

Analisi 3

Esercitazioni di Analisi 3 del corso di Giovanni Alberti e Maria Stella Gelli

Arianna Carelli e Antonio De Lucreziis

I Semestre 2021/2021

Esercitazione del 4 ottobre

1 Esercizi di teoria della misura

Di seguito riportiamo alcune proprietà di base di teoria della misura.

Proprietà.

i) Se $A \subset B$, allora $\mu(A) \leq \mu(B)$.

Dimostrazione. Scomponiamo $B = (B \setminus A) \cup (A \cap B)$. Per ipotesi $A \cap B = A$ ed essendo la misura positiva segue che

$$\mu(B) = \underbrace{\mu(B \setminus A)}_{\geq 0} + \mu(A) \geq \mu(A).$$

ii) Dati due insiemi A, B misurabili, vale

$$\mu(A \cup B) \leq \mu(A) + \mu(B).$$

Dimostrazione. La disuguaglianza segue dalle seguenti uguaglianze.

$$\begin{aligned}\mu(A) &= \mu(A \setminus B) + \mu(A \cap B) \\ \mu(B) &= \mu(B \setminus A) + \mu(A \cap B) \\ \mu(A \cup B) &= \mu(A \setminus B) + \mu(B \setminus A) + \mu(A \cap B).\end{aligned}$$

iii) Data una successione di insiemi $E_1 \subset E_2 \subset \cdots \subset \cdots$, si ha

$$\mu\left(\bigcup_i E_i\right) = \sup_i \mu(E_i) = \lim_i \mu(E_i).$$

iv) Data una successione di insiemi $E_1 \supset E_2 \supset \cdots \supset \cdots$ e $\mu(E_1) < +\infty$, si ha

$$\mu\left(\bigcap_i E_i\right) = \lim_i \mu(E_i).$$

Esercizio (Numerabile subaddittività). Dato $E \in \mathcal{A}$, $E \subset \bigcup_i E_i$ dove $E_i \in \mathcal{A}$. Allora

$$\mu(E) \leq \sum_i \mu(E_i).$$

Dimostrazione (Idea). Basta dimostrare che $\mu\left(\bigcup_i E_i\right) \leq \sum_i \mu(E_i)$. Infatti per quanto visto prima $\mu(E) \leq \mu\left(\bigcup_i E_i\right)$. Prima dimostriamo per induzione $\mu\left(\bigcup_{i=1}^N E_i\right) \leq \sum_{i=1}^N \mu(E_i)$.

Il passo base $n = 2$ è stato visto al punto ii). Una volta dimostrata la proprietà sopra, si nota che $\sum_{i=1}^N \mu(E_i)$ è limitata per ogni N , e dunque è limitato anche il suo limite, da cui la tesi. \square

2 Funzioni misurabili rispetto alla misura di Lebesgue

Si ricorda che le funzioni *continue*, *semplici* e *semicontinue* sono classi di funzioni misurabili. Due osservazioni sulle funzioni semicontinue.

- Le funzioni semicontinue sono *boreliane*.
- La proprietà di misurabilità delle funzioni semicontinue è necessaria per l'enunciato della disuguaglianza di Jensen.

Controesempio (disuguaglianza di Jensen). Notiamo che l'ipotesi di semicontinuità inferiore della funzione f è necessaria per la validità della disuguaglianza di Jensen. Infatti, definiamo f come segue

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x \in (0, 1) \\ +\infty & \text{altrimenti} \end{cases}.$$

Osserviamo che la funzione f così definita è convessa ma non semicontinua inferiormente.

Ora definiamo la funzione $u : X \rightarrow \mathbb{R}$ con $X = (0, 2)$, come la funzione costante di valore $1/2$. Calcoliamo l'integrale di $u(x)$ su X .

$$\int_X u(x) dx = 1.$$

In tal caso vale $f\left(\int_X u(x) dx\right) = +\infty$. D'altra parte $\int_X f \circ u dx = 0$, dunque l'ipotesi di semicontinuità inferiore è necessaria.

Fatto. Date φ_1, φ_2 funzioni semplici su \mathbb{R} con misura di Lebesgue. Allora $\varphi_1 \vee \varphi_2$ e $\varphi_1 \wedge \varphi_2$ sono ancora funzioni semplici.

Lemma. Data $f : X \rightarrow [0, +\infty]$ misurabile

$$\int_X f d\mu = 0 \iff f = 0 \text{ q.o. su } X$$

Dimostrazione.

\Rightarrow Dato che f è non negativa, il dominio X può essere riscritto come

$$X = \{x \in X \mid f(x) \geq 0\} = \{x \in X \mid f(x) > 0\} \cup \{x \in X \mid f(x) = 0\}$$

ricordiamo che $(0, +\infty) = \bigcup_{n \geq 1} (\frac{1}{n}, +\infty)$, dunque possiamo riscrivere una parte di X come segue e poi passare alle misure

$$\begin{aligned} \{x \in X \mid f(x) > 0\} &= \bigcup_{n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}} \left\{x \in X \mid f(x) \geq \frac{1}{n}\right\} \\ \Rightarrow \mu(\{x \in X \mid f(x) > 0\}) &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \mu\left(\left\{x \in X \mid f(x) \geq \frac{1}{n}\right\}\right) \end{aligned}$$

in questo modo otteniamo la seguente caratterizzazione dell'insieme su cui f è positiva

$$\mu(\{x \in X \mid f(x) > 0\}) > 0 \iff \exists \bar{n} \text{ tale che } \mu(\{x \in X \mid f(x) \geq 1/\bar{n}\}) > 0$$

A questo punto possiamo maggiorare come segue

$$0 = \int_X f \, d\mu \geq \int_{\{f \geq \frac{1}{n}\}} f \, d\mu \geq \frac{1}{n} \mu\left(\left\{x \mid f(x) \geq \frac{1}{n}\right\}\right).$$

da cui ricaviamo che $\forall n$ vale

$$\mu\left(\left\{x \mid f(x) \geq \frac{1}{n}\right\}\right) = 0$$

e si conclude osservando che

$$\mu(\{x \mid f(x) > 0\}) = \lim_n \mu\left(\left\{x \mid f(x) \geq \frac{1}{n}\right\}\right) = 0$$

\Leftarrow Dal fatto che f è positiva possiamo scrivere

$$\int_X f \, d\mu = \sup_{\substack{g \leq f \\ g \text{ semplice}}} \int_X g \, d\mu = \sup \sum_i \alpha_i \mu(E_i) = 0.$$

□

Osservazione (sup essenziale di funzioni misurabili). Data f misurabile, definiamo

$$\|f\|_{\infty, X} := \inf \{m \in [0, +\infty] \mid |f(x)| \leq m \text{ quasi ovunque}\}.$$

Se $\|f\|_{\infty} < +\infty$, allora diciamo che esiste una costante $L > 0$ con $L = \|f\|_{\infty, X}$, tale che

$$|f(x)| \leq L$$

quasi ovunque. Infatti, per definizione di \inf , $L = \lim_n m_n$, dove m_n verificano

$$|f(x)| \leq m_n \quad \forall x \in X \setminus N_m, \quad \mu(N_m) = 0.$$

Definiamo $N = \bigcup_m N_m$, da cui si ottiene

$$\mu(N) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(N_m) = 0.$$

Ovvero N è trascurabile. Preso $x \in X \setminus N$, vale

$$|f(x)| \leq m_n \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

3 Formula di cambio di variabile applicata a funzioni radiali

Sia $f: [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ misurabile (di solito si richiede misurabile e positiva oppure sommabile). Allora per il teorema di cambio di variabili vale la seguente

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(|x|) \, dx = c_n \cdot \int_0^{+\infty} f(\rho) \rho^{n-1} \, d\rho,$$

dove $c_n = n \mathcal{L}^n(\mathcal{B}(0, 1))$.

Applichiamo questa formula alla stima di integrali di funzioni positive.

Esercizio. Sia

$$\psi(x) = \frac{1}{\|x\|^\alpha}$$

su $\mathcal{B}(0, 1) \in \mathbb{R}^n$. Notiamo che $\psi(x) = f(\|x\|)$ con $f = 1/t^\alpha$. Usiamo la formula appena introdotta per determinare gli $\alpha \in \mathbb{R}$ per i quali ψ è sommabile su $\mathcal{B}(0, 1)$.

$$\int_{\mathcal{B}(0,1)} \psi(x) \, dx = c_n \int_0^1 \frac{1}{\rho^\alpha} \rho^{n-1} \, d\rho = c_n \int_0^1 \rho^{n-1-\alpha} \, d\rho = \begin{cases} \log(\rho) & n = \alpha \\ \frac{\rho^{n-\alpha}}{n-\alpha} & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Concludendo,

$$\int_{\mathcal{B}(0,1)} \frac{1}{\|x\|^\alpha} \, dx < +\infty \iff n > \alpha.$$

Esercizio. Con passaggi analoghi al precedente otteniamo

$$\int_{\mathbb{R}^n \setminus \mathcal{B}(0,1)} \frac{1}{\|x\|^\alpha} \, dx < +\infty \iff n < \alpha.$$

Esercizio. Vediamo per quali valori di β il seguente integrale converge

$$\int_{\mathcal{B}(0,1)} \frac{1}{(\|x\| + \|x\|^2)^\beta} \, dx$$

Vale la seguente catena di uguaglianze.

$$\int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{(\|x\| + \|x\|^2)^\beta} \, dx = \int_{\mathcal{B}(0,1)} \frac{1}{(\|x\| + \|x\|^2)^\beta} \, dx + \int_{\mathbb{R}^n \setminus \mathcal{B}(0,1)} \frac{1}{(\|x\| + \|x\|^2)^\beta} \, dx.$$

Studiamo separatamente i due pezzi dell'integrale.

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{B}(0,1)} \frac{1}{(\|x\| + \|x\|^2)^\beta} \, dx &= c_n \int_{\mathcal{B}(0,1)} \frac{1}{(\rho + \rho^2)^\beta} \rho^{n-1} \, d\rho = c_n \int_0^1 \frac{1}{\rho^\beta} \cdot \frac{\rho^{n-1}}{(1 + \rho)^\beta} \, d\rho \\ &\approx \int_0^1 \rho^{n-1-\beta} \, d\rho < +\infty \iff \beta < n. \end{aligned}$$

Inoltre,

$$\int_{\mathbb{R}^n \setminus \mathcal{B}(0,1)} \frac{1}{(\|x\| + \|x\|^2)^\beta} \, dx = \int_{\mathbb{R}^n \setminus \mathcal{B}(0,1)} \frac{1}{\rho^{2\beta}} \cdot \frac{\rho^{n-1}}{(\frac{1}{\rho} + 1)^\beta} \, d\rho \approx \int_1^{+\infty} \frac{\rho^{n-1}}{\rho^{2\beta}} \, d\rho < +\infty \iff 2\beta > n.$$

In conclusione, l'integrale è finito se $n > \beta > n/2$.

Esercizio. Studiare l'insieme di finitezza al variare del parametro α dell'integrale

$$\int_{[0,1]^n} \frac{1}{\|x\|_1^\alpha} dx.$$

Osserviamo che la norma 1 e 2 sono legate dalle seguenti disuguaglianze

$$\frac{\|x\|_1}{n} \leq \|x\|_2 \leq \|x\|_1.$$

Studiamo una maggiorazione per l'integrale

$$\int_{[0,1]^n} \frac{1}{\|x\|_1^\alpha} dx \leq \int_{[0,1]^n} \frac{1}{\|x\|^\alpha} dx \leq \int_{B(0,\sqrt{n})} \frac{1}{\|x\|^\alpha} dx < +\infty \iff \alpha < n,$$

dunque

$$\int_{[0,1]^n} \frac{1}{\|x\|_1^\alpha} dx < +\infty \quad \text{se } \alpha < n.$$

Vediamo ora una minorazione.

$$\int_{[0,1]^n} \frac{1}{\|x\|_1^\alpha} dx = \frac{1}{2^n} \int_{[-1,1]^n} \frac{1}{\|x\|_1^\alpha} dx \geq \frac{1}{2^n} \int_{B(0,1)} \frac{1}{\|x\|_1^\alpha} dx \approx \int_{B(0,1)} \frac{1}{\|x\|^\alpha} dx < +\infty \iff \alpha < n.$$

Dunque l'integrale $\int_{[0,1]^n} \frac{1}{\|x\|_1^\alpha} dx$ converge se e solo se $\alpha < n$.

Esercizi per casa.

- (1) Dimostrare che date f, g misurabili ed $r, p_1, p_2 > 0$ tali che $1/r = 1/p_1 + 1/p_2$. Allora vale

$$\|f \cdot g\|_r \leq \|f\|_{p_1} \cdot \|g\|_{p_2}.$$

Suggerimento. Usare Hölder osservando che $1 = \frac{r}{p_1} + \frac{r}{p_2} = \frac{1}{(p_1/r)} + \frac{1}{(p_2/r)}$.

