

# Analisi 3

Esercitazioni di Analisi 3 del corso di Giovanni Alberti e Maria Stella Gelli

Arianna Carelli e Antonio De Lucreziis

I Semestre 2021/2021

## Indice

<b>1</b>	<b>Esercitazione del 4 ottobre</b>	<b>3</b>
1.1	Esercizi di teoria della misura . . . . .	3
1.2	Funzioni misurabili rispetto alla misura di Lebesgue . . . . .	4
1.3	Formula di cambio di variabile applicata a funzioni radiali . . . . .	5
<b>2</b>	<b>Esercitazione del 13 ottobre</b>	<b>8</b>
2.1	Esercizi su spazi $L^p(X)$ al variare di $p$ e dello spazio $X$ . . . . .	8
2.2	Spazi $\ell^p$ . . . . .	11
<b>3</b>	<b>Esercitazione del 21 ottobre</b>	<b>12</b>
3.1	Convoluzione . . . . .	15
3.2	Separabilità degli spazi $L^p$ . . . . .	16
<b>4</b>	<b>Esercitazione del 3 Novembre 2021</b>	<b>17</b>
4.1	Basi Hilbertiane e proiezioni . . . . .	17
4.2	Approssimazioni per convoluzione . . . . .	19
<b>5</b>	<b>Esempi di basi Hilbertiane</b>	<b>20</b>
5.1	Polinomi . . . . .	20
5.2	Base di Haar . . . . .	20
<b>6</b>	<b>Esercitazione del 11 novembre</b>	<b>21</b>
<b>7</b>	<b>Esercitazione del 18 Novembre 2021</b>	<b>23</b>
7.1	Esercizi preliminari . . . . .	23
<b>8</b>	<b>Esercitazione del 25 Novembre 2021</b>	<b>27</b>

<b>9</b>	<b>Esercitazione del 2 dicembre</b>	<b>29</b>
<b>10</b>	<b>Esercitazione del 13 Dicembre 2021</b>	<b>31</b>
10.1	Operatori autoaggiunti . . . . .	31
10.2	Calcolo Trasformate di Fourier . . . . .	33
10.2.1	Trasformata della Gaussiana . . . . .	34

# 1 Esercitazione del 4 ottobre

## 1.1 Esercizi di teoria della misura

Di seguito riportiamo alcune proprietà di base di teoria della misura.

**Proprietà.**

i) Se  $A \subset B$ , allora  $\mu(A) \leq \mu(B)$ .

**Dimostrazione.** Scomponiamo  $B = (B \setminus A) \cup (A \cap B)$ . Per ipotesi  $A \cap B = A$  ed essendo la misura positiva segue che

$$\mu(B) = \underbrace{\mu(B \setminus A) + \mu(A)}_{\geq 0} \geq \mu(A).$$

ii) Dati due insiemi  $A, B$  misurabili, vale

$$\mu(A \cup B) \leq \mu(A) + \mu(B).$$

**Dimostrazione.** La disuguaglianza segue dalle seguenti uguaglianze.

$$\begin{aligned}\mu(A) &= \mu(A \setminus B) + \mu(A \cap B) \\ \mu(B) &= \mu(B \setminus A) + \mu(A \cap B) \\ \mu(A \cup B) &= \mu(A \setminus B) + \mu(B \setminus A) + \mu(A \cap B).\end{aligned}$$

iii) Data una successione di insiemi  $E_1 \subset E_2 \subset \dots \subset \dots$ , si ha

$$\mu\left(\bigcup_i E_i\right) = \sup_i \mu(E_i) = \lim_i \mu(E_i).$$

iv) Data una successione di insiemi  $E_1 \supset E_2 \supset \dots \supset \dots$  e  $\mu(E_1) < +\infty$ , si ha

$$\mu\left(\bigcap_i E_i\right) = \lim_i \mu(E_i).$$

**Esercizio** (Numerabile subaddittività). Dato  $E \in \mathcal{A}$ ,  $E \subset \bigcup_i E_i$  dove  $E_i \in \mathcal{A}$ . Allora

$$\mu(E) \leq \sum_i \mu(E_i).$$

**Dimostrazione** (Idea). Basta dimostrare che  $\mu\left(\bigcup_i E_i\right) \leq \sum_i \mu(E_i)$ . Infatti per quanto visto prima  $\mu(E) \leq \mu\left(\bigcup_i E_i\right)$ . Prima dimostriamo per induzione  $\mu\left(\bigcup_{i=1}^N E_i\right) \leq \sum_{i=1}^N \mu(E_i)$ .

Il passo base  $n = 2$  è stato visto al punto ii). Una volta dimostrata la proprietà sopra, si nota che  $\sum_{i=1}^N \mu(E_i)$  è limitata per ogni  $N$ , e dunque è limitato anche il suo limite, da cui la tesi.  $\square$

## 1.2 Funzioni misurabili rispetto alla misura di Lebesgue

Si ricorda che le funzioni *continue*, *semplici* e *semicontinue* sono classi di funzioni misurabili. Due osservazioni sulle funzioni semicontinue.

- Le funzioni semicontinue sono *boreliane*.
- La proprietà di misurabilità delle funzioni semicontinue è necessaria per l'enunciato della disuguaglianza di Jensen.

**Controesempio** (disuguaglianza di Jensen). Notiamo che l'ipotesi di semicontinuità inferiore della funzione  $f$  è necessaria per la validità della disuguaglianza di Jensen. Infatti, definiamo  $f$  come segue

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x \in (0, 1) \\ +\infty & \text{altrimenti} \end{cases}.$$

Osserviamo che la funzione  $f$  così definita è convessa ma non semicontinua inferiormente.

Ora definiamo la funzione  $u : X \rightarrow \mathbb{R}$  con  $X = (0, 2)$ , come la funzione costante di valore  $1/2$ . Calcoliamo l'integrale di  $u(x)$  su  $X$ .

$$\int_X u(x) dx = 1.$$

In tal caso vale  $f\left(\int_X u(x) dx\right) = +\infty$ . D'altra parte  $\int_X f \circ u dx = 0$ , dunque l'ipotesi di semicontinuità inferiore è necessaria.

**Fatto.** Date  $\varphi_1, \varphi_2$  funzioni semplici su  $\mathbb{R}$  con misura di Lebesgue. Allora  $\varphi_1 \vee \varphi_2$  e  $\varphi_1 \wedge \varphi_2$  sono ancora funzioni semplici.

**Lemma.** Data  $f : X \rightarrow [0, +\infty]$  misurabile

$$\int_X f d\mu = 0 \iff f = 0 \text{ q.o. su } X$$

**Dimostrazione.**

$\Rightarrow$  Dato che  $f$  è non negativa, il dominio  $X$  può essere riscritto come

$$X = \{x \in X \mid f(x) \geq 0\} = \{x \in X \mid f(x) > 0\} \cup \{x \in X \mid f(x) = 0\}$$

ricordiamo che  $(0, +\infty) = \bigcup_{n \geq 1} (\frac{1}{n}, +\infty)$ , dunque possiamo riscrivere una parte di  $X$  come segue e poi passare alle misure

$$\begin{aligned} \{x \in X \mid f(x) > 0\} &= \bigcup_{n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}} \left\{x \in X \mid f(x) \geq \frac{1}{n}\right\} \\ \implies \mu(\{x \in X \mid f(x) > 0\}) &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \mu\left(\left\{x \in X \mid f(x) \geq \frac{1}{n}\right\}\right) \end{aligned}$$

in questo modo otteniamo la seguente caratterizzazione dell'insieme su cui  $f$  è positiva

$$\mu(\{x \in X \mid f(x) > 0\}) > 0 \iff \exists \bar{n} \text{ tale che } \mu(\{x \in X \mid f(x) \geq 1/\bar{n}\}) > 0$$

A questo punto possiamo maggiorare come segue

$$0 = \int_X f d\mu \geq \int_{\{f \geq \frac{1}{n}\}} f d\mu \geq \frac{1}{n} \mu\left(\left\{x \mid f(x) \geq \frac{1}{n}\right\}\right).$$

da cui ricaviamo che  $\forall n$  vale

$$\mu\left(\left\{x \mid f(x) \geq \frac{1}{n}\right\}\right) = 0$$

e si conclude osservando che

$$\mu(\{x \mid f(x) > 0\}) = \lim_n \mu\left(\left\{x \mid f(x) \geq \frac{1}{n}\right\}\right) = 0$$

$\Leftarrow$  Dal fatto che  $f$  è positiva possiamo scrivere

$$\int_X f \, d\mu = \sup_{\substack{g \leq f \\ g \text{ semplice}}} \int_X g \, d\mu = \sup \sum_i \alpha_i \mu(E_i) = 0.$$

□

**Osservazione** (sup essenziale di funzioni misurabili). Data  $f$  misurabile, definiamo

$$\|f\|_{\infty, X} := \inf \{m \in [0, +\infty] \mid |f(x)| \leq m \text{ quasi ovunque}\}.$$

Se  $\|f\|_{\infty} < +\infty$ , allora diciamo che esiste una costante  $L > 0$  con  $L = \|f\|_{\infty, X}$ , tale che

$$|f(x)| \leq L$$

quasi ovunque. Infatti, per definizione di  $\inf$ ,  $L = \lim_n m_n$ , dove  $m_n$  verificano

$$|f(x)| \leq m_n \quad \forall x \in X \setminus N_m, \quad \mu(N_m) = 0.$$

Definiamo  $N = \bigcup_m N_m$ , da cui si ottiene

$$\mu(N) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(N_m) = 0.$$

Ovvero  $N$  è trascurabile. Preso  $x \in X \setminus N$ , vale

$$|f(x)| \leq m_n \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

### 1.3 Formula di cambio di variabile applicata a funzioni radiali

Sia  $f: [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  misurabile (di solito si richiede misurabile e positiva oppure sommabile). Allora per il teorema di cambio di variabili vale la seguente

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(|x|) \, dx = c_n \cdot \int_0^{+\infty} f(\rho) \rho^{n-1} \, d\rho,$$

dove  $c_n = n \mathcal{L}^n(\mathcal{B}(0, 1))$ .

Applichiamo questa formula alla stima di integrali di funzioni positive.

**Esercizio.** Sia

$$\psi(x) = \frac{1}{\|x\|^\alpha}$$

su  $\mathcal{B}(0,1) \in \mathbb{R}^n$ . Notiamo che  $\psi(x) = f(\|x\|)$  con  $f = 1/t^\alpha$ . Usiamo la formula appena introdotta per determinare gli  $\alpha \in \mathbb{R}$  per i quali  $\psi$  è sommabile su  $\mathcal{B}(0,1)$ .

$$\int_{\mathcal{B}(0,1)} \psi(x) dx = c_n \int_0^1 \frac{1}{\rho^\alpha} \rho^{n-1} d\rho = c_n \int_0^1 \rho^{n-1-\alpha} d\rho = \begin{cases} \log(\rho) & n = \alpha \\ \frac{\rho^{n-\alpha}}{n-\alpha} & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Concludendo,

$$\int_{\mathcal{B}(0,1)} \frac{1}{\|x\|^\alpha} dx < +\infty \iff n > \alpha.$$

**Esercizio.** Con passaggi analoghi al precedente otteniamo

$$\int_{\mathbb{R}^n \setminus \mathcal{B}(0,1)} \frac{1}{\|x\|^\alpha} dx < +\infty \iff n < \alpha.$$

**Esercizio.** Vediamo per quali valori di  $\beta$  il seguente integrale converge

$$\int_{\mathcal{B}(0,1)} \frac{1}{(\|x\| + \|x\|^2)^\beta} dx$$

Vale la seguente catena di uguaglianze.

$$\int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{(\|x\| + \|x\|^2)^\beta} dx = \int_{\mathcal{B}(0,1)} \frac{1}{(\|x\| + \|x\|^2)^\beta} dx + \int_{\mathbb{R}^n \setminus \mathcal{B}(0,1)} \frac{1}{(\|x\| + \|x\|^2)^\beta} dx.$$

Studiamo separatamente i due pezzi dell'integrale.

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{B}(0,1)} \frac{1}{(\|x\| + \|x\|^2)^\beta} dx &= c_n \int_{\mathcal{B}(0,1)} \frac{1}{(\rho + \rho^2)^\beta} \rho^{n-1} d\rho = c_n \int_0^1 \frac{1}{\rho^\beta} \cdot \frac{\rho^{n-1}}{(1+\rho)^\beta} d\rho \\ &\approx \int_0^1 \rho^{n-1-\beta} d\rho < +\infty \iff \beta < n. \end{aligned}$$

Inoltre,

$$\int_{\mathbb{R}^n \setminus \mathcal{B}(0,1)} \frac{1}{(\|x\| + \|x\|^2)^\beta} dx = \int_{\mathbb{R}^n \setminus \mathcal{B}(0,1)} \frac{1}{\rho^{2\beta}} \cdot \frac{\rho^{n-1}}{(\frac{1}{\rho} + 1)^\beta} d\rho \approx \int_1^{+\infty} \frac{\rho^{n-1}}{\rho^{2\beta}} d\rho < +\infty \iff 2\beta > n.$$

In conclusione, l'integrale è finito se  $n > \beta > n/2$ .

**Esercizio.** Studiare l'insieme di finitezza al variare del parametro  $\alpha$  dell'integrale

$$\int_{[0,1]^n} \frac{1}{\|x\|_1^\alpha} dx.$$

Osserviamo che la norma 1 e 2 sono legate dalle seguenti disuguaglianze

$$\frac{\|x\|_1}{n} \leq \|x\|_2 \leq \|x\|_1.$$

Studiamo una maggiorazione per l'integrale

$$\int_{[0,1]^n} \frac{1}{\|x\|_1^\alpha} dx \leq \int_{[0,1]^n} \frac{1}{\|x\|^\alpha} dx \leq \int_{\mathcal{B}(0,\sqrt{n})} \frac{1}{\|x\|^\alpha} dx < +\infty \iff \alpha < n,$$

dunque

$$\int_{[0,1]^n} \frac{1}{\|x\|_1^\alpha} dx < +\infty \quad \text{se } \alpha < n.$$

Vediamo ora una minorazione.

$$\int_{[0,1]^n} \frac{1}{\|x\|_1^\alpha} dx = \frac{1}{2^n} \int_{[-1,1]^n} \frac{1}{\|x\|_1^\alpha} dx \geq \frac{1}{2^n} \int_{\mathcal{B}(0,1)} \frac{1}{\|x\|_1^\alpha} dx \approx \int_{\mathcal{B}(0,1)} \frac{1}{\|x\|^\alpha} dx < +\infty \iff \alpha < n.$$

Dunque l'integrale  $\int_{[0,1]^n} \frac{1}{\|x\|_1^\alpha} dx$  converge se e solo se  $\alpha < n$ .

