Analisi 3

Appunti di Analisi 3 del corso di Giovanni Alberti e Maria Stella Gelli

Arianna Carelli e Antonio De Lucreziis

I Semestre 2021/2021

Indice

Capitolo 1

Teoria della misura

1.1 Misure astratte

Definizione. Uno spazio misurabile è una terna $(X, \mathcal{A}, \mu)$ tale che

- X è un insieme qualunque.
- $\mathcal{A}$ è una σ-algebra di sottoinsiemi di X (chiamata σ-algebra dei misurabili) ovvero una famiglia di sottoinsiemi di X che rispetta le seguenti proprietà:
  - $\emptyset, X \in \mathcal{A}$.
  - $\mathcal{A}$ è chiusa per complementare, unione e intersezione numerabile.
- μ è una misura su X, ossia una funzione $\mu\colon \mathcal{A} \to [0, +\infty]$ σ-addittiva, cioè tale che data una famiglia numerabile $\{E_k\} \subset \mathcal{A}$ disgiunta e posto $E := \bigcup E_n$, allora
$$\mu(E) = \sum_n \mu(E_n).$$

Notazione. Data una successione crescente di insiemi $E_1 \subset E_2 \subset \cdots E_n \subset \cdots$ con $\bigcup E_n = E$, scriviamo $E_n \uparrow E$.

Proprietà.

- $\mu(\emptyset) = 0$
- *Monotonia*: Dati $E, E' \in \mathcal{A}$ e $E \subset E'$, allora $\mu(E) \leq \mu(E')$.
- Data $E_n \uparrow E$, vale $\mu(E) = \lim\limits_{n\to\infty} \mu(E_n) = \sup\limits_n \mu(E_n)$.
- Se $E_n \downarrow E$ e $\mu(E_{\bar{n}}) < +\infty$ per qualche $\bar{n}$, allora $\mu(E) = \lim\limits_{n\to\infty} \mu(E_n) = \inf\limits_n \mu(E_n)$.
- *Subadditività*: Se $E \subset \bigcup E_n$, allora $\mu(E) \leq \sum\limits_n \mu(E_n)$.

Osservazione. Dato $X' \in \mathcal{A}$ si possono restringere $\mathcal{A}$ e μ a X' nel modo ovvio.

Definizioni.

- μ si dice **completa** se $F \subset E, E \in \mathcal{A}$ e $\mu(E) = 0$, allora $F \in \mathcal{A}$ (e di conseguenza $\mu(F) = 0$).

- μ si dice **finita** se $\mu(X) < +\infty$.
- μ si dice **σ-finita** se esiste una successione $\{E_n\}$ con $E_n \subset E_{n+1}$ tale che $\bigcup E_n = X$ con $\mu(E_n) < +\infty$ per ogni n.

Notazione. Sia $P(X)$ un predicato che dipende da $x \in X$ allora si dice che $P(X)$ **vale μ-quasi ogni** $x \in X$ se l'insieme $\{x \mid P(x) \text{ è falso}\}$ è (contenuto in) un insieme di misura μ nulla.

D'ora in poi consideriamo solo misure complete.

1.2 Esempi di misure

- **Misura che conta i punti.**
$$X \text{ insieme} \qquad \mathcal{A} \coloneqq \mathcal{P}(X) \qquad \mu(E) \coloneqq \#E \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$$
- **Delta di Dirac in x_0.**
$$X \text{ insieme, } x_0 \in X \text{ fissato} \qquad \mathcal{A} \coloneqq \mathcal{P}(X) \qquad \mu(E) \coloneqq \delta_{x_0}(E) = \mathbb{1}_E(x_0)$$
- **Misura di Lebesgue.**
$$X = \mathbb{R}^n \qquad \mathcal{M}^n \ \sigma\text{-algebra dei misurabili secondo Lebesgue} \qquad \mathscr{L}^n \text{ misura di Lebesgue}$$
Dato R parallelepipedo in $\mathbb{R}^n$, cioè $R = \prod_{k=1}^n I_k$ con I_k intervalli in $\mathbb{R}$. Si pone
$$\mathrm{vol}_n(R) \coloneqq \prod_{k=1}^n \mathrm{lungh}(I_k)$$
per ogni $E \subset \mathbb{R}^n$ (assumendo $\mathrm{lungh}([a,b]) = b - a$). Infine poniamo
$$\mathscr{L}^n(E) \coloneqq \inf\left\{\sum_i \mathrm{vol}_n(R_i) \;\middle|\; \{R_i\} \text{ tale che } E \subset \bigcup_i R_i\right\}.$$

Osservazioni.

- $\mathscr{L}^n(R) = \mathrm{vol}_n(R)$.
- $\mathscr{L}^n$ non è σ-addittiva su $\mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$.

Il secondo punto giustifica l'introduzione della σ-algebra dei **misurabili secondo Lebesgue** che denotiamo con $\mathcal{M}^n$.

Dato $E \subset \mathbb{R}^n$ si dice che E è misurabile (secondo Lebesgue) se
$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists A \text{ aperto e } C \text{ chiuso, tali che } C \subset E \subset A \text{ e } \mathscr{L}^n(A \setminus C) \leq \varepsilon.$$

Osservazioni.

- Per ogni E misurabile vale
$$\mathscr{L}^n(E) = \inf\{\mathscr{L}^n \colon A \text{ aperto}, A \supset E\} = \sup\{\mathscr{L}^n \colon K \text{ compatto}, K \subset E\}.$$
- Notiamo che se $F \subset E$ con $E \subset \mathcal{M}^n$ e $\mathscr{L}^n(E) = 0$, allora $F \in \mathcal{M}^n$. Ovvero la misura di Lebesgue è completa!

Notazione. $|E| \coloneqq \mathscr{L}^n(E)$

1.3 Funzioni misurabili

Definizione. Dato $(X, \mathcal{A}, \mu)$ e $f\colon X \to \mathbb{R}$ (o al posto di $\mathbb{R}$ in Y spazio topologico), diciamo che f è **misurabile** (più precisamente $\mathcal{A}$-misurabile), se

$$\forall A \text{ aperto } f^{-1}(A) \in \mathcal{A}$$

Osservazioni.

- Dato $E \subset X$, vale $E \in \mathcal{A}$ se solo se $\mathbb{1}_E$ è misurabile.
- La classe delle funzioni misurabili è chiusa rispetto a molte operazioni
    - *Somma*, *prodotto* (se hanno senso nello spazio immagine della funzione).
    - *Composizione con funzione continua*: Se $f\colon X \to Y$ continua e $g\colon Y \to Y'$ continua, allora $g \circ f$ è misurabile.
    - *Convergenza puntuale*: data una successione di f_n misurabili e $f_n \to f$ puntualmente, allora f è misurabile.
    - $\liminf$ e $\limsup$ (almeno nel caso $Y = \mathbb{R}$).

1.3.1 Funzioni semplici

Definizione. Definiamo la classe delle **funzione semplici** come

$$\mathcal{S} := \left\{ f\colon X \to \mathbb{R} \;\middle|\; f = \sum_i \alpha_i \mathbb{1}_{E_i} \text{ con } E_i \text{ misurabili e } \{\alpha_i\} \text{ finito} \right\}$$

Osservazione. La rappresentazione di una funzione semplice come combinazione lineare di indicatrici di insiemi *non è unica*, però se necessario possiamo prendere gli E_i disgiunti.

1.4 Integrale

Definizione. Diamo la definizione di $\displaystyle\int_X f \,\mathrm{d}\mu$ per passi

i) Se $f \in \mathcal{S}$ e $f \geq 0$ cioè $f = \sum_i \alpha_i \mathbb{1}_{E_i}$ con $\alpha_i \geq 0$ allora poniamo

$$\int_X f \,\mathrm{d}\mu := \sum_i \alpha_i \mu(E_i),$$

convenendo che $0 \cdot +\infty = 0$ in quanto la misura di un insieme non è necessariamente finita.

ii) Se $f\colon X \to [0, +\infty]$ misurabile si pone

$$\int_X f \,\mathrm{d}\mu := \sup_{\substack{g \in \mathcal{S} \\ 0 \leq g \leq f}} \int_X g \,\mathrm{d}\mu.$$

iii) $f\colon X \to \overline{\mathbb{R}}$ misurabile si dice **integrabile** se

$$\int_X f^+ \,\mathrm{d}\mu < +\infty \quad \text{oppure} \quad \int_X f^- \,\mathrm{d}\mu < +\infty.$$

e per tali f si pone

$$\int_X f \,\mathrm{d}\mu \coloneqq \int_X f^+ \,\mathrm{d}\mu - \int_X f^- \,\mathrm{d}\mu.$$

iv) $f\colon X \to \mathbb{R}^n$ si dice **sommabile** (o di **classe** $\mathscr{L}^1$) se $\int_X |f| \,\mathrm{d}\mu < +\infty$. In tal caso, se $\int_X f_i^\pm \,\mathrm{d}\mu < +\infty$ per ogni f_i componente di f, allora $\int_X f \,\mathrm{d}\mu$ esiste ed è finito.

Per tali f si pone

$$\int_X f \,\mathrm{d}\mu \coloneqq \left(\int_X f_1 \,\mathrm{d}\mu, \dots, \int_X f_n \,\mathrm{d}\mu\right).$$

Notazione. Scriveremo spesso $\displaystyle\int_E f(x) \,\mathrm{d}x$ invece di $\displaystyle\int_E f \,\mathrm{d}\mathscr{L}^n$.

Osservazioni.

- L'integrale è lineare (sulle funzioni sommabili).
- I passaggi i) e ii) danno lo stesso risultato per f semplice ≥ 0.
- La definizione in ii) ha senso per ogni $f\colon X \to [0, +\infty]$ anche non misurabile. Ma in generale vale solo che
$$\int_X f_1 + f_2 \,\mathrm{d}\mu \geq \int_X f_1 \,\mathrm{d}\mu + \int_X f_2 \,\mathrm{d}\mu.$$
- Dato $E \in \mathcal{A}$, f misurabile su E, notiamo che vale l'uguaglianza
$$\int_E f \,\mathrm{d}\mu \coloneqq \int_X f \cdot \mathbb{1}_E \,\mathrm{d}\mu.$$
- Si può definire l'integrale anche per $f\colon X \to Y$ con Y *spazio vettoriale normato finito dimensionale*[1] ed f sommabile.
- Se $f_1 = f_2$ μ-q.o. allora $\displaystyle\int_X f_1 \,\mathrm{d}\mu = \int_X f_2 \,\mathrm{d}\mu$.
- Si definisce $\displaystyle\int_X f \,\mathrm{d}\mu$ anche se f è misurabile e definita su $X \setminus N$ con $\mu(N) = 0$.
- Se $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ è integrabile secondo Riemann allora è misurabile secondo Lebesgue e le due nozioni di integrale coincidono.

  Nota. Lo stesso vale per integrali impropri di funzioni positive. Ma nel caso più generale non vale: se consideriamo la funzione
$$f\colon (0, +\infty) \to \mathbb{R} \qquad f(x) \coloneqq \frac{\sin x}{x}$$
  allora l'integrale di f definito su $(0, +\infty)$ esiste come integrale improprio ma non secondo Lebesgue, infatti
$$\int_0^{+\infty} f^+ \,\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} f^- \,\mathrm{d}x = +\infty$$

[1] È necessario avere uno spazio vettoriale, perché serve la linearità e la moltiplicazione per scalare

- $\displaystyle\int_X f \,\mathrm{d}\delta_{x_0} = f(x_0)$
- Se $X = \mathbb{N}$ e μ è la misura che conta i punti l'integrale è

  $$\int_X f \,\mathrm{d}\mu = \sum_{n=0}^{\infty} f(n)$$

  per le f positive o tali che $\sum f^+(n) < +\infty$ oppure $\sum f^-(n) < +\infty$.

  Nota. Come prima nel caso di funzioni non sempre positive ci sono casi in cui la serie solita non è definita come integrale di una misura, ad esempio

  $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$$

  esiste come serie ma non come integrale.
- Dato X qualunque, μ misura che conta i punti e $f\colon X \to [0, +\infty]$ possiamo definire la somma di tutti i valori di f

  $$\sum_{x \in X} f(x) \coloneqq \int_X f \,\mathrm{d}\mu.$$

1.5 Teoremi di convergenza

Sia $(X, \mathcal{A}, \mu)$ come in precedenza.

Teorema (di convergenza monotona o Beppo-Levi). Date $f_n\colon X \to [0, +\infty]$ misurabili, tali che $f_n \uparrow f$ ovunque in X, allora[1]

$$\lim_{n \to +\infty} \int_X f_n \,\mathrm{d}\mu = \int_X f \,\mathrm{d}\mu$$

ed in particolare il termine a sinistra è crescente quindi è proprio un sup ovvero $\lim_{n \to +\infty} \int_X f_n \,\mathrm{d}\mu = \sup_n \int_X f_n \,\mathrm{d}\mu$.

Teorema (lemma di Fatou). Date $f_n\colon X \to [0, +\infty]$ misurabili, allora

$$\liminf_{n \to +\infty} \int_X f \,\mathrm{d}\mu \geq \int_X \left(\liminf_{n \to +\infty} f_n \right) \mathrm{d}\mu.$$

Teorema (di convergenza dominata o di Lebesgue). Date $f_n\colon X \to \mathbb{R}$ (o anche $\mathbb{R}^n$) con le seguenti proprietà

- *Convergenza puntuale:* $f_n(x) \to f(x)$ per ogni $x \in X$.
- *Dominazione:* Esiste $g\colon X \to [0, +\infty]$ sommabile tale che $|f_n(x)| \leq g(x)$ per ogni $x \in X$ e per ogni $n \in \mathbb{N}$.

allora

$$\lim_{n \to \infty} \int_X f_n \,\mathrm{d}\mu = \int_X f \,\mathrm{d}\mu.$$

[1] *Mnemonica:* $\displaystyle\sup_n \int_X f_n \,\mathrm{d}\mu = \int_X \sup_n f_n \,\mathrm{d}\mu$

Nota. La seconda proprietà è essenziale; sostituirla con $\displaystyle\int_X |f_n| \,\mathrm{d}\mu \leq C < +\infty$ non basta!

Definizione. Data una *densità* $\rho\colon \mathbb{R}^n \to [0, +\infty]$ misurabile, la **misura μ con densità ρ** è data da

$$\forall E \in \mathcal{A} \quad \mu(E) \coloneqq \int_E \rho \,\mathrm{d}x$$

Osservazioni.

- $\mathbb{R}^n$ e $\mathscr{L}^n$ possono essere sostituiti da X e $\widetilde{\mu}$.
- il fatto che μ è una misura segue da Beppo Levi, in particolare serve per mostrare la subadditività.

Teorema (di cambio di variabile). Siano Ω e Ω' aperti di $\mathbb{R}^n$, $\Phi\colon \Omega \to \Omega'$ un diffeomorfismo[1] di classe C^1 e $f\colon \Omega' \to [0, +\infty]$ misurabile. Allora

$$\int_{\Omega'} f(x') \,\mathrm{d}x' = \int_\Omega f(\Phi(x)) \left|\det(\nabla\Phi(x))\right| \,\mathrm{d}x.$$

La stessa formula vale per f a valori in $\overline{\mathbb{R}}$ integrabile e per f a valori in $\mathbb{R}^n$ sommabile.

Osservazioni.

- Se $n = 1$, $|\det(\Lambda\Phi(x))| = |\Phi'(x)|$ e non $\Phi'(x)$ come nella formula vista ad Analisi 1 (l'informazione del segno viene data dall'inversione degli estremi).
- Indebolire le ipotesi su Φ è delicato. Basta Φ di classe C^1 e $\widetilde{\forall} x' \in \Omega'$ $\#\Phi^{-1}(x') = 1$ (supponendo Φ iniettiva la proprietà precedente segue immediatamente). Se Φ non è "quasi" iniettiva bisogna correggere la formula per tenere conto della molteplicità.
- Quest'ultima osservazione serve giusto per far funzionare il cambio in coordinate polari che non è iniettivo solo nell'origine.

1.5.1 Fubini-Tonelli

Di seguito riportiamo il teorema di Fubini-Tonelli per la misura di Lebesgue.

Teorema (di Fubini-Tonelli). Sia $\mathbb{R}^{n_1} \times \mathbb{R}^{n_2} \simeq \mathbb{R}^n$ con $n = n_1 + n_2$, $E \coloneqq E_1 \times E_2$ dove E_1, E_2 sono misurabili e f è una funzione misurabile definita su E. Se f ha valori in $[0, +\infty]$ allora

$$\int_X f \,\mathrm{d}\mu = \int_{E_2} \int_{E_1} f(x_1, x_2) \,\mathrm{d}x_1 \,\mathrm{d}x_2 = \int_{E_1} \int_{E_2} f(x_1, x_2) \,\mathrm{d}x_2 \,\mathrm{d}x_1$$

Vale lo stesso per f a valori in $\mathbb{R}$ o in $\mathbb{R}^n$ sommabile.

Osservazioni. Possiamo generalizzare il teorema di Fubini-Tonelli a misure generiche ed ottenere alcuni risultati utili che useremo ogni tanto.

- Se X_1, X_2 sono spazi con misure μ_1, μ_2 (con opportune ipotesi) vale:

$$\int_{E_2} \int_{E_1} f(x_1, x_2) \,\mathrm{d}\mu_1(x_1) \,\mathrm{d}\mu_2(x_2) = \int_{E_1} \int_{E_2} f(x_1, x_2) \,\mathrm{d}\mu_2(x_2) \,\mathrm{d}\mu_1(x_1).$$

[1]funzione differenziabile con inversa differenziabile.

se $f \geq 0$ oppure $\displaystyle\int_{X_1}\int_{X_2} |f| \, \mathrm{d}\mu_2(x_2) \, \mathrm{d}\mu_1(x_1) < +\infty$.

- **Teorema** (di scambio serie-integrale). Se $X_1 \subset \mathbb{R}$ (oppure $X_1 \subset \mathbb{R}^n$), $\mu_1 = \mathscr{L}^n$ e $X_2 = \mathbb{N}$, μ_2 è la misura che conta i punti, allora la formula sopra diventa

$$\sum_{n=0}^{\infty} \int_{X_1} f_n(x) \, \mathrm{d}x = \int_{X_1} \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x) \, \mathrm{d}x.$$

se $f_i \geq 0$ oppure $\displaystyle\sum_i \int_{X_1} |f_i(x)| \, \mathrm{d}x < +\infty$.

- **Teorema** (di scambio di serie). Se $X_1 = X_2 = \mathbb{N}$ e $\mu_1 = \mu_2$ è la misura che conta i punti la formula sopra diventa

$$\sum_{j=0}^{\infty}\sum_{i=0}^{\infty} a_{i,j} = \sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty} a_{i,j}$$

se $a_{i,j} \geq 0$ oppure $\displaystyle\sum_i \sum_j |a_{i,j}| < +\infty$.

Capitolo 2

Spazi L^p e convoluzione

2.1 Disuguaglianze

2.1.1 Disuguaglianza di Jensen

Ricordiamo che una funzione $f\colon \mathbb{R}^d \to [-\infty, +\infty]$ è **convessa** se e solo se dati $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}^d$ e $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in [0,1]$ con $\sum_i \lambda_i = 1$ abbiamo che

$$f\left(\sum_i \lambda_i x_i\right) \le \sum_i \lambda_i f(x_i)$$

Teorema (Jensen). Dato $(X, \mathcal{A}, \mu)$ con $\mu(X) = 1$ e $f\colon \mathbb{R}^d \to [-\infty, +\infty]$ convessa e semicontinua inferiormente (S.C.I.) e $u\colon X \to \mathbb{R}^d$ sommabile allora vale

$$f\left(\int_X u \,\mathrm{d}\mu\right) \le \int_X f \circ u \,\mathrm{d}\mu$$

e $f \circ u$ è integrabile.

Osservazioni.

- $(f \circ u)^-$ ha integrale finito.
- Interpretando μ come probabilità si riscrive come $\mathbb{E}[f \circ \mu] \ge f(\mathbb{E}[u])$.
- Se u è una funzione semplice, cioè $u = \sum_i y_i \cdot \mathbb{1}_{E_i}$ con E_i disgiunti e $\bigcup E_i = X$ allora posti $\lambda_i = \mu(E_i)$ abbiamo

$$\int_X f \circ u \,\mathrm{d}\mu = \int_X \sum_i f(y_i) \cdot \mathbb{1}_{E_i} \,\mathrm{d}\mu = \sum_i \lambda_i f(y_i) \ge f\left(\sum_i \lambda_i y_i\right) = f\left(\int_X u \,\mathrm{d}\mu\right)$$

  Questo ci darebbe una strada per dimostrare in generale per passi il teorema di Jensen ma in realtà si presentano vari problemi tecnici.

- Ogni funzione convessa e S.C.I su Ω convesso in $\mathbb{R}^d$ si estende a $\widetilde{f}\colon \mathbb{R} \to (-\infty, +\infty]$ convessa e S.C.I., ad esempio se $\Omega = (0, +\infty)$

$$f(y) = \frac{1}{y} \quad \rightsquigarrow \quad \widetilde{f}(y) = \begin{cases} +\infty & y \le 0 \\ \dfrac{1}{y} & y > 0 \end{cases}$$

- La semi-continuità inferiore serve perché le funzioni convesse sono continue solo se a valori in $\mathbb{R}$, ad esempio per k costante la funzione

$$f(y) := \begin{cases} k & y < 0 \\ +\infty & y \geq 0 \end{cases}$$

è convessa ma non semi-continua inferiormente (e neanche continua).

Dimostrazione. Poniamo $y_0 \coloneqq \displaystyle\int_X u \, \mathrm{d}\mu$, allora la tesi diventa

$$f\left(\int_X u \, \mathrm{d}\mu \right) \leq \int_X f \circ u \, \mathrm{d}\mu \quad \rightsquigarrow \quad \int_X f \circ u \, \mathrm{d}\mu \geq f(y_0)$$

Prendiamo $\phi \colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ affine (ovvero $\phi(y) = a \cdot y + b$ con $a \in \mathbb{R}^d$ e $b \in \mathbb{R}$) tale che $\phi \leq f$, allora

$$\int_X f \circ u \, \mathrm{d}\mu \geq \int_X \phi \circ u \, \mathrm{d}\mu = \int_X a \cdot u + b \, \mathrm{d}\mu = a y_0 + b = \phi(y_0)$$

Infine concludiamo usando il seguente lemma di caratterizzazione delle funzioni convesse ed S.C.I.

Lemma. Ogni $f \colon \mathbb{R}^d \to (-\infty, +\infty]$ convessa e S.C.I è tale che

$$\forall y_0 \in \mathbb{R}^d \qquad \sup_{\substack{\phi \text{ affine} \\ \phi \leq f}} \phi(y_0) = f(y_0)$$

Nel caso $d = 1$ e $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ possiamo appoggiarci al fatto che le funzioni convesse ammettono sempre derivata destra o sinistra, il sup diventa un massimo e ci basta prendere come ϕ la retta tangente in $(y_0, f(y_0))$ o una con pendenza compresa tra $f'(y_0^-)$ e $f'(y_0^+)$.

Rileggendo meglio la dimostrazione segue che $(f \circ u)^- < (\phi \circ u)^- \implies (f \circ u)^-$.

$\square$

Definizione. Dati $p_1, p_2 \in [1, +\infty]$ diciamo che sono **coniugati** se

$$\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} = 1$$

convenendo che $1/\infty = 0$.

Fissiamo $p \in [1, +\infty]$ detto *esponente di sommabilità* e sia $(X, \mathcal{A}, \mu)$ come sempre.

Definizione. Data $f \colon X \to \overline{\mathbb{R}}$ o $\mathbb{R}^d$ misurabile, la **norma** p di f è

$$\|f\|_p \coloneqq \left(\int_X |f|^p \, \mathrm{d}\mu \right)^{1/p} \qquad p \in [1, +\infty)$$

mentre per $p = +\infty$ poniamo

$$\|f\|_\infty = \operatorname{supess} f(x) \coloneqq \inf\{ m \in [0, +\infty] \mid |f(x)| \leq m \text{ per } \mu\text{-q.o. } x \}.$$

Nota. In realtà queste sono solo delle semi-norme[1].

[1] Vedremo meglio più avanti questo dettaglio

- $\|f\|_\infty \leq \sup\limits_{x \in X} |f(x)|$
- $\|f\|_p = 0 \iff f = 0$ quasi ovunque

  Dimostrazione.

  $\boxed{\Rightarrow}$ [TODO: Facile ma non ovvia]

  $\boxed{\Leftarrow}$ Ovvio.

  $\square$

- Se $f_1 = f_2$ quasi ovunque $\implies \|f_1\|_p = \|f_2\|_p$.

  Dimostrazione. $f_1 = f_2$ quasi ovunque $\implies \exists D \subset X$ con $\mu(D) = 0$ tale che $f_1(x) = f_2(x)$ su $X \setminus D$, usiamo il fatto che l'integrale non cambia se modifichiamo la funzione su un insieme di misura nulla

$$\|f_1\|_p^p = \int_X |f_1|^p \, \mathrm{d}\mu = \int_{X \setminus D} |f_1|^p \, \mathrm{d}\mu = \int_{X \setminus D} |f_2|^p \, \mathrm{d}\mu = \int_X |f_2|^p \, \mathrm{d}\mu = \|f_2\|_p^p$$

$\square$

2.1.2 Disuguaglianza di Young

Proposizione. Per ogni $a_1, a_2 \geq 0$ e $\lambda_1, \lambda_2 > 0$ con $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$ abbiamo che

$$a_1^{\lambda_1} a_2^{\lambda_2} \leq \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2$$

inoltre vale l'uguale se e solo se $a_1 = a_2$.

Dimostrazione. Se $a_1 = a_2 = 0$ allora è ovvia. Supponiamo dunque $a_1, a_2 > 0$. Per la concavità del logaritmo abbiamo

$$\lambda_1 \log a_1 + \lambda_2 \log a_2 \leq \log(\lambda_1 a_2 + \lambda_2 a_2),$$

da cui segue la tesi.

Il se e solo se per l'uguale segue dal fatto che il logaritmo è *strettamente concavo.* $\square$

2.1.3 Disuguaglianza di Hölder

Proposizione. Date $f_1, f_2 \colon X \to \overline{\mathbb{R}}$ o $\mathbb{R}^d$ e p_1, p_2 esponenti coniugati allora

$$\int_X |f_1| \cdot |f_2| \, \mathrm{d}\mu \leq \|f_1\|_{p_1} \cdot \|f_2\|_{p_2}$$

vale anche per $p = +\infty$ convenendo che $+\infty \cdot 0 = 0$ nel membro di destra.

Dimostrazione. Se $\|f_1\|_{p_1} = 0$ o $+\infty$ e anche $\|f_2\|_{p_2} = 0$ o $+\infty$ la dimostrazione è immediata, supponiamo dunque $\|f_1\|_{p_1}, \|f_2\|_{p_2} > 0$ e finiti.

- *Caso 1:* se $p_1 = 1, p_2 = +\infty$ allora

$$\int_X |f_1| \cdot |f_2| \, \mathrm{d}\mu \leq \int_X |f_1| \cdot \|f_2\|_\infty \, \mathrm{d}\mu = \|f_2\|_\infty \cdot \int_X |f_1| \, \mathrm{d}\mu = \|f_2\|_\infty \cdot \|f_1\|_1$$

- *Caso 2:* se $1 < p_1, p_2 < +\infty$, introduciamo un parametro $\gamma > 0$ allora

$$\int_X |f_1| \cdot |f_2| \, \mathrm{d}\mu = \int_X (\gamma^{p_1} \cdot |f_1|^{p_1})^{1/p_1} \cdot \left(\gamma^{-p_2} \cdot |f_1|^{p_2}\right)^{1/p_2} \, \mathrm{d}\mu$$

a questo punto chiamiamo per comodità $g_1 := \gamma^{p_1} \cdot |f_1|^{p_1}$, $\lambda_1 := 1/p_1$ e $g_2 := \gamma^{-p_2} \cdot |f_1|^{p_2}$, $\lambda_2 := 1/p_2$ da cui

$$= \int_X g_1^{\lambda_1} \cdot g_2^{\lambda_2} \overset{\text{Young}}{\leq} \int_X \lambda_1 g_1 + \lambda_2 g_2 \, \mathrm{d}\mu = \lambda_1 \gamma^{p_1} \int_X |f_1|^{p_1} + \lambda_2 \gamma^{-p_2} \int_X |f_1|^{p_2} \, \mathrm{d}\mu$$

$$= \lambda_1 \gamma^{p_1} \cdot \|f_1\|_{p_1}^{p_1} + \lambda_2 \gamma^{-p_2} \cdot \|f_1\|_{p_2}^{p_2}$$

posti ora $a_1 := \gamma^{p_1} \|f_1\|_{p_1}^{p_1}$ e $a_2 := \gamma^{-p_2} \|f_1\|_{p_2}^{p_2}$, per $\gamma \to 0$ abbiamo che $a_1 \to 0, a_2 \to +\infty$ mentre per $\gamma \to +\infty$ abbiamo che $a_1 \to +\infty, a_2 \to 0$ dunque per il teorema del valor medio esisterà γ tale che $a_1 = a_2$, ma allora siamo nel caso dell'uguaglianza per la disuguaglianza di Young dunque

$$\lambda_1 \gamma^{p_1} \|f_1\|_{p_1}^{p_1} + \lambda_2 \gamma^{-p_2} \|f_1\|_{p_2}^{p_2} = \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 = a_1^{\lambda_1} \cdot a_2^{\lambda_2} = \|f_1\|_{p_1} \cdot \|f_2\|_{p_2}$$

In particolare, vale l'uguaglianza se prendiamo un valore di γ tale che $a_1 = a_2$. Resta da verificare che tale valore di γ esista [TODO]. $\square$

Osservazione. La disuguaglianza di Hölder può essere generalizzata a n funzioni, date $f_1, \dots, f_n$ e $p_1, \dots, p_n$ con $\frac{1}{p_1} + \dots + \frac{1}{p_2} = 1$ allora

$$\int_X \prod_i^n |f_i| \, \mathrm{d}\mu \leq \prod_i^n \|f_i\|_{p_i}$$

2.1.4 Disuguaglianza di Minkowski

Proposizione. Consideriamo sempre $(X, \mathcal{A}, \mu)$ e sia $p \in [1, +\infty]$ un esponente di sommabilità ed $f_1, f_2 \colon X \to \mathbb{R}$ oppure $\mathbb{R}^d$ allora vale la disuguaglianza triangolare

$$\|f_1 + f_2\|_p \leq \|f_1\|_p + \|f_2\|_p$$

Dimostrazione.

- *Caso 1:* se $p = 1$ o $p = +\infty$, allora svolgiamo il calcolo diretto
  - Se $p = 1$

$$\|f_1 + f_2\|_1 = \int_X |f_1 + f_2| \, \mathrm{d}\mu \leq \int_X |f_1| + |f_2| \, \mathrm{d}\mu = \int_X |f_1| \, \mathrm{d}\mu + \int_X |f_2| \, \mathrm{d}\mu = \|f_1\|_1 + \|f_2\|_1$$

  - Se $p = +\infty$ allora poniamo D l'insieme di *misura nulla* che realizza su $X \setminus D$ il supess ovvero $\operatorname{supess}_X |f_1 + f_2| = \sup_{X \setminus D} |f_1 + f_2|$

$$\|f_1 + f_2\|_\infty = \operatorname{supess}_X |f_1 + f_2| = \operatorname{supess}_{X \setminus D} |f_1 + f_2| \leq \operatorname{supess}_{X \setminus D} (|f_1| + |f_2|)$$

$$= \operatorname{supess}_{X \setminus D} |f_1| + \operatorname{supess}_{X \setminus D} |f_2| = \operatorname{supess}_X |f_1| + \operatorname{supess}_X |f_2| = \|f_1\|_\infty + \|f_2\|_\infty$$

- *Caso 2:* se $1 < p < +\infty$ e $0 < \|f_1 + f_2\|_p < +\infty$

$$\|f_1 + f_2\|_p^p = \int_X |f_1 + f_2|^p \le \int_X (|f_1| + |f_2|) \cdot |f_1 + f_2|^{p-1} \,\mathrm{d}\mu =$$
$$= \int_X |f_1| \cdot |f_1 + f_2|^{p-1} \,\mathrm{d}\mu + \int_X |f_2| \cdot |f_1 + f_2|^{p-1} \,\mathrm{d}\mu =$$

ora introduciamo q esponente coniugato di p e notiamo

$$q = \frac{p-1}{p} \quad \text{e} \quad \left\| |f|^{p-1} \right\|_q = \|f\|_p^{p-1}$$

ora continuiamo a svolgere il conto di prima usando Hölder con esponenti p e q

$$\overset{\text{Hölder}}{\le} \|f_1\|_p \cdot \left\| |f_1 + f_2|^{p-1} \right\|_q + \|f_2\|_p \cdot \left\| |f_1 + f_2|^{p-1} \right\|_q =$$
$$= (\|f_1\|_p + \|f_2\|_p) \cdot \left\| |f_1 + f_2|^{p-1} \right\|_q = (\|f_1\|_p + \|f_2\|_p) \cdot \|f_1 + f_2\|_p^{p-1}$$

infine per l'ipotesi $\|f_1 + f_2\|_p > 0$ possiamo portare l'ultimo fattore dall'altra parte ed ottenere la tesi

$$\implies \frac{\|f_1 + f_2\|_p^p}{\|f_1 + f_2\|_p^{p-1}} \le \|f_1\|_p + \|f_2\|_p \implies \|f_1 + f_2\|_p \le \|f_1\|_p + \|f_2\|_p$$

- *Caso 3:* se $1 < p < +\infty$ ma $\|f_1 + f_2\| = 0$ o $+\infty$ allora se $\|f_1 + f_2\| = 0$ la disuguaglianza è banale mentre se $\|f_1 + f_2\| = +\infty$ si usa la seguente disuguaglianza

$$\|f_1 + f_2\|_p^p \le 2^{p-1}(\|f_1\|_p^p + \|f_2\|_p^p)$$

che si ottiene usando la convessità della funzione $x \mapsto x^p$ e la combinazione affine $\frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_2$ infatti

$$\left(\frac{x}{2} + \frac{y}{2}\right)^p \le \frac{1}{2}x^p + \frac{1}{2}y^p \implies \frac{1}{2^{p-1}}(x+y)^p \le x^p + y^p \implies (x+y)^p \le 2^{p-1}(x^p + y^p)$$

ma sostituendo con f_1 e f_2, integrando e poi sostituendo le norme otteniamo

$$\|f_1 + f_2\|_p^p \le 2^{p-1}(\|f_1\|_p^p + \|f_2\|_p^p)$$

da cui possiamo ricavare subito che almeno uno dei due termini deve essere $+\infty$.

2.2 Esercitazione del 4 ottobre

2.2.1 Esercizi di teoria della misura

Di seguito riportiamo alcune proprietà di base di teoria della misura.

Proprietà.

i) Se $A \subset B$, allora $\mu(A) \le \mu(B)$.

Dimostrazione. Scomponiamo $B = (B \setminus A) \cup (A \cap B)$. Per ipotesi $A \cap B = A$ ed essendo la misura positiva segue che

$$\mu(B) = \underbrace{\mu(B \setminus A)}_{\ge 0} + \mu(A) \ge \mu(A).$$

ii) Dati due insiemi A, B misurabili, vale
$$\mu(A \cup B) \leq \mu(A) + \mu(B).$$

Dimostrazione. La disuguaglianza segue dalle seguenti uguaglianze.

$$\begin{aligned} \mu(A) &= \mu(A \setminus B) + \mu(A \cap B) \\ \mu(B) &= \mu(B \setminus A) + \mu(A \cap B) \\ \mu(A \cup B) &= \mu(A \setminus B) + \mu(B \setminus A) + \mu(A \cap B). \end{aligned}$$

iii) Data una successione di insiemi $E_1 \subset E_2 \subset \cdots \subset \cdots$, si ha
$$\mu\left(\bigcup_i E_i\right) = \sup_i \mu(E_i) = \lim_i \mu(E_i).$$

iv) Data una successione di insiemi $E_1 \supset E_2 \supset \cdots \supset \cdots$ e $\mu(E_1) < +\infty$, si ha
$$\mu\left(\bigcap_i E_i\right) = \lim_i \mu(E_i).$$

Esercizio (Numerabile subaddittività). Dato $E \in \mathcal{A}$, $E \subset \bigcup_i E_i$ dove $E_i \in \mathcal{A}$. Allora
$$\mu(E) \leq \sum_i \mu(E_i).$$

Dimostrazione (Idea). Basta dimostrare che $\mu\left(\bigcup_i E_i\right) \leq \sum_i \mu(E_i)$. Infatti per quanto visto prima $\mu(E) \leq \mu\left(\bigcup_i E_i\right)$. Prima dimostriamo per induzione $\mu\left(\bigcup_{i=1}^N E_i\right) \leq \sum_{i=1}^N \mu(E_i)$. Il passo base $n = 2$ è stato visto al punto ii). Una volta dimostrata la proprietà sopra, si nota che $\sum_{i=1}^N \mu(E_i)$ è limitata per ogni N, e dunque è limitato anche il suo limite, da cui la tesi. □

2.2.2 Funzioni misurabili rispetto alla misura di Lebesgue

Si ricorda che le funzioni *continue*, *semplici* e *semicontinue* sono classi di funzioni misurabili. Due osservazioni sulle funzioni semicontinue.

- Le funzioni semicontinue sono *boreliane*.
- La proprietà di misurabilità delle funzioni semicontinue è necessaria per l'enunciato della disuguaglianza di Jensen.

Controesempio (disuguaglianza di Jensen). Notiamo che l'ipotesi di semicontinuità inferiore della funzione f è necessaria per la validità della disuguaglianza di Jensen. Infatti, definiamo f come segue
$$f(x) = \begin{cases} 0 & x \in (0,1) \\ +\infty & \text{altrimenti} \end{cases}.$$

Osserviamo che la funzione f così definita è convessa ma non semicontinua inferiormente.

Ora definiamo la funzione $u : X \to \mathbb{R}$ con $X = (0, 2)$, come la funzione costante di valore $1/2$. Calcoliamo l'integrale di $u(x)$ su X.

$$\int_X u(x)\,\mathrm{d}x = 1.$$

In tal caso vale $f\left(\int_X u(x)\,\mathrm{d}x\right) = +\infty$. D'altra parte $\int_X f \circ u\,\mathrm{d}x = 0$, dunque l'ipotesi di semicontinuità inferiore è necessaria.

Fatto. Date φ_1, φ_2 funzioni semplici su $\mathbb{R}$ con misura di Lebesgue. Allora $\varphi_1 \vee \varphi_2$ e $\varphi_1 \wedge \varphi_2$ sono ancora funzioni semplici.

Lemma. Data $f \colon X \to [0, +\infty]$ misurabile

$$\int_X f\,\mathrm{d}\mu = 0 \quad \iff \quad f = 0 \text{ q.o. su } X$$

Dimostrazione.

$\boxed{\Rightarrow}$ Dato che f è non negativa, il dominio X può essere riscritto come

$$X = \{x \in X \mid f(x) \geq 0\} = \{x \in X \mid f(x) > 0\} \cup \{x \in X \mid f(x) = 0\}$$

ricordiamo che $(0, +\infty) = \bigcup_{n\geq 1}(\frac{1}{n}, +\infty)$, dunque possiamo riscrivere una parte di X come segue e poi passare alle misure

$$\{x \in X \mid f(x) > 0\} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}} \left\{x \in X \,\middle|\, f(x) \geq \frac{1}{n}\right\}$$
$$\implies \mu\left(\{x \in X \mid f(x) > 0\}\right) = \lim_{n\to+\infty} \mu\left(\left\{x \in X \,\middle|\, f(x) \geq \frac{1}{n}\right\}\right)$$

in questo modo otteniamo la seguente caratterizzazione dell'insieme su cui f è positiva

$$\mu\left(\{x \in X \mid f(x) > 0\}\right) > 0 \iff \exists \bar{n} \text{ tale che } \mu\left(\{x \in X \mid f(x) \geq 1/\bar{n}\}\right) > 0$$

A questo punto possiamo maggiorare come segue

$$0 = \int_X f\,\mathrm{d}\mu \geq \int_{\left\{f\,\geq\,\frac{1}{n}\right\}} f\,\mathrm{d}\mu \geq \frac{1}{n}\mu\left(\left\{x \,\middle|\, f(x) \geq \frac{1}{n}\right\}\right).$$

da cui ricaviamo che $\forall n$ vale

$$\mu\left(\left\{x \,\middle|\, f(x) \geq \frac{1}{n}\right\}\right) = 0$$

e si conclude osservando che

$$\mu\left(\{x \mid f(x) > 0\}\right) = \lim_n \mu\left(\left\{x \,\middle|\, f(x) \geq \frac{1}{n}\right\}\right) = 0$$

$\boxed{\Leftarrow}$ Dal fatto che f è positiva possiamo scrivere

$$\int_X f\,\mathrm{d}\mu = \sup_{\substack{g\leq f \\ g \text{ semplice}}} \int_X g\,\mathrm{d}\mu = \sup \sum_i \alpha_i \mu(E_i) = 0.$$

$\square$

Osservazione (sup essenziale di funzioni misurabili). Data f misurabile, definiamo

$$\|f\|_{\infty,X} \coloneqq \inf\left\{m \in [0,+\infty] \mid |f(x)| \le m \quad \text{quasi ovunque}\right\}.$$

Se $\|f\|_\infty < +\infty$, allora diciamo che esiste una costante $L > 0$ con $L = \|f\|_{\infty,X}$, tale che

$$|f(x)| \le L$$

quasi ovunque. Infatti, per definizione di inf, $L = \lim_n m_n$, dove m_n verificano

$$|f(x)| \le m_n \quad \forall x \in X \setminus N_m, \quad \mu(N_m) = 0.$$

Definiamo $N = \bigcup_m N_m$, da cui si ottiene

$$\mu(N) \le \sum_{n=1}^{\infty} \mu(N_m) = 0.$$

Ovvero N è trascurabile. Preso $x \in X \setminus N$, vale

$$|f(x)| \le m_n \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

2.2.3 Formula di cambio di variabile applicata a funzioni radiali

Sia $f\colon [0,+\infty) \to \mathbb{R}$ misurabile (di solito si richiede misurabile e positiva oppure sommabile). Allora per il teorema di cambio di variabili vale la seguente

$$\int_{\mathbb{R}^n} f\left(|x|\right) \,\mathrm{d}x = c_n \cdot \int_0^{+\infty} f(\rho)\rho^{n-1} \,\mathrm{d}\rho,$$

dove $c_n = n\mathscr{L}^n\left(\mathcal{B}(0,1)\right)$.

Applichiamo questa formula alla stima di integrali di funzioni positive.

Esercizio. Sia

$$\psi(x) = \frac{1}{\|x\|^\alpha}$$

su $\mathcal{B}(0,1) \in \mathbb{R}^n$. Notiamo che $\psi(x) = f(\|x\|)$ con $f = 1/t^\alpha$. Usiamo la formula appena introdotta per determinare gli $\alpha \in \mathbb{R}$ per i quali ψ è sommabile su $\mathcal{B}(0,1)$.

$$\int_{\mathcal{B}(0,1)} \psi(x) \,\mathrm{d}x = c_n \int_0^1 \frac{1}{\rho^\alpha}\rho^{n-1} \,\mathrm{d}\rho = c_n \int_0^1 \rho^{n-1-\alpha} \,\mathrm{d}\rho = \begin{cases} \log(\rho) & n = \alpha \\ \dfrac{\rho^{n-\alpha}}{n-\alpha} & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Concludendo,

$$\int_{\mathcal{B}(0,1)} \frac{1}{\|x\|^\alpha} \,\mathrm{d}x < +\infty \iff n > \alpha.$$

Esercizio. Con passaggi analoghi al precedente otteniamo

$$\int_{\mathbb{R}^n \setminus \mathcal{B}(0,1)} \frac{1}{\|x\|^\alpha} \,\mathrm{d}x < +\infty \iff n < \alpha.$$

Esercizio. Vediamo per quali valori di β il seguente integrale converge

$$\int_{\mathcal{B}(0,1)} \frac{1}{\left(\|x\| + \|x\|^2\right)^\beta} \,\mathrm{d}x$$

Vale la seguente catena di uguaglianze.

$$\int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{\left(\|x\| + \|x\|^2\right)^\beta} \,\mathrm{d}x = \int_{\mathcal{B}(0,1)} \frac{1}{\left(\|x\| + \|x\|^2\right)^\beta} \,\mathrm{d}x + \int_{\mathbb{R}^n \setminus \mathcal{B}(0,1)} \frac{1}{\left(\|x\| + \|x\|^2\right)^\beta} \,\mathrm{d}x.$$

Studiamo separatamente i due pezzi dell'integrale.

$$\int_{\mathcal{B}(0,1)} \frac{1}{\left(\|x\| + \|x\|^2\right)^\beta} \,\mathrm{d}x = c_n \int_{\mathcal{B}(0,1)} \frac{1}{(\rho + \rho^2)^\beta} \rho^{n-1} \,\mathrm{d}\rho = c_n \int_0^1 \frac{1}{\rho^\beta} \cdot \frac{\rho^{n-1}}{(1+\rho)^\beta} \,\mathrm{d}\rho$$
$$\approx \int_0^1 \rho^{n-1-\beta} \,\mathrm{d}\rho < +\infty \iff \beta < n.$$

Inoltre,

$$\int_{\mathbb{R}^n \setminus \mathcal{B}(0,1)} \frac{1}{\left(\|x\| + \|x\|^2\right)^\beta} \,\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^n \setminus \mathcal{B}(0,1)} \frac{1}{\rho^{2\beta}} \cdot \frac{\rho^{n-1}}{\left(\frac{1}{\rho} + 1\right)^\beta} \,\mathrm{d}\rho \approx \int_1^{+\infty} \frac{\rho^{n-1}}{\rho^{2\beta}} \,\mathrm{d}\rho < +\infty \iff 2\beta > n.$$

In conclusione, l'integrale è finito se $n > \beta > n/2$.

Esercizio. Studiare l'insieme di finitezza al variare del parametro α dell'integrale

$$\int_{[0,1]^n} \frac{1}{\|x\|_1^\alpha} \,\mathrm{d}x.$$

Osserviamo che la norma 1 e 2 sono legate dalle seguenti disuguaglianze

$$\frac{\|x\|_1}{n} \leq \|x\|_2 \leq \|x\|_1.$$

Studiamo una maggiorazione per l'integrale

$$\int_{[0,1]^n} \frac{1}{\|x\|_1^\alpha} \,\mathrm{d}x \leq \int_{[0,1]^n} \frac{1}{\|x\|^\alpha} \,\mathrm{d}x \leq \int_{B(0,\sqrt{n})} \frac{1}{\|x\|^\alpha} \,\mathrm{d}x < +\infty \iff \alpha < n,$$

dunque

$$\int_{[0,1]^n} \frac{1}{\|x\|_1^\alpha} \,\mathrm{d}x < +\infty \quad \text{se } \alpha < n.$$

Vediamo ora una minorazione.

$$\int_{[0,1]^n} \frac{1}{\|x\|_1^\alpha} \,\mathrm{d}x = \frac{1}{2^n} \int_{[-1,1]^n} \frac{1}{\|x\|_1^\alpha} \,\mathrm{d}x \geq \frac{1}{2^n} \int_{\mathcal{B}(0,1)} \frac{1}{\|x\|_1^\alpha} \,\mathrm{d}x \approx \int_{\mathcal{B}(0,1)} \frac{1}{\|x\|^\alpha} \,\mathrm{d}x < +\infty \iff \alpha < n.$$

Dunque l'integrale $\displaystyle\int_{[0,1]^n} \frac{1}{\|x\|_1^\alpha} \,\mathrm{d}x$ converge se solo se $\alpha < n$.

