2022/04/02 19:59 index.html

数学講座第一回練習問題

1:因数分解の演習

(1),(2),(3)は空欄を埋めましょう。

$$(1): x^2 + 2x + 1 = (x+1)^2$$

$$(2): 2x^2 - 4x + 2 = 2(x-1)^2$$

$$(3): x^2 + 4x + 3 = (x+3)(x+1)$$

$$(4): -2x^2 + 4x - 2 = -2(x-1)^2$$

$$(5):3x^2+4x+1=(3x+1)(x+1)$$

$$(6): x^2 + 6x - 7 = (x+7)(x-1)$$

2: 平方完成の演習

(1),(2),(3)は空欄を埋めましょう。

$$(1): x^2 - 2x + 1 = (x - 1)^2$$

$$(2)$$
: $x^2 - 2x - 3 = (x - 1)^2 - 4$

$$(3)$$
: $x^2 + 6x + 7 = (x+3)^2 - 2$

$$(4): x^2 + 4x - 4 = (x+2)^2 - 8$$

(5):
$$-x^2 + 6x + 7 = -(x-3)^2 + 16$$

$$(6):3x^2+6x-2=3(x+1)^2-5$$

③:2次方程式の解を求める問題

因数分解と平方完成、同値記号⇔を使って解いてみましょう。 (1),(2)は空欄を埋めましょう。

$$(1)$$
: $x^2 + 2x - 3 = 0 \Leftrightarrow (x+3)(x-1) = 0$ $\Leftrightarrow x = -3, 1.$ よって解は $x = -3, 1.$

$$(2)$$
: $x^2 + 6x - 7 = 0 \Leftrightarrow (x+7)(x-1) = 0$ $\Leftrightarrow x = -7, 1.$ よって解は $x = -7, 1.$

$$(3)$$
: $x^2 + 2x - 2 = 0$
 $\Leftrightarrow (x+1)^2 - 3 = 0$
 $\Leftrightarrow (x+1)^2 = 3$
 $\Leftrightarrow x+1 = \pm \sqrt{3}$
 $\Leftrightarrow x = -1 \pm \sqrt{3}$.
よって解は $x = -1 \pm \sqrt{3}$.

$$(4): x^2 + 6x + 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x+3)^2 - 5 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x+3)^2 = 5$$

$$\Leftrightarrow x = -3 \pm \sqrt{5}$$
よって解は $x = -3 \pm \sqrt{5}$.

$$(5)$$
: $2x^2 + 5x + 2 = 0$
 $\Leftrightarrow (2x + 1)(x + 2) = 0$
 $\Leftrightarrow x = -\frac{1}{2}, -2.$
よって解は $x = -\frac{1}{2}, -2.$

$$(6)$$
: $x^2 + 4x + 5 = 0$ $\Leftrightarrow (x+2)^2 + 1 = 0$ $\Leftrightarrow (x+2)^2 = -1$. 任意の実数 x に関して $(x+2)^2 \geq 0$ である。よって解なし。

4:解の公式、判別式の利用

解の公式を使って解いてみましょう。 その際判別式を書くのを忘れないようにしましょう。

$$(1)$$
: $x^2+2x+1=0$ $x^2+2x+1=0$ の判別式 $D=2^2-4\times 1\times 1=0$ のため、この方程式の実数解は1つ存在する(重解)。

よって2次方程式の解の公式より
$$x^2+2x+1=0\Leftrightarrow x=rac{-2\pm\sqrt{2^2-4 imes1 imes1}}{2 imes1}=-1.$$
よって解は $x=-1$.

$$(2)$$
: $x^2+6x+7=0$ $x^2+6x+7=0$ の判別式 $D=6^2-4\times 1\times 7=8$ のため、 $D>0$ であり、この方程式の異なる実数解は2つ存在する。

よって2次方程式の解の公式より
$$x^2+2x+1=0\Leftrightarrow x=rac{-6\pm\sqrt{6^2-4 imes1 imes7}}{2 imes1}=-3\pm\sqrt{2}.$$
 (復号同順) よって解は $x=-3\pm\sqrt{2}.$

$$(3)$$
: $2x^2+5x+2=0$ $2x^2+5x+2=0$ の判別式 $D=5^2-4\times2\times2=9$ のため、 $D>0$ であり、この方程式の異なる実数解は2つ存在する。

