

Analisi 3

Appunti di Analisi 3 del corso di Giovanni Alberti e Maria Stella Gelli

Arianna Carelli e Antonio De Lucreziis

I Semestre 2021/2021

Indice

Capitolo 1

Teoria della misura

1.1 Misure astratte

Definizione. Uno spazio misurabile è una terna (X, \mathcal{A}, μ) tale che

- X è un insieme qualunque.
- \mathcal{A} è una σ -algebra di sottoinsiemi di X (chiamata σ -algebra dei misurabili) ovvero una famiglia di sottoinsiemi di X che rispetta le seguenti proprietà:
 - $\emptyset, X \in \mathcal{A}$.
 - \mathcal{A} è chiusa per complementare, unione e intersezione numerabile.
- μ è una misura su X , ossia una funzione $\mu: \mathcal{A} \rightarrow [0, +\infty]$ σ -addittiva, cioè tale che data una famiglia numerabile $\{E_k\} \subset \mathcal{A}$ disgiunta e posto $E := \bigcup E_n$, allora

$$\mu(E) = \sum_n \mu(E_n).$$

Notazione. Data una successione crescente di insiemi $E_1 \subset E_2 \subset \dots \subset E_n \subset \dots$ con $\bigcup E_n = E$, scriviamo $E_n \uparrow E$.

Proprietà.

- $\mu(\emptyset) = 0$
- *Monotonia:* Dati $E, E' \in \mathcal{A}$ e $E \subset E'$, allora $\mu(E) \leq \mu(E')$.
- Data $E_n \uparrow E$, vale $\mu(E) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(E_n) = \sup_n \mu(E_n)$.
- Se $E_n \downarrow E$ e $\mu(E_{\bar{n}}) < +\infty$ per qualche \bar{n} , allora $\mu(E) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(E_n) = \inf_n \mu(E_n)$.
- *Subadditività:* Se $E \subset \bigcup E_n$, allora $\mu(E) \leq \sum_n \mu(E_n)$.

Osservazione. Dato $X' \in \mathcal{A}$ si possono restringere \mathcal{A} e μ a X' nel modo ovvio.

Definizioni.

- μ si dice **completa** se $F \subset E, E \in \mathcal{A}$ e $\mu(E) = 0$, allora $F \in \mathcal{A}$ (e di conseguenza $\mu(F) = 0$).

- μ si dice **finita** se $\mu(X) < +\infty$.
- μ si dice **σ -finita** se esiste una successione $\{E_n\}$ con $E_n \subset E_{n+1}$ tale che $\bigcup E_n = X$ con $\mu(E_n) < +\infty$ per ogni n .

Notazione. Sia $P(X)$ un predicato che dipende da $x \in X$ allora si dice che $P(X)$ **vale μ -quasi ogni $x \in X$** se l'insieme $\{x \mid P(x) \text{ è falso}\}$ è (contenuto in) un insieme di misura μ nulla.

D'ora in poi consideriamo solo misure complete.

1.2 Esempi di misure

- **Misura che conta i punti.**

$$X \text{ insieme} \quad \mathcal{A} := \mathcal{P}(X) \quad \mu(E) := \#E \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$$

- **Delta di Dirac in x_0 .**

$$X \text{ insieme, } x_0 \in X \text{ fissato} \quad \mathcal{A} := \mathcal{P}(X) \quad \mu(E) := \delta_{x_0}(E) = \mathbb{1}_E(x_0)$$

- **Misura di Lebesgue.**

$$X = \mathbb{R}^n \quad \mathcal{M}^n \text{ } \sigma\text{-algebra dei misurabili secondo Lebesgue} \quad \mathcal{L}^n \text{ misura di Lebesgue}$$

Dato R parallelepipedo in \mathbb{R}^n , cioè $R = \prod_{k=1}^n I_k$ con I_k intervalli in \mathbb{R} . Si pone

$$\text{vol}_n(R) := \prod_{k=1}^n \text{lung}(I_k)$$

per ogni $E \subset \mathbb{R}^n$ (assumendo $\text{lung}([a, b]) = b - a$). Infine poniamo

$$\mathcal{L}^n(E) := \inf \left\{ \sum_i \text{vol}_n(R_i) \mid \{R_i\} \text{ tale che } E \subset \bigcup_i R_i \right\}.$$

Osservazioni.

- $\mathcal{L}^n(R) = \text{vol}_n(R)$.
- \mathcal{L}^n non è σ -addittiva su $\mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$.

Il secondo punto giustifica l'introduzione della σ -algebra dei **misurabili secondo Lebesgue** che denotiamo con \mathcal{M}^n .

Dato $E \subset \mathbb{R}^n$ si dice che E è misurabile (secondo Lebesgue) se

$$\forall \varepsilon > 0 \exists A \text{ aperto e } C \text{ chiuso, tali che } C \subset E \subset A \text{ e } \mathcal{L}^n(A \setminus C) \leq \varepsilon.$$

Osservazioni.

- Per ogni E misurabile vale

$$\mathcal{L}^n(E) = \inf \{ \mathcal{L}^n(A) : A \text{ aperto, } A \supset E \} = \sup \{ \mathcal{L}^n(K) : K \text{ compatto, } K \subset E \}.$$

- Notiamo che se $F \subset E$ con $E \in \mathcal{M}^n$ e $\mathcal{L}^n(E) = 0$, allora $F \in \mathcal{M}^n$. Ovvero la misura di Lebesgue è completa!

Notazione. $|E| := \mathcal{L}^n(E)$

1.3 Funzioni misurabili

Definizione. Dato (X, \mathcal{A}, μ) e $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ (o al posto di \mathbb{R} in Y spazio topologico), diciamo che f è **misurabile** (più precisamente \mathcal{A} -misurabile), se

$$\forall A \text{ aperto } f^{-1}(A) \in \mathcal{A}$$

Osservazioni.

- Dato $E \subset X$, vale $E \in \mathcal{A}$ se solo se $\mathbb{1}_E$ è misurabile.
- La classe delle funzioni misurabili è chiusa rispetto a molte operazioni
 - *Somma, prodotto* (se hanno senso nello spazio immagine della funzione).
 - *Composizione con funzione continua*: Se $f: X \rightarrow Y$ continua e $g: Y \rightarrow Y'$ continua, allora $g \circ f$ è misurabile.
 - *Convergenza puntuale*: data una successione di f_n misurabili e $f_n \rightarrow f$ puntualmente, allora f è misurabile.
 - \liminf e \limsup (almeno nel caso $Y = \mathbb{R}$).

1.3.1 Funzioni semplici

Definizione. Definiamo la classe delle **funzione semplici** come

$$\mathcal{S} := \left\{ f: X \rightarrow \mathbb{R} \mid f = \sum_i \alpha_i \mathbb{1}_{E_i} \text{ con } E_i \text{ misurabili e } \{\alpha_i\} \text{ finito} \right\}$$

Osservazione. La rappresentazione di una funzione semplice come combinazione lineare di indicatori di insiemi *non è unica*, però se necessario possiamo prendere gli E_i disgiunti.

1.4 Integrale

Definizione. Diamo la definizione di $\int_X f \, d\mu$ per passi

- i) Se $f \in \mathcal{S}$ e $f \geq 0$ cioè $f = \sum_i \alpha_i \mathbb{1}_{E_i}$ con $\alpha_i \geq 0$ allora poniamo

$$\int_X f \, d\mu := \sum_i \alpha_i \mu(E_i),$$

convenendo che $0 \cdot +\infty = 0$ in quanto la misura di un insieme non è necessariamente finita.

- ii) Se $f: X \rightarrow [0, +\infty]$ misurabile si pone

$$\int_X f \, d\mu := \sup_{\substack{g \in \mathcal{S} \\ 0 \leq g \leq f}} \int_X g \, d\mu.$$

iii) $f: X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ misurabile si dice **integrabile** se

$$\int_X f^+ d\mu < +\infty \quad \text{oppure} \quad \int_X f^- d\mu < +\infty.$$

e per tali f si pone

$$\int_X f d\mu := \int_X f^+ d\mu - \int_X f^- d\mu.$$

iv) $f: X \rightarrow \mathbb{R}^n$ si dice **sommabile** (o di **classe** \mathcal{L}^1) se $\int_X |f| d\mu < +\infty$. In tal caso, se $\int_X f_i^\pm d\mu < +\infty$ per ogni f_i componente di f , allora $\int_X f d\mu$ esiste ed è finito.

Per tali f si pone

$$\int_X f d\mu := \left(\int_X f_1 d\mu, \dots, \int_X f_n d\mu \right).$$

Notazione. Scriveremo spesso $\int_E f(x) dx$ invece di $\int_E f d\mathcal{L}^n$.

Osservazioni.

- L'integrale è lineare (sulle funzioni sommabili).
- I passaggi ?? e ?? danno lo stesso risultato per f semplice ≥ 0 .
- La definizione in ?? ha senso per ogni $f: X \rightarrow [0, +\infty]$ anche non misurabile. Ma in generale vale solo che

$$\int_X f_1 + f_2 d\mu \geq \int_X f_1 d\mu + \int_X f_2 d\mu.$$

- Dato $E \in \mathcal{A}$, f misurabile su E , notiamo che vale l'uguaglianza

$$\int_E f d\mu := \int_X f \cdot \mathbb{1}_E d\mu.$$

- Si può definire l'integrale anche per $f: X \rightarrow Y$ con Y spazio vettoriale normato finito dimensionale¹ ed f sommabile.
- Se $f_1 = f_2$ μ -q.o. allora $\int_X f_1 d\mu = \int_X f_2 d\mu$.
- Si definisce $\int_X f d\mu$ anche se f è misurabile e definita su $X \setminus N$ con $\mu(N) = 0$.
- Se $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ è integrabile secondo Riemann allora è misurabile secondo Lebesgue e le due nozioni di integrale coincidono.

Nota. Lo stesso vale per integrali impropri di funzioni positive. Ma nel caso più generale non vale: se consideriamo la funzione

$$f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R} \quad f(x) := \frac{\sin x}{x}$$

allora l'integrale di f definito su $(0, +\infty)$ esiste come integrale improprio ma non secondo Lebesgue, infatti

$$\int_0^{+\infty} f^+ dx = \int_0^{+\infty} f^- dx = +\infty$$

¹È necessario avere uno spazio vettoriale, perché serve la linearità e la moltiplicazione per scalare

- $\int_X f \, d\delta_{x_0} = f(x_0)$
- Se $X = \mathbb{N}$ e μ è la misura che conta i punti l'integrale è

$$\int_X f \, d\mu = \sum_{n=0}^{\infty} f(n)$$

per le f positive o tali che $\sum f^+(n) < +\infty$ oppure $\sum f^-(n) < +\infty$.

Nota. Come prima nel caso di funzioni non sempre positive ci sono casi in cui la serie solita non è definita come integrale di una misura, ad esempio

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$$

esiste come serie ma non come integrale.

- Dato X qualunque, μ misura che conta i punti e $f: X \rightarrow [0, +\infty]$ possiamo definire la somma di tutti i valori di f

$$\sum_{x \in X} f(x) := \int_X f \, d\mu.$$

1.5 Teoremi di convergenza

Sia (X, \mathcal{A}, μ) come in precedenza.

Teorema (di convergenza monotona o Beppo-Levi). Date $f_n: X \rightarrow [0, +\infty]$ misurabili, tali che $f_n \uparrow f$ ovunque in X , allora²

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_X f_n \, d\mu = \int_X f \, d\mu$$

ed in particolare il termine a sinistra è crescente quindi è proprio un sup ovvero $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_X f_n \, d\mu = \sup_n \int_X f_n \, d\mu$.

Teorema (lemma di Fatou). Date $f_n: X \rightarrow [0, +\infty]$ misurabili, allora

$$\liminf_{n \rightarrow +\infty} \int_X f \, d\mu \geq \int_X \left(\liminf_{n \rightarrow +\infty} f_n \right) \, d\mu.$$

Teorema (di convergenza dominata o di Lebesgue). Date $f_n: X \rightarrow \mathbb{R}$ (o anche \mathbb{R}^n) misurabili con le seguenti proprietà

- *Convergenza puntuale:* $f_n(x) \rightarrow f(x)$ per ogni $x \in X$.
- *Dominazione:* Esiste $g: X \rightarrow [0, +\infty]$ sommabile tale che $|f_n(x)| \leq g(x)$ per ogni $x \in X$ e per ogni $n \in \mathbb{N}$.

allora

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_X f_n \, d\mu = \int_X f \, d\mu.$$

²Mnemonica: $\sup_n \int_X f_n \, d\mu = \int_X \sup_n f_n \, d\mu$

Nota. La seconda proprietà è essenziale; sostituirla con $\int_X |f_n| \, d\mu \leq C < +\infty$ non basta!

Definizione. Data una *densità* $\rho: \mathbb{R}^n \rightarrow [0, +\infty]$ misurabile, la **misura μ con densità ρ** è data da

$$\forall E \in \mathcal{A} \quad \mu(E) := \int_E \rho \, dx$$

Osservazioni.

- \mathbb{R}^n e \mathcal{L}^n possono essere sostituiti da X e $\tilde{\mu}$.
- il fatto che μ è una misura segue da Beppo Levi, in particolare serve per mostrare la subadditività.

Teorema (di cambio di variabile). Siano Ω e Ω' aperti di \mathbb{R}^n , $\Phi: \Omega \rightarrow \Omega'$ un diffeomorfismo³ di classe C^1 e $f: \Omega' \rightarrow [0, +\infty]$ misurabile. Allora

$$\int_{\Omega'} f(x') \, dx' = \int_{\Omega} f(\Phi(x)) |\det(\nabla \Phi(x))| \, dx.$$

La stessa formula vale per f a valori in $\overline{\mathbb{R}}$ integrabile e per f a valori in \mathbb{R}^n sommabile.

Osservazioni.

- Se $n = 1$, $|\det(\nabla \Phi(x))| = |\Phi'(x)|$ e non $\Phi'(x)$ come nella formula vista ad Analisi 1 (l'informazione del segno viene data dall'inversione degli estremi).
- Indebolire le ipotesi su Φ è delicato. Basta Φ di classe C^1 e $\forall x' \in \Omega' \# \Phi^{-1}(x') = 1$ (supponendo Φ iniettiva la proprietà precedente segue immediatamente). Se Φ non è "quasi" iniettiva bisogna correggere la formula per tenere conto della molteplicità.
- Quest'ultima osservazione serve giusto per far funzionare il cambio in coordinate polari che non è iniettivo solo nell'origine.

Formula di cambio di variabile applicata a funzioni radiali. Sia $f: [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ misurabile (di solito si richiede misurabile e positiva oppure sommabile). Allora per il teorema di cambio di variabili vale la seguente

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(|x|) \, dx = c_n \cdot \int_0^{+\infty} f(\rho) \rho^{n-1} \, d\rho,$$

dove $c_n = n \mathcal{L}^n(\mathcal{B}(0, 1))$.

1.5.1 Fubini-Tonelli

Di seguito riportiamo il teorema di Fubini-Tonelli per la misura di Lebesgue.

Teorema (di Fubini-Tonelli). Sia $\mathbb{R}^{n_1} \times \mathbb{R}^{n_2} \simeq \mathbb{R}^n$ con $n = n_1 + n_2$, $E := E_1 \times E_2$ dove E_1, E_2 sono misurabili e f è una funzione misurabile definita su E . Se f ha valori in $[0, +\infty]$ allora

$$\int_E f \, d\mu = \int_{E_2} \int_{E_1} f(x_1, x_2) \, dx_1 \, dx_2 = \int_{E_1} \int_{E_2} f(x_1, x_2) \, dx_2 \, dx_1$$

³funzione differenziabile con inversa differenziabile.

Vale lo stesso per f a valori in \mathbb{R} o in \mathbb{R}^n sommabile.

Osservazioni. Possiamo generalizzare il teorema di Fubini-Tonelli a misure generiche ed ottenere alcuni risultati utili che useremo ogni tanto.

- Se X_1, X_2 sono spazi con misure μ_1, μ_2 (con opportune ipotesi) vale:

$$\int_{E_2} \int_{E_1} f(x_1, x_2) d\mu_1(x_1) d\mu_2(x_2) = \int_{E_1} \int_{E_2} f(x_1, x_2) d\mu_2(x_2) d\mu_1(x_1).$$

se $f \geq 0$ oppure $\int_{X_1} \int_{X_2} |f| d\mu_2(x_2) d\mu_1(x_1) < +\infty$.

- **Teorema** (di scambio serie-integrale). Se $X_1 \subset \mathbb{R}$ (oppure $X_1 \subset \mathbb{R}^n$), $\mu_1 = \mathcal{L}^n$ e $X_2 = \mathbb{N}$, μ_2 è la misura che conta i punti, allora la formula sopra diventa

$$\sum_{n=0}^{\infty} \int_{X_1} f_n(x) dx = \int_{X_1} \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x) dx.$$

se $f_i \geq 0$ oppure $\sum_i \int_{X_1} |f_i(x)| dx < +\infty$.

- **Teorema** (di scambio di serie). Se $X_1 = X_2 = \mathbb{N}$ e $\mu_1 = \mu_2$ è la misura che conta i punti la formula sopra diventa

$$\sum_{j=0}^{\infty} \sum_{i=0}^{\infty} a_{i,j} = \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} a_{i,j}$$

se $a_{i,j} \geq 0$ oppure $\sum_i \sum_j |a_{i,j}| < +\infty$.

Capitolo 2

Spazi L^p e convoluzione

2.1 Disuguaglianze

2.1.1 Disuguaglianza di Jensen

Ricordiamo che una funzione $f: \mathbb{R}^d \rightarrow [-\infty, +\infty]$ è **convessa** se e solo se dati $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}^d$ e $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in [0, 1]$ con $\sum_i \lambda_i = 1$ abbiamo che

$$f\left(\sum_i \lambda_i x_i\right) \leq \sum_i \lambda_i f(x_i)$$

Definizione. Una funzione $f: X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ si dice **semicontinua inferiormente nel punto** $x_0 \in X$ se per ogni $t \in \mathbb{R}$ con $t < f(x_0)$ esiste $U \in \mathcal{I}(x)$ tale che $t < f(y)$ per ogni $y \in U$. Infine f si dice **semicontinua inferiormente su X** se lo è in ogni $x \in X$.

Proprietà. Dalla definizione segue che $f: X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ è semicontinua inferiormente in $x_0 \in X$ se e solo se

$$f(x) \leq \sup_{U \in \mathcal{I}(x)} \inf_{y \in U} f(y) = \liminf_{x \rightarrow x_0} f(x).$$

Teorema (Jensen). Dato (X, \mathcal{A}, μ) con $\mu(X) = 1$ e $f: \mathbb{R}^d \rightarrow [-\infty, +\infty]$ convessa e semicontinua inferiormente (S.C.I.) e $u: X \rightarrow \mathbb{R}^d$ sommabile allora vale

$$f\left(\int_X u \, d\mu\right) \leq \int_X f \circ u \, d\mu$$

e $f \circ u$ è integrabile.

Osservazioni.

- $(f \circ u)^-$ ha integrale finito.
- Interpretando μ come probabilità si riscrive come $\mathbb{E}[f \circ u] \geq f(\mathbb{E}[u])$.
- Se u è una funzione semplice, cioè $u = \sum_i y_i \cdot \mathbb{1}_{E_i}$ con E_i disgiunti e $\bigcup E_i = X$ allora posti $\lambda_i = \mu(E_i)$ abbiamo

$$\int_X f \circ u \, d\mu = \int_X \sum_i f(y_i) \cdot \mathbb{1}_{E_i} \, d\mu = \sum_i \lambda_i f(y_i) \geq f\left(\sum_i \lambda_i y_i\right) = f\left(\int_X u \, d\mu\right)$$

Questo ci darebbe una strada per dimostrare in generale per passi il teorema di Jensen ma in realtà si presentano vari problemi tecnici.

- Ogni funzione convessa e S.C.I su Ω convesso in \mathbb{R}^d si estende a $\tilde{f}: \mathbb{R}^d \rightarrow (-\infty, +\infty]$ convessa e S.C.I.; ad esempio se $\Omega = (0, +\infty)$

$$f(y) = \frac{1}{y} \quad \rightsquigarrow \quad \tilde{f}(y) = \begin{cases} +\infty & y \leq 0 \\ \frac{1}{y} & y > 0 \end{cases}$$

- L'ipotesi di semi-continuità è non banale perché le funzioni convesse sono continue solo se a valori in \mathbb{R} , ad esempio per k costante la funzione

$$f(y) := \begin{cases} k & y < 0 \\ +\infty & y \geq 0 \end{cases}$$

è convessa ma non semi-continua inferiormente (e neanche continua).

Dimostrazione. Poniamo $y_0 := \int_X u \, d\mu$, allora la tesi diventa

$$f\left(\int_X u \, d\mu\right) \leq \int_X f \circ u \, d\mu \quad \Longleftrightarrow \quad f(y_0) \leq \int_X f \circ u \, d\mu.$$

Prendiamo $\phi: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ affine (ovvero $\phi(y) = a \cdot y + b$ con $a \in \mathbb{R}^d$ e $b \in \mathbb{R}$) tale che $\phi \leq f$, allora

$$\int_X f \circ u \, d\mu \underset{(*)}{\geq} \int_X \phi \circ u \, d\mu = \int_X a \cdot u + b \, d\mu = a y_0 + b = \phi(y_0)$$

Concludiamo usando il seguente lemma di caratterizzazione delle funzioni convesse ed S.C.I.

Lemma. Ogni $f: \mathbb{R}^d \rightarrow (-\infty, +\infty]$ convessa e S.C.I è tale che

$$\forall y_0 \in \mathbb{R}^d \quad \sup_{\substack{\phi \text{ affine} \\ \phi \leq f}} \phi(y_0) = f(y_0)$$

Infine, si dimostra che $(f \circ u)^-$ è integrabile. Dal fatto che $f \circ u \geq \phi \circ u$ con $\phi \circ u$ sommabile¹ si ha che

$$\begin{aligned} &\implies (f \circ u)^- \leq (\phi \circ u)^- \\ &\implies (f \circ u)^- \quad \text{è sommabile} \\ &\implies f \circ u \quad \text{è integrabile} \end{aligned}$$

□

Nota. Nel caso $d = 1$ e $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ possiamo usare il fatto che le funzioni convesse ammettono sempre derivata destra o sinistra, il sup diventa un massimo e ci basta prendere come ϕ la retta tangente in $(y_0, f(y_0))$ o una con pendenza compresa tra $f'(y_0^-)$ e $f'(y_0^+)$.

Definizione. Dati $p_1, p_2 \in [1, +\infty]$ diciamo che sono **coniugati** se

$$\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} = 1$$

¹ u è sommabile e ϕ è affine.

convenendo che $1/\infty = 0$.

Fissiamo $p \in [1, +\infty]$ detto *esponente di sommabilità* e sia (X, \mathcal{A}, μ) come sempre.

Definizione. Data $f: X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ o \mathbb{R}^d misurabile, la **norma** p di f è

$$\|f\|_p := \left(\int_X |f|^p d\mu \right)^{1/p} \quad p \in [1, +\infty)$$

mentre per $p = +\infty$ poniamo

$$\|f\|_\infty = \text{supess} f(x) := \inf\{m \in [0, +\infty] \mid |f(x)| \leq m \text{ per } \mu\text{-q.o. } x\}.$$

Nota. In realtà queste sono solo delle semi-norme.

- $\|f\|_\infty \leq \sup_{x \in X} |f(x)|$
- $\|f\|_p = 0 \iff f = 0$ quasi ovunque

Dimostrazione.

\Rightarrow [TODO: Facile ma non ovvia]

\Leftarrow Ovvio.

□

- Se $f_1 = f_2$ quasi ovunque $\implies \|f_1\|_p = \|f_2\|_p$.

Dimostrazione. $f_1 = f_2$ quasi ovunque $\implies \exists D \subset X$ con $\mu(D) = 0$ tale che $f_1(x) = f_2(x)$ su $X \setminus D$, usiamo il fatto che l'integrale non cambia se modifichiamo la funzione su un insieme di misura nulla

$$\|f_1\|_p^p = \int_X |f_1|^p d\mu = \int_{X \setminus D} |f_1|^p d\mu = \int_{X \setminus D} |f_2|^p d\mu = \int_X |f_2|^p d\mu = \|f_2\|_p^p$$

□

2.1.2 Disuguaglianza di Young

Proposizione. Per ogni $a_1, a_2 \geq 0$ e $\lambda_1, \lambda_2 > 0$ con $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$ abbiamo che

$$a_1^{\lambda_1} a_2^{\lambda_2} \leq \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2$$

inoltre vale l'uguale se e solo se $a_1 = a_2$.

Dimostrazione. Se a_1 o $a_2 = 0$ allora è ovvia. Supponiamo dunque $a_1, a_2 > 0$. Per la concavità del logaritmo abbiamo

$$\lambda_1 \log a_1 + \lambda_2 \log a_2 \leq \log(\lambda_1 a_2 + \lambda_2 a_2), \iff \log(a_1^{\lambda_1} a_2^{\lambda_2}) \leq \log(\lambda_1 a_2 + \lambda_2 a_2)$$

e dalla monotonia

$$a_1^{\lambda_1} a_2^{\lambda_2} \leq \lambda_1 a_2 + \lambda_2 a_2.$$

Infine, il se e solo se per l'uguale segue dal fatto che il logaritmo è *strettamente concavo*. □

2.1.3 Disuguaglianza di Hölder

Proposizione. Date $f_1, f_2: X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ o \mathbb{R}^d e p_1, p_2 esponenti coniugati allora

$$\int_X |f_1| \cdot |f_2| d\mu \leq \|f_1\|_{p_1} \cdot \|f_2\|_{p_2}$$

vale anche per $p = +\infty$ convenendo che $+\infty \cdot 0 = 0$ nel membro di destra.

Dimostrazione. Se $\|f_1\|_{p_1} = 0$ o $+\infty$ e anche $\|f_2\|_{p_2} = 0$ o $+\infty$ la dimostrazione è immediata, supponiamo dunque $\|f_1\|_{p_1}, \|f_2\|_{p_2} > 0$ e finiti.

- *Caso 1:* se $p_1 = 1, p_2 = +\infty$ allora

$$\int_X |f_1| \cdot |f_2| d\mu \leq \int_X |f_1| \cdot \|f_2\|_\infty d\mu = \|f_2\|_\infty \cdot \int_X |f_1| d\mu = \|f_2\|_\infty \cdot \|f_1\|_1$$

- *Caso 2:* se $1 < p_1, p_2 < +\infty$, introduciamo un parametro $\gamma > 0$ allora

$$\int_X |f_1| \cdot |f_2| d\mu = \int_X (\gamma^{p_1} \cdot |f_1|^{p_1})^{1/p_1} \cdot (\gamma^{-p_2} \cdot |f_2|^{p_2})^{1/p_2} d\mu$$

a questo punto chiamiamo per comodità $g_1 := \gamma^{p_1} \cdot |f_1|^{p_1}$, $\lambda_1 := 1/p_1$ e $g_2 := \gamma^{-p_2} \cdot |f_2|^{p_2}$, $\lambda_2 := 1/p_2$ da cui

$$\begin{aligned} &= \int_X g_1^{\lambda_1} \cdot g_2^{\lambda_2} d\mu \stackrel{\text{Young}}{\leq} \int_X \lambda_1 g_1 + \lambda_2 g_2 d\mu = \lambda_1 \gamma^{p_1} \int_X |f_1|^{p_1} + \lambda_2 \gamma^{-p_2} \int_X |f_2|^{p_2} d\mu \\ &= \lambda_1 \gamma^{p_1} \cdot \|f_1\|_{p_1}^{p_1} + \lambda_2 \gamma^{-p_2} \cdot \|f_2\|_{p_2}^{p_2} \end{aligned}$$

posti ora $a_1 := \gamma^{p_1} \|f_1\|_{p_1}^{p_1}$ e $a_2 := \gamma^{-p_2} \|f_2\|_{p_2}^{p_2}$, per $\gamma \rightarrow 0$ abbiamo che $a_1 \rightarrow 0, a_2 \rightarrow +\infty$ mentre per $\gamma \rightarrow +\infty$ abbiamo che $a_1 \rightarrow +\infty, a_2 \rightarrow 0$ dunque per il teorema del valor medio esisterà γ tale che $a_1 = a_2$, ma allora siamo nel caso dell'uguaglianza per la disuguaglianza di Young dunque

$$\lambda_1 \gamma^{p_1} \|f_1\|_{p_1}^{p_1} + \lambda_2 \gamma^{-p_2} \|f_2\|_{p_2}^{p_2} = \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 = a_1^{\lambda_1} \cdot a_2^{\lambda_2} = \|f_1\|_{p_1} \cdot \|f_2\|_{p_2}$$

□

Osservazione. La disuguaglianza di Hölder può essere generalizzata a n funzioni, date f_1, \dots, f_n e p_1, \dots, p_n con $\frac{1}{p_1} + \dots + \frac{1}{p_n} = 1$ allora

$$\int_X \prod_i^n |f_i| d\mu \leq \prod_i^n \|f_i\|_{p_i}$$

2.1.4 Disuguaglianza di Minkowski

Proposizione. Consideriamo sempre (X, \mathcal{A}, μ) e sia $p \in [1, +\infty]$ un esponente di sommabilità ed $f_1, f_2: X \rightarrow \mathbb{R}$ oppure \mathbb{R}^d . Allora vale la disuguaglianza triangolare

$$\|f_1 + f_2\|_p \leq \|f_1\|_p + \|f_2\|_p.$$

Dimostrazione.

- *Caso 1:* se $p = 1$ o $p = +\infty$, allora svolgiamo il calcolo diretto

- Se $p = 1$

$$\|f_1 + f_2\|_1 = \int_X |f_1 + f_2| d\mu \leq \int_X |f_1| + |f_2| d\mu = \int_X |f_1| d\mu + \int_X |f_2| d\mu = \|f_1\|_1 + \|f_2\|_1$$

- Se $p = +\infty$ allora poniamo D l'insieme di *misura nulla* che realizza su $X \setminus D$ il \sup ² ovvero $\sup_X |f_1 + f_2| = \sup_{X \setminus D} |f_1 + f_2|$

$$\begin{aligned} \|f_1 + f_2\|_\infty &= \sup_X |f_1 + f_2| = \sup_{X \setminus D} |f_1 + f_2| \leq \sup_{X \setminus D} (|f_1| + |f_2|) \\ &= \sup_{X \setminus D} |f_1| + \sup_{X \setminus D} |f_2| = \sup_X |f_1| + \sup_X |f_2| = \|f_1\|_\infty + \|f_2\|_\infty \end{aligned}$$

- *Caso 2:* se $1 < p < +\infty$ e $0 < \|f_1 + f_2\|_p < +\infty$

$$\begin{aligned} \|f_1 + f_2\|_p^p &= \int_X |f_1 + f_2|^p \leq \int_X (|f_1| + |f_2|) \cdot |f_1 + f_2|^{p-1} d\mu = \\ &= \int_X |f_1| \cdot |f_1 + f_2|^{p-1} d\mu + \int_X |f_2| \cdot |f_1 + f_2|^{p-1} d\mu = \end{aligned}$$

ora introduciamo q esponente coniugato di p e notiamo

$$q = \frac{p}{p-1} \quad \text{e} \quad \| |f|^{p-1} \|_q = \|f\|_p^{p-1}$$

ora continuiamo a svolgere il conto di prima usando Hölder con esponenti p e q

$$\begin{aligned} &\stackrel{\text{Hölder}}{\leq} \|f_1\|_p \cdot \| |f_1 + f_2|^{p-1} \|_q + \|f_2\|_p \cdot \| |f_1 + f_2|^{p-1} \|_q = \\ &= (\|f_1\|_p + \|f_2\|_p) \cdot \| |f_1 + f_2|^{p-1} \|_q = (\|f_1\|_p + \|f_2\|_p) \cdot \|f_1 + f_2\|_p^{p-1} \end{aligned}$$

infine per l'ipotesi $\|f_1 + f_2\|_p > 0$ possiamo dividere per l'ultimo fattore e ottenere la tesi.

- *Caso 3:* se $1 < p < +\infty$ ma $\|f_1 + f_2\| = 0$ o $+\infty$ allora se $\|f_1 + f_2\| = 0$ la disuguaglianza è banale mentre se $\|f_1 + f_2\| = +\infty$ si usa la seguente disuguaglianza

$$\|f_1 + f_2\|_p^p \leq 2^{p-1} (\|f_1\|_p^p + \|f_2\|_p^p),$$

che si ottiene usando la convessità della funzione $x \mapsto x^p$ e la combinazione affine $\frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_2$ infatti

$$\left(\frac{x}{2} + \frac{y}{2} \right)^p \leq \frac{1}{2}x^p + \frac{1}{2}y^p \implies \frac{1}{2^{p-1}}(x+y)^p \leq x^p + y^p \implies (x+y)^p \leq 2^{p-1}(x^p + y^p).$$

□

²Si usa questa strategia perché il \sup non soddisfa le proprietà del modulo e della somma del \sup .

2.2 Esercitazione del 4 ottobre

2.2.1 Esercizi di teoria della misura

Di seguito riportiamo alcune proprietà di base di teoria della misura.

Proprietà.

i) Se $A \subset B$, allora $\mu(A) \leq \mu(B)$.

Dimostrazione. Scomponiamo $B = (B \setminus A) \cup (A \cap B)$. Per ipotesi $A \cap B = A$ ed essendo la misura positiva segue che

$$\mu(B) = \underbrace{\mu(B \setminus A) + \mu(A)}_{\geq 0} \geq \mu(A).$$

ii) Dati due insiemi A, B misurabili, vale

$$\mu(A \cup B) \leq \mu(A) + \mu(B).$$

Dimostrazione. La disuguaglianza segue dalle seguenti uguaglianze.

$$\begin{aligned}\mu(A) &= \mu(A \setminus B) + \mu(A \cap B) \\ \mu(B) &= \mu(B \setminus A) + \mu(A \cap B) \\ \mu(A \cup B) &= \mu(A \setminus B) + \mu(B \setminus A) + \mu(A \cap B).\end{aligned}$$

iii) Data una successione di insiemi $E_1 \subset E_2 \subset \dots \subset \dots$, si ha

$$\mu\left(\bigcup_i E_i\right) = \sup_i \mu(E_i) = \lim_i \mu(E_i).$$

iv) Data una successione di insiemi $E_1 \supset E_2 \supset \dots \supset \dots$ e $\mu(E_1) < +\infty$, si ha

$$\mu\left(\bigcap_i E_i\right) = \lim_i \mu(E_i).$$

Esercizio (Numerabile subaddittività). Dato $E \in \mathcal{A}$, $E \subset \bigcup_i E_i$ dove $E_i \in \mathcal{A}$. Allora

$$\mu(E) \leq \sum_i \mu(E_i).$$

Dimostrazione (Idea). Basta dimostrare che $\mu\left(\bigcup_i E_i\right) \leq \sum_i \mu(E_i)$. Infatti per quanto visto prima $\mu(E) \leq \mu\left(\bigcup_i E_i\right)$. Prima dimostriamo per induzione $\mu\left(\bigcup_{i=1}^N E_i\right) \leq \sum_{i=1}^N \mu(E_i)$.

Il passo base $n = 2$ è stato visto al punto ???. Una volta dimostrata la proprietà sopra, si nota che $\sum_{i=1}^N \mu(E_i)$ è limitata per ogni N , e dunque è limitato anche il suo limite, da cui la tesi. \square

2.2.2 Funzioni misurabili rispetto alla misura di Lebesgue

Si ricorda che le funzioni *continue*, *semplici* e *semicontinue* sono classi di funzioni misurabili. Due osservazioni sulle funzioni semicontinue.

- Le funzioni semicontinue sono *boreliane*.
- La proprietà di misurabilità delle funzioni semicontinue è necessaria per l'enunciato della disuguaglianza di Jensen.

Controesempio (disuguaglianza di Jensen). Notiamo che l'ipotesi di semicontinuità inferiore della funzione f è necessaria per la validità della disuguaglianza di Jensen. Infatti, definiamo f come segue

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x \in (0, 1) \\ +\infty & \text{altrimenti} \end{cases}.$$

Osserviamo che la funzione f così definita è convessa ma non semicontinua inferiormente.

Ora definiamo la funzione $u : X \rightarrow \mathbb{R}$ con $X = (0, 2)$, come la funzione costante di valore $1/2$. Calcoliamo l'integrale di $u(x)$ su X .

$$\int_X u(x) dx = 1.$$

In tal caso vale $f\left(\int_X u(x) dx\right) = +\infty$. D'altra parte $\int_X f \circ u dx = 0$, dunque l'ipotesi di semicontinuità inferiore è necessaria.

Fatto. Date φ_1, φ_2 funzioni semplici su \mathbb{R} con misura di Lebesgue. Allora $\varphi_1 \vee \varphi_2$ e $\varphi_1 \wedge \varphi_2$ sono ancora funzioni semplici.

Lemma. Data $f : X \rightarrow [0, +\infty]$ misurabile

$$\int_X f d\mu = 0 \iff f = 0 \text{ q.o. su } X$$

Dimostrazione.

\Rightarrow Dato che f è non negativa, il dominio X può essere riscritto come

$$X = \{x \in X \mid f(x) \geq 0\} = \{x \in X \mid f(x) > 0\} \cup \{x \in X \mid f(x) = 0\}$$

ricordiamo che $(0, +\infty) = \bigcup_{n \geq 1} (\frac{1}{n}, +\infty)$, dunque possiamo riscrivere una parte di X come segue e poi passare alle misure

$$\begin{aligned} \{x \in X \mid f(x) > 0\} &= \bigcup_{n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}} \left\{x \in X \mid f(x) \geq \frac{1}{n}\right\} \\ \implies \mu(\{x \in X \mid f(x) > 0\}) &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \mu\left(\left\{x \in X \mid f(x) \geq \frac{1}{n}\right\}\right) \end{aligned}$$

in questo modo otteniamo la seguente caratterizzazione dell'insieme su cui f è positiva

$$\mu(\{x \in X \mid f(x) > 0\}) > 0 \iff \exists \bar{n} \text{ tale che } \mu(\{x \in X \mid f(x) \geq 1/\bar{n}\}) > 0$$

A questo punto possiamo maggiorare come segue

$$0 = \int_X f d\mu \geq \int_{\{f \geq \frac{1}{n}\}} f d\mu \geq \frac{1}{n} \mu\left(\left\{x \mid f(x) \geq \frac{1}{n}\right\}\right).$$

da cui ricaviamo che $\forall n$ vale

$$\mu\left(\left\{x \mid f(x) \geq \frac{1}{n}\right\}\right) = 0$$

e si conclude osservando che

$$\mu(\{x \mid f(x) > 0\}) = \lim_n \mu\left(\left\{x \mid f(x) \geq \frac{1}{n}\right\}\right) = 0$$

\Leftarrow Dal fatto che f è positiva possiamo scrivere

$$\int_X f \, d\mu = \sup_{\substack{g \leq f \\ g \text{ semplice}}} \int_X g \, d\mu = \sup \sum_i \alpha_i \mu(E_i) = 0.$$

□

Osservazione (sup essenziale di funzioni misurabili). Data f misurabile, definiamo

$$\|f\|_{\infty, X} := \inf \{m \in [0, +\infty] \mid |f(x)| \leq m \text{ quasi ovunque}\}.$$

Se $\|f\|_{\infty} < +\infty$, allora diciamo che esiste una costante $L > 0$ con $L = \|f\|_{\infty, X}$, tale che

$$|f(x)| \leq L$$

quasi ovunque. Infatti, per definizione di \inf , $L = \lim_n m_n$, dove m_n verificano

$$|f(x)| \leq m_n \quad \forall x \in X \setminus N_m, \quad \mu(N_m) = 0.$$

Definiamo $N = \bigcup_m N_m$, da cui si ottiene

$$\mu(N) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(N_m) = 0.$$

Ovvero N è trascurabile. Preso $x \in X \setminus N$, vale

$$|f(x)| \leq m_n \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

2.2.3 Formula di cambio di variabile applicata a funzioni radiali

Sia $f: [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ misurabile (di solito si richiede misurabile e positiva oppure sommabile). Allora per il teorema di cambio di variabili vale la seguente

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(|x|) \, dx = c_n \cdot \int_0^{+\infty} f(\rho) \rho^{n-1} \, d\rho,$$

dove $c_n = n \mathcal{L}^n(\mathcal{B}(0, 1))$.

Applichiamo questa formula alla stima di integrali di funzioni positive.

Esercizio. Sia

$$\psi(x) = \frac{1}{\|x\|^\alpha}$$

su $\mathcal{B}(0,1) \in \mathbb{R}^n$. Notiamo che $\psi(x) = f(\|x\|)$ con $f = 1/t^\alpha$. Usiamo la formula appena introdotta per determinare gli $\alpha \in \mathbb{R}$ per i quali ψ è sommabile su $\mathcal{B}(0,1)$.

$$\int_{\mathcal{B}(0,1)} \psi(x) dx = c_n \int_0^1 \frac{1}{\rho^\alpha} \rho^{n-1} d\rho = c_n \int_0^1 \rho^{n-1-\alpha} d\rho = \begin{cases} \log(\rho) & n = \alpha \\ \frac{\rho^{n-\alpha}}{n-\alpha} & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Concludendo,

$$\int_{\mathcal{B}(0,1)} \frac{1}{\|x\|^\alpha} dx < +\infty \iff n > \alpha.$$

Esercizio. Con passaggi analoghi al precedente otteniamo

$$\int_{\mathbb{R}^n \setminus \mathcal{B}(0,1)} \frac{1}{\|x\|^\alpha} dx < +\infty \iff n < \alpha.$$

Esercizio. Vediamo per quali valori di β il seguente integrale converge

$$\int_{\mathcal{B}(0,1)} \frac{1}{(\|x\| + \|x\|^2)^\beta} dx$$

Vale la seguente catena di uguaglianze.

$$\int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{(\|x\| + \|x\|^2)^\beta} dx = \int_{\mathcal{B}(0,1)} \frac{1}{(\|x\| + \|x\|^2)^\beta} dx + \int_{\mathbb{R}^n \setminus \mathcal{B}(0,1)} \frac{1}{(\|x\| + \|x\|^2)^\beta} dx.$$

Studiamo separatamente i due pezzi dell'integrale.

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{B}(0,1)} \frac{1}{(\|x\| + \|x\|^2)^\beta} dx &= c_n \int_{\mathcal{B}(0,1)} \frac{1}{(\rho + \rho^2)^\beta} \rho^{n-1} d\rho = c_n \int_0^1 \frac{1}{\rho^\beta} \cdot \frac{\rho^{n-1}}{(1 + \rho)^\beta} d\rho \\ &\approx \int_0^1 \rho^{n-1-\beta} d\rho < +\infty \iff \beta < n. \end{aligned}$$

Inoltre,

$$\int_{\mathbb{R}^n \setminus \mathcal{B}(0,1)} \frac{1}{(\|x\| + \|x\|^2)^\beta} dx = \int_{\mathbb{R}^n \setminus \mathcal{B}(0,1)} \frac{1}{\rho^{2\beta}} \cdot \frac{\rho^{n-1}}{(\frac{1}{\rho} + 1)^\beta} d\rho \approx \int_1^{+\infty} \frac{\rho^{n-1}}{\rho^{2\beta}} d\rho < +\infty \iff 2\beta > n.$$

In conclusione, l'integrale è finito se $n > \beta > n/2$.

Esercizio. Studiare l'insieme di finitezza al variare del parametro α dell'integrale

$$\int_{[0,1]^n} \frac{1}{\|x\|_1^\alpha} dx.$$

Osserviamo che la norma 1 e 2 sono legate dalle seguenti disuguaglianze

$$\frac{\|x\|_1}{n} \leq \|x\|_2 \leq \|x\|_1.$$

Studiamo una maggiorazione per l'integrale

$$\int_{[0,1]^n} \frac{1}{\|x\|_1^\alpha} dx \leq \int_{[0,1]^n} \frac{1}{\|x\|^\alpha} dx \leq \int_{\mathcal{B}(0,\sqrt{n})} \frac{1}{\|x\|^\alpha} dx < +\infty \iff \alpha < n,$$

dunque

$$\int_{[0,1]^n} \frac{1}{\|x\|_1^\alpha} dx < +\infty \quad \text{se } \alpha < n.$$

Vediamo ora una minorazione.

$$\int_{[0,1]^n} \frac{1}{\|x\|_1^\alpha} dx = \frac{1}{2^n} \int_{[-1,1]^n} \frac{1}{\|x\|_1^\alpha} dx \geq \frac{1}{2^n} \int_{\mathcal{B}(0,1)} \frac{1}{\|x\|_1^\alpha} dx \approx \int_{\mathcal{B}(0,1)} \frac{1}{\|x\|^\alpha} dx < +\infty \iff \alpha < n.$$

Dunque l'integrale $\int_{[0,1]^n} \frac{1}{\|x\|_1^\alpha} dx$ converge se e solo se $\alpha < n$.

Esercizi per casa.

- (1) Dimostrare che date f, g misurabili ed $r, p_1, p_2 > 0$ tali che $1/r = 1/p_1 + 1/p_2$. Allora vale

$$\|f \cdot g\|_r \leq \|f\|_{p_1} \cdot \|g\|_{p_2}.$$

Suggerimento. Usare Hölder osservando che $1 = \frac{r}{p_1} + \frac{r}{p_2} = \frac{1}{(p_1/r)} + \frac{1}{(p_2/r)}$.