## Esercizi per casa.

- (1) Dimostrare che date  $f, g$  misurabili ed  $r, p_1, p_2 > 0$  tali che  $1/r = 1/p_1 + 1/p_2$ . Allora vale

$$\|f \cdot g\|_r \leq \|f\|_{p_1} \cdot \|g\|_{p_2}.$$

*Suggerimento.* Usare Hölder osservando che  $1 = \frac{r}{p_1} + \frac{r}{p_2} = \frac{1}{(p_1/r)} + \frac{1}{(p_2/r)}$ .

**Dimostrazione.** Vale quanto segue.

$$\begin{aligned} \|f \cdot g\|_r^r &= \int_X |f \cdot g|^r d\mu = \int_X |f| \cdot |g| d\mu^{\text{Holder}} \leq \|f^r\|_{p_1/r} \cdot \|f^r\|_{p_2/r} \\ &= \left( \int_X |f|^{r \cdot p_1/r} \right)^{r/p_1} \cdot \left( \int_X |g|^{r \cdot p_2/r} \right)^{r/p_2} = \|f\|_{p_1}^r \cdot \|g\|_{p_2}^r = (\|f\|_{p_1} \cdot \|g\|_{p_2})^r \\ &\implies \|f \cdot g\|_r \leq \|f\|_{p_1} \cdot \|g\|_{p_2}. \end{aligned}$$

□

- (2) Dimostrare che date  $f_1, \dots, f_n$  misurabili e  $p_i > 0$  tali che  $1/p_1 + \dots + 1/p_n = 1$  si ha

$$\|f_1 \cdots f_n\|_1 \leq \|f_1\|_{p_1} \cdots \|f_n\|_{p_n}.$$

*Suggerimento.* Fare il primo passo dell'induzione e usare la formula precedente scegliendo  $r$  in modo corretto.

**Dimostrazione.** Dimostriamo per induzione la seguente proprietà più generale.

Siano  $f_1, \dots, f_n$  misurabili e  $r > 1$ . Allora, per i  $p_i > 0$  tali che  $1/p_1 + \dots + 1/p_n = r$  si ha

$$\|f_1 \cdots f_n\|_r \leq \|f_1\|_{p_1} \cdots \|f_n\|_{p_n}.$$

*Passo base.* Vero per il punto (1).

*Passo induttivo*  $[n-1 \Rightarrow n]$ . Supponiamo di aver dimostrato per ogni  $r > 1$  la disuguaglianza sopra. Allora

$$\|f_1 \cdots f_n\|_r = \|(f_1 \cdots f_{n-1}) \cdot f_n\|_r \stackrel{(1)}{\leq} \|f_1 \cdots f_{n-1}\|_p \cdot \|f_n\|_{p_n}, \quad \text{dove } r = 1/p + 1/p_n.$$

Notando che  $1/p = 1/r - 1/p_{n-1} = 1/p_1 + \dots + 1/p_{n-1}$  e usando l'ipotesi induttiva otteniamo la tesi. □

## 2 Esercitazione del 13 ottobre

### 2.1 Esercizi su spazi $L^p(X)$ al variare di $p$ e dello spazio $X$

Sia  $X \subset \mathbb{R}^n$ ,  $\mu$  la misura di Lebesgue e  $1 \leq p_1 \leq p_2$ .

**Domanda.** Possiamo confrontare gli spazi  $L^{p_1}(X)$  e  $L^{p_2}(X)$ ? In generale no.

Vediamo informalmente perché. Posto  $X = (0, +\infty)$ , gli integrali

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+x)^{\beta p}} dx, \quad \int_0^{+\infty} \frac{1}{x^{\beta p}} \cdot \mathbb{1}_{[0,1]}(x) dx = \int_0^1 \frac{1}{x^{\beta p}} dx$$



sono maggiorati dall'integrale di  $1/x^\alpha$  dove l'esponente  $\alpha$  è rispettivamente più piccolo e più grande di  $\beta \cdot p$ .

Utilizziamo questa intuizione per vedere formalmente che gli spazi  $L^p(0, +\infty)$  non sono confrontabili.

Cerchiamo una funzione  $f \in L^{p_1}(0, +\infty) \setminus L^{p_2}(0, +\infty)$  e una funzione  $g \in L^{p_2}(0, +\infty) \setminus L^{p_1}(0, +\infty)$ . La funzione  $f$  definita come segue

$$f(x) := \begin{cases} 1/x^\beta & x \in (0, 1) \\ 0 & x \geq 1 \end{cases}$$

ha integrale

$$\int_0^{+\infty} f(x)^{p_1} dx = \int_0^1 \frac{1}{x^{\beta p_1}} dx < +\infty \iff \beta \cdot p_1 < 1$$

e

$$\int_0^{+\infty} f(x)^{p_2} dx = \int_0^1 \frac{1}{x^{\beta p_2}} dx = +\infty \iff \beta \cdot p_2 \geq 1.$$

Dunque, basta prendere  $\beta \in [1/p_2, 1/p_1)$ .

Ora cerchiamo  $g \in L^2(0, +\infty) \setminus L^{p_1}(0, +\infty)$ . Definiamo  $g(x)$  come segue

$$g(x) := \frac{1}{(1+x)^\alpha}$$

da cui

$$\int_0^{+\infty} g(x)^{p_2} dx < +\infty \iff \alpha \cdot p_2 > 1 \quad \text{e} \quad \int_0^{+\infty} g(x)^{p_1} dx = +\infty \iff \alpha \cdot p_1 \leq 1$$

*Conclusion.* In generale non c'è confrontabilità fra gli spazi  $L^p$ . La confrontabilità, dipende infatti dall'insieme  $X$  su cui sono definiti.

**Nota.** Un caso particolare è dato ponendo  $p_1 < p_2$  e  $\mu(X) < +\infty$ . In tal caso  $L^{p_2}(X) \subset L^{p_1}(X)$ .

Data  $f \in L^{p_2}(X)$ , cioè con  $\int_X |f|^{p_2} d\mu < +\infty$  vediamo che  $\int_X |f|^{p_1} d\mu < +\infty$ .

Usiamo Hölder:

$$\begin{aligned} \int_X |f|^{p_1} d\mu &\leq \left( \int_X \overbrace{|f(x)|^{p_1 p}}^{|h(x)|^p} d\mu \right)^{1/p} \cdot \left( \int_X 1^q d\mu \right)^{1/q} \underbrace{\leq}_{p=p_1/p_2} \left( \int_X |f|^{p_2} d\mu \right)^{p_2/p_1} \left( \int_X 1^q d\mu \right)^{1/q} \\ &\underbrace{=}_{q=(1-\frac{1}{p})^{-1}=\frac{p}{p-1}=\frac{p_2/p_1}{p_2-p_1}} \|f\|_{L^{p_2}(X)}^{p_1} \cdot \mu(X)^{\frac{p_2-p_1}{p_2}}. \end{aligned}$$

Dunque

$$\|f\|_{L^{p_1}(X)} \leq \|f\|_{L^{p_2}(X)} \cdot \mu(X)^{\frac{p_2-p_1}{p_1 p_2}}.$$

L'inclusione

$$\begin{aligned} i: L^{p_2} &\rightarrow L^{p_1}(X) \\ f &\mapsto f \end{aligned}$$

è ben definita per quanto fatto sopra.

**Esercizio.** [TO DO] Vedere con quale topologia l'inclusione risulta continua.

**Esercizio.** [TO DO] Dato  $p \geq 1$ , stabilire se esistono  $X, \mu, f \in L^p(X)$  e  $f \notin L^q(X)$  per ogni  $q \neq p, q \geq 1$ .

*Suggerimento.* Pensare a  $X = (0, +\infty)$ ,  $\mu$  misura di Lebesgue.

**Osservazione.**  $L^p(X)$  è uno spazio vettoriale di dimensione infinita, ossia ogni base algebrica ha cardinalità infinita. Vediamo il caso  $X = (0, 1)$ . Per trovare una base infinita, cerchiamo per ogni  $N \in \mathbb{N}$ , un insieme di funzioni  $f_1, \dots, f_N \in L^p(0, 1)$  tali che siano linearmente indipendenti. Vale a dire, presi  $\lambda_1, \dots, \lambda_N \in \mathbb{R}$  vale  $\lambda_1 f_1 + \dots + \lambda_N f_N = 0$  se e solo se  $\lambda_1 = \dots = \lambda_N = 0$ .

Ad esempio, definiamo  $f_i := \mathbb{1}_{i/N, (i+1)/N}$  (questa costruzione si può riprodurre per ogni  $N \in \mathbb{N}$ ).

Ricordiamo che, essendo  $L^p(X)$  uno spazio metrico, dato  $Y \subset L^p$  vale la seguente caratterizzazione:

$Y$  è compatto  $\iff Y$  è compatto per successioni  $\iff Y$  chiuso e totalmente limitato.

**Osservazione.**  $Y \subset L^p(X)$  è un sottoinsieme che eredita la norma  $\|\cdot\|_{L^p}$ :

$Y$  è completo  $\iff Y$  è chiuso.

**Osservazione.** In  $L^p$  i sottoinsiemi chiusi e limitati non sono compatti<sup>1</sup>! In particolare le palle

$$Y = \{f \in L^p \mid \|f\|_{L^p} \leq 1\}$$

non sono compatte.

Ad esempio, mostriamo che in  $L^p(0, 1)$  le palle

$$B = \{f \in L^p \mid \|f\|_{L^p} \leq 1\}$$

non sono compatte. Per farlo, esibiamo una successione  $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset B$  che non ammette sottosuccessioni convergenti. La costruiamo in modo che non abbia sottosuccessioni di Cauchy

$$f_n: (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}, \quad \|f_n - f_m\|_{L^p} \geq c_0 > 0 \quad \forall n \neq m.$$

Cerco  $A_n \subset (0, 1)$  tale che  $|A_n \cap A_m| = 0$  per ogni  $n \neq m$ . Definiamo  $f_n$  come segue

$$f_n(x) := \begin{cases} 0 & \text{se } x \in (0, 1) \setminus (1/(n+1), 1/n) \\ c_n > 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

dove  $c_n$  è tale che

$$\left( \int_{1/(n+1)}^{1/n} c_n^p \right)^{1/p} = 1 \iff c_n^p \cdot (1/n - 1/(n+1)) = 1 \iff c_n^p = n \cdot (n+1).$$

Calcoliamo ora  $\|f_n - f_m\|_{L^p}^p$  con  $n \neq m$ :

$$\int_0^1 |f_n(x) - f_m(x)|^p dx = \int_{(1/n, 1/(n+1)) \cup (1/(m+1), 1/m)} |f_n - f_m|^p dx = \int_{1/(n+1)}^{1/n} |f_n|^p dx + \int_0^1 |f_m|^p dx = 1 + 1 = 2.$$

Si osserva che quanto detto sopra vale anche per  $p = +\infty$ .

**Esercizio.** [TO DO] Sia  $E = \{f \in L^1(1, +\infty) \mid |f(x)| \leq 1/x^2 \text{ e } x \in [1, +\infty)\}$ .

<sup>1</sup>Uno spazio metrico è compatto se solo se è completo e totalmente limitato. Inoltre, uno spazio metrico  $X$  si dice totalmente limitato se  $\forall \varepsilon > 0$  esiste  $B_\varepsilon^1, \dots, B_\varepsilon^n$  tale che  $X \subset \bigcup_{i=1}^n B_\varepsilon^i$ .

- $E$  è limitato in  $L^1$ ?
- $E$  è chiuso in  $L^1$ ?
- $E$  è compatto in  $L^1$ ?

**Soluzione.**

i) Dimostriamo che  $\|f\|_{L^1} < C$  per ogni  $f \in E$ .

$$\|f\|_{L^1} = \int_1^\infty |f(x)| \, dx \leq \int_1^\infty 1/x^2 \, dx < C.$$

ii)  $E$  è chiuso. Ci basta dimostrare che se  $\{f_n\} \in E$  è convergente a  $f$  allora  $f \in E$ . Questo equivale a dimostrare che  $|f(x)| < 1/x^2$ . Dal fatto che  $\{f_n\} \in E$  è convergente in  $L^1$ , abbiamo che esiste una sottosuccessione  $\{f_{n_k}\}$  che converge puntualmente a  $f$ . Essendo che  $|f_{n_k}| < 1/x^2$  per ogni  $x \in [1, +\infty)$ , per la continuità del modulo segue la tesi.

iii) Da fare [TO DO]

**Esercizio.** [TO DO]

- Dire se  $f_n(x) = x^n$ ,  $n = 0, \dots, N$  è un insieme di funzioni linearmente indipendenti in  $L^p([0, 1])$ .
- Dire se  $\{f_n\} \subset L^p(0, 1)$  è compatta in  $L^p(0, 1)$ .

*Suggerimento.* Studiare il limite puntuale.

**Soluzione.**

i) Dimostriamolo per induzione. *Passo base.* [TO DO]

*Passo induttivo.* ( $n - 1 \geq n$ ) Vediamo che se  $a_1 \cdot 1 + a_2 \cdot x + \dots + a_{n-1} \cdot x^{n-1} + a_n \cdot x^n = 0 \implies a_1 = \dots = a_n = 0$ .

$$\begin{aligned} a_1 \cdot 1 + a_2 \cdot x + \dots + a_{n-1} \cdot x^{n-1} &= -a_n \cdot x^n \\ \downarrow + a_n \cdot x^n \\ (a_1 + a_n) \cdot 1 + (a_2 + a_n) \cdot x + \dots + (a_{n-1} + a_n) \cdot x^{n-1} &= 0 \end{aligned}$$

essendo che  $1, x^1, \dots, x^{n-1}$  sono linearmente indipendenti per ipotesi induttiva, vale  $(a_i + a_n) = 0$  per ogni  $i = 1, \dots, n-1$ , da cui  $a_i = 0$  per ogni  $i = 1, \dots, n$ .

ii) Dimostriamo che non è compatto. Se per assurdo lo fosse, dalla successione  $(f_n)$  potremmo estrarre una sottosuccessione convergente  $(f_{n_k})$  in  $L^p([0, 1])$ ; denotiamo il limite con  $f$ . Per i risultati visti sulla convergenza, da  $(f_{n_k})$  potremmo estrarre una sottosuccessione convergente quasi ovunque a  $f$ . Ma questo è assurdo perché  $\lim_n f_n = +\infty$ .

