

5.10 Tall og figurer

Tallene

1, 2, 3, 4, 5, ...

kaller vi de *naturlige tallene*. De naturlige tallene deler vi ofte i *partall* og *oddetall*.

Partallene er de tallene vi kan dele med 2. Det er tallene

2, 4, 6, 8, 10, ...

Oddetallene kan vi ikke dele med 2. Det er tallene

1, 3, 5, 7, 9, 11, ...

Når vi kvadrerer et naturlig tall, får vi et *kvadrattall*. Her er de minste kvadrattallene:

$$K_1 = 1^2 = 1$$

$$K_2 = 2^2 = 4$$

$$K_3 = 3^2 = 9$$

$$K_4 = 4^2 = 16$$

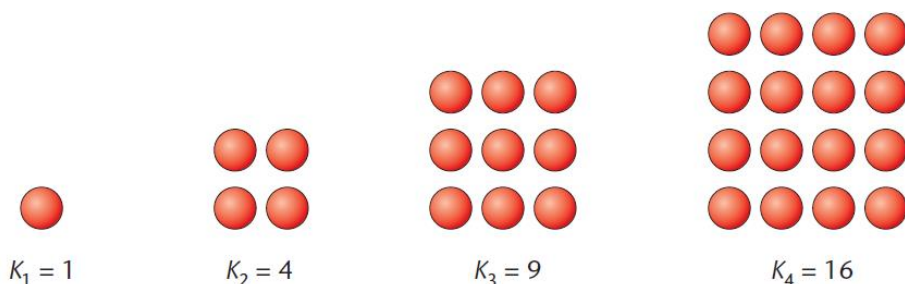
$$K_5 = 5^2 = 25$$

Kvadrattall nr. n er gitt ved formelen

$$K_n = n^2$$

Vi sier også at for eksempel 16 er *kvadratet* av 4.

Kvadrattallene kan vi framstille som *figurtall* av kuler på denne måten:



Vi ser at for eksempel kvadrattall nr. 4 danner et kvadrat med 4 kuler i hver retning.

Nå skal vi i oppgaver studere kvadrattallene og andre figurtall for å se etter sammenhenger.



Oppgave 5.100

- Velg to naturlige tall som følger etter hverandre.
Finn summen av tallene og differansen mellom kvadratet av tallene.
Hva ser du?
- Prøv det samme med andre naturlige tall som følger etter hverandre.
Hvilken regel ser ut til å gjelde?
- Prøv å forklare regelen ved å tegne opp kvadrattallene som figurtall.



Oppgave 5.101

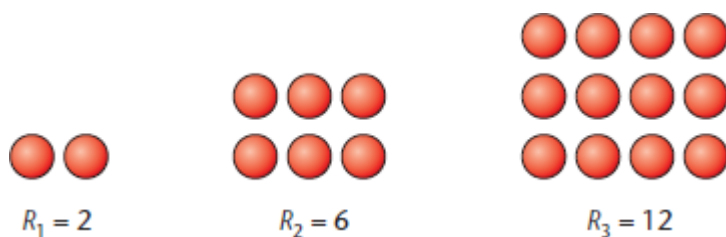
- Velg to naturlige tall slik at det ene er 2 større enn det andre.
Finn summen av tallene og differansen mellom kvadratet av tallene.
Prøv med flere slike tall og se etter et system.
- Velg to naturlige tall slik at det ene er 3 større enn det andre.
Finn summen av tallene og differansen mellom kvadratet av tallene.
Prøv med flere slike tall og se om du kan finne et system.
- Se på det du fant ut i oppgave a og b.
Hvilken regel ser ut til å gjelde?
Prøv regelen din ved å bruke andre tall enn 2 og 3.

Oppgave 5.102

- Finn summen av de to minste, de tre minste, de fire minste og de fem minste oddetallene.
Hvilken regel ser ut til å gjelde?
- Prøv ut regelen din ved å summere flere oddetall.
- Finn summen av de 50 minste oddetallene.