Dimostrazione. Vale quanto segue.

$$\begin{aligned} \|f \cdot g\|_r^r &= \int_X |f \cdot g|^r d\mu = \int_X |f| \cdot |g| d\mu^{\text{Holder}} \leq \|f^r\|_{p_1/r} \cdot \|f^r\|_{p_2/r} \\ &= \left(\int_X |f|^{r \cdot p_1/r} \right)^{r/p_1} \cdot \left(\int_X |g|^{r \cdot p_2/r} \right)^{r/p_2} = \|f\|_{p_1}^r \cdot \|g\|_{p_2}^r = (\|f\|_{p_1} \cdot \|g\|_{p_2})^r \\ &\implies \|f \cdot g\|_r \leq \|f\|_{p_1} \cdot \|g\|_{p_2}. \end{aligned}$$

□

- (2) Dimostrare che date f_1, \dots, f_n misurabili e $p_i > 0$ tali che $1/p_1 + \dots + 1/p_n = 1$ si ha

$$\|f_1 \cdots f_n\|_1 \leq \|f_1\|_{p_1} \cdots \|f_n\|_{p_n}.$$

Suggerimento. Fare il primo passo dell'induzione e usare la formula precedente scegliendo r in modo corretto.

Dimostrazione. Dimostriamo per induzione la seguente proprietà più generale.

Siano f_1, \dots, f_n misurabili e $r > 1$. Allora, per i $p_i > 0$ tali che $1/p_1 + \dots + 1/p_n = r$ si ha

$$\|f_1 \cdots f_n\|_r \leq \|f_1\|_{p_1} \cdots \|f_n\|_{p_n}.$$

Passo base. Vero per il punto (1).

Passo induttivo $[n-1 \Rightarrow n]$. Supponiamo di aver dimostrato per ogni $r > 1$ la disuguaglianza sopra. Allora

$$\|f_1 \cdots f_n\|_r = \|(f_1 \cdots f_{n-1}) \cdot f_n\|_r \stackrel{(1)}{\leq} \|f_1 \cdots f_{n-1}\|_p \cdot \|f_n\|_{p_n}, \quad \text{dove } r = 1/p + 1/p_n.$$

Notando che $1/p = 1/r - 1/p_{n-1} = 1/p_1 + \dots + 1/p_{n-1}$ e usando l'ipotesi induttiva otteniamo la tesi. \square

Esercitazione del 13 ottobre

4 Esercizi su spazi $L^p(X)$ al variare di p e dello spazio X

Sia $X \subset \mathbb{R}^n$, μ la misura di Lebesgue e $1 \leq p_1 \leq p_2$.

Domanda. Possiamo confrontare gli spazi $L^{p_1}(X)$ e $L^{p_2}(X)$? In generale no.

Vediamo informalmente perché. Posto $X = (0, +\infty)$, gli integrali

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+x)^{\beta p}} dx, \quad \int_0^{+\infty} \frac{1}{x^{\beta p}} \cdot \mathbb{1}_{[0,1]}(x) dx = \int_0^1 \frac{1}{x^{\beta p}} dx$$

sono maggiorati dall'integrale di $1/x^\alpha$ dove l'esponente α è rispettivamente più piccolo e più grande di $\beta \cdot p$.

Utilizziamo questa intuizione per vedere formalmente che gli spazi $L^p(0, +\infty)$ non sono confrontabili.

Cerchiamo una funzione $f \in L^{p_1}(0, +\infty) \setminus L^{p_2}(0, +\infty)$ e una funzione $g \in L^{p_2}(0, +\infty) \setminus L^{p_1}(0, +\infty)$. La funzione f definita come segue

$$f(x) := \begin{cases} 1/x^\beta & x \in (0, 1) \\ 0 & x \geq 1 \end{cases}$$

ha integrale

$$\int_0^{+\infty} f(x)^{p_1} dx = \int_0^1 \frac{1}{x^{\beta p_1}} dx < +\infty \iff \beta \cdot p_1 < 1$$

e

$$\int_0^{+\infty} f(x)^{p_2} dx = \int_0^1 \frac{1}{x^{\beta p_2}} dx = +\infty \iff \beta \cdot p_2 \geq 1.$$

Dunque, basta prendere $\beta \in [1/p_2, 1/p_1)$.

Ora cerchiamo $g \in L^2(0, +\infty) \setminus L^{p_1}(0, +\infty)$. Definiamo $g(x)$ come segue

$$g(x) := \frac{1}{(1+x)^\alpha}$$

da cui

$$\int_0^{+\infty} g(x)^{p_2} dx < +\infty \iff \alpha \cdot p_2 > 1 \quad \text{e} \quad \int_0^{+\infty} g(x)^{p_1} dx = +\infty \iff \alpha \cdot p_1 \leq 1$$

Conclusione. In generale non c'è confrontabilità fra gli spazi L^p . La confrontabilità, dipende infatti dall'insieme X su cui sono definiti.

Nota. Un caso particolare è dato ponendo $p_1 < p_2$ e $\mu(X) < +\infty$. In tal caso $L^{p_2}(X) \subset L^{p_1}(X)$. Data $f \in L^{p_2}(X)$, cioè con $\int_X |f|^{p_2} d\mu < +\infty$ vediamo che $\int_X |f|^{p_1} d\mu < +\infty$.

Usiamo Hölder:

$$\begin{aligned} \int_X |f|^{p_1} d\mu &\leq \left(\int_X \overbrace{|f(x)|^{p_1 p_2}}^{|h(x)|^p} d\mu \right)^{1/p} \cdot \left(\int_X 1^q d\mu \right)^{1/q} \underset{p=p_1/p_2}{\leq} \left(\int_X |f|^{p_2} d\mu \right)^{p_2/p_1} \left(\int_X 1^q d\mu \right)^{1/q} \\ &\underset{q=(1-\frac{1}{p})^{-1}=\frac{p}{p-1}=\frac{p_2/p_1}{p_2-p_1}}{=} \|f\|_{L^{p_2}(X)}^{p_1} \cdot \mu(X)^{\frac{p_2-p_1}{p_2}}. \end{aligned}$$

Dunque

$$\|f\|_{L^{p_1}(X)} \leq \|f\|_{L^{p_2}(X)} \cdot \mu(X)^{\frac{p_2-p_1}{p_1 p_2}}.$$

L'inclusione

$$\begin{aligned} i: L^{p_2} &\rightarrow L^{p_1}(X) \\ f &\mapsto f \end{aligned}$$

è ben definita per quanto fatto sopra.

Esercizio. [TO DO] Vedere con quale topologia l'inclusione risulta continua.

Esercizio. [TO DO] Dato $p \geq 1$, stabilire se esistono $X, \mu, f \in L^p(X)$ e $f \notin L^q(X)$ per ogni $q \neq p, q \geq 1$.

Suggerimento. Pensare a $X = (0, +\infty)$, μ misura di Lebesgue.

Osservazione. $L^p(X)$ è uno spazio vettoriale di dimensione infinita, ossia ogni base algebrica ha cardinalità infinita. Vediamo il caso $X = (0, 1)$. Per trovare una base infinita, cerchiamo per ogni $N \in \mathbb{N}$, un insieme di funzioni $f_1, \dots, f_N \in L^p(0, 1)$ tali che siano linearmente indipendenti. Vale a dire, presi $\lambda_1, \dots, \lambda_N \in \mathbb{R}$ vale $\lambda_1 f_1 + \dots + \lambda_N f_N = 0$ se e solo se $\lambda_1 = \dots = \lambda_N = 0$.

Ad esempio, definiamo $f_i := \mathbb{1}_{i/N, (i+1)/N}$ (questa costruzione si può riprodurre per ogni $N \in \mathbb{N}$).

Ricordiamo che, essendo $L^p(X)$ uno spazio metrico, dato $Y \subset L^p$ vale la seguente caratterizzazione:

Y è compatto $\iff Y$ è compatto per successioni $\iff Y$ chiuso e totalmente limitato.

Osservazione. $Y \subset L^p(X)$ è un sottoinsieme che eredita la norma $\|\cdot\|_{L^p}$:

Y è completo $\iff Y$ è chiuso.

Osservazione. In L^p i sottoinsiemi chiusi e limitati non sono compatti¹! In particolare le palle

$$Y = \{f \in L^p \mid \|f\|_{L^p} \leq 1\}$$

¹Uno spazio metrico è compatto se e solo se è completo e totalmente limitato. Inoltre, uno spazio metrico X si dice totalmente limitato se $\forall \varepsilon > 0$ esiste $B_\varepsilon^1, \dots, B_\varepsilon^n$ tale che $X \subset \bigcup_{i=1}^n B_\varepsilon^i$.

non sono compatte.

Ad esempio, mostriamo che in $L^p(0, 1)$ le palle

$$B = \{f \in L^p \mid \|f\|_{L^p} \leq 1\}$$

non sono compatte. Per farlo, esibiamo una successione $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset B$ che non ammette sottosuccessioni convergenti. La costruiamo in modo che non abbia sottosuccessioni di Cauchy

$$f_n: (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}, \quad \|f_n - f_m\|_{L^p} \geq c_0 > 0 \quad \forall n \neq m.$$

Cerco $A_n \subset (0, 1)$ tale che $|A_n \cap A_m| = 0$ per ogni $n \neq m$. Definiamo f_n come segue

$$f_n(x) := \begin{cases} 0 & \text{se } x \in (0, 1) \setminus (1/(n+1), 1/n) \\ c_n > 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

dove c_n è tale che

$$\left(\int_{1/(n+1)}^{1/n} c_n^p \right)^{1/p} = 1 \iff c_n^p \cdot (1/n - 1/(n+1)) = 1 \iff c_n^p = n \cdot (n+1).$$

Calcoliamo ora $\|f_n - f_m\|_{L^p}^p$ con $n \neq m$:

$$\int_0^1 |f_n(x) - f_m(x)|^p dx = \int_{(1/n, 1/(n+1)) \cup (1/(m+1), 1/m)} |f_n - f_m|^p dx = \int_{1/(n+1)}^{1/n} |f_n|^p dx + \int_0^1 |f_m|^p dx = 1 + 1 = 2.$$

Si osserva che quanto detto sopra vale anche per $p = +\infty$.

Esercizio. [TO DO] Sia $E = \{f \in L^1(1, +\infty) \mid |f(x)| \leq 1/x^2 \text{ e } x \in [1, +\infty)\}$.

- E è limitato in L^1 ?
- E è chiuso in L^1 ?
- E è compatto in L^1 ?

Soluzione.

i) Dimostriamo che $\|f\|_{L^1} < C$ per ogni $f \in E$.

$$\|f\|_{L^1} = \int_1^\infty |f(x)| dx \leq \int_1^\infty 1/x^2 dx < C.$$

ii) E è chiuso. Ci basta dimostrare che se $\{f_n\} \in E$ è convergente a f allora $f \in E$. Questo equivale a dimostrare che $|f(x)| < 1/x^2$. Dal fatto che $\{f_n\} \in E$ è convergente in L^1 , abbiamo che esiste una sottosuccessione $\{f_{n_k}\}$ che converge puntualmente a f . Essendo che $|f_{n_k}| < 1/x^2$ per ogni $x \in [1, +\infty)$, per la continuità del modulo segue la tesi.

iii) Da fare [TO DO]

Esercizio. [TO DO]

- Dire se $f_n(x) = x^n$, $n = 0, \dots, N$ è un insieme di funzioni linearmente indipendenti in $L^p([0, 1])$.

- Dire se $\{f_n\} \subset L^p(0, 1)$ è compatta in $L^p(0, 1)$.

Suggerimento. Studiare il limite puntuale.

Soluzione.

- i) Dimostriamolo per induzione. *Passo base.* [TO DO]

Passo induttivo. ($n - 1 \geq n$) Vediamo che se $a_1 \cdot 1 + a_2 \cdot x + \dots + a_{n-1} \cdot x^{n-1} + a_n \cdot x^n = 0 \implies a_1 = \dots = a_n = 0$.

$$\begin{aligned} a_1 \cdot 1 + a_2 \cdot x + \dots + a_{n-1} \cdot x^{n-1} &= -a_n \cdot x^n \\ \downarrow + a_n \cdot x^n \\ (a_1 + a_n) \cdot 1 + (a_2 + a_n) \cdot x + \dots + (a_{n-1} + a_n) \cdot x^{n-1} &= 0 \end{aligned}$$

essendo che $1, x^1, \dots, x^{n-1}$ sono linearmente indipendenti per ipotesi induttiva, vale $(a_i + a_n) = 0$ per ogni $i = 1, \dots, n - 1$, da cui $a_i = 0$ per ogni $i = 1, \dots, n$.

- ii) Dimostriamo che non è compatto. Se per assurdo lo fosse, dalla successione (f_n) potremmo estrarre una sottosuccessione convergente (f_{n_k}) in $L^p([0, 1])$; denotiamo il limite con f . Per i risultati visti sulla convergenza, da (f_{n_k}) potremmo estrarre una sottosuccessione convergente quasi ovunque a f . Ma questo è assurdo perché $\lim_n f_n = +\infty$.

5 Spazi ℓ^p

Prendiamo $X = \mathbb{N}$ e $\mu = \#$ la misura che conta i punti.

Osservazione. Definiamo

$$\ell^p = L^p(\mathbb{N}, \#) = \left\{ (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \left| \sum_{n=0}^{+\infty} |x_n|^p < +\infty \right. \right\}$$

con $p \geq 1$ e $p \neq +\infty$, e

$$\ell^\infty = \{\text{successioni limitate}\} = \left\{ (x_n) \left| \sup_{n \in \mathbb{N}} |x_n| < +\infty \right. \right\}.$$

Esempio (di insieme non compatto in ℓ^1). Consideriamo la successione (e_i) definita come

$$(e_i)_n := \begin{cases} 0 & \text{se } n \neq i \\ 1 & \text{se } n = i \end{cases}$$

si osserva inoltre che le successioni così definite sono linearmente indipendenti e generano se sono infiniti.

