

# Analisi 3

Appunti di Analisi 3 del corso di Giovanni Alberti e Maria Stella Gelli

Arianna Carelli e Antonio De Lucreziis

I Semestre 2021/2021

# Indice

<b>1</b>	<b>Teoria della misura</b>	<b>4</b>
1.1	Misure astratte . . . . .	4
1.2	Esempi di misure . . . . .	5
1.3	Funzioni misurabili . . . . .	6
1.3.1	Funzioni semplici . . . . .	6
1.4	Integrale . . . . .	6
1.5	Teoremi di convergenza . . . . .	8
1.5.1	Fubini-Tonelli . . . . .	9
<b>2</b>	<b>Spazi <math>L^p</math> e convoluzione</b>	<b>11</b>
2.1	Disuguaglianze . . . . .	11
2.1.1	Disuguaglianza di Jensen . . . . .	11
2.1.2	Disuguaglianza di Young . . . . .	13
2.1.3	Disuguaglianza di Hölder . . . . .	13
2.1.4	Disuguaglianza di Minkowski . . . . .	14
2.2	Esercitazione del 4 ottobre . . . . .	15
2.2.1	Esercizi di teoria della misura . . . . .	15
2.2.2	Funzioni misurabili rispetto alla misura di Lebesgue . . . . .	16
2.2.3	Formula di cambio di variabile applicata a funzioni radiali . . . . .	18
2.3	Costruzione spazi $L^p$ . . . . .	20
2.3.1	Prodotto scalare su $L^2$ . . . . .	21
2.4	Completezza degli spazi $L^p$ . . . . .	22
2.4.1	Alcune proprietà a esercitazione degli spazi $L^p$ . . . . .	25
2.4.2	Separabilità degli spazi $L^p$ . . . . .	25
2.5	Nozioni di convergenza per successioni di funzioni . . . . .	26
2.6	Controesempi sulle convergenze . . . . .	29
2.7	Approssimazioni di funzioni in $L^p$ . . . . .	29
2.8	Esercitazione del 13 ottobre . . . . .	32
2.8.1	Esercizi su spazi $L^p(X)$ al variare di $p$ e dello spazio $X$ . . . . .	32

2.8.2	Spazi $\ell^p$	35
2.9	Complementi su approssimazioni di funzioni in $L^p$	36
2.10	Appendice	38
2.11	Convoluzione	39
2.12	Esercitazione del 21 ottobre	43
2.12.1	Convoluzione	46
2.13	Rimanenze dalla lezione precedente	47
2.14	Derivata e Convoluzione	48
2.15	Approssimazione per convoluzione	49
<b>3</b>	<b>Spazi di Hilbert</b>	<b>52</b>
3.1	Spazi di Hilbert complessi	57
3.2	Esempi di basi Hilbertiane	58
3.2.1	Polinomi	58
3.2.2	Base di Haar	58
3.3	Esercitazione del 3 Novembre 2021	59
3.3.1	Basi Hilbertiane e proiezioni	59
3.3.2	Approssimazioni per convoluzione	61
<b>4</b>	<b>Serie di Fourier</b>	<b>62</b>
4.1	Regolarità di $f$ e dei coefficienti	65
4.2	Convergenza puntuale della serie di Fourier	67
4.3	Esercitazione del 11 novembre	70
<b>5</b>	<b>Applicazioni della serie di Fourier</b>	<b>74</b>
5.1	Equazione del calore	74
5.2	Risoluzione dell'equazione del calore (su $\mathbb{S}^1$ )	75
5.2.1	Risoluzione formale	75
5.3	Equazione delle onde	78
5.4	Risoluzione dell'equazione delle onde	79
5.4.1	Risoluzione formale	79
5.5	Esercitazione del 18 Novembre 2021	80
5.5.1	Esercizi preliminari	80
5.6	Risoluzione dell'equazione delle onde	83
5.7	Altre applicazioni della serie di Fourier	85
5.7.1	Disuguaglianza isoperimetrica	85
5.8	Appendice	85
5.8.1	Operatori autoaggiunti	89

5.9	Esercitazione del 25 Novembre 2021 . . . . .	90
<b>6</b>	<b>Trasformata di Fourier</b>	<b>93</b>
6.1	Proprietà della trasformata di Fourier . . . . .	94
6.2	Trasformata di Fourier su $L^2$ . . . . .	98
6.2.1	Proprietà della trasformata di Fourier in $L^2$ . . . . .	100
6.3	Conclusione sulla TdF . . . . .	102
6.4	Applicazioni TdF . . . . .	103
6.5	Esercitazione del 2 dicembre . . . . .	104
6.6	Esercitazione del 13 Dicembre 2021 . . . . .	106
6.6.1	Operatori autoaggiunti . . . . .	106
6.6.2	Calcolo Trasformate di Fourier . . . . .	108
<b>7</b>	<b>Integrazione di superfici</b>	<b>111</b>
7.1	Superfici . . . . .	111
7.2	Misure su superfici . . . . .	112
7.3	Superfici $k$ -dimensionali in $\mathbb{R}^d$ di classe $C^1$ . . . . .	113
7.4	$k$ -covettori . . . . .	116
7.5	Integrazione di $k$ -forme su superfici . . . . .	116

# Capitolo 1

## Teoria della misura

### 1.1 Misure astratte

**Definizione.** Uno spazio misurabile è una terna  $(X, \mathcal{A}, \mu)$  tale che

- $X$  è un insieme qualunque.
- $\mathcal{A}$  è una  $\sigma$ -algebra di sottoinsiemi di  $X$  (chiamata  $\sigma$ -algebra dei misurabili) ovvero una famiglia di sottoinsiemi di  $X$  che rispetta le seguenti proprietà:
  - $\emptyset, X \in \mathcal{A}$ .
  - $\mathcal{A}$  è chiusa per complementare, unione e intersezione numerabile.
- $\mu$  è una misura su  $X$ , ossia una funzione  $\mu: \mathcal{A} \rightarrow [0, +\infty]$   $\sigma$ -addittiva, cioè tale che data una famiglia numerabile  $\{E_k\} \subset \mathcal{A}$  disgiunta e posto  $E := \bigcup E_n$ , allora

$$\mu(E) = \sum_n \mu(E_n).$$

**Notazione.** Data una successione crescente di insiemi  $E_1 \subset E_2 \subset \dots \subset E_n \subset \dots$  con  $\bigcup E_n = E$ , scriviamo  $E_n \uparrow E$ .

**Proprietà.**

- $\mu(\emptyset) = 0$
- *Monotonia:* Dati  $E, E' \in \mathcal{A}$  e  $E \subset E'$ , allora  $\mu(E) \leq \mu(E')$ .
- Data  $E_n \uparrow E$ , vale  $\mu(E) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(E_n) = \sup_n \mu(E_n)$ .
- Se  $E_n \downarrow E$  e  $\mu(E_{\bar{n}}) < +\infty$  per qualche  $\bar{n}$ , allora  $\mu(E) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(E_n) = \inf_n \mu(E_n)$ .
- *Subadditività:* Se  $E \subset \bigcup E_n$ , allora  $\mu(E) \leq \sum_n \mu(E_n)$ .

**Osservazione.** Dato  $X' \in \mathcal{A}$  si possono restringere  $\mathcal{A}$  e  $\mu$  a  $X'$  nel modo ovvio.

**Definizioni.**

- $\mu$  si dice **completa** se  $F \subset E, E \in \mathcal{A}$  e  $\mu(E) = 0$ , allora  $F \in \mathcal{A}$  (e di conseguenza  $\mu(F) = 0$ ).

- $\mu$  si dice **finita** se  $\mu(X) < +\infty$ .
- $\mu$  si dice  **$\sigma$ -finita** se esiste una successione  $\{E_n\}$  con  $E_n \subset E_{n+1}$  tale che  $\bigcup E_n = X$  con  $\mu(E_n) < +\infty$  per ogni  $n$ .

**Notazione.** Sia  $P(X)$  un predicato che dipende da  $x \in X$  allora si dice che  $P(X)$  **vale  $\mu$ -quasi ogni**  $x \in X$  se l'insieme  $\{x \mid P(x) \text{ è falso}\}$  è (contenuto in) un insieme di misura  $\mu$  nulla.

D'ora in poi consideriamo solo misure complete.

## 1.2 Esempi di misure

- **Misura che conta i punti.**

$$X \text{ insieme} \quad \mathcal{A} := \mathcal{P}(X) \quad \mu(E) := \#E \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$$

- **Delta di Dirac in  $x_0$ .**

$$X \text{ insieme, } x_0 \in X \text{ fissato} \quad \mathcal{A} := \mathcal{P}(X) \quad \mu(E) := \delta_{x_0}(E) = \mathbb{1}_E(x_0)$$

- **Misura di Lebesgue.**

$$X = \mathbb{R}^n \quad \mathcal{M}^n \text{ } \sigma\text{-algebra dei misurabili secondo Lebesgue} \quad \mathcal{L}^n \text{ misura di Lebesgue}$$

Dato  $R$  parallelepipedo in  $\mathbb{R}^n$ , cioè  $R = \prod_{k=1}^n I_k$  con  $I_k$  intervalli in  $\mathbb{R}$ . Si pone

$$\text{vol}_n(R) := \prod_{k=1}^n \text{lung}(I_k)$$

per ogni  $E \subset \mathbb{R}^n$  (assumendo  $\text{lung}([a, b]) = b - a$ ). Infine poniamo

$$\mathcal{L}^n(E) := \inf \left\{ \sum_i \text{vol}_n(R_i) \mid \{R_i\} \text{ tale che } E \subset \bigcup_i R_i \right\}.$$

**Osservazioni.**

- $\mathcal{L}^n(R) = \text{vol}_n(R)$ .
- $\mathcal{L}^n$  non è  $\sigma$ -addittiva su  $\mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ .

Il secondo punto giustifica l'introduzione della  $\sigma$ -algebra dei **misurabili secondo Lebesgue** che denotiamo con  $\mathcal{M}^n$ .

Dato  $E \subset \mathbb{R}^n$  si dice che  $E$  è misurabile (secondo Lebesgue) se

$$\forall \varepsilon > 0 \exists A \text{ aperto e } C \text{ chiuso, tali che } C \subset E \subset A \text{ e } \mathcal{L}^n(A \setminus C) \leq \varepsilon.$$

**Osservazioni.**

- Per ogni  $E$  misurabile vale

$$\mathcal{L}^n(E) = \inf \{ \mathcal{L}^n(A) : A \text{ aperto, } A \supset E \} = \sup \{ \mathcal{L}^n(K) : K \text{ compatto, } K \subset E \}.$$

- Notiamo che se  $F \subset E$  con  $E \subset \mathcal{M}^n$  e  $\mathcal{L}^n(E) = 0$ , allora  $F \in \mathcal{M}^n$ . Ovvero la misura di Lebesgue è completa!

**Notazione.**  $|E| := \mathcal{L}^n(E)$

## 1.3 Funzioni misurabili

**Definizione.** Dato  $(X, \mathcal{A}, \mu)$  e  $f: X \rightarrow \mathbb{R}$  (o al posto di  $\mathbb{R}$  in  $Y$  spazio topologico), diciamo che  $f$  è **misurabile** (più precisamente  $\mathcal{A}$ -misurabile), se

$$\forall A \text{ aperto } f^{-1}(A) \in \mathcal{A}$$

**Osservazioni.**

- Dato  $E \subset X$ , vale  $E \in \mathcal{A}$  se solo se  $\mathbb{1}_E$  è misurabile.
- La classe delle funzioni misurabili è chiusa rispetto a molte operazioni
  - *Somma, prodotto* (se hanno senso nello spazio immagine della funzione).
  - *Composizione con funzione continua*: Se  $f: X \rightarrow Y$  continua e  $g: Y \rightarrow Y'$  continua, allora  $g \circ f$  è misurabile.
  - *Convergenza puntuale*: data una successione di  $f_n$  misurabili e  $f_n \rightarrow f$  puntualmente, allora  $f$  è misurabile.
  - $\liminf$  e  $\limsup$  (almeno nel caso  $Y = \mathbb{R}$ ).

### 1.3.1 Funzioni semplici

**Definizione.** Definiamo la classe delle **funzione semplici** come

$$\mathcal{S} := \left\{ f: X \rightarrow \mathbb{R} \mid f = \sum_i \alpha_i \mathbb{1}_{E_i} \text{ con } E_i \text{ misurabili e } \{\alpha_i\} \text{ finito} \right\}$$

**Osservazione.** La rappresentazione di una funzione semplice come combinazione lineare di indicatrici di insiemi *non è unica*, però se necessario possiamo prendere gli  $E_i$  disgiunti.

## 1.4 Integrale

**Definizione.** Diamo la definizione di  $\int_X f \, d\mu$  per passi

- i) Se  $f \in \mathcal{S}$  e  $f \geq 0$  cioè  $f = \sum_i \alpha_i \mathbb{1}_{E_i}$  con  $\alpha_i \geq 0$  allora poniamo

$$\int_X f \, d\mu := \sum_i \alpha_i \mu(E_i),$$

convenendo che  $0 \cdot +\infty = 0$  in quanto la misura di un insieme non è necessariamente finita.

- ii) Se  $f: X \rightarrow [0, +\infty]$  misurabile si pone

$$\int_X f \, d\mu := \sup_{\substack{g \in \mathcal{S} \\ 0 \leq g \leq f}} \int_X g \, d\mu.$$

iii)  $f: X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  misurabile si dice **integrabile** se

$$\int_X f^+ d\mu < +\infty \quad \text{oppure} \quad \int_X f^- d\mu < +\infty.$$

e per tali  $f$  si pone

$$\int_X f d\mu := \int_X f^+ d\mu - \int_X f^- d\mu.$$

iv)  $f: X \rightarrow \mathbb{R}^n$  si dice **sommabile** (o di **classe**  $\mathcal{L}^1$ ) se  $\int_X |f| d\mu < +\infty$ . In tal caso, se  $\int_X f_i^\pm d\mu < +\infty$  per ogni  $f_i$  componente di  $f$ , allora  $\int_X f d\mu$  esiste ed è finito.

Per tali  $f$  si pone

$$\int_X f d\mu := \left( \int_X f_1 d\mu, \dots, \int_X f_n d\mu \right).$$

**Notazione.** Scriveremo spesso  $\int_E f(x) dx$  invece di  $\int_E f d\mathcal{L}^n$ .

**Osservazioni.**

- L'integrale è lineare (sulle funzioni sommabili).
- I passaggi i) e ii) danno lo stesso risultato per  $f$  semplice  $\geq 0$ .
- La definizione in ii) ha senso per ogni  $f: X \rightarrow [0, +\infty]$  anche non misurabile. Ma in generale vale solo che

$$\int_X f_1 + f_2 d\mu \geq \int_X f_1 d\mu + \int_X f_2 d\mu.$$

- Dato  $E \in \mathcal{A}$ ,  $f$  misurabile su  $E$ , notiamo che vale l'uguaglianza

$$\int_E f d\mu := \int_X f \cdot \mathbb{1}_E d\mu.$$

- Si può definire l'integrale anche per  $f: X \rightarrow Y$  con  $Y$  spazio vettoriale normato finito dimensionale<sup>1</sup> ed  $f$  sommabile.
- Se  $f_1 = f_2$   $\mu$ -q.o. allora  $\int_X f_1 d\mu = \int_X f_2 d\mu$ .
- Si definisce  $\int_X f d\mu$  anche se  $f$  è misurabile e definita su  $X \setminus N$  con  $\mu(N) = 0$ .
- Se  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  è integrabile secondo Riemann allora è misurabile secondo Lebesgue e le due nozioni di integrale coincidono.

**Nota.** Lo stesso vale per integrali impropri di funzioni positive. Ma nel caso più generale non vale: se consideriamo la funzione

$$f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R} \quad f(x) := \frac{\sin x}{x}$$

allora l'integrale di  $f$  definito su  $(0, +\infty)$  esiste come integrale improprio ma non secondo Lebesgue, infatti

$$\int_0^{+\infty} f^+ dx = \int_0^{+\infty} f^- dx = +\infty$$

---

<sup>1</sup>È necessario avere uno spazio vettoriale, perché serve la linearità e la moltiplicazione per scalare



- $\int_X f \, d\delta_{x_0} = f(x_0)$
- Se  $X = \mathbb{N}$  e  $\mu$  è la misura che conta i punti l'integrale è

$$\int_X f \, d\mu = \sum_{n=0}^{\infty} f(n)$$

per le  $f$  positive o tali che  $\sum f^+(n) < +\infty$  oppure  $\sum f^-(n) < +\infty$ .

**Nota.** Come prima nel caso di funzioni non sempre positive ci sono casi in cui la serie solita non è definita come integrale di una misura, ad esempio

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$$

esiste come serie ma non come integrale.

- Dato  $X$  qualunque,  $\mu$  misura che conta i punti e  $f: X \rightarrow [0, +\infty]$  possiamo definire la somma di tutti i valori di  $f$

$$\sum_{x \in X} f(x) := \int_X f \, d\mu.$$

## 1.5 Teoremi di convergenza

Sia  $(X, \mathcal{A}, \mu)$  come in precedenza.

**Teorema** (di convergenza monotona o Beppo-Levi). Date  $f_n: X \rightarrow [0, +\infty]$  misurabili, tali che  $f_n \uparrow f$  ovunque in  $X$ , allora<sup>1</sup>

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_X f_n \, d\mu = \int_X f \, d\mu$$

ed in particolare il termine a sinistra è crescente quindi è proprio un sup ovvero  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_X f_n \, d\mu = \sup_n \int_X f_n \, d\mu$ .

**Teorema** (lemma di Fatou). Date  $f_n: X \rightarrow [0, +\infty]$  misurabili, allora

$$\liminf_{n \rightarrow +\infty} \int_X f \, d\mu \geq \int_X \left( \liminf_{n \rightarrow +\infty} f_n \right) \, d\mu.$$

**Teorema** (di convergenza dominata o di Lebesgue). Date  $f_n: X \rightarrow \mathbb{R}$  (o anche  $\mathbb{R}^n$ ) misurabili con le seguenti proprietà

- *Convergenza puntuale:*  $f_n(x) \rightarrow f(x)$  per ogni  $x \in X$ .
- *Dominazione:* Esiste  $g: X \rightarrow [0, +\infty]$  sommabile tale che  $|f_n(x)| \leq g(x)$  per ogni  $x \in X$  e per ogni  $n \in \mathbb{N}$ .

allora

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_X f_n \, d\mu = \int_X f \, d\mu.$$

---

<sup>1</sup>Mnemonica:  $\sup_n \int_X f_n \, d\mu = \int_X \sup_n f_n \, d\mu$

**Nota.** La seconda proprietà è essenziale; sostituirla con  $\int_X |f_n| \, d\mu \leq C < +\infty$  non basta!

**Definizione.** Data una *densità*  $\rho: \mathbb{R}^n \rightarrow [0, +\infty]$  misurabile, la **misura  $\mu$  con densità  $\rho$**  è data da

$$\forall E \in \mathcal{A} \quad \mu(E) := \int_E \rho \, dx$$

**Osservazioni.**

- $\mathbb{R}^n$  e  $\mathcal{L}^n$  possono essere sostituiti da  $X$  e  $\tilde{\mu}$ .
- il fatto che  $\mu$  è una misura segue da Beppo Levi, in particolare serve per mostrare la subadditività.

**Teorema** (di cambio di variabile). Siano  $\Omega$  e  $\Omega'$  aperti di  $\mathbb{R}^n$ ,  $\Phi: \Omega \rightarrow \Omega'$  un diffeomorfismo<sup>1</sup> di classe  $C^1$  e  $f: \Omega' \rightarrow [0, +\infty]$  misurabile. Allora

$$\int_{\Omega'} f(x') \, dx' = \int_{\Omega} f(\Phi(x)) |\det(\nabla \Phi(x))| \, dx.$$

La stessa formula vale per  $f$  a valori in  $\overline{\mathbb{R}}$  integrabile e per  $f$  a valori in  $\mathbb{R}^n$  sommabile.

**Osservazioni.**

- Se  $n = 1$ ,  $|\det(\nabla \Phi(x))| = |\Phi'(x)|$  e non  $\Phi'(x)$  come nella formula vista ad Analisi 1 (l'informazione del segno viene data dall'inversione degli estremi).
- Indebolire le ipotesi su  $\Phi$  è delicato. Basta  $\Phi$  di classe  $C^1$  e  $\forall x' \in \Omega' \# \Phi^{-1}(x') = 1$  (supponendo  $\Phi$  iniettiva la proprietà precedente segue immediatamente). Se  $\Phi$  non è "quasi" iniettiva bisogna correggere la formula per tenere conto della molteplicità.
- Quest'ultima osservazione serve giusto per far funzionare il cambio in coordinate polari che non è iniettivo solo nell'origine.

**Formula di cambio di variabile applicata a funzioni radiali.** Sia  $f: [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  misurabile (di solito si richiede misurabile e positiva oppure sommabile). Allora per il teorema di cambio di variabili vale la seguente

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(|x|) \, dx = c_n \cdot \int_0^{+\infty} f(\rho) \rho^{n-1} \, d\rho,$$

dove  $c_n = n \mathcal{L}^n(\mathcal{B}(0, 1))$ .

### 1.5.1 Fubini-Tonelli

Di seguito riportiamo il teorema di Fubini-Tonelli per la misura di Lebesgue.

**Teorema** (di Fubini-Tonelli). Sia  $\mathbb{R}^{n_1} \times \mathbb{R}^{n_2} \simeq \mathbb{R}^n$  con  $n = n_1 + n_2$ ,  $E := E_1 \times E_2$  dove  $E_1, E_2$  sono misurabili e  $f$  è una funzione misurabile definita su  $E$ . Se  $f$  ha valori in  $[0, +\infty]$  allora

$$\int_E f \, d\mu = \int_{E_2} \int_{E_1} f(x_1, x_2) \, dx_1 \, dx_2 = \int_{E_1} \int_{E_2} f(x_1, x_2) \, dx_2 \, dx_1$$

---

<sup>1</sup>funzione differenziabile con inversa differenziabile.

Vale lo stesso per  $f$  a valori in  $\mathbb{R}$  o in  $\mathbb{R}^n$  sommabile.

**Osservazioni.** Possiamo generalizzare il teorema di Fubini-Tonelli a misure generiche ed ottenere alcuni risultati utili che useremo ogni tanto.

- Se  $X_1, X_2$  sono spazi con misure  $\mu_1, \mu_2$  (con opportune ipotesi) vale:

$$\int_{E_2} \int_{E_1} f(x_1, x_2) d\mu_1(x_1) d\mu_2(x_2) = \int_{E_1} \int_{E_2} f(x_1, x_2) d\mu_2(x_2) d\mu_1(x_1).$$

se  $f \geq 0$  oppure  $\int_{X_1} \int_{X_2} |f| d\mu_2(x_2) d\mu_1(x_1) < +\infty$ .

- **Teorema** (di scambio serie-integrale). Se  $X_1 \subset \mathbb{R}$  (oppure  $X_1 \subset \mathbb{R}^n$ ),  $\mu_1 = \mathcal{L}^n$  e  $X_2 = \mathbb{N}$ ,  $\mu_2$  è la misura che conta i punti, allora la formula sopra diventa

$$\sum_{n=0}^{\infty} \int_{X_1} f_n(x) dx = \int_{X_1} \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x) dx.$$

se  $f_i \geq 0$  oppure  $\sum_i \int_{X_1} |f_i(x)| dx < +\infty$ .

- **Teorema** (di scambio di serie). Se  $X_1 = X_2 = \mathbb{N}$  e  $\mu_1 = \mu_2$  è la misura che conta i punti la formula sopra diventa

$$\sum_{j=0}^{\infty} \sum_{i=0}^{\infty} a_{i,j} = \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} a_{i,j}$$

se  $a_{i,j} \geq 0$  oppure  $\sum_i \sum_j |a_{i,j}| < +\infty$ .

# Capitolo 2

## Spazi $L^p$ e convoluzione

### 2.1 Disuguaglianze

#### 2.1.1 Disuguaglianza di Jensen

Ricordiamo che una funzione  $f: \mathbb{R}^d \rightarrow [-\infty, +\infty]$  è **convessa** se e solo se dati  $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}^d$  e  $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in [0, 1]$  con  $\sum_i \lambda_i = 1$  abbiamo che

$$f\left(\sum_i \lambda_i x_i\right) \leq \sum_i \lambda_i f(x_i)$$

**Teorema** (Jensen). Dato  $(X, \mathcal{A}, \mu)$  con  $\mu(X) = 1$  e  $f: \mathbb{R}^d \rightarrow [-\infty, +\infty]$  convessa e semi-continua inferiormente (S.C.I.) e  $u: X \rightarrow \mathbb{R}^d$  sommabile allora vale

$$f\left(\int_X u \, d\mu\right) \leq \int_X f \circ u \, d\mu$$

e  $f \circ u$  è integrabile.

**Osservazioni.**

- $(f \circ u)^-$  ha integrale finito.
- Interpretando  $\mu$  come probabilità si riscrive come  $\mathbb{E}[f \circ \mu] \geq f(\mathbb{E}[u])$ .
- Se  $u$  è una funzione semplice, cioè  $u = \sum_i y_i \cdot \mathbb{1}_{E_i}$  con  $E_i$  disgiunti e  $\bigcup E_i = X$  allora posti  $\lambda_i = \mu(E_i)$  abbiamo

$$\int_X f \circ u \, d\mu = \int_X \sum_i f(y_i) \cdot \mathbb{1}_{E_i} \, d\mu = \sum_i \lambda_i f(y_i) \geq f\left(\sum_i \lambda_i y_i\right) = f\left(\int_X u \, d\mu\right)$$

Questo ci darebbe una strada per dimostrare in generale per passi il teorema di Jensen ma in realtà si presentano vari problemi tecnici.

- Ogni funzione convessa e S.C.I. su  $\Omega$  convesso in  $\mathbb{R}^d$  si estende a  $\tilde{f}: \mathbb{R} \rightarrow (-\infty, +\infty]$  convessa e S.C.I., ad esempio se  $\Omega = (0, +\infty)$

$$f(y) = \frac{1}{y} \quad \rightsquigarrow \quad \tilde{f}(y) = \begin{cases} +\infty & y \leq 0 \\ \frac{1}{y} & y > 0 \end{cases}$$

- La semi-continuità inferiore serve perché le funzioni convesse sono continue solo se a valori in  $\mathbb{R}$ , ad esempio per  $k$  costante la funzione

$$f(y) := \begin{cases} k & y < 0 \\ +\infty & y \geq 0 \end{cases}$$

è convessa ma non semi-continua inferiormente (e neanche continua).

**Dimostrazione.** Poniamo  $y_0 := \int_X u \, d\mu$ , allora la tesi diventa

$$f\left(\int_X u \, d\mu\right) \leq \int_X f \circ u \, d\mu \iff f(y_0) \leq \int_X f \circ u \, d\mu.$$

Prendiamo  $\phi: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$  affine (ovvero  $\phi(y) = a \cdot y + b$  con  $a \in \mathbb{R}^d$  e  $b \in \mathbb{R}$ ) tale che  $\phi \leq f$ , allora

$$\int_X f \circ u \, d\mu \underset{(*)}{\geq} \int_X \phi \circ u \, d\mu = \int_X a \cdot u + b \, d\mu = ay_0 + b = \phi(y_0)$$

Infine concludiamo usando il seguente lemma di caratterizzazione delle funzioni convesse ed S.C.I.

**Lemma.** Ogni  $f: \mathbb{R}^d \rightarrow (-\infty, +\infty]$  convessa e S.C.I è tale che

$$\forall y_0 \in \mathbb{R}^d \quad \sup_{\substack{\phi \text{ affine} \\ \phi \leq f}} \phi(y_0) = f(y_0)$$

Rileggendo meglio la dimostrazione<sup>1</sup> segue che  $(f \circ u)^- < (\phi \circ u)^- \implies (f \circ u)^-$ .

**Nota.** Nel caso  $d = 1$  e  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  possiamo usare il fatto che le funzioni convesse ammettono sempre derivata destra o sinistra, il sup diventa un massimo e ci basta prendere come  $\phi$  la retta tangente in  $(y_0, f(y_0))$  o una con pendenza compresa tra  $f'(y_0^-)$  e  $f'(y_0^+)$ .

□

**Definizione.** Dati  $p_1, p_2 \in [1, +\infty]$  diciamo che sono **coniugati** se

$$\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} = 1$$

convenendo che  $1/\infty = 0$ .

Fissiamo  $p \in [1, +\infty]$  detto *esponente di sommabilità* e sia  $(X, \mathcal{A}, \mu)$  come sempre.

**Definizione.** Data  $f: X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  o  $\mathbb{R}^d$  misurabile, la **norma**  $p$  di  $f$  è

$$\|f\|_p := \left( \int_X |f|^p \, d\mu \right)^{1/p} \quad p \in [1, +\infty)$$

mentre per  $p = +\infty$  poniamo

$$\|f\|_\infty = \text{supess} f(x) := \inf\{m \in [0, +\infty] \mid |f(x)| \leq m \text{ per } \mu\text{-q.o. } x\}.$$

**Nota.** In realtà queste sono solo delle semi-norme.

---

<sup>1</sup>Viene considerata la parte negativa per invertire la disuguaglianza (\*).

- $\|f\|_\infty \leq \sup_{x \in X} |f(x)|$
- $\|f\|_p = 0 \iff f = 0$  quasi ovunque

**Dimostrazione.**

$\Rightarrow$  [TODO: Facile ma non ovvia]

$\Leftarrow$  Ovvio.

□

- Se  $f_1 = f_2$  quasi ovunque  $\implies \|f_1\|_p = \|f_2\|_p$ .

**Dimostrazione.**  $f_1 = f_2$  quasi ovunque  $\implies \exists D \subset X$  con  $\mu(D) = 0$  tale che  $f_1(x) = f_2(x)$  su  $X \setminus D$ , usiamo il fatto che l'integrale non cambia se modifichiamo la funzione su un insieme di misura nulla

$$\|f_1\|_p^p = \int_X |f_1|^p d\mu = \int_{X \setminus D} |f_1|^p d\mu = \int_{X \setminus D} |f_2|^p d\mu = \int_X |f_2|^p d\mu = \|f_2\|_p^p$$

□

### 2.1.2 Disuguaglianza di Young

**Proposizione.** Per ogni  $a_1, a_2 \geq 0$  e  $\lambda_1, \lambda_2 > 0$  con  $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$  abbiamo che

$$a_1^{\lambda_1} a_2^{\lambda_2} \leq \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2$$

inoltre vale l'uguale se e solo se  $a_1 = a_2$ .

