数学講座第一回練習問題

1：因数分解の演習

(1),(2),(3)は空欄を埋めましょう。

$(1): x^2+2x+1=(x+1)^2$

$(2): 2x^2-4x+2=2(x-1)^2$

$(3): x^2+4x+3=(x+3)(x+1)$

$(4): -2x^2+4x-2=-2(x-1)^2$

$(5): 3x^2+4x+1=(3x+1)(x+1)$

$(6): x^2+6x-7=(x+7)(x-1)$

2：平方完成の演習

(1),(2),(3)は空欄を埋めましょう。

$(1): x^2-2x+1=(x-1)^2$

$(2): x^2-2x-3=(x-1)^2-4$

$(3): x^2+6x+7=(x+3)^2-2$

$(4): x^2+4x-4=(x+2)^2-8$

$(5): -x^2+6x+7=-(x-3)^2+16$

$(6): 3x^2+6x-2=3(x+1)^2-5$

3：2次方程式の解を求める問題

因数分解と平方完成、同値記号⇔を使って解いてみましょう。
(1),(2)は空欄を埋めましょう。

$(1): x^2 + 2x - 3 = 0 \Leftrightarrow (x+3)(x-1) = 0$
$\Leftrightarrow x = -3, 1.$
よって解は $x = -3, 1.$

$(2): x^2 + 6x - 7 = 0 \Leftrightarrow (x+7)(x-1) = 0$
$\Leftrightarrow x = -7, 1.$
よって解は $x = -7, 1.$

$(3): x^2 + 2x - 2 = 0$
$\Leftrightarrow (x+1)^2 - 3 = 0$
$\Leftrightarrow (x+1)^2 = 3$
$\Leftrightarrow x + 1 = \pm\sqrt{3}$
$\Leftrightarrow x = -1 \pm \sqrt{3}.$
よって解は$x = -1 \pm \sqrt{3}.$

$(4): x^2 + 6x + 4 = 0$
$\Leftrightarrow (x+3)^2 - 5 = 0$
$\Leftrightarrow (x+3)^2 = 5$
$\Leftrightarrow x = -3 \pm \sqrt{5}$
よって解は$x = -3 \pm \sqrt{5}.$

$(5): 2x^2 + 5x + 2 = 0$
$\Leftrightarrow (2x+1)(x+2) = 0$
$\Leftrightarrow x = -\frac{1}{2}, -2.$
よって解は$x = -\frac{1}{2}, -2.$

$(6): x^2 + 4x + 5 = 0$
$\Leftrightarrow (x+2)^2 + 1 = 0$
$\Leftrightarrow (x+2)^2 = -1.$
任意の実数 x に関して $(x+2)^2 \geq 0$ である。
よって解なし。

4：解の公式、判別式の利用

解の公式を使って解いてみましょう。
その際判別式を書くのを忘れないようにしましょう。

$(1): x^2+2x+1=0$

$x^2+2x+1=0$ の判別式 $D=2^2-4\times1\times1=0$ のため、この方程式の実数解は1つ存在する（重解）。

よって2次方程式の解の公式より$x^2+2x+1=0 \Leftrightarrow x=\dfrac{-2\pm\sqrt{2^2-4\times1\times1}}{2\times1}=-1.$

よって解は $x=-1.$

$(2): x^2+6x+7=0$

$x^2+6x+7=0$ の判別式 $D=6^2-4\times1\times7=8$ のため、$D>0$ であり、この方程式の異なる実数解は2つ存在する。

よって2次方程式の解の公式より$x^2+2x+1=0 \Leftrightarrow x=\dfrac{-6\pm\sqrt{6^2-4\times1\times7}}{2\times1}$

$=-3\pm\sqrt{2}.$ （復号同順）

よって解は $x=-3\pm\sqrt{2}.$

$(3): 2x^2+5x+2=0$

$2x^2+5x+2=0$ の判別式 $D=5^2-4\times2\times2=9$ のため、$D>0$ であり、この方程式の異なる実数解は2つ存在する。

よって2次方程式の解の公式より$2x^2+5x+2=0 \Leftrightarrow x=\dfrac{-5\pm\sqrt{5^2-4\times2\times2}}{2\times2}$

$=-\dfrac{1}{2}, -1.$

よって解は $x=-\dfrac{1}{2}, -1.$

$(4): x^2+5x+5=0$

$x^2+5x+5=0$ の判別式 $D=5^2-4\times2\times5=5$ のため、$D>0$ であり、この方程式の異なる実数解は2つ存在する。

よって2次方程式の解の公式より$x^2+5x+5=0 \Leftrightarrow x=\dfrac{-5\pm\sqrt{5^2-4\times1\times5}}{2\times1}$

$=\dfrac{-5\pm\sqrt{5}}{2}.$ （復号同順）

よって解は $x=\dfrac{-5\pm\sqrt{5}}{2}.$

$(5): -2x^2-3x+4=0$

$-2x^2-3x+4=0$ の判別式 $D=(-3)^2-4\times(-2)\times4=41$ のため、$D>0$ であり、この方程式の異なる実数解は2つ存在する。