Esempio (di insieme compatto in ℓ^1). Sia $F = \{(x_n)_n \in \ell^1 \mid |x_n| \leq 1/n^2 \quad \forall n \in \mathbb{N}\}$. Noto subito che F è limitato, infatti, presa

$$\underline{x} = (x_n) \in F, \quad \|\underline{x}\|_{\ell^1} = \sum_{n=0}^{+\infty} |x_n| \leq \sum_{n=0}^{+\infty} 1/n^2 < +\infty.$$

F è anche chiuso.

Osservazione. Data una successione $(\underline{x}^k) \subset \ell^1$, se $\underline{x}^k \xrightarrow{\ell^1} \underline{x}^\infty$, vuol dire che

$$\|\underline{x}^k - \underline{x}^\infty\|_{\ell^1} = \sum_{n=0}^{+\infty} |x_n^k - x_n^\infty| \xrightarrow{k} 0.$$

In particolare, per ogni $n \in \mathbb{N}$ fissato, $\lim_k (x_n^k - x_n^\infty) = 0$.

F è chiuso perché se $(\underline{x}^k) \subset F$ e $\underline{x}^k \xrightarrow{\ell^1} \underline{x}^\infty$, allora per ogni $n \in \mathbb{N}$ vale

$$|x_n^k| \leq 1/n^2 \quad \text{e} \quad \underbrace{\lim_{n \rightarrow +\infty} |x_n^k|}_{x_n^\infty} \leq 1/n^2.$$

Dimostriamo che è compatto per successioni. Prendiamo $(\underline{x}^k) \subset F$, ogni componente x_n è equilimitata, quindi a meno di sottosuccessioni $x_n^{k_j}$ converge a x_n^∞ . A meno di diagonalizzare, possiamo supporre che la successione k_j non dipenda da n . Inoltre gli elementi $x_n^{k_j}$ sono dominati da $y = (1/n^2)$. Concludiamo usando il teorema di convergenza dominata di Lebesgue.

Esercitazione del 21 ottobre

Data $T: X \rightarrow Y$ lineare tra X, Y spazi normati, allora T è continua se e solo se esiste $C > 0$ tale che $\|T(x)\|_Y \leq C \|x\|_X$ per ogni $x \in X$.

Applichiamo questo risultato.

- i) Sia $X = \mathbb{R}^d$. L'applicazione $L^1(\mathbb{R}^d) \ni u \mapsto \int_{\mathbb{R}^d} u \, dx$ è lineare e continua in quanto limitata. Infatti:

$$|T(u)| = \left| \int_{\mathbb{R}^d} u \, dx \right| \leq \int_{\mathbb{R}^d} |u| \, dx = \|u\|_{L^1(\mathbb{R}^d)}.$$

- ii) Studiamo ora il caso per $p > 1$. Data $u \in L^p(\mathbb{R}^d)$, l'applicazione

$$u \mapsto \int_{\mathbb{R}^d} u \, dx$$

potrebbe non essere ben definita.

Ad esempio se restringiamo il dominio a $L^p(\mathbb{R}^d) \cap L^1(\mathbb{R}^d)$ l'applicazione sopra è ben definita, ma in generale non è continua. Più formalmente, la mappa

$$T: (L^p \cap L^1(\mathbb{R}^d), \|\cdot\|_{L^p}) \rightarrow \mathbb{R}$$

è lineare ma non continua.

Studiamo il caso reale, ovvero $d = 1$.

Per verificare quanto sopra, utilizziamo la definizione di continuità per successioni. Definiamo una successione di funzioni a supporto compatto u_n , che sappiamo essere in tutti gli spazi L^p , e verifichiamo che $\lim_n T(u_n) \neq T(u_\infty)$ dove $u_\infty := \lim_n u_n$.

Definiamo la successione come segue (fare disegno):

$$u_n(x) = \frac{1}{n} \mathbb{1}_{[n, 2n]} = \begin{cases} \frac{1}{n} & \text{se } n \leq x \leq 2n \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Dunque, $T(u_n) = \int_{\mathbb{R}} u_n dx = \frac{1}{n} |E_n| = 1$, dove $E_n = [n, 2n]$. Segue che $T(u_n) \equiv 1$ ma rispetto alla convergenza in L^p , $T(u_n) \not\rightarrow T(u_\infty) = T(0) = 0$.

Più in generale, quando $u \in L^p(\mathbb{R}^d)$ con $p > 1$, una costruzione come sopra non funziona, infatti

$$\|u_n\|_{L^p(\mathbb{R})}^p = \int_{\mathbb{R}} u_n^p(x) dx = \frac{1}{n^p} \cdot |E_n| = \frac{n}{n^p} = \frac{1}{n^{p-1}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Un altro modo per dimostrare quanto sopra è verificare che, per ogni $C > 0$, esiste una funzione $u \in L^p(\mathbb{R}^d) \cap L^1(\mathbb{R}^d)$ tale per cui

$$\left| \int_{\mathbb{R}} u dx \right| > C \left(\int_{\mathbb{R}} |u|^p dx \right)^{1/p}.$$

Notiamo che questo è proprio l'esercizio che segue.

Esercizio. Fissato $C > 0$, trovare $u \in L^p \cap L^1(\mathbb{R})$ tale che

$$\left| \int_{\mathbb{R}} u dx \right| > C \|u\|_{L^p(\mathbb{R})} \quad (\star)$$

Dimostrazione. Fissato $C > 0$, cerchiamo una funzione in L^p il cui integrale in modulo sia maggiore di C per la sua norma L^p . Per trovare u consideriamo la successione di funzioni definita come segue

$$f_n = \begin{cases} 1/x & 1 \leq x \leq n \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}.$$

Le funzioni f_n sono a supporto compatto e stanno in ogni L^p . Notiamo che $f_n \uparrow f$ definita come

$$f = \begin{cases} 1/x & x > 1 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

ed $f \in L^p$ per ogni $p > 1$. In particolare, $\left(\int_{\mathbb{R}} |f_n|^p \right)^{1/p} \leq \left(\int_{\mathbb{R}} |f|^p \right)^{1/p} \leq \sup_{f \in L^p, \forall p > 1} +\infty$ per ogni n .

Quindi il secondo membro di (\star) è maggiorato da una costante che non dipende da n . D'altra parte, per Beppo Levi $\lim_n \int_{\mathbb{R}} f_n dx = \int_{\mathbb{R}} f dx$ che non sta in L^1 . In conclusione, esiste un n abbastanza grande per cui vale (\star) . \square

Esercizio. Sia $p \geq 1$ e $E = \left\{ u \in L^p(-1, 1) : \int_{-1}^1 u dx = 0 \right\}$.

i) Dire se E è limitato in $L^p(-1, 1)$.

ii) Dire se E è chiuso in $L^p(-1, 1)$.

Soluzione.

i) Dimostrare che E è limitato in $L^p(-1, 1)$ equivale a dimostrare che esiste $M > 0$ tale che ogni $u \in L^p(-1, 1)$, $\int_{-1}^1 u dx = 0$ verifica $\|u\|_{L^p} \leq M$.

Vediamo che E non è limitato. Preso $M > 0$, riesco sempre a trovare una funzione maggiore di M in norma. Ad esempio la funzione definita come

$$u(x) := \begin{cases} M & \text{se } x \in (0, 1) \\ -M & \text{se } x \in (-1, 0) \end{cases}$$

ha norma $\|u\|_{L^p}^p = 2M^p$.

Nota. Aveva senso cercare il controesempio nella classe delle funzioni dispari e limitate, perché hanno media zero, e perché sono in tutti gli L^p .

ii) Vediamo che E è chiuso.

Nota. Possiamo dimostrarlo usando i teoremi di convergenza, ma seguiremo un'altra strada.

- *Caso* $p > 1$. Definiamo l'operatore

$$T: L^p(-1, 1) \rightarrow \mathbb{R} \\ u \mapsto \int_{-1}^1 u \, dx$$

è ben definito. Infatti, per Hölder vale

$$\left| \int_{-1}^1 1 \cdot u \, dx \right| \leq \left(\int_{-1}^1 |u|^p \, dx \right)^{1/p} (1^q)^{1/q}$$

dove $q = \frac{p}{p-1}$. Allora

$$|T(u)| \leq \|u\|_{L^p(-1,1)} \cdot 2^{\frac{p}{p-1}}.$$

Dunque T è continuo in L^p per ogni $p > 1$.

- *Caso* $p = 1$. L'operatore sopra è continuo anche per $p = 1$. Grazie alla stima vista prima

$$|T(u)| = \left| \int_{-1}^1 u \, dx \right| \leq \int_{-1}^1 |u| \, dx = \|u\|_{L^1}.$$

Dunque T è continua e $T^{-1}(0) = E$, dunque E è chiuso.

Esercizio. [TO DO] Sia $p \geq 1$. Definiamo

$$F = \left\{ v \in L^p(\mathbb{R}) \mid \int_0^1 v(x) \, dx - 2 \int_{-1}^0 v(x) \, dx = 3 \right\}.$$

Dire se F è chiuso in $(L^p(\mathbb{R}), \|\cdot\|_{L^p(\mathbb{R})})$.

Esercizio. [TO DO] Sia

$$G = \left\{ v \in L^p(0, 2\pi) \mid \int_0^{2\pi} v(x) \sin(x) \, dx = 1 \right\}.$$

Dire se G è chiuso in $L^2(0, 2\pi)$.

Domanda. Dato $L^p(X, \mu)$ e V sottospazio di $L^p(X, \mu)$, posso dire che V è chiuso?

In generale no! Infatti esistono sottospazi densi in $L^p(X, \mu)$.

Ad esempio in ℓ^2 consideriamo l'insieme denso

$$V = \{ \{x_n\} \mid x_n = 0 \text{ definitivamente} \}.$$

Vediamo che non è chiuso. Sia $\underline{x} \in \ell^2$, definita come $\underline{x} = \{1/n\}_{n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}}$, diciamo che $\underline{x} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \underline{x}^n$ dove

$$x_n^k = \begin{cases} \frac{1}{n} & 1 \leq n \leq k \\ 0 & n > k, n = 0 \end{cases}$$

abbiamo che

$$\|\underline{x} - \underline{x}^k\|_{\ell^2}^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |x_n - x_n^k|^2 = \sum_{n=k+1}^{+\infty} |x_n|^2 = \sum_{n=k+1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} 0.$$

Vediamo un altro esempio. Siano $X = \mathbb{R}$, μ la misura di Lebesgue e $p > 1$. In tal caso, l'insieme $L^p \cap L^1(\mathbb{R})$ è un sottospazio denso in $(L^1(\mathbb{R}), \|\cdot\|_{L^1})$ e $(L^p(\mathbb{R}), \|\cdot\|_{L^p})$.

Nota. L'insieme $L^2(\mathbb{R}) \cap L^1(\mathbb{R})$ è un sottospazio proprio di $L^1(\mathbb{R})$. Diciamo che non è chiuso in $\|\cdot\|_{L^1(\mathbb{R})}$ perché è denso. Infatti,

$$\mathcal{C}_C^0(\mathbb{R}) \subset L^2(\mathbb{R}) \cap L^1(\mathbb{R}).$$

6 Convoluzione

Sia $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ e sia $g: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ continua a supporto compatto¹.

$$|g(x) - g(y)| \leq M |x - y|_{\mathbb{R}^d}.$$

Esercizio. Dimostrare che $f * g$ è ben definita e lipschitziana, dove $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ e $g \in \mathcal{C}_C^0(\mathbb{R}^d)$.

Verifichiamo che la convoluzione è ben definita. Dal fatto che $g \in \mathcal{C}_C^0(\mathbb{R}^d)$ abbiamo in particolare che g è limitata, da cui

$$f * g = \int_{\mathbb{R}^d} f(x-y) \cdot g(y) dy \stackrel{|g| \leq M}{\leq} M \cdot \int_{\mathbb{R}^d} f(x-y) dy \stackrel{f \in L^1(\mathbb{R}^d)}{<} +\infty.$$

Ora verifichiamo che $f * g$ è lipschitziana. Consideriamo $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^d$

$$|f * g(x_1) - f * g(x_2)| = \left| \int_{\mathbb{R}^d} f(x_1 - y) g(y) dy - \int_{\mathbb{R}^d} f(x_2 - y) g(y) dy \right|$$

Usiamo la proprietà che, essendo $f * g$ ben definita, si ha $f * g(x) = g * f(x)$. Da cui

$$\begin{aligned} |f * g(x_1) - f * g(x_2)| &= \left| \int_{\mathbb{R}^d} g(x_1 - y) f(y) dy - \int_{\mathbb{R}^d} g(x_2 - y) f(y) dy \right| \\ &= \left| \int_{\mathbb{R}^d} (g(x_1 - y) - g(x_2 - y)) f(y) dy \right| \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^d} |g(x_1 - y) - g(x_2 - y)| |f(y)| dy \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^d} M |(x_1 - y) - (x_2 - y)| |f(y)| dy \leq M |x_1 - x_2| \cdot \|f\|_{L^1(\mathbb{R}^d)}. \end{aligned}$$

¹In tal caso g è lipschitziana.