## 2.2 Spazi $\ell^p$

Prendiamo  $X = \mathbb{N}$  e  $\mu = \#$  la misura che conta i punti.

**Osservazione.** Definiamo

$$\ell^p = L^p(\mathbb{N}, \#) = \left\{ (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \left| \sum_{n=0}^{+\infty} |x_n|^p < +\infty \right. \right\}$$

con  $p \geq 1$  e  $p \neq +\infty$ , e

$$l^\infty = \{\text{successioni limitate}\} = \left\{ (x_n) \mid \sup_{n \in \mathbb{N}} |x_n| < +\infty \right\}.$$

**Esempio** (di insieme non compatto in  $\ell^1$ ). Consideriamo la successione  $(e_i)$  definita come

$$(e_i)_n := \begin{cases} 0 & \text{se } n \neq i \\ 1 & \text{se } n = i \end{cases}$$

si osserva inoltre che le successioni così definite sono linearmente indipendenti e generano se sono infiniti.

**Esempio** (di insieme compatto in  $\ell^1$ ). Sia  $F = \{(x_n)_n \in \ell^1 \mid |x_n| \leq 1/n^2 \quad \forall n \in \mathbb{N}\}$ . Noto subito che  $F$  è limitato, infatti, presa

$$\underline{x} = (x_n) \in F, \quad \|\underline{x}\|_{\ell^1} = \sum_{n=0}^{+\infty} |x_n| \leq \sum_{n=0}^{+\infty} 1/n^2 < +\infty.$$

$F$  è anche chiuso.

**Osservazione.** Data una successione  $(\underline{x}^k) \subset \ell^1$ , se  $\underline{x}^k \xrightarrow{\ell^1} \underline{x}^\infty$ , vuol dire che

$$\|\underline{x}^k - \underline{x}^\infty\|_{\ell^1} = \sum_{n=0}^{+\infty} |x_n^k - x_n^\infty| \xrightarrow{k} 0.$$

In particolare, per ogni  $n \in \mathbb{N}$  fissato,  $\lim_k (x_n^k - x_n^\infty) = 0$ .

$F$  è chiuso perché se  $(\underline{x}^k) \subset F$  e  $\underline{x}^k \xrightarrow{\ell^1} \underline{x}^\infty$ , allora per ogni  $n \in \mathbb{N}$  vale

$$|x_n^k| \leq 1/n^2 \quad \text{e} \quad \lim_{\underbrace{n \rightarrow +\infty}_{x_n^\infty}} |x_n^k| \leq 1/n^2.$$

Dimostriamo che è compatto per successioni. Prendiamo  $(\underline{x}^k) \subset F$ , ogni componente  $x_n$  è equilimitata, quindi a meno di sottosuccessioni  $x_n^{k_j}$  converge a  $x_n^\infty$ . A meno di diagonalizzare, possiamo supporre che le successione  $k_j$  non dipenda da  $n$ . Inoltre gli elementi  $x_n^{k_j}$  sono dominati da  $y = (1/n^2)$ . Concludiamo usando il teorema di convergenza dominata di Lebesgue.

### 3 Esercitazione del 21 ottobre

Data  $T: X \rightarrow Y$  lineare tra  $X, Y$  spazi normati, allora  $T$  è continua se e solo se esiste  $C > 0$  tale che  $\|T(x)\|_Y \leq C \|x\|_X$  per ogni  $x \in X$ .

Applichiamo questo risultato.

i) Sia  $X = \mathbb{R}^d$ . L'applicazione  $L^1(\mathbb{R}^d) \ni u \xrightarrow{T} \int_{\mathbb{R}^d} u \, dx$  è lineare e continua in quanto limitata. Infatti:

$$|T(u)| = \left| \int_{\mathbb{R}^d} u \, dx \right| \leq \int_{\mathbb{R}^d} |u| \, dx = \|u\|_{L^1(\mathbb{R}^d)}.$$

ii) Studiamo ora il caso per  $p > 1$ . Data  $u \in L^p(\mathbb{R}^d)$ , l'applicazione

$$u \mapsto \int_{\mathbb{R}^d} u \, dx$$

potrebbe non essere ben definita.

Ad esempio se restringiamo il dominio a  $L^p(\mathbb{R}^d) \cap L^1(\mathbb{R}^d)$  l'applicazione sopra è ben definita, ma in generale non è continua. Più formalmente, la mappa

$$T: (L^p \cap L^1(\mathbb{R}^d), \|\cdot\|_{L^p}) \rightarrow \mathbb{R}$$

è lineare ma non continua.

Studiamo il caso reale, ovvero  $d = 1$ .

Per verificare quanto sopra, utilizziamo la definizione di continuità per successioni. Definiamo una successione di funzioni a supporto compatto  $u_n$ , che sappiamo essere in tutti gli spazi  $L^p$ , e verifichiamo che  $\lim_n T(u_n) \neq T(u_\infty)$  dove  $u_\infty := \lim_n u_n$ .

Definiamo la successione come segue (fare disegno):

$$u_n(x) = \frac{1}{n} \mathbb{1}_{[n, 2n]} = \begin{cases} \frac{1}{n} & \text{se } n \leq x \leq 2n \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Dunque,  $T(u_n) = \int_{\mathbb{R}} u_n \, dx = \frac{1}{n} |E_n| = 1$ , dove  $E_n = [n, 2n]$ . Segue che  $T(u_n) \equiv 1$  ma rispetto alla convergenza in  $L^p$ ,  $T(u_n) \not\rightarrow T(u_\infty) = T(0) = 0$ .

Più in generale, quando  $u \in L^p(\mathbb{R}^d)$  con  $p > 1$ , una costruzione come sopra non funziona, infatti

$$\|u_n\|_{L^p(\mathbb{R})}^p = \int_{\mathbb{R}} u_n^p(x) \, dx = \frac{1}{n^p} \cdot |E_n| = \frac{n}{n^p} = \frac{1}{n^{p-1}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Un altro modo per dimostrare quanto sopra è verificare che, per ogni  $C > 0$ , esiste una funzione  $u \in L^p(\mathbb{R}^d) \cap L^1(\mathbb{R}^d)$  tale per cui

$$\left| \int_{\mathbb{R}} u \, dx \right| > C \left( \int_{\mathbb{R}} |u|^p \, dx \right)^{1/p}.$$

Notiamo che questo è proprio l'esercizio che segue.

**Esercizio.** Fissato  $C > 0$ , trovare  $u \in L^p \cap L^1(\mathbb{R})$  tale che

$$\left| \int_{\mathbb{R}} u \, dx \right| > C \|u\|_{L^p(\mathbb{R})} \quad (\star)$$

**Dimostrazione.** Fissato  $C > 0$ , cerchiamo una funzione in  $L^p$  il cui integrale in modulo sia maggiore di  $C$  per la sua norma  $L^p$ . Per trovare  $u$  consideriamo la successione di funzioni definita come segue

$$f_n = \begin{cases} 1/x & 1 \leq x \leq n \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}.$$

Le funzioni  $f_n$  sono a supporto compatto e stanno in ogni  $L^p$ . Notiamo che  $f_n \uparrow f$  definita come

$$f = \begin{cases} 1/x & x > 1 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

ed  $f \in L^p$  per ogni  $p > 1$ . In particolare,  $\left(\int_{\mathbb{R}} |f_n|^p\right)^{1/p} \leq \left(\int_{\mathbb{R}} |f|^p\right)^{1/p} \underbrace{\leq}_{f \in L^p \forall p > 1} +\infty$  per ogni  $n$ .

Quindi il secondo membro di  $(\star)$  è maggiorato da una costante che non dipende da  $n$ . D'altra parte, per Beppo Levi  $\lim_n \int_{\mathbb{R}} f_n dx = \int_{\mathbb{R}} f dx$  che non sta in  $L^1$ . In conclusione, esiste un  $n$  abbastanza grande per cui vale  $(\star)$ .  $\square$

**Esercizio.** Sia  $p \geq 1$  e  $E = \left\{u \in L^p(-1, 1) : \int_{-1}^1 u dx = 0\right\}$ .

i) Dire se  $E$  è limitato in  $L^p(-1, 1)$ .

ii) Dire se  $E$  è chiuso in  $L^p(-1, 1)$ .

**Soluzione.**

i) Dimostrare che  $E$  è limitato in  $L^p(-1, 1)$  equivale a dimostrare che esiste  $M > 0$  tale che ogni  $u \in L^p(-1, 1)$ ,  $\int_{-1}^1 u dx = 0$  verifica  $\|u\|_{L^p} \leq M$ .

Vediamo che  $E$  non è limitato. Preso  $M > 0$ , riesco sempre a trovare una funzione maggiore di  $M$  in norma. Ad esempio la funzione definita come

$$u(x) := \begin{cases} M & \text{se } x \in (0, 1) \\ -M & \text{se } x \in (-1, 0) \end{cases}$$

ha norma  $\|u\|_{L^p}^p = 2M^p$ .

**Nota.** Aveva senso cercare il controesempio nella classe delle funzioni dispari e limitate, perché hanno media zero, e perché sono in tutti gli  $L^p$ .

ii) Vediamo che  $E$  è chiuso.

**Nota.** Possiamo dimostrarlo usando i teoremi di convergenza, ma seguiremo un'altra strada.

- *Caso*  $p > 1$ . Definiamo l'operatore

$$T: L^p(-1, 1) \rightarrow \mathbb{R} \\ u \mapsto \int_{-1}^1 u dx$$

è ben definito. Infatti, per Hölder vale

$$\left| \int_{-1}^1 1 \cdot u dx \right| \leq \left( \int_{-1}^1 |u|^p dx \right)^{1/p} (1^q)^{1/q}$$

dove  $q = \frac{p}{p-1}$ . Allora

$$|T(u)| \leq \|u\|_{L^p(-1, 1)} \cdot 2^{\frac{p}{p-1}}.$$

Dunque  $T$  è continuo in  $L^p$  per ogni  $p > 1$ .

- *Caso*  $p = 1$ . L'operatore sopra è continuo anche per  $p = 1$ . Grazie alla stima vista prima

$$|T(u)| = \left| \int_{-1}^1 u \, dx \right| \leq \int_{-1}^1 |u| \, dx = \|u\|_{L^1}.$$

Dunque  $T$  è continua e  $T^{-1}(0) = E$ , dunque  $E$  è chiuso.

**Esercizio.** [TO DO] Sia  $p \geq 1$ . Definiamo

$$F = \left\{ v \in L^p(\mathbb{R}) \mid \int_0^1 v(x) \, dx - 2 \int_{-1}^0 v(x) \, dx = 3 \right\}.$$

Dire se  $F$  è chiuso in  $(L^p(\mathbb{R}), \|\cdot\|_{L^p(\mathbb{R})})$ .

**Esercizio.** [TO DO] Sia

$$G = \left\{ v \in L^p(0, 2\pi) \mid \int_0^{2\pi} v(x) \sin(x) \, dx = 1 \right\}.$$

Dire se  $G$  è chiuso in  $L^2(0, 2\pi)$ .

**Domanda.** Dato  $L^p(X, \mu)$  e  $V$  sottospazio di  $L^p(X, \mu)$ , posso dire che  $V$  è chiuso?

In generale no! Infatti esistono sottospazi densi in  $L^p(X, \mu)$ .

Ad esempio in  $\ell^2$  consideriamo l'insieme denso

$$V = \{ \{x_n\} \mid x_n = 0 \text{ definitivamente} \}.$$

Vediamo che non è chiuso. Sia  $\underline{x} \in \ell^2$ , definita come  $\underline{x} = \{1/n\}_{n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}}$ , diciamo che  $\underline{x} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \underline{x}^n$  dove

$$x_n^k = \begin{cases} \frac{1}{n} & 1 \leq n \leq k \\ 0 & n > k, n = 0 \end{cases}$$

abbiamo che

$$\|\underline{x} - \underline{x}^k\|_{\ell^2}^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |x_n - x_n^k|^2 = \sum_{n=k+1}^{+\infty} |x_n|^2 = \sum_{n=k+1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} 0.$$

Vediamo un altro esempio. Siano  $X = \mathbb{R}$ ,  $\mu$  la misura di Lebesgue e  $p > 1$ . In tal caso, l'insieme  $L^p \cap L^1(\mathbb{R})$  è un sottospazio denso in  $(L^1(\mathbb{R}), \|\cdot\|_{L^1})$  e  $(L^p(\mathbb{R}), \|\cdot\|_{L^p})$ .

**Nota.** L'insieme  $L^2(\mathbb{R}) \cap L^1(\mathbb{R})$  è un sottospazio proprio di  $L^1(\mathbb{R})$ . Diciamo che non è chiuso in  $\|\cdot\|_{L^1(\mathbb{R})}$  perché è denso. Infatti,

$$\mathcal{C}_c^0(\mathbb{R}) \subset L^2(\mathbb{R}) \cap L^1(\mathbb{R}).$$

### 3.1 Convoluzione

Sia  $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$  e sia  $g: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$  continua a supporto compatto<sup>1</sup>.

$$|g(x) - g(y)| \leq M |x - y|_{\mathbb{R}^d}.$$

---

<sup>1</sup>In tal caso  $g$  è lipschitziana.

