制御理論

No. 6

2023年11月8日

無線部開発班 JG1VPP

nextzlog.dev

目次

第1章　制御系の構成と安定性

1.1　はじめに

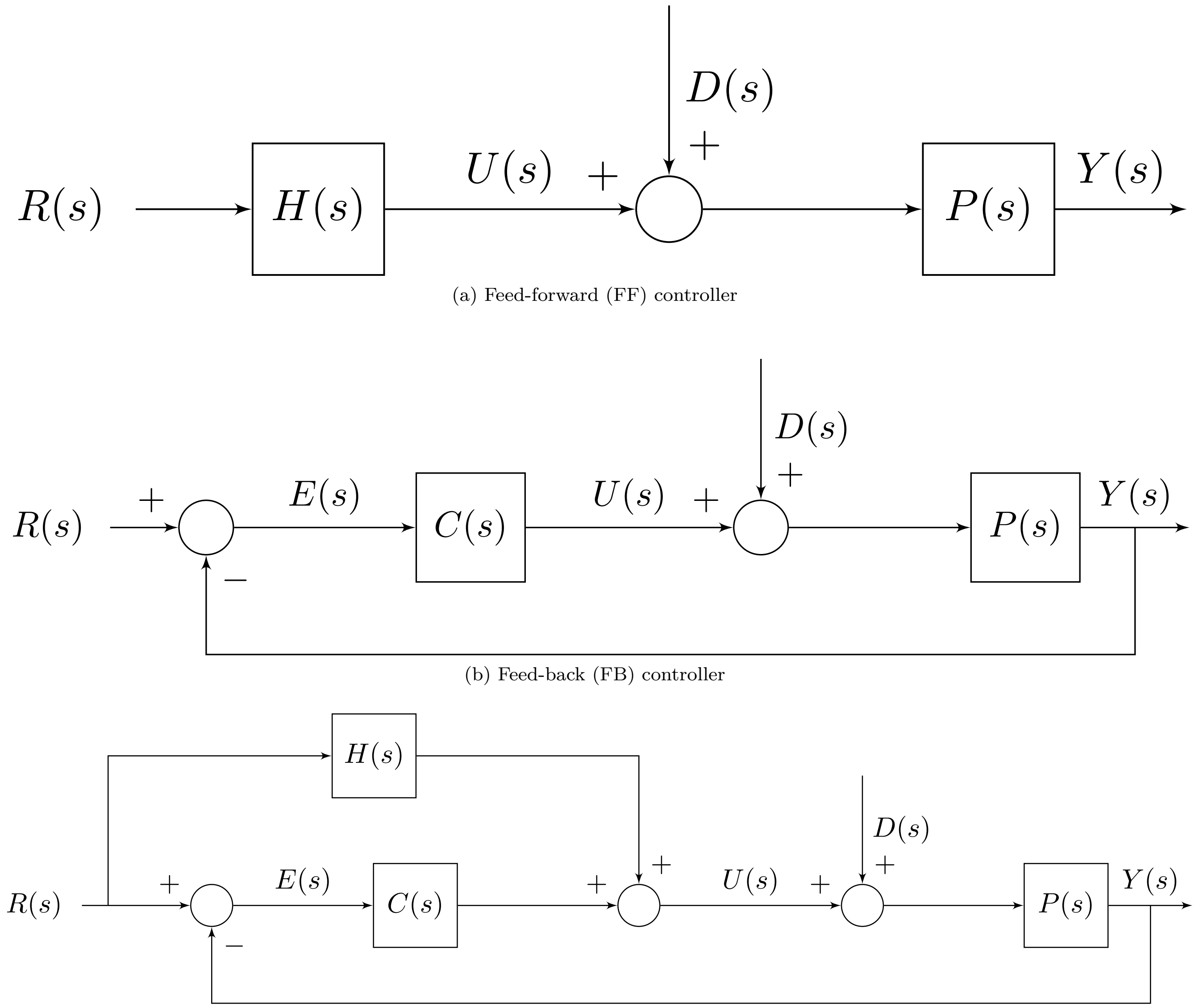
制御系を設計し、**安定性**と**モデル化誤差**の考え方を学ぶ。

1.2　制御器

制御系は、以下に例示する**制御仕様**を前提に設計される。

- 安定性
- 行き過ぎ量
- 立ち上がり時間
- 参照信号に対する追従性能

制御則は、Fig. 1.1 に示す 3 種類の基本的な形に分類できる。制御器 H, C は P の出力 Y を参照信号 R に追従させる。



(a) Feed-forward (FF) controller

(b) Feed-back (FB) controller

(c) 2 degree of freedom controller

Fig. 1.1: 制御系の種類

ただし、操作 U に外乱 D が乗り、動作に影響を与える。

1.3　安定性

制御系の設計で最も重要な観点が、安定性の確保である。

1.3.1　FF 制御

Fig. 1.1 より、各信号の間には、式 (1.1) の関係性が成立する。

$$\begin{pmatrix} U(s) \\ Y(s) \end{pmatrix} = G(s) \begin{pmatrix} R(s) \\ D(s) \end{pmatrix}. \tag{1.1}$$

整理すると、

$$G(s) = \begin{pmatrix} H(s) & 0 \\ P(s)H(s) & P(s) \end{pmatrix}. \tag{1.2}$$

安定性の必要十分条件は、任意の有界な R, D に対して、伝達行列 G の全要素が、有限の出力を与えることである。

1.3.2 FB 制御

Fig. 1.1 より、各信号の間には、式 (1.3) の関係性が成立する。

$$\begin{pmatrix} U(s) \\ Y(s) \end{pmatrix} = G(s) \begin{pmatrix} R(s) \\ D(s) \end{pmatrix}. \tag{1.3}$$

整理すると、

$$G(s) = \frac{1}{1+P(s)C(s)} \begin{pmatrix} C(s) & -P(s)C(s) \\ P(s)C(s) & P(s) \end{pmatrix}. \tag{1.4}$$