Esercizio. [TO DO] Se $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ e g a supporto compatto è α -Hölderiana allora anche $f * g$ lo è.

Esercizio. [TO DO] Presa $f(x) = \mathbb{1}_{[0,1]}$ in \mathbb{R} , calcolare $f * f$.

7 Separabilità degli spazi L^p

Proposizione. Si ha che $L^p(\mathbb{R}^d, \mu)$ con μ la misura di Lebesgue, è separabile se e solo se $p \neq +\infty$. Lo stesso risultato vale per ℓ^p .

Osservazione. La proposizione è valida anche per $L^p(X, \mu)$ con $X \subset \mathbb{R}^d$ aperto.

Sia $1 \leq p < +\infty$, $L^p(\mathbb{R}^d, \mu)$ con μ la misura di Lebesgue. Le funzioni semplici costituite da somme finite di insiemi di misura finita sono dense in $L^p(\mathbb{R}^d)$.

Prendiamo una base numerabile di \mathbb{R}^d e la indichiamo con \mathcal{B} . L'insieme

$$Y = \left\{ \sum_{i=1}^n \alpha_i \mathbb{1}_{B_i} \mid B_i \in \mathcal{B}, \alpha_i \in \mathbb{Q} \right\}$$

è numerabile. Vediamo che è denso in $L^p(\mathbb{R}^d)$.

Idea. È sufficiente approssimare le funzioni semplici a somma finita $\sum_{i=1}^N \alpha_i \mathbb{1}_{E_i}$. In particolare, ci basta approssimare $\alpha \cdot \mathbb{1}_E$. Essendo $\alpha \in \mathbb{R}$ troviamo una successione di razionali α_j tali che $\alpha_j \xrightarrow{j \rightarrow \infty} \alpha$. Dunque, rimane da approssimare l'insieme E .

Fissiamo E e supponiamo dapprima E aperto. Possiamo scrivere E come unione arbitraria di elementi della base \mathcal{B}

$$E = \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i.$$

Per approssimare E consideriamo gli insiemi $E_N = \bigcup_{i=1}^N B_i$. Otteniamo $|E| = \lim_N |E_N|$, da cui $|E \setminus E_N| \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} 0$. Concludiamo notando che il caso E arbitrario si fa approssimandolo con una famiglia di aperti.

Per ℓ^p con $p < +\infty$ definiamo

$$Y = \{ \{x_n\} \mid x_n = 0 \text{ definitivamente}, x_n \in \mathbb{Q} \}$$

e verifico che è numerabile e separabile.

Domanda. Cosa succede per $p = +\infty$?

Consideriamo $L^\infty([0, +\infty], \mu)$ con μ di Lebesgue e $E_n = [n, n+1]$. Definiamo l'insieme

$$Z = \left\{ \forall J \subset \mathbb{N} \quad u = \sum_{j \in J} \mathbb{1}_{E_j} \right\}.$$

Z ha la cardinalità delle parti di \mathbb{N} cioè è più che numerabile. Osserviamo che per ogni $u, v \in Z$, $u \neq v$ si ha che $\|u - v\|_{L^\infty(\mathbb{R})} = 1$. Se per assurdo esistesse un insieme denso e numerabile D in ℓ^∞ , per definizione di insieme denso dovremmo trovare per ogni palla di raggio minore di 1 e centro in un qualsiasi elemento di Z , un elemento di D . Ma questo è impossibile in quanto D ha cardinalità numerabile e Z la cardinalità del continuo.

Vediamo in un altro modo che l^∞ non è separabile. Se per assurdo $Y = \{\underline{x}^k\}_{k \in \mathbb{N}}$ fosse denso in L^∞ , allora potremmo definire un elemento $z \in l^\infty$ tale che $\|\underline{x}^k - z\|_{l^\infty} \geq 1$ per ogni k .

Definiamo $z = \{z_n\}$ come segue

$$z_n = \begin{cases} 0 & \text{se } |x_n^n| > 1 \\ 2 & \text{se } |x_n^n| \leq 1 \end{cases}.$$

Esercitazione del 3 Novembre 2021

8 Basi Hilbertiane e proiezioni

Esercizio. Sia $H = L^2(-1, 1)$ e sia $V = \text{Span}\{1, x, x^2\}$. Verificare che V è un sottospazio chiuso e calcolare la proiezione di $\sin x$ su V .

Notazione. Indichiamo con $\|\cdot\|$ la norma $\|\cdot\|_{L^2(-1,1)}$ e con $\langle \cdot, \cdot \rangle$ il prodotto scalare su L^2 .

Soluzione. Vediamo come risolvere questo esercizio in tre modi diversi.

i) Dato H spazio di Hilbert separabile, e dato un sottospazio $V \subset H$, vediamo come trovare la proiezione di un elemento $x \in H$ su V . Procediamo come segue.

- Controlliamo che V sia chiuso.
- Calcoliamo una base hilbertiana di V che indichiamo con $\{e_1, \dots, e_n, \dots\}$.

Il tal caso, la proiezione di un elemento $x \in H$ su V è data da

$$p_V(x) = \sum_n \langle x, e_n \rangle e_n.$$

Esercizio. [TO DO: per casa] Ogni sottospazio di dimensione finita di uno spazio di Hilbert o di L^p è chiuso (e in particolare ha parte interna vuota).

Abbiamo una base di V data da $\{1, x, x^2\}$ (è una base in quanto sono linearmente indipendenti: si può verificare mostrando che $\forall x \in [-1, 1] \lambda_1 + \lambda_2 x + \lambda_3 x^2 = 0 \implies \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$ usando la teoria sulle equazioni di II grado oppure si può derivare e man mano ottenere più informazioni su $\lambda_3, \lambda_2, \lambda_1$).

Volendo usare la base scritta sopra per calcolare la proiezione di $\sin x$ su V , dovremmo prima applicare Gram-Schmidt alla base $\{1, x, x^2\}$ per determinare una base Hilbertiana:

$$\begin{aligned} e_1 &= \frac{1}{\|1\|} = \frac{1}{\sqrt{2}} \\ e_2 &= \frac{x - \langle x, \frac{1}{\sqrt{2}} \rangle \cdot 1}{\left\| x - \langle x, \frac{1}{\sqrt{2}} \rangle \cdot 1 \right\|} \\ e_3 &= \frac{x^2 - \langle x^2, e_1 \rangle \cdot e_1 - \langle x^2, e_2 \rangle \cdot e_2}{\left\| x^2 - \langle x^2, e_1 \rangle \cdot e_1 - \langle x^2, e_2 \rangle \cdot e_2 \right\|} \end{aligned}$$

e successivamente calcolare $p_V(\sin x)$ con la formula scritta sopra.

- ii) Alternativamente, possiamo direttamente cercare la proiezione di $\sin x$ su V . Determiniamo a, b, c tali che $a + bx + cx^2$ sia $p_V(x) = \sin x$ allora posto $f(x) := \sin x - a - bx - cx^2$ abbiamo $f(x) \in V^\perp \iff$ si verificano le seguenti condizioni

$$\langle f(x), 1 \rangle = 0 \quad \langle f(x), x \rangle = 0 \quad \langle f(x), x^2 \rangle = 0$$

Ad esempio da $\langle f(x), 1 \rangle = 0$ otteniamo

$$0 = \int_{-1}^1 (\sin x - a - bx - cx^2) \cdot 1 \, dx = \underbrace{\int_{-1}^1 \sin x \, dx}_{=0} - 2a - b \underbrace{\int_{-1}^1 x \, dx}_{=0} - c \int_{-1}^1 x^2 \, dx \implies 0 = -2a - \frac{2}{3}c$$

ed analogamente si procede con x e x^2 ... [TODO: Da finire]

- iii) Un altro modo è considerare la funzione $g(a, b, c) := \|\sin x - a - bx - cx^2\|_{L^2(-1,1)}$ che è continua, coerciva, etc. e imponendo $\nabla_{a,b,c} g = 0$ si minimizza e si ottengono $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ che verificano $p_V(\sin x)$.

Esercizio. Sia $X = \{u \in L^2(\mathbb{R}) \mid \int_0^2 u \, dx = 0\}$, dire se è un sottospazio chiuso, calcolare X^\perp per una generica $u \in L^2(\mathbb{R})$ e determinare le proiezioni $p_X(u)$ e $p_{X^\perp}(u)$.

Soluzione. La mappa T lineare data da

$$u \mapsto \int_0^2 u \, dx$$

è ben definita, lineare e continua, allora X è proprio $T^{-1}(0)$ dunque è un sottospazio chiuso.

Osservazione. Notiamo che

$$T(u) = \int_{\mathbb{R}} u(x) \cdot \mathbb{1}_{[0,2]}(x) \, dx = \langle u, g \rangle_{L^2(\mathbb{R})}, \quad g = \mathbb{1}_{[0,2]}(x) \in L^2(\mathbb{R}).$$

Calcoliamo ora X^\perp e le proiezioni p_X, p_{X^\perp} . Abbiamo che $X = \{u \in L^2(\mathbb{R}) \mid \langle u, g \rangle = 0\}$ dove $g = \mathbb{1}_{[0,2]}(x)$, dunque $X^\perp = \text{Span}(g)$. Notiamo¹ che

$$L^2(\mathbb{R}) = \text{Span}_{\mathbb{R}} \left\{ \frac{g}{\|g\|_{L^2}} \right\} \oplus \left\{ \frac{g^\perp}{\|g^\perp\|_{L^2}} \right\}.$$

Calcoliamo $p_X(u)$ come segue

$$p_X(u) = u - \left\langle u, \frac{g}{\|g\|_{L^2}} \right\rangle \cdot \frac{g}{\|g\|_{L^2}},$$

dove

$$\|g\|_{L^2} = \left(\int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_{[0,2]}(x)^2 \, dx \right)^{1/2} = \sqrt{2}$$

e dunque

$$p_X(u) = u - \left(\int_0^2 u \, dx \right) \cdot \frac{\mathbb{1}_{[0,2]}}{2}$$

¹Con $g/\|g^\perp\|_{L^2}$ indichiamo una base normalizzata di g^\perp .

Un controllo veloce per verificare di aver fatto i conti corretti è quello di vedere che $p_X(u) \in X$, dunque di verificare che $\int_0^2 p_X(u) dx = 0$.

Per calcolare $p_{X^\perp}(u)$ usiamo la seguente.

Osservazione. Vale $u = p_X(u) + p_{X^\perp}(u)$.

In conclusione,

$$p_{X^\perp}(u) = u - p_X(u) = \left(\int_0^2 u dx \right) \cdot \frac{\mathbb{1}_{[0,2]}}{2}.$$

Esercizio. [TO DO: per casa.] Sia $V = \{\underline{x} = (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \ell^2 \mid x_1 + x_3 + x_5 = 0\}$. Dire se V è chiuso in ℓ^2 e calcolare p_V e p_{V^\perp} .

9 Approssimazioni per convoluzione

Abbiamo visto che data $g \in L^1(\mathbb{R}^d)$ con $\int g dx = 1$ allora per ogni $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$ abbiamo $f_\delta := f * \sigma_\delta g \xrightarrow{\delta \rightarrow 0} f$ in $L^p(\mathbb{R}^d)$ per $p \neq \infty$.

Esercizio. Dire se esiste $v \in L^1(\mathbb{R})$ tale che sia elemento neutro della convoluzione, ovvero

$$\forall f \in L^1(\mathbb{R}) \quad f * v = f.$$

Una tale v non esiste, per vederlo scegliamo opportunamente \bar{f} e usiamo l'equazione. Scelgo $g \in C_c(\mathbb{R})$ e defiamo $\sigma_\delta g = 1/\delta g(1/\delta)$. Abbiamo che $\sigma_\delta g * v = \sigma_\delta g$ per ogni δ . Per il teorema abbiamo che $\sigma_\delta g * v \xrightarrow{\delta \rightarrow 0} v$ in $L^1(\mathbb{R})$, ma $\sigma_\delta g \xrightarrow{\delta \rightarrow 0} 0$ quasi ovunque in $L^1(\mathbb{R})$. Allora $v = 0$ q.o. in $L^1(\mathbb{R})$, dunque non può valere $f * v = v$ per ogni $f \in L^1(\mathbb{R})$.

Esercizio. [TO DO: per casa.] Sia f misurabile su \mathbb{R}^d tale che $\int_E f dx = 0$ per ogni E misurabile di \mathbb{R}^d . Dimostrare che $f = 0$ q.o. su \mathbb{R}^d .

Suggerimento. Considerare l'integrale sull'insieme $\{x \in \mathbb{R}^d \mid f(x) = 0\} \cup \{x \in \mathbb{R}^d \mid f(x) \neq 0\}$ e verificare che, se denotiamo $A = \{x \in \mathbb{R}^d \mid f(x) \neq 0\}$, allora $|A| = 0$.

Esercizio. [TO DO: per casa.] Sia f Lebesgue-misurabile su \mathbb{R}^d tale che $\forall B$ palla su \mathbb{R}^d

$$\int_B f dx = 0$$

Dimostrare che $f = 0$ quasi ovunque su \mathbb{R}^d .

