ВЫЧИСЛИТЕЛЬНО ЭФФЕКТИВНАЯ РЕАЛИЗАЦИЯ ПРЯМОГО И ОБРАТНОГО ПРЕОБРАЗОВАНИЙ ВЕЙЛЯ-ГЕЙЗЕНБЕРГА

Асирян Валерий Мишевич
студент группы БЗС1401 МТУСИ
dmc5mod@yandex.ru
Волчков Валерий Павлович
д.т.н., профессор кафедры ОТС, МТУСИ
volchkovvalery@mail.ru

Ключевые слова: *преобразование Вейля-Гейзенберга, ортогональный базис, хорошая локализация, быстрое преобразование Фурье, полифазное разложение.*

Рассматривается задача вычислительно эффективной реализации прямого и обратного дискретных преобразований Вейля-Гейзенберга. В работе показывается, что применение *M*/2-точечного обратного быстрого преобразования Фурье (ОБПФ) и полифазных КИХ-фильтров позволяет существенно снизить объем вычислительных затрат и делает возможным применение оптимальных базисов Вейля-Гейзенберга к сигналам больших размерностей.

История быстрых алгоритмов обработки сигналов берет свой отсчет с 1965 года, когда Джеймс Кули и Джон Тьюки опубликовали свою версию алгоритма вычисления дискретного преобразования Фурье (*Fast Fourier Transform*) [1]. С тех пор дискретный спектральный анализ играет ключевую роль в решении задач цифровой обработки и анализа сигналов. Тем не менее значительный технологический прогресс, достигнутый в разработке новых алгоритмов передачи и обработки информации, делает особенно актуальными исследования все более сложных методов получения частотных и частотно-временных характеристик сигналов.

Как было замечено в современных работах [2], для получения информации о спектре, локализованного во времени, наиболее целесообразно применение обобщенных базисов Вейля-Гейзенберга (*Generalized Weyl-Heisenberg Bases*), получаемых путем равномерных сдвигов по времени и частоте. В статьях также показано, что базис Вейля-Гейзенберга, построенный на основе произвольного импульса, не будет оптимальным, поскольку частотно-временная локализация формируемых базисных функций может оказаться неприемлемой. Именно поэтому, особый интерес в изучении представляет оптимальный базис Вейля-Гейзенберга, в основу которого положены частотно-временные свойства гауссиана (базис Габора). Однако, как известно, такой *WH*-базис не является ортогональным, а, следовательно, не может применяться для обработки сигналов. Между тем, в статье [3] описывается вычислительно эффективный алгоритм ортогонализации формирующей функции оптимального базиса Вейля-Гейзенберга с использованием дискретных *Zak*-преобразований, что также делает возможным построение ортогональных *WH*-базисов больших размеров. В свою очередь, применение оптимальных базисов Вейля-Гейзенберга к многомерным сигналам (например, изображениям) по-прежнему остается сложной задачей, так как сформулированные в работе [4] прямое и обратное дискретные преобразования Вейля-Гейзенберга (*Weyl-Heisenberg Transform*) требуют серьезных вычислительных затрат. Таким образом, целью данного исследования является построение и анализ методов вычислительно эффективной реализации дискретных преобразований Вейля-Гейзенберга (*Fast Weyl-Heisenberg Transform*).

1. Постановка задачи и метод ее решения

Прямое дискретное преобразование Вейля-Гейзенберга сигнала $s[n],\ n \in J_N$ (в общем случае комплексного), заданного на конечном дискретном интервале $J_N = \{0,1,\dots,N-1\}$, базируется на его обобщенном спектральном представлении в следующем виде:

$$c_{k,l} = c^R_{k,l} + jc^I_{k,l}, \tag{1}$$

$$c^R_{k,l} = \left\langle s[n], \psi^R_{k,l}[n] \right\rangle_R, \; c^I_{k,l} = \left\langle s[n], \psi^I_{k,l}[n] \right\rangle_R, \tag{2}$$

$$k \in J_M = \{k = 0,1,\ldots, M-1\}, \; l \in J_L = \{l = 0,1,\ldots, L-1\},$$

где $\mathcal{B} = \left\{\psi^R_{k,l}[n],\; \psi^I_{k,l}[n]\right\}$ – *WH*-система, состоящая из дискретных комплексных базисных функций, сдвинутых относительно друг друга по времени и частоте, нормированная и ортогональная в смысле вещественного скалярного произведения:

$$\left\langle x[n], y[n] \right\rangle_R = \mathrm{Re}\sum_{n=0}^{N-1} x[n]\overline{y}[n], \tag{3}$$

$$\left\langle \psi^R_{k,l}[n], \psi^R_{k',l'}[n] \right\rangle_R = \delta_{k,k'}\delta_{l,l'}, \; \left\langle \psi^I_{k,l}[n], \psi^I_{k',l'}[n] \right\rangle_R = \delta_{k,k'}\delta_{l,l'}, \; \left\langle \psi^R_{k,l}[n], \psi^I_{k',l'}[n] \right\rangle_R = 0, \tag{4}$$

($\delta_{k,l}$ – символ Кронекера), а элементы базисных функций описываются выражениями:

$$\psi^R_{k,l}[n] = g[(n-lM)_{\mathrm{mod}\,N}]\, e^{j\frac{2\pi}{M}k\left(n+\frac{\alpha}{2}\right)}, \tag{5}$$

$$\psi^I_{k,l}[n] = jg[(n+M/2-lM)_{\mathrm{mod}\,N}]\, e^{j\frac{2\pi}{M}k\left(n+\frac{\alpha}{2}\right)}, \tag{6}$$

где $(\cdot)_{\mathrm{mod}\,N}$ – операция взятия модуля в аргументах функций на дискретном интервале J_N (в дальнейшем будет опускаться), α – фазовый параметр, обеспечивающий физическую реализуемость ортонормированного *WH*-базиса $\mathcal{B} = \left\{\psi^R_{k,l}[n],\; \psi^I_{k,l}[n]\right\}$ в виде соответствующего банка фильтров, а $g[n]$ – формирующая *WH*-функция. При этом количество используемых частотных сдвигов M задает разрешающую способность по частоте, а количество временных сдвигов L – разрешающую способность по времени. Их произведение $N = M \cdot L$ определяет общее число элементов дискретного сигнала $s[n]$.

В работе [3] показано, что если формирующая *WH*-функция удовлетворяет условию сопряженной *N*-симметрии: $g[n] = g^*[-n]_{\mathrm{mod}\,N}$ [3], то значение фазового параметра следует выбирать равным $\alpha = \alpha_{опт} = M/2$. Тогда вещественные коэффициенты прямого преобразования (2) будут вычисляться по формулам:

$$c^R_{k,l} = \left\langle s[n], \psi^R_{k,l}[n] \right\rangle_R = \mathrm{Re}\sum_{n=0}^{N-1} s[n]\, g[n-lM]\, e^{-j\left(\frac{2\pi}{M}n + \frac{\pi}{2}\right)k} = \tag{7}$$

$$= \mathrm{Re}\sum_{n=0}^{N-1} g[n]\, s[lM-n]\, e^{j\left(\frac{2\pi}{M}n - \frac{\pi}{2}\right)k},$$

$$c^I_{k,l} = \left\langle s[n], \psi^I_{k,l}[n] \right\rangle_R = \mathrm{Re}\sum_{n=0}^{N-1} -js[n]\, g[n+M/2-lM]\, e^{-j\left(\frac{2\pi}{M}n + \frac{\pi}{2}\right)k} = \tag{8}$$

$$= \mathrm{Im}\sum_{n=0}^{N-1} g[n-M/2]\, s[lM-n]\, e^{j\left(\frac{2\pi}{M}n - \frac{\pi}{2}\right)k},$$

$$k \in J_M,\; m \in J_L.$$

Обратное дискретное преобразование Вейля-Гейзенберга позволяет восстановить исходный сигнал $s[n],\; n \in J_N$ по спектральным коэффициентам (1) и базисным *WH*-функциям (5), (6) с использованием следующего конечного ряда:

$$s[n] = \sum_{k=0}^{M-1}\left(\sum_{l=0}^{L-1} c_{k,l}^{R}\psi_{k,l}^{R}[n] + \sum_{l=0}^{L-1} c_{k,l}^{I}\psi_{k,l}^{I}[n]\right) =$$
$$= \sum_{k=0}^{M-1}\left(\sum_{l=0}^{L-1} c_{k,l}^{R} g[n-lM]\, e^{j\left(\frac{2\pi}{M}n-\frac{\pi}{2}\right)k} + j\sum_{l=0}^{L-1} c_{k,l}^{I} g[n+M/2-lM]\, e^{j\left(\frac{2\pi}{M}n-\frac{\pi}{2}\right)k}\right) \quad (9)$$

