Analisi 3

Appunti di Analisi 3 del corso di Giovanni Alberti e Maria Stella Gelli

Arianna Carelli e Antonio De Lucreziis

I Semestre 2021/2021

Indice

Capitolo 1

Teoria della misura

1.1 Misure astratte

Definizione. Uno spazio misurabile è una terna $(X, \mathcal{A}, \mu)$ tale che

- X è un insieme qualunque.
- $\mathcal{A}$ è una σ-algebra di sottoinsiemi di X, ovvero una famiglia di sottoinsiemi di X che rispetta le seguenti proprietà:
  - $\emptyset, X \in \mathcal{A}$.
  - $\mathcal{A}$ è chiusa per complementare, unione e intersezione numerabile.
- μ è una misura su X, ossia una funzione $\mu\colon \mathcal{A} \to [0, +\infty]$ σ-addittiva, cioè tale che data una famiglia numerabile $\{E_k\} \subset \mathcal{A}$ disgiunta e posto $E := \bigcup E_n$, allora

$$\mu(E) = \sum_n \mu(E_n).$$

Notazione. Data una crescente di insiemi $E_1 \subset E_2 \subset \cdots E_n \subset \cdots$ con $\bigcup E_n = E$, scriviamo $E_n \uparrow E$.

Proprietà.

- $\mu(\emptyset) = 0$
- *Monotonia*: Dati $E, E' \in \mathcal{A}$ e $E \subset E'$, allora $\mu(E) \leq \mu(E')$.
- Data una successione crescente di insiemi $E_n \uparrow E$, allora $\mu(E) = \lim_{n\to\infty} \mu(E_n) = \sup_n \mu(E_n)$.
- Se $E_n \uparrow E$ e $\mu(E_{\bar{n}}) < +\infty$ per qualche $\bar{n}$, allora $\mu(E) = \lim_{n\to+\infty} \mu(E_n) = \inf_n \mu(E_n)$.
- *Subadditività*: Se $\bigcup E_n \supset E$, allora $\mu(E) \leq \sum_n \mu(E_n)$.

Osservazione. Dato $X' \in \mathcal{A}$ si possono restringere $\mathcal{A}$ e μ a X' nel modo ovvio.

Definizioni.

- μ si dice **completa** se $F \subset E, E \in \mathcal{A}$ e $\mu(E) = 0$, allora $F \in \mathcal{A}$ (e di conseguenza $\mu(F) = 0$).

- μ si dice **finita** se $\mu(X) < +\infty$.
- μ si dice **σ-finita** se esiste una successione $\{E_n\}$ con $E_n \subset E_{n+1}$ tale che $\bigcup E_n = X$ con $\mu(E_n) < +\infty$ per ogni n.

Notazione. Sia $P(X)$ un predicato che dipende da $x \in X$ allora si dice che $P(X)$ **vale μ-quasi ogni** $x \in X$ se l'insieme $\{x \mid P(x) \text{ è falso}\}$ è (contenuto in) un insieme di misura μ nulla.

D'ora in poi consideriamo solo misure complete.

1.2 Esempi di misure

- **Misura che conta i punti.**
$$X \text{ insieme} \qquad \mathcal{A} \coloneqq \mathcal{P}(X) \qquad \mu(E) \coloneqq \#E \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$$
- **Delta di Dirac in x_0.**
$$X \text{ insieme, } x_0 \in X \text{ fissato} \qquad \mathcal{A} \coloneqq \mathcal{P}(X) \qquad \mu(E) \coloneqq \delta_{x_0}(E) = \mathbb{1}_E(x_0)$$
- **Misura di Lebesgue.**
$$X = \mathbb{R}^n \qquad \mathcal{M}^n \ \sigma\text{-algebra dei misurabili secondo Lebesgue} \qquad \mathscr{L}^n \text{ misura di Lebesgue}$$
Dato R parallelepipedo in $\mathbb{R}^n$, cioè $R = \prod_{k=1}^n I_k$ con I_k intervalli in $\mathbb{R}$. Si pone
$$\mathrm{vol}_n(R) \coloneqq \prod_{k=1}^n \mathrm{lungh}(I_k)$$
per ogni $E \subset \mathbb{R}^n$ (assumendo $\mathrm{lungh}([a,b]) = b - a$). Infine poniamo
$$\mathscr{L}^n(E) \coloneqq \inf \left\{ \sum_i \mathrm{vol}_n(R_i) \,\middle|\, \{R_i\} \text{ tale che } E \subset \bigcup_i R_i \right\}.$$

Osservazioni.

- $\mathscr{L}^n(R) = \mathrm{vol}_n(R)$.
- $\mathscr{L}^n$ è così definita se $\mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ ma non è σ-addittiva.
- $\mathscr{L}^n$ è σ-addittiva su $\mathcal{M}^n$ (è per questo che bisogna introdurre $\mathcal{M}^n$).

Il terzo punto giustifica l'introduzione dei **misurabili secondo Lebesgue**. Dunque definiamo $\mathcal{M}^n$, dato $E \subset \mathbb{R}^n$ si dice che E è misurabile (secondo Lebesgue) se
$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists A \text{ aperto e } C \text{ chiuso con } C \subset E \subset A \text{tali che} \mathscr{L}^n(A \smallsetminus C) \le \varepsilon$$

Osservazioni.

- Per ogni E misurabile vale
$$\mathscr{L}^n(E) = \inf \{\mathscr{L}^n \colon A \text{ aperto}, A \supset E\} = \sup \{\mathscr{L}^n \colon K \text{ compatto}, K \subset E\}.$$
- Notiamo che se $F \subset E$ con $E \subset \mathcal{M}^n$ e $\mathscr{L}^n(E) = 0$, allora $F \in \mathcal{M}^n$. Ovvero la misura di Lebesgue è completa!

Notazione. $|E| \coloneqq \mathscr{L}^n(E)$

1.3 Funzioni misurabili

Definizione. Dato $(X, \mathcal{A}, \mu)$ e $f\colon X \to \mathbb{R}$ (o al posto di $\mathbb{R}$ in Y spazio topologico), diciamo che f è **misurabile** (più precisamente $\mathcal{A}$-misurabile), se

$$\forall A \text{ aperto } f^{-1}(A) \in \mathcal{A}$$

Osservazioni.