**Dimostrazione.** Se  $a_1 = a_2 = 0$  allora è ovvia. Supponiamo dunque  $a_1, a_2 > 0$ . Per la concavità del logaritmo abbiamo

$$\lambda_1 \log a_1 + \lambda_2 \log a_2 \leq \log(\lambda_1 a_2 + \lambda_2 a_2), \iff \log(a_1^{\lambda_1} a_2^{\lambda_2}) \leq \log(\lambda_1 a_2 + \lambda_2 a_2)$$

e dalla monotonia

$$a_1^{\lambda_1} a_2^{\lambda_2} \leq \lambda_1 a_2 + \lambda_2 a_2.$$

Infine, il se e solo se per l'uguale segue dal fatto che il logaritmo è *strettamente concavo*. □

### 2.1.3 Disuguaglianza di Hölder

**Proposizione.** Date  $f_1, f_2: X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  o  $\mathbb{R}^d$  e  $p_1, p_2$  esponenti coniugati allora

$$\int_X |f_1| \cdot |f_2| d\mu \leq \|f_1\|_{p_1} \cdot \|f_2\|_{p_2}$$

vale anche per  $p = +\infty$  convenendo che  $+\infty \cdot 0 = 0$  nel membro di destra.

**Dimostrazione.** Se  $\|f_1\|_{p_1} = 0$  o  $+\infty$  e anche  $\|f_2\|_{p_2} = 0$  o  $+\infty$  la dimostrazione è immediata, supponiamo dunque  $\|f_1\|_{p_1}, \|f_2\|_{p_2} > 0$  e finiti.

- *Caso 1:* se  $p_1 = 1, p_2 = +\infty$  allora

$$\int_X |f_1| \cdot |f_2| d\mu \leq \int_X |f_1| \cdot \|f_2\|_\infty d\mu = \|f_2\|_\infty \cdot \int_X |f_1| d\mu = \|f_2\|_\infty \cdot \|f_1\|_1$$

- *Caso 2:* se  $1 < p_1, p_2 < +\infty$ , introduciamo un parametro  $\gamma > 0$  allora

$$\int_X |f_1| \cdot |f_2| d\mu = \int_X (\gamma^{p_1} \cdot |f_1|^{p_1})^{1/p_1} \cdot (\gamma^{-p_2} \cdot |f_1|^{p_2})^{1/p_2} d\mu$$

a questo punto chiamiamo per comodità  $g_1 := \gamma^{p_1} \cdot |f_1|^{p_1}$ ,  $\lambda_1 := 1/p_1$  e  $g_2 := \gamma^{-p_2} \cdot |f_1|^{p_2}$ ,  $\lambda_2 := 1/p_2$  da cui

$$\begin{aligned} &= \int_X g_1^{\lambda_1} \cdot g_2^{\lambda_2} d\mu \stackrel{\text{Young}}{\leq} \int_X \lambda_1 g_1 + \lambda_2 g_2 d\mu = \lambda_1 \gamma^{p_1} \int_X |f_1|^{p_1} + \lambda_2 \gamma^{-p_2} \int_X |f_1|^{p_2} d\mu \\ &= \lambda_1 \gamma^{p_1} \cdot \|f_1\|_{p_1}^{p_1} + \lambda_2 \gamma^{-p_2} \cdot \|f_1\|_{p_2}^{p_2} \end{aligned}$$

posti ora  $a_1 := \gamma^{p_1} \|f_1\|_{p_1}^{p_1}$  e  $a_2 := \gamma^{-p_2} \|f_1\|_{p_2}^{p_2}$ , per  $\gamma \rightarrow 0$  abbiamo che  $a_1 \rightarrow 0, a_2 \rightarrow +\infty$  mentre per  $\gamma \rightarrow +\infty$  abbiamo che  $a_1 \rightarrow +\infty, a_2 \rightarrow 0$  dunque per il teorema del valor medio esisterà  $\gamma$  tale che  $a_1 = a_2$ , ma allora siamo nel caso dell'uguaglianza per la disuguaglianza di Young dunque

$$\lambda_1 \gamma^{p_1} \|f_1\|_{p_1}^{p_1} + \lambda_2 \gamma^{-p_2} \|f_1\|_{p_2}^{p_2} = \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 = a_1^{\lambda_1} \cdot a_2^{\lambda_2} = \|f_1\|_{p_1} \cdot \|f_2\|_{p_2}$$

□

**Osservazione.** La disuguaglianza di Hölder può essere generalizzata a  $n$  funzioni, date  $f_1, \dots, f_n$  e  $p_1, \dots, p_n$  con  $\frac{1}{p_1} + \dots + \frac{1}{p_n} = 1$  allora

$$\int_X \prod_i |f_i| d\mu \leq \prod_i \|f_i\|_{p_i}$$

## 2.1.4 Disuguaglianza di Minkowski

**Proposizione.** Consideriamo sempre  $(X, \mathcal{A}, \mu)$  e sia  $p \in [1, +\infty]$  un esponente di sommabilità ed  $f_1, f_2: X \rightarrow \mathbb{R}$  oppure  $\mathbb{R}^d$ . Allora vale la disuguaglianza triangolare

$$\|f_1 + f_2\|_p \leq \|f_1\|_p + \|f_2\|_p.$$

**Dimostrazione.**

- *Caso 1:* se  $p = 1$  o  $p = +\infty$ , allora svolgiamo il calcolo diretto

- Se  $p = 1$

$$\|f_1 + f_2\|_1 = \int_X |f_1 + f_2| d\mu \leq \int_X |f_1| + |f_2| d\mu = \int_X |f_1| d\mu + \int_X |f_2| d\mu = \|f_1\|_1 + \|f_2\|_1$$

- Se  $p = +\infty$  allora poniamo  $D$  l'insieme di *misura nulla* che realizza su  $X \setminus D$  il supess ovvero  $\sup_{X \setminus D} |f_1 + f_2| = \sup_{X \setminus D} |f_1 + f_2|$

$$\begin{aligned} \|f_1 + f_2\|_\infty &= \sup_{X \setminus D} |f_1 + f_2| = \sup_{X \setminus D} |f_1 + f_2| \leq \sup_{X \setminus D} (|f_1| + |f_2|) \\ &= \sup_{X \setminus D} |f_1| + \sup_{X \setminus D} |f_2| = \sup_X |f_1| + \sup_X |f_2| = \|f_1\|_\infty + \|f_2\|_\infty \end{aligned}$$

- *Caso 2:* se  $1 < p < +\infty$  e  $0 < \|f_1 + f_2\|_p < +\infty$

$$\begin{aligned}\|f_1 + f_2\|_p^p &= \int_X |f_1 + f_2|^p \leq \int_X (|f_1| + |f_2|) \cdot |f_1 + f_2|^{p-1} d\mu = \\ &= \int_X |f_1| \cdot |f_1 + f_2|^{p-1} d\mu + \int_X |f_2| \cdot |f_1 + f_2|^{p-1} d\mu =\end{aligned}$$

ora introduciamo  $q$  esponente coniugato di  $p$  e notiamo

$$q = \frac{p-1}{p} \quad \text{e} \quad \| |f|^{p-1} \|_q = \|f\|_p^{p-1}$$

ora continuiamo a svolgere il conto di prima usando Hölder con esponenti  $p$  e  $q$

$$\begin{aligned}&\stackrel{\text{Hölder}}{\leq} \|f_1\|_p \cdot \| |f_1 + f_2|^{p-1} \|_q + \|f_2\|_p \cdot \| |f_1 + f_2|^{p-1} \|_q = \\ &= (\|f_1\|_p + \|f_2\|_p) \cdot \| |f_1 + f_2|^{p-1} \|_q = (\|f_1\|_p + \|f_2\|_p) \cdot \|f_1 + f_2\|_p^{p-1}\end{aligned}$$

infine per l'ipotesi  $\|f_1 + f_2\|_p > 0$  possiamo portare l'ultimo fattore dall'altra parte ed ottenere la tesi.

- *Caso 3:* se  $1 < p < +\infty$  ma  $\|f_1 + f_2\| = 0$  o  $+\infty$  allora se  $\|f_1 + f_2\| = 0$  la disuguaglianza è banale mentre se  $\|f_1 + f_2\| = +\infty$  si usa la seguente disuguaglianza

$$\|f_1 + f_2\|_p^p \leq 2^{p-1} (\|f_1\|_p^p + \|f_2\|_p^p),$$

che si ottiene usando la convessità della funzione  $x \mapsto x^p$  e la combinazione affine  $\frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_2$  infatti

$$\left(\frac{x}{2} + \frac{y}{2}\right)^p \leq \frac{1}{2}x^p + \frac{1}{2}y^p \implies \frac{1}{2^{p-1}}(x+y)^p \leq x^p + y^p \implies (x+y)^p \leq 2^{p-1}(x^p + y^p).$$

□

## 2.2 Esercitazione del 4 ottobre

### 2.2.1 Esercizi di teoria della misura

Di seguito riportiamo alcune proprietà di base di teoria della misura.

**Proprietà.**

- i) Se  $A \subset B$ , allora  $\mu(A) \leq \mu(B)$ .

**Dimostrazione.** Scomponiamo  $B = (B \setminus A) \cup (A \cap B)$ . Per ipotesi  $A \cap B = A$  ed essendo la misura positiva segue che

$$\mu(B) = \underbrace{\mu(B \setminus A)}_{\geq 0} + \mu(A) \geq \mu(A).$$

- ii) Dati due insiemi  $A, B$  misurabili, vale

$$\mu(A \cup B) \leq \mu(A) + \mu(B).$$



**Dimostrazione.** La disuguaglianza segue dalle seguenti uguaglianze.

$$\begin{aligned}\mu(A) &= \mu(A \setminus B) + \mu(A \cap B) \\ \mu(B) &= \mu(B \setminus A) + \mu(A \cap B) \\ \mu(A \cup B) &= \mu(A \setminus B) + \mu(B \setminus A) + \mu(A \cap B).\end{aligned}$$

iii) Data una successione di insiemi  $E_1 \subset E_2 \subset \dots \subset \dots$ , si ha

$$\mu\left(\bigcup_i E_i\right) = \sup_i \mu(E_i) = \lim_i \mu(E_i).$$

iv) Data una successione di insiemi  $E_1 \supset E_2 \supset \dots \supset \dots$  e  $\mu(E_1) < +\infty$ , si ha

$$\mu\left(\bigcap_i E_i\right) = \lim_i \mu(E_i).$$

**Esercizio** (Numerabile subaddittività). Dato  $E \in \mathcal{A}$ ,  $E \subset \bigcup_i E_i$  dove  $E_i \in \mathcal{A}$ . Allora

$$\mu(E) \leq \sum_i \mu(E_i).$$

**Dimostrazione** (Idea). Basta dimostrare che  $\mu\left(\bigcup_i E_i\right) \leq \sum_i \mu(E_i)$ . Infatti per quanto visto prima  $\mu(E) \leq \mu\left(\bigcup_i E_i\right)$ . Prima dimostriamo per induzione  $\mu\left(\bigcup_{i=1}^N E_i\right) \leq \sum_{i=1}^N \mu(E_i)$ .

Il passo base  $n = 2$  è stato visto al punto ii). Una volta dimostrata la proprietà sopra, si nota che  $\sum_{i=1}^N \mu(E_i)$  è limitata per ogni  $N$ , e dunque è limitato anche il suo limite, da cui la tesi.  $\square$

## 2.2.2 Funzioni misurabili rispetto alla misura di Lebesgue

Si ricorda che le funzioni *continue*, *semplici* e *semicontinue* sono classi di funzioni misurabili. Due osservazioni sulle funzioni semicontinue.

- Le funzioni semicontinue sono *boreliane*.
- La proprietà di misurabilità delle funzioni semicontinue è necessaria per l'enunciato della disuguaglianza di Jensen.

**Controesempio** (disuguaglianza di Jensen). Notiamo che l'ipotesi di semicontinuità inferiore della funzione  $f$  è necessaria per la validità della disuguaglianza di Jensen. Infatti, definiamo  $f$  come segue

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x \in (0, 1) \\ +\infty & \text{altrimenti} \end{cases}.$$

Osserviamo che la funzione  $f$  così definita è convessa ma non semicontinua inferiormente.

Ora definiamo la funzione  $u : X \rightarrow \mathbb{R}$  con  $X = (0, 2)$ , come la funzione costante di valore  $1/2$ . Calcoliamo l'integrale di  $u(x)$  su  $X$ .

$$\int_X u(x) dx = 1.$$

In tal caso vale  $f\left(\int_X u(x) dx\right) = +\infty$ . D'altra parte  $\int_X f \circ u dx = 0$ , dunque l'ipotesi di semicontinuità inferiore è necessaria.

**Fatto.** Date  $\varphi_1, \varphi_2$  funzioni semplici su  $\mathbb{R}$  con misura di Lebesgue. Allora  $\varphi_1 \vee \varphi_2$  e  $\varphi_1 \wedge \varphi_2$  sono ancora funzioni semplici.

**Lemma.** Data  $f : X \rightarrow [0, +\infty]$  misurabile

$$\int_X f d\mu = 0 \iff f = 0 \text{ q.o. su } X$$

**Dimostrazione.**

$\Rightarrow$  Dato che  $f$  è non negativa, il dominio  $X$  può essere riscritto come

$$X = \{x \in X \mid f(x) \geq 0\} = \{x \in X \mid f(x) > 0\} \cup \{x \in X \mid f(x) = 0\}$$

ricordiamo che  $(0, +\infty) = \bigcup_{n \geq 1} (\frac{1}{n}, +\infty)$ , dunque possiamo riscrivere una parte di  $X$  come segue e poi passare alle misure

$$\begin{aligned} \{x \in X \mid f(x) > 0\} &= \bigcup_{n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}} \left\{x \in X \mid f(x) \geq \frac{1}{n}\right\} \\ \implies \mu(\{x \in X \mid f(x) > 0\}) &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \mu\left(\left\{x \in X \mid f(x) \geq \frac{1}{n}\right\}\right) \end{aligned}$$

in questo modo otteniamo la seguente caratterizzazione dell'insieme su cui  $f$  è positiva

$$\mu(\{x \in X \mid f(x) > 0\}) > 0 \iff \exists \bar{n} \text{ tale che } \mu(\{x \in X \mid f(x) \geq 1/\bar{n}\}) > 0$$

A questo punto possiamo maggiorare come segue

$$0 = \int_X f d\mu \geq \int_{\{f \geq \frac{1}{n}\}} f d\mu \geq \frac{1}{n} \mu\left(\left\{x \mid f(x) \geq \frac{1}{n}\right\}\right).$$

da cui ricaviamo che  $\forall n$  vale

$$\mu\left(\left\{x \mid f(x) \geq \frac{1}{n}\right\}\right) = 0$$

e si conclude osservando che

$$\mu(\{x \mid f(x) > 0\}) = \lim_n \mu\left(\left\{x \mid f(x) \geq \frac{1}{n}\right\}\right) = 0$$

$\Leftarrow$  Dal fatto che  $f$  è positiva possiamo scrivere

$$\int_X f d\mu = \sup_{\substack{g \leq f \\ g \text{ semplice}}} \int_X g d\mu = \sup \sum_i \alpha_i \mu(E_i) = 0.$$

□

**Osservazione** (sup essenziale di funzioni misurabili). Data  $f$  misurabile, definiamo

$$\|f\|_{\infty, X} := \inf \{m \in [0, +\infty] \mid |f(x)| \leq m \text{ quasi ovunque}\}.$$

Se  $\|f\|_{\infty} < +\infty$ , allora diciamo che esiste una costante  $L > 0$  con  $L = \|f\|_{\infty, X}$ , tale che

$$|f(x)| \leq L$$

quasi ovunque. Infatti, per definizione di  $\inf$ ,  $L = \lim_n m_n$ , dove  $m_n$  verificano

$$|f(x)| \leq m_n \quad \forall x \in X \setminus N_m, \quad \mu(N_m) = 0.$$

Definiamo  $N = \bigcup_m N_m$ , da cui si ottiene

$$\mu(N) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(N_m) = 0.$$

Ovvero  $N$  è trascurabile. Preso  $x \in X \setminus N$ , vale

$$|f(x)| \leq m_n \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

### 2.2.3 Formula di cambio di variabile applicata a funzioni radiali

Sia  $f: [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  misurabile (di solito si richiede misurabile e positiva oppure sommabile). Allora per il teorema di cambio di variabili vale la seguente

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(|x|) \, dx = c_n \cdot \int_0^{+\infty} f(\rho) \rho^{n-1} \, d\rho,$$

dove  $c_n = n \mathcal{L}^n(\mathcal{B}(0, 1))$ .

Applichiamo questa formula alla stima di integrali di funzioni positive.

**Esercizio.** Sia

$$\psi(x) = \frac{1}{\|x\|^\alpha}$$

su  $\mathcal{B}(0, 1) \in \mathbb{R}^n$ . Notiamo che  $\psi(x) = f(\|x\|)$  con  $f = 1/t^\alpha$ . Usiamo la formula appena introdotta per determinare gli  $\alpha \in \mathbb{R}$  per i quali  $\psi$  è sommabile su  $\mathcal{B}(0, 1)$ .

$$\int_{\mathcal{B}(0,1)} \psi(x) \, dx = c_n \int_0^1 \frac{1}{\rho^\alpha} \rho^{n-1} \, d\rho = c_n \int_0^1 \rho^{n-1-\alpha} \, d\rho = \begin{cases} \log(\rho) & n = \alpha \\ \frac{\rho^{n-\alpha}}{n-\alpha} & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Concludendo,

$$\int_{\mathcal{B}(0,1)} \frac{1}{\|x\|^\alpha} \, dx < +\infty \iff n > \alpha.$$

**Esercizio.** Con passaggi analoghi al precedente otteniamo

$$\int_{\mathbb{R}^n \setminus \mathcal{B}(0,1)} \frac{1}{\|x\|^\alpha} \, dx < +\infty \iff n < \alpha.$$

**Esercizio.** Vediamo per quali valori di  $\beta$  il seguente integrale converge

$$\int_{\mathcal{B}(0,1)} \frac{1}{(\|x\| + \|x\|^2)^\beta} \, dx$$

Vale la seguente catena di uguaglianze.

$$\int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{(\|x\| + \|x\|^2)^\beta} dx = \int_{\mathcal{B}(0,1)} \frac{1}{(\|x\| + \|x\|^2)^\beta} dx + \int_{\mathbb{R}^n \setminus \mathcal{B}(0,1)} \frac{1}{(\|x\| + \|x\|^2)^\beta} dx.$$

Studiamo separatamente i due pezzi dell'integrale.

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{B}(0,1)} \frac{1}{(\|x\| + \|x\|^2)^\beta} dx &= c_n \int_{\mathcal{B}(0,1)} \frac{1}{(\rho + \rho^2)^\beta} \rho^{n-1} d\rho = c_n \int_0^1 \frac{1}{\rho^\beta} \cdot \frac{\rho^{n-1}}{(1+\rho)^\beta} d\rho \\ &\approx \int_0^1 \rho^{n-1-\beta} d\rho < +\infty \iff \beta < n. \end{aligned}$$

Inoltre,

$$\int_{\mathbb{R}^n \setminus \mathcal{B}(0,1)} \frac{1}{(\|x\| + \|x\|^2)^\beta} dx = \int_{\mathbb{R}^n \setminus \mathcal{B}(0,1)} \frac{1}{\rho^{2\beta}} \cdot \frac{\rho^{n-1}}{(\frac{1}{\rho} + 1)^\beta} d\rho \approx \int_1^{+\infty} \frac{\rho^{n-1}}{\rho^{2\beta}} d\rho < +\infty \iff 2\beta > n.$$

In conclusione, l'integrale è finito se  $n > \beta > n/2$ .

**Esercizio.** Studiare l'insieme di finitezza al variare del parametro  $\alpha$  dell'integrale

$$\int_{[0,1]^n} \frac{1}{\|x\|_1^\alpha} dx.$$

Osserviamo che la norma 1 e 2 sono legate dalle seguenti disuguaglianze

$$\frac{\|x\|_1}{n} \leq \|x\|_2 \leq \|x\|_1.$$

Studiamo una maggiorazione per l'integrale

$$\int_{[0,1]^n} \frac{1}{\|x\|_1^\alpha} dx \leq \int_{[0,1]^n} \frac{1}{\|x\|^\alpha} dx \leq \int_{\mathcal{B}(0,\sqrt{n})} \frac{1}{\|x\|^\alpha} dx < +\infty \iff \alpha < n,$$

dunque

$$\int_{[0,1]^n} \frac{1}{\|x\|_1^\alpha} dx < +\infty \quad \text{se } \alpha < n.$$

Vediamo ora una minorazione.

$$\int_{[0,1]^n} \frac{1}{\|x\|_1^\alpha} dx = \frac{1}{2^n} \int_{[-1,1]^n} \frac{1}{\|x\|_1^\alpha} dx \geq \frac{1}{2^n} \int_{\mathcal{B}(0,1)} \frac{1}{\|x\|_1^\alpha} dx \approx \int_{\mathcal{B}(0,1)} \frac{1}{\|x\|^\alpha} dx < +\infty \iff \alpha < n.$$

Dunque l'integrale  $\int_{[0,1]^n} \frac{1}{\|x\|_1^\alpha} dx$  converge se e solo se  $\alpha < n$ .

### Esercizi per casa.

- (1) Dimostrare che date  $f, g$  misurabili ed  $r, p_1, p_2 > 0$  tali che  $1/r = 1/p_1 + 1/p_2$ . Allora vale

$$\|f \cdot g\|_r \leq \|f\|_{p_1} \cdot \|g\|_{p_2}.$$

*Suggerimento.* Usare Hölder osservando che  $1 = \frac{r}{p_1} + \frac{r}{p_2} = \frac{1}{(p_1/r)} + \frac{1}{(p_2/r)}$ .

**Dimostrazione.** Vale quanto segue.

$$\begin{aligned} \|f \cdot g\|_r^r &= \int_X |f \cdot g|^r d\mu = \int_X |f| \cdot |g| d\mu \stackrel{\text{Holder}}{\leq} \|f^r\|_{p_1/r} \cdot \|f^r\|_{p_2/r} \\ &= \left( \int_X |f|^{r \cdot p_1/r} \right)^{r/p_1} \cdot \left( \int_X |g|^{r \cdot p_2/r} \right)^{r/p_2} = \|f\|_{p_1}^r \cdot \|g\|_{p_2}^r = (\|f\|_{p_1} \cdot \|g\|_{p_2})^r \\ &\implies \|f \cdot g\|_r \leq \|f\|_{p_1} \cdot \|g\|_{p_2}. \end{aligned}$$

□

- (2) Dimostrare che date  $f_1, \dots, f_n$  misurabili e  $p_i > 0$  tali che  $1/p_1 + \dots + 1/p_n = 1$  si ha

$$\|f_1 \cdots f_n\|_1 \leq \|f_1\|_{p_1} \cdots \|f_n\|_{p_n}.$$

*Suggerimento.* Fare il primo passo dell'induzione e usare la formula precedente scegliendo  $r$  in modo corretto.

**Dimostrazione.** Dimostriamo per induzione la seguente proprietà più generale.

Siano  $f_1, \dots, f_n$  misurabili e  $r > 1$ . Allora, per i  $p_i > 0$  tali che  $1/p_1 + \dots + 1/p_n = r$  si ha

$$\|f_1 \cdots f_n\|_r \leq \|f_1\|_{p_1} \cdots \|f_n\|_{p_n}.$$

*Passo base.* Vero per il punto (1).

*Passo induttivo*  $[n-1 \Rightarrow n]$ . Supponiamo di aver dimostrato per ogni  $r > 1$  la disuguaglianza sopra. Allora

$$\|f_1 \cdots f_n\|_r = \|(f_1 \cdots f_{n-1}) \cdot f_n\|_r \stackrel{(1)}{\leq} \|f_1 \cdots f_{n-1}\|_p \cdot \|f_n\|_{p_n}, \quad \text{dove } r = 1/p + 1/p_n.$$

Notando che  $1/p = 1/r - 1/p_{n-1} = 1/p_1 + \dots + 1/p_{n-1}$  e usando l'ipotesi induttiva otteniamo la tesi. □

## 2.3 Costruzione spazi $L^p$

Fissiamo  $(X, \mathcal{A}, \mu)$  come sempre.

**Definizione.** Sia  $\mathcal{L}^p$  l'insieme delle funzioni  $f: X \rightarrow \mathbb{R}$  o  $\mathbb{R}^d$  misurabili tali che  $\|f\|_p < +\infty$ .

**Osservazioni.**

- $\mathcal{L}^p$  è un sottospazio vettoriale dello spazio vettoriale dato da  $\{f: X \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ misurabile}\}$  e  $\|\cdot\|_p$  è una semi-norma.

**Dimostrazione.**

- $\mathcal{L}^p$  è chiuso per somma e moltiplicazione per scalari.
- Dalla definizione segue subito  $\|\lambda f\|_p = |\lambda| \cdot \|f\|_p$  l'omogeneità della norma.
- Dalla disuguaglianza di Minkowski segue che  $\|\cdot\|_p$  è una semi-norma.
- In particolare non è una norma se  $\{0\} \subsetneq \{f \mid \|f\|_p = 0\}$  ovvero se  $\mathcal{A}$  contiene insiemi non vuoti di misura nulla.
- In generale dato  $V$  spazio vettoriale e  $\|\cdot\|$  semi-norma su  $V$  possiamo introdurre  $N := \{v \mid \|v\| = 0\}$ .  $N$  risulta essere un sottospazio di  $V$  e la norma data da  $\|[v]\| := \|v\|$  per  $[v] \in V/N$  è ben definita ed è proprio una norma su  $V/N$ .
- Nel caso della norma  $\|\cdot\|_p$  abbiamo che  $[f_1] = [f_2] \iff [f_1 - f_2] = 0 \iff f_1 - f_2 = 0$  quasi ovunque.

**Definizione.** Poniamo  $N := \{f \mid \|f\|_p = 0\}$  e definiamo gli **spazi**  $L^p$  come

$$L^p := \mathcal{L}^p/N = \mathcal{L}^p/\sim \quad \|[f]\|_p := \|f\|_p$$

**Notazione.** Ogni tanto serve precisare meglio l'insieme di partenza e di arrivo degli spazi  $L^p$  ed in tal caso useremo le seguenti notazioni

$$L^p = L^p(X) = L^p(X, \mu) = L^p(X, \mathcal{A}, \mu) = L^p(X, \mu; \mathbb{R}^d).$$

**Nota.** Nella pratica non si parla mai di “classi di funzioni” e si lavora direttamente parlando di “funzioni in  $L^p$ ”. Le “operazioni” comuni non creano problemi però in certi casi bisogna stare attenti di star lavorando con oggetti ben definiti. Ad esempio:

- Preso  $x_0 \in X$ , consideriamo l'insieme  $\{f \in L^p \mid f(x_0) = 0\}$ . Notiamo che non è un sottoinsieme ben definito (a meno che  $\mu(\{x_0\}) > 0$  ovvero che la misura sia atomica) di  $L^p$ , in quanto possiamo variare  $f$  su un insieme di misura nulla.
- Invece ad esempio il seguente insieme è ben definito

$$\left\{ f \in L^1 \mid \int_X f \, d\mu = 0 \right\}$$

### 2.3.1 Prodotto scalare su $L^2$

Date  $f_1, f_2 \in L^2(X)$  si pone

$$\langle f_1, f_2 \rangle := \int_X f_1 \cdot f_2 \, d\mu.$$

**Osservazioni.**

- La definizione di  $\langle f_1, f_2 \rangle$  è ben posta, infatti basta far vedere che  $\int_X |f_1 f_2| \, d\mu < +\infty$  ma per Hölder abbiamo

$$\int_X |f_1 f_2| \, d\mu \leq \|f_1\|_2 \|f_2\|_2 < +\infty$$

- $\|f\|_2^2 = \langle f, f \rangle$  per ogni  $f \in L^2(X)$ .

- Inoltre,  $\left| \int_X f_1 f_2 \, d\mu \right| \leq \int_X |f_1 f_2| \, d\mu$  quindi

$$|\langle f_1, f_2 \rangle| \leq \|f_1\|_2 \|f_2\|_2 \quad (\text{Cauchy-Schwartz}).$$

- L'operatore  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  è un prodotto scalare definito positivo.

### Osservazioni.

- Dato  $C$  spazio vettoriale reale con prodotto scalare  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ , allora  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  si ricava dalla norma associata  $\|\cdot\|$  tramite l'identità di polarizzazione:

$$\langle v_1, v_2 \rangle = \frac{1}{4} \left( \|v_1 + v_2\|^2 - \|v_1 - v_2\|^2 \right).$$

- Dato  $V$  come sopra, vale l'identità del parallelogramma:

$$\|v_1 + v_2\|^2 + \|v_1 - v_2\|^2 = 2\|v_1\|^2 + 2\|v_2\|^2 \quad \forall v_1, v_2 \in V.$$

Usando questa identità si dimostra che la norma di  $L^p$  deriva da un prodotto scalare solo per  $p = 2$ .

**Proprietà.** Sia  $V$  uno spazio vettoriale con norma  $\|\cdot\|$ . Allora vale l'identità del parallelogramma se e solo se  $\|\cdot\|$  deriva da un prodotto scalare.

**Esempio.** La norma di  $L^p([-1, 1])$ , deriva da un prodotto scalare solo per  $p = 2$ . Prendiamo  $f_1 = \mathbb{1}_{[-1, 0]}$  e  $f_2 = \mathbb{1}_{[0, 1]}$ . Allora

$$\begin{aligned} \|f_1 + f_2\|_p^p &= \int_{-1}^1 1 \, dx = 2 \Rightarrow \|f_1 + f_2\|_p = 2^{1/p} \\ \|f_1 - f_2\|_p &= \|f_1 + f_2\|_p = 2^{1/p}, \quad \|f_1\|_p = \|f_2\|_p = 1 \end{aligned}$$

Se vale l'identità del parallelogramma allora

$$\|f_1 + f_2\|_p^2 + \|f_1 - f_2\|_p^2 = 2\|f_1\|_p^2 + 2\|f_2\|_p^2$$

cioè

$$2^{2/p} + 2^{2/p} = 2 \cdot 1 + 2 \cdot 1 \iff p = 2.$$

**Domanda.** Per quali  $X, \mathcal{A}, \mu$  vale la stessa conclusione?

## 2.4 Completezza degli spazi $L^p$

Vediamo ora la proprietà più importante degli spazi  $L^p$ .

**Teorema.** Lo spazio  $L^p$  è completo per ogni  $p \in [1, +\infty]$ .

**Lemma 1.** Dato  $(Y, d)$  spazio metrico, allora

- i) Ogni successione  $(y_n)$  tale che

$$\sum_{n=1}^{\infty} d(y_n, y_{n+1}) < +\infty$$

è di Cauchy.

ii) Se ogni  $(y_n)$  tale che  $\sum_{n=1}^{\infty} d(y_n, y_{n+1}) < +\infty$  converge allora  $Y$  è completo.

**Osservazione.** Non tutte le successioni di Cauchy  $(y_n)$  soddisfano quella condizione. Ad esempio la successione  $(-1)^n/n$  definita su  $\mathbb{R}$  è di Cauchy però

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{(-1)^{n+1}}{n+1} - \frac{(-1)^n}{n} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n^2+n} \approx \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \rightarrow \infty.$$

**Nota.** Per mostrare la completezza degli spazi  $L^p$  è sufficiente verificare la convergenza per una sottoclasse propria delle successioni di Cauchy.

