятся три плоских угла φ , ψ и $\pi - \pi/n$. В любой вершине верхнего основания многогранника сходятся три плоских угла $\pi - \varphi$, $\pi - \psi$ и $\pi - \pi/n$. Как первые, так и вторые три угла удовлетворяют неравенствам треугольника. Кроме того, сумма плоских углов в вершине меньше 2π . Значит, углы φ и ψ удовлетворяют следующим двум системам неравенств [5]:

$$\varphi + \frac{\pi}{n} < \psi + \pi, \quad \psi + \frac{\pi}{n} < \varphi + \pi, \quad (3)$$

$$\pi - \frac{\pi}{n} < \varphi + \psi < \pi + \frac{\pi}{n}. \quad (4)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 6. Дополнительно можно предполагать, что выполнено неравенство $\varphi + \psi < \pi$. Тогда вершина пирамиды Π находится над плоскостью ее основания. В случае, когда $\varphi + \psi > \pi$, вершина пирамиды Π находится под плоскостью основания. Если же $\varphi + \psi = \pi$, то Π является не пирамидой, а призмой, что возвращает нас к исходной работе [1].

Кусочно линейная ворончатая поверхность $\bar{Z} \subset \mathbb{R}^3$ имеет $2n$ плоских граней $\bar{Z}_{12}, \dots, \bar{Z}_{2n1}$. Разрежем грань \bar{Z}_{2n1} одной из n плоскостей зеркальной симметрии и развернем поверхность \bar{Z} на евклидову плоскость \mathbb{R}^2 . Получим развертку поверхности \bar{Z} в виде невыпуклого многоугольника $R \subset \mathbb{R}^2$, обладающего парой эквивалентных сторон¹² (см. рис. 10, а). Эти стороны имеют один и тот же образ на поверхности $\bar{Z} \subset \mathbb{R}^3$ при изометрическом отображении $\bar{f}: R \rightarrow \bar{Z}$. Прообразы следов имеющихся n плоскостей зеркальной симметрии на поверхности \bar{Z} суть отрезки на плоскости \mathbb{R}^2 , которые при $\delta_j \cap \delta_i = \emptyset$, $j \neq i$, $i = 1, \dots, 2n$, разбивают развертку R на $2n$ равных невыпуклых *фундаментальных шестиугольников* – прообразов фундаментальных областей группы $G = nmm$ (см. рис. 10, б). Развертка, изображенная на рис. 10, а, соответствует ворончатой поверхности \bar{Z} , изображенной на рис. 9, а. Здесь $n = 2$.

Отрезки δ_i изначально были взяты на гранях α_i пирамиды Π . Прообразы отрезков δ_i разбивают развертку R на трапеции. Отметим, что прообразы отрезков δ_i , расположенные в смежных фундаментальных шестиугольниках развертки R (см. рис. 10, б), зеркально симметричны относительно их общей стороны (см. рис. 10, а). Углы, составляемые прообразом отрезка δ_1 в одном

¹²Здесь эти стороны случайно оказались на одной прямой.

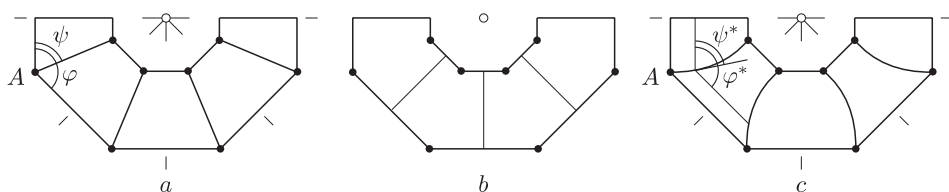


Рис. 10. Развертка R : a – прообразы δ_i ; b – следы зеркал; c – прообразы γ_i

из его концов, скажем A , со сторонами развертки R равны φ и ψ . Эти углы удовлетворяют системам неравенств (3) и (4).

Впредь будем полагать, что метрика кусочно линейной ворончатой поверхности $\bar{Z} \subset \mathbb{R}^3$ фиксирована. Тогда фиксирована метрика ее развертки $R \subset \mathbb{R}^2$. Значит, фиксирована величина угла $A = \varphi + \psi = \text{const}$, слагаемые углы φ и ψ которого удовлетворяют системе неравенств (4). На самом деле неравенства (4) являются ограничениями величины угла A . Поэтому неравенства (4) представляют собой условия, налагаемые на устройство самой развертки R , расположенной в плоскости \mathbb{R}^2 .

Рассмотрим произвольную гладкую кривую τ_1 , внутренние точки которой расположены внутри того же фундаментального шестиугольника развертки R , что и точки прообраза ребра δ_1 , и обладающую общими концами с прообразом ребра δ_1 . Обозначим через φ^* и ψ^* те углы, которые составляет касательная в произвольной точке рассматриваемой гладкой кривой τ_1 со сторонами развертки R , проходящими через упомянутую выше ее вершину A (см. рис. 10, c). Для них мы имеем $\varphi^* + \psi^* = \angle A = \varphi + \psi$. Поэтому углы φ^* и ψ^* удовлетворяют системе неравенств (4).

Наше главное требование, налагаемое на кривую τ_1 , состоит в том, что углы φ^* и ψ^* должны удовлетворять системе неравенств (3).

Далее, во всех шестиугольниках развертки R (см. рис. 10, b) построим гладкие кривые τ_i , конгруэнтные рассматриваемой гладкой кривой τ_1 , пользуясь единственным правилом: в смежных фундаментальных шестиугольниках эти гладкие кривые зеркально симметричны относительно их общей стороны (см. рис. 10, c). Теперь мы можем построить изометрическое вложение развертки $f^*: R \rightarrow Z^*$, где $Z^* \subset \mathbb{R}^3$.

Кусочно гладкая ворончатая поверхность Z^* является развертывающейся. Любая внутренняя точка поверхности Z^* имеет окрестность, изометричную евклидову кругу. Именно этим она отличается от той поверхности Z , которая была построена в начале параграфа.

Построение ворончатой поверхности Z^* по заданной ее развертке точно такое же, каким было построение трубчатой поверхности Z по ее развертке. А именно, в случае трубчатой поверхности Z на ее развертке R (см. рис. 2, a) выбирался фундаментальный прямоугольник (см. рис. 2, b) и в нем строилась последовательность ломаных, вписанных в кривую τ_1 (см. рис. 4). В пределе получалась поверхность Z . Для ребристой линии $\gamma_1 = f(\tau_1)$ было найдено уравнение (2). Точно так же в случае ворончатой поверхности Z^* на ее

развертке R (см. рис. 10, с) выбирается фундаментальный шестиугольник (см. рис. 10, b) и в нем строится последовательность ломаных, вписанных в аналогичную кривую τ_1 . В пределе получается поверхность Z^* . Для ребристой линии $\gamma_1^* = f^*(\tau_1)$ выводится дифференциальное уравнение (2) точно так же, как и раньше, но теперь вместо угла $\pi - \varphi$ фигурирует угол ψ . Значит, уравнение (2) имеет другую правую часть и другое решение.

Итак, кусочно гладкая ворончатая поверхность Z^* опять получается из последовательности кусочно линейных ворончатых поверхностей в процессе предельного перехода, но теперь шаги предельного перехода надо осуществлять в фундаментальном шестиугольнике, а не в фундаментальном прямоугольнике (см. рис. 4). Как и ранее, важную роль играет группа изометрий $G = nmt$. Именно эту группу рассматривал А. В. Погорелов.

Углы между гладкой кривой γ_1^* и прямолинейными образующими на ворончатой поверхности Z^* равны углам между прообразом кривой γ_1^* и соответствующими прообразами прямолинейных образующих на развертке R . Эти углы всегда удовлетворяют неравенствам (3).

Таким образом, любая кусочно линейная ворончатая поверхность \bar{Z} , построенная посредством прямолинейного отрезка δ_1 , взятого на грани α_1 пирамиды Π в качестве исходной гладкой кривой γ_1 , допускает изометрическое вложение в \mathbb{R}^3 в виде кусочно гладкой ворончатой поверхности Z^* , состоящей из $2n$ цилиндрических поверхностей с горизонтальными образующими и обладающей конгруэнтными криволинейными ребрами γ_i^* . Если ребристые линии γ_i^* не являются прямолинейными, то они обладают ненулевым *кручением* (см. приложение 2 с подробным обоснованием).

Резюмируя все сказанное, получим следующую теорему.

ТЕОРЕМА 3. *Произвольная кусочно линейная ворончатая поверхность $\bar{Z} \subset \mathbb{R}^3$, построенная с помощью прямолинейного отрезка δ_1 , взятого на грани α_1 пирамиды Π , допускает вложение в трехмерное евклидово пространство \mathbb{R}^3 в виде изометричной ей кусочно гладкой ворончатой поверхности $Z^* \subset \mathbb{R}^3$, состоящей из $2n$ цилиндрических поверхностей с горизонтальными образующими и обладающей $2n$ конгруэнтными криволинейными ребрами γ_i^* с ненулевым кручением, прообразами которых на развертке $R \subset \mathbb{R}^2$, удовлетворяющей условиям (4), являются построенные выше гладкие кривые τ_i , удовлетворяющие условиям (3).*

Примеры кусочно гладких ворончатых поверхностей Z^* представлены на рис. 11, а–е, где показаны проекции поверхностей на плоскость, перпендикулярную оси n группы изометрий $G = nmt$. Все они изометричны кусочно линейным поверхностям \bar{Z} , представленным на рис. 9, а–е соответственно.

