Matte 3 - Øving 13

Arve Nygård

30. april 2012

1 Oppgave 1

1.1 Deloppgave 1

$$w = -8 + 8\sqrt{3}i$$

$$r = \sqrt{(-8)^2 + (8\sqrt{3})^2} = \sqrt{4 * 64} = 16$$

$$\phi = \arctan(\tfrac{8\sqrt{3}}{-8}) = \arctan(-\sqrt{3}) = \tfrac{-\pi}{3}$$

$$\text{Vi er i 2. kvadrant, så vi har at } \theta = \tfrac{-\pi}{3} + \pi = \boldsymbol{\tfrac{2\pi}{3}}$$

$$\underline{\underline{w = 16(\cos(\tfrac{2\pi}{3}) - i\sin(\tfrac{2\pi}{3}))}}$$

1.2 Deloppgave 2

Vi skal finne fjerderøttene. Det er 4 av disse, og de ligger 90 grader på hverandre.

1. rot:

$$w^{1/4} = 16^{1/4}\left[\cos(\tfrac{1}{4}\tfrac{2\pi}{3}) + i\sin(\tfrac{1}{4}\tfrac{2\pi}{3})\right] = 2\left[\cos(\tfrac{\pi}{6}) + i\sin(\tfrac{\pi}{6})\right]$$
$$= \underline{\underline{\mathbf{\sqrt{3} + i}}}$$

2. rot:

Radien er alltid den samme, vi legger på $\frac{\pi}{2}$.

$$2\left[\cos(\tfrac{\pi}{6} + \tfrac{\pi}{2}) + i\sin(\tfrac{\pi}{6} + \tfrac{\pi}{2})\right] = 2\cos(\tfrac{2\pi}{3}) + 2\sin(\tfrac{2\pi}{3})$$
$$= \underline{\underline{\mathbf{-1 + \sqrt{3}i}}}$$

3.- og 4. rot finner vi ved inspeksjon: Enten av tegning eller tallene. Vi skal ha én rot i hver kvadrant.

3. rot: $\underline{\underline{\mathbf{-\sqrt{3} - i}}}$ 4. rot: $\underline{\underline{\mathbf{1 - \sqrt{3}i}}}$

2 Oppgave 2

2.1 a)

$$y'' + 4y' + 5y = 0 \qquad , \qquad y(0) = 1, y'(0) = 2$$

$$\lambda^2 + 4\lambda + 5 = 0$$
$$\implies \lambda_1 = -2 - i, \qquad \lambda_2 = -2 + i$$

Vi får imaginære tall, og dermed blir y(x) på formen $C_1 e^{-2x}\cos(x) + C_2 e^{-2x}\sin(x)$. Vi setter x=0 og løser for C_1:

$$y(0) = 1 = C_1 e^0 \cos 0 + C_2 e^0 \sin 0$$
$$1 = C_1 \cdot 1 \cdot 1 + C_2 \cdot 1 \cdot 0$$
$$\mathbf{C_1 = 1}$$

Vi har nå at $\qquad y(x) = e^{-2x}\cos x + C_2 e^{-2x}\sin x.$
Deriver uttrykket, bruk initialverdi og løs for C_2:

$$y'(x) = C_2\Big[e^{-2x}\sin x\Big]' + \Big[e^{-2x}\cos x\Big]'$$
$$= C_2\Big[-2e^{-2x}\sin x + e^{-2x}\cos x\Big] + \Big[-2e^{-2x}\cos x - e^{-2x}\sin x\Big]$$
$$= C_2 e^{-2x}\Big[-2\sin x + \cos x\Big] + e^{-2x}\Big[-2\cos x - \sin x\Big]$$

Vi setter så inn x=0:

$$y'(0) = 2 = C_2 e^0\Big[-2\sin 0 + \cos 0\Big] + e^0\Big[-2\cos 0 - \sin 0\Big]$$
$$2 = C_2\Big[1\Big] + \Big[-2\Big]$$
$$2 = C_2 - 2$$
$$\mathbf{C_2 = 4}$$

Vi har nå hele løsningen på initialverdiproblemet:

$$y(x) = e^{-2x}\cos x + 4e^{-2x}\sin x = \underline{\underline{\mathbf{e^{2x}}\big(\cos\mathbf{x} + \mathbf{4}\sin\mathbf{x}\big)}}$$

2.2 b)

Fra oppgave 2a har vi at $y_h = e^{2x}\big(\cos x + 4\sin x\big)$.
Vi leter etter en partikulær løsning på formen $y_p = A\cos x + B\sin x + Cx + D$.

$$
\begin{gathered}
y_p = A\cos x + B\sin x + Cx + D \\
y_p' = -A\sin x + B\cos x + C \\
y_p'' = -A\cos x - B\sin x
\end{gathered}
$$

Vi setter opp stykket, og setter inn vår partikulærløsning, og løser deretter for A, B, C og D:

$$
\begin{gathered}
y'' + 4y' + 5y = 4\cos x + 5x \\
\big(4A + 4B\big)\cos x + \big(4B - 4A\big)\sin x + Cx + d = 4\cos x + 5x
\end{gathered}
$$

