

Analisi 3

Appunti di Analisi 3 del corso di Giovanni Alberti e Maria Stella Gelli

Arianna Carelli e Antonio De Lucreziis

I Semestre 2021/2021

Indice

1	Teoria della misura	3
1.1	Misure astratte	3
1.2	Esempi di misure	4
1.3	Funzioni misurabili	5
1.3.1	Funzioni semplici	5
1.4	Integrale	5
1.5	Teoremi di convergenza	7
1.5.1	Fubini-Tonelli	8
2	Spazi L^p e convoluzione	10
2.1	Disuguaglianze	10
2.1.1	Disuguaglianza di Jensen	10
2.1.2	Disuguaglianza di Young	12
2.1.3	Disuguaglianza di Hölder	12
2.1.4	Disuguaglianza di Minkowski	13
2.2	Esercitazione del 4 ottobre	14
2.3	Costruzione spazi L^p	19
2.4	Completezza degli spazi L^p	20
2.5	Nozioni di convergenza per successioni di funzioni	22
2.5.1	Prodotto scalare su L^2	24
2.6	Controesempi sulle convergenze	25
2.6.1	Approssimazioni di funzioni in L^p	26
2.7	Esercitazione del 13 ottobre	28
2.7.1	Esercizi su spazi $L^p(X)$ al variare di p e dello spazio X	28
2.7.2	Spazi ℓ^p	31
2.8	Complementi su approssimazioni di funzioni in L^p	31
3	Spazi di Hilbert	34
4	Serie di Fourier	35

5	Applicazioni della serie di Fourier	36
6	Trasformata di Fourier	37
7	Funzioni armoniche	38
8	Integrazione di superfici	39
8.1	Indice Analitico	40

Capitolo 1

Teoria della misura

1.1 Misure astratte

Definizione. Uno spazio misurabile è una terna (X, \mathcal{A}, μ) tale che

- X è un insieme qualunque.
- \mathcal{A} è una σ -algebra di sottoinsiemi di X , ovvero una famiglia di sottoinsiemi di X che rispetta le seguenti proprietà:
 - $\emptyset, X \in \mathcal{A}$.
 - \mathcal{A} è chiusa per complementare, unione e intersezione numerabile.
- μ è una misura su X , ossia una funzione $\mu: \mathcal{A} \rightarrow [0, +\infty]$ σ -addittiva, cioè tale che data una famiglia numerabile $\{E_k\} \subset \mathcal{A}$ disgiunta e posto $E := \bigcup E_n$, allora

$$\mu(E) = \sum_n \mu(E_n).$$

Notazione. Data una crescente di insiemi $E_1 \subset E_2 \subset \cdots E_n \subset \cdots$ con $\bigcup E_n = E$, scriviamo $E_n \uparrow E$.

Proprietà.

- $\mu(\emptyset) = 0$
- *Monotonia:* Dati $E, E' \in \mathcal{A}$ e $E \subset E'$, allora $\mu(E) \leq \mu(E')$.
- Data una successione crescente di insiemi $E_n \uparrow E$, allora $\mu(E) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(E_n) = \sup_n \mu(E_n)$.
- Se $E_n \uparrow E$ e $\mu(E_{\bar{n}}) < +\infty$ per qualche \bar{n} , allora $\mu(E) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \mu(E_n) = \inf_n \mu(E_n)$.
- *Subadditività:* Se $\bigcup E_n \supset E$, allora $\mu(E) \leq \sum_n \mu(E_n)$.

Osservazione. Dato $X' \in \mathcal{A}$ si possono restringere \mathcal{A} e μ a X' nel modo ovvio.

Definizioni.

- μ si dice **completa** se $F \subset E, E \in \mathcal{A}$ e $\mu(E) = 0$, allora $F \in \mathcal{A}$ (e di conseguenza $\mu(F) = 0$).

- μ si dice **finita** se $\mu(X) < +\infty$.
- μ si dice **σ -finita** se esiste una successione $\{E_n\}$ con $E_n \subset E_{n+1}$ tale che $\bigcup E_n = X$ con $\mu(E_n) < +\infty$ per ogni n .

Notazione. Sia $P(X)$ un predicato che dipende da $x \in X$ allora si dice che $P(X)$ **vale μ -quasi ogni $x \in X$** se l'insieme $\{x \mid P(x) \text{ è falso}\}$ è (contenuto in) un insieme di misura μ nulla.

D'ora in poi consideriamo solo misure complete.

1.2 Esempi di misure

- **Misura che conta i punti.**

$$X \text{ insieme} \quad \mathcal{A} := \mathcal{P}(X) \quad \mu(E) := \#E \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$$

- **Delta di Dirac in x_0 .**

$$X \text{ insieme, } x_0 \in X \text{ fissato} \quad \mathcal{A} := \mathcal{P}(X) \quad \mu(E) := \delta_{x_0}(E) = \mathbb{1}_E(x_0)$$

- **Misura di Lebesgue.**

$$X = \mathbb{R}^n \quad \mathcal{M}^n \text{ } \sigma\text{-algebra dei misurabili secondo Lebesgue} \quad \mathcal{L}^n \text{ misura di Lebesgue}$$

Dato R parallelepipedo in \mathbb{R}^n , cioè $R = \prod_{k=1}^n I_k$ con I_k intervalli in \mathbb{R} . Si pone

$$\text{vol}_n(R) := \prod_{k=1}^n \text{lung}(I_k)$$

per ogni $E \subset \mathbb{R}^n$ (assumendo $\text{lung}([a, b]) = b - a$). Infine poniamo

$$\mathcal{L}^n(E) := \inf \left\{ \sum_i \text{vol}_n(R_i) \mid \{R_i\} \text{ tale che } E \subset \bigcup_i R_i \right\}.$$

Osservazioni.

- $\mathcal{L}^n(R) = \text{vol}_n(R)$.
- \mathcal{L}^n è così definita se $\mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ ma non è σ -addittiva.
- \mathcal{L}^n è σ -addittiva su \mathcal{M}^n (è per questo che bisogna introdurre \mathcal{M}^n).

Il terzo punto giustifica l'introduzione dei **misurabili secondo Lebesgue**. Dunque definiamo \mathcal{M}^n , dato $E \subset \mathbb{R}^n$ si dice che E è misurabile (secondo Lebesgue) se

$$\forall \varepsilon > 0 \exists A \text{ aperto e } C \text{ chiuso con } C \subset E \subset A \text{ tali che } \mathcal{L}^n(A \setminus C) \leq \varepsilon$$

Osservazioni.

- Per ogni E misurabile vale

$$\mathcal{L}^n(E) = \inf \{ \mathcal{L}^n(A) : A \text{ aperto, } A \supset E \} = \sup \{ \mathcal{L}^n(K) : K \text{ compatto, } K \subset E \}.$$

- Notiamo che se $F \subset E$ con $E \subset \mathcal{M}^n$ e $\mathcal{L}^n(E) = 0$, allora $F \in \mathcal{M}^n$. Ovvero la misura di Lebesgue è completa!

Notazione. $|E| := \mathcal{L}^n(E)$

1.3 Funzioni misurabili

Definizione. Dato (X, \mathcal{A}, μ) e $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ (o al posto di \mathbb{R} in Y spazio topologico), diciamo che f è **misurabile** (più precisamente \mathcal{A} -misurabile), se

$$\forall A \text{ aperto } f^{-1}(A) \in \mathcal{A}$$

Osservazioni.

- Dato $E \subset X$, vale $E \in \mathcal{A}$ se solo se $\mathbb{1}_E$ è misurabile.
- La classe delle funzioni misurabili è chiusa rispetto a molte operazioni
 - *somma, prodotto* (se hanno senso nello spazio immagine della funzione).
 - *Composizione con funzione continua*: Se $f: X \rightarrow Y$ continua e $g: Y \rightarrow Y'$ continua, allora $g \circ f$ è misurabile.
 - *Convergenza puntuale*: data una successione di f_n misurabili e $f_n \rightarrow f$ puntualmente, allora f è misurabile.
 - \liminf e \limsup (almeno nel caso $Y = \mathbb{R}$).

1.3.1 Funzioni semplici

Definizione. Definiamo la classe delle **funzione semplici** come

$$\mathcal{S} := \left\{ f: X \rightarrow \mathbb{R} \mid f = \sum_i \alpha_i \mathbb{1}_{E_i} \text{ con } E_i \text{ misurabili e } \{\alpha_i\} \text{ finito} \right\}$$

Osservazione. La rappresentazione di una funzione semp/alice come combinazione lineare di indicatori di insiemi *non è unica*, però se necessario possiamo prendere gli E_i disgiunti.

1.4 Integrale

Definizione. Diamo la definizione di $\int_X f d\mu$ per passi

- i) Se $f \in \mathcal{S}$ e $f \geq 0$ cioè $f = \sum_i \alpha_i \mathbb{1}_{E_i}$ con $\alpha_i \geq 0$ allora poniamo

$$\int_X f d\mu := \sum_i \alpha_i \mu(E_i),$$

convenendo che $0 \cdot +\infty = 0$ in quanto la misura di un insieme non è necessariamente finita.

- ii) Se $f: X \rightarrow [0, +\infty]$ misurabile si pone

$$\int_X f d\mu := \sup_{\substack{g \in \mathcal{S} \\ 0 \leq g \leq f}} \int_X g d\mu.$$

iii) $f: X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ misurabile si dice **integrabile** se

$$\int_X f^+ d\mu < +\infty \quad \text{oppure} \quad \int_X f^- d\mu < +\infty.$$

e per tali f si pone

$$\int_X f d\mu := \int_X f^+ d\mu - \int_X f^- d\mu.$$

iv) $f: X \rightarrow \mathbb{R}^n$ si dice **sommabile** (o di **classe** \mathcal{L}^1) se $\int_X |f| d\mu < +\infty$. In tal caso, se $\int_X f_i^\pm d\mu < +\infty$ per ogni f_i componente di f , allora $\int_X f d\mu$ esiste ed è finito.

Per tali f si pone

$$\int_X f d\mu := \left(\int_X f_1 d\mu, \dots, \int_X f_n d\mu \right).$$

Notazione. Scriveremo spesso $\int_E f(x) dx$ invece di $\int_E f d\mathcal{L}^n$.

Osservazioni.

- L'integrale è lineare (sulle funzioni sommabili).
- I passaggi i) e ii) danno lo stesso risultato per f semplice ≥ 0 .
- La definizione in ii) ha senso per ogni $f: X \rightarrow [0, +\infty]$ anche non misurabile. Ma in generale vale solo che

$$\int_X f_1 + f_2 d\mu \geq \int_X f_1 d\mu + \int_X f_2 d\mu.$$

- Dato $E \in \mathcal{A}$, f misurabile su E , notiamo che vale l'uguaglianza

$$\int_E f d\mu := \int_X f \cdot \mathbb{1}_E d\mu.$$

- Si può definire l'integrale anche per $f: X \rightarrow Y$ con Y spazio vettoriale normato finito dimensionale¹ ed f sommabile.
- Se $f_1 = f_2$ μ -q.o. allora $\int_X f_1 d\mu = \int_X f_2 d\mu$.
- Si definisce $\int_X f d\mu$ anche se f è misurabile e definita su $X \setminus N$ con $\mu(N) = 0$.
- Se $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ è integrabile secondo Riemann allora è misurabile secondo Lebesgue e le due nozioni di integrale coincidono.

Nota. Lo stesso vale per integrali impropri di funzioni positive. Ma nel caso più generale non vale: se consideriamo la funzione

$$f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R} \quad f(x) := \frac{\sin x}{x}$$

allora l'integrale di f definito su $(0, +\infty)$ esiste come integrale improprio ma non secondo Lebesgue, infatti

$$\int_0^{+\infty} f^+ dx = \int_0^{+\infty} f^- dx = +\infty$$

¹È necessario avere uno spazio vettoriale, perché serve la linearità e la moltiplicazione per scalare

- $\int_X f \, d\delta_{x_0} = f(x_0)$
- Se $X = \mathbb{N}$ e μ è la misura che conta i punti l'integrale è

$$\int_X f \, d\mu = \sum_{n=0}^{\infty} f(n)$$

per le f positive o tali che $\sum f^+(n) < +\infty$ oppure $\sum f^-(n) < +\infty$.

