制御理論

JOURNAL OF HAMRADIO INFORMATICS LETTERS THE UNIVERSITY OF TOKYO AMATEUR RADIO CLUB

No. 6

2024年5月12日

無線部開発班 JG1VPP

nextzlog.dev

目次

第1章　極配置法

質量 m の錘と、弾性係数 k のバネと、粘性係数 d の緩衝器で構成される機構系を考える。運動方程式を式 (1.1) に示す。

$$m\ddot{y}(t) + d\dot{y}(t) + ky(t) = \ddot{y}(t) + 5\dot{y}(t) + 6y(t) = u(t). \tag{1.1}$$

時刻 t の位置 $y(t)$ と速度 $\dot{y}(t)$ を、状態 $\boldsymbol{x}(t)$ にまとめる。式 (1.1) を変形して、式 (1.2) を得る。これを**状態方程式**と呼ぶ。

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t) = A\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{b}u(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -6 & -5 \end{bmatrix} \boldsymbol{x}(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t), \quad \text{where} \quad \boldsymbol{x}(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y(t) \\ \dot{y}(t) \end{bmatrix}. \tag{1.2}$$

状態 $\boldsymbol{x}$ を原点 $\mathbf{0}$ に拘束する制御を考える。位置 $y(t)$ と速度 $\dot{y}(t)$ を観測し、式 (1.3) に示す操作 $u(t)$ で、偏差を補償する。

$$u(t) = -\boldsymbol{f}\boldsymbol{x}(t). \tag{1.3}$$

式 (1.3) の制御則を**状態フィードバック制御**と呼ぶ。式 (1.3) を式 (1.2) の状態空間に適用し、式 (1.4) の状態空間を得る。

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t) = (A - \boldsymbol{b}\boldsymbol{f})\boldsymbol{x}(t) = A_f\boldsymbol{x}(t). \tag{1.4}$$

式 (1.4) をラプラス変換して、時間発展を求めると、式 (1.5) を得る。行列 A_f 次第で、初期値 $\boldsymbol{x}(0)$ から原点 $\mathbf{0}$ に向かう。

$$\boldsymbol{x}(t) = \mathcal{L}^{-1}\left[(sI - A_f)^{-1}\right]\boldsymbol{x}(0) = e^{A_f t}\boldsymbol{x}(0). \tag{1.5}$$

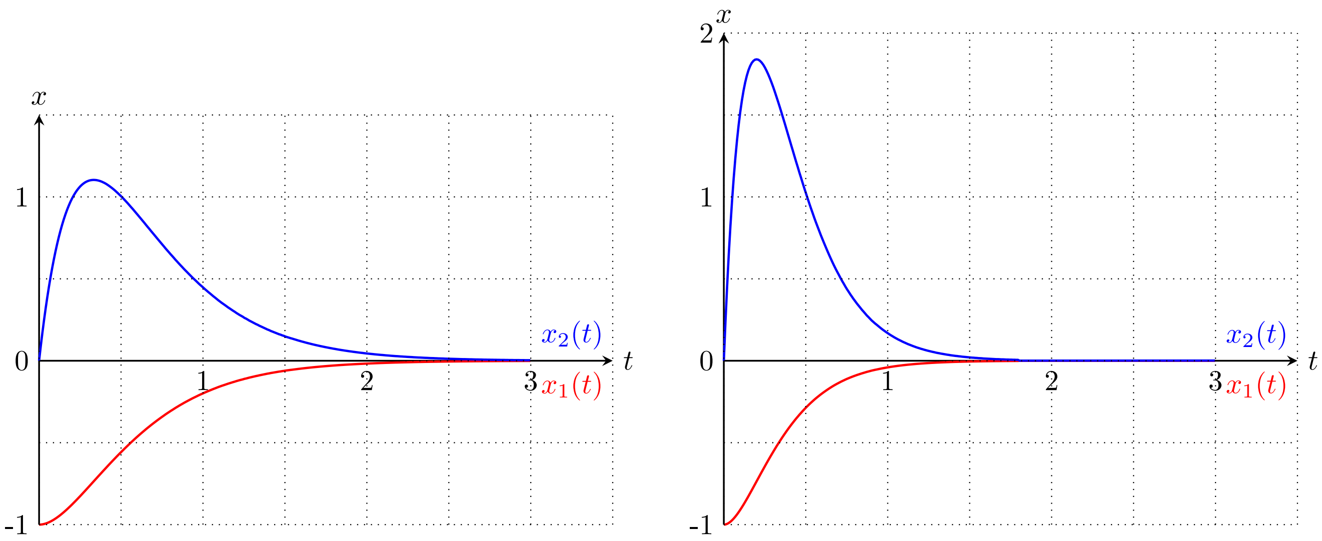
式 (1.5) で、行列 A_f の固有値を -3 の重根に配置すると、式 (1.6) を得る。位置 -1 から軌跡を描くと Fig. 1.1(a) を得る。

$$\boldsymbol{x}(t) = e^{-3t}\begin{bmatrix} 1+3t & t \\ -9t & 1-3t \end{bmatrix}\boldsymbol{x}(0) \leftarrow (sI - A_f)^{-1} = \frac{1}{(s+3)^2}\begin{bmatrix} s+6 & 1 \\ -9 & s \end{bmatrix} \leftarrow \boldsymbol{f} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \end{bmatrix}. \tag{1.6}$$

式 (1.5) で、行列 A_f の固有値を -5 の重根に配置すると、式 (1.7) を得る。位置 -1 から軌跡を描くと Fig. 1.1(b) を得る。

$$\boldsymbol{x}(t) = e^{-5t}\begin{bmatrix} 1+5t & t \\ -25t & 1-5t \end{bmatrix}\boldsymbol{x}(0) \leftarrow (sI - A_f)^{-1} = \frac{1}{(s+5)^2}\begin{bmatrix} s+10 & 1 \\ -25 & s \end{bmatrix} \leftarrow \boldsymbol{f} = \begin{bmatrix} 19 & 5 \end{bmatrix}. \tag{1.7}$$

極の実部を小さく設定すれば、追従速度が改善する。しかし、操作が急速すぎ、機械的な限界を超過する可能性もある。



(a) 極 -3 の応答.　(b) 極 -5 の応答.

Fig. 1.1: Pole placement method.

第 1 章に解説した**極配置法**では、原点 $\mathbf{0}$ に収束する速度や、応答の概形を設計できたが、過剰な操作の抑制は困難である。