**Dimostrazione.**

i) Vorremmo vedere che  $\forall \varepsilon \exists N$  tale che  $\forall m, n > N$  si ha  $d(y_m, y_n) \leq \varepsilon$ . Presi  $n > m$  abbiamo che

$$d(y_m, y_n) \leq \sum_{k=m}^{n-1} d(y_k, y_{k+1}) \leq \sum_{k=m}^{\infty} d(y_k, y_{k+1}) \rightarrow 0$$

in quanto *coda di una serie convergente*, quindi

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists m_\varepsilon \text{ tale che } \sum_{k=m_\varepsilon}^{\infty} d(y_k, y_{k+1}) < \varepsilon \implies \forall n > m \geq m_\varepsilon \quad d(y_m, y_n) \leq \varepsilon$$

ii) Sia  $(y_n)$  una successione di Cauchy, mostriamo che converge. Osserviamo che esiste una sottosuccessione  $(y_{n_k})$  tale che

$$\sum_{k=1}^{\infty} d(y_{n_k}, y_{n_{k+1}}) < +\infty.$$

Infatti,  $\forall k \exists n_k$  tale che  $\forall n, m \geq n_k \quad d(y_m, y_n) \leq 1/2^k$  e dunque  $d(y_{n_k}, y_{n_{k+1}}) \leq 1/2^k$ . Per ipotesi  $(y_{n_k})$  converge a un qualche  $y \in Y$ , da cui la tesi<sup>1</sup>.  $\square$

**Lemma 2.** Dato  $Y$  spazio normato, i seguenti fatti sono equivalenti

i)  $Y$  è completo.

ii) Per ogni successione  $(y_n)$  tale che  $\sum_{n=1}^{\infty} \|y_n\| < +\infty$ , la serie  $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$  converge<sup>2</sup>.

**Dimostrazione.** ii)  $\Rightarrow$  i). Dobbiamo mostrare che  $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$  è di Cauchy. Per il Lemma 1 basta mostrare che la successione

$$z_n := \sum_{k=1}^n y_k \quad \text{soddisfa la proprietà} \quad \sum_{n=1}^{\infty} d(z_{n+1}, z_n).$$

Espandendo la formula sopra

$$\sum_{n=1}^{\infty} d(z_{n+1}, z_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \left\| \sum_{k=1}^{n+1} y_k - \sum_{k=1}^n y_k \right\| = \sum_{n=1}^{\infty} \|y_{n+1}\|$$

<sup>1</sup>Data una successione di Cauchy  $x_n$ , se una sottosuccessione  $x_{n_k}$  converge, allora converge anche la successione.

<sup>2</sup>Nel senso che esiste  $y$  tale che  $\left\| y - \sum_{n=1}^N y_n \right\| \rightarrow 0$ .



che è finito per ipotesi.

ii)  $\Rightarrow$  i). Utilizziamo l'enunciato ii) del Lemma 2: mostriamo ogni  $(y_n)$  che soddisfa la proprietà  $\sum_n d(y_n, y_{n+1}) < +\infty$  converge. Definiamo la successione  $z_n := y_{n+1} - y_n$ . Per ipotesi, essendo che  $\sum_n \|z_n\| < +\infty$ , la serie  $\sum_n z_n$  converge. Indicando con  $L$  il limite della serie, abbiamo che  $\lim_n y_n = L + y_1$ .

□

**Lemma 3** (Minkowski per somme infinite). Date delle funzioni  $(g_n)$  funzioni positive su  $X$  allora

$$\left\| \sum_{n=1}^{\infty} g_n \right\|_p \leq \sum_{n=1}^{\infty} \|g_n\|_p$$

**Dimostrazione.** Per ogni  $N$  abbiamo che

$$\left\| \sum_{n=1}^N g_n \right\|_p^p \leq \left( \sum_{n=1}^N \|g_n\|_p \right)^p \leq \left( \sum_{n=1}^{\infty} \|g_n\|_p \right)^p$$

e per convergenza monotona possiamo passare il termine di sinistra al limite

$$\lim_N \left\| \sum_{n=1}^N g_n \right\|_p^p = \lim_N \int_X \left( \sum_{n=1}^N g_n \right)^p d\mu = \int_X \left( \lim_N \sum_{n=1}^N g_n \right)^p d\mu = \left\| \sum_{n=1}^{\infty} g_n \right\|_p^p$$

□

**Dimostrazione** (Completezza spazi  $L^p$ ).

- Se  $p = +\infty$ : si tratta di vedere che data  $(f_n)$  di Cauchy in  $L^\infty(X)$  esiste  $E$  con  $\mu(E) = 0$  tale che  $(f_n)$  è di Cauchy rispetto allora norma del sup in  $X \setminus E$ . [TODO: Finire]
- Se  $p < +\infty$ : per il Lemma 2, basta far vedere che data  $(f_n) \subset L^p(X)$  tale che  $\sum_{n=1}^{\infty} \|f_n\|_p < +\infty$  allora  $\sum_n f_n$  converge a qualche  $f \in L^p(X)$ .

La dimostrazione è suddivisa in tre passi, prima costruiamo  $f$ , poi mostriamo che  $f_n$  converge a  $f$  ed infine mostriamo  $f \in L^p(X)$ .

◦ *Passo 1:* Per ipotesi abbiamo

$$\infty > \sum_{n=1}^{\infty} \|f_n\|_p = \sum_{n=1}^{\infty} \| |f_n| \|_p \geq \left\| \sum_{n=1}^{\infty} |f_n| \right\|_p = \left( \int \left( \sum_{n=1}^{\infty} |f_n(x)| \right)^p d\mu(x) \right)^{1/p}$$

quindi  $\sum_{n=1}^{\infty} |f_n(x)| < +\infty$  per ogni  $x \in X \setminus E$  con  $\mu(E) = 0$ . Quindi  $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$  converge a qualche  $f(x)$  per ogni  $x \in X \setminus E$  ed a questo punto ci basta estendere  $f$  a zero in  $E$ <sup>1</sup>.

◦ *Passo 2:* Fissiamo  $N$  ed osserviamo che  $\forall x \in X \setminus E$  abbiamo

$$\left| f(x) - \sum_{n=1}^N f_n(x) \right| = \left| \sum_{n=N+1}^{\infty} f_n(x) \right| \leq \sum_{n=N+1}^{\infty} |f_n(x)|$$

<sup>1</sup>Una costruzione alternativa degli spazi  $L^p$  potrebbe anche partire da *funzioni definite quasi ovunque*, questo ovvierebbe al problema di estendere a 0 la funzione  $f$  appena costruita. Però diventa più complicato mostrare di essere in uno spazio vettoriale poiché per esempio serve ridefinire  $+$  per funzioni definite quasi ovunque.

da cui otteniamo

$$\left\| f - \sum_{n=1}^N f_n \right\|_p \leq \left\| \sum_{n=N+1}^{\infty} |f_n| \right\|_p \leq \sum_{n=N+1}^{\infty} \|f_n\|_p$$

dove l'ultimo termine è la coda di una serie convergente.

◦ *Passo 3:* In particolare rileggendo il passo precedente per  $N = 0$  otteniamo

$$\|f\|_p \leq \sum_{n=1}^{\infty} \|f_n\|_p < +\infty \implies f \in L^p$$

□

**Esercizio.**<sup>1</sup> Sia  $f: X \rightarrow [0, +\infty]$  allora  $\int_X f \, d\mu < +\infty \implies f(x) < +\infty$  per quasi ogni  $x$ .

**Dimostrazione.** Sia  $E := \{x \mid f(x) = +\infty\}$ , allora l'idea è che

$$+\infty > \int_X f \, d\mu \geq \int_E f \, d\mu = +\infty \cdot \mu(E).$$

Oppure, osserviamo che  $\forall m \in [0, +\infty)$  abbiamo  $f \cdot \mathbb{1}_E \geq m \cdot \mathbb{1}_E$  per ogni  $x \in E$  quindi integrando ricaviamo

$$\underbrace{\int_E f \, d\mu}_I \geq m \cdot \mu(E) \implies \mu(E) \leq \frac{I}{m} \xrightarrow{m \rightarrow +\infty} 0$$

□

### 2.4.1 Alcune proprietà a esercitazione degli spazi $L^p$

**Osservazioni.** Valgono le seguenti

- Sia  $X \in \mathbb{R}^n$ ,  $\mu$  misura di Lebesgue e  $1 \leq p_1 < p_2 \leq +\infty$ . In generale non posso confrontare gli spazi  $L^p$ . Tuttavia, se  $\mu(X) < +\infty$ , allora

$$L^{p_2}(X) \subset L^{p_1}(X) \quad \text{se } p_1 < p_2.$$

- Dato  $Y \in L^p(X)$  un sottoinsieme che eredita la norma  $\|\cdot\|_{L^p}$ , allora  $Y$  è completo  $\iff Y$  è chiuso.
- Negli spazi  $L^p$  i sottoinsiemi chiusi e limitati non sono compatti. In particolare, le palle  $Y = \{f \in L^p \mid \|f\|_{L^p} \leq 1\}$  non sono compatte.

### 2.4.2 Separabilità degli spazi $L^p$

**Proposizione.** Si ha che  $L^p(\mathbb{R}^d, \mu)$  con  $\mu$  la misura di Lebesgue, è separabile se e solo se  $p \neq +\infty$ . Lo stesso risultato vale per  $\ell^p$ .

**Osservazione.** La proposizione è valida anche per  $L^p(X, \mu)$  con  $X \subset \mathbb{R}^d$  aperto.

---

<sup>1</sup>In questo corso non è strettamente necessario ricordarsi come si facciano tutti questi esercizi di teoria della misura ma è bene saperli applicare in automatico quando serve.

Sia  $1 \leq p < +\infty$ ,  $L^p(\mathbb{R}^d, \mu)$  con  $\mu$  la misura di Lebesgue. Le funzioni semplici costituite da somme finite di insiemi di misura finita sono dense in  $L^p(\mathbb{R}^d)$ .

Prendiamo una base numerabile di  $\mathbb{R}^d$  e la indichiamo con  $\mathcal{B}$ . L'insieme

$$Y = \left\{ \sum_{i=1}^n \alpha_i \mathbb{1}_{B_i} \mid B_i \in \mathcal{B}, \alpha_i \in \mathbb{Q} \right\}$$

è numerabile. Vediamo che è denso in  $L^p(\mathbb{R}^d)$ .

*Idea.* È sufficiente approssimare le funzioni semplici a somma finita  $\sum_{i=1}^N \alpha_i \mathbb{1}_{E_i}$ . In particolare, ci basta approssimare  $\alpha \cdot \mathbb{1}_E$ . Essendo  $\alpha \in \mathbb{R}$  troviamo una successione di razionali  $\alpha_j$  tali che  $\alpha_j \xrightarrow{j \rightarrow \infty} \alpha$ . Dunque, rimane da approssimare l'insieme  $E$ .

Fissiamo  $E$  e supponiamo dapprima  $E$  aperto. Possiamo scrivere  $E$  come unione arbitraria di elementi della base  $\mathcal{B}$

$$E = \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i.$$

Per approssimare  $E$  consideriamo gli insiemi  $E_N = \bigcup_{i=1}^N B_i$ . Otteniamo  $|E| = \lim_N |E_N|$ , da cui  $|E \setminus E_N| \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} 0$ . Concludiamo notando che il caso  $E$  arbitrario si fa approssimandolo con una famiglia di aperti.

Per  $\ell^p$  con  $p < +\infty$  definiamo

$$Y = \{ \{x_n\} \mid x_n = 0 \text{ definitivamente}, x_n \in \mathbb{Q} \}$$

e verifico che è numerabile e separabile.

**Domanda.** Cosa succede per  $p = +\infty$ ?

Consideriamo  $L^\infty([0, +\infty], \mu)$  con  $\mu$  di Lebesgue e  $E_n = [n, n+1]$ . Definiamo l'insieme

$$Z = \left\{ \forall J \subset \mathbb{N} \quad u = \sum_{j \in J} \mathbb{1}_{E_j} \right\}.$$

$Z$  ha la cardinalità delle parti di  $\mathbb{N}$  cioè è più che numerabile. Osserviamo che per ogni  $u, v \in Z$ ,  $u \neq v$  si ha che  $\|u - v\|_{L^\infty(\mathbb{R})} = 1$ . Se per assurdo esistesse un insieme denso e numerabile  $D$  in  $\ell^\infty$ , per definizione di insieme denso dovremmo trovare per ogni palla di raggio minore di 1 e centro in un qualsiasi elemento di  $Z$ , un elemento di  $D$ . Ma questo è impossibile in quanto  $D$  ha cardinalità numerabile e  $Z$  la cardinalità del continuo.

Vediamo in un altro modo che  $\ell^\infty$  non è separabile. Se per assurdo  $Y = \{\underline{x}^k\}_{k \in \mathbb{N}}$  fosse denso in  $L^\infty$ , allora potremmo definire un elemento  $z \in \ell^\infty$  tale che  $\|\underline{x}^k - z\|_{\ell^\infty} \geq 1$  per ogni  $k$ .

Definiamo  $z = \{z_n\}$  come segue

$$z_n = \begin{cases} 0 & \text{se } |x_n^n| > 1 \\ 2 & \text{se } |x_n^n| \leq 1 \end{cases}.$$

## 2.5 Nozioni di convergenza per successioni di funzioni

Fissiamo  $X, \mathcal{A}, \mu$  e prendiamo  $f, f_n: X \rightarrow \mathbb{R}$  (o  $\mathbb{R}^k$ ) misurabili.

**Definizione.** Riportiamo le definizioni di alcune nozioni di convergenza.

- **Uniforme** :  $\forall \varepsilon \exists n_\varepsilon$  tale che  $\|f - f_n\| < \varepsilon \quad \forall n > n_\varepsilon$ .
- **Puntuale** :  $f_n(x) \rightarrow f(x) \quad \forall x \in X$ .
- **Puntuale  $\mu$ -quasi ovunque** :  $f_n(x) \rightarrow f(x)$  per  $\mu$ -q.o.  $x \in X$ .
- **In  $L^p$**  :  $\|f_n - f\|_p \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ .
- **In misura** :  $\forall \varepsilon > 0 \quad \mu(\{x \mid |f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon\}) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ .

**Osservazione.** Abbiamo le seguenti implicazioni ovvie delle diverse nozioni di convergenza:

$$\text{uniforme} \Rightarrow \text{puntuale} \Rightarrow \text{puntuale } \mu \text{ q.o.}$$

**Proposizione.** Valgono le seguenti.

- Data  $f_n \rightarrow f$  q.o. e  $\mu(X) < +\infty$ , allora  $f_n \rightarrow f$  in misura.
- (*Severini-Egorov*): Data  $f_n \rightarrow f$  q.o. e  $\mu(X) < +\infty$ , allora  $\forall \delta > 0$  esiste  $E \in \mathcal{A}$  tale che  $\mu(E) < \delta$  e  $f_n \rightarrow f$  uniformemente su  $X \setminus E$ .
- $f_n \rightarrow f$  in  $L^p$ ,  $p < +\infty$ , allora  $f_n \rightarrow f$  in misura.
- $f_n \rightarrow f \in L^\infty$ , allora  $\exists E$  tale che  $\mu(E) = 0$  e  $f_n \rightarrow f$  uniformemente su  $X \setminus E$ .
- $f_n \rightarrow f$  in misura, allora  $\exists n_k$  tale che  $f_{n_k} \rightarrow f$   $\mu$ -q.o.
- $f_n \rightarrow f$  in  $L^p$ , allora  $\exists n_k$  tale che  $f_{n_k} \rightarrow f$   $\mu$ -q.o.

**Osservazione.** In i) e ii) l'ipotesi  $\mu(X) < +\infty$  è necessaria. Infatti, preso  $X = \mathbb{R}$  e  $f_n = \mathbb{1}_{[n, +\infty)}$  si ha che  $f_n \rightarrow 0$  ovunque ma  $f_n$  non converge a 0 in misura, e  $f_n$  non converge a 0 uniformemente in  $\mathbb{R} \setminus E$  per ogni  $E$  di misura finita.

**Lemma** (disuguaglianza di Markov). Data  $g: X \rightarrow [0, +\infty]$  misurabile e  $m > 0$  si ha

$$\mu(\{x \in X \mid g(x) \geq m\}) \leq \frac{1}{m} \int_X g \, d\mu$$

**Dimostrazione.** Poniamo  $E := \{x \in X \mid g(x) \geq m\}$ . Osserviamo che  $g \geq m \cdot \mathbb{1}_E$ . Dunque vale

$$\int_X g \, d\mu \geq \int_X m \cdot \mathbb{1}_E \, d\mu = m \cdot \mu(\{x \in X \mid g(x) \geq m\}).$$

□

**Lemma** (Borel-Cantelli). Dati  $(E_n) \subset \mathcal{A}$  tali che  $\sum \mu(E_n) < +\infty$ , l'insieme

$$E := \{x \in X \mid x \in E_n \text{ frequentemente}\}$$

ha misura nulla. Cioè per  $\mu$ -q.o.  $x$ ,  $x \notin E_n$  definitivamente (in  $n$ .)

**Dimostrazione.** Osserviamo che

$$E = \bigcap_{m=1}^{\infty} \left( \underbrace{\bigcup_{n=m}^{\infty} E_n}_{F_m} \right).$$

Allora

$$\mu(E) \underbrace{=}_{F_m \downarrow E \text{ \& } \mu(F_1) < +\infty} \lim_{m \rightarrow \infty} \mu(F_m) \leq \lim_{m \rightarrow \infty} \underbrace{\sum_{n=m}^{\infty} \mu(E_n)}_{\text{coda serie convergente}} = 0.$$

**Osservazione.** L'ipotesi  $\sum \mu(E_n) < +\infty$  non può essere sostituita con  $\mu(E_n) \rightarrow 0$ .

Ora dimostriamo la proposizione.

**Dimostrazione.** Definiamo gli insiemi

$$A_n^\varepsilon := \{x \mid |f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon\},$$

$$B_m^\varepsilon := \{x \mid |f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon \text{ per qualche } n \geq m\} = \bigcup_{n=m}^{\infty} A_n^\varepsilon,$$

$$B^\varepsilon := \{x \mid |f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon \text{ frequentemente}\} = \{x \in A_n^\varepsilon \text{ frequentemente}\} = \bigcap_{m=1}^{\infty} B_m^\varepsilon.$$

i) Per ipotesi,  $f_n \rightarrow f$  quasi ovunque, cioè  $\mu(B^\varepsilon) = 0$  per ogni  $\varepsilon > 0$ , ma  $B_m^\varepsilon \downarrow B^\varepsilon$  e  $\mu(X) < +\infty$ . Allora

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} \mu(B_m^\varepsilon) = \mu(B^\varepsilon) = 0 \implies \lim_{m \rightarrow \infty} \mu(A_m^\varepsilon) = 0.$$

ii) Dalla dimostrazione precedente, abbiamo  $\lim_{m \rightarrow \infty} \mu(B_m^\varepsilon) = 0$ . Allora per ogni  $k$  esiste un  $m_k$  tale che  $\mu(B_{m_k}^{1/k}) \leq \delta/2^k$ . Poniamo  $E := \bigcup_k B_{m_k}^{1/k}$  per ogni  $k$ ; allora  $\mu(E) \leq \delta$ . Inoltre,

$$\begin{aligned} x \in X \setminus E &\implies x \notin B_{m_k}^{1/k} \forall k \iff x \notin A_n^{1/k} \forall k, n \geq m_k \\ &\implies |f(x) - f_n(x)| < \frac{1}{k} \quad \forall k, n \geq m_k \\ &\implies \sup_{x \in X \setminus E} |f(x) - f_n(x)| \leq \frac{1}{k} \quad \forall k, n \geq m_k \\ &\implies f - f_m \text{ uniformemente su } X \setminus E. \end{aligned}$$

iii) Dobbiamo mostrare che per ogni  $\varepsilon > 0$   $\mu(A_n^\varepsilon) \xrightarrow{n} 0$ . Usando la disuguaglianza di Markov ottengo

$$\mu\left(A_n^\varepsilon = \left\{x \mid \overbrace{|f_n(x) - f(x)|^p}^g \geq \varepsilon^p\right\}\right) \leq \frac{1}{\varepsilon^p} \int_X g \, d\mu = \frac{1}{\varepsilon^p} \|f_n - f\|_p^p \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

iii') Definiamo  $E_n := \{x \mid |f_n(x) - f(x)| > \|f_n - f\|_\infty\}$  per ogni  $n$ , allora  $\mu(E_n) = 0$ . Poniamo  $E = \bigcup_n E_n$  e  $\mu(E) = 0$ , dunque

$$\sup_{x \in X \setminus E} |f_n(x) - f(x)| \leq \|f_n - f\|_\infty \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

iv) Per ipotesi,  $f_n \rightarrow f$  in misura, cioè

$$\begin{aligned} \forall \varepsilon > 0 \quad \mu(A_n^\varepsilon) &\xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 \\ &\implies \forall k \exists n_k: \mu(A_{n_k}^{1/k}) \leq \frac{1}{2^k} \\ &\implies \sum_k \mu(A_{n_k}^{1/k}) < +\infty. \end{aligned}$$

Allora per Borel-Cantelli, si ha per  $\mu$ -quasi ogni  $x$ ,  $x \notin A_{n_k}^{1/k}$  definitivamente in  $k$ , cioè  $\|f_{n_k}(x) - f(x)\| < 1/k$  definitivamente in  $k$ , cioè  $f_{n_k}(x) \xrightarrow{k} f(x)$ .

v) Vogliamo mostrare che  $f_n \rightarrow f$  in  $L^p \implies \exists n_k$  tale che  $f_{n_k} \rightarrow f$  quasi ovunque. Consideriamo due casi

- se  $p < +\infty$ , allora  $f_n \rightarrow f$  in  $L^p \implies f_n \rightarrow f$  in misura, da cui  $\exists n_k$  tale che  $f_{n_k} \rightarrow f$  quasi ovunque
- se  $p = +\infty$ , allora  $f_n \rightarrow f$  uniformemente su  $X \setminus E$  con  $\mu(E) = 0 \implies f_n \rightarrow f$  puntualmente su  $X \setminus E \implies f_n \rightarrow f$  quasi ovunque.

□

## 2.6 Controesempi sulle convergenze

Vediamo un controesempio che mostra che tutte le implicazioni sui vari tipi di convergenza sono ottimali ovvero

- i)  $f_n \rightarrow f$  in misura  $\not\Rightarrow f_n \rightarrow f$  q.o.
- ii)  $f_n \rightarrow f$  in  $L^p$  con  $p < +\infty \not\Rightarrow f_n \rightarrow f$  q.o.
- iii)  $\mu(E_n) \rightarrow 0 \not\Rightarrow$  per q.o  $x$  si ha  $x \notin E_n$  definitivamente.

**Dimostrazione.** Consideriamo gli insiemi  $I_1 = [1, 1 + \frac{1}{2}]$ ,  $I_2 = [1 + \frac{1}{2}, 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}]$ , ...

$$I_n := \left[ \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}, \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k} \right]$$

e consideriamo la loro proiezione “modulo”  $[0, 1]$  usando la funzione  $p: \mathbb{R} \rightarrow [0, 1)$  *parte frazionaria* data da

$$p(x) := x - \lfloor x \rfloor$$

e chiamiamo  $E_n := p(I_n)$ . Per ogni  $n$  abbiamo che  $|I_n| = |E_n| = 1/n$  e  $\bigcup_n I_n = [1, +\infty)$  (in quanto  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = +\infty$ ) e quindi ogni  $x \in [0, 1)$  appartiene ad  $E_n$  per infiniti  $n$  ed in particolare questo mostra la iii).

Per la i) basta notare che  $\mathbb{1}_{E_n} \rightarrow 0$  in misura (in quanto  $|E_n| \rightarrow 0$ ) ma  $\mathbb{1}_{E_n} \not\rightarrow 0$  q.o., anzi  $\forall x \in [0, 1) \mathbb{1}_{E_n}(x) \not\rightarrow 0$  e la ii) segue analogamente. □

## 2.7 Approssimazioni di funzioni in $L^p$

Vediamo ora alcune classi di funzioni dense in  $L^p$  che risulteranno essere un utile strumento da usare nelle dimostrazioni.

**Nota.** Ricordiamo la nozione di insieme denso in uno spazio metrico. Sia  $(X, d)$  uno spazio metrico e  $Y \subset X$ . Allora  $Y$  è denso in  $X$  se e solo se per ogni  $x \in X$ , esiste una successione  $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$  in  $Y$  tale che  $x = \lim_n y_n$ .

Per ora sia  $(X, \mathcal{A}, \mu)$  in generale.

**Proposizione 1.** Le funzioni limitate in  $L^p$  sono dense in  $L^p$ .

**Dimostrazione.** Data  $f \in L^p(X)$  cerchiamo una successione di funzioni  $f_n \in L^p(X)$  limitate tali che  $f_n \rightarrow f$  in  $L^p$ , consideriamo

$$f(x) := (f(x) \wedge n) \vee (-n)$$

vorremmo mostrare che  $f_n \rightarrow f$  in  $L^p$  ovvero

$$\|f_n - f\|_p^p = \int_X |f_n - f|^p d\mu \rightarrow 0$$

intanto osserviamo che, per la *convergenza puntuale*, basta osservare che se  $n \geq |f(x)|$  abbiamo che  $\forall x \ f_n(x) = f(x) \implies f_n(x) \xrightarrow{n} f(x) \implies |f_n(x) - f(x)|^p \rightarrow 0$ .

Per concludere basta applicare *convergenza dominata* usando come dominazione direttamente  $|f(x) - f_n(x)| \leq |f(x)| \implies |f(x) - f_n(x)|^p \leq |f(x)|^p$  e notiamo che  $|f|^p \in L^1(X)$ .  $\square$

**Proposizione 2.** Sia<sup>1</sup>  $\widetilde{\mathcal{F}} := \text{Span}(\{\mathbb{1}_E \mid E \in \mathcal{A}, \mu(E) < +\infty\})$ , allora  $\widetilde{\mathcal{F}}$  è denso in  $L^p(X)$ .

**Dimostrazione.** Data  $f \in L^p(X)$  cerchiamo una successione che approssima  $f$  in  $\widetilde{\mathcal{F}}$ .

- *Caso 1:* Se  $f \geq 0$  allora fissiamo  $\varepsilon > 0$  e per ogni  $k = 1, 2, \dots$  e poniamo

$$A_\varepsilon^k := \{x \mid k\varepsilon \leq f(x) \leq (k+1)\varepsilon\}$$

risulta che  $A_\varepsilon^k$  è misurabile ed ha misura finita<sup>2</sup>. Ora consideriamo la successione di funzioni parametrizzata da  $\varepsilon$  data da

$$f_\varepsilon(x) := \sum_{1 \leq k \leq 1/\varepsilon^2} k\varepsilon \cdot \mathbb{1}_{A_\varepsilon^k}(x) \in \widetilde{\mathcal{F}}$$

Osserviamo che vale anche  $\max f_\varepsilon(x) = \max\{k\varepsilon \mid k\varepsilon \leq f(x) \text{ e } k \leq 1/\varepsilon^2\}$  e mostriamo la seguente<sup>3</sup>

$$\int_X |f(x) - f_\varepsilon(x)|^p d\mu(x) \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0$$

- *Convergenza puntuale:* Per l'identità precedente abbiamo che  $0 \leq f(x) - f_\varepsilon(x) \leq \varepsilon$  se  $f(x) \leq 1/\varepsilon$ .
- *Dominazione:* Possiamo usare nuovamente  $|f(x) - f_\varepsilon(x)|^p \leq |f(x)|^p < +\infty$  in quanto  $f \in L^p(X)$ .
- *Caso 2:* Sia  $f: X \rightarrow \mathbb{R}$  allora si può rifare la dimostrazione precedente oppure si può semplicemente considerare  $f_\varepsilon := (f^+)_\varepsilon - (f^-)_\varepsilon$ .
- *Caso 3:* Generalizziamo la proposizione al caso di  $f: X \rightarrow \mathbb{R}^d$  come segue

**Proposizione 2bis** (Generalizzata). Sia  $\widetilde{\mathcal{F}} := \left\{ \sum_i \alpha_i \mathbb{1}_{E_i} \mid \alpha_i \in \mathbb{R}^d, E_i \in \mathcal{A}, \mu(E_i) < +\infty \right\}$ .

Allora  $\widetilde{\mathcal{F}}$  è denso in  $L^p(X; \mathbb{R}^d)$ .

**Dimostrazione.** (Idea) Basta approssimare componente per componente.

<sup>1</sup>Lo span è inteso come combinazioni lineari

<sup>2</sup>È misurabile in quanto preimmagine di un misurabile, ed ha misura finita in quanto  $f \in L^p(X)$ .

<sup>3</sup>Notiamo che qui stiamo applicando il teorema di *convergenza dominata* su una famiglia parametrizzata da  $\varepsilon$  e non su una successione ma si può verificare facilmente che il teorema (ed anche gli altri risultati di convergenza di successioni di funzioni) si può estendere semplicemente prendendo  $\varepsilon = 1/n$  per  $n \rightarrow \infty$ .

□

Sia ora  $X$  uno spazio metrico e  $\{\text{aperti}\} \subset \mathcal{A}$ .

**Proposizione 3.** Sia  $\widetilde{\mathcal{S}}_\ell := \{\sum_i \alpha_i \mathbb{1}_{E_i} \mid \alpha_i \in \mathbb{R}^d, E_i \in \mathcal{A}, \mu(E_i) < +\infty, E_i \text{ limitati}\}$  allora  $\widetilde{\mathcal{S}}_\ell$  è denso in  $L^p(X; \mathbb{R}^d)$  per  $p < +\infty$ .

**Osservazione.** In generale l'enunciato non vale per  $p = +\infty$ . Ad esempio preso  $L^\infty(\mathbb{R})$  e  $f = 1$  non si può approssimare con funzioni a supporto limitato (come quelle in  $\widetilde{\mathcal{S}}_\ell$ . In particolare data  $g$  con supporto  $A$  limitato  $|f - g| = 1$  su  $\mathbb{R} \setminus A$  e siccome  $|\mathbb{R} \setminus A| > 0$  abbiamo  $\|f - g\|_\infty \geq 1$ ).

**Dimostrazione.** ( $\widetilde{\mathcal{S}}_\ell$  è denso in  $L^p$ ) Per prima cosa vediamo un lemma che useremo assieme alla proposizione precedente.

**Lemma 1.** Dato  $E \in \mathcal{A}, \mu(E) < +\infty$  esiste  $E_n \in \mathcal{A}$  con  $E_n$  limitati tali che  $E_n \subset E$  e  $\mu(E \setminus E_n) \rightarrow 0$  e quindi  $\|\mathbb{1}_E - \mathbb{1}_{E_n}\|_p = \mu(E \setminus E_n)^{1/p} \xrightarrow{n} 0$  (e  $\mathbb{1}_{E_n} \in \widetilde{\mathcal{S}}_\ell$ ).