Как и в случае кусочно гладкой трубчатой поверхности Z , построенной посредством призмы Π , в случае кусочно гладкой ворончатой поверхности Z^* также существует изометрическая деформация в \mathbb{R}^3 . А именно, рассмотрим на развертке R вариацию прообраза ребра δ_1 , в процессе которой варьируемая кривая зависит от непрерывного параметра t , $0 \leq t \leq 1$. Обозначим

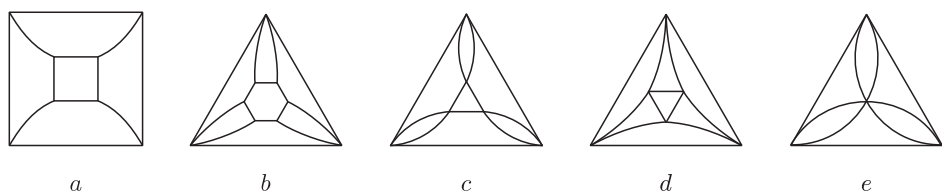


Рис. 11. Примеры кусочно гладких поверхностей: a – для $G = 2mt$; $b-e$ – для $G = 6mt$

варьируемую кривую через τ_1 . Предположим, что при вариации выполняются следующие четыре условия:

- 1) концы варьируемой кривой τ_1 остаются неподвижными – они совпадают с концами прообраза ребра δ_1 ;
- 2) кривая τ_1 остается в том же шестиугольнике, что и δ_1 (см. рис. 10, b);
- 3) варьируемая кривая τ_1 является гладкой;
- 4) углы, которые составляет касательная к кривой τ_1 в любой ее точке с прямыми, параллельными сторонам развертки, проходящими через вершину A прообраза ребра δ_1 (см. рис. 10, a, c), удовлетворяют неравенствам (3).

Развертка при этом фиксирована и удовлетворяет условиям (4).

Далее, во всех фундаментальных шестиугольниках развертки R построим гладкие кривые τ_i , $i = 1, \dots, 2n$, конгруэнтные варьируемой гладкой кривой τ_1 , пользуясь единственным правилом: при каждом фиксированном t , $0 \leq t \leq 1$, в смежных шестиугольниках варьируемые гладкие кривые τ_i зеркально симметричны относительно их общей стороны. При любом фиксированном t , $0 \leq t \leq 1$, выполнены условия теоремы. Имеем

СЛЕДСТВИЕ 2. При заданных условиях произвольная вариация прообраза ребра δ_1 сопровождается соответствующей вариацией пространственной ребристой линии γ_1^* , а вместе с ней и соответствующим изгибанием кусочно гладкой ворончатой поверхности Z^* .

Развертывающаяся поверхность Z^* внешне отличается от неизометричной неразвертывающейся поверхности Z , построенной в начале данного параграфа, например, тем, что ребристые линии γ_i на кусочно гладкой поверхности $Z \subset \mathbb{R}^3$ являются плоскими кривыми (с нулевым кручением), а ребристые линии γ_i^* на кусочно гладкой поверхности $Z^* \subset \mathbb{R}^3$ являются пространственными кривыми (с не нулевым кручением).

Развертки кусочно гладкой ворончатой поверхности Z^* и кусочно линейной ворончатой поверхности \bar{Z} изометричны. Более того, они суть части развертки прямого кругового конуса (см. рис. 10, c, a). (Как всегда, угол при вершине конуса меньше 2π , и лишь случайно на рис. 10 он равен π .) Таким образом, имеет место следующее

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Ворончатые кусочно гладкая поверхность Z^* и кусочно линейная поверхность \bar{Z} изометричны поверхности прямого кругового конуса, а точнее некоторой его части, обхватывающей ось конуса.

Условия (3) и (4) справедливы при любом построенном нами специальным изометрическом преобразовании поверхности прямого кругового конуса. При этом не важно, какова реальная высота конуса: является ли она конечной или бесконечной. Более того, условия (3) и (4) справедливы как для кусочно гладкой, так и для кусочно линейной поверхности, изометричной поверхности конуса. Эти условия задают ограничения для ребристой линии произвольной кусочно гладкой ворончатой поверхности и, самое главное, для прообраза ребристой линии, взятого на развертке этой поверхности. Если ребристые линии суть прямолинейные отрезки, то их прообразы разбивают развертку на $2n$ равнобоких трапеций. Если ребристые линии являются криволинейными, то кривыми являются и их прообразы, заменившие боковые стороны трапеций. После такого искривления боковых сторон любой трапеции проведем прямолинейные отрезки, параллельные основаниям трапеции, начинающиеся в точке одной искривленной стороны и заканчивающиеся в точке другой. Эти отрезки суть прообразы прямолинейных образующих. На развертке возникает естественное расслоение: его слои суть ломаные, составленные из прообразов прямолинейных образующих, а база есть прообраз ребристой линии.

Для развертки, на которой заданы прообразы всех прямолинейных образующих и всех ребристых линий, легче трактовать полученные нами системы неравенств (3) и (4). Неравенства (3) налагают ограничения на прообраз ребристой линии на развертке. Неравенства (4) налагают ограничения на развертку, самосклеивающуюся в воронку.

ЗАМЕЧАНИЕ 7 (о погружениях конуса). Выше говорилось о вложении $Z^* \subset \mathbb{R}^3$. Для построения поверхности Z^* по заданной развертке R мы воспользуемся деформацией разрезанной поверхности, аналогичной той, которая описана для трубчатой поверхности в замечании 4. Теперь точно так же по данной развертке $R \subset \mathbb{R}^2$ мы строим ворончатую поверхность $Z^* \subset \mathbb{R}^3$. Как и ранее (см. замечание 4), при некоторых более сильных условиях, налагаемых на прообраз ребристой линии, расположенной на развертке, процесс обращения времени можно продолжить. А именно, пусть при некотором натуральном k , $2 \leq k \leq n-1$, взамен условий (3) выполнены неравенства

$$\varphi + \frac{k\pi}{n} < \psi + \pi, \quad \psi + \frac{k\pi}{n} < \varphi + \pi.$$

При этом вместе с фиксированной разверткой R условия (4) сохраняются прежними, следовательно, имеют место неравенства

$$\pi - \frac{k\pi}{n} < \pi - \frac{\pi}{n} < \varphi + \psi < \pi + \frac{\pi}{n} < \pi + \frac{k\pi}{n}.$$

Тогда в момент $t = 1 - k$ мы получим поверхность, которая обходит ось симметрии k раз. Каждая из этих поверхностей погружена в \mathbb{R}^3 . Никакие другие погружения поверхности прямого кругового конуса в трехмерное евклидово пространство мы не рассматриваем. При каждом $k = 2, \dots, n-1$ погруженная поверхность строится по развертке точно так же, как строилась выше вложенная поверхность при $k = 1$.

Таким образом, специальными изометрическими преобразованиями обладает не только поверхность прямого кругового цилиндра (см. [1]), но и поверхность прямого кругового конуса. Условия (3) и (4) являются не только необходимыми, но и достаточными для существования кусочно гладкой ворончатой поверхности Z^* с данной разверткой. Эта поверхность изометрична поверхности прямого кругового конуса или его части.

§ 4. Вложения поверхностей платоновых тел

При использовании метода А. В. Погорелова [1] в работе [2] были указаны некоторые кусочно гладкие погружения (вложения) поверхностей платоновых тел в трехмерное евклидово пространство \mathbb{R}^3 . А именно, поверхность произвольного платонова тела допускает кусочно гладкие изгибания любого своего *пояса*, составленного из замкнутых плоских геодезических, расположенных в попарно параллельных плоскостях. (Пояс поверхности платонова тела изометричен поверхности прямого кругового цилиндра и представляет собой боковую поверхность *антипризмы*, *призмы* или *трапецоэдра*¹³.) Некоторые грани октаэдра, куба, икосаэдра, додекаэдра (или их части) при указанных погружениях оставались плоскими. В связи с этим возникла следующая задача: предъявить такие кусочно гладкие вложения поверхностей платоновых тел в \mathbb{R}^3 , которые не имеют плоских кусков. Решение этой задачи дано в работе [3].

ТЕОРЕМА 4. *Поверхности платоновых тел допускают такие кусочно гладкие изометрические погружения в трехмерное евклидово пространство \mathbb{R}^3 , которые не имеют плоских кусков.*

Доказательство теоремы 4 для поверхности тетраэдра было дано выше¹⁴ и в [2]. Однако здесь мы предъявляем совершенно другое кусочно гладкое погружение (вложение) поверхности правильного тетраэдра в трехмерное евклидово пространство \mathbb{R}^3 .