Esercizi per casa.

(1) Dimostrare che date f, g misurabili ed $r, p_1, p_2 > 0$ tali che $1/r = 1/p_1 + 1/p_2$. Allora vale

$$\|f \cdot g\|_r \leq \|f\|_{p_1} \cdot \|g\|_{p_2} .$$

Suggerimento. Usare Hölder osservando che $1 = \dfrac{r}{p_1} + \dfrac{r}{p_2} = \dfrac{1}{(p_1/r)} + \dfrac{1}{(p_2/r)}$.

Dimostrazione. Vale quanto segue.

$$\begin{aligned}
\|f \cdot g\|_r^r &= \int_X |f \cdot g|^r \, \mathrm{d}\mu = \int_X |f| \cdot |g| \, \mathrm{d}\mu \overset{\text{Holder}}{\leq} \|f^r\|_{p_1/r} \cdot \|f^r\|_{p_2/r} \\
&= \left(\int_X |f|^{r \cdot p_1/r} \right)^{r/p_1} \cdot \left(\int_X |g|^{r \cdot p_2/r} \right)^{r/p_2} = \|f\|_{p_1}^r \cdot \|g\|_{p_2}^r = \left(\|f\|_{p_1} \cdot \|g\|_{p_2} \right)^r \\
&\implies \|f \cdot g\|_r \leq \|f\|_{p_1} \cdot \|g\|_{p_2} .
\end{aligned}$$

□

(2) Dimostrare che date $f_1, \dots, f_n$ misurabili e $p_i > 0$ tali che $1/p_1 + \ldots + 1/p_n = 1$ si ha

$$\|f_1 \cdots f_n\|_1 \leq \|f_1\|_{p_1} \cdots \|f_n\|_{p_n} .$$

Suggerimento. Fare il primo passo dell'induzione e usare la formula precedente scegliendo r in modo corretto.

Dimostrazione. Dimostriamo per induzione la seguente proprietà più generale.

Siano $f_1, \dots, f_n$ misurabili e $r > 1$. Allora, per i $p_i > 0$ tali che $1/p_1 + \ldots + 1/p_n = r$ si ha

$$\|f_1 \cdots f_n\|_r \leq \|f_1\|_{p_1} \cdots \|f_n\|_{p_n} .$$

Passo base. Vero per il punto (1).

Passo induttivo $[n-1 \Rightarrow n]$. Supponiamo di aver dimostrato per ogni $r > 1$ la disuguaglianza sopra. Allora

$$\|f_1 \cdots f_n\|_r = \|(f_1 \cdots f_{n-1}) \cdot f_n\|_r \overset{(1)}{\leq} \|f_1 \cdots f_{n-1}\|_p \cdot \|f_n\|_{p_n} , \qquad \text{dove } r = 1/p + 1/p_n.$$

Notando che $1/p = 1/r - 1/p_{n-1} = 1/p_1 + \cdots + 1/p_{n-1}$ e usando l'ipotesi induttiva otteniamo la tesi. □

2.3 Costruzione spazi L^p

Fissiamo $(X, \mathcal{A}, \mu)$ come sempre.

Definizione. Sia $\mathscr{L}^p$ l'insieme delle funzioni $f \colon X \to \mathbb{R}$ o $\mathbb{R}^d$ misurabili tali che $\|f\|_p < +\infty$.

Osservazioni.

- $\mathscr{L}^p$ è un sottospazio vettoriale dello spazio vettoriale dato da $\{f \colon X \to \mathbb{R} \mid f \text{ misurabile}\}$ e $\|\cdot\|_p$ è una semi-norma.

  Dimostrazione.

- $\circ$ $\mathscr{L}^p$ è chiuso per somma e moltiplicazione per scalari.
  - $\circ$ Dalla definizione segue subito $\|\lambda f\|_p = |\lambda| \cdot \|f\|_p$ l'omogeneità della norma.
  - $\circ$ Dalla disuguaglianza di Minkowski segue che $\|\cdot\|_p$ è una semi-norma.

- In particolare non è una norma se $\{0\} \subsetneq \{f \mid \|f\|_p = 0\}$ ovvero se $\mathcal{A}$ contiene insiemi non vuoti di misura nulla.

- In generale dato V spazio vettoriale e $\|\cdot\|$ semi-norma su V possiamo introdurre $N \coloneqq \{v \mid \|v\| = 0\}$. N risulta essere un sottospazio di V e la norma data da $\|[v]\| \coloneqq \|v\|$ per $[v] \in {}^{V}\!/_{N}$ è ben definita ed è proprio una norma su ${}^{V}\!/_{N}$.

- Nel caso della della norma $\|\cdot\|_p$ abbiamo che $[f_1] = [f_2] \iff [f_1 - f_2] = 0 \iff f_1 - f_2 = 0$ quasi ovunque.

Definizione. Poniamo $N \coloneqq \{f \mid \|f\|_p = 0\}$ e definiamo gli **spazi** L^p come

$$L^p := {}^{\mathscr{L}^p}\!/_{N} = {}^{\mathscr{L}^p}\!/_{\sim} \qquad \|[f]\|_p \coloneqq \|f\|_p$$

Notazione. Ogni tanto serve precisare meglio l'insieme di partenza e di arrivo degli spazi L^p ed in tal caso useremo le seguenti notazioni

$$L^p = L^p(X) = L^p(X, \mu) = L^p(X, \mathcal{A}, \mu) = L^p(X, \mu; \mathbb{R}^d).$$

Nota. Nella pratica non si parla mai di "classi di funzioni" e si lavora direttamente parlando di "funzioni in L^p". Le "operazioni" comuni non creano problemi però in certi casi bisogna stare attenti di star lavorando con oggetti ben definiti. Ad esempio:

- Preso $x_0 \in X$, consideriamo l'insieme $\{f \in L^p \mid f(x_0) = 0\}$. Notiamo che non è un sottoinsieme ben definito (a meno che $\mu(\{x_0\}) > 0$ ovvero che la misura sia atomica) di L^p, in quanto possiamo variare f su un insieme di misura nulla.

- Invece ad esempio il seguente insieme è ben definito

$$\left\{ f \in L^1 \,\middle|\, \int_X f \, \mathrm{d}\mu = 0 \right\}$$

2.3.1 Prodotto scalare su L^2

Date $f_1, f_2 \in L^2(X)$ si pone

$$\langle f_1, f_2 \rangle \coloneqq \int_X f_1 \cdot f_2 \, \mathrm{d}\mu.$$

Osservazioni.

- La definizione di $\langle f_1, f_2 \rangle$ è ben posta, infatti basta far vedere che $\displaystyle\int_X |f_1 f_2| \, \mathrm{d}\mu < +\infty$ ma per Hölder abbiamo

$$\int_X |f_1 f_2| \, \mathrm{d}\mu \le \|f_1\|_2 \, \|f_2\|_2 < +\infty$$

- $\|f\|_2^2 = \langle f, f \rangle$ per ogni $f \in L^2(X)$.

- Inoltre, $\left|\int_X f_1 f_2 \,\mathrm{d}\mu\right| \leq \int_X |f_1 f_2| \,\mathrm{d}\mu$ quindi
$$|\langle f_1, f_2\rangle| \leq \|f_1\|_2 \|f_2\|_2 \qquad (\textit{Cauchy-Schwartz}).$$
- L'operatore $\langle\,\cdot\,,\,\cdot\,\rangle$ è un prodotto scalare definito positivo.

Osservazioni.

- Dato C spazio vettoriale reale con prodotto scalare $\langle\,\cdot\,,\,\cdot\,\rangle$, allora $\langle\,\cdot\,,\,\cdot\,\rangle$ si ricava dalla norma associata $\|\cdot\|$ tramite l'identità di polarizzazione:
$$\langle v_1, v_2\rangle = \frac{1}{4}\left(\|v_1 + v_2\|^2 - \|v_1 - v_2\|^2\right).$$
- Dato V come sopra, vale l'identità del parallelogramma:
$$\|v_1 + v_2\|^2 + \|v_1 - v_2\|^2 = 2\|v_1\|^2 + 2\|v_2\|^2 \quad \forall v_1, v_2 \in V.$$
Usando questa identità di dimostra che la norma di L^p deriva da un prodotto scalare solo per $p = 2$.

Proprietà. Sia V uno spazio vettoriale con norma $\|\cdot\|$. Allora vale l'identità del parallelogramma se solo se $\|\cdot\|$ deriva da un prodotto scalare.

Esempio. La norma di $L^p([-1,1])$, deriva da un prodotto scalare solo per $p = 2$. Prendiamo $f_1 = \mathbb{1}_{[-1,0]}$ e $f_2 = \mathbb{1}_{[0,+1]}$. Allora
$$\|f_1 + f_2\|_p^p = \int_{-1}^{1} 1 \,\mathrm{d}x = 2 \Rightarrow \|f_1 + f_2\|_p = 2^{1/p}$$
$$\|f_1 - f_2\|_p = \|f_1 + f_2\|_p = 2^{1/p}, \quad \|f_1\|_p = \|f_2\|_p = 1$$

Se vale l'identità del parallelogramma allora
$$\|f_1 + f_2\|_p^2 + \|f_1 - f_2\|_p^2 = 2\|f_1\|_p^2 + 2\|f_2\|_p^2$$
cioè
$$2^{2/p} + 2^{2/p} = 2 \cdot 1 + 2 \cdot 1 \iff p = 2.$$

Domanda. Per quali $X, \mathcal{A}, \mu$ vale la stessa conclusione?

2.4 Completezza degli spazi L^p

Vediamo ora la proprietà più importante degli spazi L^p.

Teorema. Lo spezio L^p è completo per ogni $p \in [1, +\infty]$.

Lemma 1. Dato (Y, d) spazio metrico, allora

i) Ogni successione (y_n) tale che
$$\sum_{n=1}^{\infty} d(y_n, y_{n+1}) < +\infty$$
è di Cauchy.

ii) Se ogni (y_n) tale che $\sum_{n=1}^{\infty} d(y_n, y_{n+1}) < +\infty$ converge allora Y è completo.

Osservazione. Non tutte le successioni di Cauchy (y_n) soddisfano quella condizione. Ad esempio la successione $(-1)^n/n$ definita su $\mathbb{R}$ è di Cauchy però

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{(-1)^{n+1}}{n+1} - \frac{(-1)^n}{n} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n^2+n} \approx \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \to \infty.$$

Nota. Per mostrare la completezza degli spazi L^p è sufficiente verificare la convergenza per una sottoclasse propria delle successioni di Cauchy.

Dimostrazione.

i) Vorremmo vedere che $\forall \varepsilon \, \exists N$ tale che $\forall m, n > N$ si ha $d(y_m, y_n) \leq \varepsilon$. Presi $n > m$ abbiamo che

$$d(y_m, y_n) \leq \sum_{k=m}^{n-1} d(y_k, y_{k+1}) \leq \sum_{k=m}^{\infty} d(y_k, y_{k+1}) \to 0$$

in quanto *coda di una serie convergente*, quindi

$$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists m_\varepsilon \text{ tale che } \sum_{k=m_\varepsilon}^{\infty} d(y_k, y_{k+1}) < \varepsilon \implies \forall n > m \geq m_\varepsilon \; d(y_m, y_n) \leq \varepsilon$$

ii) Vogliamo vedere che ogni successione di Cauchy converge, ma osserviamo che basta mostrare che data (y_n) di Cauchy esiste una sottosuccessione y_{n_k} tale che

$$\sum_{k=1}^{\infty} d(y_{n_k}, y_{n_{k+1}}) < +\infty$$

ma a quel punto per ipotesi questa sottosuccessione converge ad $y \in Y$ e dunque anche $y_n \to y$. Questa sottosuccessione esiste in quanto $\forall k \; \exists n_k$ tale che $\forall n, m \geq n_k \; d(y_m, y_n) \leq 1/2^k$ e dunque $d(y_{n_k}, y_{n_{k+1}}) \leq 1/2^k$. $\square$

Lemma 2. Dato Y spazio normato, i seguenti fatti sono equivalenti

i) Y è completo.

ii) Per ogni successione (y_n) tale che $\sum_{n=1}^{\infty} \|y_n\| < +\infty$, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$ converge[1].

Dimostrazione. È un corollario del lemma precedente. $\square$

Lemma 3 (Minkowski per somme infinite). Date delle funzioni (g_n) funzioni positive su X allora

$$\left\| \sum_{n=1}^{\infty} g_n \right\|_p \leq \sum_{n=1}^{\infty} \|g_n\|_p$$

Dimostrazione. Per ogni N abbiamo che

$$\left\| \sum_{n=1}^{N} g_n \right\|_p^p \leq \left(\sum_{n=1}^{N} \|g_n\|_p \right)^p \leq \left(\sum_{n=1}^{\infty} \|g_n\|_p \right)^p$$

[1] Nel senso che esiste y tale che $\left\| y - \sum_{n=1}^{N} y_n \right\| \to 0$.

e per convergenza monotona possiamo passare il termine di sinistra al limite

$$\lim_N \left\| \sum_{n=1}^N g_n \right\|_p^p = \lim_N \int_X \left(\sum_{n=1}^N g_n \right)^p \mathrm{d}\mu = \int_X \left(\lim_N \sum_{n=1}^N g_n \right)^p \mathrm{d}\mu = \left\| \sum_{n=1}^\infty g_n \right\|_p^p$$

$\square$

Dimostrazione (Completezza spazi L^p).

- Se $p = +\infty$: si tratta di vedere che data (f_n) di Cauchy in $L^\infty(X)$ esiste E con $\mu(E) = 0$ tale che (f_n) è di Cauchy rispetto allora norma del sup in $X \setminus E$. [TODO: Finire]
- Se $p < +\infty$: per il Lemma 2, basta far vedere che data $(f_n) \subset L^p(X)$ tale che $\sum_{n=1}^\infty \|f_n\|_p < +\infty$ allora $\sum_n f_n$ converge a qualche $f \in L^p(X)$.

  La dimostrazione è suddivisa in tre passi, prima costruiamo f, poi mostriamo che f_n converge a f ed infine mostriamo $f \in L^p(X)$.

  - *Passo 1:* Per ipotesi abbiamo

    $$\infty > \sum_{n=1}^\infty \|f_n\|_p = \sum_{n=1}^\infty \||f_n|\|_p \geq \left\| \sum_{n=1}^\infty |f_n| \right\|_p = \left(\int \left(\sum_{n=1}^\infty |f_n(x)| \right)^p \mathrm{d}\mu(x) \right)^{1/p}$$

    quindi $\sum_{n=1}^\infty |f_n(x)| < +\infty$ per ogni $x \in X \setminus E$ con $\mu(E) = 0$. Quindi $\sum_{n=1}^\infty f_n(x)$ converge a qualche $f(x)$ per ogni $x \in X \setminus E$ ed a questo punto ci basta estendere f a zero in E [1].
  - *Passo 2:* Fissiamo N ed osserviamo che $\forall x \in X \setminus E$ abbiamo

    $$\left| f(x) - \sum_{n=1}^N f_n(x) \right| = \left| \sum_{n=N+1}^\infty f_n(x) \right| \leq \sum_{n=N+1}^\infty |f_n(x)|$$

    da cui otteniamo

    $$\left\| f - \sum_{n=1}^N f_n \right\|_p \leq \left\| \sum_{n=N+1}^\infty |f_n| \right\|_p \leq \sum_{n=N+1}^\infty \|f_n\|_p$$

    dove l'ultimo termine è la coda di una serie convergente.
  - *Passo 3:* In particolare rileggendo il passo precedente per $N = 0$ otteniamo

    $$\|f\|_p \leq \sum_{n=1}^\infty \|f_n\|_p < +\infty \implies f \in L^p$$

$\square$

Esercizio.[2] Sia $f \colon X \to [0, +\infty]$ allora $\displaystyle\int_X f \,\mathrm{d}\mu < +\infty \implies f(x) < +\infty$ per quasi ogni x.

[1] Una costruzione alternativa degli spazi L^p potrebbe anche partire da *funzioni definite quasi ovunque*, questo ovvierebbe al problema di estendere a 0 la funzione f appena costruita. Però diventa più complicato mostrare di essere in uno spazio vettoriale poiché per esempio serve ridefinire $+$ a funzioni definite quasi ovunque.

[2] In questo corso non è strettamente necessario ricordarsi come si facciano tutti questi esercizi tecnici di teoria della misura ma è bene saperli applicare in automatico quando serve.

Dimostrazione. Sia $E := \{x \mid f(x) = +\infty\}$, allora l'idea è che

$$\infty > \int_X f \, \mathrm{d}\mu \geq \int_E f \, \mathrm{d}\mu = +\infty \cdot \mu(E).$$

Oppure, osserviamo che $\forall m \in [0, +\infty)$ abbiamo $f \cdot \mathbb{1}_E \geq m \cdot \mathbb{1}_E$ per ogni $x \in E$ quindi integrando ricaviamo

$$\underbrace{\int_E f \, \mathrm{d}\mu}_{I} \geq m \cdot \mu(E) \implies \mu(E) \leq \frac{I}{m} \xrightarrow{m \to +\infty} 0$$

□

2.5 Nozioni di convergenza per successioni di funzioni

Fissiamo $X, \mathcal{A}, \mu$ e prendiamo $f, f_n \colon X \to \mathbb{R}$ (o $\mathbb{R}^k$) misurabili.

Definizione. Riportiamo le definizioni di alcune nozioni di convergenza.

- **Uniforme**: $\forall \varepsilon \; \exists n_\varepsilon$ tale che $\|f(x) - f_n(x)\| < \varepsilon \;\; \forall n > n_\varepsilon$.
- **Puntuale**: $f_n(x) \to f(x) \;\; \forall x \in X$.
- **Puntuale μ-quasi ovunque**: $f_n(x) \to f(x)$ per μ-q.o. $x \in X$.
- **In L^p**: $\|f_n - f\|_p \xrightarrow{n \to \infty} 0$.
- **In misura**: $\forall \varepsilon > 0 \quad \mu\left(\{x \mid |f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon\}\right) \xrightarrow{n \to +\infty} 0$.

Osservazione. Abbiamo le seguenti implicazioni ovvie delle diverse nozioni di convergenza:

$$\text{uniforme} \Rightarrow \text{puntuale} \Rightarrow \text{puntuale } \mu \text{ q.o.}$$

Proposizione. Valgono le seguenti.

i) Data $f_n \to f$ q.o. e $\mu(X) < +\infty$, allora $f_n \to f$ in misura.

ii) (*Severini-Egorov*): Data $f_n \to f$ q.o. e $\mu(X) < +\infty$, allora $\forall \delta > 0$ esiste $E \in \mathcal{A}$ tale che $\mu(E) < \delta$ e $f_n \to f$ uniformemente su $X \setminus E$.

iii) $f_n \to f$ in L^p, $p < +\infty$, allora $f_n \to f$ in misura.

iii') $f_n \to f$ in L^∞, allora $\exists E$ tale che $\mu(E) = 0$ e $f_n \to f$ uniformemente su $X \setminus E$.

iv) $f_n \to f$ in misura, allora $\exists n_k$ tale che $f_{n_k} \to f$ μ-q.o.

v) $f_n \to f$ in L^p, allora $\exists n_k$ tale che $f_{n_k} \to f$ μ-q.o.

Osservazione. In i) e ii) l'ipotesi $\mu(X) < +\infty$ è necessaria. Infatti, preso $X = \mathbb{R}$ e $f_n = \mathbb{1}_{[n, +\infty)}$ si ha che $f_n \to 0$ ovunque ma f_n non converge a 0 in misura, e f_n non converge a 0 uniformemente in $\mathbb{R} \setminus E$ per ogni E di misura finita.

Lemma (disuguaglianza di Markov). Data $g \colon X \to [0, +\infty]$ misurabile e $m > 0$ si ha

$$\mu\left(\{x \in X \mid g(x) \geq m\}\right) \leq \frac{1}{m} \int_X g \, \mathrm{d}\mu$$

Dimostrazione. Poniamo $E \coloneqq \{x \in X \mid g(x) \geq m\}$. Osserviamo che $g \geq m \cdot \mathbb{1}_E$. Dunque vale

$$\int_X g \, \mathrm{d}\mu \geq \int_X m \cdot \mathbb{1}_E \, \mathrm{d}\mu = m \cdot \mu\left(\{x \in X \mid g(x) \geq m\}\right).$$

$\square$

Lemma (Borel-Cantelli). Dati $(E_n) \subset \mathcal{A}$ tali che $\sum \mu(E_n) \leq +\infty$, l'insieme

$$E \coloneqq \{x \in X \mid x \in E_n \text{ frequentemente}\}$$

ha misura nulla. Cioè per μ-q.o. x, $x \notin E_n$ definitivamente (in n.)

Dimostrazione. Osserviamo che

$$E = \bigcap_{m=1}^{\infty} \Big(\underbrace{\bigcup_{n=m}^{\infty} E_n}_{F_m} \Big).$$

Allora

$$\mu(E) \underbrace{=}_{F_m \downarrow E \text{ e } \mu(F_1) < +\infty} \lim_{m \to \infty} \mu(F_m) \leq \lim_{m \to \infty} \underbrace{\sum_{n=m}^{\infty} \mu(E_n)}_{\text{coda serie convergente}} = 0.$$

Osservazione. L'ipotesi $\sum \mu(E_n) < +\infty$ non può essere sostituita con $\mu(E_n) \to 0$.

Ora dimostriamo la proposizione.

Dimostrazione della Proposizione. Definiamo gli insiemi

$$A_n^\varepsilon \coloneqq \{x \mid |f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon\},$$

$$B_m^\varepsilon \coloneqq \{x \mid |f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon \text{ per qualche } n \geq m\} = \bigcup_{n=m}^{\infty} A_n^\varepsilon,$$

$$B^\varepsilon \coloneqq \{x \mid |f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon \text{ frequentemente}\} = \{x \in A_n^\varepsilon \text{ frequentemente}\} = \bigcap_{m=1}^{\infty} B_m^\varepsilon.$$

i) Per ipotesi, $f_n \to f$ quasi ovunque, cioè $\mu(B^\varepsilon) = 0$ per ogni $\varepsilon > 0$, ma $B_m^\varepsilon \downarrow B^\varepsilon$ e $\mu(X) < +\infty$. Allora

$$\lim_{m \to +\infty} \mu(B_m^\varepsilon) = \mu(B^\varepsilon) = 0 \Longrightarrow \lim_{m \to \infty} \mu(A_m^\varepsilon) = 0.$$

ii) Dalla dimostrazione precedente, abbiamo $\lim\limits_{m \to \infty} \mu(B_m^\varepsilon) = 0$. Allora per ogni k esiste un m_k tale che $\mu\left(B_{m_k}^{1/k}\right) \leq \delta/2^k$. Poniamo $E \coloneqq \bigcup_k B_{m_k}^{1/k}$ per ogni k; allora $\mu(E) \leq \delta$. Inoltre,

$$\begin{aligned} x \in X \setminus E &\Longrightarrow x \notin B_{m_k}^{1/k} \; \forall k \iff x \notin A_n^{1/k} \;\; \forall k, n \geq m_k \\ &\Longrightarrow |f(x) - f_n(x)| < \frac{1}{k} \;\; \forall k, n \geq m_k \\ &\Longrightarrow \sup_{x \in X \setminus E} |f(x) - f_n(x)| \leq \frac{1}{k} \;\; \forall k, n \geq m_k \\ &\Longrightarrow f - f_m \text{ uniformemente su } X \setminus E. \end{aligned}$$

iii) Dobbiamo mostrare che per ogni $\varepsilon > 0$ $\mu(A_n^\varepsilon) \xrightarrow{n} 0$. Usando la disuguaglianza di Markov otteniamo

$$\mu(A_n^\varepsilon) = \mu\bigg(\Big\{x \Big| \overbrace{|f_n(x) - f(x)|^p}^{g} \geq \varepsilon^p\Big\}\bigg) \leq \frac{1}{m} \int_X g \, \mathrm{d}\mu = \frac{1}{\varepsilon^p} \|f_n - f\|_p^p \xrightarrow{n \to +\infty} 0.$$

iii') Definiamo $E_n \coloneqq \{x \mid |f_n(x) - f(x)| > \|f_n - f\|_\infty\}$ per ogni n, allora $\mu(E_n) = 0$. Poniamo $E = \bigcup_n E_n$ e $\mu(E) = 0$, dunque

$$\sup_{x \in X \setminus E} |f_n(x) - f(x)| \leq \|f_n - f\|_\infty \xrightarrow{n\to\infty} 0.$$

iv) Per ipotesi, $f_n \to f$ in misura, cioè

$$\begin{aligned} &\forall \varepsilon > 0 \quad \mu\left(A_n^\varepsilon\right) \xrightarrow{n\to+\infty} 0 \\ &\implies \forall k\ \exists n_k \colon \mu\left(A_{n_k}^{1/k}\right) \leq \frac{1}{2^k} \\ &\implies \sum_k \mu\left(A_{n_k}^{1/k}\right) < +\infty. \end{aligned}$$

Allora per Borel-Cantelli, si ha per μ-quasi ogni x, $x \notin A_{n_k}^{1/k}$ definitivamente in k, cioè $\|f_{n_k}(x) - f(x)\| < 1/k$ definitivamente in k, cioè $f_{n_k}(x) \xrightarrow{k} f(x)$.

v) Vogliamo mostrare che $f_n \to f$ in $L^p \Rightarrow \exists n_k$ tale che $f_{n_k} \to f$ quasi ovunque. Consideriamo due casi

- Se $p < +\infty$, allora $f_n \to f$ in $L^p \implies f_n \to f$ in misura da cui $\exists n_k$ tale che $f_{n_k} \to f$ quasi ovunque.
- Se $p = +\infty$, allora $f_n \to f$ uniformemente su $X \setminus E$ con $\mu(E) = 0 \implies f_n \to f$ puntualmente su $X \setminus E \implies f_n \to f$ quasi ovunque (quindi semplicemente con $n_k = k$).

2.6 Controesempi sulle convergenze

Vediamo un controesempio che mostra che tutte le implicazioni sui vari tipi di convergenza sono ottimali ovvero

i) $f_n \to f$ in misura $\not\Longrightarrow$ $f_n \to f$ q.o.

ii) $f_n \to f$ in L^p con $p < +\infty$ $\not\Longrightarrow$ $f_n \to f$ q.o.

iii) $\mu(E_n) \to 0$ $\not\Longrightarrow$ per q.o x si ha $x \notin E_n$ definitivamente.

Dimostrazione. Consideriamo gli insiemi $I_1 = \left[1, 1 + \frac{1}{2}\right]$, $I_2 = \left[1 + \frac{1}{2}, 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right]$, ...

$$I_n \coloneqq \left[\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}, \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k}\right]$$

e consideriamo la loro proiezione "modulo" $[0,1]$ usando la funzione $p \colon \mathbb{R} \to [0,1)$ *parte frazionaria* data da

$$p(x) \coloneqq x - \lfloor x \rfloor$$

e chiamiamo $E_n \coloneqq p(I_n)$. Per ogni n abbiamo che $|I_n| = |E_n| = 1/n$ e $\bigcup_n I_n = [1, +\infty)$ (in quanto $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = +\infty$) e quindi ogni $x \in [0,1)$ appartiene ad E_n per infiniti n ed in particolare questo mostra la iii).

[TODO: Disegnino]

Per la i) basta notare che $\mathbb{1}_{E_n} \to 0$ in misura (in quanto $|E_n| \to 0$) ma $\mathbb{1}_{E_n} \not\to 0$ q.o., anzi $\forall x \in [0,1)$ $\mathbb{1}_{E_n}(x) \not\to 0$ e la ii) segue analogamente. $\square$

2.7 Approssimazioni di funzioni in L^p

Vediamo ora alcune classi di funzioni dense in L^p che risulteranno essere un utile strumento da usare nelle dimostrazioni.

Nota. Ricordiamo la nozione di insieme denso in uno spazio metrico. Sia (X, d) uno spazio metrico e $Y \subset X$. Allora Y è denso in X se solo se per ogni $x \in X$, esiste una successione $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in Y che tale che $x = \lim_n y_n$.

Per ora sia $(X, \mathcal{A}, \mu)$ in generale.

Proposizione 1. Le funzioni limitate in L^p sono dense in L^p.

Dimostrazione. Data $f \in L^p(X)$ cerchiamo una successione di funzioni $f_n \in L^p(X)$ limitate tali che $f_n \to f$ in L^p, consideriamo

$$f(x) := (f(x) \wedge n) \vee (-n)$$

vorremmo mostrare che $f_n \to f$ in L^p ovvero

$$\|f_n - f\|_p^p = \int_X |f_n - f|^p \,\mathrm{d}\mu \to 0$$

intanto osserviamo che, per la *convergenza puntuale*, basta osservare che se $n \geq |f(x)|$ abbiamo che $\forall x \; f_n(x) = f(x) \implies f_n(x) \xrightarrow{n} f(x) \implies |f_n(x) - f(x)|^p \to 0$.

Per concludere basta applicare *convergenza dominata* usando come dominazione direttamente $|f(x) - f_n(x)| \leq |f(x)| \implies |f(x) - f_n(x)|^p \leq |f(x)|^p$ e notiamo che $|f|^p \in L^1(X)$. □

Proposizione 2. Sia[1] $\widetilde{\mathscr{S}} := \operatorname{Span}(\{\mathbb{1}_E \mid E \in \mathcal{A}, \mu(E) < +\infty\})$, allora $\widetilde{\mathscr{S}}$ è denso in $L^p(X)$.

Dimostrazione. Data $f \in L^p(X)$ cerchiamo una successione che approssima f in $\widetilde{\mathscr{S}}$.

- *Caso 1*: Se $f \geq 0$ allora fissiamo $\varepsilon > 0$ e per ogni $k = 1, 2, \ldots$ e poniamo

  $$A_\varepsilon^k := \{x \mid k\varepsilon \leq f(x) \leq (k+1)\varepsilon\}$$

  risulta che A_k^ε è misurabile ed ha misura finita[2]. Ora consideriamo la successione di funzioni parametrizzata da ε data da

  $$f_\varepsilon(x) := \sum_{1 \leq k \leq 1/\varepsilon^2} k\varepsilon \cdot \mathbb{1}_{A_\varepsilon^k}(x) \in \widetilde{\mathscr{S}}$$

  [TODO: Disegnino]

  Osserviamo che vale anche $\max f_\varepsilon(x) = \max\{k\varepsilon \mid k\varepsilon \leq f(x) \text{ e } k \leq 1/\varepsilon^2\}$ e mostriamo la seguente[3]

  $$\int_X |f(x) - f_\varepsilon(x)|^p \,\mathrm{d}\mu(x) \xrightarrow{\varepsilon \to 0} 0$$

  - *Convergenza puntuale*: Per l'identità precedente abbiamo che $0 \leq f(x) - f_\varepsilon(x) \leq \varepsilon$ se $f(x) \leq 1/\varepsilon$.

[1] Lo span è inteso come combinazioni lineari

[2] È misurabile in quanto preimmagine di un misurabile ed ha misura finita in quanto se così non fosse esisterebbero $\varepsilon > 0, k \geq 1$ tali che $\mu(A_\varepsilon^k) = +\infty$ da cui $\|f\|_p^p \geq \left\|k\varepsilon\mathbb{1}_{A_\varepsilon^k}\right\|_p^p \geq +\infty \implies f \notin L^p(X)$ ↯.

[3] Notiamo che qui stiamo applicando il teorema di *convergenza dominata* su una famiglia parametrizzata da ε e non su una successione ma si può verificare facilmente che il teorema (ed anche gli altri risultati di convergenza di successioni di funzioni) si può estendere semplicemente prendendo $\varepsilon = 1/n$ per $n \to \infty$.

- ◦ *Dominazione*: Possiamo usare nuovamente $|f(x)-f_\varepsilon(x)|^p \le |f(x)|^p < +\infty$ in quanto $f \in L^p(X)$.

  [TODO: Disegnino]

- *Caso 2*: Sia $f\colon X \to \mathbb{R}$ allora si può rifare la dimostrazione precedente oppure si può semplicemente considerare $f_\varepsilon := (f^+)_\varepsilon - (f^-)_\varepsilon$.

- *Caso 3*: Generalizziamo la proposizione al caso di $f\colon X \to \mathbb{R}^d$ come segue

  Proposizione 2' (Generalizzata). Sia $\widetilde{\mathscr{S}} := \left\{\sum_i \alpha_i \mathbb{1}_{E_i} \mid \alpha_i \in \mathbb{R}^d, E_i \in \mathcal{A}, \mu(E_i) < +\infty\right\}$. Allora $\widetilde{\mathscr{S}}$ è denso in $L^p(X;\mathbb{R}^d)$.

  Dimostrazione. (Idea) Basta approssimare componente per componente.

  □

Sia ora X uno *spazio metrico* e $\{\text{aperti}\} \subset \mathcal{A}$.

Proposizione 3. Sia $\widetilde{\mathscr{S}_\ell} := \{\sum_i \alpha_i \mathbb{1}_{E_i} \mid \alpha_i \in \mathbb{R}^d, E_i \in \mathcal{A}, \mu(E_i) < +\infty, E_i \text{ limitati}\}$ allora $\widetilde{\mathscr{S}_\ell}$ è denso in $L^p(X;\mathbb{R}^d)$ per $p < +\infty$.

Osservazione. In generale l'enunciato non vale per $p = +\infty$. Ad esempio preso $L^\infty(\mathbb{R})$ e $f = 1$ non si può approssimare con funzioni a supporto limitato (come quelle in $\widetilde{\mathscr{S}_\ell}$. In particolare data g con supporto A limitato $|f-g| = 1$ su $\mathbb{R}\backslash A$ e siccome $|\mathbb{R}\backslash A| > 0$ abbiamo $\|f-g\|_\infty \ge 1$).

Dimostrazione. ($\widetilde{\mathscr{S}_\ell}$ è denso in L^p) Per prima cosa vediamo un lemma che useremo assieme alla proposizione precedente.

Lemma 1. Dato $E \in \mathcal{A}, \mu(E) < +\infty$ esiste $E_n \in \mathcal{A}$ con E_n limitati tali che $E_n \subset E$ e $\mu(E \setminus E_n) \to 0$ e quindi $\|\mathbb{1}_E - \mathbb{1}_{E_n}\|_p = \mu(E \setminus E_n)^{1/p} \xrightarrow{n} 0$ (e $\mathbb{1}_{E_n} \in \widetilde{\mathscr{S}_\ell}$).

Dimostrazione. Dato E con $\mu(E) < +\infty$ prendiamo $x_0 \in X$ e poniamo $E_n := E \cap \mathcal{B}(x_0, n)$; $E_n \subset E$ e $E \setminus E_n \downarrow \varnothing \implies \mu(E \setminus E_n) \xrightarrow{n} 0$.

Intuitivamente $\widetilde{\mathscr{S}_\ell}$ è denso in $\widetilde{\mathscr{S}}$ che a sua volta è denso in L^p (usando la definizione di densità topologica la tesi è quasi ovvia mentre usando la definizione per successioni bisogna passare per un procedimento diagonale). □

Ora siano $X \subset \mathbb{R}^n, \mu = \mathscr{L}^n$ e $C_C(\mathbb{R}^n) := \{\text{funzioni a supporto compatto}\}$, precisiamo che il **supporto** di una funzione è definito come la chiusura dell'insieme dei punti in cui è non zero

$$\operatorname{supp}(f) := \overline{\{x \mid f(x) \neq 0\}}$$

in quanto per le funzioni continue l'insieme $\{x \mid f(x) \neq 0\}$ è sempre aperto e dunque mai veramente compatto, a parte quando è vuoto.

Proposizione 4. Le funzioni in $C_C(\mathbb{R}^n)$ *ristrette a* X sono dense[1] in $L^p(X)$ per $p < +\infty$.

Vediamo prima alcuni lemmi.

Lemma 2. (di Urysohn) Dati C_0, C_1 chiusi disgiunti in X spazio metrico esiste una funzione $f\colon X \to [0,1]$ continua tale che $f = 0$ su C_0 e $f = 1$ su C_1.

Dimostrazione. Posta $d(x,C) = \inf\{d(x,y) \mid y \in C\}$ basta considerare

$$f(x) = \frac{d(x,C_0)}{d(x,C_0) + d(x,C_1)}.$$

[1] È denso anche l'insieme delle funzioni *continue* a supporto compatto ristretto a X e si indica con $\mathcal{C}^0_C(\mathbb{R}^n)$.

Lemma 3. Dato $E \subset \mathbb{R}^n$ limitato (e quindi di misura finita) esiste $f_\varepsilon \in C_C(\mathbb{R}^n)$ tale che $f_\varepsilon \xrightarrow{\varepsilon\to 0} \mathbb{1}_E$ in $L^p(\mathbb{R}^n)$ e quindi in $L^p(X)$.

Dimostrazione. Per regolarità della misura di Lebesgue abbiamo che per ogni ε esistono $C_\varepsilon \subset E \subset A_\varepsilon$ tali che $|A_\varepsilon \setminus C_\varepsilon| \leq \varepsilon$. Per il Lemma 2 possiamo definire la classe di funzioni $f_\varepsilon \colon \mathbb{R}^n \to [0,1]$ continue tali che

$$f_\varepsilon = 1 \text{ su } C_\varepsilon \qquad f_\varepsilon = 0 \text{ su } \mathbb{R}^n \setminus A_\varepsilon.$$

In particolare, sappiamo che su $A_\varepsilon \setminus C_\varepsilon$ vale $|f_\varepsilon - \mathbb{1}_E| \leq 1$. Allora,

$$\begin{aligned}\|f_\varepsilon - \mathbb{1}_E\|_p^p = \int_{A_\varepsilon \setminus C_\varepsilon} |f_\varepsilon - \mathbb{1}_E|^p \, \mathrm{d}x \leq \int_{A_\varepsilon \setminus C_\varepsilon} \mathbb{1}_{A_\varepsilon \setminus C_\varepsilon} \, \mathrm{d}x = |A_\varepsilon \setminus C_\varepsilon|^{1/p} \leq \varepsilon^{1/p} \\ \implies \|f_\varepsilon - \mathbb{1}_E\|_p^p \xrightarrow{\varepsilon\to 0} 0.\end{aligned}$$

□

Dimostrazione Proposizione 4. Per la Proposizione 3 basta approssimare la classe delle funzioni a supporto limitato (e finito). Dunque, per il Lemma 3 si ha la tesi.

2.8 Esercitazione del 13 ottobre

2.8.1 Esercizi su spazi $L^p(X)$ al variare di p e dello spazio X

Sia $X \subset \mathbb{R}^n$, μ la misura di Lebesgue e $1 \leq p_1 \leq p_2$.

Domanda. Possiamo confrontare gli spazi $L^{p_1}(X)$ e $L^{p_2}(X)$? In generale no.

Vediamo informalmente perché. Posto $X = (0, +\infty)$, gli integrali

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+x)^{\beta p}} \, \mathrm{d}x \qquad \int_0^{+\infty} \frac{1}{x^{\beta p}} \cdot \mathbb{1}_{[0,1]}(x) \, \mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{1}{x^{\beta p}} \, \mathrm{d}x$$

sono maggiorati dall'integrale di $1/x^\alpha$ dove l'esponente α è rispettivamente più piccolo e più grande di $\beta \cdot p$.

Utilizziamo questa intuizione per vedere formalmente che gli spazi $L^p(0, +\infty)$ non sono confrontabili.

Cerchiamo una funzione $f \in L^{p_1}(0, +\infty) \setminus L^{p_2}(0, +\infty)$ e una funzione $g \in L^{p_2}(0, +\infty) \setminus L^{p_1}(0, +\infty)$. Sia β un parametro e sia funzione f definita come segue

$$f(x) \coloneqq \begin{cases} 1/x^\beta & x \in (0,1) \\ 0 & x \geq 1 \end{cases}$$

ed ora imponiamo i vincoli sulle due norme

$$\begin{aligned} \|f\|_{p_1}^{p_1} &= \int_0^{+\infty} f(x)^{p_1} \, \mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{1}{x^{\beta p_1}} \, \mathrm{d}x < +\infty \iff \beta \cdot p_1 < 1 \\ \|f\|_{p_2}^{p_2} &= \int_0^{+\infty} f(x)^{p_2} \, \mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{1}{x^{\beta p_2}} \, \mathrm{d}x = +\infty \iff \beta \cdot p_2 \geq 1 \end{aligned}$$

dunque poiché $p_1 < p_2$ basta prendere $\beta \in [1/p_2, 1/p_1)$.

Ora cerchiamo $g \in L^{p_2}(0,+\infty) \setminus L^{p_1}(0,+\infty)$. Definiamo $g(x)$ come segue

$$g(x) \coloneqq \frac{1}{(1+x)^{\alpha}}$$

da cui

$$\int_0^{+\infty} g(x)^{p_2}\,\mathrm{d}x < +\infty \iff \alpha \cdot p_2 > 1 \quad \text{e} \quad \int_0^{+\infty} g(x)^{p_1}\,\mathrm{d}x = +\infty \iff \alpha \cdot p_1 \leq 1$$

Conclusione. In generale non c'è confrontabilità fra gli spazi L^p. La confrontabilità, dipende infatti dall'insieme X su cui sono definiti.

Nota. Un caso particolare è dato ponendo $p_1 < p_2$ e $\mu(X) < +\infty$. In tal caso $L^{p_2}(X) \subset L^{p_1}(X)$. Data $f \in L^{p_2}(X)$, cioè con $\int_X |f|^{p_2}\,\mathrm{d}\mu < +\infty$ vediamo che $\int_X |f|^{p_1}\,\mathrm{d}\mu < +\infty$.
Usiamo Hölder:

$$\int_X |f|^{p_1}\,\mathrm{d}\mu \leq \left(\int_X \overbrace{|h(x)|^p}^{|f(x)|^{p_1 p}}\,\mathrm{d}\mu\right)^{1/p} \cdot \left(\int_X 1^q\,\mathrm{d}\mu\right)^{1/q} \underbrace{\leq}_{p=p_1/p_2} \left(\int_X |f|^{p_2}\,\mathrm{d}\mu\right)^{p_2/p_1} \left(\int_X 1^q\,\mathrm{d}\mu\right)^{1/q}$$

$$\underbrace{=}_{q=\left(1-\frac{1}{p}\right)^{-1}=\frac{p}{p-1}=\frac{p_2/p_1}{p_2-p_1}} \|f\|^{p_1}_{L^{p_2}(X)} \cdot \mu(X)^{\frac{p_2-p_1}{p_2}}.$$

Dunque

$$\|f\|_{p_1} \leq \|f\|_{p_2} \cdot \mu(X)^{\frac{p_2-p_1}{p_1 p_2}}$$

L'inclusione

$$\begin{array}{rccc} i\colon & L^{p_2}(X) & \to & L^{p_1}(X) \\ & f & \mapsto & f \end{array}$$

è ben definita per quanto fatto sopra.

Esercizio. [TO DO] Vedere con quale topologia l'inclusione risulta continua.

Esercizio. [TO DO] Dato $p \geq 1$, stabilire se esistono X, μ tali che $f \in L^p(X)$ e $\forall q \geq 1$ con $q \neq p$ valga $f \notin L^q(X)$ (ovvero se esiste una funzione che appartiene ad un solo L^p).
Suggerimento. Pensare a $X = (0,+\infty)$, μ misura di Lebesgue.

Osservazione. $L^p(X)$ è uno spazio vettoriale di dimensione infinita, ossia ogni base algebrica ha cardinalità infinita. Vediamo il caso $X = (0,1)$. Per trovare una base infinita, cerchiamo per ogni $N \in \mathbb{N}$, un insieme di funzioni $f_1, \ldots, f_N \in L^p(0,1)$ tali che siano linearmente indipendenti. Vale a dire, presi $\lambda_1, \ldots, \lambda_N \in \mathbb{R}$ vale $\lambda_1 f_1 + \ldots + f_N = 0$ se solo se $\lambda_1 = \ldots = \lambda_N = 0$.

Ad esempio, definiamo $f_i \coloneqq \mathbb{1}_{i/N,(i+1)/N}$ (questa costruzione si può riprodurre per ogni $N \in \mathbb{N}$).

Ricordiamo che, essendo $L^p(X)$ uno spazio metrico, dato $Y \subset L^p$ vale la seguente caratterizzazione:

$$Y \text{ è compatto} \iff Y \text{ è compatto per successioni} \iff Y \text{ chiuso e totalmente limitato.}$$

Osservazione. $Y \subset L^p(X)$ è un sottoinsieme che eredita la norma $\|\cdot\|_{L^p}$:

$$Y \text{ è completo} \iff Y \text{ è chiuso.}$$

Osservazione. In L^p i sottoinsiemi chiusi e limitati non sono compatti[1]! In particolare le palle

$$Y = \{f \in L^p \mid \|f\|_{L^p} \leq 1\}$$

non sono compatte.

Ad esempio, mostriamo che in $L^p(0,1)$ le palle

$$B = \{f \in L^p \mid \|f\|_{L^p} \leq 1\}$$

non sono compatte. Per farlo, esibiamo una successione $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset B$ che non ammetta sottosuccessioni convergenti. La costruiamo in modo che non abbia sottosuccessioni di Cauchy

$$f_n \colon (0,1) \to \mathbb{R}, \quad \|f_n - f_m\|_{L^p} \geq c_0 > 0 \quad \forall n \neq m.$$

Cerchiamo $A_n \subset (0,1)$ tale che $|A_n \cap A_m| = 0$ per ogni $n \neq m$. Definiamo f_n come segue

$$f_n(x) := \begin{cases} 0 & \text{se } x \in (0,1) \setminus (1/(n+1), 1/n) \\ c_n > 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

dove c_n è tale che

$$\left(\int_{1/n+1}^{1/n} c_n^p\right)^{1/p} = 1 \iff c_n^p \cdot (1/n - 1/(n+1)) = 1 \iff c_n^p = n \cdot (n+1).$$

Calcoliamo ora $\|f_n - f_m\|_{L^p}^p$ con $n \neq m$:

$$\int_0^1 |f_n(x) - f_m(x)|^p \,\mathrm{d}x = \int_{(1/n,1/n+1)\cup(1/m+1,1/m)} |f_n - f_m|^p \,\mathrm{d}x = \int_{1/n+1}^{1/n} |f_n|^p \,\mathrm{d}x + \int_0^1 |f_m|^p \,\mathrm{d}x = 1 + 1 = 2.$$

Si osserva che quanto detto sopra vale anche per $p = +\infty$.

Esercizio. [TO DO] Sia $E = \{f \in L^1(1,+\infty) \mid |f(x)| \leq 1/x^2 \text{ e } x \in [1,+\infty)\}$.

- E è limitato in L^1?
- E è chiuso in L^1?
- E è compatto in L^1?

