

制御理論



2024年2月28日

無線部開発班 JG1VPP



目次

第 1 章	制御系の構成と安定性	3
1.1	はじめに	3
1.2	制御器	3
1.3	安定性	3
1.4	モデルベース設計	4
1.5	加法的変動	5
1.6	制御帯域	5
1.7	データ駆動的設計	6
第 2 章	現代制御とは	7
2.1	動的システム	7
2.2	伝達関数表現	7
2.3	連立微分方程式	7
2.4	具体例	7
2.5	伝達関数表現との比較	8
2.6	非線形システム	9
第 3 章	可制御・可観測	10
3.1	線形システムの分解	10
3.2	可制御性	12
3.3	可観測性	14
3.4	双対性	14
3.5	最小実現	15
3.6	平衡実現	15
第 4 章	外乱補償	16

第1章 制御系の構成と安定性

1.1 はじめに

制御系を設計し、**安定性**と**モデル化誤差**の考え方を学ぶ。

1.2 制御器

制御系は、以下に例示する**制御仕様**を前提に設計される。

- 安定性
- 行き過ぎ量
- 立ち上がり時間
- 参照信号に対する追従性能

制御則は、Fig. 1.1 に示す3種類の基本的な形に分類できる。制御器 H, C は P の出力 Y を参照信号 R に追従させる。

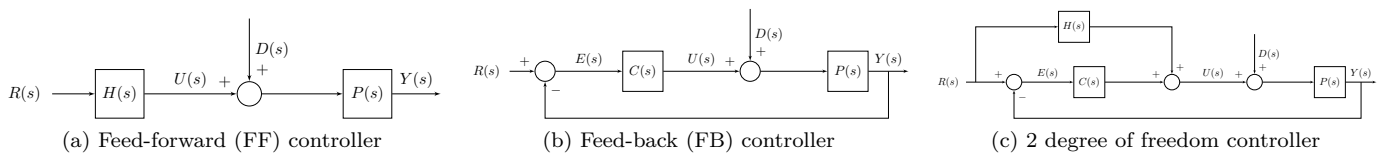


Fig. 1.1: 制御系の種類

ただし、操作 U に外乱 D が乗り、動作に影響を与える。

1.3 安定性

制御系の設計で最も重要な観点が、**安定性の確保**である。

1.3.1 FF 制御

Fig. 1.1 より、各信号の間には、式 (1.1) の関係性が成立する。

$$\begin{pmatrix} U(s) \\ Y(s) \end{pmatrix} = G(s) \begin{pmatrix} R(s) \\ D(s) \end{pmatrix}. \quad (1.1)$$

整理すると、

$$G(s) = \begin{pmatrix} H(s) & 0 \\ P(s)H(s) & P(s) \end{pmatrix}. \quad (1.2)$$

安定性の必要十分条件は、任意の有界な R, D に対して、伝達行列 G の全要素が、有限の出力を与えることである。

1.3.2 FB制御

Fig. 1.1 より、各信号の間には、式 (1.3) の関係性が成立する。

$$\begin{pmatrix} U(s) \\ Y(s) \end{pmatrix} = G(s) \begin{pmatrix} R(s) \\ D(s) \end{pmatrix}. \quad (1.3)$$

整理すると、

$$G(s) = \frac{1}{1 + P(s)C(s)} \begin{pmatrix} C(s) & -P(s)C(s) \\ P(s)C(s) & P(s) \end{pmatrix}. \quad (1.4)$$

G の全要素が安定な伝達関数の場合を、**内部安定**と呼ぶ。任意の参照信号と外乱に対し、系の安定性を保証できる。

1.4 モデルベース設計

式 (1.5) に示す簡単な制御対象と、比例制御器を設計する。

$$\begin{cases} P(s) = \frac{b}{s+a}, \\ C(s) = K_p. \end{cases} \quad (1.5)$$

1.4.1 FF制御

式 (1.6) より、FF 制御系の伝達関数 G は、 $-a$ を極に持つ。極の実部を負に配置すれば、定常値に漸近して安定する。

$$G(s) = \begin{pmatrix} K_p & 0 \\ \frac{bK_p}{s+a} & \frac{b}{s+a} \end{pmatrix}. \quad (1.6)$$

式 (1.7) に示す階段関数の参照信号 R と外乱 D を与える。

$$\begin{cases} R(s) = \frac{1}{s}, \\ D(s) = \frac{d}{s}. \end{cases} \quad (1.7)$$

安定な制御系の場合は、最終値の定理で定常値が求まる。

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sY(s) = \frac{b}{a}(K_p + d). \quad (1.8)$$

外乱 d が 0 なら、式 (1.9) の設定で参照信号に追従できる。

$$K_p = \frac{a}{b}. \quad (1.9)$$

外乱を抑圧するには、FB 制御器との併用が必要である。

1.4.2 FB制御

式 (1.10) より、FB 制御系 G は、 $-(a + bK_p)$ を極に持つ。 P が不安定でも、 K_p の調整により、系を安定化できる。

$$G(s) = \frac{1}{s + a + bK_p} \begin{pmatrix} (s+a)K_p & -bK_p \\ bK_p & b \end{pmatrix}. \quad (1.10)$$