Nota. Come prima nel caso di funzioni non sempre positive ci sono casi in cui la serie solita non è definita come integrale di una misura, ad esempio

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$$

esiste come serie ma non come integrale.

- Dato X qualunque, μ misura che conta i punti e $f: X \rightarrow [0, +\infty]$ possiamo definire la somma di tutti i valori di f

$$\sum_{x \in X} f(x) := \int_X f \, d\mu.$$

1.5 Teoremi di convergenza

Sia (X, \mathcal{A}, μ) come in precedenza.

Teorema. *di convergenza monotona o Beppo-Levi.* Date $f_n: X \rightarrow [0, +\infty]$ misurabili, tali che $f_n \uparrow f$ ovunque in X , allora

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_X f_n \, d\mu = \int_X f \, d\mu,$$

dove

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_X f_n \, d\mu = \sup_n \int_X f_n \, d\mu.$$

Teorema. *detto lemma di Fatou.* Date $f_n: X \rightarrow [0, +\infty]$ misurabili, allora

$$\liminf_{n \rightarrow +\infty} \int_X f \, d\mu \geq \int_X \left(\liminf_{n \rightarrow +\infty} f_n \right) \, d\mu.$$

Teorema. *di convergenza dominata o di Lebesgue.* Date $f_n: X \rightarrow \mathbb{R}$ (o anche \mathbb{R}^n) con le seguenti proprietà

- *Convergenza puntuale:* $f_n(x) \rightarrow f(x)$ per ogni $x \in X$.
- *Dominazione:* Esiste $g: X \rightarrow [0, +\infty]$ sommabile tale che $|f_n(x)| \leq g(x)$ per ogni $x \in X$ e per ogni $n \in \mathbb{N}$.

allora

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_X f_n \, d\mu = \int_X f \, d\mu.$$

Nota. La seconda proprietà è essenziale; sostituirla con $\int_X |f_n| \, d\mu \leq C < +\infty$ non basta!

Definizione. Data una “densità” $\rho: \mathbb{R}^n \rightarrow [0, +\infty]$ misurabile, la **misura μ con densità ρ** è data da

$$\forall E \in \mathcal{A} \quad \mu(E) := \int_E \rho \, dx$$

Osservazioni.

- \mathbb{R}^n e \mathcal{L}^n possono essere sostituiti da X e $\tilde{\mu}$.
- il fatto che μ è una misura segue da Beppo Levi, in particolare serve per mostrare la subadditività.

Teorema. di cambio di variabile. Siano Ω e Ω' aperti di \mathbb{R}^n , $\Phi: \Omega \rightarrow \Omega'$ un diffeomorfismo di classe C^1 e $f: \Omega' \rightarrow [0, +\infty]$ misurabile. Allora

$$\int_{\Omega'} f(x') \, dx' = \int_{\Omega} f(\Phi(x)) |\det(\nabla \Phi(x))| \, dx.$$

La stessa formula vale per f a valori in $\overline{\mathbb{R}}$ integrabile e per f a valori in \mathbb{R}^n sommabile.

Osservazioni.

- Se $n = 1$, $|\det(\nabla \Phi(x))| = |\Phi'(x)|$ e non $\Phi'(x)$ come nella formula vista ad Analisi 1 (l'informazione del segno viene data dall'inversione degli estremi).
- Indebolire le ipotesi su Φ è delicato. Basta Φ di classe C^1 e $\forall x' \in \Omega' \# \Phi^{-1}(x') = 1$ (supponendo Φ iniettiva la proprietà precedente segue immediatamente). Se Φ non è "quasi" iniettiva bisogna correggere la formula per tenere conto della molteplicità.
- Quest'ultima osservazione serve giusto per far funzionare il cambio in coordinate polari che non è iniettivo solo nell'origine.

1.5.1 Fubini-Tonelli

Di seguito riportiamo il teorema di Fubini-Tonelli per la misura di Lebesgue.

Teorema. Fubini-Tonelli. Sia $\mathbb{R}^{n_1} \times \mathbb{R}^{n_2} \simeq \mathbb{R}^n$ con $n = n_1 + n_2$, $E := E_1 \times E_2$ dove E_1, E_2 sono misurabili e f è una funzione misurabile definita su E . Se f ha valori in $[0, +\infty]$ allora

$$\int_X f \, d\mu = \int_{E_2} \int_{E_1} f(x_1, x_2) \, dx_1 \, dx_2 = \int_{E_1} \int_{E_2} f(x_1, x_2) \, dx_2 \, dx_1$$

Vale lo stesso per f a valori in \mathbb{R} o in \mathbb{R}^n sommabile.

Osservazioni. Possiamo generalizzare il teorema di Fubini-Tonelli a misure generiche ed ottenere alcuni risultati utili che useremo ogni tanto.

- Se X_1, X_2 sono spazi con misure μ_1, μ_2 (con opportune ipotesi) vale:

$$\int_{E_2} \int_{E_1} f(x_1, x_2) \, d\mu_1(x_1) \, d\mu_2(x_2) = \int_{E_1} \int_{E_2} f(x_1, x_2) \, d\mu_2(x_2) \, d\mu_1(x_1).$$

se $f \geq 0$ oppure $\int_{X_1} \int_{X_2} |f| \, d\mu_2(x_2) \, d\mu_1(x_1) < +\infty$.

- *Teorema di scambio serie-integrale:* Se $X_1 \subset \mathbb{R}$ (oppure $X_1 \subset \mathbb{R}^n$), $\mu_1 = \mathcal{L}^n$ e $X_2 = \mathbb{N}$, μ_2 è la misura che conta i punti, allora la formula sopra diventa

$$\sum_{n=0}^{\infty} \int_{X_1} f_n(x) \, dx = \int_{X_1} \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x) \, dx.$$

se $f_i \geq 0$ oppure $\sum_i \int_{X_1} |f_i(x)| \, dx < +\infty$.

- *Teorema di scambio di serie:* Se $X_1 = X_2 = \mathbb{N}$ e $\mu_1 = \mu_2$ è la misura che conta i punti la formula sopra diventa

$$\sum_{j=0}^{\infty} \sum_{i=0}^{\infty} a_{i,j} = \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} a_{i,j}$$

se $a_{i,j} \geq 0$ oppure $\sum_i \sum_j |a_{i,j}| < +\infty$.

Capitolo 2

Spazi L^p e convoluzione

2.1 Disuguaglianze

2.1.1 Disuguaglianza di Jensen

Ricordiamo che una funzione $f: \mathbb{R}^d \rightarrow [-\infty, +\infty]$ è **convessa** se e solo se dati $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}^d$ e $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in [0, 1]$ con $\sum_i \lambda_i = 1$ abbiamo che

$$f\left(\sum_i \lambda_i x_i\right) \leq \sum_i \lambda_i f(x_i)$$

Teorema (Jensen), Dato (X, \mathcal{A}, μ) con $\mu(X) = 1$ e $f: \mathbb{R}^d \rightarrow [-\infty, +\infty]$ convessa e semi-continua inferiormente (S.C.I.) e $u: X \rightarrow \mathbb{R}^d$ sommabile allora vale

$$\int_X f \circ u \, d\mu \geq f\left(\int_X u \, d\mu\right)$$

e $f \circ u$ è integrabile.

Osservazioni.

- $(f \circ u)^-$ ha integrale finito.
- Interpretando μ come probabilità si riscrive come $\mathbb{E}[f \circ \mu] \geq f(\int u)$.
- Se u è una funzione semplice, cioè $u = \sum_i y_i \cdot \mathbb{1}_{E_i}$ con E_i disgiunti e $\bigcup E_i = X$ allora posti $\lambda_i = \mu(E_i)$ abbiamo

$$\int_X f \circ u \, d\mu = \int_X \sum_i f(y_i) \cdot \mathbb{1}_{E_i} \, d\mu = \sum_i \lambda_i f(y_i) \geq f\left(\sum_i \lambda_i y_i\right) = f\left(\int_X u \, d\mu\right)$$

Questo ci darebbe una strada per dimostrare in generale per passi il teorema di Jensen ma in realtà si presentano vari problemi tecnici.

- Ogni funzione convessa e S.C.I. su Ω convesso in \mathbb{R}^d si estende a $\tilde{f}: \mathbb{R} \rightarrow (-\infty, +\infty]$ convessa e S.C.I., ad esempio se $\Omega = (0, +\infty)$

$$f(y) = \frac{1}{y} \quad \rightsquigarrow \quad \tilde{f}(y) = \begin{cases} \frac{1}{y} & y > 0 \end{cases}$$

- La semi-continuità inferiore serve perché le funzioni convesse sono continue solo se a valori in \mathbb{R} , ad esempio per k costante la funzione

$$f(y) := \begin{cases} k & y < 0 \\ +\infty & y \geq 0 \end{cases}$$

è convessa ma non semi-continua inferiormente (e neanche continua).

Dimostrazione. Poniamo $y_0 := \int_X u \, d\mu$, allora la tesi diventa

$$\int_X f \circ u \, d\mu \geq f(y_0)$$

Prendiamo $\phi: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ affine (ovvero $\phi(y) = a \cdot y + b$ con $a \in \mathbb{R}^d$ e $b \in \mathbb{R}$) tale che $\phi \leq f$, allora

$$\int_X f \circ u \, d\mu \geq \int_X \phi \circ u \, d\mu = \int_X a \cdot u + b \, d\mu = a y_0 + b = \phi(y_0)$$

Infine concludiamo usando il seguente lemma di caratterizzazione delle funzioni convesse ed S.C.I.

Lemma. Ogni $f: \mathbb{R}^d \rightarrow (-\infty, +\infty]$ convessa e S.C.I è tale che

$$\forall y_0 \in \mathbb{R}^d \quad \sup_{\substack{\phi \text{ affine} \\ \phi \leq f}} \phi(y_0) = f(y_0)$$

Nel caso $d = 1$ e $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ possiamo appoggiarci al fatto che le funzioni convesse sono ammettono sempre derivata destra o sinistra, il sup diventa un massimo e ci basta prendere come ϕ la retta tangente in $(y_0, f(y_0))$ o una con pendenza compresa tra $f'(y_0^-)$ e $f'(y_0^+)$.

Rileggendo meglio la dimostrazione segue che $(f \circ u)^- < (\phi \circ u)^- \implies (f \circ u)^-$.

□

Definizione. Dati $p_1, p_2 \in [1, +\infty]$ diciamo che sono **coniugati** se

$$\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} = 1$$

convenendo che $1/\infty = 0$.

Fissiamo $p \in [1, +\infty]$ detto “esponente di sommabilità” e sia (X, \mathcal{A}, μ) come sempre.

Definizione. $f: X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ o \mathbb{R}^d misurabile, allora la **norma p di f** è per $p \in [1, +\infty)$

$$\|f\|_p := \left(\int_X |f|^p \, d\mu \right)^{1/p}$$

mentre per $p = +\infty$ poniamo

$$\|f\|_\infty := \inf\{m \in [0, +\infty] \mid |f(x)| \leq m \text{ per } \mu\text{-q.o. } x\}$$

in realtà queste sono solo delle semi-norme¹.

- $\|f\|_\infty \leq \sup_{x \in X} |f(x)|$

¹Vedremo meglio più avanti questo dettaglio

- $\|f\|_p = 0 \iff f = 0$ quasi ovunque

Dimostrazione.

\Rightarrow [TODO: Facile ma non ovvia]

\Leftarrow Ovvio.

□

- Se $f_1 = f_2$ quasi ovunque $\implies \|f_1\|_p = \|f_2\|_p$.

Dimostrazione. $f_1 = f_2$ quasi ovunque $\implies \exists D \subset X$ con $\mu(D) = 0$ tale che $f_1(x) = f_2(x)$ su $X \setminus D$, usiamo il fatto che l'integrale non cambia se modifichiamo la funzione su un insieme di misura nulla

$$\|f_1\|_p^p = \int_X |f_1|^p d\mu = \int_{X \setminus D} |f_1|^p d\mu = \int_{X \setminus D} |f_2|^p d\mu = \int_X |f_2|^p d\mu = \|f_2\|_p^p$$

□

2.1.2 Disuguaglianza di Young

Proposizione. Per ogni $a_1, a_2 \geq 0$ e $\lambda_1, \lambda_2 > 0$ con $\lambda_1 + \lambda_2 > 0$ abbiamo che

$$a_1^{\lambda_1} a_2^{\lambda_2} \leq \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2$$

inoltre vale l'uguale se e solo se $a_1 = a_2$.