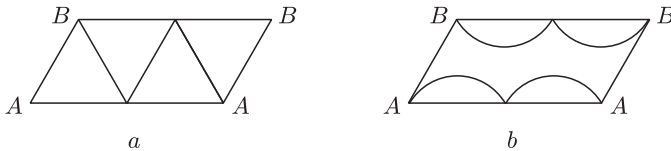


Рис. 12. Изометричные развертки: a – кусочно линейной поверхности; b – кусочно гладкой поверхности

На рис. 12, a, b изображены развертки двух изометричных поверхностей. Одна развертка соответствует (единственному выпуклому) кусочно линейному вложению поверхности тетраэдра в \mathbb{R}^3 (см. рис. 12, a). Это развертка тетраэдра. Другая развертка соответствует (криволинейному и невыпуклому) кусочно гладкому вложению поверхности тетраэдра в \mathbb{R}^3 (см. рис. 12, b). Четыре (две

¹³В книге [6] термин “трапецоэдр” несет другую смысловую нагрузку.

¹⁴См. рис. 1, d при $n = 2$. В этом случае цилиндры не являются круговыми.

выпуклые и две вогнутые) криволинейные дуги на развертке суть арки стандартной синусоиды, если ребра тетраэдра равны π . В этом кусочно гладком случае поверхность имеет 4 вершины, 4 криволинейных ребра, 3 криволинейные грани. Здесь $v - e + f = 3$. Поскольку одна криволинейная грань неодносвязна, то для получения эйлеровой характеристики 2 фактически требуется задать дополнительное *декоративное* криволинейное ребро, после разреза вдоль которого неодносвязная грань станет односвязной.

Более естественная развертка приведена на рис. 13, а. На ней прообраз каждого гладкого куска является целым. Прообразы образующих вертикальны. Кусочно гладкая поверхность имеет вид седла (см. рис. 13, b).

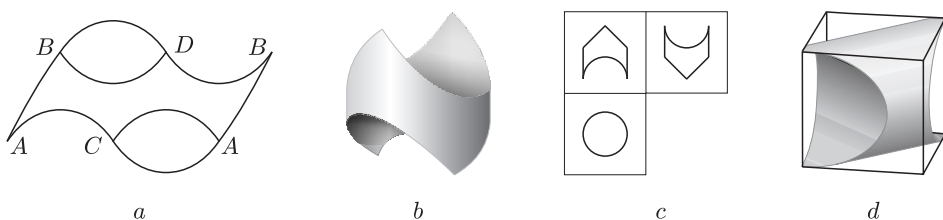


Рис. 13. Кусочно гладкая поверхность: а – развертка; b – общий вид; c – эпюр; d – подушка

Эпюр данной поверхности изображен на рис. 13, c. Гладкие куски расположены на поверхностях трех круговых цилиндров. Плоскость зеркально-поворотной симметрии пересекает эту поверхность по окружности. Если повернуть на четверть окружности одну половину поверхности относительно другой, то получим поверхность *подушки*. Последнюю, как оказалось, легко построить методом А. В. Погорелова (см. рис. 13, d). Здесь имеется в виду, что вспомогательная квадратная призма Π является прозрачной. Поверхность подушки изометрична соответствующей *наволочке*, которая, как обычно, представляет собой удвоение прямоугольника.

Рассмотрим теперь остальные поверхности: октаэдр, куб, икосаэдр, додекаэдр. Возьмем на поверхности диаметрально противоположные вершины S и N . Перпендикулярно отрезку SN проведем плоскости, проходящие через вершины. *Ободки* поверхности, расположенные между соседними плоскостями, суть боковые поверхности пирамиды, антипризмы, трапецеэдра, усеченной пирамиды с усеченными ребрами. (Ободок, изометричный цилиндру, раньше мы называли *поясом*.) Ободок имеет группу изометрий $G = nmm$ с n плоскостями зеркальной симметрии, проходящими через общую ось порядка n , где $n = 4, 3, 5, 3$ соответственно. Для октаэдра вместо $4mm$ достаточно взять одну из ее подгрупп $2mm$.

Развертка поверхности октаэдра, куба, икосаэдра или додекаэдра представима в виде объединения разверток ободков, из которых данная развертка состоит и количество которых соответственно равно 2, 3, 3 или 5 (рис. 14, a–d).

Любой ободок – это кусочно линейная поверхность \bar{Z} , ворончатая или трубчатая. Заменим ее соответственно на кусочно гладкую поверхность Z^* или Z .

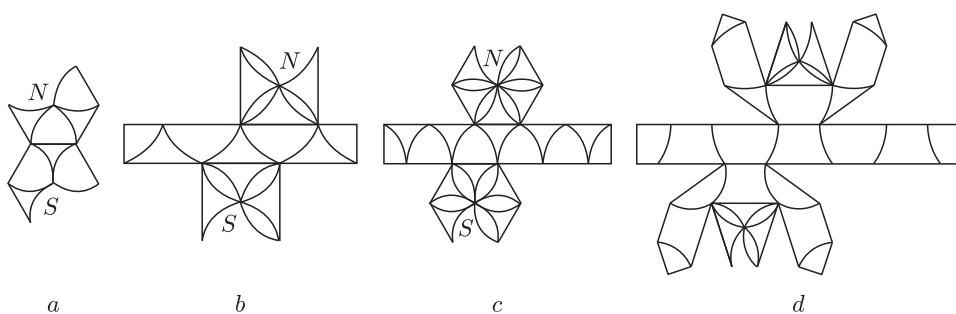


Рис. 14. Развертки: a – октаэдра; b – куба; c – икосаэдра; d – додекаэдра

Для этой цели заменим прообраз бокового ребра δ_1 любого ободка на гладкую кривую τ_1 и размножим τ_1 посредством отражений от прообразов следов зеркал. Такая замена прообраза ребра на гладкую кривую с последующим ее размножением на развертке ободка проводится для каждого ободка отдельно. В итоге получится развертка кусочно гладкой поверхности, составленной из кусочно гладких ворончатых и трубчатых поверхностей, каждая из которых соответствует той или иной развертке ободка с указанными на ней прообразами ребристых линий. Кривую τ_1 можно взять достаточно близкой к прообразу ребра δ_1 , скажем составляющей с ним выпуклый сегмент. При этом на развертке ободка будут чередоваться выпуклые и невыпуклые участки (см. рис. 14, $a-d$). Тогда при кусочно гладком вложении в \mathbb{R}^3 каждый гладкий кусок окажется направленным выпуклостью внутрь (наружу) поверхности, если его прообраз на развертке является выпуклым (невыпуклым).

Так, например, поверхность додекаэдра состоит из пяти ободков. Один ободок изометричен цилиндру. Значит, это пояс. Он изображен на рис. 3, b при $n = 3$. Два примыкающих к нему ободка изображены на рис. 9, b , однако теперь шестиугольный край должен быть более длинным, чем треугольный. Еще два замыкающих ободка изображены на рис. 9, e . Заменим ободки на Z^* или Z . Тогда кусочно гладкая поверхность, изометричная поверхности додекаэдра, будет состоять из пяти кусочно гладких поверхностей: одной трубчатой и четырех ворончатых. Трубчатая поверхность изображена на рис. 1, b при $n = 3$. Примыкающие к ней две ворончатые поверхности изображены на рис. 11, b , однако шестиугольный край более длинный, чем треугольный. Замыкающие две ворончатые поверхности изображены на рис. 11, e . Развертка всей кусочно гладкой поверхности в целом изображена на рис. 14, d .

Сказанное служит наглядным примером применения не только самого метода А. В. Погорелова, но и полученного обобщения этого метода.

§ 5. Метод А. В. Погорелова: частные случаи

Метод А. В. Погорелова достаточно подробно изложен в работе [1]. Рассматривается вспомогательная правильная призма Π с горизонтальным $2n$ -угольным основанием и вертикальной осью симметрии. Зеркальные плоскости, каж-

дая из которых содержит какое-то боковое ребро и ось призмы, образуют группу $G = nmm$. На боковой грани α_1 призмы Π выбирается произвольная гладкая кривая γ_1 , однозначно проектирующаяся на ось призмы Π . Кривая γ_1 размножается всеми элементами группы $G = nmm$. По гладким кривым γ_i , $i = 1, \dots, 2n$, строится кусочно гладкая трубчатая поверхность Z . Подробнее об этом сказано выше и в работе [1]. Из контекста видно, что А.В. Погорелов рассматривал лишь общий случай, в котором выполняются равенства $\gamma_j \cap \gamma_i = \emptyset$ при всех $j \neq i$, где $i = 1, \dots, 2n$ (см. рис. 1, а, b).

