Analisi 3

Appunti di Analisi 3 del corso di Giovanni Alberti e Maria Stella Gelli

Arianna Carelli e Antonio De Lucreziis

I Semestre 2021/2021

Indice

Capitolo 1

Teoria della misura

1.1 Misure astratte

Definizione. Uno spazio misurabile è una terna $(X, \mathcal{A}, \mu)$ tale che

- X è un insieme qualunque.
- $\mathcal{A}$ è una σ-algebra di sottoinsiemi di X (chiamata σ-algebra dei misurabili) ovvero una famiglia di sottoinsiemi di X che rispetta le seguenti proprietà:
  - $\emptyset, X \in \mathcal{A}$.
  - $\mathcal{A}$ è chiusa per complementare, unione e intersezione numerabile.
- μ è una misura su X, ossia una funzione $\mu\colon \mathcal{A} \to [0, +\infty]$ σ-addittiva, cioè tale che data una famiglia numerabile $\{E_k\} \subset \mathcal{A}$ disgiunta e posto $E \coloneqq \bigcup E_n$, allora

$$\mu(E) = \sum_n \mu(E_n).$$

Notazione. Data una successione crescente di insiemi $E_1 \subset E_2 \subset \cdots E_n \subset \cdots$ con $\bigcup E_n = E$, scriviamo $E_n \uparrow E$.

Proprietà.

- $\mu(\emptyset) = 0$
- *Monotonia*: Dati $E, E' \in \mathcal{A}$ e $E \subset E'$, allora $\mu(E) \leq \mu(E')$.
- Data $E_n \uparrow E$, vale $\mu(E) = \lim_{n\to\infty} \mu(E_n) = \sup_n \mu(E_n)$.
- Se $E_n \downarrow E$ e $\mu(E_{\bar{n}}) < +\infty$ per qualche $\bar{n}$, allora $\mu(E) = \lim_{n\to\infty} \mu(E_n) = \inf_n \mu(E_n)$.
- *Subadditività*: Se $E \subset \bigcup E_n$, allora $\mu(E) \leq \sum_n \mu(E_n)$.

Osservazione. Dato $X' \in \mathcal{A}$ si possono restringere $\mathcal{A}$ e μ a X' nel modo ovvio.

Definizioni.

- μ si dice **completa** se $F \subset E, E \in \mathcal{A}$ e $\mu(E) = 0$, allora $F \in \mathcal{A}$ (e di conseguenza $\mu(F) = 0$).

- μ si dice **finita** se $\mu(X) < +\infty$.
- μ si dice **σ-finita** se esiste una successione $\{E_n\}$ con $E_n \subset E_{n+1}$ tale che $\bigcup E_n = X$ con $\mu(E_n) < +\infty$ per ogni n.

Notazione. Sia $P(X)$ un predicato che dipende da $x \in X$ allora si dice che $P(X)$ **vale μ-quasi ogni** $x \in X$ se l'insieme $\{x \mid P(x) \text{ è falso}\}$ è (contenuto in) un insieme di misura μ nulla.

D'ora in poi consideriamo solo misure complete.

1.2 Esempi di misure

- **Misura che conta i punti.**
$$X \text{ insieme} \qquad \mathcal{A} \coloneqq \mathcal{P}(X) \qquad \mu(E) \coloneqq \#E \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$$
- **Delta di Dirac in x_0.**
$$X \text{ insieme, } x_0 \in X \text{ fissato} \qquad \mathcal{A} \coloneqq \mathcal{P}(X) \qquad \mu(E) \coloneqq \delta_{x_0}(E) = \mathbb{1}_E(x_0)$$
- **Misura di Lebesgue.**

  $X = \mathbb{R}^n$ $\quad$ $\mathcal{M}^n$ σ-algebra dei misurabili secondo Lebesgue $\quad$ $\mathscr{L}^n$ misura di Lebesgue

  Dato R parallelepipedo in $\mathbb{R}^n$, cioè $R = \prod_{k=1}^n I_k$ con I_k intervalli in $\mathbb{R}$. Si pone
$$\mathrm{vol}_n(R) \coloneqq \prod_{k=1}^n \mathrm{lungh}(I_k)$$
  per ogni $E \subset \mathbb{R}^n$ (assumendo $\mathrm{lungh}([a,b]) = b - a$). Infine poniamo
$$\mathscr{L}^n(E) \coloneqq \inf\left\{\sum_i \mathrm{vol}_n(R_i) \;\middle|\; \{R_i\} \text{ tale che } E \subset \bigcup_i R_i\right\}.$$

Osservazioni.

- $\mathscr{L}^n(R) = \mathrm{vol}_n(R)$.
- $\mathscr{L}^n$ non è σ-addittiva su $\mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$.

Il secondo punto giustifica l'introduzione della σ-algebra dei **misurabili secondo Lebesgue** che denotiamo con $\mathcal{M}^n$.

Dato $E \subset \mathbb{R}^n$ si dice che E è misurabile (secondo Lebesgue) se
$$\forall \varepsilon > 0\ \exists A \text{ aperto e } C \text{ chiuso, tali che } C \subset E \subset A \text{ e } \mathscr{L}^n(A \setminus C) \le \varepsilon.$$

Osservazioni.

- Per ogni E misurabile vale
$$\mathscr{L}^n(E) = \inf\{\mathscr{L}^n\colon A \text{ aperto}, A \supset E\} = \sup\{\mathscr{L}^n\colon K \text{ compatto}, K \subset E\}.$$
- Notiamo che se $F \subset E$ con $E \subset \mathcal{M}^n$ e $\mathscr{L}^n(E) = 0$, allora $F \in \mathcal{M}^n$. Ovvero la misura di Lebesgue è completa!

Notazione. $|E| \coloneqq \mathscr{L}^n(E)$

1.3 Funzioni misurabili

Definizione. Dato $(X, \mathcal{A}, \mu)$ e $f\colon X \to \mathbb{R}$ (o al posto di $\mathbb{R}$ in Y spazio topologico), diciamo che f è **misurabile** (più precisamente $\mathcal{A}$-misurabile), se

$$\forall A \text{ aperto } f^{-1}(A) \in \mathcal{A}$$

Osservazioni.

- Dato $E \subset X$, vale $E \in \mathcal{A}$ se solo se $\mathbb{1}_E$ è misurabile.
- La classe delle funzioni misurabili è chiusa rispetto a molte operazioni
  - *Somma*, *prodotto* (se hanno senso nello spazio immagine della funzione).
  - *Composizione con funzione continua*: Se $f\colon X \to Y$ continua e $g\colon Y \to Y'$ continua, allora $g \circ f$ è misurabile.
  - *Convergenza puntuale*: data una successione di f_n misurabili e $f_n \to f$ puntualmente, allora f è misurabile.
  - $\liminf$ e $\limsup$ (almeno nel caso $Y = \mathbb{R}$).

1.3.1 Funzioni semplici

Definizione. Definiamo la classe delle **funzione semplici** come

$$\mathcal{S} := \left\{ f\colon X \to \mathbb{R} \;\middle|\; f = \sum_i \alpha_i \mathbb{1}_{E_i} \text{ con } E_i \text{ misurabili e } \{\alpha_i\} \text{ finito} \right\}$$

Osservazione. La rappresentazione di una funzione semplice come combinazione lineare di indicatrici di insiemi *non è unica*, però se necessario possiamo prendere gli E_i disgiunti.

1.4 Integrale

Definizione. Diamo la definizione di $\displaystyle\int_X f \,\mathrm{d}\mu$ per passi

i) Se $f \in \mathcal{S}$ e $f \geq 0$ cioè $f = \sum_i \alpha_i \mathbb{1}_{E_i}$ con $\alpha_i \geq 0$ allora poniamo

$$\int_X f \,\mathrm{d}\mu := \sum_i \alpha_i \mu(E_i),$$

convenendo che $0 \cdot +\infty = 0$ in quanto la misura di un insieme non è necessariamente finita.

ii) Se $f\colon X \to [0, +\infty]$ misurabile si pone

$$\int_X f \,\mathrm{d}\mu := \sup_{\substack{g \in \mathcal{S} \\ 0 \leq g \leq f}} \int_X g \,\mathrm{d}\mu.$$

iii) $f\colon X \to \overline{\mathbb{R}}$ misurabile si dice **integrabile** se

$$\int_X f^+ \,\mathrm{d}\mu < +\infty \quad \text{oppure} \quad \int_X f^- \,\mathrm{d}\mu < +\infty.$$

e per tali f si pone

$$\int_X f \,\mathrm{d}\mu \coloneqq \int_X f^+ \,\mathrm{d}\mu - \int_X f^- \,\mathrm{d}\mu.$$

iv) $f\colon X \to \mathbb{R}^n$ si dice **sommabile** (o di **classe** $\mathscr{L}^1$) se $\int_X |f| \,\mathrm{d}\mu < +\infty$. In tal caso, se $\int_X f_i^\pm \,\mathrm{d}\mu < +\infty$ per ogni f_i componente di f, allora $\int_X f \,\mathrm{d}\mu$ esiste ed è finito.

Per tali f si pone

$$\int_X f \,\mathrm{d}\mu \coloneqq \left(\int_X f_1 \,\mathrm{d}\mu, \dots, \int_X f_n \,\mathrm{d}\mu \right).$$

Notazione. Scriveremo spesso $\displaystyle\int_E f(x) \,\mathrm{d}x$ invece di $\displaystyle\int_E f \,\mathrm{d}\mathscr{L}^n$.

Osservazioni.

- L'integrale è lineare (sulle funzioni sommabili).
- I passaggi **??** e **??** danno lo stesso risultato per f semplice ≥ 0.
- La definizione in **??** ha senso per ogni $f\colon X \to [0, +\infty]$ anche non misurabile. Ma in generale vale solo che
$$\int_X f_1 + f_2 \,\mathrm{d}\mu \geq \int_X f_1 \,\mathrm{d}\mu + \int_X f_2 \,\mathrm{d}\mu.$$
- Dato $E \in \mathcal{A}$, f misurabile su E, notiamo che vale l'uguaglianza
$$\int_E f \,\mathrm{d}\mu \coloneqq \int_X f \cdot \mathbb{1}_E \,\mathrm{d}\mu.$$
- Si può definire l'integrale anche per $f\colon X \to Y$ con Y *spazio vettoriale normato finito dimensionale*[1] ed f sommabile.
- Se $f_1 = f_2$ μ-q.o. allora $\displaystyle\int_X f_1 \,\mathrm{d}\mu = \int_X f_2 \,\mathrm{d}\mu$.
- Si definisce $\displaystyle\int_X f \,\mathrm{d}\mu$ anche se f è misurabile e definita su $X \setminus N$ con $\mu(N) = 0$.
- Se $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ è integrabile secondo Riemann allora è misurabile secondo Lebesgue e le due nozioni di integrale coincidono.

  Nota. Lo stesso vale per integrali impropri di funzioni positive. Ma nel caso più generale non vale: se consideriamo la funzione
$$f\colon (0, +\infty) \to \mathbb{R} \qquad f(x) \coloneqq \frac{\sin x}{x}$$
  allora l'integrale di f definito su $(0, +\infty)$ esiste come integrale improprio ma non secondo Lebesgue, infatti
$$\int_0^{+\infty} f^+ \,\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} f^- \,\mathrm{d}x = +\infty$$

[1] È necessario avere uno spazio vettoriale, perché serve la linearità e la moltiplicazione per scalare

- $\displaystyle\int_X f \, \mathrm{d}\delta_{x_0} = f(x_0)$
- Se $X = \mathbb{N}$ e μ è la misura che conta i punti l'integrale è

  $$\int_X f \, \mathrm{d}\mu = \sum_{n=0}^{\infty} f(n)$$

  per le f positive o tali che $\sum f^+(n) < +\infty$ oppure $\sum f^-(n) < +\infty$.

  Nota. Come prima nel caso di funzioni non sempre positive ci sono casi in cui la serie solita non è definita come integrale di una misura, ad esempio

  $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$$

  esiste come serie ma non come integrale.
- Dato X qualunque, μ misura che conta i punti e $f \colon X \to [0, +\infty]$ possiamo definire la somma di tutti i valori di f

  $$\sum_{x \in X} f(x) \coloneqq \int_X f \, \mathrm{d}\mu.$$

1.5 Teoremi di convergenza

Sia $(X, \mathcal{A}, \mu)$ come in precedenza.

Teorema (di convergenza monotona o Beppo-Levi). Date $f_n \colon X \to [0, +\infty]$ misurabili, tali che $f_n \uparrow f$ ovunque in X, allora[1]

$$\lim_{n \to +\infty} \int_X f_n \, \mathrm{d}\mu = \int_X f \, \mathrm{d}\mu$$

ed in particolare il termine a sinistra è crescente quindi è proprio un sup ovvero $\lim_{n \to +\infty} \int_X f_n \, \mathrm{d}\mu = \sup_n \int_X f_n \, \mathrm{d}\mu$.

Teorema (lemma di Fatou). Date $f_n \colon X \to [0, +\infty]$ misurabili, allora

$$\liminf_{n \to +\infty} \int_X f \, \mathrm{d}\mu \geq \int_X \left(\liminf_{n \to +\infty} f_n \right) \mathrm{d}\mu.$$

Teorema (di convergenza dominata o di Lebesgue). Date $f_n \colon X \to \mathbb{R}$ (o anche $\mathbb{R}^n$) misurabili con le seguenti proprietà

- *Convergenza puntuale:* $f_n(x) \to f(x)$ per ogni $x \in X$.
- *Dominazione:* Esiste $g \colon X \to [0, +\infty]$ sommabile tale che $|f_n(x)| \leq g(x)$ per ogni $x \in X$ e per ogni $n \in \mathbb{N}$.

allora

$$\lim_{n \to \infty} \int_X f_n \, \mathrm{d}\mu = \int_X f \, \mathrm{d}\mu.$$

---

[1] *Mnemonica:* $\displaystyle\sup_n \int_X f_n \, \mathrm{d}\mu = \int_X \sup_n f_n \, \mathrm{d}\mu$

Nota. La seconda proprietà è essenziale; sostituirla con $\displaystyle\int_X |f_n| \,\mathrm{d}\mu \leq C < +\infty$ non basta!

Definizione. Data una *densità* $\rho\colon \mathbb{R}^n \to [0, +\infty]$ misurabile, la **misura** μ **con densità** ρ è data da

$$\forall E \in \mathcal{A} \quad \mu(E) \coloneqq \int_E \rho \,\mathrm{d}x$$

Osservazioni.

- $\mathbb{R}^n$ e $\mathscr{L}^n$ possono essere sostituiti da X e $\widetilde{\mu}$.
- il fatto che μ è una misura segue da Beppo Levi, in particolare serve per mostrare la subadditività.

Teorema (di cambio di variabile). Siano Ω e Ω' aperti di $\mathbb{R}^n$, $\Phi\colon \Omega \to \Omega'$ un diffeomorfismo[1] di classe C^1 e $f\colon \Omega' \to [0, +\infty]$ misurabile. Allora

$$\int_{\Omega'} f(x') \,\mathrm{d}x' = \int_{\Omega} f(\Phi(x)) \left|\det(\nabla\Phi(x))\right| \,\mathrm{d}x.$$

La stessa formula vale per f a valori in $\overline{\mathbb{R}}$ integrabile e per f a valori in $\mathbb{R}^n$ sommabile.

Osservazioni.

- Se $n = 1$, $|\det(\Lambda\Phi(x))| = |\Phi'(x)|$ e non $\Phi'(x)$ come nella formula vista ad Analisi 1 (l'informazione del segno viene data dall'inversione degli estremi).
- Indebolire le ipotesi su Φ è delicato. Basta Φ di classe C^1 e $\widetilde{\forall} x' \in \Omega'$ $\#\Phi^{-1}(x') = 1$ (supponendo Φ iniettiva la proprietà precedente segue immediatamente). Se Φ non è "quasi" iniettiva bisogna correggere la formula per tenere conto della molteplicità.
- Quest'ultima osservazione serve giusto per far funzionare il cambio in coordinate polari che non è iniettivo solo nell'origine.

1.5.1 Fubini-Tonelli

Di seguito riportiamo il teorema di Fubini-Tonelli per la misura di Lebesgue.

Teorema (di Fubini-Tonelli). Sia $\mathbb{R}^{n_1} \times \mathbb{R}^{n_2} \simeq \mathbb{R}^n$ con $n = n_1 + n_2$, $E \coloneqq E_1 \times E_2$ dove E_1, E_2 sono misurabili e f è una funzione misurabile definita su E. Se f ha valori in $[0, +\infty]$ allora

$$\int_E f \,\mathrm{d}\mu = \int_{E_2} \int_{E_1} f(x_1, x_2) \,\mathrm{d}x_1 \,\mathrm{d}x_2 = \int_{E_1} \int_{E_2} f(x_1, x_2) \,\mathrm{d}x_2 \,\mathrm{d}x_1$$

Vale lo stesso per f a valori in $\mathbb{R}$ o in $\mathbb{R}^n$ sommabile.

Osservazioni. Possiamo generalizzare il teorema di Fubini-Tonelli a misure generiche ed ottenere alcuni risultati utili che useremo ogni tanto.

- Se X_1, X_2 sono spazi con misure μ_1, μ_2 (con opportune ipotesi) vale:

$$\int_{E_2} \int_{E_1} f(x_1, x_2) \,\mathrm{d}\mu_1(x_1) \,\mathrm{d}\mu_2(x_2) = \int_{E_1} \int_{E_2} f(x_1, x_2) \,\mathrm{d}\mu_2(x_2) \,\mathrm{d}\mu_1(x_1).$$

[1] funzione differenziabile con inversa differenziabile.

se $f \geq 0$ oppure $\displaystyle\int_{X_1}\int_{X_2} |f| \, \mathrm{d}\mu_2(x_2)\, \mathrm{d}\mu_1(x_1) < +\infty$.

- **Teorema** (di scambio serie-integrale). Se $X_1 \subset \mathbb{R}$ (oppure $X_1 \subset \mathbb{R}^n$), $\mu_1 = \mathscr{L}^n$ e $X_2 = \mathbb{N}$, μ_2 è la misura che conta i punti, allora la formula sopra diventa

$$\sum_{n=0}^{\infty} \int_{X_1} f_n(x)\, \mathrm{d}x = \int_{X_1} \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)\, \mathrm{d}x.$$

se $f_i \geq 0$ oppure $\displaystyle\sum_i \int_{X_1} |f_i(x)| \, \mathrm{d}x < +\infty$.

- **Teorema** (di scambio di serie). Se $X_1 = X_2 = \mathbb{N}$ e $\mu_1 = \mu_2$ è la misura che conta i punti la formula sopra diventa

$$\sum_{j=0}^{\infty}\sum_{i=0}^{\infty} a_{i,j} = \sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty} a_{i,j}$$

se $a_{i,j} \geq 0$ oppure $\displaystyle\sum_i \sum_j |a_{i,j}| < +\infty$.

Capitolo 2

Spazi L^p e convoluzione

2.1 Disuguaglianze

2.1.1 Disuguaglianza di Jensen

Ricordiamo che una funzione $f\colon \mathbb{R}^d \to [-\infty, +\infty]$ è **convessa** se e solo se dati $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}^d$ e $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in [0, 1]$ con $\sum_i \lambda_i = 1$ abbiamo che

$$f\left(\sum_i \lambda_i x_i\right) \leq \sum_i \lambda_i f(x_i)$$

Teorema (Jensen). Dato $(X, \mathcal{A}, \mu)$ con $\mu(X) = 1$ e $f\colon \mathbb{R}^d \to [-\infty, +\infty]$ convessa e semicontinua inferiormente (S.C.I.) e $u\colon X \to \mathbb{R}^d$ sommabile allora vale

$$f\left(\int_X u \,\mathrm{d}\mu\right) \leq \int_X f \circ u \,\mathrm{d}\mu$$

e $f \circ u$ è integrabile.

Osservazioni.

- $(f \circ u)^-$ ha integrale finito.
- Interpretando μ come probabilità si riscrive come $\mathbb{E}[f \circ \mu] \geq f(\mathbb{E}[u])$.
- Se u è una funzione semplice, cioè $u = \sum\limits_i y_i \cdot \mathbb{1}_{E_i}$ con E_i disgiunti e $\bigcup E_i = X$ allora posti $\lambda_i = \mu(E_i)$ abbiamo

  $$\int_X f \circ u \,\mathrm{d}\mu = \int_X \sum_i f(y_i) \cdot \mathbb{1}_{E_i} \,\mathrm{d}\mu = \sum_i \lambda_i f(y_i) \geq f\left(\sum_i \lambda_i y_i\right) = f\left(\int_X u \,\mathrm{d}\mu\right)$$

  Questo ci darebbe una strada per dimostrare in generale per passi il teorema di Jensen ma in realtà si presentano vari problemi tecnici.
- Ogni funzione convessa e S.C.I su Ω convesso in $\mathbb{R}^d$ si estende a $\widetilde{f}\colon \mathbb{R} \to (-\infty, +\infty]$ convessa e S.C.I., ad esempio se $\Omega = (0, +\infty)$

  $$f(y) = \frac{1}{y} \quad \rightsquigarrow \quad \widetilde{f}(y) = \begin{cases} +\infty & y \leq 0 \\ \dfrac{1}{y} & y > 0 \end{cases}$$

- La semi-continuità inferiore serve perché le funzioni convesse sono continue solo se a valori in $\mathbb{R}$, ad esempio per k costante la funzione

$$f(y) := \begin{cases} k & y < 0 \\ +\infty & y \geq 0 \end{cases}$$

è convessa ma non semi-continua inferiormente (e neanche continua).

Dimostrazione. Poniamo $y_0 := \displaystyle\int_X u \, \mathrm{d}\mu$, allora la tesi diventa

$$f\left(\int_X u \, \mathrm{d}\mu\right) \leq \int_X f \circ u \, \mathrm{d}\mu \quad \iff \quad f(y_0) \leq \int_X f \circ u \, \mathrm{d}\mu.$$

Prendiamo $\phi \colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ affine (ovvero $\phi(y) = a \cdot y + b$ con $a \in \mathbb{R}^d$ e $b \in \mathbb{R}$) tale che $\phi \leq f$, allora

$$\int_X f \circ u \, \mathrm{d}\mu \underset{(\star)}{\geq} \int_X \phi \circ u \, \mathrm{d}\mu = \int_X a \cdot u + b \, \mathrm{d}\mu = a y_0 + b = \phi(y_0)$$

Infine concludiamo usando il seguente lemma di caratterizzazione delle funzioni convesse ed S.C.I.

Lemma. Ogni $f \colon \mathbb{R}^d \to (-\infty, +\infty]$ convessa e S.C.I è tale che

$$\forall y_0 \in \mathbb{R}^d \qquad \sup_{\substack{\phi \text{ affine} \\ \phi \leq f}} \phi(y_0) = f(y_0)$$

Rileggendo meglio la dimostrazione[1] segue che $(f \circ u)^- < (\phi \circ u)^- \implies (f \circ u)^-$.

Nota. Nel caso $d = 1$ e $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ possiamo usare il fatto che le funzioni convesse ammettono sempre derivata destra o sinistra, il sup diventa un massimo e ci basta prendere come ϕ la retta tangente in $(y_0, f(y_0))$ o una con pendenza compresa tra $f'(y_0^-)$ e $f'(y_0^+)$.

$\square$

Definizione. Dati $p_1, p_2 \in [1, +\infty]$ diciamo che sono **coniugati** se

$$\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} = 1$$

convenendo che $1/\infty = 0$.

Fissiamo $p \in [1, +\infty]$ detto *esponente di sommabilità* e sia $(X, \mathcal{A}, \mu)$ come sempre.

Definizione. Data $f \colon X \to \overline{\mathbb{R}}$ o $\mathbb{R}^d$ misurabile, la **norma** p di f è

$$\|f\|_p := \left(\int_X |f|^p \, \mathrm{d}\mu\right)^{1/p} \qquad p \in [1, +\infty)$$

mentre per $p = +\infty$ poniamo

$$\|f\|_\infty = \operatorname{supess} f(x) := \inf\{m \in [0, +\infty] \mid |f(x)| \leq m \text{ per } \mu\text{-q.o. } x\}.$$

Nota. In realtà queste sono solo delle semi-norme.

[1] Viene considerata la parte negativa per invertire la disuguaglianza $(\star)$.

- $\|f\|_\infty \leq \sup_{x \in X} |f(x)|$
- $\|f\|_p = 0 \iff f = 0$ quasi ovunque

  Dimostrazione.

  $\boxed{\Rightarrow}$ [TODO: Facile ma non ovvia]

  $\boxed{\Leftarrow}$ Ovvio.

  $\square$

- Se $f_1 = f_2$ quasi ovunque $\implies \|f_1\|_p = \|f_2\|_p$.

  Dimostrazione. $f_1 = f_2$ quasi ovunque $\implies \exists D \subset X$ con $\mu(D) = 0$ tale che $f_1(x) = f_2(x)$ su $X \setminus D$, usiamo il fatto che l'integrale non cambia se modifichiamo la funzione su un insieme di misura nulla

  $$\|f_1\|_p^p = \int_X |f_1|^p \,\mathrm{d}\mu = \int_{X\setminus D} |f_1|^p \,\mathrm{d}\mu = \int_{X\setminus D} |f_2|^p \,\mathrm{d}\mu = \int_X |f_2|^p \,\mathrm{d}\mu = \|f_2\|_p^p$$

  $\square$

2.1.2 Disuguaglianza di Young

Proposizione. Per ogni $a_1, a_2 \geq 0$ e $\lambda_1, \lambda_2 > 0$ con $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$ abbiamo che

$$a_1^{\lambda_1} a_2^{\lambda_2} \leq \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2$$

inoltre vale l'uguale se e solo se $a_1 = a_2$.

Dimostrazione. Se $a_1 = a_2 = 0$ allora è ovvia. Supponiamo dunque $a_1, a_2 > 0$. Per la concavità del logaritmo abbiamo

$$\lambda_1 \log a_1 + \lambda_2 \log a_2 \leq \log(\lambda_1 a_2 + \lambda_2 a_2), \iff \log\left(a_1^{\lambda_1} a_2^{\lambda_2}\right) \leq \log(\lambda_1 a_2 + \lambda_2 a_2)$$

e dalla monotonia

$$a_1^{\lambda_1} a_2^{\lambda_2} \leq \lambda_1 a_2 + \lambda_2 a_2.$$

Infine, il se e solo se per l'uguale segue dal fatto che il logaritmo è *strettamente concavo*. $\square$

2.1.3 Disuguaglianza di Hölder

Proposizione. Date $f_1, f_2 \colon X \to \overline{\mathbb{R}}$ o $\mathbb{R}^d$ e p_1, p_2 esponenti coniugati allora

$$\int_X |f_1| \cdot |f_2| \,\mathrm{d}\mu \leq \|f_1\|_{p_1} \cdot \|f_2\|_{p_2}$$

vale anche per $p = +\infty$ convenendo che $+\infty \cdot 0 = 0$ nel membro di destra.

Dimostrazione. Se $\|f_1\|_{p_1} = 0$ o $+\infty$ e anche $\|f_2\|_{p_2} = 0$ o $+\infty$ la dimostrazione è immediata, supponiamo dunque $\|f_1\|_{p_1}, \|f_2\|_{p_2} > 0$ e finiti.

- *Caso 1:* se $p_1 = 1, p_2 = +\infty$ allora

  $$\int_X |f_1| \cdot |f_2| \,\mathrm{d}\mu \leq \int_X |f_1| \cdot \|f_2\|_\infty \,\mathrm{d}\mu = \|f_2\|_\infty \cdot \int_X |f_1| \,\mathrm{d}\mu = \|f_2\|_\infty \cdot \|f_1\|_1$$

- *Caso 2:* se $1 < p_1, p_2 < +\infty$, introduciamo un parametro $\gamma > 0$ allora

$$\int_X |f_1| \cdot |f_2| \,\mathrm{d}\mu = \int_X \left(\gamma^{p_1} \cdot |f_1|^{p_1}\right)^{1/p_1} \cdot \left(\gamma^{-p_2} \cdot |f_1|^{p_2}\right)^{1/p_2} \,\mathrm{d}\mu$$

  a questo punto chiamiamo per comodità $g_1 := \gamma^{p_1} \cdot |f_1|^{p_1}$, $\lambda_1 := 1/p_1$ e $g_2 := \gamma^{-p_2} \cdot |f_1|^{p_2}$, $\lambda_2 := 1/p_2$ da cui

$$= \int_X g_1^{\lambda_1} \cdot g_2^{\lambda_2} \overset{\text{Young}}{\leq} \int_X \lambda_1 g_1 + \lambda_2 g_2 \,\mathrm{d}\mu = \lambda_1 \gamma^{p_1} \int_X |f_1|^{p_1} + \lambda_2 \gamma^{-p_2} \int_X |f_1|^{p_2} \,\mathrm{d}\mu$$

$$= \lambda_1 \gamma^{p_1} \cdot \|f_1\|_{p_1}^{p_1} + \lambda_2 \gamma^{-p_2} \cdot \|f_1\|_{p_2}^{p_2}$$

  posti ora $a_1 := \gamma^{p_1} \|f_1\|_{p_1}^{p_1}$ e $a_2 := \gamma^{-p_2} \|f_1\|_{p_2}^{p_2}$, per $\gamma \to 0$ abbiamo che $a_1 \to 0, a_2 \to +\infty$ mentre per $\gamma \to +\infty$ abbiamo che $a_1 \to +\infty, a_2 \to 0$ dunque per il teorema del valor medio esisterà γ tale che $a_1 = a_2$, ma allora siamo nel caso dell'uguaglianza per la disuguaglianza di Young dunque

$$\lambda_1 \gamma^{p_1} \|f_1\|_{p_1}^{p_1} + \lambda_2 \gamma^{-p_2} \|f_1\|_{p_2}^{p_2} = \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 = a_1^{\lambda_1} \cdot a_2^{\lambda_2} = \|f_1\|_{p_1} \cdot \|f_2\|_{p_2}$$

$\square$

Osservazione. La disuguaglianza di Hölder può essere generalizzata a n funzioni, date $f_1, \dots, f_n$ e $p_1, \dots, p_n$ con $\frac{1}{p_1} + \cdots + \frac{1}{p_2} = 1$ allora

$$\int_X \prod_i^n |f_i| \,\mathrm{d}\mu \leq \prod_i^n \|f_i\|_{p_i}$$

2.1.4 Disuguaglianza di Minkowski

Proposizione. Consideriamo sempre $(X, \mathcal{A}, \mu)$ e sia $p \in [1, +\infty]$ un esponente di sommabilità ed $f_1, f_2 \colon X \to \mathbb{R}$ oppure $\mathbb{R}^d$. Allora vale la disuguaglianza triangolare

$$\|f_1 + f_2\|_p \leq \|f_1\|_p + \|f_2\|_p .$$

Dimostrazione.

- *Caso 1:* se $p = 1$ o $p = +\infty$, allora svolgiamo il calcolo diretto

  - Se $p = 1$

$$\|f_1 + f_2\|_1 = \int_X |f_1 + f_2| \,\mathrm{d}\mu \leq \int_X |f_1| + |f_2| \,\mathrm{d}\mu = \int_X |f_1| \,\mathrm{d}\mu + \int_X |f_2| \,\mathrm{d}\mu = \|f_1\|_1 + \|f_2\|_1$$

  - Se $p = +\infty$ allora poniamo D l'insieme di *misura nulla* che realizza su $X \setminus D$ il supess ovvero $\operatorname{supess}_X |f_1 + f_2| = \sup_{X \setminus D} |f_1 + f_2|$

$$\|f_1 + f_2\|_\infty = \operatorname{supess}_X |f_1 + f_2| = \operatorname{supess}_{X \setminus D} |f_1 + f_2| \leq \operatorname{supess}_{X \setminus D} (|f_1| + |f_2|)$$

$$= \operatorname{supess}_{X \setminus D} |f_1| + \operatorname{supess}_{X \setminus D} |f_2| = \operatorname{supess}_X |f_1| + \operatorname{supess}_X |f_2| = \|f_1\|_\infty + \|f_2\|_\infty$$

- *Caso 2:* se $1 < p < +\infty$ e $0 < \|f_1 + f_2\|_p < +\infty$

$$\begin{aligned}\|f_1 + f_2\|_p^p = \int_X |f_1 + f_2|^p \le \int_X (|f_1| + |f_2|) \cdot |f_1 + f_2|^{p-1} \,\mathrm{d}\mu = \\ = \int_X |f_1| \cdot |f_1 + f_2|^{p-1} \,\mathrm{d}\mu + \int_X |f_2| \cdot |f_1 + f_2|^{p-1} \,\mathrm{d}\mu =\end{aligned}$$

ora introduciamo q esponente coniugato di p e notiamo

$$q = \frac{p-1}{p} \quad \text{e} \quad \left\| |f|^{p-1} \right\|_q = \|f\|_p^{p-1}$$

ora continuiamo a svolgere il conto di prima usando Hölder con esponenti p e q

$$\begin{aligned}&\overset{\text{Hölder}}{\le} \|f_1\|_p \cdot \left\| |f_1 + f_2|^{p-1} \right\|_q + \|f_2\|_p \cdot \left\| |f_1 + f_2|^{p-1} \right\|_q = \\ &= (\|f_1\|_p + \|f_2\|_p) \cdot \left\| |f_1 + f_2|^{p-1} \right\|_q = (\|f_1\|_p + \|f_2\|_p) \cdot \|f_1 + f_2\|_p^{p-1}\end{aligned}$$

infine per l'ipotesi $\|f_1 + f_2\|_p > 0$ possiamo portare l'ultimo fattore dall'altra parte ed ottenere la tesi.