- Dato $E \subset X$, vale $E \in \mathcal{A}$ se solo se $\mathbb{1}_E$ è misurabile.
- La classe delle funzioni misurabili è chiusa rispetto a molte operazioni
  - *somma*, *prodotto* (se hanno senso nello spazio immagine della funzione).
  - *Composizione con funzione continua*: Se $f\colon X \to Y$ continua e $g\colon Y \to Y'$ continua, allora $g \circ f$ è misurabile.
  - *Convergenza puntuale*: data una successione di f_n misurabili e $f_n \to f$ puntualmente, allora f è misurabile.
  - $\liminf$ e $\limsup$ (almeno nel caso $Y = \mathbb{R}$).

1.3.1 Funzioni semplici

Definizione. Definiamo la classe delle **funzione semplici** come

$$\mathcal{S} := \left\{ f\colon X \to \mathbb{R} \;\middle|\; f = \sum_i \alpha_i \mathbb{1}_{E_i} \text{ con } E_i \text{ misurabili e } \{\alpha_i\} \text{ finito} \right\}$$

Osservazione. La rappresentazione di una funzione semplice come combinazione lineare di indicatrici di insiemi *non è unica*, però se necessario possiamo prendere gli E_i disgiunti.

1.4 Integrale

Definizione. Diamo la definizione di $\displaystyle\int_X f \,\mathrm{d}\mu$ per passi

i) Se $f \in \mathcal{S}$ e $f \geq 0$ cioè $f = \sum_i \alpha_i \mathbb{1}_{E_i}$ con $\alpha_i \geq 0$ allora poniamo

$$\int_X f \,\mathrm{d}\mu := \sum_i \alpha_i \mu(E_i),$$

convenendo che $0 \cdot +\infty = 0$ in quanto la misura di un insieme non è necessariamente finita.

ii) Se $f\colon X \to [0, +\infty]$ misurabile si pone

$$\int_X f \,\mathrm{d}\mu := \sup_{\substack{g \in \mathcal{S} \\ 0 \leq g \leq f}} \int_X g \,\mathrm{d}\mu.$$

iii) $f\colon X \to \overline{\mathbb{R}}$ misurabile si dice **integrabile** se

$$\int_X f^+ \,\mathrm{d}\mu < +\infty \quad \text{oppure} \quad \int_X f^- \,\mathrm{d}\mu < +\infty.$$

e per tali f si pone

$$\int_X f \,\mathrm{d}\mu := \int_X f^+ \,\mathrm{d}\mu - \int_X f^- \,\mathrm{d}\mu.$$

iv) $f\colon X \to \mathbb{R}^n$ si dice **sommabile** (o di **classe** $\mathscr{L}^1$) se $\int_X |f| \,\mathrm{d}\mu < +\infty$. In tal caso, se $\int_X f_i^\pm \,\mathrm{d}\mu < +\infty$ per ogni f_i componente di f, allora $\int_X f \,\mathrm{d}\mu$ esiste ed è finito.

Per tali f si pone

$$\int_X f \,\mathrm{d}\mu := \left(\int_X f_1 \,\mathrm{d}\mu, \ldots, \int_X f_n \,\mathrm{d}\mu\right).$$

Notazione. Scriveremo spesso $\int_E f(x)\,\mathrm{d}x$ invece di $\int_E f \,\mathrm{d}\mathscr{L}^n$.

Osservazioni.

- L'integrale è lineare (sulle funzioni sommabili).
- I passaggi i) e ii) danno lo stesso risultato per f semplice ≥ 0.
- La definizione in ii) ha senso per ogni $f\colon X \to [0, +\infty]$ anche non misurabile. Ma in generale vale solo che
$$\int_X f_1 + f_2 \,\mathrm{d}\mu \geq \int_X f_1 \,\mathrm{d}\mu + \int_X f_2 \,\mathrm{d}\mu.$$
- Dato $E \in \mathcal{A}$, f misurabile su E, notiamo che vale l'uguaglianza
$$\int_E f \,\mathrm{d}\mu := \int_X f \cdot \mathbb{1}_E \,\mathrm{d}\mu.$$
- Si può definire l'integrale anche per $f\colon X \to Y$ con Y *spazio vettoriale normato finito dimensionale*[1] ed f sommabile.
- Se $f_1 = f_2$ μ-q.o. allora $\int_X f_1 \,\mathrm{d}\mu = \int_X f_2 \,\mathrm{d}\mu$.
- Si definisce $\int_X f \,\mathrm{d}\mu$ anche se f è misurabile e definita su $X \setminus N$ con $\mu(N) = 0$.
- Se $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ è integrabile secondo Riemann allora è misurabile secondo Lebesgue e le due nozioni di integrale coincidono.

  Nota. Lo stesso vale per integrali impropri di funzioni positive. Ma nel caso più generale non vale: se consideriamo la funzione
$$f\colon (0, +\infty) \to \mathbb{R} \qquad f(x) := \frac{\sin x}{x}$$
  allora l'integrale di f definito su $(0, +\infty)$ esiste come integrale improprio ma non secondo Lebesgue, infatti
$$\int_0^{+\infty} f^+ \,\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} f^- \,\mathrm{d}x = +\infty$$

[1] È necessario avere uno spazio vettoriale, perchè serve la linearità e la moltiplicazione per scalare

- $\int_X f \, \mathrm{d}\delta_{x_0} = f(x_0)$
- Se $X = \mathbb{N}$ e μ è la misura che conta i punti l'integrale è
$$\int_X f \, \mathrm{d}\mu = \sum_{n=0}^{\infty} f(n)$$
per le f positive o tali che $\sum f^+(n) < +\infty$ oppure $\sum f^-(n) < +\infty$.