Теперь методом А.В. Погорелова мы строим некоторые частные случаи поверхностей. Среди них есть не только кусочно гладкие и кусочно линейные, но и *экзотические* поверхности. Так, если γ_i – гладкие кривые, то мы получаем кусочно гладкую поверхность $Z \subset \mathbb{R}^3$. Не исключено, что при этом могут выполняться неравенства $\gamma_j \cap \gamma_i \neq \emptyset$, $j \neq i$ (см. рис. 1, с, d). Если же кривые γ_i выпрямляются, т.е. $\gamma_i = \delta_i$, $i = 1, \dots, 2n$, где δ_i – прямолинейные отрезки (см. рис. 3, а–d), то мы получаем кусочно линейную поверхность $\bar{Z} \subset \mathbb{R}^3$. Мы будем допускать также, что кривая γ_1 , посредством которой А.В. Погорелов строил кусочно гладкую трубчатую поверхность Z , может быть кусочно гладкой. Нами допускается даже частный случай $\gamma_2 = \gamma_1$. (Это случай слияния двух соседних гладких кривых. Здесь $\gamma_1 = \delta_1$, $\gamma_2 = \delta_2$, где $\delta_2 = \delta_1$. Другими словами, в качестве гладких кривых γ_i выбираются взятые через одно боковые ребра призмы Π . Именно так были получены кусочно линейные (см. рис. 9, с, e) и соответствующие им кусочно гладкие варианты в построенном обобщении (см. рис. 11, с, e), когда в качестве Π была взята пирамида, а не призма.) Далее, как это обычно принято, любая конечная кусочно линейная или кусочно гладкая поверхность состоит лишь из конечного числа линейных или гладких кусков. Точно так же можно рассматривать конечные поверхности, составленные из счетного множества линейных и/или гладких кусков. В таком случае на замыкании поверхности найдется хотя бы одна точка, любая достаточно малая окрестность которой пересекается со счетным множеством линейных или гладких кусков. Мы будем полагать, что множество всех таких точек на поверхности имеет меру нуль. Каждую такую поверхность будем называть *экзотической*. Конкретные примеры экзотических трубчатой и ворончатой поверхностей приведены ниже (см. рис. 15, с и рис. 16, b).

Мы не ставим своей целью описать здесь все частные случаи. Такая задача в принципе невыполнима. Здесь мы хотим описать лишь некоторые интересные частные случаи. Найденные нами примеры наглядно показывают, что не следует всегда и безоговорочно пренебрегать частными случаями. Иногда они могут оказаться не только полезными, но и даже очень показательными. Теперь приступим к их рассмотрению.

1. В качестве исходной кривой γ_1 возьмем гладкую кривую, соединяющую вершину нижнего основания с серединой верхнего основания грани α_1 рассматриваемой вспомогательной правильной призмы Π (с конечной высотой), однозначно проектирующуюся на ось¹⁵ призмы и обладающую вертикальными касательными в обоих концах. Поскольку призма Π имеет $2n$ -угольное

¹⁵Мы всегда полагаем, что ось призмы Π расположена вертикально.

основание, то контур нижнего основания кусочно гладкой трубчатой поверхности Z является правильным n -угольником, а контур верхнего основания есть правильный $2n$ -угольник.

Именно так мы построим счетное множество различных кусочно гладких поверхностей Z_k , $k \in \mathbb{N}$. При этом в качестве основания соответствующей вспомогательной призмы Π_k , $k \in \mathbb{N}$, мы выбираем правильный $2^k n$ -угольник. Высота различных призм Π_k предполагается одной и той же, скажем равной 1. Пусть нижнее основание поверхности Z_k при $k \geq 2$ совпадает с верхним основанием поверхности Z_{k-1} . Тогда объединение $\bigcup_{k \in \mathbb{N}} Z_k$ представляет собой кусочно гладкую трубчатую поверхность, простирающуюся неограниченно вверх. Плоскость нижнего основания поверхности Z_1 является опорной плоскостью к поверхности $\bigcup_{k \in \mathbb{N}} Z_k$. Вместе со своим отражением от этой опорной плоскости поверхность $\bigcup_{k \in \mathbb{N}} Z_k$ составляет кусочно гладкую трубчатую поверхность, простирающуюся неограниченно не только вверх, но и вниз. Лишь одна плоскость зеркальной симметрии перпендикулярна оси, все остальные зеркальные плоскости проходят через ось.

Каждую кривую $\gamma_1(k)$ на грани $\alpha_1(k)$ соответствующей призмы Π_k при любом фиксированном $k \in \mathbb{N}$ мы выбрали так, чтобы касательные в концах кривой $\gamma_1(k)$ были направлены вертикально. В таком случае соседние цилиндрические поверхности, составляющие кусочно гладкую трубчатую поверхность $\bigcup_{k \in \mathbb{N}} Z_k$, являются продолжениями друг друга вдоль высоты. (Заметим, что ребристые линии $\gamma_1(k-1)$ и $\gamma_1(k)$ соседних поверхностей Z_{k-1} и Z_k расположены в различных плоскостях.)

С ростом высоты количество гладких поверхностей в окружном направлении неограниченно растет. Ровно n гладких цилиндрических поверхностей простираются неограниченно вверх и вниз по всей высоте. Остальные гладкие цилиндрические поверхности простираются неограниченно лишь в одном направлении: либо вверх, либо вниз.

2. Среди найденных частных случаев особо выделим одну из серий.

Как и в случае 1, в качестве исходной кривой $\gamma_1(k)$ рассмотрим гладкую кривую, соединяющую вершину нижнего основания с серединой верхнего основания грани $\alpha_1(k)$ вспомогательной правильной призмы Π_k , однозначно проектирующуюся на ось призмы и обладающую вертикальными касательными в обоих концах. Однако на этот раз мы построим не счетное множество, а только N разных поверхностей Z_k , $k = 1, \dots, N$. Основанием призмы Π_k опять служит правильный $2^k n$ -угольник. Высота всех призм Π_k , $k = 1, \dots, N$, равна 1. При $k \geq 2$ поверхность Z_k состоит из $2^k n > 2n$ гладких поверхностей. Предполагается, что при $k = 2, \dots, N$ нижнее основание поверхности Z_k совпадает с верхним основанием поверхности Z_{k-1} . При заданных условиях объединение $\bigcup_{k=1}^N Z_k$ представляет собой кусочно гладкую трубчатую поверхность с конечной высотой. Размножив поверхность $\bigcup_{k=1}^N Z_k$ всеми элементами группы H , порожденной отражениями m_1 и m_2 от (ее опорных) плоскостей нижнего и верхнего основания соответственно, мы получим бесконечную в обе стороны кусочно гладкую трубчатую поверхность \mathcal{Z} , изометричную бесконечному круговому цилиндру и обладающую двоякой периодичностью.

При любом $N \in \mathbb{N}$, если $N \geq 2$ или $N = 1$, поверхность \mathcal{Z} обладает дискретной группой параллельных переносов вдоль оси. В окружном направлении действует группа $G = nmt$ порядка $2n$, порожденная отражениями от двух плоскостей, пересекающихся под углом π/n .

Как раз о такой периодичности говорил А. В. Погорелов в случае произвольной кусочно гладкой трубчатой поверхности Z . Напомним, что он предполагал для простоты, что поверхность Z не содержит плоских кусков (см. [1, с. 53]). После этого предположения он сделал вывод, что поверхность Z состоит в точности из $2n$ цилиндрических поверхностей.

Полученная нами бесконечная двоякопериодичная поверхность \mathcal{Z} состоит не из $2n$, а из счетного множества цилиндрических поверхностей. Это противоречит выводу, сделанному в работе [1, с. 53–54].

ЗАМЕЧАНИЕ 8. Для выполнения упомянутого вывода дополнительно должны иметь место соотношения $\gamma_j \cap \gamma_i = \emptyset$ при $j \neq i$, где $i = 1, 2, \dots$. Здесь учитываются все ребристые линии кусочно гладкой поверхности.

В работе [1] индекс i принимает в точности $2n$ значений. В нашем случае лишь при $N = 1$ индекс i принимает $2n$ значений. Напротив, при $N \geq 2$ индекс i принимает более чем $2n$ значений, хотя порядок группы G фиксирован и по-прежнему равен $2n$. Здесь нами рассматривается некоторый особый частный случай. Как и в [1, с. 53], построенная нами поверхность \mathcal{Z} не содержит плоских кусков. Однако в противоположность работе [1] в рассматриваемом нами случае при некоторых $j \neq i$ имеется непустое пересечение $\gamma_j \cap \gamma_i \neq \emptyset$.

Построенная нами поверхность \mathcal{Z} состоит из n бесконечных гладких цилиндрических поверхностей, эквивалентных относительно группы G , и счетного множества конечных гладких цилиндрических поверхностей. Отдельно взятая суммарная поверхность $\bigcup_{k=1}^N Z_k$ состоит из $2^N n$ гладких цилиндрических поверхностей. Число $2^N n$ больше $2n$ при $N \geq 2$.

На рис. 15, *b*, уже имеется зеркальное отражение m_2 от плоскости верхнего основания поверхности $\bigcup_{k=1}^N Z_k$. Здесь $n = 4$ и $N = 2$.

Поверхность $\bigcup_{k=1}^N Z_k$ размножается вдоль вертикальной оси элементами группы H (см. выше). В окружном направлении действует группа G .

В рассматриваемом нами примере не все гладкие ребристые линии поверхности эквивалентны относительно группы $G = nmt$, если $N \geq 2$. В работе [1] все ребристые линии γ_i , $i = 1, \dots, 2n$, эквивалентны относительно группы G .

Таким образом, нами найдены такие кусочно гладкие изометрические вложения цилиндра с двоякой периодичностью, в которых множество гладких кусков является неограниченным несмотря на то, что в окружном направлении действует одна и та же фиксированная группа $G = nmt$, порожденная двумя отражениями. Такие погружения прямого кругового цилиндра в трехмерное евклидово пространство \mathbb{R}^3 в работе [1] не рассматривались.

