Analisi 3

Appunti di Analisi 3 del corso di Giovanni Alberti e Maria Stella Gelli

Arianna Carelli e Antonio De Lucreziis

I Semestre 2021/2021

Indice

Capitolo 1

Teoria della misura

Misure astratte

Siano

X un insieme qualunque.

$\mathcal{A}$ una σ-algebra di sottoinsiemi di X, ovvero una famiglia di sottoinsiemi di X che rispetta le seguenti proprietà:

- $\emptyset, X \in \mathcal{A}$.
- $\mathcal{A}$ è chiusa per complementare, unione e intersezione numerabile.

μ una misura su X, ossia una funzione $\mu\colon A \to [0, +\infty]$ σ-addittiva, cioè tale che data una famiglia numerabile $\{E_k\} \subset A$ disgiunta e posto $E \coloneqq \bigcup E_n$, allora

$$\mu(E) = \sum_n \mu(E_n).$$

Seguono le proprietà.

(i) $\mu(\emptyset) = 0$.

(ii) *Monotonia.* Dati $E, E' \in \mathcal{A}$ e $E \subset E'$, allora $\mu(E) \leq \mu(E')$.

(iii) Data una successione crescente di insiemi, $E_n \uparrow E$, allora $\mu(E) = \lim_{n\to\infty} \mu(E_n) = \sup_n \mu(E_n)$.

(iv) Se $E_n \uparrow E$ e $\mu(E_{\bar{n}}) < +\infty$ per qualche $\bar{n}$, allora $\mu(E) = \lim_{n\to+\infty} \mu(E_n) = \inf_n \mu(E_n)$.

(v) *Subadditività.* Se $\bigcup E_n \supset E$, allora $\mu(E) \leq \sum_n \mu(E_n)$.

Dove una successione crescente di insiemi $E_n \uparrow E$ è tale che $E_1 \subset E_2 \subset \dots E_n \subset \dots$ e $\bigcup E_n = E$. Notiamo infine che dato $X' \in \mathcal{A}$ si possono restringere $\mathcal{A}$ e μ a X'.

Terminologia.

Sia $P(X)$ un'affermazione che dipende da $x \in X$. Si dice che $P(X)$ vale μ-quasi ogni $x \in X$ se l'insieme $\{x\colon P(x) \text{ non vale}\}$ è (contenuto in) un insieme di misura μ nulla.

μ si dice *completa* se $F \subset E, E \in \mathcal{A}$ e $\mu(E) = 0$, allora $F \in \mathcal{A}$ (e di conseguenza $\mu(F) = 0$).

μ si dice *finita* se $\mu(X) < +\infty$.

D'ora in poi consideriamo solo misure complete.

Misura che conta i punti. Siano

X qualunque.

$\mathcal{A} \coloneqq \mathcal{P}(X)$.

$\mu(E) \coloneqq \#E \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$.

Delta di Dirac in x_0. Siano

X qualunque

$\mathcal{A} \coloneqq \mathcal{P}(X)$.

$x_0 \in X$ fissato, allora $\mu(E) \coloneqq \delta_{x_0}(E) = \mathbb{1}_E(x_0)$.

2. *Misura di Lebesgue* Siano

$X = \mathbb{R}^n$.

$\mathcal{M}^n$ la σ-algebra dei misurabili secondo Lebesgue.

$\mathcal{L}^n$ la misura di Lebesgue.

Di seguito definiamo la misura di Lebesgue $\mathcal{L}^n$.

Dato R parallelepipedo in $\mathbb{R}^n$, cioè $R = \prod_{k=1}^n I_k$ con I_k intervalli in $\mathbb{R}$. Si pone

$$\mathrm{vol}_n(R) \coloneqq \prod_{k=1}^n \mathrm{lungh}(I_k)$$

per ogni $E \subset \mathbb{R}^n$. Si pone

$$\mathcal{L}^n(E) \coloneqq \inf \left\{ \sum_i \mathrm{vol}_n(R_i) \mid \{R_i\} \text{ tale che} \cup_i R_i \supset E \right\}.$$

Osservazione 1. Si hanno le seguenti.

- $\mathcal{L}^n(R) = \mathrm{vol}_n(R)$.
- $\mathcal{L}^n$ è così definita se $\mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ ma non è σ-addittiva.
- $\mathcal{L}^n$ è σ-addittiva su $\mathcal{M}^n$ (è per questo che bisogna introdurre $\mathcal{M}^n$).

Il terzo punto giustifica l'introduzione dei *misurabili secondo Lebesgue.* Dunque definiamo $\mathcal{M}^n$.