- *Caso 3:* se $1 < p < +\infty$ ma $\|f_1 + f_2\| = 0$ o $+\infty$ allora se $\|f_1 + f_2\| = 0$ la disuguaglianza è banale mentre se $\|f_1 + f_2\| = +\infty$ si usa la seguente disuguaglianza

$$\|f_1 + f_2\|_p^p \le 2^{p-1}(\|f_1\|_p^p + \|f_2\|_p^p),$$

che si ottiene usando la convessità della funzione $x \mapsto x^p$ e la combinazione affine $\frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_2$ infatti

$$\left(\frac{x}{2} + \frac{y}{2}\right)^p \le \frac{1}{2}x^p + \frac{1}{2}y^p \implies \frac{1}{2^{p-1}}(x+y)^p \le x^p + y^p \implies (x+y)^p \le 2^{p-1}(x^p + y^p).$$

$\square$

2.2 Costruzione spazi L^p

Fissiamo $(X, \mathcal{A}, \mu)$ come sempre.

Definizione. Sia $\mathscr{L}^p$ l'insieme delle funzioni $f\colon X \to \mathbb{R}$ o $\mathbb{R}^d$ misurabili tali che $\|f\|_p < +\infty$.

Osservazioni.

- $\mathscr{L}^p$ è un sottospazio vettoriale dello spazio vettoriale dato da $\{f\colon X \to \mathbb{R} \mid f \text{ misurabile}\}$ e $\|\cdot\|_p$ è una semi-norma.

  Dimostrazione.

  - $\mathscr{L}^p$ è chiuso per somma e moltiplicazione per scalari.
  - Dalla definizione segue subito $\|\lambda f\|_p = |\lambda| \cdot \|f\|_p$ l'omogeneità della norma.
  - Dalla disuguaglianza di Minkowski segue che $\|\cdot\|_p$ è una semi-norma.

- In particolare non è una norma se $\{0\} \subsetneq \{f \mid \|f\|_p = 0\}$ ovvero se $\mathcal{A}$ contiene insiemi non vuoti di misura nulla.

- In generale dato V spazio vettoriale e $\|\cdot\|$ semi-norma su V possiamo introdurre $N \coloneqq \{v \mid \|v\| = 0\}$. N risulta essere un sottospazio di V e la norma data da $\|[v]\| \coloneqq \|v\|$ per $[v] \in {}^{V}\!/_{N}$ è ben definita ed è proprio una norma su ${}^{V}\!/_{N}$.

- Nel caso della della norma $\|\cdot\|_p$ abbiamo che $[f_1] = [f_2] \iff [f_1 - f_2] = 0 \iff f_1 - f_2 = 0$ quasi ovunque.

Definizione. Poniamo $N \coloneqq \{f \mid \|f\|_p = 0\}$ e definiamo gli **spazi** L^p come

$$L^p \coloneqq {}^{\mathscr{L}^p}\!/_{N} = {}^{\mathscr{L}^p}\!/_{\sim} \qquad \|[f]\|_p \coloneqq \|f\|_p$$

Notazione. Ogni tanto serve precisare meglio l'insieme di partenza e di arrivo degli spazi L^p ed in tal caso useremo le seguenti notazioni

$$L^p = L^p(X) = L^p(X, \mu) = L^p(X, \mathcal{A}, \mu) = L^p(X, \mu; \mathbb{R}^d).$$

Nota. Nella pratica non si parla mai di "classi di funzioni" e si lavora direttamente parlando di "funzioni in L^p". Le "operazioni" comuni non creano problemi però in certi casi bisogna stare attenti di star lavorando con oggetti ben definiti. Ad esempio:

- Preso $x_0 \in X$, consideriamo l'insieme $\{f \in L^p \mid f(x_0) = 0\}$. Notiamo che non è un sottoinsieme ben definito (a meno che $\mu(\{x_0\}) > 0$ ovvero che la misura sia atomica) di L^p, in quanto possiamo variare f su un insieme di misura nulla.

- Invece ad esempio il seguente insieme è ben definito

$$\left\{ f \in L^1 \;\middle|\; \int_X f \, \mathrm{d}\mu = 0 \right\}$$

2.2.1 Prodotto scalare su L^2

Date $f_1, f_2 \in L^2(X)$ si pone

$$\langle f_1, f_2 \rangle \coloneqq \int_X f_1 \cdot f_2 \, \mathrm{d}\mu.$$

Osservazioni.

- La definizione di $\langle f_1, f_2 \rangle$ è ben posta, infatti basta far vedere che $\displaystyle\int_X |f_1 f_2| \, \mathrm{d}\mu < +\infty$ ma per Hölder abbiamo

$$\int_X |f_1 f_2| \, \mathrm{d}\mu \leq \|f_1\|_2 \, \|f_2\|_2 < +\infty$$

- $\|f\|_2^2 = \langle f, f \rangle$ per ogni $f \in L^2(X)$.

- Inoltre, $\displaystyle\left| \int_X f_1 f_2 \, \mathrm{d}\mu \right| \leq \int_X |f_1 f_2| \, \mathrm{d}\mu$ quindi

$$|\langle f_1, f_2 \rangle| \leq \|f_1\|_2 \, \|f_2\|_2 \qquad (\textit{Cauchy-Schwartz}).$$

- L'operatore $\langle \cdot , \cdot \rangle$ è un prodotto scalare definito positivo.

Osservazioni.

- Dato C spazio vettoriale reale con prodotto scalare $\langle \cdot , \cdot \rangle$, allora $\langle \cdot , \cdot \rangle$ si ricava dalla norma associata $\| \cdot \|$ tramite l'identità di polarizzazione:

$$\langle v_1, v_2 \rangle = \frac{1}{4}\left(\|v_1 + v_2\|^2 - \|v_1 - v_2\|^2 \right).$$

- Dato V come sopra, vale l'identità del parallelogramma:

$$\|v_1 + v_2\|^2 + \|v_1 - v_2\|^2 = 2\|v_1\|^2 + 2\|v_2\|^2 \quad \forall v_1, v_2 \in V.$$

  Usando questa identità di dimostra che la norma di L^p deriva da un prodotto scalare solo per $p = 2$.

Proprietà. Sia V uno spazio vettoriale con norma $\| \cdot \|$. Allora vale l'identità del parallelogramma se solo se $\| \cdot \|$ deriva da un prodotto scalare.

Esempio. La norma di $L^p([-1, 1])$, deriva da un prodotto scalare solo per $p = 2$. Prendiamo $f_1 = \mathbb{1}_{[-1,0]}$ e $f_2 = \mathbb{1}_{[0,+1]}$. Allora

$$\|f_1 + f_2\|_p^p = \int_{-1}^{1} 1 \, \mathrm{d}x = 2 \Rightarrow \|f_1 + f_2\|_p = 2^{1/p}$$
$$\|f_1 - f_2\|_p = \|f_1 + f_2\|_p = 2^{1/p}, \quad \|f_1\|_p = \|f_2\|_p = 1$$

Se vale l'identità del parallelogramma allora

$$\|f_1 + f_2\|_p^2 + \|f_1 - f_2\|_p^2 = 2\|f_1\|_p^2 + 2\|f_2\|_p^2$$

cioè

$$2^{2/p} + 2^{2/p} = 2 \cdot 1 + 2 \cdot 1 \iff p = 2.$$

Domanda. Per quali $X, \mathcal{A}, \mu$ vale la stessa conclusione?

2.3 Completezza degli spazi L^p

Vediamo ora la proprietà più importante degli spazi L^p.

Teorema. Lo spazio L^p è completo per ogni $p \in [1, +\infty]$.

Lemma 1. Dato (Y, d) spazio metrico, allora

i) Ogni successione (y_n) tale che

$$\sum_{n=1}^{\infty} d(y_n, y_{n+1}) < +\infty$$

è di Cauchy.

ii) Se ogni (y_n) tale che $\sum_{n=1}^{\infty} d(y_n, y_{n+1}) < +\infty$ converge allora Y è completo.

Osservazione. Non tutte le successioni di Cauchy (y_n) soddisfano quella condizione. Ad esempio la successione $(-1)^n/n$ definita su $\mathbb{R}$ è di Cauchy però

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{(-1)^{n+1}}{n+1} - \frac{(-1)^n}{n} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n^2+n} \approx \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \to \infty.$$

Nota. Per mostrare la completezza degli spazi L^p è sufficiente verificare la convergenza per una sottoclasse propria delle successioni di Cauchy.

Dimostrazione.

i) Vorremmo vedere che $\forall\varepsilon\,\exists N$ tale che $\forall m,n > N$ si ha $d(y_m,y_n) \leq \varepsilon$. Presi $n > m$ abbiamo che

$$d(y_m,y_n) \leq \sum_{k=m}^{n-1} d(y_k,y_{k+1}) \leq \sum_{k=m}^{\infty} d(y_k,y_{k+1}) \to 0$$

in quanto *coda di una serie convergente*, quindi

$$\forall\varepsilon > 0\ \ \exists m_\varepsilon \text{ tale che } \sum_{k=m_\varepsilon}^{\infty} d(y_k,y_{k+1}) < \varepsilon \implies \forall n > m \geq m_\varepsilon\ d(y_m,y_n) \leq \varepsilon$$

ii) Sia (y_n) una successione di Cauchy, mostriamo che converge. Osserviamo che esiste una sottosuccessione (y_{n_k}) tale che

$$\sum_{k=1}^{\infty} d(y_{n_k},y_{n_{k+1}}) < +\infty.$$

Infatti, $\forall k\ \exists n_k$ tale che $\forall n,m \geq n_k\ \ d(y_m,y_n) \leq 1/2^k$ e dunque $d(y_{n_k},y_{n_{k+1}}) \leq 1/2^k$. Per ipotesi (y_{n_k}) converge a un qualche $y \in Y$, da cui la tesi[1]. □

Lemma 2. Dato Y spazio normato, i seguenti fatti sono equivalenti

i) Y è completo.

ii) Per ogni successione (y_n) tale che $\sum_{n=1}^{\infty} \|y_n\| < +\infty$, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$ converge [2].

Dimostrazione. ii) $\Rightarrow$ i). Dobbiamo mostrare che $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$ è di Cauchy. Per il Lemma 1 basta mostrare che la successione

$$z_n := \sum_{k=1}^{n} y_k \quad \text{soddisfa la proprietà} \quad \sum_{n=1}^{\infty} d(z_{n+1},z_n).$$

Espandendo la formula sopra

$$\sum_{n=1}^{\infty} d(z_{n+1},z_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \left\| \sum_{k}^{n+1} y_k - \sum_{k}^{n} y_k \right\| = \sum_{n=1}^{\infty} \|y_{n+1}\|$$

che è finito per ipotesi.

ii) $\Rightarrow$ i). Utilizziamo l'enunciato ii) del Lemma 2: mostriamo ogni (y_n) che soddisfa la proprietà $\sum_n d(y_n,y_{n+1}) < +\infty$ converge. Definiamo la successione $z_n := y_{n+1} - y_n$. Per ipotesi, essendo che $\sum_n \|z_n\| < +\infty$, la serie $\sum_n z_n$ converge. Indicando con L il limite della serie, abbiamo che $\lim_n y_n = L + y_1$.

□

[1] Data una successione di Cauchy x_n, se una sottosuccessione x_{n_k} converge, allora converge anche la successione.

[2] Nel senso che esiste y tale che $\left\|y - \sum_{n=1}^{N} y_n\right\| \to 0$.

Lemma 3 (Minkowski per somme infinite). Date delle funzioni (g_n) funzioni positive su X allora

$$\left\| \sum_{n=1}^{\infty} g_n \right\|_p \leq \sum_{n=1}^{\infty} \|g_n\|_p$$

Dimostrazione. Per ogni N abbiamo che

$$\left\| \sum_{n=1}^{N} g_n \right\|_p^p \leq \left(\sum_{n=1}^{N} \|g_n\|_p \right)^p \leq \left(\sum_{n=1}^{\infty} \|g_n\|_p \right)^p$$

e per convergenza monotona possiamo passare il termine di sinistra al limite

$$\lim_N \left\| \sum_{n=1}^{N} g_n \right\|_p^p = \lim_N \int_X \left(\sum_{n=1}^{N} g_n \right)^p \mathrm{d}\mu = \int_X \left(\lim_N \sum_{n=1}^{N} g_n \right)^p \mathrm{d}\mu = \left\| \sum_{n=1}^{\infty} g_n \right\|_p^p$$

□

Dimostrazione (Completezza spazi L^p).

- Se $p = +\infty$: si tratta di vedere che data (f_n) di Cauchy in $L^\infty(X)$ esiste E con $\mu(E) = 0$ tale che (f_n) è di Cauchy rispetto allora norma del sup in $X \setminus E$. [TODO: Finire]
- Se $p < +\infty$: per il Lemma 2, basta far vedere che data $(f_n) \subset L^p(X)$ tale che $\sum_{n=1}^{\infty} \|f_n\|_p < +\infty$ allora $\sum_n f_n$ converge a qualche $f \in L^p(X)$.

  La dimostrazione è suddivisa in tre passi, prima costruiamo f, poi mostriamo che f_n converge a f ed infine mostriamo $f \in L^p(X)$.

  - *Passo 1:* Per ipotesi abbiamo

    $$\infty > \sum_{n=1}^{\infty} \|f_n\|_p = \sum_{n=1}^{\infty} \||f_n|\|_p \geq \left\| \sum_{n=1}^{\infty} |f_n| \right\|_p = \left(\int \left(\sum_{n=1}^{\infty} |f_n(x)| \right)^p \mathrm{d}\mu(x) \right)^{1/p}$$

    quindi $\sum_{n=1}^{\infty} |f_n(x)| < +\infty$ per ogni $x \in X \setminus E$ con $\mu(E) = 0$. Quindi $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ converge a qualche $f(x)$ per ogni $x \in X \setminus E$ ed a questo punto ci basta estendere f a zero in E [1].
  - *Passo 2:* Fissiamo N ed osserviamo che $\forall x \in X \setminus E$ abbiamo

    $$\left| f(x) - \sum_{n=1}^{N} f_n(x) \right| = \left| \sum_{n=N+1}^{\infty} f_n(x) \right| \leq \sum_{n=N+1}^{\infty} |f_n(x)|$$

    da cui otteniamo

    $$\left\| f - \sum_{n=1}^{N} f_n \right\|_p \leq \left\| \sum_{n=N+1}^{\infty} |f_n| \right\|_p \leq \sum_{n=N+1}^{\infty} \|f_n\|_p$$

    dove l'ultimo termine è la coda di una serie convergente.

[1] Una costruzione alternativa degli spazi L^p potrebbe anche partire da *funzioni definite quasi ovunque*, questo ovvierebbe al problema di estendere a 0 la funzione f appena costruita. Però diventa più complicato mostrare di essere in uno spazio vettoriale poiché per esempio serve ridefinire $+$ per funzioni definite quasi ovunque.

- *Passo 3:* In particolare rileggendo il passo precedente per $N = 0$ otteniamo

$$\|f\|_p \leq \sum_{n=1}^{\infty} \|f_n\|_p < +\infty \implies f \in L^p$$

□

Esercizio.[2] Sia $f\colon X \to [0, +\infty]$ allora $\displaystyle\int_X f \,\mathrm{d}\mu < +\infty \implies f(x) < +\infty$ per quasi ogni x.

Dimostrazione. Sia $E := \{x \mid f(x) = +\infty\}$, allora l'idea è che

$$\infty > \int_X f \,\mathrm{d}\mu \geq \int_E f \,\mathrm{d}\mu = +\infty \cdot \mu(E).$$

Oppure, osserviamo che $\forall m \in [0, +\infty)$ abbiamo $f \cdot \mathbb{1}_E \geq m \cdot \mathbb{1}_E$ per ogni $x \in E$ quindi integrando ricaviamo

$$\underbrace{\int_E f \,\mathrm{d}\mu}_{I} \geq m \cdot \mu(E) \implies \mu(E) \leq \frac{I}{m} \xrightarrow{m \to +\infty} 0$$

□

2.4 Nozioni di convergenza per successioni di funzioni

Fissiamo $X, \mathcal{A}, \mu$ e prendiamo $f, f_n\colon X \to \mathbb{R}$ (o $\mathbb{R}^k$) misurabili.

Definizione. Riportiamo le definizioni di alcune nozioni di convergenza.

- **Uniforme** : $\forall \varepsilon\ \exists n_\varepsilon$ tale che $\|f - f_n\| < \varepsilon\ \ \forall n > n_\varepsilon$.
- **Puntuale** : $f_n(x) \to f(x)\ \ \forall x \in X$.
- **Puntuale μ-quasi ovunque** : $f_n(x) \to f(x)$ per μ-q.o. $x \in X$.
- **In L^p** : $\|f_n - f\|_p \xrightarrow{n \to \infty} 0$.
- **In misura** : $\forall \varepsilon > 0 \quad \mu\left(\{x \mid |f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon\}\right) \xrightarrow{n \to +\infty} 0$.

Osservazione. Abbiamo le seguenti implicazioni ovvie delle diverse nozioni di convergenza:

$$\text{uniforme} \Rightarrow \text{puntuale} \Rightarrow \text{puntuale } \mu \text{ q.o.}$$

Proposizione. Valgono le seguenti.

i) Data $f_n \to f$ q.o. e $\mu(X) < +\infty$, allora $f_n \to f$ in misura.

ii) (*Severini-Egorov*): Data $f_n \to f$ q.o. e $\mu(X) < +\infty$, allora $\forall \delta > 0$ esiste $E \in \mathcal{A}$ tale che $\mu(E) < \delta$ e $f_n \to f$ uniformemente su $X \setminus E$.

iii) $f_n \to f$ in L^p, $p < +\infty$, allora $f_n \to f$ in misura.

[2] In questo corso non è strettamente necessario ricordarsi come si facciano tutti questi esercizietti di teoria della misura ma è bene saperli applicare in automatico quando serve.

iii') $f_n \to f \in L^\infty$, allora $\exists E$ tale che $\mu(E) = 0$ e $f_n \to f$ uniformemente su $X \setminus E$.

iv) $f_n \to f$ in misura, allora $\exists n_k$ tale che $f_{n_k} \to f$ μ-q.o.

v) $f_n \to f$ in L^p, allora $\exists n_k$ tale che $f_{n_k} \to f$ μ-q.o.

Osservazione. In i) e ii) l'ipotesi $\mu(X) < +\infty$ è necessaria. Infatti, preso $X = \mathbb{R}$ e $f_n = \mathbb{1}_{[n,+\infty)}$ si ha che $f_n \to 0$ ovunque ma f_n non converge a 0 in misura, e f_n non converge a 0 uniformemente in $\mathbb{R} \setminus E$ per ogni E di misura finita.

Lemma (disuguaglianza di Markov). Data $g\colon X \to [0, +\infty]$ misurabile e $m > 0$ si ha

$$\mu\left(\{x \in X \mid g(x) \geq m\}\right) \leq \frac{1}{m} \int_X g \, \mathrm{d}\mu$$

Dimostrazione. Poniamo $E := \{x \in X \mid g(x) \geq m\}$. Osserviamo che $g \geq m \cdot \mathbb{1}_E$. Dunque vale

$$\int_X g \, \mathrm{d}\mu \geq \int_X m \cdot \mathbb{1}_E \, \mathrm{d}\mu = m \cdot \mu\left(\{x \in X \mid g(x) \geq m\}\right).$$

□

Lemma (Borel-Cantelli). Dati $(E_n) \subset \mathcal{A}$ tali che $\sum \mu(E_n) \leq +\infty$, l'insieme

$$E := \{x \in X \mid x \in E_n \text{ frequentemente}\}$$

ha misura nulla. Cioè per μ-q.o. x, $x \notin E_n$ definitivamente (in n.)

Dimostrazione. Osserviamo che

$$E = \bigcap_{m=1}^{\infty} \underbrace{\left(\bigcup_{n=m}^{\infty} E_n\right)}_{F_m}.$$

Allora

$$\mu(E) \underbrace{=}_{F_m \downarrow E \ \& \ \mu(F_1) < +\infty} \lim_{m\to\infty} \mu(F_m) \leq \lim_{m\to\infty} \underbrace{\sum_{n=m}^{\infty} \mu(E_n)}_{\text{coda serie convergente}} = 0.$$

Osservazione. L'ipotesi $\sum \mu(E_n) < +\infty$ non può essere sostituita con $\mu(E_n) \to 0$.

Ora dimostriamo la proposizione.

Dimostrazione. Definiamo gli insiemi

$$A_n^\varepsilon := \{x \mid |f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon\},$$

$$B_m^\varepsilon := \{x \mid |f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon \text{ per qualche } n \geq m\} = \bigcup_{n=m}^{\infty} A_n^\varepsilon,$$

$$B^\varepsilon := \{x \mid |f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon \text{ frequentemente}\} = \{x \in A_n^\varepsilon \text{ frequentemente}\} = \bigcap_{m=1}^{\infty} B_m^\varepsilon.$$

i) Per ipotesi, $f_n \to f$ quasi ovunque, cioè $\mu(B^\varepsilon) = 0$ per ogni $\varepsilon > 0$, ma $B_m^\varepsilon \downarrow B^\varepsilon$ e $\mu(X) < +\infty$. Allora

$$\lim_{m\to+\infty} \mu(B_m^\varepsilon) = \mu(B^\varepsilon) = 0 \Longrightarrow \lim_{m\to\infty} \mu(A_m^\varepsilon) = 0.$$

ii) Dalla dimostrazione precedente, abbiamo $\lim_{m\to\infty} \mu(B_m^\varepsilon) = 0$. Allora per ogni k esiste un m_k tale che $\mu\left(B_{m_k}^{1/k}\right) \le \delta/2^k$. Poniamo $E \coloneqq \bigcup_k B_{m_k}^{1/k}$ per ogni k; allora $\mu(E) \le \delta$. Inoltre,

$$
\begin{aligned}
x \in X \setminus E \implies x \notin B_{m_k}^{1/k}\ \forall k \iff & \ x \notin A_n^{1/k} \quad \forall k, n \ge m_k \\
&\implies |f(x) - f_n(x)| < \frac{1}{k} \quad \forall k, n \ge m_k \\
&\implies \sup_{x\in X\setminus E} |f(x) - f_n(x)| \le \frac{1}{k} \quad \forall k, n \ge m_k \\
&\implies f - f_m \text{ uniformemente su } X \setminus E.
\end{aligned}
$$

iii) Dobbiamo mostrare che per ogni $\varepsilon > 0$ $\mu(A_n^\varepsilon) \xrightarrow{n} 0$. Usando la disuguaglianza di Markov ottengo

$$
\mu\Bigg(A_n^\varepsilon = \left\{x \,\middle|\, \overbrace{|f_n(x) - f(x)|^p}^{g} \ge \varepsilon^p\right\}\Bigg) \le \frac{1}{m}\int_X g \,\mathrm{d}\mu = \frac{1}{\varepsilon^p}\|f_n - f\|_p^p \xrightarrow{n\to+\infty} 0.
$$

iii') Definiamo $E_n \coloneqq \{x \mid |f_n(x) - f(x)| > \|f_n - f\|_\infty\}$ per ogni n, allora $\mu(E_n) = 0$. Poniamo $E = \bigcup_n E_n$ e $\mu(E) = 0$, dunque

$$
\sup_{x\in X\setminus E} |f_n(x) - f(x)| \le \|f_n - f\|_\infty \xrightarrow{n\to\infty} 0.
$$

iv) Per ipotesi, $f_n \to f$ in misura, cioè

$$
\begin{aligned}
&\forall \varepsilon > 0 \quad \mu\left(A_n^\varepsilon\right) \xrightarrow{n\to+\infty} 0 \\
&\implies \forall k\ \exists n_k \colon \mu\left(A_{n_k}^{1/k}\right) \le \frac{1}{2^k} \\
&\implies \sum_k \mu\left(A_{n_k}^{1/k}\right) < +\infty.
\end{aligned}
$$

Allora per Borel-Cantelli, si ha per μ-quasi ogni x, $x \notin A_{n_k}^{1/k}$ definitivamente in k, cioè $\|f_{n_k}(x) - f(x)\| < 1/k$ definitivamente in k, cioè $f_{n_k}(x) \xrightarrow{k} f(x)$.

v) Vogliamo mostrare che $f_n \to f$ in $L^p \implies \exists n_k$ tale che $f_{n_k} \to f$ quasi ovunque. Consideriamo due casi

- se $p < +\infty$, allora $f_n \to f$ in $L^p \implies f_n \to f$ in misura, da cui $\exists n_k$ tale che $f_{n_k} \to f$ quasi ovunque
- se $p = +\infty$, allora $f_n \to f$ uniformemente su $X \setminus E$ con $\mu(E) = 0 \implies f_n \to f$ puntualmente su $X \setminus E \implies f_n \to f$ quasi ovunque.

$\square$

2.5 Controesempi sulle convergenze

Vediamo un controesempio che mostra che tutte le implicazioni sui vari tipi di convergenza sono ottimali ovvero

i) $f_n \to f$ in misura $\not\Longrightarrow$ $f_n \to f$ q.o.

ii) $f_n \to f$ in L^p con $p < +\infty$ $\not\Longrightarrow$ $f_n \to f$ q.o.

iii) $\mu(E_n) \to 0$ $\not\Longrightarrow$ per q.o x si ha $x \notin E_n$ definitivamente.

Dimostrazione. Consideriamo gli insiemi $I_1 = \left[1, 1 + \frac{1}{2}\right], I_2 = \left[1 + \frac{1}{2}, 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right], \dots$

$$I_n \coloneqq \left[\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}, \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k}\right]$$

e consideriamo la loro proiezione "modulo" $[0,1]$ usando la funzione $p\colon \mathbb{R} \to [0,1)$ *parte frazionaria* data da

$$p(x) \coloneqq x - \lfloor x \rfloor$$

e chiamiamo $E_n \coloneqq p(I_n)$. Per ogni n abbiamo che $|I_n| = |E_n| = 1/n$ e $\bigcup_n I_n = [1, +\infty)$ (in quanto $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = +\infty$) e quindi ogni $x \in [0,1)$ appartiene ad E_n per infiniti n ed in particolare questo mostra la **??**.

Per la **??** basta notare che $\mathbb{1}_{E_n} \to 0$ in misura (in quanto $|E_n| \to 0$) ma $\mathbb{1}_{E_n} \not\to 0$ q.o., anzi $\forall x \in [0,1)$ $\mathbb{1}_{E_n}(x) \not\to 0$ e la **??** segue analogamente. □

2.6 Approssimazioni di funzioni in L^p

Vediamo ora alcune classi di funzioni dense in L^p che risulteranno essere un utile strumento da usare nelle dimostrazioni.

Nota. Ricordiamo la nozione di insieme denso in uno spazio metrico. Sia (X, d) uno spazio metrico e $Y \subset X$. Allora Y è denso in X se solo se per ogni $x \in X$, esiste una successione $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in Y che tale che $x = \lim_n y_n$.

Per ora sia $(X, \mathcal{A}, \mu)$ in generale.

Proposizione 1. Le funzioni limitate in L^p sono dense in L^p.

Dimostrazione. Data $f \in L^p(X)$ cerchiamo una successione di funzioni $f_n \in L^p(X)$ limitate tali che $f_n \to f$ in L^p, consideriamo

$$f(x) \coloneqq (f(x) \wedge n) \vee (-n)$$

vorremmo mostrare che $f_n \to f$ in L^p ovvero

$$\|f_n - f\|_p^p = \int_X |f_n - f|^p \, \mathrm{d}\mu \to 0$$

intanto osserviamo che, per la *convergenza puntuale*, basta osservare che se $n \geq |f(x)|$ abbiamo che $\forall x$ $f_n(x) = f(x) \implies f_n(x) \xrightarrow{n} f(x) \implies |f_n(x) - f(x)|^p \to 0$.

Per concludere basta applicare *convergenza dominata* usando come dominazione direttamente $|f(x) - f_n(x)| \leq |f(x)| \implies |f(x) - f_n(x)|^p \leq |f(x)|^p$ e notiamo che $|f|^p \in L^1(X)$. □

Proposizione 2. Sia[1] $\widetilde{\mathscr{S}} \coloneqq \operatorname{Span}(\{\mathbb{1}_E \mid E \in \mathcal{A}, \mu(E) < +\infty\})$, allora $\widetilde{\mathscr{S}}$ è denso in $L^p(X)$.

Dimostrazione. Data $f \in L^p(X)$ cerchiamo una successione che approssima f in $\widetilde{\mathscr{S}}$.

[1] Lo span è inteso come combinazioni lineari

- *Caso 1*: Se $f \geq 0$ allora fissiamo $\varepsilon > 0$ e per ogni $k = 1, 2, \ldots$ e poniamo

$$A_\varepsilon^k := \{x \mid k\varepsilon \leq f(x) \leq (k+1)\varepsilon\}$$

risulta che A_k^ε è misurabile ed ha misura finita[1]. Ora consideriamo la successione di funzioni parametrizzata da ε data da

$$f_\varepsilon(x) := \sum_{1 \leq k \leq 1/\varepsilon^2} k\varepsilon \cdot \mathbb{1}_{A_\varepsilon^k}(x) \in \widetilde{\mathscr{S}}$$

Osserviamo che vale anche $\max f_\varepsilon(x) = \max\{k\varepsilon \mid k\varepsilon \leq f(x) \text{ e } k \leq 1/\varepsilon^2\}$ e mostriamo la seguente[2]

$$\int_X |f(x) - f_\varepsilon(x)|^p \, \mathrm{d}\mu(x) \xrightarrow{\varepsilon \to 0} 0$$

  - *Convergenza puntuale*: Per l'identità precedente abbiamo che $0 \leq f(x) - f_\varepsilon(x) \leq \varepsilon$ se $f(x) \leq 1/\varepsilon$.
  - *Dominazione*: Possiamo usare nuovamente $|f(x) - f_\varepsilon(x)|^p \leq |f(x)|^p < +\infty$ in quanto $f \in L^p(X)$.

- *Caso 2*: Sia $f\colon X \to \mathbb{R}$ allora si può rifare la dimostrazione precedente oppure si può semplicemente considerare $f_\varepsilon := (f^+)_\varepsilon - (f^-)_\varepsilon$.

- *Caso 3*: Generalizziamo la proposizione al caso di $f\colon X \to \mathbb{R}^d$ come segue

  Proposizione 2bis (Generalizzata). Sia $\widetilde{\mathscr{S}} := \left\{\sum_i \alpha_i \mathbb{1}_{E_i} \mid \alpha_i \in \mathbb{R}^d, E_i \in \mathcal{A}, \mu(E_i) < +\infty\right\}$. Allora $\widetilde{\mathscr{S}}$ è denso in $L^p(X; \mathbb{R}^d)$.

  Dimostrazione. (Idea) Basta approssimare componente per componente.

  □

Sia ora X uno *spazio metrico* e $\{\text{aperti}\} \subset \mathcal{A}$.

Proposizione 3. Sia $\widetilde{\mathscr{S}_\ell} := \{\sum_i \alpha_i \mathbb{1}_{E_i} \mid \alpha_i \in \mathbb{R}^d, E_i \in \mathcal{A}, \mu(E_i) < +\infty, E_i \text{ limitati}\}$ allora $\widetilde{\mathscr{S}_\ell}$ è denso in $L^p(X; \mathbb{R}^d)$ per $p < +\infty$.

Osservazione. In generale l'enunciato non vale per $p = +\infty$. Ad esempio preso $L^\infty(\mathbb{R})$ e $f = 1$ non si può approssimare con funzioni a supporto limitato (come quelle in $\widetilde{\mathscr{S}_\ell}$. In particolare data g con supporto A limitato $|f - g| = 1$ su $\mathbb{R} \setminus A$ e siccome $|\mathbb{R} \setminus A| > 0$ abbiamo $\|f - g\|_\infty \geq 1$).

Dimostrazione. ($\widetilde{\mathscr{S}_\ell}$ è denso in L^p) Per prima cosa vediamo un lemma che useremo assieme alla proposizione precedente.

Lemma 1. Dato $E \in \mathcal{A}, \mu(E) < +\infty$ esiste $E_n \in \mathcal{A}$ con E_n limitati tali che $E_n \subset E$ e $\mu(E \setminus E_n) \to 0$ e quindi $\|\mathbb{1}_E - \mathbb{1}_{E_n}\|_p = \mu(E \setminus E_n)^{1/p} \xrightarrow{n} 0$ (e $\mathbb{1}_{E_n} \in \widetilde{\mathscr{S}_\ell}$).

Dimostrazione. Dato E con $\mu(E) < +\infty$ prendiamo $x_0 \in X$ e poniamo $E_n := E \cap \mathcal{B}(x_0, n)$; $E_n \subset E$ e $E \setminus E_n \downarrow \varnothing \implies \mu(E \setminus E_n) \xrightarrow{n} 0$.

Intuitivamente $\widetilde{\mathscr{S}_\ell}$ è denso in $\widetilde{\mathscr{S}}$ che a sua volta è denso in L^p (usando la definizione di densità topologica la tesi è quasi ovvia mentre usando la definizione per successioni bisogna passare per un procedimento diagonale). □

[1] È misurabile in quanto preimmagine di un misurabile, ed ha misura finita in quanto $f \in L^p(X)$.