式 (1.7) に示す階段関数の参照信号 R と外乱 D を与える。安定な制御系の場合は、最終値の定理で定常値が求まる。

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = \frac{bK_p}{a + bK_p} + \frac{bd}{a + bK_p} \xrightarrow{K_p \rightarrow \infty} 1. \quad (1.11)$$

利得が無限なら、外乱を完全に抑圧し、偏差も 0 になる。外乱が無視できる場合の追従性能は、FF 制御器に劣る。

1.5 加法的変動

実際の制御対象は、熱暴走など何らかの変動要因を持つ。Fig. 1.2 に示す、 ΔP の**加法的変動**が生じる場合を検討する。

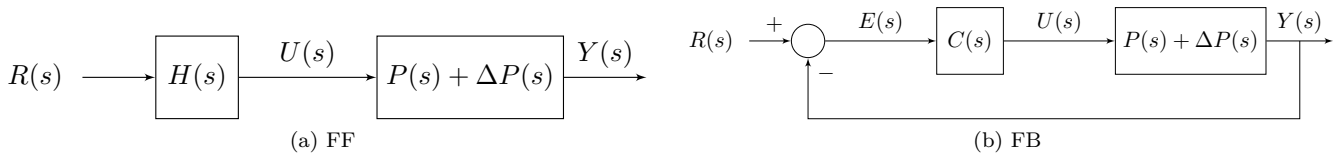


Fig. 1.2: 加法的変動のある制御系

1.5.1 FF 制御

FF 制御では、変動 ΔP の影響が、抑圧されず出現する。

$$Y = (G + \Delta G)R = (P + \Delta P)HR. \quad (1.12)$$

整理すると、

$$\frac{\Delta G}{G} = \frac{\Delta P}{P}. \quad (1.13)$$

1.5.2 FB 制御

FB 制御では、変動 ΔP の影響が、抑圧されて出現する。

$$Y = (G + \Delta G)R = \frac{(P + \Delta P)C}{1 + (P + \Delta P)C}R. \quad (1.14)$$

整理すると、

$$\frac{\Delta G}{G} = \frac{1}{1 + (P + \Delta P)C} \frac{\Delta P}{P} \approx S(s) \frac{\Delta P}{P}. \quad (1.15)$$

式 (1.16) は、変動に対する頑健性を表し、**感度関数**と呼ぶ。

$$S(s) = \frac{1}{1 + PC}. \quad (1.16)$$

閉路伝達関数は、 $S(s)$ と対比して**相補感度関数**とも呼ぶ。

1.6 制御帯域

参照信号に対する追従速度は、**制御帯域**によって決まる。帯域を広げるには、**位相進み補償**や2自由度制御を行う。

1.6.1 FF 制御

式 (1.17) より、周波数 a rad/s で、応答は 3 dB 減衰する。

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{bK_p}{s + a}. \quad (1.17)$$

1.6.2 FB 制御

式 (1.18) より、制御帯域は、 $a + bK_p$ rad/s まで改善する。

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{bK_p}{s + a + bK_p}. \quad (1.18)$$