**Esercizio.** Dimostrare che  $f * g$  è ben definita e lipschitziana, dove  $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$  e  $g \in \mathcal{C}_C^0(\mathbb{R}^d)$ . Verifichiamo che la convoluzione è ben definita. Dal fatto che  $g \in \mathcal{C}_C^0(\mathbb{R}^d)$  abbiamo in particolare che  $g$  è limitata, da cui

$$f * g = \int_{\mathbb{R}^d} f(x-y) \cdot g(y) \, dy \stackrel{|g| \leq M}{\leq} M \cdot \int_{\mathbb{R}^d} f(x-y) \, dy \stackrel{f \in L^1(\mathbb{R}^d)}{<} +\infty.$$

Ora verifichiamo che  $f * g$  è lipschitziana. Consideriamo  $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^d$

$$|f * g(x_1) - f * g(x_2)| = \left| \int_{\mathbb{R}^d} f(x_1 - y) g(y) \, dy - \int_{\mathbb{R}^d} f(x_2 - y) g(y) \, dy \right|$$

Usiamo la proprietà che, essendo  $f * g$  ben definita, si ha  $f * g(x) = g * f(x)$ . Da cui

$$\begin{aligned} |f * g(x_1) - f * g(x_2)| &= \left| \int_{\mathbb{R}^d} g(x_1 - y) f(y) \, dy - \int_{\mathbb{R}^d} g(x_2 - y) f(y) \, dy \right| \\ &= \left| \int_{\mathbb{R}^d} (g(x_1 - y) - g(x_2 - y)) f(y) \, dy \right| \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^d} |g(x_1 - y) - g(x_2 - y)| |f(y)| \, dy \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^d} M |(x_1 - y) - (x_2 - y)| |f(y)| \, dy \leq M |x_1 - x_2| \cdot \|f\|_{L^1(\mathbb{R}^d)}. \end{aligned}$$

**Esercizio.** [TO DO] Se  $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$  e  $g$  a supporto compatto è  $\alpha$ -Hölderiana allora anche  $f * g$  lo è.

**Esercizio.** [TO DO] Presa  $f(x) = \mathbb{1}_{[0,1]}$  in  $\mathbb{R}$ , calcolare  $f * f$ .

### 3.2 Separabilità degli spazi $L^p$

**Proposizione.** Si ha che  $L^p(\mathbb{R}^d, \mu)$  con  $\mu$  la misura di Lebesgue, è separabile se e solo se  $p \neq +\infty$ . Lo stesso risultato vale per  $\ell^p$ .

**Osservazione.** La proposizione è valida anche per  $L^p(X, \mu)$  con  $X \subset \mathbb{R}^d$  aperto.

Sia  $1 \leq p < +\infty$ ,  $L^p(\mathbb{R}^d, \mu)$  con  $\mu$  la misura di Lebesgue. Le funzioni semplici costituite da somme finite di insiemi di misura finita sono dense in  $L^p(\mathbb{R}^d)$ .

Prendiamo una base numerabile di  $\mathbb{R}^d$  e la indichiamo con  $\mathcal{B}$ . L'insieme

$$Y = \left\{ \sum_{i=1}^n \alpha_i \mathbb{1}_{B_i} \mid B_i \in \mathcal{B}, \alpha_i \in \mathbb{Q} \right\}$$

è numerabile. Vediamo che è denso in  $L^p(\mathbb{R}^d)$ .

*Idea.* È sufficiente approssimare le funzioni semplici a somma finita  $\sum_{i=1}^N \alpha_i \mathbb{1}_{E_i}$ . In particolare, ci basta approssimare  $\alpha \cdot \mathbb{1}_E$ . Essendo  $\alpha \in \mathbb{R}$  troviamo una successione di razionali  $\alpha_j$  tali che  $\alpha_j \xrightarrow{j \rightarrow \infty} \alpha$ . Dunque, rimane da approssimare l'insieme  $E$ .

Fissiamo  $E$  e supponiamo dapprima  $E$  aperto. Possiamo scrivere  $E$  come unione arbitraria di elementi della base  $\mathcal{B}$

$$E = \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i.$$



Per approssimare  $E$  consideriamo gli insiemi  $E_N = \bigcup_{i=1}^N B_i$ . Otteniamo  $|E| = \lim_N |E_N|$ , da cui  $|E \setminus E_N| \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} 0$ . Concludiamo notando che il caso  $E$  arbitrario si fa approssimandolo con una famiglia di aperti.

Per  $\ell^p$  con  $p < +\infty$  definiamo

$$Y = \{\{x_n\} \mid x_n = 0 \text{ definitivamente}, x_n \in \mathbb{Q}\}$$

e verifico che è numerabile e separabile.

**Domanda.** Cosa succede per  $p = +\infty$ ?

Consideriamo  $L^\infty([0, +\infty], \mu)$  con  $\mu$  di Lebesgue e  $E_n = [n, n+1]$ . Definiamo l'insieme

$$Z = \left\{ \forall J \subset \mathbb{N} \quad u = \sum_{j \in J} \mathbb{1}_{E_j} \right\}.$$

$Z$  ha la cardinalità delle parti di  $\mathbb{N}$  cioè è più che numerabile. Osserviamo che per ogni  $u, v \in Z$ ,  $u \neq v$  si ha che  $\|u - v\|_{L^\infty(\mathbb{R})} = 1$ . Se per assurdo esistesse un insieme denso e numerabile  $D$  in  $\ell^\infty$ , per definizione di insieme denso dovremmo trovare per ogni palla di raggio minore di 1 e centro in un qualsiasi elemento di  $Z$ , un elemento di  $D$ . Ma questo è impossibile in quanto  $D$  ha cardinalità numerabile e  $Z$  la cardinalità del continuo.

Vediamo in un altro modo che  $\ell^\infty$  non è separabile. Se per assurdo  $Y = \{\underline{x}^k\}_{k \in \mathbb{N}}$  fosse denso in  $L^\infty$ , allora potremmo definire un elemento  $z \in \ell^\infty$  tale che  $\|\underline{x}^k - z\|_{\ell^\infty} \geq 1$  per ogni  $k$ .

Definiamo  $z = \{z_n\}$  come segue

$$z_n = \begin{cases} 0 & \text{se } |x_n^n| > 1 \\ 2 & \text{se } |x_n^n| \leq 1 \end{cases}.$$

## 4 Esercitazione del 3 Novembre 2021

### 4.1 Basi Hilbertiane e proiezioni

**Esercizio.** Sia  $H = L^2(-1, 1)$  e sia  $V = \text{Span}\{1, x, x^2\}$ . Verificare che  $V$  è un sottospazio chiuso e calcolare la proiezione di  $\sin x$  su  $V$ .

*Notazione.* Indichiamo con  $\|\cdot\|$  la norma  $\|\cdot\|_{L^2(-1,1)}$  e con  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  il prodotto scalare su  $L^2$ .

**Soluzione.** Vediamo come risolvere questo esercizio in tre modi diversi.

i) Dato  $H$  spazio di Hilbert separabile, e dato un sottospazio  $V \subset H$ , vediamo come trovare la proiezione di un elemento  $x \in H$  su  $V$ . Procediamo come segue.

- Controlliamo che  $V$  sia chiuso.
- Calcoliamo una base hilbertiana di  $V$  che indichiamo con  $\{e_1, \dots, e_n, \dots\}$ .

Il tal caso, la proiezione di un elemento  $x \in H$  su  $V$  è data da

$$p_V(x) = \sum_n \langle x, e_n \rangle e_n.$$

**Esercizio.** [TO DO: per casa] Ogni sottospazio di dimensione finita di uno spazio di Hilbert o di  $L^p$  è chiuso (e in particolare ha parte interna vuota).

Abbiamo una base di  $V$  data da  $\{1, x, x^2\}$  (è una base in quanto sono linearmente indipendenti: si può verificare mostrando che  $\forall x \in [-1, 1] \lambda_1 + \lambda_2 x + \lambda_3 x^2 = 0 \implies \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$  usando la teoria sulle equazioni di II grado oppure si può derivare e man mano ottenere più informazioni su  $\lambda_3, \lambda_2, \lambda_1$ ).

Volendo usare la base scritta sopra per calcolare la proiezione di  $\sin x$  su  $V$ , dovremmo prima applicare Gram-Schmidt alla base  $\{1, x, x^2\}$  per determinare una base Hilbertiana:

$$\begin{aligned} e_1 &= \frac{1}{\|1\|} = \frac{1}{\sqrt{2}} \\ e_2 &= \frac{x - \langle x, \frac{1}{\sqrt{2}} \rangle \cdot 1}{\|x - \langle x, \frac{1}{\sqrt{2}} \rangle \cdot 1\|} \\ e_3 &= \frac{x^2 - \langle x^2, e_1 \rangle \cdot e_1 - \langle x^2, e_2 \rangle \cdot e_2}{\|x^2 - \langle x^2, e_1 \rangle \cdot e_1 - \langle x^2, e_2 \rangle \cdot e_2\|} \end{aligned}$$

e successivamente calcolare  $p_V(\sin x)$  con la formula scritta sopra.

- ii) Alternativamente, possiamo direttamente cercare la proiezione di  $\sin x$  su  $V$ . Determiniamo  $a, b, c$  tali che  $a + bx + cx^2$  sia  $p_V(x) = \sin x$  allora posto  $f(x) := \sin x - a - bx - cx^2$  abbiamo  $f(x) \in V^\perp \iff$  si verificano le seguenti condizioni

$$\langle f(x), 1 \rangle = 0 \quad \langle f(x), x \rangle = 0 \quad \langle f(x), x^2 \rangle = 0$$

Ad esempio da  $\langle f(x), 1 \rangle = 0$  otteniamo

$$0 = \int_{-1}^1 (\sin x - a - bx - cx^2) \cdot 1 \, dx = \underbrace{\int_{-1}^1 \sin x \, dx}_{=0} - 2a - b \underbrace{\int_{-1}^1 x \, dx}_{=0} - c \int_{-1}^1 x^2 \, dx \implies 0 = -2a - \frac{2}{3}c$$

ed analogamente si procede con  $x$  e  $x^2$ ... [TODO: Da finire]

- iii) Un altro modo è considerare la funzione  $g(a, b, c) := \|\sin x - a - bx - cx^2\|_{L^2(-1,1)}$  che è continua, coerciva, etc. e imponendo  $\nabla_{a,b,c} g = 0$  si minimizza e si ottengono  $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$  che verificano  $p_V(\sin x)$ .

**Esercizio.** Sia  $X = \{u \in L^2(\mathbb{R}) \mid \int_0^2 u \, dx = 0\}$ , dire se è un sottospazio chiuso, calcolare  $X^\perp$  per una generica  $u \in L^2(\mathbb{R})$  e determinare le proiezioni  $p_X(u)$  e  $p_{X^\perp}(u)$ .

**Soluzione.** La mappa  $T$  lineare data da

$$u \mapsto \int_0^2 u \, dx$$

è ben definita, lineare e continua, allora  $X$  è proprio  $T^{-1}(0)$  dunque è un sottospazio chiuso.

**Osservazione.** Notiamo che

$$T(u) = \int_{\mathbb{R}} u(x) \cdot \mathbb{1}_{[0,2]}(x) \, dx = \langle u, g \rangle_{L^2(\mathbb{R})}, \quad g = \mathbb{1}_{[0,2]}(x) \in L^2(\mathbb{R}).$$

Calcoliamo ora  $X^\perp$  e le proiezioni  $p_X, p_{X^\perp}$ . Abbiamo che  $X = \{u \in L^2(\mathbb{R}) \mid \langle u, g \rangle = 0\}$  dove  $g = \mathbb{1}_{[0,2]}(x)$ , dunque  $X^\perp = \text{Span}(g)$ . Notiamo<sup>1</sup> che

$$L^2(\mathbb{R}) = \text{Span}_{\mathbb{R}} \left\{ \frac{g}{\|g\|_{L^2}} \right\} \oplus \left\{ \frac{g^\perp}{\|g^\perp\|_{L^2}} \right\}.$$

Calcoliamo  $p_X(u)$  come segue

$$p_X(u) = u - \left\langle u, \frac{g}{\|g\|_{L^2}} \right\rangle \cdot \frac{g}{\|g\|_{L^2}},$$

dove

$$\|g\|_{L^2} = \left( \int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_{[0,2]}(x)^2 dx \right)^{1/2} = \sqrt{2}$$

e dunque

$$p_X(u) = u - \left( \int_0^2 u dx \right) \cdot \frac{\mathbb{1}_{[0,2]}}{2}$$

Un controllo veloce per verificare di aver fatto i conti corretti è quello di vedere che  $p_X(u) \in X$ , dunque di verificare che  $\int_0^2 p_X(u) dx = 0$ .

Per calcolare  $p_{X^\perp}(u)$  usiamo la seguente.

**Osservazione.** Vale  $u = p_X(u) + p_{X^\perp}(u)$ .

In conclusione,

$$p_{X^\perp}(u) = u - p_X(u) = \left( \int_0^2 u dx \right) \cdot \frac{\mathbb{1}_{[0,2]}}{2}.$$

**Esercizio.** [TO DO: per casa.] Sia  $V = \{\underline{x} = (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \ell^2 \mid x_1 + x_3 + x_5 = 0\}$ . Dire se  $V$  è chiuso in  $\ell^2$  e calcolare  $p_V$  e  $p_{V^\perp}$ .

## 4.2 Approssimazioni per convoluzione

Abbiamo visto che data  $g \in L^1(\mathbb{R}^d)$  con  $\int g dx = 1$  allora per ogni  $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$  abbiamo  $f_\delta := f * \sigma_\delta g \xrightarrow{\delta \rightarrow 0} f$  in  $L^p(\mathbb{R}^d)$  per  $p \neq \infty$ .

**Esercizio.** Dire se esiste  $v \in L^1(\mathbb{R})$  tale che sia elemento neutro della convoluzione, ovvero

$$\forall f \in L^1(\mathbb{R}) \quad f * v = f.$$

Una tale  $v$  non esiste, per vederlo scegliamo opportunamente  $\bar{f}$  e usiamo l'equazione. Scelgo  $g \in C_c(\mathbb{R})$  e defiamo  $\sigma_\delta g = 1/\delta g(1/\delta)$ . Abbiamo che  $\sigma_\delta g * v = \sigma_\delta g$  per ogni  $\delta$ . Per il teorema abbiamo che  $\sigma_\delta g * v = \sigma_\delta g \xrightarrow{\delta \rightarrow 0} v$  in  $L^1(\mathbb{R})$ , ma  $\sigma_\delta g \xrightarrow{\delta \rightarrow 0} 0$  quasi ovunque in  $L^1(\mathbb{R})$ . Allora  $v = 0$  q.o. in  $L^1(\mathbb{R})$ , dunque non può valere  $f * v = v$  per ogni  $f \in L^1(\mathbb{R})$ .