Dimostrazione. Se $a_1 = a_2 = 0$ allora è ovvia. Supponiamo dunque $a_1, a_2 > 0$, ma sappiamo che

$$\lambda_1 \log a_1 + \lambda_2 \log a_2 \leq \log(\lambda_1 a_2 + \lambda_2 a_1)$$

per concavità del logaritmo e quindi segue la tesi.

Il se e solo se per l'uguale segue dal fatto che il logaritmo è *strettamente concavo*.

□

2.1.3 Disuguaglianza di Hölder

Proposizione. Date $f_1, f_2: X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ o \mathbb{R}^d e p_1, p_2 esponenti coniugati allora

$$\int_X |f_1| \cdot |f_2| d\mu \leq \|f_1\|_{p_1} \cdot \|f_2\|_{p_2}$$

vale anche per $p = +\infty$ convenendo che $+\infty \cdot 0 = 0$ a destra dell'uguale.

Dimostrazione. Se $\|f_1\|_{p_1} = 0$ o $+\infty$ e anche $\|f_2\|_{p_2} = 0$ o $+\infty$ la dimostrazione è immediata, supponiamo dunque $\|f_1\|_{p_1}, \|f_2\|_{p_2} > 0$ e finiti.

- *Caso 1:* se $p_1 = 1, p_2 = +\infty$ allora

$$\int_X |f_1| \cdot |f_2| d\mu \leq \int_X |f_1| \cdot \|f_2\|_\infty d\mu = \|f_2\|_\infty \cdot \int_X |f_1| d\mu = \|f_2\|_\infty \cdot \|f_1\|_1$$

- *Caso 2:* se $1 < p_1, p_2 < +\infty$, introduciamo un parametro $\gamma > 0$ allora

$$\int_X |f_1| \cdot |f_2| d\mu = \int_X (\gamma^{p_1} \cdot |f_1|^{p_1})^{1/p_1} \cdot (\gamma^{-p_2} \cdot |f_2|^{p_2})^{1/p_2} d\mu$$

a questo punto chiamiamo per comodità $g_1 := \gamma^{p_1} \cdot |f_1|^{p_1}$, $\lambda_1 := 1/p_1$ e $g_2 := \gamma^{-p_2} \cdot |f_1|^{p_2}$, $\lambda_2 := 1/p_2$ da cui

$$\begin{aligned} &= \int_X g_1^{\lambda_1} \cdot g_2^{\lambda_2} \stackrel{\text{Young}}{\leq} \int_X \lambda_1 g_1 + \lambda_2 g_2 \, d\mu = \lambda_1 \gamma^{p_1} \int_X |f_1|^{p_1} + \lambda_2 \gamma^{-p_2} \int_X |f_1|^{p_2} \, d\mu \\ &= \lambda_1 \gamma^{p_1} \cdot \|f_1\|_{p_1}^{p_1} + \lambda_2 \gamma^{-p_2} \cdot \|f_1\|_{p_2}^{p_2} \end{aligned}$$

posti ora $a_1 := \gamma^{p_1} \|f_1\|_{p_1}^{p_1}$ e $a_2 := \gamma^{-p_2} \|f_1\|_{p_2}^{p_2}$, per $\gamma \rightarrow 0$ abbiamo che $a_1 \rightarrow 0, a_2 \rightarrow +\infty$ mentre per $\gamma \rightarrow +\infty$ abbiamo che $a_1 \rightarrow +\infty, a_2 \rightarrow 0$ dunque per il teorema del valor medio esisterà γ tale che $a_1 = a_2$, ma allora siamo nel caso dell'uguaglianza per la disuguaglianza di Young dunque

$$\lambda_1 \gamma^{p_1} \|f_1\|_{p_1}^{p_1} + \lambda_2 \gamma^{-p_2} \|f_1\|_{p_2}^{p_2} = \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 = a_1^{\lambda_1} \cdot a_2^{\lambda_2} = \|f_1\|_{p_1} \cdot \|f_2\|_{p_2}$$

In particolare, vale l'uguaglianza se prendiamo un valore di γ tale che $a_1 = a_2$. Resta da verificare che tale valore di γ esista [TODO]. \square

Osservazione. La disuguaglianza di Hölder può essere generalizzata a n funzioni, date f_1, \dots, f_n e p_1, \dots, p_n con $\frac{1}{p_1} + \dots + \frac{1}{p_n} = 1$ allora

$$\int_X \prod_i |f_i| \, d\mu \leq \prod_i \|f_i\|_{p_i}$$

2.1.4 Disuguaglianza di Minkowski

Proposizione. Consideriamo sempre (X, \mathcal{A}, μ) e sia $p \in [1, +\infty]$ un esponente di sommabilità ed $f_1, f_2: X \rightarrow \mathbb{R}$ oppure \mathbb{R}^d allora vale la disuguaglianza triangolare

$$\|f_1 + f_2\|_p \leq \|f_1\|_p + \|f_2\|_p$$

Dimostrazione.

- *Caso 1:* se $p = 1$ o $p = +\infty$, allora basta fare il calcolo diretto

- Se $p = 1$

$$\|f_1 + f_2\|_1 = \int_X |f_1 + f_2| \, d\mu \leq \int_X |f_1| + |f_2| \, d\mu = \int_X |f_1| \, d\mu + \int_X |f_2| \, d\mu = \|f_1\|_1 + \|f_2\|_1$$

- Se $p = +\infty$

$$\begin{aligned} \|f_1 + f_2\|_\infty &= \sup_{X \setminus D} |f_1 + f_2| = \sup_{X \setminus D} (|f_1| + |f_2|) \\ &= \sup_{X \setminus D} |f_1| + \sup_{X \setminus D} |f_2| = \sup_X |f_1| + \sup_X |f_2| = \|f_1\|_\infty + \|f_2\|_\infty \end{aligned}$$

- *Caso 2:* se $1 < p < +\infty$ e $0 < \|f_1 + f_2\|_p < +\infty$

$$\begin{aligned} \|f_1 + f_2\|_p^p &= \int_X |f_1 + f_2|^p \leq \int_X (|f_1| + |f_2|) \cdot |f_1 + f_2|^{p-1} \, d\mu = \\ &= \int_X |f_1| \cdot |f_1 + f_2|^{p-1} \, d\mu + \int_X |f_2| \cdot |f_1 + f_2|^{p-1} \, d\mu = \\ &\stackrel{\text{Hölder}}{\leq} \|f_1\|_p \cdot \left\| |f_1 + f_2|^{p-1} \right\|_q + \|f_2\|_p \cdot \left\| |f_1 + f_2|^{p-1} \right\|_q = \\ &= (\|f_1\|_p + \|f_2\|_p) \cdot \left\| |f_1 + f_2|^{p-1} \right\|_q = (\|f_1\|_p + \|f_2\|_p) \cdot \|f_1 + f_2\|_p^{p-1} \end{aligned}$$

e poiché $\|f_1 + f_2\|_p > 0$ possiamo portare l'ultimo fattore dall'altra parte

$$\implies \frac{\|f_1 + f_2\|_p^p}{\|f_1 + f_2\|_p^{p-1}} \leq \|f_1\|_p + \|f_2\|_p \implies \|f_1 + f_2\|_p \leq \|f_1\|_p + \|f_2\|_p$$

- *Caso 3:* se $1 < p < +\infty$ ma $\|f_1 + f_2\| = 0$ o $+\infty$ allora se $\|f_1 + f_2\| = 0$ la disuguaglianza è banale mentre se $\|f_1 + f_2\| = +\infty$ si usa la seguente disuguaglianza

$$\|f_1 + f_2\|_p^p \leq 2^{p-1}(\|f_1\|_p^p + \|f_2\|_p^p)$$

che si ottiene usando la convessità della funzione $y \mapsto y^p$

$$\begin{aligned} \|f_1 + f_2\|_p^p &= \int_X |f_1 + f_2|^p d\mu = 2^p \int_X \left| \frac{f_1 + f_2}{2} \right|^p d\mu \\ &\leq 2^p \int_X \frac{1}{2} |f_1|^p + \frac{1}{2} |f_2|^p d\mu = 2^{p-1}(\|f_1\|_p^p + \|f_2\|_p^p) \end{aligned}$$

da cui possiamo ricavare subito che almeno uno dei due termini deve essere $+\infty$.

2.2 Esercitazione del 4 ottobre

Teoria della misura

Di seguito riportiamo alcune proprietà di base di teoria della misura.

Proprietà.

- i) Se $A \subset B$, allora $\mu(A) \leq \mu(B)$.

Dimostrazione. Scomponiamo $B = (B \setminus A) \cup (A \cap B)$. Per ipotesi $A \cap B = A$ ed essendo la misura positiva segue che

$$\mu(B) = \underbrace{\mu(B \setminus A)}_{\geq 0} + \mu(A) \geq \mu(A).$$

- ii) Dati due insiemi A, B misurabili, vale

$$\mu(A \cup B) \leq \mu(A) + \mu(B).$$

Dimostrazione. La disuguaglianza segue dalle seguenti uguaglianze.

$$\begin{aligned} \mu(A) &= \mu(A \setminus B) + \mu(A \cap B) \\ \mu(B) &= \mu(B \setminus A) + \mu(A \cap B) \\ \mu(A \cup B) &= \mu(A \setminus B) + \mu(B \setminus A) + \mu(A \cap B). \end{aligned}$$

- iii) Data una successione di insiemi $E_1 \subset E_2 \subset \dots \subset \dots$, si ha

$$\mu\left(\bigcup_i E_i\right) = \sup_i \mu(E_i) = \lim_i \mu(E_i).$$

iv) Data una successione di insiemi $E_1 \supset E_2 \supset \dots \supset \dots$ e $\mu(E_1) < +\infty$, si ha

$$\mu\left(\bigcap_i E_i\right) = \lim_i \mu(E_i).$$

Esercizio (Numerabile subaddittività). Dato $E \in \mathcal{A}$, $E \subset \bigcup_i E_i$ dove $E_i \in \mathcal{A}$. Allora

$$\mu(E) \leq \sum_i \mu(E_i).$$

Dimostrazione (*Idea*). Basta dimostrare che $\mu\left(\bigcup_i E_i\right) \leq \sum_i \mu(E_i)$. Infatti per quanto visto prima $\mu(E) \leq \mu\left(\bigcup_i E_i\right)$. Prima dimostriamo per induzione $\mu\left(\bigcup_{i=1}^N E_i\right) \leq \sum_{i=1}^N \mu(E_i)$.

Il passo base $n = 2$ è stato visto al punto ii). Una volta dimostrata la proprietà sopra, si nota che $\sum_{i=1}^N \mu(E_i)$ è limitata per ogni N , e dunque è limitato anche il suo limite, da cui la tesi. \square

Funzioni misurabili rispetto alla misura di Lebesgue

Si ricorda che le funzioni *continue*, *semplici* e *semicontinue* sono classi di funzioni misurabili. Due osservazioni sulle funzioni semicontinue.

- Le funzioni semicontinue sono *boreliane*.
- La proprietà di misurabilità delle funzioni semicontinue è necessaria per l'enunciato della disuguaglianza di Jensen.

Controesempio (*Disuguaglianza di Jensen*). Notiamo che l'ipotesi di semicontinuità inferiore della funzione f è necessaria per la validità della disuguaglianza di Jensen. Infatti, definiamo f come segue

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x \in (0, 1) \\ +\infty & \text{altrimenti} \end{cases}.$$

Osserviamo che la funzione f così definita è convessa ma non semicontinua inferiormente.

Ora definiamo la funzione $u : X \rightarrow \mathbb{R}$ con $X = (0, 2)$, come la funzione costante di valore $1/2$. Calcoliamo l'integrale di $u(x)$ su X .

$$\int_X u(x) dx = 1.$$

In tal caso vale $f\left(\int_X u(x) dx\right) = +\infty$. D'altra parte $\int_X f \circ u dx = 0$, dunque l'ipotesi di semicontinuità inferiore è necessaria.