Dato $E \subset \mathbb{R}^n$, si dice che E è misurabile (secondo Lebesgue) se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un aperto A e un chiuso C tale che

- $C \subset E \subset A$,
- $\mathcal{L}^n(A \setminus C) \leq \varepsilon$.

Osservazione 2. Si hanno le seguenti.

- Per ogni E misurabile vale
$$\mathcal{L}^n = \inf \{\mathcal{L}^n \colon A \text{ aperto}, A \supset E\} = \sup \{\mathcal{L}^n \colon K \text{ compatto}, K \subset E\}.$$
- Notiamo che se $F \subset E$ con $E \subset \mathcal{M}^n$ e $\mathcal{L}^n(E) = 0$, allora $F \in \mathcal{M}^n$. Ovvero la misura di Lebesgue è completa!

Notazione. $|E| \coloneqq \mathcal{L}^n(E)$.

Funzioni misurabili

Definizione 1.1. Dati $X, \mathcal{A}, \mu$ e $f\colon X \to \mathbb{R}$ (o in Y spazio topologico), diciamo che f è *misurabile* ($\mathcal{A}$-misurabile), se

$$f^{-1}(A) \in \mathcal{A} \quad \text{per ogni } A \text{ aperto.}$$

Osservazione 3. Si hanno le seguenti.

- Dato $E \subset X$, vale $E \in \mathcal{A}$ se solo se $\mathbb{1}_E$ è misurabile.
- La classe delle funzioni misurabili è chiusa rispetto a moolte operazioni:
  * somma, prodotto (se hanno senso nello spazio immagine della funzione).
  * Composizione con funzioni continue. In particolare, se $f\colon X \to Y$ continua e $g\colon Y \to Y'$ continua, allora $g \circ f$ è misurabile.
  * Convergenza puntuale: data una successione di f_n misurabili e $f_n \to f$ puntualmente, allora f è misurabile.
  * $\liminf$ e $\limsup$ (nel caso $Y = \mathbb{R}$).

1.3.1 Funzioni semplici

Indico con $\mathcal{S}$ la classe delle funzioni $f\colon X \to \mathbb{R}$ *semplici*, cioè della forma $f = \sum_i^n \alpha_i \mathbb{1}_{E_i}$ con $\{E_i\}_{1\le i\le n}$ misurabili e $\alpha_i \in \mathbb{R}$.
Nota. Se necessario posso supporre gli E_i disgiunti.

Integrale

La definizione di $\int_X f \; \mathrm{d}\mu$ è data per passi:

1. $f \in \mathcal{S}, f \geq 0$, cioè $f = \sum_i \alpha_i \mathbb{1}_{E_i}$, $\alpha_i \geq 0$, si pone
$$\int_X f \; \mathrm{d}\mu := \sum_i \alpha_i \; \mu(E_i),$$
convenendo che $+\infty \cdot 0 = 0$.
2. $f\colon X \to [0, +\infty]$ misurabile si pone
$$\int_X f \; \mathrm{d}\mu := \sup_{\substack{g\in\mathcal{S} \\ 0\le g\le f}} \int_X g \; \mathrm{d}\mu.$$
3. $f\colon X \to \overline{\mathbb{R}}$ misurabile si dice *integrabile* se
$$\int_X f^+ \; \mathrm{d}\mu < +\infty \quad \text{oppure} \quad \int_X f^- \; \mathrm{d}\mu < +\infty.$$
Per tali f si pone
$$\int_X f \; \mathrm{d}\mu := \int_X f^+ \; \mathrm{d}\mu - \int_X f^- \; \mathrm{d}\mu.$$
4. $f\colon X \to \mathbb{R}^n$ si dice *sommabile* (o di *classe* $\mathcal{L}^1$) se $\int_X |f| \; \mathrm{d}\mu < +\infty$. In tal caso, se $\int_X f_i^\pm \; \mathrm{d}\mu < +\infty$ per ogni f_i componente di f, allora $\int_X f \; \mathrm{d}\mu$ esiste ed è finito.

Per tali f si pone

$$\int_X f \, \mathrm{d}\mu := \left(\int_X f_1 \, \mathrm{d}\mu, \ldots, \int_X f_n \, \mathrm{d}\mu \right).$$

Notazione. Scriveremo spesso $\int_E f(x) \, \mathrm{d}x$ invece di $\int_E f \, \mathrm{d}\mathcal{L}^n$.

Osservazione 4. Si hanno le seguenti.