[2] Notiamo che qui stiamo applicando il teorema di *convergenza dominata* su una famiglia parametrizzata da ε e non su una successione ma si può verificare facilmente che il teorema (ed anche gli altri risultati di convergenza di successioni di funzioni) si può estendere semplicemente prendendo $\varepsilon = 1/n$ per $n \to \infty$.

Ora siano $X \subset \mathbb{R}^n, \mu = \mathscr{L}^n$ e $C_C(\mathbb{R}^n) := \{\text{funzioni a supporto compatto}\}$, dove il **supporto** è definito come la chiusura dell'insieme dei punti in cui la funzione è non zero $\operatorname{supp}(f) := \overline{\{x \mid f(x) \neq 0\}}$, in quanto per le funzioni continue l'insieme $\{x \mid f(x) \neq 0\}$ è sempre aperto e dunque mai veramente compatto, a parte quando è vuoto.

Proposizione 4. Le funzioni in $C_C(\mathbb{R}^n)$ *ristrette a* X sono dense[1] in $L^p(X)$ per $p < +\infty$.

Vediamo prima alcuni lemmi.

Lemma 2. (di Urysohn) Dati C_0, C_1 chiusi disgiunti in X spazio metrico esiste una funzione $f\colon X \to [0,1]$ continua tale che $f = 0$ su C_0 e $f = 1$ su C_1.

Dimostrazione. Posta $d(x, C) = \inf\{d(x,y) \mid y \in C\}$ basta considerare

$$f(x) = \frac{d(x, C_0)}{d(x, C_0) + d(x, C_1)}.$$

Lemma 3. Dato $E \subset \mathbb{R}^n$ limitato (e quindi di misura finita) esiste $f_\varepsilon \in C_C(\mathbb{R}^n)$ tale che $f_\varepsilon \xrightarrow{\varepsilon \to 0} \mathbb{1}_E$ in $L^p(\mathbb{R}^n)$ e quindi in $L^p(X)$.

Dimostrazione. Per regolarità della misura di Lebesgue abbiamo che per ogni ε esistono $C_\varepsilon \subset E \subset A_\varepsilon$ tali che $|A_\varepsilon \setminus C_\varepsilon| \leq \varepsilon$. Per il Lemma 2 possiamo definire la classe di funzioni $f_\varepsilon \colon \mathbb{R}^n \to [0,1]$ continue tali che

$$f_\varepsilon = 1 \text{ su } C_\varepsilon \qquad f_\varepsilon = 0 \text{ su } \mathbb{R}^n \setminus A_\varepsilon.$$

In particolare, sappiamo che su $A_\varepsilon \setminus C_\varepsilon$ vale $|f_\varepsilon - \mathbb{1}_E| \leq 1$. Allora,

$$\begin{aligned} \|f_\varepsilon - \mathbb{1}_E\|_p^p = \int_{A_\varepsilon \setminus C_\varepsilon} |f_\varepsilon - \mathbb{1}_E|^p \,\mathrm{d}x \leq \int_{A_\varepsilon \setminus C_\varepsilon} \mathbb{1}_{A_\varepsilon \setminus C_\varepsilon} \,\mathrm{d}x = |A_\varepsilon \setminus C_\varepsilon|^{1/p} \leq \varepsilon^{1/p} \\ \implies \|f_\varepsilon - \mathbb{1}_E\|_p^p \xrightarrow{\varepsilon \to 0} 0. \end{aligned}$$

□

Dimostrazione Proposizione 4. Per la Proposizione 3 basta approssimare la classe delle funzioni a supporto limitato (e finito). Dunque, per il Lemma 3 si ha la tesi.

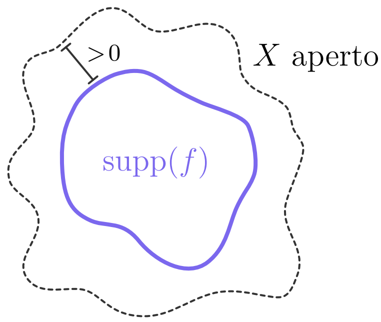
2.7 Complementi su approssimazioni di funzioni in L^p

Sia X misurabile in $\mathbb{R}^n$ con $\mu = \mathscr{L}^n$ su X. In precedenza abbiamo visto che

Proposizione 3. Le funzioni in $C_C(\mathbb{R}^n)$ *ristrette a* X sono dense in L^p se $p < +\infty$.

Osservazione. Si vede facilmente che $C_C(\mathbb{R}^n) \subset L^p(\mathbb{R}^n)$.

Domanda. Vale un risultato analogo per le funzioni $C_C(X)$?



Notiamo che dato $X \subset \mathbb{R}^n$ le funzioni continue su X hanno supporto compatto solo se X è aperto in quanto il supporto ha veramente distanza non nulla dal bordo e possiamo estendere la funzione a 0 fuori da X. [TODO: Esempio con un chiuso in cui le cose non fungono?]

Proposizione 4. Sia X aperto di $\mathbb{R}^n, \mu = \mathscr{L}^n$ allora $C_C(X)$ è denso in L^p per ogni $p < +\infty$

Dimostrazione.

[1] È denso anche l'insieme delle funzioni continue a supporto compatto ristretto a X e si indica con $\mathcal{C}^0_C(\mathbb{R}^n)$.

- $\mathscr{S}_C := \{$funzioni semplici con supporto compatto in $X\}$ è denso in $L^p(X)$ per ogni $p < +\infty$.

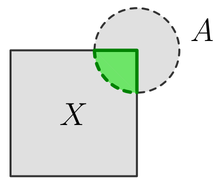
- Dato E relativamente compatto[1] in X esiste $f_n \in C_C(X)$ tale che $f_n \to \mathbb{1}_E$ in L^p per ogni $p < +\infty$.

La Proposizione 3 non vale per $p = +\infty$, intuitivamente in quanto data $f \in L^\infty(X)$ discontinua, se trovassimo $f_n \to f$ in $L^\infty(X)$ con f_n continue avremmo $f_n \to f$ *uniformemente* e dunque f continua.

Fatto. In generale vale che data $f\colon X \to \mathbb{R}$ misurabile, $\|f\|_\infty \leq \sup_{x\in X} |f(x)|$ (detta anche *norma del sup*)

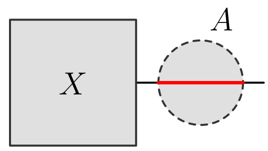
Esercizio. Se X è aperto in $\mathbb{R}^n$ e $\mu = \mathscr{L}^n$ e $f\colon X \to \mathbb{R}$ continua, allora $\|f\|_\infty = \sup_{x\in X} |f(x)|$.

Soluzione. Se per assurdo $\exists x \in X$ tale che $\|f\|_\infty < |f(x)|$ allora la continuità di f implica che esiste un intorno di x in cui $\|f\|_\infty < |f(x)|$; ma un intorno contiene una palla aperta di misura positiva. $\lightning$



In particolare possiamo anche estenderci a $X \subseteq \mathbb{R}^n$ tali che ogni A aperto relativamente a X abbia misura positiva.

Per spiegare meglio il perché la Proposizione 3 non si estende al caso $p = +\infty$ consideriamo



$$f(x) = \begin{cases} 1 & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$

e vediamo che $\nexists f_n\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tale che $f_n \to f$ in L^∞.

Se esistesse $(f_n)_n$, allora sarebbe di Cauchy rispetto alla norma $\|\cdot\|_\infty$ allora per continuità $(f_n)_n$ è di Cauchy anche rispetto alla norma del sup $\implies f_n \to \widetilde{f}$ uniformemente con $\widetilde{f}$ continua, quindi $\widetilde{f} = f$ quasi ovunque ma questo non è possibile per la f definita sopra.

(In particolare dato $E = \{x \mid f(x) = \widetilde{f}(x)\}$, prendiamo $x_n, y_n \in E$ tali che $x_n \uparrow 0$ e $y_n \downarrow 0$ ma i limiti di f sono 0 e 1 $\lightning$)

Teorema (di Lusin). Dato $X \subset \mathbb{R}^d, \mu = \mathscr{L}^d$ e data $f\colon X \to \mathbb{R}$ o $\mathbb{R}^m$ misurabile e $\varepsilon > 0$, esiste E aperto in X con $|E| \leq \varepsilon$ tale che f è continua su $X \setminus E$ (la restrizione di f a $X \setminus E$ è continua)

Osservazione. In generale f può essere non continua in tutti i punti di X, infatti E può essere denso e $X \setminus E$ avere parte interna vuota.

Lemma (di estensione di Tietze). Dato X spazio metrico e $C \subset X$ chiuso, $f\colon C \to \mathbb{R}$ continua allora f si estende a una funzione continua su X.

Usando questo lemma possiamo enunciare nuovamente il teorema precedente come segue

Teorema (di Lusin$'$). Data $f\colon X \to \mathbb{R}$ misurabile e $\varepsilon > 0$, $\exists E$ aperto con $|E| \leq \varepsilon$ e $g\colon X \to \mathbb{R}$ continua tale che $f = g$ su $X \setminus E$, inoltre se $f \in L^p(X)$ e $p < +\infty$ si può anche chiedere che $\|f - g\|_p \leq \varepsilon$.

Dimostrazione. Basta trovare E misurabile (per ottenere E aperto si usa la regolarità della misura)

- *Caso 1:* $f \in L^1(X)$ e $|X| < +\infty$

[1] Un sottospazio relativamente compatto di uno spazio topologico è un sottoinsieme dello spazio topologico la cui chiusura è compatta.

Abbiamo che $f \in L^1 \implies \exists f_n$ continue tali che $f_n \to f$ in $L^1 \implies f_n \to f$ in misura e per Severini-Egorov esiste E tale che $|E| \leq \varepsilon$ e $f_n \to f$ uniformemente su $X \setminus E \implies f$ è continua su $X \setminus E$.

- *Caso 2*: f qualunque misurabile e $|X| < +\infty$

  Lemma. Dati $X, \mathcal{A}, \mu$ con $\mu(X) < +\infty$ e data $f\colon X \to \mathbb{R}$ misurabile e $\varepsilon > 0$ esiste F misurabile con $\mu(F) \leq \varepsilon$ tale che f è limitata su $X \setminus F$.

  Dimostrazione. $\forall m > 0$ sia $F_m := \{x \mid |f(x)| > m\}$ allora $F_m \downarrow \varnothing \implies \mu(F_m) \downarrow 0$ e quindi esiste m tale che $\mu(F_m) \leq \varepsilon$.

  Quindi data f qualunque misurabile e $|X| < +\infty$ esiste F misurabile tale che $|F| \leq \varepsilon/2$ e con f limitata su $X \setminus F \implies f \in L^\infty(X \setminus F) \subset L^1(X \setminus F)$, dunque per il *Caso 1* esiste E misurabile tale che $|E| \leq \varepsilon/2$ e f è continua su $X \setminus (E \cup F)$ e $\mu(E \cup F) \leq \varepsilon$

- *Caso 3*: f qualunque misurabile

  Per ogni n poniamo $X_n := X \cap B(0, n)$ per il *Caso 2* esistono E_n misurabili con $|E_n| \leq \varepsilon/2^n$ tali che f è continua su $X_n \setminus E_n$, infine prendo $E := \bigcup_{n=1}^\infty E_n$ con $\mu(E) \leq \varepsilon \implies f$ è continua su $X_n \setminus E$ per ogni $n \implies f$ è continua su $X \setminus E$.

□

2.8 Appendice

Proposizione. Siano V, W spazi normati, $T\colon V \to W$ lineare. Sono fatti equivalenti

i) T è continua in 0.

ii) T è continua.

iii) T è lipschitziana, cioè esiste una costante $c < +\infty$ tale che $\|Tv - Tv'\|_W \leq c\,\|v - v'\|_V$.

iv) Esiste una costante c tale che $\|Tv\|_W \leq c\,\|v\|_V$ per ogni $v \in V$.

v) Esiste una costante c tale che $\|Tv\|_W \leq c$ per ogni $v \in V$, $\|v\|_V = 1$.

Dimostrazione. v) $\Rightarrow$ iv). Vale la seguente

$$\|Tv\|_W \underbrace{=}_{v=\lambda\widetilde{v}, \|\widetilde{v}\|_V=1} |\lambda|\,\|T\widetilde{v}\|_W \leq c\lambda = c\,\|v\|_V \leq 1.$$

iv) $\Rightarrow$ iii). Vale la seguente

$$\|Tv - Tv'\|_W = \|T(v - v')\|_W \leq c\,\|v - v'\|_W .$$

iii) $\Rightarrow$ ii) e ii) $\Rightarrow$ i) sono ovvie.
i) $\Rightarrow$ v). T continua in 0, dunque esiste $\delta > 0$ tale che

$$\|Tv - T0\|_W \leq 1 \quad \text{se} \quad \|v - 0\|_V \leq \delta,$$

cioè

$$\|Tv\| \leq 1 \quad \text{se} \quad \|v\| \leq \delta,$$

da cui segue che $\|Tv\| \leq 1/\delta$ se $\|v\| \leq 1$. $\square$

Osservazione. Le costanti ottimali iii), iv), v) sono uguali e valgono

$$c = \sup_{\|v\|_V \leq 1} \|Tv\|_W .$$

Esempi.

i) Sia $X, \mathcal{A}, \mu$ coma al solito, con $\mu(X) < +\infty$. Allora, dati $1 \leq p_1 < p_2 \leq +\infty$, vale

$$L^{p_2}(X) \subset L^{p_1}(X). \tag{$\star$}$$

Inoltre, l'inclusione $i \colon L^{p_2}(X) \to L^{p_1}(X)$ è continua.

Dimostrazione. La dimostrazione di (**??**) segue dalla stima

$$\|u\|_{p_1} \underbrace{\leq}_{\text{Hölder generalizzato}} \|\mathbb{1}_X\|_q \|u\|_{p_2} \quad \text{dove} \quad q = \frac{p_1 p_2}{p_2 - p_1}.$$

Dove

$$\|\mathbb{1}_X\|_{\frac{p_1 p_2}{p_2 - p_1}} \|u\|_{p_2} = (\mu(X))^{\frac{1}{p_1} - \frac{1}{p_2}} \|u\|_{p_2} .$$

Quanto sopra soddisfa la condizione al punto iv). $\square$

ii) L'applicazione $L^1(X) \ni u \mapsto \displaystyle\int u \,\mathrm{d}\mu \in \mathbb{R}$ è continua.

Dimostrazione. Infatti, vale

$$\left| \int_X u \,\mathrm{d}\mu \right| \leq \int_X |u| \,\mathrm{d}\mu = \|u\|_1 .$$

Quanto sopra soddisfa la condizione al punto iv). $\square$

iii) Cosa possiamo dire invece dell'applicazione $L^p(X) \ni u \mapsto \displaystyle\int u \,\mathrm{d}\mu \in \mathbb{R}$? Se $\mu(X) < +\infty$ la continuità segue dagli esempi i) e ii) sopra. Se invece $\mu(X) = +\infty$? Per esempio $L^2(\mathbb{R})$? [TO DO].

2.9 Convoluzione

Definizione. Date $f_1, f_2 \colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ misurabili, il **prodotto di convoluzione** $f_1 * f_2$ è la funzione (da $\mathbb{R}^d$ a $\mathbb{R}$) data da

$$f_1 * f_2(x) = \int_{\mathbb{R}^d} f_1(x - y) f_2(y) \,\mathrm{d}y$$

Osservazioni.

i) La definizione sopra è ben posta se $f_1, f_2 \geq 0$ ($f_1 * f_2(x)$ può essere anche $+\infty$). In generale non è ben posta per funzioni a valori reali (non è detto che l'integrale esista).

Ad esempio, se prendiamo $f_1 = 1$ e $f_2 = \sin x$ con $d = 1$, allora $f_1 * f_2(x)$ non è definito per alcun x.

ii) Se $f_1 * f_2(x)$ esiste, allora $f_1 * f_2(x) = f_2 * f_1(x)$, infatti

$$f_1 * f_2(x) = \int_{\mathbb{R}^d} f_1(x-y) f_2(y)\,\mathrm{d}y = \begin{pmatrix} t := x-y \\ \mathrm{d}t = \mathrm{d}y \end{pmatrix} = \int_{\mathbb{R}^d} f_1(t) f_2(x-t)\,\mathrm{d}t = f_2 * f_1(x).$$

iii) È importante che f_1, f_2 siano definite su $\mathbb{R}^d$ e che la misura sia quella di Lebesgue.

In realtà, si può generalizzare quanto sopra rimpiazzando $(\mathbb{R}^d, \mathscr{L}^d)$ con (G, μ), dove G è un gruppo commutativo e μ una misura su G invariante per traslazione. Per esempio, $\mathbb{Z}$ con la misura che conta i punti. Cioè $f_1, f_2 \colon \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$, vale

$$f_1 * f_2(n) \coloneqq \sum_{n \in \mathbb{Z}} f_1(n-m) f_2(m).$$

iv) Data f distribuzione di massa (continua) su $\mathbb{R}^3$, il potenziale gravitazionale generato è

$$v(x) = \int_{y \in \mathbb{R}^d} \frac{1}{|x-y|} \rho(y)\,\mathrm{d}y$$

cioè $v = g * \rho$, dove $g(x) = 1/|x|$ è il potenziale di una massa puntuale in 0.

v) Se X_1, X_2 sono variabili aleatorie (reali) con distribuzione di probabilità continua p_1, p_2 e X_1, X_2 sono indipendenti, allora $X_1 + X_2$ ha distribuzione di probabilità $p_1 * p_2$. (Facile per X_1, X_2 in $\mathbb{Z}$).

Proposizione 1. Se $|f_1| * |f_2|(x) < +\infty$ allora $f_1 * f_2(x)$ è ben definito, in quanto $|f_1 * f_2(x)| \leq |f_1| * |f_2|(x)$.

Dimostrazione. Basta osservare che,

$$\begin{aligned} f_1 * f_2(x) = \int_{\mathbb{R}^d} f_1(x-y) \cdot f_2(y)\,\mathrm{d}y &\leq \left| \int_{\mathbb{R}^d} f_1(x-y) \cdot f_2(y)\,\mathrm{d}y \right| \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^d} |f_1(x-y) \cdot f_2(y)|\,\mathrm{d}y = |f_1| * |f_2|(x) < +\infty. \end{aligned}$$

□

Corollario 2. Se $|f_1| * |f_2| \in L^p(\mathbb{R}^d)$ con $1 \leq p \leq +\infty$ allora $f_1 * f_2(x)$ è ben definito per quasi ogni $x \in \mathbb{R}^d$ e $\|f_1 * f_2\|_p \leq \||f_1| * |f_2|\|_p$.

Dimostrazione. Segue subito dalla proposizione precedente. □

Teorema 3 (disuguaglianza di Young per convoluzione.) Se $f_1 \in L^{p_1}(\mathbb{R}^d)$ e $f_2 \in L^{p_2}(\mathbb{R}^d)$ e preso $r \geq 1$ tale che

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} - 1, \tag{$\star$}$$

allora $f_1 * f_2$ è ben definito quasi ovunque e

$$\|f_1 * f_2\|_r \leq \|f_1\|_{p_1} \cdot \|f_2\|_{p_2} \tag{$\star\star$}$$

Osservazioni.

- Nel caso di prima 1 e $\sin x$ sono solo in L^∞ infatti viene $r = -1$ e la disuguaglianza non ha senso.

- Supponiamo di avere $\|f_1 * f_2\| \leq C \cdot \|f_1\|_{p_1}^{\alpha_1} \cdot \|f_2\|_{p_2}^{\alpha_2}$ allora vediamo che per ogni f_1, f_2 positiva deve valere necessariamente $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$ e la condizione (??).

  Dimostrazione. Per ogni $\lambda > 0$ consideriamo λf_1 e f_2, allora

  $$\|(\lambda f_1) * f_2\|_r = \|\lambda(f_1 * f_2)\|_r = \lambda \|f_1 * f_2\|_r$$

  ma abbiamo anche

  $$\|(\lambda f_1) * f_2\|_r \leq C \cdot \|\lambda f_1\|_{p_1}^{\alpha_1} \cdot \|f_2\|_{p_2}^{\alpha_2} = C \cdot \lambda^{\alpha_1} \|f_1\|_{p_1}^{\alpha_1} \cdot \|f_2\|_{p_2}^{\alpha_2},$$

  da cui necessariamente $\alpha_1 = 1$ e di conseguenza $\alpha_2 = 1$.

  A questo punto richiediamo anche che f_1 e f_2 siano tali che $\|f_1\|_{p_1}, \|f_2\|_{p_2} < +\infty$ e $\|f_1 * f_2\| > 0$ (questo possiamo farlo in quanto basta prendere $f_1 = f_2 = \mathbb{1}_B$ con B una palla, nel caso segue proprio che $f_1 * f_2(x) > 0$ se $|x| < 1$).

  Data $f \colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ e $\lambda > 0$ poniamo $R_\lambda f(x) \coloneqq f(x/\lambda)$ allora abbiamo

  $$\begin{aligned} \|(R_\lambda f_1) * (R_\lambda f_2)\|_r &= \left\| \int_{\mathbb{R}^d} f_1\left(\frac{x-y}{\lambda}\right) \cdot f_2\left(\frac{y}{\lambda}\right) \mathrm{d}y \right\| = \begin{pmatrix} t = \frac{y}{\lambda} \\ \lambda \, \mathrm{d}t = \mathrm{d}y \end{pmatrix} \\ &= \lambda^d \cdot \left\| \int_{\mathbb{R}^d} f_1\left(\frac{x}{\lambda} - t\right) \cdot f_2(t) \, \mathrm{d}t \right\| \\ &= \lambda^d \cdot \|R_\lambda(f_1 * f_2)\|_r . \end{aligned}$$

  Per il punto successivo abbiamo $\|R_\lambda(g)\|_r = \lambda^{d/r} \|g\|_r$, da cui otteniamo

  $$\|(R_\lambda f_1) * (R_\lambda f_2)\|_r = \lambda^{d\left(1+\frac{1}{r}\right)} \|f_1 * f_2\|_r .$$

  Ma anche

  $$\|(R_\lambda f_1) * (R_\lambda f_2)\|_r \leq C \cdot \|R_\lambda f_1\|_{p_1} \cdot \|R_\lambda f_2\|_{p_2} = \lambda^{d\left(\frac{1}{p_1}+\frac{1}{p_2}\right)} \cdot \|f_1\|_{p_1} \cdot \|f_2\|_{p_2} .$$

  Dunque sicuramente abbiamo $\lambda^{d(1+1/r)} \leq C \cdot \lambda^{d(1/p_1 + 1/p_2)}$ per ogni $\lambda > 0$ e quindi $1 + 1/r = 1/p_1 + 1/p_2$. □

- $\|R_\lambda f\|_p = \lambda^{d/p} \|f\|_p$ ed in realtà possiamo ricavare l'esponente d/p per *analisi dimensionale*[1]. Consideriamo l'espressione

  $$\|f\|_p^p = \int_{\mathbb{R}^d} f(x) \, \mathrm{d}x.$$

  Se $f(x)$ è una *quantità adimensionale* allora $\int_{\mathbb{R}^d} f \, \mathrm{d}x$ ha dimensione di un *volume* L^d, da cui $\|f\|_p$ ha dimensione di $\mathsf{L}^{d/p}$.

  Similmente, per ottenere $\|R_\lambda(f_1 * f_2)\|_r = \lambda^{d(1+1/r)} \|f_1 * f_2\|_r$, basta osservare che

  $$f_1 * f_2(x) = \int_{\mathbb{R}^d} f_1(x-y) f_2(y) \, \mathrm{d}y$$

  ha dimensione L^d, da cui

  $$\|f_1 * f_2\|_r = \left(\int_{\mathbb{R}^d} \underbrace{|f_1 * f_2|^r}_{\mathsf{L}^{dr}} \underbrace{\mathrm{d}x}_{\mathsf{L}^d} \right)^{1/r}$$

  ha dimensione di $\mathsf{L}^{d(1+1/r)}$.

[1] Ovvero studiando le potenze delle unità di misura delle varie quantità.

Dimostrazione Teorema 3. Per via del Corollario 2. ci basta dimostrare (**??**) se $f_1, f_2 \geq 0$.

- *Caso facile.* Se $p_1 = p_2 = 1$ e $r = 1$

$$\begin{aligned}\|f_1 * f_2\|_1 &= \int f_1 * f_2(x)\,\mathrm{d}x = \iint f_1(x-y) f_2(y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \int f_2(y) \int f_1(x-y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \\ &= \int \|f_1\|_1 \cdot f_2(y)\,\mathrm{d}y = \|f_1\|_1 \cdot \|f_2\|_1\end{aligned}$$

- *Caso leggermente meno facile.* Se $p_1 = p, p_2 = 1$ e $r = p$. Vogliamo vedere che

$$\|f_1 * f_2\|_p \leq \|f_1\|_p \cdot \|f_2\|_1$$

allora

$$\begin{aligned}\|f_1 * f_2\|_p &= \int_{\mathbb{R}^d} (\underbrace{f_1 * f_2}_{h})^p\,\mathrm{d}x = \int h \cdot h^{p-1}\,\mathrm{d}x = \iint f_1(x-y) f_2(y) h^{p-1}(x)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \\ &= \iint f_1(y-x) h^{p-1}(x)\,\mathrm{d}x f_2(y)\,\mathrm{d}y \overset{\text{Hölder}}{\leq} \int \|f_1(y - \,\cdot\,)\|_p \|h^{p-1}\|_{p'} f_2(y)\,\mathrm{d}y\end{aligned}$$

con p' esponente coniugato a p. Inoltre notiamo che $\|f_1(y - \,\cdot\,)\|_p = \|f_1\|$ per invarianza di $\mathscr{L}^d$ per riflessioni e traslazioni. Infine otteniamo

$$\|f_1\|_p \|h^{p-1}\|_{p'} \|f_2\|_1 = \|f_1\|_p \|h\|_p^{p-1} \|f_2\|_1 .$$

Dunque, $\|f_1 * f_2\|_p^p \leq \|f_1 * f_2\|_p^{p-1} \|f_1\|_p \|f_2\|_1 \implies \|f_1 * f_2\|_p \leq \|f_1\|_p \|f_2\|_1$. Quest'ultima implicazione però è valida solo nel caso in cui $0 < \|f_1 * f_2\|_p < +\infty$. Resterebbero da controllare i due casi in cui la norma è 0 oppure $+\infty$. Il primo è ovvio; il secondo invece si fa per approssimazione e passando al limite.

Consideriamo f_1, f_2 e approssimiamole con $f_{1,n}, f_{2,n}$ limitate a supporto compatto, allora vale $\|f_{1,n} * f_{1,n}\|_p \leq \|f_{1,n}\|_p \cdot \|f_{2,n}\|_1$ e passando al limite si ottiene la tesi. In particolare possiamo costruire le f_n come

$$f_n(x) \coloneqq (f(x) \cdot \mathbb{1}_{\mathcal{B}(0,n)}(x)) \wedge n$$

Osservazione. Se $f_2 \geq 0$ e $\int f_2\,\mathrm{d}x = 1$ allora $\|f_1 * f_2\|_p \leq \|f_1\|_p$ è una versione semplificata della proposizione precedente, in particolare la dimostrazione si semplifica in quanto possiamo pensare a f_2 come distribuzione di probabilità e quindi $f_1 * f_2$ è una "media pesata" delle traslazioni di f_1 o più precisamente una combinazione convessa "integrale".

- *Caso generale.* Non lo facciamo perché servono mille mila parametri e non è troppo interessante.

□

Nel caso $r = +\infty$ gli esponenti p_1 e p_2 sono proprio coniugati e possiamo rafforzare la tesi del teorema precedente.

Teorema 4 (caso $r = +\infty$ del Teorema 3). Dati p_1 e p_2 esponenti coniugati e $f_1 \in L^{p_1}(\mathbb{R}^d)$, $f_2 \in L^{p_2}(\mathbb{R}^d)$, allora

i) $f_1 * f_2(x)$ è ben definito per ogni $x \in \mathbb{R}^d$

ii) $|f_1 * f_2(x)| \le \|f_1\|_{p_1} \|f_2\|_{p_2}$

iii) $f_1 * f_2$ è uniformemente continua

iv) Se $1 < p_1, p_2 < +\infty$ allora $f_1 * f_2 \to 0$ per $|x| \to +\infty$

Premettiamo i seguenti risultati.

Proposizione 5. Data $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$ con $p < +\infty$ la mappa

$$\begin{array}{rccc} \tau_h f : & \mathbb{R}^d & \to & L^p(\mathbb{R}^d) \\ & h & \mapsto & f(\,\cdot - h) \end{array}$$

è continua.

Lemma 6. Lo spazio $C_0(\mathbb{R}^d) = \{f \colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R} \text{ continue con } f(x) \to 0 \text{ per } |x| \to \infty\}$ è chiuso rispetto alla convergenza uniforme.

Dimostrazione Teorema 4.

i) Osserviamo che

$$|f_1| * |f_2|(x) = \int_{\mathbb{R}^d} |f_1(x-y)| \cdot |f_2(y)| \,\mathrm{d}y \overset{\text{Hölder}}{\le} \|f_1(x - \,\cdot\,)\|_{p_1} \|f_2\|_{p_2} = \|f_1\|_{p_1} \|f_2\|_{p_2}$$

e concludiamo per la Proposizione 1.

ii) Dal punto precedente abbiamo che $|f_1| * |f_2|(x) \le \|f_1\|_{p_1} \|f_2\|_{p_2}$, da cui si conclude banalmente.

iii) Uno tra p_1 e p_2 è finito; supponiamo lo sia p_1. Fissiamo $x, h \in \mathbb{R}^d$

$$f_1 * f_2(x+h) - f_1 * f_2(x) = \int_{\mathbb{R}^d} \left(f_1(x+h-y) - f_1(x-y)\right) f_2(y) \,\mathrm{d}y,$$

quindi

$$\begin{aligned} |f_1 * f_2(x+h) - f_1 * f_2(x)| &\le \int |f_1(x+h-y) - f_1(x-y)| \, |f_2| \,\mathrm{d}y \\ &\underset{\text{Holder}}{\le} \|f_1(x+h-\,\cdot\,) - f_1(x-\,\cdot\,)\|_{p_1} \|f_2\|_{p_2} \\ &= \|f_1(\,\cdot - h) - f_1(\,\cdot\,)\|_{p_1} \|f_2\|_{p_2} \\ &= \underbrace{\|\tau_h f_1 - f_1\|_{p_1}}_{\xrightarrow[\text{Proposizione 5}]{h\to 0} 0} \|f_2\|_{p_2} \end{aligned}$$

da cui segue la tesi[1].

iv) Approssimiamo f_1 e f_2 con $f_{1,n}$ e $f_{2,n} \in \mathcal{C}_C(\mathbb{R}^d)$ in L^{p_1} e L^{p_2} rispettivamente.

Osserviamo che $f_{1,n} * f_{2,n} \in \mathcal{C}_C(\mathbb{R}^d) \subset \mathcal{C}_0(\mathbb{R}^d)$. Per il Lemma 6 basta dimostrare che $f_{1,n} * f_{2,n} \longrightarrow f_1 * f_2$ uniformemente

$$\begin{aligned} \|f_{1,n} * f_{2,n} - f_1 * f_2\|_\infty &= \|(f_{1,n} * f_{2,n} - f_{1,n} * f_2) + (f_{1,n} * f_2 - f_1 * f_2)\|_\infty \\ &\underset{\text{lin della conv}}{\le} \|f_{1,n} * (f_{2,n} - f_2)\|_\infty + \|(f_{1,n} - f_1) * f_2\|_\infty \\ &\underset{ii)}{\le} \underbrace{\|f_{1,n}\|_{p_1}}_{\to \|f_1\|_{p_1}} \underbrace{\|f_{2,n} - f_2\|_{p_2}}_{\to 0} + \underbrace{\|f_{1,n} - f_1\|_{p_1}}_{\to 0} \|f_2\|_{p_2}\,. \end{aligned}$$

[1] *Nota.* In generale, quanto appena mostrato ci direbbe che la funzione è continua, ma essendo che stiamo maggiorando con una quantità indipendente da x segue l'uniforme continuità.

Quindi $\|f_{1,n} * f_{2,n} - f_1 * f_2\|_\infty \to 0$. $\square$

2.10 Rimanenze dalla lezione precedente

Proposizione. Data $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$ con $1 \le p < +\infty$ allora la funzione $\tau_h f \colon \mathbb{R}^d \to L^p(\mathbb{R}^d)$ data da $h \mapsto f(\cdot - h)$ è continua.

Dimostrazione. Per prima cosa notiamo che basta vedere solo la continuità in 0 in quanto

$$\tau_{h'} f - \tau_h f = \tau_h(\tau_{h'-h} f - f) \implies \|\tau_{h'} f - \tau_h f\|_p = \|\tau_{h'-h} f - f\|_p .$$

Dimostriamo ora la proposizione in due passi.

- *Caso 1:* $f \in C_C(\mathbb{R}^d)$

  $$\|\tau_h f - f\|_p^p = \int_{\mathbb{R}^d} |f(x-h) - f(x)|^p \,\mathrm{d}x \xrightarrow{|h|\to 0} 0$$

  per convergenza dominata, verifichiamo però che siano rispettate le ipotesi

  i) La convergenza puntuale, ovvero $|f(x-h) - f(x)|^p \xrightarrow{|h|\to 0} 0$ segue direttamente dalla continuità di f.

  ii) Come dominazione invece usiamo $|f(x-h) - f(x)|^p \le (2\|f\|_\infty)^p \cdot \mathbb{1}_{\mathcal{B}(0,R+1)}$ usando che $f \in C_C \implies \operatorname{supp}(f) \subset \overline{B(0,R)}$ e poi che

  $$\operatorname{supp}(f(\,\cdot\, - h) - f(\,\cdot\,)) \subset \overline{\mathcal{B}(0, R + |h|)}$$

  infine se $|h| < 1$ come raggio ci basta prendere $R + 1$.

