数学講座第1回
2次関数+おまけ

目次

Section0:前提知識

$\mathbb{R}$:実数、$\mathbb{Q}$:有理数、$\mathbb{Z}$:整数、$\mathbb{N}$:自然数。

$\mathbb{R} \supset \mathbb{Q} \supset \mathbb{Z} \supset \mathbb{N}$。

（ただし個人的に私はほとんど $\mathbb{N}$ は使いません。）

係数: 例えば $ax^2 + bx + c = 0$ の a, b, c を指します。

2次の係数は a であり、0次の係数は c ですが、0次の係数は定数項と呼ぶことが多いです。

Section1:2次関数って？

はい。会長です。今回から数学講座をやっていきます。（次回は未定です。）

さて、2次関数の範囲をさっそく始めます。

2次関数って何かというと、$f(x) = ax^2 + bx + c$ みたいなやつです。
もっと簡単に言うと、$f(x) = x^2$ とかも2次関数です。
$a = 1, b = c = 0$ って感じです。

　基本的に a も b も c も実数範囲で、 $a \neq 0$ です。
複素数範囲とかのこともあるけど一旦割愛します。（人によっては未履修なので）

Section2:「2次式を解く」とは？

　簡単に言うと、$f(x) = 0$（x は2次式）を満たす x を求めることです。

　たいがいの場合以下で説明する因数分解か平方完成、2次方程式の解の公式を使って求めることになります。

$$a(x-b)(x-c) = 0 \Leftrightarrow x = b, c \text{（}a, b, c \in \mathbb{R}, a \neq 0\text{）}$$

を使っていく感じです。

Section3:因数分解と平方完成、2次方程式の解の公式

　まずは因数分解です。

　因数分解は例えば $x^2 - 3x + 2 = 0$ を $(x-1)(x-2) = 0$ とするように、高次式を一次式の積で表すものです。

　これ単体ではまだ何がうれしいのか分からないと思います。
しかしこれは2次式を解くときなどに重要になります。

　次に平方完成です。

　これは

$$\begin{aligned} ax^2 + bx + c &= a(x^2 + \frac{b}{a}x) + c \text{（}a \neq 0\text{）} \\ &= a(x + \frac{b}{2a})^2 - a(\frac{b}{2a})^2 + c \\ &= a(x + \frac{b}{2a})^2 - a\frac{b^2 - 4ac}{(2a)^2} \end{aligned}$$

という一連の変形のことです。平方（何々の2乗）-何々といった形にします。これだけでは理解しにくいと思うので、具体例を2つ：

$$
\begin{aligned}
1: x^2-3x+2 &= (x^2-3x)+2\\
&= (x-\frac{3}{2})^2-(\frac{3}{2})^2+2\\
&= (x-\frac{3}{2})^2-\frac{3^2-4\times1\times2}{2^2} = (x-\frac{3}{2})^2-\frac{1}{2^2}\ldots①\\
2: 2x^2-3x+1 &= 2(x^2-\frac{3}{2})+1\\
&= 2(x-\frac{3}{4})^2-2(\frac{3}{4})^2+1\\
&= 2(x-\frac{3}{4})^2-2(\frac{3^2-4\times2\times1}{4^2}) = 2(x-\frac{3}{4})^2-2(\frac{1}{4^2})\ldots②
\end{aligned}
$$

これは簡単な因数分解ができない2次式を解くとき（$x^2-6x+7=0$ とか）に重宝します。

さらに2乗-2乗の因数分解によって
①は $(x-1)(x-2)$ 、②は $2(x-1)\left(x-\frac{1}{2}\right)$ と変形できます。

慣れてくると
$x^2-6x+7=(x-3)^2-2=0 \Leftrightarrow x=3\pm\sqrt{2}$
ぐらいで終わらせることもあります（2次の係数だけ気をつけよう）

　最後に2次方程式の解の公式について。

　解の公式は上の平方完成をそっくりそのまま利用したものです。

具体的には $ax^2+bx+c=0 \Leftrightarrow x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ です。
（上で挙げた通り $a(x-b)(x-c)=0 \Leftrightarrow x=b,c$ （ $a,b,c\in\mathbb{R}, a\neq0$ ） なので）

ただし一つだけ注意点があり、$b^2-4ac\geq0$ である場合にしか解の公式は使えません。

理由は簡単で、そのときは $\sqrt{b^2-4ac}$ が実数範囲にないからです。
逆に複素数を扱うときにはこれを意識する必要はありません。（b^2-4ac の符号を気にしなくてもよくなるため）