Vi løser for A og B:

$$
\begin{gathered}
4A + 4B = 4 \\
4B - 4A = 0 \\
\Rightarrow A = \tfrac{1}{2}, B = \tfrac{1}{2}
\end{gathered}
$$

Vi løser så for C og D:

$$
\begin{gathered}
4C + 5Cx + 5D = 5x \Rightarrow C = 1 \\
4 + 5D = 0 \Rightarrow D = \tfrac{-4}{5}
\end{gathered}
$$

Vi har nå en fullstendig partikulærløsning:

$$y_p = \tfrac{1}{2}\cos x + \tfrac{1}{2}\sin x = x - \tfrac{4}{5}$$

Den generelle løsningen blir da:

$$
\begin{gathered}
y_g = y_h = y_g \\
\underline{\underline{\mathbf{y_g = e^{-2x}\left(\cos x + 4\sin x\right) + \tfrac{1}{2}\left(\cos x + \sin x\right) + x - \tfrac{4}{5}}}}
\end{gathered}
$$

2.3 c)

Denne klarte jeg ikke :(

3 Oppgave 3

3.1 a)

Alternativ C

3.2 b)

Alternativ A

4 Oppgave 4

4.1 a)

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & -1 \\ -2 & 3 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad A$$

Swap row 1 with row 2:

$$\begin{pmatrix} -2 & 3 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad 2$$

Add $\frac{1}{2}$ row 1 to row 2:

$$\begin{pmatrix} -2 & 3 & 1 & -3 \\ 0 & \frac{5}{2} & \frac{5}{2} & -\frac{5}{2} \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad 3$$

Divide row 1 by -1:

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 & -1 & 3 \\ 0 & \frac{5}{2} & \frac{5}{2} & -\frac{5}{2} \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad 4$$

Multiply row 2 by $\frac{2}{5}$:

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad 5$$

Subtract row 1 from row 4:

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 2 & -2 \end{pmatrix} \quad 6$$

Divide row 4 by -2:

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad 7$$

Subtract row 2 from row 3:

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad 8$$

Add row 2 to row 4:

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad 9$$

Add 3 row 2 to row 1:

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad 10$$

Divide row 1 by 2:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad E$$

Computed by Wolfram|Alpha

Basis for $ColA$: $\vec{v_1}, \vec{v_2}$

$$\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} , \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \right\}$$

Basis for $RowA$:

$$\left\{ \begin{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \\ , \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \end{matrix} \right\}$$

4.1.1 b)

$NulA$:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & | & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix}$$

$$x_1 = -x_3$$

$$x_2 = -x_3 + x_4$$

$$x_3, x_4 \text{ fri.}$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = x3 \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + x_4 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \text{Nul A} = \left\{ \begin{bmatrix} -x \\ y-x \\ x \\ y \end{bmatrix} |x, y \in \mathbb{R} \right\}$$

For at $A\vec{x} = \vec{b}$ skal ha en løsning, må $\vec{b}$ være i $ColA$.
Siden b_1 og b_2 er gitt, kan vi finne hvilken kombinasjon av kollonnevektorer i A som $\vec{b}$ består av. Vi fokuserer på rad 1 og 2; siden disse er gitt for $\vec{b}$.

Vi må finne a og b slik at $a + b = 1$, og $-2a + 3b = 0$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & | & 1 \\ -2 & 3 & | & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & | & \frac{3}{5} \\ 0 & 1 & | & \frac{2}{5} \end{bmatrix}$$

Dermed har vi at $a = \frac{3}{5}$ og $b = \frac{2}{5}$. Dette betyr at $\vec{b}$ består av $\frac{3}{5}\vec{v_1} + \frac{2}{5}\vec{v_2}$, der $\vec{v_1}$ og $\vec{v_2}$ er vektorene i $ColA$. Da gjenstår bare litt enkel regning for å finne α og β:

$$\alpha = \frac{3}{5} \cdot 0 + \frac{2}{5} \cdot 1 = \underline{\underline{\mathbf{\frac{2}{5}}}}$$

$$\beta = \frac{3}{5} \cdot 2 + \frac{2}{5} \cdot -1 = \underline{\underline{\mathbf{\frac{4}{5}}}}$$

4.2 c)

$$\vec{v_1} = \vec{u_1}$$

$$\tilde{v_2} = \vec{u_2} - \left(\frac{\vec{u_2} \cdot \vec{v_1}}{\vec{v_1} \cdot \vec{v_1}}\right) \vec{v_1} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} - \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}, \quad \vec{v_2} = (-1, 2, 1, -2)$$

5 Oppgave 5

Vi ser på den karakteristiske likningen $det(A - I) = 0$:

$$\begin{vmatrix} 3-\lambda & 4 & -2 \\ -2 & -3-\lambda & 2 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda) \begin{vmatrix} 3-\lambda & 4 \\ -2 & -3-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(\lambda^2-1) = -(\lambda-1)^2(\lambda+1) = 0$$

Dermed er egenverdiene til A 1 og -1