1.7 データ駆動的設計

Fig. 1.3 は、FB 制御系を伝達関数 T で設計する様子である。制御対象 P が未知でも、実測値 U_0, Y_0 で最適化できる。

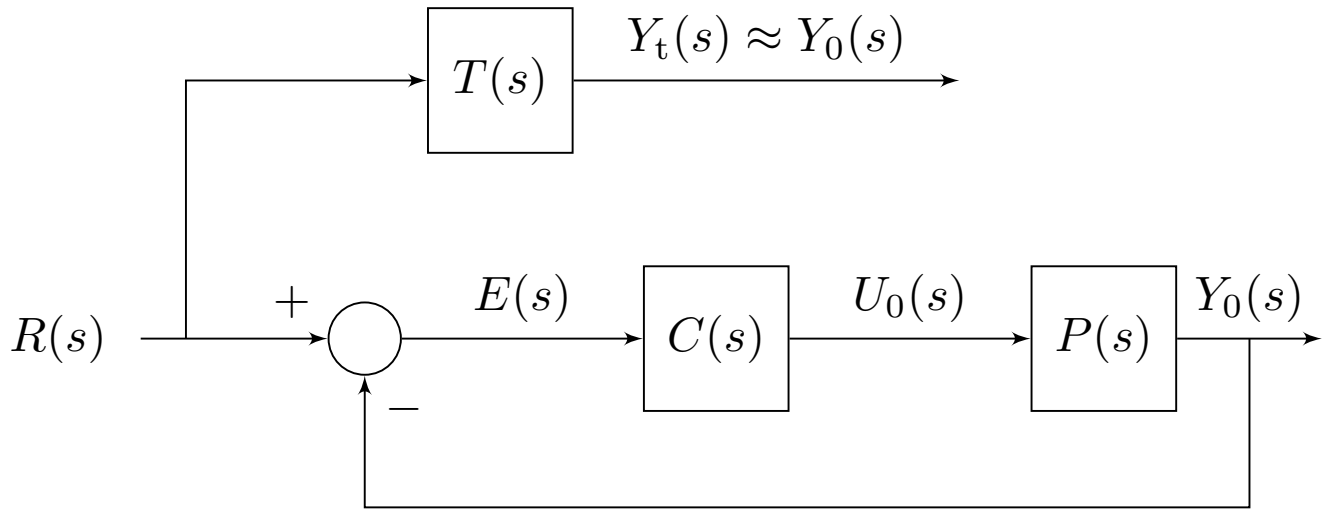


Fig. 1.3: データ駆動的設計

VRFT では、式 (1.19) により、入力 U_0 側で最適化を行う。

$$U_0(s) \approx C(s) (T^{-1}(s) - 1) Y_0(s). \quad (1.19)$$

FRIT では、式 (1.20) により、出力 Y_0 側で最適化を行う。

$$Y_0(s) \approx T(s) (C^{-1}(s) U_0(s) + Y_0(s)). \quad (1.20)$$

第2章 現代制御とは

伝達関数によりラプラス変換領域でシステムを記述する古典制御に対し、状態空間表現により時間領域でシステムを記述する。これにより、出力に直接現れない状態変数を考慮した制御を実現する。現実のシステムは非線形性を持つが、何らかの現実的な仮定を置くことで線形化できる。

2.1 動的システム

例えば、バネマスダンパ系は、

$$M\ddot{y}(t) + D\dot{y}(t) + Ky(t) = f(t). \quad (2.1)$$

物体に加える力 $f(t)$ を操作 $u(t)$ として適切に選び、物体の位置 $y(t)$ を望み通りの値に変化させる。式 (2.1) で、質量 M と弾性係数 K と粘性摩擦係数 D は常に同じ値と仮定すると、これを**線形時不変 (LTI)** と呼ぶ。また、1 入力 1 出力なので、SISO とも呼ばれる。

2.2 伝達関数表現

古典制御では、LTI システムを伝達関数で表す。伝達関数は、微分方程式をラプラス変換することで得られる。

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{1}{Ms^2 + Ds + K}. \quad (2.2)$$

伝達関数はブロック線図と親和性が高く便利だが、以下の問題がある。

- 変位 $y(t)$ の応答は表現できても、速度 $\dot{y}(t)$ の表現は煩雑になる。
- 初期値に対する応答の依存性を考慮していない。

このため、定常値は保証できても、過渡応答を設計するのは困難である。

2.3 連立微分方程式

現代制御の肝は、LTI システムを連立微分方程式で表すことにある。例えば、

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = a_{11}x_1(t) + a_{12}x_2(t), \\ \dot{x}_2(t) = a_{21}x_1(t) + a_{22}x_2(t). \end{cases} \quad (2.3)$$

式 (2.3) を行列式で表現すると、

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{pmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = A\mathbf{x}(t). \quad (2.4)$$

2.4 具体例

2 個の水槽に水が流れ込むシステムを考える。

2.4.1 並列2水槽システム

並列に並ぶ左右の水槽にそれぞれ水が流れ込む場合を考える。左右の水槽の水位 $h(t)$ は、

$$\begin{cases} C_1 \dot{h}_1(t) &= q_{i1}(t) - q_{o1}(t), \\ C_2 \dot{h}_2(t) &= q_{i2}(t) - q_{o2}(t). \end{cases} \quad (2.5)$$

ただし、 q_i は流入量で、 q_o は流出量である。流量が定常値であれば、

$$\begin{cases} q_{o1}(t) = \frac{1}{R_1} h_1(t), \\ q_{o2}(t) = \frac{1}{R_2} h_2(t). \end{cases} \quad (2.6)$$

が成立し、

$$\begin{cases} R_1 C_1 \dot{h}_1(t) = -h_1(t) + R_1 q_{i1}(t), \\ R_2 C_2 \dot{h}_2(t) = -h_2(t) + R_2 q_{i2}(t). \end{cases} \quad (2.7)$$

ここから、状態空間表現は、

$$\dot{\mathbf{h}}(t) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{R_1 C_1} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{R_2 C_2} \end{pmatrix} \mathbf{h}(t) + \begin{pmatrix} \frac{1}{C_1} \\ \frac{1}{C_2} \end{pmatrix} \mathbf{q}_i(t). \quad (2.8)$$

対角行列となる点に注目しよう。

2.4.2 直列2水槽システム

上段と下段の2個の水槽に水が流れ込む場合を考える。上段の流出量 q_{o1} は下段の流入量 q_{i2} と同じなので、

$$\begin{cases} R_1 C_1 \dot{h}_1 = -h_1(t) + R_1 q_{i1}(t), \\ R_2 C_2 \dot{h}_2 = -h_2(t) + \frac{R_2}{R_1} h_1(t). \end{cases} \quad (2.9)$$

