В.М. Асирян [1], Г.В Васильев [2]
1) МТУСИ, студент группы БЗС1401 (СиСС)
dmc5mod@yandex.ru
2) МТУСИ, студент группы БПЗ1401 (ИТ)
gordey97@mail.ru
Научный руководитель: к.ф.-м.н., профессор Арутюнян Р.В.
rob57@mail.ru
Кафедра «Математический анализ»

МИНИМИЗАЦИЯ НОРМАЛЬНЫХ ФОРМ ВСЮДУ ОПРЕДЕЛЕННЫХ БУЛЕВЫХ ФУНКЦИЙ

В данной работе представлены и рассмотрены вопросы минимизации нормальных форм всюду определенных булевых функций. Реализован алгоритм минимизации булевой функции большой разрядности на основе метода Квайна. Разработаны структуры и классы на языке программирования *Microsoft Visual C#* для работы с булевыми переменными, функциями и матрицами, которые впоследствии позволили создать программное обеспечение для решения практических задач по минимизации нормальных форм всюду определенных булевых функций и их символьной и графической визуализации.

Введение

Минимизация структурных формул булевых функций всегда была желательна, не сколько для упрощения алгебраических выражений, сколько для уменьшения количества необходимого электронного оборудования для реализации цифровых устройств и систем.

Одним из эффективных методов минимизации нормальных форм всюду определенных булевых функций является метод Квайна. Его основное достоинство – четкая алгоритмическая структура, предполагающая возможность программной реализации, в отличие от графических способов Карно и Вейча, использование которых для функций большой разрядности представляется не только неудобным, но и невозможным процессом. В виду этих соображений, в качестве исходного алгоритма решения задачи минимизации был выбран метод Квайна.

Математический аппарат

По определению булевой функцией называется функция, аргументы и значение которой принадлежат множеству *B*, где множество *B* = {0, 1}. Областью определения булевой функции от n переменных служит совокупность всевозможных n-мерных упорядоченных наборов значений аргументов функции. Все наборы размерности n нумеруются целыми числами от 0 до $2^n - 1$. Отсюда следует, что число всех наборов равно 2^n. Если значения некоторой булевой функции заданы на всех наборах значений аргументов, то она называется *всюду определенной булевой функцией*. В свою очередь, всюду определенная булева функция представима в виде совершенных нормальным форм – дизъюнктивной и конъюнктивной. Совершенной ДНФ будет соответствовать набор аргументов, где функция принимает значение 1, а КНФ – значение 0.

Первым этапом минимизации всюду определенной булевой функции является переход от совершенных нормальных форм к сокращенным, который выполняется по теореме Квайна.

Теорема Квайна: *Если произвести все возможные операции неполного склеивания, а затем элементарного поглощения к совершенной нормальной форме, то в результате получится сокращенная нормальная форма.*

На втором этапе происходит удаление из сокращенных ДНФ и КНФ тех импликант, которые не меняют таблицы истинности исходной булевой функции. Если удалить все лишние импликанты, то получатся тупиковые нормальные формы. В случае, когда число вхождений переменных минимально, такие нормальные формы как раз и называются минимальными.

Программная реализация

Структура **Bool** представляет булеву переменную. Структура реализует все возможные применяемые логические операции к булевым переменным X и Y, тем самым позволяя проводить вычисления полноценных логических выражений, соблюдая при этом иерархию операций. Список основных команд:

- Инверсия: –X
- Дизъюнкция: X + Y
- Конъюнкция: X * Y
- Неравнозначность (XOR): X ^ Y
- Штрих Шеффера: X | Y
- Импликация: X – Y
- Стрелка Пирса: Peirce(X, Y)
- Эквиваленция: Equal(X, Y)

Структура **Boolf** представляет всюду определенную булеву функцию, состоящую из 2^n значений типа **Bool**. Структура позволяет работать, как с самой булевой функцией F, так и с ее параметрами. Список основных команд:

- Инверсия функции: F = –F
- Получение количества переменных: F.Count
- Получение длины функции: F.Length
- Вычисление совершенных форм: F.SDNF, F.SKNF
- Вычисление минимальных форм: F.MDNF, F.MKNF

Структура **BoolMatrix** представляет булеву матрицу размерности (N, M), состоящую из $N \cdot M$ количества значений типа **Bool**. Структура реализует применяемые логические операции к булевым матрицам U и V, позволяет проводить вычисления полноценных матричных выражений вне зависимости от размеров самих матриц. Список основных команд:

- Инверсия матрицы: U = –U
- Транспонирование матрицы: U.Transponate
- Отображение матрицы по осям: U.FlipX, U.FlipY
- Дизъюнкция: U + V
- Конъюнкция: U * V
- Неравнозначность (XOR): U ^ V
- Штрих Шеффера: U | V

- Импликация: U – V
- Стрелка Пирса: Peirce(U, V)
- Эквиваленция: Equal(U, V)

Решение задачи минимизации

Ниже представлено решение задачи минимизации нормальных форм с использованием разработанных компонентов на примере булевой функции малой разрядности: $f_1 = 10101111$.

Программный код с комментариями

```
BoolMatrix m = BoolMatrix.Table(8);          // Инициализация таблицы переменных,
Boolf f = Boolf.Parse("10101111");            // Инициализация булевой функции,
string result = Consolas.Disp(m) + "\n";      // Вывод таблицы переменных,
result += Consolas.Disp(f) + "\n";            // Вывод булевой функции,
result += f.SDNF + "\n";                      // Совершенная ДНФ,
result += f.SKNF + "\n";                      // Совершенная КНФ,
result += f.MDNF + "\n";                      // Минимальная ДНФ,
result += f.MKNF + "\n";                      // Минимальная КНФ,
richTextBox.Text = result;                    // Вывод результатов в текстовое окно.
```

Окно результатов с примечаниями

```
Таблица переменных: количество строк 3, столбцов 8
    0    1    0    1    0    1    0    1
    0    0    1    1    0    0    1    1
    0    0    0    0    1    1    1    1

Булева функция: количество переменных 3, длина 8
    1    0    1    0    1    1    1    1

Совершенные нормальные формы:
СДНФ: (¬X¬Y¬Z) + (¬XY¬Z) + (X¬Y¬Z) + (X¬YZ) + (XY¬Z) + (XYZ)
СНКФ: (X+Y+¬Z) * (X+¬Y+¬Z)

Минимальные нормальные формы:
МДНФ: (¬Z) + (X)
МКНФ: (X+¬Z)
```

Минимизация нормальных форм всюду определенной булевой функции большой разрядности: $f_2 = \{f_1, f_1, f_1, f_1\}$.

Окно результатов с примечаниями

```
Булева функция: количество переменных 5, длина 32
10101111  10101111  10101111  10101111

МДНФ: (¬T) + (Z)
МКНФ: (Z+¬T)
```

Очевидно, что разрядность исходной булевой функции может быть значительно больше, однако, приводить такого рода булеву функцию в качестве примера не представляется целесообразным.

Важно также отметить, что во время тестирования разработанных компонентов было замечено, что функция зависимости затраченного времени на вычисление обеих минимальных нормальных форм булевой функции от ее длины носит экспоненциальный характер. Это отрицательно сказывается при минимизации нормальных форм булевых функций разрядности свыше 2^9. Вычисление минимальных форм для функций свыше 2^{15} и вовсе не представляется возможным в реальном времени.

Графическая визуализация

Разработанные программные графические компоненты также позволяют проводить визуализацию совершенных нормальных форм булевой функции. Ниже приведены результаты визуализации совершенных форм булевой функции f_2.

