

Analisi 3

Appunti di Analisi 3 del corso di Giovanni Alberti e Maria Stella Gelli

Arianna Carelli e Antonio De Lucreziis

I Semestre 2021/2022

Indice

1	Teoria della misura	4
1.1	Misure astratte	4
1.2	Esempi di misure	5
1.3	Funzioni misurabili	6
1.3.1	Funzioni semplici	6
1.4	Integrale	6
1.5	Teoremi di convergenza	8
1.5.1	Fubini-Tonelli	9
1.6	Esercizi	10
1.6.1	Teoria della misura	10
1.6.2	Funzioni misurabili rispetto alla misura di Lebesgue	11
1.6.3	Formula di cambio di variabile applicata a funzioni radiali	13
2	Spazi L^p e convoluzione	15
2.1	Disuguaglianze	15
2.1.1	Disuguaglianza di Jensen	15
2.1.2	Disuguaglianza di Young	18
2.1.3	Disuguaglianza di Hölder	18
2.1.4	Disuguaglianza di Minkowski	19
2.2	Costruzione spazi L^p	20
2.3	Prodotto scalare su L^2	21
2.4	Completezza degli spazi L^p	22
2.5	Alcune proprietà viste a esercitazione degli spazi L^p	25
2.5.1	Confrontabilità degli spazi di L^p	25
2.5.2	Separabilità degli spazi L^p	25
2.6	Nozioni di convergenza per successioni di funzioni	26
2.7	Controesempi sulle convergenze	29
2.8	Approssimazioni di funzioni in L^p	29
2.9	Complementi su approssimazioni di funzioni in L^p	32

2.10	Appendice	34
2.11	Esercizi	35
2.11.1	Generalizzazioni disuguaglianza di Hölder	35
2.11.2	Esercizi su spazi $L^p(X)$ al variare di p e dello spazio X	36
2.11.3	Sottospazi limitati, chiusi e compatti di L^p	37
2.11.4	Spazi ℓ^p	39
2.11.5	Continuità operatori lineari	40
3	Convoluzione	44
3.1	Derivata e Convoluzione	49
3.2	Approssimazione per convoluzione	50
3.3	Esercizi	52
3.3.1	Convoluzione	52
3.3.2	Approssimazioni per convoluzione	53
4	Spazi di Hilbert	54
4.1	Spazi di Hilbert complessi	59
4.2	Esempi di basi Hilbertiane	60
4.2.1	Polinomi	60
4.2.2	Base di Haar	60
4.3	Esercizi	61
4.3.1	Basi Hilbertiane e proiezioni	61
5	Serie di Fourier	64
5.1	Regolarità di f e dei coefficienti	68
5.2	Convergenza puntuale della serie di Fourier	70
5.3	Esercizi	73
5.3.1	Serie di Fourier	73
6	Applicazioni della serie di Fourier	76
6.1	Equazione del calore	76
6.2	Risoluzione dell'equazione del calore (su \mathbb{S}^1)	77
6.2.1	Risoluzione formale	77
6.3	Equazione delle onde	81
6.4	Risoluzione dell'equazione delle onde	81
6.4.1	Risoluzione formale	81
6.5	Altre applicazioni della serie di Fourier	84
6.5.1	Disuguaglianza isoperimetrica	84

6.6	Appendice	85
6.6.1	Basi di Hilbert rilevanti	85
6.6.2	Operatori autoaggiunti	88
6.7	Esercizi	90
6.7.1	Calcolo dei coefficienti di Fourier	90
6.7.2	Applicazione serie di Fourier: risoluzione di PDE	91
6.7.3	Operatori autoaggiunti	95
7	Trasformata di Fourier	98
7.1	Proprietà della trasformata di Fourier	99
7.2	Trasformata di Fourier su L^2	104
7.2.1	Proprietà della trasformata di Fourier in L^2	106
7.3	Conclusione sulla TdF	108
7.4	Applicazioni TdF	109
7.5	Esercizi	110
7.5.1	Calcolo TdF - prima parte	110
7.5.2	Calcolo TdF - seconda parte	112
7.5.3	Trasformate di Fourier note	114
8	Integrazione di superfici	115
8.1	Superfici	115
8.2	Misure su superfici	117
8.3	k -covettori	121

Capitolo 1

Teoria della misura

1.1 Misure astratte

Definizione. Uno spazio misurabile è una terna (X, \mathcal{A}, μ) tale che

- X è un insieme qualunque.
- \mathcal{A} è una σ -algebra di sottoinsiemi di X (chiamata σ -algebra dei misurabili) ovvero una famiglia di sottoinsiemi di X che rispetta le seguenti proprietà:
 - $\emptyset, X \in \mathcal{A}$.
 - \mathcal{A} è chiusa per complementare, unione e intersezione numerabile.
- μ è una misura su X , ossia una funzione $\mu: \mathcal{A} \rightarrow [0, +\infty]$ σ -addittiva, cioè tale che data una famiglia numerabile $\{E_k\} \subset \mathcal{A}$ disgiunta e posto $E := \bigcup E_n$, allora

$$\mu(E) = \sum_n \mu(E_n).$$

Notazione. Data una successione crescente di insiemi $E_1 \subset E_2 \subset \dots \subset E_n \subset \dots$ con $\bigcup E_n = E$, scriviamo $E_n \uparrow E$.

Proprietà.

- $\mu(\emptyset) = 0$
- *Monotonia:* Dati $E, E' \in \mathcal{A}$ e $E \subset E'$, allora $\mu(E) \leq \mu(E')$.
- Data $E_n \uparrow E$, vale $\mu(E) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(E_n) = \sup_n \mu(E_n)$.
- Se $E_n \downarrow E$ e $\mu(E_{\bar{n}}) < +\infty$ per qualche \bar{n} , allora $\mu(E) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(E_n) = \inf_n \mu(E_n)$.
- *Subadditività:* Se $E \subset \bigcup E_n$, allora $\mu(E) \leq \sum_n \mu(E_n)$.

Osservazione. Dato $X' \in \mathcal{A}$ si possono restringere \mathcal{A} e μ a X' nel modo ovvio.

Definizioni.

- μ si dice **completa** se $F \subset E, E \in \mathcal{A}$ e $\mu(E) = 0$, allora $F \in \mathcal{A}$ (e di conseguenza $\mu(F) = 0$).

- μ si dice **finita** se $\mu(X) < +\infty$.
- μ si dice **σ -finita** se esiste una successione $\{E_n\}$ con $E_n \subset E_{n+1}$ tale che $\bigcup E_n = X$ con $\mu(E_n) < +\infty$ per ogni n .

Notazione. Sia $P(X)$ un predicato che dipende da $x \in X$ allora si dice che $P(X)$ **vale μ -quasi ogni** $x \in X$ se l'insieme $\{x \mid P(x) \text{ è falso}\}$ è (contenuto in) un insieme di misura μ nulla.

D'ora in poi consideriamo solo misure complete.

1.2 Esempi di misure

- **Misura che conta i punti.**

$$X \text{ insieme} \quad \mathcal{A} := \mathcal{P}(X) \quad \mu(E) := \#E \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$$

- **Delta di Dirac in x_0 .**

$$X \text{ insieme, } x_0 \in X \text{ fissato} \quad \mathcal{A} := \mathcal{P}(X) \quad \mu(E) := \delta_{x_0}(E) = \mathbb{1}_E(x_0)$$

- **Misura di Lebesgue.**

$$X = \mathbb{R}^n \quad \mathcal{M}^n \text{ } \sigma\text{-algebra dei misurabili secondo Lebesgue} \quad \mathcal{L}^n \text{ misura di Lebesgue}$$

Dato R parallelepipedo in \mathbb{R}^n , cioè $R = \prod_{k=1}^n I_k$ con I_k intervalli in \mathbb{R} . Si pone

$$\text{vol}_n(R) := \prod_{k=1}^n \text{lung}(I_k)$$

per ogni $E \subset \mathbb{R}^n$ (assumendo $\text{lung}([a, b]) = b - a$). Infine poniamo

$$\mathcal{L}^n(E) := \inf \left\{ \sum_i \text{vol}_n(R_i) \mid \{R_i\} \text{ tale che } E \subset \bigcup_i R_i \right\}.$$

Osservazioni.

- $\mathcal{L}^n(R) = \text{vol}_n(R)$.
- \mathcal{L}^n non è σ -addittiva su $\mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$.

Il secondo punto giustifica l'introduzione della σ -algebra dei **misurabili secondo Lebesgue** che denotiamo con \mathcal{M}^n .

Dato $E \subset \mathbb{R}^n$ si dice che E è misurabile (secondo Lebesgue) se

$$\forall \varepsilon > 0 \exists A \text{ aperto e } C \text{ chiuso, tali che } C \subset E \subset A \text{ e } \mathcal{L}^n(A \setminus C) \leq \varepsilon.$$

Osservazioni.

- Per ogni E misurabile vale

$$\mathcal{L}^n(E) = \inf \{ \mathcal{L}^n(A) : A \text{ aperto, } A \supset E \} = \sup \{ \mathcal{L}^n(K) : K \text{ compatto, } K \subset E \}.$$

- Notiamo che se $F \subset E$ con $E \in \mathcal{M}^n$ e $\mathcal{L}^n(E) = 0$, allora $F \in \mathcal{M}^n$. Ovvero la misura di Lebesgue è completa!

Notazione. $|E| := \mathcal{L}^n(E)$

1.3 Funzioni misurabili

Definizione. Dato (X, \mathcal{A}, μ) e $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ (o al posto di \mathbb{R} in Y spazio topologico), diciamo che f è **misurabile** (più precisamente \mathcal{A} -misurabile), se

$$\forall A \text{ aperto } f^{-1}(A) \in \mathcal{A}$$

Osservazioni.

- Dato $E \subset X$, vale $E \in \mathcal{A}$ se solo se $\mathbb{1}_E$ è misurabile.
- La classe delle funzioni misurabili è chiusa rispetto a molte operazioni
 - *Somma, prodotto* (se hanno senso nello spazio immagine della funzione).
 - *Composizione con funzione continua*: Se $f: X \rightarrow Y$ continua e $g: Y \rightarrow Y'$ continua, allora $g \circ f$ è misurabile.
 - *Convergenza puntuale*: data una successione di f_n misurabili e $f_n \rightarrow f$ puntualmente, allora f è misurabile.
 - \liminf e \limsup (almeno nel caso $Y = \mathbb{R}$).

1.3.1 Funzioni semplici

Definizione. Definiamo la classe delle **funzione semplici** come

$$\mathcal{S} := \left\{ f: X \rightarrow \mathbb{R} \mid f = \sum_i \alpha_i \mathbb{1}_{E_i} \text{ con } E_i \text{ misurabili e } \{\alpha_i\} \text{ finito} \right\}$$

Osservazione. La rappresentazione di una funzione semplice come combinazione lineare di indicatori di insiemi *non è unica*, però se necessario possiamo prendere gli E_i disgiunti.

1.4 Integrale

Definizione. Diamo la definizione di $\int_X f \, d\mu$ per passi

- i) Se $f \in \mathcal{S}$ e $f \geq 0$ cioè $f = \sum_i \alpha_i \mathbb{1}_{E_i}$ con $\alpha_i \geq 0$ allora poniamo

$$\int_X f \, d\mu := \sum_i \alpha_i \mu(E_i),$$

convenendo che $0 \cdot +\infty = 0$ in quanto la misura di un insieme non è necessariamente finita.

- ii) Se $f: X \rightarrow [0, +\infty]$ misurabile si pone

$$\int_X f \, d\mu := \sup_{\substack{g \in \mathcal{S} \\ 0 \leq g \leq f}} \int_X g \, d\mu.$$

iii) $f: X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ misurabile si dice **integrabile** se

$$\int_X f^+ d\mu < +\infty \quad \text{oppure} \quad \int_X f^- d\mu < +\infty.$$

e per tali f si pone

$$\int_X f d\mu := \int_X f^+ d\mu - \int_X f^- d\mu.$$

iv) $f: X \rightarrow \mathbb{R}^n$ si dice **sommabile** (o di **classe** \mathcal{L}^1) se $\int_X |f| d\mu < +\infty$. In tal caso, se $\int_X f_i^\pm d\mu < +\infty$ per ogni f_i componente di f , allora $\int_X f d\mu$ esiste ed è finito.

Per tali f si pone

$$\int_X f d\mu := \left(\int_X f_1 d\mu, \dots, \int_X f_n d\mu \right).$$

Notazione. Scriveremo spesso $\int_E f(x) dx$ invece di $\int_E f d\mathcal{L}^n$.

Osservazioni.

- L'integrale è lineare (sulle funzioni sommabili).
- I passaggi i) e ii) danno lo stesso risultato per f semplice ≥ 0 .
- La definizione in ii) ha senso per ogni $f: X \rightarrow [0, +\infty]$ anche non misurabile. Ma in generale vale solo che

$$\int_X f_1 + f_2 d\mu \geq \int_X f_1 d\mu + \int_X f_2 d\mu.$$

- Dato $E \in \mathcal{A}$, f misurabile su E , notiamo che vale l'uguaglianza

$$\int_E f d\mu := \int_X f \cdot \mathbb{1}_E d\mu.$$

- Si può definire l'integrale anche per $f: X \rightarrow Y$ con Y spazio vettoriale normato finito dimensionale¹ ed f sommabile.
- Se $f_1 = f_2$ μ -q.o. allora $\int_X f_1 d\mu = \int_X f_2 d\mu$.
- Si definisce $\int_X f d\mu$ anche se f è misurabile e definita su $X \setminus N$ con $\mu(N) = 0$.
- Se $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ è integrabile secondo Riemann allora è misurabile secondo Lebesgue e le due nozioni di integrale coincidono.

Nota. Lo stesso vale per integrali impropri di funzioni positive. Ma nel caso più generale non vale: se consideriamo la funzione

$$f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R} \quad f(x) := \frac{\sin x}{x}$$

allora l'integrale di f definito su $(0, +\infty)$ esiste come integrale improprio ma non secondo Lebesgue, infatti

$$\int_0^{+\infty} f^+ dx = \int_0^{+\infty} f^- dx = +\infty$$

¹È necessario avere uno spazio vettoriale, perché serve la linearità e la moltiplicazione per scalare

- $\int_X f \, d\delta_{x_0} = f(x_0)$
- Se $X = \mathbb{N}$ e μ è la misura che conta i punti l'integrale è

$$\int_X f \, d\mu = \sum_{n=0}^{\infty} f(n)$$

per le f positive o tali che $\sum f^+(n) < +\infty$ oppure $\sum f^-(n) < +\infty$.

Nota. Come prima nel caso di funzioni non sempre positive ci sono casi in cui la serie solita non è definita come integrale di una misura, ad esempio

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$$

esiste come serie ma non come integrale.

- Dato X qualunque, μ misura che conta i punti e $f: X \rightarrow [0, +\infty]$ possiamo definire la somma di tutti i valori di f

$$\sum_{x \in X} f(x) := \int_X f \, d\mu.$$

1.5 Teoremi di convergenza

Sia (X, \mathcal{A}, μ) come in precedenza.

Teorema (di convergenza monotona o Beppo-Levi). Date $f_n: X \rightarrow [0, +\infty]$ misurabili, tali che $f_n \uparrow f$ ovunque in X , allora¹

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_X f_n \, d\mu = \int_X f \, d\mu$$

ed in particolare il termine a sinistra è crescente quindi è proprio un sup ovvero $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_X f_n \, d\mu = \sup_n \int_X f_n \, d\mu$.

Teorema (lemma di Fatou). Date $f_n: X \rightarrow [0, +\infty]$ misurabili, allora

$$\liminf_{n \rightarrow +\infty} \int_X f \, d\mu \geq \int_X \left(\liminf_{n \rightarrow +\infty} f_n \right) \, d\mu.$$

Teorema (di convergenza dominata o di Lebesgue). Date $f_n: X \rightarrow \mathbb{R}$ (o anche \mathbb{R}^n) misurabili con le seguenti proprietà

- *Convergenza puntuale:* $f_n(x) \rightarrow f(x)$ per ogni $x \in X$.
- *Dominazione:* Esiste $g: X \rightarrow [0, +\infty]$ sommabile tale che $|f_n(x)| \leq g(x)$ per ogni $x \in X$ e per ogni $n \in \mathbb{N}$.

allora

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_X f_n \, d\mu = \int_X f \, d\mu.$$

¹Mnemonica: $\sup_n \int_X f_n \, d\mu = \int_X \sup_n f_n \, d\mu$

Nota. La seconda proprietà è essenziale; sostituirla con $\int_X |f_n| \, d\mu \leq C < +\infty$ non basta!

Definizione. Data una *densità* $\rho: \mathbb{R}^n \rightarrow [0, +\infty]$ misurabile, la **misura μ con densità ρ** è data da

$$\forall E \in \mathcal{A} \quad \mu(E) := \int_E \rho \, dx$$

Osservazioni.

- \mathbb{R}^n e \mathcal{L}^n possono essere sostituiti da X e $\tilde{\mu}$.
- il fatto che μ è una misura segue da Beppo Levi, in particolare serve per mostrare la subadditività.

Teorema (di cambio di variabile). Siano Ω e Ω' aperti di \mathbb{R}^n , $\Phi: \Omega \rightarrow \Omega'$ un diffeomorfismo¹ di classe C^1 e $f: \Omega' \rightarrow [0, +\infty]$ misurabile. Allora

$$\int_{\Omega'} f(x') \, dx' = \int_{\Omega} f(\Phi(x)) |\det(\nabla \Phi(x))| \, dx.$$

La stessa formula vale per f a valori in $\overline{\mathbb{R}}$ integrabile e per f a valori in \mathbb{R}^n sommabile.

Osservazioni.

- Se $n = 1$, $|\det(\nabla \Phi(x))| = |\Phi'(x)|$ e non $\Phi'(x)$ come nella formula vista ad Analisi 1 (l'informazione del segno viene data dall'inversione degli estremi).
- Indebolire le ipotesi su Φ è delicato. Basta Φ di classe C^1 e $\forall x' \in \Omega' \# \Phi^{-1}(x') = 1$ (supponendo Φ iniettiva la proprietà precedente segue immediatamente). Se Φ non è "quasi" iniettiva bisogna correggere la formula per tenere conto della molteplicità.
- Quest'ultima osservazione serve giusto per far funzionare il cambio in coordinate polari che non è iniettivo solo nell'origine.

Formula di cambio di variabile applicata a funzioni radiali. Sia $f: [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ misurabile (di solito si richiede misurabile e positiva oppure sommabile). Allora per il teorema di cambio di variabili vale la seguente

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(|x|) \, dx = c_n \cdot \int_0^{+\infty} f(\rho) \rho^{n-1} \, d\rho,$$

dove $c_n = n \mathcal{L}^n(\mathcal{B}(0, 1))$.

1.5.1 Fubini-Tonelli

Di seguito riportiamo il teorema di Fubini-Tonelli per la misura di Lebesgue.

Teorema (di Fubini-Tonelli). Sia $\mathbb{R}^{n_1} \times \mathbb{R}^{n_2} \simeq \mathbb{R}^n$ con $n = n_1 + n_2$, $E := E_1 \times E_2$ dove E_1, E_2 sono misurabili e f è una funzione misurabile definita su E . Se f ha valori in $[0, +\infty]$ allora

$$\int_E f \, d\mu = \int_{E_2} \int_{E_1} f(x_1, x_2) \, dx_1 \, dx_2 = \int_{E_1} \int_{E_2} f(x_1, x_2) \, dx_2 \, dx_1$$

¹funzione differenziabile con inversa differenziabile.

Vale lo stesso per f a valori in \mathbb{R} o in \mathbb{R}^n sommabile.

Osservazioni. Possiamo generalizzare il teorema di Fubini-Tonelli a misure generiche ed ottenere alcuni risultati utili che useremo ogni tanto.

- Se X_1, X_2 sono spazi con misure μ_1, μ_2 (con opportune ipotesi) vale:

$$\int_{E_2} \int_{E_1} f(x_1, x_2) d\mu_1(x_1) d\mu_2(x_2) = \int_{E_1} \int_{E_2} f(x_1, x_2) d\mu_2(x_2) d\mu_1(x_1).$$

se $f \geq 0$ oppure $\int_{X_1} \int_{X_2} |f| d\mu_2(x_2) d\mu_1(x_1) < +\infty$.

- **Teorema** (di scambio serie-integrale). Se $X_1 \subset \mathbb{R}$ (oppure $X_1 \subset \mathbb{R}^n$), $\mu_1 = \mathcal{L}^n$ e $X_2 = \mathbb{N}$, μ_2 è la misura che conta i punti, allora la formula sopra diventa

$$\sum_{n=0}^{\infty} \int_{X_1} f_n(x) dx = \int_{X_1} \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x) dx.$$

se $f_i \geq 0$ oppure $\sum_i \int_{X_1} |f_i(x)| dx < +\infty$.

- **Teorema** (di scambio di serie). Se $X_1 = X_2 = \mathbb{N}$ e $\mu_1 = \mu_2$ è la misura che conta i punti la formula sopra diventa

$$\sum_{j=0}^{\infty} \sum_{i=0}^{\infty} a_{i,j} = \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} a_{i,j}$$

se $a_{i,j} \geq 0$ oppure $\sum_i \sum_j |a_{i,j}| < +\infty$.

1.6 Esercizi

1.6.1 Teoria della misura

Di seguito riportiamo alcune proprietà di base di teoria della misura.

Proprietà.

- i) Se $A \subset B$, allora $\mu(A) \leq \mu(B)$.

Dimostrazione. Scomponiamo $B = (B \setminus A) \cup (A \cap B)$. Per ipotesi $A \cap B = A$ ed essendo la misura positiva segue che

$$\mu(B) = \underbrace{\mu(B \setminus A)}_{\geq 0} + \mu(A) \geq \mu(A).$$

- ii) Dati due insiemi A, B misurabili, vale

$$\mu(A \cup B) \leq \mu(A) + \mu(B).$$

Dimostrazione. La disuguaglianza segue dalle seguenti uguaglianze.

$$\begin{aligned} \mu(A) &= \mu(A \setminus B) + \mu(A \cap B) \\ \mu(B) &= \mu(B \setminus A) + \mu(A \cap B) \\ \mu(A \cup B) &= \mu(A \setminus B) + \mu(B \setminus A) + \mu(A \cap B). \end{aligned}$$

iii) Data una successione di insiemi $E_1 \subset E_2 \subset \dots \subset \dots$, si ha

$$\mu\left(\bigcup_i E_i\right) = \sup_i \mu(E_i) = \lim_i \mu(E_i).$$

iv) Data una successione di insiemi $E_1 \supset E_2 \supset \dots \supset \dots$ e $\mu(E_1) < +\infty$, si ha

$$\mu\left(\bigcap_i E_i\right) = \lim_i \mu(E_i).$$

Esercizio (Numerabile subaddittività). Dato $E \in \mathcal{A}$, $E \subset \bigcup_i E_i$ dove $E_i \in \mathcal{A}$. Allora

$$\mu(E) \leq \sum_i \mu(E_i).$$

Dimostrazione (Idea). Basta dimostrare che $\mu\left(\bigcup_i E_i\right) \leq \sum_i \mu(E_i)$. Infatti per quanto visto prima $\mu(E) \leq \mu\left(\bigcup_i E_i\right)$. Prima dimostriamo per induzione $\mu\left(\bigcup_{i=1}^N E_i\right) \leq \sum_{i=1}^N \mu(E_i)$.

Il passo base $n = 2$ è stato visto al punto ii). Una volta dimostrata la proprietà sopra, si nota che $\sum_{i=1}^N \mu(E_i)$ è limitata per ogni N , e dunque è limitato anche il suo limite, da cui la tesi. \square

1.6.2 Funzioni misurabili rispetto alla misura di Lebesgue

Si ricorda che le funzioni *continue*, *semplici* e *semicontinue* sono classi di funzioni misurabili. Due osservazioni sulle funzioni semicontinue.

- Le funzioni semicontinue sono *boreliane*.
- La proprietà di misurabilità delle funzioni semicontinue è necessaria per l'enunciato della disuguaglianza di Jensen.

Controesempio (disuguaglianza di Jensen). Notiamo che l'ipotesi di semicontinuità inferiore della funzione f è necessaria per la validità della disuguaglianza di Jensen. Infatti, definiamo f come segue

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x \in (0, 1) \\ +\infty & \text{altrimenti} \end{cases}.$$

Osserviamo che la funzione f così definita è convessa ma non semicontinua inferiormente.

Ora definiamo la funzione $u : X \rightarrow \mathbb{R}$ con $X = (0, 2)$, come la funzione costante di valore $1/2$. Calcoliamo l'integrale di $u(x)$ su X .

$$\int_X u(x) dx = 1.$$

In tal caso vale $f\left(\int_X u(x) dx\right) = +\infty$. D'altra parte $\int_X f \circ u dx = 0$, dunque l'ipotesi di semicontinuità inferiore è necessaria.

Fatto. Date φ_1, φ_2 funzioni semplici su \mathbb{R} con misura di Lebesgue. Allora $\varphi_1 \vee \varphi_2$ e $\varphi_1 \wedge \varphi_2$ sono ancora funzioni semplici.

Lemma. Data $f: X \rightarrow [0, +\infty]$ misurabile

$$\int_X f \, d\mu = 0 \iff f = 0 \text{ q.o. su } X$$

Dimostrazione.

\Rightarrow Dato che f è non negativa, il dominio X può essere riscritto come

$$X = \{x \in X \mid f(x) \geq 0\} = \{x \in X \mid f(x) > 0\} \cup \{x \in X \mid f(x) = 0\}$$

ricordiamo che $(0, +\infty) = \bigcup_{n \geq 1} (\frac{1}{n}, +\infty)$, dunque possiamo riscrivere una parte di X come segue e poi passare alle misure

$$\begin{aligned} \{x \in X \mid f(x) > 0\} &= \bigcup_{n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}} \left\{x \in X \mid f(x) \geq \frac{1}{n}\right\} \\ \implies \mu(\{x \in X \mid f(x) > 0\}) &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \mu\left(\left\{x \in X \mid f(x) \geq \frac{1}{n}\right\}\right) \end{aligned}$$

in questo modo otteniamo la seguente caratterizzazione dell'insieme su cui f è positiva

$$\mu(\{x \in X \mid f(x) > 0\}) > 0 \iff \exists \bar{n} \text{ tale che } \mu(\{x \in X \mid f(x) \geq 1/\bar{n}\}) > 0$$

A questo punto possiamo maggiorare come segue

$$0 = \int_X f \, d\mu \geq \int_{\{f \geq \frac{1}{n}\}} f \, d\mu \geq \frac{1}{n} \mu\left(\left\{x \mid f(x) \geq \frac{1}{n}\right\}\right).$$

da cui ricaviamo che $\forall n$ vale

$$\mu\left(\left\{x \mid f(x) \geq \frac{1}{n}\right\}\right) = 0$$

e si conclude osservando che

$$\mu(\{x \mid f(x) > 0\}) = \lim_n \mu\left(\left\{x \mid f(x) \geq \frac{1}{n}\right\}\right) = 0$$

\Leftarrow Dal fatto che f è positiva possiamo scrivere

$$\int_X f \, d\mu = \sup_{\substack{g \leq f \\ g \text{ semplice}}} \int_X g \, d\mu = \sup \sum_i \alpha_i \mu(E_i) = 0.$$

□

Osservazione (sup essenziale di funzioni misurabili). Data f misurabile, definiamo

$$\|f\|_{\infty, X} := \inf \{m \in [0, +\infty] \mid |f(x)| \leq m \text{ quasi ovunque}\}.$$

Se $\|f\|_{\infty} < +\infty$, allora diciamo che esiste una costante $L > 0$ con $L = \|f\|_{\infty, X}$, tale che

$$|f(x)| \leq L$$

quasi ovunque. Infatti, per definizione di \inf , $L = \lim_n m_n$, dove m_n verificano

$$|f(x)| \leq m_n \quad \forall x \in X \setminus N_m, \quad \mu(N_m) = 0.$$

Definiamo $N = \bigcup_m N_m$, da cui si ottiene

$$\mu(N) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(N_m) = 0.$$

Ovvero N è trascurabile. Preso $x \in X \setminus N$, vale

$$|f(x)| \leq m_n \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

1.6.3 Formula di cambio di variabile applicata a funzioni radiali

Sia $f: [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ misurabile (di solito si richiede misurabile e positiva oppure sommabile). Allora per il teorema di cambio di variabili vale la seguente

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(|x|) \, dx = c_n \cdot \int_0^{+\infty} f(\rho) \rho^{n-1} \, d\rho,$$

dove $c_n = n \mathcal{L}^n(\mathcal{B}(0, 1))$.

Applichiamo questa formula alla stima di integrali di funzioni positive.

Esercizio. Sia

$$\psi(x) = \frac{1}{\|x\|^\alpha}$$

su $\mathcal{B}(0, 1) \in \mathbb{R}^n$. Notiamo che $\psi(x) = f(\|x\|)$ con $f = 1/t^\alpha$. Usiamo la formula appena introdotta per determinare gli $\alpha \in \mathbb{R}$ per i quali ψ è sommabile su $\mathcal{B}(0, 1)$.

$$\int_{\mathcal{B}(0,1)} \psi(x) \, dx = c_n \int_0^1 \frac{1}{\rho^\alpha} \rho^{n-1} \, d\rho = c_n \int_0^1 \rho^{n-1-\alpha} \, d\rho = \begin{cases} \log(\rho) & n = \alpha \\ \frac{\rho^{n-\alpha}}{n-\alpha} & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Concludendo,

$$\int_{\mathcal{B}(0,1)} \frac{1}{\|x\|^\alpha} \, dx < +\infty \iff n > \alpha.$$

Esercizio. Con passaggi analoghi al precedente otteniamo

$$\int_{\mathbb{R}^n \setminus \mathcal{B}(0,1)} \frac{1}{\|x\|^\alpha} \, dx < +\infty \iff n < \alpha.$$

Esercizio. Vediamo per quali valori di β il seguente integrale converge

$$\int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{(\|x\| + \|x\|^2)^\beta} \, dx$$

Vale la seguente catena di uguaglianze.

$$\int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{(\|x\| + \|x\|^2)^\beta} \, dx = \int_{\mathcal{B}(0,1)} \frac{1}{(\|x\| + \|x\|^2)^\beta} \, dx + \int_{\mathbb{R}^n \setminus \mathcal{B}(0,1)} \frac{1}{(\|x\| + \|x\|^2)^\beta} \, dx.$$

Studiamo separatamente i due pezzi dell'integrale.

$$\begin{aligned} \int_{B(0,1)} \frac{1}{(\|x\| + \|x\|^2)^\beta} dx &= c_n \int_{B(0,1)} \frac{1}{(\rho + \rho^2)^\beta} \rho^{n-1} d\rho = c_n \int_0^1 \frac{1}{\rho^\beta} \cdot \frac{\rho^{n-1}}{(1+\rho)^\beta} d\rho \\ &\approx \int_0^1 \rho^{n-1-\beta} d\rho < +\infty \iff \beta < n. \end{aligned}$$

Inoltre,

$$\int_{\mathbb{R}^n \setminus B(0,1)} \frac{1}{(\|x\| + \|x\|^2)^\beta} dx = \int_{\mathbb{R}^n \setminus B(0,1)} \frac{1}{\rho^{2\beta}} \cdot \frac{\rho^{n-1}}{\left(\frac{1}{\rho} + 1\right)^\beta} d\rho \approx \int_1^{+\infty} \frac{\rho^{n-1}}{\rho^{2\beta}} d\rho < +\infty \iff 2\beta > n.$$

In conclusione, l'integrale è finito se $n > \beta > n/2$.

Esercizio. Studiare l'insieme di finitezza al variare del parametro α dell'integrale

$$\int_{[0,1]^n} \frac{1}{\|x\|_1^\alpha} dx.$$

Osserviamo che la norma 1 e 2 sono legate dalle seguenti disuguaglianze

$$\frac{\|x\|_1}{n} \leq \|x\|_2 \leq \|x\|_1.$$

Studiamo una maggiorazione per l'integrale

$$\int_{[0,1]^n} \frac{1}{\|x\|_1^\alpha} dx \leq \int_{[0,1]^n} \frac{1}{\|x\|^\alpha} dx \leq \int_{B(0,\sqrt{n})} \frac{1}{\|x\|^\alpha} dx < +\infty \iff \alpha < n,$$

dunque

$$\int_{[0,1]^n} \frac{1}{\|x\|_1^\alpha} dx < +\infty \quad \text{se } \alpha < n.$$

Vediamo ora una minorazione.

$$\int_{[0,1]^n} \frac{1}{\|x\|_1^\alpha} dx = \frac{1}{2^n} \int_{[-1,1]^n} \frac{1}{\|x\|_1^\alpha} dx \geq \frac{1}{2^n} \int_{B(0,1)} \frac{1}{\|x\|_1^\alpha} dx \approx \int_{B(0,1)} \frac{1}{\|x\|^\alpha} dx < +\infty \iff \alpha < n.$$

Dunque l'integrale $\int_{[0,1]^n} \frac{1}{\|x\|_1^\alpha} dx$ converge se solo se $\alpha < n$.

Capitolo 2

Spazi L^p e convoluzione

2.1 Disuguaglianze

2.1.1 Disuguaglianza di Jensen

Ricordiamo che una funzione $f: \mathbb{R}^d \rightarrow [-\infty, +\infty]$ è **convessa** se e solo se dati $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}^d$ e $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in [0, 1]$ con $\sum_i \lambda_i = 1$ abbiamo che

$$f\left(\sum_i \lambda_i x_i\right) \leq \sum_i \lambda_i f(x_i)$$

Definizione. Una funzione $f: X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ si dice **semicontinua inferiormente nel punto** $x_0 \in X$ se per ogni $t \in \mathbb{R}$ con $t < f(x_0)$ esiste $U \in \mathcal{I}(x_0)$ tale che $t < f(y)$ per ogni $y \in U$. Infine f si dice **semicontinua inferiormente su X** se lo è in ogni $x \in X$.

Proprietà. Dalla definizione segue che $f: X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ è semicontinua inferiormente in $x_0 \in X$ se e solo se

$$f(x) \leq \sup_{U \in \mathcal{I}(x_0)} \inf_{y \in U} f(y) = \liminf_{x \rightarrow x_0} f(x).$$

Teorema (Jensen). Dato (X, \mathcal{A}, μ) con $\mu(X) = 1$ e $f: \mathbb{R}^d \rightarrow [-\infty, +\infty]$ convessa e semi-continua inferiormente (S.C.I.) e $u: X \rightarrow \mathbb{R}^d$ sommabile allora vale

$$f\left(\int_X u \, d\mu\right) \leq \int_X f \circ u \, d\mu$$

e $f \circ u$ è integrabile.

Osservazioni.

- $(f \circ u)^-$ ha integrale finito.
- Interpretando μ come probabilità si riscrive come $\mathbb{E}[f \circ \mu] \geq f(\mathbb{E}[u])$.

- Se u è una funzione semplice, cioè $u = \sum_i y_i \cdot \mathbb{1}_{E_i}$ con E_i disgiunti e $\bigcup E_i = X$ allora posti $\lambda_i = \mu(E_i)$ abbiamo

$$\int_X f \circ u \, d\mu = \int_X \sum_i f(y_i) \cdot \mathbb{1}_{E_i} \, d\mu = \sum_i \lambda_i f(y_i) \geq f\left(\sum_i \lambda_i y_i\right) = f\left(\int_X u \, d\mu\right)$$

Questo ci darebbe una strada per dimostrare in generale per passi il teorema di Jensen ma in realtà si presentano vari problemi tecnici.

- Ogni funzione convessa e S.C.I su Ω convesso in \mathbb{R}^d si estende a $\tilde{f}: \mathbb{R}^d \rightarrow (-\infty, +\infty]$ convessa e S.C.I.; ad esempio se $\Omega = (0, +\infty)$

$$f(y) = \frac{1}{y} \quad \rightsquigarrow \quad \tilde{f}(y) = \begin{cases} +\infty & y \leq 0 \\ \frac{1}{y} & y > 0 \end{cases}$$

- L'ipotesi di semi-continuità è non banale perché le funzioni convesse sono continue solo se a valori in \mathbb{R} , ad esempio per k costante la funzione

$$f(y) := \begin{cases} k & y < 0 \\ +\infty & y \geq 0 \end{cases}$$

è convessa ma non semi-continua inferiormente (e neanche continua).

- Se $0 < \mu(X) < +\infty$ la disuguaglianza di Jensen va modificata come segue

$$\int_X f \circ u \, d\mu \leq f\left(\int_X u \, d\mu\right).$$

Per la dimostrazione ci si riconduce al caso precedente sostituendo μ con $\tilde{\mu} := m \cdot \mu$, con $m := 1/\mu(X)$.

Dimostrazione. Poniamo $y_0 := \int_X u \, d\mu$, allora la tesi diventa

$$f\left(\int_X u \, d\mu\right) \leq \int_X f \circ u \, d\mu \quad \Longleftrightarrow \quad f(y_0) \leq \int_X f \circ u \, d\mu.$$

Prendiamo $\phi: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ affine (ovvero $\phi(y) = a \cdot y + b$ con $a \in \mathbb{R}^d$ e $b \in \mathbb{R}$) tale che $\phi \leq f$, allora

$$\int_X f \circ u \, d\mu \underset{(*)}{\geq} \int_X \phi \circ u \, d\mu = \int_X a \cdot u + b \, d\mu = ay_0 + b = \phi(y_0)$$

Concludiamo usando il seguente lemma di caratterizzazione delle funzioni convesse ed S.C.I.

Lemma. Ogni $f: \mathbb{R}^d \rightarrow (-\infty, +\infty]$ convessa e S.C.I è tale che

$$\forall y_0 \in \mathbb{R}^d \quad \sup_{\substack{\phi \text{ affine} \\ \phi \leq f}} \phi(y_0) = f(y_0)$$

Infine, si dimostra che $(f \circ u)^-$ è integrabile. Dal fatto che $f \circ u \geq \phi \circ u$ con $\phi \circ u$ sommabile¹ si ha che

$$\begin{aligned} &\implies (f \circ u)^- \leq (\phi \circ u)^- \\ &\implies (f \circ u)^- \text{ è sommabile} \\ &\implies f \circ u \text{ è integrabile} \end{aligned}$$

□

Nota. Nel caso $d = 1$ e $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ possiamo usare il fatto che le funzioni convesse ammettono sempre derivata destra o sinistra, il sup diventa un massimo e ci basta prendere come ϕ la retta tangente in $(y_0, f(y_0))$ o una con pendenza compresa tra $f'(y_0^-)$ e $f'(y_0^+)$.

Definizione. Dati $p_1, p_2 \in [1, +\infty]$ diciamo che sono **coniugati** se

$$\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} = 1$$

convenendo che $1/\infty = 0$.

Fissiamo $p \in [1, +\infty]$ detto *esponente di sommabilità* e sia (X, \mathcal{A}, μ) come sempre.

Definizione. Data $f: X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ o \mathbb{R}^d misurabile, la **norma** p di f è

$$\|f\|_p := \left(\int_X |f|^p d\mu \right)^{1/p} \quad p \in [1, +\infty)$$

mentre per $p = +\infty$ poniamo

$$\|f\|_\infty = \sup_{x \in X} f(x) := \inf \{ m \in [0, +\infty] \mid |f(x)| \leq m \text{ per } \mu\text{-q.o. } x \}.$$

Nota. In realtà queste sono solo delle semi-norme.

- $\|f\|_\infty \leq \sup_{x \in X} |f(x)|$
- $\|f\|_p = 0 \iff f = 0$ quasi ovunque

Dimostrazione.

\Rightarrow [TODO: Facile ma non ovvia]

\Leftarrow Ovvio.

□

- Se $f_1 = f_2$ quasi ovunque $\implies \|f_1\|_p = \|f_2\|_p$.

Dimostrazione. $f_1 = f_2$ quasi ovunque $\implies \exists D \subset X$ con $\mu(D) = 0$ tale che $f_1(x) = f_2(x)$ su $X \setminus D$, usiamo il fatto che l'integrale non cambia se modifichiamo la funzione su un insieme di misura nulla

$$\|f_1\|_p^p = \int_X |f_1|^p d\mu = \int_{X \setminus D} |f_1|^p d\mu = \int_{X \setminus D} |f_2|^p d\mu = \int_X |f_2|^p d\mu = \|f_2\|_p^p$$

□

¹ u è sommabile e ϕ è affine.

2.1.2 Disuguaglianza di Young

Proposizione. Per ogni $a_1, a_2 \geq 0$ e $\lambda_1, \lambda_2 > 0$ con $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$ abbiamo che

$$a_1^{\lambda_1} a_2^{\lambda_2} \leq \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2$$

inoltre vale l'uguale se e solo se $a_1 = a_2$.

Dimostrazione. Se a_1 o $a_2 = 0$ allora è ovvia. Supponiamo dunque $a_1, a_2 > 0$. Per la concavità del logaritmo abbiamo

$$\lambda_1 \log a_1 + \lambda_2 \log a_2 \leq \log(\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2), \iff \log(a_1^{\lambda_1} a_2^{\lambda_2}) \leq \log(\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2)$$

e dalla monotonia

$$a_1^{\lambda_1} a_2^{\lambda_2} \leq \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2.$$

Infine, il se e solo se per l'uguale segue dal fatto che il logaritmo è *strettamente concavo*. \square

2.1.3 Disuguaglianza di Hölder

Proposizione. Date $f_1, f_2: X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ o \mathbb{R}^d e p_1, p_2 esponenti coniugati allora

$$\int_X |f_1| \cdot |f_2| d\mu \leq \|f_1\|_{p_1} \cdot \|f_2\|_{p_2}$$

vale anche per $p = +\infty$ convenendo che $+\infty \cdot 0 = 0$ nel membro di destra.

Dimostrazione. Se $\|f_1\|_{p_1} = 0, +\infty$ o $\|f_2\|_{p_2} = 0, +\infty$ la dimostrazione è immediata, supponiamo dunque $\|f_1\|_{p_1}, \|f_2\|_{p_2} > 0$ e finiti.

- *Caso 1:* se $p_1 = 1, p_2 = +\infty$ allora

$$\int_X |f_1| \cdot |f_2| d\mu \leq \int_X |f_1| \cdot \|f_2\|_{\infty} d\mu = \|f_2\|_{\infty} \cdot \int_X |f_1| d\mu = \|f_2\|_{\infty} \cdot \|f_1\|_1$$

- *Caso 2:* se $1 < p_1, p_2 < +\infty$, introduciamo un parametro $\gamma > 0$ allora

$$\int_X |f_1| \cdot |f_2| d\mu = \int_X (\gamma^{p_1} \cdot |f_1|^{p_1})^{1/p_1} \cdot (\gamma^{-p_2} \cdot |f_2|^{p_2})^{1/p_2} d\mu$$

a questo punto chiamiamo per comodità $g_1 := \gamma^{p_1} \cdot |f_1|^{p_1}$, $\lambda_1 := 1/p_1$ e $g_2 := \gamma^{-p_2} \cdot |f_2|^{p_2}$, $\lambda_2 := 1/p_2$ da cui

$$\begin{aligned} &= \int_X g_1^{\lambda_1} \cdot g_2^{\lambda_2} \stackrel{\text{Young}}{\leq} \int_X \lambda_1 g_1 + \lambda_2 g_2 d\mu = \lambda_1 \gamma^{p_1} \int_X |f_1|^{p_1} + \lambda_2 \gamma^{-p_2} \int_X |f_2|^{p_2} d\mu \\ &= \lambda_1 \gamma^{p_1} \cdot \|f_1\|_{p_1}^{p_1} + \lambda_2 \gamma^{-p_2} \cdot \|f_2\|_{p_2}^{p_2} \end{aligned}$$

posti ora $a_1 := \gamma^{p_1} \|f_1\|_{p_1}^{p_1}$ e $a_2 := \gamma^{-p_2} \|f_2\|_{p_2}^{p_2}$, per $\gamma \rightarrow 0$ abbiamo che $a_1 \rightarrow 0, a_2 \rightarrow +\infty$ mentre per $\gamma \rightarrow +\infty$ abbiamo che $a_1 \rightarrow +\infty, a_2 \rightarrow 0$ dunque per il teorema del valor medio esisterà γ tale che $a_1 = a_2$, ma allora siamo nel caso dell'uguaglianza per la disuguaglianza di Young dunque

$$\lambda_1 \gamma^{p_1} \|f_1\|_{p_1}^{p_1} + \lambda_2 \gamma^{-p_2} \|f_2\|_{p_2}^{p_2} = \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 = a_1^{\lambda_1} \cdot a_2^{\lambda_2} = \|f_1\|_{p_1} \cdot \|f_2\|_{p_2}$$

□

Osservazione. La disuguaglianza di Hölder può essere generalizzata a n funzioni, date f_1, \dots, f_n e p_1, \dots, p_n con $\frac{1}{p_1} + \dots + \frac{1}{p_n} = 1$ allora

$$\int_X \prod_i^n |f_i| d\mu \leq \prod_i^n \|f_i\|_{p_i}$$

2.1.4 Disuguaglianza di Minkowski

Proposizione. Consideriamo sempre (X, \mathcal{A}, μ) e sia $p \in [1, +\infty]$ un esponente di sommabilità ed $f_1, f_2: X \rightarrow \mathbb{R}$ oppure \mathbb{R}^d . Allora vale la disuguaglianza triangolare

$$\|f_1 + f_2\|_p \leq \|f_1\|_p + \|f_2\|_p.$$

Dimostrazione.