G の全要素が安定な伝達関数の場合を、**内部安定**と呼ぶ。任意の参照信号と外乱に対し、系の安定性を保証できる。

1.4 モデルベース設計

式 (1.5) に示す簡単な制御対象と、比例制御器を設計する。

$$\begin{cases} P(s) = \dfrac{b}{s+a}, \\ C(s) = K_{\mathrm{p}}. \end{cases} \tag{1.5}$$

1.4.1 FF 制御

式 (1.6) より、FF 制御系の伝達関数 G は、$-a$ を極に持つ。極の実部を負に配置すれば、定常値に漸近して安定する。

$$G(s) = \begin{pmatrix} K_{\mathrm{p}} & 0 \\ \dfrac{bK_{\mathrm{p}}}{s+a} & \dfrac{b}{s+a} \end{pmatrix}. \tag{1.6}$$

式 (1.7) に示す階段関数の参照信号 R と外乱 D を与える。

$$\begin{cases} R(s) = \dfrac{1}{s}, \\ D(s) = \dfrac{d}{s}. \end{cases} \tag{1.7}$$

安定な制御系の場合は、最終値の定理で定常値が求まる。

$$\lim_{t\to\infty} y(t) = \lim_{s\to 0} sY(s) = \frac{b}{a}(K_{\mathrm{p}} + d). \tag{1.8}$$

外乱 d が 0 なら、式 (1.9) の設定で参照信号に追従できる。

$$K_{\mathrm{p}} = \frac{a}{b}. \tag{1.9}$$

外乱を抑圧するには、FB 制御器との併用が必要である。

1.4.2 FB 制御

式 (1.10) より、FB 制御系 G は、$-(a+bK_{\mathrm{p}})$ を極に持つ。P が不安定でも、K_{p} の調整により、系を安定化できる。

$$G(s) = \frac{1}{s+a+bK_{\mathrm{p}}} \begin{pmatrix} (s+a)K_{\mathrm{p}} & -bK_{\mathrm{p}} \\ bK_{\mathrm{p}} & b \end{pmatrix}. \tag{1.10}$$

