

# Kompendium i emne

## TFY4125 Fysikk

for studenter ved studieprogrammene

MTDT, MTKOM, MTIØT, og  
MTNANO

NTNU

Våren 2007



## Forord

Emne TFY4125 Fysikk undervises våren 2007 for studieprogrammene MTDT, MTKOM, MTIØT og MTNANO.

Av praktiske grunner er øvingsveiledningen delt på to dager: Mandager for MTDT og MTNANO, og Torsdager for MTKOM og MTIØT.

Under ”itslearning” vil studentene finne all nødvendig informasjon for hver av de to parallellene. Dette inkluderer blant annet:

- Generell beskrivelse av emnet.
- Kompendiet/forelesningsnotatene (pdf-format).
- Obligatoriske øvingsoppgaver (pdf-format).
- Løsningsforslag (pdf-format) til obligatoriske øvingsoppgaver (tilgjengelig kun etter innleveringsfristen).
- Informasjon om hvilke obligatoriske øvinger studenten har fått godkjent.

For å sikre at emnets innhold er mest mulig relevant, har skiftende faglærere opp gjennom årene jamnlig oppdatert utvalget av temaer, eksempler og øvinger i samråd med det emnemiljøet som studentene tilhører.

*Steinar Raaen*



# Innhold

<b>1</b>	<b>Introduksjon</b>	<b>1</b>
<b>I</b>	<b>Elementær mekanikk</b>	<b>3</b>
<b>2</b>	<b>Newtons 2. lov</b>	<b>5</b>
2.1	Bevegelse av punktmasser som påvirkes av ytre krefter . . . . .	5
2.2	Kastbevegelse i homogent gravitasjonsfelt . . . . .	8
2.3	Lodd hengt opp i spiralfjær . . . . .	9
2.3.1	Statisk beregning . . . . .	9
2.3.2	Dynamisk beregning . . . . .	10
<b>3</b>	<b>Arbeid og energi</b>	<b>13</b>
3.1	Arbeid og kinetisk energi . . . . .	13
3.2	Potensiell energi og konservative krefter . . . . .	14
3.3	Ikke-konservative krefter . . . . .	16
3.3.1	Vanlig tørr friksjon . . . . .	16
3.3.2	Fluidfriksjon . . . . .	17
3.3.3	Friksjonsarbeid . . . . .	17
<b>4</b>	<b>Dreiemoment og vektstangprinsipp</b>	<b>21</b>
4.1	Vektstang i skålvektkonfigurasjon . . . . .	21
4.2	Løfting med spett . . . . .	22
4.3	Dreiemoment . . . . .	23
4.3.1	Dreiemoment og arbeid . . . . .	23
4.4	Tyngdepunkt og massefellespunkt . . . . .	24
4.5	Statisk likevekt . . . . .	24
4.5.1	Opplagret bjelke med last . . . . .	25
<b>5</b>	<b>Topartikkelsystemer</b>	<b>27</b>
5.1	Separasjon av bevegelseslikningene . . . . .	28
5.2	Elastisk støt i én dimensjon . . . . .	30
5.3	Uelastisk støt i én dimensjon – ballistisk pendel . . . . .	31
<b>6</b>	<b>Rotasjon av stive legemer</b>	<b>33</b>

6.1	Beskrivelse vha. sylinderkoordinater . . . . .	33
6.1.1	Baneakselerasjon og radialakselerasjon . . . . .	34
6.2	Rotasjonsenergi og treghetsmoment . . . . .	35
6.2.1	Rullende ring . . . . .	36
6.2.2	Rullende massivt hjul . . . . .	37
6.2.3	Modellering av Galileis eksperiment . . . . .	38
6.3	Parallellakse-teoremet (Steiners sats) . . . . .	40
6.3.1	Alternativ beregning av kinetisk energi for rullende hjul . . .	40
6.4	Spinn for punktmasse . . . . .	41
6.5	Spinnet for stivt legeme . . . . .	42
6.5.1	Gyroskop . . . . .	43
6.5.2	Bumerang . . . . .	45
<b>7</b>	<b>Elastisitet</b>	<b>47</b>
7.1	Strekkelastisitet . . . . .	47
7.2	Skjærelastisitet . . . . .	48
7.3	Volumelastisitet . . . . .	49
7.4	Sammenhengen mellom elastisitetsmodulene . . . . .	49
7.4.1	Poissons tall . . . . .	49
7.4.2	Sammenhengen mellom volum- og strekkmodul . . . . .	50
7.4.3	Sammenhengen mellom skjær- og strekkmodul . . . . .	51
7.5	Bøying . . . . .	51
7.5.1	Innspent bjelke med last . . . . .	53
7.6	Torsjon . . . . .	54
<b>II</b>	<b>Svingninger og bølger</b>	<b>57</b>
<b>8</b>	<b>Periodisk bevegelse</b>	<b>59</b>
8.1	Masse og fjær . . . . .	60
8.2	Uniform rotasjon . . . . .	60
8.3	Torsjonssvingninger . . . . .	62
8.4	Matematisk pendel . . . . .	64
8.5	Fysisk pendel . . . . .	66
8.5.1	Tynn, homogen stav . . . . .	67
8.6	Dempete svingninger . . . . .	67
8.6.1	Løsning ved svak demping . . . . .	68
8.6.2	Klassifisering etter dempningsgrad . . . . .	70
8.7	Tvungne svingninger og resonans . . . . .	70
<b>9</b>	<b>Mekaniske bølger</b>	<b>75</b>
9.1	Harmoniske forløp i rom og tid . . . . .	76
9.2	Standbølger . . . . .	76
9.3	Vandrebølger og fasehastighet . . . . .	77

9.4	Bølgelikninga – syntetisk utledning . . . . .	77
9.5	Transversale bølger: Svingende streng . . . . .	79
9.6	Longitudinale bølger: Lydbølger . . . . .	80
9.6.1	Lydbølger i en stav av fast stoff . . . . .	82
9.7	Effekt og intensitet . . . . .	83
9.7.1	Svingende streng . . . . .	83
9.7.2	Lydbølge i væske eller gass . . . . .	84
9.7.3	Lydtrykk og intensitet . . . . .	84
9.7.4	Decibelskalaen . . . . .	85
9.8	Dopplereffekten . . . . .	86
9.8.1	Dopplers formel . . . . .	87
9.8.2	Dopplereffekt for elektromagnetiske bølger . . . . .	87
9.9	Stående bølger . . . . .	88
9.9.1	Stående bølger på svingende streng . . . . .	89
9.9.2	Longitudinale standbølger . . . . .	90
9.9.3	Blåseinstrument med åpen ende . . . . .	90
9.10	Interferens og svevning . . . . .	91
9.10.1	Interferens mellom vandre bølger med samme frekvens . . . . .	91
9.10.2	Lydbilde fra to høyttalere . . . . .	92
9.10.3	Svevning mellom bølger med nærliggende frekvenser . . . . .	93
<b>III</b>	<b>Termisk fysikk</b>	<b>97</b>
<b>10</b>	<b>Temperatur og varme</b>	<b>99</b>
10.1	Temperatur og termisk utvidelse . . . . .	99
10.1.1	Temperaturskalaer . . . . .	100
10.1.2	Termisk lengdeutvidelse . . . . .	102
10.1.3	Termisk utvidelse av vann . . . . .	103
10.2	Varme og varmekapasitet . . . . .	103
10.2.1	Varmekapasitet . . . . .	104
10.2.2	Varmetoning – latent varme . . . . .	105
10.3	Varmetransport . . . . .	107
10.3.1	Varmeledning . . . . .	107
10.3.2	Tilfrysing av en innsjø . . . . .	109
10.3.3	Varmestråling . . . . .	111
<b>11</b>	<b>Kinetisk gassteori</b>	<b>115</b>
11.1	Makroskopisk beskrivelse (kontinuumsbeskrivelse) . . . . .	115
11.2	Mikroskopisk beskrivelse (atomær/molekylær beskrivelse) . . . . .	116
11.3	Fra mikroskopisk til makroskopisk beskrivelse (kontraksjon) . . . . .	116
11.4	Den ideelle gassloven . . . . .	117

11.5	Varmekapasitet for ideell énatomig gass . . . . .	119
11.5.1	Oppvarming ved konstant volum . . . . .	119
11.5.2	Oppvarming ved konstant trykk . . . . .	120
11.6	Varmelæras 1. hovedsetning . . . . .	121
11.7	Frihetsgrader . . . . .	122
11.7.1	Enatomig gass . . . . .	122
11.7.2	Toatomig gass . . . . .	122
11.7.3	Fleratomige gasser . . . . .	123
11.8	Ekvipartisjonsprinsippet . . . . .	123
11.8.1	Hydrogengass, $H_2$ . . . . .	123
11.8.2	Faste stoffer: Dulong-Petits lov . . . . .	124
11.9	Adiabatiske prosesser . . . . .	125
11.9.1	Ideell gass . . . . .	125
11.9.2	Lydhastigheten i en ideell gass . . . . .	126
11.9.3	Rüchardts eksperiment . . . . .	127
11.10	Transportprosesser i ideelle gasser . . . . .	128
11.10.1	Fri veglengde og fri tid mellom støt . . . . .	129
11.10.2	Varmeledning . . . . .	130
11.10.3	Viskositet . . . . .	132
11.11	Kondensasjon og kritisk punkt . . . . .	134
11.11.1	van der Waals likning . . . . .	135
11.11.2	Fasediagram og trippelpunkt . . . . .	137
<b>12</b>	<b>Termodynamiske kretsprosesser</b>	<b>139</b>
12.1	$pV$ -diagrammer og arbeid . . . . .	140
12.1.1	Arbeidet er avhengig av banen . . . . .	140
12.1.2	Kretsprosess . . . . .	140
12.1.3	Prosesstyper – terminologi . . . . .	141
12.1.4	Reversibel og ikke-reversibel prosess . . . . .	141
12.1.5	Joule-Thomson effekten – og Lindes kjølemaskin . . . . .	142
12.2	Sykliske varmekraftmaskiner . . . . .	143
12.2.1	Termisk virkningsgrad . . . . .	144
12.2.2	Otto-syklus . . . . .	144
12.2.3	Diesel-syklus . . . . .	147
12.3	Kjølemaskiner og varmepumper . . . . .	148
12.3.1	Kjøleprinsipper . . . . .	149
12.3.2	Kjøleanlegg med kjølemedium i gass/væske likevekt . . . . .	149
12.4	Carnotprosessen . . . . .	151
12.4.1	Carnotsyklus . . . . .	151
12.4.2	Carnotprosess i en ideell gass . . . . .	152
12.4.3	Generell Carnotprosess . . . . .	153
12.4.4	Konsekvenser for virkelige kraftverk . . . . .	154
12.4.5	Carnotprosessen og temperaturdefinisjonen . . . . .	154



12.5	Varmelæras 2. hovedsetning . . . . .	155
12.6	Entropi . . . . .	155
12.6.1	Clausius ulikhet . . . . .	155
12.6.2	Definisjon entropi . . . . .	156
12.6.3	Entropien for en ideell, énatomig gass . . . . .	157
12.6.4	Entropien og 2. hovedsetning . . . . .	158
12.6.5	Misbruk av 2. hovedsetning . . . . .	159
12.6.6	Sluttord – om termodynamikk og kultur . . . . .	160

## IV Elektrisitet og magnetisme 163

### 13 Elektromagnetiske grunnbegreper 165

13.1	Kort historisk bakgrunn . . . . .	165
13.1.1	Fra gresk oldtid til James Clerk Maxwell . . . . .	165
13.1.2	Litt om enheter . . . . .	167
13.2	Elektrostatikk . . . . .	167
13.2.1	Coulombs lov . . . . .	167
13.2.2	Elektrisk felt $E$ og potensial $V$ . . . . .	168
13.2.3	Gauss lov . . . . .	169
13.2.4	Kapasitans . . . . .	170
13.2.5	Elektrostatisk feltenergi . . . . .	171
13.2.6	Dielektrika og polarisasjon . . . . .	172
13.3	Statiske magnetfelt og elektrisk strøm . . . . .	173
13.3.1	Elektrisk strøm og Ohms lov . . . . .	173
13.3.2	Kraft på leder i magnetfelt . . . . .	175
13.3.3	Lorentzkrafta . . . . .	176
13.3.4	Krefter mellom strømførende ledere – og enheten ampere . . . . .	177
13.3.5	Magnetfeltet fra en rett leder . . . . .	178
13.3.6	Ampères lov . . . . .	179
13.3.7	Magnetfeltet i en lang, rett spole . . . . .	179
13.4	Magnetisk induksjon . . . . .	180
13.4.1	Faradays induksjonslov . . . . .	181
13.4.2	Generering av vekselstrøm . . . . .	181
13.4.3	Teslas trefasegenerator . . . . .	182
13.4.4	Selvinduksjon og magnetisk feltenergi . . . . .	183
13.5	Enkle kretser . . . . .	185
13.5.1	RC-krets . . . . .	185
13.5.2	Opplading av kondensator . . . . .	186
13.5.3	RL-krets . . . . .	187
13.5.4	LC-krets . . . . .	188
13.5.5	RLC-krets . . . . .	188

<b>14 Elektromagnetiske bølger</b>	<b>191</b>
14.1 Om elektromagnetiske bølger i vakuum . . . . .	191
14.2 Forskyvningsstrøm og generalisert Ampères lov . . . . .	193
14.3 Maxwells likninger . . . . .	194
14.4 Bølgelikninga i vakuum . . . . .	196
<b>A Fysiske og matematiske grunnprinsipp</b>	<b>199</b>
A.1 Størrelser og enheter . . . . .	199
A.2 Litt grunnleggende matematikk . . . . .	201
A.3 Separasjon av sammensatte problem . . . . .	202



# Kapittel 1

## Introduksjon

Vi skal i dette kapitlet gi ei kort oversikt over hva kurset omfatter og hva som kreves av forkunnskaper.

Fra innholdslista vil man se at dette kurset spenner over emner som arbeid, energi, partikkeldynamikk, hydrostatikk, fluidmekanikk, mekaniske bølger, termisk fysikk, kinetisk teori og termodynamiske kretsprosesser. Dette kan ved første øyekast se ut som temaer som har lite eller ingenting felles, men dette viser seg ikke å være riktig. Den underliggende fellesnevneren for alle disse temaene er *Newtons mekanikk* for masser som er så små at man kan se bort fra effekter som skyldes massenes utstrekning. Slike masser refereres til som massepunkter eller *punktmasser*. I de tilfeller hvor man ønsker å studere fluider eller faste legemer med utstrekning, modellerer man de aktuelle systemene som ei samling av et større eller mindre antall *vekselvirkende punktmasser*.

Newtons mekanikk (1686) bygger på Newtons<sup>1</sup> bevegelseslikning publisert i “*Principia*”.

Einsteins spesielle relativitetsteori (1905) skiller seg fra Newtons mekanikk kun når partikkelhastigheten blir en signifikant brøkdel av lyshastigheten,  $c = 300\,000$  km/s.

Heisenberg og Schrödingers kvantemekanikk (1924) beskriver de spesielle fysiske egenskapene som begynner å dominere når ved termisk likevekt massen til punktmassene er av samme størrelsesorden som massen til et hydrogenatom, eller mindre.

Hawkins (1980) beskrev hvordan alle kjente fysiske lover mister sin gyldighet i nærheten av svarte hull (“uendelig” stor masse med “null” utstrekning).

Vi vil her *ikke* befatte oss med tre sistnevnte spesialtilfellene, og vil kun betrakte

---

<sup>1</sup>Sir Isaac Newton (1642(43)-1727), engelsk fysiker og matematiker. Den største vitenskapsmann i 17. århundre med spesialområder mekanikk, optikk og infinitesimalregning. Boka “*Philosophiae Naturalis Principia Mathematica*” regnes av mange som ei av de aller viktigste i vitenskapens historie.

objekter som A) har stor nok masse, B) beveger seg langsomt nok og C) befinner seg langt nok bort fra svarte hull til at Newtons mekanikk er gyldig. Dette innbefatter i praksis de aller fleste systemer av interesse innen ingeniørvitenskap – inklusive makroskopiske egenskaper som varmekapasitet og trykk ved gitt volum og temperatur for de fleste atomære og molekulære gasser.

Det er ellers viktig å legge merke til at *fysikkens “språk” er matematikk* – samtidig som matematikk også er et av fysikkens viktigste verktøy. Isaac Newton måtte i en alder av 22-23 år bokstavelig talt “finne opp” integral- og differensialregning for å kunne beregne planetbanene rundt sola. For å ha størst mulig utbytte av de foreliggende fysikknotatene, er det derfor desto bedre jo “mer flytende man snakker matematikk”. Ved eventuelle vansker er det derfor nyttig først å få avklart om det dreier seg om kun et “språkproblem” (matematikkproblem) – eller om det er selve fysikken som volder vansker. Erfaring viser at i førsteårskurs fysikkemner bunner studentenes problemer seg for en stor del i “språkproblemer”. Det er derfor å anbefale at studentene underveis i dette kurset stadig frisker opp det som de alt har fått gjennomgått i matematikk. Se ellers Tillegg A i dette kompendiet.

## OPPSUMMERING AV KAP. 1

- Newtons mekanikk er gyldig for alle systemer av interesse innen bygg- og miljøteknikk hvor A) Hastigheten er mye mindre enn lyshastigheten, og B) Massen er endelig og større enn hydrogenatomets masse. For systemer bestående av sterkt vekselvirkende punktmasser (f.eks. faste legemer og fluider) vil det ofte være nyttig å innføre andre koordinater enn de som brukes for frie punktmasser.

# Del I

## Elementær mekanikk



# Kapittel 2

## Newton's 2. lov

### Innhold

2.1	Bevegelse av punktmasser som påvirkes av ytre krefter	5
2.2	Kastbevegelse i homogent gravitasjonsfelt . . . . .	8
2.3	Lodd hengt opp i spiralfjær . . . . .	9
2.3.1	Statisk beregning . . . . .	9
2.3.2	Dynamisk beregning . . . . .	10

Vi skal i dette kapitlet gjøre rede for Newtons 2. lov og se på et par eksempler.

### 2.1 Bevegelse av punktmasser som påvirkes av ytre krefter

Vår grunnlikning – som nesten all annen mekanikk kan utledes fra – er *Newton's 2. lov*, som på komponentform kan skrives

$$\begin{aligned}\frac{dp_x}{dt} &= F_x(x, y, z, t), \\ \frac{dp_y}{dt} &= F_y(x, y, z, t), \\ \frac{dp_z}{dt} &= F_z(x, y, z, t),\end{aligned}\tag{2-1}$$

eller på vektorform

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}(\vec{r}, t),\tag{2-2}$$



hvor

$$\begin{aligned}\vec{\mathbf{r}} &= \{x, y, z\} = \text{punktmassens posisjonsvektor,} \\ m &= \text{massen}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\vec{\mathbf{p}} &= \{p_x, p_y, p_z\} = m \frac{d\vec{\mathbf{r}}}{dt} = m \dot{\vec{\mathbf{r}}} = \text{bevegelsesmengden,} \\ \vec{\mathbf{v}} &= \{v_x, v_y, v_z\} = \dot{\vec{\mathbf{r}}} = \frac{d}{dt} \vec{\mathbf{r}} = \text{hastigheten,} \\ t &= \text{tid og}\end{aligned}\tag{2-3}$$

$$\vec{\mathbf{F}}(\vec{\mathbf{r}}, t) = \{F_x(\vec{\mathbf{r}}, t), F_y(\vec{\mathbf{r}}, t), F_z(\vec{\mathbf{r}}, t)\} = \text{ytte kraft.}\tag{2-4}$$

Vi definerer også punktmassens akselerasjon  $\vec{\mathbf{a}}$  gitt ved uttrykket

$$\vec{\mathbf{a}} = \{a_x, a_y, a_z\} = \frac{d}{dt} \vec{\mathbf{v}} = \frac{d^2}{dt^2} \vec{\mathbf{r}} = \ddot{\vec{\mathbf{r}}} = \frac{1}{m} \dot{\vec{\mathbf{p}}}.\tag{2-5}$$

Fra Newtons 2. lov følger at krafta er *en avledet størrelse*  $\vec{\mathbf{F}} = m \vec{\mathbf{a}}$  med enhet (dimensjon)

$$[\vec{\mathbf{F}}] = [m] \cdot [\vec{\mathbf{a}}] = \text{kilogram} \cdot \frac{\text{meter}}{\text{sekund}^2} = \frac{\text{kg m}}{\text{s}^2}.\tag{2-6}$$

Denne enheten defineres 1 *newton*:

$$\text{newton} = \text{N} = \frac{\text{kg m}}{\text{s}^2}.$$

Se ellers Tillegg A i dette kompendiet.

Newtons 2. lov kan alternativt skrives som

$$\frac{d}{dt} \left[ m(t) \dot{\vec{\mathbf{r}}} \right] = \vec{\mathbf{F}}(\vec{\mathbf{r}}, t).\tag{2-7}$$

I det følgende vil vi kun befatte oss med systemer hvor *massen er tidsuavhengig*, men f.eks. for en rakett vil totalmassen reduseres etter hvert som raketts drivstoff forbrennes, dvs. rakettmassen vil være en funksjon av tida.

For tidsuavhengig masse, dvs.  $m(t) = m = \text{konstant}$ , kan Newtons 2. lov skrives

$$\vec{\mathbf{a}} = \frac{1}{m} \vec{\mathbf{F}}(\vec{\mathbf{r}}, t),\tag{2-8}$$

$$\vec{\mathbf{F}}(\vec{\mathbf{r}}, t) = m \vec{\mathbf{a}}.$$

(2-9)

Likning (2-8) kan brukes til å beregne akselerasjonen når den ytre krafta er gitt, mens likning (2-9) kan brukes til å beregne den ytre krafta når akselerasjonen er

## 2.1. BEVEGELSE AV PUNKTMASSE SOM PÅVIRKES AV YTRE KREFTER 7

gitt. Mens Newtons 2. lov (2-8) forteller hvor stor akselerasjon et legeme får når det påvirkes av en kraft, er *Newtons 1. lov* et spesialtilfelle av denne: Når ingen krefter virker på et legeme (i praksis: summen av alle krefter lik null), endres ikke hastigheten til et legeme. Dersom det er i ro forblir det i ro.

Kjært barn har, som kjent, mange navn. Slik er det også for Newtons mekanikk:

	norsk	engelsk
$\vec{p} = m \vec{v}$	bevegelsesmengde, driv, impuls	momentum
$d\vec{p} = \vec{F} dt$	kraftstøt, impuls, impulsforandring	impulse

For tidsuavhengige masser ( $m = \text{konstant}$ ) har man i det generelle tilfellet bevegelseslikningene

$$\begin{aligned}\ddot{x} &= \frac{d^2x}{dt^2} = \frac{1}{m} F_x(x, y, z, t), \\ \ddot{y} &= \frac{d^2y}{dt^2} = \frac{1}{m} F_y(x, y, z, t), \\ \ddot{z} &= \frac{d^2z}{dt^2} = \frac{1}{m} F_z(x, y, z, t),\end{aligned}\tag{2-10}$$

hvor akselerasjonen i f.eks.  $x$ -retning i det generelle tilfellet vil kunne avhenge av verdien til alle de tre komponentene til punktmassens posisjonsvektor  $\vec{r} = \{x, y, z\}$ . Dette gir *tre koplede andreordens differensiallikninger* for å bestemme de *tre ukjente*  $x$ ,  $y$  og  $z$  når de matematisk uttrykkene for  $F_x(x, y, z, t)$ ,  $F_y(x, y, z, t)$  og  $F_z(x, y, z, t)$  er kjente. Bevegelsen av en planet rundt sola er et eksempel på et slikt system. I mange tilfeller er det ikke trivielt å løse de tre koplede differensiallikningene i (2-10). F.eks. er planetbanene rundt sola ellipser hvor sola befinner seg i det ene brennpunktet.

Viktig spesialtilfelle når krafta i hver retning ikke er avhengig av andre retninger:

$$F_x(x, y, z, t) = F_x(x, t),\tag{2-11}$$

$$F_y(x, y, z, t) = F_y(y, t),\tag{2-12}$$

$$F_z(x, y, z, t) = F_z(z, t),\tag{2-13}$$

med bevegelseslikningene

$$\ddot{x} = \frac{1}{m} F_x(x, t), \quad \ddot{y} = \frac{1}{m} F_y(y, t), \quad \ddot{z} = \frac{1}{m} F_z(z, t),\tag{2-14}$$

hvor *komponentene av bevegelsen langs hver koordinatakse er uavhengig av komponentene til bevegelsen langs de øvrige koordinataksene*. Det vil si at man først kan beregne komponentene av bevegelsen langs de tre aksene hver for seg som om bevegelsen langs de andre aksene ikke fant sted, og så til slutt summere/superposisjonere bevegelsene. Dette refereres gjerne som *superposisjonsprinsippet*.

Når superposisjonsprinsippet kan benyttes, fører dette som oftest til sterk forenkling av selve beregningene. Hvor vidt surperposisjonsprinsippet kan benyttes for et gitt system, avhenger ofte av orienteringa av “laboratoriekoordinatsystemet”. I praksis er det slik at hvor mye regnearbeid som trengs for å løse en gitt oppgave, ofte er sterkt avhengig av både lokaliseringa av origo og orienteringa av laboratoriekoordinatsystemet. Normalt lønner det seg derfor å prøve seg litt fram før man plasserer et systems laboratoriekoordinatsystem. Dette er et typisk eksempel på en arbeidsoppgave hvor øvelse – mer enn noe annet – gjør mester.

## 2.2 Kastbevegelse i homogent gravitasjonsfelt

Gitt at den ytre krafta på punktmassen er<sup>1</sup>

$$\vec{F}(\vec{r}, t) = \{0, 0, -mg\}. \quad (2-15)$$

Parameter  $g$  kalles “tyngdens akselerasjon” og er konstant i et homogent gravitasjonsfelt. Denne parameteren har blitt gitt dette navnet fordi

$$[g] = \frac{[F_z]}{[m]} = \frac{\text{N}}{\text{kg}} = \frac{\text{m}}{\text{s}^2}, \quad (2-16)$$

dvs.  $g$  har dimensjon akselerasjon. Legg merke til at  $m$  betyr meter, mens symbolet for masse er  $m$ . Videre ser vi fra likn. (2-16) at for en punktmasse er  $a_z = -g$ . Ved havnivå finner man at  $g \simeq 9,82 \text{ m/s}^2$ .

Vektorkomponenten til partikkelhastigheten kan for dette spesialtilfellet finnes enkelt ved integrasjon fordi akselerasjonen er konstant:

$$v_x(t) = v_x(0) + \int_0^t \frac{dv_x}{dt} dt = v_x(0) + \int_0^t \frac{1}{m} F_x dt = v_x(0), \quad (2-17)$$

$$v_y(t) = v_y(0) + \int_0^t \frac{dv_y}{dt} dt = v_y(0) + \int_0^t \frac{1}{m} F_y dt = v_y(0), \quad (2-18)$$

$$v_z(t) = v_z(0) + \int_0^t \frac{dv_z}{dt} dt = v_z(0) + \int_0^t \frac{1}{m} F_z dt = v_z(0) - g t. \quad (2-19)$$

Vi har videre at

$$\vec{r}(t) = \vec{r}(0) + \int_0^t \vec{v}(t) dt, \quad (2-20)$$

som sammen med likningene (2-17) – (2-19) gir følgende sett med bevegelseslikninger

$$\begin{aligned} x(t) &= x(0) + v_x(0) t, \\ y(t) &= y(0) + v_y(0) t, \\ z(t) &= z(0) + v_z(0) t - \frac{1}{2} g t^2. \end{aligned}$$

(2-21)

<sup>1</sup>Merk at alle ledd i  $\{ \dots \}$  skal ha samme enhet (dimensjon). Siden “0” ikke har dimensjon er en formelt riktigere måte å skrive dette på:  $\vec{F} = \{0 \text{ N}, 0 \text{ N}, -mg\}$ . Men når måltallet er lik null tillater selv de mest formelle fysikere å sløyfe enheten, den er underforstått. Dette gjelder også i uttrykk som  $v_x(0)$ , f.eks. i likning (2-17).

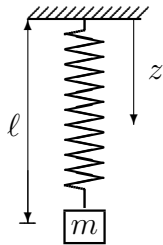
Man legger her merke til at partikkelbevegelsen ikke overraskende avhenger både av hvor partikkelen befinner seg og hvilken hastighet den har ved tida  $t = 0$ .

Anta at vi har en kastbevegelse hvor partikkelen befinner seg i origo ved tida  $t = 0$ , at det ikke er noen bevegelse i  $y$ -retning, dvs.  $x(0) = y(0) = z(0) = 0$  og<sup>2</sup> at  $v_y = 0$ . Ved å eliminere  $t$  fra likningene (2-21) finner man følgende likning for partikkelbanen

$$z = \frac{v_z(0)}{v_x(0)} x - \frac{1}{2} \frac{g}{v_x^2(0)} x^2, \quad (2-22)$$

dvs. banene til partikkelen er en parabel som ligger i planet gjennom  $x$ - og  $z$ -aksene.

## 2.3 Lodd hengt opp i spiralfjær



Ei spiralfjær med fjærkonstant  $k$  og lengde  $\ell_0$  når den er ubelastet, henges opp vertikalt. Fjæra belastes deretter med et lodd med masse  $m$  slik at fjærlengden blir  $\ell$ . Massen til fjæra kan neglisjeres. Systemet befinner seg i et homogent gravitasjonsfelt med tyngdeakselerasjon  $g$ .

### 2.3.1 Statisk beregning

For å få enklest mulig algebra velger vi å benytte et koordinatsystem med  $z$ -akse parallelt med og retta med tyngdekrafta. Koordinatsystemet plasseres slik at  $z = 0$  ved toppfestet og posisjonsvektoren til nedre ende av fjæra er  $\vec{r} = \{0, 0, z_0\}$  når fjæra er ubelastet.

Lokaliseringa og orienteringa av koordinatsystemet som benyttes, har ingenting å si for det endelige resultatet av beregningene. Men, hvor mye arbeid som kreves for å komme fram til svaret, avhenger ofte sterkt av hvor man plasserer koordinatsystemet og hvordan det orienteres. Er man dum nok til f.eks. å orientere koordinatsystemet skrått i forhold til tyngdekrafta, blir uttrykkene unødige stygge.

Vi antar at fjærkrafta  $F^{(\text{fjær})}$  følger Hookes lov, dvs.

$$F_x^{(\text{fjær})} = 0 \quad F_y^{(\text{fjær})} = 0 \quad F_z^{(\text{fjær})} = -k(\ell - \ell_0) = -k(z - z_0), \quad (2-23)$$

<sup>2</sup>Legg her merke til at fordi  $x$  og  $v_x$  har forskjellig dimensjon, har vi ikke satt de like selv om de begge er lik null.

hvor  $k$  er fjærkonstanten. Vi setter minustegn foran krafta fordi den virker i negativ  $z$ -retning når  $z > z_0$ . Den totale ytre krafta  $\vec{\mathbf{F}} = \{F_x, F_y, F_z\}$  på loddet blir da

$$F_x = 0 \quad F_y = 0 \quad F_z = F_z^{(\text{fjær})} + F_z^{(\text{tyngde})} = -k(z - z_0) + mg. \quad (2-24)$$

Akselerasjonen av loddet er gitt av Newtons 2. lov og dermed av uttrykket

$$\ddot{\mathbf{r}} = \frac{1}{m} \vec{\mathbf{F}} = \frac{1}{m} \{0, 0, -k(z - z_0) + mg\}. \quad (2-25)$$

Loddet henger i ro (statisk likevekt) hvis  $\ddot{\mathbf{r}} = \vec{\mathbf{0}}$  og  $\dot{\mathbf{r}} = \vec{\mathbf{0}}$ . For dette viktige spesialtilfellet gir Newtons 2. lov at

$$\vec{\mathbf{F}} = \{0, 0, F_z^{(\text{fjær})} + F_z^{(\text{tyngde})}\} = \vec{\mathbf{0}}. \quad (2-26)$$

Viktig resultat: *I statisk likevekt er akselerasjonen lik null. Fra Newtons 2. lov følger derfor at for dette spesielle tilfellet er summen av alle de ytre kreftene lik null.*

Et lodd opphengt i spiralfjær faller derfor til ro ved

$$\Delta\ell = (z - z_0) = \frac{mg}{k}. \quad (2-27)$$

### 2.3.2 Dynamisk beregning

Fra likning (2-23) ser man at  $F_x = F_y = 0$  og at det i følge Newtons 2. lov derfor ikke er noen akselerasjon i  $x$ - og  $y$ -retning. Hvis hastighetene  $v_x = v_y = 0$  ved tida  $t = 0$ , vil det derfor ikke være noen bevegelse i  $x$ - og  $y$ -retning.

Før loddet faller til ro vil man fra bevegelseslikninga (2-25) for  $z$ -retninga finne

$$\ddot{z} = \frac{1}{m} F_z = \frac{1}{m} [-k(z - z_0) + mg], \quad (2-28)$$

som gir følgende differensiallikning av andre orden med konstante koeffisienter til å bestemme tidsavhengigheten til den ene ukjente størrelsen  $z(t)$

$$\ddot{z}(t) + \frac{k}{m} (z(t) - z_0) - g = 0. \quad (2-29)$$

De viktigste alternative måtene å finne den analytiske løsningen til ei gitt differensiallikning – hvis en analytisk løsning i det hele eksisterer – er:

A. Slå opp i ei lærebok eller et av de mange referanseverk som lister opp den analytiske løsningen for de aller fleste av de mest vanlig forekommende differensiallikninger.

B. Kontakt en matematiker eller noen andre med den nødvendige kompetanse.

C. Hvis man kjenner et fysisk system som er beskrevet av differensiallikninga, vil man ofte ved enkel observasjon kunne erverve ei viss formening om hva dynamikken

til systemet er. Hvis systemet f.eks. svinger opp og ned når man gir det en kakk slik at systemet kommer ut av statisk likevekt, består ofte løsningen av mer eller mindre dempede harmoniske (sinus og cosinus) svingninger. Dette kan så benyttes til å sette opp en såkalt prøveløsning (gjettet løsning) som så settes inn i likninga for å se hva som må til av tilpasninger for at prøveløsningen skal være en løsning av differensiallikninga.

D. Man kan selv prøve å integrere differensiallikninga analytisk.

I en arbeidslivssituasjon er alternativene A eller B nesten alltid det beste valg. Ofte vil man også kunne komme opp i den situasjonen at det ikke finnes noen analytisk løsning. I slike tilfeller må man ty til datamaskinbaserte (numeriske) løsningsmetoder.

Likning (2-29) hører til en klasse differensiallikninger som er godt kjent og som dere etter hvert vil stifte bekjentskap med i mange sammenhenger. Her skal vi derfor kun sette opp svaret og vise at det er en løsning av likning (2-29).

For å få likning (2-29) på en enklere form innfører vi en ny variabel  $\xi$  (gresk bokstav som uttales “ksi”) som er lik utsvinget fra den statiske likevektsverdien

$$\xi = z - (z_0 + \Delta\ell). \quad (2-30)$$

Dette gir

$$\ddot{z} = \ddot{\xi} \quad \text{og} \quad z - z_0 = \xi + \Delta\ell = \xi + mg/k,$$

som innsatt i likning (2-29) gir

$$\ddot{\xi}(t) + \frac{k}{m}\xi(t) = 0. \quad (2-31)$$

Ved prøving ser man at den generelle løsningen til denne likninga er

$$\xi(t) = C_1 \sin \sqrt{\frac{k}{m}} t + C_2 \cos \sqrt{\frac{k}{m}} t, \quad (2-32)$$

hvor  $C_1$  og  $C_2$  er integrasjonskonstanter som bestemmes av massens posisjon og hastighet ved tida  $t = 0$ . Dette er rene *harmoniske svingninger* med periode (svingetid)

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}} = 2\pi \sqrt{\frac{\Delta\ell}{g}}, \quad (2-33)$$

hvor man i den siste overgangen har benyttet at  $\Delta\ell = mg/k$ . Dess mindre massen er og dess stivere fjæra er, jo kortere er svingetida.

## OPPSUMMERING AV KAP. 2

- Newtons 2. lov er grunnlikninga som nesten all mekanikk kan utledes fra:  
 $\vec{\mathbf{F}}(\vec{\mathbf{r}}, t) = m \vec{\mathbf{a}}.$
- *Bevegelsesmengden*(impulsen) for en punktmasse er lik *masse · hastighet*.
- Newtons 2. lov gir at *impulsforandringa* er lik *kraft · tid*.
- Newtons 1. lov er et spesialtilfelle av Newtons 2. lov, når  $\Sigma \vec{\mathbf{F}} = 0$ .
- Banen til en kastbevegelse avtegner deler av en parabel.
- Den dynamiske bevegelsen til en friksjonsfri masse koplet til ei fjær er harmonisk.

# Kapittel 3

## Arbeid og energi

### Innhold

3.1	Arbeid og kinetisk energi . . . . .	13
3.2	Potensiell energi og konservative krefter . . . . .	14
3.3	Ikke-konservative krefter . . . . .	16
3.3.1	Vanlig tørr friksjon . . . . .	16
3.3.2	Fluidfriksjon . . . . .	17
3.3.3	Friksjonsarbeid . . . . .	17

Vi skal i dette kapittelet gjøre rede for begrepene arbeid, kinetisk og potensiell energi, og konservative- og ikke-konservative krefter. Vi vil også se på hva som kjennetegner henholdsvis stabile, ustabile og labile likevekter.

### 3.1 Arbeid og kinetisk energi

Begrepene *arbeid* og *energi* ble definert matematisk først i ca. år 1800, av Thomas Young, dvs. mer enn 100 år etter Newtons Principia. Newton – og Galilei – nøyde seg med å betrakte størrelsen bevegelsesmengde.

Vi definerer arbeid  $W$  som

$$\text{arbeid} = (\text{kraft}) \cdot (\text{vei i kraftas retning})$$

(3-1)

dvs. at når utgått vei settes lik  $d\vec{s}$ , får man at

$$dW = \vec{F} \cdot d\vec{s} .$$

(3-2)



Innsetting av  $\vec{F} = m d\vec{v}/dt$  fra Newtons 2. lov gir

$$\vec{F} \cdot d\vec{s} = \left( m \frac{d\vec{v}}{dt} \right) \cdot (\vec{v} dt) = m d\vec{v} \cdot \vec{v} = d\left( \frac{1}{2} m v^2 \right), \quad (3-3)$$

hvor vi har brukt at  $d(v^2) = d(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2) = 2(v_x dv_x + v_y dv_y + v_z dv_z) \equiv 2 \vec{v} \cdot d\vec{v}$ . For arbeid utført på en punktmasse med masse  $m$  fås dermed

$$dW = d\left( \frac{1}{2} m v^2 \right) \quad \text{Arbeid på punktmassen.} \quad (3-4)$$

Uttrykket i parantesen til høyre er *den kinetiske energien* til punktmassen,

$$W_k = \frac{1}{2} m v^2 \quad \text{Punktmassens kinetisk energi.} \quad (3-5)$$

## 3.2 Potensiell energi og konservative krefter

La oss betrakte noen velkjente typer krefter  $\vec{F}$ , og tilhørende arbeid  $\vec{F} \cdot d\vec{s}$ :

Fjærkraft:	$F = -kx$	$dW = -kx dx$	$= -\frac{1}{2}d(kx^2)$
Tyngdekraft:	$F = -mg$	$dW = -mg dh$	$= -d(mgh)$
Gravitasjon:	$F = -Gm_1m_2/R^2$	$dW = -Gm_1m_2 dR/R^2$	$= +d(Gm_1m_2/R)$

For alle tre tilfellene kan arbeidet uttrykkes som forandring i en størrelse *som bare avhenger av posisjonen*, og som vi vil kalle *potensiell energi* eller *kraftpotensial*  $V(\vec{r})$ :

Fjær:	$V(x) = k \frac{1}{2} x^2$	$\vec{F} = (-dV/dx) \hat{e}_x$
Tyngdefelt:	$V(h) = mgh$	$\vec{F} = (-dV/dh) \hat{e}_h$
Gravitasjon:	$V(R) = -Gm_1m_2/R$	$\vec{F} = (-dV/dR) \hat{e}_R,$

hvor  $\hat{e}_x$ ,  $\hat{e}_h$  og  $\hat{e}_R$  er enhetsvektorene langs henholdsvis  $x$ ,  $h$  og  $R$ . Kreftene gitt i de tre eksemplene ovenfor, kan avledes av et kraftpotensial  $V(\vec{r})$  som i tre dimensjoner med  $\vec{r} = \{x, y, z\}$  formelt kan uttrykkes som

$$\vec{F} = -\frac{\partial V(\vec{r})}{\partial x} \hat{e}_x - \frac{\partial V(\vec{r})}{\partial y} \hat{e}_y - \frac{\partial V(\vec{r})}{\partial z} \hat{e}_z = -\nabla V(\vec{r}), \quad (3-6)$$

hvor  $\hat{e}_x$ ,  $\hat{e}_y$  og  $\hat{e}_z$  er enhetsvektoren langs henholdsvis  $x$ -,  $y$ - og  $z$ -aksen. Slike krefter kalles *konservative krefter*.

Den partiellderiverte er definert slik at

$$\left. \frac{dV(x, y, z, t)}{dx} \right|_{y, z, t = \text{konst}} = \frac{\partial V(x, y, z, t)}{\partial x}. \quad (3-7)$$

Ved statisk likevekt er den konservative krafta lik null, hvilket svarer til minimum i den potensielle energien, fordi  $\vec{\mathbf{F}} = -\nabla V(\vec{\mathbf{r}}) = \vec{\mathbf{0}}$ .

Kraftpotensialet i likn. (3-6) satt inn i Newtons 2. lov (2-9) gir

$$m \frac{d}{dt} \vec{\mathbf{v}} + \nabla V(\vec{\mathbf{r}}) = \vec{\mathbf{0}}. \quad (3-8)$$

Uttrykket  $\nabla V(\vec{\mathbf{r}}) \cdot d\vec{\mathbf{r}}$  bør være kjent fra matematikken som den retningsderiverte, dvs. endring  $dV$  av  $V$  i retningen  $d\vec{\mathbf{r}}$ . Med en forflytning  $d\vec{\mathbf{r}}$  i tida  $dt$  vil da  $\nabla V(\vec{\mathbf{r}}) \cdot \frac{d\vec{\mathbf{r}}}{dt} = \frac{dV(\vec{\mathbf{r}})}{dt}$ . Ved å multiplisere likn. (3-8) med  $\frac{d\vec{\mathbf{r}}}{dt}$  får vi da ved å bruke siste del av likn. (3-3) med  $\frac{d\vec{\mathbf{r}}}{dt} = \vec{\mathbf{v}}$  at

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} m \vec{\mathbf{v}}^2 + V(\vec{\mathbf{r}}) \right) = 0, \quad (3-9)$$

som betyr at

$$\frac{1}{2} m \vec{\mathbf{v}}^2 + V(\vec{\mathbf{r}}) = \text{total energi} = \text{konstant}$$

(3-10)

under bevegelsen av punktmassen. Dette er et meget viktig resultat.

Hvis begynnelsesenergi og begynnelsesposisjon er gitt, kan derfor den kinetiske energien i en hvilken som helst posisjon bestemmes fra kjennskap til potensialet, uten at man trenger å løse bevegelseslikningene.

Legg ellers merke til at for et hvert “rimelig glatt” potensial gir Taylor-rekkeutvikling at følgende uttrykk

$$V(x) = V(x_0) + \left. \frac{dV}{dx} \right|_{x_0} (x - x_0) + \frac{1}{2} \left. \frac{d^2V}{dx^2} \right|_{x_0} (x - x_0)^2 + \dots \quad (3-11)$$

er en god tilnærmelse for små verdier av  $(x - x_0)$ . Desto mindre  $(x - x_0)$  er, jo bedre er tilnærmelsen. Når

$$\left. \frac{dV}{dx} \right|_{x_0} = 0, \quad (3-12)$$

betyr det at potensialet enten har et minimum eller et maksimum for  $x = x_0$ .

Når likning (3-12) er oppfylt, kan potensialet for små utslag om likevekt uttrykkes som

$$V(x) = V(x_0) + \frac{1}{2} \left. \frac{d^2V}{dx^2} \right|_{x_0} (x - x_0)^2 + \dots \quad (3-13)$$

Verdien  $x = x_0$  svarer til et minimum i potensialet hvis  $k > 0$  og et maksimum i potensialet hvis  $k < 0$ , hvor

$$k = \left. \frac{d^2V}{dx^2} \right|_{x_0}. \quad (3-14)$$

*Dette medfører at  $k > 0$  og  $k < 0$  svarer til henholdsvis ei stabil likevekt og ei labil (ustabil) likevekt for  $x = x_0$ . Likning (3-13) har samme matematiske form som potensialet for ei fjær med fjærkonstant  $k$ .*

*Likning (3-13) viser også at for alle friksjonsfrie systemer er svingningene om ei stabil likevekt harmoniske og beskrevet av likning (2-29) forutsatt at amplituden til utsvingene er tilstrekkelig små.*

Hvis  $V(x) = \text{konstant}$ , er både den første- og andrederiverte av potensialet lik null. I dette tilfellet har man likevekt (indifferent likevekt) for alle mulig verdier av  $x$ . Dette svarer til situasjonen hvor ei kule er plassert på et horisontalt plan hvor gravitasjonskreftene er vertikale.

### 3.3 Ikke-konservative krefter

Ikke-konservative krefter er krefter som *ikke* kan avledes (assosieres) med kraftpotensial. Arbeidet som utføres av slike krefter, er ikke bare avhengig av begynnelses- og slutt punkt, men også av veien som følges. I Newtonsk mekanikk er *friksjonskrefter* de typiske ikke-konservative krefter.<sup>1</sup> Arbeidet som utføres av friksjonskrefter, fører til *oppvarming* – og regnes i Newtons mekanikken som “tapt”. At også varme er en form for mekanisk energi, ble først vist kvantitativt av James P. Joule<sup>2</sup>. Vi kommer tilbake til det seinere.

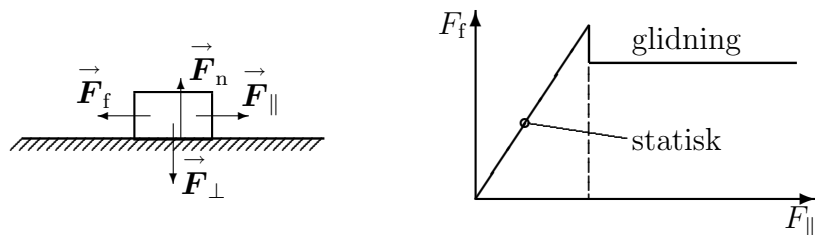
Studiet av friksjon – tribologi – er en egen vitenskap, med svært mange spesialtilfeller. Vi skal her ta med bare et par av de enkleste: Vanlig “tørr friksjon” (mellom et legeme og et plant og tørt underlag) og enkel “fluidfriksjon” (mellom et legeme og en gass eller væske – typisk luftmotstand eller friksjon mellom oljesmurte maskindeler).

---

<sup>1</sup>I elektromagnetisme, termisk fysikk og relativistisk mekanikk opptrer også andre ikke-konservative krefter.

<sup>2</sup>James P. Joule 1818-1889, engelsk fysiker.

### 3.3.1 Vanlig tørr friksjon



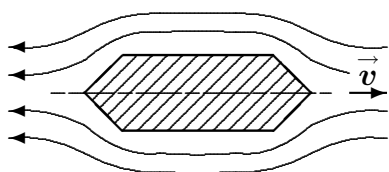
Betrakt en kloss som ligger på et plant underlag, og trykkes mot underlaget med ei kraft  $F_\perp$  (som *kan* være tyngdekrafta, eller en komponent av denne, hvis underlaget er skrått). Den trekkes langs underlaget med ei ytre kraft  $F_\parallel$  (som også *kan* være en komponent av tyngdekrafta), og holdes igjen av ei friksjonskraft  $F_f$  som peker i motsatt retning. Normalkrafta  $F_n$  virker fra underlaget og er motsatt lik  $F_\perp$ .

Så lenge krafta  $F_\parallel$  er lita nok, blir klossen liggende i ro. Den totale akselererende krafta på klossen er dermed lik null, og  $F_f = -F_\parallel$ . Når  $F_\parallel$  økes, begynner *plutselig* klossen å gli – ved en verdi av  $F_\parallel$  proporsjonal med krafta fra underlaget  $F_n$ , og friksjonskrafta faller litt.

$$\begin{aligned} \text{Statisk friksjon:} \quad & F_f \leq \mu_s F_n \quad \text{og} \quad |F_f| = |F_\parallel| \\ \text{Glidende friksjon:} \quad & F_f = \mu_k F_n \end{aligned} \quad (3-15)$$

hvor  $\mu_s$  er den *statiske* og  $\mu_k$  den *kinetiske* (eller glidende) friksjonskoeffisienten. Det vil alltid gjelde at  $\mu_k \leq \mu_s$ , som vi bl.a. nyttiggjør oss av ved klassisk skigang.

### 3.3.2 Fluidfriksjon



Et legeme beveger seg med hastighet  $\vec{v}$  i ei væske eller gass (et fluid), med lav nok hastighet til at strømminga rundt legemet er laminær uten virvler som kommer og går (turbulens).

Friksjonskrafta – som reduserer  $\vec{v}$  – er da proporsjonal med  $\vec{v}$ ,

$$\boxed{\vec{F}_f = -k_f \vec{v}, \quad \text{hvor } k_f \text{ er en positiv konstant.}} \quad (3-16)$$

### 3.3.3 Friksjonsarbeid

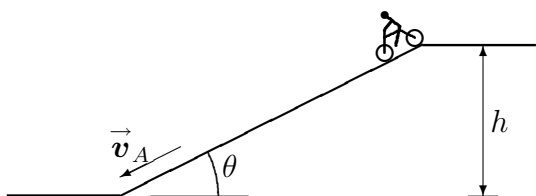
Når et legeme beveger seg en strekning  $d\vec{s}$  og det er friksjon, gjør friksjonskrafta  $F_f$  et arbeid

$$W_f = \int \vec{F}_f \cdot d\vec{s}.$$

Dette arbeidet er alltid negativt da  $\vec{F}_f$  og forflytningen  $d\vec{s}$  alltid peker i motsatt retning. Friksjonen tapper derfor legemet for energi, og energilikningen (3-9) må revideres. Totalenergien reduseres:

$$d\left(\frac{1}{2} m \vec{v}^2 + V(\vec{r})\right) = W_f. \quad (3-17)$$

*EKSEMPEL: Syklist i bratt bakke (Fra eksamen i fysikk/forkurs 8.1.99)*



En syklist med masse  $m$  setter utfor en bakke, med høyde  $h$  og helningsvinkel  $\theta$  – uten hverken å trække eller bremse. Hva blir hastigheten  $v_A$  ved bunnen av bakken? Og hvor lang tid  $t_A$  tar det å komme seg ned bakken?

Etter krasj og sykehusopphold prøver syklisten seg igjen i samme bakke. Men nå bremser han – klokere av skade – alt han kan, med ei konstant bremsekraft på 300 N. Hva blir denne gangen hastigheten  $v_B$  og tida  $t_B$ ?

Se bort fra luftmotstanden. Sett inn tallverdier:  $m = 80$  kg,  $h = 20$  m,  $\theta = 30^\circ$ .

Løsningsforslag:

Det første man bør gjøre når man står overfor en slik oppgave, er å bestemme det minste antall parametere (frihetsgrader) som er nødvendig for å beskrive de egenskapene til systemet som vi er interesserte i. Dette er blant annet viktig fordi *antall uavhengige likninger som man må gjøre seg bruk av, er lik antallet frihetsgrader som systemet har*. Videre er det alltid lurt og tenke seg litt om før man bestemmer seg for hvor man skal plassere og orientere det koordinatsystemet som man ønsker å benytte. Det siste valget har ofte stor innvirkning på hvor kompliserte selve beregningene blir.

I og med at all bevegelse av interesse foregår langs ei rett linje, står vi her overfor et system med kun en frihetsgrad. Det vil si at vi kun trenger ei likning for å løse oppgaven. Hvis vi legger vårt lokale koordinatsystem med origo akkurat i toppen av bakken og med  $x$ -aksen langs bakken, vil  $x$  fullt ut beskrive syklistens bevegelse. Hastigheten det spørres om i oppgaven, vil da være den tidsderivate av  $x$  i bunnen av bakken.

I praksis har vi to likninger å velge mellom når vi nå skal besvare oppgaven: 1) Newtons 2. lov og 2) Likninga som holder regnskap med energiforbruket (enegrikon-

serveringslikninga). Vi vil her for illustrasjonens skyld bruke begge de to alternative metodene til å besvare oppgaven.

1) Fra teksten foran finner vi at den ytre krafta og dermed akselerasjonen er konstant. I det følgende angir indeks A størrelser uten friksjon og B størrelser med friksjon. Hastigheten i bunnen av bakken er lik henholdsvis

$$v_A = a_A t_A \quad v_B = a_B t_B \quad (3-18)$$

Videre har vi at

$$L = \frac{1}{2} a_A t_A^2 \quad L = \frac{1}{2} a_B t_B^2, \quad (3-19)$$

$$t_A = \sqrt{2L/a_A} \quad t_B = \sqrt{2L/a_B}, \quad (3-20)$$

hvor bakkens lengde  $L = h/\sin \theta$ . Newtons 2. lov gir at

$$a_A = F_g/m \quad a_B = (F_g - F_f)/m, \quad (3-21)$$

hvor komponenten av gravitasjonskrafta langs bakken er gitt som  $F_g = mg \sin \theta$  og  $F_f$  er friksjonskrafta. Ved å benytte de siste uttrykkene for akselerasjonen finner man følgende svar på oppgaven:

$$\underline{v_A = \sqrt{2gh}} \quad \underline{v_B = \sqrt{2gh} \cdot \sqrt{1 - \frac{F_f}{mg \sin \theta}}} \quad (3-22)$$

$$\underline{t_A = \frac{1}{\sin \theta} \sqrt{\frac{2h}{g}}} \quad \underline{t_B = \frac{1}{\sin \theta} \sqrt{\frac{2h}{g}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - F_f/mg \sin \theta}}} \quad (3-23)$$

Innsetting av tallverdier  $m = 80 \text{ kg}$ ,  $h = 20 \text{ m}$ ,  $\theta = 30^\circ$ ,  $g \simeq 10 \text{ m/s}^2$  og  $F_f = 300 \text{ N}$  gir

$$\underline{v_A = 20 \text{ m/s} = 72 \text{ km/time}} \quad \underline{v_B = 10 \text{ m/s} = 36 \text{ km/time}} \quad (3-24)$$

$$\underline{t_A = 4,0 \text{ s}} \quad \underline{t_B = 8,0 \text{ s}} \quad (3-25)$$

2) Ved bruk av energikonserveringslikninga får man direkte at

$$W_k + V = \text{konstant} \quad \Rightarrow \quad mgh = \frac{1}{2} m v_A^2 \quad (3-26)$$

$$\Rightarrow \quad \underline{v_A = \sqrt{2gh}}. \quad (3-27)$$

Tida  $t$  kan vi finne hvis vi kjenner middelhastigheten  $\bar{v}$  og lengden  $L$ ;  $L = \bar{v} t$ . Fordi vi har konstant akselerasjon, fra  $v = 0$ , må middelhastigheten være halvparten av topphastigheten. Vi har derfor

$$\underline{t_A = \frac{L}{\bar{v}_A} = \frac{h/\sin \theta}{v_A/2} = \frac{1}{\sin \theta} \cdot \sqrt{\frac{2h}{g}}}. \quad (3-28)$$

Når man har friksjon, går noe av energien tapt til varme pga. friksjonsarbeid  $F_f s$ . Endring i energi (før – etter) er lik friksjonsarbeidet, som kan formuleres:

$$d(W_k + V) = \int F_f ds \quad \Rightarrow \quad mgh = \frac{1}{2}mv_B^2 + \frac{F_f h}{\sin \theta} \quad (3-29)$$

$$v_B = \sqrt{2gh \cdot \left(1 - \frac{F_f}{mg \sin \theta}\right)} \quad (3-30)$$

$$\underline{t_B} = \frac{L}{\bar{v}_B} = \frac{h/\sin \theta}{v_B/2} = \frac{1}{\sin \theta} \sqrt{\frac{2h}{g} \frac{1}{1 - F_f/(mg \sin \theta)}} \quad (3-31)$$

En ser at løsningen som baserte seg på prinsippet om energibevarelse i dette tilfellet var noe enklere, men for å komme fram måtte vi benytte oss av et uttrykk for middelverdien som bare kunne oppnås ved bruk av Newtons 2. lov.

### OPPSUMMERING AV KAP. 3

- *Arbeid* = (kraft) · (utgått vei i kraftas retning), dvs.  $dW = \vec{F} \cdot d\vec{s}$ .
- At noe “innholder” *energi*, vil si at dette noe kan utføre arbeid.
- Ved akselerasjon av en punktmasse med masse  $m$  utføres et arbeid. Arbeidet utført for å akselerere fra  $v = 0$  til  $v$  er lik  $\frac{1}{2}mv^2$ . Uttrykket  $W_k = \frac{1}{2}mv^2$  kalles punktmassens *kinetiske energi*.
- Når den ytre krafta på en punktmasse er en funksjon kun av posisjonen, dvs.  $\vec{F} = \vec{F}(\vec{r})$ , vil også det arbeidet som skal til for å flytte en punktmasse fra origo til posisjonen  $\vec{r}$ , kun være en funksjon av posisjonen. Ei slik kraft kalles *konservativ kraft* og arbeidet som kreves kalles *potensiell energi*.
- Den konservative krafta assosiert med en gitt potensiell energi, er for enhver posisjon  $\vec{r}$  lik minus *gradienten* til potensielle energien i posisjon  $\vec{r}$ , dvs.  $\vec{F} = -\nabla V(\vec{r})$ .
- For en punktmasse i et konservativt potensial svarer et minimum i potensiell energi til *stabil statisk likevekt* (“hviler i bunnen”).
- For en punktmasse i et konservativt potensial svarer et maksimum i potensiell energi til *labil statisk likevekt* (“balanserer på toppen”).
- For en punktmasse i et konservativt potensial er summen av kinetisk og potensiell energi posisjonsuavhengig (konstant) og lik punktmassens *totale energi*.
- *Friksjonskrefter* er eksempel på *ikke-konservative krefter*. Mens konservative krefter kun er avhengig av punktmassens posisjon, er friksjonskrefter avhengig også av bevegelsen.

- Ved tørr friksjon er *glidefriksjonen* mindre enn *den statisk friksjonen*, men ellers hastighetsuavhengig.
- Friksjonskrafta for et sfærisk legeme som beveger seg tilstrekkelig langsomt gjennom et fluid (*fluidfriksjon*), er proporsjonal med hastigheten og har retning motsatt retning av hastigheten.





# Kapittel 4

## Dreiemoment og vektstangprinsipp

### Innhold

4.1	Vektstang i skålvektkonfigurasjon . . . . .	21
4.2	Løfting med spett . . . . .	22
4.3	Dreiemoment . . . . .	23
4.3.1	Dreiemoment og arbeid . . . . .	23
4.4	Tyngdepunkt og massefellespunkt . . . . .	24
4.5	Statisk likevekt . . . . .	24
4.5.1	Opplagret bjelke med last . . . . .	25

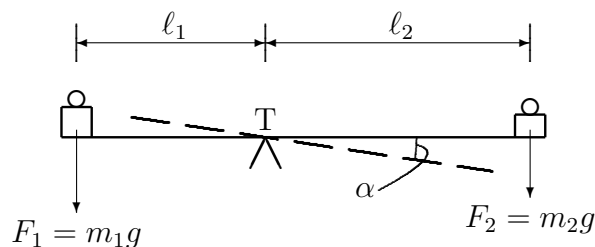
Vi skal i dette kapittelet gjøre rede for vektstangprinsippet og begreper massefellespunkt, dreiemoment og kravene til statisk likevekt.

“Gi meg et fast punkt, og jeg skal løfte jorda”, sa Arkhimedes<sup>1</sup>, oldtidens største naturviter og militæringenjør. Hva man kan gjøre med ei vektstang, har vært kjent fra tidenes morgen – men det ser ut til å ha gått ut av pensum i dagens norske videregående skole. Vi skal derfor i det følgende gi ei kort innføring i “Arkhimediske prinsipper”.

### 4.1 Vektstang i skålvektkonfigurasjon

La oss starte med å se på en vanlig skålvektkonfigurasjon, i idealisert utgave:

<sup>1</sup>Arkhimedes (ca. 287 – 212 f.Kr.), gresk vitenskapsmann, Siracusa på Sicilia (på den tida under gresk herredømme). Berømt for sin forståelse og bruk av vektarmprinsippet, legemers og plans tyngdepunkt, legemers oppdrift i væsker og sine teknologiske bidrag til forsvaret av sin heimby.



To lodd, masser  $m_1$  og  $m_2$ .

Vektløs stang, lengde  $\ell$ .

Opplagringspunkt T.

Lengdene  $\ell_1$ ,  $\ell_2$  skal velges slik at systemet er i balanse.

Likevekt svarer, som nevnt tidligere, til et minimum i den potensielle energien. Dette har sammenheng med at for et minimum er den deriverte av potensialet lik null, hvilket innebærer at summen av ytre krefter er lik null – som i sin tur, i følge Newtons 2. lov, betyr at det ikke er noen akselerasjon. Dvs. hvis systemet er i ro, vil det forbli i ro – hvilket er definisjonen på at system er i likevekt.

Velger man å angi den potensielle energien i forhold til energien når vektarma befinner seg i horisontal stilling, får man at den potensielle energien til vekta er gitt som

$$V = F_1 \Delta h_1 + F_2 \Delta h_2 = F_1 \ell_1 \sin \alpha - F_2 \ell_2 \sin \alpha = (F_1 \ell_1 - F_2 \ell_2) \sin \alpha \quad (4-1)$$

hvor  $\Delta h_i$  ( $i=1,2$ ) er høyden til masse  $m_i$  over horisontalplanet gjennom opplagringspunktet T. For at vinkel  $\alpha = 0$  skal svare til likevekt, må man for  $\alpha = 0$  ha at

$$\frac{dV}{d\alpha} = (F_1 \ell_1 - F_2 \ell_2) \cos \alpha = 0. \quad (4-2)$$

Når vekta er plassert i et homogent gravitasjonsfelt ( $g = \text{konstant}$ ), gir dette at man har likevekt når

$$m_1 \ell_1 = m_2 \ell_2, \quad (4-3)$$

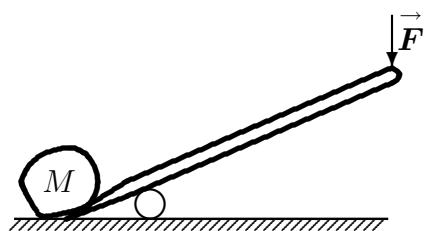
– som enhver gammel fiskehandler vet.

Legg merke til at når likning (4-3) er oppfylt, er den potensielle energien til vekta lik null for alle verdier av vinkel  $\alpha$ . Det vil si at vekta er i likevekt for alle verdier av vinkel  $\alpha$ , når likning (4-3) er oppfylt. Matematisk sett er dette analogt til situasjonen når man legger ei kule på ei plan horisontal plate.

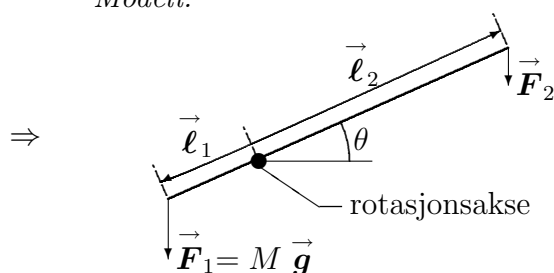
## 4.2 Løfting med spett

La oss så se på vektstanga brukt som løfteredskap, som illustrert nedenunder – i reell og idealisert modell.

Løfting med spett:



Modell:



Den generelle likevektsbetingelsen blir som for skålvekta at

$$F_1 \ell_1 \cos \theta = F_2 \ell_2 \cos \theta. \quad (4-4)$$

For løfting med spett har man dermed at

$F_1 \ell_1 = F_2 \ell_2.$

(4-5)

Dvs. at med tilstrekkelig lang arm  $\ell_2$  kan massen  $M$  løftes med vilkårlig liten kraft  $F_2$  (forutsatt at spettet ikke brekker og opplagringspunktet tåler belastninga og ligger i ro).

## 4.3 Dreiemoment

Med henvisning til likning (4-4) viser det seg nyttig å innføre vektoren  $\vec{\tau}$

$$|\vec{\tau}_1| = F_1 \ell_1 \cos \theta = F_1 \ell_1 \sin(\pi/2 - \theta) = |\vec{\ell}_1 \times \vec{F}_1| \quad (4-6)$$

$$|\vec{\tau}_2| = F_2 \ell_2 \cos \theta = F_2 \ell_2 \sin(\pi/2 - \theta) = |\vec{\ell}_2 \times \vec{F}_2| \quad (4-7)$$

der  $\pi/2 - \theta =$  vinkelen mellom  $\vec{\ell}$  og  $\vec{F}$ . Vektoren kalles *dreiemoment* (engelsk: “torque”) og på full vektoriell form er den definert

$\vec{\tau} = \vec{\ell} \times \vec{F}.$

(4-8)

For det spesialtilfellet at retninga til krafta står vinkelrett på retninga til arma, har man at

dreiemoment = kraft · arm.

(4-9)

### 4.3.1 Dreiemoment og arbeid

Under diskusjonen av skålvekta fant vi at den potensielle energien knyttet til kraft  $F_1$  var gitt som  $V = F_1 \ell_1 \sin \alpha$ . For konservative systemer er endringa i potensiell

energi  $dV$  lik utført arbeid  $dW$  slik at ved rotasjon er

$$dW = F_1 \ell_1 \cos \alpha \, d\alpha = |\vec{\tau}_1| \, d\alpha. \quad (4-10)$$

Eller sagt med ord: Ved rotasjon har man at

$$\text{arbeid} = \text{dreiemoment} \cdot \text{vinkel}, \quad (4-11)$$

mens man for translasjon hadde at arbeid er lik kraft ganger vei. Dette betyr at ved rotasjon spiller dreiemomentet rollen som ei “generalisert kraft” mens rotasjonsvinkelen spiller rollen som “generalisert vei”.

## 4.4 Tyngdepunkt og massefellespunkt

Når skålvektene er i likevekt, er virkninga av de to massene  $m_1$  og  $m_2$  den samme som om det i steden var plassert en masse  $M = m_1 + m_2$  i opplagringspunktet. Opplagringspunktet sammenfaller i dette tilfellet med massenes tyngdepunkt.

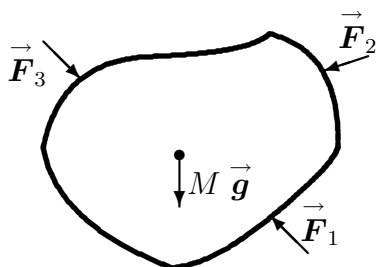
Tyngdepunktet er nesten alltid likt massefellespunktet, så la oss definere det først: For ei samling punktmasser er *massefellespunktet* gitt ved posisjonsvektoren  $\vec{r}_M$

$$\vec{r}_M = \frac{\sum_{i=1}^N m_i \vec{r}_i}{\sum_{i=1}^N m_i} = \frac{\sum_{i=1}^N m_i \vec{r}_i}{M}. \quad (4-12)$$

der  $M$  er den totale massen til systemet.

For det vanlige forekommende spesialtilfellet at massens akselerasjon  $\vec{g}$  er konstant over systemet, er tyngdepunktet og massefellespunktet sammenfallende. I praksis kan tyngdepunktet for et legeme finnes ved først å henge legemet opp i ett punkt og så trekke loddlinja gjennom opphengingspunktet. Deretter henger man opp legemet i et nytt punkt og trekker den nye loddlinja. Tyngdepunktet er skjæringspunktet mellom de to loddlinjene. Som vi altså også betrakter som massefellespunktet.

## 4.5 Statisk likevekt



Vi ser på et utstrakt legeme med masse  $M = \sum m_k$ , påvirket av ytre krefter  $\vec{F}_i$  og tyngdekraft  $M \vec{g} = \sum m_k \vec{g}$ . Hva er betingelsene for at legemet skal være helt i ro?

