作业三

敖旭扬 PB18071477 2021 年 1 月 5 日

第一题 解：

(a) 由 Gauss 顺序消元法的步骤和过程，第一次迭代后 A 的第一列完成消去时，有

$$a_{ij}^{(1)} = a_{ij} - \frac{a_{i1}}{a_{11}} a_{1j}, \quad i, j = 2, 3, \cdots, n \tag{1}$$

由于 A 是对称矩阵且满足 $a_{11} \neq 0$，所以有

$$a_{ij} = a_{ji}, \quad i, j = 1, 2, 3, \cdots, n \tag{2}$$

所以

$$a_{ij}^{(1)} = a_{ij} - \frac{a_{i1}}{a_{11}} a_{1j} = a_{ji} - \frac{a_{1i}}{a_{11}} a_{j1} = a_{ji} - \frac{a_{j1}}{a_{11}} a_{1i} = a_{ji}^{(1)}, \quad i, j = 2, 3, \cdots, n \tag{3}$$

从而 $A^{(1)}$ 是对称的。

(b) 计算一个正定 (positive definite) 矩阵 LU 分解的算法如下：

```
%% 正定矩阵(Positive Definite Matrix)LU分解算法
function [L, U] = LU_PDM(A)
    [~, n] = size(A);
    L = zeros(n, n);
    U = zeros(n, n);
    for i = 1:n
        for j = i + 1:n
            for k = j:n
                A(j, k) = A(j,k)-A(i,k)*A(j,i)/A(i,i);
                A(k, j) = A(j,k);
            end
        end
        for k = i:n
            U(i, k) = A(i, k);
            L(k, i) = A(i, k) / U(i, i);
        end
    end
end
```

(c) 使用 Cholesky 分解解方程组 $Ax = b$ 的 MATLAB 程序显示如下：

```
clear,clc,clf
A = [4,-2,4,2; -2,10,-2,-7; 4,-2,8,4; 2,-7,4,7];
b = [8; 2; 16; 6];
x = deEquations(A,b)
%% 运行的输出结果
% x =
%
%      1
%      2
%      1
%      2

%% 用Cholesky分解解方程组Ax=b
function [X]=deEquations(A,b)
N=length(A);
L=cholesky(A);
Lt=L';
X=zeros(N, 1);
Y=zeros(N, 1);
for j=1:N
    Y(j)=(b(j)-L(j,1:j-1)*Y(1:j-1))/L(j,j);
end
for k=N:-1:1
    X(k)=(Y(k)-Lt(k,k+1:N)*X(k+1:N))/Lt(k,k);
end
end

function [L]=cholesky(A)
N=length(A);
for i=1:N
    A(i,i)=sqrt(A(i,i)-A(i,1:i-1)*A(i,1:i-1)');
    if A(i,i)==0
        ME=MException('Zero Element', 'A(%d,%d) = 0',i,i);
        throw(ME);
```

```
    end
    for j=i+1:N
        A(j,i)=(A(j,i)-A(j,1:i-1)*A(i,1:i-1)')/A(i,i);
    end
end
L = tril(A); %取下三角部分
end
```

根据上述程序在命令行输出的结果（以注释形式写在了上面的代码中），原题所求的解为：

$$x = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

第二题 解：

(a) 证明：

Richardson 迭代方法的迭代关系式为：

$$x^{(k+1)} = \omega I(\frac{1}{\omega}I - A)x^{(k)} + \omega Ib = (I - \omega A)x^{(k)} + \omega b \tag{4}$$

令

$$G_\omega = I - \omega A \tag{5}$$

则

$$x^{(k+1)} = G_\omega x^{(k)} + \omega b \tag{6}$$

根据课本第五章开头处对迭代法收敛性的讨论可知，上述 Richardson 迭代方法收敛的充要条件为谱半径 $\rho(G_\omega) < 1$，又 A 是正定矩阵，所以它的特征值均为正数，由已知，G_ω 的特征值为 $1 - \omega\lambda_i$，其中 $0 < \lambda_1 \leq \lambda_i \leq \lambda_n$，则

$$\rho(G_\omega) = max|1-\omega\lambda_i| < 1 \tag{7}$$

则对任意 λ_i，需要满足

$$0 < \omega\lambda_i < 2 \tag{8}$$

即

$$\omega < 2/\lambda_n \tag{9}$$

(b) 由 **(a)** 得，

$$\rho(G_\omega) = \max|1-\omega\lambda_i| = \max(1-\omega\lambda_1, \omega\lambda_n - 1) \tag{10}$$

应该使得收敛速度尽量快，所以 $\rho(G_\omega)$ 应该尽量小，即取

$$\rho(G_\omega) = \min_\omega \max(1-\omega\lambda_1, \omega\lambda_n - 1) \tag{11}$$

所以 ω 的最佳值为

$$\omega_b = \arg\min_\omega \max(1-\omega\lambda_1, \omega\lambda_n - 1) = \frac{2}{\lambda_1 + \lambda_n} \tag{12}$$

且

$$\rho(G_\omega) = \begin{cases} 1-\omega\lambda_1 & \omega \le \omega_b \\ \dfrac{\lambda_n - \lambda_1}{\lambda_n + \lambda_1} & \omega = \omega_b \\ \omega\lambda_n - 1 & \omega \ge \omega_b \end{cases} \tag{13}$$