- *Caso 2:* f qualunque Dato $\varepsilon > 0$ prendiamo $g \in C_C(\mathbb{R}^d)$ tale che $\|g - f\| \le \varepsilon$ allora aggiungiamo a sottraiamo $g + \tau_h g$ e raggruppiamo in modo da ottenere

  $$\begin{gathered}\tau_h f - f = \tau_h(f-g) + (\tau_h g - g) + (g - f)\\ \implies \|\tau_h f - f\|_p \le \underbrace{\|\tau_h(f-g)\|_p}_{\le\varepsilon} + \|\tau_h g - g\|_p + \underbrace{\|g - f\|_p}_{\le\varepsilon} \le 2\varepsilon + \underbrace{\|\tau_h g - g\|_p}_{\to 0 \text{ per } \textit{Caso 1}}\end{gathered}$$

  dunque $\limsup_{|h|\to 0} \|\tau_h f - f\|_p \le 2\varepsilon$ ma per arbitrarietà di ε otteniamo anche che $\|\tau_h f - f\|_p \to 0$ per $|h| \to 0$.

$\square$

[TO DO: il teorema sotto non è già stato dimostrato?] **Teorema.** Siano $f_1 \in L^{p_1}(\mathbb{R}^d)$ e $f_2 \in L^{p_2}(\mathbb{R}^d)$ con p_1 e p_2 esponenti coniugati, allora $f_1 * f_2$ è definita per ogni x e uniformemente continua

$$|f_1 * f_2(x)| \le \|f_1\|_{p_1} \cdot \|f_2\|_{p_2} \quad \forall x.$$

Dimostrazione. Prendiamo $f_{1,n}, f_{2,n} \in C_C(\mathbb{R}^d)$ tali che $f_{1,n} \to f_1$ in L^{p_1} e $f_{2,n} \to f_2$ in L^{p_2}.

- Per prima cosa verifichiamo che $\overline{f * g}$ è ben definita. Notiamo che $f_{1,n} * f_{2,n}$ ha supporto limitato, infatti se $\operatorname{supp}(f_{i,n}) \subset \overline{\mathcal{B}(0, r_{i,n})}$ per $i = 1, 2$ allora

  $$\operatorname{supp}(f_{1,n} * f_{2,n}) \subset \overline{\mathcal{B}(0, r_{1,n} + r_{2,n})}$$

e basta notare che l'espressione

$$f_1 * f_2(x) = \int_{\mathbb{R}^d} f_1(x-y) f_2(y)\, \mathrm{d}y$$

ha integranda nulla per ogni y se $|x| \geq r_{1,n} + r_{2,n}$.

- Vediamo che $f_{1,n} * f_{2,n} \to f_1 * f_2$ uniformemente

$$f_{1,n} * f_{2,n} - f_1 * f_2 = (f_{1,n} - f_1) * f_{2,n} - f_1 * (f_{2,n} - f_2)$$

$$\begin{aligned} \|f_{1,n} * f_{2,n} - f_1 * f_2\|_p &\leq \|(f_{1,n} - f_1) * f_{2,n}\|_p + \|f_1 * (f_{2,n} - f_2)\|_p \\ &\leq \underbrace{\|f_{1,n} - f_1\|_{p_1}}_{\to 0} \cdot \underbrace{\|f_{2,n}\|_{p_2}}_{\to \|f_2\|_{p_2}} + \underbrace{\|f_1\|_{p_1}}_{\text{cost.}} \cdot \underbrace{\|f_{2,n} - f_2\|_{p_2}}_{\to 0} \to 0 \end{aligned}$$

- $C_0(\mathbb{R}^d)$ è chiuso per convergenza uniforme [TODO: da fare per esercizio]

2.11 Derivata e Convoluzione

Osservazione. Osserviamo che la convoluzione si comporta bene con l'operatore di traslazione definito precedentemente, infatti $\tau_h(f_1 * f_2) = (\tau_h f_1) * f_2$ in quanto

$$f_1 * f_2(x-h) = \int f_1(x-h-y) \cdot f_2(y)\, \mathrm{d}y = \int \tau_h f(x-y) \cdot f_2(y)\, \mathrm{d}y = (\tau_h f_1) * f_2$$

quindi "formalmente" possiamo calcolare il seguente rapporto incrementale

$$\frac{\tau_h(f_1 * f_2) - f_1 * f_2}{h} = \frac{\tau_h f_1 - f_1}{h} * f_2 \implies (f_1 * f_2)' = (f_1)' * f_2$$

Vediamo ora di formalizzare questo risultato.

Teorema. Dati p_1 e p_2 esponenti coniugati, se

- $f_1 \in C^1(\mathbb{R}^d)$, f_1 e $\nabla f_1 \in L^{p_1}(\mathbb{R}^d)$
- $f_2 \in L^{p_2}(\mathbb{R}^d)$

allora $f_1 * f_2 \in C^1$ con $\nabla(f_1 * f_2) = (\nabla f_1) * f_2$[1].

Dimostrazione.

- $d = 1$: Sappiamo che $f_1 * f_2$ ed $f_1' * f_2$ sono continue. Vediamo che coincidono usando il teorema fondamentale del calcolo integrale. L'uguaglianza $(f_1 * f_2)' = f_1' * f_2$ segue da

$$\int_a^b f_1' * f_2\, \mathrm{d}x = f_1 * f_2(b) - f_1 * f_2(a) \quad \forall a < b$$

[1]Ha senso anche se ∇f_1 è a valori vettoriali. In tal caso $\frac{\partial}{\partial x_i}(f_1 * f_2) = \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_i}\right) * f_2 \quad$ per $i = 1, \ldots, d$.

ed in effetti

$$\begin{aligned}\int_a^b f_1' * f_2(x)\,\mathrm{d}x &= \int_a^b \int_{-\infty}^{\infty} f_1'(x-y) f_2(y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x \\ &\overset{(*)}{=} \int_{-\infty}^{\infty} \int_a^b f_1'(x-y)\,\mathrm{d}x \cdot f_2(y)\,\mathrm{d}y \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} (f_1(b-y) - f_1(a-y)) \cdot f_2(y)\,\mathrm{d}y \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f_1(b-y) f_2(y)\,\mathrm{d}y - \int_{-\infty}^{\infty} f_1(a-y) f_2(y)\,\mathrm{d}y \\ &= f_1 * f_2(b) - f_1 * f_2(a).\end{aligned}$$

In particolare in $(*)$ stiamo usando Fubini-Tonelli in quanto

$$\int_a^b \int_{-\infty}^{\infty} |f_1'(x-y)| \cdot |f_2(y)|\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x \leq \int_a^b \|f_1'(x-\,\cdot\,)\|_{p_1} \cdot \|f_2\|_{p_2}\,\mathrm{d}x = \|f_1'\|_{p_1} \cdot \|f_2\|_{p_2} \cdot (b-a).$$

- per $d > 1$ dato $i = 1, \dots, d$ basta semplicemente considerare le proiezioni infatti

$$\int_a^b \frac{\partial f_1}{\partial x_i} * f_2(x_1, \dots, \overset{(i)}{t}, \dots, x_d)\,\mathrm{d}t = f_1 * f_2(x_1, \dots, \overset{(i)}{b}, \dots, x_d) - f_1 * f_2(x_1, \dots, \overset{(i)}{a}, \dots, x_d)$$

□

Corollario. Data $f_1 \in C_C^\infty(\mathbb{R}^d)$ (da cui segue $\nabla^k \in L^q(\mathbb{R}^d)$ per ogni $k = 0, 1, \dots$ e $1 \leq q < +\infty$) e $f_2 \in L^p(\mathbb{R}^d)$ allora $f_1 * f_2 \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$ (anzi $\nabla^k(f_1 * f_2) \in C_0(\mathbb{R}^d)$ per ogni k) e vale la formula nota[1]

$$\nabla^k(f_1 * f_2) = (\nabla^k f_1) * f_2 \quad \forall k = 1, \dots$$

Dimostrazione. Si dimostra per induzione su k. [TO DO: da fare]

2.12 Approssimazione per convoluzione

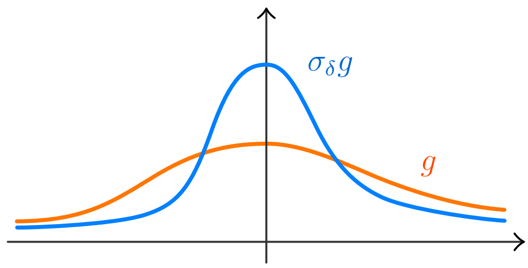
Definizione. Per prima cosa data una funzione $g \colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ e $\delta \neq 0$ poniamo

$$\sigma_\delta g(x) := \frac{1}{\delta^d} g\left(\frac{x}{\delta}\right)$$

e notiamo che questa trasformazione preserva la norma L^1. Infatti, il valore $1/\delta^d$ è proprio il modulo del determinante dello Jacobiano del cambio di variabile.

Teorema. Data $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$ e $g \in L^1(\mathbb{R}^d)$ con $1 \leq p < +\infty$ e posto $m := \displaystyle\int_{\mathbb{R}^d} g(x)\,\mathrm{d}x$, allora

$$f * \sigma_\delta g \xrightarrow{\delta \to 0} mf \ \text{ in } L^p(\mathbb{R}^d).$$



Interpretazione. Se $g_2 \geq 0$ con $\int g\,\mathrm{d}x = 1$ (dunque g distribuzione di probabilità) allora $f * g$ possiamo

[1] dato che $\nabla^k f_1$ ha valori in $\mathbb{R}^k$ e f_2 in $\mathbb{R}$, dobbiamo definire $\nabla^k f_1 * f_2$ [TO DO: da fare].

pensarla come media pesata di traslate di f, dunque facendo $f * \sigma_\delta g$ stiamo pesando sempre di più i valori delle traslate vicino a 0.

Nota. Per $p = +\infty$ il teorema non vale. Infatti, la funzione $f = \mathbb{1}_{[0,+\infty]} \in L^\infty$; le funzioni $f * \sigma_\delta g$ sono continue ma non convergono in L^∞ a $mf = f$. Infatti, le successioni continue convergono in L^∞ a funzioni che coincidono, a meno di insiemi di misura nulla, con funzioni continue, ed f non è possibile modificarla in un insieme di misura nulla in modo che coincida con una funzione continua.

Dimostrazione. Per ora consideriamo g generica e ripercorriamo una dimostrazione simile a quella fatta per la disuguaglianza di Young

$$
\begin{aligned}
\|f * g - mf\|_p^p &= \int_{\mathbb{R}^d} \underbrace{|f * g - mf|}_{h}{}^p \,\mathrm{d}x \\
&= \int |f * g - mf| \cdot h^{p-1} \,\mathrm{d}x \\
&= \int \left| \int f(x-y)g(y)\,\mathrm{d}y - f(x) \int g(y)\,\mathrm{d}y \right| \cdot h^{p-1}(x)\,\mathrm{d}x \\
&\leq \int \int |f(x-y) - f(x)| \cdot |g(y)|\,\mathrm{d}y \cdot h^{p-1}(x)\,\mathrm{d}x \\
&\overset{(*)}{=} \int \left(\int |f(x-y) - f(x)| h^{p-1}(x)\,\mathrm{d}x \right) |g(y)|\,\mathrm{d}y,
\end{aligned}
$$

dove in $(*)$ abbiamo usato Fubini-Tonelli. Ora prendiamo q tale che $1/p + 1/q = 1$ allora per Hölder abbiamo

$$
\begin{aligned}
&\leq \int \|f(\,\cdot\, - y) - f(\,\cdot\,)\|_p \,\|h^{p-1}\|_q \cdot |g(y)|\,\mathrm{d}y \\
&= \|h\|_p^{p-1} \int_{\mathbb{R}^d} \|\tau_y f - f\|_p \cdot |g(y)|\,\mathrm{d}y
\end{aligned}
$$

dunque abbiamo ricavato che

$$
\|f * g - mf\|_p^p \leq \|f * g - mf\|_p^{p-1} \int_{\mathbb{R}^d} \|\tau_y f - f\|_p \cdot |g(y)|\,\mathrm{d}y
$$

ed ora applicando questa stima a $\sigma_\delta g$ invece che a g otteniamo

$$
\|f * \sigma_\delta g - mf\|_p \leq \int_{\mathbb{R}^d} \|\tau_y f - f\|_p \cdot |\sigma_\delta g(y)|\,\mathrm{d}y,
$$

infine ponendo $z = y/\delta$ e $\mathrm{d}z = 1/\delta^d\,\mathrm{d}y$ e sostituendo nell'integrale

$$
= \int_{\mathbb{R}^d} \|\tau_{\delta z} f - f\|_p \cdot |g(z)|\,\mathrm{d}z \xrightarrow{\delta \to 0} 0
$$

per *convergenza dominata*, verifichiamone le ipotesi

i) La convergenza puntuale segue in quanto $\|\tau_{\delta z} f - f\|_p \xrightarrow{\delta \to 0} 0$ per ogni z.

ii) Come dominazione prendiamo $2\|f\|_p \cdot |g| \in L^1$.

□

Corollario. Sia $g \in C_C^\infty(\mathbb{R}^d)$ con $\displaystyle\int g\,\mathrm{d}x = 1$ e $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$ e $1 \leq p < +\infty$ allora $\sigma_\delta g * f \xrightarrow{\delta \to 0} f$ in $L^p(\mathbb{R}^d)$ e $\sigma_\delta g * f \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$.

Capitolo 3

Spazi di Hilbert

Sia H spazio vettoriale reale con prodotto scalare $\langle \cdot, \cdot \rangle$ definito positivo e norma indotta $\| \cdot \|$ definita come $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$.
Si ricorda l'identità di polarizzazione

$$\langle x_1, x_2 \rangle = \frac{1}{4} \left(\|x_1 + x_2\|^2 - \|x_1 - x_2\|^2 \right).$$

Nota. Siccome $\| \cdot \|$ è continua, dalla formula di polarizzazione segue che il prodotto scalare è continuo.

Definizione. H si dice **spazio di Hilbert** se è completo.

Esempi.

- Dato $(X, \mathcal{A}, \mu)$, gli spazi $L^2(X), L^2(X, \mathbb{R}^m)$ sono spazi di Hilbert.
- Lo spazio $\ell^2 = \left\{ (x_n) \;\middle|\; \sum_{n=0}^{\infty} x_n^2 < +\infty \right\}$ è uno spazio di Hilbert.

Definizione. $\mathcal{F} \subset H$ è un **sistema ortonormale** se

$$\|e\| = 1 \ \ \forall e \in \mathcal{F}, \qquad \langle e, e' \rangle = 0 \ \ \forall e \neq e' \in \mathcal{F}.$$

Definizione. $\mathcal{F}$ si dice **completo** se $\overline{\operatorname{Span}(\mathcal{F})} = H$[1]. In tal caso $\mathcal{F}$ si dice **base di Hilbert**.

Osservazione. In generale una base di Hilbert $\mathcal{F} \subset H$ non è anche una base algebrica di H.

L'esempio che segue spiega quanto appena detto.

Esempio. In ℓ^2 una base ortonormale è $\mathcal{F} = \{e_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ con $e_n = (0, \ldots, 0, \overset{(n)}{1}, 0, \ldots)$.
Infatti, il fatto che siano ortonormali è banale; verifichiamo che sia una base.

Studiamo $\operatorname{Span}(\mathcal{F}) = \{x = (x_0, x_1, \ldots) \mid x_n \ \ \text{è definitivamente nullo}\}$: dato $x \in \ell^2$ e $m = \mathbb{N}$, definiamo

$$P_m x := (x_0, x_1, \ldots, x_m, 0, \ldots).$$

Allora $\operatorname{Span}(\mathcal{F}) \supset P_m x \xrightarrow{m \to +\infty} x$ in ℓ^2. Infatti,

$$x - P_m x = (0, \ldots, 0, x_{m+1}, x_{m+2}, \ldots).$$

[1] Lo span sono combinazioni lineari finite.

Dunque
$$\|x - P_m x\| = \sum_{n=m+1}^{\infty} x_n^2 \xrightarrow{m\to+\infty} 0.$$

Teorema 1. (della base di Hilbert.) Dato H spazio di Hilbert, $\mathcal{F}$ sistema ortonormale al più numerabile, ovvero $\mathcal{F} = \{e_n \mid n \in \mathbb{N}\}$. Definiamo per ogni $x \in H$, $n \in \mathbb{N}$ l'elemento $x_n = \langle x, e_n\rangle$. Allora

i) Vale $\sum_n x_n^2 \leq \|x\|^2$ (**Disuguaglianza di Bessel**).

ii) La somma $\sum_n x_n e_n$ converge a qualche $\overline{x} \in H$ e $\overline{x}_n = x_n$ per ogni n.

iii) Vale $\|\overline{x}\|^2 = \sum_n x_n^2 \leq \|x\|^2$.

iv) Se $x - \overline{x} \perp \mathcal{F}$, allora $x - \overline{x} \perp \overline{\mathrm{Span}(\mathcal{F})}$, ovvero $\overline{x}$ è la proiezione di x su $\overline{\mathrm{Span}(\mathcal{F})}$.

v) Se $\mathcal{F}$ è completo, allora $x = \overline{x}$ e in particolare
$$x = \sum_{n=0}^{\infty} x_n e_n, \qquad \|x\|^2 = \sum_{n=0}^{\infty} x_n^2 \qquad (\textbf{Identità di Parseval}).$$

Alla dimostrazione del teorema premettiamo il seguente lemma.

Lemma 2. Siano H e $\mathcal{F}$ come nel teorema. Data $(a_n) \in \ell^2$, allora

i) La serie $\sum_n a_n e_n$ converge a qualche $\overline{x} \in H$.

ii) $\overline{x}_n = a_n$ per ogni n.

iii) $\|\overline{x}\|^2 = \sum_n a_n^2$.

Dimostrazione.

i) Dimostriamo che $y_n = \sum_{n=1}^{m} a_n e_n$ è di Cauchy in H. Se $m' > m$, vale
$$y_{m'} - y_m = \sum_{n=m+1}^{m'} a_n e_n \Longrightarrow \|y_{m'} - y_m\|^2 = \left\| \sum_{n=m+1}^{m'} a_n e_n \right\|^2 = \sum_{n=m+1}^{m'} a_n^2 \leq \sum_{n=m+1}^{\infty} a_n^2 < +\infty.$$
Dunque, per ogni ε esiste m_ε tale che $\sum_{m_\varepsilon+1}^{\infty} a_n^2 \leq \varepsilon^2$, per cui
$$\|y_{m'} - y_m\|^2 \leq \sum_{m+1}^{m'} a_n^2 \leq \sum_{m_\varepsilon+1}^{\infty} a_n^2 \leq \varepsilon^2 \quad \forall m, m' \geq m_\varepsilon.$$

ii) Se $m \geq n$, $\langle y_m, e_n\rangle = a_n$, dunque, per continuità del prodotto scalare
$$a_n = \langle y_m, e_n\rangle \xrightarrow{m\to\infty} \langle \overline{x}, e_n\rangle = \overline{x}_n.$$

iii) Si ha l'uguaglianza $\|y_m\|^2 = \sum_{n=1}^{m} a_n^2$, per cui passando al limite per $m \to +\infty$ otteniamo

$$\begin{array}{ccc} \|y_m\|^2 & \xrightarrow{m\to\infty} & \|\overline{x}\|^2 \\ \| & & \\ \sum_{n=0}^{m} a_n^2 & \xrightarrow{m\to\infty} & \sum_{n=0}^{\infty} a_n^2 \end{array}$$

□

Dimostrazione Teorema 1.

i) Studiamo la somma $x = \sum_{n=0}^{m} x_n e_n + \overbrace{y}^{\text{resto}}$.

Notiamo che x è somma di vettori ortogonali, infatti y è ortogonale a $\sum_{n=0}^{m} x_n e_n$:

$$\langle y, e_i \rangle = \left\langle x - \sum_{n=0}^{m} x_n e_n, e_i \right\rangle = \langle x, e_i \rangle - \sum_{n=0}^{m} x_n \underbrace{\langle e_n, e_i \rangle}_{\delta_{i,n}} = x_i - x_i = 0.$$

Essendo che x è somma di vettori ortogonali abbiamo

$$\|x\|^2 = \sum_{n=1}^{m} x_n^2 + \|y\|^2 \geq \sum_{n=1}^{m} x_n^2.$$

Passando al limite per $m \to +\infty$ otteniamo

$$\|x\|^2 \geq \sum_{n=1}^{\infty} x_n^2.$$

ii) Segue dal lemma notando che il punto precedente ci dice che la successione (x_n) è a quadrato sommabile.

iii) Analogamente al caso precedente.

iv) Notiamo che $\langle x - \overline{x}, e_n \rangle = x_n - \overline{x}_n \overset{\text{ii)}}{=} 0$ per ogni n. Cioè

$$x - \overline{x} \perp e_n \Longrightarrow x - \overline{x} \perp \operatorname{Span}(\mathcal{F}) \Longrightarrow x - \overline{x} \underset{\substack{\text{continuità} \\ \text{pr. scalare}}}{\perp} \overline{\operatorname{Span}(\mathcal{F})}$$

v) $x - \overline{x} \perp \overline{\operatorname{Span}(\mathcal{F})} \underbrace{=}_{\mathcal{F} \text{ è completo}} H \Longrightarrow x - \overline{x} = 0$, cioè $x = \overline{x}$.

□

Corollario 3. Siano H spazio di Hilbert, $\mathcal{F} = \{e_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ base di Hilbert, $x, x' \in H$. Valgono le seguenti.

i) $x_n = x'_n \quad \forall n \in \mathbb{N} \Longleftrightarrow x = x'$ ($\Leftarrow$ è ovvia).

ii) $\langle x, x' \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} x_n x'_n$ (**Identità di Parseval**).

iii) L'applicazione $H \ni x \mapsto (x_n) \in \ell^2$ è un'isometria surgettiva[1].

Dimostrazione.

i) Per l'enunciato **??** se due vettori hanno la stessa rappresentazione rispetto a una base di Hilbert coincidono.

ii) La tesi segue usando l'identità di polarizzazione congiuntamente all'enunciato **??** del teorema:

$$\langle x, x' \rangle = \frac{1}{4}\left(\|x+x'\|^2 - \|x-x'\|^2\right) = \frac{1}{4}\Bigg(\sum_n \overbrace{(x_n + x'_n)^2}^{x_n^2 + x_n'^2 + 2x_n x'_n} - \sum_n \underbrace{(x_n - x'_n)^2}_{x_n^2 + x_n'^2 - 2x_n x'_n}\Bigg)$$
$$= \frac{1}{4}\left(\cancel{\sum x_n^2} + \cancel{\sum x_n'^2} + 2\sum x_n x'_n - \cancel{\sum x_n^2} - \cancel{\sum x_n'^2} + 2\sum x_n x'_n\right).$$

iii) Il fatto che l'applicazione sia un'isometria segue da Parseval; che sia iniettiva dal fatto che $\mathcal{F}$ è una base di Hilbert e che sia surgettiva dai punti i) e ii) del Lemma 2.

$\square$

Osservazioni.

- Gli enunciati **??** e **??** non richiedono H completo, mentre **??** non è vero se H non è completo.
- Se H è uno spazio di Hilbert e $\mathcal{F}$ sistema ortonormale infinito, allora $\mathcal{F}$ non è mai una base algebrica[1]. Dunque, combinazioni lineari finite di $\mathcal{F}$ non sono mai uguali ad H, ovvero $\mathrm{Span}(\mathcal{F}) \subsetneq H$.

  Dimostrazione. Presi $(e_n) \subset \mathcal{F}$, consideriamo $\overline{x} = \sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n} e_n$. Allora $\overline{x} \in H \setminus \mathrm{Span}(\mathcal{F})$.
- Siano H uno spazio di Hilbert di dimensione infinita e $\mathcal{F}$ una base di Hilbert. Allora $\mathcal{F}$ è numerabile se solo se H è separabile.

  Dimostrazione.

  $\boxed{\Rightarrow}$ Vale $H = \overline{\mathrm{Span}(\mathcal{F})} = \overline{\mathrm{Span}_{\mathbb{Q}}(\mathcal{F})}$. Concludiamo notando che $\overline{\mathrm{Span}_{\mathbb{Q}}(\mathcal{F})}$ è numerabile se $\mathcal{F}$ è numerabile.

  $\boxed{\Leftarrow}$ Se $\mathcal{F}$ non fosse numerabile, siccome $\|e - e'\| = \sqrt{2} \quad \forall e, e' \in \mathcal{F}$, potremmo definire per ogni elemento di $\mathcal{F}$ una palla di raggio $\sqrt{2}/2$, dunque potremmo definire un insieme di palle disgiunte. Dato un sottoinsieme denso di H, per definizione, deve intersecare ogni palla e dunque deve essere più che numerabile, dunque H non sarebbe separabile.

  Esempio. Lo spazio $H = L^2(X)$, con $X = \mathbb{R}^n$, μ misura di Lebesgue ha base di Hilbert numerabile.

[1] In particolare è bigettiva ma l'iniettività è ovvia.

[1] Per base algebrica s'intende un insieme di vettori di uno spazio vettoriale le cui combinazioni lineari generano tutto lo spazio.

- Dato $\mathcal{F}$ sistema ortonormale in H, allora $\mathcal{F}$ è completo se solo se $\mathcal{F}$ è massimale (nella classe dei sistemi ortonormali rispetto all'inclusione).

  Dimostrazione.

  $\boxed{\Rightarrow}$ Dato che $\mathcal{F}$ è completo segue che $\overline{\operatorname{Span}(\mathcal{F})} = X$, quindi

  $$\mathcal{F}^\perp = (\operatorname{Span}(\mathcal{F}))^\perp \underbrace{=}_{\substack{\text{continuità del}\\ \text{prodotto scalare}}} \overline{\operatorname{Span}(\mathcal{F})}^\perp = H^\perp = \{0\}.$$

  dunque $\mathcal{F}$ è massimale.

  $\boxed{\Leftarrow}$ Se $\mathcal{F}$ non è completo, esiste $x \in H \setminus \operatorname{Span}(\mathcal{F})$. Definiamo $\overline{x}$ come nel Teorema 1. Notiamo che $x - \overline{x} \perp \operatorname{Span}(\mathcal{F})$, dunque $x - \overline{x} \perp \mathcal{F}$ e $x - \overline{x} \neq \{0\}$, da cui $\mathcal{F} \cup \left\{ \dfrac{x - \overline{x}}{\|x - \overline{x}\|} \right\}$ è un sistema ortonormale che include strettamente $\mathcal{F}$. ↯

  Osservazione. Nell'implicazione $\boxed{\Rightarrow}$ non abbiamo usato la completezza di H.

- Ogni sistema ortonormale $\mathcal{F}$ si completa a $\widetilde{\mathcal{F}}$ base di Hilbert di H.

  Dimostrazione. Sia $X = \left\{ \mathcal{F} \text{ sistema ortonormale} H \text{ tale che } \widetilde{\mathcal{F}} \subset \mathcal{F} \right\}$. Per Zorn, X contiene un elemento massimale. Denotiamolo con $\widetilde{\mathcal{F}}$. Allora $\widetilde{\mathcal{F}}$ è una base di Hilbert.

Teorema 4. Dato V sottospazio vettoriale chiuso di H. Allora

i) $H = V + V^\perp$, cioè per ogni $x \in H$ esiste $\overline{x} \in V$ e $\widetilde{x} \in V^\perp$ tale che $x = \overline{x} + \widetilde{x}$.

ii) Gli elementi $\overline{x}$ e $\widetilde{x}$ sono univocamente determinati (e indicati con x_V e $x_V^\perp$).

iii) $\overline{x}$ è caratterizzato come l'elemento di V più vicino a X.

Dimostrazione.

i) Dato che V è chiuso, V è completo, cioè V è un sottospazio di H, dunque V ammette base ortonormale $\mathcal{F} = \{e_n \mid n \in \mathbb{N}\}$. Definiamo $\overline{x} \in \overline{\operatorname{Span}(\mathcal{F})}$ come nel Teorema 1 e $\widetilde{x} := x - \overline{x} \in \overline{\operatorname{Span}(\mathcal{F})} = V^\perp$ (per **??**).

ii) Se $x = \overline{x} + \widetilde{x} = \overline{x}' + \widetilde{x}'$, dove $\overline{x}, \overline{x}' \in V$ e $\widetilde{x}, \widetilde{x}' \in V^\perp$, allora

$$\overline{x} - \overline{x}' = \widetilde{x}' - \widetilde{x} \underbrace{\Longrightarrow}_{V \cap V^\perp = \{0\}} \overline{x} - \overline{x}' = \widetilde{x}' - \widetilde{x} = 0.$$

iii) Per ogni $y \in V$ sia $f(y) = \|x - y\|^2$. Mostriamo che $\overline{x}$ è l'unico minimo di f.

$$f(y) = \|x - y\|^2 = \|\overbrace{x - \overline{x}}^{\in V^\perp} + \overbrace{\overline{x} - y}^{\in V}\|^2 = \|x - \overline{x}\|^2 + \|\overline{x} - y\|^2 = f(\overline{x}) + \|\overline{x} - y\|^2 \geq f(\overline{x}).$$

□

Osservazione. Serve V chiuso. Se per esempio V è denso in H ma $V \neq H$, allora

$$\overline{V^\perp} = \overline{V}^\perp = H^\perp = \{0\} \Longrightarrow V \subseteq V + V^\perp \subseteq V + \overline{V^\perp} = V \subsetneq H.$$

Un esempio di tale V è $\operatorname{Span}(\mathcal{F})$ con $\mathcal{F}$ base di H (H di dimensione infinita).

Teorema 5 (di rappresentazione di Riesz.) Dato $\Lambda\colon H \to \mathbb{R}$ lineare e continuo, esiste $x_0 \in H$ tale che

$$\Lambda(x) = \langle x, x_0 \rangle \quad \text{per ogni } x \in H. \tag{$*$}$$

Lemma 6. Dato $\Lambda\colon X \to \mathbb{R}$ lineare, $(\ker\Lambda)^\perp$ ha dimensione 0 o 1.

Dimostrazione Se per assurdo $\dim(\ker\Lambda)^\perp \geq 2$, allora $(\ker\Lambda)^\perp$ conterrebbe un sottospazio W di dimensione 2. Dunque, $\dim\left(\ker \Lambda|_W\right) = \{1, 2\}$, essendo che $\dim\mathbb{R} = 1$. Ma questo non è possibile, in quanto abbiamo definito $W = \ker^\perp$. $\square$

Dimostrazione Teorema 5. Sia $V \coloneqq \ker\Lambda$. Dato che Λ è continuo segue che V è chiuso. Se $V = H \implies \Lambda \cong 0$ e prendiamo $x_0 = 0$.

Se $V \neq H$, allora $V^\perp \neq \{0\}$ e definiamo $x_1 \in V^\perp$ con $\|x_1\| = 1$. Poniamo $x_0 \coloneqq cx_1$ con $c \coloneqq \Lambda x_1$ e $\widetilde{\Lambda}(x) \coloneqq \langle x, x_0 \rangle$. Abbiamo che

- $x \in V \implies x \perp x_1 \implies x \perp x_0 \implies \widetilde{\Lambda} = 0 = \Lambda(x)$. Quindi $\widetilde{\Lambda} = \Lambda$ su V.
- $\widetilde{\Lambda}(x_1) = \langle x_1, x_0 \rangle = \langle x_1, cx_1 \rangle = c\,\|x_1\|^2 = c = \Lambda(x_1)$. Quindi $\widetilde{\Lambda} = \Lambda$ su $\mathrm{Span}(x_1) = V^\perp$.
- $\widetilde{\Lambda} = \Lambda$ su $V + V^\perp = H$.

$\square$

Osservazione. Esistono funzioni $\Lambda\colon H \to \mathbb{R}$ lineari ma non continue se H ha dimensione infinita.

Dimostrazione. Prendo $\Lambda\colon H \to \mathbb{R}$ lineare definito come

$$\begin{cases} \Lambda(e_n) = n \quad \forall n \\ \Lambda(e) = \text{qualsiasi } e \in \mathcal{G} \setminus \{e_n\}. \end{cases}$$

Allora

$$+\infty = \sup_n |\Lambda(e_n)| \leq \sup_{\|x\| \leq 1} |\Lambda(x)|$$

da cui segue che Λ non è continuo.

3.1 Spazi di Hilbert complessi

Definizione. Sia H una spazio vettoriale su $\mathbb{C}$ con prodotto hermitiano $\langle\,\cdot\,;\,\cdot\,\rangle$, ovvero tale che

- $\langle\,\cdot\,;\,\cdot\,\rangle$ è lineare nella prima variabile
- $\langle x; x' \rangle = \overline{\langle x', x \rangle}$ ovvero è antilineare nella seconda variabile.
- $\langle x; x \rangle \geq 0$ per ogni x e vale 0 se e solo se $x = 0$.

Analogamente si pone $\|x\| \coloneqq \sqrt{\langle x; x \rangle}$. C'è un'identità di polarizzazione ma è leggermente diversa dalla versione reale.

Definizione. H si dice di Hilbert se è **completo**.

