

# 制御理論



2023年11月8日

無線部開発班 JG1VPP



---

# 目次

---

<b>第 1 章 制御系の構成と安定性</b>	<b>3</b>
1.1 はじめに . . . . .	3
1.2 制御器 . . . . .	3
1.3 安定性 . . . . .	4
1.4 モデルベース設計 . . . . .	5
1.5 加法的変動 . . . . .	6
1.6 制御帯域 . . . . .	6
1.7 データ駆動的設計 . . . . .	7

---

# 第1章 制御系の構成と安定性

---

## 1.1 はじめに

制御系を設計し、**安定性**と**モデル化誤差**の考え方を学ぶ。

## 1.2 制御器

制御系は、以下に例示する**制御仕様**を前提に設計される。

- 安定性
- 行き過ぎ量
- 立ち上がり時間
- 参照信号に対する追従性能

制御則は、Fig. 1.1 に示す3種類の基本的な形に分類できる。制御器  $H, C$  は  $P$  の出力  $Y$  を参照信号  $R$  に追従させる。

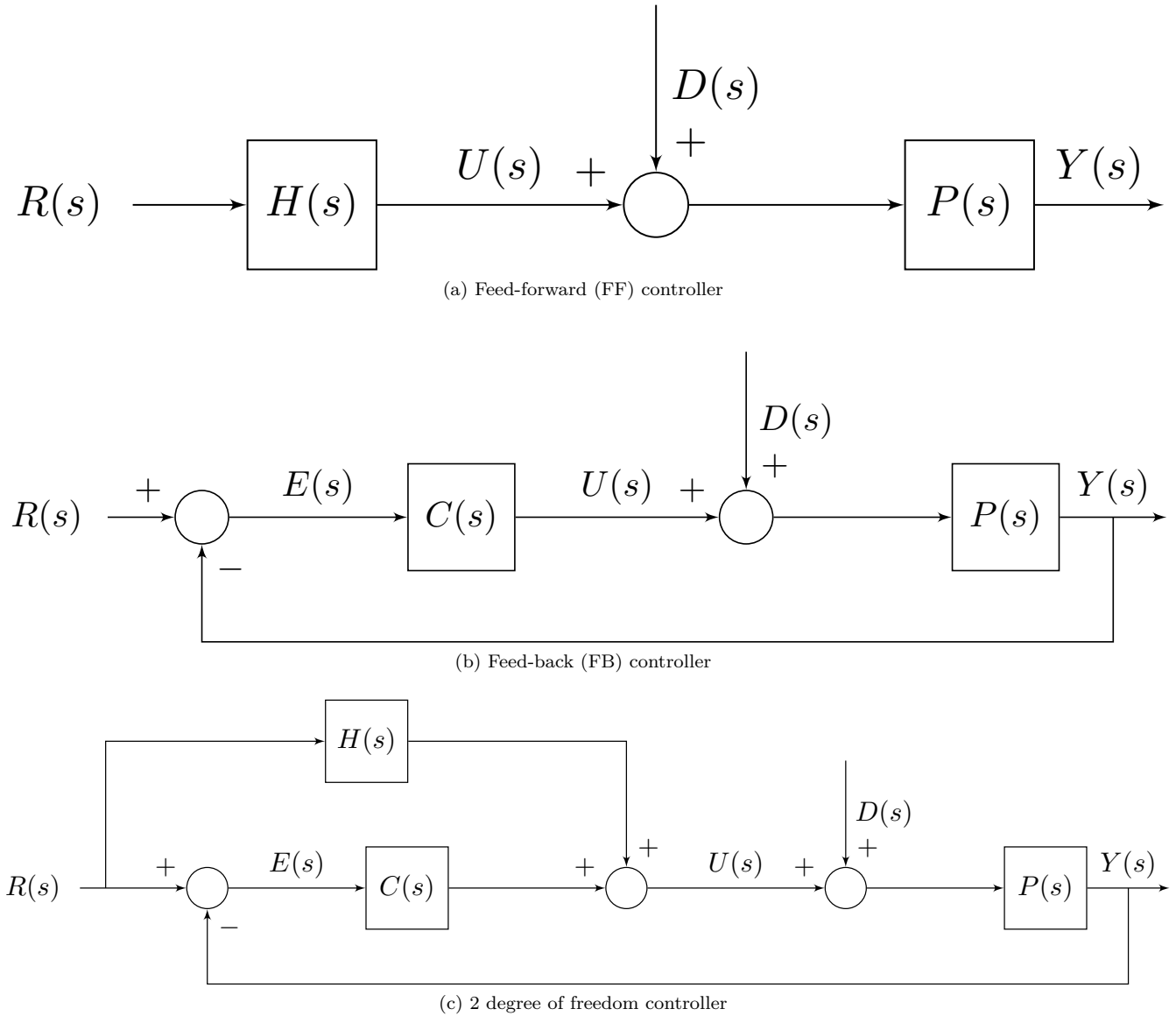


Fig. 1.1: 制御系の種類

ただし、操作  $U$  に外乱  $D$  が乗り、動作に影響を与える。

## 1.3 安定性

制御系の設計で最も重要な観点が、安定性の確保である。

### 1.3.1 FF 制御

Fig. 1.1 より、各信号の間には、式 (1.1) の関係性が成立する。

$$\begin{pmatrix} U(s) \\ Y(s) \end{pmatrix} = G(s) \begin{pmatrix} R(s) \\ D(s) \end{pmatrix}. \quad (1.1)$$

整理すると、

$$G(s) = \begin{pmatrix} H(s) & 0 \\ P(s)H(s) & P(s) \end{pmatrix}. \quad (1.2)$$

安定性の必要十分条件は、任意の有界な  $R, D$  に対して、伝達行列  $G$  の全要素が、有限の出力を与えることである。

### 1.3.2 FB制御

Fig. 1.1 より、各信号の間には、式 (1.3) の関係性が成立する。

$$\begin{pmatrix} U(s) \\ Y(s) \end{pmatrix} = G(s) \begin{pmatrix} R(s) \\ D(s) \end{pmatrix}. \quad (1.3)$$