**Esercizio.** [TO DO: per casa.] Sia  $f$  misurabile su  $\mathbb{R}^d$  tale che  $\int_E f dx = 0$  per ogni  $E$  misurabile di  $\mathbb{R}^d$ . Dimostrare che  $f = 0$  q.o. su  $\mathbb{R}^d$ .

*Suggerimento.* Considerare l'integrale sull'insieme  $\{x \in \mathbb{R}^d \mid f(x) = 0\} \cup \{x \in \mathbb{R}^d \mid f(x) \neq 0\}$  e verificare che, se denotiamo  $A = \{x \in \mathbb{R}^d \mid f(x) \neq 0\}$ , allora  $|A| = 0$ .

---

<sup>1</sup>Con  $g/\|g^\perp\|_{L^2}$  indichiamo una base normalizzata di  $g^\perp$ .

**Esercizio.** [TO DO: per casa.] Sia  $f$  Lebesgue-misurabile su  $\mathbb{R}^d$  tale che  $\forall B$  palla su  $\mathbb{R}^d$

$$\int_B f \, dx = 0$$

Dimostrare che  $f = 0$  quasi ovunque su  $\mathbb{R}^d$ .

*Suggerimenti.* Usare la convoluzione con opportuni nuclei; notare che  $\int_B f = 0 \iff f * \mathbb{1}_B = 0$  per ogni palla  $B$ .

## 5 Esempi di basi Hilbertiane

### 5.1 Polinomi

La base data da  $\{1, x, x^2, \dots, x^n, \dots\}$  opportunamente ortonormalizzata è una base<sup>1</sup> di  $L^2[0, 1]$  (anche di  $L^2(\mathbb{R})$ ).

### 5.2 Base di Haar

Vediamo la base di Haar data da due indici  $n, k$  dove  $n$  indica l'ampiezza delle "onde" (anche dette *wavelet*) e  $k$  il posizionamento dell'onda. Sia  $n \in \mathbb{N}$  e  $k = 1, \dots, 2^n$  e poniamo

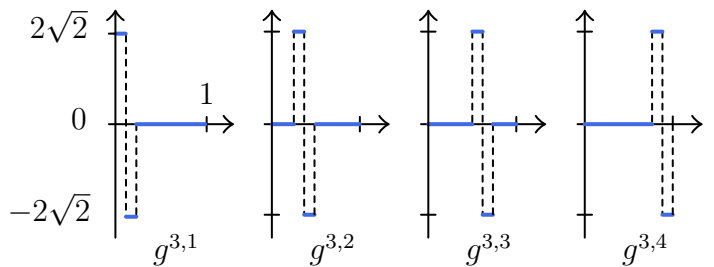
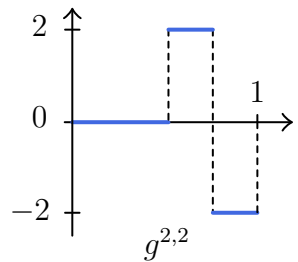
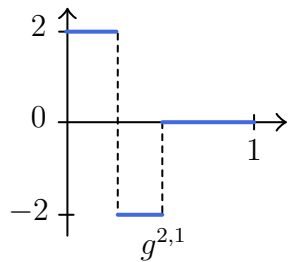
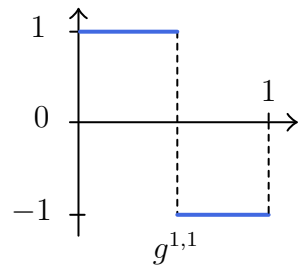
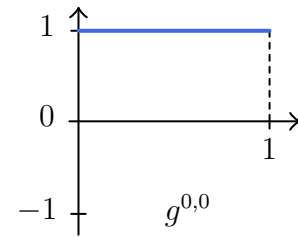
$$g^{0,0} := \mathbb{1}_{[0,1]} \quad g^{n,k} := 2^{\frac{n-1}{2}} \left( \mathbb{1}_{\left[\frac{2k-2}{2^n}, \frac{2k-1}{2^n}\right]} - \mathbb{1}_{\left[\frac{2k-1}{2^n}, \frac{2k}{2^n}\right]} \right)$$

Inoltre  $\|g^{n,k}\|_{L^2[0,1]} = 1$  ed anche  $\|g^{0,0}\|_{L^2[0,1]} = 1$ . Vedremo che  $\{g^{n,k} \mid n \geq 1, k = 1, \dots, 2^n\} \cup \{g^{0,0}\}$  formano un sistema ortonormale.

- $\langle g^{n,k}, g^{0,0} \rangle = 0$ : È ovvio in quanto le  $g^{n,k}$  hanno media nulla.
- $\langle g^{n,k}, g^{n',k'} \rangle = 0$ : Se  $n = n'$  i supporti sono sempre disgiunti altrimenti  $n \neq n'$ , se supponiamo  $n < n'$  allora i supporti o sono disgiunti e si conclude come prima o il supporto di  $g^{n',k'}$  è contenuto in quello di  $g^{n,k}$ . In tal caso però  $g^{n,k}$  è costante su  $g^{n',k'}$  e dunque l'integrale è sempre nullo.

Inoltre è anche una base hilbertiana, per combinazioni algebriche si ottengono tutti gli intervalli della forma

$$I_k := \left[ \frac{k-1}{2^n}, \frac{k}{2^n} \right] \rightsquigarrow \mathbb{1}_{I_k}$$



<sup>1</sup>Teorema di Stone-Weierstrass: i polinomi sono densi nello spazio delle funzioni continue.

ad esempio normalizzando  $g^{n,k} + 2^{\frac{n-1}{2}} g^{0,0}$  otteniamo uno degli intervalli di sopra di lunghezza  $1/2^{n+1}$ .

Vedremo che possiamo estendere la base di Haar a tutto  $\mathbb{R}$  però è più difficile... [TODO: Ehm aggiungere la parte dopo quando verrà fatta]

**Esercizio.** Sia  $p \geq 1$  allora  $\{u \in L^p(\mathbb{R}) \mid \int u \, dx = 0\} \subseteq L^p(\mathbb{R})$  è denso in  $L^p(\mathbb{R})$ ?

## 6 Esercitazione del 11 novembre

Consideriamo  $L^2([-\pi, \pi], \mathbb{C})$ . Ricordiamo che  $e^{inx} = \cos(nx) + i \sin(nx)$ . Abbiamo

$$\begin{aligned} \sum_{n=-N}^N c_n e^{inx} &= c_0(f) + \sum_{n=1}^N (c_n(f) e^{inx} + c_{-n} e^{inx}) \\ &= c_0(f) + \sum_{n=1}^N [(c_n(f) + c_{-n}(f)) \cos(nx) + i(c_n(f) - c_{-n}(f)) \sin(nx)] \\ &= c_0(f) + \sum_{n=1}^N a_n(f) \cos(nx) + b_n(f) \sin(nx) \end{aligned}$$

con

$$\begin{cases} a_n(f) = c_n(f) + c_{-n}(f) \\ b_n(f) = i c_n(f) - i c_{-n}(f) \\ a_0(f) = c_0(f) \end{cases}$$

Passando al limite per  $N \rightarrow +\infty$

$$f(x) \stackrel{L^2}{\rightrightarrows} \sum_{n=-N}^N c_n e^{inx} \stackrel{(*)}{=} c_0(f) + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n(f) \cos(nx) + b_n(f) \sin(nx)$$

**Nota.** L'uguaglianza  $(*)$  ha bisogno di qualche spiegazione: come sappiamo che la serie a destra converge? Usiamo il fatto, che mostriamo sotto, che  $\{1, \cos(nx), \sin(nx), n > 1\}$  sono un sistema ortogonale, dunque per la disuguaglianza di Bessel segue la convergenza.

**Osservazione.** Gli elementi  $\{1, \sin(nx), \cos(nx)\}$  sono ortogonali per  $n \geq 1$  in  $L^2([-\pi, \pi], \mathbb{C})$ . Infatti, ricordiamo che

$$\begin{aligned} \cos(nx) &= \frac{e^{inx} + e^{-inx}}{2} \\ \sin(nx) &= \frac{e^{inx} - e^{-inx}}{2i}. \end{aligned}$$

- È banale verificare che  $\langle 1, \cos(nx) \rangle = \langle 1, \sin(nx) \rangle = 0$ ;
- Verifichiamo ora che valga  $\langle \cos(nx), \sin(mx) \rangle = 0$  per ogni  $n, m$ , dunque calcoliamo:

$$\langle \sin(nx), \sin(mx) \rangle = \frac{1}{4} \langle e^{-inx} - e^{inx}, e^{-imx} - e^{imx} \rangle = 0.$$

Ora normalizziamo:  $\left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{\cos(nx)}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin(nx)}{\sqrt{\pi}}, n \geq 1 \right\}$ .

In conclusione, abbiamo ottenuto che

- $L^2([-\pi, \pi], \mathbb{C})$  ha base Hilbertiana  $\left\{ \frac{1}{\sqrt{\pi}}, \frac{\cos(nx)}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin(nx)}{\sqrt{\pi}} \right\}_{\mathbb{C}}$
- $L^2([-\pi, \pi], \mathbb{R})$  ha base Hilbertiana  $\left\{ \frac{1}{\sqrt{\pi}}, \frac{\cos(nx)}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin(nx)}{\sqrt{\pi}} \right\}_{\mathbb{R}}$

**Esercizio.** Se  $f$  è a valori reali, dimostrare che  $a_n(f)$  e  $b_n(f)$  sono anch'essi reali. [TO DO]

*Sketch.* Si dimostra che  $a_n(f) = \overline{a_n(f)}$ ,  $b_n(f) = \overline{b_n(f)}$  e per farlo si usano le espressioni di  $a_n, b_n$  in funzione dei coefficienti di Fourier complessi scritte sopra.

**Esercizio.** Trovare la base di Fourier complessa e reale di  $L^2([a, b], \mathbb{C})$ .

**Soluzione.** Data  $f(x) \in L^2([a, b], \mathbb{C})$ , definiamo la funzione

$$F(y) := f\left((y + \pi)\frac{b-a}{2\pi} + a\right) = f(x).$$

Notiamo che  $F \in L^2([-\pi, \pi], \mathbb{C})$ , dunque ha espansione in serie di Fourier:

$$\begin{aligned} F(y) &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n(F) e^{iny}, \quad c_n(F) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F(y) e^{-iny} dy \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f\left((y + \pi)\frac{b-a}{2\pi} + a\right) e^{-iny} dy. \end{aligned}$$

Usando il cambio di variabile  $y = (x - a)\frac{2\pi}{b-a} - \pi$  si ottiene

$$\begin{aligned} c_n(f) &= \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) \exp\left[\left((x-a)\frac{2\pi}{b-a} - \pi\right)(-in)\right] dx \\ &= \frac{(-1)^n}{b-a} \exp\left[\frac{2\pi a}{b-a} in\right] \int_a^b f(x) \exp\left[\frac{2\pi x}{b-a}(-in)\right] dx \end{aligned}$$

Da cui

$$f(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n(f) \exp\left[\frac{2\pi}{b-a} xin\right], \quad c_n(f) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) \exp\left[-\frac{2\pi}{b-a} xin\right].$$

**Esercizio.** Sia  $f \in L^2([-\pi, \pi], \mathbb{C})$  (l'estensione di)  $f$  è  $2\pi/N$  periodica. Dimostrare che  $c_n(f) \neq 0$  se e solo se  $n$  multiplo di  $N$ . [TO DO]

**Esercizi classici.** Fissata una funzione  $f \in L^2$ , calcolare i coefficienti di Fourier complessi (e reali).

Calcoliamo i coefficienti di  $f(x) = x^2$ .

$$\begin{aligned} c_n(f) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x^2 e^{-inx} dx = \frac{1}{2\pi} \left[ \frac{e^{-inx}}{-in} x^2 \right]_{-\pi}^{\pi} - \int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{-inx}}{-in} 2x dx \\ &= - \int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{-inx}}{-in} 2x dx = -\frac{i}{\pi n} \left[ \left[ \frac{e^{-inx}}{-in} \right]_{-\pi}^{\pi} - \int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{-inx}}{-in} dx \right] \\ &= \frac{-i\pi \cos(-n\pi) + \cos(-n(-\pi))}{-in} + \frac{i}{\pi n} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{-inx}}{-in} dx \\ &= \frac{2}{n^2} + \frac{i}{\pi n} \cdot 0 = \frac{2}{n^2} (-1)^n \\ &\implies c_n(f) = \frac{2}{n^2} (-1)^n. \end{aligned}$$

Infine

$$c_0(f) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x^2 dx = \frac{1}{2\pi} \frac{2}{3} \pi^3 = \frac{1}{3} \pi^2.$$

Per Parseval  $\|f\|_{L^2}^2 = 2\pi \sum_{n \in \mathbb{Z}} |c_n(f)|^2$ . Da cui

$$\int_{-\pi}^{\pi} x^4 dx = \|x^2\|_{L^2}^2 = 2\pi \cdot \left[ \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{4}{n^4} + \frac{\pi^2}{3} \right].$$

**Nota.** Potevamo ottenere i coefficienti di  $f(x) = x^2$ , applicando il teorema della derivata.

**Domande.**

- Abbiamo visto che  $c_n(x^2) = \frac{2(-1)^n}{n^2}$  e dedotto che  $c_n(2x) = in \frac{2(-1)^n}{n^2} = \frac{2(-1)^n i}{n}$ .
- Vorremmo calcolare  $c_n(2)$ , possiamo applicare il teorema sulla formula della derivata?

**Esercizio.**

- Calcolare i coefficienti di Fourier complessi di  $x^3$  e vedere se vale  $c_n(3x^2) = inc_n(x^3)$ .
- Calcolare i coefficienti reali di  $x^2$ .

**Esercizio.** Sia  $f(x)$  definita da  $\sum_{n \in \mathbb{Z}} \gamma_n e^{inx}$  con  $\begin{cases} \gamma_n = \frac{\cos(n)}{|n|^{3/2}} \\ \gamma_0 = 1 \end{cases}$

**Domande.**

- $f$  è ben definita?
- $f$  è continua?
- $f$  è derivabile?