  Nota. Come prima nel caso di funzioni non sempre positive ci sono casi in cui la serie solita non è definita come integrale di una misura, ad esempio
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$$
esiste come serie ma non come integrale.
- Dato X qualunque, μ misura che conta i punti e $f\colon X \to [0, +\infty]$ possiamo definire la somma di tutti i valori di f
$$\sum_{x \in X} f(x) \coloneqq \int_X f \, \mathrm{d}\mu.$$

1.5 Teoremi di convergenza

Sia $(X, \mathcal{A}, \mu)$ come in precedenza.

Teorema. *di convergenza monotona o Beppo-Levi.* Date $f_n\colon X \to [0, +\infty]$ misurabili, tali che $f_n \uparrow f$ ovunque in X, allora
$$\lim_{n \to +\infty} \int_X f_n \, \mathrm{d}\mu = \int_X f \, \mathrm{d}\mu,$$
dove
$$\lim_{n \to +\infty} \int_X f_n \, \mathrm{d}\mu = \sup_n \int f_n \, \mathrm{d}\mu.$$

Teorema. *detto lemma di Fatou.* Date $f_n\colon X \to [0, +\infty]$ misurabili, allora
$$\liminf_{n \to +\infty} \int_X f \, \mathrm{d}\mu \geq \int_X \left(\liminf_{n \to +\infty} f_n \right) \mathrm{d}\mu.$$

Teorema. *di convergenza dominata o di Lebesgue.* Date $f_n\colon X \to \mathbb{R}$ (o anche $\mathbb{R}^n$) con le seguenti proprietà

- *Convergenza puntuale:* $f_n(x) \to f(x)$ per ogni $x \in X$.
- *Dominazione:* Esiste $g\colon X \to [0, +\infty]$ sommabile tale che $|f_n(x)| \leq g(x)$ per ogni $x \in X$ e per ogni $n \in \mathbb{N}$.

allora
$$\lim_{n \to \infty} \int_X f_n \, \mathrm{d}\mu = \int_X f \, \mathrm{d}\mu.$$

Nota. La seconda proprietà è essenziale; sostituirla con $\int_X |f_n| \, \mathrm{d}\mu \leq C < +\infty$ non basta!

Definizione. Data una "densità" $\rho\colon \mathbb{R}^n \to [0,+\infty]$ misurabile, la **misura μ con densità ρ** è data da

$$\forall E \in \mathcal{A} \quad \mu(E) := \int_E \rho \, \mathrm{d}x$$

Osservazioni.

- $\mathbb{R}^n$ e $\mathscr{L}^n$ possono essere sostituiti da X e $\widetilde{\mu}$.
- il fatto che μ è una misura segue da Beppo Levi, in particolare serve per mostrare la subadditività.

Teorema. *di cambio di variabile.* Siano Ω e Ω' aperti di $\mathbb{R}^n$, $\Phi\colon \Omega \to \Omega'$ un diffeomorfismo di classe C^1 e $f\colon \Omega' \to [0,+\infty]$ misurabile. Allora

$$\int_{\Omega'} f(x') \, \mathrm{d}x' = \int_{\Omega} f(\Phi(x)) \left|\det(\nabla\Phi(x))\right| \, \mathrm{d}x.$$

La stessa formula vale per f a valori in $\overline{\mathbb{R}}$ integrabile e per f a valori in $\mathbb{R}^n$ sommabile.

Osservazioni.

- Se $n = 1$, $|\det(\nabla\Phi(x))| = |\Phi'(x)|$ e non $\Phi'(x)$ come nella formula vista ad Analisi 1 (l'informazione del segno viene data dall'inversione degli estremi).
- Indebolire le ipotesi su Φ è delicato. Basta Φ di classe C^1 e $\widetilde{\forall} x' \in \Omega'$ $\#\Phi^{-1}(x') = 1$ (supponendo Φ iniettiva la proprietà precedente segue immediatamente). Se Φ non è "quasi" iniettiva bisogna correggere la formula per tenere conto della molteplicità.
- Quest'ultima osservazione serve giusto per far funzionare il cambio in coordinate polari che non è iniettivo solo nell'origine.

1.5.1 Fubini-Tonelli

Di seguito riportiamo il teorema di Fubini-Tonelli per la misura di Lebesgue.

Teorema. *Fubini-Tonelli.* Sia $\mathbb{R}^{n_1} \times \mathbb{R}^{n_2} \simeq \mathbb{R}^n$ con $n = n_1 + n_2$, $E := E_1 \times E_2$ dove E_1, E_2 sono misurabili e f è una funzione misurabile definita su E. Se f ha valori in $[0,+\infty]$ allora

$$\int_X f \, \mathrm{d}\mu = \int_{E_2}\int_{E_1} f(x_1,x_2) \, \mathrm{d}x_1 \, \mathrm{d}x_2 = \int_{E_1}\int_{E_2} f(x_1,x_2) \, \mathrm{d}x_2 \, \mathrm{d}x_1$$

Vale lo stesso per f a valori in $\mathbb{R}$ o in $\mathbb{R}^n$ sommabile.

Osservazioni. Possiamo generalizzare il teorema di Fubini-Tonelli a misure generiche ed ottenere alcuni risultati utili che useremo ogni tanto.

- Se X_1, X_2 sono spazi con misure μ_1, μ_2 (con opportune ipotesi) vale:

  $$\int_{E_2}\int_{E_1} f(x_1,x_2) \, \mathrm{d}\mu_1(x_1) \, \mathrm{d}\mu_2(x_2) = \int_{E_1}\int_{E_2} f(x_1,x_2) \, \mathrm{d}\mu_2(x_2) \, \mathrm{d}\mu_1(x_1).$$

  se $f \geq 0$ oppure $\displaystyle\int_{X_1}\int_{x_2} |f| \, \mathrm{d}\mu_2(x_2) \, \mathrm{d}\mu_1(x_1) < +\infty$.