Fatto. Date φ_1, φ_2 funzioni semplici su \mathbb{R} con misura di Lebesgue. Allora $\varphi_1 \vee \varphi_2$ e $\varphi_1 \wedge \varphi_2$ sono ancora funzioni semplici.

Lemma. Data $f : X \rightarrow [0, +\infty]$ misurabile

$$\int_X f d\mu = 0 \iff f = 0 \text{ q.o. su } X.$$

Dimostrazione.

\Rightarrow Dato che f è non negativa, il dominio X può essere riscritto come

$$X = \{x \in X \mid f(x) \geq 0\} = \{x \in X \mid f(x) > 0\} \cup \{x \in X \mid f(x) = 0\}$$

ricordiamo che $(0, +\infty) = \bigcup_{n \geq 1} (\frac{1}{n}, +\infty)$ da cui segue

$$\{x \in X \mid f(x) > 0\} = \bigcup_{n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}} \left\{x \in X \mid f(x) \geq \frac{1}{n}\right\},$$

e passiamo alle misure

$$\mu(\{x \in X \mid f(x) > 0\}) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \mu\left(\left\{x \in X \mid f(x) \geq \frac{1}{n}\right\}\right),$$

in questo modo otteniamo la seguente caratterizzazione dell'insieme su cui f è positiva

$$\mu(\{x \in X \mid f(x) > 0\}) > 0 \iff \exists \bar{n} \mid \mu(\{x \in X \mid f(x) \geq 1/\bar{n}\}) > 0.$$

Allora possiamo maggiorare come segue

$$0 = \int_X f \, d\mu \geq \int_{\{f \geq \frac{1}{n}\}} f \, d\mu \geq \frac{1}{n} \mu\left(\left\{x \mid f(x) \geq \frac{1}{n}\right\}\right).$$

Dunque abbiamo

$$\mu\left(\left\{x \mid f(x) \geq \frac{1}{n}\right\}\right) = 0 \quad \forall n.$$

Si conclude osservando che

$$\mu(\{x \mid f(x) > 0\}) = \lim_n \mu\left(\left\{x \mid f(x) \geq \frac{1}{n}\right\}\right) = 0.$$

\Leftarrow Dal fatto che f è positiva possiamo scrivere

$$\int_X f \, d\mu = \sup_{\substack{g \leq f \\ g \text{ semplice}}} \int_X g \, d\mu = \sup \sum_i \alpha_i \mu(E_i) = 0.$$

□

Osservazione. (sup essenziale di funzioni misurabili). Data f misurabile, definiamo

$$\|f\|_{\infty, X} := \inf \{m \in [0, +\infty] \mid |f(x)| \leq m \text{ quasi ovunque}\}.$$

Se $\|f\|_{\infty} < +\infty$, allora diciamo che esiste una costante $L > 0$ con $L = \|f\|_{\infty, X}$, tale che

$$|f(x)| \leq L$$

quasi ovunque. Infatti, per definizione di inf, $L = \lim_n m_n$, dove m_n verificano

$$|f(x)| \leq m_n \quad \forall x \in X \setminus N_m, \quad \mu(N_m) = 0.$$

Definiamo $N = \bigcup_m N_m$, da cui si ottiene

$$\mu(N) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(N_m) = 0.$$

Ovvero N è trascurabile. Preso $x \in X \setminus N$, vale

$$|f(x)| \leq m_n \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Formula di cambio di variabile applicata a funzioni radiali

Sia $f: [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ misurabile (di solito si richiede misurabile e positiva oppure sommabile). Vala la seguente

$$\int_0^{+\infty} f(|x|) \, dx = c_n \cdot \int_0^{+\infty} f(\rho) \rho^{n-1} \, d\rho,$$

dove $c_n = n \mathcal{L}^n(\mathcal{B}(0, 1))$.

Applichiamo questa formula alla stima di integrali di funzioni positive.

Esercizio. Sia

$$\psi(x) = \frac{1}{\|x\|^\alpha}$$

su $\mathcal{B}(0, 1) \in \mathbb{R}^n$. Notiamo che $\psi(x) = f(\|x\|)$ con $f = 1/t^\alpha$. Usiamo la formula appena introdotta per determinare gli $\alpha \in \mathbb{R}$ per i quali ψ è sommabile su $\mathcal{B}(0, 1)$.

$$\int_{\mathcal{B}(0,1)} \psi(x) \, dx = c_n \int_0^1 \frac{1}{\rho^\alpha} \rho^{n-1} \, d\rho = c_n \int_0^1 \rho^{n-1-\alpha} \, d\rho = \begin{cases} \log(\rho) & n = \alpha \\ \frac{\rho^{n-\alpha}}{n-\alpha} & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Concludendo,

$$\int_{\mathcal{B}(0,1)} \frac{1}{\|x\|^\alpha} \, dx < +\infty \iff n > \alpha.$$

Esercizio. Con passaggi analoghi al precedente otteniamo

$$\int_{\mathbb{R}^n \setminus \mathcal{B}(0,1)} \frac{1}{\|x\|^\alpha} \, dx < +\infty \iff n < \alpha.$$

Esercizio. Vediamo per quali valori di β l'integrale

$$\int_{\mathcal{B}(0,1)} \frac{1}{(\|x\| + \|x\|^2)^\beta} \, dx$$

converge.

Vale la seguente catena di uguaglianze.

$$\int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{(\|x\| + \|x\|^2)^\beta} \, dx = \int_{\mathcal{B}(0,1)} \frac{1}{(\|x\| + \|x\|^2)^\beta} \, dx + \int_{\mathbb{R}^n \setminus \mathcal{B}(0,1)} \frac{1}{(\|x\| + \|x\|^2)^\beta} \, dx.$$

Studiamo separatamente i due pezzi dell'integrale.

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{B}(0,1)} \frac{1}{(\|x\| + \|x\|^2)^\beta} \, dx &= c_n \int_{\mathcal{B}(0,1)} \frac{1}{(\rho + \rho^2)^\beta} \rho^{n-1} \, d\rho = c_n \int_0^1 \frac{1}{\rho^\beta} \cdot \frac{\rho^{n-1}}{(1 + \rho)^\beta} \, d\rho \\ &\approx \int_0^1 \rho^{n-1-\beta} \, d\rho < +\infty \iff \beta < n. \end{aligned}$$

Inoltre,

$$\int_{\mathcal{B}(0,1)} \frac{1}{(\|x\| + \|x\|^2)^\beta} \, dx = \int_{\mathbb{R}^n \setminus \mathcal{B}(0,1)} \frac{1}{\rho^{2\beta}} \cdot \frac{\rho^{n-1}}{(\frac{1}{\rho} + 1)^\beta} \, d\rho \approx \int_1^{+\infty} \frac{\rho^{n-1}}{\rho^{2\beta}} \, d\rho < +\infty \iff 2\beta > \alpha.$$

In conclusione, l'integrale è finito se $n > \beta > n/2$.

Esercizio. Studiare l'insieme di finitezza al variare del parametro α dell'integrale

$$\int_{[0,1]^n} \frac{1}{\|x\|_1^\alpha} dx$$

Osserviamo che la norma 1 e 2 sono legate dalle seguenti disuguaglianze

$$\frac{\|x\|_1}{n} \leq \|x\|_2 \leq \|x\|_1.$$

Studiamo una maggiorazione per l'integrale

$$\int_{[0,1]^n} \frac{1}{\|x\|_1^\alpha} dx \leq \int_{[0,1]^n} \frac{1}{\|x\|^\alpha} dx \leq \int_{B(0,\sqrt{n})} \frac{1}{\|x\|^\alpha} dx < +\infty \iff \alpha < n,$$

dunque

$$\int_{[0,1]^n} \frac{1}{\|x\|_1^\alpha} dx < +\infty \quad \text{se } \alpha < n.$$

Vediamo ora una minorazione.

$$\int_{[0,1]^n} \frac{1}{\|x\|_1^\alpha} dx = \frac{1}{2^n} \int_{[-1,1]^n} \frac{1}{\|x\|_1^\alpha} dx \geq \frac{1}{2^n} \int_{B(0,1)} \frac{1}{\|x\|_1^\alpha} dx \approx \int_{B(0,1)} \frac{1}{\|x\|^\alpha} dx < +\infty \iff \alpha < n.$$

Dunque l'integrale $\int_{[0,1]^n} \frac{1}{\|x\|_1^\alpha} dx$ converge se e solo se $\alpha < n$.

Esercizi per casa.

- (1) Dimostrare che date f, g misurabili ed $r, p_1, p_2 > 0$ tali che $1/r = 1/p_1 + 1/p_2$. Allora vale

$$\|f \cdot g\|_r \leq \|f\|_{p_1} + \|g\|_{p_2}.$$

Suggerimento. Usare Holder osservando che $1 = \frac{r}{p_1} + \frac{r}{p_2} = \frac{1}{(p_1/r)} + \frac{1}{(p_2/r)}$.

- (2) Dimostrare che date f_1, \dots, f_n misurabili e $p_i > 0$ tali che $1/p_1 + \dots + 1/p_n = 1$ si ha

$$\|f_1 \cdots f_n\|_1 \leq \|f_1\|_{p_1} \cdots \|f_n\|_{p_n}.$$

Suggerimento. Fare il primo passo dell'induzione e usare la formula precedente scegliendo r in modo corretto.

2.3 Costruzione spazi L^p

Fissiamo (X, \mathcal{A}, μ) come sempre.

Definizione. Sia \mathcal{L}^p l'insieme delle funzioni $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ o \mathbb{R}^d misurabili tali che $\|f\|_p < +\infty$.

Osservazioni.

- \mathcal{L}^p è un sottospazio vettoriale dello spazio vettoriale dato da $\{f: X \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ misurabile}\}$ e $\|\cdot\|_p$ è una semi-norma.

Dimostrazione.

- \mathcal{L}^p è chiuso per moltiplicazione per scalari.
- $f_1, f_2 \in \mathcal{L}^p \implies f_1 + f_2 \in \mathcal{L}^p$
- Dalla definizione segue subito $\|\lambda f\|_p = |\lambda| \cdot \|f\|_p$ l'omogeneità della norma.
- Dalla disuguaglianza di Minkowski segue che $\|\cdot\|_p$ è una semi-norma.
- In particolare non è una norma se $\{0\} \subsetneq \{f \mid \|f\|_p = 0\}$ ovvero se \mathcal{A} contiene insiemi non vuoti di misura nulla.
- In generale dato V spazio vettoriale e $\|\cdot\|$ semi-norma su V possiamo introdurre $N := \{v \mid \|v\| = 0\}$. N risulta essere un sottospazio di V e la norma data da $\|[v]\| := \|v\|$ per $[v] \in V/N$ è ben definita ed è proprio una norma su V/N .
- Nel caso della norma $\|\cdot\|_p$ abbiamo che $[f_1] = [f_2] \iff [f_1 - f_2] = 0 \iff f_1 - f_2 = 0$ quasi ovunque.

Definizione. Poniamo $N := \{f \mid \|f\|_p = 0\}$ e definiamo gli **spazi** L^p come

$$L^p := \mathcal{L}^p/N = \mathcal{L}^p/\sim \quad \|[f]\|_p := \|f\|_p$$

Notazione. Ogni tanto serve precisare meglio l'insieme di partenza e di arrivo degli spazi L^p ed in tal caso useremo le seguenti notazioni

$$L^p = L^p(X) = L^p(X, \mu) = L^p(X, \mathcal{A}, \mu) = L^p(X, \mu; \mathbb{R}^d)$$

Nota. Nella pratica non si parla mai di “classi di funzioni” e si lavora direttamente parlando di “funzioni in L^p ”. Le “operazioni” comuni non creano problemi però in certi casi bisogna stare attenti di star lavorando con oggetti ben definiti ad esempio:

- Preso $x_0 \in X$ consideriamo l'insieme $\{f \in L^p \mid f(x_0) = 0\}$ non è un sottoinsieme ben definito (a meno che $\mu(\{x_0\}) > 0$) di L^p in quanto possiamo variare f su un insieme di misura nulla.
- Invece l'insieme $\{f \in L^1 \mid \int_X f \, d\mu = 0\}$ è ben definito.