よって2次方程式の解の公式より
$$2x^2+5x+2=0\Leftrightarrow x=rac{-5\pm\sqrt{5^2-4 imes2 imes2}}{2 imes2}$$
 $=-rac{1}{2},\,-1.$ よって解は $x=-rac{1}{2},\,-1.$

$$(4)$$
: $x^2+5x+5=0$ $x^2+5x+5=0$ の判別式 $D=5^2-4\times2\times5=5$ のため、 $D>0$ であり、この方程式の異なる実数解は2つ存在する。

よって2次方程式の解の公式より
$$x^2+5x+5=0\Leftrightarrow x=rac{-5\pm\sqrt{5^2-4 imes1 imes5}}{2 imes1}$$
 $=rac{-5\pm\sqrt{5}}{2}.$ (復号同順) よって解は $x=rac{-5\pm\sqrt{5}}{2}.$

$$(5)$$
: $-2x^2-3x+4=0$ $-2x^2-3x+4=0$ の判別式 $D=\left(-3\right)^2-4 imes\left(-2
ight) imes4=41$ のため、 $D>0$ であり、この方程式の異なる実数解は2つ存在する。 よって2次方程式の解の公式より

$$-2x^2-3x+4=0\Leftrightarrow x=rac{-(-3)\pm\sqrt{(-3)^2-4 imes(-2) imes4}}{2 imes(-2)}$$
 $=rac{-3\mp\sqrt{41}}{4}.$ (復号同順) よって解は $x=rac{-3\pm\sqrt{41}}{4}.$

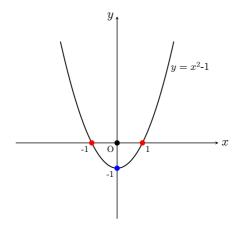
2022/04/02 19:59 index.html

$$(6)$$
: $x^2+x+2=0$ $x^2+x+2=0$ の判別式 $D=1^2-4\times 1\times 2=-7$ のため、 $D<0$ であり、よってこの方程式の実数解は存在しない。

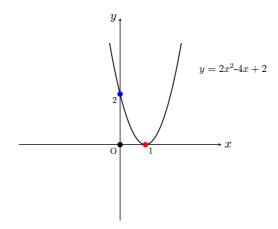
5:関数のグラフを書く

関数のグラフを書いてみましょう。

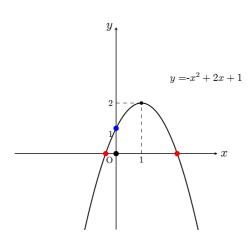
$$(1)$$
: $y = x^2 - 1$



$$(2)\!:\!y=2x^2-4x+2$$



$$(3): y = -x^2 + 2x + 1$$



6:解と係数の関係を扱う

(1): 2次方程式 $x^2+ax+b=0$ の2解 lpha,eta に関して、lpha+eta=2,lphaeta=-3 でした。 a,b を求めましょう。

解と係数の関係より、 $x^2+ax+b=x^2-(\alpha+\beta)x+lpha\beta=x^2-2x-3.$ よって a=-2,b=-3.

- (2): 2次方程式 $x^2-2x-4=0$ の2解を lpha,eta とするとき、次の式の値を求めよ:
- (i): $(\alpha+1)(\beta+1)$ 解と係数の関係より、 $\alpha+\beta=2,$ $\alpha\beta=-4$. よって $(\alpha+1)(\beta+1)=\alpha\beta+(\alpha+\beta)+1=-4+2+1=-1$.

$$(ii)$$
: $lpha^2+eta^2$
解と係数の関係より、 $lpha+eta=2, lphaeta=-4.$
よって $lpha^2+eta^2=(lpha+eta)^2-2lphaeta=2^2-2 imes(-4)=12.$

$$(iii)$$
: $lpha^3+eta^3$
解と係数の関係より、 $lpha+eta=2, lphaeta=-4.$
よって

$$lpha^3+eta^3=ig(lpha^2-lphaeta+eta^2ig)(lpha+eta)=\Big(ig(lpha+etaig)^2-3lphaeta\Big)(lpha+eta)=\Big(2^2-3 imes(-4)ig) imes2=3$$

$$(iv)$$
: $\dfrac{eta}{lpha-1}+\dfrac{lpha}{eta-1}$ 解と係数の関係より、 $lpha+eta=2, lphaeta=-4.$

よって (ii) より

$$\frac{\beta}{\alpha - 1} + \frac{\alpha}{\beta - 1} = \frac{\beta(\beta - 1) + \alpha(\alpha - 1)}{(\alpha - 1)(\beta - 1)} = \frac{\left(\alpha^2 + \beta^2\right) - (\alpha + \beta)}{\alpha\beta - (\alpha + \beta) + 1} = \frac{12 - 2}{(-4) - 2 + 1} = -2.$$