1. (1 punto) Una empresa dedicada al suministro de láminas de acero desea planificar su producción del año 2021. A efectos de organización dividen el año en cuatro trimestres (indexados por t), cada uno de ellos con una demanda estimada de dem_t toneladas de acero. La empresa dispone de doce fábricas ya construidas, pero si en algún momento del año utiliza la fábrica i habrá de pagar ap_i euros en gastos de acondicionamiento.

   Fabricar una tonelada de acero en la fábrica i en el trimestre t le cuesta c_{it}, y cada fábrica i puede producir como mucho max_{it} toneladas el trimestre t.

   Formula un modelo de programación lineal, de manera que se minimice el coste y se satisfaga la demanda.

Solución: Considerar las siguientes variables:

$$X_{it} \equiv \text{ cantidad de toneladas producidas en fábrica } i \text{ en trimestre } t$$

$$Y_i = \begin{cases} 1 & \text{si se acondiciona fábrica } i \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

El modelo queda:

$$\begin{aligned} \min \; & \sum_{i,t} c_{it} X_{it} + \sum_i ap_i Y_i \\ \text{s.a.} \; & \sum_i X_{it} = dem_t \qquad \forall t \qquad (\geq dem_t \text{ también válido}) \\ & X_{it} \leq max_{it} Y_i \qquad \forall i, t \\ & X_{it} \geq 0, Y_i \in \{0, 1\} \qquad \forall i, t \end{aligned}$$

Los siguientes apartados son modificaciones **independientes** del modelo del primer apartado. Todos los modelos desarrollados han de ser **lineales**

2. (1 punto) Incluir una restricción de manera que en el último trimestre toda la producción solo pueda venir de (como mucho) 3 fábricas.

Solución: Añadir la siguiente variables binaria:

$$\delta_i = \begin{cases} 1 & \text{si en el último trimestre la fábrica } i \text{ produce algo} \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Y añadir las siguientes restricciones:

$$X_{i4} \leq M\delta_i \qquad \forall i \qquad (M = max_{i4})$$

$$\sum_i \delta_i \leq 3$$

$$\delta_i \in \{0, 1\} \qquad \forall i$$

3. (1 punto) Suponer ahora que si se acondicionan estrictamente menos de 5 fábricas, los gastos de acondicionamiento se reducen en un 15 %

Solución: Añadir al problema las siguientes variables binarias:

$$Y_i^+ = \begin{cases} 1 & \text{si se acondiciona fábrica } i \text{ a precio estándar } (ap_i) \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

$$Y_i^- = \begin{cases} 1 & \text{si se acondiciona fábrica } i \text{ a precio reducido } (0.85ap_i) \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

$$\gamma = \begin{cases} 1 & \text{si se acondicionan 4 o menos fábricas} \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

La función objetivo se ve afectada, quedando de la siguiente forma:

$$\min \sum_{i,t} c_{it} X_{it} + \sum_i \left(ap_i Y_i^+ + 0.85 ap_i Y_i^- \right)$$

Y se añaden las siguientes restricciones:

- Una fábrica es acondicionada a uno o a otro precio:

$$Y_i = Y_i^+ + Y_i^-$$

- Activación de γ:

$$\sum_i Y_i \leq 4 + M(1-\gamma) \qquad (\gamma = 8)$$

- Solo puede haber descuento si $\gamma = 1$

$$Y_i^- \leq \gamma \qquad \forall i$$

$$Y_i^+, Y_i^-, \gamma \in \{0,1\} \qquad \forall i$$

4. (1 punto) La empresa considera ahora que es posible almacenar láminas para satisfacer la demanda de posteriores trimestres, siendo el coste de almacenaje igual a h euros por tonelada almacenada y trimestre. Considerar además que la capacidad del almacén es de 120 toneladas, que el inventario inicial es de 60 toneladas y que al final del cuarto trimestre tienen que quedar al menos 70 toneladas en el almacén.

Solución: Añadir la siguiente variable:

$$I_t \equiv \text{ toneladas almacenadas al final del periodo } t$$

Modificar la función objetivo para añadir el coste de almacenamiento:

$$\min \sum_{i,t} c_{it} X_{it} + \sum_i ap_i Y_i + \sum_t h I_t$$

Y añadir la restricción de balance, actualizando lo que hay almacenado en cada t:

$$I_t = I_{t-1} + \sum_i X_{it} - dem_t \qquad \forall t \qquad (I_0 = 60)$$

$$I_4 \geq 70$$

$$0 \leq I_t \leq 120 \qquad \forall t$$

5. (1 punto) Por último la empresa se percata de que hay una gran incertidumbre en la capacidad máxima de producción del cuarto trimestre, por lo que se plantea un modelo estocástico.

   La empresa considera 6 escenarios diferentes, con probabilidad π_s, en los que la producción máxima de cada fábrica en el cuarto trimestre es max_{i4s}, con $s = 1, \dots, 6$. Si el decisor supiese que se va a dar el escenario s, las decisiones que tomaría le llevarían a un coste mínimo de z_s^*. Formula un modelo para decidir qué decisiones tomar sin saber el escenario que se va a dar, de manera que se minimice el máximo arrepentimiento.

Solución: Considerar la variable X_{its}, producción en i en periodo t bajo escenario s. Para minimizar el máximo arrepentimiento:

$$
\begin{aligned}
&\min Z \\
&\text{s.a. } Z \geq \left(\sum_{i,t,s} c_{it} X_{its} + \sum_i ap_i Y_i \right) - z_s^* \qquad \forall s \\
&\qquad \sum_i X_{its} = dem_t \qquad \forall t, s \\
&\qquad X_{its} = X_{its'} \qquad \forall s, s', i, t = 1, 2, 3 \\
&\qquad X_{its} \leq max_{its} Y_i \qquad \forall i, t \\
&\qquad X_{its} \geq 0, Y_i \in \{0, 1\} \qquad \forall i, t, s
\end{aligned}
$$

La restricción $X_{its} = X_{its'} (\forall s, s', i, t = 1, 2, 3)$ corresponde a las **restricciones de no anticipatividad**: en los periodos 1, 2 y 3 no es posible saber en qué escenario se está, así que en todos ellos se deberá tomar la misma decisión.

Otra posible forma de hacerlo es mediante la **formulación compacta**, definiendo X_{its} solo para los pares (t, s) apropiados (es decir, solo un escenario en los tres primeros periodos y 6 escenarios en el último)