(c) 使用 Richardson 迭代方法解 $Ax = b$ 的 MATLAB 程序显示如下：

```
clear, clc, clf
%% 构造A和b
D = orth(rand(5, 5));
B = diag([1, 2, 3, 4, 5]);
A = D \ B * D;
b = rand(5, 1);
xexact = A \ b; % x精确解

%% 使用多个omega迭代求解
lambda1 = 1;
lambdan = 5;
omegab=2/(lambda1+lambdan);
eponch=1001;
omegalist = linspace(0.001, 0.399, eponch);
count=zeros(eponch,1)';
for i = 1:eponch
    count(i)=Richardson(A,b,xexact,omegalist(i));
end

%% 输出结果
```

```matlab
[mink,idx]=min(count);
omegalist(idx);
fp=fopen('p2c_out.txt','w');
fprintf (fp,'bestomega = %f\tk=%d\n',omegalist(idx),mink);
fprintf (fp,'omegab = %f\tk=%d\n',omegab,Richardson(A,b,xexact,omegab));
semilogy(omegalist, count, 'k.-');
xlabel('\omega');
ylabel('迭代次数');

%% 返回Richardson迭代方法的迭代次数
function [k]=Richardson(A,b,xexact,omega)
    G = eye(5) - omega * A;
    x = zeros(5, 1);
    k = 0;
    while norm(x - xexact) > 1e-13
        x = G * x + omega * b;
        k = k + 1;
    end
end
```

上述程序某一次执行输出的结果为：

```
bestomega = 0.333330	k=70
omegab = 0.333333	k=70
```

同时输出的收敛迭代次数随 ω 变化的 semilogy 图为：

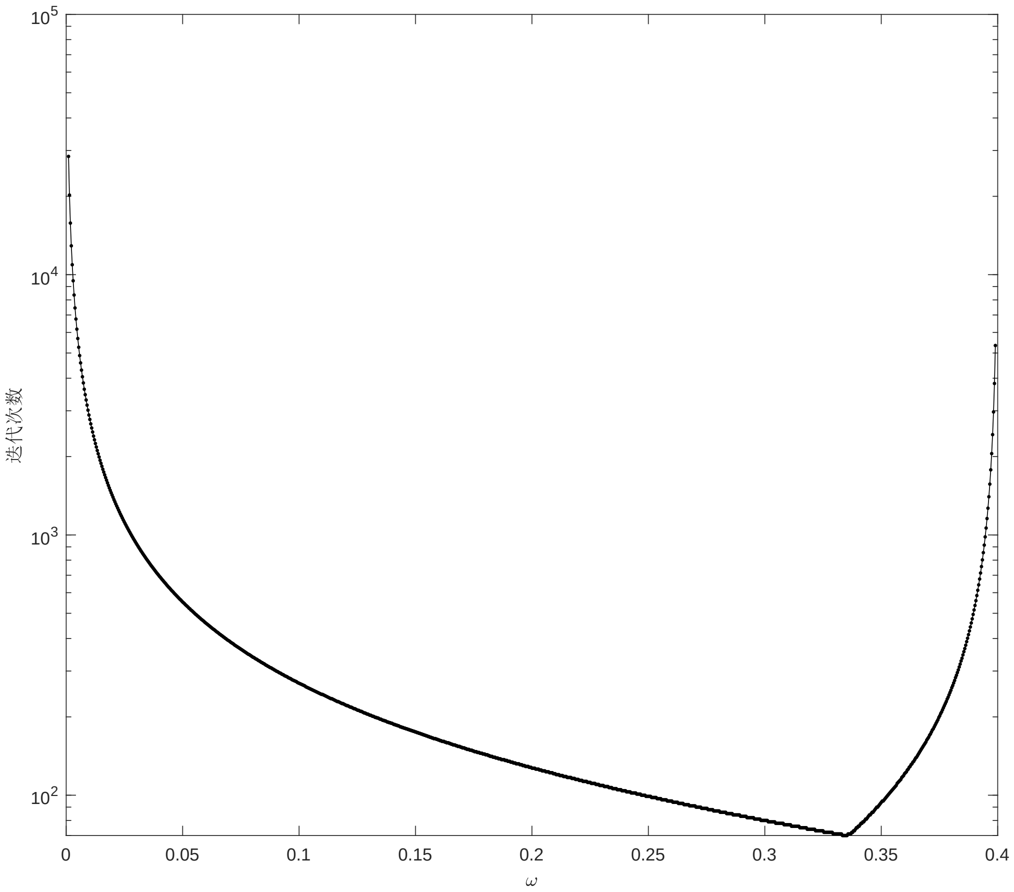

图 1: 寻找 Richardson 迭代方法的最佳 ω

这一结果验证了最佳 ω 是 ω_b，它使得收敛速度最快。

第三题 解：

(a) $I(f)=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 关于积分节点 $\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$ 的 Gauß 积分的数值积分公式为

$$I_n(f)=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i f(x_i) \tag{14}$$

$n=6$ 时，代数精度不超过 $2n-1=11$，所以依次取线性不相关的 $f(x)=1,x,x^2,\cdots,x^{11}$，即 $f(x)=x^k,\quad k=0,1,\cdots,11$，根据

$$I_n(f)=I(f) \tag{15}$$

取 $a=-1,b=1$ 得

$$\sum_{i=1}^{n}\alpha_{ki}x_i^k=\int_{-1}^{1}x^k\mathrm{d}x=\frac{1-(-1)^{k+1}}{k+1}\quad,\quad k=0,1,\cdots,11 \tag{16}$$

(b) 截断。

(c) 由 (a)

(d) 一阶