Analisi 3

Appunti di Analisi 3 del corso di Giovanni Alberti e Maria Stella Gelli

Arianna Carelli e Antonio De Lucreziis

I Semestre 2021/2021

Indice

Capitolo 1

Teoria della misura

1.1 Misure astratte

Definizione. Uno spazio misurabile è una terna $(X, \mathcal{A}, \mu)$ tale che

- X è un insieme qualunque.
- $\mathcal{A}$ è una σ-algebra di sottoinsiemi di X, ovvero una famiglia di sottoinsiemi di X che rispetta le seguenti proprietà:
  - $\emptyset, X \in \mathcal{A}$.
  - $\mathcal{A}$ è chiusa per complementare, unione e intersezione numerabile.
- μ è una misura su X, ossia una funzione $\mu\colon \mathcal{A} \to [0, +\infty]$ σ-addittiva, cioè tale che data una famiglia numerabile $\{E_k\} \subset \mathcal{A}$ disgiunta e posto $E \coloneqq \bigcup E_n$, allora

$$\mu(E) = \sum_n \mu(E_n).$$

Notazione. Data una crescente di insiemi $E_1 \subset E_2 \subset \cdots E_n \subset \cdots$ con $\bigcup E_n = E$, scriviamo $E_n \uparrow E$.

Proprietà.

- $\mu(\emptyset) = 0$
- *Monotonia*: Dati $E, E' \in \mathcal{A}$ e $E \subset E'$, allora $\mu(E) \leq \mu(E')$.
- Data una successione crescente di insiemi $E_n \uparrow E$, allora $\mu(E) = \lim_{n\to\infty} \mu(E_n) = \sup_n \mu(E_n)$.
- Se $E_n \uparrow E$ e $\mu(E_{\bar{n}}) < +\infty$ per qualche $\bar{n}$, allora $\mu(E) = \lim_{n\to+\infty} \mu(E_n) = \inf_n \mu(E_n)$.
- *Subadditività*: Se $\bigcup E_n \supset E$, allora $\mu(E) \leq \sum_n \mu(E_n)$.

Osservazione. Dato $X' \in \mathcal{A}$ si possono restringere $\mathcal{A}$ e μ a X' nel modo ovvio.

Definizioni.

- μ si dice **completa** se $F \subset E, E \in \mathcal{A}$ e $\mu(E) = 0$, allora $F \in \mathcal{A}$ (e di conseguenza $\mu(F) = 0$).
- μ si dice **finita** se $\mu(X) < +\infty$.
- μ si dice **σ-finita** se esiste una successione $\{E_n\}$ con $E_n \subset E_{n+1}$ tale che $\bigcup E_n = X$ con $\mu(E_n) < +\infty$ per ogni n.

Notazione. Sia $P(X)$ un predicato che dipende da $x \in X$ allora si dice che $P(X)$ **vale μ-quasi ogni** $x \in X$ se l'insieme $\{x \mid P(x) \text{ è falso}\}$ è (contenuto in) un insieme di misura μ nulla.

D'ora in poi consideriamo solo misure complete.

1.2 Esempi di misure

- **Misura che conta i punti.**

$$X \text{ insieme} \qquad \mathcal{A} := \mathcal{P}(X) \qquad \mu(E) := \#E \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$$

- **Delta di Dirac in x_0.**

$$X \text{ insieme, } x_0 \in X \text{ fissato} \qquad \mathcal{A} := \mathcal{P}(X) \qquad \mu(E) := \delta_{x_0}(E) = \mathbb{1}_E(x_0)$$

- **Misura di Lebesgue.**

$$X = \mathbb{R}^n \qquad \mathcal{M}^n \ \sigma\text{-algebra dei misurabili secondo Lebesgue} \qquad \mathscr{L}^n \text{ misura di Lebesgue}$$

Dato R parallelepipedo in $\mathbb{R}^n$, cioè $R = \prod_{k=1}^n I_k$ con I_k intervalli in $\mathbb{R}$. Si pone

$$\mathrm{vol}_n(R) := \prod_{k=1}^n \mathrm{lungh}(I_k)$$

per ogni $E \subset \mathbb{R}^n$ (assumendo $\mathrm{lungh}([a, b]) = b - a$). Infine poniamo

$$\mathscr{L}^n(E) := \inf \left\{ \sum_i \mathrm{vol}_n(R_i) \mid \{R_i\} \text{ tale che } E \subset \bigcup_i R_i \right\}.$$

Osservazioni.