**Dimostrazione.** Dato  $E$  con  $\mu(E) < +\infty$  prendiamo  $x_0 \in X$  e poniamo  $E_n := E \cap \mathcal{B}(x_0, n)$ ;  $E_n \subset E$  e  $E \setminus E_n \downarrow \emptyset \implies \mu(E \setminus E_n) \xrightarrow{n} 0$ .

Intuitivamente  $\widetilde{\mathcal{S}}_\ell$  è denso in  $\mathcal{S}$  che a sua volta è denso in  $L^p$  (usando la definizione di densità topologica la tesi è quasi ovvia mentre usando la definizione per successioni bisogna passare per un procedimento diagonale). □

Ora siano  $X \subset \mathbb{R}^n, \mu = \mathcal{L}^n$  e  $C_C(\mathbb{R}^n) := \{\text{funzioni a supporto compatto}\}$ , dove il **supporto** è definito come la chiusura dell'insieme dei punti in cui la funzione è non zero  $\text{supp}(f) := \overline{\{x \mid f(x) \neq 0\}}$ , in quanto per le funzioni continue l'insieme  $\{x \mid f(x) \neq 0\}$  è sempre aperto e dunque mai veramente compatto, a parte quando è vuoto.

**Proposizione 4.** Le funzioni in  $C_C(\mathbb{R}^n)$  ristrette a  $X$  sono dense<sup>1</sup> in  $L^p(X)$  per  $p < +\infty$ .

Vediamo prima alcuni lemmi.

**Lemma 2.** (di Urysohn) Dati  $C_0, C_1$  chiusi disgiunti in  $X$  spazio metrico esiste una funzione  $f: X \rightarrow [0, 1]$  continua tale che  $f = 0$  su  $C_0$  e  $f = 1$  su  $C_1$ .

**Dimostrazione.** Posta  $d(x, C) = \inf\{d(x, y) \mid y \in C\}$  basta considerare

$$f(x) = \frac{d(x, C_0)}{d(x, C_0) + d(x, C_1)}.$$

**Lemma 3.** Dato  $E \subset \mathbb{R}^n$  limitato (e quindi di misura finita) esiste  $f_\varepsilon \in C_C(\mathbb{R}^n)$  tale che  $f_\varepsilon \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \mathbb{1}_E$  in  $L^p(\mathbb{R}^n)$  e quindi in  $L^p(X)$ .

**Dimostrazione.** Per regolarità della misura di Lebesgue abbiamo che per ogni  $\varepsilon$  esistono  $C_\varepsilon \subset E \subset A_\varepsilon$  tali che  $|A_\varepsilon \setminus C_\varepsilon| \leq \varepsilon$ . Per il Lemma 2 possiamo definire la classe di funzioni  $f_\varepsilon: \mathbb{R}^n \rightarrow [0, 1]$  continue tali che

$$f_\varepsilon = 1 \text{ su } C_\varepsilon \quad f_\varepsilon = 0 \text{ su } \mathbb{R}^n \setminus A_\varepsilon.$$

In particolare, sappiamo che su  $A_\varepsilon \setminus C_\varepsilon$  vale  $|f_\varepsilon - \mathbb{1}_E| \leq 1$ . Allora,

$$\begin{aligned} \|f_\varepsilon - \mathbb{1}_E\|_p^p &= \int_{A_\varepsilon \setminus C_\varepsilon} |f_\varepsilon - \mathbb{1}_E|^p dx \leq \int_{A_\varepsilon \setminus C_\varepsilon} \mathbb{1}_{A_\varepsilon \setminus C_\varepsilon} dx = |A_\varepsilon \setminus C_\varepsilon|^{1/p} \leq \varepsilon^{1/p} \\ &\implies \|f_\varepsilon - \mathbb{1}_E\|_p^p \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0. \end{aligned}$$

---

<sup>1</sup>È denso anche l'insieme delle funzioni continue a supporto compatto ristretto a  $X$  e si indica con  $\mathcal{C}_C^0(\mathbb{R}^n)$ .



□

**Dimostrazione Proposizione 4.** Per la Proposizione 3 basta approssimare la classe delle funzioni a supporto limitato (e finito). Dunque, per il Lemma 3 si ha la tesi.

## 2.8 Esercitazione del 13 ottobre

### 2.8.1 Esercizi su spazi $L^p(X)$ al variare di $p$ e dello spazio $X$

Sia  $X \subset \mathbb{R}^n$ ,  $\mu$  la misura di Lebesgue e  $1 \leq p_1 \leq p_2$ .

**Domanda.** Possiamo confrontare gli spazi  $L^{p_1}(X)$  e  $L^{p_2}(X)$ ? In generale no.

Vediamo informalmente perché. Posto  $X = (0, +\infty)$ , gli integrali

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+x)^{\beta p}} dx, \quad \int_0^{+\infty} \frac{1}{x^{\beta p}} \cdot \mathbb{1}_{[0,1]}(x) dx = \int_0^1 \frac{1}{x^{\beta p}} dx$$

sono maggiorati dall'integrale di  $1/x^\alpha$  dove l'esponente  $\alpha$  è rispettivamente più piccolo e più grande di  $\beta \cdot p$ .

Utilizziamo questa intuizione per vedere formalmente che gli spazi  $L^p(0, +\infty)$  non sono confrontabili.

Cerchiamo una funzione  $f \in L^{p_1}(0, +\infty) \setminus L^{p_2}(0, +\infty)$  e una funzione  $g \in L^{p_2}(0, +\infty) \setminus L^{p_1}(0, +\infty)$ . La funzione  $f$  definita come segue

$$f(x) := \begin{cases} 1/x^\beta & x \in (0, 1) \\ 0 & x \geq 1 \end{cases}$$

ha integrale

$$\int_0^{+\infty} f(x)^{p_1} dx = \int_0^1 \frac{1}{x^{\beta p_1}} dx < +\infty \iff \beta \cdot p_1 < 1$$

e

$$\int_0^{+\infty} f(x)^{p_2} dx = \int_0^1 \frac{1}{x^{\beta p_2}} dx = +\infty \iff \beta \cdot p_2 \geq 1.$$

Dunque, basta prendere  $\beta \in [1/p_2, 1/p_1)$ .

Ora cerchiamo  $g \in L^2(0, +\infty) \setminus L^1(0, +\infty)$ . Definiamo  $g(x)$  come segue

$$g(x) := \frac{1}{(1+x)^\alpha}$$

da cui

$$\int_0^{+\infty} g(x)^{p_2} dx < +\infty \iff \alpha \cdot p_2 > 1 \quad \text{e} \quad \int_0^{+\infty} g(x)^{p_1} dx = +\infty \iff \alpha \cdot p_1 \leq 1$$

*Conclusione.* In generale non c'è confrontabilità fra gli spazi  $L^p$ . La confrontabilità, dipende infatti dall'insieme  $X$  su cui sono definiti.

**Nota.** Un caso particolare è dato ponendo  $p_1 < p_2$  e  $\mu(X) < +\infty$ . In tal caso  $L^{p_2}(X) \subset L^{p_1}(X)$ .

Data  $f \in L^{p_2}(X)$ , cioè con  $\int_X |f|^{p_2} d\mu < +\infty$  vediamo che  $\int_X |f|^{p_1} d\mu < +\infty$ .

Usiamo Hölder:

$$\begin{aligned} \int_X |f|^{p_1} d\mu &\leq \left( \int_X \overbrace{|f(x)|^{p_1 p_2}}^{|h(x)|^p} d\mu \right)^{1/p_2} \cdot \left( \int_X 1^q d\mu \right)^{1/q} \underset{p=p_1/p_2}{\leq} \left( \int_X |f|^{p_2} d\mu \right)^{p_2/p_1} \left( \int_X 1^q d\mu \right)^{1/q} \\ &\underset{q=(1-\frac{1}{p})^{-1}=\frac{p}{p-1}=\frac{p_2/p_1}{p_2-p_1}}{=} \|f\|_{L^{p_2}(X)}^{p_1} \cdot \mu(X)^{\frac{p_2-p_1}{p_2}}. \end{aligned}$$

Dunque

$$\|f\|_{L^{p_1}(X)} \leq \|f\|_{L^{p_2}(X)} \cdot \mu(X)^{\frac{p_2-p_1}{p_1 p_2}}.$$

L'inclusione

$$\begin{aligned} i: L^{p_2} &\rightarrow L^{p_1}(X) \\ f &\mapsto f \end{aligned}$$

è ben definita per quanto fatto sopra.

**Esercizio.** [TO DO] Vedere con quale topologia l'inclusione risulta continua.

**Esercizio.** [TO DO] Dato  $p \geq 1$ , stabilire se esistono  $X, \mu, f \in L^p(X)$  e  $f \notin L^q(X)$  per ogni  $q \neq p, q \geq 1$ .

*Suggerimento.* Pensare a  $X = (0, +\infty)$ ,  $\mu$  misura di Lebesgue.

**Osservazione.**  $L^p(X)$  è uno spazio vettoriale di dimensione infinita, ossia ogni base algebrica ha cardinalità infinita. Vediamo il caso  $X = (0, 1)$ . Per trovare una base infinita, cerchiamo per ogni  $N \in \mathbb{N}$ , un insieme di funzioni  $f_1, \dots, f_N \in L^p(0, 1)$  tali che siano linearmente indipendenti. Vale a dire, presi  $\lambda_1, \dots, \lambda_N \in \mathbb{R}$  vale  $\lambda_1 f_1 + \dots + \lambda_N f_N = 0$  se e solo se  $\lambda_1 = \dots = \lambda_N = 0$ .

Ad esempio, definiamo  $f_i := \mathbb{1}_{i/N, (i+1)/N}$  (questa costruzione si può riprodurre per ogni  $N \in \mathbb{N}$ ).

Ricordiamo che, essendo  $L^p(X)$  uno spazio metrico, dato  $Y \subset L^p$  vale la seguente caratterizzazione:

$Y$  è compatto  $\iff Y$  è compatto per successioni  $\iff Y$  chiuso e totalmente limitato.

**Osservazione.**  $Y \subset L^p(X)$  è un sottoinsieme che eredita la norma  $\|\cdot\|_{L^p}$ :

$Y$  è completo  $\iff Y$  è chiuso.

**Osservazione.** In  $L^p$  i sottoinsiemi chiusi e limitati non sono compatti<sup>1</sup>! In particolare le palle

$$Y = \{f \in L^p \mid \|f\|_{L^p} \leq 1\}$$

non sono compatte.

Ad esempio, mostriamo che in  $L^p(0, 1)$  le palle

$$B = \{f \in L^p \mid \|f\|_{L^p} \leq 1\}$$

non sono compatte. Per farlo, esibiamo una successione  $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset B$  che non ammette sottosuccessioni convergenti. La costruiamo in modo che non abbia sottosuccessioni di Cauchy

$$f_n: (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}, \quad \|f_n - f_m\|_{L^p} \geq c_0 > 0 \quad \forall n \neq m.$$

<sup>1</sup>Uno spazio metrico è compatto se e solo se è completo e totalmente limitato. Inoltre, uno spazio metrico  $X$  si dice totalmente limitato se  $\forall \varepsilon > 0$  esiste  $B_\varepsilon^1, \dots, B_\varepsilon^n$  tale che  $X \subset \bigcup_{i=1}^n B_\varepsilon^i$ .

Cerco  $A_n \subset (0, 1)$  tale che  $|A_n \cap A_m| = 0$  per ogni  $n \neq m$ . Definiamo  $f_n$  come segue

$$f_n(x) := \begin{cases} 0 & \text{se } x \in (0, 1) \setminus (1/(n+1), 1/n) \\ c_n > 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

dove  $c_n$  è tale che

$$\left( \int_{1/(n+1)}^{1/n} c_n^p \right)^{1/p} = 1 \iff c_n^p \cdot (1/n - 1/(n+1)) = 1 \iff c_n^p = n \cdot (n+1).$$

Calcoliamo ora  $\|f_n - f_m\|_{L^p}^p$  con  $n \neq m$ :

$$\int_0^1 |f_n(x) - f_m(x)|^p dx = \int_{(1/n, 1/(n+1)) \cup (1/(m+1), 1/m)} |f_n - f_m|^p dx = \int_{1/(n+1)}^{1/n} |f_n|^p dx + \int_0^1 |f_m|^p dx = 1 + 1 = 2.$$

Si osserva che quanto detto sopra vale anche per  $p = +\infty$ .

**Esercizio.** [TO DO] Sia  $E = \{f \in L^1(1, +\infty) \mid |f(x)| \leq 1/x^2 \text{ e } x \in [1, +\infty)\}$ .

- $E$  è limitato in  $L^1$ ?
- $E$  è chiuso in  $L^1$ ?
- $E$  è compatto in  $L^1$ ?

**Soluzione.**

i) Dimostriamo che  $\|f\|_{L^1} < C$  per ogni  $f \in E$ .

$$\|f\|_{L^1} = \int_1^\infty |f(x)| dx \leq \int_1^\infty 1/x^2 dx < C.$$

ii)  $E$  è chiuso. Ci basta dimostrare che se  $\{f_n\} \in E$  è convergente a  $f$  allora  $f \in E$ . Questo equivale a dimostrare che  $|f(x)| < 1/x^2$ . Dal fatto che  $\{f_n\} \in E$  è convergente in  $L^1$ , abbiamo che esiste una sottosuccessione  $\{f_{n_k}\}$  che converge puntualmente a  $f$ . Essendo che  $|f_{n_k}| < 1/x^2$  per ogni  $x \in [1, +\infty)$ , per la continuità del modulo segue la tesi.

iii) Da fare [TO DO]

**Esercizio.** [TO DO]

- Dire se  $f_n(x) = x^n$ ,  $n = 0, \dots, N$  è un insieme di funzioni linearmente indipendenti in  $L^p([0, 1])$ .
- Dire se  $\{f_n\} \subset L^p(0, 1)$  è compatta in  $L^p(0, 1)$ .

*Suggerimento.* Studiare il limite puntuale.

**Soluzione.**

i) Dimostriamolo per induzione. *Passo base.* [TO DO]

*Passo induttivo.* ( $n-1 \geq n$ ) Vediamo che se  $a_1 \cdot 1 + a_2 \cdot x + \dots + a_{n-1} \cdot x^{n-1} + a_n \cdot x^n = 0 \implies a_1 = \dots = a_n = 0$ .

$$\begin{aligned} a_1 \cdot 1 + a_2 \cdot x + \dots + a_{n-1} \cdot x^{n-1} &= -a_n \cdot x^n \\ \downarrow + a_n \cdot x^n \\ (a_1 + a_n) \cdot 1 + (a_2 + a_n) \cdot x + \dots + (a_{n-1} + a_n) \cdot x^{n-1} &= 0 \end{aligned}$$

essendo che  $1, x^1, \dots, x^{n-1}$  sono linearmente indipendenti per ipotesi induttiva, vale  $(a_i + a_n) = 0$  per ogni  $i = 1, \dots, n-1$ , da cui  $a_i = 0$  per ogni  $i = 1, \dots, n$ .

ii) Dimostriamo che non è compatto. Se per assurdo lo fosse, dalla successione  $(f_n)$  potremmo estrarre una sottosuccessione convergente  $(f_{n_k})$  in  $L^p([0, 1])$ ; denotiamo il limite con  $f$ . Per i risultati visti sulla convergenza, da  $(f_{n_k})$  potremmo estrarre una sottosuccessione convergente quasi ovunque a  $f$ . Ma questo è assurdo perché  $\lim_n f_n = +\infty$ .

## 2.8.2 Spazi $\ell^p$

Prendiamo  $X = \mathbb{N}$  e  $\mu = \#$  la misura che conta i punti.

**Osservazione.** Definiamo

$$\ell^p = L^p(\mathbb{N}, \#) = \left\{ (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \left| \sum_{n=0}^{+\infty} |x_n|^p < +\infty \right. \right\}$$

con  $p \geq 1$  e  $p \neq +\infty$ , e

$$\ell^\infty = \{\text{successioni limitate}\} = \left\{ (x_n) \left| \sup_{n \in \mathbb{N}} |x_n| < +\infty \right. \right\}.$$

**Esempio** (di insieme non compatto in  $\ell^1$ ). Consideriamo la successione  $(e_i)$  definita come

$$(e_i)_n := \begin{cases} 0 & \text{se } n \neq i \\ 1 & \text{se } n = i \end{cases}$$

si osserva inoltre che le successioni così definite sono linearmente indipendenti e generano se sono infiniti.

**Esempio** (di insieme compatto in  $\ell^1$ ). Sia  $F = \{(x_n)_n \in \ell^1 \mid |x_n| \leq 1/n^2 \quad \forall n \in \mathbb{N}\}$ . Noto subito che  $F$  è limitato, infatti, presa

$$\underline{x} = (x_n) \in F, \quad \|\underline{x}\|_{\ell^1} = \sum_{n=0}^{+\infty} |x_n| \leq \sum_{n=0}^{+\infty} 1/n^2 < +\infty.$$

$F$  è anche chiuso.

**Osservazione.** Data una successione  $(\underline{x}^k) \subset \ell^1$ , se  $\underline{x}^k \xrightarrow{\ell^1} \underline{x}^\infty$ , vuol dire che

$$\|\underline{x}^k - \underline{x}^\infty\|_{\ell^1} = \sum_{n=0}^{+\infty} |x_n^k - x_n^\infty| \xrightarrow{k} 0.$$

In particolare, per ogni  $n \in \mathbb{N}$  fissato,  $\lim_k (x_n^k - x_n^\infty) = 0$ .

$F$  è chiuso perché se  $(\underline{x}^k) \subset F$  e  $\underline{x}^k \xrightarrow{\ell^1} \underline{x}^\infty$ , allora per ogni  $n \in \mathbb{N}$  vale

$$|x_n^k| \leq 1/n^2 \quad \text{e} \quad \underbrace{\lim_{n \rightarrow +\infty} |x_n^k|}_{x_n^\infty} \leq 1/n^2.$$

Dimostriamo che è compatto per successioni. Prendiamo  $(\underline{x}^k) \subset F$ , ogni componente  $x_n$  è equilimitata, quindi a meno di sottosuccessioni  $x_n^{k_j}$  converge a  $x_n^\infty$ . A meno di diagonalizzare, possiamo supporre che la successione  $k_j$  non dipenda da  $n$ . Inoltre gli elementi  $x_n^{k_j}$  sono dominati da  $y = (1/n^2)$ . Concludiamo usando il teorema di convergenza dominata di Lebesgue.

## 2.9 Complementi su approssimazioni di funzioni in $L^p$

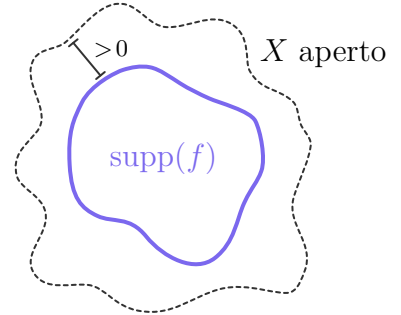
Sia  $X$  misurabile in  $\mathbb{R}^n$  con  $\mu = \mathcal{L}^n$  su  $X$ . In precedenza abbiamo visto che

**Proposizione 3.** Le funzioni in  $C_C(\mathbb{R}^n)$  ristrette a  $X$  sono dense in  $L^p$  se  $p < +\infty$ .

**Osservazione.** Si vede facilmente che  $C_C(\mathbb{R}^n) \subset L^p(\mathbb{R}^n)$ .

**Domanda.** Vale un risultato analogo per le funzioni  $C_C(X)$ ?

Notiamo che dato  $X \subset \mathbb{R}^n$  le funzioni continue su  $X$  hanno supporto compatto solo se  $X$  è aperto in quanto il supporto ha veramente distanza non nulla dal bordo e possiamo estendere la funzione a 0 fuori da  $X$ . [TODO: Esempio con un chiuso in cui le cose non fungono?]



**Proposizione 4.** Sia  $X$  aperto di  $\mathbb{R}^n$ ,  $\mu = \mathcal{L}^n$  allora  $C_C(X)$  è denso in  $L^p$  per ogni  $p < +\infty$

**Dimostrazione.**

- $\mathcal{S}_C := \{\text{funzioni semplici con supporto compatto in } X\}$  è denso in  $L^p(X)$  per ogni  $p < +\infty$ .
- Dato  $E$  relativamente compatto<sup>1</sup> in  $X$  esiste  $f_n \in C_C(X)$  tale che  $f_n \rightarrow \mathbb{1}_E$  in  $L^p$  per ogni  $p < +\infty$ .

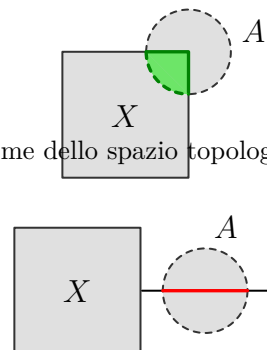
La Proposizione 3 non vale per  $p = +\infty$ , intuitivamente in quanto data  $f \in L^\infty(X)$  discontinua, se trovassimo  $f_n \rightarrow f$  in  $L^\infty(X)$  con  $f_n$  continue avremmo  $f_n \rightarrow f$  *uniformemente* e dunque  $f$  continua.

**Fatto.** In generale vale che data  $f: X \rightarrow \mathbb{R}$  misurabile,  $\|f\|_\infty \leq \sup_{x \in X} |f(x)|$  (detta anche *norma del sup*)

**Esercizio.** Se  $X$  è aperto in  $\mathbb{R}^n$  e  $\mu = \mathcal{L}^n$  e  $f: X \rightarrow \mathbb{R}$  continua, allora  $\|f\|_\infty = \sup_{x \in X} |f(x)|$ .

**Soluzione.** Se per assurdo  $\exists x \in X$  tale che  $\|f\|_\infty < |f(x)|$  allora la continuità di  $f$  implica che esiste un intorno di  $x$  in cui  $\|f\|_\infty < |f(x)|$ ; ma un intorno contiene una palla aperta di misura positiva.  $\nmid$

In particolare possiamo anche estenderci a  $X \subseteq \mathbb{R}^n$  tali che ogni  $A$  aperto relativamente a  $X$  abbia misura positiva.



<sup>1</sup>Un sottospazio relativamente compatto di uno spazio topologico è un sottoinsieme dello spazio topologico la cui chiusura è compatta.

Per spiegare meglio il perché la Proposizione 3 non si estende al caso  $p = +\infty$  consideriamo

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$

e vediamo che  $\nexists f_n: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  tale che  $f_n \rightarrow f$  in  $L^\infty$ .

Se esistesse  $(f_n)_n$ , allora sarebbe di Cauchy rispetto alla norma  $\|\cdot\|_\infty$  allora per continuità  $(f_n)_n$  è di Cauchy anche rispetto alla norma del sup  $\implies f_n \rightarrow \tilde{f}$  uniformemente con  $\tilde{f}$  continua, quindi  $\tilde{f} = f$  quasi ovunque ma questo non è possibile per la  $f$  definita sopra.

(In particolare dato  $E = \{x \mid f(x) = \tilde{f}(x)\}$ , prendiamo  $x_n, y_n \in E$  tali che  $x_n \uparrow 0$  e  $y_n \downarrow 0$  ma i limiti di  $f$  sono 0 e 1  $\zeta$ )

**Teorema** (di Lusin). Dato  $X \subset \mathbb{R}^d, \mu = \mathcal{L}^d$  e data  $f: X \rightarrow \mathbb{R}$  o  $\mathbb{R}^m$  misurabile e  $\varepsilon > 0$ , esiste  $E$  aperto in  $X$  con  $|E| \leq \varepsilon$  tale che  $f$  è continua su  $X \setminus E$  (la restrizione di  $f$  a  $X \setminus E$  è continua)

**Osservazione.** In generale  $f$  può essere non continua in tutti i punti di  $X$ , infatti  $E$  può essere denso e  $X \setminus E$  avere parte interna vuota.

**Lemma** (di estensione di Tietze). Dato  $X$  spazio metrico e  $C \subset X$  chiuso,  $f: C \rightarrow \mathbb{R}$  continua allora  $f$  si estende a una funzione continua su  $X$ .

Usando questo lemma possiamo enunciare nuovamente il teorema precedente come segue

**Teorema** (di Lusin'). Data  $f: X \rightarrow \mathbb{R}$  misurabile e  $\varepsilon > 0$ ,  $\exists E$  aperto con  $|E| \leq \varepsilon$  e  $g: X \rightarrow \mathbb{R}$  continua tale che  $f = g$  su  $X \setminus E$ , inoltre se  $f \in L^p(X)$  e  $p < +\infty$  si può anche chiedere che  $\|f - g\|_p \leq \varepsilon$ .

**Dimostrazione.** Basta trovare  $E$  misurabile (per ottenere  $E$  aperto si usa la regolarità della misura)

- *Caso 1:*  $f \in L^1(X)$  e  $|X| < +\infty$

Abbiamo che  $f \in L^1 \implies \exists f_n$  continue tali che  $f_n \rightarrow f$  in  $L^1 \implies f_n \rightarrow f$  in misura e per Severini-Egorov esiste  $E$  tale che  $|E| \leq \varepsilon$  e  $f_n \rightarrow f$  uniformemente su  $X \setminus E \implies f$  è continua su  $X \setminus E$ .

- *Caso 2:*  $f$  qualunque misurabile e  $|X| < +\infty$

**Lemma.** Dati  $X, \mathcal{A}, \mu$  con  $\mu(X) < +\infty$  e data  $f: X \rightarrow \mathbb{R}$  misurabile e  $\varepsilon > 0$  esiste  $F$  misurabile con  $\mu(F) \leq \varepsilon$  tale che  $f$  è limitata su  $X \setminus F$ .

**Dimostrazione.**  $\forall m > 0$  sia  $F_m := \{x \mid |f(x)| > m\}$  allora  $F_m \downarrow \emptyset \implies \mu(F_m) \downarrow 0$  e quindi esiste  $m$  tale che  $\mu(F_m) \leq \varepsilon$ .

Quindi data  $f$  qualunque misurabile e  $|X| < +\infty$  esiste  $F$  misurabile tale che  $|F| \leq \varepsilon/2$  e con  $f$  limitata su  $X \setminus F \implies f \in L^\infty(X \setminus F) \subset L^1(X \setminus F)$ , dunque per il *Caso 1* esiste  $E$  misurabile tale che  $|E| \leq \varepsilon/2$  e  $f$  è continua su  $X \setminus (E \cup F)$  e  $\mu(E \cup F) \leq \varepsilon$

- *Caso 3:*  $f$  qualunque misurabile

Per ogni  $n$  poniamo  $X_n := X \cap B(0, n)$  per il *Caso 2* esistono  $E_n$  misurabili con  $|E_n| \leq \varepsilon/2^n$  tali che  $f$  è continua su  $X_n \setminus E_n$ , infine prendo  $E := \bigcup_{n=1}^\infty E_n$  con  $\mu(E) \leq \varepsilon \implies f$  è continua su  $X_n \setminus E$  per ogni  $n \implies f$  è continua su  $X \setminus E$ .

□

## 2.10 Appendice

**Proposizione.** Siano  $V, W$  spazi normati,  $T: V \rightarrow W$  lineare. Sono fatti equivalenti

- i)  $T$  è continua in 0.
- ii)  $T$  è continua.
- iii)  $T$  è lipschitziana, cioè esiste una costante  $c < +\infty$  tale che  $\|Tv - Tv'\|_W \leq c \|v - v'\|_V$ .
- iv) Esiste una costante  $c$  tale che  $\|Tv\|_W \leq c \|v\|_V$  per ogni  $v \in V$ .
- v) Esiste una costante  $c$  tale che  $\|Tv\|_W \leq c$  per ogni  $v \in V$ ,  $\|v\|_V = 1$ .

**Dimostrazione.** v)  $\Rightarrow$  iv). Vale la seguente

$$\|Tv\|_W \stackrel{=}{\underbrace{\quad}}_{v=\lambda\tilde{v}, \|\tilde{v}\|_V=1} |\lambda| \|T\tilde{v}\|_W \leq c\lambda = c \|v\|_V \leq 1.$$

iv)  $\Rightarrow$  iii). Vale la seguente

$$\|Tv - Tv'\|_W = \|T(v - v')\|_W \leq c \|v - v'\|_W.$$

iii)  $\Rightarrow$  ii) e ii)  $\Rightarrow$  i) sono ovvie.

i)  $\Rightarrow$  v).  $T$  continua in 0, dunque esiste  $\delta > 0$  tale che

$$\|Tv - T0\|_W \leq 1 \quad \text{se} \quad \|v - 0\|_V \leq \delta,$$

cioè

$$\|Tv\| \leq 1 \quad \text{se} \quad \|v\| \leq \delta,$$

da cui segue che  $\|Tv\| \leq 1/\delta$  se  $\|v\| \leq 1$ . □

**Osservazione.** Le costanti ottimali iii), iv), v) sono uguali e valgono

$$c = \sup_{\|v\|_V \leq 1} \|Tv\|_W.$$

**Esempi.**

- i) Sia  $X, \mathcal{A}, \mu$  coma al solito, con  $\mu(X) < +\infty$ . Allora, dati  $1 \leq p_1 < p_2 \leq +\infty$ , vale

$$L^{p_2}(X) \subset L^{p_1}(X). \quad (\star)$$

Inoltre, l'inclusione  $i: L^{p_2}(X) \rightarrow L^{p_1}(X)$  è continua.

**Dimostrazione.** La dimostrazione di  $(\star)$  segue dalla stima

$$\|u\|_{p_1} \stackrel{\text{Hölder generalizzato}}{\leq} \|\mathbb{1}_X\|_q \|u\|_{p_2} \quad \text{dove} \quad q = \frac{p_1 p_2}{p_2 - p_1}.$$

Dove

$$\|\mathbb{1}_X\|_{\frac{p_1 p_2}{p_2 - p_1}} \|u\|_{p_2} = (\mu(X))^{\frac{1}{p_1} - \frac{1}{p_2}} \|u\|_{p_2}.$$

Quanto sopra soddisfa la condizione al punto iv). □

ii) L'applicazione  $L^1(X) \ni u \mapsto \int u \, d\mu \in \mathbb{R}$  è continua.

**Dimostrazione.** Infatti, vale

$$\left| \int_X u \, d\mu \right| \leq \int_X |u| \, d\mu = \|u\|_1.$$

Quanto sopra soddisfa la condizione al punto iv). □

iii) Cosa possiamo dire invece dell'applicazione  $L^p(X) \ni u \mapsto \int u \, d\mu \in \mathbb{R}$ ? Se  $\mu(X) < +\infty$  la continuità segue dagli esempi i) e ii) sopra. Se invece  $\mu(X) = +\infty$ ? Per esempio  $L^2(\mathbb{R})$ ? [TO DO].

## 2.11 Convoluzione

**Definizione.** Date  $f_1, f_2: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$  misurabili, il **prodotto di convoluzione**  $f_1 * f_2$  è la funzione (da  $\mathbb{R}^d$  a  $\mathbb{R}$ ) data da

$$f_1 * f_2(x) = \int_{\mathbb{R}^d} f_1(x-y) f_2(y) \, dy$$

**Osservazioni.**

i) La definizione sopra è ben posta se  $f_1, f_2 \geq 0$  ( $f_1 * f_2(x)$  può essere anche  $+\infty$ ). In generale non è ben posta per funzioni a valori reali (non è detto che l'integrale esista).