Dimostrazione. Vale quanto segue.

$$\begin{aligned} \|f \cdot g\|_r^r &= \int_X |f \cdot g|^r d\mu = \int_X |f^r| \cdot |g^r| d\mu \stackrel{\text{Holder}}{\leq} \|f^r\|_{p_1/r} \cdot \|g^r\|_{p_2/r} \\ &= \left(\int_X |f|^{r \cdot p_1/r} \right)^{r/p_1} \cdot \left(\int_X |g|^{r \cdot p_2/r} \right)^{r/p_2} = \|f\|_{p_1}^r \cdot \|g\|_{p_2}^r = (\|f\|_{p_1} \cdot \|g\|_{p_2})^r \\ &\implies \|f \cdot g\|_r \leq \|f\|_{p_1} \cdot \|g\|_{p_2}. \end{aligned}$$

□

- (2) Dimostrare che date f_1, \dots, f_n misurabili e $p_i > 0$ tali che $1/p_1 + \dots + 1/p_n = 1$ si ha

$$\|f_1 \cdots f_n\|_1 \leq \|f_1\|_{p_1} \cdots \|f_n\|_{p_n}.$$

Suggerimento. Fare il primo passo dell'induzione e usare la formula precedente scegliendo r in modo corretto.

Dimostrazione. Dimostriamo per induzione la seguente proprietà più generale.

Siano f_1, \dots, f_n misurabili e $r > 1$. Allora, per i $p_i > 0$ tali che $1/p_1 + \dots + 1/p_n = r$ si ha

$$\|f_1 \cdots f_n\|_r \leq \|f_1\|_{p_1} \cdots \|f_n\|_{p_n}.$$

Passo base. Vero per il punto (1).

Passo induttivo $[n-1 \Rightarrow n]$. Supponiamo di aver dimostrato per ogni $r > 1$ la disuguaglianza sopra. Allora

$$\|f_1 \cdots f_n\|_r = \|(f_1 \cdots f_{n-1}) \cdot f_n\|_r \stackrel{(1)}{\leq} \|f_1 \cdots f_{n-1}\|_p \cdot \|f_n\|_{p_n}, \quad \text{dove } r = 1/p + 1/p_n.$$

Notando che $1/p = 1/r - 1/p_{n-1} = 1/p_1 + \dots + 1/p_{n-1}$ e usando l'ipotesi induttiva otteniamo la tesi. □

2.3 Costruzione spazi L^p

Fissiamo (X, \mathcal{A}, μ) come sempre.

Definizione. Sia \mathcal{L}^p l'insieme delle funzioni $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ o \mathbb{R}^d misurabili tali che $\|f\|_p < +\infty$.

Osservazioni.

- \mathcal{L}^p è un sottospazio vettoriale dello spazio vettoriale dato da $\{f: X \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ misurabile}\}$ e $\|\cdot\|_p$ è una semi-norma.

Dimostrazione.

- \mathcal{L}^p è chiuso per somma e moltiplicazione per scalari.
- Dalla definizione segue subito $\|\lambda f\|_p = |\lambda| \cdot \|f\|_p$ l'omogeneità della norma.
- Dalla disuguaglianza di Minkowski segue che $\|\cdot\|_p$ è una semi-norma.
- In particolare non è una norma se $\{0\} \subsetneq \{f \mid \|f\|_p = 0\}$ ovvero se \mathcal{A} contiene insiemi non vuoti di misura nulla.
- In generale dato V spazio vettoriale e $\|\cdot\|$ semi-norma su V possiamo introdurre $N := \{v \mid \|v\| = 0\}$. N risulta essere un sottospazio di V e la norma data da $\|[v]\| := \|v\|$ per $[v] \in V/N$ è ben definita ed è proprio una norma su V/N .
- Nel caso della norma $\|\cdot\|_p$ abbiamo che $[f_1] = [f_2] \iff [f_1 - f_2] = 0 \iff f_1 - f_2 = 0$ quasi ovunque.

Definizione. Poniamo $N := \{f \mid \|f\|_p = 0\}$ e definiamo gli **spazi** L^p come

$$L^p := \mathcal{L}^p/N = \mathcal{L}^p/\sim \quad \|[f]\|_p := \|f\|_p$$

Notazione. Ogni tanto serve precisare meglio l'insieme di partenza e di arrivo degli spazi L^p ed in tal caso useremo le seguenti notazioni

$$L^p = L^p(X) = L^p(X, \mu) = L^p(X, \mathcal{A}, \mu) = L^p(X, \mu; \mathbb{R}^d).$$

Nota. Nella pratica non si parla mai di “classi di funzioni” e si lavora direttamente parlando di “funzioni in L^p ”. Le “operazioni” comuni non creano problemi però in certi casi bisogna stare attenti di star lavorando con oggetti ben definiti. Ad esempio:

- Preso $x_0 \in X$, consideriamo l'insieme $\{f \in L^p \mid f(x_0) = 0\}$. Notiamo che non è un sottoinsieme ben definito (a meno che $\mu(\{x_0\}) > 0$ ovvero che la misura sia atomica) di L^p , in quanto possiamo variare f su un insieme di misura nulla.
- Invece ad esempio il seguente insieme è ben definito

$$\left\{ f \in L^1 \mid \int_X f \, d\mu = 0 \right\}$$

2.3.1 Prodotto scalare su L^2

Date $f_1, f_2 \in L^2(X)$ si pone

$$\langle f_1, f_2 \rangle := \int_X f_1 \cdot f_2 \, d\mu.$$

Osservazioni.

- La definizione di $\langle f_1, f_2 \rangle$ è ben posta, infatti basta far vedere che $\int_X |f_1 f_2| \, d\mu < +\infty$ ma per Hölder abbiamo

$$\int_X |f_1 f_2| \, d\mu \leq \|f_1\|_2 \|f_2\|_2 < +\infty$$

- $\|f\|_2^2 = \langle f, f \rangle$ per ogni $f \in L^2(X)$.

- Inoltre, $\left| \int_X f_1 f_2 \, d\mu \right| \leq \int_X |f_1 f_2| \, d\mu$ quindi

$$|\langle f_1, f_2 \rangle| \leq \|f_1\|_2 \|f_2\|_2 \quad (\text{Cauchy-Schwartz}).$$

- L'operatore $\langle \cdot, \cdot \rangle$ è un prodotto scalare definito positivo.

Osservazioni.

- Dato C spazio vettoriale reale con prodotto scalare $\langle \cdot, \cdot \rangle$, allora $\langle \cdot, \cdot \rangle$ si ricava dalla norma associata $\|\cdot\|$ tramite l'identità di polarizzazione:

$$\langle v_1, v_2 \rangle = \frac{1}{4} \left(\|v_1 + v_2\|^2 - \|v_1 - v_2\|^2 \right).$$

- Dato V come sopra, vale l'identità del parallelogramma:

$$\|v_1 + v_2\|^2 + \|v_1 - v_2\|^2 = 2\|v_1\|^2 + 2\|v_2\|^2 \quad \forall v_1, v_2 \in V.$$

Usando questa identità si dimostra che la norma di L^p deriva da un prodotto scalare solo per $p = 2$.

Proprietà. Sia V uno spazio vettoriale con norma $\|\cdot\|$. Allora vale l'identità del parallelogramma se e solo se $\|\cdot\|$ deriva da un prodotto scalare.

Esempio. La norma di $L^p([-1, 1])$, deriva da un prodotto scalare solo per $p = 2$. Prendiamo $f_1 = \mathbb{1}_{[-1, 0]}$ e $f_2 = \mathbb{1}_{[0, +1]}$. Allora

$$\begin{aligned} \|f_1 + f_2\|_p^p &= \int_{-1}^1 1 \, dx = 2 \Rightarrow \|f_1 + f_2\|_p = 2^{1/p} \\ \|f_1 - f_2\|_p &= \|f_1 + f_2\|_p = 2^{1/p}, \quad \|f_1\|_p = \|f_2\|_p = 1 \end{aligned}$$

Se vale l'identità del parallelogramma allora

$$\|f_1 + f_2\|_p^2 + \|f_1 - f_2\|_p^2 = 2\|f_1\|_p^2 + 2\|f_2\|_p^2$$

cioè

$$2^{2/p} + 2^{2/p} = 2 \cdot 1 + 2 \cdot 1 \iff p = 2.$$

Dunque l'unica possibilità per verificare la regola del parallelogramma è che $p = 2$.

Domanda. Per quali X, \mathcal{A}, μ vale la stessa conclusione?

2.4 Completezza degli spazi L^p

Vediamo ora la proprietà più importante degli spazi L^p .

Teorema. Lo spazio L^p è completo per ogni $p \in [1, +\infty]$.

Lemma 1. Dato (Y, d) spazio metrico, allora

- Ogni successione (y_n) tale che

$$\sum_{n=1}^{\infty} d(y_n, y_{n+1}) < +\infty$$

è di Cauchy.

ii) Se ogni (y_n) tale che $\sum_{n=1}^{\infty} d(y_n, y_{n+1}) < +\infty$ converge allora Y è completo.

Osservazione. Non tutte le successioni di Cauchy (y_n) soddisfano quella condizione. Ad esempio la successione $(-1)^n/n$ definita su \mathbb{R} è di Cauchy però

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{(-1)^{n+1}}{n+1} - \frac{(-1)^n}{n} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n^2+n} \approx \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \rightarrow \infty.$$

Nota. Per mostrare la completezza degli spazi L^p è sufficiente verificare la convergenza per una sottoclasse propria delle successioni di Cauchy.

Dimostrazione.

i) Vorremmo vedere che $\forall \varepsilon \exists N$ tale che $\forall m, n > N$ si ha $d(y_m, y_n) \leq \varepsilon$. Presi $n > m$ abbiamo che

$$d(y_m, y_n) \leq \sum_{k=m}^{n-1} d(y_k, y_{k+1}) \leq \sum_{k=m}^{\infty} d(y_k, y_{k+1}) \rightarrow 0$$

in quanto *coda di una serie convergente*, quindi

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists m_\varepsilon \text{ tale che } \sum_{k=m_\varepsilon}^{\infty} d(y_k, y_{k+1}) < \varepsilon \implies \forall n > m \geq m_\varepsilon \quad d(y_m, y_n) \leq \varepsilon$$

ii) Sia (y_n) una successione di Cauchy, mostriamo che converge. Osserviamo che esiste una sottosuccessione (y_{n_k}) tale che

$$\sum_{k=1}^{\infty} d(y_{n_k}, y_{n_{k+1}}) < +\infty.$$

Infatti, $\forall k \exists n_k$ tale che $\forall n, m \geq n_k \quad d(y_m, y_n) \leq 1/2^k$ e dunque $d(y_{n_k}, y_{n_{k+1}}) \leq 1/2^k$. Per ipotesi (y_{n_k}) converge a un qualche $y \in Y$, da cui la tesi³. \square

Lemma 2. Dato Y spazio normato, i seguenti fatti sono equivalenti

i) Y è completo.

ii) Per ogni successione (y_n) tale che $\sum_{n=1}^{\infty} \|y_n\| < +\infty$, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$ converge⁴.

Dimostrazione. i) \Rightarrow ii). Dobbiamo mostrare che $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$ è di Cauchy. Per il Lemma 1 basta mostrare che la successione

$$z_n := \sum_{k=1}^n y_k \quad \text{soddisfa la proprietà} \quad \sum_{n=1}^{\infty} d(z_{n+1}, z_n) < +\infty.$$

Espandendo la formula sopra

$$\sum_{n=1}^{\infty} d(z_{n+1}, z_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \left\| \sum_{k=1}^{n+1} y_k - \sum_{k=1}^n y_k \right\| = \sum_{n=1}^{\infty} \|y_{n+1}\|$$

³Data una successione di Cauchy x_n , se una sottosuccessione x_{n_k} converge, allora converge anche la successione.

⁴Nel senso che esiste y tale che $\left\| y - \sum_{n=1}^N y_n \right\| \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 0$.

che è finito per ipotesi.

ii) \Rightarrow i). Utilizziamo l'enunciato ii) del Lemma 2: mostriamo ogni (y_n) che soddisfa la proprietà $\sum_n d(y_n, y_{n+1}) < +\infty$ converge. Definiamo la successione $z_n := y_{n+1} - y_n$. Per ipotesi, essendo che $\sum_n \|z_n\| < +\infty$, la serie $\sum_n z_n$ converge. Indicando con L il limite della serie, abbiamo che $\lim_n y_n = L + y_1$.

□

Lemma 3 (Minkowski per somme infinite). Date delle funzioni (g_n) positive su X allora

$$\left\| \sum_{n=1}^{\infty} g_n \right\|_p \leq \sum_{n=1}^{\infty} \|g_n\|_p$$

Dimostrazione. Per ogni N abbiamo che

$$\left\| \sum_{n=1}^N g_n \right\|_p^p \leq \left(\sum_{n=1}^N \|g_n\|_p \right)^p \leq \left(\sum_{n=1}^{\infty} \|g_n\|_p \right)^p$$

e per convergenza monotona possiamo passare il termine di sinistra al limite

$$\lim_N \left\| \sum_{n=1}^N g_n \right\|_p^p = \lim_N \int_X \left(\sum_{n=1}^N g_n \right)^p d\mu = \int_X \left(\lim_N \sum_{n=1}^N g_n \right)^p d\mu = \left\| \sum_{n=1}^{\infty} g_n \right\|_p^p$$

□

Dimostrazione (Completezza spazi L^p).

- Se $p = +\infty$: si tratta di vedere che data (f_n) di Cauchy in $L^\infty(X)$ esiste N con $\mu(N) = 0$ tale che (f_n) è di Cauchy rispetto allora norma del sup in $X \setminus N$ che sappiamo essere completa per il punto ii) del Lemma 2⁵.

Determiniamo un tale N . Dato che (f_n) è di Cauchy in $L^\infty(X)$ significa che

$$\forall k \exists n_k: \forall n, m > n_k: \|f_n - f_m\|_{L^\infty} < \frac{1}{2^k}, \quad \|f_n - f_m\|_{L^\infty} = \sup_{X \setminus N_{n,m}^k} |f_n - f_m|$$

per un certo insieme $N_{n,m}^k$ di misura nulla. Definiamo $N^k = \bigcup_{n,m \in \mathbb{N}} N_{n,m}^k$ che ha misura nulla perché unione misurabile di insiemi di misura nulla. Infine definiamo $N := \bigcup_{k \in \mathbb{N}} N^k$ anch'esso di misura nulla che è l'insieme cercato.

- Se $p < +\infty$: per il Lemma 2, basta far vedere che data $(f_n) \subset L^p(X)$ tale che $\sum_{n=1}^{\infty} \|f_n\|_p < +\infty$ allora $\sum_n f_n$ converge a qualche $f \in L^p(X)$.

La dimostrazione è suddivisa in tre passi, prima costruiamo f , poi mostriamo che f_n converge a f ed infine mostriamo $f \in L^p(X)$.

◦ *Passo 1.* Per ipotesi abbiamo

$$\infty > \sum_{n=1}^{\infty} \|f_n\|_p = \sum_{n=1}^{\infty} \| |f_n| \|_p \geq \left\| \sum_{n=1}^{\infty} |f_n| \right\|_p = \left(\int \left(\sum_{n=1}^{\infty} |f_n(x)| \right)^p d\mu(x) \right)^{1/p}$$

⁵Dato che se $\sum \|y_n\|_\infty < +\infty \Rightarrow \sum y_n < +\infty$

quindi $\sum_{n=1}^{\infty} |f_n(x)| < +\infty$ per ogni $x \in X \setminus E$ con $\mu(E) = 0$. Quindi $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ converge a qualche $f(x)$ per ogni $x \in X \setminus E$ ed a questo punto ci basta estendere f a zero in E ⁶.

◦ *Passo 2.* Fissiamo N ed osserviamo che $\forall x \in X \setminus E$ abbiamo

$$\left| f(x) - \sum_{n=1}^N f_n(x) \right| = \left| \sum_{n=N+1}^{\infty} f_n(x) \right| \leq \sum_{n=N+1}^{\infty} |f_n(x)|$$

da cui otteniamo

$$\left\| f - \sum_{n=1}^N f_n \right\|_p \leq \left\| \sum_{n=N+1}^{\infty} |f_n| \right\|_p \leq \sum_{n=N+1}^{\infty} \|f_n\|_p$$

dove l'ultimo termine è la coda di una serie convergente.

◦ *Passo 3.* In particolare rileggendo il passo precedente per $N = 0$ otteniamo

$$\|f\|_p \leq \sum_{n=1}^{\infty} \|f_n\|_p < +\infty \implies f \in L^p$$

□

Esercizio.⁷ Sia $f: X \rightarrow [0, +\infty]$ allora $\int_X f \, d\mu < +\infty \implies f(x) < +\infty$ per quasi ogni x .

Dimostrazione. Sia $E := \{x \mid f(x) = +\infty\}$, allora l'idea è che

$$+\infty > \int_X f \, d\mu \geq \int_E f \, d\mu = +\infty \cdot \mu(E).$$

Oppure, osserviamo che $\forall m \in [0, +\infty)$ abbiamo $f \cdot \mathbb{1}_E \geq m \cdot \mathbb{1}_E$ per ogni $x \in E$ quindi integrando ricaviamo

$$\underbrace{\int_E f \, d\mu}_I \geq m \cdot \mu(E) \implies \mu(E) \leq \frac{I}{m} \xrightarrow{m \rightarrow +\infty} 0$$

□

2.4.1 Alcune proprietà viste a esercitazione degli spazi L^p

Osservazioni. Valgono le seguenti

- Sia $X \in \mathbb{R}^n$, μ misura di Lebesgue e $1 \leq p_1 < p_2 \leq +\infty$. In generale non posso confrontare gli spazi L^p . Tuttavia, se $\mu(X) < +\infty$, allora

$$L^{p_2}(X) \subset L^{p_1}(X) \quad \text{se } p_1 < p_2.$$

- Dato $Y \in L^p(X)$ un sottoinsieme che eredita la norma $\|\cdot\|_{L^p}$, allora Y è completo $\iff Y$ è chiuso.
- Negli spazi L^p i sottoinsiemi chiusi e limitati non sono compatti. In particolare, le palle $Y = \{f \in L^p \mid \|f\|_{L^p} \leq 1\}$ non sono compatte.

⁶Una costruzione alternativa degli spazi L^p potrebbe anche partire da *funzioni definite quasi ovunque*, questo ovvierebbe al problema di estendere a 0 la funzione f appena costruita. Però diventa più complicato mostrare di essere in uno spazio vettoriale poiché per esempio serve ridefinire $+$ per funzioni definite quasi ovunque.

⁷In questo corso non è strettamente necessario ricordarsi come si facciano tutti questi esercizi di teoria della misura ma è bene saperli applicare in automatico quando serve.

2.4.2 Separabilità degli spazi L^p

Proposizione. Si ha che $L^p(\mathbb{R}^d, \mu)$ con μ la misura di Lebesgue, è separabile se e solo se $p \neq +\infty$. Lo stesso risultato vale per ℓ^p .

Osservazione. La proposizione è valida anche per $L^p(X, \mu)$ con $X \subset \mathbb{R}^d$ aperto.

Sia $1 \leq p < +\infty$, $L^p(\mathbb{R}^d, \mu)$ con μ la misura di Lebesgue. Le funzioni semplici costituite da somme finite di insiemi di misura finita sono dense in $L^p(\mathbb{R}^d)$.

Prendiamo una base numerabile di \mathbb{R}^d e la indichiamo con \mathcal{B} . L'insieme

$$Y = \left\{ \sum_{i=1}^n \alpha_i \mathbb{1}_{B_i} \mid B_i \in \mathcal{B}, \alpha_i \in \mathbb{Q} \right\}$$

è numerabile. Vediamo che è denso in $L^p(\mathbb{R}^d)$.

Idea. È sufficiente approssimare le funzioni semplici a somma finita $\sum_{i=1}^N \alpha_i \mathbb{1}_{E_i}$. In particolare, ci basta approssimare $\alpha \cdot \mathbb{1}_E$. Essendo $\alpha \in \mathbb{R}$ troviamo una successione di razionali α_j tali che $\alpha_j \xrightarrow{j \rightarrow \infty} \alpha$. Dunque, rimane da approssimare l'insieme E .

Fissiamo E e supponiamo dapprima E aperto. Possiamo scrivere E come unione arbitraria di elementi della base \mathcal{B}

$$E = \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i.$$

Per approssimare E consideriamo gli insiemi $E_N = \bigcup_{i=1}^N B_i$. Otteniamo $|E| = \lim_N |E_N|$, da cui $|E \setminus E_N| \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} 0$. Concludiamo notando che il caso E arbitrario si fa approssimandolo con una famiglia di aperti.

Per ℓ^p con $p < +\infty$ definiamo

$$Y = \{ \{x_n\} \mid x_n = 0 \text{ definitivamente}, x_n \in \mathbb{Q} \}$$

e verifico che è numerabile e separabile.

Domanda. Cosa succede per $p = +\infty$?

Consideriamo $L^\infty([0, +\infty], \mu)$ con μ di Lebesgue e $E_n = [n, n+1]$. Definiamo l'insieme

$$Z = \left\{ \forall J \subset \mathbb{N} \quad u = \sum_{j \in J} \mathbb{1}_{E_j} \right\}.$$

Z ha la cardinalità delle parti di \mathbb{N} cioè è più che numerabile. Osserviamo che per ogni $u, v \in Z$, $u \neq v$ si ha che $\|u - v\|_{L^\infty(\mathbb{R})} = 1$. Se per assurdo esistesse un insieme denso e numerabile D in ℓ^∞ , per definizione di insieme denso dovremmo trovare per ogni palla di raggio minore di 1 e centro in un qualsiasi elemento di Z , un elemento di D . Ma questo è impossibile in quanto D ha cardinalità numerabile e Z la cardinalità del continuo.

Vediamo in un altro modo che ℓ^∞ non è separabile. Se per assurdo $Y = \{\underline{x}^k\}_{k \in \mathbb{N}}$ fosse denso in L^∞ , allora potremmo definire un elemento $z \in \ell^\infty$ tale che $\|\underline{x}^k - z\|_{\ell^\infty} \geq 1$ per ogni k .

Definiamo $z = \{z_n\}$ come segue

$$z_n = \begin{cases} 0 & \text{se } |x_n^n| > 1 \\ 2 & \text{se } |x_n^n| \leq 1 \end{cases}.$$

2.5 Nozioni di convergenza per successioni di funzioni

Fissiamo X, \mathcal{A}, μ e prendiamo $f, f_n: X \rightarrow \mathbb{R}$ (o \mathbb{R}^k) misurabili.

Definizione. Riportiamo le definizioni di alcune nozioni di convergenza.

- **Uniforme** : $\forall \varepsilon \exists n_\varepsilon$ tale che $\|f - f_n\| < \varepsilon \quad \forall n > n_\varepsilon$.
- **Puntuale** : $f_n(x) \rightarrow f(x) \quad \forall x \in X$.
- **Puntuale μ -quasi ovunque** : $f_n(x) \rightarrow f(x)$ per μ -q.o. $x \in X$.
- **In L^p** : $\|f_n - f\|_p \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$.
- **In misura** : $\forall \varepsilon > 0 \quad \mu(\{x \mid |f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon\}) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.

Osservazione. Abbiamo le seguenti implicazioni ovvie delle diverse nozioni di convergenza:

$$\text{uniforme} \Rightarrow \text{puntuale} \Rightarrow \text{puntuale } \mu \text{ q.o.}$$

Proposizione. Valgono le seguenti.

- Data $f_n \rightarrow f$ q.o. e $\mu(X) < +\infty$, allora $f_n \rightarrow f$ in misura.
- (*Severini-Egorov*): Data $f_n \rightarrow f$ q.o. e $\mu(X) < +\infty$, allora $\forall \delta > 0$ esiste $E \in \mathcal{A}$ tale che $\mu(E) < \delta$ e $f_n \rightarrow f$ uniformemente su $X \setminus E$.
- $f_n \rightarrow f$ in L^p , $p < +\infty$, allora $f_n \rightarrow f$ in misura.
- $f_n \rightarrow f$ in L^∞ , allora $\exists E$ tale che $\mu(E) = 0$ e $f_n \rightarrow f$ uniformemente su $X \setminus E$.
- $f_n \rightarrow f$ in misura, allora $\exists n_k$ tale che $f_{n_k} \rightarrow f$ μ -q.o.
- $f_n \rightarrow f$ in L^p , allora $\exists n_k$ tale che $f_{n_k} \rightarrow f$ μ -q.o.

Osservazione. In i) e ii) l'ipotesi $\mu(X) < +\infty$ è necessaria. Infatti, preso $X = \mathbb{R}$ e $f_n = \mathbb{1}_{[n, +\infty)}$ si ha che $f_n \rightarrow 0$ ovunque ma f_n non converge a 0 in misura, e f_n non converge a 0 uniformemente in $\mathbb{R} \setminus E$ per ogni E di misura finita.

Lemma (disuguaglianza di Markov). Data $g: X \rightarrow [0, +\infty]$ misurabile e $m > 0$ si ha

$$\mu(\{x \in X \mid g(x) \geq m\}) \leq \frac{1}{m} \int_X g \, d\mu$$

Dimostrazione. Poniamo $E := \{x \in X \mid g(x) \geq m\}$. Osserviamo che $g \geq m \cdot \mathbb{1}_E$. Dunque vale

$$\int_X g \, d\mu \geq \int_X m \cdot \mathbb{1}_E \, d\mu = m \cdot \mu(\{x \in X \mid g(x) \geq m\}).$$

□

Lemma (Borel-Cantelli). Dati $(E_n) \subset \mathcal{A}$ tali che $\sum \mu(E_n) < +\infty$, l'insieme

$$E := \{x \in X \mid x \in E_n \text{ frequentemente}\}$$

ha misura nulla. Cioè per μ -q.o. x vale $x \notin E_n$ definitivamente (in n .)

Dimostrazione. Osserviamo che

$$E = \bigcap_{m=1}^{\infty} \left(\underbrace{\bigcup_{n=m}^{\infty} E_n}_{F_m} \right).$$

Allora

$$\mu(E) \underbrace{=}_{F_m \downarrow E \text{ \& } \mu(F_1) < +\infty} \lim_{m \rightarrow \infty} \mu(F_m) \leq \lim_{m \rightarrow \infty} \underbrace{\sum_{n=m}^{\infty} \mu(E_n)}_{\text{coda serie convergente}} = 0.$$

Osservazione. L'ipotesi $\sum \mu(E_n) < +\infty$ non può essere sostituita con $\mu(E_n) \rightarrow 0$.

Ora dimostriamo la proposizione.

Dimostrazione. Definiamo gli insiemi

$$A_n^\varepsilon := \{x \in X : |f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon\},$$

$$B_m^\varepsilon := \{x \in X : |f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon \text{ per qualche } n \geq m\} = \bigcup_{n=m}^{\infty} A_n^\varepsilon,$$

$$B^\varepsilon := \{x \in X : |f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon \text{ frequentemente}\} = \{x \in A_n^\varepsilon \text{ frequentemente}\} = \bigcap_{m=1}^{\infty} B_m^\varepsilon.$$

i) Dobbiamo mostrare che $\lim_{m \rightarrow \infty} A_m^\varepsilon = 0$. Per ipotesi, $f_n \rightarrow f$ quasi ovunque, cioè $\mu(B^\varepsilon) = 0$ per ogni $\varepsilon > 0$, ma $B_m^\varepsilon \downarrow B^\varepsilon$ e $\mu(X) < +\infty$. Allora

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} \mu(B_m^\varepsilon) = \mu(B^\varepsilon) = 0 \implies \lim_{m \rightarrow \infty} \mu(A_m^\varepsilon) = 0.$$

dato che $A_m^\varepsilon \subset B_m^\varepsilon$.

ii) Dalla dimostrazione precedente abbiamo $\lim_{m \rightarrow \infty} \mu(B_m^\varepsilon) = 0$. Allora per ogni k esiste un m_k tale che $\mu(B_{m_k}^{1/k}) \leq \delta/2^k$. Poniamo $E := \bigcup_k B_{m_k}^{1/k}$ per ogni k ; allora $\mu(E) \leq \delta$. Inoltre,

$$\begin{aligned} x \in X \setminus E &\implies x \notin B_{m_k}^{1/k} \forall k \iff x \notin A_n^{1/k} \forall k, n \geq m_k \\ &\implies |f(x) - f_n(x)| < \frac{1}{k} \quad \forall k, n \geq m_k \\ &\implies \sup_{x \in X \setminus E} |f(x) - f_n(x)| \leq \frac{1}{k} \quad \forall k, n \geq m_k \\ &\implies f - f_m \text{ uniformemente su } X \setminus E. \end{aligned}$$

iii) Dobbiamo mostrare che per ogni $\varepsilon > 0$ $\mu(A_n^\varepsilon) \xrightarrow{n} 0$. Usando la disuguaglianza di Markov ottengo

$$\mu\left(A_n^\varepsilon = \left\{x \mid \overbrace{|f_n(x) - f(x)|^p}^g \geq \varepsilon^p\right\}\right) \leq \frac{1}{\varepsilon^p} \int_X g \, d\mu = \frac{1}{\varepsilon^p} \|f_n - f\|_p^p \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

iii') Definiamo $E_n := \{x \mid |f_n(x) - f(x)| > \|f_n - f\|_\infty\}$ per ogni n , allora $\mu(E_n) = 0$. Poniamo $E = \bigcup_n E_n$ e $\mu(E) = 0$, dunque

$$\sup_{x \in X \setminus E} |f_n(x) - f(x)| \leq \|f_n - f\|_\infty \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

iv) Per ipotesi, $f_n \rightarrow f$ in misura, cioè

$$\begin{aligned} \forall \varepsilon > 0 \quad \mu(A_n^\varepsilon) &\xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 \\ \implies \forall k \exists n_k: \mu(A_{n_k}^{1/k}) &\leq \frac{1}{2^k} \\ \implies \sum_k \mu(A_{n_k}^{1/k}) &< +\infty. \end{aligned}$$

Allora per Borel-Cantelli, si ha per μ -quasi ogni x , $x \notin A_{n_k}^{1/k}$ definitivamente in k , cioè $\|f_{n_k}(x) - f(x)\| < 1/k$ definitivamente in k , cioè $f_{n_k}(x) \xrightarrow{k} f(x)$.

v) Vogliamo mostrare che $f_n \rightarrow f$ in $L^p \implies \exists n_k$ tale che $f_{n_k} \rightarrow f$ quasi ovunque. Consideriamo due casi

- se $p < +\infty$, allora $f_n \rightarrow f$ in $L^p \implies f_n \rightarrow f$ in misura, da cui $\exists n_k$ tale che $f_{n_k} \rightarrow f$ quasi ovunque
- se $p = +\infty$, allora $f_n \rightarrow f$ uniformemente su $X \setminus E$ con $\mu(E) = 0 \implies f_n \rightarrow f$ puntualmente su $X \setminus E \implies f_n \rightarrow f$ quasi ovunque.

□

2.6 Controesempi sulle convergenze

Vediamo un controesempio che mostra che tutte le implicazioni sui vari tipi di convergenza sono ottimali ovvero

- i) $f_n \rightarrow f$ in misura $\not\Rightarrow f_n \rightarrow f$ q.o.
- ii) $f_n \rightarrow f$ in L^p con $p < +\infty \not\Rightarrow f_n \rightarrow f$ q.o.
- iii) $\mu(E_n) \rightarrow 0 \not\Rightarrow$ per q.o x si ha $x \notin E_n$ definitivamente.

Dimostrazione. Consideriamo gli insiemi $I_1 = [1, 1 + \frac{1}{2}]$, $I_2 = [1 + \frac{1}{2}, 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}]$, ...

$$I_n := \left[\sum_{k=1}^n \frac{1}{k}, \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k} \right]$$

e consideriamo la loro proiezione “modulo” $[0, 1]$ usando la funzione $p: \mathbb{R} \rightarrow [0, 1)$ *parte frazionaria* data da

$$p(x) := x - \lfloor x \rfloor$$

e chiamiamo $E_n := p(I_n)$. Per ogni n abbiamo che $|I_n| = |E_n| = 1/n$ e $\bigcup_n I_n = [1, +\infty)$ (in quanto $\sum_{k=1}^\infty \frac{1}{k} = +\infty$) e quindi ogni $x \in [0, 1)$ appartiene ad E_n per infiniti n ed in particolare questo mostra la ??.

Per la ?? basta notare che $\mathbb{1}_{E_n} \rightarrow 0$ in misura (in quanto $|E_n| \rightarrow 0$) ma $\mathbb{1}_{E_n} \not\rightarrow 0$ μ -q.o. dato che $x \in E_n$ per infiniti n , anzi $\forall x \in [0, 1) \mathbb{1}_{E_n}(x) \not\rightarrow 0$ e la ?? segue analogamente. □

2.7 Approssimazioni di funzioni in L^p

Vediamo ora alcune classi di funzioni dense in L^p che risulteranno essere un utile strumento da usare nelle dimostrazioni.

Nota. Ricordiamo la nozione di insieme denso in uno spazio metrico. Sia (X, d) uno spazio metrico e $Y \subset X$. Allora Y è denso in X se e solo se per ogni $x \in X$, esiste una successione $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in Y tale che $x = \lim_n y_n$.

Per ora sia (X, \mathcal{A}, μ) in generale.

Proposizione 1. Le funzioni limitate in L^p sono dense in L^p .

Dimostrazione. Data $f \in L^p(X)$ cerchiamo una successione di funzioni $f_n \in L^p(X)$ limitate tali che $f_n \rightarrow f$ in L^p , consideriamo

$$f(x) := (f(x) \wedge n) \vee (-n)$$

vorremmo mostrare che $f_n \rightarrow f$ in L^p ovvero

$$\|f_n - f\|_p^p = \int_X |f_n - f|^p d\mu \rightarrow 0$$

intanto osserviamo che, per la *convergenza puntuale*, basta osservare che se $n \geq |f(x)|$ abbiamo che $\forall x \ f_n(x) = f(x) \implies f_n(x) \xrightarrow{n} f(x) \implies |f_n(x) - f(x)|^p \rightarrow 0$.

Per concludere basta applicare *convergenza dominata* usando come dominazione direttamente $|f(x) - f_n(x)| \leq |f(x)| \implies |f(x) - f_n(x)|^p \leq |f(x)|^p$ e notiamo che $|f|^p \in L^1(X)$. \square

Proposizione 2. Sia⁸ $\widetilde{\mathcal{F}} := \text{Span}(\{\mathbb{1}_E \mid E \in \mathcal{A}, \mu(E) < +\infty\})$, allora $\widetilde{\mathcal{F}}$ è denso in $L^p(X)$.

Dimostrazione. Data $f \in L^p(X)$ cerchiamo una successione che approssima f in $\widetilde{\mathcal{F}}$.

- *Caso 1:* Se $f \geq 0$ allora fissiamo $\varepsilon > 0$ e per ogni $k = 1, 2, \dots$ e poniamo

$$A_\varepsilon^k := \{x \mid k\varepsilon \leq f(x) \leq (k+1)\varepsilon\}$$

risulta che A_ε^k è misurabile ed ha misura finita⁹. Ora consideriamo la successione di funzioni parametrizzata da ε data da

$$f_\varepsilon(x) := \sum_{1 \leq k \leq 1/\varepsilon^2} k\varepsilon \cdot \mathbb{1}_{A_\varepsilon^k}(x) \in \widetilde{\mathcal{F}}$$

Osserviamo che vale anche $\max f_\varepsilon(x) = \max\{k\varepsilon \mid k\varepsilon \leq f(x) \text{ e } k \leq 1/\varepsilon^2\}$ e mostriamo la seguente¹⁰

$$\int_X |f(x) - f_\varepsilon(x)|^p d\mu(x) \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0$$

- *Convergenza puntuale:* Per l'identità precedente abbiamo che $0 \leq f(x) - f_\varepsilon(x) \leq \varepsilon$ se $f(x) \leq 1/\varepsilon + \varepsilon$.

⁸Lo span è inteso come combinazioni lineari

⁹È misurabile in quanto preimmagine di un misurabile, ed ha misura finita in quanto $f \in L^p(X)$.

¹⁰Notiamo che qui stiamo applicando il teorema di *convergenza dominata* su una famiglia parametrizzata da ε e non su una successione ma si può verificare facilmente che il teorema (ed anche gli altri risultati di convergenza di successioni di funzioni) si può estendere semplicemente prendendo $\varepsilon = 1/n$ per $n \rightarrow \infty$.

◦ *Dominazione*: Possiamo usare nuovamente $|f(x) - f_\varepsilon(x)|^p \leq |f(x)|^p < +\infty$ in quanto $f \in L^p(X)$.

- *Caso 2*: Sia $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ allora si può rifare la dimostrazione precedente oppure si può semplicemente considerare $f_\varepsilon := (f^+)_\varepsilon - (f^-)_\varepsilon$.

□

Generalizziamo la proposizione al caso di $f: X \rightarrow \mathbb{R}^d$ come segue

Proposizione 2bis (Generalizzata). Sia $\widetilde{\mathcal{S}} := \left\{ \sum_i \alpha_i \mathbb{1}_{E_i} \mid \alpha_i \in \mathbb{R}^d, E_i \in \mathcal{A}, \mu(E_i) < +\infty \right\}$.

Allora $\widetilde{\mathcal{S}}$ è denso in $L^p(X; \mathbb{R}^d)$.

Dimostrazione. (Idea) Basta approssimare componente per componente. □

Sia ora X uno spazio metrico e $\{\text{aperti}\} \subset \mathcal{A}$.

Proposizione 3. Sia $\widetilde{\mathcal{S}}_\ell := \{\sum_i \alpha_i \mathbb{1}_{E_i} \mid \alpha_i \in \mathbb{R}^d, E_i \in \mathcal{A}, \mu(E_i) < +\infty, E_i \text{ limitati}\}$ allora $\widetilde{\mathcal{S}}_\ell$ è denso in $L^p(X; \mathbb{R}^d)$ per $p < +\infty$.

Dimostrazione. ($\widetilde{\mathcal{S}}_\ell$ è denso in L^p) Si dimostra che $\widetilde{\mathcal{S}}_\ell$ è denso in $\widetilde{\mathcal{S}}$ che a sua volta, per la proposizione precedente, è denso in L^p . Dal lemma seguente si ottiene la tesi.

Lemma 1. Dato $E \in \mathcal{A}, \mu(E) < +\infty$ esiste $E_n \in \mathcal{A}$ con E_n limitati tali che $E_n \subset E$ e $\mu(E \setminus E_n) \rightarrow 0$ e quindi $\|\mathbb{1}_E - \mathbb{1}_{E_n}\|_p = \mu(E \setminus E_n)^{1/p} \xrightarrow{n} 0$ (e $\mathbb{1}_{E_n} \in \widetilde{\mathcal{S}}_\ell$).

Dim. Dato E con $\mu(E) < +\infty$ prendiamo $x_0 \in X$ e poniamo $E_n := E \cap \mathcal{B}(x_0, n)$; $E_n \subset E$ e $E \setminus E_n \downarrow \emptyset \implies \mu(E \setminus E_n) \xrightarrow{n} 0$.

□

Osservazione. In generale l'enunciato non vale per $p = +\infty$. Ad esempio, preso $L^\infty(\mathbb{R})$ e $f = 1$ non si può approssimare con funzioni a supporto limitato; in particolare, data g con supporto A limitato $|f - g| = 1$ su $\mathbb{R} \setminus A$ e siccome $|\mathbb{R} \setminus A| > 0$ abbiamo $\|f - g\|_\infty \geq 1$.

Ora siano $X \subset \mathbb{R}^n, \mu = \mathcal{L}^n$ e $C_C(\mathbb{R}^n) := \{\text{funzioni a supporto compatto}\}$, dove il **supporto** è definito come la chiusura dell'insieme dei punti in cui la funzione è non zero $\text{supp}(f) := \overline{\{x \mid f(x) \neq 0\}}$, in quanto per le funzioni continue l'insieme $\{x \mid f(x) \neq 0\}$ è sempre aperto e dunque mai veramente compatto, a parte quando è vuoto.

Proposizione 4. Le funzioni in $C_C(\mathbb{R}^n)$ ristrette a X sono dense¹¹ in $L^p(X)$ per $p < +\infty$.

Vediamo prima alcuni lemmi.

Lemma 2. (di Urysohn) Dati C_0, C_1 chiusi disgiunti in X spazio metrico esiste una funzione $f: X \rightarrow [0, 1]$ continua tale che $f = 0$ su C_0 e $f = 1$ su C_1 .

Dimostrazione. Posta $d(x, C) = \inf\{d(x, y) \mid y \in C\}$ basta considerare

$$f(x) = \frac{d(x, C_0)}{d(x, C_0) + d(x, C_1)}.$$

Lemma 3. Dato $E \subset \mathbb{R}^n$ limitato (e quindi di misura finita) esiste $f_\varepsilon \in C_C(\mathbb{R}^n)$ tale che $f_\varepsilon \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \mathbb{1}_E$ in $L^p(\mathbb{R}^n)$ e quindi in $L^p(X)$.

¹¹È denso anche l'insieme delle funzioni continue a supporto compatto ristretto a X e si indica con $\mathcal{C}_C^0(\mathbb{R}^n)$.

Dimostrazione. Per regolarità della misura di Lebesgue abbiamo che per ogni ε esistono $C_\varepsilon \subset E \subset A_\varepsilon$ tali che $|A_\varepsilon \setminus C_\varepsilon| \leq \varepsilon$. Per il Lemma 2 possiamo definire la classe di funzioni $f_\varepsilon: \mathbb{R}^n \rightarrow [0, 1]$ continue tali che

$$f_\varepsilon = 1 \text{ su } C_\varepsilon \quad f_\varepsilon = 0 \text{ su } \mathbb{R}^n \setminus A_\varepsilon.$$

In particolare, sappiamo che su $A_\varepsilon \setminus C_\varepsilon$ vale $|f_\varepsilon - \mathbb{1}_E| \leq 1$. Allora,

$$\begin{aligned} \|f_\varepsilon - \mathbb{1}_E\|_p^p &= \int_{A_\varepsilon \setminus C_\varepsilon} |f_\varepsilon - \mathbb{1}_E|^p dx \leq \int_{A_\varepsilon \setminus C_\varepsilon} \mathbb{1}_{A_\varepsilon \setminus C_\varepsilon} dx = |A_\varepsilon \setminus C_\varepsilon|^{1/p} \leq \varepsilon^{1/p} \\ \implies \|f_\varepsilon - \mathbb{1}_E\|_p^p &\xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0. \end{aligned}$$

□

Dimostrazione Proposizione 4. Per la Proposizione 3 basta approssimare la classe delle funzioni a supporto limitato (e finito). Dunque, per il Lemma 3 si ha la tesi.

2.8 Esercitazione del 13 ottobre

2.8.1 Esercizi su spazi $L^p(X)$ al variare di p e dello spazio X

Sia $X \subset \mathbb{R}^n$, μ la misura di Lebesgue e $1 \leq p_1 \leq p_2$.

Domanda. Possiamo confrontare gli spazi $L^{p_1}(X)$ e $L^{p_2}(X)$? In generale no.

Vediamo informalmente perché. Posto $X = (0, +\infty)$, gli integrali

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+x)^{\beta p}} dx, \quad \int_0^{+\infty} \frac{1}{x^{\beta p}} \cdot \mathbb{1}_{[0,1]}(x) dx = \int_0^1 \frac{1}{x^{\beta p}} dx$$

sono maggiorati dall'integrale di $1/x^\alpha$ dove l'esponente α è rispettivamente più piccolo e più grande di $\beta \cdot p$.

Utilizziamo questa intuizione per vedere formalmente che gli spazi $L^p(0, +\infty)$ non sono confrontabili.

Cerchiamo una funzione $f \in L^{p_1}(0, +\infty) \setminus L^{p_2}(0, +\infty)$ e una funzione $g \in L^{p_2}(0, +\infty) \setminus L^{p_1}(0, +\infty)$. La funzione f definita come segue

$$f(x) := \begin{cases} 1/x^\beta & x \in (0, 1) \\ 0 & x \geq 1 \end{cases}$$

ha integrale

$$\int_0^{+\infty} f(x)^{p_1} dx = \int_0^1 \frac{1}{x^{\beta p_1}} dx < +\infty \iff \beta \cdot p_1 < 1$$

e

$$\int_0^{+\infty} f(x)^{p_2} dx = \int_0^1 \frac{1}{x^{\beta p_2}} dx = +\infty \iff \beta \cdot p_2 \geq 1.$$

Dunque, basta prendere $\beta \in [1/p_2, 1/p_1)$.

Ora cerchiamo $g \in L^2(0, +\infty) \setminus L^{p_1}(0, +\infty)$. Definiamo $g(x)$ come segue

$$g(x) := \frac{1}{(1+x)^\alpha}$$

da cui

$$\int_0^{+\infty} g(x)^{p_2} dx < +\infty \iff \alpha \cdot p_2 > 1 \quad \text{e} \quad \int_0^{+\infty} g(x)^{p_1} dx = +\infty \iff \alpha \cdot p_1 \leq 1$$

Conclusione. In generale non c'è confrontabilità fra gli spazi L^p . La confrontabilità, dipende infatti dall'insieme X su cui sono definiti.

Nota. Un caso particolare è dato ponendo $p_1 < p_2$ e $\mu(X) < +\infty$. In tal caso $L^{p_2}(X) \subset L^{p_1}(X)$. Data $f \in L^{p_2}(X)$, cioè con $\int_X |f|^{p_2} d\mu < +\infty$ vediamo che $\int_X |f|^{p_1} d\mu < +\infty$.

