Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана (национальный исследовательский университет)» (МГТУ им. Н.Э. Баумана)

Факультет: Информатики и систем управления

Кафедра: Теоретической информатики и компьютерных технологий

Домашнее задание №2

«Цепи Маркова с дискретным и непрерывным временем»

по курсу: «МОДЕЛИРОВАНИЕ»

Выполнила: студентка группы ИУ9-81

Синявская А. А.

Проверила: Домрачева А.Б.

Москва, 2020

ЦЕЛЬ: приобретение навыка описания сложных систем на основе цепей Маркова, получение навыков планирования и проведения вычислительного эксперимента.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ:

Дано: Сезон телевизионной игры «Что? Где? Когда?» состоит из 4 серий: Весенней, Летней, Осенней и Зимней. Порядок участия команд знатоков в сериях:

- Все команды принимают участие в Весенней или Летней серии. Команда, выигравшая последней в Весенней или Летней серии, получает право сыграть в Зимней серии. Остальные победившие команды имеют шанс сыграть в Осенней серии.
- Команда, выигравшая последней в Осенней серии, получает право сыграть в Зимней серии.
- Победившая с большим счетом в Зимней серии команда получает право сыграть в Финале года.

Вероятность победы не последней по счету для команды X в Весенней/Летней серии составляет $p_1 = 0.5$, вероятность победы последней $p_2 = 0.3$. Вероятность победы последней в Осенней серии $p_3 = 0.3$. Вероятность победы с наибольшим счетом в Зимней серии составляет $p_4 = 0.4$.

Оценить: количество сезонов, по прошествии которых у команды получится попасть в Финал года.

ОСНОВНЫЕ ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ:

Случайный процесс называется марковским процессом, если для каждого момента времени t состояние системы в настоящем и не зависит от того, каким образом она пришла в это состояние.

Марковский процесс удобно задавать графом переходов из состояния S_i в состояние S_j с вероятностью перехода P_{ij}, $i = \overline{1, n}, \ j = \overline{1, m}$.

Рассматривают два варианта описания марковских процессов — с дискретным и непрерывным временем. В первом случае переход из одного состояния в другое происходит в заранее известные моменты времени — такты (1, 2, 3, 4, …). Переход осуществляется на каждом такте, то есть исследователя интересует только последовательность состояний, которую проходит случайный процесс в своем развитии, и не интересует, когда конкретно происходил каждый из переходов. Во втором случае последовательность состояний и моменты переходов оказываются значимы. Если вероятность перехода не зависит от времени, то марковскую цепь называют однородной.

ОПИСАНИЕ АЛГОРИТМА:

Исходя из постановки задачи, будем описывать дискретную однородную марковскую цепь. В реализуемой модели 4 состояния S = $\{S_1, S_2, S_3,\ S_4\}$, S_1— игра в Весенней/Летней серии, S_2 – игра в Осенней серии, S_3 – игра в Зимней серии, S_4— Финал года. Вероятности переходов представлены в таблице 1.

Наглядно модель марковского процесса можно представить себе в виде графа на рисунке 1.

Таблица 1 – Вероятности переходов.

	S_1	S_2	S_3	S_4
S_1	0.2	0.5	0.3	0
S_2	0.7	0	0.3	0
S_3	0.6	0	0	0.4
S_4	0	0	0	1

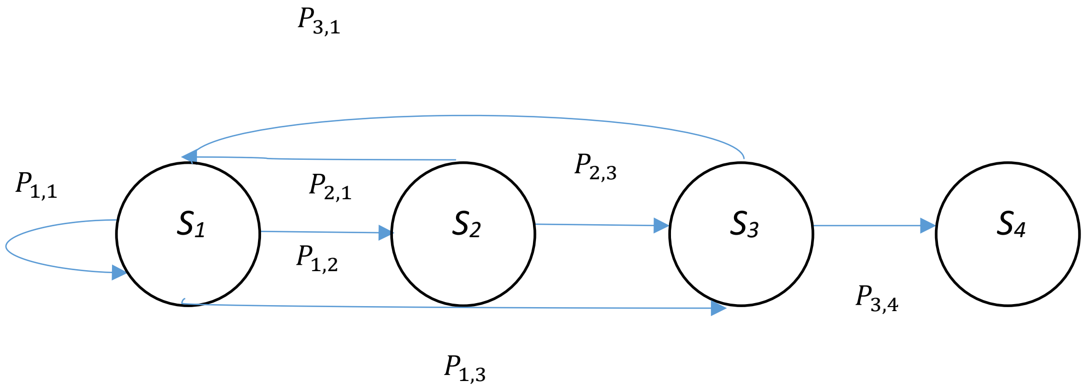

Рисунок 1 – Граф модели марковского процесса.

Чтобы определить, в какое состояние перейдет процесс из текущего i-го состояния, достаточно разбить интервал $[0; 1]$ на подынтервалы величиной $P_{i1}, P_{i2}, P_{i3}, \ldots$ $(P_{i1} + P_{i2} + P_{i3} + \ldots = 1)$. Далее с помощью генератора случайных чисел необходимо получить очередное равномерно распределенное в интервале $[0; 1]$ случайное число и определить, в какой из подынтервалов оно попадает.