Soluzione.

i) Dimostriamo che $\|f\|_{L^1} < C$ per ogni $f \in E$.

$$\|f\|_{L^1} = \int_1^\infty |f(x)| \,\mathrm{d}x \leq \int_1^\infty 1/x^2 \,\mathrm{d}x < C.$$

ii) E è chiuso. Ci basta dimostrare che se $\{f_n\} \in E$ è convergente a f allora $f \in E$. Questo equivale a dimostrare che $|f(x)| < 1/x^2$. Dal fatto che $\{f_n\} \in E$ è convergente in L^1, abbiamo che esiste una sottosuccessione $\{f_{n_k}\}$ che converge puntualmente a f. Essendo che $|f_{n_k}| < 1/x^2$ per ogni $x \in [1,+\infty)$, per la continuità del modulo segue la tesi.

[1] Uno spazio metrico è compatto se solo se è completo e totalmente limitato. Ricordiamo che uno spazio metrico X si dice **totalmente limitato** se $\forall \varepsilon > 0$ esiste $B_\varepsilon^1, \ldots, B_\varepsilon^n$ tale che $X \subset \bigcup_{i=1}^n B_\varepsilon^i$.

iii) Da fare [TO DO]

Esercizio. [TO DO]

- Dire se $f_n(x) = x^n$, $n = 0, \dots, N$ è un insieme di funzioni linearmente indipendenti in $L^p([0,1])$.
- Dire se $\{f_n\} \subset L^p(0,1)$ è compatta in $L^p(0,1)$.

Suggerimento. Studiare il limite puntuale.

Soluzione.

i) Dimostriamolo per induzione.

   Passo base. [TO DO]

   Passo induttivo. $(n-1 \Rightarrow n)$ Vediamo che se $a_1 \cdot 1 + a_2 \cdot x + \dots + a_{n-1} \cdot x^{n-1} + a_n \cdot x^n = 0 \Longrightarrow a_1 = \ldots = a_n = 0$.

$$\begin{gathered} a_1 \cdot 1 + a_2 \cdot x + \dots + a_{n-1} \cdot x^{n-1} = -a_n \cdot x^n \\ \downarrow +a_n \cdot x^n \\ (a_1 + a_n) \cdot 1 + (a_2 + a_n) \cdot x + \dots + (a_{n-1} + a_n) \cdot x^{n-1} = 0 \end{gathered}$$

   essendo che $1, x^1, \dots, x^{n-1}$ sono linearmente indipendenti per ipotesi induttiva, vale $(a_i + a_n) = 0$ per ogni $i = 1, \dots, n-1$, da cui $a_i = 0$ per ogni $i = 1, \dots, n$.

ii) Dimostriamo che non è compatto. Se per assurdo lo fosse, dalla successione (f_n) potremmo estrarre una sottosuccessione convergente (f_{n_k}) in $L^p([0,1])$; denotiamo il limite con f. Per i risultati visti sulla convergenza, da (f_{n_k}) potremmo estrarre una sottosuccessione convergente quasi ovunque a f. Ma questo è assurdo perchè $\lim_n f_n = +\infty$.

2.8.2 Spazi ℓ^p

Prendiamo $X = \mathbb{N}$ e $\mu = \#$ la misura che conta i punti.

Osservazione. Definiamo

$$\ell^p = L^p(\mathbb{N}, \#) = \left\{ (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \;\middle|\; \sum_{n=0}^{+\infty} |x_n|^p < +\infty \right\}$$

con $p \geq 1$ e $p \neq +\infty$, e

$$l^\infty = \{\text{successioni limitate}\} = \left\{ (x_n) \;\middle|\; \sup_{n\in\mathbb{N}} |x_n| < +\infty \right\}.$$

Esempio (di insieme non compatto in ℓ^1). Consideriamo la successione (e_i) definita come

$$(e_i)_n := \begin{cases} 0 & \text{se } n \neq i \\ 1 & \text{se } n = i \end{cases}$$

si osserva inoltre che le successioni così definite sono linearmente indipendenti e generano se sono infiniti.

Esempio (di insieme compatto in ℓ^1). Sia $F = \{(x_n)_n \in \ell^1 \mid |x_n| \le 1/n^2 \quad \forall n \in \mathbb{N}\}$. Noto subito che F è limitato, infatti, presa

$$\underline{x} = (x_n) \in F, \quad \|\underline{x}\|_{\ell^1} = \sum_{n=0}^{+\infty} |x_n| \le \sum_{n=0}^{+\infty} 1/n^2 < +\infty.$$

F è anche chiuso.

Osservazione. Data una successione $(\underline{x}^k) \subset \ell^1$, se $\underline{x}^k \xrightarrow{\ell^1} \underline{x}^\infty$, vuol dire che

$$\left\|\underline{x}^k - \underline{x}^\infty\right\|_{\ell^1} = \sum_{n=0}^{+\infty} \left|x_n^k - x_n^\infty\right| \xrightarrow{k} 0.$$

In particolare, per ogni $n \in \mathbb{N}$ fissato, $\lim_k (x_n^k - x_n^\infty) = 0$.

F è chiuso perché se $(\underline{x}^k) \subset F$ e $\underline{x}^k \xrightarrow{\ell^1} \underline{x}^\infty$, allora per ogni $n \in \mathbb{N}$ vale

$$\left|x_n^k\right| \le 1/n^2 \quad \text{e} \quad \underbrace{\lim_{n\to+\infty} \left|x_n^k\right|}_{x_n^\infty} \le 1/n^2.$$

Dimostriamo che è compatto per successioni. Prendiamo $(\underline{x}^k) \subset F$, ogni componente x_n è equilimitata, quindi a meno di sottosuccessioni $x_n^{k_j}$ converge a x_n^∞. A meno di diagonalizzare, possiamo supporre che le successione k_j non dipenda da n. Inoltre gli elementi $x_n^{k_j}$ sono dominati da $y = (1/n^2)$. Concludiamo usando il teorema di convergenza dominata di Lebesgue.

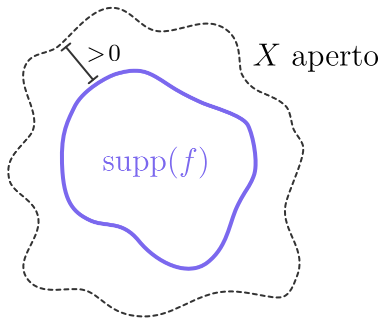
2.9 Complementi su approssimazioni di funzioni in L^p

Sia X misurabile in $\mathbb{R}^n$ con $\mu = \mathscr{L}^n$ su X. In precedenza abbiamo visto che

Proposizione 3. Le funzioni in $C_C(\mathbb{R}^n)$ *ristrette a* X sono dense in L^p se $p < +\infty$.

Osservazione. Si vede facilmente che $C_C(\mathbb{R}^n) \subset L^p(\mathbb{R}^n)$.

Domanda. Vale un risultato analogo per le funzioni $C_C(X)$?



Notiamo che dato $X \subset \mathbb{R}^n$ le funzioni continue su X hanno supporto compatto solo se X è aperto in quanto il supporto ha veramente distanza non nulla dal bordo e possiamo estendere la funzione a 0 fuori da X. [TODO: Esempio con un chiuso in cui le cose non fungono?]

Proposizione 4. Sia X aperto di $\mathbb{R}^n, \mu = \mathscr{L}^n$ allora $C_C(X)$ è denso in L^p per ogni $p < +\infty$

Dimostrazione.

- $\mathscr{S}_C :=$ {funzioni semplici con supporto compatto in X} è denso in $L^p(X)$ per ogni $p < +\infty$.
- Dato E relativamente compatto[1] in X esiste $f_n \in C_C(X)$ tale che $f_n \to \mathbb{1}_E$ in L^p per ogni $p < +\infty$.

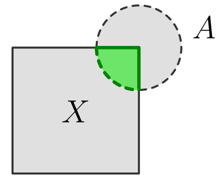
[1]Un sottospazio relativamente compatto di uno spazio topologico è un sottoinsieme dello spazio topologico la cui chiusura è compatta.

La Proposizione 3 non vale per $p = +\infty$, intuitivamente in quanto data $f \in L^\infty(X)$ discontinua, se trovassimo $f_n \to f$ in $L^\infty(X)$ con f_n continue avremmo $f_n \to f$ *uniformemente* e dunque f continua.

Fatto. In generale vale che data $f\colon X \to \mathbb{R}$ misurabile, $\|f\|_\infty \leq \sup_{x\in X} |f(x)|$ (detta anche *norma del sup*)

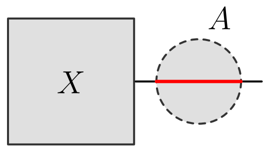
Esercizio. Se X è aperto in $\mathbb{R}^n$ e $\mu = \mathscr{L}^n$ e $f\colon X \to \mathbb{R}$ continua, allora $\|f\|_\infty = \sup_{x\in X} |f(x)|$.

Soluzione. Se per assurdo $\exists x \in X$ tale che $\|f\|_\infty < |f(x)|$ allora la continuità di f implica che esiste un intorno di x in cui $\|f\|_\infty < |f(x)|$; ma un intorno contiene una palla aperta di misura positiva. $\lightning$



In particolare possiamo anche estenderci a $X \subseteq \mathbb{R}^n$ tali che ogni A aperto relativamente a X abbia misura positiva.

Per spiegare meglio il perché la Proposizione 3 non si estende al caso $p = +\infty$ consideriamo



$$f(x) = \begin{cases} 1 & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$

e vediamo che $\nexists f_n\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tale che $f_n \to f$ in L^∞.

Se esistesse $(f_n)_n$, allora sarebbe di Cauchy rispetto alla norma $\|\cdot\|_\infty$ allora per continuità $(f_n)_n$ è di Cauchy anche rispetto alla norma del sup $\implies f_n \to \tilde{f}$ uniformemente con $\tilde{f}$ continua, quindi $\tilde{f} = f$ quasi ovunque ma questo non è possibile per la f definita sopra.

(In particolare dato $E = \{x \mid f(x) = \tilde{f}(x)\}$, prendiamo $x_n, y_n \in E$ tali che $x_n \uparrow 0$ e $y_n \downarrow 0$ ma i limiti di f sono 0 e 1 $\lightning$)

Teorema (di Lusin). Dato $X \subset \mathbb{R}^d, \mu = \mathscr{L}^d$ e data $f\colon X \to \mathbb{R}$ o $\mathbb{R}^m$ misurabile e $\varepsilon > 0$, esiste un aperto $E \subset X$ con $|E| \leq \varepsilon$ tale che f è continua su $X \setminus E$ (la restrizione di f a $X \setminus E$ è continua)

Osservazione. In generale f può essere non continua in tutti i punti di X, infatti E può essere denso e $X \setminus E$ avere parte interna vuota.

Lemma (di estensione di Tietze). Dato X spazio metrico e $C \subset X$ chiuso, $f\colon C \to \mathbb{R}$ continua allora f si estende a una funzione continua su X.

Usando questo lemma possiamo enunciare nuovamente il teorema precedente come segue

Teorema (di Lusin$'$). Data $f\colon X \to \mathbb{R}$ misurabile e $\varepsilon > 0$, $\exists E$ aperto con $|E| \leq \varepsilon$ e $g\colon X \to \mathbb{R}$ continua tale che $f = g$ su $X \setminus E$, inoltre se $f \in L^p(X)$ e $p < +\infty$ si può anche chiedere che $\|f - g\|_p \leq \varepsilon$.

Essenzialmente il teorema di Lusin ci dice che le funzioni misurabili (o in L^p), a meno di un insieme di misura arbitrariamente piccola, si comportano come funzioni continue.

Dimostrazione. Basta trovare E misurabile (per ottenere E aperto si usa la regolarità della misura)

- *Caso 1*: $f \in L^1(X)$ e $|X| < +\infty$

  Abbiamo che $f \in L^1 \implies \exists f_n$ continue tali che $f_n \to f$ in $L^1 \implies f_n \to f$ in misura e per *Severini-Egorov* esiste E tale che $|E| \leq \varepsilon$ e $f_n \to f$ uniformemente su $X \setminus E \implies f$ è continua su $X \setminus E$.

- *Caso 2*: f qualunque misurabile e $|X| < +\infty$

Lemma. Dati $X, \mathcal{A}, \mu$ con $\mu(X) < +\infty$ e data $f\colon X \to \mathbb{R}$ misurabile e $\varepsilon > 0$ esiste F misurabile con $\mu(F) \leq \varepsilon$ tale che f è limitata su $X \setminus F$.

Dimostrazione. $\forall m > 0$ sia $F_m := \{x \mid |f(x)| > m\}$ allora $F_m \downarrow \varnothing \implies \mu(F_m) \downarrow 0$ e quindi esiste m tale che $\mu(F_m) \leq \varepsilon$.

Quindi data f qualunque misurabile e $|X| < +\infty$ esiste F misurabile tale che $|F| \leq \varepsilon/2$ e con f limitata su $X \setminus F \implies f \in L^\infty(X \setminus F) \subset L^1(X \setminus F)$, dunque per il *Caso 1* esiste E misurabile tale che $|E| \leq \varepsilon/2$ e f è continua su $X \setminus (E \cup F)$ e $\mu(E \cup F) \leq \varepsilon$

- *Caso 3*: f qualunque misurabile

  Per ogni n poniamo $X_n \coloneqq X \cap B(0, n)$ per il *Caso 2* esistono E_n misurabili con $|E_n| \leq \varepsilon/2^n$ tali che f è continua su $X_n \setminus E_n$, infine prendo $E \coloneqq \bigcup_{n=1}^\infty E_n$ con $\mu(E) \leq \varepsilon \implies f$ è continua su $X_n \setminus E$ per ogni $n \implies f$ è continua su $X \setminus E$.

$\square$

2.10 Alcune proprietà degli spazi normati

Proposizione. Siano V, W spazi normati, $T\colon V \to W$ lineare. Sono fatti equivalenti

i) T è continua in 0.

ii) T è continua.

iii) T è lipschitziana, cioè esiste una costante $c < +\infty$ tale che $\|Tv - Tv'\|_W \leq c\,\|v - v'\|_V$.

iv) Esiste una costante c tale che $\|Tv\|_W \leq c\,\|v\|_V$ per ogni $v \in V$.

v) Esiste una costante c tale che $\|Tv\|_W \leq c$ per ogni $v \in V$, $\|v\|_V = 1$.

Dimostrazione. v) $\Rightarrow$ iv). Vale la seguente

$$\|Tv\|_W \underbrace{=}_{v=\lambda\widetilde{v},\,\|\widetilde{v}\|_V=1} |\lambda|\,\|T\widetilde{v}\|_W \leq c\lambda = c\,\|v\|_V \leq 1.$$

iv) $\Rightarrow$ iii). Vale la seguente

$$\|Tv - Tv'\|_W = \|T(v - v')\|_W \leq c\,\|v - v'\|_W\,.$$

iii) $\Rightarrow$ ii).
i) $\Rightarrow$ v). T continua in 0, dunque esiste $\delta > 0$ tale che

$$\|Tv - T0\|_W \leq 1 \quad \text{se} \quad \|v - 0\|_V \leq \delta,$$

cioè

$$\|Tv\| \leq 1 \quad \text{se} \quad \|v\| \leq \delta,$$

da cui segue che $\|Tv\| \leq 1/\delta$ se $\|v\| \leq 1$. $\square$

Osservazione. Le costanti ottimali iii), iv), v) sono uguali e valgono

$$c = \sup_{\|v\|_V \leq 1} \|Tv\|_W\,.$$

Esempi.

i) Sia $X, \mathcal{A}, \mu$ coma al solito, con $\mu(X) < +\infty$. Allora, dati $1 \leq p_1 < p_2 \leq +\infty$, vale

$$L^{p_2}(X) \subset L^{p_1}(X). \tag{$\star$}$$

Inoltre, l'inclusione $i\colon L^{p_2}(X) \to L^{p_1}(X)$ è continua.

Dimostrazione. La dimostrazione di $(\star)$ segue dalla stima

$$\|u\|_{p_1} \underbrace{\leq}_{\text{Hölder generalizzato}} \|\mathbb{1}_X\|_q \|u\|_{p_2} \quad \text{dove} \quad q = \frac{p_1 p_2}{p_2 - p_1}.$$

Dove

$$\|\mathbb{1}_X\|_{\frac{p_1 p_2}{p_2 - p_1}} \|u\|_{p_2} = (\mu(X))^{\frac{1}{p_1} - \frac{1}{p_2}} \|u\|_{p_2}.$$

Quanto sopra soddisfa la condizione al punto iv). □

ii) L'applicazione $L^1(X) \ni u \mapsto \displaystyle\int u \,\mathrm{d}\mu \in \mathbb{R}$ è continua.

Dimostrazione. Infatti, vale

$$\left| \int_X u \,\mathrm{d}\mu \right| \leq \int_X |u| \,\mathrm{d}\mu = \|u\|_1.$$

Quanto sopra soddisfa la condizione al punto iv). □

iii) Cosa possiamo dire invece dell'applicazione $L^p(X) \ni u \mapsto \displaystyle\int u \,\mathrm{d}\mu \in \mathbb{R}$? Se $\mu(X) < +\infty$ la continuità segue dagli esempi i) e ii) sopra. Se invece $\mu(X) = +\infty$? Per esempio $L^2(\mathbb{R})$? [TO DO].

2.11 Convoluzione

Definizione. Date $f_1, f_2\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ misurabili, il **prodotto di convoluzione** $f_1 * f_2$ è la funzione (da $\mathbb{R}^d$ a $\mathbb{R}$) data da

$$f_1 * f_2(x) = \int_{\mathbb{R}^d} f_1(x-y) f_2(y) \,\mathrm{d}y$$

Osservazioni.

i) La definizione sopra è ben posta se $f_1, f_2 \geq 0$ ($f_1 * f_2(x)$ può essere anche $+\infty$). In generale non è ben posta per funzioni a valori reali (non è detto che l'integrale esista).

Ad esempio, se prendiamo $f_1 = 1$ e $f_2 = \sin x$ con $d = 1$, allora $f_1 * f_2(x)$ non è definito per alcun x.

ii) Se $f_1 * f_2(x)$ esiste, allora $f_1 * f_2(x) = f_2 * f_1(x)$, infatti

$$f_1 * f_2(x) = \int_{\mathbb{R}^d} f_1(x-y) f_2(y) \,\mathrm{d}y = \begin{pmatrix} t := x - y \\ \mathrm{d}t = \mathrm{d}y \end{pmatrix} = \int_{\mathbb{R}^d} f_1(t) f_2(x-t) \,\mathrm{d}t = f_2 * f_1(x).$$

iii) È importante che f_1, f_2 siano definite su $\mathbb{R}^d$ e che la misura sia quella di Lebesgue.

In realtà, si può generalizzare quanto sopra rimpiazzando $(\mathbb{R}^d, \mathscr{L}^d)$ con (G, μ), dove G è un gruppo commutativo e μ una misura su G invariante per traslazione[2]. Per esempio, $\mathbb{Z}$ con la misura che conta i punti. Cioè $f_1, f_2 \colon \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$, vale

$$f_1 * f_2(n) := \sum_{n \in \mathbb{Z}} f_1(n-m) f_2(m).$$

iv) Data f distribuzione di massa (continua) su $\mathbb{R}^3$, il potenziale gravitazionale generato è

$$v(x) = \int_{y \in \mathbb{R}^d} \frac{1}{|x-y|} \rho(y) \, \mathrm{d}y$$

cioè $v = g * \rho$, dove $g(x) = 1/|x|$ è il potenziale di una massa puntuale in 0.

v) Se X_1, X_2 sono variabili aleatorie (reali) con distribuzione di probabilità continua p_1, p_2 e X_1, X_2 sono indipendenti, allora $X_1 + X_2$ ha distribuzione di probabilità $p_1 * p_2$. (Facile per X_1, X_2 in $\mathbb{Z}$).

Proposizione 1. Se $|f_1| * |f_2|(x) < +\infty$ allora $f_1 * f_2(x)$ è ben definito, in quanto $|f_1 * f_2(x)| \leq |f_1| * |f_2|(x)$.

Dimostrazione. Basta osservare che,

$$\begin{aligned} f_1 * f_2(x) = \int_{\mathbb{R}^d} f_1(x-y) \cdot f_2(y) \, \mathrm{d}y &\leq \left| \int_{\mathbb{R}^d} f_1(x-y) \cdot f_2(y) \, \mathrm{d}y \right| \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^d} |f_1(x-y) \cdot f_2(y)| \, \mathrm{d}y = |f_1| * |f_2|(x) < +\infty. \end{aligned}$$

□

Corollario 2. Se $|f_1| * |f_2| \in L^p(\mathbb{R}^d)$ con $1 \leq p \leq +\infty$ allora $f_1 * f_2(x)$ è ben definito per quasi ogni $x \in \mathbb{R}^d$ e $\|f_1 * f_2\|_p \leq \||f_1| * |f_2|\|_p$.

Dimostrazione. Segue subito dalla proposizione precedente. □

2.11.1 Disuguaglianza di Young per convoluzione

Teorema 3 Se $f_1 \in L^{p_1}(\mathbb{R}^d)$ e $f_2 \in L^{p_2}(\mathbb{R}^d)$ e preso $r \geq 1$ tale che

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} - 1, \tag{$\star$}$$

allora $f_1 * f_2$ è ben definito quasi ovunque e

$$\|f_1 * f_2\|_r \leq \|f_1\|_{p_1} \cdot \|f_2\|_{p_2} \tag{$\star\star$}$$

Osservazioni.

- Nel caso di prima 1 e $\sin x$ sono solo in L^∞ infatti viene $r = -1$ e la disuguaglianza non ha senso.

[2]Ovvero per ogni $g \in G$ e $E \subset G$, posto $E + g := \{x + g \mid x \in E\}$, allora vale $\mu(E) = \mu(E + g)$

- Supponiamo di avere $\|f_1 * f_2\| \leq C \cdot \|f_1\|_{p_1}^{\alpha_1} \cdot \|f_2\|_{p_2}^{\alpha_2}$ allora vediamo che per ogni f_1, f_2 positiva deve valere necessariamente $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$ e la condizione (**??**).

  Dimostrazione. Per ogni $\lambda > 0$ consideriamo λf_1 e f_2, allora

  $$\|(\lambda f_1) * f_2\|_r = \|\lambda(f_1 * f_2)\|_r = \lambda \|f_1 * f_2\|_r$$

  ma abbiamo anche

  $$\|(\lambda f_1) * f_2\|_r \leq C \cdot \|\lambda f_1\|_{p_1}^{\alpha_1} \cdot \|f_2\|_{p_2}^{\alpha_2} = C \cdot \lambda^{\alpha_1} \|f_1\|_{p_1}^{\alpha_1} \cdot \|f_2\|_{p_2}^{\alpha_2},$$

  da cui necessariamente $\alpha_1 = 1$ e di conseguenza $\alpha_2 = 1$.

  A questo punto richiediamo anche che f_1 e f_2 siano tali che $\|f_1\|_{p_1}, \|f_2\|_{p_2} < +\infty$ e $\|f_1 * f_2\| > 0$ (questo possiamo farlo in quanto basta prendere $f_1 = f_2 = \mathbb{1}_B$ con B una palla, nel caso segue proprio che $f_1 * f_2(x) > 0$ se $|x| < 1$).

  Data $f \colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ e $\lambda > 0$ poniamo $R_\lambda f(x) \coloneqq f(x/\lambda)$ allora abbiamo

  $$\begin{aligned} \|(R_\lambda f_1) * (R_\lambda f_2)\|_r &= \left\| \int_{\mathbb{R}^d} f_1\left(\frac{x-y}{\lambda}\right) \cdot f_2\left(\frac{y}{\lambda}\right) \mathrm{d}y \right\| = \begin{pmatrix} t = y/\lambda \\ \lambda \, \mathrm{d}t = \mathrm{d}y \end{pmatrix} \\ &= \lambda^d \cdot \left\| \int_{\mathbb{R}^d} f_1\left(\frac{x}{\lambda} - t\right) \cdot f_2(t) \, \mathrm{d}t \right\| \\ &= \lambda^d \cdot \|R_\lambda(f_1 * f_2)\|_r \end{aligned}$$

  Per il punto successivo abbiamo $\|R_\lambda(g)\|_r = \lambda^{d/r} \|g\|_r$, da cui otteniamo

  $$\|(R_\lambda f_1) * (R_\lambda f_2)\|_r = \lambda^{d\left(1+\frac{1}{r}\right)} \|f_1 * f_2\|_r.$$

  Ma anche

  $$\|(R_\lambda f_1) * (R_\lambda f_2)\|_r \leq C \cdot \|R_\lambda f_1\|_{p_1} \cdot \|R_\lambda f_2\|_{p_2} = \lambda^{d\left(\frac{1}{p_1}+\frac{1}{p_2}\right)} \cdot \|f_1\|_{p_1} \cdot \|f_2\|_{p_2}.$$

  Dunque sicuramente abbiamo $\lambda^{d(1+1/r)} \leq C \cdot \lambda^{d(1/p_1+1/p_2)}$ per ogni $\lambda > 0$ e quindi $1+1/r = 1/p_1 + 1/p_2$. □

- $\|R_\lambda f\|_p = \lambda^{d/p} \|f\|_p$ ed in realtà possiamo ricavare l'esponente d/p per *analisi dimensionale*[3]. Consideriamo l'espressione

  $$\|f\|_p^p = \int_{\mathbb{R}^d} f(x) \, \mathrm{d}x.$$

  Se $f(x)$ è una *quantità adimensionale* allora $\int_{\mathbb{R}^d} f \, \mathrm{d}x$ ha dimensione di un *volume* L^d, da cui $\|f\|_p$ ha dimensione di $\mathsf{L}^{d/p}$.

  Similmente, per ottenere $\|R_\lambda(f_1 * f_2)\|_r = \lambda^{d(1+1/r)} \|f_1 * f_2\|_r$, basta osservare che

  $$f_1 * f_2(x) = \int_{\mathbb{R}^d} f_1(x-y) f_2(y) \, \mathrm{d}y$$

  ha dimensione L^d, da cui

  $$\|f_1 * f_2\|_r = \left(\int_{\mathbb{R}^d} \underbrace{|f_1 * f_2|^r}_{\mathsf{L}^{dr}} \underbrace{\mathrm{d}x}_{\mathsf{L}^d} \right)^{1/r}$$

  ha dimensione di $\mathsf{L}^{d(1+1/r)}$. □

[3] Ovvero studiando le potenze delle unità di misura delle varie quantità.

Dimostrazione Teorema 3. Per via del Corollario 2 ci basta dimostrare (??) se $f_1, f_2 \geq 0$.

- *Caso facile.* Se $p_1 = p_2 = 1$ e $r = 1$

$$\begin{aligned}\|f_1 * f_2\|_1 &= \int f_1 * f_2(x)\,\mathrm{d}x = \iint f_1(x-y)f_2(y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \int f_2(y)\int f_1(x-y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \\ &= \int \|f_1\|_1 \cdot f_2(y)\,\mathrm{d}y = \|f_1\|_1 \cdot \|f_2\|_1\end{aligned}$$

- *Caso leggermente meno facile.* Se $p_1 = p, p_2 = 1$ e $r = p$. Vogliamo vedere che

$$\|f_1 * f_2\|_p \leq \|f_1\|_p \cdot \|f_2\|_1$$

allora

$$\begin{aligned}\|f_1 * f_2\|_p &= \int_{\mathbb{R}^d} (\underbrace{f_1 * f_2}_{h})^p\,\mathrm{d}x = \int h \cdot h^{p-1}\,\mathrm{d}x = \iint f_1(x-y)f_2(y)h^{p-1}(x)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \\ &= \int f_2(y)\int f_1(y-x)h^{p-1}(x)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \overset{\text{Hölder}}{\leq} \int \|f_1(y-\,\cdot\,)\|_p \|h^{p-1}\|_{p'} f_2(y)\,\mathrm{d}y\end{aligned}$$

con p' esponente coniugato a p. Inoltre notiamo che $\|f_1(y-\,\cdot\,)\|_p = \|f_1\|$ per invarianza di $\mathscr{L}^d$ per riflessioni e traslazioni. Infine otteniamo

$$\|f_1\|_p \|h^{p-1}\|_{p'} \|f_2\|_1 = \|f_1\|_p \|h\|_{p'}^{p-1} \|f_2\|_1 .$$

Dunque, $\|f_1 * f_2\|_p^p \leq \|f_1 * f_2\|_p^{p-1} \|f_1\|_p \|f_2\|_1 \implies \|f_1 * f_2\|_p \leq \|f_1\|_p \|f_2\|_1$. Quest'ultima implicazione però è valida solo nel caso in cui $0 < \|f_1 * f_2\|_p < +\infty$. Resterebbero da controllare i due casi in cui la norma è 0 oppure $+\infty$. Il primo è ovvio; il secondo invece si fa per approssimazione e passando al limite.

Consideriamo f_1, f_2 e approssimiamole con $f_{1,n}, f_{2,n}$ limitate a supporto compatto, allora vale $\|f_{1,n} * f_{1,n}\|_p \leq \|f_{1,n}\|_p \cdot \|f_{2,n}\|_1$ e passando al limite si ottiene la tesi. In particolare possiamo costruire le f_n come

$$f_n(x) \coloneqq (f(x) \cdot \mathbb{1}_{\mathcal{B}(0,n)}(x)) \wedge n$$

Osservazione. Se $f_2 \geq 0$ e $\int f_2\,\mathrm{d}x = 1$ allora $\|f_1 * f_2\|_p \leq \|f_1\|_p$ è una versione semplificata della proposizione precedente, in particolare la dimostrazione si semplifica in quanto possiamo pensare a f_2 come distribuzione di probabilità e quindi $f_1 * f_2$ è una "media pesata" delle traslazioni di f_1 o più precisamente una combinazione convessa "integrale".

- *Caso generale.* Non lo facciamo perché servono mille mila parametri e non è troppo interessante.

□

Nel caso $r = +\infty$ gli esponenti p_1 e p_2 sono proprio coniugati e possiamo rafforzare la tesi del teorema precedente.

Teorema 4 (caso $r = +\infty$ del Teorema 3). Dati p_1 e p_2 esponenti coniugati e $f_1 \in L^{p_1}(\mathbb{R}^d)$, $f_2 \in L^{p_2}(\mathbb{R}^d)$, allora

i) $f_1 * f_2(x)$ è ben definito per ogni $x \in \mathbb{R}^d$

ii) $|f_1 * f_2(x)| \leq \|f_1\|_{p_1} \|f_2\|_{p_2}$

iii) $f_1 * f_2$ è uniformemente continua

iv) Se $1 < p_1, p_2 < +\infty$ allora $f_1 * f_2 \to 0$ per $|x| \to +\infty$, ovvero è infinitesima a $\pm\infty$.

Premettiamo i seguenti risultati.

Proposizione 5. Data $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$ con $p < +\infty$ la mappa di traslazione

$$\begin{array}{rccc} \tau_h f: & \mathbb{R}^d & \to & L^p(\mathbb{R}^d) \\ & h & \mapsto & f(\,\cdot - h) \end{array}$$

è continua.

Lemma 6. Lo spazio $C_0(\mathbb{R}^d) = \{f\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R} \text{ continue con } f(x) \to 0 \text{ per } |x| \to \infty\}$ è chiuso rispetto alla convergenza uniforme.

Dimostrazione Teorema 4.

i) Osserviamo che

$$|f_1| * |f_2|(x) = \int_{\mathbb{R}^d} |f_1(x-y)| \cdot |f_2(y)| \,\mathrm{d}y \overset{\text{Hölder}}{\leq} \|f_1(x - \,\cdot\,)\|_{p_1} \|f_2\|_{p_2} = \|f_1\|_{p_1} \|f_2\|_{p_2}$$

e concludiamo per la Proposizione 1.

ii) Dal punto precedente abbiamo che $|f_1| * |f_2|(x) \leq \|f_1\|_{p_1} \|f_2\|_{p_2}$, da cui si conclude banalmente.

iii) Uno tra p_1 e p_2 è finito; supponiamo lo sia p_1. Fissiamo $x, h \in \mathbb{R}^d$

$$f_1 * f_2(x+h) - f_1 * f_2(x) = \int_{\mathbb{R}^d} (f_1(x+h-y) - f_1(x-y))\, f_2(y) \,\mathrm{d}y$$

quindi

$$\begin{aligned} |f_1 * f_2(x+h) - f_1 * f_2(x)| &\leq \int |f_1(x+h-y) - f_1(x-y)|\, |f_2| \,\mathrm{d}y \\ &\overset{\text{Hölder}}{\leq} \|f_1(x+h- \,\cdot\,) - f_1(x - \,\cdot\,)\|_{p_1} \|f_2\|_{p_2} \\ &= \|f_1(\,\cdot - h) - f_1(\,\cdot\,)\|_{p_1} \|f_2\|_{p_2} \\ &= \underbrace{\|\tau_h f_1 - f_1\|_{p_1}}_{\xrightarrow[\text{Proposizione 5}]{h \to 0} 0} \|f_2\|_{p_2}. \end{aligned}$$

iv) Approssimiamo f_1 e f_2 con $f_{1,n}$ e $f_{2,n} \in \mathcal{C}_C(\mathbb{R}^d)$ in L^{p_1} e L^{p_2} rispettivamente.

Osserviamo che $f_{1,n} * f_{2,n} \in \mathcal{C}_C(\mathbb{R}^d) \subset \mathcal{C}_0(\mathbb{R}^d)$. Per il Lemma 6 basta dimostrare che $f_{1,n} * f_{2,n} \longrightarrow f_1 * f_2$ uniformemente

$$\begin{aligned} \|f_{1,n} * f_{2,n} - f_1 * f_2\|_\infty &= \|(f_{1,n} * f_{2,n} - f_{1,n} * f_2) + (f_{1,n} * f_2 - f_1 * f_2)\|_\infty \\ &\overset{\text{lin della conv}}{\leq} \|f_{1,n} * (f_{2,n} - f_2)\|_\infty + \|(f_{1,n} - f_1) * f_2\|_\infty \\ &\overset{ii)}{\leq} \underbrace{\|f_{1,n}\|_{p_1}}_{\to \|f_1\|_{p_1}} \underbrace{\|f_{2,n} - f_2\|_{p_2}}_{\to 0} + \underbrace{\|f_{1,n} - f_1\|_{p_1}}_{\to 0} \|f_2\|_{p_2}. \end{aligned}$$

Quindi $\|f_{1,n} * f_{2,n} - f_1 * f_2\|_\infty \to 0$. □

2.12 Esercitazione del 21 ottobre

Data $T \colon X \to Y$ lineare tra X, Y spazi normati, allora T è continua se solo se esiste $C > 0$ tale che $\|T(x)\|_Y \leq C \|x\|_X$ per ogni $x \in X$.

Applichiamo questo risultato.

i) Sia $X = \mathbb{R}^d$. L'applicazione $L^1(\mathbb{R}^d) \ni u \xmapsto{T} \int_{\mathbb{R}^d} u \, \mathrm{d}x$ è lineare e continua in quanto limitata. Infatti:

$$|T(u)| = \left| \int_{\mathbb{R}^d} u \, \mathrm{d}x \right| \leq \int_{\mathbb{R}^d} |u| \, \mathrm{d}x = \|u\|_{L^1(\mathbb{R}^d)} .$$

ii) Studiamo ora il caso per $p > 1$. Data $u \in L^p(\mathbb{R}^d)$, l'applicazione

$$u \mapsto \int_{\mathbb{R}^d} u \, \mathrm{d}x$$

potrebbe non essere ben definita.

Ad esempio se restringiamo il dominio a $L^p(\mathbb{R}^d) \cap L^1(\mathbb{R}^d)$ l'applicazione sopra è ben definita, ma in generale non è continua. Più formalmente, la mappa

$$T \colon \left(L^p \cap L^1(\mathbb{R}^d), \|\cdot\|_{L^p} \right) \to \mathbb{R}$$

è lineare ma non continua.

Studiamo il caso reale, ovvero $d = 1$.

Per verificare quanto sopra, utilizziamo la definizione di continuità per successioni. Definiamo una successione di funzioni a supporto compatto u_n, che sappiamo essere in tutti gli spazi L^p, e verifichiamo che $\lim_n T(u_n) \neq T(u_\infty)$ dove $u_\infty \coloneqq \lim_n u_n$.

Definiamo la successione come segue (fare disegno):

$$u_n(x) = \frac{1}{n} \mathbb{1}_{[n,2n]} = \begin{cases} \frac{1}{n} & \text{se} \quad n \leq x \leq 2n \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Dunque, $T(u_n) = \int_{\mathbb{R}} u_n \, \mathrm{d}x = \frac{1}{n} |E_n| = 1$, dove $E_n = [n, 2n]$. Segue che $T(u_n) \equiv 1$ ma rispetto alla convergenza in L^p, $T(u_n) \not\to T(u_\infty) = T(0) = 0$.

Più in generale, quando $u \in L^p(\mathbb{R}^d)$ con $p > 1$, una costruzione come sopra non funziona, infatti

$$\|u_n\|^p_{L^p(\mathbb{R})} = \int_{\mathbb{R}} u_n^p(x) \, \mathrm{d}x = \frac{1}{n^p} \cdot |E_n| = \frac{n}{n^p} = \frac{1}{n^{p-1}} \xrightarrow{n \to \infty} 0.$$

Un altro modo per dimostrare quanto sopra è verificare che, per ogni $C > 0$, esiste una funzione $u \in L^p(\mathbb{R}^d) \cap L^1(\mathbb{R}^d)$ tale per cui

$$\left| \int_{\mathbb{R}} u \, \mathrm{d}x \right| > C \left(\int_{\mathbb{R}} |u|^p \, \mathrm{d}x \right)^{1/p} .$$

Notiamo che questo è proprio l'esercizio che segue.

Esercizio. Fissato $C > 0$, trovare $u \in L^p \cap L^1(\mathbb{R})$ tale che

$$\left| \int_{\mathbb{R}} u \, \mathrm{d}x \right| > C \, \|u\|_{L^p(\mathbb{R})} \tag{$\star$}$$

Dimostrazione. Fissato $C > 0$, cerchiamo una funzione in L^p il cui integrale in modulo sia maggiore di C per la sua norma L^p. Per trovare u consideriamo la successione di funzioni definita come segue

$$f_n = \begin{cases} 1/x & 1 \le x \le n \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}.$$

Le funzioni f_n sono a supporto compatto e stanno in ogni L^p. Notiamo che $f_n \uparrow f$ definita come

$$f = \begin{cases} 1/x & x > 1 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

ed $f \in L^p$ per ogni $p > 1$. In particolare, $\left(\int_{\mathbb{R}} |f_n|^p \right)^{1/p} \le \left(\int_{\mathbb{R}} |f|^p \right)^{1/p} \underbrace{\le}_{f \in L^p \ \forall p > 1} +\infty$ per ogni n.

Quindi il secondo membro di (**??**) è maggiorato da una costante che non dipende da n. D'altra parte, per Beppo Levi $\lim_n \int_{\mathbb{R}} f_n \, \mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}} f \, \mathrm{d}x$ che non sta in L^1. In conclusione, esiste un n abbastanza grande per cui vale (**??**). $\square$

Esercizio. Sia $p \ge 1$ e $E = \left\{ u \in L^p(-1,1) \colon \fint_{-1}^{1} u \, \mathrm{d}x = 0 \right\}$.

i) Dire se E è limitato in $L^p(-1,1)$.

ii) Dire se E è chiuso in $L^p(-1,1)$.

Soluzione.

i) Dimostrare che E è limitato in $L^p(-1,1)$ equivale a dimostrare che esiste $M > 0$ tale che ogni $u \in L^p(-1,1)$, $\fint_{-1}^{1} u \, \mathrm{d}x = 0$ verifica $\|u\|_{L^p} \le M$.

   Vediamo che E non è limitato. Preso $M > 0$, riesco sempre a trovare una funzione maggiore di M in norma. Ad esempio la funzione definita come

$$u(x) \coloneqq \begin{cases} M & \text{se} \quad x \in (0,1) \\ -M & \text{se} \quad x \in (-1,0) \end{cases}$$

   ha norma $\|u\|_{L^p}^p = 2M^p$.

   Nota. Aveva senso cercare il controesempio nella classe delle funzioni dispari e limitate, perché hanno media zero, e perché sono in tutti gli L^p.

ii) Vediamo che E è chiuso.

   Nota. Possiamo dimostrarlo usando i teoremi di convergenza, ma seguiremo un'altra strada.

- *Caso* $p > 1$. Definiamo l'operatore
$$\begin{aligned} T\colon L^p(-1,1) &\to \mathbb{R} \\ u &\mapsto \int_{-1}^1 u \, \mathrm{d}x \end{aligned}$$
è ben definito. Infatti, per Hölder vale
$$\left| \int_{-1}^1 1 \cdot u \, \mathrm{d}x \right| \leq \left(\int_{-1}^1 |u|^p \, \mathrm{d}x \right)^{1/p} (1^q)^{1/q}$$
dove $q = \frac{p}{p-1}$. Allora
$$|T(u)| \leq \|u\|_{L^p(-1,1)} \cdot 2^{\frac{p}{p-1}}.$$
Dunque T è continuo in L^p per ogni $p > 1$.
- *Caso* $p = 1$. L'operatore sopra è continuo anche per $p = 1$. Grazie alla stima vista prima
$$|T(u)| = \left| \int_{-1}^1 u \, \mathrm{d}x \right| \leq \int_{-1}^1 |u| \, \mathrm{d}x = \|u\|_{L^1}.$$
Dunque T è continua e $T^{-1}(0) = E$, dunque E è chiuso.

Esercizio. [TO DO] Sia $p \geq 1$. Definiamo
$$F = \left\{ v \in L^p(\mathbb{R}) \;\middle|\; \int_0^1 v(x) \, \mathrm{d}x - 2 \int_{-1}^0 v(x) \, \mathrm{d}x = 3 \right\}.$$
Dire se F è chiuso in $\left(L^p(\mathbb{R}), \| \cdot \|_{L^p(\mathbb{R})} \right)$.

Esercizio. [TO DO] Sia
$$G = \left\{ v \in L^p(0,2\pi) \;\middle|\; \int_0^{2\pi} v(x) \sin(x) \, \mathrm{d}x = 1 \right\}.$$
Dire se G è chiuso in $L^2(0,2\pi)$.

Domanda. Dato $L^p(X,\mu)$ e V sottospazio di $L^p(X,\mu)$, posso dire che V è chiuso?

In generale no! Infatti esistono sottospazi densi in $L^p(X,\mu)$.

Ad esempio in ℓ^2 consideriamo l'insieme denso
$$V = \{ \{x_n\} \mid x_n = 0 \quad \text{definitivamente} \}.$$
Vediamo che non è chiuso. Sia $\underline{x} \in \ell^2$, definita come $\underline{x} = \{1/n\}_{n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}}$, diciamo che $\underline{x} = \lim_{n \to +\infty} \underline{x}^n$ dove
$$x_n^k = \begin{cases} \frac{1}{n} & 1 \leq n \leq k \\ 0 & n > k, n = 0 \end{cases}$$
abbiamo che
$$\left\| \underline{x} - \underline{x}^k \right\|_{\ell^2}^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \left| x_n - x_n^k \right|^2 = \sum_{n=k+1}^{+\infty} |x_n|^2 = \sum_{n=k+1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \xrightarrow{k \to +\infty} 0$$
abbiamo così trovato una successione che converge fuori da V segue che V non è chiuso.

Vediamo un altro esempio. Siano $X = \mathbb{R}$, μ la misura di Lebesgue e $p > 1$. In tal caso, l'insieme $L^p \cap L^1(\mathbb{R})$ è un sottospazio denso in $(L^1(\mathbb{R}), \|\cdot\|_{L^1})$ e $(L^p(\mathbb{R}), \|\cdot\|_{L^p})$.

Nota. L'insieme $L^2(\mathbb{R}) \cap L^1(\mathbb{R})$ è un sottospazio proprio di $L^1(\mathbb{R})$. Diciamo che non è chiuso in $\|\cdot\|_{L^1(\mathbb{R})}$ perché è denso. Infatti,

$$\mathcal{C}^0_C(\mathbb{R}) \subset L^2(\mathbb{R}) \cap L^1(\mathbb{R}).$$

2.12.1 Convoluzione

Sia $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ e sia $g \colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ continua a supporto compatto[4].

$$|g(x) - g(y)| \leq M\, |x - y|_{\mathbb{R}^d}\,.$$

Esercizio. Dimostrare che $f * g$ è ben definita e lipschitziana, dove $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ e $g \in \mathcal{C}^0_C(\mathbb{R}^d)$.

Verifichiamo che la convoluzione è ben definita. Dal fatto che $g \in \mathcal{C}^0_C(\mathbb{R}^d)$ abbiamo in particolare che g è limitata, da cui

$$f * g = \int_{\mathbb{R}^d} f(x-y)\cdot g(y)\,\mathrm{d}y \overset{|g|\leq M}{\leq} M \cdot \int_{\mathbb{R}^d} f(x-y)\,\mathrm{d}y \overset{f \in L^1(\mathbb{R}^d)}{<} +\infty.$$

Ora verifichiamo che $f * g$ è lipschitziana. Consideriamo $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^d$

$$|f * g(x_1) - f * g(x_2)| = \left| \int_{\mathbb{R}^d} f(x_1 - x) g(y)\,\mathrm{d}y - \int_{\mathbb{R}^d} f(x_2 - y) g(y)\,\mathrm{d}y \right|$$

Usiamo la proprietà che, essendo $f * g$ ben definita, si ha $f * g(x) = g * f(x)$. Da cui

$$\begin{aligned}
|f * g(x_1) - f * g(x_2)| &= \left| \int_{\mathbb{R}^d} g(x_1 - y) f(y)\,\mathrm{d}y - \int_{\mathbb{R}^d} g(x_2 - y) f(y)\,\mathrm{d}y \right| \\
&= \left| \int_{\mathbb{R}^d} \left(g(x_1 - y) - g(x_2 - y)\right) f(y)\,\mathrm{d}y \right| \\
&\leq \int_{\mathbb{R}^d} |g(x_1 - y) - g(x_2 - y)| \cdot |f(y)|\,\mathrm{d}y \\
&\leq \int_{\mathbb{R}^d} M\,|(x_1 - y) - (x_2 - y)| \cdot |f(y)|\,\mathrm{d}y \leq M\,|x_1 - x_2| \cdot \|f\|_{L^1(\mathbb{R}^d)}\,.
\end{aligned}$$

Esercizio. [TO DO] Se $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ e g a supporto compatto è α-Hölderiana allora anche $f * g$ lo è.

Esercizio. [TO DO] Presa $f(x) = \mathbb{1}_{[0,1]}$ in $\mathbb{R}$, calcolare $f * f$.

2.12.2 Separabilità degli spazi L^p

Proposizione. Si ha che $L^p(\mathbb{R}^d, \mu)$ con μ la misura di Lebesgue, è separabile se solo se $p \neq +\infty$. Lo stesso risultato vale per ℓ^p.

Osservazione. La proposizione è valida anche per $L^p(X, \mu)$ con $X \subset \mathbb{R}^d$ aperto.

[4] In tal caso g è lipschitziana.

Sia $1 \leq p < +\infty$, $L^p(\mathbb{R}^d, \mu)$ con μ la misura di Lebesgue. Le funzioni semplici costituite da somme finite di insiemi di misura finita sono dense in $L^p(\mathbb{R}^d)$.