整理すると、

$$G(s) = \frac{1}{1 + P(s)C(s)} \begin{pmatrix} C(s) & -P(s)C(s) \\ P(s)C(s) & P(s) \end{pmatrix}. \quad (1.4)$$

$G$  の全要素が安定な伝達関数の場合を、**内部安定**と呼ぶ。任意の参照信号と外乱に対し、系の安定性を保証できる。

## 1.4 モデルベース設計

式 (1.5) に示す簡単な制御対象と、比例制御器を設計する。

$$\begin{cases} P(s) = \frac{b}{s+a}, \\ C(s) = K_p. \end{cases} \quad (1.5)$$

### 1.4.1 FF制御

式 (1.6) より、FF 制御系の伝達関数  $G$  は、 $-a$  を極に持つ。極の実部を負に配置すれば、定常値に漸近して安定する。

$$G(s) = \begin{pmatrix} K_p & 0 \\ \frac{bK_p}{s+a} & \frac{b}{s+a} \end{pmatrix}. \quad (1.6)$$

式 (1.7) に示す階段関数の参照信号  $R$  と外乱  $D$  を与える。

$$\begin{cases} R(s) = \frac{1}{s}, \\ D(s) = \frac{d}{s}. \end{cases} \quad (1.7)$$

安定な制御系の場合は、最終値の定理で定常値が求まる。

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sY(s) = \frac{b}{a}(K_p + d). \quad (1.8)$$

外乱  $d$  が 0 なら、式 (1.9) の設定で参照信号に追従できる。

$$K_p = \frac{a}{b}. \quad (1.9)$$

外乱を抑圧するには、FB 制御器との併用が必要である。

### 1.4.2 FB制御

式 (1.10) より、FB 制御系  $G$  は、 $-(a + bK_p)$  を極に持つ。 $P$  が不安定でも、 $K_p$  の調整により、系を安定化できる。

$$G(s) = \frac{1}{s + a + bK_p} \begin{pmatrix} (s+a)K_p & -bK_p \\ bK_p & b \end{pmatrix}. \quad (1.10)$$