Ad esempio, se prendiamo  $f_1 = 1$  e  $f_2 = \sin x$  con  $d = 1$ , allora  $f_1 * f_2(x)$  non è definito per alcun  $x$ .

ii) Se  $f_1 * f_2(x)$  esiste, allora  $f_1 * f_2(x) = f_2 * f_1(x)$ , infatti

$$f_1 * f_2(x) = \int_{\mathbb{R}^d} f_1(x-y) f_2(y) \, dy = \left( \begin{array}{l} t := x-y \\ dt = dy \end{array} \right) = \int_{\mathbb{R}^d} f_1(t) f_2(x-t) \, dt = f_2 * f_1(x).$$

iii) È importante che  $f_1, f_2$  siano definite su  $\mathbb{R}^d$  e che la misura sia quella di Lebesgue.

In realtà, si può generalizzare quanto sopra rimpiazzando  $(\mathbb{R}^d, \mathcal{L}^d)$  con  $(G, \mu)$ , dove  $G$  è un gruppo commutativo e  $\mu$  una misura su  $G$  invariante per traslazione. Per esempio,  $\mathbb{Z}$  con la misura che conta i punti. Cioè  $f_1, f_2: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}$ , vale

$$f_1 * f_2(n) := \sum_{m \in \mathbb{Z}} f_1(n-m) f_2(m).$$

iv) Data  $f$  distribuzione di massa (continua) su  $\mathbb{R}^3$ , il potenziale gravitazionale generato è

$$v(x) = \int_{y \in \mathbb{R}^d} \frac{1}{|x-y|} \rho(y) \, dy$$

cioè  $v = g * \rho$ , dove  $g(x) = 1/|x|$  è il potenziale di una massa puntuale in 0.

v) Se  $X_1, X_2$  sono variabili aleatorie (reali) con distribuzione di probabilità continua  $p_1, p_2$  e  $X_1, X_2$  sono indipendenti, allora  $X_1 + X_2$  ha distribuzione di probabilità  $p_1 * p_2$ . (Facile per  $X_1, X_2$  in  $\mathbb{Z}$ ).



**Proposizione 1.** Se  $|f_1| * |f_2|(x) < +\infty$  allora  $f_1 * f_2(x)$  è ben definito, in quanto  $|f_1 * f_2(x)| \leq |f_1| * |f_2|(x)$ .

**Dimostrazione.** Basta osservare che,

$$\begin{aligned} f_1 * f_2(x) &= \int_{\mathbb{R}^d} f_1(x-y) \cdot f_2(y) \, dy \leq \left| \int_{\mathbb{R}^d} f_1(x-y) \cdot f_2(y) \, dy \right| \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^d} |f_1(x-y) \cdot f_2(y)| \, dy = |f_1| * |f_2|(x) < +\infty. \end{aligned}$$

□

**Corollario 2.** Se  $|f_1| * |f_2| \in L^p(\mathbb{R}^d)$  con  $1 \leq p \leq +\infty$  allora  $f_1 * f_2(x)$  è ben definito per quasi ogni  $x \in \mathbb{R}^d$  e  $\|f_1 * f_2\|_p \leq \| |f_1| * |f_2| \|_p$ .

**Dimostrazione.** Segue subito dalla proposizione precedente. □

**Teorema 3** (disuguaglianza di Young per convoluzione.) Se  $f_1 \in L^{p_1}(\mathbb{R}^d)$  e  $f_2 \in L^{p_2}(\mathbb{R}^d)$  e preso  $r \geq 1$  tale che

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} - 1, \quad (*)$$

allora  $f_1 * f_2$  è ben definito quasi ovunque e

$$\|f_1 * f_2\|_r \leq \|f_1\|_{p_1} \cdot \|f_2\|_{p_2} \quad (**)$$

**Osservazioni.**

- Nel caso di prima 1 e sin  $x$  sono solo in  $L^\infty$  infatti viene  $r = -1$  e la disuguaglianza non ha senso.
- Supponiamo di avere  $\|f_1 * f_2\| \leq C \cdot \|f_1\|_{p_1}^{\alpha_1} \cdot \|f_2\|_{p_2}^{\alpha_2}$  allora vediamo che per ogni  $f_1, f_2$  positiva deve valere necessariamente  $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$  e la condizione (\*).

**Dimostrazione.** Per ogni  $\lambda > 0$  consideriamo  $\lambda f_1$  e  $f_2$ , allora

$$\|(\lambda f_1) * f_2\|_r = \|\lambda(f_1 * f_2)\|_r = \lambda \|f_1 * f_2\|_r$$

ma abbiamo anche

$$\|(\lambda f_1) * f_2\|_r \leq C \cdot \|\lambda f_1\|_{p_1}^{\alpha_1} \cdot \|f_2\|_{p_2}^{\alpha_2} = C \cdot \lambda^{\alpha_1} \|f_1\|_{p_1}^{\alpha_1} \cdot \|f_2\|_{p_2}^{\alpha_2},$$

da cui necessariamente  $\alpha_1 = 1$  e di conseguenza  $\alpha_2 = 1$ .

A questo punto richiediamo anche che  $f_1$  e  $f_2$  siano tali che  $\|f_1\|_{p_1}, \|f_2\|_{p_2} < +\infty$  e  $\|f_1 * f_2\| > 0$  (questo possiamo farlo in quanto basta prendere  $f_1 = f_2 = \mathbb{1}_B$  con  $B$  una palla, nel caso segue proprio che  $f_1 * f_2(x) > 0$  se  $|x| < 1$ ).

Data  $f: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$  e  $\lambda > 0$  poniamo  $R_\lambda f(x) := f(x/\lambda)$  allora abbiamo

$$\begin{aligned} \|(R_\lambda f_1) * (R_\lambda f_2)\|_r &= \left\| \int_{\mathbb{R}^d} f_1\left(\frac{x-y}{\lambda}\right) \cdot f_2\left(\frac{y}{\lambda}\right) \, dy \right\| = \left( \int_{\mathbb{R}^d} f_1\left(\frac{x}{\lambda} - t\right) \cdot f_2(t) \, dt \right) \\ &= \lambda^d \cdot \left\| \int_{\mathbb{R}^d} f_1\left(\frac{x}{\lambda} - t\right) \cdot f_2(t) \, dt \right\| \\ &= \lambda^d \cdot \|R_\lambda(f_1 * f_2)\|_r. \end{aligned}$$

Per il punto successivo abbiamo  $\|R_\lambda(g)\|_r = \lambda^{d/r} \|g\|_r$ , da cui otteniamo

$$\|(R_\lambda f_1) * (R_\lambda f_2)\|_r = \lambda^{d(1+\frac{1}{r})} \|f_1 * f_2\|_r.$$

Ma anche

$$\|(R_\lambda f_1) * (R_\lambda f_2)\|_r \leq C \cdot \|R_\lambda f_1\|_{p_1} \cdot \|R_\lambda f_2\|_{p_2} = \lambda^{d(\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2})} \cdot \|f_1\|_{p_1} \cdot \|f_2\|_{p_2}.$$

Dunque sicuramente abbiamo  $\lambda^{d(1+1/r)} \leq C \cdot \lambda^{d(1/p_1+1/p_2)}$  per ogni  $\lambda > 0$  e quindi  $1+1/r = 1/p_1 + 1/p_2$ .  $\square$

- $\|R_\lambda f\|_p = \lambda^{d/p} \|f\|_p$  ed in realtà possiamo ricavare l'esponente  $d/p$  per *analisi dimensionale*<sup>1</sup>. Consideriamo l'espressione

$$\|f\|_p^p = \int_{\mathbb{R}^d} f(x) dx.$$

Se  $f(x)$  è una *quantità adimensionale* allora  $\int_{\mathbb{R}^d} f dx$  ha dimensione di un *volume*  $\mathbb{L}^d$ , da cui  $\|f\|_p$  ha dimensione di  $\mathbb{L}^{d/p}$ .

Similmente, per ottenere  $\|R_\lambda(f_1 * f_2)\|_r = \lambda^{d(1+1/r)} \|f_1 * f_2\|_r$ , basta osservare che

$$f_1 * f_2(x) = \int_{\mathbb{R}^d} f_1(x-y) f_2(y) dy$$

ha dimensione  $\mathbb{L}^d$ , da cui

$$\|f_1 * f_2\|_r = \left( \int_{\mathbb{R}^d} \underbrace{|f_1 * f_2|^r}_{\mathbb{L}^{dr}} \underbrace{dx}_{\mathbb{L}^d} \right)^{1/r}$$

ha dimensione di  $\mathbb{L}^{d(1+1/r)}$ .

**Dimostrazione Teorema 3.** Per via del Corollario 2. ci basta dimostrare ( $\star\star$ ) se  $f_1, f_2 \geq 0$ .

- *Caso facile.* Se  $p_1 = p_2 = 1$  e  $r = 1$

$$\begin{aligned} \|f_1 * f_2\|_1 &= \int f_1 * f_2(x) dx = \iint f_1(x-y) f_2(y) dy dx = \int f_2(y) \int f_1(x-y) dx dy = \\ &= \int \|f_1\|_1 \cdot f_2(y) dy = \|f_1\|_1 \cdot \|f_2\|_1 \end{aligned}$$

- *Caso leggermente meno facile.* Se  $p_1 = p, p_2 = 1$  e  $r = p$ . Vogliamo vedere che

$$\|f_1 * f_2\|_p \leq \|f_1\|_p \cdot \|f_2\|_1$$

allora

$$\begin{aligned} \|f_1 * f_2\|_p &= \int_{\mathbb{R}^d} \underbrace{(f_1 * f_2)^p}_h dx = \int h \cdot h^{p-1} dx = \iint f_1(x-y) f_2(y) h^{p-1}(x) dy dx = \\ &= \iint f_1(y-x) h^{p-1}(x) dx f_2(y) dy \stackrel{\text{Hölder}}{\leq} \int \|f_1(y-\cdot)\|_p \|h^{p-1}\|_{p'} f_2(y) dy \end{aligned}$$

---

<sup>1</sup>Ovvero studiando le potenze delle unità di misura delle varie quantità.

con  $p'$  esponente coniugato a  $p$ . Inoltre notiamo che  $\|f_1(y - \cdot)\|_p = \|f_1\|_p$  per invarianza di  $\mathcal{L}^d$  per riflessioni e traslazioni. Infine otteniamo

$$\|f_1\|_p \|h\|_p^{p-1} \|f_2\|_1 = \|f_1\|_p \|h\|_p^{p-1} \|f_2\|_1.$$

Dunque,  $\|f_1 * f_2\|_p^p \leq \|f_1 * f_2\|_p^{p-1} \|f_1\|_p \|f_2\|_1 \implies \|f_1 * f_2\|_p \leq \|f_1\|_p \|f_2\|_1$ . Quest'ultima implicazione però è valida solo nel caso in cui  $0 < \|f_1 * f_2\|_p < +\infty$ . Resterebbero da controllare i due casi in cui la norma è 0 oppure  $+\infty$ . Il primo è ovvio; il secondo invece si fa per approssimazione e passando al limite.

Consideriamo  $f_1, f_2$  e approssimiamole con  $f_{1,n}, f_{2,n}$  limitate a supporto compatto, allora vale  $\|f_{1,n} * f_{1,n}\|_p \leq \|f_{1,n}\|_p \cdot \|f_{2,n}\|_1$  e passando al limite si ottiene la tesi. In particolare possiamo costruire le  $f_n$  come

$$f_n(x) := (f(x) \cdot \mathbb{1}_{B(0,n)}(x)) \wedge n$$

**Osservazione.** Se  $f_2 \geq 0$  e  $\int f_2 dx = 1$  allora  $\|f_1 * f_2\|_p \leq \|f_1\|_p$  è una versione semplificata della proposizione precedente, in particolare la dimostrazione si semplifica in quanto possiamo pensare a  $f_2$  come distribuzione di probabilità e quindi  $f_1 * f_2$  è una “media pesata” delle traslazioni di  $f_1$  o più precisamente una combinazione convessa “integrale”.

- *Caso generale.* Non lo facciamo perché servono mille mila parametri e non è troppo interessante.

□

Nel caso  $r = +\infty$  gli esponenti  $p_1$  e  $p_2$  sono proprio coniugati e possiamo rafforzare la tesi del teorema precedente.

**Teorema 4** (caso  $r = +\infty$  del Teorema 3). Dati  $p_1$  e  $p_2$  esponenti coniugati e  $f_1 \in L^{p_1}(\mathbb{R}^d)$ ,  $f_2 \in L^{p_2}(\mathbb{R}^d)$ , allora

- i)  $f_1 * f_2(x)$  è ben definito per ogni  $x \in \mathbb{R}^d$
- ii)  $|f_1 * f_2(x)| \leq \|f_1\|_{p_1} \|f_2\|_{p_2}$
- iii)  $f_1 * f_2$  è uniformemente continua
- iv) Se  $1 < p_1, p_2 < +\infty$  allora  $f_1 * f_2 \rightarrow 0$  per  $|x| \rightarrow +\infty$

Premettiamo i seguenti risultati.

**Proposizione 5.** Data  $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$  con  $p < +\infty$  la mappa

$$\begin{aligned} \tau_h f : \mathbb{R}^d &\rightarrow L^p(\mathbb{R}^d) \\ h &\mapsto f(\cdot - h) \end{aligned}$$

è continua.

**Lemma 6.** Lo spazio  $C_0(\mathbb{R}^d) = \{f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R} \text{ continue con } f(x) \rightarrow 0 \text{ per } |x| \rightarrow \infty\}$  è chiuso rispetto alla convergenza uniforme.

**Dimostrazione Teorema 4.**

- i) Osserviamo che

$$|f_1| * |f_2|(x) = \int_{\mathbb{R}^d} |f_1(x - y)| \cdot |f_2(y)| dy \stackrel{\text{Hölder}}{\leq} \|f_1(x - \cdot)\|_{p_1} \|f_2\|_{p_2} = \|f_1\|_{p_1} \|f_2\|_{p_2}$$

e concludiamo per la Proposizione 1.

- ii) Dal punto precedente abbiamo che  $|f_1| * |f_2|(x) \leq \|f_1\|_{p_1} \|f_2\|_{p_2}$ , da cui si conclude banalmente.
- iii) Uno tra  $p_1$  e  $p_2$  è finito; supponiamo lo sia  $p_1$ . Fissiamo  $x, h \in \mathbb{R}^d$

$$f_1 * f_2(x+h) - f_1 * f_2(x) = \int_{\mathbb{R}^d} (f_1(x+h-y) - f_1(x-y)) f_2(y) dy,$$

quindi

$$\begin{aligned} |f_1 * f_2(x+h) - f_1 * f_2(x)| &\leq \int |f_1(x+h-y) - f_1(x-y)| |f_2(y)| dy \\ &\stackrel{\text{Holder}}{\leq} \|f_1(x+h-\cdot) - f_1(x-\cdot)\|_{p_1} \|f_2\|_{p_2} \\ &= \|f_1(\cdot - h) - f_1(\cdot)\|_{p_1} \|f_2\|_{p_2} \\ &= \underbrace{\|\tau_h f_1 - f_1\|_{p_1}}_{\xrightarrow{h \rightarrow 0} 0} \|f_2\|_{p_2} \\ &\quad \text{Proposizione 5} \end{aligned}$$

da cui segue la tesi<sup>1</sup>.

- iv) Approssimiamo  $f_1$  e  $f_2$  con  $f_{1,n}$  e  $f_{2,n} \in \mathcal{C}_C(\mathbb{R}^d)$  in  $L^{p_1}$  e  $L^{p_2}$  rispettivamente. Osserviamo che  $f_{1,n} * f_{2,n} \in \mathcal{C}_C(\mathbb{R}^d) \subset \mathcal{C}_0(\mathbb{R}^d)$ . Per il Lemma 6 basta dimostrare che  $f_{1,n} * f_{2,n} \rightarrow f_1 * f_2$  uniformemente

$$\begin{aligned} \|f_{1,n} * f_{2,n} - f_1 * f_2\|_{\infty} &= \|(f_{1,n} * f_{2,n} - f_{1,n} * f_2) + (f_{1,n} * f_2 - f_1 * f_2)\|_{\infty} \\ &\stackrel{\text{lin della conv}}{\leq} \|f_{1,n} * (f_{2,n} - f_2)\|_{\infty} + \|(f_{1,n} - f_1) * f_2\|_{\infty} \\ &\stackrel{ii)}{\leq} \underbrace{\|f_{1,n}\|_{p_1}}_{\rightarrow \|f_1\|_{p_1}} \underbrace{\|f_{2,n} - f_2\|_{p_2}}_{\rightarrow 0} + \underbrace{\|f_{1,n} - f_1\|_{p_1}}_{\rightarrow 0} \|f_2\|_{p_2}. \end{aligned}$$

Quindi  $\|f_{1,n} * f_{2,n} - f_1 * f_2\|_{\infty} \rightarrow 0$ . □

## 2.12 Esercitazione del 21 ottobre

Data  $T: X \rightarrow Y$  lineare tra  $X, Y$  spazi normati, allora  $T$  è continua se e solo se esiste  $C > 0$  tale che  $\|T(x)\|_Y \leq C \|x\|_X$  per ogni  $x \in X$ .

Applichiamo questo risultato.

- i) Sia  $X = \mathbb{R}^d$ . L'applicazione  $L^1(\mathbb{R}^d) \ni u \xrightarrow{T} \int_{\mathbb{R}^d} u dx$  è lineare e continua in quanto limitata. Infatti:

$$|T(u)| = \left| \int_{\mathbb{R}^d} u dx \right| \leq \int_{\mathbb{R}^d} |u| dx = \|u\|_{L^1(\mathbb{R}^d)}.$$

- ii) Studiamo ora il caso per  $p > 1$ . Data  $u \in L^p(\mathbb{R}^d)$ , l'applicazione

$$u \mapsto \int_{\mathbb{R}^d} u dx$$

---

<sup>1</sup>Nota. In generale, quanto appena mostrato ci direbbe che la funzione è continua, ma essendo che stiamo maggiorando con una quantità indipendente da  $x$  segue l'uniforme continuità.

potrebbe non essere ben definita.

Ad esempio se restringiamo il dominio a  $L^p(\mathbb{R}^d) \cap L^1(\mathbb{R}^d)$  l'applicazione sopra è ben definita, ma in generale non è continua. Più formalmente, la mappa

$$T: (L^p \cap L^1(\mathbb{R}^d), \|\cdot\|_{L^p}) \rightarrow \mathbb{R}$$

è lineare ma non continua.

Studiamo il caso reale, ovvero  $d = 1$ .

Per verificare quanto sopra, utilizziamo la definizione di continuità per successioni. Definiamo una successione di funzioni a supporto compatto  $u_n$ , che sappiamo essere in tutti gli spazi  $L^p$ , e verifichiamo che  $\lim_n T(u_n) \neq T(u_\infty)$  dove  $u_\infty := \lim_n u_n$ .

Definiamo la successione come segue (fare disegno):

$$u_n(x) = \frac{1}{n} \mathbb{1}_{[n, 2n]} = \begin{cases} \frac{1}{n} & \text{se } n \leq x \leq 2n \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Dunque,  $T(u_n) = \int_{\mathbb{R}} u_n dx = \frac{1}{n} |E_n| = 1$ , dove  $E_n = [n, 2n]$ . Segue che  $T(u_n) \equiv 1$  ma rispetto alla convergenza in  $L^p$ ,  $T(u_n) \not\rightarrow T(u_\infty) = T(0) = 0$ .

Più in generale, quando  $u \in L^p(\mathbb{R}^d)$  con  $p > 1$ , una costruzione come sopra non funziona, infatti

$$\|u_n\|_{L^p(\mathbb{R})}^p = \int_{\mathbb{R}} u_n^p(x) dx = \frac{1}{n^p} \cdot |E_n| = \frac{n}{n^p} = \frac{1}{n^{p-1}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Un altro modo per dimostrare quanto sopra è verificare che, per ogni  $C > 0$ , esiste una funzione  $u \in L^p(\mathbb{R}^d) \cap L^1(\mathbb{R}^d)$  tale per cui

$$\left| \int_{\mathbb{R}} u dx \right| > C \left( \int_{\mathbb{R}} |u|^p dx \right)^{1/p}.$$

Notiamo che questo è proprio l'esercizio che segue.

**Esercizio.** Fissato  $C > 0$ , trovare  $u \in L^p \cap L^1(\mathbb{R})$  tale che

$$\left| \int_{\mathbb{R}} u dx \right| > C \|u\|_{L^p(\mathbb{R})} \quad (\star)$$

**Dimostrazione.** Fissato  $C > 0$ , cerchiamo una funzione in  $L^p$  il cui integrale in modulo sia maggiore di  $C$  per la sua norma  $L^p$ . Per trovare  $u$  consideriamo la successione di funzioni definita come segue

$$f_n = \begin{cases} 1/x & 1 \leq x \leq n \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}.$$

Le funzioni  $f_n$  sono a supporto compatto e stanno in ogni  $L^p$ . Notiamo che  $f_n \uparrow f$  definita come

$$f = \begin{cases} 1/x & x > 1 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

ed  $f \in L^p$  per ogni  $p > 1$ . In particolare,  $\left( \int_{\mathbb{R}} |f_n|^p \right)^{1/p} \leq \left( \int_{\mathbb{R}} |f|^p \right)^{1/p} \leq +\infty$  per ogni  $n$ .

Quindi il secondo membro di  $(\star)$  è maggiorato da una costante che non dipende da  $n$ . D'altra parte, per Beppo Levi  $\lim_n \int_{\mathbb{R}} f_n dx = \int_{\mathbb{R}} f dx$  che non sta in  $L^1$ . In conclusione, esiste un  $n$  abbastanza grande per cui vale  $(\star)$ .  $\square$

**Esercizio.** Sia  $p \geq 1$  e  $E = \left\{ u \in L^p(-1, 1) : \int_{-1}^1 u dx = 0 \right\}$ .

i) Dire se  $E$  è limitato in  $L^p(-1, 1)$ .

ii) Dire se  $E$  è chiuso in  $L^p(-1, 1)$ .

**Soluzione.**

i) Dimostrare che  $E$  è limitato in  $L^p(-1, 1)$  equivale a dimostrare che esiste  $M > 0$  tale che ogni  $u \in L^p(-1, 1)$ ,  $\int_{-1}^1 u dx = 0$  verifica  $\|u\|_{L^p} \leq M$ .

Vediamo che  $E$  non è limitato. Preso  $M > 0$ , riesco sempre a trovare una funzione maggiore di  $M$  in norma. Ad esempio la funzione definita come

$$u(x) := \begin{cases} M & \text{se } x \in (0, 1) \\ -M & \text{se } x \in (-1, 0) \end{cases}$$

ha norma  $\|u\|_{L^p}^p = 2M^p$ .

**Nota.** Aveva senso cercare il controesempio nella classe delle funzioni dispari e limitate, perché hanno media zero, e perché sono in tutti gli  $L^p$ .

ii) Vediamo che  $E$  è chiuso.

**Nota.** Possiamo dimostrarlo usando i teoremi di convergenza, ma seguiremo un'altra strada.

- *Caso*  $p > 1$ . Definiamo l'operatore

$$T: L^p(-1, 1) \rightarrow \mathbb{R} \\ u \mapsto \int_{-1}^1 u dx$$

è ben definito. Infatti, per Hölder vale

$$\left| \int_{-1}^1 1 \cdot u dx \right| \leq \left( \int_{-1}^1 |u|^p dx \right)^{1/p} (1^q)^{1/q}$$

dove  $q = \frac{p}{p-1}$ . Allora

$$|T(u)| \leq \|u\|_{L^p(-1,1)} \cdot 2^{\frac{p}{p-1}}.$$

Dunque  $T$  è continuo in  $L^p$  per ogni  $p > 1$ .

- *Caso*  $p = 1$ . L'operatore sopra è continuo anche per  $p = 1$ . Grazie alla stima vista prima

$$|T(u)| = \left| \int_{-1}^1 u dx \right| \leq \int_{-1}^1 |u| dx = \|u\|_{L^1}.$$

Dunque  $T$  è continua e  $T^{-1}(0) = E$ , dunque  $E$  è chiuso.

**Esercizio.** [TO DO] Sia  $p \geq 1$ . Definiamo

$$F = \left\{ v \in L^p(\mathbb{R}) \mid \int_0^1 v(x) \, dx - 2 \int_{-1}^0 v(x) \, dx = 3 \right\}.$$

Dire se  $F$  è chiuso in  $(L^p(\mathbb{R}), \|\cdot\|_{L^p(\mathbb{R})})$ .

**Esercizio.** [TO DO] Sia

$$G = \left\{ v \in L^p(0, 2\pi) \mid \int_0^{2\pi} v(x) \sin(x) \, dx = 1 \right\}.$$

Dire se  $G$  è chiuso in  $L^2(0, 2\pi)$ .

**Domanda.** Dato  $L^p(X, \mu)$  e  $V$  sottospazio di  $L^p(X, \mu)$ , posso dire che  $V$  è chiuso?

In generale no! Infatti esistono sottospazi densi in  $L^p(X, \mu)$ .

Ad esempio in  $\ell^2$  consideriamo l'insieme denso

$$V = \{ \{x_n\} \mid x_n = 0 \text{ definitivamente} \}.$$

Vediamo che non è chiuso. Sia  $\underline{x} \in \ell^2$ , definita come  $\underline{x} = \{1/n\}_{n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}}$ , diciamo che  $\underline{x} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \underline{x}^n$  dove

$$x_n^k = \begin{cases} \frac{1}{n} & 1 \leq n \leq k \\ 0 & n > k, n = 0 \end{cases}$$

abbiamo che

$$\|\underline{x} - \underline{x}^k\|_{\ell^2}^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |x_n - x_n^k|^2 = \sum_{n=k+1}^{+\infty} |x_n|^2 = \sum_{n=k+1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} 0.$$

Vediamo un altro esempio. Siano  $X = \mathbb{R}$ ,  $\mu$  la misura di Lebesgue e  $p > 1$ . In tal caso, l'insieme  $L^p \cap L^1(\mathbb{R})$  è un sottospazio denso in  $(L^1(\mathbb{R}), \|\cdot\|_{L^1})$  e  $(L^p(\mathbb{R}), \|\cdot\|_{L^p})$ .

**Nota.** L'insieme  $L^2(\mathbb{R}) \cap L^1(\mathbb{R})$  è un sottospazio proprio di  $L^1(\mathbb{R})$ . Diciamo che non è chiuso in  $\|\cdot\|_{L^1(\mathbb{R})}$  perché è denso. Infatti,

$$\mathcal{C}_C^0(\mathbb{R}) \subset L^2(\mathbb{R}) \cap L^1(\mathbb{R}).$$

### 2.12.1 Convoluzione

Sia  $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$  e sia  $g: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$  continua a supporto compatto<sup>1</sup>.

$$|g(x) - g(y)| \leq M |x - y|_{\mathbb{R}^d}.$$

**Esercizio.** Dimostrare che  $f * g$  è ben definita e lipschitziana, dove  $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$  e  $g \in \mathcal{C}_C^0(\mathbb{R}^d)$ .

Verifichiamo che la convoluzione è ben definita. Dal fatto che  $g \in \mathcal{C}_C^0(\mathbb{R}^d)$  abbiamo in particolare che  $g$  è limitata, da cui

$$f * g = \int_{\mathbb{R}^d} f(x-y) \cdot g(y) \, dy \stackrel{|g| \leq M}{\leq} M \cdot \int_{\mathbb{R}^d} f(x-y) \, dy \stackrel{f \in L^1(\mathbb{R}^d)}{<} +\infty.$$

---

<sup>1</sup>In tal caso  $g$  è lipschitziana.

Ora verifichiamo che  $f * g$  è lipschitziana. Consideriamo  $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^d$

$$|f * g(x_1) - f * g(x_2)| = \left| \int_{\mathbb{R}^d} f(x_1 - y)g(y) dy - \int_{\mathbb{R}^d} f(x_2 - y)g(y) dy \right|$$

Usiamo la proprietà che, essendo  $f * g$  ben definita, si ha  $f * g(x) = g * f(x)$ . Da cui

$$\begin{aligned} |f * g(x_1) - f * g(x_2)| &= \left| \int_{\mathbb{R}^d} g(x_1 - y)f(y) dy - \int_{\mathbb{R}^d} g(x_2 - y)f(y) dy \right| \\ &= \left| \int_{\mathbb{R}^d} (g(x_1 - y) - g(x_2 - y))f(y) dy \right| \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^d} |g(x_1 - y) - g(x_2 - y)| |f(y)| dy \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^d} M |(x_1 - y) - (x_2 - y)| |f(y)| dy \leq M |x_1 - x_2| \cdot \|f\|_{L^1(\mathbb{R}^d)}. \end{aligned}$$

**Esercizio.** [TO DO] Se  $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$  e  $g$  a supporto compatto è  $\alpha$ -Hölderiana allora anche  $f * g$  lo è.

**Esercizio.** [TO DO] Presa  $f(x) = \mathbb{1}_{[0,1]}$  in  $\mathbb{R}$ , calcolare  $f * f$ .

## 2.13 Rimanenze dalla lezione precedente

**Proposizione.** Data  $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$  con  $1 \leq p < +\infty$  allora la funzione  $\tau_h f: \mathbb{R}^d \rightarrow L^p(\mathbb{R}^d)$  data da  $h \mapsto f(\cdot - h)$  è continua.

**Dimostrazione.** Per prima cosa notiamo che basta vedere solo la continuità in 0 in quanto

$$\tau_{h'} f - \tau_h f = \tau_h(\tau_{h'-h} f - f) \implies \|\tau_{h'} f - \tau_h f\|_p = \|\tau_{h'-h} f - f\|_p.$$

Dimostriamo ora la proposizione in due passi.

- *Caso 1:*  $f \in C_C(\mathbb{R}^d)$

$$\|\tau_h f - f\|_p^p = \int_{\mathbb{R}^d} |f(x-h) - f(x)|^p dx \xrightarrow{|h| \rightarrow 0} 0$$

per convergenza dominata, verifichiamo però che siano rispettate le ipotesi

- La convergenza puntuale, ovvero  $|f(x-h) - f(x)|^p \xrightarrow{|h| \rightarrow 0} 0$  segue direttamente dalla continuità di  $f$ .
- Come dominazione invece usiamo  $|f(x-h) - f(x)|^p \leq (2\|f\|_\infty)^p \cdot \mathbb{1}_{B(0, R+1)}$  usando che  $f \in C_C \implies \text{supp}(f) \subset \overline{B(0, R)}$  e poi che

$$\text{supp}(f(\cdot - h) - f(\cdot)) \subset \overline{B(0, R + |h|)}$$

infine se  $|h| < 1$  come raggio ci basta prendere  $R + 1$ .