Den første likevektsbetingelsen er at akselerasjonen er lik null som i følge Newtons 2. lov innebærer at summen av *alle krefter* – inklusive tyngdekrafta – må være lik null

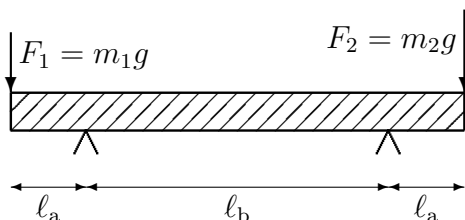
$$\sum_i \vec{F}_i = \vec{0} \quad \text{Betingelse for translasjonslikevekt.} \quad (4-13)$$

Den neste likevektsbetingelsen er at legemet ikke skal begynne å *rottere* – dvs. at summen av *dreiemomentene* (om en hvilken som helst akse) skal være lik null

$$\sum_i \vec{\tau}_i = \sum_i \vec{r}_i \times \vec{F}_i = \vec{0} \quad \text{Betingelse for rotasjonslikevekt.} \quad (4-14)$$

De to siste likningene er begge avledninger av Newtons 2. lov og de er viktige f.eks. ved analyse av kreftene i en vid klasse bygningskonstruksjoner.

#### 4.5.1 Opplagret bjelke med last



En homogen bjelke med masse  $M$  er opplagret som vist i figuren, og belastet med masser  $m_1$  og  $m_2$  i endepunktene.

Hva er lagerkreftene på venstre og høyre lager,  $F_v$  og  $F_h$ ?

Vi har her to ukjente,  $F_v$  og  $F_h$  og trenger derfor to uavhengige likninger for å kunne bestemme disse to størrelsene:

*Kraftbalanse:*

$$\sum \vec{F}_i = \vec{0} \Rightarrow F_v + F_h = (m_1 + m_2 + M)g. \quad (4-15)$$

*Dreiemomentbalanse* om høyre lager (“vilkaarlig valgt akse”):

$$\sum \vec{\tau}_i = \vec{0} \Rightarrow (\ell_a + \ell_b)(m_1 g) - \ell_b F_v + (\ell_b/2)(M g) - \ell_a(m_2 g) = 0. \quad (4-16)$$

Likningene (4-15) og (4-16) gir de to likningene vi trenger for bestemmelse av de to ukjente kreftene. Litt standard algebra gir

$$\begin{aligned} F_v &= \frac{1}{2} M g + m_1 g (1 + \ell_a / \ell_b) - m_2 g \ell_a / \ell_b \\ F_h &= \frac{1}{2} M g + m_2 g (1 + \ell_b / \ell_a) - m_1 g \ell_b / \ell_a. \end{aligned} \quad (4-17)$$

Hva blir situasjonen hvis det var *tre* i stedet for to opplagringspunkter? Da har vi ikke nok likninger. Det hjelper ikke å sette opp flere momentlikninger fordi

det gir bare “null = null” type informasjon. Systemet er da “statisk ubestemt”, og det er nødvendig å ta de elastiske egenskapene til bjelken i betraktning for å finne opplagringskreftene. Matematisk sett analoge situasjoner opptrer i mange bygningskonstruksjoner. Det skal vi *ikke* gå nærmere inn på i dette kurset.

#### OPPSUMMERING AV KAP. 4

- *Dreiemoment* = kraft · arm, når retninga til krafta er normalt på arma.
- I det generelle tilfellet er dreiemomentet en vektor og definert som  $\vec{\tau} = \vec{\ell} \times \vec{F}$ , hvor vektoren  $\vec{\ell}$  angir både armas lengde og retning, og  $\vec{F}$  er krafta.
- Ei vekt er i statisk likevekt når dreiemomentet om opplagringspunktet er lik null. I samsvar med Arkhimedes’ prinsipp gir dette for homogene gravitasjonsfelt at  $m_1\ell_1 = m_2\ell_2$ , hvor  $m$  er masse,  $\ell$  er lengda til arma og indeksen angir henholdsvis vektskål 1 og vektskål 2.
- Ved rotasjon er arbeid = dreiemoment multiplisert med assosiert rotasjonsvinkel.
- I homogent gravitasjonsfelt er massefellespunktet og tyngdepunktet sammenfallende, som da er gitt ved  $\vec{r}_M = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^N m_i \vec{r}_i$ , hvor  $\vec{r}_i$  er posisjonsvektoren til punktmasse  $i$  med masse  $m_i$  og  $M$  er total masse.
- Et stivt legeme er i statisk likevekt når A) summen av de ytre kreftene er lik null og B) summen av alle momenter om en vilkårlig valgt akse er lik null.

# Kapittel 5

## Topartikkelsystemer

### Innhold

5.1	Separasjon av bevegelseslikningene . . . . .	28
5.2	Elastisk støt i én dimensjon . . . . .	30
5.3	Uelastisk støt i én dimensjon – ballistisk pendel . . . .	31

Vi skal i dette kapittelet vise hvordan man ved å innføre nye koordinater lettere kan beregne dynamikken til to punktmasser med sentralkrefter. Vi vil i hovedsak bruke denne kunnskapen til å beregne virkninga av elastiske og uelastiske støt mellom to punktmasser.

Topartikkelsystemer er systemer som kan modelleres som bestående av **to** punktmasser. Vi vil her videre anta at disse punktmassene vekselvirker *bare med hverandre*.

Eksempler på hva som kan modelleres på denne måten, med “god approksimasjon”, er

- To molekyler med masse  $\gg$  et hydrogenatom, som støter sammen i en gass (brukes i mikroskopisk beskrivelse av varmelæra)
- To biljardkuler som støter sammen
- En bil som treffer en elg
- En planet som sirkler rundt sola

For topartikkelproblemet beskrevet over, har man bevegelse i 3 dimensjoner  $(x, y, z)$  for hver av partiklene, dvs. totalt 6 frihetsgrader  $(x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2)$ . Man har derfor i prinsippet *et sett med 6 koplede differensiallikninger*, og ikke bare 3 som vist i likning (2-1) for kun en partikkel. Det kan ved første øyekast synes relativt håpløst å skulle lykkes med å gjøre noe analytisk med denne typen problemer.

Det viser seg imidlertid at ved å foreta et gunstig valg av nye koordinater – som alle kan uttrykkes ved de gamle koordinatene – man i stedet får *to uavhengige sett med*

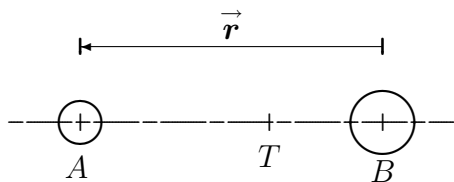


*koblede differensiallikninger, hvor hvert sett består av tre likninger.* Dette viser seg å innebære ei betydelig forenkling. Tre av de nye koordinatene beskriver bevegelsen av massefellespunktet til de to punktmassene, mens de resterende tre koordinatene beskriver relativbevegelsen av de to punktmassene.

Dvs. at det opprinnelige 6-dimensjonale problemet er *matematisk sett separabelt* slik at man i stedet får to 3-dimensjonale sett med differensiallikninger. Fordi dynamikken beskrevet av de to nye likningssettene er uavhengig, kan dynamikken for henholdsvis massefellespunktet og relativbevegelsen regnes ut hver for seg. Den totale resulterende dynamikken blir summen av massefellespunkt- og relativbevegelsen. Dette er et nytt eksempel på gyldigheten av *superposisjonsprinsippet* hvor dynamikken beskrevet vha. visse koordinater er matematisk sett separable fra dynamikken beskrevet av de øvrige koordinatene, eller subsett av disse.

## 5.1 Separasjon av bevegelseslikningene

Vi tar for oss et topartikkelsystem  $(A, B)$ , og skal i utgangspunktet tillate sentralkrefter mellom partiklene, og ytre krefter.<sup>1</sup> Vi vil i løpet av behandlingen av problemet se hva vi kan tillate av ytre krefter uten at problemet blir uløselig.



Masser, posisjoner og krefter:

$$\begin{aligned} m_A, \vec{r}_A, \vec{F}_A &= \vec{F}_{AB} + \vec{F}_{AY} \\ m_B, \vec{r}_B, \vec{F}_B &= \vec{F}_{BA} + \vec{F}_{BY} \\ \vec{F}_{AB} + \vec{F}_{BA} &= 0 \quad (\text{actio reactio est})^2 \end{aligned}$$

$\vec{F}_{AB}$  er kraft på punktmasse  $A$  pga. vekselvirkning med punktmasse  $B$  og med retning fra  $A$  til  $B$ .  $\vec{F}_{AY}$  er kraft på punktmasse  $A$  pga. ytre krefter.

Vi innfører nå følgende nye koordinater

$$\text{Relativkoordinat} \quad \vec{r} = \vec{r}_A - \vec{r}_B \quad (5-1)$$

$$\text{Massefellespunktkoordinat} \quad (\text{fra likn. (4-12) med } M = m_A + m_B):$$

$$\vec{R}_M = \frac{m_A}{M} \vec{r}_A + \frac{m_B}{M} \vec{r}_B. \quad (5-2)$$

Dvs. at man har transformasjonen

$$\{\vec{r}_A, \vec{r}_B\} \Longleftrightarrow \{\vec{R}_M, \vec{r}\}, \quad (5-3)$$

<sup>1</sup>Kreftene mellom punktpartikler er alltid sentralkrefter når de kan avledes av et kraftpotensial. Eksempler er gravitasjonskraft, og elektrostatisk kraft (Coulombkraft). Magnetiske krefter mellom ladde partikler er derimot *ikke* sentralkrefter.

<sup>2</sup>Newtons tredje lov: Kraft lik motkraft.

hvor

$$\vec{r} = \vec{r}_A - \vec{r}_B \quad \vec{r}_A = \vec{R}_M + \frac{m_B}{M} \vec{r} \quad (5-4)$$

$$\vec{R}_M = \frac{m_A}{M} \vec{r}_A + \frac{m_B}{M} \vec{r}_B \quad \vec{r}_B = \vec{R}_M - \frac{m_A}{M} \vec{r}. \quad (5-5)$$

Utgangspunktet for beregning av bevegelsene i systemet er fortsatt Newtons 2. lov, som her blir

$$\vec{F}_A = \vec{F}_{AB} + \vec{F}_{AY} = m_A \frac{d^2 \vec{r}_A}{dt^2} \quad (5-6)$$

$$\vec{F}_B = \vec{F}_{BA} + \vec{F}_{BY} = m_B \frac{d^2 \vec{r}_B}{dt^2}. \quad (5-7)$$

Addisjon av likningene (5-6) og (5-7) og bruk av at  $\vec{F}_{AB} + \vec{F}_{BA} = 0$ , gir følgende likning for *massefellespunktbevegelsen*

$$(5-6) + (5-7) \Rightarrow \underbrace{\vec{F}_{AY} + \vec{F}_{BY}}_{\vec{F}_Y} = \frac{d^2}{dt^2} \underbrace{(m_A \vec{r}_A + m_B \vec{r}_B)}_{M \vec{R}_M}. \quad (5-8)$$

Som man vel kunne vente, kan massefellespunktbevegelsen beregnes fra total ytre kraft  $\vec{F}_Y$  og total masse  $M$ , uavhengig av hva kreftene *mellom partiklene* måtte være:

$$\vec{F}_Y = \frac{d}{dt} \vec{P} \quad \text{Bevegelseslikninga for massefellespunktbevegelsen,}$$

(5-9)

hvor  $\vec{P} = M \frac{d}{dt} \vec{R}_M = M \vec{V}_M$  = total bevegelsesmengde. Og – nota bene –

- Hvis summen av ytre krefter er lik null, er den totale bevegelsesmengden  $\vec{P}$  en bevegelseskonstant

Ved å subtrahere likning (5-7)/ $m_B$  fra likning (5-6)/ $m_A$  får vi ei likning for *relativbevegelsen*

$$\frac{(5-6)}{m_A} - \frac{(5-7)}{m_B} \Rightarrow \frac{\vec{F}_{AB} + \vec{F}_{AY}}{m_A} - \frac{\vec{F}_{BA} + \vec{F}_{BY}}{m_B} = \frac{d^2}{dt^2} (\vec{r}_A - \vec{r}_B) \quad (5-10)$$

Vi slår sammen  $\vec{F}_{AB}$  og  $\vec{F}_{BA}$  leddene,

$$\frac{\vec{F}_{AB}}{m_A} - \frac{\vec{F}_{BA}}{m_B} = \frac{\vec{F}_{AB}}{m_A} + \frac{\vec{F}_{AB}}{m_B} = \frac{\vec{F}_{AB}}{m_r}, \quad (5-11)$$

hvor

$$m_r = \frac{m_A m_B}{(m_A + m_B)} = \frac{m_A m_B}{M} = \text{den reduserte massen.}$$

Multiplikasjon av likn. (5-10) med  $m_r$  gir

$$\vec{\mathbf{F}}_{AB} + \frac{m_B}{M} \vec{\mathbf{F}}_{AY} - \frac{m_A}{M} \vec{\mathbf{F}}_{BY} = m_r \frac{d^2 \vec{\mathbf{r}}}{dt^2}. \quad (5-12)$$

Hvis de ytre kreftene *enten* er lik null *eller* er proporsjonale med massene (tyngdekraft  $\vec{\mathbf{F}} = m \vec{\mathbf{g}}$ ), forenkles dette til

$$\vec{\mathbf{F}}_{AB} = \frac{m_A m_B}{m_A + m_B} \frac{d^2 \vec{\mathbf{r}}}{dt^2} = m_r \frac{d^2 \vec{\mathbf{r}}}{dt^2} \quad \text{Bevegelseslikninga for relativbevegelsen.}$$

(5-13)

Den kinetiske energien kan skrives som summen av energien til massefellespunktbevegelsen, og energien til relativbevegelsen:

$$W_k = \frac{1}{2} M V_M^2 + \frac{1}{2} m_r u^2. \quad (5-14)$$

Bevis følger. I uttrykket  $W_k = \frac{1}{2} m_A v_A^2 + \frac{1}{2} m_B v_B^2$  setter vi inn  $\vec{\mathbf{v}}_{A,B}$  uttrykt ved tyngdepunkthastighet  $\vec{\mathbf{V}}_M = d\vec{\mathbf{R}}_M/dt$  og *relativhastighet*  $\vec{\mathbf{u}} = d\vec{\mathbf{r}}/dt$

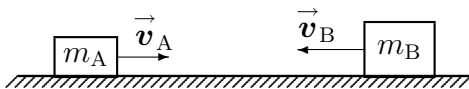
$$\vec{\mathbf{v}}_A = \vec{\mathbf{V}}_M + \frac{m_B}{M} \vec{\mathbf{u}} \quad \Rightarrow \quad v_A^2 = V_M^2 + 2 \frac{m_B}{M} \vec{\mathbf{V}}_M \cdot \vec{\mathbf{g}} + \left(\frac{m_B}{M}\right)^2 u^2 \quad (5-15)$$

$$\vec{\mathbf{v}}_B = \vec{\mathbf{V}}_M - \frac{m_A}{M} \vec{\mathbf{u}} \quad \Rightarrow \quad v_B^2 = V_M^2 - 2 \frac{m_A}{M} \vec{\mathbf{V}}_M \cdot \vec{\mathbf{g}} + \left(\frac{m_A}{M}\right)^2 u^2 \quad (5-16)$$

$\vec{\mathbf{V}}_M \cdot \vec{\mathbf{u}}$ -leddene faller mot hverandre, og vi står etter litt opprydding igjen med likn. (5-14).

## 5.2 Elastisk stød i én dimensjon

Vi tar for oss stød mellom to klosser som glir friksjonsløst på et plant underlag.



Hastigheter før stød:

$$\vec{\mathbf{v}}_A = v_A \hat{\mathbf{e}}_x$$

$$\vec{\mathbf{v}}_B = v_B \hat{\mathbf{e}}_x \quad (v_B < 0 \text{ på figuren})$$

$$\text{Før stød:} \quad \vec{\mathbf{v}}_A, \vec{\mathbf{v}}_B \quad \vec{\mathbf{V}}_M, \vec{\mathbf{u}} := \vec{\mathbf{v}}_A - \vec{\mathbf{v}}_B \quad (5-17)$$

$$\text{Etter stød:} \quad \vec{\mathbf{v}}'_A, \vec{\mathbf{v}}'_B \quad \vec{\mathbf{V}}'_M, \vec{\mathbf{u}}' := \vec{\mathbf{v}}'_A - \vec{\mathbf{v}}'_B \quad (5-18)$$

Vi skal finne hastighetene etter stød,  $\vec{\mathbf{v}}'_A = v'_A \hat{\mathbf{e}}_x$  og  $\vec{\mathbf{v}}'_B = v'_B \hat{\mathbf{e}}_x$ , dvs. to ukjente. For å bestemme disse størrelsene trenger vi to uavhengige likninger.

*Den første likninga:* Når det ikke er ytre krefter i  $x$ -retningen er total bevegelsesmengde (i  $\hat{\mathbf{e}}_x$ -retningen) konserverte:  $P = MV_M = \text{konstant}$ . Dette gir

$$V'_M = V_M, \quad \text{dvs.} \quad V'_M = \frac{m_A}{M}v_A + \frac{m_B}{M}v_B. \quad (5-19)$$

*Den andre likninga:* For elastisk støt er kinetisk energi i massefellespunktsystemet konserverte. Fra likning ((5-14)) følger

$$\frac{1}{2}M V_M^2 + \frac{1}{2}m_r u^2 = \frac{1}{2}M V_M'^2 + \frac{1}{2}m_r u'^2. \quad (5-20)$$

og da  $V_M = V'_M$  følger

$$u^2 = u'^2 \quad \text{og, da } \vec{u} \text{ skifter retning:} \quad u' = -u = -(v_A - v_B) \quad (5-21)$$

Vi har dermed

$$\begin{aligned} v_A &\rightarrow v'_A = V'_M + \frac{m_B}{M}u' = \frac{m_A - m_B}{M}v_A + 2\frac{m_B}{M}v_B, \\ v_B &\rightarrow v'_B = V'_M - \frac{m_A}{M}u' = \frac{m_B - m_A}{M}v_B + 2\frac{m_A}{M}v_A. \end{aligned} \quad (5-22)$$

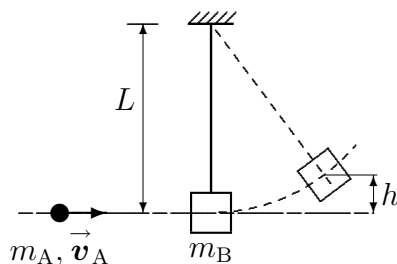
Vi ser spesielt at hvis massene er *like*, fører støtet til at klossene *bytter* hastighet (demonstrasjon i auditoriet).

*Talleksempel (fra eksamen i fysikk/forkurs 8.1.99):*

$m_A = 2,0 \text{ kg}$ ,  $m_B = 3,0 \text{ kg}$  ; hvis  $v_B = 0$  og  $v'_A$  måles til  $-2,0 \text{ m/s}$ , hva var da  $v_A$ , og hva ble  $v'_B$ ? Og hva var total kinetisk energi før og etter støtet?

[Svar:  $v_A = 10 \text{ m/s}$ ,  $v'_B = 8,0 \text{ m/s}$ ,  $W_k = W'_k = 100 \text{ J}$ ].

## 5.3 Uelastisk støt i én dimensjon – ballistisk pendel



Ei kule med masse  $m_A$  og ukjent hastighet  $v_A$  skytes inn i ei tung blokk med masse  $m_B$ , hengt opp i ei snor med lengde  $L$  – og blir sittende fast i blokka. Blokka svinger opp ei høyde  $h$ . Hva var  $v_A$ ?

Ved uelastisk støt avtar den totale kinetiske energien idet noe av energien går over til varme. Total bevegelsesmengde, derimot, er bevart. Dvs. farten til massemidelpunktet er uendra gjennom støtet:

Før støt	Etter støt
$V_M = \frac{m_A}{m_A + m_B} \cdot v_A$	$V'_M = V_M$
$u = v_A$	$u' = 0$
$v_B = 0$	$v'_B = v'_A = V'_M = V_M$ .

Etter støtet er relativhastigheten null, og den totale kinetiske energien er dermed

$$W'_k = \frac{1}{2} M V_M^2 = \frac{m_A}{m_A + m_B} \cdot \frac{1}{2} m_A v_A^2. \quad (5-23)$$

Forskjellen mellom  $W'_k$  og begynnelsesenergien  $\frac{1}{2} m_A v_A^2$  er gått til *varme*.

Den kinetiske energien etter støtet går med til å løfte (blokk + kule) en høyde  $h$  mot tyngdekrafta  $(m_A + m_B)u$ , dvs.

$$V(h) = W'_k \quad (5-24)$$

$$(m_A + m_B)gh = \frac{1}{2} \frac{m_A}{m_A + m_B} m_A v_A^2 \quad (5-25)$$

$$v_A = \left(1 + \frac{m_B}{m_A}\right) \sqrt{2gh} \approx \frac{m_B}{m_A} \sqrt{2gh} \quad (5-26)$$

## OPPSUMMERING AV KAP. 5

- Ved analyse av to-partikkelsystemer er det som oftest gunstig å benytte følgende koordinater i stedet for posisjonsvektorene  $\vec{r}_A$  og  $\vec{r}_B$  til de to punkt-massene:
  - I) Avstandsvektoren mellom de to punktmassene  $\vec{r} = \vec{r}_A - \vec{r}_B$ , og
  - II) Posisjonsvektoren til massefellespunkt  $\vec{R}_M = (m_A/M) \vec{r}_A + (m_B/M) \vec{r}_B$ . Grunnen er at det viser seg å være matematisk separasjon mellom likningene som beskriver relativbevegelse og massefellespunktbevegelse.
- Bevegelseslikninga for relativbevegelsen er:  $m_r d^2\vec{r}/dt^2 = \vec{F}_{AB}$ , hvor *den reduserte massen* er gitt som  $m_r = m_A m_B / (m_A + m_B)$ , og  $\vec{F}_{AB}$  er krafta på punktmasse A pga. vekselvirkninga med punktmasse B med retning fra B til A.
- Den kinetiske energien til to-partikkelsystemet er  $W_k = \frac{1}{2} M V_M^2 + \frac{1}{2} m_r u^2$ , hvor totalmassen er lik  $M = m_A + m_B$ ,  $V_M$  er hastigheten til massefellespunktet og relativthastigheten er gitt som  $\vec{u} = d\vec{r}/dt$ .

- Ved elastiske støt er både energien i massefellespunktsystemet og den totale bevegelsesmengden konserververt. Ved elastisk støt mellom punktmasser med lik masse, vil de to punktmassene som resultat av støtet *bytte hastighet*.
- Ved uelastisk støt avtar den totale kinetiske energien idet noe av energien går over til varme. Total bevegelsesmengde er bevart.



# Kapittel 6

## Rotasjon av stive legemer

### Innhold

---

<b>6.1</b>	<b>Beskrivelse vha. sylinderkoordinater . . . . .</b>	<b>33</b>
6.1.1	Baneakselerasjon og radialakselerasjon . . . . .	34
<b>6.2</b>	<b>Rotasjonsenergi og treghetsmoment . . . . .</b>	<b>35</b>
6.2.1	Rullende ring . . . . .	36
6.2.2	Rullende massivt hjul . . . . .	37
6.2.3	Modellering av Galileis eksperiment . . . . .	38
<b>6.3</b>	<b>Parallellakse-teoremet (Steiners sats) . . . . .</b>	<b>40</b>
6.3.1	Alternativ beregning av kinetisk energi for rullende hjul	40
<b>6.4</b>	<b>Spinn for punktmasse . . . . .</b>	<b>41</b>
<b>6.5</b>	<b>Spinnet for stivt legeme . . . . .</b>	<b>42</b>
6.5.1	Gyroskop . . . . .	43
6.5.2	Bumerang . . . . .	45

---

Vi skal i dette kapitlet vise hvordan man kan analysere dynamikken til stive legemer med endelig utstrekning. Denne beskrivelsen vil inneholde begreper som rotasjonsenergi, treghetsmoment, dreiemoment og spinn.

Med begrepet *stivt legeme* forstår vi et legeme som har uforanderlig geometrisk form. I prinsipp finnes ikke slike legemer, men i praksis er det svært ofte en god tilnærming å anta et legeme “stivt”. I et stivt legeme er alle relative posisjoner uforanderlige og legemet kan beskrives som ei samling av et stort antall punktmasser. Dette gjør at en dynamisk beskrivelse kan forenkles drastisk.

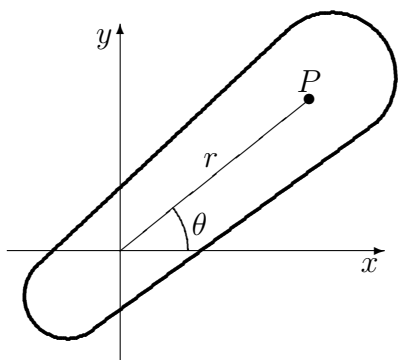
Legemets bevegelse kan generelt beskrives som bestående av to komponenter; en *rotasjonsbevegelse* om en rotasjonsakse, og en *translasjonsbevegelse* av denne akse. Ofte - men langt fra alltid - vil akse gå gjennom legemets massefellespunkt. Translasjonsbevegelsen kan for disse tilfellene beregnes som om legemet var en punktmasse.



Beskrivelse av rotasjon foregår mest hensiktsmessig i sylinderkoordinater med rotasjonsaksen som symmetriakse.

## 6.1 Beskrivelse vha. sylinderkoordinater

Vi betrakter et stivt legeme som roterer om en fast akse. Rotasjonsaksen velges som vår  $z$ -akse.



Rotasjon om  $z$ -aksen.

Hvert punkt  $P$  på legemet er karakterisert ved koordinater  $\{x, y\} = \{r \cos \theta, r \sin \theta\}$ .

Stivt legeme  $\Rightarrow$  hvis  $\theta \rightarrow \theta + \Delta\theta$  for ett punkt  $P$ , er forandringa  $\Delta\theta$  den samme for alle  $P$ . Følgelig er *vinkelhastigheten*  $\Delta\theta/\Delta t$  den samme for alle  $P$ .

$$\text{Vinkelhastighet} : \omega = \dot{\theta} = \frac{d\theta}{dt} \quad (\text{positiv retning mot urviseren}) \quad (6-1)$$

$$\text{Vinkelakselerasjon} : \alpha = \frac{d\omega}{dt} = \ddot{\theta} \quad (6-2)$$

Vinkelhastighet og -akselerasjon angis ofte som vektorer. Da får vi også gitt rotasjonsaksen og rotasjonsretningen: Vektoren har retning langs aksen – dvs. *loddrett på* bevegelsen til punktene  $P$ , og positiv retning er definert ved *høyrehåndsregelen*:

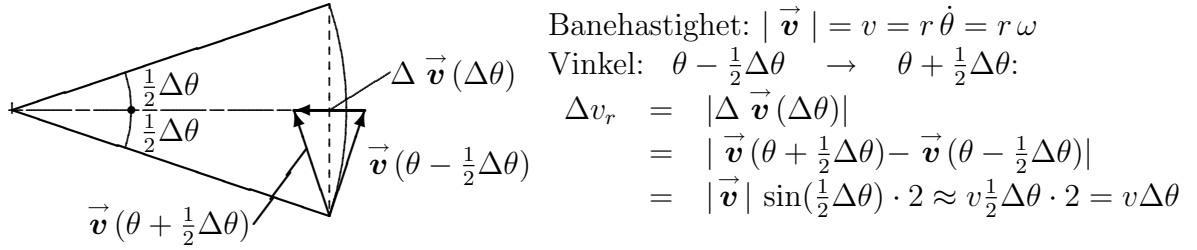
$$\vec{\omega} = \omega \hat{e}_z \quad (6-3)$$

$$\vec{\alpha} = \frac{d\vec{\omega}}{dt}. \quad (6-4)$$

### 6.1.1 Baneakselerasjon og radialakselerasjon

Bevegelsen til en partikkel i krum bane kan instantant sees som del av en sirkelbevegelse om en akse gjennom *krumningssenteret*. Ren sirkelbevegelse om en fast akse er et spesialtilfelle av dette. Akselerasjonen til partikkelen kan da deles i to komponenter; en *baneakselerasjon* i hastighetens retning, og en *radialakselerasjon* loddrett på hastighet og krumningsakse. Og eventuelt en tredje komponent i krumningsaksens retning – men det glemmer vi foreløpig.

Figuren som følger, viser hvordan vi finner uttrykk for radialakselerasjonen. Anta her at banehastigheten  $v$  er konstant.



Radialakselerasjonen blir dermed – med flere alternative uttrykk –

$$a_r = -\frac{\Delta v_r}{\Delta t} \rightarrow -\frac{dv_r}{dt} = -v \frac{d\theta}{dt} = -v\omega = -\frac{v^2}{r} = -\omega^2 r, \quad (6-5)$$

hvor vi setter inn minustegn fordi akselerasjonen er i motsatt retning av økende  $r$ . Hvis partikkelen holdes i fast avstand  $r$  fra aksen med ei snor eller liknende, er *sentripetalkraft* assosiert med radialakselerasjonen lik

$$F_r = ma_r = -m \frac{v^2}{r} = -m\omega^2 r, \quad (6-6)$$

mens “det som strekker snora” av vanlige mennesker kalles “sentrifugalkraft”. I følge fysikk-språklige purister er det siste uttrykket forbudt å bruke – men nå har vi altså skrevet uttrykket.

Hvis banehastigheten  $v$  ikke er konstant har vi en *baneakselerasjonen* som er lik

$$a_\theta = \frac{dv}{dt} = r \frac{d\omega}{dt} = r\alpha. \quad (6-7)$$

## 6.2 Rotasjonsenergi og treghetsmoment

Vi betrakter et stivt legeme som roterer om en fast rotasjonsakse, og skal finne den kinetiske energien – rotasjonsenergien – uttrykt ved vinkelhastigheten.

Legemet kan betraktes som sammensatt av punktmasser  $P_i$ , hver med hastighet  $\vec{v}_i$  og kinetisk energi  $\frac{1}{2}m_i v_i^2$ . Den kinetiske energien for legemet som helhet må dermed kunne skrives

$$W_k = \frac{1}{2} \sum_i m_i v_i^2 = \sum_i \frac{1}{2} m_i r_i^2 \omega^2 = \frac{1}{2} \left( \sum_i m_i r_i^2 \right) \omega^2 = \frac{1}{2} I \omega^2 = \frac{1}{2} I \dot{\theta}^2,$$

(6-8)

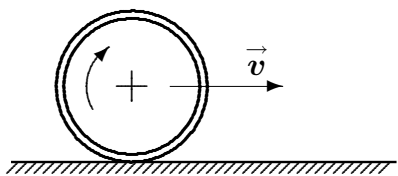
hvor størrelsen  $I$  er legemets *treghetsmoment* om den gitte akse,

$$I = \sum_i m_i r_i^2 \quad \text{Treghetsmomentet.} \quad (6-9)$$

Ved beregning av rotasjonsbevegelser er det nesten alltid hensiktsmessig å bruke treghetsmoment og vinkelhastighet i stedet for masse og hastighet. Når treghetsmomentet er beregnet, er summasjonen over massepunktene utført en gang for alle.

Analogier mellom translasjons- og rotasjonsbevegelser er vist i oppsummeringen til slutt i dette kapitlet.

### 6.2.1 Rullende ring



Betrakt en *tynn* ring, med radius  $R$  og masse  $M$ , som ruller på et plant underlag.

Alle punkter på ringen har samme avstand  $R$  fra en akse gjennom sentrum av ringen (“massefellespunktaksen”).

Treghetsmomentet om massefellespunktaksen (*ut av* papirplanet) er følgelig<sup>1</sup>

$$I_T = M R^2. \quad (6-10)$$

Vinkelhastigheten om massefellespunktaksen kalles  $\omega$ . Periferien av ringen ruller med en lengde lik omkretsen  $2\pi R$  i løpet av en periode  $T = 2\pi/\omega$ , og hastigheten til ringen,  $v$ , og vinkelhastigheten  $\omega$  er følgelig gitt av

$$v = \frac{2\pi R}{T} = \frac{2\pi R}{2\pi} \cdot \omega = \omega R. \quad (6-11)$$

Den totale kinetiske energien til ringen er summen av translasjonsenergien til massefellespunktet og rotasjonsenergien i massefellespunktsystemet:

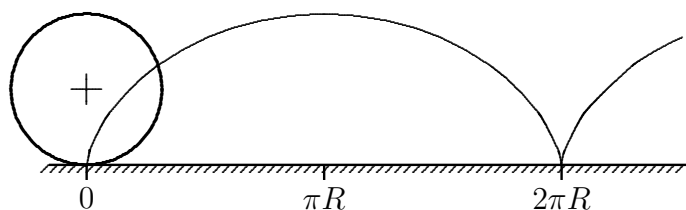
$$W_k = W_{\text{trans}} + W_{\text{rot}} = \frac{1}{2} M v^2 + \frac{1}{2} I_T \omega^2 = \frac{1}{2} M v^2 + \frac{1}{2} M \omega^2 R^2 = M v^2$$

(6-12)

Den kinetiske energien er dobbelt så stor som for en ring med samme translasjons-hastighet, men uten rotasjon. Dette er noe å tenke på når sykkelens akselereres: Masse i hjulfelgene og dekk teller dobbelt så mye som sykkel (og kropp) ellers.

<sup>1</sup>Vi fører gjerne på indeks T;  $I_T$ , for å markere at treghetsmomentet er beregnet om akse gjennom massefellespunktet (Tyngdepunktet).

Vi har her løst opp rullebevegelsen i to komponenter, en rein translasjon og en rein sirkulær bevegelse. Hvis vi setter bevegelsene sammen igjen, og følger et punkt på periferien av sirkelen, ser det hele mer komplisert ut, som vist nedenfor.



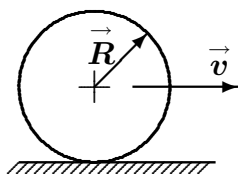
“Rullepunktet” løftes opp loddrett fra underlaget. Banen blir en sykloide.

For å knytte dette til noe velkjent: Ventilen på et sykkelhjul (på flatt underlag) vil med god approksimasjon beskrive en sykloidebane.

Ved “ideell rulling” hindres ringen i å skli pga. *statisk* friksjon: Hastigheten til kontaktpunktet *langs* underlaget er derfor lik null. Ved statisk friksjon utføres det ikke noe friksjonsarbeid.

Ved “reell rulling” deformeres underlaget litt av trykket av ringen, som dermed får en liten “motbakke” hele tida. Deformasjonen gir opphav til friksjonsarbeid (og oppvarming).

### 6.2.2 Rullende massivt hjul



Et massivt, jamntykt og homogent hjul med radius  $R$  og masse  $M$  ruller med hastighet  $\vec{v}$  på et plant underlag. Hva er den kinetiske energien  $W_k$ ?

Vi kan beregne  $W_k$  som i foregående eksempel, men treghetsmomentet  $I_T$  blir et annet, og må finnes først.

Vi betrakter da hjulet som sammensatt av tynne ringer, hver med radius  $r$ , tykkelse  $\Delta r$  og samme bredde  $b$ ; regner ut treghetsmomentet for hver av de tynne ringene, og så det totale treghetsmomentet ved summasjon – dvs. integrasjon over  $\Delta r \rightarrow dr$ .

Hver ring har en masse gitt av totalmassen og forholdet mellom volumet av ringen og totalvolumet, og vi har dermed

$$\begin{aligned} \text{Masse av én ring: } \Delta m &= M \frac{\Delta V}{V} = M \frac{2\pi r \Delta r b}{\pi R^2 b} = \frac{2M}{R^2} r \Delta r \\ \text{Treghetsmoment: } \Delta I &= r^2 \Delta m = \frac{2M}{R^2} r^3 \Delta r. \end{aligned}$$

Tregghetsmomentet til hjulet om hjulaksen blir

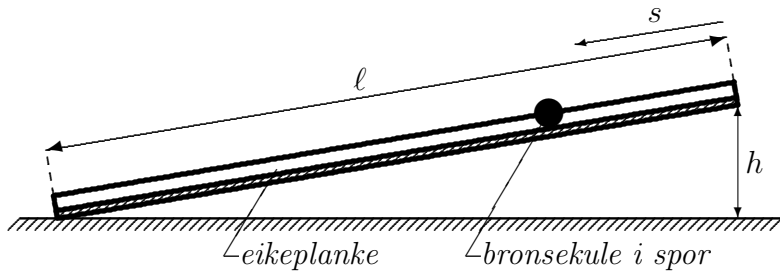
$$I_T = \sum \Delta I \rightarrow \int_{r=0}^R dI = \frac{2M}{R^2} \int_0^R r^3 dr = \frac{1}{2} M R^2, \quad (6-13)$$

og den totale kinetiske energien er følgelig

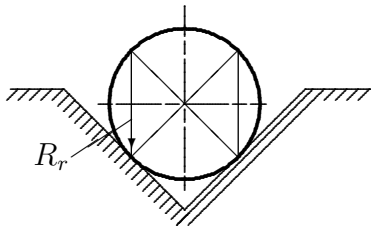
$$W_k = W_{\text{trans}} + W_{\text{rot}} = \frac{1}{2} M v^2 + \frac{1}{2} I_T \omega^2 = \frac{1}{2} M v^2 + \frac{1}{4} M \omega^2 R^2 = \frac{3}{4} M v^2. \quad (6-14)$$

### 6.2.3 Modellering av Galileis eksperiment

Eksperimentet hvor Galilei (1564-1642) fant/demonstrerte akselerasjonsloven  $s = s_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a t^2$ , besto av en eikeplanke 12 alen lang, med et polert spor, hvor han rullet bronsekuler. Den ene enden lå på gulvet, og den andre ble løftet én til to alen opp. Og så målte han tida det tok for ei kule å rulle hele, halve og kvarte lengden. Tidsmålingen foregikk med et vannur – pendeluret var ennå ikke oppfunnet – “med en nøyaktighet bedre en 1/10 pulsslag”, hevdet Galilei.



Målingene viste at tida  $t$  var proporsjonal med kvadratrota av lengden  $s$ . Men – hva *var* egentlig akselerasjonen og tida Galilei målte? La oss finne det ut, for  $s = \ell$ .



Vi antar rettvinklet spor, som vist.

Rulleradius blir da

$$R_r = R \sin 45^\circ = R/\sqrt{2}$$

og hastigheten blir

$$v = \omega R_r \rightarrow \omega = \frac{v}{R} \sqrt{2}.$$

Energibevarelse; (Potensiell energi)  $\rightarrow$  (kinetisk energi); gir

$$V = Mgh \rightarrow W_k = \frac{1}{2} M v^2 + \frac{1}{2} I_T \omega^2, \quad (6-15)$$

dvs.

$$Mgh = \frac{1}{2} M v^2 \left( 1 + \frac{2I_T}{MR^2} \right) \quad (6-16)$$

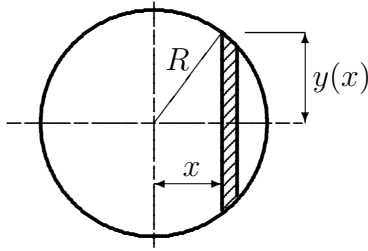
$$v^2 = \frac{2gh}{1 + 2I_T/MR^2} \quad (6-17)$$

$$\bar{v} = \frac{1}{2} v(\ell) = \sqrt{\frac{gh}{2(1 + 2I_T/MR^2)}} \quad (6-18)$$

$$t = \frac{\ell}{\bar{v}} = \sqrt{2 \left( 1 + \frac{2I_T}{MR^2} \right) \frac{\ell^2}{gh}}. \quad (6-19)$$

På grunn av rotasjonen – som spiser energi – går det hele en faktor  $\sqrt{1 + 2I_T/MR^2}$  langsommere enn for en punktmasse som sklir “friksjonsfritt”.

For å komme videre, må vi finne treghetsmomentet for ei homogen kule om en akse gjennom massefellespunktet.



Kula kan ses som sammensatt av tynne, homogene skiver, hver med tykkelse  $\Delta x$  og radius  $y(x) = \sqrt{R^2 - x^2}$ . Treghetsmomentet for ei skive er som regnet ut i forrige eksempel,  $\Delta I = \frac{1}{2} \Delta M_{\text{skive}} y^2$

Massen  $\Delta M_{\text{skive}}$  er lik (masse per volumenhet) · (volumet av skiva)

$$\Delta M_{\text{skive}} = \frac{M}{4\pi R^3/3} \cdot \pi y^2 \Delta x = \frac{3M}{4R^3} y^2 \Delta x, \quad (6-20)$$

og treghetsmomentet for kula blir dermed

$$I_T = \sum \Delta I = \sum \frac{1}{2} \Delta M_{\text{skive}} y^2 = \sum \frac{3}{8} \frac{M}{R^3} y^4 \Delta x, \quad (6-21)$$

som med overgang  $\sum \rightarrow \int$  og innsetting  $y(x) = \sqrt{R^2 - x^2}$  gir

$$\begin{aligned} I_T &= \frac{3}{8} \frac{M}{R^3} \int_{x=-R}^R (R^2 - x^2)^2 dx \\ &= \frac{3}{8} \frac{M}{R^3} \int_{-R}^R (R^4 - 2R^2 x^2 + x^4) dx \\ &= \frac{3}{8} \frac{M}{R^3} \left[ R^4 x - \frac{2}{3} R^2 x^3 + \frac{1}{5} x^5 \right]_{-R}^R \end{aligned} \quad (6-22)$$

$$\boxed{I_T = \frac{2}{5} M R^2.} \quad (6-23)$$

Settes dette inn i uttrykket for tida  $t$ , får vi endelig

$$t = \sqrt{2 \left(1 + \frac{4}{5}\right) \frac{\ell^2}{gh}} = \sqrt{\frac{9}{5}} t_0, \quad (6-24)$$

hvor  $t_0 = \ell \sqrt{\frac{2}{gh}}$  er tida et friksjonsløst massepunkt ville ha brukt. På grunn av rullinga går det en faktor  $\sqrt{9/5} \approx 1,34$  langsommere – og akselerasjonen blir tilsvarende mindre.

*Tallemsempel:*

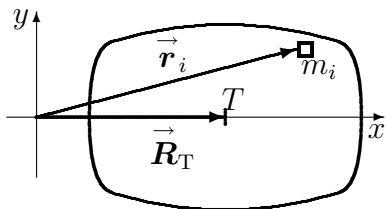
Setter vi inn Galileis lengde  $\ell = 12$  alen og bruker høyden  $h = 1$  alen – med  $1 \text{ alen} \approx 0,60 \text{ m}$ ,<sup>2</sup> og antar  $g \approx 9,8 \text{ m/s}^2$ , finner vi  $t \approx 5,6 \text{ s}$ .

### 6.3 Parallellakse-teoremet (Steiners sats)

Svært ofte vil den aktuelle rotasjonsaksen *ikke* gå gjennom legemets massefellespunkt. Hvis vi kjenner treghetsmomentet  $I_T$  om en akse gjennom massefellespunktet og parallell med rotasjonsaksen, er imidlertid beregningen av treghetsmomentet  $I$  om rotasjonsaksen triviell,

$$I = I_T + MR_T^2 \quad \text{Steiners sats,} \quad (6-25)$$

hvor  $M$  er legemets masse og  $R_T$  rotasjonsaksens avstand fra massefellespunktet. Vi viser dette:



Parallele akser, én gjennom massefellespunktet og én rotasjonsakse parallell med og i avstand  $R_T$  fra massefellespunktaksen.

<sup>2</sup>En norsk alen var 0,62 m, og en italiensk alen noe mindre.

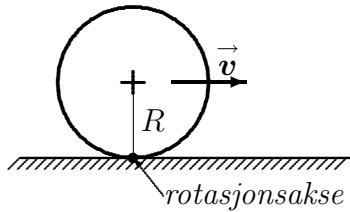
Vi velger rotasjonsaksen som  $z$ -akse ( $x = y = 0$ ), og har da

$$I = \sum_i m_i r_i^2 = \sum_i m_i (x_i^2 + y_i^2) \quad (6-26)$$

$$\begin{aligned} I_T &= \sum_i m_i (\vec{r}_i - \vec{R}_T)^2 = \sum_i m_i [(x_i - X_T)^2 + (y_i - Y_T)^2] \\ &= \sum_i m_i (x_i^2 + y_i^2) - 2 \underbrace{\sum_i m_i x_i}_{MX_T} X_T - 2 \underbrace{\sum_i m_i y_i}_{MY_T} Y_T + \underbrace{\sum_i m_i}_{M} (X_T^2 + Y_T^2) \\ &= \sum_i m_i (x_i^2 + y_i^2) - M(X_T^2 + Y_T^2) = I - M R_T^2 \quad - \text{som skulle vises.} \end{aligned} \quad (6-27)$$

### 6.3.1 Alternativ beregning av kinetisk energi for rullende hjul

Vi skal igjen finne den kinetiske energien  $W_k$  for et massivt, jamntykt og homogent hjul med radius  $R$  og masse  $M$ , som ruller med hastighet  $\vec{v}$  på et plant underlag – men vil nå betrakte bevegelsen som en *rein rotasjon* om kontaktpunktet mellom hjul og underlag. Hjulet roterer altså nå om en akse i avstand  $R$  fra hjulets sentrum. Kontaktpunktet flytter seg altså med hjulets hastighet  $v$ .



Tregghetsmomentet om tyngdepunktaksen er

$$I_T = \frac{1}{2} M R^2$$

og vi fant tidligere energien som

$$W_k = \frac{1}{2} M v^2 + \frac{1}{2} I_T \omega^2 = \frac{3}{4} M v^2.$$

Når vi ser på bevegelsen som rotasjon om kontaktpunktet, blir den kinetiske energien å beregne som rotasjonsenergi alene,

$$W_k = \frac{1}{2} I \omega^2, \quad (6-28)$$

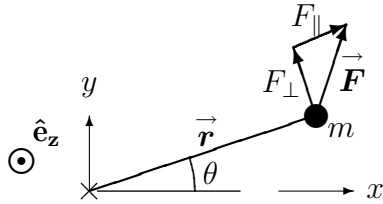
som med Steiners sats blir

$$\begin{aligned} W_k &= \frac{1}{2} (I_T + M R^2) \omega^2 \\ &= \frac{1}{2} \left( \frac{1}{2} M R^2 + M R^2 \right) \left( \frac{v}{R} \right)^2 = \frac{3}{4} M v^2; \quad - \text{som før.} \end{aligned} \quad (6-29)$$



## 6.4 Spinn for punktmasse

For beskrivelse av rotasjonsdynamikk er det fordelaktig å formulere Newtons 2. lov i sylinderkoordinater, og bruke dreiemomentet om rotasjonsaksen,  $\vec{r} \times \vec{F}$ , i stedet for krafta alene. Vi starter igjen med å se på en punktmasse, og finner deretter uttrykk gjeldende for stive legemer ved å summere over punktmassene.



Rotasjonsakse:  $\hat{e}_z$  (ut av papiret)

$$\vec{F} = \frac{d}{dt}(m \vec{v}) \quad (\text{Newtons 2. lov})$$

$$\vec{r} \times (\text{Newtons 2. lov}) \Rightarrow$$

$$\vec{r} \times \vec{F} = \vec{r} \times \frac{d}{dt}(m \vec{v}). \quad (6-30)$$

Størrelsen til venstre i likn. (6-30) er

$$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F} = r F_{\perp} \hat{e}_z \quad \text{Dreiemomentet.} \quad (6-31)$$

Størrelsen til høyre omskriver vi til

$$\vec{r} \times \frac{d(m \vec{v})}{dt} = \frac{d}{dt}(\vec{r} \times m \vec{v}) - \overbrace{\frac{d \vec{r}}{dt} \times (m \vec{v})}^{= m \vec{v} \times \vec{v} = 0} = \frac{d}{dt}(\vec{r} \times m \vec{v}). \quad (6-32)$$

Siden  $m \vec{v}$  er “bevegelsesmengden” kunne den siste parantesen i likningen kalles “rotasjonsmengden”, men størrelsen kalles “spinnet”<sup>3</sup>, altså:

$$\vec{r} \times m \vec{v} = \vec{r} \times \vec{p} = \vec{L} \quad \text{Spinnet.} \quad (6-33)$$

Vår nye bevegelseslikning,  $\vec{r} \times (\text{Newtons 2. lov})$ , kan dermed skrives

$$\vec{\tau} = \frac{d \vec{L}}{dt}; \quad \text{med} \quad \begin{cases} \vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F} \\ \vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} \end{cases} \quad \text{Spinlikninga.} \quad (6-34)$$

Ved å skue til Newtons 2. lov:  $\vec{F} = \frac{d \vec{p}}{dt}$  ser man at likning (6-34) gjerne kan kalles Newtons 2. lov for rotasjon.

<sup>3</sup>Også dette kjære barnet har mange navn: Spinn, dreieimpuls, drivmoment, bevegelsesmengdemoment. Engelsk: angular momentum eller moment of momentum.

## 6.5 Spinnet for stivt legeme

Vi ser så på et legeme sammensatt av punktmasser  $P_i$  med masser og posisjoner  $(m_i, \vec{r}_i)$ , og finner spinnlikninga for legemet ved å summere over massepunktene:

$$\begin{aligned}\vec{\tau} &= \sum \vec{\tau}_i = \sum \vec{r}_i \times \vec{F}_i & : \text{totalt dreiemoment} \\ \vec{L} &= \sum \vec{L}_i = \sum \vec{r}_i \times m_i \vec{v}_i & : \text{totalt spinn.}\end{aligned}\quad (6-35)$$

Bare *ytre* krefter bidrar til det totale dreiemomentet – kreftene mellom massepunktene kansellerer i summen som følge av Newtons 3. lov (kraft = motkraft).

Hvis det totale dreiemomentet er lik null,  
er spinnet  $\vec{L}$  en bevegelseskonstant.

(6-36)

Vi spesialiserer så til *stivt* legeme, og kan da uttrykke spinnet ved treghetsmomentet  $I$  og vinkelhastigheten  $\vec{\omega}$ . For alle punktene kan vi skrive

$$|\vec{r}_i \times \vec{v}_i| = r_i v_{i\perp} = r_i^2 \omega \quad - \text{ eller, på vektorform} \quad (6-37)$$

$$\vec{r}_i \times \vec{v}_i = r_i^2 \vec{\omega}. \quad (6-38)$$

Det totale spinnet blir dermed

$$\vec{L} = \sum_i \vec{r}_i \times (m_i \vec{v}_i) = \left( \sum_i m_i r_i^2 \right) \vec{\omega} = I \vec{\omega},$$

(6-39)

og spinnlikninga går over til

$$\vec{\tau} = I \frac{d\vec{\omega}}{dt} \quad \text{Spinnlikninga for stivt legeme,}$$

(6-40)

hvor  $d\vec{\omega}/dt = \vec{\alpha}$  er vinkelakselerasjonen som gitt i likn. (6-4).

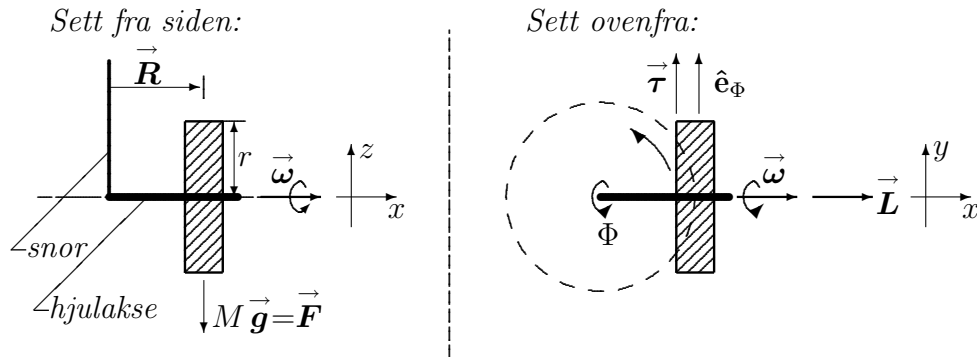
### 6.5.1 Gyroskop

Et hjul med masse  $M$  og radius  $r$  roterer med vinkelhastighet  $\omega$  om en horisontal akse. Hjulakselen er hengt opp i en vertikal snor, i en avstand  $R$  fra hjulets midtplan.

Tyngdekrafta vil prøve å dreie hjulaksen til vertikal retning. Som man ser (demonstrasjon i forelesninga) skjer dette ikke; i stedet får hjulaksen en langsom rotasjon om snoraksen – en *presesjon* med vinkelhastighet  $\omega_p \ll \omega$ .

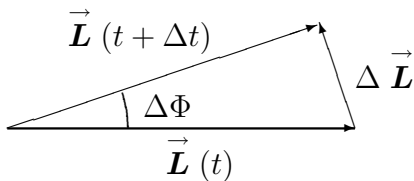
For de fleste vil vel dette se ut til å være helt i strid med hva man forventer – men hvis man holder i et roterende hjul og prøver å vri på det, får man bedre føling med hva slags krefter som er i spill.

Ved at det roterende hjulet preseserer om en vertikal akse med vinkelhastighet  $\omega_p = d\phi/dt$  gir et kraftmoment i vertikal retning som er akkurat nok til å motvirke tyngden av hjulet. Dette kommer istand fordi hjulets spinn  $\vec{L}$  stadig endrer retning og til dette kreves det ifølge likn. (6-34) et kraftmoment:



$$\begin{aligned}
 \text{Spinn:} \quad & \vec{L} = I \vec{\omega} \quad (x\text{-retning på figuren}) \\
 \text{Dreiemoment:} \quad & \vec{\tau} = \vec{R} \times \vec{F} = \vec{R} \times M \vec{g} = MgR \hat{e}_\Phi \\
 \text{Spinnlikn. :} \quad & d\vec{L}/dt = \vec{\tau} \Rightarrow Id\vec{\omega}/dt = MgR \hat{e}_\Phi \\
 \text{dvs.} \quad & d\vec{\omega} \perp \vec{\omega}
 \end{aligned} \tag{6-41}$$

- Intet dreiemoment i  $\vec{L}$ -retning  $\Rightarrow |\vec{L}| = I\omega = \text{konstant}$
- Dreiemoment  $\perp \vec{L}$  roterer  $\vec{L}$  i  $xy$ -planet med vinkelhastighet  $\vec{\omega}_p \perp \vec{\omega} \Rightarrow$



$$\Delta \vec{L} = \vec{\tau} \Delta t = MgR \Delta t \hat{e}_\Phi \tag{6-42}$$

$$\Delta \Phi = \frac{\Delta L}{L} = \frac{MgR \Delta t}{I\omega}. \tag{6-43}$$

Presesjonsvinkelhastigheten

$$\omega_p = \frac{d\Phi}{dt} = \frac{MgR}{I\omega}. \tag{6-44}$$

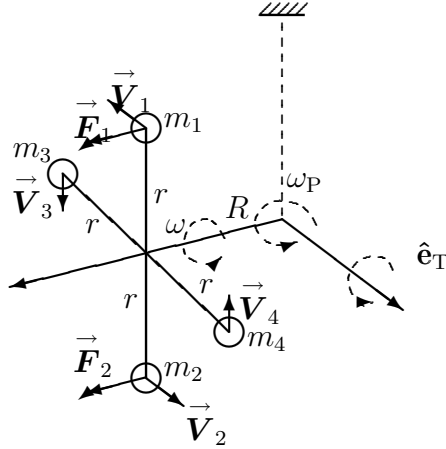
For ring/felg:  $I = Mr^2$  og

$$\omega_p = \frac{gR}{\omega r^2}. \tag{6-45}$$

Tallemsempel:

$r = 0,30 \text{ m}$ ,  $R = 0,10 \text{ m}$ ,  $T = 0,25 \text{ s}$  og  $g = 9,8 \text{ m/s}^2 \Rightarrow T_p = 14,5 \text{ s}$ .

Beregning av presesjonsvinkelhastigheten for et gyroskop gir en god illustrasjon av styrken og elegansen til bruk av vektoralgebra og begrepene dreiemoment og spinn. Men for de som fortsatt synes at det er merkelig at sykkelhjulet starter å presesere i stedet for å bikke over, finnes det en alternativ måte som gir samme svar, men som er mer intuitiv og kun gjør bruk av enkel Newtons mekanikk.



Felgen er i dette tilfellet erstattet av fire like kuler med samme masse ( $m = m_1 = m_2 = m_3 = m_4$ ) som befinner seg i avstand  $r$  fra rotasjonsaksen. Kulene er koplet stivt til rotasjonsaksen. Total masse er  $M = 4m$ .

For at at rotasjonen om akse  $\hat{\mathbf{e}}_T$  skal være lik null (hjulet ikke falle ned), må dreiemomentet om denne aksen være lik null, dvs.

$$MgR + rF_1 - rF_2 = 0 \quad \text{hvor} \quad F_1 = m \frac{V_1^2}{R} \quad \text{og} \quad F_2 = m \frac{V_2^2}{R}, \quad (6-46)$$

hvor  $F_1$  og  $F_2$  er sentrifugalkrafta på henholdsvis kule en og kule to,  $\vec{V}_1$  og  $\vec{V}_2$  er hastigheten for henholdsvis kule en og kule to.

Den eneste måten som man kan få oppfylt denne likninga på, er ved å sørge for at  $V_2 > V_1$ . Her er det av interesse å legge merke til at når presesjonsvinkelhastigheten  $\omega_p$  er positiv, gir dette nettopp hva man er ute etter, nemlig en økning av  $V_2$  og samtidig en reduksjon av  $V_1$ . Hastighetene har bidrag fra rotasjonen  $\omega$  samt rotasjonen  $\omega_p$ , slik at

$$V_1 = r\omega - R\omega_p \quad \text{og} \quad V_2 = r\omega + R\omega_p \quad (6-47)$$

Innsetting av disse uttrykkene i momentbalanseuttrykket gitt ovenfor og bruk av at  $M = 4m$  gir samme uttrykk for presesjonsvinkelhastigheten som vist i likn. (6-45).

Dvs. at dreiemomentet pga.  $MgR$  kanselleres fordi  $V_2 > V_1$  som gir at  $F_2 > F_1$ .

## 6.5.2 Bumerang

En bumerang er et kasteredskap som brukes av urinvånerne i Australia<sup>4</sup> og som har den fascinerende egenskap at når det kastes horisontalt kommer våpenet tilbake til utgangspunktet. En moderne variant av bumerangen som kan kjøpes i

<sup>4</sup>Også kjent av oldtidens irakere.

mange leketøysbutikker, er utformet som en standard fire-vingers klassisk flypropell. Den kastes slik at den roterer om en horisontal akse vinkelrett på kasteretningen (Demonstrasjon i auditoriet?). Pga. translasjonshastigheten til bumerangen gir propellbladene mer "løft" på den sida hvor bladhastigheten pga. rotasjonen er parallell med hastigheten i kasteretningen. Dette gir et dreiemoment helt analogt til det gravitasjonen ga i eksempelet ovenfor. Dette gir en rotasjon av propellen om en vertial akse som medvirker dermed til at propellens translasjonshastighet endrer retning og etter hvert vender tilbake til utgangspunktet. Denne vridninga gir i sin tur opphav til ei kraft som får propellen til samtidig å legge seg over slik at løftet fra de roterende propellbladene medvirker til også å holde propellen svevende. Denne siste effekten er også en følge av Newtons 2. lov, men er litt mer komplisert å utdype kvantitativt.

For blant annet å unngå bumerangeffekten når helikopteret flyr forover med stor hastighet, blir skråvinkelen til hvert rotorblad på et helikopter justert etter hvert som rotorbladet roterer. Bladet gis mindre stigeinkel når det beveger seg med fartsretningen enn når det beveger seg i bakover. På denne måten sikres at hvert rotorblad gir samme løft uavhengig av i hvilken retning bladet peker relativt helikopter kroppen.

## OPPSUMMERING AV KAP. 6

- Et stivt legeme består av et stor antall punktmasser hvor alle innbyrdes avstander er tidsuavhengige.
- Ved rotasjon av et stivt legeme om en akse har alle punktmasser samme vinkelhastighet.
- Når et stivt legeme roterer med vinkelhastighet  $\omega$  om en akse, er *radialakselerasjonen* for et punkt i avstand  $r$  fra rotasjonsaksen gitt ved uttrykket  $a_r = -\omega^2 r$ .
- *Trehetsmomentet* ved rotasjon av et stivt legeme om en akse er  $I = \sum_i m_i r_i^2$ , hvor  $m_i$  er massen til punktmasse  $i$  og  $r_i$  er avstanden fra rotasjonsaksen til punktmasse  $i$ .
- Trehetsmomentet til hjul med masse  $M$ , radius  $R$  og som roterer om symmetriaksen, er  $I = \frac{1}{2}MR^2$ .
- Trehetsmomentet til kule med masse  $M$ , radius  $R$  og som roterer om aksene gjennom massefellespunktet, er  $I = \frac{2}{5}MR^2$ .
- Ved rotasjon av et stivt legeme med masse  $M$  om en akse som ikke går gjennom massefellespunktet er trehetsmomentet  $I = I_T + MR^2$ , hvor  $I_T$  er trehetsmomentet om en akse som er parallell med rotasjonsaksen og som går gjennom massefellespunktet, og  $R$  er avstanden fra massefellespunktet til rotasjonsaksen (Steiners sats).

- Den kinetiske energien til et stivt legeme som roterer med vinkelhastighet  $\dot{\theta}$  er gitt ved uttrykket  $W_k = \frac{1}{2}I\dot{\theta}^2$ .
- *Spinnet* til et stivt legeme som roterer med vinkelhastighet  $\vec{\omega}$ , er lik  $\vec{L} = I \vec{\omega}$
- Newtons 2. lov tilpasset rotasjon lyder:  $\frac{d\vec{L}}{dt} = I \frac{d\vec{\omega}}{dt} = \vec{\tau}$ , hvor  $\vec{\tau}$  er dreiemomentet om rotasjonsaksen.
- Summa summarum: Formelle analogier mellom translasjons- og rotasjonsbevegelser:

Størrelse	Trans	Rot (vektor)	Rot (skalar)
Stedkoord.	$\vec{r}$		$\theta$
Hastighet	$\dot{\vec{r}} = \vec{v}$	$\dot{\vec{\theta}} = \vec{\omega}$	$\dot{\theta} = \omega$
Akselerasjon	$\ddot{\vec{r}} = \vec{a}$	$\ddot{\vec{\theta}} = \vec{\alpha}$	$\ddot{\theta} = \alpha$
“Kraft”	$\vec{F}$	$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}$	$\tau = rF \sin \theta$
“Masse”	$m$		$I = \int r^2 dm$
Kin. energi	$W_k = \frac{1}{2}m v^2$		$W_k = \frac{1}{2}I \omega^2$
“Bev.mengde”	$\vec{p} = m \dot{\vec{r}}$	$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = I \vec{\omega}$	$L = rp \sin \theta = I \omega$
Newton 2	$\vec{F} = \dot{\vec{p}} = m \ddot{\vec{r}}$	$\vec{\tau} = \dot{\vec{L}} = I \ddot{\vec{\theta}}$	$\tau = I \ddot{\theta}$



# Kapittel 7

## Elastisitet

### Innhold

---

<b>7.1</b>	<b>Strekkelastisitet . . . . .</b>	<b>47</b>
<b>7.2</b>	<b>Skjærelastisitet . . . . .</b>	<b>48</b>
<b>7.3</b>	<b>Volumelastisitet . . . . .</b>	<b>49</b>
<b>7.4</b>	<b>Sammenhengen mellom elastisitetsmodulene . . . . .</b>	<b>49</b>
7.4.1	Poissons tall . . . . .	49
7.4.2	Sammenhengen mellom volum- og strekkmodul . . . . .	50
7.4.3	Sammenhengen mellom skjær- og strekkmodul . . . . .	51
<b>7.5</b>	<b>Bøying . . . . .</b>	<b>51</b>
7.5.1	Innspent bjelke med last . . . . .	53
<b>7.6</b>	<b>Torsjon . . . . .</b>	<b>54</b>

---

Vi skal i dette kapitlet se på sammenhenger mellom kraftpåvirkning og deformasjon. Dette vil omfatte både frie og innspennte bjelker. Vi vil også analysere vridning og torsjonsstivhet.

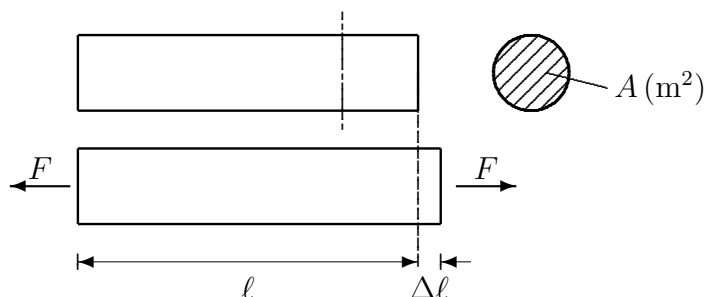
Vi begrenser oss her til å studere materialer som følger Hookes lov, dvs. “deformasjonen er proporsjonal med den mekaniske spenninga”.<sup>1</sup>

---

<sup>1</sup>Robert Hooke 1676: *ut tensio sic vis*. Legg ellers merke til at mekaniske spenninger involverer mekaniske kraftfelt, mens elektriske spenninger involverer elektriske felt.



## 7.1 Strekkelastisitet



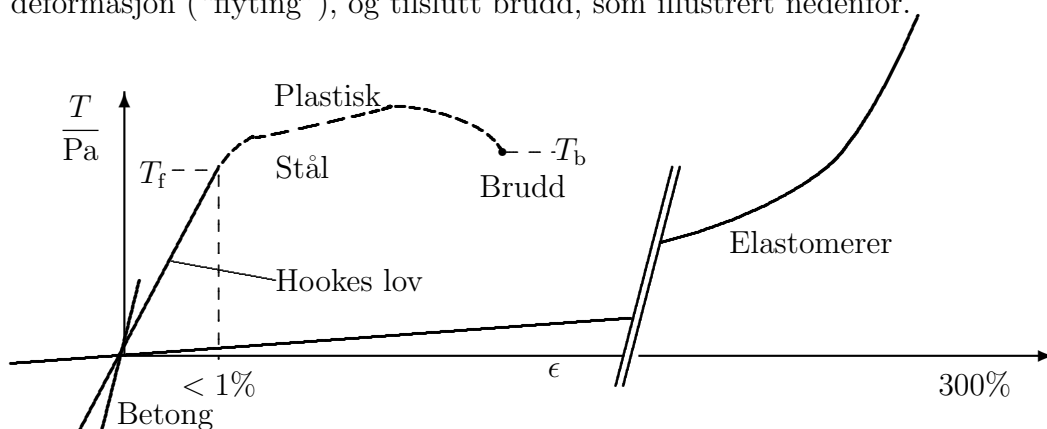
Betrakt en rett, homogen stav, med lengde  $\ell$  og tverrsnitt  $A$ . Staven belastes med ei strekk-kraft  $F$ , og dette resulterer i en forlengelse  $\Delta\ell$ .

For “elastisk lineære materialer” er den *relative forlengelse* (tøyninga)  $\epsilon = \Delta\ell/\ell$  proporsjonal med *strekkspenninga*  $T = F/A$

$\epsilon = \Delta\ell/\ell$	Tøyning (engelsk: “strain”)
$T = F/A$	Strekkspenning (Pa = N/m <sup>2</sup> ) (engelsk: “stress”)
$T = E \epsilon$	Hookes lov (for strekk/trykk), hvor $E$ er <i>strekk-elastisitetsmodulen</i> (strekkmodulen)

I engelsk litteratur betegnes strekk-elastisitetsmodulen gjerne  $Y$ , og kalles “Young’s modulus”.

For vanlige metalliske konstruksjonsmaterialer er strekkmodulen  $E$  av størrelsesorden  $10^{11}$  Pa (ca.  $2 \cdot 10^{11}$  Pa for stål). Slike materialene kan vanligvis strekkes elastisk etter Hookes lov til tøyningen blir av størrelsesorden 1%. Mer strekk gir varig plastisk deformasjon (“flyting”), og tilslutt brudd, som illustrert nedenfor.



Flytegrense  $T_f$  og “bruddstyrke”  $T_b$  er av samme størrelsesorden.

*Tallempeksel:*

For stål er  $T_b \sim 10^9$  Pa. En ståltråd med diameter 1,0 mm vil følgelig ryke ved en belastning på ca.  $(\pi \cdot (0,001 \text{ m})^2/4) \cdot (10^9 \text{ N/m}^2) \sim 10^3 \text{ N}$  – dvs. den kan strekkes med ei vekt  $m = F/g \sim 100 \text{ kg}$  uten å ryke.

