

# 用几何表达式求解几何问题

matlab 编译

2018 年 8 月 29 日

©2016年Saltire Software。保留所有权利。

本文件内的资料如有更改，恕不另行通知。本产品的分销和销售仅供原购买者使用。根据著作权法，未经Saltire software公司事先书面同意，除软件许可协议中所述的方式外。任何文件或软件，全部或部分，均不得复制、复印、复制、翻译或还原为任何电子媒介或机器可读的形式。

Saltire Software, Inc

PO Box 230755

Tigard, OR 97281 0755

<http://www.saltire.com>

<http://www.geometryexpressions.com>

几何表达式是Saltire Software Inc的注册商标。

本材料基于国家自然科学基金会在第0750028号拨款项下支持的工作

---

<sup>†</sup>本文档利用科学工作平台 Scientific WorkPlace V 5.5 配置的 PDF<sub>L</sub>A<sub>T</sub>E<sub>X</sub> 进行录入排版.

# 目录

0.1 约束与构造：两个工作方法 . . . . .	1
0.2 基于约束的绘图 . . . . .	2
0.3 构造—绘图基础 . . . . .	3
0.4 几何表达式如何解决问题? . . . . .	5
0.5 内部构造顺序 . . . . .	5
0.6 应用程序添加的变量 . . . . .	7
0.7 解决歧义 . . . . .	8
0.8 约束冲突 . . . . .	9
0.9 计算输出 . . . . .	14
0.10 消除绝对值 . . . . .	15
0.11 使用中间变量 . . . . .	16
0.12 控制变量 . . . . .	19
0.13 分配 . . . . .	20
0.14 锁定 . . . . .	20
0.15 动画 . . . . .	20
0.16 导入和导出表达式 . . . . .	23
0.17 性能提示 . . . . .	24

# 求解几何问题

几何 Expressions™是一个交互式应用程序，它允许您指定带有符号约束的几何问题。例如，设置一条线以具有长度  $a$ 、设置角度为  $\theta$  或使两行垂直-而不是输入数值。

也可以使用数字和符号值组合输入。以符号形式请求输出度量，作为数学表达式。数字输出也可用。

在阅读了基础几何表达式的基本思想之后，尝试运行几何表达式教程以帮助您入门。

## 0.1 约束与构造：两个工作方法

使用几何表达式来解决简单的三步骤过程中的问题：

1. 绘制几何对象，如点、线或圆圈。您无需绘制精确的几何图形表达式将在约束绘图时进行必要的调整。
2. 约束对象。当您指定约束时，绘图将调整以满足它们。您可以完全限制问题，也可以保留一些未指定的元素。
3. 要求测量。几何表达式添加计算所需的任何缺少的变量，然后输出所请求的表达式或值。

首先绘制对象并不重要;相反，应用程序在您定义时一次更正绘图一步通过添加约束来解决问题。这种基于约束的方法可以灵活、探索性的工作方式。它也很容易在象征性地定义一个问题，因为它允许你指定约束-距离、角度、斜坡、等等-在变量方面。几何表达式提供了一组丰富的几何图形对象和约束，在几何表达式手册和嵌入式帮助系统中进行了描述。

您可能熟悉其他交互式几何应用程序，例如 SketchPad<sup>®</sup> 或 Cabri Geometry<sup>™</sup>，它们使用不同的方法：

1. 绘制独立的几何物体。
2. 使用结构定义依赖对象。

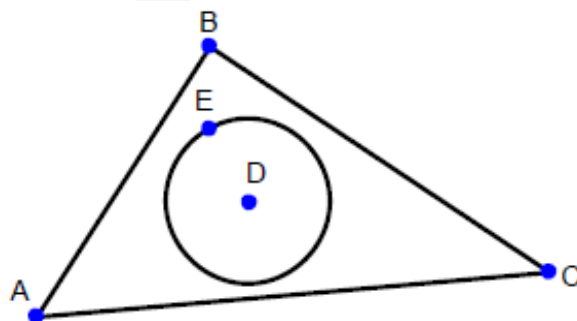
几何表达式还启用了这种工作风格，提供了一套丰富的结构。（请参阅几何表达式手册和嵌入式帮助系统。）

构造根据现有对象定义新的几何图形对象。基于构造的方法要求您区分独立和从属对象，并从一开始就准确地绘制独立对象。正确开始绘图并在每个步骤中保持正确。为实现此目的，该方法通常需要对问题的几何进行一些预知。

为了比较这两种方法，我们将使用两者来创建一个显示三角形的内切圆的绘图，即三角形的内切圆，它与三边均相切。

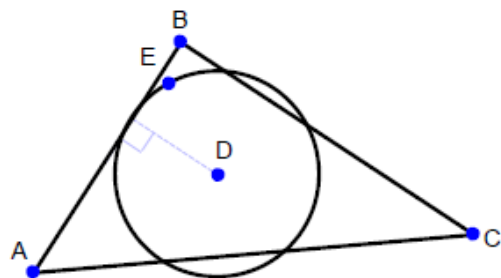
## 0.2 基于约束的绘图

基于约束的方法从包含所有相关几何对象的绘图开始，但不首先要求它们正确相关（尽管圆应该或多或少地位于三角形内以区别于外接圆）：

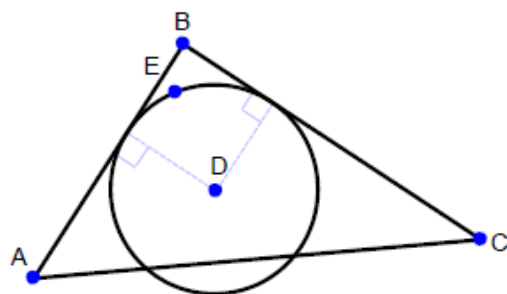


我们所知道的内切圆是，它的切线是三角形所有三边。因此，我们通过应用来描述这个问题。

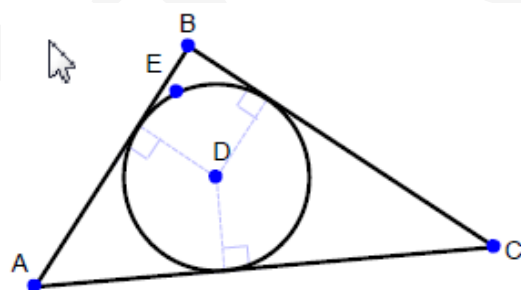
1. ...第一个相切约束：



2. ...第二个相切约束:



3. ...最后一个:

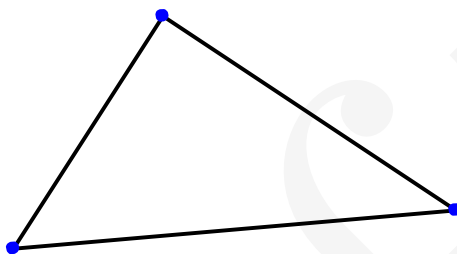


现在准确地表示所需的绘图情况。

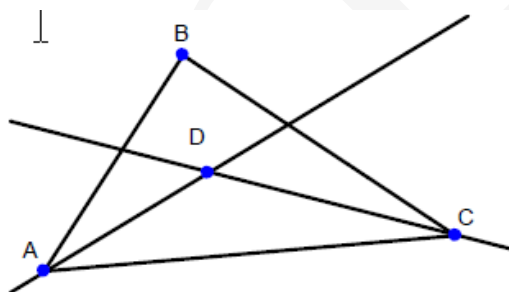
### 0.3 构造—绘图基础

相比之下，基于构造的方法逐步建立了一个精确的绘图，依靠以前的知识：内切圆的中心是三角形的两个角平分线的交点。

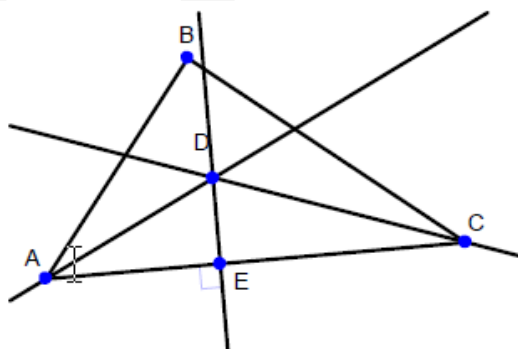
1. 绘制三角形:



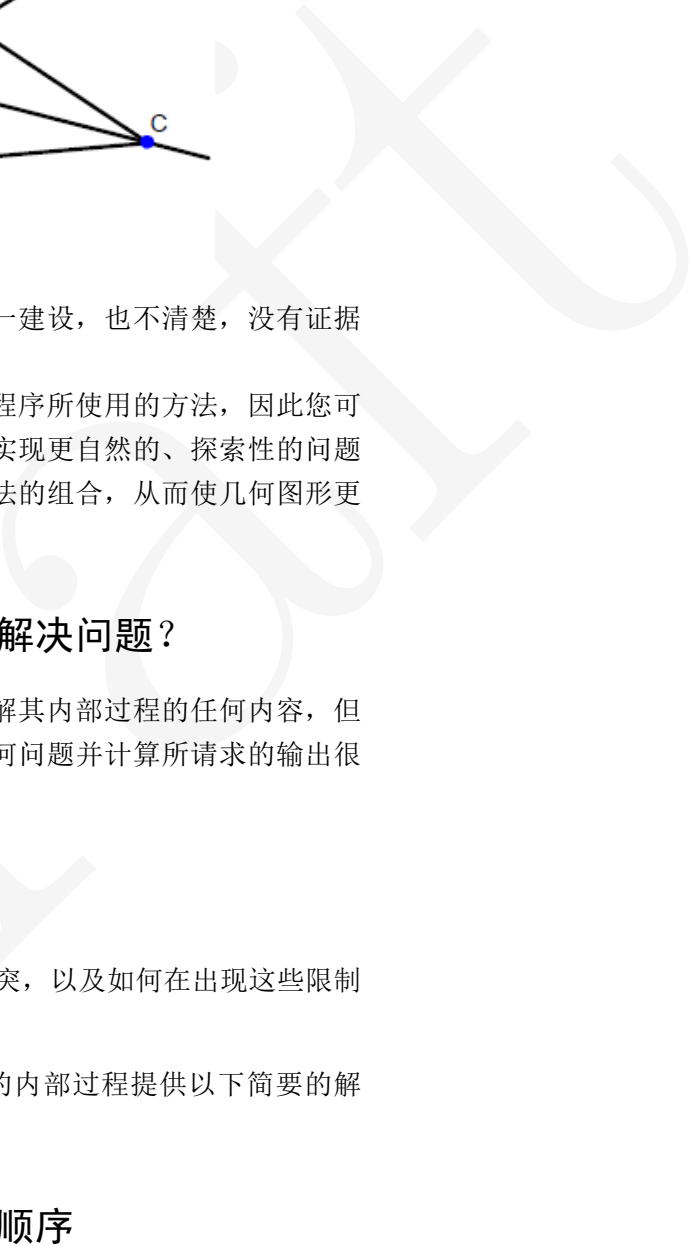
2. 构造一个角的角平分线。
3. 构造第二个角的角平分线。
4. 构造两个角平分线的交点 D:



5. 构造一条垂直于 AC 的线通过 D. 构造点 E, 其中新线相交 AC:



6. 绘制一个以 D 为中心的圆圈, 通过 E:



基于构造的绘图是其他交互式几何应用程序所使用的方法，因此您可以使用它。另一方面，基于约束的绘图可以实现更自然的、探索性的问题解决方式。实际上，您可能会使用这两种方法的组合，从而使几何图形更容易创建。

## 0.4 几何表达式如何解决问题？

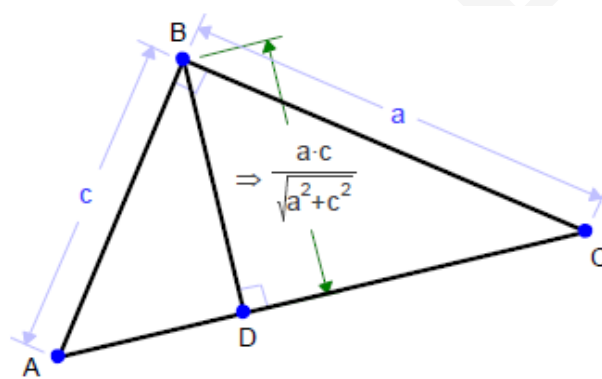
- 应用程序如何使用您的绘图来解决歧义；
- 应用程序添加变量的时间和原因；
- 为什么有时会提示您解决约束之间的冲突，以及如何在出现这些限制时解决它们。

## 0.5 内部构造顺序




1. 当您指定几何对象和约束时，它为它们创建一个构造序列。
2. 它执行这些构造来创建几何问题的符号模型。
3. 它创建一个包含对象并符合约束条件的绘图。为此，它分配示例数值或变量。

例如,在下面的绘图中, AB 被限制为长度  $c$ , BC 被限制为长度  $a$ , AB 约束垂直于 BC, BD 被限制为垂直于 AC, D 被限制在 AC 上。



