1. (1 punto) Una empresa dedicada al suministro de láminas de acero desea planificar su producción del año 2021. A efectos de organización dividen el año en cuatro trimestres (indexados por t), cada uno de ellos con una demanda estimada de dem_t toneladas de acero. La empresa dispone de ocho fábricas ya construidas, pero si en algún momento del año utiliza la fábrica i habrá de pagar ap_i euros en gastos de acondicionamiento.

   Fabricar una tonelada de acero en la fábrica i en el trimestre t le cuesta c_{it}, y cada fábrica i puede producir como mucho max_{it} toneladas el trimestre t.

   Formula un modelo de programación lineal, de manera que se minimice el coste y se satisfaga la demanda.

Solución: Considerar las siguientes variables:

$$X_{it} \equiv \text{ cantidad de toneladas producidas en fábrica } i \text{ en trimestre } t$$

$$Y_i = \begin{cases} 1 & \text{si se acondiciona fábrica } i \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

El modelo queda:

$$\begin{aligned} \min \ & \sum_{i,t} c_{it} X_{it} + \sum_i ap_i Y_i \\ \text{s.a.} \ & \sum_i X_{it} = dem_t \qquad \forall t \qquad (\geq dem_t \text{ también válido}) \\ & X_{it} \leq max_{it} Y_i \qquad \forall i, t \\ & X_{it} \geq 0, Y_i \in \{0, 1\} \qquad \forall i, t \end{aligned}$$

Los siguientes apartados son modificaciones **independientes** del modelo del primer apartado. Todos los modelos desarrollados han de ser **lineales**

2. (1 punto) Imponer que en el primer trimestre tiene que haber una fábrica donde se haga al menos el 50 % de la demanda de ese periodo.

Solución: Introducir la siguiente variable binaria:

$$\delta_i = \begin{cases} 1 & \text{si en fábrica } i \text{ se hace el } 50\,\% \text{ el primer trimestre} \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Y añadir las siguientes restricciones:

$$X_{i1} \geq 0.5 dem_1 \delta_i \qquad \forall i$$

$$\sum_i \delta_i = 1 \qquad (\text{o} \geq 1 \text{ también válido})$$

$$\delta_i \in \{0, 1\} \qquad \forall i$$

3. (1 punto) Suponer ahora que si se acondicionan más de 5 fábricas, los gastos de acondicionamiento se reducen en un 20 % (solo en las fábricas a partir de la sexta).

Solución: Añadir al problema las siguientes variables binarias:

$$Y_i^+ = \begin{cases} 1 & \text{si se acondiciona fábrica } i \text{ a precio estándar } (ap_i) \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

$$Y_i^- = \begin{cases} 1 & \text{si se acondiciona fábrica } i \text{ a precio descontado } (0.8ap_i) \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

$$\gamma = \begin{cases} 1 & \text{si se acondicionan 6 o más fábricas} \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

La función objetivo se ve afectada, quedando de la siguiente forma:

$$\min \sum_{i,t} c_{it} X_{it} + \sum_i \left(ap_i Y_i^+ + ap_i^d Y_i^- \right)$$

Y se añaden las siguientes restricciones:

- Una fábrica es acondicionada a uno o a otro precio:

$$Y_i = Y_i^+ + Y_i^-$$

- Activación de γ:

$$6\gamma \leq \sum_i Y_i$$

- Solo puede haber descuento si $\gamma = 1$

$$Y_i^- \leq \gamma \qquad \forall i$$

- Si hay descuento, 5 se pagan a precio estándar:

$$5\gamma \leq \sum_i Y_i^+$$

- Dominio: $Y_i^+, Y_i^-, \gamma \in \{0, 1\} \qquad \forall i$

4. (1 punto) La empresa considera ahora que es posible almacenar láminas para satisfacer la demanda de posteriores trimestres, siendo el coste de almacenaje igual a h euros por tonelada almacenada y trimestre. Considerar además que la capacidad del almacén es de 80 unidades y que se dispone de un inventario inicial de 50 toneladas.

Solución: Añadir la siguiente variable:

$$I_t \equiv \text{ toneladas almacenadas al final del periodo } t$$

Modificar la función objetivo para añadir el coste de almacenamiento:

$$\min \sum_{i,t} c_{it} X_{it} + \sum_i ap_i Y_i + \sum_t h I_t$$

Y añadir la restricción de balance, actualizando lo que hay almacenado en cada t:

$$I_t = I_{t-1} + \sum_i X_{it} - dem_t \qquad \forall t \qquad (I_0 = 50)$$

$$0 \leq I_t \leq 80 \qquad \forall t$$

5. (1 punto) Por último la empresa se percata de que hay una gran incertidumbre en la demanda del cuarto trimestre, por lo que se plantea un modelo estocástico.

   La empresa considera 5 escenarios diferentes, con probabilidad π_s, en los que la demanda del cuarto trimestre es dem_{4s}, con $s = 1, \ldots, 5$. Si el decisor supiese que se va a dar el escenario s, las decisiones que tomaría le llevarían a un coste mínimo de z_s^*. Formula un modelo para decidir qué decisiones tomar sin saber el escenario que se va a dar, de manera que se minimice el máximo arrepentimiento.

Solución: Considerar la variable X_{its}, producción en i en periodo t bajo escenario s. Para minimizar el máximo arrepentimiento:

$$\begin{aligned}
&\min Z \\
&\text{s.a. } Z \geq \left(\sum_{i,t,s} c_{it} X_{its} + \sum_i ap_i Y_i \right) - z_s^* \qquad \forall s \\
&\quad \sum_i X_{its} = dem_{ts} \qquad \forall t, s \\
&\quad X_{its} = X_{its'} \qquad \forall s, s', i, t = 1, 2, 3 \\
&\quad X_{its} \leq max_{it} Y_i \qquad \forall i, t \\
&\quad X_{its} \geq 0, Y_i \in \{0, 1\} \qquad \forall i, t, s
\end{aligned}$$

La restricción $X_{its} = X_{its'} (\forall s, s', i, t = 1, 2, 3)$ corresponde a las **restricciones de no anticipatividad**: en los periodos 1, 2 y 3 no es posible saber en qué escenario se está, así que en todos ellos se deberá tomar la misma decisión.

Otra posible forma de hacerlo es mediante la **formulación compacta**, definiendo X_{its} solo para los pares (t, s) apropiados (es decir, solo un escenario en los tres primeros periodos y 5 escenarios en el último)