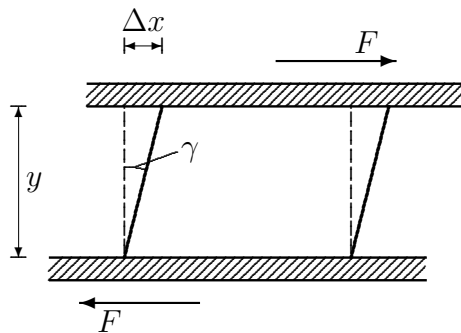
Mange moderne polymerbaserte<sup>2</sup> materialer (f.eks. polymerbaserte elastomerer) er

<sup>2</sup>Polymerer er lange kjedemolekyler.

ikke bare vesentlig mykere, de framviser ofte lineær elastisitet for tøyning opp mot 300% eller mer. Gummistrikk er eksempel på dette. Når elastisitetsmodulen for slike materialer måles ved bruk av periodisk tøyning (strain), avhenger de målte verdiene i mange tilfeller også av oscillasjonsfrekvensen. Slike materialer framviser som oftest både elastiske og viskøse egenskaper, og refereres derfor til som *viskoelastiske* materialer.

## 7.2 Skjærelastisitet

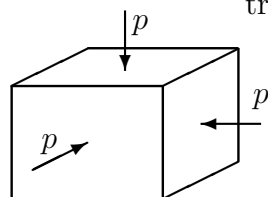
Begrepet “skjærkraft” kan illustreres ved figuren under. En kloss er klemmt fast mellom to parallelle plater, som trekkes i hver sin retning med kraft  $F$ . Dette gir klossen en vinkeldeformasjon  $\gamma$ . (Engelsk: “shear” – skjære/klippe).



“Skjærspenning” er  
 (kraft i  $x$ -retning)/(flate i  $y$ -retning) =  
 $T = F/A$  Skjærspenning  
 $\gamma = \Delta x/y$  Skjærtøyning  
 $T = \mu\gamma$  Hookes lov  
 hvor  $\mu$  er *skjær-elastisitetsmodulen*  
 (skjærmodulen)

## 7.3 Volumelastisitet

Betrakt et legeme som er utsatt for et rent “hydrostatisk trykk”, som f.eks. ei dykkerklokke nedsenket i havet. Kreftene står overalt loddrett på overflata, og gir legemet ei volumforandring proporsjonal med “overtrykket”  $\Delta p$ .



“Trykkspenning” er det samme som “hydrostatisk overtrykk”

$$\begin{aligned} \epsilon_V &= \frac{\Delta V}{V} && \text{Volumtøyning} \\ T &= \Delta p && \text{Trykkspenning} \\ \Delta p &= -B \frac{\Delta V}{V} && \text{Hookes lov} \end{aligned} \quad (7-1)$$

hvor  $B$  er *volum-elastisitetsmodulen* (volum-modulen).

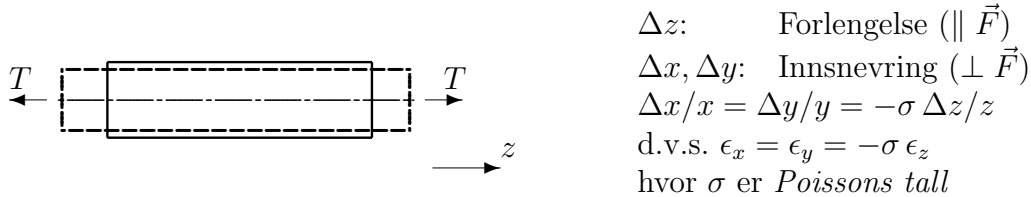
Typiske tallverdier for stål:  $E \sim 200 \text{ GPa}$ ,  $\mu \sim 75 \text{ GPa}$  og  $B \sim 170 \text{ GPa}$ .<sup>3</sup>

<sup>3</sup>G for “Giga” =  $10^9$ .

## 7.4 Sammenhengen mellom elastisitetsmodulene

### 7.4.1 Poissons tall

Når et fast legeme strekkes, får det *både* ei forlengelse i retninga til strekk-krafta, og ei innsnevring i retningene loddrett på strekk-krafta.



For de fleste metaller er Poissons tall  $\sigma \sim 0,30$ , mens betong har  $\sigma \sim 0,10$ .

Volumforandringen ved strekking av et materiale kan uttrykkes, om man antar en kloss med sidekanter  $x, y$  og  $z$ :

$$\begin{aligned} \Delta V &= \Delta(x y z) = (x + \Delta x)(y + \Delta y)(z + \Delta z) - x y z \\ &= V[(1 + \epsilon_x)(1 + \epsilon_y)(1 + \epsilon_z) - 1] \\ &\stackrel{\epsilon_i \ll 1}{\approx} (\epsilon_x + \epsilon_y + \epsilon_z) V \end{aligned} \quad (7-2)$$

$$= (-2\sigma + 1) \epsilon_z V, \quad (7-3)$$

hvor vi i siste overgang har innført Poissons tall  $\sigma$ . Dersom  $\sigma = 1/2$ , ser man at volumforandringen er null.

### 7.4.2 Sammenhengen mellom volum- og strekkmodul

Et reint hydrostatisk trykk  $\Delta p$  gir samme strekk<sup>4</sup>  $T = -\Delta p$  og samme tøyning  $\epsilon_x = \epsilon_y = \epsilon_z \equiv \epsilon$  i alle retninger. Tøyningene kan sees som satt sammen av reine strekk-tøyninger i trykk-kreftenes retninger og innsnevring i retningene loddrett på trykk-kreftene. Hvis vi f.eks. tar for oss tøyningen i  $z$ -retning skyldes den

1) Trykket i  $z$ -retningen som gir tøyning  $\epsilon_{z,z} = T_z/E = -\Delta p/E$ ,  
og ifølge definisjonen av Poissons tall  $\sigma$  gir

2) trykket i  $y$ -retningen tøyning  $\epsilon_{z,y} = -\sigma \epsilon_{z,z}$  i  $z$ -retningen og

3) trykket i  $x$ -retningen tøyning  $\epsilon_{z,x} = -\sigma \epsilon_{z,z}$  i  $z$ -retningen.

Total tøyning i  $z$ -retningen blir summen av disse:

$$\epsilon_z = \epsilon_{z,z} - \sigma \epsilon_{z,z} - \sigma \epsilon_{z,z} = (1 - 2\sigma) \epsilon_{z,z} = -(1 - 2\sigma) \Delta p/E. \quad (7-4)$$

Tilsvarende ville vi finne samme verdi for  $\epsilon_y$  og  $\epsilon_x$  – de er jo alle like. Volumforandringa ved hydrostatisk trykk der da  $\epsilon_x = \epsilon_y = \epsilon_z = \epsilon$  ser vi fra likn. (7-2) er  $\Delta V \approx 3 \epsilon V$ . Fra definisjonen av volumelastisitetsmodulen  $B$  får vi dermed

$$B = -\frac{\Delta p}{\Delta V/V} = -\frac{\Delta p}{3\epsilon} = -\frac{\Delta p}{-3(1 - 2\sigma) \Delta p/E}, \quad (7-5)$$

<sup>4</sup>trykk = negativt strekk.

$$B = \frac{1}{3} \frac{E}{1 - 2\sigma}. \quad (7-6)$$

Her ser man at  $B \rightarrow \infty$  når  $\sigma \rightarrow 0,5$ , dvs.  $\sigma = 0,5$  svarer til et materiale som ikke lar seg komprimere.

### 7.4.3 Sammenhengen mellom skjær- og strekkmodul

Denne sammenhengen er *litt* mer komplisert å finne slik at her vil vi hopper over utledninga og nøyer oss med å gi resultatet

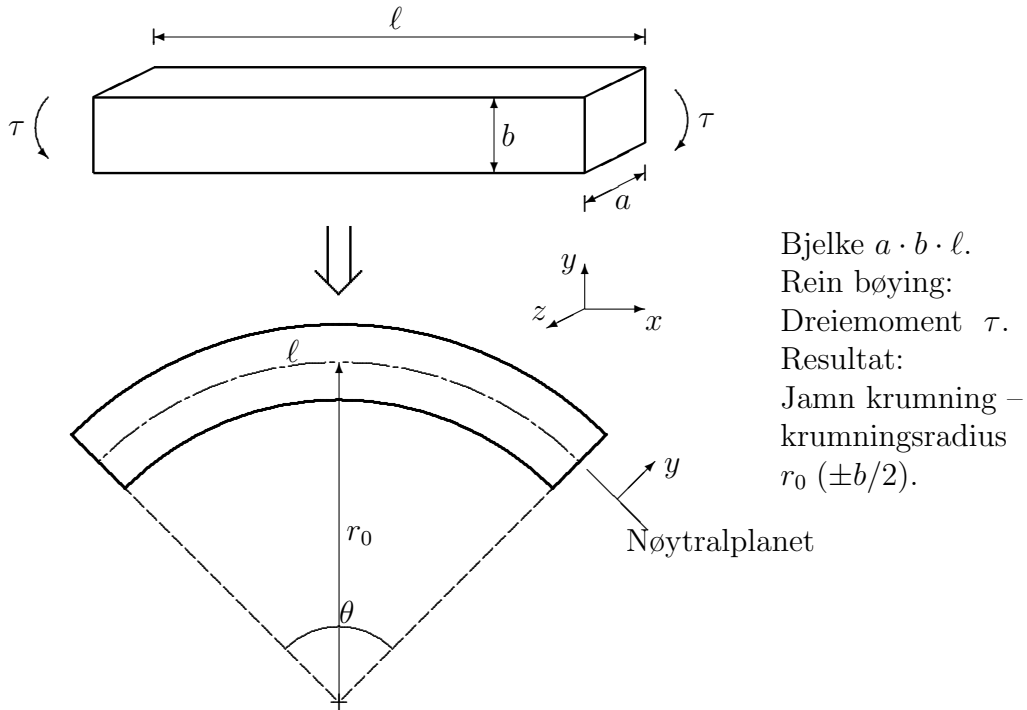
$$\mu = \frac{1}{2} \frac{E}{1 + \sigma}. \quad (7-7)$$

De tabellverdiene som man finner for  $E$ ,  $\mu$  og  $B$ , refererer oftest *ikke* til samme prøve. Det ser man lett ved for eksempel å bruke  $E$  og en av de to andre til å beregne  $\sigma$  – og så regne ut hva den tredje tabellverdien burde ha vært.

Sammenhengen mellom de mekaniske spenningene for et gitt fast legeme når disse refereres til to koordinatsystemer som er rotert i forhold til hverandre, er komplisert, men godt kartlagt. Mekaniske spenninger (og deformasjoner) hører til en klasse fysiske størrelser som kalles *tensorer*.

## 7.5 Bøying

Betrakt en rektangulær bjelke, med dimensjoner  $a \cdot b \cdot \ell$ . Vi velger bjelkeaksen som  $x$ -akse, og utsetter bjelken for et dreiemoment  $\vec{\tau} = \tau \hat{\mathbf{e}}_z$ , som vist på figuren.



Dreiemomentet bøyer alle deler av bjelken likt, slik at bjelkeaksen får en jamn krumning, med krumningsradius  $r_0$ .

Dreiemomentet gir strekk-krefter på øvre del av bjelken, og like store trykk-krefter på nedre del. Vi definerer nøytralplanet der det er null strekk og null forlengelse og definerer her  $y = 0$ . I en avstand  $y$  fra aksen blir lengden  $\ell + \Delta x(y)$ , og vi skal vise at relativ forlengelse (tøyning) blir proporsjonal med  $y$ .

“Krumningsvinkelen”  $\theta$  er den samme for alle  $y$ :

$$\begin{aligned} \theta &= \frac{\ell}{r_0} = \frac{\ell + \Delta x(y)}{r_0 + y} \\ \Rightarrow \ell r_0 + \ell y &= \ell r_0 + \Delta x(y) r_0 \end{aligned} \quad (7-8)$$

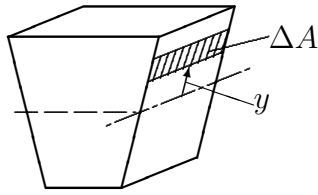
dvs. relativ forlengelse (tøyning) er

$$\epsilon(y) = \frac{\Delta x(y)}{\ell} = \frac{y}{r_0}. \quad (7-9)$$

Strekk-spenninga blir dermed

$$T(y) = E\epsilon = E \frac{y}{r_0} \quad (\text{negativ for } y < 0). \quad (7-10)$$

Betrakt så kreftene på et tverrsnitt (i  $yz$ -planet) av bjelken:



På et flateelement  $\Delta A = a\Delta y$  virker ei strekkkraft  $\Delta F = T(y)\Delta A$ , og dette gir igjen et dreiemoment om  $z$ -aksen ( $y = 0$ )

$$\Delta\tau = y\Delta F = yT(y)\Delta A = (Ea/r_0)y^2\Delta y$$

Det totale dreiemomentet finnes ved å summere over  $\Delta\tau$ :

$$\tau = \sum \frac{E}{r_0}(y^2\Delta A) \rightarrow \frac{E}{r_0} \int_{y=-b/2}^{b/2} ay^2 dy, \quad (7-11)$$

$$\tau = \frac{1}{12} \frac{E}{r_0} ab^3. \quad (7-12)$$

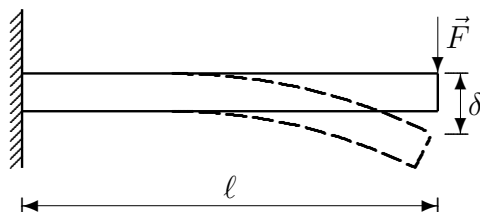
“Krumningsvinkelen”  $\theta$  er dermed gitt av dreiemomentet og bjelkelengden ved

$$\theta = \frac{\ell}{r_0} = \frac{\tau}{EI_F} \ell, \text{ hvor} \quad (7-13)$$

$$I_F = \int y^2 dA = \frac{1}{12} ab^3 \quad \text{er flatetregghetsmomentet til bjelken.}$$

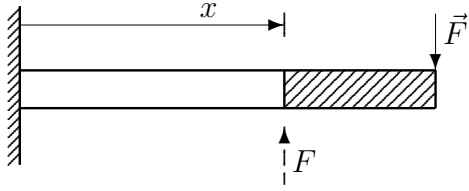
Flatetregghetsmomentet er tatt om bøyningssaksen, dvs.  $z$ -aksen. Det funne uttrykket for  $\theta$  er gyldig også for andre bjelkeprofiler, dersom det tilhørende uttrykket for  $I_F$  settes inn.

### 7.5.1 Innspent bjelke med last



En horisontal bjelke med lengde  $\ell$  er fast innspent i den ene enden, og påtrykt ei vertikal kraft  $\vec{F}$  i den frie enden. Vi vil finne uttrykk for nedbøyinga av enden,  $\delta$ . Bjelkens egenvekt neglisjeres – egennebbøyinga kan eventuelt beregnes separat etterpå.

Betrakt et element av bjelken, fra posisjon  $x$  og ut til enden, med lengde  $\ell - x$ .

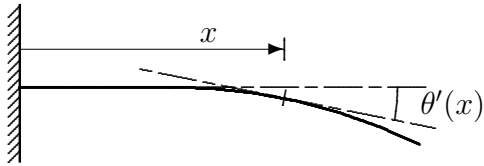


Vertikal kraftbalanse: Krafta  $F$  balanseres av en tilsvarende motkraft i posisjon  $x$ .

Momentbalanse: Momentet av  $F$  i  $x$  balanseres av et moment

$$\tau(x) = (\ell - x) F$$

Vi har funnet sammenhengen mellom “krumningsvinkel”  $\theta$  og bøyemoment  $\tau$ , ved konstant  $\tau$ . Her er  $\tau = \tau(x)$ , og vi kan da skrive  $\theta/\ell \rightarrow d\theta/dx = \tau(x)/EI_F$ .



$\theta'$  er den lokale hellinga til bjelken;

$$\theta' = d\delta/dx$$

$$d\delta = \theta' dx$$

$\theta(x)$  og nedbøying  $\delta(x)$  finnes nå ved integrasjon

$$\theta(x) = \int_{x'=0}^x d\theta(x') = \frac{F}{EI_F} \int_0^x (\ell - x') dx' = \frac{F}{EI_F} (\ell x - x^2/2) \quad (7-14)$$

$$\begin{aligned} \delta(x) &= \int_{x'=0}^x \theta(x') dx' = \frac{F}{EI_F} \int_0^x (\ell x' - x'^2/2) dx' \\ &= \frac{F}{EI_F} (\ell x^2/2 - x^3/6). \end{aligned} \quad (7-15)$$

og nedbøyinga av enden til bjelken ( $x = \ell$ ) blir dermed

$$\delta(\ell) = \frac{\ell^3}{3EI_F} F.$$

(7-16)

Alternativt kan nedbøyinga beregnes ved å legge merke til at

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = -\frac{1}{r} \quad \text{og} \quad \frac{1}{r} = \frac{\tau}{EI_F}, \quad (7-17)$$

hvilket gir

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = -\frac{F}{EI_F} (\ell - x). \quad (7-18)$$

Etter to gangers integrasjon av denne likninga får man videre at

$$y(x) = -\frac{F\ell}{EI_F} \left[ \frac{1}{2} x^2 - \frac{1}{6} \frac{x^3}{\ell} \right], \quad (7-19)$$

hvor innsetting av  $x = \ell$  gir likn. (7-16), med  $\delta(\ell) = -y(\ell)$ .

Vi har i beregninga over underslått at belastninga ikke er ei rein bøyning; i tillegg til dreiemomentet er det ei konstant skjærkraft  $F$ , som også gir deformasjon. Men skjær-deformasjonen gir essensielt bare en formforandring av bjelken fra rektangel til parallelogram, det vil si et konstant bidrag til vinkelen  $\theta$ , og ikke et bidrag som øker proporsjonalt med  $x^2$ , slik dreiemomentet gir. Unntatt for meget korte bjelker kan derfor skjær-deformasjonen vanligvis neglisjeres.

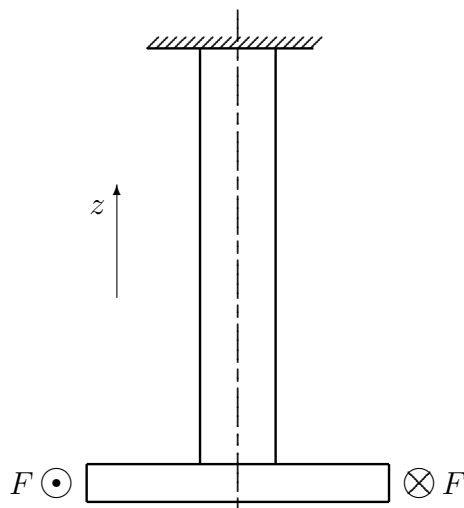
Tallemsempel:

Rektangulær stav av stål,  $a \cdot b \cdot \ell = 5,0 \text{ mm} \cdot 5,0 \text{ mm} \cdot 1,0 \text{ m}$ ,  $F = 1,0 \text{ N}$ ,  $E = 2,0 \cdot 10^{11} \text{ Pa}$  og  $I_F = ab^3/12 = 5,2 \cdot 10^{-11} \text{ m}^4 \Rightarrow \underline{\delta = 3,0 \text{ cm}}$ .

## 7.6 Torsjon

Torsjon – vridning – ble først studert kvantitativt av den franske bygningsingeniøren Charles Coulomb, som etter 10 år med ansvar for utbygging av befestningene på Mauritius vendte tilbake til hjemlandet – og i 1776 skrev en prisoppgave om emnet, belønnet av det franske vitenskapsakademiet. Han konstruerte deretter ei følsom torsjonsvekt, som han så brukte til å undersøke kreftene mellom elektriske ladninger. Det er det siste han er blitt mest kjent for.

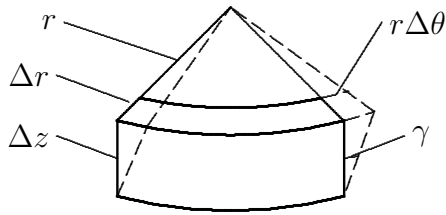
Vi følger Coulomb, og tar for oss torsjon av sylindriske staver eller tråder.



En massiv, sylindrisk stav med diameter  $D = 2R$  og lengde  $\ell$  er fast innspenst i øvre ende. Den nedre enden vrir med et kraftpar to like store, men motsatt rettede krefter, som gir et dreiemoment  $\tau$  om stavens akse. Stavens nedre ende blir dermed vridd en vinkel  $\theta$  i forhold til den øvre.

Vi tar for oss ei skive av staven, mellom posisjoner  $z$  og  $z + \Delta z$ , og ser på et utsnitt av denne skiva.





Utsnitt av skiva:

Sektor med radius  $r < R$

Skiva vris en vinkel  $\Delta\theta$

Skjærtøyninga er:

$\gamma(r) = r\Delta\theta/\Delta z \propto r$

og skjærspenninga er:

$T(r) = \mu\gamma = \mu r\Delta\theta/\Delta z$ .

Dreiemomentet om aksen er (arm  $\times$  kraft) = arm  $\times$  (spenning  $\cdot$  flate).

På et element  $\Delta A$  av tverrsnittet, mellom  $r$  og  $r + \Delta r$ , virker derfor et dreiemoment

$$\Delta\tau = r \times (T(r)\Delta A) = \mu \frac{\Delta\theta}{\Delta z} r^2 \Delta A, \quad (7-20)$$

hvor  $\Delta A = 2\pi r \Delta r$  og det totale dreiemomentet er

$$\tau = \int_{r=0}^R d\tau = \mu \frac{\Delta\theta}{\Delta z} \underbrace{\int_0^R r^2 dA}_{I_{\text{Fr}}} = \mu \mathcal{I}_r \frac{\Delta\theta}{\Delta z}, \quad (7-21)$$

$$\tau = \mu \mathcal{I}_r \frac{\theta}{\ell}. \quad (7-22)$$

$I_{\text{Fr}}$  er det radielle flatetregghetsmomentet som for vår sylindriske stav blir

$$I_{\text{Fr}} = \int_0^R r^2 \cdot (2\pi r dr) = 2\pi \int_0^R r^3 dr = \pi R^4/2. \quad (7-23)$$

Inverterer vi uttrykket for  $\tau$ , finner vi vridningsvinkelen som funksjon av dreiemomentet

$$\theta = \frac{2}{\pi\mu} \frac{\ell}{R^4} \tau = \frac{32}{\pi\mu} \frac{\ell}{D^4} \tau. \quad (7-24)$$

Mest å merke er kanskje at “torsjonsstivheten”  $\tau/\theta$  øker med økende diameter som  $D^4$ . Det vil si at det meste av vridningsstivheten kommer fra den ytterste delen av den sylindriske staven.

Tallemsempel:

Stålstav,  $\ell = 30$  cm og  $D = 0,5$  mm.

Skjærmodul  $\mu_{\text{stål}} = 7,7 \cdot 10^{10}$  Pa  $\Rightarrow \theta/\tau = 635$  rad/(Nm).

Det skal bare et dreiemoment på  $(2\pi/635) \approx 0,01$  Nm til for å vri enden av staven én gang rundt ( $360^\circ$ )!

Legg ellers merke til at *for samme materialforbruk gir lukkede, rørliknende konstruksjoner mye bedre torsjonsstivhet enn åpne profiler*, som “H”- og “U”-bjelker.

## OPPSUMMERING AV KAP. 7

- *Strekkspenninga* er gitt som  $T = F/A$ , med enhet  $\text{N/m}^2 = \text{Pa}$ .
- Hookes lov for strekktøyning:  $T = E \cdot \epsilon$ , hvor  $\epsilon = \Delta\ell/\ell =$  tøyning (relativ forlengelse) og  $E$  er *strekkelastisitetsmodulen* (også kalt Youngs modulus).
- Hookes lov for skjærtøyning:  $T = \mu \cdot \gamma$ , hvor  $\gamma = \Delta x/y =$  skjærtøyning og  $\mu$  er *skjærelastisitetsmodulen*.
- Hookes lov for volumtøyning:  $\Delta p = -B\epsilon_V$ , hvor  $\epsilon_V = \Delta V/V =$  volumtøyning (relativ forlengelse) og  $B$  er *volumelastisitetsmodulen*.
- Ved nedbøying av en bjelke har man strekktøyning på oversida av bjelken og kompresjon (negativstrekktøyning) på undersida. I et *nøytralplan* mellom disse to ytterlighetene vil man ha null deformasjon (null tøyning).
- *Flatetregghetsmomentet* til en bjelke er gitt som  $I_F = \int y^2 dA$  hvor  $y$  er avstanden fra nøytralplanet.
- En bjelkes *bøyetivhet* er proporsjonal med både flatetregghetsmomentet og strekkmodulen.
- Dreiemomentet ved torsjon er proporsjonal med *det radielle flatetregghetsmomentet*, som for en sylinder med diameter  $D$  er gitt som  $I_{\text{Fr}} = \int_0^{D/2} r^2 2\pi r dr = \pi D^4/32$ .



## Del II

# Svingninger og bølger



# Kapittel 8

## Periodisk bevegelse

### Innhold

8.1	Masse og fjær . . . . .	60
8.2	Uniform rotasjon . . . . .	60
8.3	Torsjonssvingninger . . . . .	62
8.4	Matematisk pendel . . . . .	64
8.5	Fysisk pendel . . . . .	66
8.5.1	Tynn, homogen stav . . . . .	67
8.6	Dempete svingninger . . . . .	67
8.6.1	Løsning ved svak demping . . . . .	68
8.6.2	Klassifisering etter dempningsgrad . . . . .	70
8.7	Tvungne svingninger og resonans . . . . .	70

Vi skal i dette kapittelet se lokaliserte bevegelser som er periodiske funksjoner av tida.

Mange fysisk sett svært ulike periodiske fenomener modelleres matematisk på samme måte – slik at én og samme matematiske metode kan benyttes for å beskrive en vid klasse av periodiske fenomener.

Vi skal her først ta for oss *periodisk bevegelse uten demping*, og vise at den matematiske beskrivelse for mange systemer kan føres tilbake til – eksakt eller tilnærmet – beskrivelsen av en uniform rotasjon.

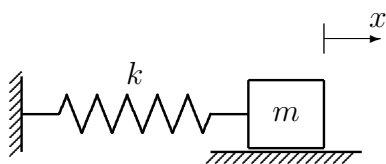
Vi ser så på *viskøst dempete systemer* – dvs. systemer hvor friksjonskrafta er proporsjonal med hastigheten. Av de mer velkjente praktiske eksempler på slike systemer, er olje-dempete fjæringssystemer (støtdempere) i biler.

Tilslutt tar vi for oss *påtvungne svingninger* – svingninger drevet og holdt vedlike av en periodisk ytre kraft (“pådrag”). Vi vil vise hvordan utslagsamplituden varierer

med frekvensen av pådraget og at det finnes en *resonanstopp* hvor denne frekvensen faller sammen med *egenfrekvensen* for systemet.

Vi tar først for oss to tilfeller av periodisk bevegelse som vi har sett på tidligere i dette kurset: ei fjærdrevet svingning og en jamn rotasjonsbevegelse, og vi viser at de matematisk sett er ekvivalente, med bevegelseslikning av samme form. Deretter viser vi hvordan løsningen av bevegelseslikninga finnes, for gitte startbetingelser.

## 8.1 Masse og fjær



En masse  $m$  er festet i ei fjær med fjærkonstant  $k$ , og glir på friksjonsfritt underlag. Utslaget fra likevektsposisjon er  $x$ .

Fjærkrafta er retta *mot* utslagsretninga, og er

$$F = -kx \quad \text{Hookes lov.} \quad (8-1)$$

Innsatt i Newtons 2. lov gir dette

$$m\ddot{x} = -kx, \quad (8-2)$$

som kan ordnes om til formen

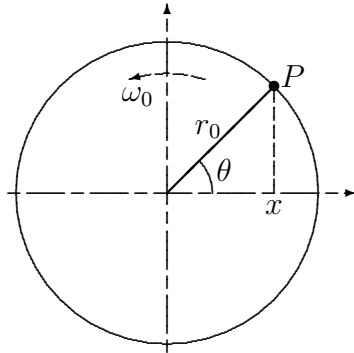
$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0, \quad (8-3)$$

hvor  $\omega_0^2 = k/m$ . I kap. 2 fant vi at løsningen kunne skrives på formen

$$x(t) = C_1 \cos \omega_0 t + C_2 \sin \omega_0 t = r_0 \cos(\omega_0 t + \theta_0), \quad (8-4)$$

hvor  $r_0$  og  $\theta_0$  samt  $C_1 = r_0 \cos \theta_0$  og  $C_2 = -r_0 \sin \theta_0$  er integrasjonskonstanter.

## 8.2 Uniform rotasjon



Et punkt  $P$  roterer om en akse gjennom origo, med konstant vinkelhastighet  $\omega_0$  og konstant baneradius  $r = r_0$ .

Vinkelen mellom radiusvektor og  $x$ -akse er  $\theta$ , og øker lineært med tida,

$$\theta = \omega_0 t + \theta_0.$$

Banen uttrykkes enklest i polarkoordinater,

$$\{r, \theta\} = \{r_0, \omega_0 t + \theta_0\}.$$

I kartesiske koordinater tilsvarer dette

$$\{x, y\} = \{r \cos \theta, r \sin \theta\} = \{r_0 \cos(\omega_0 t + \theta_0), r_0 \sin(\omega_0 t + \theta_0)\}.$$

Vi betrakter nå bare  $x$ -projeksjonen av banen

$$x(t) = r_0 \cos(\omega_0 t + \theta_0).$$

Uttrykket for  $x(t)$  er av samme form som vi fant for fjærbevegelsen.

Vil vi ha tak i  $x$ -akselerasjonen – for eksempel for å kunne bestemme vha. Newtons 2. lov hva *føringskrafta* på en masse  $m$  i punktet  $P$  måtte være. Vi kan derivere uttrykket to ganger:

$$\dot{x}(t) = -\omega_0 r_0 \sin(\omega_0 t + \theta_0) \quad (8-5)$$

$$\ddot{x}(t) = -\omega_0^2 r_0 \cos(\omega_0 t + \theta_0) \equiv -\omega_0^2 x. \quad (8-6)$$

$x$ -komponenten av føringskrafta,  $F_x = m\ddot{x} = -m\omega_0^2 x$ , er altså proporsjonal med  $x$ . Det var det samme som vi fant for krafta fra en fjær (Hookes lov) beskrevet i kap. 2.3 og spesielt i likn. (2-29). Ved sammenlikning ser vi da at føringskrafta i rotasjonsbevegelsen tilsvarer fjærkrafta med fjærkonstant  $k = m\omega_0^2$ . Vi ser altså

*$x$ -projeksjonen av en ren rotasjonsbevegelse med vinkelhastighet  $\omega_0$   
og en éndimensjonal fjærbevegelse med masse  $m$  og fjærkonstant  $k$   
er matematisk ekvivalente bevegelser, med  $\omega_0 \leftrightarrow \sqrt{\frac{k}{m}}$ .*

Navnet for et system som er beskrevet av denne likninga er en *udempet harmonisk oscillator*

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0.$$

(8-7)



**Bestemmelse av integrasjonskonstantene**

Løsningen av harmonisk oscillator-likninga er av form

$$x = r_0 \cos(\omega_0 t + \theta_0),$$

hvor  $r_0$  og  $\theta_0$  er integrasjonskonstanter, som bestemmes av *begynnelsesbetingelsene*.

Bestemmelse av to konstanter krever to betingelser, vanligvis gitt som

$$\begin{aligned} x(t=0) &= x_0 \\ \dot{x}(t=0) &\equiv v(t=0) = v_0, \end{aligned} \quad (8-8)$$

dvs. at man får to likninger for å løse de to ukjente størrelsene  $r_0$  og  $\theta_0$ .

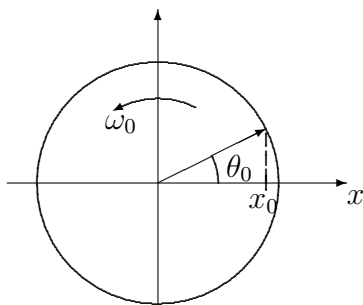
$$(I) \quad r_0 \cos \theta_0 = x_0 \quad (8-9)$$

$$(II) \quad -\omega_0 r_0 \sin \theta_0 = v_0 \quad (8-10)$$

$$\begin{aligned} (I)^2 + \left[ \frac{(II)}{\omega_0} \right]^2 &\Rightarrow r_0^2 (\cos^2 \theta_0 + \sin^2 \theta_0) = x_0^2 + \left( \frac{v_0}{\omega_0} \right)^2 \\ \Rightarrow \text{amplituden:} \quad r_0 &= \sqrt{x_0^2 + v_0^2 / \omega_0^2} \end{aligned} \quad (8-11)$$

$$\begin{aligned} \frac{(II)}{(I)} &\Rightarrow -\frac{\omega_0 \sin \theta_0}{\cos \theta_0} = \frac{v_0}{x_0} \Rightarrow \tan \theta_0 = -\frac{v_0}{\omega_0 x_0} \\ \Rightarrow \text{fasevinkelen:} \quad \theta_0 &= \arctan \left( -\frac{v_0}{\omega_0 x_0} \right) \end{aligned} \quad (8-12)$$

Men – i hvilken kvadrant ligger fasevinkelen  $\theta_0$ ? Taster du inn tallverdier til  $\arctan$  på kalkulatoren, vil den gi som svar en vinkel i 1. kvadrant ( $\theta_0 \in [0, \frac{\pi}{2}]$ ) hvis argumentet er positivt, og i 4. kvadrant ( $\theta_0 \in [-\frac{\pi}{2}, 0]$ ) hvis argumentet er negativt. Men hvis  $v_0$  er positiv og  $x_0$  negativ skal  $\theta_0$  ligge i 3. kvadrant. Så om kalkulatorvinkelen skal korrigeres med en ekstra  $\pi$  ( $180^\circ$ ) må du selv finne ut. Men dette er i grunnen ganske enkelt:

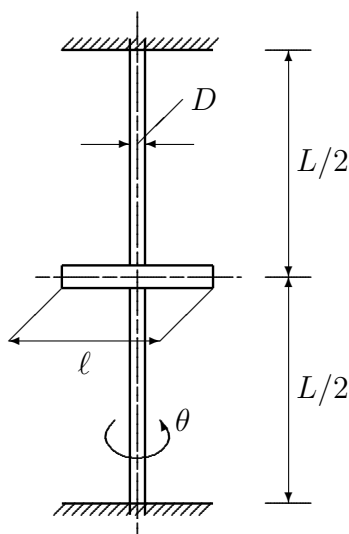


$v_0 \equiv \dot{x}(0)$  er hastigheten i  $x$ -retning ved tid  $t = 0$ ,  
 $x_0 \equiv x(0)$  er  $x$ -posisjonen ved tid  $t = 0$ .

Fra figuren skjønner vi da at:

$$\begin{aligned} x_0 > 0 \text{ og } v_0 < 0 &\Rightarrow \theta_0 \text{ i 1. kvadrant.} \\ x_0 < 0 \text{ og } v_0 < 0 &\Rightarrow \theta_0 \text{ i 2. kvadrant.} \\ x_0 < 0 \text{ og } v_0 > 0 &\Rightarrow \theta_0 \text{ i 3. kvadrant.} \\ x_0 > 0 \text{ og } v_0 > 0 &\Rightarrow \theta_0 \text{ i 4. kvadrant.} \end{aligned}$$

## 8.3 Torsjonssvingninger



Som eksempel på en harmonisk “fjærbevegelse”, hvor utslaget ikke er en lengde  $x$  men en vinkel  $\theta$ , tar vi for oss ei relativt enkel torsjonssvingning. Det kan være passende i dette kurset – siden vi allerede har vist sammenhengen mellom torsjonsmoment  $\tau$  og dreiningsvinkel  $\theta$  for en sylindrisk stav/tråd, som først gitt av Charles Coulomb.

En sylindrisk tråd med lengde  $L$  og diameter  $D$  er fast innspent i begge ender.

Midt på tråden er festet en sylindrisk stav med lengde  $\ell$  og diameter  $d$ : Tråden går gjennom et hull midt på staven, med stav- og trådakse perpendikulære på hverandre.

Hvis staven roteres ut av likevektsposisjon, og så slippes, vil utslagsvinkelen  $\theta$  variere periodisk. Vi skal modellere denne periodiske bevegelsen, og finne uttrykk for perioden  $T$ .

Vi vil anta tråden tynn, slik at trådens treghetsmoment om trådaksen kan neglisjeres i forhold til treghetsmomentet til staven.

Rotasjonsbevegelsen til staven følger dreiemomentlikninga vi hadde i likn. (6-40) (Newtons 2. lov på rotasjonsform):

$$\tau = I \frac{d\omega}{dt} \equiv I \ddot{\theta}. \quad (8-13)$$

hvor  $I$  er stavens treghetsmoment om trådaksen, og  $\tau$  er dreiemomentet (torsjonsmomentet) fra den vridde tråden. For å komme videre, må vi finne uttrykk for  $\tau$  og for  $I$ .

### Dreiemomentet

Staven påvirkes av dreiemoment fra *to* trådelementer, hver med lengde  $L/2$  og vridningsvinkel  $\theta$ . Vi fant tidligere (kapitel 7.6) sammenhengen mellom vridningsvinkel og dreiemoment for en stav med lengde  $\ell$  og diameter  $D$ ;

$$\theta = \frac{32\ell}{\mu\pi D^4} \tau, \quad (8-14)$$

hvor  $\mu$  er skjærmodulen. En liten sidebemerkning: Nå må vi passe på fortegnet, og snu det – fordi positiv  $\theta$  gir dreiemoment *mot*  $\theta$ -retninga.<sup>1</sup> For vårt tilfelle med to

<sup>1</sup>Dreiemomentet er her reaksjonen fra tråden, mens det i kapitel 7.6 var dreiemomentet som vred tråden – derfor fortegnsskiftet.

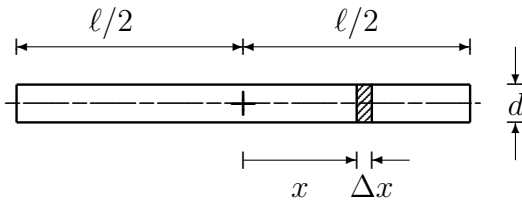
trådelementer fås dermed

$$\tau = \tau_1 + \tau_2 = -2 \frac{\mu \pi D^4}{32(L/2)} \theta \equiv -\kappa \theta, \quad (8-15)$$

hvor *torsjonsstivheten* er gitt som

$$\kappa = \frac{\pi \mu D^4}{8 L}. \quad (8-16)$$

### Trehetsmoment



Trehetsmomentet om rotasjonsaksen er, per definisjon,  $I = \sum r^2 \Delta m$ , hvor  $r$  er avstand fra rotasjonsaksen.

Hvis staven er tynn,  $d \ll \ell$ , kan vi med god tilnærming anta at  $r$  er lik den lineære lengden  $x$  langs stavens akse, dvs.  $r \approx x$ .

Massen til hele staven er  $M = \ell \cdot \pi r^2 \cdot \rho = \ell \cdot \pi \frac{1}{4} d^2 \cdot \rho$ , hvor  $\rho$  er stavens massetetthet. Massen til en liten bit  $\Delta x$  er da  $\Delta m = M \cdot \Delta x / \ell$ . Og dermed

$$\begin{aligned} I &\approx \sum x^2 \cdot M \cdot \frac{\Delta x}{\ell} \longrightarrow \frac{M}{\ell} \int_{x=-\ell/2}^{\ell/2} x^2 dx \\ &= \frac{M}{\ell} \cdot 2 \cdot \frac{1}{3} \left( \frac{\ell}{2} \right)^3 = \frac{1}{12} M \ell^2 \quad \left( = \frac{\pi}{48} \rho d^2 \ell^3 \right) \end{aligned} \quad (8-17)$$

### Bevegelseslikning

Fra likn. (8-13) og (8-15) finner vi da bevegelseslikninga for rotasjonsvinkelen  $\theta$ :

$$\begin{aligned} I \ddot{\theta} &= -\kappa \theta \\ \ddot{\theta} + \omega_0^2 \theta &= 0 \end{aligned} \quad (8-18)$$

$$\text{med} \quad \omega_0^2 = \frac{\kappa}{I} = \frac{3}{2} \pi \frac{\mu D^4}{L M \ell^2} \quad \left( = \frac{6 \mu D^4}{\rho L d^2 \ell^3} \right) \quad (8-19)$$

$$\text{og perioden} \quad T = \frac{2\pi}{\omega_0} \quad (8-20)$$

#### Tallempeksel:

Tråd av stål, med lengde  $L = 0,60$  m og diameter  $D = 0,50$  mm.

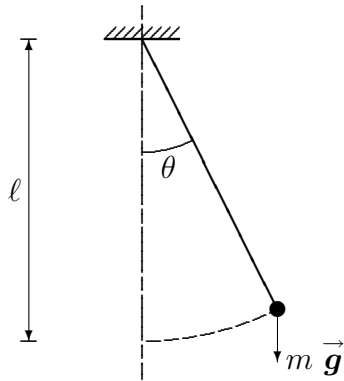
Skjærmodulen for stål:  $\mu_{\text{Fe}} = 8,0 \cdot 10^{10}$  Pa.

Stav av messing, med lengde  $\ell = 110$  mm og diameter  $d = 8,0$  mm.

Massetettheten til messing  $\rho_{\text{Me}} = 8,40$  g/cm<sup>3</sup>.

Dette gir  $\omega_0^2 = 69,88 \text{ s}^{-2}$  og  $T = 2\pi/\omega_0 = 0,75$  s.

## 8.4 Matematisk pendel



En *matematisk pendel* består av en punktmasse  $m$  hengt opp i ei vektløs snor med lengde  $\ell$ .

Hvis massen trekkes ut til sida og slippes, vil tyngdekrafta trekke den tilbake mot likevektsposisjonen, og den kommer i periodiske svingninger.

Massen akselereres langs en sirkelbue av komponenten av tyngdekrafta langs sirkelbuen,

$$F_{\theta} = -mg \sin \theta. \quad (8-21)$$

Vi setter negativt fortegn på krafta, fordi den virker i retning *mot* utslagsvinkelen  $\theta$ . Etter Newtons 2. lov er  $F_{\theta} = ma_{\theta}$ , hvor akselerasjonen langs sirkelbanen,  $a_{\theta}$ , kan uttrykkes ved vinkelakselerasjonen  $\ddot{\theta}$  og pendellengden,

$$a_{\theta} = \ell \ddot{\theta}. \quad (8-22)$$

Bevegelseslikninga blir dermed

$$-mg \sin \theta = m \ell \ddot{\theta}, \quad (8-23)$$

som vi skriver om til den eksakte bevegelseslikninga for en matematisk pendel

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{\ell} \sin \theta = 0. \quad (8-24)$$

Dette er *ikke* likninga for harmonisk oscillator – en harmonisk oscillator-likning skulle hatt  $\sin \theta$  erstattet av  $\theta$ . Men – for små  $\theta$  er harmonisk oscillator-likninga en god approksimasjon: Utvikler vi  $\sin \theta$  i MacLaurin-rekke<sup>2</sup>, får vi

$$\sin \theta = \theta - \theta^3/6 + \dots = \theta(1 - \theta^2/6 + \dots) \quad (8-25)$$

og for vinkler små nok til at  $\theta^2/6 \ll 1$ , kan vi uten merkbar feil erstatte  $\sin \theta$  med  $\theta$ .

Vi får da

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{\ell} \theta \approx 0$$

(8-26)

<sup>2</sup>Det vil si Taylorrekke om null,  $f(x) = f(0) + x f'(0) + (x^2/2!)f''(0) + (x^3/3!)f'''(0) + \dots$ , se ellers Rottmann.

som er likninga for en harmonisk oscillator med

$$\begin{array}{ll} \text{Vinkelfrekvens} & : \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{g}{\ell}} \\ \text{Periode} & : \quad T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}} \end{array} \quad (8-27)$$

Merk at massen  $m$  er uten betydning for perioden.

En såkalt *sekundpendel* er en pendel hvor en *halv* periode (en “tikk” i “tikk-takk”) er lik ett sekund; det tilsvarer en pendellengde<sup>3</sup>  $\ell = 0,994$  m.

Hvor store utslag kan så pendelen ha uten at perioden blir merkbart forandret?

For “store”  $\theta$  blir vinkelakselerasjonen  $\ddot{\theta}$  redusert med en faktor omtrent lik  $(1 - \theta^2/6)$  – og med litt strev kan man få med også denne faktoren ved integrasjon av bevegelseslikninga. Med resultat

$$T \approx 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}} \left(1 - \frac{\theta_{\max}^2}{16}\right), \quad (8-28)$$

hvor  $\theta_{\max}$  er utslagsamplituden (i *radianer* – finn for all del ikke på å bruke grader i slike uttrykk – det gir vanvittige resultater).

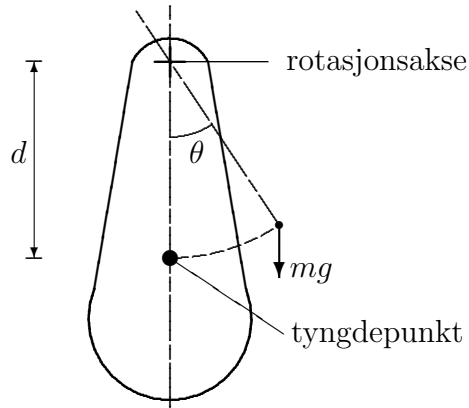
*Talleksempel:*

For et pendelur vil en  $\theta_{\max} = 0,10$  rad ( $5,7^\circ$ ) gi en relativ feil i perioden på  $\theta_{\max}^2/16 = 0,064\%$ , det vil si en absolutt feil i løpet av ett døgn på  $(24 \cdot 60 \cdot 60) \text{ s} \cdot 0,064\% = 55$  sekunder (for fort). Og det er vel litt mye – selv for et gammelt slagur – så utslaget bør være en del mindre enn dette. – Eller korreksjonen må tas inn ved å dimensjonere urpendelen litt lengre.

## 8.5 Fysisk pendel

Ingen pendler har virkelig all masse samla i ett punkt, som en matematisk pendel. En *fysisk pendel* er et stivt legeme som kan dreie seg – her antatt friksjonsfritt – om en horisontal rotasjonsakse.

<sup>3</sup> Som en kuriositet: Før Norge tiltrådte meterkonvensjonen (i 1872), var lengdestandarden her i landet 1 norsk tomme, 1”, lik en Rhinlandsk tomme som er definert 1/38 av lengden av en sekundpendel ved  $45^\circ$  nordlig bredde, som da blir 26,15 mm.



La legemets masse være  $m$ , avstanden fra rotasjonsaksen til tyngdepunktet  $d$ , tregghetsmomentet om rotasjonsaksen  $I$ , og vinkelutslaget fra likevekt  $\theta$ . Tyngdekrafta  $m\vec{g}$  gir et dreiemoment  $\tau = -mgd \sin \theta$  om rotasjonsaksen, og fra dreiemomentlikninga  $\tau = I\ddot{\theta}$  fås dermed følgende eksakte bevegelseslikning for en fysisk pendel

$$\ddot{\theta} + \frac{mgd}{I} \sin \theta = 0. \quad (8-29)$$

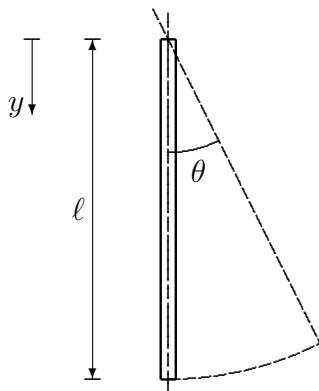
Den eneste forskjellen fra matematisk pendel-likninga er at  $\frac{g}{\ell}$  er erstattet med  $\frac{mgd}{I}$ . For små vinkler  $\theta$  kan igjen  $\sin \theta$  settes tilnærmet lik  $\theta$ , og man får ei harmonisk oscillator-likning

$$\ddot{\theta} + \omega_0^2 \theta = 0 \quad \text{hvor} \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{mgd}{I}}$$

(8-30)

For en matematisk pendel er avstanden til tyngdepunktet lik snorlengden,  $d = \ell$ , og tregghetsmomentet om rotasjonsaksen er  $I = m\ell^2$ . Dette gir  $\omega_0 = \sqrt{\frac{mg\ell}{m\ell^2}} = \sqrt{\frac{g}{\ell}}$ , som før. Om man bruker Newtons 2. lov eller dreiemomentlikningen, som er ( $\vec{r} \times$  Newtons 2. lov), må resultatet naturligvis bli det samme.

### 8.5.1 Tynn, homogen stav



Som eksempel på en fysisk pendel skal vi ta en tynn, homogen stav med lengde  $\ell$  og masse  $m$  er hengt opp friksjonsfritt på en aksling med senter gjennom det ene endepunktet. Avstanden fra rotasjonsaksen til tyngdepunktet er da  $d = \ell/2$ .

Tregghetsmomentet til staven om rotasjonsaksen kan skrives som summen av treg-

hetsmomentene for elementer av aksene mellom  $y$  og  $y + \Delta y$ ;

$$\begin{aligned} I &= \sum \Delta I = \sum y^2 \Delta m = \sum y^2 \cdot m \frac{\Delta y}{\ell} \\ &\longrightarrow \frac{m}{\ell} \int_{y=0}^{\ell} y^2 dy = \frac{1}{3} m \ell^2 \end{aligned} \quad (8-31)$$

Fra likn. (8-30) og med  $d = \ell/2$  er da

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{mgd}{m\ell^2}} \cdot 3 = \sqrt{\frac{3g}{2\ell}}, \quad (8-32)$$

og svingetida, ved små utslag, blir dermed

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} = \sqrt{\frac{2}{3}} \cdot 2\pi \sqrt{\frac{\ell}{g}}, \quad (8-33)$$

dvs.  $\sqrt{2/3} = 0,817$  ganger svingetida for en matematisk pendel med samme lengde.

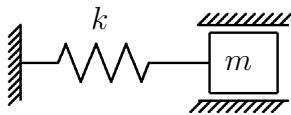
## 8.6 Dempete svingninger

I vanlig makrofysikk vil harmoniske svingninger alltid være dempet av friksjonskrefter, og svingningsamplituden vil avta med tida.

Det enkleste å modellere matematisk er viskøs friksjon, med friksjonskraft proporsjonal med hastigheten. Dette finner man ved bevegelse av legemer i væske og gass ved ikke for store hastigheter. Et legeme med hastighet  $\vec{v}$  vil da bremses med en kraft  $\vec{F}_f$  lik

$$\vec{F}_f = -b \vec{v}, \quad (8-34)$$

der  $b$  kalles friksjonskoeffisienten. Vi kan som illustrativ modell velge et stempel som beveger seg i en oljesmurt sylinder, og er festet til en spiralfjær.



*Fjærdrevet stempel  
med oljedempning*

La stempelutslaget fra likevekt være  $x$ , fjærkrafta  $-kx$ , friksjonskrafta  $-bv_x$  med  $v_x \equiv \dot{x}$ , og stempelmassen  $m$ .

Newtons 2. lov gir da

$$F = -kx - b\dot{x} = m\ddot{x}, \quad (8-35)$$

som vi ordner til standardformen for viskøst dempede svingninger

$$\ddot{x} + 2\delta \dot{x} + \omega_0^2 x = 0.$$

(8-36)

hvor vi har innført *dempningskonstanten*  $\delta = \frac{1}{2} \frac{b}{m}$ , og *udempet egenfrekvens*  $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$  som før.

### 8.6.1 Løsning ved svak damping

Hvis dempninga forsvinner, det vil si  $\delta = b/2m \rightarrow 0$ , må løsningen bli en ren harmonisk svingning av form  $x = x_0 \cos(\omega_0 t + \theta_0)$ , som før.

En svak dempning vil gjøre at amplituden  $x_0$  avtar langsomt med tida. Dertil vil friksjonen gjøre at det tar *litt* lengre tid fra én null-kryssing til den neste, så vi må erstatte  $\omega_0$  i den udempete løsningen med en “dempet egenfrekvens”  $\omega_d$  litt mindre enn  $\omega_0$ .

Den *svakt dempete løsningen* (prøveløsningen) må dermed kunne forventes å kunne skrives på form

$$x(t) = x_0(t) \cos(\omega_d t + \theta_0), \quad (8-37)$$

hvor  $x_0(t)$  avtar monotont med økende  $t$ .

Formen på amplitudedefunksjonen  $x_0(t)$  og størrelsen på  $\omega_d$  kan vi prøve å bestemme ved å sette vårt “forventede uttrykk” for  $x(t)$  inn i svingelikninga.

Vi deriverer  $x(t)$  to ganger, setter inn, og ordner det resulterende uttrykket i en sinusdel og en cosinusdel (husk  $x_0$  er funksjon av  $t$ :  $x_0(t)$ ):

$$\dot{x}(t) = \dot{x}_0 \cos(\omega_d t + \theta_0) - \omega_d x_0 \sin(\omega_d t + \theta_0) \quad (8-38)$$

$$\ddot{x}(t) = \ddot{x}_0 \cos(\omega_d t + \theta_0) - 2\omega_d \dot{x}_0 \sin(\omega_d t + \theta_0) - \omega_d^2 x_0 \cos(\omega_d t + \theta_0) \quad (8-39)$$

Innsetting i (8-36) gir

$$\begin{aligned} & \{-2\omega_d \dot{x}_0 - 2\delta \omega_d x_0\} \sin(\omega_d t + \theta_0) \\ & + \{\ddot{x}_0 - \omega_d^2 x_0 + 2\delta \dot{x}_0 + \omega_0^2 x_0\} \cos(\omega_d t + \theta_0) = 0 \end{aligned} \quad (8-40)$$

Hvis uttrykket over *alltid* skal være lik null, må leddene foran sinus- og cosinusfaktorene være lik null hver for seg. Vi sitter da igjen med

$$\begin{aligned} \text{(I)} \quad & \dot{x}_0 + \delta x_0 = 0 \\ \text{(II)} \quad & \ddot{x}_0 + 2\delta \dot{x}_0 + (\omega_0^2 - \omega_d^2)x_0 = 0. \end{aligned} \quad (8-41)$$

Likning (I) kan integreres direkte,

$$\begin{aligned} \dot{x}_0 & \equiv dx_0/dt = -\delta \cdot x_0 \\ \Rightarrow dx_0/x_0 & \equiv d \ln x_0 = -\delta \cdot dt \\ \Rightarrow \ln x_0 & = \ln x_0(0) - \delta \cdot t \\ \Rightarrow x_0(t) & = x_0(0) e^{-\delta \cdot t}. \end{aligned} \quad (8-42)$$



Setter vi dette inn i (II), får vi ei likning til bestemmelse av  $\omega_d$ :

$$\begin{aligned}\delta^2 x_0 + 2\delta \cdot (-\delta)x_0 + (\omega_0^2 - \omega_d^2)x_0 &= 0 \quad \text{dvs.} \\ \omega_d^2 &= \omega_0^2 - \delta^2.\end{aligned}\tag{8-43}$$

Løsningen kan dermed skrives på form

$x(t) = A e^{-\delta t} \cos(\omega_d t + \theta_0) \quad \text{hvor} \quad \omega_d = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2},$

(8-44)

hvor vi har skrevet  $A$  i stedet for  $x_0(0)$ .

Størrelsene  $A$  og  $\theta_0$  bestemmes fra begynnelsesbetingelsene  $x(0)$  og  $\dot{x}(0)$  tilsvarende som for udempet svingning.

Løsningen er en oscillasjon med konstant vinkelfrekvens  $\omega_d$ , begrenset av “omhyllningskurver”  $\pm A e^{-\delta t}$ , som illustrert nedenfor.

Dempet  
harmonisk  
svingning

### 8.6.2 Klassifisering etter dempningsgrad

Løsningen  $x(t)$  funnet i det foregående er åpenbart bare gyldig hvis  $\delta < \omega_0$ . For  $\delta > \omega_0$  blir uttrykket for den dempete egenfrekvensen  $\omega_d$  imaginært – og dette betyr rett og slett at dempninga da er så sterk at systemet ikke svinger i det hele tatt.

Det er lett å vise at løsningen i så fall kan skrives som en sum av to eksponensialfunksjoner (transienter), som faller mot null med ulike tidskonstanter.

Likninga  $\ddot{x} + 2\delta \dot{x} + \omega_0^2 x = 0$  gir således opphav til to ulike typer løsninger;

$$\begin{aligned}\delta < \omega_0, \text{ underkritisk dempet: } & x(t) = A e^{-\delta t} \cos(\omega_d t + \theta_0) \\ \delta > \omega_0, \text{ overkritisk dempet: } & x(t) = A^{(+)} e^{-\alpha^{(+)} t} + A^{(-)} e^{-\alpha^{(-)} t}\end{aligned}$$

med  $\omega_d = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}$  og  $\alpha^{(\pm)} = \delta \pm \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2}$ .

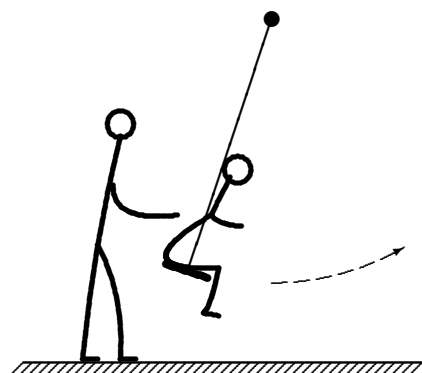
Grensetilfellet  $\delta = \omega_0$  betegnes *kritisk dempning* – og kan i praksis aldri implementeres eksakt.

## 8.7 Tvungne svingninger og resonans

Vi har til nå bare betraktet *frie svingninger* – dvs. svingninger som etter å være satt igang, fortsetter uforstyrret til evig tid.

*Tvungne svingninger* er svingninger – i et dempet system – som settes igang og/eller holdes vedlike av ytre krefter.

Hvor store utslag som fås, avhenger ikke bare av størrelsen, men også tidsforløpet til på den ytre krafta.



Hvis den ytre krafta er periodisk med periode nær den naturlige perioden for systemet, blir utslaget størst (ved gitt størrelse på pådraget) – som vi alle vet fra et tidlig tidspunkt i livet. Dette kalles *resonans*.

I stedet for korte, periodiske dytt – som i systemet illustrert ovenfor – skal vi her ta for oss systemer påtrykt en harmonisk ytre kraft av form  $F_y(t) = F_0 \cos \omega t$ . Det er enklere å analysere.

Tar vi utgangspunkt i et vanlig dempet fjærsystem, gir da Newtons 2. lov

$$F = F_0 \cos \omega t - kx - b\dot{x} = m\ddot{x}, \quad (8-45)$$

som med divisjon med  $m$  og rydding kan skrives på standardformen for tvungne svingninger med harmonisk pådrag

$$\ddot{x} + 2\delta \dot{x} + \omega_0^2 x = a_0 \cos \omega t \quad (8-46)$$

hvor  $\delta$  og  $\omega_0^2$  er som før, og  $a_0 = F_0/m$ .

Når pådraget  $a_0 \cos \omega t$  har stått på lenge, må alle transientene i systemet ha blitt dempet ut til null, og  $x(t)$  må variere i takt med pådraget. Vi må dermed forvente en “stasjonær respons” av form

$$x(t) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} x_0 \cos(\omega t + \phi). \quad \text{Stasjonær respons.} \quad (8-47)$$

Hvis pådragsamplituden  $a_0$  holdes konstant og pådragsfrekvensen  $\omega$  varieres, må vi forvente at respons-amplituden  $x_0(\omega)$  varierer, og blir størst ved  $\omega \approx \omega_0$ . La oss vise at det blir slik.

For å finne funksjonen  $x_0(\omega)$ , setter vi uttrykket over for  $x(t \rightarrow \infty)$  inn i differensiallikninga, og ordner den i én del proporsjonal med  $\cos \omega t$  og én del proporsjonal med  $\sin \omega t$ . Disse to delene må hver for seg oppfylle differensiallikninga, og det gir oss de to likningene som skal til for å bestemme de to ukjente  $x_0$  og  $\phi$ .

Vi skriver først om uttrykket for  $x(t \rightarrow \infty)$  til formen

$$x(t \rightarrow \infty) = x_0 \cos(\omega t + \phi) = \underbrace{(x_0 \cos \phi)}_{x_1} \cos \omega t - \underbrace{(x_0 \sin \phi)}_{x_2} \sin \omega t. \quad (8-48)$$

Det er  $x_0$  vi skal finne, men går veien om  $x_1$  og  $x_2$ . Merker oss at

$$x_1^2 + x_2^2 = x_0^2(\cos^2 \phi + \sin^2 \phi) = x_0^2. \quad (8-49)$$

Innsetting i differensiallikninga av

$$\dot{x}(t \rightarrow \infty) = -\omega x_1 \sin \omega t - \omega x_2 \cos \omega t \quad (8-50)$$

$$\ddot{x}(t \rightarrow \infty) = -\omega^2 x_1 \cos \omega t + \omega^2 x_2 \sin \omega t \quad (8-51)$$

gir

$$\begin{aligned} & (-\omega^2 x_1 - 2\delta\omega x_2 + \omega_0^2 x_1) \cos \omega t \\ & + (-\omega^2 x_2 + 2\delta\omega x_1 + \omega_0^2 x_2) \sin \omega t = a_0 \cos \omega t. \end{aligned} \quad (8-52)$$

Til bestemmelse av  $x_1$  og  $x_2$  har vi dermed

$$(\omega_0^2 - \omega^2)x_1 - 2\delta\omega x_2 = a_0 \quad (8-53)$$

$$(\omega_0^2 - \omega^2)x_2 + 2\delta\omega x_1 = 0. \quad (8-54)$$

Vi kvadrerer hver av disse likningene og legger dem sammen. Leddene med  $x_1 \cdot x_2$  kansellerer hverandre, og etter opprydding sitter man igjen med

$$[(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\delta^2\omega^2] \underbrace{(x_1^2 + x_2^2)}_{x_0^2} = a_0^2, \quad (8-55)$$

dvs.

$$x_0(\omega) = \frac{a_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\delta^2\omega^2}}.$$

(8-56)

Vi kan også finne fasevinkelen  $\phi$  i løsningen (8-47), fra likn. (8-54):

$$\tan \phi = \frac{\sin \phi}{\cos \phi} = \frac{x_2}{x_1} = -\frac{2\omega\delta}{\omega_0^2 - \omega^2}.$$

(8-57)

Vi merker oss spesielt hvordan  $x_0(\omega)$  oppfører seg ved pådragsfrekvens henholdsvis langt under, lik og langt over resonansfrekvensen  $\omega_0$ :

$$\begin{aligned}\omega \ll \omega_0 & : x_0 \rightarrow \frac{a_0}{\omega_0^2} \\ \omega = \omega_0 & : x_0 = \frac{a_0}{\omega_0^2} \cdot \frac{\omega_0}{2\delta} \\ \omega \gg \omega_0 & : x_0 \rightarrow \frac{a_0}{\omega_0^2} \cdot \left(\frac{\omega_0}{\omega}\right)^2 \xrightarrow{\omega \rightarrow \infty} 0.\end{aligned}\tag{8-58}$$

Størrelsen  $\frac{\omega_0}{2\delta}$  angir hvor høy “resonanstoppen” blir i forhold til statisk respons (respons for  $\omega \rightarrow 0$ ), og kalles gjerne svingesystemets *Q-verdi* (Q for Quality factor).

Frekvensrespons for  
systemer med Q-verdier:

$$Q = \begin{cases} 1, 0 \\ 2, 5 \\ 5, 0 \end{cases}$$

## OPPSUMMERING AV KAP. 8

- $x$ -projeksjonen av en ren rotasjonsbevegelse er lik svingningene til en udempet masse i ei ideell fjær. Bevegelseslikning:  $\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0$  med  $\omega_0^2 = k/m$  og løsning  $x(t) = x_0 \cos(\omega_0 t + \theta_0)$ .
- Likninga for udempete torsjonsvingninger er helt analog:  $\ddot{\theta} + \omega_0^2 \theta = 0$  med  $\omega_0^2 = \kappa/I$ .
- En matematisk pendel er en punktmasse med masse  $m$  hengt opp i ei masseløs snor med lengde  $\ell$ . Bevegelseslikninga for en udempet matematisk pendel er eksakt  $\ddot{\theta} + \frac{g}{\ell} \sin \theta = 0$  og tilnærmet  $\ddot{\theta} + \frac{g}{\ell} \theta = 0$ .
- En fysisk pendel er et stivt legeme som dreie seg friksjonsfritt om en horisontal akse. Bevegelseslikninga for en fysisk pendel er eksakt  $\ddot{\theta} + \frac{mgd}{I} \sin \theta = 0$  og tilnærmet  $\ddot{\theta} + \frac{mgd}{I} \theta = 0$ .
- For en masse som henger i ei ideell fjær og i tillegg er utsatt for ei friksjonskraft  $F_f = -bv$ , er bevegelseslikninga  $m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = 0$ , hvor  $k$  er fjærkonstanten. Ved svak dempning blir svingningen av form  $x(t) = Ae^{-\delta t} \cos(\omega_d t + \theta_0)$  med  $\delta = b/(2m)$  og  $\omega_d = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}$ .
- Tvungne svingninger er svingningene som oppstår når massen utsettes for ei periodisk kraft, f.eks.  $a_0 \cos \omega t$ . Bevegelseslikninga for et slikt system er  $m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = a_0 \cos \omega t$ .
- Det viser seg at massebevegelsen beskrevet av den siste likninga kan være sterkt avhengig av vinkelfrekvensen  $\omega$ . Ved lav dempning og konstant amplitude  $a_0$  til pådraget vil man ved en bestemt frekvens kunne få f.eks. 100 ganger så sterkt utsving som ved små verdier av  $\omega$ . Denne frekvensen kalles systemets resonansfrekvens.

# Kapittel 9

## Mekaniske bølger

### Innhold

---

<b>9.1</b>	<b>Harmoniske forløp i rom og tid . . . . .</b>	<b>76</b>
<b>9.2</b>	<b>Standbølger . . . . .</b>	<b>76</b>
<b>9.3</b>	<b>Vandrebølger og fasehastighet . . . . .</b>	<b>77</b>
<b>9.4</b>	<b>Bølgelikninga – syntetisk utledning . . . . .</b>	<b>77</b>
<b>9.5</b>	<b>Transversale bølger: Svingende streng . . . . .</b>	<b>79</b>
<b>9.6</b>	<b>Longitudinale bølger: Lydbølger . . . . .</b>	<b>80</b>
9.6.1	Lydbølger i en stav av fast stoff . . . . .	82
<b>9.7</b>	<b>Effekt og intensitet . . . . .</b>	<b>83</b>
9.7.1	Svingende streng . . . . .	83
9.7.2	Lydbølge i væske eller gass . . . . .	84
9.7.3	Lydtrykk og intensitet . . . . .	84
9.7.4	Decibelskalaen . . . . .	85
<b>9.8</b>	<b>Dopplereffekten . . . . .</b>	<b>86</b>
9.8.1	Dopplers formel . . . . .	87
9.8.2	Dopplereffekt for elektromagnetiske bølger . . . . .	87
<b>9.9</b>	<b>Stående bølger . . . . .</b>	<b>88</b>
9.9.1	Stående bølger på svingende streng . . . . .	89
9.9.2	Longitudinale standbølger . . . . .	90
9.9.3	Blåseinstrument med åpen ende . . . . .	90
<b>9.10</b>	<b>Interferens og svingning . . . . .</b>	<b>91</b>
9.10.1	Interferens mellom vandrebølger med samme frekvens . . . . .	91
9.10.2	Lydbilde fra to høyttalere . . . . .	92
9.10.3	Svingning mellom bølger med nærliggende frekvenser . . . . .	93

---

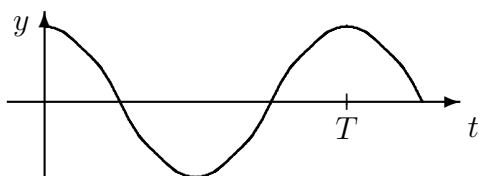
Vi skal i dette kapittelet se hvordan mekaniske forstyrrelser i et punkt brer seg utover som *mekaniske bølger* langs en streng eller et fluid. Vårt fokus vil bli på *vibrasjonsbølger* og *trykkbølger* (lydbølger), men det finnes også en annen viktig klasse av mekaniske bølger som alle som har reist med båt eller som fulgte TV-nyhetene etter naturkatastrofa jula 2004, kjenner til: Bølger i grenseflata mellom væske og luft.

Innen fysikk finnes det et utall av andre bølgefenomener, men disse skal vi ikke beskrive i detalj i dette kurset. Av disse bølgefenomenene er det nok *elektromagnetiske bølger* det som har størst praktisk betydning. Trass i at det ved første øyekast kan virke forunderlig, er så forskjellige fenomener som *radiobølger* (inklusive “TV- og mobiltelefonbølger”), *mikrobølger* (“mikrobølgeovn- og parabolantennebølger”), *varmestråling*, *synlig lys*, *ultrafiolett stråling*, *røntgenstråling* og *gammastråling* (en type høyenergistråling knyttet til radioaktivitet) alle elektromagnetisk stråling. Med unntak av lys er alle disse bølgene “usynlige” for mennesker. De tre siste typene av bølger – pluss overflatebølger i grenseflata mellom væske og luft – kan lett skade levende vesener, inklusive mennesker. I tillegg har man blant annet *temperaturbølger*, *materiebølger* som beskriver atom-, molekyl- og kjernefysiske fenomener, og *gravitasjonsbølger* i verdensrommet.