给定此输入, 几何表达式内部创建一个构造序列, 如:

1. 将点 A 放在任意位置, 创建变量以表示点 A 的坐标  $(u_0, v_0)$ 。
2. 在任意方向上放置 B 距离  $c$ , 创建另一个变量代表直线的斜率默认值,  $\theta_0$ 。
3. 通过使用本机坐标系测量 AB 线段的距离, 计算  $c$  的样本值。虽然我们迄今显示的绘图不显示坐标轴、坐标或网格, 但您可以通过单击工具栏上的切换网格和坐标轴图标  轻松地显示或隐藏它们。请参阅几何表达式手册或嵌入式帮助系统。
4. 创建一条垂直于 AB 的线, 通过 B。
5. 将 C 点放在离 B 距离  $a$  的这条线上。

两个点在这个距离是可能的—在左边或在线 AB 的右边。几何表达式从您绘制线段的位置和放置点处获取提示。如果绘图显示 AB 右侧的 C, 几何表达式确定这就是您想要的。

6. 找到一条垂直于 AC 的线通过 B。

7. 把 D 放在这条线和 AC 的交叉处。

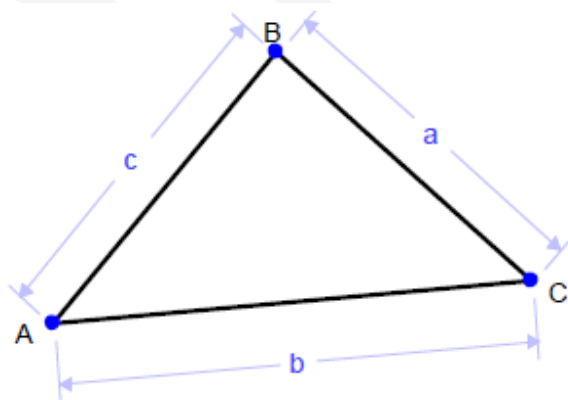
几何表达式的构造序列的存在不等同于数学上定义良好的问题。不幸的是，几何表达式的构造工具箱不能应付许多数学上定义良好的问题。然而，有了一点独创性，你通常可以找到一个替代的方法来描述这个问题，一个应用程序可以构建的。

应用程序添加的变量，解决几何歧义，以及当几何表达式无法找到构造序列时会发生什么，都在下面更详细地讨论。

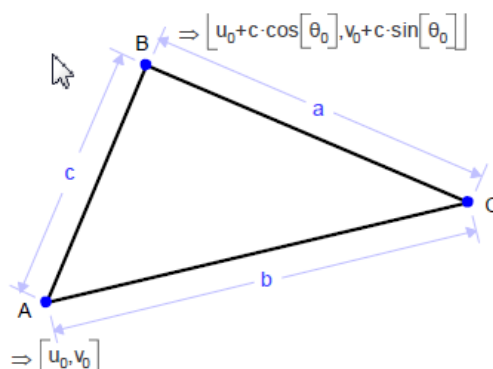
## 0.6 应用程序添加的变量

几何表达式不要求您在每个细节中都指定模型。底层几何引擎会自动填充任何未指定的变量。

例如，下面的绘图（许多几何问题的典型）约束三角形的形状，但不限制其位置：



如果要求 A 和 B 的坐标，则需要系统为点 A 的位置和 AB 线的方向添加变量：

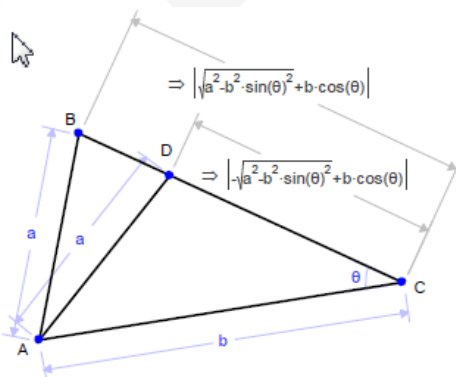


默认情况下，几何表达式为点 A 的 x 和 y 坐标创建变量  $u_0$  和  $v_0$ ，并为 AB 直线的方向  $\theta_0$ 。它根据绘图坐标系统上相关对象的位置将数值与这些变量关联起来。

几何表达式不能总是如此容易地计算样本值。当一个变量在多个地方使用，或者当它涉及复杂的表达式时，应用程序解决等式来得出适当的样本值。但是，无论它分配的值是什么，都可以直接在“变量”面板中设置自己的值（下面讨论的是“控制变量”）。

## 0.7 解决歧义

几何表达式使用绘图来解决多义性。例如，下面的绘图显示 ABC 和 ADC 两个三角形。两者都有约束长度的两个边，一个长度 a 和另一个长度 b，以及一个夹角  $\theta$ ，一个非夹角：



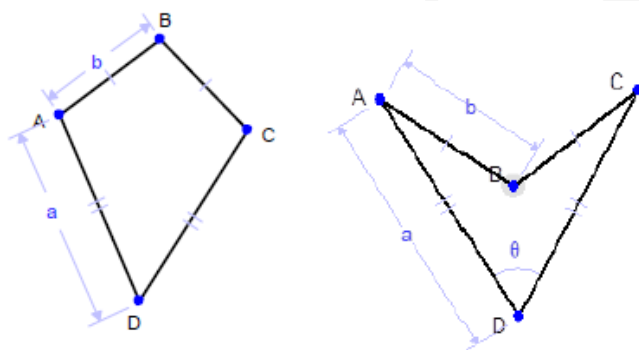
两边和所包含的夹角唯一地定义一个三角形，但不是两边和一夹角。

因此，如果用两个边和一个非夹角指定一个三角形，它不是唯一的：存在两个可能的解。在上面的绘图中，它可以是 ABC 或 ADC。

在这样的模棱两可的情况下，几何表达式根据绘制对象的方式确定您打算选择哪一种解决方案。

两个三角形都有一个夹角度（BAC 和 DAC），一个非夹角解。但受约束的角（ACB）及一个无约束的角和非夹角（ABC 和 ADC）。两个三角形之间的关键区别在于这个最后的角度是锐角的还是钝角。因此，应用程序咨询您的绘图，以了解您如何绘制这个关键角度。如果您将其绘制为锐角，则应用程序构造三角形 ABC；如果将其绘制为钝角，则会构造 ADC。