- *Caso 1:* se $p = 1$ o $p = +\infty$, allora svolgiamo il calcolo diretto

- Se $p = 1$

$$\|f_1 + f_2\|_1 = \int_X |f_1 + f_2| d\mu \leq \int_X |f_1| + |f_2| d\mu = \int_X |f_1| d\mu + \int_X |f_2| d\mu = \|f_1\|_1 + \|f_2\|_1$$

- Se $p = +\infty$ allora poniamo D l'insieme di *misura nulla* che realizza su $X \setminus D$ il $\sup_{X \setminus D} |f_1 + f_2|$ ovvero $\sup_{X \setminus D} |f_1 + f_2| = \sup_{X \setminus D} |f_1 + f_2|$

$$\begin{aligned} \|f_1 + f_2\|_\infty &= \sup_{X \setminus D} |f_1 + f_2| = \sup_{X \setminus D} |f_1 + f_2| \leq \sup_{X \setminus D} (|f_1| + |f_2|) \\ &= \sup_{X \setminus D} |f_1| + \sup_{X \setminus D} |f_2| = \sup_{X \setminus D} |f_1| + \sup_{X \setminus D} |f_2| = \|f_1\|_\infty + \|f_2\|_\infty \end{aligned}$$

- *Caso 2:* se $1 < p < +\infty$ e $0 < \|f_1 + f_2\|_p < +\infty$

$$\begin{aligned} \|f_1 + f_2\|_p^p &= \int_X |f_1 + f_2|^p d\mu \leq \int_X (|f_1| + |f_2|) \cdot |f_1 + f_2|^{p-1} d\mu = \\ &= \int_X |f_1| \cdot |f_1 + f_2|^{p-1} d\mu + \int_X |f_2| \cdot |f_1 + f_2|^{p-1} d\mu = \end{aligned}$$

ora introduciamo q esponente coniugato di p e notiamo

$$q = \frac{p}{p-1} \quad \text{e} \quad \| |f|^{p-1} \|_q = \|f\|_p^{p-1}$$

ora continuiamo a svolgere il conto di prima usando Hölder con esponenti p e q

$$\begin{aligned} &\stackrel{\text{Hölder}}{\leq} \|f_1\|_p \cdot \| |f_1 + f_2|^{p-1} \|_q + \|f_2\|_p \cdot \| |f_1 + f_2|^{p-1} \|_q = \\ &= (\|f_1\|_p + \|f_2\|_p) \cdot \| |f_1 + f_2|^{p-1} \|_q = (\|f_1\|_p + \|f_2\|_p) \cdot \|f_1 + f_2\|_p^{p-1} \end{aligned}$$

infine per l'ipotesi $\|f_1 + f_2\|_p > 0$ possiamo dividere per l'ultimo fattore e ottenere la tesi.

¹Si usa questa strategia perché il \sup non soddisfa le proprietà del modulo e della somma del \sup .

- *Caso 3:* se $1 < p < +\infty$ ma $\|f_1 + f_2\| = 0$ o $+\infty$ allora se $\|f_1 + f_2\| = 0$ la disuguaglianza è banale mentre se $\|f_1 + f_2\| = +\infty$ si usa la seguente disuguaglianza

$$\|f_1 + f_2\|_p^p \leq 2^{p-1}(\|f_1\|_p^p + \|f_2\|_p^p),$$

che si ottiene usando la convessità della funzione $x \mapsto x^p$ e la combinazione affine $\frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_2$ infatti

$$\left(\frac{x}{2} + \frac{y}{2}\right)^p \leq \frac{1}{2}x^p + \frac{1}{2}y^p \implies \frac{1}{2^{p-1}}(x+y)^p \leq x^p + y^p \implies (x+y)^p \leq 2^{p-1}(x^p + y^p).$$

□

2.2 Costruzione spazi L^p

Fissiamo (X, \mathcal{A}, μ) come sempre.

Definizione. Sia \mathcal{L}^p l'insieme delle funzioni $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ o \mathbb{R}^d misurabili tali che $\|f\|_p < +\infty$.

Osservazioni.

- \mathcal{L}^p è un sottospazio vettoriale dello spazio vettoriale dato da $\{f: X \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ misurabile}\}$ e $\|\cdot\|_p$ è una semi-norma.

Dimostrazione.

- \mathcal{L}^p è chiuso per somma e moltiplicazione per scalari.
- Dalla definizione segue subito $\|\lambda f\|_p = |\lambda| \cdot \|f\|_p$ l'omogeneità della norma.
- Dalla disuguaglianza di Minkowski segue che $\|\cdot\|_p$ è una semi-norma.
- In particolare non è una norma se $\{0\} \subsetneq \{f \mid \|f\|_p = 0\}$ ovvero se \mathcal{A} contiene insiemi non vuoti di misura nulla.
- In generale dato V spazio vettoriale e $\|\cdot\|$ semi-norma su V possiamo introdurre $N := \{v \mid \|v\| = 0\}$. N risulta essere un sottospazio di V e la norma data da $\|[v]\| := \|v\|$ per $[v] \in V/N$ è ben definita ed è proprio una norma su V/N .
- Nel caso della norma $\|\cdot\|_p$ abbiamo che $[f_1] = [f_2] \iff [f_1 - f_2] = 0 \iff f_1 - f_2 = 0$ quasi ovunque.

Definizione. Poniamo $N := \{f \mid \|f\|_p = 0\}$ e definiamo gli **spazi L^p** come

$$L^p := \mathcal{L}^p / N = \mathcal{L}^p / \sim \quad \|[f]\|_p := \|f\|_p$$

Notazione. Ogni tanto serve precisare meglio l'insieme di partenza e di arrivo degli spazi L^p ed in tal caso useremo le seguenti notazioni

$$L^p = L^p(X) = L^p(X, \mu) = L^p(X, \mathcal{A}, \mu) = L^p(X, \mu; \mathbb{R}^d).$$

Nota. Nella pratica non si parla mai di “classi di funzioni” e si lavora direttamente parlando di “funzioni in L^p ”. Le “operazioni” comuni non creano problemi però in certi casi bisogna stare attenti di star lavorando con oggetti ben definiti. Ad esempio:

- Preso $x_0 \in X$, consideriamo l'insieme $\{f \in L^p \mid f(x_0) = 0\}$. Notiamo che non è un sottoinsieme ben definito (a meno che $\mu(\{x_0\}) > 0$ ovvero che la misura sia atomica) di L^p , in quanto possiamo variare f su x_0 (che è un insieme di misura nulla) e ottenere una nuova funzione g con $[g] = [f]$ ma $g \notin \{f \in L^p \mid f(x_0) = 0\}$.
- Invece il seguente insieme è ben definito

$$\left\{ f \in L^1 \mid \int_X f \, d\mu = 0 \right\}$$

2.3 Prodotto scalare su L^2

Date $f_1, f_2 \in L^2(X)$ si pone

$$\langle f_1, f_2 \rangle := \int_X f_1 \cdot f_2 \, d\mu.$$

Osservazioni.

- La definizione di $\langle f_1, f_2 \rangle$ è ben posta, infatti basta far vedere che $\int_X |f_1 f_2| \, d\mu < +\infty$ ma per Hölder abbiamo

$$\int_X |f_1 f_2| \, d\mu \leq \|f_1\|_2 \|f_2\|_2 < +\infty$$

- $\|f\|_2^2 = \langle f, f \rangle$ per ogni $f \in L^2(X)$.
- Inoltre, $\left| \int_X f_1 f_2 \, d\mu \right| \leq \int_X |f_1 f_2| \, d\mu$ quindi

$$|\langle f_1, f_2 \rangle| \leq \|f_1\|_2 \|f_2\|_2 \quad (\text{Cauchy-Schwartz}).$$

- L'operatore $\langle \cdot, \cdot \rangle$ è un prodotto scalare definito positivo.

Osservazioni.

- Uno V spazio vettoriale reale normato ha norma $\|\cdot\|$ derivante da un prodotto scalare se solo se vale l'**identità del parallelogramma**

$$\|v_1 + v_2\|^2 + \|v_1 - v_2\|^2 = 2\|v_1\|^2 + 2\|v_2\|^2 \quad \forall v_1, v_2 \in V;$$

in tal caso il prodotto scalare può essere calcolato tramite l'**identità di polarizzazione**

$$\langle v_1, v_2 \rangle = \frac{1}{4} \left(\|v_1 + v_2\|^2 - \|v_1 - v_2\|^2 \right).$$

Usando l'identità del parallelogramma si dimostra che la norma di L^p deriva da un prodotto scalare solo per $p = 2$.

Proprietà. Sia V uno spazio vettoriale con norma $\|\cdot\|$. Allora vale l'identità del parallelogramma se solo se $\|\cdot\|$ deriva da un prodotto scalare.

Esempio. La norma di $L^p([-1, 1])$, deriva da un prodotto scalare solo per $p = 2$. Prendiamo $f_1 = \mathbb{1}_{[-1, 0]}$ e $f_2 = \mathbb{1}_{[0, +1]}$. Allora

$$\|f_1 + f_2\|_p^p = \int_{-1}^1 1 \, dx = 2 \Rightarrow \|f_1 + f_2\|_p = 2^{1/p}$$

$$\|f_1 - f_2\|_p = \|f_1 + f_2\|_p = 2^{1/p}, \quad \|f_1\|_p = \|f_2\|_p = 1$$

Se vale l'identità del parallelogramma allora

$$\|f_1 + f_2\|_p^2 + \|f_1 - f_2\|_p^2 = 2 \|f_1\|_p^2 + 2 \|f_2\|_p^2$$

cioè

$$2^{2/p} + 2^{2/p} = 2 \cdot 1 + 2 \cdot 1 \iff p = 2.$$

Dunque l'unica possibilità per verificare la regola del parallelogramma è che $p = 2$.

Domanda. Per quali X, \mathcal{A}, μ vale la stessa conclusione?

2.4 Completezza degli spazi L^p

Vediamo ora la proprietà più importante degli spazi L^p .

Teorema. Lo spazio L^p è completo per ogni $p \in [1, +\infty]$.

Lemma 1. Dato (Y, d) spazio metrico, allora

i) Ogni successione (y_n) tale che

$$\sum_{n=1}^{\infty} d(y_n, y_{n+1}) < +\infty$$

è di Cauchy.

ii) Se ogni (y_n) tale che $\sum_{n=1}^{\infty} d(y_n, y_{n+1}) < +\infty$ converge allora Y è completo.

Osservazione. Non tutte le successioni di Cauchy (y_n) soddisfano quella condizione. Ad esempio la successione $(-1)^n/n$ definita su \mathbb{R} è di Cauchy però

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{(-1)^{n+1}}{n+1} - \frac{(-1)^n}{n} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n^2+n} \approx \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \rightarrow \infty.$$

Nota. Per mostrare la completezza degli spazi L^p è sufficiente verificare la convergenza per una sottoclasse propria delle successioni di Cauchy.

Dimostrazione.

i) Vorremmo vedere che $\forall \varepsilon \exists N$ tale che $\forall m, n > N$ si ha $d(y_m, y_n) \leq \varepsilon$. Presi $n > m$ abbiamo che

$$d(y_m, y_n) \leq \sum_{k=m}^{n-1} d(y_k, y_{k+1}) \leq \sum_{k=m}^{\infty} d(y_k, y_{k+1}) \rightarrow 0$$

in quanto *coda di una serie convergente*, quindi

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists m_\varepsilon \text{ tale che } \sum_{k=m_\varepsilon}^{\infty} d(y_k, y_{k+1}) < \varepsilon \implies \forall n > m \geq m_\varepsilon \text{ vale } d(y_m, y_n) \leq \varepsilon$$

- ii) Sia (y_n) una successione di Cauchy, mostriamo che converge. Osserviamo che esiste una sottosuccessione (y_{n_k}) tale che

$$\sum_{k=1}^{\infty} d(y_{n_k}, y_{n_{k+1}}) < +\infty.$$

Infatti, $\forall k \exists n_k$ tale che $\forall n, m \geq n_k \quad d(y_n, y_m) \leq 1/2^k$ e dunque $d(y_{n_k}, y_{n_{k+1}}) \leq 1/2^k$. Per ipotesi (y_{n_k}) converge a un qualche $y \in Y$, da cui la tesi¹. \square

Lemma 2. Dato Y spazio normato, i seguenti fatti sono equivalenti

- i) Y è completo.

- ii) Per ogni successione (y_n) tale che $\sum_{n=1}^{\infty} \|y_n\| < +\infty$, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$ converge².

Dimostrazione. i) \Rightarrow ii). Dobbiamo mostrare che $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$ è di Cauchy. Per il Lemma 1 basta mostrare che la successione

$$z_n := \sum_{k=1}^n y_k \quad \text{soddisfa la proprietà} \quad \sum_{n=1}^{\infty} d(z_{n+1}, z_n) < +\infty.$$

Espandendo la formula sopra

$$\sum_{n=1}^{\infty} d(z_{n+1}, z_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \left\| \sum_{k=1}^{n+1} y_k - \sum_{k=1}^n y_k \right\| = \sum_{n=1}^{\infty} \|y_{n+1}\|$$

che è finito per ipotesi.

ii) \Rightarrow i). Utilizziamo l'enunciato ii) del Lemma 2: mostriamo ogni (y_n) che soddisfa la proprietà $\sum_n d(y_n, y_{n+1}) < +\infty$ converge. Definiamo la successione $z_n := y_{n+1} - y_n$. Per ipotesi, essendo che $\sum_n \|z_n\| < +\infty$, la serie $\sum_n z_n$ converge. Indicando con L il limite della serie, abbiamo che $\lim_n y_n = L + y_1$. \square

Lemma 3 (Minkowski per somme infinite). Date delle funzioni (g_n) positive su X allora

$$\left\| \sum_{n=1}^{\infty} g_n \right\|_p \leq \sum_{n=1}^{\infty} \|g_n\|_p$$

Dimostrazione. Per ogni N abbiamo che

$$\left\| \sum_{n=1}^N g_n \right\|_p^p \leq \left(\sum_{n=1}^N \|g_n\|_p \right)^p \leq \left(\sum_{n=1}^{\infty} \|g_n\|_p \right)^p$$

e per convergenza monotona possiamo passare il termine di sinistra al limite

$$\lim_N \left\| \sum_{n=1}^N g_n \right\|_p^p = \lim_N \int_X \left(\sum_{n=1}^N g_n \right)^p d\mu = \int_X \left(\lim_N \sum_{n=1}^N g_n \right)^p d\mu = \left\| \sum_{n=1}^{\infty} g_n \right\|_p^p$$

\square

¹Data una successione di Cauchy x_n , se una sottosuccessione x_{n_k} converge, allora converge anche la successione.

²Nel senso che esiste y tale che $\left\| y - \sum_{n=1}^N y_n \right\| \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 0$.

Dimostrazione (Completezza spazi L^p).

- Se $p = +\infty$: si tratta di vedere che data (f_n) di Cauchy in $L^\infty(X)$ esiste N con $\mu(N) = 0$ tale che (f_n) è di Cauchy rispetto allora norma del sup in $X \setminus N$ che sappiamo essere completa per il punto ii) del Lemma 2¹.

Determiniamo un tale N . Dato che (f_n) è di Cauchy in $L^\infty(X)$ significa che

$$\forall k \exists n_k: \forall n, m > n_k: \|f_n - f_m\|_{L^\infty} < \frac{1}{2^k}, \quad \|f_n - f_m\|_{L^\infty} = \sup_{X \setminus N_{n,m}^k} |f_n - f_m|$$

per un certo insieme $N_{n,m}^k$ di misura nulla. Definiamo $N^k = \bigcup_{n,m \in \mathbb{N}} N_{n,m}^k$ che ha misura nulla perché unione misurabile di insiemi di misura nulla. Infine definiamo $N := \bigcup_{k \in \mathbb{N}} N^k$ anch'esso di misura nulla che è l'insieme cercato.

- Se $p < +\infty$: per il Lemma 2, basta far vedere che data $(f_n) \subset L^p(X)$ tale che $\sum_{n=1}^\infty \|f_n\|_p < +\infty$ allora $\sum_n f_n$ converge a qualche $f \in L^p(X)$.

La dimostrazione è suddivisa in tre passi, prima costruiamo f , poi mostriamo che f_n converge a f ed infine mostriamo $f \in L^p(X)$.

◦ *Passo 1.* Per ipotesi abbiamo

$$+\infty > \sum_{n=1}^\infty \|f_n\|_p = \sum_{n=1}^\infty \| |f_n| \|_p \geq \left\| \sum_{n=1}^\infty |f_n| \right\|_p = \left(\int \left(\sum_{n=1}^\infty |f_n(x)| \right)^p d\mu(x) \right)^{1/p}$$

quindi $\sum_{n=1}^\infty |f_n(x)| < +\infty$ per ogni $x \in X \setminus E$ con $\mu(E) = 0$. Quindi $\sum_{n=1}^\infty f_n(x)$ converge a qualche $f(x)$ per ogni $x \in X \setminus E$ ed a questo punto ci basta estendere f a zero in E ².

◦ *Passo 2.* Fissiamo N ed osserviamo che $\forall x \in X \setminus E$ abbiamo

$$\left| f(x) - \sum_{n=1}^N f_n(x) \right| = \left| \sum_{n=N+1}^\infty f_n(x) \right| \leq \sum_{n=N+1}^\infty |f_n(x)|$$

da cui otteniamo

$$\left\| f - \sum_{n=1}^N f_n \right\|_p \leq \left\| \sum_{n=N+1}^\infty |f_n| \right\|_p \leq \sum_{n=N+1}^\infty \|f_n\|_p$$

dove l'ultimo termine è la coda di una serie convergente.

◦ *Passo 3.* In particolare rileggendo il passo precedente per $N = 0$ otteniamo

$$\|f\|_p \leq \sum_{n=1}^\infty \|f_n\|_p < +\infty \implies f \in L^p$$

□

¹Dato che se $\sum \|y_n\|_\infty < +\infty \implies \sum y_n < +\infty$

²Una costruzione alternativa degli spazi L^p potrebbe anche partire da *funzioni definite quasi ovunque*, questo ovvierebbe al problema di estendere a 0 la funzione f appena costruita. Però diventa più complicato mostrare di essere in uno spazio vettoriale poiché per esempio serve ridefinire $+$ per funzioni definite quasi ovunque.

Esercizio.¹ Sia $f: X \rightarrow [0, +\infty]$ allora $\int_X f \, d\mu < +\infty \implies f(x) < +\infty$ per quasi ogni x .

Dimostrazione. Sia $E := \{x \mid f(x) = +\infty\}$, allora l'idea è che

$$\infty > \int_X f \, d\mu \geq \int_E f \, d\mu = +\infty \cdot \mu(E).$$

Oppure, osserviamo che $\forall m \in [0, +\infty)$ abbiamo $f \cdot \mathbb{1}_E \geq m \cdot \mathbb{1}_E$ per ogni $x \in E$ quindi integrando ricaviamo

$$\underbrace{\int_E f \, d\mu}_I \geq m \cdot \mu(E) \implies \mu(E) \leq \frac{I}{m} \xrightarrow{m \rightarrow +\infty} 0$$

□

2.5 Alcune proprietà viste a esercitazione degli spazi L^p

2.5.1 Confrontabilità degli spazi di L^p

Osservazioni. Valgono le seguenti²

- Sia $X \in \mathbb{R}^n$, μ misura di Lebesgue e $1 \leq p_1 < p_2 \leq +\infty$. In generale non posso confrontare gli spazi L^p . Tuttavia, se $\mu(X) < +\infty$, allora

$$L^{p_2}(X) \subset L^{p_1}(X) \quad \text{se } p_1 < p_2.$$

- Dato $Y \in L^p(X)$ un sottoinsieme che eredita la norma $\|\cdot\|_{L^p}$, allora Y è completo $\iff Y$ è chiuso.
- Negli spazi L^p i sottoinsiemi chiusi e limitati non sono compatti. In particolare, le palle $Y = \{f \in L^p \mid \|f\|_{L^p} \leq 1\}$ non sono compatte.

2.5.2 Separabilità degli spazi L^p

Proposizione. Si ha che $L^p(\mathbb{R}^d, \mu)$ con μ la misura di Lebesgue, è separabile se e solo se $p \neq +\infty$. Lo stesso risultato vale per ℓ^p .

Osservazione. La proposizione è valida anche per $L^p(X, \mu)$ con $X \subset \mathbb{R}^d$ aperto.

Sia $1 \leq p < +\infty$, $L^p(\mathbb{R}^d, \mu)$ con μ la misura di Lebesgue. Le funzioni semplici costituite da somme finite di insiemi di misura finita sono dense in $L^p(\mathbb{R}^d)$.

Prendiamo una base numerabile di \mathbb{R}^d e la indichiamo con \mathcal{B} . L'insieme

$$Y = \left\{ \sum_{i=1}^n \alpha_i \mathbb{1}_{B_i} \mid B_i \in \mathcal{B}, \alpha_i \in \mathbb{Q} \right\}$$

¹In questo corso non è strettamente necessario ricordarsi come si facciano tutti questi esercizi di teoria della misura ma è bene saperli applicare in automatico quando serve.

²Le dimostrazioni di questi fatti sono nella parte di esercizi in fondo al capitolo.

è numerabile. Vediamo che è denso in $L^p(\mathbb{R}^d)$.

Idea. È sufficiente approssimare le funzioni semplici a somma finita $\sum_{i=1}^N \alpha_i \mathbb{1}_{E_i}$. In particolare, ci basta approssimare $\alpha \cdot \mathbb{1}_E$. Essendo $\alpha \in \mathbb{R}$ troviamo una successione di razionali α_j tali che $\alpha_j \xrightarrow{j \rightarrow \infty} \alpha$. Dunque, rimane da approssimare l'insieme E .

Fissiamo E e supponiamo dapprima E aperto. Possiamo scrivere E come unione arbitraria di elementi della base \mathcal{B}

$$E = \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i.$$

Per approssimare E consideriamo gli insiemi $E_N = \bigcup_{i=1}^N B_i$. Otteniamo $|E| = \lim_N |E_N|$, da cui $|E \setminus E_N| \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} 0$. Concludiamo notando che il caso E arbitrario si fa approssimandolo con una famiglia di aperti.

Per ℓ^p con $p < +\infty$ definiamo

$$Y = \{\{x_n\} \mid x_n = 0 \text{ definitivamente, } x_n \in \mathbb{Q}\}$$

e verifico che è numerabile e separabile.

Domanda. Cosa succede per $p = +\infty$?

Consideriamo $L^\infty([0, +\infty], \mu)$ con μ di Lebesgue e $E_n = [n, n+1]$. Definiamo l'insieme

$$Z = \left\{ \forall J \subset \mathbb{N} \quad u = \sum_{j \in J} \mathbb{1}_{E_j} \right\}.$$

Z ha la cardinalità delle parti di \mathbb{N} cioè è più che numerabile. Osserviamo che per ogni $u, v \in Z$, $u \neq v$ si ha che $\|u - v\|_{L^\infty(\mathbb{R})} = 1$. Se per assurdo esistesse un insieme denso e numerabile D in L^∞ , per definizione di insieme denso dovremmo trovare per ogni palla di raggio minore di 1 e centro in un qualsiasi elemento di Z , un elemento di D . Ma questo è impossibile in quanto D ha cardinalità numerabile e Z la cardinalità del continuo.

Vediamo che l^∞ non è separabile. Sia $Y = \{\underline{x}^k\}_{k \in \mathbb{N}}$, allora definiamo $\underline{z} \in l^\infty$ come segue

$$z_n = \begin{cases} 0 & \text{se } |x_n^n| > 1 \\ 2 & \text{se } |x_n^n| \leq 1 \end{cases}$$

In questo modo otteniamo $\|\underline{x}^k - \underline{z}\|_{l^\infty} \geq 1$ per ogni k , dunque $\{\underline{x}^k\}_k$ non può essere denso.

2.6 Nozioni di convergenza per successioni di funzioni

Fissiamo X, \mathcal{A}, μ e prendiamo $f, f_n: X \rightarrow \mathbb{R}$ (o \mathbb{R}^k) misurabili.

Definizione. Riportiamo le definizioni di alcune nozioni di convergenza.

- **Uniforme** : $\forall \varepsilon \exists n_\varepsilon$ tale che $\|f - f_n\| < \varepsilon \quad \forall n > n_\varepsilon$.
- **Puntuale** : $f_n(x) \rightarrow f(x) \quad \forall x \in X$.
- **Puntuale μ -quasi ovunque** : $f_n(x) \rightarrow f(x)$ per μ -q.o. $x \in X$.

- In L^p : $\|f_n - f\|_p \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$.
- In misura : $\forall \varepsilon > 0 \quad \mu(\{x \mid |f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon\}) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.

Osservazione. Abbiamo le seguenti implicazioni ovvie delle diverse nozioni di convergenza:

$$\text{uniforme} \Rightarrow \text{puntuale} \Rightarrow \text{puntuale } \mu \text{ q.o.}$$

Proposizione. Valgono le seguenti.

- i) Data $f_n \rightarrow f$ q.o. e $\mu(X) < +\infty$, allora $f_n \rightarrow f$ in misura.
- ii) (*Severini-Egorov*): Data $f_n \rightarrow f$ q.o. e $\mu(X) < +\infty$, allora $\forall \delta > 0$ esiste $E \in \mathcal{A}$ tale che $\mu(E) < \delta$ e $f_n \rightarrow f$ uniformemente su $X \setminus E$.
- iii) $f_n \rightarrow f$ in L^p , $p < +\infty$, allora $f_n \rightarrow f$ in misura.
- iii') $f_n \rightarrow f \in L^\infty$, allora $\exists E$ tale che $\mu(E) = 0$ e $f_n \rightarrow f$ uniformemente su $X \setminus E$.
- iv) $f_n \rightarrow f$ in misura, allora $\exists n_k$ tale che $f_{n_k} \rightarrow f$ μ -q.o.
- v) $f_n \rightarrow f$ in L^p , allora $\exists n_k$ tale che $f_{n_k} \rightarrow f$ μ -q.o.

Osservazione. In i) e ii) l'ipotesi $\mu(X) < +\infty$ è necessaria. Infatti, preso $X = \mathbb{R}$ e $f_n = \mathbb{1}_{[n, +\infty)}$ si ha che $f_n \rightarrow 0$ ovunque ma f_n non converge a 0 in misura, e f_n non converge a 0 uniformemente in $\mathbb{R} \setminus E$ per ogni E di misura finita.

Lemma (disuguaglianza di Markov). Data $g: X \rightarrow [0, +\infty]$ misurabile e $m > 0$ si ha

$$\mu(\{x \in X \mid g(x) \geq m\}) \leq \frac{1}{m} \int_X g \, d\mu$$

Dimostrazione. Poniamo $E := \{x \in X \mid g(x) \geq m\}$. Osserviamo che $g \geq m \cdot \mathbb{1}_E$. Dunque vale

$$\int_X g \, d\mu \geq \int_X m \cdot \mathbb{1}_E \, d\mu = m \cdot \mu(\{x \in X \mid g(x) \geq m\}).$$

□

Lemma (Borel-Cantelli). Dati $(E_n) \subset \mathcal{A}$ tali che $\sum \mu(E_n) < +\infty$, l'insieme

$$E := \{x \in X \mid x \in E_n \text{ frequentemente}\}$$

ha misura nulla. Cioè per μ -q.o. x vale $x \notin E_n$ definitivamente (in n).

Dimostrazione. Osserviamo che

$$E = \bigcap_{m=1}^{\infty} \left(\underbrace{\bigcup_{n=m}^{\infty} E_n}_{F_m} \right).$$

Allora

$$\underbrace{\mu(E)}_{F_m \downarrow E \text{ \& } \mu(F_1) < +\infty} = \lim_{m \rightarrow \infty} \mu(F_m) \leq \lim_{m \rightarrow \infty} \underbrace{\sum_{n=m}^{\infty} \mu(E_n)}_{\text{coda serie convergente}} = 0.$$

Osservazione. L'ipotesi $\sum \mu(E_n) < +\infty$ non può essere sostituita con $\mu(E_n) \rightarrow 0$.

Ora dimostriamo la proposizione.

Dimostrazione. Definiamo gli insiemi

$$A_n^\varepsilon := \{x \in X : |f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon\},$$

$$B_m^\varepsilon := \{x \in X : |f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon \text{ per qualche } n \geq m\} = \bigcup_{n=m}^{\infty} A_n^\varepsilon,$$

$$B^\varepsilon := \{x \in X : |f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon \text{ frequentemente}\} = \{x \in A_n^\varepsilon \text{ frequentemente}\} = \bigcap_{m=1}^{\infty} B_m^\varepsilon.$$

- i) Dobbiamo mostrare che $\lim_{m \rightarrow \infty} \mu(A_m^\varepsilon) = 0$. Per ipotesi, $f_n \rightarrow f$ quasi ovunque, cioè $\mu(B^\varepsilon) = 0$ per ogni $\varepsilon > 0$, ma $B_m^\varepsilon \downarrow B^\varepsilon$ e $\mu(X) < +\infty$. Allora

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} \mu(B_m^\varepsilon) = \mu(B^\varepsilon) = 0 \implies \lim_{m \rightarrow \infty} \mu(A_m^\varepsilon) = 0.$$

dato che $A_m^\varepsilon \subset B_m^\varepsilon$.

- ii) Dalla dimostrazione precedente abbiamo $\lim_{m \rightarrow \infty} \mu(B_m^\varepsilon) = 0$. Allora per ogni k esiste un m_k tale che $\mu(B_{m_k}^{1/k}) \leq \delta/2^k$. Poniamo $E := \bigcup_k B_{m_k}^{1/k}$ per ogni k ; allora $\mu(E) \leq \delta$. Inoltre,

$$\begin{aligned} x \in X \setminus E &\implies x \notin B_{m_k}^{1/k} \forall k \iff x \notin A_n^{1/k} \forall k, n \geq m_k \\ &\implies |f(x) - f_n(x)| < \frac{1}{k} \quad \forall k, n \geq m_k \\ &\implies \sup_{x \in X \setminus E} |f(x) - f_n(x)| \leq \frac{1}{k} \quad \forall k, n \geq m_k \\ &\implies f - f_m \text{ uniformemente su } X \setminus E. \end{aligned}$$

- iii) Dobbiamo mostrare che per ogni $\varepsilon > 0$ $\mu(A_n^\varepsilon) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$. Usando la disuguaglianza di Markov ottengo

$$\mu\left(A_n^\varepsilon = \left\{x \mid \overbrace{|f_n(x) - f(x)|^p}^g \geq \varepsilon^p\right\}\right) \leq \frac{1}{\varepsilon^p} \int_X g \, d\mu = \frac{1}{\varepsilon^p} \|f_n - f\|_p^p \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

- iii') Definiamo $E_n := \{x \mid |f_n(x) - f(x)| > \|f_n - f\|_\infty\}$ per ogni n , allora $\mu(E_n) = 0$. Poniamo $E = \bigcup_n E_n$ e $\mu(E) = 0$, dunque

$$\sup_{x \in X \setminus E} |f_n(x) - f(x)| \leq \|f_n - f\|_\infty \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

- iv) Per ipotesi, $f_n \rightarrow f$ in misura, cioè

$$\begin{aligned} \forall \varepsilon > 0 \quad \mu(A_n^\varepsilon) &\xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 \\ &\implies \forall k \exists n_k : \mu(A_{n_k}^{1/k}) \leq \frac{1}{2^k} \\ &\implies \sum_k \mu(A_{n_k}^{1/k}) < +\infty. \end{aligned}$$

Allora per Borel-Cantelli, si ha per μ -quasi ogni x , $x \notin A_{n_k}^{1/k}$ definitivamente in k , cioè $\|f_{n_k}(x) - f(x)\| < 1/k$ definitivamente in k , cioè $f_{n_k}(x) \xrightarrow{k} f(x)$.

- v) Vogliamo mostrare che $f_n \rightarrow f$ in $L^p \implies \exists n_k$ tale che $f_{n_k} \rightarrow f$ quasi ovunque. Consideriamo due casi
- se $p < +\infty$, allora $f_n \rightarrow f$ in $L^p \implies f_n \rightarrow f$ in misura, da cui $\exists n_k$ tale che $f_{n_k} \rightarrow f$ quasi ovunque
 - se $p = +\infty$, allora $f_n \rightarrow f$ uniformemente su $X \setminus E$ con $\mu(E) = 0 \implies f_n \rightarrow f$ puntualmente su $X \setminus E \implies f_n \rightarrow f$ quasi ovunque.

□

2.7 Controesempi sulle convergenze

Vediamo un controesempio che mostra che tutte le implicazioni sui vari tipi di convergenza sono ottimali ovvero

- i) $f_n \rightarrow f$ in misura $\not\Rightarrow f_n \rightarrow f$ q.o.
- ii) $f_n \rightarrow f$ in L^p con $p < +\infty \not\Rightarrow f_n \rightarrow f$ q.o.
- iii) $\mu(E_n) \rightarrow 0 \not\Rightarrow$ per q.o x si ha $x \notin E_n$ definitivamente.

Dimostrazione. Consideriamo gli insiemi $I_1 = [1, 1 + \frac{1}{2}]$, $I_2 = [1 + \frac{1}{2}, 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}]$, ...

$$I_n := \left[\sum_{k=1}^n \frac{1}{k}, \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k} \right]$$

e consideriamo la loro proiezione “modulo” $[0, 1]$ usando la funzione $p: \mathbb{R} \rightarrow [0, 1)$ *parte frazionaria* data da

$$p(x) := x - \lfloor x \rfloor$$

e chiamiamo $E_n := p(I_n)$. Per ogni n abbiamo che $|I_n| = |E_n| = 1/n$ e $\bigcup_n I_n = [1, +\infty)$ (in quanto $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = +\infty$) e quindi ogni $x \in [0, 1)$ appartiene ad E_n per infiniti n ed in particolare questo mostra la iii).

Per la i) basta notare che $\mathbb{1}_{E_n} \rightarrow 0$ in misura (in quanto $|E_n| \rightarrow 0$) ma $\mathbb{1}_{E_n} \not\rightarrow 0$ μ -q.o. dato che $x \in E_n$ per infiniti n , anzi $\forall x \in [0, 1)$ $\mathbb{1}_{E_n}(x) \not\rightarrow 0$ e la ii) segue analogamente. □

2.8 Approssimazioni di funzioni in L^p

Vediamo ora alcune classi di funzioni dense in L^p che risulteranno essere un utile strumento da usare nelle dimostrazioni.

Nota. Ricordiamo la nozione di insieme denso in uno spazio metrico. Sia (X, d) uno spazio metrico e $Y \subset X$. Allora Y è denso in X se e solo se per ogni $x \in X$, esiste una successione $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in Y tale che $x = \lim_n y_n$.

Per ora sia (X, \mathcal{A}, μ) in generale.

Proposizione 1. Le funzioni limitate in L^p sono dense in L^p .

Dimostrazione. Data $f \in L^p(X)$ cerchiamo una successione di funzioni $f_n \in L^p(X)$ limitate tali che $f_n \rightarrow f$ in L^p , consideriamo

$$f(x) := (f(x) \wedge n) \vee (-n)$$

vorremmo mostrare che $f_n \rightarrow f$ in L^p ovvero

$$\|f_n - f\|_p^p = \int_X |f_n - f|^p d\mu \rightarrow 0$$

intanto osserviamo che, per la *convergenza puntuale*, basta osservare che se $n \geq |f(x)|$ abbiamo che $\forall x \ f_n(x) = f(x) \implies f_n(x) \xrightarrow{n} f(x) \implies |f_n(x) - f(x)|^p \rightarrow 0$.

Per concludere basta applicare *convergenza dominata* usando come dominazione direttamente $|f(x) - f_n(x)| \leq |f(x)| \implies |f(x) - f_n(x)|^p \leq |f(x)|^p$ e notiamo che $|f|^p \in L^1(X)$. \square

Proposizione 2. Sia $\widetilde{\mathcal{F}} := \text{Span}(\{\mathbb{1}_E \mid E \in \mathcal{A}, \mu(E) < +\infty\})$, allora $\widetilde{\mathcal{F}}$ è denso in $L^p(X)$.

Dimostrazione. Data $f \in L^p(X)$ cerchiamo una successione che approssima f in $\widetilde{\mathcal{F}}$.

- *Caso 1:* Se $f \geq 0$ allora fissiamo $\varepsilon > 0$ e per ogni $k = 1, 2, \dots$ e poniamo

$$A_\varepsilon^k := \{x \mid k\varepsilon \leq f(x) \leq (k+1)\varepsilon\}$$

risulta che A_ε^k è misurabile ed ha misura finita¹. Ora consideriamo la successione di funzioni parametrizzata da ε data da

$$f_\varepsilon(x) := \sum_{1 \leq k \leq 1/\varepsilon^2} k\varepsilon \cdot \mathbb{1}_{A_\varepsilon^k}(x) \in \widetilde{\mathcal{F}}$$

Osserviamo che vale anche $\max f_\varepsilon(x) = \max\{k\varepsilon \mid k\varepsilon \leq f(x) \text{ e } k \leq 1/\varepsilon^2\}$ e mostriamo la seguente²

$$\int_X |f(x) - f_\varepsilon(x)|^p d\mu(x) \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0$$

- *Convergenza puntuale:* Per l'identità precedente abbiamo che $0 \leq f(x) - f_\varepsilon(x) \leq \varepsilon$ se $f(x) \leq 1/\varepsilon + \varepsilon$.
- *Dominazione:* Possiamo usare nuovamente $|f(x) - f_\varepsilon(x)|^p \leq |f(x)|^p < +\infty$ in quanto $f \in L^p(X)$.
- *Caso 2:* Sia $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ allora si può rifare la dimostrazione precedente oppure si può semplicemente considerare $f_\varepsilon := (f^+)_\varepsilon - (f^-)_\varepsilon$.

\square

Generalizziamo la proposizione al caso di $f: X \rightarrow \mathbb{R}^d$ come segue

¹È misurabile in quanto preimmagine di un misurabile, ed ha misura finita in quanto $f \in L^p(X)$.

²Notiamo che qui stiamo applicando il teorema di *convergenza dominata* su una famiglia parametrizzata da ε e non su una successione ma si può verificare facilmente che il teorema (ed anche gli altri risultati di convergenza di successioni di funzioni) si può estendere semplicemente prendendo $\varepsilon = 1/n$ per $n \rightarrow \infty$.

Proposizione 2bis (Generalizzata). Sia $\tilde{\mathcal{S}} := \left\{ \sum_i \alpha_i \mathbb{1}_{E_i} \mid \alpha_i \in \mathbb{R}^d, E_i \in \mathcal{A}, \mu(E_i) < +\infty \right\}$. Allora $\tilde{\mathcal{S}}$ è denso in $L^p(X; \mathbb{R}^d)$.

Dimostrazione. (Idea) Basta approssimare componente per componente. □

Sia ora X uno spazio metrico e $\{\text{aperti}\} \subset \mathcal{A}$.

Proposizione 3. Sia $\tilde{\mathcal{S}}_\ell := \{\sum_i \alpha_i \mathbb{1}_{E_i} \mid \alpha_i \in \mathbb{R}^d, E_i \in \mathcal{A}, \mu(E_i) < +\infty, E_i \text{ limitati}\}$ allora $\tilde{\mathcal{S}}_\ell$ è denso in $L^p(X; \mathbb{R}^d)$ per $p < +\infty$.

Dimostrazione. Si dimostra che $\tilde{\mathcal{S}}_\ell$ è denso in $\tilde{\mathcal{S}}$ che a sua volta, per la proposizione precedente, è denso in L^p . Dal lemma seguente si ottiene la tesi.

Lemma 1. Dato $E \in \mathcal{A}, \mu(E) < +\infty$ esiste $E_n \in \mathcal{A}$ con E_n limitati tali che $E_n \subset E$ e $\mu(E \setminus E_n) \rightarrow 0$ e quindi $\|\mathbb{1}_E - \mathbb{1}_{E_n}\|_p = \mu(E \setminus E_n)^{1/p} \xrightarrow{n} 0$ (e $\mathbb{1}_{E_n} \in \tilde{\mathcal{S}}_\ell$).

Dim. Dato E con $\mu(E) < +\infty$ prendiamo $x_0 \in X$ e poniamo $E_n := E \cap \mathcal{B}(x_0, n)$; $E_n \subset E$ e $E \setminus E_n \downarrow \emptyset \implies \mu(E \setminus E_n) \xrightarrow{n} 0$. □

Osservazione. In generale l'enunciato non vale per $p = +\infty$. Ad esempio, preso $L^\infty(\mathbb{R})$ e $f = 1$ non si può approssimare con funzioni a supporto limitato; in particolare, data g con supporto A limitato $|f - g| = 1$ su $\mathbb{R} \setminus A$ e siccome $|\mathbb{R} \setminus A| > 0$ abbiamo $\|f - g\|_\infty \geq 1$.

Ora siano $X \subset \mathbb{R}^n, \mu = \mathcal{L}^n$ e $C_C(\mathbb{R}^n) := \{\text{funzioni continue a supporto compatto}\}$, dove il **supporto** è definito come la chiusura dell'insieme dei punti in cui la funzione è non zero $\text{supp}(f) := \overline{\{x \mid f(x) \neq 0\}}$, in quanto per le funzioni continue l'insieme $\{x \mid f(x) \neq 0\}$ è sempre aperto e dunque mai veramente compatto, a parte quando è vuoto.

Proposizione 4. Le funzioni in $C_C(\mathbb{R}^n)$ ristrette a X sono dense in $L^p(X)$ per $p < +\infty$.

Vediamo prima alcuni lemmi.

Lemma 2. (di Urysohn) Dati C_0, C_1 chiusi disgiunti in X spazio metrico esiste una funzione $f: X \rightarrow [0, 1]$ continua tale che $f = 0$ su C_0 e $f = 1$ su C_1 .

Dimostrazione. Posta $d(x, C) = \inf\{d(x, y) \mid y \in C\}$ basta considerare

$$f(x) = \frac{d(x, C_0)}{d(x, C_0) + d(x, C_1)}.$$

Lemma 3. Dato $E \subset \mathbb{R}^n$ limitato (e quindi di misura finita) esiste $f_\varepsilon \in C_C(\mathbb{R}^n)$ tale che $f_\varepsilon \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \mathbb{1}_E$ in $L^p(\mathbb{R}^n)$ e quindi in $L^p(X)$.

Dimostrazione. Per regolarità della misura di Lebesgue abbiamo che per ogni ε esistono $C_\varepsilon \subset E \subset A_\varepsilon$ tali che $|A_\varepsilon \setminus C_\varepsilon| \leq \varepsilon$. Per il Lemma 2 possiamo definire la classe di funzioni $f_\varepsilon: \mathbb{R}^n \rightarrow [0, 1]$ continue tali che

$$f_\varepsilon = 1 \text{ su } C_\varepsilon \quad f_\varepsilon = 0 \text{ su } \mathbb{R}^n \setminus A_\varepsilon.$$

In particolare, sappiamo che su $A_\varepsilon \setminus C_\varepsilon$ vale $|f_\varepsilon - \mathbb{1}_E| \leq 1$. Allora,

$$\begin{aligned} \|f_\varepsilon - \mathbb{1}_E\|_p^p &= \int_{A_\varepsilon \setminus C_\varepsilon} |f_\varepsilon - \mathbb{1}_E|^p dx \leq \int_{A_\varepsilon \setminus C_\varepsilon} \mathbb{1}_{A_\varepsilon \setminus C_\varepsilon} dx = |A_\varepsilon \setminus C_\varepsilon|^{1/p} \leq \varepsilon^{1/p} \\ \implies \|f_\varepsilon - \mathbb{1}_E\|_p^p &\xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0. \end{aligned}$$

□

Dimostrazione Proposizione 4. Per la Proposizione 3 basta approssimare la classe delle funzioni a supporto limitato (e di misura finita). Dunque, per il Lemma 3 si ha la tesi.

2.9 Complementi su approssimazioni di funzioni in L^p

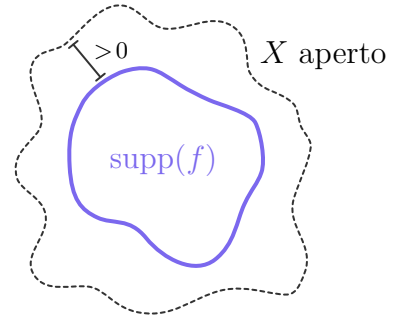
Sia X misurabile in \mathbb{R}^n con $\mu = \mathcal{L}^n$ su X . In precedenza abbiamo visto che

Proposizione 3. Le funzioni in $C_C(\mathbb{R}^n)$ ristrette a X sono dense in L^p se $p < +\infty$.

Osservazione. Si vede facilmente che $C_C(\mathbb{R}^n) \subset L^p(\mathbb{R}^n)$.

Domanda. Vale un risultato analogo per le funzioni $C_C(X)$?

Le funzioni continue a supporto compatto in X sono continue anche su \mathbb{R}^n solo se X è aperto, in quanto il supporto ha veramente distanza non nulla dal bordo e possiamo estendere con continuità la funzione a 0 fuori da X .



Proposizione 4. Sia X aperto di \mathbb{R}^n , $\mu = \mathcal{L}^n$ allora $C_C(X)$ è denso in L^p per ogni $p < +\infty$.

Dimostrazione.

- $\mathcal{S}_C := \{\text{funzioni semplici con supporto compatto in } X\}$ è denso in $L^p(X)$ per ogni $p < +\infty$. L'idea è di approssimare la classe delle funzioni semplici aventi dominio limitato. Data $f \in \mathcal{S}_I$ la approssimiamo con

$$f_n := f \cdot \mathbb{1}_{\{|x| < n\} \cap \{d(\partial X, x) > 1/n\}}.$$

Resta da verificare che tale successione converge a f in L^p .

- Dato E relativamente compatto¹ in X esiste $f_n \in C_C(X)$ tale che $f_n \rightarrow \mathbb{1}_E$ in L^p per ogni $p < +\infty$. □

La Proposizione 3 non vale per $p = +\infty$, intuitivamente in quanto data $f \in L^\infty(X)$ discontinua, se trovassimo $f_n \rightarrow f$ in $L^\infty(X)$ con f_n continue avremmo $f_n \rightarrow f$ uniformemente e dunque f continua. Per spiegare meglio il perché la Proposizione 3 non si estende al caso $p = +\infty$ consideriamo quanto segue.

Fatto. In generale vale che data $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ misurabile, $\|f\|_\infty \leq \sup_{x \in X} |f(x)|$ (detta anche *norma del sup*)

Esercizio. Se X è aperto² in \mathbb{R}^n e $\mu = \mathcal{L}^n$ e $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ continua, allora $\|f\|_\infty = \sup_{x \in X} |f(x)|$.

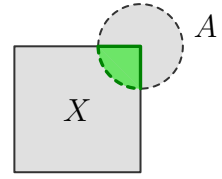
¹Un sottospazio relativamente compatto di uno spazio topologico è un sottoinsieme dello spazio topologico la cui chiusura è compatta.

²In particolare possiamo anche estenderci a $X \subseteq \mathbb{R}^n$ tali che ogni A aperto relativamente a X abbia misura positiva.

