Analisi 3

Appunti di Analisi 3 del corso di Giovanni Alberti e Maria Stella Gelli

Arianna Carelli e Antonio De Lucreziis

I Semestre 2021/2021

Indice

Capitolo 1

Teoria della misura

Misure astratte

Siano

- X un insieme qualunque;
- $\mathcal{A}$ una σ-algebra di sottoinsiemi di X. Ovvero una famiglia di sottinsiemi di X che rispetta le seguenti proprietà.
  - $\emptyset, X \in \mathcal{A}$;
  - $\mathcal{A}$ è chiusa per complementare, unione e intersezione numerabile.
- μ una misura su X, cioè una funzione $\mu\colon A \to [0, +\infty]$ σ-addittiva, cioè tale che data una famiglia numerabile $\{E_k\} \subset A$ disgiunta e posto $E \coloneqq \bigcup E_n$, allora
$$\mu(E) = \sum_n \mu(E_n).$$

Seguono le proprietà.

- $\mu(\emptyset) = 0$;
- *monotonia:* dati $E, E' \in \mathcal{A}$ e $E \subset E'$, allora $\mu(E) \leq \mu(E')$;
- data una successione crescente di insiemi, $E_n \uparrow E$, allora $\mu(E) = \lim_{n\to\infty} \mu(E_n) = \sup_n \mu(E_n)$;
- se $E_n \uparrow E$ e $\mu(E_{\overline{n}}) < +\infty$ per qualche $\overline{n}$, allora $\mu(E) = \lim_{n\to+\infty} \mu(E_n) = \inf_n \mu(E_n)$;
- *subadditività* se $\bigcup E_n \supset E$, allora $\mu(E) \leq \sum_n \mu(E_n)$.

Dove una successione crescente di insiemi $E_n \uparrow E$ è tale che $E_1 \subset E_2 \subset \ldots E_n \subset \ldots$ e $\bigcup E_n = E$.

Osservazione 1. Dato $X' \in \mathcal{A}$ si possono restringere $\mathcal{A}$ e μ a X'.

Terminologia.

- Sia $P(X)$ un'affermazione che dipende da $x \in X$. Si dice che $P(X)$ vale per quasi μ-quasi ogni $x \in X$ se l'insieme $\{x\colon P(x) \text{ non vale }\}$ è (contenuto in) un insieme di misura μ nulla.
- μ si dice *completa* se $F \subset E, E \in \mathcal{A}$ e $\mu(E) = 0$, allora $F \in \mathcal{A}$ (e di conseguenza $\mu(F) = 0$).
- μ si dice *finita* se $\mu(X) < +\infty$.

D'ora in poi consideriamo solo misure complete.

Misura che conta i punti. Siano

- X qualunque
- $\mathcal{A} \coloneqq \mathcal{P}(X) = \{\text{sottoinsiemi di } X\}$;
- $\mu(E) \coloneqq \#E \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$.

Delta di Dirac in x_0. Siano

- X qualunque
- $\mathcal{A} \coloneqq \mathcal{P}(X)$;
- $x_0 \in X$ fissato, allora $\mu(E) \coloneqq \delta_{x_0}(E) = \mathbb{1}_E(x_0)$.

2. *Misura di Lebesgue* Siano

- $X = \mathbb{R}^n$;
- $\mathcal{M}^n$ la σ-algebra dei misurabili secondo Lebesgue;
- $\mathcal{L}^n$ la misura di Lebesgue.

Definiamo la misura di Lebesgue $\mathcal{L}^n$.
Dato R parallelepipedo in $\mathbb{R}^n$, cioè $R = \prod_{k=1}^n I_k$ con I_k intervalli in $\mathbb{R}$. Si pone

$$\mathrm{vol}_n(R) \coloneqq \prod_{k=1}^n \mathrm{lungh}(I_k)$$

per ogni $E \subset \mathbb{R}^n$. Si pone

$$\mathcal{L}^n(E) \coloneqq \inf \left\{ \sum_i \mathrm{vol}_n(R_i) \mid \{R_i\} \text{ tale che} \cup_i R_i \supset E \right\}.$$

Osservazione 2. Seguono le seguenti osservazioni.

- $\mathcal{L}^n(R) = \mathrm{vol}_n(R)$ (fatto non del tutto ovvio);
- $\mathcal{L}^n$ è così definita se $\mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ ma non è σ-addittiva;
- $\mathcal{L}^n$ è σ-addittiva su $\mathcal{M}^n$ (è per questo che bisogna introdurre $\mathcal{M}^n$).

Definizione di $\mathcal{M}^n$.
Dato $E \subset \mathbb{R}^n$, si dice che E è misurabile (secondo Lebesgue) se per ogni $\varepsilon > 0$ eiste A aperto, C chiuso tale che

- $C \subset E \subset A$,
- $\mathcal{L}^n(A \setminus C) \leq \varepsilon$.

Osservazione 3. Seguono le seguenti osservazioni.

- Per ogni E misurabile vale
$$\mathcal{L}^n = \inf \{\mathcal{L}^n \colon A \text{ aperto}, A \supset E\} = \sup \{\mathcal{L}^n \colon K \text{ compatto}, K \subset E\}.$$
- $F \subset E$ con $E \subset \mathcal{M}^n$ e $\mathcal{L}^n(E) = 0$, allora $F \in \mathcal{M}^n$. Ovvero la misura di Lebesgue è completa!

Useremo spesso la notazione

$$|E| \coloneqq \mathcal{L}^n(E).$$

Capitolo 2

Spazi L^p e convoluzione

Capitolo 3

Spazi di Hilbert

Capitolo 4

Serie di Fourier

Capitolo 5

Applicazioni della serie di Fourier

Capitolo 6

Trasformata di Fourier

Capitolo 7

Funzioni armoniche

Capitolo 8

Integrazione di superfici

prova test prova