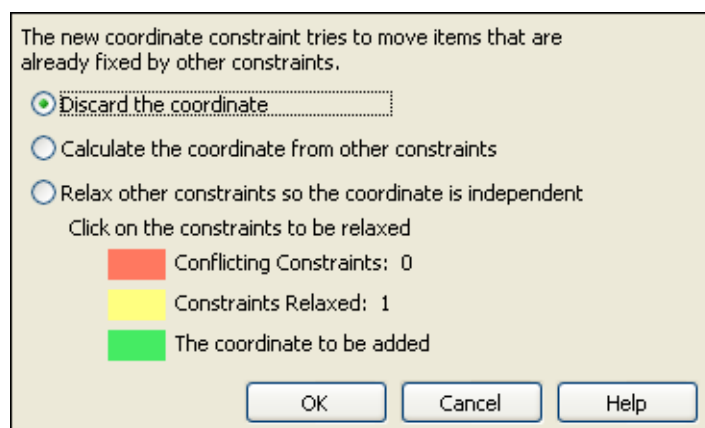
一个梯形与下面指定的约束也有两个可能的解决方案的角度 ABC—一个凸，另一个凹。因为绘图是凸的，所以几何表达式选择凸解：



## 0.8 约束冲突

您可能尝试添加更多的约束，而不需要这样做，从而创建了您试图添加与现有的冲突的约束的情况。在这种情况下，几何表达式无法找到构造序列。

如果为已经受约束的几何图形对象输入约束，您将看到这样的对话框：



可以用三种方式解决约束冲突：

- 取消该操作，使绘图不受新约束而保留。
- 从其他约束中计算 [新约束]。与取消一样，此选项消除了新约束，并且几何表达式计算请求的值并显示结果。
- 若要添加新约束，您必须放宽一个或多个冲突部分。选择底部的单选按钮提供了选择的机会；所有冲突的约束都以红色突出显示，您尝试添加的约束将以黄色突出显示（图 1）。

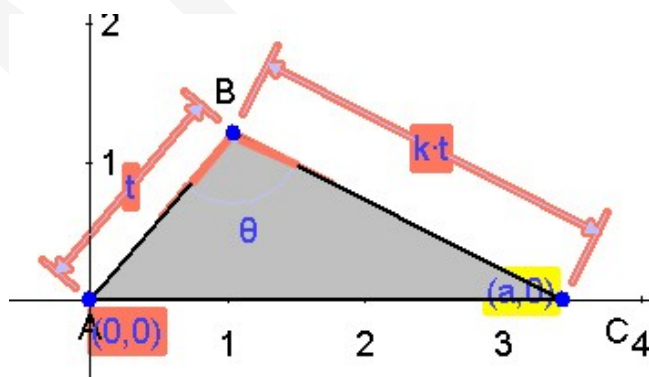


图 1

当您选择这些约束之一时（图 2 显示了单击 $\theta$ 的结果），当前约束的突出显示变为绿色。

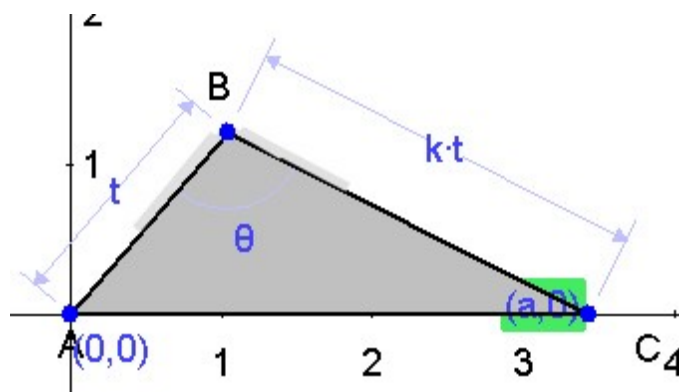


图 2

确定添加新约束，然后计算并显示与松弛约束关联的变量的新值（图 3）。

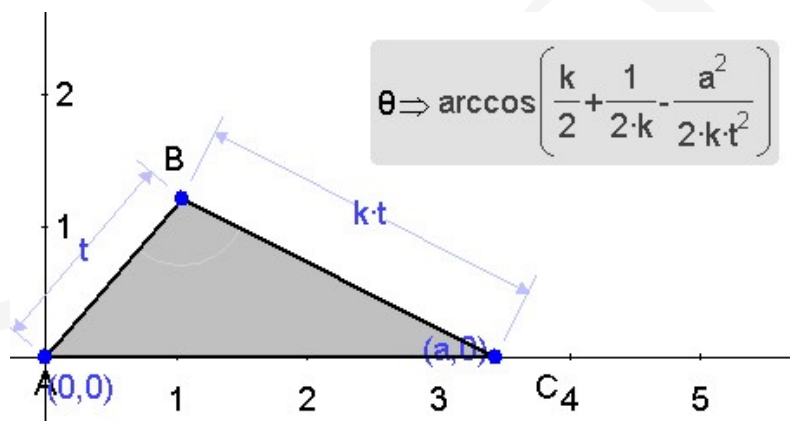
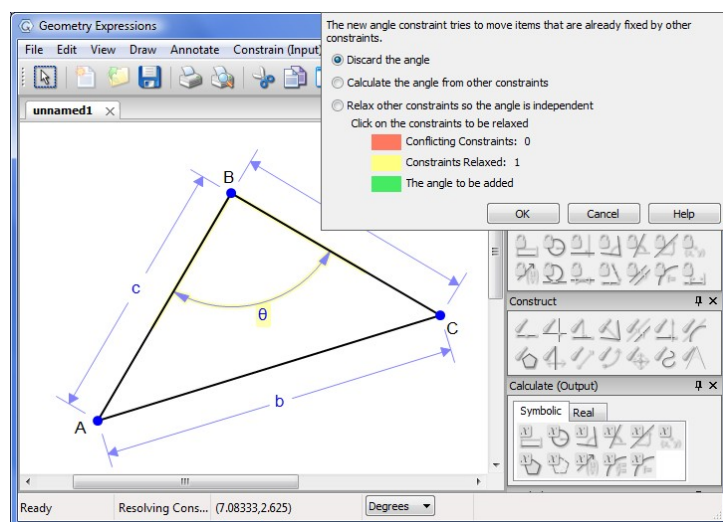