Soluzione. Se per assurdo $\exists x \in X$ tale che $\|f\|_\infty < |f(x)|$ allora la continuità di f implica che esiste un intorno di x in cui $\|f\|_\infty < |f(x)|$; ma un intorno contiene una palla aperta di misura positiva. \nexists

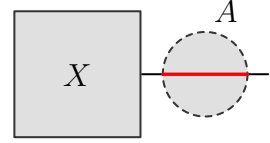
Consideriamo la funzione

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$



e vediamo che $\nexists f_n: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tale che $f_n \rightarrow f$ in L^∞ e $(f_n) \subset C_c(\mathbb{R})$.

Se esistesse $(f_n)_n$, allora sarebbe di Cauchy rispetto alla norma $\|\cdot\|_\infty$ allora per continuità $(f_n)_n$ è di Cauchy anche rispetto alla norma del sup $\implies f_n \rightarrow \tilde{f}$ uniformemente con \tilde{f} continua, quindi $\tilde{f} = f$ quasi ovunque ma questo non è possibile per la f definita sopra.



(In particolare dato $E = \{x \mid f(x) = \tilde{f}(x)\}$, prendiamo $x_n, y_n \in E$ tali che $x_n \uparrow 0$ e $y_n \downarrow 0$ ma i limiti di f sono 0 e 1 \nexists)

Teorema (di Lusin). Dato $X \subset \mathbb{R}^d, \mu = \mathcal{L}^d$ e data $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ o \mathbb{R}^m misurabile e $\varepsilon > 0$, esiste E aperto in X con $|E| \leq \varepsilon$ tale che f è continua su $X \setminus E$ (la restrizione di f a $X \setminus E$ è continua)

Osservazione. In generale f può essere non continua in tutti i punti di X , infatti E può essere denso e $X \setminus E$ avere parte interna vuota.

Dimostrazione. Basta trovare E misurabile (per ottenere E aperto si usa la regolarità della misura)

- *Caso 1:* $f \in L^1(X)$ e $|X| < +\infty$

Abbiamo che $f \in L^1 \implies \exists f_n$ continue tali che $f_n \rightarrow f$ in $L^1 \implies f_n \rightarrow f$ in misura e per Severini-Egorov esiste E tale che $|E| \leq \varepsilon$ e $f_n \rightarrow f$ uniformemente su $X \setminus E \implies f$ è continua su $X \setminus E$.

- *Caso 2:* f qualunque misurabile e $|X| < +\infty$

Lemma. Dati X, \mathcal{A}, μ con $\mu(X) < +\infty$ e data $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ misurabile e $\varepsilon > 0$ esiste F misurabile con $\mu(F) \leq \varepsilon$ tale che f è limitata su $X \setminus F$.

Dimostrazione. $\forall m > 0$ sia $F_m := \{x \mid |f(x)| > m\}$ allora $F_m \downarrow \emptyset \implies \mu(F_m) \downarrow 0$ e quindi esiste m tale che $\mu(F_m) \leq \varepsilon$.

Quindi data f qualunque misurabile e $|X| < +\infty$ esiste F misurabile tale che $|F| \leq \varepsilon/2$ e con f limitata su $X \setminus F \implies f \in L^\infty(X \setminus F) \subset L^1(X \setminus F)$, dunque per il *Caso 1* esiste E misurabile tale che $|E| \leq \varepsilon/2$ e f è continua su $X \setminus (E \cup F)$ e $\mu(E \cup F) \leq \varepsilon$

- *Caso 3:* f qualunque misurabile

Per ogni n poniamo $X_n := X \cap B(0, n)$ per il *Caso 2* esistono E_n misurabili con $|E_n| \leq \varepsilon/2^n$ tali che f è continua su $X_n \setminus E_n$, infine prendo $E := \bigcup_{n=1}^\infty E_n$ con $\mu(E) \leq \varepsilon \implies f$ è continua su $X_n \setminus E$ per ogni $n \implies f$ è continua su $X \setminus E$.

□

Lemma (di estensione di Tietze). Dato X spazio metrico e $C \subset X$ chiuso, $f: C \rightarrow \mathbb{R}$ continua allora f si estende a una funzione continua su X .

Usando questo lemma possiamo enunciare nuovamente il teorema precedente come segue

Teorema (di Lusin'). Data $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ misurabile e $\varepsilon > 0$, esiste E aperto con $|E| \leq \varepsilon$ e $g: X \rightarrow \mathbb{R}$ continua tale che $f = g$ su $X \setminus E$.
Inoltre se $f \in L^p(X)$ e $p < +\infty$ si può anche chiedere che $\|f - g\|_p \leq \varepsilon$.

2.10 Appendice

Proposizione. Siano V, W spazi normati, $T: V \rightarrow W$ lineare. Sono fatti equivalenti

- i) T è continua in 0.
- ii) T è continua.
- iii) T è lipschitziana, cioè esiste una costante $c < +\infty$ tale che $\|Tv - Tv'\|_W \leq c \|v - v'\|_V$.
- iv) Esiste una costante c tale che $\|Tv\|_W \leq c \|v\|_V$ per ogni $v \in V$.
- v) Esiste una costante c tale che $\|Tv\|_W \leq c$ per ogni $v \in V$, $\|v\|_V = 1$.

Dimostrazione. v) \Rightarrow iv). Vale la seguente

$$\|Tv\|_W \underset{v=\lambda\tilde{v}, \|\tilde{v}\|_V=1}{=} |\lambda| \|T\tilde{v}\|_W \leq c\lambda = c \|v\|_V.$$

iv) \Rightarrow iii). Vale la seguente

$$\|Tv - Tv'\|_W = \|T(v - v')\|_W \leq c \|v - v'\|_W.$$

iii) \Rightarrow ii) e ii) \Rightarrow i) sono ovvie.

i) \Rightarrow v). T continua in 0, dunque esiste $\delta > 0$ tale che

$$\|Tv - T0\|_W \leq 1 \quad \text{se} \quad \|v - 0\|_V \leq \delta,$$

cioè

$$\|Tv\| \leq 1 \quad \text{se} \quad \|v\| \leq \delta,$$

da cui segue che $\|Tv\| \leq 1/\delta$ se $\|v\| \leq 1$. □

Osservazione. Le costanti ottimali iii), iv), v) sono uguali e valgono

$$c = \sup_{\|v\|_V \leq 1} \|Tv\|_W.$$

Esempi.

- i) Sia (X, \mathcal{A}, μ) coma al solito, con $\mu(X) < +\infty$. Allora, dati $1 \leq p_1 < p_2 \leq +\infty$, vale

$$L^{p_2}(X) \subset L^{p_1}(X). \quad (\star)$$

Inoltre, l'inclusione $i: L^{p_2}(X) \rightarrow L^{p_1}(X)$ è continua.

Dimostrazione. La dimostrazione di (\star) segue dalla stima

$$\|u\|_{p_1} \underbrace{\leq}_{\text{Hölder generalizzato}} \|\mathbb{1}_X\|_q \|u\|_{p_2} \quad \text{dove} \quad q = \frac{p_1 p_2}{p_2 - p_1}.$$

Dove

$$\|\mathbb{1}_X\|_{\frac{p_1 p_2}{p_2 - p_1}} \|u\|_{p_2} = (\mu(X))^{\frac{1}{p_1} - \frac{1}{p_2}} \|u\|_{p_2}.$$

Quanto sopra soddisfa la condizione al punto iv). \square

ii) L'applicazione $L^1(X) \ni u \mapsto \int u \, d\mu \in \mathbb{R}$ è continua.

Dimostrazione. Infatti, vale

$$\left| \int_X u \, d\mu \right| \leq \int_X |u| \, d\mu = \|u\|_1.$$

Quanto sopra soddisfa la condizione al punto iv). \square

iii) Cosa possiamo dire invece dell'applicazione $L^p(X) \ni u \mapsto \int u \, d\mu \in \mathbb{R}$? Se $\mu(X) < +\infty$ la continuità segue dagli esempi i) e ii) sopra. Se invece $\mu(X) = +\infty$? Per esempio $L^2(\mathbb{R})$? [TO DO].

2.11 Esercizi

2.11.1 Generalizzazioni disuguaglianza di Hölder

(1) Dimostrare che date f, g misurabili ed $r, p_1, p_2 > 0$ tali che $1/r = 1/p_1 + 1/p_2$. Allora vale

$$\|f \cdot g\|_r \leq \|f\|_{p_1} \cdot \|g\|_{p_2}.$$

Suggerimento. Usare Hölder osservando che $1 = \frac{r}{p_1} + \frac{r}{p_2} = \frac{1}{(p_1/r)} + \frac{1}{(p_2/r)}$.

Dimostrazione. Vale quanto segue.

$$\begin{aligned} \|f \cdot g\|_r^r &= \int_X |f \cdot g|^r \, d\mu = \int_X |f^r| \cdot |g^r| \, d\mu \stackrel{\text{Holder}}{\leq} \|f^r\|_{p_1/r} \cdot \|f^r\|_{p_2/r} \\ &= \left(\int_X |f|^{r \cdot p_1/r} \right)^{r/p_1} \cdot \left(\int_X |g|^{r \cdot p_2/r} \right)^{r/p_2} = \|f\|_{p_1}^r \cdot \|g\|_{p_2}^r = (\|f\|_{p_1} \cdot \|g\|_{p_2})^r \\ &\implies \|f \cdot g\|_r \leq \|f\|_{p_1} \cdot \|g\|_{p_2}. \end{aligned}$$

\square

(2) Dimostrare che date f_1, \dots, f_n misurabili e $p_i > 0$ tali che $1/p_1 + \dots + 1/p_n = 1$ si ha

$$\|f_1 \cdots f_n\|_1 \leq \|f_1\|_{p_1} \cdots \|f_n\|_{p_n}.$$

Suggerimento. Fare il primo passo dell'induzione e usare la formula precedente scegliendo r in modo corretto.

Dimostrazione. Dimostriamo per induzione la seguente proprietà più generale.

Siano f_1, \dots, f_n misurabili e $r > 1$. Allora, per i $p_i > 0$ tali che $1/p_1 + \dots + 1/p_n = r$ si ha

$$\|f_1 \cdots f_n\|_r \leq \|f_1\|_{p_1} \cdots \|f_n\|_{p_n}.$$

Passo base. Vero per il punto (1).

Passo induttivo $[n-1 \Rightarrow n]$. Supponiamo di aver dimostrato per ogni $r > 1$ la disuguaglianza sopra. Allora

$$\|f_1 \cdots f_n\|_r = \|(f_1 \cdots f_{n-1}) \cdot f_n\|_r \stackrel{(1)}{\leq} \|f_1 \cdots f_{n-1}\|_p \cdot \|f_n\|_{p_n}, \quad \text{dove } r = 1/p + 1/p_n.$$

Notando che $1/p = 1/r - 1/p_{n-1} = 1/p_1 + \dots + 1/p_{n-1}$ e usando l'ipotesi induttiva otteniamo la tesi. \square

2.11.2 Esercizi su spazi $L^p(X)$ al variare di p e dello spazio X

Sia $X \subset \mathbb{R}^n$, μ la misura di Lebesgue e $1 \leq p_1 \leq p_2$.

Domanda. Possiamo confrontare gli spazi $L^{p_1}(X)$ e $L^{p_2}(X)$? In generale no.

Vediamo informalmente perché. Posto $X = (0, +\infty)$, gli integrali

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+x)^{\beta p}} dx, \quad \int_0^{+\infty} \frac{1}{x^{\beta p}} \cdot \mathbb{1}_{[0,1]}(x) dx = \int_0^1 \frac{1}{x^{\beta p}} dx$$

sono maggiorati dall'integrale di $1/x^\alpha$ dove l'esponente α è rispettivamente più piccolo e più grande di $\beta \cdot p$.

Utilizziamo questa intuizione per vedere formalmente che gli spazi $L^p(0, +\infty)$ non sono confrontabili.

Cerchiamo una funzione $f \in L^{p_1}(0, +\infty) \setminus L^{p_2}(0, +\infty)$ e una funzione $g \in L^{p_2}(0, +\infty) \setminus L^{p_1}(0, +\infty)$. La funzione f definita come segue

$$f(x) := \begin{cases} 1/x^\beta & x \in (0, 1) \\ 0 & x \geq 1 \end{cases}$$

ha integrale

$$\int_0^{+\infty} f(x)^{p_1} dx = \int_0^1 \frac{1}{x^{\beta p_1}} dx < +\infty \iff \beta \cdot p_1 < 1$$

e

$$\int_0^{+\infty} f(x)^{p_2} dx = \int_0^1 \frac{1}{x^{\beta p_2}} dx = +\infty \iff \beta \cdot p_2 \geq 1.$$

Dunque, basta prendere $\beta \in [1/p_2, 1/p_1)$.

Ora cerchiamo $g \in L^{p_2}(0, +\infty) \setminus L^{p_1}(0, +\infty)$. Definiamo $g(x)$ come segue

$$g(x) := \frac{1}{(1+x)^\alpha}$$

da cui

$$\int_0^{+\infty} g(x)^{p_2} dx < +\infty \iff \alpha \cdot p_2 > 1 \quad \text{e} \quad \int_0^{+\infty} g(x)^{p_1} dx = +\infty \iff \alpha \cdot p_1 \leq 1$$

Conclusione. In generale non c'è confrontabilità fra gli spazi L^p . La confrontabilità, dipende infatti dall'insieme X su cui sono definiti.

Nota. Un caso particolare è dato ponendo $p_1 < p_2$ e $\mu(X) < +\infty$. In tal caso $L^{p_2}(X) \subset L^{p_1}(X)$. Data $f \in L^{p_2}(X)$, cioè con $\int_X |f|^{p_2} d\mu < +\infty$ vediamo che $\int_X |f|^{p_1} d\mu < +\infty$.

Usiamo Hölder:

$$\begin{aligned} \int_X |f|^{p_1} d\mu &\leq \left(\int_X \overbrace{|f(x)|^{p_1 p_2}}^{|h(x)|^p} d\mu \right)^{1/p_2} \cdot \left(\int_X 1^q d\mu \right)^{1/q} \underset{p=p_2/p_1}{\leq} \left(\int_X |f|^{p_2} d\mu \right)^{p_1/p_2} \left(\int_X 1^q d\mu \right)^{1/q} \\ &\underset{q=(1-\frac{1}{p})^{-1}=\frac{p}{p-1}=\frac{p_2/p_1}{p_2-p_1}}{=} \|f\|_{L^{p_2}(X)}^{p_1} \cdot \mu(X)^{\frac{p_2-p_1}{p_2}}. \end{aligned}$$

Dunque

$$\|f\|_{L^{p_1}(X)} \leq \|f\|_{L^{p_2}(X)} \cdot \mu(X)^{\frac{p_2-p_1}{p_1 p_2}}.$$

L'inclusione

$$\begin{aligned} i: L^{p_2} &\rightarrow L^{p_1}(X) \\ f &\mapsto f \end{aligned}$$

è ben definita per quanto fatto sopra.

Esercizio. [TO DO] Vedere con quale topologia l'inclusione risulta continua.

Esercizio. [TO DO] Dato $p \geq 1$, stabilire se esistono $X, \mu, f \in L^p(X)$ e $f \notin L^q(X)$ per ogni $q \neq p, q \geq 1$.

Suggerimento. Pensare a $X = (0, +\infty)$, μ misura di Lebesgue.

Osservazione. $L^p(X)$ è uno spazio vettoriale di dimensione infinita, ossia ogni base algebrica ha cardinalità infinita. Vediamo il caso $X = (0, 1)$. Per trovare una base infinita, cerchiamo per ogni $N \in \mathbb{N}$, un insieme di funzioni $f_1, \dots, f_N \in L^p(0, 1)$ tali che siano linearmente indipendenti. Vale a dire, presi $\lambda_1, \dots, \lambda_N \in \mathbb{R}$ vale $\lambda_1 f_1 + \dots + \lambda_N f_N = 0$ se e solo se $\lambda_1 = \dots = \lambda_N = 0$.

Ad esempio, definiamo $f_i := \mathbb{1}_{i/N, (i+1)/N}$ (questa costruzione si può riprodurre per ogni $N \in \mathbb{N}$).

2.11.3 Sottospazi limitati, chiusi e compatti di L^p

Ricordiamo che, essendo $L^p(X)$ uno spazio metrico, dato $Y \subset L^p$ vale la seguente caratterizzazione:

Y è compatto $\iff Y$ è compatto per successioni $\iff Y$ chiuso e totalmente limitato.

Osservazione. $Y \subset L^p(X)$ è un sottoinsieme che eredita la norma $\|\cdot\|_{L^p}$:

Y è completo $\iff Y$ è chiuso.

Osservazione. In L^p i sottoinsiemi chiusi e limitati non sono compatti¹! In particolare le palle

$$Y = \{f \in L^p \mid \|f\|_{L^p} \leq 1\}$$

¹Uno spazio metrico è compatto se solo se è completo e totalmente limitato. Inoltre, uno spazio metrico X si dice totalmente limitato se $\forall \varepsilon > 0$ esiste $B_\varepsilon^1, \dots, B_\varepsilon^n$ tale che $X \subset \bigcup_{i=1}^n B_\varepsilon^i$.

non sono compatte.

Ad esempio, mostriamo che in $L^p(0, 1)$ le palle

$$B = \{f \in L^p \mid \|f\|_{L^p} \leq 1\}$$

non sono compatte. Per farlo, esibiamo una successione $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset B$ che non ammette sottosuccessioni convergenti. La costruiamo in modo che non abbia sottosuccessioni di Cauchy

$$f_n: (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}, \quad \|f_n - f_m\|_{L^p} \geq c_0 > 0 \quad \forall n \neq m.$$

Cerco $A_n \subset (0, 1)$ tale che $|A_n \cap A_m| = 0$ per ogni $n \neq m$. Definiamo f_n come segue

$$f_n(x) := \begin{cases} 0 & \text{se } x \in (0, 1) \setminus (1/(n+1), 1/n) \\ c_n > 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

dove c_n è tale che

$$\left(\int_{1/(n+1)}^{1/n} c_n^p \right)^{1/p} = 1 \iff c_n^p \cdot (1/n - 1/(n+1)) = 1 \iff c_n^p = n \cdot (n+1).$$

Calcoliamo ora $\|f_n - f_m\|_{L^p}^p$ con $n \neq m$:

$$\int_0^1 |f_n(x) - f_m(x)|^p dx = \int_{(1/n, 1/(n+1)) \cup (1/(m+1), 1/m)} |f_n - f_m|^p dx = \int_{1/(n+1)}^{1/n} |f_n|^p dx + \int_{1/(m+1)}^{1/m} |f_m|^p dx = 1 + 1 = 2.$$

Si osserva che quanto detto sopra vale anche per $p = +\infty$.

Esercizio. [TO DO] Sia $E = \{f \in L^1(1, +\infty) \mid |f(x)| \leq 1/x^2 \text{ e } x \in [1, +\infty)\}$.

- E è limitato in L^1 ?
- E è chiuso in L^1 ?
- E è compatto in L^1 ?

Soluzione.

i) Dimostriamo che $\|f\|_{L^1} < C$ per ogni $f \in E$.

$$\|f\|_{L^1} = \int_1^\infty |f(x)| dx \leq \int_1^\infty 1/x^2 dx < C.$$

ii) E è chiuso. Ci basta dimostrare che se $\{f_n\} \in E$ è convergente a f allora $f \in E$. Questo equivale a dimostrare che $|f(x)| < 1/x^2$. Dal fatto che $\{f_n\} \in E$ è convergente in L^1 , abbiamo che esiste una sottosuccessione $\{f_{n_k}\}$ che converge puntualmente a f . Essendo che $|f_{n_k}| < 1/x^2$ per ogni $x \in [1, +\infty)$, per la continuità del modulo segue la tesi.

iii) Da fare [TO DO]

Esercizio. [TO DO]

- Dire se $f_n(x) = x^n$, $n = 0, \dots, N$ è un insieme di funzioni linearmente indipendenti in $L^p([0, 1])$.

- Dire se $\{f_n\} \subset L^p(0, 1)$ è compatta in $L^p(0, 1)$.

Suggerimento. Studiare il limite puntuale.

Soluzione.

i) Ovvio

ii) Dimostriamo che non è compatta. Se per assurdo lo fosse, dalla successione (f_n) potremmo estrarre una sottosuccessione convergente (f_{n_k}) in $L^p([0, 1])$; denotiamo il limite con f . Per i risultati visti sulla convergenza, da (f_{n_k}) potremmo estrarre una sottosuccessione convergente quasi ovunque a f . Ma questo è assurdo perché $\lim_n f_n = +\infty$.

2.11.4 Spazi ℓ^p

Prendiamo $X = \mathbb{N}$ e $\mu = \#$ la misura che conta i punti.

Osservazione. Definiamo

$$\ell^p = L^p(\mathbb{N}, \#) = \left\{ (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \left| \sum_{n=0}^{+\infty} |x_n|^p < +\infty \right. \right\}$$

con $p \geq 1$ e $p \neq +\infty$, e

$$\ell^\infty = \{\text{successioni limitate}\} = \left\{ (x_n) \left| \sup_{n \in \mathbb{N}} |x_n| < +\infty \right. \right\}.$$

Esempio (di insieme non compatto in ℓ^1). Consideriamo la successione (e_i) definita come

$$(e_i)_n := \begin{cases} 0 & \text{se } n \neq i \\ 1 & \text{se } n = i \end{cases}$$

si osserva inoltre che le successioni così definite sono linearmente indipendenti e generano se sono infiniti.

Esempio (di insieme compatto in ℓ^1). Sia $F = \{(x_n)_n \in \ell^1 \mid |x_n| \leq 1/n^2 \quad \forall n \in \mathbb{N}\}$. Noto subito che F è limitato, infatti, presa

$$\underline{x} = (x_n) \in F, \quad \|\underline{x}\|_{\ell^1} = \sum_{n=0}^{+\infty} |x_n| \leq \sum_{n=0}^{+\infty} 1/n^2 < +\infty.$$

F è anche chiuso.

Osservazione. Data una successione $(\underline{x}^k) \subset \ell^1$, se $\underline{x}^k \xrightarrow{\ell^1} \underline{x}^\infty$, vuol dire che

$$\|\underline{x}^k - \underline{x}^\infty\|_{\ell^1} = \sum_{n=0}^{+\infty} |x_n^k - x_n^\infty| \xrightarrow{k} 0.$$

In particolare, per ogni $n \in \mathbb{N}$ fissato, $\lim_k (x_n^k - x_n^\infty) = 0$.

F è chiuso perché se $(\underline{x}^k) \subset F$ e $\underline{x}^k \xrightarrow{\ell^1} \underline{x}^\infty$, allora per ogni $n \in \mathbb{N}$ vale

$$|x_n^k| \leq 1/n^2 \quad \text{e} \quad \underbrace{\lim_{k \rightarrow +\infty} |x_n^k|}_{x_n^\infty} \leq 1/n^2.$$

Dimostriamo che è compatto per successioni. Prendiamo $(x^k) \subset F$, ogni componente x_n è equilimitata, quindi a meno di sottosuccessioni $x_n^{k_j}$ converge a x_n^∞ . A meno di diagonalizzare, possiamo supporre che la successione k_j non dipenda da n . Inoltre gli elementi $x_n^{k_j}$ sono dominati da $y = (1/n^2)$. Concludiamo usando il teorema di convergenza dominata di Lebesgue.

2.11.5 Continuità operatori lineari

Data $T: X \rightarrow Y$ lineare tra X, Y spazi normati, allora T è continua se e solo se esiste $C > 0$ tale che $\|T(x)\|_Y \leq C \|x\|_X$ per ogni $x \in X$.

Applichiamo questo risultato.

- i) Sia $X = \mathbb{R}^d$. L'applicazione $L^1(\mathbb{R}^d) \ni u \mapsto \int_{\mathbb{R}^d} u \, dx$ è lineare e continua in quanto limitata. Infatti:

$$|T(u)| = \left| \int_{\mathbb{R}^d} u \, dx \right| \leq \int_{\mathbb{R}^d} |u| \, dx = \|u\|_{L^1(\mathbb{R}^d)}.$$

- ii) Studiamo ora il caso per $p > 1$. Data $u \in L^p(\mathbb{R}^d)$, l'applicazione

$$u \mapsto \int_{\mathbb{R}^d} u \, dx$$

potrebbe non essere ben definita.

Ad esempio se restringiamo il dominio a $L^p(\mathbb{R}^d) \cap L^1(\mathbb{R}^d)$ l'applicazione sopra è ben definita, ma in generale non è continua. Più formalmente, la mappa

$$T: (L^p \cap L^1(\mathbb{R}^d), \|\cdot\|_{L^p}) \rightarrow \mathbb{R}$$

è lineare ma non continua.

Studiamo il caso reale, ovvero $d = 1$.

Per verificare quanto sopra, utilizziamo la definizione di continuità per successioni. Definiamo una successione di funzioni a supporto compatto u_n , che sappiamo essere in tutti gli spazi L^p , e verifichiamo che $\lim_n T(u_n) \neq T(u_\infty)$ dove $u_\infty := \lim_n u_n$.

Definiamo la successione come segue:

$$u_n(x) = \frac{1}{n} \mathbb{1}_{[n, 2n]} = \begin{cases} \frac{1}{n} & \text{se } n \leq x \leq 2n \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Noto quanto segue

- $u_\infty = 0$, infatti, posto $E_n = [n, 2n]$

$$\|u_n - 0\|_{L^p(\mathbb{R})}^p = \|u_n\|_{L^p(\mathbb{R})}^p = \int_{\mathbb{R}} u_n^p(x) \, dx = \frac{1}{n^p} \cdot |E_n| = \frac{n}{n^p} = \frac{1}{n^{p-1}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

- $T(u_n) \equiv 1$, infatti

$$T(u_n) = \int_{\mathbb{R}} u_n \, dx = \frac{1}{n} |E_n| = 1.$$

In conclusione, rispetto alla convergenza in L^p vale $T(u_n) \not\rightarrow T(u_\infty) = T(0) = 0$.

Un altro modo per dimostrare quanto sopra è verificare che, per ogni $C > 0$, esiste una funzione $u \in L^p(\mathbb{R}^d) \cap L^1(\mathbb{R}^d)$ tale per cui

$$\left| \int_{\mathbb{R}} u \, dx \right| > C \left(\int_{\mathbb{R}} |u|^p \, dx \right)^{1/p}.$$

Notiamo che questo è proprio l'esercizio che segue.

Esercizio. Fissato $C > 0$, trovare $u \in L^p \cap L^1(\mathbb{R})$ tale che

$$\left| \int_{\mathbb{R}} u \, dx \right| > C \|u\|_{L^p(\mathbb{R})} \quad (\star)$$

Dimostrazione. Fissato $C > 0$, cerchiamo una funzione in L^p il cui integrale in modulo sia maggiore di C per la sua norma L^p . Per trovare u consideriamo la successione di funzioni definita come segue

$$f_n = \begin{cases} 1/x & 1 \leq x \leq n \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}.$$

Le funzioni f_n sono a supporto compatto e stanno in ogni L^p . Notiamo che $f_n \uparrow f$ definita come

$$f = \begin{cases} 1/x & x > 1 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

ed $f \in L^p$ per ogni $p > 1$. In particolare, $\left(\int_{\mathbb{R}} |f_n|^p \right)^{1/p} \leq \left(\int_{\mathbb{R}} |f|^p \right)^{1/p} \leq +\infty$ per ogni n .

Quindi il secondo membro di (\star) è maggiorato da una costante che non dipende da n . D'altra parte, per Beppo Levi $\lim_n \int_{\mathbb{R}} f_n \, dx = \int_{\mathbb{R}} f \, dx$ che non sta in L^1 . In conclusione, esiste un n abbastanza grande per cui vale (\star) . \square

Esercizio. Sia $p \geq 1$ e $E = \left\{ u \in L^p(-1, 1) : \int_{-1}^1 u \, dx = 0 \right\}$.

i) Dire se E è limitato in $L^p(-1, 1)$.

ii) Dire se E è chiuso in $L^p(-1, 1)$.

Soluzione.

i) Dimostrare che E è limitato in $L^p(-1, 1)$ equivale a dimostrare che esiste $M > 0$ tale che ogni $u \in L^p(-1, 1)$, $\int_{-1}^1 u \, dx = 0$ verifica $\|u\|_{L^p} \leq M$.

Vediamo che E non è limitato. Preso $M > 0$, riesco sempre a trovare una funzione maggiore di M in norma. Ad esempio la funzione definita come

$$u(x) := \begin{cases} M & \text{se } x \in (0, 1) \\ -M & \text{se } x \in (-1, 0) \end{cases}$$

ha norma $\|u\|_{L^p}^p = 2M^p$.

Nota. Aveva senso cercare il controesempio nella classe delle funzioni dispari e limitate, perché hanno media zero, e perché sono in tutti gli L^p .

ii) Vediamo che E è chiuso.

Nota. Possiamo dimostrarlo usando i teoremi di convergenza, ma seguiremo un'altra strada.

- *Caso* $p > 1$. Definiamo l'operatore

$$T: L^p(-1, 1) \rightarrow \mathbb{R} \\ u \mapsto \int_{-1}^1 u \, dx$$

è ben definito. Infatti, per Hölder vale

$$\left| \int_{-1}^1 1 \cdot u \, dx \right| \leq \left(\int_{-1}^1 |u|^p \, dx \right)^{1/p} (1^q)^{1/q}$$

dove $q = \frac{p}{p-1}$. Allora

$$|T(u)| \leq \|u\|_{L^p(-1,1)} \cdot 2^{\frac{p}{p-1}}.$$

Dunque T è continuo in L^p per ogni $p > 1$.

- *Caso* $p = 1$. L'operatore sopra è continuo anche per $p = 1$. Grazie alla stima vista prima

$$|T(u)| = \left| \int_{-1}^1 u \, dx \right| \leq \int_{-1}^1 |u| \, dx = \|u\|_{L^1}.$$

Dunque T è continua e $T^{-1}(0) = E$, dunque E è chiuso.

Esercizio. [TO DO] Sia $p \geq 1$. Definiamo

$$F = \left\{ v \in L^p(\mathbb{R}) \mid \int_0^1 v(x) \, dx - 2 \int_{-1}^0 v(x) \, dx = 3 \right\}.$$

Dire se F è chiuso in $(L^p(\mathbb{R}), \|\cdot\|_{L^p(\mathbb{R})})$.

Esercizio. [TO DO] Sia

$$G = \left\{ v \in L^p(0, 2\pi) \mid \int_0^{2\pi} v(x) \sin(x) \, dx = 1 \right\}.$$

Dire se G è chiuso in $L^2(0, 2\pi)$.

Domanda. Dato $L^p(X, \mu)$ e V sottospazio di $L^p(X, \mu)$, posso dire che V è chiuso?

In generale no! Infatti esistono sottospazi densi in $L^p(X, \mu)$.

Ad esempio in ℓ^2 consideriamo l'insieme denso

$$V = \{ \{x_n\} \mid x_n = 0 \text{ definitivamente} \}.$$

Vediamo che non è chiuso. Sia $\underline{x} \in \ell^2$, definita come $\underline{x} = \{1/n\}_{n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}}$, diciamo che $\underline{x} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \underline{x}^n$ dove

$$x_n^k = \begin{cases} \frac{1}{n} & 1 \leq n \leq k \\ 0 & n > k, n = 0 \end{cases}$$

abbiamo che

$$\|\underline{x} - \underline{x}^k\|_{\ell^2}^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |x_n - x_n^k|^2 = \sum_{n=k+1}^{+\infty} |x_n|^2 = \sum_{n=k+1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} 0.$$

Vediamo un altro esempio. Siano $X = \mathbb{R}$, μ la misura di Lebesgue e $p > 1$. In tal caso, l'insieme $L^p \cap L^1(\mathbb{R})$ è un sottospazio denso in $(L^1(\mathbb{R}), \|\cdot\|_{L^1})$ e $(L^p(\mathbb{R}), \|\cdot\|_{L^p})$.

Nota. L'insieme $L^2(\mathbb{R}) \cap L^1(\mathbb{R})$ è un sottospazio proprio di $L^1(\mathbb{R})$. Diciamo che non è chiuso in $\|\cdot\|_{L^1(\mathbb{R})}$ perché è denso. Infatti,

$$C_C(\mathbb{R}) \subset L^2(\mathbb{R}) \cap L^1(\mathbb{R}).$$

Capitolo 3

Convoluzione

Definizione. Date $f_1, f_2: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ misurabili, il **prodotto di convoluzione** $f_1 * f_2$ è la funzione (da \mathbb{R}^d a \mathbb{R}) data da

$$f_1 * f_2(x) = \int_{\mathbb{R}^d} f_1(x-y)f_2(y) \, dy$$

Osservazioni.

- i) La definizione sopra è ben posta se $f_1, f_2 \geq 0$ ($f_1 * f_2(x)$ può essere anche $+\infty$). In generale non è ben posta per funzioni a valori reali (non è detto che l'integrale esista).

Ad esempio, se prendiamo $f_1 = 1$ e $f_2 = \sin x$ con $d = 1$, allora $f_1 * f_2(x)$ non è definito per alcun x .

- ii) Se $f_1 * f_2(x)$ esiste, allora $f_1 * f_2(x) = f_2 * f_1(x)$, infatti

$$f_1 * f_2(x) = \int_{\mathbb{R}^d} f_1(x-y)f_2(y) \, dy = \left(\begin{matrix} t := x-y \\ dt = dy \end{matrix} \right) = \int_{\mathbb{R}^d} f_1(t)f_2(x-t) \, dt = f_2 * f_1(x).$$

- iii) È importante che f_1, f_2 siano definite su \mathbb{R}^d e che la misura sia quella di Lebesgue.

In realtà, si può generalizzare quanto sopra rimpiazzando $(\mathbb{R}^d, \mathcal{L}^d)$ con (G, μ) , dove G è un gruppo commutativo e μ una misura su G invariante per traslazione. Per esempio, \mathbb{Z} con la misura che conta i punti. Cioè $f_1, f_2: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}$, vale

$$f_1 * f_2(n) := \sum_{m \in \mathbb{Z}} f_1(n-m)f_2(m).$$

- iv) Data f distribuzione di massa (continua) su \mathbb{R}^3 , il potenziale gravitazionale generato è

$$v(x) = \int_{y \in \mathbb{R}^d} \frac{1}{|x-y|} \rho(y) \, dy$$

cioè $v = g * \rho$, dove $g(x) = 1/|x|$ è il potenziale di una massa puntuale in 0.

- v) Se X_1, X_2 sono variabili aleatorie (reali) con distribuzione di probabilità continua p_1, p_2 e X_1, X_2 sono indipendenti, allora $X_1 + X_2$ ha distribuzione di probabilità $p_1 * p_2$. (Facile per X_1, X_2 in \mathbb{Z}).

Proposizione 1. Se $|f_1| * |f_2|(x) < +\infty$ allora $f_1 * f_2(x)$ è ben definito, in quanto $f_1 * f_2(x) \leq |f_1 * f_2(x)| \leq |f_1| * |f_2|(x)$.

Dimostrazione. Basta osservare che,

$$\begin{aligned} f_1 * f_2(x) &= \int_{\mathbb{R}^d} f_1(x-y) \cdot f_2(y) \, dy \leq \left| \int_{\mathbb{R}^d} f_1(x-y) \cdot f_2(y) \, dy \right| \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^d} |f_1(x-y) \cdot f_2(y)| \, dy = |f_1| * |f_2|(x) < +\infty. \end{aligned}$$

□

Corollario 2. Se $|f_1| * |f_2| \in L^p(\mathbb{R}^d)$ con $1 \leq p \leq +\infty$ allora $f_1 * f_2(x)$ è ben definito per quasi ogni $x \in \mathbb{R}^d$ e $\|f_1 * f_2\|_p \leq \| |f_1| * |f_2| \|_p$.

Dimostrazione. Dato che $|f_1| * |f_2| \in L^p$ segue che

$$\int_{\mathbb{R}^d} (|f_1| * |f_2|(x))^p \, dx < +\infty \implies |f_1 * f_2(x)| \leq |f_1| * |f_2|(x) < +\infty \quad \forall x \in \mathbb{R}^d.$$

Inoltre

$$\begin{aligned} \|f_1 * f_2\|_p^p &= \int_{\mathbb{R}^d} \left| \left(\int_{\mathbb{R}^d} f_1(x-y) \cdot f_2(y) \, dy \right) \right|^p \, dx \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^d} \left(\int_{\mathbb{R}^d} |f_1(x-y)| \cdot |f_2(y)| \, dy \right)^p \, dx = \| |f_1| * |f_2| \|_p^p \end{aligned}$$

□

Teorema 3 (disuguaglianza di Young per convoluzione.) Se $f_1 \in L^{p_1}(\mathbb{R}^d)$ e $f_2 \in L^{p_2}(\mathbb{R}^d)$ e preso $r \geq 1$ tale che

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} - 1, \quad (*)$$

allora $f_1 * f_2$ è ben definito quasi ovunque e

$$\|f_1 * f_2\|_r \leq \|f_1\|_{p_1} \cdot \|f_2\|_{p_2} \quad (**)$$

Osservazioni.

- Nel caso di prima 1 e sin x sono solo in L^∞ infatti viene $r = -1$ e la disuguaglianza non ha senso.
- Supponiamo di avere $\|f_1 * f_2\|_r \leq C \cdot \|f_1\|_{p_1}^{\alpha_1} \cdot \|f_2\|_{p_2}^{\alpha_2}$ allora vediamo che per ogni f_1, f_2 positive deve valere necessariamente $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$ e $1/r = 1/p_1 + 1/p_2 - 1$.

Dimostrazione. Vediamo prima $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$ e successivamente $1/r = 1/p_1 + 1/p_2 - 1$.

◦ Per ogni $\lambda > 0$ consideriamo λf_1 e f_2 , allora

$$\|(\lambda f_1) * f_2\|_r = \|\lambda(f_1 * f_2)\|_r = \lambda \|f_1 * f_2\|_r$$

ma abbiamo anche

$$\|(\lambda f_1) * f_2\|_r \leq C \cdot \|\lambda f_1\|_{p_1}^{\alpha_1} \cdot \|f_2\|_{p_2}^{\alpha_2} = C \cdot \lambda^{\alpha_1} \|f_1\|_{p_1}^{\alpha_1} \cdot \|f_2\|_{p_2}^{\alpha_2},$$

da cui necessariamente $\alpha_1 = 1$ e similmente si dimostra che $\alpha_2 = 1$.

◦ Data $f: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ e $\lambda > 0$ poniamo $R_\lambda f(x) := f(x/\lambda)$ allora abbiamo

$$\begin{aligned} \|(R_\lambda f_1) * (R_\lambda f_2)\|_r &= \left\| \int_{\mathbb{R}^d} f_1\left(\frac{x-y}{\lambda}\right) \cdot f_2\left(\frac{y}{\lambda}\right) dy \right\| = \left(\lambda^d dt = \frac{y}{\lambda} dy \right) \\ &= \lambda^d \cdot \left\| \int_{\mathbb{R}^d} f_1\left(\frac{x}{\lambda} - t\right) \cdot f_2(t) dt \right\| \\ &= \lambda^d \cdot \|R_\lambda(f_1 * f_2)\|_r. \end{aligned}$$

Similmente si dimostra che $\|R_\lambda(g)\|_r = \lambda^{d/r} \|g\|_r$, da cui otteniamo

$$\|(R_\lambda f_1) * (R_\lambda f_2)\|_r = \lambda^{d(1+\frac{1}{r})} \|f_1 * f_2\|_r.$$

Ma anche

$$\begin{aligned} \lambda^{d(1+\frac{1}{r})} \|f_1 * f_2\|_r &= \|(R_\lambda f_1) * (R_\lambda f_2)\|_r \stackrel{(\star\star)}{\leq} C \cdot \|R_\lambda f_1\|_{p_1} \cdot \|R_\lambda f_2\|_{p_2} \\ &= C \cdot \lambda^{d(\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2})} \cdot \|f_1\|_{p_1} \cdot \|f_2\|_{p_2}. \end{aligned}$$

Dunque abbiamo $\lambda^{d(1+1/r)} \leq C \cdot \lambda^{d(1/p_1+1/p_2)}$ per ogni $\lambda > 0$ e quindi $1 + 1/r = 1/p_1 + 1/p_2$. \square

Dimostrazione Teorema 3. Per via del Corollario 2. ci basta dimostrare $(\star\star)$ se $f_1, f_2 \geq 0$.

- *Caso facile.* Se $p_1 = p_2 = 1$ e $r = 1$

$$\begin{aligned} \|f_1 * f_2\|_1 &= \int f_1 * f_2(x) dx = \iint f_1(x-y) f_2(y) dy dx = \int f_2(y) \int f_1(x-y) dx dy = \\ &= \int \|f_1\|_1 \cdot f_2(y) dy = \|f_1\|_1 \cdot \|f_2\|_1 \end{aligned}$$

- *Caso leggermente meno facile.* Se $p_1 = p, p_2 = 1$ e $r = p$. Vogliamo vedere che

$$\|f_1 * f_2\|_p \leq \|f_1\|_p \cdot \|f_2\|_1$$

allora

$$\begin{aligned} \|f_1 * f_2\|_p^p &= \int_{\mathbb{R}^d} \underbrace{(f_1 * f_2)^p}_h dx = \int h \cdot h^{p-1} dx = \iint f_1(x-y) f_2(y) h^{p-1}(x) dy dx = \\ &= \iint f_1(y-x) h^{p-1}(x) dx f_2(y) dy \stackrel{\text{H\"older}}{\leq} \int \|f_1(y-\cdot)\|_p \|h^{p-1}\|_{p'} f_2(y) dy \end{aligned}$$

con p' esponente coniugato a p . Inoltre notiamo che $\|f_1(y-\cdot)\|_p = \|f_1\|_p$ per invarianza di \mathcal{L}^d per riflessioni e traslazioni. Infine otteniamo

$$\|f_1\|_p \|h^{p-1}\|_{p'} \|f_2\|_1 = \|f_1\|_p \|h\|_p^{p-1} \|f_2\|_1.$$

Dunque, $\|f_1 * f_2\|_p^p \leq \|f_1 * f_2\|_p^{p-1} \|f_1\|_p \|f_2\|_1 \implies \|f_1 * f_2\|_p \leq \|f_1\|_p \|f_2\|_1$. Quest'ultima implicazione però è valida solo nel caso in cui $0 < \|f_1 * f_2\|_p < +\infty$. Resterebbero da controllare i due casi in cui la norma è 0 oppure $+\infty$. Il primo è ovvio; il secondo invece si fa per approssimazione e passando al limite.

Consideriamo f_1, f_2 e approssimiamole con $f_{1,n}, f_{2,n}$ limitate a supporto limitato e crescenti,

$$f_{i,n} = (f \wedge n) \cdot \mathbb{1}_{B(0,n)} \quad i = 1, 2.$$

Allora $f_{1,n} * f_{2,n}$ è limitata e con supporto limitato e quindi $\|f_{1,n} * f_{2,n}\|_p < +\infty$ e per il *Caso leggermente meno facile*,

$$\|f_{1,n} * f_{2,n}(x)\|_p \leq \|f_{1,n}\|_p \cdot \|f_{2,n}\|_1$$

Inoltre $f_{1,n} * f_{2,n} \uparrow f_1 * f_2(x)$ per il teorema di convergenza monotona, e sempre per convergenza monotona

$$\begin{aligned} \|f_{1,n} * f_{2,n}(x)\|_p &\uparrow \|f_1 * f_2\|_p \\ \|f_{1,n}\|_p &\uparrow \|f_1\|_p \\ \|f_{2,n}\|_1 &\uparrow \|f_2\|_1 \end{aligned}$$

da cui otteniamo $\|f_1 * f_2\|_p \leq \|f_1\|_p \|f_2\|_1$.

- *Caso generale.* Non lo facciamo perché servono mille mila parametri e non è troppo interessante.

□

Osservazione. Se $f_2 \geq 0$ e $\int f_2 dx = 1$ allora $\|f_1 * f_2\|_p \leq \|f_1\|_p$ è una versione semplificata della proposizione precedente, in particolare la dimostrazione si semplifica in quanto possiamo pensare a f_2 come distribuzione di probabilità e quindi $f_1 * f_2$ è una “media pesata” delle traslazioni di f_1 o più precisamente una combinazione convessa “integrale”.

Nel caso $r = +\infty$ gli esponenti p_1 e p_2 sono proprio coniugati e possiamo rafforzare la tesi del teorema precedente.

Teorema 4 (caso $r = +\infty$ del Teorema 3). Dati p_1 e p_2 esponenti coniugati e $f_1 \in L^{p_1}(\mathbb{R}^d), f_2 \in L^{p_2}(\mathbb{R}^d)$, allora

- i) $f_1 * f_2(x)$ è ben definito per ogni $x \in \mathbb{R}^d$
- ii) $|f_1 * f_2(x)| \leq \|f_1\|_{p_1} \|f_2\|_{p_2}$
- iii) $f_1 * f_2$ è uniformemente continua
- iv) Se $1 < p_1, p_2 < +\infty$ allora $f_1 * f_2 \rightarrow 0$ per $|x| \rightarrow +\infty$

Premettiamo i seguenti risultati.

Proposizione 5. Data $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$ con $p < +\infty$ la mappa

$$\begin{aligned} \tau_h f : \mathbb{R}^d &\rightarrow L^p(\mathbb{R}^d) \\ h &\mapsto f(\cdot - h) \end{aligned}$$

è continua.

Dimostrazione. Per prima cosa notiamo che basta vedere solo la continuità in 0 in quanto

$$\tau_{h'} f - \tau_h f = \tau_h(\tau_{h'-h} f - f) \implies \|\tau_{h'} f - \tau_h f\|_p = \|\tau_{h'-h} f - f\|_p.$$

Dimostriamo ora la proposizione in due passi.

- *Caso 1:* $f \in C_C(\mathbb{R}^d)$

$$\|\tau_h f - f\|_p^p = \int_{\mathbb{R}^d} |f(x-h) - f(x)|^p dx \xrightarrow{|h| \rightarrow 0} 0$$

per convergenza dominata, verifichiamo però che siano rispettate le ipotesi

- La convergenza puntuale, ovvero $|f(x-h) - f(x)|^p \xrightarrow{|h| \rightarrow 0} 0$ segue direttamente dalla continuità di f .
- Come dominazione invece usiamo $|f(x-h) - f(x)|^p \leq (2\|f\|_\infty)^p \cdot \mathbb{1}_{\mathcal{B}(0, R+1)}$ usando che $f \in C_C \implies \text{supp}(f) \subset \overline{\mathcal{B}(0, R)}$ e poi che

$$\text{supp}(f(\cdot - h) - f(\cdot)) \subset \overline{\mathcal{B}(0, R + |h|)}$$

infine se $|h| < 1$ come raggio ci basta prendere $R + 1$.