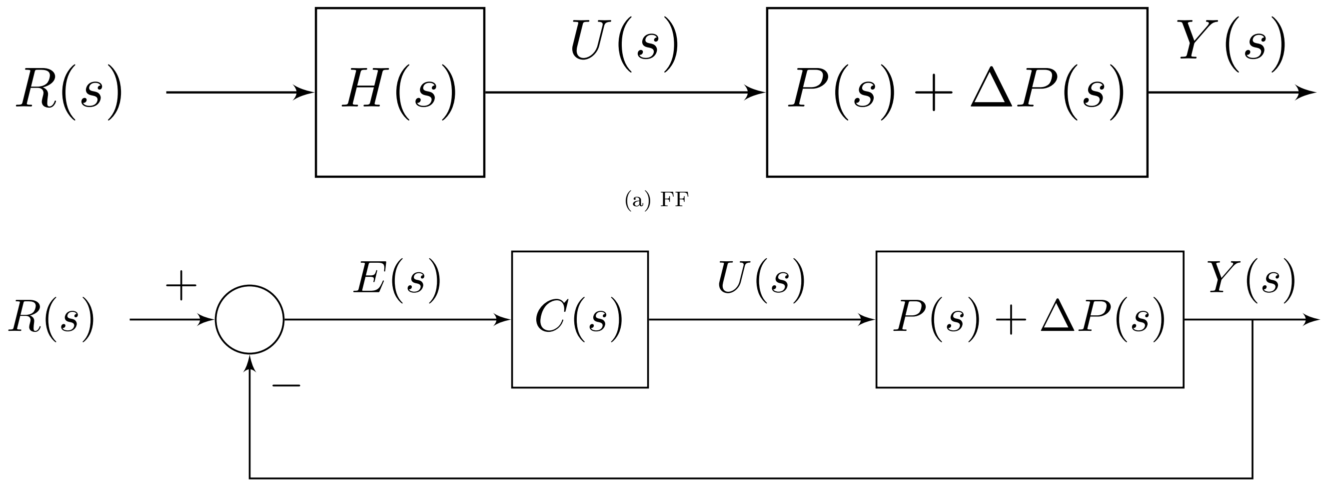
式 (1.7) に示す階段関数の参照信号 R と外乱 D を与える。安定な制御系の場合は、最終値の定理で定常値が求まる。

$$\lim_{t\to\infty} y(t) = \frac{bK_{\mathrm{p}}}{a+bK_{\mathrm{p}}} + \frac{bd}{a+bK_{\mathrm{p}}} \underset{K_{\mathrm{p}}\to\infty}{\longrightarrow} 1. \tag{1.11}$$

利得が無限なら、外乱を完全に抑圧し、偏差も 0 になる。外乱が無視できる場合の追従性能は、FF 制御器に劣る。

1.5 加法的変動

実際の制御対象は、熱暴走など何らかの変動要因を持つ。Fig. 1.2 に示す、ΔP の**加法的変動**が生じる場合を検討する。



(a) FF

(b) FB

Fig. 1.2: 加法的変動のある制御系

1.5.1 FF 制御

FF 制御では、変動 ΔP の影響が、抑圧されず出現する。

$$Y = (G + \Delta G)R = (P + \Delta P)HR. \tag{1.12}$$

整理すると、

$$\frac{\Delta G}{G} = \frac{\Delta P}{P}. \tag{1.13}$$

1.5.2 FB 制御

FB 制御では、変動 ΔP の影響が、抑圧されて出現する。

$$Y = (G + \Delta G)R = \frac{(P + \Delta P)C}{1 + (P + \Delta P)C}R. \tag{1.14}$$

整理すると、

$$\frac{\Delta G}{G} = \frac{1}{1 + (P + \Delta P)C}\frac{\Delta P}{P} \approx S(s)\frac{\Delta P}{P}. \tag{1.15}$$