图 3

在添加新约束时，您需要解决约束冲突：

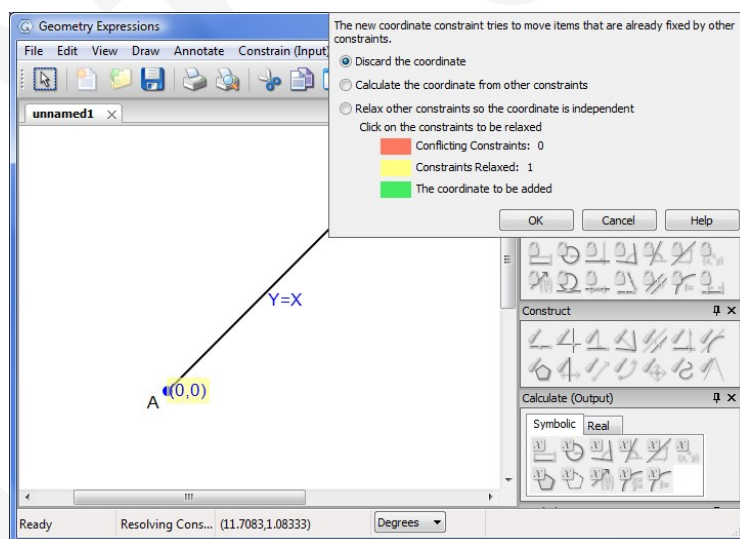
- 不独立的那些已经添加；
- 不一般适用，但可能适用于特定情况；
- 或无法获得构造序列的。

下面是一个不独立的约束的例子：三边已经定义了三角形，所以  $\theta$  依赖于边的长度。

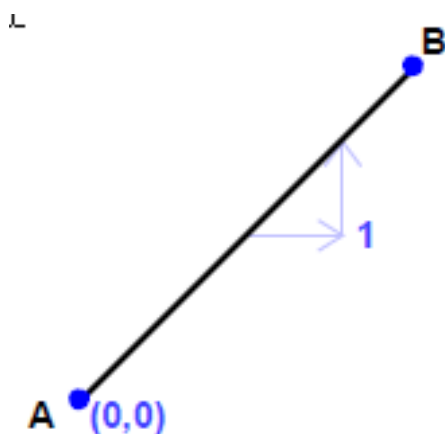


若要解决此冲突，可以消除其中一个约束——无论是有问题的边长度或  $\theta$ 。

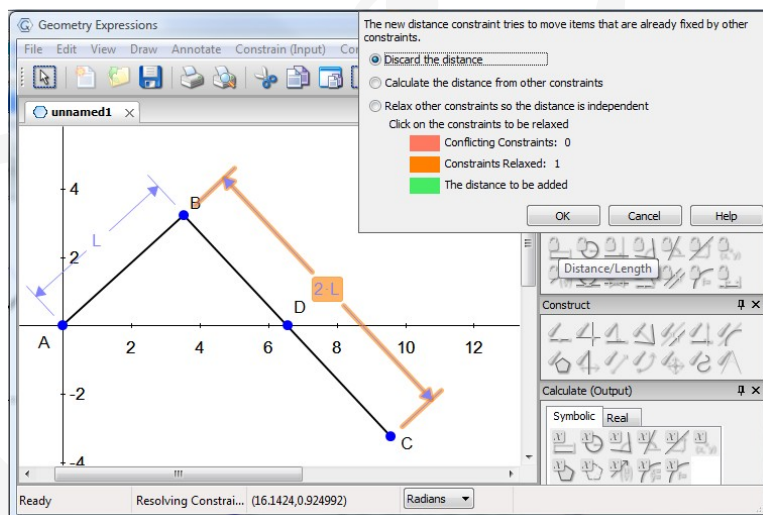
下面是一个约束的例子，尽管它看起来是独立的，但在所有情况下都不会如此。线段已被分配给等式  $Y = X$ ，并且点 A 被分配了坐标(0,0)。点(0,0)确实位于  $Y = X$  线上，但其坐标的其他值可能不存在。例如，如果试图将 A 限制为在坐标(1,0)上，则会违反  $Y = X$  约束。几何表达式中的约束必须笼统地适用，而不是依赖于特定的值。



要解决此冲突，您可以设置其斜率，而不是设置直线方程：

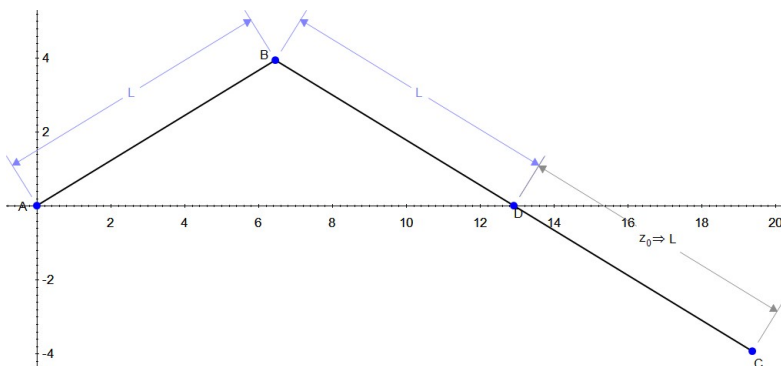


有些问题似乎违反了这两条规则；然而，几何表达式找不到满足它们的构造序列。在这些情况下，最好的解决方案是尝试一种不同但等价的方法来构造问题。例如，您可能希望有两个附加的成员，其中较短的成员的一端是固定的，第二张幻灯片的中点沿一个条形，其中长两倍于较短的长度。您可能首先尝试这样构建：

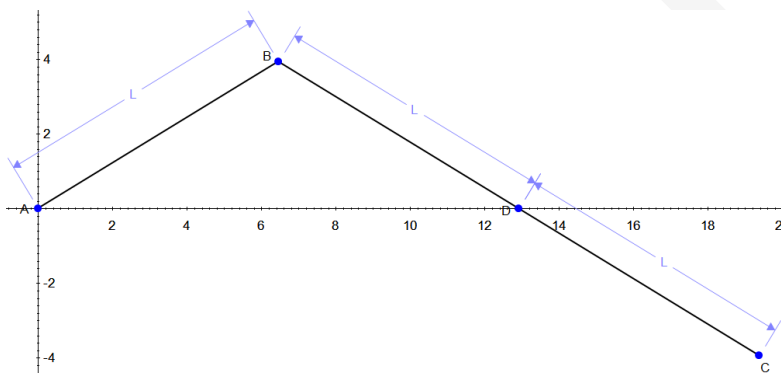


其中 A 固定在原点, D 为 BC 的中点, 受限在 x 轴上。不允许此约束, 但不会过度约束图形。在这种情况下, 用两种不同的方法都可以很容易地进行补救。更简单的变化是限制 BD 长度为 L, 而限制整个线段 BC 长度为 2L。





或者，而不是构造 D 作为中点，只需将它放在 BC 和轴之间的交点上。然后约束 BD 和 CD 每有长度 L。



后一种选择通常会更好，原因有两个：一是线约束更明确，显示更明显。三线段的长度相同。二是在建设后期不太可能造成其他冲突。当几何表达式不能将一组约束解析为构造序列时，通常是与一些显式构造冲突，中点、垂直平分线和角平分线是最坏的违规者。一组约束在构造顺序中足够灵活，几乎总能解决它们，但显式构造减少了灵活性，有时会在不存在的情况下产生冲突。