式 (1.7) に示す階段関数の参照信号  $R$  と外乱  $D$  を与える。安定な制御系の場合は、最終値の定理で定常値が求まる。

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = \frac{bK_p}{a + bK_p} + \frac{bd}{a + bK_p} \xrightarrow{K_p \rightarrow \infty} 1. \quad (1.11)$$

利得が無限なら、外乱を完全に抑圧し、偏差も 0 になる。外乱が無視できる場合の追従性能は、FF 制御器に劣る。

## 1.5 加法的変動

実際の制御対象は、熱暴走など何らかの変動要因を持つ。Fig. 1.2 に示す、 $\Delta P$  の**加法的変動**が生じる場合を検討する。

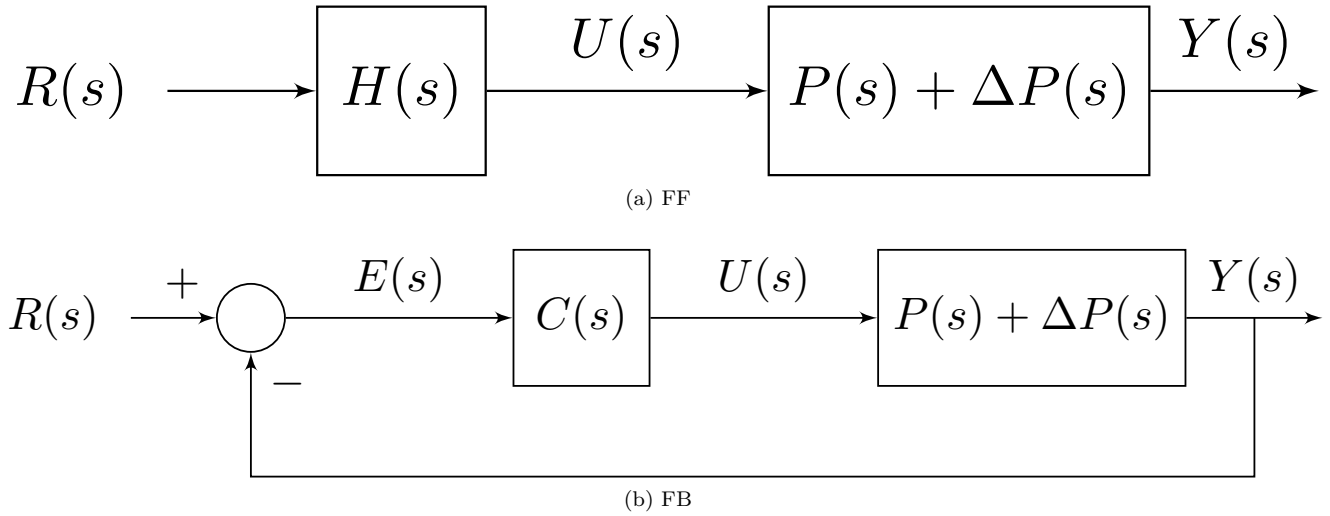


Fig. 1.2: 加法的変動のある制御系

### 1.5.1 FF 制御

FF 制御では、変動  $\Delta P$  の影響が、抑圧されず出現する。

$$Y = (G + \Delta G)R = (P + \Delta P)HR. \quad (1.12)$$

整理すると、

$$\frac{\Delta G}{G} = \frac{\Delta P}{P}. \quad (1.13)$$

### 1.5.2 FB 制御

FB 制御では、変動  $\Delta P$  の影響が、抑圧されて出現する。

$$Y = (G + \Delta G)R = \frac{(P + \Delta P)C}{1 + (P + \Delta P)C}R. \quad (1.14)$$