ここから、状態空間表現は、

$$\dot{\mathbf{h}}(t) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{R_1 C_1} & 0 \\ \frac{1}{R_1 C_2} & -\frac{1}{R_2 C_2} \end{pmatrix} \mathbf{h}(t) + \begin{pmatrix} \frac{1}{C_1} \\ 0 \end{pmatrix} q_{i1}(t). \quad (2.10)$$

非対角行列となる点に注目しよう。

2.5 伝達関数表現との比較

式 (2.10) の直列2水槽システムで、流入量 $q_{i1}(t)$ を操作 $u(t)$ とし、水位 $h_2(t)$ を制御量 $y(t)$ とする。伝達関数は、

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{R_2}{(R_2 C_2 s + 1)(R_1 C_1 s + 1)}. \quad (2.11)$$

式 (2.11) の伝達関数表現では、出力 $h_2(t)$ を表現できるが、上段の水位 $h_1(t)$ を表現できない。式 (2.10) の状態空間表現では、両者を同時に表現できる。より一般に、

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t), \\ \mathbf{y}(t) &= \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}\mathbf{u}(t). \end{aligned} \quad (2.12)$$

$\mathbf{x}(t)$ を状態変数で、 $\mathbf{y}(t)$ は出力変数である。行列 $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D}$ には特に定まった名称はない。行列 $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D}$ が定数の場合、このシステムは LTI である。

2.6 非線形システム

過渡現象、つまり式 (2.6) の仮定が成立しない場合、

$$q_{o1}(t) = K\sqrt{h_1(t)}. \quad (2.13)$$

定数 K は重力加速度、流出口の断面積、流量係数により決まる。水槽単体の運動方程式は、

$$C_1 \dot{h}_1(t) = -K\sqrt{h_1(t)} + q_{i1}(t). \quad (2.14)$$

式 (2.14) は非線形システムである。この場合、状態空間表現ができず、

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t), \\ \mathbf{y}(t) &= \mathbf{h}(\mathbf{x}, t). \end{aligned} \quad (2.15)$$

ここで、もし式 (2.16) が成立する場合は、これをアフィンスystemと呼ぶ。

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{g}(\mathbf{x})\mathbf{u}. \quad (2.16)$$

このように、現実のシステムは厳密には非線形性を持つ場合がある。今回は流量は定常値という仮定によって、**線形化**できた。さらに言えば、想定した**平衡点**の近傍で非線形システムを線形近似することが広く行われる。

第3章 可制御・可観測

今回は、システムを安定化する状態フィードバック制御と、その応答特性を決定する極配置法を学んだ。状態量は観測可能とは限らず、また、極を任意に配置できるとも限らないので、その判定方法を学ぶ。

3.1 線形システムの分解

3.1.1 対角正準形

状態方程式が式 (3.1) で与えられる n 次元 SISO システムを考える。

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}}(t) &= A\mathbf{x}(t) + \mathbf{b}u(t), \\ y(t) &= \mathbf{c}\mathbf{x}(t).\end{aligned}\tag{3.1}$$

行列 A の固有値 $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ は全て異なる値とする。また、対応する固有ベクトルを $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$ とし、行列 T を式 (3.2) とする。

$$T = [\mathbf{v}_1 \quad \cdots \quad \mathbf{v}_n].\tag{3.2}$$

固有値が全て異なるので、 T は正則行列となり、逆行列 T^{-1} が存在する。この行列 T を使って、式 (3.3) に示す変数変換を行う。

$$\mathbf{x}(t) = T\mathbf{z}(t).\tag{3.3}$$

ここで、式 (3.1) より、

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{z}}(t) &= T^{-1}AT\mathbf{z}(t) + T^{-1}\mathbf{b}u(t), \\ y(t) &= \mathbf{c}T\mathbf{z}(t).\end{aligned}\tag{3.4}$$

これは行列 A を対角化する操作に当たり、

$$\hat{A} = T^{-1}AT = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix}.\tag{3.5}$$

また、

$$\hat{\mathbf{b}} = T^{-1}\mathbf{b} = \begin{bmatrix} \hat{b}_1 \\ \vdots \\ \hat{b}_n \end{bmatrix}, \quad \hat{\mathbf{c}} = \mathbf{c}T = [\hat{c}_1 \quad \cdots \quad \hat{c}_n].\tag{3.6}$$

Fig. 3.1 に示すように、それぞれ固有値 $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ に対応する n 個の部分系に分解できる。