Несложно заметить, что вычисление (7-8) при прямом преобразовании Вейля-Гейзенберга требует $O\left(2N^2\right)$ комплексных операций. Аналогичный объем вычислительных затрат требуется для восстановления сигнала при обратном преобразовании, согласно формуле (9).

2. Вычислительно эффективная реализация прямого WH-преобразования

Для упрощения вычислений вещественных коэффициентов преобразования (7-8) воспользуемся тождествами:

$$\mathrm{Re}(a) = (a+a^*)/2,\ \mathrm{Im}(a) = (a-a^*)/2j, \quad (10)$$

а также известным фактом, что любую конечную последовательность $x[n],\, n \in J_N$ можно разложить в сумму сопряженно-симметрической и сопряженно-антисимметрической последовательностей:

$$x[n] = x_{ep}[n] + x_{op}[n], \quad (11)$$

$$x_{ep}[n] = \frac{1}{2}\left(x[(n)_{\mathrm{mod}\,N}] + x^*[(-n)_{\mathrm{mod}\,N}]\right), \quad (12)$$

$$x_{op}[n] = \frac{1}{2}\left(x[(n)_{\mathrm{mod}\,N}] - x^*[(-n)_{\mathrm{mod}\,N}]\right). \quad (13)$$

Тогда формулу (7) можно разбить на две части, которые соответствуют фильтрам с четными и нечетными номерами [1]:

$$c_{2k,l}^{R} = \frac{1}{2}\sum_{m=0}^{M/2-1}\left(A_l(m) + A_l(m+M/2) + A_l^*(M/2-m) + A_l^*(M-m)\right)e^{j\frac{2\pi}{M/2}mk}, \quad (14)$$

$$c_{2k+1,l}^{R} = \frac{1}{2}\sum_{m=0}^{M/2-1}\left(A_l(m) - A_l(m+M/2) - A_l^*(M/2-m) + A_l^*(M-m)\right)e^{j\frac{2\pi}{M}m}e^{j\frac{2\pi}{M/2}mk}. \quad (15)$$

Аналогичные преобразования можно выполнить и для формулы (8):

$$c_{2k,l}^{I} = \frac{1}{2j}\sum_{m=0}^{M/2-1}\left(B_l(m) + B_l(m+M/2) - B_l^*(M/2-m) - B_l^*(M-m)\right)e^{j\frac{2\pi}{M/2}mk}, \quad (16)$$

$$c_{2k+1,l}^{I} = \frac{1}{2j}\sum_{m=0}^{M/2-1}\left(B_l(m) - B_l(m+M/2) + B_l^*(M/2-m) - B_l^*(M-m)\right)e^{j\frac{2\pi}{M}m}e^{j\frac{2\pi}{M/2}mk}, \quad (17)$$

где $k \in J_{M/2}$, $l \in J_L$, а $A_l(m)$ и $B_l(m)$ определяются на интервале J_M следующим образом:

$$A_l(m) = \sum_{l'=0}^{L-1} g[m+M/4+l'M]\; s[lM-m-M/4-l'M], \quad (18)$$

$$B_l(m) = \sum_{l'=0}^{L-1} g[m-M/4+l'M]\; s[lM-m-M/4-l'M]. \quad (19)$$

Сформируем новые последовательности на половинном интервале $J_{M/2}$:

$$\tilde{A}_l(m) = \frac{1}{2}\Big\{A_l(m) + A_l(m+M/2) + A_l^*(M/2-m) + A_l^*(M-m) +$$
$$+ j\left(A_l(m) - A_l(m+M/2) - A_l^*(M/2-m) + A_l^*(M-m)\right)e^{j\frac{2\pi}{M}m}\Big\}, \quad (20)$$

$$\tilde{B}_l(m) = \frac{1}{2j}\Big\{ B_l(m) + B_l(m+M/2) - B_l^*(M/2-m) - B_l^*(M-m) + \tag{21}$$
$$+ j\Big(B_l(m) - B_l(m+M/2) + B_l^*(M/2-m) - B_l^*(M-m)\Big) e^{j\frac{2\pi}{M}m} \Big\}.$$