- *Caso 2:* f qualunque Dato $\varepsilon > 0$ prendiamo $g \in C_C(\mathbb{R}^d)$ tale che $\|g - f\| \leq \varepsilon$ allora aggiungiamo a sottraiamo $g + \tau_h g$ e raggruppiamo in modo da ottenere

$$\begin{aligned} \tau_h f - f &= \tau_h(f - g) + (\tau_h g - g) + (g - f) \\ \implies \|\tau_h f - f\|_p &\leq \underbrace{\|\tau_h(f - g)\|_p}_{\leq \varepsilon} + \|\tau_h g - g\|_p + \underbrace{\|g - f\|_p}_{\leq \varepsilon} \leq 2\varepsilon + \underbrace{\|\tau_h g - g\|_p}_{\rightarrow 0 \text{ per Caso 1}} \end{aligned}$$

dunque $\limsup_{|h| \rightarrow 0} \|\tau_h f - f\|_p \leq 2\varepsilon$ ma per arbitrarietà di ε otteniamo anche che $\|\tau_h f - f\|_p \rightarrow 0$ per $|h| \rightarrow 0$.

□

Lemma 6. Lo spazio $C_0(\mathbb{R}^d) = \{f: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R} \text{ continue con } f(x) \rightarrow 0 \text{ per } |x| \rightarrow \infty\}$ è chiuso rispetto alla convergenza uniforme.

Dimostrazione Teorema 4.

- Osserviamo che

$$|f_1| * |f_2|(x) = \int_{\mathbb{R}^d} |f_1(x-y)| \cdot |f_2(y)| dy \stackrel{\text{Hölder}}{\leq} \|f_1(x - \cdot)\|_{p_1} \|f_2\|_{p_2} = \|f_1\|_{p_1} \|f_2\|_{p_2}$$

e concludiamo per la Proposizione 1.

- Dal punto precedente abbiamo che $|f_1| * |f_2|(x) \leq \|f_1\|_{p_1} \|f_2\|_{p_2}$, da cui si conclude banalmente.

- Uno tra p_1 e p_2 è finito; supponiamo lo sia p_1 . Fissiamo $x, h \in \mathbb{R}^d$

$$f_1 * f_2(x+h) - f_1 * f_2(x) = \int_{\mathbb{R}^d} (f_1(x+h-y) - f_1(x-y)) f_2(y) dy,$$

quindi

$$\begin{aligned} |f_1 * f_2(x+h) - f_1 * f_2(x)| &\leq \int |f_1(x+h-y) - f_1(x-y)| |f_2(y)| dy \\ &\stackrel{\text{Holder}}{\leq} \|f_1(x+h-\cdot) - f_1(x-\cdot)\|_{p_1} \|f_2\|_{p_2} \\ &= \|f_1(\cdot - h) - f_1(\cdot)\|_{p_1} \|f_2\|_{p_2} \\ &= \underbrace{\|\tau_h f_1 - f_1\|_{p_1}}_{\xrightarrow{|h| \rightarrow 0} 0} \|f_2\|_{p_2} \\ &\quad \text{Proposizione 5} \end{aligned}$$

da cui segue la tesi¹.

iv) Approssimiamo f_1 e f_2 con $f_{1,n}$ e $f_{2,n} \in \mathcal{C}_C(\mathbb{R}^d)$ in L^{p_1} e L^{p_2} rispettivamente.

Osserviamo che $f_{1,n} * f_{2,n} \in \mathcal{C}_C(\mathbb{R}^d) \subset \mathcal{C}_0(\mathbb{R}^d)$. Per il Lemma 6 basta dimostrare che $f_{1,n} * f_{2,n} \rightarrow f_1 * f_2$ uniformemente

$$\begin{aligned} \|f_{1,n} * f_{2,n} - f_1 * f_2\|_\infty &= \|(f_{1,n} * f_{2,n} - f_{1,n} * f_2) + (f_{1,n} * f_2 - f_1 * f_2)\|_\infty \\ &\leq \|f_{1,n} * (f_{2,n} - f_2)\|_\infty + \|(f_{1,n} - f_1) * f_2\|_\infty \\ &\stackrel{ii)}{\leq} \underbrace{\|f_{1,n}\|_{p_1}}_{\rightarrow \|f_1\|_{p_1}} \underbrace{\|f_{2,n} - f_2\|_{p_2}}_{\rightarrow 0} + \underbrace{\|f_{1,n} - f_1\|_{p_1}}_{\rightarrow 0} \|f_2\|_{p_2}. \end{aligned}$$

Quindi $\|f_{1,n} * f_{2,n} - f_1 * f_2\|_\infty \rightarrow 0$. □

3.1 Derivata e Convoluzione

Osservazione. Osserviamo che la convoluzione si comporta bene con l'operatore di traslazione definito precedentemente, infatti $\tau_h(f_1 * f_2) = (\tau_h f_1) * f_2$ in quanto

$$\tau_h(f_1 * f_2) = f_1 * f_2(x - h) = \int f_1(x - h - y) \cdot f_2(y) dy = \int \tau_h f_1(x - y) \cdot f_2(y) dy = (\tau_h f_1) * f_2$$

quindi “formalmente” possiamo calcolare il seguente rapporto incrementale

$$\frac{\tau_h(f_1 * f_2) - f_1 * f_2}{h} = \frac{\tau_h f_1 - f_1}{h} * f_2 \implies (f_1 * f_2)' = (f_1)' * f_2$$

Vediamo ora di formalizzare questo risultato.

Teorema. Dati p_1 e p_2 esponenti coniugati, se

- $f_1 \in C^1(\mathbb{R}^d)$, f_1 e $\nabla f_1 \in L^{p_1}(\mathbb{R}^d)$
- $f_2 \in L^{p_2}(\mathbb{R}^d)$

allora $f_1 * f_2 \in C^1$ con $\nabla(f_1 * f_2) = (\nabla f_1) * f_2$.

Premettiamo il seguente.

Lemma (teorema fondamentale del calcolo integrale.) Date $g, h: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continue e tali che

$$g(x) - g(a) = \int_a^x h(t) dt \quad \forall x \in [a, b]$$

allora $g \in C^1$ e $g' = h$.

¹*Nota.* In generale, quanto appena mostrato ci direbbe che la funzione è continua, ma essendo che stiamo maggiorando con una quantità indipendente da x segue l'uniforme continuità.

Dimostrazione Proposizione.

- $d = 1$. Per il Lemma basta dimostrare che $\forall -\infty < a < x < +\infty$ vale

$$f_1 * f_2(x) - f_1 * f_2(a) = \int_a^x f_1' * f_2(t) dt.$$

Infatti

$$\begin{aligned} \int_a^x f_1' * f_2(t) dt &= \int_a^x \int_{-\infty}^{\infty} f_1'(t-y) f_2(y) dy dt \\ &\stackrel{(*)}{=} \int_{-\infty}^{\infty} \int_a^x f_1'(t-y) dt \cdot f_2(y) dy \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} (f_1(x-y) - f_1(a-y)) \cdot f_2(y) dy \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f_1(x-y) f_2(y) dy - \int_{-\infty}^{\infty} f_1(a-y) f_2(y) dy \\ &= f_1 * f_2(x) - f_1 * f_2(a). \end{aligned}$$

In $(*)$ abbiamo usato Fubini-Tonelli:

$$\int_a^x \int_{-\infty}^{\infty} |f_1'(t-y)| \cdot |f_2(y)| dy dt \leq \int_a^x \|f_1'(t-\cdot)\|_{p_1} \cdot \|f_2\|_{p_2} dt = \|f_1'\|_{p_1} \cdot \|f_2\|_{p_2} \cdot (x-a).$$

- per $d > 1$ dato $i = 1, \dots, d$ basta semplicemente considerare le proiezioni infatti

$$\int_a^x \frac{\partial f_1}{\partial x_i} * f_2(x_1, \dots, \overset{(i)}{t}, \dots, x_d) dt = f_1 * f_2(x_1, \dots, \overset{(i)}{x}, \dots, x_d) - f_1 * f_2(x_1, \dots, \overset{(i)}{a}, \dots, x_d)$$

□

Corollario. Data $f_1 \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ (da cui segue $\nabla^k \in L^q(\mathbb{R}^d)$ per ogni $k = 0, 1, \dots$ e $1 \leq q < +\infty$) e $f_2 \in L^p(\mathbb{R}^d)$ allora $f_1 * f_2 \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$ (anzi $\nabla^k(f_1 * f_2) \in C_0(\mathbb{R}^d)$ per ogni k) e vale la formula nota¹

$$\nabla^k(f_1 * f_2) = (\nabla^k f_1) * f_2 \quad \forall k = 1, \dots$$

Dimostrazione. Si dimostra per induzione su k . [TO DO: da fare]

3.2 Approssimazione per convoluzione

Definizione. Per prima cosa data una funzione $g: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ e $\delta \neq 0$ poniamo

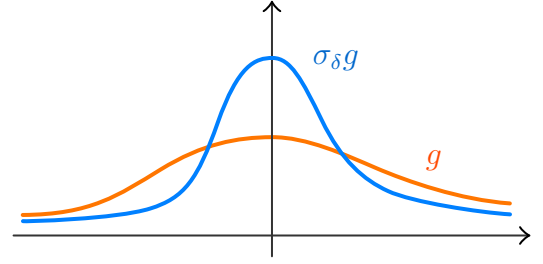
$$\sigma_\delta g(x) := \frac{1}{\delta^d} g\left(\frac{x}{\delta}\right)$$

e notiamo che questa trasformazione preserva la norma L^1 . Infatti, il valore $1/\delta^d$ è proprio il modulo del determinante dello Jacobiano del cambio di variabile.

¹dato che $\nabla^k f_1$ ha valori in \mathbb{R}^k e f_2 in \mathbb{R} , dobbiamo definire $\nabla^k f_1 * f_2$ [TO DO: da fare].

Teorema. Data $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$ e $g \in L^1(\mathbb{R}^d)$ con $1 \leq p < +\infty$ e posto $m := \int_{\mathbb{R}^d} g(x) dx$, allora

$$f * \sigma_\delta g \xrightarrow{\delta \rightarrow 0} mf \text{ in } L^p(\mathbb{R}^d).$$



Interpretazione. Se $g \geq 0$ con $\int g dx = 1$ (dunque g distribuzione di probabilità) allora $f * g$ possiamo pensarla come media pesata di traslate di f , dunque facendo $f * \sigma_\delta g$ stiamo pesando sempre di più i valori delle traslate vicino a 0.

Nota. Per $p = +\infty$ il teorema non vale. Infatti, la funzione $f = \mathbb{1}_{[0, +\infty]} \in L^\infty$; le funzioni $f * \sigma_\delta g$ sono continue ma non convergono in L^∞ a $mf = f$. Infatti, le successioni continue convergono in L^∞ a funzioni che coincidono, a meno di insiemi di misura nulla, con funzioni continue, ed f non è possibile modificarla in un insieme di misura nulla in modo che coincida con una funzione continua.

Dimostrazione. Per ora consideriamo g generica e ripercorriamo una dimostrazione simile a quella fatta per la disuguaglianza di Young

$$\begin{aligned} \|f * g - mf\|_p^p &= \int_{\mathbb{R}^d} \underbrace{|f * g - mf|^p}_h dx \\ &= \int |f * g - mf| \cdot h^{p-1} dx \\ &= \int \left| \int f(x-y)g(y) dy - f(x) \int g(y) dy \right| \cdot h^{p-1}(x) dx \\ &\leq \int \int |f(x-y) - f(x)| \cdot |g(y)| dy \cdot h^{p-1}(x) dx \\ &\stackrel{(*)}{=} \int \left(\int |f(x-y) - f(x)| h^{p-1}(x) dx \right) |g(y)| dy, \end{aligned}$$

dove in (*) abbiamo usato Fubini-Tonelli. Ora prendiamo q tale che $1/p + 1/q = 1$ allora per Hölder abbiamo

$$\begin{aligned} &\leq \int \|f(\cdot - y) - f(\cdot)\|_p \|h^{p-1}\|_q \cdot |g(y)| dy \\ &= \|h\|_p^{p-1} \int_{\mathbb{R}^d} \|\tau_y f - f\|_p \cdot |g(y)| dy \end{aligned}$$

dunque abbiamo ricavato che

$$\|f * g - mf\|_p^p \leq \|f * g - mf\|_p^{p-1} \int_{\mathbb{R}^d} \|\tau_y f - f\|_p \cdot |g(y)| dy$$

ed ora applicando questa stima a $\sigma_\delta g$ invece che a g otteniamo

$$\|f * \sigma_\delta g - mf\|_p \leq \int_{\mathbb{R}^d} \|\tau_y f - f\|_p \cdot |\sigma_\delta g(y)| dy,$$

infine ponendo $z = y/\delta$ e $dz = 1/\delta^d dy$ e sostituendo nell'integrale

$$= \int_{\mathbb{R}^d} \|\tau_{\delta z} f - f\|_p \cdot |g(z)| dz \xrightarrow{\delta \rightarrow 0} 0$$

per *convergenza dominata*, verifichiamone le ipotesi:

- i) La convergenza puntuale segue in quanto $\|\tau_{\delta z} f - f\|_p \xrightarrow{\delta \rightarrow 0} 0$ per ogni z .
- ii) Come dominazione prendiamo $2\|f\|_p \cdot |g| \in L^1$.

□

Corollario. Sia $g \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ con $\int g \, dx = 1$ e $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$ e $1 \leq p < +\infty$ allora $\sigma_\delta g * f \xrightarrow{\delta \rightarrow 0} f$ in $L^p(\mathbb{R}^d)$ e $\sigma_\delta g * f \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$.

Osservazione. Dal corollario segue che per $p \in [1, \infty)$ il sottospazio $C^\infty \subset L^p(\mathbb{R}^d)$ è denso in $L^p(\mathbb{R}^d)$; dunque ogni $C^k \subset L^p(\mathbb{R}^d)$ è denso.

3.3 Esercizi

3.3.1 Convoluzione

Sia $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ e sia $g: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ continua a supporto compatto¹.

$$|g(x) - g(y)| \leq M |x - y|_{\mathbb{R}^d}.$$

Esercizio. Dimostrare che $f * g$ è ben definita e lipschitziana, dove $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ e $g \in C_c^0(\mathbb{R}^d)$.

Verifichiamo che la convoluzione è ben definita. Dal fatto che $g \in C_c^0(\mathbb{R}^d)$ abbiamo in particolare che g è limitata, da cui

$$f * g = \int_{\mathbb{R}^d} f(x - y) \cdot g(y) \, dy \stackrel{|g| \leq M}{\leq} M \cdot \int_{\mathbb{R}^d} f(x - y) \, dy \stackrel{f \in L^1(\mathbb{R}^d)}{<} +\infty.$$

Ora verifichiamo che $f * g$ è lipschitziana. Consideriamo $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^d$

$$|f * g(x_1) - f * g(x_2)| = \left| \int_{\mathbb{R}^d} f(x_1 - y) g(y) \, dy - \int_{\mathbb{R}^d} f(x_2 - y) g(y) \, dy \right|$$

Usiamo la proprietà che, essendo $f * g$ ben definita, si ha $f * g(x) = g * f(x)$. Da cui

$$\begin{aligned} |f * g(x_1) - f * g(x_2)| &= \left| \int_{\mathbb{R}^d} g(x_1 - y) f(y) \, dy - \int_{\mathbb{R}^d} g(x_2 - y) f(y) \, dy \right| \\ &= \left| \int_{\mathbb{R}^d} (g(x_1 - y) - g(x_2 - y)) f(y) \, dy \right| \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^d} |g(x_1 - y) - g(x_2 - y)| |f(y)| \, dy \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^d} M |(x_1 - y) - (x_2 - y)| |f(y)| \, dy \leq M |x_1 - x_2| \cdot \|f\|_{L^1(\mathbb{R}^d)}. \end{aligned}$$

Esercizio. [TO DO] Se $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ e g a supporto compatto è α -Hölderiana allora anche $f * g$ lo è.

Esercizio. [TO DO] Presa $f(x) = \mathbb{1}_{[0,1]}$ in \mathbb{R} , calcolare $f * f$.

¹In tal caso g è lipschitziana.

3.3.2 Approssimazioni per convoluzione

Abbiamo visto che data $g \in L^1(\mathbb{R}^d)$ con $\int g \, dx = 1$ allora per ogni $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$ abbiamo $f_\delta := f * \sigma_\delta g \xrightarrow{\delta \rightarrow 0} f$ in $L^p(\mathbb{R}^d)$ per $p \neq \infty$.

Esercizio. Dire se esiste $v \in L^1(\mathbb{R})$ tale che sia elemento neutro della convoluzione, ovvero

$$\forall f \in L^1(\mathbb{R}) \quad f * v = f.$$

Soluzione. Una tale v non esiste, per vederlo scegliamo opportunamente \bar{f} e usiamo l'equazione. Scelgo $g \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ e defiamo $\sigma_\delta g = 1/\delta g(1/\delta)$. Abbiamo che $\sigma_\delta g * v = \sigma_\delta g$ per ogni δ . Per il teorema abbiamo che $\sigma_\delta g * v = \sigma_\delta g \xrightarrow{\delta \rightarrow 0} v$ in $L^1(\mathbb{R})$, ma $\sigma_\delta g \xrightarrow{\delta \rightarrow 0} 0$ quasi ovunque in $L^1(\mathbb{R})$. Allora $v = 0$ q.o. in $L^1(\mathbb{R})$, dunque non può valere $f * v = f$ per ogni $f \in L^1(\mathbb{R})$.

Esercizio. [TO DO: per casa.] Sia f misurabile su \mathbb{R}^d tale che $\int_E f \, dx = 0$ per ogni E misurabile di \mathbb{R}^d . Dimostrare che $f = 0$ q.o. su \mathbb{R}^d .

Suggerimento. Considerare l'integrale sull'insieme $\{x \in \mathbb{R}^d \mid f(x) = 0\} \cup \{x \in \mathbb{R}^d \mid f(x) \neq 0\}$ e verificare che, se denotiamo $A = \{x \in \mathbb{R}^d \mid f(x) \neq 0\}$, allora $|A| = 0$.

Esercizio. Sia f Lebesgue-misurabile su \mathbb{R}^d tale che $\forall B$ palla su \mathbb{R}^d

$$\int_B f \, dx = 0$$

Dimostrare che $f = 0$ quasi ovunque su \mathbb{R}^d .

Soluzione. Considero $g = \mathbb{1}_{[0,1]} \in L^1(\mathbb{R}^d)$. Per quanto fatto in classe so che

$$\sigma_\delta g * f \xrightarrow{\delta \rightarrow 0} mf$$

dunque se $\sigma_\delta g * f = 0$ per ogni δ ho finito.

$$\sigma_\delta g * f(y) = \int_{\mathbb{R}^d} \sigma_\delta \mathbb{1}_{[0,1]}(y-x) \cdot f(x) \, dx = \frac{1}{\delta^d} \int_{B(y,\delta)} f(x) \, dx = 0$$

Esercizio. Sia $p \geq 1$ allora $\{u \in L^p(\mathbb{R}) \mid \int u \, dx = 0\} \subseteq L^p(\mathbb{R})$ è denso in $L^p(\mathbb{R})$?

Capitolo 4

Spazi di Hilbert

Sia H spazio vettoriale reale con prodotto scalare $\langle \cdot, \cdot \rangle$ definito positivo e norma indotta $\| \cdot \|$ definita come $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$.

Si ricorda l'identità di polarizzazione

$$\langle x_1, x_2 \rangle = \frac{1}{4} \left(\|x_1 + x_2\|^2 - \|x_1 - x_2\|^2 \right).$$

Nota. Siccome $\| \cdot \|$ è continua, dalla formula di polarizzazione segue che il prodotto scalare è continuo.

Definizione. H si dice **spazio di Hilbert** se è completo.

Esempi.

- Dato (X, \mathcal{A}, μ) , gli spazi $L^2(X), L^2(X, \mathbb{R}^m)$ sono spazi di Hilbert.
- Lo spazio $\ell^2 = \left\{ (x_n) \mid \sum_{n=0}^{\infty} x_n^2 < +\infty \right\}$ è uno spazio di Hilbert.

Definizione. $\mathcal{F} \subset H$ è un **sistema ortonormale** se

$$\|e\| = 1 \quad \forall e \in \mathcal{F}, \quad \langle e, e' \rangle = 0 \quad \forall e \neq e' \in \mathcal{F}.$$

Definizione. \mathcal{F} si dice **completo** se $\overline{\text{Span}(\mathcal{F})} = H$. In tal caso \mathcal{F} si dice **base di Hilbert**.

Osservazione. In generale una base di Hilbert $\mathcal{F} \subset H$ non è anche una base algebrica di H .

L'esempio che segue spiega quanto appena detto.

Esempio. In ℓ^2 una base ortonormale è $\mathcal{F} = \{e_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ con $e_n = (0, \dots, 0, \overset{(n)}{1}, 0, \dots)$. Infatti, il fatto che siano ortonormali è banale; verifichiamo che sia una base.

Studiamo $\text{Span}(\mathcal{F}) = \{x = (x_0, x_1, \dots) \mid x_n \text{ è definitivamente nullo}\}$: dato $x \in \ell^2$ e $m = \mathbb{N}$, definiamo

$$P_m x := (x_0, x_1, \dots, x_m, 0, \dots).$$

Allora $\text{Span}(\mathcal{F}) \supset P_m x \xrightarrow{m \rightarrow +\infty} x$ in ℓ^2 . Infatti,

$$x - P_m x = (0, \dots, 0, x_{m+1}, x_{m+2}, \dots).$$

¹Lo span sono combinazioni lineari finite.

Dunque

$$\|x - P_m x\| = \sum_{n=m+1}^{\infty} x_n^2 \xrightarrow{m \rightarrow +\infty} 0.$$

Teorema 1. (della base di Hilbert.) Dato H spazio di Hilbert, \mathcal{F} sistema ortonormale al più numerabile, ovvero $\mathcal{F} = \{e_n \mid n \in \mathbb{N}\}$. Definiamo per ogni $x \in H$, $n \in \mathbb{N}$ l'elemento $x_n = \langle x, e_n \rangle$. Allora

- i) Vale $\sum_n x_n^2 \leq \|x\|^2$ (**Disuguaglianza di Bessel**).
- ii) La somma $\sum_n x_n e_n$ converge a qualche $\bar{x} \in H$ e $\bar{x}_n = x_n$ per ogni n .
- iii) Vale $\|\bar{x}\|^2 = \sum_n x_n^2 \leq \|x\|^2$.
- iv) Vale $x - \bar{x} \perp e_n \quad \forall n$ e in particolare $x - \bar{x} \perp \overline{\text{Span}(\mathcal{F})}$, ovvero \bar{x} è la proiezione di x su $\overline{\text{Span}(\mathcal{F})}$.
- v) Se \mathcal{F} è completo, allora $x = \bar{x}$ e in particolare

$$x = \sum_{n=0}^{\infty} x_n e_n, \quad \|x\|^2 = \sum_{n=0}^{\infty} x_n^2 \quad (\textbf{Identità di Parseval}).$$

Alla dimostrazione del teorema premettiamo il seguente lemma.

Lemma 2. Siano H e \mathcal{F} come nel teorema. Data $(a_n) \in \ell^2$, allora

- i) La serie $\sum_n a_n e_n$ converge a qualche $\bar{x} \in H$.
- ii) $\bar{x}_n = a_n$ per ogni n .
- iii) $\|\bar{x}\|^2 = \sum_n a_n^2$.

Dimostrazione.

- i) Dimostriamo che $y_m = \sum_{n=1}^m a_n e_n$ è di Cauchy in H . Se $m' > m$, vale

$$y_{m'} - y_m = \sum_{n=m+1}^{m'} a_n e_n \implies \|y_{m'} - y_m\|^2 = \left\| \sum_{n=m+1}^{m'} a_n e_n \right\|^2 = \sum_{n=m+1}^{m'} a_n^2 \leq \sum_{n=m+1}^{\infty} a_n^2 < +\infty.$$

Dunque, per ogni ε esiste m_ε tale che $\sum_{m_\varepsilon+1}^{\infty} a_n^2 \leq \varepsilon^2$, per cui

$$\|y_{m'} - y_m\|^2 \leq \sum_{m+1}^{m'} a_n^2 \leq \sum_{m_\varepsilon+1}^{\infty} a_n^2 \leq \varepsilon^2 \quad \forall m, m' \geq m_\varepsilon.$$

- ii) Se $m \geq n$, $\langle y_m, e_n \rangle = a_n$, dunque, per continuità del prodotto scalare

$$a_n = \langle y_m, e_n \rangle \xrightarrow{m \rightarrow \infty} \langle \bar{x}, e_n \rangle = \bar{x}_n.$$

iii) Si ha l'uguaglianza $\|y_m\|^2 = \sum_{n=1}^m a_n^2$, per cui passando al limite per $m \rightarrow +\infty$ otteniamo

$$\begin{aligned} \|y_m\|^2 &\xrightarrow{m \rightarrow \infty} \|\bar{x}\|^2 \\ \| & \\ \sum_{n=0}^m a_n^2 &\xrightarrow{m \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^{\infty} a_n^2 \end{aligned}$$

□

Dimostrazione Teorema 1.

i) Studiamo la somma $x = \sum_{n=0}^m x_n e_n + \overbrace{\quad}^{\text{resto}} y$.

Notiamo che x è somma di vettori ortogonali, infatti y è ortogonale a $\sum_{n=0}^m x_n e_n$:

$$\langle y, e_i \rangle = \left\langle x - \sum_{n=0}^m x_n e_n, e_i \right\rangle = \langle x, e_i \rangle - \sum_{n=0}^m x_n \underbrace{\langle e_n, e_i \rangle}_{\delta_{i,n}} = x_i - x_i = 0.$$

Essendo che x è somma di vettori ortogonali abbiamo

$$\|x\|^2 = \sum_{n=1}^m x_n^2 + \|y\|^2 \geq \sum_{n=1}^m x_n^2.$$

Passando al limite per $m \rightarrow +\infty$ otteniamo

$$\|x\|^2 \geq \sum_{n=1}^{\infty} x_n^2.$$

ii) Segue dal lemma notando che il punto precedente ci dice che la successione (x_n) è a quadrato sommabile.

iii) Segue banalmente dai primi due punti.

iv) Notiamo che $\langle x - \bar{x}, e_n \rangle = x_n - \bar{x}_n \stackrel{\text{ii)}}{=} 0$ per ogni n . Cioè

$$x - \bar{x} \perp e_n \implies x - \bar{x} \perp \text{Span}(\mathcal{F}) \implies x - \bar{x} \underset{\substack{\text{continuità} \\ \text{pr. scalare}}}{\perp} \overline{\text{Span}(\mathcal{F})}$$

v) $x - \bar{x} \perp \overline{\text{Span}(\mathcal{F})} \underset{\mathcal{F} \text{ è completo}}{=} H \implies x - \bar{x} = 0$, cioè $x = \bar{x}$.

□

Corollario 3. Siano H spazio di Hilbert, $\mathcal{F} = \{e_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ base di Hilbert, $x, x' \in H$. Valgono le seguenti.

i) $x_n = x'_n \quad \forall n \in \mathbb{N} \iff x = x'$ (\Leftarrow è ovvia).

ii) $\langle x, x' \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} x_n x'_n$ (**Identità di Parseval**).

iii) L'applicazione $H \ni x \mapsto (x_n) \in \ell^2$ è un'isometria surgettiva^a.

^aIn particolare è bigettiva ma l'iniettività è ovvia.

Dimostrazione.

- i) Per l'enunciato v) se due vettori hanno la stessa rappresentazione rispetto a una base di Hilbert coincidono.
- ii) La tesi segue usando l'identità di polarizzazione congiuntamente all'enunciato v) del teorema:

$$\begin{aligned}\langle x, x' \rangle &= \frac{1}{4} (\|x + x'\|^2 - \|x - x'\|^2) = \frac{1}{4} \left(\sum_n \overbrace{(x_n + x'_n)^2}^{x_n^2 + x_n'^2 + 2x_n x'_n} - \sum_n \overbrace{(x_n - x'_n)^2}^{x_n^2 + x_n'^2 - 2x_n x'_n} \right) \\ &= \frac{1}{4} \left(\cancel{\sum x_n^2} + \cancel{\sum x_n'^2} + 2 \sum x_n x'_n - \cancel{\sum x_n^2} - \cancel{\sum x_n'^2} + 2 \sum x_n x'_n \right).\end{aligned}$$

- iii) Il fatto che l'applicazione sia un'isometria segue da Parseval; che sia iniettiva dal fatto che \mathcal{F} è una base di Hilbert e che sia surgettiva dai punti i) e ii) del Lemma 2.

□

Osservazioni.

- Gli enunciati i) e v) non richiedono H completo, mentre ii) non è vero se H non è completo.
- Se H è uno spazio di Hilbert e \mathcal{F} sistema ortonormale infinito, allora \mathcal{F} non è mai una base algebrica¹. Dunque, combinazioni lineari finite di \mathcal{F} non sono mai uguali ad H , ovvero $\text{Span}(\mathcal{F}) \subsetneq H$.

Dimostrazione. Presi $(e_n) \subset \mathcal{F}$, consideriamo $\bar{x} = \sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n} e_n$. Allora $\bar{x} \in H \setminus \text{Span}(\mathcal{F})$.

- Siano H uno spazio di Hilbert di dimensione infinita e \mathcal{F} una base di Hilbert. Allora \mathcal{F} è numerabile se e solo se H è separabile.

Dimostrazione.

⇒ Vale $H = \overline{\text{Span}(\mathcal{F})} = \overline{\text{Span}_{\mathbb{Q}}(\mathcal{F})}$. Concludiamo notando che $\overline{\text{Span}_{\mathbb{Q}}(\mathcal{F})}$ è numerabile se \mathcal{F} è numerabile.

⇐ Se \mathcal{F} non fosse numerabile, siccome $\|e - e'\| = \sqrt{2} \quad \forall e, e' \in \mathcal{F}$, potremmo definire per ogni elemento di \mathcal{F} una palla di raggio $\sqrt{2}/2$, dunque potremmo definire un insieme di palle disgiunte. Dato un sottoinsieme denso di H , per definizione, deve intersecare ogni palla e dunque deve essere più che numerabile, dunque H non sarebbe separabile.

Esempio. Lo spazio $H = L^2(X)$, con $X = \mathbb{R}^n$, μ misura di Lebesgue ha base di Hilbert numerabile.

¹Per base algebrica s'intende un insieme di vettori di uno spazio vettoriale le cui combinazioni lineari generano tutto lo spazio.

- Dato \mathcal{F} sistema ortonormale in H , allora \mathcal{F} è completo se e solo se \mathcal{F} è massimale (nella classe dei sistemi ortonormali rispetto all'inclusione).

Dimostrazione.

\Rightarrow Dato che \mathcal{F} è completo segue che $\overline{\text{Span}(\mathcal{F})} = X$, quindi

$$\mathcal{F}^\perp = (\text{Span}(\mathcal{F}))^\perp \underbrace{= \overline{\text{Span}(\mathcal{F})}^\perp}_{\text{continuità del prodotto scalare}} = H^\perp = \{0\}.$$

dunque \mathcal{F} è massimale.

\Leftarrow Se \mathcal{F} non è completo, esiste $x \in H \setminus \overline{\text{Span}(\mathcal{F})}$. Definiamo \bar{x} come nel Teorema 1. Notiamo che $x - \bar{x} \perp \text{Span}(\mathcal{F})$, dunque $x - \bar{x} \perp \mathcal{F}$ e $x - \bar{x} \neq \{0\}$, da cui $\mathcal{F} \cup \left\{ \frac{x - \bar{x}}{\|x - \bar{x}\|} \right\}$ è un sistema ortonormale che include strettamente \mathcal{F} . \nmid

Osservazione. Nell'implicazione \Rightarrow non abbiamo usato la completezza di H .

- Ogni sistema ortonormale \mathcal{F} si completa a $\tilde{\mathcal{F}}$ base di Hilbert di H . In particolare ogni spazio di Hilbert ammette una base.

Dimostrazione. Sia $X := \{\mathcal{F} \subset H : \mathcal{F} \text{ è sistema ortonormale}\}$. Gli elementi di X sono ordinati rispetto all'inclusione e ogni catena ammette un elemento massimale dato dall'unione dei suoi elementi, dunque X ammette un elemento massimale B per il lemma di Zorn e tale elemento è una base di Hilbert. Infatti, l'ortonormalità è banale dato che $B \in X$. La completezza si dimostra usando la formula di decomposizione

$$H = \overline{\text{Span}(B)} \oplus \overline{\text{Span}(B)}^\perp$$

notando che per la massimalità di B deve valere $\overline{\text{Span}(B)}^\perp = \{0\}$.

Teorema 4. Dato V sottospazio vettoriale chiuso di H . Allora

- $H = V + V^\perp$, cioè per ogni $x \in H$ esiste $\bar{x} \in V$ e $\tilde{x} \in V^\perp$ tale che $x = \bar{x} + \tilde{x}$.
- Gli elementi \bar{x} e \tilde{x} sono univocamente determinati (e indicati con x_V e x_V^\perp).
- \bar{x} è caratterizzato come l'elemento di V più vicino a x .

Dimostrazione.

- Dato che V è chiuso, V è completo, cioè V è un sottospazio di H , dunque V ammette base ortonormale $\mathcal{F} = \{e_n \mid n \in \mathbb{N}\}$. Definiamo $\bar{x} \in \overline{\text{Span}(\mathcal{F})}$ come nel Teorema 1 e $\tilde{x} := x - \bar{x} \perp \overline{\text{Span}(\mathcal{F})} = V$ (per iv)) dunque $\tilde{x} \in V^\perp$.

- Se $x = \bar{x} + \tilde{x} = \bar{x}' + \tilde{x}'$, dove $\bar{x}, \bar{x}' \in V$ e $\tilde{x}, \tilde{x}' \in V^\perp$, allora

$$\bar{x} - \bar{x}' = \tilde{x}' - \tilde{x} \underbrace{\implies}_{V \cap V^\perp = \{0\}} \bar{x} - \bar{x}' = \tilde{x}' - \tilde{x} = 0.$$

- Per ogni $y \in V$ sia $f(y) = \|x - y\|^2$. Mostriamo che \bar{x} è l'unico minimo di f .

$$f(y) = \|x - y\|^2 = \left\| \underbrace{x - \bar{x}}_{\in V^\perp} + \underbrace{\bar{x} - y}_{\in V} \right\|^2 = \|x - \bar{x}\|^2 + \|\bar{x} - y\|^2 = f(\bar{x}) + \|\bar{x} - y\|^2 \geq f(\bar{x}).$$

□

Osservazione. Serve V chiuso. Se per esempio V è denso in H ma $V \neq H$, allora

$$\overline{V^\perp} = \overline{V}^\perp = H^\perp = \{0\} \implies V \subseteq V + V^\perp \subseteq V + \overline{V^\perp} = V \subsetneq H.$$

Un esempio di tale V è $\text{Span}(\mathcal{F})$ con \mathcal{F} base di H (H di dimensione infinita).

Teorema 5 (di rappresentazione di Riesz.) Sia H spazio di Hilbert. Dato $\Lambda: H \rightarrow \mathbb{R}$ lineare e continuo, esiste $x_0 \in H$ tale che

$$\Lambda(x) = \langle x, x_0 \rangle \quad \text{per ogni } x \in H. \quad (*)$$

Lemma 6. Dato $\Lambda: X \rightarrow \mathbb{R}$ lineare, $(\ker \Lambda)^\perp$ ha dimensione 0 o 1.

Dimostrazione Se per assurdo $\dim(\ker \Lambda)^\perp \geq 2$, allora $(\ker \Lambda)^\perp$ conterrebbe un sottospazio W di dimensione 2. Dunque, $\dim(\ker \Lambda|_W) = \{1, 2\}$, essendo che $\dim \mathbb{R} = 1$. Ma questo non è possibile, in quanto abbiamo definito $W \subset \ker^\perp$. \square

Dimostrazione Teorema 5. Sia $V := \ker \Lambda$. Dato che Λ è continuo segue che V è chiuso. Se $V = H \implies \Lambda \cong 0$ e prendiamo $x_0 = 0$.

Se $V \neq H$, allora $V^\perp \neq \{0\}$ e definiamo $x_1 \in V^\perp$ con $\|x_1\| = 1$. Poniamo $x_0 := cx_1$ con $c := \Lambda x_1$ e $\tilde{\Lambda}(x) := \langle x, x_0 \rangle$. Abbiamo che

- $x \in V \implies x \perp x_1 \implies x \perp x_0 \implies \tilde{\Lambda}(x) = 0 = \Lambda(x)$. Quindi $\tilde{\Lambda} = \Lambda$ su V .
- $\tilde{\Lambda}(x_1) = \langle x_1, x_0 \rangle = \langle x_1, cx_1 \rangle = c \|x_1\|^2 = c = \Lambda(x_1)$. Quindi $\tilde{\Lambda} = \Lambda$ su $\text{Span}(x_1) = V^\perp$ che ha dimensione 0 o 1 per il Lemma 6.
- $\tilde{\Lambda} = \Lambda$ su $V + V^\perp = H$.

\square

Osservazione. Esistono funzioni $\Lambda: H \rightarrow \mathbb{R}$ lineari ma non continue se H ha dimensione infinita.

Infatti, presa \mathcal{G} base algebrica di vettori unitari di H ; \mathcal{G} è infinita e contiene una successione (e_n) . Definiamo $\Lambda: H \rightarrow \mathbb{R}$ lineare come

$$\begin{cases} \Lambda(e_n) = n & \forall n \\ \Lambda(e) = C & e \in \mathcal{G} \setminus \{e_n\}. \end{cases}$$

con C generico. Allora

$$+\infty = \sup_n |\Lambda(e_n)| \leq \sup_{\|x\| \leq 1} |\Lambda(x)|$$

da cui segue che Λ non è continuo.

4.1 Spazi di Hilbert complessi

Definizione. Sia H uno spazio vettoriale su \mathbb{C} con prodotto hermitiano $\langle \cdot; \cdot \rangle$, ovvero tale che

- $\langle \cdot; \cdot \rangle$ è lineare nella prima variabile
- $\langle x; x' \rangle = \overline{\langle x', x \rangle}$ ovvero è antilineare nella seconda variabile.
- $\langle x; x \rangle \geq 0$ per ogni x e vale 0 se e solo se $x = 0$.

Analogamente si pone $\|x\| := \sqrt{\langle x; x \rangle}$. C'è un'identità di polarizzazione ma è leggermente diversa dalla versione reale.

Definizione. H si dice di Hilbert se è **completo**.

Esempio. Su $L^2(X; \mathbb{C})$ si mette il prodotto scalare dato da

$$\langle u; v \rangle := \int_X u \cdot \bar{v} \, d\mu.$$

Teorema. (della base di Hilbert per spazi complessi) Dato $\mathcal{F} = \{e_n\}$ sistema ortonormale in H e $x \in H$ allora per ogni n si pone¹

$$x_n = \langle x; e_n \rangle$$

e il resto dell'enunciato è uguale al caso reale.

4.2 Esempi di basi Hilbertiane

4.2.1 Polinomi

La base data da $\{1, x, x^2, \dots, x^n, \dots\}$ opportunamente ortonormalizzata è una base di $L^2[0, 1]$ (anche di $L^2(\mathbb{R})$) per il teorema di Stone-Weierstrass.

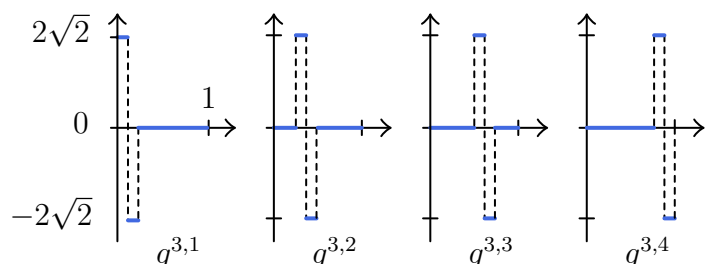
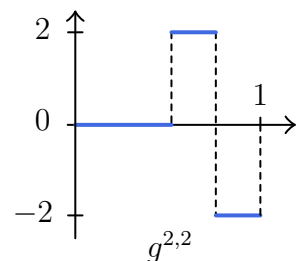
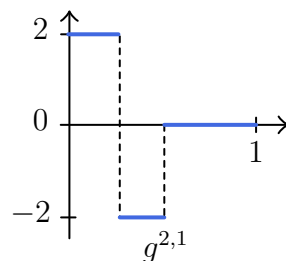
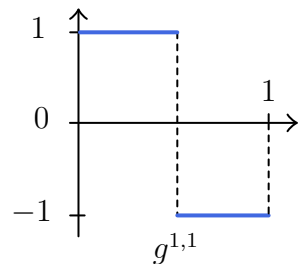
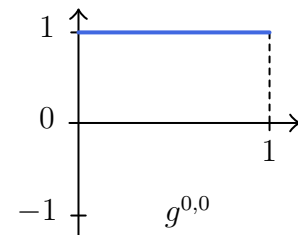
4.2.2 Base di Haar

Vediamo la base di Haar su $L^2([0, 1])$ data da due indici n, k dove n indica l'ampiezza delle “onde” (anche dette *wavelet*) e k il posizionamento dell'onda. Sia $n \in \mathbb{N}$ e $k = 1, \dots, 2^n$ e poniamo

$$g^{0,0} := \mathbb{1}_{[0,1]} \quad g^{n,k} := 2^{\frac{n-1}{2}} \left(\mathbb{1}_{[\frac{2k-2}{2^n}, \frac{2k-1}{2^n}]} - \mathbb{1}_{[\frac{2k-1}{2^n}, \frac{2k}{2^n}]} \right)$$

Inoltre $\|g^{n,k}\|_{L^2[0,1]} = 1$ ed anche $\|g^{0,0}\|_{L^2[0,1]} = 1$. Vedremo che $\{g^{n,k} \mid n \geq 1, k = 1, \dots, 2^n\} \cup \{g^{0,0}\}$ formano un sistema ortonormale.

- $\langle g^{n,k}, g^{0,0} \rangle = 0$: È ovvio in quanto le $g^{n,k}$ hanno media nulla.
- $\langle g^{n,k}, g^{n',k'} \rangle = 0$. Se $n = n'$ i supporti sono sempre disgiunti. Se $n < n'$, allora i supporti o sono disgiunti e si conclude come prima o il supporto di $g^{n',k'}$ è contenuto in quello di $g^{n,k}$ e dunque l'integrale ha media nulla.



¹E non $\langle e_n; x \rangle$!

Inoltre è anche una base hilbertiana dato che per combinazioni algebriche si ottengono tutti gli intervalli della forma

$$I_k := \left[\frac{k-1}{2^n}, \frac{k}{2^n} \right] \rightsquigarrow \mathbb{1}_{I_k}$$

che formano un insieme denso. Per mostrare la densità si dimostra che le funzioni indicatrici $\mathbb{1}_{I_k}$ possono approssimare ogni funzione caratteristica $\mathbb{1}_{[a,b]}$ con $0 \leq a < b \leq 1$ (in questo modo si ottengono tutte le funzioni semplici in $[0, 1]$).

Nota. È possibile estendere la base di Haar a tutto \mathbb{R} .

4.3 Esercizi

4.3.1 Basi Hilbertiane e proiezioni

Esercizio. Sia $H = L^2(-1, 1)$ e sia $V = \text{Span}\{1, x, x^2\}$. Verificare che V è un sottospazio chiuso e calcolare la proiezione di $\sin x$ su V .

Notazione. Indichiamo con $\|\cdot\|$ la norma $\|\cdot\|_{L^2(-1,1)}$ e con $\langle \cdot, \cdot \rangle$ il prodotto scalare su L^2 .

Soluzione. Vediamo come risolvere questo esercizio in tre modi diversi.

i) Dato H spazio di Hilbert separabile, e dato un sottospazio $V \subset H$, vediamo come trovare la proiezione di un elemento $x \in H$ su V . Procediamo come segue.

- Controlliamo che V sia chiuso.
- Calcoliamo una base hilbertiana di V che indichiamo con $\{e_1, \dots, e_n, \dots\}$.

Il tal caso, la proiezione di un elemento $x \in H$ su V è data da

$$p_V(x) = \sum_n \langle x, e_n \rangle e_n.$$

Esercizio. [TO DO: per casa] Ogni sottospazio di dimensione finita di uno spazio di Hilbert o di L^p è chiuso (e in particolare ha parte interna vuota).

Abbiamo una base di V data da $\{1, x, x^2\}$ (è una base in quanto sono linearmente indipendenti: si può verificare mostrando che $\forall x \in [-1, 1] \lambda_1 + \lambda_2 x + \lambda_3 x^2 = 0 \implies \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$ usando la teoria sulle equazioni di II grado oppure si può derivare e man mano ottenere più informazioni su $\lambda_3, \lambda_2, \lambda_1$).

Volendo usare la base scritta sopra per calcolare la proiezione di $\sin x$ su V , dovremmo prima applicare Gram-Schmidt alla base $\{1, x, x^2\}$ per determinare una base Hilbertiana:

$$\begin{aligned} e_1 &= \frac{1}{\|1\|} = \frac{1}{\sqrt{2}} \\ e_2 &= \frac{x - \langle x, \frac{1}{\sqrt{2}} \rangle \cdot 1}{\left\| x - \langle x, \frac{1}{\sqrt{2}} \rangle \cdot 1 \right\|} \\ e_3 &= \frac{x^2 - \langle x^2, e_1 \rangle \cdot e_1 - \langle x^2, e_2 \rangle \cdot e_2}{\left\| x^2 - \langle x^2, e_1 \rangle \cdot e_1 - \langle x^2, e_2 \rangle \cdot e_2 \right\|} \end{aligned}$$

e successivamente calcolare $p_V(\sin x)$ con la formula scritta sopra.