3. Снова рассмотрим бесконечную сумму $\bigcup_{k \in \mathbb{N}} Z_k$ кусочно гладких трубчатых поверхностей Z_k , в которой нижнее основание поверхности Z_k , $k \geq 2$, совпадает с верхним основанием поверхности Z_{k-1} , однако при совершенно других условиях. Пусть высота призмы Π_k , где $k \in \mathbb{N}$, равна 2^{-k} . Тогда

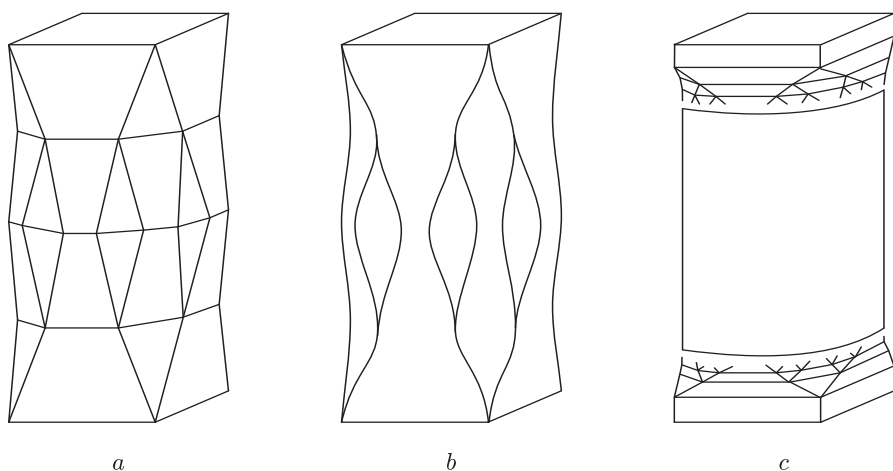


Рис. 15. Цилиндр. Вложение поверхности: a – кусочно линейной; b – кусочно гладкой; c – экзотической

высота кусочно гладкой трубчатой поверхности $\bigcup_{k \in \mathbb{N}} Z_k$ равна 1. (В таком случае высота изометричного кругового цилиндра будет больше 1.) Последовательность оснований слагаемых поверхностей Z_k , где $k \in \mathbb{N}$, является сходящейся. Предел последовательности при $k \rightarrow \infty$ представляет собой окружность, которая не принадлежит трубчатой поверхности $\bigcup_{k \in \mathbb{N}} Z_k$, однако все точки окружности суть граничные точки этой поверхности. Если поверхность $\bigcup_{k \in \mathbb{N}} Z_k$ пополнить, включив в нее все граничные точки (и тем самым получив на поверхности вторую компоненту края), то пополненная поверхность перестанет считаться кусочно гладкой. Она станет экзотической: любая достаточно малая окрестность точки, расположенной на граничной окружности, пересекается с неограниченным (счетным) множеством гладких кусков поверхности. Размножив замыкание поверхности $\bigcup_{k \in \mathbb{N}} Z_k$ всеми элементами группы H , порожденной отражениями m_1 и m_2 от (ее опорных) плоскостей нижнего и верхнего оснований соответственно, мы получим бесконечную поверхность. Для нее конечная поверхность $\bigcup_{k \in \mathbb{N}} Z_k$ (а точнее, ее замыкание) служит фундаментальной областью относительно группы H . Полученная в итоге экзотическая трубчатая поверхность, простирающаяся неограниченно вверх и вниз, опять обладает двоякой периодичностью.

Отметим также, что по любой окружности эту бесконечную поверхность можно разрезать на две части, обе части раздвинуть и вставить между ними дополнительный круговой цилиндр. Поверхность останется экзотической. Так, например, на рис. 15, c добавлены цилиндр и еще две призмы. Ее так же можно дополнить до двоякопериодичной.

ЗАМЕЧАНИЕ 9. Всякую кусочно гладкую поверхность можно заменить на изометричную ей кусочно линейную поверхность. Такая замена очень проста. А именно, при указанных выше построениях кусочно гладких трубчатых по-

верхностей Z_k , $k \in \mathbb{N}$, вместо гладких кривых $\gamma_1(k)$ мы возьмем прямолинейные отрезки $\delta_1(k)$: при каждом фиксированном $k \in \mathbb{N}$ на грани $\alpha_1(k)$ вспомогательной призмы Π_k мы выбираем свой прямолинейный отрезок δ_1 , зависящий от k . Возможность такой замены следует из теоремы Лагранжа о конечных приращениях. Таким образом, кусочно гладкая поверхность Z_k заменяется на кусочно линейную поверхность \bar{Z}_k .

ЗАМЕЧАНИЕ 10. Кусочно линейные трубчатые поверхности можно строить несколько иначе. А именно, на нижнем основании призмы Π возьмем не все вершины, а лишь половину из них, точнее – через одну. На верхнем основании возьмем середины всех сторон. Натянем выпуклую оболочку на все эти $3n$ точек. Боковая поверхность выпуклой оболочки представляет собой кусочно линейную трубчатую поверхность \bar{Z} , для которой нижним основанием служит правильный n -угольник, а верхним основанием служит правильный $2n$ -угольник. Иллюстрация представлена на рис. 3, с, но при одном дополнительном условии: верхнее основание представляет собой правильный многоугольник, а не полуправильный; в рассматриваемом случае $\delta_2 \cap \delta_1 \neq \emptyset$, здесь ребра δ_2 и δ_1 пересекаются в вершине; если необходимо, индексацию ребер можно поменять.

4. Пользуясь замечанием 9, мы построим счетное множество разных кусочно линейных поверхностей \bar{Z}_k , $k \in \mathbb{N}$. Основанием соответствующей вспомогательной призмы Π_k , $k \in \mathbb{N}$, является правильный $2^k n$ -угольник. Высоты различных поверхностей \bar{Z}_k равны 1. Пусть нижнее основание поверхности \bar{Z}_k при $k \geq 2$ совпадает с верхним основанием поверхности \bar{Z}_{k-1} . Тогда объединение $\bigcup_{k \in \mathbb{N}} \bar{Z}_k$ представляет собой составную кусочно линейную трубчатую поверхность, простирающуюся неограниченно вверх. Вместе с ее отражением от нижнего основания получаем кусочно линейную трубчатую поверхность, простирающуюся неограниченно как вверх, так и вниз. Только одна плоскость зеркальной симметрии суммарной поверхности перпендикулярна оси. Все остальные плоскости зеркальной симметрии проходят через ось.

5. Рассмотрим лишь N разных кусочно линейных поверхностей \bar{Z}_k , $k = 1, \dots, N$, построенных в п. 4. (При $k \geq 2$ поверхность \bar{Z}_k имеет $2^k n > 2n$ плоских граней.) Тогда объединение $\bigcup_{k=1}^N \bar{Z}_k$ представляет собой кусочно линейную трубчатую поверхность. Размножив поверхность $\bigcup_{k=1}^N \bar{Z}_k$ всеми элементами группы H , порожденной отражениями m_1 и m_2 от (ее опорных) плоскостей нижнего и верхнего основания соответственно, мы получим бесконечную в обе стороны кусочно линейную трубчатую поверхность, аналогичную \mathcal{Z} , изометричную бесконечному круговому цилиндру и обладающую двоякой периодичностью. Имеется дискретная группа параллельных переносов вдоль оси. В окружном направлении действует группа $G = nmm$ (см. рис. 15, а, где $n = 4$ и $N = 2$). На рис. 15, а, как и на рис. 15, б, имеется зеркальное отражение m_2 .

6. Снова рассмотрим бесконечную сумму $\bigcup_{k \in \mathbb{N}} \bar{Z}_k$ кусочно линейных трубчатых поверхностей \bar{Z}_k , в которой нижнее основание поверхности \bar{Z}_k , $k \geq 2$, совпадает с верхним основанием поверхности \bar{Z}_{k-1} , однако при следующих условиях. Пусть высота поверхности \bar{Z}_k , $k \in \mathbb{N}$, равна 2^{-k} . Тогда высота

кусочно линейной трубчатой поверхности $\bigcup_{k \in \mathbb{N}} \bar{Z}_k$ равна 1. Последовательность оснований слагаемых поверхностей \bar{Z}_k , где $k \in \mathbb{N}$, является сходящейся. Предел последовательности при $k \rightarrow \infty$ представляет собой окружность. Трубчатая поверхность $\bigcup_{k \in \mathbb{N}} \bar{Z}_k$ вместе с граничной окружностью представляет собой экзотическую поверхность. Размножив замыкание поверхности $\bigcup_{k \in \mathbb{N}} \bar{Z}_k$ всеми элементами группы H , порожденной отражениями m_1 и m_2 от (ее опорных) плоскостей нижнего и верхнего оснований соответственно, мы получим бесконечную поверхность, для которой конечная поверхность $\bigcup_{k \in \mathbb{N}} \bar{Z}_k$ (вместе с граничной окружностью) служит фундаментальной областью относительно группы H . Полученная в итоге экзотическая¹⁶ трубчатая поверхность, простирающаяся неограниченно вверх и вниз, обладает двойкой периодичностью.

Кроме того, по любой окружности эту бесконечную поверхность можно разрезать на две части, обе части раздвинуть и вставить между ними дополнительный круговой цилиндр. Эти дополнительные цилиндры можно вставлять периодически. Поверхность останется экзотической.