- *Teorema di scambio serie-integrale:* Se $X_1 \subset \mathbb{R}$ (oppure $X_1 \subset \mathbb{R}^n$), $\mu_1 = \mathscr{L}^n$ e $X_2 = \mathbb{N}$, μ_2 è la misura che conta i punti, allora la formula sopra diventa

  $$\sum_{n=0}^{\infty} \int_{X_1} f_n(x)\,\mathrm{d}x = \int_{X_1} \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)\,\mathrm{d}x.$$

  se $f_i \geq 0$ oppure $\sum_i \int_{X_1} |f_i(x)|\,\mathrm{d}x < +\infty$.

- *Teorema di scambio di serie:* Se $X_1 = X_2 = \mathbb{N}$ e $\mu_1 = \mu_2$ è la misura che conta i punti la formula sopra diventa

  $$\sum_{j=0}^{\infty} \sum_{i=0}^{\infty} a_{i,j} = \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} a_{i,j}$$

  se $a_{i,j} \geq 0$ oppure $\sum_i \sum_j |a_{i,j}| < +\infty$.

Capitolo 2

Spazi L^p e convoluzione

2.1 Disuguaglianze

2.1.1 Disuguaglianza di Jensen

Ricordiamo che una funzione $f\colon \mathbb{R}^d \to [-\infty, +\infty]$ è **convessa** se e solo se dati $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}^d$ e $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in [0, 1]$ con $\sum_i \lambda_i = 1$ abbiamo che

$$f\left(\sum_i \lambda_i x_i\right) \leq \sum_i \lambda_i f(x_i)$$

Teorema (Jensen), Dato $(X, \mathcal{A}, \mu)$ con $\mu(X) = 1$ e $f\colon \mathbb{R}^d \to [-\infty, +\infty]$ convessa e semicontinua inferiormente (S.C.I.) e $u\colon X \to \mathbb{R}^d$ sommabile allora vale

$$\int_X f \circ u \,\mathrm{d}\mu \geq f\left(\int_X u \,\mathrm{d}\mu\right)$$

e $f \circ u$ è integrabile.

Osservazioni.

- $(f \circ u)^-$ ha integrale finito.
- Interpretando μ come probabilità si riscrive come $\mathbb{E}[f \circ \mu] \geq f([u])$.
- Se u è una funzione semplice, cioè $u = \sum_i y_i \cdot \mathbb{1}_{E_i}$ con E_i disgiunti e $\bigcup E_i = X$ allora posti $\lambda_i = \mu(E_i)$ abbiamo

  $$\int_X f \circ u \,\mathrm{d}\mu = \int_X \sum_i f(y_i) \cdot \mathbb{1}_{E_i} \,\mathrm{d}\mu = \sum_i \lambda_i f(y_i) \geq f\left(\sum_i \lambda_i y_i\right) = f\left(\int_X u \,\mathrm{d}\mu\right)$$

  Questo ci darebbe una strada per dimostrare in generale per passi il teorema di Jensen ma in realtà si presentano vari problemi tecnici.
- Ogni funzione convessa e S.C.I su Ω convesso in $\mathbb{R}^d$ si estende a $\tilde{f}\colon \mathbb{R} \to (-\infty, +\infty]$ convessa e S.C.I., ad esempio se $\Omega = (0, +\infty)$

  $$f(y) = \frac{1}{y} \quad \rightsquigarrow \quad \tilde{f}(y) = \begin{cases} +\infty & y \leq 0 \\ \dfrac{1}{y} & y > 0 \end{cases}$$

- La semi-continuità inferiore serve perché le funzioni convesse sono continue solo se a valori in $\mathbb{R}$, ad esempio per k costante la funzione

$$f(y) := \begin{cases} k & y < 0 \\ +\infty & y \geq 0 \end{cases}$$

è convessa ma non semi-continua inferiormente (e neanche continua).

Dimostrazione. Poniamo $y_0 := \int_X u \, \mathrm{d}\mu$, allora la tesi diventa

$$\int_X f \circ u \, \mathrm{d}\mu \geq f(y_0)$$

Prendiamo $\phi \colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ affine (ovvero $\phi(y) = a \cdot y + b$ con $a \in \mathbb{R}^d$ e $b \in \mathbb{R}$) tale che $\phi \leq f$, allora

$$\int_X f \circ u \, \mathrm{d}\mu \geq \int_X \phi \circ u \, \mathrm{d}\mu = \int_X a \cdot u + b \, \mathrm{d}\mu = a y_0 + b = \phi(y_0)$$

Infine concludiamo usando il seguente lemma di caratterizzazione delle funzioni convesse ed S.C.I.

Lemma. Ogni $f \colon \mathbb{R}^d \to (-\infty, +\infty]$ convessa e S.C.I è tale che

$$\forall y_0 \in \mathbb{R}^d \qquad \sup_{\substack{\phi \text{ affine} \\ \phi \leq f}} \phi(y_0) = f(y_0)$$

Nel caso $d = 1$ e $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ possiamo appoggiarci al fatto che le funzioni convesse sono ammettono sempre derivata destra o sinistra, il sup diventa un massimo e ci basta prendere come ϕ la retta tangente in $(y_0, f(y_0))$ o una con pendenza compresa tra $f'(y_0^-)$ e $f'(y_0^+)$.

Rileggendo meglio la dimostrazione segue che $(f \circ u)^- < (\phi \circ u)^- \implies (f \circ u)^-$.

$\square$

2.2 Costruzione spazi L^p

Definizione. Dati $p_1, p_2 \in [1, +\infty]$ diciamo che sono **coniugati** se

$$\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} = 1$$

convenendo che ${}^1/_\infty = 0$.

Fissiamo $p \in [1, +\infty]$ detto "esponente di sommabilità" e sia $(X, \mathcal{A}, \mu)$ come sempre.

Definizione. $f \colon X \to \overline{\mathbb{R}}$ o $\mathbb{R}^d$ misurabile, allora la **norma** p **di** f è per $p \in [1, +\infty)$

$$\|f\|_p := \left(\int_X |f|^p \, \mathrm{d}\mu \right)^p$$

mentre per $p = +\infty$ poniamo

$$\|f\|_\infty := \inf\{m \in [0, +\infty] \mid |f(x)| \leq m \text{ per } \mu\text{-q.o. } x\}$$

in realtà queste sono solo delle semi-norme[1].

