Analisi 3

Appunti di Analisi 3 del corso di Giovanni Alberti e Maria Stella Gelli

Arianna Carelli e Antonio De Lucreziis

I Semestre 2021/2021

Indice

Capitolo 1

Teoria della misura

Misure astratte

Siano

- X un insieme qualunque;
- $\mathcal{A}$ una σ-algebra di sottoinsiemi di X. Ovvero una famiglia di sottinsiemi di X che rispetta le seguenti proprietà.
  - $\emptyset, X \in \mathcal{A}$;
  - $\mathcal{A}$ è chiusa per complementare, unione e intersezione numerabile.
- μ una misura su X, cioè una funzione $\mu\colon A \to [0, +\infty]$ σ-addittiva, cioè tale che data una famiglia numerabile $\{E_k\} \subset A$ disgiunta e posto $E \coloneqq \bigcup E_n$, allora
$$\mu(E) = \sum_n \mu(E_n).$$

Seguono le proprietà.

- $\mu(\emptyset) = 0$;
- *monotonia:* dati $E, E' \in \mathcal{A}$ e $E \subset E'$, allora $\mu(E) \leq \mu(E')$;
- data una successione crescente di insiemi, $E_n \uparrow E$, allora $\mu(E) = \lim_{n\to\infty} \mu(E_n) = \sup_n \mu(E_n)$;
- se $E_n \uparrow E$ e $\mu(E_{\overline{n}}) < +\infty$ per qualche $\overline{n}$, allora $\mu(E) = \lim_{n\to+\infty} \mu(E_n) = \inf_n \mu(E_n)$;
- *subadditività* se $\bigcup E_n \supset E$, allora $\mu(E) \leq \sum_n \mu(E_n)$.

Dove una successione crescente di insiemi $E_n \uparrow E$ è tale che $E_1 \subset E_2 \subset \ldots E_n \subset \ldots$ e $\bigcup E_n = E$.

Osservazione 1. Dato $X' \in \mathcal{A}$ si possono restringere $\mathcal{A}$ e μ a X'.

Terminologia.

- Sia $P(X)$ un'affermazione che dipende da $x \in X$. Si dice che $P(X)$ vale per quasi μ-quasi ogni $x \in X$ se l'insieme $\{x\colon P(x) \text{ non vale }\}$ è (contenuto in) un insieme di misura μ nulla.
- μ si dice *completa* se $F \subset E, E \in \mathcal{A}$ e $\mu(E) = 0$, allora $F \in \mathcal{A}$ (e di conseguenza $\mu(F) = 0$).
- μ si dice *finita* se $\mu(X) < +\infty$.

D'ora in poi consideriamo solo misure complete.

Misura che conta i punti. Siano

- X qualunque
- $\mathcal{A} := \mathcal{P}(X) = \{\text{sottoinsiemi di } X\}$;
- $\mu(E) := \#E \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$.

Delta di Dirac in x_0. Siano

- X qualunque
- $\mathcal{A} := \mathcal{P}(X)$;
- $x_0 \in X$ fissato, allora $\mu(E) := \delta_{x_0}(E) = \mathbb{1}_E(x_0)$.

2. *Misura di Lebesgue* Siano

- $X = \mathbb{R}^n$;
- $\mathcal{M}^n$ la σ-algebra dei misurabili secondo Lebesgue;
- $\mathcal{L}^n$ la misura di Lebesgue.

Definiamo la misura di Lebesgue $\mathcal{L}^n$.
Dato R parallelepipedo in $\mathbb{R}^n$, cioè $R = \prod_{k=1}^n I_k$ con I_k intervalli in $\mathbb{R}$. Si pone

$$\mathrm{vol}_n(R) := \prod_{k=1}^n \mathrm{lungh}(I_k)$$

per ogni $E \subset \mathbb{R}^n$. Si pone

$$\mathcal{L}^n(E) := \inf \left\{ \sum_i \mathrm{vol}_n(R_i) \mid \{R_i\} \text{ tale che} \cup_i R_i \supset E \right\}.$$

Osservazione 2. Seguono le seguenti osservazioni.

- $\mathcal{L}^n(R) = \mathrm{vol}_n(R)$ (fatto non del tutto ovvio);
- $\mathcal{L}^n$ è così definita se $\mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ ma non è σ-addittiva;
- $\mathcal{L}^n$ è σ-addittiva su $\mathcal{M}^n$ (è per questo che bisogna introdurre $\mathcal{M}^n$).

Definizione di $\mathcal{M}^n$.
Dato $E \subset \mathbb{R}^n$, si dice che E è misurabile (secondo Lebesgue) se per ogni $\varepsilon > 0$ eiste A aperto, C chiuso tale che

- $C \subset E \subset A$,
- $\mathcal{L}^n(A \setminus C) \leq \varepsilon$.

Osservazione 3. Seguono le seguenti osservazioni.

- Per ogni E misurabile vale
$$\mathcal{L}^n = \inf \{\mathcal{L}^n \colon A \text{ aperto}, A \supset E\} = \sup \{\mathcal{L}^n \colon K \text{ compatto}, K \subset E\}.$$
- $F \subset E$ con $E \subset \mathcal{M}^n$ e $\mathcal{L}^n(E) = 0$, allora $F \in \mathcal{M}^n$. Ovvero la misura di Lebesgue è completa!

Useremo spesso la notazione

$$|E| := \mathcal{L}^n(E).$$

Capitolo 2

Spazi L^p e convoluzione

Capitolo 3

Spazi di Hilbert

Capitolo 4

Serie di Fourier

Capitolo 5

Applicazioni della serie di Fourier

Capitolo 6

Trasformata di Fourier

Capitolo 7

Funzioni armoniche

Capitolo 8

Integrazione di superfici

Indice Analitico

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipisicing elit, sed do eiusmod tempor incididunt ut labore et dolore magna aliqua. Ut enim ad minim veniam, quis nostrud exercitation ullamco laboris nisi ut aliquip ex ea commodo consequat. Duis aute irure dolor in reprehenderit in voluptate velit esse cillum dolore eu fugiat nulla pariatur. Excepteur sint occaecat cupidatat non proident, sunt in culpa qui officia deserunt mollit anim id est laborum.

$\lightning$	Assurdo
$\lightning$	Assurdo
$\lightning$	Assurdo
$\lightning$	Assurdo
$\lightning$	Assurdo
$\lightning$	Assurdo
$\lightning$	Assurdo
$\lightning$	Assurdo