Oppgave 5.103

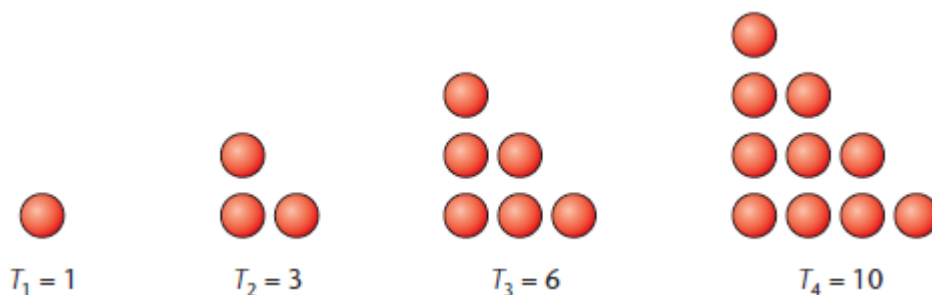
Nå skal vi se på noen figurtall som vi kan kalle rektangeltall. Her er de minste rektangeltallene:



- Finn rektangeltallene R_4 og R_5 .
- Prøv å finne et system i rektangeltallene slik at du kan regne ut rektangeltallet R_{50} .
- Finn summen av de to minste, de tre minste, de fire minste og de fem minste partallene.
Hvilken regel ser ut til å gjelde?
Bruk dette til å finne summen av de 50 minste partallene.

Oppgave 5.104

Nå skal vi se på noen tall som vi kaller trekantall. Her er de minste trekantallene:



- a) Finn trekantallene T_5 og T_6 .
- b) Vi kan vise at vi har denne formelen for trekantall nr. n :

$$T_n = \frac{n \cdot (n+1)}{2}$$

Undersøk om denne formelen passer for trekantallene T_5 og T_6 som du fant i oppgave a.

Finn trekantall T_{20} .

- c) Se på summen av to trekantall som følger etter hverandre.
Hvilken regel ser ut til å gjelde?
Hvordan kan du bruke figurtallene til å vise at regelen er riktig?
- d) Finn summen av de to minste, de tre minste, de fire minste og de fem minste naturlige tallene.
Hvilken regel ser ut til å gjelde?
Hvordan kan du se at denne regelen er riktig ut fra figurtallene?
Bruk denne regelen til å finne summen av de 40 minste naturlige tallene.

Oppgave 5.105

Vi kan lage figurtall ved å legge kuler oppå hverandre. Figuren nedenfor viser de tre første pyramidetallene 1, 5 og 14.



- a) Finn pyramidetall nr. 4 og nr. 5.
- b) Vi kan vise at pyramidetall nr. n er gitt ved

$$\frac{n \cdot (n+1) \cdot (2n+1)}{6}$$

Undersøk om denne formelen stemmer med de tallene du fant i oppgave a.

- c) Hvilken sammenheng er det mellom pyramidetallene og kvadrattallene?

Oppgavedel

5.10 Tall og figurer

KATEGORI 1

Oppgave 5.1100

Jenny har laget disse tre figurene.



Figur 1



Figur 2



Figur 3

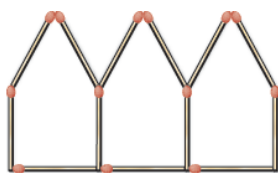
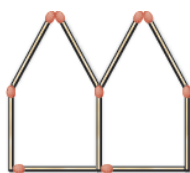
- a) Hvor mange fyrstikker er det på hver av de tre figurene?
- b) Hvor mange nye fyrstikker trenger Jenny for hver ny figur hun lager når hun er ferdig med den første figuren?
- c) Hvor mange fyrstikker trenger Jenny for å lage figur nr. 10?
- d) Jenny forsøker å finne fram til en matematisk modell som kan fortelle hvor mange fyrstikker det er på figur nr. n . Hun er i tvil om hvilken av disse tre modellene som er den riktige:

1) $3n$ 2) $2n + 1$ 3) $3n + 2$

Hjelp Jenny med å finne fram til riktig modell.

Oppgave 5.1101

Figuren viser tre rekker med fyrstikkhus.



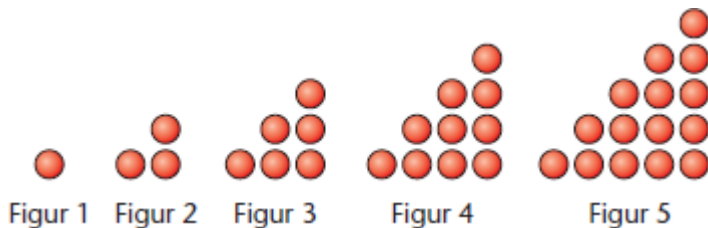
- a) Hvor mange fyrstikker er det i hvert av de tre husene?
- b) Hvor mange nye fyrstikker trenger vi for hvert hus vi lager når vi er ferdig med det første huset?
- c) Hvor mange fyrstikker er det i en rekke med 10 slike hus?
- d) Trude ønsker å lage en matematisk modell som forteller hvor mange fyrstikker det er i ei rekke med n slike hus. Hun vet at modellen skal begynne med $4n$, men sliter med å finne hele uttrykket.