2.4 Completezza degli spazi L^p

Vediamo ora la proprietà più importante degli spazi L^p .

Teorema. Per $p \in [1, +\infty]$ lo spazio L^p è completo.

Lemma 1. Dato (Y, d) spazio metrico, allora

- i) Ogni successione (y_n) tale che

$$\sum_{n=1}^{\infty} d(y_n, y_{n+1}) < +\infty$$

è di Cauchy, e in particolare converge a qualche $y \in Y$ se Y è completo.

- ii) Se ogni (y_n) tale che $\sum_{n=1}^{\infty} d(y_n, y_{n+1}) < +\infty$ converge allora Y è completo.

Osservazione. Non tutte le successioni di Cauchy (y_n) soddisfano quella condizione, ad esempio su \mathbb{R} la successione $(-1)^n/n$ è di Cauchy però

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{(-1)^{n+1}}{n+1} - \frac{(-1)^n}{n} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n^2+n} \approx \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \rightarrow \infty$$

ma come abbiamo visto nella ii) ci basta per mostrare la completezza dello spazio che è ciò che ci interessa veramente.

Dimostrazione.

- i) Dati $n > m$ abbiamo che

$$d(y_m, y_n) \leq \sum_{k=m}^{n-1} d(y_k, y_{k+1}) \leq \sum_{k=m}^{\infty} d(y_k, y_{k+1}) \rightarrow 0$$

in quanto è la *coda di una serie convergente* quindi

$$\forall \varepsilon > 0 \exists m_\varepsilon \text{ tale che } \sum_{k=m_\varepsilon}^{\infty} d(y_k, y_{k+1}) < \varepsilon \implies \forall n > m \geq m_\varepsilon \, d(y_m, y_n) \leq \varepsilon$$

- ii) Basta far vedere che data (y_n) di Cauchy esiste una sottosuccessione y_{n_k} tale che

$$\sum_{k=1}^{\infty} d(y_{n_k}, y_{n_{k+1}}) < +\infty$$

ma $\forall k \exists n_k$ tale che $\forall n, m \geq n_k \, d(y_m, y_n) \leq \frac{1}{2^k}$ dunque $d(y_{n_k}, y_{n_{k+1}}) \leq \frac{1}{2^k}$.

Quindi per ipotesi y_{n_k} converge a qualche $y \in Y$ ed anche $y_n \rightarrow y$.

□

Lemma 2. Dato Y spazio normato, i seguenti fatti sono equivalenti

i) Y è completo.

ii) $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$ converge in Y per ogni (y_n) tale che $\sum_{n=1}^{\infty} \|y_n\| < +\infty$ ovvero $\|y - \sum_{n=1}^N y_n\| \rightarrow 0$.

Dimostrazione. È un corollario del lemma precedente. \square

Lemma 3 (Minkowski per somme infinite). Date delle funzioni (g_n) funzioni positive su X allora

$$\left\| \sum_{n=1}^{\infty} g_n \right\|_p \leq \sum_{n=1}^{\infty} \|g_n\|_p$$

Dimostrazione. Per ogni N abbiamo che

$$\left\| \sum_{n=1}^N g_n \right\|_p^p \leq \left(\sum_{n=1}^N \|g_n\|_p \right)^p \leq \left(\sum_{n=1}^{\infty} \|g_n\|_p \right)^p$$

e

$$\left\| \sum_{n=1}^N g_n \right\|_p^p = \int_X \left(\sum_{n=1}^N g_n(x) \right)^p d\mu(x) \xrightarrow{N} \int_X \left(\sum_{n=1}^{\infty} g_n(x) \right)^p d\mu(x)$$

per *convergenza monotona*. \square

Dimostrazione (Completezza spazi L^p).

- Se $p = +\infty$: si tratta di vedere che data (f_n) di Cauchy in $L^\infty(X)$ esiste E con $\mu(E) = 0$ tale che (f_n) è di Cauchy rispetto allora norma del sup in $X \setminus E$. [TODO: Finire]
- Se $p < +\infty$: per il Lemma 2, basta far vedere che data $(f_n) \subset L^p(X)$ tale che $\sum_{n=1}^{\infty} \|f_n\|_p < +\infty$ allora $\sum_n f_n$ converge a qualche $f \in L^p(X)$.

La dimostrazione è suddivisa in tre passi, prima costruiamo f , poi mostriamo che f_n converge a f ed infine mostriamo $f \in L^p(X)$.

◦ *Passo 1:* Per ipotesi abbiamo

$$\infty > \sum_{n=1}^{\infty} \|f_n\|_p = \sum_{n=1}^{\infty} \| |f_n| \|_p \geq \left\| \sum_{n=1}^{\infty} |f_n| \right\|_p = \left(\int \left(\sum_{n=1}^{\infty} |f_n(x)| \right)^p d\mu(x) \right)^{1/p}$$

quindi $\sum_{n=1}^{\infty} |f_n(x)| < +\infty$ per ogni $x \in X \setminus E$ con $\mu(E) = 0$. Quindi $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ converge a qualche $f(x)$ per ogni $x \in X \setminus E$ ed a questo punto ci basta estendere f a zero¹.

◦ *Passo 2:* Fissiamo N ed osserviamo che $\forall x \in X \setminus E$ abbiamo

$$\left| f(x) - \sum_{n=1}^N f_n(x) \right| = \left| \sum_{n=N+1}^{\infty} f_n(x) \right| \leq \sum_{n=N+1}^{\infty} |f_n(x)|$$

da cui otteniamo

$$\left\| f - \sum_{n=1}^N f_n \right\|_p \leq \left\| \sum_{n=N+1}^{\infty} |f_n| \right\|_p \leq \sum_{n=N+1}^{\infty} \|f_n\|_p$$

dove l'ultimo termine è la coda di una serie convergente.

¹Una costruzione alternativa degli spazi L^p potrebbe anche partire da *funzioni definite quasi ovunque*, questo ovvierebbe al problema di estendere a 0 la funzione f appena costruita. Però diventa più complicato mostrare di essere in uno spazio vettoriale poiché per esempio serve ridefinire $+$ per funzioni definite quasi ovunque.

◦ *Passo 3*: In particolare rileggendo il passo precedente per $N = 0$ otteniamo

$$\|f\|_p \leq \sum_{n=1}^{\infty} \|f_n\|_p < +\infty \implies f \in L^p$$

□

Esercizio.¹ Sia $f: X \rightarrow [0, +\infty]$ allora $\int_X f \, d\mu < +\infty \implies f(x) < +\infty$ per quasi ogni x .

Dimostrazione. Sia $E := \{x \mid f(x) = +\infty\}$, allora l'idea è che

$$\infty > \int_X f \, d\mu \geq \int_E f \, d\mu = +\infty \cdot \mu(E)$$

più precisamente osserviamo che $\forall m \in [0, +\infty)$ abbiamo $f \cdot \mathbb{1}_E \geq m \cdot \mathbb{1}_E$ quindi integrando ricaviamo

$$\underbrace{\int_E f \, d\mu}_I \geq m \cdot \mu(E) \implies \mu(E) \leq \frac{I}{m} \xrightarrow{m \rightarrow +\infty} 0$$

□

2.5 Nozioni di convergenza per successioni di funzioni

Fissiamo X, \mathcal{A}, μ e prendiamo $f, f_n: X \rightarrow \mathbb{R}$ (o \mathbb{R}^k) misurabili.

Definizione. Riportiamo le definizioni di alcune nozioni di convergenza.

- **Uniforme** : $\forall \varepsilon \exists n_\varepsilon$ tale che $\|f(x) - f_n(x)\| < \varepsilon \quad n > n_\varepsilon$.
- **Puntuale** : $f_n \rightarrow f \quad \forall x \in X$.
- **Puntuale μ -quasi ovunque** : $f_n \rightarrow f$ per μ -q.o. $x \in X$.
- **In L^p** : $\|f_n - f\|_p \rightarrow 0$.
- **In misura** : $\forall \varepsilon > 0 \quad \mu(\{x \mid |f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon\}) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.

Osservazione. Abbiamo le seguenti implicazioni ovvie delle diverse nozioni di convergenza:

$$\text{uniforme} \implies \text{puntuale} \implies \text{puntuale } \mu \text{ q.o.}$$

Proposizione. Valgono le seguenti.

- i) Data $f_n \rightarrow f$ q.o. e $\mu(X) < +\infty$, allora $f_n \rightarrow f$ in misura.
- ii) (*Severini-Egorov*): Data $f_n \rightarrow f$ q.o. e $\mu(X) < +\infty$, allora $\forall \delta > 0$ esiste $E \in \mathcal{A}$ tale che $\mu(E) < \delta$ e $f_n \rightarrow f$ uniformemente su $X \setminus E$.
- iii) $f_n \rightarrow f$ in L^p , $p < +\infty$, allora $f_n \rightarrow f$ in misura.
- iii') $f_n \rightarrow f$ in L^∞ , allora $\exists E$ tale che $\mu(E) = 0$ e $f_n \rightarrow f$ uniformemente su $X \setminus E$.

¹In questo corso non è strettamente necessario ricordarsi come si facciano tutti questi esercizi di teoria della misura ma è bene saperli applicare in automatico quando serve.

iv) $f_n \rightarrow f$ in misura, allora $\exists n_k$ tale che $f_{n_k} \rightarrow f$ μ -q.o.

v) $f_n \rightarrow f$ in L^p , allora $\exists n_k$ tale che $f_{n_k} \rightarrow f$ μ -q.o.

Osservazione. In i) e ii) l'ipotesi $\mu(X) < +\infty$ è necessaria. Infatti, preso $X = \mathbb{R}$ e $f_n = \mathbb{1}_{[n, +\infty)}$ si ha che $f_n \rightarrow 0$ ovunque ma f_n non converge a 0 in misura, e f_n non converge a 0 uniformemente in $\mathbb{R} \setminus E$ per ogni E di misura finita.

Lemma. (Disuguaglianza di Markov). Data $g: X \rightarrow [0, +\infty]$ misurabile e $m > 0$ si ha

$$\mu(\{x \in X \mid g(x) \geq m\}) \leq \frac{1}{m} \int_X g \, d\mu$$

Dimostrazione. Poniamo $E := \{x \in X \mid g(x) \geq m\}$. Osserviamo che $g \geq m \cdot \mathbb{1}_E$. Dunque vale

$$\int_X g \, d\mu \geq \int_X m \cdot \mathbb{1}_E \, d\mu = m \cdot \mu(\{x \in X \mid g(x) \geq m\})$$

da cui la tesi. □

Lemma. (Borel-Cantelli). Dati $(E_n) \subset \mathcal{A}$ tali che $\sum \mu(E_n) < +\infty$, l'insieme

$$E := \{x \in X \mid x \in E_n \text{ frequentemente}\}$$

ha misura nulla. Cioè per μ -q.o. x , $x \notin E_n$ definitivamente (in n .)

Dimostrazione. Osserviamo che

$$E = \bigcap_{m=1}^{\infty} \left(\underbrace{\bigcup_{n=m}^{\infty} E_n}_{F_m} \right).$$

Allora

$$\underbrace{\mu(E)}_{F_m \downarrow E \text{ \& } \mu(F_1) < +\infty} \stackrel{=}{=} \lim_{m \rightarrow \infty} \mu(F_m) \leq \lim_{m \rightarrow \infty} \underbrace{\sum_{n=m}^{\infty} \mu(E_n)}_{\text{coda di serie convergente}} = 0.$$

Osservazione. L'ipotesi $\sum \mu(E_n) < +\infty$ non può essere sostituita con $\mu(E_n) \rightarrow 0$.

Ora dimostriamo la proposizione.

Dimostrazione.