Кусочно гладкие, кусочно линейные и экзотические поверхности, изометричные цилиндру, можно комбинировать между собой в различном порядке. Так, например, кусочно линейную поверхность, заданную в п. 5, можно слегка сгладить вблизи каждого горизонтального ее ребра.

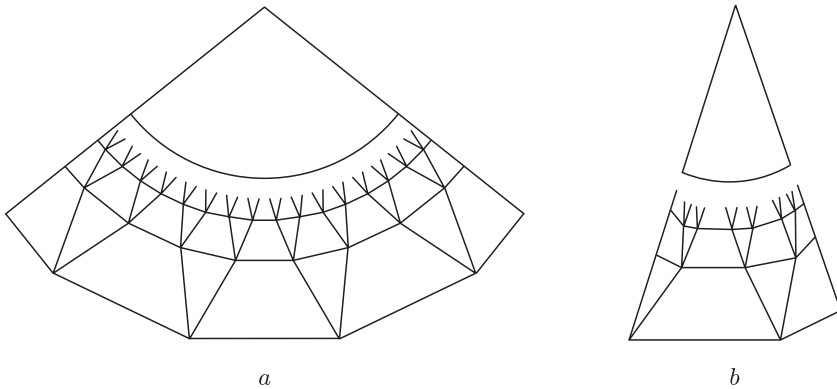


Рис. 16. Поверхность пирамиды: a – развертка; b – экзотическое вложение

Итак, мы рассмотрели лишь некоторые частные случаи специальных изометрических преобразований поверхности прямого кругового цилиндра, полученных методом А. В. Погорелова. Аналогичные построения можно распространить с поверхности прямого кругового цилиндра на поверхность прямого кругового конуса. Так, например, на рис. 16, b изображена поверхность, которая представлена в виде объединения счетного множества кусочно линейных ворончатых поверхностей и поверхности кругового конуса. В этом случае любую кусочно линейную поверхность, представленную на рис. 9, b , можно заменить

¹⁶Если окружности удалить, останутся кусочно линейные поверхности.

на кусочно гладкую ворончатую поверхность, приведенную на рис. 11, *b*, а высоту слагаемого конуса можно устремить к нулю, сосредоточив всю экзотику в одной вершине. (Здесь в рисунках должно быть одно и то же n .)

Однако здесь мы не будем переизлагать все эти построения заново. Достаточно сказать следующее. При этих построениях обязательно следует учесть, что в случае конуса имеются свои индивидуальные особенности. Здесь важно проводить все построения на одной и той же развертке в целом (см. рис. 16, *a*). В противном случае при объединении разных разверток может получиться неразвертывающаяся поверхность. Кроме того, отметим следующее обстоятельство, обнаруженное при обобщении метода А. В. Погорелова. Если кусочно гладкая поверхность $Z \subset \mathbb{R}^3$ (или кусочно линейная поверхность $\bar{Z} \subset \mathbb{R}^3$) изометрична конечной части прямого кругового цилиндра, то эта часть является прямым круговым цилиндром конечной высоты. Если же кусочно гладкая поверхность $Z^* \subset \mathbb{R}^3$ (или кусочно линейная поверхность $\bar{Z} \subset \mathbb{R}^3$) изометрична конечной части прямого кругового конуса, то эта часть не является (усеченным) прямым круговым конусом с конечной высотой. Это связано с тем, что компонента края поверхности прямого кругового конуса является гладкой кривой. Напротив, компонента края поверхности $Z^* \subset \mathbb{R}^3$ (или $\bar{Z} \subset \mathbb{R}^3$) является кусочно гладкой кривой – это многоугольник, составленный из прямолинейных образующих поверхности (здесь $\psi \neq \pi - \varphi$). Поэтому проще отображать в \mathbb{R}^3 не поверхность усеченного конуса, а поверхность усеченной пирамиды с группой изометрий $G = nmm$ (см. рис. 16).

Таким образом, метод А. В. Погорелова обобщен с цилиндра на конус. В итоге получены некоторые кусочно гладкие, кусочно линейные и экзотические вложения поверхности прямого кругового конуса, аналогичные специальным изометрическим вложениям прямого кругового цилиндра.

§ 6. Приложение 1. О распознавании ребер трапецеэдра

Прежде всего, напомним о введенном нами понятии трапецеэдра и об особенностях устройства поверхности трапецеэдра.

Рассмотрим кусочно линейную трубчатую поверхность $\bar{Z} \subset \mathbb{R}^3$, построенную с помощью ребра δ_1 , взятого на грани α_1 вспомогательной призмы Π . На поверхности $\bar{Z} \subset \mathbb{R}^3$ действует группа $G = nmm$. Предполагается, что исходное прямолинейное ребро $\delta_1 \subset Z$ выбрано внутри фундаментальной области группы $G = nmm$. Тогда $\delta_j \cap \delta_i = \emptyset$ при $j \neq i$, где $i = 1, \dots, 2n$. Грани поверхности $\bar{Z} \subset \mathbb{R}^3$ являются равнобедренными трапециями. Все они разбиваются на два класса. Оба класса суть две орбиты граней относительно группы изометрий $G = nmm$. Построим развертку R поверхности \bar{Z} (см. рис. 2, *c*). На ней для прообраза ребра δ_1 имеет место система неравенств (1).

Теперь решим обратную задачу. Возьмем произвольную развертку $R \subset \mathbb{R}^2$, удовлетворяющую условиям (1). Докажем, что в \mathbb{R}^3 имеется специальная изометрическая реализация развертки R , т. е. существует кусочно линейная поверхность $\bar{Z} \subset \mathbb{R}^3$, изометричная развертке $R \subset \mathbb{R}^2$.

Конечно, развертка $R \subset \mathbb{R}^2$ имеет специальный вид. Развертка R представляет собой прямоугольник, у которого две противоположные стороны отождествлены. Она состоит из $2n$ равнобедренных трапеций (см. рис. 2, *c*) и обладает группой изометрий, изоморфной группе $G = n\mathbb{T}$. Естественная фундаментальная область группы изометрий также является прямоугольником, его площадь в $2n$ раз меньше площади развертки (см. рис. 2, *b* и рис. 17, *a*). Фундаментальный прямоугольник развертки R состоит из двух трапеций, обладающих общей боковой стороной AB .

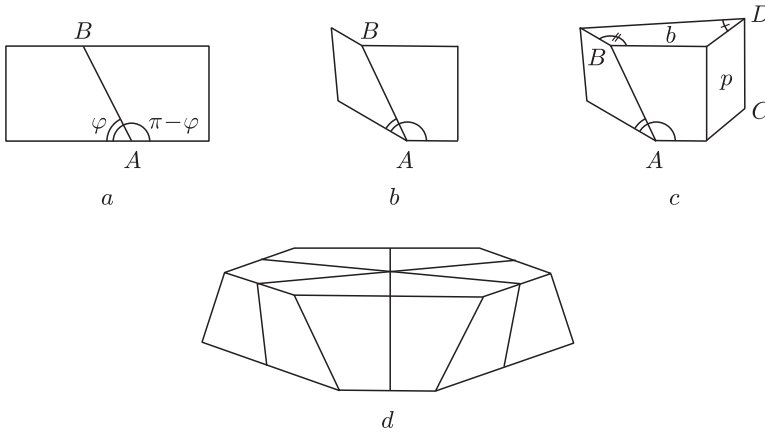


Рис. 17. Этапы построения трапецоэдра по его развертке: *a* – фундаментальный прямоугольник на развертке R ; *b* – фундаментальная область группы G на поверхности \tilde{Z} ; *c* – фундаментальная область группы G в трапецоэдре; *d* – трапецоэдр

Две другие боковые стороны трапеций являются одновременно их высотами. Плоские углы трапеций в вершине A равны φ и $\pi - \varphi$. Система неравенств (1) позволяет так подобрать двугранный угол между плоскостями указанных двух трапеций, чтобы в вершине A образовался трехгранный угол с тремя плоскими углами φ , $\pi - \varphi$ и $\pi - \pi/n$. Это всегда можно сделать, так как система неравенств (1) эквивалентна неравенствам треугольника. Достаточно повернуть одну из трапеций по отношению к другой вокруг общей стороны AB так, чтобы угол между основаниями трапеций стал равным $\pi - \pi/n$. При этом получится вполне определенная метрическая конструкция, состоящая из двух трапеций (см. рис. 17, *b*). Ниже мы детально исследуем эту конструкцию.

Основания трапеций, проходящие через точку A , лежат в некоторой вполне определенной плоскости (обозначим ее через a) и составляют угол $\pi - \pi/n$. Основания трапеций, проходящие через точку B , лежат в параллельной плоскости (обозначим ее через b) и составляют угол той же величины $\pi - \pi/n$. В плоскости a построим четырехугольник, две стороны которого совпадают с основаниями трапеций, обладающими общей вершиной A , а две другие стороны перпендикулярны им. Угол четырехугольника в вершине C , противоположной вершине A , равен π/n . Аналогично, в плоскости b построим четырехугольник,

две стороны которого совпадают с основаниями трапеций, обладающими общей вершиной B , а две другие стороны перпендикулярны им. Угол четырехугольника в вершине D , противоположной вершине B , равен π/n (см. рис. 17, с).