Prendiamo una base numerabile di $\mathbb{R}^d$ e la indichiamo con $\mathcal{B}$. L'insieme

$$Y = \left\{ \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mathbb{1}_{B_i} \;\middle|\; B_i \in \mathcal{B}, \alpha_i \in \mathbb{Q} \right\}$$

è numerabile. Vediamo che è denso in $L^p(\mathbb{R}^d)$.

Idea. È sufficiente approssimare le funzioni semplici a somma finita $\sum_{i=1}^{N} \alpha_i \mathbb{1}_{E_i}$. In particolare, ci basta approssimare $\alpha \cdot \mathbb{1}_E$. Essendo $\alpha \in \mathbb{R}$ troviamo una successione di razionali α_j tali che $\alpha_j \xrightarrow{j\to\infty} \alpha$. Dunque, rimane da approssimare l'insieme E.

Fissiamo E e supponiamo dapprima E aperto. Possiamo scrivere E come unione arbitraria di elementi della base $\mathcal{B}$

$$E = \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i.$$

Per approssimare E consideriamo gli insiemi $E_N = \bigcup_{i=1}^{N} B_i$. Otteniamo $|E| = \lim_N |E_N|$, da cui $|E \setminus E_N| \xrightarrow{N\to+\infty} 0$. Concludiamo notando che il caso E arbitrario si fa approssimandolo con una famiglia di aperti.

Per ℓ^p con $p < +\infty$ definiamo

$$Y = \{\{x_n\} \mid x_n = 0 \quad \text{definitivamente}, x_n \in \mathbb{Q}\}$$

e verifico che è numerabile e separabile.

Domanda. Cosa succede per $p = +\infty$?

Consideriamo $L^\infty([0, +\infty], \mu)$ con μ di Lebesgue e $E_n = [n, n+1]$. Definiamo l'insieme

$$Z = \left\{ \forall J \subset \mathbb{N} \quad u = \sum_{j \in J} \mathbb{1}_{E_j} \right\}.$$

Z ha la cardinalità delle parti di $\mathbb{N}$ cioè è più che numerabile. Osserviamo che per ogni $u, v \in Z$, $u \neq v$ si ha che $\|u - v\|_{L^\infty(\mathbb{R})} = 1$. Se per assurdo esistesse un insieme denso e numerabile D in ℓ^∞, per definizione di insieme denso dovremmo trovare per ogni palla di raggio minore di 1 e centro in un qualsiasi elemento di Z, un elemento di D. Ma questo è impossibile in quanto D ha cardinalità numerabile e Z la cardinalità del continuo.

Vediamo in un altro modo che l^∞ non è separabile. Se per assurdo $Y = \left\{\underline{x}^k\right\}_{k\in\mathbb{N}}$ fosse denso in L^∞, allora potremmo definire un elemento $z \in l^\infty$ tale che $\left\|\underline{x}^k - \underline{z}\right\|_{l^\infty} \geq 1$ per ogni k.

Definiamo $z = \{z_n\}$ come segue

$$z_n = \begin{cases} 0 & \text{se} \quad |x_n^n| > 1 \\ 2 & \text{se} \quad |x_n^n| \leq 1 \end{cases} .$$

2.13 Rimanenze dalla lezione precedente

Proposizione. Data $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$ con $1 \leq p < +\infty$ allora la funzione $\tau_h f \colon \mathbb{R}^d \to L^p(\mathbb{R}^d)$ data da $h \mapsto f(\cdot - h)$ è continua.

Dimostrazione. Per prima cosa notiamo che basta vedere solo la continuità in 0 in quanto

$$\tau_{h'} f - \tau_h f = \tau_h(\tau_{h'-h} f - f) \implies \|\tau_{h'} f - \tau_h f\|_p = \|\tau_{h'-h} f - f\|_p .$$

Dimostriamo ora la proposizione in due passi.

- *Caso 1:* $f \in C_C(\mathbb{R}^d)$

  $$\|\tau_h f - f\|_p^p = \int_{\mathbb{R}^d} |f(x-h) - f(x)|^p \, \mathrm{d}x \xrightarrow{|h|\to 0} 0$$

  per convergenza dominata, verifichiamo però che siano rispettate le ipotesi

  i) La convergenza puntuale, ovvero $|f(x-h)-f(x)|^p \xrightarrow{|h|\to 0} 0$ segue direttamente dalla continuità di f.

  ii) Come dominazione invece usiamo $|f(x-h) - f(x)|^p \leq (2\,\|f\|_\infty)^p \cdot \mathbb{1}_{\mathcal{B}(0,R+1)}$ usando che $f \in C_C \implies \operatorname{supp}(f) \subset \overline{B(0,R)}$ e poi che

  $$\operatorname{supp}(f(\,\cdot\, - h) - f(\,\cdot\,)) \subset \overline{\mathcal{B}(0, R + |h|)}$$

  infine se $|h| < 1$ come raggio ci basta prendere $R+1$.

- *Caso 2:* f qualunque Dato $\varepsilon > 0$ prendiamo $g \in C_C(\mathbb{R}^d)$ tale che $\|g - f\| \leq \varepsilon$ allora aggiungiamo a sottraiamo $g + \tau_h g$ e raggruppiamo in modo da ottenere

  $$\begin{aligned} \tau_h f - f &= \tau_h(f-g) + (\tau_h g - g) + (g - f) \\ \implies \|\tau_h f - f\|_p &\leq \underbrace{\|\tau_h(f-g)\|_p}_{\leq\varepsilon} + \|\tau_h g - g\|_p + \underbrace{\|g-f\|_p}_{\leq \varepsilon} \leq 2\varepsilon + \underbrace{\|\tau_h g - g\|_p}_{\to 0 \text{ per } \textit{Caso 1}} \end{aligned}$$

  dunque $\limsup_{|h|\to 0} \|\tau_h f - f\|_p \leq 2\varepsilon$ ma per arbitrarietà di ε otteniamo anche che $\|\tau_h f - f\|_p \to 0$ per $|h| \to 0$.

$\square$

Teorema. Siano $f_1 \in L^{p_1}(\mathbb{R}^d)$ e $f_2 \in L^{p_2}(\mathbb{R}^d)$ con p_1 e p_2 esponenti coniugati, allora $f_1 * f_2$ è definita per ogni x e uniformemente continua

$$|f_1 * f_2(x)| \leq \|f_1\|_{p_1} \cdot \|f_2\|_{p_2} \quad \forall x.$$

Dimostrazione. Prendiamo $f_{1,n}, f_{2,n} \in C_C(\mathbb{R}^d)$ tali che $f_{1,n} \to f_1$ in L^{p_1} e $f_{2,n} \to f_2$ in L^{p_2}.

- Per prima cosa verifichiamo che $f * g$ è ben definita. Notiamo che $f_{1,n} * f_{2,n}$ ha supporto limitato, infatti se $\operatorname{supp}(f_{i,n}) \subset \overline{\mathcal{B}(0, r_{i,n})}$ per $i = 1,2$ allora

  $$\operatorname{supp}(f_{1,n} * f_{2,n}) \subset \overline{\mathcal{B}(0, r_{1,n} + r_{2,n})}$$

  e basta notare che l'espressione

  $$f_1 * f_2(x) = \int_{\mathbb{R}^d} f_1(x-y) f_2(y) \, \mathrm{d}y$$

  ha integranda nulla per ogni y se $|x| \geq r_{1,n} + r_{2,n}$.

- Vediamo che $f_{1,n} * f_{2,n} \to f_1 * f_2$ uniformemente
$$f_{1,n} * f_{2,n} - f_1 * f_2 = (f_{1,n} - f_1) * f_{2,n} - f_1 * (f_{2,n} - f_2)$$
$$\begin{aligned}\|f_{1,n} * f_{2,n} - f_1 * f_2\|_p &\le \|(f_{1,n} - f_1) * f_{2,n}\|_p + \|f_1 * (f_{2,n} - f_2)\|_p \\ &\le \underbrace{\|f_{1,n} - f_1\|_{p_1}}_{\to 0} \cdot \underbrace{\|f_{2,n}\|_{p_2}}_{\to \|f_2\|_{p_2}} + \underbrace{\|f_1\|_{p_1}}_{\text{cost.}} \cdot \underbrace{\|f_{2,n} - f_2\|_{p_2}}_{\to 0} \to 0\end{aligned}$$

- $C_0(\mathbb{R}^d)$ è chiuso per convergenza uniforme [TODO: da fare per esercizio]

2.14 Derivata e Convoluzione

Osservazione. Osserviamo che la convoluzione si comporta bene con l'operatore di traslazione definito precedentemente, infatti $\tau_h(f_1 * f_2) = (\tau_h f_1) * f_2$ in quanto
$$f_1 * f_2(x-h) = \int f_1(x-h-y) \cdot f_2(y)\,\mathrm{d}y = \int \tau_h f(x-y) \cdot f_2(y)\,\mathrm{d}y = (\tau_h f_1) * f_2$$
quindi "formalmente" possiamo calcolare il seguente rapporto incrementale
$$\frac{\tau_h(f_1 * f_2) - f_1 * f_2}{h} = \frac{\tau_h f_1 - f_1}{h} * f_2 \implies (f_1 * f_2)' = (f_1)' * f_2$$
Vediamo ora di formalizzare questo risultato.

Teorema. Dati p_1 e p_2 esponenti coniugati, se

- $f_1 \in C^1(\mathbb{R}^d)$, $\nabla f_1 \in L^{p_1}(\mathbb{R}^d)$
- $f_2 \in L^{p_2}(\mathbb{R}^d)$

allora $f_1 * f_2 \in C^1$ con $\nabla(f_1 * f_2) = (\nabla f_1) * f_2$[5].

Dimostrazione.

- $d = 1$: Sappiamo che $f_1 * f_2$ è continua e $f_1' * f_2$ è continua. Vediamo che coincidono usando il teorema fondamentale del calcolo integrale. L'uguaglianza $(f_1 * f_2)' = f_1' * f_2$ segue da
$$\int_a^b f_1' * f_2\,\mathrm{d}x = f_1 * f_2(b) - f_1 * f_2(a) \quad \forall a < b$$
ed in effetti
$$\begin{aligned}\int_a^b f_1' * f_2(x)\,\mathrm{d}x &= \int_a^b \int_{-\infty}^{\infty} f_1'(x-y) f_2(y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x \\ &\overset{(*)}{=} \int_{-\infty}^{\infty} \int_a^b f_1'(x-y)\,\mathrm{d}x \cdot f_2(y)\,\mathrm{d}y \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} (f_1(b-y) - f_1(a-y)) \cdot f_2(y)\,\mathrm{d}y \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f_1(b-y) f_2(y)\,\mathrm{d}y - \int_{-\infty}^{\infty} f_1(a-y) f_2(y)\,\mathrm{d}y \\ &= f_1 * f_2(b) - f_1 * f_2(a).\end{aligned}$$

[5]Ha senso anche se ∇f_1 è a valori vettoriali. In tal caso $\frac{\partial}{\partial x}(f_1 * f_2) = \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_i}\right) * f_2 \quad$ per $i = 1, \dots, d$.

In particolare in $(*)$ stiamo usando Fubini-Tonelli in quanto
$$\int_a^b \int_{-\infty}^{\infty} |f_1'(x-y)| \cdot |f_2(y)| \, \mathrm{d}y \le \int_a^b \|f_1'(x-\,\cdot\,)\|_{p_1} \cdot \|f_2\|_{p_2} \, \mathrm{d}x = \|f_1'\|_{p_1} \cdot \|f_2\|_{p_2} \cdot (b-a).$$

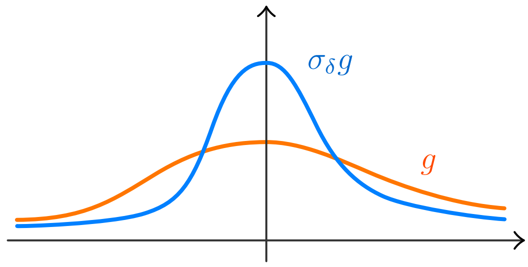
- per $d > 1$ dato $i = 1, \dots, d$ basta semplicemente considerare le proiezioni infatti
$$\int_a^b \frac{\partial f_1}{\partial x_i} * f_2(x_1, \dots, \overset{(i)}{t}, \dots, x_d) \, \mathrm{d}t = f_1 * f_2(x_1, \dots, \overset{(i)}{b}, \dots, x_d) - f_1 * f_2(x_1, \dots, \overset{(i)}{a}, \dots, x_d)$$

$\square$

Corollario. Data $f_1 \in C_C^\infty(\mathbb{R}^d)$ (da cui segue $\nabla^k \in L^q(\mathbb{R}^d)$ per ogni $k = 0, 1, \dots$ e $1 \le q < +\infty$) e $f_2 \in L^p(\mathbb{R}^d)$ allora $f_1 * f_2 \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$ (anzi $\nabla^k(f_1 * f_2) \in C_0(\mathbb{R}^d)$ per ogni k) e vale la formula nota[6]
$$\nabla^k(f_1 * f_2) = (\nabla^k f_1) * f_2.$$

Dimostrazione. Dimostriamo il corollario per approssimazione usando il seguente teorema.

Definizione. Per prima cosa data una funzione $g \colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ e $\delta \neq 0$ poniamo
$$\sigma_\delta g(x) \coloneqq \frac{1}{\delta^d} g\left(\frac{x}{\delta}\right)$$
e notiamo che questa trasformazione preserva la norma L^1. Infatti, il valore $1/\delta^d$ è proprio il modulo del determinante dello Jacobiano del cambio di variabile.



Teorema. Data $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$ e $g \in L^1(\mathbb{R}^d)$ con $1 \le p < +\infty$ e posto $m \coloneqq \displaystyle\int_{\mathbb{R}^d} g(x) \, \mathrm{d}x$, allora
$$f * \sigma_\delta g \xrightarrow{\delta \to 0} mf \in L^p(\mathbb{R}^d).$$

Osservazione. Se $g_2 \ge 0$ con $\int g \, \mathrm{d}x = 1$ (dunque g distribuzione di probabilità) allora $f * g$ possiamo pensarla come media pesata di traslate di f, dunque facendo $f * \sigma_\delta g$ stiamo pesando sempre di più i valori delle traslate vicino a 0.

Inoltre per $p = +\infty$ non vale ed il controesempio è sempre il solito. [TO DO: scrivere la funzione].

Dimostrazione. Per ora consideriamo g generica e ripercorriamo una dimostrazione simile a quella fatta per la disuguaglianza di Young
$$\begin{aligned}
\|f * g - mf\|_p^p &= \int_{\mathbb{R}^d} \underbrace{|f * g - mf|}_{h}{}^p \, \mathrm{d}x \\
&= \int |f * g - mf| \cdot h^{p-1} \, \mathrm{d}x \\
&= \int \left| \int \left(f(x-y)g(y) - f(x) \int g(y) \right) \mathrm{d}y \right| \cdot h^{p-1}(x) \, \mathrm{d}x \\
&\le \int \int |f(x-y) - f(x)| \cdot |g(y)| \, \mathrm{d}y \cdot h^{p-1}(x) \, \mathrm{d}x \\
&\overset{(*)}{=} \int \left(\int |f(x-y) - f(x)| h^{p-1}(x) \, \mathrm{d}x \right) |g(y)| \, \mathrm{d}y,
\end{aligned}$$

[6]Vista in termini di gradienti la formulazione è più compatta ma non poi così intuitiva: bisognerebbe definire la convoluzione tre una funzione a valori vettoriali ed uno scalare etc... Altrimenti basta scrivere le singole identità usando *derivate parziali e multiindici.*

dove in $(*)$ abbiamo usato Fubini-Tonelli. Ora prendiamo q tale che $1/p + 1/q = 1$ allora per Hölder abbiamo

$$
\begin{aligned}
&\leq \int \|f(\,\cdot\, - y) - f(\,\cdot\,)\|_p \, \|h^{p-1}\|_q \cdot |g(y)| \, \mathrm{d}y \\
&= \|h\|_p^{p-1} \int_{\mathbb{R}^d} \|\tau_y f - f\|_p \cdot |g(y)| \, \mathrm{d}y
\end{aligned}
$$

dunque abbiamo ricavato che

$$\|f * g - mf\|_p^p \leq \|f * g - mf\|_p^{p-1} \int_{\mathbb{R}^d} \|\tau_y f - f\|_p \cdot |g(y)| \, \mathrm{d}y$$

ed ora applicando questa stima a $\sigma_\delta g$ invece che a g otteniamo

$$\|f * \sigma_\delta g - mf\|_p \leq \int_{\mathbb{R}^d} \|\tau_y f - f\|_p \cdot |\sigma_\delta g(y)| \, \mathrm{d}y$$

infine ponendo $z = y/\delta$ e $\mathrm{d}z = 1/\delta^d \, \mathrm{d}y$ e sostituendo nell'integrale

$$= \int_{\mathbb{R}^d} \|\tau_{\delta z} f - f\|_p \cdot |\sigma_\delta g(y)| \, \mathrm{d}y \xrightarrow{\delta \to 0} 0$$

per *convergenza dominata*, verifichiamone le ipotesi

i) La convergenza puntuale segue in quanto $\|\tau_{\delta z} f - f\|_p \xrightarrow{\delta \to 0} 0$ per ogni z.

ii) Come dominazione prendiamo $2\,\|f\|_p \cdot |g| \in L^1$.

□

Corollario. Sia $g \in C_C^\infty(\mathbb{R}^d)$ con $\int g \, \mathrm{d}x = 1$ e $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$ e $1 \leq p < +\infty$ allora $\sigma_\delta g * f \xrightarrow{\delta \to 0} f$ in $L^p(\mathbb{R}^d)$ e $\sigma_\delta g * f \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$.

Capitolo 3

Spazi di Hilbert

Sia H spazio vettoriale reale con prodotto scalare $\langle \cdot, \cdot \rangle$ definito positivo e norma indotta $\| \cdot \|$ definita come $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$.
Si ricorda l'identità di polarizzazione

$$\langle x_1, x_2 \rangle = \frac{1}{4} \left(\|x_1 + x_2\|^2 - \|x_1 - x_2\|^2 \right).$$

Nota. Siccome $\| \cdot \|$ è continua, dalla formula di polarizzazione segue che il prodotto scalare è continuo.

Definizione. H si dice **spazio di Hilbert** se è completo.

Esempi.

- Dato $(X, \mathcal{A}, \mu)$, gli spazi $L^2(X), L^2(X, \mathbb{R}^m)$ sono spazi di Hilbert.
- Lo spazio $\ell^2 = \left\{ (x_n) \;\middle|\; \sum_{n=0}^{\infty} x_n^2 < +\infty \right\}$ è uno spazio di Hilbert.

Definizione. $\mathcal{F} \subset H$ è un **sistema ortonormale** se

$$\|e\| = 1 \ \ \forall e \in \mathcal{F}, \qquad \langle e, e' \rangle = 0 \ \ \forall e \neq e' \in \mathcal{F}.$$

Definizione. $\mathcal{F}$ si dice **completo** se $\overline{\operatorname{Span}(\mathcal{F})} = H$[1]. In tal caso $\mathcal{F}$ si dice **base di Hilbert**.

Osservazione. In generale una base di Hilbert $\mathcal{F} \subset H$ non è anche una base algebrica di H.

L'esempio che segue spiega quanto appena detto.

Esempio. In ℓ^2 una base ortonormale è $\mathcal{F} = \{e_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ con $e_n = (0, \dots, 0, \overset{(n)}{1}, 0, \dots)$.
Infatti, il fatto che siano ortonormali è banale; verifichiamo che sia una base.

Studiamo $\operatorname{Span}(\mathcal{F}) = \{x = (x_0, x_1, \dots) \mid x_n \quad \text{è definitivamente nullo}\}$: dato $x \in \ell^2$ e $m = \mathbb{N}$, definiamo

$$P_m x := (x_0, x_1, \dots, x_m, 0, \dots).$$

Allora $\operatorname{Span}(\mathcal{F}) \supset P_m x \xrightarrow{m \to +\infty} x$ in ℓ^2. Infatti,

$$x - P_m x = (0, \dots, 0, x_{m+1}, x_{m+2}, \dots).$$

[1] Lo span sono combinazioni lineari finite.

Dunque
$$\|x - P_m x\| = \sum_{n=m+1}^{\infty} x_n^2 \xrightarrow{m\to+\infty} 0.$$

Teorema 1. (della base di Hilbert.) Dato H spazio di Hilbert, $\mathcal{F}$ sistema al più numerabile, ovvero $\mathcal{F} = \{e_n \mid n \in \mathbb{N}\}$. Definiamo per ogni $x \in H$, $n \in \mathbb{N}$ l'elemento $x_n = \langle x, e_n\rangle$. Allora

i) Vale $\sum_n x_n^2 \le \|x\|^2$ (**Disuguaglianza di Bessel**).

ii) La somma $\sum_n x_n e_n$ converge a qualche $\overline{x} \in H$ e $\overline{x}_n = x_n$ per ogni n.

iii) Vale $\|\overline{x}\|^2 = \sum_n x_n^2 \le \|x\|^2$.

iv) Se $x - \overline{x} \perp \mathcal{F}$, allora $x - \overline{x} \perp \overline{\mathrm{Span}(\mathcal{F})}$, ovvero $\overline{x}$ è la proiezione di x su $\overline{\mathrm{Span}(\mathcal{F})}$.

v) Se $\mathcal{F}$ è completo, allora $x = \overline{x}$ e in particolare
$$x = \sum_{n=0}^{\infty} x_n e_n, \qquad \|x\|^2 = \sum_{n=0}^{\infty} x_n^2 \qquad (\textbf{Identità di Parceval}).$$

Alla dimostrazione del teorema premettiamo il seguente lemma.

Lemma. Siano H e $\mathcal{F}$ come nel teorema. Data $(a_n) \in \ell^2$, allora

i) La serie $\sum_n a_n e_n$ converge a qualche $\overline{x} \in H$.

ii) $\overline{x}_n = a_n$ per ogni n.

iii) $\|\overline{x}\|^2 = \sum_n a_n^2$.

Dimostrazione lemma.

i) Dimostriamo che $y_n = \sum_{n=1}^{m} a_n e_n$ è di Cauchy in H. Se $m' > m$, vale
$$y_{m'} - y_m = \sum_{n=m+1}^{m'} a_n e_n \Longrightarrow \|y_{m'} - y_m\|^2 = \left\|\sum_{n=m+1}^{m'} a_n e_n\right\|^2 = \sum_{n=m+1}^{m'} a_n^2 \le \sum_{n=m+1}^{\infty} a_n^2 < +\infty.$$
Dunque, per ogni ε esiste m_ε tale che $\sum_{m+1}^{\infty} a_n^2 \le \varepsilon^2$, per cui
$$\|y_{m'} - y_m\|^2 \le \sum_{m+1}^{\infty} a_n^2 \le \sum_{m_\varepsilon+1}^{\infty} a_n^2 \le \varepsilon^2 \quad \forall m, m' \ge m_\varepsilon.$$

ii) Se $m \ge n$, $\langle y_m, e_n\rangle = a_n$, dunque
$$a_n = \langle y_m, e_n\rangle \xrightarrow{m\to\infty} \langle \overline{x}, e_n\rangle = \overline{x}_n.$$

iii) Si ha l'uguaglianza $\|y_m\|^2 = \sum_{n=1}^{m} a_n^2$, per cui passando al limite per $m \to +\infty$ otteniamo

$$\begin{array}{ccc} \|y_m\|^2 & \xrightarrow{m\to\infty} & \|\overline{x}\|^2 \\ \| & & \\ \sum_{n=0}^{m} a_n^2 & \xrightarrow{m\to\infty} & \sum_{n=0}^{\infty} a_n^2 \end{array}$$

$\square$

Dimostrazione teorema.

i) Studiamo la somma $x = \sum_{n=0}^{m} x_n e_n + \overbrace{y}^{\text{resto}}$.

Notiamo che x è somma di vettori ortogonali, infatti y è ortogonale a $\sum_{n=0}^{m} x_n e_n$:

$$\langle y, e_i \rangle = \left\langle x - \sum_{n=0}^{m} x_n e_n, e_i \right\rangle = \langle x, e_i \rangle - \sum_{n=0}^{m} x_n \underbrace{\langle e_n, e_i \rangle}_{\delta_{i,n}} = x_i - x_i = 0.$$

Essendo che x è somma di vettori ortogonali abbiamo

$$\|x\|^2 = \sum_{n=1}^{m} x_n^2 + \|y\|^2 \geq \sum_{n=1}^{m} x_n^2.$$

Passando al limite per $m \to +\infty$ otteniamo

$$\|x\|^2 \geq \sum_{n=1}^{\infty} x_n^2.$$

ii) Segue dal punto precedente e dal lemma.

iii) Segue dal punto precedente e dal lemma.

iv) Notiamo che $\langle x - \overline{x}, e_n \rangle = x_n - \overline{x}_n \overset{\text{ii)}}{=} 0$ per ogni n. Cioè

$$x - \overline{x} \perp e_n \Longrightarrow x - \overline{x} \perp \mathrm{Span}(\mathcal{F}) \Longrightarrow x - \overline{x} \underset{\substack{\text{continuità} \\ \text{pr. scalare}}}{\perp} \overline{\mathrm{Span}(\mathcal{F})}$$

v) $x - \overline{x} \perp \overline{\mathrm{Span}(\mathcal{F})} \underbrace{=}_{\mathcal{F} \text{ è completo}} H \Longrightarrow x - \overline{x} = 0$, cioè $x = \overline{x}$.

$\square$

Corollario. Siano H spazio di Hilbert, $\mathcal{F} = \{e_n \mid n \in \mathbb{Z}\}$ base di Hilbert, $x, x' \in H$. Valgono le seguenti.

i) Se $x_n = x'_n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, allora $x = x'$ ($\Leftarrow$ è ovvia.)

ii) $\langle x, x' \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} x_n x'_n$ (**Identità di Parceval**).

iii) L'applicazione $H \ni x \mapsto (x_n) \in \ell^2$ è un'isometria surgettiva[2].

Dimostrazione.

i) Per l'enunciato **??** se due vettori hanno la stessa rappresentazione rispetto a una base di Hilbert coincidono.

ii) La tesi segue usando l'identità di polarizzazione congiuntamente all'enunciato **??** del teorema:

$$\begin{aligned}\langle x, x' \rangle &= \frac{1}{4}\left(\|x + x'\|^2 + \|x - x'\|^2\right) = \frac{1}{4}\Big(\sum_n \overbrace{(x_n + x_n')^2}^{x_n^2 + x_n'^2 + 2x_nx_n'} \sum_n \underbrace{(x_n - x_n')^2}_{x_n^2 + x_n'^2 - 2x_nx_n'}\Big) \\ &= \frac{1}{4}\left(\cancel{\sum x_n^2} + \cancel{\sum x_n'^2} + 2\sum x_nx_n' - \cancel{\sum x_n^2} - \cancel{\sum x_n'^2} + 2\sum x_nx_n'\right).\end{aligned}$$

iii) Segue da Parseval e dal punto **??**.

$\square$

Osservazioni.

- Gli enunciati **??** e **??** non richiedono H completo, mentre **??** è vero anche se H non è completo.

- Se H è uno spazio di Hilbert e $\mathcal{F}$ sistema ortonormale infinito, allora $\mathcal{F}$ non è mai una base algebrica[3]. Dunque, combinazioni lineari finite di H non sono mai uguali ad H, ovvero $\mathrm{Span}(\mathcal{F}) \subsetneq H$) di H.

  Dimostrazione. Presi $(e_n) \subset \mathcal{F}$, consideriamo $\overline{x} = \sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n} e_n$. Allora $\overline{x} \in H \setminus \mathrm{Span}(\mathcal{F})$.

- Siano H uno spazio di Hilbert di dimensione infinita e $\mathcal{F}$ una base di Hilbert. Allora $\mathcal{F}$ è numerabile se solo se H è separabile.

  Dimostrazione.

  $\boxed{\Rightarrow}$ Vale $H = \overline{\mathrm{Span}(\mathcal{F})} = \overline{\mathrm{Span}_{\mathbb{Q}}(\mathcal{F})}$. Concludiamo notando che $\overline{\mathrm{Span}_{\mathbb{Q}}(\mathcal{F})}$ è numerabile se $\mathcal{F}$ è numerabile.

  $\boxed{\Leftarrow}$ Se $\mathcal{F}$ non fosse numerabile, siccome $\|e - e'\| = \sqrt{2} \quad \forall e, e' \in \mathcal{F}$ allora H non è separabile.

  Esempio. Lo spazio $H = L^2(X)$, con $X = \mathbb{R}^n$, μ misura di Lebesgue ha base di Hilbert numerabile.

- Dato $\mathcal{F}$ sistema ortonormale in H, allora $\mathcal{F}$ è completo se solo se $\mathcal{F}$ è massimale (nella classe dei sistemi ortonormali rispetto all'inclusione).

  Dimostrazione.

[2] In particolare è bigettiva ma l'iniettività è ovvia.

[3] Per base algebrica s'intende un insieme di vettori di uno spazio vettoriale le cui combinazioni lineari generano tutto lo spazio.

$\boxed{\Rightarrow}$ Dato che $\mathcal{F}$ è completo segue che $\overline{\text{Span}(\mathcal{F})} = X$, quindi

$$\mathcal{F}^\perp = (\text{Span}(\mathcal{F}))^\perp \underbrace{=}_{\substack{\text{continuità del}\\ \text{prodotto scalare}}} \overline{\text{Span}(\mathcal{F})}^\perp = H^\perp = \{0\}.$$

dunque $\mathcal{F}$ è massimale.

$\boxed{\Leftarrow}$ Se $\mathcal{F}$ non è completo, esiste $c \in H \setminus \text{Span}(\mathcal{F})$. Definiamo $\overline{x}$ come nel Teorema 1. Notiamo che $x - \overline{x} \perp \text{Span}(\mathcal{F})$, dunque $x - \overline{x} \perp \mathcal{F}$ e $x - \overline{x} \neq \{0\}$, da cui $\mathcal{F} \cup \left\{ \dfrac{x - \overline{x}}{\|x - \overline{x}\|} \right\}$ è un sistema ortonormale che include strettamente $\mathcal{F}$. $\lightning$

Osservazione. Nell'implicazione $\boxed{\Rightarrow}$ non abbiamo usato la completezza di H.

Corollario. Ogni sistema ortonormale $\mathcal{F}$ si completa a $\widetilde{\mathcal{F}}$ base di Hilbert di H.

Dimostrazione. Sia $X = \left\{ \mathcal{F} \text{ sistema ortonormale} H \text{ tale che } \widetilde{\mathcal{F}} \subset \mathcal{F} \right\}$. Per Zorn, X contiene un elemento massimale. Denotiamolo con $\widetilde{\mathcal{F}}$. Allora $\widetilde{\mathcal{F}}$ è una base di Hilbert.

Nota. Aggiungere le note a caso. [TO DO: ?]

Teorema 2. Dato V sottospazio vettoriale chiuso di H. Allora

i) $H = V + V^\perp$, cioè per ogni $x \in H$ esiste $\overline{x} \in V$ e $\widetilde{x} \in V^\perp$ tale che $x = \overline{x} + \widetilde{x}$.

ii) Gli elementi $\overline{x}$ e $\widetilde{x}$ sono univocamente determinati (e indicati con x_V e $x_V^\perp$).

iii) $\overline{x}$ è caratterizzato come l'elemento di V più vicino a X.

Dimostrazione.

i) Dato che V è chiuso, V è completo, cioè V è un sottospazio di H, dunque V ammette base ortonormale $\mathcal{F} = \{e_n \mid n \in \mathbb{N}\}$. Definiamo $\overline{x} \in \overline{\text{Span}(\mathcal{F})}$ come nel Teorema 1 e $\widetilde{x} \coloneqq x - \overline{x} \in \overline{\text{Span}(\mathcal{F})} = V^\perp$ (per **??**).

ii) Se $x = \overline{x} + \widetilde{x} = \overline{x}' + \widetilde{x}'$, dove $\overline{x}, \overline{x}' \in V$ e $\widetilde{x}, \widetilde{x}' \in V^\perp$, allora

$$\overline{x} - \overline{x}' = \widetilde{x}' - \widetilde{x} \underbrace{\Longrightarrow}_{V \cap V^\perp = \{0\}} \overline{x} - \overline{x}' = \widetilde{x}' - \widetilde{x} = 0.$$

iii) Per ogni $y \in V$ sia $f(y) = \|x - y\|^2$. Mostriamo che $\overline{x}$ è l'unico minimo di f.

$$f(y) = \|x - y\|^2 = \|\overbrace{x - \overline{x}}^{\in V^\perp} + \overbrace{\overline{x} - y}^{\in V}\|^2 = \|x - \overline{x}\|^2 + \|\overline{x} - y\|^2 = f(\overline{x}) + \|\overline{x} - y\|^2 \geq f(\overline{x}).$$

$\square$

Osservazione. Serve V chiuso. Se per esempio V è denso in H ma $V \neq H$, allora

$$\overline{V^\perp} = \overline{V}^\perp = H^\perp = \{0\} \Longrightarrow V \subseteq V + V^\perp \subseteq V + \overline{V^\perp} = V \subsetneq H.$$

Un esempio di tale V è $\text{Span}(\mathcal{F})$ con $\mathcal{F}$ base di H (H di dimensione infinita).

Teorema 3 (di rappresentazione di Riesz.) Dato $\Lambda\colon H \to \mathbb{R}$ lineare e continuo, esiste $x_0 \in H$ tale che

$$\Lambda(x) = \langle x, x_0 \rangle \quad \text{per ogni } x \in H. \tag{$*$}$$

Dimostrazione. Supponiamo $\Lambda \not\equiv 0$. Dato che Λ è continuo, $\ker \Lambda$ è chiuso in H. Definiamo $V := \ker \Lambda$. Per il primo enunciato del teorema precedente, $H = V + V^{\perp}$ e per quanto supposto $V^{\perp} \neq \{0\}$.

Notiamo che $\dim V^{\perp} = 1$. Infatti, se per assurdo $\dim(V^{\perp}) > 1$, allora esisterebbe $W \subset V^{\perp}$ con $\dim W = 2$, da cui seguirebbe che $\Lambda\colon W \to \mathbb{R}$ ha ker banale. $\lightning$

Allora $V^{\perp} = \operatorname{Span}\{x_1\}$ con $\|x_1\| = 1$. Definiamo $c := \Lambda(x_1), x_0 = cx_1$.

Dimostriamo ora l'uguaglianza $*$ per passi.

i) Vale per $x \in V$ tale che $x \in \ker \Lambda$. Infatti $\Lambda(x) = x_0$ e $\langle x, x_0 \rangle = 0$ perché $x_0 \in V^{\perp}$.

ii) Vale per $x = x_1$ (e quindi per $x \in V^{\perp}$). Infatti,

$$\Lambda(x_1) = c \quad \langle x_1, x_0 \rangle = \langle x_1, cx_1 \rangle = c\,\|x_1\|^2 = c.$$

iii) Vale su $V + V^{\perp} = H$.

Osservazioni.

- Esistono funzioni $\Lambda\colon H \to \mathbb{R}$ lineari ma non continue se H ha dimensione infinita.

  Dimostrazione. Prendo $\Lambda\colon H \to \mathbb{R}$ lineare definito come

  $$\begin{cases} \Lambda(e_n) = n \quad \forall n \\ \Lambda(e) = \text{qualsiasi } e \in \mathcal{G} \setminus \{e_n\}. \end{cases}$$

  Allora

  $$+\infty = \sup_n |\Lambda(e_n)| \leq \sup_{\|x\| \leq 1} |\Lambda(x)|$$

  da cui segue che Λ non è continuo.

3.1 Esercitazione del 3 Novembre 2021

3.1.1 Basi Hilbertiane e proiezioni

Esercizio. Sia $H = L^2(-1,1)$ e sia $V = \operatorname{Span}\{1, x, x^2\}$. Verificare che V è un sottospazio chiuso e calcolare la proiezione di $\sin x$ su V.
Notazione. Indichiamo con $\|\cdot\|$ la norma $\|\cdot\|_{L^2(-1,1)}$ e con $\langle\,\cdot\,,\,\cdot\,\rangle$ il prodotto scalare su L^2.

Soluzione. Vediamo come risolvere questo esercizio in tre modi diversi.

i) Dato H spazio di Hilbert separabile, e dato un sottospazio $V \subset H$, vediamo come trovare la proiezione di un elemento $x \in H$ su V. Procediamo come segue.

   - Controlliamo che V sia chiuso.
   - Calcoliamo una base hilbertiana di V che indichiamo con $\{e_1, \ldots, e_n, \ldots\}$.

Il tal caso, la proiezione di un elemento $x \in H$ su V è data da

$$p_V(x) = \sum_n \langle x, e_n \rangle e_n.$$

Esercizio. [TO DO: per casa] Ogni sottospazio di dimensione finita di uno spazio di Hilbert o di L^p è chiuso (e in particolare ha parte interna vuota).

Abbiamo una base di V data da $\{1, x, x^2\}$ (è una base in quanto sono linearmente indipendenti: si può verificare mostrando che $\forall x \in [-1,1]$ $\lambda_1 + \lambda_2 x + \lambda_3 x^2 = 0 \implies \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$ usando la teoria sulle equazioni di II grado oppure si può derivare e man mano ottenere più informazioni su $\lambda_3, \lambda_2, \lambda_1$).

Volendo usare la base scritta sopra per calcolare la proiezione di $\sin x$ su V, dovremmo prima applicare Gram-Schmidt alla base $\{1, x, x^2\}$ per determinare una base Hilbertiana:

$$\begin{aligned}
e_1 &= \frac{1}{\|1\|} = \frac{1}{\sqrt{2}} \\
e_2 &= \frac{x - \langle x, \frac{1}{\sqrt{2}} \rangle \cdot 1}{\left\| x - \langle x, \frac{1}{\sqrt{2}} \rangle \cdot 1 \right\|} \\
e_3 &= \frac{x^2 - \langle x^2, e_1 \rangle \cdot e_1 - \langle x^2, e_2 \rangle \cdot e_2}{\|x^2 - \langle x^2, e_1 \rangle \cdot e_1 - \langle x^2, e_2 \rangle \cdot e_2\|}
\end{aligned}$$

e successivamente calcolare $p_V(\sin x)$ con la formula scritta sopra.

ii) Alternativamente, possiamo direttamente cercare la proiezione di $\sin x$ su V. Determiniamo a, b, c tali che $a + bx + cx^2$ sia $p_V(x) = \sin x$ allora posto $f(x) := \sin x - a - bx - cx^2$ abbiamo $f(x) \in V^\perp \iff$ si verificano le seguenti condizioni

$$\langle f(x), 1 \rangle = 0 \qquad \langle f(x), x \rangle = 0 \qquad \langle f(x), x^2 \rangle = 0$$

Ad esempio da $\langle f(x), 1 \rangle = 0$ otteniamo

$$0 = \int_{-1}^{1} (\sin x - a - bx - cx^2) \cdot 1 \, \mathrm{d}x = \underbrace{\int_{-1}^{1} \sin x \, \mathrm{d}x}_{=0} - 2a - b \underbrace{\int_{-1}^{1} x \, \mathrm{d}x}_{=0} - c \int_{-1}^{1} x^2 \implies 0 = -2a - \frac{2}{3} c$$

ed analogamente si procede con x e x^2... [TODO: Da finire]

iii) Un altro modo è considerare la funzione $g(a,b,c) := \|\sin x - a - bx - cx^2\|_{L^2(-1,1)}$ che è continua, coerciva, etc. e imponendo $\nabla_{a,b,c,} g = 0$ si minimizza e si ottengono $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ che verificano $p_V(\sin x)$.

Esercizio. Sia $X = \{u \in L^2(\mathbb{R}) \mid \int_0^2 u \, \mathrm{d}x = 0\}$, dire se è un sottospazio chiuso, calcolare $X^\perp$ per una generica $u \in L^2(\mathbb{R})$ e determinare le proiezioni $p_X(u)$ e $p_{X^\perp}(u)$.

Soluzione. La mappa T lineare data da

$$u \mapsto \int_0^2 u \, \mathrm{d}x$$

è ben definita, lineare e continua, allora X è proprio $T^{-1}(0)$ dunque è un sottospazio chiuso.

Osservazione. Notiamo che

$$T(u) = \int_{\mathbb{R}} u(x) \cdot \mathbb{1}_{[0,2]}(x)\,\mathrm{d}x = \langle u, g\rangle_{L^2(\mathbb{R})}, \qquad g = \mathbb{1}_{[0,2]}(x) \in L^2(\mathbb{R}).$$

Calcoliamo ora $X^\perp$ e le proiezioni p_X, $p_{X^\perp}$. Abbiamo che $X = \{u \in L^2(\mathbb{R}) \mid \langle u, g\rangle = 0\}$ dove $g = \mathbb{1}_{[0,2]}(x)$, dunque $X^\perp = \mathrm{Span}(g)$. Notiamo[4] che

$$L^2(\mathbb{R}) = \mathrm{Span}_{\mathbb{R}} \left\{ \frac{g}{\|g\|_{L^2}} \right\} \oplus \left\{ \frac{g^\perp}{\|g^\perp\|_{L^2}} \right\}.$$

Calcoliamo $p_X(u)$ come segue

$$p_X(u) = u - \left\langle u, \frac{g}{\|g\|_{L^2}} \right\rangle \cdot \frac{g}{\|g\|_{L^2}},$$

dove

$$\|g\|_{L^2} = \left(\int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_{[0,2]}(x)^2\,\mathrm{d}x \right)^{1/2} = \sqrt{2}$$

e dunque

$$p_X(u) = u - \left(\int_0^2 u\,\mathrm{d}x \right) \cdot \frac{\mathbb{1}_{[0,2]}}{2}$$

Un controllo veloce per verificare di aver fatto i conti corretti è quello di vedere che $p_X(u) \in X$, dunque di verificare che $\int_0^2 p_X(u)\,\mathrm{d}x = 0$.

Per calcolare $p_{X^\perp}(u)$ usiamo la seguente.

Osservazione. Vale $u = p_X(u) + p_{X^\perp}(u)$.

In conclusione,

$$p_{X^\perp}(u) = u - p_X(u) = \left(\int_0^2 u\,\mathrm{d}x \right) \cdot \frac{\mathbb{1}_{[0,2]}}{2}.$$

Esercizio. [TO DO: per casa.] Sia $V = \{\underline{x} = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^2 \mid x_1 + x_3 + x_5 = 0\}$. Dire se V è chiuso in ℓ^2 e calcolare p_V e $p_{V^\perp}$.

3.1.2 Approssimazioni per convoluzione

Abbiamo visto che data $g \in L^1(\mathbb{R}^d)$ con $\int g\,\mathrm{d}x = 1$ allora per ogni $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$ abbiamo $f_\delta \coloneqq f * \sigma_\delta g \xrightarrow{\delta\to 0} f$ in $L^p(\mathbb{R}^d)$ per $p \neq \infty$.

Esercizio. Dire se esiste $v \in L^1(\mathbb{R})$ tale che sia elemento neutro della convoluzione, ovvero

$$\forall f \in L^1(\mathbb{R}) \qquad f * v = f.$$

Una tale v non esiste, per vederlo scegliamo opportunamente $\bar{f}$ e usiamo l'equazione. Scelgo $g \in C_C(\mathbb{R})$ e defiamo $\sigma_\delta g = 1/\delta g(1/\delta)$. Abbiamo che $\sigma_\delta g * v = \sigma_\delta g$ per ogni δ. Per il teorema abbiamo che $\sigma_\delta g * v = \sigma_\delta g \xrightarrow{\delta\to 0} v$ in $L^1(\mathbb{R})$, ma $\sigma_\delta g \xrightarrow{\delta\to 0} 0$ quasi ovunque in $L^1(\mathbb{R})$. Allora $v = 0$ q.o. in $L^1(\mathbb{R})$, dunque non può valere $f * v = v$ per ogni $f \in L^1(\mathbb{R})$.

[4]Con $g/\left\|g^\perp\right\|_{L^2}$ indichiamo una base normalizzata di $g^\perp$.

Esercizio. [TO DO: per casa.] Sia f misurabile su $\mathbb{R}^d$ tale che $\int_E f \, \mathrm{d}x = 0$ per ogni E misurabile di $\mathbb{R}^d$. Dimostrare che $f = 0$ q.o. su $\mathbb{R}^d$.

Suggerimento. Considerare l'integrale sull'insieme $\{x \in \mathbb{R}^d \mid f(x) = 0\} \cup \{x \in \mathbb{R}^d \mid f(x) \neq 0\}$ e verificare che, se denotiamo $A = \{x \in \mathbb{R}^d \mid f(x) \neq 0\}$, allora $|A| = 0$.

Esercizio. [TO DO: per casa.] Sia f Lebesgue-misurabile su $\mathbb{R}^d$ tale che $\forall B$ palla su $\mathbb{R}^d$

$$\int_B f \, \mathrm{d}x = 0$$

Dimostrare che che $f = 0$ quasi ovunque su $\mathbb{R}^d$.

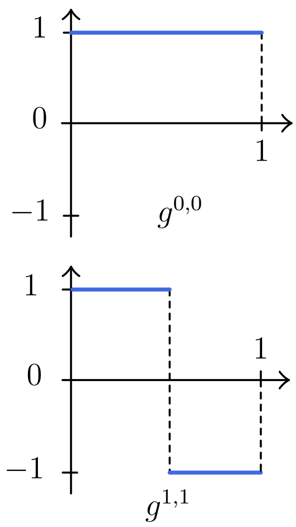
Suggerimenti. Usare la convoluzione con opportuni nuclei; notare che $\displaystyle\int_B f = 0 \iff f * \mathbb{1}_B = 0$ per ogni palla B.

3.2 Esempi di basi Hilbertiane

3.2.1 Polinomi

La base data da $\{1, x, x^2, \ldots, x^n, \ldots\}$ opportunamente ortonormalizzata è una base[5] di $L^2[0,1]$ (anche di $L^2(\mathbb{R})$).

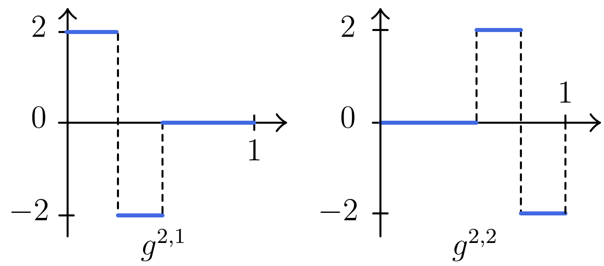
3.2.2 Base di Haar



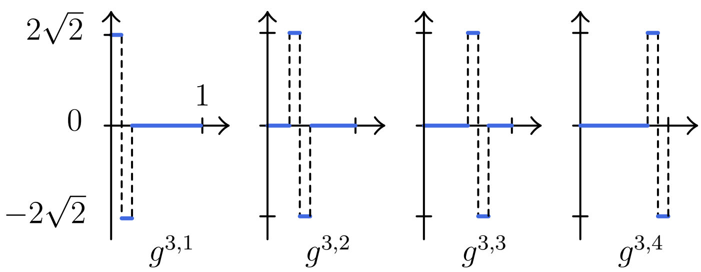
Vediamo la base di Haar data da due indici n, k dove n indica l'ampiezza delle "onde" (anche dette *wavelet*) e k il posizionamento dell'onda. Sia $n \in \mathbb{N}$ e $k = 1, \ldots, 2^n$ e poniamo

$$g^{0,0} := \mathbb{1}_{[0,1]} \qquad g^{n,k} := 2^{\frac{n-1}{2}} \left(\mathbb{1}_{\left[\frac{2k-2}{2^n}, \frac{2k-1}{2^n}\right]} - \mathbb{1}_{\left[\frac{2k-1}{2^n}, \frac{2k}{2^n}\right]} \right)$$

Inoltre $\|g^{n,k}\|_{L^2[0,1]} = 1$ ed anche $\|g^{0,0}\|_{L^2[0,1]} = 1$. Vedremo che $\{g^{n,k} \mid n \geq 1, k = 1, \ldots, 2^n\} \cup \{g^{0,0}\}$ formano un sistema ortonormale.