**Dimostrazione.**

- Sì, infatti  $2 \sum_{n=1}^{+\infty} |\gamma_n|^2 \leq 2 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^3} < +\infty$ .

- Suggerimento.* Usare la Proposizione 3 della parte della regolarità dei coefficienti della serie di Fourier.

## 7 Esercitazione del 18 Novembre 2021

### 7.1 Esercizi preliminari

Data  $f: [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$  o  $\mathbb{C}$  uno degli esercizi più comuni è doverne calcolare lo sviluppo di Fourier complesso o reale.

**Osservazione.** Ricordiamo che  $c_n(f)$  può essere calcolato anche solo se  $f \in L^1$  inoltre

$$\text{SF}_{\mathbb{C}}(f) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n(f) e^{inx} \quad c_n(f) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx} dx$$

e con base hilbertiana  $\left\{ \frac{e^{inx}}{\sqrt{2\pi}} \mid n \in \mathbb{Z} \right\}$

invece nel caso reale abbiamo visto

$$\text{SF}_{\mathbb{R}}(f) = \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)] + a_0$$

$$a_n(f) = c_n(f) + c_{-n}(f) \quad b_n(f) = i(c_n(f) - c_{-n}(f)) \quad a_0(f) = c_0(f)$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx) dx \quad b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(nx) dx$$

e con base hilbertiana  $\left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{\cos(nx)}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin(nx)}{\sqrt{\pi}} \mid n \geq 1 \right\}$

**Esercizio.** Sia  $f(x) = \cos^2(x) \sin(3x)$ , calcolare i coefficienti di Fourier<sup>1</sup>.

**Svolgimento.** Usiamo lo sviluppo complesso

$$\cos(x) = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \quad \sin(x) = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$$

Dunque possiamo riscrivere  $f(x)$  come

$$\begin{aligned} &= \frac{i}{8} (e^{i2x} + e^{-i2x} + 2) (e^{-i3x} - e^{i3x}) = \\ &= \frac{i}{8} (e^{-ix} + e^{-i5x} + 2e^{-i3x} - e^{i5x} - e^{ix} - 2e^{i3x}) = \\ &= \frac{i}{8} e^{-ix} + \frac{i}{8} e^{-i5x} + \frac{i}{4} e^{-i3x} - \frac{i}{8} e^{i5x} - \frac{i}{8} e^{ix} - \frac{i}{4} e^{i3x}. \end{aligned}$$

Dunque possiamo già scrivere i coefficienti di Fourier complessi di  $f(x)$

$$c_n(f) \neq 0 \iff n = \pm 1, \pm 3, \pm 5$$

$$c_{\pm 1}(f) = \mp \frac{i}{8} \quad c_{\pm 3}(f) = \mp \frac{i}{4} \quad c_{\pm 5}(f) = \mp \frac{i}{8}.$$

Continuiamo ora il conto precedente e ricostruiamo la serie di Fourier reale ricomponendo i termini

$$\begin{aligned} &= -\frac{1}{4} \left( \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} \right) - \frac{i^2}{4} \left( \frac{e^{i3x} - e^{-i3x}}{2i} \right) - \frac{i^2}{4} \left( \frac{e^{i5x} - e^{-i5x}}{2i} \right) = \\ &= \frac{1}{4} \sin(x) + \frac{1}{2} \sin(3x) + \frac{1}{4} \sin(5x), \end{aligned}$$

in particolare possiamo notare che  $f(\pi) = f(-\pi) = 0$  dunque potevamo già dedurre che la serie di Fourier reale sarebbe stata composta solo da seni.

**Esercizio.** Caratterizzare i coefficienti  $c_n(f)$  di una  $f: [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{C}$  in  $L^2$  tale che  $\text{Im}(f) \subseteq \mathbb{R}$ .

*Suggerimento.* Si usa che per  $z \in \mathbb{C}$  vale  $z \in \mathbb{R} \iff z = \bar{z}$ .

---

<sup>1</sup>Con funzioni ottenute come combinazioni di prodotti di potenze di funzioni trigonometriche (anche con argomento moltiplicato per un naturale) conviene calcolare lo sviluppo complesso e poi passare a quello reale.



**Esercizio.** Determinare la soluzione di (P) e stabilire unicità e regolarità della soluzione  $u: [0, T) \times [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$  o  $\mathbb{C}$ .

$$\begin{cases} u_t = 4u_{xx} \\ u(\cdot, -\pi) = u(\cdot, \pi) \\ u_x(\cdot, -\pi) = u_x(\cdot, \pi) \\ u(0, x) = \cos^2(x) \sin(3x) \end{cases} \quad (\text{P})$$

**Svolgimento.** Per prima cosa troviamo formalmente una soluzione in serie di Fourier  $u(t, x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n(t) e^{inx}$  dove  $c_n(t)$  è il coefficiente di  $u(t, \cdot)$ .

Per il teorema di derivazione sotto il segno di integrale abbiamo

$$u_t(t, x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \dot{c}_n(t) e^{inx} \quad \text{con } c_n(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} u(t, x) e^{-inx} dx$$

Le condizioni al bordo assicurano che  $c_n(u_{xx}(t, \cdot)) = -4n^2 c_n(u(t, \cdot))$  da cui otteniamo il seguente problema di Cauchy sui coefficienti

$$\begin{cases} \dot{c}_n(t) = -4n^2 c_n(t) \\ c_n(0) = c_n(u(0, \cdot)) = c_n(\cos^2(x) \sin(3x)) \end{cases} \quad \forall n \in \mathbb{Z}$$

Inoltre dato che  $c_n^0 = 0$  se  $n \neq \pm 1, \pm 3, \pm 5 \implies c_n(t) = 0$  per questi  $n$ , dunque complessivamente i sistemi sono

$$\begin{cases} \dot{c}_1(t) = -4c_1(t) \\ c_1(0) = -\frac{i}{8} \end{cases} \quad \begin{cases} \dot{c}_3(t) = -36c_3(t) \\ c_3(0) = -\frac{i}{4} \end{cases} \quad \begin{cases} \dot{c}_5(t) = -100c_5(t) \\ c_5(0) = -\frac{i}{8} \end{cases}$$

con la condizione  $c_{-n}(t) = \overline{c_n(t)}$ , così otteniamo

$$\begin{aligned} c_1(t) &= -\frac{i}{8} e^{-4t} & c_3(t) &= -\frac{i}{4} e^{-36t} & c_5(t) &= -\frac{i}{8} e^{-100t} \\ c_{-1}(t) &= \frac{i}{8} e^{-4t} & c_{-3}(t) &= \frac{i}{4} e^{-36t} & c_{-5}(t) &= \frac{i}{8} e^{-100t} \end{aligned}$$

ed infine fattorizzando

$$\begin{aligned} u(t, x) &= \frac{e^{-4t}}{4} \left( -\frac{i}{2} e^{ix} + \frac{i}{2} e^{-ix} \right) + \frac{e^{-36t}}{2} \left( -\frac{i}{2} e^{i3x} + \frac{i}{2} e^{-i3x} \right) + \frac{e^{-100t}}{4} \left( -\frac{i}{2} e^{i5x} + \frac{i}{2} e^{-i5x} \right) = \\ &= \frac{1}{4} e^{-4t} \sin(x) + \frac{1}{2} e^{-36t} \sin(3x) + \frac{1}{2} e^{-100t} \sin(5x) \end{aligned}$$

**Esercizio.** Consideriamo il problema (P) dato da

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} + u \\ u(\cdot, -\pi) = u(\cdot, \pi) \\ u_x(\cdot, -\pi) = u_x(\cdot, \pi) \\ u(0, \cdot) = u_0 \end{cases} \quad (\text{P})$$

dove  $u_0(x) = \cos^2(x) \sin(3x)$  oppure  $\sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{1}{2^{|n|}} e^{inx}$ .

**Svolgimento.** Per ora lavoriamo con  $u_0(x) = \cos^2(x) \sin(3x)$ , notiamo subito che i coefficienti soddisfano l'equazione

$$\begin{cases} \dot{c}_n(t) = -n^2 c_n(t) + c_n(t) = (1 - n^2) c_n(t) \\ c_n(0) = c_n(\cos^2(x) \sin(3x)) \end{cases}$$

da cui  $\dot{c}_n(t) = (1 - n^2) c_n$  con soluzione  $c_n(t) = \gamma e^{(1-n^2)t}$ , quindi ad esempio abbiamo

$$c_{\pm 1}(t) = \mp \frac{i}{8} \quad c_{\pm 3}(t) = \mp \frac{i}{4} e^{-8t} \quad c_{\pm 5}(t) = \mp \frac{i}{8} e^{-24t}$$

Dunque la soluzione finale è

$$\begin{aligned} u(t, x) &= \frac{i}{8} e^{-ix} - \frac{i}{8} e^{ix} + \frac{i}{4} e^{3t} e^{-i3x} + \frac{i}{4} e^{3t} e^{i3x} + \frac{i}{8} e^{-24t} e^{-i5x} + \frac{i}{8} e^{-24t} e^{i5x} = \\ &= -\frac{i}{4} \left( \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2} \right) - \frac{i}{2} e^{-3t} \left( \frac{e^{i3x} - e^{-i3x}}{2} \right) - \frac{i}{4} e^{-24t} \left( \frac{e^{i5x} - e^{-i5x}}{2} \right) = \\ &= \frac{1}{4} \sin(x) - \frac{1}{2} e^{-3t} \sin(3x) - \frac{1}{4} e^{-24t} \sin(5x) \end{aligned}$$

Invece considerando la condizione iniziale  $u_0(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{inx} / 2^{|n|}$  abbiamo che  $c_n(u_0) = 1/2^{|n|}$ , notiamo che i coefficienti sono sommabili

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{1}{2^{|n|}} = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} + 1 < +\infty \quad u(t, x) := \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{1}{2^{|n|}} e^{(1-n)^2 t} e^{inx}$$

in particolare formalmente possiamo scriverla meglio come

$$= \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{1}{2^{|n|}} e^{(1-n)^2 t} e^{inx} = e^t \left( 1 + \sum_{n>0} \frac{1}{2^{|n|}} e^{(1-n)^2} \cos(nx) \dots \dots \right)$$

[TODO: Finire meglio questo conto]

**Esercizio.** (della volta scorsa) Consideriamo la funzione

$$f(x) = \sum_{n \neq 0} \frac{\cos(n)}{|n|^{3/2}} e^{inx}$$

- Dire se  $f$  è ben definita e continua.
- Dire se  $f$  è derivabile.

**Svolgimento.**

$$\sum_{n \neq 0} |c_n| = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\cos(n)|}{|n|^{3/2}} \leq 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{3/2}} < +\infty$$

dunque la serie di Fourier converge uniformemente a  $f \implies$  è continua e periodica.

Se  $\sum |n| \cdot |c_n| < +\infty$  si potrebbe dire che  $f$  è derivabile però

$$\sum_{n \neq 0} |n| \cdot |c_n| = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\cos(n)|}{\sqrt{n}} = +\infty \text{ non converge assolutamente}$$

Ma la candidata derivata ha coefficienti  $inc_n$  e non starebbe in  $L^2$  ovvero

$$\sum n^2 |c_n|^2 = +\infty \implies \sum inc_n e^{inx} \notin L^2$$

## 8 Esercitazione del 25 Novembre 2021

**Esercizio.** Consideriamo l'equazione alle derivate parziali

$$\begin{cases} u_{ttt}(t, x) = u_{xx}(t, x) & x \in [-\pi, \pi] \\ u(\cdot, \pi) = u(\cdot, -\pi) \\ u_x(\cdot, \pi) = u_x(\cdot, -\pi) \\ u(0, \cdot) = u_0 \\ u_x(0, \cdot) = u_1 \\ u_{xx}(0, \cdot) = u_2 \end{cases} \quad (\text{P})$$

ponendo  $c_n^i := c_n(u_i)$  per  $n \in \mathbb{Z}$  per  $i = 1, 2, 3$ . Segue subito che il problema di Cauchy sui coefficienti è

$$\begin{cases} \ddot{c}_n(t) = -n^2 c_n(t) \\ c_n(0) = c_n^0 \\ \dot{c}_n(0) = c_n^1 \\ \ddot{c}_n(0) = c_n^2 \end{cases} \quad \forall n \in \mathbb{Z} \quad (\text{P}')$$

che ha polinomio caratteristico  $p(\lambda) = \lambda^3 + n^2 \implies \lambda^3 = -n^2$  e dunque le soluzioni sono  $\lambda_i = n^{2/3} \zeta_6^{2i-1}$  con  $\zeta_6$  una radice sesta dell'unità. Per comodità per  $i = 1, 2, 3$  poniamo  $z_i := n^{2/3} \omega_i$  con  $\omega_i$  soluzioni di  $\omega^3 = -1$  che possiamo anche riscrivere come

$$\omega_1 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \quad \omega_2 = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i \quad \omega_3 = -1$$

Dunque per  $n \in \mathbb{Z}$  e  $n \neq 0$  la soluzione sarà

$$\begin{cases} c_n(t) = A_n e^{-z_1^n t} + B_n e^{-z_2^n t} + C_n e^{-z_3^n t} \\ c_n(0) = c_n^0 = A_n + B_n + C_n \\ c_n(1) = c_n^1 = A_n z_1^n + B_n z_2^n + C_n z_3^n \\ c_n(2) = c_n^2 = A_n (z_1^n)^2 + B_n (z_2^n)^2 + C_n (z_3^n)^2 \end{cases}$$

e quindi otteniamo il sistema

$$\implies \begin{cases} c_n^0 = A_n + B_n + C_n \\ n^{-2/3} c_n^1 = A_n \omega_1 + B_n \omega_2 + C_n \omega_3 \\ n^{-4/3} c_n^2 = A_n \omega_1^2 + B_n \omega_2^2 + C_n \omega_3^2 \end{cases} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \omega_1 & \omega_2 & \omega_3 \\ \omega_1^2 & \omega_2^2 & \omega_3^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_n \\ B_n \\ C_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_n^0 \\ n^{-2/3} c_n^1 \\ n^{-4/3} c_n^2 \end{pmatrix}$$

e facendo conti si ottengono  $A_n, B_n$  e  $C_n$  e si scopre che [TODO: Controllare i conti con Mathematica]

$$\begin{aligned} A_n e^{n^{2/3}(t/2+i\sqrt{3}t/2)} &\sim e^{n^{2/3}t/2} \xrightarrow{t \rightarrow \infty} \infty \\ B_n e^{n^{2/3}(t/2-i\sqrt{3}t/2)} &\sim e^{n^{2/3}t/2} \xrightarrow{t \rightarrow \infty} \infty \\ C_n e^{-n^{2/3}t} &\sim e^{-n^{2/3}t} \xrightarrow{t \rightarrow -\infty} \infty \end{aligned}$$

dunque in realtà anche se il problema in partenza sembrava ben definito in realtà non ha soluzione per alcun  $t \in \mathbb{R}$ .