- *Caso 2:*  $f$  qualunque Dato  $\varepsilon > 0$  prendiamo  $g \in C_C(\mathbb{R}^d)$  tale che  $\|g - f\| \leq \varepsilon$  allora aggiungiamo a sottraiamo  $g + \tau_h g$  e raggruppiamo in modo da ottenere

$$\begin{aligned} \tau_h f - f &= \tau_h(f - g) + (\tau_h g - g) + (g - f) \\ \implies \|\tau_h f - f\|_p &\leq \underbrace{\|\tau_h(f - g)\|_p}_{\leq \varepsilon} + \|\tau_h g - g\|_p + \underbrace{\|g - f\|_p}_{\leq \varepsilon} \leq 2\varepsilon + \underbrace{\|\tau_h g - g\|_p}_{\rightarrow 0 \text{ per Caso 1}} \end{aligned}$$



dunque  $\limsup_{|h| \rightarrow 0} \|\tau_h f - f\|_p \leq 2\varepsilon$  ma per arbitrarietà di  $\varepsilon$  otteniamo anche che  $\|\tau_h f - f\|_p \rightarrow 0$  per  $|h| \rightarrow 0$ .

□

[TO DO: il teorema sotto non è già stato dimostrato?] **Teorema.** Siano  $f_1 \in L^{p_1}(\mathbb{R}^d)$  e  $f_2 \in L^{p_2}(\mathbb{R}^d)$  con  $p_1$  e  $p_2$  esponenti coniugati, allora  $f_1 * f_2$  è definita per ogni  $x$  e uniformemente continua

$$|f_1 * f_2(x)| \leq \|f_1\|_{p_1} \cdot \|f_2\|_{p_2} \quad \forall x.$$

**Dimostrazione.** Prendiamo  $f_{1,n}, f_{2,n} \in C_C(\mathbb{R}^d)$  tali che  $f_{1,n} \rightarrow f_1$  in  $L^{p_1}$  e  $f_{2,n} \rightarrow f_2$  in  $L^{p_2}$ .

- Per prima cosa verifichiamo che  $f * g$  è ben definita. Notiamo che  $f_{1,n} * f_{2,n}$  ha supporto limitato, infatti se  $\text{supp}(f_{i,n}) \subset \overline{\mathcal{B}(0, r_{i,n})}$  per  $i = 1, 2$  allora

$$\text{supp}(f_{1,n} * f_{2,n}) \subset \overline{\mathcal{B}(0, r_{1,n} + r_{2,n})}$$

e basta notare che l'espressione

$$f_1 * f_2(x) = \int_{\mathbb{R}^d} f_1(x - y) f_2(y) dy$$

ha integranda nulla per ogni  $y$  se  $|x| \geq r_{1,n} + r_{2,n}$ .

- Vediamo che  $f_{1,n} * f_{2,n} \rightarrow f_1 * f_2$  uniformemente

$$\begin{aligned} f_{1,n} * f_{2,n} - f_1 * f_2 &= (f_{1,n} - f_1) * f_{2,n} - f_1 * (f_{2,n} - f_2) \\ \|f_{1,n} * f_{2,n} - f_1 * f_2\|_p &\leq \|(f_{1,n} - f_1) * f_{2,n}\|_p + \|f_1 * (f_{2,n} - f_2)\|_p \\ &\leq \underbrace{\|f_{1,n} - f_1\|_{p_1}}_{\rightarrow 0} \cdot \underbrace{\|f_{2,n}\|_{p_2}}_{\rightarrow \|f_2\|_{p_2}} + \underbrace{\|f_1\|_{p_1}}_{\text{cost.}} \cdot \underbrace{\|f_{2,n} - f_2\|_{p_2}}_{\rightarrow 0} \rightarrow 0 \end{aligned}$$

- $C_0(\mathbb{R}^d)$  è chiuso per convergenza uniforme [TODO: da fare per esercizio]

## 2.14 Derivata e Convoluzione

**Osservazione.** Osserviamo che la convoluzione si comporta bene con l'operatore di traslazione definito precedentemente, infatti  $\tau_h(f_1 * f_2) = (\tau_h f_1) * f_2$  in quanto

$$f_1 * f_2(x - h) = \int f_1(x - h - y) \cdot f_2(y) dy = \int \tau_h f_1(x - y) \cdot f_2(y) dy = (\tau_h f_1) * f_2$$

quindi “formalmente” possiamo calcolare il seguente rapporto incrementale

$$\frac{\tau_h(f_1 * f_2) - f_1 * f_2}{h} = \frac{\tau_h f_1 - f_1}{h} * f_2 \implies (f_1 * f_2)' = (f_1)' * f_2$$

Vediamo ora di formalizzare questo risultato.

**Teorema.** Dati  $p_1$  e  $p_2$  esponenti coniugati, se

- $f_1 \in C^1(\mathbb{R}^d)$ ,  $f_1$  e  $\nabla f_1 \in L^{p_1}(\mathbb{R}^d)$

- $f_2 \in L^{p_2}(\mathbb{R}^d)$

allora  $f_1 * f_2 \in C^1$  con  $\nabla(f_1 * f_2) = (\nabla f_1) * f_2$ .

**Dimostrazione.**

- $d = 1$ : Sappiamo che  $f_1 * f_2$  ed  $f'_1 * f_2$  sono continue. Vediamo che coincidono usando il teorema fondamentale del calcolo integrale. L'uguaglianza  $(f_1 * f_2)' = f'_1 * f_2$  segue da

$$\int_a^b f'_1 * f_2 \, dx = f_1 * f_2(b) - f_1 * f_2(a) \quad \forall a < b$$

ed in effetti

$$\begin{aligned} \int_a^b f'_1 * f_2(x) \, dx &= \int_a^b \int_{-\infty}^{\infty} f'_1(x-y) f_2(y) \, dy \, dx \\ &\stackrel{(*)}{=} \int_{-\infty}^{\infty} \int_a^b f'_1(x-y) \, dx \cdot f_2(y) \, dy \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} (f_1(b-y) - f_1(a-y)) \cdot f_2(y) \, dy \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f_1(b-y) f_2(y) \, dy - \int_{-\infty}^{\infty} f_1(a-y) f_2(y) \, dy \\ &= f_1 * f_2(b) - f_1 * f_2(a). \end{aligned}$$

In particolare in  $(*)$  stiamo usando Fubini-Tonelli in quanto

$$\int_a^b \int_{-\infty}^{\infty} |f'_1(x-y)| \cdot |f_2(y)| \, dy \, dx \leq \int_a^b \|f'_1(x - \cdot)\|_{p_1} \cdot \|f_2\|_{p_2} \, dx = \|f'_1\|_{p_1} \cdot \|f_2\|_{p_2} \cdot (b-a).$$

- per  $d > 1$  dato  $i = 1, \dots, d$  basta semplicemente considerare le proiezioni infatti

$$\int_a^b \frac{\partial f_1}{\partial x_i} * f_2(x_1, \dots, \overset{(i)}{t}, \dots, x_d) \, dt = f_1 * f_2(x_1, \dots, \overset{(i)}{b}, \dots, x_d) - f_1 * f_2(x_1, \dots, \overset{(i)}{a}, \dots, x_d)$$

□

**Corollario.** Data  $f_1 \in C_C^\infty(\mathbb{R}^d)$  (da cui segue  $\nabla^k \in L^q(\mathbb{R}^d)$  per ogni  $k = 0, 1, \dots$  e  $1 \leq q < +\infty$ ) e  $f_2 \in L^p(\mathbb{R}^d)$  allora  $f_1 * f_2 \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$  (anzi  $\nabla^k(f_1 * f_2) \in C_0(\mathbb{R}^d)$  per ogni  $k$ ) e vale la formula nota<sup>2</sup>

$$\nabla^k(f_1 * f_2) = (\nabla^k f_1) * f_2 \quad \forall k = 1, \dots$$

**Dimostrazione.** Si dimostra per induzione su  $k$ . [TO DO: da fare]

## 2.15 Approssimazione per convoluzione

**Definizione.** Per prima cosa data una funzione  $g: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$  e  $\delta \neq 0$  poniamo

$$\sigma_\delta g(x) := \frac{1}{\delta^d} g\left(\frac{x}{\delta}\right)$$

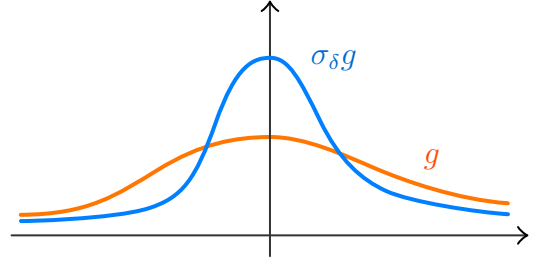
e notiamo che questa trasformazione preserva la norma  $L^1$ . Infatti, il valore  $1/\delta^d$  è proprio il modulo del determinante dello Jacobiano del cambio di variabile.

<sup>1</sup>Ha senso anche se  $\nabla f_1$  è a valori vettoriali. In tal caso  $\frac{\partial}{\partial x_i}(f_1 * f_2) = \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_i}\right) * f_2$  per  $i = 1, \dots, d$ .

<sup>2</sup>dato che  $\nabla^k f_1$  ha valori in  $\mathbb{R}^k$  e  $f_2$  in  $\mathbb{R}$ , dobbiamo definire  $\nabla^k f_1 * f_2$  [TO DO: da fare].

**Teorema.** Data  $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$  e  $g \in L^1(\mathbb{R}^d)$  con  $1 \leq p < +\infty$  e posto  $m := \int_{\mathbb{R}^d} g(x) dx$ , allora

$$f * \sigma_\delta g \xrightarrow{\delta \rightarrow 0} mf \text{ in } L^p(\mathbb{R}^d).$$



**Interpretazione.** Se  $g \geq 0$  con  $\int g dx = 1$  (dunque  $g$  distribuzione di probabilità) allora  $f * g$  possiamo pensarla come media pesata di traslate di  $f$ , dunque facendo  $f * \sigma_\delta g$  stiamo pesando sempre di più i valori delle traslate vicino a 0.

**Nota.** Per  $p = +\infty$  il teorema non vale. Infatti, la funzione  $f = \mathbb{1}_{[0, +\infty]} \in L^\infty$ ; le funzioni  $f * \sigma_\delta g$  sono continue ma non convergono in  $L^\infty$  a  $mf = f$ . Infatti, le successioni continue convergono in  $L^\infty$  a funzioni che coincidono, a meno di insiemi di misura nulla, con funzioni continue, ed  $f$  non è possibile modificarla in un insieme di misura nulla in modo che coincida con una funzione continua.

**Dimostrazione.** Per ora consideriamo  $g$  generica e ripercorriamo una dimostrazione simile a quella fatta per la disuguaglianza di Young

$$\begin{aligned} \|f * g - mf\|_p^p &= \int_{\mathbb{R}^d} \underbrace{|f * g - mf|}_h^p dx \\ &= \int |f * g - mf| \cdot h^{p-1} dx \\ &= \int \left| \int f(x-y)g(y) dy - f(x) \int g(y) dy \right| \cdot h^{p-1}(x) dx \\ &\leq \int \int |f(x-y) - f(x)| \cdot |g(y)| dy \cdot h^{p-1}(x) dx \\ &\stackrel{(*)}{=} \int \left( \int |f(x-y) - f(x)| h^{p-1}(x) dx \right) |g(y)| dy, \end{aligned}$$

dove in (\*) abbiamo usato Fubini-Tonelli. Ora prendiamo  $q$  tale che  $1/p + 1/q = 1$  allora per Hölder abbiamo

$$\begin{aligned} &\leq \int \|f(\cdot - y) - f(\cdot)\|_p \|h^{p-1}\|_q \cdot |g(y)| dy \\ &= \|h\|_p^{p-1} \int_{\mathbb{R}^d} \|\tau_y f - f\|_p \cdot |g(y)| dy \end{aligned}$$

dunque abbiamo ricavato che

$$\|f * g - mf\|_p^p \leq \|f * g - mf\|_p^{p-1} \int_{\mathbb{R}^d} \|\tau_y f - f\|_p \cdot |g(y)| dy$$

ed ora applicando questa stima a  $\sigma_\delta g$  invece che a  $g$  otteniamo

$$\|f * \sigma_\delta g - mf\|_p \leq \int_{\mathbb{R}^d} \|\tau_y f - f\|_p \cdot |\sigma_\delta g(y)| dy,$$

infine ponendo  $z = y/\delta$  e  $dz = 1/\delta^d dy$  e sostituendo nell'integrale

$$= \int_{\mathbb{R}^d} \|\tau_{\delta z} f - f\|_p \cdot |g(z)| dz \xrightarrow{\delta \rightarrow 0} 0$$

per *convergenza dominata*, verifichiamone le ipotesi

- i) La convergenza puntuale segue in quanto  $\|\tau_{\delta z}f - f\|_p \xrightarrow{\delta \rightarrow 0} 0$  per ogni  $z$ .
- ii) Come dominazione prendiamo  $2\|f\|_p \cdot |g| \in L^1$ .

□

**Corollario.** Sia  $g \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$  con  $\int g \, dx = 1$  e  $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$  e  $1 \leq p < +\infty$  allora  $\sigma_\delta g * f \xrightarrow{\delta \rightarrow 0} f$  in  $L^p(\mathbb{R}^d)$  e  $\sigma_\delta g * f \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$ .

# Capitolo 3

## Spazi di Hilbert

Sia  $H$  spazio vettoriale reale con prodotto scalare  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  definito positivo e norma indotta  $\| \cdot \|$  definita come  $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$ .

Si ricorda l'identità di polarizzazione

$$\langle x_1, x_2 \rangle = \frac{1}{4} \left( \|x_1 + x_2\|^2 - \|x_1 - x_2\|^2 \right).$$

**Nota.** Siccome  $\| \cdot \|$  è continua, dalla formula di polarizzazione segue che il prodotto scalare è continuo.

**Definizione.**  $H$  si dice **spazio di Hilbert** se è completo.

**Esempi.**

- Dato  $(X, \mathcal{A}, \mu)$ , gli spazi  $L^2(X), L^2(X, \mathbb{R}^m)$  sono spazi di Hilbert.
- Lo spazio  $\ell^2 = \left\{ (x_n) \mid \sum_{n=0}^{\infty} x_n^2 < +\infty \right\}$  è uno spazio di Hilbert.

**Definizione.**  $\mathcal{F} \subset H$  è un **sistema ortonormale** se

$$\|e\| = 1 \quad \forall e \in \mathcal{F}, \quad \langle e, e' \rangle = 0 \quad \forall e \neq e' \in \mathcal{F}.$$

**Definizione.**  $\mathcal{F}$  si dice **completo** se  $\overline{\text{Span}(\mathcal{F})} = H$ . In tal caso  $\mathcal{F}$  si dice **base di Hilbert**.

**Osservazione.** In generale una base di Hilbert  $\mathcal{F} \subset H$  non è anche una base algebrica di  $H$ .

L'esempio che segue spiega quanto appena detto.

**Esempio.** In  $\ell^2$  una base ortonormale è  $\mathcal{F} = \{e_n \mid n \in \mathbb{N}\}$  con  $e_n = (0, \dots, 0, \overset{(n)}{1}, 0, \dots)$ . Infatti, il fatto che siano ortonormali è banale; verifichiamo che sia una base.

Studiamo  $\text{Span}(\mathcal{F}) = \{x = (x_0, x_1, \dots) \mid x_n \text{ è definitivamente nullo}\}$ : dato  $x \in \ell^2$  e  $m = \mathbb{N}$ , definiamo

$$P_m x := (x_0, x_1, \dots, x_m, 0, \dots).$$

Allora  $\text{Span}(\mathcal{F}) \supset P_m x \xrightarrow{m \rightarrow +\infty} x$  in  $\ell^2$ . Infatti,

$$x - P_m x = (0, \dots, 0, x_{m+1}, x_{m+2}, \dots).$$

---

<sup>1</sup>Lo span sono combinazioni lineari finite.

Dunque

$$\|x - P_m x\| = \sum_{n=m+1}^{\infty} x_n^2 \xrightarrow{m \rightarrow +\infty} 0.$$

**Teorema 1.** (della base di Hilbert.) Dato  $H$  spazio di Hilbert,  $\mathcal{F}$  sistema ortonormale al più numerabile, ovvero  $\mathcal{F} = \{e_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ . Definiamo per ogni  $x \in H$ ,  $n \in \mathbb{N}$  l'elemento  $x_n = \langle x, e_n \rangle$ . Allora

- i) Vale  $\sum_n x_n^2 \leq \|x\|^2$  (**Disuguaglianza di Bessel**).
- ii) La somma  $\sum_n x_n e_n$  converge a qualche  $\bar{x} \in H$  e  $\bar{x}_n = x_n$  per ogni  $n$ .
- iii) Vale  $\|\bar{x}\|^2 = \sum_n x_n^2 \leq \|x\|^2$ .
- iv) Se  $x - \bar{x} \perp \mathcal{F}$ , allora  $x - \bar{x} \perp \overline{\text{Span}(\mathcal{F})}$ , ovvero  $\bar{x}$  è la proiezione di  $x$  su  $\overline{\text{Span}(\mathcal{F})}$ .
- v) Se  $\mathcal{F}$  è completo, allora  $x = \bar{x}$  e in particolare

$$x = \sum_{n=0}^{\infty} x_n e_n, \quad \|x\|^2 = \sum_{n=0}^{\infty} x_n^2 \quad (\textbf{Identità di Parseval}).$$

Alla dimostrazione del teorema premettiamo il seguente lemma.

**Lemma 2.** Siano  $H$  e  $\mathcal{F}$  come nel teorema. Data  $(a_n) \in \ell^2$ , allora

- i) La serie  $\sum_n a_n e_n$  converge a qualche  $\bar{x} \in H$ .
- ii)  $\bar{x}_n = a_n$  per ogni  $n$ .
- iii)  $\|\bar{x}\|^2 = \sum_n a_n^2$ .

**Dimostrazione.**

- i) Dimostriamo che  $y_n = \sum_{n=1}^m a_n e_n$  è di Cauchy in  $H$ . Se  $m' > m$ , vale

$$y_{m'} - y_m = \sum_{n=m+1}^{m'} a_n e_n \implies \|y_{m'} - y_m\|^2 = \left\| \sum_{n=m+1}^{m'} a_n e_n \right\|^2 = \sum_{n=m+1}^{m'} a_n^2 \leq \sum_{n=m+1}^{\infty} a_n^2 < +\infty.$$

Dunque, per ogni  $\varepsilon$  esiste  $m_\varepsilon$  tale che  $\sum_{m_\varepsilon+1}^{\infty} a_n^2 \leq \varepsilon^2$ , per cui

$$\|y_{m'} - y_m\|^2 \leq \sum_{m+1}^{m'} a_n^2 \leq \sum_{m_\varepsilon+1}^{\infty} a_n^2 \leq \varepsilon^2 \quad \forall m, m' \geq m_\varepsilon.$$

- ii) Se  $m \geq n$ ,  $\langle y_m, e_n \rangle = a_n$ , dunque, per continuità del prodotto scalare

$$a_n = \langle y_m, e_n \rangle \xrightarrow{m \rightarrow \infty} \langle \bar{x}, e_n \rangle = \bar{x}_n.$$

iii) Si ha l'uguaglianza  $\|y_m\|^2 = \sum_{n=1}^m a_n^2$ , per cui passando al limite per  $m \rightarrow +\infty$  otteniamo

$$\begin{aligned} \|y_m\|^2 &\xrightarrow{m \rightarrow \infty} \|\bar{x}\|^2 \\ &\parallel \\ \sum_{n=0}^m a_n^2 &\xrightarrow{m \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^{\infty} a_n^2 \end{aligned}$$

□

### Dimostrazione Teorema 1.

i) Studiamo la somma  $x = \sum_{n=0}^m x_n e_n + \overbrace{y}^{\text{resto}}$ .

Notiamo che  $x$  è somma di vettori ortogonali, infatti  $y$  è ortogonale a  $\sum_{n=0}^m x_n e_n$  :

$$\langle y, e_i \rangle = \left\langle x - \sum_{n=0}^m x_n e_n, e_i \right\rangle = \langle x, e_i \rangle - \sum_{n=0}^m x_n \underbrace{\langle e_n, e_i \rangle}_{\delta_{i,n}} = x_i - x_i = 0.$$

Essendo che  $x$  è somma di vettori ortogonali abbiamo

$$\|x\|^2 = \sum_{n=1}^m x_n^2 + \|y\|^2 \geq \sum_{n=1}^m x_n^2.$$

Passando al limite per  $m \rightarrow +\infty$  otteniamo

$$\|x\|^2 \geq \sum_{n=1}^{\infty} x_n^2.$$

ii) Segue dal lemma notando che il punto precedente ci dice che la successione  $(x_n)$  è a quadrato sommabile.

iii) Analogamente al caso precedente.

iv) Notiamo che  $\langle x - \bar{x}, e_n \rangle = x_n - \bar{x}_n \stackrel{\text{ii)}}{=} 0$  per ogni  $n$ . Cioè

$$x - \bar{x} \perp e_n \implies x - \bar{x} \perp \text{Span}(\mathcal{F}) \implies x - \bar{x} \underset{\substack{\text{continuità} \\ \text{pr. scalare}}}{\perp} \overline{\text{Span}(\mathcal{F})}$$

v)  $x - \bar{x} \perp \underbrace{\overline{\text{Span}(\mathcal{F})}}_{\mathcal{F} \text{ è completo}} = H \implies x - \bar{x} = 0$ , cioè  $x = \bar{x}$ .

□

**Corollario 3.** Siano  $H$  spazio di Hilbert,  $\mathcal{F} = \{e_n \mid n \in \mathbb{N}\}$  base di Hilbert,  $x, x' \in H$ . Valgono le seguenti.

i)  $x_n = x'_n \quad \forall n \in \mathbb{N} \iff x = x'$  ( $\Leftarrow$  è ovvia).

ii)  $\langle x, x' \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} x_n x'_n$  (**Identità di Parseval**).

iii) L'applicazione  $H \ni x \mapsto (x_n) \in \ell^2$  è un'isometria surgettiva<sup>1</sup>.

### Dimostrazione.

- i) Per l'enunciato v) se due vettori hanno la stessa rappresentazione rispetto a una base di Hilbert coincidono.
- ii) La tesi segue usando l'identità di polarizzazione congiuntamente all'enunciato v) del teorema:

$$\begin{aligned}\langle x, x' \rangle &= \frac{1}{4} (\|x + x'\|^2 - \|x - x'\|^2) = \frac{1}{4} \left( \sum_n \overbrace{(x_n + x'_n)^2}^{x_n^2 + x_n'^2 + 2x_n x'_n} - \sum_n \underbrace{(x_n - x'_n)^2}_{x_n^2 + x_n'^2 - 2x_n x'_n} \right) \\ &= \frac{1}{4} (\cancel{\sum x_n^2} + \cancel{\sum x_n'^2} + 2 \sum x_n x'_n - \cancel{\sum x_n^2} - \cancel{\sum x_n'^2} + 2 \sum x_n x'_n) .\end{aligned}$$

- iii) Il fatto che l'applicazione sia un'isometria segue da Parseval; che sia iniettiva dal fatto che  $\mathcal{F}$  è una base di Hilbert e che sia surgettiva dai punti i) e ii) del Lemma 2.

□

### Osservazioni.

- Gli enunciati i) e v) non richiedono  $H$  completo, mentre ii) non è vero se  $H$  non è completo.
- Se  $H$  è uno spazio di Hilbert e  $\mathcal{F}$  sistema ortonormale infinito, allora  $\mathcal{F}$  non è mai una base algebrica<sup>2</sup>. Dunque, combinazioni lineari finite di  $\mathcal{F}$  non sono mai uguali ad  $H$ , ovvero  $\text{Span}(\mathcal{F}) \subsetneq H$ .

**Dimostrazione.** Presi  $(e_n) \subset \mathcal{F}$ , consideriamo  $\bar{x} = \sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n} e_n$ . Allora  $\bar{x} \in H \setminus \text{Span}(\mathcal{F})$ .

- Siano  $H$  uno spazio di Hilbert di dimensione infinita e  $\mathcal{F}$  una base di Hilbert. Allora  $\mathcal{F}$  è numerabile se e solo se  $H$  è separabile.

### Dimostrazione.

⇒ Vale  $H = \overline{\text{Span}(\mathcal{F})} = \overline{\text{Span}_{\mathbb{Q}}(\mathcal{F})}$ . Concludiamo notando che  $\overline{\text{Span}_{\mathbb{Q}}(\mathcal{F})}$  è numerabile se  $\mathcal{F}$  è numerabile.

⇐ Se  $\mathcal{F}$  non fosse numerabile, siccome  $\|e - e'\| = \sqrt{2} \quad \forall e, e' \in \mathcal{F}$ , potremmo definire per ogni elemento di  $\mathcal{F}$  una palla di raggio  $\sqrt{2}/2$ , dunque potremmo definire un insieme di palle disgiunte. Dato un sottoinsieme denso di  $H$ , per definizione, deve intersecare ogni palla e dunque deve essere più che numerabile, dunque  $H$  non sarebbe separabile.

**Esempio.** Lo spazio  $H = L^2(X)$ , con  $X = \mathbb{R}^n$ ,  $\mu$  misura di Lebesgue ha base di Hilbert numerabile.

<sup>1</sup>In particolare è bigettiva ma l'iniettività è ovvia.

<sup>2</sup>Per base algebrica s'intende un insieme di vettori di uno spazio vettoriale le cui combinazioni lineari generano tutto lo spazio.



- Dato  $\mathcal{F}$  sistema ortonormale in  $H$ , allora  $\mathcal{F}$  è completo se e solo se  $\mathcal{F}$  è massimale (nella classe dei sistemi ortonormali rispetto all'inclusione).

**Dimostrazione.**

$\Rightarrow$  Dato che  $\mathcal{F}$  è completo segue che  $\overline{\text{Span}(\mathcal{F})} = X$ , quindi

$$\mathcal{F}^\perp = (\text{Span}(\mathcal{F}))^\perp \underbrace{= \overline{\text{Span}(\mathcal{F})}^\perp}_{\text{continuità del prodotto scalare}} = H^\perp = \{0\}.$$

dunque  $\mathcal{F}$  è massimale.

$\Leftarrow$  Se  $\mathcal{F}$  non è completo, esiste  $x \in H \setminus \text{Span}(\mathcal{F})$ . Definiamo  $\bar{x}$  come nel Teorema 1. Notiamo che  $x - \bar{x} \perp \text{Span}(\mathcal{F})$ , dunque  $x - \bar{x} \perp \mathcal{F}$  e  $x - \bar{x} \neq \{0\}$ , da cui  $\mathcal{F} \cup \left\{ \frac{x - \bar{x}}{\|x - \bar{x}\|} \right\}$  è un sistema ortonormale che include strettamente  $\mathcal{F}$ .  $\nmid$

**Osservazione.** Nell'implicazione  $\Rightarrow$  non abbiamo usato la completezza di  $H$ .

- Ogni sistema ortonormale  $\mathcal{F}$  si completa a  $\tilde{\mathcal{F}}$  base di Hilbert di  $H$ .

**Dimostrazione.** Sia  $X = \{ \mathcal{F} \text{ sistema ortonormale in } H \text{ tale che } \tilde{\mathcal{F}} \subset \mathcal{F} \}$ . Per Zorn,  $X$  contiene un elemento massimale. Denotiamolo con  $\tilde{\mathcal{F}}$ . Allora  $\tilde{\mathcal{F}}$  è una base di Hilbert.

**Teorema 4.** Dato  $V$  sottospazio vettoriale chiuso di  $H$ . Allora

- $H = V + V^\perp$ , cioè per ogni  $x \in H$  esiste  $\bar{x} \in V$  e  $\tilde{x} \in V^\perp$  tale che  $x = \bar{x} + \tilde{x}$ .
- Gli elementi  $\bar{x}$  e  $\tilde{x}$  sono univocamente determinati (e indicati con  $x_V$  e  $x_V^\perp$ ).
- $\bar{x}$  è caratterizzato come l'elemento di  $V$  più vicino a  $x$ .

**Dimostrazione.**

- Dato che  $V$  è chiuso,  $V$  è completo, cioè  $V$  è un sottospazio di  $H$ , dunque  $V$  ammette base ortonormale  $\mathcal{F} = \{e_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ . Definiamo  $\bar{x} \in \overline{\text{Span}(\mathcal{F})}$  come nel Teorema 1 e  $\tilde{x} := x - \bar{x} \in \overline{\text{Span}(\mathcal{F})}^\perp = V^\perp$  (per iv).
- Se  $x = \bar{x} + \tilde{x} = \bar{x}' + \tilde{x}'$ , dove  $\bar{x}, \bar{x}' \in V$  e  $\tilde{x}, \tilde{x}' \in V^\perp$ , allora

$$\bar{x} - \bar{x}' = \tilde{x}' - \tilde{x} \quad \underbrace{\implies}_{V \cap V^\perp = \{0\}} \quad \bar{x} - \bar{x}' = \tilde{x}' - \tilde{x} = 0.$$

- Per ogni  $y \in V$  sia  $f(y) = \|x - y\|^2$ . Mostriamo che  $\bar{x}$  è l'unico minimo di  $f$ .

$$f(y) = \|x - y\|^2 = \left\| \underbrace{x - \bar{x}}_{\in V^\perp} + \underbrace{\bar{x} - y}_{\in V} \right\|^2 = \|x - \bar{x}\|^2 + \|\bar{x} - y\|^2 = f(\bar{x}) + \|\bar{x} - y\|^2 \geq f(\bar{x}).$$

□

**Osservazione.** Serve  $V$  chiuso. Se per esempio  $V$  è denso in  $H$  ma  $V \neq H$ , allora

$$\overline{V^\perp} = \overline{V}^\perp = H^\perp = \{0\} \implies V \subseteq V + V^\perp \subseteq V + \overline{V^\perp} = V \subsetneq H.$$

Un esempio di tale  $V$  è  $\text{Span}(\mathcal{F})$  con  $\mathcal{F}$  base di  $H$  ( $H$  di dimensione infinita).

**Teorema 5** (di rappresentazione di Riesz.) Dato  $\Lambda: H \rightarrow \mathbb{R}$  lineare e continuo, esiste  $x_0 \in H$  tale che

$$\Lambda(x) = \langle x, x_0 \rangle \quad \text{per ogni } x \in H. \quad (*)$$

**Lemma 6.** Dato  $\Lambda: X \rightarrow \mathbb{R}$  lineare,  $(\ker \Lambda)^\perp$  ha dimensione 0 o 1.

**Dimostrazione** Se per assurdo  $\dim(\ker \Lambda)^\perp \geq 2$ , allora  $(\ker \Lambda)^\perp$  conterrebbe un sottospazio  $W$  di dimensione 2. Dunque,  $\dim(\ker \Lambda|_W) = \{1, 2\}$ , essendo che  $\dim \mathbb{R} = 1$ . Ma questo non è possibile, in quanto abbiamo definito  $W = \ker^\perp$ .  $\square$

**Dimostrazione Teorema 5.** Sia  $V := \ker \Lambda$ . Dato che  $\Lambda$  è continuo segue che  $V$  è chiuso. Se  $V = H \implies \Lambda \cong 0$  e prendiamo  $x_0 = 0$ .