- $\langle g^{n,k}, g^{0,0} \rangle = 0$: È ovvio in quanto le $g^{n,k}$ hanno media nulla.
- $\langle g^{n,k}, g^{n',k'} \rangle = 0$: Se $n = n'$ i supporti sono sempre disgiunti altrimenti $n \neq n'$, se supponiamo $n < n'$ allora i supporti o sono disgiunti e si conclude come prima o il supporto di $g^{n',k'}$ è contenuto in quello di $g^{n,k}$. In tal caso però $g^{n,k}$ è costante su $g^{n',k'}$ e dunque l'integrale è sempre nullo.



[5] Teorema di Stone-Weierstrass: i polinomi sono densi nello spazio delle funzioni continue.

Inoltre è anche una base hilbertiana, per combinazioni algebriche si ottengono tutti gli intervalli della forma

$$I_k := \left[\frac{k-1}{2^n}, \frac{k}{2^n}\right] \qquad \rightsquigarrow \qquad \mathbb{1}_{I_k}$$

ad esempio normalizzando $g^{n,k} + 2^{\frac{n-1}{2}} g^{0,0}$ otteniamo uno degli intervalli di sopra di lunghezza $1/2^{n+1}$.

Vedremo che possiamo estendere la base di Haar a tutto $\mathbb{R}$ però è più difficile... [TODO: Ehm aggiungere la parte dopo quando verrà fatta]

Esercizio. Sia $p \geq 1$ allora $\{u \in L^p(\mathbb{R}) \mid \int u \,\mathrm{d}x = 0\} \subseteq L^p(\mathbb{R})$ è denso in $L^p(\mathbb{R})$?

3.3 Spazi di Hilbert complessi

Definizione. Sia H una spazio vettoriale su $\mathbb{C}$ con prodotto hermitiano $\langle \cdot\,; \cdot \rangle$, ovvero tale che

- $\langle \cdot\,; \cdot \rangle$ è lineare nella prima variabile
- $\langle x; x' \rangle = \overline{\langle x', x \rangle}$ ovvero è antilineare nella seconda variabile.
- $\langle x; x \rangle \geq 0$ per ogni x e vale 0 se e solo se $x = 0$.

Analogamente si pone $\|x\| := \sqrt{\langle x; x \rangle}$. C'è un'identità di polarizzazione ma è leggermente diversa dalla versione reale.

Definizione. H si dice di Hilbert se è **completo**.

Esempio. Su $L^2(X; \mathbb{C})$ si mette il prodotto scalare dato da

$$\langle u; v \rangle := \int_X u \cdot \overline{v} \,\mathrm{d}\mu.$$

Teorema. (della base di Hilbert per spazi complessi) Dato $\mathcal{F} = \{e_n\}$ sistema ortonormale in H e $x \in H$ allora per ogni n si pone[6]

$$x_n = \langle x; e_n \rangle$$

Vale anche l'identità di Parseval $\|x^2\| = \sum |x_n|^2$ dove $|\cdot|$ è il modulo di un numero complesso, in particolare nella versione con prodotto scalare diventa

$$\langle x, x' \rangle = \sum_n x_n \overline{x'_n}.$$

[6] E non $\langle e_n; x \rangle$!

Capitolo 4

Serie di Fourier

Lo scopo della serie di Fourier (complessa) è di rappresentare una funzione $f\colon [-\pi, \pi] \to \mathbb{C}$ (o più in generale una funzione $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ 2π-periodica) come

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}$$

In particolare, chiamiamo i coefficienti c_n **coefficienti di Fourier** di $f(x)$ e tutta l'espressione a destra **serie di Fourier** di $f(x)$.

Motivazione. La rappresentazione in serie di Fourier serve ad esempio a risolvere certe equazioni alle derivate parziali ed è anche utilizzata per la "compressione dati".

Problemi.

- Come si trovano (se esistono) i coefficienti di Fourier?
- Ed in che senso la serie converge?

Osservazione. La serie appena vista è indicizzata da $-\infty$ a $+\infty$, più avanti vedremo che la definizione esatta non sarà importante ma per ora usiamo la definizione

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \coloneqq \lim_{N\to+\infty} \sum_{n=-N}^{N} a_n$$

ed ogni tanto scriveremo anche $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n$ per brevità.

Teorema 1. L'insieme $\mathcal{F} = \left\{ e_n(x) \coloneqq \dfrac{e^{inx}}{\sqrt{2\pi}} \right\}$ è una base ortonormale di $L^2([-\pi, \pi]; \mathbb{C})$.

Da cui *formalmente* segue che

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{n\in\mathbb{Z}} \langle f; e_n \rangle \cdot e_n = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \left(\int_{-\pi}^{\pi} f(t) \overline{\frac{e^{int}}{\sqrt{2\pi}}} \,\mathrm{d}t \right) \frac{e^{inx}}{\sqrt{2\pi}} \\ &= \sum_{n\in\mathbb{Z}} \underbrace{\frac{1}{2\pi} \left(\int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-int} \,\mathrm{d}t \right)}_{c_n} e^{inx} \end{aligned}$$

Definizione. Data $f \in L^2([-\pi, \pi]; \mathbb{C})$ i coefficienti di Fourier di f sono

$$c_n = c_n(f) \coloneqq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx} \,\mathrm{d}x.$$

Notiamo in particolare che è anche ben definito anche per $f \in L^1$ (anche se per ora non ci dice molto in quanto L^1 non è uno spazio di Hilbert).

Corollario. Per ogni $f \in L^2([-\pi, \pi]; \mathbb{C})$ abbiamo

i) La serie $\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n e^{inx}$ converge a f in L^2.

ii) Vale l'identità di Parseval

$$\|f\|_2^2 = 2\pi \sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n|^2 \qquad\qquad \langle f, g\rangle = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(f)\overline{c_n(g)}$$

Osservazione. Usando la **??** ed il fatto che la convergenza in L^2 implica la convergenza quasi ovunque a meno di sottosuccessioni otteniamo che $\forall f\ \exists N_n \uparrow \infty$ tale che

$$\sum_{n=-N_k}^{N_k} c_n e^{inx} \xrightarrow{k} f(x) \qquad \tilde{\forall} x \in [-\pi, \pi]$$

In particolare nel 1966 Carleson ha dimostrato che in realtà vale proprio

$$\sum_{n=-N}^{N} c_n e^{inx} \xrightarrow{N} f(x) \qquad \tilde{\forall} x$$

Dimostrazione Teorema 1. Vogliamo vedere che

i) $\mathcal{F}$ è un sistema ortonormale.

Dimostrazione. Basta calcolare $\langle e_n; e_m\rangle$ per ogni $n, m \in \mathbb{Z}$

$$\langle e_n; e_m\rangle = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{inx}}{\sqrt{2\pi}} \cdot \overline{\frac{e^{inx}}{\sqrt{2\pi}}}\,\mathrm{d}x = \begin{cases} \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} 1\,\mathrm{d}x = 1 & \text{se } n = m \\ \dfrac{1}{2\pi}\left[\dfrac{e^{i(n-m)x}}{i(n-m)}\right]_{-\pi}^{\pi} = 0 & \text{se } n \neq m \end{cases}$$

ii) $\mathcal{F}$ è completo

Questo punto richiede il teorema di Stone-Weierstrass che enunciamo.

Teorema di Stone-Weierstrass. Sia K uno spazio compatto e T_2 (essenzialmente è uno spazio metrico compatto) e siano $C(K)$ le funzioni continue reali su K, mentre $C(K; \mathbb{C})$ le funzioni continue complesse su K (con la norma del sup).

Dato $\mathcal{A} \subset C(K)$ diciamo che è una **sottoalgebra** se è uno spazio vettoriale e chiuso rispetto al prodotto e diciamo che **separa i punti** se $\forall x_1, x_2 \in K$ con $x_1 \neq x_2$ allora $\exists f \in \mathcal{A}$ tale che $f(x_1) \neq f(x_2)$.

- *Caso reale:* se $\mathcal{A}$ è una sottoalgebra di $C(K)$ che separa i punti e contiene le costanti allora $\overline{\mathcal{A}} = C(K)$.
- *Caso complesso:* se $\mathcal{A}$ è una sottoalgebra di $C(K; \mathbb{C})$ che separa i punti, contiene le costanti e *chiusa per coniugio* allora $\overline{\mathcal{A}} = C(K; \mathbb{C})$.

Osservazioni.

- Se $K = [0,1]$, $\mathcal{A} =$ "polinomi reali" $\implies \overline{\mathcal{A}} = C(K; \mathbb{C})$.
- L'ipotesi di separare i punti è necessaria, se ad esempio $\exists x_1, x_2$ tali che $x_1 \neq x_2$ e per ogni f abbiamo $f(x_1) = f(x_2)$ allora varrà analogamente anche per ogni funzione nella chiusura ma le funzioni continue separano i punti.
- È anche necessario che $\mathcal{A} \supset$ "costanti", ad esempio dato $x_0 \in K$ ed $\mathcal{A} \coloneqq \{f \in C(K) \mid f(x_0) = 0\}$ abbiamo che $\overline{\mathcal{A}} = \mathcal{A} \subsetneq C(K)$.
- Anche la chiusura per coniugio è necessaria, infatti ad esempio preso $K = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq 1\}$, $\mathcal{A} =$ "polinomi complessi", $\mathcal{A}$ separa i punti e contiene le costanti però $\overline{\mathcal{A}}$ sono solo le funzioni olomorfe su K.

In particolare vorremmo applicare questo teorema alle funzioni 2π-periodiche ristrette a $[-\pi, \pi]$ che però non verificano la separazione dei punti in quanto per la periodicità $f(-\pi) = f(\pi)$. Nel seguente corollario vediamo come possiamo estendere leggermente il teorema passando ai quozienti topologici.

Corollario. Sia $\mathcal{A}$ una sottoalgebra di $C(K)$ (o analogamente per $C(K;\mathbb{C})$) che contiene le costanti (e nel caso complesso anche chiusa per coniugio) e definiamo la seguente relazione di equivalenza $x_1 \sim x_2$ se $f(x_1) = f(x_2)$ per ogni $f \in \mathcal{A}$ allora

$$\overline{\mathcal{A}} = \{f \in C(K) \mid x_1 \sim x_2 \Rightarrow f(x_1) = f(x_2)\}$$

$$\begin{tikzcd} K \arrow[r, "g"] \arrow[d, "\pi"'] & \mathbb{C} \\ K/\sim \arrow[ur, dashed, "\widetilde{g}"'] & \end{tikzcd}$$

Dimostrazione del corollario. Diciamo $X \coloneqq \{f \in C(K) \mid x_1 \sim x_2 \Rightarrow f(x_1) = f(x_2)\}$ allora applichiamo il teorema di Stone-Weierstrass a $K/\sim$, è chiaro che $\overline{\mathcal{A}} \subset X$, vediamo che $X \subset \overline{\mathcal{A}}$.
Data $g \in X$ troviamo $g_n \in \mathcal{A}$ tale che $g_n \to g$ uniformemente allora $\exists \widetilde{g} \colon K/\sim \to \mathbb{C}$ tale che $g = \widetilde{g} \circ \pi$, consideriamo $\mathcal{A} = \{\widetilde{f} \mid f \in \mathcal{A}\}$ che è una sottoalgebra di $C(\overline{K/\sim}; \mathbb{C})$ che separa i punti, etc. $\square$

Torniamo alla dimostrazione della completezza di $\mathcal{F}$, $K = [-\pi, \pi]$ e consideriamo

$$\mathcal{A} = \mathrm{Span}_{\mathbb{C}}(\mathcal{F}) = \left\{ \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n e^{inx} \right\} = \{p(e^{inx}) \mid p \text{ polinomio a esponenti interi}\}$$

segue che $\mathcal{A}$ è una sottoalgebra, separa i punti di K tranne $-\pi$ e π ed è chiuso per coniugio.

Per il corollario[1] $\overline{\mathcal{A}}^C = \{f \in C([-\pi, \pi]; \mathbb{C}) \mid f(-\pi) = f(\pi)\}$. Se invece facciamo la chiusura rispetto ad L^2 abbiamo che

$$\overline{\mathcal{A}}^{L^2} \supseteq \{f \in C([-\pi, \pi]; \mathbb{C}) \mid f(-\pi) = f(\pi)\}$$

in quanto la convergenza uniforme implica la convergenza in L^2 per spazi di misura finita.

Inoltre $\overline{\mathcal{A}}^{L^2} \supseteq \{f \in C([-\pi, \pi]; \mathbb{C})\}$, data $f \in C([-\pi, \pi]; \mathbb{C})$ la approssimiamo in L^2 con $f_n = f \cdot \varphi_n$, dove le φ_n sono tali che $\varphi_n(-\pi) = \varphi_n(\pi) = 0$, $\varphi_n = 1$ su $[1/n - \pi, \pi - 1/n]$ e interpolata linearmente nell'intervallo rimanete.

[TODO: Disegnino delle φ_n]

Infine poiché le funzioni continue sono dense in L^2 rispetto alla sua norma segue che $\overline{\mathcal{A}}^{L^2} = L^2$.

[1] Notiamo che la topologia su $\mathcal{A}$ è quella data dalla norma del sup delle funzioni continue quindi la chiusura è rispetto a tale norma e la indichiamo con $\overline{\mathcal{A}}^C$.

Esempio (calcolo coefficienti di Fourier).

- $\cos x = \frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2} = \frac{1}{2}e^{ix} + \frac{1}{2}e^{-ix}$, allora $c_n = \begin{cases} \frac{1}{2} & n = \pm 1 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$.

- $(\sin x)^2 = (\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i})^2 = \frac{1}{4}e^{2ix} + \frac{1}{2} - \frac{1}{4}e^{-2ix}$, allora $c_n = \begin{cases} -\frac{1}{4} & n = \pm 2 \\ \frac{1}{2} & n = 0 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$.

- $f(x) = x, c_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,\mathrm{d}x = 0$. Per $n \neq 0$:

$$c_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} xe^{-inx}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2\pi}\left|\frac{xe^{-inx}}{-in}\right|_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{e^{-inx}}{-in}\,\mathrm{d}x = \frac{(-1)^n i}{n}.$$

Calcoliamo ora $\sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} |c_n|^2$. Valgono le uguaglianze

$$\begin{aligned} \sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n|^2 i &= 2\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2} \\ \sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n|^2 i &= \frac{1}{2\pi}\|x\|_2^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^2\,\mathrm{d}x = \frac{2}{2\pi}\cdot\frac{\pi^3}{3} = \frac{\pi^2}{3}. \end{aligned}$$

Dunque $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^3}{6}$.

4.0.1 Regolarità di f e dei coefficienti

Proposizione 1. Data $f \in [-\pi,\pi] \to \mathbb{C}$ tale che

(R) $f \in C^1$ (basta f continua e C^1 a tratti).

(CB) $f(-\pi) = f(\pi)$.

Allora $c_n(f') \overset{(\star)}{=} in\ c_n(f)$.

Derivazione formale della formula

$$f(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n e^{inx} \xrightarrow{\text{derivata}} f'(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} in\ c_n e^{inx}$$

Dimostrazione. Vale quanto segue

$$\begin{aligned} c_n(f') &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)'e^{-inx}\,\mathrm{d}x \\ &\underbrace{=}_{\text{int. per parti}} \frac{1}{2\pi}\overbrace{\cancel{\left|f(x)e^{-inx}\right|_{-\pi}^{\pi}}}^{f(-\pi)=f(\pi),\ e^{-in\pi}=e^{-in(-\pi)}} - \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)(-in)e^{-inx}\,\mathrm{d}x \\ &= (in)\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-inx}\,\mathrm{d}x = in\ c_n(f). \end{aligned}$$

$\square$

Esercizio. Trovare l'analogo della formula della derivata nel caso di cui non valga la condizione al bordo (CB). [TO DO]

Osservazione. In verità, basta ancora meno. Possiamo riformulare la Proposizione 1 come segue.

(R') Data f continua ed esiste $g \in L^1([-\pi,\pi],\mathbb{C})$ tale che $f(x) = f(-\pi) + \displaystyle\int_{-x}^{x} g(t)\,\mathrm{d}t$

(CB) $f(-\pi) = f(\pi) \iff \displaystyle\int_{-x}^{x} g(t)\,\mathrm{d}t = 0.$

Allora la formula $(\star)$ diventa $c_n(g) = in\, c_n(f)$.

Proposizione 2. Data f come nella Proposizione 1, valgono le seguenti

i) $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{Z}} n^2 \left|c_n(f)\right|^2 = \frac{\|f'\|_2^2}{2\pi} < +\infty.$

ii) $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{Z}} |n|^\alpha \left|c_n(f)\right| < +\infty$ per ogni $\alpha < 1/2$.

iii) La serie di Fourier converge [2]totalmente.

Dimostrazione.

i) $\displaystyle\sum n^2 \left|c_n(f)\right|^2 \overbrace{=}^{(*)} \sum \left|c_n(f')\right|^2 \overbrace{=}^{\text{Parceval}} 2\pi \|f'\|_2^2 \underbrace{<}_{f'\in L^1([-\pi,\pi],\mathbb{C})\subset L^2([-\pi,\pi],\mathbb{C})} +\infty.$

ii) $$\sum |n|^\alpha \left|c_n(f)\right| \underbrace{\le}_{(n\neq 0)} \sum_{n\in\mathbb{Z}} |n| \left|c_n(f)\right| \cdot \frac{1}{|n|^{1-\alpha}} \underbrace{\le}_{C-S} \overbrace{\left(\sum_{n\in\mathbb{Z}} |n|^2 \left|c_n(f)\right|^2\right)^{1/2}}^{<+\infty \text{ per il punto ii)}} \cdot \left(\sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{1}{|n|^{2-2\alpha}}\right)^{1/2}.$$

iii) Dal punto precedente con $\alpha = 0$ otteniamo $\left\|c_n(f)e^{inx}\right\|_\infty \displaystyle\sum_{n\in\mathbb{Z}} \left|c_n(f)\right| < +\infty.$

Proposizione 3. Data $f \in [-\pi,\pi] \to \mathbb{C}$ tale che

(R_k) $f \in C^k$ (oppure $f \in C^{k-1}$ e $D^{k-1}f$ è C^1 a tratti).

(CB_{k-1}) $D^h f(-\pi) = D^h f(\pi)$ per $h = 0, 1, \ldots, k-1$.

Allora

i) $c_n(D^h f) = (in)^h c_n(f)$ per ogni $n \in \mathbb{Z}$ per ogni $h = 1, \ldots, k$.

ii) $\displaystyle\sum |n|^{2k} \left|c_n(f)\right|^2 \le \frac{\left\|D^k f\right\|_2^2}{2\pi} < +\infty.$

iii) $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{Z}} |n|^\alpha \left|c_n(f)\right| < +\infty$ per ogni $\alpha < k - 1/2$.

[2] $\sum a_n(x)$ converge totalmente se converge la serie $\sum \|a_n(x)\|_\infty$.

iv) La serie di Fourier di f converge totalmente con tutte le derivate fino all'ordine $k-1$.

Proposizione 4. Se f è continua e $\sum_{n\in\mathbb{Z}} |n|^{k-1} |c_n(f)| < +\infty$ allora $f \in C^{k-1}$ e soddisfa (CB_{k-1}).

Dimostrazione. Preso $h = 0, 1, \ldots, k-1$ vale

$$\begin{aligned} D^k(c_n(f)e^{inx}) &= c_n(f)(in)^h e^{inx} \\ \left\| D^k(c_n(f)e^{inx}) \right\| &= |c_n(f)| \, |n|^h \leq |c_n(f)| \, |n|^{k-1} . \end{aligned}$$

Dunque $\sum D^h \left(c_n(f)e^{inx} \right)$ converge totalmente e quindi uniformemente per ogni $h \leq k-1$ ad $\widetilde{f} \colon [-\pi, \pi] \to \mathbb{C}$ di classe C^{k-1}. Ma

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left\| \sum_{-N}^{N} c_n e^{inx} - \widetilde{f}(x) \right\|_2 \leq \left\| \sum_{-N}^{N} c_n e^{inx} - \widetilde{f}(x) \right\|_\infty \xrightarrow{N \to +\infty} 0.$$

Ma $\sum c_n e^{inx} \to \widetilde{f}$ uniformemente, allora $\sum_{-N}^{N} c_n e^{inx} \to \widetilde{f}$ in L^2. Allora $f = \widetilde{f}$ nel senso L^2. Siccome $f, \widetilde{f}$ sono continue e coincidono quasi ovunque, vale $f = \widetilde{f}$. Abbiamo usato il lemma

Lemma. Date $f, \widetilde{f}$ continue e $f(x) = \widetilde{f}(x)$ per quasi ogni x, allora $f(x) = \widetilde{f}(x)$ per ogni x. $\square$

Osservazione. $f \in C^{k-1}([-\pi, \pi]) + (CB_{k-1})$ se solo se f è la restrizione a $[-pi, \pi]$ di una funzione 2π-periodica e C^{k-1}.

4.0.2 Convergenza puntuale della serie di Fourier

Teorema. Data $f \in L^1([-\pi, \pi], \mathbb{C})$ (estesa in modo 2π-periodico a tutto $\mathbb{R}$) tale che esiste $\overline{x} \in \mathbb{R}$ ed esiste $\alpha > 0$ tale che f è α-Holderiana in $\overline{x}$, cioè esiste $\delta > 0$, $M < +\infty$ per cui

$$|f(\overline{x}+t) - f(\overline{x})| \leq M |t|^\alpha \qquad \forall t \colon \, |t| < \delta \iff \limsup_{t \to 0} \frac{|f(\overline{x}+t) - f(\overline{x})|}{|t|^\alpha} < +\infty.$$

Allora $\sum_{-\infty}^{\infty} c_n(f) e^{in\overline{x}}$ converge a $f(\overline{x})$. Cioè $\sum_{-N}^{N} c_n(f) e^{in\overline{x}} \xrightarrow{N \to \infty} f(\overline{x})$

Lavoro preparatorio: rappresentare somme parziali di serie di Fourier con "convoluzione":

Data $f \in L^1([-\pi, \pi], \mathbb{C})$, $N = 1, 2, \ldots$ (estesa a funzioni 2π-periodiche su $\mathbb{R}$).

$$S_N f(x) \coloneqq \sum_{-N}^{N} c_n e^{inx}$$

Riscriviamo

$$\begin{aligned} S_N f(x) \coloneqq \sum_{-N}^{N} c_n e^{inx} &= \sum_{-N}^{N} \frac{1}{2\pi} \left(\int_{-\pi}^{\pi} f(y) e^{-iny} \, \mathrm{d}y \right) e^{inx} \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(y) \left(\sum_{n=-N}^{N} e^{in(x-y)} \right) \mathrm{d}y. \end{aligned}$$

Poniamo $D_N(z) \coloneqq \sum_{n=-N}^{N} e^{inz}$ che si definisce **nucleo di Dirichlet**. Allora

$$\begin{aligned} S_n f(x) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(y) D_N(x-y)\,\mathrm{d}y \overbrace{=}^{x-y=t,\,\mathrm{d}y=\,\mathrm{d}t} \frac{1}{2\pi}\int_{x-\pi}^{x+\pi} f(x-t)D_N(t)\,\mathrm{d}t \\ &\overbrace{=}^{(\star)} \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x-t)D_N(t)\,\mathrm{d}t \end{aligned}$$

Dove $(\star)$ è il seguente lemma.

Lemma. Se g è T-periodica e $g \in L^1([-\pi,\pi],\mathbb{C})$, allora

$$\int_0^T g(\tau)\,\mathrm{d}\tau = \int_c^{c+T} g(\tau - s)\,\mathrm{d}\tau \quad \forall s\ \forall c.$$

Ne segue che

$$S_N f(x) \coloneqq \sum_{-N}^{N} c_n(f) e^{inx} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x-t)D_N(t)\,\mathrm{d}t$$

dove

$$D_N(t) = \sum_{-N}^{N} e^{int} = \frac{\sin((N+1/2)t)}{\sin(t/2)}.$$

Infatti,

$$\begin{aligned} D_N(t) &= \sum_{-N}^{N} e^{int} = \sum_{-N}^{N} (e^{it})^t = e^{-iNt}\cdot \sum_{n=0}^{2N} (e^{it})^n \\ &= \frac{e^{-i(N+1/2)t}}{e^{-it/2}} \cdot \frac{e^{(2N+1)it}-1}{e^{it}-1} = \frac{e^{(N+1/2)it} - e^{-(N+1)it}}{e^{it/2}-e^{-it/2}} \\ &= \frac{\sin((N+1/2)t)}{\sin(t/2)}. \end{aligned}$$

Lemma. (di rappresentazione di $S_n f$ come convoluzione) Ricapitolando data f come sopra abbiamo visto che

$$S_n f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x-t)D_n(t)\,\mathrm{d}t \qquad \text{con } D_N(t) \coloneqq \sum_{n=-N}^{N} e^{int} = \frac{\sin\left(\left(N+\frac{1}{2}\right)t\right)}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)}$$

Osservazione. In particolare vale $\displaystyle\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} D_N(t)\,\mathrm{d}t = 1$.

Lemma. (di Riemann-Lebesgue (generalizzato)). Data $g \in L^1(\mathbb{R})$ e $h \in L^\infty(\mathbb{R})$ con h T-periodica, allora

$$\int_{\mathbb{R}} g(x)h(yx)\,\mathrm{d}x \xrightarrow{y\to\pm\infty} \underbrace{\left(\int_{\mathbb{R}} g(x)\,\mathrm{d}x\right)}_{a}\underbrace{\left(\fint_0^T h(x)\,\mathrm{d}x\right)}_{m}$$

Se supponiamo $\operatorname{supp} g \subseteq [0,1]$ allora

$$\int_0^1 g(x)h(yx)\,\mathrm{d}x \xrightarrow{y\to\pm\infty} \int_0^1 g(x)\,\mathrm{d}x \cdot \fint_0^T h(x)\,\mathrm{d}x \approx \int_0^1 g(x)\,\mathrm{d}x \cdot \fint_0^1 h(yx)\,\mathrm{d}y.$$

In particolare è abbastanza intuitivo il risultato per g costante a tratti infatti su un intervallo otterremmo

$$\int_0^{x_1} g(x)h(yx)\,\mathrm{d}x = c\int_0^{x_1} h(yx)\,\mathrm{d}x = (cx_1)m$$

Però ci sarebbero delle correzzioni da fare per dimostrare le cose in questo modo in generale. Vediamo invece un'altra dimostrazione un po' più elegante.

[TODO: Disegnino nel caso g costante a tratti]

Dimostrazione. Per ogni s, y poniamo $\Phi(y,s) := \int_{\mathbb{R}} g(x)h(yx+s)\,\mathrm{d}x$ con $s, y \in \mathbb{R}$ allora la tesi è che $\Phi(y,0) \xrightarrow{y\to\pm\infty} am$. Vedremo che valgono le seguenti

i) $\forall y \ ⨍_0^T \Phi(y,s)\,\mathrm{d}s = am$.

ii) $\forall s\ \Phi(y,s) - \Phi(y,0) \xrightarrow{y\to\pm\infty} 0$.

da cui segue subito che

$$\Phi(y,0) - ma = ⨍_0^T \Phi(y,0) - \Phi(y,s)\,\mathrm{d}s \xrightarrow{y\to\pm\infty} 0$$

per convergenza dominata dove dalla ii). segue la convergenza puntuale e come dominazione usiamo

$$|\Phi(y,0) - \Phi(y,s)| \le 2\,\|g\|_1\,\|h\|_\infty$$

da cui segue la tesi. Mostriamo ora i due punti.

i) Esplicitiamo e applichiamo Fubini-Tonelli

$$\begin{aligned}\int_0^T \Phi(y,s)\,\mathrm{d}s &= \int_0^T \int_{\mathbb{R}} g(x)h(yx+s)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}s \\ &= \int_{\mathbb{R}} \underbrace{⨍_0^T h(yx+s)\,\mathrm{d}s}_{m} \cdot g(x)\,\mathrm{d}x \\ &= m\int_{\mathbb{R}} g(x)\,\mathrm{d}x = ma\end{aligned}$$

e possiamo usare Fubini-Tonelli in quanto

$$\int_{\mathbb{R}} ⨍_0^T |h(yx-s)|\,\mathrm{d}s \cdot |g(x)|\,\mathrm{d}x \le \int_{\mathbb{R}} \|f\|_\infty\,|g(x)|\,\mathrm{d}x = \|h\|_\infty \cdot \|g\|_1$$

ii) [TODO: inventare delle parole a caso]

$$\Phi(y,s) = \int_{\mathbb{R}} g(x)h\left(y\left(x+\frac{s}{y}\right)\right)\,\mathrm{d}x$$

ora applichiamo la sostituzione $t = x + \dfrac{s}{y}$ da cui $\mathrm{d}t = \mathrm{d}x$

$$= \int_{\mathbb{R}} g\left(t - \frac{s}{y}\right) h(yt)\,\mathrm{d}t$$

ed a questo punto otteniamo

$$\Phi(y,s)-\Phi(y,0)=\int_{\mathbb{R}}\left(g\left(t-\frac{s}{y}\right)-g(t)\right)h(yt)\,\mathrm{d}t$$

$$\implies |\Phi(y,s)-\Phi(y,0)|=\int_{\mathbb{R}}|\tau_{\frac{s}{y}}g-g|\cdot|h(yt)|\,\mathrm{d}t\le\left\|\tau_{\frac{s}{y}}g-g\right\|_1\cdot\|h\|_\infty\xrightarrow{y\to\pm\infty}0$$

$\square$

Dimostrazione del Teorema.

$$\begin{aligned}S_Nf(\bar{x})-f(\bar{x})&=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(\bar{x}-t)D_N(t)\,\mathrm{d}t-\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(\bar{x})D_N(t)\,\mathrm{d}t\\&=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(f(\bar{x}-t)-f(\bar{x}))D_N(t)\,\mathrm{d}t\\&=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{f(\bar{x}-t)-f(\bar{x})}{\sin\frac{t}{2}}\sin\left(\left(N+\frac{1}{2}\right)t\right)\,\mathrm{d}t\\&=\int_{-\pi}^{\pi}g(t)\cdot\sin\left(\left(N+\frac{1}{2}\right)t\right)\xrightarrow{\mathrm{RL}}\left(\int g(x)\,\mathrm{d}x\right)\cdot\fint_0^{\pi}\sin x\,\mathrm{d}x\end{aligned}$$

in particolare per applicare Riemann-Lebesgue serve $g\in L^1([-\pi,\pi])$ ma infatti per $|t|\le\delta$

$$|g(t)|\le\frac{|f(\bar{x}-t)-f(\bar{x})|}{|\sin\frac{t}{2}|}\le\frac{M|t|^\alpha}{|t|/\pi}=\frac{M\pi}{|t|^{1-\alpha}}\in L^1([-\delta,\delta])$$

invece per $\delta\le|t|\le\pi$ basta

$$|g(t)|\le\frac{|f(\bar{x}-t)|+|f(\bar{x})|}{\sin\frac{\delta}{2}}\in L^1([-\pi,\pi])$$

$\square$

Data $f\in L^1([-\pi,\pi])$ estesa per periodicità e dato $\bar{x}$ tale che esistano i limiti a destra e sinistra di f in $\bar{x}$ detti L^+ e L^- ed f α-Hölderiana a sinistra e destra si può vedere che vale

$$S_Nf(\bar{x})\xrightarrow{N}\frac{L^++L^-}{2}$$

Capitolo 5

Applicazioni della serie di Fourier

5.1 Equazione del calore

Sia Ω un aperto di $\mathbb{R}^d$ e $u(t,x)\colon [0,T) \times \Omega \to \mathbb{R}$ e chiamiamo x la *variabile spaziale* e t la *variabile temporale*. In dimensione 3 l'insieme Ω rappresenta un solito di materiale conduttore omogeneo e $u(t,x) =$ temperatura in x all'istante $t \implies u$ risolve l'equazione del calore

$$u_t = c \cdot \Delta u$$

dove con u_t indichiamo la derivata parziale di u rispetto al tempo, c è una costante fisica che porremo uguale ad 1 e Δu è il laplaciano rispetto alle dimensioni spaziali ovvero

$$\Delta u = \sum_{i=1}^{d} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} = \operatorname{div}(\nabla_x u)$$

Vedremo che la soluzione di $u_t = \Delta u$ esiste ed è unica specificando $u(0,\,\cdot\,) = u_0$ condizione iniziale con $u_0\colon \Omega \to \mathbb{R}$ data e delle condizioni al bordo come ad esempio

- *Condizioni di Dirichlet*: $u = v_0$ su $[0,T) \times \partial\Omega$ con v_0 funzione fissata. Possiamo pensare come fissare delle sorgenti di calore costanti sul bordo.
- *Condizioni di Neumann:* $\dfrac{\partial u}{\partial \nu}$ con ν direzione normale al bordo. Essenzialmente ci sta dicendo che non c'è scambio di calore con l'esterno.

In particolare scriveremo

$$\begin{cases} u_t = \Delta u \quad \text{su } \Omega \\ u(0,\,\cdot\,) = u_0 \\ \text{Una delle condizioni al bordo su } \partial\Omega\ldots \end{cases}$$

5.1.1 Derivazione dell'equazione del calore

Partiamo da due leggi fisiche

- *Trasmissione del calore attraverso pareti sottili:*

  Siano u^- e u^+ le temperature a sinistra e destra di una parete di spessore δ ed area a. Allora "la quantità di calore che attraversa la parete per unità di tempo è proporzionale a $u^- - u^+$, all'area della parete e inversamente proporzionale allo spessore.

$$\Delta E = c_1 \frac{\Delta u}{\delta} a \Delta t$$

In particolare per $\delta \to 0$ otteniamo che su una superficie Σ vale

$$\Delta E = c_1 \frac{\partial u}{\partial \nu} |\Sigma| \Delta t$$

Passando ulteriormente al caso continuo otteniamo

$$\frac{\Delta E}{\Delta t} = c_1 \frac{\partial u}{\partial \nu} |\Sigma| \implies \frac{\partial E}{\partial t} = \int_{\partial A} \frac{\partial u}{\partial \nu}$$

- *Legge fisica 2:*

  L'aumento di temperatura in un solito è proporzionale alla quantità di calore immessa e inversamente proporzionale al volume.

  $$\Delta u = \frac{1}{c_2} \frac{\Delta E}{V}$$

  passando al continuo otteniamo $\dfrac{\partial E}{\partial t} = \displaystyle\int_A c_2 \frac{\partial u}{\partial t}$.

Dunque infine otteniamo che

$$\forall A \subseteq \Omega \, \forall t \qquad \int_A c_2 \frac{\partial u}{\partial t} = \int_{\partial A} \frac{\partial u}{\partial \nu} = \int_A \operatorname{div}(\nabla u) = \int_A \Delta u$$

dove abbiamo usato il teorema della divergenza. Ed infine

$$\implies \int_A c_2 \frac{\partial u}{\partial t} = \int_A c_1 \Delta u \implies c_2 \frac{\partial u}{\partial t} = c_1 \Delta u \implies \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{c_1}{c_2} \cdot \Delta u$$

5.2 Esercitazione del 11 novembre

Consideriamo $L^2([-\pi, \pi], \mathbb{C})$. Ricordiamo che $e^{inx} = \cos(nx) + i \sin(nx)$. Abbiamo

$$\begin{aligned}
\sum_{n=-N}^{N} c_n e^{inx} &= c_0(f) + \sum_{n=1}^{N} \left(c_n(f) e^{inx} + c_{-n} e^{inx} \right) \\
&= c_0(f) + \sum_{n=1}^{N} \left[(c_n(f) + c_{-n}(f)) \cos(nx) + i \left(c_n(f) - c_{-n}(f) \right) \sin(nx) \right] \\
&= c_0(f) + \sum_{n=1}^{N} a_n(f) \cos(nx) + b_n(f) \sin(nx)
\end{aligned}$$

con

$$\begin{cases} a_n(f) = c_n(f) + c_{-n}(f) \\ b_n(f) = i c_n(f) - i c_{-n}(f) \\ a_0(f) = c_0(f) \end{cases}$$

Passando al limite per $N \to +\infty$

$$f(x) \overset{L^2}{\widehat{=}} \sum_{n=-N}^{N} c_n e^{inx} \overset{(\star)}{=} c_0(f) + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n(f)\cos(nx) + b_n(f)\sin(nx)$$

Nota. L'uguaglianza $(\star)$ ha bisogno di qualche spiegazione: come sappiamo che la serie a destra converge? Usiamo il fatto, che mostriamo sotto, che $\{1, \cos(nx), \sin(nx), n > 1\}$ sono un sistema ortogonale, dunque per la disuguaglianza di Bessel segue la convergenza.

Osservazione. Gli elementi $\{1, \sin(nx), \cos(nx)\}$ sono ortogonali per $n \geq 1$ in $L^2([-\pi, \pi], \mathbb{C})$. Infatti, ricordiamo che

$$\begin{aligned} \sin(nx) &= \frac{e^{inx} - e^{-inx}}{2i} = \frac{ie^{-inx} - ie^{inx}}{2} \\ \cos(nx) &= \frac{1}{2}\left(e^{inx} + e^{-inx}\right). \end{aligned}$$

È banale verificare che $\langle 1, \cos(nx)\rangle = \langle 1, \sin(nx)\rangle = 0$ per ogni n, perchè integro cos e sin sul periodo. Anche $\langle \cos(nx), \sin(mx)\rangle = 0$ per ogni n, m.

Dunque, calcoliamo

$$\langle \sin(nx), \sin(mx)\rangle = \frac{1}{4}\left\langle e^{-inx} - e^{inx}, e^{-imx} - e^{imx}\right\rangle = 0.$$

Ora normalizziamo: $\left\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{\cos(nx)}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin(nx)}{\sqrt{\pi}}, n \geq 1\right\}$.

Dunque abbiamo ottenuto che

- $L^2([-\pi, \pi], \mathbb{C})$ ha base Hilbertiana $\left\{\frac{1}{\sqrt{\pi}}, \frac{\cos(nx)}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin(nx)}{\sqrt{\pi}}\right\}_{\mathbb{C}}$
- $L^2([-\pi, \pi], \mathbb{R})$ ha base Hilbertiana $\left\{\frac{1}{\sqrt{\pi}}, \frac{\cos(nx)}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin(nx)}{\sqrt{\pi}}\right\}_{\mathbb{R}}$

Esercizio. Se f è a valori reali, dimostrare che $a_n(f)$ e $b_n(f)$ sono anch'essi reali. [TO DO]

Sketch. Si dimostra che $a_n(f) = \overline{a_n(f)}, b_n(f) = \overline{b_n(f)}$ e per farlo si usano le espressioni di a_n, b_n in funzione dei coefficienti di Fourier complessi scritte sopra.

Esercizio. Trovare la base di Fourier complessa e reale di $L^2([a, b], \mathbb{C})$ [TO DO]

Esercizio. Sia $f \in L^2([-\pi, \pi], \mathbb{C})$ (l'estensione di) f è $2\pi/N$ periodica. Dimostrare che $c_n(f) \neq 0$ se solo se n multiplo di N. [TO DO]

Esercizi classici. Fissata una funzione $f \in L^2$, calcolare i coefficienti di Fourier complessi (e reali).

Calcoliamo i coefficienti di $f(x) = x^2$.

$$
\begin{aligned}
c_n(f) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^2 e^{-inx}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2\pi}\left|\frac{e^{-inx}}{-in}x^2\right|_{-\pi}^{\pi} - \int_{-\pi}^{\pi}\frac{e^{-inx}}{-in}2x\,\mathrm{d}x \\
&= -\int_{-\pi}^{\pi}\frac{e^{-inx}}{-in}2x\,\mathrm{d}x = -\frac{i}{\pi n}\left[\left|\frac{e^{-inx}}{-in}\right|_{-\pi}^{\pi} - \int_{-\pi}^{\pi}\frac{e^{-inx}}{-in}\,\mathrm{d}x\right] \\
&= \frac{-i\pi}{\pi n}\frac{\cos(-n\pi)+\cos(-n(-\pi))}{-in} + \frac{i}{\pi n}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{e^{-inx}}{-inx}\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{2}{n^2} + \frac{i}{\pi n}\cdot 0 = \frac{2}{n^2}(-1)^n \\
&\Longrightarrow c_n(f) = \frac{2}{n^2}(-1)^n.
\end{aligned}
$$

Infine

$$
c_0(f) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^2\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2\pi}\frac{2}{3}\pi^3 = \frac{1}{3}\pi^2.
$$

Per Parseval $\|f\|_{L^2}^2 = 2\pi\sum_{n\in\mathbb{Z}}|c_n(f)|^2$. Da cui

$$
\int_{-\pi}^{\pi} x^4\,\mathrm{d}x = \left\|x^2\right\|_{L^2}^2 = 2\pi\cdot\left[\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{4}{n^4} + \frac{\pi^2}{3}\right].
$$

Nota. Potevamo ottenere i coefficienti di $f(x) = x^2$, applicando il teorema della derivata. [TO DO: vedere che valgono le ipotesi]

Domande.

- Abbiamo visto che $c_n(x^2) = \dfrac{2(-1)^n}{n^2}$ e dedotto che $c_n(2x) = in\dfrac{2(-1)^n}{n^2} = \dfrac{2(-1)^n i}{n}$.
- Vorremmo calcolare $c_n(2)$, possiamo applicare il teorema sulla formula della derivata?

Esercizio.

i) Calcolare i coefficienti di Fourier complessi di x^3 e vedere che se vale $c_n(3x^2) = inc_n(x^3)$.

ii) Calcolare i coefficienti reali di x^2.

Esercizio. Sia $f(x)$ definita da $\sum_{n\in\mathbb{Z}}\gamma_n e^{inx}$ con $\begin{cases}\gamma_n = \dfrac{\cos(n)}{|n|^{3/2}} \\ \gamma_0 = 1\end{cases}$

Domande.

i) f è ben definita?

ii) f è continua?

iii) f è derivabile?

Dimostrazione.

i) Sì, infatti $2\sum_{n=1}^{+\infty}|\gamma_n|^2 \le 2\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^3} < +\infty$.

ii) *Suggerimento.* Usare la Proposizione 3 della parte della regolarità dei coefficienti della serie di Fourier.

5.3 Risoluzione dell'equazione del calore (su $\mathbb{S}^1$)

Come conduttore consideriamo un anello di materiale omogeneo e sottile che parametrizziamo con $[-\pi, \pi]$. Dunque consideriamo $u\colon [0,T) \times [-\pi,\pi] \to \mathbb{R}$ con le condizioni

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} \\ u(\,\cdot\,,\pi) = u(\,\cdot\,,-\pi) \\ u(0,\,\cdot\,) = u_0 \end{cases} \tag{P}$$

in particolare la (ii) e la (iii) condizione non sono né quelle di Dirichlet né di Neumann, sono delle condizioni che effettivamente ci dicono che siamo "su $\mathbb{S}^1$"[1]; invece l'ultima è la condizione iniziale ed u_0 è data.

5.3.1 Risoluzione formale

Scriviamo u in serie di Fourier rispetto a x cioè

$$u(t,x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n e^{inx}$$

con $c_n \coloneqq c_n(u(t,\,\cdot\,))$ da cui derivando formalmente dentro le sommatorie otteniamo che u_t e u_{xx} sono

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} \dot{c}_n(t)e^{inx} = u_t = u_{xx} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} -n^2 c_n(t)e^{inx}$$
$$u_t = u_{xx} \iff \dot{c}_n(t) = -n^2 c_n(t) \;\; \forall n\, \forall t \quad \text{e} \quad u(0,\,\cdot\,) = u_0 \iff c_n(0) = c_n(u_0) =: c_n^0$$

Dunque risolvere (**??**) equivale per ogni n che c_n che risolva il problema di Cauchy dato da

$$\begin{cases} \dot{y} = -n^2 y \\ y(0) = c_n^0 \end{cases} \tag{P$'$}$$

con soluzione $y(t) = \alpha e^{-n^2 t}$ cioè $c_n(t) = c_n^0 e^{-n^2 t}$ e quindi abbiamo

$$u(t,x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n^0 e^{-n^2 t} e^{inx} \tag{$*$}$$

Studiando questa soluzione formale possiamo fare le seguenti osservazioni che poi diventeranno dei teoremi

- *La soluzione esiste per $t \in [0,+\infty)$ ed è molto regolare per $t > 0$*

  Vedremo che la soluzione formale è proprio una soluzione al problema per $t \geq 0$, in particolare il termine $e^{-n^2 t} \to 0$ in modo più che polinomiale ed infatti vedremo che la soluzione sarà proprio C^∞ per $t > 0$.

[1] Bastano solo queste condizioni sulla funzione e sulla sua derivata perché intuitivamente le altre seguono applicando la (i).

- *La soluzione è unica*

  Tutti i problemi di Cauchy per i coefficienti $c_n(t)$ hanno un'unica soluzione dunque anche la soluzione u è unica.

- *In generale non esiste soluzione nel passato.*

  Se il numero di coefficienti $c_n^0 \neq 0$ è infinito allora il termine $e^{-n^2 t} \to +\infty$ molto velocemente per $t < 0$ e la serie diverge.

Teorema 1 (Esistenza e Regolarità).
Se $u_0 \colon [-\pi, \pi] \to \mathbb{C}$ (presa in L^2) è tale che $\sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n^0| < +\infty$ (ad esempio se $u_0 \in C^1$ ed è 2π-periodica) allora

$$u(t,x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \underbrace{c_n^0 e^{-n^2 t} e^{inx}}_{u_n(t,x)}$$

definisce una funzione $u \colon [0, +\infty) \times \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ tale che

i) u è 2π-periodica in x ed è reale se u_0 è reale.

ii) u è continua.

iii) u è C^∞ su $(0, +\infty) \times \mathbb{R}$.

iv) Risolve (**??**). In particolare vale $u_{tt} = u_{xx}$ e valgono le condizioni di periodicità per $t > 0$; e infine vale $u(0, \cdot\,) = u_0$ su $[-\pi, \pi]$.

Vediamo alcuni lemmi tecnici preparatori e sia R un rettangolo di $\mathbb{R}^d$ ovvero prodotto di intervalli con estremi aperti o chiusi.

Lemma 4. Date $v_n \colon R \to \mathbb{C}$ di classe C^k con $k = 1, 2, \dots, +\infty$ tali che

- $v_n \to v$ uniformemente.
- $\forall \underline{h} = (h_1, \dots, h_d) \in \mathbb{N}^d$ con $|\underline{h}| \coloneqq h_1 + \cdots + h_d \leq k$ (se $k = +\infty$ allora basta $|\underline{h}| < +\infty$) posto

  $$D^{\underline{h}} v_n \coloneqq \frac{\partial^k}{\partial x_1^{h_1} \cdots \partial x_d^{h_d}} v_n$$

  $D^{\underline{h}} v_n \to D^{\underline{h}} v$ converge uniformemente.

allora $v \in C^k$ e $D^{\underline{h}} v = \lim_n D^{\underline{h}} v_n$.