Hvordan skal den matematiske modellen se ut?

KATEGORI 2

Oppgave 5.2100

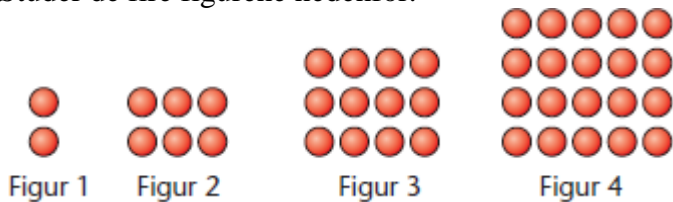
Studer de fire figurene nedenfor.



- Hvor mange kuler er det på hver av de fem figurene?
- Finn ut hvor mange kuler det er på hver av de tre neste figurene.
- Forklar hvordan du finner ut hvor mange kuler du trenger for hver ny figur du lager.
- Du skal nå lage fem nye figurer. Figur A skal ha like mange kuler som figur 1. Figur B skal ha like mange kuler som figur 1 og figur 2 har til sammen. Figur C skal ha like mange kuler som figur 2 og figur 3 har til sammen. Figur D skal ha like mange kuler som figur 3 og figur 4 har til sammen, osv. Hvor mange kuler må du da bruke for hver av de fem figurene?
- Skriv opp tallrekken som tallet på kuler representerer. Hva kaller vi disse tallene?

Oppgave 5.2101

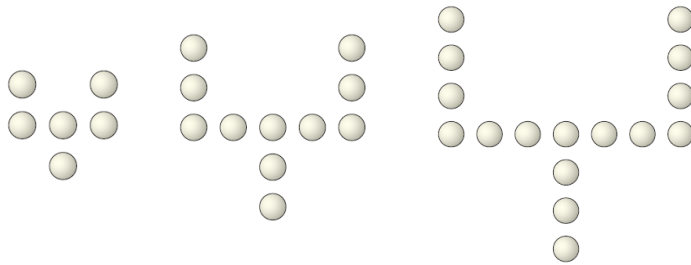
Studer de fire figurene nedenfor.



- Hvor mange kuler er det på hver av de fire figurene?
- Finn ut hvor mange kuler det er på hver av de to neste figurene.
- Forklar hvordan du finner ut hvor mange kuler du trenger for hver ny figur du lager.
- For å regne ut hvor mange kuler vi trenger for å lage figur nummer n kan vi bruke uttrykket
$$n^2 + n$$
- Bruk dette uttrykket og kontroller svaret i oppgave a.
- Jesper brukte 156 kuler på figur nummer n . Finn n digitalt.

UTEN HJELPEMIDDEL

Oppgave 5.3100 (Eksamen H-2012)



Siri lager figurer av runde perler. Figurene ovenfor har hun kalt f_1 , f_2 og f_3 .

- a) Følg samme mønster, og tegn figuren f_4 .

Hvor mange perler vil det være i figuren f_5 og i figuren f_6 ?

- b) Sett opp en modell som viser antall perler i figuren f_n , uttrykt ved n .

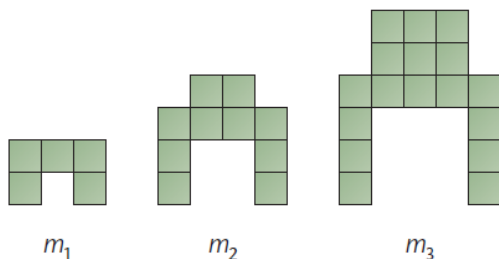
Bruk modellen til å bestemme hvor mange perler Siri trenger for å lage figuren f_{36} .

- c) Hva er den største figuren f_n Siri kan lage dersom hun har 1000 perler?

MED HJELPEMIDDEL

Oppgave 5.3101

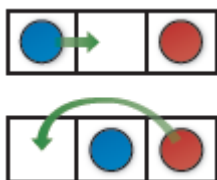
Figuren nedenfor representerer de tre figurtallene m_1 , m_2 og m_3 .