- $\mathscr{L}^n(R) = \mathrm{vol}_n(R)$.
- $\mathscr{L}^n$ è così definita se $\mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ ma non è σ-addittiva.
- $\mathscr{L}^n$ è σ-addittiva su $\mathcal{M}^n$ (è per questo che bisogna introdurre $\mathcal{M}^n$).

Il terzo punto giustifica l'introduzione dei **misurabili secondo Lebesgue**. Dunque definiamo $\mathcal{M}^n$, dato $E \subset \mathbb{R}^n$ si dice che E è misurabile (secondo Lebesgue) se

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists A \text{ aperto e } C \text{ chiuso con } C \subset E \subset A \text{tali che} \mathscr{L}^n(A \setminus C) \leq \varepsilon$$

Osservazioni.

- Per ogni E misurabile vale

$$\mathscr{L}^n(E) = \inf \{\mathscr{L}^n \colon A \text{ aperto}, A \supset E\} = \sup \{\mathscr{L}^n \colon K \text{ compatto}, K \subset E\}.$$

- Notiamo che se $F \subset E$ con $E \subset \mathcal{M}^n$ e $\mathscr{L}^n(E) = 0$, allora $F \in \mathcal{M}^n$. Ovvero la misura di Lebesgue è completa!

Notazione. $|E| := \mathscr{L}^n(E)$

1.3 Funzioni misurabili

Definizione. Dato $(X, \mathcal{A}, \mu)$ e $f \colon X \to \mathbb{R}$ (o al posto di $\mathbb{R}$ in Y spazio topologico), diciamo che f è **misurabile** (più precisamente $\mathcal{A}$-misurabile), se

$$\forall A \text{ aperto } f^{-1}(A) \in \mathcal{A}$$

Osservazioni.

- Dato $E \subset X$, vale $E \in \mathcal{A}$ se solo se $\mathbb{1}_E$ è misurabile.
- La classe delle funzioni misurabili è chiusa rispetto a molte operazioni
  - *somma*, *prodotto* (se hanno senso nello spazio immagine della funzione).
  - *Composizione con funzione continua*: Se $f\colon X \to Y$ continua e $g\colon Y \to Y'$ continua, allora $g \circ f$ è misurabile.
  - *Convergenza puntuale*: data una successione di f_n misurabili e $f_n \to f$ puntualmente, allora f è misurabile.
  - $\liminf$ e $\limsup$ (almeno nel caso $Y = \mathbb{R}$).

1.3.1 Funzioni semplici

Definizione. Definiamo la classe delle **funzione semplici** come

$$\mathcal{S} := \left\{ f\colon X \to \mathbb{R} \;\middle|\; f = \sum_i \alpha_i \mathbb{1}_{E_i} \text{ con } E_i \text{ misurabili e } \{\alpha_i\} \text{ finito} \right\}$$

Osservazione. La rappresentazione di una funzione semplice come combinazione lineare di indicatrici di insiemi *non è unica*, però se necessario possiamo prendere gli E_i disgiunti.