整理すると、

$$\frac{\Delta G}{G} = \frac{1}{1 + (P + \Delta P)C} \frac{\Delta P}{P} \approx S(s) \frac{\Delta P}{P}. \quad (1.15)$$

式 (1.16) は、変動に対する頑健性を表し、**感度関数**と呼ぶ。

$$S(s) = \frac{1}{1 + PC}. \quad (1.16)$$

閉路伝達関数は、 $S(s)$  と対比して**相補感度関数**とも呼ぶ。

## 1.6 制御帯域

参照信号に対する追従速度は、**制御帯域**によって決まる。帯域を広げるには、**位相進み補償**や2自由度制御を行う。

### 1.6.1 FF 制御

式 (1.17) より、周波数  $a$  rad/s で、応答は 3 dB 減衰する。

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{bK_p}{s + a}. \quad (1.17)$$

### 1.6.2 FB 制御

式 (1.18) より、制御帯域は、 $a + bK_p$  rad/s まで改善する。

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{bK_p}{s + a + bK_p}. \quad (1.18)$$

## 1.7 データ駆動的設計

Fig. 1.3 は、FB 制御系を伝達関数  $T$  で設計する様子である。制御対象  $P$  が未知でも、実測値  $U_0, Y_0$  で最適化できる。

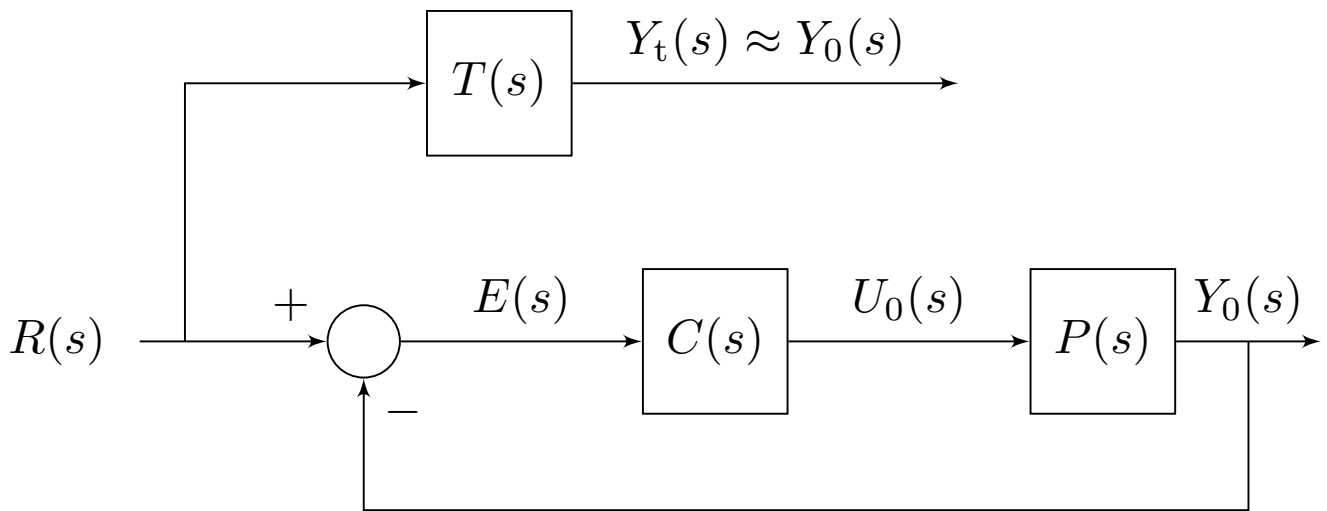


Fig. 1.3: データ駆動的設計

VRFT では、式 (1.19) により、入力  $U_0$  側で最適化を行う。

$$U_0(s) \approx C(s) (T^{-1}(s) - 1) Y_0(s). \quad (1.19)$$

FRIT では、式 (1.20) により、出力  $Y_0$  側で最適化を行う。

$$Y_0(s) \approx T(s) (C^{-1}(s) U_0(s) + Y_0(s)). \quad (1.20)$$