Matematisk “snille bølger” har pen og hyggelig cosinusform i rom og tid, og vi skal her begrense oss til å se på snille mekaniske bølger. Mindre snille mekaniske bølger er også velkjente: Når det bryter på grunt vann og det fråder på toppene, er cosinusformen en dårlig beskrivelse. Det samme gjelder sjokkbølger fra fly som går gjennom den såkalte “lydmuren”. Slikt er viktig, naturligvis – men altfor vanskelig for oss i dette kurset.

## 9.1 Harmoniske forløp i rom og tid

Vi skal, for å finne fram til en beskrivelse av bølger, ta utgangspunkt i harmoniske svingninger – allerede velkjente – og analoge harmoniske forløp i rommet:

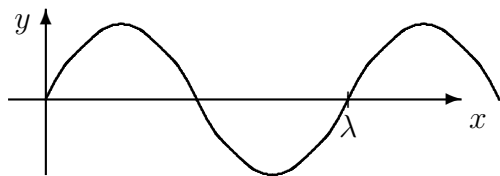


Harmonisk svingning:

$$y = y_0 \cos \omega t$$

$\omega$ : vinkelfrekvensen,  $[\omega] = \text{rad/s}$

$\omega T = 2\pi$ , der  $T$  = perioden



Harmonisk romlig forløp:

$$y = y_0 \sin kx$$

$k$ : bølgetallet,  $[k] = \text{rad/m}$

$k\lambda = 2\pi$ , der  $\lambda$  = bølgelengden

## 9.2 Standbølger

Kombinerer man de harmoniske forløpene i tid og rom direkte, ved å multiplisere dem med hverandre, får man uttrykk for en *standbølge* – dvs. et harmonisk romlig forløp som varierer harmonisk med tida<sup>1</sup>

$$y = y_0 \sin(kx) \cos(\omega t) \quad \text{Standbølgemønster.} \quad (9-1)$$

Det enkle standbølgemønsteret over – *produktet* av en sinus- og en cosinusfunksjon – kan med enkel trigonometrisk manipulasjon i stedet uttrykkes som en *sum* (*superposisjon*) av to sinusfunksjoner.

Vi skriver først ned de relevante trigonometriske uttrykkene:

$$\begin{array}{rcl} & \sin(A + B) = \sin A \cos B + \cos A \sin B \\ + & \sin(A - B) = \sin A \cos B - \cos A \sin B \\ \hline = & \sin(A + B) + \sin(A - B) = 2 \sin A \cos B \end{array} \quad (9-2)$$

Med  $A \rightarrow kx$  og  $B \rightarrow \omega t$ , kan med dette standbølga ovenfor skrives som

$$y = y_0 \sin(kx) \cos(\omega t) = \frac{1}{2} y_0 \sin(kx + \omega t) + \frac{1}{2} y_0 \sin(kx - \omega t). \quad (9-3)$$

## 9.3 Vandrebølger og fasehastighet

Standbølga vi gikk ut fra er nå uttrykt ved to “lineært uavhengige signaler” av form

$$\begin{array}{l} y = A \sin(kx \pm \omega t) = A \sin \phi(x, t) \\ \text{hvor } \phi(x, t) = kx \pm \omega t \quad \text{er fasene til bølgene.} \end{array} \quad (9-4)$$

Disse signalene representerer *bølgemønstre* som beveger seg i  $x$ -retning med hastigheter  $\pm\omega/k$ , hva vi kaller *vandrebølger*. Vi vil nå vise dette.

<sup>1</sup>Vi har – for enkelhets skyld – valgt nullpunkter i rom og tid slik at vi slipper å legge til “fasefaktorer”.



Velg et observasjonspunkt  $x(t)$  som følger bølga slik at fasen  $\phi(x(t), t)$  forblir uendret (konstant). Hastigheten til dette observasjonspunktet vil vi kalle bølgemønsterets *fasehastighet*,  $v_f$ . Fasen  $\phi(x, t)$  er konstant hvis  $kx \pm \omega t$  er konstant. Dette er oppfylt hvis  $x = \pm(\omega/k)t$  – dvs. hvis  $x$  flyttes med hastighet

$$v_f = \pm \frac{\omega}{k} \quad \text{Fasehastigheten.} \quad (9-5)$$

Standbølga kan dermed – som påstått – oppfattes som en superposisjon av ei bølge av form  $\sin(kx - \omega t)$ , som beveger seg i positiv  $x$ -retning med hastighet  $\omega/k$ , og ei av form  $\sin(kx + \omega t)$ , som beveger seg med samme hastighet i negativ  $x$ -retning.

I stedet for å uttrykke fasehastigheten  $v_f$  ved *vinkelfrekvens*  $\omega$  og *bølgetall*  $k$ , kan vi uttrykke den ved perioden  $T = 2\pi/\omega$  og bølgelengda  $\lambda = 2\pi/k$ ;

$$|v_f| = \frac{\omega}{k} = \frac{\lambda}{T}. \quad (9-6)$$

For de enkle bølgene vi skal ta for oss i dette kurset, er *fasehastigheten* den eneste hastigheten assosiert med bølga. Mer generelt kan man assosiere *to* hastigheter til en bølge; hastigheten som gir konstant fase ( $v_f$ , som her), og hastigheten energien flytter seg med, den såkalte *gruppeshastigheten*  $v_g$ . Disse to hastighetene trenger ikke være like, og de framkommer av dispersjonsrelasjonen  $\omega = \omega(k)$ , gitt av fysikken bak problemet:

$$v_f = \frac{\omega}{k} \quad \text{og} \quad v_g = \frac{\partial \omega}{\partial k}. \quad (9-7)$$

Men for de bølgene vi studerer her, kan disse komplikasjonene glemmes, og vi vil i det følgende bruke “bølgehastigheten” for fasehastigheten.

## 9.4 Bølgelikninga – syntetisk utledning

Ved gitt bølgeform – f.eks.  $y(t) \propto \sin(\omega t - kx)$  – kan vi spørre: Hvilken form måtte krafta ha i Newtons 2. lov  $F = m\ddot{y}$  for å gi ei slik bølgeform? Vi stilte tilsvarende spørsmål da vi behandlet harmoniske svingninger, og fant fram til likninga for udempete harmoniske svingninger på den måten. Vi gjør nå tilsvarende for “udempede harmoniske bølger”.

Utgangspunktet må være å derivere løsningen to ganger med hensyn på tida, for å finne  $\ddot{y}$ . Men nå varierer løsningen på tilsvarende måte med posisjonen  $x$  som med tida  $t$ , og det vil være rimelig å se hvor vi kommer med å behandle variasjonen i

tid og rom på tilsvarende måte – som vist nedenfor:

$$y(x, t) = A \sin \phi(x, t) \quad \text{hvor} \quad \phi(x, t) = kx - \omega t$$

$$\frac{\partial y}{\partial t} = A \cos \phi(x, t) \cdot \frac{\partial \phi}{\partial t} = A \cos \phi(x, t) \cdot (-\omega) = -\omega A \cos \phi(x, t)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} &= \omega A \sin \phi(x, t) \cdot \frac{\partial \phi}{\partial t} = \omega A \sin \phi(x, t) \cdot (-\omega) \\ &= -\omega^2 A \sin \phi(x, t) = -\omega^2 y(x, t) \end{aligned}$$

$$\frac{\partial y}{\partial x} = A \cos \phi(x, t) \cdot \frac{\partial \phi}{\partial x} = A \cos \phi(x, t) \cdot (k) = kA \cos \phi(x, t)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} &= -kA \sin \phi(x, t) \cdot \frac{\partial \phi}{\partial x} = -kA \sin \phi(x, t) \cdot (k) \\ &= -k^2 A \sin \phi(x, t) = -k^2 y(x, t). \end{aligned}$$

(9-8)

Vi observerer fellesskapen mellom de to andrederiverte idet

$$\frac{1}{\omega^2} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - \frac{1}{k^2} \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = 0. \quad (9-9)$$

Dette gir oss bølgelikninga

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - v^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = 0,$$

(9-10)

hvor  $v^2 = (\omega/k)^2$  er bølgehastigheten i kvadrat. Denne likninga – som vi skal utlede fra fysikalske betraktninger for to enkle tilfeller i de to neste avsnittene – beskriver en rekke bølgefenomener i naturen.

Vi tok utgangspunkt i harmoniske forløp i rom og tid, men man ser at løsningene også kan være andre:

Alle to ganger deriverbare funksjoner av form

$$y = f(x \pm vt)$$

oppfyller bølgelikninga.

(9-11)

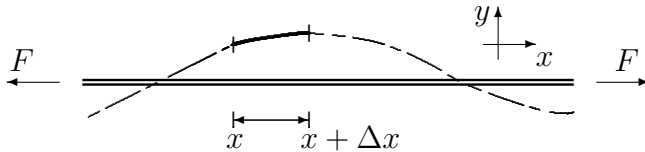
I dette kurset skal vi – for å holde matematikken enkelst mulig – begrense oss til sinus-løsninger  $f(x \pm vt) \propto \sin[k(x \pm vt)] = \sin[k(x \pm vt)]$ .

## 9.5 Transversale bølger: Svingende streng

Skolemodellen for utledning av bølgelikninga er hva vi kaller *svingende streng* – ei lang, fleksibel snor strukket med ei passende strekk-kraft.

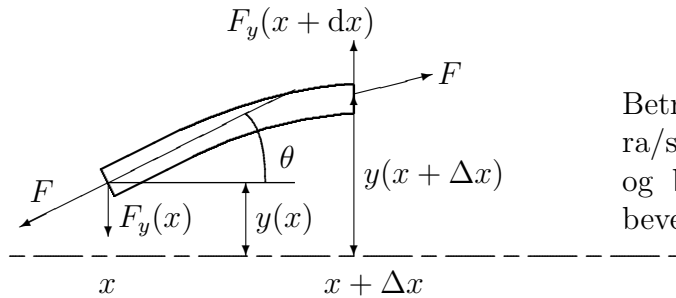
Vi skal her ta for oss det utenkelige tilfellet med ei uendelig lang snor – fordi da slipper vi å bry oss med hva som foregår i endene. Deretter skal vi seinere ta for oss snorer/strenger med endelig lengde, som for eksempel strengene på en gitar, fiolin eller gummistrikk med ekstra masser som i auditoriedemonstrasjonen.

Vi skal nå benytte Newtons 2. lov på et lengdeelement i snora  $m\ddot{y} = F_y$ :



Ei lang, fleksibel snor, med tverrsnittsareal  $A$  og massetetthet  $\rho$ , strekkes med strekk-kraft  $F$ .

Snora trekkes litt ut fra likevektsposisjon  $y(x) = 0$ , og slippes. Vi skal vise at snor-svingningene  $y(x, t)$  følger bølgelikninga (9-10).



Betrakt et lite element av snora/strengen, mellom  $x$  og  $x + \Delta x$ , og bruk Newtons 2. lov på  $y$ -bevegelsen av elementet.

Elementet har lengde  $\Delta\ell$ , med  $(\Delta\ell)^2 = (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2$ . Vi antar at snora alltid er *nesten* horisontal, dvs.  $\Delta y/\Delta x \ll 1$ , og vi kan da sette  $\Delta\ell \approx \Delta x$ .

Bruk av Newtons 2. lov i  $y$ -retning gir

$$\rho A \, dx \, \ddot{y} = F_y(x + dx) - F_y(x) = F_y(x) + \frac{\partial F_y}{\partial x} dx - F_y(x) = \frac{\partial F_y}{\partial x} dx, \quad (9-12)$$

som gir

$$\rho A \, \ddot{y} = \frac{\partial F_y}{\partial x}. \quad (9-13)$$

Vi har videre at

$$F_y = F \sin \theta \simeq F \tan \theta = F \frac{\partial y}{\partial x}. \quad (9-14)$$

Innsatt i foregående likning gir dette følgende bølgelikning for svingende streng

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - \frac{F}{\rho A} \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = 0,$$

(9-15)

som er den lovede bølgelikninga.

Bølgehastigheten  $v$  kan uttrykkes på flere ekvivalente måter:

$$\begin{aligned}
 v &= \sqrt{\frac{F}{\rho A}} \\
 &= \sqrt{\frac{T}{\rho}} \quad \text{hvor } T = \frac{F}{A} \text{ er strekkspenninga} \\
 &= \sqrt{\frac{F}{\mu}} \quad \text{hvor } \mu = \rho A = \frac{\Delta m}{\Delta \ell} \text{ er masse/lengdeenhet}
 \end{aligned}
 \tag{9-16}$$

*Tallempeksel:*

Ståltråd 0,50 $\phi$  (dvs. diameter 0,50 mm).

$$A = \pi \cdot (0,25 \cdot 10^{-3})^2 = 1,96 \cdot 10^{-7} \text{ m}^2 \quad \text{og} \quad \rho = 7,9 \text{ g/cm}^3$$

$$\Rightarrow \rho A = 1,55 \cdot 10^{-3} \text{ kg/m.}$$

$$F = 1,0 \text{ N} \quad \Rightarrow \quad v = (1/\sqrt{0,00155}) \text{ m/s} \approx 25 \text{ m/s.}$$

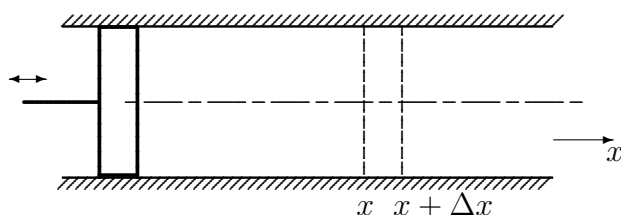
$$F = 10 \text{ N} \quad \Rightarrow \quad v = \sqrt{10} \cdot 25 \text{ m/s} \approx \underline{80 \text{ m/s.}}$$

## 9.6 Longitudinale bølger: Lydbølger

Vi tar nå for oss *trykkbølger i væsker og gasser* – og skal vise at slike bølger følger ei bølgelikning av vanlig type, med bølgehastighet  $v = \sqrt{B/\rho}$ , hvor  $B$  er volumelastisitetsmodulen, og  $\rho$  massetettheten. Med en liten modifikasjon,  $B \rightarrow E$ , hvor  $E$  er strekkmodulen, kan resultatet brukes også for trykkbølger i faste stoffer.

Trykkbølger med frekvenser i området 50 Hz til ca. 15 kHz kan registreres av “normale ører”, og kalles gjerne *lydbølger*. Trykkbølger med høyere frekvenser kalles tilsvarende *ultralyd*.

Vi skal egentlig ta for oss trykkbølger i “uendelig medium”. Men det er enklere å begynne med bølger i et rør med konstant tverrsnitt – da er bølgeutbredelsesretninga  $\hat{e}_k$  gitt, og problemet er hyggelig og éndimensjonalt. Det er trivielt å generalisere resultatet til tre dimensjoner seinere, om man så skulle ønske.

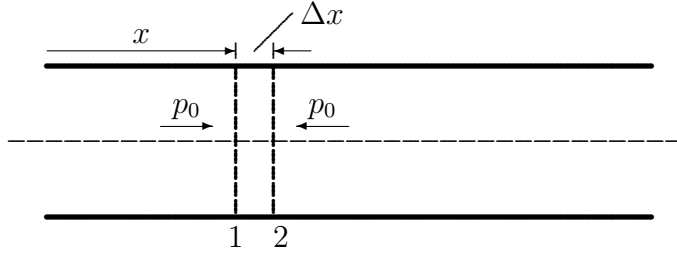


Et langt rør med tverrsnitt  $A$  er fylt med væske (eller gass) med likevektstetthet  $\rho$ . Et stempel (eller en høyttalermembran) i den ene enden setter væsken i bevegelse i akseretning  $\hat{e}_x$ .

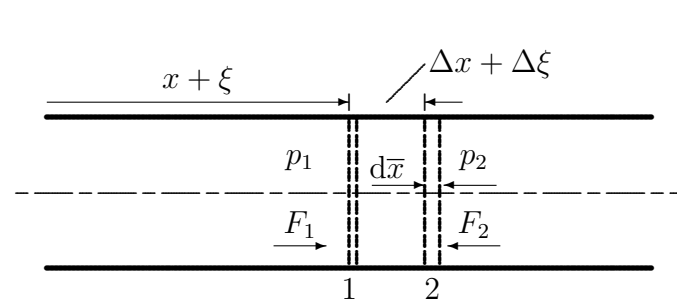
Vi vil se på bevegelsen til et væskeelement med likevektsposisjon mellom  $x$  og

$x + \Delta x$ , som vist på figuren. Forskyvninga, i  $x$ -retning, ut fra likevekt betegner vi  $\xi(x, t)$ . Vi skal ved å bruke Newtons 2. lov for væskeelementet finne ei bølgelikning for  $\xi(x, t)$ .

Massen innen væskeelementet – merket av mellom 1 og 2 på figurene nedenfor – er  $\Delta m = \rho \Delta V = \rho A \Delta x$ .



Væskeelement i likevekt: Det hydrostatiske trykket er lik likevektstrykket  $p_0$  på begge sider av elementet.



Væskeelement forskyvnet fra likevekt:

Både posisjon og tykkelse av elementet er forandret. Relative volumforandringer på de to sider av elementet kan være ulike, og de lokale trykkene på overflata er heller ikke like store.

Newtons 2. lov gir at

$$(\rho A dx) \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = F_2 - F_1 = -A(p_2 - p_1) = -A(p_1 + \frac{\partial p}{\partial x} dx - p_1) = -A \frac{\partial p}{\partial x} dx \quad (9-17)$$

Vi har videre at det lokale trykkene på overflata av det utvalgte volumelementet er gitt som (se likn. (7-1))

$$p = -B \frac{dV}{V} = -B \frac{\partial \xi}{\partial x}, \quad (9-18)$$

hvor det er viktig å merke seg at  $dV$  og  $V$  gjelder for et lite tenkt volum lokalisert nær overflata av de volumelement som vi beskriver i likning (9-17). Merk at  $A$  er konstant og dermed  $dV = A \cdot d\xi$ .

Innsatt i foregående likning gir dette følgende bølgelikning for longitudinelle bølger

$$\boxed{\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} - \frac{B}{\rho} \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = 0,} \quad (9-19)$$

hvor fasehastigheten er gitt ved uttrykket

$$\boxed{v = \sqrt{\frac{B}{\rho}}.} \quad (9-20)$$

Merk at rørarelet falt bort. Det vi har utledet, gjelder dermed for plane bølger generelt, uten begrensninger på utstrekninga loddrett på bølgeretninga.

*Tallempeksel:*

Lydbølge i vann ved 20 °C. (F.eks. lyder fra kvaler og sonar). Volumelastisitetsmodulen er  $B = 2,18 \cdot 10^9$  Pa og tettheten  $\rho = 1,0 \cdot 10^3$  kg/m<sup>3</sup>. Dette gir bølgehastighet  $v = \sqrt{B/\rho} = \sqrt{2,18 \cdot 10^6} \text{ m/s} = 1,48 \text{ km/s}$ .

For *ideelle gasser* kan volumelastisitetsmodulen  $B$  beregnes eksakt fra kinetisk gass-teori – og det skal vi gjøre i siste del av kurset. Man finner (se side 127) for ideell gass at lydfarten er

$$v = \sqrt{\frac{\gamma k_B T}{m}}. \quad (9-21)$$

hvor  $T$  er gasstemperaturen i grader Kelvin,  $m$  er molekylmassen,  $k_B = 1,38 \cdot 10^{-23}$  J/K er Boltzmanns konstant, og  $\gamma$  har verdien 5/3 for énatomige gasser og 7/5 for nitrogen og oksygen ved vanlig romtemperatur. Side 127 er lydfarten beregnet til 347 m/s ved romtemperatur.

### 9.6.1 Lydbølger i en stav av fast stoff

Beregninga blir nesten som lydbølger i væsker. Forskjellen består i at *tverrsnittet* i staven avtar hvis staven strekkes<sup>2</sup>, mens vi i væsker og gasser regnet med et konstant rørtverrsnitt. Forholdet mellom trykk- eller strekk-kraft og strekk-tøyninga  $\partial \xi / \partial x$  er dermed ikke gitt av volumelastisitetsmodulen  $B$ , men av strekkmodulen  $E$ ,

$$v = \sqrt{\frac{E}{\rho}}. \quad (9-22)$$

*Tallempeksel:*

For en stålstav (for eksempel en jernbaneskinne), med  $E \approx 20 \cdot 10^{10}$  Pa og  $\rho \approx 7,9 \text{ g/cm}^3$ , gir dette en lydhastighet  $v \approx 5 \text{ km/s}$  – dvs. mer enn 10 ganger lydhastigheten i luft.

## 9.7 Effekt og intensitet

I ei mekanisk svingning veksler energien mellom kinetisk energi ( $m\dot{x}^2/2$  for en punktmasse med bevegelse i  $x$ -retning) og potensiell energi ( $kx^2/2$  for en tilsvarende fjær-bevegelse), med i middel like mye energi i hver energiform. Det samme gjelder for mekaniske bølger, men forskjellen er at lokaliseringa av både den potensielle og kinetiske energien i bølger flytter seg med bølgehastighet  $v$ .

<sup>2</sup> Jfr. kapittel 7 om spenninger, tøyninger og elastisitetsmoduler.

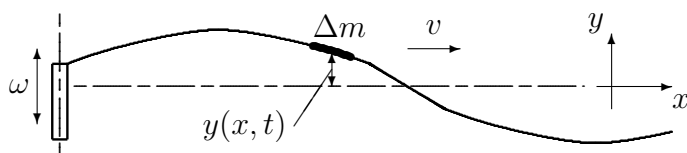
Med en bølge med matematisk form  $y(x, t) = y_0 \sin(kx - \omega t)$  blir hastigheten  $\dot{y} \propto \omega y_0$ , og kinetisk energi dermed  $\propto \omega^2 y_0^2$ . Denne energien transporteres med hastighet  $v$ , slik at energien som passerer en gitt posisjon  $x$  per tidsenhet – det vil si *effekten*  $P$  i bølga – blir av form

$$P \propto v \omega^2 y_0^2. \quad (9-23)$$

Vi skal vise dette i detalj, og finne proporsjonalitetsfaktoren, for en svingende streng og for ei lydbølge.

For ei lydbølge kan vi i stedet for effekten operere med *intensiteten*, som er effekt per flateenhet, og som kan relateres til *lydtrykket*. Lydintensitet angis gjerne i *decibel*, som er en logaritmisk enhet – og vi skal til slutt i dette avsnittet definere decibelskalaen.

### 9.7.1 Svingende streng



En “halvuendelig” svingende streng er eksitert av ei “ristemaskin” i enden av strengen, som indikert på figuren.

Vi betrakter et element av strengen, med (horisontal) lengde  $\Delta x$ , masse  $\Delta m$  og vertikal posisjon og hastighet

$$y(x, t) = y_0 \sin(kx - \omega t) \quad (9-24)$$

$$\dot{y}(x, t) = -\omega y_0 \cos(kx - \omega t). \quad (9-25)$$

Den totale energien  $\Delta E$  til elementet – summen av kinetisk og potensiell energi – er uavhengig av tida, og kan dermed settes lik den kinetiske energien elementet har når den potensielle energien er lik null,

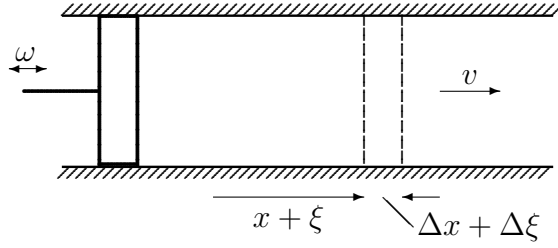
$$\Delta E = \left( \frac{1}{2} \Delta m \dot{y}^2 \right)_{\max} = \frac{1}{2} \Delta m \omega^2 y_0^2 \equiv \frac{1}{2} \mu \Delta x \omega^2 y_0^2, \quad (9-26)$$

hvor  $\mu = \Delta m / \Delta x$  er masse per lengdeenhet for strengen. Energien flytter seg mot høyre med bølgehastigheten  $v$ , og *effekten* må da kunne skrives som

$$P = \left. \frac{\Delta E}{\Delta t} \right|_{\frac{\Delta x}{\Delta t} = v} = \frac{1}{2} \mu v \omega^2 y_0^2, \quad (9-27)$$

– og den søkte proporsjonalitetsfaktoren ble  $\frac{1}{2} \cdot (\text{masse/lengdeenhet})$ .

### 9.7.2 Lydbølge i væske eller gass



Et vibrerende stempel eksiterer et fluid med massetetthet  $\rho$  i et halv-uendelig rør med tverrsnitt  $A$ . Eksitasjons-vinkelfrekvensen er  $\omega$ , utslagsamplituden er  $\xi_0$  og hastighetsamplituden  $\omega\xi_0$ .

Totalenergien  $\Delta E$  i et element  $(\Delta m, \Delta x)$  er lik den kinetiske energien ved maksimal hastighet,

$$\Delta E = \frac{1}{2} \Delta m (\omega \xi_0)^2 = \frac{1}{2} (\rho A \Delta x) (\omega \xi_0)^2. \quad (9-28)$$

Effekten  $P$  og intensiteten  $I$  ( $\text{W/m}^2$ ) blir med dette

$$\begin{aligned} P &= \left. \frac{\Delta E}{\Delta t} \right|_{\frac{\Delta x}{\Delta t} = v} = \frac{1}{2} \rho A v (\omega \xi_0)^2 \\ I &= \frac{P}{A} = \frac{1}{2} \rho v \omega^2 \xi_0^2. \end{aligned} \quad (9-29)$$

### 9.7.3 Lydtrykk og intensitet

Til “utslagsbølga”  $\xi(x, t) = \xi_0 \sin(kx - \omega t)$  for lydbølger er det assosiert ei trykkbølge  $\Delta p(x, t)$  faseforskjøvet  $\pi/2$  i forhold til utslagsbølga;

$$\Delta p = -B \frac{\Delta V}{V} = -B \frac{\partial \xi}{\partial x} = kB \xi_0 \cos(kx - \omega t). \quad (9-30)$$

Trykkamplituden  $(\Delta p)_{\max}$  betegnes gjerne *lydtrykk*, og kan skrives som

$$p_{\text{lyd}} = (\Delta p)_{\max} = kB \xi_0 \stackrel{v^2 = B/\rho}{=} kv^2 \rho \xi_0. \quad (9-31)$$

Bruker vi dette til å uttrykke intensiteten  $I$  som funksjon av  $p_{\text{lyd}}$  i stedet for av  $\xi_0$ , får vi

$$I = \frac{\rho}{2} \frac{v \omega^2}{k^2 v^4 \rho^2} p_{\text{lyd}}^2, \quad (9-32)$$

som med  $\omega/k = v = \sqrt{B/\rho}$  kan skrives om til

$$I = \frac{1}{2} \frac{p_{\text{lyd}}^2}{\rho v} = \frac{1}{2} \frac{p_{\text{lyd}}^2}{\sqrt{\rho B}}. \quad (9-33)$$



### 9.7.4 Decibelskalaen

Den vanligste måleenhet for lydstyrke er dB (decibel), som er en  $\log_{10}$ -skala med nullpunkt valgt ved den såkalte “høregrensa”. *Høregrensa* er den svakeste lyd et “normalt øre” kan høre, ved en frekvens på 1000 Hz.<sup>3</sup>

Den tilsvarende lydintensiteten er – eller er definert å være –

$$I_{\min} = 10^{-12} \text{ W/m}^2. \quad (9-34)$$

I luft ved atmosfæretrykk og 300 K – dvs. med  $\rho = 1,2 \text{ kg/m}^3$  og  $v = 343 \text{ m/s}$  – tilsvarer dette lydtrykk og utslagsamplitude på

$$p_{\text{lyd}}^{\min} = \sqrt{2\rho v I_{\min}} = 2,87 \cdot 10^{-5} \text{ Pa} \sim 2,8 \cdot 10^{-10} \text{ atm} \quad (9-35)$$

$$\xi_0^{\min} = \frac{p_{\text{lyd}}^{\min}}{k v^2 \rho} = \frac{p_{\text{lyd}}^{\min}}{\omega v \rho} = 1,1 \cdot 10^{-11} \text{ m}. \quad (9-36)$$

Øret er et ganske fabelaktig følsomt instrument: Minste hørbare utslagsamplitude (ved 1000 Hz) er godt under en molekyldiameter i størrelse!

*Smertegrensa* er den sterkeste lyd et “vanlig menneske” kan tolerere. Den tilsvarer – igjen ved 1000 Hz – lydtrykk og utslagsamplitude på henholdsvis

$$p_{\text{lyd}}^{\max} \sim 30 \text{ Pa} \sim 3 \cdot 10^{-4} \text{ atm} \quad \text{og} \quad \xi_0^{\max} \sim 10^{-5} \text{ m} = 0,01 \text{ mm} \quad (9-37)$$

En faktor 10 i intensitet ble opprinnelig gitt betegnelsen “en bel” (etter John Graham Bell - han med telefonen) – men dette ble funnet å være en uhensiktsmessig stor enhet, så den ble delt inn i 10 deler, kalt *decibel* (dB).

Lyd nivået angis dermed som

$$\beta = 10 \log_{10} \frac{I}{I_{\min}} \quad (\text{dB}) \quad \text{Lydnivå,} \quad \text{der } I_{\min} = 10^{-12} \text{ W/m}^2. \quad (9-38)$$

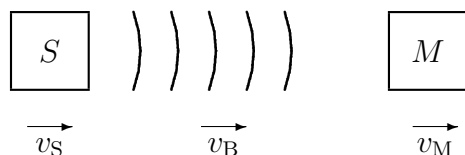
En intensitetsforskjell på 10 dB tilsvarer et forhold mellom intensitetene på en faktor  $10^{10/10} = 10$ . En faktor 10 i *amplitude* gir en faktor 100 i intensitet, og tilsvarer 20 dB.

Noen typiske lydnivåer er listet opp til høyre. For veibyggere og politikere kan det være nyttig å vite hvor på skalaen lovlig grense for trafikkstøy ligger – den er vanligvis rundt  $65 \pm 10 \text{ dB}$  – “avhengig av forholdene”.

Lydkilde	dB
Høregrense	0
Raslende løv	10
Hvisking	30
Mygg-zzz	40
Vanlig samtale	50
Motorgressklipper	100
Rockekonsert	110
Smertegrensa	120

<sup>3</sup>Et normalt øre er mest følsomt ved  $f \sim 1000 \text{ Hz}$ . Vi skal ikke her gå inn på hvordan lyd-skalaen beregnes ved andre frekvenser.

## 9.8 Dopplereffekten



En bølge sendes ut av en sender  $S$ , og mottas av en mottaker  $M$ .

$S$  og  $M$  beveger seg med hastigheter  $v_S$  og  $v_M$  i forhold til mediet bølga forplanter seg i, og bølgehastigheten i mediet er  $v_B$ .

Hvis senderen sender ut en bølge med frekvens  $f_S = \omega_S/2\pi$ , vil mottakeren registrere en signalfrekvens  $f_M = \omega_M/2\pi \neq f_S$  – hvis  $v_S \neq v_B$ . Dette kalles *Dopplereffekt*.

Vi skal vise at sammenhengen mellom  $f_S$  og  $f_M$  er gitt ved

$$\frac{f_S}{f_M} = \frac{1 - v_S/v_B}{1 - v_M/v_B} \quad \text{Dopplers formel.} \quad (9-39)$$

Effekten har navn etter J.C. Doppler<sup>4</sup>, som i 1843 fant at bølgelengda til lyset fra dobbeltstjerner varierte periodisk – og tilskrev variasjonen den periodiske variasjonen i  $v_S$  som stammet fra rotasjonen av stjernene om hverandre. Han hadde litt flaks – formelen over er ikke korrekt for lys, som Albert Einstein fant ut 62 år seinere. Men for  $v_S/v_B \ll 1$  blir det nesten riktig likevel.

Dopplereffekten er lett observerbar i dagliglivet: Hvis man befinner seg ved siden av en veien, og der nærmer en utrykningsbil med ulende sirener, er tonen høy (høy frekvens) når bilen nærmer seg, og dypere (lavere frekvens) når den har passert.

### 9.8.1 Dopplers formel

Vi starter med ei bølge – f.eks. ei lydbølge med utslag  $\xi(t)$  og hastighet  $v_B = \omega/k$  i positiv  $x$ -retning – av form

$$\xi(x, t) = \xi_0 \sin(kx - \omega t). \quad (9-40)$$

En observatør  $A$  som beveger seg med konstant hastighet  $v_A$  langs bølga, vil ha en posisjon

$$x_A(t) = x_A(0) + v_A t, \quad (9-41)$$

<sup>4</sup>Johann Christian Doppler 1803-53, f. Salzburg, prof. i eksperimentalfysikk i Praha, Chemnitz og tilslutt i Wien.

og vil se et utslag

$$\begin{aligned}
 \xi_A(t) &= \xi(x_A(t), t) \\
 &= \xi_0 \sin[kx_A(0) + kv_A t - \omega t] \\
 &= \xi_0 \sin[kx_A(0) - \omega(1 - kv_A/\omega)t] \\
 &\stackrel{\omega/k=v_B}{=} \xi_0 \sin[kx_A(0) - \omega(1 - v_A/v_B)t],
 \end{aligned} \tag{9-42}$$

dvs. et utslag som varierer med vinkelfrekvens

$$\omega_A = \omega(1 - v_A/v_B). \tag{9-43}$$

La det så være *to* observatører – én som sender ut bølga ( $A \rightarrow S$ ) og én som mottar bølga ( $A \rightarrow M$ ). Frekvensene disse to observerer, blir

$$\omega_S = \omega \left(1 - \frac{v_S}{v_B}\right) \tag{9-44}$$

$$\omega_M = \omega \left(1 - \frac{v_M}{v_B}\right). \tag{9-45}$$

og divisjon av disse to uttrykkene med hverandre gir

$$\frac{\omega_S}{\omega_M} = \frac{f_S}{f_M} = \frac{1 - v_S/v_B}{1 - v_M/v_B}.$$

(9-46)

som var hva vi skulle vise.

### 9.8.2 Dopplereffekt for elektromagnetiske bølger

For elektromagnetiske bølger, herunder lys, blir det ovenforstående galt.

Vi har antatt at bølga beveger seg i forhold til et ‘medium’, med hastighet  $v_B$  i forhold til mediet – og implisitt at hastigheten i forhold til en observatør med en annen hastighet  $v_A$  blir

$$v_{\text{rel}} = v_B - v_A. \tag{9-47}$$

Denne hastighetstransformasjonen, og tilhørende koordinattransformasjon for  $x(t)$ , stammer fra Galilei, og kalles *Galileitransformasjon*.<sup>5</sup>

Nå er idéen om et medium – “eteren” – for elektromagnetiske bølger forkastet – og i stedet for Galileitransformasjon bruker man en *Lorentztransformasjon*, som

---

<sup>5</sup>Det denne transformasjonen sier, er at hvis man befinner seg inne i en buss som kjører framover med hastighet 60 km/time i retning Oslo og du går framover langs midtgangen med hastighet 5 km/time, er din totale hastighet i retning Oslo 60 km/time + 5 km/time = 65 km/time.

transformerer både sted og tid. Dette var en grunnidé bak Einsteins spesielle relativitetsteori – som vi ikke skal gå inn på i dette kurset.

Resultatet når det gjelder Dopplereffekten, er en sammenheng

$$\frac{f_S}{f_M} = \sqrt{\frac{1 - v/c}{1 + v/c}} \quad \text{Elektromagnetisk bølge i vakuum,} \quad (9-48)$$

hvor  $v = v_S - v_M$  er relativ hastighet mellom sender og mottaker, og  $c$  er lyshastigheten i vakuum. Denne formelen brukes – for eksempel – til å finne hastigheten til fjerne galakser ut fra rødforskyvningen av spektrallinjer, og dermed hvor fort universet utvider seg.

For *små* verdier av  $v/c$  kan uttrykket utvikles i Taylorrekke til første orden i  $v/c$ , og gir da

$$\frac{f_S}{f_M} \xrightarrow{v \ll c} 1 - \frac{v}{c}. \quad (9-49)$$

Tilsvarende får man det klassiske uttrykket, når  $(v_S, v_M) \ll v_B$ ,

$$\frac{f_S}{f_M} \rightarrow 1 - \frac{v_S - v_M}{v_B}, \quad (9-50)$$

som med  $v_B \rightarrow c$  blir det samme. Hvilket som nevnt, var heldig for Doppler.

## 9.9 Stående bølger

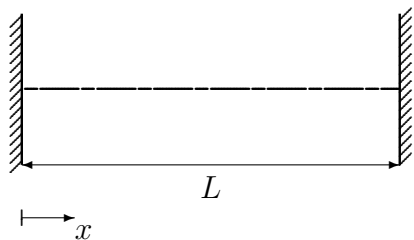
Vi begynte dette kapitlet om mekaniske bølger med å ta utgangspunkt i formen til en *stående bølge* eller *standbølge*, og viste at denne formen kunne oppfattes som summen av en venstre- og høyregående *vandrebølge*,

$$\begin{aligned} y(t) &= y_0 \sin[k(x - x_0)] \cos[\omega(t - t_0)] \\ &= \frac{1}{2} y_0 \sin[k(x - x_0) + \omega(t - t_0)] \\ &\quad + \frac{1}{2} y_0 \sin[k(x - x_0) - \omega(t - t_0)]. \end{aligned} \quad (9-51)$$

Vi har her generalisert lett fra hva vi gjorde tidligere, ved å ta med faseforskyvninger  $kx_0$  og  $\omega t_0$ .

Musikkinstrumenter kan i hovedsak sees som instrumenter for generering av standbølger med utvalgte frekvenser. Vi skal her svært kort ta for oss standbølger på svingende streng – grunnlag for forståelse av strengeinstrumenter – og longitudinale standbølger i rør lukket i den ene eller begge ender – grunnlag for forståelse av blåseinstrumenter.

### 9.9.1 Stående bølger på svingende streng



En uniform streng med lengde  $L$ , tverrsnitt  $A$  og massetetthet  $\rho$  er strukket med strekkraft  $F$  og fastspent i endene  $x = 0$  og  $x = L$ . Vi antar en harmonisk form  
 $y(x, t) = y_0 \sin k(x - x_0) \cos \omega(t - t_0)$   
 på utslaget – som indikert på figuren.

La oss følge Kumbel<sup>6</sup> – gjøre det hele litt matematisk, og bestemme bølgetall  $k$  og  $x$ -nullpunkt  $x_0$  fra grensebetingelsene, dvs. fra

$$y(0, t) = y(L, t) = 0 \quad \text{for alle } t. \quad (9-52)$$

Vi har da

$$\begin{aligned} \sin(-kx_0) = 0 &\Rightarrow kx_0 = 0, \text{ og} \\ \sin k(L - x_0) = 0 &\Rightarrow k(L - x_0) = n \cdot \pi, \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots \end{aligned} \quad (9-53)$$

$$\Rightarrow kL = n\pi \quad (9-54)$$

Setter vi her inn  $k = 2\pi/\lambda$ , hvor  $\lambda$  er bølgelengden, tilsvarer dette

$$L = \text{et helt antall halve bølgelengder} = n \cdot \lambda/2, \quad (9-55)$$

som vi jo kan se direkte uten noen matematikk i det hele tatt.

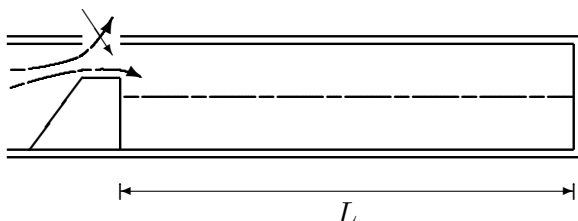
Bølgehastighet  $v$ , bølgelengde  $\lambda$  og frekvens  $f$  henger sammen ved  $v = f \cdot \lambda$ , og frekvensen til den  $n$ 'te harmoniske kan dermed skrives

$f_n = n \cdot \frac{v}{2L}, \text{ hvor } n = 1, 2, 3, \dots$

Frekvenser for svingende streng (9-56)

Det totale svingebildet til en streng vil være en blanding av harmoniske – en *grunnfrekvens*  $f_1$  og *overtoner*  $f_{n>1}$ .

### 9.9.2 Longitudinale standbølger



Figuren viser skjematisk et blåseinstrument med lukket ende.

Blåsing inn til venstre setter opp longitudinale lydbølger, med utslagsamplitude

<sup>6</sup>Den som gjør det lette svært, viser best hva han har lært' - fra Kumbels (Piet Hein) Gruk.

$\xi(x, t) = 0$  ved den lukkede enden, og med maksimum nær blåseinngangen, som indikert på figuren for de to laveste modene.

Trykkvariasjonene er  $\pi/2$  faseforskjøvet i forhold til utslagsvariasjonene, og trykkamplituden  $p_{\text{lyd}}$  har maksimum der utslagsamplituden har minimum, og vice versa<sup>7</sup>.

Ved betraktning av figuren og bruk av vanlig sunn fornuft ser man uten videre at betingelsen for stående bølge er at

$$L = \lambda/4 + n \cdot \lambda/2 \quad (n = 1, 2, 3 \dots), \quad (9-57)$$

og vi får

laveste svingemode:  $L = \lambda/4$      $f = v/4L$     1. harmoniske  
 nest laveste:             $L = 3\lambda/4$      $f = 3v/4L$     3. harmoniske  
 generelt, bare odde harmoniske:

$$f_n = \frac{v}{4L} \cdot (2n - 1) \quad , \text{ hvor } n = 1, 2, 3 \dots \quad \text{Frekvenser for rør med én lukket ende}$$

(9-58)

Grensebetingelsen at utslagsamplituden er lik null i den lukkede enden, kan ses som en beskrivelse av hva som skjer når en høyregående vandrebølge når enden: Den blir reflektert med uforandret tallverdi på utslaget, men reversert retning,  $\xi^{(+)}(L, t) \rightarrow \xi^{(-)}(L, t) = -\xi^{(+)}(L, t)$ . Dette er også typen beskrivelse vi må bruke hvis vi vil se i detalj hvordan den stående bølga bygger seg opp - men det skal vi ikke gå inn på her.

### 9.9.3 Blåseinstrument med åpen ende

Et slikt instrument adskiller seg fra det med lukket ende ved grensebetingelsen i høyre ende: Nå er det *trykk*amplituden som blir null i eller nær ved enden - mens utslagsamplituden da får maksimum.

Dermed blir betingelsen for stående bølge tilsvarende som for svingende streng,  $L = n \cdot \lambda/2$ , og

$$f = n \cdot \frac{v}{2L} \quad , \text{ hvor } n = 1, 2, 3 \dots \quad \text{Frekvenser for rør med to åpne ender}$$

(9-59)

og spektret av overharmoniske – *klangfargen* – blir helt annerledes enn for et instrument med lukket ende – fordi også like harmoniske er med.

---

<sup>7</sup>Latin: I omvendt rekkefølge

## 9.10 Interferens og svevning

Vi skal tilslutt i dette kapitlet se på et lite utvalg av fenomener knyttet til blanding av to vandrebølger – først blanding av to bølger med samme frekvens men ulike kildeposisjoner (interferens), og så blanding av to bølger som har *litt* forskjellige frekvenser (svevning).

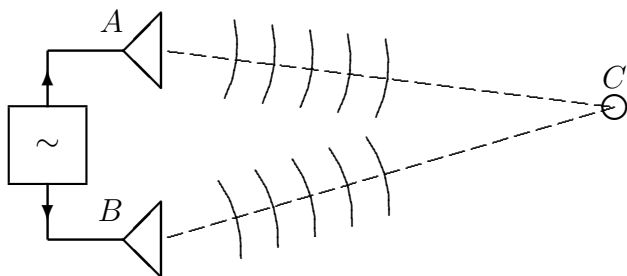
### 9.10.1 Interferens mellom vandrebølger med samme frekvens

Interferens mellom bølger opprinnelig fra samme kilde, men med ulike signalveier, er noe vel alle har opplevd.

Ett eksempel er interferens mellom direkte og reflekterte radiobølger – også omfattende fjernsynsfrekvenser – hvor interferensene gir stygge forløp i høyttalere og/eller på skjerm.

Et annet eksempel er dødpunkter i konsertsaler – eller, gjentagne ganger undersøkt av hovedoppgavestudenter fra Gløshaugen innen akustikk – i Storsalen i Samfundet.

Vi skal her se litt på enkle tilfelle av interferens mellom lydbølger.



To høyttalere  $A$  og  $B$  sender ut harmoniske signal med samme frekvens og fase. Signalene registreres av en mottaker (øre eller mikrofon) i  $C$ .

Vi betrakter for enkelhets skyld høyttalerne som punktkilder, med posisjoner  $\vec{r}_A$  og  $\vec{r}_B$ , og mottakeren som en punkt-mottaker i posisjon  $\vec{r}$ .

Høyttalerene sender ut signaler som faller av omvendt proporsjonalt med avstanden<sup>8</sup>. Ved mottakeren kan de to signalene dermed skrives som

$$\left. \begin{aligned} A \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}_A|} \sin[\vec{k}_A \cdot (\vec{r} - \vec{r}_A) - \omega t] \\ B \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}_B|} \sin[\vec{k}_B \cdot (\vec{r} - \vec{r}_B) - \omega t] \end{aligned} \right\} |\vec{k}_A| = |\vec{k}_B| = k \quad (9-60)$$

og totalt mottatt signal finnes ved å addere dem.

<sup>8</sup> Effekten i signalet er konstant - og er lik intensitet·flate. 'Flaten' er en del av en kuleflate, og øker proporsjonalt med avstanden i kvadrat – følgelig vil intensiteten falle av som  $1/r^2$ . Og – siden intensiteten er proporsjonal med amplituden i kvadrat, må amplituden falle av som  $1/r$ .

Faseforskjellen mellom de to signalene er

$$\begin{aligned}\phi_{AB} &= \phi_A(\vec{r}, t) - \phi_B(\vec{r}, t) = [\vec{k}_A \cdot (\vec{r} - \vec{r}_A) - \omega t] - [\vec{k}_B \cdot (\vec{r} - \vec{r}_B) - \omega t] \\ &= \vec{k}_A \cdot (\vec{r} - \vec{r}_A) - \vec{k}_B \cdot (\vec{r} - \vec{r}_B).\end{aligned}\quad (9-61)$$

Hvis faseforskjellen er lik null, eller et helt antall ganger  $2\pi$ , svinger de to signalene i takt ved mottakeren, og forsterker hverandre. Hvis den skulle være lik  $\pi$ , eller  $\pi$  pluss et helt antall ganger  $2\pi$ , vil de derimot svinge i mottak, og svekke hverandre maksimalt

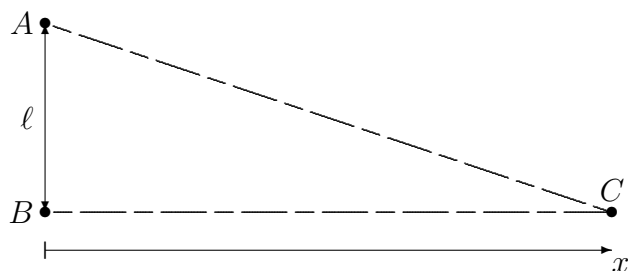
$$\begin{aligned}\phi_{AB} &= n \cdot 2\pi && : \text{Konstruktiv interferens} \quad ; \text{dvs. signaler i takt} \\ \phi_{AB} &= (n + \tfrac{1}{2}) \cdot 2\pi && : \text{Destruktiv interferens} \quad ; \text{dvs. signaler i mottakt.}\end{aligned}$$

Destruktiv interferens er grunnprinsippet i det som kalles *aktiv støydemping* og som i enkleste versjon består i at f.eks. en maskinoperatør har på seg øreklokker med innebygd høyttaler. Disse høyttalerene sender i sanntid ut en lyd som er en “kopi” av støyen utenfor øreklokkene bortsett fra at lydtrykket er invertert, dvs. er 180 grader ut av fase. Dette gir destruktiv interferens og ved å justere amplituden på signalet fra høyttalerene inne i øreklokkene, gir dette en sterk reduksjon av den støyen som personen hører. Teknikken er også brukt til å lage et punkt inne i radiostudio hvor f.eks. gatestøy og liknende ikke høres. I dette punktet plasseres så mikrofonene som brukes av radiostudioet i samband med studioets egne sendinger.

### 9.10.2 Lydbilde fra to høyttalere

Det er ofte enklere å visualisere betingelsene på fasene ved å gjøre dem om til betingelser på gangforskjellene  $r_{AC} = |\vec{r} - \vec{r}_A|$  og  $r_{BC} = |\vec{r} - \vec{r}_B|$ :

$$\begin{aligned}\text{Konstruktiv interferens:} \quad & r_{AC} - r_{BC} = \text{like antall halve bølgelengder} \\ \text{Destruktiv interferens:} \quad & r_{AC} - r_{BC} = \text{odde antall halve bølgelengder} : \end{aligned}$$



To høyttalere A og B med innbyrdes avstand  $\ell = 2\text{ m}$  sender ut identiske signaler (samme amplitude og fase) med frekvens  $f = 1\text{ kHz}$ . Signalene oppfanges av en mikrofon C plassert i posisjon  $x$  som vist på figuren.

Anta så at høyttalerposisjonen  $x$  varieres. Ved hvilke posisjoner vil mottatt signal ha minima?

Vi benytter betingelsen for destruktiv interferens, på form *Gangforskjellen skal være et odde antall halve bølgelengder* – dvs.

$$r_{AC} - r_{BC} = \sqrt{x^2 + \ell^2} - x = (n + 1/2)\lambda \quad (n = 1, 2, 3 \dots) \quad (9-62)$$



Flytter vi ‘ $-x$ ’ over på høyre side og kvadrerer, får vi

$$x^2 + \ell^2 = x^2 + 2x \cdot (n + 1/2)\lambda + [(n + 1/2)\lambda]^2. \quad (9-63)$$

Leddene  $x^2$  kan strykes på begge sider, og etter opprydding står vi igjen med

$$x = \frac{\ell}{2} \left[ \frac{\ell}{(n + 1/2)\lambda} - \frac{(n + 1/2)\lambda}{\ell} \right]. \quad (9-64)$$

Vi antar lydhastighet  $v \approx 340$  m/s (luft ved romtemperatur), som gir  $\lambda = v/f = 0.34$  m – og finner at det blir 6 lydminima:

$n$	0	1	2	3	4	5	Posisjoner for destruktiv interferens
$x/\text{m}$	11,7	3,7	1,9	1,1	0,54	0,13	

### 9.10.3 Svevning mellom bølger med nærliggende frekvenser

I *The Concise Oxford Dictionary* - ei bok hvor man finner gode forklaringer på de fleste ord - er svevning (engelsk “beat”) beskrevet som *pulsation due to combination of two sounds or electric currents of (slightly) different frequencies*.

Vi hører svevning ute i naturen om våren: Fugletriller som stiger og faller i intensitet – og mer prosaisk utnyttes det ved modulasjon og deteksjon av radiosignaler.

Anta at en observatør i posisjon  $\vec{r}$  lytter til en kombinasjon av to signaler med nærliggende vinkelfrekvenser  $\omega_A$  og  $\omega_B$ ,

$$S(\vec{r}, t) = A \sin\{\omega_A t + \phi_A(\vec{r})\} + B \sin\{\omega_B t + \phi_B(\vec{r})\} \quad (9-65)$$

Så lenge observatøren ikke flytter seg, er fasene  $\phi_A$  og  $\phi_B$  konstanter, og vi kan uten å miste noe vesentlig anta begge lik null. For å holde det hele enkelt, antar vi også at amplitudene er like,  $A = B$  – dvs. vi tar for oss et forenklet signal av form

$$S(t) = A[\sin \omega_A t + \sin \omega_B t]. \quad (9-66)$$

I stedet for vinkelfrekvensene  $\omega_A$  og  $\omega_B$  innfører vi middelfrekvens  $\omega_0$  og differansefrekvens  $\omega_d$ , med sammenhengene:

$$\begin{array}{l} \omega_0 = \frac{1}{2}(\omega_A + \omega_B) \\ \omega_d = \omega_A - \omega_B \end{array} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{array}{l} \omega_A = \omega_0 + \frac{\omega_d}{2} \\ \omega_B = \omega_0 - \frac{\omega_d}{2} \end{array}. \quad (9-67)$$

Setter vi inn dette, og bruker

$$\sin\left(\omega_0 \pm \frac{\omega_d}{2}\right)t = \sin \omega_0 t \cos \frac{\omega_d}{2}t \pm \cos \omega_0 t \sin \frac{\omega_d}{2}t, \quad (9-68)$$

får vi<sup>9</sup>

$$S = 2A \cos \frac{\omega_d}{2}t \sin \omega_0 t$$

(9-69)

<sup>9</sup>Dette er – på et vis – den inverse prosedyren av den vi brukte først i dette kapitlet for å komme fra et produkt av sinus og cosinus til en sum av sinus’er – dvs. for å uttrykke en standbølge som en sum av vandrede bølger



Signalet  $S$  sees som et signal med grunnfrekvens  $\omega_0$ , og *amplitudemodulert* med frekvens  $\omega_d/2$ .

Svevningsperioden – dvs. tida mellom intensitetsmaksima – blir halvparten av modulasjonsperioden, dvs.  $2\pi/\omega_d$ .

I radioteknikk eller ved ultralydkommunikasjon mellom dykkere under vann fåes signaler av denne typen ved å multiplisere et *audiosignal* med frekvens  $\omega_d/2$  i det hørbare området og en *bærebølge* med frekvens  $\omega_0$  fra noen hundre kilohertz og oppover før sending – såkalt AM-modulasjon. Audiosignalet gjenvinnes etter mottaking ved å sende det hele gjennom en detektor som er for langsom til å følge med de hurtige svingningene. Pianostemmere bruker også svevningsfenomenet. Når man trykker på en pianotangent slår hammeren samtidig på to eller tre strenger med samme tonehøyde – unntatt for de dypeste basstøner. Hvis strengene ikke er stemt helt likt oppnås svevning.

Signalene som er vist her, er *fullmodulert*. Hvis amplitudene  $A$  og  $B$  ikke er like, får vi delvis modulerte signaler, hvor amplituden varierer mellom et maksimum og et minimum, uten å passere gjennom null.

## OPPSUMMERING AV KAP. 9

- Bølger er mer eller mindre periodiske *fenomener som varierer både i tid og rom* – ikke bare i tid som svingningene beskrevet i foregående kapittel.
- *Ei vandrebeølge* kan generelt beskrives ved uttrykket  $y = f(kx - \omega t)$ , hvor  $f$  er en vilkårlig valgt, to ganger deriverbar funksjon. *Fasen* til bølga er definert som  $\phi = kx - \omega t$ . Ei harmonisk vandrebeølge beskrives ved uttrykket  $y = A \sin(kx - \omega t)$ , hvor  $A$  er amplituden.
- *Ei harmonisk standbølge* har følgende utsving  $y = y_0 \sin(kx) \cos(\omega t)$ , dvs. at utslaget i ethvert punkt er en harmonisk funksjon av tida med tidsuavhengig amplitude som er en funksjon av posisjonen  $x$ . De fleste musikkinstrumenter (både strenge- og blåseinstrumenter) benytter seg av dette fenomenet.
- Den generelle bølgelikninga er gitt som  $\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - v^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = 0$ , hvor  $v$  er bølgehastigheten.
- *Transverselle bølger* er bølger hvor utsvinget er normalt på forplantningsretninga til bølga. Eks.: Svingende streng.
- *Longitudinelle bølger* er bølger hvor utsvinget er langs forplantningsretninga til bølga. Eks.: Lydbølger (trykkbølger).
- *Effekten* til ei bølge er energi som per tidsenhet passerer gjennom ei flate normalt på bølgas forplantningsretning. *Intensiteten* til ei bølge er effekt per flateenhet.
- *Decibel* er en måleenhet for måling av lydintensiteten (lydnivået). For ei lydkilde som gir lyd med intensitet  $I$  er lydnivået i desibel,  $\beta$  gitt ved uttrykket  $\beta = 10 \log(I/I_{\min})$ , hvor  $I_{\min} = 10^{-12} \text{ W/m}^2$  svarer til *høregrensa* for “normaløret”. Høregrensa er altså 0 dB.
- *Dopplereffekten*: Hvis f.eks. ei lydkilde beveger seg mot observatøren får det som følge at observatøren registrerer at lydfrekvensen går ned, og motsatt hvis lydkilda beveger seg bort fra observatøren. Tilsvarende vil fargen til ei stjerne avhenge av om stjerna beveger seg mot oss eller fra oss.
- Registrerer man lyden fra to lydkilder som sender ut lyd med samme frekvens, vil intensiteten til den registrerte lyden endres om den ene av lydkildene flyttes til et annet sted. Blir lyden sterkere har man *konstruktiv interferens*, og blir lyden svakere har man *destruktiv interferens*.
- Registrerer man lyden fra to lydkilder som sender ut lyd med nesten samme frekvens, vil man i tillegg til de to tonene høre en tone med frekvens lik differensen mellom de to tonene. Dette kalles *svevning*.

## Del III

### Termisk fysikk



# Kapittel 10

## Temperatur og varme

### Innhold

---

<b>10.1 Temperatur og termisk utvidelse . . . . .</b>	<b>99</b>
10.1.1 Temperaturskalaer . . . . .	100
10.1.2 Termisk lengdeutvidelse . . . . .	102
10.1.3 Termisk utvidelse av vann . . . . .	103
<b>10.2 Varme og varmekapasitet . . . . .</b>	<b>103</b>
10.2.1 Varmekapasitet . . . . .	104
10.2.2 Varmetoning – latent varme . . . . .	105
<b>10.3 Varmetransport . . . . .</b>	<b>107</b>
10.3.1 Varmeledning . . . . .	107
10.3.2 Tilfrysing av en innsjø . . . . .	109
10.3.3 Varmestråling . . . . .	111

---

Vi skal i dette kapitlet ta for oss noen grunnleggende begreper i varmelæra som *temperatur*, *termisk utvidelse*, *varme*, *varmekapasitet* og *varmetransport*.

Alle har et visst begrep om hva forskjellen er, når noe er kaldt eller varmt. De fleste kan også lese av et termometer og dermed finne temperaturen. Og man trenger ingen dypere innsikt i hva varme og temperatur “egentlig” er, for å kunne tolke slike avlesningene for praktisk bruk.

Historisk sett kom temperaturmålinger, nøyaktige termometre og temperaturskalaer lenge før man forstod hva *varme* kunne være for noe. Galilei gjorde de første kjente temperaturmålinger i 1590-årene, med et grovt gasstermometer, og Fahrenheit,<sup>1</sup> Celsius<sup>2</sup> og Réaumur<sup>3</sup> innførte nøyaktige væsketermometre og fikspunkt-baserte temperaturskalaer vel 100 år seinere. Det at *varme er uordnet, mekanisk*

---

<sup>1</sup>Gabriel Fahrenheit 1686-1736, tysk/nederlandsk glassinstrumentmaker.

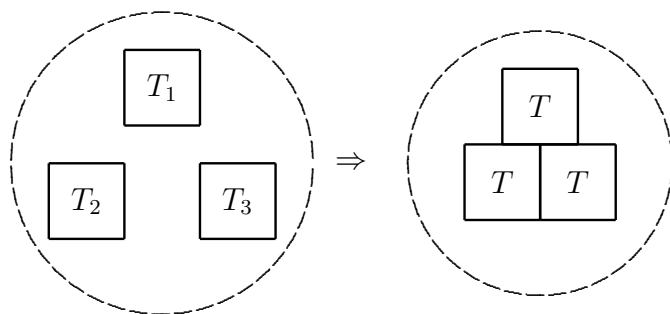
<sup>2</sup>Anders Celsius 1701-1744, professor i astronomi i Uppsala.

<sup>3</sup>Ferchault de Réaumur 1683-1757, fransk naturforsker.

bevegelsesenergi på atomær-molekylær lengdeskala ble allment akseptert først etter Joules bestemmelse av *varmens mekaniske ekvivalent* på slutten av 1840-årene. *Kalorimetri* – presisjonsmåling av varmemengder – var likevel utviklet til en nøyaktig vitenskap nær 100 år tidligere. Banebrytende teoretiske arbeider innen termodynamikk var gjort i perioden 1800-1830 – alt mens man trodde varme var forbundet med mer eller mindre magiske væsker eller partikler som *flogiston* eller *kalorier*.<sup>4</sup>

## 10.1 Temperatur og termisk utvidelse

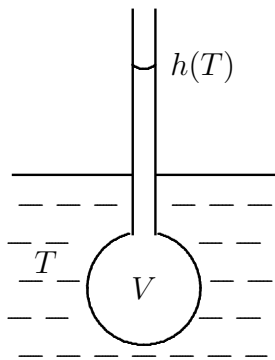
Et legemes *temperatur*  $T$  er et kvantitativt mål for hvor “varmt” et legeme er. Temperaturen er en *tilstandsstørrelse* for legemet.



Karakteristisk for temperaturen er at når legemer med i utgangspunktet ulike temperaturer ( $T_1, T_2, T_3, \dots$ ) bringes i *termisk kontakt* med hverandre – isolert fra omverdenen – vil de ved *termisk likevekt* alle ha fått samme temperatur  $T$ .

### 10.1.1 Temperaturskalaer

Praktiske *temperaturskalaer* har i utgangspunktet vært én-til-én koplet med væsers termiske utvidelse. Fahrenheit og Celsius brukte kvikksølv, mens Réaumur brukte en vann-alkohol blanding.



Prinsippet er kjent av alle: Et volum av væska innsluttes i ei kule eller lignende som er avsluttet med et tynt stigerør. Varmes volumet opp, stiger væska i stigerøret, og høyden  $h$  viser – kvantitativt og repeterbart – hvor varmt det er.

For å fastsette temperaturskalaen, brukte man to *fikspunkter*.<sup>5</sup> Réaumur og Celsius

<sup>4</sup> Forestillinga om “brennstoff” - flogiston - ble avlivet av Lavoisier, som prompte erstattet den (i 1787) med hypotesen om *kalori* som et ekstra grunnstoff.

<sup>5</sup>Referansefenomer med temperatur som lett lar seg reproducere.

brukte fryse- og kokepunkt for vann (ved atmosfæretrykk), som de satte til å være henholdsvis  $0^{\circ}\text{R}$  og  $100^{\circ}\text{C}$  for frysepunktet og  $80^{\circ}\text{R}$  og  $0^{\circ}\text{C}$  for kokepunktet.<sup>6</sup> Fahrenheit brukte det kaldeste han visste om, ei is-vann-salmiak-koksalt kuldeblanding ( $-17,78^{\circ}\text{C}$ ) og temperaturen i armhulen (på seg selv) – og satte disse til henholdsvis 0 og  $96^{\circ}\text{F}$ . Og så delte man inn skalaen i like lange biter mellom fikspunktene, eventuelt i biter tilsvarende like store relative volumforandringer.

La oss anta den siste inndelingsmetoden. Temperaturskalaen mellom fikspunktene er da *definert* ved

$$\Delta T \propto \Delta V/V \quad \text{eller} \quad \Delta V/V = \beta \Delta T, \quad (10-1)$$

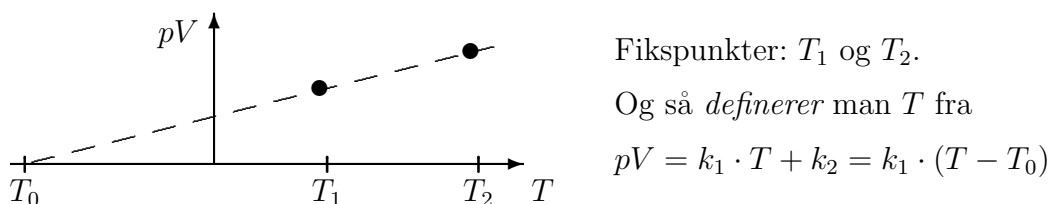
hvor  $\beta$  er volumutvidelseskoeffisienten for væska.<sup>7</sup>

Varmeutvidelseskoeffisienten  $\beta$  vil generelt være materialavhengig og variere med temperaturen  $\beta = \beta(T)$  – og også med trykket  $p$ . En materialuavhengig temperaturskala kan man få ved å bruke en ideell gass som termometervæske. Gassen følger Boyles<sup>8</sup> lov:

$pV = \text{konstant ved konstant temperatur.}$

(10-2)

Temperaturskalaen finnes ved å sette konstanten proporsjonal med temperaturen – som illustrert nedenfor.



På en Celsiusskala, med  $T_1 = 0^{\circ}\text{C}$  og  $T_2 = 100^{\circ}\text{C}$ , finner man ved ekstrapolasjon  $T_0 = -273,15^{\circ}\text{C}$ . Og – hvis man her velger konstanten  $T_0 = 0$ , har man en *absolutt temperaturskala*, som først foreslått av den franske fysikeren Guillaume Amontons (1663-1705).<sup>9</sup> Denne temperaturskalaen kalles Kelvinskalaen etter Lord Kelvin<sup>10</sup>, slik at  $0^{\circ}\text{C}$  og  $100^{\circ}\text{C}$  tilsvarer henholdsvis 273,15 K og 373,15 K, vanligvis avrundet til 273 K og 373 K.

<sup>6</sup>Dette er *ikke* skrivefeil. Celsiusskalaen ble snudd til  $(0, 100)^{\circ}\text{C}$  etter at Celsius var død (42 år gammel), av hans elev og etterfølger professor Mårten Strömer – eller kanskje egentlig av deres instrumentmaker Daniel Ekström.

<sup>7</sup>På vår Celsiusskala er, ved  $20^{\circ}\text{C}$ ,  $\beta_{\text{C}_2\text{H}_5\text{OH}} = 1,1 \cdot 10^{-3} \text{ K}^{-1}$ ,  $\beta_{\text{Hg}} = 0,18 \cdot 10^{-3} \text{ K}^{-1}$ ,  $\beta_{\text{vann}} = 0,21 \cdot 10^{-3} \text{ K}^{-1}$ ,  $\beta_{\text{luft}} = 3,4 \cdot 10^{-3} \text{ K}^{-1}$

<sup>8</sup>Robert Boyle 1627-1691, meget velstående irsk naturforsker, som publiserte loven i 1660. Det er trolig at loven egentlig ble funnet av hans assistent – som i alle fall bygget apparaturen – Robert Hooke.

<sup>9</sup> Amontons eksperimentelle data gir et absolutt nullpunkt på mellom  $-240$  og  $-250^{\circ}\text{C}$ .

<sup>10</sup>William Thomson 1834-1907, adlet til Lord Kelvin av dronning Victoria.



I moderne drakt definerer vi på linje med dette *absolutt temperatur* ut fra loven for ideell gass:

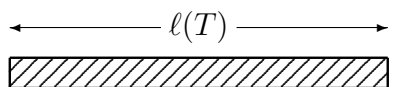
$$pV = nRT, \quad (10-3)$$

hvor  $n$  er antall mol,<sup>11</sup> og  $R = 8,314 \text{ J}/(\text{mol} \cdot \text{K})$  er *gasskonstanten*.

På denne skalaen er origo gitt, og det trenges derfor bare ett fikspunkt for entydig å bestemme skalaen. Og dette fikspunktet er *trippelpunktet* for vann (den eneste trykk-temperatur kombinasjonen  $p, T$  hvor væske, damp og fast stoff (is) sameksisterer i likevekt), med temperatur  $T = 273,16 \text{ K} = 0,0098^\circ\text{C}$  og  $p = 611 \text{ Pa}$ .

Vi skal seinere se at den uordnede, mekaniske begelsesenergien til en gass er proporsjonal med  $T$ . Dette forklarer hvorfor  $T$  i prinsippet kan være lik null, men aldri negativ. Vi skal også på slutten av kurset raffinere bildet av absolutt temperatur noe. Vår nåværende vitenskapelige temperaturskala er i prinsipp uavhengig også av gassloven.

### 10.1.2 Termisk lengdeutvidelse



Betrakt en homogen stav med lengde  $\ell$ , temperatur  $T$  og friksjonsfri “fri” opplagring.

Når  $T \rightarrow T + \Delta T$ , vil  $\ell \rightarrow \ell + \Delta\ell$ , og hvis  $\Delta T$  er liten nok blir  $\Delta\ell$  proporsjonal med både  $\ell$  og  $\Delta T$ . Proporsjonalitetskoeffisienten er *den lineære varmeutvidelseskoeffisienten*

$$\alpha = \frac{1}{\ell} \frac{d\ell}{dT} \quad \text{Lineær varmeutvidelseskoeffisient.} \quad (10-4)$$

*Volumutvidelseskoeffisienten* er likedan definert

$$\beta = \frac{1}{V} \frac{dV}{dT} \quad \text{Volumutvidelseskoeffisient.} \quad (10-5)$$

Man ser lett at volumutvidelseskoeffisienten er tre ganger den lineære koeffisienten. La volumet være  $V = x \cdot y \cdot z$  slik at  $\frac{\partial V}{\partial x} = yz$  osv. Da utvidelsen er lik i alle

<sup>11</sup>Antallet mol er antall atomer eller molekyler dividert med Avogadros tall,  $N_A = 6,02 \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1}$ .

