ВЫЧИСЛИТЕЛЬНО ЭФФЕКТИВНЫЙ АЛГОРИТМ ФОРМИРОВАНИЯ ОПТИМАЛЬНОГО БАЗИСА ВЕЙЛЯ-ГЕЙЗЕНБЕРГА

© 2017 г. В.П. ВОЛЧКОВ, В.М. АСИРЯН

Московский технический университет связи и информатики
E-mail: volchkovvalery@mail.ru, dmc5mod@yandex.ru

1. Введение

На сегодняшний день дискретный спектральный анализ, базирующийся на преобразовании Фурье, стал одним из основных средств решения задач в цифровой обработке сигналов. Однако, зачастую на практике возникает необходимость получать информацию о спектре, локализованную во времени.

Одним из возможных решений данной задачи является оконное преобразование Фурье (*Short-Time Fourier Transform*), которое позволяет получать характеристику распределения частоты сигнала во времени. Но главная проблема при использовании оконного преобразования Фурье связана с принципом *неопределенности Гейзенберга*, который действует в отношении параметров времени и частоты сигнала. В основе этого принципа лежит тот факт, что невозможно точно сказать в какой момент времени определенная частота присутствует в сигнале, можно говорить лишь об интервале времени или диапазоне частот. В свою очередь, применение вейвлет-преобразований (*Wavelet Transform*), разработанных как инструмент, который решает проблему неопределенности Гейзенберга для получения частотно-временных характеристик сигнала, не всегда является оптимальным средством. Это обусловлено тем, что классическое вейвлет-преобразование дает лучшее представление времени и худшее представление частоты на низких частотах сигнала и лучшее представление частоты с худшим представлением времени на высоких частотах сигнала. Кроме того, распространенным недостатком вейвлетов является несимметричность формирующих функций. Именно по этим и другим причинам для получения частотно-временных характеристик сигнала наиболее целесообразно применение обобщенных базисов Вейля-Гейзенберга (*Generalized Weyl-Heisenberg Bases*), получаемых путем равномерных сдвигов по времени и частоте одной или нескольких функций [1].

Базис Вейля-Гейзенберга, построенный на основе произвольного импульса, не является оптимальным, поскольку частотно-временная локализация формируемых базисных функций может оказаться неприемлемой. Именно поэтому наиболее актуальным и перспективным в изучении представляется обобщенный базис Вейля-Гейзенберга, в основу которого положены частотно-временные свойства гауссиана.

2. Вычислительно эффективный алгоритм ортогонализации оптимального WH-базиса с применением Zak-преобразования

Оптимальный базис Вейля-Гейзенберга определяет M-количество сдвигов по времени и L-количество сдвигов по частоте. Откуда следует, что общее число дискретных отсчетов, описывающих дискретизированную формирующую функцию, составляет:

$$N = M \cdot L \qquad (1)$$

Для получения хорошей частотно-временной локализации, в качестве непрерывного прототипа формирующей WH-функции используется усеченный гауссиан вида:

$$g(t) = (2\sigma)^{1/4} \exp(-\pi\sigma t^2)\,, \qquad (2)$$

где σ – среднеквадратическое отклонение. Интервал дискретизации гауссиана выбирается исходя из теоремы Котельникова, а усечение по времени не должно приводить к большим энергетическим потерям. В результате, формируется вектор отсчетов $\mathbf{g} = (g[1], g[2], ..., g[N])$ размерности N, адекватно описывающий дискретный эквивалент функции (2). Затем на его основе строится циклически симметричная формирующая функция $g_0[n]=(g[(n)_{\mathrm{mod}\,N}] + g[(-n)_{\mathrm{mod}\,N}])/2$ на конечном дискретном интервале $J_N = \{0,1,...,N-1\}$, удовлетворяющая условию сопряженной N-симметрии:

$$g_0[n] = g_0[(-n)_{\mathrm{mod}\,N}]\,. \qquad (3)$$

Тем не менее, полученная формирующая функция (3) хоть и обладает наилучшей частотно-временной локализацией, однако, построенный на его основе WH-базис (базис Габора) не будет ортогональным [1]. В свою очередь, использование стандартных процедур для его ортогонализации (например, процесса Грама-Шмидта) приводит к значительному ухудшению частотно-временной локализации базисных функций, т.е. получаемый ортогональный WH-базис уже не будет обладать оптимальными свойствами.