Definiamo gli insiemi

$$A_n^\varepsilon := \{x \mid |f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon\},$$

$$B_m^\varepsilon := \{x \mid |f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon \text{ per qualche } n \geq m\} = \bigcup_{n=m}^{\infty} A_n^\varepsilon,$$

$$A_n^\varepsilon := \{x \mid |f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon \text{ frequentemente}\} = \{x \in A_n^\varepsilon \text{ frequentemente}\} = \bigcap_{m=1}^{\infty} B_m^\varepsilon.$$

i) Per ipotesi, $f_n \rightarrow f$ quasi ovunque, cioè $\mu(B^\varepsilon) = 0$ per ogni $\varepsilon > 0$, ma $B_m^\varepsilon \downarrow B^\varepsilon$ e $\mu(X) < +\infty$. Allora

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} \mu(B_m^\varepsilon) = \mu(B^\varepsilon) = 0 \Rightarrow \lim_{m \rightarrow \infty} \mu(A_m^\varepsilon) = 0.$$

ii) Dalla dimostrazione precedente, abbiamo $\lim_{m \rightarrow \infty} \mu(B_m^\varepsilon) = 0$. Allora per ogni k esiste un m_k tale che $\mu(B_{m_k}^{1/k}) \leq \delta/2^k$. Pongo $E := \bigcup_k B_{m_k}^{1/k}$ per ogni k ; allora $\mu(E) \leq \delta$. Inoltre,

$$\begin{aligned} x \in X \setminus E &\Rightarrow x \notin B_{m_k}^{1/k} \forall k \iff x \notin A_n^{1/k} \forall k, n \geq m_k \\ &\Rightarrow |f(x)f_n(x)| < \frac{1}{k} \quad \forall k, n \geq m_k \\ &\Rightarrow \sup_{x \in X \setminus E} |f(x) - f_n(x)| \leq \frac{1}{k} \quad \forall k, n \geq m_k \\ &\Rightarrow f - f_m \text{ uniformemente su } X \setminus E. \end{aligned}$$

iii) Dobbiamo mostrare che per ogni $\varepsilon > 0$ $\mu(A_n^\varepsilon) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$. Usando la disuguaglianza di Markov ottengo

$$\mu\left(A_n^\varepsilon = \left\{x \mid \overbrace{|f_n(x) - f(x)|}^g \geq \varepsilon^p\right\}\right) \leq \frac{1}{m} \int_X g \, d\mu = \frac{1}{\varepsilon^p} \|f_n - f\|_p^p \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

iii') Definiamo $E_n := \{x \mid |f_n(x) - f(x)| > \|f_n - f\|_\infty\}$ per ogni n , allora $\mu(E_n) = 0$. Poniamo $E = \bigcup_n E_n$ e $\mu(E) = 0$, dunque

$$\sup_{x \in X \setminus E} |f_n(x) - f(x)| \leq \|f_n - f\|_\infty \rightarrow 0.$$

iv) per ipotesi, $f_n \rightarrow f$ in misura, cioè

$$\begin{aligned} \forall \varepsilon > 0 \quad \mu(A_n^\varepsilon) &\xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 \\ &\Rightarrow \forall k \exists n_k: \mu(A_{n_k}^{1/k}) \leq \frac{1}{2^k} \\ &\Rightarrow \sum_k \mu(A_{n_k}^{1/k}) < +\infty. \end{aligned}$$

Allora per Borel-Cantelli, si ha per μ -quasi ogni x , $x \notin A_{n_k}^{1/k}$ definitivamente in k , cioè $\|f_{n_k}(x) - f(x)\| < 1/k$ definitivamente in k , cioè $f_{n_k}(x) \xrightarrow{k} f(x)$.

v) [TODO].

2.5.1 Prodotto scalare su L^2

Date $f_1, f_2 \in L^2(X)$ si pone

$$\langle f_1, f_2 \rangle := \int_X f_1 \cdot f_2 \, d\mu.$$

Osservazioni.

- La definizione di $\langle f_1, f_2 \rangle$ è ben posta. Infatti, basta far vedere che $\int_X |f_1 f_2| \, d\mu < +\infty$, che segue da Hölder.

$$\int_X |f_1 f_2| \, d\mu \leq \|f_1\|_2 \|f_2\|_2 < +\infty$$

- $\|f\|_2^2 = \langle f, f \rangle$ per ogni $f \in L^2(X)$.

- Inoltre, $\left| \int_X f_1 f_2 \right| d\mu \leq \int_X |f_1 f_2| d\mu$ quindi

$$|\langle f_1, f_2 \rangle| \leq \|f_1\|_2 \|f_2\|_2 \quad (\text{Cauchy-Schwartz}).$$

- L'operatore $\langle \cdot, \cdot \rangle$ è un prodotto scalare definito positivo.

Osservazioni.

- Dato C spazio vettoriale reale con prodotto scalare $\langle \cdot, \cdot \rangle$, allora $\langle \cdot, \cdot \rangle$ si ricava dalla norma associata $\|\cdot\|$ tramite l'identità di polarizzazione:

$$\langle v_1, v_2 \rangle = \frac{1}{4} (\|v_1 + v_2\|^2 - \|v_1 - v_2\|^2).$$

- Dato V come sopra, vale l'identità del parallelogramma:

$$\|v_1 + v_2\|^2 + \|v_1 - v_2\|^2 = 2\|v_1\|^2 + 2\|v_2\|^2 \quad \forall v_1, v_2 \in V.$$

Usando questa identità si dimostra che la norma di L^p deriva da un prodotto scalare solo per $p = 2$.

Proprietà. Sia V uno spazio vettoriale normato con norma $\|\cdot\|$. Allora vale l'identità del parallelogramma se e solo se $\|\cdot\|$ deriva da un prodotto scalare.

Esempio. La norma di $L^p([-1, 1])$, deriva da un prodotto scalare solo per $p = 2$. Prendiamo $f_1 = \mathbb{1}_{[-1, 0]}$ e $f_2 = \mathbb{1}_{[0, +1]}$. Allora

$$\begin{aligned} \|f_1 + f_2\|_p^p &= \int_{-1}^1 1 dx = 2 \Rightarrow \|f_1 + f_2\|_p = 2^{1/p} \\ \|f_1 - f_2\|_p &= \|f_1 + f_2\|_p = 2^{1/p}, \quad \|f_1\|_p = \|f_2\|_p = 1 \end{aligned}$$

Se vale l'identità del parallelogramma allora

$$\|f_1 + f_2\|_p^2 + \|f_1 - f_2\|_p^2 = 2\|f_1\|_p^2 + 2\|f_2\|_p^2$$

cioè

$$2^{2/p} + 2^{2/p} = 2 \cdot 1 + 2 \cdot 1 \iff p = 2.$$

Domanda. Per quali X, \mathcal{A}, μ vale la stessa conclusione?

2.6 Controesempi sulle convergenze

Vediamo un controesempio che mostra che tutte le implicazioni sui vari tipi di convergenza sono ottimali ovvero

- $f_n \rightarrow f$ in misura $\not\Rightarrow f_n \rightarrow f$ q.o.
- $f_n \rightarrow f$ in L^p con $p < +\infty$ $\not\Rightarrow f_n \rightarrow f$ q.o.
- $\mu(E_n) \rightarrow 0$ $\not\Rightarrow$ per q.o x si ha $x \notin E_n$ definitivamente.

Dimostrazione. Consideriamo gli insiemi $I_1 = [1, 1 + \frac{1}{2}]$, $I_2 = [1 + \frac{1}{2}, 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}]$, \dots

$$I_n := \left[\sum_{k=1}^n \frac{1}{k}, \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k} \right]$$

e consideriamo la loro proiezione “modulo” $[0, 1]$ usando la funzione $p: \mathbb{R} \rightarrow [0, 1)$ *parte frazionaria* data da

$$p(x) := x - \lfloor x \rfloor$$

e chiamiamo $E_n := p(I_n)$. Per ogni n abbiamo che $|I_n| = |E_n| = 1/n$ e $\bigcup_n I_n = [1, +\infty)$ (in quanto $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = +\infty$) e quindi ogni $x \in [0, 1)$ appartiene ad E_n per infiniti n ed in particolare questo mostra la iii).

[TODO: Disegnino]

Per la i) basta considerare $\mathbb{1}_{E_n} \rightarrow 0$ in misura (in quanto $|E_n| \rightarrow 0$) ma $\mathbb{1}_{E_n} \not\rightarrow 0$ q.o., anzi $\forall x \in [0, 1) \mathbb{1}_{E_n}(x) \not\rightarrow 0$ e la ii) segue analogamente. \square

2.6.1 Approssimazioni di funzioni in L^p

Vediamo ora alcune classi di funzioni dense in L^p che risulteranno essere un utile strumento da usare nelle dimostrazioni.

Nota. Ricordiamo la nozione di insieme denso in uno spazio metrico. Sia (X, d) uno spazio metrico e $Y \subset X$. Allora Y è denso in X se e solo se per ogni $x \in X$, esiste una successione $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in Y tale che $x = \lim_n y_n$.

Per ora sia (X, \mathcal{A}, μ) in generale.

Esercizio. Le funzioni limitate in L^p sono dense in L^p .

Dimostrazione. Data $f \in L^p(X)$ cerchiamo una successione di funzioni $f_n \in L^p(X)$ limitate tali che $f_n \rightarrow f$ in L^p , consideriamo

$$f_n(x) := f(x) \wedge n \vee (-n)$$

vorremmo mostrare che $f_n \rightarrow f$ in L^p ovvero

$$\|f_n - f\|_p^p = \int_X |f_n - f|^p d\mu \rightarrow 0$$

intanto vediamo che per la *convergenza puntuale* basta osservare che se $n \geq |f(x)|$ abbiamo che $\forall x \ f_n(x) = f(x) \implies f_n(x) \xrightarrow{n} f(x) \implies |f_n(x) - f(x)|^p \rightarrow 0$.

Per concludere basta applicare *convergenza dominata* usando come dominazione direttamente $|f(x) - f_n(x)| \leq |f(x)| \implies |f(x) - f_n(x)|^p \leq |f(x)|^p$ e notiamo che $|f|^p \in L^1(X)$. \square

Proposizione. Sia¹ $\widetilde{\mathcal{F}} := \text{Span}(\{\mathbb{1}_E \mid E \in \mathcal{A}, \mu(E) < +\infty\})$, allora $\widetilde{\mathcal{F}}$ è denso in $L^p(X)$.

Dimostrazione. Data $f \in L^p(X)$ cerchiamo una successione che approssima f in $\widetilde{\mathcal{F}}$.

- *Caso 1:* Se $f \geq 0$ allora fissiamo $\varepsilon > 0$ e per ogni $k = 1, 2, \dots$ e poniamo

$$A_k^\varepsilon := \{x \mid k\varepsilon \leq f(x) \leq (k+1)\varepsilon\}$$

¹Lo span è inteso come combinazioni lineari

risulta che A_k^ε è misurabile ed ha misura finita. Ora consideriamo la successione di funzioni parametrizzata da ε data da

$$f_\varepsilon(x) := \sum_{1 \leq k \leq 1/\varepsilon^2} k\varepsilon \cdot \mathbb{1}_{A_k^\varepsilon}(x) \in \widetilde{\mathcal{F}}$$

[TODO: Disegnino]

Osserviamo che vale anche $f_\varepsilon(x) = \max\{k\varepsilon \mid k\varepsilon \leq f(x) \text{ e } k \leq 1/\varepsilon^2\}$ e mostriamo la seguente¹

$$\int_X |f(x) - f_\varepsilon(x)|^p d\mu(x) \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0$$

- *Convergenza puntuale*: Per l'identità precedente abbiamo che $0 \leq f(x) - f_\varepsilon(x) \leq \varepsilon$ se $f(x) \leq 1/\varepsilon$.
- *Dominazione*: Possiamo usare nuovamente $|f(x) - f_\varepsilon(x)|^p \leq |f(x)|^p < +\infty$ in quanto $f \in L^p(X)$.

[TODO: Disegnino]

- *Caso 2*: Sia $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ allora si può rifare la dimostrazione precedente oppure si può semplicemente considerare $f_\varepsilon := (f^+)_\varepsilon - (f^-)_\varepsilon$.
- *Caso 3*: Generalizziamo la proposizione al caso di $f: X \rightarrow \mathbb{R}^d$ come segue

Proposizione. (Generalizzata) Sia $\widetilde{\mathcal{F}} := \{\sum_i \alpha_i \mathbb{1}_{E_i} \mid \alpha_i \in \mathbb{R}^d, E_i \in \mathcal{A}, \mu(E_i) < +\infty\} \implies \widetilde{\mathcal{F}}$ è denso in $L^p(X; \mathbb{R}^d)$.