Se  $V \neq H$ , allora  $V^\perp \neq \{0\}$  e definiamo  $x_1 \in V^\perp$  con  $\|x_1\| = 1$ . Poniamo  $x_0 := cx_1$  con  $c := \Lambda x_1$  e  $\tilde{\Lambda}(x) := \langle x, x_0 \rangle$ . Abbiamo che

- $x \in V \implies x \perp x_1 \implies x \perp x_0 \implies \tilde{\Lambda} = 0 = \Lambda(x)$ . Quindi  $\tilde{\Lambda} = \Lambda$  su  $V$ .
- $\tilde{\Lambda}(x_1) = \langle x_1, x_0 \rangle = \langle x_1, cx_1 \rangle = c\|x_1\|^2 = c = \Lambda(x_1)$ . Quindi  $\tilde{\Lambda} = \Lambda$  su  $\text{Span}(x_1) = V^\perp$ .
- $\tilde{\Lambda} = \Lambda$  su  $V + V^\perp = H$ .

$\square$

**Osservazione.** Esistono funzioni  $\Lambda: H \rightarrow \mathbb{R}$  lineari ma non continue se  $H$  ha dimensione infinita.

**Dimostrazione.** Prendo  $\Lambda: H \rightarrow \mathbb{R}$  lineare definito come

$$\begin{cases} \Lambda(e_n) = n & \forall n \\ \Lambda(e) = \text{qualsiasi } e \in \mathcal{G} \setminus \{e_n\}. \end{cases}$$

Allora

$$+\infty = \sup_n |\Lambda(e_n)| \leq \sup_{\|x\| \leq 1} |\Lambda(x)|$$

da cui segue che  $\Lambda$  non è continuo.

### 3.1 Spazi di Hilbert complessi

**Definizione.** Sia  $H$  uno spazio vettoriale su  $\mathbb{C}$  con prodotto hermitiano  $\langle \cdot; \cdot \rangle$ , ovvero tale che

- $\langle \cdot; \cdot \rangle$  è lineare nella prima variabile
- $\langle x; x' \rangle = \overline{\langle x', x \rangle}$  ovvero è antilineare nella seconda variabile.
- $\langle x; x \rangle \geq 0$  per ogni  $x$  e vale 0 se e solo se  $x = 0$ .

Analogamente si pone  $\|x\| := \sqrt{\langle x; x \rangle}$ . C'è un'identità di polarizzazione ma è leggermente diversa dalla versione reale.

**Definizione.**  $H$  si dice di Hilbert se è **completo**.

**Esempio.** Su  $L^2(X; \mathbb{C})$  si mette il prodotto scalare dato da

$$\langle u; v \rangle := \int_X u \cdot \bar{v} \, d\mu.$$

**Teorema.** (della base di Hilbert per spazi complessi) Dato  $\mathcal{F} = \{e_n\}$  sistema ortonormale in  $H$  e  $x \in H$  allora per ogni  $n$  si pone<sup>1</sup>

$$x_n = \langle x; e_n \rangle$$

Vale anche l'identità di Parseval  $\|x\|^2 = \sum |x_n|^2$  dove  $|\cdot|$  è il modulo di un numero complesso, in particolare nella versione con prodotto scalare diventa

$$\langle x, x' \rangle = \sum_n x_n \overline{x'_n}.$$

## 3.2 Esempi di basi Hilbertiane

### 3.2.1 Polinomi

La base data da  $\{1, x, x^2, \dots, x^n, \dots\}$  opportunamente ortonormalizzata è una base di  $L^2[0, 1]$  (anche di  $L^2(\mathbb{R})$ ) per il teorema di Stone-Weierstrass.

### 3.2.2 Base di Haar

Vediamo la base di Haar data da due indici  $n, k$  dove  $n$  indica l'ampiezza delle “onde” (anche dette *wavelet*) e  $k$  il posizionamento dell'onda. Sia  $n \in \mathbb{N}$  e  $k = 1, \dots, 2^n$  e poniamo

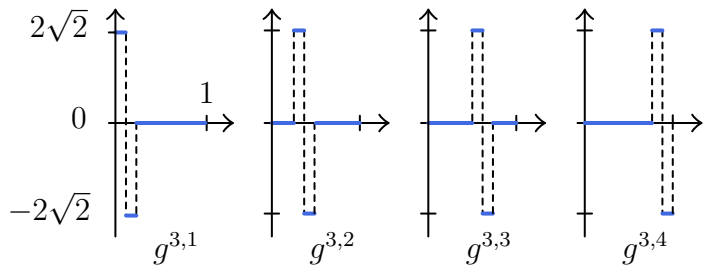
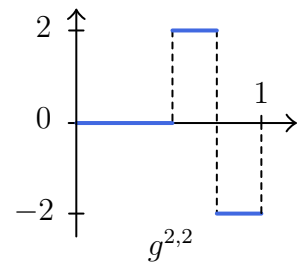
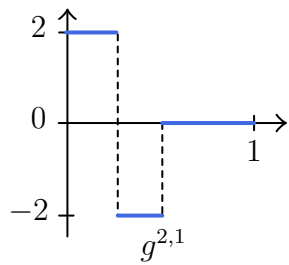
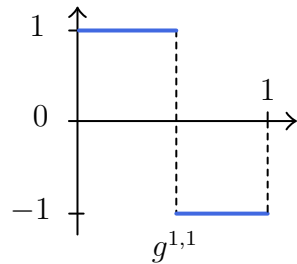
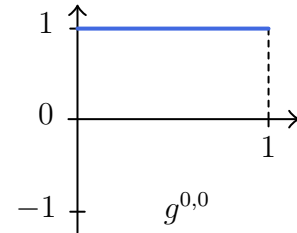
$$g^{0,0} := \mathbb{1}_{[0,1]} \quad g^{n,k} := 2^{\frac{n-1}{2}} \left( \mathbb{1}_{\left[\frac{2k-2}{2^n}, \frac{2k-1}{2^n}\right]} - \mathbb{1}_{\left[\frac{2k-1}{2^n}, \frac{2k}{2^n}\right]} \right)$$

Inoltre  $\|g^{n,k}\|_{L^2[0,1]} = 1$  ed anche  $\|g^{0,0}\|_{L^2[0,1]} = 1$ . Vedremo che  $\{g^{n,k} \mid n \geq 1, k = 1, \dots, 2^n\} \cup \{g^{0,0}\}$  formano un sistema ortonormale.

- $\langle g^{n,k}, g^{0,0} \rangle = 0$ : È ovvio in quanto le  $g^{n,k}$  hanno media nulla.
- $\langle g^{n,k}, g^{n',k'} \rangle = 0$ : Se  $n = n'$  i supporti sono sempre disgiunti altrimenti  $n \neq n'$ , se supponiamo  $n < n'$  allora i supporti o sono disgiunti e si conclude come prima o il supporto di  $g^{n',k'}$  è contenuto in quello di  $g^{n,k}$ . In tal caso però  $g^{n,k}$  è costante su  $g^{n',k'}$  e dunque l'integrale è sempre nullo.

Inoltre è anche una base hilbertiana, per combinazioni algebriche si ottengono tutti gli intervalli della forma

$$I_k := \left[ \frac{k-1}{2^n}, \frac{k}{2^n} \right] \rightsquigarrow \mathbb{1}_{I_k}$$



<sup>1</sup>E non  $\langle e_n; x \rangle$ !

ad esempio normalizzando  $g^{n,k} + 2^{\frac{n-1}{2}} g^{0,0}$  otteniamo uno degli intervalli di sopra di lunghezza  $1/2^{n+1}$ .

Vedremo che possiamo estendere la base di Haar a tutto  $\mathbb{R}$  però è più difficile... [TODO: Ehm aggiungere la parte dopo quando verrà fatta]

## 3.3 Esercitazione del 3 Novembre 2021

### 3.3.1 Basi Hilbertiane e proiezioni

**Esercizio.** Sia  $H = L^2(-1, 1)$  e sia  $V = \text{Span}\{1, x, x^2\}$ . Verificare che  $V$  è un sottospazio chiuso e calcolare la proiezione di  $\sin x$  su  $V$ .

*Notazione.* Indichiamo con  $\|\cdot\|$  la norma  $\|\cdot\|_{L^2(-1,1)}$  e con  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  il prodotto scalare su  $L^2$ .

**Soluzione.** Vediamo come risolvere questo esercizio in tre modi diversi.

i) Dato  $H$  spazio di Hilbert separabile, e dato un sottospazio  $V \subset H$ , vediamo come trovare la proiezione di un elemento  $x \in H$  su  $V$ . Procediamo come segue.

- Controlliamo che  $V$  sia chiuso.
- Calcoliamo una base hilbertiana di  $V$  che indichiamo con  $\{e_1, \dots, e_n, \dots\}$ .

Il tal caso, la proiezione di un elemento  $x \in H$  su  $V$  è data da

$$p_V(x) = \sum_n \langle x, e_n \rangle e_n.$$

**Esercizio.** [TO DO: per casa] Ogni sottospazio di dimensione finita di uno spazio di Hilbert o di  $L^p$  è chiuso (e in particolare ha parte interna vuota).

Abbiamo una base di  $V$  data da  $\{1, x, x^2\}$  (è una base in quanto sono linearmente indipendenti: si può verificare mostrando che  $\forall x \in [-1, 1] \lambda_1 + \lambda_2 x + \lambda_3 x^2 = 0 \implies \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$  usando la teoria sulle equazioni di II grado oppure si può derivare e man mano ottenere più informazioni su  $\lambda_3, \lambda_2, \lambda_1$ ).

Volendo usare la base scritta sopra per calcolare la proiezione di  $\sin x$  su  $V$ , dovremmo prima applicare Gram-Schmidt alla base  $\{1, x, x^2\}$  per determinare una base Hilbertiana:

$$\begin{aligned} e_1 &= \frac{1}{\|1\|} = \frac{1}{\sqrt{2}} \\ e_2 &= \frac{x - \langle x, \frac{1}{\sqrt{2}} \rangle \cdot 1}{\left\| x - \langle x, \frac{1}{\sqrt{2}} \rangle \cdot 1 \right\|} \\ e_3 &= \frac{x^2 - \langle x^2, e_1 \rangle \cdot e_1 - \langle x^2, e_2 \rangle \cdot e_2}{\left\| x^2 - \langle x^2, e_1 \rangle \cdot e_1 - \langle x^2, e_2 \rangle \cdot e_2 \right\|} \end{aligned}$$

e successivamente calcolare  $p_V(\sin x)$  con la formula scritta sopra.

ii) Alternativamente, possiamo direttamente cercare la proiezione di  $\sin x$  su  $V$ . Determiniamo  $a, b, c$  tali che  $a + bx + cx^2$  sia  $p_V(x) = \sin x$  allora posto  $f(x) := \sin x - a - bx - cx^2$  abbiamo  $f(x) \in V^\perp \iff$  si verificano le seguenti condizioni

$$\langle f(x), 1 \rangle = 0 \quad \langle f(x), x \rangle = 0 \quad \langle f(x), x^2 \rangle = 0$$

Ad esempio da  $\langle f(x), 1 \rangle = 0$  otteniamo

$$0 = \int_{-1}^1 (\sin x - a - bx - cx^2) \cdot 1 \, dx = \underbrace{\int_{-1}^1 \sin x \, dx}_{=0} - 2a - b \underbrace{\int_{-1}^1 x \, dx}_{=0} - c \int_{-1}^1 x^2 \, dx \implies 0 = -2a - \frac{2}{3}c$$

ed analogamente si procede con  $x$  e  $x^2$ ... [TODO: Da finire]

- iii) Un altro modo è considerare la funzione  $g(a, b, c) := \|\sin x - a - bx - cx^2\|_{L^2(-1,1)}$  che è continua, coerciva, etc. e imponendo  $\nabla_{a,b,c} g = 0$  si minimizza e si ottengono  $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$  che verificano  $p_V(\sin x)$ .

**Esercizio.** Sia  $X = \{u \in L^2(\mathbb{R}) \mid \int_0^2 u \, dx = 0\}$ , dire se è un sottospazio chiuso, calcolare  $X^\perp$  per una generica  $u \in L^2(\mathbb{R})$  e determinare le proiezioni  $p_X(u)$  e  $p_{X^\perp}(u)$ .

**Soluzione.** La mappa  $T$  lineare data da

$$u \mapsto \int_0^2 u \, dx$$

è ben definita, lineare e continua, allora  $X$  è proprio  $T^{-1}(0)$  dunque è un sottospazio chiuso.

**Osservazione.** Notiamo che

$$T(u) = \int_{\mathbb{R}} u(x) \cdot \mathbb{1}_{[0,2]}(x) \, dx = \langle u, g \rangle_{L^2(\mathbb{R})}, \quad g = \mathbb{1}_{[0,2]}(x) \in L^2(\mathbb{R}).$$

Calcoliamo ora  $X^\perp$  e le proiezioni  $p_X, p_{X^\perp}$ . Abbiamo che  $X = \{u \in L^2(\mathbb{R}) \mid \langle u, g \rangle = 0\}$  dove  $g = \mathbb{1}_{[0,2]}(x)$ , dunque  $X^\perp = \text{Span}(g)$ . Notiamo<sup>1</sup> che

$$L^2(\mathbb{R}) = \text{Span}_{\mathbb{R}} \left\{ \frac{g}{\|g\|_{L^2}} \right\} \oplus \left\{ \frac{g^\perp}{\|g^\perp\|_{L^2}} \right\}.$$

Calcoliamo  $p_X(u)$  come segue

$$p_X(u) = u - \left\langle u, \frac{g}{\|g\|_{L^2}} \right\rangle \cdot \frac{g}{\|g\|_{L^2}},$$

dove

$$\|g\|_{L^2} = \left( \int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_{[0,2]}(x)^2 \, dx \right)^{1/2} = \sqrt{2}$$

e dunque

$$p_X(u) = u - \left( \int_0^2 u \, dx \right) \cdot \frac{\mathbb{1}_{[0,2]}}{2}.$$

Un controllo veloce per verificare di aver fatto i conti corretti è quello di vedere che  $p_X(u) \in X$ , dunque di verificare che  $\int_0^2 p_X(u) \, dx = 0$ .

Per calcolare  $p_{X^\perp}(u)$  usiamo la seguente.

**Osservazione.** Vale  $u = p_X(u) + p_{X^\perp}(u)$ .

In conclusione,

$$p_{X^\perp}(u) = u - p_X(u) = \left( \int_0^2 u \, dx \right) \cdot \frac{\mathbb{1}_{[0,2]}}{2}.$$

**Esercizio.** [TO DO: per casa.] Sia  $V = \{\underline{x} = (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \ell^2 \mid x_1 + x_3 + x_5 = 0\}$ . Dire se  $V$  è chiuso in  $\ell^2$  e calcolare  $p_V$  e  $p_{V^\perp}$ .

---

<sup>1</sup>Con  $g/\|g\|_{L^2}$  indichiamo una base normalizzata di  $g^\perp$ .

### 3.3.2 Approssimazioni per convoluzione

Abbiamo visto che data  $g \in L^1(\mathbb{R}^d)$  con  $\int g \, dx = 1$  allora per ogni  $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$  abbiamo  $f_\delta := f * \sigma_\delta g \xrightarrow{\delta \rightarrow 0} f$  in  $L^p(\mathbb{R}^d)$  per  $p \neq \infty$ .

**Esercizio.** Dire se esiste  $v \in L^1(\mathbb{R})$  tale che sia elemento neutro della convoluzione, ovvero

$$\forall f \in L^1(\mathbb{R}) \quad f * v = f.$$

Una tale  $v$  non esiste, per vederlo scegliamo opportunamente  $\bar{f}$  e usiamo l'equazione. Scelgo  $g \in C_C(\mathbb{R})$  e defiamo  $\sigma_\delta g = 1/\delta g(1/\delta)$ . Abbiamo che  $\sigma_\delta g * v = \sigma_\delta g$  per ogni  $\delta$ . Per il teorema abbiamo che  $\sigma_\delta g * v = \sigma_\delta g \xrightarrow{\delta \rightarrow 0} v$  in  $L^1(\mathbb{R})$ , ma  $\sigma_\delta g \xrightarrow{\delta \rightarrow 0} 0$  quasi ovunque in  $L^1(\mathbb{R})$ . Allora  $v = 0$  q.o. in  $L^1(\mathbb{R})$ , dunque non può valere  $f * v = v$  per ogni  $f \in L^1(\mathbb{R})$ .

**Esercizio.** [TO DO: per casa.] Sia  $f$  misurabile su  $\mathbb{R}^d$  tale che  $\int_E f \, dx = 0$  per ogni  $E$  misurabile di  $\mathbb{R}^d$ . Dimostrare che  $f = 0$  q.o. su  $\mathbb{R}^d$ .

*Suggerimento.* Considerare l'integrale sull'insieme  $\{x \in \mathbb{R}^d \mid f(x) = 0\} \cup \{x \in \mathbb{R}^d \mid f(x) \neq 0\}$  e verificare che, se denotiamo  $A = \{x \in \mathbb{R}^d \mid f(x) \neq 0\}$ , allora  $|A| = 0$ .

**Esercizio.** [TO DO: per casa.] Sia  $f$  Lebesgue-misurabile su  $\mathbb{R}^d$  tale che  $\int_B f \, dx = 0$  per ogni palla  $B$  su  $\mathbb{R}^d$

$$\int_B f \, dx = 0$$

Dimostrare che  $f = 0$  quasi ovunque su  $\mathbb{R}^d$ .

*Suggerimenti.* Usare la convoluzione con opportuni nuclei; notare che  $\int_B f \, dx = 0 \iff f * \mathbb{1}_B = 0$  per ogni palla  $B$ .

**Esercizio.** Sia  $p \geq 1$  allora  $\{u \in L^p(\mathbb{R}) \mid \int u \, dx = 0\} \subseteq L^p(\mathbb{R})$  è denso in  $L^p(\mathbb{R})$ ?

# Capitolo 4

## Serie di Fourier

Lo scopo della serie di Fourier (complessa) è di rappresentare una funzione  $f: [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{C}$  (o più in generale una funzione  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$   $2\pi$ -periodica) come

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}$$

In particolare, chiamiamo i coefficienti  $c_n$  **coefficienti di Fourier** di  $f(x)$  e tutta l'espressione a destra **serie di Fourier** di  $f(x)$ .

**Motivazione.** La rappresentazione in serie di Fourier serve ad esempio a risolvere certe equazioni alle derivate parziali ed è anche utilizzata per la “compressione dati”.

**Problemi.**

- Come si trovano (se esistono) i coefficienti di Fourier?
- Ed in che senso la serie converge?

**Osservazione.** La serie appena vista è indicizzata da  $-\infty$  a  $+\infty$ , più avanti vedremo che la definizione esatta non sarà importante ma per ora usiamo la definizione

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n := \lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{n=-N}^N a_n$$

ed ogni tanto scriveremo anche  $\sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n$  per brevità.

**Teorema 1.** L'insieme  $\mathcal{F} = \left\{ e_n(x) := \frac{e^{inx}}{\sqrt{2\pi}} \right\}$  è una base ortonormale di  $L^2([-\pi, \pi]; \mathbb{C})$ .

Da cui *formalmente* segue che

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} \langle f; e_n \rangle \cdot e_n = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \left( \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \frac{\overline{e^{int}}}{\sqrt{2\pi}} dt \right) \frac{e^{inx}}{\sqrt{2\pi}} \\ &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{1}{2\pi} \underbrace{\left( \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-int} dt \right)}_{c_n} e^{inx} \end{aligned}$$

**Definizione.** Data  $f \in L^2([-\pi, \pi]; \mathbb{C})$  i coefficienti di Fourier di  $f$  sono

$$c_n = c_n(f) := \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx} dx.$$

Notiamo in particolare che è anche ben definito anche per  $f \in L^1$  (anche se per ora non ci dice molto in quanto  $L^1$  non è uno spazio di Hilbert).

**Corollario.** Per ogni  $f \in L^2([-\pi, \pi]; \mathbb{C})$  abbiamo

i) La serie  $\sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n e^{inx}$  converge a  $f$  in  $L^2$ .

ii) Vale l'identità di Parseval

$$\|f\|_2^2 = 2\pi \sum_{n \in \mathbb{Z}} |c_n|^2 \quad \langle f, g \rangle = 2\pi \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n(f) \overline{c_n(g)}$$

**Osservazione.** Usando la i) ed il fatto che la convergenza in  $L^2$  implica la convergenza quasi ovunque a meno di sottosuccessioni otteniamo che  $\forall f \exists N_n \uparrow \infty$  tale che

$$\sum_{n=-N_k}^{N_k} c_n e^{inx} \xrightarrow{k} f(x) \quad \forall x \in [-\pi, \pi].$$

In particolare nel 1966 Carleson ha dimostrato che in realtà vale proprio

$$\sum_{n=-N}^N c_n e^{inx} \xrightarrow{N} f(x) \quad \forall x.$$

Prima di dimostrare il Teorema 1 riportiamo il teorema di Stone-Weierstrass.

**Teorema** (di Stone-Weierstrass.) Sia  $K$  uno spazio compatto e  $T_2$  (essenzialmente è uno spazio metrico compatto) e sia  $C(K)$  l'insieme delle funzioni continue reali su  $K$ , mentre  $C(K; \mathbb{C})$  le funzioni continue complesse su  $K$  dotate della norma del sup.

Dato  $\mathcal{A} \subset C(K)$  diciamo che è una **sottoalgebra** se è uno spazio vettoriale e chiuso rispetto al prodotto e diciamo che **separa i punti** se  $\forall x_1, x_2 \in K$  con  $x_1 \neq x_2$  allora  $\exists f \in \mathcal{A}$  tale che  $f(x_1) \neq f(x_2)$ .

- *Caso reale:* se  $\mathcal{A}$  è una sottoalgebra di  $C(K)$  che separa i punti e contiene le costanti allora  $\overline{\mathcal{A}} = C(K)$ .
- *Caso complesso:* se  $\mathcal{A}$  è una sottoalgebra di  $C(K; \mathbb{C})$  che separa i punti, contiene le costanti e *chiusa per coniugio* allora  $\overline{\mathcal{A}} = C(K; \mathbb{C})$ .

**Osservazioni.**

- Se  $K = [0, 1]$ ,  $\mathcal{A}$  = “polinomi reali”  $\implies \overline{\mathcal{A}} = C(K; \mathbb{C})$ .
- L'ipotesi di separare i punti è necessaria, se ad esempio  $\exists x_1, x_2$  tali che  $x_1 \neq x_2$  e per ogni  $f$  abbiamo  $f(x_1) = f(x_2)$  allora varrà analogamente anche per ogni funzione nella chiusura ma le funzioni continue separano i punti.
- È anche necessario che  $\mathcal{A} \supset$  “costanti”, ad esempio dato  $x_0 \in K$  ed  $\mathcal{A} := \{f \in C(K) \mid f(x_0) = 0\}$  abbiamo che  $\overline{\mathcal{A}} = \mathcal{A} \subsetneq C(K)$ .
- Anche la chiusura per coniugio è necessaria, infatti ad esempio preso  $K = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq 1\}$ ,  $\mathcal{A}$  = “polinomi complessi”,  $\mathcal{A}$  separa i punti e contiene le costanti però  $\overline{\mathcal{A}}$  sono solo le funzioni olomorfe su  $K$ .



In particolare, vorremmo applicare questo teorema alle funzioni  $2\pi$ -periodiche ristrette a  $[-\pi, \pi]$  che però non verificano la separazione dei punti in quanto per la periodicità  $f(-\pi) = f(\pi)$ . Nel seguente corollario vediamo come possiamo estendere leggermente il teorema passando ai quozienti topologici.

**Corollario.** Sia  $\mathcal{A}$  una sottoalgebra di  $C(K)$  (o analogamente per  $C(K; \mathbb{C})$ ) che contiene le costanti (e nel caso complesso anche chiusa per coniugio). Definiamo la relazione di equivalenza  $x_1 \sim x_2$  se  $f(x_1) = f(x_2)$  per ogni  $f \in \mathcal{A}$ . Allora,

$$\overline{\mathcal{A}} = \{f \in C(K) \mid f(x_1) = f(x_2) \text{ se } x_1 \sim x_2\}.$$

**Dimostrazione Corollario.** È chiaro che  $\mathcal{A} \subset X := \{f \in C(K) \mid f(x_1) = f(x_2) \text{ se } x_1 \sim x_2\}$ . Data  $g \in X$ , definiamo  $\tilde{g}: K/\sim \rightarrow \mathbb{C}$  in modo che  $g = \tilde{g} \circ \pi$ . Osserviamo che  $K/\sim$  è compatto e  $T_2$  e che  $\tilde{\mathcal{A}} = \{\tilde{f}: f \in \mathcal{A}\}$  soddisfa le ipotesi del teorema di Stone-Weierstrass, quindi  $\overline{\tilde{\mathcal{A}}} = C(K/\sim; \mathbb{C})$ , quindi per ogni  $g \in X$  esiste una successione  $\tilde{g}_n \in \tilde{\mathcal{A}}$  tale che  $\tilde{g}_n \rightarrow \tilde{g}$  uniformemente e quindi  $g_n \rightarrow g$  uniformemente.

$$\begin{array}{ccc} K & \xrightarrow{g} & \mathbb{C} \\ \downarrow \pi & \nearrow \tilde{g} & \\ K/\sim & & \end{array}$$

□

**Dimostrazione Teorema 1.** Vogliamo vedere che

i)  $\mathcal{F}$  è un sistema ortonormale.

*Dimostrazione.* Basta calcolare  $\langle e_n; e_m \rangle$  per ogni  $n, m \in \mathbb{Z}$

$$\langle e_n; e_m \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{inx}}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{\overline{e^{imx}}}{\sqrt{2\pi}} dx = \begin{cases} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} 1 dx = 1 & \text{se } n = m \\ \frac{1}{2\pi} \left[ \frac{e^{i(n-m)x}}{i(n-m)} \right]_{-\pi}^{\pi} = 0 & \text{se } n \neq m \end{cases}$$

ii)  $\mathcal{F}$  è completo.

*Dimostrazione.* Questo punto richiede il teorema di Stone-Weierstrass.

Consideriamo

$$\mathcal{A} = \text{Span}_{\mathbb{C}}(\mathcal{F}) = \left\{ \sum_n a_n e^{inx} \right\} = \{p(e^{inx}) \mid p \text{ polinomio a esponenti interi}\}.$$

Segue che  $\mathcal{A}$  è una sottoalgebra che separa i punti di  $K$  tranne  $-\pi$  e  $\pi$  ed è chiusa per coniugio.

Per il corollario<sup>1</sup>  $\overline{\mathcal{A}}^C = \{f \in C([-\pi, \pi]; \mathbb{C}) \mid f(-\pi) = f(\pi)\}$ . Dato che la convergenza uniforme implica la convergenza in  $L^2$  per spazi di misura finita, abbiamo:

$$\overline{\mathcal{A}}^{L^2} \supseteq \{f \in C([-\pi, \pi]; \mathbb{C}) \mid f(-\pi) = f(\pi)\}.$$

Inoltre,  $\overline{\mathcal{A}}^{L^2} \supseteq \{f \in C([-\pi, \pi]; \mathbb{C})\}$  in quanto, una  $f \in C([-\pi, \pi]; \mathbb{C})$  può essere approssimata in  $L^2$  tramite funzioni  $f_n$  che coincidono in  $[-\pi, \pi]$ . Definiamo  $f_n = f \cdot \varphi_n$ , dove le

<sup>1</sup>Notiamo che la topologia su  $\mathcal{A}$  è quella data dalla norma del sup delle funzioni continue quindi la chiusura è rispetto a tale norma e la indichiamo con  $\overline{\mathcal{A}}^C$ .

$\varphi_n$  sono tali che  $\varphi_n(-\pi) = \varphi_n(\pi) = 0$ ,  $\varphi_n = 1$  su  $[1/n - \pi, \pi - 1/n]$ ; notiamo che  $f_n \rightarrow f$  in  $L^2$ .

[TODO: Disegnino delle  $\varphi_n$ ]

Infine poiché le funzioni continue sono dense in  $L^2$  segue che  $\overline{\mathcal{A}}^{L^2} = L^2$ .

□

**Esempio** (calcolo coefficienti di Fourier).

- $\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} = \frac{1}{2}e^{ix} + \frac{1}{2}e^{-ix}$ , allora  $c_n = \begin{cases} \frac{1}{2} & n = \pm 1 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$ .
- $(\sin x)^2 = \left(\frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}\right)^2 = \frac{1}{4}e^{2ix} + \frac{1}{4} - \frac{1}{4}e^{-2ix}$ , allora  $c_n = \begin{cases} -\frac{1}{4} & n = \pm 2 \\ \frac{1}{2} & n = 0 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$ .
- $f(x) = x, c_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = 0$ . Per  $n \neq 0$ :

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x e^{-inx} dx = \frac{1}{2\pi} \left[ \frac{x e^{-inx}}{-in} \right]_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{-inx}}{-in} dx = \frac{(-1)^n i}{n}.$$

Calcoliamo ora  $\sum_{n \in \mathbb{Z}} |c_n|^2$ . Valgono le uguaglianze

$$\begin{aligned} \sum_{n \in \mathbb{Z}} |c_n|^2 i &= 2 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} \\ \sum_{n \in \mathbb{Z}} |c_n|^2 i &= \frac{1}{2\pi} \|x\|_2^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x^2 dx = \frac{2}{2\pi} \cdot \frac{\pi^3}{3} = \frac{\pi^2}{3}. \end{aligned}$$

Dunque  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$ .

## 4.1 Regolarità di $f$ e dei coefficienti

**Proposizione 1.** Data  $f \in [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{C}$  tale che

(R)  $f \in C^1$  (basta  $f$  continua e  $C^1$  a tratti).

(CB)  $f(-\pi) = f(\pi)$ .

Allora  $c_n(f') \stackrel{(*)}{=} in c_n(f)$ .

Derivazione formale della formula

$$f(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n e^{inx} \xrightarrow{\text{derivata}} f'(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} in c_n e^{inx}$$

**Dimostrazione.** Vale quanto segue

$$\begin{aligned}
 c_n(f') &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)' e^{-inx} dx \\
 &\stackrel{\text{int. per parti}}{=} \frac{1}{2\pi} \overbrace{\int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx} dx}^{f(-\pi)=f(\pi), e^{-in\pi}=e^{-in(-\pi)}} - \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)(-in)e^{-inx} dx \\
 &= (in) \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx} dx = in c_n(f).
 \end{aligned}$$

□

**Esercizio.** Trovare l'analogo della formula della derivata nel caso di cui non valga la condizione al bordo (CB). [TO DO]

**Osservazione.** In verità, basta ancora meno. Possiamo riformulare la Proposizione 1 come segue.

**Proposizione 1'.** Data  $f: [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{C}$  tale che

(R')  $f$  è continua.