Usiamo Hölder:

$$\begin{aligned} \int_X |f|^{p_1} d\mu &\leq \left(\int_X \overbrace{|f(x)|^{p_1 p}}^{|h(x)|^p} d\mu \right)^{1/p} \cdot \left(\int_X 1^q d\mu \right)^{1/q} \underset{p=p_1/p_2}{\leq} \left(\int_X |f|^{p_2} d\mu \right)^{p_2/p_1} \left(\int_X 1^q d\mu \right)^{1/q} \\ &\underset{q=(1-\frac{1}{p})^{-1}=\frac{p}{p-1}=\frac{p_2/p_1}{p_2-p_1}}{=} \|f\|_{L^{p_2}(X)}^{p_1} \cdot \mu(X)^{\frac{p_2-p_1}{p_2}}. \end{aligned}$$

Dunque

$$\|f\|_{L^{p_1}(X)} \leq \|f\|_{L^{p_2}(X)} \cdot \mu(X)^{\frac{p_2-p_1}{p_1 p_2}}.$$

L'inclusione

$$\begin{aligned} i: L^{p_2} &\rightarrow L^{p_1}(X) \\ f &\mapsto f \end{aligned}$$

è ben definita per quanto fatto sopra.

Esercizio. [TO DO] Vedere con quale topologia l'inclusione risulta continua.

Esercizio. [TO DO] Dato $p \geq 1$, stabilire se esistono $X, \mu, f \in L^p(X)$ e $f \notin L^q(X)$ per ogni $q \neq p, q \geq 1$.

Suggerimento. Pensare a $X = (0, +\infty)$, μ misura di Lebesgue.

Osservazione. $L^p(X)$ è uno spazio vettoriale di dimensione infinita, ossia ogni base algebrica ha cardinalità infinita. Vediamo il caso $X = (0, 1)$. Per trovare una base infinita, cerchiamo per ogni $N \in \mathbb{N}$, un insieme di funzioni $f_1, \dots, f_N \in L^p(0, 1)$ tali che siano linearmente indipendenti. Vale a dire, presi $\lambda_1, \dots, \lambda_N \in \mathbb{R}$ vale $\lambda_1 f_1 + \dots + \lambda_N f_N = 0$ se e solo se $\lambda_1 = \dots = \lambda_N = 0$.

Ad esempio, definiamo $f_i := \mathbb{1}_{i/N, (i+1)/N}$ (questa costruzione si può riprodurre per ogni $N \in \mathbb{N}$).

Ricordiamo che, essendo $L^p(X)$ uno spazio metrico, dato $Y \subset L^p$ vale la seguente caratterizzazione:

$$Y \text{ è compatto} \iff Y \text{ è compatto per successioni} \iff Y \text{ chiuso e totalmente limitato.}$$

Osservazione. $Y \subset L^p(X)$ è un sottoinsieme che eredita la norma $\|\cdot\|_{L^p}$:

$$Y \text{ è completo} \iff Y \text{ è chiuso.}$$

Osservazione. In L^p i sottoinsiemi chiusi e limitati non sono compatti¹²! In particolare le palle

$$Y = \{f \in L^p \mid \|f\|_{L^p} \leq 1\}$$

¹²Uno spazio metrico è compatto se e solo se è completo e totalmente limitato. Inoltre, uno spazio metrico X si dice totalmente limitato se $\forall \varepsilon > 0$ esiste $B_\varepsilon^1, \dots, B_\varepsilon^n$ tale che $X \subset \bigcup_{i=1}^n B_\varepsilon^i$.

non sono compatte.

Ad esempio, mostriamo che in $L^p(0, 1)$ le palle

$$B = \{f \in L^p \mid \|f\|_{L^p} \leq 1\}$$

non sono compatte. Per farlo, esibiamo una successione $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset B$ che non ammette sottosuccessioni convergenti. La costruiamo in modo che non abbia sottosuccessioni di Cauchy

$$f_n: (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}, \quad \|f_n - f_m\|_{L^p} \geq c_0 > 0 \quad \forall n \neq m.$$

Cerco $A_n \subset (0, 1)$ tale che $|A_n \cap A_m| = 0$ per ogni $n \neq m$. Definiamo f_n come segue

$$f_n(x) := \begin{cases} 0 & \text{se } x \in (0, 1) \setminus (1/(n+1), 1/n) \\ c_n > 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

dove c_n è tale che

$$\left(\int_{1/(n+1)}^{1/n} c_n^p \right)^{1/p} = 1 \iff c_n^p \cdot (1/n - 1/(n+1)) = 1 \iff c_n^p = n \cdot (n+1).$$

Calcoliamo ora $\|f_n - f_m\|_{L^p}^p$ con $n \neq m$:

$$\int_0^1 |f_n(x) - f_m(x)|^p dx = \int_{(1/n, 1/(n+1)) \cup (1/(m+1), 1/m)} |f_n - f_m|^p dx = \int_{1/(n+1)}^{1/n} |f_n|^p dx + \int_0^1 |f_m|^p dx = 1 + 1 = 2.$$

Si osserva che quanto detto sopra vale anche per $p = +\infty$.

Esercizio. [TO DO] Sia $E = \{f \in L^1(1, +\infty) \mid |f(x)| \leq 1/x^2 \text{ e } x \in [1, +\infty)\}$.

- E è limitato in L^1 ?
- E è chiuso in L^1 ?
- E è compatto in L^1 ?

Soluzione.

i) Dimostriamo che $\|f\|_{L^1} < C$ per ogni $f \in E$.

$$\|f\|_{L^1} = \int_1^\infty |f(x)| dx \leq \int_1^\infty 1/x^2 dx < C.$$

ii) E è chiuso. Ci basta dimostrare che se $\{f_n\} \in E$ è convergente a f allora $f \in E$. Questo equivale a dimostrare che $|f(x)| < 1/x^2$. Dal fatto che $\{f_n\} \in E$ è convergente in L^1 , abbiamo che esiste una sottosuccessione $\{f_{n_k}\}$ che converge puntualmente a f . Essendo che $|f_{n_k}| < 1/x^2$ per ogni $x \in [1, +\infty)$, per la continuità del modulo segue la tesi.

iii) Da fare [TO DO]

Esercizio. [TO DO]

- Dire se $f_n(x) = x^n$, $n = 0, \dots, N$ è un insieme di funzioni linearmente indipendenti in $L^p([0, 1])$.

- Dire se $\{f_n\} \subset L^p(0, 1)$ è compatta in $L^p(0, 1)$.

Suggerimento. Studiare il limite puntuale.

Soluzione.

i) Ovvio

ii) Dimostriamo che non è compatta. Se per assurdo lo fosse, dalla successione (f_n) potremmo estrarre una sottosuccessione convergente (f_{n_k}) in $L^p([0, 1])$; denotiamo il limite con f . Per i risultati visti sulla convergenza, da (f_{n_k}) potremmo estrarre una sottosuccessione convergente quasi ovunque a f . Ma questo è assurdo perché $\lim_n f_n = +\infty$.

2.8.2 Spazi ℓ^p

Prendiamo $X = \mathbb{N}$ e $\mu = \#$ la misura che conta i punti.

Osservazione. Definiamo

$$\ell^p = L^p(\mathbb{N}, \#) = \left\{ (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \left| \sum_{n=0}^{+\infty} |x_n|^p < +\infty \right. \right\}$$

con $p \geq 1$ e $p \neq +\infty$, e

$$\ell^\infty = \{\text{successioni limitate}\} = \left\{ (x_n) \left| \sup_{n \in \mathbb{N}} |x_n| < +\infty \right. \right\}.$$

Esempio (di insieme non compatto in ℓ^1). Consideriamo la successione (e_i) definita come

$$(e_i)_n := \begin{cases} 0 & \text{se } n \neq i \\ 1 & \text{se } n = i \end{cases}$$

si osserva inoltre che le successioni così definite sono linearmente indipendenti e generano se sono infiniti.

Esempio (di insieme compatto in ℓ^1). Sia $F = \{(x_n)_n \in \ell^1 \mid |x_n| \leq 1/n^2 \quad \forall n \in \mathbb{N}\}$. Noto subito che F è limitato, infatti, presa

$$\underline{x} = (x_n) \in F, \quad \|\underline{x}\|_{\ell^1} = \sum_{n=0}^{+\infty} |x_n| \leq \sum_{n=0}^{+\infty} 1/n^2 < +\infty.$$

F è anche chiuso.

Osservazione. Data una successione $(\underline{x}^k) \subset \ell^1$, se $\underline{x}^k \xrightarrow{\ell^1} \underline{x}^\infty$, vuol dire che

$$\|\underline{x}^k - \underline{x}^\infty\|_{\ell^1} = \sum_{n=0}^{+\infty} |x_n^k - x_n^\infty| \xrightarrow{k} 0.$$

In particolare, per ogni $n \in \mathbb{N}$ fissato, $\lim_k (x_n^k - x_n^\infty) = 0$.

F è chiuso perché se $(\underline{x}^k) \subset F$ e $\underline{x}^k \xrightarrow{\ell^1} \underline{x}^\infty$, allora per ogni $n \in \mathbb{N}$ vale

$$|x_n^k| \leq 1/n^2 \quad \text{e} \quad \underbrace{\lim_{k \rightarrow +\infty} |x_n^k|}_{x_n^\infty} \leq 1/n^2.$$

Dimostriamo che è compatto per successioni. Prendiamo $(x^k) \subset F$, ogni componente x_n è equilimitata, quindi a meno di sottosuccessioni $x_n^{k_j}$ converge a x_n^∞ . A meno di diagonalizzare, possiamo supporre che la successione k_j non dipenda da n . Inoltre gli elementi $x_n^{k_j}$ sono dominati da $y = (1/n^2)$. Concludiamo usando il teorema di convergenza dominata di Lebesgue.

2.9 Complementi su approssimazioni di funzioni in L^p

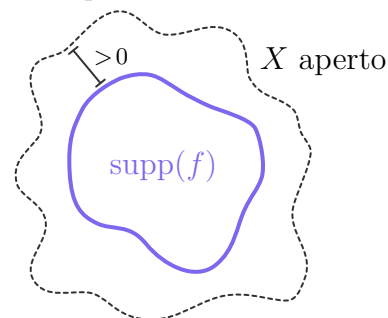
Sia X misurabile in \mathbb{R}^n con $\mu = \mathcal{L}^n$ su X . In precedenza abbiamo visto che

Proposizione 3. Le funzioni in $C_C(\mathbb{R}^n)$ ristrette a X sono dense in L^p se $p < +\infty$.

Osservazione. Si vede facilmente che $C_C(\mathbb{R}^n) \subset L^p(\mathbb{R}^n)$.

Domanda. Vale un risultato analogo per le funzioni $C_C(X)$?

Notiamo che dato $X \subset \mathbb{R}^n$ le funzioni continue su X hanno supporto compatto solo se X è aperto in quanto il supporto ha veramente distanza non nulla dal bordo e possiamo estendere la funzione a 0 fuori da X . [TODO: Esempio con un chiuso in cui le cose non fungono?]



Proposizione 4. Sia X aperto di \mathbb{R}^n , $\mu = \mathcal{L}^n$ allora $C_C(X)$ è denso in L^p per ogni $p < +\infty$

Dimostrazione.

- $\mathcal{S}_C := \{\text{funzioni semplici con supporto compatto in } X\}$ è denso in $L^p(X)$ per ogni $p < +\infty$.
- Dato E relativamente compatto¹³ in X esiste $f_n \in C_C(X)$ tale che $f_n \rightarrow 1_E$ in L^p per ogni $p < +\infty$.

La Proposizione 3 non vale per $p = +\infty$, intuitivamente in quanto data $f \in L^\infty(X)$ discontinua, se trovassimo $f_n \rightarrow f$ in $L^\infty(X)$ con f_n continue avremmo $f_n \rightarrow f$ uniformemente e dunque f continua.

Fatto. In generale vale che data $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ misurabile, $\|f\|_\infty \leq \sup_{x \in X} |f(x)|$ (detta anche *norma del sup*)

Esercizio. Se X è aperto in \mathbb{R}^n e $\mu = \mathcal{L}^n$ e $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ continua, allora $\|f\|_\infty = \sup_{x \in X} |f(x)|$.

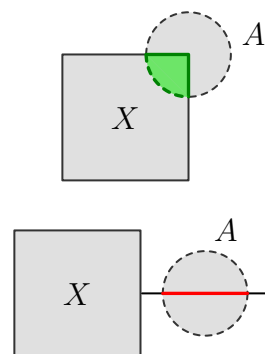
Soluzione. Se per assurdo $\exists x \in X$ tale che $\|f\|_\infty < |f(x)|$ allora la continuità di f implica che esiste un intorno di x in cui $\|f\|_\infty < |f(x)|$; ma un intorno contiene una palla aperta di misura positiva. \nmid

In particolare possiamo anche estenderci a $X \subseteq \mathbb{R}^n$ tali che ogni A aperto relativamente a X abbia misura positiva.

Per spiegare meglio il perché la Proposizione 3 non si estende al caso $p = +\infty$ consideriamo

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$

e vediamo che $\nexists f_n: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tale che $f_n \rightarrow f$ in L^∞ .



¹³Un sottospazio relativamente compatto di uno spazio topologico è un sottoinsieme dello spazio topologico la cui chiusura è compatta.

Se esistesse $(f_n)_n$, allora sarebbe di Cauchy rispetto alla norma $\|\cdot\|_\infty$ allora per continuità $(f_n)_n$ è di Cauchy anche rispetto alla norma del sup $\implies f_n \rightarrow \tilde{f}$ uniformemente con \tilde{f} continua, quindi $\tilde{f} = f$ quasi ovunque ma questo non è possibile per la f definita sopra.

(In particolare dato $E = \{x \mid f(x) = \tilde{f}(x)\}$, prendiamo $x_n, y_n \in E$ tali che $x_n \uparrow 0$ e $y_n \downarrow 0$ ma i limiti di f sono 0 e 1 \nmid)

Teorema (di Lusin). Dato $X \subset \mathbb{R}^d, \mu = \mathcal{L}^d$ e data $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ o \mathbb{R}^m misurabile e $\varepsilon > 0$, esiste E aperto in X con $|E| \leq \varepsilon$ tale che f è continua su $X \setminus E$ (la restrizione di f a $X \setminus E$ è continua)

Osservazione. In generale f può essere non continua in tutti i punti di X , infatti E può essere denso e $X \setminus E$ avere parte interna vuota.

Lemma (di estensione di Tietze). Dato X spazio metrico e $C \subset X$ chiuso, $f: C \rightarrow \mathbb{R}$ continua allora f si estende a una funzione continua su X .

Usando questo lemma possiamo enunciare nuovamente il teorema precedente come segue

Teorema (di Lusin'). Data $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ misurabile e $\varepsilon > 0$, $\exists E$ aperto con $|E| \leq \varepsilon$ e $g: X \rightarrow \mathbb{R}$ continua tale che $f = g$ su $X \setminus E$, inoltre se $f \in L^p(X)$ e $p < +\infty$ si può anche chiedere che $\|f - g\|_p \leq \varepsilon$.

Dimostrazione. Basta trovare E misurabile (per ottenere E aperto si usa la regolarità della misura)

- *Caso 1:* $f \in L^1(X)$ e $|X| < +\infty$

Abbiamo che $f \in L^1 \implies \exists f_n$ continue tali che $f_n \rightarrow f$ in $L^1 \implies f_n \rightarrow f$ in misura e per Severini-Egorov esiste E tale che $|E| \leq \varepsilon$ e $f_n \rightarrow f$ uniformemente su $X \setminus E \implies f$ è continua su $X \setminus E$.

- *Caso 2:* f qualunque misurabile e $|X| < +\infty$

Lemma. Dati X, \mathcal{A}, μ con $\mu(X) < +\infty$ e data $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ misurabile e $\varepsilon > 0$ esiste F misurabile con $\mu(F) \leq \varepsilon$ tale che f è limitata su $X \setminus F$.

Dimostrazione. $\forall m > 0$ sia $F_m := \{x \mid |f(x)| > m\}$ allora $F_m \downarrow \emptyset \implies \mu(F_m) \downarrow 0$ e quindi esiste m tale che $\mu(F_m) \leq \varepsilon$.

Quindi data f qualunque misurabile e $|X| < +\infty$ esiste F misurabile tale che $|F| \leq \varepsilon/2$ e con f limitata su $X \setminus F \implies f \in L^\infty(X \setminus F) \subset L^1(X \setminus F)$, dunque per il *Caso 1* esiste E misurabile tale che $|E| \leq \varepsilon/2$ e f è continua su $X \setminus (E \cup F)$ e $\mu(E \cup F) \leq \varepsilon$

- *Caso 3:* f qualunque misurabile

Per ogni n poniamo $X_n := X \cap B(0, n)$ per il *Caso 2* esistono E_n misurabili con $|E_n| \leq \varepsilon/2^n$ tali che f è continua su $X_n \setminus E_n$, infine prendo $E := \bigcup_{n=1}^\infty E_n$ con $\mu(E) \leq \varepsilon \implies f$ è continua su $X_n \setminus E$ per ogni $n \implies f$ è continua su $X \setminus E$.

□

2.10 Appendice

Proposizione. Siano V, W spazi normati, $T: V \rightarrow W$ lineare. Sono fatti equivalenti

- T è continua in 0.
- T è continua.

- iii) T è lipschitziana, cioè esiste una costante $c < +\infty$ tale che $\|Tv - Tv'\|_W \leq c \|v - v'\|_V$.
- iv) Esiste una costante c tale che $\|Tv\|_W \leq c \|v\|_V$ per ogni $v \in V$.
- v) Esiste una costante c tale che $\|Tv\|_W \leq c$ per ogni $v \in V$, $\|v\|_V = 1$.

Dimostrazione. v) \Rightarrow iv). Vale la seguente

$$\|Tv\|_W \underset{v=\lambda\tilde{v}, \|\tilde{v}\|_V=1}{=} |\lambda| \|T\tilde{v}\|_W \leq c\lambda = c \|v\|_V \leq 1.$$

iv) \Rightarrow iii). Vale la seguente

$$\|Tv - Tv'\|_W = \|T(v - v')\|_W \leq c \|v - v'\|_W.$$

iii) \Rightarrow ii) e ii) \Rightarrow i) sono ovvie.

i) \Rightarrow v). T continua in 0, dunque esiste $\delta > 0$ tale che

$$\|Tv - T0\|_W \leq 1 \quad \text{se} \quad \|v - 0\|_V \leq \delta,$$

cioè

$$\|Tv\| \leq 1 \quad \text{se} \quad \|v\| \leq \delta,$$

da cui segue che $\|Tv\| \leq 1/\delta$ se $\|v\| \leq 1$. □

Osservazione. Le costanti ottimali iii), iv), v) sono uguali e valgono

$$c = \sup_{\|v\|_V \leq 1} \|Tv\|_W.$$

Esempi.

- i) Sia X, \mathcal{A}, μ coma al solito, con $\mu(X) < +\infty$. Allora, dati $1 \leq p_1 < p_2 \leq +\infty$, vale

$$L^{p_2}(X) \subset L^{p_1}(X). \quad (\star)$$

Inoltre, l'inclusione $i: L^{p_2}(X) \rightarrow L^{p_1}(X)$ è continua.

Dimostrazione. La dimostrazione di (??) segue dalla stima

$$\|u\|_{p_1} \underset{\text{Hölder generalizzato}}{\leq} \|\mathbb{1}_X\|_q \|u\|_{p_2} \quad \text{dove} \quad q = \frac{p_1 p_2}{p_2 - p_1}.$$

Dove

$$\|\mathbb{1}_X\|_{\frac{p_1 p_2}{p_2 - p_1}} \|u\|_{p_2} = (\mu(X))^{\frac{1}{p_1} - \frac{1}{p_2}} \|u\|_{p_2}.$$

Quanto sopra soddisfa la condizione al punto iv). □

- ii) L'applicazione $L^1(X) \ni u \mapsto \int u \, d\mu \in \mathbb{R}$ è continua.

Dimostrazione. Infatti, vale

$$\left| \int_X u \, d\mu \right| \leq \int_X |u| \, d\mu = \|u\|_1.$$

Quanto sopra soddisfa la condizione al punto iv). □

- iii) Cosa possiamo dire invece dell'applicazione $L^p(X) \ni u \mapsto \int u \, d\mu \in \mathbb{R}$? Se $\mu(X) < +\infty$ la continuità segue dagli esempi i) e ii) sopra. Se invece $\mu(X) = +\infty$? Per esempio $L^2(\mathbb{R})$? [TO DO].

2.11 Convoluzione

Definizione. Date $f_1, f_2: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ misurabili, il **prodotto di convoluzione** $f_1 * f_2$ è la funzione (da \mathbb{R}^d a \mathbb{R}) data da

$$f_1 * f_2(x) = \int_{\mathbb{R}^d} f_1(x-y)f_2(y) dy$$

Osservazioni.

i) La definizione sopra è ben posta se $f_1, f_2 \geq 0$ ($f_1 * f_2(x)$ può essere anche $+\infty$). In generale non è ben posta per funzioni a valori reali (non è detto che l'integrale esista).

Ad esempio, se prendiamo $f_1 = 1$ e $f_2 = \sin x$ con $d = 1$, allora $f_1 * f_2(x)$ non è definito per alcun x .

ii) Se $f_1 * f_2(x)$ esiste, allora $f_1 * f_2(x) = f_2 * f_1(x)$, infatti

$$f_1 * f_2(x) = \int_{\mathbb{R}^d} f_1(x-y)f_2(y) dy = \left(\begin{matrix} t := x-y \\ dt = dy \end{matrix} \right) = \int_{\mathbb{R}^d} f_1(t)f_2(x-t) dt = f_2 * f_1(x).$$

iii) È importante che f_1, f_2 siano definite su \mathbb{R}^d e che la misura sia quella di Lebesgue.

In realtà, si può generalizzare quanto sopra rimpiazzando $(\mathbb{R}^d, \mathcal{L}^d)$ con (G, μ) , dove G è un gruppo commutativo e μ una misura su G invariante per traslazione. Per esempio, \mathbb{Z} con la misura che conta i punti. Cioè $f_1, f_2: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}$, vale

$$f_1 * f_2(n) := \sum_{m \in \mathbb{Z}} f_1(n-m)f_2(m).$$

iv) Data f distribuzione di massa (continua) su \mathbb{R}^3 , il potenziale gravitazionale generato è

$$v(x) = \int_{y \in \mathbb{R}^d} \frac{1}{|x-y|} \rho(y) dy$$

cioè $v = g * \rho$, dove $g(x) = 1/|x|$ è il potenziale di una massa puntuale in 0.

v) Se X_1, X_2 sono variabili aleatorie (reali) con distribuzione di probabilità continua p_1, p_2 e X_1, X_2 sono indipendenti, allora $X_1 + X_2$ ha distribuzione di probabilità $p_1 * p_2$. (Facile per X_1, X_2 in \mathbb{Z}).

Proposizione 1. Se $|f_1| * |f_2|(x) < +\infty$ allora $f_1 * f_2(x)$ è ben definito, in quanto $|f_1 * f_2(x)| \leq |f_1| * |f_2|(x)$.

Dimostrazione. Basta osservare che,

$$\begin{aligned} f_1 * f_2(x) &= \int_{\mathbb{R}^d} f_1(x-y) \cdot f_2(y) dy \leq \left| \int_{\mathbb{R}^d} f_1(x-y) \cdot f_2(y) dy \right| \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^d} |f_1(x-y) \cdot f_2(y)| dy = |f_1| * |f_2|(x) < +\infty. \end{aligned}$$

□

Corollario 2. Se $|f_1| * |f_2| \in L^p(\mathbb{R}^d)$ con $1 \leq p \leq +\infty$ allora $f_1 * f_2(x)$ è ben definito per quasi ogni $x \in \mathbb{R}^d$ e $\|f_1 * f_2\|_p \leq \| |f_1| * |f_2| \|_p$.

Dimostrazione. Segue subito dalla proposizione precedente. \square

Teorema 3 (disuguaglianza di Young per convoluzione.) Se $f_1 \in L^{p_1}(\mathbb{R}^d)$ e $f_2 \in L^{p_2}(\mathbb{R}^d)$ e preso $r \geq 1$ tale che

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} - 1, \quad (*)$$

allora $f_1 * f_2$ è ben definito quasi ovunque e

$$\|f_1 * f_2\|_r \leq \|f_1\|_{p_1} \cdot \|f_2\|_{p_2} \quad (**)$$

Osservazioni.

- Nel caso di prima 1 e sin x sono solo in L^∞ infatti viene $r = -1$ e la disuguaglianza non ha senso.
- Supponiamo di avere $\|f_1 * f_2\| \leq C \cdot \|f_1\|_{p_1}^{\alpha_1} \cdot \|f_2\|_{p_2}^{\alpha_2}$ allora vediamo che per ogni f_1, f_2 positiva deve valere necessariamente $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$ e la condizione (??).

Dimostrazione. Per ogni $\lambda > 0$ consideriamo λf_1 e f_2 , allora

$$\|(\lambda f_1) * f_2\|_r = \|\lambda(f_1 * f_2)\|_r = \lambda \|f_1 * f_2\|_r$$

ma abbiamo anche

$$\|(\lambda f_1) * f_2\|_r \leq C \cdot \|\lambda f_1\|_{p_1}^{\alpha_1} \cdot \|f_2\|_{p_2}^{\alpha_2} = C \cdot \lambda^{\alpha_1} \|f_1\|_{p_1}^{\alpha_1} \cdot \|f_2\|_{p_2}^{\alpha_2},$$

da cui necessariamente $\alpha_1 = 1$ e di conseguenza $\alpha_2 = 1$.

A questo punto richiediamo anche che f_1 e f_2 siano tali che $\|f_1\|_{p_1}, \|f_2\|_{p_2} < +\infty$ e $\|f_1 * f_2\| > 0$ (questo possiamo farlo in quanto basta prendere $f_1 = f_2 = \mathbb{1}_B$ con B una palla, nel caso segue proprio che $f_1 * f_2(x) > 0$ se $|x| < 1$).

Data $f: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ e $\lambda > 0$ poniamo $R_\lambda f(x) := f(x/\lambda)$ allora abbiamo

$$\begin{aligned} \|(R_\lambda f_1) * (R_\lambda f_2)\|_r &= \left\| \int_{\mathbb{R}^d} f_1\left(\frac{x-y}{\lambda}\right) \cdot f_2\left(\frac{y}{\lambda}\right) dy \right\|_r = \left(\int_{\mathbb{R}^d} f_1\left(\frac{x-t}{\lambda}\right) \cdot f_2(t) dt \right) \\ &= \lambda^d \cdot \left\| \int_{\mathbb{R}^d} f_1\left(\frac{x}{\lambda} - t\right) \cdot f_2(t) dt \right\|_r \\ &= \lambda^d \cdot \|R_\lambda(f_1 * f_2)\|_r. \end{aligned}$$

Per il punto successivo abbiamo $\|R_\lambda(g)\|_r = \lambda^{d/r} \|g\|_r$, da cui otteniamo

$$\|(R_\lambda f_1) * (R_\lambda f_2)\|_r = \lambda^{d(1+\frac{1}{r})} \|f_1 * f_2\|_r.$$

Ma anche

$$\|(R_\lambda f_1) * (R_\lambda f_2)\|_r \leq C \cdot \|R_\lambda f_1\|_{p_1} \cdot \|R_\lambda f_2\|_{p_2} = \lambda^{d\left(\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2}\right)} \cdot \|f_1\|_{p_1} \cdot \|f_2\|_{p_2}.$$

Dunque sicuramente abbiamo $\lambda^{d(1+1/r)} \leq C \cdot \lambda^{d(1/p_1+1/p_2)}$ per ogni $\lambda > 0$ e quindi $1+1/r = 1/p_1 + 1/p_2$. \square

- $\|R_\lambda f\|_p = \lambda^{d/p} \|f\|_p$ ed in realtà possiamo ricavare l'esponente d/p per *analisi dimensionale*¹⁴. Consideriamo l'espressione

$$\|f\|_p^p = \int_{\mathbb{R}^d} f(x) dx.$$

Se $f(x)$ è una *quantità adimensionale* allora $\int_{\mathbb{R}^d} f dx$ ha dimensione di un *volume* \mathbb{L}^d , da cui $\|f\|_p$ ha dimensione di $\mathbb{L}^{d/p}$.

Similmente, per ottenere $\|R_\lambda(f_1 * f_2)\|_r = \lambda^{d(1+1/r)} \|f_1 * f_2\|_r$, basta osservare che

$$f_1 * f_2(x) = \int_{\mathbb{R}^d} f_1(x-y) f_2(y) dy$$

ha dimensione \mathbb{L}^d , da cui

$$\|f_1 * f_2\|_r = \left(\int_{\mathbb{R}^d} \underbrace{|f_1 * f_2|^r}_{\mathbb{L}^{dr}} \underbrace{dx}_{\mathbb{L}^d} \right)^{1/r}$$

ha dimensione di $\mathbb{L}^{d(1+1/r)}$.

Dimostrazione Teorema 3. Per via del Corollario 2. ci basta dimostrare (??) se $f_1, f_2 \geq 0$.

- *Caso facile.* Se $p_1 = p_2 = 1$ e $r = 1$

$$\begin{aligned} \|f_1 * f_2\|_1 &= \int f_1 * f_2(x) dx = \iint f_1(x-y) f_2(y) dy dx = \int f_2(y) \int f_1(x-y) dx dy = \\ &= \int \|f_1\|_1 \cdot f_2(y) dy = \|f_1\|_1 \cdot \|f_2\|_1 \end{aligned}$$

- *Caso leggermente meno facile.* Se $p_1 = p, p_2 = 1$ e $r = p$. Vogliamo vedere che

$$\|f_1 * f_2\|_p \leq \|f_1\|_p \cdot \|f_2\|_1$$

allora

$$\begin{aligned} \|f_1 * f_2\|_p &= \int_{\mathbb{R}^d} \underbrace{(f_1 * f_2)^p}_h dx = \int h \cdot h^{p-1} dx = \iint f_1(x-y) f_2(y) h^{p-1}(x) dy dx = \\ &= \iint f_1(y-x) h^{p-1}(x) dx f_2(y) dy \stackrel{\text{Hölder}}{\leq} \int \|f_1(y-\cdot)\|_p \|h^{p-1}\|_{p'} f_2(y) dy \end{aligned}$$

con p' esponente coniugato a p . Inoltre notiamo che $\|f_1(y-\cdot)\|_p = \|f_1\|_p$ per invarianza di \mathcal{L}^d per riflessioni e traslazioni. Infine otteniamo

$$\|f_1\|_p \|h^{p-1}\|_{p'} \|f_2\|_1 = \|f_1\|_p \|h\|_p^{p-1} \|f_2\|_1.$$

Dunque, $\|f_1 * f_2\|_p^p \leq \|f_1 * f_2\|_p^{p-1} \|f_1\|_p \|f_2\|_1 \implies \|f_1 * f_2\|_p \leq \|f_1\|_p \|f_2\|_1$. Quest'ultima implicazione però è valida solo nel caso in cui $0 < \|f_1 * f_2\|_p < +\infty$. Resterebbero da controllare i due casi in cui la norma è 0 oppure $+\infty$. Il primo è ovvio; il secondo invece si fa per approssimazione e passando al limite.

¹⁴Ovvero studiando le potenze delle unità di misura delle varie quantità.

Consideriamo f_1, f_2 e approssimiamole con $f_{1,n}, f_{2,n}$ limitate a supporto compatto, allora vale $\|f_{1,n} * f_{1,n}\|_p \leq \|f_{1,n}\|_p \cdot \|f_{2,n}\|_1$ e passando al limite si ottiene la tesi. In particolare possiamo costruire le f_n come

$$f_n(x) := (f(x) \cdot \mathbb{1}_{B(0,n)}(x)) \wedge n$$

Osservazione. Se $f_2 \geq 0$ e $\int f_2 dx = 1$ allora $\|f_1 * f_2\|_p \leq \|f_1\|_p$ è una versione semplificata della proposizione precedente, in particolare la dimostrazione si semplifica in quanto possiamo pensare a f_2 come distribuzione di probabilità e quindi $f_1 * f_2$ è una “media pesata” delle traslazioni di f_1 o più precisamente una combinazione convessa “integrale”.

- *Caso generale.* Non lo facciamo perché servono mille mila parametri e non è troppo interessante.

□

Nel caso $r = +\infty$ gli esponenti p_1 e p_2 sono proprio coniugati e possiamo rafforzare la tesi del teorema precedente.

Teorema 4 (caso $r = +\infty$ del Teorema 3). Dati p_1 e p_2 esponenti coniugati e $f_1 \in L^{p_1}(\mathbb{R}^d)$, $f_2 \in L^{p_2}(\mathbb{R}^d)$, allora

- i) $f_1 * f_2(x)$ è ben definito per ogni $x \in \mathbb{R}^d$
- ii) $|f_1 * f_2(x)| \leq \|f_1\|_{p_1} \|f_2\|_{p_2}$
- iii) $f_1 * f_2$ è uniformemente continua
- iv) Se $1 < p_1, p_2 < +\infty$ allora $f_1 * f_2 \rightarrow 0$ per $|x| \rightarrow +\infty$

Premettiamo i seguenti risultati.

Proposizione 5. Data $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$ con $p < +\infty$ la mappa

$$\begin{aligned} \tau_h f : \mathbb{R}^d &\rightarrow L^p(\mathbb{R}^d) \\ h &\mapsto f(\cdot - h) \end{aligned}$$

è continua.

Lemma 6. Lo spazio $C_0(\mathbb{R}^d) = \{f: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R} \text{ continue con } f(x) \rightarrow 0 \text{ per } |x| \rightarrow \infty\}$ è chiuso rispetto alla convergenza uniforme.

Dimostrazione Teorema 4.

- i) Osserviamo che

$$|f_1| * |f_2|(x) = \int_{\mathbb{R}^d} |f_1(x-y)| \cdot |f_2(y)| dy \stackrel{\text{Hölder}}{\leq} \|f_1(x - \cdot)\|_{p_1} \|f_2\|_{p_2} = \|f_1\|_{p_1} \|f_2\|_{p_2}$$

e concludiamo per la Proposizione 1.

- ii) Dal punto precedente abbiamo che $|f_1| * |f_2|(x) \leq \|f_1\|_{p_1} \|f_2\|_{p_2}$, da cui si conclude banalmente.
- iii) Uno tra p_1 e p_2 è finito; supponiamo lo sia p_1 . Fissiamo $x, h \in \mathbb{R}^d$

$$f_1 * f_2(x+h) - f_1 * f_2(x) = \int_{\mathbb{R}^d} (f_1(x+h-y) - f_1(x-y)) f_2(y) dy,$$

quindi

$$\begin{aligned}
|f_1 * f_2(x+h) - f_1 * f_2(x)| &\leq \int |f_1(x+h-y) - f_1(x-y)| |f_2(y)| dy \\
&\stackrel{\text{Holder}}{\leq} \|f_1(x+h-\cdot) - f_1(x-\cdot)\|_{p_1} \|f_2\|_{p_2} \\
&= \|f_1(\cdot-h) - f_1(\cdot)\|_{p_1} \|f_2\|_{p_2} \\
&= \underbrace{\|\tau_h f_1 - f_1\|_{p_1}}_{\substack{h \rightarrow 0 \\ \text{Proposizione 5}}} \|f_2\|_{p_2} \rightarrow 0
\end{aligned}$$

da cui segue la tesi¹⁵.

iv) Approssimiamo f_1 e f_2 con $f_{1,n}$ e $f_{2,n} \in \mathcal{C}_C(\mathbb{R}^d)$ in L^{p_1} e L^{p_2} rispettivamente.

Osserviamo che $f_{1,n} * f_{2,n} \in \mathcal{C}_C(\mathbb{R}^d) \subset \mathcal{C}_0(\mathbb{R}^d)$. Per il Lemma 6 basta dimostrare che $f_{1,n} * f_{2,n} \rightarrow f_1 * f_2$ uniformemente

$$\begin{aligned}
\|f_{1,n} * f_{2,n} - f_1 * f_2\|_\infty &= \|(f_{1,n} * f_{2,n} - f_{1,n} * f_2) + (f_{1,n} * f_2 - f_1 * f_2)\|_\infty \\
&\stackrel{\text{lin della conv}}{\leq} \|f_{1,n} * (f_{2,n} - f_2)\|_\infty + \|(f_{1,n} - f_1) * f_2\|_\infty \\
&\stackrel{ii)}{\leq} \underbrace{\|f_{1,n}\|_{p_1}}_{\rightarrow \|f_1\|_{p_1}} \underbrace{\|f_{2,n} - f_2\|_{p_2}}_{\rightarrow 0} + \underbrace{\|f_{1,n} - f_1\|_{p_1}}_{\rightarrow 0} \|f_2\|_{p_2}.
\end{aligned}$$

Quindi $\|f_{1,n} * f_{2,n} - f_1 * f_2\|_\infty \rightarrow 0$. □

2.12 Esercitazione del 21 ottobre

Data $T: X \rightarrow Y$ lineare tra X, Y spazi normati, allora T è continua se e solo se esiste $C > 0$ tale che $\|T(x)\|_Y \leq C \|x\|_X$ per ogni $x \in X$.

Applichiamo questo risultato.

i) Sia $X = \mathbb{R}^d$. L'applicazione $L^1(\mathbb{R}^d) \ni u \xrightarrow{T} \int_{\mathbb{R}^d} u \, dx$ è lineare e continua in quanto limitata. Infatti:

$$|T(u)| = \left| \int_{\mathbb{R}^d} u \, dx \right| \leq \int_{\mathbb{R}^d} |u| \, dx = \|u\|_{L^1(\mathbb{R}^d)}.$$

ii) Studiamo ora il caso per $p > 1$. Data $u \in L^p(\mathbb{R}^d)$, l'applicazione

$$u \mapsto \int_{\mathbb{R}^d} u \, dx$$

potrebbe non essere ben definita.

Ad esempio se restringiamo il dominio a $L^p(\mathbb{R}^d) \cap L^1(\mathbb{R}^d)$ l'applicazione sopra è ben definita, ma in generale non è continua. Più formalmente, la mappa

$$T: (L^p \cap L^1(\mathbb{R}^d), \|\cdot\|_{L^p}) \rightarrow \mathbb{R}$$

¹⁵Nota. In generale, quanto appena mostrato ci direbbe che la funzione è continua, ma essendo che stiamo maggiorando con una quantità indipendente da x segue l'uniforme continuità.

è lineare ma non continua.

Studiamo il caso reale, ovvero $d = 1$.

Per verificare quanto sopra, utilizziamo la definizione di continuità per successioni. Definiamo una successione di funzioni a supporto compatto u_n , che sappiamo essere in tutti gli spazi L^p , e verifichiamo che $\lim_n T(u_n) \neq T(u_\infty)$ dove $u_\infty := \lim_n u_n$.

Definiamo la successione come segue:

$$u_n(x) = \frac{1}{n} \mathbb{1}_{[n, 2n]} = \begin{cases} \frac{1}{n} & \text{se } n \leq x \leq 2n \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Noto quanto segue

- $u_\infty = 0$, infatti, posto $E_n = [n, 2n]$

$$\|u_n - 0\|_{L^p(\mathbb{R})}^p = \|u_n\|_{L^p(\mathbb{R})}^p = \int_{\mathbb{R}} u_n^p(x) dx = \frac{1}{n^p} \cdot |E_n| = \frac{n}{n^p} = \frac{1}{n^{p-1}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

- $T(u_n) \equiv 1$, infatti

$$T(u_n) = \int_{\mathbb{R}} u_n dx = \frac{1}{n} |E_n| = 1.$$

In conclusione, rispetto alla convergenza in L^p vale $T(u_n) \not\rightarrow T(u_\infty) = T(0) = 0$.

Un altro modo per dimostrare quanto sopra è verificare che, per ogni $C > 0$, esiste una funzione $u \in L^p(\mathbb{R}^d) \cap L^1(\mathbb{R}^d)$ tale per cui

$$\left| \int_{\mathbb{R}} u dx \right| > C \left(\int_{\mathbb{R}} |u|^p dx \right)^{1/p}.$$

Notiamo che questo è proprio l'esercizio che segue.

Esercizio. Fissato $C > 0$, trovare $u \in L^p \cap L^1(\mathbb{R})$ tale che

$$\left| \int_{\mathbb{R}} u dx \right| > C \|u\|_{L^p(\mathbb{R})} \quad (\star)$$

Dimostrazione. Fissato $C > 0$, cerchiamo una funzione in L^p il cui integrale in modulo sia maggiore di C per la sua norma L^p . Per trovare u consideriamo la successione di funzioni definita come segue

$$f_n = \begin{cases} 1/x & 1 \leq x \leq n \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}.$$

Le funzioni f_n sono a supporto compatto e stanno in ogni L^p . Notiamo che $f_n \uparrow f$ definita come

$$f = \begin{cases} 1/x & x > 1 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

ed $f \in L^p$ per ogni $p > 1$. In particolare, $\left(\int_{\mathbb{R}} |f_n|^p \right)^{1/p} \leq \left(\int_{\mathbb{R}} |f|^p \right)^{1/p} \stackrel{f \in L^p \forall p > 1}{\leq} +\infty$ per ogni n .

Quindi il secondo membro di (??) è maggiorato da una costante che non dipende da n . D'altra parte, per Beppo Levi $\lim_n \int_{\mathbb{R}} f_n dx = \int_{\mathbb{R}} f dx$ che non sta in L^1 . In conclusione, esiste un n abbastanza grande per cui vale (??). \square

Esercizio. Sia $p \geq 1$ e $E = \left\{ u \in L^p(-1, 1) : \int_{-1}^1 u dx = 0 \right\}$.

i) Dire se E è limitato in $L^p(-1, 1)$.

ii) Dire se E è chiuso in $L^p(-1, 1)$.

Soluzione.

i) Dimostrare che E è limitato in $L^p(-1, 1)$ equivale a dimostrare che esiste $M > 0$ tale che ogni $u \in L^p(-1, 1)$, $\int_{-1}^1 u dx = 0$ verifica $\|u\|_{L^p} \leq M$.

Vediamo che E non è limitato. Preso $M > 0$, riesco sempre a trovare una funzione maggiore di M in norma. Ad esempio la funzione definita come

$$u(x) := \begin{cases} M & \text{se } x \in (0, 1) \\ -M & \text{se } x \in (-1, 0) \end{cases}$$

ha norma $\|u\|_{L^p}^p = 2M^p$.

Nota. Aveva senso cercare il controesempio nella classe delle funzioni dispari e limitate, perché hanno media zero, e perché sono in tutti gli L^p .

ii) Vediamo che E è chiuso.

Nota. Possiamo dimostrarlo usando i teoremi di convergenza, ma seguiremo un'altra strada.

- *Caso* $p > 1$. Definiamo l'operatore

$$T: L^p(-1, 1) \rightarrow \mathbb{R} \\ u \mapsto \int_{-1}^1 u dx$$

è ben definito. Infatti, per Hölder vale

$$\left| \int_{-1}^1 1 \cdot u dx \right| \leq \left(\int_{-1}^1 |u|^p dx \right)^{1/p} (1^q)^{1/q}$$

dove $q = \frac{p}{p-1}$. Allora

$$|T(u)| \leq \|u\|_{L^p(-1,1)} \cdot 2^{\frac{p}{p-1}}.$$

Dunque T è continuo in L^p per ogni $p > 1$.

- *Caso* $p = 1$. L'operatore sopra è continuo anche per $p = 1$. Grazie alla stima vista prima

$$|T(u)| = \left| \int_{-1}^1 u dx \right| \leq \int_{-1}^1 |u| dx = \|u\|_{L^1}.$$

Dunque T è continua e $T^{-1}(0) = E$, dunque E è chiuso.

Esercizio. [TO DO] Sia $p \geq 1$. Definiamo

$$F = \left\{ v \in L^p(\mathbb{R}) \mid \int_0^1 v(x) \, dx - 2 \int_{-1}^0 v(x) \, dx = 3 \right\}.$$

Dire se F è chiuso in $(L^p(\mathbb{R}), \|\cdot\|_{L^p(\mathbb{R})})$.

Esercizio. [TO DO] Sia

$$G = \left\{ v \in L^p(0, 2\pi) \mid \int_0^{2\pi} v(x) \sin(x) \, dx = 1 \right\}.$$

Dire se G è chiuso in $L^2(0, 2\pi)$.

Domanda. Dato $L^p(X, \mu)$ e V sottospazio di $L^p(X, \mu)$, posso dire che V è chiuso?

In generale no! Infatti esistono sottospazi densi in $L^p(X, \mu)$.

Ad esempio in ℓ^2 consideriamo l'insieme denso

$$V = \{ \{x_n\} \mid x_n = 0 \text{ definitivamente} \}.$$

Vediamo che non è chiuso. Sia $\underline{x} \in \ell^2$, definita come $\underline{x} = \{1/n\}_{n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}}$, diciamo che $\underline{x} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \underline{x}^n$ dove

$$x_n^k = \begin{cases} \frac{1}{n} & 1 \leq n \leq k \\ 0 & n > k, n = 0 \end{cases}$$

abbiamo che

$$\|\underline{x} - \underline{x}^k\|_{\ell^2}^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |x_n - x_n^k|^2 = \sum_{n=k+1}^{+\infty} |x_n|^2 = \sum_{n=k+1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} 0.$$

Vediamo un altro esempio. Siano $X = \mathbb{R}$, μ la misura di Lebesgue e $p > 1$. In tal caso, l'insieme $L^p \cap L^1(\mathbb{R})$ è un sottospazio denso in $(L^1(\mathbb{R}), \|\cdot\|_{L^1})$ e $(L^p(\mathbb{R}), \|\cdot\|_{L^p})$.