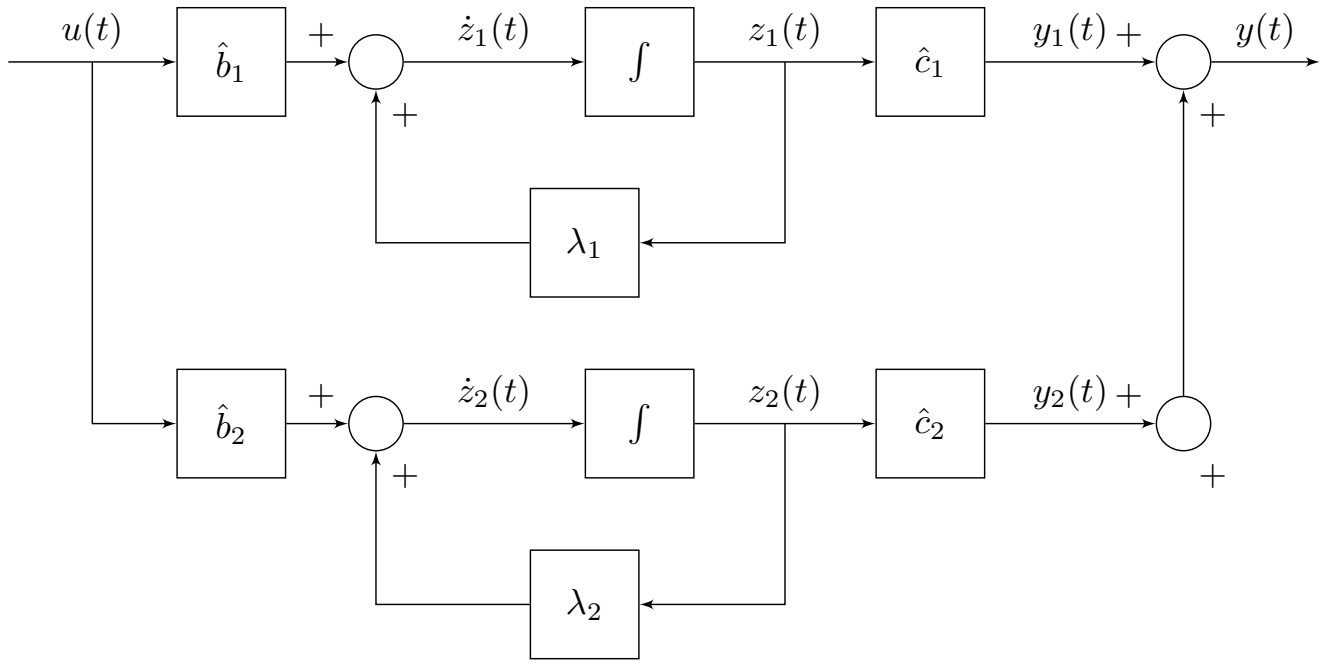


Fig. 3.1: linear subsystems.

$\hat{b}_i \neq 0$ となる**可制御**な部分系の状態 $z_i(t)$ は、操作 $u(t)$ により制御できる。また、 $\hat{c}_i \neq 0$ となる**可観測**な部分系の状態 $z_i(t)$ は、出力 $y(t)$ から推定できる。

3.1.2 伝達関数との関係

式 (3.1) で、 $\mathbf{x}(0) = \mathbf{0}$ かつ式 (3.7) とする。

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{c} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}. \quad (3.7)$$

伝達関数を求めると、

$$G(s) = \mathbf{c}(sI - A)^{-1}\mathbf{b} = \frac{\text{cadj}(sI - A)\mathbf{b}}{|sI - A|}. \quad (3.8)$$

\mathbf{b}, \mathbf{c} を代入しつつ、余因子行列に関する公式を使うと、

$$G(s) = \frac{5(s-1)(s-3)}{(s+2)(s-1)(s-3)} = \frac{5}{s+2}. \quad (3.9)$$

極零相殺により、伝達関数の次数1がシステムの次数3よりも小さくなる。さて、行列 A の固有値は $-2, 1, 3$ で、対応する固有ベクトルは、

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} -11 \\ -1 \\ 14 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}. \quad (3.10)$$

固有ベクトルを並べて式 (3.2) の行列 T を構成すると、

$$T = [\mathbf{v}_1 \quad \mathbf{v}_2 \quad \mathbf{v}_3] = \begin{bmatrix} -11 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 14 & 1 & 1 \end{bmatrix}. \quad (3.11)$$

従って、

$$\hat{\mathbf{b}} = T^{-1}\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ -\frac{1}{5} \\ 0 \\ \frac{14}{5} \end{bmatrix}, \quad \hat{\mathbf{c}} = \mathbf{c}T = \begin{bmatrix} -25 & -2 & 0 \end{bmatrix}. \quad (3.12)$$

以上を第??節の議論に当てはめると、

- 固有値 $\lambda_1 = -2$ の部分系は可制御かつ可観測
- 固有値 $\lambda_2 = 1$ の部分系は不可制御かつ可観測
- 固有値 $\lambda_3 = 3$ の部分系は可制御かつ不可観測

伝達関数には、不可制御または不可観測の部分系は出現しない。式 (3.8) では、 $s=1$ または $s=3$ の極と零が相殺され、伝達関数 $G(s)$ に現れなかった。可制御かつ可観測な部分系の個数は、伝達関数の次数と一致する。

3.2 可制御性

状態フィードバック制御で、極を任意に配置できる必要十分条件は、対象のシステム $\{A, \mathbf{b}\}$ の可制御性と等価である。式 (3.1) で、任意の状態 \mathbf{x}_f と、全ての初期値 $\mathbf{x}(0)$ に対し、有限な時刻 t_f と操作量 $u(t)$ が存在し、 $\mathbf{x}(t_f) = \mathbf{x}_f$ が成立し得るならば、可制御である。