Conti esatti con Mathematica:

$$\begin{aligned} A_n &\rightarrow \frac{c_n^0}{3} - \frac{c_n^2}{3n^{4/3}} - \frac{(-1)^{2/3}c_n^2}{3n^{4/3}} - \frac{(-1)^{2/3}c_n^1}{3n^{2/3}}, \\ B_n &\rightarrow \frac{c_n^0}{3} - \frac{c_n^2}{6n^{4/3}} + \frac{ic_n^2}{2\sqrt{3}n^{4/3}} + \frac{c_n^1}{6n^{2/3}} + \frac{ic_n^1}{2\sqrt{3}n^{2/3}}, \\ C_n &\rightarrow \frac{c_n^0}{3} + \frac{c_n^2}{3n^{4/3}} - \frac{c_n^1}{3n^{2/3}} \end{aligned}$$

**Esercizio.** (Equazione del calore senza una condizione al bordo)

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} & x \in [-\pi, \pi] \\ u(\cdot, -\pi) = u(\cdot, \pi) \\ u(0, \cdot) = u_0 = \cos(x/2) \end{cases} \quad (P)$$

i) *Esiste una soluzione?*

Sì in quanto esiste anche con una condizione in più

ii) *È unica?*

Senza periodicità per  $u_x$  non è vero in generale che  $c_n(u_{xx}(t, \cdot)) = -n^2 c_n(u(t, \cdot))$ .

Cerchiamo una soluzione della forma  $u(t, x) = \cos(x/2)\psi(t)$ . Abbiamo che  $u_t(t, x) = \dot{\psi}(t)\cos(x/2)$  e  $u_{xx}(t, x) = -\cos(x/2)\psi(t)/4$ . Dunque  $\dot{\psi}(t) = -\psi(t)/4$  e  $\psi(0) = 1 \implies \psi(t) = e^{-t/4}$ .

**Esercizio.**

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} & x \in [0, \pi] \\ u(t, 0) = 0 & t \in \mathbb{R} \\ u(t, \pi) = t & t \in \mathbb{R} \\ u(0, \cdot) = u_0 \end{cases} \quad (P)$$

L'equazione è lineare, cerchiamo  $u(t, x) = v(t, x) + \psi(t, x)$  in modo che  $v(t, x) = 0$  se  $x = 0, \pi$  e  $\psi(t, 0) = 0$  e  $\psi(t, \pi) = t$  e  $\psi(t, x) = tx/\pi$ .

**Esercizio.**

$$\begin{cases} u_t = u_{xxxx} & x \in [-\pi, \pi] \\ u(\cdot, \pi) = u(\cdot, -\pi) \\ u_x(\cdot, \pi) = u_x(\cdot, -\pi) \\ u_{xx}(\cdot, \pi) = u_{xx}(\cdot, -\pi) \\ u_{xxx}(\cdot, \pi) = u_{xxx}(\cdot, -\pi) \\ u(0, \cdot) = u_0 \end{cases} \quad (P)$$

**Esercizio.**

$$\begin{cases} u_t = u_{xxxx} & x \in [0, \pi] \\ u(\cdot, 0) = u(\cdot, \pi) = 0 \\ u_{xx}(\cdot, 0) = u_{xx}(\cdot, \pi) = 0 \\ u(0, \cdot) = u_0 \end{cases} \quad (P)$$

**Esercizio.** Sia  $V$  il seguente insieme

$$V := \left\{ f \in L^1([1, +\infty)) \mid |f(x)| \leq \frac{1}{x^2} \text{ per q.o. } x \right\}$$

è compatto in  $L^1$ ? e se al posto di  $L^1$  avessimo  $L^2$ ?

[TODO: Espandere]

Intuitivamente  $V \supseteq \{f \mid |f(x)| \leq 1/2 \text{ q.o. in } [1, 2]\}$  che non è compatto in quanto contiene famiglie di funzioni che “oscillano molto” costruite sull’idea della base di Haar.

**Esercizio.** Trovare una funzione in  $L^p([0, +\infty))$  tale però che  $f \notin L^q$  per  $q \neq p$ .

Cercare  $f$  della forma

$$f(x) = \frac{1}{x^\alpha(a + (\ln x)^\beta)}$$

## 9 Esercitazione del 2 dicembre

Ricordiamo la definizione della trasformata di Fourier

$$\mathcal{F}(f) = \widehat{f}(y) = \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-ixy} dx, \quad f \in L^1(\mathbb{R}; \mathbb{C}), \quad f \in L^1(\mathbb{R})$$

dove  $\mathcal{F}: L^1(\mathbb{R}; \mathbb{C}) \rightarrow L^\infty(\mathbb{R}) \cap C_0(\mathbb{R})$ , in quanto  $\|\widehat{f}\|_\infty \leq \|f\|_1$ .

**Proprietà.** Ricordiamo le proprietà viste a lezione.

- i)  $\widehat{\tau_h f}(y) = e^{-iyh} \widehat{f}(y)$  per ogni  $h \in \mathbb{R}$ , dove  $\sigma_h f(x) = f(x - h)$
- ii)  $\widehat{e^{ihx} f}(y) = \tau_h \widehat{f}(y)$
- iii) Legame tra trasformata e derivata.
  - $f \in C^1(\mathbb{R})$ ,  $f, f' \in L^1(\mathbb{R}; \mathbb{C})$ , allora  $\widehat{f}'(y) = iy \widehat{f}(y)$ .
  - $f \in L^1(\mathbb{R}; \mathbb{C})$  e  $xf(x) \in L^1(\mathbb{R}; \mathbb{C})$ ,  $(1 + |x|)f(x) \in L^1(\mathbb{R}; \mathbb{C})$ , allora  $\widehat{f} \in C^1(\mathbb{R})$  e  $(\widehat{f})' = -ix \widehat{xf(x)}$ .

**Nota.** Le ipotesi  $f \in L^1(\mathbb{R}; \mathbb{C})$  e  $xf(x) \in L^1(\mathbb{R}; \mathbb{C})$  sono equivalenti a  $(1 + |x|)f(x) \in L^1(\mathbb{R}; \mathbb{C})$ .

- iv) Vale  $\widehat{f * g} = \widehat{f} \cdot \widehat{g}$ .

Riportiamo un esercizio già posto con una soluzione alternativa.

**Esercizio.** Dire se esiste  $v \in L^1$  non banale tale che

- $v * v = v$
- $g * v = g$  per ogni  $g \in L^1$ .

**Soluzione.** La risposta è no per entrambi i punti. Infatti,

- Se per assurdo valesse tale identità, passando alle trasformate si avrebbe

$$\widehat{v * v} = (\widehat{v})^2 \implies \widehat{v}(\widehat{v} - 1) = 0.$$

Ovvero,  $\widehat{v} = \{0, 1\}$ . Osserviamo subito che non è possibile che  $\widehat{v}$  assuma entrambi i valori in quanto funzione continua; d’altra parte non è possibile che  $\widehat{v} = 1$ , in quanto è anche infinitesima, dunque  $\widehat{v} = 0 \implies v = 0$ .

- Analogamente al punto precedente si avrebbe  $\hat{v} = 1$  ma ciò non è possibile.

**Esercizio 1.** Calcolare la trasformata di Fourier della funzione  $f(x) = e^{-|x|}$ .

**Soluzione.** Abbiamo

$$\begin{aligned}\hat{f}(y) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-|x|} e^{-ixy} dx = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-|x|} \cos(xy) dx - i \int_{-\infty}^{\infty} \overbrace{e^{-|x|} \sin(xy)}^{\text{integrale definito di funzione dispari} = 0} dx = 2 \int_0^{\infty} e^{-|x|} \cos(xy) dx \\ &= 2 \int_0^{\infty} e^{-x} \operatorname{Re} e^{ixy} dx = 2 \int_0^{\infty} \operatorname{Re} (e^{-x} \cdot e^{ixy}) dx = 2 \operatorname{Re} \left[ \int_0^{\infty} e^{-x} e^{ixy} \right] dx = 2 \operatorname{Re} \left[ \frac{e^{x(iy-1)}}{(iy-1)} \right]_0^{\infty} \\ &= 2 \operatorname{Re} \left[ -\frac{1}{iy-1} + \underbrace{\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{e^{x(iy-1)}}{iy-1}}_{=0} \right] = 2 \operatorname{Re} \left[ -\frac{1}{iy-1} \right] = 2 \operatorname{Re} \left[ -\frac{1}{iy-1} \cdot \frac{iy+1}{iy+1} \right] \\ &= 2 \operatorname{Re} \left[ \frac{iy+1}{1+y^2} \right].\end{aligned}$$

In conclusione,  $\hat{f}(y) = \frac{2}{1+y^2}$ .

**Esercizio 2.** Calcolare la trasformata di Fourier della funzione  $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ .

**Soluzione.** Calcoliamo  $\hat{f}(y) = \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{-ixy}}{1+x^2} dx$ . Dal fatto che  $f \in L^1$  e usando il teorema di convergenza dominata, possiamo scrivere  $\hat{f}(y)$  come

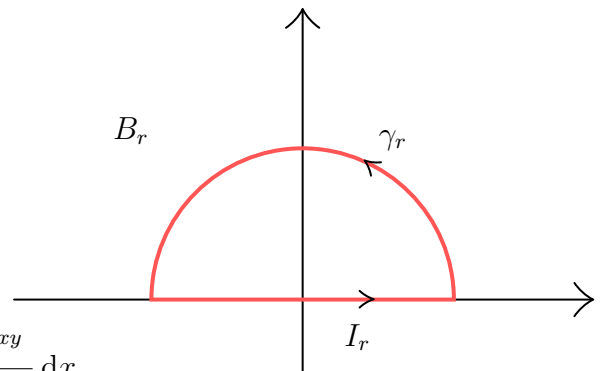
$$\hat{f}(y) = \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{-R}^R \frac{e^{-ixy}}{1+x^2} dx$$

*Idea.* Calcolare questo integrale con il metodo dei residui, ponendo  $\frac{e^{-ixy}}{1+x^2} = \frac{e^{-izy}}{1+z^2} \Big|_{z \text{ reale}}$

Per il teorema dei residui:

$$\int_{B_r} g(z) dz = 2\pi i \sum_{\substack{z_i \text{ singolarit\`a} \\ \text{di } g \text{ in } B_r}} \operatorname{res}(g, z_i)$$

$$\text{Inoltre } \int_{B_r} g(z) dz = \int_{I_r} g(z) dx + \underbrace{\int_{\gamma_r} g(x) = \int_{-r}^r \frac{e^{-ixy}}{1+x^2} dx}_{\xrightarrow{r \rightarrow \infty} 0}$$



- Verifichiamo che  $\int_{\gamma_r} g(x) \xrightarrow{r \rightarrow \infty} 0$  dove  $[0, \pi] \ni \theta \mapsto r e^{i\theta}$ .

Poniamo  $z = x + it$ , dunque  $yz = xy + yit$ , da cui  $g(z) = g(x + it) = (e^{-ixy} e^{ty}) / (1 + (x + it)^2)$ . Dunque,

$$\int_0^\pi g(e^{i\theta} r) r d\theta \implies \int_0^\pi \frac{e^{-ri \cos \theta} e^{r \sin \theta y}}{(1 + r^2 e^{i2\theta})} r d\theta \xrightarrow{r \rightarrow \pm\infty} 0 \quad \text{se } y < 0.$$

Per il caso  $y > 0$  si ripercorre lo stesso procedimento ma si utilizza la curva  $[\pi, 2\pi] \ni \theta \xrightarrow{\gamma_r} re^{i\theta}$ .

- Calcoliamo i residui: l'unico residuo di  $g$  è nel punto  $i$  che si tratta di una singolarità semplice (nel caso  $y > 0$  la singolarità è in  $-i$ ).

$$\lim_{r \rightarrow \pm\infty} 2\pi i \operatorname{res}(g, i) = \pi e^y$$

Considerando anche il caso  $y > 0$  la trasformata di Fourier diviene  $\pi e^{-|y|}$ .

[TO DO]. Riportare il teorema dei residui con i metodi di base per calcolare i residui?

## 10 Esercitazione del 13 Dicembre 2021

### 10.1 Operatori autoaggiunti

[TODO: Pezzo iniziale mancante]

**Esercizi.**

- 1) Esempio classico di  $H = L^2([-\pi, \pi]; \mathbb{C})$  e  $D = \{u \in C^1([-\pi, \pi]; \mathbb{C}) \mid u(-\pi) = u(\pi)\}$  e  $Tu = iu$  allora  $T$  è un operatore autoaggiunto ed ha autovalori  $\lambda = n \in \mathbb{Z}$ .
- 2)  $H = L^2([0, \pi]; \mathbb{R})$  e  $D = \{u \in C^2([0, \pi]) \mid u(0) = 0 \text{ e } u(\pi) = 0\}$  sono dette condizioni di Dirichlet con  $Tu = -\ddot{u}$ .

Ora usiamo sempre  $Tu = -\ddot{u}$  ma su domini differenti.

- 3)  $D_3 = \{u \in C^2([0, \pi]) \mid \dot{u}(0) = 0 \text{ e } \dot{u}(\pi) = 0\}$  sono dette condizioni di Neumann.
- 4)  $D_4 = \{u \in C^2([0, \pi]) \mid u(0) = 0 \text{ e } \dot{u}(\pi) = 0\}$  sono dette condizioni di Robin.