1.4 Integrale

Definizione. Diamo la definizione di $\int_X f \, \mathrm{d}\mu$ per passi

i) Se $f \in \mathcal{S}$ e $f \geq 0$ cioè $f = \sum_i \alpha_i \mathbb{1}_{E_i}$ con $\alpha_i \geq 0$ allora poniamo

$$\int\limits_X f \, \mathrm{d}\mu := \sum_i \alpha_i \mu(E_i),$$

convenendo che $0 \cdot +\infty = 0$ in quanto la misura di un insieme non è necessariamente finita.

ii) Se $f\colon X \to [0, +\infty]$ misurabile si pone

$$\int\limits_X f \, \mathrm{d}\mu := \sup_{\substack{g \in \mathcal{S} \\ 0 \leq g \leq f}} \int\limits_X g \, \mathrm{d}\mu.$$

iii) $f\colon X \to \overline{\mathbb{R}}$ misurabile si dice **integrabile** se

$$\int\limits_X f^+ \, \mathrm{d}\mu < +\infty \quad \text{oppure} \quad \int\limits_X f^- \, \mathrm{d}\mu < +\infty.$$

e per tali f si pone

$$\int\limits_X f \, \mathrm{d}\mu := \int\limits_X f^+ \, \mathrm{d}\mu - \int\limits_X f^- \, \mathrm{d}\mu.$$

iv) $f\colon X \to \mathbb{R}^n$ si dice **sommabile** (o di **classe** $\mathscr{L}^1$) se $\int_X |f| \, \mathrm{d}\mu < +\infty$.
In tal caso, se $\int_X f_i^{\pm} \, \mathrm{d}\mu < +\infty$ per ogni f_i componente di f, allora $\int_X f \, \mathrm{d}\mu$ esiste ed è finito.

Per tali f si pone

$$\int\limits_X f \, \mathrm{d}\mu := \left(\int_X f_1 \, \mathrm{d}\mu, \dots, \int_X f_n \, \mathrm{d}\mu\right).$$

Notazione. Scriveremo spesso $\int_E f(x) \, \mathrm{d}x$ invece di $\int_E f \, \mathrm{d}\mathscr{L}^n$.

Osservazione 1. Si hanno le seguenti.

- L'integrale è lineare (sulle funzioni sommabili).
- Le definizioni in i) E ii) Danno lo stesso risultato per f semplice ≥ 0.
- La definizione in ii) Ha senso per ogni $f\colon X \to [0, +\infty]$ anche non misurabile. Ma in generale vale solo che

$$\int\limits_X f_1 + f_2 \, \mathrm{d}\mu \geq \int_X f_1 \, \mathrm{d}\mu + \int_X f_2 \, \mathrm{d}\mu.$$

- Dato $E \in \mathcal{A}$, f misurabile su E, notiamo che vale l'uguaglianza

$$\int_E f \, \mathrm{d}\mu := \int_X f \cdot \mathbb{1}_E \, \mathrm{d}\mu.$$

- Si può definire $\int_X f \, \mathrm{d}\mu$ anche per $f\colon X \to Y$ con Y spazio vettoriale normato finito dimensionale e f sommabile. (è necessario avere uno spazio vettoriale, perchè mi serve la linearità e la moltiplicazione per scalare).
- Se $f_1 = f_2$ μ-q.o. allora $\int_X f_1 \, \mathrm{d}\mu = \int_X f_2 \, \mathrm{d}\mu$.
- Si definisce $\int_X f \, \mathrm{d}\mu$ anche se f è misurabile e definita su $X \setminus N$ con $\mu(N) = 0$.
- se $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ è integrabile secondo Rienmann allora è misurabile secondo Lebesgue e le due nozioni di integrale coincidono. *Nota.* Lo stesso vale per integrali impropri di funzioni positive. Ma nel caso più generale non vale: se $f\colon (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ è data da $f(x) := \dfrac{\sin x}{x}$, allora l'integrale di f definito su $(0, +\infty)$ esiste come integrale improprio ma non secondo Lebesgue $\left(\int_0^{+\infty} f^+ \, \mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} f^- \, \mathrm{d}x = +\infty\right)$.
- $\int_X f \, \mathrm{d}\delta_{x_0} = f(x_0)$.
- se $X = \mathbb{N}$ e μ è la misura che conta i punti l'integrale è