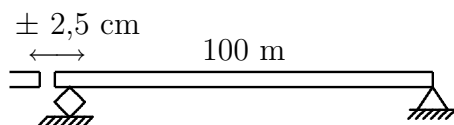
retninger får man

$$\begin{aligned}
 \beta &= \frac{1}{V} \frac{dV}{dT} \\
 &= \frac{1}{V} \left( \frac{\partial V}{\partial x} \frac{dx}{dT} + \frac{\partial V}{\partial y} \frac{dy}{dT} + \frac{\partial V}{\partial z} \frac{dz}{dT} \right) \\
 &= \frac{1}{x} \frac{dx}{dT} + \frac{1}{y} \frac{dy}{dT} + \frac{1}{z} \frac{dz}{dT} = \alpha + \alpha + \alpha = 3\alpha
 \end{aligned} \tag{10-6}$$

	$\alpha/\text{K}^{-1}$
Al	$24 \cdot 10^{-6}$
Cu	$20 \cdot 10^{-6}$
Fe	$10 \cdot 10^{-6}$
Invar	$0,9 \cdot 10^{-6}$

Varmeutvidelseskoeffisienten  $\alpha$  for noen vanlige metaller er gitt til venstre. Invar er en Fe-Ni legering, som blant annet brukes i LPG-skip (Fartøy som frakter nedkjølt, flytende naturgass).

Tallempeksel:



Stålbru, lengde  $\ell = 100 \text{ m}$

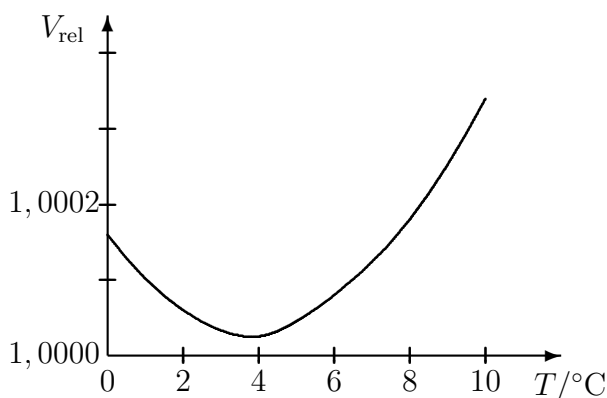
$$\Delta T_{\text{vinter}}^{\text{sommer}} \sim 50 \text{ K}$$

$$\Rightarrow \Delta \ell \sim 5 \text{ cm}$$

som på figuren tas opp av et vippelager.

### 10.1.3 Termisk utvidelse av vann

Ferskvann ( $\text{H}_2\text{O}$ ) har en ganske unik oppførsel – ikke bare er fast fase (is) lettere enn væskefase (vann), og flyter oppå væska, men vann har også *negativ* termisk utvidelseskoeffisient ved temperaturer rett over frysepunktet.



Figuren viser relativt volum – skalaen er ikke av betydning.

Vannet har størst tetthet ved  $T = 4,0^\circ\text{C}$ .

Ved tilfrysing av en innsjø synker det kalde vannet til bunns inntil hele sjøen har fått denne temperaturen – og deretter blir det kaldeste vannet liggende og flyte på toppen, til det tilslutt fryser til is.

Dermed bunnfryser ikke innsjøer, noe de ville ha gjort hvis vannet hadde oppført seg som væsker flest. I så tilfelle ville livsmiljøet på vår planet sett svært forskjellig ut fra det som er tilfellet i dag.

For de fleste stoff er massetettheten større i fast fase enn i væskefase ved samme temperaturen. Dette er ikke tilfellet for  $\text{H}_2\text{O}$ , is har lavere massetetthet enn vann. Disse anomaliteter er med på å gjøre vann til ei meget spesiell væske. Fenomenet skyldes at vann i væskeform på molekylært nivå har mange flere likheter med strukturen i fast fase enn de fleste andre stoff.

## 10.2 Varmer og varmekapasitet

Begrepene *varme*<sup>12</sup> og *temperatur* gikk ofte om hverandre fram til omlag 1750, da Joseph Black (1728-1799) introduserte *kalorimetri* – dvs. kvantitativ måling av varmer, samt begrepene *spesifikk varme* (eller *varmekapasitet*) og *latent varme* (smeltevarme, fordampingsvarme o.l.).

Hva varme egentlig var, var det delte meninger om. Boyle, Newton og Bernoulli mente varme trolig hadde med partikkelbevegelser å gjøre, mens Black, Lavoisier m.fl. seinere vant fram med synet at det var et eget “varmestoff”.

Ei tilsynelatende klargjøring kom med grev Rumford<sup>13</sup> på 1790-tallet. Han observerte glødende metallspoon fra boring av messingkanoner, og gjorde en serie nitide undersøkelser for å finne ut hva som kunne være kilda til varmeutviklinga. Og konkluderte med at det syntes vanskelig eller umulig å forklare – “except it be motion”.

Men Rumford fikk ikke gjennomslag for dette i sin levetid. Først med Joules eksperimenter i 1840-årene, hvor Joule kvantitativt målte sammenhengen mellom arbeid mot friksjonskrefter og varmeutvikling,<sup>14</sup> ble det endelig alment akseptert at *varme er (uordnet) energi på atomær/molekylær lengdeskala*, også kalt indre energi.

Definisjon av *varme*:

Varmer  $Q$ : Energi som overføres som følge av en temperaturforskjell.

Kombinert med prinsippet om energibevarelse fåes

1. Varmer er energi
2. Total energi er bevart

Varmerlæras 1. hovedsetning.

(10-7)

<sup>12</sup>I fysikken kalles varmemengde bare *varme*.

<sup>13</sup>Benjamin Thompson 1753-1814, amerikansk født, deltok på engelsk side i uavhengighetskriegen, ble krigsminister i Bayern og der adlet til Graf von Rumford; seinere en av stifterne av The Physical Society i London.

<sup>14</sup>Oppvarming av ett pund vann én grad Fahrenheit krever et friksjonsarbeid på 778 fot-pund – dette er enheten ‘Btu’ (British thermal unit), som man finner bl. a. i amerikanske lærebøker.

Med de fysiske størrelsene:

$U$  Indre energi (systemets totale indre energi termisk sett)

$Q$  Tilført varme

$W$  Arbeid utført av systemet

kan dette for et system skrives:

$$\Delta U = Q - W \quad \text{Varmelæras 1. hovedsetning.} \quad (10-8)$$

### 10.2.1 Varmekapasitet

Varmemengder ble i utgangspunktet referert til som det som trengs for oppvarming av vann. Gammel enhet for varme – som vi *ikke* vil bruke i dette kurset – er *kalori*:

*1 cal er varmen som skal til for å varme opp 1,00 cm<sup>3</sup> H<sub>2</sub>O fra 14,5°C til 15,5°C.*

Og her er det god mulighet for forvirring: En “kostholdskalori” er 1000 av disse kaloriene, dvs. 1 kcal, men skrives ofte 1 kal!

Bestemmelse av varmens mekaniske ekvivalent ga, i SI-enheter:<sup>15</sup>

$$1 \text{ cal} = 4,1855 \text{ Nm} = 4,1855 \text{ J}.$$

Vann kan følgelig<sup>16</sup> ta opp  $4,1893 \cdot 10^3$  J per kg og grad oppvarming– og vi sier vannet har en *varmekapasitet*  $c = 4,19 \text{ kJ}/(\text{kg K})$ . Dette er ved 15 °C, andre temperaturer gir litt andre verdier for  $c$ .

Vi bruker begrepet varmekapasitet i noen ulike betydninger, betydningen går som regel fram av sammenhengen:

- for et gitt legeme (totalt)  $Q = C\Delta T$   $[C] = \text{J/K}$
- per masseenhed (spesifikk)  $Q = mc\Delta T$   $[c] = \text{J}/(\text{K kg})$
- per mol (molar)  $Q = nc'\Delta T$   $[c'] = \text{J}/(\text{K mol})$
- per molekyl  $Q = Nc_m\Delta T$   $[c_m] = \text{J/K}$ .

Varmekapasiteten (ved 20 °C) for noen stoff er gitt i tabell nedenfor.

	$c$ J/(K kg)	$c'$ J/(K mol)
Cu	390	24,6
Al	910	24,8
C <sub>2</sub> H <sub>5</sub> OH	2428	112,0
Is	2000	36,5
Vann	4182	75,3

Varmekapasiteten per mol er nær den samme for mange faste stoff,  $c' \approx 3R$ , hvor  $R = 8,314 \text{ J}/(\text{K mol})$  er gasskonstanten (Dulong og Petits lov).

<sup>15</sup>Det er ulike standarder for definisjonen av 1 cal: “I.T.-kalori” = 4,1868 J ; “termokjemisk kalori” = 4,184 J; “15 °C kalori” =  $(4,1855 \pm 0,0005) \text{ J}$ . Siste brukes her i teksten.

<sup>16</sup>1,000 cm<sup>3</sup> vann veier 0,9991 g ved 15 °C.

## 10.2.2 Varmetoning – latent varme

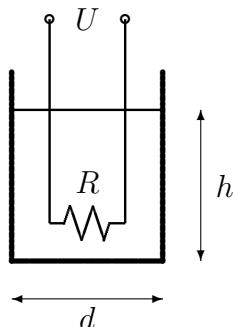
Utteksling av energi i form av varme opptrer ikke bare i forbindelse med temperaturforandringer, men også i forbindelse med *faseomvandlinger* – som smelting, fordamping, sublimering (fordamping fra fast fase) og rekrySTALLISASJON. Varmen vil da ofte opptas eller avgis ved *konstant temperatur* – *smeltepunkt*, *kokepunkt* m.m.

Smeltepunkt  $T_S$  og kokepunkt  $T_K$  ved atmosfæretrykk for noen stoff er gitt nedenfor. Kokepunktet er den temperaturen hvor damptrykk over væska er lik ytre lufttrykk, da koker væska, dvs. damp dannes inne i selve væska. Også de latente varmer er gitt:  $L_S$  = smeltevarme ved smeltepunktet og  $L_K$  = fordampingsvarme ved kokepunktet.

	$\frac{T_S}{\text{K}}$	$\frac{T_K}{\text{K}}$	$\frac{L_S}{\text{kJ/kg}}$	$\frac{L_K}{\text{kJ/kg}}$
N <sub>2</sub>	63	78	25,7	199
C <sub>2</sub> H <sub>5</sub> OH	159	351	109	879
H <sub>2</sub> O	273,15	373,15	333,5	2257
Pb	600,6	2024	24,7	858

Værphenomenet “fönvind” er basert på at den latente varmen til vanndampen i lufta frigjøres når fuktig luft avkjøles som følge av at vanndampen presses opp over ei fjellkjede. Når lufta kommer ned til normal høyde igjen, etter å ha passert fjellkjeda, kan den være opp til 10-15 grader varmere enn hva den var da den begynte oppstigninga over fjellkjeda. Spesielt like nord for Alpene er dette et velkjent fenomen, men det opptrer fra tid til annen også i Trøndelag når det er vind fra sør og det regner grovt øverst i Østerdalen. Den latente varmen til vanndamp er også grunnen til at man over litt lenger avstander i fjernvarmeanlegg ikke transporterer varmt vann, men vanndamp under høgt trykk og temperatur (“steam”).

Talleksempel:



Vi modellerer en enkel elektrisk vannkoker.

Et kar med diameter  $d=100$  mm fylles til en høyde  $h=127$  mm med vann fra springen, med temperatur  $T = 8,0^\circ\text{C}$ . Vannet i karet varmes med en varmespiral dyppet ned i vannet, og varmespiralen gir  $P = 1,36 \text{ kW} = 1,36 \text{ kJ/s}$  fra elektrisk strøm.

Første spørsmål: Hvor lang tid ( $t_0$ ) tar det å få kokt opp kaffevannet?

Andre spørsmål: Hvis kaffekokeren glemmes vil den stå og koke til vannet har dampet bort *helt ned til filamentet*. Og hvis det skjer, forsvinner kjølinga ( $100^\circ\text{C}$ ) for filamentet, og det brenner av. Hvor lang tid ( $t_1$ ) tar *det* – hvis toppen av filamentet står  $h_1 = 50\text{ mm}$  over bunnen av karet?

Vi modellerer dette veldig enkelt, og ser helt bort fra a) varmetap til omgivelsene. og b) varmekapasiteten til karet.

Vi må finne

1. Hvor mye vann som skal varmes opp ( $m_0$  i kg),
2. hvor stor varme som trenges til dette ( $Q_0$  i J),
3. hvor lang tida  $t_0$  er, beregnet fra  $P \cdot t_0 = Q_0$ ,
4. hvor mye vann som skal kokes bort ( $m_1$ ),
5. og hvor stor varme  $Q_1$  som trenges til fordampinga, og derav  $t_1$ .

Konstanter som trenges til beregninga er

$\rho_{\text{H}_2\text{O}} = 1,00\text{ kg/l}$	Massetettheten til vann
$c_{\text{H}_2\text{O}} = 4,19\text{ kJ/(K kg)}$	Varmekapasiteten til vann (snitt mellom $8$ og $100^\circ\text{C}$ )
$L_{\text{H}_2\text{O}} = 2257\text{ kJ/kg}$	Fordampingsvarmen til vann (ved kokepunktet)

Og så skulle det hele være rett fram:

1.  $m_0 = \rho V_0 = \rho \cdot (\pi d^2/4) \cdot h = (1,00\text{ kg/l}) \cdot 0,997\text{ l} \approx 1\text{ kg}$
2.  $Q_0 = m_0 \cdot c \Delta T = 1\text{ kg} \cdot 4,19\text{ kJ/(K kg)} \cdot 92\text{ K} \approx 385\text{ kJ}$
3.  $P \cdot t_0 = Q_0$   
 $\Rightarrow \underline{t_0} = Q_0/P = 385\text{ kJ}/1,356\text{ kW} = 284\text{ s} \approx \underline{5\text{ minutter}}$
4.  $m_1 = m_0 \cdot (h - h_1)/h = m_0 \cdot (1 - h_1/h) \approx 0,6\text{ kg}$
5.  $Q_1 = m_1 \cdot L_{\text{H}_2\text{O}} = 0,6\text{ kg} \cdot 2257\text{ kJ/kg} \approx 1,37\text{ MJ}$   
 $\Rightarrow \underline{t_1} = Q_1/P = 1,37\text{ MJ}/1,356\text{ kW} = 1009\text{ s} \approx \underline{17\text{ minutter}}$

## 10.3 Varmetransport

Varmetransport er, som navnet sier, forflytning av energi i form av varme fra ett sted til et annet. Og dette foregår ved tre ulike mekanismer, *konveksjon* (strømning), *varmeledning* og *varmestråling*.

Ved konveksjon følger varmen med bevegelsen til et fluid, vanligvis vann eller luft. Og store varmer kan transporteres relativt hurtig.

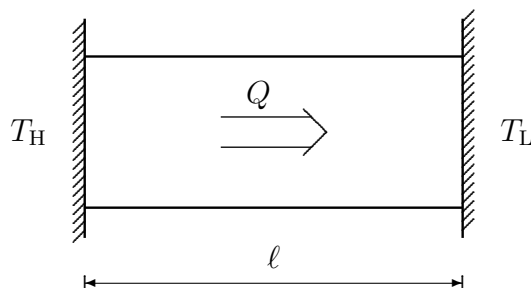
“Relativt hurtig” – det er å tolke som i forhold til transport ved varmeledning, som er transport gjennom faste stoff, eller i fluider som på et eller annet vis er forhindret i å strømme. Eksempler er varmetransport i jord – vannledninger i 2 meters dybde kan gjerne fryse 4-5 måneder etter hard barfrost på overflata – og transport gjennom luftlaget mellom glassene i dobbeltvinduer.

Varmestråling er nær instantan transport (tid sol-jord ca. 8 minutter) av varme i form av bredspektret elektromagnetisk stråling, hovedsaklig i det infrarøde

området. Frekvensspektrum og intensitet av varmestrålinga er gitt av og karakteristisk for temperaturen til legemet som stråler.

Vi skal her vesentlig ta for oss varmeledning, men også ta med litt om varmestråling. Konveksjonsproblemer vil det føre for langt å gå inn på.

### 10.3.1 Varmeledning



Betrakt et system som vist til venstre. En stav med lengde  $\ell$  og tverrsnitt  $A$  er plassert mellom, og i god termisk kontakt med, to *varmereservoar*, med temperaturer  $T_H$  (høy temperatur) og  $T_L$  (lav temperatur). Vi antar ingen varmetap til omgivelsene.

Fra  $T_H$  til  $T_L$  går det en *varmestrøm* – det er *varme per tidsenhet* –

$$\Phi \equiv dQ/dt \quad \text{Varmestrøm (J/s = W)} \quad (10-9)$$

Varmestrømmen vil være proporsjonal med temperaturdifferansen over staven og tverrsnittet av staven, og omvendt proporsjonal med lengden,

$$\Phi = \lambda \cdot A (T_H - T_L) \frac{1}{\ell}, \quad (10-10)$$

hvor proporsjonalitetsfaktoren  $\lambda$  er *varmeledningsevnen* for materialet i staven.

	$\frac{\lambda}{\text{WK}^{-1}\text{m}^{-1}}$	
Cu	401	Metall: frie elektroner
Al	237	
Fe	80	
Glass	0,8	
Kork	0,04	
Steinull	0,04	
H <sub>2</sub>	0,14	Gass: kinetisk teori
Luft	0,024	
Ar	0,016	

Varmeledningsevnen for noen materialer, ved romtemperatur, er vist til venstre.

I metaller bæres varmen vesentlig av *ledningselektronene* (det er også de som er årsaken til at metaller reflekterer lys, og er blanke).

I gasser bæres varmen av enkeltmolekyler, og varmeledningsevnen kan beregnes med *kinetisk teori* – vi skal vise dette i neste kapittel.

*Definisjonslikninga* for varmeledning gitt ovenfor, likn. (10-10), forutsetter en stav av homogent materiale og med konstant tverrsnitt.

En mer generell sammenheng fåes ved å betrakte varmestrømmen gjennom et lite element av staven, med lengde  $\Delta x$  og tverrsnitt  $\Delta A$ , og med temperaturfall  $\Delta T$ . For et slikt element får vi – når vi tar med fortegn som viser at varmestrømmen

går i retning fra høy til lav temperatur –

$$\Delta\Phi = -\lambda \cdot \frac{\Delta A \Delta T}{\Delta x}, \quad (10-11)$$

og i “differensiell grense”

$$\boxed{\frac{d\Phi}{dA} = -\lambda \frac{dT}{dx} \quad \frac{\Phi}{A} = \text{varmestrømtetthet.}} \quad (10-12)$$

Størrelsen  $d\Phi/dA$  – varme per tids- og flateenhet – kaller vi *varmestrømtetthet*, og gis symbolet  $j_Q$  ( $\text{W/m}^2$ ).

Vi kan dermed skrive

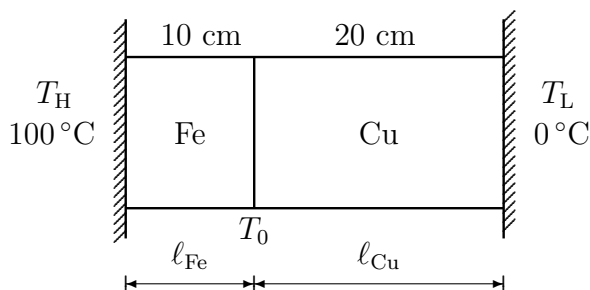
$$\boxed{j_Q = -\lambda \frac{\partial T}{\partial x} \quad \text{Fouriers lov for varmeledning.}} \quad (10-13)$$

Temperaturen *kan* også variere med tida – derfor partiellderivert i likninga.<sup>17</sup>

---

<sup>17</sup>Etter Jean Baptiste Joseph Fourier (1768-1830), fransk matematiker og fysiker. Kanskje mest kjent for sine Fourier-rekker. Varmeledningsloven stammer fra 1820. I 3 dimensjoner blir den  $\vec{j}_Q = -\lambda \nabla T$ . Også varmeledningslikningen på formen (10-10) kalles Fouriers lov.



Tallempeksel:

En bolt, med tverrsnitt  $A = 2 \cdot 2 \text{ cm}^2$ , er satt sammen av jern med en lengde  $\ell_{\text{Fe}} = 10 \text{ cm}$  og kopper med en lengde  $\ell_{\text{Cu}} = 20 \text{ cm}$ , og plassert mellom to varmereservoarer med temperaturer  $T_{\text{H}} = 100^\circ\text{C}$  og  $T_{\text{L}} = 0^\circ\text{C}$ , som vist på figuren.

Hva er temperaturen i  $T_0$  i kontaktflata jern-kopper? Og hva er varmestrømmen  $\Phi$  gjennom bolten?

Vi har to ukjente,  $T_0$  og  $\Phi$ , og trenger dermed to likninger. Disse får vi ved å sette opp uttrykk for varmestrømmen  $\Phi$  i både venstre og høyre del av bolten – dette må nødvendigvis være samme størrelse, ellers ville temperaturen endres i kontaktflata.

$$(I) \quad \Phi = \Phi_{\text{Fe}} = \lambda_{\text{Fe}}(A/\ell_{\text{Fe}})(T_{\text{H}} - T_0) = A \cdot K_{\text{Fe}}(T_{\text{H}} - T_0) \quad (10-14)$$

$$(II) \quad \Phi = \Phi_{\text{Cu}} = \lambda_{\text{Cu}}(A/\ell_{\text{Cu}})(T_0 - T_{\text{L}}) = A \cdot K_{\text{Cu}}(T_0 - T_{\text{L}}) \quad (10-15)$$

der  $K_{\text{Fe}} = \lambda_{\text{Fe}}/\ell_{\text{Fe}}$  er *varmeoverføringskoeffisienten* for jern delen med tykkelse  $\ell_{\text{Fe}}$  og tilsvarende for kopper delen.

$$[(I) - (II)] \Rightarrow 0 = (A \cdot K_{\text{Fe}}T_{\text{H}} + A \cdot K_{\text{Cu}}T_{\text{L}}) - (A \cdot K_{\text{Fe}} + A \cdot K_{\text{Cu}})T_0, \text{ dvs.}$$

$$T_0 = \frac{K_{\text{Fe}}T_{\text{H}} + K_{\text{Cu}}T_{\text{L}}}{K_{\text{Fe}} + K_{\text{Cu}}}. \quad (10-16)$$

$$[K_{\text{Cu}} \cdot (I) + K_{\text{Fe}} \cdot (II)] \Rightarrow (K_{\text{Cu}} + K_{\text{Fe}})\Phi = A \cdot K_{\text{Fe}}K_{\text{Cu}}(T_{\text{H}} - T_{\text{L}}), \text{ dvs.}$$

$$\Phi = A \cdot \frac{K_{\text{Fe}}K_{\text{Cu}}}{K_{\text{Fe}} + K_{\text{Cu}}} \cdot (T_{\text{H}} - T_{\text{L}}) \quad (10-17)$$

Merk at vi også kan skrive

$$\Phi = A \cdot K_{\text{tot}} \cdot (T_{\text{H}} - T_{\text{L}}) \quad \text{med} \quad \frac{1}{K_{\text{tot}}} = \frac{1}{K_{\text{Fe}}} + \frac{1}{K_{\text{Cu}}} \quad (10-18)$$

Tallverdier:

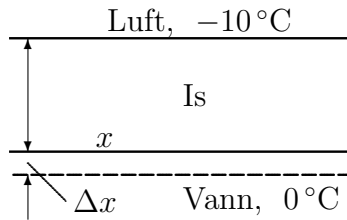
$$\left. \begin{array}{l} K_{\text{Fe}} = \lambda_{\text{Fe}}/\ell_{\text{Fe}} = 800 \text{ WK}^{-1}\text{m}^{-2} \\ K_{\text{Cu}} = \lambda_{\text{Cu}}/\ell_{\text{Cu}} = 2005 \text{ WK}^{-1}\text{m}^{-2} \\ A = 4,0 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} K_{\text{tot}} = 572 \text{ WK}^{-1}\text{m}^{-2} \\ \Phi = 22,9 \text{ W} \\ T_0 = 28,5^\circ\text{C} \end{array} \right. \quad (10-19)$$

### 10.3.2 Tilfrysing av en innsjø

Vi tar som utgangspunkt en sjø som senhøstes er kjølt ned til  $4^\circ\text{C}$  – hvorpå lufttemperaturen faller til  $-10^\circ\text{C}$  og blir der.

Hvor lang tid tar det før isen er blitt 10 cm tykk? Og 25 cm?

Oppgitt for is: Varmeledningsevne  $\lambda = 1,6 \text{ W m}^{-1} \text{ K}^{-1}$ , massetetthet:  $\rho \approx 0,92 \text{ g/cm}^3$ , varmekapasitet:  $c_{\text{is}} = 2,17 \text{ kJ/(kg K)}$ .



Vi betrakter systemet litt ute i fryseprosessen, ved tid  $t$ .

Istykkelsen er  $x$ , lufttemperaturen  $T_L$  er  $-10^\circ\text{C}$  og vanntemperaturen rett under isen  $T_0$  er  $0^\circ\text{C}$ . Isens temperatur er  $-10^\circ\text{C}$  i grensa mot lufta og  $0^\circ\text{C}$  i grensa mot vannet, med middeltemperatur  $-5^\circ\text{C}$ .

I et tidsintervall  $\Delta t$  fryses et nytt sjikt is med tykkelse  $\Delta x$ , og *frysevarmen*  $L_{\text{is}} = 334 \text{ kJ/kg}$  må fraktes gjennom isen.

Dertil skal tilsvarende mengde vann kjøles ned fra  $4^\circ\text{C}$  til  $0^\circ\text{C}$ , og tilsvarende mengde is kjøles ned fra  $0^\circ\text{C}$  til isens middeltemperatur  $-5^\circ\text{C}$ . Dette gir i tillegg  $\Delta L = (c_{\text{H}_2\text{O}} \cdot 4 \text{ K} + c_{\text{is}} \cdot 5 \text{ K}) \approx 27 \text{ kJ/kg}$ , som også må fraktes opp til lufta.

Vi modellerer enkelt, og regner som om bare frysing til is spiller noen rolle (det er 90 % av varmen) – men korrigerer ved å bruke en litt høyere *effektiv frysevarme*  $L_0 \approx 360 \text{ kJ/kg}$ .

La oss velge et utsnitt av isen med areal  $\Delta A$ . Frysing av en tykkelse  $\Delta x$  krever en frysevarme

$$\Delta Q = L_0 \Delta m = L_0 \rho \Delta V = L_0 \rho \Delta x \Delta A \quad \text{hvor } \rho \text{ er for is} \quad (10-20)$$

og varmestrømtettheten mot overflata må være

$$j_Q = \frac{\Delta Q}{\Delta A \Delta t} = L_0 \rho \frac{\Delta x}{\Delta t} \rightarrow L_0 \rho \frac{dx}{dt}. \quad (10-21)$$

Denne må være lik varmestrømtettheten etter Fouriers lov

$$j_Q = -\lambda \frac{\partial T}{\partial x} = \lambda \frac{T_0 - T_L}{x} \equiv \lambda \frac{\Delta T}{x} \quad \text{hvor } \Delta T = 10 \text{ K}. \quad (10-22)$$

Settes disse to like, fåes en sammenheng

$$\begin{aligned} L_0 \rho \frac{dx}{dt} &= \lambda \frac{\Delta T}{x}, & \text{dvs.} & \quad x dx = \frac{\lambda \Delta T}{L_0 \rho} dt, & \text{som integreres til} \\ \frac{1}{2} x^2 &= \frac{\lambda \Delta T}{L_0 \rho} t, & \text{eller} & \quad t(x) = \frac{L_0 \rho}{2 \lambda \Delta T} x^2 \end{aligned} \quad (10-23)$$

Tallemsempel:

$$\frac{L_0 \rho}{2 \lambda \Delta T} \approx 10,3 \cdot 10^6 \text{ s/m}^2$$

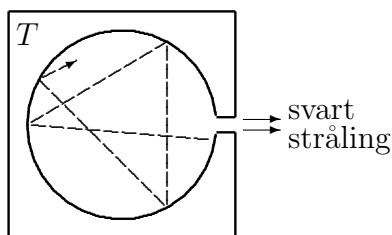
$$x = 10 \text{ cm gir: } t \approx 10,3 \cdot 10^4 \text{ s} \approx 29 \text{ h} \quad - \text{dvs. ca. ett døgn}$$

$$x = 25 \text{ cm gir: } t \approx (2,5)^2 \cdot t_{10 \text{ cm}} = 6,3 \cdot 29 \text{ h} \quad - \text{dvs. ca. éi uke.}$$

### 10.3.3 Varmestråling

Alle flater vil p.g.a. temperaturen sende ut elektromagnetisk stråling. Utstrålt effekt avhenger av flates temperatur og overflateegenskaper (farge/blankhet). Svarte legemer stråler ut mest. Varmestrålinga øker sterkt med økende temperatur, samtidig som fargen går fra usynlig infrarødt, gjennom svak rødglød ved ca. 800 °C til mer og mer hvitglødende. Handa vår kan lett føle varme som utstråles fra overflater i infrarødt-område, hvis legemet blir så varmt at det gløder kan vi også se strålingen. Strålingen kalles varmemestråling, og hvis utstrålt effekt er lik innfallende effekt er det termisk likevekt med omgivelsene.

Vi tar for oss hva vi kaller *svart stråling* (“blackbody radiation”).



Skoleeksempelet på svart stråling er såkalt hulromstråling; strålinga kommer ut fra et hulrom i et legeme med temperatur  $T$ , gjennom et lite hull.

Stråling fra fiksstjerner – inklusive vår sol – er i hovedsak svart stråling, overlagret noen absorpsjons- eller emisjonslinjer fra den ytre stjerneatmosfæren.

Samtidig med at bølgelengden endres når temperaturen øker – som beskrevet ovenfor – øker også utstrålt effekt betydelig når temperaturen øker. Dette er kvantitativt uttrykt ved Stefan-Boltzmanns lov<sup>18</sup> som sier at *total utstrålt effekt per flateenhet* ( $j$  – også kalt *radians*) øker med fjerde potens av temperaturen:

$$j = \sigma T^4 \quad \text{Stefan-Boltzmanns lov,} \quad (10-24)$$

hvor  $\sigma = 5,67 \cdot 10^{-8} \text{ W}/(\text{m}^2 \cdot \text{K})$  er Stefan-Boltzmann-konstanten.

Den kvantitative beskrivelsen av hvordan frekvensen til strålingen avhenger av temperaturen er gitt ved Plancks strålingslov<sup>19</sup>. Frekvensspekteret, dvs. strålingseffekt per flateenhet per frekvensintervall  $d\nu$ , er gitt ved<sup>20</sup>

$$j_\nu(\nu, T) = \frac{2\pi h \nu^3}{c^2} \frac{1}{e^{h\nu/k_B T} - 1} \quad \text{Plancks strålingslov} \quad (10-25)$$

hvor  $c = 3,00 \cdot 10^8 \text{ m/s}$  er lyshastigheten,  $k_B = 1,3806 \cdot 10^{-23} \text{ J/K}$  er Boltzmanns konstant og  $h = 6,626 \cdot 10^{-34} \text{ Js}$  er Plancks konstant.

<sup>18</sup>Funnet eksperimentelt av Josef Stefan (1853-1893) i 1879, og utledet teoretisk av Ludwig Boltzmann (1844-1906) i 1884; begge var da professorer i fysikk i Wien.

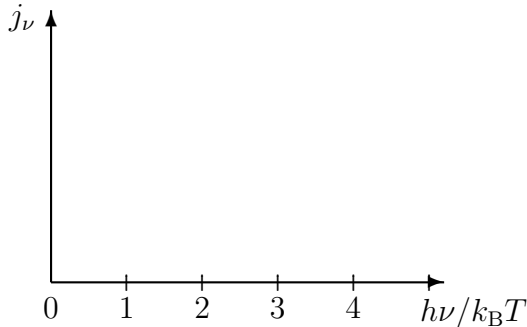
<sup>19</sup>Max Planck (1858-1947), tysk fysiker. Loven kom i 1900 – og Nobelprisen kom i 1920.

<sup>20</sup>Det er vanlig å bruke  $\nu$  i stedet for  $f$  som symbol for frekvensen til lys.

Sammenhengen mellom  $j_\nu$  – radians per frekvensenhet – og total radians  $j$  er

$$\Delta j = j_\nu \Delta \nu \quad ; \quad j = \int_{\nu=0}^{\infty} j_\nu d\nu. \quad (10-26)$$

Planck fant også at *strålinga opptreer i kvanter, med energi per kvant  $E = h\nu$ .*



Planck-kurven er vist til venstre, med  $j_\nu$  i vilkårlige enheter.

Registrering av Planck-kurven for strålingen fra en fiksstjerne bestemmer overflatetemperaturen til stjerna – f.eks. gjennom topp-punktet i kurva. Et annet eksempel: Temperaturen til smelten i ferrosilisiumovner. eksempel.

Den kosmiske bakgrunnsstrålinga gir perfekt overensstemmelse med Planck-kurven, og gir en temperatur på 2 K – fotoner som er strukket av universets utvidelse siden dets skapelse.

For ikke-svarte strålere kan man modifisere Stefan-Boltzmanns strålingslov til

$$j = e \sigma T^4, \quad (10-27)$$

hvor  $e \leq 1$  er *emissiviteten*. Sotete overflater har  $e$  på ca. 0,95, rimelig gode “grå flater” 0,7 - 0,8, mens speilende kopper ca. 0,03. Det er derfor termosier har speilende flater i tillegg til vakuum inne i dobbeltveggen til beholderen. Glødetråden i lyspærer bør ha høyest mulig emissivitet, men den er ikke høyere enn ca 0,5 ved glødetemperaturen.

*Tallempele:*

La oss se på utstråling fra et menneske “in natura”.

Overflata er – på en middelstudent –  $A \approx 1,2 \text{ m}^2$ , og hudtemperaturen er  $T_H \approx 30^\circ\text{C} \approx 303 \text{ K}$ .<sup>21</sup> Vi antar emissiviteten  $e$  er omtrent lik én. Dette gir en total utstrålt varmestrom  $\Phi = A \cdot \sigma T_H^4 = 1,2 \cdot 5,67 \cdot 10^{-8} \cdot 303^4 \text{ W} \approx 570 \text{ W}$  – dvs. mer enn en halv kilowatt. Men – det er alltid betydelig innstråling også, slik at netto tap blir som regel vesentlig mindre:

Hvis man for eksempel står inne i et kjølig soveværelse, si med (vegg)temperatur  $T_S = 15^\circ\text{C} \approx 288 \text{ K}$ , får man ei innstråling proporsjonal med  $T_S^4$ , og netto tap reduseres med en faktor  $1 - (T_S/T_H)^4 = 1 - (288/303)^4 = 1 - 0,82 = 0,18$ , til

<sup>21</sup>Innfødte i Australia har hudtemperatur (om natten) på bare ca.  $27^\circ\text{C}$ , det gir overlevelsesfordeler for folk som sover ute uten klær.

ca. 105 W. Med klær på kroppen reduseres heldigvis tapet ytterlige, idet overflate-temperaturen på klærne nærmer seg omgivelsenes temperatur. Ute i sola en varm sommerdag – eller i ei badstu – er innstrålingen større enn utstrålingen.

## OPPSUMMERING AV KAP. 10

- *Varme* er overføring av energi pga. temperaturforskjeller. Varme måles i enhet som energi, dvs.  $J = \text{joule}$ .
- Når legemer som er isolert fra omverden og som i utgangspunktet har ulik temperatur, bringes i termisk kontakt, vil alle legemene ha samme temperatur når legemene har nådd termisk likevekt.
- Alle stoffer utvider seg ved oppvarming (unntatt vann mellom 0 og  $4^\circ\text{C}$ ). Temperaturskalaer er knyttet til stoffers utvidelse.
- Som *referansetemperaturer* benyttet man opprinnelig frysepunktet eller kokepunktet til valgte væsker. Seinere benyttet man det absolutte nullpunkt,  $0\text{ K} = -273,15^\circ\text{C}$ .
- En ideell gass følger loven:  $pV = nRT$ . Definisjonen av absolutt temperatur er basert på denne likningen ved ekstrapolasjon fra gasser rundt romtemperatur og ned til null volum  $V$  med tilhørende  $T = 0\text{ K}$ .
- *Varmekapasiteten* til et stoff angir hvor mye varme som trengs for å varme opp f.eks. et kilogram av stoffet en grad, men varmekapasiteten kan også regnes for et helt legeme, per mol, per atom eller molekyl.
- *Varmetoning* er utveksling av varme i samband med faseomvandling, f.eks. ved fordamping eller frysing.
- *Varmetransport* foregår ved *konveksjon*(strømning), *varmeledning* eller *stråling*.
- *Varmeledning* mellom to legemer er alltid proporsjonal med temperaturdifferansen mellom legemene, gitt ved Fouriers lov.
- *Varmestråling* er en kvantefysisk effekt og er proporsjonal med fjerdepotens av den absolutte temperaturen, Stefan-Bolzmanns lov:  $j = e\sigma T^4$ . Den er også avhengig av overflatefarge og -struktur gjennom emissiviteten  $e$ .

# Kapittel 11

## Kinetisk gasteori

### Innhold

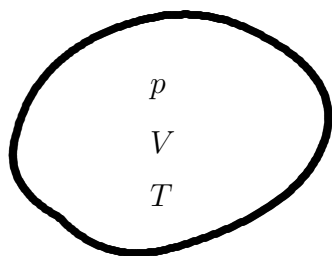
---

11.1 Makroskopisk	beskrivelse
(kontinuumsbeskrivelse) . . . . .	115
11.2 Mikroskopisk	beskrivelse
(atomær/molekylær beskrivelse) . . . . .	116
11.3 Fra mikroskopisk til makroskopisk beskrivelse (kon-	
traksjon) . . . . .	116
11.4 Den ideelle gassloven . . . . .	117
11.5 Varmekapasitet for ideell énatomig gass . . . . .	119
11.5.1 Oppvarming ved konstant volum . . . . .	119
11.5.2 Oppvarming ved konstant trykk . . . . .	120
11.6 Varmelæras 1. hovedsetning . . . . .	121
11.7 Frihetsgrader . . . . .	122
11.7.1 Enatomig gass . . . . .	122
11.7.2 Toatomig gass . . . . .	122
11.7.3 Fleratomige gasser . . . . .	123
11.8 Ekvipartisjonsprinsippet . . . . .	123
11.8.1 Hydrogengass, $H_2$ . . . . .	123
11.8.2 Faste stoffer: Dulong-Petits lov . . . . .	124
11.9 Adiabatisk prosesser . . . . .	125
11.9.1 Ideell gass . . . . .	125
11.9.2 Lydhastigheten i en ideell gass . . . . .	126
11.9.3 Rüchardts eksperiment . . . . .	127
11.10 Transportprosesser i ideelle gasser . . . . .	128
11.10.1 Fri veglengde og fri tid mellom støt . . . . .	129
11.10.2 Varmedledning . . . . .	130
11.10.3 Viskositet . . . . .	132

<b>11.11 Kondensasjon og kritisk punkt . . . . .</b>	<b>134</b>
11.11.1 van der Waals likning . . . . .	135
11.11.2 Fasediagram og trippelpunkt . . . . .	137

Vi skal i dette kapittelet vise hvordan bruk av enkel *kinetisk teori* for ideelle gasser kan gi oss økt mikroskopisk forståelse av varmelæra. Dette inkluderer loven for ideell gass, varmekapasitet for en og fleratomige gasser, varmelæras 1. hovedsetning, adiabatisk prosesser, transportkoeffisienter som varmeledning og viskositet, og fasediagram. Fundamentet som denne teorien bygger på, er for en stor del Newtons mekanikk.

## 11.1 Makroskopisk beskrivelse (kontinuumsbeskrivelse)



Vi betrakter – for å gjøre det enkelt – hva vi kan kalle et isolert termodynamisk system, uten hverken energi- eller partikkelutveksling med omverdenen, i termodynamisk likevekt.

Systemet er da karakterisert ved 3 – og bare 3 – *tilstandsvariable*, trykket  $p$ , volumet  $V$  og temperaturen  $T$ . Og disse er forbundet med ei eller anna *tilstandslikning*, av form  $f(p, V, T) = 0$

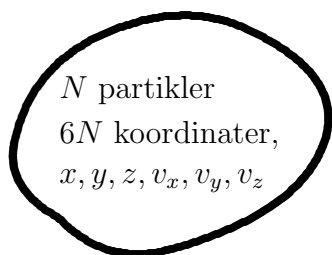
Eksempler på tilstandslikninger er

Ideell gass:  $pV = nRT$  ( $n$ : # mol,  $R$ : gasskonstanten)

Fast stoff:  $V \approx V_0[1 - \beta(T - T_0) - k(p - p_0)]$

(For fast stoffer: lineær approksimasjon rundt  $(p_0, V_0, T_0)$ , med varmeutvidelse og kompressibilitet til første orden.)

## 11.2 Mikroskopisk beskrivelse (atomær/molekylær beskrivelse)



Vi betrakter det samme isolerte systemet som ovenfor, men prøver nå å følge hver av de  $N$  partiklene i systemet. For en full beskrivelse må vi følge utviklinga med tida av  $6N$  koordinater – 3 posisjonskoordinater  $(x, y, z)$  og 3 hastighetskoordinater  $(v_x, v_y, v_z)$  for hver partikkel. Og det blir et ganske formidabelt problem – selv de største datamaskiner greier ikke mer enn  $10^5$  til  $10^6$  partikler.

Hvor store partikkeltall det vanligvis dreier seg om, får man en idé om fra verdien av Avogadros tall (# per mol)<sup>1</sup> og Loschmidts tall (# per m<sup>3</sup> ved NTP<sup>2</sup>):

$$N_A = 6,02 \cdot 10^{23} \frac{\#}{\text{mol}} \quad \text{Avogadros tall}$$

$$N_L = 2,69 \cdot 10^{25} \left( \frac{\#}{\text{m}^3} \right)_{\text{NTP}} \quad \text{Loschmidts tall.}$$

## 11.3 Fra mikroskopisk til makroskopisk beskrivelse (kontraksjon)

Overgang fra beskrivelse med  $6N$  koordinater til bare 3 tilstandsvariable betegnes *kontraksjon av beskrivelsen*.

En kontraksjon er ikke mulig uten å kaste inn noen ekstra, forhåpentligvis plausible, antakelser. Og så får man sammenligne resultatet av antakelsene med virkeligheten – og har det gått bra, er det trolig at gjetta hadde mye for seg.

Kontraksjonen kan forsøkes med *direkte metode*, ved at man prøver å følge partikkelbevegelser i tiden, og ved passende midling finne de makroskopiske størrelser man er ute etter; dette kalles gjerne *kinetiske teorimetoder*. En svakhet ved slike metoder er at det kan være vanskelig å generalisere resultatene – mens en fordel er at det vil være nokså gjennomslutning hva man egentlig har gjort.

En mer abstrakt gruppe av metoder benytter formell statistikk koplet med grunnleggende hypoteser om systemers statistiske oppførsel, ofte uten å spesifisere i detalj hva slag system man egentlig behandler. Resultatene kan bli veldig generelle – og ganske imponerende – og få forståelse hva som egentlig gjøres. Denne *statistiske fysikk* skal vi ligge *langt* unna i dette kurset – de stakkars fysikkstudentene får den banket inn i hodet i 3. årskurs.

Vi skal her presentere enkel kinetisk teori, anvendt på et enkelt system: en ideell gass. Og i tillegg til å finne tilstandslikninga *ab initio*<sup>3</sup>, skal vi demonstrere *sammenhengen mellom kinetisk energi og temperatur*, og vise hvordan man finner fram til verdien av fenomenologiske koeffisienter som *varmekapasitet*, *varmeledningsevne* og *viskositet*.

## 11.4 Den ideelle gassloven

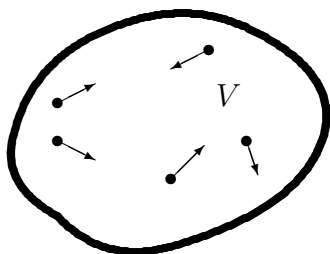
Vi tar for oss en enkel, mikroskopisk ideell gassmodell, som vist nedenfor:

<sup>1</sup>Spesielt i engelskspråklig litteratur vil man finne ofte at # blir brukt som symbol/forkortelse for “antall”.

<sup>2</sup> “Normal Temperature and Pressure” – som settes til 0 °C og atmosfæretrykk

<sup>3</sup>Latin: Fra begynnelsen.





Isolert ideell gass

$N$  partikler i et volum  $V$ , i posisjoner  $\vec{r}_i$  og med hastigheter  $\vec{v}_i$ .

Partiklene regnes som små og like kuler, med diameter  $d$  og masse  $m$ .

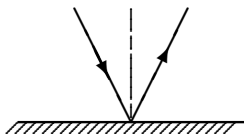
Gassen er fortynnet – dvs. kulenes volum,  $\pi d^3/6$  per kule, okkuperer lite av totalvolumet:

$$N \cdot (\pi d^3/6) \ll V$$

Veggene er elastisk reflekterende, slik at total kinetisk energi er konstant,

$$E = \sum m v_i^2 / 2 = \text{konstant}$$

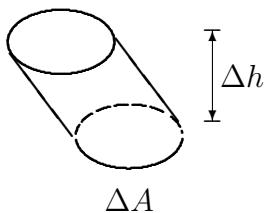
Vi skal finne et uttrykk for *trykket mot veggen*, dvs. for *midlere kraft per flateenhet* som følge av støt mellom vegg og gassmolekyler. Dette gjør vi ved først vilkårlig å velge ut én partikkel, finne hvor mye denne partikkelen midlet over lang tid bidrar til trykket – og så multiplisere med antall partikler.



Til venstre er illustrert refleksjon av (vår utvalgte) partikkel fra veggen. Den faller inn mot veggen med hastighet  $\vec{v}$ , som kan deles i en komponent  $\vec{v}_{\parallel}$  langs veggen og en komponent  $\vec{v}_{\perp}$  loddrett på veggen. Ved støtet mot veggen er  $\vec{v}_{\parallel}$  uforandret, mens  $\vec{v}_{\perp} \rightarrow -\vec{v}_{\perp}$ .

Impulsen overført til veggen ved støtet er dermed<sup>4</sup>

$$\Delta \vec{P} = 2m \vec{v}_{\perp} \quad \text{eller} \quad \Delta P_{\perp} = 2mv_{\perp} \quad (11-1)$$



Vi betrakter nå et lite element  $\Delta A$  av veggen, og et lite tidsintervall  $\Delta t$ . For at “vår partikkel” skal treffe veggen i løpet av tida  $(t, t + \Delta t)$ , må den ved tida  $t$  være en avstand mindre enn  $\Delta h = v_{\perp} \Delta t$  fra veggen, dvs. innenfor en sylinder med volum  $\Delta V = \Delta A \cdot \Delta h = v_{\perp} \Delta A \cdot \Delta t$ .

I middel kan partikkelen være hvor som helst i hele volumet  $V$ , så sannsynligheten  $S^{(V)}$  for å finne den i  $\Delta V$  ved gitt tid  $t$  blir

$$S^{(V)} = \frac{\Delta V}{V} = \frac{v_{\perp} \Delta A \Delta t}{V}. \quad (11-2)$$

Videre er, ved gitt tallverdi av  $\vec{v}_{\perp}$ , sannsynligheten  $S^{(+)}$  for at retningen skal være *mot* veggen og ikke *fra* veggen

$$S^{(+)} = 1/2. \quad (11-3)$$

“Vår partikkel” gir dermed, midlet over lang tid, en midlere impuls til  $\Delta A$  i ei tid

<sup>4</sup>Bruker stor  $P$  for impuls her, liten  $p$  reservert for trykk i termisk fysikk.

$\Delta t$ 

$$\begin{aligned}
\Delta P_{\perp} &= S^{(+)} \cdot S^{(V)} \cdot (2mv_{\perp}) \\
&= \frac{1}{2} \cdot \frac{v_{\perp} \Delta A \Delta t}{V} \cdot 2mv_{\perp} \\
&= mv_{\perp}^2 \frac{\Delta A \Delta t}{V}.
\end{aligned} \tag{11-4}$$

Newtons 2. lov gir at *kraft* = *impulsforandring/tidsenhet* =  $d(mv)/dt$ , og videre er *trykk* = *kraft/flateenhet*. Vår partikkel gir dermed et bidrag til *trykket* mot  $\Delta A$  på

$$p = \frac{\Delta P_{\perp} / \Delta t}{\Delta A} = \frac{mv_{\perp}^2}{V}. \tag{11-5}$$

Og så gjør vi det samme for alle partiklene ( $i = 1, \dots, N$ ) i volumet  $V$ , og summerer bidragene. Dermed blir det totale trykket

$$p = \sum_{i=1}^N p_i = m \sum_{i=1}^N \frac{(v_{\perp}^2)_i}{V}. \tag{11-6}$$

Etter definisjonen av middelværdi kan summen her skrives som

$$\sum_{i=1}^N (v_{\perp}^2)_i = N \overline{v_{\perp}^2}. \tag{11-7}$$

Hastigheten  $v_{\perp}$  er komponenten i en kartesisk retning. Nå er total midlere kvadratiske hastighet lik summen av kvadratene av hastighetene i hver av tre retninger (Pythagoras),  $\overline{v^2} = \overline{v_x^2} + \overline{v_y^2} + \overline{v_z^2}$ , og når ingen retning er preferert, blir midlere kvadratisk hastighet i én retning ( $\overline{v_{\perp}^2} =$ )  $\overline{v_x^2} = \overline{v_y^2} = \overline{v_z^2} = \overline{v^2}/3$ . Uttrykket for (midlere) trykk  $p$  kan dermed skrives som

$$p = \frac{1}{3} N \frac{m \overline{v^2}}{V}. \tag{11-8}$$

Midlere kinetisk energi per partikkel er  $E = m \overline{v^2}/2 = (3/2) \cdot (1/3) m \overline{v^2}$ . Bruker vi dette, og flytter  $V$  over til venstre side av likninga, står vi igjen med<sup>5</sup>

$$pV = N \cdot \frac{2}{3} E \quad \text{hvor} \quad E = \frac{1}{2} m \overline{v^2}. \tag{11-9}$$

eller

$$\begin{aligned}
pV &= N \Theta \\
\Theta &= \frac{2}{3} \cdot \frac{m \overline{v^2}}{2} = m \overline{v_x^2}.
\end{aligned}$$

(11-10)

hvor  $\Theta$  er *gassens temperatur* – i enhet joule.

Temperaturen er  $2 \cdot$  midlere kinetisk energi per partikkel *og* retning i rommet.

<sup>5</sup>Dette uttrykket ble funnet av Daniel Bernoulli (1700-1782) i 1738, men ble avvist av samtida. Det ble gjenoppdaget og akseptert først 100 år seinere.

For å komme over fra energiskala til Kelvinskala benytter vi sammenhengen

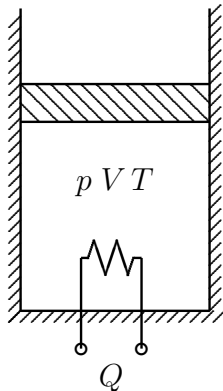
$$\Theta = k_B \cdot T \quad (11-11)$$

hvor  $k_B = 1,38 \cdot 10^{-23}$  J/K er Boltzmanns konstant. Eventuelt kan vi også uttrykke det totale partikkeltallet  $N$  ved antall mol,<sup>6</sup>  $n_M$ , dvs.  $N = N_A \cdot n_M$ , hvor  $N_A$  er Avogadros tall, og bruke sammenhengen  $N_A \cdot k_B = R$ , hvor  $R$  er gasskonstanten. *Tilstandslikninga for ideell gass* kan dermed skrives på variantformene

$pV = N\Theta = Nk_B T = n_M R T.$

(11-12)

## 11.5 Varmekapasitet for ideell énatomig gass



Betrakt en isolert, ideell, énatomig mengde gass. Gassen inneholder  $N$  atomer, og har tilstandsvariable  $p$ ,  $V$  og  $T$ . Man *kan* – om ønsket – variere volumet  $V$  (indikert med et flyttbart stempel). Gassen *kan* tilføres en varmemengde  $Q$  (indikert med en motstand, som kan fungere som varmeelement).

### 11.5.1 Oppvarming ved konstant volum

Vi antar først at volumet  $V$  holdes konstant, mens gassen tilføres varmen  $Q$ . All den tilførte energien må da gå med til å øke den indre energien  $U = N \cdot (\overline{mv^2}/2)$  til gassen – for det er ikke noe annet som kan ta opp energi. Og med  $(2/3) \cdot (\overline{mv^2}/2) = k_B T$ , har vi dermed

$$Q = N \cdot \Delta(\overline{mv^2}/2) = N \cdot (3/2)k_B \Delta T. \quad (11-13)$$

Varmekapasiteten *per partikkel* er per definisjon

$$c_m = \frac{1}{N} \frac{Q}{\Delta T}. \quad (11-14)$$

Varmekapasitet per atom for énatomig gass ved konstant volum bli dermed (indeks  $V$  indikerer konstant volum)

$$c_{V,m} = \frac{3}{2} k_B = 2,07 \cdot 10^{-23} \text{ J/K} \quad (11-15)$$

<sup>6</sup>Velger i dette kapitlet å bruke  $n_M$  for antall mol av et stoff. I tidligere kapitler har vi brukt  $n$ , men i dette kapitlet brukes  $n = N/V$  for antall partikler per volumenhet.

Varmekapasiteten per mol fåes ved å multiplisere med Avogadros tall  $N_A = 6.02 \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1}$ ,

$$\begin{aligned} c'_V &= \frac{3}{2} N_A k_B && \text{Varmekapasitet per mol for} \\ &\equiv \frac{3}{2} R = 12,5 \text{ J/(mol K)} && \text{énatomig gass ved konstant volum} \end{aligned} \quad (11-16)$$

### 11.5.2 Oppvarming ved konstant trykk

Vi antar så at trykket  $p$  holdes konstant - for eksempel ved at stempelet på figuren beveger seg friksjonsfritt mot et konstant ytre trykk. Tilføring av varme  $Q$  fører nå til *både* ei temperaturøkning  $\Delta T$  og ei volumøkning  $\Delta V$ ;

$$pV = Nk_B T \xrightarrow{p=\text{konst}} p\Delta V = Nk_B \Delta T. \quad (11-17)$$

Den tilførte varmen brukes dermed ikke bare til økning av indre energi, men også til *trykkarbeid*  $W$ . Anta for enkelhets skyld et stempel med areal  $A$ , som forskyves en lengde  $\Delta x$ . Trykkarbeidet blir da

$$W = (\text{kraft} \cdot \text{veg}) = (p A) \cdot \Delta x. \quad (11-18)$$

Her er  $A \cdot \Delta x = \Delta V$  - og vi sitter igjen med *det generelle uttrykket for trykkarbeid* - gyldig ved enhver volumforandring -

$W = p\Delta V \quad \text{Trykkarbeid.}$

(11-19)

Energiregnskapet blir nå

$$Q = \Delta U + W, \quad (11-20)$$

hvor  $\Delta U = (3/2)Nk_B \Delta T$ , som før, og  $p\Delta V = Nk_B \Delta T$ , dvs.

$$Q = N \cdot \left[ \frac{3}{2} + 1 \right] k_B \Delta T = \frac{5}{2} Nk_B \Delta T. \quad (11-21)$$

Varmekapasiteten per atom er fremdeles definert som  $Q/(N \Delta T)$ , og vi har dermed

$$c_{m,p} = \frac{5}{2} k_B = 3,45 \cdot 10^{-23} \text{ J/K} \quad (11-22)$$

og tilsvarende for varmekapasiteten per mol,  $c'_p = \frac{5}{2} R = 20,8 \text{ J/(mol K)}$ .

Vi kan merke oss at uttrykket for trykkarbeidet er uavhengig av hva den indre energien er. Vi vil derfor for alle ideelle gasser - også molekylære - ha en sammenheng mellom varmekapasitetene ved konstant volum og konstant trykk

$$\begin{aligned} c_{m,p} &= c_{m,V} + k_B \\ c'_p &= c'_V + R. \end{aligned}$$

(11-23)

Vi ser at varmekapasitet ikke er en ren materialegenskap, men også avhenger av *hvordan* oppvarminga foregår.

## 11.6 Varmelæras 1. hovedsetning

Energiregnskapet satt opp foran kan ses som en kvantitativ formulering av varmelæras 1. hovedsetning. På differensiell form kan energikonserveringa dermed skrives

$$\boxed{dQ = dU + dW \quad \text{Varmelæras 1. hovedsetning,}} \quad (11-24)$$

hvor arbeidet  $dW$  her er

$$dW = p dV \quad \text{Arbeid utført av trykk-krefter} \quad (11-25)$$

Hvis det finnes flere typer krefter, for eksempel elektromagnetiske, kommer andre ledd i tillegg i uttrykket for  $dW$ . Og hvis partikkeltallet ikke er bevart, som ved kjemiske reaksjoner, kommer det også inn andre tilleggsledd. Men – i dette kurset vil alt arbeid være  $p dV$ -arbeid.

For en énatomig gass fant vi en midlere indre energi per partikkel  $u = (3/2)k_B T$ , fordelt med  $k_B T/2$  på hver bevegelsesretning. Og i en énatomig gass er dette *all* indre energi.

I molekulære gasser kan molekylene både rotere og vibrere, og i tillegg til *translasjonsenergi* kan de dermed også oppta *rotasjonsenergi* og *vibrasjonsenergi*. Dette har til følge at indre energi per partikkel, og dermed også varmekapasiteten, blir større enn for en atomær gass.

## 11.7 Frihetsgrader

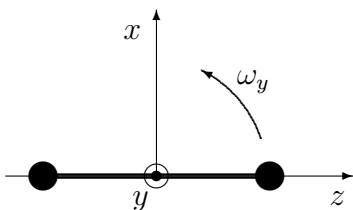
Antallet frihetsgrader for et atom eller et molekyl er det minste antallet uavhengige parametere som må til for beskrive atomet/molekylets dynamikk.

### 11.7.1 Enatomig gass

Hvert atom har tre mulige bevegelsesretninger, og inneholder i middel like mye energi for bevegelse i hver retning.

*Enatomig gass har tre translasjonsfrihetsgrader per atom, og hver frihetsgrad opptar i middel en energi  $k_B T/2$ .*

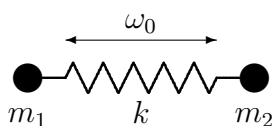
### 11.7.2 Toatomig gass



For et toatomig molekyl kan vi definere tre akser gjennom tyngdepunktet. Rotasjon om akse som ligger langs molekylaksen bidrar ikke til rotasjonsenergien fordi treghetsmomentet om den akse er forsvunnet liten. La oss si dette er  $z$ -aksen. Rotasjon om  $x$ -aksen og  $y$ -aksen (begge loddrett på molekylaksene) har rotasjonsenergier gitt av treghetsmoment og vinkelhastighet,

$$E_{\text{rot}}^{(x)} = I\omega_x^2/2 \quad \text{og} \quad E_{\text{rot}}^{(y)} = I\omega_y^2/2. \quad (11-26)$$

Gassen har altså to *rotasjonsfrihetsgrader* per molekyl, i tillegg til tre translasjonsfrihetsgrader.



Et toatomig molekyl kan i tillegg vibrere i akse-retninga – i god tilnærming som en harmonisk oscillator med grunnfrekvens  $\omega_0$  og fjærkonstant  $k$ :  $\omega_0^2 = k/m_r$ , hvor  $m_r = m_1 m_2 / (m_1 + m_2)$ .

Energien i en harmonisk oscillator er summen av potensiell og kinetisk energi,

$$E_{\text{vib}} = kx^2/2 + m_r \dot{x}^2/2, \quad (11-27)$$

og disse er – som vi har sett tidligere – i middel like store. Vi sier at gassen har to *vibrasjonsfrihetsgrader* per molekyl, i tillegg til translasjons- og rotasjonsfrihetsgradene.

### 11.7.3 Fleratomige gasser

Molekylene i en fleratomig gass kan ha uavhengige rotasjoner om tre akser gjennom massefellespunktet, og får dermed tre rotasjonsfrihetsgrader.

Antall mulige vibrasjonsmoder må undersøkes nærmere for hvert enkelt molekyl; det er av og til svært mange muligheter.

## 11.8 Ekvipartisjonsprinsippet

Ekvipartisjonsprinsippet (likefordelingsprinsippet) sier

*Ved likevekt er det for hver tilgjengelig frihetsgrad assosiert en midlere energi  $\frac{1}{2}k_B T$  per molekyl, dvs.  $\frac{1}{2}RT$  per mol.*

Hva som menes med “tilgjengelige” frihetsgrader, skal vi komme tilbake til – det viser seg at vibrasjonsfrihetsgradene svært ofte er “frosset ut”, og ikke teller med.

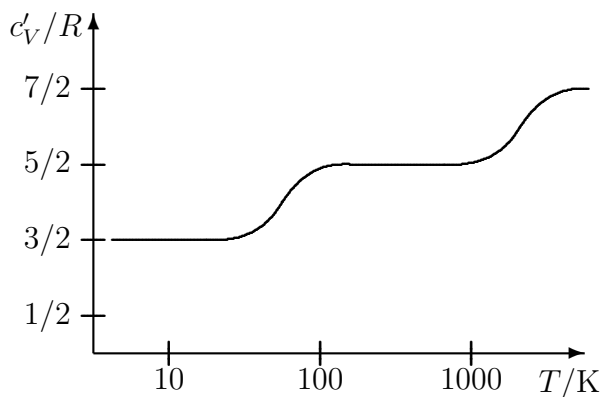
La antall tilgjengelige frihetsgrader være  $n_f$ . Da er etter ekvipartisjonsprinsippet varmekapasitetene per mol av stoffet gitt ved

$$\begin{aligned} c'_V &= n_f \cdot \frac{1}{2}R \\ c'_p &= c'_V + k_B = (n_f + 2) \cdot \frac{1}{2}R \\ \frac{c'_p}{c'_V} &\equiv \gamma = \frac{n_f + 2}{n_f}, \end{aligned} \quad (11-28)$$

hvor  $\gamma$  = adiabatkonstanten.

Antall tilgjengelige frihetsgrader kan i praksis finnes ved å måle forholdet  $\gamma = c_p/c_V$ .

### 11.8.1 Hydrogengass, $H_2$



Til venstre er skissert varmekapasiteten ved konstant volum for hydrogengass, som funksjon av temperaturen  $T$ . Gassen oppfører seg altså kvalitativt ulikt i ulike temperaturområder.

Ved lave temperaturer er  $c'_V$  som for atomær gass,  $n_f = 3$   
 Ved romtemperatur er  $c'_V$  som for “stiv rotor”,  $n_f = 5$   
 Ved høye temperaturer er  $c'_V$  som for “vibrerende rotor”,  $n_f = 7$

Det er tydelig at rotasjons- og vibrasjonsfrihetsgradene “fryses ut” ved lave temperaturer. Dette er *kvanteeffekter*. Analogt til at elektromagnetisk stråling kommer i minste “kvanter” med energi  $h\nu$  (jfr. avsnitt om termisk stråling), kommer også rotasjons- og vibrasjonsenergi i kvantiserte biter, med minste mulige energier. F.eks. for rotasjonsenergien får vi

$$E_{\text{rot}}^{(\min)} \sim \left( \frac{h}{2\pi} \right)^2 \frac{1}{I}, \quad \text{hvor } I \text{ er treghetsmomentet.}$$

Når temperaturen er så lav at den termiske energien  $k_B T$  er mye lavere enn denne energien, er molekylene “frosset i grunntilstanden”.

Av toatomige molekyler er det hydrogen som har det minste treghetsmomentet, og dermed den høyeste terskelenergien  $E_{\text{rot}}^{(\min)}$ . Det betyr at alle andre molekyler har terskeltemperatur for rotasjonseksitasjon som er lavere enn for hydrogen. Hydrogen har terskeltemperatur på 80-90 K (se grafen). Man har derfor at

*ved romtemperatur kan man trygt regne med at rotasjonsfrihetsgradene skal være med i beregning av varmekapasiteten for alle molekylære gasser.*

Vibrasjonsenergien er det vanskeligere å generalisere om. For relativt lette molekyler kan man regne at vibrasjonsfrihetsgradene er “frosset ut” ved romtemperatur, men for tyngre molekyler kan de spille vesentlig rolle.

Varmekapasiteter og effektivt antall frihetsgrader for noen gasser ved romtemperatur (300 K) er gitt nedenfor.

Gass	$c'_V/k_B$	$n_f^{\text{eff}}$
He	1,50	3
Ar	1,50	3

Gass	$c'_V/k_B$	$n_f^{\text{eff}}$
H <sub>2</sub>	2,46	4,92
N <sub>2</sub>	2,50	5,00
O <sub>2</sub>	2,54	5,08
CO	2,51	5,02

Gass	$c'_V/k_B$	$n_f^{\text{eff}}$
CO <sub>2</sub>	3,42	6,84
SO <sub>2</sub>	3,78	7,56
H <sub>2</sub> S	3,12	6,24

### 11.8.2 Faste stoffer: Dulong-Petits lov

Den enkleste varmekapasitetsmodellen for et fast stoff består i å se på stoffet som ei samling av vibrerende atomer, dvs. ei samling av harmoniske oscillatorer. Hver oscillator kan vibrere i tre retninger, og har både potensiell og kinetisk energi i hver av disse retningene.

Dermed blir antall frihetsgrader per atom  $n_f = 6$  – og varmekapasiteten per atom i samsvar med Dulong-Petits<sup>7</sup> lov

$$c'_V \approx 3R \quad \text{Dulong-Petits lov,} \quad (11-29)$$

– og med  $c'_p$  praktisk talt den samme (fordi faste stoffer utvider seg minimalt ved oppvarming i forhold til gasser).

	$c'_V/R$
Al	2,96
Be	2,13
Cu	2,98
Fe	3,16
NaCl	6,18

I praksis stemmer det rimelig godt for de fleste metaller ved og over romtemperatur (300 K), men ikke for alle.

Varmekapasitet for noen faste stoffer ved 300 K til venstre.

<sup>7</sup>Etter Pierre Louis Dulong (1785-1838), fransk fysiker, kjemiker og lege, direktør ved École Polytechnique fra 1830 - og hans kollega Alexis Thérèse Petit – de fant at produktet av atomvekt og spesifikk varme for elementer i fast tilstand er ca. 6 cal/°C.



## 11.9 Adiabatiske prosesser

### 11.9.1 Ideell gass

Adiabatiske prosesser<sup>8</sup> er prosesser hvor det *ikke foregår varmeutveksling*, dvs. hvor  $Q = 0$ . I praksis kan prosesser ofte regnes som adiabatiske når de *går så fort at det ikke blir tid til varmetransport*. Typiske eksempler er hurtige kompresjoner/dekompresjoner i lydbølger og i stempelmotorer.

Når vi har opplysninger om en termodynamisk prosess i tillegg til tilstandslikninga, kan vi bruke dette til f.eks. å eliminere én av de tilstandsvariable.

Vi skal vise at for en adiabatisk prosess i en ideell gass finner vi en sammenheng mellom trykk og volum av form  $pV^\gamma = \text{konstant}$ , hvor  $\gamma = c'_p/c'_V$ .