- ii) Alternativamente, possiamo direttamente cercare la proiezione di $\sin x$ su V . Determiniamo a, b, c tali che $a + bx + cx^2$ sia $p_V(x) = \sin x$ allora posto $f(x) := \sin x - a - bx - cx^2$ abbiamo $f(x) \in V^\perp \iff$ si verificano le seguenti condizioni

$$\langle f(x), 1 \rangle = 0 \quad \langle f(x), x \rangle = 0 \quad \langle f(x), x^2 \rangle = 0$$

Ad esempio da $\langle f(x), 1 \rangle = 0$ otteniamo

$$0 = \int_{-1}^1 (\sin x - a - bx - cx^2) \cdot 1 \, dx = \underbrace{\int_{-1}^1 \sin x \, dx}_{=0} - 2a - b \underbrace{\int_{-1}^1 x \, dx}_{=0} - c \int_{-1}^1 x^2 \, dx \implies 0 = -2a - \frac{2}{3}c$$

ed analogamente si procede con x e x^2 ... [TODO: Da finire]

- iii) Un altro modo è considerare la funzione $g(a, b, c) := \|\sin x - a - bx - cx^2\|_{L^2(-1,1)}$ che è continua, coerciva, etc. e imponendo $\nabla_{a,b,c} g = 0$ si minimizza e si ottengono $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ che verificano $p_V(\sin x)$.

Esercizio. Sia $X = \{u \in L^2(\mathbb{R}) \mid \int_0^2 u \, dx = 0\}$, dire se è un sottospazio chiuso, calcolare X^\perp per una generica $u \in L^2(\mathbb{R})$ e determinare le proiezioni $p_X(u)$ e $p_{X^\perp}(u)$.

Soluzione. La mappa T lineare data da

$$u \mapsto \int_0^2 u \, dx$$

è ben definita, lineare e continua, allora X è proprio $T^{-1}(0)$ dunque è un sottospazio chiuso.

Osservazione. Notiamo che

$$T(u) = \int_{\mathbb{R}} u(x) \cdot \mathbb{1}_{[0,2]}(x) \, dx = \langle u, g \rangle_{L^2(\mathbb{R})}, \quad g = \mathbb{1}_{[0,2]}(x) \in L^2(\mathbb{R}).$$

Calcoliamo ora X^\perp e le proiezioni p_X, p_{X^\perp} . Abbiamo che $X = \{u \in L^2(\mathbb{R}) \mid \langle u, g \rangle = 0\}$ dove $g = \mathbb{1}_{[0,2]}(x)$, dunque¹ $X = \text{Span}(g)^\perp \implies X^\perp = (\text{Span}(g)^\perp)^\perp = \overline{\text{Span}(g)} = \text{Span } g$.

Notiamo² che

$$L^2(\mathbb{R}) = \text{Span}_{\mathbb{R}} \left\{ \frac{g}{\|g\|_{L^2}} \right\} \oplus \left\{ \frac{g^\perp}{\|g^\perp\|_{L^2}} \right\}.$$

Calcoliamo $p_X(u)$ come segue

$$p_X(u) = u - \left\langle u, \frac{g}{\|g\|_{L^2}} \right\rangle \cdot \frac{g}{\|g\|_{L^2}},$$

dove

$$\|g\|_{L^2} = \left(\int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_{[0,2]}(x)^2 \, dx \right)^{1/2} = \sqrt{2}$$

e dunque

$$p_X(u) = u - \left(\int_0^2 u \, dx \right) \cdot \frac{\mathbb{1}_{[0,2]}}{2}$$

¹Dato $\mathcal{F} \subset H$ spazio di Hilbert, $(\mathcal{F}^\perp)^\perp = \overline{\text{Span } \mathcal{F}}$

²Con $g/\|g\|_{L^2}$ indichiamo una base normalizzata di g^\perp .

Un controllo veloce per verificare di aver fatto i conti corretti è quello di vedere che $p_X(u) \in X$, dunque di verificare che $\int_0^2 p_X(u) dx = 0$.

Per calcolare $p_{X^\perp}(u)$ usiamo la seguente.

Osservazione. Vale $u = p_X(u) + p_{X^\perp}(u)$.

In conclusione,

$$p_{X^\perp}(u) = u - p_X(u) = \left(\int_0^2 u dx \right) \cdot \frac{\mathbb{1}_{[0,2]}}{2}.$$

Esercizio. [TO DO: per casa.] Sia $V = \{\underline{x} = (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \ell^2 \mid x_1 + x_3 + x_5 = 0\}$. Dire se V è chiuso in ℓ^2 e calcolare p_V e p_{V^\perp} .

Capitolo 5

Serie di Fourier

Lo scopo della serie di Fourier (complessa) è di rappresentare una funzione $f: [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{C}$ (o più in generale una funzione $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ 2π -periodica) come

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}$$

In particolare, chiamiamo i coefficienti c_n **coefficienti di Fourier** di $f(x)$ e tutta l'espressione a destra **serie di Fourier** di $f(x)$.

Motivazione. La rappresentazione in serie di Fourier serve ad esempio a risolvere certe equazioni alle derivate parziali ed è anche utilizzata per la “compressione dati”.

Problemi.

- Come si trovano (se esistono) i coefficienti di Fourier?
- Ed in che senso la serie converge?

Osservazione. La serie appena vista è indicizzata da $-\infty$ a $+\infty$, più avanti vedremo che la definizione esatta non sarà importante ma per ora usiamo la definizione

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n := \lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{n=-N}^N a_n$$

ed ogni tanto scriveremo anche $\sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n$ per brevità.

Teorema 1. L'insieme $\mathcal{F} = \left\{ e_n(x) := \frac{e^{inx}}{\sqrt{2\pi}} \mid n \in \mathbb{Z} \right\}$ è una base ortonormale di $L^2([-\pi, \pi]; \mathbb{C})$.

Da cui segue che

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} \langle f; e_n \rangle \cdot e_n = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \left(\int_{-\pi}^{\pi} f(t) \frac{\overline{e^{int}}}{\sqrt{2\pi}} dt \right) \frac{e^{inx}}{\sqrt{2\pi}} \\ &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{1}{2\pi} \underbrace{\left(\int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-int} dt \right)}_{c_n} e^{inx} \end{aligned}$$

Definizione. Data $f \in L^2([-\pi, \pi]; \mathbb{C})$ i coefficienti di Fourier di f sono

$$c_n = c_n(f) := \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx} dx.$$

Notiamo in particolare che è anche ben definito anche per $f \in L^1$ (anche se per ora non ci dice molto in quanto L^1 non è uno spazio di Hilbert).

Corollario. Per ogni $f \in L^2([-\pi, \pi]; \mathbb{C})$ abbiamo

i) La serie $\sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n e^{inx}$ converge a f in L^2 .

ii) Vale l'identità di Parseval

$$\|f\|_2^2 = 2\pi \sum_{n \in \mathbb{Z}} |c_n|^2 \quad \langle f, g \rangle = 2\pi \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n(f) \overline{c_n(g)}$$

Osservazione. Usando la i) ed il fatto che la convergenza in L^2 implica la convergenza quasi ovunque a meno di sottosuccessioni otteniamo che $\forall f \exists N_n \uparrow \infty$ tale che

$$\sum_{n=-N_k}^{N_k} c_n e^{inx} \xrightarrow{k} f(x) \quad \forall x \in [-\pi, \pi].$$

In particolare nel 1966 Carleson ha dimostrato che in realtà vale proprio

$$\sum_{n=-N}^N c_n e^{inx} \xrightarrow{N} f(x) \quad \forall x.$$

Prima di dimostrare il Teorema 1 riportiamo il teorema di Stone-Weierstrass.

Teorema (di Stone-Weierstrass.) Sia K uno spazio compatto e T_2 (essenzialmente è uno spazio metrico compatto) e siano

- $C(K)$ l'insieme delle funzioni continue reali su K ,
- $C(K; \mathbb{C})$ le funzioni continue complesse su K

entrambe dotate della norma del sup.

Dato $\mathcal{A} \subset C(K)$ diciamo che è una **sottoalgebra** se è uno spazio vettoriale e chiuso rispetto al prodotto e diciamo che **separa i punti** se $\forall x_1, x_2 \in K$ con $x_1 \neq x_2$ allora $\exists f \in \mathcal{A}$ tale che $f(x_1) \neq f(x_2)$.

- *Caso reale:* se \mathcal{A} è una sottoalgebra di $C(K)$ che separa i punti e contiene le costanti allora $\overline{\mathcal{A}} = C(K)$.
- *Caso complesso:* se \mathcal{A} è una sottoalgebra di $C(K; \mathbb{C})$ che separa i punti, contiene le costanti ed è *chiusa per coniugio* allora $\overline{\mathcal{A}} = C(K; \mathbb{C})$.

Osservazioni.

- Se $K = [0, 1]$, \mathcal{A} = “polinomi reali” $\implies \overline{\mathcal{A}} = C(K; \mathbb{C})$.

- L'ipotesi di separare i punti è necessaria, se ad esempio $\exists x_1, x_2$ tali che $x_1 \neq x_2$ e per ogni f abbiamo $f(x_1) = f(x_2)$ allora varrà analogamente anche per ogni funzione nella chiusura ma le funzioni continue separano i punti¹.
- È anche necessario che $\mathcal{A} \supset$ “costanti”, ad esempio dato $x_0 \in K$ ed $\mathcal{A} := \{f \in C(K) \mid f(x_0) = 0\}$ abbiamo che $\overline{\mathcal{A}} = \mathcal{A} \subsetneq C(K)$.
- Anche la chiusura per coniugio è necessaria, infatti ad esempio preso $K = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq 1\}$, $\mathcal{A} =$ “polinomi complessi”, \mathcal{A} separa i punti e contiene le costanti però $\overline{\mathcal{A}}$ sono solo le funzioni olomorfe su K .

Vorremmo applicare questo teorema alle funzioni 2π -periodiche ristrette a $[-\pi, \pi]$ che però non verificano la separazione dei punti in quanto per la periodicità $f(-\pi) = f(\pi)$. Nel seguente corollario vediamo come possiamo estendere leggermente il teorema passando ai quozienti topologici.

Corollario. Sia \mathcal{A} una sottoalgebra di $C(K)$ (o analogamente per $C(K; \mathbb{C})$) che contiene le costanti (e nel caso complesso anche chiusa per coniugio). Definiamo la relazione di equivalenza $x_1 \sim x_2$ se $f(x_1) = f(x_2)$ per ogni $f \in \mathcal{A}$. Allora,

$$\overline{\mathcal{A}} = \{f \in C(K) \mid f(x_1) = f(x_2) \text{ se } x_1 \sim x_2\}.$$

Dimostrazione Corollario. È chiaro che $\mathcal{A} \subset X := \{f \in C(K) \mid f(x_1) = f(x_2) \text{ se } x_1 \sim x_2\}$. Data $g \in X$, definiamo $\tilde{g}: K/\sim \rightarrow \mathbb{C}$ in modo che $g = \tilde{g} \circ \pi$. Osserviamo che K/\sim è compatto e T_2 e che $\tilde{\mathcal{A}} = \{\tilde{f} \mid f \in \mathcal{A}\}$ soddisfa le ipotesi del teorema di Stone-Weierstrass, quindi $\overline{\tilde{\mathcal{A}}} = C(K/\sim; \mathbb{C})$, quindi per ogni $g \in X$ esiste una successione $\tilde{g}_n \in \tilde{\mathcal{A}}$ tale che $\tilde{g}_n \rightarrow \tilde{g}$ uniformemente e quindi $g_n \rightarrow g$ uniformemente.

□

Dimostrazione Teorema 1. Vogliamo vedere che

i) \mathcal{F} è un sistema ortonormale.

Dimostrazione. Basta calcolare $\langle e_n; e_m \rangle$ per ogni $n, m \in \mathbb{Z}$

$$\langle e_n; e_m \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{inx}}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{\overline{e^{inx}}}{\sqrt{2\pi}} dx = \begin{cases} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} 1 dx = 1 & \text{se } n = m \\ \frac{1}{2\pi} \left[\frac{e^{i(n-m)x}}{i(n-m)} \right]_{-\pi}^{\pi} = 0 & \text{se } n \neq m \end{cases}$$

ii) \mathcal{F} è completo.

Dimostrazione. Questo punto richiede il teorema di Stone-Weierstrass.

Consideriamo²

$$\mathcal{A} = \text{Span}_{\mathbb{C}}(\mathcal{F}) = \left\{ \sum_n a_n e^{inx} \right\} = \{p(e^{inx}) \mid p \text{ polinomio a esponenti interi}\}.$$

Segue che \mathcal{A} è una sottoalgebra che separa i punti di K tranne $-\pi$ e π ed è chiusa per coniugio.

¹Basta prendere una funzione lineare.

²Le combinazioni lineari sono finite.

Per il Corollario, indicando con $\overline{\mathcal{A}}^C$ la chiusura di \mathcal{A} rispetto alla norma del sup e con $\overline{\mathcal{A}}^{L^2}$ la chiusura rispetto alla norma L^2 , si ottiene

$$\begin{aligned}
\overline{\mathcal{A}}^C &= \{g \in C([- \pi, \pi; \mathbb{C}]) : g(-\pi) = g(\pi)\} \\
&\Downarrow \\
\overline{\mathcal{A}}^{L^2} &\supset \{g \in C([- \pi, \pi; \mathbb{C}]) : g(-\pi) = g(\pi)\} \\
&\Downarrow * \\
\overline{\mathcal{A}}^{L^2} &\supset C([- \pi, \pi; \mathbb{C}]) \\
&\Downarrow \\
\overline{\mathcal{A}}^{L^2} &\underbrace{=}_{\text{densità di } C \text{ in } L^2} L^2([- \pi, \pi; \mathbb{C}])
\end{aligned}$$

dove $*$ deriva dal fatto che

$$\overline{\{g \in C([- \pi, \pi; \mathbb{C}]) : g(-\pi) = g(\pi)\}} = C([- \pi, \pi; \mathbb{C}]).$$

Infatti, data $g \in C([- \pi, \pi; \mathbb{C}])$ definisco la successione (g_n) come $g_n := g \cdot \varphi_n$ dove φ_n sono tali che $\varphi_n(-\pi) = \varphi_n(\pi) = 0$, $\varphi_n = 1$ su $[1/n - \pi, \pi - 1/n]$. Concludiamo osservando che $g_n \rightarrow g$ in L^2 . [TO DO: disegno delle φ_n]

□

Esempio (calcolo coefficienti di Fourier).

- $\cos x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2} = \frac{1}{2}e^{ix} + \frac{1}{2}e^{-ix}$, allora $c_n = \begin{cases} \frac{1}{2} & n = \pm 1 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$.
- $(\sin x)^2 = \left(\frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}\right)^2 = \frac{1}{4}e^{2ix} + \frac{1}{2} - \frac{1}{4}e^{-2ix}$, allora $c_n = \begin{cases} -\frac{1}{4} & n = \pm 2 \\ \frac{1}{2} & n = 0 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$.
- $f(x) = x$, $c_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = 0$. Per $n \neq 0$:

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x e^{-inx} dx = \frac{1}{2\pi} \left| \frac{x e^{-inx}}{-in} \right|_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{-inx}}{-in} dx = \frac{(-1)^n i}{n}.$$

Calcoliamo ora $\sum_{n \in \mathbb{Z}} |c_n|^2$. Valgono le uguaglianze

$$\begin{aligned}
\sum_{n \in \mathbb{Z}} |c_n|^2 i &= 2 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} \\
\sum_{n \in \mathbb{Z}} |c_n|^2 i &= \frac{1}{2\pi} \|x\|_2^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x^2 dx = \frac{2}{2\pi} \cdot \frac{\pi^3}{3} = \frac{\pi^2}{3}.
\end{aligned}$$

Dunque $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

5.1 Regolarità di f e dei coefficienti

Proposizione 1. Data $f \in [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{C}$ tale che

(R) $f \in C^1$ (basta f continua e C^1 a tratti).

(CB) $f(-\pi) = f(\pi)$.

Allora $c_n(f') \stackrel{(*)}{=} in c_n(f)$.

Derivazione formale della formula

$$f(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n e^{inx} \xrightarrow{\text{derivata}} f'(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} in c_n e^{inx}$$

Dimostrazione. Vale quanto segue

$$\begin{aligned} c_n(f') &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)' e^{-inx} dx \\ &\stackrel{\text{int. per parti}}{=} \frac{1}{2\pi} \left[\overbrace{f(x) e^{-inx}}^{f(-\pi)=f(\pi), e^{-in\pi}=e^{-in(-\pi)}} \Big|_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) (-in) e^{-inx} dx \right] \\ &= (in) \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx} dx = in c_n(f). \end{aligned}$$

□

Nota. La formula della derivata nel caso di cui non valga la condizione al bordo (CB) si dimostra allo stesso modo ma il primo termine dell'integrazione per parti non si cancella.

Osservazione. In verità, basta ancora meno. Possiamo riformulare la Proposizione 1 come segue.

Proposizione 1'. Data $f: [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{C}$ tale che

(R') f è continua.

(CB) esiste $g \in L^1([-\pi, \pi], \mathbb{C})$ tale che $f(x) = f(-\pi) + \int_{-\pi}^x g(t) dt$.

Allora la formula $(*)$ diventa $c_n(g) = in c_n(f)$.

La seguente dà un'indicazione sul comportamento asintotico dei coefficienti di Fourier.

Proposizione 2. Data f come nella Proposizione 1, valgono le seguenti

i) $\sum_{n \in \mathbb{Z}} n^2 |c_n(f)|^2 = \frac{\|f'\|_2^2}{2\pi} < +\infty.$

ii) $\sum_{n \in \mathbb{Z}} |n|^\alpha |c_n(f)| < +\infty$ per ogni $\alpha < 1/2$.

iii) La serie di Fourier converge.

Dimostrazione.

$$\text{i)} \sum_{n \in \mathbb{Z}} n^2 |c_n(f)|^2 \stackrel{(*)}{=} \sum_{n \in \mathbb{Z}} |c_n(f')|^2 \stackrel{\text{Parseval}}{=} \|f'\|_2^2 / 2\pi \stackrel{f' \in L^\infty([- \pi, \pi], \mathbb{C}) \subset L^2([- \pi, \pi], \mathbb{C})}{<} +\infty.$$

$$\text{ii)} \sum_{n \in \mathbb{Z}} |n|^\alpha |c_n(f)| \stackrel{(n \neq 0)}{=} \sum_{n \in \mathbb{Z}} |n| |c_n(f)| \cdot \frac{1}{|n|^{1-\alpha}} \stackrel{\text{C-S per } \ell^2}{\leq} \underbrace{\left(\sum_{n \in \mathbb{Z}} |n|^2 |c_n(f)|^2 \right)^{1/2}}_{< +\infty \text{ per il punto ii)}} \cdot \underbrace{\left(\sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{1}{|n|^{2-2\alpha}} \right)^{1/2}}_{\alpha < 1/2 \Rightarrow < +\infty} < +\infty.$$

$$\text{iii)} \text{ Dal punto precedente con } \alpha = 0 \text{ otteniamo } \sum_{n \in \mathbb{Z}} \|c_n(f) e^{inx}\|_\infty = \sum_{n \in \mathbb{Z}} |c_n(f)| < +\infty. \quad \square$$

Proposizione 3. Data $f \in [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{C}$ tale che

$(R_k) \ f \in C^k$ (oppure $f \in C^{k-1}$ e $D^{k-1}f$ è C^1 a tratti).

$(CB_{k-1}) \ D^h f(-\pi) = D^h f(\pi)$ per $h = 0, 1, \dots, k-1$.

Allora

i) $c_n(D^h f) = (in)^h c_n(f)$ per ogni $n \in \mathbb{Z}$ per ogni $h = 1, \dots, k$.

$$\text{ii)} \sum_{n \in \mathbb{Z}} |n|^{2k} |c_n(f)|^2 = \frac{\|D^k f\|_2^2}{2\pi} < +\infty.$$

$$\text{iii)} \sum_{n \in \mathbb{Z}} |n|^\alpha |c_n(f)| < +\infty \text{ per ogni } \alpha < k - 1/2.$$

iv) La serie di Fourier di f converge totalmente con tutte le derivate fino all'ordine $k-1$.

Proposizione 4. Se f è continua e $\sum_{n \in \mathbb{Z}} |n|^{k-1} |c_n(f)| < +\infty$ allora $f \in C^{k-1}$ e soddisfa (CB_{k-1}) .

Dimostrazione. Preso $h = 0, 1, \dots, k-1$ vale

$$\begin{aligned} D^h(c_n(f)e^{inx}) &= c_n(f)(in)^h e^{inx} \\ \|D^h(c_n(f)e^{inx})\| &= |c_n(f)| |n|^h \leq |c_n(f)| |n|^{k-1}. \end{aligned}$$

Dunque $\sum D^h(c_n(f)e^{inx})$ converge totalmente (e quindi uniformemente) con tutte le derivate fino all'ordine $k-1$ dunque per il teorema di derivazione per serie segue la tesi. \square

Osservazione. $f \in C^{k-1}([- \pi, \pi]) + (CB_{k-1})$ se e solo se f è la restrizione a $[- \pi, \pi]$ di una funzione 2π -periodica e C^{k-1} .

5.2 Convergenza puntuale della serie di Fourier

Teorema. Data $f \in L^1([-\pi, \pi], \mathbb{C})$ (estesa in modo 2π -periodico a tutto \mathbb{R}), $\bar{x} \in \mathbb{R}$ e f è α -Hölderiana in \bar{x} con $\alpha > 0$, cioè esistono $\delta > 0$ e $M < +\infty$ per cui

$$|f(\bar{x} + t) - f(\bar{x})| \leq M |t|^\alpha \quad \text{per } t \text{ tale che } |t| < \delta,$$

allora $\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(f) e^{in\bar{x}}$ converge a $f(\bar{x})$. Cioè $\sum_{n=-N}^N c_n(f) e^{in\bar{x}} \xrightarrow{N \rightarrow \infty} f(\bar{x})$

Lavoro preparatorio: rappresentare somme parziali di serie di Fourier con “convoluzione”:

Data $f \in L^1([-\pi, \pi], \mathbb{C})$, $N = 1, 2, \dots$ (estesa a funzioni 2π -periodiche su \mathbb{R}).

$$S_N f(x) := \sum_{n=-N}^N c_n e^{inx}$$

Riscriviamo

$$\begin{aligned} S_N f(x) &:= \sum_{n=-N}^N c_n e^{inx} = \sum_{n=-N}^N \frac{1}{2\pi} \left(\int_{-\pi}^{\pi} f(y) e^{-iny} dy \right) e^{inx} \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(y) \left(\sum_{n=-N}^N e^{in(x-y)} \right) dy. \end{aligned}$$

Poniamo $D_N(z) := \sum_{n=-N}^N e^{inz}$ che si definisce **nucleo di Dirichlet**. Allora

$$\begin{aligned} S_N f(x) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(y) D_N(x-y) dy \quad \xrightarrow{x-y=t, dy=-dt} \frac{1}{2\pi} \int_{x-\pi}^{x+\pi} f(x-t) D_N(t) dt \\ &\stackrel{(*)}{=} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x-t) D_N(t) dt = \frac{1}{2\pi} f * D_N(x) \end{aligned}$$

dove $*$ è il prodotto di convoluzione su $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$. Infine $(*)$ è il seguente lemma.

Lemma. Se g è T -periodica e $g \in L^1([-\pi, \pi], \mathbb{C})$, allora

$$\int_0^T g(\tau) d\tau = \int_c^{c+T} g(\tau - s) d\tau \quad \forall s \forall c.$$

Ne segue che

$$S_N f(x) := \sum_{n=-N}^N c_n(f) e^{inx} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x-t) D_N(t) dt$$

dove

$$D_N(t) = \sum_{n=-N}^N e^{int} = \frac{\sin((N+1/2)t)}{\sin(t/2)}.$$

Infatti,

$$\begin{aligned}
D_N(t) &= \sum_{-N}^N e^{int} = \sum_{-N}^N (e^{it})^n = e^{-iNt} \cdot \sum_{n=0}^{2N} (e^{it})^n \\
&= \frac{e^{-i(N+1/2)t}}{e^{-it/2}} \cdot \frac{e^{(2N+1)it} - 1}{e^{it} - 1} = \frac{e^{(N+1/2)it} - e^{-(N+1/2)it}}{e^{it/2} - e^{-it/2}} \\
&= \frac{\sin((N+1/2)t)}{\sin(t/2)}.
\end{aligned}$$

Il seguente lemma riassume quanto detto finora.

Lemma (di rappresentazione di $S_n f$ come convoluzione). Data $f \in L^1([-\pi, \pi; \mathbb{C}])$ (estesa a funzioni 2π -periodiche su \mathbb{R}) vale

$$S_N f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x-t) D_N(t) dt = \frac{1}{2\pi} f * D_N(x)$$

con

$$D_N(t) := \sum_{n=-N}^N e^{int} = \frac{\sin\left(\left(N + \frac{1}{2}\right)t\right)}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)}, \quad \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} D_N(t) dt = 1.$$

Lemma (di Riemann-Lebesgue (generalizzato)). Data $g \in L^1(\mathbb{R})$ e $h \in L^\infty(\mathbb{R})$ con h T -periodica, allora

$$\int_{\mathbb{R}} g(x) h(yx) dx \xrightarrow{y \rightarrow \pm\infty} \underbrace{\left(\int_{\mathbb{R}} g(x) dx \right)}_a \underbrace{\left(\int_0^T h(x) dx \right)}_m$$

Dimostrazione. Per ogni s, y poniamo $\Phi(y, s) := \int_{\mathbb{R}} g(x) h(yx + s) dx$ con $s, y \in \mathbb{R}$. Dunque, vogliamo dimostrare che $\Phi(y, 0) \xrightarrow{y \rightarrow \pm\infty} am$. Vedremo che valgono le seguenti

$$\text{i) } \forall y \int_0^T \Phi(y, s) ds = am.$$

$$\text{ii) } \forall s \Phi(y, s) - \Phi(y, 0) \xrightarrow{y \rightarrow \pm\infty} 0.$$

da cui segue subito che

$$\Phi(y, 0) - ma = \int_0^T \Phi(y, 0) - \Phi(y, s) ds \xrightarrow{y \rightarrow \pm\infty} 0$$

per convergenza dominata; dove dalla ii) segue la convergenza puntuale e come dominazione usiamo

$$|\Phi(y, 0) - \Phi(y, s)| \leq 2 \|g\|_1 \|h\|_\infty.$$

Mostriamo ora i due punti.

i) Esplicitiamo e applichiamo Fubini-Tonelli

$$\begin{aligned}\int_0^T \Phi(y, s) \, ds &= \int_0^T \int_{\mathbb{R}} g(x) h(yx + s) \, dx \, ds = \int_{\mathbb{R}} \underbrace{\int_0^T h(yx + s) \, ds}_m \cdot g(x) \, dx \\ &= m \int_{\mathbb{R}} g(x) \, dx = ma\end{aligned}$$

e possiamo usare Fubini-Tonelli in quanto

$$\int_{\mathbb{R}} \int_0^T |h(yx - s)| \, ds \cdot |g(x)| \, dx \leq \int_{\mathbb{R}} \|h\|_{\infty} |g(x)| \, dx = \|h\|_{\infty} \cdot \|g\|_1.$$

ii) Notiamo che

$$\begin{aligned}\Phi(y, s) &= \int_{\mathbb{R}} g(x) h(y(x + s/y)) \, dx = \left(\begin{matrix} t = x + s/y \\ dt = dx \end{matrix} \right) = \int_{\mathbb{R}} g(t - s/y) h(yt) \, dt \\ \implies \Phi(y, s) - \Phi(y, 0) &= \int_{\mathbb{R}} \left(g\left(t - \frac{s}{y}\right) - g(t) \right) h(yt) \, dt \\ \implies |\Phi(y, s) - \Phi(y, 0)| &\leq \int_{\mathbb{R}} |\tau_{s/y} g - g| \cdot |h(yt)| \, dt \leq \|\tau_{s/y} g - g\|_1 \cdot \|h\|_{\infty} \xrightarrow{y \rightarrow \pm\infty} 0.\end{aligned}$$

□

Dimostrazione del Teorema.

$$\begin{aligned}S_N f(\bar{x}) - f(\bar{x}) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\bar{x} - t) D_N(t) \, dt - \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\bar{x}) D_N(t) \, dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (f(\bar{x} - t) - f(\bar{x})) D_N(t) \, dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{f(\bar{x} - t) - f(\bar{x})}{\sin \frac{t}{2}} \sin \left(\left(N + \frac{1}{2} \right) t \right) \, dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(t) \cdot \sin \left(\left(N + \frac{1}{2} \right) t \right) \, dt\end{aligned}$$

Applicando il Lemma di Riemann-Lebesgue otteniamo:

$$S_N f(\bar{x}) - f(\bar{x}) \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} \frac{1}{2} \left(\int g(x) \, dx \right) \cdot \int_0^{2\pi} \sin x \, dx = 0.$$

Per applicare il lemma devo verificare che $g \in L^1([-\pi, \pi])$:

$$\begin{aligned}\int_{-\pi}^{\pi} |g(t)| \, dt &= \int_{|t| \leq \delta} |g(t)| \, dt + \int_{\delta < |t| \leq \pi} |g(t)| \, dt \\ &\stackrel{(*)}{\leq} \int_{|t| \leq \delta} \frac{M|t|^\alpha}{|t|/\pi} \, dt + \int_{\delta < |t| \leq \pi} \frac{|f(\bar{x} + t)| + |f(\bar{x})|}{\sin(\delta/2)} \, dt \\ &\leq 2\pi M \int_0^\delta \frac{dt}{t^{1-\alpha}} + \frac{\|f\|_1 + |f(\bar{x})|}{\sin(\delta/2)} < +\infty\end{aligned}$$

dove in (\star) abbiamo usato

$$|\sin(t/2)| \geq |t|/\pi \quad \forall t \in [-\pi, \pi] \quad \text{e} \quad |\sin(t/2)| \geq |\sin(\delta/2)| \quad \text{se } \delta \leq |t| \leq \pi$$

□

Vale la seguente generalizzazione del teorema di convergenza puntuale della serie di Fourier.

Proposizione. Data $f \in L^1([-\pi, \pi])$ estesa per periodicità e dato \bar{x} tale che esistano i limiti a destra e sinistra di f in \bar{x} detti L^+ e L^- ed f α -Hölderiana a sinistra e destra si può vedere che vale

$$S_N f(\bar{x}) \xrightarrow{N} \frac{L^+ + L^-}{2}.$$

5.3 Esercizi

5.3.1 Serie di Fourier

Consideriamo $L^2([-\pi, \pi], \mathbb{C})$. Ricordiamo che $e^{inx} = \cos(nx) + i \sin(nx)$. Abbiamo

$$\begin{aligned} \sum_{n=-N}^N c_n e^{inx} &= c_0(f) + \sum_{n=1}^N (c_n(f) e^{inx} + c_{-n} e^{inx}) \\ &= c_0(f) + \sum_{n=1}^N [(c_n(f) + c_{-n}(f)) \cos(nx) + i(c_n(f) - c_{-n}(f)) \sin(nx)] \\ &= c_0(f) + \sum_{n=1}^N a_n(f) \cos(nx) + b_n(f) \sin(nx) \end{aligned}$$

con

$$\begin{cases} a_n(f) = c_n(f) + c_{-n}(f) \\ b_n(f) = i c_n(f) - i c_{-n}(f) \\ a_0(f) = c_0(f) \end{cases}$$

Passando al limite per $N \rightarrow +\infty$

$$f(x) \overset{L^2}{\rightrightarrows} \sum_{n=-N}^N c_n e^{inx} \overset{(\star)}{=} c_0(f) + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n(f) \cos(nx) + b_n(f) \sin(nx)$$

Nota. L'uguaglianza (\star) ha bisogno di qualche spiegazione: come sappiamo che la serie a destra converge? Usiamo il fatto, che mostriamo sotto, che $\{1, \cos(nx), \sin(nx), n > 1\}$ sono un sistema ortogonale, dunque per la disuguaglianza di Bessel segue la convergenza.

Osservazione. Gli elementi $\{1, \sin(nx), \cos(nx)\}$ sono ortogonali per $n \geq 1$ in $L^2([-\pi, \pi], \mathbb{C})$. Infatti, ricordiamo che

$$\begin{aligned} \cos(nx) &= \frac{e^{inx} + e^{-inx}}{2} \\ \sin(nx) &= \frac{e^{inx} - e^{-inx}}{2i}. \end{aligned}$$

- È banale verificare che $\langle 1, \cos(nx) \rangle = \langle 1, \sin(nx) \rangle = 0$;

- Verifichiamo ora che valga $\langle \cos(nx), \sin(mx) \rangle = 0$ per ogni n, m , dunque calcoliamo:

$$\langle \sin(nx), \sin(mx) \rangle = \frac{1}{4} \langle e^{-inx} - e^{inx}, e^{-imx} - e^{imx} \rangle = 0.$$

Ora normalizziamo: $\left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{\cos(nx)}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin(nx)}{\sqrt{\pi}}, n \geq 1 \right\}$.

In conclusione, abbiamo ottenuto che

- $L^2([-\pi, \pi], \mathbb{C})$ ha base Hilbertiana $\left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{\cos(nx)}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin(nx)}{\sqrt{\pi}} \right\}_{\mathbb{C}}$
- $L^2([-\pi, \pi], \mathbb{R})$ ha base Hilbertiana $\left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{\cos(nx)}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin(nx)}{\sqrt{\pi}} \right\}_{\mathbb{R}}$

Esercizio. Se f è a valori reali, dimostrare che $a_n(f)$ e $b_n(f)$ sono anch'essi reali. [TO DO]

Sketch. Si dimostra che $a_n(f) = \overline{a_n(f)}$, $b_n(f) = \overline{b_n(f)}$ e per farlo si usano le espressioni di a_n, b_n in funzione dei coefficienti di Fourier complessi scritte sopra.

Esercizio. Trovare la base di Fourier complessa e reale di $L^2([a, b], \mathbb{C})$.

Soluzione. Data $f(x) \in L^2([a, b], \mathbb{C})$, definiamo la funzione

$$F(y) := f\left((y + \pi)\frac{b-a}{2\pi} + a\right) = f(x).$$

Notiamo che $F \in L^2([-\pi, \pi], \mathbb{C})$, dunque ha espansione in serie di Fourier:

$$\begin{aligned} F(y) &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n(F) e^{iny}, & c_n(F) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F(y) e^{-iny} dy \\ & & &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f\left((y + \pi)\frac{b-a}{2\pi} + a\right) e^{-iny} dy. \end{aligned}$$

Usando il cambio di variabile $y = (x - a)\frac{2\pi}{b-a} - \pi$ si ottiene

$$\begin{aligned} c_n(f) &= \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) \exp\left[\left((x-a)\frac{2\pi}{b-a} - \pi\right)(-in)\right] dx \\ &= \frac{(-1)^n}{b-a} \exp\left[\frac{2\pi a}{b-a} in\right] \int_a^b f(x) \exp\left[\frac{2\pi x}{b-a}(-in)\right] dx \end{aligned}$$

Da cui

$$f(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n(f) \exp\left[\frac{2\pi}{b-a} xin\right], \quad c_n(f) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) \exp\left[-\frac{2\pi}{b-a} xin\right].$$

Esercizio. Dato un intero $N \geq 2$, dimostrare che f è $2\pi/N$ -periodica se e solo se $c_n = 0$ per ogni n che non è multiplo di N .

Soluzione. [TO DO: da fare]

Esercizi classici. Fissata una funzione $f \in L^2$, calcolare i coefficienti di Fourier complessi (e reali).

Calcoliamo i coefficienti di $f(x) = x^2$.

$$\begin{aligned}
c_n(f) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x^2 e^{-inx} dx = \frac{1}{2\pi} \left[\frac{e^{-inx}}{-in} x^2 \right]_{-\pi}^{\pi} - \int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{-inx}}{-in} 2x dx \\
&= - \int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{-inx}}{-in} 2x dx = - \frac{i}{\pi n} \left[\left[\frac{e^{-inx}}{-in} \right]_{-\pi}^{\pi} - \int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{-inx}}{-in} dx \right] \\
&= \frac{-i\pi \cos(-n\pi) + \cos(-n(-\pi))}{\pi n \cdot -in} + \frac{i}{\pi n} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{-inx}}{-in} dx \\
&= \frac{2}{n^2} + \frac{i}{\pi n} \cdot 0 = \frac{2}{n^2} (-1)^n \\
&\implies c_n(f) = \frac{2}{n^2} (-1)^n.
\end{aligned}$$

Infine

$$c_0(f) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x^2 dx = \frac{1}{2\pi} \frac{2}{3} \pi^3 = \frac{1}{3} \pi^2.$$

Per Parseval $\|f\|_{L^2}^2 = 2\pi \sum_{n \in \mathbb{Z}} |c_n(f)|^2$. Da cui

$$\int_{-\pi}^{\pi} x^4 dx = \|x^2\|_{L^2}^2 = 2\pi \cdot \left[\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{4}{n^4} + \frac{\pi^2}{3} \right].$$

Nota. Potevamo ottenere i coefficienti di $f(x) = x^2$, applicando il teorema della derivata.

Domande.

- Abbiamo visto che $c_n(x^2) = \frac{2(-1)^n}{n^2}$ e dedotto che $c_n(2x) = in \frac{2(-1)^n}{n^2} = \frac{2(-1)^n i}{n}$.
- Vorremmo calcolare $c_n(2)$, possiamo applicare il teorema sulla formula della derivata?

Esercizio.

- Calcolare i coefficienti di Fourier complessi di x^3 e vedere se vale $c_n(3x^2) = inc_n(x^3)$.
- Calcolare i coefficienti reali di x^2 .

Esercizio. Sia $f(x)$ definita da $\sum_{n \in \mathbb{Z}} \gamma_n e^{inx}$ con $\begin{cases} \gamma_n = \frac{\cos(n)}{|n|^{3/2}} \\ \gamma_0 = 1 \end{cases}$

Domande.

- f è ben definita?
- f è continua?
- f è derivabile?

Dimostrazione.

- Sì, infatti $2 \sum_{n=1}^{+\infty} |\gamma_n|^2 \leq 2 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^3} < +\infty$.

- Suggerimento.* Usare la Proposizione 3 della parte della regolarità dei coefficienti della serie di Fourier.

Capitolo 6

Applicazioni della serie di Fourier

6.1 Equazione del calore

Sia Ω un aperto di \mathbb{R}^d e $u(t, x): [0, T) \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ e chiamiamo x la *variabile spaziale* e t la *variabile temporale*. In dimensione 3 l'insieme Ω rappresenta un solido di materiale conduttore omogeneo e $u(t, x)$ rappresenta la temperatura in x all'istante t . Dunque u risolve l'equazione del calore

$$u_t = c \cdot \Delta u$$

dove con u_t indichiamo la derivata parziale di u rispetto al tempo, c è una costante fisica che porremo uguale ad 1 e Δu è il laplaciano rispetto alle dimensioni spaziali ovvero

$$\Delta u = \sum_{i=1}^d \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} = \operatorname{div}(\nabla_x u).$$

Vedremo che la soluzione di $u_t = \Delta u$ esiste ed è unica specificando $u(0, \cdot) = u_0$ condizione iniziale con $u_0: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ data e delle condizioni al bordo come ad esempio

- *Condizioni di Dirichlet:* $u = v_0$ su $[0, T) \times \partial\Omega$ con v_0 funzione fissata. Possiamo pensare come fissare delle sorgenti di calore costanti sul bordo.
- *Condizioni di Neumann:* $\frac{\partial u}{\partial \nu}$ con ν direzione normale al bordo. Essenzialmente ci sta dicendo che non c'è scambio di calore con l'esterno.

In particolare scriveremo

$$\begin{cases} u_t = \Delta u & \text{su } \Omega \\ u(0, \cdot) = u_0 \\ \text{Una delle condizioni al bordo su } \partial\Omega \dots \end{cases}$$

6.2 Risoluzione dell'equazione del calore (su \mathbb{S}^1)

Come conduttore consideriamo un anello di materiale omogeneo e sottile che parametrizziamo con $[-\pi, \pi]$. Dunque consideriamo $u: [0, T) \times [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$ con le condizioni

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} \\ u(\cdot, \pi) = u(\cdot, -\pi) \\ u_x(\cdot, \pi) = u_x(\cdot, -\pi) \\ u(0, \cdot) = u_0 \end{cases} \quad (\text{P})$$

in particolare la (ii) e la (iii) condizione non sono né quelle di Dirichlet né di Neumann, sono delle condizioni che effettivamente ci dicono che siamo “su \mathbb{S}^1 ”¹; invece l'ultima è la condizione iniziale ed u_0 è data.

6.2.1 Risoluzione formale

Scriviamo u in serie di Fourier rispetto a x cioè

$$u(t, x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n e^{inx}$$

con $c_n := c_n(u(t, \cdot))$ da cui derivando formalmente dentro le sommatorie otteniamo che u_t e u_{xx} SONO

$$\begin{aligned} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \dot{c}_n(t) e^{inx} = u_t = u_{xx} &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} -n^2 c_n(t) e^{inx} \\ u_t = u_{xx} \iff \dot{c}_n(t) = -n^2 c_n(t) \quad \forall n \forall t \quad \text{e} \quad u(0, \cdot) = u_0 &\iff c_n(0) = c_n(u_0) =: c_n^0 \end{aligned}$$

Dunque risolvere (P) equivale per ogni n che c_n che risolva il problema di Cauchy dato da

$$\begin{cases} \dot{y} = -n^2 y \\ y(0) = c_n^0 \end{cases} \quad (\text{P}')$$

con soluzione $y(t) = \alpha e^{-n^2 t}$ cioè $c_n(t) = c_n^0 e^{-n^2 t}$ e quindi abbiamo

$$u(t, x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n^0 e^{-n^2 t} e^{inx} \quad (*)$$

Studiando questa soluzione formale possiamo fare le seguenti osservazioni che poi diventeranno dei teoremi

- *La soluzione esiste per $t \in [0, +\infty)$ ed è molto regolare per $t > 0$*

Vedremo che la soluzione formale è proprio una soluzione al problema per $t \geq 0$, in particolare il termine $e^{-n^2 t} \rightarrow 0$ in modo più che polinomiale ed infatti vedremo che la soluzione sarà proprio C^∞ per $t > 0$.

- *La soluzione è unica*

Tutti i problemi di Cauchy per i coefficienti $c_n(t)$ hanno un'unica soluzione dunque anche la soluzione u è unica.

¹Bastano solo queste condizioni sulla funzione e sulla sua derivata perché intuitivamente le altre seguono applicando la (i).

- In generale non esiste soluzione nel passato.

Se il numero di coefficienti $c_n^0 \neq 0$ è infinito allora il termine $e^{-n^2 t} \rightarrow +\infty$ molto velocemente per $t < 0$ e la serie diverge.

Teorema 1 (Esistenza e Regolarità).

Se $u_0: [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{C}$ (presa in L^2) continua e tale che $\sum_{n \in \mathbb{Z}} |c_n^0| < +\infty$, allora

$$u(t, x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \underbrace{c_n^0 e^{-n^2 t} e^{inx}}_{u_n(t, x)}$$

definisce una funzione $u: [0, +\infty) \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ tale che

- i) u è 2π -periodica in x ed è reale se u_0 è reale.
- ii) u è continua.
- iii) u è C^∞ su $(0, +\infty) \times \mathbb{R}$.
- iv) Risolve (P). In particolare vale $u_{tt} = u_{xx}$ e valgono le condizioni di periodicità per $t > 0$; e infine vale $u(0, \cdot) = u_0$ su $[-\pi, \pi]$.

Vediamo alcuni lemmi tecnici preparatori.

Notazione. $R :=$ rettangolo di \mathbb{R}^d .

Lemma 4. Date $v_n: R \rightarrow \mathbb{C}$ di classe C^k con $k = 1, 2, \dots, +\infty$ tali che

- $v_n \rightarrow v$ uniformemente.
- $\forall \underline{h} = (h_1, \dots, h_d) \in \mathbb{N}^d$ con $|\underline{h}| := h_1 + \dots + h_d \leq k$ (se $k = +\infty$ allora basta $|\underline{h}| < +\infty$) posto

$$D^{\underline{h}} v_n := \frac{\partial^k}{\partial x_1^{h_1} \dots \partial x_d^{h_d}} v_n$$

$D^{\underline{h}} v_n \rightarrow D^{\underline{h}} v$ converge uniformemente.

allora $v \in C^k$ e $D^{\underline{h}} v = \lim_n D^{\underline{h}} v_n$.

Dimostrazione. Si parte dal caso $d = 1$ e $k = 1$ e si procede per induzione. [TODO: Esercizio] \square

Corollario. 5 Date $u_n: R \rightarrow \mathbb{C}$ di classe C^k con $k = 1, \dots, +\infty$ tali che

$$\forall \underline{h} \text{ con } |\underline{h}| \leq k \quad \sum_n \|D^{\underline{h}} u_n\| < +\infty$$

allora $u := \sum_n u_n$ è una funzione ben definita su R e C^k e $D^{\underline{h}} u = \sum_n D^{\underline{h}} u_n$ per ogni \underline{h} con $|\underline{h}| \leq k$.

In particolare se $\sum_n \|D^{\underline{h}} u_n\|_\infty < +\infty$ per ogni $\underline{h} \in \mathbb{N}^d$ allora u è C^∞ .

Lemma. 6 Data $u: R \rightarrow \mathbb{C}$ e rettangoli $R_i \subset R$ relativamente aperti in R tali che u è C^k sugli R_i per ogni i allora u è di classe C^k su $\tilde{R} := \bigcup_i R_i$.

Lemma. 7 Data $f \in L^2((-\pi, \pi); \mathbb{C})$

$$f \text{ è reale q.o.} \iff c_{-n}(f) = \overline{c_n(f)}$$

Osservazione. Notiamo che se $f \in L^1$ la freccia $\boxed{\Leftarrow}$ è molto più difficile.

Dimostrazione Teorema 1.