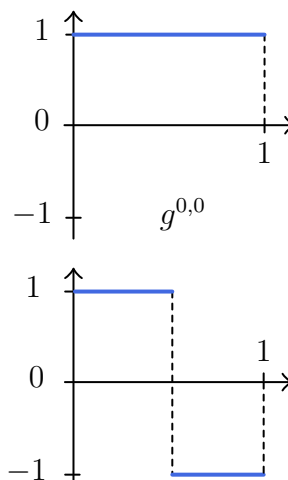
Suggerimenti. Usare la convoluzione con opportuni nuclei; notare che $\int_B f = 0 \iff f * \mathbb{1}_B = 0$ per ogni palla B .

10 Esempi di basi Hilbertiane

Polinomi

La base data da $\{1, x, x^2, \dots, x^n, \dots\}$ opportunamente ortonormalizzata è una base² di $L^2[0, 1]$ (anche di $L^2(\mathbb{R})$).

²Teorema di Stone-Weierstrass: i polinomi sono densi nello spazio delle funzioni continue.



Base di Haar

Vediamo la base di Haar data da due indici n, k dove n indica l'ampiezza delle "onde" (anche dette *wavelet*) e k il posizionamento dell'onda. Sia $n \in \mathbb{N}$ e $k = 1, \dots, 2^n$ e poniamo

$$g^{0,0} := \mathbb{1}_{[0,1]} \quad g^{n,k} := 2^{\frac{n-1}{2}} \left(\mathbb{1}_{\left[\frac{2k-2}{2^n}, \frac{2k-1}{2^n}\right]} - \mathbb{1}_{\left[\frac{2k-1}{2^n}, \frac{2k}{2^n}\right]} \right)$$

Inoltre $\|g^{n,k}\|_{L^2[0,1]} = 1$ ed anche $\|g^{0,0}\|_{L^2[0,1]} = 1$. Vedremo che $\{g^{n,k} \mid n \geq 1, k = 1, \dots, 2^n\} \cup \{g^{0,0}\}$ formano un sistema ortonormale.

- $\langle g^{n,k}, g^{0,0} \rangle = 0$: È ovvio in quanto le $g^{n,k}$ hanno media nulla.
- $\langle g^{n,k}, g^{n',k'} \rangle = 0$: Se $n = n'$ i supporti sono sempre disgiunti altrimenti $n \neq n'$, se supponiamo $n < n'$ allora i supporti o sono disgiunti e si conclude come prima o il supporto di $g^{n',k'}$ è contenuto in quello di $g^{n,k}$. In tal caso però $g^{n,k}$ è costante su $g^{n',k'}$ e dunque l'integrale è sempre nullo.

Inoltre è anche una base hilbertiana, per combinazioni algebriche si ottengono tutti gli intervalli della forma

$$I_k := \left[\frac{k-1}{2^n}, \frac{k}{2^n} \right] \quad \rightsquigarrow \quad \mathbb{1}_{I_k}$$

ad esempio normalizzando $g^{n,k} + 2^{\frac{n-1}{2}} g^{0,0}$ otteniamo uno degli intervalli di sopra di lunghezza $1/2^{n+1}$.

Vedremo che possiamo estendere la base di Haar a tutto \mathbb{R} però è più difficile... [TODO: Ehm aggiungere la parte dopo quando verrà fatta]

Esercizio. Sia $p \geq 1$ allora $\{u \in L^p(\mathbb{R}) \mid \int u \, dx = 0\} \subseteq L^p(\mathbb{R})$ è denso in $L^p(\mathbb{R})$?

Esercitazione del 11 novembre

Consideriamo $L^2([-\pi, \pi], \mathbb{C})$. Ricordiamo che $e^{inx} = \cos(nx) + i \sin(nx)$. Abbiamo

$$\begin{aligned} \sum_{n=-N}^N c_n e^{inx} &= c_0(f) + \sum_{n=1}^N (c_n(f) e^{inx} + c_{-n} e^{inx}) \\ &= c_0(f) + \sum_{n=1}^N [(c_n(f) + c_{-n}(f)) \cos(nx) + i(c_n(f) - c_{-n}(f)) \sin(nx)] \\ &= c_0(f) + \sum_{n=1}^N a_n(f) \cos(nx) + b_n(f) \sin(nx) \end{aligned}$$

con

$$\begin{cases} a_n(f) = c_n(f) + c_{-n}(f) \\ b_n(f) = i c_n(f) - i c_{-n}(f) \\ a_0(f) = c_0(f) \end{cases}$$

Passando al limite per $N \rightarrow +\infty$

$$f(x) \stackrel{L^2}{=} \sum_{n=-N}^N c_n e^{inx} \stackrel{(*)}{=} c_0(f) + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n(f) \cos(nx) + b_n(f) \sin(nx)$$

Nota. L'uguaglianza $(*)$ ha bisogno di qualche spiegazione: come sappiamo che la serie a destra converge? Usiamo il fatto, che mostriamo sotto, che $\{1, \cos(nx), \sin(nx), n > 1\}$ sono un sistema ortogonale, dunque per la disuguaglianza di Bessel segue la convergenza.

Osservazione. Gli elementi $\{1, \sin(nx), \cos(nx)\}$ sono ortogonali per $n \geq 1$ in $L^2([-\pi, \pi], \mathbb{C})$. Infatti, ricordiamo che

$$\begin{aligned} \cos(nx) &= \frac{e^{inx} + e^{-inx}}{2} \\ \sin(nx) &= \frac{e^{inx} - e^{-inx}}{2i}. \end{aligned}$$

- È banale verificare che $\langle 1, \cos(nx) \rangle = \langle 1, \sin(nx) \rangle = 0$;
- Verifichiamo ora che valga $\langle \cos(nx), \sin(mx) \rangle = 0$ per ogni n, m , dunque calcoliamo:

$$\langle \sin(nx), \sin(mx) \rangle = \frac{1}{4} \langle e^{-inx} - e^{inx}, e^{-imx} - e^{imx} \rangle = 0.$$

Ora normalizziamo: $\left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{\cos(nx)}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin(nx)}{\sqrt{\pi}}, n \geq 1 \right\}$.

In conclusione, abbiamo ottenuto che

- $L^2([-\pi, \pi], \mathbb{C})$ ha base Hilbertiana $\left\{ \frac{1}{\sqrt{\pi}}, \frac{\cos(nx)}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin(nx)}{\sqrt{\pi}} \right\}_{\mathbb{C}}$
- $L^2([-\pi, \pi], \mathbb{R})$ ha base Hilbertiana $\left\{ \frac{1}{\sqrt{\pi}}, \frac{\cos(nx)}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin(nx)}{\sqrt{\pi}} \right\}_{\mathbb{R}}$

Esercizio. Se f è a valori reali, dimostrare che $a_n(f)$ e $b_n(f)$ sono anch'essi reali. [TO DO]

Sketch. Si dimostra che $a_n(f) = \overline{a_n(f)}$, $b_n(f) = \overline{b_n(f)}$ e per farlo si usano le espressioni di a_n, b_n in funzione dei coefficienti di Fourier complessi scritte sopra.

Esercizio. Trovare la base di Fourier complessa e reale di $L^2([a, b], \mathbb{C})$.

Soluzione. Data $f(x) \in L^2([a, b], \mathbb{C})$, definiamo la funzione

$$F(y) := f\left((y + \pi) \frac{b-a}{2\pi} + a\right) = f(x).$$

Notiamo che $F \in L^2([-\pi, \pi], \mathbb{C})$, dunque ha espansione in serie di Fourier:

$$\begin{aligned} F(y) &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n(F) e^{iny}, \quad c_n(F) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F(y) e^{-iny} dy \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f\left((y + \pi) \frac{b-a}{2\pi} + a\right) e^{-iny} dy. \end{aligned}$$

Usando il cambio di variabile $y = (x - a)\frac{2\pi}{b - a} - \pi$ si ottiene

$$\begin{aligned} c_n(f) &= \frac{1}{b - a} \int_a^b f(x) \exp \left[\left((x - a)\frac{2\pi}{b - a} - \pi \right) (-in) \right] dx \\ &= \frac{(-1)^n}{b - a} \exp \left[\frac{2\pi a}{b - a} in \right] \int_a^b f(x) \exp \left[\frac{2\pi x}{b - a} (-in) \right] dx \end{aligned}$$

Da cui

$$f(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n(f) \exp \left[\frac{2\pi}{b - a} xin \right], \quad c_n(f) = \frac{1}{b - a} \int_a^b f(x) \exp \left[-\frac{2\pi}{b - a} xin \right].$$

Esercizio. Sia $f \in L^2([-\pi, \pi], \mathbb{C})$ (l'estensione di) f è $2\pi/N$ periodica. Dimostrare che $c_n(f) \neq 0$ se e solo se n multiplo di N . [TO DO]

Esercizi classici. Fissata una funzione $f \in L^2$, calcolare i coefficienti di Fourier complessi (e reali).

Calcoliamo i coefficienti di $f(x) = x^2$.

$$\begin{aligned} c_n(f) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x^2 e^{-inx} dx = \frac{1}{2\pi} \left[\frac{e^{-inx}}{-in} x^2 \right]_{-\pi}^{\pi} - \int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{-inx}}{-in} 2x dx \\ &= - \int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{-inx}}{-in} 2x dx = -\frac{i}{\pi n} \left[\left[\frac{e^{-inx}}{-in} \right]_{-\pi}^{\pi} - \int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{-inx}}{-in} dx \right] \\ &= \frac{-i\pi \cos(-n\pi) + \cos(-n(-\pi))}{\pi n (-in)} + \frac{i}{\pi n} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{-inx}}{-in} dx \\ &= \frac{2}{n^2} + \frac{i}{\pi n} \cdot 0 = \frac{2}{n^2} (-1)^n \\ &\implies c_n(f) = \frac{2}{n^2} (-1)^n. \end{aligned}$$

Infine

$$c_0(f) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x^2 dx = \frac{1}{2\pi} \frac{2}{3} \pi^3 = \frac{1}{3} \pi^2.$$

Per Parseval $\|f\|_{L^2}^2 = 2\pi \sum_{n \in \mathbb{Z}} |c_n(f)|^2$. Da cui

$$\int_{-\pi}^{\pi} x^4 dx = \|x^2\|_{L^2}^2 = 2\pi \cdot \left[\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{4}{n^4} + \frac{\pi^2}{3} \right].$$

Nota. Potevamo ottenere i coefficienti di $f(x) = x^2$, applicando il teorema della derivata.

Domande.

- Abbiamo visto che $c_n(x^2) = \frac{2(-1)^n}{n^2}$ e dedotto che $c_n(2x) = in \frac{2(-1)^n}{n^2} = \frac{2(-1)^n i}{n}$.
- Vorremmo calcolare $c_n(2)$, possiamo applicare il teorema sulla formula della derivata?

Esercizio.

- i) Calcolare i coefficienti di Fourier complessi di x^3 e vedere se vale $c_n(3x^2) = inc_n(x^3)$.
- ii) Calcolare i coefficienti reali di x^2 .

Esercizio. Sia $f(x)$ definita da $\sum_{n \in \mathbb{Z}} \gamma_n e^{inx}$ con $\begin{cases} \gamma_n = \frac{\cos(n)}{|n|^{3/2}} \\ \gamma_0 = 1 \end{cases}$

Domande.

- i) f è ben definita?
- ii) f è continua?
- iii) f è derivabile?

Dimostrazione.

- i) Sì, infatti $2 \sum_{n=1}^{+\infty} |\gamma_n|^2 \leq 2 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^3} < +\infty$.
- ii) *Suggerimento.* Usare la Proposizione 3 della parte della regolarità dei coefficienti della serie di Fourier.

Esercitazione del 18 Novembre 2021

11 Esercizi preliminari

Data $f: [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$ o \mathbb{C} uno degli esercizi più comuni è doverne calcolare lo sviluppo di Fourier complesso o reale.

Osservazione. Ricordiamo che $c_n(f)$ può essere calcolato anche solo se $f \in L^1$ inoltre

$$\text{SF}_{\mathbb{C}}(f) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n(f) e^{inx} \quad c_n(f) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx} dx$$

e con base hilbertiana $\left\{ \frac{e^{inx}}{\sqrt{2\pi}} \mid n \in \mathbb{Z} \right\}$

invece nel caso reale abbiamo visto

$$\text{SF}_{\mathbb{R}}(f) = \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)] + a_0$$

$$a_n(f) = c_n(f) + c_{-n}(f) \quad b_n(f) = i(c_n(f) - c_{-n}(f)) \quad a_0(f) = c_0(f)$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx) dx \quad b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(nx) dx$$

e con base hilbertiana $\left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{\cos(nx)}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin(nx)}{\sqrt{\pi}} \mid n \geq 1 \right\}$

Esercizio. Sia $f(x) = \cos^2(x) \sin(3x)$, calcolare i coefficienti di Fourier³.

³Con funzioni ottenute come combinazioni di prodotti di potenze di funzioni trigonometriche (anche con argomento moltiplicato per un naturale) conviene calcolare lo sviluppo complesso e poi passare a quello reale.