I utledningen får vi bruk for en viktig relasjon for ideell gass:

$$\boxed{dU = C_V dT = n_M c'_V dT.} \quad (11-30)$$

*Bevis:* For en ideell gass ved konstant  $V$  er  $dQ = C_V \cdot dT$ . Samtidig gjelder varmelæras 1. hovedsetning:  $dQ = dU + p dV = dU$  (ved konstant  $V$ ). Dette gir  $dU = C_V \cdot dT$ .<sup>9</sup>

For en adiabatisk prosess er  $dQ = 0$ , per definisjon, slik at varmelæras 1. hovedsetning gir energikonserveringslikninga

$$dU + p dV = 0. \quad (11-31)$$

Trykket  $p$  setter vi inn fra tilstandslikninga – og bruker også at  $R = c'_p - c'_V$ :

$$p = n_M R T \frac{1}{V} = n_M (c'_p - c'_V) T \frac{1}{V} \quad (11-32)$$

$$p dV = n_M T (c'_p - c'_V) \frac{dV}{V}. \quad (11-33)$$

Dette uttrykket samt  $dU$  fra likn. (11-30) settes inn i likn. (11-31), som gir

$$n_M c'_V dT + n_M T (c'_p - c'_V) \frac{dV}{V} = 0. \quad (11-34)$$

Ved divisjon av hele likninga med  $n_M T c'_V$  går dette over i

$$\frac{dT}{T} + (\gamma - 1) \frac{dV}{V} = 0. \quad (11-35)$$

<sup>8</sup>Gresk adiabatos, *a* - ikke, *diabaino* - slippe gjennom, passere

<sup>9</sup>Egentlig litt for enkelt bevis. Forutsetter også at  $U$  ikke er avhengig av volumet, som gjelder for ideell gass - der det ikke er vekselvirkning mellom molekyler. Da er  $dU = \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_V dT = (dQ/dT)_V dT = C_V dU$ . (En gass som har molekylvekselvirkning er f.eks. van der Waals gass, se kap. 11.11.1).

Integrasjon gir  $\ln T + (\gamma - 1) \ln V = \text{konstant}$ , dvs.

$$T V^{\gamma-1} = \text{konstant}. \quad (11-36)$$

Setter vi her inn for  $T$  fra  $pV = n_M R T$ , får vi

$$\frac{p V \cdot V^{\gamma-1}}{n_M R} = \text{konstant, hvor } n_M R \text{ er konstant, dvs.}$$

$$p V^\gamma = \text{konstant, hvor } \gamma = \frac{C_p}{C_V}. \quad (11-37)$$

### 11.9.2 Lydhastigheten i en ideell gass

Vi har tidligere funnet at lydhastigheten i ei væske eller en gass er

$$v_{\text{lyd}} = \sqrt{B/\rho}, \quad (11-38)$$

hvor  $\rho$  er massetettheten og  $B$  er volumelastisitetsmodulen, definert ved

$$\Delta p = -B \frac{\Delta V}{V}. \quad (11-39)$$

Lydbølgene er hurtige kompresjoner og dekompresjoner – og det er ikke tid til varmeutveksling over lengde av størrelsesorden bølgelengden i løpet av en svingningsperiode. *Ei lydbølge er følgelig 'en adiabatisk prosess'.*

For å finne  $v_{\text{lyd}}$ , må vi ha tak i  $B$  for en adiabatisk prosess.

Fra adiabatlikninga  $pV^\gamma = \text{konstant}$  får vi ved derivasjon

$$\begin{aligned} dp \cdot V^\gamma + p \cdot \gamma V^{\gamma-1} dV &= 0, \text{ dvs.} \\ dp &= -\gamma p \cdot \frac{dV}{V}, \end{aligned} \quad (11-40)$$

og følgelig er volumelastisitetsmodulen

$$B = -V \frac{dp}{dV} = \gamma p = \gamma \cdot n_M R T \frac{1}{V}. \quad (11-41)$$

Nå er  $n_M R = N k_B$  der  $N$  er antall molekyler. I uttrykket  $v_{\text{lyd}} = \sqrt{B/\rho}$  ovenfor trenger vi massetettheten  $\rho$  til luft. Med masse  $m$  per partikkel får vi  $\rho = \frac{N m}{V}$ , og dermed er

$$\frac{B}{\rho} = \gamma \cdot N k_B T \frac{1}{V} \cdot \frac{V}{N m} = \frac{\gamma k_B T}{m}, \quad (11-42)$$

og lydhastigheten blir

$$v_{\text{lyd}} = \sqrt{\frac{\gamma k_B T}{m}} \quad \text{Lydhastigheten i en ideell gass.} \quad (11-43)$$

Tallemsempel:

Luft ved  $300\text{ K}$ :

Toatomig gass, 3 translasjonsfrihetsgrader og to rotasjonsfrihetsgrader  $\Rightarrow n_f = 5$ , og massetallet er (midlet over oksygen, nitrogen og litt argon) ca. 29.

$$\gamma = (n_f + 2)/n_f = 7/5 = 1,4$$

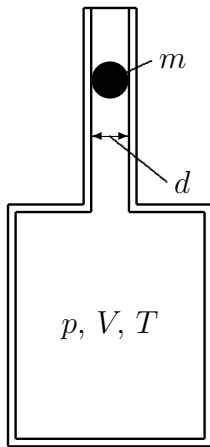
$$k_B T = 1,38 \cdot 10^{-23} \text{ J/K} \cdot 300 \text{ K} = 4,14 \cdot 10^{-21} \text{ J}$$

$$m \approx 29 \cdot 1,6605 \cdot 10^{-27} \text{ kg} = 4,81 \cdot 10^{-26} \text{ kg} \quad - \text{ og dermed fåes}$$

$$v_{\text{lyd}} = \sqrt{\frac{1,4 \cdot 4,14 \cdot 10^{-21}}{4,81 \cdot 10^{-26}}} \sqrt{\frac{\text{J}}{\text{kg}}} = \underline{347 \text{ m/s}}$$

### 11.9.3 Rüchardts eksperiment

Rüchardts eksperiment er et eksperiment – ofte brukt i studentlaboratorier – til måling av adiabatkonstanten  $\gamma$ .



Ei kule, med masse  $m$  og diameter  $d$ , er plassert inne i et slipt glassrør, og kan svinge opp og ned inne i glassrøret på ei “fjærende pute av gass”.

I likevekt – dvs. når kula ligger i ro – er volumet av den avstengte gassen  $V_0$ , og temperatur og trykk  $T_0$  og  $p_0$ .

Man måler svingeperioden for kula,  $\tau$ , og finner fra den målte verdien av  $\tau$  adiabatkonstanten  $\gamma$ .

Kulas posisjon (høyde) relativt likevektposisjonen kaller vi  $y$  – og vi skal fra Newtons 2. lov finne ei svingelikning for  $y(t)$ .

La oss kalle rørtverrsnittet  $A$ ; vi kan seinere sette inn  $A = \pi d^2/4$ . Krafta som virker på kula, er  $F = A \Delta p$ , og uttrykk for  $\Delta p$  finner vi fra adiabatlikninga (se f.eks. likn. (11-40)):  $\Delta p = -\gamma p \Delta V/V$ , hvor vi kan sette inn  $\Delta V = A y$ . Vi antar avvikene fra likevekt er relativt små, dvs.  $|\Delta V/V| \ll 1$  og  $|\Delta p/p| \ll 1$ .

Newtons 2. lov  $F = m\ddot{y}$  gir nå

$$-A \cdot \gamma p \cdot Ay/V = m\ddot{y} \quad \Rightarrow \quad \ddot{y} + \frac{\gamma A^2 p}{mV} y = 0. \quad (11-44)$$

Dette er ei standard svingelikning med  $\omega_0^2 = \gamma A^2 p/mV$ , dvs. perioden til svingningene er

$$\tau = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi \sqrt{\frac{mV}{\gamma A^2 p}} \quad (11-45)$$

Tallemsempel:

Anta et volum  $V = 10 \text{ l} = 0,01 \text{ m}^3$ , fylt med luft – dvs. med  $\gamma = 1,4$ . Diameteren på rør og kule er  $d = 16 \text{ mm}$ , og kula er av messing, med massetetthet  $\rho = 8,4 \text{ g/cm}^3 = 8,4 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3$ . Dette gir  $A = \pi d^2/4 = 201 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2$ , og  $m = \rho \cdot \pi d^3/6 = 0,0180 \text{ kg}$ . Trykket er  $p \approx 1 \text{ atm} \approx 10^5 \text{ Pa}$ .<sup>10</sup> Innsetting i uttrykket for  $\tau$  gir dermed  $\tau = 1,13 \text{ s}$ .

## 11.10 Transportprosesser i ideelle gasser

Vi vil her prøve å gi et mikroskopisk innblikk i hva varmeledning og viskositet egentlig er for slags prosesser – og skal foreta halvkvantitative beregninger for en enkel ideell gassmodell.

*Varmeledning innbefatter forflytning av energi* gjennom molekylbevegelsene, og fordi varmeledning normalt foregår ved konstant trykk, må energien som flyttes ha med varmekapasiteten  $C_p$  å gjøre.

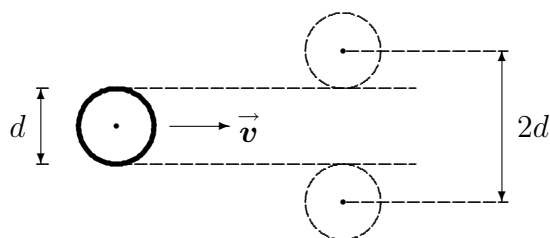
*Viskositet innbefatter forflytning av “ordnet impuls”* = (masse)·(strømningshastighet) gjennom molekylbevegelsene.

I begge tilfeller er det forflytning av molekyler som er den underliggende transportmekanismen. Vi starter derfor med å se på hvor langt og fort molekyler vandrer i en gass før de stoppes ved kollisjon med andre molekyler.

### 11.10.1 Fri veglengde og fri tid mellom støt

Vi tar for oss en modellgass som består av like store harde kuler, alle med diameter  $d$ . Blant disse plukker vi ut én “testpartikkel”, med hastighet  $\vec{v}$ , og følger den.

De øvrige partiklene i gassen vil ha hastigheter i alle retninger og med en fordeling av verdier, men *i middel* ligger de i ro. Så når vi regner ut hva som skjer med testpartikkelen, regner vi her som alle de andre ligger i ro.



Testpartikkel med hastighet  $\vec{v}$  og diameter  $d = 2r$ .

Når testpartikkelen beveger seg gjennom gassen, vil den treffe alle andre partikler i avstand mindre enn  $r + r = d$  fra testpartikkelens sentrum – dvs. partikler med

<sup>10</sup>Vi skal strengt tatt legge til trykket som skyldes vekten av kula,  $\delta p = mg/A$  – dette blir ca. 880 Pa, og gir mindre enn 1 % korreksjon til atmosfæretrykket.

sentrum i en sylinder om  $\vec{v}$ -retning med tverrsnittsareal  $\pi d^2$ . Vi sier at partiklene har et *støttverrsnitt*  $\sigma = \pi d^2$ ,

$$\sigma = \pi d^2 \quad \text{Støttverrsnittet.} \quad (11-46)$$

Hvor langt går testpartikkelen i middel før den treffer på en annen partikkel?

I løpet av ei tid  $\Delta t$  vil partikkelen gå ei lengde  $\ell = v\Delta t$ , og ha støtt på de andre partiklene som måtte være innenfor et volum  $\Delta V = \sigma \ell = \sigma v \Delta t$ . Innenfor  $\Delta V$  vil det i middel være  $n \Delta V$  partikler, hvor  $n = N/V$  er antalltettheten til gassen – og vi vil i middel ha fått  $n \Delta V = n \sigma v \Delta t$  støt i denne tida.

Midlere fri veglengde før støt,  $\ell_0$ , er definert ved

$$\ell_0 = \frac{\text{lengde}}{\text{antall støt}} = \frac{v \Delta t}{n \sigma v \Delta t} = \frac{1}{n \sigma} \quad \text{Midlere fri veglengde.} \quad (11-47)$$

Hva er *midlere fri tid* mellom to støt,  $\tau$ , og tilsvarende midlere støtfrekvens  $\nu = 1/\tau$ ?

$$\begin{array}{ll} \text{Midlere fri tid:} & \tau = \frac{\text{tid}}{\text{antall støt}} = \frac{\Delta t}{n \sigma v \Delta t} = \frac{1}{n \nu \sigma} \\ \text{Støtfrekvens:} & \nu = 1/\tau = n \nu \sigma. \end{array} \quad (11-48)$$

Tallemsempel:

Diameteren for små molekyler er av størrelsesorden noen tideler nanometer. Ta som typisk verdi  $d \sim 0,35 \text{ nm}$ . Dette gir  $\sigma = \pi d^2 \sim 0,4 (\text{nm})^2 = 40 \cdot 10^{-20} \text{ m}^2$ .

Ved NTP er  $n = 2,6860 \cdot 10^{25} \text{ m}^{-3}$ , og man får

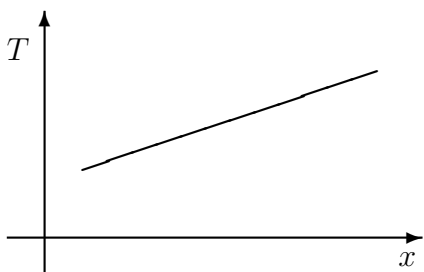
$$\ell_0^{(\text{NTP})} = 1/(n\sigma) \sim 0,1 \mu\text{m}.$$

For luft er  $\bar{v} \sim 500 \text{ m/s}$ , og midlere fri tid mellom støt blir da

$$\tau_{\text{luft}}^{(\text{NTP})} = \ell_0^{(\text{NTP})}/\bar{v} \sim 2 \cdot 10^{-10} \text{ s} = 0,2 \text{ ns}.$$

Og for sammenlikning – lyshastigheten er  $30 \text{ cm/ns}$  – så mellom to støt går lyset ca.  $6 \text{ cm}$ . Stor kollisjonsaktivitet!

### 11.10.2 Varmedledning



Vi tar nå for oss en gass som det er en temperaturforskjell gjennom. La oss anta – i alle fall over et mindre område – at temperaturgradienten er konstant, dvs.  $dT/dx = \text{konstant}$ .

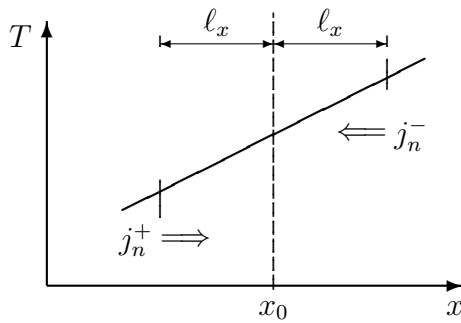
Innstilling av trykklikevekt – det vi i termodynamikk kaller “mekanisk likevekt” – er en hurtig prosess i forhold til temperaturutjamning ved varmeledning, så vi vil anta at trykket  $p = \text{konstant}$ .

Varmestrømmen vil prøve å jamne ut temperaturgradienten, og går i retning mot denne. Etter *Fouriers lov* (10-13) og med  $\lambda = \text{varmeledningsevnen}$ , er varmestrømtettheten

$$j_Q = -\lambda \frac{dT}{dx}, \quad (11-49)$$

Og hva blir nå  $\lambda$  for vår modellgass av stive kuler?

En grov beregningsmodell er skissert nedenfor:



Stiller man seg opp i en posisjon  $x_0$ , vil man se partikler som strømmer mot høyre med strømtetthet  $j_n^+$ , og partikler som strømmer mot venstre med strømtetthet  $j_n^-$ .

Hver partikkel frakter i middel med seg en varme  $c_{p,m} T(x)$ , hvor  $x$  er stedet partikkelen kommer fra og  $c_{p,m}$  er varmekapasitet per partikkel.

Vi vil late som om partiklene (i middel) alle kommer fra steder én fri veglengde  $\ell_x$  fra  $x_0$ , dvs. fra  $x_0 \pm \ell_x$ .

Partikkelstrømtetthetene  $j_n^\pm$  (enhet  $\#/\text{m}^2\text{s}$ ) i én retning er gitt av produktet av antalltetthet  $n$  og hastighet  $\bar{v}_x$  i den retningen – med tillegg av en faktor  $1/2$  fordi halvparten av partiklene går i motsatt retning. Varmestrømtetthetene  $j_Q^\pm$  (enhet  $\text{J}/\text{m}^2\text{s}$ ) blir produktet av partikkelstrømtetthet og varme som fraktes per partikkel.

$$j_n^\pm(x) = \frac{1}{2} n(x) \bar{v}_x(x) \quad (11-50)$$

$$j_Q^\pm(x) = j_n^\pm(x) \cdot (c_{p,m} T(x)) = \frac{1}{2} n(x) \bar{v}_x c_{p,m} T(x). \quad (11-51)$$

Ved bruk av ekvipartisjonsprinsippet finner vi at middelhastigheten  $\bar{v}_x$  med god tilnærmelse kan settes lik

$$\bar{v}_x \approx \sqrt{\bar{v}_x^2} = \sqrt{\frac{k_B T}{m}}. \quad (11-52)$$

Vi antar i det følgende enatomig gass, dvs.  $n_f = 3$ , slik at  $c_p' = \frac{5}{2}R$  og  $c_{p,m} = \frac{5}{2}k_B$ . Dermed har vi

$$j_Q^\pm(x) \approx \frac{5}{4} n k_B T(x) \sqrt{\frac{k_B T(x)}{m}}. \quad (11-53)$$

Bruk av ideell gasslov –  $n k_B T = p$  som er antatt konstant – gir endelig

$$j_Q^\pm(x) \approx \frac{5}{4} p \sqrt{\frac{k_B}{m}} \sqrt{T(x)}, \quad (11-54)$$

hvor den eneste størrelsen som varierer med posisjonen, er  $T(x)$ .

Total varmestromtetthet kan nå skrives som

$$j_Q(x_0) = j_Q^+(x_0 - \ell_x) - j_Q^-(x_0 + \ell_x). \quad (11-55)$$

Temperaturuttrykkene som inngår her, tilnærmer vi ved ei første ordens Taylorrekke om  $x_0$ ,

$$\begin{aligned} f(x_0 \pm \ell_x) &\approx f(x_0) + \frac{df}{dx_0} \cdot (\pm \ell_x) \quad \text{med } f(x_0) = \sqrt{T(x_0)} = T^{\frac{1}{2}}(x_0) : \\ T^{\frac{1}{2}}(x_0 \pm \ell_x) &\approx T^{\frac{1}{2}}(x_0) + \frac{1}{2} T^{-\frac{1}{2}} \frac{dT}{dx_0} \cdot (\pm \ell_x), \end{aligned} \quad (11-56)$$

og får da, når vi tilbakesubstituerer for  $p$  fra ideell gasslov,

$$j_Q(x_0) \approx - \underbrace{\frac{5}{4} n k_B T \sqrt{\frac{k_B}{mT}}}_{\lambda} \ell_x \frac{dT}{dx_0}. \quad (11-57)$$

Sammenlikning med Fouriers lov viser at vi nå har funnet et uttrykk for varmeledningsevnen  $\lambda$ .

Vi skal rydde opp litt før vi er helt ferdige: Vi valgte  $x$ -retningen med fri veglengde  $l_x$ . De andre retningene  $y$  og  $z$  har samme fri veglengde:  $l_z = l_y = l_x$ , slik at sammenheng mellom  $l_x$  og fri veglengde  $l_0$  i tre dimensjoner (som gitt ved likn. (11-47)) er

$$l_0^2 = l_x^2 + l_y^2 + l_z^2 = 3 l_x^2 \quad (11-58)$$

$$\Rightarrow l_x = \frac{l_0}{\sqrt{3}} = \frac{1}{n\sigma} \frac{1}{\sqrt{3}}. \quad (11-59)$$

Setter vi inn dette, står vi igjen med

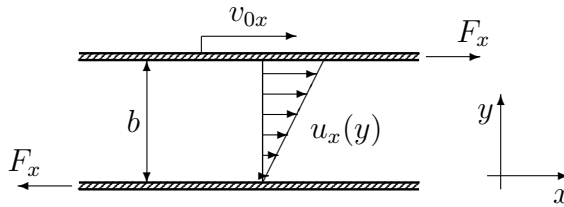
$$\lambda = \frac{5}{4\sqrt{3}} \sqrt{\frac{k_B T}{m}} \frac{k_B}{\sigma}. \quad (11-60)$$

Vi hadde valgt en enatomig gass med  $c_{p,m} = \frac{5}{2} k_B$ . For andre gasser vil 5 erstattes av  $n_f + 2$  i likningen over. For den enatomige gassen er faktoren  $\frac{5}{4\sqrt{3}} = 0,722$ . En mer nøyaktig og innfløkt beregning på denne modellen gir i stedet en faktor  $\sqrt{1/\pi} = 0,564$  – så vi har kommet ut 28 % for høyt. For toatomige gasser og andre gasser er feilen mindre, under 8 %. Så vi har truffet godt trass i temmelig grove tilnærmelser.

*Merk at gasstettheten  $n$  ikke er med i uttrykket for  $\lambda$ .*<sup>11</sup> Den fysikalske grunn til dette er at med økende tetthet blir det nok flere partikler til å frakte varmen, men de går akkurat tilsvarende like mye kortere mellom støtene – så effekten av forandring av partikkeltetthet på transportert varme blir null.

<sup>11</sup>Bare gyldig for systemer hvor  $l_0 \ll L$ , hvor  $L$  er systemets karakteristiske lengde. For lavere trykk har gasser dårlig varmeledningsevne, jamfør bruken av “vakuum” i termosflasker.

## 11.10.3 Viskositet



“Definisjonseksperimentet” for viskositet er vist til venstre, jfr. kap. ??

Ei væske er begrenset av to plane, parallelle plater med avstand  $b$ , som beveger seg i forhold til hverandre med konstant relativ hastighet  $v_{0x}$ . Dette gir væska en hastighet  $u_x(y)$  som varierer lineært med posisjonen  $y$ :  $u_x(y) = u_{0x} \cdot y/b$ .

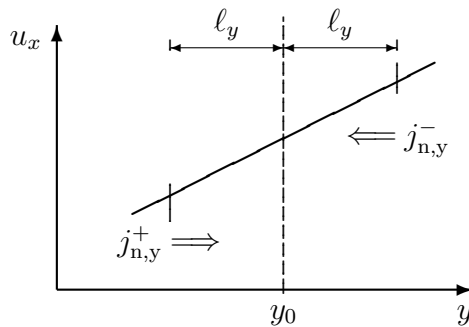
Krafta per flateenhet som skal til for å bevege platene ble analysert i kap. ??, og er – etter Newtons 2. lov –

$$T_{xy} = \frac{F_x}{A_y} = \eta \frac{u_{0x}}{b} = \eta \frac{\partial u_x}{\partial y}, \quad (11-61)$$

hvor  $\eta$  er skjærviskositeten og  $T_{xy}$  skjærspenninga, som beskrevet i likn. (??).

La nå væska erstattes av en ideell gass (viskositetsloven gjelder for alle fluider – også gasser). Hva blir nå  $\eta$  for vår modell?

Den underliggende mekanismen bak viskositeten er transport av retta impuls  $mu_x(y)$  med molekylbevegelsene, i retning loddrett på strømningsretningen  $\hat{\mathbf{e}}_x$ . Og beregninga blir svært mye den samme som ved beregning av varmeledning.



Stiller man seg opp i en posisjon  $y_0$ , vil man se partikler som strømmer mot høyre med strømtetthet  $j_{n,y}^+ = \frac{1}{2}n\bar{v}_y$ , og partikler som strømmer mot venstre med strømtetthet  $j_{n,y}^- = \frac{1}{2}n\bar{v}_y$ .

Hver partikkel frakter i middel med seg en retta impuls  $mu_x(y)$ , hvor  $y$  er stedet partikkelen kommer fra.

Og vi antar at strømningshastigheten  $u_x$  er liten i forhold til midlere uordnet hastighet på gasspartiklene,  $u_x \ll \bar{v}$ .

Impulsstrømtetthetene  $j_{p,xy}^\pm$  – dvs. strømtetthetene i  $y$ -retning av impuls  $p$  i  $x$ -retningen – er produkt av retta impuls per partikkel og partikkelstrømtetthet, dvs.

$$j_{p,xy}^\pm(y) = [mu_x(y)] \cdot j_{n,y}^\pm = mu_x(y) \cdot \frac{1}{2}n\bar{v}_y. \quad (11-62)$$

Total impulsstrømtetthet fåes ved å ta differansen mellom høyrestrøm  $j_{p,xy}^+(y_0 - \ell_y)$  og venstrestrøm  $j_{p,xy}^-(y_0 + \ell_y)$  – og det eneste som varierer med  $y$  er nå strømningshastigheten  $u_x(y)$ . Ved bruk av ei 1. ordens Taylorrekke tilsvarende hva vi gjorde for varmeledning, fås da

$$j_{p,xy} = -m n \bar{v}_y \ell_y \frac{\partial u_x}{\partial y}. \quad (11-63)$$



Det gjenstår da bare å tolke hva  $j_{p,xy}$  er rent fysisk. Fra likn. (11-62) ser vi at dimensjonen er:  $[j_{p,xy}] = (\text{kg m/s}) \cdot (\text{m}^{-3} \text{ m/s}) = (\text{kg m s}^{-2}) \cdot \text{m}^{-2} = \text{N/m}^2$ , dvs. *mekanisk spenning* eller altså skjærspenning. Det betyr at  $j_{p,xy}$  er skjærspenninga væska bremses platene med – med motsatt fortegn av  $T_{xy}$ , etter *actio reactio est*<sup>12</sup>.

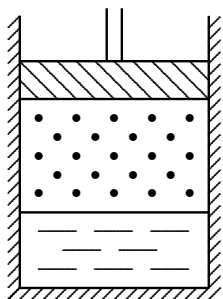
Proporsjonalitetsfaktoren foran  $\partial u_x / \partial y$  er følgelig viskositeten  $\eta$ . Med innsetting for fri veglengde og middelhastighet som ved behandling av varmeledning, får vi dermed at

$$\eta = \frac{1}{\sigma} \sqrt{\frac{m k_B T}{3}}. \quad (11-64)$$

Merk at for gasser er viskositeten, slik som varmeledningsevnen, uavhengig av antalltettheten  $n$  når  $l_0 \ll L$ .

## 11.11 Kondensasjon og kritisk punkt

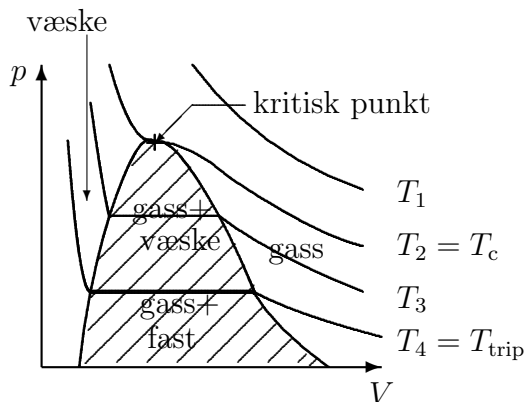
Hvis temperaturen ikke er for høy, vil en gass som presses sammen, *kondensere*, enten til ei væske, eller direkte til et fast stoff.



Illustrasjon av gass-væske likevekt:

Ved kompresjon av gass – ved antatt konstant temperatur – kondenseres gassen til væske i bunnen av karet.

Vi tar først for oss bare gass-væske overgangene, og betrakter en isolert mengde av mediet – dvs. et gitt antall mol.



Tilstanden til mediet kan beskrives ved å tegne *isotermer*<sup>13</sup> i et  $pV$ -diagram, som vist til venstre.

Øvre del av det skraverte området viser hvor gass og væske sameksisterer (gass-væske likevekt). I dette området kan volumet forandres *uten* forandring av trykket. Nedre del av det skraverte området viser hvor gass og fast stoff sameksisterer. De to skraverte områdene skilles ved trippelpunktet,  $T_{\text{trip}}$ , eneste temperatur der gass, væske og fast stoff kan sameksistere.

<sup>12</sup>Etter Newton: Kraft er lik motkraft

<sup>13</sup>Iso-term: Samme temperatur,  $T = \text{konstant}$ .

Til høyre for det skraverte området er alt gass, mens til venstre (over trippelpunktet) er alt væske, og det kreves svært stort trykk for å redusere volumet ytterligere.

Hvis temperaturen blir lik en *kritisk temperatur*  $T_c$ , forsvinner sameksistensområdet, og ved høyere temperaturer har man bare én fase. dvs. – ved temperaturer  $T > T_c$  kan gassen ikke kondenseres.

Gass	$\frac{T_c}{K}$	$\frac{p_c}{10^5 \text{ Pa}}$
He	5,3	2,26
H <sub>2</sub>	33,3	13
N <sub>2</sub>	126,1	35
O <sub>2</sub>	154,4	50,8
CO <sub>2</sub>	304,2	72,9
H <sub>2</sub> O	647,4	217,5

Kritisk temperatur  $T_c$  og tilhørende kritisk trykk  $p_c$  for noen gasser er vist i tabellen til venstre.

Trykket er vist i enheter  $10^5 \text{ Pa}$ , som er svært nær én atmosfære,  $1 \text{ atm} = 1,013 \cdot 10^5 \text{ Pa}$ .

### 11.11.1 van der Waals likning

Mot slutten av 1900-tallet hadde man greid å kondensere en rekke gasser, men noen gjensto, deriblant hydrogen og helium. Og man famlet en stund temmelig i blinde for å finne ut hva slag temperaturer man måtte ned i, og hva slag trykk man måtte bruke, for å komme fram.

van der Waals<sup>14</sup> laget en modifisert tilstandslikning for gasser, som kunne brukes også når gassen begynte å bli heller tett – dvs. nær det kritiske punkt. Den nye tilstandslikninga inneholdt to parametere i tillegg til det man har for ideell gass. Ved å se på trenden i disse to parametrene for gasser man *hadde* greid å kondensere, kunne man peile seg inn på hvor kritisk punkt lå også for de to gassene som sto igjen.

Veiledet av van der Waals likning kondenserte Dewar<sup>15</sup> hydrogen rett etter århundreskiftet, og greide seinere også å lage *fast* hydrogen. Helium ble kondensert av Kamerlingh-Onnes<sup>16</sup> i 1908. Koepunktet for helium ved normalt atmosfæretrykk er 4 K (-269 °C). Koepunktet for nitrogen ved normalt atmosfæretrykk er 77 K (-196 °C).

Vi skal skissere utledninga av van der Waals likning. Utgangspunkt er den ideelle gasslov,

$$pV = Nk_B T. \quad (11-65)$$

<sup>14</sup>Johannes Diederik van der Waals (1837-1923), professor i Amsterdam, likninga ble publisert i 1881, og Nobelprisen innkassert i 1910.

<sup>15</sup>James Dewar (1842-1923), professor i Cambridge og seinere direktør for The Faraday Laboratories – kanskje vel så kjent for å ha oppfunnet termosflasken.

<sup>16</sup>Heike Kamerlingh-Onnes (1853-1926), professor i Leiden – også oppdager av superfluiditet, Nobelpris i 1913.

I en ikke så veldig fortynnet gass er det i første omgang to korreksjoner å gjøre til denne:

- Hver partikkel tar opp et volum  $\Delta V$ , tilsammen blir dette et volum  $N \Delta V$ . Dette kommer til fradrag i volumet  $V$  hvor partiklene kan finne, dvs.  $V \rightarrow V - N \Delta V$ .
- Partiklene virker på hverandre med *tiltrekkende* krefter (når partiklene er nærme hverandre, men ikke helt i kontakt) – det er dette vi idag kaller *van der Waalske krefter*. Dette gjør at partiklene treffer veggen med mindre hastighet enn de ville gjort i en ideell gass, og dermed at målt trykk  $p$  blir redusert med en (positiv) størrelse  $\Delta p$ , som må legges til trykket som inngår i tilstandslikninga.

Den modifiserte gassloven kommer dermed på form

$$(p + \Delta p)(V - N \Delta V) = N k_B T. \quad (11-66)$$

Så var det å finne et uttrykk for  $\Delta p$ . Her må man ta med *to* effekter:

- Hastigheten til partiklene som treffer veggen, reduseres med en faktor proporsjonal med hvor mange partikler det er i nærheten, dvs. med en faktor proporsjonal med antalltettheten  $n = N/V$ .
- Og antallet partikler som treffer veggen per tids- og flateenhet, er også proporsjonalt med antalltettheten.

Dermed blir midlere impuls til veggen per tids- og flateenhet – dvs. trykket – redusert fra ideell gass-trykket med en størrelse proporsjonal med  $(N/V)^2$ , og vi skriver  $\Delta p = \alpha (N/V)^2$ .

Tilstandslikninga kommer dermed over på form

$$\left( p + \alpha \left( \frac{N}{V} \right)^2 \right) (V - \beta N) = N k_B T, \quad (11-67)$$

hvor vi har substituert  $\Delta V \rightarrow \beta$ .

Hvis vi dividerer hele likninga med antall mol  $n_M = N/N_A$ , introduserer gassvolum per mol:  $v_M = V/n_M$ , volum som et mol av molekylene opptar:  $b = \beta N_A$  og omdefinerer  $a = \alpha N_A^2$ , kan dette i stedet skrives på normalformen

$$\left( p + \frac{a}{v_M^2} \right) (v_M - b) = RT \quad \text{van der Waals likning.}$$

(11-68)

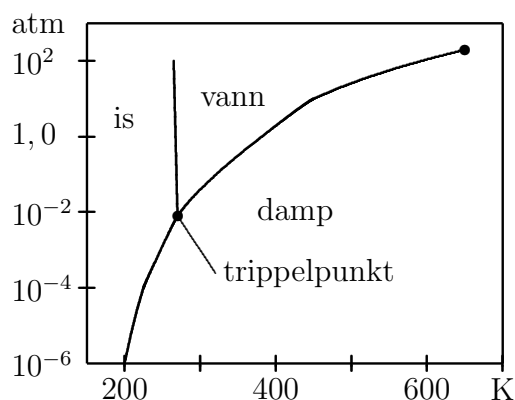
Kritisk punkt har man der både  $\frac{\partial p}{\partial v_M}$  og  $\frac{\partial^2 p}{\partial v_M^2}$  er null – og litt derivasjonsarbeid gir

$$\{p_c, T_c\} = \left\{ \frac{a}{27b^2}, \frac{8a}{27Rb} \right\}. \quad (11-69)$$

Tabeller over  $a$  og  $b$  for endel gasser kan finnes f.eks i kjemilærebok (Eks. S.S. Zumdahl, kap. 5).

### 11.11.2 Fasediagram og trippelpunkt

Det er ikke alltid et medium går over fra gass til *væske*, når det presses sammen – selv om temperaturen er under den kritiske temperatur. Det kan også gå direkte over til fast stoff, og vise versa. Prosessen (kondensert fase)  $\rightarrow$  (damp/gass) kalles da ikke fordamping, men *sublimasjon*. Dette skjer når temperaturen er under *trippelpunktet*.



Dette illustreres gjerne i et  $pT$ -fasediagram, som vist til venstre for vann.

Merk at trykkaksen her er logaritmisk – det er ikke mulig å få med alt av interesse på en lineær trykkskala.

Med dette slutter vi kapitlet om kinetisk gassteori – og overlater alt annet om fasediagrammer til “materialfag”.

### OPPSUMMERING AV KAP. 11

- *Kinetisk gassteori* blir her presentert som enkle mekaniske modeller for beskrivelse av egenskapene til gasser. Målet til kinetisk gassteori er å gi sammenhengen mellom mikroskopisk (atomær/molekylær) beskrivelse og makroskopisk beskrivelse (kontinuumsbeskrivelse) av gasser.
- *Tilstandslikninger* er likninger som gir sammenhengen mellom de parametrene som beskriver systemet på makroskopisk nivå.

- Den mest kjente tilstandslikningen, den ideelle gassloven,  $pV = n_M RT$ , kan utledes ved bruk av kinetisk teori når man bruker at trykk er lik impulsforandring per flate- og tidsenhet.
- Indre energi,  $U$ , for en gass er atomenes/molekylenes translasjonsenergi pluss molekylers rotasjons- og vibrasjonsenergi pluss eventuell vekselvirkningsenergi mellom atomene/molekylene.
- *Varmelæras 1. hovedsetning* er ei energikonserveringslikning:  $dQ = dU + dW$ , hvor  $dQ$  er varme inn til systemet,  $dU$  er økning i systemets indre energi og  $dW$  er arbeid utført av systemet på omgivelsene.
- *Antallet frihetsgrader for et atom eller molekyl* er det minste antall parametre som skal til for å beskrive den newtonske dynamikken til en makroskopisk modell av molekylet.
- *Ekvipartisjonsprinsippet* sier at for et ikke-quantemekanisk system i termodynamisk likevekt er den indre energien per atom/molekyl lik  $\frac{1}{2}k_B T$  per frihetsgrad. Forutsetningen er at temperaturen er høy nok til at de kvantemekaniske energiene er eksitert.
- *Adiabatkonstanten* er gitt som  $\gamma = C_p/C_V$ , hvor  $C_p$  og  $C_V$  er varmekapasiteten for prosesser med henholdsvis konstant trykk og temperatur.
- *Adiabatiske prosesser* er prosesser hvor det ikke foregår varmeutveksling med omgivelsene – eller varmeutvekslinga er mye langsommere enn de karakteristiske tidene til det fenomenet som man studerer. Her gjelder adiabatlikningen  $pV^\gamma = \text{konstant}$ .
- *Fri veglengde mellom støt* angir hvor langt et atom/molekyl går før det kolliderer med et annet. Ved normalt atmosfæretrykk er denne lengden ca.  $0,1 \mu\text{m}$ , mens den ved  $10^{-7}$  atm er ca. 1 m. Tid mellom støt i luft med normalt atmosfæretrykk er ca. 0,2 ns.
- Hvis man komprimerer en gass tilstrekkelig ved konstant temperatur som er lavere enn den såkalte *kritiske temperatur*, vil gassen etter hvert kondensere til væske. Er temperaturen under trippelpunktet, vil gassen kondensere til fast stoff.
- *van der Waals likning* for gasser inkluderer at gassatomene/molekylene har en visst volum og at de tiltrekker hverandre:  $(p + a/v_M^2)(v_M - b) = RT$ , hvor  $a$  inneholder informasjon om tiltrekninga mellom atomene/molekylene og  $b$  er volumet til et mol av atomene/molekylene.

# Kapittel 12

## Termodynamiske kretsprosesser

### Innhold

---

<b>12.1 <math>pV</math>-diagrammer og arbeid</b>	<b>140</b>
12.1.1 Arbeidet er avhengig av banen	140
12.1.2 Kretsprosess	140
12.1.3 Prosesstyper – terminologi	141
12.1.4 Reversibel og ikke-reversibel prosess	141
12.1.5 Joule-Thomson effekten – og Lindes kjølemaskin	142
<b>12.2 Sykliske varmekraftmaskiner</b>	<b>143</b>
12.2.1 Termisk virkningsgrad	144
12.2.2 Otto-syklus	144
12.2.3 Diesel-syklus	147
<b>12.3 Kjølemaskiner og varmepumper</b>	<b>148</b>
12.3.1 Kjøleprinsipper	149
12.3.2 Kjøleanlegg med kjølemedium i gass/væske likevekt	149
<b>12.4 Carnotprosessen</b>	<b>151</b>
12.4.1 Carnotsyklus	151
12.4.2 Carnotprosess i en ideell gass	152
12.4.3 Generell Carnotprosess	153
12.4.4 Konsekvenser for virkelige kraftverk	154
12.4.5 Carnotprosessen og temperaturdefinisjonen	154
<b>12.5 Varmelæras 2. hovedsetning</b>	<b>155</b>
<b>12.6 Entropi</b>	<b>155</b>
12.6.1 Clausius ulikhet	155
12.6.2 Definisjon entropi	156
12.6.3 Entropien for en ideell, énatomig gass	157
12.6.4 Entropien og 2. hovedsetning	158

12.6.5 Misbruk av 2. hovedsetning . . . . .	159
---	-----

12.6.6 Sluttord – om termodynamikk og kultur . . . . .	160
--	-----

Vi skal i dette kapitlet vesentlig ta for oss de deler av termisk fysikk som er relevante for forståelsen av hvordan varmekraftmaskiner (*bensinmotor*, *dieselmotor*, *dampmaskin*) og kjølemaskiner (*kjøleskap*, *varmepumper*) virker. Til slutt legger vi til litt om *entropi* – en for mange litt magisk størrelse som gir et kvantitativt mål for uorden.

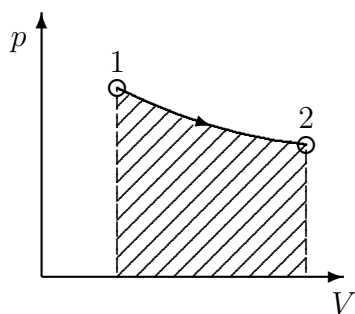
*I tillegg formulerer vi varmelæras 2. hovedsetning – som alle sivilingeniører som en del av sitt kulturgrunnlag skal vite hva er .*

Vi definerer deretter temperaturskalaen på nytt – denne gang abstrakt og ikke avhengig av noe medium – ikke engang ideell gass.

Noen grunnbegreper bør være på plass før man setter igang:

- \* Termodynamisk tilstand :  $p, V, T$  ( $N$  partikler,  $n_M = N/N_A$  mol)
- \* Termodynamisk prosess :  $(p_1, V_1, T_1) \rightarrow (p_2, V_2, T_2)$
- \* Positiv varmemengde :  $Q$  (J) til systemet (fortegniskonvensjon)
- \* Arbeid ved volumforandring :  $dW = F ds = (pA)dx = pdV$
- \* Indre energi :  $U =$  mikroskopisk (kin. + pot.) energi
- \* 1. hovedsetning :  $dQ = dU + dW$  (energikonservering)
- \*  $U = U(p, V, T)$  er en *tilstandsfunksjon*.  
 $Q, W$  er ikke tilstandsfunksjoner, de avhenger av prosessens “veivalg”.

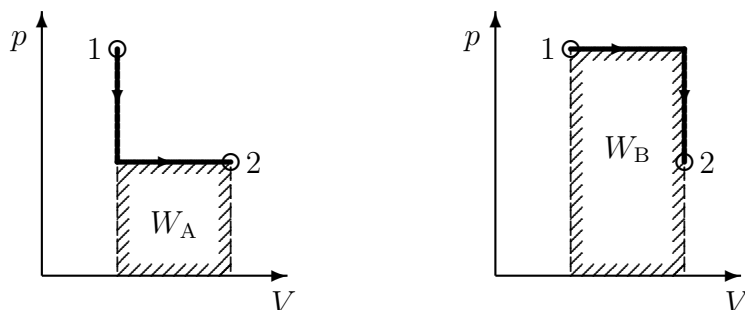
## 12.1 $pV$ -diagrammer og arbeid



La oss ta for oss en prosess,  $(p_1 V_1) \rightarrow (p_2 V_2)$  langs en gitt bane, som vist. Utført arbeid i prosessen er  $W = \int_1^2 dW = \int_1^2 p dV$  som er *det skraverte arealet* på figuren.

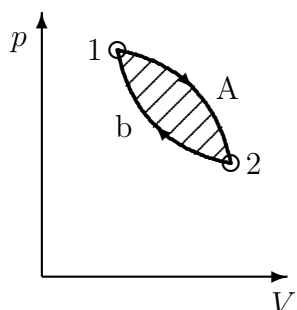
Forutsetninga for at vi skal kunne beregne arbeidet som  $\int p dV$  er, naturligvis, at trykket  $p$  er veldefinert langs hele banen, dvs. at banen går gjennom *veldefinerte og kontinuerlige mellomtilstander*  $(p, V, T)$ . I så fall kan man i prinsipp snu prosessen i et hvilket som helst lite deltrinn: Prosessen er *reversibel*. Vi vil i det følgende forutsette reversible prosesser, unntatt når annet er sagt eksplisitt.

### 12.1.1 Arbeidet er avhengig av banen



Figuren over illustrerer hvordan to ulike baner mellom samme start- og slutttilstander gir ulikt arbeid,  $W_A$  og  $W_B$ .

### 12.1.2 Kretsprosess



En kretsprosess er en prosess hvor man starter og slutter i samme punkt, som illustrert til venstre. Arbeidet i den viste prosessen er

$$\begin{aligned} W &= \oint p dV \\ &= W_{12}^A + W_{21}^B \\ &= W_{12}^A - W_{12}^B = \text{skravert areal} \end{aligned}$$

Retninga til prosessen bestemmer fortegnet på arbeidet: I prosessen på figuren er arbeidet positivt – dvs. prosessen har utført arbeid – og det må ha vært tilført varme for å få dette til. Prosessen er dermed typisk for ei *varmekraftmaskin*.

Hvis retningen snus, blir arbeidet negativt, dvs. prosessen er tilført arbeid, og må dermed ha mistet varmemengde. Dette er typisk for kjølemaskiner og varmepumper.

### 12.1.3 Prosesstyper – terminologi

Noen “rendyrkede” typer prosesser har egne navn, som man forutsettes å forstå betydninga av:

- $T = \text{konstant}$  : isotherm prosess
- $p = \text{konstant}$  : isobar prosess
- $V = \text{konstant}$  : isokor prosess
- $Q = 0$  : adiabatisk prosess.



### 12.1.4 Reversibel og ikke-reversibel prosess

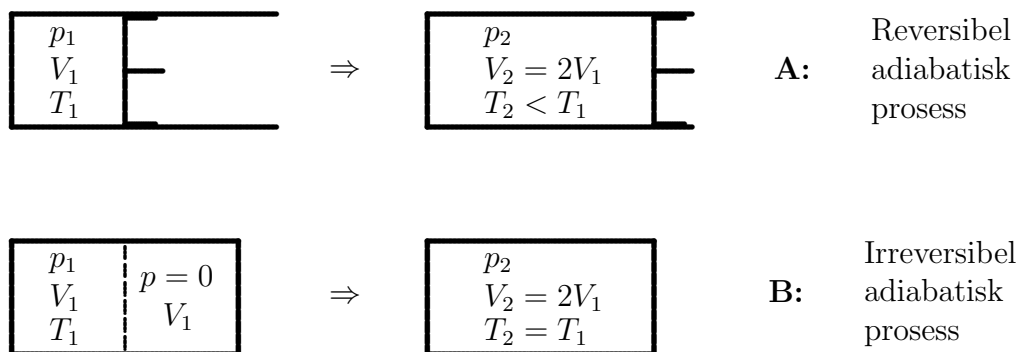
For å illustrere begrepene reversibel og ikke-reversibel prosess, tar vi for oss et relativt enkelt eksempel: Adiabatisk ekspansjon av en ideell gass, dvs. økning av volumet uten å tilføre varme.

Følg med på figuren. Vi starter med et volum  $V_1$  av gassen, ved temperatur  $T_1$  og trykk  $p_1$ , og lar det utvide seg adiabatisk til det doble volumet,  $V_2 = 2V_1$ , og med slutt-temperatur  $T_2$  og slutt-trykk  $p_2$ . La oss, for å ha noe litt konkret å holde oss til, anta at gassen er luft, med  $p_1 = 1 \text{ atm}$  og  $T_1 = 300 \text{ K}$ , og adiabatkonstant  $\gamma = 1,4$ .

Og vi lar utvidelsen skje på to måter:

A: Et stempel trekkes langsomt ut (langsomt i forhold til molekyllhastighetene), til volumet er blitt lik  $V_2$ .

B: Volumet  $V_1$  er i utgangstilstanden delt av med en tynn skillevegg (diafragma), fra et like stort volum hvor det er vakuum ( $p = 0$ ). Og så ryker skilleveggen, og gassen strømmer fritt ut og fyller hele rommet.



**A:**  $(p_1, V_1, T_1) \rightarrow (p_2, V_2, T_2)$  reversibelt og adiabatisk,  
 $pV^\gamma = \text{konstant} \Rightarrow p_2 = p_1/2^\gamma = p_1/2,64 = 0,38 \text{ atm}$   
 $TV^{\gamma-1} = \text{konstant} \Rightarrow T_2 = T_1/2^{\gamma-1} = T_1/1,32 = 227 \text{ K}$   
og det er utført  $pdV$ -arbeid lik forandringen i indre energi (idet  $Q = 0$ ):  
 $W = NC_V \Delta T = N \frac{5}{2} k_B T_1 (1 - 1/2^{\gamma-1}) = \frac{5}{2} (1 - 1/2^{\gamma-1}) p_1 V_1 = 0,6 p_1 V_1$ .

**B:** Intet arbeid er utført og ingen varme tilført, følgelig er indre energi bevart. Fordi gassen er forutsatt ideell, er dermed temperaturen uforandret,  $T_2 = T_1$ , og trykket har falt til  $p_2 = p_1/2$ . Det arbeidet  $W$  som *kunne* vært trukket ut, er gått tapt. Det går *alltid* "mulig arbeid" tapt i irreversible prosesser.

*Det er vel verdt det å ta seg litt ekstra tid til å reflektere over hva som egentlig er forskjellen på det som hender i de to eksemplene beskrevet ovenfor.*

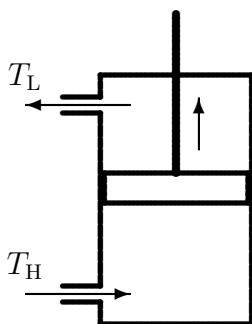
### 12.1.5 Joule-Thomson effekten – og Lindes kjølemaskin

Bildet vi tegnet av den irreversible ekspansjonen ut i vakuum, er ikke helt korrekt for *reelle* gasser.

Ved ekspansjonen må det utføres *litt* arbeid likevel – det krever energi å fjerne gassmolekylene fra hverandre når det er (van der Waalske) tiltrekningskrefter mellom gassmolekylene. Da det ikke tilføres energi (varme) må energien tas fra indre energi  $U$ , og dermed går kinetisk energi ned, og gassen kjøles. Effekten er størst ved litt høye trykk og lave temperaturer – og er oppkalt etter herrene Joule og Thomson (Lord Kelvin) – som samarbeidet med eksperimentet hvor den ble funnet.

Så – hvis man erstatter diafragmaet med en dyse der gassen passerer fra høyt trykk ut til et lavt trykk – og pumper den kjølte gassen rundt noe som skal kjøles, og så tilbake igjen, har man en kjølemaskin (Lindes kjølemaskin). Den søler bort noe ganske vederstyggelig med effekt – men den virker også ved *svært* lave temperaturer, hvor vanlige kjølemedier som fluorokarboner og  $\text{CO}_2$  fryser. Hos oss – ved Institutt for fysikk ved NTNU – bruker vi en slik maskin til å produsere flytende nitrogen (78 K) for hele NTNU.

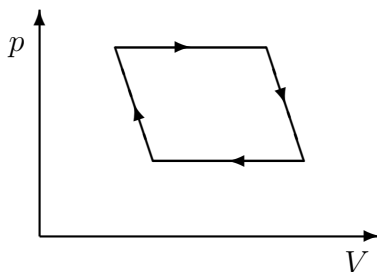
## 12.2 Sykliske varmekraftmaskiner



Erkeeksemplet på en syklisk varmekraftmaskin – som vel har vært i tankene hos de fleste av teoribyggerne på første del av 1800-tallet – er James Watts<sup>1</sup> dobbeltvirkende dampmaskin.

Varm vanndamp fra en dampkjel (temperatur  $T_H$ ) slippes inn på den ene siden av et stempel, mens dampen på den andre siden av stempelet blåses ut og kondenseres til vann i et kaldt reservoar (temperatur  $T_L$ ). Og så sørger Watts geniale sleideventil for at inn- og utblåsingssidene bytter funksjon.

<sup>1</sup>James Watt (1736-1819), skotsk instrumentmaker, nær venn av Joseph Black (1728-1799), kalorimetriens far. Patent på den første virkelig brukbare dampmaskinen i 1769 – den tidligere modellen til Thomas Newcomen var temmelig håpløs, og brukte nesten ufattelige mengder kull. En populær historie vil ha det til at det eneste Watt gjorde, var å automatisere ventillukkinga – men det er ikke sant – *det* var det en ung gutt ved navn Henry Potter (ikke Harry) som gjorde.



Skjematisk kan dette framstilles i et  $pV$ -diagram, som vist øverst til venstre.

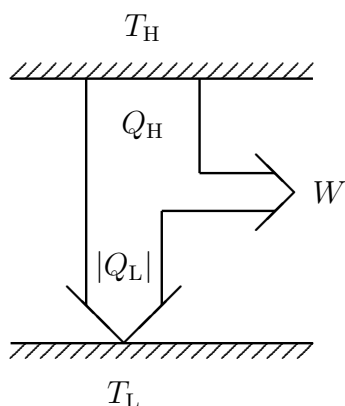
(Diagrammet vist her er *ikke* korrekt i detalj – rette linjer er brukt fordi de er lette å tegne.)

Eller det kan framstilles i et *varmestrømdiagram*, som vist nederst til venstre.

En varmemengde  $Q_H$  tas fra et reservoar med høy temperatur  $T_H$ , mens en varmemengde  $|Q_L|$  avgis til et reservoar med lav temperatur  $T_L$ . Merk at  $Q_L$  går ut av systemet og er derfor negativ.

Energibalanselikninga for prosessen er

$$W = Q_H + Q_L = Q_H - |Q_L| \quad (12-1)$$



Ideelt skulle man helst ha

$$\left. \begin{array}{l} Q_L = 0 \\ W = Q_H \end{array} \right\}$$

men dette er *umulig* – som er *ei* formulering av *Varmelæras 2. hovedsetning*

(12-2)

### 12.2.1 Termisk virkningsgrad

Den *termiske virkningsgraden*  $e$  (“efficiency”) for en syklisk prosess defineres som<sup>2</sup>

$$e = \frac{W}{Q_H} \quad \text{Termisk virkningsgrad,}$$

(12-3)

og er alltid mindre enn én,

$$e = \frac{W}{Q_H} = \frac{Q_H + Q_L}{Q_H} = \frac{Q_H - |Q_L|}{Q_H} = 1 - \frac{|Q_L|}{Q_H} < 1 \quad (12-4)$$

*Tallempeksel:*

$Q_H = 10 \text{ kJ}$	per syklus	(forbrenningsvarmen til bensinen)
$W = 2 \text{ kJ}$	per syklus	(til hjulene)
$e = W/Q_H$	$\sim 20\%$	

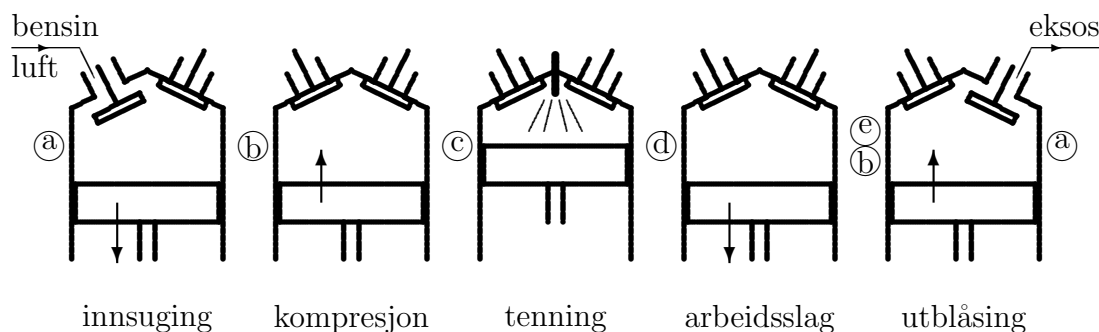
<sup>2</sup>Alle termiske virkningsgrader er definert etter prinsippet: (hva som er nyttig)/(hva som koster). Gjelder også kjølefaktor og varmepumpers virkningsgrad (tas opp seinere).

– og dette er ganske elendig. Med klampen i bønn opp Okstadbakken i middels stor bil ( $100 \text{ kW} = 84 \text{ hestekrafters motor}$ ) går ca.  $80 \text{ kW}$  tapt til varme (sammenlikn dette tapet med energiforbruket (“strømforbruket”) i din egen hybel/leilighet)!

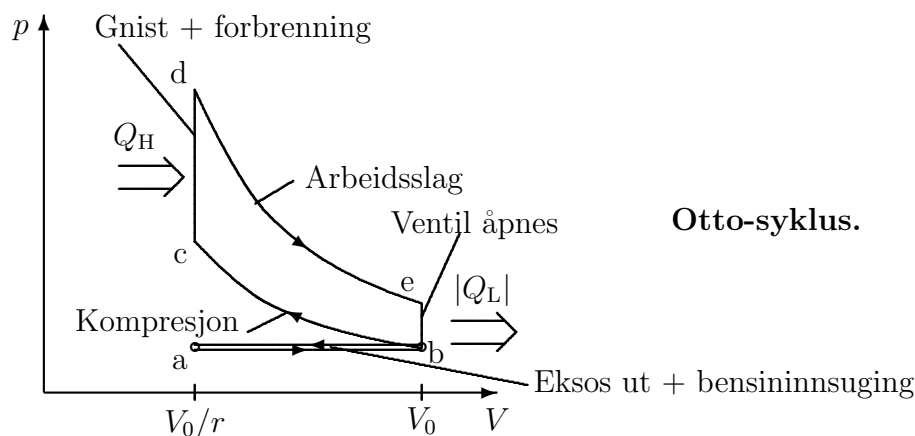
### 12.2.2 Otto-syklus

Otto<sup>3</sup> bygde i 1876 den første fungerende 4-taktsmotor.

En arbeidssyklus for en vanlig 4-takts bensinmotor er vist nedenfor. Bensin-luftblanding fra forgasseren suges inn i sylinderen (nedadgående stempel, åpen innsugningsventil). Blandinga komprimeres (oppadgående stempel, lukkede ventiler). Tennpluggen slår gnist ved maksimal kompresjon og blandinga forbrenner nær momentant, og stemplet drives nedover og utfører arbeid. Tilslutt blåses forbrente gasser ut (oppadgående stempel, åpen utblåsningsventil).



En idealisert modell av en syklus er vist i  $pV$ -diagram nedenfor.



Vi starter etter innsugninga, når cylindervolumet  $V_0$  er fylt med gass-bensin blanding ved lav temperatur (punkt b i diagrammet, temperatur  $T_b$ ).

<sup>3</sup>Nikolaus August Otto (1832-1891), tysk ingeniør

Gassen komprimeres så adiabatisk b-c ( $pV^\gamma = \text{konstant}$ ), til et minste volum  $V_0/r$ , hvor faktoren  $r$  er *kompresjonen*. Temperaturen er da blitt  $T_c$ .

Så forbrenner gassen, fort, slik at stemplet ikke får flyttet seg – dvs. ved konstant volum. Gassen tilføres da forbrenningsvarmen  $Q_H$ , c-d i diagrammet (temperatur  $T_d$ ).

Og så kommer *arbeidsslaget* d-e, gassen ekspanderer adiabatisk tilbake til volum  $V_0$ . Temperaturen faller til  $T_e$ .

Tilslutt åpnes eksosventilen, gassen blåses raskt ut og trykket synker brått til ca atmosfæretrykket (e-b). Varmemengden  $|Q_L|$  avgis. Total utblåsing b-a med åpen eksosventil og innsuging a-b med åpen innsugingsventil skjer ved konstant (atmosfære)trykk (horisontale linjer i figuren). Så begynner man på nytt med samme mengde kald gass.

## Virkningsgrad

Varmemengdene  $Q_H$  og  $Q_L$  er

$$Q_H = NC_V(T_d - T_c) \quad [> 0] \quad (12-5)$$

$$Q_L = NC_V(T_b - T_e) \quad [< 0], \quad (12-6)$$

hvor  $N$  er antall molekyler, og virkningsgraden kan dermed skrives

$$e = \frac{Q_H + Q_L}{Q_H} = \frac{(T_d - T_c) + (T_b - T_e)}{T_d - T_c}. \quad (12-7)$$

Vi bruker adiabatlikninga  $TV^{\gamma-1} = \text{konst.}$  til å uttrykke  $T_b$  ved  $T_c$  og  $T_e$  ved  $T_d$ ,

$$\left. \begin{aligned} T_b V_0^{\gamma-1} &= T_c (V_0/r)^{\gamma-1} \\ T_e V_0^{\gamma-1} &= T_d (V_0/r)^{\gamma-1} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left. \begin{aligned} T_b &= T_c r^{1-\gamma} \\ T_e &= T_d r^{1-\gamma} \end{aligned} \right\} \Rightarrow e = \frac{(T_d - T_c)(1 - r^{1-\gamma})}{T_d - T_c}, \quad (12-8)$$

som gir følgende virkningsgrad for en idealisert Otto-prosess:

$$e = 1 - \frac{1}{r^{\gamma-1}}.$$

(12-9)

### Talkeksempel:

Kompresjonen  $r$  kan komme opp mot 10 i motorer med høyoktan bensin, og gassbensin blandinga er vesentlig luft, med  $\gamma = 1,4$ . Dette gir en ideell virkningsgrad  $e = 1 - 10^{-0,4} = 0,60$ . I reelle biler er gjerne  $e \sim 0,25$  – vi har kommentert det før.

## Motorbank og oktantall

Hvis kompresjonen  $r$  økes, øker også virkningsgraden  $e$ . Samtidig øker også temperaturen på den komprimerte gassen ( $T_c$ ).

Men – ved tilstrekkelig høy temperatur vil gass-bensin blandinga *selvantenne* – og dette vil da kunne skje *før* stempelet når topp-posisjon. Dette er vel noe mange har opplevd når de har kjørt på såkalt lavoktan bensin, og motoren har arbeidet tungt og derfor har gått varm. Dette gir selvantenning av drivstoffet og *motorbank*<sup>4</sup>.

*Eksempelvis vil ved kompresjon  $r = 10$  og innsugningstemperatur  $T_b = 300\text{ K}$  temperaturen etter kompresjon bli  $T_c = 753\text{ K} = 480^\circ\text{C}$  – og all normal bensin vil ha selvantent før tennpluggen aktiveres.*

Kompresjonen  $r$  må holdes altså holdes så lav at det ikke blir selvantenning. Dette begrenser den teoretisk høyest oppnåelige virkningsgrad for en Otto-motor.

*Bensin som drivstoff karakteriseres etter hvor stor kompresjon som tåles før man får selvantenning, med en temmelig indirekte metode:*

Man sammenlikner bensinen med en blanding av iso-oktan ( $\text{C}_8\text{H}_{18}$ ) og n-heptan ( $\text{C}_7\text{H}_{16}$ ), i en motor hvor kompresjonen kan varieres. Først kjøres motoren på bensin, og kompresjonen økes inntil motoren banker. Så erstattes bensinen med en iso-oktan/n-heptan blanding; man starter med mye iso-oktan og øker så n-heptan andelen inntil motoren igjen banker.

*Oktantallet til bensinen er lik prosentdelen iso-oktan i blandinga som banker ved samme kompresjon som bensinen.*

100-oktan bensin tilsvarer en kompresjon på omlag 9,7, 98-oktan en kompresjon på 9,0. Og dette er cirka-verdier – hvilket oktantall man kommer fram til kan variere noe med hvilken motor man bruker ved testinga, samt lufttemperatur og fuktighet.

Bensin og liknende brennstoffer er hydrokarboner  $\text{C}_n\text{H}_m$ , og de grovklassifiseres etter verdien av  $n$ :

Hydrokarboner $\text{C}_n\text{H}_m$	
$n \sim 5 - 10$	bensin
$n \sim 10 - 18$	parafin/flybensin
$n \sim 15 - 25$	diesel/fyringsolje
$n > 25$	asfalt

<sup>4</sup>De første tilløpene til selvantennelsen skjer alltid som en følge av overflatekatalyserte reaksjoner. Grunnen til at man benytter bly i bensinen er at bly har en tilløp til å “forgifte” slike overflatekatalyserte reaksjoner – akkurat som bly forgifter eksosgass-katalysatoren i vanlige blyfrie motorer. I bensinmotorer er også tenningen justert til avfyring litt før stempelet er i topposisjonen, optimalisert for normalt turtall. Ved lavt turtall kan dette i seg selv gi motorbank.

### 12.2.3 Diesel-syklus

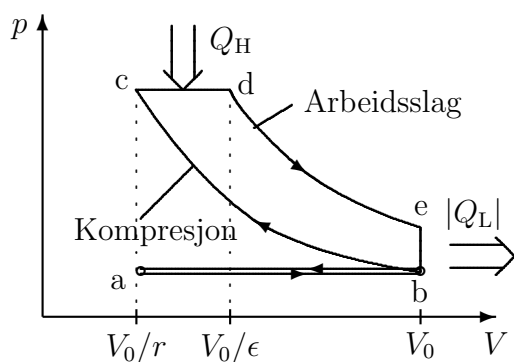
Hovedideen bak utviklinga av dieselmotoren<sup>5</sup> var å kunne øke kompresjonen vilkårlig høyt, og dermed få vesentlig bedre virkningsgrad enn i en Otto-motor. Dette ble oppnådd ved følgende grep:

- Man komprimerer ren luft, *uten* brennstoff iblandet,
- og så sprøytes brennstoff *direkte inn i sylindere*, nær og kort etter maksimal kompresjon. I en ideell Dieselprosess skjer dette ved konstant trykk.
- Tenninga skjer ved selvtenning, høy kompresjon  $r \sim 20 \Rightarrow T \sim 600^\circ\text{C}$ , så tennplugg er unødvendig (selv om glødehode av og til brukes).
- Dertil, som nyere påfunn, brukes gjerne avgassen til å drive en turbin, som brukes til å komprimere luft inn i sylindere *før* kompresjonsslaget – og denne *turboladninga* gir mulighet for mer forbrenning per syklus, og dermed økt effekt.

Diesels første forsøk gikk ut på å prøve å holde *temperaturen* konstant under forbrenninga – noe som teoretisk skulle være optimalt (ifølge Sidi Carnot – vi kommer tilbake til dette seinere) – men det fikk han ikke til.

Dieselmotoren var i utgangspunktet vesentlig tyngre og mer komplisert enn en Otto-motor, og ble først bare brukt i ubåter, seinere som skipsmaskineri. Men det er historie – idag leveres også mindre biler med dieselmotor.

En idealisert Diesel-syklus er vist skjematisk nedenfor. En *virkelig* dieselmotor-syklus ser mer ut som en blanding av denne og en Otto-syklus.



**Diesel-syklus.**

Virkningsgraden for en idealisert Dieselsyklus kan utregnes til å bli

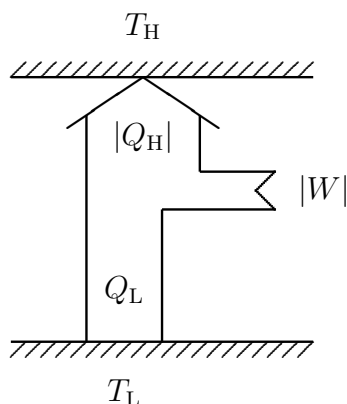
$$e = 1 - \frac{1}{\gamma} \frac{T_e - T_b}{T_d - T_c} = 1 - \frac{1}{\gamma} \frac{(r/\epsilon)^\gamma - 1}{r/\epsilon - 1} \frac{1}{r^{(\gamma-1)}} \approx 1 - \frac{1}{r^{(\gamma-1)}}, \quad (12-10)$$

<sup>5</sup>Rudolf Diesel (1858-1913), tysk maskiningeniør, stort teoretisk arbeid 1893, ledet så (hos Krupp) arbeid med å utvikle dieselmotoren, patent 1898.

hvor  $\epsilon = V_0/V_d$ ,  $r = V_0/V_c$  og det i siste overgang er antatt  $r/\epsilon = 1 + x$ , der  $x$  er et lite tall. Ved vanlige driftsforhold ( $r \sim 20$ ) er  $e$  ca. 70 %. Dieselmotorer er generelt mer drivstoffeffektive enn Ottomotorer.

## 12.3 Kjølemaskiner og varmepumper

En kjøleprosess er i prinsippet en invertert varmekraftprosess, som illustrert nedenfor.



Arbeid  $|W|$  tilføres<sup>6</sup> prosessen, for å transportere en varmemengde  $|Q_L|$  fra et kaldt reservoar på temperatur  $T_L$  til et varmt reservoar på temperatur  $T_H$ . Effektiviteten av prosessen karakteriseres ved en *kjølefaktor*  $K$ ,

$$K = \frac{Q_L}{|W|} \quad \text{Kjølefaktor}^7. \quad (12-11)$$

### 12.3.1 Kjøleprinsipper

Det finnes en rekke ulike kjølemetoder, som brukes til ulike formål. De viktigste er listet opp nedenfor.

- *Flytting av varme som fordampnings-/kondensasjonsvarme.*  
Det benyttes et kjølemedium i gass/væske likevekt, og mediet flyttes mellom høyt og lavt trykk ved ekspansjonsventil/kompressor-kombinasjon. Dette brukes i alle normale fryse- og kjøleanlegg, med ulike kjølemedier.
- *Adiabatisk ekspansjon av gass.*  
Dette benyttes som kjølemetode for jetfly (åpent kaldluftanlegg), og for kondensasjon av gasser med lavt kokepunkt. Viktig teknisk er produksjon av flytende nitrogen (kokepunkt 78 K), og – for forskningsformål – flytende helium (kokepunkt 4,2 K). (Moderne maskiner bruker mer effektive metoder enn Lindes kuldemaskin, som er basert på Joule-Thomson effekten).
- *Adiabatisk demagnetisering.*  
Dette er for ekstreme lavtemperaturformål – temperaturer ned til 0,000 001 K er oppnådd.
- *Peltier-effekt.*  
Dette er en termoelektrisk effekt. Et termoelement er i prinsipp to ledninger

<sup>6</sup>Her er  $W < 0$ ,  $Q_L > 0$  og  $Q_H < 0$ .