Esempio. Su $L^2(X; \mathbb{C})$ si mette il prodotto scalare dato da

$$\langle u; v \rangle \coloneqq \int_X u \cdot \overline{v}\,\mathrm{d}\mu.$$

Teorema. (della base di Hilbert per spazi complessi) Dato $\mathcal{F} = \{e_n\}$ sistema ortonormale in H e $x \in H$ allora per ogni n si pone[1]

$$x_n = \langle x; e_n \rangle$$

Vale anche l'identità di Parseval $\|x^2\| = \sum |x_n|^2$ dove $|\cdot|$ è il modulo di un numero complesso, in particolare nella versione con prodotto scalare diventa

$$\langle x, x' \rangle = \sum_n x_n \overline{x'_n}.$$

[1] E non $\langle e_n; x \rangle$!

Capitolo 4

Serie di Fourier

Lo scopo della serie di Fourier (complessa) è di rappresentare una funzione $f\colon [-\pi,\pi] \to \mathbb{C}$ (o più in generale una funzione $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ 2π-periodica) come

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}$$

In particolare, chiamiamo i coefficienti c_n **coefficienti di Fourier** di $f(x)$ e tutta l'espressione a destra **serie di Fourier** di $f(x)$.

Motivazione. La rappresentazione in serie di Fourier serve ad esempio a risolvere certe equazioni alle derivate parziali ed è anche utilizzata per la "compressione dati".

Problemi.

- Come si trovano (se esistono) i coefficienti di Fourier?
- Ed in che senso la serie converge?

Osservazione. La serie appena vista è indicizzata da $-\infty$ a $+\infty$, più avanti vedremo che la definizione esatta non sarà importante ma per ora usiamo la definizione

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \coloneqq \lim_{N\to+\infty} \sum_{n=-N}^{N} a_n$$

ed ogni tanto scriveremo anche $\sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n$ per brevità.

Teorema 1. L'insieme $\mathcal{F} = \left\{ e_n(x) \coloneqq \frac{e^{inx}}{\sqrt{2\pi}} \right\}$ è una base ortonormale di $L^2([-\pi,\pi];\mathbb{C})$.

Da cui *formalmente* segue che

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{n\in\mathbb{Z}} \langle f; e_n\rangle \cdot e_n = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \left(\int_{-\pi}^{\pi} f(t) \overline{\frac{e^{int}}{\sqrt{2\pi}}} \,\mathrm{d}t \right) \frac{e^{inx}}{\sqrt{2\pi}} \\ &= \sum_{n\in\mathbb{Z}} \underbrace{\frac{1}{2\pi} \left(\int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-int} \,\mathrm{d}t \right)}_{c_n} e^{inx} \end{aligned}$$

Definizione. Data $f \in L^2([-\pi,\pi];\mathbb{C})$ i coefficienti di Fourier di f sono

$$c_n = c_n(f) \coloneqq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx} \,\mathrm{d}x.$$

Notiamo in particolare che è anche ben definito anche per $f \in L^1$ (anche se per ora non ci dice molto in quanto L^1 non è uno spazio di Hilbert).

Corollario. Per ogni $f \in L^2([-\pi,\pi];\mathbb{C})$ abbiamo

i) La serie $\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n e^{inx}$ converge a f in L^2.

ii) Vale l'identità di Parseval

$$\|f\|_2^2 = 2\pi \sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n|^2 \qquad\qquad \langle f,g\rangle = 2\pi \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(f)\overline{c_n(g)}$$

.

Osservazione. Usando la **??** ed il fatto che la convergenza in L^2 implica la convergenza quasi ovunque a meno di sottosuccessioni otteniamo che $\forall f\ \exists N_n \uparrow \infty$ tale che

$$\sum_{n=-N_k}^{N_k} c_n e^{inx} \xrightarrow{k} f(x) \qquad \widetilde{\forall} x \in [-\pi,\pi].$$

In particolare nel 1966 Carleson ha dimostrato che in realtà vale proprio

$$\sum_{n=-N}^{N} c_n e^{inx} \xrightarrow{N} f(x) \qquad \widetilde{\forall} x.$$

Prima di dimostrare il Teorema 1 riportiamo il teorema di Stone-Weierstrass.

Teorema (di Stone-Weierstrass.) Sia K uno spazio compatto e T_2 (essenzialmente è uno spazio metrico compatto) e sia $C(K)$ l'insieme delle funzioni continue reali su K, mentre $C(K;\mathbb{C})$ le funzioni continue complesse su K dotate della norma del sup.

Dato $\mathcal{A} \subset C(K)$ diciamo che è una **sottoalgebra** se è uno spazio vettoriale e chiuso rispetto al prodotto e diciamo che **separa i punti** se $\forall x_1, x_2 \in K$ con $x_1 \neq x_2$ allora $\exists f \in \mathcal{A}$ tale che $f(x_1) \neq f(x_2)$.

- *Caso reale:* se $\mathcal{A}$ è una sottoalgebra di $C(K)$ che separa i punti e contiene le costanti allora $\overline{\mathcal{A}} = C(K)$.
- *Caso complesso:* se $\mathcal{A}$ è una sottoalgebra di $C(K;\mathbb{C})$ che separa i punti, contiene le costanti e *chiusa per coniugio* allora $\overline{\mathcal{A}} = C(K;\mathbb{C})$.

Osservazioni.

- Se $K = [0,1]$, $\mathcal{A} =$ "polinomi reali" $\implies \overline{\mathcal{A}} = C(K;\mathbb{C})$.
- L'ipotesi di separare i punti è necessaria, se ad esempio $\exists x_1, x_2$ tali che $x_1 \neq x_2$ e per ogni f abbiamo $f(x_1) = f(x_2)$ allora varrà analogamente anche per ogni funzione nella chiusura ma le funzioni continue separano i punti.
- È anche necessario che $\mathcal{A} \supset$ "costanti", ad esempio dato $x_0 \in K$ ed $\mathcal{A} := \{f \in C(K) \mid f(x_0) = 0\}$ abbiamo che $\overline{\mathcal{A}} = \mathcal{A} \subsetneq C(K)$.
- Anche la chiusura per coniugio è necessaria, infatti ad esempio preso $K = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq 1\}$, $\mathcal{A} =$ "polinomi complessi", $\mathcal{A}$ separa i punti e contiene le costanti però $\overline{\mathcal{A}}$ sono solo le funzioni olomorfe su K.

In particolare, vorremmo applicare questo teorema alle funzioni 2π-periodiche ristrette a $[-\pi, \pi]$ che però non verificano la separazione dei punti in quanto per la periodicità $f(-\pi) = f(\pi)$. Nel seguente corollario vediamo come possiamo estendere leggermente il teorema passando ai quozienti topologici.

Corollario. Sia $\mathcal{A}$ una sottoalgebra di $C(K)$ (o analogamente per $C(K;\mathbb{C})$) che contiene le costanti (e nel caso complesso anche chiusa per coniugio). Definiamo la relazione di equivalenza $x_1 \sim x_2$ se $f(x_1) = f(x_2)$ per ogni $f \in \mathcal{A}$. Allora,

$$\overline{\mathcal{A}} = \{f \in C(K) \mid f(x_1) = f(x_2) \text{ se } x_1 \sim x_2\}.$$

Dimostrazione Corollario. È chiaro che $\mathcal{A} \subset X \coloneqq \{f \in C(K) \mid f(x_1) = f(x_2) \text{ se } x_1 \sim x_2\}$. Data $g \in X$, definiamo $\widetilde{g}\colon {}^{K}\!/\!_{\sim} \to \mathbb{C}$ in modo che $g = \widetilde{g} \circ \pi$. Osserviamo che ${}^{K}\!/\!_{\sim}$ è compatto e T_2 e che $\widetilde{\mathcal{A}} = \{\widetilde{f}\colon f \in \mathcal{A}\}$ soddisfa le ipotesi del teorema di Stone-Weierstrass, quindi $\overline{\widetilde{\mathcal{A}}} = C\left({}^{K}\!/\!_{\sim};\mathbb{C}\right)$, quindi per ogni $g \in X$ esiste una successione $\widetilde{g}_n \in \widetilde{\mathcal{A}}$ tale che $\widetilde{g}_n \to \widetilde{g}$ uniformemente e quindi $g_n \to g$ uniformemente.

$$\begin{tikzcd} K \arrow[r, "g"] \arrow[d, "\pi"'] & \mathbb{C} \\ {}^{K}\!/\!_{\sim} \arrow[ur, dashed, "\widetilde{g}"'] & \end{tikzcd}$$

□

Dimostrazione Teorema 1. Vogliamo vedere che

i) $\mathcal{F}$ è un sistema ortonormale.

Dimostrazione. Basta calcolare $\langle e_n; e_m\rangle$ per ogni $n, m \in \mathbb{Z}$

$$\langle e_n; e_m\rangle = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{inx}}{\sqrt{2\pi}} \cdot \overline{\frac{e^{inx}}{\sqrt{2\pi}}}\,\mathrm{d}x = \begin{cases} \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} 1\,\mathrm{d}x = 1 & \text{se } n = m \\ \dfrac{1}{2\pi}\left[\dfrac{e^{i(n-m)x}}{i(n-m)}\right]_{-\pi}^{\pi} = 0 & \text{se } n \neq m \end{cases}$$

ii) $\mathcal{F}$ è completo.

Dimostrazione. Questo punto richiede il teorema di Stone-Weierstrass.

Consideriamo

$$\mathcal{A} = \mathrm{Span}_{\mathbb{C}}(\mathcal{F}) = \left\{\sum_n a_n e^{inx}\right\} = \{p(e^{inx}) \mid p \text{ polinomio a esponenti interi}\}.$$

Segue che $\mathcal{A}$ è una sottoalgebra che separa i punti di K tranne $-\pi$ e π ed è chiusa per coniugio.

Per il corollario[1] $\overline{\mathcal{A}}^{C} = \{f \in C([-\pi, \pi];\mathbb{C}) \mid f(-\pi) = f(\pi)\}$. Dato che la convergenza uniforme implica la convergenza in L^2 per spazi di misura finita, abbiamo:

$$\overline{\mathcal{A}}^{L^2} \supseteq \{f \in C([-\pi, \pi];\mathbb{C}) \mid f(-\pi) = f(\pi)\}.$$

Inoltre, $\overline{\mathcal{A}}^{L^2} \supseteq \{f \in C([-\pi, \pi];\mathbb{C})\}$ in quanto, una $f \in C([-\pi, \pi];\mathbb{C})$ può essere approssimata in L^2 tramite funzioni f_n che coincidono in $\{-\pi, \pi\}$. Definiamo $f_n = f \cdot \varphi_n$, dove le

[1] Notiamo che la topologia su $\mathcal{A}$ è quella data dalla norma del sup delle funzioni continue quindi la chiusura è rispetto a tale norma e la indichiamo con $\overline{\mathcal{A}}^{C}$.

φ_n sono tali che $\varphi_n(-\pi) = \varphi_n(\pi) = 0$, $\varphi_n = 1$ su $[1/n - \pi, \pi - 1/n]$; notiamo che $f_n \to f$ in L^2.

[TODO: Disegnino delle φ_n]

Infine poiché le funzioni continue sono dense in L^2 segue che $\overline{\mathcal{A}}^{L^2} = L^2$.

□

Esempio (calcolo coefficienti di Fourier).

- $\cos x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2} = \frac{1}{2}e^{ix} + \frac{1}{2}e^{-ix}$, allora $c_n = \begin{cases} \frac{1}{2} & n = \pm 1 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$.
- $(\sin x)^2 = (\frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i})^2 = \frac{1}{4}e^{2ix} + \frac{1}{2} - \frac{1}{4}e^{-2ix}$, allora $c_n = \begin{cases} -\frac{1}{4} & n = \pm 2 \\ \frac{1}{2} & n = 0 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$.
- $f(x) = x, c_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,\mathrm{d}x = 0$. Per $n \neq 0$:

$$c_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} xe^{-inx}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2\pi}\left|\frac{xe^{-inx}}{-in}\right|_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{e^{-inx}}{-in}\,\mathrm{d}x = \frac{(-1)^n i}{n}.$$

Calcoliamo ora $\sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} |c_n|^2$. Valgono le uguaglianze

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n|^2\, i = 2\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}$$
$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n|^2\, i = \frac{1}{2\pi}\|x\|_2^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^2\,\mathrm{d}x = \frac{2}{2\pi}\cdot\frac{\pi^3}{3} = \frac{\pi^2}{3}.$$

Dunque $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^3}{6}$.

4.1 Regolarità di f e dei coefficienti

Proposizione 1. Data $f \in [-\pi, \pi] \to \mathbb{C}$ tale che

(R) $f \in C^1$ (basta f continua e C^1 a tratti).

(CB) $f(-\pi) = f(\pi)$.

Allora $c_n(f') \overset{(\star)}{=} in\; c_n(f)$.

Derivazione formale della formula

$$f(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n e^{inx} \xrightarrow{\text{derivata}} f'(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} in\; c_n e^{inx}$$

Dimostrazione. Vale quanto segue

$$\begin{aligned} c_n(f') &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)' e^{-inx}\,\mathrm{d}x \\ &\underbrace{=}_{\text{int. per parti}} \frac{1}{2\pi} \overbrace{\cancel{\left. f(x)e^{-inx}\right|_{-\pi}^{\pi}}}^{f(-\pi)=f(\pi),\ e^{-in\pi}=e^{-in(-\pi)}} - \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)(-in)e^{-inx}\,\mathrm{d}x \\ &= (in)\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-inx}\,\mathrm{d}x = in\ c_n(f). \end{aligned}$$

□

Esercizio. Trovare l'analogo della formula della derivata nel caso di cui non valga la condizione al bordo (CB). [TO DO]

Osservazione. In verità, basta ancora meno. Possiamo riformulare la Proposizione 1 come segue.

Proposizione 1'. Data $f\colon [-\pi,\pi]\to\mathbb{C}$ tale che

(R') f è continua.

(CB) esiste $g\in L^1([-\pi,\pi],\mathbb{C})$ tale che $f(x) = f(-\pi) + \displaystyle\int_{-x}^{x} g(t)\,\mathrm{d}t$.

Allora la formula ($\star$) diventa $c_n(g) = in\ c_n(f)$.

Proposizione 2. Data f come nella Proposizione 1, valgono le seguenti

i) $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{Z}} n^2 |c_n(f)|^2 = \frac{\|f'\|_2^2}{2\pi} < +\infty$.

ii) $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{Z}} |n|^\alpha |c_n(f)| < +\infty$ per ogni $\alpha < 1/2$.

iii) La serie di Fourier converge [1]totalmente.

Dimostrazione.

i) $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{Z}} n^2 |c_n(f)|^2 \overbrace{=}^{(*)} \sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n(f')|^2 \underbrace{=}_{\text{Parseval}} \|f'\|_2^2/2\pi \overbrace{<}^{f'\in L^1([-\pi,\pi],\mathbb{C})\subset L^2([-\pi,\pi],\mathbb{C})} +\infty.$

ii) $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{Z}} |n|^\alpha |c_n(f)| \underbrace{\le}_{(n\neq 0)} \sum_{n\in\mathbb{Z}} |n|\,|c_n(f)|\cdot\frac{1}{|n|^{1-\alpha}} \underbrace{\le}_{\text{C-S per }\ell^2} \overbrace{\left(\sum_{n\in\mathbb{Z}} |n|^2 |c_n(f)|^2\right)^{1/2}}^{<+\infty \text{ per il punto ii)}} \cdot \overbrace{\left(\sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{1}{|n|^{2-2\alpha}}\right)^{1/2}}^{\alpha<1/2\ \Rightarrow\ <+\infty} < +\infty.$

iii) Dal punto precedente con $\alpha = 0$ otteniamo $\displaystyle\sum \left\|c_n(f)e^{inx}\right\|_\infty = \sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n(f)| < +\infty.$ □

[1] $\sum a_n(x)$ converge totalmente se converge la serie $\sum \|a_n(x)\|_\infty$.

Proposizione 3. Data $f \in [-\pi, \pi] \to \mathbb{C}$ tale che

(R_k) $f \in C^k$ (oppure $f \in C^{k-1}$ e $D^{k-1}f$ è C^1 a tratti).

(CB_{k-1}) $D^h f(-\pi) = D^h f(\pi)$ per $h = 0, 1, \dots, k-1$.

Allora

i) $c_n(D^h f) = (in)^h c_n(f)$ per ogni $n \in \mathbb{Z}$ per ogni $h = 1, \dots, k$.

ii) $\sum |n|^{2k} |c_n(f)|^2 \leq \dfrac{\left\|D^k f\right\|_2^2}{2\pi} < +\infty$.

iii) $\sum_{n\in\mathbb{Z}} |n|^{\alpha} |c_n(f)| < +\infty$ per ogni $\alpha < k - 1/2$.

iv) La serie di Fourier di f converge totalmente con tutte le derivate fino all'ordine $k-1$.

Proposizione 4. Se f è continua e $\sum_{n\in\mathbb{Z}} |n|^{k-1} |c_n(f)| < +\infty$ allora $f \in C^{k-1}$ e soddisfa (CB_{k-1}).

Dimostrazione. Preso $h = 0, 1, \dots, k-1$ vale

$$D^h(c_n(f)e^{inx}) = c_n(f)(in)^h e^{inx}$$
$$\left\|D^h(c_n(f)e^{inx})\right\| = |c_n(f)|\,|n|^h \leq |c_n(f)|\,|n|^{k-1}.$$

Dunque $\sum D^h \left(c_n(f)e^{inx}\right)$ converge totalmente e quindi uniformemente per ogni $h \leq k-1$ ad $\widetilde{f}\colon [-\pi, \pi] \to \mathbb{C}$ di classe C^{k-1}. Ma

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left\| \sum_{-N}^{N} c_n e^{inx} - \widetilde{f}(x) \right\|_2 \leq \left\| \sum_{-N}^{N} c_n e^{inx} - \widetilde{f}(x) \right\|_\infty \xrightarrow{N\to+\infty} 0.$$

Ma $\sum c_n e^{inx} \to \widetilde{f}$ uniformemente, allora $\sum_{-N}^{N} c_n e^{inx} \to \widetilde{f}$ in L^2. Allora $f = \widetilde{f}$ nel senso L^2. Siccome $f, \widetilde{f}$ sono continue e coincidono quasi ovunque, vale $f = \widetilde{f}$. Abbiamo usato il lemma

Lemma. Date $f, \widetilde{f}$ continue e $f(x) = \widetilde{f}(x)$ per quasi ogni x, allora $f(x) = \widetilde{f}(x)$ per ogni x. □

Osservazione. $f \in C^{k-1}([-\pi, \pi]) + (CB_{k-1})$ se solo se f è la restrizione a $[-\pi, \pi]$ di una funzione 2π-periodica e C^{k-1}.

4.2 Convergenza puntuale della serie di Fourier

Teorema. Data $f \in L^1([-\pi, \pi], \mathbb{C})$ (estesa in modo 2π-periodico a tutto $\mathbb{R}$) tale che esiste $\overline{x} \in \mathbb{R}$ ed esiste $\alpha > 0$ tale che f è α-Holderiana in $\overline{x}$, cioè esiste $\delta > 0$, $M < +\infty$ per cui

$$|f(\overline{x}+t) - f(\overline{x})| \leq M\,|t|^{\alpha} \qquad \forall t\colon\ |t| < \delta \iff \limsup_{t\to 0} \frac{|f(\overline{x}+t) - f(\overline{x})|}{|t|^{\alpha}} < +\infty.$$

Allora $\sum_{-\infty}^{\infty} c_n(f)e^{in\overline{x}}$ converge a $f(\overline{x})$. Cioè $\sum_{-N}^{N} c_n(f)e^{in\overline{x}} \xrightarrow{N\to\infty} f(\overline{x})$

Lavoro preparatorio: rappresentare somme parziali di serie di Fourier con "convoluzione":
Data $f \in L^1([-\pi,\pi],\mathbb{C})$, $N = 1, 2, \dots$ (estesa a funzioni 2π-periodiche su $\mathbb{R}$).

$$S_N f(x) \coloneqq \sum_{-N}^{N} c_n e^{inx}$$

Riscriviamo

$$\begin{aligned} S_N f(x) \coloneqq \sum_{-N}^{N} c_n e^{inx} &= \sum_{-N}^{N} \frac{1}{2\pi} \left(\int_{-\pi}^{\pi} f(y) e^{-iny} \, \mathrm{d}y \right) e^{inx} \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(y) \left(\sum_{n=-N}^{N} e^{in(x-y)} \right) \mathrm{d}y. \end{aligned}$$

Poniamo $D_N(z) \coloneqq \sum_{n=-N}^{N} e^{inz}$ che si definisce **nucleo di Dirichlet**. Allora

$$\begin{aligned} S_N f(x) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(y) D_N(x-y) \, \mathrm{d}y \overbrace{=}^{x-y=t,\, \mathrm{d}y = \mathrm{d}t} \frac{1}{2\pi} \int_{x-\pi}^{x+\pi} f(x-t) D_N(t) \, \mathrm{d}t \\ &\overbrace{=}^{(\star)} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x-t) D_N(t) \, \mathrm{d}t \end{aligned}$$

Dove $(\star)$ è il seguente lemma.

Lemma. Se g è T-periodica e $g \in L^1([-\pi,\pi],\mathbb{C})$, allora

$$\int_0^T g(\tau) \, \mathrm{d}\tau = \int_c^{c+T} g(\tau - s) \, \mathrm{d}\tau \quad \forall s \; \forall c.$$

Ne segue che

$$S_N f(x) \coloneqq \sum_{-N}^{N} c_n(f) e^{inx} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x-t) D_N(t) \, \mathrm{d}t$$

dove

$$D_N(t) = \sum_{-N}^{N} e^{int} = \frac{\sin((N+1/2)t)}{\sin(t/2)}.$$

Infatti,

$$\begin{aligned} D_N(t) &= \sum_{-N}^{N} e^{int} = \sum_{-N}^{N} (e^{it})^n = e^{-iNt} \cdot \sum_{n=0}^{2N} (e^{it})^n \\ &= \frac{e^{-i(N+1/2)t}}{e^{-it/2}} \cdot \frac{e^{(2N+1)it} - 1}{e^{it} - 1} = \frac{e^{(N+1/2)it} - e^{-(N+1/2)it}}{e^{it/2} - e^{-it/2}} \\ &= \frac{\sin((N+1/2)t)}{\sin(t/2)}. \end{aligned}$$

Il seguente lemma riassume quanto detto finora.

Lemma. (di rappresentazione di $S_n f$ come convoluzione) Data $f \in L^1([-\pi,\pi;\mathbb{C}])$ (estesa a funzioni 2π-periodiche su $\mathbb{R}$) vale Ricapitolando data f come sopra abbiamo visto che

$$S_N f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x-t) D_N(t) \, \mathrm{d}t \qquad \text{con } D_N(t) \coloneqq \sum_{n=-N}^{N} e^{int} = \frac{\sin\left(\left(N + \frac{1}{2}\right) t\right)}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)}$$

Osservazione. In particolare: $\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} D_N(t)\,\mathrm{d}t = 1.$

Lemma. (di Riemann-Lebesgue (generalizzato)). Data $g \in L^1(\mathbb{R})$ e $h \in L^\infty(\mathbb{R})$ con h T-periodica, allora

$$\int_{\mathbb{R}} g(x)h(yx)\,\mathrm{d}x \xrightarrow{y\to\pm\infty} \underbrace{\left(\int_{\mathbb{R}} g(x)\,\mathrm{d}x\right)}_{a}\underbrace{\left(⨍_0^T h(x)\,\mathrm{d}x\right)}_{m}$$

Dimostrazione. Per ogni s, y poniamo $\Phi(y,s) := \int_{\mathbb{R}} g(x)h(yx+s)\,\mathrm{d}x$ con $s, y \in \mathbb{R}$. Dunque, vogliamo dimostrare che $\Phi(y,0) \xrightarrow{y\to\pm\infty} am$. Vedremo che valgono le seguenti

i) $\forall y \;\; ⨍_0^T \Phi(y,s)\,\mathrm{d}s = am.$

ii) $\forall s \;\Phi(y,s) - \Phi(y,0) \xrightarrow{y\to\pm\infty} 0.$

da cui segue subito che

$$\Phi(y,0) - ma = ⨍_0^T \Phi(y,0) - \Phi(y,s)\,\mathrm{d}s \xrightarrow{y\to\pm\infty} 0$$

per convergenza dominata; dove dalla ii) segue la convergenza puntuale e come dominazione usiamo

$$\Phi(y,0) - \Phi(y,s)| \leq 2\left\|g\right\|_1 \left\|h\right\|_\infty.$$

Mostriamo ora i due punti.

i) Esplicitiamo e applichiamo Fubini-Tonelli

$$⨍_0^T \Phi(y,s)\,\mathrm{d}s = ⨍_0^T \int_{\mathbb{R}} g(x)h(yx+s)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}s = \int_{\mathbb{R}} \underbrace{⨍_0^T h(yx+s)\,\mathrm{d}s}_{m} \cdot g(x)\,\mathrm{d}x$$

$$= m\int_{\mathbb{R}} g(x)\,\mathrm{d}x = ma$$

e possiamo usare Fubini-Tonelli in quanto

$$\int_{\mathbb{R}} ⨍_0^T |h(yx-s)|\,\mathrm{d}s \cdot |g(x)|\,\mathrm{d}x \leq \int_{\mathbb{R}} \left\|h\right\|_\infty |g(x)|\,\mathrm{d}x = \left\|h\right\|_\infty \cdot \left\|g\right\|_1.$$

ii) Notiamo che

$$\Phi(y,s) = \int_{\mathbb{R}} g(x)h\left(y\left(x+s/y\right)\right)\,\mathrm{d}x = \begin{pmatrix} t = x + s/y \\ \mathrm{d}t = \mathrm{d}x \end{pmatrix} = \int_{\mathbb{R}} g\left(t - s/y\right)h(yt)\,\mathrm{d}t$$

$$\implies \Phi(y,s) - \Phi(y,0) = \int_{\mathbb{R}} \left(g\left(t - \frac{s}{y}\right) - g(t)\right)h(yt)\,\mathrm{d}t$$

$$\implies |\Phi(y,s) - \Phi(y,0)| = \int_{\mathbb{R}} |\tau_{s/y}g - g| \cdot |h(yt)|\,\mathrm{d}t \leq \left\|\tau_{s/y}g - g\right\|_1 \cdot \left\|h\right\|_\infty \xrightarrow{y\to\pm\infty} 0.$$

$\square$

Dimostrazione del Teorema.

$$\begin{aligned}
S_N f(\bar{x}) - f(\bar{x}) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\bar{x}-t)D_N(t)\,\mathrm{d}t - \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\bar{x})D_N(t)\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} (f(\bar{x}-t) - f(\bar{x}))D_N(t)\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{f(\bar{x}-t) - f(\bar{x})}{\sin\frac{t}{2}} \sin\left(\left(N+\frac{1}{2}\right)t\right)\,\mathrm{d}t \\
&= \int_{-\pi}^{\pi} g(t)\cdot \sin\left(\left(N+\frac{1}{2}\right)t\right)
\end{aligned}$$

Applicando il Lemma di Riemann-Lebesgue otteniamo:

$$S_N f(\bar{x}) - f(\bar{x}) \xrightarrow{N\to+\infty} \left(\int g(x)\,\mathrm{d}x\right)\cdot \fint_0^{\pi} \sin x\,\mathrm{d}x = 0.$$

In particolare, per applicare il lemma serve $g \in L^1([-\pi,\pi])$; ma infatti per $|t| \leq \delta$

$$|g(t)| \leq \frac{|f(\bar{x}-t) - f(\bar{x})|}{|\sin\frac{t}{2}|} \leq \frac{M|t|^\alpha}{|t|/\pi} = \frac{M\pi}{|t|^{1-\alpha}} \in L^1([-\delta,\delta]).$$

Invece per $\delta \leq |t| \leq \pi$ basta

$$|g(t)| \leq \frac{|f(\bar{x}-t)| + |f(\bar{x})|}{\sin\frac{\delta}{2}} \in L^1([-\pi,\pi]).$$

$\square$

Proposizione. Data $f \in L^1([-\pi,\pi])$ estesa per periodicità e dato $\bar{x}$ tale che esistano i limiti a destra e sinistra di f in $\bar{x}$ detti L^+ e L^- ed f α-Hölderiana a sinistra e destra si può vedere che vale

$$S_N f(\bar{x}) \xrightarrow{N} \frac{L^+ + L^-}{2}.$$

Capitolo 5

Applicazioni della serie di Fourier

5.1 Equazione del calore

Sia Ω un aperto di $\mathbb{R}^d$ e $u(t,x)\colon [0,T)\times\Omega \to \mathbb{R}$ e chiamiamo x la *variabile spaziale* e t la *variabile temporale*. In dimensione 3 l'insieme Ω rappresenta un solido di materiale conduttore omogeneo e $u(t,x)$ rappresenta la temperatura in x all'istante t. Dunque u risolve l'equazione del calore

$$u_t = c \cdot \Delta u$$

dove con u_t indichiamo la derivata parziale di u rispetto al tempo, c è una costante fisica che porremo uguale ad 1 e Δu è il laplaciano rispetto alle dimensioni spaziali ovvero

$$\Delta u = \sum_{i=1}^{d} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} = \operatorname{div}(\nabla_x u).$$

Vedremo che la soluzione di $u_t = \Delta u$ esiste ed è unica specificando $u(0,\,\cdot\,) = u_0$ condizione iniziale con $u_0\colon \Omega \to \mathbb{R}$ data e delle condizioni al bordo come ad esempio

- *Condizioni di Dirichlet*: $u = v_0$ su $[0,T)\times\partial\Omega$ con v_0 funzione fissata. Possiamo pensare come fissare delle sorgenti di calore costanti sul bordo.
- *Condizioni di Neumann:* $\dfrac{\partial u}{\partial \nu}$ con ν direzione normale al bordo. Essenzialmente ci sta dicendo che non c'è scambio di calore con l'esterno.

In particolare scriveremo

$$\begin{cases} u_t = \Delta u \quad \text{su } \Omega \\ u(0,\,\cdot\,) = u_0 \\ \text{Una delle condizioni al bordo su } \partial\Omega\text{...} \end{cases}$$

5.2 Risoluzione dell'equazione del calore (su $\mathbb{S}^1$)

Come conduttore consideriamo un anello di materiale omogeneo e sottile che parametrizziamo con $[-\pi, \pi]$. Dunque consideriamo $u\colon [0, T) \times [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ con le condizioni

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} \\ u(\,\cdot\,, \pi) = u(\,\cdot\,, -\pi) \\ u_x(\,\cdot\,, \pi) = u_x(\,\cdot\,, -\pi) \\ u(0, \,\cdot\,) = u_0 \end{cases} \tag{P}$$

in particolare la (ii) e la (iii) condizione non sono né quelle di Dirichlet né di Neumann, sono delle condizioni che effettivamente ci dicono che siamo "su $\mathbb{S}^1$"[1]; invece l'ultima è la condizione iniziale ed u_0 è data.

5.2.1 Risoluzione formale

Scriviamo u in serie di Fourier rispetto a x cioè

$$u(t, x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n e^{inx}$$

con $c_n \coloneqq c_n(u(t, \,\cdot\,))$ da cui derivando formalmente dentro le sommatorie otteniamo che u_t e u_{xx} sono

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} \dot{c}_n(t) e^{inx} = u_t = u_{xx} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} -n^2 c_n(t) e^{inx}$$

$$u_t = u_{xx} \iff \dot{c}_n(t) = -n^2 c_n(t) \;\; \forall n \, \forall t \quad \text{e} \quad u(0, \,\cdot\,) = u_0 \iff c_n(0) = c_n(u_0) \eqqcolon c_n^0$$

Dunque risolvere (**??**) equivale per ogni n che c_n che risolva il problema di Cauchy dato da

$$\begin{cases} \dot{y} = -n^2 y \\ y(0) = c_n^0 \end{cases} \tag{P$'$}$$

con soluzione $y(t) = \alpha e^{-n^2 t}$ cioè $c_n(t) = c_n^0 e^{-n^2 t}$ e quindi abbiamo

$$u(t, x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n^0 e^{-n^2 t} e^{inx} \tag{$*$}$$

Studiando questa soluzione formale possiamo fare le seguenti osservazioni che poi diventeranno dei teoremi

- *La soluzione esiste per $t \in [0, +\infty)$ ed è molto regolare per $t > 0$*

  Vedremo che la soluzione formale è proprio una soluzione al problema per $t \geq 0$, in particolare il termine $e^{-n^2 t} \to 0$ in modo più che polinomiale ed infatti vedremo che la soluzione sarà proprio C^∞ per $t > 0$.

- *La soluzione è unica*

  Tutti i problemi di Cauchy per i coefficienti $c_n(t)$ hanno un'unica soluzione dunque anche la soluzione u è unica.

[1] Bastano solo queste condizioni sulla funzione e sulla sua derivata perché intuitivamente le altre seguono applicando la (i).

- *In generale non esiste soluzione nel passato.*

  Se il numero di coefficienti $c_n^0 \neq 0$ è infinito allora il termine $e^{-n^2 t} \to +\infty$ molto velocemente per $t < 0$ e la serie diverge.

Teorema 1 (Esistenza e Regolarità).