[1] Vedremo meglio più avanti questo dettaglio

- $\|f\|_\infty \leq \sup\limits_{x \in X} |f(x)|$
- $\|f\|_p = 0 \iff f = 0$ quasi ovunque

  Dimostrazione.

  $\boxed{\Rightarrow}$ [TODO: Facile ma non ovvia]

  $\boxed{\Leftarrow}$ Ovvio.

  $\square$

- Se $f_1 = f_2$ quasi ovunque $\implies \|f_1\|_p = \|f_2\|_p$.

  Dimostrazione. $f_1 = f_2$ quasi ovunque $\implies \exists D \subset X$ con $\mu(D) = 0$ tale che $f_1(x) = f_2(x)$ su $X \setminus D$, usiamo il fatto che l'integrale non cambia se modifichiamo la funzione su un insieme di misura nulla

  $$\|f_1\|_p^p = \int_X |f_1|^p \, \mathrm{d}\mu = \int_{X \setminus D} |f_1|^p \, \mathrm{d}\mu = \int_{X \setminus D} |f_2|^p \, \mathrm{d}\mu = \int_X |f_2|^p \, \mathrm{d}\mu = \|f_2\|_p^p$$

  $\square$

2.2.1 Disuguaglianza di Young

Proposizione. Per ogni $a_1, a_2 \geq 0$ e $\lambda_1, \lambda_2 > 0$ con $\lambda_1 + \lambda_2 > 0$ abbiamo che

$$a_1^{\lambda_1} a_2^{\lambda_2} \leq \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2$$

inoltre vale l'uguale se e solo se $a_1 = a_2$.

Dimostrazione. Se $a_1 = a_2 = 0$ allora è ovvia. Supponiamo dunque $a_1, a_2 > 0$, ma sappiamo che

$$\lambda_1 \log a_1 + \lambda_2 \log a_2 \leq \log(\lambda_1 a_2 + \lambda_2 a_2)$$

per concavità del logaritmo e quindi segue la tesi.

Il se e solo se per l'uguale segue dal fatto che il logaritmo è *strettamente concavo.* $\square$

2.2.2 Disuguaglianza di Hölder

Proposizione. Date $f_1, f_2 \colon X \to \overline{\mathbb{R}}$ o $\mathbb{R}^d$ e p_1, p_2 esponenti coniugati allora

$$\int_X |f_1| \cdot |f_2| \, \mathrm{d}\mu \leq \|f_1\|_{p_1} \cdot \|f_2\|_{p_2}$$

vale anche per $p = +\infty$ convenendo che $+\infty \cdot 0 = 0$ a destra dell'uguale.

Dimostrazione. Se $\|f_1\|_{p_1} = 0$ o $+\infty$ e anche $\|f_2\|_{p_2} = 0$ o $+\infty$ la dimostrazione è immediata, supponiamo dunque $\|f_1\|_{p_1}, \|f_2\|_{p_2} > 0$ e finiti.

- *Caso 1:* se $p_1 = 1, p_2 = +\infty$ allora

  $$\int_X |f_1| \cdot |f_2| \, \mathrm{d}\mu \leq \int_X |f_1| \cdot \|f_2\|_\infty \, \mathrm{d}\mu = \|f_2\|_\infty \cdot \int_X |f_1| \, \mathrm{d}\mu = \|f_2\|_\infty \cdot \|f_1\|_1$$

- *Caso 2:* se $1 < p_1, p_2 < +\infty$, introduciamo un parametro $\gamma > 0$ allora

$$\int_X |f_1| \cdot |f_2| \,\mathrm{d}\mu = \int_X \left(\gamma^{p_1} \cdot |f_1|^{p_1}\right)^{1/p_1} \cdot \left(\gamma^{-p_2} \cdot |f_1|^{p_2}\right)^{1/p_2} \mathrm{d}\mu$$

  a questo punto chiamiamo per comodità $g_1 := \gamma^{p_1} \cdot |f_1|^{p_1}$, $\lambda_1 := 1/p_1$ e $g_2 := \gamma^{-p_2} \cdot |f_1|^{p_2}$, $\lambda_2 := 1/p_2$ da cui

$$= \int_X g_1^{\lambda_1} \cdot g_2^{\lambda_2} \overset{\text{Young}}{\leq} \int_X \lambda_1 g_1 + \lambda_2 g_2 \,\mathrm{d}\mu = \lambda_1 \gamma^{p_1} \int_X |f_1|^{p_1} + \lambda_2 \gamma^{-p_2} \int_X |f_1|^{p_2} \,\mathrm{d}\mu$$
$$= \lambda_1 \gamma^{p_1} \cdot \|f_1\|_{p_1}^{p_1} + \lambda_2 \gamma^{-p_2} \cdot \|f_1\|_{p_2}^{p_2}$$

  posti ora $a_1 := \gamma^{p_1} \|f_1\|_{p_1}^{p_1}$ e $a_2 := \gamma^{-p_2} \|f_1\|_{p_2}^{p_2}$, per $\gamma \to 0$ abbiamo che $a_1 \to 0, a_2 \to +\infty$ mentre per $\gamma \to +\infty$ abbiamo che $a_1 \to +\infty, a_2 \to 0$ dunque per il teorema del valor medio esisterà γ tale che $a_1 = a_2$, ma allora siamo nel caso dell'uguaglianza per la disuguaglianza di Young dunque

$$\lambda_1 \gamma^{p_1} \|f_1\|_{p_1}^{p_1} + \lambda_2 \gamma^{-p_2} \|f_1\|_{p_2}^{p_2} = \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 = a_1^{\lambda_1} \cdot a_2^{\lambda_2} = \|f_1\|_{p_1} \cdot \|f_2\|_{p_2}$$

In particolare l'uguaglianza vale se [TODO] □

Osservazione. La disuguaglianza di Hölder può essere generalizzata a n funzioni, date $f_1, \dots, f_n$ e $p_1, \dots, p_n$ con $\frac{1}{p_1} + \cdots + \frac{1}{p_2} = 1$ allora

$$\int_X \prod_i |f_i| \,\mathrm{d}\mu \leq \prod_i \|f_i\|_{p_i}$$

2.2.3 Disuguaglianza di Minkowski

Proposizione. Consideriamo sempre $(X, \mathcal{A}, \mu)$ e sia $p \in [1, +\infty]$ un esponente di sommabilità ed $f_1, f_2 \colon X \to \mathbb{R}$ oppure $\mathbb{R}^d$ allora vale la disuguaglianza triangolare

$$\|f_1 + f_2\|_p \leq \|f_1\|_p + \|f_2\|_p$$

Dimostrazione.