Nota. L'insieme $L^2(\mathbb{R}) \cap L^1(\mathbb{R})$ è un sottospazio proprio di $L^1(\mathbb{R})$. Diciamo che non è chiuso in $\|\cdot\|_{L^1(\mathbb{R})}$ perché è denso. Infatti,

$$\mathcal{C}_C^0(\mathbb{R}) \subset L^2(\mathbb{R}) \cap L^1(\mathbb{R}).$$

2.12.1 Convoluzione

Sia $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ e sia $g: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ continua a supporto compatto¹⁶.

$$|g(x) - g(y)| \leq M |x - y|_{\mathbb{R}^d}.$$

Esercizio. Dimostrare che $f * g$ è ben definita e lipschitziana, dove $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ e $g \in \mathcal{C}_C^0(\mathbb{R}^d)$.

Verifichiamo che la convoluzione è ben definita. Dal fatto che $g \in \mathcal{C}_C^0(\mathbb{R}^d)$ abbiamo in particolare che g è limitata, da cui

$$f * g = \int_{\mathbb{R}^d} f(x-y) \cdot g(y) \, dy \stackrel{|g| \leq M}{\leq} M \cdot \int_{\mathbb{R}^d} f(x-y) \, dy \stackrel{f \in L^1(\mathbb{R}^d)}{<} +\infty.$$

¹⁶In tal caso g è lipschitziana.

Ora verifichiamo che $f * g$ è lipschitziana. Consideriamo $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^d$

$$|f * g(x_1) - f * g(x_2)| = \left| \int_{\mathbb{R}^d} f(x_1 - y)g(y) \, dy - \int_{\mathbb{R}^d} f(x_2 - y)g(y) \, dy \right|$$

Usiamo la proprietà che, essendo $f * g$ ben definita, si ha $f * g(x) = g * f(x)$. Da cui

$$\begin{aligned} |f * g(x_1) - f * g(x_2)| &= \left| \int_{\mathbb{R}^d} g(x_1 - y)f(y) \, dy - \int_{\mathbb{R}^d} g(x_2 - y)f(y) \, dy \right| \\ &= \left| \int_{\mathbb{R}^d} (g(x_1 - y) - g(x_2 - y))f(y) \, dy \right| \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^d} |g(x_1 - y) - g(x_2 - y)| |f(y)| \, dy \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^d} M |(x_1 - y) - (x_2 - y)| |f(y)| \, dy \leq M |x_1 - x_2| \cdot \|f\|_{L^1(\mathbb{R}^d)}. \end{aligned}$$

Esercizio. [TO DO] Se $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ e g a supporto compatto è α -Hölderiana allora anche $f * g$ lo è.

Esercizio. [TO DO] Presa $f(x) = \mathbb{1}_{[0,1]}$ in \mathbb{R} , calcolare $f * f$.

2.13 Rimanenze dalla lezione precedente

Proposizione. Data $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$ con $1 \leq p < +\infty$ allora la funzione $\tau_h f: \mathbb{R}^d \rightarrow L^p(\mathbb{R}^d)$ data da $h \mapsto f(\cdot - h)$ è continua.

Dimostrazione. Per prima cosa notiamo che basta vedere solo la continuità in 0 in quanto

$$\tau_{h'} f - \tau_h f = \tau_h(\tau_{h'-h} f - f) \implies \|\tau_{h'} f - \tau_h f\|_p = \|\tau_{h'-h} f - f\|_p.$$

Dimostriamo ora la proposizione in due passi.

- *Caso 1:* $f \in C_C(\mathbb{R}^d)$

$$\|\tau_h f - f\|_p^p = \int_{\mathbb{R}^d} |f(x-h) - f(x)|^p \, dx \xrightarrow{|h| \rightarrow 0} 0$$

per convergenza dominata, verifichiamo però che siano rispettate le ipotesi

- La convergenza puntuale, ovvero $|f(x-h) - f(x)|^p \xrightarrow{|h| \rightarrow 0} 0$ segue direttamente dalla continuità di f .
- Come dominazione invece usiamo $|f(x-h) - f(x)|^p \leq (2\|f\|_\infty)^p \cdot \mathbb{1}_{B(0, R+1)}$ usando che $f \in C_C \implies \text{supp}(f) \subset \overline{B(0, R)}$ e poi che

$$\text{supp}(f(\cdot - h) - f(\cdot)) \subset \overline{B(0, R + |h|)}$$

infine se $|h| < 1$ come raggio ci basta prendere $R + 1$.

- *Caso 2:* f qualunque Dato $\varepsilon > 0$ prendiamo $g \in C_C(\mathbb{R}^d)$ tale che $\|g - f\| \leq \varepsilon$ allora aggiungiamo a sottraiamo $g + \tau_h g$ e raggruppiamo in modo da ottenere

$$\begin{aligned} \tau_h f - f &= \tau_h(f - g) + (\tau_h g - g) + (g - f) \\ \implies \|\tau_h f - f\|_p &\leq \underbrace{\|\tau_h(f - g)\|_p}_{\leq \varepsilon} + \|\tau_h g - g\|_p + \underbrace{\|g - f\|_p}_{\leq \varepsilon} \leq 2\varepsilon + \underbrace{\|\tau_h g - g\|_p}_{\rightarrow 0 \text{ per Caso 1}} \end{aligned}$$

dunque $\limsup_{|h| \rightarrow 0} \|\tau_h f - f\|_p \leq 2\varepsilon$ ma per arbitrarietà di ε otteniamo anche che $\|\tau_h f - f\|_p \rightarrow 0$ per $|h| \rightarrow 0$.

□

[TO DO: il teorema sotto non è già stato dimostrato?] **Teorema.** Siano $f_1 \in L^{p_1}(\mathbb{R}^d)$ e $f_2 \in L^{p_2}(\mathbb{R}^d)$ con p_1 e p_2 esponenti coniugati, allora $f_1 * f_2$ è definita per ogni x e uniformemente continua

$$|f_1 * f_2(x)| \leq \|f_1\|_{p_1} \cdot \|f_2\|_{p_2} \quad \forall x.$$

Dimostrazione. Prendiamo $f_{1,n}, f_{2,n} \in C_C(\mathbb{R}^d)$ tali che $f_{1,n} \rightarrow f_1$ in L^{p_1} e $f_{2,n} \rightarrow f_2$ in L^{p_2} .

- Per prima cosa verifichiamo che $f * g$ è ben definita. Notiamo che $f_{1,n} * f_{2,n}$ ha supporto limitato, infatti se $\text{supp}(f_{i,n}) \subset \overline{\mathcal{B}(0, r_{i,n})}$ per $i = 1, 2$ allora

$$\text{supp}(f_{1,n} * f_{2,n}) \subset \overline{\mathcal{B}(0, r_{1,n} + r_{2,n})}$$

e basta notare che l'espressione

$$f_1 * f_2(x) = \int_{\mathbb{R}^d} f_1(x - y) f_2(y) dy$$

ha integranda nulla per ogni y se $|x| \geq r_{1,n} + r_{2,n}$.

- Vediamo che $f_{1,n} * f_{2,n} \rightarrow f_1 * f_2$ uniformemente

$$\begin{aligned} f_{1,n} * f_{2,n} - f_1 * f_2 &= (f_{1,n} - f_1) * f_{2,n} - f_1 * (f_{2,n} - f_2) \\ \|f_{1,n} * f_{2,n} - f_1 * f_2\|_p &\leq \|(f_{1,n} - f_1) * f_{2,n}\|_p + \|f_1 * (f_{2,n} - f_2)\|_p \\ &\leq \underbrace{\|f_{1,n} - f_1\|_{p_1}}_{\rightarrow 0} \cdot \underbrace{\|f_{2,n}\|_{p_2}}_{\rightarrow \|f_2\|_{p_2}} + \underbrace{\|f_1\|_{p_1}}_{\text{cost.}} \cdot \underbrace{\|f_{2,n} - f_2\|_{p_2}}_{\rightarrow 0} \rightarrow 0 \end{aligned}$$

- $C_0(\mathbb{R}^d)$ è chiuso per convergenza uniforme [TODO: da fare per esercizio]

2.14 Derivata e Convoluzione

Osservazione. Osserviamo che la convoluzione si comporta bene con l'operatore di traslazione definito precedentemente, infatti $\tau_h(f_1 * f_2) = (\tau_h f_1) * f_2$ in quanto

$$f_1 * f_2(x - h) = \int f_1(x - h - y) \cdot f_2(y) dy = \int \tau_h f_1(x - y) \cdot f_2(y) dy = (\tau_h f_1) * f_2$$

quindi “formalmente” possiamo calcolare il seguente rapporto incrementale

$$\frac{\tau_h(f_1 * f_2) - f_1 * f_2}{h} = \frac{\tau_h f_1 - f_1}{h} * f_2 \implies (f_1 * f_2)' = (f_1)' * f_2$$

Vediamo ora di formalizzare questo risultato.

Teorema. Dati p_1 e p_2 esponenti coniugati, se

- $f_1 \in C^1(\mathbb{R}^d)$, f_1 e $\nabla f_1 \in L^{p_1}(\mathbb{R}^d)$

- $f_2 \in L^{p_2}(\mathbb{R}^d)$

allora $f_1 * f_2 \in C^1$ con $\nabla(f_1 * f_2) = (\nabla f_1) * f_2$ ¹⁷.

Dimostrazione.

- $d = 1$: Sappiamo che $f_1 * f_2$ ed $f'_1 * f_2$ sono continue. Vediamo che coincidono usando il teorema fondamentale del calcolo integrale. L'uguaglianza $(f_1 * f_2)' = f'_1 * f_2$ segue da

$$\int_a^b f'_1 * f_2 \, dx = f_1 * f_2(b) - f_1 * f_2(a) \quad \forall a < b$$

ed in effetti

$$\begin{aligned} \int_a^b f'_1 * f_2(x) \, dx &= \int_a^b \int_{-\infty}^{\infty} f'_1(x-y) f_2(y) \, dy \, dx \\ &\stackrel{(*)}{=} \int_{-\infty}^{\infty} \int_a^b f'_1(x-y) \, dx \cdot f_2(y) \, dy \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} (f_1(b-y) - f_1(a-y)) \cdot f_2(y) \, dy \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f_1(b-y) f_2(y) \, dy - \int_{-\infty}^{\infty} f_1(a-y) f_2(y) \, dy \\ &= f_1 * f_2(b) - f_1 * f_2(a). \end{aligned}$$

In particolare in $(*)$ stiamo usando Fubini-Tonelli in quanto

$$\int_a^b \int_{-\infty}^{\infty} |f'_1(x-y)| \cdot |f_2(y)| \, dy \, dx \leq \int_a^b \|f'_1(x - \cdot)\|_{p_1} \cdot \|f_2\|_{p_2} \, dx = \|f'_1\|_{p_1} \cdot \|f_2\|_{p_2} \cdot (b-a).$$

- per $d > 1$ dato $i = 1, \dots, d$ basta semplicemente considerare le proiezioni infatti

$$\int_a^b \frac{\partial f_1}{\partial x_i} * f_2(x_1, \dots, \overset{(i)}{t}, \dots, x_d) \, dt = f_1 * f_2(x_1, \dots, \overset{(i)}{b}, \dots, x_d) - f_1 * f_2(x_1, \dots, \overset{(i)}{a}, \dots, x_d)$$

□

Corollario. Data $f_1 \in C^\infty_C(\mathbb{R}^d)$ (da cui segue $\nabla^k \in L^q(\mathbb{R}^d)$ per ogni $k = 0, 1, \dots$ e $1 \leq q < +\infty$) e $f_2 \in L^p(\mathbb{R}^d)$ allora $f_1 * f_2 \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$ (anzi $\nabla^k(f_1 * f_2) \in C_0(\mathbb{R}^d)$ per ogni k) e vale la formula nota¹⁸

$$\nabla^k(f_1 * f_2) = (\nabla^k f_1) * f_2 \quad \forall k = 1, \dots$$

Dimostrazione. Si dimostra per induzione su k . [TO DO: da fare]

2.15 Approssimazione per convoluzione

Definizione. Per prima cosa data una funzione $g: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ e $\delta \neq 0$ poniamo

$$\sigma_\delta g(x) := \frac{1}{\delta^d} g\left(\frac{x}{\delta}\right)$$

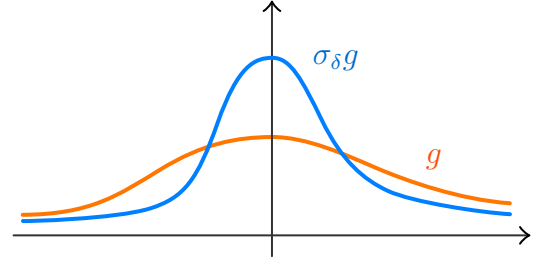
e notiamo che questa trasformazione preserva la norma L^1 . Infatti, il valore $1/\delta^d$ è proprio il modulo del determinante dello Jacobiano del cambio di variabile.

¹⁷Ha senso anche se ∇f_1 è a valori vettoriali. In tal caso $\frac{\partial}{\partial x_i}(f_1 * f_2) = \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_i}\right) * f_2$ per $i = 1, \dots, d$.

¹⁸dato che $\nabla^k f_1$ ha valori in \mathbb{R}^k e f_2 in \mathbb{R} , dobbiamo definire $\nabla^k f_1 * f_2$ [TO DO: da fare].

Teorema. Data $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$ e $g \in L^1(\mathbb{R}^d)$ con $1 \leq p < +\infty$ e posto $m := \int_{\mathbb{R}^d} g(x) dx$, allora

$$f * \sigma_\delta g \xrightarrow{\delta \rightarrow 0} mf \text{ in } L^p(\mathbb{R}^d).$$



Interpretazione. Se $g \geq 0$ con $\int g dx = 1$ (dunque g distribuzione di probabilità) allora $f * g$ possiamo pensarla come media pesata di traslate di f , dunque facendo $f * \sigma_\delta g$ stiamo pesando sempre di più i valori delle traslate vicino a 0.

Nota. Per $p = +\infty$ il teorema non vale. Infatti, la funzione $f = \mathbb{1}_{[0, +\infty]} \in L^\infty$; le funzioni $f * \sigma_\delta g$ sono continue ma non convergono in L^∞ a $mf = f$. Infatti, le successioni continue convergono in L^∞ a funzioni che coincidono, a meno di insiemi di misura nulla, con funzioni continue, ed f non è possibile modificarla in un insieme di misura nulla in modo che coincida con una funzione continua.

Dimostrazione. Per ora consideriamo g generica e ripercorriamo una dimostrazione simile a quella fatta per la disuguaglianza di Young

$$\begin{aligned} \|f * g - mf\|_p^p &= \int_{\mathbb{R}^d} \underbrace{|f * g - mf|^p}_h dx \\ &= \int |f * g - mf| \cdot h^{p-1} dx \\ &= \int \left| \int f(x-y)g(y) dy - f(x) \int g(y) dy \right| \cdot h^{p-1}(x) dx \\ &\leq \int \int |f(x-y) - f(x)| \cdot |g(y)| dy \cdot h^{p-1}(x) dx \\ &\stackrel{(*)}{=} \int \left(\int |f(x-y) - f(x)| h^{p-1}(x) dx \right) |g(y)| dy, \end{aligned}$$

dove in (*) abbiamo usato Fubini-Tonelli. Ora prendiamo q tale che $1/p + 1/q = 1$ allora per Hölder abbiamo

$$\begin{aligned} &\leq \int \|f(\cdot - y) - f(\cdot)\|_p \|h^{p-1}\|_q \cdot |g(y)| dy \\ &= \|h\|_p^{p-1} \int_{\mathbb{R}^d} \|\tau_y f - f\|_p \cdot |g(y)| dy \end{aligned}$$

dunque abbiamo ricavato che

$$\|f * g - mf\|_p^p \leq \|f * g - mf\|_p^{p-1} \int_{\mathbb{R}^d} \|\tau_y f - f\|_p \cdot |g(y)| dy$$

ed ora applicando questa stima a $\sigma_\delta g$ invece che a g otteniamo

$$\|f * \sigma_\delta g - mf\|_p \leq \int_{\mathbb{R}^d} \|\tau_y f - f\|_p \cdot |\sigma_\delta g(y)| dy,$$

infine ponendo $z = y/\delta$ e $dz = 1/\delta^d dy$ e sostituendo nell'integrale

$$= \int_{\mathbb{R}^d} \|\tau_{\delta z} f - f\|_p \cdot |g(z)| dz \xrightarrow{\delta \rightarrow 0} 0$$

per *convergenza dominata*, verifichiamone le ipotesi

- i) La convergenza puntuale segue in quanto $\|\tau_{\delta z}f - f\|_p \xrightarrow{\delta \rightarrow 0} 0$ per ogni z .
- ii) Come dominazione prendiamo $2\|f\|_p \cdot |g| \in L^1$.

□

Corollario. Sia $g \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ con $\int g \, dx = 1$ e $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$ e $1 \leq p < +\infty$ allora $\sigma_\delta g * f \xrightarrow{\delta \rightarrow 0} f$ in $L^p(\mathbb{R}^d)$ e $\sigma_\delta g * f \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$.

Capitolo 3

Spazi di Hilbert

Sia H spazio vettoriale reale con prodotto scalare $\langle \cdot, \cdot \rangle$ definito positivo e norma indotta $\| \cdot \|$ definita come $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$.

Si ricorda l'identità di polarizzazione

$$\langle x_1, x_2 \rangle = \frac{1}{4} \left(\|x_1 + x_2\|^2 - \|x_1 - x_2\|^2 \right).$$

Nota. Siccome $\| \cdot \|$ è continua, dalla formula di polarizzazione segue che il prodotto scalare è continuo.

Definizione. H si dice **spazio di Hilbert** se è completo.

Esempi.

- Dato (X, \mathcal{A}, μ) , gli spazi $L^2(X), L^2(X, \mathbb{R}^m)$ sono spazi di Hilbert.
- Lo spazio $\ell^2 = \left\{ (x_n) \mid \sum_{n=0}^{\infty} x_n^2 < +\infty \right\}$ è uno spazio di Hilbert.

Definizione. $\mathcal{F} \subset H$ è un **sistema ortonormale** se

$$\|e\| = 1 \quad \forall e \in \mathcal{F}, \quad \langle e, e' \rangle = 0 \quad \forall e \neq e' \in \mathcal{F}.$$

Definizione. \mathcal{F} si dice **completo** se $\overline{\text{Span}(\mathcal{F})} = H$ ¹. In tal caso \mathcal{F} si dice **base di Hilbert**.

Osservazione. In generale una base di Hilbert $\mathcal{F} \subset H$ non è anche una base algebrica di H .

L'esempio che segue spiega quanto appena detto.

Esempio. In ℓ^2 una base ortonormale è $\mathcal{F} = \{e_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ con $e_n = (0, \dots, 0, \overset{(n)}{1}, 0, \dots)$. Infatti, il fatto che siano ortonormali è banale; verifichiamo che sia una base.

Studiamo $\text{Span}(\mathcal{F}) = \{x = (x_0, x_1, \dots) \mid x_n \text{ è definitivamente nullo}\}$: dato $x \in \ell^2$ e $m = \mathbb{N}$, definiamo

$$P_m x := (x_0, x_1, \dots, x_m, 0, \dots).$$

Allora $\text{Span}(\mathcal{F}) \supset P_m x \xrightarrow{m \rightarrow +\infty} x$ in ℓ^2 . Infatti,

$$x - P_m x = (0, \dots, 0, x_{m+1}, x_{m+2}, \dots).$$

¹Lo span sono combinazioni lineari finite.

Dunque

$$\|x - P_m x\| = \sum_{n=m+1}^{\infty} x_n^2 \xrightarrow{m \rightarrow +\infty} 0.$$

Teorema 1. (della base di Hilbert.) Dato H spazio di Hilbert, \mathcal{F} sistema ortonormale al più numerabile, ovvero $\mathcal{F} = \{e_n \mid n \in \mathbb{N}\}$. Definiamo per ogni $x \in H$, $n \in \mathbb{N}$ l'elemento $x_n = \langle x, e_n \rangle$. Allora

- i) Vale $\sum_n x_n^2 \leq \|x\|^2$ (**Disuguaglianza di Bessel**).
- ii) La somma $\sum_n x_n e_n$ converge a qualche $\bar{x} \in H$ e $\bar{x}_n = x_n$ per ogni n .
- iii) Vale $\|\bar{x}\|^2 = \sum_n x_n^2 \leq \|x\|^2$.
- iv) Se $x - \bar{x} \perp \mathcal{F}$, allora $x - \bar{x} \perp \overline{\text{Span}(\mathcal{F})}$, ovvero \bar{x} è la proiezione di x su $\overline{\text{Span}(\mathcal{F})}$.
- v) Se \mathcal{F} è completo, allora $x = \bar{x}$ e in particolare

$$x = \sum_{n=0}^{\infty} x_n e_n, \quad \|x\|^2 = \sum_{n=0}^{\infty} x_n^2 \quad (\textbf{Identità di Parseval}).$$

Alla dimostrazione del teorema premettiamo il seguente lemma.

Lemma 2. Siano H e \mathcal{F} come nel teorema. Data $(a_n) \in \ell^2$, allora

- i) La serie $\sum_n a_n e_n$ converge a qualche $\bar{x} \in H$.
- ii) $\bar{x}_n = a_n$ per ogni n .
- iii) $\|\bar{x}\|^2 = \sum_n a_n^2$.

Dimostrazione.

- i) Dimostriamo che $y_n = \sum_{n=1}^m a_n e_n$ è di Cauchy in H . Se $m' > m$, vale

$$y_{m'} - y_m = \sum_{n=m+1}^{m'} a_n e_n \implies \|y_{m'} - y_m\|^2 = \left\| \sum_{n=m+1}^{m'} a_n e_n \right\|^2 = \sum_{n=m+1}^{m'} a_n^2 \leq \sum_{n=m+1}^{\infty} a_n^2 < +\infty.$$

Dunque, per ogni ε esiste m_ε tale che $\sum_{m_\varepsilon+1}^{\infty} a_n^2 \leq \varepsilon^2$, per cui

$$\|y_{m'} - y_m\|^2 \leq \sum_{m+1}^{m'} a_n^2 \leq \sum_{m_\varepsilon+1}^{\infty} a_n^2 \leq \varepsilon^2 \quad \forall m, m' \geq m_\varepsilon.$$

- ii) Se $m \geq n$, $\langle y_m, e_n \rangle = a_n$, dunque, per continuità del prodotto scalare

$$a_n = \langle y_m, e_n \rangle \xrightarrow{m \rightarrow \infty} \langle \bar{x}, e_n \rangle = \bar{x}_n.$$

iii) Si ha l'uguaglianza $\|y_m\|^2 = \sum_{n=1}^m a_n^2$, per cui passando al limite per $m \rightarrow +\infty$ otteniamo

$$\begin{aligned} \|y_m\|^2 &\xrightarrow{m \rightarrow \infty} \|\bar{x}\|^2 \\ &\parallel \\ \sum_{n=0}^m a_n^2 &\xrightarrow{m \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^{\infty} a_n^2 \end{aligned}$$

□

Dimostrazione Teorema 1.

i) Studiamo la somma $x = \sum_{n=0}^m x_n e_n + \overbrace{y}^{\text{resto}}$.

Notiamo che x è somma di vettori ortogonali, infatti y è ortogonale a $\sum_{n=0}^m x_n e_n$:

$$\langle y, e_i \rangle = \left\langle x - \sum_{n=0}^m x_n e_n, e_i \right\rangle = \langle x, e_i \rangle - \sum_{n=0}^m x_n \underbrace{\langle e_n, e_i \rangle}_{\delta_{i,n}} = x_i - x_i = 0.$$

Essendo che x è somma di vettori ortogonali abbiamo

$$\|x\|^2 = \sum_{n=1}^m x_n^2 + \|y\|^2 \geq \sum_{n=1}^m x_n^2.$$

Passando al limite per $m \rightarrow +\infty$ otteniamo

$$\|x\|^2 \geq \sum_{n=1}^{\infty} x_n^2.$$

ii) Segue dal lemma notando che il punto precedente ci dice che la successione (x_n) è a quadrato sommabile.

iii) Analogamente al caso precedente.

iv) Notiamo che $\langle x - \bar{x}, e_n \rangle = x_n - \bar{x}_n \stackrel{\text{ii)}}{=} 0$ per ogni n . Cioè

$$x - \bar{x} \perp e_n \implies x - \bar{x} \perp \text{Span}(\mathcal{F}) \implies x - \bar{x} \underset{\substack{\text{continuità} \\ \text{pr. scalare}}}{\perp} \overline{\text{Span}(\mathcal{F})}$$

v) $x - \bar{x} \perp \underbrace{\overline{\text{Span}(\mathcal{F})}}_{\mathcal{F} \text{ è completo}} = H \implies x - \bar{x} = 0$, cioè $x = \bar{x}$.

□

Corollario 3. Siano H spazio di Hilbert, $\mathcal{F} = \{e_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ base di Hilbert, $x, x' \in H$. Valgono le seguenti.

i) $x_n = x'_n \quad \forall n \in \mathbb{N} \iff x = x'$ (\Leftarrow è ovvia).

ii) $\langle x, x' \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} x_n x'_n$ (**Identità di Parseval**).

iii) L'applicazione $H \ni x \mapsto (x_n) \in \ell^2$ è un'isometria surgettiva².

Dimostrazione.

- i) Per l'enunciato ?? se due vettori hanno la stessa rappresentazione rispetto a una base di Hilbert coincidono.
- ii) La tesi segue usando l'identità di polarizzazione congiuntamente all'enunciato ?? del teorema:

$$\begin{aligned}\langle x, x' \rangle &= \frac{1}{4} (\|x + x'\|^2 - \|x - x'\|^2) = \frac{1}{4} \left(\sum_n \overbrace{(x_n + x'_n)^2}^{x_n^2 + x_n'^2 + 2x_n x'_n} - \sum_n \underbrace{(x_n - x'_n)^2}_{x_n^2 + x_n'^2 - 2x_n x'_n} \right) \\ &= \frac{1}{4} \left(\cancel{\sum x_n^2} + \cancel{\sum x_n'^2} + 2 \sum x_n x'_n - \cancel{\sum x_n^2} - \cancel{\sum x_n'^2} + 2 \sum x_n x'_n \right).\end{aligned}$$

- iii) Il fatto che l'applicazione sia un'isometria segue da Parseval; che sia iniettiva dal fatto che \mathcal{F} è una base di Hilbert e che sia surgettiva dai punti i) e ii) del Lemma 2.

□

Osservazioni.

- Gli enunciati ?? e ?? non richiedono H completo, mentre ?? non è vero se H non è completo.
- Se H è uno spazio di Hilbert e \mathcal{F} sistema ortonormale infinito, allora \mathcal{F} non è mai una base algebrica³. Dunque, combinazioni lineari finite di \mathcal{F} non sono mai uguali ad H , ovvero $\text{Span}(\mathcal{F}) \subsetneq H$.

Dimostrazione. Presi $(e_n) \subset \mathcal{F}$, consideriamo $\bar{x} = \sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n} e_n$. Allora $\bar{x} \in H \setminus \text{Span}(\mathcal{F})$.

- Siano H uno spazio di Hilbert di dimensione infinita e \mathcal{F} una base di Hilbert. Allora \mathcal{F} è numerabile se e solo se H è separabile.

Dimostrazione.

- ⇒ Vale $H = \overline{\text{Span}(\mathcal{F})} = \overline{\text{Span}_{\mathbb{Q}}(\mathcal{F})}$. Concludiamo notando che $\overline{\text{Span}_{\mathbb{Q}}(\mathcal{F})}$ è numerabile se \mathcal{F} è numerabile.
- ⇐ Se \mathcal{F} non fosse numerabile, siccome $\|e - e'\| = \sqrt{2} \quad \forall e, e' \in \mathcal{F}$, potremmo definire per ogni elemento di \mathcal{F} una palla di raggio $\sqrt{2}/2$, dunque potremmo definire un insieme di palle disgiunte. Dato un sottoinsieme denso di H , per definizione, deve intersecare ogni palla e dunque deve essere più che numerabile, dunque H non sarebbe separabile.

Esempio. Lo spazio $H = L^2(X)$, con $X = \mathbb{R}^n$, μ misura di Lebesgue ha base di Hilbert numerabile.

²In particolare è bigettiva ma l'iniettività è ovvia.

³Per base algebrica s'intende un insieme di vettori di uno spazio vettoriale le cui combinazioni lineari generano tutto lo spazio.

- Dato \mathcal{F} sistema ortonormale in H , allora \mathcal{F} è completo se e solo se \mathcal{F} è massimale (nella classe dei sistemi ortonormali rispetto all'inclusione).

Dimostrazione.

\Rightarrow Dato che \mathcal{F} è completo segue che $\overline{\text{Span}(\mathcal{F})} = X$, quindi

$$\mathcal{F}^\perp = (\text{Span}(\mathcal{F}))^\perp \underbrace{= \overline{\text{Span}(\mathcal{F})}^\perp}_{\text{continuità del prodotto scalare}} = H^\perp = \{0\}.$$

dunque \mathcal{F} è massimale.

\Leftarrow Se \mathcal{F} non è completo, esiste $x \in H \setminus \text{Span}(\mathcal{F})$. Definiamo \bar{x} come nel Teorema 1. Notiamo che $x - \bar{x} \perp \text{Span}(\mathcal{F})$, dunque $x - \bar{x} \perp \mathcal{F}$ e $x - \bar{x} \neq \{0\}$, da cui $\mathcal{F} \cup \left\{ \frac{x - \bar{x}}{\|x - \bar{x}\|} \right\}$ è un sistema ortonormale che include strettamente \mathcal{F} . \nmid

Osservazione. Nell'implicazione \Rightarrow non abbiamo usato la completezza di H .

- Ogni sistema ortonormale \mathcal{F} si completa a $\tilde{\mathcal{F}}$ base di Hilbert di H .

Dimostrazione. Sia $X = \{ \mathcal{F} \text{ sistema ortonormale in } H \text{ tale che } \tilde{\mathcal{F}} \subset \mathcal{F} \}$. Per Zorn, X contiene un elemento massimale. Denotiamolo con $\tilde{\mathcal{F}}$. Allora $\tilde{\mathcal{F}}$ è una base di Hilbert.

Teorema 4. Dato V sottospazio vettoriale chiuso di H . Allora

- $H = V + V^\perp$, cioè per ogni $x \in H$ esiste $\bar{x} \in V$ e $\tilde{x} \in V^\perp$ tale che $x = \bar{x} + \tilde{x}$.
- Gli elementi \bar{x} e \tilde{x} sono univocamente determinati (e indicati con x_V e x_V^\perp).
- \bar{x} è caratterizzato come l'elemento di V più vicino a x .

Dimostrazione.

- Dato che V è chiuso, V è completo, cioè V è un sottospazio di H , dunque V ammette base ortonormale $\mathcal{F} = \{e_n \mid n \in \mathbb{N}\}$. Definiamo $\bar{x} \in \overline{\text{Span}(\mathcal{F})}$ come nel Teorema 1 e $\tilde{x} := x - \bar{x} \in \overline{\text{Span}(\mathcal{F})}^\perp = V^\perp$ (per ??).
- Se $x = \bar{x} + \tilde{x} = \bar{x}' + \tilde{x}'$, dove $\bar{x}, \bar{x}' \in V$ e $\tilde{x}, \tilde{x}' \in V^\perp$, allora

$$\bar{x} - \bar{x}' = \tilde{x}' - \tilde{x} \quad \underbrace{\implies}_{V \cap V^\perp = \{0\}} \quad \bar{x} - \bar{x}' = \tilde{x}' - \tilde{x} = 0.$$

- Per ogni $y \in V$ sia $f(y) = \|x - y\|^2$. Mostriamo che \bar{x} è l'unico minimo di f .

$$f(y) = \|x - y\|^2 = \left\| \underbrace{x - \bar{x}}_{\in V^\perp} + \underbrace{\bar{x} - y}_{\in V} \right\|^2 = \|x - \bar{x}\|^2 + \|\bar{x} - y\|^2 = f(\bar{x}) + \|\bar{x} - y\|^2 \geq f(\bar{x}).$$

□

Osservazione. Serve V chiuso. Se per esempio V è denso in H ma $V \neq H$, allora

$$\overline{V^\perp} = \overline{V}^\perp = H^\perp = \{0\} \implies V \subseteq V + V^\perp \subseteq V + \overline{V^\perp} = V \subsetneq H.$$

Un esempio di tale V è $\text{Span}(\mathcal{F})$ con \mathcal{F} base di H (H di dimensione infinita).

Teorema 5 (di rappresentazione di Riesz.) Dato $\Lambda: H \rightarrow \mathbb{R}$ lineare e continuo, esiste $x_0 \in H$ tale che

$$\Lambda(x) = \langle x, x_0 \rangle \quad \text{per ogni } x \in H. \quad (*)$$

Lemma 6. Dato $\Lambda: X \rightarrow \mathbb{R}$ lineare, $(\ker \Lambda)^\perp$ ha dimensione 0 o 1.

Dimostrazione Se per assurdo $\dim(\ker \Lambda)^\perp \geq 2$, allora $(\ker \Lambda)^\perp$ conterrebbe un sottospazio W di dimensione 2. Dunque, $\dim(\ker \Lambda|_W) = \{1, 2\}$, essendo che $\dim \mathbb{R} = 1$. Ma questo non è possibile, in quanto abbiamo definito $W = \ker^\perp$. \square

Dimostrazione Teorema 5. Sia $V := \ker \Lambda$. Dato che Λ è continuo segue che V è chiuso. Se $V = H \implies \Lambda \cong 0$ e prendiamo $x_0 = 0$.

Se $V \neq H$, allora $V^\perp \neq \{0\}$ e definiamo $x_1 \in V^\perp$ con $\|x_1\| = 1$. Poniamo $x_0 := cx_1$ con $c := \Lambda x_1$ e $\tilde{\Lambda}(x) := \langle x, x_0 \rangle$. Abbiamo che

- $x \in V \implies x \perp x_1 \implies x \perp x_0 \implies \tilde{\Lambda} = 0 = \Lambda(x)$. Quindi $\tilde{\Lambda} = \Lambda$ su V .
- $\tilde{\Lambda}(x_1) = \langle x_1, x_0 \rangle = \langle x_1, cx_1 \rangle = c\|x_1\|^2 = c = \Lambda(x_1)$. Quindi $\tilde{\Lambda} = \Lambda$ su $\text{Span}(x_1) = V^\perp$.
- $\tilde{\Lambda} = \Lambda$ su $V + V^\perp = H$.

\square

Osservazione. Esistono funzioni $\Lambda: H \rightarrow \mathbb{R}$ lineari ma non continue se H ha dimensione infinita.

Dimostrazione. Prendo $\Lambda: H \rightarrow \mathbb{R}$ lineare definito come

$$\begin{cases} \Lambda(e_n) = n & \forall n \\ \Lambda(e) = \text{qualsiasi } e \in \mathcal{G} \setminus \{e_n\}. \end{cases}$$

Allora

$$+\infty = \sup_n |\Lambda(e_n)| \leq \sup_{\|x\| \leq 1} |\Lambda(x)|$$

da cui segue che Λ non è continuo.

3.1 Spazi di Hilbert complessi

Definizione. Sia H uno spazio vettoriale su \mathbb{C} con prodotto hermitiano $\langle \cdot; \cdot \rangle$, ovvero tale che

- $\langle \cdot; \cdot \rangle$ è lineare nella prima variabile
- $\langle x; x' \rangle = \overline{\langle x', x \rangle}$ ovvero è antilineare nella seconda variabile.
- $\langle x; x \rangle \geq 0$ per ogni x e vale 0 se e solo se $x = 0$.

Analogamente si pone $\|x\| := \sqrt{\langle x; x \rangle}$. C'è un'identità di polarizzazione ma è leggermente diversa dalla versione reale.

Definizione. H si dice di Hilbert se è **completo**.

Esempio. Su $L^2(X; \mathbb{C})$ si mette il prodotto scalare dato da

$$\langle u; v \rangle := \int_X u \cdot \bar{v} \, d\mu.$$

Teorema. (della base di Hilbert per spazi complessi) Dato $\mathcal{F} = \{e_n\}$ sistema ortonormale in H e $x \in H$ allora per ogni n si pone⁴

$$x_n = \langle x; e_n \rangle$$

Vale anche l'identità di Parseval $\|x\|^2 = \sum |x_n|^2$ dove $|\cdot|$ è il modulo di un numero complesso, in particolare nella versione con prodotto scalare diventa

$$\langle x, x' \rangle = \sum_n x_n \overline{x'_n}.$$

3.2 Esempi di basi Hilbertiane

3.2.1 Polinomi

La base data da $\{1, x, x^2, \dots, x^n, \dots\}$ opportunamente ortonormalizzata è una base di $L^2[0, 1]$ (anche di $L^2(\mathbb{R})$) per il teorema di Stone-Weierstrass.

3.2.2 Base di Haar

Vediamo la base di Haar data da due indici n, k dove n indica l'ampiezza delle “onde” (anche dette *wavelet*) e k il posizionamento dell'onda. Sia $n \in \mathbb{N}$ e $k = 1, \dots, 2^n$ e poniamo

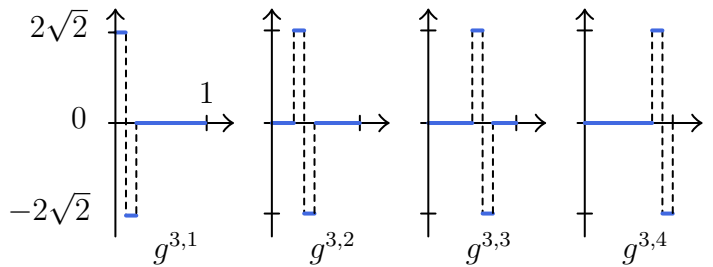
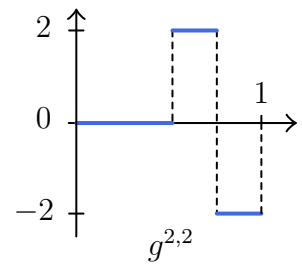
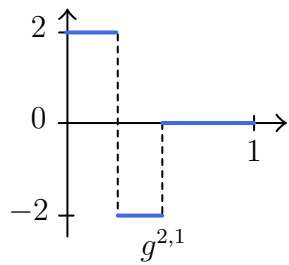
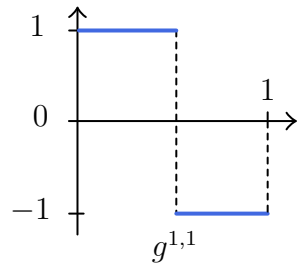
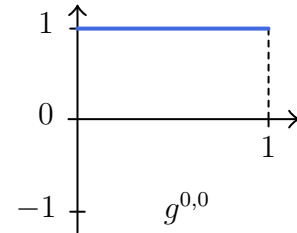
$$g^{0,0} := \mathbb{1}_{[0,1]} \quad g^{n,k} := 2^{\frac{n-1}{2}} \left(\mathbb{1}_{\left[\frac{2k-2}{2^n}, \frac{2k-1}{2^n}\right]} - \mathbb{1}_{\left[\frac{2k-1}{2^n}, \frac{2k}{2^n}\right]} \right)$$

Inoltre $\|g^{n,k}\|_{L^2[0,1]} = 1$ ed anche $\|g^{0,0}\|_{L^2[0,1]} = 1$. Vedremo che $\{g^{n,k} \mid n \geq 1, k = 1, \dots, 2^n\} \cup \{g^{0,0}\}$ formano un sistema ortonormale.

- $\langle g^{n,k}, g^{0,0} \rangle = 0$: È ovvio in quanto le $g^{n,k}$ hanno media nulla.
- $\langle g^{n,k}, g^{n',k'} \rangle = 0$: Se $n = n'$ i supporti sono sempre disgiunti altrimenti $n \neq n'$, se supponiamo $n < n'$ allora i supporti o sono disgiunti e si conclude come prima o il supporto di $g^{n',k'}$ è contenuto in quello di $g^{n,k}$. In tal caso però $g^{n,k}$ è costante su $g^{n',k'}$ e dunque l'integrale è sempre nullo.

Inoltre è anche una base hilbertiana, per combinazioni algebriche si ottengono tutti gli intervalli della forma

$$I_k := \left[\frac{k-1}{2^n}, \frac{k}{2^n} \right] \rightsquigarrow \mathbb{1}_{I_k}$$



⁴E non $\langle e_n; x \rangle$!

ad esempio normalizzando $g^{n,k} + 2^{\frac{n-1}{2}} g^{0,0}$ otteniamo uno degli intervalli di sopra di lunghezza $1/2^{n+1}$.

Vedremo che possiamo estendere la base di Haar a tutto \mathbb{R} però è più difficile... [TODO: Ehm aggiungere la parte dopo quando verrà fatta]

3.3 Esercitazione del 3 Novembre 2021

3.3.1 Basi Hilbertiane e proiezioni

Esercizio. Sia $H = L^2(-1, 1)$ e sia $V = \text{Span}\{1, x, x^2\}$. Verificare che V è un sottospazio chiuso e calcolare la proiezione di $\sin x$ su V .

Notazione. Indichiamo con $\|\cdot\|$ la norma $\|\cdot\|_{L^2(-1,1)}$ e con $\langle \cdot, \cdot \rangle$ il prodotto scalare su L^2 .

Soluzione. Vediamo come risolvere questo esercizio in tre modi diversi.

i) Dato H spazio di Hilbert separabile, e dato un sottospazio $V \subset H$, vediamo come trovare la proiezione di un elemento $x \in H$ su V . Procediamo come segue.

- Controlliamo che V sia chiuso.
- Calcoliamo una base hilbertiana di V che indichiamo con $\{e_1, \dots, e_n, \dots\}$.

Il tal caso, la proiezione di un elemento $x \in H$ su V è data da

$$p_V(x) = \sum_n \langle x, e_n \rangle e_n.$$

Esercizio. [TO DO: per casa] Ogni sottospazio di dimensione finita di uno spazio di Hilbert o di L^p è chiuso (e in particolare ha parte interna vuota).

Abbiamo una base di V data da $\{1, x, x^2\}$ (è una base in quanto sono linearmente indipendenti: si può verificare mostrando che $\forall x \in [-1, 1] \lambda_1 + \lambda_2 x + \lambda_3 x^2 = 0 \implies \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$ usando la teoria sulle equazioni di II grado oppure si può derivare e man mano ottenere più informazioni su $\lambda_3, \lambda_2, \lambda_1$).

Volendo usare la base scritta sopra per calcolare la proiezione di $\sin x$ su V , dovremmo prima applicare Gram-Schmidt alla base $\{1, x, x^2\}$ per determinare una base Hilbertiana:

$$\begin{aligned} e_1 &= \frac{1}{\|1\|} = \frac{1}{\sqrt{2}} \\ e_2 &= \frac{x - \langle x, \frac{1}{\sqrt{2}} \rangle \cdot 1}{\left\| x - \langle x, \frac{1}{\sqrt{2}} \rangle \cdot 1 \right\|} \\ e_3 &= \frac{x^2 - \langle x^2, e_1 \rangle \cdot e_1 - \langle x^2, e_2 \rangle \cdot e_2}{\|x^2 - \langle x^2, e_1 \rangle \cdot e_1 - \langle x^2, e_2 \rangle \cdot e_2\|} \end{aligned}$$

e successivamente calcolare $p_V(\sin x)$ con la formula scritta sopra.

ii) Alternativamente, possiamo direttamente cercare la proiezione di $\sin x$ su V . Determiniamo a, b, c tali che $a + bx + cx^2$ sia $p_V(x) = \sin x$ allora posto $f(x) := \sin x - a - bx - cx^2$ abbiamo $f(x) \in V^\perp \iff$ si verificano le seguenti condizioni

$$\langle f(x), 1 \rangle = 0 \quad \langle f(x), x \rangle = 0 \quad \langle f(x), x^2 \rangle = 0$$

Ad esempio da $\langle f(x), 1 \rangle = 0$ otteniamo

$$0 = \int_{-1}^1 (\sin x - a - bx - cx^2) \cdot 1 \, dx = \underbrace{\int_{-1}^1 \sin x \, dx}_{=0} - 2a - b \underbrace{\int_{-1}^1 x \, dx}_{=0} - c \int_{-1}^1 x^2 \, dx \implies 0 = -2a - \frac{2}{3}c$$

ed analogamente si procede con x e x^2 ... [TODO: Da finire]

- iii) Un altro modo è considerare la funzione $g(a, b, c) := \|\sin x - a - bx - cx^2\|_{L^2(-1,1)}$ che è continua, coerciva, etc. e imponendo $\nabla_{a,b,c} g = 0$ si minimizza e si ottengono $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ che verificano $p_V(\sin x)$.

Esercizio. Sia $X = \{u \in L^2(\mathbb{R}) \mid \int_0^2 u \, dx = 0\}$, dire se è un sottospazio chiuso, calcolare X^\perp per una generica $u \in L^2(\mathbb{R})$ e determinare le proiezioni $p_X(u)$ e $p_{X^\perp}(u)$.