В работах [2], [3] описан алгоритм ортогонализации оптимального базиса Вейля-Гейзенберга с использованием спектрального разложения квадратной матрицы. Тем не менее, данный алгоритм обладает существенными вычислительными затратами и не подходит для синтеза WH-базисов больших размеров, что делает невозможным его применение для обработки сигналов размерности $N > 64$, в частности изображений [4]. В связи с этим, в данной статье предлагается другой, более эффективный метод ортогонализации, основанный на переходе к WH-базису, состоящему из собственных функций оператора частотно-временных сдвигов $\mathbf{S}_{g_0}$, действующего на формирующий импульс (3). Известно [5], что такой оператор диагонализируется с помощью прямого дискретного Zak-преобразования:

$$Z_{g_0}[l,k] = (1/\sqrt{M})\sum_{r=0}^{M-1} g_0\left[\left(l + rL\right)_{\mathrm{mod}\,N}\right] \cdot \exp\left(-j2\pi r\frac{k}{M}\right), \quad l \in J_L, k \in J_M \qquad (4)$$

$J_L = \{0,1,...,L-1\}$, $J_M = \{0,1,...,M-1\}$, а собственные числа оператора $\mathbf{S}_{g_0}$ описываются выражением:

$$\lambda_{g_0}[l,k] = M\left|Z_{g_0}[l,k]\right|^2 + M\left|Z_{g_0}[l,k-L]\right|^2, \quad l \in J_L, k \in J_M. \qquad (5)$$

Вычислив (4), (5) находим:

$$Z_{g_{onm}}[l,k] = \frac{Z_{g_0}[l,k]}{\sqrt{\lambda_{g_0}[l,k]}}, \quad l \in J_L, k \in J_M. \qquad (6)$$

Затем применяем к (6) обратное Zak- преобразование:

$$g_{opt}\left[l,k\right] = (1/\sqrt{M})\sum_{r=0}^{M-1} Z_{g_{opt}}[l,r] \cdot \exp\left(j2\pi r\frac{k}{M}\right), \quad n \in J_L, k \in J_M \qquad (7)$$

и, выстраивая элементы (7) в столбец, строим новую формирующую функцию

$$g_{onm}[n] = g_{onm}\left[\left(n_{\mathrm{mod}\,L}, \lfloor n/L \rfloor\right)\right], n \in J_{N-1} \qquad (8)$$

Используем полученный вектор отсчетов (8) для построения матрицы оптимального базиса Вейля-Гейзенберга, которая по структуре является блочной и описывается выражением:

$$\mathbf{U} = [\mathbf{U}_R, \mathbf{U}_I] = U(n,m), \quad n \in J_N, m \in J_{2N} = \{0,1,...2N-1\}, \tag{9}$$

где матрица $\mathbf{U}_R$ определяет базис подпространства для действительных компонент, а матрица $\mathbf{U}_I$ – для мнимых. Элементы матриц описываются выражениями:

$$\begin{gathered} U_R(n,lM+k) = g_{onm}[(n-lM)_{\mathrm{mod}\,N}]\exp(2\pi j \frac{k}{M}(n-a_{onm}/2)) \\ U_I(n,lM+k) = jg_{onm}[(n+M/2-lM)_{\mathrm{mod}\,N}]\exp(2\pi j \frac{k}{M}(n-a_{onm}/2)) \\ n=0,...,N-1, \quad k=0,...,M-1, \quad l=0,...,L-1. \end{gathered} \tag{10}$$

По столбцам блочной матрицы (9) стоят комплексные базисные векторы, значение фазового параметра $a_{onm} = (M/2)_{\mathrm{mod}\,M}$ выбирается из условия сопряженной N-симметрии $U(n,m) = U^*((-n)_{\mathrm{mod}\,N}, m)$, что обеспечивает физическую реализуемость базиса в виде банка соответствующих фильтров.

Можно показать, что функция (7), построенная по формулам (4-8), обеспечивает ортогональность WH-базиса (9) относительно вещественного скалярного произведения. Более того (10) совпадает с WH-базисом, построенным по методике спектрального разложения, изложенной в статье [2]. Однако, в отличии от алгоритма ортогонализации [2,3], предложенный алгоритм (4-8) допускает «быструю» вычислительную реализацию, поскольку дискретное Zak-преобразование представляет собой прореженную по времени версию дискретного преобразования Фурье, для которого известны высокоэффективные вычислительные алгоритмы.

3. Результаты моделирования

Ниже представлены результаты моделирования базисов Габора и Вейля-Гейзенберга при следующих значениях параметров: $M = 64,\ L = 16,$ $a = 32,\ \sigma = 2.4 \cdot 10^{-4}$. На рисунке 1 изображены базисные функции во временной области, соответствующие нулевым сдвигам по частоте и по времени. На рисунке 2 представлены те же базисные функции в частотной области, для удобства сдвинутые в середину графика.