Se $u_0 \colon [-\pi, \pi] \to \mathbb{C}$ (presa in L^2) è tale che $\sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n^0| < +\infty$ (ad esempio se $u_0 \in C^1$ ed è 2π-periodica) allora

$$u(t,x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \underbrace{c_n^0 e^{-n^2 t} e^{inx}}_{u_n(t,x)}$$

definisce una funzione $u \colon [0, +\infty) \times \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ tale che

i) u è 2π-periodica in x ed è reale se u_0 è reale.

ii) u è continua.

iii) u è C^∞ su $(0, +\infty) \times \mathbb{R}$.

iv) Risolve (**??**). In particolare vale $u_{tt} = u_{xx}$ e valgono le condizioni di periodicità per $t > 0$; e infine vale $u(0, \cdot\,) = u_0$ su $[-\pi, \pi]$.

Vediamo alcuni lemmi tecnici preparatori e sia R un rettangolo di $\mathbb{R}^d$ ovvero prodotto di intervalli con estremi aperti o chiusi.

Lemma 4. Date $v_n \colon R \to \mathbb{C}$ di classe C^k con $k = 1, 2, \ldots, +\infty$ tali che

- $v_n \to v$ uniformemente.
- $\forall \underline{h} = (h_1, \ldots, h_d) \in \mathbb{N}^d$ con $|\underline{h}| \coloneqq h_1 + \cdots + h_d \leq k$ (se $k = +\infty$ allora basta $|\underline{h}| < +\infty$) posto

  $$D^{\underline{h}} v_n \coloneqq \frac{\partial^k}{\partial x_1^{h_1} \cdots \partial x_d^{h_d}} v_n$$

  $D^{\underline{h}} v_n \to D^{\underline{h}} v$ converge uniformemente.

allora $v \in C^k$ e $D^{\underline{h}} v = \lim_n D^{\underline{h}} v_n$.

Dimostrazione. Si parte dal caso $d = 1$ e $k = 1$ e si procede per induzione. [TODO: Esercizio] $\square$

Corollario. 5 Date $u_n \colon R \to \mathbb{C}$ di classe C^k con $k = 1, \ldots, +\infty$ tali che

$$\forall \underline{h} \text{ con } |\underline{h}| \leq k \qquad \sum_n \left\| D^{\underline{h}} u_n \right\| < +\infty$$

allora $u \coloneqq \sum_n u_n$ è una funzione ben definita su R e C^k e $D^{\underline{h}} u = \sum_n D^{\underline{h}} u_n$ per ogni $\underline{h}$ con $|\underline{h}| \leq k$.

Lemma. 6 Data $u \colon R \to \mathbb{C}$ e rettangoli $R_i \subset R$ relativamente aperti in R tali che u è C^k sugli R_i per ogni i allora u è di classe C^k su $\widetilde{R} \coloneqq \bigcup_i R_i$.

Dimostrazione. Intuitivamente essere C^k è una proprietà locale ma preso $x \in R \implies \exists i\ x \in R_i$ e dunque segue per l'ipotesi sugli R_i. $\square$

Lemma. 7 Data $f \in L^2((-\pi, \pi); \mathbb{C})$

$$f \text{ è reale q.o.} \iff c_{-n}(f) = \overline{c_n(f)}$$

Osservazione. Notiamo che se $f \in L^1$ la freccia $\boxed{\Leftarrow}$ è molto più difficile.

Dimostrazione Teorema 1.

i) u_0 reale $\implies c^0_{-n} = \overline{c^0_n} \implies c^0_{-n}e^{-(-n)^2t} = \overline{c^0_n e^{-n^2t}} \iff c_{-n}(u(t,\,\cdot)) = \overline{c_n(u(t,\,\cdot))}$.

ii) Sia $R := [0,+\infty) \times \mathbb{R}$, $\|u_n\|_{L^\infty(R)} = \left\|c^0_n e^{-n^2t}\right\|_{L^\infty(R)} = |c^0_n|$ dunque $\sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} u_n$ converge totalmente su R e quindi u è ben definita e continua su R.

iii) Presi $h,k = 0,1,2,\ldots$ se proviamo a calcolare $D^h_t D^k_x u_n = c^0_n(-n)^{2h}(in)^k e^{-n^2t}e^{inx}$ vediamo non si riesce a stimare per $t \to 0$ infatti

$$\left\|D^h_t D^k_x u_n\right\|_{L^\infty(R)} = |c^0_n| \cdot |n|^{2h+k} \xrightarrow{n} \infty.$$

Serve prendere $\delta > 0$ e sia $R_\delta := (\delta,+\infty) \times \mathbb{R}$

$$\left\|D^h_t D^k_x u_n\right\|_{L^\infty(R_\delta)} = |c^0_n| \cdot |n|^{2h+k}e^{-n^2\delta}$$

in particolare per ogni h,k abbiamo che $|n|^{2h+k}e^{-n^2\delta} \xrightarrow{n} 0 \implies |n|^{2h+k}e^{-n^2\delta} \le m_{h,k} \implies \left\|D^h_t D^k_x u_n\right\|_{L^\infty(R_\delta)} \le m_{h,k} \cdot |c^0_n|$ e quindi $\sum_n D^h_t D^k_x u_n$ converge totalmente su R_δ.

Quindi u è C^∞ su R_δ per ogni $\delta > 0$ e siccome R_δ è aperto in R per il Lemma. 6 u è C^∞ su $\bigcup_{\delta>0} R_\delta = (0,+\infty) \times \mathbb{R}$.

iv) Essendo che u è 2π-periodica in x, valgono le condizioni al bordo; inoltre u_0 e $u(0,\cdot)$ hanno gli stessi coefficienti di Fourier, dunque $u_0 = u(0,\cdot)$ quasi ovunque, ma essendo continue vale $u_0 = u(0,\cdot)$ su $[-\pi,\pi]$; infine, $(u_n)_t = (u_n)_{xx} \implies \sum(u_n)_t = \sum(u_n)_{xx} \implies u_t = u_{xx}$ per $t > 0$.

□

Ora enunciamo il teorema di unicità, vogliamo un teorema con il minor numero di ipotesi possibile e che ci dà più informazioni; quindi in questo caso cerchiamo la più grande famiglia di funzioni (quindi la meno regolare possibile) sulla quale vale l'unicità della soluzione.

Teorema. 2 (Unicità) Sia $u\colon [0,T) \times [-\pi,\pi] \to \mathbb{C}$ continua, C^1 nel tempo e C^2 nello spazio per $t > 0$. Se u risolve (**??**) su $t > 0$ allora u è unica.

Definizione. Dato R un rettangolo e $u\colon R \to \mathbb{C}$ diciamo che u è C^k nella variabile x_i se $\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)^h u$ esiste per $h = 1,\ldots,k$ ed è continua su R.

Lemma. 8 Data $u\colon I \times [-\pi,\pi] \to \mathbb{C}$ di classe C^k in $t \implies c_n(D^h_t u(t,\,\cdot)) = D^h_t c_n(u(t,\,\cdot))$ per $h \le k$.

Dimostrazione.

$$c_n(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} u(t,x)e^{-inx}\,\mathrm{d}x \implies \dot{c}_n(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} u_t(t,x)e^{-inx}\,\mathrm{d}x = c_n(u_t(t,\,\cdot))$$

per il teorema di derivazione sotto il segno di integrale (Analisi 2?) □

Dimostrazione Teorema 2. Poniamo $c_n(t) := c_n(u(t,\,\cdot))$. Sappiamo che per $t > 0$ vale $\dot{c}_n(t) \overset{(*)}{=} c_n(u_t(t,\,\cdot)) \overset{(**)}{=} c_n(u_{xx}(t,\,\cdot)) = -n^2c_n(t)$, dove $(*)$ segue dal Lemma 8 e $(**)$ segue dalla regolarità dei coefficienti. Dunque i coefficienti c_n risolvono il problema di Cauchy

$$\begin{cases} \dot{y} = -n^2y \\ y(0) = c^0_n \end{cases}$$

che ha un'unica soluzione.

Nota. Sia $y\colon [0,T) \to \mathbb{R}^k$ funzione continua su $[0,T)$ e derivabile su $(0,T)$ che risolve l'equazione differenziale ordinaria $\dot{y} = f(t,y)$ su $(0,T)$ con $f\colon [0,T) \times \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^k$ continua. Allora y è $\mathcal{C}^1$ su $[0,T)$ e risolve $\dot{y} = f(t,y)$ su $[0,T)$.

Dalla nota sopra otteniamo che c_n è unico. □

Notazione. $\mathcal{C}^k_{\text{per}} = \{f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}\ \pi\text{-periodiche e } \mathcal{C}^k\}$.

Teorema 3 (di non esistenza nel passato). Esiste $u_0 \in \mathcal{C}^\infty_{\text{per}}$ tale che per ogni $\delta > 0$ non esiste $u\colon (-\delta, 0] \times [-\pi,\pi] \to \mathbb{C}$ soluzione di (**??**) (u continua, $\mathcal{C}^1$ in t e $\mathcal{C}^2$ in x per $t < 0$)

Dimostrazione. Sia u su $(-\delta, 0) \times [-\pi,\pi]$ un'eventuale soluzione. Sia $c_n(t)$ al solito. Dalla dimostrazione del Teorema 2 abbiamo che c_n risolve (**??**).

Quindi $c_n(t) = c_n^0 e^{-n^2 t}$. Scelgliamo c_n^0 (cioè u_0) in modo che

- $c_n^0 = O(|n|^{-a})$ per $n \to \pm\infty$ per ogni $a > 0$. ($\Rightarrow \sum |n|^k |c_n^0| < +\infty \ \ \forall k \Rightarrow u_0 \in \mathcal{C}^\infty_{\text{per}}$).
- $c_n^0 e^{-n^2 t} \nrightarrow 0$ per ogni $t < 0$.

Con un tale c_n^0 la soluzione non esiste al tempo t. Infatti, se per assurdo esistesse, i coefficienti di Fourier $c_n(t)$ sarebbero quadrato sommabili, ovvero dovrebbero tendere a zero ↯.

Prendiamo $c_n^0 = e^{-|n|}$. □

Esercizio. Dato u_0 sia T_* il massimo T per cui (**??**) ammette soluzione su $(-T, 0] \times [-\pi,\pi]$. Caratterizzare T_* in termini del comportamento asintotico di c_n^0 per $n \to \pm\infty$.

Suggerimento. Guardare $\log(|c_n^0|)/n^2$.

5.3 Equazione delle onde

Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ aperto, I intervallo temporale, $u\colon I \times \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$, l' equazione delle onde è

$$u_{tt} = v^2 \nabla u = \nabla_x u = \sum_{i=1}^{d} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}$$

dove v si chiama **velocità di propagazione**.

La soluzione è univocamente determinata specificando

- Le condizioni al bordo (come per il calore), ad esempio quelle di Dirichlet: $u = v_0$ su $I \times \partial\Omega$ oppure di Neumann: $\partial u / \partial \nu = 0$ su $I \times \partial\Omega$.
- Condizioni iniziali: $u(0,\cdot) = u_0, u_t(0,\cdot) = u_1$.

Esempio 1. Per $d = 1$, $\Omega = [0,1]$ rappresenta una sbarra sottile di materiale elastico. La sbarra è soggetta a vibrazioni longitudinali (onde sonore). La funzione $u(t,x)$ rappresenta lo spostamento dalla posizione di riposo x al tempo t. In tal caso, l'equazione delle onde è

$$u_{tt} = v^2 u_{xx}.$$

Esempio 2. Per $d = 2$, Ω rappresenta una sbarra sottile di materiale elastico che vibra trasversalmente. La funzione $u(t,x)$ rappresenta lo spostamento verticale del punto di coordinata

$x \in \Omega$ a riposo. Allora u soddisfa[1]

$$u_{tt} = v^2 \nabla v.$$

5.4 Risoluzione dell'equazione delle onde

Consideriamo il caso uno dimensionale. In tal caso l'equazione delle onde è la seguente.

$$\begin{cases} u_{tt} = v^2 u_{xx} \\ u(\cdot, \pi) = u(\cdot, -\pi) \\ u_x(\cdot, \pi) = u_x(\cdot, -\pi) \\ u(0, \cdot) = u_0 \\ u_t(0, \cdot) = u_1 \end{cases} \tag{P}$$

5.4.1 Risoluzione formale

Scriviamo $u(t, x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n(t) e^{inx}$. Deriviamo in t e due volte in x.

$$u_{tt} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \ddot{c}_n e^{inx}$$
$$u_{xx} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} -v^2 n^2 c_n e^{inx}$$

Abbiamo che

$$u_{tt} = v^2 u_{xx} \iff \ddot{c}_n = -v^2 n^2 c_n$$
$$u(0, \cdot) = u_0 \iff c_n(0) = c_n^0 \coloneqq c_n(u_0) \qquad u_t(0, \cdot) = u_1 \iff \dot{c}_n(0) = c_n^1 \coloneqq c_n(u_1)$$

Quindi u risolve (**??**) se solo se per ogni n, c_n risolve

$$\begin{cases} \ddot{y} = -n^2 v^2 y \\ y(0) = c_n^0 \\ \dot{y}(0) = c_n^1 \end{cases} \tag{P$'$}$$

Dunque,

- Per $n = 0$, $\ddot{y} = 0$ se solo se y è un polinomio di primo grado, ovvero $c_0(t) = c_0^0 + c_0^1 t$.
- Per $n \neq 0$, $y = \alpha_n^+ e^{invt} + \alpha_n^- e^{-invt}$ con

$$\alpha_n^\pm = \frac{1}{2} \left(c_n^0 \pm \frac{c_n^1}{inv} \right)$$

Quindi, la soluzione è

$$u(t, x) = c_0^0 + c_0^1 t + \sum_{n \neq 0} \left[\alpha_n^+ e^{in(x+vt)} + \alpha_n^- e^{in(x-vt)} \right] \tag{$*$}$$

Inoltre,

$$u(t, x) = c_0^0 + c_0^1 t + \varphi^+(x + vt) + \varphi^-(x - vt) \tag{$**$}$$

con $\varphi^\pm$ funzioni con coefficienti di Fourier $\alpha_n^\pm$ che si dicono **onde viaggianti**.

Nota. La (**??**) è specifica delle equazioni delle onde.

[1] Per oscillazioni piccole.

5.5 Risoluzione dell'equazione delle onde

Consideriamo il problema

$$\begin{cases} u_{tt} = v^2 u_{xx} \\ u(\,\cdot\,,\pi) = u(\,\cdot\,,-\pi) \\ u_x(\,\cdot\,,\pi) = u_x(\,\cdot\,,-\pi) \\ u(0,\,\cdot\,) = u_0 \\ u_t(0,\,\cdot\,) = u_1 \end{cases} \tag{P}$$

ed abbiamo visto che ha soluzione

$$u(t,x) = c_0^0 + c_0^1 t + \sum_{n\neq 0} (\alpha_n^+ e^{in(x+vt)} + \alpha_n^- e^{in(x-vt)}) \tag{$*$}$$

$$\alpha_n^\pm = \frac{1}{2}\left(c_n^0 \pm \frac{c_n^1}{inv}\right).$$

Inoltre, possiamo scrivere l'equazione $(*)$ come

$$u(t,x) = c_0^0 + c_0^1 t + \varphi^+(x+vt) + \varphi^-(x-vt) \tag{$**$}$$

dove φ^+, φ^- sono funzioni 2π-periodiche.

Vedremo i seguenti risultati

- Esistenza usando la forma $(**)$, specifico per equazione delle onde.
- Esistenza usando la forma $(*)$, che però richiede maggiore regolarità su u_0 e u_1.
- Unicità.

Teorema 1. Dati $u_0 \in C^1_{\text{per}}$ allora esistono c_0^0, c_0^1 e $\varphi^+, \varphi^- \in C^2_{\text{per}}$ tali che la u in $(**)$ è di classe C^2 su $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$, 2π-periodica in x e risolve (P).

Lemma 4. Date $h, g \in C^1(\mathbb{R})$ con g primitiva di h e $T > 0$ allora g è T-periodica $\iff$ h è T-periodica e $\int_0^T h(x)\,\mathrm{d}x = 0$.

Dimostrazione. Notiamo che h è T-periodica se e solo se $\forall x$ $\int_x^{T+x} h(x)\,\mathrm{d}x = \text{cost}$.

$$\int_x^{T+x} h(x)\,\mathrm{d}x = g\Big|_x^{T+x} = g(T+x) - g(x) = 0 \iff g \text{ è } T\text{-periodica}$$

Dimostrazione Teorema 1.

Parte 1. Se $c_0^0, c_0^1 \in \mathbb{R}$ e $\varphi^+, \varphi^- \in C^2_{\text{per}}$ allora la u data da $(**)$ è C^2 su $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ e 2π-periodica in x e risolve $u_{tt} = v^2 u_{xx}$.

$$\begin{aligned} u_{tt} &= [\ddot\varphi^+(x+vt) + \ddot\varphi^-(x-vt)]v^2 \\ u_{xx} &= \ddot\varphi^+(x+vt) + \ddot\varphi^-(x-vt) \end{aligned} \implies u_{tt} = v^2 u_{xx}$$

Parte 2. $\exists c_0^0, c_0^1 \in \mathbb{R}$ e $\varphi^+, \varphi^- \in C^2_{\text{per}}$ tali che la u data da $(**)$ soddisfa la condizione iniziale in (P), per $t = 0$, poste $\varphi^\pm = \varphi^\pm(x \pm v0)$

$$\begin{cases} c_0^0 + \varphi^+ + \varphi^- = u_0 \\ c_0^1 + v(\dot\varphi^+ - \dot\varphi^-) = u_1 \end{cases} \implies \begin{cases} \varphi^+ + \varphi^- = u_0 - c_0^0 \\ (\varphi^+ - \varphi^-)' = (u_1 - c_0^1)/v \end{cases}$$

ed ora fissiamo $c_0^0 = \fint_{-\pi}^{\pi} u_0 \, \mathrm{d}x$ e $c_0^1 = \fint_{-\pi}^{\pi} u_1 \, \mathrm{d}x$. In questo modo possiamo applicare il lemma precedente ed ottenere

$$\begin{cases} \varphi^+ + \varphi^- = g_0 \\ (\varphi^+ - \varphi^-)' = g_1' \end{cases} \implies \varphi^+ = \frac{1}{2}(g_0 + g_1) \qquad \varphi^- = \frac{1}{2}(g_0 - g_1)$$

□

Teorema 2. Siano $u_0, u_1 \in C^0_{\text{per}}$ tali che $\sum n^2 |c_n^0| < +\infty$ e $\sum |n| \cdot |c_n^1| < +\infty$. Allora $(*)$ definisce una funzione $u\colon \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ di classe C^2, 2π-periodica in x che risolve (P).

Dimostrazione.

$$u(t,x) = c_0^0 + c_0^1 t + \sum_{n \neq 0} (\underbrace{\alpha^+ e^{in(x+vt)}}_{v_n^+} + \underbrace{\alpha^- e^{in(x-vt)}}_{v_n^-})$$

Passo 1. Dimostriamo che $u \in C^0(\mathbb{R} \times \mathbb{R})$ e 2π-periodica in x.

La funzione u soddisfa le condizioni di periodicità. Per mostrare la continuità è sufficiente mostrare che la serie converga totalmente su $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

$$\left\| v_n^\pm \right\|_{L^\infty(\mathbb{R}\times\mathbb{R})} = |\alpha^\pm| = O\left(|c_n^0| + \frac{|c_n^1|}{n} \right)$$

che sono sommabili in n.

Passo 2. Mostriamo che $u \in C^2(\mathbb{R} \times \mathbb{R})$.

Abbiamo

$$\begin{aligned} &D_t^h D_x^k v_n^\pm = \alpha_n^\pm e^{in(x \pm vt)} (in)^k (ivn)^h \\ \implies &\left\| D_t^h D_x^k v_n^\pm \right\|_{L^\infty(\mathbb{R}\times\mathbb{R})} = |\alpha_n^\pm| \cdot |v|^h \cdot |n|^{k+h} = O(|c_n^0| \cdot |n|^{k+h} + |c_n^1| \cdot |n|^{k+h-1}) \end{aligned}$$

che è sommabile se $k + h \leq 2$ in n. La serie in $(*)$ converge totalmente su $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ con tutte le derivate di ordine $\leq 2 \implies u$ è C^2.

Passo 3. Dimostriamo che u risolve l'equazione $u_{tt} = v^2 u_{xx}$.

u risolve l'equazione perché derivata e serie commutano e per come abbiamo impostato (P′) $c_n(u(0,\,\cdot\,)) = c_n(u_0) \implies u(0,\,\cdot\,) = u_0$. $c_n(u_t(0,\,\cdot\,)) = c_n(u_1) \implies u_t(0,\,\cdot\,) = u_1$.

Teorema 3. (Unicità) Se $u\colon I \times [-\pi, \pi] \to \mathbb{C}$ è C^2 in x e t e risolve (P) allora è unica.

Dimostrazione. Si ripercorre la stessa dell'equazione del calore. Dimostriamo che i coefficienti $c_n(t) = c_n(u(t,\,\cdot\,))$ definiti per $t \in I$ risolvono (P′)...

5.6 Altre applicazioni della serie di Fourier

5.6.1 Disuguaglianza isoperimetrica

Sia D un aperto limitato con frontiera C^1 parametrizzata da un unico cammino γ (quindi niente buchi o più di una componente connessa). Allora $L^2 \geq 4\pi A$ dove L è la lunghezza di ∂D e A è l'area di D. Inoltre vale l'uguale se e solo se D è un disco.

Dimostrazione.

Possiamo scegliere $\gamma\colon [-\pi,\pi] \to \mathbb{R}^2 \simeq \mathbb{C}$ e γ parametrizzazione di ∂D in senso antiorario ed a velocità costante (da cui $|\dot\gamma(t)| = L/2\pi$)

Passo 1.

$$L^2 = 2\pi \int_{-\pi}^{\pi} |\dot\gamma|^2 \,\mathrm{d}t = 2\pi \,\|\dot\gamma\|_2 = 4\pi^2 \sum |c_n(\dot\gamma)|^2 = 4\pi^2 \sum n^2 |c_n|^2$$

Passo 2.

$$A \overset{(*)}{=} \frac{1}{2}\langle -i\dot\gamma, \gamma\rangle = \frac{1}{2} 2\pi \sum (-i(inc_n))c_n = \pi \sum n|c_n|^2$$

Vediamo che vale questa formula per l'area usata in $(*)$, poniamo $\gamma = \gamma_x + i\gamma_y$ allora

$$\begin{aligned}
\langle \dot\gamma, \gamma\rangle &= \int_{-\pi}^{\pi} \dot\gamma\,\overline{\gamma}\,\mathrm{d}t \\
&= \int_{-\pi}^{\pi} (\gamma_x - i\gamma_y)(\dot\gamma_x + i\dot\gamma_y)\,\mathrm{d}t = \\
&= \int_\gamma (x - iy)(\,\mathrm{d}x + i\,\mathrm{d}y) = \\
&= \int_D 2i\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 2iA
\end{aligned}$$

Passo 3. Infine $L^2 = 4\pi \sum n^2 |c_n|^2$ e $4\pi A = 4\pi \sum n|c_n|^2$, dunque segue subito che $L^2 \geq 4\pi A$ e vale l'uguale se e solo se $n^2 = n$ o se $c_n = 0$ per ogni $n \implies \gamma(t) = c_0 + c_1 e^{it}$ che è una circonferenza di centro c_0 e raggio $|c_1|$.

5.7 Appendice

Studiamo alcune variazioni dell'equazione del calore.

Nota. Un problema del tipo $u_t = a(t)\cdot u_{xx}$ si può risolvere ripercorrendo i passaggi della risoluzione dell'equazione del calore. Viceversa, il problema $u_t = a(x)\cdot u_{xx}$ non si può risolvere allo stesso modo, in quanto, non è vero che il prodotto di serie di Fourier ha come coefficienti il prodotto dei coefficienti.

Studiamo ora variazioni alle condizioni di bordo.

Osservazione. Quando proviamo a risolvere $u_t = u_{xx}$, passiamo alla serie di Fourier e deriviamo; per fare questo passaggio servono le condizioni al bordo[1]; dunque, togliendo le condizioni di periodicità il sistema non funziona più molto bene.

Introduciamo delle varianti della serie di Fourier.

- **Serie di Fourier su $[-\pi,\pi]^d$.** Data $u \in L^2([-\pi,\pi]^2, \mathbb{C})$, definiamo

$$u(x) = \sum_{\underline{n}\in\mathbb{Z}^d} c_{\underline{n}} e^{i\underline{n}x} \qquad c_{\underline{n}} = c_{\underline{n}}(u) := \frac{1}{(2\pi)^d}\int_{[-\pi,\pi]^d} u(x) e^{-i\underline{n}x}\,\mathrm{d}x$$

  con base di Hilbert

$$\mathcal{F} = \left\{ \frac{e^{i\underline{n}x}}{(2\pi)^{d/2}} : n \in \mathbb{Z}^d \right\}$$

[1] Anche se avevamo derivato le formule formalmente anche a posteriori l'ipotesi delle condizioni al bordo era necessaria.

C'è da dimostrare che $\mathcal{F}$ è una base di Hilbert.

Dimostrazione (idea).

- Ortonormalità. È un conto [TO DO].
- Completezza. Si può dimostrare come per $d = 1$, oppure si usa il seguente lemma.
  Lemma. Sia $\mathcal{F}_1 \coloneqq \{e_n^1\}$ base di Hilbert di $L^2(X_1, \mathbb{C})$ e $\mathcal{F}_2 \coloneqq \{e_n^2\}$ base di Hilbert di $L^2(X_2, \mathbb{C})$. Allora, una base di Hilbert di $L^2(X_1 \times X_2, \mathbb{C})$ è

$$\mathcal{F} = \left\{ e_{n_1,n_2}(x_1, x_2) \;\middle|\; e_{n_1}^1(x_1) e_{n_2}^2(x_2) \right\}$$

Formula chiave. Se $u \in C^1_{\text{per}}(\mathbb{R}^d) = \{$funzioni 2π-periodiche in tutte le variabili$\}$. Abbiamo che

$$c_{\underline{n}}(\nabla u) = i\underline{n} c_n(u), \qquad c_{\underline{n}}(\Delta u) = -\left|\underline{n}\right|^2 c_{\underline{n}}(u) \text{ se } u \in \mathcal{C}^2_{\text{per}}$$

- **Serie in seni.** Data $u \in L^2([0, \pi])$, allora

$$u(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(nx) \qquad b_n = b_n(u) \coloneqq \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} u(x) \sin(nx) \, \mathrm{d}x$$

con base di Hilbert

$$\mathcal{F} = \left\{ \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin(nx) \;\middle|\; n \geq 1 \right\}$$

Dimostrazione. Mostriamo l'ortonormalità e la completezza.

Ortonormalità. Sono conti. [TO DO]

Completezza. Data $u \in L^2([0, \pi])$. Sia $\widetilde{u}$ l'estensione dispari a $[-\pi, \pi]$. Allora

$$\widetilde{u} = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \widetilde{a}_n \cos(nx) + \widetilde{b}_n \sin(nx) \underset{\widetilde{u} \text{ dispari}}{=} \sum_{n=1}^{\infty} \widetilde{b}_n \sin(nx).$$

Osservazione. I coefficienti $\widetilde{b}_n = b_n$. Si può vedere in diversi modi, un modo possibile è questo.

$$\widetilde{b}_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \widetilde{u}(x) \sin(nx) \, \mathrm{d}x = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \widetilde{u} \sin(nx) \, \mathrm{d}x = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} u(x) \sin(nx) \, \mathrm{d}x = b_n.$$

Formula chiave. Data $u \in \mathcal{C}^2([0, \pi])$ con condizioni al bordo $u(\,\cdot\,, 0) = u(\,\cdot\,, \pi)$. Allora

$$b_n(\ddot{u}) = -n^2 b_n(u)$$

dove

$$\begin{aligned} b_n(\ddot{u}) &\coloneqq \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \ddot{u}(x) \sin(nx) \, \mathrm{d}x \\ &= \frac{2}{\pi} \left| \dot{u}(x) \sin(nx) \right|_0^{\pi} - \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \dot{u}(x) \cos(nx) \, \mathrm{d}x \\ &= -n \frac{2}{\pi} \left| u(x) \cos(nx) \right|_0^{\pi} - n^2 \underbrace{\left(\frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} u(x) \sin(nx) \, \mathrm{d}x \right)}_{b_{n(x)}} \end{aligned}$$

□

Applicazione (della serie in seni). Risoluzione di EDP su $[0,\pi]$ con condizioni di Dirichlet (omogenee) al bordo.

Esempio. Risolvere

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} \quad \text{su } [0,\pi] \\ u(\,\cdot\,,0) = u(\,\cdot\,,\pi) = 0 \\ u(0,\,\cdot\,) = u_0 \end{cases} \tag{P}$$

Soluzione. Poniamo $b_n^0 \coloneqq b_n(u_0)$. Scriviamo $u(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n(t)\sin(nx)$ serie di seni in x.

Formalmente,

$$u_t = \sum_{n=1}^{\infty} \dot{b}_n(t)\sin(nx) \qquad u_{xx} = \sum_{n=1}^{\infty} -n^2 b_n(t)\sin(nx)$$

Dunque,

$$u_t = u_{xx} \iff \dot{b}_n(t) = -n^2 b_n(t) \ \ \forall t \forall n$$

Cioè $b_n(t)$ risolve il problema di Cauchy.

$$\begin{cases} \dot{y} = -n^2 y \\ y(0) = \dot{b}_n \end{cases} \tag{P'}$$

Ovvero $b_n(t) = b_n^0 e^{-n^2 t}$, da cui

$$u(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{b_n^0 e^{-n^2 t}\sin(nx)}_{u_n}. \tag{$*$}$$

Teorema 1 (di esistenza nel futuro). Se $u_0\colon [0,\pi] \to \mathbb{R}$ è continua è $\sum_n |b_n^0| < +\infty$ (basta $u_0 \in \mathcal{C}^1$ e $u(0) = u(\pi) = 0$). Allora la u in (**??**) è ben definita e continua su $[0,+\infty) \times \mathbb{R}$ e risolve (**??**).

Dimostrazione. Dimostriamo il teorema per passi.

Passo 1. Mostriamo che u è ben definita e continua su $(0,+\infty) \times \mathbb{R}$: studiamo la norma del sup. Sia $R = [0,+\infty) \times \mathbb{R}$.

$$\|u_n\|_{L^\infty(R)} \le |b_n^0| \implies u_n \ \text{ converge totalmente su } \mathbb{R}.$$

Passo 2. Mostriamo che $\mathcal{C}^\infty$ su $(0,+\infty) \times \mathbb{R}$. Sia $R_\delta = (\delta,+\infty) \times \mathbb{R}$. Stimiamo le derivate.

$$D_t^k D_x^h u_n = b_n^0 (-n^2)^k e^{-n^2 t} \cdot n^h \cdot \underbrace{\cdots}_{\star}$$

$$\implies \left\| D_t^k D_x^h u_n \right\|_{L^\infty(R_\delta)} = |b_n^0| \quad \underbrace{e^{-n^2\delta} \cdot |n|^{2k+h}}_{\substack{\text{limitato in } n \\ \text{perché è infinitesimo in } n}}$$

Allora le norme delle derivate sono sommabili per ogni n, dunque $u \in \mathcal{C}^\infty(R_\delta)$ per ogni δ, da cui $u \in \mathcal{C}^\infty((0,+\infty),\mathbb{R})$.

Passo 3. Mostriamo che la $u(t,x)$ definita in (**??**) risolve (**??**).

- u risolve $u_t = u_{xx}$ per $t > 0$. Infatti, l'equazione è lineare per quanto mostrato al punto sopra e dunque posso scambiare serie e derivata.

- u soddisfa la condizione iniziale $u(0, \cdot\,) = u_0$, perché hanno gli stessi coefficienti di Fourier.
- Sono soddisfatte anche le condizioni al bordo, infatti

$$u(\,\cdot\,, 0) = u(\,\cdot\,, \pi) = 0$$

$\square$

Domanda. Quale ipotesi su u_0 garantisce $\sum_n |b_n^0| < +\infty$? Basta $u_0 \in \mathcal{C}^1$ e $u(0) = u(\pi) = 0$.

Teorema 2 (non esistenza nel passato). Esiste $u_0 \colon [0, \pi] \to \mathbb{R}$ $\mathcal{C}^\infty$ (+ condizioni al bordo) tale che per ogni $\delta > 0$ (**??**) non ha alcuna soluzione $u \colon (-\delta, 0] \times [0, \pi] \to \mathbb{R}$ continua e $\mathcal{C}^1$ in t e $\mathcal{C}^2$ in x.

Teorema 3 (di unicità). [TO DO: aggiungere (è sempre lo stesso).]

5.7.1 Considerazioni finali su SdF e serie in seni

Notiamo che l'efficacia per la soluzione di certe EDP dipende dal fatto che

$$c_n(u) = inc_n(u) \qquad b_n(\ddot{u}) = -n^2 b_n(u)$$

che segue (almeno formalmente) da $(e^{inx})' = ine^{inx}$ e $(\sin(nx))'' = -n^2 \sin(nx)$.

Cioè che $\left\{e^{inx}/\sqrt{2\pi}\right\}$ è una base ortonormale di $L^2([-\pi, \pi], \mathbb{C})$ di autovettori di D e $\left\{\sqrt{2/\pi}\sin(x)\right\}$ è una base ortonormale di autovettori di D^2.

Analogamente per risolvere $u_t = \Delta u$ su Ω, basterebbe avere $\{e_n\}$ base ortonormale di $L^2(\Omega)$ fatta di autovettori del laplaciano.

Per avere una base ortonormale di autovettori di un operatore T serve che T sia autoaggiunto (almeno in dimensione finita).