Стороны двух построенных четырехугольников, примыкающие к боковой стороне трапеции, которая служит ее высотой, перпендикулярны к основаниям этой трапеции. Эти стороны параллельны. Одна пара таких сторон лежит в плоскости, которую обозначим через p , другая пара параллельных сторон лежит в плоскости, которую обозначим через q . Плоскость p перпендикулярна основаниям одной трапеции, плоскость q перпендикулярна основаниям другой трапеции. Угол между перпендикулярами равен $\pi - \pi/n$ или π/n . Значит, плоскости p и q составляют два двугранных угла, один равен $\pi - \pi/n$, другой равен π/n . Рассматриваемые нами две трапеции, обладающие общей боковой стороной AB , находятся в том двугранном углу, величина которого равна π/n (см. рис. 17, с).

Возьмем группу G , порожденную отражениями от плоскостей p и q . Размножим рассматриваемую пару трапеций и пару построенных четырехугольников всеми элементами группы G . В результате объединения указанных трапеций и четырехугольников получится поверхность выпуклого многогранника с осью CD , основаниями которого служат два $2n$ -угольника, а боковой поверхностью служит поверхность \bar{Z} , составленная из $2n$ равнобедренных трапеций.

В итоге получена поверхность \bar{Z} , изометричная заданной развертке R . Эта поверхность названа нами *трапецоэдром* (см. рис. 17, d, а также рис. 3, b). Обратная задача решена.

Отметим, что в решении обратной задачи важную роль играет группа $G = mtn$. Эта группа использована нами в достаточно полной мере. А именно, система неравенств (1) обеспечивает существование конструкции, состоящей из двух трапеций и представляющей собой фундаментальную часть трапецоэдра, т.е. фундаментальную область группы G на поверхности трапецоэдра. И, самое главное, наличие нетривиальной группы $G = nmt$, как оказалось впоследствии, позволяет посредством ее элементов продолжить эту фундаментальную часть до всего трапецоэдра.

Говоря об обратной задаче, мы хотим обратить особое внимание на следующее. Развертка $R \subset \mathbb{R}^2$ поверхности $\bar{Z} \subset \mathbb{R}^3$ с учетом отождествления эквивалентных сторон представляет собой сферу с двумя многоугольными отверстиями. Заклеим оба отверстия двумя $2n$ -угольниками M_1 и M_2 с углами $\pi - \pi/n$. Расширенная развертка $M_1 \cup R \cup M_2$ гомеоморфна сфере. В каждой своей точке она имеет неотрицательную кривизну. По теореме А. Д. Александрова существует (и при том единственный) замкнутый выпуклый многогранник $M_1 \cup \bar{Z} \cup M_2$, изометричный данной расширенной развертке $M_1 \cup R \cup M_2$. Трапецоэдром можно называть не только боковую поверхность $\bar{Z} \subset \mathbb{R}^3$ этого многогранника, но и сам многогранник $M_1 \cup \bar{Z} \cup M_2$, что впредь и будем предполагать. Точкам развертки с положительной кривизной и только им соответствуют вершины выпуклого многогранника.

Теперь приступим к решению задачи о распознавании (*восстановлении*) ребер трапецоэдра по заданной его развертке. Рассмотрим абстрактную развертку

ку неотрицательной кривизны, *гомеоморфную сфере*. Предположим, что она обладает группой изометрий, порожденной отражениями. Более того, будем полагать, что фундаментальная область группы изометрий есть двугульник с углами π/n , $n \geq 2$, внутри которого имеются всего лишь две точки с ненулевой кривизной, точнее с положительной кривизной. Обозначим эти точки через A и B . Опустим из них кратчайшие перпендикуляры на стороны фундаментального двугульника. Пусть полученный при этом шестиугольник разбивается отрезком AB на две трапеции, которые пересекаются по общей боковой стороне AB , и пусть углы трапеций в вершине A суть φ и $\pi - \varphi$, удовлетворяющие¹⁷ системе неравенств (1). Тогда шестиугольник на самом деле есть прямоугольник, составленный из двух трапеций. Для этих двух трапеций повторим все те построения, о которых было сказано выше (см. рис. 17). В итоге получим многогранник $M_1 \cup \bar{Z} \cup M_2$, изометричный данной развертке. Этот многогранник (трапецоэдр) выпуклый и по теореме А. Д. Александрова единственный. Многоугольники M_1 и M_2 являются его гранями. Значит, ребра этого многогранника однозначно определяются по заданной его развертке: они суть ребра граней кусочно линейной трубчатой поверхности $\bar{Z} \subset \mathbb{R}^3$. Таким образом, мы приходим к следующему очень важному для нас заключению.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. *Все ребра трапецоэдра однозначно определяются по метрически заданной его развертке.*

ЗАМЕЧАНИЕ 11. Все грани трапецоэдра суть многоугольники Делоне.

Мы рассмотрели тот случай, в котором кусочно линейная поверхность \bar{Z} изометрична цилиндру. Точно так же поступим и в случае конуса. Только теперь для развертки выполняются условия (3) и (4) и доказывается существование кусочно линейной поверхности с произвольной метрически заданной разверткой, представленной на рис. 10, а. Доказательство такое же, как и раньше. Единственное отличие состоит в том, что теперь две трапеции с общей стороной AB составляют не фундаментальный прямоугольник (см. рис. 2, b и рис. 17, a), а фундаментальный шестиугольник (см. рис. 10, b). Но это не является помехой для повторения тех же рассуждений. Таким образом, достаточность условий (3) и (4) доказана. Вместе с этим нами подтверждена распознаваемость ребер по развертке для еще одного замкнутого выпуклого многогранника, являющегося обобщением введенного трапецоэдра.

Аналогичным способом удастся найти ребра по заданной развертке во многих других случаях, когда развертка обладает достаточно богатой группой симметрии. Таковыми являются, например, развертки поверхностей платоновых тел, тел Архимеда, изогонов, изоэдров и т. д.

Здесь отмечены наиболее простые случаи, в которых ребра выпуклого многогранника однозначно распознаются по заданной развертке.

¹⁷На самом деле выполнение системы неравенств (1) нужно не требовать, а доказывать, опираясь на имеющиеся специфические свойства метрики развертки. Такое доказательство получено, однако оно оказалось слишком громоздким и поэтому здесь не приведено. В настоящее время предпринимаются попытки упростить его.

Распознавание ребер выпуклого многогранника по заданной его развертке в самом общем случае – это очень сложная задача, даже безнадежная, судя по высказыванию А. Д. Александрова. Несмотря на предпринимающиеся в последнее время попытки решить эту задачу алгоритмически, выявление классов выпуклых многогранников, для которых распознавание ребер по заданной развертке осуществимо вручную, по-прежнему является интересным. Поиск таких классов выпуклых многогранников продолжается, однако полученные результаты выходят за рамки настоящей публикации.

§ 7. Приложение 2. Эллипс на двумерной сфере

На единичной сфере $\mathbb{S}^2 \subset \mathbb{R}^3$ рассмотрим две фиксированные точки P и Q . Предположим, что точки P и Q не диаметрально противоположны. Середину единственной кратчайшей дуги \widehat{PQ} между точками P и Q обозначим через N . Напомним, что расстояние между точками на единичной сфере измеряется длиной дуги большой окружности, кратчайшей между ними, или углом между опирающимися на них радиусами. Ясно, что $0 < |\widehat{PQ}| < \pi$. Пусть точка N – северный полюс. Тогда сделаем проекцию северного полушария на плоскость экватора (рис. 18).

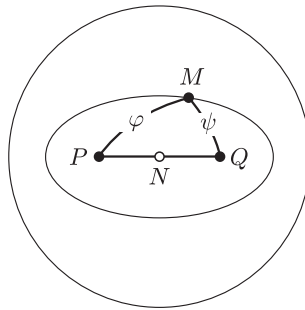


Рис. 18. Эллипс на поверхности сферы $\mathbb{S}^2 \subset \mathbb{R}^3$

Пусть M – произвольная точка северной полусферы, φ – расстояние от точки M до точки P , ψ – расстояние от точки M до точки Q , и пусть c – любое фиксированное число, но с ограничениями $|\widehat{PQ}| \leq c \leq \pi$. Тогда множество всех точек M , где $M \in \mathbb{S}^2 \subset \mathbb{R}^3$, определяемых уравнением

$$\varphi + \psi = c,$$

представляет собой *сферический эллипс*. Это не обычный классический эллипс на евклидовой плоскости, а совсем необычный эллипс на сфере.

Если $c = |\widehat{PQ}|$, то сферический эллипс вырождается в дугу \widehat{PQ} (взятую дважды). Этот эллипс плоский, поскольку он лежит в плоскости меридиана.

Если $|\widehat{PQ}| < c < \pi$, то сферический эллипс представляет собой не плоскую¹⁸ кривую, как эллипс на плоскости, а пространственную.

¹⁸Пересечение сферы с произвольной плоскостью является окружностью.

Если $c = \pi$, то сферический эллипс совпадает с экватором рассматриваемой сферы. Этот эллипс плоский, поскольку он лежит в плоскости экватора.

Итак, если c пробегает весь допустимый интервал, $|\widetilde{PQ}| < c < \pi$, то сферический эллипс находится между двумя крайними сферическими эллипсами, соответствующими концам интервала, и пробегает северную половину сферы.

Ниже нами будут использованы следующие две леммы.