$$\int_X f \, \mathrm{d}\mu = \sum_{n=0}^{\infty} f(n)$$

  per le f positive o tali che $\sum f^+(n) < +\infty$ oppure $\sum f^+(n) < -\infty$.
  Nota. $\sum_1^\infty \frac{(-1)^n}{n}$ esiste come serie ma non come integrale. Da questo si osserva che serie e integrale non coincidono.
- Dato X qualunque, μ misura che conta i punti e $f\colon X \to [0, +\infty]$ posso definire la somma di tutti i valori di f

$$\sum_{x \in X} f(x) := \int\limits_X f \, \mathrm{d}\mu.$$

1.5 Teoremi di convergenza

Prendo $X, \mathcal{A}, \mu$ come al solito.

Teorema 1.1 (Convergenza Monotona (Beppo Levi))**.** Date $f_n\colon X \to [0, +\infty]$ misurabili, tali che $f_n \uparrow f$ ovunque in X, allora

$$\lim_{n \to +\infty} \int\limits_X f_n \, \mathrm{d}\mu = \int\limits_X f \, \mathrm{d}\mu,$$

dove

$$\lim_{n\to+\infty}\int_X f_n \, \mathrm{d}\mu = \sup_n \int f_n \, \mathrm{d}\mu.$$

Teorema 1.2 (Lemma di Fatou)**.** Date $f_n\colon X \to [0,+\infty]$ misurabili, allora

$$\liminf_{n\to+\infty}\int_X f \, \mathrm{d}\mu \geq \int_X \left(\liminf_{n\to+\infty} f_n\right) \, \mathrm{d}\mu.$$

Teorema 1.3. Date $f_n\colon X \to \mathbb{R}$ (o anche $\mathbb{R}^n$) tali che

convergenza puntuale. $f_n(x) \to f(x)$ per ogni $x \in X$.
dominazione. Esiste $g\colon X \to [0,+\infty]$ sommabile tale che $|f_n(x)| \leq g(x)$ per ogni $x \in X$ e per ogni $n \in \mathbb{N}$.

Allora

$$\lim_{n\to\infty}\int_X f_n \, \mathrm{d}\mu = \int_X f \, \mathrm{d}\mu.$$

Nota. la seconda proprietà è essenziale; sostituirla con $\int_X |f_n| \, \mathrm{d}\mu \leq C < +\infty$ non basta!

Altro esempio di misura. Data $\rho\colon \mathbb{R}^n \to [0,+\infty]$ misurabile, la misura con densità ρ è data da

$$\mu(E) = \int_E \rho \, \mathrm{d}x \quad \text{per ogni } E \text{ misurabile.}$$

Osservazione 2. Si hanno le seguenti.

- $\mathbb{R}^n$ e $\mathscr{L}^n$ possono essere sostituiti da X e $\widetilde{\mu}$.
- il fatto che μ è una misura segue da Beppo Levi, in particolare serve per mostrare la subadditività.

Teorema 1.4 (Cambio di variabile)**.** Siano Ω, Ω' aperti di $\mathbb{R}^n$, $\phi\colon \Omega \to \Omega'$ un diffeomorfismo di classe C^1 e $f\colon \Omega' \to [0,+\infty]$ misurabile. Allora

$$\int_{\Omega'} f(x') \, \mathrm{d}x' = \int_\Omega f(\phi(x)) \left|\det(\nabla\phi(x))\right| \, \mathrm{d}x.$$

La stessa formula vale per f a valori in $\overline{\mathbb{R}}$ integrabile e per f a valori in $\mathbb{R}^n$ sommabile.

Osservazione 3. Si hanno le seguenti.

- Se $n = 1$, $|\det(\nabla\phi(x))| = |\phi'(x)|$ e non $\phi'(x)$ come nella formula vista ad analisi 1 (l'informazione del segno viene data dall'inversione degli estremi).
- Indebolire le ipotesi su ϕ è delicato. Basta ϕ di classe C^1 e $\#\phi^{-1}(x') = 1$ per quasi ogni $x' \in \Omega'$ (supponendo ϕ iniettiva la proprietà precedente segue immediatamente). Se ϕ non è "quasi" iniettiva bisogna correggere la formula per tenere conto della molteplicità.