- i) u_0 reale $\implies c_{-n}^0 = \overline{c_n^0} \implies c_{-n}^0 e^{-(-n)^2 t} = \overline{c_n^0 e^{-n^2 t}} \iff c_{-n}(u(t, \cdot)) = \overline{c_n(u(t, \cdot))}$.
- ii) Sia $R := [0, +\infty) \times \mathbb{R}$, $\|u_n\|_{L^\infty(R)} = \|c_n^0 e^{-n^2 t}\|_{L^\infty(R)} = |c_n^0|$ dunque $\sum_{n \in \mathbb{Z}} u_n$ converge totalmente su R e quindi u è ben definita e continua su R .
- iii) Presi $h, k = 0, 1, 2, \dots$ se proviamo a calcolare $D_t^h D_x^k u_n = c_n^0 (-n)^{2h} (in)^k e^{-n^2 t} e^{inx}$ vediamo non si riesce a stimare per $t \rightarrow 0$ infatti

$$\|D_t^h D_x^k u_n\|_{L^\infty(R)} = |c_n^0| \cdot |n|^{2h+k} \xrightarrow{n} \infty.$$

Serve prendere $\delta > 0$ e sia $R_\delta := (\delta, +\infty) \times \mathbb{R}$

$$\|D_t^h D_x^k u_n\|_{L^\infty(R_\delta)} = |c_n^0| \cdot |n|^{2h+k} e^{-n^2 \delta}$$

in particolare per ogni h, k abbiamo che $|n|^{2h+k} e^{-n^2 \delta} \xrightarrow{n} 0 \implies |n|^{2h+k} e^{-n^2 \delta} \leq m_{h,k} \implies \|D_t^h D_x^k u_n\|_{L^\infty(R_\delta)} \leq m_{h,k} \cdot |c_n^0|$ e quindi $\sum_n D_t^h D_x^k u_n$ converge totalmente su R_δ .

Quindi u è C^∞ su R_δ per ogni $\delta > 0$ e siccome R_δ è aperto in R per il Lemma. 6 u è C^∞ su $\bigcup_{\delta > 0} R_\delta = (0, +\infty) \times \mathbb{R}$.

- iv) Essendo che u è 2π -periodica in x , valgono le condizioni al bordo; inoltre u_0 e $u(0, \cdot)$ hanno gli stessi coefficienti di Fourier, dunque $u_0 = u(0, \cdot)$ quasi ovunque, ma essendo continue vale $u_0 = u(0, \cdot)$ su $[-\pi, \pi]^1$.

Per mostrare che $u_t = u_{xx}$ osserviamo che $(u_n)_t = (u_n)_{xx}$ e che l'equazione è lineare omogenea:

$$u_t = \left(\sum_n u_n \right)_t \stackrel{\text{Cor 5}}{=} \sum_n (u_n)_t = \sum_n (u_n)_{xx} \stackrel{\text{Cor 5}}{=} \left(\sum_n u_n \right)_{xx} = u_{xx}.$$

□

Ora enunciamo il teorema di unicità, vogliamo un teorema con il minor numero di ipotesi possibile e che ci dà più informazioni; quindi in questo caso cerchiamo la più grande famiglia di funzioni (quindi la meno regolare possibile) sulla quale vale l'unicità della soluzione.

Teorema. 2 (Unicità) Sia $u: [0, T) \times [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{C}$ continua, C^1 nel tempo e C^2 nello spazio per $t > 0$. Se u risolve (P) su $t > 0$ allora u è unica.

¹I coefficienti di Fourier sono prodotti scalari in L^2 dunque sono definiti a meno di insiemi di misura nulla.

Definizione. Dato R un rettangolo e $u: R \rightarrow \mathbb{C}$ diciamo che u è C^k nella variabile x_i se $\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)^h u$ esiste per $h = 1, \dots, k$ ed è continua su R .

Lemma 8. Sia $u: I \times [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{C}$ e sia $c_n(t) := c_n(u(t, \cdot))$ per ogni n .

- Se u è continua c_n è continua su I .
- Se u è C^k allora c_n è C^k su I e $c_n(D_t^h u(t, \cdot)) = D_t^h c_n(u(t, \cdot))$ per $h \leq k$.

Dimostrazione. Si ricorda che

$$c_n(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} u(t, x) e^{-inx} dx.$$

La continuità segue dal teorema di convergenza dominata¹. Il resto dell'enunciato segue dal teorema di derivazione sotto il segno di integrale (applicato k -volte per l'ultima parte dell'enunciato). \square

Lemma 9. Sia $y: [0, T) \rightarrow \mathbb{R}^k$ funzione continua su $[0, T)$ e derivabile su $(0, T)$ che risolve l'equazione differenziale ordinaria $\dot{y} = f(t, y)$ su $(0, T)$ con $f: [0, T) \times \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^k$ continua. Allora y è C^1 su $[0, T)$ e risolve $\dot{y} = f(t, y)$ su $[0, T)$.

Dimostrazione Teorema 2. Poniamo $c_n(t) := c_n(u(t, \cdot))$. Sappiamo che per $t > 0$ vale $\dot{c}_n(t) \stackrel{(*)}{=} c_n(u_t(t, \cdot)) = c_n(u_{xx}(t, \cdot)) \stackrel{(**)}{=} -n^2 c_n(t)$, dove $(*)$ segue dal Lemma 8 e $(**)$ segue dalla regolarità dei coefficienti. Dunque, per il Lemma 9, i coefficienti c_n risolvono il problema di Cauchy

$$\begin{cases} \dot{y} = -n^2 y \\ y(0) = c_n^0 \end{cases}$$

che ha un'unica soluzione. \square

Notazione. $\mathcal{C}_{\text{per}}^k = \{f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C} \text{ } \pi\text{-periodiche e } C^k\}$.

Teorema 3 (di non esistenza nel passato). Esiste $u_0 \in \mathcal{C}_{\text{per}}^\infty$ tale che per ogni $\delta > 0$ non esiste $u: (-\delta, 0] \times [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{C}$ soluzione di (P) (u continua, C^1 in t e C^2 in x per $t < 0$)

Dimostrazione. Sia u su $(-\delta, 0) \times [-\pi, \pi]$ un'eventuale soluzione. Sia $c_n(t)$ al solito. Dalla dimostrazione del Teorema 2 abbiamo che c_n risolve (P').

Quindi $c_n(t) = c_n^0 e^{-n^2 t}$. Scegliamo c_n^0 (cioè u_0) in modo che

- $c_n^0 = O(|n|^{-a})$ per $n \rightarrow \pm\infty$ per ogni $a > 0$. ($\Rightarrow \sum |n|^k |c_n^0| < +\infty \quad \forall k \Rightarrow u_0 \in \mathcal{C}_{\text{per}}^\infty$).
- $c_n^0 e^{-n^2 t} \nrightarrow 0$ per ogni $t < 0$.

Con un tale c_n^0 la soluzione non esiste al tempo t . Infatti, se per assurdo esistesse, i coefficienti di Fourier $c_n(t)$ sarebbero quadrato sommabili², ovvero dovrebbero tendere a zero $\not\downarrow$.

Prendiamo $c_n^0 = e^{-|n|}$. \square

¹ $u(t, x)$ funzione continua dunque limitata su I .

²Per la disuguaglianza di Bessel.

Esercizio. Dato u_0 sia T_* il massimo T per cui (P) ammette soluzione su $(-T, 0] \times [-\pi, \pi]$. Caratterizzare T_* in termini del comportamento asintotico di c_n^0 per $n \rightarrow \pm\infty$.

Suggerimento. Guardare $\log(|c_n^0|)/n^2$.

6.3 Equazione delle onde

Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ aperto, I intervallo temporale, $u: I \times \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$, l'equazione delle onde è

$$u_{tt} = v^2 \nabla u = \nabla_x u = \sum_{i=1}^d \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}$$

dove v si chiama **velocità di propagazione**.

La soluzione è univocamente determinata specificando

- Le condizioni al bordo (come per il calore), ad esempio quelle di Dirichlet: $u = v_0$ su $I \times \partial\Omega$ oppure di Neumann: $\partial u / \partial \nu = 0$ su $I \times \partial\Omega$.
- Condizioni iniziali: $u(0, \cdot) = u_0, u_t(0, \cdot) = u_1$.

Esempio 1. Per $d = 1$, $\Omega = [0, 1]$ rappresenta una sbarra sottile di materiale elastico. La sbarra è soggetta a vibrazioni longitudinali (onde sonore). La funzione $u(t, x)$ rappresenta lo spostamento dalla posizione di riposo x al tempo t . In tal caso, l'equazione delle onde è

$$u_{tt} = v^2 u_{xx}.$$

Esempio 2. Per $d = 2$, Ω rappresenta una sbarra sottile di materiale elastico che vibra trasversalmente. La funzione $u(t, x)$ rappresenta lo spostamento verticale del punto di coordinata $x \in \Omega$ a riposo. Allora u soddisfa (per oscillazioni piccole).

$$u_{tt} = v^2 \nabla v.$$

6.4 Risoluzione dell'equazione delle onde

Consideriamo il caso uno dimensionale. In tal caso l'equazione delle onde è la seguente.

$$\begin{cases} u_{tt} = v^2 u_{xx} \\ u(\cdot, \pi) = u(\cdot, -\pi) \\ u_x(\cdot, \pi) = u_x(\cdot, -\pi) \\ u(0, \cdot) = u_0 \\ u_t(0, \cdot) = u_1 \end{cases} \quad (\text{P})$$

6.4.1 Risoluzione formale

Scriviamo $u(t, x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n(t) e^{inx}$. Deriviamo in t e due volte in x .

$$\begin{aligned} u_{tt} &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} \ddot{c}_n e^{inx} \\ u_{xx} &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} -v^2 n^2 c_n e^{inx} \end{aligned}$$

Abbiamo che

$$u_{tt} = v^2 u_{xx} \iff \ddot{c}_n = -v^2 n^2 c_n$$

$$u(0, \cdot) = u_0 \iff c_n(0) = c_n^0 := c_n(u_0) \quad u_t(0, \cdot) = u_1 \iff \dot{c}_n(0) = c_n^1 := c_n(u_1)$$

Quindi u risolve (P) se e solo se per ogni n , c_n risolve

$$\begin{cases} \ddot{y} = -n^2 v^2 y \\ y(0) = c_n^0 \\ \dot{y}(0) = c_n^1 \end{cases} \quad (\text{P}')$$

Dunque,

- Per $n = 0$, $\ddot{y} = 0$ se e solo se y è un polinomio di primo grado, ovvero $c_0(t) = c_0^0 + c_0^1 t$.
- Per $n \neq 0$, $y = \alpha_n^+ e^{inv t} + \alpha_n^- e^{-inv t}$ con

$$\alpha_n^\pm = \frac{1}{2} \left(c_n^0 \pm \frac{c_n^1}{inv} \right)$$

Quindi, la soluzione è

$$u(t, x) = c_0^0 + c_0^1 t + \sum_{n \neq 0} \left[\alpha_n^+ e^{in(x+vt)} + \alpha_n^- e^{in(x-vt)} \right] \quad (*)$$

Inoltre,

$$u(t, x) = c_0^0 + c_0^1 t + \varphi^+(x + vt) + \varphi^-(x - vt) \quad (**)$$

con φ^\pm funzioni con coefficienti di Fourier α_n^\pm che si dicono **onde viaggianti**.

Nota. La (**) è specifica delle equazioni delle onde.

Vedremo i seguenti risultati

- Esistenza usando la forma (**), specifico per equazione delle onde.
- Esistenza usando la forma (*), che però richiede maggiore regolarità su u_0 e u_1 .
- Unicità.

Teorema 1. Dati $u_0 \in C_{\text{per}}^2, u_1 \in C_{\text{per}}^1$, allora esistono $c_0^0, c_0^1 \in \mathbb{C}$ e $\varphi^+, \varphi^- \in C_{\text{per}}^2$ (con integrale nullo sul periodo) tali che la u in (**) è di classe C^2 su $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, 2π -periodica in x e risolve (P). Inoltre, se u_0, u_1 sono reali u è reale.

Lemma 4. Date $h, g \in C^1(\mathbb{R})$ con g primitiva di h e $T > 0$ allora g è T -periodica $\iff h$ è T -periodica e $\int_0^T h(x) dx = 0$.

Dimostrazione. Notiamo che h è T -periodica se e solo se $\forall x \int_x^{T+x} h(x) dx = \text{cost.}$

$$\int_x^{T+x} h(x) dx = g \Big|_x^{T+x} = g(T+x) - g(x) = 0 \iff g \text{ è } T\text{-periodica}$$

Dimostrazione Teorema 1.

Parte 1. Se $c_0^0, c_0^1 \in \mathbb{C}$ e $\varphi^+, \varphi^- \in C_{\text{per}}^2$ allora la u data da $(**)$ è C^2 su $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ e 2π -periodica in x e risolve $u_{tt} = v^2 u_{xx}$.

$$\begin{aligned} u_{tt} &= [\ddot{\varphi}^+(x+vt) + \ddot{\varphi}^-(x-vt)]v^2 \\ u_{xx} &= \ddot{\varphi}^+(x+vt) + \ddot{\varphi}^-(x-vt) \end{aligned} \implies u_{tt} = v^2 u_{xx}$$

Parte 2. $\exists c_0^0, c_0^1 \in \mathbb{R}$ e $\varphi^+, \varphi^- \in C_{\text{per}}^2$ tali che la u data da $(**)$ soddisfa la condizione iniziale in (P), per $t = 0$, poste $\varphi^\pm = \varphi^\pm(x \pm v_0)$

$$\begin{cases} c_0^0 + \varphi^+ + \varphi^- = u_0 \\ c_0^1 + v(\dot{\varphi}^+ - \dot{\varphi}^-) = u_1 \end{cases} \implies \begin{cases} \varphi^+ + \varphi^- = u_0 - c_0^0 =: g_0 \in C^2 \\ (\varphi^+ - \varphi^-)' = (u_1 - c_0^1)/v =: h_1 \in C^1 \end{cases}$$

ed ora fissiamo $c_0^0 = \int_{-\pi}^{\pi} u_0 dx$ e $c_0^1 = \int_{-\pi}^{\pi} u_1 dx$. In questo modo possiamo applicare il lemma precedente ed ottenere

$$\begin{cases} \varphi^+ + \varphi^- = g_0 \\ (\varphi^+ - \varphi^-)' = g_1' \end{cases} \implies \varphi^+ = \frac{1}{2}(g_0 + g_1) \quad \varphi^- = \frac{1}{2}(g_0 - g_1)$$

dove g_1 è la primitiva di h_1 . □

Teorema 2. Siano $u_0, u_1: [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{C}$ continue e tali che

$$\sum n^2 |c_n^0| < +\infty \quad \sum |n| \cdot |c_n^1| < +\infty.$$

Allora $(*)$ definisce una funzione $u: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ di classe C^2 , 2π -periodica in x che risolve (P). Inoltre, se u_0, u_1 sono reali u è reale.

Dimostrazione.

$$u(t, x) = c_0^0 + c_0^1 t + \sum_{n \neq 0} (\underbrace{\alpha_n^+ e^{in(x+vt)}}_{v_n^+} + \underbrace{\alpha_n^- e^{in(x-vt)}}_{v_n^-})$$

Passo 1 Dimostriamo che $u \in C^0(\mathbb{R} \times \mathbb{R})$ e 2π -periodica in x .

La funzione u soddisfa le condizioni di periodicità. Per mostrare la continuità è sufficiente mostrare che la serie converge totalmente su $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Notiamo che

$$\|v_n^\pm\|_{L^\infty(\mathbb{R} \times \mathbb{R})} = |\alpha_n^\pm| = O\left(|c_n^0| + \frac{|c_n^1|}{n}\right),$$

dunque sono sommabili in n .

Passo 2 Mostriamo che $u \in C^2(\mathbb{R} \times \mathbb{R})$.

Abbiamo

$$\begin{aligned} D_t^h D_x^k v_n^\pm &= \alpha_n^\pm e^{in(x \pm vt)} (in)^k (ivn)^h \\ \implies \|D_t^h D_x^k v_n^\pm\|_{L^\infty(\mathbb{R} \times \mathbb{R})} &= |\alpha_n^\pm| \cdot |v|^h \cdot |n|^{k+h} = O(|c_n^0| \cdot |n|^{k+h} + |c_n^1| \cdot |n|^{k+h-1}) \end{aligned}$$

che è sommabile se $k + h \leq 2$ in n . La serie in $(*)$ converge totalmente su $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ con tutte le derivate di ordine $\leq 2 \implies u \in C^2$.

Passo 3 Dimostriamo che u risolve il problema (P).

Notiamo che $u(t, x)$ risolve l'equazione $u_{tt} = v^2 u_{xx}$ usando il lemma che ci garantisce di poter scambiare serie e derivata usando la regolarità C^2 dimostrata al punto precedente. Inoltre

$$\begin{aligned} c_n(u(0, \cdot)) &= c_n(u_0) \implies u(0, \cdot) = u_0 \\ c_n(u_t(0, \cdot)) &\stackrel{\text{Lem 8}}{=} \dot{c}_n(u(0, \cdot)) = c_n(u_1) \implies u_t(0, \cdot) = u_1. \end{aligned}$$

perché le funzioni sono continue.

Teorema 3 (Unicità). Se $u: I \times [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{C}$ è C^2 in x e t e risolve (P) allora è unica.

Dimostrazione. Si ripercorre la stessa dell'equazione del calore.

Nota. I è un intervallo che può contenere lo zero.

6.5 Altre applicazioni della serie di Fourier

6.5.1 Disuguaglianza isoperimetrica

Sia D un aperto limitato con frontiera C^1 parametrizzata da un unico cammino γ (quindi niente buchi o più di una componente connessa). Allora $L^2 \geq 4\pi A$ dove L è la lunghezza di ∂D e A è l'area di D . Inoltre vale l'uguale se e solo se D è un disco.

Dimostrazione.

Possiamo scegliere $\gamma: [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{R}^2 \simeq \mathbb{C}$ e γ parametrizzazione di ∂D in senso antiorario ed a velocità costante (da cui $|\dot{\gamma}(t)| = L/2\pi$)

Passo 1.

$$L^2 = 2\pi \int_{-\pi}^{\pi} |\dot{\gamma}|^2 dt = 2\pi \|\dot{\gamma}\|_2^2 = 4\pi^2 \sum |c_n(\dot{\gamma})|^2 = 4\pi^2 \sum n^2 |c_n|^2$$

Passo 2.

$$A \stackrel{(*)}{=} \frac{1}{2} \langle -i\dot{\gamma}, \gamma \rangle = \frac{1}{2} 2\pi \sum (-i(nc_n))c_n = \pi \sum n|c_n|^2$$

Vediamo che vale questa formula per l'area usata in (*), poniamo $\gamma = \gamma_x + i\gamma_y$ allora

$$\begin{aligned} \langle \dot{\gamma}, \gamma \rangle &= \int_{-\pi}^{\pi} \dot{\gamma} \bar{\gamma} dt \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} (\gamma_x - i\gamma_y)(\dot{\gamma}_x + i\dot{\gamma}_y) dt = \\ &= \int_{\gamma} (x - iy)(dx + i dy) = \\ &= \int_D 2i dx dy = 2iA \end{aligned}$$

Passo 3. Infine $L^2 = 4\pi \sum n^2 |c_n|^2$ e $4\pi A = 4\pi \sum n|c_n|^2$, dunque segue subito che $L^2 \geq 4\pi A$ e vale l'uguale se e solo se $n^2 = n$ o se $c_n = 0$ per ogni $n \implies \gamma(t) = c_0 + c_1 e^{it}$ che è una circonferenza di centro c_0 e raggio $|c_1|$.

6.6 Appendice

Studiamo alcune variazioni dell'equazione del calore.

Nota. Un problema del tipo $u_t = a(t) \cdot u_{xx}$ si può risolvere ripercorrendo i passaggi della risoluzione dell'equazione del calore. Viceversa, il problema $u_t = a(x) \cdot u_{xx}$ non si può risolvere allo stesso modo, in quanto, non è vero che il prodotto di serie di Fourier ha come coefficienti il prodotto dei coefficienti.

Studiamo ora variazioni alle condizioni di bordo.

Osservazione. Quando proviamo a risolvere $u_t = u_{xx}$, passiamo alla serie di Fourier e deriviamo; per fare questo passaggio servono le condizioni al bordo¹; dunque, togliendo le condizioni di periodicità il sistema non funziona più molto bene.

Introduciamo delle varianti della serie di Fourier.

6.6.1 Basi di Hilbert rilevanti

- **Serie di Fourier reale.** Data $u \in L^2([-\pi, \pi])$, definiamo

$$u(x) = \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)] + a_0$$

$$a_n(u) = c_n(u) + c_{-n}(u) \quad b_n(u) = i(c_n(u) - c_{-n}(u)) \quad a_0(u) = c_0(u)$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx) dx \quad b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(nx) dx$$

$$\text{e con base hilbertiana } \left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{\cos(nx)}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin(nx)}{\sqrt{\pi}} \mid n \geq 1 \right\}.$$

- **Serie di Fourier su $[-\pi, \pi]^d$.** Data $u \in L^2([-\pi, \pi]^d, \mathbb{C})$, definiamo

$$u(x) = \sum_{\underline{n} \in \mathbb{Z}^d} c_{\underline{n}} e^{i \underline{n} x} \quad c_{\underline{n}} = c_{\underline{n}}(u) := \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{[-\pi, \pi]^d} u(x) e^{-i \underline{n} x} dx$$

con base di Hilbert

$$\mathcal{F} = \left\{ \frac{e^{i \underline{n} x}}{(2\pi)^{d/2}} : \underline{n} \in \mathbb{Z}^d \right\}$$

C'è da dimostrare che \mathcal{F} è una base di Hilbert.

Dimostrazione (idea).

- Ortonormalità. È un conto [TO DO].
- Completezza. Si può dimostrare come per $d = 1$, oppure si usa il seguente lemma.
Lemma. Sia $\mathcal{F}_1 := \{e_n^1\}$ base di Hilbert di $L^2(X_1, \mathbb{C})$ e $\mathcal{F}_2 := \{e_n^2\}$ base di Hilbert di $L^2(X_2, \mathbb{C})$. Allora, una base di Hilbert di $L^2(X_1 \times X_2, \mathbb{C})$ è

$$\mathcal{F} = \left\{ e_{n_1, n_2}(x_1, x_2) \mid e_{n_1}^1(x_1) e_{n_2}^2(x_2) \right\}$$

¹ Anche se avevamo derivato le formule formalmente anche a posteriori l'ipotesi delle condizioni al bordo era necessaria.

Formula chiave. Se $u \in C_{\text{per}}^1(\mathbb{R}^d) = \{\text{funzioni } 2\pi\text{-periodiche in tutte le variabili}\}$. Abbiamo che

$$c_{\underline{n}}(\nabla u) = i\underline{n}c_{\underline{n}}(u), \quad c_{\underline{n}}(\Delta u) = -|\underline{n}|^2 c_{\underline{n}}(u) \quad \text{se } u \in \mathcal{C}_{\text{per}}^2$$

- **Serie in seni.** Data $u \in L^2([0, \pi])$, allora

$$u(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(nx) \quad b_n = b_n(u) := \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} u(x) \sin(nx) \, dx$$

con base di Hilbert

$$\mathcal{F} = \left\{ \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin(nx) \mid n \geq 1 \right\}$$

Dimostrazione. Mostriamo l'ortonormalità e la completezza.

Ortonormalità. Sono conti.

Completezza. Data $u \in L^2([0, \pi])$. Sia \tilde{u} l'estensione dispari a $[-\pi, \pi]$. Allora

$$\tilde{u} = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{a}_n \cos(nx) + \tilde{b}_n \sin(nx) \underset{\tilde{u} \text{ dispari}}{=} \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{b}_n \sin(nx).$$

Osservazione. I coefficienti $\tilde{b}_n = b_n$. Si può vedere in diversi modi, un modo possibile è questo.

$$\tilde{b}_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \tilde{u}(x) \sin(nx) \, dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \tilde{u} \sin(nx) \, dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} u(x) \sin(nx) \, dx = b_n.$$

Formula chiave. Data $u \in \mathcal{C}^2([0, \pi])$ con condizioni al bordo $u(\cdot, 0) = u(\cdot, \pi)$. Allora

$$b_n(\ddot{u}) = -n^2 b_n(u)$$

dove

$$\begin{aligned} b_n(\ddot{u}) &:= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \ddot{u}(x) \sin(nx) \, dx \\ &= \frac{2}{\pi} \left[\dot{u}(x) \sin(nx) \right]_0^{\pi} - n \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \dot{u}(x) \cos(nx) \, dx \\ &= -n \frac{2}{\pi} \left[u(x) \cos(nx) \right]_0^{\pi} - n^2 \underbrace{\left(\frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} u(x) \sin(nx) \, dx \right)}_{b_n(u)} \\ &= -n^2 b_n(u). \end{aligned}$$

□

Applicazione (della serie in seni). Risoluzione di EDP su $[0, \pi]$ con condizioni di Dirichlet (omogenee) al bordo.

Esempio. Risolvere

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} & \text{su } [0, \pi] \\ u(\cdot, 0) = u(\cdot, \pi) = 0 \\ u(0, \cdot) = u_0 \end{cases} \quad (\text{P})$$

Soluzione. Poniamo $b_n^0 := b_n(u_0)$. Scriviamo $u(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n(t) \sin(nx)$ serie di seni in x .

Formalmente,

$$u_t = \sum_{n=1}^{\infty} \dot{b}_n(t) \sin(nx) \quad u_{xx} = \sum_{n=1}^{\infty} -n^2 b_n(t) \sin(nx),$$

dunque

$$u_t = u_{xx} \iff \dot{b}_n(t) = -n^2 b_n(t) \quad \forall t \forall n.$$

Cioè $b_n(t)$ risolve il problema di Cauchy.

$$\begin{cases} \dot{y} = -n^2 y \\ y(0) = \dot{b}_n. \end{cases} \quad (\text{P}')$$

Ovvero $b_n(t) = b_n^0 e^{-n^2 t}$, da cui

$$u(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{b_n^0 e^{-n^2 t} \sin(nx)}_{u_n}. \quad (*)$$

Teorema 1 (di esistenza nel futuro). Se $u_0: [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$ è continua è $\sum_n |b_n^0| < +\infty$ (basta $u_0 \in \mathcal{C}^1$ e $u(0) = u(\pi) = 0$). Allora la u in $(*)$ è ben definita e continua su $[0, +\infty) \times \mathbb{R}$ e risolve (P).

Dimostrazione. Dimostriamo il teorema per passi.

Passo 1. Mostriamo che u è ben definita e continua su $(0, +\infty) \times \mathbb{R}$: studiamo la norma del sup. Sia $R = [0, +\infty) \times \mathbb{R}$.

$$\|u_n\|_{L^\infty(R)} \leq |b_n^0| \implies u_n \text{ converge totalmente su } \mathbb{R}.$$

Passo 2. Mostriamo che \mathcal{C}^∞ su $(0, +\infty) \times \mathbb{R}$. Sia $R_\delta = (\delta, +\infty) \times \mathbb{R}$. Stimiamo le derivate.

$$\begin{aligned} D_t^k D_x^h u_n &= b_n^0 (-n^2)^k e^{-n^2 t} \cdot n^h \cdot \underbrace{\cdot \cdot \cdot}_{\star} \\ \implies \|D_t^k D_x^h u_n\|_{L^\infty(R_\delta)} &= |b_n^0| \underbrace{e^{-n^2 \delta} \cdot |n|^{2k+h}}_{\substack{\text{limitato in } n \\ \text{perché è infinitesimo in } n}} \end{aligned}$$

Allora le norme delle derivate sono sommabili per ogni n , dunque $u \in \mathcal{C}^\infty(R_\delta)$ per ogni δ , da cui $u \in \mathcal{C}^\infty((0, +\infty), \mathbb{R})$.

Passo 3. Mostriamo che la $u(t, x)$ definita in $(*)$ risolve (P).

- u risolve $u_t = u_{xx}$ per $t > 0$. Infatti, l'equazione è lineare per quanto mostrato al punto sopra e dunque posso scambiare serie e derivata.
- u soddisfa la condizione iniziale $u(0, \cdot) = u_0$, perché hanno gli stessi coefficienti di Fourier.
- Sono soddisfatte anche le condizioni al bordo, infatti

$$u(\cdot, 0) = u(\cdot, \pi) = 0$$

□

Domanda. Quale ipotesi su u_0 garantisce $\sum_n |b_n^0| < +\infty$? Basta $u_0 \in \mathcal{C}^1$ e $u(0) = u(\pi) = 0$.

Teorema 2 (non esistenza nel passato). Esiste $u_0: [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$ \mathcal{C}^∞ , con $u_0(0) = u_0(\pi)$ tale che per ogni $\delta > 0$ (P) non ha alcuna soluzione $u: (-\delta, 0] \times [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$ continua e \mathcal{C}^1 in t e \mathcal{C}^2 in x .

Teorema 3 (di unicità). Sia $u: [0, T) \times [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{C}$ continua, \mathcal{C}^1 nel tempo e \mathcal{C}^2 nello spazio per $t > 0$. Se u risolve (P) su $t > 0$ allora u è unica.

6.6.2 Operatori autoaggiunti

Notiamo che l'efficacia per la soluzione di certe EDP dipende dal fatto che

$$c_n(u) = inc_n(u) \quad b_n(\ddot{u}) = -n^2 b_n(u)$$

che segue (almeno formalmente) da $(e^{inx})' = ine^{inx}$ e $(\sin(nx))'' = -n^2 \sin(nx)$.

Cioè che $\{e^{inx}/\sqrt{2\pi}\}$ è una base ortonormale di $L^2([-\pi, \pi], \mathbb{C})$ di autovettori di D^1 e $\{\sqrt{2/\pi} \sin(x)\}$ è una base ortonormale di $L^2([0, \pi]; \mathbb{C})$ di autovettori di D^2 .

Analogamente per risolvere $u_t = \Delta u$ su Ω , basterebbe avere $\{e_n\}$ base ortonormale di $L^2(\Omega)$ fatta di autovettori del laplaciano.

Per avere una base ortonormale di autovettori di un operatore T serve che T sia autoaggiunto (almeno in dimensione finita).

Definizione. Dato H spazio di Hilbert complesso o reale, D sottospazio denso di H , $T: D \rightarrow H$ lineare (non necessariamente continuo), dico che T è **autoaggiunto** se $\langle Tx, y \rangle = \langle x, Ty \rangle$ per ogni $x, y \in D$. Infine, si dice che T è **definito positivo** se $\langle Tx, x \rangle > 0$.

Proposizione. Dato T come sopra

- i) Se λ è autovalore di T (ovvero tale che $\exists x \neq 0$ tale che $Tx = \lambda x$) allora λ è reale.
- ii) Dati $\lambda_1 \neq \lambda_2$ autovalori allora $V_{\lambda_1} \perp V_{\lambda_2}$ dove $V_\lambda := \{x \mid Tx = \lambda x\}$.
- iii) Se T è definito positivo allora $\underbrace{\langle Tx, x \rangle}_{\text{è reale}} > 0$ per ogni $x \in D$ dunque ogni autovalore è > 0 .

Attenzione! Per dimostrare che gli autovettori di un operatore autoaggiunto T formano una base di $L^2(\Omega)$ è necessario verificare la completezza: infatti, il teorema garantisce solamente l'ortogonalità. Per dimostrare la completezza si può, per esempio, usare il teorema di Stone-Weierstrass.

Nota. In dimensione infinita manca un teorema spettrale, ovvero tale che $\overline{\bigoplus_\lambda V_\lambda} = H$.

¹Operatore derivata.

Esempio 1. Sia $H = L^2([-\pi, \pi], \mathbb{C})$, $D = \{u \in C^2(-\pi, \pi) \mid u(-\pi) = u(\pi)\}$ e $T: D \rightarrow H$ tale che $u \mapsto i\dot{u}$. Mostrare che

- i) T è autoaggiunto
- ii) Gli autovalori di T sono $\lambda_n = n$ con $n \in \mathbb{Z}$ $V_{\lambda_n} = V_n = \text{Span}\{e^{inx}\}$.
- iii) T non è continuo

In questo caso esiste una base ortonormale di L^2 di autovettori di T .

Dimostrazione.

- i) Dati $u, v \in D(= \mathcal{C}_{\text{per}}^1)$, allora

$$\langle Tu, v \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} i\dot{u}\bar{v} \, dx = \left[iu\bar{v} \right]_{-\pi}^{\pi} - \int_{-\pi}^{\pi} iu\dot{\bar{v}} \, dx = \int_{-\pi}^{\pi} u\overline{i\dot{v}} \, dx$$

- ii) Questo è un esercizio di equazioni differenziali ordinarie. Risolviamo il problema

$$\begin{cases} i\dot{u} = \lambda u & \text{su } [-\pi, \pi] \\ u(\pi) = u(-\pi) \end{cases}$$

da cui $\dot{u} + i\lambda u = 0$, che ha polinomio associato $t + i\lambda = 0$ con radice $-i\lambda$. In conclusione la soluzione del problema sopra è $\alpha e^{-i\lambda x}$.

Dalla condizione al bordo abbiamo che $\alpha e^{i\lambda\pi} = \alpha e^{-i\lambda\pi}$ dunque $e^{i\lambda\pi} = e^{-i\lambda\pi} \iff e^{2i\lambda\pi} = 1 \iff \lambda \in \mathbb{Z}$.

- iii) Siccome gli autovalori sono illimitati, T non è continuo. □

Esempio 3. Sia $H = L^2([-\pi, \pi], \mathbb{C})$ $D = \{u \in C^1(-\pi, \pi)\}$ e $T: D \rightarrow H$ tale che $u \mapsto i\dot{u}$.

Dimostrazione. Dati $u, v \in D$ abbiamo

$$\begin{aligned} \langle Tu, v \rangle &= \int_{-\pi}^{\pi} i\dot{u}\bar{v} \, dx = \left[iu\bar{v} \right]_{-\pi}^{\pi} - \int_{-\pi}^{\pi} iu\dot{\bar{v}} \, dx \\ &= i(u(\pi)\bar{v}(\pi) - u(-\pi)\bar{v}(-\pi)) + \langle u, Tv \rangle \neq \langle u, Tv \rangle. \end{aligned}$$

In quanto, in generale, il termine $u(\pi)\bar{v}(\pi) - u(-\pi)\bar{v}(-\pi)$ è diverso da zero.

Esercizio. Cercare $T: L^2([0, 1]) \rightarrow L^2([0, 1])$ continuo autoaggiunto senza autovalori.

Suggerimento. Cercare T del tipo $T: u \mapsto gu$ con $g \in L^\infty$.

6.7 Esercizi

6.7.1 Calcolo dei coefficienti di Fourier

Data $f: [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$ o \mathbb{C} uno degli esercizi più comuni è doverne calcolare lo sviluppo di Fourier complesso o reale.

Osservazione. Ricordiamo che $c_n(f)$ può essere calcolato anche solo se $f \in L^1$ inoltre

$$\text{SF}_{\mathbb{C}}(f) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n(f) e^{inx} \quad c_n(f) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx} dx$$

e con base hilbertiana $\left\{ \frac{e^{inx}}{\sqrt{2\pi}} \mid n \in \mathbb{Z} \right\}$

invece nel caso reale abbiamo visto

$$\text{SF}_{\mathbb{R}}(f) = \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)] + a_0$$

$$a_n(f) = c_n(f) + c_{-n}(f) \quad b_n(f) = i(c_n(f) - c_{-n}(f)) \quad a_0(f) = c_0(f)$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx) dx \quad b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(nx) dx$$

e con base hilbertiana $\left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{\cos(nx)}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin(nx)}{\sqrt{\pi}} \mid n \geq 1 \right\}$

Esercizio. Sia $f(x) = \cos^2(x) \sin(3x)$, calcolare i coefficienti di Fourier¹.

Svolgimento. Usiamo lo sviluppo complesso

$$\cos(x) = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \quad \sin(x) = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$$

Dunque possiamo riscrivere $f(x)$ come

$$\begin{aligned} &= \frac{i}{8} (e^{i2x} + e^{-i2x} + 2) (e^{-i3x} - e^{i3x}) = \\ &= \frac{i}{8} (e^{-ix} + e^{-i5x} + 2e^{-i3x} - e^{i5x} - e^{ix} - 2e^{i3x}) = \\ &= \frac{i}{8} e^{-ix} + \frac{i}{8} e^{-i5x} + \frac{i}{4} e^{-i3x} - \frac{i}{8} e^{i5x} - \frac{i}{8} e^{ix} - \frac{i}{4} e^{i3x}. \end{aligned}$$

Dunque possiamo già scrivere i coefficienti di Fourier complessi di $f(x)$

$$c_n(f) \neq 0 \iff n = \pm 1, \pm 3, \pm 5$$

$$c_{\pm 1}(f) = \mp \frac{i}{8} \quad c_{\pm 3}(f) = \mp \frac{i}{4} \quad c_{\pm 5}(f) = \mp \frac{i}{8}.$$

Continuiamo ora il conto precedente e ricostruiamo la serie di Fourier reale ricomponendo i termini

$$\begin{aligned} &= -\frac{i^2}{4} \left(\frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} \right) - \frac{i^2}{2} \left(\frac{e^{i3x} - e^{-i3x}}{2i} \right) - \frac{i^2}{4} \left(\frac{e^{i5x} - e^{-i5x}}{2i} \right) = \\ &= \frac{1}{4} \sin(x) + \frac{1}{2} \sin(3x) + \frac{1}{4} \sin(5x), \end{aligned}$$

¹Con funzioni ottenute come combinazioni di prodotti di potenze di funzioni trigonometriche (anche con argomento moltiplicato per un naturale) conviene calcolare lo sviluppo complesso e poi passare a quello reale.

in particolare possiamo notare che $f(\pi) = f(-\pi) = 0$ dunque potevamo già dedurre che la serie di Fourier reale sarebbe stata composta solo da seni.

Esercizio. Caratterizzare i coefficienti $c_n(f)$ di una $f: [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{C}$ in L^2 tale che $\text{Im}(f) \subseteq \mathbb{R}$.

Suggerimento. Si usa che per $z \in \mathbb{C}$ vale $z \in \mathbb{R} \iff z = \bar{z}$.

6.7.2 Applicazione serie di Fourier: risoluzione di PDE

Esercizio. Determinare la soluzione di (P) e stabilire unicità e regolarità della soluzione $u: [0, T) \times [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$ o \mathbb{C} .

$$\begin{cases} u_t = 4u_{xx} \\ u(\cdot, -\pi) = u(\cdot, \pi) \\ u_x(\cdot, -\pi) = u_x(\cdot, \pi) \\ u(0, x) = \cos^2(x) \sin(3x) \end{cases} \quad (\text{P})$$

Svolgimento. Per prima cosa troviamo formalmente una soluzione in serie di Fourier $u(t, x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n(t) e^{inx}$ dove $c_n(t)$ è il coefficiente di $u(t, \cdot)$.

Per il teorema di derivazione sotto il segno di integrale abbiamo

$$u_t(t, x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \dot{c}_n(t) e^{inx} \quad \text{con } c_n(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} u(t, x) e^{-inx} dx$$

Le condizioni al bordo assicurano che $c_n(u_{xx}(t, \cdot)) = -4n^2 c_n(u(t, \cdot))$ da cui otteniamo il seguente problema di Cauchy sui coefficienti

$$\begin{cases} \dot{c}_n(t) = -4n^2 c_n(t) \\ c_n(0) = c_n(u(0, \cdot)) = c_n(\cos^2(x) \sin(3x)) \end{cases} \quad \forall n \in \mathbb{Z}$$

Inoltre dato che $c_n^0 = 0$ se $n \neq \pm 1, \pm 3, \pm 5 \implies c_n(t) = 0$ per questi n , dunque complessivamente i sistemi sono

$$\begin{cases} \dot{c}_1(t) = -4c_1(t) \\ c_1(0) = -\frac{i}{8} \end{cases} \quad \begin{cases} \dot{c}_3(t) = -36c_3(t) \\ c_3(0) = -\frac{i}{4} \end{cases} \quad \begin{cases} \dot{c}_5(t) = -100c_5(t) \\ c_5(0) = -\frac{i}{8} \end{cases}$$

con la condizione $c_{-n}(t) = \overline{c_n(t)}$, così otteniamo

$$\begin{aligned} c_1(t) &= -\frac{i}{8} e^{-4t} & c_3(t) &= -\frac{i}{4} e^{-36t} & c_5(t) &= -\frac{i}{8} e^{-100t} \\ c_{-1}(t) &= \frac{i}{8} e^{-4t} & c_{-3}(t) &= \frac{i}{4} e^{-36t} & c_{-5}(t) &= \frac{i}{8} e^{-100t} \end{aligned}$$

ed infine fattorizzando

$$\begin{aligned} u(t, x) &= \frac{e^{-4t}}{4} \left(-\frac{i}{2} e^{ix} + \frac{i}{2} e^{-ix} \right) + \frac{e^{-36t}}{2} \left(-\frac{i}{2} e^{i3x} + \frac{i}{2} e^{-i3x} \right) + \frac{e^{-100t}}{4} \left(-\frac{i}{2} e^{i5x} + \frac{i}{2} e^{-i5x} \right) = \\ &= \frac{1}{4} e^{-4t} \sin(x) + \frac{1}{2} e^{-36t} \sin(3x) + \frac{1}{2} e^{-100t} \sin(5x) \end{aligned}$$

Esercizio. Consideriamo il problema (P) dato da

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} + u \\ u(\cdot, -\pi) = u(\cdot, \pi) \\ u_x(\cdot, -\pi) = u_x(\cdot, \pi) \\ u(0, \cdot) = u_0 \end{cases} \quad (\text{P})$$

dove $u_0(x)$ è $\cos^2(x) \sin(3x)$ oppure $\sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{1}{2^{|n|}} e^{inx}$.

Svolgimento. Per ora lavoriamo con $u_0(x) = \cos^2(x) \sin(3x)$, notiamo subito che i coefficienti soddisfano l'equazione

$$\begin{cases} \dot{c}_n(t) = -n^2 c_n(t) + c_n(t) = (1 - n^2) c_n(t) \\ c_n(0) = c_n(\cos^2(x) \sin(3x)) \end{cases}$$

da cui $\dot{c}_n(t) = (1 - n^2) c_n$ con soluzione $c_n(t) = \gamma e^{(1-n^2)t}$, quindi ad esempio abbiamo

$$c_{\pm 1}(t) = \mp \frac{i}{8} \quad c_{\pm 3}(t) = \mp \frac{i}{4} e^{-8t} \quad c_{\pm 5}(t) = \mp \frac{i}{8} e^{-24t}$$

Dunque la soluzione finale è

$$\begin{aligned} u(t, x) &= \frac{i}{8} e^{-ix} - \frac{i}{8} e^{ix} + \frac{i}{4} e^{3t} e^{-i3x} + \frac{i}{4} e^{3t} e^{i3x} + \frac{i}{8} e^{-24t} e^{-i5x} + \frac{i}{8} e^{-24t} e^{i5x} = \\ &= -\frac{i}{4} \left(\frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2} \right) - \frac{i}{2} e^{-3t} \left(\frac{e^{i3x} - e^{-i3x}}{2} \right) - \frac{i}{4} e^{-24t} \left(\frac{e^{i5x} - e^{-i5x}}{2} \right) = \\ &= \frac{1}{4} \sin(x) - \frac{1}{2} e^{-3t} \sin(3x) - \frac{1}{4} e^{-24t} \sin(5x) \end{aligned}$$

Invece considerando la condizione iniziale $u_0(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{inx} / 2^{|n|}$ abbiamo che $c_n(u_0) = 1/2^{|n|}$, notiamo che i coefficienti sono sommabili

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{1}{2^{|n|}} = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} + 1 < +\infty \quad u(t, x) := \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{1}{2^{|n|}} e^{(1-n^2)t} e^{inx}$$

in particolare formalmente possiamo scriverla meglio come

$$= \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{1}{2^{|n|}} e^{(1-n^2)t} e^{inx} = e^t \left(1 + \sum_{n>0} \frac{1}{2^{|n|}} e^{(1-n^2)t} \cos(nx) \dots \dots \right)$$

[TODO: Finire meglio questo conto]

Esercizio. (della volta scorsa) Consideriamo la funzione

$$f(x) = \sum_{n \neq 0} \frac{\cos(n)}{|n|^{3/2}} e^{inx}$$

- Dire se f è ben definita e continua.
- Dire se f è derivabile.

Svolgimento.

$$\sum_{n \neq 0} |c_n| = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\cos(n)|}{|n|^{3/2}} \leq 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{3/2}} < +\infty$$

dunque la serie di Fourier converge uniformemente a $f \implies$ è continua e periodica.