Dimostrazione. Si parte dal caso $d = 1$ e $k = 1$ e si procede per induzione. [TODO: Esercizio] □

Corollario. 5 Date $u_n \colon R \to \mathbb{C}$ di classe C^k con $k = 1, \dots, +\infty$ tali che

$$\forall \underline{h} \text{ con } |\underline{h}| \leq k \qquad \sum_n \left\| D^{\underline{h}} u_n \right\| < +\infty$$

allora $u \coloneqq \sum_n u_n$ è una funzione ben definita su R e C^k e $D^{\underline{h}} u = \sum_n D^{\underline{h}} u_n$ per ogni $\underline{h}$ con $|\underline{h}| \leq k$.

Lemma. 6 Data $u \colon R \to \mathbb{C}$ e rettangoli $R_i \subset R$ relativamente aperti in R tali che u è C^k sugli R_i per ogni i allora u è di classe C^k su $\widetilde{R} \coloneqq \bigcup_i R_i$.

Dimostrazione. Intuitivamente essere C^k è una proprietà locale ma preso $x \in R \implies \exists i \; x \in R_i$ e dunque segue per l'ipotesi sugli R_i. $\square$

Lemma. 7 Data $f \in L^2((-\pi, \pi); \mathbb{C})$

$$f \text{ è reale q.o. } \iff c_{-n}(f) = \overline{c_n(f)}$$

Osservazione. Notiamo che se $f \in L^1$ la freccia $\boxed{\Leftarrow}$ è molto più difficile.

Dimostrazione Teorema 1.

i) u_0 reale $\implies c^0_{-n} = \overline{c^0_n} \implies c^0_{-n} e^{-(-n)^2 t} = \overline{c^0_n e^{-n^2 t}} \iff c_{-n}(u(t, \cdot)) = \overline{c_n(u(t, \cdot))}$.

ii) Sia $R \coloneqq [0, +\infty) \times \mathbb{R}$, $\|u_n\|_{L^\infty(R)} = \left\| c^0_n e^{-n^2 t} \right\|_{L^\infty(R)} = |c^0_n|$ dunque $\sum_{n \in \mathbb{Z}} u_n$ converge totalmente su R e quindi u è ben definita e continua su R.

iii) Presi $h, k = 0, 1, 2, \ldots$ se proviamo a calcolare $D^h_t D^k_x u_n = c^0_n (-n)^{2h} (in)^k e^{-n^2 t} e^{inx}$ vediamo non si riesce a stimare per $t \to 0$ infatti

$$\left\| D^h_t D^k_x u_n \right\|_{L^\infty(R)} = |c^0_n| \cdot |n|^{2h+k} \xrightarrow{n} \infty.$$

Serve prendere $\delta > 0$ e sia $R_\delta \coloneqq (\delta, +\infty) \times \mathbb{R}$

$$\left\| D^h_t D^k_x u_n \right\|_{L^\infty(R_\delta)} = |c^0_n| \cdot |n|^{2h+k} e^{-n^2 \delta}$$

in particolare per ogni h, k abbiamo che $|n|^{2h+k} e^{-n^2 \delta} \xrightarrow{n} 0 \implies |n|^{2h+k} e^{-n^2 \delta} \leq m_{h,k} \implies \left\| D^h_t D^k_x u_n \right\|_{L^\infty(R_\delta)} \leq m_{h,k} \cdot |c^0_n|$ e quindi $\sum_n D^h_t D^k_x u_n$ converge totalmente su R_δ.

Quindi u è C^∞ su R_δ per ogni $\delta > 0$ e siccome R_δ è aperto in R per il Lemma. 6 u è C^∞ su $\bigcup_{\delta > 0} R_\delta = (0, +\infty) \times \mathbb{R}$.

iv) Essendo che u è 2π-periodica in x, valgono le condizioni al bordo; inoltre u_0 e $u(0, \cdot)$ hanno gli stessi coefficienti di Fourier, dunque $u_0 = u(0, \cdot)$ quasi ovunque, ma essendo continue vale $u_0 = u(0, \cdot)$ su $[-\pi, \pi]$; infine, $(u_n)_t = (u_n)_{xx} \implies \sum (u_n)_t = \sum (u_n)_{xx} \implies u_t = u_{xx}$ per $t > 0$.

$\square$

Ora enunciamo il teorema di unicità, vogliamo un teorema con il minor numero di ipotesi possibile e che ci dà più informazioni; quindi in questo caso cerchiamo la più grande famiglia di funzioni (quindi la meno regolare possibile) sulla quale vale l'unicità della soluzione.

Teorema. 2 (Unicità) Sia $u \colon [0, T) \times [-\pi, \pi] \to \mathbb{C}$ continua, C^1 nel tempo e C^2 nello spazio per $t > 0$. Se u risolve (**??**) su $t > 0$ allora u è unica.

Definizione. Dato R un rettangolo e $u \colon R \to \mathbb{C}$ diciamo che u è C^k nella variabile x_i se $\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)^h u$ esiste per $h = 1, \ldots, k$ ed è continua su R.

Lemma. 8 Data $u \colon I \times [-\pi, \pi] \to \mathbb{C}$ di classe C^k in $t \implies c_n(D^h_t u(t, \cdot)) = D^h_t c_n(u(t, \cdot))$ per $h \leq k$.

Dimostrazione.

$$c_n(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} u(t, x) e^{-inx} \, \mathrm{d}x \implies \dot{c}_n(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} u_t(t, x) e^{-inx} \, \mathrm{d}x = c_n(u_t(t, \cdot))$$

per il teorema di derivazione sotto il segno di integrale (Analisi 2?) $\square$

Dimostrazione Teorema 2. Poniamo $c_n(t) \coloneqq c_n(u(t,\,\cdot))$. Sappiamo che per $t > 0$ vale $\dot{c}_n(t) \overset{(*)}{=} c_n(u_t(t,\,\cdot)) \overset{(**)}{=} c_n(u_{xx}(t,\,\cdot)) = -n^2 c_n(t)$, dove $(*)$ segue dal Lemma 8 e $(**)$ segue dalla regolarità dei coefficienti. Dunque i coefficienti c_n risolvono il problema di Cauchy

$$\begin{cases} \dot{y} = -n^2 y \\ y(0) = c_n^0 \end{cases}$$

che ha un'unica soluzione.

Nota. Sia $y\colon [0,T) \to \mathbb{R}^k$ funzione continua su $[0,T)$ e derivabile su $(0,T)$ che risolve l'equazione differenziale ordinaria $\dot{y} = f(t,y)$ su $(0,T)$ con $f\colon [0,T) \times \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^k$ continua. Allora y è $\mathcal{C}^1$ su $[0,T)$ e risolve $\dot{y} = f(t,y)$ su $[0,T)$.

Dalla nota sopra otteniamo che c_n è unico. $\square$

Notazione. $\mathcal{C}^k_{\text{per}} = \{f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}\ \pi\text{-periodiche e } \mathcal{C}^k\}$.

Teorema 3 (di non esistenza nel passato). Esiste $u_0 \in \mathcal{C}^\infty_{\text{per}}$ tale che per ogni $\delta > 0$ non esiste $u\colon (-\delta, 0] \times [-\pi,\pi] \to \mathbb{C}$ soluzione di (**??**) (u continua, $\mathcal{C}^1$ in t e $\mathcal{C}^2$ in x per $t < 0$)

Dimostrazione. Sia u su $(-\delta, 0) \times [-\pi,\pi]$ un'eventuale soluzione. Sia $c_n(t)$ al solito. Dalla dimostrazione del Teorema 2 abbiamo che c_n risolve (**??**).

Quindi $c_n(t) = c_n^0 e^{-n^2 t}$. Scelgliamo c_n^0 (cioè u_0) in modo che

- $c_n^0 = O(|n|^{-a})$ per $n \to \pm\infty$ per ogni $a > 0$. ($\Rightarrow \sum |n|^k |c_n^0| < +\infty \ \ \forall k \Rightarrow u_0 \in \mathcal{C}^\infty_{\text{per}}$).
- $c_n^0 e^{-n^2 t} \nrightarrow 0$ per ogni $t < 0$.

Con un tale c_n^0 la soluzione non esiste al tempo t. Infatti, se per assurdo esistesse, i coefficienti di Fourier $c_n(t)$ sarebbero quadrato sommabili, ovvero dovrebbero tendere a zero $\lightning$.

Prendiamo $c_n^0 = e^{-|n|}$. $\square$

Esercizio. Dato u_0 sia T_* il massimo T per cui (**??**) ammette soluzione su $(-T, 0] \times [-\pi,\pi]$. Caratterizzare T_* in termini del comportamento asintotico di c_n^0 per $n \to \pm\infty$.

Suggerimento. Guardare $\log(|c_n^0|)/n^2$.

5.4 Equazione delle onde

Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ aperto, I intervallo temporale, $u\colon I \times \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$, l' equazione delle onde è

$$u_{tt} = v^2 \nabla u = \nabla_x u = \sum_{i=1}^d \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}$$

dove v si chiama **velocità di propagazione**.

La soluzione è univocamente determinata specificando

- Le condizioni al bordo (come per il calore), ad esempio quelle di Dirichlet: $u = v_0$ su $I \times \partial\Omega$ oppure di Neumann: $\partial u/\partial\nu = 0$ su $I \times \partial\Omega$.
- Condizioni iniziali: $u(0,\cdot) = u_0, u_t(0,\cdot) = u_1$.

Esempio 1. Per $d = 1$, $\Omega = [0, 1]$ rappresenta una sbarra sottile di materiale elastico. La sbarra è soggetta a vibrazioni longitudinali (onde sonore). La funzione $u(t, x)$ rappresenta lo spostamento dalla posizione di riposo x al tempo t. In tal caso, l'equazione delle onde è

$$u_{tt} = v^2 u_{xx}.$$

Esempio 2. Per $d = 2$, Ω rappresenta una sbarra sottile di materiale elastico che vibra trasversalmente. La funzione $u(t, x)$ rappresenta lo spostamento verticale del punto di coordinata $x \in \Omega$ a riposo. Allora u soddisfa[2]

$$u_{tt} = v^2 \nabla v.$$

5.5 Derivazione dell'equazione delle onde

[TO DO: da aggiungere (non viene chiesto all'esame.)]

5.6 Risoluzione dell'equazione delle onde

Consideriamo il caso uno dimensionale. In tal caso l'equazione delle onde è la seguente.

$$\begin{cases} u_{tt} = v^2 u_{xx} \\ u(\cdot, \pi) = u(\cdot, -\pi) \\ u_x(\cdot, \pi) = u_x(\cdot, -\pi) \\ u(0, \cdot) = u_0 \\ u_t(0, \cdot) = u_1 \end{cases} \tag{P}$$

5.6.1 Risoluzione formale

Scriviamo $u(t, x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n(t) e^{inx}$. Deriviamo in t e due volte in x.

$$u_{tt} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \ddot{c}_n e^{inx}$$
$$u_{xx} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} -v^2 n^2 c_n e^{inx}$$

Abbiamo che

$$u_{tt} = v^2 u_{xx} \iff \ddot{c}_n = -v^2 n^2 c_n$$
$$u(0, \cdot) = u_0 \iff c_n(0) = c_n^0 := c_n(u_0) \qquad u_t(0, \cdot) = u_1 \iff \dot{c}_n(0) = c_n^1 := c_n(u_1)$$

Quindi u risolve (**??**) se solo se per ogni n, c_n risolve

$$\begin{cases} \ddot{y} = -n^2 v^2 y \\ y(0) = c_n^0 \\ \dot{y}(0) = c_n^1 \end{cases} \tag{P'}$$

Dunque,

[2] Per oscillazioni piccole.

- Per $n = 0$, $\ddot{y} = 0$ se solo se y è un polinomio di primo grado, ovvero $c_0(t) = c_0^0 + c_0^1 t$.
- Per $n \neq 0$, $y = \alpha_n^+ e^{invt} + \alpha_n^- e^{-invt}$ con

$$\alpha_n^\pm = \frac{1}{2}\left(c_n^0 \pm \frac{c_n^1}{inv}\right)$$

Quindi, la soluzione è

$$u(t,x) = c_0^0 + c_0^1 t + \sum_{n\neq 0}\left[\alpha_n^+ e^{in(x+vt)} + \alpha_n^- e^{in(x-vt)}\right] \tag{$*$}$$

Inoltre,

$$u(t,x) = c_0^0 + c_0^1 t + \varphi^+(x+vt) + \varphi^-(x-vt) \tag{$**$}$$

con $\varphi^\pm$ funzioni con coefficienti di Fourier $\alpha_n^\pm$ che si dicono **onde viaggianti**.

Nota. La (**??**) è specifica delle equazioni delle onde.

5.7 Esercitazione del 18 Novembre 2021

5.7.1 Esercizi preliminari

Data $f\colon [-\pi,\pi] \to \mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$ uno degli esercizi più comuni è doverne calcolare lo sviluppo di Fourier complesso o reale.

Osservazione. Ricordiamo che $c_n(f)$ può essere calcolato anche solo se $f \in L^1$ inoltre

$$\mathrm{SF}_{\mathbb{C}}(f) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(f)e^{inx} \qquad c_n(f) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-inx}\,\mathrm{d}x$$

$$\text{e con base hilbertiana } \left\{\frac{e^{inx}}{\sqrt{2\pi}}\,\middle|\, n\in\mathbb{Z}\right\}$$

invece nel caso reale abbiamo visto

$$\mathrm{SF}_{\mathbb{R}}(f) = \sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n\cos(nx) + b_n\sin(nx)\right] + a_0$$

$$a_n(f) = c_n(f) + c_{-n}(f) \qquad b_n(f) = i(c_n(f) - c_{-n}(f)) \qquad a_0(f) = c_0(f)$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)\,\mathrm{d}x \qquad b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(nx)\,\mathrm{d}x$$

$$\text{e con base hilbertiana } \left\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{\cos(nx)}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin(nx)}{\sqrt{\pi}}\,\middle|\, n\geq 1\right\}$$

Esercizio. Sia $f(x) = \cos^2(x)\sin(3x)$, calcolare i coefficienti di Fourier[3].

Svolgimento. Usiamo lo sviluppo complesso

$$\cos(x) = \frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2} \qquad \sin(x) = \frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}$$

[3] Con funzioni ottenute come combinazioni di prodotti di potenze di funzioni trigonometriche (anche con argomento moltiplicato per un naturale) conviene calcolare lo sviluppo complesso e poi passare a quello reale.

Dunque possiamo riscrivere $f(x)$ come

$$\begin{aligned}
&= \frac{i}{8}\left(e^{i2x}+e^{-i2x}+2\right)\left(e^{-i3x}-e^{i3x}\right) = \\
&= \frac{i}{8}\left(e^{-ix}+e^{-i5x}+2e^{-i3x}-e^{i5x}-e^{ix}-2e^{i3x}\right) = \\
&= \frac{i}{8}e^{-ix}+\frac{i}{8}e^{-i5x}+\frac{i}{4}e^{-i3x}-\frac{i}{8}e^{i5x}-\frac{i}{8}e^{ix}-\frac{i}{4}e^{i3x}.
\end{aligned}$$

Dunque possiamo già scrivere i coefficienti di Fourier complessi di $f(x)$

$$c_n(f) \neq 0 \iff n = \pm 1, \pm 3, \pm 5$$
$$c_{\pm 1}(f) = \mp\frac{i}{8} \quad c_{\pm 3}(f) = \mp\frac{i}{4} \quad c_{\pm 5}(f) = \mp\frac{i}{8}.$$

Continuiamo ora il conto precedente e ricostruiamo la serie di Fourier reale ricomponendo i termini

$$\begin{aligned}
&= -\frac{1}{4}\left(\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}\right)-\frac{i^2}{4}\left(\frac{e^{i3x}-e^{-i3x}}{2i}\right)-\frac{i^2}{4}\left(\frac{e^{i5x}-e^{-i5x}}{2i}\right) = \\
&= \frac{1}{4}\sin(x)+\frac{1}{2}\sin(3x)+\frac{1}{4}\sin(5x),
\end{aligned}$$

in particolare possiamo notare che $f(\pi) = f(-\pi) = 0$ dunque potevamo già dedurre che la serie di Fourier reale sarebbe stata composta solo da seni.

Esercizio. Caratterizzare i coefficienti $c_n(f)$ di una $f\colon [-\pi,\pi] \to \mathbb{C}$ in L^2 tale che $\operatorname{Im}(f) \subseteq \mathbb{R}$.

Suggerimento. Si usa che per $z \in \mathbb{C}$ vale $z \in \mathbb{R} \iff z = \overline{z}$.

Esercizio. Determinare la soluzione di (P) e stabilire unicità e regolarità della soluzione $u\colon [0,T) \times [-\pi,\pi] \to \mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$.

$$\begin{cases} u_t = 4u_{xx} \\ u(\,\cdot\,,-\pi) = u(\,\cdot\,,\pi) \\ u_x(\,\cdot\,,-\pi) = u_x(\,\cdot\,,\pi) \\ u(0,x) = \cos^2(x)\sin(3x) \end{cases} \tag{P}$$

Svolgimento. Per prima cosa troviamo formalmente una soluzione in serie di Fourier $u(t,x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(t)e^{inx}$ dove $c_n(t)$ è il coefficiente di $u(t,\,\cdot\,)$.

Per il teorema di derivazione sotto il segno di integrale abbiamo

$$u_t(t,x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \dot{c}_n(t)e^{inx} \qquad \text{con } c_n(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} u(t,x)e^{-inx}\,\mathrm{d}x$$

Le condizioni al bordo assicurano che $c_n(u_{xx}(t,\,\cdot\,)) = -4n^2 c_n(u(t,\,\cdot\,))$ da cui otteniamo il seguente problema di Cauchy sui coefficienti

$$\begin{cases} \dot{c}_n(t) = -4n^2 c_n(t) \\ c_n(0) = c_n(u(0,\,\cdot\,)) = c_n(\cos^2(x)\sin(3x)) \end{cases} \qquad \forall n \in \mathbb{Z}$$

Inoltre dato che $c_n^0 = 0$ se $n \neq \pm 1, \pm 3, \pm 5 \implies c_n(t) = 0$ per questi n, dunque complessivamente i sistemi sono

$$\begin{cases} \dot{c}_1(t) = -4c_1(t) \\ c_1(0) = -\dfrac{i}{8} \end{cases} \quad \begin{cases} \dot{c}_3(t) = -36c_3(t) \\ c_3(0) = -\dfrac{i}{4} \end{cases} \quad \begin{cases} \dot{c}_5(t) = -100c_5(t) \\ c_5(0) = -\dfrac{i}{8} \end{cases}$$

con la condizione $c_{-n}(t) = \overline{c_n(t)}$, così otteniamo

$$\begin{aligned} c_1(t) &= -\frac{i}{8}e^{-4t} \qquad c_3(t) = -\frac{i}{4}e^{-36t} \qquad c_5(t) = -\frac{i}{8}e^{-100t} \\ c_{-1}(t) &= \frac{i}{8}e^{-4t} \qquad c_{-3}(t) = \frac{i}{4}e^{-36t} \qquad c_{-5}(t) = \frac{i}{8}e^{-100t} \end{aligned}$$

ed infine fattorizzando

$$\begin{aligned} u(t,x) &= \frac{e^{-4t}}{4}\left(-\frac{i}{2}e^{ix} + \frac{i}{2}e^{-ix}\right) + \frac{e^{-36t}}{2}\left(-\frac{i}{2}e^{i3x} + \frac{i}{2}e^{-i3x}\right) + \frac{e^{-100t}}{4}\left(-\frac{i}{2}e^{i5x} + \frac{i}{2}e^{-i5x}\right) = \\ &= \frac{1}{4}e^{-4t}\sin(x) + \frac{1}{2}e^{-36t}\sin(3x) + \frac{1}{2}e^{-100t}\sin(5x) \end{aligned}$$

Esercizio. Consideriamo il problema (P) dato da

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} + u \\ u(\,\cdot\,, -\pi) = u(\,\cdot\,, \pi) \\ u_x(\,\cdot\,, -\pi) = u_x(\,\cdot\,, \pi) \\ u(0, \cdot\,) = u_0 \end{cases} \tag{P}$$

dove $u_0(x)$ è $\cos^2(x)\sin(3x)$ oppure $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{1}{2^{|n|}}e^{inx}$.

Svolgimento. Per ora lavoriamo con $u_0(x) = \cos^2(x)\sin(3x)$, notiamo subito che i coefficienti soddisfano l'equazione

$$\begin{cases} \dot{c}_n(t) = -n^2 c_n(t) + c_n(t) = (1-n^2)c_n(t) \\ c_n(0) = c_n(\cos^2(x)\sin(3x)) \end{cases}$$

da cui $\dot{c}_n(t) = (1-n^2)c_n$ con soluzione $c_n(t) = \gamma e^{(1-n^2)t}$, quindi ad esempio abbiamo

$$c_{\pm 1}(t) = \mp\frac{i}{8} \qquad c_{\pm 3}(t) = \mp\frac{i}{4}e^{-8t} \qquad c_{\pm 5}(t) = \mp\frac{i}{8}e^{-24t}$$

Dunque la soluzione finale è

$$\begin{aligned} u(t,x) &= \frac{i}{8}e^{-ix} - \frac{i}{8}e^{ix} + \frac{i}{4}e^{3t}e^{-i3x} + \frac{i}{4}e^{3t}e^{i3x} + \frac{i}{8}e^{-24t}e^{-i5x} + \frac{i}{8}e^{-24t}e^{i5x} = \\ &= -\frac{i}{4}\left(\frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2}\right) - \frac{i}{2}e^{-3t}\left(\frac{e^{i3x} - e^{-i3x}}{2}\right) - \frac{i}{4}e^{-24t}\left(\frac{e^{i5x} - e^{-i5x}}{2}\right) = \\ &= \frac{1}{4}\sin(x) - \frac{1}{2}e^{-3t}\sin(3x) - \frac{1}{4}e^{-24t}\sin(5x) \end{aligned}$$

Invece considerando la condizione iniziale $u_0(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{inx}/2^{|n|}$ abbiamo che $c_n(u_0) = 1/2^{|n|}$, notiamo che i coefficienti sono sommabili

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{1}{2^{|n|}} = 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} + 1 < +\infty \qquad u(t,x) \coloneqq \sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{1}{2^{|n|}} e^{(1-n)^2 t} e^{inx}$$

in particolare formalmente possiamo scriverla meglio come

$$= \sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{1}{2^{|n|}} e^{(1-n)^2 t} e^{inx} = e^t \left(1 + \sum_{n>0} \frac{1}{2^{|n|}} e^{(1-n)^2} \cos(nx) \cdots\cdots\right.$$

[TODO: Finire meglio questo conto]

Esercizio. (della volta scorsa) Consideriamo la funzione

$$f(x) = \sum_{n\neq 0} \frac{\cos(n)}{|n|^{3/2}} e^{inx}$$

- Dire se f è ben definita e continua.
- Dire se f è derivabile.

Svolgimento.

$$\sum_{n\neq 0} |c_n| = 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\cos(n)|}{|n|^{3/2}} \leq 2\sum \frac{1}{n^{3/2}} < +\infty$$

dunque la serie di Fourier converge uniformemente a $f \implies$ è continua e periodica.

Se $\sum |n| \cdot |c_n| < +\infty$ si potrebbe dire che f è derivabile però

$$\sum_{n\neq 0} |n| \cdot |c_n| = 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\cos(n)|}{\sqrt{n}} = +\infty \text{ non converge assolutamente}$$

Ma la candidata derivata ha coefficienti inc_n e non starebbe in L^2 ovvero

$$\sum n^2 |c_n|^2 = +\infty \implies \sum inc_n e^{inx} \notin L^2$$

5.8 Risoluzione dell'equazione delle onde

Consideriamo il problema

$$\begin{cases} u_{tt} = v^2 u_{xx} \\ u(\,\cdot\,,\pi) = u(\,\cdot\,,-\pi) \\ u_x(\,\cdot\,,\pi) = u_x(\,\cdot\,,-\pi) \\ u(0,\,\cdot\,) = u_0 \\ u_t(0,\,\cdot\,) = u_1 \end{cases} \tag{P}$$

ed abbiamo visto che ha soluzione

$$u(t,x) = c_0^0 + c_0^1 t + \sum_{n\neq 0} (\alpha_n^+ e^{in(x+vt)} + \alpha_n^- e^{in(x-vt)}) \tag{$*$}$$

$$\alpha_n^\pm = \frac{1}{2}\left(c_n^0 \pm \frac{c_n^1}{inv}\right).$$

Inoltre, possiamo scrivere l'equazione $(*)$ come

$$u(t,x) = c_0^0 + c_0^1 t + \varphi^+(x+vt) + \varphi^-(x-vt) \tag{$**$}$$

dove φ^+, φ^- sono funzioni 2π-periodiche.

Vedremo i seguenti risultati

- Esistenza usando la forma $(**)$, specifico per equazione delle onde.
- Esistenza usando la forma $(*)$, che però richiede maggiore regolarità su u_0 e u_1.

- Unicità.

Teorema 1. Dati $u_0 \in C^1_{\text{per}}$ allora esistono c^0_0, c^1_0 e $\varphi^+, \varphi^- \in C^2_{\text{per}}$ tali che la u in $(**)$ è di classe C^2 su $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, 2π-periodica in x e risolve (P).

Lemma 4. Date $h, g \in C^1(\mathbb{R})$ con g primitiva di h e $T > 0$ allora g è T-periodica $\iff$ h è T-periodica e $\int_0^T h(x)\,\mathrm{d}x = 0$.

Dimostrazione. Notiamo che h è T-periodica se e solo se $\forall x$ $\int_x^{T+x} h(x)\,\mathrm{d}x = \text{cost}$.

$$\int_x^{T+x} h(x)\,\mathrm{d}x = g\Big|_x^{T+x} = g(T+x) - g(x) = 0 \iff g \text{ è } T\text{-periodica}$$

Dimostrazione Teorema 1.

Parte 1. Se $c^0_0, c^1_0 \in \mathbb{R}$ e $\varphi^+, \varphi^- \in C^2_{\text{per}}$ allora la u data da $(**)$ è C^2 su $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ e 2π-periodica in x e risolve $u_{tt} = v^2 u_{xx}$.

$$\begin{aligned} u_{tt} &= [\ddot{\varphi}^+(x+vt) + \ddot{\varphi}^-(x-vt)]v^2 \\ u_{xx} &= \ddot{\varphi}^+(x+vt) + \ddot{\varphi}^-(x-vt) \end{aligned} \implies u_{tt} = v^2 u_{xx}$$

Parte 2. $\exists c^0_0, c^1_0 \in \mathbb{R}$ e $\varphi^+, \varphi^- \in C^2_{\text{per}}$ tali che la u data da $(**)$ soddisfa la condizione iniziale in (P), per $t = 0$, poste $\varphi^\pm = \varphi^\pm(x \pm v0)$

$$\begin{cases} c^0_0 + \varphi^+ + \varphi^- = u_0 \\ c^1_0 + v(\dot{\varphi}^+ - \dot{\varphi}^-) = u_1 \end{cases} \implies \begin{cases} \varphi^+ + \varphi^- = u_0 - c^0_0 \\ (\varphi^+ - \varphi^-)' = (u_1 - c^1_0)/v \end{cases}$$

ed ora fissiamo $c^0_0 = \fint_{-\pi}^{\pi} u_0\,\mathrm{d}x$ e $c^1_0 = \fint_{-\pi}^{\pi} u_1\,\mathrm{d}x$. In questo modo possiamo applicare il lemma precedente ed ottenere

$$\begin{cases} \varphi^+ + \varphi^- = g_0 \\ (\varphi^+ - \varphi^-)' = g_1' \end{cases} \implies \varphi^+ = \frac{1}{2}(g_0 + g_1) \qquad \varphi^- = \frac{1}{2}(g_0 - g_1)$$

□

Teorema 2. Siano $u_0, u_1 \in C^0_{\text{per}}$ tali che $\sum n^2 |c^0_n| < +\infty$ e $\sum |n| \cdot |c^1_n| < +\infty$. Allora $(*)$ definisce una funzione $u \colon \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ di classe C^2, 2π-periodica in x che risolve (P).

Dimostrazione.

$$u(t,x) = c^0_0 + c^1_0 t + \sum_{n \neq 0} (\underbrace{\alpha^+ e^{in(x+vt)}}_{v_n^+} + \underbrace{\alpha^- e^{in(x-vt)}}_{v_n^-})$$

Passo 1. Dimostriamo che $u \in C^0(\mathbb{R} \times \mathbb{R})$ e 2π-periodica in x.

La funzione u soddisfa le condizioni di periodicità. Per mostrare la continuità è sufficiente mostrare che la serie converga totalmente su $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

$$\left\| v_n^\pm \right\|_{L^\infty(\mathbb{R}\times\mathbb{R})} = |\alpha^\pm| = O\left(|c^0_n| + \frac{|c^1_n|}{n}\right)$$

che sono sommabili in n.

Passo 2. Mostriamo che $u \in C^2(\mathbb{R} \times \mathbb{R})$.

Abbiamo

$$
\begin{aligned}
&D_t^h D_x^k v_n^\pm = \alpha_n^\pm e^{in(x\pm vt)}(in)^k(ivn)^h\\
\implies &\left\| D_t^h D_x^k v_n^\pm \right\|_{L^\infty(\mathbb{R}\times\mathbb{R})} = |\alpha_n^\pm|\cdot|v|^h\cdot|n|^{k+h} = O(|c_n^0|\cdot|n|^{k+h} + |c_n^1|\cdot|n|^{k+h-1})
\end{aligned}
$$

che è sommabile se $k+h \le 2$ in n. La serie in $(*)$ converge totalmente su $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ con tutte le derivate di ordine $\le 2 \implies u$ è C^2.

Passo 3. Dimostriamo che u risolve l'equazione $u_{tt} = v^2 u_{xx}$.

u risolve l'equazione perché derivata e serie commutano e per come abbiamo impostato (P′) $c_n(u(0,\cdot)) = c_n(u_0) \implies u(0,\cdot) = u_0$. $c_n(u_t(0,\cdot)) = c_n(u_1) \implies u_t(0,\cdot) = u_1$.

Teorema 3. (Unicità) Se $u\colon I\times[-\pi,\pi]\to\mathbb{C}$ è C^2 in x e t e risolve (P) allora è unica.

Dimostrazione. Si ripercorre la stessa dell'equazione del calore. Dimostriamo che i coefficienti $c_n(t) = c_n(u(t,\cdot))$ definiti per $t\in I$ risolvono (P′)...

5.9 Altre applicazioni della serie di Fourier

5.9.1 Disuguaglianza isoperimetrica

Sia D un aperto limitato con frontiera C^1 parametrizzata da un unico cammino γ (quindi niente buchi o più di una componente connessa). Allora $L^2 \ge 4\pi A$ dove L è la lunghezza di ∂D e A è l'area di D. Inoltre vale l'uguale se e solo se D è un disco.

Dimostrazione.

Possiamo scegliere $\gamma\colon[-\pi,\pi]\to\mathbb{R}^2\simeq\mathbb{C}$ e γ parametrizzazione di ∂D in senso antiorario ed a velocità costante (da cui $|\dot\gamma(t)| = L/2\pi$)

Passo 1.

$$L^2 = 2\pi\int_{-\pi}^{\pi}|\dot\gamma|^2\,\mathrm{d}t = 2\pi\left\|\dot\gamma\right\|_2 = 4\pi^2\sum|c_n(\dot\gamma)|^2 = 4\pi^2\sum n^2|c_n|^2$$

Passo 2.

$$A \overset{(*)}{=} \frac{1}{2}\langle -i\dot\gamma,\gamma\rangle = \frac{1}{2}2\pi\sum(-i(inc_n))c_n = \pi\sum n|c_n|^2$$

Vediamo che vale questa formula per l'area usata in $(*)$, poniamo $\gamma = \gamma_x + i\gamma_y$ allora

$$
\begin{aligned}
\langle\dot\gamma,\gamma\rangle &= \int_{-\pi}^{\pi}\dot\gamma\,\overline{\gamma}\,\mathrm{d}t\\
&= \int_{-\pi}^{\pi}(\gamma_x - i\gamma_y)(\dot\gamma_x + i\dot\gamma_y)\,\mathrm{d}t =\\
&= \int_\gamma (x-iy)(\,\mathrm{d}x + i\,\mathrm{d}y) =\\
&= \int_D 2i\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 2iA
\end{aligned}
$$

Passo 3. Infine $L^2 = 4\pi\sum n^2|c_n|^2$ e $4\pi A = 4\pi\sum n|c_n|^2$, dunque segue subito che $L^2\ge 4\pi A$ e vale l'uguale se e solo se $n^2 = n$ o se $c_n = 0$ per ogni $n \implies \gamma(t) = c_0 + c_1 e^{it}$ che è una circonferenza di centro c_0 e raggio $|c_1|$.

5.10 Appendice

Studiamo alcune variazioni dell'equazione del calore.

Nota. Un problema del tipo $u_t = a(t) \cdot u_{xx}$ si può risolvere ripercorrendo i passaggi della risoluzione dell'equazione del calore. Viceversa, il problema $u_t = a(x) \cdot u_{xx}$ non si può risolvere allo stesso modo, in quanto, non è vero che il prodotto di serie di Fourier ha come coefficienti il prodotto dei coefficienti.

Studiamo ora variazioni alle condizioni di bordo.

Osservazione. Quando proviamo a risolvere $u_t = u_{xx}$, passiamo alla serie di Fourier e deriviamo; per fare questo passaggio servono le condizioni al bordo[4]; dunque, togliendo le condizioni di periodicità il sistema non funziona più molto bene.

Introduciamo delle varianti della serie di Fourier.

- **Serie di Fourier su $[-\pi, \pi]^d$.** Data $u \in L^2([-\pi, \pi]^2, \mathbb{C})$, definiamo

$$u(x) = \sum_{\underline{n} \in \mathbb{Z}^d} c_{\underline{n}} e^{i\underline{n}x} \qquad c_{\underline{n}} = c_{\underline{n}}(u) := \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{[-\pi,\pi]^d} u(x) e^{-i\underline{n}x} \, \mathrm{d}x$$

  con base di Hilbert

$$\mathcal{F} = \left\{ \frac{e^{i\underline{n}x}}{(2\pi)^{d/2}} : n \in \mathbb{Z}^d \right\}$$

  C'è da dimostrare che $\mathcal{F}$ è una base di Hilbert.

  Dimostrazione (idea).

  - Ortonormalità. È un conto [TO DO].
  - Completezza. Si può dimostrare come per $d = 1$, oppure si usa il seguente lemma.
    Lemma. Sia $\mathcal{F}_1 := \{e_n^1\}$ base di Hilbert di $L^2(X_1, \mathbb{C})$ e $\mathcal{F}_2 := \{e_n^2\}$ base di Hilbert di $L^2(X_2, \mathbb{C})$. Allora, una base di Hilbert di $L^2(X_1 \times X_2, \mathbb{C})$ è

$$\mathcal{F} = \left\{ e_{n_1,n_2}(x_1, x_2) \;\middle|\; e_{n_1}^1(x_1) e_{n_2}^2(x_2) \right\}$$

  Formula chiave. Se $u \in C^1_{\text{per}}(\mathbb{R}^d) = \{\text{funzioni } 2\pi\text{-periodiche in tutte le variabili}\}$. Abbiamo che

$$c_{\underline{n}}(\nabla u) = i\underline{n} c_n(u), \qquad c_{\underline{n}}(\Delta u) = -\left|\underline{n}\right|^2 c_{\underline{n}}(u) \;\text{ se } u \in \mathcal{C}^2_{\text{per}}$$

- **Serie in seni.** Data $u \in L^2([0, \pi])$, allora

$$u(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(nx) \qquad b_n = b_n(u) := \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} u(x) \sin(nx) \, \mathrm{d}x$$

  con base di Hilbert

$$\mathcal{F} = \left\{ \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin(nx) \;\middle|\; n \geq 1 \right\}$$

  Dimostrazione. Mostriamo l'ortonormalità e la completezza.

[4] Anche se avevamo derivato le formule formalmente anche a posteriori l'ipotesi delle condizioni al bordo era necessaria.

Ortonormalità. Sono conti. [TO DO]

Completezza. Data $u \in L^2([0,\pi])$. Sia $\widetilde{u}$ l'estensione dispari a $[-\pi,\pi]$. Allora

$$\widetilde{u} = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \widetilde{a}_n \cos(nx) + \widetilde{b}_n \sin(nx) \underset{\widetilde{u} \text{ dispari}}{=} \sum_{n=1}^{\infty} \widetilde{b}_n \sin(nx).$$

Osservazione. I coefficienti $\widetilde{b}_n = b_n$. Si può vedere in diversi modi, un modo possibile è questo.

$$\widetilde{b}_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \widetilde{u}(x)\sin(nx)\,\mathrm{d}x = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \widetilde{u}\sin(nx)\,\mathrm{d}x = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} u(x)\sin(nx)\,\mathrm{d}x = b_n.$$

Formula chiave. Data $u \in \mathcal{C}^2([0,\pi])$ con condizioni al bordo $u(\,\cdot\,,0) = u(\,\cdot\,,\pi)$. Allora

$$b_n(\ddot{u}) = -n^2 b_n(u)$$

dove

$$\begin{aligned}
b_n(\ddot{u}) &\coloneqq \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \ddot{u}(x)\sin(nx)\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{2}{\pi}\left|\dot{u}(x)\sin(nx)\right|_0^{\pi} - \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \dot{u}(x)\cos(nx)\,\mathrm{d}x \\
&= -n\frac{2}{\pi}\left|u(x)\cos(nx)\right|_0^{\pi} - n^2 \underbrace{\left(\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} u(x)\sin(nx)\,\mathrm{d}x\right)}_{b_{n(x)}}
\end{aligned}$$

□

Applicazione (della serie in seni). Risoluzione di EDP su $[0,\pi]$ con condizioni di Dirichlet (omogenee) al bordo.

Esempio. Risolvere

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} \quad \text{su } [0,\pi] \\ u(\,\cdot\,,0) = u(\,\cdot\,,\pi) = 0 \\ u(0,\,\cdot\,) = u_0 \end{cases} \tag{P}$$

Soluzione. Poniamo $b_n^0 \coloneqq b_n(u_0)$. Scriviamo $u(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n(t)\sin(nx)$ serie di seni in x.

Formalmente,

$$u_t = \sum_{n=1}^{\infty} \dot{b}_n(t)\sin(nx) \qquad u_{xx} = \sum_{n=1}^{\infty} -n^2 b_n(t)\sin(nx)$$

Dunque,

$$u_t = u_{xx} \iff \dot{b}_n(t) = -n^2 b_n(t) \;\; \forall t \forall n$$

Cioè $b_n(t)$ risolve il problema di Cauchy.

$$\begin{cases} \dot{y} = -n^2 y \\ y(0) = \dot{b}_n \end{cases} \tag{P'}$$

Ovvero $b_n(t) = b_n^0 e^{-n^2 t}$, da cui

$$u(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{b_n^0 e^{-n^2 t} \sin(nx)}_{u_n}. \tag{$*$}$$

Teorema 1 (di esistenza nel futuro). Se $u_0\colon [0,\pi] \to \mathbb{R}$ è continua è $\sum_n |b_n^0| < +\infty$ (basta $u_0 \in \mathcal{C}^1$ e $u(0) = u(\pi) = 0$). Allora la u in (**??**) è ben definita e continua su $[0,+\infty) \times \mathbb{R}$ e risolve (**??**).

Dimostrazione. Dimostriamo il teorema per passi.

Passo 1. Mostriamo che u è ben definita e continua su $(0,+\infty) \times \mathbb{R}$: studiamo la norma del sup. Sia $R = [0,+\infty) \times \mathbb{R}$.

$$\|u_n\|_{L^\infty(R)} \le |b_n^0| \implies u_n \ \text{ converge totalmente su } \mathbb{R}.$$

Passo 2. Mostriamo che $\mathcal{C}^\infty$ su $(0,+\infty) \times \mathbb{R}$. Sia $R_\delta = (\delta,+\infty) \times \mathbb{R}$. Stimiamo le derivate.

$$D_t^k D_x^h u_n = b_n^0 (-n^2)^k e^{-n^2 t} \cdot n^h \cdot \underbrace{\dots}_{\star}$$

$$\implies \left\| D_t^k D_x^h u_n \right\|_{L^\infty(R_\delta)} = |b_n^0| \quad \underbrace{e^{-n^2 \delta} \cdot |n|^{2k+h}}_{\substack{\text{limitato in } n \\ \text{perché è infinitesimo in } n}}$$

Allora le norme delle derivate sono sommabili per ogni n, dunque $u \in \mathcal{C}^\infty(R_\delta)$ per ogni δ, da cui $u \in \mathcal{C}^\infty((0,+\infty),\mathbb{R})$.

Passo 3. Mostriamo che la $u(t,x)$ definita in (**??**) risolve (**??**).

- u risolve $u_t = u_{xx}$ per $t > 0$. Infatti, l'equazione è lineare per quanto mostrato al punto sopra e dunque posso scambiare serie e derivata.
- u soddisfa la condizione iniziale $u(0,\,\cdot\,) = u_0$, perché hanno gli stessi coefficienti di Fourier.
- Sono soddisfatte anche le condizioni al bordo, infatti

$$u(\,\cdot\,,0) = u(\,\cdot\,,\pi) = 0$$

□

Domanda. Quale ipotesi su u_0 garantisce $\sum_n |b_n^0| < +\infty$? Basta $u_0 \in \mathcal{C}^1$ e $u(0) = u(\pi) = 0$.

Teorema 2 (non esistenza nel passato). Esiste $u_0\colon [0,\pi] \to \mathbb{R}$ $\mathcal{C}^\infty$ (+ condizioni al bordo) tale che per ogni $\delta > 0$ (**??**) non ha alcuna soluzione $u\colon (-\delta,0] \times [0,\pi] \to \mathbb{R}$ continua e $\mathcal{C}^1$ in t e $\mathcal{C}^2$ in x.

Teorema 3 (di unicità). [TO DO: aggiungere (è sempre lo stesso).]

5.11 Esercitazione del 25 Novembre 2021

Esercizio. Consideriamo l'equazione alle derivate parziali

$$\begin{cases} u_{ttt}(t,x) = u_{xx}(t,x) \qquad x \in [-\pi,\pi] \\ u(\,\cdot\,,\pi) = u(\,\cdot\,,-\pi) \\ u_x(\,\cdot\,,\pi) = u_x(\,\cdot\,,-\pi) \\ u(0,\,\cdot\,) = u_0 \\ u_x(0,\,\cdot\,) = u_1 \\ u_{xx}(0,\,\cdot\,) = u_2 \end{cases} \tag{P}$$

ponendo $c_n^i := c_n(u_i)$ per $n \in \mathbb{Z}$ per $i = 1,2,3$. Segue subito che il problema di Cauchy sui coefficienti è

$$\begin{cases} \dddot{c}_n(t) = -n^2 c_n(t) \\ c_n(0) = c_n^0 \\ \dot{c}_n(0) = c_n^1 \\ \ddot{c}_n(0) = c_n^2 \end{cases} \qquad \forall n \in \mathbb{Z} \tag{P'}$$

che ha polinomio caratteristico $p(\lambda) = \lambda^3 + n^2 \implies \lambda^3 = -n^2$ e dunque le soluzioni sono $\lambda_i = n^{2/3}\zeta_6^{2i-1}$ con ζ_6 una radice sesta dell'unità. Per comodità per $i = 1,2,3$ poniamo $z_i := n^{2/3}\omega_i$ con ω_i soluzioni di $\omega^3 = -1$ che possiamo anche riscrivere come

$$\omega_1 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \qquad \omega_2 = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i \qquad \omega_3 = -1$$

Dunque per $n \in \mathbb{Z}$ e $n \neq 0$ la soluzione sarà

$$\begin{cases} c_n(t) = A_n e^{-z_1^n t} + B_n e^{-z_2^n t} + C_n e^{-z_3^n t} \\ c_n(0) = c_n^0 = A_n + B_n + C_n \\ c_n(1) = c_n^1 = A_n z_1^n + B_n z_2^n + C_n z_3^n \\ c_n(2) = c_n^2 = A_n (z_1^n)^2 + B_n (z_2^n)^2 + C_n (z_3^n)^2 \end{cases}$$

e quindi otteniamo il sistema

$$\implies \begin{cases} c_n^0 = A_n + B_n + C_n \\ n^{-2/3} c_n^1 = A_n\omega_1 + B_n\omega_2 + C_n\omega_3 \\ n^{-4/3} c_n^2 = A_n\omega_1^2 + B_n\omega_2^2 + C_n\omega_3^2 \end{cases} \quad \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \omega_1 & \omega_2 & \omega_3 \\ \omega_1^2 & \omega_2^2 & \omega_3^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_n \\ B_n \\ C_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_n^0 \\ n^{-2/3} c_n^1 \\ n^{-4/3} c_n^2 \end{pmatrix}$$

e facendo conti si ottengono A_n, B_n e C_n e si scopre che [TODO: Controllare i conti con Mathematica]

$$\begin{aligned} A_n e^{n^{2/3}(t/2 + i\sqrt{3}t/2)} &\sim e^{n^{2/3}t/2} \xrightarrow{t\to\infty} \infty \\ B_n e^{n^{2/3}(t/2 - i\sqrt{3}t/2)} &\sim e^{n^{2/3}t/2} \xrightarrow{t\to\infty} \infty \\ C_n e^{-n^{2/3}} &\sim e^{-n^{2/3}t} \xrightarrow{t\to-\infty} \infty \end{aligned}$$

dunque in realtà anche se il problema in partenza sembrava ben definito in realtà non ha soluzione per alcun $t \in \mathbb{R}$.

Conti esatti con Mathematica:

$$
\begin{aligned}
A_n &\to \frac{c_n^0}{3} - \frac{c_n^2}{3n^{4/3}} - \frac{(-1)^{2/3}c_n^2}{3n^{4/3}} - \frac{(-1)^{2/3}c_n^1}{3n^{2/3}}, \\
B_n &\to \frac{c_n^0}{3} - \frac{c_n^2}{6n^{4/3}} + \frac{ic_n^2}{2\sqrt{3}n^{4/3}} + \frac{c_n^1}{6n^{2/3}} + \frac{ic_n^1}{2\sqrt{3}n^{2/3}}, \\
C_n &\to \frac{c_n^0}{3} + \frac{c_n^2}{3n^{4/3}} - \frac{c_n^1}{3n^{2/3}}
\end{aligned}
$$

Esercizio. (Equazione del calore senza una condizione al bordo)

$$
\begin{cases}
u_t = u_{xx} & x \in [-\pi, \pi] \\
u(\,\cdot\,, -\pi) = u(\,\cdot\,, \pi) \\
u(0, \,\cdot\,) = u_0 = \cos(x/2)
\end{cases}
\tag{P}
$$

i) *Esiste una soluzione?*

Sì in quanto esiste anche con una condizione in più

ii) *È unica?*

Senza periodicità per u_x non è vero in generale che $c_n(u_{xx}(t, \,\cdot\,)) = -n^2 c_n(u(t, \,\cdot\,))$.