Svolgimento. Usiamo lo sviluppo complesso

$$\cos(x) = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \quad \sin(x) = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$$

Dunque possiamo riscrivere $f(x)$ come

$$\begin{aligned} &= \frac{i}{8} (e^{i2x} + e^{-i2x} + 2) (e^{-i3x} - e^{i3x}) = \\ &= \frac{i}{8} (e^{-ix} + e^{-i5x} + 2e^{-i3x} - e^{i5x} - e^{ix} - 2e^{i3x}) = \\ &= \frac{i}{8} e^{-ix} + \frac{i}{8} e^{-i5x} + \frac{i}{4} e^{-i3x} - \frac{i}{8} e^{i5x} - \frac{i}{8} e^{ix} - \frac{i}{4} e^{i3x}. \end{aligned}$$

Dunque possiamo già scrivere i coefficienti di Fourier complessi di $f(x)$

$$\begin{aligned} c_n(f) \neq 0 &\iff n = \pm 1, \pm 3, \pm 5 \\ c_{\pm 1}(f) &= \mp \frac{i}{8} \quad c_{\pm 3}(f) = \mp \frac{i}{4} \quad c_{\pm 5}(f) = \mp \frac{i}{8}. \end{aligned}$$

Continuiamo ora il conto precedente e ricostruiamo la serie di Fourier reale ricomponendo i termini

$$\begin{aligned} &= -\frac{1}{4} \left(\frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} \right) - \frac{i^2}{4} \left(\frac{e^{i3x} - e^{-i3x}}{2i} \right) - \frac{i^2}{4} \left(\frac{e^{i5x} - e^{-i5x}}{2i} \right) = \\ &= \frac{1}{4} \sin(x) + \frac{1}{2} \sin(3x) + \frac{1}{4} \sin(5x), \end{aligned}$$

in particolare possiamo notare che $f(\pi) = f(-\pi) = 0$ dunque potevamo già dedurre che la serie di Fourier reale sarebbe stata composta solo da seni.

Esercizio. Caratterizzare i coefficienti $c_n(f)$ di una $f: [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{C}$ in L^2 tale che $\text{Im}(f) \subseteq \mathbb{R}$.

Suggerimento. Si usa che per $z \in \mathbb{C}$ vale $z \in \mathbb{R} \iff z = \bar{z}$.

Esercizio. Determinare la soluzione di (P) e stabilire unicità e regolarità della soluzione $u: [0, T] \times [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$ o \mathbb{C} .

$$\begin{cases} u_t = 4u_{xx} \\ u(\cdot, -\pi) = u(\cdot, \pi) \\ u_x(\cdot, -\pi) = u_x(\cdot, \pi) \\ u(0, x) = \cos^2(x) \sin(3x) \end{cases} \quad (\text{P})$$

Svolgimento. Per prima cosa troviamo formalmente una soluzione in serie di Fourier $u(t, x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n(t) e^{inx}$ dove $c_n(t)$ è il coefficiente di $u(t, \cdot)$.

Per il teorema di derivazione sotto il segno di integrale abbiamo

$$u_t(t, x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \dot{c}_n(t) e^{inx} \quad \text{con } c_n(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} u(t, x) e^{-inx} dx$$

Le condizioni al bordo assicurano che $c_n(u_{xx}(t, \cdot)) = -4n^2 c_n(u(t, \cdot))$ da cui otteniamo il seguente problema di Cauchy sui coefficienti

$$\begin{cases} \dot{c}_n(t) = -4n^2 c_n(t) \\ c_n(0) = c_n(u(0, \cdot)) = c_n(\cos^2(x) \sin(3x)) \end{cases} \quad \forall n \in \mathbb{Z}$$

Inoltre dato che $c_n^0 = 0$ se $n \neq \pm 1, \pm 3, \pm 5 \implies c_n(t) = 0$ per questi n , dunque complessivamente i sistemi sono

$$\begin{cases} \dot{c}_1(t) = -4c_1(t) \\ c_1(0) = -\frac{i}{8} \end{cases} \quad \begin{cases} \dot{c}_3(t) = -36c_3(t) \\ c_3(0) = -\frac{i}{4} \end{cases} \quad \begin{cases} \dot{c}_5(t) = -100c_5(t) \\ c_5(0) = -\frac{i}{8} \end{cases}$$

con la condizione $c_{-n}(t) = \overline{c_n(t)}$, così otteniamo

$$\begin{aligned} c_1(t) &= -\frac{i}{8}e^{-4t} & c_3(t) &= -\frac{i}{4}e^{-36t} & c_5(t) &= -\frac{i}{8}e^{-100t} \\ c_{-1}(t) &= \frac{i}{8}e^{-4t} & c_{-3}(t) &= \frac{i}{4}e^{-36t} & c_{-5}(t) &= \frac{i}{8}e^{-100t} \end{aligned}$$

ed infine fattorizzando

$$\begin{aligned} u(t, x) &= \frac{e^{-4t}}{4} \left(-\frac{i}{2}e^{ix} + \frac{i}{2}e^{-ix} \right) + \frac{e^{-36t}}{2} \left(-\frac{i}{2}e^{i3x} + \frac{i}{2}e^{-i3x} \right) + \frac{e^{-100t}}{4} \left(-\frac{i}{2}e^{i5x} + \frac{i}{2}e^{-i5x} \right) = \\ &= \frac{1}{4}e^{-4t} \sin(x) + \frac{1}{2}e^{-36t} \sin(3x) + \frac{1}{2}e^{-100t} \sin(5x) \end{aligned}$$

Esercizio. Consideriamo il problema (P) dato da

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} + u \\ u(\cdot, -\pi) = u(\cdot, \pi) \\ u_x(\cdot, -\pi) = u_x(\cdot, \pi) \\ u(0, \cdot) = u_0 \end{cases} \quad (P)$$

dove $u_0(x) = \cos^2(x) \sin(3x)$ oppure $\sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{1}{2^{|n|}} e^{inx}$.

Svolgimento. Per ora lavoriamo con $u_0(x) = \cos^2(x) \sin(3x)$, notiamo subito che i coefficienti soddisfano l'equazione

$$\begin{cases} \dot{c}_n(t) = -n^2 c_n(t) + c_n(t) = (1 - n^2) c_n(t) \\ c_n(0) = c_n(\cos^2(x) \sin(3x)) \end{cases}$$

da cui $\dot{c}_n(t) = (1 - n^2) c_n$ con soluzione $c_n(t) = \gamma e^{(1-n^2)t}$, quindi ad esempio abbiamo

$$c_{\pm 1}(t) = \mp \frac{i}{8} \quad c_{\pm 3}(t) = \mp \frac{i}{4} e^{-8t} \quad c_{\pm 5}(t) = \mp \frac{i}{8} e^{-24t}$$

Dunque la soluzione finale è

$$\begin{aligned} u(t, x) &= \frac{i}{8}e^{-ix} - \frac{i}{8}e^{ix} + \frac{i}{4}e^{3t}e^{-i3x} + \frac{i}{4}e^{3t}e^{i3x} + \frac{i}{8}e^{-24t}e^{-i5x} + \frac{i}{8}e^{-24t}e^{i5x} = \\ &= -\frac{i}{4} \left(\frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2} \right) - \frac{i}{2}e^{-3t} \left(\frac{e^{i3x} - e^{-i3x}}{2} \right) - \frac{i}{4}e^{-24t} \left(\frac{e^{i5x} - e^{-i5x}}{2} \right) = \\ &= \frac{1}{4} \sin(x) - \frac{1}{2}e^{-3t} \sin(3x) - \frac{1}{4}e^{-24t} \sin(5x) \end{aligned}$$

Invece considerando la condizione iniziale $u_0(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{inx}/2^{|n|}$ abbiamo che $c_n(u_0) = 1/2^{|n|}$, notiamo che i coefficienti sono sommabili

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{1}{2^{|n|}} = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} + 1 < +\infty \quad u(t, x) := \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{1}{2^{|n|}} e^{(1-n^2)t} e^{inx}$$

in particolare formalmente possiamo scriverla meglio come

$$= \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{1}{2^{|n|}} e^{(1-n)^2 t} e^{inx} = e^t \left(1 + \sum_{n>0} \frac{1}{2^{|n|}} e^{(1-n)^2} \cos(nx) \dots \right)$$

[TODO: Finire meglio questo conto]

Esercizio. (della volta scorsa) Consideriamo la funzione

$$f(x) = \sum_{n \neq 0} \frac{\cos(n)}{|n|^{3/2}} e^{inx}$$

- Dire se f è ben definita e continua.
- Dire se f è derivabile.

Svolgimento.

$$\sum_{n \neq 0} |c_n| = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\cos(n)|}{|n|^{3/2}} \leq 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{3/2}} < +\infty$$

dunque la serie di Fourier converge uniformemente a $f \implies$ è continua e periodica.

Se $\sum |n| \cdot |c_n| < +\infty$ si potrebbe dire che f è derivabile però

$$\sum_{n \neq 0} |n| \cdot |c_n| = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\cos(n)|}{\sqrt{n}} = +\infty \text{ non converge assolutamente}$$

Ma la candidata derivata ha coefficienti inc_n e non starebbe in L^2 ovvero

$$\sum n^2 |c_n|^2 = +\infty \implies \sum inc_n e^{inx} \notin L^2$$

Esercitazione del 25 Novembre 2021

Esercizio. Consideriamo l'equazione alle derivate parziali

$$\begin{cases} u_{ttt}(t, x) = u_{xx}(t, x) & x \in [-\pi, \pi] \\ u(\cdot, \pi) = u(\cdot, -\pi) \\ u_x(\cdot, \pi) = u_x(\cdot, -\pi) \\ u(0, \cdot) = u_0 \\ u_x(0, \cdot) = u_1 \\ u_{xx}(0, \cdot) = u_2 \end{cases} \quad (\text{P})$$

ponendo $c_n^i := c_n(u_i)$ per $n \in \mathbb{Z}$ per $i = 1, 2, 3$. Segue subito che il problema di Cauchy sui coefficienti è

$$\begin{cases} \ddot{c}_n(t) = -n^2 c_n(t) \\ c_n(0) = c_n^0 \\ \dot{c}_n(0) = c_n^1 \\ \ddot{c}_n(0) = c_n^2 \end{cases} \quad \forall n \in \mathbb{Z} \quad (\text{P}')$$

che ha polinomio caratteristico $p(\lambda) = \lambda^3 + n^2 \implies \lambda^3 = -n^2$ e dunque le soluzioni sono $\lambda_i = n^{2/3} \zeta_6^{2i-1}$ con ζ_6 una radice sesta dell'unità. Per comodità per $i = 1, 2, 3$ poniamo $z_i := n^{2/3} \omega_i$ con ω_i soluzioni di $\omega^3 = -1$ che possiamo anche riscrivere come

$$\omega_1 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \quad \omega_2 = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i \quad \omega_3 = -1$$

Dunque per $n \in \mathbb{Z}$ e $n \neq 0$ la soluzione sarà

$$\begin{cases} c_n(t) = A_n e^{-z_1^n t} + B_n e^{-z_2^n t} + C_n e^{-z_3^n t} \\ c_n(0) = c_n^0 = A_n + B_n + C_n \\ c_n(1) = c_n^1 = A_n z_1^n + B_n z_2^n + C_n z_3^n \\ c_n(2) = c_n^2 = A_n (z_1^n)^2 + B_n (z_2^n)^2 + C_n (z_3^n)^2 \end{cases}$$

e quindi otteniamo il sistema

$$\implies \begin{cases} c_n^0 = A_n + B_n + C_n \\ n^{-2/3} c_n^1 = A_n \omega_1 + B_n \omega_2 + C_n \omega_3 \\ n^{-4/3} c_n^2 = A_n \omega_1^2 + B_n \omega_2^2 + C_n \omega_3^2 \end{cases} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \omega_1 & \omega_2 & \omega_3 \\ \omega_1^2 & \omega_2^2 & \omega_3^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_n \\ B_n \\ C_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_n^0 \\ n^{-2/3} c_n^1 \\ n^{-4/3} c_n^2 \end{pmatrix}$$

e facendo conti si ottengono A_n, B_n e C_n e si scopre che [TODO: Controllare i conti con Mathematica]

$$\begin{aligned} A_n e^{n^{2/3}(t/2+i\sqrt{3}t/2)} &\sim e^{n^{2/3}t/2} \xrightarrow{t \rightarrow \infty} \infty \\ B_n e^{n^{2/3}(t/2-i\sqrt{3}t/2)} &\sim e^{n^{2/3}t/2} \xrightarrow{t \rightarrow \infty} \infty \\ C_n e^{-n^{2/3}t} &\sim e^{-n^{2/3}t} \xrightarrow{t \rightarrow -\infty} \infty \end{aligned}$$

dunque in realtà anche se il problema in partenza sembrava ben definito in realtà non ha soluzione per alcun $t \in \mathbb{R}$.