Di seguito riportiamo il teorema di Fubini-Tonelli per la misura di Lebesgue.

Teorema 1.5 (Fubini-Tonelli)**.** Sia $R^{n_1} \times \mathbb{R}^{n_2} \simeq \mathbb{R}^n$ con $n = n_1 + n_2$, $E \coloneqq E_1 \times E_2$ dove E_1, E_2 sono misurabili e f è una funzione misurabile definita su E. Se f ha valori in $[0,+\infty]$ allora

$$\int_X f \, \mathrm{d}\mu = \int_{E_2}\left(\int_{E_1} f(x_1,x_2) \, \mathrm{d}x_1\right) \, \mathrm{d}x_2 = \int_{E_1}\left(\int_{E_2} f(x_1,x_2) \, \mathrm{d}x_2\right) \, \mathrm{d}x_1.$$

Vale lo stesso per f a valori in $\mathbb{R}$ o in $\mathbb{R}^n$ sommabile.

Osservazione 4. Si hanno le seguenti.

- Se X_1, X_2 sono spazi con misure μ_1, μ_2 (con opportune ipotesi) vale:

$$\int_{E_2} \left(\int_{E_1} f(x_1, x_2)\ \mathrm{d}\mu_1(x_1) \right) \mathrm{d}\mu_2(x_2) = \int_{E_1} \left(\int_{E_2} f(x_1, x_2)\ \mathrm{d}\mu_2(x_2) \right) \mathrm{d}\mu_1(x_1).$$

  se $f \geq 0$ oppure $\displaystyle\int_{X_1} \left(\int_{x_2} |f|\ \mathrm{d}\mu_2(x_2) \right) \mathrm{d}\mu_1(x_1) < +\infty$.

- Se $X_1 \subset \mathbb{R}$ (oppure $X_1 \subset \mathbb{R}^n$), $\mu_1 = \mathscr{L}^n$ e $X_2 = \mathbb{N}$, μ_2 è la misura che conta i punti, allora la formula sopra diventa

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\int_{X_1} f_n(x)\ \mathrm{d}x \right) = \int_{X_1} \left(\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x) \right) \mathrm{d}x.$$

  Se $f_i \geq 0$ oppure $\displaystyle\sum_i \left(\int_{X_1} |f_i(x)|\ \mathrm{d}x \right) < +\infty$.

- se $X_1 = X_2 = \mathbb{N}$ e $\mu_1 = \mu_2$ è la misura che conta i punti la formula sopra diventa

$$\sum_{j=0}^{\infty} \left(\sum_{i=0}^{\infty} a_{i,j} \right) = \sum_{i=0}^{\infty} \left(\sum_{j=0}^{\infty} a_{i,j} \right)$$

  se $a_{i,j} \geq 0$ oppure $\sum_i \sum_j |a_{i,j}| < +\infty$.

Capitolo 2

Spazi L^p e convoluzione

Capitolo 3

Spazi di Hilbert

Capitolo 4

Serie di Fourier

Capitolo 5

Applicazioni della serie di Fourier

Capitolo 6

Trasformata di Fourier

Capitolo 7

Funzioni armoniche

Capitolo 8

Integrazione di superfici

8.1 Indice Analitico

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipisicing elit, sed do eiusmod tempor incididunt ut labore et dolore magna aliqua. Ut enim ad minim veniam, quis nostrud exercitation ullamco laboris nisi ut aliquip ex ea commodo consequat. Duis aute irure dolor in reprehenderit in voluptate velit esse cillum dolore eu fugiat nulla pariatur. Excepteur sint occaecat cupidatat non proident, sunt in culpa qui officia deserunt mollit anim id est laborum.

↯	Assurdo	↯	Assurdo
↯	Assurdo	↯	Assurdo
↯	Assurdo	↯	Assurdo
↯	Assurdo	↯	Assurdo