Soluzione. La mappa T lineare data da

$$u \mapsto \int_0^2 u \, dx$$

è ben definita, lineare e continua, allora X è proprio $T^{-1}(0)$ dunque è un sottospazio chiuso.

Osservazione. Notiamo che

$$T(u) = \int_{\mathbb{R}} u(x) \cdot \mathbb{1}_{[0,2]}(x) \, dx = \langle u, g \rangle_{L^2(\mathbb{R})}, \quad g = \mathbb{1}_{[0,2]}(x) \in L^2(\mathbb{R}).$$

Calcoliamo ora X^\perp e le proiezioni p_X, p_{X^\perp} . Abbiamo che $X = \{u \in L^2(\mathbb{R}) \mid \langle u, g \rangle = 0\}$ dove $g = \mathbb{1}_{[0,2]}(x)$, dunque $X^\perp = \text{Span}(g)$. Notiamo⁵ che

$$L^2(\mathbb{R}) = \text{Span}_{\mathbb{R}} \left\{ \frac{g}{\|g\|_{L^2}} \right\} \oplus \left\{ \frac{g^\perp}{\|g^\perp\|_{L^2}} \right\}.$$

Calcoliamo $p_X(u)$ come segue

$$p_X(u) = u - \left\langle u, \frac{g}{\|g\|_{L^2}} \right\rangle \cdot \frac{g}{\|g\|_{L^2}},$$

dove

$$\|g\|_{L^2} = \left(\int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_{[0,2]}(x)^2 \, dx \right)^{1/2} = \sqrt{2}$$

e dunque

$$p_X(u) = u - \left(\int_0^2 u \, dx \right) \cdot \frac{\mathbb{1}_{[0,2]}}{2}.$$

Un controllo veloce per verificare di aver fatto i conti corretti è quello di vedere che $p_X(u) \in X$, dunque di verificare che $\int_0^2 p_X(u) \, dx = 0$.

Per calcolare $p_{X^\perp}(u)$ usiamo la seguente.

Osservazione. Vale $u = p_X(u) + p_{X^\perp}(u)$.

In conclusione,

$$p_{X^\perp}(u) = u - p_X(u) = \left(\int_0^2 u \, dx \right) \cdot \frac{\mathbb{1}_{[0,2]}}{2}.$$

Esercizio. [TO DO: per casa.] Sia $V = \{\underline{x} = (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \ell^2 \mid x_1 + x_3 + x_5 = 0\}$. Dire se V è chiuso in ℓ^2 e calcolare p_V e p_{V^\perp} .

⁵Con $g/\|g\|_{L^2}$ indichiamo una base normalizzata di g^\perp .

3.3.2 Approssimazioni per convoluzione

Abbiamo visto che data $g \in L^1(\mathbb{R}^d)$ con $\int g \, dx = 1$ allora per ogni $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$ abbiamo $f_\delta := f * \sigma_\delta g \xrightarrow{\delta \rightarrow 0} f$ in $L^p(\mathbb{R}^d)$ per $p \neq \infty$.

Esercizio. Dire se esiste $v \in L^1(\mathbb{R})$ tale che sia elemento neutro della convoluzione, ovvero

$$\forall f \in L^1(\mathbb{R}) \quad f * v = f.$$

Soluzione. Una tale v non esiste, per vederlo scegliamo opportunamente \bar{f} e usiamo l'equazione. Scelgo $g \in C_C(\mathbb{R})$ e defiamo $\sigma_\delta g = 1/\delta g(1/\delta)$. Abbiamo che $\sigma_\delta g * v = \sigma_\delta g$ per ogni δ . Per il teorema abbiamo che $\sigma_\delta g * v = \sigma_\delta g \xrightarrow{\delta \rightarrow 0} v$ in $L^1(\mathbb{R})$, ma $\sigma_\delta g \xrightarrow{\delta \rightarrow 0} 0$ quasi ovunque in $L^1(\mathbb{R})$. Allora $v = 0$ q.o. in $L^1(\mathbb{R})$, dunque non può valere $f * v = f$ per ogni $f \in L^1(\mathbb{R})$.

Esercizio. [TO DO: per casa.] Sia f misurabile su \mathbb{R}^d tale che $\int_E f \, dx = 0$ per ogni E misurabile di \mathbb{R}^d . Dimostrare che $f = 0$ q.o. su \mathbb{R}^d .

Suggerimento. Considerare l'integrale sull'insieme $\{x \in \mathbb{R}^d \mid f(x) = 0\} \cup \{x \in \mathbb{R}^d \mid f(x) \neq 0\}$ e verificare che, se denotiamo $A = \{x \in \mathbb{R}^d \mid f(x) \neq 0\}$, allora $|A| = 0$.

Esercizio. [TO DO: per casa.] Sia f Lebesgue-misurabile su \mathbb{R}^d tale che $\forall B$ palla su \mathbb{R}^d

$$\int_B f \, dx = 0$$

Dimostrare che $f = 0$ quasi ovunque su \mathbb{R}^d .

Soluzione. Considero $g = \mathbb{1}_{[0,1]} \in L^1(\mathbb{R}^d)$. Per quanto fatto in classe so che

$$\sigma_\delta g * f \xrightarrow{\delta \rightarrow 0} mf$$

dunque se $\sigma_\delta g * f = 0$ per ogni δ ho finito.

$$\sigma_\delta g * f(y) = \int_{\mathbb{R}^d} \sigma_\delta \mathbb{1}_{[0,1]}(y-x) \cdot f(x) \, dx = \frac{1}{\delta^d} \int_{B(y,\delta)} f(x) \, dx = 0$$

Esercizio. Sia $p \geq 1$ allora $\{u \in L^p(\mathbb{R}) \mid \int u \, dx = 0\} \subseteq L^p(\mathbb{R})$ è denso in $L^p(\mathbb{R})$?

Capitolo 4

Serie di Fourier

Lo scopo della serie di Fourier (complessa) è di rappresentare una funzione $f: [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{C}$ (o più in generale una funzione $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ 2π -periodica) come

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}$$

In particolare, chiamiamo i coefficienti c_n **coefficienti di Fourier** di $f(x)$ e tutta l'espressione a destra **serie di Fourier** di $f(x)$.

Motivazione. La rappresentazione in serie di Fourier serve ad esempio a risolvere certe equazioni alle derivate parziali ed è anche utilizzata per la “compressione dati”.

Problemi.

- Come si trovano (se esistono) i coefficienti di Fourier?
- Ed in che senso la serie converge?

Osservazione. La serie appena vista è indicizzata da $-\infty$ a $+\infty$, più avanti vedremo che la definizione esatta non sarà importante ma per ora usiamo la definizione

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n := \lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{n=-N}^N a_n$$

ed ogni tanto scriveremo anche $\sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n$ per brevità.

Teorema 1. L'insieme $\mathcal{F} = \left\{ e_n(x) := \frac{e^{inx}}{\sqrt{2\pi}} \right\}$ è una base ortonormale di $L^2([-\pi, \pi]; \mathbb{C})$.

Da cui *formalmente* segue che

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} \langle f; e_n \rangle \cdot e_n = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \left(\int_{-\pi}^{\pi} f(t) \frac{\overline{e^{int}}}{\sqrt{2\pi}} dt \right) \frac{e^{inx}}{\sqrt{2\pi}} \\ &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{1}{2\pi} \underbrace{\left(\int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-int} dt \right)}_{c_n} e^{inx} \end{aligned}$$

Definizione. Data $f \in L^2([-\pi, \pi]; \mathbb{C})$ i coefficienti di Fourier di f sono

$$c_n = c_n(f) := \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx} dx.$$

Notiamo in particolare che è anche ben definito anche per $f \in L^1$ (anche se per ora non ci dice molto in quanto L^1 non è uno spazio di Hilbert).

Corollario. Per ogni $f \in L^2([-\pi, \pi]; \mathbb{C})$ abbiamo

i) La serie $\sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n e^{inx}$ converge a f in L^2 .

ii) Vale l'identità di Parseval

$$\|f\|_2^2 = 2\pi \sum_{n \in \mathbb{Z}} |c_n|^2 \quad \langle f, g \rangle = 2\pi \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n(f) \overline{c_n(g)}$$

Osservazione. Usando la ?? ed il fatto che la convergenza in L^2 implica la convergenza quasi ovunque a meno di sottosuccessioni otteniamo che $\forall f \exists N_n \uparrow \infty$ tale che

$$\sum_{n=-N_k}^{N_k} c_n e^{inx} \xrightarrow{k} f(x) \quad \forall x \in [-\pi, \pi].$$

In particolare nel 1966 Carleson ha dimostrato che in realtà vale proprio

$$\sum_{n=-N}^N c_n e^{inx} \xrightarrow{N} f(x) \quad \forall x.$$

Prima di dimostrare il Teorema 1 riportiamo il teorema di Stone-Weierstrass.

Teorema (di Stone-Weierstrass.) Sia K uno spazio compatto e T_2 (essenzialmente è uno spazio metrico compatto) e sia $C(K)$ l'insieme delle funzioni continue reali su K , mentre $C(K; \mathbb{C})$ le funzioni continue complesse su K dotate della norma del sup.

Dato $\mathcal{A} \subset C(K)$ diciamo che è una **sottoalgebra** se è uno spazio vettoriale e chiuso rispetto al prodotto e diciamo che **separa i punti** se $\forall x_1, x_2 \in K$ con $x_1 \neq x_2$ allora $\exists f \in \mathcal{A}$ tale che $f(x_1) \neq f(x_2)$.

- *Caso reale:* se \mathcal{A} è una sottoalgebra di $C(K)$ che separa i punti e contiene le costanti allora $\overline{\mathcal{A}} = C(K)$.
- *Caso complesso:* se \mathcal{A} è una sottoalgebra di $C(K; \mathbb{C})$ che separa i punti, contiene le costanti e *chiusa per coniugio* allora $\overline{\mathcal{A}} = C(K; \mathbb{C})$.

Osservazioni.

- Se $K = [0, 1]$, \mathcal{A} = “polinomi reali” $\implies \overline{\mathcal{A}} = C(K; \mathbb{C})$.
- L'ipotesi di separare i punti è necessaria, se ad esempio $\exists x_1, x_2$ tali che $x_1 \neq x_2$ e per ogni f abbiamo $f(x_1) = f(x_2)$ allora varrà analogamente anche per ogni funzione nella chiusura ma le funzioni continue separano i punti.
- È anche necessario che $\mathcal{A} \supset$ “costanti”, ad esempio dato $x_0 \in K$ ed $\mathcal{A} := \{f \in C(K) \mid f(x_0) = 0\}$ abbiamo che $\overline{\mathcal{A}} = \mathcal{A} \subsetneq C(K)$.
- Anche la chiusura per coniugio è necessaria, infatti ad esempio preso $K = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq 1\}$, \mathcal{A} = “polinomi complessi”, \mathcal{A} separa i punti e contiene le costanti però $\overline{\mathcal{A}}$ sono solo le funzioni olomorfe su K .

In particolare, vorremmo applicare questo teorema alle funzioni 2π -periodiche ristrette a $[-\pi, \pi]$ che però non verificano la separazione dei punti in quanto per la periodicità $f(-\pi) = f(\pi)$. Nel seguente corollario vediamo come possiamo estendere leggermente il teorema passando ai quozienti topologici.

Corollario. Sia \mathcal{A} una sottoalgebra di $C(K)$ (o analogamente per $C(K; \mathbb{C})$) che contiene le costanti (e nel caso complesso anche chiusa per coniugio). Definiamo la relazione di equivalenza $x_1 \sim x_2$ se $f(x_1) = f(x_2)$ per ogni $f \in \mathcal{A}$. Allora,

$$\overline{\mathcal{A}} = \{f \in C(K) \mid f(x_1) = f(x_2) \text{ se } x_1 \sim x_2\}.$$

Dimostrazione Corollario. È chiaro che $\mathcal{A} \subset X := \{f \in C(K) \mid f(x_1) = f(x_2) \text{ se } x_1 \sim x_2\}$. Data $g \in X$, definiamo $\tilde{g}: K/\sim \rightarrow \mathbb{C}$ in modo che $g = \tilde{g} \circ \pi$. Osserviamo che K/\sim è compatto e T_2 e che $\tilde{\mathcal{A}} = \{\tilde{f}: f \in \mathcal{A}\}$ soddisfa le ipotesi del teorema di Stone-Weierstrass, quindi $\overline{\tilde{\mathcal{A}}} = C(K/\sim; \mathbb{C})$, quindi per ogni $g \in X$ esiste una successione $\tilde{g}_n \in \tilde{\mathcal{A}}$ tale che $\tilde{g}_n \rightarrow \tilde{g}$ uniformemente e quindi $g_n \rightarrow g$ uniformemente.

$$\begin{array}{ccc} K & \xrightarrow{g} & \mathbb{C} \\ \downarrow \pi & \nearrow \tilde{g} & \\ K/\sim & & \end{array}$$

□

Dimostrazione Teorema 1. Vogliamo vedere che

i) \mathcal{F} è un sistema ortonormale.

Dimostrazione. Basta calcolare $\langle e_n; e_m \rangle$ per ogni $n, m \in \mathbb{Z}$

$$\langle e_n; e_m \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{inx}}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{\overline{e^{imx}}}{\sqrt{2\pi}} dx = \begin{cases} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} 1 dx = 1 & \text{se } n = m \\ \frac{1}{2\pi} \left[\frac{e^{i(n-m)x}}{i(n-m)} \right]_{-\pi}^{\pi} = 0 & \text{se } n \neq m \end{cases}$$

ii) \mathcal{F} è completo.

Dimostrazione. Questo punto richiede il teorema di Stone-Weierstrass.

Consideriamo

$$\mathcal{A} = \text{Span}_{\mathbb{C}}(\mathcal{F}) = \left\{ \sum_n a_n e^{inx} \right\} = \{p(e^{inx}) \mid p \text{ polinomio a esponenti interi}\}.$$

Segue che \mathcal{A} è una sottoalgebra che separa i punti di K tranne $-\pi$ e π ed è chiusa per coniugio.

Per il corollario¹ $\overline{\mathcal{A}}^C = \{f \in C([-\pi, \pi]; \mathbb{C}) \mid f(-\pi) = f(\pi)\}$. Dato che la convergenza uniforme implica la convergenza in L^2 per spazi di misura finita, abbiamo:

$$\overline{\mathcal{A}}^{L^2} \supseteq \{f \in C([-\pi, \pi]; \mathbb{C}) \mid f(-\pi) = f(\pi)\}.$$

Inoltre, $\overline{\mathcal{A}}^{L^2} \supseteq \{f \in C([-\pi, \pi]; \mathbb{C})\}$ in quanto, una $f \in C([-\pi, \pi]; \mathbb{C})$ può essere approssimata in L^2 tramite funzioni f_n che coincidono in $[-\pi, \pi]$. Definiamo $f_n = f \cdot \varphi_n$, dove le

¹Notiamo che la topologia su \mathcal{A} è quella data dalla norma del sup delle funzioni continue quindi la chiusura è rispetto a tale norma e la indichiamo con $\overline{\mathcal{A}}^C$.

φ_n sono tali che $\varphi_n(-\pi) = \varphi_n(\pi) = 0$, $\varphi_n = 1$ su $[1/n - \pi, \pi - 1/n]$; notiamo che $f_n \rightarrow f$ in L^2 .

[TODO: Disegnino delle φ_n]

Infine poiché le funzioni continue sono dense in L^2 segue che $\overline{\mathcal{A}}^{L^2} = L^2$.

□

Esempio (calcolo coefficienti di Fourier).

- $\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} = \frac{1}{2}e^{ix} + \frac{1}{2}e^{-ix}$, allora $c_n = \begin{cases} \frac{1}{2} & n = \pm 1 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$.
- $(\sin x)^2 = \left(\frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}\right)^2 = \frac{1}{4}e^{2ix} + \frac{1}{4}e^{-2ix} - \frac{1}{2}$, allora $c_n = \begin{cases} -\frac{1}{4} & n = \pm 2 \\ \frac{1}{2} & n = 0 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$.
- $f(x) = x$, $c_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = 0$. Per $n \neq 0$:

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x e^{-inx} dx = \frac{1}{2\pi} \left[\frac{x e^{-inx}}{-in} \right]_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{-inx}}{-in} dx = \frac{(-1)^n i}{n}.$$

Calcoliamo ora $\sum_{n \in \mathbb{Z}} |c_n|^2$. Valgono le uguaglianze

$$\begin{aligned} \sum_{n \in \mathbb{Z}} |c_n|^2 i &= 2 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} \\ \sum_{n \in \mathbb{Z}} |c_n|^2 i &= \frac{1}{2\pi} \|x\|_2^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x^2 dx = \frac{2}{2\pi} \cdot \frac{\pi^3}{3} = \frac{\pi^2}{3}. \end{aligned}$$

Dunque $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

4.1 Regolarità di f e dei coefficienti

Proposizione 1. Data $f \in [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{C}$ tale che

(R) $f \in C^1$ (basta f continua e C^1 a tratti).

(CB) $f(-\pi) = f(\pi)$.

Allora $c_n(f') \stackrel{(*)}{=} in c_n(f)$.

Derivazione formale della formula

$$f(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n e^{inx} \xrightarrow{\text{derivata}} f'(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} in c_n e^{inx}$$

Dimostrazione. Vale quanto segue

$$\begin{aligned}
 c_n(f') &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)' e^{-inx} dx \\
 &\stackrel{\text{int. per parti}}{=} \frac{1}{2\pi} \overbrace{\int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx} dx}^{f(-\pi)=f(\pi), e^{-in\pi}=e^{-in(-\pi)}} - \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) (-in) e^{-inx} dx \\
 &= (in) \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx} dx = in \, c_n(f).
 \end{aligned}$$

□

Esercizio. Trovare l'analogo della formula della derivata nel caso di cui non valga la condizione al bordo (CB). [TO DO]

Osservazione. In verità, basta ancora meno. Possiamo riformulare la Proposizione 1 come segue.

Proposizione 1'. Data $f: [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{C}$ tale che

(R') f è continua.

(CB) esiste $g \in L^1([-\pi, \pi], \mathbb{C})$ tale che $f(x) = f(-\pi) + \int_{-\pi}^x g(t) dt$.

Allora la formula (\star) diventa $c_n(g) = in \, c_n(f)$.

Proposizione 2. Data f come nella Proposizione 1, valgono le seguenti

i) $\sum_{n \in \mathbb{Z}} n^2 |c_n(f)|^2 = \frac{\|f'\|_2^2}{2\pi} < +\infty.$

ii) $\sum_{n \in \mathbb{Z}} |n|^\alpha |c_n(f)| < +\infty$ per ogni $\alpha < 1/2$.

iii) La serie di Fourier converge ²totalmente.

Dimostrazione.

i) $\sum_{n \in \mathbb{Z}} n^2 |c_n(f)|^2 \stackrel{(*)}{=} \sum_{n \in \mathbb{Z}} |c_n(f')|^2 \stackrel{\text{Parseval}}{=} \frac{\|f'\|_2^2}{2\pi} \stackrel{f' \in L^1([-\pi, \pi], \mathbb{C}) \subset L^2([-\pi, \pi], \mathbb{C})}{<} +\infty.$

ii) $\sum_{n \in \mathbb{Z}} |n|^\alpha |c_n(f)| \stackrel{(n \neq 0)}{\leq} \sum_{n \in \mathbb{Z}} |n| |c_n(f)| \cdot \frac{1}{|n|^{1-\alpha}} \stackrel{\text{C-S per } \ell^2}{\leq} \overbrace{\left(\sum_{n \in \mathbb{Z}} |n|^2 |c_n(f)|^2 \right)^{1/2}}^{< +\infty \text{ per il punto ii)}} \cdot \overbrace{\left(\sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{1}{|n|^{2-2\alpha}} \right)^{1/2}}^{\alpha < 1/2 \Rightarrow < +\infty} < +\infty.$

iii) Dal punto precedente con $\alpha = 0$ otteniamo $\sum_{n \in \mathbb{Z}} \|c_n(f) e^{inx}\|_\infty = \sum_{n \in \mathbb{Z}} |c_n(f)| < +\infty.$ □

² $\sum a_n(x)$ converge totalmente se converge la serie $\sum \|a_n(x)\|_\infty$.

Proposizione 3. Data $f \in [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{C}$ tale che

(R_k) $f \in C^k$ (oppure $f \in C^{k-1}$ e $D^{k-1}f$ è C^1 a tratti).

(CB_{k-1}) $D^h f(-\pi) = D^h f(\pi)$ per $h = 0, 1, \dots, k-1$.

Allora

i) $c_n(D^h f) = (in)^h c_n(f)$ per ogni $n \in \mathbb{Z}$ per ogni $h = 1, \dots, k$.

ii) $\sum |n|^{2k} |c_n(f)|^2 \leq \frac{\|D^k f\|_2^2}{2\pi} < +\infty$.

iii) $\sum_{n \in \mathbb{Z}} |n|^\alpha |c_n(f)| < +\infty$ per ogni $\alpha < k - 1/2$.

iv) La serie di Fourier di f converge totalmente con tutte le derivate fino all'ordine $k-1$.

Proposizione 4. Se f è continua e $\sum_{n \in \mathbb{Z}} |n|^{k-1} |c_n(f)| < +\infty$ allora $f \in C^{k-1}$ e soddisfa (CB_{k-1}).

Dimostrazione. Preso $h = 0, 1, \dots, k-1$ vale

$$\begin{aligned} D^h(c_n(f)e^{inx}) &= c_n(f)(in)^h e^{inx} \\ \|D^h(c_n(f)e^{inx})\| &= |c_n(f)| |n|^h \leq |c_n(f)| |n|^{k-1}. \end{aligned}$$

Dunque $\sum D^h(c_n(f)e^{inx})$ converge totalmente e quindi uniformemente per ogni $h \leq k-1$ ad $\tilde{f}: [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{C}$ di classe C^{k-1} . Ma

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left\| \sum_{-N}^N c_n e^{inx} - \tilde{f}(x) \right\|_2 \leq \left\| \sum_{-N}^N c_n e^{inx} - \tilde{f}(x) \right\|_\infty \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} 0.$$

Ma $\sum c_n e^{inx} \rightarrow \tilde{f}$ uniformemente, allora $\sum_{-N}^N c_n e^{inx} \rightarrow \tilde{f}$ in L^2 . Allora $f = \tilde{f}$ nel senso L^2 .

Siccome f, \tilde{f} sono continue e coincidono quasi ovunque, vale $f = \tilde{f}$. Abbiamo usato il lemma

Lemma. Date f, \tilde{f} continue e $f(x) = \tilde{f}(x)$ per quasi ogni x , allora $f(x) = \tilde{f}(x)$ per ogni x . \square

Osservazione. $f \in C^{k-1}([-\pi, \pi]) + (CB_{k-1})$ se e solo se f è la restrizione a $[-\pi, \pi]$ di una funzione 2π -periodica e C^{k-1} .

4.2 Convergenza puntuale della serie di Fourier

Teorema. Data $f \in L^1([-\pi, \pi], \mathbb{C})$ (estesa in modo 2π -periodico a tutto \mathbb{R}) tale che esiste $\bar{x} \in \mathbb{R}$ ed esiste $\alpha > 0$ tale che f è α -Holderiana in \bar{x} , cioè esiste $\delta > 0$, $M < +\infty$ per cui

$$|f(\bar{x} + t) - f(\bar{x})| \leq M |t|^\alpha \quad \forall t: |t| < \delta \iff \limsup_{t \rightarrow 0} \frac{|f(\bar{x} + t) - f(\bar{x})|}{|t|^\alpha} < +\infty.$$

Allora $\sum_{-\infty}^{\infty} c_n(f) e^{in\bar{x}}$ converge a $f(\bar{x})$. Cioè $\sum_{-N}^N c_n(f) e^{in\bar{x}} \xrightarrow{N \rightarrow \infty} f(\bar{x})$

Lavoro preparatorio: rappresentare somme parziali di serie di Fourier con "convoluzione":

Data $f \in L^1([-\pi, \pi], \mathbb{C})$, $N = 1, 2, \dots$ (estesa a funzioni 2π -periodiche su \mathbb{R}).

$$S_N f(x) := \sum_{n=-N}^N c_n e^{inx}$$

Riscriviamo

$$\begin{aligned} S_N f(x) &:= \sum_{n=-N}^N c_n e^{inx} = \sum_{n=-N}^N \frac{1}{2\pi} \left(\int_{-\pi}^{\pi} f(y) e^{-iny} dy \right) e^{inx} \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(y) \left(\sum_{n=-N}^N e^{in(x-y)} \right) dy. \end{aligned}$$

Poniamo $D_N(z) := \sum_{n=-N}^N e^{inz}$ che si definisce **nucleo di Dirichlet**. Allora

$$\begin{aligned} S_N f(x) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(y) D_N(x-y) dy \quad \stackrel{x-y=t, dy=dt}{=} \frac{1}{2\pi} \int_{x-\pi}^{x+\pi} f(x-t) D_N(t) dt \\ &\stackrel{(\star)}{=} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x-t) D_N(t) dt \end{aligned}$$

Dove (\star) è il seguente lemma.

Lemma. Se g è T -periodica e $g \in L^1([-\pi, \pi], \mathbb{C})$, allora

$$\int_0^T g(\tau) d\tau = \int_c^{c+T} g(\tau-s) d\tau \quad \forall s \forall c.$$

Ne segue che

$$S_N f(x) := \sum_{n=-N}^N c_n(f) e^{inx} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x-t) D_N(t) dt$$

dove

$$D_N(t) = \sum_{n=-N}^N e^{int} = \frac{\sin((N+1/2)t)}{\sin(t/2)}.$$

Infatti,

$$\begin{aligned} D_N(t) &= \sum_{n=-N}^N e^{int} = \sum_{n=-N}^N (e^{it})^n = e^{-iNt} \cdot \sum_{n=0}^{2N} (e^{it})^n \\ &= \frac{e^{-i(N+1/2)t}}{e^{-it/2}} \cdot \frac{e^{(2N+1)it} - 1}{e^{it} - 1} = \frac{e^{(N+1/2)it} - e^{-(N+1/2)it}}{e^{it/2} - e^{-it/2}} \\ &= \frac{\sin((N+1/2)t)}{\sin(t/2)}. \end{aligned}$$

Il seguente lemma riassume quanto detto finora.

Lemma. (di rappresentazione di $S_n f$ come convoluzione) Data $f \in L^1([-\pi, \pi], \mathbb{C})$ (estesa a funzioni 2π -periodiche su \mathbb{R}) vale Ricapitolando data f come sopra abbiamo visto che

$$S_N f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x-t) D_N(t) dt \quad \text{con } D_N(t) := \sum_{n=-N}^N e^{int} = \frac{\sin\left(\left(N + \frac{1}{2}\right)t\right)}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)}$$

Osservazione. In particolare: $\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} D_N(t) dt = 1$.

Lemma. (di Riemann-Lebesgue (generalizzato)). Data $g \in L^1(\mathbb{R})$ e $h \in L^\infty(\mathbb{R})$ con h T -periodica, allora

$$\int_{\mathbb{R}} g(x)h(yx) dx \xrightarrow{y \rightarrow \pm\infty} \underbrace{\left(\int_{\mathbb{R}} g(x) dx \right)}_a \underbrace{\left(\int_0^T h(x) dx \right)}_m$$

Dimostrazione. Per ogni s, y poniamo $\Phi(y, s) := \int_{\mathbb{R}} g(x)h(yx + s) dx$ con $s, y \in \mathbb{R}$. Dunque, vogliamo dimostrare che $\Phi(y, 0) \xrightarrow{y \rightarrow \pm\infty} am$. Vedremo che valgono le seguenti

i) $\forall y \int_0^T \Phi(y, s) ds = am.$

ii) $\forall s \Phi(y, s) - \Phi(y, 0) \xrightarrow{y \rightarrow \pm\infty} 0.$

da cui segue subito che

$$\Phi(y, 0) - ma = \int_0^T \Phi(y, 0) - \Phi(y, s) ds \xrightarrow{y \rightarrow \pm\infty} 0$$

per convergenza dominata; dove dalla ii) segue la convergenza puntuale e come dominazione usiamo

$$|\Phi(y, 0) - \Phi(y, s)| \leq 2 \|g\|_1 \|h\|_\infty.$$

Mostriamo ora i due punti.

i) Esplicitiamo e applichiamo Fubini-Tonelli

$$\begin{aligned} \int_0^T \Phi(y, s) ds &= \int_0^T \int_{\mathbb{R}} g(x)h(yx + s) dx ds = \int_{\mathbb{R}} \underbrace{\int_0^T h(yx + s) ds}_m g(x) dx \\ &= m \int_{\mathbb{R}} g(x) dx = ma \end{aligned}$$

e possiamo usare Fubini-Tonelli in quanto

$$\int_{\mathbb{R}} \int_0^T |h(yx + s)| ds \cdot |g(x)| dx \leq \int_{\mathbb{R}} \|h\|_\infty |g(x)| dx = \|h\|_\infty \cdot \|g\|_1.$$

ii) Notiamo che

$$\begin{aligned} \Phi(y, s) &= \int_{\mathbb{R}} g(x)h(y(x + s/y)) dx = \left(\begin{matrix} t = x + s/y \\ dt = dx \end{matrix} \right) = \int_{\mathbb{R}} g(t - s/y) h(yt) dt \\ \implies \Phi(y, s) - \Phi(y, 0) &= \int_{\mathbb{R}} \left(g\left(t - \frac{s}{y}\right) - g(t) \right) h(yt) dt \\ \implies |\Phi(y, s) - \Phi(y, 0)| &= \int_{\mathbb{R}} |\tau_{s/y}g - g| \cdot |h(yt)| dt \leq \|\tau_{s/y}g - g\|_1 \cdot \|h\|_\infty \xrightarrow{y \rightarrow \pm\infty} 0. \end{aligned}$$

□

Dimostrazione del Teorema.

$$\begin{aligned}
S_N f(\bar{x}) - f(\bar{x}) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\bar{x} - t) D_N(t) dt - \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\bar{x}) D_N(t) dt \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (f(\bar{x} - t) - f(\bar{x})) D_N(t) dt \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{f(\bar{x} - t) - f(\bar{x})}{\sin \frac{t}{2}} \sin \left(\left(N + \frac{1}{2} \right) t \right) dt \\
&= \int_{-\pi}^{\pi} g(t) \cdot \sin \left(\left(N + \frac{1}{2} \right) t \right) dt
\end{aligned}$$

Applicando il Lemma di Riemann-Lebesgue otteniamo:

$$S_N f(\bar{x}) - f(\bar{x}) \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} \left(\int_{-\pi}^{\pi} g(x) dx \right) \cdot \int_0^{\pi} \sin x dx = 0.$$

In particolare, per applicare il lemma serve $g \in L^1([-\pi, \pi])$; ma infatti per $|t| \leq \delta$

$$|g(t)| \leq \frac{|f(\bar{x} - t) - f(\bar{x})|}{|\sin \frac{t}{2}|} \leq \frac{M|t|^\alpha}{|t|/\pi} = \frac{M\pi}{|t|^{1-\alpha}} \in L^1([-\delta, \delta]).$$

Invece per $\delta \leq |t| \leq \pi$ basta

$$|g(t)| \leq \frac{|f(\bar{x} - t)| + |f(\bar{x})|}{\sin \frac{\delta}{2}} \in L^1([-\pi, \pi]).$$

□

Proposizione. Data $f \in L^1([-\pi, \pi])$ estesa per periodicità e dato \bar{x} tale che esistano i limiti a destra e sinistra di f in \bar{x} detti L^+ e L^- ed f α -Hölderiana a sinistra e destra si può vedere che vale

$$S_N f(\bar{x}) \xrightarrow{N} \frac{L^+ + L^-}{2}.$$

4.3 Esercitazione del 11 novembre

Consideriamo $L^2([-\pi, \pi], \mathbb{C})$. Ricordiamo che $e^{inx} = \cos(nx) + i \sin(nx)$. Abbiamo

$$\begin{aligned}
\sum_{n=-N}^N c_n e^{inx} &= c_0(f) + \sum_{n=1}^N (c_n(f) e^{inx} + c_{-n} e^{inx}) \\
&= c_0(f) + \sum_{n=1}^N [(c_n(f) + c_{-n}(f)) \cos(nx) + i(c_n(f) - c_{-n}(f)) \sin(nx)] \\
&= c_0(f) + \sum_{n=1}^N a_n(f) \cos(nx) + b_n(f) \sin(nx)
\end{aligned}$$

con

$$\begin{cases} a_n(f) = c_n(f) + c_{-n}(f) \\ b_n(f) = i c_n(f) - i c_{-n}(f) \\ a_0(f) = c_0(f) \end{cases}$$

Passando al limite per $N \rightarrow +\infty$

$$f(x) \stackrel{L^2}{=} \sum_{n=-N}^N c_n e^{inx} \stackrel{(*)}{=} c_0(f) + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n(f) \cos(nx) + b_n(f) \sin(nx)$$

Nota. L'uguaglianza $(*)$ ha bisogno di qualche spiegazione: come sappiamo che la serie a destra converge? Usiamo il fatto, che mostriamo sotto, che $\{1, \cos(nx), \sin(nx), n > 1\}$ sono un sistema ortogonale, dunque per la disuguaglianza di Bessel segue la convergenza.

Osservazione. Gli elementi $\{1, \sin(nx), \cos(nx)\}$ sono ortogonali per $n \geq 1$ in $L^2([-\pi, \pi], \mathbb{C})$. Infatti, ricordiamo che

$$\begin{aligned} \cos(nx) &= \frac{e^{inx} + e^{-inx}}{2} \\ \sin(nx) &= \frac{e^{inx} - e^{-inx}}{2i}. \end{aligned}$$

- È banale verificare che $\langle 1, \cos(nx) \rangle = \langle 1, \sin(nx) \rangle = 0$;
- Verifichiamo ora che valga $\langle \cos(nx), \sin(mx) \rangle = 0$ per ogni n, m , dunque calcoliamo:

$$\langle \sin(nx), \sin(mx) \rangle = \frac{1}{4} \langle e^{-inx} - e^{inx}, e^{-imx} - e^{imx} \rangle = 0.$$

Ora normalizziamo: $\left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{\cos(nx)}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin(nx)}{\sqrt{\pi}}, n \geq 1 \right\}$.

In conclusione, abbiamo ottenuto che

- $L^2([-\pi, \pi], \mathbb{C})$ ha base Hilbertiana $\left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{\cos(nx)}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin(nx)}{\sqrt{\pi}} \right\}_{\mathbb{C}}$
- $L^2([-\pi, \pi], \mathbb{R})$ ha base Hilbertiana $\left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{\cos(nx)}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin(nx)}{\sqrt{\pi}} \right\}_{\mathbb{R}}$

Esercizio. Se f è a valori reali, dimostrare che $a_n(f)$ e $b_n(f)$ sono anch'essi reali. [TO DO]

Sketch. Si dimostra che $a_n(f) = \overline{a_n(f)}$, $b_n(f) = \overline{b_n(f)}$ e per farlo si usano le espressioni di a_n, b_n in funzione dei coefficienti di Fourier complessi scritte sopra.

Esercizio. Trovare la base di Fourier complessa e reale di $L^2([a, b], \mathbb{C})$.

Soluzione. Data $f(x) \in L^2([a, b], \mathbb{C})$, definiamo la funzione

$$F(y) := f\left((y + \pi) \frac{b-a}{2\pi} + a\right) = f(x).$$

Notiamo che $F \in L^2([-\pi, \pi], \mathbb{C})$, dunque ha espansione in serie di Fourier:

$$\begin{aligned} F(y) &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n(F) e^{iny}, \quad c_n(F) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F(y) e^{-iny} dy \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f\left((y + \pi) \frac{b-a}{2\pi} + a\right) e^{-iny} dy. \end{aligned}$$

Usando il cambio di variabile $y = (x - a)\frac{2\pi}{b - a} - \pi$ si ottiene

$$\begin{aligned} c_n(f) &= \frac{1}{b - a} \int_a^b f(x) \exp \left[\left((x - a)\frac{2\pi}{b - a} - \pi \right) (-in) \right] dx \\ &= \frac{(-1)^n}{b - a} \exp \left[\frac{2\pi a}{b - a} in \right] \int_a^b f(x) \exp \left[\frac{2\pi x}{b - a} (-in) \right] dx \end{aligned}$$

Da cui

$$f(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n(f) \exp \left[\frac{2\pi}{b - a} xin \right], \quad c_n(f) = \frac{1}{b - a} \int_a^b f(x) \exp \left[-\frac{2\pi}{b - a} xin \right].$$

Esercizio. Sia $f \in L^2([-\pi, \pi], \mathbb{C})$ (l'estensione di) f è $2\pi/N$ periodica. Dimostrare che $c_n(f) \neq 0$ se e solo se n multiplo di N .

Soluzione. [TO DO: da cambiare enunciato e scrivere la soluzione]

Esercizi classici. Fissata una funzione $f \in L^2$, calcolare i coefficienti di Fourier complessi (e reali).

Calcoliamo i coefficienti di $f(x) = x^2$.

$$\begin{aligned} c_n(f) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x^2 e^{-inx} dx = \frac{1}{2\pi} \left[\frac{e^{-inx}}{-in} x^2 \right]_{-\pi}^{\pi} - \int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{-inx}}{-in} 2x dx \\ &= - \int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{-inx}}{-in} 2x dx = -\frac{i}{\pi n} \left[\left[\frac{e^{-inx}}{-in} \right]_{-\pi}^{\pi} - \int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{-inx}}{-in} dx \right] \\ &= \frac{-i\pi \cos(-n\pi) + \cos(-n(-\pi))}{\pi n} + \frac{i}{\pi n} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{-inx}}{-in} dx \\ &= \frac{2}{n^2} + \frac{i}{\pi n} \cdot 0 = \frac{2}{n^2} (-1)^n \\ &\implies c_n(f) = \frac{2}{n^2} (-1)^n. \end{aligned}$$

Infine

$$c_0(f) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x^2 dx = \frac{1}{2\pi} \frac{2}{3} \pi^3 = \frac{1}{3} \pi^2.$$

Per Parseval $\|f\|_{L^2}^2 = 2\pi \sum_{n \in \mathbb{Z}} |c_n(f)|^2$. Da cui

$$\int_{-\pi}^{\pi} x^4 dx = \|x^2\|_{L^2}^2 = 2\pi \cdot \left[\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{4}{n^4} + \frac{\pi^2}{3} \right].$$

Nota. Potevamo ottenere i coefficienti di $f(x) = x^2$, applicando il teorema della derivata.

Domande.

- Abbiamo visto che $c_n(x^2) = \frac{2(-1)^n}{n^2}$ e dedotto che $c_n(2x) = in \frac{2(-1)^n}{n^2} = \frac{2(-1)^n i}{n}$.
- Vorremmo calcolare $c_n(2)$, possiamo applicare il teorema sulla formula della derivata?

Esercizio.

- i) Calcolare i coefficienti di Fourier complessi di x^3 e vedere se vale $c_n(3x^2) = inc_n(x^3)$.
- ii) Calcolare i coefficienti reali di x^2 .

Esercizio. Sia $f(x)$ definita da $\sum_{n \in \mathbb{Z}} \gamma_n e^{inx}$ con
$$\begin{cases} \gamma_n = \frac{\cos(n)}{|n|^{3/2}} \\ \gamma_0 = 1 \end{cases}$$

Domande.

- i) f è ben definita?
- ii) f è continua?
- iii) f è derivabile?

Dimostrazione.

- i) Sì, infatti $2 \sum_{n=1}^{+\infty} |\gamma_n|^2 \leq 2 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^3} < +\infty$.
- ii) *Suggerimento.* Usare la Proposizione 3 della parte della regolarità dei coefficienti della serie di Fourier.

Capitolo 5

Applicazioni della serie di Fourier

5.1 Equazione del calore

Sia Ω un aperto di \mathbb{R}^d e $u(t, x): [0, T) \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ e chiamiamo x la *variabile spaziale* e t la *variabile temporale*. In dimensione 3 l'insieme Ω rappresenta un solido di materiale conduttore omogeneo e $u(t, x)$ rappresenta la temperatura in x all'istante t . Dunque u risolve l'equazione del calore

$$u_t = c \cdot \Delta u$$

dove con u_t indichiamo la derivata parziale di u rispetto al tempo, c è una costante fisica che porremo uguale ad 1 e Δu è il laplaciano rispetto alle dimensioni spaziali ovvero

$$\Delta u = \sum_{i=1}^d \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} = \operatorname{div}(\nabla_x u).$$

Vedremo che la soluzione di $u_t = \Delta u$ esiste ed è unica specificando $u(0, \cdot) = u_0$ condizione iniziale con $u_0: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ data e delle condizioni al bordo come ad esempio

- *Condizioni di Dirichlet:* $u = v_0$ su $[0, T) \times \partial\Omega$ con v_0 funzione fissata. Possiamo pensare come fissare delle sorgenti di calore costanti sul bordo.
- *Condizioni di Neumann:* $\frac{\partial u}{\partial \nu}$ con ν direzione normale al bordo. Essenzialmente ci sta dicendo che non c'è scambio di calore con l'esterno.

In particolare scriveremo

$$\begin{cases} u_t = \Delta u & \text{su } \Omega \\ u(0, \cdot) = u_0 \\ \text{Una delle condizioni al bordo su } \partial\Omega \dots \end{cases}$$

5.2 Risoluzione dell'equazione del calore (su \mathbb{S}^1)

Come conduttore consideriamo un anello di materiale omogeneo e sottile che parametrizziamo con $[-\pi, \pi]$. Dunque consideriamo $u: [0, T) \times [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$ con le condizioni

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} \\ u(\cdot, \pi) = u(\cdot, -\pi) \\ u_x(\cdot, \pi) = u_x(\cdot, -\pi) \\ u(0, \cdot) = u_0 \end{cases} \quad (\text{P})$$

in particolare la (ii) e la (iii) condizione non sono né quelle di Dirichlet né di Neumann, sono delle condizioni che effettivamente ci dicono che siamo “su \mathbb{S}^1 ”¹; invece l'ultima è la condizione iniziale ed u_0 è data.

5.2.1 Risoluzione formale

Scriviamo u in serie di Fourier rispetto a x cioè

$$u(t, x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n e^{inx}$$

con $c_n := c_n(u(t, \cdot))$ da cui derivando formalmente dentro le sommatorie otteniamo che u_t e u_{xx} SONO

$$\begin{aligned} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \dot{c}_n(t) e^{inx} = u_t = u_{xx} &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} -n^2 c_n(t) e^{inx} \\ u_t = u_{xx} \iff \dot{c}_n(t) = -n^2 c_n(t) \quad \forall n \forall t \quad \text{e} \quad u(0, \cdot) = u_0 &\iff c_n(0) = c_n(u_0) =: c_n^0 \end{aligned}$$

Dunque risolvere (??) equivale per ogni n che c_n che risolva il problema di Cauchy dato da

$$\begin{cases} \dot{y} = -n^2 y \\ y(0) = c_n^0 \end{cases} \quad (\text{P}')$$

con soluzione $y(t) = \alpha e^{-n^2 t}$ cioè $c_n(t) = c_n^0 e^{-n^2 t}$ e quindi abbiamo

$$u(t, x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n^0 e^{-n^2 t} e^{inx} \quad (*)$$

Studiando questa soluzione formale possiamo fare le seguenti osservazioni che poi diventeranno dei teoremi

- *La soluzione esiste per $t \in [0, +\infty)$ ed è molto regolare per $t > 0$*

Vedremo che la soluzione formale è proprio una soluzione al problema per $t \geq 0$, in particolare il termine $e^{-n^2 t} \rightarrow 0$ in modo più che polinomiale ed infatti vedremo che la soluzione sarà proprio C^∞ per $t > 0$.

- *La soluzione è unica*

Tutti i problemi di Cauchy per i coefficienti $c_n(t)$ hanno un'unica soluzione dunque anche la soluzione u è unica.

¹Bastano solo queste condizioni sulla funzione e sulla sua derivata perché intuitivamente le altre seguono applicando la (i).

- In generale non esiste soluzione nel passato.

Se il numero di coefficienti $c_n^0 \neq 0$ è infinito allora il termine $e^{-n^2 t} \rightarrow +\infty$ molto velocemente per $t < 0$ e la serie diverge.

Teorema 1 (Esistenza e Regolarità).

Se $u_0: [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{C}$ (presa in L^2) continua e tale che $\sum_{n \in \mathbb{Z}} |c_n^0| < +\infty$, allora

$$u(t, x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \underbrace{c_n^0 e^{-n^2 t} e^{inx}}_{u_n(t, x)}$$

definisce una funzione $u: [0, +\infty) \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ tale che

- i) u è 2π -periodica in x ed è reale se u_0 è reale.
- ii) u è continua.
- iii) u è C^∞ su $(0, +\infty) \times \mathbb{R}$.
- iv) Risolve (??). In particolare vale $u_{tt} = u_{xx}$ e valgono le condizioni di periodicità per $t > 0$; e infine vale $u(0, \cdot) = u_0$ su $[-\pi, \pi]$.

Vediamo alcuni lemmi tecnici preparatori e sia R un rettangolo di \mathbb{R}^d ovvero prodotto di intervalli con estremi aperti o chiusi.

