

Matte 3 - Øving 13

Arve Nygård

30. april 2012

1 Oppgave 1

1.1 Deloppgave 1

$$w = -8 + 8\sqrt{3}i$$

$$r = \sqrt{(-8)^2 + (8\sqrt{3})^2} = \sqrt{4 * 64} = 16$$

$$\phi = \arctan\left(\frac{8\sqrt{3}}{-8}\right) = \arctan(-\sqrt{3}) = \frac{-\pi}{3}$$

Vi er i 2. kvadrant, så vi har at $\theta = \frac{-\pi}{3} + \pi = \frac{2\pi}{3}$

$$\underline{\underline{w = 16(\cos(\frac{2\pi}{3}) - i \sin(\frac{2\pi}{3}))}}}$$

1.2 Deloppgave 2

Vi skal finne fjerderøttene. Det er 4 av disse, og de ligger 90 grader på hverandre.

1. rot:

$$\begin{aligned} w^{1/4} &= 16^{1/4} \left[\cos\left(\frac{1}{4} \frac{2\pi}{3}\right) + i \sin\left(\frac{1}{4} \frac{2\pi}{3}\right) \right] = 2 \left[\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) \right] \\ &= \underline{\underline{\sqrt{3} + i}} \end{aligned}$$

2. rot:

Radien er alltid den samme, vi legger på $\frac{\pi}{2}$.

$$\begin{aligned} 2 \left[\cos\left(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{2}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{2}\right) \right] &= 2 \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + 2i \sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) \\ &= \underline{\underline{-1 + \sqrt{3}i}} \end{aligned}$$

3.- og 4. rot finner vi ved inspeksjon: Enten av tegning eller tallene. Vi skal ha én rot i hver kvadrant.

$$3. \text{ rot: } \underline{\underline{-\sqrt{3} - i}}$$

$$4. \text{ rot: } \underline{\underline{1 - \sqrt{3}i}}$$

2 Oppgave 2

2.1 a)

$$y'' + 4y' + 5y = 0 \quad , \quad y(0) = 1, y'(0) = 2$$

$$\begin{aligned} \lambda^2 + 4\lambda + 5 &= 0 \\ \implies \lambda_1 &= -2 - i, \quad \lambda_2 = -2 + i \end{aligned}$$

Vi får imaginære tall, og dermed blir $y(x)$ på formen $C_1 e^{-2x} \cos(x) + C_2 e^{-2x} \sin(x)$.
Vi setter $x=0$ og løser for C_1 :

$$\begin{aligned} y(0) &= 1 = C_1 e^0 \cos 0 + C_2 e^0 \sin 0 \\ 1 &= C_1 \cdot 1 \cdot 1 + C_2 \cdot 1 \cdot 0 \\ \mathbf{C_1} &= \mathbf{1} \end{aligned}$$

Vi har nå at $y(x) = e^{-2x} \cos x + C_2 e^{-2x} \sin x$.
Deriver uttrykket, bruk initialverdi og løs for C_2 :

$$\begin{aligned} y'(x) &= C_2 \left[e^{-2x} \sin x \right]' + \left[e^{-2x} \cos x \right]' \\ &= C_2 \left[-2e^{-2x} \sin x + e^{-2x} \cos x \right] + \left[-2e^{-2x} \cos x - e^{-2x} \sin x \right] \\ &= C_2 e^{-2x} \left[-2 \sin x + \cos x \right] + e^{-2x} \left[-2 \cos x - \sin x \right] \end{aligned}$$

Vi setter så inn $x=0$:

$$\begin{aligned} y'(0) &= 2 = C_2 e^0 \left[-2 \sin 0 + \cos 0 \right] + e^0 \left[-2 \cos 0 - \sin 0 \right] \\ 2 &= C_2 \begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 \end{bmatrix} \\ 2 &= C_2 - 2 \\ \mathbf{C_2} &= \mathbf{4} \end{aligned}$$

Vi har nå hele løsningen på initialverdiproblemet:

$$y(x) = e^{-2x} \cos x + 4e^{-2x} \sin x = \underline{\underline{\mathbf{e^{2x}(\cos x + 4 \sin x)}}}$$

2.2 b)

Fra oppgave 2a har vi at $y_h = e^{2x}(\cos x + 4 \sin x)$.