- a) Hvor mange ruter er det i m_4 ?
- b) Hvor mange ruter tipper du det er i m_{10} ?
- c) Finn en formel for hvor mange ruter det er i m_n .
- d) Bruk formelen du fant i oppgave c til å regne ut hvor mange ruter det er i m_{10} .
- e) Hvordan stemmer dette med det du tippet i oppgave b?

Oppgave 5.3102

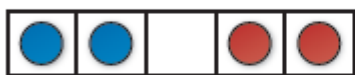
Gå til nettsiden <http://is.gd/froskehopp>. Prøv å få de brune og de grønne froskene til å skifte side ved å klikke på dem. Froskene kan bare flytte framover og ikke tilbake. De kan hoppe ei rute fram om denne er ledig. De kan også hoppe over en frosk som har en annen farge, dersom denne frosken står i ruta ved siden av og den neste ruta er ledig, slik figurene nedenfor viser.



- a) Hva er det minste tallet på hopp du trenger for at alle froskene skal ha byttet side?
- b) Hvor mange hopp tror du må til dersom det er ti frosker på hver side?

Bruk små plastbrikker med ulik farge eller papirbrikker der du merker halvparten med et kryss. Tegn tre spillebrett og plasser brikkene slik figurene nedenfor viser.

- c) Hva er det minste tallet på hopp du trenger dersom det er én frosk på hver side?



- d) Hva er det minste tallet på hopp du trenger dersom det er to frosker på hver side?
- e) Hva er det minste tallet på hopp du trenger dersom det er fire frosker på hver side?

Du skal nå prøve å finne en formel for hvor mange hopp som må til dersom det er n frosker på hver side.

- f) Fyll ut tabellen nedenfor med det minste tallet på hopp som er nødvendig for at alle froskene skal bytte plass. Se etter mønster eller system i tallene.

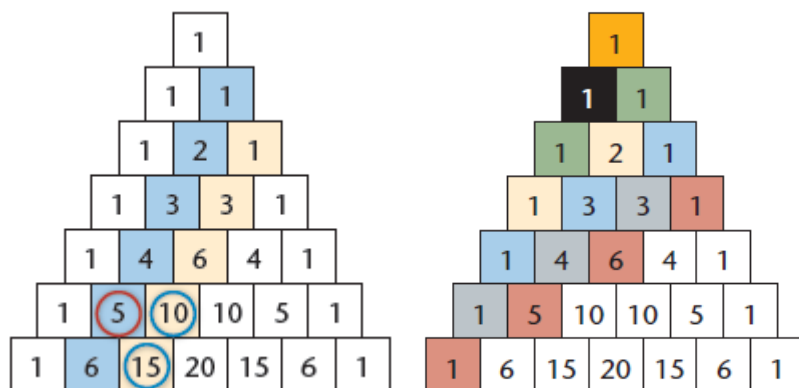
Tall på frosker på hver side	1	2	3	4
Minste tall på hopp				

Hva er det minste tallet på hopp du kan bruke dersom det er n frosker på hver side?

- g) Bruk formelen du fant i oppgave f til å finne hvor mange hopp som må til dersom det er ti frosker på hver side.
Hvordan stemmer dette med det du tippet i oppgave b?
- h) La nå froskene bytte side når det **ikke** er like mange frosker på hver side. Prøv med noen forskjellige kombinasjoner og lag en tabell over resultatene du kommer fram til.
Hva er det minste tallet på hopp som må til dersom det er n frosker på den ene siden og m frosker på den andre?
- i) Vis at formelen du kom fram til i oppgave f er et spesialtilfelle av den mer generelle formelen du fant i oppgave h.

Oppgave 5.3103

Vi vil nå lete etter system og mønster i pascaltrekanten. Vi kaller den øverste ruten for rad nummer 0. De to neste rutene kaller vi rad nr. 1 osv.



- Legg sammen tallene i hver rad og finn en formel for summen S_n av tallene i rad nr. n .
- Bruk formelen du fant i oppgave a til å regne ut summen S_{10} av tallene i rad nr. 10.
- Hva kaller vi tallene i de blå rutene i figuren til venstre ovenfor?
- Hva kaller vi tallene i de gule rutene i figuren til venstre ovenfor?
- Hvilken sammenheng er det mellom tallet i den røde ringen, og de to tallene med blå ringen rundt, i figuren til venstre ovenfor?
Gjelder denne sammenhengen alle tallene i de blå rutene og de to tallene vi får ved å flytte én rute til høyre og så én rute på skrå ned til venstre?
- Regn ut 11^0 , 11^1 , 11^2 , 11^3 og 11^4 .
Hvilken sammenheng er det mellom tallene du regnet ut og pascaltrekanten?
- Begynn i rad nummer 0 i figuren til høyre ovenfor, og legg sammen tallene som er i ruter med samme farge. Vi regner ikke med tallene i de hvite rutene.
Hva kaller vi tallene som disse summene danner?
- Begynn med tallet 2 i de blå rutene i figuren til venstre ovenfor. Legg sammen tallene i de seks rutene som ligger rundt den blå ruten med tallet 2. Gjenta det samme for tallene 3, 4 og 5 i de blå rutene og fyll ut tabellen nedenfor.