Lemma 4. Date $v_n: R \rightarrow \mathbb{C}$ di classe C^k con $k = 1, 2, \dots, +\infty$ tali che

- $v_n \rightarrow v$ uniformemente.
- $\forall \underline{h} = (h_1, \dots, h_d) \in \mathbb{N}^d$ con $|\underline{h}| := h_1 + \dots + h_d \leq k$ (se $k = +\infty$ allora basta $|\underline{h}| < +\infty$) posto

$$D^{\underline{h}} v_n := \frac{\partial^k}{\partial x_1^{h_1} \dots \partial x_d^{h_d}} v_n$$

$D^{\underline{h}} v_n \rightarrow D^{\underline{h}} v$ converge uniformemente.

allora $v \in C^k$ e $D^{\underline{h}} v = \lim_n D^{\underline{h}} v_n$.

Dimostrazione. Si parte dal caso $d = 1$ e $k = 1$ e si procede per induzione. [TODO: Esercizio] \square

Corollario. 5 Date $u_n: R \rightarrow \mathbb{C}$ di classe C^k con $k = 1, \dots, +\infty$ tali che

$$\forall \underline{h} \text{ con } |\underline{h}| \leq k \quad \sum_n \|D^{\underline{h}} u_n\| < +\infty$$

allora $u := \sum_n u_n$ è una funzione ben definita su R e C^k e $D^{\underline{h}} u = \sum_n D^{\underline{h}} u_n$ per ogni \underline{h} con $|\underline{h}| \leq k$.

Lemma. 6 Data $u: R \rightarrow \mathbb{C}$ e rettangoli $R_i \subset R$ relativamente aperti in R tali che u è C^k sugli R_i per ogni i allora u è di classe C^k su $\tilde{R} := \bigcup_i R_i$.

Dimostrazione. Intuitivamente essere C^k è una proprietà locale ma preso $x \in R \implies \exists i \ x \in R_i$ e dunque segue per l'ipotesi sugli R_i . \square

Lemma. 7 Data $f \in L^2((-\pi, \pi); \mathbb{C})$

$$f \text{ è reale q.o. } \iff c_{-n}(f) = \overline{c_n(f)}$$

Osservazione. Notiamo che se $f \in L^1$ la freccia $\boxed{\Leftarrow}$ è molto più difficile.

Dimostrazione Teorema 1.

- i) u_0 reale $\implies c_{-n}^0 = \overline{c_n^0} \implies c_{-n}^0 e^{-(-n)^2 t} = \overline{c_n^0 e^{-n^2 t}} \iff c_{-n}(u(t, \cdot)) = \overline{c_n(u(t, \cdot))}$.
- ii) Sia $R := [0, +\infty) \times \mathbb{R}$, $\|u_n\|_{L^\infty(R)} = \|c_n^0 e^{-n^2 t}\|_{L^\infty(R)} = |c_n^0|$ dunque $\sum_{n \in \mathbb{Z}} u_n$ converge totalmente su R e quindi u è ben definita e continua su R .
- iii) Presi $h, k = 0, 1, 2, \dots$ se proviamo a calcolare $D_t^h D_x^k u_n = c_n^0 (-n)^{2h} (in)^k e^{-n^2 t} e^{inx}$ vediamo non si riesce a stimare per $t \rightarrow 0$ infatti

$$\|D_t^h D_x^k u_n\|_{L^\infty(R)} = |c_n^0| \cdot |n|^{2h+k} \xrightarrow{n} \infty.$$

Serve prendere $\delta > 0$ e sia $R_\delta := (\delta, +\infty) \times \mathbb{R}$

$$\|D_t^h D_x^k u_n\|_{L^\infty(R_\delta)} = |c_n^0| \cdot |n|^{2h+k} e^{-n^2 \delta}$$

in particolare per ogni h, k abbiamo che $|n|^{2h+k} e^{-n^2 \delta} \xrightarrow{n} 0 \implies |n|^{2h+k} e^{-n^2 \delta} \leq m_{h,k} \implies \|D_t^h D_x^k u_n\|_{L^\infty(R_\delta)} \leq m_{h,k} \cdot |c_n^0|$ e quindi $\sum_n D_t^h D_x^k u_n$ converge totalmente su R_δ .

Quindi u è C^∞ su R_δ per ogni $\delta > 0$ e siccome R_δ è aperto in R per il Lemma. 6 u è C^∞ su $\bigcup_{\delta > 0} R_\delta = (0, +\infty) \times \mathbb{R}$.

- iv) Essendo che u è 2π -periodica in x , valgono le condizioni al bordo; inoltre u_0 e $u(0, \cdot)$ hanno gli stessi coefficienti di Fourier, dunque $u_0 = u(0, \cdot)$ quasi ovunque, ma essendo continue vale $u_0 = u(0, \cdot)$ su $[-\pi, \pi]^2$.

Per mostrare che $u_t = u_{xx}$ osserviamo che $(u_n)_t = (u_n)_{xx}$ e che l'equazione è lineare omogenea:

$$u_t = \left(\sum_n u_n \right)_t \stackrel{\text{Cor 5}}{=} \sum_n (u_n)_t = \sum_n (u_n)_{xx} \stackrel{\text{Cor 5}}{=} \left(\sum_n u_n \right)_{xx} = u_{xx}.$$

□

Ora enunciamo il teorema di unicità, vogliamo un teorema con il minor numero di ipotesi possibile e che ci dà più informazioni; quindi in questo caso cerchiamo la più grande famiglia di funzioni (quindi la meno regolare possibile) sulla quale vale l'unicità della soluzione.

Teorema. 2 (Unicità) Sia $u: [0, T] \times [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{C}$ continua, C^1 nel tempo e C^2 nello spazio per $t > 0$. Se u risolve (??) su $t > 0$ allora u è unica.

Definizione. Dato R un rettangolo e $u: R \rightarrow \mathbb{C}$ diciamo che u è C^k nella variabile x_i se $\left(\frac{\partial}{\partial x_i} \right)^h u$ esiste per $h = 1, \dots, k$ ed è continua su R .

Lemma 8. Sia $u: I \times [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{C}$ e sia $c_n(t) := c_n(u(t, \cdot))$ per ogni n .

Se u è continua c_n è continua su I .

Se u è C^k allora c_n è C^k su I e $c_n(D_t^h u(t, \cdot)) = D_t^h c_n(u(t, \cdot))$ per $h \leq k$.

Dimostrazione.

$$c_n(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} u(t, x) e^{-inx} dx \implies \dot{c}_n(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} u_t(t, x) e^{-inx} dx = c_n(u_t(t, \cdot))$$

²I coefficienti di Fourier sono prodotti scalari in L^2 dunque sono definiti a meno di insiemi di misura nulla.

per il teorema di derivazione sotto il segno di integrale. \square

Lemma 9. Sia $y: [0, T) \rightarrow \mathbb{R}^k$ funzione continua su $[0, T)$ e derivabile su $(0, T)$ che risolve l'equazione differenziale ordinaria $\dot{y} = f(t, y)$ su $(0, T)$ con $f: [0, T) \times \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^k$ continua. Allora y è \mathcal{C}^1 su $[0, T)$ e risolve $\dot{y} = f(t, y)$ su $[0, T)$.

Dimostrazione Teorema 2. Poniamo $c_n(t) := c_n(u(t, \cdot))$. Sappiamo che per $t > 0$ vale $\dot{c}_n(t) \stackrel{(*)}{=} c_n(u_t(t, \cdot)) = c_n(u_{xx}(t, \cdot)) \stackrel{(**)}{=} -n^2 c_n(t)$, dove $(*)$ segue dal Lemma 8 e $(**)$ segue dalla regolarità dei coefficienti. Dunque, per il Lemma 9, i coefficienti c_n risolvono il problema di Cauchy

$$\begin{cases} \dot{y} = -n^2 y \\ y(0) = c_n^0 \end{cases}$$

che ha un'unica soluzione. \square

Notazione. $\mathcal{C}_{\text{per}}^k = \{f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C} \text{ } \pi\text{-periodiche e } \mathcal{C}^k\}$.

Teorema 3 (di non esistenza nel passato). Esiste $u_0 \in \mathcal{C}_{\text{per}}^\infty$ tale che per ogni $\delta > 0$ non esiste $u: (-\delta, 0] \times [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{C}$ soluzione di $(??)$ (u continua, \mathcal{C}^1 in t e \mathcal{C}^2 in x per $t < 0$)

Dimostrazione. Sia u su $(-\delta, 0) \times [-\pi, \pi]$ un'eventuale soluzione. Sia $c_n(t)$ al solito. Dalla dimostrazione del Teorema 2 abbiamo che c_n risolve $(??)$.

Quindi $c_n(t) = c_n^0 e^{-n^2 t}$. Scegliamo c_n^0 (cioè u_0) in modo che

- $c_n^0 = O(|n|^{-a})$ per $n \rightarrow \pm\infty$ per ogni $a > 0$. ($\Rightarrow \sum |n|^k |c_n^0| < +\infty \quad \forall k \Rightarrow u_0 \in \mathcal{C}_{\text{per}}^\infty$).
- $c_n^0 e^{-n^2 t} \not\rightarrow 0$ per ogni $t < 0$.

Con un tale c_n^0 la soluzione non esiste al tempo t . Infatti, se per assurdo esistesse, i coefficienti di Fourier $c_n(t)$ sarebbero quadrato sommabili³, ovvero dovrebbero tendere a zero $\not\downarrow$.

Prendiamo $c_n^0 = e^{-|n|}$. \square

Esercizio. Dato u_0 sia T_* il massimo T per cui $(??)$ ammette soluzione su $(-T, 0] \times [-\pi, \pi]$. Caratterizzare T_* in termini del comportamento asintotico di c_n^0 per $n \rightarrow \pm\infty$.

Suggerimento. Guardare $\log(|c_n^0|)/n^2$.

5.3 Equazione delle onde

Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ aperto, I intervallo temporale, $u: I \times \overline{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$, l'equazione delle onde è

$$u_{tt} = v^2 \nabla u = \nabla_x u = \sum_{i=1}^d \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}$$

dove v si chiama **velocità di propagazione**.

La soluzione è univocamente determinata specificando

- Le condizioni al bordo (come per il calore), ad esempio quelle di Dirichlet: $u = v_0$ su $I \times \partial\Omega$ oppure di Neumann: $\partial u / \partial \nu = 0$ su $I \times \partial\Omega$.
- Condizioni iniziali: $u(0, \cdot) = u_0, u_t(0, \cdot) = u_1$.

³Per la disuguaglianza di Bessel.

Esempio 1. Per $d = 1$, $\Omega = [0, 1]$ rappresenta una sbarra sottile di materiale elastico. La sbarra è soggetta a vibrazioni longitudinali (onde sonore). La funzione $u(t, x)$ rappresenta lo spostamento dalla posizione di riposo x al tempo t . In tal caso, l'equazione delle onde è

$$u_{tt} = v^2 u_{xx}.$$

Esempio 2. Per $d = 2$, Ω rappresenta una sbarra sottile di materiale elastico che vibra trasversalmente. La funzione $u(t, x)$ rappresenta lo spostamento verticale del punto di coordinata $x \in \Omega$ a riposo. Allora u soddisfa⁴

$$u_{tt} = v^2 \nabla^2 u.$$

5.4 Risoluzione dell'equazione delle onde

Consideriamo il caso uno dimensionale. In tal caso l'equazione delle onde è la seguente.

$$\begin{cases} u_{tt} = v^2 u_{xx} \\ u(\cdot, \pi) = u(\cdot, -\pi) \\ u_x(\cdot, \pi) = u_x(\cdot, -\pi) \\ u(0, \cdot) = u_0 \\ u_t(0, \cdot) = u_1 \end{cases} \quad (\text{P})$$

5.4.1 Risoluzione formale

Scriviamo $u(t, x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n(t) e^{inx}$. Deriviamo in t e due volte in x .

$$\begin{aligned} u_{tt} &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} \ddot{c}_n e^{inx} \\ u_{xx} &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} -v^2 n^2 c_n e^{inx} \end{aligned}$$

Abbiamo che

$$\begin{aligned} u_{tt} = v^2 u_{xx} &\iff \ddot{c}_n = -v^2 n^2 c_n \\ u(0, \cdot) = u_0 &\iff c_n(0) = c_n^0 := c_n(u_0) \quad u_t(0, \cdot) = u_1 \iff \dot{c}_n(0) = c_n^1 := c_n(u_1) \end{aligned}$$

Quindi u risolve (??) se solo se per ogni n , c_n risolve

$$\begin{cases} \ddot{y} = -n^2 v^2 y \\ y(0) = c_n^0 \\ \dot{y}(0) = c_n^1 \end{cases} \quad (\text{P}')$$

Dunque,

- Per $n = 0$, $\ddot{y} = 0$ se solo se y è un polinomio di primo grado, ovvero $c_0(t) = c_0^0 + c_0^1 t$.
- Per $n \neq 0$, $y = \alpha_n^+ e^{inv t} + \alpha_n^- e^{-inv t}$ con

$$\alpha_n^\pm = \frac{1}{2} \left(c_n^0 \pm \frac{c_n^1}{inv} \right)$$

⁴Per oscillazioni piccole.

Quindi, la soluzione è

$$u(t, x) = c_0^0 + c_0^1 t + \sum_{n \neq 0} [\alpha_n^+ e^{in(x+vt)} + \alpha_n^- e^{in(x-vt)}] \quad (*)$$

Inoltre,

$$u(t, x) = c_0^0 + c_0^1 t + \varphi^+(x + vt) + \varphi^-(x - vt) \quad (**)$$

con φ^\pm funzioni con coefficienti di Fourier α_n^\pm che si dicono **onde viaggianti**.

Nota. La (??) è specifica delle equazioni delle onde.

5.5 Esercitazione del 18 Novembre 2021

5.5.1 Esercizi preliminari

Data $f: [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$ o \mathbb{C} uno degli esercizi più comuni è doverne calcolare lo sviluppo di Fourier complesso o reale.

Osservazione. Ricordiamo che $c_n(f)$ può essere calcolato anche solo se $f \in L^1$ inoltre

$$\begin{aligned} \text{SF}_{\mathbb{C}}(f) &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n(f) e^{inx} & c_n(f) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx} dx \\ &\text{e con base hilbertiana } \left\{ \frac{e^{inx}}{\sqrt{2\pi}} \mid n \in \mathbb{Z} \right\} \end{aligned}$$

invece nel caso reale abbiamo visto

$$\begin{aligned} \text{SF}_{\mathbb{R}}(f) &= \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)] + a_0 \\ a_n(f) &= c_n(f) + c_{-n}(f) & b_n(f) &= i(c_n(f) - c_{-n}(f)) & a_0(f) &= c_0(f) \\ a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx) dx & b_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(nx) dx \\ &\text{e con base hilbertiana } \left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{\cos(nx)}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin(nx)}{\sqrt{\pi}} \mid n \geq 1 \right\} \end{aligned}$$

Esercizio. Sia $f(x) = \cos^2(x) \sin(3x)$, calcolare i coefficienti di Fourier⁵.

Svolgimento. Usiamo lo sviluppo complesso

$$\cos(x) = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \quad \sin(x) = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$$

Dunque possiamo riscrivere $f(x)$ come

$$\begin{aligned} &= \frac{i}{8} (e^{i2x} + e^{-i2x} + 2) (e^{-i3x} - e^{i3x}) = \\ &= \frac{i}{8} (e^{-ix} + e^{-i5x} + 2e^{-i3x} - e^{i5x} - e^{ix} - 2e^{i3x}) = \\ &= \frac{i}{8} e^{-ix} + \frac{i}{8} e^{-i5x} + \frac{i}{4} e^{-i3x} - \frac{i}{8} e^{i5x} - \frac{i}{8} e^{ix} - \frac{i}{4} e^{i3x}. \end{aligned}$$

⁵Con funzioni ottenute come combinazioni di prodotti di potenze di funzioni trigonometriche (anche con argomento moltiplicato per un naturale) conviene calcolare lo sviluppo complesso e poi passare a quello reale.

Dunque possiamo già scrivere i coefficienti di Fourier complessi di $f(x)$

$$c_n(f) \neq 0 \iff n = \pm 1, \pm 3, \pm 5$$

$$c_{\pm 1}(f) = \mp \frac{i}{8} \quad c_{\pm 3}(f) = \mp \frac{i}{4} \quad c_{\pm 5}(f) = \mp \frac{i}{8}.$$

Continuiamo ora il conto precedente e ricostruiamo la serie di Fourier reale ricomponendo i termini

$$= -\frac{i^2}{4} \left(\frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} \right) - \frac{i^2}{2} \left(\frac{e^{i3x} - e^{-i3x}}{2i} \right) - \frac{i^2}{4} \left(\frac{e^{i5x} - e^{-i5x}}{2i} \right) =$$

$$= \frac{1}{4} \sin(x) + \frac{1}{2} \sin(3x) + \frac{1}{4} \sin(5x),$$

in particolare possiamo notare che $f(\pi) = f(-\pi) = 0$ dunque potevamo già dedurre che la serie di Fourier reale sarebbe stata composta solo da seni.

Esercizio. Caratterizzare i coefficienti $c_n(f)$ di una $f: [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{C}$ in L^2 tale che $\text{Im}(f) \subseteq \mathbb{R}$.

Suggerimento. Si usa che per $z \in \mathbb{C}$ vale $z \in \mathbb{R} \iff z = \bar{z}$.

Esercizio. Determinare la soluzione di (P) e stabilire unicità e regolarità della soluzione $u: [0, T) \times [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$ o \mathbb{C} .

$$\begin{cases} u_t = 4u_{xx} \\ u(\cdot, -\pi) = u(\cdot, \pi) \\ u_x(\cdot, -\pi) = u_x(\cdot, \pi) \\ u(0, x) = \cos^2(x) \sin(3x) \end{cases} \quad (\text{P})$$

Svolgimento. Per prima cosa troviamo formalmente una soluzione in serie di Fourier $u(t, x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n(t) e^{inx}$ dove $c_n(t)$ è il coefficiente di $u(t, \cdot)$.

Per il teorema di derivazione sotto il segno di integrale abbiamo

$$u_t(t, x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \dot{c}_n(t) e^{inx} \quad \text{con } c_n(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} u(t, x) e^{-inx} dx$$

Le condizioni al bordo assicurano che $c_n(u_{xx}(t, \cdot)) = -4n^2 c_n(u(t, \cdot))$ da cui otteniamo il seguente problema di Cauchy sui coefficienti

$$\begin{cases} \dot{c}_n(t) = -4n^2 c_n(t) \\ c_n(0) = c_n(u(0, \cdot)) = c_n(\cos^2(x) \sin(3x)) \end{cases} \quad \forall n \in \mathbb{Z}$$

Inoltre dato che $c_n^0 = 0$ se $n \neq \pm 1, \pm 3, \pm 5 \implies c_n(t) = 0$ per questi n , dunque complessivamente i sistemi sono

$$\begin{cases} \dot{c}_1(t) = -4c_1(t) \\ c_1(0) = -\frac{i}{8} \end{cases} \quad \begin{cases} \dot{c}_3(t) = -36c_3(t) \\ c_3(0) = -\frac{i}{4} \end{cases} \quad \begin{cases} \dot{c}_5(t) = -100c_5(t) \\ c_5(0) = -\frac{i}{8} \end{cases}$$

con la condizione $c_{-n}(t) = \overline{c_n(t)}$, così otteniamo

$$\begin{aligned} c_1(t) &= -\frac{i}{8} e^{-4t} & c_3(t) &= -\frac{i}{4} e^{-36t} & c_5(t) &= -\frac{i}{8} e^{-100t} \\ c_{-1}(t) &= \frac{i}{8} e^{-4t} & c_{-3}(t) &= \frac{i}{4} e^{-36t} & c_{-5}(t) &= \frac{i}{8} e^{-100t} \end{aligned}$$

ed infine fattorizzando

$$\begin{aligned} u(t, x) &= \frac{e^{-4t}}{4} \left(-\frac{i}{2} e^{ix} + \frac{i}{2} e^{-ix} \right) + \frac{e^{-36t}}{2} \left(-\frac{i}{2} e^{i3x} + \frac{i}{2} e^{-i3x} \right) + \frac{e^{-100t}}{4} \left(-\frac{i}{2} e^{i5x} + \frac{i}{2} e^{-i5x} \right) = \\ &= \frac{1}{4} e^{-4t} \sin(x) + \frac{1}{2} e^{-36t} \sin(3x) + \frac{1}{2} e^{-100t} \sin(5x) \end{aligned}$$

Esercizio. Consideriamo il problema (P) dato da

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} + u \\ u(\cdot, -\pi) = u(\cdot, \pi) \\ u_x(\cdot, -\pi) = u_x(\cdot, \pi) \\ u(0, \cdot) = u_0 \end{cases} \quad (\text{P})$$

dove $u_0(x)$ è $\cos^2(x) \sin(3x)$ oppure $\sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{1}{2^{|n|}} e^{inx}$.

Svolgimento. Per ora lavoriamo con $u_0(x) = \cos^2(x) \sin(3x)$, notiamo subito che i coefficienti soddisfano l'equazione

$$\begin{cases} \dot{c}_n(t) = -n^2 c_n(t) + c_n(t) = (1 - n^2) c_n(t) \\ c_n(0) = c_n(\cos^2(x) \sin(3x)) \end{cases}$$

da cui $\dot{c}_n(t) = (1 - n^2) c_n$ con soluzione $c_n(t) = \gamma e^{(1-n^2)t}$, quindi ad esempio abbiamo

$$c_{\pm 1}(t) = \mp \frac{i}{8} \quad c_{\pm 3}(t) = \mp \frac{i}{4} e^{-8t} \quad c_{\pm 5}(t) = \mp \frac{i}{8} e^{-24t}$$

Dunque la soluzione finale è

$$\begin{aligned} u(t, x) &= \frac{i}{8} e^{-ix} - \frac{i}{8} e^{ix} + \frac{i}{4} e^{3t} e^{-i3x} + \frac{i}{4} e^{3t} e^{i3x} + \frac{i}{8} e^{-24t} e^{-i5x} + \frac{i}{8} e^{-24t} e^{i5x} = \\ &= -\frac{i}{4} \left(\frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2} \right) - \frac{i}{2} e^{-3t} \left(\frac{e^{i3x} - e^{-i3x}}{2} \right) - \frac{i}{4} e^{-24t} \left(\frac{e^{i5x} - e^{-i5x}}{2} \right) = \\ &= \frac{1}{4} \sin(x) - \frac{1}{2} e^{-3t} \sin(3x) - \frac{1}{4} e^{-24t} \sin(5x) \end{aligned}$$

Invece considerando la condizione iniziale $u_0(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{inx} / 2^{|n|}$ abbiamo che $c_n(u_0) = 1/2^{|n|}$, notiamo che i coefficienti sono sommabili

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{1}{2^{|n|}} = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} + 1 < +\infty \quad u(t, x) := \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{1}{2^{|n|}} e^{(1-n^2)t} e^{inx}$$

in particolare formalmente possiamo scriverla meglio come

$$= \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{1}{2^{|n|}} e^{(1-n^2)t} e^{inx} = e^t \left(1 + \sum_{n>0} \frac{1}{2^{|n|}} e^{(1-n^2)t} \cos(nx) \dots \dots \right)$$

[TODO: Finire meglio questo conto]

Esercizio. (della volta scorsa) Consideriamo la funzione

$$f(x) = \sum_{n \neq 0} \frac{\cos(n)}{|n|^{3/2}} e^{inx}$$

- Dire se f è ben definita e continua.
- Dire se f è derivabile.

Svolgimento.

$$\sum_{n \neq 0} |c_n| = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\cos(n)|}{|n|^{3/2}} \leq 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{3/2}} < +\infty$$

dunque la serie di Fourier converge uniformemente a $f \implies$ è continua e periodica.

Se $\sum |n| \cdot |c_n| < +\infty$ si potrebbe dire che f è derivabile però

$$\sum_{n \neq 0} |n| \cdot |c_n| = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\cos(n)|}{\sqrt{n}} = +\infty \text{ non converge assolutamente}$$

Ma la candidata derivata ha coefficienti inc_n e non starebbe in L^2 ovvero

$$\sum n^2 |c_n|^2 = +\infty \implies \sum inc_n e^{inx} \notin L^2$$

5.6 Risoluzione dell'equazione delle onde

Consideriamo il problema

$$\begin{cases} u_{tt} = v^2 u_{xx} \\ u(\cdot, \pi) = u(\cdot, -\pi) \\ u_x(\cdot, \pi) = u_x(\cdot, -\pi) \\ u(0, \cdot) = u_0 \\ u_t(0, \cdot) = u_1 \end{cases} \quad (\text{P})$$

ed abbiamo visto che ha soluzione

$$u(t, x) = c_0^0 + c_0^1 t + \sum_{n \neq 0} (\alpha_n^+ e^{in(x+vt)} + \alpha_n^- e^{in(x-vt)}) \quad (*)$$

$$\alpha_n^\pm = \frac{1}{2} \left(c_n^0 \pm \frac{c_n^1}{inv} \right).$$

Inoltre, possiamo scrivere l'equazione (*) come

$$u(t, x) = c_0^0 + c_0^1 t + \varphi^+(x + vt) + \varphi^-(x - vt) \quad (**)$$

dove φ^+, φ^- sono funzioni 2π -periodiche.

Vedremo i seguenti risultati

- Esistenza usando la forma (**), specifico per equazione delle onde.
- Esistenza usando la forma (*), che però richiede maggiore regolarità su u_0 e u_1 .
- Unicità.

Teorema 1. Dati $u_0 \in C_{\text{per}}^2, u_1 \in C_{\text{per}}^1$, allora esistono $c_0^0, c_0^1 \in \mathbb{C}$ e $\varphi^+, \varphi^- \in C_{\text{per}}^2$ (con integrale nullo sul periodo) tali che la u in (**) è di classe C^2 su $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, 2π -periodica in x e risolve (P). Inoltre, se u_0, u_1 sono reali u è reale.

Lemma 4. Date $h, g \in C^1(\mathbb{R})$ con g primitiva di h e $T > 0$ allora g è T -periodica $\iff h$ è T -periodica e $\int_0^T h(x) dx = 0$.

Dimostrazione. Notiamo che h è T -periodica se e solo se $\forall x \int_x^{T+x} h(x) dx = \text{cost.}$

$$\int_x^{T+x} h(x) dx = g \Big|_x^{T+x} = g(T+x) - g(x) = 0 \iff g \text{ è } T\text{-periodica}$$

Dimostrazione Teorema 1.

Parte 1. Se $c_0^0, c_0^1 \in \mathbb{C}$ e $\varphi^+, \varphi^- \in C_{\text{per}}^2$ allora la u data da $(**)$ è C^2 su $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ e 2π -periodica in x e risolve $u_{tt} = v^2 u_{xx}$.

$$\begin{aligned} u_{tt} &= [\ddot{\varphi}^+(x+vt) + \ddot{\varphi}^-(x-vt)]v^2 \\ u_{xx} &= \ddot{\varphi}^+(x+vt) + \ddot{\varphi}^-(x-vt) \end{aligned} \implies u_{tt} = v^2 u_{xx}$$

Parte 2. $\exists c_0^0, c_0^1 \in \mathbb{R}$ e $\varphi^+, \varphi^- \in C_{\text{per}}^2$ tali che la u data da $(**)$ soddisfa la condizione iniziale in (P), per $t = 0$, poste $\varphi^\pm = \varphi^\pm(x \pm v0)$

$$\begin{cases} c_0^0 + \varphi^+ + \varphi^- = u_0 \\ c_0^1 + v(\dot{\varphi}^+ - \dot{\varphi}^-) = u_1 \end{cases} \implies \begin{cases} \varphi^+ + \varphi^- = u_0 - c_0^0 =: g_0 \in C^2 \\ (\varphi^+ - \varphi^-)' = (u_1 - c_0^1)/v =: h_1 \in C^1 \end{cases}$$

ed ora fissiamo $c_0^0 = \int_{-\pi}^{\pi} u_0 dx$ e $c_0^1 = \int_{-\pi}^{\pi} u_1 dx$. In questo modo possiamo applicare il lemma precedente ed ottenere

$$\begin{cases} \varphi^+ + \varphi^- = g_0 \\ (\varphi^+ - \varphi^-)' = g_1' \end{cases} \implies \varphi^+ = \frac{1}{2}(g_0 + g_1) \quad \varphi^- = \frac{1}{2}(g_0 - g_1)$$

dove g_1 è la primitiva di h_1 . □

Teorema 2. Siano $u_0, u_1 \in C_{\text{per}}^0$ tali che $\sum n^2 |c_n^0| < +\infty$ e $\sum |n| \cdot |c_n^1| < +\infty$. Allora $(*)$ definisce una funzione $u: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ di classe C^2 , 2π -periodica in x che risolve (P). Inoltre, se u_0, u_1 sono reali u è reale.

Dimostrazione.

$$u(t, x) = c_0^0 + c_0^1 t + \sum_{n \neq 0} \left(\underbrace{\alpha^+ e^{in(x+vt)}}_{v_n^+} + \underbrace{\alpha^- e^{in(x-vt)}}_{v_n^-} \right)$$

Passo 1. Dimostriamo che $u \in C^0(\mathbb{R} \times \mathbb{R})$ e 2π -periodica in x .

La funzione u soddisfa le condizioni di periodicità. Per mostrare la continuità è sufficiente mostrare che la serie converge totalmente su $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Notiamo che

$$\|v_n^\pm\|_{L^\infty(\mathbb{R} \times \mathbb{R})} = |\alpha^\pm| = O\left(|c_n^0| + \frac{|c_n^1|}{n}\right),$$

dunque sono sommabili in n .

Passo 2. Mostriamo che $u \in C^2(\mathbb{R} \times \mathbb{R})$.

Abbiamo

$$\begin{aligned} D_t^h D_x^k v_n^\pm &= \alpha_n^\pm e^{in(x \pm vt)} (in)^k (ivn)^h \\ \implies \|D_t^h D_x^k v_n^\pm\|_{L^\infty(\mathbb{R} \times \mathbb{R})} &= |\alpha_n^\pm| \cdot |v|^h \cdot |n|^{k+h} = O(|c_n^0| \cdot |n|^{k+h} + |c_n^1| \cdot |n|^{k+h-1}) \end{aligned}$$

che è sommabile se $k + h \leq 2$ in n . La serie in $(*)$ converge totalmente su $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ con tutte le derivate di ordine $\leq 2 \implies u$ è C^2 .

Passo 3. Dimostriamo che u risolve il problema (P). [TO DO: aggiungi link]

Notiamo che $u(t, x)$ risolve l'equazione $u_{tt} = v^2 u_{xx}$ usando il lemma che ci garantisce di poter scambiare serie e derivata usando la regolarità C^2 dimostrata al punto precedente. Inoltre

$$\begin{aligned} c_n(u(0, \cdot)) &= c_n(u_0) \implies u(0, \cdot) = u_0 \\ c_n(u_t(0, \cdot)) &\stackrel{\text{Lem 8}}{=} \dot{c}_n(u(0, \cdot)) = c_n(u_1) \implies u_t(0, \cdot) = u_1. \end{aligned}$$

perché le funzioni sono continue.

Teorema 3 (Unicità). Se $u: I \times [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{C}$ è C^2 in x e t e risolve (P) allora è unica.

Dimostrazione. Si ripercorre la stessa dell'equazione del calore. Dimostriamo che i coefficienti $c_n(t) = c_n(u(t, \cdot))$ definiti per $t \in I$ risolvono (P')...

5.7 Altre applicazioni della serie di Fourier

5.7.1 Disuguaglianza isoperimetrica

Sia D un aperto limitato con frontiera C^1 parametrizzata da un unico cammino γ (quindi niente buchi o più di una componente connessa). Allora $L^2 \geq 4\pi A$ dove L è la lunghezza di ∂D e A è l'area di D . Inoltre vale l'uguale se e solo se D è un disco.

Dimostrazione.

Possiamo scegliere $\gamma: [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{R}^2 \simeq \mathbb{C}$ e γ parametrizzazione di ∂D in senso antiorario ed a velocità costante (da cui $|\dot{\gamma}(t)| = L/2\pi$)

Passo 1.

$$L^2 = 2\pi \int_{-\pi}^{\pi} |\dot{\gamma}|^2 dt = 2\pi \|\dot{\gamma}\|_2^2 = 4\pi^2 \sum |c_n(\dot{\gamma})|^2 = 4\pi^2 \sum n^2 |c_n|^2$$

Passo 2.

$$A \stackrel{(*)}{=} \frac{1}{2} \langle -i\dot{\gamma}, \gamma \rangle = \frac{1}{2} 2\pi \sum (-i(nc_n))c_n = \pi \sum n|c_n|^2$$

Vediamo che vale questa formula per l'area usata in $(*)$, poniamo $\gamma = \gamma_x + i\gamma_y$ allora

$$\begin{aligned} \langle \dot{\gamma}, \gamma \rangle &= \int_{-\pi}^{\pi} \dot{\gamma} \bar{\gamma} dt \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} (\gamma_x - i\gamma_y)(\dot{\gamma}_x + i\dot{\gamma}_y) dt = \\ &= \int_{\gamma} (x - iy)(dx + i dy) = \\ &= \int_D 2i dx dy = 2iA \end{aligned}$$

Passo 3. Infine $L^2 = 4\pi \sum n^2 |c_n|^2$ e $4\pi A = 4\pi \sum n |c_n|^2$, dunque segue subito che $L^2 \geq 4\pi A$ e vale l'uguale se e solo se $n^2 = n$ o se $c_n = 0$ per ogni $n \implies \gamma(t) = c_0 + c_1 e^{it}$ che è una circonferenza di centro c_0 e raggio $|c_1|$.

5.8 Appendice

Studiamo alcune variazioni dell'equazione del calore.

Nota. Un problema del tipo $u_t = a(t) \cdot u_{xx}$ si può risolvere ripercorrendo i passaggi della risoluzione dell'equazione del calore. Viceversa, il problema $u_t = a(x) \cdot u_{xx}$ non si può risolvere allo stesso modo, in quanto, non è vero che il prodotto di serie di Fourier ha come coefficienti il prodotto dei coefficienti.

Studiamo ora variazioni alle condizioni di bordo.

Osservazione. Quando proviamo a risolvere $u_t = u_{xx}$, passiamo alla serie di Fourier e deriviamo; per fare questo passaggio servono le condizioni al bordo⁶; dunque, togliendo le condizioni di periodicità il sistema non funziona più molto bene.

Introduciamo delle varianti della serie di Fourier.

- **Serie di Fourier reale.** Data $u \in L^2([-\pi, \pi])$, definiamo

$$u(x) = \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)] + a_0$$

$$a_n(u) = c_n(u) + c_{-n}(u) \quad b_n(u) = i(c_n(u) - c_{-n}(u)) \quad a_0(u) = c_0(u)$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx) dx \quad b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(nx) dx$$

e con base hilbertiana $\left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{\cos(nx)}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin(nx)}{\sqrt{\pi}} \mid n \geq 1 \right\}$.

- **Serie di Fourier su $[-\pi, \pi]^d$.** Data $u \in L^2([-\pi, \pi]^d, \mathbb{C})$, definiamo

$$u(x) = \sum_{\underline{n} \in \mathbb{Z}^d} c_{\underline{n}} e^{i \underline{n} x} \quad c_{\underline{n}} = c_{\underline{n}}(u) := \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{[-\pi, \pi]^d} u(x) e^{-i \underline{n} x} dx$$

con base di Hilbert

$$\mathcal{F} = \left\{ \frac{e^{i \underline{n} x}}{(2\pi)^{d/2}} : \underline{n} \in \mathbb{Z}^d \right\}$$

C'è da dimostrare che \mathcal{F} è una base di Hilbert.

Dimostrazione (idea).

- Ortonormalità. È un conto [TO DO].
- Completezza. Si può dimostrare come per $d = 1$, oppure si usa il seguente lemma.

Lemma. Sia $\mathcal{F}_1 := \{e_n^1\}$ base di Hilbert di $L^2(X_1, \mathbb{C})$ e $\mathcal{F}_2 := \{e_n^2\}$ base di Hilbert di $L^2(X_2, \mathbb{C})$. Allora, una base di Hilbert di $L^2(X_1 \times X_2, \mathbb{C})$ è

$$\mathcal{F} = \left\{ e_{n_1, n_2}(x_1, x_2) \mid e_{n_1}^1(x_1) e_{n_2}^2(x_2) \right\}$$

Formula chiave. Se $u \in C_{\text{per}}^1(\mathbb{R}^d) = \{\text{funzioni } 2\pi\text{-periodiche in tutte le variabili}\}$. Abbiamo che

$$c_{\underline{n}}(\nabla u) = i \underline{n} c_{\underline{n}}(u), \quad c_{\underline{n}}(\Delta u) = -|\underline{n}|^2 c_{\underline{n}}(u) \quad \text{se } u \in \mathcal{C}_{\text{per}}^2$$

⁶Anche se avevamo derivato le formule formalmente anche a posteriori l'ipotesi delle condizioni al bordo era necessaria.

- **Serie in seni.** Data $u \in L^2([0, \pi])$, allora

$$u(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(nx) \quad b_n = b_n(u) := \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} u(x) \sin(nx) dx$$

con base di Hilbert

$$\mathcal{F} = \left\{ \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin(nx) \mid n \geq 1 \right\}$$

Dimostrazione. Mostriamo l'ortonormalità e la completezza.

Ortonormalità. Sono conti. [TO DO]

Completezza. Data $u \in L^2([0, \pi])$. Sia \tilde{u} l'estensione dispari a $[-\pi, \pi]$. Allora

$$\tilde{u} = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{a}_n \cos(nx) + \tilde{b}_n \sin(nx) \underset{\tilde{u} \text{ dispari}}{=} \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{b}_n \sin(nx).$$

Osservazione. I coefficienti $\tilde{b}_n = b_n$. Si può vedere in diversi modi, un modo possibile è questo.

$$\tilde{b}_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \tilde{u}(x) \sin(nx) dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \tilde{u} \sin(nx) dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} u(x) \sin(nx) dx = b_n.$$

Formula chiave. Data $u \in \mathcal{C}^2([0, \pi])$ con condizioni al bordo $u(\cdot, 0) = u(\cdot, \pi)$. Allora

$$b_n(\ddot{u}) = -n^2 b_n(u)$$

dove

$$\begin{aligned} b_n(\ddot{u}) &:= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \ddot{u}(x) \sin(nx) dx \\ &= \frac{2}{\pi} \left[\dot{u}(x) \sin(nx) \right]_0^{\pi} - n \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \dot{u}(x) \cos(nx) dx \\ &= -n \frac{2}{\pi} \left[u(x) \cos(nx) \right]_0^{\pi} - n^2 \underbrace{\left(\frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} u(x) \sin(nx) dx \right)}_{b_n(u)} \\ &= -n^2 b_n(u). \end{aligned}$$

□

Applicazione (della serie in seni). Risoluzione di EDP su $[0, \pi]$ con condizioni di Dirichlet (omogenee) al bordo.

Esempio. Risolvere

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} & \text{su } [0, \pi] \\ u(\cdot, 0) = u(\cdot, \pi) = 0 \\ u(0, \cdot) = u_0 \end{cases} \quad (\text{P})$$

Soluzione. Poniamo $b_n^0 := b_n(u_0)$. Scriviamo $u(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n(t) \sin(nx)$ serie di seni in x .

Formalmente,

$$u_t = \sum_{n=1}^{\infty} \dot{b}_n(t) \sin(nx) \quad u_{xx} = \sum_{n=1}^{\infty} -n^2 b_n(t) \sin(nx),$$

dunque

$$u_t = u_{xx} \iff \dot{b}_n(t) = -n^2 b_n(t) \quad \forall t \forall n.$$

Cioè $b_n(t)$ risolve il problema di Cauchy.

$$\begin{cases} \dot{y} = -n^2 y \\ y(0) = \dot{b}_n. \end{cases} \quad (\text{P}')$$

Ovvero $b_n(t) = b_n^0 e^{-n^2 t}$, da cui

$$u(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{b_n^0 e^{-n^2 t} \sin(nx)}_{u_n}. \quad (*)$$

Teorema 1 (di esistenza nel futuro). Se $u_0: [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$ è continua e $\sum_n |b_n^0| < +\infty$ (basta $u_0 \in \mathcal{C}^1$ e $u(0) = u(\pi) = 0$). Allora la u in (??) è ben definita e continua su $[0, +\infty) \times \mathbb{R}$ e risolve (??).

Dimostrazione. Dimostriamo il teorema per passi.

Passo 1. Mostriamo che u è ben definita e continua su $(0, +\infty) \times \mathbb{R}$: studiamo la norma del sup. Sia $R = [0, +\infty) \times \mathbb{R}$.

$$\|u_n\|_{L^\infty(R)} \leq |b_n^0| \implies u_n \text{ converge totalmente su } \mathbb{R}.$$

Passo 2. Mostriamo che \mathcal{C}^∞ su $(0, +\infty) \times \mathbb{R}$. Sia $R_\delta = (\delta, +\infty) \times \mathbb{R}$. Stimiamo le derivate.

$$\begin{aligned} D_t^k D_x^h u_n &= b_n^0 (-n^2)^k e^{-n^2 t} \cdot n^h \cdot \underbrace{\dots}_{*} \\ \implies \|D_t^k D_x^h u_n\|_{L^\infty(R_\delta)} &= |b_n^0| \underbrace{e^{-n^2 \delta} \cdot |n|^{2k+h}}_{\substack{\text{limitato in } n \\ \text{perché è infinitesimo in } n}} \end{aligned}$$

Allora le norme delle derivate sono sommabili per ogni n , dunque $u \in \mathcal{C}^\infty(R_\delta)$ per ogni δ , da cui $u \in \mathcal{C}^\infty((0, +\infty), \mathbb{R})$.

Passo 3. Mostriamo che la $u(t, x)$ definita in (??) risolve (??).

- u risolve $u_t = u_{xx}$ per $t > 0$. Infatti, l'equazione è lineare per quanto mostrato al punto sopra e dunque posso scambiare serie e derivata.
- u soddisfa la condizione iniziale $u(0, \cdot) = u_0$, perché hanno gli stessi coefficienti di Fourier.
- Sono soddisfatte anche le condizioni al bordo, infatti

$$u(\cdot, 0) = u(\cdot, \pi) = 0$$

□

Domanda. Quale ipotesi su u_0 garantisce $\sum_n |b_n^0| < +\infty$? Basta $u_0 \in \mathcal{C}^1$ e $u(0) = u(\pi) = 0$.

Teorema 2 (non esistenza nel passato). Esiste $u_0: [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$ \mathcal{C}^∞ , con $u_0(0) = u_0(\pi) = 0$ tale che per ogni $\delta > 0$ (??) non ha alcuna soluzione $u: (-\delta, 0] \times [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$ continua e \mathcal{C}^1 in t e \mathcal{C}^2 in x .

Teorema 3 (di unicità). Sia $u: [0, T] \times [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{C}$ continua, \mathcal{C}^1 nel tempo e \mathcal{C}^2 nello spazio per $t > 0$. Se u risolve (??) su $t > 0$ allora u è unica.

5.8.1 Operatori autoaggiunti

Notiamo che l'efficacia per la soluzione di certe EDP dipende dal fatto che

$$c_n(u) = inc_n(u) \quad b_n(\ddot{u}) = -n^2 b_n(u)$$

che segue (almeno formalmente) da $(e^{inx})' = ine^{inx}$ e $(\sin(nx))'' = -n^2 \sin(nx)$.

Cioè che $\{e^{inx}/\sqrt{2\pi}\}$ è una base ortonormale di $L^2([-\pi, \pi], \mathbb{C})$ di autovettori di D^7 e $\{\sqrt{2/\pi} \sin(x)\}$ è una base ortonormale di $L^2([0, \pi]; \mathbb{C})$ di autovettori di D^2 .

Analogamente per risolvere $u_t = \Delta u$ su Ω , basterebbe avere $\{e_n\}$ base ortonormale di $L^2(\Omega)$ fatta di autovettori del laplaciano.

Per avere una base ortonormale di autovettori di un operatore T serve che T sia autoaggiunto (almeno in dimensione finita).

Definizione. Dato H spazio di Hilbert complesso o reale, D sottospazio denso di H , $T: D \rightarrow H$ lineare (non necessariamente continuo), dico che T è **autoaggiunto** se $\langle Tx, y \rangle = \langle x, Ty \rangle$ per ogni $x, y \in D$. Infine, si dice che T è **definito positivo** se $\langle Tx, x \rangle > 0$.

Proposizione. Dato T come sopra

- i) Se λ è autovalore di T (ovvero tale che $\exists x \neq 0$ tale che $Tx = \lambda x$) allora λ è reale.
- ii) Dati $\lambda_1 \neq \lambda_2$ autovalori allora $V_{\lambda_1} \perp V_{\lambda_2}$ dove $V_\lambda := \{x \mid Tx = \lambda x\}$.
- iii) Se T è definito positivo allora $\underbrace{\langle Tx, x \rangle}_{\text{è reale}} > 0$ per ogni $x \in D$ dunque ogni autovalore è > 0 .

Nota. In dimensione infinita manca un teorema spettrale, ovvero tale che $\overline{\bigoplus_\lambda V_\lambda} = H$.

Esempio 1. Sia $H = L^2([-\pi, \pi], \mathbb{C})$, $D = \{u \in \mathcal{C}^2(-\pi, \pi) \mid u(-\pi) = u(\pi)\}$ e $T: D \rightarrow H$ tale che $u \mapsto i\dot{u}$. Mostrare che

- i) T è autoaggiunto
- ii) Gli autovalori di T sono $\lambda_n = n$ con $n \in \mathbb{Z}$ $V_{\lambda_n} = V_n = \text{Span}\{e^{inx}\}$.
- iii) T non è continuo

In questo caso esiste una base ortonormale di L^2 di autovettori di T . [TO DO: aggiustare].