3.2.1 可制御グラム行列

n 次システムで式 (3.13) に示す**可制御グラム行列**を考える。可制御性の必要十分条件は、 W_c の正定値性である。

$$W_c = \int_0^{t_f} e^{-A\tau} \mathbf{b}^t \mathbf{b} e^{-tA\tau} d\tau. \quad (3.13)$$

W_c は式 (3.14) の**リアプノフ方程式**の解である。

$${}^t A W_c + W_c A + \mathbf{b}^t \mathbf{b} = \mathbf{0} \Big|_{t_f \rightarrow \infty}. \quad (3.14)$$

積の微分方程式から容易に導ける。

$$\int_0^\infty \frac{d}{dt} \left\{ e^{tA} \mathbf{b}^t \mathbf{b} e^{At} \right\} dt = -\mathbf{b}^t \mathbf{b}. \quad (3.15)$$

ただし、前提として漸近安定の場合に限る。

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e^{At} = 0. \quad (3.16)$$

逆に、正定値行列 W_c が存在する場合、漸近安定である。また、 W_c の固有値の大きさは、それに対応する状態の制御の容易さを反映する。

十分性の証明

W_c を正定値行列と仮定すると、逆行列 W_c^{-1} が存在する。適当な $t_f \geq t$ を選んで、操作量 $u(t)$ を式 (3.17) で与えよう。

$$u(t) = \mathbf{b}^t e^{-tA} W_c^{-1} (-\mathbf{x}(0) + e^{-At_f} \mathbf{x}_f). \quad (3.17)$$

式 (3.21) より、可制御性が導かれる。

$$\mathbf{x}(t_f) = e^{At_f} (\mathbf{x}(0) - \mathbf{x}(0) + e^{-At_f} \mathbf{x}_f) = \mathbf{x}_f. \quad (3.18)$$

必要性の証明

W_c は非正定値行列と仮定すると、式 (3.19) を満たす $\mathbf{x}_f \neq \mathbf{0}$ が存在する。

$${}^t\mathbf{x}_f W_c \mathbf{x}_f = \int_0^{t_f} \| {}^t\mathbf{b} e^{-tA\tau} \mathbf{x}_f \|^2 d\tau = 0. \quad (3.19)$$

被積分関数は連続関数なので、任意の $t_f \geq 0$ に対し、式 (3.20) が成立する。

$${}^t\mathbf{b} e^{-tA\tau} \mathbf{x}_f = {}^t\mathbf{x}_f e^{-A\tau} \mathbf{b} = \mathbf{0}. \quad (3.20)$$

式 (3.1) の解は、

$$\mathbf{x}(t) = e^{At} \left(\mathbf{x}(0) + \int_0^t e^{-A\tau} \mathbf{b} u(\tau) d\tau \right). \quad (3.21)$$

ここで可制御性を仮定すると、初期値 \mathbf{x}_f から原点 $\mathbf{0}$ に遷移させる操作量 $u(t)$ が存在して、

$$\mathbf{x}_f = - \int_0^{t_f} e^{-A\tau} \mathbf{b} u(\tau) d\tau. \quad (3.22)$$

従って、

$${}^t\mathbf{x}_f \mathbf{x}_f = - \int_0^{t_f} {}^t\mathbf{x}_f e^{-A\tau} \mathbf{b} u(\tau) d\tau = 0. \quad (3.23)$$

これは $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ と矛盾する。即ち、可制御ならば W_c は正定値行列である。

3.2.2 可制御行列

n 次システムで、式 (3.24) に示す**可制御行列**を考える。可制御性の必要十分条件は、 U_c が正則行列で、即ち $\text{rank } U_c = n$ が成立することである。

$$U_c = \begin{bmatrix} \mathbf{b} & A\mathbf{b} & A^2\mathbf{b} & \cdots & A^{n-1}\mathbf{b} \end{bmatrix}. \quad (3.24)$$

特に、1 入力の場合は、 U_c は正方行列なので、 $|U_c| \neq 0$ と等価である。

十分性の証明

$\text{rank } U_c = n$ に対し、不可制御と仮定すると、式 (3.25) を満たす $\mathbf{x}_f \neq \mathbf{0}$ が存在する。

$${}^t\mathbf{x}_f W_c \mathbf{x}_f = \int_0^{t_f} \| {}^t\mathbf{x}_f e^{-tA\tau} \mathbf{x}_f \|^2 d\tau = 0. \quad (3.25)$$

ここから、

$${}^t\mathbf{b} e^{-tA\tau} \mathbf{x}_f = 0. \quad (3.26)$$

t で微分して $t=0$ とすると、

$$\begin{bmatrix} {}^t\mathbf{b} \\ {}^t\mathbf{b}^t A \\ {}^t\mathbf{b} ({}^t A)^2 \\ \vdots \\ {}^t\mathbf{b} ({}^t A)^{n-1} \end{bmatrix} \mathbf{x}_f = {}^t U_c \mathbf{x}_f = \mathbf{0}. \quad (3.27)$$