ЛЕММА 1. Пусть $|\widetilde{PQ}| = \pi - \pi/n$, где $n \geq 2$, и $\pi - \pi/n < c < \pi$. Тогда сферический эллипс $\varphi + \psi = c$ является пространственной кривой.

ЛЕММА 2. Пусть $|\widetilde{PQ}| = \pi - \pi/n$, где $n \geq 2$, и $c = \pi$. Тогда сферический эллипс $\varphi + \psi = c$ является плоской кривой.

Прежде всего напомним два общеизвестных факта из курса дифференциальной геометрии. Пусть дана кривая $\mathbf{r} = \mathbf{r}(s)$, где параметр s — дуга. Тогда в любой точке кривой единичный касательный вектор имеет вид $\mathbf{t} = \frac{d\mathbf{r}}{ds}$. Если конец вектора $\mathbf{r} = \mathbf{r}(s)$ описывает пространственную кривую, то конец единичного касательного вектора $\mathbf{t} = \mathbf{t}(s)$ также описывает пространственную кривую. Если конец вектора $\mathbf{r} = \mathbf{r}(s)$ описывает плоскую кривую, то конец единичного касательного вектора $\mathbf{t} = \mathbf{t}(s)$ также описывает плоскую кривую. Оба факта являются простыми следствиями из формул Френе.

Именно в этих двух фактах, как оказалось, заключается различие между специальными изометрическими преобразованиями поверхности прямого кругового конуса (см. [5]) и специальными изометрическими преобразованиями поверхности прямого кругового цилиндра (см. [1] и дополнение [4] к работе [1]). Связано это с тем, что в обоих случаях ребристая линия кусочно гладкой ворончатой или трубчатой поверхности является решением дифференциального уравнения (2).

Ниже мы будем рассматривать сначала кусочно гладкую ворончатую поверхность Z^* , для которой углы φ^* и ψ^* в условиях (3) и (4) являются переменными, а потом кусочно гладкую трубчатую поверхность Z , для которой угол φ в условиях (1) является переменным.

Ворончатая поверхность Z^* . Напомним, что построение кусочно гладкой ворончатой поверхности $Z^* \subset \mathbb{R}^3$ по фиксированной ее развертке $R \subset \mathbb{R}^2$ при заданных метрических условиях (3) и (4) тесно связано с решением дифференциального уравнения (2).

Искомый радиус-вектор с началом в фиксированной точке A и концом в произвольной точке S гладкой ребристой линии γ_1^* на кусочно гладкой ворончатой поверхности $Z^* \subset \mathbb{R}^3$ мы обозначили через \mathbf{r} . Для нахождения неизвестной вектор-функции $\mathbf{r} = \mathbf{r}(s)$ имеется известное дифференциальное уравнение (2) с начальным условием $\mathbf{r}(0) = \mathbf{0}$. Вектор-функция $\mathbf{t}(s)$ в правой части уравнения (2) известна заранее. В самом деле, она может быть однозначно определена по заданной развертке R (на которой известны углы φ^* и ψ^*) и фиксированному углу $\pi - \pi/n$. Таким образом, в каждом конкретном случае решение уравнения (2) является вполне определенным.

Теперь сделаем некоторое простое вспомогательное построение. Полагая, что начальная точка A находится в центре единичной сферы $S^2 \subset \mathbb{R}^3$, выберем на поверхности сферы S^2 вспомогательные две точки P и Q , для которых имеет место равенство $\angle PAQ = \pi - \pi/n$. Мы вправе полагать, что отрезки AP и AQ направлены вдоль двух прямолинейных образующих поверхности $Z^* \subset \mathbb{R}^3$, проходящих через ее точку A (угол между ними как раз равен $\pi - \pi/n$; направления отрезков AP и AQ были зафиксированы ранее в объемлющем пространстве \mathbb{R}^3 (см. вывод уравнения (2)).

Пусть M – произвольная точка сферы $S^2 \subset \mathbb{R}^3$, а φ – сферическое расстояние от M до P и ψ – сферическое расстояние от M до Q . Тогда при условии $\pi - \pi/n < c < \pi$ (см. (4) и замечание 6) уравнение $\varphi + \psi = c$ задает сферический эллипс. Этот эллипс на сфере $S^2 \subset \mathbb{R}^3$ описывает конец вектора $\mathbf{t} = \mathbf{t}(s)$, начало которого находится в точке A .

При заданных условиях вспомогательный сферический эллипс, как оказалось, является пространственной кривой – это лемма 1. Отметим, что середина N дуги PQ является центром сферического эллипса. Касательная и нормаль к сферическому эллипсу в точке M являются биссектрисами углов между дугами \widehat{MP} и \widehat{MQ} . Сферический эллипс имеет группу симметрии $2m$. Одна плоскость симметрии содержит дугу \widehat{PQ} , другая проходит через N перпендикулярно отрезку PQ . Орбита точки M общего положения относительно группы $2m$ представляет собой четыре вершины прямоугольника, плоскость которого параллельна плоскости экватора. Все остальные точки сферического эллипса не могут лежать в этой же плоскости. Иначе (как пересечение сферы с плоскостью) сферический эллипс был бы окружностью. Ее радиус \widehat{MN} совпал бы с нормалью в точке M . Однако как нормаль к сферическому эллипсу дуга \widehat{MN} являлась бы биссектрисой угла между дугами \widehat{MP} и \widehat{MQ} , а это невозможно, так как медиана не может быть биссектрисой при условии $|\widehat{MP}| \neq |\widehat{MQ}|$. Значит, сферический эллипс $\varphi + \psi = c$ не может быть плоской кривой, если $|\widehat{PQ}| < c < \pi$. Он является пространственной кривой. Следовательно, ребристая линия γ_1^* поверхности $Z^* \subset \mathbb{R}^3$ также является пространственной кривой (обладающей ненулевым кручением).

Теперь доказательство теоремы 3 в случае специальных кусочно гладких изометрических вложений конуса завершено полностью.

Трубчатая поверхность Z . Здесь, как и в случае поверхности Z^* , можно опять повторить точно те же рассуждения. Однако теперь вместо (3) и (4) следует учитывать условия (1). Вектор-функция $\mathbf{t}(s)$ в правой части уравнения (2) опять известна заранее. Она может быть однозначно определена по заданной развертке R (на которой известны углы φ и $\pi - \varphi$) и фиксированному углу $\pi - \pi/n$. Теперь введем следующее формальное обозначение: $\psi = \pi - \varphi$. Получим уравнение $\varphi + \psi = \pi$, связывающее между собой два переменных угла φ и ψ . Это уравнение сферического эллипса, описываемого концом единичного вектора $\mathbf{t} = \mathbf{t}(s)$ на сфере $S^2 \subset \mathbb{R}^3$. При заданных условиях вспомогательный сферический эллипс является плоской кривой – это лемма 2. Ребристая линия γ_1 , расположенная на поверхности $Z \subset \mathbb{R}^3$, также является

плоской кривой (обладающей нулевым кручением). Этот случай был исследован в [1].

Автор выражает благодарность рецензенту за внимательное прочтение данной работы, критические замечания к ней и полезные советы, а также В. А. Васильеву и И. Х. Сабитову за подробное обсуждение настоящей статьи.

Список литературы

1. А. В. Погорелов, *Изгибания поверхностей и устойчивость оболочек*, Наука, М., 1986; англ. пер.: A. V. Pogorelov, *Bendings of surfaces and stability of shells*, Transl. Math. Monogr., **72**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1988.
2. М. И. Штогрин, “Специальные изометрические преобразования поверхностей платоновых тел”, *УМН*, **60**:4 (2005), 221–222; англ. пер.: M. I. Shtogrin, “Special isometric transformations of the surfaces of the Platonic solids”, *Russian Math. Surveys*, **60**:4 (2005), 799–801.
3. М. И. Штогрин, “Изометрические вложения поверхностей платоновых тел”, *УМН*, **62**:2 (2007), 183–184; англ. пер.: M. I. Shtogrin, “Isometric embeddings of the surfaces of the Platonic solids”, *Russian Math. Surveys*, **62**:2 (2007), 395–397.
4. М. И. Штогрин, “Специальные изометрические преобразования цилиндра”, *УМН*, **62**:5 (2007), 173–174; англ. пер.: M. I. Shtogrin, “Special isometric transformations of a cylinder”, *Russian Math. Surveys*, **62**:5 (2007), 1015–1017.
5. М. И. Штогрин, “Специальные изометрические преобразования конуса”, *УМН*, **63**:2 (2008), 183–184; англ. пер.: M. I. Shtogrin, “Special isometric transformations of a cone”, *Russian Math. Surveys*, **63**:2 (2008), 388–390.
6. А. В. Шубников, В. А. Копщик, *Симметрия в науке и искусстве*, Наука, М., 1972.
7. М. И. Штогрин, “Кусочно гладкие разворачивающиеся поверхности”, *Геометрия, топология и математическая физика*, I: Сборник статей. К 70-летию со дня рождения академика С. П. Новикова, Тр. МИАН, **263**, Наука, М., 2008, 227–250.

М. И. ШТОГРИН (M. I. SHTOGRIN)
Математический институт им. В. А. Стеклова РАН
E-mail: stogrin@mi.ras.ru

Поступило в редакцию
26.02.2007