Dimostrazione.

- i) Dati $u, v \in D(= \mathcal{C}_{\text{per}}^1)$, allora

$$\langle Tu, v \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} i\dot{u}\bar{v} \, dx = \cancel{\int_{-\pi}^{\pi} iu\bar{v}' \, dx} - \int_{-\pi}^{\pi} iu\bar{v} \, dx = \int_{-\pi}^{\pi} u\bar{v}' \, dx$$

- ii) Questo è un esercizio di equazioni differenziali ordinarie. Risolviamo il problema

$$\begin{cases} i\dot{u} = \lambda u & \text{su } [-\pi, \pi] \\ u(\pi) = u(-\pi) \end{cases}$$

⁷Operatore derivata.

da cui $\dot{u} + i\lambda u = 0$, che ha polinomio associato $t + i\lambda = 0$ con radice $-i\lambda$. In conclusione la soluzione del problema sopra è $\alpha e^{i\lambda x}$.

Dalla condizione al bordo abbiamo che $\alpha e^{i\lambda\pi} = \alpha e^{-i\lambda\pi}$ dunque $e^{i\lambda\pi} = e^{-i\lambda\pi} \iff e^{2i\lambda\pi} = 1 \iff \lambda \in \mathbb{Z}$.

iii) Siccome gli autovalori sono illimitati, T non è continuo. \square

Esempio 3. Sia $H = L^2([-\pi, \pi], \mathbb{C})$ $D = \{u \in C^1(-\pi, \pi)\}$ e $T: D \rightarrow H$ tale che $u \mapsto i\dot{u}$.

Dimostrazione. Dati $u, v \in D$ abbiamo

$$\begin{aligned} \langle Tu, v \rangle &= \int_{-\pi}^{\pi} i\dot{u}\bar{v} \, dx = |i\dot{u}\bar{v}|_{-\pi}^{\pi} - \int_{-\pi}^{\pi} iu\bar{\dot{v}} \, dx \\ &= i(u(\pi)\bar{v}(\pi) - u(-\pi)\bar{v}(-\pi)) + \langle u, Tv \rangle \neq \langle u, Tv \rangle. \end{aligned}$$

In quanto, in generale, il termine $u(\pi)\bar{v}(\pi) - u(-\pi)\bar{v}(-\pi)$ è diverso da zero.

Esercizio. Cercare $T: L^2([0, 1]) \rightarrow L^2([0, 1])$ continuo autoaggiunto senza autovalori.

Suggerimento. Cercare T del tipo $T: u \mapsto gu$ con $g \in L^\infty$.

5.9 Esercitazione del 25 Novembre 2021

Esercizio. Consideriamo l'equazione alle derivate parziali

$$\begin{cases} u_{ttt}(t, x) = u_{xx}(t, x) & x \in [-\pi, \pi] \\ u(\cdot, \pi) = u(\cdot, -\pi) \\ u_x(\cdot, \pi) = u_x(\cdot, -\pi) \\ u(0, \cdot) = u_0 \\ u_x(0, \cdot) = u_1 \\ u_{xx}(0, \cdot) = u_2 \end{cases} \quad (P)$$

ponendo $c_n^i := c_n(u_i)$ per $n \in \mathbb{Z}$ per $i = 1, 2, 3$. Segue subito che il problema di Cauchy sui coefficienti è

$$\begin{cases} \ddot{c}_n(t) = -n^2 c_n(t) \\ c_n(0) = c_n^0 \\ \dot{c}_n(0) = c_n^1 \\ \ddot{c}_n(0) = c_n^2 \end{cases} \quad \forall n \in \mathbb{Z} \quad (P')$$

che ha polinomio caratteristico $p(\lambda) = \lambda^3 + n^2 \implies \lambda^3 = -n^2$ e dunque le soluzioni sono $\lambda_i = n^{2/3} \zeta_6^{2i-1}$ con ζ_6 una radice sesta dell'unità. Per comodità per $i = 1, 2, 3$ poniamo $z_i := n^{2/3} \omega_i$ con ω_i soluzioni di $\omega^3 = -1$ che possiamo anche riscrivere come

$$\omega_1 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \quad \omega_2 = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i \quad \omega_3 = -1$$

Dunque per $n \in \mathbb{Z}$ e $n \neq 0$ la soluzione sarà

$$\begin{cases} c_n(t) = A_n e^{-z_1^n t} + B_n e^{-z_2^n t} + C_n e^{-z_3^n t} \\ c_n(0) = c_n^0 = A_n + B_n + C_n \\ c_n(1) = c_n^1 = A_n z_1^n + B_n z_2^n + C_n z_3^n \\ c_n(2) = c_n^2 = A_n (z_1^n)^2 + B_n (z_2^n)^2 + C_n (z_3^n)^2 \end{cases}$$

e quindi otteniamo il sistema

$$\Rightarrow \begin{cases} c_n^0 = A_n + B_n + C_n \\ n^{-2/3} c_n^1 = A_n \omega_1 + B_n \omega_2 + C_n \omega_3 \\ n^{-4/3} c_n^2 = A_n \omega_1^2 + B_n \omega_2^2 + C_n \omega_3^2 \end{cases} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \omega_1 & \omega_2 & \omega_3 \\ \omega_1^2 & \omega_2^2 & \omega_3^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_n \\ B_n \\ C_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_n^0 \\ n^{-2/3} c_n^1 \\ n^{-4/3} c_n^2 \end{pmatrix}$$

e facendo conti si ottengono A_n, B_n e C_n e si scopre che [TODO: Controllare i conti con Mathematica]

$$\begin{aligned} A_n e^{n^{2/3}(t/2+i\sqrt{3}t/2)} &\sim e^{n^{2/3}t/2} \xrightarrow{t \rightarrow \infty} \infty \\ B_n e^{n^{2/3}(t/2-i\sqrt{3}t/2)} &\sim e^{n^{2/3}t/2} \xrightarrow{t \rightarrow \infty} \infty \\ C_n e^{-n^{2/3}t} &\sim e^{-n^{2/3}t} \xrightarrow{t \rightarrow -\infty} \infty \end{aligned}$$

dunque in realtà anche se il problema in partenza sembrava ben definito in realtà non ha soluzione per alcun $t \in \mathbb{R}$.

Conti esatti con Mathematica:

$$\begin{aligned} A_n &\rightarrow \frac{c_n^0}{3} - \frac{c_n^2}{3n^{4/3}} - \frac{(-1)^{2/3} c_n^2}{3n^{4/3}} - \frac{(-1)^{2/3} c_n^1}{3n^{2/3}}, \\ B_n &\rightarrow \frac{c_n^0}{3} - \frac{c_n^2}{6n^{4/3}} + \frac{ic_n^2}{2\sqrt{3}n^{4/3}} + \frac{c_n^1}{6n^{2/3}} + \frac{ic_n^1}{2\sqrt{3}n^{2/3}}, \\ C_n &\rightarrow \frac{c_n^0}{3} + \frac{c_n^2}{3n^{4/3}} - \frac{c_n^1}{3n^{2/3}} \end{aligned}$$

Esercizio. (Equazione del calore senza una condizione al bordo)

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} & x \in [-\pi, \pi] \\ u(\cdot, -\pi) = u(\cdot, \pi) \\ u(0, \cdot) = u_0 = \cos(x/2) \end{cases} \quad (P)$$

i) *Esiste una soluzione?*

Sì in quanto esiste anche con una condizione in più

ii) *È unica?*

Senza periodicità per u_x non è vero in generale che $c_n(u_{xx}(t, \cdot)) = -n^2 c_n(u(t, \cdot))$.

Cerchiamo una soluzione della forma $u(t, x) = \cos(x/2)\psi(t)$. Abbiamo che $u_t(t, x) = \dot{\psi}(t) \cos(x/2)$ e $u_{xx}(t, x) = -\cos(x/2)\psi(t)/4$. Dunque $\psi(t) = -\dot{\psi}(t)/4$ e $\psi(0) = 1 \Rightarrow \psi(t) = e^{-t/4}$.

Esercizio.

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} & x \in [0, \pi] \\ u(t, 0) = 0 & t \in \mathbb{R} \\ u(t, \pi) = t & t \in \mathbb{R} \\ u(0, \cdot) = u_0 \end{cases} \quad (P)$$

L'equazione è lineare, cerchiamo $u(t, x) = v(t, x) + \psi(t, x)$ in modo che $v(t, x) = 0$ se $x = 0, \pi$ e $\psi(t, 0) = 0$ e $\psi(t, \pi) = t$ e $\psi(t, x) = tx/\pi$.

Esercizio.

$$\begin{cases} u_t = u_{xxxx} & x \in [-\pi, \pi] \\ u(\cdot, \pi) = u(\cdot, -\pi) \\ u_x(\cdot, \pi) = u_x(\cdot, -\pi) \\ u_{xx}(\cdot, \pi) = u_{xx}(\cdot, -\pi) \\ u_{xxx}(\cdot, \pi) = u_{xxx}(\cdot, -\pi) \\ u(0, \cdot) = u_0 \end{cases} \quad (\text{P})$$

Esercizio.

$$\begin{cases} u_t = u_{xxxx} & x \in [0, \pi] \\ u(\cdot, 0) = u(\cdot, \pi) = 0 \\ u_{xx}(\cdot, 0) = u_{xx}(\cdot, \pi) = 0 \\ u(0, \cdot) = u_0 \end{cases} \quad (\text{P})$$

Esercizio. Sia V il seguente insieme

$$V := \left\{ f \in L^1([1, +\infty)) \mid |f(x)| \leq \frac{1}{x^2} \text{ per q.o. } x \right\}$$

è compatto in L^1 ? e se al posto di L^1 avessimo L^2 ?

[TODO: Espandere]

Intuitivamente $V \supseteq \{f \mid |f(x)| \leq 1/2 \text{ q.o. in } [1, 2]\}$ che non è compatto in quanto contiene famiglie di funzioni che “oscillano molto” costruite sull’idea della base di Haar.

Esercizio. Trovare una funzione in $L^p([0, +\infty))$ tale però che $f \notin L^q$ per $q \neq p$.

Cercare f della forma

$$f(x) = \frac{1}{x^\alpha(a + (\ln x)^\beta)}$$

Capitolo 6

Trasformata di Fourier

Data $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ poniamo

$$f(x) \stackrel{(*)}{=} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(y) e^{iyx} dy \quad \hat{f}(y) := \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-iyx} dx.$$

Dove \hat{u} si chiama *trasformata di Fourier*¹ di u e la formula $(*)$ si dice *formula di inversione*.

Derivazione formale (della formula di inversione). Prendiamo $f \in \mathcal{C}_C^1(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ e $\delta > 0$ tale che $\text{supp}(f) \subset [-\pi/\delta, \pi/\delta]$.

Scriviamo f in serie di Fourier su $[-\pi/\delta, \pi/\delta]$ (serve un cambio di variabile per ricondursi alla serie di Fourier su $[-\pi, \pi]$).

$$f(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n^\delta(f) e^{in\delta x}$$
$$c_n^\delta(f) := \frac{\delta}{2\pi} \int_{-\pi/\delta}^{\pi/\delta} f(x) e^{-in\delta x} dx = \frac{\delta}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-in\delta x} dx = \frac{\delta}{2\pi} \hat{f}(n\delta).$$

Dunque,

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{\delta}{2\pi} \underbrace{\hat{f}(n\delta) e^{i(n\delta)x}}_{\hat{f}(y) e^{iyx} \text{ calcolata in } y=n\delta}$$

dove $\sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{\delta}{2\pi} \hat{f}(n\delta) e^{i(n\delta)x}$ è la somma di Riemann di $\int_{-\infty}^{\infty} \hat{f} e^{iyx} dy$. Dunque

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{\delta}{2\pi} \hat{f}(n\delta) e^{i(n\delta)x} \xrightarrow{\delta \rightarrow 0} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(y) e^{iyx} dy.$$

Quest'ultimo passaggio non è giustificato rigorosamente ma si può rendere rigoroso per $f \in \mathcal{C}_C^1(\mathbb{R})$.

Definizione. Data $f \in L^1(\mathbb{R}; \mathbb{C})$ la **trasformata di Fourier** \hat{f} è definita da

$$\hat{f}(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-ixy} dx \quad \forall y \in \mathbb{R}.$$

¹Sostituisce la serie di Fourier quando si passa da funzioni su \mathbb{R} 2π -periodiche a funzioni su \mathbb{R} .

Teorema. Data $f \in L^1(\mathbb{R}; \mathbb{C})$, allora

- i) \widehat{f} è ben definita in ogni punto di \mathbb{R} .
- ii) Vale $\|\widehat{f}\|_\infty \leq \|f\|_1$.
- iii) \widehat{f} è continua
- iv) \widehat{f} è infinitesima.

Dimostrazione.

- i) $\widehat{f}(y)$ è ben definita per ogni $y \in \mathbb{R}$. Infatti, $f(x)e^{-iyx} \in L^1$ dato che

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)e^{-iyx}| dx = \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx = \|f\|_1.$$

- ii) $\|\widehat{f}\|_\infty \leq \|f\|_1$. Infatti,

$$|\widehat{f}|_\infty \leq \int |f(x)e^{-iyx}| dx = \|f\|_1$$

- iii) \widehat{f} è continua. Se $y_n \rightarrow y$, allora

$$\widehat{f}(y_n) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-ixy_n} dx \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-iny} dx = \widehat{f}(y)$$

per convergenza dominata. Infatti, la convergenza puntuale segue dalla continuità dell'esponenziale; mentre la dominazione è data da $|f(x)e^{-ixy_n}| = |f(x)|$.

- iv) $\widehat{f}(y) \xrightarrow{y \rightarrow \pm\infty} 0$ per il lemma di Riemann-Lebesgue.

□

6.1 Proprietà della trasformata di Fourier

Data $f \in L^1(\mathbb{R}; \mathbb{C})$ abbiamo posto

$$\forall y \in \mathbb{R} \quad \mathcal{F}(f)(y) = \widehat{f}(y) := \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-iyx} dx$$

ed abbiamo visto che

Teorema 1. $\widehat{f} \in C_0(\mathbb{R}; \mathbb{C})$ e $\|\widehat{f}\|_\infty \leq \|f\|_1$.

Proposizione 2. Data $f \in L^1(\mathbb{R}; \mathbb{C})$ allora

- i) $\forall h \in \mathbb{R}$ vale $\widehat{\tau_h f} = e^{-ihy} \widehat{f}$
- ii) $\forall h \in \mathbb{R}$ vale $\widehat{e^{ihx} f} = \tau_h \widehat{f}$
- iii) $\forall \delta \neq 0$ vale $\widehat{\sigma_\delta f} = \widehat{f}(\delta y)$

Derivazione. Partendo dalla formula di inversione

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{2\pi} \int \widehat{f}(y) e^{iyx} dy \\ f(x-h) &= \frac{1}{2\pi} \int \underbrace{\widehat{f}(y) e^{-ihy}}_{= \widehat{f(x-h)}} e^{iyx} dy \end{aligned}$$

Dimostrazione. Facciamo il calcolo diretto

$$\begin{aligned} \widehat{\tau_h f} &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-h) e^{-ixy} dx = \\ &= \left(\begin{array}{l} t = x-h \\ dt = dx \end{array} \right) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-i(t+h)y} dt = \\ &= e^{-ihy} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-ity} dt = e^{-ihy} \widehat{f}(t). \end{aligned}$$

Analogamente seguono anche le altre □

Proposizione 3. Sia $f \in C^1(\mathbb{R}; \mathbb{C})$ con $f, f' \in L^1$ allora $\widehat{f'} = iy\widehat{f}$ (da confrontare con $c_n(f') = inc_n(f)$ nel caso della serie di Fourier).

Derivazione. Si deriva la formula di inversione

$$f'(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{f}(y) iye^{ixy} dy$$

Dimostrazione. Vediamo prima una dimostrazione che non funziona e cerchiamo di aggiustarla. Abbiamo che

$$\widehat{f'}(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f'(x) e^{-iyx} dx = \underbrace{\left[f(x) e^{-iyx} \right]_{-\infty}^{+\infty}}_{=0} + iy \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-iyx} dx = iy\widehat{f}(y)$$

serve che $f(x) \rightarrow 0$ per $|x| \rightarrow +\infty$ (ad esempio $f \in C \cap L^1$ lo implica), in realtà $f \in C^1$ e $f, f' \in L^1$ basta, ma la dimostrazione è più complicata.

Argomentiamo come segue, $f \in L^1 \implies \liminf_{|x| \rightarrow \infty} |f(x)| = 0$ (in quanto se $\liminf_{|x| \rightarrow \infty} |f(x)| = \delta > 0$ allora la funzione sarebbe $> \delta$ per $|x| \rightarrow +\infty$ ed avrebbe integrale $+\infty$) dunque esistono due successioni $a_n \rightarrow -\infty, b_n \rightarrow +\infty$ tali che $f(a_n) \rightarrow 0$ e $f(b_n) \rightarrow 0$ quindi come prima abbiamo

$$\begin{aligned} \widehat{f'}(y) &= \lim_n \int_{a_n}^{b_n} f'(x) e^{iyx} dx = \\ &= \lim_n \int \mathbb{1}_{[a_n, b_n]} f'(x) e^{iyx} dx = \\ &= \lim_n \left(\underbrace{\left[f(x) e^{-iyx} \right]_{a_n}^{b_n}}_{\rightarrow 0} + iy \int_{a_n}^{b_n} f(x) e^{-iyx} dx \right) = \\ &= \lim_n iy \int_{a_n}^{b_n} f(x) e^{-iyx} dx = \\ &= iy\widehat{f}(y) \end{aligned}$$

□

Proposizione 4. Sia $f \in L^1$ con $xf \in L^1$, allora $\widehat{f} \in C^1(\mathbb{R}; \mathbb{C})$ e $(\widehat{f})' = -i\widehat{xf}$.

Dimostrazione.

$$\widehat{f}(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-ixy} dx \implies (\widehat{f})'(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)(-ix)e^{-ixy} dx = -i\widehat{xf}$$

Proposizione 5. (Derivazione sotto segno di integrale) Sia I un intervallo di \mathbb{R} , E misurabile in \mathbb{R}^d e $g: I \times E \rightarrow \mathbb{C}$ tale che

i) $g(\cdot, x) \in C^1(I)$ per q.o. $x \in E$.

ii) $\exists h_0, h_1 \in L^1(E)$ tali che

$$|g(t, x)| \leq h_0(x) \quad \text{e} \quad \left| \frac{\partial g}{\partial t}(t, x) \right| \leq h_1(x)$$

allora $G(t) := \int_E g(t, x) dx$ è ben definita per ogni $t \in I$ e $G \in C^1(I)$ e

$$G'(t) = \int_E \frac{\partial}{\partial t} g(t, x) dx$$

Traccia dimostrazione.

- *Passo 1:* $G(t)$ e $\tilde{G}(t)$ sono ben definite $\forall t \in I$ (grazie alla dominazione) e continue in t (usando convergenza dominata e le dominazioni)
- *Passo 2:* Dobbiamo far vedere che G è C^1 con derivata \tilde{G} , si usa la seguente forma del teorema fondamentale del calcolo integrale

$$\forall t_0, t_1 \in I \text{ con } t_0 < t_1 \quad G(t_1) - G(t_0) \stackrel{(*)}{=} \int_{t_0}^{t_1} \tilde{G}(t) dt$$

ed usando Fubini-Tonelli in (*).

Proposizione 6. (Prodotto di convoluzione e trasformata di Fourier). Siano $f_1, f_2 \in L^1(\mathbb{R}; \mathbb{C})$, allora $f_1 * f_2 \in L^1$ (già visto) e vale

$$\mathcal{F}(f_1 * f_2) = (\mathcal{F}f_1) \cdot (\mathcal{F}f_2)$$

Dimostrazione.

$$\begin{aligned} \widehat{f_1 * f_2}(y) &= \int f_1 * f_2(x) e^{-ixy} dx = \\ &= \iint f_1(x-t) f_2(t) dt e^{-ixy} dx = \\ &= \int \left(\int f_1(x-t) e^{-i(x-t)y} dx \right) f_2(t) e^{-ity} dt = \\ &= \int \widehat{f_1}(y) f_2(t) e^{-ity} dt = \widehat{f_1}(y) \cdot \widehat{f_2}(y) \end{aligned}$$

Definizione. Data $g \in L^1(\mathbb{R}; \mathbb{C})$ definiamo l'**antitrasformata di Fourier** di g la funzione

$$\check{g}(x) := \int_{-\infty}^{+\infty} g(y) e^{ixy} dy.$$

Cioè $\check{g}(x) = \widehat{g}(-x)$ e scriviamo anche $\check{g} = \mathcal{F}^*g$. Effettivamente \mathcal{F}^* è l'aggiunto di \mathcal{F} , almeno formalmente² infatti abbiamo

$$\langle \mathcal{F}f, g \rangle = \iint f \overline{e^{ixy}g(y)} dx dy = \int f(x) \overline{\check{g}(x)} dx = \langle f, \mathcal{F}^*g \rangle.$$

Teorema 7. Data $f \in L^1(\mathbb{R}; \mathbb{C})$ tale che $\widehat{f} \in L^1(\mathbb{R}; \mathbb{C})$ allora

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \mathcal{F}^* \mathcal{F}f = 2\pi f \quad \text{cioè} \quad \int \widehat{f}(x) e^{ixy} dy = 2\pi f(x)$$

Nota. Una funzione continua e infinitesima non è, in generale, una funzione L^1 ; in particolare, l'ipotesi $\widehat{f} \in L^1$ è necessaria e non deriva dalle proprietà già note.

Dimostrazione. *Dimostrazione diretta* (passando dalla Delta di Dirac dei fisici):

$$\begin{aligned} \mathcal{F}^* \mathcal{F}f &= \int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{f}(y) e^{iyx} dy = \\ &= \iint f(t) e^{-iyt} dt e^{ixy} dy = \\ &= \int f(t) \underbrace{\int e^{i(x-t)y} dy}_{\text{"}\delta(x-t)\text{"}} dt = f(x) \end{aligned}$$

Dimostrazione vera: scegliamo una funzione ausiliaria $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tale che

- i) $\varphi(0) = 1$ continua in 0 e φ limitata
- ii) $\varphi \in L^1$
- iii) $\check{\varphi} \in L^1$

e poniamo $g_\delta(x) := \int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{f}(y) \varphi(\delta y) e^{ixy} dy$.

- *Passo 1:* $g_\delta(x) \rightarrow \mathcal{F}^* \mathcal{F}f(x)$ per ogni $x \in \mathbb{R}$ per convergenza dominata

$$\int \widehat{f}(y) e^{iyx} \varphi(\delta y) dy \xrightarrow{\delta \rightarrow 0} \int \widehat{f}(y) e^{iyx} dy$$

e come dominazione usiamo $|\widehat{f}(y) e^{iyx} \varphi(\delta y)| \leq |\widehat{f}(y)| \cdot \|\varphi\|_\infty$

- *Passo 2:* $g_\delta(x) = \int \left(\int f(t) e^{-ity} dt \right) e^{ixy} \varphi(\delta y) dy$, per Fubini-Tonelli otteniamo

$$\begin{aligned} &= \iint \varphi(\delta y) e^{i(x-t)y} dy f(t) dt = \\ &= \int \sigma_\delta \check{\varphi}(x-t) f(t) dt = \sigma_\delta \check{\varphi} * f(x). \end{aligned}$$

- *Passo 3:* $g_\delta \rightarrow mf$ in L^1 con $m = \int_{\mathbb{R}} \check{\varphi}(x) dx$ (per il teorema di approssimazione e per ipotesi).

²In L^1 non è definito il prodotto scalare.

- *Passo 4:* Usando il primo ed il terzo passo otteniamo $\mathcal{F}^* \mathcal{F} f = m f$ per quasi ogni x , in quanto la convergenza puntuale e quella in L^1 devono essere compatibili; in particolare, la convergenza in L^1 a meno di sottosuccessioni equivale alla convergenza puntuale e dunque coincidono.
- *Passo 5:* $m = 2\pi$ ad esempio prendendo $\varphi(y) = e^{-|y|}$, segue che

$$\check{\varphi}(y) = \frac{2}{1+x^2}$$

e dunque $m = 2\pi$. In realtà vale per ogni φ che verifica le condizioni dell'ipotesi.

In conclusione, riportiamo la verifica di Fubini-Tonelli:

$$\iint |f(t) e^{-ity} e^{ixy} \varphi(\delta y)| dt dy = \iint |f(t)| \cdot |\varphi(\delta y)| dt dy = \|f\|_1 \cdot \|\varphi(\delta y)\|_1 < +\infty$$

□

Corollario 8. Date $f_1, f_2 \in L^1$ tali che $\widehat{f_1} = \widehat{f_2} \implies f_1 = f_2$ quasi ovunque cioè \mathcal{F} è iniettiva, cioè f è univocamente determinata da \widehat{f} .

Dimostrazione. Per ipotesi, $\widehat{f_1} - \widehat{f_2} = \widehat{f_1 - f_2} = 0$. Applicando il Teorema 7 a $\widehat{f_1 - f_2}$ (possiamo farlo perché $0 \in L^1$) otteniamo

$$0 = \int \widehat{f_1 - f_2}(x) e^{ixy} dy = 2\pi(f_1(x) - f_2(x)) \Rightarrow f_1(x) = f_2(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

□

Esercizio. Date $f_1, f_2 \in L^1([-\pi, \pi]; \mathbb{C})$ e tali che per ogni $n \in \mathbb{Z}$ vale $c_n(f_1) = c_n(f_2)$ allora $f_1 = f_2$ quasi ovunque (e $c_n(f) = 0$ per ogni $n \implies f = 0$ q.o.).

6.2 Trasformata di Fourier su L^2

Abbiamo visto che la *serie di Fourier* si definisce naturalmente su L^2 (uno spazio di Hilbert) mentre la *trasformata di Fourier* ha bisogno di L^1 che non è uno spazio di Hilbert. Vedremo ora come estendere la trasformata di Fourier ad L^2 e come poter fare i conti.

Proposizione 1. Data $f \in L^1(\mathbb{R}; \mathbb{C}) \cap L^2(\mathbb{R}; \mathbb{C})$ vale $\|\widehat{f}\|_2 = \sqrt{2\pi} \|f\|_2$.

Teorema 2. \mathcal{F} si estende per continuità da $L^1 \cap L^2$ a tutto L^2 e $\mathcal{F}/\sqrt{2\pi}$ risulta essere un'isometria (come operatore a valori in L^2).

Corollario 3. (Identità di Plancherel). $\forall f_1, f_2 \in L^2(\mathbb{R}; \mathbb{C})$ vale $\langle \widehat{f_1}, \widehat{f_2} \rangle = 2\pi \langle f_1, f_2 \rangle$.

Osservazione. Come si può calcolare \widehat{f} per $f \in L^2 \setminus L^1$? Se per quasi ogni $y \in \mathbb{R}$ esiste il limite

$$\lim_n \underbrace{\int_{-n}^n f(x) e^{-ixy} dx}_{\widehat{f_n}(y)}$$

allora coincide con $\widehat{f}(y)$.

Infatti, per ogni n posto $f_n := f \cdot \mathbb{1}_{[-n, n]}$ abbiamo che $\lim_n \int_{-n}^n f(x) e^{-ixy} dx = \widehat{f_n}(x)$. A questo punto, osserviamo che $f_n \rightarrow f$ in L^2 (da controllare per esercizio) e quindi $\widehat{f_n} \rightarrow \widehat{f}$ in L^2

(segue dalla continuità della trasformata). Siccome per ipotesi \widehat{f}_n converge puntualmente quasi ovunque allora $\widehat{f}_n \rightarrow \widehat{f}$ puntualmente quasi ovunque.

Intuitivamente, il Teorema 2 e l'identità di polarizzazione danno il Corollario 3. mentre il Teorema 2 segue dalla Proposizione 1. più un fatto noto usando che $L^1 \cap L^2$ è denso in L^2 .

Fatto Noto. Dati X e Y spazi metrici, Y completo e D denso in X , $g: D \rightarrow Y$ uniformemente continua allora g ammette un'unica estensione $G: X \rightarrow Y$ continua. (Inoltre se X e Y sono spazi normati e g è lineare allora anche G è lineare)

Dimostrazione Proposizione 1.

Dimostrazione che non funziona: Proviamo a svolgere il calcolo diretto

$$\begin{aligned}\|\widehat{f}\|_2^2 &= \int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{f}(y) \overline{\widehat{f}(y)} dy \\ &= \iiint f(x) e^{-ixy} \overline{f(t)} e^{-ity} dt dx dy = \\ &= \iint f(x) \overline{f(t)} \underbrace{\left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-iy(t-x)} dy \right)}_{\delta(x-t)} dt dx = \\ &= \int \left(\int f(x) \delta(x-t) dx \right) \overline{f(t)} dt = \\ &= 2\pi \int f(t) \overline{f(t)} dt = 2\pi \|f\|_2^2\end{aligned}$$

vediamo però che compare l'integrale $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-iy(t-x)} dy$ e serve assumere che corrisponda a $\delta(x-t)$ dove δ è la “funzione Delta di Dirac”, vediamo ora la dimostrazione formale usando una funzione ausiliaria.

Dimostrazione formale: Prendiamo $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow [0, +\infty]$ tale che

- i) φ continua in 0, crescente per $y < 0$ e decrescente per $y > 0$ e $\varphi(0) = 1$.
- ii) $\varphi \in L^1$ e $\check{\varphi} \in L^1$.

Poniamo per ogni δ

$$I_\delta = \int_{-\infty}^{+\infty} |\widehat{f}(y)|^2 \varphi(\delta y) dy \stackrel{?}{\rightarrow} \int_{-\infty}^{+\infty} |f(y)|^2$$

- *Passo 1:* $I_\delta \xrightarrow{\delta \rightarrow 0} \|\widehat{f}\|_2^2$ per convergenza monotona usando l'ipotesi di crescita/descrescenza prima/dopo lo 0.

- *Passo 2:*

$$\begin{aligned}
I_\delta &= \int \widehat{f}(y) \overline{\widehat{f}(y)} \varphi(\delta y) dy = \\
&= \int \left(\int f(x) e^{-ixy} dx \right) \left(\int \overline{f(t)} e^{ity} dt \right) \varphi(\delta y) dy = \\
&\stackrel{\text{FT}}{=} \iint f(x) \overline{f(t)} \underbrace{\left(\int \varphi(\delta y) e^{i(t-x)y} dy \right)}_{\sigma_\delta \check{\varphi}(t-x)} dx dy = \\
&= \int (f(x) \sigma_\delta \check{\varphi}(t-x) dx) \overline{f(t)} dt = \\
&= \int f * \sigma_\delta \check{\varphi}(t) \cdot \overline{f(t)} dt = \\
&= \langle f * \sigma_\delta \check{\varphi}; f \rangle
\end{aligned}$$

e possiamo applicare il teorema di Fubini-Tonelli in quanto le ipotesi sono verificate infatti

$$\begin{aligned}
&\iiint |f(x) \overline{f(t)}| e^{i(t-x)y} \varphi(\delta y) dx dt dy = \\
&= \iiint |f(x)| \cdot |f(t)| \cdot |\varphi(\delta y)| dx dt dy = \\
&= \|f\|_1^2 \|\varphi(\delta y)\|_1 < +\infty
\end{aligned}$$

e $\|\varphi(\delta y)\|_1 < +\infty$ poiché $\varphi \in L^1$.

- *Passo 3:* $I_\delta \xrightarrow{\delta \rightarrow 0} 2\pi \|f\|_2^2$. Infatti $I_\delta = \langle f * \sigma_\delta \check{\varphi}; f \rangle$ e

$$\sigma_\delta \check{\varphi} \xrightarrow{\text{in } L^2} mf \quad \text{con } m = \int \check{\varphi}(x) dx$$

- *Passo 4:* Infine $m = 2\pi$ ad esempio prendendo $\varphi(y) = e^{-|y|}$

$$\check{\varphi}(x) = \frac{2}{1+x^2} \in L^1$$

ed in questo caso m si calcola.

□

6.2.1 Proprietà della trasformata di Fourier in L^2

Proposizione 4.

- $\widehat{\tau_h f} = e^{-ihy} \widehat{f}$
- $\widehat{e^{ihx} f} = \tau_h \widehat{f}$
- $\widehat{\sigma_h f} = \widehat{f}(\delta y)$

Dimostrazione. Le identità valgono in $L^1 \cap L^2$ che è denso in L^2 e dunque si estendono per continuità ad L^2 .

Proposizione 5. Se $f \in C^1(\mathbb{R}; \mathbb{C})$ e $f \in L^1 \cup L^2$ e $f' \in L^1 \cup L^2 \implies \widehat{f'} = iy \widehat{f}$.

Dimostrazione. La stessa fatta per $f, f' \in L^1$. Si parte da a_n, b_n tali che $a_n \rightarrow -\infty$ e $b_n \rightarrow +\infty$ con $f(a_n) \rightarrow 0$ e $f(b_n) \rightarrow 0$ e si integra per parti

$$\begin{aligned}\mathcal{F}(f' \cdot \mathbb{1}_{[a_n, b_n]}) &= \int_{a_n}^{b_n} f'(x) e^{-ixy} dx \\ &= \underbrace{\left[f(x) e^{-ixy} \right]_{a_n}^{b_n}}_{\rightarrow 0} + iy \int_{a_n}^{b_n} f(x) e^{-ixy} dx = iy \mathcal{F}(f \cdot \mathbb{1}_{[a_n, b_n]}).\end{aligned}$$

Per concludere si dimostra che

$$\begin{aligned}\mathcal{F}(f' \cdot \mathbb{1}_{[a_n, b_n]}) &\xrightarrow{n \rightarrow \infty} \mathcal{F}(f') \text{ in } L^2 \\ \mathcal{F}(f \cdot \mathbb{1}_{[a_n, b_n]}) &\xrightarrow{n \rightarrow \infty} \mathcal{F}(f) \text{ in } L^2\end{aligned}$$

Ovvero si dimostra che

$$\begin{aligned}\int_{b_n}^{+\infty} |f(x) e^{-ixy}|^2 dx + \int_{-\infty}^{a_n} |f(x) e^{-ixy}|^2 dx &\xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \\ \int_{b_n}^{+\infty} |f'(x) e^{-ixy}|^2 dx + \int_{-\infty}^{a_n} |f'(x) e^{-ixy}|^2 dx &\xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0\end{aligned}$$

Ma questo è vero in quanto $f, f' \in L^2$.

Proposizione 6. Se $f \in C^1, f \in L^1, f' \in L^2 \implies \widehat{f} \in L^1$ e soddisfa le ipotesi del teorema di inversione.

Dimostrazione. Sappiamo che $iy\widehat{f} = \widehat{f'} \in L^2 \implies y\widehat{f} \in L^2$.

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}} |\widehat{f}(y)| dy &= \int_{|y| \leq 1} |\widehat{f}(y)| dy + \int_{|y| \geq 1} |\widehat{f}(y)| dy \\ &\leq 2\|\widehat{f}\|_{\infty} + \int_{|y| \geq 1} |\widehat{f}(y)y| \frac{1}{|y|} dy \\ &\leq 2\|f\|_1 + \|\widehat{f}y\|_2 \left(\int_{|y| \geq 1} \frac{1}{|y|^2} dy \right)^{1/2} \\ &\leq 2\|f\|_1 + 2\|f'\|_2\end{aligned}$$

Corollario. $f \in C_C^1 \implies f, \widehat{f} \in L^1$

Proposizione 7. Se $f_1, f_2 \in L^2(\mathbb{R}; \mathbb{C})$ (e dunque $f_1 f_2 \in L^1(\mathbb{R}; \mathbb{C})$ per Hölder) allora

$$2\pi \widehat{f_1 f_2} = \widehat{f_1} * \widehat{f_2}$$

Dimostrazione. $f_1, f_2 \in L^2 \implies f_1 f_2 \in L^1$ segue da Hölder. Dimostriamo la proposizione per $f_1, f_2 \in C_C^1 \implies f_1, f_2, f_1 f_2 \in C_C^1 \implies$ tutte in L^1 e con trasformate in L^1 .

$$\mathcal{F}^* \left(\frac{1}{2\pi} \widehat{f_1} * \widehat{f_2} \right) = \frac{1}{2\pi} \mathcal{F}^*(\widehat{f_1}) \mathcal{F}^*(\widehat{f_2}) = \frac{1}{2\pi} (2\pi f_1) \cdot (2\pi f_2) = 2\pi f_1 \cdot f_2 = \mathcal{F}^*(\widehat{f_1 f_2})$$

ed usando che \mathcal{F}^* è iniettiva otteniamo che $2\pi \widehat{f_1 f_2} = \widehat{f_1} * \widehat{f_2}$.

Per $f_1, f_2 \in L^2$ si procede per continuità e si approssimano f_1 ed f_2 con $f_{1,n}$ e $f_{2,n}$ in C_C^1 . \square

6.3 Conclusione sulla TdF

Proposizione 4. (di 2 lezioni fa) Se $f, xf \in L^1(\mathbb{R}; \mathbb{C})$, allora $\widehat{f} \in C^1(\mathbb{R}; \mathbb{C})$ e $(\widehat{f})' = -ix\widehat{f}$.

Corollario. Se $f, x^k f \in L^1$ con $k = 1, 2, \dots$, allora $x^h f \in L^1$ per ogni $h = 0, \dots, k$ e $\widehat{f} \in C_0^k$ e $D^h \widehat{f} = \widehat{(-ix)^h f}$.

Dimostrazione. Vale $|x^h| \leq 1 + |x|^k$ per ogni x e per ogni $h = 1, \dots, k$. Allora $|x^h f| \leq (1 + |x|^k)|f| \in L^1$. Il resto dell'enunciato è per induzione su k .

Corollario. Se $x^k f \in L^1$ per ogni $k = 0, 1, \dots$,³ allora $\widehat{f} \in C^\infty$ (anzi C_0^∞ siccome le derivate sono trasformate).

Teorema (Paley-Weiner). Se $e^{\alpha|x|} \cdot f(x) \in L^1$ per qualche $\alpha > 0$, allora \widehat{f} è analitica⁴.

Dimostrazione. In $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \simeq \mathbb{C}$ definisco $g(z)$.

Ricordiamo che $\widehat{f}(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-iyx} dx$. Poniamo

$$g(z) := \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-izx} dx$$

Passo 1. $g(z)$ è definita per ogni $z \in \mathbb{R} \times [-\alpha, \alpha]$. Infatti,

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-izx} dx = \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|e^{tx} dt \leq \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|e^{\alpha|x|} dx < +\infty$$

Passo 2. Mostriamo che $g(z)$ è olomorfa su $\mathbb{R} \times (-\alpha, \alpha)$. Sviluppo g in serie di potenze in 0.

Nota. Questo mi serve per dire che è olomorfa in una palla di raggio α centrata in 0. Per concludere bisogna traslare il centro la palla per tutta la retta reale e mostrare la stessa cosa [TO DO: spiegare meglio + disegno palla].

$$g(z) = \int_{\mathbb{R}} f(x)e^{-izx} dx = \int_{\mathbb{R}} f(x) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-izx)^n}{n!} dx \stackrel{(\star)}{=} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\int_{\mathbb{R}} \frac{(-ix)^n}{n!} f(x) dx \right) z^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

La serie $\sum_n a_n z^n$ è convergente per $|z| \leq \alpha$, quindi g è olomorfa su $B(0, \alpha)$. Notiamo che in (\star) abbiamo usato Fubini-Tonelli; controlliamo che potevamo applicarlo, dunque verifichiamo quanto segue.

$$\int_{\mathbb{R}} |f(x)| \sum_{n=0}^{\infty} \left| \frac{(-izx)^n}{n!} \right| dx < +\infty$$

Abbiamo

$$\int_{\mathbb{R}} |f(x)| \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|zx|^n}{n!} dx = \int_{\mathbb{R}} |f(x)| e^{|z||x|} dx \stackrel{\text{se } |z| \leq \alpha}{\leq} \int_{\mathbb{R}} |f(x)| e^{\alpha|x|} dx$$

Per concludere si dimostra (allo stesso modo) che g si sviluppa in serie in ogni punto $y_0 \in \mathbb{R}$ con raggio di convergenza α . □

³Questa condizione è implicata, ad esempio, dall'ipotesi $f \in C_C$

⁴Restrizione di $g: \underbrace{\mathbb{R} \times (-\alpha, \alpha)}_{\mathbb{R} \times \mathbb{R} \simeq \mathbb{C}} \rightarrow \mathbb{C}$ olomorfa

Corollario. Se $f \in L^1$ è olomorfa e a supporto compatto allora \hat{f} è la restrizione di $g: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ olomorfa [TO DO: controllare].

Nota. Se $f \in L^1$ e a supporto compatto, si ha $f(x)e^{\alpha|x|} \in L^1$ per ogni α .

6.4 Applicazioni TdF

Risoluzione equazioni del calore su \mathbb{R} .

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} (x \in \mathbb{R}) \\ u(0, \cdot) = u_0 \end{cases}$$

Risoluzione formale. Denotiamo con $\hat{u} := \hat{u}(t, y)$ la trasformata di Fourier rispetto alla variabile x

$$\hat{u}_t(t, y) = \int \frac{\partial}{\partial t} u(t, x) e^{-ixy} dx = \frac{\partial}{\partial t} \left(\int u(t, x) e^{-ixy} dx \right) = \hat{u}_t$$

Inoltre, $\hat{u}_t = \widehat{u_{xx}} = (iy)^2 \hat{u} = -y^2 \hat{u}$. Quindi, per ogni y , $\hat{u}(\cdot, y)$ risolve

$$\begin{cases} \dot{z} = -y^2 z \\ z(0) = \hat{u}_0(y) \end{cases} \quad (\text{P})$$

Soluzione generale $z = \alpha e^{-y^2 t}$, da cui la soluzione per (??) è $\hat{u}(t, y) = \hat{u}_0(y) e^{-y^2 t}$.

Siano

$$\rho(x) := \frac{e^{-x^2/2}}{\sqrt{2\pi}}, \quad \widehat{\sigma_{\sqrt{2t}} \rho} = \hat{\rho}(\sqrt{2t}y).$$

Però è noto che⁵ $\hat{\rho}(y) = e^{-y^2/2} \implies \hat{\rho}(\sqrt{2t}y) = e^{-(\sqrt{2t}y)^2/2} = e^{-y^2 t}$. Da cui

$$\hat{u}(t, y) = \hat{u}_0(y) e^{-y^2 t} = \hat{u}_0(y) \cdot \widehat{\sigma_{\sqrt{2t}} \rho}(y) = \mathcal{F}(u_0 * \sigma_{\sqrt{2t}} \rho) \implies u(t, y) = u_0 * (\sigma_{\sqrt{2t}} \rho)$$

Dunque

$$u(t, x) := \begin{cases} u_0(x) & \text{per } t = 0 \\ u_0 * \sigma_{\sqrt{2t}} \rho(x) & \text{per } t > 0 \end{cases} \quad (*)$$

Teorema. Se $u_0: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ è continua e limitata, allora u data in (??) è ben definita su $[0, +\infty) \times \mathbb{R}$, continua, C^∞ per $t > 0$ e risolve (??).

Data $u: [0, T) \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ soluzione di (??) tale che esiste $h_0, h_1 \in L^1(\mathbb{R})$ tali che

$$|u(t, x)| \leq h_0(x), \quad |u_t(t, x)| \leq h_1(x)$$

allora $\hat{u}(\cdot, y)$ è univocamente determinata su $[0, T)$, dunque u è univocamente determinata per l'iniettività di TdF.

⁵Si vede all'esercitazione che segue?

6.5 Esercitazione del 2 dicembre

Ricordiamo la definizione della trasformata di Fourier

$$\mathcal{F}(f) = \widehat{f}(y) = \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-ixy} dx, \quad f \in L^1(\mathbb{R}; \mathbb{C}), \quad f \in L^1(\mathbb{R})$$

dove $\mathcal{F}: L^1(\mathbb{R}; \mathbb{C}) \rightarrow L^\infty(\mathbb{R}) \cap C_0(\mathbb{R})$, in quanto $\|\widehat{f}\|_\infty \leq \|f\|_1$.

Proprietà. Ricordiamo le proprietà viste a lezione.

- i) $\widehat{\tau_h f}(y) = e^{-iyh} \widehat{f}(y)$ per ogni $h \in \mathbb{R}$, dove $\sigma_h f(x) = f(x - h)$
- ii) $\widehat{e^{ihx} f}(y) = \tau_h \widehat{f}(y)$
- iii) Legame tra trasformata e derivata.
 - $f \in C^1(\mathbb{R})$, $f, f' \in L^1(\mathbb{R}; \mathbb{C})$, allora $\widehat{f'}(y) = iy \widehat{f}(y)$.
 - $f \in L^1(\mathbb{R}; \mathbb{C})$ e $xf(x) \in L^1(\mathbb{R}; \mathbb{C})$, $(1 + |x|)f(x) \in L^1(\mathbb{R}; \mathbb{C})$, allora $\widehat{f} \in C^1(\mathbb{R})$ e $(\widehat{f})' = -i \widehat{xf(x)}$.
- Nota. Le ipotesi $f \in L^1(\mathbb{R}; \mathbb{C})$ e $xf(x) \in L^1(\mathbb{R}; \mathbb{C})$ sono equivalenti a $(1 + |x|)f(x) \in L^1(\mathbb{R}; \mathbb{C})$.
- iv) Vale $\widehat{f * g} = \widehat{f} \cdot \widehat{g}$.