## 0.9 计算输出

几何表达式根据绘制的对象以及指定的约束或结构计算结果。如果尚未提供所有必要的约束，系统将自动添加任何丢失的变量。（有关示例，请参见“应用程序添加的变量”）。

您可以通过在请求输出时选择适当的选项卡（实数或符号）来请求数值或符号条件下的计算。符号计算以数学表达式的形式产生结果。

几何表达式可以以不同的方式显示其计算结果，具体取决于输出设置。两个特别需要讨论—无论您希望看到某些术语的绝对值，以及您希望如何处理中间变量。在“数学”选项卡的“输出”部分中，从“编辑 > 首选项”菜单中调整这些设置。您可以在选择上下文菜单中更改单个输出的这些设置（选择输出表达式和右键单击）> 输出属性或编辑 > 属性。

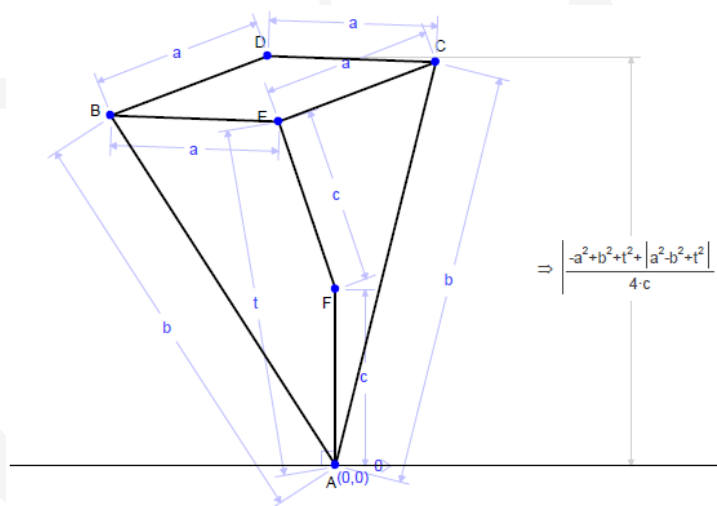
## 0.10 消除绝对值

使用假设是“显示属性”或“首选项”对话框的“输出”部分中的一个选项，用于确定表达式是否包含或消除绝对值：问题的假设是绝对值的操作数是正数还是负。

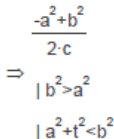
当检查时，应用程序假定给定的术语为正数，如果绝对值操作数的值为正数。如果是阴性的话相应的术语被假定为负数。

取消选中时，相关术语出现在包含在绝对值条中的表达式中。

例如，没有假设，在这 Paucellier 的连接图中，D 的高度取决于参数 t:



如果选中“使用假设”复选框，则表达式将简化且不再涉及 t。但是，有时可以添加其他假设，如下所示。根据图表的几何图形检查这些假设，看看它们是否准确地表达了你的意图。



假设是简化表达式并仅应用于绝对值的一种方法。如果表达式中不包含绝对值中的任何术语，则该选项将不起作用。

## 0.11 使用中间变量

如上文“计算输出”中所述，应用程序以下列方式表示结果：

- 您添加的变量，并且
- 应用程序添加的其他变量，如果您还没有完全约束绘图。

但是，表达式有时会很长，很复杂，难以阅读和理解。为了使输出表达式更清晰、更紧凑，您可以选择使用中间变量。

可以通过三种方式控制几何表达式处理中间变量的方式:

- 中间变量复杂性设置确定了中间变量在表达式中出现之前必须具有的复杂程度。
- “使用中间变量”字段确定此阈值之上是否显示它们。
- “显示中间变量”字段会影响它们的显示。

这三设置相互作用，让您控制了计算，并说明了它是如何呈现的。

中间变量复杂度是一个应用程序设置，可从“**数学**”选项卡中的“**编辑 > 首选项**”中获得。此选项允许您为中间变量复杂度设置阈值（从 2 到 100）。此数字确定要用表达式中的变量替换的术语的复杂性。

低数字告诉应用程序用中间变量替换甚至简单的术语，这样您就可以看到更多的这些变量。递增的数字意味着中间变量在表达式中会逐渐变大和更复杂，因此您将看到较少的值。

使用中间变量（在“**首选项**”对话框的“**数学**”选项卡的“**输出**”部分和“**显示属性**”对话框中的“**输出**”下）确定是否使用了复杂性阈值以上的中间变量。当检查时，比阈值更复杂的术语将被表达式中的中间变量替换。不替换比阈值更简单的术语。

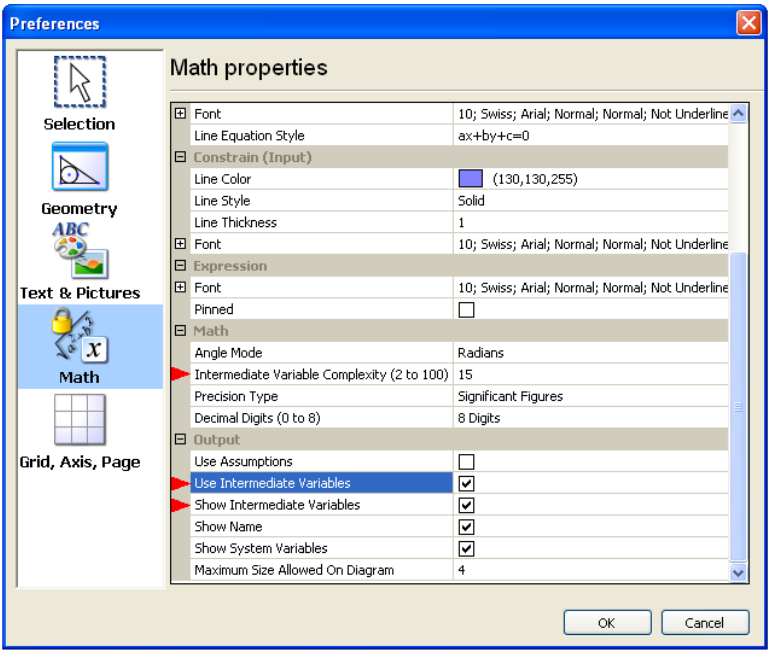
取消选中时，中间变量从不出现，阈值无效。

显示中间变量（在“**首选项**”对话框和“**输出**”部分的“**数学**”选项卡的“**输出**”部分中找到显示属性对话框）确定中间变量定义是否显示结果。检查时，您将看到结果，包括中间变量，然后显示所使用的每个中间变量的定义的附加行。