式 (1.16) は、変動に対する頑健性を表し、**感度関数**と呼ぶ。

$$S(s) = \frac{1}{1 + PC}. \tag{1.16}$$

閉路伝達関数は、$S(s)$ と対比して**相補感度関数**とも呼ぶ。

1.6 制御帯域

参照信号に対する追従速度は、**制御帯域**によって決まる。帯域を広げるには、**位相進み補償**や 2 自由度制御を行う。

1.6.1　FF 制御

式 (1.17) より、周波数 a rad/s で、応答は 3 dB 減衰する。

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{bK_\mathrm{p}}{s+a}. \tag{1.17}$$

1.6.2　FB 制御

式 (1.18) より、制御帯域は、$a + bK_\mathrm{p}$ rad/s まで改善する。

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{bK_\mathrm{p}}{s+a+bK_\mathrm{p}}. \tag{1.18}$$

1.7　データ駆動的設計

Fig. 1.3 は、FB 制御系を伝達関数 T で設計する様子である。制御対象 P が未知でも、実測値 U_0, Y_0 で最適化できる。

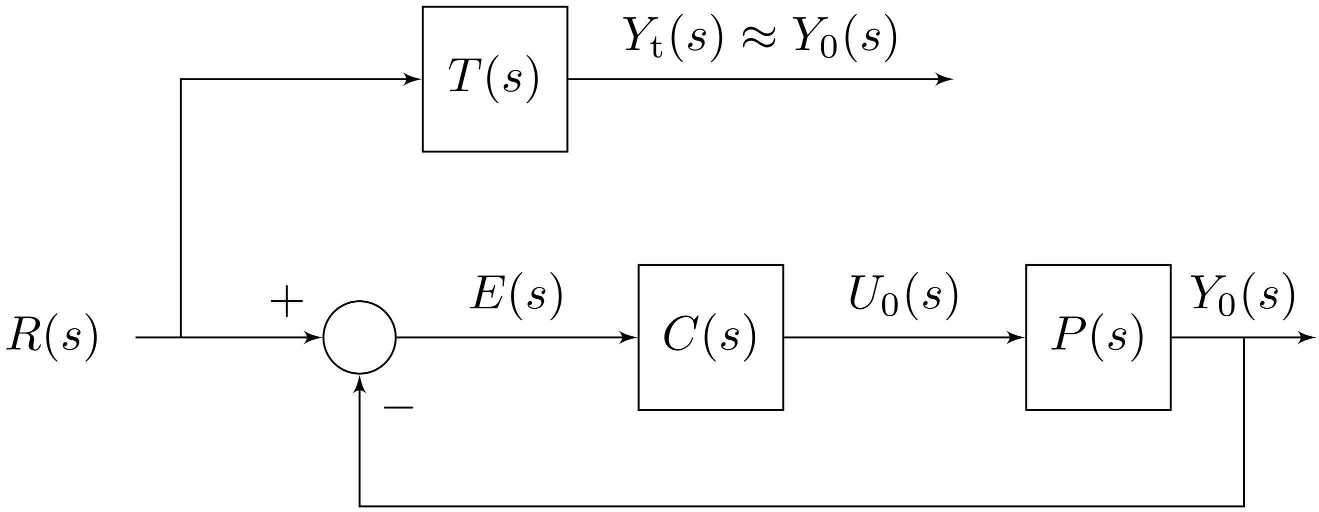


Fig. 1.3: データ駆動的設計

VRFT では、式 (1.19) により、入力 U_0 側で最適化を行う。

$$U_0(s) \approx C(s)\left(T^{-1}(s) - 1\right) Y_0(s). \tag{1.19}$$

FRIT では、式 (1.20) により、出力 Y_0 側で最適化を行う。

$$Y_0(s) \approx T(s)\left(C^{-1}(s)U_0(s) + Y_0(s)\right). \tag{1.20}$$