このb^2-4acは、よく判別式 $D=b^2-4ac$ などと書かれます。
判別式が正か0か負かによって解の個数が変わります。（正:2つ、0:1つ、負:なし）

　間違って覚えてケアレスミスの温床になることもあるのでそれだけ注意しましょう。
解の公式を使うよりも平方完成をした方が早いこともあります。

Section4:関数のグラフ

Chart 1

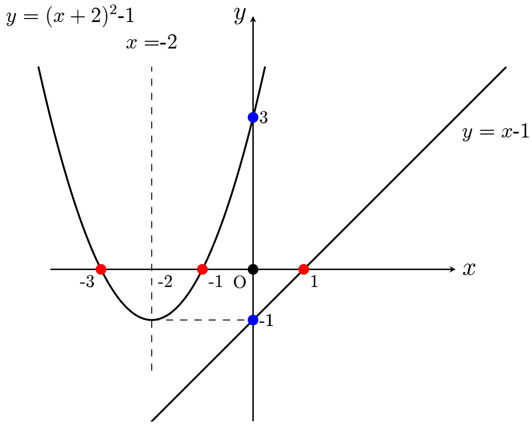
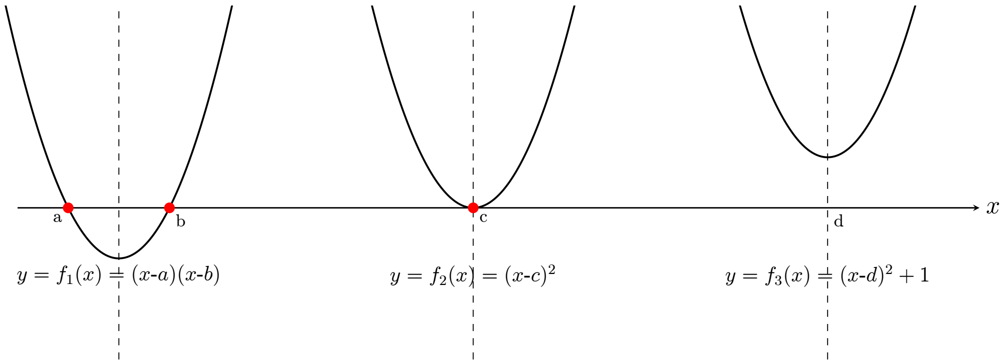


Chart 2



　関数のグラフを書くこともある意味方程式の解を求めることに繋がります。

　例えばChart 2のように、
x 軸と $y=f_1(x)$ は図の2点で重なるので $f_1(x)=(x-a)(x-b)$ のように因数分解でき、
x 軸と $y=f_2(x)$ は図のある1点でのみ重なるので $f_2(x)=(x-c)^2$ のように因数分解でき、
x 軸と $y=f_3(x)$ は重ならないため $f_3(x)$ は実数範囲での因数分解は不可能です。

　なので
$f_1(x)=0 \Leftrightarrow x=a,b$ であり、
$f_2(x)=0 \Leftrightarrow x=c$ であり、（「重解を持つ」と言います）
$f_3(x)=0$ は実数範囲で解を持ちません。

　また
$f_1(x)=0$ の判別式 $D_1>0$であり、
$f_2(x)=0$ の判別式 $D_2=0$であり、
$f_3(x)=0$ の判別式 $D_3<0$です。

　x 切片から得られる情報はこのように豊富ですが、y 切片から得られることはそう多くなく、ある x の関数 $f(x)$ に関しての $f(0)$ の値が分かる程度です。

Section5:解と係数の関係

2次式の解から逆説的に元の2次式を導き出すことができます。

a, b を解に持つ2次式 $f(x)$ は $f(x) = k(x-a)(x-b) = k\left(x^2 - (a+b)x + ab\right)$（$k$ は非ゼロの任意の実数）と表せ、
よって $a+b, ab$ の値のみから例えば $a^2 + b^2\left(= (a+b)^2 - 2ab\right)$ の値などを割り出せます。

多くの問題において $ax^2 + bx + c = 0$ と2解 α, β の存在のみが前提として存在し、
このとき $\alpha + \beta = -\dfrac{b}{a}$ （-を忘れずに！）かつ $\alpha\beta = \dfrac{c}{a}$ であることが解と係数の関係より分かります。

おまけ:えっ！？複素数係数のn次方程式の複素数解がn個って本当ですか！？

複素数集合：$i^2 = -1$ である虚数単位 i を定義したときの $a + bi$ $(a, b$ は任意の実数)全体の集合。

ざっくりと説明すると、「代数学の基本定理」（「複素数係数のn次方程式は必ず複素数範囲の根（解）を持つ」という主張）から、
複素数係数のn次関数（n>=1） $f_n(x)$ に関して $f_n(\alpha_1) = 0$ となる α_1 が存在し、よって
$f_n(x) = f_{n-1}(x)(x - \alpha_1)$ となる(n-1)次式 $f_{n-1}(x)$ が存在する。よって再帰的にこの手法を用いることで
$f_n(x) = (x-\alpha_1)(x-\alpha_2)...(x-\alpha_n)$と因数分解でき、よって
$f_n(x) = 0$ の複素数解は重解を含めてn個あると分かります。

また、複素数係数のn次方程式の複素数解は重解を含めてn個あることから、
実数係数のn次方程式の複素数解は重解を含めてn個あると分かり（∵実数集合は複素数集合に含まれる）、
よって実数係数のn次方程式の実数解は高々n個であると分かります。（∵実数集合に含まれない複素数が存在する）

みんな一度は抱くに違いない「n次方程式の解は本当にn個なのか？」という疑問はこのように説明できます。

（実のところ、「代数学の基本定理」の証明をここではしていないので、それも気になるというそこの君は「代数学の基本定理」と検索してみよう。東大の辻雄（つじたけし）さんの証明とかが分かりやすいぞ！）