Se $\sum |n| \cdot |c_n| < +\infty$ si potrebbe dire che f è derivabile però

$$\sum_{n \neq 0} |n| \cdot |c_n| = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\cos(n)|}{\sqrt{n}} = +\infty \text{ non converge assolutamente}$$

Ma la candidata derivata ha coefficienti inc_n e non starebbe in L^2 ovvero

$$\sum n^2 |c_n|^2 = +\infty \implies \sum inc_n e^{inx} \notin L^2$$

Esercizio. Consideriamo l'equazione alle derivate parziali

$$\begin{cases} u_{ttt}(t, x) = u_{xx}(t, x) & x \in [-\pi, \pi] \\ u(\cdot, \pi) = u(\cdot, -\pi) \\ u_x(\cdot, \pi) = u_x(\cdot, -\pi) \\ u(0, \cdot) = u_0 \\ u_x(0, \cdot) = u_1 \\ u_{xx}(0, \cdot) = u_2 \end{cases} \quad (P)$$

ponendo $c_n^i := c_n(u_i)$ per $n \in \mathbb{Z}$ per $i = 1, 2, 3$. Segue subito che il problema di Cauchy sui coefficienti è

$$\begin{cases} \ddot{c}_n(t) = -n^2 c_n(t) \\ c_n(0) = c_n^0 \\ \dot{c}_n(0) = c_n^1 \\ \ddot{c}_n(0) = c_n^2 \end{cases} \quad \forall n \in \mathbb{Z} \quad (P')$$

che ha polinomio caratteristico $p(\lambda) = \lambda^3 + n^2 \implies \lambda^3 = -n^2$ e dunque le soluzioni sono $\lambda_i = n^{2/3} \zeta_6^{2i-1}$ con ζ_6 una radice sesta dell'unità. Per comodità per $i = 1, 2, 3$ poniamo $z_i := n^{2/3} \omega_i$ con ω_i soluzioni di $\omega^3 = -1$ che possiamo anche riscrivere come

$$\omega_1 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \quad \omega_2 = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i \quad \omega_3 = -1$$

Dunque per $n \in \mathbb{Z}$ e $n \neq 0$ la soluzione sarà

$$\begin{cases} c_n(t) = A_n e^{-z_1^n t} + B_n e^{-z_2^n t} + C_n e^{-z_3^n t} \\ c_n(0) = c_n^0 = A_n + B_n + C_n \\ c_n(1) = c_n^1 = A_n z_1^n + B_n z_2^n + C_n z_3^n \\ c_n(2) = c_n^2 = A_n (z_1^n)^2 + B_n (z_2^n)^2 + C_n (z_3^n)^2 \end{cases}$$

e quindi otteniamo il sistema

$$\implies \begin{cases} c_n^0 = A_n + B_n + C_n \\ n^{-2/3} c_n^1 = A_n \omega_1 + B_n \omega_2 + C_n \omega_3 \\ n^{-4/3} c_n^2 = A_n \omega_1^2 + B_n \omega_2^2 + C_n \omega_3^2 \end{cases} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \omega_1 & \omega_2 & \omega_3 \\ \omega_1^2 & \omega_2^2 & \omega_3^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_n \\ B_n \\ C_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_n^0 \\ n^{-2/3} c_n^1 \\ n^{-4/3} c_n^2 \end{pmatrix}$$

e facendo conti si ottengono A_n, B_n e C_n e si scopre che [TODO: Controllare i conti con Mathematica]

$$\begin{aligned} A_n e^{n^{2/3}(t/2 + i\sqrt{3}t/2)} &\sim e^{n^{2/3}t/2} \xrightarrow{t \rightarrow \infty} \infty \\ B_n e^{n^{2/3}(t/2 - i\sqrt{3}t/2)} &\sim e^{n^{2/3}t/2} \xrightarrow{t \rightarrow \infty} \infty \\ C_n e^{-n^{2/3}t} &\sim e^{-n^{2/3}t} \xrightarrow{t \rightarrow -\infty} \infty \end{aligned}$$

dunque in realtà anche se il problema in partenza sembrava ben definito in realtà non ha soluzione per alcun $t \in \mathbb{R}$.

Conti esatti con Mathematica:

$$\begin{aligned} A_n &\rightarrow \frac{c_n^0}{3} - \frac{c_n^2}{3n^{4/3}} - \frac{(-1)^{2/3}c_n^2}{3n^{4/3}} - \frac{(-1)^{2/3}c_n^1}{3n^{2/3}}, \\ B_n &\rightarrow \frac{c_n^0}{3} - \frac{c_n^2}{6n^{4/3}} + \frac{ic_n^2}{2\sqrt{3}n^{4/3}} + \frac{c_n^1}{6n^{2/3}} + \frac{ic_n^1}{2\sqrt{3}n^{2/3}}, \\ C_n &\rightarrow \frac{c_n^0}{3} + \frac{c_n^2}{3n^{4/3}} - \frac{c_n^1}{3n^{2/3}} \end{aligned}$$

Esercizio. (Equazione del calore senza una condizione al bordo)

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} & x \in [-\pi, \pi] \\ u(\cdot, -\pi) = u(\cdot, \pi) \\ u(0, \cdot) = u_0 = \cos(x/2) \end{cases} \quad (P)$$

i) *Esiste una soluzione?*

Sì in quanto esiste anche con una condizione in più

ii) *È unica?*

Senza periodicità per u_x non è vero in generale che $c_n(u_{xx}(t, \cdot)) = -n^2 c_n(u(t, \cdot))$.

Cerchiamo una soluzione della forma $u(t, x) = \cos(x/2)\psi(t)$. Abbiamo che $u_t(t, x) = \dot{\psi}(t)\cos(x/2)$ e $u_{xx}(t, x) = -\cos(x/2)\psi(t)/4$. Dunque $\dot{\psi}(t) = -\psi(t)/4$ e $\psi(0) = 1 \implies \psi(t) = e^{-t/4}$.

Esercizio.

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} & x \in [0, \pi] \\ u(t, 0) = 0 & t \in \mathbb{R} \\ u(t, \pi) = t & t \in \mathbb{R} \\ u(0, \cdot) = u_0 \end{cases} \quad (P)$$

L'equazione è lineare, cerchiamo $u(t, x) = v(t, x) + \psi(t, x)$ in modo che $v(t, x) = 0$ se $x = 0, \pi$ e $\psi(t, 0) = 0$ e $\psi(t, \pi) = t$ e $\psi(t, x) = tx/\pi$.

Esercizio.

$$\begin{cases} u_t = u_{xxxx} & x \in [-\pi, \pi] \\ u(\cdot, \pi) = u(\cdot, -\pi) \\ u_x(\cdot, \pi) = u_x(\cdot, -\pi) \\ u_{xx}(\cdot, \pi) = u_{xx}(\cdot, -\pi) \\ u_{xxx}(\cdot, \pi) = u_{xxx}(\cdot, -\pi) \\ u(0, \cdot) = u_0 \end{cases} \quad (P)$$

Esercizio.

$$\begin{cases} u_t = u_{xxxx} & x \in [0, \pi] \\ u(\cdot, 0) = u(\cdot, \pi) = 0 \\ u_{xx}(\cdot, 0) = u_{xx}(\cdot, \pi) = 0 \\ u(0, \cdot) = u_0 \end{cases} \quad (P)$$

Esercizio. Sia V il seguente insieme

$$V := \left\{ f \in L^1([1, +\infty)) \mid |f(x)| \leq \frac{1}{x^2} \text{ per q.o. } x \right\}$$

è compatto in L^1 ? e se al posto di L^1 avessimo L^2 ?

[TODO: Espandere]

Intuitivamente $V \supseteq \{f \mid |f(x)| \leq 1/2 \text{ q.o. in } [1, 2]\}$ che non è compatto in quanto contiene famiglie di funzioni che “oscillano molto” costruite sull’idea della base di Haar.

Esercizio. Trovare una funzione in $L^p([0, +\infty))$ tale però che $f \notin L^q$ per $q \neq p$.

Cercare f della forma

$$f(x) = \frac{1}{x^\alpha(a + (\ln x)^\beta)}$$

6.7.3 Operatori autoaggiunti

Esercizi.

- 1) Esempio classico di $H = L^2([-\pi, \pi]; \mathbb{C})$ e $D = \{u \in C^1([-\pi, \pi]; \mathbb{C}) \mid u(-\pi) = u(\pi)\}$ e $Tu = i\dot{u}$ allora T è un operatore autoaggiunto ed ha autovalori $\lambda = n \in \mathbb{Z}$.
- 2) $H = L^2([0, \pi]; \mathbb{R})$ e $D = \{u \in C^2([0, \pi]) \mid u(0) = 0 \text{ e } u(\pi) = 0\}$ sono dette condizioni di Dirichlet con $Tu = -\ddot{u}$.

Ora usiamo sempre $Tu = -\ddot{u}$ ma su domini differenti.

- 3) $D_3 = \{u \in C^2([0, \pi]) \mid \dot{u}(0) = 0 \text{ e } \dot{u}(\pi) = 0\}$ sono dette condizioni di Neumann.
- 4) $D_4 = \{u \in C^2([0, \pi]) \mid u(0) = 0 \text{ e } \dot{u}(\pi) = 0\}$ sono dette condizioni di Robin.

Dire per 2), 3) e 4) rispondere alle seguenti

- L’operatore T è autoaggiunto e controllare se il relativo D è denso in L^2
- Controllare se esistono autovalori ed eventualmente dire chi sono gli autovettori.
- Stabilire se esiste una base Hilbertiana di autovettori.

Risoluzione.

- 2) D_2 è denso. Vediamo l’operatore è autoaggiunto

$$\begin{aligned}\langle Tu, v \rangle &= \int_0^\pi (-\ddot{u}(x))v(x) \, dx = \underbrace{-\dot{u}(x)v(x) \Big|_0^\pi}_{v(0)=v(\pi)=0} - \int_0^\pi (-\dot{u}(x))\dot{v}(x) \, dx = \int_0^\pi \dot{u}(x)\dot{v}(x) \, dx \\ \langle u, Tv \rangle &= \int_0^\pi u(x)(-\ddot{v}(x)) \, dx = \underbrace{u(x)(-\dot{v}(x)) \Big|_0^\pi}_{u(0)=u(\pi)=0} - \int_0^\pi \dot{u}(x)(-\dot{v}(x)) \, dx = \int_0^\pi \dot{u}(x)\dot{v}(x) \, dx\end{aligned}$$

dunque $\langle Tu, v \rangle = \langle \dot{u}, \dot{v} \rangle = \langle u, Tv \rangle$.

Inoltre T è anche definito positivo infatti $\langle Tu, u \rangle = \langle \dot{u}, \dot{u} \rangle = \|\dot{u}\|_{L^2}^2 \geq 0$.

Cerchiamo gli autovalori quindi poniamo $-\ddot{u} = Tu = \lambda u$ con $\lambda \geq 0$ e $u \in D_2$. Segue $p(t) = t^2 + \lambda \implies t = \pm i\sqrt{\lambda}$ se $\lambda \neq 0$.

Se $\lambda = 0$ invece otteniamo $\ddot{u} = 0 \implies u(x) = ax + b$ ma per le condizioni al bordo segue $a, b = 0$ e dunque $u = 0 \implies \lambda = 0$ non è autovalore.

Invece se $\lambda > 0$ abbiamo $u(x) = A \cos(\sqrt{\lambda}x) + B \sin(\sqrt{\lambda}x)$ e segue $A = 0$ e $\lambda = n^2$ per $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$.

- 3) D_2 è denso e similmente si vede che anche in questo caso T è autoaggiunto. Anche in questo caso T è definito positivo perché vale sempre $\langle Tu, v \rangle = \langle \dot{u}, \dot{v} \rangle$.

Per cercare gli autovalori risolviamo il seguente sistema

$$\begin{cases} -\ddot{u} = \lambda u \\ \dot{u}(0) = 0 \\ \dot{u}(\pi) = 0 \end{cases}$$

Se $\lambda = 0$ allora $u(x) = \text{cost.}$ è un autovettore per l'autovalore 0.

Se invece $\lambda \neq 0$ allora $u(x) = A \cos(\sqrt{\lambda}x) + B \sin(\sqrt{\lambda}x) \implies \cos(nx)$ è un autovettore e $\lambda = n^2$ per $n = 1, 2, \dots$

- 4) In questo caso vediamo che vale sempre $\langle Tu, v \rangle = \langle \dot{u}, \dot{v} \rangle$ ma per motivi diversi infatti

$$\begin{aligned} \langle Tu, v \rangle &= \int_0^\pi (-\ddot{u}(x))v(x) dx = \underbrace{-\dot{u}(x)v(x)}_{\dot{u}(\pi)=0, v(0)=0} \Big|_0^\pi - \int_0^\pi (-\dot{u}(x))\dot{v}(x) dx = \int_0^\pi \dot{u}(x)\dot{v}(x) dx \\ \langle u, Tv \rangle &= \int_0^\pi u(x)(-\ddot{v}(x)) dx = \underbrace{u(x)(-\dot{v}(x))}_{\dot{v}(\pi)=0, u(0)=0} \Big|_0^\pi - \int_0^\pi \dot{u}(x)(-\dot{v}(x)) dx = \int_0^\pi \dot{u}(x)\dot{v}(x) dx \end{aligned}$$

Considerando il sistema $-\ddot{u} = \lambda u$ con le condizioni al bordo di Robin caso $\lambda = 0$ non è un autovalore mentre se $\lambda \neq 0$ abbiamo che $\dot{u}(x) = \sqrt{\lambda}B \cos(\sqrt{\lambda}x) = 0$ per $x = \pi$ dunque $\sqrt{\lambda} = n + 1/2$ per $n = 0, 1, 2, \dots$ e gli autovettori sono

$$u_n(x) = \sin \left(\left(n + \frac{1}{2} \right) x \right)$$

Osservazione. $T: D \rightarrow L^2$ operatore lineare e continuo $\iff \exists M > 0$ tale che $\|Tu\|_2 \leq M \|u\|$ per ogni $u \in D$.

Vediamo ad esempio che D_1 non è continuo infatti gli autovalori sono $\lambda_n = n^2 \implies n^2 \|u_n\|_2 \leq M \|u_n\|_2 \implies M \geq n^2$ per ogni n . Dunque M è illimitato e l'operatore non può essere continuo.

Esempio. Se ad esempio abbiamo $Tu = -\ddot{u}$ con $\widetilde{D} = \{u \in C^2 \mid u(0) = u(\pi) = 1\}$ allora T non è autoaggiunto e basta trovare u, v tali che

$$\langle Tu, v \rangle \neq \langle u, Tv \rangle$$

Esercizio.

- i) Sia $T_1: \ell^2 \rightarrow \ell^2$ dato da

$$T_1((x_n)_{n>0}) = (0, x_1, x_2, \dots)$$

- ii) Sia $T_2: \ell^2 \rightarrow \ell^2$ dato da

$$T_2((x_n)_{n>0}) = (x_2, x_3, \dots)$$

Dire se sono autoaggiunti ed eventualmente chi sono gli autovalori.

Esercizi più da compito sono invece cose del tipo...

Esercizio. Sia $H = L^2([0, \pi] \times [0, \pi]; \mathbb{R})$ e $Tu = -\Delta u = -u_{xx} - u_{yy}$

- $D_1 = \{u \in C^2([0, \pi] \times [0, \pi]; \mathbb{R}) \mid u|_{\partial Q} = 0\}$
- $D_2 = \{u \in C^2([0, \pi] \times [0, \pi]; \mathbb{R}) \mid \nabla u|_{\partial Q} = 0\}$
- $D_3 = \{u \in C^2([0, \pi] \times [0, \pi]; \mathbb{R}) \mid u = 0 \text{ su due lati paralleli e } \nabla u = 0 \text{ sugli altri due}\}$

e dire se l'operatore è autoaggiunto ed eventualmente trovare gli autovalori.

Capitolo 7

Trasformata di Fourier

Data $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ poniamo

$$f(x) \stackrel{(*)}{=} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(y) e^{iyx} dy \quad \hat{f}(y) := \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-iyx} dx.$$

Dove \hat{u} si chiama *trasformata di Fourier*¹ di u e la formula $(*)$ si dice *formula di inversione*.

Derivazione formale (della formula di inversione). Prendiamo $f \in \mathcal{C}_C^1(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ e $\delta > 0$ tale che $\text{supp}(f) \subset [-\pi/\delta, \pi/\delta]$.

Scriviamo f in serie di Fourier su $[-\pi/\delta, \pi/\delta]$ (serve un cambio di variabile per ricondursi alla serie di Fourier su $[-\pi, \pi]$).

$$f(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n^\delta(f) e^{in\delta x}$$
$$c_n^\delta(f) := \frac{\delta}{2\pi} \int_{-\pi/\delta}^{\pi/\delta} f(x) e^{-in\delta x} dx = \frac{\delta}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-in\delta x} dx = \frac{\delta}{2\pi} \hat{f}(n\delta).$$

Dunque,

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{\delta}{2\pi} \underbrace{\hat{f}(n\delta) e^{i(n\delta)x}}_{\hat{f}(y) e^{iyx} \text{ calcolata in } y=n\delta}$$

dove $\sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{\delta}{2\pi} \hat{f}(n\delta) e^{i(n\delta)x}$ è la somma di Riemann di $\int_{-\infty}^{\infty} \hat{f} e^{iyx} dy$. Dunque

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{\delta}{2\pi} \hat{f}(n\delta) e^{i(n\delta)x} \xrightarrow{\delta \rightarrow 0} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(y) e^{iyx} dy.$$

Quest'ultimo passaggio non è giustificato rigorosamente ma si può rendere rigoroso per $f \in \mathcal{C}_C^1(\mathbb{R})$.

Definizione. Data $f \in L^1(\mathbb{R}; \mathbb{C})$ la **trasformata di Fourier** \hat{f} è definita da

$$\hat{f}(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-ixy} dx \quad \forall y \in \mathbb{R}.$$

¹Sostituisce la serie di Fourier quando si passa da funzioni su \mathbb{R} 2π -periodiche a funzioni su \mathbb{R} .

Teorema. Data $f \in L^1(\mathbb{R}; \mathbb{C})$, allora

- i) \widehat{f} è ben definita in ogni punto di \mathbb{R} .
- ii) Vale $\|\widehat{f}\|_\infty \leq \|f\|_1$.
- iii) \widehat{f} è continua
- iv) \widehat{f} è infinitesima.

Dimostrazione.

- i) $\widehat{f}(y)$ è ben definita per ogni $y \in \mathbb{R}$. Infatti, $f(x)e^{-iyx} \in L^1$ dato che

$$\|\widehat{f}\|_1 \leq \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)e^{-iyx}| dx = \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx = \|f\|_1.$$

- ii) $\|\widehat{f}\|_\infty \leq \|f\|_1$. Infatti,

$$|\widehat{f}| \leq \int |f(x)e^{-iyx}| dx = \|f\|_1$$

- iii) \widehat{f} è continua. Se $y_n \rightarrow y$, allora

$$\widehat{f}(y_n) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-ixy_n} dx \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-iny} dx = \widehat{f}(y)$$

per convergenza dominata. Infatti, la convergenza puntuale segue dalla continuità dell'esponenziale; mentre la dominazione è data da $|f(x)e^{-iyx}| = |f(x)|$.

- iv) $\widehat{f}(y) \xrightarrow{y \rightarrow \pm\infty} 0$ per il lemma di Riemann-Lebesgue.

□

7.1 Proprietà della trasformata di Fourier

Data $f \in L^1(\mathbb{R}; \mathbb{C})$ abbiamo posto

$$\forall y \in \mathbb{R} \quad \mathcal{F}(f)(y) = \widehat{f}(y) := \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-iyx} dx$$

ed abbiamo visto che

Teorema 1. $\widehat{f} \in C_0(\mathbb{R}; \mathbb{C})$ e $\|\widehat{f}\|_\infty \leq \|f\|_1$.

Proposizione 2. Data $f \in L^1(\mathbb{R}; \mathbb{C})$ allora

- i) $\forall h \in \mathbb{R}$ vale $\widehat{\tau_h f} = e^{-ihy} \widehat{f}$
- ii) $\forall h \in \mathbb{R}$ vale $\widehat{e^{ihx} f} = \tau_h \widehat{f}$
- iii) $\forall \delta \neq 0$ vale $\widehat{\sigma_\delta f} = \widehat{f}(\delta y)$

Derivazione. Partendo dalla formula di inversione

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{2\pi} \int \widehat{f}(y) e^{iyx} dy \\ f(x-h) &= \frac{1}{2\pi} \int \underbrace{\widehat{f}(y) e^{-ihy}}_{=\widehat{f(x-h)}} e^{iyx} dy \end{aligned}$$

Dimostrazione. Facciamo il calcolo diretto

$$\begin{aligned} \widehat{\tau_h f} &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-h) e^{-ixy} dx = \\ &= \left(\begin{array}{l} t = x-h \\ dt = dx \end{array} \right) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-i(t+h)y} dt = \\ &= e^{-ihy} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-ity} dt = e^{-ihy} \widehat{f}(t). \end{aligned}$$

Analogamente seguono anche le altre □

Proposizione 3. Sia $f \in C^1(\mathbb{R}; \mathbb{C})$ con $f, f' \in L^1$ allora $\widehat{f'} = iy\widehat{f}$ (da confrontare con $c_n(f') = inc_n(f)$ nel caso della serie di Fourier).

Derivazione. Si deriva la formula di inversione

$$f'(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{f}(y) iye^{ixy} dy$$

Dimostrazione. Vediamo prima una dimostrazione che non funziona e cerchiamo di aggiustarla. Abbiamo che

$$\widehat{f'}(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f'(x) e^{-iyx} dx = \underbrace{\left[f(x) e^{-iyx} \right]_{-\infty}^{+\infty}}_{(*)} + iy \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-iyx} dx = iy\widehat{f}(y)$$

serve che $f(x) \rightarrow 0$ per $|x| \rightarrow +\infty$ per far sì che $(*) = 0$.

Nota. $f \in C \cap L^1$ non implica che $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow \pm\infty} 0$, tuttavia $f \in C^1 \cap L^1$ e $f' \in L^1$ sì, però la dimostrazione è più complicata.

Argomentiamo come segue: $f \in L^1 \implies \liminf_{|x| \rightarrow \infty} |f(x)| = 0$, in quanto se $\liminf_{|x| \rightarrow \infty} |f(x)| = \delta > 0$ allora la funzione sarebbe $> \delta$ per $|x| \rightarrow +\infty$ ed avrebbe integrale $+\infty$, dunque esistono due successioni $a_n \rightarrow -\infty, b_n \rightarrow +\infty$ tali che $f(a_n) \rightarrow 0$ e $f(b_n) \rightarrow 0$ quindi come prima abbiamo

$$\begin{aligned} \widehat{f'}(y) &\stackrel{(*)}{=} \lim_n \int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_{[a_n, b_n]} f'(x) e^{iyx} dx = \\ &= \lim_n \int_{a_n}^{b_n} f'(x) e^{iyx} dx = \\ &= \lim_n \left(\underbrace{\left[f(x) e^{-iyx} \right]_{a_n}^{b_n}}_{\rightarrow 0} + iy \int_{a_n}^{b_n} f(x) e^{-iyx} dx \right) = \\ &= \lim_n iy \int_{a_n}^{b_n} f(x) e^{-iyx} dx = \\ &= iy\widehat{f}(y) \end{aligned}$$

dove (*) segue dal teorema di convergenza dominata. \square

Proposizione 4. Sia $f \in L^1$ con $xf \in L^1$, allora $\widehat{f} \in C^1(\mathbb{R}; \mathbb{C})$ e $(\widehat{f})' = -i\widehat{xf}$.

Dimostrazione. Per il teorema di derivazione sotto il segno di integrale:

$$\widehat{f}(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-ixy} dx \implies (\widehat{f})'(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)(-ix)e^{-ixy} dx = -i\widehat{xf}$$

Proposizione 5. (Derivazione sotto segno di integrale) Sia I un intervallo di \mathbb{R} , E misurabile in \mathbb{R}^d e $g: I \times E \rightarrow \mathbb{C}$ tale che

i) $g(\cdot, x) \in C^1(I)$ per q.o. $x \in E$.

ii) $\exists h_0, h_1 \in L^1(E)$ tali che

$$|g(t, x)| \leq h_0(x) \quad \text{e} \quad \left| \frac{\partial g}{\partial t}(t, x) \right| \leq h_1(x)$$

allora $G(t) := \int_E g(t, x) dx$ è ben definita per ogni $t \in I$ e $G \in C^1(I)$ e

$$G'(t) = \int_E \frac{\partial}{\partial t} g(t, x) dx$$

Traccia dimostrazione.

- *Passo 1:* $G(t)$ e $\tilde{G}(t)$ sono ben definite $\forall t \in I$ (grazie alla dominazione) e continue in t (usando convergenza dominata e le dominazioni)
- *Passo 2:* Dobbiamo far vedere che G è C^1 con derivata \tilde{G} , si usa la seguente forma del teorema fondamentale del calcolo integrale

$$\forall t_0, t_1 \in I \text{ con } t_0 < t_1 \quad G(t_1) - G(t_0) \stackrel{(*)}{=} \int_{t_0}^{t_1} \tilde{G}(t) dt$$

ed usando Fubini-Tonelli in (*).

Proposizione 6. (Prodotto di convoluzione e trasformata di Fourier). Siano $f_1, f_2 \in L^1(\mathbb{R}; \mathbb{C})$, allora $f_1 * f_2 \in L^1$ (già visto) e vale

$$\mathcal{F}(f_1 * f_2) = (\mathcal{F}f_1) \cdot (\mathcal{F}f_2)$$

Dimostrazione.

$$\begin{aligned} \widehat{f_1 * f_2}(y) &= \int f_1 * f_2(x) e^{-ixy} dx = \\ &= \iint f_1(x-t) f_2(t) dt e^{-ixy} dx = \\ &= \int \left(\int f_1(x-t) e^{-i(x-t)y} dx \right) f_2(t) e^{-ity} dt = \\ &= \int \widehat{f_1}(y) f_2(t) e^{-ity} dt = \widehat{f_1}(y) \cdot \widehat{f_2}(y) \end{aligned}$$

Definizione. Data $g \in L^1(\mathbb{R}; \mathbb{C})$ definiamo l'**antitrasformata di Fourier** di g la funzione

$$\check{g}(x) := \int_{-\infty}^{+\infty} g(y) e^{ixy} dy.$$

Cioè $\check{g}(x) = \widehat{g}(-x)$ e scriviamo anche $\check{g} = \mathcal{F}^* g$. Effettivamente \mathcal{F}^* è l'aggiunto di \mathcal{F} , almeno formalmente¹ infatti abbiamo

$$\langle \mathcal{F}f, g \rangle = \iint f e^{\overline{ixy} g(y)} dx dy = \int f(x) \overline{\check{g}(x)} dx = \langle f, \mathcal{F}^* g \rangle.$$

Teorema 7. Data $f \in L^1(\mathbb{R}; \mathbb{C})$ tale che $\widehat{f} \in L^1(\mathbb{R}; \mathbb{C})$ allora

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \mathcal{F}^* \mathcal{F} f = 2\pi f \quad \text{cioè} \quad \int \widehat{f}(x) e^{ixy} dy = 2\pi f(x)$$

Nota. Una funzione continua e infinitesima non è, in generale, una funzione L^1 ; in particolare, l'ipotesi $\widehat{f} \in L^1$ è necessaria e non deriva dalle proprietà già note.

Dimostrazione. *Dimostrazione scorretta* (passando dalla Delta di Dirac dei fisici):

$$\begin{aligned} \mathcal{F}^* \mathcal{F} f &= \int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{f}(y) e^{iyx} dy = \\ &= \iint f(t) e^{-iyt} dt e^{ixy} dy = \\ &\stackrel{\text{non si può usare Fubini}^1}{\rightarrow} = \int f(t) \underbrace{\int e^{i(x-t)y} dy}_{\text{"}\delta(x-t)\text{"}} dt = f(x) \end{aligned}$$

Dimostrazione vera: scegliamo una funzione ausiliaria $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tale che

- i) $\varphi(0) = 1$ continua in 0 e φ limitata
- ii) $\varphi \in L^1$
- iii) $\check{\varphi} \in L^1$

e poniamo $g_\delta(x) := \int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{f}(y) \varphi(\delta y) e^{ixy} dy$.

- *Passo 1.* $g_\delta(x) \rightarrow \mathcal{F}^* \mathcal{F} f(x)$ per ogni $x \in \mathbb{R}$ per convergenza dominata. Infatti:

$$\int \widehat{f}(y) e^{iyx} \varphi(\delta y) dy \xrightarrow{\delta \rightarrow 0} \int \widehat{f}(y) e^{iyx} dy$$

e come dominazione usiamo $|\widehat{f}(y) e^{iyx} \varphi(\delta y)| \leq |\widehat{f}(y)| \cdot \|\varphi\|_\infty$

¹In L^1 non è definito il prodotto scalare.

¹Infatti $f \in L^1$ non basta per garantire che $\iint |f(t)| < \infty$.

- *Passo 2.* Per Fubini Tonelli vale

$$g_\delta(x) = \int \widehat{f} e^{ixy} \varphi(\delta y) dy = \int \left(\int f(t) e^{-ity} dt \right) e^{ixy} \varphi(\delta y) dy \\ \stackrel{\text{Fubini}}{=} \int f(t) \left(\int \varphi(\delta y) e^{i(x-t)y} dy \right) dt,$$

dato che

$$\iint |f(t) e^{-ity} e^{ixy} \varphi(\delta y)| dt dy = \iint |f(t)| |\varphi(\delta y)| dt dy = \|f\|_1 \cdot \|\varphi(\delta \cdot)\|_1 < +\infty.$$

Dunque otteniamo

$$g_\delta(x) = \int f(t) \overbrace{\left(\int \varphi(\delta y) e^{i(x-t)y} dy \right)}^{\substack{\text{antitrasf. di } \varphi(\delta y) \\ \text{calcolata in } x-t \text{ ovvero } \sigma_\delta \check{\varphi}(x-t)}} dt \\ = \int f(t) \sigma_\delta \check{\varphi}(x-t) dt = f * \sigma_\delta \check{\varphi}(x).$$

- *Passo 3.* Siccome $f \in L^1$ e $\check{\varphi} \in L^1$, per il teorema di approssimazione per convoluzione segue

$$g_\delta(x) = f * \sigma_\delta \check{\varphi}(x) \xrightarrow{\delta \rightarrow 0} m f(x) \quad \text{in } L^1, \quad \text{dove} \quad m = \int \check{\varphi}(y) dy.$$

- *Passo 4.* Usando il primo ed il terzo passo otteniamo $\mathcal{F}^* \mathcal{F} f = m f$ per quasi ogni x , in quanto la convergenza puntuale e quella in L^1 devono essere compatibili.
- *Passo 5.* Resta da dimostrare che $m = 2\pi$. Prendendo $\varphi(y) = e^{-|y|}$ segue che

$$\check{\varphi}(x) = \frac{2}{1+x^2}$$

e dunque $m = 2\pi$. In realtà vale per ogni φ che verifica le condizioni dell'ipotesi.

□

Corollario 8. Date $f_1, f_2 \in L^1$ tali che $\widehat{f_1} = \widehat{f_2} \implies f_1 = f_2$ quasi ovunque cioè \mathcal{F} è iniettiva, cioè f è univocamente determinata da \widehat{f} .

Dimostrazione. Per ipotesi, $\widehat{f_1} - \widehat{f_2} = \widehat{f_1 - f_2} = 0$. Applicando il Teorema 7 a $\widehat{f_1 - f_2}$ (possiamo farlo perché $0 \in L^1$) otteniamo

$$0 = \int \widehat{f_1 - f_2}(x) e^{ixy} dy = 2\pi(f_1(x) - f_2(x)) \implies f_1(x) = f_2(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

□

Esercizio. Date $f_1, f_2 \in L^1([-\pi, \pi]; \mathbb{C})$ e tali che per ogni $n \in \mathbb{Z}$ vale $c_n(f_1) = c_n(f_2)$ allora $f_1 = f_2$ quasi ovunque (e $c_n(f) = 0$ per ogni $n \implies f = 0$ q.o.).

Osservazione. Data (f_n) successione di funzioni in L^1 con $f_n \rightarrow f$ in L^1 , allora $\widehat{f_n} \rightarrow \widehat{f}$ uniformemente¹.

¹Basta applicare la definizione di convergenza uniforme più il teorema di convergenza dominata.

7.2 Trasformata di Fourier su L^2

Abbiamo visto che la *serie di Fourier* si definisce naturalmente su L^2 (uno spazio di Hilbert) mentre la *trasformata di Fourier* ha bisogno di L^1 che non è uno spazio di Hilbert. Vedremo ora come estendere la trasformata di Fourier ad L^2 e come poter fare i conti.

Proposizione 1. Data $f \in L^1(\mathbb{R}; \mathbb{C}) \cap L^2(\mathbb{R}; \mathbb{C})$ vale $\|\widehat{f}\|_2 = \sqrt{2\pi} \|f\|_2$.

Teorema 2. \mathcal{F} si estende per continuità da $L^1 \cap L^2$ a tutto L^2 e $\mathcal{F}/\sqrt{2\pi}$ risulta essere un'isometria¹ (come operatore a valori in L^2).

Dimostrazione. Segue dalla Proposizione 1 e dal seguente lemma di estensione.

Lemma. Dati X e Y spazi metrici, Y completo e D denso in X , $g: D \rightarrow Y$ uniformemente continua allora g ammette un'unica estensione $G: X \rightarrow Y$ continua. (Inoltre se X e Y sono spazi normati e g è lineare allora anche G è lineare). \square

Corollario 3. (Identità di Plancherel). Per ogni $f_1, f_2 \in L^2(\mathbb{R}; \mathbb{C})$ vale $\langle \widehat{f_1}, \widehat{f_2} \rangle = 2\pi \langle f_1, f_2 \rangle$.

Dimostrazione. Segue dal Teorema 2 e dall'identità di polarizzazione. Infatti,

$$\begin{aligned} \langle \widehat{f_1}, \widehat{f_2} \rangle &\stackrel{\text{identità pol}}{=} \frac{1}{4} \left(\|\widehat{f_1} + \widehat{f_2}\|^2 + \|\widehat{f_1} - \widehat{f_2}\|^2 \right) \\ &\stackrel{\text{Teo 2}}{\rightarrow} = \frac{2\pi}{4} \left(\|f_1 + f_2\|^2 + \|f_1 - f_2\|^2 \right) \\ &= 2\pi \langle f_1, f_2 \rangle. \end{aligned}$$

\square

Dimostrazione Proposizione 1.

Dimostrazione che non funziona. Proviamo a svolgere il calcolo diretto:

$$\begin{aligned} \|\widehat{f}\|_2^2 &= \int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{f}(y) \overline{\widehat{f}(y)} dy \\ &= \iiint f(x) e^{-ixy} \overline{f(t) e^{-ity}} dt dx dy \\ \text{Non posso usare Fubini} \rightarrow &= \iint f(x) \overline{f(t)} \underbrace{\left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-iy(t-x)} dy \right)}_{\delta(x-t)} dt dx \\ &= \int \left(\int f(x) \delta(x-t) dx \right) \overline{f(t)} dt \\ &= 2\pi \int f(t) \overline{f(t)} dt = 2\pi \|f\|_2^2 \end{aligned}$$

Dimostrazione formale. Prendiamo $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow [0, +\infty]$ tale che

i) φ continua in 0, crescente per $y < 0$ e decrescente per $y > 0$ e $\varphi(0) = 1$.

ii) $\varphi \in L^1$ e $\check{\varphi} \in L^1$.

¹dunque è uniformemente continua.

- *Passo 1.* Poniamo per ogni δ

$$I_\delta = \int_{-\infty}^{+\infty} |\widehat{f}(y)|^2 \varphi(\delta y) dy \xrightarrow{\delta \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{+\infty} |f(y)|^2 dy \quad \text{per Beppo Levi.}$$

- *Passo 2.*

$$\begin{aligned} I_\delta &= \int \widehat{f}(y) \overline{\widehat{f}(y)} \varphi(\delta y) dy = \\ &= \int \left(\int f(x) e^{-ixy} dx \right) \left(\int \overline{f(t)} e^{ity} dt \right) \varphi(\delta y) dy = \\ &\stackrel{\text{FT}}{=} \iint f(x) \overline{f(t)} \underbrace{\left(\int \varphi(\delta y) e^{i(t-x)y} dy \right)}_{\sigma_\delta \check{\varphi}(t-x)} dx dt = \\ &= \int (f(x) \sigma_\delta \check{\varphi}(t-x) dx) \overline{f(t)} dt = \\ &= \int f * \sigma_\delta \check{\varphi}(t) \cdot \overline{f(t)} dt = \\ &= \langle f * \sigma_\delta \check{\varphi}; f \rangle \end{aligned}$$

e possiamo applicare il teorema di Fubini-Tonelli in quanto le ipotesi sono verificate, infatti

$$\begin{aligned} &\iiint |f(x) \overline{f(t)}| e^{i(t-x)y} \varphi(\delta y) dx dt dy = \\ &= \iiint |f(x)| \cdot |f(t)| \cdot |\varphi(\delta y)| dx dt dy = \\ &= \|f\|_1^2 \|\varphi(\delta y)\|_1 < +\infty \end{aligned}$$

e $\|\varphi(\delta y)\|_1 < +\infty$ poiché $\varphi \in L^1$.

- *Passo 3.* $I_\delta \xrightarrow{\delta \rightarrow 0} 2\pi \|f\|_2^2$. Infatti $I_\delta = \langle f * \sigma_\delta \check{\varphi}; f \rangle$ e

$$\sigma_\delta \check{\varphi} \xrightarrow{\text{in } L^2} mf \quad \text{con } m = \int \check{\varphi}(x) dx$$

- *Passo 4.* Infine $m = 2\pi$ ad esempio prendendo $\varphi(y) = e^{-|y|}$

$$\check{\varphi}(x) = \frac{2}{1+x^2} \in L^1.$$

□

Calcolo TdF su $L^2 \setminus L^1$.

Non si può applicare la formula per $f \in L^1$. Tuttavia osserviamo che

$$f_n := f \cdot \mathbb{1}_{[-n,n]} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} f \quad \text{in } L^2$$

e $f_n \in L^1$. Quindi $\widehat{f_n}$ si calcola con la solita formula e converge a $\widehat{f} \in L^2$. Se esiste il limite puntuale q.o. di

$$\widehat{f_n}(y) = \int_{-n}^n f(x) e^{-ixy} dx$$

allora deve coincidere con \widehat{f} cioè vale

$$\widehat{f}(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-ixy} dx \quad \text{per q.o. } x$$

con l'integrale inteso come integrale improprio (nel senso di Analisi 1) e non nel senso di Lebesgue.

7.2.1 Proprietà della trasformata di Fourier in L^2

Proposizione 4.

- $\widehat{\tau_h f} = e^{-ihy} \widehat{f}$
- $\widehat{e^{ihx} f} = \tau_h \widehat{f}$
- $\widehat{\sigma_h f} = \widehat{f}(\delta y)$

Dimostrazione. Le identità valgono in $L^1 \cap L^2$ che è denso in L^2 e dunque si estendono per continuità ad L^2 .

Proposizione 5. Se $f \in C^1(\mathbb{R}; \mathbb{C})$ e $f \in L^1 \cup L^2$ e $f' \in L^1 \cup L^2 \implies \widehat{f'} = iy \widehat{f}$.

Dimostrazione. La stessa fatta per $f, f' \in L^1$. Si parte da a_n, b_n tali che $a_n \rightarrow -\infty$ e $b_n \rightarrow +\infty$ con $f(a_n) \rightarrow 0$ e $f(b_n) \rightarrow 0$ e si integra per parti

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(f' \cdot \mathbb{1}_{[a_n, b_n]}) &= \int_{a_n}^{b_n} f'(x) e^{-ixy} dx \\ &= \underbrace{\left[f(x) e^{-ixy} \right]_{a_n}^{b_n}}_{\rightarrow 0} + iy \int_{a_n}^{b_n} f(x) e^{-iyx} dx = iy \mathcal{F}(f \cdot \mathbb{1}_{[a_n, b_n]}). \end{aligned}$$

Per concludere si dimostra che

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(f' \cdot \mathbb{1}_{[a_n, b_n]}) &\xrightarrow{n \rightarrow \infty} \mathcal{F}(f') \text{ in } L^2 \\ \mathcal{F}(f \cdot \mathbb{1}_{[a_n, b_n]}) &\xrightarrow{n \rightarrow \infty} \mathcal{F}(f) \text{ in } L^2 \end{aligned}$$

Ovvero si dimostra che

$$\begin{aligned} \int_{b_n}^{+\infty} |f(x) e^{-ixy}|^2 dx + \int_{-\infty}^{a_n} |f(x) e^{-ixy}|^2 dx &\xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \\ \int_{b_n}^{+\infty} |f'(x) e^{-ixy}|^2 dx + \int_{-\infty}^{a_n} |f'(x) e^{-ixy}|^2 dx &\xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \end{aligned}$$

Ma questo è vero in quanto $f, f' \in L^2$.

Proposizione 6. Se $f \in C^1, f \in L^1, f' \in L^2 \implies \widehat{f} \in L^1$ e soddisfa le ipotesi del teorema di inversione.

Dimostrazione. Sappiamo che $iy\widehat{f} = \widehat{f}' \in L^2 \implies y\widehat{f} \in L^2$.

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} |\widehat{f}(y)| dy &= \int_{|y| \leq 1} |\widehat{f}(y)| dy + \int_{|y| \geq 1} |\widehat{f}(y)| dy \\ &\leq 2\|\widehat{f}\|_{\infty} + \int_{|y| \geq 1} |\widehat{f}(y)y| \frac{1}{|y|} dy \\ &\leq 2\|f\|_1 + \|\widehat{f}y\|_2 \left(\int_{|y| \geq 1} \frac{1}{|y|^2} dy \right)^{1/2} \\ &\leq 2\|f\|_1 + 2\|f'\|_2 \end{aligned}$$

Corollario. $f \in C_C^1 \implies f, \widehat{f} \in L^1$

Proposizione 7. Se $f_1, f_2 \in L^2(\mathbb{R}; \mathbb{C})$ (e dunque $f_1 f_2 \in L^1(\mathbb{R}; \mathbb{C})$ per Hölder) allora

$$2\pi \widehat{f_1 f_2} = \widehat{f_1} * \widehat{f_2}$$

Dimostrazione. Dimostriamo l'identità per casi.

Per prima cosa osserviamo che $f_1, f_2 \in L^2 \implies f_1 f_2 \in L^1$ per Hölder.

Caso 1. $f_1, f_2 \in C_C^1$. In tal caso

$$f_1, f_2, \widehat{f_1}, \widehat{f_2}, f_1 f_2, \widehat{f_1 f_2} \in L^1$$

quindi

$$\mathcal{F}^* \left(\frac{1}{2\pi} \widehat{f_1} * \widehat{f_2} \right) = \frac{1}{2\pi} \mathcal{F}^*(\mathcal{F}(f_1)) \mathcal{F}^*(\mathcal{F}(f_2)) = 2\pi f_1 f_2 = \mathcal{F}^* \left(\widehat{f_1 f_2} \right)$$

e per l'iniettività di \mathcal{F}^* segue

$$\frac{1}{2\pi} \widehat{f_1} * \widehat{f_2} = \widehat{f_1 f_2} \quad \text{ovunque.}$$

Caso 2. Prendiamo $(f_{1,n}), (f_{2,n}) \subset C_C^1$ tali che

$$f_{1,n} \xrightarrow{L^2} f_1 \quad f_{2,n} \xrightarrow{L^2} f_2$$

allora

- $\mathcal{F}(f_{1,n} f_{2,n}) = \frac{1}{2\pi} \widehat{f_{1,n}} * \widehat{f_{2,n}}$
- $f_{1,n} f_{2,n} \xrightarrow{L^1} f_1 f_2 \implies \mathcal{F}(f_{1,n} \cdot f_{2,n}) \xrightarrow{C_0} \widehat{f_1 f_2}$
- $\widehat{f_{1,n}} \xrightarrow{L^2} \widehat{f_1}; \widehat{f_{2,n}} \xrightarrow{L^2} \widehat{f_2} \implies \widehat{f_{1,n}} * \widehat{f_{2,n}} \xrightarrow{L^\infty} \widehat{f_1} * \widehat{f_2}$

Dove abbiamo usato che gli operatori

$$\cdot: L^2 \times L^2 \longrightarrow L^1 \quad *: L^2 \times L^2 \longrightarrow L^\infty$$

sono continui (è da verificare). □

7.3 Conclusione sulla TdF

Proposizione 4. (di 2 lezioni fa) Se $f, xf \in L^1(\mathbb{R}; \mathbb{C})$, allora $\hat{f} \in C^1(\mathbb{R}; \mathbb{C})$ e $(\hat{f})' = -ix\hat{f}$.

Corollario. Se $f, x^k f \in L^1$ con $k = 1, 2, \dots$, allora $x^h f \in L^1$ per ogni $h = 0, \dots, k$ e $\hat{f} \in C_0^k$ e $D^h \hat{f} = \widehat{(-ix)^h f}$.

Dimostrazione. Vale $|x^h| \leq 1 + |x|^k$ per ogni x e per ogni $h = 1, \dots, k$. Allora $|x^h f| \leq (1 + |x|^k)|f| \in L^1$. Il resto dell'enunciato è per induzione su k usando la Proposizione 4.

Corollario. Se $x^k f \in L^1$ per ogni $k = 0, 1, \dots$,¹ allora $\hat{f} \in C^\infty$ (anzi C_0^∞ siccome le derivate sono trasformate).

Teorema (Paley-Weiner). Se $e^{\alpha|x|} \cdot f(x) \in L^1$ per qualche $\alpha > 0$, allora \hat{f} è analitica².

Dimostrazione. In $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \simeq_{\substack{y \\ t}} \mathbb{C} \simeq_{z=y+it}$ definisco $g(z)$.

Ricordiamo che $\hat{f}(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-iyx} dx$. Poniamo

$$g(z) := \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-izx} dx$$

Passo 1. $g(z)$ è definita per ogni $z \in \mathbb{R} \times [-\alpha, \alpha]$. Infatti,

$$\left| \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-izx} dx \right| \leq \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|e^{tx} dt \leq \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|e^{\alpha|x|} dx < +\infty$$

Passo 2. Mostriamo che $g(z)$ è olomorfa su $\mathbb{R} \times (-\alpha, \alpha)$. Sviluppo g in serie di potenze in 0.

Nota. Questo mi serve per dire che è olomorfa in una palla di raggio α centrata in 0. Per concludere bisogna traslare il centro la palla per tutta la retta reale e mostrare la stessa cosa.

$$g(z) = \int_{\mathbb{R}} f(x)e^{-izx} dx = \int_{\mathbb{R}} f(x) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-izx)^n}{n!} dx \stackrel{(*)}{=} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\int_{\mathbb{R}} \frac{(-ix)^n}{n!} f(x) dx \right) z^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

La serie $\sum_n a_n z^n$ è convergente per $|z| \leq \alpha$, quindi g è olomorfa su $B(0, \alpha)$. Notiamo che in $(*)$ abbiamo usato Fubini-Tonelli; controlliamo che potevamo applicarlo, dunque verifichiamo quanto segue.

$$\int_{\mathbb{R}} |f(x)| \sum_{n=0}^{\infty} \left| \frac{(-izx)^n}{n!} \right| dx < +\infty$$

Abbiamo

$$\int_{\mathbb{R}} |f(x)| \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|zx|^n}{n!} dx = \int_{\mathbb{R}} |f(x)| e^{|z||x|} dx \stackrel{\text{se } |z| \leq \alpha}{\leq} \int_{\mathbb{R}} |f(x)| e^{\alpha|x|} dx$$

Per concludere si dimostra (allo stesso modo) che g si sviluppa in serie in ogni punto $y_0 \in \mathbb{R}$ con raggio di convergenza α . \square

Corollario. Se $f \in L^1$ e f ha supporto compatto allora \hat{f} è analitica, anzi \hat{f} coincide su \mathbb{R} con una funzione olomorfa $g: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$.