- *Caso 1:* se $p = 1$ o $p = +\infty$, allora basta fare il calcolo diretto
  - Se $p = 1$

$$\|f_1 + f_2\|_1 = \int_X |f_1 + f_2| \,\mathrm{d}\mu \leq \int_X |f_1| + |f_2| \,\mathrm{d}\mu = \int_X |f_1| \,\mathrm{d}\mu + \int_X |f_2| \,\mathrm{d}\mu = \|f_1\|_1 + \|f_2\|_1$$

  - Se $p = +\infty$

$$\|f_1 + f_2\|_\infty = \operatorname{supess}_X |f_1 + f_2| = \operatorname{supess}_{X \setminus D} \leq \operatorname{supess}_{X \setminus D}(|f_1| + |f_2|)$$
$$= \operatorname{supess}_{X \setminus D} |f_1| + \operatorname{supess}_{X \setminus D} |f_2| = \operatorname{supess}_X |f_1| + \operatorname{supess}_X |f_2| = \|f_1\|_\infty + \|f_2\|_\infty$$

- *Caso 2:* se $1 < p < +\infty$ e $0 < \|f_1 + f_2\|_p < +\infty$

$$\begin{aligned}
\|f_1 + f_2\|_p^p = \int_X |f_1 + f_2|^p \leq \int_X (|f_1| + |f_2|) \cdot |f_1 + f_2|^{p-1} \,\mathrm{d}\mu = \\
&= \int_X |f_1| \cdot |f_1 + f_2|^{p-1} \,\mathrm{d}\mu + \int_X |f_2| \cdot |f_1 + f_2|^{p-1} \,\mathrm{d}\mu = \\
&\overset{\text{Hölder}}{\leq} \|f_1\|_p \cdot \||f_1 + f_2|^{p-1}\|_q + \|f_2\|_p \cdot \||f_1 + f_2|^{p-1}\|_q = \\
&= (\|f_1\|_p + \|f_2\|_p) \cdot \||f_1 + f_2|^{p-1}\|_q = (\|f_1\|_p + \|f_2\|_p) \cdot \|f_1 + f_2\|_p^{p-1}
\end{aligned}$$

e poiché $\|f_1 + f_2\|_p > 0$ possiamo portare l'ultimo fattore dall'altra parte

$$\implies \frac{\|f_1 + f_2\|_p^p}{\|f_1 + f_2\|_p^{p-1}} \leq \|f_1\|_p + \|f_2\|_p \implies \|f_1 + f_2\|_p \leq \|f_1\|_p + \|f_2\|_p$$

- *Caso 3:* se $1 < p < +\infty$ ma $\|f_1 + f_2\| = 0$ o $+\infty$ allora se $\|f_1 + f_2\| = 0$ la disuguaglianza è banale mentre se $\|f_1 + f_2\| = +\infty$ si usa la seguente disuguaglianza

$$\|f_1 + f_2\|_p^p \leq 2^{p-1}(\|f_1\|_p^p + \|f_2\|_p^p)$$

che si ottiene usando la convessità della funzione $y \mapsto y^p$

$$\|f_1 + f_2\|_p^p = \int_X |f_1 + f_2|^p \, \mathrm{d}\mu = 2^p \int_X \left| \frac{f_1 + f_2}{2} \right|^p \mathrm{d}\mu$$

$$\leq 2^p \int_X \frac{1}{2}|f_1|^p + \frac{1}{2}|f_2|^p \, \mathrm{d}\mu = 2^{p-1}(\|f_1\|_p^p + \|f_2\|_p^p)$$

da cui possiamo ricavare subito che almeno uno dei due termini deve essere $+\infty$.

Esercitazione del 4 ottobre

Teoria della misura

Di seguito riportiamo alcune proprietà di base di teoria della misura.

Proprietà.

i) Se $A \subset B$, allora $\mu(A) \leq \mu(B)$.

Dimostrazione. Scomponiamo $B = (B \setminus A) \cup (A \cap B)$. Per ipotesi $A \cap B = A$ ed essendo la misura positiva segue che

$$\mu(B) = \underbrace{\mu(B \setminus A)}_{\geq 0} + \mu(A) \geq \mu(A).$$

ii) Dati due insiemi A, B misurabili, vale

$$\mu(A \cup B) \leq \mu(A) + \mu(B).$$

Dimostrazione. La disuguaglianza segue dalle seguenti uguaglianze.

$$\begin{aligned} \mu(A) &= \mu(A \setminus B) + \mu(A \cap B) \\ \mu(B) &= \mu(B \setminus A) + \mu(A \cap B) \\ \mu(A \cup B) &= \mu(A \setminus B) + \mu(B \setminus A) + \mu(A \cap B). \end{aligned}$$

iii) Data una successione di insiemi $E_1 \subset E_2 \subset \cdots \subset \cdots$, si ha

$$\mu\left(\bigcup_i E_i\right) = \sup_i \mu(E_i) = \lim_i \mu(E_i).$$

iv) Data una successione di insiemi $E_1 \supset E_2 \supset \cdots \supset \cdots$ e $\mu(E_1) < +\infty$, si ha

$$\mu\left(\bigcap_i E_i\right) = \lim_i \mu(E_i).$$

Esercizio (Numberabile subadditività). Dato $E \in \mathcal{A}, E \subset \bigcup_i E_i$ dove $E_i \in \mathcal{A}$. Allora

$$\mu(E) \leq \sum_i \mu(E_i).$$

Dimostrazione (*Idea*). Basta dimostrare che $\mu\left(\bigcup_i E_i\right) \leq \sum_i \mu(E_i)$. Infatti per quanto visto prima $\mu(E) \leq \mu\left(\bigcup_i E_i\right)$.