<sup>7</sup>I engelsk litteratur brukes COP = Coefficient of performance.



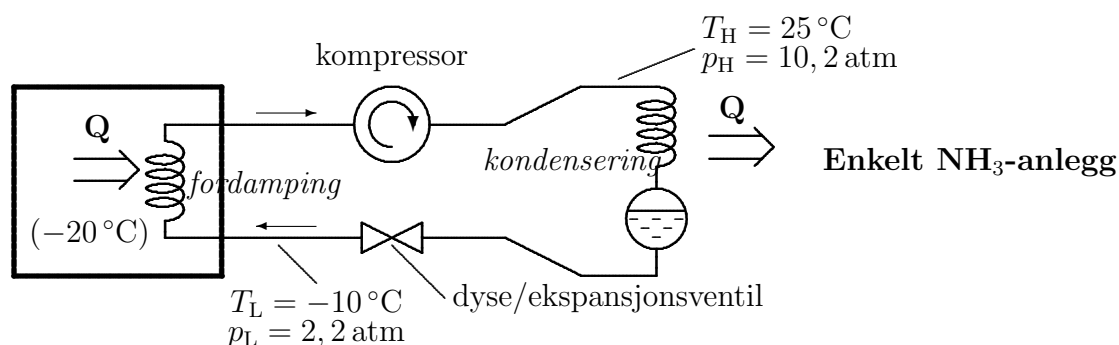
av ulike metaller, loddet sammen i begge ender. Når den ene enden plasseres ved lav temperatur og den andre ved høyere temperatur, lager temperaturforskjellen en spenning over kretsen. Tilsvarende vil man ved å drive en strøm gjennom kretsen, generere en temperaturforskjell mellom loddepunktene. Denne effekten, Peltier-effekten, kan brukes til kjøling. Kjølingen er ikke spesielt effektiv, men er grei for små systemer – for eksempel til kjøling av mikroprosessen i datamaskiner.

- *Kuldeblandinger.*

Dette er en “engangsprosess”; man blander for eksempel is og salt, og får en temperatur ned mot  $-20^{\circ}\text{C}$ . Eller tørris ( $\text{CO}_2$ ) og sprit, og kommer ned mot  $-80^{\circ}\text{C}$ : Greit for små eksperimenter.

### 12.3.2 Kjøleanlegg med kjølemedium i gass/væske likevekt

Nedenfor er vist skjematisk et typisk kjøleanlegg, med amoniakk ( $\text{NH}_3$ ) som kjølefluid.

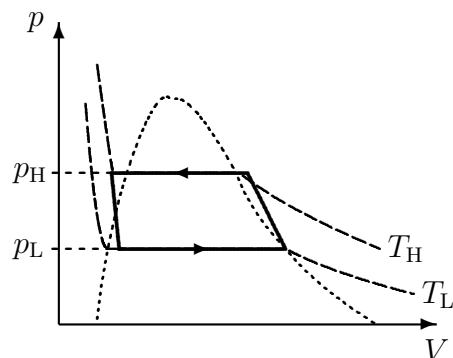


Virkemåten er i hovedsak som følger:

- $\text{NH}_3$  (amoniakk) sirkulerer i lukket rørsystem.
- Rørspiraler brukes som varmevekslere.
- Gass-væske likevekt både på høytrykksida ( $T_H, p_H$ ) og lavtrykksida ( $T_L, p_L$ ).
- I kompressoren komprimeres dampen (adiabatisk) til høyt trykk  $p_H$ .
- P.g.a. det høye trykket tvinges gassen over til væske. Dette skjer i kondensatorspiralen og det avgis kondensasjonsvarme til omgivelsene (som derfor varmes opp).
- I dysa ekspanderer væske til lavt trykk  $p_L$ . P.g.a. det lave trykket fordampes væske, og fordampningsvarmen tas opp fra omgivelser (kalde del) gjennom fordampningsspiralen.
- Og så komprimeres dampen i kompressoren igjen, klar til en ny runde.

Mange kjøleskap bruker hydrofluorokarboner, men mange av disse er miljøskadelige ved at de skader ozonlaget når det spaltes av ultrafiolett lys i stratosfæren, og avgir atomært klor. Eksempel på dette er freon  $\text{CCl}_2\text{F}_2$  som er iferd med å fases ut; et mer miljøvennlig medium er  $\text{C}_2\text{H}_2\text{F}_4$ .

Amoniakk brukes i en del større anlegg; såkalte absorpsjons-kjøleskap bruker også ammoniakk. Av miljøgrunner satses det betydelig i mange land for å løse de tekniske utfordringer knyttet til overgang til bruk av CO<sub>2</sub> som kjølevæske i kjøle- og fryseanlegg.

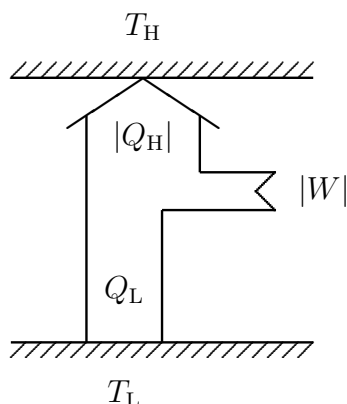


Et  $pV$ -diagram for en typisk kjøleprosess er vist skjematisk til venstre.

Isotermene  $T = T_H$  og  $T = T_L$  er tegnet inn, og også omhylningskurva for sameksistensområdet for væske/damp-fase.

Og ikke ta dette for bokstavelig: Diagrammet er *ikke* i realistisk skala.

*Ei varmepumpe er i prinsipp akkurat det samme som en kjølemaskin, bare “sett fra den andre sida”:*



Nå er det varme  $|Q_H|$  tilført f.eks. stua som er den nyttige størrelsen, mens fortsatt er  $|W|$  hva som koster. Varme  $|Q_L|$  tas fra et ytre reservoar med temperatur  $T_L$  (som bør være høyest mulig). Varmepumpas effektivitet karakteriseres ved *effekt faktoren* (virkningsgraden)  $\epsilon$ ,

$$\epsilon = \left| \frac{Q_H}{W} \right| \quad \text{Effekt faktor .} \quad (12-12)$$

Kjøle faktoren  $K$  og effekt faktoren  $\epsilon$  bør være en god del større enn en for å være nyttige, i praksis 3-5. Teoretisk maksimalt kan den bli 10-20 (avhengig av temperaturforskjellen  $T_H - T_L$ , mer om dette under Carnotprosesser).

For ei varmepumpe: La kjølespiralen være plassert i et passende reservoar, for eksempel neddykket i en sjø, eller plassert dypt ned i et grunnvannsreservoar, og ‘kondensatorsspiralen’ stå inne i dagligstuen. Og det er det hele –.

En enda mer effektiv utnyttelse får man hvis fordamperspiralen legges ned i en skøytebane og kondensorspiralen i fjernvarmeanlegg – og vips, man kan selge energien  $|Q_H| = |W| + Q_L$  og tjene inn mer enn forbrukt elektrisitet  $W$ .

Kjølesystemer koplet med varmeleveranse er også brukt med hell i tunnelprosjekter; ved 2-3 anlegg i Oslo er vannlekkasjer i tunneler tettet ved *frysing*, og sum av kjølevarme og tilført arbeid benyttes i fjernvarmeanlegg.

## 12.4 Carnotprosessen

Carnotprosessen<sup>8</sup> er *den teoretisk mest effektive* termodynamiske kretsprosess som tenkes kan:

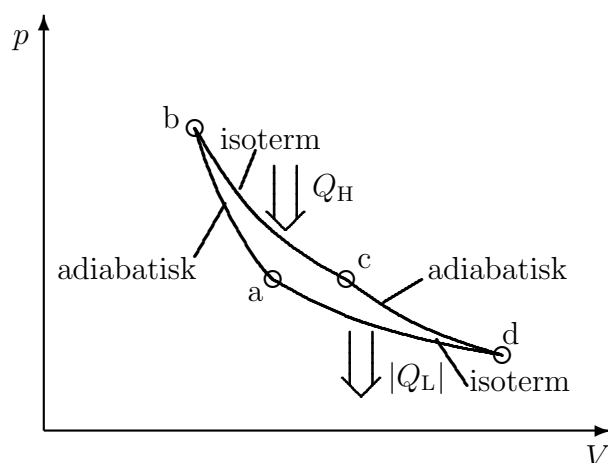
### 12.4.1 Carnotsyklus

For at en kretsprosess skal gi minimalt med tap, må følgende være oppfylt:

- Prosessen må være reversibel. Irreversible prosesser gir *alltid* ekstra ‘kaotisk energi’. I praksis er dette energi som ikke kan utnyttes til arbeid. Eksempel: friksjon.
- Varmedledning drevet av et endelig temperaturfall  $\Delta T$  er en irreversibel prosess. Varmeoverføring må følgelig skje *isotermt*.
- Under de trinn i prosessen hvor  $\Delta T \neq 0$ , må det ifølge dette *ikke* overføres varme, dvs. disse trinnene må være *adiabatiske*.

En Carnotsyklus, i den enkleste form, vil dermed være sammensatt av to isoterme og to adiabatisk prosesser.

### 12.4.2 Carnotprosess i en ideell gass



Til venstre er vist en Carnotprosess for en ideell gass, tegnet med  $\gamma = C_p/C_V = 5/3$  (dvs. for en énatomig gass).

- a–b: adiabatisk ( $pV^\gamma = \text{konst.}$ )
- b–c: isoterm ( $pV = \text{konst.}$ )
- c–d: adiabatisk
- d–a: isoterm

Vi skal beregne virkningsgraden  $e = \frac{W}{Q_H} = 1 - \frac{|Q_L|}{Q_H}$ .

<sup>8</sup>Nicolas Léonard Sadi Carnot (1796-1832), fransk reserveoffiser og naturviter. Faren var general og minister under Napoleon – slik at sønnen hadde få karrieremuligheter under Bourbonene. Grunnleggende teoretisk arbeid i 1824: “Réflexions sur la puissance motrice du feu”.

*Isotermene b-c og d-a:*

Temperaturen er konstant, og følgelig er indre energi konstant og  $dU = 0$ . Dermed er arbeidet lik tilført varmemengde,  $dQ = dU + dW = dW$ , og vi har

$$dQ = dW = p dV = \frac{Nk_B T}{V} dV = Nk_B T d(\ln V). \quad (12-13)$$

Brukt på de to isotermene fåes dermed

$$\begin{aligned} Q_H &= Nk_B T_H \int_b^c d \ln V = Nk_B T_H \ln \frac{V_c}{V_b} \\ Q_L &= \dots = Nk_B T_L \ln \frac{V_a}{V_d} \quad [ < 0 ]. \end{aligned} \quad (12-14)$$

*Adiabatene a-b og c-d:*

$$TV^{\gamma-1} = \text{konst.}, \text{ dvs. } V \propto \left(\frac{1}{T}\right)^{1/(\gamma-1)}.$$

Dertil er (fra isotermene)  $T_c = T_b$  og  $T_a = T_d$ , og volumene  $V_d$  og  $V_a$  kan dermed skrives

$$\begin{aligned} V_d &= V_c \left(\frac{T_c}{T_d}\right)^{1/(\gamma-1)} = V_c \left(\frac{T_b}{T_a}\right)^{1/(\gamma-1)} \\ V_a &= V_b \left(\frac{T_b}{T_a}\right)^{1/(\gamma-1)} \\ \text{og følgelig} \quad \frac{V_a}{V_d} &= \frac{V_b}{V_c}. \end{aligned} \quad (12-15)$$

For prosessen totalt får vi dermed, når vi setter inn siste resultatet i uttrykkene for  $Q_H$  og  $Q_L$  (og bruker at  $\ln x = -\ln(1/x)$ )

$$\frac{Q_L}{Q_H} = -\frac{T_L}{T_H} \quad e = 1 - \frac{T_L}{T_H} \quad \text{Carnotprosess.}$$

(12-16)

Virkningsgraden  $e$  avhenger følgelig *bare* av temperaturforholdet  $T_L/T_H$ .

### 12.4.3 Generell Carnotprosess

Ved beregning av virkningsgraden  $e$  for en ideell gassprosess falt *alt* om prosessen bort, unntatt temperaturforholdet.

Når slikt skjer, kan man ha berettiget håp om at man har funnet en sammenheng mer generell enn modellen man har brukt, skulle tilsi. Og slik er det i dette tilfellet også – men det vi avstår fra virkelig å vise det i dette innføringskurset.

Så vi bare slår fast:

For *alle* Carnotprosesser – uansett arbeidsmedium – er

$$\frac{Q_L}{Q_H} = -\frac{T_L}{T_H} \quad e = 1 - \frac{T_L}{T_H} \quad \text{Gyldig alle Carnot-varmekraftmaskiner.}$$

(12-17)

For *alle andre prosesser* mellom samme reservoartemperaturer er  $e \leq e_{\text{Carnot}}$ .

Som kjølemaskin eller varmepumpe som arbeider som Carnotprosess fåes tilsvarende:

$$\begin{aligned} K &= \left| \frac{Q_L}{W} \right| = \frac{|Q_L|}{|Q_H| - |Q_L|} = \frac{T_L}{T_H - T_L} && \text{Carnot-kjøleskap,} \\ \epsilon &= \left| \frac{Q_H}{W} \right| = \frac{|Q_H|}{|Q_H| - |Q_L|} = \frac{T_H}{T_H - T_L} && \text{Carnot-varmepumpe,} \end{aligned}$$

(12-18)

som igjen er det teoretisk høyest oppnåelige.

#### 12.4.4 Konsekvenser for virkelige kraftverk

Temperaturen på det kalde reservoaret er stort sett gitt fra naturens side, og kan regnes å ligge rundt 300 K.

For å få opp virkningsgraden, må man redusere irreversible tap mest mulig, og dertil ha *høyest mulig* temperatur på høytemperaturreservoaret.

I store, kullfyrte kraftverk – med dampmaskin og vann som arbeidsmedium – oppnås det siste ved å bruke trykk og temperatur i nærheten av kritisk punkt for vann,  $p_c \sim 217 \text{ atm}$  og  $T_c \sim 647 \text{ K}$ . Man får dermed en teoretisk høyeste virkningsgrad  $e_{\text{max}} \sim (1 - 300/647) \sim 0,54$  – og *virkelige* kullkraftverk kjøres idag med virkningsgrad noe over 40 %.

I gassturbin-kraftverk kan temperaturen komme opp i  $T_H \sim 900 \text{ K}$ , og teoretisk høyeste virkningsgrad tilsvarende opp i  $e_{\text{max}} \sim 0,75$  – virkelige gasskraftverk oppnår gjerne i nærheten av 60 %.

Vi ser at i alle tilfeller går mye av energien – grovt regnet halvparten – bort i spillvarme. Hvis temperaturen på lavtemperaturreservoaret økes til si ca. 350 K, koster dette ikke mye ekstra energi, men spillvarmen kan benyttes til fjernvarme o.l. I et slikt tilfelle blir den totale utnyttingsgraden (elektrisk energi + energi til varmeanlegg) 80-90%. Varmekraftverk bør derfor legges nær befolkningskonsentrasjoner eller varmtvannskrevende storindustri. Å legge varmekraftanlegg ute i øygarden og der bruke spillvarmen til å varme opp vannet for fiskene, er særdeles lite forutseende.

### 12.4.5 Carnotprosessen og temperaturdefinisjonen

Virkningsgraden for en Carnotprosess mellom to reservoartemperaturer  $T_H$  og  $T_L$  ble funnet – med utgangspunkt i loven for ideell gass og dermed med temperatur definert ut fra denne – å være

$$e_{\text{Carnot}} = 1 - \frac{T_L}{T_H}. \quad (12-19)$$

Dette kan snues om, så man lar temperaturen være definert ut fra Carnotprosessen – og man har da en medieuavhengig, absolutt temperaturskala.

Og dette er hva man gjør: Dagens vitenskapelige temperaturskala er definert på denne måten.

I praksis vil det si at man ved lave temperaturer bruker en adiabatisk magnetisering/demagnetisering som temperaturdefinerende prosess – det virker bra ned til temperaturer av størrelsesorden  $\mu\text{K}$ .

## 12.5 Varmelæras 2. hovedsetning

Varmelæras 2. hovedsetning sier at det er umulig å gjøre om “kaotisk varmeenergi på atomær-molekylær skala” til nyttig arbeid uten å legge inn tilleggsarbeid.

Noen alternative formuleringer:

- Det er umulig å flytte varme fra et kaldt til et varmt reservoar uten å utføre arbeid
- Det er umulig å transformere varme til arbeid uten å få spillvarme.
- Det er umulig å lage en kretsprosess som er mer effektiv enn Carnotprosessen.
- Perpetuum mobile av 2. art (“skape energi fra mikroskopisk termisk energi”) er umulig.

## 12.6 Entropi

Entropi – og kvantitativ formulering av 2. hovedsetning: *Hvorfor* er det ikke mulig å gjøre om mikroskopisk energi til arbeid – slik uten videre? Det kommer nok ut av beregningene våre – men forstår vi det?

*Vi skal her gå litt i retning av forståelse – dvs. hvordan Varmelæras 2. hovedsetning egentlig uttrykker hvordan verden alltid, overlatt til seg selv, blir mer og mer rotete – og “hvordan det alltid krever arbeid å rydde”.*

Dette uttrykkes kvantitativt ved innføring av begrepet *entropi*<sup>9</sup>, som er et mål

---

<sup>9</sup>Fra gresk *en*-i + *trope*-forandring

for uorden – eller kanskje heller et mål for manglende informasjon – og en lov om hvordan entropien utvikler seg med tida.

### 12.6.1 Clausius ulikhet

Clausius<sup>10</sup> regnes som grunnlegger av kinetisk gassteori (1857) og har æren for å ha trukket Carnots arbeider ut av glemselen (1850). Clausius har også æren og skylda for innføring av begrepet entropi.

Vi fant for Carnotprosessen

$$\frac{Q_L}{Q_H} = -\frac{T_L}{T_H}, \quad (12-20)$$

som kan skrives om til formen

$$\frac{Q_L}{T_L} + \frac{Q_H}{T_H} = 0. \quad (12-21)$$

For hele kretsprosessen kan dermed skrives

$$\sum \frac{Q}{T} = 0$$

Gyldig for alle  
reversible kretsprosesser.

(12-22)

For irreversible prosesser fåes i stedet en ulikhet – la oss vise det.

Siden Carnotprosessen er den mest effektive, vil virkningsgraden for alle irreversible kretsprosesser være mindre:  $e_{\text{irr}} < e_{\text{Carnot}}$ . Virkningsgraden for enhver prosess er definert i likning (12-4):

$$e = \frac{W}{Q_H} = \frac{Q_H + Q_L}{Q_H} = 1 + \frac{Q_L}{Q_H} \quad (12-23)$$

og for Carnotprosessen har vi altså nå lært

$$e_{\text{Carnot}} = 1 - \frac{T_L}{T_H}, \quad (12-24)$$

som gir oss

$$1 + \frac{Q_L}{Q_H} \leq 1 - \frac{T_L}{T_H} \quad (12-25)$$

Enkel omskriving av denne ulikheten gir

$$\frac{Q_L}{T_L} + \frac{Q_H}{T_H} \leq 0. \quad (12-26)$$

---

<sup>10</sup>Rudolph Julius Emanuel Clausius (1822-1888), tysk fysiker, professor i Bonn fra 1869.

Derfor, gyldig for alle kretsprosesser

$$\sum \frac{Q}{T} \leq 0 \quad \text{Gyldig for alle kretsprosesser.} \quad (12-27)$$

For en *kontinuerlig* kretsprosess erstatter vi summen med et lukket integral, og har da

$$\oint \frac{dQ}{T} \leq 0 \quad \text{Clausius ulikhet (likhet for reversible prosesser).} \quad (12-28)$$

Og her er fortegnskonvensjonen viktig:  $dQ$  er varmemengde *tilført* systemet. Likhets-tegnet gjelder for reversible prosesser og ulikhetstegnet for irreverible prosesser.

### 12.6.2 Definisjon entropi

For en *reversibel* prosess må følgende integralet over  $dQ/T$  mellom to vilkårlige *termodynamiske tilstander* være uavhengig av integrasjonsveien – ellers kunne ikke det lukkede integralet  $\oint dQ/T$  bli lik null generelt. Størrelsen  $dQ_{\text{rev}}/T$  er dermed analog til differensialet av en potensialfunksjon  $V(\vec{r})$  i mekanikken –  $\int dV$  er også uavhengig av integrasjonsveien.

I termodynamikken kalles slike funksjoner *tilstandsfunksjoner*, og akkurat denne kalles *entropi*

$$\Delta S_{12} = S_2 - S_1 = \int_1^2 \frac{dQ_{\text{rev}}}{T} \quad \text{entropiforandring.} \quad (12-29)$$

Analogt til potensialfunksjoner kan vi også for entropien operere med vilkårlig nullpunkt.

Vi definerer således entropiforskjellen mellom to tilstander ut fra en tenkt reversibel prosess mellom tilstandene, fra differensialet

$$dS = \frac{dQ_{\text{rev}}}{T} \quad S : \text{entropi.} \quad (12-30)$$

### 12.6.3 Entropien for en ideell, éatomig gass

La oss finne et uttrykk for entropien for et enkelt system: En éatomig, ideell gass med  $N$  partikler – og se om vi blir noe klokere av å se på hvordan uttrykket ser ut.



Utgangspunkt er

$$\begin{aligned} dQ_{\text{rev}} &= dU + p dV && : \text{den termodynamiske identitet} \\ p &= N k_B T / V && : \text{tilstandslikninga} \\ dU &= N C_V dT = N \frac{3}{2} k_B dT && : \text{varmekapasitet iflg. ekv.part.prinsipp} \end{aligned} \quad (12-31)$$

Av dette fåes

$$\begin{aligned} dS &= \frac{dQ_{\text{rev}}}{T} = \frac{3}{2} N k_B \frac{dT}{T} + N k_B \frac{dV}{V} \\ &= N k_B \left( \frac{3}{2} \frac{dT}{T} + \frac{dV}{V} \right) = N k_B d \ln(T^{3/2} V). \end{aligned} \quad (12-32)$$

Integrasjon gir så entropien til en ideell gass

$$S(N, T, V) = N k_B \ln(T^{3/2} V) + \text{konstant.} \quad (12-33)$$

Det første man ser, er at entropien er en *ekstensiv størrelse* – den totale entropien fåes som sum av entropiene per partikkel (i likhet med total indre energi).

Faktoren  $T^{3/2}V$  kan oppfattes som uttrykk for tilgjengelig volum for partikkelen i det 6-dimensjonale  $\vec{r} \times \vec{v}$ -rommet. Jo større  $T$  og  $V$  er, dess mer plass har hver partikkel å boltre seg på, og jo mindre vet vi om hvor de enkelte partiklene er.

Skriver vi om uttrykket for entropien til formen

$$S = k_B \ln \{ (T^{3/2} V)^N \} + \text{konstant} \quad (12-34)$$

kan vi dermed tolke faktoren  $(T^{3/2} V)^N$  som

*proporsjonal med antall ulike måter man kan putte  $N$  partikler i volumet  $V$  slik at temperaturen blir  $T$ , dvs. som et uttrykk for “sannsynligheten til tilstanden”.*

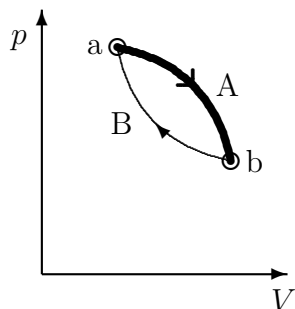
Dette gir oss uttrykket som står inngravert på Ludwig Boltzmanns gravstein i Wien

$$S = k_B \ln w, \quad (12-35)$$

hvor  $w$  er lik *den termodynamiske sannsynlighet*. Denne størrelsen er proporsjonal med antallet mikroskopiske (atomære/molekylære) måter som er forenelig med en gitt termodynamisk tilstand.

Men – nå har vi begynt å bevege oss inn i fagområdet statistisk fysikk – og det skulle vi holde oss unna i dette kurset. Så dette får være nok av forsøk på å tolke entropibegrepet.

## 12.6.4 Entropien og 2. hovedsetning



For en vilkårlig kretsprosess er ifølge Clausius  $\oint \frac{dQ}{T} \leq 0$ . Ta for oss en kretsprosess  $a \xrightarrow{A} b \xrightarrow{B} a$ , hvor A er en irreversibel og B er en reversibel prosess. Da vil gjelde

$$\oint \frac{dQ}{T} = \int_a^{(A)b} \frac{dQ}{T} + \int_b^{(B)a} \frac{dQ}{T} \leq 0 \quad (12-36)$$

Her er

$$\int_b^{(B)a} \frac{dQ}{T} = - \int_a^{(B)b} \frac{dQ}{T} = -\Delta S_{ab} \quad (12-37)$$

ifølge definisjonen (12-29) av entropi og at B er en reversibel prosess. Merk forresten at

$$\int_a^{(A)b} \frac{dQ}{T} \neq \Delta S_{ab} \quad (12-38)$$

fordi definisjonen av  $\Delta S$  krever en reversibel prosess. Fra ulikheten i (12-36) får vi nå

$$\int_a^{(A)b} \frac{dQ}{T} \leq \Delta S_{ab}. \quad (12-39)$$

Hvis prosessen A foregår i et lukket system – dvs. system som ikke utveksler varme med omgivelsene, altså med  $dQ = 0$ , får vi:

$0 \leq \Delta S_{ab} \quad \text{for lukket system}$	Clausius formulering av 2. hovedsetning,	(12-40)
---	---	---------

eller i ord:

<i>Entropien for et lukket system vil aldri avta.</i>	(12-41)
---	---------

Derav begrepet at alle systemer overlatt til seg selv går mot “full uorden/kaos”. I en viss forstand er dette ikke noe annet enn det som skjer hvis man har et brett med like mange kvite som svare kuler, hvor brettet stadig utsettes for små tilfeldige ristinger. Hvis man ved tida  $t = 0$  har sortert kulene slik at alle de kvite er på ei side av brettet og alle de svarte på motsatt side, vil man etter et kortere eller lenger tid finne at de kvite og svarte kulene er jamnt fordelt over brettet. I den atomære/molekylære verden er det de termiske bevegelsene når  $T > 0$  som står for “ristinga”. Å definere entropi for alt annet enn systemer som i det minste befinner seg tilnærmet i *lokal termodynamisk likevekt* er ei utfordring som teoretiske fysikere fortsatt sliter med.

*Entropien for et lukket system vil aldri avta* er den mest presise formuleringa av varmelæras 2. hovedsetning – men også den mest abstrakte, mest misforståtte og mest misbrukte.

### 12.6.5 Misbruk av 2. hovedsetning

Ei formulering man ofte hører, er at “varmelæras 2. hovedsetning sier at universet går mot en varmedød”. Selv om universet kanskje er lukket, er det tvilsomt om man i det hele tatt kan definere entropien for universet på fornuftig vis. En grunnleggende forutsetning for en slik diskusjon – nemlig at man har tilnærmet “lokal *termodynamisk* likevekt” – er neppe oppfylt. Da er nok utviklinga til vår nærmeste stjerne (sola) en vel så stor trussel for våre etterkommere – hvis de da klarer å holde det gående de milliarder av årene det her er tale om.

Varmelæras 2. hovedsetning sier at orden ikke kan oppstå fra uorden. Med 2. hovedsetning som argument kan da enkelte motsi eller motbevise Darwins evolusjonsteori. Dette er åpenbart et feil utsagn: Ingen levende vesener utgjør et termodynamisk lukket system – og hvis vi blir “lukket”, dør vi alle i løpet av noen minutter.

I *åpne* systemer kan entropien både øke og avta, ved varmetransport, og dermed *entropitransport*. Og slik opptrer *selvorganisering* helt normalt i naturen – et skoleeksempel i denne sammenheng er dannelsen av iskrystaller i skyene. Entropien i vanndråpene avtar når de fryser – og entropien eksporteres til lufta omkring som (frysevarme)/(temperatur). Det er ikke noe magisk ved det.

I levende systemer foregår en kontinuerlig entropitransport til omgivelsene – det er betingelse for å opprettholde livet. Heller ikke det er det noe magisk med ut fra et termodynamisk synspunkt.

Varmelæras 2. hovedsetning sier faktisk ingen ting hverken for eller imot Darwins evolusjonsteori.

Begrepet entropi er en matematisk hjelpestørrelse som er viktig i samband med den detaljerte beskrivelsen av varmelæras 2. hovedsetning. Problemet er imidlertid at denne detaljerte beskrivelsen er såpass avansert at den kun blir en “selvfølge” etter flere års studier og “modning” innen statistisk fysikk. All forsøk på kjappe forklaringer er derfor nokså dødfødte fordi det man egentlig gjør, er å presentere enkle bilder/modeller som i beste fall gir tilhøreren/leseren en illusjon av å ha forstått hva som foregår. Fortvil derfor ikke om begrepet entropi fortsatt er noe ullent selv etter en periode med intens eksamenslesing.

### 12.6.6 Sluttord – om termodynamikk og kultur

Et mål med siste delen av dette kurset kan formuleres som følger:

Alle studentene skal forstå hvordan et kjøleskap virker.

Alle skal inntil et visst nivå forstå varmelæras 2. hovedsetning.

Og – alle skal forstå at disse to tingene har noe med hverandre å gjøre.

Til ettertanke gjengis til slutt følgende snutt fra Sir Charles Percy Snows bok “De to kulturer” (Cambridge 1959, norsk oversettelse Cappelen 1960):

“Mange ganger har jeg vært i selskap med folk som etter den tradisjonelle kulturens målestokk regnes for å ha en høy utdannelse, og som med stor applomb kan gi uttrykk over sin forferdelse over naturviterens litterære uvitenhet.

Et par ganger har jeg kjent meg provosert til å spørre gjestene hvor mange av dem som kunne forklare termodynamikkens andre hovedsetning. Reaksjonen var kjølig og avgjort negativ. Likevel var spørsmålet det vitenskapelige motstykke til ‘Har De lest noe av Shakespeare?’.

Jeg tror jeg må si at hvis jeg hadde stilt et enda klarere spørsmål – som for eksempel: hva menes med masse eller akselerasjon – hvilket er det naturvitenskapelige motstykke til Kan de lese? – ville ikke mer enn én av ti av disse høyt utdannede menn hatt følelsen av at jeg snakket samme språk som dem.”

## OPPSUMMERING AV KAP. 12

- En *kretsprosess* er en prosess som starter og slutter i samme termodynamiske tilstand.
- Arbeidet utført av en kretsprosess er lik arealet innesluttet av kurven som avtegner seg i  $pV$ -diagrammet i løpet av en syklus.
- En del av en prosess er *isoterm*, *isobar* eller *isokor* avhengig om det er henholdsvis temperaturen, trykket eller volumet som er konstant under den aktuelle delen av prosessen.
- For en *reversibel prosess* kan retninga til prosessen snus og man får avtegnet nøyaktig samme kurve f.eks. i  $pV$ -diagrammet.
- For en *ikke-reversibel prosess* kan man ikke uten videre snu retninga til prosessen. Slike prosesser er ellers kjennetegnet ved at arbeid som kunne ha vært trukket ut av prosessen går tapt og i stedet går med til å endre systemets indre energi.
- Den termiske virkningsgraden til ei varmekraftmaskin er gitt som  $e = W/Q_H$  hvor  $W$  er arbeid produseret av maskina og  $Q_H$  er varme fra høgtemperaturreservoaret. Legg ellers merke til at  $e = W/Q_H = (Q_H - |Q_L|)/Q_H < 1$ .

- *Otto-syklusen* beskriver virkemåten til en vanlig fire-takts bensinmotor, mens *Diesel-syklusen* beskriver virkemåten til en vanlig dieselmotor. Dieselmotoren kan benytte høyere kompresjon enn i Otto-motorer og dermed oppnå bedre virkningsgrad.
- Kjølemaskiner er i prinsippet varmekraftmaskiner kjørt “baklengs”, men de tekniske løsningene er generelt helt forskjellige. Det viktigste kjøleprinsippet er flytting av varme som fordampnings-/kondensasjonsvarme.
- Kjølefactoren er definert som  $K = |Q_L/W|$ .
- *Carnotprosessen* er den teoretisk maksimalt mest effektive termodynamiske kretsprosessen man kan tenke seg. Dette krever at alle deler av prosessen er reversibel. I praksis må prosessene da kjøres så sakte at de har liten praksis interesse. Min ikke desto større teoretisk interesse, for ingen kretsprosessen kan ha høyere virkningsgrad enn en Carnotprosess, en meget viktig begrensning for varmekraftmaskiner.
- For alle Carnotprosesser er virkningsgraden  $e = 1 - T_L/T_H$ , hvor  $T_L$  og  $T_H$  er temperaturen til henholdsvis lavtemperatur- og høytemperatur varmereservoaret.
- *Varmelæras 2. hovedsetning* har flere ekvivalente formuleringer, hvorav den viktigste er: Det er umulig å flytte varme fra et kaldt til et varmt reservoar uten å måtte utføre et arbeid.
- Begrepet *entropi* er en matematisk hjelpestørrelse som er viktig i samband med den detaljerte beskrivelsen av varmelæras 2. hovedsetning.
- En viktig alternativ formulering av varmelæras 2. hovedsetning lyder: *Entropien til et lukket system vil aldri avta*, hvor “lukket” betyr at det hverken utveksles varme, arbeid eller materie (stoff) med omgivelsene:  $\Delta S \geq 0$ .

## Del IV

# Elektrisitet og magnetisme



# Kapittel 13

## Elektromagnetiske grunnbegreper

### Innhold

---

<b>13.1 Kort historisk bakgrunn . . . . .</b>	<b>165</b>
13.1.1 Fra gresk oldtid til James Clerk Maxwell . . . . .	165
13.1.2 Litt om enheter . . . . .	167
<b>13.2 Elektrostatikk . . . . .</b>	<b>167</b>
13.2.1 Coulombs lov . . . . .	167
13.2.2 Elektrisk felt $E$ og potensial $V$ . . . . .	168
13.2.3 Gauss lov . . . . .	169
13.2.4 Kapasitans . . . . .	170
13.2.5 Elektrostatisk feltenergi . . . . .	171
13.2.6 Dielektrika og polarisasjon . . . . .	172
<b>13.3 Statiske magnetfelt og elektrisk strøm . . . . .</b>	<b>173</b>
13.3.1 Elektrisk strøm og Ohms lov . . . . .	173
13.3.2 Kraft på leder i magnetfelt . . . . .	175
13.3.3 Lorentzkrafta . . . . .	176
13.3.4 Krefter mellom strømførende ledere – og enheten ampere	177
13.3.5 Magnetfeltet fra en rett leder . . . . .	178
13.3.6 Ampères lov . . . . .	179
13.3.7 Magnetfeltet i en lang, rett spole . . . . .	179
<b>13.4 Magnetisk induksjon . . . . .</b>	<b>180</b>
13.4.1 Faradays induksjonslov . . . . .	181
13.4.2 Generering av vekselstrøm . . . . .	181
13.4.3 Teslas trefasegenerator . . . . .	182
13.4.4 Selvinduksjon og magnetisk feltenergi . . . . .	183



<b>13.5 Enkle kretser . . . . .</b>	<b>185</b>
13.5.1 RC-krets . . . . .	185
13.5.2 Opplading av kondensator . . . . .	186
13.5.3 RL-krets . . . . .	187
13.5.4 LC-krets . . . . .	188
13.5.5 RLC-krets . . . . .	188

---

## 13.1 Kort historisk bakgrunn

### 13.1.1 Fra gresk oldtid til James Clerk Maxwell

Naturskapte elektriske og magnetiske fenomener har omgitt menneskene i all tid – og har i all tid hatt et slags magiens slør over seg. Idag er i tillegg våre omgivelser fylt opp med menneskeskapte “elektriske innretninger”, men følelsen av magi er vel fremdeles stort sett den samme hos de fleste. Man ser at noe skjer, men i motsetning til i mekanikken, ser man ikke *hvorfor* det skjer – elektrisitet og magnetisme ligger utenfor våre sanseorganers verden.

Ordet “elektrisk” ble innført av den engelske legen William Gilbert i år 1600, i hans verk “De Magnete”. Han hadde undersøkt gnidningselektrisitet, det vil si hvordan endel stoffer når de blir gnidd, kan få, bokstavelig talt, håret til å reise seg på hodet til folk. Skoleeksemplet på slike stoffer var rav (fossil harpiks) – gresk *elektron*. Stoffet med tilsvarende “hårreisende egenskaper” kalte Gilbert elektriske – en latinisering av det greske ordet.

Ordet “magnet” stammer fra gresk oldtid. Naturlige permanente magneter (mineralet magnetjernstein [magnetitt]) ble funnet nær byen Magnesia i Anatolia.<sup>1</sup> Stykker av mineralet kunne festes på en korkbit eller et trestykke, og lot man dette flyte på vann, hadde man et primitivt kompass. Helt magisk på den tiden, naturligvis, og mineralet ble kalt stein fra Magnesia- på gresk *magnes-etos* [etos fra *lithos*, stein].

Elektrisk strøm gjennom ledninger kunne man på 1700-tallet få til med bruk av gnidningselektrisitet i “elektrifiseringsmaskiner”, og man kunne lagre denne i såkalte Leidnerflasker, oppfunnet ved en tilfeldighet i 1745. Disse ga gjerne spenninger på flere kilovolt, og var ikke helt ufarlige å bruke. Praktisk eksperimentering med elektriske strømmer ble mulig etter at italieneren Allesandro Volta<sup>2</sup> i år 1800 fant opp det vi kaller “galvaniske elementer”. Navnet “galvanisk” stammer fra den italienske legen Luigi Galvani, som i 1780 gjorde elektriske eksperimenter med flådde froskelår – uten egentlig å forstå hva han gjorde og så.

<sup>1</sup>Det var flere byer i Anatolia (Lilleasia) med det navnet, forøvrig.

<sup>2</sup>Volta var greve, og professor i fysikk først i Como og så i Padua.

At magnetisme og strøm hadde noe med hverandre å gjøre, ble vist av dansken Hans Christian Ørsted i 1820. Det sies at han hadde funnet ut i eksperimenter i laboratoriet sitt at en strømførende leder *ikke* påvirket magneter. Så skulle han demonstrere dette for sine fysikkstudenter ved Københavns universitet, i auditoriet – og stilte uforvarende magneten loddrett på lederen i stedet for parallellt med, som han hadde gjort før. Og dermed var det gjort!

Ørsteds oppdagelse ble raskt fulgt opp, allerede samme og neste år, av en “hjerne-trust” ved College de France i Paris, Jean Baptiste Biot, Felix Savart – og den mest kjente av de tre, Andre Mari Ampère, som formulerte sammenhengene mellom strøm, kraft og magnetfelt i “naturlovs form”.

Så, i 1831, kom Michael Faraday med oppdagelsen av magnetisk induksjon – grunnlaget for nær all elektrisk kraftproduksjon. Senere innførte han “elektriske og magnetiske feltlinjer”, som en anskueliggjørelse av hva andre gjemte i matematikk. Han var sønn av en Londonsk grovsmed, stort sett selvlært og ikke veldig sterk i matematikk – og ubestridt det 19. århundrets fremste eksperimentalfysiker.

Det hele ble avrundet av skotten James Clerk Maxwell i 1865, med en samlet matematisk formulering av hele elektromagnetismen. Det kanskje mest forbløffende som Maxwell kunne trekke ut av dette, var at likningene ga ei bølgeligning for elektriske og magnetiske felt, med bølgeforplantningshastighet som kom ut med en tallverdi lik den eksperimentelt bestemte lyshastigheten. Dette var lenge før radiobølger og slikt var produsert eller observert, og lenge før noen hadde kommet på at lys kunne ha noe med elektromagnetisme å gjøre.

Vi går først gjennom det klassiske grunnlaget for elektromagnetismen, stort sett som presentert fra Coulomb til Faraday. Dette er vel også stort sett stoff som er, eller burde være, kjent fra videregående skole.

Så samler vi opp de fire viktigste likningene, “Maxwells likninger” – og skriver dem om til kompakt formulering som gjort av Oliver Heaviside i 1880-årene, etter at Maxwell selv var vandret til det hinsidige. Og viser clouet: Den elektromagnetiske bølgelikninga.

Til slutt tar vi kort for oss elektriske kretser, og kommer litt inn på blant annet vekselstrøm og elektriske svingekretser.

### 13.1.2 Litt om enheter

Før vi begynner for alvor: Litt om enheter. Elektromagnetismen dreier seg i utgangspunktet om vekselvirkning mellom elektriske ladninger, og det naturlige ville vel ha vært å starte definisjon av elektromagnetiske størrelser med definisjon av enheten for ladning. Man kunne da ha definert

$$1 \text{ coulomb} = 1 \text{ C} = \frac{1}{1,60219 \cdot 10^{-19}} \times (\text{den elektriske elementærladningen } e)$$

hvor den elektriske elementærladningen er ladningen på for eksempel et proton ( $H^+$ ). Men historisk gikk det ikke slik – da dette startet, visste man ikke engang sikkert at materien var bygd opp av atomer. Så man startet istedet med definisjon av strøm, det vil si (ladning per tidsenhet) –

$$1 \text{ ampere} = 1A.$$

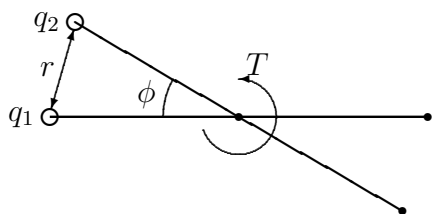
og definerte denne enheten ut fra kraftvirkninga mellom strømførende ledere – som kunne måles uten av man visste noe om hva ladninger egentlig var. Fra enheten ampere avledet man så andre enheter ved å kombinere denne ene “elektriske enheten” med enhetene i mekanikken, feks.  $1C = 1 \text{ As}$ .

Vi tar for oss enhetene etterhvert som de dukker opp, litt kaotisk som følge av en litt kaotisk forhistorie.

## 13.2 Elektrostatikk

### 13.2.1 Coulombs lov

“Grunnlikninga” i elektrostatikken er Coulombs lov for krafta mellom to punktladninger  $q_1$  og  $q_2$  i innbyrdes avstand  $r$ .



Coulomb gjorde i 1786 eksperimenter hvor én ladet metallkule ( $q_1$ ) ble hold fast, mens en annen ( $q_2$ ) var spent fast på armen i en torsjonsvekt – et instrument han selv hadde konstruert og analysert.

Og så målte han sammenhengen mellom torsjonsmoment  $T$  og vinkel  $\phi$ , og fant av det hvordan krafta mellom ladningene avhang av ladningenes fortegn, størrelse og innbyrdes avstand,

$$F \propto q_1 q_2 / r^2 \quad (13-1)$$

Krafta regnes positiv når ladningene har samme fortegn, det vil si at like ladninger frastøter hverandre og at krafta da virker “i positiv  $\vec{r}$ -retning”.

Med proporsjonalitetskonstanten tatt med, skrives dette idag – i SI-enheter – på form

$$\vec{F} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{e}_r \quad \text{Coulombs lov}$$

(13-2)

hvor  $\epsilon_0$  er “dielektrisitetskonstanten for vakuum”,

$$\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12} C^2 / (Nm^2)$$

(13-3)

### 13.2.2 Elektrisk felt $E$ og potensial $V$

Krafta på den ene ladningen – f.eks.  $q_2$  – kan oppfattes som forårsaket av et elektrisk vektorfelt  $\vec{E}(\vec{r})$ , på samme måten som tyngdekrafta på en masse  $m$  kan oppfattes som forårsaket av et tyngde- eller gravitasjonsfelt  $\vec{g}$ ;

$$\begin{aligned}\vec{F} &= q_2 \vec{E}_1 && \text{Elektrisk felt – definisjon} \\ \vec{F} &= m \vec{g} && \text{Tyngdefelt – definisjon}\end{aligned}\quad (13-4)$$

Det elektriske feltet rundt en punktladning  $q$  er dermed, i avstand  $r$  fra ladningen,

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{e}_r \quad \text{Coulombfeltet}$$

(13-5)

La oss så anta at en “testladning”  $q_t$  kan bevege seg i feltet  $\vec{E}(\vec{r})$  – uten at feltet forstyrres (for eksempel flyttes i rom fordi sentret flyttes). Dette innebærer at massen til “testpartikkelen” må være liten.

Arbeidet som ladningen  $q_t$  må utføre mot feltet for å bevege seg fra  $r$  til  $r + dr$  er

$$dW = -Fdr = -q_t E(r) dr$$

og arbeidet som må utføres for å bevege seg fra “feltfritt rom”  $r \rightarrow \infty$  til posisjonen  $r$  er

$$W(r) = -q_t \int_{\infty}^r E(r') dr' \equiv q_t V(r) \quad (13-6)$$

hvor  $V(r)$  er “det elektriske potensialet” – det vil si potensiell energi per ladningsenhet (i Coulombfeltet). Enhet for elektrisk potensial er

$1 \text{ volt} = 1V = 1 \text{ Nm/C}$

(13-7)

Det er kanskje lettere å huske dette via “enhet for energi” i elektriske enheter,

$1 \text{ Nm} = 1 \text{ J} = 1 \text{ VC} = 1 \text{ VAs}$

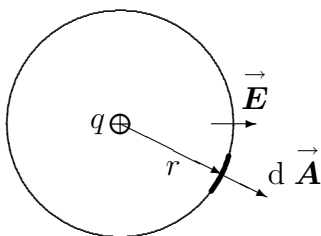
(13-8)

“Coulombpotensialet” assosiert med en ladning  $q$  blir

$$V(r) = - \int_{\infty}^r \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} dr = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} \quad \text{Coulombpotensialet}$$

(13-9)

## 13.2.3 Gauss lov



Legg nå ei tenkt kuleflate rundt en ladning  $q$ , som vist på figuren, og beregn fluksen  $\Phi_E$  til  $\vec{E}$  gjennom flata.

Fluksen til vektorfeltet  $\vec{E}(\vec{r})$  gjennom et flateelement  $d\vec{A}$  er definert som

$$d\Phi_E = \vec{E}(\vec{r}) \cdot d\vec{A} \quad (13-10)$$

hvor flatevektoren  $d\vec{A}$  er en vektor loddrett på og ut av flata, det vil si  $d\Phi_E = E_\perp dA$ , hvor  $E_\perp$  er komponenten av  $\vec{E}$  ut av flata.

Med ei kuleflate og radielt felt, som i dette tilfellet, får vi

$$d\Phi_E = E(r) r^2 d\Omega \quad (13-11)$$

hvor  $d\Omega$  er romvinklelementet. Innsatt for  $E(r) \propto r^{-2}$  fåes så

$$d\Phi_E = (q/4\pi\epsilon_0) d\Omega, \quad (13-12)$$

det vil si et uttrykk uavhengig av  $r$ . Ved integrasjon av uttrykket over kuleflata  $\Omega$  fås  $\int_\Omega d\Omega = 4\pi$ , og vi står igjen med

$$\Phi_E = \int_\Omega \vec{E} \cdot d\vec{A} = q/\epsilon_0 \quad (13-13)$$

Her “sees lett” at dette gjelder *uansett hvordan den lukkede flaten ser ut*; den trenger ikke nødvendigvis være ei kuleflate. Og vi kan putte flere ladninger innenfor flaten – og får tilsvarende uttrykk i tillegg for hver ladning. Dermed har vi – når vi multipliserer opp  $\epsilon_0$  –

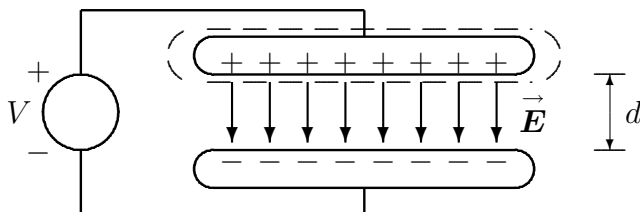
$$Q = \sum_i q_i = \epsilon_0 \Phi_E \equiv \epsilon_0 \int_\Omega \vec{E} \cdot d\vec{A} \quad \text{Gauss lov}$$

(13-14)

I ord:

Den totale ladningen innenfor ei lukket flate er  $\epsilon_0$  ganger den totale fluksen til  $\vec{E}$  ut av flata.

### 13.2.4 Kapasitans



Figuren viser skjematisk en platekondensator – to parallelle metallplater med areal  $A$  og avstand  $d$ , koplet til en spenningskilde  $V$ .

Med positiv spenning  $V$  vil den øverste plata bli ladet positivt og den nederste negativt, med totale ladninger  $\pm Q$  på platene.

Ladningene på den ene platen prøver å trekke til seg ladningene på den andre platen, og ladninger blir derfor liggende på plateoverflatene som vender mot hverandre, mens ytterflatene ikke har ladning.

Hvis vi ser bort fra “randeffekter” – det vil si regner platenes utstrekning stor i forhold til plateavstanden  $d$ , kan vi regne det elektriske feltet som homogent mellom platene og null utenfor;

$$E \approx \begin{cases} V/d & \text{mellom platene} \\ 0 & \text{utenfor} \end{cases} \quad (13-15)$$

Dette gir, fra Gauss lov brukt over en lukket flate  $\Omega$  som antyd det stiplet på figuren, en ladning

$$Q = \epsilon_0 \int_{\Omega} \vec{E} \cdot d\vec{A} \approx \epsilon_0 EA = (\epsilon_0 A/d) V \quad (13-16)$$

Proporsjonalitetsfaktoren mellom ladning  $Q$  og spenning over kondensatoren  $V$  kalles *kapasitans*. For en ideell platekondensator som vist, med luft (vakuum) mellom platene, blir kapasitansen

$$C = Q/V = \epsilon_0 \frac{A}{d} \quad \text{Kapasitansen til en platekondensator (luft)}$$

(13-17)

Enheten for kapasitans er farad,

$$1 \text{ farad} = 1 [F] = 1 \text{ C/V} = 1 \text{ As/V} \quad (13-18)$$

Uttrykt med denne enheten kan vi skrive dielektrisitetskonstanten  $\epsilon_0$  som

$$\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12} \text{ F/m} = 8,85 \text{ pF/m}$$

Talleksempel:

En platekondensator med areal  $A = 1 \text{ cm}^2$  og plateavstand  $1 \text{ mm}$  vil ha en kapasitans  $C = (8,85 \cdot 10^{-12} \cdot 10^{-4}/10^{-3}) \text{ F} \approx 0,9 \text{ pF}$ . Og det er temmelig lite, de kondensatorene man bruker i elektroniske kretser er vanligvis fra  $10 \text{ pF}$  til  $100 \mu\text{F}$ .

For å få større kapasitans, reduserer man  $d$  og øker arealet. En vanlig måte å gjøre dette på var tidligere å metallisere papir, og så rulle det opp i en mangelags sylinder. Et papirareal på  $1 \text{ m}^2$  og en papirtykkelse på  $0,01 \text{ mm}$  ville da gi  $C \approx 10 \text{ nF}$ .

### 13.2.5 Elektrostatisk feltenergi

Hvor mye energi trenges for å lade opp en kondensator til en spenning  $V$ ?

For å tilføre kondensatoren en tilleggs ladning  $dQ$  når spenningen er  $V$ , kreves et arbeid

$$dW = V dQ$$

Fra sammenhengen mellom ladning og spenning,  $Q = CV$ , fås videre

$$dQ = C dV$$

Vi har dermed at

$$W = \int_0^V CV' dV' = \frac{1}{2} CV^2 \quad (13-19)$$

Dette tilførte arbeidet er *lagret som elektrostatisk feltenergi* i kondensatoren. Eventuelt kan det uttrykkes ved ladningen i stedet for ved spenningen;

$$W = \frac{1}{2} CV^2 = \frac{1}{2} Q^2 / C$$

Lagret elektrostatisk energi

(13-20)

Talleksempel:

En kondensator med kapasitans  $1 \mu\text{F}$  er ladet til en spenning  $V = 50 \text{ V}$ . Lagret energi er da

$$W = \frac{1}{2} \cdot 10^{-6} \cdot (50)^2 \text{ F V}^2 = 1,25 \text{ J}$$

En Joule =  $1 \text{ J} = 1 \text{ NM}$ . Energien kan sees som å være “nyttet til ladningene” eller å være “knyttet til feltet” – dette er to komplementære måter å se det på. Det er stort sett greiest å bruke den siste måten – resultatet av beregninger blir det samme.

Vi tar utgangspunkt i en ideell platekondensator, og har da

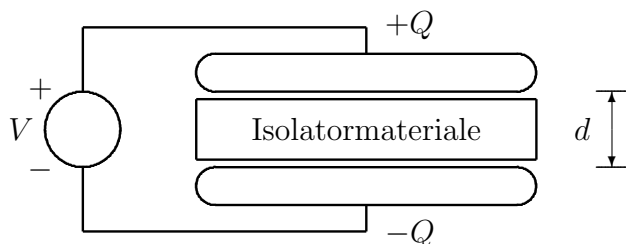
$$\left. \begin{aligned} V^2 &= E^2 d^2 \\ C &= \epsilon_0 A / d \end{aligned} \right\} \quad W = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 \cdot (Ad)$$

Her er  $Ad$  volumet (hvor det elektriske feltet er konstant og forskjellig fra null), og faktoren foran kan oppfattes som “elektrostatisk feltenergi per volumenhet”,

$$\text{Elektrostatisk energi per volumenhet} = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2$$

(13-21)

## 13.2.6 Dielektrika og polarisasjon



Hvis man i en platekondensator ikke har luft (vakuum) mellom platene, men i stedet en eller annen isolator, vil som regelen kapasitansen øke. Vi kan fenomenologisk uttrykke dette ved å tillegge isolatormateriale en “dielektrisitetskonstant” forskjellig fra  $\epsilon_0$ , og så bruke samme uttrykket for kapasitansen som før;

$$C = \epsilon A/d = \epsilon_r \epsilon_0 A/d \quad (13-22)$$

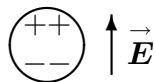
Her er  $\epsilon_r$  materialets *relative dielektrisitetskonstant* –  $\epsilon_r = \epsilon/\epsilon_0$ . Noen typiske verdier er gitt nedenfor.

Materiale	$\epsilon_r$
Glass	5 – 10
Kvarts	3,7
Hardgummi	2,5 – 3,5
Etylalkohol	25,8 ( $20^\circ C$ )
Vann	81,1 ( $18^\circ C$ )
Luft	1,000576 (NTP)

Men hva er det egentlig som skjer? Jo, det påtrykte (ytre) elektrisk feltet virker på molekylene i isolatoren – eller “dielektriket”, som vi gjerne kaller det i denne sammenhengen, og trekker ladningene på molekylene fra hverandre. Går vi i mer detalj, kan vi si at feltet deformerer elektronskyene rundt atomkjernene litt, slik at atomene blir “polarisert”:



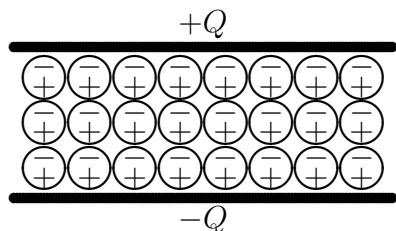
Atom,  $\vec{E} = 0$



Atom,  $\vec{E} \neq 0$

Polarisasjon av et atom i et elektrisk felt, skjematisk.

Hvis dielektriket består av molekyler hvor ladningene er separert allerede uten ytre felt, som vi for eksempel har i vanlig salt, ( $\text{NaCl} \rightarrow (\text{Na}^+ \text{Cl}^-)$ ), gjør det ytre feltet at disse “permanente dipolene” vrir av de elektrostatiske kreftene, og vi får en sterkere resulterende polarisasjon av dielektriket enn for et dielektrikum uten permanente dipoler.



For et dielektrikum i plassert mellom to plater med ladning  $\pm Q$  får vi et bilde som vist på figuren til venstre.



Forskyvningen av ladninger i dielektriket gir ingen netto volumladning, men det blir netto overflateladninger, så  $\pm Q'$ , som så gir et elektrisk felt motsatt rettet det ladningene  $\pm Q$  gir. Gauss lov, og uttrykket for ladningen på en platekondensator, gir

$$Q - Q' = \epsilon_0 EA \quad (\text{Gauss lov}) \quad (13-23)$$

$$Q = \epsilon EA \quad (13-24)$$

som gir oss et uttrykk for “den dielektriske polarisasjonen”  $P = Q'/A$ ,

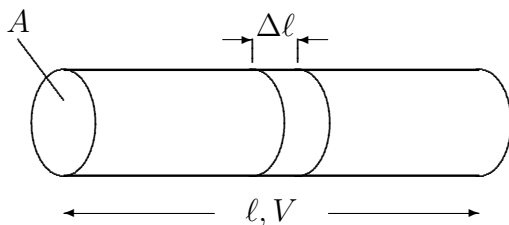
$$P = Q'/A = \epsilon_0(\epsilon_r - 1)E \equiv \chi_P E \quad (13-25)$$

Materialkonstanten  $\chi_P$  – proporsjonalitetsfaktoren mellom elektrostatisk felt og polarisasjon – kalles “dielektrisk susceptibilitet”.

## 13.3 Statiske magnetfelt og elektrisk strøm

### 13.3.1 Elektrisk strøm og Ohms lov

De elektriske strømmen vi møter i hverdagen, er for det aller meste resultat av en rettet bevegelse av elektroner i metall-ledninger og en spenning påtrykt mellom endene av ledningene.



Ta som eksempel en kopperledning, med tverrsnitt  $A$  og lengde  $\ell$ , påtrykt en spenning  $V$ .

Kopper har massetetthet  $8,92 \text{ g/cm}^3$  og atomvekt  $63,57$ . Den atomære masseenheten er  $1 \text{ amu} = 1,6605 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$ . Antallet atomer per volumenhet i kopper er dermed

$$n = 8,92 \cdot 10^3 (\text{kg/m}^3) / (63,57 \cdot 1,6605 \cdot 10^{-27} \text{ kg}) = 8,45 \cdot 10^{28} \text{ m}^{-3}$$

I en ledning med tverrsnitt  $1 \text{ mm}^2$  (typisk for 10 A-kurs i husinstallasjon) er det derfor på ei lengde  $\Delta\ell = 1 \text{ mm}$  et antall  $N = 8,45 \cdot 10^{19}$  Cu-atomer.

Cu-atomene i metallet er bundet sammen av “kjemiske krefter”, og de fleste av elektronene er låst fast enten i disse bindingene eller i tett binding til atomkjernene. Men *ett* elektron per atom er ikke bundet på denne måten, og er fritt til å bevege seg mellom atomene, og transportere ladningen sin samtidig. Vi har dermed ca.  $8,45 \cdot 10^{19}$  “frie elektroner”, gjerne kalt *ledningselektroner*, i hver  $\text{mm}^3$  av kopperledningen.

Settes det på et elektrisk felt  $E = V/\ell$  langs lederen, akselereres hvert ledningselektron av feltet, men samtidig bremses det av en “viskøs friksjonskraft”. Dette

resulterer i at elektronene “i stasjonær tilstand” får en middelhastighet proporsjonal med feltet<sup>3</sup>

$$\bar{v} = kE \quad (13-1)$$

Strømmen  $I$  i ledningen<sup>4</sup> kan uttrykkes som

$$I = e n_e \bar{v} A = e n_e k (V/\ell) A \quad (13-2)$$

hvor  $n_e$  er antalltettheten av ledningselektroner, og  $e$  tallverdien av elektronladningen.

Hvor stor er nå denne middelhastigheten  $\bar{v}$  “under vanlige forhold”? Ja, la oss anta  $A = 1 \text{ mm}^2$  og  $I = 10 \text{ A}$  – det vil si en “hjemmeledning” med maksimal tillatt belastning. Dette gir

$$\bar{v} \approx 10 \text{ A} / (1,602 \cdot 10^{-19} \text{ As} \cdot 8,45 \cdot 10^{28} \text{ m}^{-3} \cdot 10^{-6} \text{ m}^2) = 7,4 \cdot 10^{-4} \text{ m/s} = 0,74 \text{ mm/s}$$

Ikke veldig mye – hvis vi hadde hatt likestrøm, ville det ta 22 år for et elektron å komme fra Trondheim til Oslo med den farten. Nå er ikke kraftnettet likestrømsnett her i landet, men vekselstrømsnett, med periode på vekselstrømmen på  $(1/50)$  sekund. Elektronene flytter seg derfor i middel fram og tilbake med utslag ca.  $7 \mu\text{m}$ , under forhold som antatt her.

Kraftoverføring er *ikke* overføring av elektroner!

Gå så tilbake til uttrykket for strømmen, og skriv det om på formen

$$I = \sigma A V / \ell \quad (13-3)$$

Størrelsen  $\sigma (= k e n_e)$  er *konduktiviteten*, klarere uttrykt som forholdet mellom elektrisk strømtetthet  $j = I/A$  og elektrisk felt  $E = V/\ell$ ,

$$\sigma = j/E = \frac{I/A}{V/\ell} \quad \text{Konduktiviteten [enhet } \frac{\text{A}}{\text{Vm}}]$$

(13-4)

Forholdet mellom strøm  $I$  og spenning  $V$  er resistansen  $R$  til ledningsbiten (“Ohmsk motstand”),

$$R = V/I = \frac{1}{\sigma} \frac{\ell}{A} \quad \text{Resistans}$$

(13-5)

Sammenhengen mellom strøm gjennom en leder og spenninga over lederen kalles Ohms lov,<sup>5</sup>

$$V = RI \quad \text{Ohms lov}$$

(13-6)

<sup>3</sup>For svært hurtig varierende felt fås *ikke* “stasjonær tilstand” – man kan i stedet se bort fra dempingen og regne det hele tapsfritt. Og da kommer elektronene i mottakt med feltet, og slukker ut dette. Dette er mekanismen for eksempel når lys reflekteres fra metalloverflater.

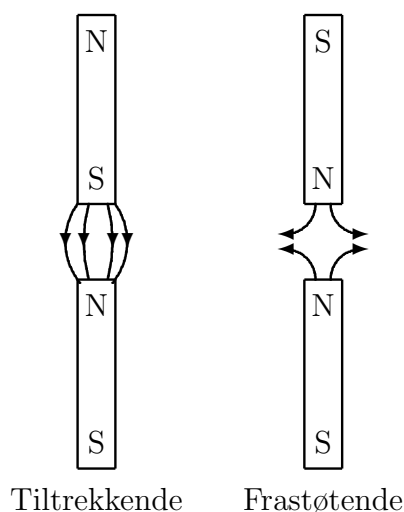
<sup>4</sup>Elektrisk strøm er lik elektrisk ladning som passerer et tverrsnitt av ledningen per tidsenhet. Eller sagt på en annen måte: Elektrisk strøm er lik ladningstettheten multiplisert med volumet ( $\bar{v} A$ ) med ladninger som per tidsenhet passerer et valgt tverrsnitt i ledningen.

<sup>5</sup>Georg Simon Ohm (1787-1854), professor i fysikk ved den tekniske høyskolen i Nürnberg, fant loven eksperimentelt i 1826

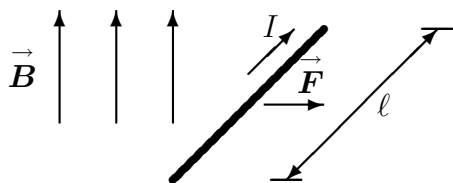
Enheten for resistans er ohm:  $1 \Omega = 1 \text{ V/A}$ .

Vi har her tatt utgangspunkt i en kopperledning, som i likhet med alle metaller har bare elektroner, med negativ ladning, som ladningsbærere. I andre ledere (lysrør, elektrolytter, halvledere) kan det også være positive ladningsbærere – og ledningsevnen  $\sigma$  blir vesentlig mindre. Metaller har  $\sigma \sim 10^8 \text{ A/(Vm)}$ , halvledere  $\sigma \sim 10^4 - 10^{-7} \text{ A/(Vm)}$  og “isolatorer”  $\sigma \sim 10^{-12} - 10^{-20} \text{ A/(Vm)}$ .

### 13.3.2 Kraft på leder i magnetfelt



Hvis man plasserer to stavmagneter med endene mot hverandre, vil de tiltrekke hverandre hvis disse endene er “motsatte poler”, og frastøte hverandre hvis de er “samme type poler” – kalt “nordpol” (N) hvis tilsvarende pol på en magnetnål peker mot nord, og “sørpol” (S) i motsatt fall. (Jordas magnetiske nordpol er dermed en magnetisk sørpol, og vice versa!) Og – legger man en glassplate eller et papir eller lignende oppå magnetene og drysser jernspon på, retter sponene seg inn langs “magnetfeltlinjene”, som skissert på figuren.



Plasserer man en strømførende leder i et slikt magnetfelt, *langs* magnetfeltlinjene – ja, da skjer det ingen ting. Men setter man lederen loddrett på feltlinjene i stedet, da får man en kraft på lederen, loddrett på både magnetfelt og leder, og proporsjonal med strømmen  $I$  og lederens lengde loddrett på feltet,  $\ell$ .

Vi lar proporsjonalitetsfaktoren i uttrykket for krafta definere magnetfeltet  $\vec{B}$ , og skriver uttrykket på formen

$$\vec{F} = I \vec{\ell} \times \vec{B} \quad (13-7)$$

eller, for krafta på en bit d  $\vec{\ell}$  av lederen,

$d\vec{F} = I d\vec{\ell} \times \vec{B}$	Kraft på lederelement i magnetfelt $\vec{B}$	(13-8)
---	---	--------

Enhet for magnetfelt er tesla; en tesla = 1 T = 1 N/(Am).

### 13.3.3 Lorentzkrafta

La oss prøve å fordele krafta  $\vec{F}$  i uttrykket  $\vec{F} = I \vec{\ell} \times \vec{B}$  på de enkelte ladningsbærere i ledere. For enkelhets skyld antar vi at alle ladningsbærerne er av samme slag, med ladning  $q$ .

Størrelsen  $\vec{l}$  er “lengde i strømmens retning”. Strømmen skriver vi som produkt av strømtetthetsvektor  $\vec{j}$  og tverrsnittet av ledere,  $A$ , og uttrykket for krafta på ledere blir da

$$\vec{F} = \vec{j} (\ell A) \times \vec{B} \quad (13-9)$$

hvor  $\ell A = \mathcal{V}$  er volumet av ledere.

Strømtettheten  $\vec{j}$  er produktet av ladning per ladningsbærer,  $q$ , antalltetthet av ladningsbærere,  $n$ , og ladningsbærernes middelhastighet  $\vec{v}$ . Vi har dermed at

$$\vec{F} = q(n\ell A) \vec{v} \times \vec{B} = q(n\mathcal{V}) \vec{v} \times \vec{B} \quad (13-10)$$

Antalltetthet ganger volum gir totalt antall,  $n\mathcal{V} = N$  – og middelhastigheten  $\vec{v}$  er definert ved

$$\vec{v} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \vec{v}_i \quad (13-11)$$

Innsetting i uttrykket for krafta  $\vec{F}$  gir med dette

$$\vec{F} = \sum_{i=1}^N \vec{F}_i = \sum_i q(\vec{v}_i \times \vec{B}) \quad (13-12)$$

Krafta på ledere kan dermed oppfattes som en sum av magnetiske krefter  $\vec{F}_B$  på de enkelte ladningsbærere

$$\vec{F}_B = q(\vec{v} \times \vec{B}) \quad (13-13)$$

Hvis det i tillegg til magnetfeltet også er et elektrisk felt  $\vec{E}$ , gir dette ei tilleggskraft  $\vec{F}_E = q \vec{E}$ . Summen av disse to kreftene gir den totale “elektromagnetiske krafta” på en ladningsbærer, kalt Lorentzkrafta<sup>6</sup>

$$\vec{F}_L = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) \quad \text{Lorentzkrafta}$$

(13-14)

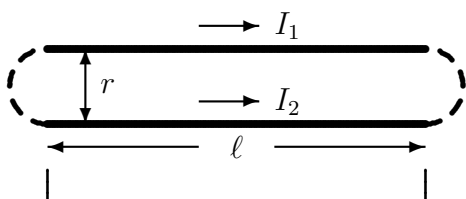
<sup>6</sup>Etter den nederlandske fysikeren Hendrik Antoon Lorentz (1853-1928) – som i 1895 postulerte at elektrisitet ble ledet av den gang uoppdagete partikler som han kalte “elektroner”. Lorentz fikk Nobelprisen i fysikk i 1902.