- L'integrale è lineare (sulle funzioni sommabili).
- Le definizioni in 1 E 2 Danno lo stesso risultato per f semplice ≥ 0.
- La definizione in 2 Ha senso per ogni $f\colon X \to [0, +\infty]$ anche non misurabile. Ma in generale vale solo che

  $$\int_X f_1 + f_2 \, \mathrm{d}\mu \geq \int_X f_1 \, \mathrm{d}\mu + \int_X f_2 \, \mathrm{d}\mu.$$

- Dato $E \in \mathcal{A}$, f misurabile su E, notiamo che vale l'uguaglianza

  $$\int_E f \, \mathrm{d}\mu := \int_X f \cdot \mathbb{1}_E \, \mathrm{d}\mu.$$

- Si può definire $\int_X f \, \mathrm{d}\mu$ anche per $f\colon X \to Y$ con Y spazio vettoriale normato finito dimensionale e f sommabile. (è necessario avere uno spazio vettoriale, perchè mi serve la linearità e la moltiplicazione per scalare).
- Se $f_1 = f_2$ μ-q.o. allora $\int_X f_1 \, \mathrm{d}\mu = \int_X f_2 \, \mathrm{d}\mu$.
- Si definisce $\int_X f \, \mathrm{d}\mu$ anche se f è misurabile e definita su $X \setminus N$ con $\mu(N) = 0$.
- se $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ è integrabile secondo Rienmann allora è misurabile secondo Lebesgue e le due nozioni di integrale coincidono. *Nota.* Lo stesso vale per integrali impropri di funzioni positive. Ma nel caso più generale non vale: se $f\colon (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ è data da $f(x) := \dfrac{\sin x}{x}$, allora l'integrale di f definito su $(0, +\infty)$ esiste come integrale improprio ma non secondo Lebesgue $\left(\int_0^{+\infty} f^+ \, \mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} f^- \, \mathrm{d}x = +\infty\right)$.
- $\int_X f \, \mathrm{d}\delta_{x_0} = f(x_0)$.
- se $X = \mathbb{N}$ e μ è la misura che conta i punti l'integrale è

  $$\int_X f \, \mathrm{d}\mu = \sum_{n=0}^{\infty} f(n)$$

  per le f positive o tali che $\sum f^+(n) < +\infty$ oppure $\sum f^+(n) < -\infty$.
  Nota. $\sum_1^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ esiste come serie ma non come integrale. Da questo si osserva che serie e integrale non coincidono.
- Dato X qualunque, μ misura che conta i punti e $f\colon X \to [0, +\infty]$ posso definire la somma di tutti i valori di f

  $$\sum_{x \in X} f(x) := \int_X f \, \mathrm{d}\mu.$$

Prendo $X, \mathcal{A}, \mu$ come al solito.

Teorema 1.1 (Convergenza Monotona (Beppo Levi))**.** Date $f_n \colon X \to [0, +\infty]$ misurabili, tali che $f_n \uparrow f$ ovunque in X, allora

$$\lim_{n \to +\infty} \int_X f_n \, \mathrm{d}\mu = \int_X f \, \mathrm{d}\mu,$$

dove

$$\lim_{n \to +\infty} \int_X f_n \, \mathrm{d}\mu = \sup_n \int f_n \, \mathrm{d}\mu.$$

Teorema 1.2 (Lemma di Fatou)**.** Date $f_n \colon X \to [0, +\infty]$ misurabili, allora

$$\liminf_{n \to +\infty} \int_X f \, \mathrm{d}\mu \geq \int_X \left(\liminf_{n \to +\infty} f_n \right) \, \mathrm{d}\mu.$$

Teorema 1.3. Date $f_n \colon X \to \mathbb{R}$ (o anche $\mathbb{R}^n$) tali che

convergenza puntuale. $f_n(x) \to f(x)$ per ogni $x \in X$.

dominazione. Esiste $g \colon X \to [0, +\infty]$ sommabile tale che $|f_n(x)| \leq g(x)$ per ogni $x \in X$ e per ogni $n \in \mathbb{N}$.

Allora

$$\lim_{n \to \infty} \int_X f_n \, \mathrm{d}\mu = \int_X f \, \mathrm{d}\mu.$$

Nota. la seconda proprietà è essenziale. sostituirla con $\int_X |f_n| \, \mathrm{d}\mu \leq C < +\infty$ non basta!

Altro esempio di misura. Data $\rho \colon \mathbb{R}^n \to [0, +\infty]$ misurabile, la misura con densità ρ è data da

$$\mu(E) = \int_E \rho \, \mathrm{d}x \quad \text{per ogni } E \text{ misurabile.}$$

Osservazione 5. Si hanno le seguenti.