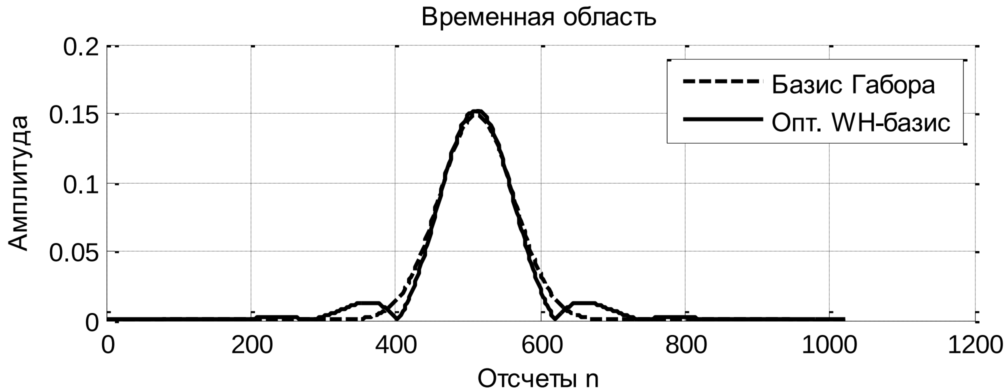

Рис 1. Базисы Габора и Вейля-Гейзенберга во временной области

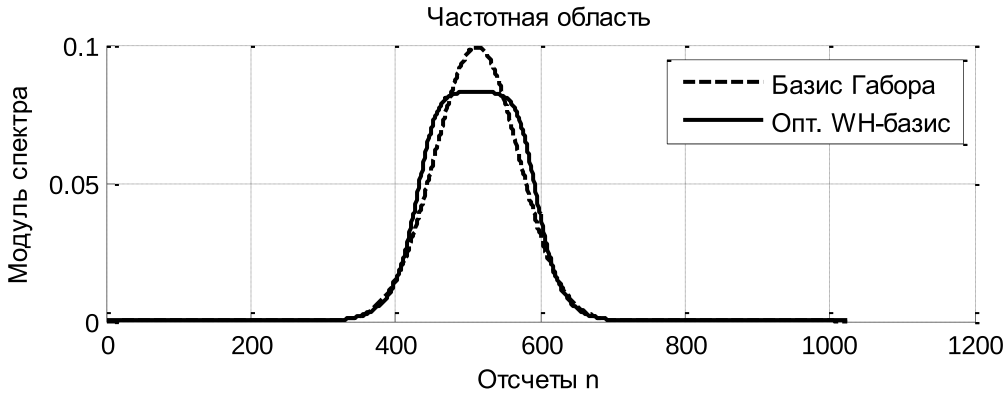

Рис 2. Базисы Габора и Вейля-Гейзенберга в частотной области

В таблице 1 приводится сравнение временных показателей двух алгоритмов построения оптимального базиса Вейля-Гейзенберга: с использованием спектрального разложения квадратной матрицы (EVD) и с применением дискретных Zak-преобразований.

Таблица 1. Зависимость количества затраченного времени (в секундах) от размерности формирующей WH-функции

N	16	64	256	1024	4096
T_{EVD}, с	0.010	0.043	0.501	29.01	348.9
T_{Zak}, с	0.009	0.012	0.118	0.146	1.879

4. Выводы

1) Из полученных графиков видно, что процедура ортогонализации привела к незначительному ухудшению частотно-временной локализации, однако, сопряженная N -симметрия формирующей WH-функции при этом сохранилась.

2) На основании результатов (табл. 1) можно заключить, что представленный в статье алгоритм ортогонализации формирующей WH-функции с применением дискретных Zak-преобразований дает значительное преимущество по скорости вычислений в отличие от алгоритма, базирующегося на спектральном разложении.

3) Данный метод ортогонализации WH-базиса является вычислительно эффективным и подходит для синтеза WH-базисов больших размерностей, что делает возможным их применение для цифровой обработки и анализа широкополосных сигналов и изображений. Эффективность представленного алгоритма может быть дополнительно улучшена за счет использования «быстрых» реализаций дискретного преобразования Фурье.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Волчков В.П.* Новые Технологии передачи и обработки информации на основе хорошо локализованных базисов. // Научные ведомости БелГу, Серия «История, политология, экономика, информатика», №15(70), 2009, Вып. 12/1, с. 181-189
2. *Волчков В.П.* Сигнальные базисы с хорошей частотно-временной локализацией. // Электросвязь, 2007, №2, с. 21-25;
3. *Волчков В.П., Петров Д.А.* Условия ортогональности обобщенных базисов Вейля-Гейзенберга для OFTDM сигналов. Научные ведомости БелГу, Серия «История, политология, экономика, информатика», №15(70), 2009, Вып. 12/1, с. 190-199
4. *Асирян В.М., Волчков В.П.* Применение ортогонального преобразования Вейля-Гейзенберга для сжатия изображений. // Телекоммуникации и информационные технологии. Том 4, № 1, 2017, с. 50-56.
5. *Bolcskei H., Hlawatsch F.* Discrete Zak Transforms, Polyphase Transforms, and Applications. // IEEE Transactions on Signal Processing, vol. 45, no. 4, April 1997;

Аннотация: Рассматривается задача эффективного построения оптимального базиса Вейля-Гейзенберга, обладающего свойством наилучшей локализации в частотно-временной области. Приводится вычислительно эффективный алгоритм ортогонализации формирующей WH-функции с применением дискретных Zak-преобразований, демонстрируются результаты моделирования.

Ключевые слова: ортогонализация, хорошая локализация, оптимальная функция, базис Вейля-Гейзенберга, Zak-преобразование.