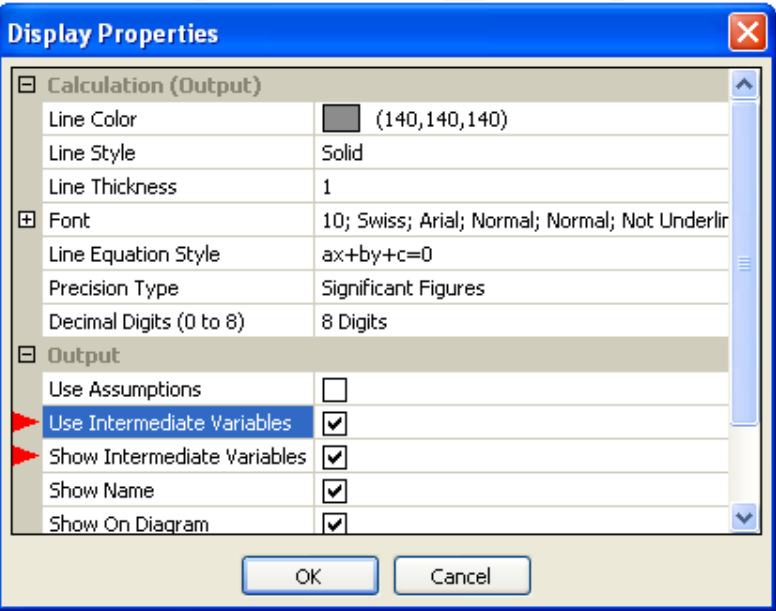
如果取消选中，则会根据其他两个设置（而不是它们的定义）在表达式中看到中间变量。

显示中间变量只影响表达式的显示方式；它对基础表达式本身没有影响。它仅在检查使用中间变量时才相关。如果未选中“使用中间变量”，则没有要显示的中间变量。

首选项适用于绘图中的所有输出，但在“**编辑 > 属性**”、“**显示属性**”对话框中设置的单个输出除外。



选择一个或多个输出，然后选择“编辑 > 属性”以更改所选输出的属性。



总结：

- 中间变量复杂度设置了一个阈值，上面使用中间变量来计算表达，并显示在其中。因此，它们会影响计算出的表达式的详细信息，也会影响表达式的可读性。
- 使用中间变量确定是否使用阈值以上的中间变量。这也会影响表达式的详细信息。
- 当中间变量存在时，显示中间变量确定显示中间变量的定义。

## 0.12 控制变量

当您创建几何对象并添加约束或构造时，几何表达式将创建所需的变量；根据约束值分配数值，构造和绘图；并列出于变量面板中的值一起创建的任何变量。

分配给一个变量的数值就像一个样本值；它不替换符号值-表达式。相反，应用程序使用数字值四的目的：

- 要确定在页面上绘制几何对象的位置，
- 要解决不明确的几何，
- 要确定在使用假设时是否用绝对值或负值替换绝对值，以及
- 从绘图中进行数值测量。

您不必接受应用程序分配的示例值。可以通过多种方式控制变量的值：

- 直接分配值。
- 将变量锁定到其当前值，以便在绘图中拖动几何图形对象时它不会更改。
- 为创建动画的变量分配一个值范围。

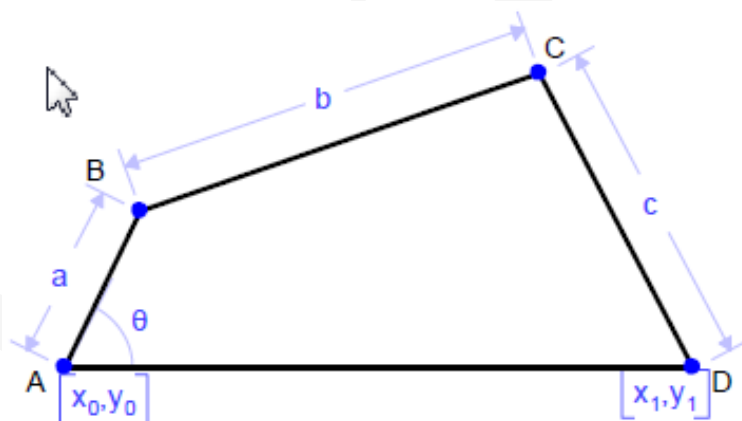
下面将讨论这些功能。

## 0.13 分配

如果希望给定的变量具有特定值，可以通过在面板中选择该变量并输入在输入字段中所需的值。（请参见“Gx 手册”或“嵌入式帮助”系统。）如果分配的值导致应用程序无法构造几何图形，则绘图中有问题的对象将消失。然而，他们并没有消失；他们会再次出现，当将变量设置为与绘图其余部分一致的值。

## 0.14 锁定

默认情况下，当您在几何表达式模型中拖动点时，它会调整变量值以尽可能地容纳拖动。例如，在下面的四条链接的模型中，拖动点  $b$  会改变长度  $a$  和  $B$  以及角度  $\theta$ ：




但是，您可能希望拖动的作用是，如果 AB、BC 和 CD 的线条是刚性的，并且只有角度  $\theta$  可调用。要安排此项，请锁定所有变量，除了  $\theta$  外。

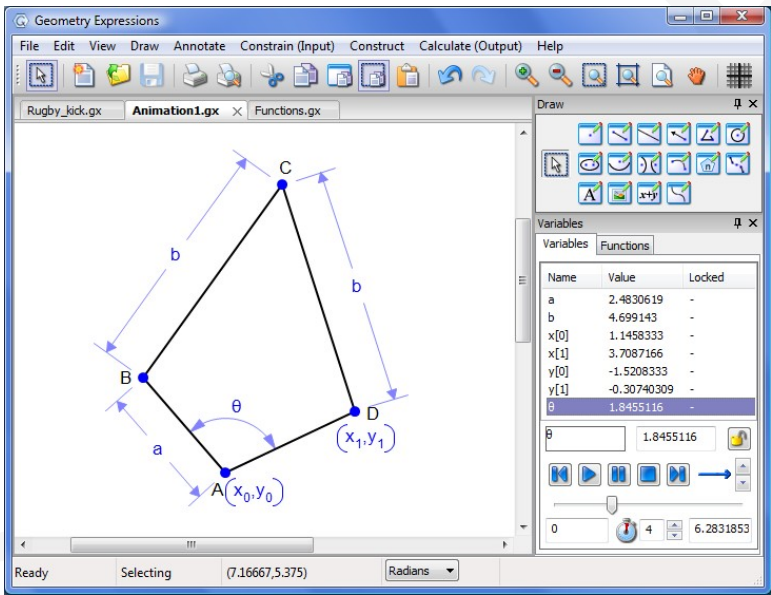
在拖动绘图时，锁定变量仅适用于其行为。您仍然可以通过在输入字段中输入值来为其分配数值。