Dimostrazione. (Idea) Basta approssimare componente per componente.

□

Sia ora X uno spazio metrico e $\{\text{aperti}\} \subset \mathcal{A}$.

Proposizione. Sia $\widetilde{\mathcal{F}}_\ell := \{\sum_i \alpha_i \mathbb{1}_{E_i} \mid \alpha_i \in \mathbb{R}^d, E_i \in \mathcal{A}, \mu(E_i) < +\infty, E_i \text{ limitati}\}$ allora $\widetilde{\mathcal{F}}_\ell$ è denso in $L^p(X; \mathbb{R}^d)$ per $p < +\infty$.

Osservazione. In generale l'enunciato non vale per $p = +\infty$. Ad esempio preso $L^\infty(\mathbb{R})$ e $f = 1$ non si può approssimare con funzioni a supporto limitato (come quelle in $\widetilde{\mathcal{F}}_\ell$. In particolare data g con supporto A limitato $|f - g| = 1$ su $\mathbb{R} \setminus A$ e siccome $|\mathbb{R} \setminus A| > 0$ abbiamo $\|f - g\|_\infty \geq 1$).

Dimostrazione. ($\widetilde{\mathcal{F}}_\ell$ è denso in L^p) Per prima cosa vediamo un lemma che useremo assieme alla proposizione precedente.

Lemma. Dato $E \in \mathcal{A}, \mu(E) < +\infty$ esiste $E_n \in \mathcal{A}$ con E_n limitati tali che $E_n \subset E$ e $\mu(E \setminus E_n) \rightarrow 0$ e quindi $\|\mathbb{1}_E - \mathbb{1}_{E_n}\|_p = \mu(E \setminus E_n)^{1/p} \xrightarrow{n} 0$ (e $\mathbb{1}_{E_n} \in \widetilde{\mathcal{F}}_\ell$).

Dimostrazione. Dato E con $\mu(E) < +\infty$ prendiamo $x_0 \in X$ e poniamo $E_n := E \cap \mathcal{B}(x_0, n)$; $E_n \subset E$ e $E \setminus E_n \downarrow \emptyset \implies \mu(E \setminus E_n) \xrightarrow{n} 0$.

Intuitivamente $\widetilde{\mathcal{F}}_\ell$ è denso in $\widetilde{\mathcal{F}}$ che a sua volta è denso in L^p (usando la definizione di densità topologica la tesi è quasi ovvia mentre usando la definizione per successioni bisogna passare per un procedimento diagonale). □

¹Notiamo che qui stiamo applicando il teorema di *convergenza dominata* su una famiglia parametrizzata da ε e non su una successione ma si può verificare facilmente che il teorema (ed anche gli altri risultati di convergenza di successioni di funzioni) si può estendere semplicemente prendendo $\varepsilon = 1/n$ per $n \rightarrow \infty$.

Ora sia $X \subset \mathbb{R}^n, \mu = \mathcal{L}^n$ e

$$C_C(\mathbb{R}^n) := \{\text{funzioni a supporto compatto}\}$$

notiamo che $C_C(\mathbb{R}^n) \subset L^p$ per ogni p .

Proposizione. Le funzioni in $C_C(\mathbb{R}^n)$ ristrette a X sono dense in $L^p(X)$ per $p < +\infty$.

Vediamo prima alcuni lemmi.

Lemma. Dato $E \subset \mathbb{R}^n$ limitato (e quindi di misura finita) esiste $f_\varepsilon \in C_C(\mathbb{R}^n)$ tale che $f_\varepsilon \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \mathbb{1}_E$ in $L^p(\mathbb{R}^n)$ e quindi in $L^p(X)$.

Dimostrazione. Per regolarità della misura di Lebesgue abbiamo che per ogni ε esistono $C_\varepsilon \subset E \subset A_\varepsilon$ tali che $|A_\varepsilon \setminus C_\varepsilon| \leq \varepsilon$ e prendiamo $f_\varepsilon: \mathbb{R}^n \rightarrow [0, 1]$ continua tale che

$$f_\varepsilon = 1 \text{ su } C_\varepsilon \quad f_\varepsilon = 0 \text{ su } \mathbb{R}^n \setminus A_\varepsilon$$

in particolare sappiamo che su $A_\varepsilon \setminus C_\varepsilon$ vale $|f_\varepsilon - \mathbb{1}_E| \leq 1$

$$\implies \|f_\varepsilon - \mathbb{1}_E\|_p^p = \int_{A_\varepsilon \setminus C_\varepsilon} |f_\varepsilon - \mathbb{1}_E|^p dx$$

Lemma. (di Urysohn) Dati C_0, C_1 chiusi disgiunti in X spazio metrico esiste una funzione $f: X \rightarrow [0, 1]$ continua tale che $f = 0$ su C_0 e $f = 1$ su C_1 .

Dimostrazione. Posta $d(x, C) = \inf\{d(x, y) \mid y \in C\}$ basta considerare

$$f(x) = \frac{d(x, C_0)}{d(x, C_0) + d(x, C_1)}$$

Dimostrazione. ($C_C(\mathbb{R}^n)$ è denso in $L^p(X)$)

Segue dalla proposizione e dal lemma precedente.

2.7 Esercitazione del 13 ottobre

2.7.1 Esercizi su spazi $L^p(X)$ al variare di p e dello spazio X

Sia $X \subset \mathbb{R}^n, \mu$ la misura di Lebesgue e $1 \leq p_1 \leq p_2$.

Domanda. Possiamo confrontare gli spazi $L^{p_1}(X)$ e $L^{p_2}(X)$? In generale no.

Vediamo informalmente perché. Posto $X = (0, +\infty)$, gli integrali

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+x)^{\beta p}} dx, \quad \int_0^{+\infty} \frac{1}{x^{\beta p}} \cdot \mathbb{1}_{[0,1]}(x) dx = \int_0^1 \frac{1}{x^{\beta p}} dx$$

sono maggiorati dall'integrale di $1/x^\alpha$ dove l'esponente α è rispettivamente più piccolo e più grande di $\beta \cdot p$.

Vediamo quanto detto finora più formalmente.

Cerchiamo una funzione $f \in L^{p_1}(0, +\infty) \setminus L^{p_2}(0, +\infty)$ e una funzione $g \in L^{p_2}(0, +\infty) \setminus L^{p_1}(0, +\infty)$. La funzione f definita come segue

$$f(x) := \begin{cases} 1/x^\beta & x \in (0, 1) \\ 0 & x \geq 1 \end{cases}$$

ha integrale

$$\int_0^{+\infty} f(x)^{p_1} dx = \int_0^1 \frac{1}{x^{\beta p_1}} dx < +\infty \iff \beta \cdot p_1 < 1, \quad 0 < p_1 < p_2 \iff \frac{1}{p_2} < \frac{1}{p_1}$$

e

$$\int_0^{+\infty} f(x)^{p_2} dx = \int_0^1 \frac{1}{x^{\beta p_2}} dx = +\infty \iff \beta \cdot p_2 \geq 1$$

basta prendere $\beta \in [1/p_2, 1/p_1]$.

Ora cerco $g \in L^2(0, +\infty) \setminus L^{p_1}(0, +\infty)$. Definisco $g(x)$ come segue

$$g(x) := \frac{1}{(1+x)^\alpha}$$

da cui

$$\int_0^{+\infty} g(x)^{p_2} dx < +\infty \iff \alpha \cdot p_2 > 1 \quad \text{e} \quad \int_0^{+\infty} g(x)^{p_1} dx = +\infty \iff \alpha \cdot p_1 \leq 1$$

Conclusion. In generale non c'è confrontabilità fra gli spazi L^p . La confrontabilità, dipende infatti dall'insieme X su cui sono definiti.

Un caso particolare è dato ponendo $p_1 < p_2$ e $\mu(X) < +\infty$. In tal caso $L^{p_2}(X) \subset L^{p_1}(X)$.

Data $f \in L^{p_2}(X)$, cioè con $\int_X |f|^{p_2} d\mu < +\infty$ vediamo che $\int_X |f|^{p_1} d\mu < +\infty$.

Usiamo Holder:

$$\begin{aligned} \int_X |f|^{p_1} d\mu &\leq \left(\int_X \overbrace{|f(x)|^{p_1 p}}^{|h(x)|^p} d\mu \right)^{1/p} \cdot \left(\int_X 1^q d\mu \right)^{1/q} \underset{p=p_1/p_2}{\leq} \left(\int_X |f|^{p_1} d\mu \right)^{p_1/p_2} \left(\int_X 1^q d\mu \right)^{1/q} \\ &\underset{q=(1-\frac{1}{p})^{-1}=\frac{p}{p-1}=\frac{p_2/p_1}{p_2-p_1}}{=} \|f\|_{L^{p_2}(X)}^{p_1} \cdot \mu(X)^{\frac{p_2-p_1}{p_2}}. \end{aligned}$$

Dunque

$$\|f\|_{L^{p_1}(X)} \leq \|f\|_{L^{p_2}(X)} \cdot \mu(X)^{\frac{p_2-p_1}{p_1 p_2}}.$$

L'inclusione

$$\begin{aligned} i: L^{p_2} &\rightarrow L^{p_1}(X) \\ f &\mapsto f \end{aligned}$$

è ben definita per quanto fatto sopra. Per esercizio vedere con quale topologia risulta continua. [TO DO]

Esercizio. [TO DO] Dato $p \geq 1$, stabilire se esistono $X, \mu, f \in L^p(X)$ e $f \notin L^q(X)$ per ogni $q \neq p, q \geq 1$.

Suggerimento. pensare a $X = (0, +\infty)$, μ misura di Lebesgue.

Osservazione. $L^p(X)$ è uno spazio vettoriale di dimensione infinita, ossia ogni base algebrica ha cardinalità infinita. Vediamo il caso $X = (0, 1)$. Per trovare una base infinita, cerchiamo

per ogni $N \in \mathbb{N}$, $f_1, \dots, f_N \in L^p(0, 1)$ tali che siano linearmente indipendenti. Vale a dire, presi $\lambda_1, \dots, \lambda_N \in \mathbb{R}$ vale $\lambda_1 f_1 + \dots + \lambda_N f_N = 0$ se e solo se $\lambda_1 = \dots = \lambda_N = 0$.

Ad esempio, definisco $f_i := \mathbb{1}_{i/N, (i+1)/N}$ (questa costruzione si può riprodurre per ogni $N \in \mathbb{N}$). Ricordiamo che, essendo $L^p(X)$ uno spazio metrico, dato $Y \subset L^p$ vale la seguente caratterizzazione:

Y è compatto $\iff Y$ è compatto per successioni $\iff Y$ chiuso e totalmente limitato.

Osservazione. $Y \subset L^p(X)$ è un sottoinsieme che eredita la norma $\|\cdot\|_{L^p}$:

Y è completo $\iff Y$ è chiuso.

Osservazione. In L^p i sottoinsiemi chiusi e limitati non sono compatti! In particolare le palle

$$Y = \{f \in L^p \mid \|f\|_{L^p} \leq 1\}$$

non sono compatte.

Ad esempio, mostriamo che in $L^p(0, 1)$ le palle

$$B = \{f \in L^p \mid \|f\|_{L^p} \leq 1\}$$

non sono compatte. Per farlo, esibiamo una successione $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset B$ che non ammette sottosuccessioni convergenti. La costruiamo in modo che non abbia sottosuccessioni di Cauchy

$$f_n: (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}, \quad \|f_n - f_m\|_{L^p} \geq c_0 > 0 \quad \forall n \neq m.$$

Cerco $A_n \subset (0, 1)$ tale che $|A_n \cap A_m| = 0$ per ogni $n \neq m$. Definiamo f_n come segue

$$f_n(x) := \begin{cases} 0 & \text{se } x \in (0, 1) \setminus (1/(n+1), 1/n) \\ c_n > 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

dove c_n è tale che

$$\left(\int_{1/(n+1)}^{1/n} c_n^p \right)^{1/p} = 1 \iff c_n^p \cdot (1/n - 1/(n+1)) = 1 \iff c_n^p = n \cdot (n+1).$$

Calcoliamo ora $\|f_n - f_m\|_{L^p}^p$ con $n \neq m$:

$$\int_0^1 |f_n(x) - f_m(x)|^p dx = \int_{(1/n, 1/(n+1)) \cup (1/(m+1), 1/m)} |f_n - f_m|^p dx = \int_{1/n+1}^{1/n} |f_n|^p dx + \int_0^1 |f_m|^p dx = 1 + 1 = 2.$$

Si osserva che quanto detto sopra vale anche per $p = +\infty$.