Si dimostra per induzione la seguente

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^N E_i\right) \leq \sum_{i=1}^N \mu(E_i).$$

Il passo base $n = 2$ è stato visto al punto ii). Una volta dimostrata la proprietà sopra, si nota che $\sum_{i=1}^N \mu(E_i)$ è limitata per ogni N, e dunque è limitato anche il suo limite, da cui la tesi.

Funzioni misurabili rispetto alla misura di Lebesgue

Si ricorda che le funzioni *continue*, *semplici* e *semicontinue* sono classi di funzioni misurabili. Due osservazioni sulle funzioni semicontinue.

- Le funzioni semicontinue sono *boreliane*.
- La proprietà di misurabilità delle funzioni semicontinue è necessaria per l'enunciato della disuguaglianza di Jensen.

– inserire controesempio Jensen —

Fatto. Date φ_1, φ_2 funzioni semplici su $\mathbb{R}$ con misura di Lebesgue. Allora $\varphi_1 \vee \varphi_2$ e $\varphi_1 \wedge \varphi_2$ sono ancora funzioni semplici.

Lemma. Data $f\colon X \to [0, +\infty]$ misurabile

$$\int_X f \,\mathrm{d}\mu = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad f = 0 \text{ q.o. su } X.$$

Dimostrazione.

$\boxed{\Rightarrow}$ Dato che f è non negativa, il dominio X può essere riscritto come

$$X = \{x \in X \mid f(x) \geq 0\} = \{x \in X \mid f(x) > 0\} \cup \{x \in X \mid f(x) = 0\}.$$

Ricordiamo che

$$\{x \in X \mid f(x) > 0\} = \bigcup_{n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}} \left\{x \in X \,\middle|\, f(x) \geq \frac{1}{n}\right\},$$

inoltre
$$\mu\left(\{x \in X \mid f(x) > 0\}\right) = \lim_{n\to+\infty} \left\{x \in X \;\middle|\; f(x) \geq \frac{1}{n}\right\},$$
dove
$$\mu\left(\{x \in X \mid f(x) > 0\}\right) > 0 \Longleftrightarrow \exists \bar{n} \mid \mu\left(\{x \in X \mid f(x) \geq 1/\bar{n}\}\right) > 0.$$
Allora
$$\int_X f \,\mathrm{d}\mu \geq \int_{\left\{x \,\middle|\, f(x)\geq \frac{1}{n}\right\}} f \,\mathrm{d}\mu \geq \frac{1}{n}\mu\left(\left\{x \;\middle|\; f(x) \geq \frac{1}{n}\right\}\right).$$

Dunque
$$\mu\left(\left\{x \;\middle|\; f(x) \geq \frac{1}{n}\right\}\right) = 0 \qquad \forall n.$$

Si conclude osservando che
$$\mu\left(\{x \mid f(x) > 0\}\right) = \lim_n \mu\left(\left\{x \;\middle|\; f(x) \geq \frac{1}{n}\right\}\right) = 0.$$

$\boxed{\Leftarrow}$ Dal fatto che f è positiva possiamo scrivere
$$\int_X f \,\mathrm{d}\mu = \sup_{\substack{g\leq f \\ g \text{ semplice}}} \int_X g \,\mathrm{d}\mu = \sup \sum_i \alpha_i \mu(E_i) = 0.$$

Osservazione. (sup essenziale di funzioni misurabili). Data f misurabile, definiamo
$$\|f\|_{\infty,X} \coloneqq \inf\left\{m \in [0,+\infty] \mid |f(x)| \leq m \quad \text{quasi ovunque}\right\}.$$

Se $\|f\|_\infty < +\infty$, allora dico che esiste una costante $L > 0$ con $L = \|f\|_{\infty,X}$, tale che
$$|f(x)| \leq L$$
quasi ovunque. Infatti, per definizione di inf, $L = \lim_n m_n$, dove m_n verificano
$$|f(x)| \leq m_n \quad \forall x \in X \setminus N_m, \quad \mu(N_m) = 0.$$
Definisco $N = \bigcup\limits_m N_m$, da cui si ottiene
$$\mu(N) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(N_m) = 0.$$
Ovvero N è trascurabile. Preso $x \in X \setminus N$, vale
$$|f(x)| \leq m_n \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Formula di cambio di variabile applicata a funzioni radiali

Sia $f\colon [0,+\infty) \to \mathbb{R}$ misurabile (di solito si richiede misurabile e positiva oppure sommabile). Vala la seguente

$$\int_0^{+\infty} f\left(|x|\right)\, \mathrm{d}x = c_n \cdot \int_0^{+\infty} f(\rho)\rho^{n-1}\, \mathrm{d}\rho,$$

dove $c_n = n\mathscr{L}^n\left(\mathcal{B}(0,1)\right)$.

Applichiamo questa formula alla stima di integrali di funzioni positive.

Esercizio. Sia

$$\psi(x) = \frac{1}{\|x\|^\alpha}$$

su $\mathcal{B}(0,1) \in \mathbb{R}^n$. Notiamo che $\psi(x) = f(\|x\|)$ con $f = 1/t^\alpha$. Usiamo la formula appena introdotta per determinare gli $\alpha \in \mathbb{R}$ per i quali ψ è sommabile su $\mathcal{B}(0,1)$.

$$\int_{\mathcal{B}(0,1)} \psi(x)\, \mathrm{d}x = c_n \int_0^1 \frac{1}{\rho}\rho^{n-1}\, \mathrm{d}\rho = c_n \int_0^1 \rho^{n-1-\alpha}\, \mathrm{d}\rho = \begin{cases} \log(\rho) & n = \alpha \\ \frac{\rho^{n-\alpha}}{n-\alpha} & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Concludendo,

$$\int_{\mathcal{B}(0,1)} \frac{1}{\|x\|^\alpha}\, \mathrm{d}x < +\infty \iff n > \alpha.$$

Esercizio. Con passaggi analoghi al precedente otteniamo

$$\int_{\mathbb{R}^n \setminus \mathcal{B}(0,1)} \frac{1}{\|x\|^\alpha}\, \mathrm{d}x < +\infty \iff n < \alpha.$$

Esercizio. Vediamo per quali valori di β l'integrale

$$\int_{\mathcal{B}(0,1)} \frac{1}{\left(\|x\| + \|x\|^2\right)^\beta}\, \mathrm{d}x$$

converge.