式 (3.27) から $\text{rank } U_c < n$ が導出され、矛盾する。

必要性の証明

行列 A の特性方程式は、適当な実数 λ に対し、

$$|\lambda I - A| = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_1\lambda + a_0. \quad (3.28)$$

λ を A に置き換えると、ケーリー・ハミルトンの定理より、

$$A^n + a_{n-1}A^{n-1} + \cdots + a_1A + a_0I = O. \quad (3.29)$$

これで次数 n を下げられるので、 e^{At} を適当な時間関数 $q_0(t), \dots, q_{n-1}(t)$ で級数展開すると、

$$e^{At} = q_0(t)I + q_1(t)A + \cdots + q_{n-1}(t)A^{n-1}. \quad (3.30)$$

式 (3.21) より、

$$e^{-At}\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}(0) = \sum_{i=0}^{n-1} q_i(-\tau)A^i\mathbf{b} \int_0^t u(\tau)d\tau. \quad (3.31)$$

式 (3.31) を満たす $u(t)$ が存在するには、式 (3.24) の列ベクトルは 1 次独立である必要がある。

3.3 可観測性

式 (3.1) で、有限な時間 t で制御量 $y(t)$ と操作量 $u(t)$ から初期状態 $\mathbf{x}(0)$ が推定できる場合、このシステムは可観測である。

3.3.1 可観測グラム行列

n 次システムで式 (3.32) に示す**可観測グラム行列**を考える。可観測性の必要十分条件は、 W_o の正定値性である。

$$W_o = \int_0^{t_f} e^{tA\tau} \mathbf{c} \mathbf{c}^T e^{A\tau} d\tau. \quad (3.32)$$

これは、式 (3.33) に示すリアプノフ方程式の解である。

$${}^tAW_o + W_oA + {}^t\mathbf{c}\mathbf{c}. \quad (3.33)$$

また、 W_o の固有値の大きさは、それに対応する状態の観測の容易さを反映する。

3.3.2 可観測行列

ここで、式 (3.34) に示す**可観測行列**を考える。

$$U_o = \begin{bmatrix} \mathbf{c} \\ \mathbf{c}A \\ \mathbf{c}A^2 \\ \vdots \\ \mathbf{c}A^{n-1} \end{bmatrix}. \quad (3.34)$$

可制御性の必要十分条件は、 $\text{rank } U_o = n$ が成立することである。任意の速度で漸近的に状態推定するオブザーバを構成する必要十分条件は、対象のシステム $\{\mathbf{c}, A\}$ が可観測であることである。

3.4 双対性

- システム $\{A, \mathbf{b}\}$ が可制御ならば、双対システム $\{{}^t\mathbf{b}, {}^tA\}$ は可観測である。
- システム $\{\mathbf{c}, A\}$ が可観測ならば、双対システム $\{{}^tA, {}^t\mathbf{c}\}$ は可制御である。

3.5 最小実現

伝達関数 $G(s)$ に対応する可制御かつ可観測な状態空間表現を実現することを**最小実現**と呼ぶ。余分な状態変数を持つ状態空間表現では、不可制御または不可観測となるためである。

3.6 平衡実現

システム $\{A, B, C\}$ を可制御性と可観測性の両方を均等に保存するように低次化する操作を考える。つまり、可制御グラム行列 W_c と可観測グラム行列 W_o を平衡グラム行列 Σ に変換する。

$$\begin{aligned}\hat{A}\Sigma + \Sigma^t\hat{A} + \hat{B}^t\hat{B} &= O, \\ {}^t\hat{A}\Sigma + \Sigma\hat{A} + {}^t\hat{C}\hat{C} &= O.\end{aligned}\tag{3.35}$$

ここで、 Σ は主成分に対応する**ハンケル特異値**が降順で並ぶ対角行列とする。即ち、 W_c, W_o は変換 T により同時対角化される。

$$\Sigma = T^{-1}W_c {}^tT^{-1} = {}^tTW_oT = \text{diag}(\sigma_1, \dots, \sigma_n).\tag{3.36}$$

ここで、 W_c, W_o は正定対称行列なので、式 (3.37) の特異値分解を得る。

$$W_c^{1/2}W_oW_c^{1/2} = U\Sigma^2 {}^tU.\tag{3.37}$$

ここで、変換行列 T を式 (3.38) に定義する。

$$T = W_c^{1/2}U\Sigma^{-1/2}.\tag{3.38}$$

式 (3.37) に左右から T を作用させることで、

$${}^tTW_oT = \Sigma^{-1/2} {}^tUW_c^{1/2}W_oW_c^{1/2}U\Sigma^{-1/2} = \Sigma.\tag{3.39}$$