Conti esatti con Mathematica:

$$\begin{aligned} A_n &\rightarrow \frac{c_n^0}{3} - \frac{c_n^2}{3n^{4/3}} - \frac{(-1)^{2/3} c_n^2}{3n^{4/3}} - \frac{(-1)^{2/3} c_n^1}{3n^{2/3}}, \\ B_n &\rightarrow \frac{c_n^0}{3} - \frac{c_n^2}{6n^{4/3}} + \frac{ic_n^2}{2\sqrt{3}n^{4/3}} + \frac{c_n^1}{6n^{2/3}} + \frac{ic_n^1}{2\sqrt{3}n^{2/3}}, \\ C_n &\rightarrow \frac{c_n^0}{3} + \frac{c_n^2}{3n^{4/3}} - \frac{c_n^1}{3n^{2/3}} \end{aligned}$$

Esercizio. (Equazione del calore senza una condizione al bordo)

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} & x \in [-\pi, \pi] \\ u(\cdot, -\pi) = u(\cdot, \pi) \\ u(0, \cdot) = u_0 = \cos(x/2) \end{cases} \quad (P)$$

i) *Esiste una soluzione?*

Sì in quanto esiste anche con una condizione in più

ii) *È unica?*

Senza periodicità per u_x non è vero in generale che $c_n(u_{xx}(t, \cdot)) = -n^2 c_n(u(t, \cdot))$.

Cerchiamo una soluzione della forma $u(t, x) = \cos(x/2)\psi(t)$. Abbiamo che $u_t(t, x) = \dot{\psi}(t)\cos(x/2)$ e $u_{xx}(t, x) = -\cos(x/2)\psi(t)/4$. Dunque $\dot{\psi}(t) = -\psi(t)/4$ e $\psi(0) = 1 \implies \psi(t) = e^{-t/4}$.

Esercizio.

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} & x \in [0, \pi] \\ u(t, 0) = 0 & t \in \mathbb{R} \\ u(t, \pi) = t & t \in \mathbb{R} \\ u(0, \cdot) = u_0 \end{cases} \quad (\text{P})$$

L'equazione è lineare, cerchiamo $u(t, x) = v(t, x) + \psi(t, x)$ in modo che $v(t, x) = 0$ se $x = 0, \pi$ e $\psi(t, 0) = 0$ e $\psi(t, \pi) = t$ e $\psi(t, x) = tx/\pi$.

Esercizio.

$$\begin{cases} u_t = u_{xxxx} & x \in [-\pi, \pi] \\ u(\cdot, \pi) = u(\cdot, -\pi) \\ u_x(\cdot, \pi) = u_x(\cdot, -\pi) \\ u_{xx}(\cdot, \pi) = u_{xx}(\cdot, -\pi) \\ u_{xxx}(\cdot, \pi) = u_{xxx}(\cdot, -\pi) \\ u(0, \cdot) = u_0 \end{cases} \quad (\text{P})$$

Esercizio.

$$\begin{cases} u_t = u_{xxxx} & x \in [0, \pi] \\ u(\cdot, 0) = u(\cdot, \pi) = 0 \\ u_{xx}(\cdot, 0) = u_{xx}(\cdot, \pi) = 0 \\ u(0, \cdot) = u_0 \end{cases} \quad (\text{P})$$

Esercizio. Sia V il seguente insieme

$$V := \left\{ f \in L^1([1, +\infty)) \mid |f(x)| \leq \frac{1}{x^2} \text{ per q.o. } x \right\}$$

è compatto in L^1 ? e se al posto di L^1 avessimo L^2 ?

[TODO: Espandere]

Intuitivamente $V \supseteq \{f \mid |f(x)| \leq 1/2 \text{ q.o. in } [1, 2]\}$ che non è compatto in quanto contiene famiglie di funzioni che “oscillano molto” costruite sull’idea della base di Haar.

Esercizio. Trovare una funzione in $L^p([0, +\infty))$ tale però che $f \notin L^q$ per $q \neq p$.

Cercare f della forma

$$f(x) = \frac{1}{x^\alpha(a + (\ln x)^\beta)}$$

Esercitazione del 2 dicembre

Ricordiamo la definizione della trasformata di Fourier

$$\mathcal{F}(f) = \widehat{f}(y) = \int_{\mathbb{R}} f(x)e^{-ixy} dx, \quad f \in L^1(\mathbb{R}; \mathbb{C}), \quad f \in L^1(\mathbb{R})$$

dove $\mathcal{F}: L^1(\mathbb{R}; \mathbb{C}) \rightarrow L^\infty(\mathbb{R}) \cap C_0(\mathbb{R})$, in quanto $\|\widehat{f}\|_\infty \leq \|f\|_1$.

Proprietà. Ricordiamo le proprietà viste a lezione.

i) $\widehat{\tau_h f}(y) = e^{-iyh} \widehat{f}(y)$ per ogni $h \in \mathbb{R}$, dove $\sigma_h f(x) = f(x - h)$

ii) $\widehat{e^{ihx} f}(y) = \tau_h \widehat{f}(y)$

iii) Legame tra trasformata e derivata.

- $f \in C^1(\mathbb{R})$, $f, f' \in L^1(\mathbb{R}; \mathbb{C})$, allora $\widehat{f'}(y) = iy \widehat{f}(y)$.
- $f \in L^1(\mathbb{R}; \mathbb{C})$ e $xf(x) \in L^1(\mathbb{R}; \mathbb{C})$, $(1 + |x|)f(x) \in L^1(\mathbb{R}; \mathbb{C})$, allora $\widehat{f} \in C^1(\mathbb{R})$ e $(\widehat{f})' = -ix \widehat{xf(x)}$.

Nota. Le ipotesi $f \in L^1(\mathbb{R}; \mathbb{C})$ e $xf(x) \in L^1(\mathbb{R}; \mathbb{C})$ sono equivalenti a $(1 + |x|)f(x) \in L^1(\mathbb{R}; \mathbb{C})$.

iv) Vale $\widehat{f * g} = \widehat{f} \cdot \widehat{g}$.

Riportiamo un esercizio già posto con una soluzione alternativa.

Esercizio. Dire se esiste $v \in L^1$ non banale tale che

- $v * v = v$
- $g * v = g$ per ogni $g \in L^1$.

Soluzione. La risposta è no per entrambi i punti. Infatti,

- Se per assurdo valesse tale identità, passando alle trasformate si avrebbe

$$\widehat{v * v} = (\widehat{v})^2 \implies \widehat{v}(\widehat{v} - 1) = 0.$$

Ovvero, $\widehat{v} = \{0, 1\}$. Osserviamo subito che non è possibile che \widehat{v} assuma entrambi i valori in quanto funzione continua; d'altra parte non è possibile che $\widehat{v} = 1$, in quanto è anche infinitesima, dunque $\widehat{v} = 0 \implies v = 0$.

- Analogamente al punto precedente si avrebbe $\widehat{v} = 1$ ma ciò non è possibile.

Esercizio 1. Calcolare la trasformata di Fourier della funzione $f(x) = e^{-|x|}$.

Soluzione. Abbiamo

$$\begin{aligned} \widehat{f}(y) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-|x|} e^{-ixy} dx = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-|x|} \cos(xy) dx - i \int_{-\infty}^{\infty} \overbrace{e^{-|x|} \sin(xy)}^{\text{integrale definito di funzione dispari} = 0} dx = 2 \int_0^{\infty} e^{-x} \cos(xy) dx \\ &= 2 \int_0^{\infty} e^{-x} \operatorname{Re} e^{ixy} dx = 2 \int_0^{\infty} \operatorname{Re} (e^{-x} \cdot e^{ixy}) dx = 2 \operatorname{Re} \left[\int_0^{\infty} e^{-x} e^{ixy} dx \right] = 2 \operatorname{Re} \left[\frac{e^{x(iy-1)}}{(iy-1)} \right]_0^{\infty} \\ &= 2 \operatorname{Re} \left[-\frac{1}{iy-1} + \underbrace{\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{e^{x(iy-1)}}{iy-1}}_{=0} \right] = 2 \operatorname{Re} \left[-\frac{1}{iy-1} \right] = 2 \operatorname{Re} \left[-\frac{1}{iy-1} \cdot \frac{iy+1}{iy+1} \right] \\ &= 2 \operatorname{Re} \left[\frac{iy+1}{1+y^2} \right]. \end{aligned}$$

In conclusione, $\hat{f}(y) = \frac{2}{1+y^2}$.

Esercizio 2. Calcolare la trasformata di Fourier della funzione $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$.

Soluzione. Calcoliamo $\hat{f}(y) = \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{-ixy}}{1+x^2} dx$. Dal fatto che $f \in L^1$ e usando il teorema di convergenza dominata, possiamo scrivere $\hat{f}(y)$ come

$$\hat{f}(y) = \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{-R}^R \frac{e^{-ixy}}{1+x^2} dx$$

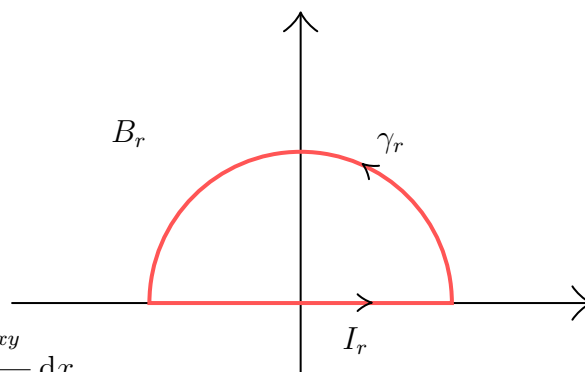
Idea. Calcolare questo integrale con il metodo dei

residui, ponendo $\frac{e^{-ixy}}{1+x^2} = \frac{e^{-izy}}{1+z^2} \Big|_{z \text{ reale}}$

Per il teorema dei residui:

$$\int_{B_r} g(z) dz = 2\pi i \sum_{\substack{z_i \text{ singolarit\`a} \\ \text{di } g \text{ in } B_r}} \text{res}(g, z_i)$$

$$\text{Inoltre } \int_{B_r} g(z) dz = \int_{I_r} g(z) dx + \underbrace{\int_{\gamma_r} g(x) dx}_{\xrightarrow{r \rightarrow \infty} 0} = \int_{-r}^r \frac{e^{-ixy}}{1+x^2} dx.$$



- Verifichiamo che $\int_{\gamma_r} g(x) dx \xrightarrow{r \rightarrow \infty} 0$ dove $[0, \pi] \ni \theta \mapsto re^{i\theta}$.

Poniamo $z = x + it$, dunque $yz = xy + yit$, da cui $g(z) = g(x + it) = (e^{-ixy} e^{ty}) / (1 + (x + it)^2)$. Dunque,

$$\int_0^\pi g(e^{i\theta} r) r d\theta \implies \int_0^\pi \frac{e^{-ri \cos \theta} e^{r \sin \theta y}}{(1 + r^2 e^{i2\theta})} r d\theta \xrightarrow{r \rightarrow \pm \infty} 0 \quad \text{se } y < 0.$$

Per il caso $y > 0$ si ripercorre lo stesso procedimento ma si utilizza la curva $[\pi, 2\pi] \ni \theta \mapsto re^{i\theta}$.

- Calcoliamo i residui: l'unico residuo di g è nel punto i che si tratta di una singolarità semplice (nel caso $y > 0$ la singolarità è in $-i$).

$$\lim_{r \rightarrow \pm \infty} 2\pi i \text{res}(g, i) = \pi e^y$$

Considerando anche il caso $y > 0$ la trasformata di Fourier diviene $\pi e^{-|y|}$.

[TO DO]. Riportare il teorema dei residui con i metodi di base per calcolare i residui?

Esercitazione del 13 Dicembre 2021

12 Operatori autoaggiunti

[TODO: Pezzo iniziale mancante]

Esercizi.

- 1) Esempio classico di $H = L^2([-\pi, \pi]; \mathbb{C})$ e $D = \{u \in C^1([-\pi, \pi]; \mathbb{C}) \mid u(-\pi) = u(\pi)\}$ e $Tu = iu$ allora T è un operatore autoaggiunto ed ha autovalori $\lambda = n \in \mathbb{Z}$.
- 2) $H = L^2([0, \pi]; \mathbb{R})$ e $D = \{u \in C^2([0, \pi]) \mid u(0) = 0 \text{ e } u(\pi) = 0\}$ sono dette condizioni di Dirichlet con $Tu = -\ddot{u}$.

Ora usiamo sempre $Tu = -\ddot{u}$ ma su domini differenti.

- 3) $D_3 = \{u \in C^2([0, \pi]) \mid \dot{u}(0) = 0 \text{ e } \dot{u}(\pi) = 0\}$ sono dette condizioni di Neumann.
- 4) $D_4 = \{u \in C^2([0, \pi]) \mid u(0) = 0 \text{ e } \dot{u}(\pi) = 0\}$ sono dette condizioni di Robin.

Dire per 2), 3) e 4) rispondere alle seguenti

- L'operatore T è autoaggiunto e controllare se il relativo D è denso in L^2
- Controllare se esistono autovalori ed eventualmente dire chi sono gli autovettori.
- Stabilire se esiste una base Hilbertiana di autovettori.

Risoluzione.

- 2) D_2 è denso. Vediamo l'operatore è autoaggiunto

$$\begin{aligned}\langle Tu, v \rangle &= \int_0^\pi (-\ddot{u}(x))v(x) dx = \underbrace{-\dot{u}(x)v(x)}_{v(0)=v(\pi)=0} \Big|_0^\pi - \int_0^\pi (-\dot{u}(x))\dot{v}(x) dx = \int_0^\pi \dot{u}(x)\dot{v}(x) dx \\ \langle u, Tv \rangle &= \int_0^\pi u(x)(-\ddot{v}(x)) dx = \underbrace{u(x)(-\dot{v}(x))}_{u(0)=u(\pi)=0} \Big|_0^\pi - \int_0^\pi \dot{u}(x)(-\dot{v}(x)) dx = \int_0^\pi \dot{u}(x)\dot{v}(x) dx\end{aligned}$$

dunque $\langle Tu, v \rangle = \langle \dot{u}, \dot{v} \rangle = \langle u, Tv \rangle$.