Definizione. Dato H spazio di Hilbert complesso o reale, D sottospazio denso di H, $T \colon D \to H$ lineare (non necessariamente continuo), dico che T è **autoaggiunto** se $\langle Tx, y\rangle = \langle x, Ty\rangle$ per ogni $x, y \in D$.

Proposizione. Dato T come sopra

i) Se λ è autovalore di T (ovvero tale che $\exists x \neq 0$ tale che $Tx = \lambda x$) allora λ è reale.

ii) Dati $\lambda_1 \neq \lambda_2$ autovalori allora $V_{\lambda_1} \perp V_{\lambda_2}$ dove $V_\lambda \coloneqq \{x \mid Tx = \lambda x\}$.

Nota. In dimensione infinita manca un teorema spettrale, ovvero tale che $\overline{\bigoplus_\lambda V_\lambda} = H$.

Esempio 1. Sia $H = L^2([-\pi, \pi], \mathbb{C})$, $D = \{u \in \mathcal{C}^2(-\pi, \pi) \mid u(-\pi) = u(\pi)\}$ e $T \colon D \to H$ tale che $u \mapsto iu$. Mostrare che

i) T è autoaggiunto

ii) Gli autovalori di T sono $\lambda_n = n$ con $n \in \mathbb{Z}$ $V_{\lambda_n} = V_n = \operatorname{Span}\{e^{inx}\}$.

iii) T non è continuo

In questo caso esiste una base ortonormale di L^2 di autovettori di T. [TO DO: aggiustare].

Dimostrazione.

i) Dati $u, c \in D(= \mathcal{C}^1_{\text{per}})$, allora

$$
\begin{aligned}
\langle Tu, v \rangle &= \int_{-\pi}^{\pi} i\dot{u}\overline{v}\,\mathrm{d}x = |iu\overline{v}|_{-\pi}^{\pi} - \int_{-\pi}^{\pi} iu\overline{v}\,\mathrm{d}x \\
&= \int_{-\pi}^{\pi} u\overline{iv}\,\mathrm{d}x = \langle u, Tv \rangle
\end{aligned}
$$

ii) Questo è un esercizio di equazioni differenziali ordinarie. Risolviamo il problema

$$
\begin{cases} -iu = \lambda u \quad \text{su } [-\pi, \pi] \\ u(\pi) = u(-\pi) \end{cases}
$$

da cui $\dot{u} - i\lambda u = 0$, che ha polinomio associato $t - i\lambda = 0$ con radice $i\lambda$. In conclusione la soluzione del problema sopra è $\alpha e^{i\lambda x}$.

Dalla condizione al bordo abbiamo che $\alpha e^{i\lambda\pi} = e^{-i\lambda\pi}$ dunque $e^{i\lambda\pi} = e^{-i\lambda\pi} \iff e^{2i\lambda\pi} = 1 \iff \lambda \in \mathbb{Z}$.

iii) Siccome gli autovalori sono illimitati, T non è continuo. □

Esempio 3. Sia $H = L^2([-\pi, \pi], \mathbb{C})$ $D = \{u \in \mathcal{C}^1(-\pi, \pi)\}$ e $T \colon D \to H$ tale che $u \mapsto i\dot{u}$.

Dimostrazione. Dati $u, v \in D$ abbiamo

$$
\begin{aligned}
\langle Tu, v \rangle &= \int_{-\pi}^{\pi} i\dot{u}\overline{v}\,\mathrm{d}x = |iu\overline{v}|_{-\pi}^{\pi} - \int_{-\pi}^{\pi} iu\dot{\overline{v}}\,\mathrm{d}x \\
&= i(u(\pi)\overline{v}(\pi) - u(-\pi)\overline{v}(-\pi)) + \langle u, Tv \rangle \neq \langle u, Tv \rangle \,.
\end{aligned}
$$

In quanto, in generale, il termine $u(\pi)\overline{v}(\pi) - u(-\pi)\overline{v}(-\pi)$ è diverso da zero.

Esercizio. Cercare $T \colon L^2([0,1]) \to L^2([0,1])$ continuo autoaggiunto senza autovalori.

Suggerimento. Cercare T del tipo $T \colon u \mapsto gu$ con $g \in L^\infty$.

Capitolo 6

Trasformata di Fourier

Data $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ poniamo

$$f(x) \overset{(*)}{=} \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(y)e^{iyx}\,\mathrm{d}y \qquad \widehat{f}(y) \coloneqq \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-iyx}\,\mathrm{d}x.$$

Dove $\widehat{u}$ si chiama *trasformata di Fourier*[1] di u e la formula $(*)$ si dice *formula di inversione.*

Derivazione formale (della formula di inversione). Prendiamo $f \in \mathcal{C}^1_C(\mathbb{R},\mathbb{C})$ e $\delta > 0$ tale che $\operatorname{supp}(f) \subset [-\pi/\delta, \pi/\delta]$.

Scriviamo f in serie di Fourier su $[-\pi/\delta, \pi/\delta]$ (serve un cambio di variabile per ricondursi alla serie di Fourier su $[-\pi,\pi]$).

$$f(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n^\delta(f)e^{in\delta x}$$

$$c_n^\delta(f) \coloneqq \frac{\delta}{2\pi}\int_{-\pi/\delta}^{\pi/\delta} f(x)e^{-in\delta x}\,\mathrm{d}x = \frac{\delta}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-in\delta x}\,\mathrm{d}x = \frac{\delta}{2\pi}\widehat{f}(n\delta).$$

Dunque,

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\sum_{n\in\mathbb{Z}}\frac{\delta}{2\pi}\quad\underbrace{\widehat{f}(n\delta)e^{i(n\delta)x}}_{\widehat{f}(y)e^{iyx}\text{ calcolata in }y=n\delta}$$

dove $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{Z}}\frac{\delta}{2\pi}\widehat{f}(n\delta)e^{i(n\delta)x}$ è la somma di Rienmann di $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\widehat{f}e^{iyx}\,\mathrm{d}y$. Dunque

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\sum_{n\in\mathbb{Z}}\frac{\delta}{2\pi}\widehat{f}(n\delta)e^{i(n\delta)x} \xrightarrow{\delta\to 0} \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\widehat{f}(y)e^{iyx}\,\mathrm{d}y.$$

Quest'ultimo passaggio non è giustificato rigorosamente ma si può rendere rigoroso per $f \in \mathcal{C}^1_C(\mathbb{R})$.

Definizione. Data $f \in L^1(\mathbb{R};\mathbb{C})$ la **trasformata di Fourier** $\widehat{f}$ è definita da

$$\widehat{f}(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-ixy}\,\mathrm{d}x \quad \forall y \in \mathbb{R}.$$

[1] Sostituisce la serie di Fourier quando si passa da funzioni su $\mathbb{R}$ 2π-periodiche a funzioni su $\mathbb{R}$.

Teorema. Data $f \in L^1(\mathbb{R};\mathbb{C})$, allora

i) $\widehat{f}$ è ben definita in ogni punto di $\mathbb{R}$.

ii) Vale $\left\|\widehat{f}\right\|_\infty \leq \|f\|_1$.

iii) $\widehat{f}$ è continua

iv) $\widehat{f}$ è infinitesima.

Dimostrazione.

i) $\widehat{f}(y)$ è ben definita per ogni $y \in \mathbb{R}$. Infatti, $f(x)e^{-iyx} \in L^1$ dato che

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left|f(x)e^{-iyx}\right| \,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| \,\mathrm{d}x = \|f\|_1 .$$

ii) $\left\|\widehat{f}\right\|_\infty \leq \|f\|_1$. Infatti,

$$|\widehat{f}|_\infty \leq \int \left|f(x)e^{-iyx}\right| \,\mathrm{d}x = \|f\|_1$$

iii) $\widehat{f}$ è continua. Se $y_n \to y$, allora

$$\widehat{f}(y_n) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-ixy_n} \,\mathrm{d}x \xrightarrow{n\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-iny} \,\mathrm{d}x = \widehat{f}(y)$$

per convergenza dominata. Infatti, la convergenza puntuale segue dalla continuità dell'esponenziale; mentre la dominazione è data da $|f(x)e^{-iyx}| = |f(x)|$.

iv) $\widehat{f}(y) \xrightarrow{y\to\pm\infty} 0$ per il lemma di Rienmann-Lebesgue.

$\square$

6.1 Proprietà della trasformata di Fourier

Data $f \in L^1(\mathbb{R};\mathbb{C})$ abbiamo posto

$$\forall y \in \mathbb{R} \qquad \mathcal{F}(f)(y) = \widehat{f}(y) := \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-iyx} \,\mathrm{d}x$$

ed abbiamo visto che

Teorema 1. $\widehat{f} \in C_0(\mathbb{R};\mathbb{C})$ e $\|\widehat{f}\|_\infty \leq \|f\|_1$.

Proposizione 2. Data $f \in L^1(\mathbb{R};\mathbb{C})$ allora

i) $\forall h \in \mathbb{R}$ vale $\widehat{\tau_h f} = e^{-ihy}\widehat{f}$

ii) $\forall h \in \mathbb{R}$ vale $\widehat{e^{ihx} f} = \tau_h \widehat{f}$

iii) $\forall \delta \neq 0$ vale $\widehat{\sigma_\delta f} = \widehat{f}(\delta y)$

Derivazione. Partendo dalla formula di inversione

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int \widehat{f}(y) e^{iyx} \, \mathrm{d}y$$
$$f(x-h) = \frac{1}{2\pi} \int \underbrace{\widehat{f}(y) e^{-ihy}}_{=\widehat{f(x-h)}} e^{iyx} \, \mathrm{d}y$$

Dimostrazione. Facciamo il calcolo diretto

$$\begin{aligned}
\widehat{\tau_h f} &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-h) e^{-ixy} \, \mathrm{d}x = \\
&= \begin{pmatrix} t = x - h \\ \mathrm{d}t = \mathrm{d}x \end{pmatrix} = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-i(t+h)y} \, \mathrm{d}t = \\
&= e^{-ihy} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-ity} \, \mathrm{d}t = e^{-ihy} \widehat{f}(t).
\end{aligned}$$

Analogamente seguono anche le altre □

Proposizione 3. Sia $f \in C^1(\mathbb{R}; \mathbb{C})$ con $f, f' \in L^1$ allora $\widehat{f'} = iy\widehat{f}$ (da confrontare con $c_n(f') = inc_n(f)$ nel caso della serie di Fourier).

Derivazione. Si deriva la formula di inversione

$$f'(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{f}(y) iy e^{ixy} \, \mathrm{d}y$$

Dimostrazione. Vediamo prima una dimostrazione che non funziona e cerchiamo di aggiustarla. Abbiamo che

$$\widehat{f'}(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f'(x) e^{-iyx} \, \mathrm{d}x = \underbrace{\left[f(x) e^{-iyx} \right]_{-\infty}^{+\infty}}_{=0} + iy \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-iyx} \, \mathrm{d}x = iy \widehat{f}(y)$$

serve che $f(x) \to 0$ per $|x| \to +\infty$ (ad esempio $f \in C \cap L^1$ lo implica), in realtà $f \in C^1$ e $f, f' \in L^1$ basta, ma la dimostrazione è più complicata.

Argomentiamo come segue, $f \in L^1 \implies \liminf_{|x| \to \infty} |f(x)| = 0$ (in quanto se $\liminf_{|x| \to \infty} |f(x)| = \delta > 0$ allora la funzione sarebbe $> \delta$ per $|x| \to +\infty$ ed avrebbe integrale $+\infty$) dunque esistono due successioni $a_n \to -\infty, b_n \to +\infty$ tali che $f(a_n) \to 0$ e $f(b_n) \to 0$ quindi come prima abbiamo

$$\begin{aligned}
\widehat{f'}(y) &= \lim_n \int_{a_n}^{b_n} f'(x) e^{iyx} \, \mathrm{d}x = \\
&= \lim_n \int \mathbb{1}_{[a_n, b_n]} f'(x) e^{iyx} \, \mathrm{d}x = \\
&= \lim_n \left(\underbrace{\left[f(x) e^{-iyx} \right]_{a_n}^{b_n}}_{\to 0} + iy \int_{a_n}^{b_n} f(x) e^{-iyx} \, \mathrm{d}x \right) = \\
&= \lim_n iy \int_{a_n}^{b_n} f(x) e^{-iyx} \, \mathrm{d}x = \\
&= iy \widehat{f}(y)
\end{aligned}$$

□

Proposizione 4. Sia $f \in L^1$ con $xf \in L^1$, allora $\widehat{f} \in C^1(\mathbb{R};\mathbb{C})$ e $(\widehat{f})' = -\widehat{ixf}$.

Dimostrazione.

$$\widehat{f}(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-ixy}\,\mathrm{d}x \implies (\widehat{f})'(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)(-ix)e^{-ixy}\,\mathrm{d}x = \widehat{-ixf}$$

Proposizione 5. (Derivazione sotto segno di integrale) Sia I un intervallo di $\mathbb{R}$, E misurabile in $\mathbb{R}^d$ e $g\colon I \times E \to \mathbb{C}$ tale che

i) $g(\,\cdot\,, x) \in C^1(I)$ per q.o. $x \in E$.

ii) $\exists h_0, h_1 \in L^1(E)$ tali che

$$|g(t,x)| \leq h_0(x) \quad \text{e} \quad \left|\frac{\partial g}{\partial t}(t,x)\right| \leq h_1(x)$$

allora $G(t) \coloneqq \int_E g(t,x)\,\mathrm{d}x$ è ben definita per ogni $t \in I$ e $G \in C^1(I)$ e

$$G'(t) = \int_E \frac{\partial}{\partial t} g(t,x)\,\mathrm{d}x$$

Traccia dimostrazione.

- *Passo 1:* $G(t)$ e $\widetilde{G}(t)$ sono ben definite $\forall t \in I$ (grazie alla dominazione) e continue in t (usando convergenza dominata e le dominazioni)
- *Passo 2:* Dobbiamo far vedere che G è C^1 con derivata $\widetilde{G}$, si usa la seguente forma del teorema fondamentale del calcolo integrale

$$\forall t_0, t_1 \in I \text{ con } t_0 < t_1 \qquad G(t_1) - G(t_0) \overset{(*)}{=} \int_{t_0}^{t_1} \widetilde{G}(t)\,\mathrm{d}t$$

  ed usando Fubini-Tonelli in $(*)$.

Proposizione 6. (Prodotto di convoluzione e trasformata di Fourier). Siano $f_1, f_2 \in L^1(\mathbb{R};\mathbb{C})$, allora $f_1 * f_2 \in L^1$ (già visto) e vale

$$\mathcal{F}(f_1 * f_2) = (\mathcal{F} f_1) \cdot (\mathcal{F} f_2)$$

Dimostrazione.

$$\begin{aligned}
\widehat{f_1 * f_2}(y) &= \int f_1 * f_2(x) e^{-ixy}\,\mathrm{d}x = \\
&= \iint f_1(x-t) f_2(t)\,\mathrm{d}t\, e^{-ixy}\,\mathrm{d}x = \\
&= \int \left(\int f_1(x-t) e^{-i(x-t)y}\,\mathrm{d}x \right) f_2(t) e^{-ity}\,\mathrm{d}t = \\
&= \int \widehat{f_1}(y) f_2(t) e^{-ity}\,\mathrm{d}t = \widehat{f_1}(y) \cdot \widehat{f_2}(y)
\end{aligned}$$

Definizione. Data $g \in L^1(\mathbb{R};\mathbb{C})$ definiamo l'**antitrasformata di Fourier** di g la funzione

$$\check{g}(x) \coloneqq \int_{-\infty}^{+\infty} g(y) e^{ixy}\,\mathrm{d}y.$$

Cioè $\check{g}(x) = \widehat{g}(-x)$ e scriviamo anche $\check{g} = \mathcal{F}^* g$. Effettivamente $\mathcal{F}^*$ è l'aggiunto di $\mathcal{F}$, almeno formalmente[1] infatti abbiamo

$$\langle \mathcal{F}f, g\rangle = \iint f\overline{e^{ixy}g(y)}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int f(x)\overline{\check{g}(x)}\,\mathrm{d}x = \langle f, \mathcal{F}^* g\rangle.$$

Teorema 7. Data $f \in L^1(\mathbb{R};\mathbb{C})$ tale che $\widehat{f} \in L^1(\mathbb{R};\mathbb{C})$ allora

$$\widetilde{\forall} x \in \mathbb{R} \qquad \mathcal{F}^*\mathcal{F}f = 2\pi f \qquad \text{cioè} \int \widehat{f}(x) e^{ixy}\,\mathrm{d}y = 2\pi f(x)$$

Nota. Una funzione continua e infinitesima non è, in generale, una funzione L^1; in particolare, l'ipotesi $\widehat{f} \in L^1$ è necessaria e non deriva dalle proprietà già note.

Dimostrazione. *Dimostrazione diretta* (passando dalla Delta di Dirac dei fisici):

$$\begin{aligned}\mathcal{F}^*\mathcal{F}f &= \int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{f}(y) e^{iyx}\,\mathrm{d}y = \\ &= \iint f(t) e^{-iyt}\,\mathrm{d}t e^{ixy}\,\mathrm{d}y = \\ &= \int f(t) \underbrace{\int e^{i(x-t)y}\,\mathrm{d}y}_{\text{“}\delta(x-t)\text{”}}\,\mathrm{d}t = f(x)\end{aligned}$$

Dimostrazione vera: scegliamo una funzione ausiliaria $\varphi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tale che

i) $\varphi(0) = 1$ continua in 0 e φ limitata

ii) $\varphi \in L^1$

iii) $\check{\varphi} \in L^1$

e poniamo $g_\delta(x) := \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{f}(y)\varphi(\delta y) e^{ixy}\,\mathrm{d}y$.

- *Passo 1:* $g_\delta(x) \to \mathcal{F}^*\mathcal{F}f(x)$ per ogni $x \in \mathbb{R}$ per convergenza dominata

$$\int \widehat{f}(y) e^{iyx}\varphi(\delta y)\,\mathrm{d}y \xrightarrow{\delta\to 0} \int \widehat{f}(y) e^{iyx}\,\mathrm{d}y$$

  e come dominazione usiamo $|\widehat{f}(y)e^{iyx}\varphi(\delta y)| \leq |\widehat{f}(y)| \cdot \|\varphi\|_\infty$

- *Passo 2:* $g_\delta(x) = \displaystyle\int \left(\int f(t) e^{-ity}\,\mathrm{d}t\right) e^{ixy}\varphi(\delta y)\,\mathrm{d}y$, per Fubini-Tonelli otteniamo

$$\begin{aligned} &= \iint \varphi(\delta y) e^{i(x-t)y}\,\mathrm{d}y f(t)\,\mathrm{d}t = \\ &= \int \sigma_\delta\check{\varphi}(x-t) f(t)\,\mathrm{d}t = \sigma_\delta\check{\varphi} * f(x).\end{aligned}$$

- *Passo 3:* $g_\delta \to mf$ in L^1 con $m = \displaystyle\int_{\mathbb{R}} \check{\varphi}(x)\,\mathrm{d}x$ (per il teorema di approssimazione e per ipotesi).

[1] In L^1 non è definito il prodotto scalare.

- *Passo 4:* Usando il primo ed il terzo passo otteniamo $\mathcal{F}^*\mathcal{F}f = mf$ per quasi ogni x, in quanto la convergenza puntuale e quella in L^1 devono essere compatibili; in particolare, la convergenza in L^1 a meno di sottosuccessioni equivale alla convergenza puntuale e dunque coincidono.

- *Passo 5:* $m = 2\pi$ ad esempio prendendo $\varphi(y) = e^{-|y|}$, segue che

$$\check{\varphi}(y) = \frac{2}{1+x^2}$$

e dunque $m = 2\pi$. In realtà vale per ogni φ che verifica le condizioni dell'ipotesi.

In conclusione, riportiamo la verifica di Fubini-Tonelli:

$$\iint |f(t)e^{-ity}e^{ixy}\varphi(\delta y)| \,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}y = \iint |f(t)| \cdot |\varphi(\delta y)| \,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}y = \|f\|_1 \cdot \|\varphi(\delta y)\|_1 < +\infty$$

$\square$

Corollario 8. Date $f_1, f_2 \in L^1$ tali che $\widehat{f_1} = \widehat{f_2} \implies f_1 = f_2$ quasi ovunque cioè $\mathcal{F}$ è iniettiva, cioè f è univocamente determinata da $\widehat{f}$.

Dimostrazione. Per ipotesi, $\widehat{f_1} - \widehat{f_2} = \widehat{f_1 - f_2} = 0$. Applicando il Teorema 7 a $\widehat{f_1 - f_2}$ (possiamo farlo perché $0 \in L^1$) otteniamo

$$0 = \int \widehat{f_1 - f_2}(x)e^{ixy} \,\mathrm{d}y = 2\pi(f_1(x) - f_2(x)) \Rightarrow f_1(x) = f_2(x) \quad \tilde{\forall} x \in \mathbb{R}.$$

$\square$

Esercizio. Date $f_1, f_2 \in L^1([-\pi, \pi]; \mathbb{C})$ e tali che per ogni $n \in \mathbb{Z}$ vale $c_n(f_1) = c_n(f_2)$ allora $f_1 = f_2$ quasi ovunque (e $c_n(f) = 0$ per ogni $n \implies f = 0$ q.o.).

6.2 Trasformata di Fourier su L^2

Abbiamo visto che la *serie di Fourier* si definisce naturalmente su L^2 (uno spazio di Hilbert) mentre la *trasformata di Fourier* ha bisogno di L^1 che non è uno spazio di Hilbert. Vedremo ora come estendere la trasformata di Fourier ad L^2 e come poter fare i conti.

Proposizione 1. Data $f \in L^1(\mathbb{R}; \mathbb{C}) \cap L^2(\mathbb{R}; \mathbb{C})$ vale $\|\widehat{f}\|_2 = \sqrt{2\pi}\,\|f\|_2$.

Teorema 2. $\mathcal{F}$ si estende per continuità da $L^1 \cap L^2$ a tutto L^2 e $\mathcal{F}/\sqrt{2\pi}$ risulta essere un'isometria (come operatore a valori in L^2).

Corollario 3. (Identità di Plancherel). $\forall f_1, f_2 \in L^2(\mathbb{R}; \mathbb{C})$ vale $\langle \widehat{f_1}, \widehat{f_2} \rangle = 2\pi \langle f_1, f_2 \rangle$.

Osservazione. Come si può calcolare $\widehat{f}$ per $f \in L^2 \setminus L^1$? Se per quasi ogni $y \in \mathbb{R}$ esiste il limite

$$\lim_n \underbrace{\int_{-n}^{n} f(x)e^{-ixy} \,\mathrm{d}x}_{\widehat{f_n}(y)}$$

allora coincide con $\widehat{f}(y)$.

Infatti, per ogni n posto $f_n := f \cdot \mathbb{1}_{[-n,n]}$ abbiamo che $\lim_n \int_{-n}^{n} f(x)e^{-ixy} \,\mathrm{d}x = \widehat{f_n}(x)$. A questo punto, osserviamo che $f_n \to f$ in L^2 (da controllare per esercizio) e quindi $\widehat{f_n} \to \widehat{f}$ in L^2

(segue dalla continuità della trasformata). Siccome per ipotesi $\widehat{f}_n$ converge puntualmente quasi ovunque allora $\widehat{f}_n \to \widehat{f}$ puntualmente quasi ovunque.

Intuitivamente, il Teorema 2 e l'identità di polarizzazione danno il Corollario 3. mentre il Teorema 2 segue dalla Proposizione 1. più un fatto noto usando che $L^1 \cap L^2$ è denso in L^2.

Fatto Noto. Dati X e Y spazi metrici, Y completo e D denso in X, $g\colon D \to Y$ uniformemente continua allora g ammette un'unica estensione $G\colon X \to Y$ continua. (Inoltre se X e Y sono spazi normati e g è lineare allora anche G è lineare)

Dimostrazione Proposizione 1.

Dimostrazione che non funziona: Proviamo a svolgere il calcolo diretto

$$\begin{aligned}
\|\widehat{f}\,\|_2^2 &= \int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{f}(y)\overline{\widehat{f}(y)}\,\mathrm{d}y \\
&= \iiint f(x)e^{-ixy}\overline{f(t)e^{-ity}}\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \\
&= \iint f(x)\overline{f(t)}\Bigg(\underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-iy(t-x)}\,\mathrm{d}y}_{\delta(x-t)}\Bigg)\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}x = \\
&= \int\left(\int f(x)\delta(x-t)\,\mathrm{d}x\right)\overline{f(t)}\,\mathrm{d}t = \\
&= 2\pi\int f(t)\overline{f(t)}\,\mathrm{d}t = 2\pi\,\|f\|_2^2
\end{aligned}$$

vediamo però che compare l'integrale $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-iy(t-x)}\,\mathrm{d}y$ e serve assumere che corrisponda a $\delta(x-t)$ dove δ è la "funzione Delta di Dirac", vediamo ora la dimostrazione formale usando una funzione ausiliaria.

Dimostrazione formale: Prendiamo $\varphi\colon \mathbb{R} \to [0, +\infty]$ tale che

i) φ continua in 0, crescente per $y < 0$ e decrescente per $y > 0$ e $\varphi(0) = 1$.

ii) $\varphi \in L^1$ e $\check{\varphi} \in L^1$.

Poniamo per ogni δ

$$I_\delta = \int_{-\infty}^{+\infty} |\widehat{f}(y)|^2\varphi(\delta y)\,\mathrm{d}y \xrightarrow{?} \int_{-\infty}^{+\infty} |f(y)|^2$$

- *Passo 1:* $I_\delta \xrightarrow{\delta\to 0} \|\widehat{f}\|_2^2$ per convergenza monotona usando l'ipotesi di crescenza/descrescenza prima/dopo lo 0.

- *Passo 2:*

$$
\begin{aligned}
I_\delta &= \int \widehat{f}(y)\overline{\widehat{f}(y)}\varphi(\delta y)\,\mathrm{d}y = \\
&= \int \left(\int f(x) e^{-ixy}\,\mathrm{d}x \right) \left(\int \overline{f(t)} e^{ity}\,\mathrm{d}t \right) \varphi(\delta y)\,\mathrm{d}y = \\
&\overset{\text{FT}}{=} \iint f(x)\overline{f(t)} \Bigg(\underbrace{\int \varphi(\delta y) e^{i(t-x)y}\,\mathrm{d}y}_{\sigma_\delta \check{\varphi}(t-x)} \Bigg) \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \\
&= \int \left(f(x)\sigma_\delta\check{\varphi}(t-x)\,\mathrm{d}x \right) \overline{f(t)}\,\mathrm{d}t = \\
&= \int f * \sigma_\delta\check{\varphi}(t) \cdot \overline{f(t)}\,\mathrm{d}t = \\
&= \langle f * \sigma_\delta \check{\varphi}; f \rangle
\end{aligned}
$$

  e possiamo applicare il teorema di Fubini-Tonelli in quanto le ipotesi sono verificate infatti

$$
\begin{aligned}
&\iiint |f(x)\overline{f(t)}| e^{i(t-x)y} \varphi(\delta y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}y = \\
= &\iiint |f(x)| \cdot |f(t)| \cdot |\varphi(\delta y)|\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}y = \\
= &\|f\|_1^2 \|\varphi(\delta y)\|_1 < +\infty
\end{aligned}
$$

  e $\|\varphi(\delta y)\|_1 < +\infty$ poiché $\varphi \in L^1$.

- *Passo 3:* $I_\delta \xrightarrow{\delta\to 0} 2\pi \|f\|_2^2$. Infatti $I_\delta = \langle f * \sigma_\delta\check{\varphi}; f\rangle$ e

$$
\sigma_\delta\check{\varphi} \xrightarrow{\text{in } L^2} mf \qquad \text{con } m = \int \check{\varphi}(x)\,\mathrm{d}x
$$

- *Passo 4:* Infine $m = 2\pi$ ad esempio prendendo $\varphi(y) = e^{-|y|}$

$$
\check{\varphi}(x) = \frac{2}{1+x^2} \in L^1
$$

  ed in questo caso m si calcola.

□

6.2.1 Proprietà della trasformata di Fourier in L^2

Proposizione 4.

- $\widehat{\tau_h f} = e^{-ihy}\widehat{f}$
- $\widehat{e^{ihx} f} = \tau_h \widehat{f}$
- $\widehat{\sigma_h f} = \widehat{f}(\delta y)$

Dimostrazione. Le identità valgono in $L^1 \cap L^2$ che è denso in L^2 e dunque si estendono per continuità ad L^2.

Proposizione 5. Se $f \in C^1(\mathbb{R};\mathbb{C})$ e $f \in L^1 \cup L^2$ e $f' \in L^1 \cup L^2 \implies \widehat{f'} = iy\widehat{f}$.

Dimostrazione. La stessa fatta per $f, f' \in L^1$. Si parte da a_n, b_n tali che $a_n \to -\infty$ e $b_n \to +\infty$ con $f(a_n) \to 0$ e $f(b_n) \to 0$ e si integra per parti

$$\begin{aligned}\mathcal{F}(f' \cdot \mathbb{1}_{[a_n,b_n]}) &= \int_{a_n}^{b_n} f'(x)e^{-ixy}\,\mathrm{d}x \\ &= \underbrace{\Big[f(x)e^{-ixy}\Big]_{a_n}^{b_n}}_{\to 0} + iy\int_{a_n}^{b_n} f(x)e^{-iyx}\,\mathrm{d}x = iy\mathcal{F}(f \cdot \mathbb{1}_{[a_n,b_n]}).\end{aligned}$$

Per concludere si dimostra che

$$\begin{aligned}\mathcal{F}(f' \cdot \mathbb{1}_{[a_n,b_n]}) &\xrightarrow{n\to\infty} \mathcal{F}(f') \text{ in } L^2 \\ \mathcal{F}(f \cdot \mathbb{1}_{[a_n,b_n]}) &\xrightarrow{n\to\infty} \mathcal{F}(f) \text{ in } L^2\end{aligned}$$

Ovvero si dimostra che

$$\begin{aligned}\int_{b_n}^{+\infty} |f(x)e^{-ixy}|^2\,\mathrm{d}x + \int_{-\infty}^{a_n} |f(x)e^{-ixy}|^2\,\mathrm{d}x \xrightarrow{n\to\infty} 0 \\ \int_{b_n}^{+\infty} |f'(x)e^{-ixy}|^2\,\mathrm{d}x + \int_{-\infty}^{a_n} |f'(x)e^{-ixy}|^2\,\mathrm{d}x \xrightarrow{n\to\infty} 0\end{aligned}$$

Ma questo è vero in quanto $f, f' \in L^2$.

Proposizione 6. Se $f \in C^1, f \in L^1, f' \in L^2 \implies \widehat{f} \in L^1$ e soddisfa le ipotesi del teorema di inversione.

Dimostrazione. Sappiamo che $iy\widehat{f} = \widehat{f'} \in L^2 \implies y\widehat{f} \in L^2$.

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}} |\widehat{f}(y)|\,\mathrm{d}y &= \int_{|y|\le 1} |\widehat{f}(y)|\,\mathrm{d}y + \int_{|y|\ge 1} |\widehat{f}(y)|\,\mathrm{d}y \\ &\le 2\|\widehat{f}\,\|_\infty + \int_{|y|\ge 1} |\widehat{f}(y)y|\frac{1}{|y|}\,\mathrm{d}y \\ &\le 2\,\|f\|_1 + \|\widehat{f}y\|_2 \left(\int_{|y|\ge 1} \frac{1}{|y|^2}\,\mathrm{d}y\right)^{1/2} \\ &\le 2\,\|f\|_1 + 2\,\|f'\|_2\end{aligned}$$

Corollario. $f \in C^1_C \implies f, \widehat{f} \in L^1$

Proposizione 7. Se $f_1, f_2 \in L^2(\mathbb{R};\mathbb{C})$ (e dunque $f_1 f_2 \in L^1(\mathbb{R};\mathbb{C})$ per Hölder) allora

$$2\pi\widehat{f_1 f_2} = \widehat{f_1} * \widehat{f_2}$$

Dimostrazione. $f_1, f_2 \in L^2 \implies f_1 f_2 \in L^1$ segue da Hölder. Dimostriamo la proposizione per $f_1, f_2 \in C^1_C \implies f_1, f_2, f_1 f_2 \in C^1_C \implies$ tutte in L^1 e con trasformate in L^1.

$$\mathcal{F}^*\left(\frac{1}{2\pi}\widehat{f_1} * \widehat{f_2}\right) = \frac{1}{2\pi}\mathcal{F}^*(\widehat{f_1})\mathcal{F}^*(\widehat{f_2}) = \frac{1}{2\pi}(2\pi f_1)\cdot(2\pi f_2) = 2\pi f_1 \cdot f_2 = \mathcal{F}^*(\widehat{f_1 f_2})$$

ed usando che $\mathcal{F}^*$ è iniettiva otteniamo che $2\pi\widehat{f_1 f_2} = \widehat{f_1} * \widehat{f_2}$.

Per $f_1, f_2 \in L^2$ si procede per continuità e si approssimano f_1 ed f_2 con $f_{1,n}$ e $f_{2,n}$ in C^1_C. $\square$

6.3 Conclusione sulla TdF

Proposizione 4. (di 2 lezioni fa) Se $f, xf \in L^1(\mathbb{R};\mathbb{C})$, allora $\widehat{f} \in C^1(\mathbb{R};\mathbb{C})$ e $(\widehat{f})' = \widehat{-ixf}$.