Отсчёт сезонов ведётся по факту попадания в состояние S_1.

ПРАКТИЧЕСКАЯ РЕАЛИЗАЦИЯ

Для реализации поставленной задачи использован язык Python, для генерации случайных чисел библиотеки random и _random. В листинге 1 представлен программный код, оценивающий количество сезонов, в которых необходимо сыграть команде для попадания в Финал года.

Листинг 1. Описание системы на основе марковской цепи.

```
import random
import _random
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

n = 4  # количество состояний

# таблица состояний

conversion_table3 = {
```

```
    (0, 0): 0.2, (0, 1): 0.5, (0, 2): 0.3, (0, 3): 0,
    (1, 0): 0.7, (1, 1): 0, (1, 2): 0.3, (1, 3): 0,
    (2, 0): 0.6, (2, 1): 0, (2, 2): 0, (2, 3): 0.4,
    (3, 0): 0, (3, 1): 0, (3, 2): 0, (3, 3): 1
}

sum_seasons = 0
m = 100
seasons = []
p_r = _random.Random()
for l in range(0, m):

    season_number = 0
    s_cur = (0, 0)
    x = 0

    fl = False

    while s_cur[0] < 3:
        i, j = s_cur
        p_random= np.random.random()
        # p_random = p_r.random()
        if s_cur == (0, 0):
            season_number += 1

        p = 0
        delta = 0
        for k in range(0, n):
            p = p + conversion_table3[i, k]
            delta = k
            if p_random <= p:
                break

        s_cur = (delta, 0)
        x += 1

               sum_seasons += season_number
    seasons.append(season_number)


print(sum_seasons / m)

fig, ax = plt.subplots()
ax.scatter([i for i in range(1, len(seasons)+1)], seasons, c = 'deeppink')
plt.show()
```

ТЕСТИРОВАНИЕ

По результатам 1000 запусков реализованной программы для генератора random было получено среднее значение количества сезонов = 5.508, для генератора _random = 5.5. Полученные результаты совпадают. Следовательно, команда сможет выйти в Финал года через 6 лет. На рисунке 2 представлен разброс количества сезонов для 1000 запусков программы. По оси X располагаются порядковые номера запусков, по оси У получившиеся количества сезонов.

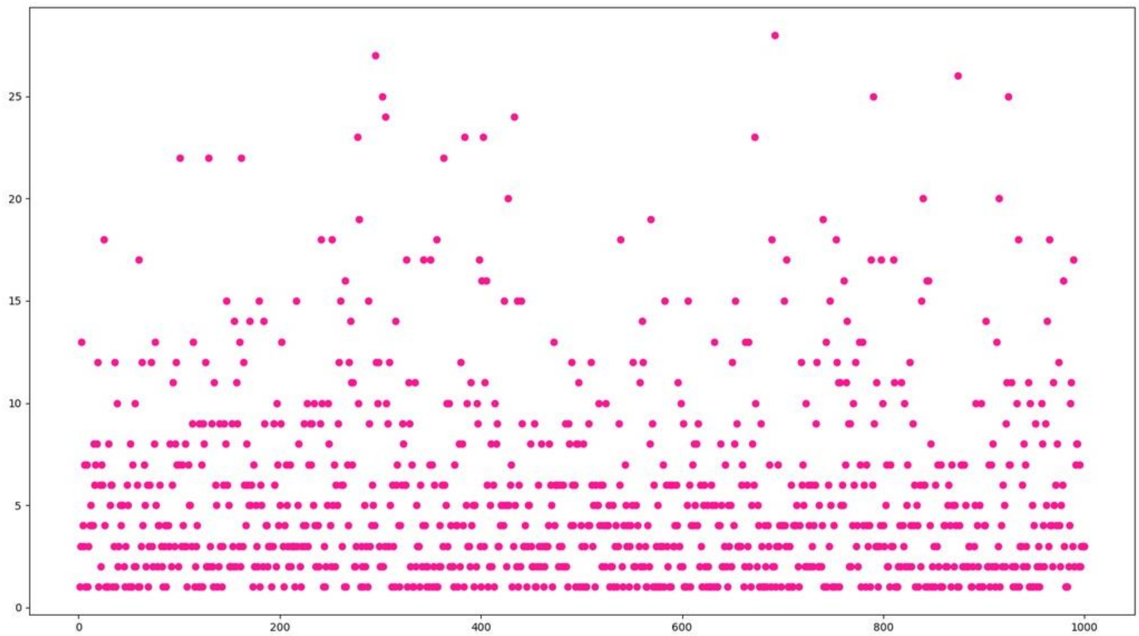

Рисунок 2 – График разброса количества сезонов, получившихся в результате 1000 запусков программы.

ВЫВОД

В рамках данной лабораторной работы была описана заданная система с помощью модели марковской цепи, оценено среднее количество сезонов, необходимых для попадания в Финал года команды знатоков в игре «Что? Где? Когда?». Полученный результат совпал для двух генераторов случайных чисел, что говорит о корректности построения модели.