Тогда с учетом (14-17), коэффициенты $c_{k,l}^R$ и $c_{k,l}^I$ можно вычислить с помощью $M/2$ - точечного обратного БПФ (по частоте):

$$c_{2k,l}^R = \mathrm{Re}\Big\{ IFFT\Big(\tilde{A}_l(m)\Big)\Big\},\ c_{2k+1,l}^R = \mathrm{Im}\Big\{ IFFT\Big(\tilde{A}_l(m)\Big)\Big\}, \tag{22}$$
$$c_{2k,l}^I = \mathrm{Re}\Big\{ IFFT\Big(\tilde{B}_l(m)\Big)\Big\},\ c_{2k+1,l}^I = \mathrm{Im}\Big\{ IFFT\Big(\tilde{B}_l(m)\Big)\Big\}. \tag{23}$$

3. Вычислительно эффективная реализация обратного WH-преобразования

Для упрощения вычисления выражения (9) сформируем последовательности на половинном интервале $J_{M/2}$ с помощью $M/2$ - точечного обратного БПФ (по частоте):

$$\tilde{A}_l(m) = IFFT\Big(c_{2k,l}^R + jc_{2k+1,l}^R\Big), \tag{24}$$
$$\tilde{B}_l(m) = IFFT\Big(c_{2k,l}^I + jc_{2k+1,l}^I\Big). \tag{25}$$

Используя тожества (10), сформируем новые последовательности на интервале $J_{M/2}$:

$$A_l(m) = \frac{1}{2}\Big(\tilde{A}_l(m) + \tilde{A}_l^*(M-m)\Big) + \frac{1}{2j}\Big(\tilde{A}_l(m) - \tilde{A}_l^*(M-m)\Big)e^{j\frac{2\pi}{M}m}, \tag{26}$$
$$A_l(m+M/2) = \frac{1}{2}\Big(\tilde{A}_l(m) + \tilde{A}_l^*(M-m)\Big) - \frac{1}{2j}\Big(\tilde{A}_l(m) - \tilde{A}_l^*(M-m)\Big)e^{j\frac{2\pi}{M}m}, \tag{27}$$
$$B_l(m) = \frac{1}{2}\Big(\tilde{B}_l(m) + \tilde{B}_l^*(M-m)\Big) + \frac{1}{2j}\Big(\tilde{B}_l(m) - \tilde{B}_l^*(M-m)\Big)e^{j\frac{2\pi}{M}m}, \tag{28}$$
$$B_l(m+M/2) = \frac{1}{2}\Big(\tilde{B}_l(m) + \tilde{B}_l^*(M-m)\Big) - \frac{1}{2j}\Big(\tilde{B}_l(m) - \tilde{B}_l^*(M-m)\Big)e^{j\frac{2\pi}{M}m}. \tag{29}$$

Определим исходный сигнал на интервале $n \in J_N$ по формуле:

$$s[n] = \sum_{l=0}^{L-1} A_l[n+M/4]\, g[n-lM] - j\sum_{l=0}^{L-1} B_l[n+M/4]\, g[n+M/2-lM]. \tag{30}$$

4. Результаты моделирования

На рис. 1 представлены зависимости количества затраченных комплексных операций для стандартного и предложенного алгоритмов от *M* при фиксированном значении *L* = 8. В таблицах 1-2 приведены более точные результаты для соответствующих пар значений сдвигов *M* и *L*.