Corollario. Se $f, x^k f \in L^1$ con $k = 1, 2, \dots$, allora $x^h f \in L^1$ per ogni $h = 0, \dots, k$ e $\widehat{f} \in C_0^k$ e $D^h \widehat{f} = \widehat{(-ix)^h f}$.

Dimostrazione. Vale $|x^h| \leq 1 + |x|^k$ per ogni x e per ogni $h = 1, \dots, k$. Allora $|x^h f| \leq (1 + |x|^k)|f| \in L^1$. Il resto dell'enunciato è per induzione su k.

Corollario. Se $x^k f \in L^1$ per ogni $k = 0, 1, \dots,$ [1] allora $\widehat{f} \in C^\infty$ (anzi C_0^∞ siccome le derivate sono trasformate).

Teorema (Paley-Weiner). Se $e^{\alpha|x|} \cdot f(x) \in L^1$ per qualche $\alpha > 0$, allora $\widehat{f}$ è analitica[2].

Dimostrazione. In $\underset{y}{\mathbb{R}} \times \underset{t}{\mathbb{R}} \simeq \underset{z=x+it}{\mathbb{C}}$ definisco $g(z)$.

Ricordiamo che $\widehat{f}(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-iyx}\,\mathrm{d}x$. Poniamo

$$g(z) := \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-izx}\,\mathrm{d}x$$

Passo 1. $g(z)$ è definita per ogni $z \in \mathbb{R} \times [-\alpha, \alpha]$. Infatti,

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-izx}\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| e^{tx}\,\mathrm{d}t \leq \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| e^{\alpha|x|}\,\mathrm{d}x < +\infty$$

Passo 2. Mostriamo che $g(z)$ è olomorfa su $\mathbb{R} \times (-\alpha, \alpha)$. Sviluppo g in serie di potenze in 0.

Nota. Questo mi serve per dire che è olomorfa in una palla di raggio α centrata in 0. Per concludere bisogna traslare il centro la palla per tutta la retta reale e mostrare la stessa cosa [TO DO: spiegare meglio + disegno palla].

$$g(z) = \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-izx}\,\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}} f(x) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-izx)^n}{n!}\,\mathrm{d}x \overset{(\star)}{=} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\int_{\mathbb{R}} \frac{(-ix)^n}{n!} f(x)\,\mathrm{d}x \right) z^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

La serie $\sum_n a_n z^n$ è convergente per $|z| \leq \alpha$, quindi g è olomorfa su $B(0, \alpha)$. Notiamo che in $(\star)$ abbiamo usato Fubini-Tonelli; controlliamo che potevamo applicarlo, dunque verifichiamo quanto segue.

$$\int_{\mathbb{R}} |f(x)| \sum_{n=0}^{\infty} \left| \frac{(-izx)^n}{n!} \right| \mathrm{d}x < +\infty$$

Abbiamo

$$\int_{\mathbb{R}} |f(x)| \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|zx|^n}{n!}\,\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}} |f(x)| e^{|z||x|}\,\mathrm{d}x \underset{\text{se } |z| \leq \alpha}{\leq} \int_{R} |f(x)| e^{\alpha|x|}\,\mathrm{d}x$$

Per concludere si dimostra (allo stesso modo) che g si sviluppa in serie in ogni punto $y_0 \in \mathbb{R}$ con raggio di convergenza α. □

[1] Questa condizione è implicata, ad esempio, dall'ipotesi $f \in C_C$

[2] Restrizione di $g \colon \underbrace{\mathbb{R} \times (-\alpha, \alpha)}_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}\simeq\mathbb{C}} \to \mathbb{C}$ olomorfa

Corollario. Se $f \in L^1$ è olomorfa e a supporto compatto allora $\widehat{f}$ è la restrizione di $g\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ olomorfa [**TO DO: controllare**].

Nota. Se $f \in L^1$ e a supporto compatto, si ha $f(x)e^{\alpha|x|} \in L^1$ per ogni α.

6.4 Applicazioni TdF

Risoluzione equazioni del calore su $\mathbb{R}$.

$$\begin{cases} u_t = u_{xx}(x \in \mathbb{R}) \\ u(0, \cdot) = u_0 \end{cases}$$

Risoluzione formale. Denotiamo con $\widehat{u} \coloneqq \widehat{u}(t, y)$ la trasformata di Fourier rispetto alla variabile x

$$\widehat{u_t}(t, y) = \int \frac{\partial}{\partial t} u(t, x) e^{-ixy} \, \mathrm{d}x = \frac{\partial}{\partial t} \left(\int u(t, x) e^{-ixy} \, \mathrm{d}x \right) = \widehat{u}_t$$

Inoltre, $\widehat{u_t} = \widehat{u_{xx}} = (iy)^2 \widehat{u} = -y^2 \widehat{u}$. Quindi, per ogni y, $\widehat{u}(\cdot, y)$ risolve

$$\begin{cases} \dot{z} = -y^2 z \\ z(0) = \widehat{u_0}(y) \end{cases} \tag{P}$$

Soluzione generale $z = \alpha e^{-y^2 t}$, da cui la soluzione per (**??**) è $\widehat{u}(t, y) = \widehat{u_0}(y) e^{-y^2 t}$.

Siano

$$\rho(x) \coloneqq \frac{e^{-x^2/2}}{\sqrt{2\pi}}, \quad \widehat{\sigma_{\sqrt{2t}} \rho} = \widehat{\rho}(\sqrt{2t} y).$$

Però è noto che[1] $\widehat{\rho}(y) = e^{-y^2/2} \implies \widehat{\rho}(\sqrt{2t} y) = e^{-(\sqrt{2t} y)^2/2} = e^{-y^2 t}$. Da cui

$$\widehat{u}(t, y) = \widehat{u_0}(y) e^{-y^2 t} = \widehat{u_0}(y) \cdot \widehat{\sigma_{\sqrt{2t}} \rho}(y) = \mathcal{F}(u_0 * \sigma_{\sqrt{2t}} \rho) \implies u(t, y) = u_0 * \left(\sigma_{\sqrt{2t}} \rho \right)$$

Dunque

$$u(t, x) \coloneqq \begin{cases} u_0(x) & \text{per } t = 0 \\ u_0 * \sigma_{\sqrt{2t}} \rho(x) & \text{per } t > 0 \end{cases} \tag{$*$}$$

Teorema. Se $u_0\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è continua e limitata, allora u data in (**??**) è ben definita su $[0, +\infty) \times \mathbb{R}$, continua, C^∞ per $t > 0$ e risolve (**??**).

Data $u\colon [0, T) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ soluzione di (**??**) tale che esiste $h_0, h_1 \in L^1(\mathbb{R})$ tali che

$$|u(t, x)| \leq h_0(x), \quad |u_t(t, x)| \leq h_1(x)$$

allora $\widehat{u}(\cdot, y)$ è univocamente determinata su $[0, T)$, dunque u è univocamente determinata per l'iniettività di TdF.

[1] Si vede all'esercitazione che segue?

Capitolo 7

Integrazione di superfici

7.1 Superfici

Definizione. Data $f\colon \Omega \subset \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^d$ di classe C^1 e dato $x \in \Omega$, la mappa lineare da $\mathbb{R}^k$ a $\mathbb{R}^d$ associata alla matrice $\nabla f(x)$ si dice **differenziale di f in x** e si indica con $\mathrm{d}_x f$.

Nota. La mappa $\mathrm{d}_x f$ è univocamente determinata da

$$f(x+h) = f(x) + \mathrm{d}_x f(h) + o(|h|)$$

dove $\mathrm{d}_x f$ è il termine di primo grado dello sviluppo di Taylor di f.

Definizione. Siano $1 \le k \le d$ e $m = 1, 2, \ldots$. L'insieme $\Sigma \subset \mathbb{R}^d$ si definisce **superficie** (senza bordo) di dimensione k e classe C^m se per ogni $x \in \Sigma$ esiste U intorno aperto[1] di $x \in \Sigma$ ed esiste una mappa $\phi\colon D \to \mathbb{R}^d \in C^m$ con D aperto di $\mathbb{R}^k$ tale che

- $\phi(D) = \Sigma \cap U$
- $\phi\colon D \to \Sigma \cap U$ è un omeomorfismo
- $\nabla\phi(s)$ ha rango massimo ($= k$) per ogni $s \in D$

Ovvero ϕ è una **parametrizzazione locale** della superficie

Osservazione. Se $k = d$ abbiamo che Σ è una superficie se e solo se Σ è aperto.

Proposizione. Dati k, d, m come sopra, $\Sigma \subset \mathbb{R}^d$ e $x \in \Sigma$ sono fatti equivalenti

- Esistono U e $\phi\colon D \to \Sigma \cap U$ tale che ϕ è una parametrizzazione regolare
- Esistono U intorno di x e $g\colon U \to \mathbb{R}^{d-k} \in C^m$ tale che
  - $\Sigma \cap U = g^{-1}(0)$
  - ∇g ha rango massimo, ovvero $d - k$
- Esistono U intorno di x e $h\colon \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^{d-k}$ di classe C^m tale che $\Sigma \cap U = \Gamma_h \cap U$ (dove Γ_h è il grafico di h) avendo identificato $\mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{d-k}$ con $\mathbb{R}^d$ tramite una scelta di k coordinate tra le d di $\mathbb{R}^d$

[1] D'ora in avanti gli intorni saranno sempre aperti.

Esempi.

- $\mathbb{S}^{d-1} = \left\{ x \in \mathbb{R}^d \;\middle|\; |x| = 1 \right\}$ è una superficie senza bordo di dimensione $d-1$ e classe C^∞ in $\mathbb{R}^d$
- $\mathbb{D} = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid x_3 = 0 \text{ e } |x| < 1\}$ è una superficie 2-dimensionale in $\mathbb{R}^3$
- $\overline{D}$ non lo è! (È una superficie con bordo)

[**TO DO**]: **disegni** in blu sul quaderno

Definizione. Data Σ superficie e fissato $x \in \Sigma$, lo **spazio tangente** a Σ in x è $T_x\Sigma \coloneqq \operatorname{Im}(\mathrm{d}_s\phi)$ dove $\phi\colon D \to \Sigma \cap U$ è una parametrizzazione regolare e $x = \phi(s)$ con $s \in D$.

Nota. Lo spazio tangente è uno spazio vettoriale di stessa dimensione della superficie.

Proposizione.

- $T_x\Sigma = \{\dot\gamma(0) \mid \gamma\colon [0,\delta) \to \Sigma \text{ cammino } C^1 \text{ con } \gamma(0) = x\}$
- Data $g\colon U \to \mathbb{R}^{d-k}$ tale che $\Sigma \cap U = g^{-1}(0)$, $\operatorname{rk}(\nabla g) = d-k$ su U, allora
$$T_x\Sigma = \ker(\mathrm{d}_x g) = \{\nabla g_1(x), \dots, \nabla g_{n-k}(x)\}^\perp$$

Definizione. Data Σ superficie in $\mathbb{R}^d$ di classe C^m, $f\colon \Sigma \to \mathbb{R}^{d'}$, diciamo che f è di classe $C^{m'}$, con $m' \leq m$ se per ogni $x \in \Sigma$ se esistono U e $\phi\colon D \to \Sigma \cap U$ parametrizzazione regolare, tale che $f \circ \phi\colon D \to \mathbb{R}^d$ è di classe $C^{m'}$ con D aperto di $\mathbb{R}^k$.

Proposizione. $f \in C^{m'} \iff \exists A$ aperto di $\mathbb{R}^d$ che contiene Σ e $F\colon A \to \mathbb{R}^d$ estensione di f di classe $C^{m'}$.

Osservazione. Se $\phi\colon D \to \Sigma \cap U$ è una parametrizzazione regolare, allora $\phi^{-1}\colon \Sigma \cap U \to D \subset \mathbb{R}^k$ è C^m. La mappa ϕ^{-1} viene definita **carta**.

Definizione. Data $f\colon \Sigma \to \mathbb{R}^d$ di classe (almeno) C^1 e $x \in \Sigma$,
$$\begin{aligned} \mathrm{d}_x f\colon T_z\Sigma &\longrightarrow \mathbb{R}^d \\ \dot\gamma(0) &\longmapsto (f \circ \gamma)'(0) \quad \gamma\colon [0,\delta) \to \Sigma,\ \gamma \in C^1,\ \gamma(0) = x \end{aligned}$$

Proposizione. Data $F\colon A \to \mathbb{R}^{d'}$ estensione C^1 di f, con $A \subset \mathbb{R}^d$, allora
$$\mathrm{d}_x f = \mathrm{d}_x F|_{T_x\Sigma}$$

Osservazione. Se $f\colon \Sigma \to \Sigma'$, dove $\Sigma \subset \mathbb{R}^d$ e $\Sigma' \subset \mathbb{R}^{d'}$ allora $\operatorname{Im}(\mathrm{d}_x f) \subset T_{f(x)}\Sigma'$. Quindi, $\mathrm{d}_x f\colon T_x\Sigma \to T_{f(x)}\Sigma'$.

7.2 Misure su superfici

In questa sezione studiamo la misura di Lebesgue su superfici definite tramite parametrizzazione[1].

Definizione. Dati V spazio vettoriale k-dimensionale dotato di prodotto scalare (per esempio V sottospazi di $\mathbb{R}^d$), la **misura di Lebesgue** σ_k su V è data dall'identificazione di V con $\mathbb{R}^k$ tramite la scelta di una base ortonormale.

[1] Coincide con la definizione di Hausdorff

Nota. σ_k non dipende dalla scelta della base.

Definizione. Siano V, V' spazi vettoriali di dimensione k dotati di prodotto scalare e $\Lambda\colon V \to V'$ lineare. Poniamo

$$|\det \Lambda| := |\det M|,$$

dove M è una matrice $k \times k$ associata a Λ dalla scelta di basi ortonormali su V e V'.

Nota. Si verifica che la definizione è ben posta, ovvero non dipende dalla scelta delle basi. Inoltre, si verifica che per ogni $E \subset V$ misurabile si ha $\sigma_k(\Lambda(E)) = |\det \Lambda| \cdot \sigma_k(E)$ (formula di cambio di variabile negli integrali).

Definizione. Sia $\Lambda\colon V \to W$, con V, W spazi vettoriali, non necessariamente di stessa dimensione. Poniamo $V' := \operatorname{Im}(\Lambda)$ e

$$|\det \Lambda| := \begin{cases} 0 & \text{se } \operatorname{rk}(\Lambda) < k \\ \text{come prima} & \text{se } \operatorname{rk}(\Lambda) = k \text{ e } \dim V' = \dim V \end{cases}$$

Proposizione 1. Se $\Lambda : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^d$ allora

$$|\det \Lambda|^2 = \det(N^t N) \tag{1}$$

dove N è una matrice $d \times k$ associata a Λ. E inoltre

$$|\det \Lambda|^2 = \sum_{\substack{Q \text{ minore} \\ k\times k \text{ di } N}} \det(Q)^2 \tag{2}$$

Osservazione. Questa proposizione implica che non è necessario trovare una base ortormale dell'immagine di Λ per calcolarne il determinante.

Dimostrazione.

(1) Supponiamo Λ iniettiva (il caso Λ non iniettivo per esercizio), scegliamo una base ortonormale $e_1, \dots, e_k$ di $\operatorname{Im}(\Lambda)$ e una matrice M $k \times k$ associata a Λ. Sia $B \in \mathbb{R}^{d\times k}$ una matrice avente colonne uguali a $e_1, \dots, e_k$. Allora $N = BM$. Dunque,

$$\det(N^t N) = \det(M^t \underbrace{B^t B}_{=I} M) = \det(M^t M) = (\det M)^2 =: |\det \Lambda|^2.$$

(2) La seconda formula richiede la formula di Binet generalizzata.

$\square$

7.3 Superfici k-dimensionali in $\mathbb{R}^d$ di classe C^1

Definizione. Un insieme $E \subset \Sigma$ è **misurabile** (secondo Lebesgue) se $\forall \phi\colon D \to \Sigma \cap U$ parametrizzazione regolare e $D \subset \mathbb{R}^k$, l'insieme $\phi^{-1}(E \cap U) \subset \mathbb{R}^k$ è misurabile secondo Lebesgue.

Notazione. $\mathcal{M}(\Sigma) := \{E \subset \Sigma \text{ misurabili}\}$.

Proposizione 1. Esiste un'unica misura σ_k su $\mathcal{M}(\Sigma)$ tale che per ogni E misurabile e per ogni $\phi\colon D \to \Sigma \cap U$ parametrizzazione regolare

$$\sigma_k(E \cap U) = \int_{\phi^{-1}(E\cap U)} \overbrace{\det(\mathrm{d}_s\phi)}^{J\phi(s)} \, \mathrm{d}s \tag{1}$$

Commenti.

- σ_k misura di volume k-dimensionale su Σ.
- σ_k coincide con la misura di Hausdorff $\mathcal{H}^k$ ristretta a Σ.
- $J\phi(s) = \sqrt{\det(\nabla^t\phi(s)\nabla\phi(s))} = \sqrt{\sum_Q (\det Q)^2}$ dove Q sono i minori $k \times k$ si $\nabla\phi(s)$.
- Se $k = 1$, vale $J\phi(s) = \sqrt{\det(\phi'(s))^t\phi'(s)} = |\phi'(s)|$.

Dimostrazione.

Passo 1: costruzione di σ_k.

Prendiamo $\sigma_i \colon D_i \to \Sigma \cap U_i$ parametrizzazioni regolari, dove $\{D_i\}$ è una famiglia numerabile, tale che $\Sigma \subset \bigcup U_i$. Prendiamo Σ_i misurabili e disgiunti tali che $\bigcup \Sigma_i = \Sigma$ e $\Sigma_i \subset U_i$.

Per ogni $E \in \mathcal{M}(\Sigma)$ poniamo

$$\sigma_k(E) = \sum_i \int\limits_{\phi^{-1}(E\cap\Sigma_i)} J\phi_i(s)\,\mathrm{d}s$$

Evitiamo di verificare che sia una misura σ-addittiva.

Per dimostrare la proposizione si usa il seguente lemma.

Lemma. Date $\phi\colon D \to \Sigma \cap U$ e $\widetilde{\phi}\colon \widetilde{D} \to \Sigma \cap \widetilde{U}$ e E misurabili contenuto in $U \cap \widetilde{U}$, allora

$$\int_{\phi^{-1}(E)} J\phi(s)\,\mathrm{d}s = \int_{\widetilde{\phi}(E)} J\widetilde{\phi}(\widetilde{s})\,\mathrm{d}\widetilde{s} \tag{2}$$

Dimostrazione lemma. Usiamo il cambio di variabile $s = \phi^{-1}(\widetilde{\phi}(\widetilde{s})) =: g(\widetilde{s})$.

$$\begin{aligned}\int_F J\phi(s)\,\mathrm{d}s &= \int_{g^{-1}(F)=\widetilde{F}} J\phi(s)Jg(\widetilde{s})\,\mathrm{d}\widetilde{s} = \int_{\widetilde{F}} |\det(\mathrm{d}_s\phi)|\cdot|\det(\mathrm{d}_{\widetilde{s}}g)|\,\mathrm{d}\widetilde{s}\\ &= \int_{\widetilde{F}} |\det(d_{\widetilde{s}}(\phi\circ g))|\,\mathrm{d}\widetilde{s} = \int_{\widetilde{F}} J\widetilde{\phi}(\widetilde{s})\,\mathrm{d}\widetilde{(s)}\end{aligned}$$

Da cui la tesi. $\square$

Corollario 2. Data $\phi\colon D \to \Sigma \cap U$ C^1 parametrizzazione bigettiva (non necessariamente regolare) , $f\colon \Sigma\cap U \to \overline{\mathbb{R}}$ misurabile e integrabile rispetto a σ_k.

$$\int_{\Sigma\cap U} f(x)\,\mathrm{d}\sigma_k(x) = \int_D f(\phi(s))J\phi(s)\,\mathrm{d}s \tag{3}$$

Se $\phi\colon D \to \Sigma\cap U$ è solo C^1, come vanno corrette (**??**) e (**??**)?

$$\int_{E\cap U} \#\phi^{-1}(x)\,\mathrm{d}\sigma_k(x) = \int_{\phi^{-1}(E\cap U)} J\phi(s)\,\mathrm{d}s \tag{1'}$$

e

$$\int_{E\cap U} f(x)\#\phi^{-1}(x)\,\mathrm{d}\sigma_k(x) = \int_D f(\phi(s))J\phi(s)\,\mathrm{d}s \tag{3'}$$

Nota. Le formule sopra giustificano il fatto che parametrizzazione non esattamente bigettive possono essere usate lo stesso per il calcolo dei volumi.

Esempio. Parametrizzazione di $\mathbb{S}^d \subset \mathbb{R}^{d+1}$ con coordinate sferiche.

Consideriamo $\phi_d \colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{S}^d$ definita come

$$\begin{aligned}\phi_d(\alpha_1, \dots, \alpha_d) =& (\cos\alpha_1, \sin\alpha_1\cos\alpha_2, \sin\alpha_1\sin\alpha_2\cos\alpha_3, \dots,\\ & \sin\alpha_1\cdots\sin\alpha_{d-1}\cos\alpha_d, \sin\alpha_1\cdots\sin\alpha_d)\end{aligned}$$

Definizione ricorsiva

$$\phi_1(\alpha_1) = (\cos\alpha_1, \sin\alpha_1), \quad \phi_d(\alpha) = (\cos\alpha_1, \sin\alpha_1 \cdot \phi_{d-1}(\alpha_2, \dots, \alpha_d))$$

Dunque

- $\phi_d\left([0,\pi]^{d-1} \times [0, 2\pi]\right) = \mathbb{S}^d$ è una parametrizzazione in coordinate sferiche ed è iniettiva.
- $J\phi_d(\alpha) = \sin(\alpha_1)^{d-1}\sin(\alpha_2)^{d-2}\cdots\sin(\alpha_{d-1})^1$

Proposizione 3. Sia Σ superficie come al solito. Allora esiste un'unica misura μ sui $\mathcal{M}(\Sigma)$ tale che per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che data $f \colon \Sigma \cap U \to \mathbb{R}^k \in C^1$ che è δ-isometria, cioè

$$\frac{1}{1+\delta}|x - x'| \le |f(x) - f(x')| \le (1+\delta)|x - x'| \quad \forall x, x' \in \Sigma \cap U \tag{P}$$

Allora

$$\frac{1}{1+\varepsilon}\sigma_k(E) \le |f(E)| \le (1+\varepsilon)\sigma_k(E) \quad \forall E \text{ mis } \subset \Sigma \cap U$$

Corollario 4. Poichè σ_k e la restrizione di $\mathcal{H}^k$ a Σ hanno la proprietà (**??**), coincidono.

Dimostrazione (Unicità). Prendiamo μ, μ' che soddisfano (**??**). Fissiamo $E, \varepsilon > 0$ e δ di conseguenza usando (**??**). Allora

- Per ogni $x \in \Sigma$ esiste $\phi_x \colon U_x \cap \Sigma \to \mathbb{R}^k$ tale che $\mathrm{d}_x\phi_x \colon T_x\Sigma \to \mathbb{R}^k$ è un'isometria.
- per ogni x esiste $V_x \subset U_x$ tale che $\phi_x \colon \Sigma \cap V_x \to \mathbb{R}^k$ è δ-isometria.
- Ricopriamo Σ con una successione $V_i \coloneqq V_{x_i}$.
- Scriviamo $E = \bigsqcup_i E_i$ con $E_i \subset V_i$.

Per (**??**) abbiamo che

$$\begin{aligned}\frac{1}{1+\varepsilon}\mu(E_i) \le |f(E_i)| \le (1+\varepsilon)\mu(E_i)\\ \frac{1}{1+\varepsilon}\widetilde{\mu}(E_i) \le |f(E_i)| \le (1+\varepsilon)\widetilde{\mu}(E_i)\end{aligned}$$

da cui incrociando le disuguaglianze otteniamo

$$\implies \begin{aligned}\frac{1}{(1+\varepsilon)^2}\mu(E_i) \le \widetilde{\mu}(E_i) \le (1+\varepsilon)^2\mu(E_i)\\ \frac{1}{(1+\varepsilon)^2}\widetilde{\mu}(E_i) \le \mu(E_i) \le (1+\varepsilon)^2\widetilde{\mu}(E_i)\end{aligned}$$

e per arbitrarietà di ε ricaviamo $\mu(E) = \widetilde{\mu}(E)$. Per arbitrarietà di E otteniamo $\mu = \widetilde{\mu}$. $\square$

7.4 k-covettori

Dato V spazio vettoriale su $\mathbb{R}$ e $k = 1, 2, \ldots$, l'applicazione $\alpha \colon V^k \to \mathbb{R}$ si dice **k-covettore o k-lineare e alternante** se

- è lineare in ogni variabile
- per ogni σ permutazione in S_k, $\alpha(v_{\sigma(1)}, \ldots, v_{\sigma(k)}) = \operatorname{sgn}(\sigma)\alpha(v_1, \ldots, v_k)$ (equivalentemente, α cambia segno scambiando due variabili).

Notazione. $\Lambda^k(V) \coloneqq \{\alpha\ k\text{-covettori su } V\}$. Formalmente $\Lambda^0(V) \coloneqq \{0\}$.

Osservazione.

- $\Lambda^k(V)$ è uno spazio vettoriale.
- $\Lambda^1(V) = V^*$ duale di V.
- det è n-lineare alternante nelle colonne (o righe).
- Se $v_1, \ldots, v_k$ sono linearmente dipendenti, allora $\alpha(v_1, \ldots, v_k) = 0$.
- Se $k > \dim V$, allora $\Lambda^k(V) = \{0\}$.

Definizione. Dati V, V' spazi vettoriali, $T \colon V \to V'$ lineare, $\alpha \in \Lambda^k(V')$, il **pull-back** di α secondo T è

$$T^{\#}\alpha \in \Lambda^k(V) \quad \text{dato da} \quad T^{\#}\alpha(v_1, \ldots, v_k) = \alpha(Tv_1, \ldots, Tv_n)$$

Inoltre, dati $\alpha \in \Lambda^k(V), \beta \in \Lambda^h(V)$ si definisce **prodotto esterno** e si indica con $\alpha \wedge \beta \in \Lambda^{k+h}(V)$ quanto segue

$$\alpha \wedge \beta(v_1, \ldots, v_{k+h}) = \frac{1}{k!h!} \sum_{\sigma \in S_{k+h}} \operatorname{sgn}(\sigma)\alpha(v_{\sigma(1)}, \ldots, v_{\sigma(k)})\beta(v_{\sigma(k+1)}, \ldots, v_{\sigma(k+h)})$$

7.5 Integrazione di k-forme su superfici

Proposizione 0. Il prodotto esterno $\wedge$ è distributivo (rispetto a $+$), associativo e anticommutativo, ovvero $\alpha \wedge \beta = (-1)^{hk}\beta \wedge \alpha$.

Data $e_1, \ldots, e_d$ base di V, $e_1^*, \ldots, e_d^*$ è una base di V^*. Denotiamo con $I(d,k) \coloneqq \{\underline{i} = (i_1, \ldots, i_k) \text{ con } 1 \leq i_1 \leq \ldots \leq i_k \leq i_d\}$ l'insieme di multiindici. Per ogni $i \in I(d,k)$ indichiamo con $e_{\underline{i}}^* = e_{i_1}^* \wedge \ldots \wedge e_{i_k}^* \in \Lambda^k(V)$. Data una matrice $d \times k$ A, $A_{\underline{i}}$ è il minore di A dato dalle righe $i_1, \ldots, i_k$.

Proposizione 1. $e_{\underline{i}}^*(v_1, \ldots, v_k) = \det(A_{\underline{i}})$, dove $A \in R^{d \times k}$ matrice delle coordinate di $v_1, \ldots, v_k$, cioè $A_{ij} = (v_j)_i$.

Dimostrazione. Per induzione su k.

- $k = 1$. OK
- *Passo induttivo* $k-1 \to k$. Scriviamo $e_{\underline{i}}^* = e_{i_1} \wedge e_{\underline{i'}}$ con $\underline{i'} = (i_2, \ldots, i_k)$. Usando la definizione di prodotto esterno e l'ipotesi induttiva notiamo che questo è uguale allo sviluppo per la prima riga di $\det(A_{\underline{i}})$

$\square$

Proposizione 2. Posta $\{e_{\underline{i}} \colon \underline{i} \in I(d,k)\}$ è una base di $\Lambda^k(V)$ e in particolare per ogni $\alpha \in \Lambda^k(V)$

$$\alpha = \sum_{\underline{i} \in I(d,k)} \alpha(e_{\underline{i}}) e^*_{\underline{i}}$$

Dimostrazione. Definiamo $\widetilde{\alpha}$ come sopra. Prendiamo $\underline{i} \in I(d,k)$,allora

$$\widetilde{\alpha}(e_{j_1}, \ldots, e_{j_k}) = \sum_{\underline{i}} \alpha(e_{i_1}, \ldots, e_{i_k}) \cdot \underbrace{e^*_{\underline{i}}(e_{j_1}, \ldots, e_{j_k})}_{=\delta_{ij}} = \alpha(e_{j_1}, \ldots, e_{j_k})$$

Si conclude per linearità e alternanza.

Corollario. Vale la seguente identità

$$\dim \Lambda^k(V) = \# I(d,k) = \begin{cases} \binom{d}{k} & \text{se } k < d \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Proposizione 3 (Formula di Binet generalizzata)**.** Dati A, B matrici di $d \times k$ con $k < d$, allora

$$\det(B^t A) = \sum_{\underline{i} \in I(d,k)} \det(B_{\underline{i}}) \det(A_{\underline{i}})$$

Dimostrazione. Basta definire $\alpha(v_1, \ldots, v_k) = \det(B^t A)$ dove A è la matrice avente colonne pari a $v_1, \ldots, v_k$. Bisogna verificare che α è k-lineare alternante ([TO DO]), da cui segue che

$$\det(B^t A) = \alpha(v_1, \ldots, v_k) \underset{\text{Prop 2}}{=} \sum_{\underline{i}} \underbrace{\alpha(e^*_{i_1}, \ldots, e^*_{i_k})}_{\det(B^t_{\underline{i}})} \cdot \underbrace{e^*_{\underline{i}}(v_1, \ldots, v_k)}_{\det A_i}$$

$\square$

Osservazione. Nel caso in cui $B = A$, otteniamo la formula

$$\det(A^t A) = \sum_{\substack{Q \text{ minore} \\ k \times k \text{ di } A}} \det(Q)^2.$$

Caso particolare $V = \mathbb{R}^d$. Indichiamo con $e_1, \ldots, e_d$ i vettori della base canonica, $\mathrm{d}x_1, \ldots, \mathrm{d}x_d$ base duale di $\mathbb{R}^d$, $\mathrm{d}x_{\underline{i}} \coloneqq e^*_{\underline{i}}$ base canonica di $\Lambda^k(\mathbb{R}^d)$.

Esempio.

$$\begin{aligned} (\mathrm{d}x_1 + 2\,\mathrm{d}x_2) \wedge (2\,\mathrm{d}x_1 \wedge \mathrm{d}x_3 - \mathrm{d}x_2 \wedge \mathrm{d}x_4) \\ &= 2\,\mathrm{d}x_1 \wedge \mathrm{d}x_1 \wedge \mathrm{d}x_3 - \mathrm{d}x_1 \wedge \mathrm{d}x_2\,\mathrm{d}x_4 + 4\,\mathrm{d}x_2 \wedge \mathrm{d}x_1 \wedge \mathrm{d}x_3 - 2\,\mathrm{d}x_2 \wedge \mathrm{d}x_2 \wedge \mathrm{d}x_4 \\ &= -\,\mathrm{d}x_1 \wedge \mathrm{d}x_2 \wedge \mathrm{d}x_4 - 4\,\mathrm{d}x_1 \wedge \mathrm{d}x_2 \wedge \mathrm{d}x_3. \end{aligned}$$

Nota. Nel prodotto esterno si cancellano tutti i termini con indici ripetuti.

Definizione. Dato $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ aperto, una ***k*-forma** ω su Ω è una "funzione" da Ω in $\Lambda^k(\mathbb{R}^d)$. In coordinate, $\omega(x) = \sum_{\underline{i} \in I(d,k)} w_{\underline{i}}(x) \cdot \mathrm{d}x_{\underline{i}}$.

Il **differenziale esterno** di una k-forma ω su Ω di classe C^1 è la $k+1$-forma su Ω di classe almeno C^0 data da

- $k = 0$. In tal caso f è una funzione (0-forma) e $\mathrm{d}f(x) = \mathrm{d}_x f = \sum \dfrac{\partial w_{\underline{i}}(x)}{\partial x_j} \mathrm{d}x_j \wedge \mathrm{d}x_{\underline{i}}$

- $k > 0$ $\mathrm{d}\omega \coloneqq \displaystyle\sum_{\underline{i} \in I(d,k)} \mathrm{d}\omega_{\underline{i}}(x) \wedge \mathrm{d}x_{\underline{i}} = \sum_{\underline{i} \in I(d,k)} \sum_{j=1}^{d} \frac{\partial \omega_{\underline{i}}(x)}{\partial x_j} \mathrm{d}x_j \wedge \mathrm{d}x_{\underline{i}}.$

Proposizione (Leibniz). Valgono le seguenti.

- $\mathrm{d}(\omega_1 \wedge \omega_2) = \mathrm{d}\omega_1 \wedge \omega_2 + (-1)^{k_1} \omega_1 \wedge \omega_2$
- $\mathrm{d}^2 \omega = 0$