## 0.15 动画

几何表达式允许您为变量赋值范围，然后使用熟悉的视频回放界面在该范围内运行以对绘图进行动画处理。要对绘图进行动画处理：

1. 选择一个变量来驱动动画。
2. 为该变量指定一系列值。
3. 按下播放按钮 (  )。

在下面的图中，我们选择  $\theta$  来曲柄链接：



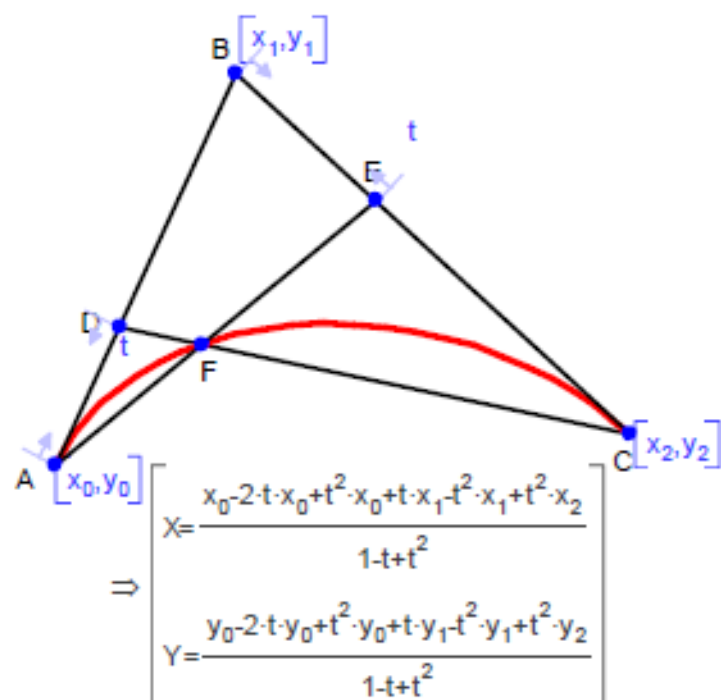
从其他交互式几何应用程序中，您可能熟悉沿线段或曲线的动画点。几何表达式也提供了这种动画功能，使用约束点沿曲线的比例。

一个点比值  $t$ ，该曲线被定义如下：

目标：	定义：
线段 AB	点满足 $(1 - t) A + tB$
圆	点对应的圆心角为 $t$
轨迹或包络	点依赖于值 $t$

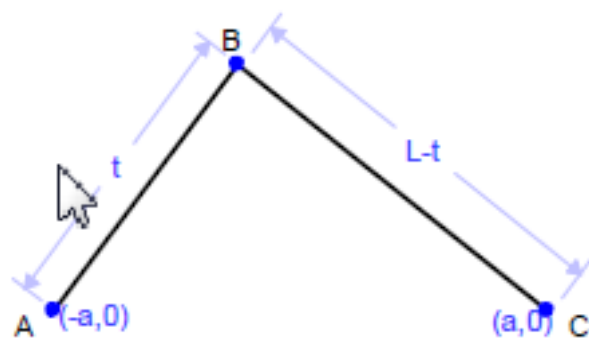
例如，在下面的绘图中，D 被定义为沿 AB 的比值  $t$ ，E 是在 BC 上定义的比值  $t$ 。曲线是 F 的轨迹为  $t$  变化在0和1之间：



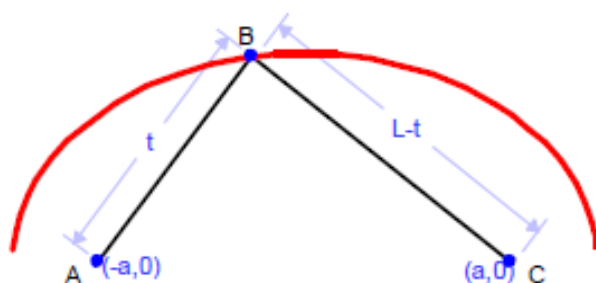


为了使之具有动画效果，我们将  $t$  的范围指定为0到 1，然后推动播放。

轨迹和包络曲线的构造可以根据任意变量来定义。例如，从下面的绘图开始：



我们在  $t$  的值上创建一个轨迹，保持其他变量常量：



## 0.16 导入和导出表达式

您可以从几何表达式复制表达式并将其粘贴到代数应用程序（如 Maple™ 或 Mathematica®）中，也可以复制此类应用程序中的表达式并将其粘贴到几何表达式中。

为实现此目的，几何表达式使用标准的 MathML™ 交换格式。MathML—数学标记语言—是广泛采用的 XML 协议的扩展，专为数学应用而设计。

在以下网址查找官方 MathML 网页和规格：

[www.w3.org/Math/](http://www.w3.org/Math/)

MathML 有两个品种：

- 演示文稿 MathML
- 内容 MathML

当从同伴应用程序复制到几何表达式时，请使用内容 MathML，这是几何图形表达式接受的变体。

为方便起见，几何表达式将在剪贴板上复制的表达式放在演示文稿 MathML 和内容 MathML 中。许多应用程序可以接受这双重输入，并选择他们需要的品种。

但是，某些应用程序可能无法接受双输入。如果在复制的表达式中遇到困难几何表达式：

1. 查阅用户指南或帮助系统的目标应用程序来确定它接受的 MathML 的种类。
2. 使用 **编辑 > 复制作为...** 以调用对话框，使您可以在两个品种之间进行选择。只要您选择的一个放在剪贴板上。

## 0.17 性能提示

各种因素影响结果的简单性和可读性, 而且在某些情况下, 它的速度达到了:

- 你对问题的定义有多清楚? 使用的未知数越少, 计算速度越快, 生成的表达式就越容易明了。
- 问题有多严重? 完全约束的问题比未限定的产生更好的结果, 因为您控制使用哪些未知。
- 使用中间变量使表达式更容易简化, 但更有可能产生结果。
- 为了更快地计算, 请使用中间的较低设置**变量复杂度**。
- 如果您的表达式在其中具有绝对值, 则对更简单的结果使用假设。但是, 检查假设, 以确保它是你的意愿; 如果没有, 请更改绘图以更准确地反映您的意图。