I et rent magnetfelt (og vakuum) gir Lorentzkrafta en sirkling av ladningene om magnetfeltlinjene, med sirklings(vinkel)frekvens  $\vec{\omega}_c$  (“syklotronfrekvensen”)

$$\vec{\omega}_c = -q \vec{B} / m \quad (13-15)$$

Denne krafta får for eksempel elektronene i ionosfæren til å sirkle om magnetfeltlinjene mens de beveger seg fra oss og ned til Antarktis og tilbake igjen. Og den brukes til å holde elektroner og ioner på plass i partikkelakseleratorer i Cern, og i stråleapparater på sykehus. I kombinasjon med et radielt elektrisk felt, i magnetronen som står inne i mikrobølgeovnen og gir varm mat på 5 minutter.

### 13.3.4 Krefter mellom strømførende ledere – og enheten ampere



Plasser to like lange og rette ledere med lengde  $\ell$  parallelt med hverandre og med avstand  $r$ , og send strømmen  $I_1$  og  $I_2$  gjennom dem. Det enkleste vil være å lage en strømsløyfe, som indikert på figuren, med  $I_1 = -I_2$ .

Lederne vil tiltrekke hverandre hvis  $I_1$  og  $I_2$  går i samme retning, og frastøte hverandre hvis de er motsatt rettet. Krafta mellom lederne er, som vist av Ampère, proporsjonal med produktet av strømmene og med lengden, og omvendt proporsjonal med avstanden mellom lederne,

$$F \propto -I_1 I_2 \ell / r \quad (13-16)$$

Dette uttrykket brukes til å *definere* strømenheten ampere (A):

$F := -(2 \cdot 10^{-7} \text{ N/A}^2) \cdot I_1 I_2 \ell / r$

Definisjon av enheten ampere (13-17)

Hvorfor tallet  $2 \cdot 10^{-7}$ ? Jo – dette stammer fra den tida da man brukte gram og centimeter som grunnenheter i stedet for kilogram og meter. kraftaheten ble da  $1 \text{ dyn} = 1 \text{ g cm/s}^2 = 10^{-5} \text{ N}$  – og 1 A er strømmen som sendt rundt i en strømsløyfe som indikert ovenfor, med total lengde  $2\ell = 1 \text{ m}$  og lederavstand 1 cm, gir en kraft på 1 dyn mellom lederne. Et greitt definisjonsekperiment, som hvermann kan sette opp enkelt i laboratoriet.

Proporsjonalitetskonstanten kaller vi, for å få pene uttrykk senere,  $\mu_0/2\pi$ , hvor størrelsen  $\mu_0$  kalles “permeabiliteten i vakuum”:

$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ N/A}^2$

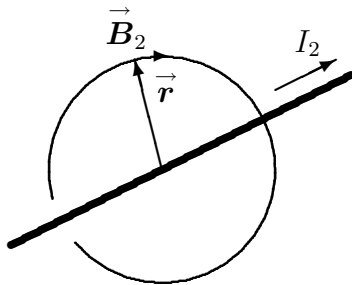
Permeabiliteten i vakuum (13-18)

### 13.3.5 Magnetfeltet fra en rett leder

Sammenlign krafta på en rett leder med strøm  $I_1$  i et magnetfelt  $\vec{B}$  loddrett på  $\vec{I}_1$ , og krafta på en rett leder med strøm  $I_1$ , når det er en annen parallell rett leder med strøm  $I_2$  i en avstand  $r$  fra  $I_1$ -lederen,

$$\begin{aligned} F &= I_1 \ell B \\ F &= \frac{\mu_0}{2\pi} I_1 I_2 \frac{\ell}{r} = I_1 \ell \frac{\mu_0 I_2}{2\pi r} \end{aligned} \quad (13-19)$$

Vi kan, i analogi med det elektrostatiske tilfellet, hvor vekselvirkninga kunne sees som å gå via et elektrostatiske felt, når det gjelder vekselvirkning mellom strømførende ledere se vekselvirkninga som å gå via et magnetisk felt – her satt opp av  $\vec{I}_2$ -lederen. Men i motsetning til det elektrostatiske feltet, hvor feltet går *langs* vektoren mellom ladningene, må det her være loddrett på avstandsvektoren – det vil si, feltet må være sirkulært, som vist nedenfor.



$$\vec{B}_2 = \mu_0 \frac{\vec{I}_2 \times \vec{r}}{2\pi r^2} \quad (13-20)$$

Dette kan generaliseres slik at man ser på feltet  $\vec{B}_2$  som satt sammen av feltene  $\Delta \vec{B}_2$  fra små lederelementer  $\Delta \vec{\ell}$ . Vi går ikke gjennom dette – som ble gjort av Biot og Savart i 1821 – men her vil vi kun presentere resultatet

$$d\vec{B}_2(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} I_2 \frac{d\vec{\ell} \times \vec{r}}{r^3} \quad \text{Biot-Savarts lov} \quad (13-21)$$

hvor  $\vec{r}$  er avstandsvektoren fra lederelementet til stedet  $\vec{B}_2$  skal beregnes.

En liten bemerkning tilslutt: Ovenstående kan sees som et resultat av Einsteins spesielle relativitetsteori. Beregner man Coulombkrefter mellom ladninger i bevegelse, får man inn ekstra ledd av orden  $(v/c)^2$ , hvor  $v$  er ladningshastighet og  $c$  er lyshastighet. Og da faller magnetfelt – og magnetiske krefter  $q \vec{v} \times \vec{B}$  – direkte ut av likningene, uten ekstra antagelser. Men dette er helt uhistorisk; de elektromagnetiske grunnlikningene ble satt opp før Einstein var født – og var “relativistisk riktige” lenge før relativitetsteorien hadde sett dagens lys.

### 13.3.6 Ampères lov

Magnetfeltlinjene rundt en strømførende leder (med strøm  $I$ ) danner lukkede sirkler. Og hvis vi integrerer magnetfeltet langs en slik sirkel, får vi – når vi bruker vinkel  $\phi$  som integrasjonsvariabel –

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = \frac{\mu_0}{2\pi} I \oint \frac{r d\phi}{r} = \frac{\mu_0}{2\pi} I \cdot (2\pi) = \mu_0 I \quad (13-22)$$

Her “sees lett” (jamfør Gauss lov) at integralet blir det samme uansett hvilken form den lukkede kurven har – og hvis det er flere strømførende ledere innenfor integrasjonsveien, adderes bare tilsvarende uttrykk til. Så vi har, generelt,

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = \mu_0 I \quad \text{Ampères lov} \quad (13-23)$$

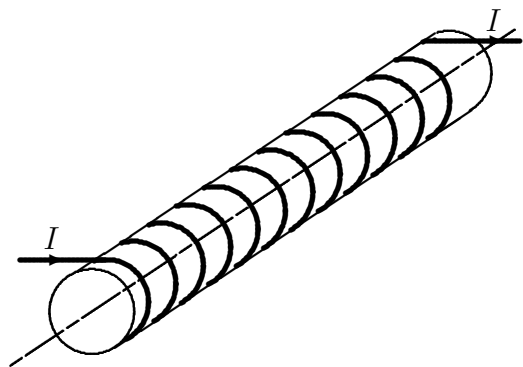
hvor  $I$  er total strøm gjennom en flate begrenset av den lukkede integrasjonsveien.

Vi kunne også prøve å gjøre som da vi fant Gauss lov (for elektriske felt), og integrere magnetfeltet over en lukket flate  $d\vec{A}$  – og vi ser at siden magnetfeltlinjene løper tilbake i seg selv, må et slikt integral være lik null,

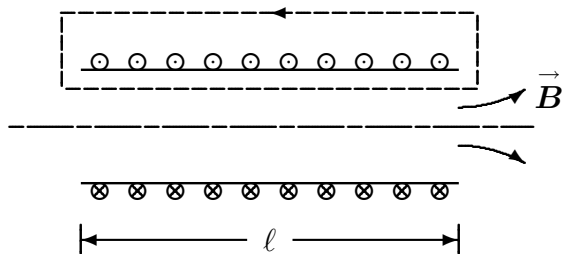
$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{A} = 0 \quad (13-24)$$

Dette uttrykket er man faktisk ikke *helt* sikker på er riktig – hvis det skulle være forskjellig fra null, ville det bety av det fantes “isolerte magnetiske monopoler”, si en ren magnetisk nordpol uten noen magnetisk sydpol koplet til denne. Slike er aldri observert, men det er mange partikkelfysikere som tror (håper) at de finnes. Det er blant de eksotiske partiklene man stadig leter etter, foreløpig forgjeves.

### 13.3.7 Magnetfeltet i en lang, rett spole



Tilnærmet homogent magnetfelt med kontrollert verdi kan lages ved hjelp av “spoler”, strømførende ledere viklet opp på en eller annen kjerne. Til venstre er vist en lang, rett spole. Denne vil gi et nær konstant magnetfelt inne i spolen, mens tallverdien av magnetfeltet faller raskt når man kommer litt utenfor spolen.



Vi tegner spolen om igjen, skjematisk. Anta lengde  $\ell$ , og  $N$  viklinger. Spoleterrsnittet (loddrett på spoleaksen) er  $A$ .

Magnetfeltet inne i spolen antas omtrent konstant, og magnetfeltet utenfor nær null – det vil avta minst som  $(1/r)$  med avstanden fra spolen (og i virkeligheten langt raskere).

Og så bruker vi Ampères lov, med den stiplede integrasjonsveien, til å finne magnetfeltet i spolen,  $B$ :

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = \mu_0 \sum I \quad \Rightarrow \quad B\ell = N\mu_0 I \quad (13-25)$$

Magnetfeltet i spolen er dermed

$B = (\mu_0 N / \ell) I$	Magnetfeltet i lang, rett luftfylt spole
--------------------------	---

(13-26)

Hvis spolen er fylt (i lengde  $\ell$ ) med et eller annet noenlunde normalt materiale, må vakuumpërmeabiliteten  $\mu_0$  i uttrykket over erstattes med en fenomenologisk permeabilitet  $\mu = \mu_r \mu_0$ , omlag som vi gjorde da det gjaldt kapasitans og dielektrisitetskonstanten. Men for de aller fleste materialer er  $\mu_r$  svært nær én – unntaket er såkalte ferromagnetiske materialer (nikkel, bløtt jern, ferritter). Vanlig bløtt stål har en  $\mu_r \approx 4000$  – og spoler med jern- eller ferrittkjerne brukes til å lage kraftige elektromagneter.

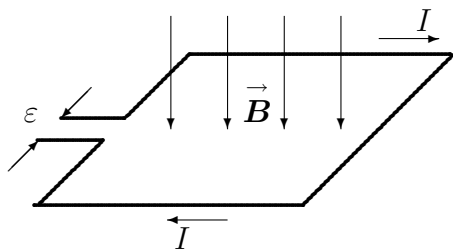
Fenomenologisk er ferromagnetismen et resultat av at materialene på mikroskopisk nivå virker som samlinger av små strømsløyfer, såkalte “magnetiske dipoler”. Men dette er en veldig lang historie, hvis man skal gi en brukbar forklaring – og vi serverer ikke den historien i dette kurset.

## 13.4 Magnetisk induksjon

Vi har hittil bare tatt for oss systemer hvor strømmer og felt er konstante i tid. Nå skal vi se på hva som skjer i tidsvariable systemer.



### 13.4.1 Faradays induksjonslov



Betrakt ei strømsløyfe plassert i et tidsvariabelt magnetfelt  $\vec{B}(t)$ . Gjennom strømsløyfa går det en magnetisk fluks

$$\Phi_B = \int_A \vec{B} \cdot d\vec{A} \quad \text{Magnetisk fluks} \quad (13-1)$$

Måler man spenninga  $\varepsilon$  over utgangsklemmene for strømsløyfa, finner man<sup>7</sup> at

$\varepsilon = -d\Phi_B/dt \quad \text{Faradays induksjonslov}$

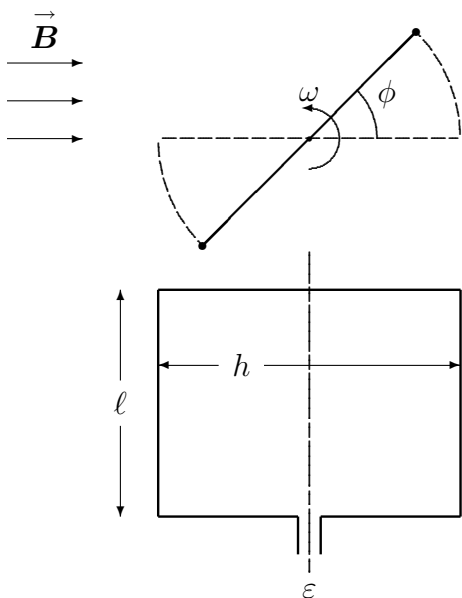
(13-2)

Størrelsen  $\varepsilon$  kalles gjerne “elektromotorisk kraft”. Og retningen – indikert med minuset i ligninga over – er slik at:

Den induuerte elektromotoriske krafta som prøver å sette igang en strøm  $I$  med retning slik at magnetfeltet som lages av denne strømmen, motvirker fluksforandringen (Lenz lov).<sup>8</sup>

Fluksforandringa  $d\Phi_B/dt$  kan framkomme på to ulike måter; Enten ved at  $\vec{B}(\vec{r}, t)$  varierer med tiden mens ledersløyfa er i ro, eller ved at ledersløyfa beveger seg (eventuelt skifter form), slik at fluksen gjennom sløyfa dermed forandrer verdi.

### 13.4.2 Generering av vekselstrøm



La en rektangulær strømsløyfe med tverrsnitt  $A = \ell \times h$  rotere med vinkelhastighet  $\omega$  i et konstant magnetfelt, som vist på figuren.

<sup>7</sup>Det vil si, Michael Faraday fant det i 1831

<sup>8</sup>Lenz lov – etter Heinrich Friedrich Emil Lenz (1804-65) er et spesialtilfelle av LeChateliers prinsipp: Naturen reagerer på forsøk på forandringer med å motsette seg forandringene.

Fluksen gjennom sløyfa er

$$\Phi_B = \int \vec{B} \cdot d\vec{A} = BA \sin \phi \quad (13-3)$$

Dreiningvinkelen er  $\phi = \omega t$ , og indusert spenning – som vi kaller  $V_1(t)$  og gir en god dag i fortegnet på – blir

$$V_1(t) = AB \frac{\partial \sin \omega t}{\partial t} = AB\omega \cos \omega t \quad (13-4)$$

Hvis vi i stedet for bare én strømsløyfe hadde en flat, rektangulær spole med  $N$  viklinger, ville den totale spenninga over spolen bli ei vekselspenning

$$V = NV_1 = NAB\omega \cos \omega t \quad (13-5)$$

Det som er beskrevet ovenfor, er prinsippet for nesten all kraftproduksjon i verden idag. “Rotasjonsarbeidet” tilføres som mekanisk energi fra en vannturbin, gassturbin, en dampmaskin eller lignende.

Systemet kan også “drives baklengs” – det vil si man kan sende vekselstrøm inn på en roterende spole, og ta ut mekanisk energi. Da er dette en synkronmotor.

### 13.4.3 Teslas trefasegenerator

I den virkelige verden benyttes stort sett ikke roterende spoler og faste magnetfelt, men man lar i stedet magnetfeltet rotere og lar spolene ligge fast,

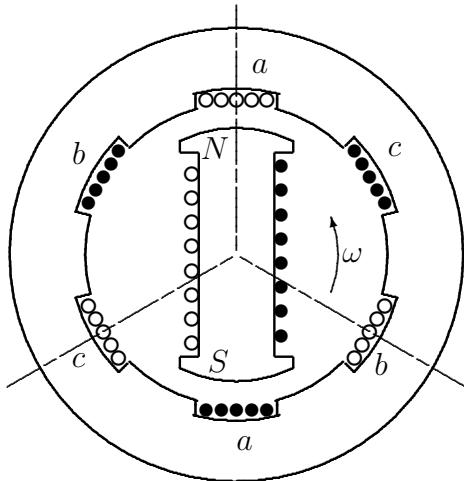
$$(\text{roterende spole} + \text{fast magnetfelt}) \rightarrow (\text{fast spole} + \text{roterende magnetfelt})$$

Dertil tar man ikke bare ut én vekselspenning, men tre, forskjøvet en fase  $2\pi/3$  i forhold til hverandre.

Prinsippet, som ble oppfunnet av Nikolai Tesla i 1888<sup>9</sup> er skissert nedenfor.

---

<sup>9</sup>Nikolai Tesla (1857-1943) var sønn av en ortodoks serbisk prest i Kroatia. Han ble ansatt hos Edison, og foreslo at man laget en generator som vist her. Men Edison var ikke interessert – han ville satse på likestrøm. Og Tesla gikk over til Westinghouse. Dette ble ett av de største varp Westinghouse noengang har gjort – mer enn 90 prosent av verdens kraftproduksjon kommer idag fra Tesla-type generatorer.



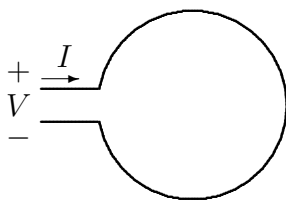
Både “rotor” og “stator” er laget av bløtt jern. Rotorviklingene tilføres likestrøm. Når rotoren drives rundt, fås et roterende magnetfelt, som gir en variabel fluks i statorviklingene.

Utgangsspenningene blir – i forhold til det felles “jord-punktet” –

$$\left. \begin{aligned} v_a(t) &= V_0 \cos \omega t \\ v_b(t) &= V_0 \cos(\omega t - 2\pi/3) \\ v_c(t) &= V_0 \cos(\omega t + 2\pi/3) \end{aligned} \right\} \quad \begin{array}{l} \text{3-fase-spenninger} \end{array} \quad (13-6)$$

I et såkalt “balansert nett” greier det seg med 3 ledninger for å føre strøm fra en trefasegenerator til forbruker – men for få år siden gikk også Norge endelig over til internasjonal standard med 4 ledninger. Dette gir mindre ulykkesrisiko.

#### 13.4.4 Selvinduksjon og magnetisk feltenergi



Betrakt igjen ei strømsløyfe, men nå uten noe ytre magnetfelt. Strømmen  $I$  resulterer i et magnetfelt  $\Phi_B \propto I$  gjennom strømsløyfa, og med  $dI/dt \neq 0$  fås dermed en “indusert spenning” over strømsløyfa.

$$V \propto -\varepsilon = \frac{d\Phi_B}{dt} \propto \frac{dI}{dt} \quad (13-7)$$

Den fysiske effekten – en tidsvariabel strøm induserer ei motspenning som motvirker tidsvariasjonen i strømmen – kalles selvinduksjon, og proporsjonalitetsfaktoren kalles (selv)induktans  $L$ .

$$V = -L \frac{dI}{dt} \quad \begin{array}{l} \text{Selvinduksjon} \\ L : \text{induktans} \end{array}$$

(13-8)

Enheten for induktans er 1 henry = 1 H = 1 Vs/A.

## INDUKTANSEN TIL EN LANG, RETT SPOLE

Betrakt en lang, rett og luftfylt spole, med tverrsnitt  $A$  og lengde  $\ell$ . Magnetfeltet inne i spolen fant vi tidligere fra Ampères lov;  $B = \mu_0 IN/\ell$ , hvor  $I$  er strømmen gjennom spolen.

Fluksen blir  $\Phi_B = \int \vec{B} \cdot d\vec{A} = BA$ , og “selvindusert spenning” over spolen blir dermed

$$V = Nd\Phi_B/dt = N \cdot \mu_0 N \ell \cdot dI/dt \quad (13-9)$$

Induktansen er følgelig

$L = N^2 \mu_0 A / \ell$	Induktans for lang, rett spole
--------------------------	-----------------------------------

(13-10)

Talleksempel: Ta en papprull med lengde  $\ell = 100$  mm, diameter  $d = 40$  mm og 200 viklinger.<sup>10</sup> Induktansen blir:  $L = 200^2 \cdot 4\pi \cdot 10^{-7} \cdot (\pi \cdot 0,04^2/4)/0,1 = 0,63$  mH.

## LAGRET ENERGI.

Energien lagret i en spole kan finnes på tilsvarende måte som vi fant lagret energi i en kondensator. For å flytte en ladning  $dQ$  over en spenning  $V$  kreves et arbeid  $dW = V dQ$ . Innsetting av  $V = LdI/dt$  og  $dQ = Idt$  gir

$$dW = V dQ = (LdI/dt) \cdot (Idt) = LI dI \quad (13-11)$$

Integrasjon av dette, fra  $I = 0$ , gir

$W = \frac{1}{2} LI^2$	Lagret energi i en induktans
------------------------	------------------------------

(13-12)

For å komme fra dette uttrykket over til uttrykk for “magnetisk feltenergi per volumenhet”, setter vi inn uttrykkene for  $L$  og  $I(B)$  for en lang, rett spole;

$$\begin{aligned} W &= \left( \frac{1}{2} N^2 \mu_0 A / \ell \right) \cdot \left( \frac{B}{\mu_0 N / \ell} \right)^2 \\ &= \frac{1}{2} (B^2 / \mu_0) (A\ell) \end{aligned} \quad (13-13)$$

Her er  $A\ell$  volumet (hvor det magnetiske feltet er konstant og forskjellig fra null), og faktoren foran blir da magnetisk feltenergi per volumenhet,

Magnetisk feltenergi per volumenhet $= \frac{1}{2} B^2 / \mu_0$
---

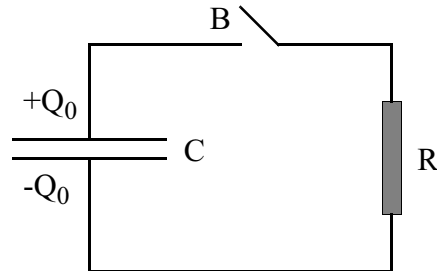
(13-14)

<sup>10</sup>For er par generasjoner siden laget man spolen for instilling av stasjonen på sitt krystallapparatet (batteriløs radiomottaker) på denne måten, for å få inn f.eks. den tids hovedsender for popmelodier: Radio Luxemburg. Spolekjernen kunne f.eks. være fra en dorull.

## 13.5 Enkle kretser

### 13.5.1 RC-krets

En kondensator med kapasitans  $C$  lades ut gjennom en motstand  $R$ . Spenninga over kondensatoren er  $V_0 = \frac{Q_0}{C}$ . Se figuren under:



Bryteren lukkes og initiell strøm blir

$$I = \frac{V_0}{R} = \frac{Q_0}{RC} \quad (13-15)$$

Ladningen  $Q$  avtar

$$I = -\frac{dQ}{dt} \quad (13-16)$$

Summen av spenningsfall over kretsen er lik null

$$\frac{Q}{C} - RI = 0 \Rightarrow \frac{Q}{C} + R \frac{dQ}{dt} = 0 \Rightarrow \frac{dQ}{Q} = -\frac{dt}{RC} \quad (13-17)$$

Integrasjon av ligninga gir

$$\int_{Q_0}^Q \frac{1}{Q} dQ = - \int_0^t \frac{1}{RC} dt \Rightarrow \ln \frac{Q}{Q_0} = -\frac{t}{RC} \quad (13-18)$$

Dermed fås

$Q = Q_0 \exp\left(\frac{-t}{RC}\right) \quad \text{hvor } \tau = RC \text{ er tidskonstanten}$

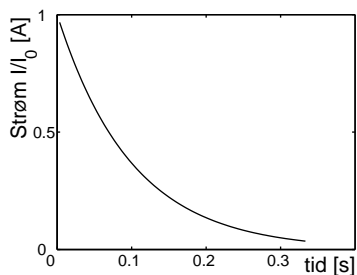
(13-19)

Strømmen blir dermed

$I = -\frac{dQ}{dt} = \frac{Q_0}{\tau} \exp(-t/\tau) = I_0 \exp(-t/\tau)$

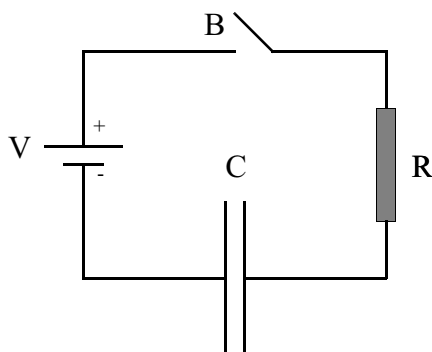
(13-20)

Strømkurven blir med verdier  $R = 10 \text{ k}\Omega$  og  $C = 10 \text{ }\mu\text{F}$



### 13.5.2 Opplading av kondensator

Ei spenningskilde  $V$  skal brukes til opplading av en kondensatoren.



Når bryteren B lukkes fås at summen av spenningsfall over kretsen er lik null

$$V - RI - \frac{Q}{C} = 0 \quad (13-21)$$

Initielt ( $t = 0$ ) gjelder

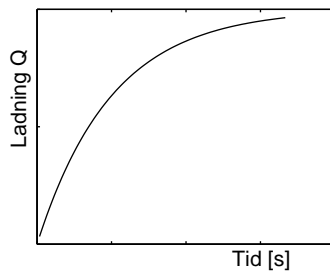
$$Q_0 = 0 \text{ og } I_0 = \frac{V}{R} \quad (13-22)$$

Ladning tilføres kondensatoren. Strømmen  $I = dQ/dt$ , og vi kan skrive

$$\frac{dQ}{dt} + \frac{Q}{RC} = \frac{V}{R} \quad (13-23)$$

Inspeksjon gir prøveløsning  $Q = Q' \exp(-t/RC) + VC$ , som med grensebetingelsen  $Q(t = 0) = 0$ , gir  $Q' = -VC$ . Dermed fås

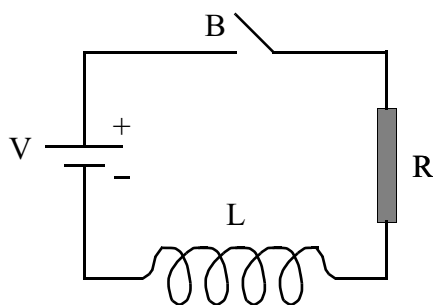
$$Q(t) = VC(1 - \exp(-t/RC)) \text{ og } I(t) = \frac{dQ}{dt} = \frac{V}{R} \exp(-t/RC) \quad (13-24)$$



Ladningen øker som vist i kurven

### 13.5.3 RL-krets

Spenningen over spolen er  $V_s = LdI/dt$ .



Når bryteren B lukkes, fås at summen av spenningsfallene over kretsen er lik null

$$V - RI - L \frac{dI}{dt} = 0 \quad (13-25)$$

For  $t = 0$  fås

$$V = L \frac{dI}{dt} \Big|_{I=0} \quad (13-26)$$

Likninga blir den samme som for tilfellet med opplading av kondensator. Løsningen er dermed

$$I(t) = I' \left( 1 - \exp\left(-\frac{R}{L}t\right) \right) \quad (13-27)$$

Konstanten  $I'$  finnes ved

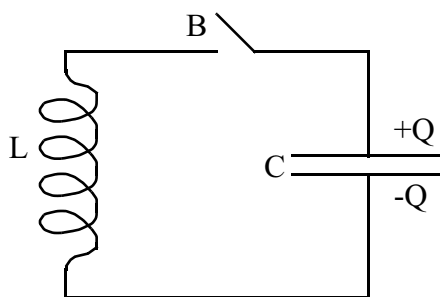
$$\frac{dI}{dt} \Big|_{I=0} = \frac{I'R}{L} = \frac{V}{L} \quad (13-28)$$

Dermed får vi

$$I(t) = \frac{V}{R} \left( 1 - \exp\left(-\frac{R}{L}t\right) \right) \quad \text{hvor tidskonstanten } \tau = L/R \quad (13-29)$$

### 13.5.4 LC-krets

Initielt er kondensatoren oppladet. Se figur.



Når bryteren B lukkes fås at summen av spenningsfall over kretsen er lik null

$$L \frac{dI}{dt} + \frac{Q}{C} = 0 \quad (13-30)$$

Som gir når  $I = dQ/dt$

$$L \frac{d^2Q}{dt^2} + \frac{Q}{C} = 0 \quad (13-31)$$

som er en udempet svingelikning av form  $m\ddot{x} + kx = 0$  med løsning

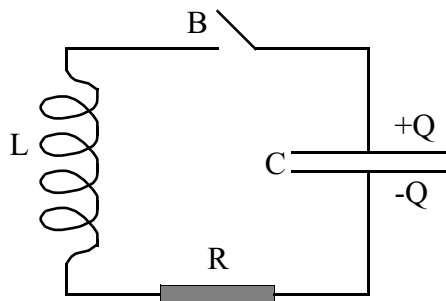
$$Q(t) = A \cos(\omega t + \varphi) \quad (13-32)$$

hvor  $\omega = \sqrt{\frac{1}{LC}}$  er vinkelfrekvensen.

### 13.5.5 RLC-krets

Vi starter med kondensatoren oppladet.





Når bryteren B lukkes, fås at summen av spenningsfallene over kretsen er lik null

$$L \frac{dI}{dt} + RI + \frac{Q}{C} = 0 \quad (13-33)$$

Fordi  $I = dQ/dt$  gir dette

$$L \frac{d^2Q}{dt^2} + R \frac{dQ}{dt} + \frac{Q}{C} = 0 \quad (13-34)$$

som er differensiallikninga for en dempede svinginger av form  $m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = 0$ . Løsningen til denne likninga er

$$Q(t) = A \exp(-\delta t) \cos(\omega t + \varphi) \quad (13-35)$$

hvor  $\omega = \sqrt{\frac{1}{LC}}$  er vinkelfrekvensen og  $\delta = R/2L$  er dempningskonstanten.

#### OPPSUMMERING AV KAP. 13

- Coulombs lov  $F = q_1 q_2 / (4\pi\epsilon_0 r^2)$  er det egentlige grunnlaget for all elektrostatikk.
- Elektrisk felt er definert ved krafta på en ladning  $q$ ,  $\vec{F} = q \vec{E}$ .
- Coulombfeltet fra og Coulombpotensialet ved en lading  $q$  er  $E = q/(4\pi\epsilon_0 r^2)$  og  $V = q/(4\pi\epsilon_0 r)$ .
- Gauss lov (elektrostatisk) gir sammenhengen mellom ladning innenfor og elektrisk fluks ut av ei lukket flate,  $Q = \epsilon_0 \Phi_E = \oint \epsilon_0 \vec{E} \cdot d\vec{A}$ .
- Konduktiviteten til et stoff (en leder) er forholdet mellom strømtetthet og elektrisk felt,  $\vec{j} = \sigma \vec{E}$ .

- Resistansen til en motstandstråd med lengde  $\ell$  og tverrsnitt  $A$  er  $R = \sigma^{-1}\ell/A$ .
- Ohms lov gir sammenheng mellom strøm gjennom, og spenning over en resistans,  $V = RI$ .
- Krafta på en lederbit med strøm  $I$  i et magnetfelt  $\vec{B}$  er  $d\vec{F} = I d\vec{\ell} \times \vec{B}$ . Dette kan sees som *definisjonslikninga* for magnetfelt.
- Lorentzkrafta er krafta på en ladet partikkel i et elektromagnetisk felt,  $\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$ .
- Ampères lov gir sammenheng mellom strøm innenfor og magnetfelt langs en lukket kurve,  $\sum I = \oint \mu_0^{-1} \vec{B} \cdot d\vec{S}$ .
- Faradays lov gir sammenheng mellom spenning (indusert elektromotorisk kraft) over og magnetisk fluks gjennom ei (nesten) lukket strømsløyfe,  $\varepsilon = -d\Phi_B/dt = -(d/dt) \int_A \vec{B} \cdot \vec{A}$ .
- I Faradays lov kan “d/dt” skyldes enten forandring av  $\vec{B}$  med tida, eller forandring av strømsløyfa (areal, posisjon).
- Kapasitans og induktans:
 
$$Q = dI/dt = CV \text{ (kapasitans } C)$$

$$V = LdI/dt \text{ (induktans } L)$$
- Kapasitans for platekondensator og induktans for lang, rett spole (i vakuum) er
 
$$C = \epsilon_0 A/d \text{ og } L = \mu_0 N^2 A/\ell.$$
- Dielektrisitetskonstanten i vakuum er  $\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12} \text{ F/m}$   
 Permeabiliteten i vakuum er  $\mu_0 \equiv 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ T/(Am)}$ .  
 med  $1/(\mu_0\epsilon_0) = c^2$ , hvor  $c = 3 \cdot 10^8 \text{ m/s}$  er lyshastigheten.
- Elektrostatisk energi:  $W = \frac{1}{2}CV^2 = \int_V \frac{1}{2}\epsilon_0 E^2 dV$
- Magnetisk energi:  $W = \frac{1}{2}LI^2 = \int_V \frac{1}{2}(B^2/\mu_0) dV$
- Dielektrika:  $\epsilon_0 \rightarrow \epsilon = \epsilon_r\epsilon_0$
- Magnetiske materialer:  $\mu_0 \rightarrow \mu = \mu_r\mu_0$



# Kapittel 14

## Elektromagnetiske bølger

### Innhold

---

14.1 Om elektromagnetiske bølger i vakuum . . . . .	191
14.2 Forskyvningsstrøm og generalisert Ampères lov . . . .	193
14.3 Maxwells likninger . . . . .	194
14.4 Bølgelikninga i vakuum . . . . .	196

---

### 14.1 Om elektromagnetiske bølger i vakuum

Vi skal helt til slutt vise at elektriske og magnetiske felt i vakuum oppfyller en bølgeligning av form helt som de “vanlige bølgelikningene” vi har møtt tidligere. Vi skriver likninga i 3 romlige dimensjoner i stedet for bare én, det vil si  $\partial/\partial x \rightarrow \nabla$ , og har da

$$\left\{ \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{1}{\mu_0 \epsilon_0} \nabla^2 \right\} (\vec{E}, \vec{B}) = 0 \quad (14-1)$$

Bølgelikninga er den samme for elektriske og magnetiske felt. Her er faktoren foran  $\nabla^2$  bølgehastigheten, som vanlig, og vi har

$$\frac{1}{\mu_0 \epsilon_0} = c^2 \quad (14-2)$$

hvor

$$c = 299792485 \text{ m/s} = \text{lyshastigheten i vakuum} \quad (14-3)$$

Historisk sett kom bølgelikninga før man hadde noen idé om at lys hadde med elektromagnetisme å gjøre, og det kom som en stor overaskelse at tallverdien av  $1/\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}$  kom ut lik den målte verdien av lyshastigheten.

Idag er lyshastigheten *definert* til å ha verdien gitt over – dette definerer lengden på meteren, når tidsenheten sekund er gitt (fra frekvensen på en spektrallinje i en cesiumisotop).

Tar vi for oss *plane* bølger med forplantningsretning i  $x$ -retning ( $\nabla \rightarrow \partial/\partial x$  i bølgelikninga), det vil si antar en løsning av form

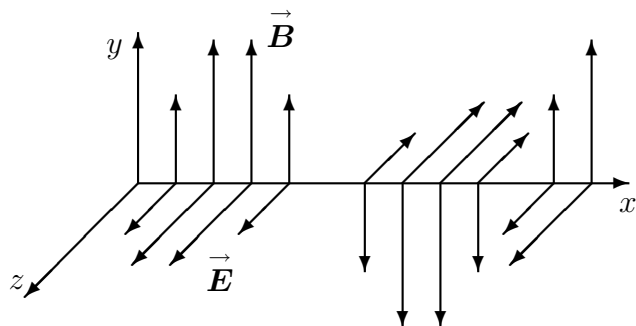
$$\vec{E} = \vec{E}_0 \cos(\omega t - kx[+\phi]) \quad (14-4)$$

finner vi at løsningen har egenskapene

$$\left. \begin{array}{l} \vec{E} \perp \vec{k} \\ \vec{B} \perp \vec{k} \\ \vec{B} \perp \vec{E} \\ |E| = c|B| \end{array} \right\} \quad \begin{array}{l} \text{Transversal e.m. bølge i vakuum} \\ \omega/k = c \approx 3 \cdot 10^8 \text{ m/s} \end{array} \quad (14-5)$$

Vektorene  $\vec{E}$  og  $\vec{B}$  kan, med  $\vec{k} = k \vec{e}_x$ , ha komponenter både i  $y$ - og  $z$ -retning. Hvis disse har ulike amplituder og faser, vil resultantvektorene ( $\vec{E} = \vec{E}_y + \vec{E}_z$ ) rotere – vi har det som kalles “elliptisk polarisert bølge”. Og med samme amplituder i  $y$ - og  $z$ -retning, blir ellipsen en sirkel, vi får “sirkulærpolarisert bølge”.

Det enkleste er å betrakte en bølge hvor si  $E_y \equiv 0$ . Bare  $B_y$  og  $E_z$  blir da forskjellige fra null, og vi har hva som kalles en planpolarisert bølge.



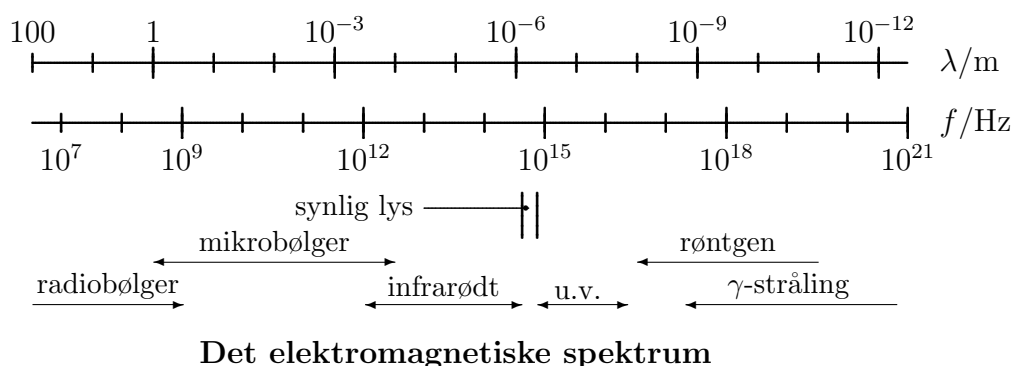
Planpolarisert elektromagnetisk bølge, skjematisk.

#### DET ELEKTROMAGNETISKE SPEKTRUM

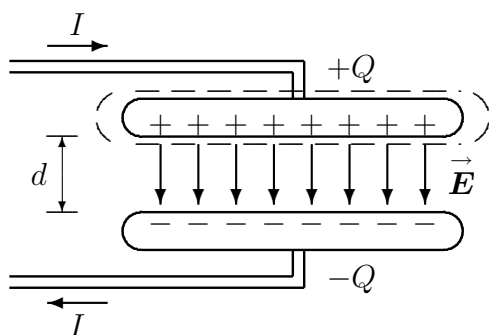
Elektromagnetiske bølger i vakuum “sorteres” gjerne etter hvilke frekvens- eller bølgelengdeområder de opptrer i. Og for å minne om det, vi har generelt

$$\begin{array}{ll} \lambda = 2\pi/k & \text{Bølgelengden} \\ f = \omega/2\pi & \text{Frekvensen} \\ c = \lambda \cdot f & \text{Lyshastigheten} \end{array}$$

Sorteringen i “bokser med navn” er i store trekk som illustrert nedenfor.



## 14.2 Forskyvningsstrøm og generalisert Ampères lov



La oss igjen betrakte en platekondensator, men nå også tegne inn tilledningene “med endelig tykkelse”.

Platekondensatoren har areal  $A_k$ , plateavstanden er  $d$ , og dielektriket er luft (vakuum).

Tilledningene har tverrsnitt  $A_\ell$ .

Ampères lov

$$\epsilon_0 \oint \vec{E} \cdot d\vec{s} = Q$$

gir oss, for denne konfigurasjonen og med integrasjonsveien vist på figuren

$$Q = \epsilon_0 EA = (\epsilon_0 A/d) V = C V$$

$$I = dQ/dt = CdV/dt = \epsilon_0 A dE/dt$$

Hvordan skal vi forstå dette?

Går strømmen *gjennom* kondensatoren – kan strøm gå gjennom vakuum?

Ja, den strømmen som går *til* den ene platen, går ut fra den andre, så på ett vis kan man vel si at det går strøm gjennom vakuum – selv om det ikke er ladninger i bevegelse der:

### I lederen:

Ladningsstrøm,

$$I_\ell = -en_e v_e A_\ell = j_c A_\ell$$

hvor  $e$  er elektronladningen,  $n_e$  elektrontettheten,  $v_e$  midlere elektronhastighet og  $j_c$  ladningsstrømtetthet.

### I vakuum:

Forskyvningsstrøm,

$$I_d = \epsilon_0(dE/dt)A_k = j_d A_k$$

hvor  $j_d$  er “forskyvningsstrømtettheten”.

Begrepet “forskyvningsstrøm” stammer fra betraktning av dielektrika: De blir polarisert av feltet, og polarisasjonen representerer en forskyvning av ladningene på atomene eller molekylene ut fra likevekt. Når polarisasjonen er tidsavhengig, gir denne variable polarisasjonen en netto ladningsstrøm i dielektriket.

Hva som skulle “polariseres” i vakuum, var og er ikke så lett å forstå. Maxwell (1861) forsøkte å forklare dette ved å anta at vakuum var en materiell “eter”, som besto av hvirvler med ladninger mellom. Men det var nok ikke riktig – vakuum er noe underlig noe, som man heller ikke idag riktig forstår.

I alle fall – det så ut til å stemme med alle likninger og faktisk oppførsel til strømmer og elektromagnetiske felt å regne denne “forskyvningsstrømmen” inn i likninga.

Og Maxwell foreslo – med stor suksess – at Ampères lov skulle forstås som

$(1/\mu_0) \oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = I_{\text{total}} = I_c + I_d = I_c + \epsilon_0 \frac{d\Phi_E}{dt}$	Generalisert Ampères lov	(14-2)
---	-----------------------------	--------

hvor  $I_c$  er “ordentlig strøm” av ladningsbærere, og  $I_d$  denne underlige forskyvningsstrømmen.

## 14.3 Maxwells likninger

Vi kan nå samle sammen fra de foregående avsnittene fire “grunnlikninger”, Faradays induksjonslov, Ampères lov (generalisert), Gauss lov for elektrisk felt, og den tilsvarende “Gauss lov” for magnetisk felt.

Vi har da – når vi i Faradays induksjonslov skriver den induserte elektromotoriske kraft i en sløyfe,  $\varepsilon$ , som integralet av elektrisk felt ganger veilengde rundt sløyfen –

$\oint \vec{E} \cdot d\vec{s} = d\Phi_B/dt$	Faradays lov	(14-1)
$\oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = \mu_0 I_c + \mu_0 \epsilon_0 d\Phi_E/dt$	Ampères lov	
$\oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = Q/\epsilon_0$	Gauss lov	
$\oint \vec{B} \cdot d\vec{A} = 0$	Gauss lov (magnetisk)	

Disse likninga kalles gjerne “Maxwells likninger på integralform”.

Vi skal mishandle dem så de kommer over på form av partielle differensiallikninger i stedet – det er det greieste utgangspunktet når man skal vri ei bølgeligning ut av de.

For å omforme likningene, bruker vi

$$\begin{aligned} \text{Gauss divergens-teorem:} \quad \oint \vec{\mathbf{F}} \cdot d\vec{\mathbf{A}} &= \int (\nabla \cdot \vec{\mathbf{F}}) dV \\ \text{Stokes teorem:} \quad \oint \vec{\mathbf{F}} \cdot d\vec{\mathbf{s}} &= \int (\nabla \times \vec{\mathbf{F}}) \cdot d\vec{\mathbf{A}} \end{aligned} \quad (14-2)$$

Gauss divergensteorem omformer uttrykket for fluksen av et vektorfelt gjennom en lukket flate til et volumintegral over divergensen av vektorfeltet, og Stokes teorem omformer et linjeintegral av et vektorfelt rundt en lukket kurve til et flateintegral over curl til vektorfeltet.

#### FARADAYS OG AMPÈRES LOVER – OG STOKES TEOREM

$$\begin{aligned} \text{Faraday:} \quad \oint \vec{\mathbf{E}} \cdot d\vec{\mathbf{s}} &= -\frac{d\Phi_B}{dt} \\ \Rightarrow \quad \int (\nabla \times \vec{\mathbf{E}}) \cdot d\vec{\mathbf{A}} &= -\frac{d}{dt} \int \vec{\mathbf{B}} \cdot d\vec{\mathbf{A}} \end{aligned} \quad (14-3)$$

Dette skal være gyldig uansett hva flata  $\vec{\mathbf{A}}$  er, og følgelig må man ha

$$\boxed{\nabla \times \vec{\mathbf{E}} = -\frac{\partial \vec{\mathbf{B}}}{\partial t}} \quad (14-4)$$

$$\begin{aligned} \text{Ampère:} \quad \oint \vec{\mathbf{B}} \cdot d\vec{\mathbf{s}} &= \mu_0 I_c + \mu_0 \epsilon_0 \frac{d\Phi_E}{dt} \\ \Rightarrow \quad \int (\nabla \times \vec{\mathbf{B}}) \cdot d\vec{\mathbf{A}} &+ \mu_0 \int \vec{\mathbf{j}}_c \cdot d\vec{\mathbf{A}} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{d}{dt} \int \vec{\mathbf{E}} \cdot d\vec{\mathbf{A}} \end{aligned} \quad (14-5)$$

hvor vi har satt inn integralet over ladningsstrømtettheten  $\vec{\mathbf{j}}_c$  for ladningsstrømmen  $I_c$

Igjen skal uttrykket være gyldig uansett hva  $\vec{\mathbf{A}}$  er, og vi får

$$\boxed{\nabla \times \vec{\mathbf{B}} = \mu_0 \left[ \vec{\mathbf{j}}_c + \epsilon_0 \frac{\partial \vec{\mathbf{E}}}{\partial t} \right]} \quad (14-6)$$

#### GAUSS LOVER – OG GAUSS TEOREM

$$\begin{aligned} \text{Elektrisk:} \quad \epsilon_0 \oint \vec{\mathbf{E}} \cdot d\vec{\mathbf{A}} &= Q \\ \Rightarrow \quad \epsilon_0 \int_V (\nabla \cdot \vec{\mathbf{E}}) dV &= \int_V \rho_e dV \end{aligned} \quad (14-7)$$

Vi har her satt ladningen  $Q$  lik volumintegralet over romladningstettheten  $\rho_e$ . For at dette skal være gyldig uansett hva volumet  $V$  er, må man ha

$$\boxed{\epsilon_0 \nabla \cdot \vec{\mathbf{E}} = \rho_e} \quad (14-8)$$



Dette uttrykket er beæret med et eget navn: Poissons lov.<sup>1</sup>

$$\begin{aligned} \text{Magnetisk:} \quad \oint \vec{B} \cdot d\vec{A} &= 0 \\ \Rightarrow (\nabla \cdot \vec{B}) &= 0 \end{aligned} \quad (14-9)$$

Og igjen – gyldighet uansett hva volumet er, krever at

$$\boxed{\nabla \cdot \vec{B} = 0} \quad (14-10)$$

#### MAXWELLS LIKNINGER (DIFFERENSIALFORM)

Vi samler sammen resultatene av det ovenforstående, og har da *et fullstendig sett* av likninger til å beskrive elektromagnetiske fenomener.

$$\boxed{\begin{aligned} \nabla \times \vec{E} &= -\partial \vec{B} / \partial t \\ \nabla \times \vec{B} &= \mu_0 \vec{j}_c + \mu_0 \epsilon_0 \partial \vec{E} / \partial t \\ \epsilon_0 \nabla \cdot \vec{E} &= \rho_e \\ \nabla \cdot \vec{B} &= 0 \end{aligned}} \quad \begin{array}{l} \text{Maxwells likninger} \\ (14-11) \end{array}$$

Hvis likningene skal brukes i materielle medier, er de riktige nok – hvis man tar med feltene fra elektrisk og magnetisk polarisasjon også. Men det er mer hensiktsmessig å modifisere dem litt, slik at man kan bruke fenomenologiske sammenhenger mellom felt og polarisasjon (relative dielektrisitetskonstanter og permeabiliteter). Men det skal vi ikke gjør i dette kurset.

## 14.4 Bølgelikninga i vakuum

Med begrepet “vakuum” vil vi (akkurat her) forstå rom hvor det hverken er elektriske romladninger eller elektriske strømmer, det vil si hvor  $\rho_e \equiv 0$  og  $\vec{j}_c \equiv 0$ .

Maxwells likninger forenkles da til

$$\begin{aligned} \text{(I)} \quad \nabla \times \vec{E} &= -\partial \vec{B} / \partial t \\ \text{(II)} \quad \nabla \times \vec{B} &= \mu_0 \epsilon_0 \partial \vec{E} / \partial t \\ \text{(III)} \quad \nabla \cdot \vec{E} &= 0 \\ \text{(IV)} \quad \nabla \cdot \vec{B} &= 0 \end{aligned} \quad (14-1)$$

<sup>1</sup>Siméon Denis Poisson (1781-1840), fransk matematiker. Professor ved École Polytechnique 22 år gammel, adlet av Napoleon.

Vi kombinerer likningene (I) og (II), og eliminerer  $\vec{B}$ , slik at vi får en ligning for  $\vec{E}$  alene. Dette gjør vi ved å ta curl til likning (I), og så på høyresiden sette inn for curl  $\vec{B}$  fra (II):

$$\begin{aligned} \nabla \times (\text{I}) \\ \Rightarrow \quad \nabla \times (\nabla \times \vec{E}) &= -\frac{\partial}{\partial t}(\nabla \times \vec{B}) \\ &= -\frac{\partial}{\partial t}(\mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \vec{E}) \\ \Rightarrow \quad \nabla \times (\nabla \times \vec{E}) &= -\mu_0 \epsilon_0 \partial^2 \vec{E} / \partial t^2 \end{aligned} \quad (14-2)$$

Så bruker vi sammenhengen

“curl curl = grad div - nabla-kvadrat”

det vil si

$$\nabla \times (\nabla \times \vec{E}) = \nabla(\nabla \cdot \vec{E}) - \nabla^2 \vec{E} \quad (14-3)$$

Her er etter ligning (III)  $\nabla \cdot \vec{E} = 0$ , og vi står igjen med

$$-\nabla^2 \vec{E} = -\mu_0 \epsilon_0 \partial^2 \vec{E} / \partial t^2$$

Lett omstokking gir ei “bølgelikning på normalform”,

$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \vec{E} - \frac{1}{\mu_0 \epsilon_0} \nabla^2 \vec{E} = 0$	Bølgelikninga for elektro- magnetiske bølger i vakuum	(14-4)
---	--	--------

Eliminasjon av  $\vec{E}$  gir samme likning for  $\vec{B}$ .

Her er  $1/\mu_0 \epsilon_0$  kommet der hvor bølgehastigheten i kvadrat skal være i bølgelikninga – det vil si bølgehastigheten er

$$c = 1/\sqrt{\mu_0 \epsilon_0} \approx 1/\sqrt{8,85 \cdot 10^{-12} \cdot 4\pi \cdot 10^{-7}} = 3 \cdot 10^8 \text{ m/s}$$

La oss her gjengi Maxwells egen kommentar til dette resultatet – fra 1862:

The velocity of light in air, as determined by M. Fizeau, is 70 843 leagues per second (25 leagues to a degree) which gives

$$V = 314\,858\,000\,000 \text{ millimetres} = 195\,647 \text{ miles per second}$$

The velocity of transverse undulations in our hypothetical medium, calculated from the electromagnetic experiments of MM. Kohlrausch and Weber, agrees so exactly with the velocity of light calculated from the optical experiments of M. Fizeau, that we can scarcely avoid the inference that *light consists in the transverse undulations of the same medium which is the cause of electric and magnetic phenomena*

At bølgene er transversale, det vil si loddrett på bølgetallsvektoren  $\vec{k}$ , følger av  $\nabla \times$ -likningene, hvor  $\nabla \times \dots \rightarrow \vec{k} \times \dots$  når man setter inn planbølge-ansatser

(variasjon som  $\cos(\omega t - kx + \phi)$ ) for  $\vec{\mathbf{E}}$  og  $\vec{\mathbf{B}}$ . Og med  $\nabla \times$  på den ene siden av likningene og bare  $\partial/\partial t$  på den andre (likning (I) og (II)), må vi få  $\vec{\mathbf{E}} \perp \vec{\mathbf{B}}$ .

Vi går ikke lenger enn dette med bølger og Maxwells likninger i dette kurset.

# Tillegg A

## Fysiske og matematiske grunnprinsipp

### A.1 Størrelser og enheter

Alle likninger innen fysikk angir relasjoner mellom symbolske uttrykk, men ofte er man ikke interessert bare i “bokstavuttrykk”. I praksis vil man i tillegg gjerne vite hva f.eks. akselerasjonen er, gitt i tall. Man kan f.eks. ønske å sammenlikne maksimalakselerasjonen til to ulike bilmodeller. Spørsmålet som da straks melder seg, er: Hva er *enheten* (*dimensjonen*) til akselerasjonen? Er det meter per sekund, – eller kanskje sekund per meter? Vi skal nå se litt nærmere på denne problemstillinga.

For enhver fysisk størrelse  $b$  har man at

$$\begin{aligned}\text{størrelse} &= \text{måltall} \cdot \text{enhet (dimensjon)} \\ b &= \{b\} \cdot [b].\end{aligned}$$

Tallempeksel:

Lengde = 5 meter, hvor 5 er måltallet og meter er enheten (dimensjonen).

De viktigste grunnenhetene i *Système International d’Unités* (SI-systemet) er

kg = kilogram    Et kilogram er massen til den internasjonale kilogramnormalen,

s = sekund    Et sekund er 9 192 631 770 perioder av den strålinga som svarer til overgangen mellom de to hyperfinnivåene i grunntilstanden for cesiumatomet 133,

m = meter    En meter er lengden som lys i vakuum går i løpet av  $1/(299\,792\,458)$  av et sekund.

A = ampere    En ampere er den konstante strøm som frambringer ei kraft på  $2 \times 10^{-7}$  newton per meter ledning når denne strømmen går gjennom hver av to rettlinjede, parallelle og uendelig lange ledere med sirkulært og neglisjerbart

lite tverrsnitt og når lederne er anbrakt i 1 meters innbyrdes avstand i lufttomt rom.

VIKTIG: Alle ledd i ei likning må ha samme enhet (dimensjon), dvs. f.eks.

$$a/c + bd = h^2 \Rightarrow [a/c] = [bd] = [h^2]. \quad (\text{A-1})$$

Her betyr “[ $x$ ]” enheten/dimensjonen til parameter  $x$ . Det er en meget viktig arbeidsregel å sjekke regelmessig om alle ledd i ei likning har samme enhet (dimensjon). Dette vil f.eks. straks avsløre om man under utledninga av et uttrykk f.eks. har kommet i skade for å glemme/miste en faktor. *Bruk av tid på å se nærmere på enheten/dimensjonen til en fysisk størrelse, vil også uten unntak øke den fysiske forståelsen av hva en gitt fysisk størrelse egentlig står for.*

Vi skal seinere se at hvis man har et fysisk system beskrevet av et gitt antall parametere  $a, b, c, d$  og  $f$  – hver med gitt dimensjon – kan man fra analyse av parametrenes dimensjoner bestemme eksponentene  $\alpha, \beta, \gamma$  og  $\delta$

$$f = a^\alpha b^\beta c^\gamma d^\delta \quad (\text{A-2})$$

ved hjelp av kun analyse av parametrenes dimensjoner (*dimensjonsanalyse*). I enkelte tilfeller kan dette – med beskjeden arbeidsinnsats – gi viktig ny innsikt selv for relativt kompliserte systemer.

Til eksamen er det å synde mot likn. (A-1) FY av verste sort, men det er også andre og viktigere grunner til å ta dette med enheter/dimensjoner alvorlig. F.eks. krasjlandet en av amerikanerens marssonder og ble ødelagt fordi en del av teamet som kontrollerte sonden, benyttet MKSA-enheter<sup>1</sup> mens den andre delen benyttet de engelske/amerikanske enhetene yards og pund. *Moral: Det er all grunn til å lære seg dette med enheter (dimensjoner) først som sist. Det er nå engang slik at voksenopplæring av sivilingeniører har lett for å bli kostbart!*

Lengdeskalene vi bruker i dette kurset spenner meget vidt:

$$\begin{aligned} 1 \text{ Å} &= 0,1 \text{ nm}; \text{ størrelsen til atomer,} \\ 1 \text{ nm} &= 10^{-9} \text{ m}; \text{ størrelsen til makromolekyler og nanopartikler,} \\ 1 \text{ μm} &= 10^{-6} \text{ m}; \text{ størrelsen til bakterier,} \\ 1 \text{ lysår} &= \text{lengden som lyset går i løpet av ett år.} \end{aligned}$$

Det samme gjelder tidsskalaen:

$$\begin{aligned} 1 \text{ ps} &= 10^{-12} \text{ s}; \text{ svingetida til molekylære svingninger,} \\ 0,1 \text{ ns} &= 10^{-10} \text{ s}; \text{ tid mellom gassmolekylstøt i vanlig luft,} \\ 1 \text{ ns} &= 10^{-9} \text{ s}; \text{ lyset går 30 cm i løpet av ett ns,} \\ 1 \text{ s} &= \text{Typiske tider for innstilling av termisk likevekt} \\ &\quad \text{for makroskopiske systemer.} \end{aligned}$$

---

<sup>1</sup>meter, kilogram, sekund, ampere

## A.2 Litt grunnleggende matematikk

Skalar = et enkelt måltall som f.eks. 5, 8, etc.

Vektor = en størrelse som både har størrelse (lengde) og retning:  $\vec{r} = |\vec{r}| \hat{e}_r$ , hvor  $|\vec{r}| = r$  er vektorens størrelse (lengde) og

$\hat{e}_r$  = enhetsvektoren i retning  $\vec{r}$  med lengde  $|\hat{e}_r| = 1$ .

Husk at enhver fysisk størrelse (skalar eller vektor) har måltall og enhet, mens matematiske størrelser ikke har enhet.

Ligger en vektor i  $xy$ -planet, har man at vektoren er gitt som

$$\vec{r} = r_x \hat{e}_x + r_y \hat{e}_y, \quad (\text{A-3})$$

hvor  $\hat{e}_x$  og  $\hat{e}_y$  er enhetsvektorene langs henholdsvis  $x$ - og  $y$ -aksen. Koordinataksene forutsettes å stå vinkelrett på hverandre. Parametrene  $r_x$  og  $r_y$  kalles henholdsvis  $x$ - og  $y$ -komponenten til  $\vec{r}$ .

Vektoren vist i likn. (A-3) kalles *todimensjonal* fordi den har komponenter forskjellig fra null bare langs to koordinatakser. I et vanlig "laboratoriekoordinatsystem" har man tre koordinatakser som alle innbyrdes står vinkelrett på hverandre. I dette tilfellet snakker man om *tredimensjonale vektorer* og har at

$$\vec{r} = r_x \hat{e}_x + r_y \hat{e}_y + r_z \hat{e}_z. \quad (\text{A-4})$$

Vi vil også benytte oss av følgende notasjon for tredimensjonale vektorer

$$\vec{r} = \{r_x, r_y, r_z\}. \quad (\text{A-5})$$

I dette tilfellet er enhetsvektorene ikke angitt eksplisitt. Man kan lett generalisere den matematiske algebraen til vektorer av høyere orden enn tre, men det kan da bli stadig vanskeligere å se for seg det aktuelle matematiske objektet.

Summen av to vektorer er også en vektor

$$\vec{A} + \vec{B} = (A_x + B_x)\hat{e}_x + (A_y + B_y)\hat{e}_y + (A_z + B_z)\hat{e}_z. \quad (\text{A-6})$$

Den *deriverte* av en funksjon  $f(x)$  er definert som

$$\frac{df(x)}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}. \quad (\text{A-7})$$

Den *partiellderiverte* av en funksjon  $f(x, y, z)$  er definert som

$$\frac{\partial f(x, y, z)}{\partial x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x, y, z) - f(x, y, z)}{\Delta x} \bigg|_{\substack{y=\text{konstant} \\ z=\text{konstant}}}. \quad (\text{A-8})$$

En *gradient* er en vektor avledet av en skalar funksjon

$$\nabla f(x, y, z) = \frac{\partial f(x, y, z)}{\partial x} \hat{e}_x + \frac{\partial f(x, y, z)}{\partial y} \hat{e}_y + \frac{\partial f(x, y, z)}{\partial z} \hat{e}_z \quad (\text{A-9})$$

Gradienten er en vektor som peker i den retninga i rommet hvor den skalare størrelsen  $f(x, y, z)$  forandrer seg mest. Gradientens størrelse angir hvor stor denne maksimale endringa er per lengdeenhet for punktet  $\vec{r}$ .

Skalarproduktet mellom de to vektorene  $\vec{A}$  og  $\vec{B}$  er en skalar

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = |\vec{A}| |\vec{B}| \cos \theta = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z, \quad (\text{A-10})$$

hvor  $\theta$  er vinkelen mellom de to vektorene  $\vec{A}$  og  $\vec{B}$ .

Vektorproduktet mellom de to vektorene  $\vec{A}$  og  $\vec{B}$  er en vektor

$$|\vec{A} \times \vec{B}| = |\vec{A}| |\vec{B}| \sin \theta. \quad (\text{A-11})$$

Vektorproduktet  $\vec{A} \times \vec{B}$  har retning normalt på både  $\vec{A}$  og  $\vec{B}$ .

En parabel i  $xy$ -planet er kurven gitt av uttrykket

$$y = a(x - x_0)^2 + b. \quad (\text{A-12})$$

En ellipse i  $xy$ -planet er kurven gitt av uttrykket

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1. \quad (\text{A-13})$$

### A.3 Separasjon av sammensatte problem

*Hvis den matematiske beskrivelsen av et komplisert fysisk problem kan deles inn i separate enheter som kan løses hver for seg – uten å behøve å ta hensyn til hva som skjer med de andre enhetene – er dette nesten alltid til stor hjelp.*

Viktige eksempel på dette er alle de fysiske systemer som er beskrevet av lineære differensiallikninger

$$a \frac{d^2 y(x)}{dx^2} + b \frac{dy(x)}{dx} + c y(x) = f(x), \quad (\text{A-14})$$

hvor koeffisientene  $a, b$  og  $c$  er konstanter. Funksjonen  $f(x)$  er en kjent funksjon (f.eks.  $f(x) = \sin x$ ) og refereres ofte til som “pådraget”.

En viktig egenskap til systemer beskrevet av lineære differensiallikninger med konstante koeffisienter, er at hvis  $f(x) = f_1(x) + f_2(x)$ ,

$$a \frac{d^2 y_1(x)}{dx^2} + b \frac{dy_1(x)}{dx} + c y_1(x) = f_1(x) \quad (\text{A-15})$$

og

$$a \frac{d^2 y_2(x)}{dx^2} + b \frac{dy_2(x)}{dx} + c y_2(x) = f_2(x), \quad (\text{A-16})$$

så er  $y(x) = y_1(x) + y_2(x)$  en løsning av likn. (A-14). Dette resultatet ses lett ved å sette inn uttrykket  $y(x) = y_1(x) + y_2(x)$  i venstre side av likn. (A-14) og så gjøre bruk av likningene (A-15) og (A-16).

Dette at man for slike systemer kan finne responsen  $y(x)$  når man har et pådrag (“forstyrrelse”) som er en sum av flere bidrag ( $f(x) = f_1(x) + f_2(x) + \dots$ ), ved å summere resultatet av pådragene hver for seg ( $y(x) = y_1(x) + y_2(x) + \dots$ ), er et meget viktig resultat. Dette refereres gjerne til som

$$\boxed{\text{superposisjonsprinsippet.}} \quad (\text{A-17})$$

Et annet viktig eksempel på oppdeling av den matematiske beskrivelsen i enheter som er uavhengige, har man ved beskrivelse av akselerasjonen til punktmasser som funksjon av tida,  $t$

$$\ddot{\mathbf{r}}(t) = \{\ddot{x}(x, y, z), \ddot{y}(x, y, z), \ddot{z}(x, y, z)\}. \quad (\text{A-18})$$

I mange – men på langt nær alle tilfeller – vil man ved gunstig valg av origo og retning av aksene til koordinatesystemet kunne oppnå at

$$\ddot{\mathbf{r}}(t) = \{\ddot{x}(x), \ddot{y}(y), \ddot{z}(z)\}, \quad (\text{A-19})$$

eller med andre ord:  $\ddot{x} = f_1(x)$ ,  $\ddot{y} = f_2(y)$  og  $\ddot{z} = f_3(z)$ , hvor  $f_1(x)$ ,  $f_2(y)$  og  $f_3(z)$  alle er gitte funksjoner. I dette tilfellet har man fått en beskrivelse hvor man kan regne ut – hver for seg – hva som foregår langs hver av de tre koordinataksene uten å måtte ta hensyn hva som skjer når det gjelder de to øvrige coordinateaksene. Også slike tilfeller refereres gjerne til som eksempler hvor superposisjonsprinsippet er gyldig. Kunnskap om hvordan man velger koordinatsystemet slik at man får forenklingene beskrevet ovenfor, kan stort sett kun erverves ved å erfare, dvs. løsning av flest mulig eksempler/regneøvinger.

Ved analyse av fysiske systemer/regneøvinger er det viktig at man først kartlegger hvor mange “frihetsgrader” systemet har. Med ordet frihetsgrader forstås i fysikk det minste antall uavhengige parametere som trengs for å beskrive systemet. For en partikkel som bare kan bevege seg langs  $x$ -aksen, er antallet frihetsgrader lik en. For en punktmasse som kan bevege seg i rommet uten føringer, er antallet frihetsgrader lik tre ( $x, y, z$ ). For mer kompliserte systemer er det ikke alltid like lett å se hva antallet frihetsgrader er, men det er viktig å bestemme dette tallet fordi man for å kunne bestemme f.eks. dynamikken til systemet alltid trenger like mange likninger som man har uavhengige ukjente, dvs. antallet frihetsgrader. Hvis man ikke fra starten har bestemt antallet frihetsgrader, viser erfaring at det også finnes tilfeller hvor man lett tar i bruk flere parametere enn nødvendig og dermed gjør ting unødig vanskelig for seg selv.

Legg ellers merke til at de grunnlikningene som man benytter i eksemplene og regneøvingene i dette kurset, stor sett begrenser seg til Newtons 2. lov og konserveringslikningene (bevarelseslikningene) for henholdsvis masse, energi, translasjonsimpuls og rotasjonsimpuls (spinn). Når man er på jakt etter å finne like mange



likninger som det man har av frihetsgrader, er det blant disse likningene man først og fremst skal lete. I visse tilfelle vil det også være aktuelt å benytte likninger som beskriver geometrien til det problemet som skal analyseres.

*Deterministiske prosesser* er prosesser hvor resultatet (utfallet) av prosessen kan forutsis med vilkårlig stor nøyaktighet hvis man kjenner verdien til alle relevante parametere når prosessen (eksperimentet) starter. Ballkast er et slikt eksempel: Kjenner man posisjonsvektoren og hastighetsvektoren i det ballen forlater handa (startbetingelsene), kan ballens bane forutsis.

*Stokastiske prosesser* er prosesser hvor man bare kjenner *sannsynlighetsfordelinga* til utfallet av prosessen selv om man kjenner startbetingelsene med stor nøyaktighet. Kast med terning er et slikt eksempel: I prinsippet er kast med terning en deterministisk prosess, men pga. geometrien til objektet som kastes, er det i praksis likevel ikke mulig å forutsi annet enn sannsynlighetsfordelinga for at terningen faller til ro med f.eks. en “sekser” opp. I eksempelet med terningkast blir prosessen stokastisk fordi det skal så lite til for å endre utfallet av prosessen at vi – fra kast til kast – ikke klarer å repetere startbetingelsene med tilstrekkelig nøyaktighet. Støtprosesser – spesielt på molekylær lengdeskala – er et begrepsmessig viktig eksempel på stokastiske prosesser. Et annet viktig eksempel er rask strømming i væsker, så som virveldannelse (turbulens) i elveløp og bak flyvinger og luftstrømmene knyttet til lav- og høytrykk. I de siste eksemplene skyldes prosessenes stokastiske natur dypereliggende matematiske egenskaper<sup>2</sup> til de likningene som beskriver disse fysiske prosessene.

## OPPSUMMERING AV TILLEGG A

- Fullt fokus på fysiske parametrers enheter/dimensjoner er viktig både for den fysiske forståelsen og ved beregning av fysiske parametrers numeriske størrelse.
- For å kunne analysere dynamikken til et gitt system, kreves at antallet uavhengige likninger som benyttes, er lik antall frihetsgrader for systemet. De likningene som i dette kurset kommer til anvendelse i denne sammenheng, er stort sett Newtons 2. lov og konserveringslikningene (bevarelseslikningene) for henholdsvis masse, energi, translasjonsimpuls og spinn.
- Matematikk er både fysikkens språk og et av fysikkens viktigste verktøy. Det er derfor viktig av brukerne av dette kompendiet har et visst minste omfang av matematikkferdigheter.

---

<sup>2</sup>Hovedpoenget i denne sammenheng er at likningene som beskriver dynamikken til fluider (Navier-Stokes likninger), er ikke-lineære.