Inoltre T è anche definito positivo infatti $\langle Tu, u \rangle = \langle \dot{u}, \dot{u} \rangle = \|\dot{u}\|_{L^2}^2 \geq 0$.

Cerchiamo gli autovalori quindi poniamo $-\ddot{u} = Tu = \lambda u$ con $\lambda \geq 0$ e $u \in D_2$. Segue $p(t) = t^2 + \lambda \implies t = \pm i\sqrt{\lambda}$ se $\lambda \neq 0$.

Se $\lambda = 0$ invece otteniamo $\ddot{u} = 0 \implies u(x) = ax + b$ ma per le condizioni al bordo segue $a, b = 0$ e dunque $u = 0 \implies \lambda = 0$ non è autovalore.

Invece se $\lambda > 0$ abbiamo $u(x) = A \cos(\sqrt{\lambda}x) + B \sin(\sqrt{\lambda}x)$ e segue $A = 0$ e $\lambda = n^2$ per $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$.

- 3) D_2 è denso e similmente si vede che anche in questo caso T è autoaggiunto. Anche in questo caso T è definito positivo perché vale sempre $\langle Tu, v \rangle = \langle \dot{u}, \dot{v} \rangle$.

Per cercare gli autovalori risolviamo il seguente sistema

$$\begin{cases} -\ddot{u} = \lambda u \\ \dot{u}(0) = 0 \\ \dot{u}(\pi) = 0 \end{cases}$$

Se $\lambda = 0$ allora $u(x) = \text{cost.}$ è un autovettore per l'autovalore 0.

Se invece $\lambda \neq 0$ allora $u(x) = A \cos(\sqrt{\lambda}x) + B \sin(\sqrt{\lambda}x) \implies \cos(nx)$ è un autovettore e $\lambda = n^2$ per $n = 1, 2, \dots$.

4) In questo caso vediamo che vale sempre $\langle Tu, v \rangle = \langle u, v \rangle$ ma per motivi diversi infatti

$$\begin{aligned}\langle Tu, v \rangle &= \int_0^\pi (-\ddot{u}(x))v(x) \, dx = \underbrace{-\dot{u}(x)v(x)}_{\dot{u}(\pi)=0, v(0)=0} \Big|_0^\pi - \int_0^\pi (-\dot{u}(x))\dot{v}(x) \, dx = \int_0^\pi \dot{u}(x)\dot{v}(x) \, dx \\ \langle u, Tv \rangle &= \int_0^\pi u(x)(-\ddot{v}(x)) \, dx = \underbrace{u(x)(-\dot{v}(x))}_{\dot{v}(\pi)=0, u(0)=0} \Big|_0^\pi - \int_0^\pi \dot{u}(x)(-\dot{v}(x)) \, dx = \int_0^\pi \dot{u}(x)\dot{v}(x) \, dx\end{aligned}$$

Considerando il sistema $-\ddot{u} = \lambda u$ con le condizioni al bordo di Robin caso $\lambda = 0$ non è un autovalore mentre se $\lambda \neq 0$ abbiamo che $\dot{u}(x) = \sqrt{\lambda}B \cos(\sqrt{\lambda}x) = 0$ per $x = \pi$ dunque $\sqrt{\lambda} = n + 1/2$ per $n = 0, 1, 2, \dots$ e gli autovettori sono

$$u_n(x) = \sin \left(\left(n + \frac{1}{2} \right) x \right)$$

Osservazione. $T: D \rightarrow L^2$ operatore lineare e continuo $\iff \exists M > 0$ tale che $\|Tu\|_2 \leq M \|u\|$ per ogni $u \in D$.

Vediamo ad esempio che D_1 non è continuo infatti gli autovalori sono $\lambda_n = n^2 \implies n^2 \|u_n\|_2 \leq M \|u_n\|_2 \implies M \geq n^2$ per ogni n . Dunque M è illimitato e l'operatore non può essere continuo.

Esempio. Se ad esempio abbiamo $Tu = -\ddot{u}$ con $\widetilde{D} = \{u \in C^2 \mid u(0) = u(\pi) = 1\}$ allora T non è autoaggiunto e basta trovare u, v tali che

$$\langle Tu, v \rangle \neq \langle u, Tv \rangle$$

Esercizio.

i) Sia $T_1: \ell^2 \rightarrow \ell^2$ dato da

$$T_1((x_n)_{n>0}) = (0, x_1, x_2, \dots)$$

ii) Sia $T_2: \ell^2 \rightarrow \ell^2$ dato da

$$T_2((x_n)_{n>0}) = (x_2, x_3, \dots)$$

Dire se sono autoaggiunti ed eventualmente chi sono gli autovalori.

Esercizi più da compito sono invece cose del tipo...

Esercizio. Sia $H = L^2([0, \pi] \times [0, \pi]; \mathbb{R})$ e $Tu = -\Delta u = -u_{xx} - u_{yy}$

- $D_1 = \{u \in C^2([0, \pi] \times [0, \pi]; \mathbb{R}) \mid u|_{\partial Q} = 0\}$
- $D_2 = \{u \in C^2([0, \pi] \times [0, \pi]; \mathbb{R}) \mid \nabla u|_{\partial Q} = 0\}$
- $D_3 = \{u \in C^2([0, \pi] \times [0, \pi]; \mathbb{R}) \mid u = 0 \text{ su due lati paralleli e } \nabla u = 0 \text{ sugli altri due}\}$

e dire se l'operatore è autoaggiunto ed eventualmente trovare gli autovalori.

13 Calcolo Trasformate di Fourier

Abbiamo visto che le trasformate di $f(x) = e^{-|x|}$ e $g(x) = 1/(1+x^2)$ sono rispettivamente

$$\widehat{f}(y) = \frac{2}{1+y^2} \quad \widehat{g}(y) = \pi e^{-|y|}$$

Vorremo provare a trovare ora le trasformate funzioni come $x^2 e^{-|x|}$ o $x/(1+x^2)$ usando le proprietà delle trasformate con le derivate. Ricordiamo che

$$\begin{aligned} f, f' \in L^1 &\implies \widehat{f'}(y) = iy \widehat{f}(y) \\ f, xf \in L^1 &\implies \widehat{f'}(y) = -ix \widehat{f}(y) \end{aligned}$$

dunque intuitivamente per $x^2 e^{-|x|}$ possiamo fare

$$x^2 e^{-|x|} = i(-i)x(xe^{-|x|}) \implies \mathcal{F}(i(-i)x(xe^{-|x|})) = i(\mathcal{F}(xe^{-|x|}))'(y)$$

ora dobbiamo calcolare $\mathcal{F}(xe^{-|x|})(y)$

$$\mathcal{F}(xe^{-|x|})(y) = i\mathcal{F}(-ixe^{-|x|}) = i\mathcal{F}(e^{-|x|})'(y) = i \left(\frac{2}{1+y^2} \right)' = \frac{-4iy}{(1+y^2)^2}$$

dunque in conclusione abbiamo

$$\mathcal{F}(x^2 e^{-|x|})(y) = i \left(\frac{-4iy}{(1+y^2)^2} \right)' = 4 \left(\frac{y}{(1+y^2)^2} \right)'$$

Invece per quanto riguarda

$$g(x) = \frac{x}{1+x^2} \notin L^1$$

però è in L^2 ma per poterne calcolare la trasformata di Fourier dovremmo passare per delle troncate di $g(x)$. Possiamo però vedere chi dovrebbe essere il candidato formale usando le tecniche di prima

$$\frac{x}{1+x^2} = \frac{i(-ix)}{1+x^2} \rightsquigarrow i\mathcal{F}\left((-ix)\frac{1}{1+x^2}\right)(y) = i\mathcal{F}\left(\frac{1}{1+x^2}\right)'(y) = i\pi(e^{-|y|})'(y)$$

però notiamo che la derivata di $e^{-|y|}$ non è ben definita in 0.

Esercizio. Calcolare la trasformata di Fourier di

$$f(x) = \mathbb{1}_{[-r,r]}(x)$$

Iniziamo a svolgere il conto

$$\widehat{f}(y) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathbb{1}_{[-r,r]}(x) e^{-ixy} dx = \int_{-r}^r e^{-ixy} dx = \begin{cases} 2r & xy = 0 \\ \int_{-r}^r e^{-ixy} dx & xy \neq 0 \end{cases}$$

nel caso $xy \neq 0$ continuiamo a svolgere il conto

$$\int_{-ry}^{ry} \frac{e^{-it}}{y} dt = \frac{1}{y} \int_{-ry}^{ry} [\cos(t) - \underbrace{i \sin(t)}_{\text{dispari}}] dt = \frac{2}{y} \sin(ry)$$

dunque in conclusione abbiamo

$$\mathcal{F}(\mathbb{1}_{[-r,r]}(x)) = \begin{cases} 2r & y = 0 \\ \frac{2}{y} \sin(ry) & y \neq 0 \end{cases}$$

Esercizio. Un esercizio simile è calcolare $\mathcal{F}(\mathbb{1}_{[0,r]}(x))$, ovvero il caso non centrato e poi provare a calcolare (come integrale improprio di Analisi 1) l'integrale

$$\int_0^\infty \frac{\sin(t)}{t} dt = \lim_{r \rightarrow \infty} \int_0^r \frac{\sin(t)}{t} dt$$

14 Trasformata della Gaussiana

Calcoliamo ora la trasformata della funzione gaussiana $e^{-x^2/2}$.

- **Metodo I:** Troviamo un'equazione differenziale (lineare) risolta dalla gaussiana, sia $f(x) = e^{-x^2/2}$ allora vale

$$f'(x) = -xe^{-x^2/2} = -xf(x)$$

e per il decadimento della gaussiana abbiamo che $f, f' \in L^1$ dunque

$$iy\widehat{f}(y) = \widehat{f'(x)}(y) = -i\mathcal{F}(-ixf(x))(y) = i(\widehat{f})'(y)$$

dunque $\widehat{f} = h(y)$ con h tale che $h'(y) = -yh(y) \implies h(y) = ke^{-y^2/2}$, rimane da trovare k . Calcoliamo direttamente $h(0)$

$$\begin{aligned} h(0) &= \widehat{e^{-x^2/2}}(0) = \int_{-\infty}^\infty e^{-x^2/2} e^{-ix \cdot 0} dx = \int_{-\infty}^\infty e^{-x^2/2} dx = \sqrt{2\pi} \\ \implies \widehat{e^{-x^2/2}} &= \sqrt{2\pi} e^{-y^2/2} \end{aligned}$$

- **Metodo II:** Studiamo la funzione di variabile complessa $g(z) = e^{-z^2/2}$ e integriamola lungo un percorso che passi per $[-r, r] \times \{0\} \subset \mathbb{R}^2 \approx \mathbb{C}$.

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(\widehat{-x^2/2})(y) &= \int_{\mathbb{R}} e^{-x^2/2} \cdot e^{-ixy} dx = \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{1}{2}(x^2+2ixy)} dx \\ &= \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{1}{2}(x^2+2ixy+y^2-y^2)} dx = \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{1}{2}(x^2+2ixy+y^2)} \cdot e^{-y^2/2} dx \\ &= e^{-y^2/2} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{1}{2}(x^2+2ixy+y^2)} dx = e^{-y^2/2} \lim_{r \rightarrow \infty} \int_{-r}^r \underbrace{e^{-\frac{1}{2}(x+iy)^2}}_{g(x+iy)} dx \end{aligned}$$

Consideriamo ora il rettangolo $D_r := \{z \mid \operatorname{Im} z \in [0, iy] \text{ e } \operatorname{Re} z \in [-r, r]\}$ dunque poiché $g(z)$ non ha poli su D_r abbiamo

$$\begin{aligned} \int_{\partial D_r} g &= \sum \operatorname{Res.} \text{ su } D_r = 0 \\ 0 &= \int_{-r}^r g(x+it) dx - \int_{-r}^r g(x+iy) dx + \int_0^{iy} g(r+iy) dt - \int_0^{iy} \underbrace{g(-r+iy)}_{\sim e^{-(r+it)^2} \xrightarrow{r \rightarrow \infty} 0} dt \end{aligned}$$

infatti più precisamente i termini verticali vanno a zero

$$\int_0^y e^{-(r+it)^2/2} dt = e^{-r^2/2} \int_0^y e^{-itr-t^2/2} dt = ye^{-r^2/2} \xrightarrow{r \rightarrow +\infty} 0$$

In conclusione abbiamo

$$\begin{aligned} \widehat{e^{-x^2/2}}(y) &= \lim_{r \rightarrow +\infty} \int_{-r}^r e^{-y^2/2} e^{-(x+iy)^2/2} dx = e^{-y^2/2} \left[\lim_{r \rightarrow +\infty} \int_{-r}^r e^{-x^2/2} dx + o(1) \right] = \\ &= e^{-y^2/2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/2} dx = \sqrt{2\pi} e^{-y^2/2} \end{aligned}$$

□