Riportiamo un esercizio già posto con una soluzione alternativa.

Esercizio. Dire se esiste $v \in L^1$ non banale tale che

- $v * v = v$
- $g * v = g$ per ogni $g \in L^1$.

Soluzione. La risposta è no per entrambi i punti. Infatti,

- Se per assurdo valesse tale identità, passando alle trasformate si avrebbe

$$\widehat{v * v} = (\widehat{v})^2 \implies \widehat{v}(\widehat{v} - 1) = 0.$$

Ovvero, $\widehat{v} = \{0, 1\}$. Osserviamo subito che non è possibile che \widehat{v} assuma entrambi i valori in quanto funzione continua; d'altra parte non è possibile che $\widehat{v} = 1$, in quanto è anche infinitesima, dunque $\widehat{v} = 0 \implies v = 0$.

- Analogamente al punto precedente si avrebbe $\widehat{v} = 1$ ma ciò non è possibile.

Esercizio 1. Calcolare la trasformata di Fourier della funzione $f(x) = e^{-|x|}$.

Soluzione. Abbiamo

$$\begin{aligned}
 \hat{f}(y) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-|x|} e^{-ixy} dx = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-|x|} \cos(xy) dx - i \int_{-\infty}^{\infty} \overbrace{e^{-|x|} \sin(xy)}^{\text{integrale definito di funzione dispari} = 0} dx = 2 \int_0^{\infty} e^{-x} \cos(xy) dx \\
 &= 2 \int_0^{\infty} e^{-x} \operatorname{Re} e^{ixy} dx = 2 \int_0^{\infty} \operatorname{Re} (e^{-x} \cdot e^{ixy}) dx = 2 \operatorname{Re} \left[\int_0^{\infty} e^{-x} e^{ixy} dx \right] = 2 \operatorname{Re} \left[\frac{e^{x(iy-1)}}{(iy-1)} \right]_0^{\infty} \\
 &= 2 \operatorname{Re} \left[-\frac{1}{iy-1} + \underbrace{\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{e^{x(iy-1)}}{iy-1}}_{=0} \right] = 2 \operatorname{Re} \left[-\frac{1}{iy-1} \right] = 2 \operatorname{Re} \left[-\frac{1}{iy-1} \cdot \frac{iy+1}{iy+1} \right] \\
 &= 2 \operatorname{Re} \left[\frac{iy+1}{1+y^2} \right].
 \end{aligned}$$

In conclusione, $\hat{f}(y) = \frac{2}{1+y^2}$.

Esercizio 2. Calcolare la trasformata di Fourier della funzione $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$.

Soluzione. Calcoliamo $\hat{f}(y) = \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{-ixy}}{1+x^2} dx$. Dal fatto che $f \in L^1$ e usando il teorema di convergenza dominata, possiamo scrivere $\hat{f}(y)$ come

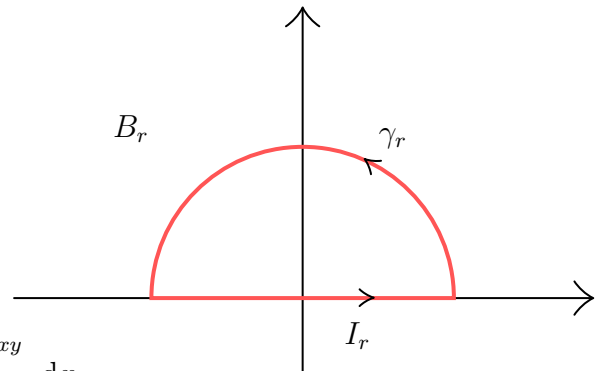
$$\hat{f}(y) = \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{-R}^R \frac{e^{-ixy}}{1+x^2} dx$$

Idea. Calcolare questo integrale con il metodo dei residui, ponendo $\frac{e^{-ixy}}{1+x^2} = \frac{e^{-izy}}{1+z^2} \Big|_{z \text{ reale}}$

Per il teorema dei residui:

$$\int_{B_r} g(z) dz = 2\pi i \sum_{\substack{z_i \text{ singolarit\`a} \\ \text{di } g \text{ in } B_r}} \operatorname{res}(g, z_i)$$

$$\text{Inoltre } \int_{B_r} g(z) dz = \int_{I_r} g(z) dx + \underbrace{\int_{\gamma_r} g(x) dx}_{\xrightarrow{r \rightarrow \infty} 0} = \int_{-r}^r \frac{e^{-ixy}}{1+x^2} dx.$$



- Verifichiamo che $\int_{\gamma_r} g(x) \xrightarrow{r \rightarrow \infty} 0$ dove $[0, \pi] \ni \theta \mapsto r e^{i\theta}$.

Calcoliamo

$$\int_0^\pi g(e^{i\theta} r) r d\theta \implies \int_0^\pi \frac{e^{-iry \cos \theta} e^{r \sin \theta y}}{(1+r^2 e^{i2\theta})} r d\theta \xrightarrow{r \rightarrow \pm\infty} 0 \quad \text{se } y < 0.$$

Per il caso $y > 0$ si ripercorre lo stesso procedimento ma si utilizza la curva $[\pi, 2\pi] \ni \theta \mapsto r e^{i\theta}$.

- Calcoliamo i residui: l'unico residuo di g è nel punto i che si tratta di una singolarità semplice (nel caso $y > 0$ la singolarità è in $-i$).

$$\lim_{r \rightarrow \pm\infty} 2\pi i \operatorname{res}(g, i) = \pi e^y$$

Considerando anche il caso $y > 0$ la trasformata di Fourier diviene $\pi e^{-|y|}$.

6.6 Esercitazione del 13 Dicembre 2021

6.6.1 Operatori autoaggiunti

Esercizi.

- 1) Esempio classico di $H = L^2([-\pi, \pi]; \mathbb{C})$ e $D = \{u \in C^1([-\pi, \pi]; \mathbb{C}) \mid u(-\pi) = u(\pi)\}$ e $Tu = i\dot{u}$ allora T è un operatore autoaggiunto ed ha autovalori $\lambda = n \in \mathbb{Z}$.
- 2) $H = L^2([0, \pi]; \mathbb{R})$ e $D = \{u \in C^2([0, \pi]) \mid u(0) = 0 \text{ e } u(\pi) = 0\}$ sono dette condizioni di Dirichlet con $Tu = -\ddot{u}$.

Ora usiamo sempre $Tu = -\ddot{u}$ ma su domini differenti.

- 3) $D_3 = \{u \in C^2([0, \pi]) \mid \dot{u}(0) = 0 \text{ e } \dot{u}(\pi) = 0\}$ sono dette condizioni di Neumann.
- 4) $D_4 = \{u \in C^2([0, \pi]) \mid u(0) = 0 \text{ e } \dot{u}(\pi) = 0\}$ sono dette condizioni di Robin.

Dire per 2), 3) e 4) rispondere alle seguenti

- L'operatore T è autoaggiunto e controllare se il relativo D è denso in L^2
- Controllare se esistono autovalori ed eventualmente dire chi sono gli autovettori.
- Stabilire se esiste una base Hilbertiana di autovettori.

Risoluzione.

- 2) D_2 è denso. Vediamo l'operatore è autoaggiunto

$$\begin{aligned} \langle Tu, v \rangle &= \int_0^\pi (-\ddot{u}(x))v(x) dx = \underbrace{-\dot{u}(x)v(x)}_{v(0)=v(\pi)=0} \Big|_0^\pi - \int_0^\pi (-\dot{u}(x))\dot{v}(x) dx = \int_0^\pi \dot{u}(x)\dot{v}(x) dx \\ \langle u, Tv \rangle &= \int_0^\pi u(x)(-\ddot{v}(x)) dx = \underbrace{u(x)(-\dot{v}(x))}_{u(0)=u(\pi)=0} \Big|_0^\pi - \int_0^\pi \dot{u}(x)(-\dot{v}(x)) dx = \int_0^\pi \dot{u}(x)\dot{v}(x) dx \end{aligned}$$

dunque $\langle Tu, v \rangle = \langle \dot{u}, \dot{v} \rangle = \langle u, Tv \rangle$.

Inoltre T è anche definito positivo infatti $\langle Tu, u \rangle = \langle \dot{u}, \dot{u} \rangle = \|\dot{u}\|_{L^2}^2 \geq 0$.

Cerchiamo gli autovalori quindi poniamo $-\ddot{u} = Tu = \lambda u$ con $\lambda \geq 0$ e $u \in D_2$. Segue $p(t) = t^2 + \lambda \implies t = \pm i\sqrt{\lambda}$ se $\lambda \neq 0$.

Se $\lambda = 0$ invece otteniamo $\ddot{u} = 0 \implies u(x) = ax + b$ ma per le condizioni al bordo segue $a, b = 0$ e dunque $u = 0 \implies \lambda = 0$ non è autovalore.

Invece se $\lambda > 0$ abbiamo $u(x) = A \cos(\sqrt{\lambda}x) + B \sin(\sqrt{\lambda}x)$ e segue $A = 0$ e $\lambda = n^2$ per $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$.

- 3) D_2 è denso e similmente si vede che anche in questo caso T è autoaggiunto. Anche in questo caso T è definito positivo perché vale sempre $\langle Tu, v \rangle = \langle \dot{u}, \dot{v} \rangle$.

Per cercare gli autovalori risolviamo il seguente sistema

$$\begin{cases} -\ddot{u} = \lambda u \\ \dot{u}(0) = 0 \\ \dot{u}(\pi) = 0 \end{cases}$$

Se $\lambda = 0$ allora $u(x) = \text{cost.}$ è un autovettore per l'autovalore 0.

Se invece $\lambda \neq 0$ allora $u(x) = A \cos(\sqrt{\lambda}x) + B \sin(\sqrt{\lambda}x) \implies \cos(nx)$ è un autovettore e $\lambda = n^2$ per $n = 1, 2, \dots$

- 4) In questo caso vediamo che vale sempre $\langle Tu, v \rangle = \langle \dot{u}, \dot{v} \rangle$ ma per motivi diversi infatti

$$\begin{aligned} \langle Tu, v \rangle &= \int_0^\pi (-\ddot{u}(x))v(x) dx = \underbrace{-\dot{u}(x)v(x)}_{\dot{u}(\pi)=0, v(0)=0} \Big|_0^\pi - \int_0^\pi (-\dot{u}(x))\dot{v}(x) dx = \int_0^\pi \dot{u}(x)\dot{v}(x) dx \\ \langle u, Tv \rangle &= \int_0^\pi u(x)(-\ddot{v}(x)) dx = \underbrace{u(x)(-\dot{v}(x))}_{\dot{v}(\pi)=0, u(0)=0} \Big|_0^\pi - \int_0^\pi \dot{u}(x)(-\dot{v}(x)) dx = \int_0^\pi \dot{u}(x)\dot{v}(x) dx \end{aligned}$$

Considerando il sistema $-\ddot{u} = \lambda u$ con le condizioni al bordo di Robin caso $\lambda = 0$ non è un autovalore mentre se $\lambda \neq 0$ abbiamo che $\dot{u}(x) = \sqrt{\lambda}B \cos(\sqrt{\lambda}x) = 0$ per $x = \pi$ dunque $\sqrt{\lambda} = n + 1/2$ per $n = 0, 1, 2, \dots$ e gli autovettori sono

$$u_n(x) = \sin \left(\left(n + \frac{1}{2} \right) x \right)$$

Osservazione. $T: D \rightarrow L^2$ operatore lineare e continuo $\iff \exists M > 0$ tale che $\|Tu\|_2 \leq M \|u\|$ per ogni $u \in D$.

Vediamo ad esempio che D_1 non è continuo infatti gli autovalori sono $\lambda_n = n^2 \implies n^2 \|u_n\|_2 \leq M \|u_n\|_2 \implies M \geq n^2$ per ogni n . Dunque M è illimitato e l'operatore non può essere continuo.

Esempio. Se ad esempio abbiamo $Tu = -\ddot{u}$ con $\widetilde{D} = \{u \in C^2 \mid u(0) = u(\pi) = 1\}$ allora T non è autoaggiunto e basta trovare u, v tali che

$$\langle Tu, v \rangle \neq \langle u, Tv \rangle$$

Esercizio.

- i) Sia $T_1: \ell^2 \rightarrow \ell^2$ dato da

$$T_1((x_n)_{n>0}) = (0, x_1, x_2, \dots)$$

- ii) Sia $T_2: \ell^2 \rightarrow \ell^2$ dato da

$$T_2((x_n)_{n>0}) = (x_2, x_3, \dots)$$

Dire se sono autoaggiunti ed eventualmente chi sono gli autovalori.

Esercizi più da compito sono invece cose del tipo...

Esercizio. Sia $H = L^2([0, \pi] \times [0, \pi]; \mathbb{R})$ e $Tu = -\Delta u = -u_{xx} - u_{yy}$

- $D_1 = \{u \in C^2([0, \pi] \times [0, \pi]; \mathbb{R}) \mid u|_{\partial Q} = 0\}$
- $D_2 = \{u \in C^2([0, \pi] \times [0, \pi]; \mathbb{R}) \mid \nabla u|_{\partial Q} = 0\}$
- $D_3 = \{u \in C^2([0, \pi] \times [0, \pi]; \mathbb{R}) \mid u = 0 \text{ su due lati paralleli e } \nabla u = 0 \text{ sugli altri due}\}$

e dire se l'operatore è autoaggiunto ed eventualmente trovare gli autovalori.

6.6.2 Calcolo Trasformate di Fourier

Abbiamo visto che le trasformate di $f(x) = e^{-|x|}$ e $g(x) = 1/(1+x^2)$ sono rispettivamente

$$\hat{f}(y) = \frac{2}{1+y^2} \quad \hat{g}(y) = \pi e^{-|y|}$$

Vorremo provare a trovare ora le trasformate funzioni come $x^2 e^{-|x|}$ o $x/(1+x^2)$ usando le proprietà delle trasformate con le derivate. Ricordiamo che

$$\begin{aligned} f, f' \in L^1 &\implies \widehat{f'}(y) = iy\hat{f}(y) \\ f, xf \in L^1 &\implies \widehat{f'}(y) = -ix\hat{f}(y) \end{aligned}$$

dunque intuitivamente per $x^2 e^{-|x|}$ possiamo fare

$$x^2 e^{-|x|} = i(-i)x(xe^{-|x|}) \implies \mathcal{F}(i(-i)x(xe^{-|x|})) = i(\mathcal{F}(xe^{-|x|}))'(y)$$

ora dobbiamo calcolare $\mathcal{F}(xe^{-|x|})(y)$

$$\mathcal{F}(xe^{-|x|})(y) = i\mathcal{F}(-ixe^{-|x|}) = i\mathcal{F}(e^{-|x|})'(y) = i\left(\frac{2}{1+y^2}\right)' = \frac{-4iy}{(1+y^2)^2}$$

dunque in conclusione abbiamo

$$\mathcal{F}(x^2 e^{-|x|})(y) = i\left(\frac{-4iy}{(1+y^2)^2}\right)' = 4\left(\frac{y}{(1+y^2)^2}\right)'$$

Invece per quanto riguarda

$$g(x) = \frac{x}{1+x^2} \notin L^1$$

però è in L^2 ma per poterne calcolare la trasformata di Fourier dovremmo passare per delle troncate di $g(x)$ come riportato nell'Osservazione vista a teoria.

Nota. Possiamo però vedere chi dovrebbe essere il candidato formale usando le tecniche di prima

$$\frac{x}{1+x^2} = \frac{i(-ix)}{1+x^2} \rightsquigarrow i\mathcal{F}\left((-ix)\frac{1}{1+x^2}\right)(y) = i\mathcal{F}\left(\frac{1}{1+x^2}\right)'(y) = i\pi(e^{-|y|})'(y)$$

però notiamo che la derivata di $e^{-|y|}$ non è ben definita in 0.

Esercizio. Calcolare la trasformata di Fourier di

$$f(x) = \mathbb{1}_{[-r,r]}(x)$$

Iniziamo a svolgere il conto

$$\widehat{f}(y) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathbb{1}_{[-r,r]}(x) e^{-ixy} dx = \int_{-r}^r e^{-ixy} dx = \begin{cases} 2r & y = 0 \\ \int_{-r}^r e^{-ixy} dx & y \neq 0 \end{cases}$$

nel caso $y \neq 0$ continuiamo a svolgere il conto

$$\int_{-ry}^{ry} \frac{e^{-it}}{y} dt = \frac{1}{y} \int_{-ry}^{ry} [\cos(t) - \underbrace{i \sin(t)}_{\text{dispari}}] dt = \frac{2}{y} \sin(ry)$$

dunque in conclusione abbiamo

$$\mathcal{F}(\mathbb{1}_{[-r,r]}(x)) = \begin{cases} 2r & y = 0 \\ \frac{2}{y} \sin(ry) & y \neq 0 \end{cases}$$

Esercizio. Un esercizio simile è calcolare $\mathcal{F}(\mathbb{1}_{[0,r]}(x))$, ovvero il caso non centrato e poi provare a calcolare (come integrale improprio di Analisi 1) l'integrale

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt = \lim_{r \rightarrow \infty} \int_0^r \frac{\sin(t)}{t} dt$$

Trasformata della Gaussiana

Calcoliamo ora la trasformata della funzione gaussiana $e^{-x^2/2}$.

- **Metodo I:** Troviamo un'equazione differenziale (lineare) risolta dalla gaussiana, sia $f(x) = e^{-x^2/2}$ allora vale

$$f'(x) = -xe^{-x^2/2} = -xf(x)$$

e per il decadimento della gaussiana abbiamo che $f, f' \in L^1$ dunque

$$iy\widehat{f}(y) = \widehat{f'(x)}(y) = -i\mathcal{F}(-xf(x))(y) = i(\widehat{f})'(y)$$

dunque $\widehat{f} = h(y)$ con h tale che $h'(y) = -yh(y) \implies h(y) = ke^{-y^2/2}$, rimane da trovare k . Calcoliamo direttamente $h(0)$

$$\begin{aligned} h(0) &= \widehat{e^{-x^2/2}}(0) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/2} e^{-ix \cdot 0} dx = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/2} dx = \sqrt{2\pi} \\ &\implies \widehat{e^{-x^2/2}} = \sqrt{2\pi} e^{-y^2/2} \end{aligned}$$

- **Metodo II:** Studiamo la funzione di variabile complessa $g(z) = e^{-z^2/2}$ e integriamola lungo un percorso che passi per $[-r, r] \times \{0\} \subset \mathbb{R}^2 \approx \mathbb{C}$.

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(\widehat{e^{-x^2/2}})(y) &= \int_{\mathbb{R}} e^{-x^2/2} \cdot e^{-ixy} dx = \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{1}{2}(x^2+2ixy)} dx \\ &= \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{1}{2}(x^2+2ixy+y^2-y^2)} dx = \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{1}{2}(x^2+2ixy+y^2)} \cdot e^{-y^2/2} dx \\ &= e^{-y^2/2} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{1}{2}(x^2+2ixy+y^2)} dx = e^{-y^2/2} \lim_{r \rightarrow \infty} \int_{-r}^r \underbrace{e^{-\frac{1}{2}(x+iy)^2}}_{g(x+iy)} dx \end{aligned}$$

Consideriamo ora il rettangolo $D_r := \{z \mid \operatorname{Im} z \in [0, iy] \text{ e } \operatorname{Re} z \in [-r, r]\}$ dunque poiché $g(z)$ non ha poli su D_r abbiamo

$$\int_{\partial D_r} g = \sum \operatorname{Res.} \text{ su } D_r = 0$$

$$0 = \int_{-r}^r g(x) dx - \int_{-r}^r g(x + iy) dx + i \int_0^y g(r + ix) dx - i \int_0^y g(-r + i(y - x)) dx.$$

I termini verticali vanno a zero, infatti:

$$\int_0^y e^{-(r+ix)^2/2} dx = e^{-r^2/2} \int_0^y e^{-ixr-x^2/2} dx \leq ye^{-r^2/2} \xrightarrow{r \rightarrow +\infty} 0.$$

L'altro integrale è analogo. In conclusione abbiamo

$$\begin{aligned} \widehat{e^{-x^2/2}}(y) &= \lim_{r \rightarrow +\infty} \int_{-r}^r e^{-y^2/2} e^{-(x+iy)^2/2} dx = e^{-y^2/2} \left[\lim_{r \rightarrow +\infty} \int_{-r}^r e^{-x^2/2} dx + o(1) \right] = \\ &= e^{-y^2/2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/2} dx = \sqrt{2\pi} e^{-y^2/2} \end{aligned}$$

□

Capitolo 7

Integrazione di superfici

7.1 Superfici

Definizione. Data $f: \Omega \subset \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^d$ di classe C^1 e dato $x \in \Omega$, la mappa lineare da \mathbb{R}^k a \mathbb{R}^d associata alla matrice $\nabla f(x)$ si dice **differenziale di f in x** e si indica con $d_x f$.

Nota. La mappa $d_x f$ è univocamente determinata da

$$f(x+h) = f(x) + d_x f \cdot h + o(|h|),$$

dove $d_x f$ è il termine di primo grado dello sviluppo di Taylor di f .

Definizione. Siano $1 \leq k \leq d$ e $m \geq 1$. L'insieme $\Sigma \subset \mathbb{R}^d$ si definisce **superficie** (senza bordo) di dimensione k e classe C^m se per ogni $x \in \Sigma$ esiste U intorno aperto¹ di x ed esiste una mappa $\phi: D \rightarrow \mathbb{R}^d$ di classe C^m con D aperto di \mathbb{R}^k tale che

- $\phi(D) = \Sigma \cap U$
- $\phi: D \rightarrow \Sigma \cap U$ è un omeomorfismo
- $\nabla \phi(s)$ ha rango massimo ($= k$) per ogni $s \in D$

Ovvero ϕ è una **parametrizzazione locale** della superficie.

Osservazione. Se $k = d$ abbiamo che Σ è una superficie se e solo se Σ è aperto.

Proposizione. Dati k, d, m come sopra, $\Sigma \subset \mathbb{R}^d$ e $x \in \Sigma$ sono fatti equivalenti

- Esistono U e $\phi: D \rightarrow \Sigma \cap U$ tale che ϕ è una parametrizzazione regolare.
- Esistono U intorno di x e $g: U \rightarrow \mathbb{R}^{d-k} \in C^m$ tale che
 - $\Sigma \cap U = g^{-1}(0)$
 - ∇g ha rango massimo, ovvero $d - k$.
- Esistono U intorno di x e $h: \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^{d-k}$ di classe C^m tale che $\Sigma \cap U = \Gamma_h \cap U$ (dove Γ_h è il grafico di h) avendo identificato $\mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{d-k}$ con \mathbb{R}^d tramite una scelta di k coordinate tra le d di \mathbb{R}^d .

¹D'ora in avanti gli intorni saranno sempre aperti.

Esempi.

- $\mathbb{S}^{d-1} = \{x \in \mathbb{R}^d \mid |x| = 1\}$ è una superficie senza bordo di dimensione $d - 1$ e classe C^∞ in \mathbb{R}^d
- $\mathbb{D} = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid x_3 = 0 \text{ e } |x| < 1\}$ è una superficie 2-dimensionale in \mathbb{R}^3
- $\overline{\mathbb{D}}$ non lo è! (È una superficie con bordo)

Definizione. Data Σ superficie e fissato $x \in \Sigma$, lo **spazio tangente** a Σ in x è $T_x \Sigma := \text{Im}(d_s \phi)$ dove $\phi: D \rightarrow \Sigma \cap U$ è una parametrizzazione regolare e $x = \phi(s)$ con $s \in D$.

Nota. Lo spazio tangente è uno spazio vettoriale di stessa dimensione della superficie.

Proposizione.

- $T_x \Sigma = \{\dot{\gamma}(0) \mid \gamma: [0, \delta) \rightarrow \Sigma \text{ cammino } C^1 \text{ con } \gamma(0) = x\}$
- Data $g: U \rightarrow \mathbb{R}^{d-k}$ tale che $\Sigma \cap U = g^{-1}(0)$, $\text{rk}(\nabla g) = d - k$ su U , allora

$$T_x \Sigma = \ker(d_x g) = \{\nabla g_1(x), \dots, \nabla g_{d-k}(x)\}^\perp$$

Definizione. Data Σ superficie in \mathbb{R}^d di classe C^m , $f: \Sigma \rightarrow \mathbb{R}^{d'}$, diciamo che f è di classe $C^{m'}$, con $m' \leq m$ se per ogni $x \in \Sigma$ se esistono U e $\phi: D \rightarrow \Sigma \cap U$ parametrizzazione regolare, tale che $f \circ \phi: D \rightarrow \mathbb{R}^{d'}$ è di classe $C^{m'}$ con D aperto di \mathbb{R}^k .

Proposizione. $f \in C^{m'} \iff \exists A$ aperto di \mathbb{R}^d che contiene Σ e $F: A \rightarrow \mathbb{R}^{d'}$ estensione di f di classe $C^{m'}$.

Osservazione. Se $\phi: D \rightarrow \Sigma \cap U$ è una parametrizzazione regolare, allora $\phi^{-1}: \Sigma \cap U \rightarrow D \subset \mathbb{R}^k$ è C^m . La mappa ϕ^{-1} viene definita **carta**.

Definizione. Data $f: \Sigma \rightarrow \mathbb{R}^{d'}$ di classe (almeno) C^1 e $x \in \Sigma$,

$$\begin{aligned} d_x f: T_x \Sigma &\longrightarrow \mathbb{R}^{d'} \\ \dot{\gamma}(0) &\longmapsto (f \circ \gamma)'(0) \quad \gamma: [0, \delta) \rightarrow \Sigma, \gamma \in C^1, \gamma(0) = x \end{aligned}$$

Proposizione. Data $F: A \rightarrow \mathbb{R}^{d'}$ estensione C^1 di f , con $A \subset \mathbb{R}^d$, allora

$$d_x f = d_x F|_{T_x \Sigma}$$

Osservazione. Se $f: \Sigma \rightarrow \Sigma'$, dove $\Sigma \subset \mathbb{R}^d$ e $\Sigma' \subset \mathbb{R}^{d'}$ allora $\text{Im}(d_x f) \subset T_{f(x)} \Sigma'$. Quindi, $d_x f: T_x \Sigma \rightarrow T_{f(x)} \Sigma'$.

7.2 Misure su superfici

In questa sezione studiamo la misura di Lebesgue su superfici definite tramite parametrizzazione².

Definizione. Dati V spazio vettoriale k -dimensionale dotato di prodotto scalare (per esempio V sottospazi di \mathbb{R}^d), la **misura di Lebesgue** σ_k su V è data dall'identificazione di V con \mathbb{R}^k tramite la scelta di una base ortonormale.

²Coincide con la definizione di Hausdorff

Nota. σ_k non dipende dalla scelta della base.

Definizione. Siano V, V' spazi vettoriali di dimensione k dotati di prodotto scalare e $\Lambda: V \rightarrow V'$ lineare. Poniamo

$$|\det \Lambda| := |\det M|,$$

dove M è una matrice $k \times k$ associata a Λ dalla scelta di basi ortonormali su V e V' .

Nota. Si verifica che la definizione è ben posta, ovvero non dipende dalla scelta delle basi. Inoltre, si verifica che per ogni $E \subset V$ misurabile si ha $\sigma_k(\Lambda(E)) = |\det \Lambda| \cdot \sigma_k(E)$ (formula di cambio di variabile negli integrali).

Definizione. Sia $\Lambda: V \rightarrow W$, con V, W spazi vettoriali, non necessariamente di stessa dimensione. Poniamo $V' := \text{Im}(\Lambda)$ e

$$|\det \Lambda| := \begin{cases} 0 & \text{se } \text{rk}(\Lambda) < k \\ \text{come prima} & \text{se } \text{rk}(\Lambda) = k \text{ e } \dim V' = \dim V \end{cases}$$

Proposizione 1. Se $\Lambda: \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^d$ allora

$$|\det \Lambda|^2 = \det(N^t N) \quad (1)$$

dove N è una matrice $d \times k$ associata a Λ . E inoltre

$$|\det \Lambda|^2 = \sum_{\substack{Q \text{ minore} \\ k \times k \text{ di } N}} \det(Q)^2 \quad (2)$$

Osservazione. Questa proposizione implica che non è necessario trovare una base ortormale dell'immagine di Λ per calcolarne il determinante.

Dimostrazione.

- (1) Supponiamo Λ iniettiva (il caso Λ non iniettivo per esercizio), scegliamo una base ortormale e_1, \dots, e_k di $\text{Im}(\Lambda)$ e una matrice M $k \times k$ associata a Λ . Sia $B \in \mathbb{R}^{d \times k}$ una matrice avente colonne uguali a e_1, \dots, e_k . Allora $N = BM$. Dunque,

$$\det(N^t N) = \det(M^t \underbrace{B^t B}_{=I} M) = \det(M^t M) = (\det M)^2 =: |\det \Lambda|^2.$$

- (2) La seconda formula richiede la formula di Binet generalizzata.

□

7.3 Superfici k -dimensionali in \mathbb{R}^d di classe C^1

Definizione. Un insieme $E \subset \Sigma$ è **misurabile** (secondo Lebesgue) se $\forall \phi: D \rightarrow \Sigma \cap U$ parametrizzazione regolare e $D \subset \mathbb{R}^k$, l'insieme $\phi^{-1}(E \cap U) \subset \mathbb{R}^k$ è misurabile secondo Lebesgue.

Notazione. $\mathcal{M}(\Sigma) := \{E \subset \Sigma \text{ misurabili}\}$.

Proposizione 1. Esiste un'unica misura σ_k su $\mathcal{M}(\Sigma)$ tale che per ogni E misurabile e per ogni $\phi: D \rightarrow \Sigma \cap U$ parametrizzazione regolare

$$\sigma_k(E \cap U) = \int_{\phi^{-1}(E \cap U)} \overbrace{|\det(\text{d}_s \phi)|}^{J\phi(s)} \text{d}s. \quad (1)$$

Commenti.

- σ_k misura di volume k -dimensionale su Σ .
- σ_k coincide con la misura di Hausdorff \mathcal{H}^k ristretta a Σ .
- $J\phi(s) := |\det d_s\phi| = \sqrt{\det(\nabla^t\phi(s)\nabla\phi(s))} = \sqrt{\sum_Q (\det Q)^2}$ dove Q sono i minori $k \times k$ di $\nabla\phi(s)$.
- Se $k = 1$, vale $J\phi(s) = \sqrt{\det(\phi'(s))^t\phi'(s)} = |\phi'(s)|$.

Dimostrazione.

Passo 1: costruzione di σ_k .

Prendiamo $\sigma_i: D_i \rightarrow \Sigma \cap U_i$ parametrizzazioni regolari, dove $\{D_i\}$ è una famiglia numerabile, tale che $\Sigma \subset \bigcup U_i$. Prendiamo Σ_i misurabili e disgiunti tali che $\bigcup \Sigma_i = \Sigma$ e $\Sigma_i \subset U_i$.

Per ogni $E \in \mathcal{M}(\Sigma)$ poniamo

$$\sigma_k(E) = \sum_i \int_{\phi^{-1}(E \cap \Sigma_i)} J\phi_i(s) \, ds$$

Evitiamo di verificare che sia una misura σ -addittiva.

Per dimostrare la proposizione si usa il seguente lemma.

Lemma. Date $\phi: D \rightarrow \Sigma \cap U$ e $\tilde{\phi}: \tilde{D} \rightarrow \Sigma \cap \tilde{U}$ e E misurabili contenuto in $U \cap \tilde{U}$, allora

$$\int_{\phi^{-1}(E)} J\phi(s) \, ds = \int_{\tilde{\phi}^{-1}(E)} J\tilde{\phi}(\tilde{s}) \, d\tilde{s} \quad (2)$$

Dimostrazione lemma. Usiamo il cambio di variabile $s = \phi^{-1}(\tilde{\phi}(\tilde{s})) =: g(\tilde{s})$.

$$\begin{aligned} \int_F J\phi(s) \, ds &= \int_{g^{-1}(F)=\tilde{F}} J\phi(s) Jg(\tilde{s}) \, d\tilde{s} = \int_{\tilde{F}} |\det(d_s\phi)| \cdot |\det(d_{\tilde{s}}g)| \, d\tilde{s} \\ &= \int_{\tilde{F}} |\det(d_{\tilde{s}}(\phi \circ g))| \, d\tilde{s} = \int_{\tilde{F}} J\tilde{\phi}(\tilde{s}) \, d\tilde{s} \end{aligned}$$

Da cui la tesi. □

Corollario 2. Data $\phi: D \rightarrow \Sigma \cap U$ C^1 parametrizzazione bigettiva (non necessariamente regolare), $f: \Sigma \cap U \rightarrow \mathbb{R}$ misurabile e integrabile rispetto a σ_k .

$$\int_{\Sigma \cap U} f(x) \, d\sigma_k(x) = \int_D f(\phi(s)) J\phi(s) \, ds \quad (3)$$

Se $\phi: D \rightarrow \Sigma \cap U$ è solo C^1 , come vanno corrette (??) e (??)?

$$\int_{E \cap U} \# \phi^{-1}(x) \, d\sigma_k(x) = \int_{\phi^{-1}(E \cap U)} J\phi(s) \, ds \quad (1')$$

e

$$\int_{E \cap U} f(x) \# \phi^{-1}(x) \, d\sigma_k(x) = \int_D f(\phi(s)) J\phi(s) \, ds \quad (3')$$

Nota. Le formule sopra giustificano il fatto che parametrizzazione non esattamente bigettive possono essere usate lo stesso per il calcolo dei volumi.

Esempio. Parametrizzazione di $\mathbb{S}^d \subset \mathbb{R}^{d+1}$ con coordinate sferiche.

Consideriamo $\phi_d: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{S}^d$ definita come

$$\phi_d(\alpha_1, \dots, \alpha_d) = (\cos \alpha_1, \sin \alpha_1 \cos \alpha_2, \sin \alpha_1 \sin \alpha_2 \cos \alpha_3, \dots, \sin \alpha_1 \cdots \sin \alpha_{d-1} \cos \alpha_d, \sin \alpha_1 \cdots \sin \alpha_d)$$

Definizione ricorsiva

$$\phi_1(\alpha_1) = (\cos \alpha_1, \sin \alpha_1), \quad \phi_d(\alpha) = (\cos \alpha_1, \sin \alpha_1 \cdot \phi_{d-1}(\alpha_2, \dots, \alpha_d))$$

Dunque

- $\phi_d([0, \pi]^{d-1} \times [0, 2\pi]) = \mathbb{S}^d$ è una parametrizzazione in coordinate sferiche ed è iniettiva.
- $J\phi_d(\alpha) = \sin(\alpha_1)^{d-1} \sin(\alpha_2)^{d-2} \cdots \sin(\alpha_{d-1})^1$

Proposizione 3. Sia Σ superficie come al solito. Allora esiste un'unica misura μ sui $\mathcal{M}(\Sigma)$ tale che per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che data $f: \Sigma \cap U \rightarrow \mathbb{R}^k \in C^1$ che è δ -isometria, cioè

$$\frac{1}{1+\delta}|x-x'| \leq |f(x)-f(x')| \leq (1+\delta)|x-x'| \quad \forall x, x' \in \Sigma \cap U \quad (\text{P})$$

Allora

$$\frac{1}{1+\varepsilon}\sigma_k(E) \leq |f(E)| \leq (1+\varepsilon)\sigma_k(E) \quad \forall E \text{ mis } \subset \Sigma \cap U$$

Corollario 4. Poiché σ_k e la restrizione di \mathcal{H}^k a Σ hanno la proprietà (??), coincidono.

Dimostrazione (Unicità). Prendiamo μ, μ' che soddisfano (??). Fissiamo $E, \varepsilon > 0$ e δ di conseguenza usando (??). Allora

- Per ogni $x \in \Sigma$ esiste $\phi_x: U_x \cap \Sigma \rightarrow \mathbb{R}^k$ tale che $d_x \phi_x: T_x \Sigma \rightarrow \mathbb{R}^k$ è un'isometria.
- per ogni x esiste $V_x \subset U_x$ tale che $\phi_x: \Sigma \cap V_x \rightarrow \mathbb{R}^k$ è δ -isometria.
- Ricopriamo Σ con una successione $V_i := V_{x_i}$.
- Scriviamo $E = \bigsqcup_i E_i$ con $E_i \subset V_i$.

Per (??) abbiamo che

$$\begin{aligned} \frac{1}{1+\varepsilon}\mu(E_i) &\leq |f(E_i)| \leq (1+\varepsilon)\mu(E_i) \\ \frac{1}{1+\varepsilon}\tilde{\mu}(E_i) &\leq |f(E_i)| \leq (1+\varepsilon)\tilde{\mu}(E_i) \end{aligned}$$

da cui incrociando le disuguaglianze otteniamo

$$\begin{aligned} \frac{1}{(1+\varepsilon)^2}\mu(E_i) &\leq \tilde{\mu}(E_i) \leq (1+\varepsilon)^2\mu(E_i) \\ \Rightarrow \frac{1}{(1+\varepsilon)^2}\tilde{\mu}(E_i) &\leq \mu(E_i) \leq (1+\varepsilon)^2\tilde{\mu}(E_i) \end{aligned}$$

e per arbitrarietà di ε ricaviamo $\mu(E) = \tilde{\mu}(E)$. Per arbitrarietà di E otteniamo $\mu = \tilde{\mu}$. \square

7.4 k -covettori

Dato V spazio vettoriale su \mathbb{R} e $k = 1, 2, \dots$, l'applicazione $\alpha: V^k \rightarrow \mathbb{R}$ si dice **k -covettore o k -lineare e alternante** se

- è lineare in ogni variabile
- per ogni σ permutazione in S_k , $\alpha(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(k)}) = \text{sgn}(\sigma)\alpha(v_1, \dots, v_k)$ (equivalentemente, α cambia segno scambiando due variabili).

Notazione. $\Lambda^k(V) := \{\alpha \text{ } k\text{-covettori su } V\}$. Formalmente $\Lambda^0(V) := \{0\}$.

Osservazione.

- $\Lambda^k(V)$ è uno spazio vettoriale.
- $\Lambda^1(V) = V^*$ duale di V .
- \det è n -lineare alternante nelle colonne (o righe).
- Se v_1, \dots, v_k sono linearmente dipendenti, allora $\alpha(v_1, \dots, v_k) = 0$.
- Se $k > \dim V$, allora $\Lambda^k(V) = \{0\}$.

Definizione. Dati V, V' spazi vettoriali, $T: V \rightarrow V'$ lineare, $\alpha \in \Lambda^k(V')$, il **pull-back** di α secondo T è

$$T^\# \alpha \in \Lambda^k(V) \quad \text{dato da} \quad T^\# \alpha(v_1, \dots, v_k) = \alpha(Tv_1, \dots, Tv_k)$$

Inoltre, dati $\alpha \in \Lambda^k(V), \beta \in \Lambda^h(V)$ si definisce **prodotto esterno** e si indica con $\alpha \wedge \beta \in \Lambda^{k+h}(V)$ quanto segue

$$\alpha \wedge \beta(v_1, \dots, v_{k+h}) = \frac{1}{k!h!} \sum_{\sigma \in S_{k+h}} \text{sgn}(\sigma) \alpha(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(k)}) \beta(v_{\sigma(k+1)}, \dots, v_{\sigma(k+h)})$$

7.5 Integrazione di k -forme su superfici

Proposizione 0. Il prodotto esterno \wedge è distributivo (rispetto a $+$), associativo e anticommutativo, ovvero $\alpha \wedge \beta = (-1)^{hk} \beta \wedge \alpha$.

Data e_1, \dots, e_d base di V , e_1^*, \dots, e_d^* è una base di V^* . Denotiamo con $I(d, k) := \{\underline{i} = (i_1, \dots, i_k) \text{ con } 1 \leq i_1 \leq \dots \leq i_k \leq d\}$ l'insieme di multiindici. Per ogni $\underline{i} \in I(d, k)$ indichiamo con $e_{\underline{i}}^* = e_{i_1}^* \wedge \dots \wedge e_{i_k}^* \in \Lambda^k(V)$. Data una matrice $d \times k$ A , $A_{\underline{i}}$ è il minore di A dato dalle righe i_1, \dots, i_k .

Proposizione 1. $e_{\underline{i}}^*(v_1, \dots, v_k) = \det(A_{\underline{i}})$, dove $A \in R^{d \times k}$ matrice delle coordinate di v_1, \dots, v_k , cioè $A_{ij} = (v_j)_i$.

Dimostrazione. Per induzione su k .

- $k = 1$. OK
- **Passo induttivo** $k - 1 \rightarrow k$. Scriviamo $e_{\underline{i}}^* = e_{i_1}^* \wedge e_{\underline{i}'}^*$ con $\underline{i}' = (i_2, \dots, i_k)$. Usando la definizione di prodotto esterno e l'ipotesi induttiva notiamo che questo è uguale allo sviluppo per la prima riga di $\det(A_{\underline{i}})$

□

Proposizione 2. Posta $\{e_{\underline{i}}: \underline{i} \in I(d, k)\}$ è una base di $\Lambda^k(V)$ e in particolare per ogni $\alpha \in \Lambda^k(V)$

$$\alpha = \sum_{\underline{i} \in I(d, k)} \alpha(e_{\underline{i}}) e_{\underline{i}}^*$$

Dimostrazione. Definiamo $\tilde{\alpha}$ come sopra. Prendiamo $\underline{i} \in I(d, k)$, allora

$$\tilde{\alpha}(e_{j_1}, \dots, e_{j_k}) = \sum_{\underline{i}} \alpha(e_{i_1}, \dots, e_{i_k}) \cdot \underbrace{e_{\underline{i}}^*(e_{j_1}, \dots, e_{j_k})}_{=\delta_{\underline{i}j}} = \alpha(e_{j_1}, \dots, e_{j_k})$$

Si conclude per linearità e alternanza.

Corollario. Vale la seguente identità

$$\dim \Lambda^k(V) = \#I(d, k) = \begin{cases} \binom{d}{k} & \text{se } k < d \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Proposizione 3 (Formula di Binet generalizzata). Dati A, B matrici di $d \times k$ con $k < d$, allora

$$\det(B^t A) = \sum_{\underline{i} \in I(d, k)} \det(B_{\underline{i}}) \det(A_{\underline{i}})$$

Dimostrazione. Basta definire $\alpha(v_1, \dots, v_k) = \det(B^t A)$ dove A è la matrice avente colonne pari a v_1, \dots, v_k . Bisogna verificare che α è k -lineare alternante ([TO DO]), da cui segue che

$$\det(B^t A) = \alpha(v_1, \dots, v_k) \stackrel{\text{Prop 2}}{=} \sum_{\underline{i}} \underbrace{\alpha(e_{i_1}^*, \dots, e_{i_k}^*)}_{\det(B_{\underline{i}}^t)} \cdot \underbrace{e_{\underline{i}}^*(v_1, \dots, v_k)}_{\det A_{\underline{i}}}$$

□

Osservazione. Nel caso in cui $B = A$, otteniamo la formula

$$\det(A^t A) = \sum_{\substack{Q \text{ minore} \\ k \times k \text{ di } A}} \det(Q)^2.$$

Caso particolare $V = \mathbb{R}^d$. Indichiamo con e_1, \dots, e_d i vettori della base canonica, dx_1, \dots, dx_d base duale di \mathbb{R}^d , $dx_{\underline{i}} := e_{\underline{i}}^*$ base canonica di $\Lambda^k(\mathbb{R}^d)$.

Esempio.

$$\begin{aligned} & (dx_1 + 2dx_2) \wedge (2dx_1 \wedge dx_3 - dx_2 \wedge dx_4) \\ &= 2dx_1 \wedge dx_1 \wedge dx_3 - dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_4 + 4dx_2 \wedge dx_1 \wedge dx_3 - 2dx_2 \wedge dx_2 \wedge dx_4 \\ &= -dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_4 - 4dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3. \end{aligned}$$

Nota. Nel prodotto esterno si cancellano tutti i termini con indici ripetuti.

Definizione. Dato $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ aperto, una k -forma ω su Ω è una "funzione" da Ω in $\Lambda^k(\mathbb{R}^d)$. In coordinate, $\omega(x) = \sum_{\underline{i} \in I(d, k)} w_{\underline{i}}(x) \cdot dx_{\underline{i}}$.

Il **differenziale esterno** di una k -forma ω su Ω di classe C^1 è la $k+1$ -forma su Ω di classe almeno C^0 data da

- $k = 0$. In tal caso f è una funzione (0-forma) e $df(x) = d_x f = \sum \frac{\partial w_{\underline{i}}(x)}{\partial x_j} dx_j \wedge dx_{\underline{i}}$
- $k > 0$ $d\omega := \sum_{\underline{i} \in I(d,k)} d\omega_{\underline{i}}(x) \wedge dx_{\underline{i}} = \sum_{\underline{i} \in I(d,k)} \sum_{j=1}^d \frac{\partial \omega_{\underline{i}}(x)}{\partial x_j} dx_j \wedge dx_{\underline{i}}$.

Proposizione (Leibniz). Valgono le seguenti.

- $d(\omega_1 \wedge \omega_2) = d\omega_1 \wedge \omega_2 + (-1)^{k_1} \omega_1 \wedge d\omega_2$
- $d^2\omega = 0$