最終的に以下の**平衡実現**を得る。

$$\{T^{-1}AT, T^{-1}B, CT\}.\tag{3.40}$$

第4章 外乱補償

プラントの入力側に外乱が加わる時に、プラントの逆伝達関数を利用して外乱を推定し、負帰還することで外乱の影響を抑制する。ここではモデル化誤差がゼロの想定。

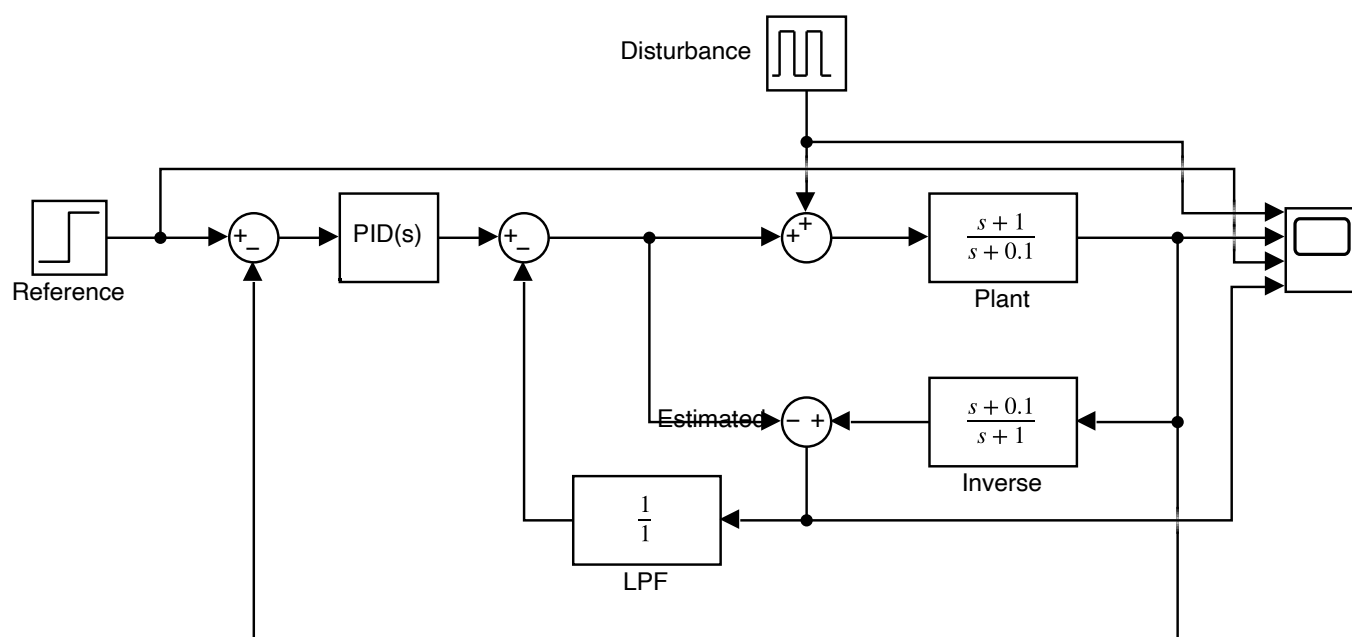


Fig. 4.1: ブロック図.

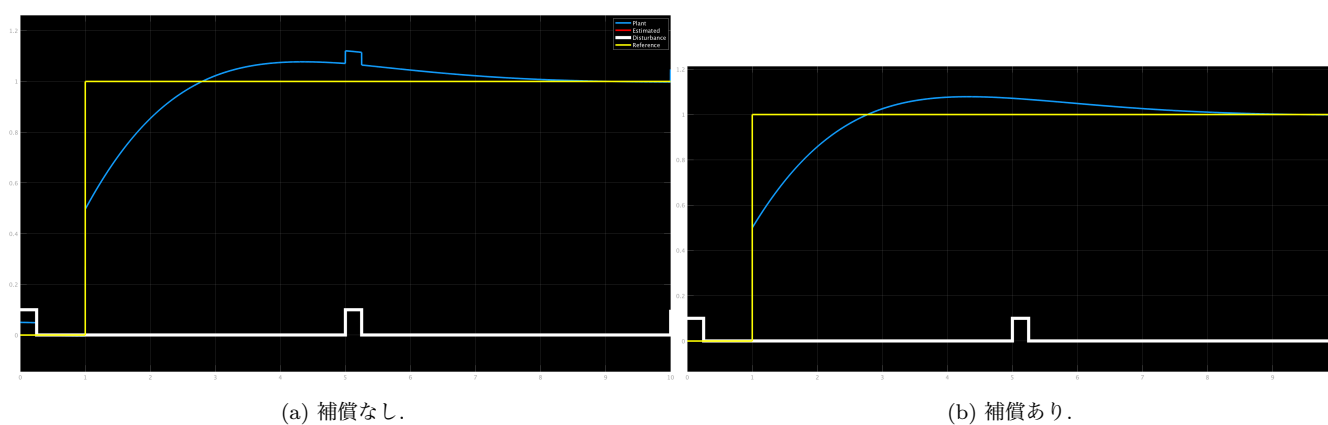


Fig. 4.2: 実験結果.

5 秒後の外乱によるプラント出力の突発的な上昇が抑制された。