Dire per 2), 3) e 4) rispondere alle seguenti

- L'operatore  $T$  è autoaggiunto e controllare se il relativo  $D$  è denso in  $L^2$
- Controllare se esistono autovalori ed eventualmente dire chi sono gli autovettori.
- Stabilire se esiste una base Hilbertiana di autovettori.

**Risoluzione.**

- 2)  $D_2$  è denso. Vediamo l'operatore è autoaggiunto

$$\langle Tu, v \rangle = \int_0^\pi (-\ddot{u}(x))v(x) dx = \underbrace{-\dot{u}(x)v(x)}_{v(0)=v(\pi)=0} \Big|_0^\pi - \int_0^\pi (-\dot{u}(x))\dot{v}(x) dx = \int_0^\pi \dot{u}(x)\dot{v}(x) dx$$

$$\langle u, Tv \rangle = \int_0^\pi u(x)(-\ddot{v}(x)) dx = \underbrace{u(x)(-\dot{v}(x))}_{u(0)=u(\pi)=0} \Big|_0^\pi - \int_0^\pi \dot{u}(x)(-\dot{v}(x)) dx = \int_0^\pi \dot{u}(x)\dot{v}(x) dx$$

dunque  $\langle Tu, v \rangle = \langle \dot{u}, \dot{v} \rangle = \langle u, Tv \rangle$ .

Inoltre  $T$  è anche definito positivo infatti  $\langle Tu, u \rangle = \langle \dot{u}, \dot{u} \rangle = \|\dot{u}\|_{L^2}^2 \geq 0$ .

Cerchiamo gli autovalori quindi poniamo  $-\ddot{u} = Tu = \lambda u$  con  $\lambda \geq 0$  e  $u \in D_2$ . Segue  $p(t) = t^2 + \lambda \implies t = \pm i\sqrt{\lambda}$  se  $\lambda \neq 0$ .

Se  $\lambda = 0$  invece otteniamo  $\ddot{u} = 0 \implies u(x) = ax + b$  ma per le condizioni al bordo segue  $a, b = 0$  e dunque  $u = 0 \implies \lambda = 0$  non è autovalore.

Invece se  $\lambda > 0$  abbiamo  $u(x) = A \cos(\sqrt{\lambda}x) + B \sin(\sqrt{\lambda}x)$  e segue  $A = 0$  e  $\lambda = n^2$  per  $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ .

- 3)  $D_2$  è denso e similmente si vede che anche in questo caso  $T$  è autoaggiunto. Anche in questo caso  $T$  è definito positivo perché vale sempre  $\langle Tu, v \rangle = \langle \dot{u}, \dot{v} \rangle$ .

Per cercare gli autovalori risolviamo il seguente sistema

$$\begin{cases} -\ddot{u} = \lambda u \\ \dot{u}(0) = 0 \\ \dot{u}(\pi) = 0 \end{cases}$$

Se  $\lambda = 0$  allora  $u(x) = \text{cost.}$  è un autovettore per l'autovalore 0.

Se invece  $\lambda \neq 0$  allora  $u(x) = A \cos(\sqrt{\lambda}x) + B \sin(\sqrt{\lambda}x) \implies \cos(nx)$  è un autovettore e  $\lambda = n^2$  per  $n = 1, 2, \dots$ .

- 4) In questo caso vediamo che vale sempre  $\langle Tu, v \rangle = \langle \dot{u}, \dot{v} \rangle$  ma per motivi diversi infatti

$$\begin{aligned} \langle Tu, v \rangle &= \int_0^\pi (-\ddot{u}(x))v(x) dx = \underbrace{-\dot{u}(x)v(x) \Big|_0^\pi}_{\dot{u}(\pi)=0, v(0)=0} - \int_0^\pi (-\dot{u}(x))\dot{v}(x) dx = \int_0^\pi \dot{u}(x)\dot{v}(x) dx \\ \langle u, Tv \rangle &= \int_0^\pi u(x)(-\ddot{v}(x)) dx = \underbrace{u(x)(-\dot{v}(x)) \Big|_0^\pi}_{\dot{v}(\pi)=0, u(0)=0} - \int_0^\pi \dot{u}(x)(-\dot{v}(x)) dx = \int_0^\pi \dot{u}(x)\dot{v}(x) dx \end{aligned}$$

Considerando il sistema  $-\ddot{u} = \lambda u$  con le condizioni al bordo di Robin caso  $\lambda = 0$  non è un autovalore mentre se  $\lambda \neq 0$  abbiamo che  $\dot{u}(x) = \sqrt{\lambda}B \cos(\sqrt{\lambda}x) = 0$  per  $x = \pi$  dunque  $\sqrt{\lambda} = n + 1/2$  per  $n = 0, 1, 2, \dots$  e gli autovettori sono

$$u_n(x) = \sin\left(\left(n + \frac{1}{2}\right)x\right)$$

**Osservazione.**  $T: D \rightarrow L^2$  operatore lineare e continuo  $\iff \exists M > 0$  tale che  $\|Tu\|_2 \leq M \|u\|$  per ogni  $u \in D$ .

Vediamo ad esempio che  $D_1$  non è continuo infatti gli autovalori sono  $\lambda_n = n^2 \implies n^2 \|u_n\|_2 \leq M \|u_n\|_2 \implies M \geq n^2$  per ogni  $n$ . Dunque  $M$  è illimitato e l'operatore non può essere continuo.

**Esempio.** Se ad esempio abbiamo  $Tu = -\ddot{u}$  con  $\widetilde{D} = \{u \in C^2 \mid u(0) = u(\pi) = 1\}$  allora  $T$  non è autoaggiunto e basta trovare  $u, v$  tali che

$$\langle Tu, v \rangle \neq \langle u, Tv \rangle$$

**Esercizio.**



i) Sia  $T_1: \ell^2 \rightarrow \ell^2$  dato da

$$T_1((x_n)_{n>0}) = (0, x_1, x_2, \dots)$$

ii) Sia  $T_2: \ell^2 \rightarrow \ell^2$  dato da

$$T_2((x_n)_{n>0}) = (x_2, x_3, \dots)$$

Dire se sono autoaggiunti ed eventualmente chi sono gli autovalori.

*Esercizi più da compito sono invece cose del tipo...*

**Esercizio.** Sia  $H = L^2([0, \pi] \times [0, \pi]; \mathbb{R})$  e  $Tu = -\Delta u = -u_{xx} - u_{yy}$

- $D_1 = \{u \in C^2([0, \pi] \times [0, \pi]; \mathbb{R}) \mid u|_{\partial Q} = 0\}$
- $D_2 = \{u \in C^2([0, \pi] \times [0, \pi]; \mathbb{R}) \mid \nabla u|_{\partial Q} = 0\}$
- $D_3 = \{u \in C^2([0, \pi] \times [0, \pi]; \mathbb{R}) \mid u = 0 \text{ su due lati paralleli e } \nabla u = 0 \text{ sugli altri due}\}$

e dire se l'operatore è autoaggiunto ed eventualmente trovare gli autovalori.

## 10.2 Calcolo Trasformate di Fourier

Abbiamo visto che le trasformate di  $f(x) = e^{-|x|}$  e  $g(x) = 1/(1+x^2)$  sono rispettivamente

$$\hat{f}(y) = \frac{2}{1+y^2} \quad \hat{g}(y) = \pi e^{-|y|}$$

Vorremo provare a trovare ora le trasformate funzioni come  $x^2 e^{-|x|}$  o  $x/(1+x^2)$  usando le proprietà delle trasformate con le derivate. Ricordiamo che

$$\begin{aligned} f, f' \in L^1 &\implies \widehat{f'}(y) = iy\widehat{f}(y) \\ f, xf \in L^1 &\implies \widehat{f'}(y) = -ix\widehat{f}(y) \end{aligned}$$

dunque intuitivamente per  $x^2 e^{-|x|}$  possiamo fare

$$x^2 e^{-|x|} = i(-i)x(xe^{-|x|}) \implies \mathcal{F}(i(-i)x(xe^{-|x|})) = i(\mathcal{F}(xe^{-|x|}))'(y)$$

ora dobbiamo calcolare  $\mathcal{F}(xe^{-|x|})(y)$

$$\mathcal{F}(xe^{-|x|})(y) = i\mathcal{F}(-ixe^{-|x|}) = i\mathcal{F}(e^{-|x|})'(y) = i\left(\frac{2}{1+y^2}\right)' = \frac{-4iy}{(1+y^2)^2}$$

dunque in conclusione abbiamo

$$\mathcal{F}(x^2 e^{-|x|})(y) = i\left(\frac{-4iy}{(1+y^2)^2}\right)' = 4\left(\frac{y}{(1+y^2)^2}\right)'$$

Invece per quanto riguarda

$$g(x) = \frac{x}{1+x^2} \notin L^1$$

però è in  $L^2$  ma per poterne calcolare la trasformata di Fourier dovremmo passare per delle troncate di  $g(x)$ . Possiamo però vedere chi dovrebbe essere il candidato formale usando le tecniche di prima

$$\frac{x}{1+x^2} = \frac{i(-ix)}{1+x^2} \rightsquigarrow i\mathcal{F}\left((-ix)\frac{1}{1+x^2}\right)(y) = i\mathcal{F}\left(\frac{1}{1+x^2}\right)'(y) = i\pi(e^{-|y|})'(y)$$

però notiamo che la derivata di  $e^{-|y|}$  non è ben definita in 0.

**Esercizio.** Calcolare la trasformata di Fourier di

$$f(x) = \mathbb{1}_{[-r,r]}(x)$$

Iniziamo a svolgere il conto

$$\widehat{f}(y) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathbb{1}_{[-r,r]}(x) e^{-ixy} dx = \int_{-r}^r e^{-ixy} dx = \begin{cases} 2r & xy = 0 \\ \int_{-r}^r e^{-ixy} dx & xy \neq 0 \end{cases}$$

nel caso  $xy \neq 0$  continuiamo a svolgere il conto

$$\int_{-ry}^{ry} \frac{e^{-it}}{y} dt = \frac{1}{y} \int_{-ry}^{ry} [\cos(t) - \underbrace{i \sin(t)}_{\text{dispari}}] dt = \frac{2}{y} \sin(ry)$$

dunque in conclusione abbiamo

$$\mathcal{F}(\mathbb{1}_{[-r,r]}(x)) = \begin{cases} 2r & y = 0 \\ \frac{2}{y} \sin(ry) & y \neq 0 \end{cases}$$

**Esercizio.** Un esercizio simile è calcolare  $\mathcal{F}(\mathbb{1}_{[0,r]}(x))$ , ovvero il caso non centrato e poi provare a calcolare (come integrale improprio di Analisi 1) l'integrale

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt = \lim_{r \rightarrow \infty} \int_0^r \frac{\sin(t)}{t} dt$$

### 10.2.1 Trasformata della Gaussiana

Calcoliamo ora la trasformata della funzione gaussiana  $e^{-x^2/2}$ .

- **Metodo I:** Troviamo un'equazione differenziale (lineare) risolta dalla gaussiana, sia  $f(x) = e^{-x^2/2}$  allora vale

$$f'(x) = -xe^{-x^2/2} = -xf(x)$$

e per il decadimento della gaussiana abbiamo che  $f, f' \in L^1$  dunque

$$iy\widehat{f}(y) = \widehat{f'(x)}(y) = -i\mathcal{F}(-xf(x))(y) = i(\widehat{f})'(y)$$

dunque  $\widehat{f} = h(y)$  con  $h$  tale che  $h'(y) = -yh(y) \implies h(y) = ke^{-y^2/2}$ , rimane da trovare  $k$ . Calcoliamo direttamente  $h(0)$

$$\begin{aligned} h(0) &= \widehat{e^{-x^2/2}}(0) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/2} e^{-ix \cdot 0} dx = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/2} dx = \sqrt{2\pi} \\ \implies \widehat{e^{-x^2/2}} &= \sqrt{2\pi} e^{-y^2/2} \end{aligned}$$

- **Metodo II:** Studiamo la funzione di variabile complessa  $g(z) = e^{-z^2/2}$  e integriamola lungo un percorso che passi per  $[-r, r] \times \{0\} \subset \mathbb{R}^2 \approx \mathbb{C}$ .

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(\widehat{e^{-x^2/2}})(y) &= \int_{\mathbb{R}} e^{-x^2/2} \cdot e^{-ixy} dx = \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{1}{2}(x^2+2ixy)} dx \\ &= \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{1}{2}(x^2+2ixy+y^2-y^2)} dx = \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{1}{2}(x^2+2ixy+y^2)} \cdot e^{-y^2/2} dx \\ &= e^{-y^2/2} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{1}{2}(x^2+2ixy+y^2)} dx = e^{-y^2/2} \lim_{r \rightarrow \infty} \int_{-r}^r \underbrace{e^{-\frac{1}{2}(x+iy)^2}}_{g(x+iy)} dx \end{aligned}$$

Consideriamo ora il rettangolo  $D_r := \{z \mid \operatorname{Im} z \in [0, iy] \text{ e } \operatorname{Re} z \in [-r, r]\}$  dunque poiché  $g(z)$  non ha poli su  $D_r$  abbiamo

$$\int_{\partial D_r} g = \sum \operatorname{Res.} \text{ su } D_r = 0$$

$$0 = \int_{-r}^r g(x+it) dx - \int_{-r}^r g(x+iy) dx + \int_0^{iy} g(r+iy) dt - \int_0^{iy} \underbrace{g(-r+iy)}_{\sim e^{-(r+it)^2} \xrightarrow{r \rightarrow \infty} 0} dt$$

infatti più precisamente i termini verticali vanno a zero

$$\int_0^y e^{-(r+it)^2/2} dt = e^{-r^2/2} \int_0^y e^{-itr-t^2/2} dt = ye^{-r^2/2} \xrightarrow{r \rightarrow +\infty} 0$$

In conclusione abbiamo

$$\begin{aligned} \widehat{e^{-x^2/2}}(y) &= \lim_{r \rightarrow +\infty} \int_{-r}^r e^{-y^2/2} e^{-(x+iy)^2/2} dx = e^{-y^2/2} \left[ \lim_{r \rightarrow +\infty} \int_{-r}^r e^{-x^2/2} dx + o(1) \right] = \\ &= e^{-y^2/2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/2} dx = \sqrt{2\pi} e^{-y^2/2} \end{aligned}$$

□