Vi leter etter en partikulær løsning på formen $y_p = A \cos x + B \sin x + Cx + D$.

$$\begin{aligned}y_p &= A \cos x + B \sin x + Cx + D \\y'_p &= -A \sin x + B \cos x + C \\y''_p &= -A \cos x - B \sin x\end{aligned}$$

Vi setter opp stykket, og setter inn vår partikulærløsning, og løser deretter for A, B, C og D:

$$\begin{aligned}y'' + 4y' + 5y &= 4 \cos x + 5x \\(4A + 4B) \cos x + (4B - 4A) \sin x + Cx + d &= 4 \cos x + 5x\end{aligned}$$

Vi løser for A og B:

$$\begin{aligned}4A + 4B &= 4 \\4B - 4A &= 0 \\ \Rightarrow A &= \frac{1}{2}, B = \frac{1}{2}\end{aligned}$$

Vi løser så for C og D:

$$\begin{aligned}4C + 5Cx + 5D &= 5x \Rightarrow C = 1 \\4 + 5D &= 0 \Rightarrow D = -\frac{4}{5}\end{aligned}$$

Vi har nå en fullstendig partikulærløsning:

$$y_p = \frac{1}{2} \cos x + \frac{1}{2} \sin x = x - \frac{4}{5}$$

Den generelle løsningen blir da:

$$\begin{aligned}y_g &= y_h = y_p \\ \underline{\underline{\mathbf{y_g} = \mathbf{e^{-2x}} \left(\cos \mathbf{x} + 4 \sin \mathbf{x} \right) + \frac{1}{2} \left(\cos \mathbf{x} + \sin \mathbf{x} \right) + \mathbf{x} - \frac{4}{5}}}\end{aligned}$$

2.3 c)

Denne klarte jeg ikke :(

3 Oppgave 3

3.1 a)

Alternativ B

3.2 b)

Alternativ A

4 Oppgave 4

4.1 a)

$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & -1 \\ -2 & 3 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$	A	<p>Multiply row 2 by $\frac{2}{5}$:</p> $\begin{pmatrix} 2 & -3 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$	5	<p>Add row 2 to row 4:</p> $\begin{pmatrix} 2 & -3 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	9
<p>Swap row 1 with row 2:</p> $\begin{pmatrix} -2 & 3 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$	2	<p>Subtract row 1 from row 4:</p> $\begin{pmatrix} 2 & -3 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 2 & -2 \end{pmatrix}$	6	<p>Add 3 row 2 to row 1:</p> $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	10
<p>Add $\frac{1}{2}$ row 1 to row 2:</p> $\begin{pmatrix} -2 & 3 & 1 & -3 \\ 0 & \frac{5}{2} & \frac{5}{2} & -\frac{5}{2} \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$	3	<p>Divide row 4 by -2:</p> $\begin{pmatrix} 2 & -3 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$	7	<p>Divide row 1 by 2:</p> $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	E
<p>Divide row 1 by -1:</p> $\begin{pmatrix} 2 & -3 & -1 & 3 \\ 0 & \frac{5}{2} & \frac{5}{2} & -\frac{5}{2} \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$	4	<p>Subtract row 2 from row 3:</p> $\begin{pmatrix} 2 & -3 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$	8	<p>Computed by Wolfram Alpha</p>	

Basis for $ColA$: \vec{v}_1, \vec{v}_2

$$\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} \right\}$$

Basis for $RowA$:

$$\left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \right\}$$

4.1.1 b)

$Nul A$:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

$$x_1 = -x_3$$

$$x_2 = -x_3 + x_4$$

$$x_3, x_4 \text{ fri.}$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = x_3 \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + x_4 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow Nul A = \left\{ \begin{bmatrix} -x \\ y - x \\ x \\ y \end{bmatrix} \mid x, y \in \mathbb{R} \right\}$$

For at $A\vec{x} = \vec{b}$ skal ha en løsning, må \vec{b} være i $Col A$.

Siden b_1 og b_2 er gitt, kan vi finne hvilken kombinasjon av kollonnevektorer i A som \vec{b} består av. Vi fokuserer på rad 1 og 2; siden disse er gitt for \vec{b} .

Vi må finne a og b slik at $a + b = 1$, og $-2a + 3b = 0$

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ -2 & 3 & 0 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & \frac{3}{5} \\ 0 & 1 & \frac{2}{5} \end{array} \right]$$

Dermed har vi at $a = \frac{3}{5}$ og $b = \frac{2}{5}$. Dette betyr at \vec{b} består av $\frac{3}{5}\vec{v}_1 + \frac{2}{5}\vec{v}_2$, der \vec{v}_1 og \vec{v}_2 er vektorene i $Col A$. Da gjenstår bare litt enkel regning for å finne α og β :

$$\alpha = \frac{3}{5} \cdot 0 + \frac{2}{5} \cdot 1 = \underline{\underline{\frac{2}{5}}}$$

$$\beta = \frac{3}{5} \cdot 2 + \frac{2}{5} \cdot -1 = \underline{\underline{\frac{4}{5}}}$$