Таблица 1. Стандартный алгоритм

M \ *L*	4	8	16
16	4096	16484	65536
32	16384	65536	262144
64	65536	262144	1048576

Таблица 2. Предложенный алгоритм

M \ *L*	4	8	16
16	1280	3584	11264
32	2816	7680	23552
64	6144	16384	49152

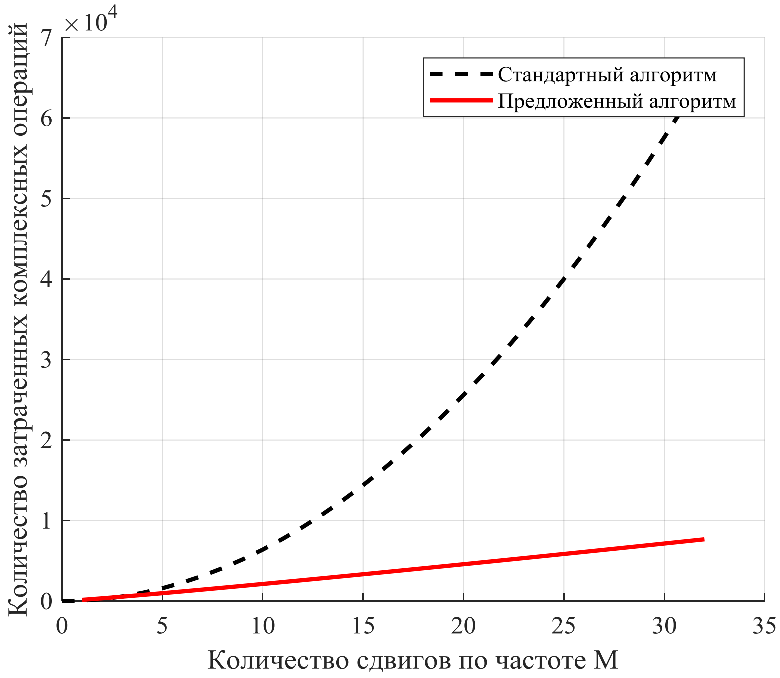

Рис 1. Зависимость количества затраченных комплексных операций от M (при L = 8)

Заключение

Общее количество полных комплексных операций при прямом преобразовании оказывается пропорциональным величине $O\left(2ML^2 + 2N\log_2 M + 4N\right)$, что значительно меньше полученной ранее оценки $O\left(2N^2\right)$. Аналогичный объем вычислений требуется и при обратном преобразовании. Кроме того, поскольку на практике значение $L \in \{2;\, 4;\, 8\}$ – невелико, а $M >> L$, то алгоритмы преобразований оказываются быстрыми.

Известный факт, что дискретные ортогональные преобразования Вейля-Гейзенберга обладают свойством линейной сепарабельности [4], дает основание полагать, что вышеописанные быстрые алгоритмы могут быть применены для вычислительно эффективной реализации многомерных *WH*-преобразований.

Литература

1. *Cooley J.W., Tukey J.W.* An Algorithm for the Machine Computation of Complex Fourier Series // Math. Comp., 1965. №19. - p. 297-301;

2. *Волчков В.П.* Сигнальные базисы с хорошей частотно-временной локализацией // Электросвязь, 2007, №2, с. 21-25;

3. *Волчков В.П., Асирян В.М.* Вычислительно эффективный алгоритм формирования базиса Вейля-Гейзенберга // Материалы Международной научно-технической конференции, INTERMATIC – 2017, часть 4, М.: МИРЭА, с. 1151-1154;

4. *Асирян В.М., Волчков В.П.* Применение ортогонального преобразования Вейля-Гейзенберга для сжатия изображений. // Телекоммуникации и информационные технологии. Том 4, № 1, 2017, с. 50-56.

A COMPUTATIONALLY EFFICIENT IMPLEMENTATION OF THE DIRECT AND INVERSE WEYL-HEISENBERG TRANSFORMS

Valery M. Asiryan
Student of group BZS1401, MTUCI
dmc5mod@yandex.ru
Valery P. Volchkov
Grand Ph.D., professor, TES department, MTUCI
volchkovvalery@mail.ru

Keywords: *Weyl-Heisenberg transform, orthogonal basis, good localization, fast Fourier transform, polyphase components.*

Here is considered the problem of computationally efficient implementation of the direct and inverse discrete Weyl-Heisenberg transforms. The paper shows that the application of M/2-point inverse fast Fourier transform (IFFT) and polyphase FIR-filters can significantly reduce computational costs and makes it possible to apply optimal Weil-Heisenberg bases to signals of large dimensions.