Nota. Se $f \in L^1$ e a supporto compatto, si ha $f(x)e^{\alpha|x|} \in L^1$ per ogni α .

¹Questa condizione è implicata, ad esempio, dall'ipotesi $f \in C_C$

²Restrizione di $g: \underbrace{\mathbb{R} \times (-\alpha, \alpha)}_{\mathbb{R} \times \mathbb{R} \simeq \mathbb{C}} \rightarrow \mathbb{C}$ olomorfa

7.4 Applicazioni TdF

Risoluzione equazioni del calore su \mathbb{R} .

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} (x \in \mathbb{R}) \\ u(0, \cdot) = u_0 \end{cases}$$

Risoluzione formale. Denotiamo con $\widehat{u} := \widehat{u}(t, y)$ la trasformata di Fourier rispetto alla variabile x

$$\widehat{u}_t(t, y) = \int \frac{\partial}{\partial t} u(t, x) e^{-ixy} dx = \frac{\partial}{\partial t} \left(\int u(t, x) e^{-ixy} dx \right) = \widehat{u}_t$$

Inoltre, $\widehat{u}_t = \widehat{u_{xx}} = (iy)^2 \widehat{u} = -y^2 \widehat{u}$. Quindi, per ogni y , $\widehat{u}(\cdot, y)$ risolve

$$\begin{cases} \dot{z} = -y^2 z \\ z(0) = \widehat{u_0}(y) \end{cases} \quad (\text{P})$$

Soluzione generale $z = \alpha e^{-y^2 t}$, da cui la soluzione per (P) è $\widehat{u}(t, y) = \widehat{u_0}(y) e^{-y^2 t}$.

Siano

$$\rho(x) := \frac{e^{-x^2/2}}{\sqrt{2\pi}}, \quad \widehat{\sigma_{\sqrt{2t}} \rho} = \widehat{\rho}(\sqrt{2t}y).$$

Però è noto che¹ $\widehat{\rho}(y) = e^{-y^2/2} \implies \widehat{\rho}(\sqrt{2t}y) = e^{-(\sqrt{2t}y)^2/2} = e^{-y^2 t}$. Da cui

$$\widehat{u}(t, y) = \widehat{u_0}(y) e^{-y^2 t} = \widehat{u_0}(y) \cdot \widehat{\sigma_{\sqrt{2t}} \rho}(y) = \mathcal{F}(u_0 * \sigma_{\sqrt{2t}} \rho) \implies u(t, y) = u_0 * (\sigma_{\sqrt{2t}} \rho)$$

Dunque

$$u(t, x) := \begin{cases} u_0(x) & \text{per } t = 0 \\ u_0 * \sigma_{\sqrt{2t}} \rho(x) & \text{per } t > 0 \end{cases} \quad (*)$$

Teorema. Se $u_0: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ è continua e limitata, allora u data in (*) è ben definita su $[0, +\infty) \times \mathbb{R}$, continua, C^∞ per $t > 0$ e risolve (P).

Data $u: [0, T) \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ soluzione di (P) tale che esiste $h_0, h_1 \in L^1(\mathbb{R})$ tali che

$$|u(t, x)| \leq h_0(x), \quad |u_t(t, x)| \leq h_1(x)$$

allora $\widehat{u}(\cdot, y)$ è univocamente determinata su $[0, T)$, dunque u è univocamente determinata per l'iniettività di TdF.

¹Si vede all'esercitazione che segue?

7.5 Esercizi

7.5.1 Calcolo TdF - prima parte

Ricordiamo la definizione della trasformata di Fourier

$$\mathcal{F}(f) = \widehat{f}(y) = \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-ixy} dx, \quad f \in L^1(\mathbb{R}; \mathbb{C}), \quad f \in L^1(\mathbb{R})$$

dove $\mathcal{F}: L^1(\mathbb{R}; \mathbb{C}) \rightarrow L^\infty(\mathbb{R}) \cap C_0(\mathbb{R})$, in quanto $\|\widehat{f}\|_\infty \leq \|f\|_1$.

Proprietà. Ricordiamo le proprietà viste a lezione.

- i) $\widehat{\tau_h f}(y) = e^{-iyh} \widehat{f}(y)$ per ogni $h \in \mathbb{R}$, dove $\sigma_h f(x) = f(x - h)$
- ii) $\widehat{e^{ihx} f}(y) = \tau_h \widehat{f}(y)$
- iii) Legame tra trasformata e derivata.
 - $f \in C^1(\mathbb{R})$, $f, f' \in L^1(\mathbb{R}; \mathbb{C})$, allora $\widehat{f}'(y) = iy \widehat{f}(y)$.
 - $f \in L^1(\mathbb{R}; \mathbb{C})$ e $xf(x) \in L^1(\mathbb{R}; \mathbb{C})$, $(1 + |x|)f(x) \in L^1(\mathbb{R}; \mathbb{C})$, allora $\widehat{f} \in C^1(\mathbb{R})$ e $(\widehat{f})' = -ix \widehat{f}(x)$.

Nota. Le ipotesi $f \in L^1(\mathbb{R}; \mathbb{C})$ e $xf(x) \in L^1(\mathbb{R}; \mathbb{C})$ sono equivalenti a $(1 + |x|)f(x) \in L^1(\mathbb{R}; \mathbb{C})$.

- iv) Vale $\widehat{f * g} = \widehat{f} \cdot \widehat{g}$.

Riportiamo un esercizio già posto con una soluzione alternativa.

Esercizio. Dire se esiste $v \in L^1$ non banale tale che

- $v * v = v$
- $g * v = g$ per ogni $g \in L^1$.

Soluzione. La risposta è no per entrambi i punti. Infatti,

- Se per assurdo valesse tale identità, passando alle trasformate si avrebbe

$$\widehat{v * v} = (\widehat{v})^2 \implies \widehat{v}(\widehat{v} - 1) = 0.$$

Ovvero, $\widehat{v} = \{0, 1\}$. Osserviamo subito che non è possibile che \widehat{v} assuma entrambi i valori in quanto funzione continua; d'altra parte non è possibile che $\widehat{v} = 1$, in quanto è anche infinitesima, dunque $\widehat{v} = 0 \implies v = 0$.

- Analogamente al punto precedente si avrebbe $\widehat{v} = 1$ ma ciò non è possibile.

Esercizio 1. Calcolare la trasformata di Fourier della funzione $f(x) = e^{-|x|}$.

Soluzione. Abbiamo

$$\begin{aligned}
 \hat{f}(y) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-|x|} e^{-ixy} dx = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-|x|} \cos(xy) dx - i \int_{-\infty}^{\infty} \overbrace{e^{-|x|} \sin(xy)}^{\text{integrale definito di funzione dispari} = 0} dx = 2 \int_0^{\infty} e^{-x} \cos(xy) dx \\
 &= 2 \int_0^{\infty} e^{-x} \operatorname{Re} e^{ixy} dx = 2 \int_0^{\infty} \operatorname{Re} (e^{-x} \cdot e^{ixy}) dx = 2 \operatorname{Re} \left[\int_0^{\infty} e^{-x} e^{ixy} dx \right] = 2 \operatorname{Re} \left[\frac{e^{x(iy-1)}}{(iy-1)} \right]_0^{\infty} \\
 &= 2 \operatorname{Re} \left[-\frac{1}{iy-1} + \underbrace{\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{e^{x(iy-1)}}{iy-1}}_{=0} \right] = 2 \operatorname{Re} \left[-\frac{1}{iy-1} \right] = 2 \operatorname{Re} \left[-\frac{1}{iy-1} \cdot \frac{iy+1}{iy+1} \right] \\
 &= 2 \operatorname{Re} \left[\frac{iy+1}{1+y^2} \right].
 \end{aligned}$$

In conclusione, $\hat{f}(y) = \frac{2}{1+y^2}$.

Esercizio 2. Calcolare la trasformata di Fourier della funzione $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$.

Soluzione. Calcoliamo $\hat{f}(y) = \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{-ixy}}{1+x^2} dx$. Dal fatto che $f \in L^1$ e usando il teorema di convergenza dominata, possiamo scrivere $\hat{f}(y)$ come

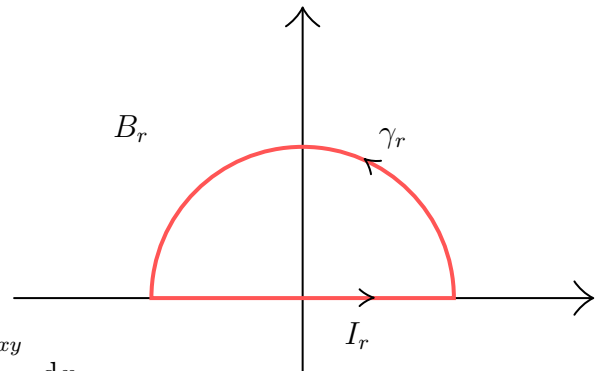
$$\hat{f}(y) = \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{-R}^R \frac{e^{-ixy}}{1+x^2} dx$$

Idea. Calcolare questo integrale con il metodo dei residui, ponendo $\frac{e^{-ixy}}{1+x^2} = \frac{e^{-izy}}{1+z^2} \Big|_{z \text{ reale}}$

Per il teorema dei residui:

$$\int_{B_r} g(z) dz = 2\pi i \sum_{\substack{z_i \text{ singolarit\`a} \\ \text{di } g \text{ in } B_r}} \operatorname{res}(g, z_i)$$

$$\text{Inoltre } \int_{B_r} g(z) dz = \int_{I_r} g(z) dx + \underbrace{\int_{\gamma_r} g(x) dx}_{\xrightarrow{r \rightarrow \infty} 0} = \int_{-r}^r \frac{e^{-ixy}}{1+x^2} dx.$$



- Verifichiamo che $\int_{\gamma_r} g(x) \xrightarrow{r \rightarrow \infty} 0$ dove $[0, \pi] \ni \theta \mapsto r e^{i\theta}$.

Calcoliamo

$$\int_0^\pi g(e^{i\theta} r) r d\theta \implies \int_0^\pi \frac{e^{-iry \cos \theta} e^{r \sin \theta y}}{(1+r^2 e^{i2\theta})} r d\theta \xrightarrow{r \rightarrow \pm\infty} 0 \quad \text{se } y < 0.$$

Per il caso $y > 0$ si ripercorre lo stesso procedimento ma si utilizza la curva $[\pi, 2\pi] \ni \theta \mapsto r e^{i\theta}$.

- Calcoliamo i residui: l'unico residuo di g è nel punto i che si tratta di una singolarità semplice (nel caso $y > 0$ la singolarità è in $-i$).

$$\lim_{r \rightarrow \pm\infty} 2\pi i \operatorname{res}(g, i) = \pi e^y$$

Considerando anche il caso $y > 0$ la trasformata di Fourier diviene $\pi e^{-|y|}$.

7.5.2 Calcolo TdF - seconda parte

Abbiamo visto che le trasformate di $f(x) = e^{-|x|}$ e $g(x) = 1/(1+x^2)$ sono rispettivamente

$$\widehat{f}(y) = \frac{2}{1+y^2} \quad \widehat{g}(y) = \pi e^{-|y|}$$

Vorremo provare a trovare ora le trasformate funzioni come $x^2 e^{-|x|}$ o $x/(1+x^2)$ usando le proprietà delle trasformate con le derivate. Ricordiamo che

$$\begin{aligned} f, f' \in L^1 &\implies \widehat{f'}(y) = iy \widehat{f}(y) \\ f, xf \in L^1 &\implies \widehat{f'}(y) = -ix \widehat{f}(y) \end{aligned}$$

dunque intuitivamente per $x^2 e^{-|x|}$ possiamo fare

$$x^2 e^{-|x|} = i(-i)x(xe^{-|x|}) \implies \mathcal{F}(i(-i)x(xe^{-|x|})) = i(\mathcal{F}(xe^{-|x|}))'(y)$$

ora dobbiamo calcolare $\mathcal{F}(xe^{-|x|})(y)$

$$\mathcal{F}(xe^{-|x|})(y) = i\mathcal{F}(-ixe^{-|x|}) = i\mathcal{F}(e^{-|x|})'(y) = i \left(\frac{2}{1+y^2} \right)' = \frac{-4iy}{(1+y^2)^2}$$

dunque in conclusione abbiamo

$$\mathcal{F}(x^2 e^{-|x|})(y) = i \left(\frac{-4iy}{(1+y^2)^2} \right)' = 4 \left(\frac{y}{(1+y^2)^2} \right)'$$

Invece per quanto riguarda

$$g(x) = \frac{x}{1+x^2} \notin L^1$$

però è in L^2 ma per poterne calcolare la trasformata di Fourier dovremmo passare per delle troncate di $g(x)$ come riportato nell'Osservazione vista a teoria.

Nota. Possiamo però vedere chi dovrebbe essere il candidato formale usando le tecniche di prima

$$\frac{x}{1+x^2} = \frac{i(-ix)}{1+x^2} \rightsquigarrow i\mathcal{F}\left((-ix)\frac{1}{1+x^2}\right)(y) = i\mathcal{F}\left(\frac{1}{1+x^2}\right)'(y) = i\pi(e^{-|y|})'(y)$$

però notiamo che la derivata di $e^{-|y|}$ non è ben definita in 0.

Esercizio. Calcolare la trasformata di Fourier di

$$f(x) = \mathbb{1}_{[-r,r]}(x)$$

Iniziamo a svolgere il conto

$$\widehat{f}(y) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathbb{1}_{[-r,r]}(x) e^{-ixy} dx = \int_{-r}^r e^{-ixy} dx = \begin{cases} 2r & y = 0 \\ \int_{-r}^r e^{-ixy} dx & y \neq 0 \end{cases}$$

nel caso $y \neq 0$ continuiamo a svolgere il conto

$$\int_{-ry}^{ry} \frac{e^{-it}}{y} dt = \frac{1}{y} \int_{-ry}^{ry} [\underbrace{\cos(t) - i \sin(t)}_{\text{dispari}}] dt = \frac{2}{y} \sin(ry)$$

dunque in conclusione abbiamo

$$\mathcal{F}(\mathbb{1}_{[-r,r]}(x)) = \begin{cases} 2r & y = 0 \\ \frac{2}{y} \sin(ry) & y \neq 0 \end{cases}$$

Esercizio. Un esercizio simile è calcolare $\mathcal{F}(\mathbb{1}_{[0,r]}(x))$, ovvero il caso non centrato e poi provare a calcolare (come integrale improprio di Analisi 1) l'integrale

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt = \lim_{r \rightarrow \infty} \int_0^r \frac{\sin(t)}{t} dt$$

Trasformata della Gaussiana

Calcoliamo ora la trasformata della funzione gaussiana $e^{-x^2/2}$.

- **Metodo I:** Troviamo un'equazione differenziale (lineare) risolta dalla gaussiana, sia $f(x) = e^{-x^2/2}$ allora vale

$$f'(x) = -xe^{-x^2/2} = -xf(x)$$

e per il decadimento della gaussiana abbiamo che $f, f' \in L^1$ dunque

$$iy\widehat{f}(y) = \widehat{f'(x)}(y) = -i\mathcal{F}(-xf(x))(y) = i(\widehat{f})'(y)$$

dunque $\widehat{f} = h(y)$ con h tale che $h'(y) = -yh(y) \implies h(y) = ke^{-y^2/2}$, rimane da trovare k . Calcoliamo direttamente $h(0)$

$$\begin{aligned} h(0) &= \widehat{e^{-x^2/2}}(0) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/2} e^{-ix \cdot 0} dx = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/2} dx = \sqrt{2\pi} \\ &\implies \widehat{e^{-x^2/2}} = \sqrt{2\pi} e^{-y^2/2} \end{aligned}$$

- **Metodo II:** Studiamo la funzione di variabile complessa $g(z) = e^{-z^2/2}$ e integriamola lungo un percorso che passi per $[-r, r] \times \{0\} \subset \mathbb{R}^2 \approx \mathbb{C}$.

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(\widehat{e^{-x^2/2}})(y) &= \int_{\mathbb{R}} e^{-x^2/2} \cdot e^{-ixy} dx = \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{1}{2}(x^2+2ixy)} dx \\ &= \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{1}{2}(x^2+2ixy+y^2-y^2)} dx = \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{1}{2}(x^2+2ixy+y^2)} \cdot e^{-y^2/2} dx \\ &= e^{-y^2/2} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{1}{2}(x^2+2ixy+y^2)} dx = e^{-y^2/2} \lim_{r \rightarrow \infty} \int_{-r}^r \underbrace{e^{-\frac{1}{2}(x+iy)^2}}_{g(x+iy)} dx \end{aligned}$$

Consideriamo ora il rettangolo $D_r := \{z \mid \operatorname{Im} z \in [0, iy] \text{ e } \operatorname{Re} z \in [-r, r]\}$ dunque poiché $g(z)$ non ha poli su D_r abbiamo

$$\int_{\partial D_r} g = \sum \operatorname{Res.} \text{ su } D_r = 0$$

$$0 = \int_{-r}^r g(x) dx - \int_{-r}^r g(x + iy) dx + i \int_0^y g(r + ix) dx - i \int_0^y g(-r + i(y - x)) dx.$$

I termini verticali vanno a zero, infatti:

$$\int_0^y e^{-(r+ix)^2/2} dx = e^{-r^2/2} \int_0^y e^{-ixr-x^2/2} dx \leq ye^{-r^2/2} \xrightarrow{r \rightarrow +\infty} 0.$$

L'altro integrale è analogo. In conclusione abbiamo

$$\begin{aligned} \widehat{e^{-x^2/2}}(y) &= \lim_{r \rightarrow +\infty} \int_{-r}^r e^{-y^2/2} e^{-(x+iy)^2/2} dx = e^{-y^2/2} \left[\lim_{r \rightarrow +\infty} \int_{-r}^r e^{-x^2/2} dx + o(1) \right] = \\ &= e^{-y^2/2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/2} dx = \sqrt{2\pi} e^{-y^2/2} \end{aligned}$$

□

7.5.3 Trasformate di Fourier note

$$\begin{array}{lll} f(x) = \frac{1}{1+x^2} & \rightsquigarrow & \mathcal{F}(f)(y) = \pi e^{-|y|} \\ f(x) = e^{-|x|} & \rightsquigarrow & \mathcal{F}(f)(y) = \frac{2}{1+y^2} \\ f(x) = e^{x^2/2} & \rightsquigarrow & \mathcal{F}(f)(y) = \sqrt{2\pi} e^{y^2/2} \end{array}$$

Capitolo 8

Integrazione di superfici

8.1 Superfici

Definizione. Data $f: \Omega \subset \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^d$ di classe C^1 con Ω aperto, dato $x \in \Omega$ la mappa lineare da \mathbb{R}^k a \mathbb{R}^d associata alla matrice $\nabla f(x)$ si dice **differenziale di f in x** e si indica con $d_x f$.

Nota. Lo sviluppo di Taylor di f in x al primo ordine è

$$f(x+h) = f(x) + d_x f \cdot h + o(|h|).$$

Definizione. Siano $1 \leq k \leq d$ e $m \geq 1$. L'insieme $\Sigma \subset \mathbb{R}^d$ si definisce **superficie (senza bordo)** di dimensione k e classe C^m se per ogni $x \in \Sigma$ esiste U intorno aperto¹ di x ed esiste una mappa $\phi: D \rightarrow \mathbb{R}^d$ di classe C^m con D aperto di \mathbb{R}^k tale che

- $\phi(D) = \Sigma \cap U$
- $\phi: D \rightarrow \Sigma \cap U$ è un omeomorfismo
- $\nabla \phi(s)$ ha rango massimo ($= k$) per ogni $s \in D$

Ovvero ϕ è una **parametrizzazione regolare** di classe C^m di $\Sigma \cap U$. In altre parole Σ è una superficie se ammette localmente una parametrizzazione regolare.

Osservazione.

- Se Σ è una superficie, $\Sigma \cap A$ è una superficie per ogni A aperto.
- Se $k = d$ abbiamo che Σ è una superficie se e solo se Σ è aperto.

Proposizione. Dati k, d, m come sopra, $\Sigma \subset \mathbb{R}^d$, $x \in \Sigma$ e U intorno aperto di x , sono fatti equivalenti

- Esistono $D \subset \mathbb{R}^k$ aperto e $\phi: D \rightarrow \Sigma \cap U$ parametrizzazione regolare.
- Esiste $g: U \rightarrow \mathbb{R}^{d-k} \in C^m$ tale che
 - $\Sigma \cap U = g^{-1}(0)$
 - ∇g ha rango massimo, ovvero $d - k$.

¹D'ora in avanti gli intorni saranno sempre aperti.

- Esiste $h: \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^{d-k}$ di classe C^m tale che $\Sigma \cap U = \Gamma_h \cap U$ (dove Γ_h è il grafico di h) avendo identificato $\mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{d-k}$ con \mathbb{R}^d tramite una scelta di k coordinate tra le d di \mathbb{R}^d .

Esempi.

- $\mathbb{S}^{d-1} = \{x \in \mathbb{R}^d \mid |x| = 1\}$ è una superficie senza bordo di dimensione $d-1$ e classe C^∞ in \mathbb{R}^d definita dall'equazione $|x|^2 = 1$; cioè $\mathbb{S}^{d-1} = g^{-1}(0)$ dove $g := |x|^2 - 1$
- Il disco $D = \{(x, y, 0) \mid x^2 + y^2 < 1\}$ è una superficie 2-dimensionale in \mathbb{R}^3 , ma $\overline{D} = \{(x, y, 0) \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$ non lo è (\overline{D} è un esempio di superficie con bordo).

Definizione. Data Σ superficie e fissato $x \in \Sigma \cap U$, lo **spazio tangente** a Σ in x è $T_x \Sigma := \text{Im}(d_s \phi)$ dove $\phi: D \rightarrow \Sigma \cap U$ è una parametrizzazione regolare e $x = \phi(s)$ con $s \in D$.

Nota. Lo spazio tangente è uno spazio vettoriale di stessa dimensione della superficie.

Proposizione. Si hanno le seguenti caratterizzazioni dello spazio tangente.

- $T_x \Sigma = \{\dot{\gamma}(0) \mid \gamma: [0, \delta) \rightarrow \Sigma \text{ cammino } C^1 \text{ con } \gamma(0) = x\}$
- Data $g: U \rightarrow \mathbb{R}^{d-k}$ tale che $\Sigma \cap U = g^{-1}(0)$, $\text{rk}(\nabla g) = d-k$ su U , allora

$$T_x \Sigma = \ker(d_x g) = \{\nabla g_1(x), \dots, \nabla g_{d-k}(x)\}^\perp$$

Definizione. Data Σ superficie in \mathbb{R}^d di classe C^m , $f: \Sigma \rightarrow \mathbb{R}^{d'}$, diciamo che f è di classe $C^{m'}$, con $m' \leq m$ se per ogni $x \in \Sigma$ se esistono U e $\phi: D \rightarrow \Sigma \cap U$ parametrizzazione regolare, tale che $f \circ \phi: D \rightarrow \mathbb{R}^{d'}$ è di classe $C^{m'}$ con D aperto di \mathbb{R}^k .

Proposizione. $f \in C^{m'} \iff \exists A$ aperto di \mathbb{R}^d che contiene Σ e $F: A \rightarrow \mathbb{R}^{d'}$ estensione di f di classe $C^{m'}$.

Osservazione. Se $\phi: D \rightarrow \Sigma \cap U$ è una parametrizzazione regolare, allora $\phi^{-1}: \Sigma \cap U \rightarrow D \subset \mathbb{R}^k$ è C^m . La mappa ϕ^{-1} viene definita **carta**.

Definizione. Data $f: \Sigma \rightarrow \mathbb{R}^{d'}$ di classe (almeno) C^1 e $x \in \Sigma$,

$$\begin{aligned} d_x f: T_x \Sigma &\longrightarrow \mathbb{R}^{d'} \\ \dot{\gamma}(0) &\longmapsto (f \circ \gamma)'(0) \quad \gamma: [0, \delta) \rightarrow \Sigma, \gamma \in C^1, \gamma(0) = x \end{aligned}$$

Osservazione.

- La definizione è ben posta (non dipende dalla scelta di γ).
- **Proposizione.** Data $F: A \rightarrow \mathbb{R}^{d'}$ estensione C^1 di f , con $A \subset \mathbb{R}^d$, allora

$$d_x f = d_x F|_{T_x \Sigma}$$

- **Osservazione.** Se $f: \Sigma \rightarrow \Sigma'$, dove $\Sigma \subset \mathbb{R}^d$ e $\Sigma' \subset \mathbb{R}^{d'}$ allora $\text{Im}(d_x f) \subset T_{f(x)} \Sigma'$. Quindi, $d_x f: T_x \Sigma \rightarrow T_{f(x)} \Sigma'$.

Nota. L'osservazione sopra è utile per dimostrare che un sottoinsieme Σ di \mathbb{R}^d non è una superficie. Infatti, data $f: \mathbb{R}^d \rightarrow \Sigma$ derivabile, abbiamo $\text{Im}(d_x f) \subset T_{f(x)} \Sigma'$, dunque se $\dim(\text{Im}(d_x f)) > \dim \Sigma = \dim T_{f(x)} \Sigma$ segue che Σ non può essere una superficie.

8.2 Misure su superfici

In questa sezione studiamo la misura di Lebesgue su superfici definite tramite parametrizzazione¹.

Definizione. Dati V spazio vettoriale k -dimensionale dotato di prodotto scalare (per esempio V sottospazio di \mathbb{R}^d), la **misura di Lebesgue** σ_k su V è data dall'identificazione di V con \mathbb{R}^k tramite la scelta di una base ortonormale.

Cioè data $\phi: \mathbb{R}^k \rightarrow V$, $\phi: x \mapsto \sum_i x_i e_i$, poniamo $\sigma_k(E) = |\phi^{-1}(E)|$ per ogni E misurabile, dove E è misurabile se $\phi^{-1}(E) \in \mathcal{M}^k$.

Nota. La misura di Lebesgue σ_k non dipende dalla scelta della base. Infatti, data un'altra base $\tilde{e}_1, \dots, \tilde{e}_k$ e $\tilde{\phi}$, abbiamo che $\tilde{\phi}^{-1}(E) = \tilde{\phi}^{-1}\phi(\phi^{-1}(E))$ e $f := \tilde{\phi}^{-1}\phi$ è l'applicazione lineare da \mathbb{R}^k in sé associata alla matrice di cambio di base M con $M \in O(k)$ quindi

$$|\det \nabla f(x)| = |\det M| = 1 \implies \left| \tilde{\phi}^{-1}(E) \right| = \left| f(\phi^{-1}(E)) \right| \underset{\substack{\text{teo cambio} \\ \text{di variabile}}}{=} \left| \phi^{-1}(E) \right|.$$

Definizione. Siano V, V' spazi vettoriali di dimensione k dotati di prodotto scalare e $\Lambda: V \rightarrow V'$ lineare. Poniamo

$$|\det \Lambda| := |\det M|,$$

dove M è una matrice $k \times k$ associata a Λ dalla scelta di basi ortonormali su V e V' .

Nota. Si verifica che la definizione è ben posta, ovvero non dipende dalla scelta delle basi. Inoltre, si verifica che per ogni $E \subset V$ misurabile si ha $\sigma_k(\Lambda(E)) = |\det \Lambda| \cdot \sigma_k(E)$, infatti

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{\Lambda} & V' \\ \downarrow \phi & & \downarrow \phi' \\ \mathbb{R}^k & \xrightarrow{M_\Lambda} & \mathbb{R}^k \end{array} \quad \sigma_k(\Lambda(E)) = |\varphi^{-1}(\Lambda E)| = |M_\Lambda(\varphi^{-1}(E))| \stackrel{\text{cambio di variabile}}{=} |\varphi^{-1}(E)| \cdot |\det M_\Lambda| = \sigma_k(E) \cdot |\det \Lambda|.$$

Non potevamo definire $\det \Lambda$ come $\det M$ perché il segno di $\det M$ dipende dalla scelta delle basi su V, V' .

Definizione. Sia $\Lambda: V \rightarrow W$, con $k = \dim V \leq \dim W$ spazi vettoriali, non necessariamente di stessa dimensione. Poniamo $V' := \text{Im}(\Lambda)$ e

$$|\det \Lambda| := \begin{cases} 0 & \text{se } \text{rk}(\Lambda) < k \\ \text{come prima} & \text{se } \text{rk}(\Lambda) = k \text{ e } \dim V' = \dim V \end{cases}$$

Proposizione 1. Se $\Lambda: \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^d$ allora

$$|\det \Lambda|^2 = \det(N^t N) \tag{1}$$

dove N è una matrice $d \times k$ associata a Λ . E inoltre

$$|\det \Lambda|^2 = \sum_{\substack{Q \text{ minore} \\ k \times k \text{ di } N}} \det(Q)^2 \tag{2}$$

Osservazione. Questa proposizione implica che non è necessario trovare una base ortormale dell'immagine di Λ per calcolarne il determinante.

¹Coincide con la definizione di Hausdorff

[TO DO: il caso non iniettivo segue dall'uguaglianza $\sum \det(Q)^2 = \det(N^t N)$ usando il fatto che $\sum \det(Q)^2 = 0$. Da ricontrollare dopo aver fatto la formula di Binet generalizzata.]

Dimostrazione.

- (1) Supponiamo Λ iniettiva (il caso Λ non iniettivo per esercizio), scegliamo una base ortonormale e_1, \dots, e_k di $\text{Im}(\Lambda)$ e definiamo M la matrice $k \times k$ associata a Λ da questa scelta di base per $\text{Im}(\Lambda)$ e dalla base canonica per \mathbb{R}^k .

Sia $B \in \mathbb{R}^{d \times k}$ la matrice avente colonne uguali a e_1, \dots, e_k . Allora $N = BM$. Dunque,

$$\det(N^t N) = \det(M^t \underbrace{B^t B}_{=I} M) = \det(M^t M) = (\det M)^2 = |\det \Lambda|^2.$$

- (2) La seconda formula richiede la formula di Binet generalizzata.

□

Definizione. Un insieme $E \subset \Sigma$ è **misurabile** (secondo Lebesgue) se $\forall \phi: D \rightarrow \Sigma \cap U$ parametrizzazione regolare e $D \subset \mathbb{R}^k$, l'insieme $\phi^{-1}(E \cap U) \subset \mathbb{R}^k$ è misurabile secondo Lebesgue.

Notazione. $\mathcal{M}(\Sigma) := \{E \subset \Sigma \text{ misurabili}\}$.

Proposizione 1. Esiste un'unica misura σ_k su $\mathcal{M}(\Sigma)$ tale che per ogni $E \subset \Sigma \cap U$ misurabile e per ogni $\phi: D \rightarrow \Sigma \cap U$ parametrizzazione regolare

$$\sigma_k(E \cap U) = \int_{\phi^{-1}(E \cap U)} \overbrace{|\det(\mathrm{d}_s \phi)|}^{J\phi(s)} \mathrm{d}s. \quad (1)$$

Commenti.

- σ_k misura di volume k -dimensionale su Σ .
- σ_k coincide con la misura di Hausdorff \mathcal{H}^k ristretta a Σ .
- $J\phi(s) := |\det \mathrm{d}_s \phi| = \sqrt{\det(\nabla^t \phi(s) \nabla \phi(s))} = \sqrt{\sum_Q (\det Q)^2}$ dove Q sono i minori $k \times k$ di $\nabla \phi(s)$.
- Se $k = 1$, vale $J\phi(s) = \sqrt{\det(\phi'(s))^t \phi'(s)} = |\phi'(s)|$.

Dimostrazione.

Passo 1: costruzione di σ_k . Prendiamo $\phi_i: D_i \rightarrow \Sigma \cap U_i$ famiglia numerabile di parametrizzazioni regolari; inoltre sia $\{\Sigma_i\}$ partizione di Σ tale che $\{\Sigma_i\} \subset \bigcup_i U_i$ e $\Sigma_i \subset \Sigma \cap U_i$ e poniamo

$$\sigma_k(E) = \sum_{\substack{i \\ \phi_i^{-1}(E \cap \Sigma_i)}} \int J\phi_i(s) \mathrm{d}s \quad \forall E \text{ misurabile}$$

Evitiamo di verificare che sia una misura σ -addittiva.

Passo 2: dimostrazione di (1). Il punto chiave è dimostrare il seguente lemma.

Lemma. Date $\phi: D \rightarrow \Sigma \cap U$ e $\tilde{\phi}: \tilde{D} \rightarrow \Sigma \cap \tilde{U}$ ed $E \subset \Sigma \cap U \cap \tilde{U}$ misurabile, allora

$$\int_{\phi^{-1}(E)} J\phi(s) ds = \int_{\tilde{\phi}(E)} J\tilde{\phi}(\tilde{s}) d\tilde{s} \quad (2)$$

Infatti, dando per buono il lemma, osserviamo quanto segue. Fissato i

$$\phi: D \rightarrow \Sigma \cap U \quad \phi_i: D \rightarrow \Sigma \cap U_i \quad E_i \subset \Sigma \cap U \cap U_i$$

dunque

$$\int_{\phi_i^{-1}(E \cap \Sigma_i)} J\phi_i(s) ds = \int_{\phi^{-1}(E \cap \Sigma)} J\phi(s) ds.$$

Infine sommando in i

$$\sigma_k(E) = \sum_i \int_{\phi_i^{-1}(E \cap \Sigma_i)} J\phi_i(s) ds = \int_{\phi^{-1}(E \cap \Sigma)} J\phi(s) ds,$$

da cui la tesi.

Dimostrazione lemma. Usiamo il cambio di variabile $s = \phi^{-1}(\tilde{\phi}(\tilde{s})) =: g(\tilde{s})$.

$$\begin{aligned} \int_F J\phi(s) ds &= \int_{g^{-1}(F)=\tilde{F}} J\phi(s) Jg(\tilde{s}) d\tilde{s} = \int_{\tilde{F}} |\det(d_s \phi)| \cdot |\det(d_{\tilde{s}} g)| d\tilde{s} \\ &= \int_{\tilde{F}} |\det(d_{\tilde{s}}(\phi \circ g))| d\tilde{s} = \int_{\tilde{F}} J\tilde{\phi}(\tilde{s}) d\tilde{s} \end{aligned}$$

□

Corollario 2. Data $\phi: D \rightarrow \Sigma \cap U$ C^1 parametrizzazione bigettiva (non necessariamente regolare), $f: \Sigma \cap U \rightarrow \mathbb{R}$ misurabile e integrabile rispetto a σ_k .

$$\int_{\Sigma \cap U} f(x) d\sigma_k(x) = \int_D f(\phi(s)) J\phi(s) ds \quad (3)$$

Dimostrazione. La formula (3) vale se f è semplice (per la formula (1)) e poi si estende per approssimazione a tutte le f positive... □

Per calcolare $\int_{\Sigma} f d\sigma_k$ e $\sigma_k(E)$ conviene usare mappe ϕ che non sono esattamente parametrizzazioni; ci chiediamo dunque come vanno corrette (1) e (3) se $\phi: D \rightarrow \Sigma \cap U$ è solo C^1 ?

Proposizione (formula dell'area). Valgono le seguenti.

$$\int_{E \cap U} \# \phi^{-1}(x) d\sigma_k(x) = \int_{\phi^{-1}(E \cap U)} J\phi(s) ds \quad (1')$$

e

$$\int_{E \cap U} f(x) \# \phi^{-1}(x) d\sigma_k(x) = \int_D f(\phi(s)) J\phi(s) ds \quad (3')$$

Nota. Le formule sopra giustificano il fatto che parametrizzazione non esattamente bigettive possono essere usate lo stesso per il calcolo dei volumi.

Esempio. Parametrizzazione di $\mathbb{S}^d \subset \mathbb{R}^{d+1}$ con coordinate sferiche.

Consideriamo $\phi_d: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{S}^d$ definita come

$$\phi_d(\alpha_1, \dots, \alpha_d) = (\cos \alpha_1, \sin \alpha_1 \cos \alpha_2, \sin \alpha_1 \sin \alpha_2 \cos \alpha_3, \dots, \\ \sin \alpha_1 \cdots \sin \alpha_{d-1} \cos \alpha_d, \sin \alpha_1 \cdots \sin \alpha_d)$$

Definizione ricorsiva

$$\phi_1(\alpha_1) = (\cos \alpha_1, \sin \alpha_1), \quad \phi_d(\alpha) = (\cos \alpha_1, \sin \alpha_1 \cdot \phi_{d-1}(\alpha_2, \dots, \alpha_d))$$

Dunque

- $\phi_d([0, \pi]^{d-1} \times [0, 2\pi]) = \mathbb{S}^d$ è una parametrizzazione in coordinate sferiche ed è iniettiva.
- $J\phi_d(\alpha) = \sin(\alpha_1)^{d-1} \sin(\alpha_2)^{d-2} \cdots \sin(\alpha_{d-1})^1$

Nota. In $J\phi_d(\alpha)$ non c'è il modulo perché i primi $d-1$ angoli sono in $[0, \pi]$ e il seno è positivo in questo intervallo.

Memo. Data $f(s): \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ il grafico Γ_f di f è una superficie di dimensione d parametrizzata da $\phi: s \mapsto (s, f(s))$ e avente Jacobiano

$$J_\phi(s) = \sqrt{1 + |\nabla f(s)|}.$$

Proposizione 3. Sia Σ superficie come al solito. Allora esiste un'unica misura μ sui $\mathcal{M}(\Sigma)$ tale che per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che data $f: \Sigma \cap U \rightarrow \mathbb{R}^k \in C^1$ che è δ -isometria, cioè

$$\frac{1}{1+\delta}|x-x'| \leq |f(x)-f(x')| \leq (1+\delta)|x-x'| \quad \forall x, x' \in \Sigma \cap U \quad (\text{P})$$

Allora

$$\frac{1}{1+\varepsilon}\sigma_k(E) \leq |f(E)| \leq (1+\varepsilon)\sigma_k(E) \quad \forall E \text{ mis } \subset \Sigma \cap U$$

Corollario 4 (coincidenza con la misura di Hausdorff.) Poiché σ_k e la restrizione di \mathcal{H}^k a Σ hanno la proprietà (P), coincidono.

Dimostrazione (Unicità). Prendiamo μ, μ' che soddisfano (P). Fissiamo $E, \varepsilon > 0$ e δ di conseguenza usando (P). Allora

- Per ogni $x \in \Sigma$ esiste $\phi_x: U_x \cap \Sigma \rightarrow \mathbb{R}^k$ tale che $d_x \phi_x: T_x \Sigma \rightarrow \mathbb{R}^k$ è un'isometria.
- Per ogni x esiste $V_x \subset U_x$ tale che $\phi_x: \Sigma \cap V_x \rightarrow \mathbb{R}^k$ è δ -isometria.
- Ricopriamo Σ con una successione $V_i := V_{x_i}$.
- Scriviamo $E = \bigsqcup_i E_i$ con $E_i \subset V_i$.

Per (P) abbiamo che

$$\frac{1}{1+\varepsilon}\mu(E_i) \leq |f(E_i)| \leq (1+\varepsilon)\mu(E_i) \\ \frac{1}{1+\varepsilon}\tilde{\mu}(E_i) \leq |f(E_i)| \leq (1+\varepsilon)\tilde{\mu}(E_i)$$

da cui incrociando le disuguaglianze otteniamo

$$\begin{aligned} \frac{1}{(1+\varepsilon)^2} \mu(E_i) &\leq \tilde{\mu}(E_i) \leq (1+\varepsilon)^2 \mu(E_i) \\ \implies \frac{1}{(1+\varepsilon)^2} \tilde{\mu}(E_i) &\leq \mu(E_i) \leq (1+\varepsilon)^2 \tilde{\mu}(E_i) \end{aligned}$$

e per arbitrarietà di ε ricaviamo $\mu(E) = \tilde{\mu}(E)$. Per arbitrarietà di E otteniamo $\mu = \tilde{\mu}$. \square

8.3 k -covettori

Dato V spazio vettoriale su \mathbb{R} e $k = 1, 2, \dots$, l'applicazione $\alpha: V^k \rightarrow \mathbb{R}$ si dice **k -covettore o k -lineare e alternante** se

- è lineare in ogni variabile
- per ogni σ permutazione in S_k , $\alpha(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(k)}) = \text{sgn}(\sigma) \alpha(v_1, \dots, v_k)$ (equivalentemente, α cambia segno scambiando due variabili).

Notazione. $\Lambda^k(V) := \{\alpha \text{ } k\text{-covettori su } V\}$. Formalmente $\Lambda^0(V) := \{0\}$.

Osservazione.

- $\Lambda^k(V)$ è uno spazio vettoriale.
- $\Lambda^1(V) = V^*$ duale di V .
- \det è n -lineare alternante nelle colonne (o righe).
- Se v_1, \dots, v_k sono linearmente dipendenti, allora $\alpha(v_1, \dots, v_k) = 0$.
- Se $k > \dim V$, allora $\Lambda^k(V) = \{0\}$.

Definizione. Dati V, V' spazi vettoriali, $T: V \rightarrow V'$ lineare, $\alpha \in \Lambda^k(V')$, il **pull-back** di α secondo T è

$$T^\# \alpha \in \Lambda^k(V) \quad \text{dato da} \quad T^\# \alpha(v_1, \dots, v_k) = \alpha(Tv_1, \dots, Tv_k)$$

Inoltre, dati $\alpha \in \Lambda^k(V), \beta \in \Lambda^h(V)$ si definisce **prodotto esterno** e si indica con $\alpha \wedge \beta \in \Lambda^{k+h}(V)$ quanto segue

$$\alpha \wedge \beta(v_1, \dots, v_{k+h}) = \frac{1}{k!h!} \sum_{\sigma \in S_{k+h}} \text{sgn}(\sigma) \alpha(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(k)}) \beta(v_{\sigma(k+1)}, \dots, v_{\sigma(k+h)})$$

Proposizione 0. Il prodotto esterno \wedge è distributivo (rispetto a $+$), associativo e anticommutativo, ovvero $\alpha \wedge \beta = (-1)^{hk} \beta \wedge \alpha$.

Data e_1, \dots, e_d base di V , e_1^*, \dots, e_d^* è una base di V^* . Denotiamo con $I(d, k) := \{\underline{i} = (i_1, \dots, i_k) \text{ con } 1 \leq i_1 \leq \dots \leq i_k \leq d\}$ l'insieme di multiindici. Per ogni $\underline{i} \in I(d, k)$ indichiamo con $e_{\underline{i}}^* = e_{i_1}^* \wedge \dots \wedge e_{i_k}^* \in \Lambda^k(V)$. Data una matrice $d \times k$ A , $A_{\underline{i}}$ è il minore di A dato dalle righe i_1, \dots, i_k .

Proposizione 1. $e_{\underline{i}}^*(v_1, \dots, v_k) = \det(A_{\underline{i}})$, dove $A \in R^{d \times k}$ matrice delle coordinate di v_1, \dots, v_k , cioè $A_{ij} = (v_j)_i$.

Dimostrazione. Per induzione su k .

- $k = 1$. OK

- *Passo induttivo* $k - 1 \rightarrow k$. Scriviamo $e_{\underline{i}}^* = e_{i_1} \wedge e_{\underline{i}'}$ con $\underline{i}' = (i_2, \dots, i_k)$. Usando la definizione di prodotto esterno e l'ipotesi induttiva notiamo che questo è uguale allo sviluppo per la prima riga di $\det(A_{\underline{i}})$

□

Proposizione 2. Posta $\{e_{\underline{i}} : \underline{i} \in I(d, k)\}$ è una base di $\Lambda^k(V)$ e in particolare per ogni $\alpha \in \Lambda^k(V)$

$$\alpha = \sum_{\underline{i} \in I(d, k)} \alpha(e_{\underline{i}}) e_{\underline{i}}^*$$

Dimostrazione. Definiamo $\tilde{\alpha}$ come sopra. Prendiamo $\underline{i} \in I(d, k)$, allora

$$\tilde{\alpha}(e_{j_1}, \dots, e_{j_k}) = \sum_{\underline{i}} \alpha(e_{i_1}, \dots, e_{i_k}) \cdot \underbrace{e_{\underline{i}}^*(e_{j_1}, \dots, e_{j_k})}_{=\delta_{ij}} = \alpha(e_{j_1}, \dots, e_{j_k})$$

Si conclude per linearità e alternanza.

Corollario. Vale la seguente identità

$$\dim \Lambda^k(V) = \#I(d, k) = \begin{cases} \binom{d}{k} & \text{se } k < d \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Proposizione 3 (Formula di Binet generalizzata). Dati A, B matrici di $d \times k$ con $k < d$, allora

$$\det(B^t A) = \sum_{\underline{i} \in I(d, k)} \det(B_{\underline{i}}) \det(A_{\underline{i}})$$

Dimostrazione. Basta definire $\alpha(v_1, \dots, v_k) = \det(B^t A)$ dove A è la matrice avente colonne pari a v_1, \dots, v_k . Bisogna verificare che α è k -lineare alternante ([TO DO]), da cui segue che

$$\det(B^t A) = \alpha(v_1, \dots, v_k) \stackrel{\text{Prop 2}}{=} \sum_{\underline{i}} \underbrace{\alpha(e_{i_1}^*, \dots, e_{i_k}^*)}_{\det(B_{\underline{i}}^t)} \cdot \underbrace{e_{\underline{i}}^*(v_1, \dots, v_k)}_{\det A_{\underline{i}}}$$

□

Osservazione. Nel caso in cui $B = A$, otteniamo la formula

$$\det(A^t A) = \sum_{\substack{Q \text{ minore} \\ k \times k \text{ di } A}} \det(Q)^2.$$

Caso particolare $V = \mathbb{R}^d$. Indichiamo con e_1, \dots, e_d i vettori della base canonica, dx_1, \dots, dx_d base duale di \mathbb{R}^d , $dx_{\underline{i}} := e_{\underline{i}}^*$ base canonica di $\Lambda^k(\mathbb{R}^d)$.

Esempio.

$$\begin{aligned} & (dx_1 + 2dx_2) \wedge (2dx_1 \wedge dx_3 - dx_2 \wedge dx_4) \\ &= 2dx_1 \wedge dx_1 \wedge dx_3 - dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_4 + 4dx_2 \wedge dx_1 \wedge dx_3 - 2dx_2 \wedge dx_2 \wedge dx_4 \\ &= -dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_4 - 4dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3. \end{aligned}$$

Nota. Nel prodotto esterno si cancellano tutti i termini con indici ripetuti.