Vale la seguente catena di uguaglianze.

$$\int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{\left(\|x\| + \|x\|^2\right)^\beta}\, \mathrm{d}x = \int_{\mathcal{B}(0,1)} \frac{1}{\left(\|x\| + \|x\|^2\right)^\beta}\, \mathrm{d}x + \int_{\mathbb{R}^n \setminus \mathcal{B}(0,1)} \frac{1}{\left(\|x\| + \|x\|^2\right)^\beta}\, \mathrm{d}x.$$

Studiamo separatamente i due pezzi dell'integrale.

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{B}(0,1)} \frac{1}{\left(\|x\| + \|x\|^2\right)^\beta}\, \mathrm{d}x &= c_n \int_{\mathcal{B}(0,1)} \frac{1}{\rho + \rho^2}^\beta \rho^{n-1}\, \mathrm{d}\rho = c_n \int_0^1 \frac{1}{\rho^\beta} \cdot \frac{\rho^{n-1}}{(1+\rho)^\beta}\, \mathrm{d}\rho \\ &\approx \int_0^1 \rho^{n-1-\beta}\, \mathrm{d}\rho < +\infty \iff \beta < n. \end{aligned}$$

Inoltre,

$$\int\limits_{\mathcal{B}(0,1)} \frac{1}{(\|x\| + \|x^2\|)^{\beta}}\,\mathrm{d}x = \int\limits_{\mathbb{R}^n\setminus\mathcal{B}(0,1)} \frac{1}{\rho^{2\beta}} \cdot \frac{\rho^{n-1}}{\left(\frac{1}{\rho}+1\right)^{\beta}}\,\mathrm{d}\rho \approx \int\limits_{1}^{+\infty} \frac{\rho^{n-1}}{\rho^{2\beta}}\,\mathrm{d}rho < +\infty \iff 2\beta > \alpha.$$

In conclusione, l'integrale è finito se $n > \beta > n/2$.

Esercizio. Studiare l'insieme di finitezza al variare del parametro α dell'integrale

$$\int\limits_{[0,1]^n} \frac{1}{\|x\|_1^{\alpha}}\,\mathrm{d}x$$

Osserviamo che la norma 1 e 2 sono legate dalle seguenti disuguglianze

$$\frac{\|x\|_1}{n} \le \|x\|_2 \le \|x\|_1.$$

Studiamo una maggiorazione per l'integrale

$$\int\limits_{[0,1]^n} \frac{1}{\|x\|_1^{\alpha}}\,\mathrm{d}x \le \int\limits_{[0,1]^n} \frac{1}{\|x\|^{\alpha}}\,\mathrm{d}x \le \int\limits_{\mathcal{B}(0,\sqrt{n})} \frac{1}{\|x\|^{\alpha}}\,\mathrm{d}x < +\infty \quad \text{se } \alpha < n.$$

Vediamo ora una minorazione.

$$\int\limits_{[0,1]^n} \frac{1}{\|x\|_1^{\alpha}}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2^n} \int\limits_{[-1,1]^n} \frac{1}{\|x\|_1^{\alpha}}\,\mathrm{d}x \ge \int\limits_{\mathcal{B}(0,1)} \frac{1}{\|x\|_1^{\alpha}}\,\mathrm{d}x \approx \int\limits_{\mathcal{B}(0,1)} \frac{1}{\|x\|_1^{\alpha}}\,\mathrm{d}x < +\infty \iff \alpha < n.$$

Esercizi per casa.

(1) Dimostrare che date f, g misurabili ed $r, p_1, p_2 > 0$ tali che $1/r = 1/p_1 + 1/p_2$. Allora vale

$$\|f \cdot g\|_r \le \|f\|_{p_1} + \|g\|_{p_2}.$$

Suggerimento. Usare Holder osservando che $1 = \frac{r}{p_1} + \frac{r}{p_2} = \frac{1}{(p_1/r)} + \frac{1}{(p_2/r)}$.

(2) Dimostrare che date $f_1, \ldots, f_N$ misurabili e $p_i > 0$ tali che $1/p_1 + \ldots + 1/p_N = 1$ si ha

$$\|f_1 \cdots f_N\|_1 \le \|f_1\|_{p_1} \cdots \|f_N\|_{p_N}.$$

Suggerimento. Fare il primo passo dell'induzione e usare la formula precedente scegliendo r in modo corretto.

Capitolo 3

Spazi di Hilbert

Capitolo 4

Serie di Fourier

Capitolo 5

Applicazioni della serie di Fourier

Capitolo 6

Trasformata di Fourier

Capitolo 7

Funzioni armoniche

Capitolo 8

Integrazione di superfici

8.1 Indice Analitico

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipisicing elit, sed do eiusmod tempor incididunt ut labore et dolore magna aliqua. Ut enim ad minim veniam, quis nostrud exercitation ullamco laboris nisi ut aliquip ex ea commodo consequat. Duis aute irure dolor in reprehenderit in voluptate velit esse cillum dolore eu fugiat nulla pariatur. Excepteur sint occaecat cupidatat non proident, sunt in culpa qui officia deserunt mollit anim id est laborum.

$\lightning$	Assurdo	$\lightning$	Assurdo
$\lightning$	Assurdo	$\lightning$	Assurdo
$\lightning$	Assurdo	$\lightning$	Assurdo
$\lightning$	Assurdo	$\lightning$	Assurdo