Esercizio. [TO DO] Sia $E = \{f \in L^1(1, +\infty) \mid |f(x)| \leq 1/x^2 \text{ e } x \in [1, +\infty)\}$.

- E è limitato in L^1 ?
- E è chiuso in L^1 ?
- E è compatto in L^1 ?

Esercizio. [TO DO]

- Dire se $f_n(x) = x^n$, $n = 0, \dots, N$ è un insieme di funzioni linearmente indipendenti in $L^p([0, 1])$.
- Dire se $\{f_n\} \subset L^p(0, 1)$ è compatta in $L^p(0, 1)$.

Suggerimento. Studiare il limite puntuale.

2.7.2 Spazi ℓ^p

Prendiamo $X = \mathbb{N}$ e $\mu = \#$ la misura che conta i punti.

Osservazione. Definiamo

$$\ell^p = L^p(\mathbb{N}, \#) = \left\{ (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \left| \sum_{n=0}^{+\infty} |x_n|^p < +\infty \right. \right\}$$

con $p \geq 1$ e $p \neq +\infty$, e

$$\ell^\infty = \{\text{successioni limitate}\} = \left\{ (x_n) \left| \sup_{n \in \mathbb{N}} |x_n| < +\infty \right. \right\}.$$

Esempio (di insieme non compatto in ℓ^1). Consideriamo la successione (e_i) definita come

$$(e_i)_n := \begin{cases} 0 & \text{se } n \neq i \\ 1 & \text{se } n = i \end{cases}$$

si osserva inoltre che le successioni così definite sono linearmente indipendenti e generano se sono infiniti.

Esempio (di insieme compatto in ℓ^1). Sia $F = \{(x_n)_n \in \ell^1 \mid |x_n| \leq 1/n^2 \quad \forall n \in \mathbb{N}\}$. Noto subito che F è limitato, infatti, presa

$$\underline{x} = (x_n) \in F, \quad \|\underline{x}\|_{\ell^1} = \sum_{n=0}^{+\infty} |x_n| \leq \sum_{n=0}^{+\infty} 1/n^2 < +\infty.$$

F è anche chiuso.

Osservazione. Data una successione $(\underline{x}^k) \subset \ell^1$, se $\underline{x}^k \xrightarrow{\ell^1} \underline{x}^\infty$, vuol dire che

$$\|\underline{x}^k - \underline{x}^\infty\|_{\ell^1} = \sum_{n=0}^{+\infty} |x_n^k - x_n^\infty| \xrightarrow{k} 0.$$

In particolare, per ogni $n \in \mathbb{N}$ fissato, $\lim_k (x_n^k - x_n^\infty) = 0$.

F è chiuso perché se $(\underline{x}^k) \subset F$ e $\underline{x}^k \xrightarrow{\ell^1} \underline{x}^\infty$, allora per ogni $n \in \mathbb{N}$ vale

$$|x_n^k| \leq 1/n^2 \quad \text{e} \quad \underbrace{\lim_{n \rightarrow +\infty} |x_n^k|}_{x_n^\infty} \leq 1/n^2.$$

Dimostriamo che è compatto per successioni. Prendiamo $(\underline{x}^k) \subset F$, ogni componente x_n è equilimitata a meno di sottosuccessioni $x_n^{x_j}$ converge a x_n^∞ . A meno di diagonalizzare, posso supporre che le successione k_j non dipenda da n . Otteniamo che $x_n^{k_j}$ sono dominate da $y = (1/n^2)$. Concludiamo usando il teorema di Lebesgue.

2.8 Complementi su approssimazioni di funzioni in L^p

Sia X misurabile in \mathbb{R}^n con $\mu = \mathcal{L}^n$ su X , in precedenza abbiamo visto che

Proposizione 3. Le funzioni in $C_C(\mathbb{R}^n)$ ristrette a X sono dense in L^p se $p < +\infty$.

[TODO: la seguente osservazione è da rilocare probabilmente]

Osservazione. Le funzioni $C_C(\mathbb{R}^n)$ sono le funzioni a supporto compatto, dove il supporto è definito come la chiusura dell'insieme dei punti in cui la funzione è non zero

$$\text{supp}(f) := \overline{\{x \mid f(x) \neq 0\}}$$

in quanto per le funzioni continue l'insieme $\{x \mid f(x) \neq 0\}$ è sempre aperto e dunque mai veramente compatto a parte quando è vuoto.

Osservazione. Si vede facilmente che $C_C(\mathbb{R}^n) \subset L^p(\mathbb{R}^n)$.

Domanda. Vale un risultato analogo per le funzioni $C_C(X)$?

Notiamo che dato $X \subset \mathbb{R}^n$ le funzioni continue su X hanno supporto compatto solo se X è aperto in quanto il supporto ha veramente distanza non nulla dal bordo e possiamo estendere la funzione a 0 fuori da X , altrimenti... [TODO: Esempio con un chiuso in cui le cose non fungono?]

[TODO: Disegnino]

Proposizione 4. Sia X aperto di \mathbb{R}^n , $\mu = \mathcal{L}^n$ allora $C_C(X)$ è denso in L^p per ogni $p < +\infty$

Dimostrazione.

- $\mathcal{S}_C := \{\text{funzioni semplici con supporto compatto in } X\}$ è denso in $L^p(X)$ per ogni $p < +\infty$.
- Dato E relativamente compatto in X esiste $f_n \in C_C(X)$ tale che $f_n \rightarrow \mathbb{1}_E$ in L^p per ogni $p < +\infty$.

La Proposizione 3 non vale per $p = +\infty$, intuitivamente in quanto data $f \in L^\infty(X)$ discontinua, se trovassimo $f_n \rightarrow f$ in $L^\infty(X)$ con f_n continue avremmo $f_n \rightarrow f$ *uniformemente* e dunque f continua.

Fatto. In generale vale che data $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ misurabile, $\|f\|_\infty \leq \sup_{x \in X} |f(x)|$ (detta anche *norma del sup*)

Esercizio. Se X è aperto in \mathbb{R}^n e $\mu = \mathcal{L}^n$ e $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ continua, allora $\|f\|_\infty = \sup_{x \in X} |f(x)|$.

Soluzione. Se per assurdo $\exists x \in X$ tale che $\|f\|_\infty < |f(x)|$ allora la continuità di f implica che esiste un intorno di x in cui $|f| > \|f\|_\infty$ ma un intorno contiene una palla aperta di misura positiva \nexists

In particolare possiamo anche estenderci a $X \subseteq \mathbb{R}^n$ tali che ogni A aperto relativamente a X abbia misura positiva.

[TODO: Disegnino di X quadrato e quadrato + una linea chiusa]

Per spiegare meglio il perché la Proposizione 3 non si estende al caso $p = +\infty$ consideriamo

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$

e vediamo che $\nexists f_n: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tale che $f_n \rightarrow f$ in L^∞ .

Se esistesse $(f_n)_n$, allora sarebbe di Cauchy rispetto alla norma $\|\cdot\|_\infty$ allora per continuità $(f_n)_n$ è di Cauchy anche rispetto alla norma del sup $\implies f_n \rightarrow \tilde{f}$ uniformemente con \tilde{f} continua, quindi $\tilde{f} = f$ quasi ovunque ma questo non è possibile per la f definita sopra.

(In particolare dato $E = \{x \mid f(x) = \tilde{f}(x)\}$, prendiamo $x_n, y_n \in E$ tali che $x_n \uparrow 0$ e $y_n \downarrow 0$ ma i limiti di f sono 0 e 1 \nmid)

Teorema. (di Lusin) Dato $X \subset \mathbb{R}^d, \mu = \mathcal{L}^d$ e data $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ o \mathbb{R}^m misurabile e $\varepsilon > 0$, esiste E aperto in X con $|E| \leq \varepsilon$ tale che f è continua su $X \setminus E$ (la restrizione di f a $X \setminus E$ è continua)

Osservazione. In generale f può essere non continua in tutti i punti di X , infatti E può essere denso e $X \setminus E$ avere parte interna vuota.

Lemma. (di estensione di Tietze) Dato X spazio metrico e $C \subset X$ chiuso, $f: C \rightarrow \mathbb{R}$ continua allora f si estende a una funzione continua su X .

Usando questo lemma possiamo rinunciare il teorema precedente come segue

Teorema. (di Lusin') Data $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ misurabile e $\varepsilon > 0$, $\exists E$ aperto con $|E| \leq \varepsilon$ e $g: X \rightarrow \mathbb{R}$ continua tale che $f = g$ su $X \setminus E$, inoltre se $f \in L^p(X)$ e $p < +\infty$ si può anche chiedere che $\|f - g\|_p \leq \varepsilon$.

Dimostrazione. Basta trovare E misurabile (per ottenere E aperto si usa la regolarità della misura)

- *Caso 1:* $f \in L^1(X)$ e $|X| < +\infty$

Abbiamo che $f \in L^1 \implies \exists f_n$ continue tali che $f_n \rightarrow f$ in $L^1 \implies f_n \rightarrow f$ in misura e per Severini-Egorov esiste E tale che $|E| \leq \varepsilon$ e $f_n \rightarrow f$ uniformemente su $X \setminus E \implies f$ è continua su $X \setminus E$.

- *Caso 2:* f qualunque misurabile e $|X| < +\infty$

Lemma. Dati X, \mathcal{A}, μ con $\mu(X) < +\infty$ e data $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ misurabile e $\varepsilon > 0$ esiste F misurabile con $\mu(F) \leq \varepsilon$ tale che f è limitata su $X \setminus F$.

Dimostrazione. $\forall m > 0$ sia $F_m := \{x \mid |f(x)| > m\}$ allora $F_m \downarrow \emptyset \implies \mu(F_m) \downarrow 0$ e quindi esiste m tale che $\mu(F_m) \leq \varepsilon$.

Quindi data f qualunque misurabile e $|X| < +\infty$ esiste F misurabile tale che $|F| \leq \varepsilon/2$ e con f limitata su $X \setminus F \implies f \in L^\infty(X \setminus F) \subset L^1(X \setminus F)$, dunque per il *Caso 1* esiste E misurabile tale che $|E| \leq \varepsilon/2$ e f è continua su $X \setminus (E \cup F)$ e $\mu(E \cup F) \leq \varepsilon$

- *Caso 3:* f qualunque misurabile

Per ogni n poniamo $X_n := X \cap B(0, n)$ per il *Caso 2* esistono E_n misurabili con $|E_n| \leq \varepsilon/2^n$ tali che f è continua su $X_n \setminus E_n$, infine prendo $E := \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$ con $\mu(E) \leq \varepsilon \implies f$ è continua su $X_n \setminus E$ per ogni $n \implies f$ è continua su $X \setminus E$.

□

Capitolo 3

Spazi di Hilbert

Capitolo 4

Serie di Fourier

Capitolo 5

Applicazioni della serie di Fourier

Capitolo 6

Trasformata di Fourier

Capitolo 7

Funzioni armoniche

Capitolo 8

Integrazione di superfici

8.1 Indice Analitico

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipisicing elit, sed do eiusmod tempor incididunt ut labore et dolore magna aliqua. Ut enim ad minim veniam, quis nostrud exercitation ullamco laboris nisi ut aliquip ex ea commodo consequat. Duis aute irure dolor in reprehenderit in voluptate velit esse cillum dolore eu fugiat nulla pariatur. Excepteur sint occaecat cupidatat non proident, sunt in culpa qui officia deserunt mollit anim id est laborum.

⚡	Assurdo	⚡	Assurdo
⚡	Assurdo	⚡	Assurdo
⚡	Assurdo	⚡	Assurdo
⚡	Assurdo	⚡	Assurdo