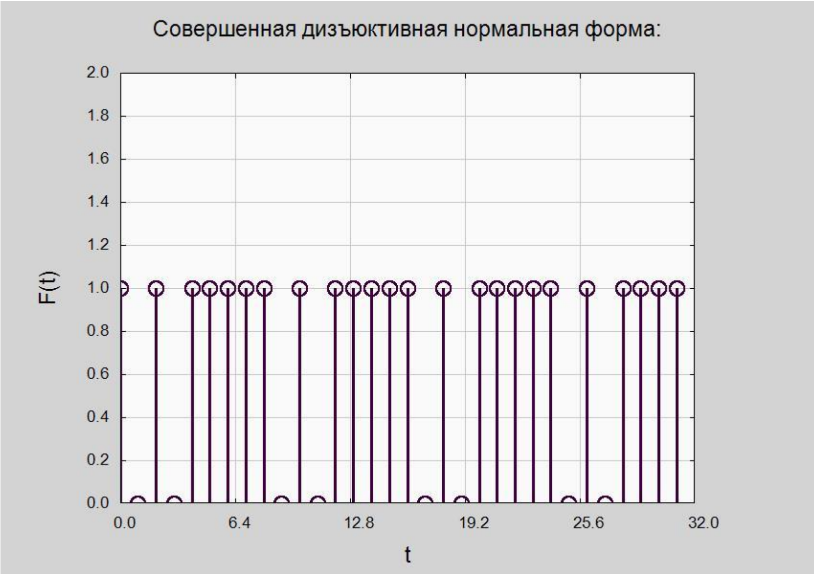

Рис. 1 Совершенная дизъюнктивная нормальная форма

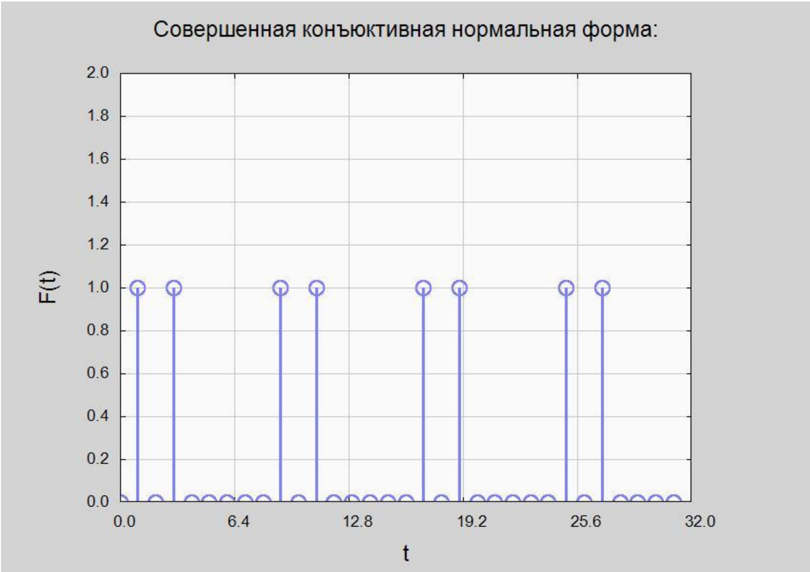

Рис. 2 Совершенная конъюнктивная нормальная форма

Выводы

Разработанные программные компоненты могут стать удобным средством для вычисления логических выражений и анализа булевых функций и матриц. Также отметим, что главным достоинством разработанных структур и классов является их возможная символьная и графическая визуализация, а недостатком – неустойчивость алгоритмов минимизации нормальных форм всюду определенных булевых функций, разрядность которых больше чем 2^9.

Данный программный комплекс может быть использован для решения задачи минимизации оборудования при проектировании цифровых систем. Кроме того, результаты работы были применены на заданиях лабораторного практикума по дисциплине «Вычислительная техника и информационные технологии». Была выполнена визуализация лабораторной работы по минимизации логических функций.

Список использованной литературы

1. *А.И. Белоусов, С.Б. Ткачев* – Дискретная математика. М.: МГТУ Им. Н.Э. Баумана, 2004;
2. *А.С. Избаш* – Вычислительная техника и информационные технологии. – М.: МТУСИ, 2012;
3. *С. Л. Блюмин* – Математические проблемы искусственного интеллекта: булева «линейная» алгебра. – М.: 2004.