Cerchiamo una soluzione della forma $u(t, x) = \cos(x/2)\psi(t)$. Abbiamo che $u_t(t, x) = \dot{\psi}(t)\cos(x/2)$ e $u_{xx}(t, x) = -\cos(x/2)\psi(t)/4$. Dunque $\dot{\psi}(t) = -\psi(t)/4$ e $\psi(0) = 1 \implies \psi(t) = e^{-t/4}$.

Esercizio.

$$
\begin{cases}
u_t = u_{xx} & x \in [0, \pi] \\
u(t, 0) = 0 & t \in \mathbb{R} \\
u(t, \pi) = t & t \in \mathbb{R} \\
u(0, \,\cdot\,) = u_0
\end{cases}
\tag{P}
$$

L'equazione è lineare, cerchiamo $u(t, x) = v(t, x) + \psi(t, x)$ in modo che $v(t, x) = 0$ se $x = 0, \pi$ e $\psi(t, 0) = 0$ e $\psi(t, \pi) = t$ e $\psi(t, x) = tx/\pi$.

Esercizio.

$$
\begin{cases}
u_t = u_{xxxx} & x \in [-\pi, \pi] \\
u(\,\cdot\,, \pi) = u(\,\cdot\,, -\pi) \\
u_x(\,\cdot\,, \pi) = u_x(\,\cdot\,, -\pi) \\
u_{xx}(\,\cdot\,, \pi) = u_{xx}(\,\cdot\,, -\pi) \\
u_{xxx}(\,\cdot\,, \pi) = u_{xxx}(\,\cdot\,, -\pi) \\
u(0, \,\cdot\,) = u_0
\end{cases}
\tag{P}
$$

Esercizio.

$$
\begin{cases}
u_t = u_{xxxx} & x \in [0, \pi] \\
u(\,\cdot\,, 0) = u(\,\cdot\,, \pi) = 0 \\
u_{xx}(\,\cdot\,, 0) = u_{xx}(\,\cdot\,, \pi) = 0 \\
u(0, \,\cdot\,) = u_0
\end{cases}
\tag{P}
$$

Esercizio. Sia V il seguente insieme

$$
V \coloneqq \left\{ f \in L^1([1, +\infty]) \;\middle|\; |f(x)| \le \frac{1}{x^2} \text{ per q.o. } x \right\}
$$

è compatto in L^1? e se al posto di L^1 avessimo L^2?

[TODO: Espandere]

Intuitivamente $V \supseteq \{f \mid |f(x)| \leq 1/2 \text{ q.o. in } [1,2]\}$ che non è compatto in quanto contiene famiglie di funzioni che "oscillano molto" costruite sull'idea della base di Haar.

Esercizio. Trovare una funzione in $L^p([0,+\infty))$ tale però che $f \notin L^q$ per $q \neq p$.

Cercare f della forma

$$f(x) = \frac{1}{x^\alpha(a + (\ln x)^\beta)}$$

5.11.1 Considerazioni finali su SdF e serie in seni

Notiamo che l'efficacia per la soluzione di certe EDP dipende dal fatto che

$$c_n(u) = inc_n(u) \qquad b_n(\ddot{u}) = -n^2 b_n(u)$$

che segue (almeno formalmente) da $(e^{inx})' = ine^{inx}$ e $(\sin(nx))'' = -n^2\sin(nx)$.

Cioè che $\left\{e^{inx}/\sqrt{2\pi}\right\}$ è una base ortonormale di $L^2([-\pi,\pi],\mathbb{C})$ di autovettori di D e $\left\{\sqrt{2/\pi}\sin(x)\right\}$ è una base ortonormale di autovettori di D^2.

Analogamente per risolvere $u_t = \Delta u$ su Ω, basterebbe avere $\{e_n\}$ base ortonormale di $L^2(\Omega)$ fatta di autovettori del laplaciano.

Per avere una base ortonormale di autovettori di un operatore T serve che T sia autoaggiunto (almeno in dimensione finita).

Definizione. Dato H spazio di Hilbert complesso o reale, D sottospazio denso di H, $T\colon D \to H$ lineare (non necessariamente continuo), dico che T è **autoaggiunto** se $\langle Tx, y\rangle = \langle x, Ty\rangle$ per ogni $x, y \in D$.

Proposizione. Dato T come sopra

i) Se λ è autovalore di T (ovvero tale che $\exists x \neq 0$ tale che $Tx = \lambda x$) allora λ è reale.

ii) Dati $\lambda_1 \neq \lambda_2$ autovalori allora $V_{\lambda_1} \perp V_{\lambda_2}$ dove $V_\lambda \coloneqq \{x \mid Tx = \lambda x\}$.

Nota. In dimensione infinita manca un teorema spettrale, ovvero tale che $\overline{\bigoplus_\lambda V_\lambda} = H$.

Esempio 1. Sia $H = L^2([-\pi,\pi],\mathbb{C})$, $D = \{u \in \mathcal{C}^2(-\pi,\pi) \mid u(-\pi) = u(\pi)\}$ e $T\colon D \to H$ tale che $u \mapsto iu$. Mostrare che

i) T è autoaggiunto

ii) Gli autovalori di T sono $\lambda_n = n$ con $n \in \mathbb{Z}$ $V_{\lambda_n} = V_n = \operatorname{Span}\{e^{inx}\}$.

iii) T non è continuo

In questo caso esiste una base ortonormale di L^2 di autovettori di T. [TO DO: aggiustare].

Dimostrazione.

i) Dati $u, c \in D(= \mathcal{C}^1_{\text{per}})$, allora

$$\begin{aligned}\langle Tu, v\rangle &= \int_{-\pi}^{\pi} i\dot{u}\overline{v}\,\mathrm{d}x = |iu\overline{v}|_{-\pi}^{\pi} - \int_{-\pi}^{\pi} iu\overline{v}\,\mathrm{d}x \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} u\overline{i\dot{v}}\,\mathrm{d}x = \langle u, Tv\rangle\end{aligned}$$

ii) Questo è un esercizio di equazioni differenziali ordinarie. Risolviamo il problema

$$\begin{cases} -iu = \lambda u & \text{su } [-\pi, \pi] \\ u(\pi) = u(-\pi) \end{cases}$$

da cui $\dot{u} - i\lambda u = 0$, che ha polinomio associato $t - i\lambda = 0$ con radice $i\lambda$. In conclusione la soluzione del problema sopra è $\alpha e^{i\lambda x}$.

Dalla condizione al bordo abbiamo che $\alpha e^{i\lambda\pi} = e^{-i\lambda\pi}$ dunque $e^{i\lambda\pi} = e^{-i\lambda\pi} \iff e^{2i\lambda\pi} = 1 \iff \lambda \in \mathbb{Z}$.

iii) Siccome gli autovalori sono illimitati, T non è continuo. □

Esempio 3. Sia $H = L^2([-\pi, \pi], \mathbb{C})$ $D = \{u \in \mathcal{C}^1(-\pi, \pi)\}$ e $T\colon D \to H$ tale che $u \mapsto i\dot{u}$.

Dimostrazione. Dati $u, v \in D$ abbiamo

$$\begin{aligned}\langle Tu, v\rangle &= \int_{-\pi}^{\pi} i\dot{u}\overline{v}\,\mathrm{d}x = |iu\overline{v}|_{-\pi}^{\pi} - \int_{-\pi}^{\pi} iu\dot{\overline{v}}\,\mathrm{d}x \\ &= i(u(\pi)\overline{v}(\pi) - u(-\pi)\overline{v}(-\pi)) + \langle u, Tv\rangle \neq \langle u, Tv\rangle\,.\end{aligned}$$

In quanto, in generale, il termine $u(\pi)\overline{v}(\pi) - u(-\pi)\overline{v}(-\pi)$ è diverso da zero.

Esercizio. Cercare $T\colon L^2([0,1]) \to L^2([0,1])$ continuo autoaggiunto senza autovalori.

Suggerimento. Cercare T del tipo $T\colon u \mapsto gu$ con $g \in L^\infty$.

Capitolo 6

Trasformata di Fourier

Data $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ poniamo

$$f(x) \overset{(*)}{=} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(y) e^{iyx} \, \mathrm{d}y \qquad \widehat{f}(y) \coloneqq \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-iyx} \, \mathrm{d}x.$$

Dove $\widehat{u}$ si chiama *trasformata di Fourier*[1] di u e la formula $(*)$ si dice *formula di inversione*.

Derivazione formale (della formula di inversione). Prendiamo $f \in \mathcal{C}^1_C(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ e $\delta > 0$ tale che $\operatorname{supp}(f) \subset [-\pi/\delta, \pi/\delta]$.

Scriviamo f in serie di Fourier su $[-\pi/\delta, \pi/\delta]$ (serve un cambio di variabile per ricondursi alla serie di Fourier su $[-\pi, \pi]$).

$$f(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n^{\delta}(f) e^{in\delta x}$$

$$c_n^{\delta}(f) \coloneqq \frac{\delta}{2\pi} \int_{-\pi/\delta}^{\pi/\delta} f(x) e^{-in\delta x} \, \mathrm{d}x = \frac{\delta}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-in\delta x} \, \mathrm{d}x = \frac{\delta}{2\pi} \widehat{f}(n\delta).$$

Dunque,

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{\delta}{2\pi} \underbrace{\widehat{f}(n\delta) e^{i(n\delta)x}}_{\widehat{f}(y)e^{iyx} \text{ calcolata in } y = n\delta}$$

dove $\displaystyle\sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{\delta}{2\pi} \widehat{f}(n\delta) e^{i(n\delta)x}$ è la somma di Rienmann di $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f} e^{iyx} \, \mathrm{d}y$. Dunque

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{\delta}{2\pi} \widehat{f}(n\delta) e^{i(n\delta)x} \xrightarrow{\delta \to 0} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(y) e^{iyx} \, \mathrm{d}y.$$

Quest'ultimo passaggio non è giustificato rigorosamente ma si può rendere rigoroso per $f \in \mathcal{C}^1_C(\mathbb{R})$.

Definizione. Data $f \in L^1(\mathbb{R}; \mathbb{C})$ la **trasformata di Fourier** $\widehat{f}$ è definita da

$$\widehat{f}(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-ixy} \, \mathrm{d}x \quad \forall y \in \mathbb{R}.$$

[1] Sostituisce la serie di Fourier quando si passa da funzioni su $\mathbb{R}$ 2π-periodiche a funzioni su $\mathbb{R}$.

Teorema. Data $f \in L^1(\mathbb{R};\mathbb{C})$, allora

i) $\widehat{f}$ è ben definita in ogni punto di $\mathbb{R}$.

ii) Vale $\left\|\widehat{f}\right\|_\infty \leq \|f\|_1$.

iii) $\widehat{f}$ è continua

iv) $\widehat{f}$ è infinitesima.

Dimostrazione.

i) $\widehat{f}(y)$ è ben definita per ogni $y \in \mathbb{R}$. Infatti, $f(x)e^{-iyx} \in L^1$ dato che

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left|f(x)e^{-iyx}\right| \,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| \,\mathrm{d}x = \|f\|_1 .$$

ii) $\left\|\widehat{f}\right\|_\infty \leq \|f\|_1$. Infatti,

$$|\widehat{f}|_\infty \leq \int \left|f(x)e^{-iyx}\right| \,\mathrm{d}x = \|f\|_1$$

iii) $\widehat{f}$ è continua. Se $y_n \to y$, allora

$$\widehat{f}(y_n) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-ixy_n} \,\mathrm{d}x \xrightarrow{n\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-iny} \,\mathrm{d}x = \widehat{f}(y)$$

per convergenza dominata. Infatti, la convergenza puntuale segue dalla continuità dell'esponenziale; mentre la dominazione è data da $|f(x)e^{-iyx}| = |f(x)|$.

iv) $\widehat{f}(y) \xrightarrow{y\to\pm\infty} 0$ per il lemma di Rienmann-Lebesgue.

$\square$

6.1 Proprietà della trasformata di Fourier

Data $f \in L^1(\mathbb{R};\mathbb{C})$ abbiamo posto

$$\forall y \in \mathbb{R} \qquad \mathcal{F}(f)(y) = \widehat{f}(y) := \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-iyx} \,\mathrm{d}x$$

ed abbiamo visto che

Teorema 1. $\widehat{f} \in C_0(\mathbb{R};\mathbb{C})$ e $\|\widehat{f}\|_\infty \leq \|f\|_1$.

Proposizione 2. Data $f \in L^1(\mathbb{R};\mathbb{C})$ allora

i) $\forall h \in \mathbb{R}$ vale $\widehat{\tau_h f} = e^{-ihy}\widehat{f}$

ii) $\forall h \in \mathbb{R}$ vale $\widehat{e^{ihx} f} = \tau_h \widehat{f}$

iii) $\forall \delta \neq 0$ vale $\widehat{\sigma_\delta f} = \widehat{f}(\delta y)$

Derivazione. Partendo dalla formula di inversione

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int \widehat{f}(y) e^{iyx} \, \mathrm{d}y$$
$$f(x-h) = \frac{1}{2\pi} \int \underbrace{\widehat{f}(y) e^{-ihy}}_{=\widehat{f(x-h)}} e^{iyx} \, \mathrm{d}y$$

Dimostrazione. Facciamo il calcolo diretto

$$\begin{aligned}
\widehat{\tau_h f} &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-h) e^{-ixy} \, \mathrm{d}x = \\
&= \begin{pmatrix} t = x-h \\ \mathrm{d}t = \mathrm{d}x \end{pmatrix} = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-i(t+h)y} \, \mathrm{d}t = \\
&= e^{-ihy} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-ity} \, \mathrm{d}t = e^{-ihy} \widehat{f}(t).
\end{aligned}$$

Analogamente seguono anche le altre □

Proposizione 3. Sia $f \in C^1(\mathbb{R}; \mathbb{C})$ con $f, f' \in L^1$ allora $\widehat{f'} = iy\widehat{f}$ (da confrontare con $c_n(f') = inc_n(f)$ nel caso della serie di Fourier).

Derivazione. Si deriva la formula di inversione

$$f'(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{f}(y) iy e^{ixy} \, \mathrm{d}y$$

Dimostrazione. Vediamo prima una dimostrazione che non funziona e cerchiamo di aggiustarla. Abbiamo che

$$\widehat{f'}(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f'(x) e^{-iyx} \, \mathrm{d}x = \underbrace{\left[f(x) e^{-iyx} \right]_{-\infty}^{+\infty}}_{=0} + iy \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-iyx} \, \mathrm{d}x = iy\widehat{f}(y)$$

serve che $f(x) \to 0$ per $|x| \to +\infty$ (ad esempio $f \in C \cap L^1$ lo implica), in realtà $f \in C^1$ e $f, f' \in L^1$ basta, ma la dimostrazione è più complicata.

Argomentiamo come segue, $f \in L^1 \implies \liminf_{|x| \to \infty} |f(x)| = 0$ (in quanto se $\liminf_{|x| \to \infty} |f(x)| = \delta > 0$ allora la funzione sarebbe $> \delta$ per $|x| \to +\infty$ ed avrebbe integrale $+\infty$) dunque esistono due successioni $a_n \to -\infty, b_n \to +\infty$ tali che $f(a_n) \to 0$ e $f(b_n) \to 0$ quindi come prima abbiamo

$$\begin{aligned}
\widehat{f'}(y) &= \lim_n \int_{a_n}^{b_n} f'(x) e^{iyx} \, \mathrm{d}x = \\
&= \lim_n \int \mathbb{1}_{[a_n, b_n]} f'(x) e^{iyx} \, \mathrm{d}x = \\
&= \lim_n \left(\underbrace{\left[f(x) e^{-iyx} \right]_{a_n}^{b_n}}_{\to 0} + iy \int_{a_n}^{b_n} f(x) e^{-iyx} \, \mathrm{d}x \right) = \\
&= \lim_n iy \int_{a_n}^{b_n} f(x) e^{-iyx} \, \mathrm{d}x = \\
&= iy\widehat{f}(y)
\end{aligned}$$

□

Proposizione 4. Sia $f \in L^1$ con $xf \in L^1$, allora $\widehat{f} \in C^1(\mathbb{R};\mathbb{C})$ e $(\widehat{f})' = -\widehat{ixf}$.

Dimostrazione.

$$\widehat{f}(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-ixy}\,\mathrm{d}x \implies (\widehat{f})'(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)(-ix)e^{-ixy}\,\mathrm{d}x = \widehat{-ixf}$$

Proposizione 5. (Derivazione sotto segno di integrale) Sia I un intervallo di $\mathbb{R}$, E misurabile in $\mathbb{R}^d$ e $g\colon I \times E \to \mathbb{C}$ tale che

i) $g(\,\cdot\,, x) \in C^1(I)$ per q.o. $x \in E$.

ii) $\exists h_0, h_1 \in L^1(E)$ tali che

$$|g(t,x)| \le h_0(x) \quad \text{e} \quad \left|\frac{\partial g}{\partial t}(t,x)\right| \le h_1(x)$$

allora $G(t) \coloneqq \int_E g(t,x)\,\mathrm{d}x$ è ben definita per ogni $t \in I$ e $G \in C^1(I)$ e

$$G'(t) = \int_E \frac{\partial}{\partial t} g(t,x)\,\mathrm{d}x$$

Traccia dimostrazione.

- *Passo 1:* $G(t)$ e $\widetilde{G}(t)$ sono ben definite $\forall t \in I$ (grazie alla dominazione) e continue in t (usando convergenza dominata e le dominazioni)
- *Passo 2:* Dobbiamo far vedere che G è C^1 con derivata $\widetilde{G}$, si usa la seguente forma del teorema fondamentale del calcolo integrale

$$\forall t_0, t_1 \in I \text{ con } t_0 < t_1 \qquad G(t_1) - G(t_0) \overset{(*)}{=} \int_{t_0}^{t_1} \widetilde{G}(t)\,\mathrm{d}t$$

ed usando Fubini-Tonelli in $(*)$.

Proposizione 6. (Prodotto di convoluzione e trasformata di Fourier). Siano $f_1, f_2 \in L^1(\mathbb{R};\mathbb{C})$, allora $f_1 * f_2 \in L^1$ (già visto) e vale

$$\mathcal{F}(f_1 * f_2) = (\mathcal{F}f_1) \cdot (\mathcal{F}f_2)$$

Dimostrazione.

$$\begin{aligned}
\widehat{f_1 * f_2}(y) &= \int f_1 * f_2(x)e^{-ixy}\,\mathrm{d}x = \\
&= \iint f_1(x-t)f_2(t)\,\mathrm{d}t\, e^{-ixy}\,\mathrm{d}x = \\
&= \int \left(\int f_1(x-t)e^{-i(x-t)y}\,\mathrm{d}x \right) f_2(t)e^{-ity}\,\mathrm{d}t = \\
&= \int \widehat{f_1}(y) f_2(t) e^{-ity}\,\mathrm{d}t = \widehat{f_1}(y) \cdot \widehat{f_2}(y)
\end{aligned}$$

Definizione. Data $g \in L^1(\mathbb{R};\mathbb{C})$ definiamo l'**antitrasformata di Fourier** di g la funzione

$$\check{g}(x) \coloneqq \int_{-\infty}^{+\infty} g(y)e^{ixy}\,\mathrm{d}y.$$

Cioè $\check{g}(x) = \widehat{g}(-x)$ e scriviamo anche $\check{g} = \mathcal{F}^* g$. Effettivamente $\mathcal{F}^*$ è l'aggiunto di $\mathcal{F}$, almeno formalmente[2] infatti abbiamo

$$\langle \mathcal{F} f, g\rangle = \iint f \overline{e^{ixy} g(y)} \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int f(x)\overline{\check{g}(x)}\,\mathrm{d}x = \langle f, \mathcal{F}^* g\rangle.$$

Teorema 7. Data $f \in L^1(\mathbb{R};\mathbb{C})$ tale che $\widehat{f} \in L^1(\mathbb{R};\mathbb{C})$ allora

$$\tilde{\forall} x \in \mathbb{R} \qquad \mathcal{F}^*\mathcal{F} f = 2\pi f \qquad \text{cioè} \int \widehat{f}(x) e^{ixy}\,\mathrm{d}y = 2\pi f(x)$$

Nota. Una funzione continua e infinitesima non è, in generale, una funzione L^1; in particolare, l'ipotesi $\widehat{f} \in L^1$ è necessaria e non deriva dalle proprietà già note.

Dimostrazione. *Dimostrazione diretta* (passando dalla Delta di Dirac dei fisici):

$$\begin{aligned}\mathcal{F}^*\mathcal{F} f &= \int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{f}(y) e^{iyx}\,\mathrm{d}y = \\ &= \iint f(t) e^{-iyt}\,\mathrm{d}t e^{ixy}\,\mathrm{d}y = \\ &= \int f(t) \underbrace{\int e^{i(x-t)y}\,\mathrm{d}y}_{\text{“}\delta(x-t)\text{”}}\,\mathrm{d}t = f(x)\end{aligned}$$

Dimostrazione vera: scegliamo una funzione ausiliaria $\varphi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tale che

i) $\varphi(0) = 1$ continua in 0 e φ limitata

ii) $\varphi \in L^1$

iii) $\check{\varphi} \in L^1$

e poniamo $g_\delta(x) \coloneqq \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{f}(y)\varphi(\delta y) e^{ixy}\,\mathrm{d}y$.

- *Passo 1:* $g_\delta(x) \to \mathcal{F}^*\mathcal{F} f(x)$ per ogni $x \in \mathbb{R}$ per convergenza dominata

  $$\int \widehat{f}(y) e^{iyx}\varphi(\delta y)\,\mathrm{d}y \xrightarrow{\delta\to 0} \int \widehat{f}(y) e^{iyx}\,\mathrm{d}y$$

  e come dominazione usiamo $|\widehat{f}(y) e^{iyx}\varphi(\delta y)| \leq |\widehat{f}(y)| \cdot \|\varphi\|_\infty$

- *Passo 2:* $g_\delta(x) = \displaystyle\int \left(\int f(t) e^{-ity}\,\mathrm{d}t\right) e^{ixy}\varphi(\delta y)\,\mathrm{d}y$, per Fubini-Tonelli otteniamo

  $$\begin{aligned}&= \iint \varphi(\delta y) e^{i(x-t)y}\,\mathrm{d}y f(t)\,\mathrm{d}t = \\ &= \int \sigma_\delta\check{\varphi}(x-t) f(t)\,\mathrm{d}t = \sigma_\delta\check{\varphi} * f(x).\end{aligned}$$

- *Passo 3:* $g_\delta \to mf$ in L^1 con $m = \displaystyle\int_{\mathbb{R}} \check{\varphi}(x)\,\mathrm{d}x$ (per il teorema di approssimazione e per ipotesi).

[2] In L^1 non è definito il prodotto scalare.

- *Passo 4:* Usando il primo ed il terzo passo otteniamo $\mathcal{F}^*\mathcal{F}f = mf$ per quasi ogni x, in quanto la convergenza puntuale e quella in L^1 devono essere compatibili; in particolare, la convergenza in L^1 a meno di sottosuccessioni equivale alla convergenza puntuale e dunque coincidono.

- *Passo 5:* $m = 2\pi$ ad esempio prendendo $\varphi(y) = e^{-|y|}$, segue che

$$\check{\varphi}(y) = \frac{2}{1+x^2}$$

e dunque $m = 2\pi$. In realtà vale per ogni φ che verifica le condizioni dell'ipotesi.

In conclusione, riportiamo la verifica di Fubini-Tonelli:

$$\iint |f(t)e^{-ity}e^{ixy}\varphi(\delta y)| \,\mathrm{d}t \,\mathrm{d}y = \iint |f(t)| \cdot |\varphi(\delta y)| \,\mathrm{d}t \,\mathrm{d}y = \|f\|_1 \cdot \|\varphi(\delta y)\|_1 < +\infty$$

□

Corollario 8. Date $f_1, f_2 \in L^1$ tali che $\widehat{f_1} = \widehat{f_2} \implies f_1 = f_2$ quasi ovunque cioè $\mathcal{F}$ è iniettiva, cioè f è univocamente determinata da $\widehat{f}$.

Dimostrazione. Per ipotesi, $\widehat{f_1} - \widehat{f_2} = \widehat{f_1 - f_2} = 0$. Applicando il Teorema 7 a $\widehat{f_1 - f_2}$ (possiamo farlo perchè $0 \in L^1$) otteniamo

$$0 = \int \widehat{f_1 - f_2}(x)e^{ixy} \,\mathrm{d}y = 2\pi(f_1(x) - f_2(x)) \Rightarrow f_1(x) = f_2(x) \quad \tilde{\forall} x \in \mathbb{R}.$$

□

Esercizio. Date $f_1, f_2 \in L^1([-\pi, \pi]; \mathbb{C})$ e tali che per ogni $n \in \mathbb{Z}$ vale $c_n(f_1) = c_n(f_2)$ allora $f_1 = f_2$ quasi ovunque (e $c_n(f) = 0$ per ogni $n \implies f = 0$ q.o.).

6.2 Esercitazione del 2 dicembre

Ricordiamo la definizione della trasformata di Fourier

$$\mathcal{F}(f) = \widehat{f}(y) = \int_{\mathbb{R}} f(x)e^{-ixy} \,\mathrm{d}x, \quad f \in L^1(\mathbb{R}; \mathbb{C}), \quad f \in L^1(\mathbb{R})$$

dove $\mathcal{F} \colon L^1(\mathbb{R}; \mathbb{C}) \to L^\infty(\mathbb{R}) \cap C_0(\mathbb{R})$, in quanto $\left\|\widehat{f}\right\|_\infty \leq \|f\|_1$.

Proprietà. Ricordiamo le proprietà viste a lezione.

i) $\widehat{\tau_h f}(y) = e^{-iyh}\widehat{f}(y)$ per ogni $h \in \mathbb{R}$, dove $\sigma_h f(x) = f(x-h)$

ii) $\widehat{e^{ihx} f}(y) = \tau_h \widehat{f}(y)$

iii) Legame tra trasformata e derivata.

  - $f \in C^1(\mathbb{R})$, $f, f' \in L^1(\mathbb{R}, \mathbb{C})$, allora $\widehat{f'}(y) = iy\widehat{f}(y)$.
  - $f \in L^1(\mathbb{R}; \mathbb{C})$ e $xf(x) \in L^1(\mathbb{R}; \mathbb{C})$, $(1+|x|)f(x) \in L^1(\mathbb{R}; \mathbb{C})$, allora $\widehat{f} \in C^1(\mathbb{R})$ e $(\widehat{f})' = -i\widehat{xf(x)}$.

Nota. Le ipotesi $f \in L^1(\mathbb{R};\mathbb{C})$ e $xf(x) \in L^1(\mathbb{R};\mathbb{C})$ sono equivalenti a $(1+|x|)f(x) \in L^1(\mathbb{R};\mathbb{C})$.

iv) Vale $\widehat{f * g} = \widehat{f} \cdot \widehat{g}$.

Riportiamo un esercizio già posto con una soluzione alternativa.

Esercizio. Dire se esiste $v \in L^1$ non banale tale che

- $v * v = v$
- $g * v = g$ per ogni $g \in L^1$.

Soluzione. La risposta è no per entrambi i punti. Infatti,

- Se per assurdo valesse tale identità, passando alle trasformate si avrebbe
$$\widehat{v * v} = (\widehat{v})^2 \Longrightarrow \widehat{v}(\widehat{v} - 1) = 0.$$
Ovvero, $\widehat{v} = \{0, 1\}$. Osserviamo subito che non è possibile che $\widehat{v}$ assuma entrambi i valori in quanto funzione continua; d'altra parte non è possibile che $\widehat{v} = 1$, in quanto è anche infinitesima, dunque $\widehat{v} = 0 \Longrightarrow v = 0$.
- Analogamente al punto precedente si avrebbe $\widehat{v} = 1$ ma ciò non è possibile.

Esercizio 1. Calcolare la trasformata di Fourier della funzione $f(x) = e^{-|x|}$.

Soluzione. Abbiamo

$$\begin{aligned}
\widehat{f}(y) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-|x|} e^{-ixy} \,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-|x|} \cos(xy) \,\mathrm{d}x - i \int_{-\infty}^{\infty} \overbrace{e^{-|x|} \sin(xy)}^{\substack{\text{integrale definito} \\ \text{di fuzione dispari}} = 0} \,\mathrm{d}x = 2\int_0^{\infty} e^{-|x|} \cos(xy) \,\mathrm{d}x \\
&= 2\int_0^{\infty} e^{-x} \operatorname{Re} e^{ixy} \,\mathrm{d}x = 2\int_0^{\infty} \operatorname{Re}\left(e^{-x} \cdot e^{ixy}\right) \,\mathrm{d}x = 2\operatorname{Re}\left[\int_0^{\infty} e^{-x} e^{ixy}\right] \mathrm{d}x = 2\operatorname{Re}\left|\frac{e^{x(iy-1)}}{(iy-1)}\right|_0^{\infty} \\
&= 2\operatorname{Re}\left[-\frac{1}{iy-1} + \underbrace{\lim_{x\to\pm\infty} \frac{e^{x(iy-1)}}{iy-1}}_{=0}\right] = 2\operatorname{Re}\left[-\frac{1}{iy-1}\right] = 2\operatorname{Re}\left[-\frac{1}{iy-1} \cdot \frac{iy+1}{iy+1}\right] \\
&= 2\operatorname{Re}\left[\frac{iy+1}{1+y^2}\right].
\end{aligned}$$

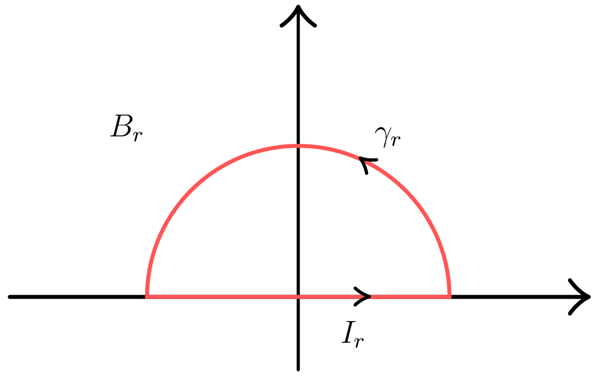
In conclusione, $\widehat{f}(y) = \dfrac{2}{1+y^2}$.

Esercizio 2. Calcolare la trasformata di Fourier della funzione $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$.

Soluzione. Calcoliamo $\widehat{f}(y) = \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{-ixy}}{1+x^2} \,\mathrm{d}x$. Dal fatto che $f \in L^1$ e usando il teorema di convergenza dominata, possiamo scrivere $\widehat{f}(y)$ come

$$\widehat{f}(y) = \lim_{R\to+\infty} \int_{-R}^{R} \frac{e^{-ixy}}{1+x^2} \,\mathrm{d}x$$

Idea. Calcolare questo integrale con il metodo dei residui, ponendo $\dfrac{e^{-ixy}}{1+x^2} = \dfrac{e^{-izy}}{1+z^2}\Big|_{z \text{ reale}}$



Per il teorema dei residui:

$$\int_{B_r} g(z)\,\mathrm{d}z = 2\pi i \sum_{\substack{z_i \text{ singolarità} \\ \text{di } g \text{ in } B_r}} \operatorname{res}(g, z_i)$$

Inoltre $\displaystyle\int_{B_r} g(z)\,\mathrm{d}z = \int_{I_r:=\text{bordo sotto}} g(z)\,\mathrm{d}x \quad + \underbrace{\int_{\gamma_r:=\text{semicirconferenza}} g(x)}_{\xrightarrow{r\to\infty} 0} = \int_{-r}^{r} \frac{e^{-ixy}}{1+x^2}\,\mathrm{d}x.$

- Verifichiamo che $\displaystyle\int_{\gamma_r} g(x) \xrightarrow{r\to\infty} 0$ dove $[0,\pi] \ni \theta \overset{\gamma_r}{\longmapsto} re^{i\theta}$.

  Poniamo $z = x + it$, dunque $yz = xy + yit$, da cui $g(z) = g(x+it) = \left(e^{-ixy}e^{ty}\right)/(1+(x+it)^2)$. Dunque,

  $$\int_0^{\pi} g(e^{i\theta}r)r\,\mathrm{d}\theta \Longrightarrow \int_0^{\pi} \frac{e^{-ri\cos\theta}e^{r\sin\theta y}}{(1+r^2e^{i2\theta})} r\,\mathrm{d}\theta \xrightarrow{r\to\pm\infty} 0 \quad \text{se } y<0.$$

  Per il caso $y>0$ si ripercorre lo stesso procedimento ma si utilizza la curva $[\pi, 2\pi] \ni \theta \overset{\gamma_r}{\longmapsto} re^{i\theta}$.

- Calcoliamo i residui: l'unico residuo di g è nel punto i che si tratta di una singolarità semplice (nel caso $y>0$ la singolarità è in $-i$).

  $$\lim_{r\to\pm\infty} 2\pi i \operatorname{res}(g, i) = \pi e^{y}$$

  Considerando anche il caso $y>0$ la trasformata di Fourier diviene $\pi e^{-|y|}$.

[TO DO]. Riportare il teorema dei residui con i metodi di base per calcolare i residui?

6.3 Trasformata di Fourier su L^2

Abbiamo visto che la *serie di Fourier* si definisce naturalmente su L^2 (uno spazio di Hilbert) mentre la *trasformata di Fourier* ha bisogno di L^1 che non è uno spazio di Hilbert. Vedremo ora come estendere la trasformata di Fourier ad L^2 e come poter fare i conti.

Proposizione 1. Data $f \in L^1(\mathbb{R};\mathbb{C}) \cap L^2(\mathbb{R};\mathbb{C})$ vale $\|\widehat{f}\|_2 = \sqrt{2\pi}\,\|f\|_2$.

Teorema 2. $\mathcal{F}$ si estende per continuità da $L^1 \cap L^2$ a tutto L^2 e $\mathcal{F}/\sqrt{2\pi}$ risulta essere un'isometria (come operatore a valori in L^2).

Corollario 3. (Identità di Plancherel). $\forall f_1, f_2 \in L^2(\mathbb{R};\mathbb{C})$ vale $\langle \widehat{f_1}, \widehat{f_2}\rangle = 2\pi\langle f_1, f_2\rangle$.

Osservazione. Come si può calcolare $\widehat{f}$ per $f \in L^2 \setminus L^1$? Se per quasi ogni $y \in \mathbb{R}$ esiste il limite

$$\lim_n \underbrace{\int_{-n}^{n} f(x)e^{-ixy}\,\mathrm{d}x}_{\widehat{f_n}(y)}$$

allora coincide con $\widehat{f}(y)$.

Infatti, per ogni n posto $f_n \coloneqq f \cdot \mathbb{1}_{[-n,n]}$ abbiamo che $\lim_n \int_{-n}^{n} f(x)e^{-ixy}\,\mathrm{d}x = \widehat{f_n}(x)$. A questo punto, osserviamo che $f_n \to f$ in L^2 (da controllare per esercizio) e quindi $\widehat{f_n} \to \widehat{f}$ in L^2 (segue dalla continuità della trasformata). Siccome per ipotesi $\widehat{f_n}$ converge puntualmente quasi ovunque allora $\widehat{f_n} \to \widehat{f}$ puntualmente quasi ovunque.

Intuitivamente, il Teorema 2 e l'identità di polarizzazione danno il Corollario 3. mentre il Teorema 2 segue dalla Proposizione 1. più un fatto noto usando che $L^1 \cap L^2$ è denso in L^2.

Fatto Noto. Dati X e Y spazi metrici, Y completo e D denso in X, $g\colon D \to Y$ uniformemente continua allora g ammette un'unica estensione $G\colon X \to Y$ continua. (Inoltre se X e Y sono spazi normati e g è lineare allora anche G è lineare)

Dimostrazione Proposizione 1.

Dimostrazione che non funziona: Proviamo a svolgere il calcolo diretto

$$\begin{aligned}
\|\widehat{f}\,\|_2^2 &= \int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{f}(y)\overline{\widehat{f}(y)}\,\mathrm{d}y \\
&= \iiint f(x)e^{-ixy}\overline{f(t)e^{-ity}}\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \\
&= \iint f(x)\overline{f(t)}\Bigg(\underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-iy(t-x)}\,\mathrm{d}y}_{\delta(x-t)}\Bigg)\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}x = \\
&= \int \left(\int f(x)\delta(x-t)\,\mathrm{d}x\right)\overline{f(t)}\,\mathrm{d}t = \\
&= 2\pi \int f(t)\overline{f(t)}\,\mathrm{d}t = 2\pi\,\|f\|_2^2
\end{aligned}$$

vediamo però che compare l'integrale $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-iy(t-x)}\,\mathrm{d}y$ e serve assumere che corrisponda a $\delta(x-t)$ dove δ è la "funzione Delta di Dirac", vediamo ora la dimostrazione formale usando una funzione ausiliaria.

Dimostrazione formale: Prendiamo $\varphi\colon \mathbb{R} \to [0,+\infty]$ tale che

i) φ continua in 0, crescente per $y < 0$ e decrescente per $y > 0$ e $\varphi(0) = 1$.

ii) $\varphi \in L^1$ e $\check{\varphi} \in L^1$.

Poniamo per ogni δ

$$I_\delta = \int_{-\infty}^{+\infty} |\widehat{f}(y)|^2\varphi(\delta y)\,\mathrm{d}y \xrightarrow{?} \int_{-\infty}^{+\infty} |f(y)|^2$$

- *Passo 1:* $I_\delta \xrightarrow{\delta\to 0} \|\widehat{f}\|_2^2$ per convergenza monotona usando l'ipotesi di crescenza/descrescenza prima/dopo lo 0.

- *Passo 2:*
$$\begin{aligned}
I_\delta &= \int \widehat{f}(y)\overline{\widehat{f}(y)}\varphi(\delta y)\,\mathrm{d}y = \\
&= \int \left(\int f(x)e^{-ixy}\,\mathrm{d}x\right)\left(\int \overline{f(t)}e^{ity}\,\mathrm{d}t\right)\varphi(\delta y)\,\mathrm{d}y = \\
&\overset{\text{FT}}{=} \iint f(x)\overline{f(t)}\Bigg(\underbrace{\int \varphi(\delta y)e^{i(t-x)y}\,\mathrm{d}y}_{\sigma_\delta\check{\varphi}(t-x)}\Bigg)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \\
&= \int \left(f(x)\sigma_\delta\check{\varphi}(t-x)\,\mathrm{d}x\right)\overline{f(t)}\,\mathrm{d}t = \\
&= \int f * \sigma_\delta\check{\varphi}(t)\cdot\overline{f(t)}\,\mathrm{d}t = \\
&= \langle f * \sigma_\delta\check{\varphi}; f\rangle
\end{aligned}$$
e possiamo applicare il teorema di Fubini-Tonelli in quanto le ipotesi sono verificate infatti
$$\begin{aligned}
&\iiint |f(x)\overline{f(t)}|e^{i(t-x)y}\varphi(\delta y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}y = \\
= &\iiint |f(x)|\cdot|f(t)|\cdot|\varphi(\delta y)|\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}y = \\
= &\|f\|_1^2\,\|\varphi(\delta y)\|_1 < +\infty
\end{aligned}$$
e $\|\varphi(\delta y)\|_1 < +\infty$ poiché $\varphi \in L^1$.

- *Passo 3:* $I_\delta \xrightarrow{\delta\to 0} 2\pi\,\|f\|_2^2$. Infatti $I_\delta = \langle f * \sigma_\delta\check{\varphi}; f\rangle$ e
$$\sigma_\delta\check{\varphi} \xrightarrow{\text{in } L^2} mf \qquad \text{con } m = \int \check{\varphi}(x)\,\mathrm{d}x$$

- *Passo 4:* Infine $m = 2\pi$ ad esempio prendendo $\varphi(y) = e^{-|y|}$
$$\check{\varphi}(x) = \frac{2}{1+x^2} \in L^1$$
ed in questo caso m si calcola.

$\square$

6.3.1 Proprietà della trasformata di Fourier in L^2

Proposizione 4.

- $\widehat{\tau_h f} = e^{-ihy}\widehat{f}$
- $\widehat{e^{ihx}f} = \tau_h\widehat{f}$
- $\widehat{\sigma_h f} = \widehat{f}(\delta y)$

Dimostrazione. Le identità valgono in $L^1 \cap L^2$ che è denso in L^2 e dunque si estendono per continuità ad L^2.

Proposizione 5. Se $f \in C^1(\mathbb{R};\mathbb{C})$ e $f \in L^1 \cup L^2$ e $f' \in L^1 \cup L^2 \implies \widehat{f'} = iy\widehat{f}$.

Dimostrazione. La stessa fatta per $f, f' \in L^1$. Si parte da a_n, b_n tali che $a_n \to -\infty$ e $b_n \to +\infty$ con $f(a_n) \to 0$ e $f(b_n) \to 0$ e si integra per parti

$$\begin{aligned}\mathcal{F}(f' \cdot \mathbb{1}_{[a_n,b_n]}) &= \int_{a_n}^{b_n} f'(x)e^{-ixy} \,\mathrm{d}x \\ &= \underbrace{\Big[f(x)e^{-ixy}\Big]_{a_n}^{b_n}}_{\to 0} + iy \int_{a_n}^{b_n} f(x)e^{-iyx} \,\mathrm{d}x = iy\mathcal{F}(f \cdot \mathbb{1}_{[a_n,b_n]}).\end{aligned}$$

Per concludere si dimostra che

$$\begin{aligned}\mathcal{F}(f' \cdot \mathbb{1}_{[a_n,b_n]}) &\xrightarrow{n\to\infty} \mathcal{F}(f') \text{ in } L^2 \\ \mathcal{F}(f \cdot \mathbb{1}_{[a_n,b_n]}) &\xrightarrow{n\to\infty} \mathcal{F}(f) \text{ in } L^2\end{aligned}$$

Ovvero si dimostra che

$$\begin{aligned}\int_{b_n}^{+\infty} |f(x)e^{-ixy}|^2 \,\mathrm{d}x + \int_{-\infty}^{a_n} |f(x)e^{-ixy}|^2 \,\mathrm{d}x \xrightarrow{n\to\infty} 0 \\ \int_{b_n}^{+\infty} |f'(x)e^{-ixy}|^2 \,\mathrm{d}x + \int_{-\infty}^{a_n} |f'(x)e^{-ixy}|^2 \,\mathrm{d}x \xrightarrow{n\to\infty} 0\end{aligned}$$

Ma questo è vero in quanto $f, f' \in L^2$.

Proposizione 6. Se $f \in C^1, f \in L^1, f' \in L^2 \implies \widehat{f} \in L^1$ e soddisfa le ipotesi del teorema di inversione.

Dimostrazione. Sappiamo che $iy\widehat{f} = \widehat{f'} \in L^2 \implies y\widehat{f} \in L^2$.

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}} |\widehat{f}(y)| \,\mathrm{d}y &= \int_{|y|\le 1} |\widehat{f}(y)| \,\mathrm{d}y + \int_{|y|\ge 1} |\widehat{f}(y)| \,\mathrm{d}y \\ &\le 2\|\widehat{f}\,\|_\infty + \int_{|y|\ge 1} |\widehat{f}(y)y| \frac{1}{|y|} \,\mathrm{d}y \\ &\le 2\,\|f\|_1 + \|\widehat{f}y\|_2 \left(\int_{|y|\ge 1} \frac{1}{|y|^2} \,\mathrm{d}y\right)^{1/2} \\ &\le 2\,\|f\|_1 + 2\,\|f'\|_2\end{aligned}$$

Corollario. $f \in C^1_C \implies f, \widehat{f} \in L^1$

Proposizione 7. Se $f_1, f_2 \in L^2(\mathbb{R};\mathbb{C})$ (e dunque $f_1 f_2 \in L^1(\mathbb{R};\mathbb{C})$ per Hölder) allora

$$2\pi\widehat{f_1 f_2} = \widehat{f_1} * \widehat{f_2}$$

Dimostrazione. $f_1, f_2 \in L^2 \implies f_1 f_2 \in L^1$ segue da Hölder. Dimostriamo la proposizione per $f_1, f_2 \in C^1_C \implies f_1, f_2, f_1 f_2 \in C^1_C \implies$ tutte in L^1 e con trasformate in L^1.

$$\mathcal{F}^*\left(\frac{1}{2\pi}\widehat{f_1} * \widehat{f_2}\right) = \frac{1}{2\pi}\mathcal{F}^*(\widehat{f_1})\mathcal{F}^*(\widehat{f_2}) = \frac{1}{2\pi}(2\pi f_1)\cdot(2\pi f_2) = 2\pi f_1 \cdot f_2 = \mathcal{F}^*(\widehat{f_1 f_2})$$

ed usando che $\mathcal{F}^*$ è iniettiva otteniamo che $2\pi\widehat{f_1 f_2} = \widehat{f_1} * \widehat{f_2}$.

Per $f_1, f_2 \in L^2$ si procede per continuità e si approssimano f_1 ed f_2 con $f_{1,n}$ e $f_{2,n}$ in C^1_C. □

6.4 Conclusione sulla TdF

Proposizione 4. (di 2 lezioni fa) Se $f, xf \in L^1(\mathbb{R};\mathbb{C})$, allora $\widehat{f} \in C^1(\mathbb{R};\mathbb{C})$ e $(\widehat{f})' = \widehat{-ixf}$.

Corollario. Se $f, x^k f \in L^1$ con $k = 1, 2, \ldots$, allora $x^h f \in L^1$ per ogni $h = 0, \ldots, k$ e $\widehat{f} \in C_0^k$ e $D^h \widehat{f} = \widehat{(-ix)^h f}$.

Dimostrazione. Vale $|x^h| \leq 1 + |x|^k$ per ogni x e per ogni $h = 1, \ldots, k$. Allora $|x^h f| \leq (1 + |x|^k)|f| \in L^1$. Il resto dell'enunciato è per induzione su k.

Corollario. Se $x^k f \in L^1$ per ogni $k = 0, 1, \ldots,$ [3] allora $\widehat{f} \in C^\infty$ (anzi C_0^∞ siccome le derivate sono trasformate).

Teorema (Paley-Weiner). Se $e^{\alpha|x|} \cdot f(x) \in L^1$ per qualche $\alpha > 0$, allora $\widehat{f}$ è analitica[4].

Dimostrazione. In $\underset{y}{\mathbb{R}} \times \underset{t}{\mathbb{R}} \simeq \underset{z=x+it}{\mathbb{C}}$ definisco $g(z)$.

Ricordiamo che $\widehat{f}(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-iyx} \, \mathrm{d}x$. Poniamo

$$g(z) \coloneqq \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-izx} \, \mathrm{d}x$$

Passo 1. $g(z)$ è definita per ogni $z \in \mathbb{R} \times [-\alpha, \alpha]$. Infatti,

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-izx} \, \mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| e^{tx} \, \mathrm{d}t \leq \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| e^{\alpha|x|} \, \mathrm{d}x < +\infty$$

Passo 2. Mostriamo che $g(z)$ è olomorfa su $\mathbb{R} \times (-\alpha, \alpha)$. Sviluppo g in serie di potenze in 0.