$\mathbb{R}^n$ e $\mathcal{L}^n$ possono essere sostituiti da X e $\widetilde{\mu}$.

il fatto che μ è una misura segue da Beppo Levi, in particolare serve per mostrare la subadditività.

Teorema 1.4 (Cambio di variabile)**.** Siano Ω, Ω' aperti di $\mathbb{R}^n$, $\phi \colon \Omega \to \Omega'$ un diffeomorfismo di classe C^1 e $f \colon \Omega' \to [0, +\infty]$ misurabile. Allora

$$\int_{\Omega'} f(x') \, \mathrm{d}x' = \int_{\Omega} f(\phi(x)) \, |\det(\nabla \phi(x))| \, \mathrm{d}x.$$

La stessa formula vale per f a valori in $\overline{\mathbb{R}}$ integrabile e per f a valori in $\mathbb{R}^n$ sommabile.

Osservazione 6. Si hanno le seguenti.

– Se $n = 1$, $|\det(\nabla \phi(x))| = |\phi'(x)|$ e non $\phi'(x)$ come nella formula vista ad analisi 1 (l'informazione del segno viene data dall'inversione degli estremi).

- Indebolire le ipotesi su ϕ è delicato. Basta ϕ di classe C^1 e $\#\phi^{-1}(x') = 1$ per quasi ogni $x' \in \Omega'$ (supponendo ϕ iniettiva la proprietà precedente segue immediatamente). Se ϕ non è "quasi" iniettiva bisogna correggere la formula per tenere conto della molteplicità.

Di seguito riportiamo il teorema di Fubini-Tonelli per la misura di Lebesgue.

Teorema 1.5 (Fubini-Tonelli)**.** Sia $R^{n_1} \times \mathbb{R}^{n_2} \simeq \mathbb{R}^n$ con $n = n_1 + n_2$, $E \coloneqq E_1 \times E_2$ dove E_1, E_2 sono misurabili e f è una funzione misurabile definita su E. Se f ha valori in $[0, +\infty]$ allora

$$\int_X f \, \mathrm{d}\mu = \int_{E_2} \left(\int_{E_1} f(x_1, x_2) \, \mathrm{d}x_1 \right) \, \mathrm{d}x_2 = \int_{E_1} \left(\int_{E_2} f(x_1, x_2) \, \mathrm{d}x_2 \right) \, \mathrm{d}x_1.$$

Vale lo stesso per f a valori in $\mathbb{R}$ o in $\mathbb{R}^n$ sommabile.

Osservazione 7. Si hanno le seguenti.

- Se X_1, X_2 sono spazi con misure μ_1, μ_2 (con opportune ipotesi) vale:

$$\int_{E_2} \left(\int_{E_1} f(x_1, x_2) \, \mathrm{d}\mu_1(x_1) \right) \mathrm{d}\mu_2(x_2) = \int_{E_1} \left(\int_{E_2} f(x_1, x_2) \, \mathrm{d}\mu_2(x_2) \right) \mathrm{d}\mu_1(x_1).$$

  se $f \geq 0$ oppure $\int_{X_1} \left(\int_{x_2} |f| \, \mathrm{d}\mu_2(x_2) \right) \mathrm{d}\mu_1(x_1) < +\infty$.

- Se $X_1 \subset \mathbb{R}$ (oppure $X_1 \subset \mathbb{R}^n$), $\mu_1 = \mathcal{L}^n$ e $X_2 = \mathbb{N}$, μ_2 è la misura che conta i punti, allora la formula sopra diventa

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\int_{X_1} f_n(x) \, \mathrm{d}x \right) = \int_{X_1} \left(\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x) \right) \mathrm{d}x.$$

  Se $f_i \geq 0$ oppure $\sum_i \left(\int_{X_1} |f_i(x)| \, \mathrm{d}x \right) < +\infty$.

- se $X_1 = X_2 = \mathbb{N}$ e $\mu_1 = \mu_2$ è la misura che conta i punti la formula sopra diventa

$$\sum_{j=0}^{\infty} \left(\sum_{i=0}^{\infty} a_{i,j} \right) = \sum_{i=0}^{\infty} \left(\sum_{j=0}^{\infty} a_{i,j} \right)$$

  se $a_{i,j} \geq 0$ oppure $\sum_i \sum_j |a_{i,j}| < +\infty$.

Capitolo 2

Spazi L^p e convoluzione

Capitolo 3

Spazi di Hilbert

Capitolo 4

Serie di Fourier

Capitolo 5

Applicazioni della serie di Fourier

Capitolo 6

Trasformata di Fourier

Capitolo 7

Funzioni armoniche

Capitolo 8

Integrazione di superfici

prova test prova