よって2次方程式の解の公式より

$-2x^2-3x+4=0 \Leftrightarrow x=\dfrac{-(-3)\pm\sqrt{(-3)^2-4\times(-2)\times4}}{2\times(-2)}$

$=\dfrac{-3\mp\sqrt{41}}{4}.$ （復号同順）

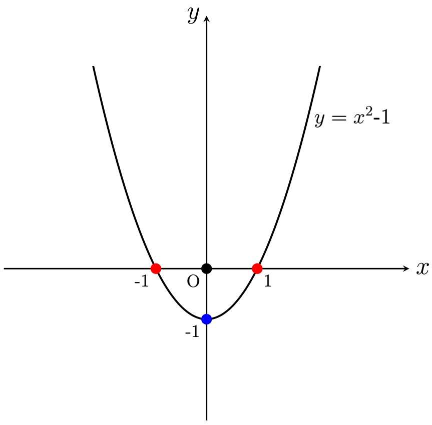
よって解は $x=\dfrac{-3\pm\sqrt{41}}{4}.$

$(6): x^2 + x + 2 = 0$
$x^2 + x + 2 = 0$ の判別式 $D = 1^2 - 4 \times 1 \times 2 = -7$ のため、$D < 0$ であり、よってこの方程式の実数解は存在しない。

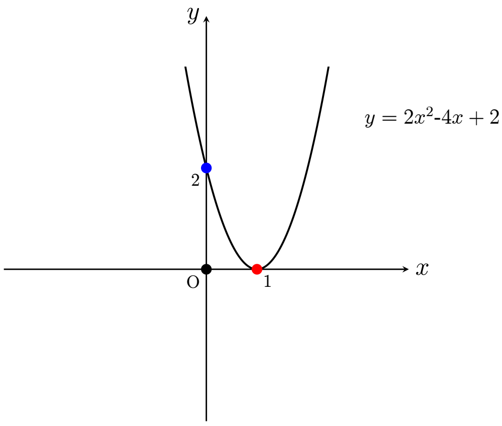
5 ：関数のグラフを書く

関数のグラフを書いてみましょう。

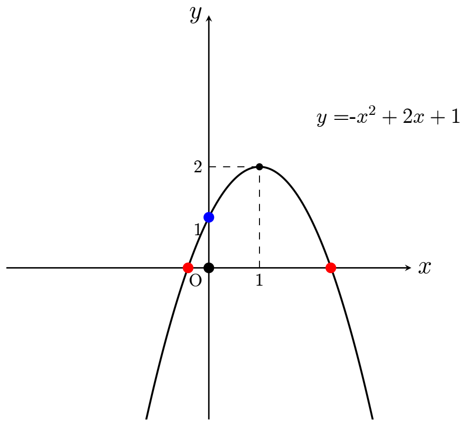
$(1): y = x^2 - 1$



$(2): y = 2x^2 - 4x + 2$



$(3): y = -x^2 + 2x + 1$



6：解と係数の関係を扱う

(1): 2次方程式 $x^2 + ax + b = 0$ の2解 α, β に関して、$\alpha + \beta = 2, \alpha\beta = -3$ でした。
a, b を求めましょう。
解と係数の関係より、$x^2 + ax + b = x^2 - (\alpha + \beta)x + \alpha\beta = x^2 - 2x - 3.$
よって $a = -2, b = -3.$

(2): 2次方程式 $x^2 - 2x - 4 = 0$ の2解を α, β とするとき、次の式の値を求めよ：

$(i): (\alpha + 1)(\beta + 1)$
解と係数の関係より、$\alpha + \beta = 2, \alpha\beta = -4.$
よって $(\alpha + 1)(\beta + 1) = \alpha\beta + (\alpha + \beta) + 1 = -4 + 2 + 1 = -1.$

$(ii): \alpha^2 + \beta^2$
解と係数の関係より、$\alpha + \beta = 2, \alpha\beta = -4.$
よって $\alpha^2 + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta = 2^2 - 2 \times (-4) = 12.$

$(iii): \alpha^3 + \beta^3$
解と係数の関係より、$\alpha + \beta = 2, \alpha\beta = -4.$
よって
$\alpha^3 + \beta^3 = \left(\alpha^2 - \alpha\beta + \beta^2\right)(\alpha + \beta) = \left((\alpha + \beta)^2 - 3\alpha\beta\right)(\alpha + \beta) = \left(2^2 - 3 \times (-4)\right) \times 2 = 3$

$(iv): \dfrac{\beta}{\alpha - 1} + \dfrac{\alpha}{\beta - 1}$
解と係数の関係より、$\alpha + \beta = 2, \alpha\beta = -4.$
よって (ii) より

$$\frac{\beta}{\alpha - 1} + \frac{\alpha}{\beta - 1} = \frac{\beta(\beta - 1) + \alpha(\alpha - 1)}{(\alpha - 1)(\beta - 1)} = \frac{(\alpha^2 + \beta^2) - (\alpha + \beta)}{\alpha\beta - (\alpha + \beta) + 1} = \frac{12 - 2}{(-4) - 2 + 1} = -2.$$