Nota. Questo mi serve per dire che è olomorfa in una palla di raggio α centrata in 0. Per concludere bisogna traslare il centro la palla per tutta la retta reale e mostrare la stessa cosa [TO DO: spiegare meglio + disegno palla].

$$g(z) = \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-izx} \, \mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}} f(x) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-izx)^n}{n!} \, \mathrm{d}x \overset{(\star)}{=} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\int_{\mathbb{R}} \frac{(-ix)^n}{n!} f(x) \, \mathrm{d}x \right) z^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

La serie $\sum_n a_n z^n$ è convergente per $|z| \leq \alpha$, quindi g è olomorfa su $B(0, \alpha)$. Notiamo che in $(\star)$ abbiamo usato Fubini-Tonelli; controlliamo che potevamo applicarlo, dunque verifichiamo quanto segue.

$$\int_{\mathbb{R}} |f(x)| \sum_{n=0}^{\infty} \left| \frac{(-izx)^n}{n!} \right| \mathrm{d}x < +\infty$$

Abbiamo

$$\int_{\mathbb{R}} |f(x)| \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|zx|^n}{n!} \, \mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}} |f(x)| e^{|z||x|} \, \mathrm{d}x \underset{\text{se } |z| \leq \alpha}{\leq} \int_{R} |f(x)| e^{\alpha|x|} \, \mathrm{d}x$$

Per concludere si dimostra (allo stesso modo) che g si sviluppa in serie in ogni punto $y_0 \in \mathbb{R}$ con raggio di convergenza α. $\square$

[3] Questa condizione è implicata, ad esempio, dall'ipotesi $f \in C_C$

[4] Restrizione di $g \colon \underbrace{\mathbb{R} \times (-\alpha, \alpha)}_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}\simeq\mathbb{C}} \to \mathbb{C}$ olomorfa

Corollario. Se $f \in L^1$ è olomorfa e a supporto compatto allora $\widehat{f}$ è la restrizione di $g\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ olomorfa [**TO DO: controllare**].

Nota. Se $f \in L^1$ e a supporto compatto, si ha $f(x)e^{\alpha|x|} \in L^1$ per ogni α.

6.5 Applicazioni TdF

Risoluzione equazioni del calore su $\mathbb{R}$.

$$\begin{cases} u_t = u_{xx}(x \in \mathbb{R}) \\ u(0, \cdot) = u_0 \end{cases}$$

Risoluzione formale. Denotiamo con $\widehat{u} \coloneqq \widehat{u}(t, y)$ la trasformata di Fourier rispetto alla variabile x

$$\widehat{u_t}(t, y) = \int \frac{\partial}{\partial t} u(t, x) e^{-ixy} \, \mathrm{d}x = \frac{\partial}{\partial t} \left(\int u(t, x) e^{-ixy} \, \mathrm{d}x \right) = \widehat{u}_t$$

Inoltre, $\widehat{u_t} = \widehat{u_{xx}} = (iy)^2 \widehat{u} = -y^2 \widehat{u}$. Quindi, per ogni y, $\widehat{u}(\cdot, y)$ risolve

$$\begin{cases} \dot{z} = -y^2 z \\ z(0) = \widehat{u_0}(y) \end{cases} \tag{P}$$

Soluzione generale $z = \alpha e^{-y^2 t}$, da cui la soluzione per (**??**) è $\widehat{u}(t, y) = \widehat{u_0}(y) e^{-y^2 t}$.

Siano

$$\rho(x) \coloneqq \frac{e^{-x^2/2}}{\sqrt{2\pi}}, \quad \widehat{\sigma_{\sqrt{2t}} \rho} = \widehat{\rho}(\sqrt{2t} y).$$

Però è noto che[5] $\widehat{\rho}(y) = e^{-y^2/2} \implies \widehat{\rho}(\sqrt{2t} y) = e^{-(\sqrt{2t} y)^2/2} = e^{-y^2 t}$. Da cui

$$\widehat{u}(t, y) = \widehat{u_0}(y) e^{-y^2 t} = \widehat{u_0}(y) \cdot \widehat{\sigma_{\sqrt{2t}} \rho}(y) = \mathcal{F}(u_0 * \sigma_{\sqrt{2t}} \rho) \Longrightarrow u(t, y) = u_0 * \left(\sigma_{\sqrt{2t}} \rho \right)$$

Dunque

$$u(t, x) \coloneqq \begin{cases} u_0(x) & \text{per } t = 0 \\ u_0 * \sigma_{\sqrt{2t}} \rho(x) & \text{per } t > 0 \end{cases} \tag{$*$}$$

Teorema. Se $u_0\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è continua e limitata, allora u data in (**??**) è ben definita su $[0, +\infty) \times \mathbb{R}$, continua, C^∞ per $t > 0$ e risolve (**??**).

Data $u\colon [0, T) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ soluzione di (**??**) tale che esiste $h_0, h_1 \in L^1(\mathbb{R})$ tali che

$$|u(t, x)| \le h_0(x), \quad |u_t(t, x)| \le h_1(x)$$

allora $\widehat{u}(\cdot, y)$ è univocamente determinata su $[0, T)$, dunque u è univocamente determinata per l'iniettività di TdF.

[5] Si vede all'esercitazione che segue?

6.6 Esercitazione del 13 Dicembre 2021

6.6.1 Operatori autoaggiunti

[TODO: Pezzo iniziale mancante]

Esercizi.

1) Esempio classico di $H = L^2([-\pi,\pi];\mathbb{C})$ e $D = \{u \in C^1([-\pi,\pi];\mathbb{C}) \mid u(-\pi) = u(\pi)\}$ e $Tu = iu$ allora T è un operatore autoaggiunto ed ha autovalori $\lambda = n \in \mathbb{Z}$.

2) $H = L^2([0,\pi];\mathbb{R})$ e $D = \{u \in C^2([0,\pi]) \mid u(0) = 0 \text{ e } u(\pi) = 0\}$ sono dette condizioni di Dirichlet con $Tu = -\ddot{u}$.

Ora usiamo sempre $Tu = -\ddot{u}$ ma su domini differrenti.

3) $D_3 = \{u \in C^2([0,\pi]) \mid \dot{u}(0) = 0 \text{ e } \dot{u}(\pi) = 0\}$ sono dette condizioni di Neumann.

4) $D_4 = \{u \in C^2([0,\pi]) \mid u(0) = 0 \text{ e } \dot{u}(\pi) = 0\}$ sono dette condizioni di Robin.

Dire per 2), 3) e 4) rispondere alle seguenti

- L'operatore T è autoaggiunto e controllare se il relativo D è denso in L^2
- Controllare se esistono autovalori ed eventualmente dire chi sono gli autovettori.
- Stabilire se esiste una base Hilbertiana di autovettori.

Risoluzione.

2) D_2 è denso. Vediamo l'operatore è autoaggiunto

$$\langle Tu, v\rangle = \int_0^\pi (-\ddot{u}(x))v(x)\,\mathrm{d}x = \underbrace{-\dot{u}(x)v(x)\Big|_0^\pi}_{v(0)=v(\pi)=0} - \int_0^\pi (-\dot{u}(x))\dot{v}(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^\pi \dot{u}(x)\dot{v}(x)\,\mathrm{d}x$$

$$\langle u, Tv\rangle = \int_0^\pi u(x)(-\ddot{v}(x))\,\mathrm{d}x = \underbrace{u(x)(-\dot{v}(x))\Big|_0^\pi}_{u(0)=u(\pi)=0} - \int_0^\pi \dot{u}(x))(-\dot{v}(x))\,\mathrm{d}x = \int_0^\pi \dot{u}(x)\dot{v}(x)\,\mathrm{d}x$$

dunque $\langle Tu, v\rangle = \langle \dot{u}, \dot{v}\rangle = \langle u, Tv\rangle$.

Inoltre T è anche definito positivo infatti $\langle Tu, u\rangle = \langle \dot{u}, \dot{u}\rangle = \|\dot{u}\|_{L^2} \geq 0$.

Cerchiamo gli autovalori quindi poniamo $-\ddot{u} = Tu = \lambda u$ con $\lambda \geq 0$ e $u \in D_2$. Segue $p(t) = t^2 + \lambda \implies t = \pm i\sqrt{\lambda}$ se $\lambda \neq 0$.

Se $\lambda = 0$ invece otteniamo $\ddot{u} = 0 \implies u(x) = ax + b$ ma per le condizioni al bordo segue $a, b = 0$ e dunque $u = 0 \implies \lambda = 0$ non è autovalore.

Invece se $\lambda > 0$ abbiamo $u(x) = A\cos(\sqrt{\lambda}x) + B\sin(\sqrt{\lambda}x)$ e segue $A = 0$ e $\lambda = n^2$ per $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$.

3) D_2 è denso e similmente si vede che anche in questo caso T è autoaggiunto. Anche in questo caso T è definito positivo perché vale sempre $\langle Tu, v\rangle = \langle \dot{u}, \dot{v}\rangle$.

Per cercare gli autovalori risolviamo il seguente sistema

$$\begin{cases} -\ddot{u} = \lambda u \\ \dot{u}(0) = 0 \\ \dot{u}(\pi) = 0 \end{cases}$$

Se $\lambda = 0$ allora $u(x) = \text{cost.}$ è un autovettore per l'autovalore 0.

Se invece $\lambda \neq 0$ allora $u(x) = A\cos(\sqrt{\lambda}x) + B\sin(\sqrt{\lambda}x) \implies \cos(nx)$ è un autovettore e $\lambda = n^2$ per $n = 1, 2, \dots$.

4) In questo caso vediamo che vale sempre $\langle Tu, v\rangle = \langle \dot{u}, \dot{v}\rangle$ ma per motivi diversi infatti

$$\langle Tu, v\rangle = \int_0^\pi (-\ddot{u}(x))v(x)\,\mathrm{d}x = \underbrace{-\dot{u}(x)v(x)\Big|_0^\pi}_{\dot{u}(\pi)=0,\ v(0)=0} - \int_0^\pi (-\dot{u}(x))\dot{v}(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^\pi \dot{u}(x)\dot{v}(x)\,\mathrm{d}x$$

$$\langle u, Tv\rangle = \int_0^\pi u(x)(-\ddot{v}(x))\,\mathrm{d}x = \underbrace{u(x)(-\dot{v}(x))\Big|_0^\pi}_{\dot{v}(\pi)=0,\ u(0)=0} - \int_0^\pi \dot{u}(x))(-\dot{v}(x))\,\mathrm{d}x = \int_0^\pi \dot{u}(x)\dot{v}(x)\,\mathrm{d}x$$

Considerando il sistema $-\ddot{u} = \lambda u$ con le condizioni al bordo di Robin caso $\lambda = 0$ non è un autovalore mentre se $\lambda \neq 0$ abbiamo che $\dot{u}(x) = \sqrt{\lambda}B\cos(\sqrt{\lambda}x) = 0$ per $x = \pi$ dunque $\sqrt{\lambda} = n + 1/2$ per $n = 0, 1, 2, \dots$ e gli autovettori sono

$$u_n(x) = \sin\left(\left(n + \frac{1}{2}\right)x\right)$$

Osservazione. $T\colon D \to L^2$ operatore lineare e continuo $\iff \exists M > 0$ tale che $\|Tu\|_2 \leq M\|u\|$ per ogni $u \in D$.

Vediamo ad esempio che D_1 non è continuo infatti gli autovalori sono $\lambda_n = n^2 \implies n^2\|u_n\|_2 \leq M\|u_n\|_2 \implies M \geq n^2$ per ogni n. Dunque M è illimitato e l'operatore non può essere continuo.

Esempio. Se ad esempio abbiamo $Tu = -\ddot{u}$ con $\widetilde{D} = \{u \in C^2 \mid u(0) = u(\pi) = 1\}$ allora T non è autoaggiunto e basta trovare u, v tali che

$$\langle Tu, v\rangle \neq \langle u, Tv\rangle$$

Esercizio.

i) Sia $T_1\colon \ell^2 \to \ell^2$ dato da
$$T_1((x_n)_{n>0}) = (0, x_1, x_2, \dots)$$

ii) Sia $T_2\colon \ell^2 \to \ell^2$ dato da
$$T_2((x_n)_{n>0}) = (x_2, x_3, \dots)$$

Dire se sono autoaggiunti ed eventualmente chi sono gli autovalori.

Esericizi più da compito sono invece cose del tipo...

Esercizio. Sia $H = L^2([0,\pi] \times [0,\pi]; \mathbb{R})$ e $Tu = -\Delta u = -u_{xx} - u_{yy}$

- $D_1 = \{u \in C^2([0,\pi] \times [0,\pi]; \mathbb{R}) \mid u|_{\partial Q} = 0\}$

- $D_2 = \{u \in C^2([0,\pi] \times [0,\pi]; \mathbb{R}) \mid \nabla u|_{\partial Q} = 0\}$
- $D_3 = \{u \in C^2([0,\pi] \times [0,\pi]; \mathbb{R}) \mid u = 0 \text{ su due lati paralleli e } \nabla u = 0 \text{ sugli altri due}\}$

e dire se l'operatore è autoaggiunto ed eventualmente trovare gli autovalori.

6.6.2 Calcolo Trasformate di Fourier

Abbiamo visto che le trasformate di $f(x) = e^{-|x|}$ e $g(x) = 1/(1+x^2)$ sono rispettivamente

$$\widehat{f}(y) = \frac{2}{1+y^2} \qquad \widehat{g}(y) = \pi e^{-|y|}$$

Vorremo provare a trovare ora le trasformate funzioni come $x^2 e^{-|x|}$ o $x/(1+x^2)$ usando le proprietà delle trasformate con le derivate. Ricordiamo che

$$f, f' \in L^1 \implies \widehat{f'}(y) = iy\widehat{f}(y)$$
$$f, xf \in L^1 \implies \widehat{f}'(y) = \widehat{-ixf}(y)$$

dunque intuitivamente per $x^2 e^{-|x|}$ possiamo fare

$$x^2 e^{-|x|} = i(-i)x(xe^{-|x|}) \implies \mathcal{F}(i(-i)x(xe^{-|x|})) = i(\mathcal{F}(xe^{-|x|}))'(y)$$

ora dobbiamo calcolare $\mathcal{F}(xe^{-|x|})(y)$

$$\mathcal{F}(xe^{-|x|})(y) = i\mathcal{F}(-ixe^{-|x|}) = i\mathcal{F}(e^{-|x|})'(y) = i\left(\frac{2}{1+y^2}\right)' = \frac{-4iy}{(1+y^2)^2}$$

dunque in conclusione abbiamo

$$\mathcal{F}(x^2 e^{-|x|})(y) = i\left(\frac{-4iy}{(1+y^2)^2}\right)' = 4\left(\frac{y}{(1+y^2)^2}\right)'$$

Invece per quanto riguarda

$$g(x) = \frac{x}{1+x^2} \notin L^1$$

però è in L^2 ma per poterne calcolare la trasformata di Fourier dovremmo passare per delle troncate di $g(x)$. Possiamo però vedere chi dovrebbe essere il candidato formale usando le tecniche di prima

$$\frac{x}{1+x^2} = \frac{i(-ix)}{1+x^2} \rightsquigarrow i\mathcal{F}\left((-ix)\frac{1}{1+x^2}\right)(y) = i\mathcal{F}\left(\frac{1}{1+x^2}\right)'(y) = i\pi(e^{-|y|})'(y)$$

però notiamo che la derivata di $e^{-|y|}$ non è ben definita in 0.

Esercizio. Calcolare la trasformata di Fourier di

$$f(x) = \mathbb{1}_{[-r,r]}(x)$$

Iniziamo a svolgere il conto

$$\widehat{f}(y) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathbb{1}_{[-r,r]}(x) e^{-ixy}\,\mathrm{d}x = \int_{-r}^{r} e^{-ixy}\,\mathrm{d}x = \begin{cases} 2r & xy = 0 \\ \displaystyle\int_{-r}^{r} e^{-ixy}\,\mathrm{d}x & xy \neq 0 \end{cases}$$

nel caso $xy \neq 0$ contiuiamo a svolgere il conto

$$\int_{-ry}^{ry} \frac{e^{-it}}{y} \,\mathrm{d}t = \frac{1}{y} \int_{-ry}^{ry} [\cos(t) - i \underbrace{\sin(t)}_{\text{dispari}}] \,\mathrm{d}t = \frac{2}{y} \sin(ry)$$

dunque in conclusione abbiamo

$$\mathcal{F}(\mathbb{1}_{[-r,r]}(x)) = \begin{cases} 2r & y = 0 \\ \dfrac{2}{y} \sin(ry) & y \neq 0 \end{cases}$$

Esercizio. Un esercizio simile è calcolare $\mathcal{F}(\mathbb{1}_{[0,r]}(x))$, ovvero il caso non centrato e poi provare a calcolare (come integrale improprio di Analisi 1) l'integrale

$$\int_0^\infty \frac{\sin(t)}{t} \,\mathrm{d}t = \lim_{r \to \infty} \int_0^r \frac{\sin(t)}{t} \,\mathrm{d}t$$

Trasformata della Gaussiana

Calcoliamo ora la trasformata della funzione gaussiana $e^{-x^2/2}$.

- **Metodo I:** Troviamo un'equazione differenziale (lineare) risolta dalla gaussiana, sia $f(x) = e^{-x^2/2}$ allora vale
$$f'(x) = -xe^{-x^2/2} = -xf(x)$$
e per il decadimento della gaussiana abbiamo che $f, f' \in L^1$ dunque
$$iy\widehat{f}(y) = \widehat{f'(x)}(y) = -i\mathcal{F}(-ixf(x))(y) = i(\widehat{f})'(y)$$
dunque $\widehat{f} = h(y)$ con h tale che $h'(y) = -yh(y) \implies h(y) = ke^{-y^2/2}$, rimane da trovare k. Calcoliamo direttamente $h(0)$
$$h(0) = \widehat{e^{-x^2/2}(0)} = \int_{-\infty}^\infty e^{-x^2/2} e^{-ix\cdot 0} \,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^\infty e^{-x^2/2} \,\mathrm{d}x = \sqrt{2\pi}$$
$$\implies \widehat{e^{-x^2/2}} = \sqrt{2\pi} e^{-y^2/2}$$

- **Metodo II:** Studiamo la funzione di variabile complessa $g(z) = e^{-z^2/2}$ e integriamola lungo un percorso che passi per $[-r,r] \times \{0\} \subset \mathbb{R}^2 \approx \mathbb{C}$.
$$\begin{aligned} \mathcal{F}(\widehat{-x^2/2})(y) &= \int_\mathbb{R} e^{-x^2/2} \cdot e^{-ixy} \,\mathrm{d}x = \int_\mathbb{R} e^{-\frac{1}{2}(x^2+2ixy)} \,\mathrm{d}x \\ &= \int_\mathbb{R} e^{-\frac{1}{2}(x^2+2ixy+y^2-y^2)} \,\mathrm{d}x = \int_\mathbb{R} e^{-\frac{1}{2}(x^2+2ixy+y^2)} \cdot e^{-y^2/2} \,\mathrm{d}x \\ &= e^{-y^2/2} \int_\mathbb{R} e^{-\frac{1}{2}(x^2+2ixy+y^2)} \,\mathrm{d}x = e^{-y^2/2} \lim_{r \to \infty} \int_{-r}^r \underbrace{e^{-\frac{1}{2}(x+iy)^2}}_{g(x+iy)} \,\mathrm{d}x \end{aligned}$$
Consideriamo ora il rettangolo $D_r := \{z \mid \operatorname{Im} z \in [0, iy] \text{ e } \operatorname{Re} z \in [-r,r]\}$ dunque poiché $g(z)$ non ha poli su D_r abbiamo
$$\int_{\partial D_r} g = \sum \text{Res. su } D_r = 0$$
$$0 = \int_{-r}^r g(x+it) \,\mathrm{d}x - \int_{-r}^r g(x+iy) \,\mathrm{d}x + \int_0^{iy} g(r+iy) \,\mathrm{d}t - \int_0^{iy} \underbrace{g(-r+iy)}_{\sim e^{-(r+it)^2} \xrightarrow{r\to\infty} 0} \,\mathrm{d}t$$

infatti più precisamente i termini verticali vanno a zero

$$\int_0^y e^{-(r+it)^2/2}\,\mathrm{d}t = e^{-r^2/2}\int_0^y e^{-itr-t^2/2}\,\mathrm{d}t = ye^{-r^2/2} \xrightarrow{r\to+\infty} 0$$

In conclusione abbiamo

$$\begin{aligned}\widehat{e^{-x^2/2}}(y) &= \lim_{r\to+\infty}\int_{-r}^{r} e^{-y^2/2}e^{-(x+iy)^2/2}\,\mathrm{d}x = e^{-y^2/2}\left[\lim_{r\to+\infty}\int_{-r}^{r} e^{-x^2/2}\,\mathrm{d}x + o(1)\right] = \\ &= e^{-y^2/2}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/2}\,\mathrm{d}x = \sqrt{2\pi}e^{-y^2/2}\end{aligned}$$

$\square$

Capitolo 7

Integrazione di superfici

7.1 Superfici

Definizione. Data $f\colon \Omega \subset \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^d$ di classe C^1 e dato $x \in \Omega$, la mappa lineare da $\mathbb{R}^k$ a $\mathbb{R}^d$ associata alla matrice $\nabla f(x)$ si dice **differenziale di f in x** e si indica con $\mathrm{d}_x f$.

Nota. La mappa $\mathrm{d}_x f$ è univocamente determinata da

$$f(x+h) = f(x) + \mathrm{d}_x f(h) + o(|h|)$$

dove $\mathrm{d}_x f$ è il termine di primo grado dello sviluppo di Taylor di f.

Definizione. Siano $1 \leq k \leq d$ e $m = 1, 2, \ldots$. L'insieme $\Sigma \subset \mathbb{R}^d$ si definisce **superficie** (senza bordo) di dimensione k e classe C^m se per ogni $x \in \Sigma$ esiste U intorno aperto[1] di $x \in \Sigma$ ed esiste una mappa $\phi\colon D \to \mathbb{R}^d \in C^m$ con D aperto di $\mathbb{R}^k$ tale che

- $\phi(D) = \Sigma \cap U$
- $\phi\colon D \to \Sigma \cap U$ è un omeomorfismo
- $\nabla\phi(s)$ ha rango massimo ($= k$) per ogni $s \in D$

Ovvero ϕ è una **parametrizzazione locale** della superficie

Osservazione. Se $k = d$ abbiamo che Σ è una superficie se e solo se Σ è aperto.

Proposizione. Dati k, d, m come sopra, $\Sigma \subset \mathbb{R}^d$ e $x \in \Sigma$ sono fatti equivalenti

- Esistono U e $\phi\colon D \to \Sigma \cap U$ tale che ϕ è una parametrizzazione regolare
- Esistono U intorno di x e $g\colon U \to \mathbb{R}^{d-k} \in C^m$ tale che
    - $\Sigma \cap U = g^{-1}(0)$
    - ∇g ha rango massimo, ovvero $d - k$
- Esistono U intorno di x e $h\colon \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^{d-k}$ di classe C^m tale che $\Sigma \cap U = \Gamma_h \cap U$ (dove Γ_h è il grafico di h) avendo identificato $\mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{d-k}$ con $\mathbb{R}^d$ tramite una scelta di k coordinate tra le d di $\mathbb{R}^d$

[1] D'ora in avanti gli intorni saranno sempre aperti.

Esempi.

- $\mathbb{S}^{d-1} = \left\{x \in \mathbb{R}^d \;\middle|\; |x| = 1\right\}$ è una superficie senza bordo di dimensione $d-1$ e classe C^∞ in $\mathbb{R}^d$
- $\mathbb{D} = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid x_3 = 0 \text{ e } |x| < 1\}$ è una superficie 2-dimensionale in $\mathbb{R}^3$
- $\overline{D}$ non lo è! (È una superficie con bordo)

[**TO DO**]: **disegni** in blu sul quaderno

Definizione. Data Σ superficie e fissato $x \in \Sigma$, lo **spazio tangente** a Σ in x è $T_x\Sigma \coloneqq \operatorname{Im}(\mathrm{d}_s\phi)$ dove $\phi\colon D \to \Sigma \cap U$ è una parametrizzazione regolare e $x = \phi(s)$ con $s \in D$.

Nota. Lo spazio tangente è uno spazio vettoriale di stessa dimensione della superficie.

Proposizione.

- $T_x\Sigma = \{\dot\gamma(0) \mid \gamma\colon [0,\delta) \to \Sigma \text{ cammino } C^1 \text{ con } \gamma(0) = x\}$
- Data $g\colon U \to \mathbb{R}^{d-k}$ tale che $\Sigma \cap U = g^{-1}(0)$, $\operatorname{rk}(\nabla g) = d-k$ su U, allora

$$T_x\Sigma = \ker(\mathrm{d}_x g) = \{\nabla g_1(x), \dots, \nabla g_{n-k}(x)\}^\perp$$

Definizione. Data Σ superficie in $\mathbb{R}^d$ di classe C^m, $f\colon \Sigma \to \mathbb{R}^{d'}$, diciamo che f è di classe $C^{m'}$, con $m' \le m$ se per ogni $x \in \Sigma$ se esistono U e $\phi\colon D \to \Sigma \cap U$ parametrizzazione regolare, tale che $f \circ \phi\colon D \to \mathbb{R}^d$ è di classe $C^{m'}$ con D aperto di $\mathbb{R}^k$.

Proposizione. $f \in C^{m'} \iff \exists A$ aperto di $\mathbb{R}^d$ che contiene Σ e $F\colon A \to \mathbb{R}^d$ estensione di f di classe $C^{m'}$.

Osservazione. Se $\phi\colon D \to \Sigma \cap U$ è una parametrizzazione regolare, allora $\phi^{-1}\colon \Sigma \cap U \to D \subset \mathbb{R}^k$ è C^m. La mappa ϕ^{-1} viene definita **carta**.

Definizione. Data $f\colon \Sigma \to \mathbb{R}^d$ di classe (almeno) C^1 e $x \in \Sigma$,

$$\begin{aligned} \mathrm{d}_x f\colon T_z\Sigma &\longrightarrow \mathbb{R}^d \\ \dot\gamma(0) &\longmapsto (f \circ \gamma)'(0) \quad \gamma\colon [0,\delta) \to \Sigma,\ \gamma \in C^1,\ \gamma(0) = x \end{aligned}$$

Proposizione. Data $F\colon A \to \mathbb{R}^{d'}$ estensione C^1 di f, con $A \subset \mathbb{R}^d$, allora

$$\mathrm{d}_x f = \mathrm{d}_x F|_{T_x\Sigma}$$

Osservazione. Se $f\colon \Sigma \to \Sigma'$, dove $\Sigma \subset \mathbb{R}^d$ e $\Sigma' \subset \mathbb{R}^{d'}$ allora $\operatorname{Im}(\mathrm{d}_x f) \subset T_{f(x)}\Sigma'$. Quindi, $\mathrm{d}_x f\colon T_x\Sigma \to T_{f(x)}\Sigma'$.

7.2 Misure su superfici

In questa sezione studiamo la misura di Lebesgue su superfici definite tramite parametrizzazione[2].

Definizione. Dati V spazio vettoriale k-dimensionale dotato di prodotto scalare (per esempio V sottospazi di $\mathbb{R}^d$), la **misura di Lebesgue** σ_k su V è data dall'identificazione di V con $\mathbb{R}^k$ tramite la scelta di una base ortonormale.

[2]Coincide con la definizione di Hausdorff

Nota. σ_k non dipende dalla scelta della base.

Definizione. Siano V, V' spazi vettoriali di dimensione k dotati di prodotto scalare e $\Lambda\colon V \to V'$ lineare. Poniamo

$$|\det \Lambda| := |\det M|,$$

dove M è una matrice $k \times k$ associata a Λ dalla scelta di basi ortonormali su V e V'.

Nota. Si verifica che la definizione è ben posta, ovvero non dipende dalla scelta delle basi. Inoltre, si verifica che per ogni $E \subset V$ misurabile si ha $\sigma_k(\Lambda(E)) = |\det \Lambda| \cdot \sigma_k(E)$ (formula di cambio di variabile negli integrali).

Definizione. Sia $\Lambda\colon V \to W$, con V, W spazi vettoriali, non necessariamente di stessa dimensione. Poniamo $V' := \mathrm{Im}(\Lambda)$ e

$$|\det \Lambda| := \begin{cases} 0 & \text{se } \mathrm{rk}(\Lambda) < k \\ \text{come prima} & \text{se } \mathrm{rk}(\Lambda) = k \text{ e } \dim V' = \dim V \end{cases}$$

Proposizione 1. Se $\Lambda : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^d$ allora

$$|\det \Lambda|^2 = \det(N^t N) \tag{1}$$

dove N è una matrice $d \times k$ associata a Λ. E inoltre

$$|\det \Lambda|^2 = \sum_{\substack{Q \text{ minore} \\ k\times k \text{ di } N}} \det(Q)^2 \tag{2}$$

Osservazione. Questa proposizione implica che non è necessario trovare una base ortormale dell'immagine di Λ per calcolarne il determinante.

Dimostrazione.

(1) Supponiamo Λ iniettiva (il caso Λ non iniettivo per esercizio), scegliamo una base ortonormale $e_1, \dots, e_k$ di $\mathrm{Im}(\Lambda)$ e una matrice M $k \times k$ associata a Λ. Sia $B \in \mathbb{R}^{d\times k}$ una matrice avente colonne uguali a $e_1, \dots, e_k$. Allora $N = BM$. Dunque,

$$\det(N^t N) = \det(M^t \underbrace{B^t B}_{=I} M) = \det(M^t M) = (\det M)^2 =: |\det \Lambda|^2.$$

(2) La seconda formula richiede la formula di Binet generalizzata.

$\square$

7.3 Superfici k-dimensionali in $\mathbb{R}^d$ di classe C^1

Definizione. Un insieme $E \subset \Sigma$ è **misurabile** (secondo Lebesgue) se $\forall \phi\colon D \to \Sigma \cap U$ parametrizzazione regolare e $D \subset \mathbb{R}^k$, l'insieme $\phi^{-1}(E \cap U) \subset \mathbb{R}^k$ è misurabile secondo Lebesgue.

Notazione. $\mathcal{M}(\Sigma) := \{E \subset \Sigma \text{ misurabili}\}$.

Proposizione 1. Esiste un'unica misura σ_k su $\mathcal{M}(\Sigma)$ tale che per ogni E misurabile e per ogni $\phi\colon D \to \Sigma \cap U$ parametrizzazione regolare

$$\sigma_k(E \cap U) = \int_{\phi^{-1}(E\cap U)} \overbrace{\det(\,\mathrm{d}_s\phi)}^{J\phi(s)}\, \mathrm{d}s \tag{1}$$

Commenti.

- σ_k misura di volume k-dimensionale su Σ.
- σ_k coincide con la misura di Hausdorff $\mathcal{H}^k$ ristretta a Σ.
- $J\phi(s) = \sqrt{\det(\nabla^t\phi(s)\nabla\phi(s))} = \sqrt{\sum_Q (\det Q)^2}$ dove Q sono i minori $k \times k$ si $\nabla\phi(s)$.
- Se $k = 1$, vale $J\phi(s) = \sqrt{\det(\phi'(s))^t\phi'(s)} = |\phi'(s)|$.

Dimostrazione.

Passo 1: costruzione di σ_k.

Prendiamo $\sigma_i \colon D_i \to \Sigma \cap U_i$ parametrizzazioni regolari, dove $\{D_i\}$ è una famiglia numerabile, tale che $\Sigma \subset \bigcup U_i$. Prendiamo Σ_i misurabili e disgiunti tali che $\bigcup \Sigma_i = \Sigma$ e $\Sigma_i \subset U_i$.

Per ogni $E \in \mathcal{M}(\Sigma)$ poniamo

$$\sigma_k(E) = \sum_i \int\limits_{\phi^{-1}(E\cap\Sigma_i)} J\phi_i(s)\,\mathrm{d}s$$

Evitiamo di verificare che sia una misura σ-addittiva.

Per dimostrare la proposizione si usa il seguente lemma.

Lemma. Date $\phi \colon D \to \Sigma \cap U$ e $\widetilde{\phi} \colon \widetilde{D} \to \Sigma \cap \widetilde{U}$ e E misurabili contenuto in $U \cap \widetilde{U}$, allora

$$\int_{\phi^{-1}(E)} J\phi(s)\,\mathrm{d}s = \int_{\widetilde{\phi}(E)} J\widetilde{\phi}(\widetilde{s})\,\mathrm{d}\widetilde{s} \tag{2}$$

Dimostrazione lemma. Usiamo il cambio di variabile $s = \phi^{-1}(\widetilde{\phi}(\widetilde{s})) =: g(\widetilde{s})$.

$$\begin{aligned}\int_F J\phi(s)\,\mathrm{d}s &= \int_{g^{-1}(F)=\widetilde{F}} J\phi(s)Jg(\widetilde{s})\,\mathrm{d}\widetilde{s} = \int_{\widetilde{F}} |\det(\mathrm{d}_s\phi)| \cdot |\det(\mathrm{d}_{\widetilde{s}}g)|\,\mathrm{d}\widetilde{s} \\ &= \int_{\widetilde{F}} |\det(d_{\widetilde{s}}(\phi\circ g))|\,\mathrm{d}\widetilde{s} = \int_{\widetilde{F}} J\widetilde{\phi}(\widetilde{s})\,\mathrm{d}\widetilde{(s)}\end{aligned}$$

Da cui la tesi. □

Corollario 2. Data $\phi \colon D \to \Sigma \cap U$ C^1 parametrizzazione bigettiva (non necessariamente regolare) , $f \colon \Sigma \cap U \to \overline{\mathbb{R}}$ misurabile e integrabile rispetto a σ_k.

$$\int_{\Sigma\cap U} f(x)\,\mathrm{d}\sigma_k(x) = \int_D f(\phi(s))J\phi(s)\,\mathrm{d}s \tag{3}$$

Se $\phi \colon D \to \Sigma \cap U$ è solo C^1, come vanno corrette (**??**) e (**??**)?

$$\int_{E\cap U} \#\phi^{-1}(x)\,\mathrm{d}\sigma_k(x) = \int_{\phi^{-1}(E\cap U)} J\phi(s)\,\mathrm{d}s \tag{1'}$$

e

$$\int_{E\cap U} f(x)\#\phi^{-1}(x)\,\mathrm{d}\sigma_k(x) = \int_D f(\phi(s))J\phi(s)\,\mathrm{d}s \tag{3'}$$

Nota. Le formule sopra giustificano il fatto che parametrizzazione non esattamente bigettive possono essere usate lo stesso per il calcolo dei volumi.

Esempio. Parametrizzazione di $\mathbb{S}^d \subset \mathbb{R}^{d+1}$ con coordinate sferiche.

Consideriamo $\phi_d \colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{S}^d$ definita come

$$\begin{aligned}\phi_d(\alpha_1, \dots, \alpha_d) =&(\cos\alpha_1, \sin\alpha_1\cos\alpha_2, \sin\alpha_1\sin\alpha_2\cos\alpha_3, \dots,\\ &\sin\alpha_1\cdots\sin\alpha_{d-1}\cos\alpha_d, \sin\alpha_1\cdots\sin\alpha_d)\end{aligned}$$

Definizione ricorsiva

$$\phi_1(\alpha_1) = (\cos\alpha_1, \sin\alpha_1), \quad \phi_d(\alpha) = (\cos\alpha_1, \sin\alpha_1 \cdot \phi_{d-1}(\alpha_2, \dots, \alpha_d))$$

Dunque

- $\phi_d\left([0,\pi]^{d-1} \times [0, 2\pi]\right) = \mathbb{S}^d$ è una parametrizzazione in coordinate sferiche ed è iniettiva.
- $J\phi_d(\alpha) = \sin(\alpha_1)^{d-1}\sin(\alpha_2)^{d-2}\cdots\sin(\alpha_{d-1})^1$

Proposizione 3. Sia Σ superficie come al solito. Allora esiste un'unica misura μ sui $\mathcal{M}(\Sigma)$ tale che per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che data $f \colon \Sigma \cap U \to \mathbb{R}^k \in C^1$ che è δ-isometria, cioè

$$\frac{1}{1+\delta}|x - x'| \le |f(x) - f(x')| \le (1+\delta)|x - x'| \quad \forall x, x' \in \Sigma \cap U \tag{P}$$

Allora

$$\frac{1}{1+\varepsilon}\sigma_k(E) \le |f(E)| \le (1+\varepsilon)\sigma_k(E) \quad \forall E \text{ mis } \subset \Sigma \cap U$$

Corollario 4. Poichè σ_k e la restrizione di $\mathcal{H}^k$ a Σ hanno la proprietà (**??**), coincidono.

Dimostrazione (Unicità). Prendiamo μ, μ' che soddisfano (**??**). Fissiamo $E, \varepsilon > 0$ e δ di conseguenza usando (**??**). Allora

- Per ogni $x \in \Sigma$ esiste $\phi_x \colon U_x \cap \Sigma \to \mathbb{R}^k$ tale che $\mathrm{d}_x\phi_x \colon T_x\Sigma \to \mathbb{R}^k$ è un'isometria.
- per ogni x esiste $V_x \subset U_x$ tale che $\phi_x \colon \Sigma \cap V_x \to \mathbb{R}^k$ è δ-isometria.
- Ricopriamo Σ con una successione $V_i \coloneqq V_{x_i}$.
- Scriviamo $E = \bigsqcup_i E_i$ con $E_i \subset V_i$.

Per (**??**) abbiamo che

$$\begin{aligned}\frac{1}{1+\varepsilon}\mu(E_i) \le |f(E_i)| \le (1+\varepsilon)\mu(E_i)\\ \frac{1}{1+\varepsilon}\widetilde{\mu}(E_i) \le |f(E_i)| \le (1+\varepsilon)\widetilde{\mu}(E_i)\end{aligned}$$

da cui incrociando le disuguaglianze otteniamo

$$\implies \begin{aligned}\frac{1}{(1+\varepsilon)^2}\mu(E_i) \le \widetilde{\mu}(E_i) \le (1+\varepsilon)^2\mu(E_i)\\ \frac{1}{(1+\varepsilon)^2}\widetilde{\mu}(E_i) \le \mu(E_i) \le (1+\varepsilon)^2\widetilde{\mu}(E_i)\end{aligned}$$

e per arbitrarietà di ε ricaviamo $\mu(E) = \widetilde{\mu}(E)$. Per arbitrarietà di E otteniamo $\mu = \widetilde{\mu}$. $\square$

7.4 k-covettori

Dato V spazio vettoriale su $\mathbb{R}$ e $k = 1, 2, \ldots$, l'applicazione $\alpha\colon V^k \to \mathbb{R}$ si dice **k-covettore o k-lineare e alternante** se

- è lineare in ogni variabile
- per ogni σ permutazione in S_k, $\alpha(v_{\sigma(1)}, \ldots, v_{\sigma(k)}) = \operatorname{sgn}(\sigma)\alpha(v_1, \ldots, v_k)$ (equivalentemente, α cambia segno scambiando due variabili).

Notazione. $\Lambda^k(V) \coloneqq \{\alpha\ k\text{-covettori su } V\}$. Formalmente $\Lambda^0(V) \coloneqq \{0\}$.

Osservazione.

- $\Lambda^k(V)$ è uno spazio vettoriale.
- $\Lambda^1(V) = V^*$ duale di V.
- det è n-lineare alternante nelle colonne (o righe).
- Se $v_1, \ldots, v_k$ sono linearmente dipendenti, allora $\alpha(v_1, \ldots, v_k) = 0$.
- Se $k > \dim V$, allora $\Lambda^k(V) = \{0\}$.

Definizione. Dati V, V' spazi vettoriali, $T\colon V \to V'$ lineare, $\alpha \in \Lambda^k(V')$, il **pull-back** di α secondo T è

$$T^{\#}\alpha \in \Lambda^k(V) \quad \text{dato da} \quad T^{\#}\alpha(v_1, \ldots, v_k) = \alpha(Tv_1, \ldots, Tv_n)$$

Inoltre, dati $\alpha \in \Lambda^k(V), \beta \in \Lambda^h(V)$ si definisce **prodotto esterno** e si indica con $\alpha \wedge \beta \in \Lambda^{k+h}(V)$ quanto segue

$$\alpha \wedge \beta(v_1, \ldots, v_{k+h}) = \frac{1}{k!h!} \sum_{\sigma \in S_{k+h}} \operatorname{sgn}(\sigma)\alpha(v_{\sigma(1)}, \ldots, v_{\sigma(k)})\beta(v_{\sigma(k+1)}, \ldots, v_{\sigma(k+h)})$$

7.5 Integrazione di k-forme su superfici

Proposizione 0. Il prodotto esterno $\wedge$ è distributivo (rispetto a $+$), associativo e anticommutativo, ovvero $\alpha \wedge \beta = (-1)^{hk}\beta \wedge \alpha$.

Data $e_1, \ldots, e_d$ base di V, $e_1^*, \ldots, e_d^*$ è una base di V^*. Denotiamo con $I(d, k) \coloneqq \{\underline{i} = (i_1, \ldots, i_k) \text{ con } 1 \leq i_1 \leq \ldots \leq i_k \leq i_d\}$ l'insieme di multiindici. Per ogni $i \in I(d, k)$ indichiamo con $e_{\underline{i}}^* = e_{i_1}^* \wedge \ldots \wedge e_{i_k}^* \in \Lambda^k(V)$. Data una matrice $d \times k$ A, $A_{\underline{i}}$ è il minore di A dato dalle righe $i_1, \ldots, i_k$.

Proposizione 1. $e_{\underline{i}}^*(v_1, \ldots, v_k) = \det(A_{\underline{i}})$, dove $A \in R^{d\times k}$ matrice delle coordinate di $v_1, \ldots, v_k$, cioè $A_{ij} = (v_j)_i$.

Dimostrazione. Per induzione su k.

- $k = 1$. OK
- *Passo induttivo* $k - 1 \to k$. Scriviamo $e_{\underline{i}}^* = e_{i_1} \wedge e_{\underline{i'}}$ con $\underline{i'} = (i_2, \ldots, i_k)$. Usando la definizione di prodotto esterno e l'ipotesi induttiva notiamo che questo è uguale allo sviluppo per la prima riga di $\det(A_{\underline{i}})$

$\square$

Proposizione 2. Posta $\{e_{\underline{i}} \colon \underline{i} \in I(d,k)\}$ è una base di $\Lambda^k(V)$ e in particolare per ogni $\alpha \in \Lambda^k(V)$

$$\alpha = \sum_{\underline{i} \in I(d,k)} \alpha(e_{\underline{i}}) e^*_{\underline{i}}$$

Dimostrazione. Definiamo $\widetilde{\alpha}$ come sopra. Prendiamo $\underline{i} \in I(d,k)$,allora

$$\widetilde{\alpha}(e_{j_1}, \dots, e_{j_k}) = \sum_{\underline{i}} \alpha\left(e_{i_1}, \dots, e_{i_k}\right) \cdot \underbrace{e^*_{\underline{i}}(e_{j_1}, \dots, e_{j_k})}_{=\delta_{ij}} = \alpha(e_{j_1}, \dots, e_{j_k})$$

Si conclude per linearità e alternanza.

Corollario. Vale la seguente identità

$$\dim \Lambda^k(V) = \#I(d,k) = \begin{cases} \binom{d}{k} & \text{se } k < d \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Proposizione 3 (Formula di Binet generalizzata). Dati A, B matrici di $d \times k$ con $k < d$, allora

$$\det(B^t A) = \sum_{\underline{i} \in I(d,k)} \det(B_{\underline{i}}) \det(A_{\underline{i}})$$

Dimostrazione. Basta definire $\alpha(v_1, \dots, v_k) = \det(B^t A)$ dove A è la matrice avente colonne pari a $v_1, \dots, v_k$. Bisogna verificare che α è k-lineare alternante ([TO DO]), da cui segue che

$$\det(B^t A) = \alpha(v_1, \dots, v_k) \underset{\text{Prop 2}}{=} \sum_{\underline{i}} \underbrace{\alpha(e^*_{i_1}, \dots, e^*_{i_k})}_{\det(B^t_{\underline{i}})} \cdot \underbrace{e^*_{\underline{i}}(v_1, \dots, v_k)}_{\det A_i}$$

$\square$

Osservazione. Nel caso in cui $B = A$, otteniamo la formula

$$\det(A^t A) = \sum_{\substack{Q \text{ minore} \\ k \times k \text{ di } A}} \det(Q)^2.$$

Caso particolare $V = \mathbb{R}^d$. Indichiamo con $e_1, \dots, e_d$ i vettori della base canonica, $\mathrm{d}x_1, \dots, \mathrm{d}x_d$ base duale di $\mathbb{R}^d$, $\mathrm{d}x_{\underline{i}} := e^*_{\underline{i}}$ base canonica di $\Lambda^k(\mathbb{R}^d)$.

Esempio.

$$\begin{aligned} &(\mathrm{d}x_1 + 2\,\mathrm{d}x_2) \wedge (2\,\mathrm{d}x_1 \wedge \mathrm{d}x_3 - \mathrm{d}x_2 \wedge \mathrm{d}x_4) = \\ &= 2\,\mathrm{d}x_1 \wedge \mathrm{d}x_1 \wedge \mathrm{d}x_3 - \mathrm{d}x_1 \wedge \mathrm{d}x_2\,\mathrm{d}x_4 + 4\,\mathrm{d}x_2 \wedge \mathrm{d}x_1 \wedge \mathrm{d}x_3 - 2\,\mathrm{d}x_2 \wedge \mathrm{d}x_2 \wedge \mathrm{d}x_4 = \\ &= -\,\mathrm{d}x_1 \wedge \mathrm{d}x_2 \wedge \mathrm{d}x_4 - 4\,\mathrm{d}x_1 \wedge \mathrm{d}x_2 \wedge \mathrm{d}x_3. \end{aligned}$$

Nota. Nel prodotto esterno si cancellano tutti i termini con indici ripetuti.

Definizione. Dato $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ aperto, una ***k*-forma** ω su Ω è una "funzione" da Ω in $\Lambda^k(\mathbb{R}^d)$. In coordinate, $\omega(x) = \sum_{\underline{i} \in I(d,k)} w_{\underline{i}}(x) \cdot \mathrm{d}x_{\underline{i}}$.

Il **differenziale esterno** di una k-forma ω su Ω di classe C^1 è la $(k+1)$-forma su Ω di classe almeno C^0 data da

- $k=0$. In tal caso f è una funzione (0-forma) e $\mathrm{d}f(x) = \mathrm{d}_x f = \sum_{j=1}^{d} \frac{\partial w_{\underline{i}}(x)}{\partial x_j} \mathrm{d}x_j \wedge \mathrm{d}x_{\underline{i}}$

- $k>0$ $\mathrm{d}\omega \coloneqq \sum_{\underline{i} \in I(d,k)} \mathrm{d}\omega_{\underline{i}}(x) \wedge \mathrm{d}x_{\underline{i}} = \sum_{\underline{i} \in I(d,k)} \sum_{j=1}^{d} \frac{\partial \omega_{\underline{i}}(x)}{\partial x_j} \mathrm{d}x_j \wedge \mathrm{d}x_{\underline{i}}$.

Proposizione (Leibniz). Valgono le seguenti

- $\mathrm{d}(\omega_1 \wedge \omega_2) = \mathrm{d}\omega_1 \wedge \omega_2 + (-1)^{k_1} \omega_1 \wedge \omega_2$
- $\mathrm{d}^2 \omega = 0$