Замена переменных в одномерном интеграле

Рассмотрим интеграл от функции одной переменной в пределах от 0 до $+\infty$. Осуществим замену переменных, позволяющую интегрировать на интервале $[0,1]$:

$$\int\limits_0^\infty f(x)dx = \left[y = \frac{2}{\pi}\operatorname{arctg} x\right] = \frac{\pi}{2}\int\limits_0^1 \left[1+\operatorname{tg}^2\left(\frac{\pi}{2}y\right)\right] f\left(\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}y\right)\right)dy$$

Введем дополнительное обозначение, чтобы упростить полученное выражение:

$$x = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}y\right)$$

$$I = \frac{\pi}{2}\int\limits_0^1 \left[1+x^2\right] f(x)dy$$

Замена переменных в двумерном интеграле

Рассмотрим двумерный интеграл, в котором интегрирование по одной переменной происходит вдоль луча $[0,\infty)$, а по второй – по отрезку $[0,\pi]$ (именно такого типа интеграл фигурирует в выражении для ВВК для системы Ar-CO_2).

$$\int\limits_0^\infty dx \int\limits_0^\pi f(x,y)dy$$

Для того, чтобы область интегрирования свести к единичному квадрату, можно осуществить следующую замену переменных:

$$X = \frac{2}{\pi}\operatorname{arctg} x \qquad x = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}X\right)$$
$$Y = \frac{1}{\pi}y \qquad y = \pi Y$$

Учитывая производные, вылазящие при замене переменных, приходим к следующему выражению:

$$\int\limits_0^\infty dx \int\limits_0^\pi f(x,y)dy = \frac{\pi^2}{2}\int\limits_0^1 dX \int\limits_0^1 f\left(\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}X\right), \pi Y\right)\left(1+\operatorname{tg}^2\left(\frac{\pi}{2}X\right)\right)dY$$

С вычислительной точки зрения проще пересчитывать старые переменные (x,y) через новые (X,Y), чтобы рассчитать значение подынтегрального выражения.

$$\frac{\pi^2}{2}\int\limits_0^1 dX \int\limits_0^1 f\left(\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}X\right), \pi Y\right)\left(1+\operatorname{tg}^2\left(\frac{\pi}{2}X\right)\right)dY = \frac{\pi^2}{2}\int\limits_0^1 dX \int\limits_0^1 f\left(x,y\right)(1+x^2)dY$$