Tall i blå ruter	2	3	4	5
Summen av tallene i de omliggende rutene				

Finn en formel for summen O_n av tallene i de omliggende rutene når tallet i den blå ruten er n .

- Hva er sammenhengen mellom summen av tallene i de omliggende rutene og froskehopptallene F_n som du fant i oppgave 5.310 f?

FASIT teoridel

5.100

- a) Svaret blir det samme.
- b) Summen av to påfølgende naturlige tall er like differansen av kvadratene av de samme tallene.

5.101

- a) Differansen mellom kvadratene er 2 ganger summen av tallene.
- b) Differansen mellom kvadratene er 3 ganger summen av tallene.
- c) Gitt to naturlige tall der det ene er n høyere enn det andre. Da er differansen mellom kvadratene n ganger summen av tallene.

5.102

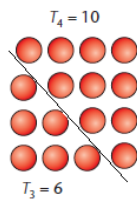
- a) 4, 9, 16, 25. Summen blir kvadrattallene.
- c) 2500

5.103

- a) $R_4 = 20$, $R_5 = 30$
- b) $R_n = n \cdot (n+1)$, $R_{50} = 50 \cdot 51 = 2550$
- c) $2 + 4 = 6 = R_2$, $2 + 4 + 6 = 12 = R_3$, $2 + 4 + 6 + 8 = 20 = R_4$, $2 + 4 + 6 + 8 + 10 = 30 = R_5$
Summen av partall er rektangeltall. Summen av de 50 første er 2550.

5.104

- a) $T_5 = 15$, $T_6 = 21$
- b) $T_5 = \frac{5 \cdot (5+1)}{2} = \frac{30}{2} = 15$, $T_6 = \frac{6 \cdot (6+1)}{2} = \frac{42}{2} = 21$. Regelen passer.
 $T_{20} = \frac{20 \cdot 21}{2} = 210$
- c) Summen av to påfølgende trekantall er et kvadrattall. $T_n + T_{n+1} = (n+1)^2$



- d) $1 + 2 = 3 = T_2$, $1 + 2 + 3 = 6 = T_3$, $1 + 2 + 3 + 4 = 10 = T_4$, $1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15 = T_5$
Summene er trekantallene.

$$T_{40} = \frac{40 \cdot 41}{2} = 820$$

5.105

- a) 30, 55
- b) Ja
- c) $P_n = T_n \cdot \frac{2n+1}{3}$

FASIT oppgavedel

5.1100

- a) 3, 5, 7 b) 2 c) 21
d) Alternativ 2

5.1101

- a) 5, 9, 13 b) 4 c) 41 d) $y = 4n + 1$

5.2100

- a) 1, 3, 6, 10, 15 b) 21, 28
d) 1, 4, 9, 16, 25 e) Kvadrattall

5.2101

- a) 2, 6, 12, 20 b) 30, 42 f) 12

5.3100

- a) 26 perler, 31 perler
b) $f_n = 5n + 1$, 181 perler c) f_{199}

5.3101

- a) 26 c) $n^2 + 2n + 2 = (n+1)^2 + 1$ d) 122

5.3102

- a) 15
c) 3
d) 8
e) 24
f) $n(n+2) = n^2 + 2n$
g) 120
h) $n \cdot m + n + m$
i) Bytter vi ut m med n , får vi formelen i oppgave f.

5.3103

- a) $S_n = 2^n$ b) $2^{10} = 1024$
c) De naturlige tallene
d) Trekanttallene
e) $5^2 = 10 + 15$. Sammenhengen gjelder for alle tallene i de blå rutene.
f) $11^0 = 1$
 $11^1 = 11$
 $11^2 = 121$
 $11^3 = 1331$
 $11^4 = 14641$
g) Fibonaccitallene
h) $O_n = n^2 + 2n + 2$ i) $O_n = F_n + 2$