(CB) esiste  $g \in L^1([-\pi, \pi], \mathbb{C})$  tale che  $f(x) = f(-\pi) + \int_{-\pi}^x g(t) dt$ .

Allora la formula  $(\star)$  diventa  $c_n(g) = in c_n(f)$ .

**Proposizione 2.** Data  $f$  come nella Proposizione 1, valgono le seguenti

i)  $\sum_{n \in \mathbb{Z}} n^2 |c_n(f)|^2 = \frac{\|f'\|_2^2}{2\pi} < +\infty.$

ii)  $\sum_{n \in \mathbb{Z}} |n|^\alpha |c_n(f)| < +\infty$  per ogni  $\alpha < 1/2$ .

iii) La serie di Fourier converge <sup>1</sup>totalmente.

**Dimostrazione.**

i)  $\sum_{n \in \mathbb{Z}} n^2 |c_n(f)|^2 \stackrel{(*)}{=} \sum_{n \in \mathbb{Z}} |c_n(f')|^2 \stackrel{\text{Parseval}}{=} \frac{\|f'\|_2^2}{2\pi} \stackrel{f' \in L^1([-\pi, \pi], \mathbb{C}) \subset L^2([-\pi, \pi], \mathbb{C})}{<} +\infty.$

ii)  $\sum_{n \in \mathbb{Z}} |n|^\alpha |c_n(f)| \stackrel{(n \neq 0)}{\leq} \sum_{n \in \mathbb{Z}} |n| |c_n(f)| \cdot \frac{1}{|n|^{1-\alpha}} \stackrel{\text{C-S per } \ell^2}{\leq} \overbrace{\left( \sum_{n \in \mathbb{Z}} |n|^2 |c_n(f)|^2 \right)^{1/2}}^{< +\infty \text{ per il punto ii)}} \cdot \overbrace{\left( \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{1}{|n|^{2-2\alpha}} \right)^{1/2}}^{\alpha < 1/2 \Rightarrow < +\infty} < +\infty.$

iii) Dal punto precedente con  $\alpha = 0$  otteniamo  $\sum_{n \in \mathbb{Z}} \|c_n(f) e^{inx}\|_\infty = \sum_{n \in \mathbb{Z}} |c_n(f)| < +\infty.$  □

---

<sup>1</sup> $\sum a_n(x)$  converge totalmente se converge la serie  $\sum \|a_n(x)\|_\infty$ .

**Proposizione 3.** Data  $f \in [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{C}$  tale che

( $R_k$ )  $f \in C^k$  (oppure  $f \in C^{k-1}$  e  $D^{k-1}f$  è  $C^1$  a tratti).

( $CB_{k-1}$ )  $D^h f(-\pi) = D^h f(\pi)$  per  $h = 0, 1, \dots, k-1$ .

Allora

i)  $c_n(D^h f) = (in)^h c_n(f)$  per ogni  $n \in \mathbb{Z}$  per ogni  $h = 1, \dots, k$ .

ii)  $\sum |n|^{2k} |c_n(f)|^2 \leq \frac{\|D^k f\|_2^2}{2\pi} < +\infty$ .

iii)  $\sum_{n \in \mathbb{Z}} |n|^\alpha |c_n(f)| < +\infty$  per ogni  $\alpha < k - 1/2$ .

iv) La serie di Fourier di  $f$  converge totalmente con tutte le derivate fino all'ordine  $k-1$ .

**Proposizione 4.** Se  $f$  è continua e  $\sum_{n \in \mathbb{Z}} |n|^{k-1} |c_n(f)| < +\infty$  allora  $f \in C^{k-1}$  e soddisfa ( $CB_{k-1}$ ).

**Dimostrazione.** Preso  $h = 0, 1, \dots, k-1$  vale

$$\begin{aligned} D^h(c_n(f)e^{inx}) &= c_n(f)(in)^h e^{inx} \\ \|D^h(c_n(f)e^{inx})\| &= |c_n(f)| |n|^h \leq |c_n(f)| |n|^{k-1}. \end{aligned}$$

Dunque  $\sum D^h(c_n(f)e^{inx})$  converge totalmente e quindi uniformemente per ogni  $h \leq k-1$  ad  $\tilde{f}: [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{C}$  di classe  $C^{k-1}$ . Ma

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left\| \sum_{-N}^N c_n e^{inx} - \tilde{f}(x) \right\|_2 \leq \left\| \sum_{-N}^N c_n e^{inx} - \tilde{f}(x) \right\|_\infty \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} 0.$$

Ma  $\sum c_n e^{inx} \rightarrow \tilde{f}$  uniformemente, allora  $\sum_{-N}^N c_n e^{inx} \rightarrow \tilde{f}$  in  $L^2$ . Allora  $f = \tilde{f}$  nel senso  $L^2$ .

Siccome  $f, \tilde{f}$  sono continue e coincidono quasi ovunque, vale  $f = \tilde{f}$ . Abbiamo usato il lemma

**Lemma.** Date  $f, \tilde{f}$  continue e  $f(x) = \tilde{f}(x)$  per quasi ogni  $x$ , allora  $f(x) = \tilde{f}(x)$  per ogni  $x$ .  $\square$

**Osservazione.**  $f \in C^{k-1}([-\pi, \pi]) + (CB_{k-1})$  se e solo se  $f$  è la restrizione a  $[-\pi, \pi]$  di una funzione  $2\pi$ -periodica e  $C^{k-1}$ .

## 4.2 Convergenza puntuale della serie di Fourier

**Teorema.** Data  $f \in L^1([-\pi, \pi], \mathbb{C})$  (estesa in modo  $2\pi$ -periodico a tutto  $\mathbb{R}$ ) tale che esiste  $\bar{x} \in \mathbb{R}$  ed esiste  $\alpha > 0$  tale che  $f$  è  $\alpha$ -Holderiana in  $\bar{x}$ , cioè esiste  $\delta > 0$ ,  $M < +\infty$  per cui

$$|f(\bar{x} + t) - f(\bar{x})| \leq M |t|^\alpha \quad \forall t: |t| < \delta \iff \limsup_{t \rightarrow 0} \frac{|f(\bar{x} + t) - f(\bar{x})|}{|t|^\alpha} < +\infty.$$

Allora  $\sum_{-\infty}^{\infty} c_n(f) e^{in\bar{x}}$  converge a  $f(\bar{x})$ . Cioè  $\sum_{-N}^N c_n(f) e^{in\bar{x}} \xrightarrow{N \rightarrow \infty} f(\bar{x})$

*Lavoro preparatorio:* rappresentare somme parziali di serie di Fourier con "convoluzione":

Data  $f \in L^1([-\pi, \pi], \mathbb{C})$ ,  $N = 1, 2, \dots$  (estesa a funzioni  $2\pi$ -periodiche su  $\mathbb{R}$ ).

$$S_N f(x) := \sum_{n=-N}^N c_n e^{inx}$$

Riscriviamo

$$\begin{aligned} S_N f(x) &:= \sum_{n=-N}^N c_n e^{inx} = \sum_{n=-N}^N \frac{1}{2\pi} \left( \int_{-\pi}^{\pi} f(y) e^{-iny} dy \right) e^{inx} \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(y) \left( \sum_{n=-N}^N e^{in(x-y)} \right) dy. \end{aligned}$$

Poniamo  $D_N(z) := \sum_{n=-N}^N e^{inz}$  che si definisce **nucleo di Dirichlet**. Allora

$$\begin{aligned} S_N f(x) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(y) D_N(x-y) dy \quad \stackrel{x-y=t, dy=dt}{=} \frac{1}{2\pi} \int_{x-\pi}^{x+\pi} f(x-t) D_N(t) dt \\ &\stackrel{(\star)}{=} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x-t) D_N(t) dt \end{aligned}$$

Dove  $(\star)$  è il seguente lemma.

**Lemma.** Se  $g$  è  $T$ -periodica e  $g \in L^1([-\pi, \pi], \mathbb{C})$ , allora

$$\int_0^T g(\tau) d\tau = \int_c^{c+T} g(\tau-s) d\tau \quad \forall s \forall c.$$

Ne segue che

$$S_N f(x) := \sum_{n=-N}^N c_n(f) e^{inx} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x-t) D_N(t) dt$$

dove

$$D_N(t) = \sum_{n=-N}^N e^{int} = \frac{\sin((N+1/2)t)}{\sin(t/2)}.$$

Infatti,

$$\begin{aligned} D_N(t) &= \sum_{n=-N}^N e^{int} = \sum_{n=-N}^N (e^{it})^n = e^{-iNt} \cdot \sum_{n=0}^{2N} (e^{it})^n \\ &= \frac{e^{-i(N+1/2)t}}{e^{-it/2}} \cdot \frac{e^{(2N+1)it} - 1}{e^{it} - 1} = \frac{e^{(N+1/2)it} - e^{-(N+1/2)it}}{e^{it/2} - e^{-it/2}} \\ &= \frac{\sin((N+1/2)t)}{\sin(t/2)}. \end{aligned}$$

Il seguente lemma riassume quanto detto finora.

**Lemma.** (di rappresentazione di  $S_n f$  come convoluzione) Data  $f \in L^1([-\pi, \pi], \mathbb{C})$  (estesa a funzioni  $2\pi$ -periodiche su  $\mathbb{R}$ ) vale Ricapitolando data  $f$  come sopra abbiamo visto che

$$S_N f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x-t) D_N(t) dt \quad \text{con } D_N(t) := \sum_{n=-N}^N e^{int} = \frac{\sin\left(\left(N + \frac{1}{2}\right)t\right)}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)}$$

**Osservazione.** In particolare:  $\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} D_N(t) dt = 1$ .

**Lemma.** (di Riemann-Lebesgue (generalizzato)). Data  $g \in L^1(\mathbb{R})$  e  $h \in L^\infty(\mathbb{R})$  con  $h$   $T$ -periodica, allora

$$\int_{\mathbb{R}} g(x)h(yx) dx \xrightarrow{y \rightarrow \pm\infty} \underbrace{\left( \int_{\mathbb{R}} g(x) dx \right)}_a \underbrace{\left( \int_0^T h(x) dx \right)}_m$$

**Dimostrazione.** Per ogni  $s, y$  poniamo  $\Phi(y, s) := \int_{\mathbb{R}} g(x)h(yx + s) dx$  con  $s, y \in \mathbb{R}$ . Dunque, vogliamo dimostrare che  $\Phi(y, 0) \xrightarrow{y \rightarrow \pm\infty} am$ . Vedremo che valgono le seguenti

$$\text{i) } \forall y \int_0^T \Phi(y, s) ds = am.$$

$$\text{ii) } \forall s \Phi(y, s) - \Phi(y, 0) \xrightarrow{y \rightarrow \pm\infty} 0.$$

da cui segue subito che

$$\Phi(y, 0) - ma = \int_0^T \Phi(y, 0) - \Phi(y, s) ds \xrightarrow{y \rightarrow \pm\infty} 0$$

per convergenza dominata; dove dalla ii) segue la convergenza puntuale e come dominazione usiamo

$$|\Phi(y, 0) - \Phi(y, s)| \leq 2 \|g\|_1 \|h\|_\infty.$$

Mostriamo ora i due punti.

i) Esplicitiamo e applichiamo Fubini-Tonelli

$$\begin{aligned} \int_0^T \Phi(y, s) ds &= \int_0^T \int_{\mathbb{R}} g(x)h(yx + s) dx ds = \int_{\mathbb{R}} \underbrace{\int_0^T h(yx + s) ds}_m g(x) dx \\ &= m \int_{\mathbb{R}} g(x) dx = ma \end{aligned}$$

e possiamo usare Fubini-Tonelli in quanto

$$\int_{\mathbb{R}} \int_0^T |h(yx + s)| ds \cdot |g(x)| dx \leq \int_{\mathbb{R}} \|h\|_\infty |g(x)| dx = \|h\|_\infty \cdot \|g\|_1.$$

ii) Notiamo che

$$\begin{aligned} \Phi(y, s) &= \int_{\mathbb{R}} g(x)h(y(x + s/y)) dx = \left( \begin{matrix} t = x + s/y \\ dt = dx \end{matrix} \right) = \int_{\mathbb{R}} g(t - s/y) h(yt) dt \\ \implies \Phi(y, s) - \Phi(y, 0) &= \int_{\mathbb{R}} \left( g\left(t - \frac{s}{y}\right) - g(t) \right) h(yt) dt \\ \implies |\Phi(y, s) - \Phi(y, 0)| &= \int_{\mathbb{R}} |\tau_{s/y}g - g| \cdot |h(yt)| dt \leq \|\tau_{s/y}g - g\|_1 \cdot \|h\|_\infty \xrightarrow{y \rightarrow \pm\infty} 0. \end{aligned}$$

□

### Dimostrazione del Teorema.

$$\begin{aligned}
S_N f(\bar{x}) - f(\bar{x}) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\bar{x} - t) D_N(t) dt - \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\bar{x}) D_N(t) dt \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (f(\bar{x} - t) - f(\bar{x})) D_N(t) dt \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{f(\bar{x} - t) - f(\bar{x})}{\sin \frac{t}{2}} \sin \left( \left( N + \frac{1}{2} \right) t \right) dt \\
&= \int_{-\pi}^{\pi} g(t) \cdot \sin \left( \left( N + \frac{1}{2} \right) t \right) dt
\end{aligned}$$

Applicando il Lemma di Riemann-Lebesgue otteniamo:

$$S_N f(\bar{x}) - f(\bar{x}) \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} \left( \int_{-\pi}^{\pi} g(x) dx \right) \cdot \int_0^{\pi} \sin x dx = 0.$$

In particolare, per applicare il lemma serve  $g \in L^1([-\pi, \pi])$ ; ma infatti per  $|t| \leq \delta$

$$|g(t)| \leq \frac{|f(\bar{x} - t) - f(\bar{x})|}{|\sin \frac{t}{2}|} \leq \frac{M|t|^\alpha}{|t|/\pi} = \frac{M\pi}{|t|^{1-\alpha}} \in L^1([-\delta, \delta]).$$

Invece per  $\delta \leq |t| \leq \pi$  basta

$$|g(t)| \leq \frac{|f(\bar{x} - t)| + |f(\bar{x})|}{\sin \frac{\delta}{2}} \in L^1([-\pi, \pi]).$$

□

**Proposizione.** Data  $f \in L^1([-\pi, \pi])$  estesa per periodicità e dato  $\bar{x}$  tale che esistano i limiti a destra e sinistra di  $f$  in  $\bar{x}$  detti  $L^+$  e  $L^-$  ed  $f$   $\alpha$ -Hölderiana a sinistra e destra si può vedere che vale

$$S_N f(\bar{x}) \xrightarrow{N} \frac{L^+ + L^-}{2}.$$

## 4.3 Esercitazione del 11 novembre

Consideriamo  $L^2([-\pi, \pi], \mathbb{C})$ . Ricordiamo che  $e^{inx} = \cos(nx) + i \sin(nx)$ . Abbiamo

$$\begin{aligned}
\sum_{n=-N}^N c_n e^{inx} &= c_0(f) + \sum_{n=1}^N (c_n(f) e^{inx} + c_{-n} e^{inx}) \\
&= c_0(f) + \sum_{n=1}^N [(c_n(f) + c_{-n}(f)) \cos(nx) + i(c_n(f) - c_{-n}(f)) \sin(nx)] \\
&= c_0(f) + \sum_{n=1}^N a_n(f) \cos(nx) + b_n(f) \sin(nx)
\end{aligned}$$

con

$$\begin{cases} a_n(f) = c_n(f) + c_{-n}(f) \\ b_n(f) = i c_n(f) - i c_{-n}(f) \\ a_0(f) = c_0(f) \end{cases}$$

Passando al limite per  $N \rightarrow +\infty$

$$f(x) \stackrel{L^2}{=} \sum_{n=-N}^N c_n e^{inx} \stackrel{(*)}{=} c_0(f) + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n(f) \cos(nx) + b_n(f) \sin(nx)$$

**Nota.** L'uguaglianza  $(*)$  ha bisogno di qualche spiegazione: come sappiamo che la serie a destra converge? Usiamo il fatto, che mostriamo sotto, che  $\{1, \cos(nx), \sin(nx), n > 1\}$  sono un sistema ortogonale, dunque per la disuguaglianza di Bessel segue la convergenza.

**Osservazione.** Gli elementi  $\{1, \sin(nx), \cos(nx)\}$  sono ortogonali per  $n \geq 1$  in  $L^2([-\pi, \pi], \mathbb{C})$ . Infatti, ricordiamo che

$$\begin{aligned} \cos(nx) &= \frac{e^{inx} + e^{-inx}}{2} \\ \sin(nx) &= \frac{e^{inx} - e^{-inx}}{2i}. \end{aligned}$$

- È banale verificare che  $\langle 1, \cos(nx) \rangle = \langle 1, \sin(nx) \rangle = 0$ ;
- Verifichiamo ora che valga  $\langle \cos(nx), \sin(mx) \rangle = 0$  per ogni  $n, m$ , dunque calcoliamo:

$$\langle \sin(nx), \sin(mx) \rangle = \frac{1}{4} \langle e^{-inx} - e^{inx}, e^{-imx} - e^{imx} \rangle = 0.$$

Ora normalizziamo:  $\left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{\cos(nx)}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin(nx)}{\sqrt{\pi}}, n \geq 1 \right\}$ .

In conclusione, abbiamo ottenuto che

- $L^2([-\pi, \pi], \mathbb{C})$  ha base Hilbertiana  $\left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{\cos(nx)}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin(nx)}{\sqrt{\pi}} \right\}_{\mathbb{C}}$
- $L^2([-\pi, \pi], \mathbb{R})$  ha base Hilbertiana  $\left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{\cos(nx)}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin(nx)}{\sqrt{\pi}} \right\}_{\mathbb{R}}$

**Esercizio.** Se  $f$  è a valori reali, dimostrare che  $a_n(f)$  e  $b_n(f)$  sono anch'essi reali. [TO DO]

*Sketch.* Si dimostra che  $a_n(f) = \overline{a_n(f)}$ ,  $b_n(f) = \overline{b_n(f)}$  e per farlo si usano le espressioni di  $a_n, b_n$  in funzione dei coefficienti di Fourier complessi scritte sopra.

**Esercizio.** Trovare la base di Fourier complessa e reale di  $L^2([a, b], \mathbb{C})$ .

**Soluzione.** Data  $f(x) \in L^2([a, b], \mathbb{C})$ , definiamo la funzione

$$F(y) := f\left((y + \pi) \frac{b-a}{2\pi} + a\right) = f(x).$$

Notiamo che  $F \in L^2([-\pi, \pi], \mathbb{C})$ , dunque ha espansione in serie di Fourier:

$$\begin{aligned} F(y) &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n(F) e^{iny}, \quad c_n(F) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F(y) e^{-iny} dy \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f\left((y + \pi) \frac{b-a}{2\pi} + a\right) e^{-iny} dy. \end{aligned}$$



Usando il cambio di variabile  $y = (x - a)\frac{2\pi}{b - a} - \pi$  si ottiene

$$\begin{aligned} c_n(f) &= \frac{1}{b - a} \int_a^b f(x) \exp \left[ \left( (x - a)\frac{2\pi}{b - a} - \pi \right) (-in) \right] dx \\ &= \frac{(-1)^n}{b - a} \exp \left[ \frac{2\pi a}{b - a} in \right] \int_a^b f(x) \exp \left[ \frac{2\pi x}{b - a} (-in) \right] dx \end{aligned}$$

Da cui

$$f(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n(f) \exp \left[ \frac{2\pi}{b - a} xin \right], \quad c_n(f) = \frac{1}{b - a} \int_a^b f(x) \exp \left[ -\frac{2\pi}{b - a} xin \right].$$

**Esercizio.** Sia  $f \in L^2([-\pi, \pi], \mathbb{C})$  (l'estensione di)  $f$  è  $2\pi/N$  periodica. Dimostrare che  $c_n(f) \neq 0$  se e solo se  $n$  multiplo di  $N$ . [TO DO]

**Esercizi classici.** Fissata una funzione  $f \in L^2$ , calcolare i coefficienti di Fourier complessi (e reali).

Calcoliamo i coefficienti di  $f(x) = x^2$ .

$$\begin{aligned} c_n(f) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x^2 e^{-inx} dx = \frac{1}{2\pi} \left[ \frac{e^{-inx}}{-in} x^2 \right]_{-\pi}^{\pi} - \int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{-inx}}{-in} 2x dx \\ &= - \int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{-inx}}{-in} 2x dx = -\frac{i}{\pi n} \left[ \left[ \frac{e^{-inx}}{-in} \right]_{-\pi}^{\pi} - \int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{-inx}}{-in} dx \right] \\ &= \frac{-i\pi \cos(-n\pi) + \cos(-n(-\pi))}{\pi n} + \frac{i}{\pi n} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{-inx}}{-in} dx \\ &= \frac{2}{n^2} + \frac{i}{\pi n} \cdot 0 = \frac{2}{n^2} (-1)^n \\ &\implies c_n(f) = \frac{2}{n^2} (-1)^n. \end{aligned}$$

Infine

$$c_0(f) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x^2 dx = \frac{1}{2\pi} \frac{2}{3} \pi^3 = \frac{1}{3} \pi^2.$$

Per Parseval  $\|f\|_{L^2}^2 = 2\pi \sum_{n \in \mathbb{Z}} |c_n(f)|^2$ . Da cui

$$\int_{-\pi}^{\pi} x^4 dx = \|x^2\|_{L^2}^2 = 2\pi \cdot \left[ \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{4}{n^4} + \frac{\pi^2}{3} \right].$$

**Nota.** Potevamo ottenere i coefficienti di  $f(x) = x^2$ , applicando il teorema della derivata.

**Domande.**

- Abbiamo visto che  $c_n(x^2) = \frac{2(-1)^n}{n^2}$  e dedotto che  $c_n(2x) = in \frac{2(-1)^n}{n^2} = \frac{2(-1)^n i}{n}$ .
- Vorremmo calcolare  $c_n(2)$ , possiamo applicare il teorema sulla formula della derivata?

**Esercizio.**

- i) Calcolare i coefficienti di Fourier complessi di  $x^3$  e vedere se vale  $c_n(3x^2) = inc_n(x^3)$ .
- ii) Calcolare i coefficienti reali di  $x^2$ .

**Esercizio.** Sia  $f(x)$  definita da  $\sum_{n \in \mathbb{Z}} \gamma_n e^{inx}$  con  $\begin{cases} \gamma_n = \frac{\cos(n)}{|n|^{3/2}} \\ \gamma_0 = 1 \end{cases}$

**Domande.**

- i)  $f$  è ben definita?
- ii)  $f$  è continua?
- iii)  $f$  è derivabile?

**Dimostrazione.**

- i) Sì, infatti  $2 \sum_{n=1}^{+\infty} |\gamma_n|^2 \leq 2 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^3} < +\infty$ .
- ii) *Suggerimento.* Usare la Proposizione 3 della parte della regolarità dei coefficienti della serie di Fourier.

# Capitolo 5

## Applicazioni della serie di Fourier

### 5.1 Equazione del calore

Sia  $\Omega$  un aperto di  $\mathbb{R}^d$  e  $u(t, x): [0, T) \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  e chiamiamo  $x$  la *variabile spaziale* e  $t$  la *variabile temporale*. In dimensione 3 l'insieme  $\Omega$  rappresenta un solido di materiale conduttore omogeneo e  $u(t, x)$  rappresenta la temperatura in  $x$  all'istante  $t$ . Dunque  $u$  risolve l'equazione del calore

$$u_t = c \cdot \Delta u$$

dove con  $u_t$  indichiamo la derivata parziale di  $u$  rispetto al tempo,  $c$  è una costante fisica che porremo uguale ad 1 e  $\Delta u$  è il laplaciano rispetto alle dimensioni spaziali ovvero

$$\Delta u = \sum_{i=1}^d \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} = \operatorname{div}(\nabla_x u).$$

Vedremo che la soluzione di  $u_t = \Delta u$  esiste ed è unica specificando  $u(0, \cdot) = u_0$  condizione iniziale con  $u_0: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  data e delle condizioni al bordo come ad esempio

- *Condizioni di Dirichlet:*  $u = v_0$  su  $[0, T) \times \partial\Omega$  con  $v_0$  funzione fissata. Possiamo pensare come fissare delle sorgenti di calore costanti sul bordo.
- *Condizioni di Neumann:*  $\frac{\partial u}{\partial \nu}$  con  $\nu$  direzione normale al bordo. Essenzialmente ci sta dicendo che non c'è scambio di calore con l'esterno.

In particolare scriveremo

$$\begin{cases} u_t = \Delta u & \text{su } \Omega \\ u(0, \cdot) = u_0 \\ \text{Una delle condizioni al bordo su } \partial\Omega \dots \end{cases}$$

## 5.2 Risoluzione dell'equazione del calore (su $\mathbb{S}^1$ )

Come conduttore consideriamo un anello di materiale omogeneo e sottile che parametrizziamo con  $[-\pi, \pi]$ . Dunque consideriamo  $u: [0, T) \times [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$  con le condizioni

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} \\ u(\cdot, \pi) = u(\cdot, -\pi) \\ u_x(\cdot, \pi) = u_x(\cdot, -\pi) \\ u(0, \cdot) = u_0 \end{cases} \quad (\text{P})$$

in particolare la (ii) e la (iii) condizione non sono né quelle di Dirichlet né di Neumann, sono delle condizioni che effettivamente ci dicono che siamo “su  $\mathbb{S}^1$ ”<sup>1</sup>; invece l'ultima è la condizione iniziale ed  $u_0$  è data.

### 5.2.1 Risoluzione formale

Scriviamo  $u$  in serie di Fourier rispetto a  $x$  cioè

$$u(t, x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n e^{inx}$$

con  $c_n := c_n(u(t, \cdot))$  da cui derivando formalmente dentro le sommatorie otteniamo che  $u_t$  e  $u_{xx}$  SONO

$$\begin{aligned} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \dot{c}_n(t) e^{inx} = u_t = u_{xx} &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} -n^2 c_n(t) e^{inx} \\ u_t = u_{xx} \iff \dot{c}_n(t) = -n^2 c_n(t) \quad \forall n \forall t \quad \text{e} \quad u(0, \cdot) = u_0 &\iff c_n(0) = c_n(u_0) =: c_n^0 \end{aligned}$$

Dunque risolvere (P) equivale per ogni  $n$  che  $c_n$  che risolva il problema di Cauchy dato da

$$\begin{cases} \dot{y} = -n^2 y \\ y(0) = c_n^0 \end{cases} \quad (\text{P}') \quad (P')$$

con soluzione  $y(t) = \alpha e^{-n^2 t}$  cioè  $c_n(t) = c_n^0 e^{-n^2 t}$  e quindi abbiamo

$$u(t, x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n^0 e^{-n^2 t} e^{inx} \quad (*)$$

Studiando questa soluzione formale possiamo fare le seguenti osservazioni che poi diventeranno dei teoremi

- *La soluzione esiste per  $t \in [0, +\infty)$  ed è molto regolare per  $t > 0$*

Vedremo che la soluzione formale è proprio una soluzione al problema per  $t \geq 0$ , in particolare il termine  $e^{-n^2 t} \rightarrow 0$  in modo più che polinomiale ed infatti vedremo che la soluzione sarà proprio  $C^\infty$  per  $t > 0$ .

- *La soluzione è unica*

Tutti i problemi di Cauchy per i coefficienti  $c_n(t)$  hanno un'unica soluzione dunque anche la soluzione  $u$  è unica.

---

<sup>1</sup>Bastano solo queste condizioni sulla funzione e sulla sua derivata perché intuitivamente le altre seguono applicando la (i).

- In generale non esiste soluzione nel passato.

Se il numero di coefficienti  $c_n^0 \neq 0$  è infinito allora il termine  $e^{-n^2 t} \rightarrow +\infty$  molto velocemente per  $t < 0$  e la serie diverge.

**Teorema 1** (Esistenza e Regolarità).

Se  $u_0: [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{C}$  (presa in  $L^2$ ) continua e tale che  $\sum_{n \in \mathbb{Z}} |c_n^0| < +\infty$ , allora

$$u(t, x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \underbrace{c_n^0 e^{-n^2 t} e^{inx}}_{u_n(t, x)}$$

definisce una funzione  $u: [0, +\infty) \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  tale che

- i)  $u$  è  $2\pi$ -periodica in  $x$  ed è reale se  $u_0$  è reale.
- ii)  $u$  è continua.
- iii)  $u$  è  $C^\infty$  su  $(0, +\infty) \times \mathbb{R}$ .
- iv) Risolve (P). In particolare vale  $u_{tt} = u_{xx}$  e valgono le condizioni di periodicità per  $t > 0$ ; e infine vale  $u(0, \cdot) = u_0$  su  $[-\pi, \pi]$ .

Vediamo alcuni lemmi tecnici preparatori e sia  $R$  un rettangolo di  $\mathbb{R}^d$  ovvero prodotto di intervalli con estremi aperti o chiusi.

**Lemma 4.** Date  $v_n: R \rightarrow \mathbb{C}$  di classe  $C^k$  con  $k = 1, 2, \dots, +\infty$  tali che

- $v_n \rightarrow v$  uniformemente.
- $\forall \underline{h} = (h_1, \dots, h_d) \in \mathbb{N}^d$  con  $|\underline{h}| := h_1 + \dots + h_d \leq k$  (se  $k = +\infty$  allora basta  $|\underline{h}| < +\infty$ ) posto

$$D^{\underline{h}} v_n := \frac{\partial^k}{\partial x_1^{h_1} \dots \partial x_d^{h_d}} v_n$$

$D^{\underline{h}} v_n \rightarrow D^{\underline{h}} v$  converge uniformemente.

allora  $v \in C^k$  e  $D^{\underline{h}} v = \lim_n D^{\underline{h}} v_n$ .

**Dimostrazione.** Si parte dal caso  $d = 1$  e  $k = 1$  e si procede per induzione. [TODO: Esercizio]  $\square$

**Corollario. 5** Date  $u_n: R \rightarrow \mathbb{C}$  di classe  $C^k$  con  $k = 1, \dots, +\infty$  tali che

$$\forall \underline{h} \text{ con } |\underline{h}| \leq k \quad \sum_n \|D^{\underline{h}} u_n\| < +\infty$$

allora  $u := \sum_n u_n$  è una funzione ben definita su  $R$  e  $C^k$  e  $D^{\underline{h}} u = \sum_n D^{\underline{h}} u_n$  per ogni  $\underline{h}$  con  $|\underline{h}| \leq k$ .

**Lemma. 6** Data  $u: R \rightarrow \mathbb{C}$  e rettangoli  $R_i \subset R$  relativamente aperti in  $R$  tali che  $u$  è  $C^k$  sugli  $R_i$  per ogni  $i$  allora  $u$  è di classe  $C^k$  su  $\tilde{R} := \bigcup_i R_i$ .

**Dimostrazione.** Intuitivamente essere  $C^k$  è una proprietà locale ma preso  $x \in R \implies \exists i \ x \in R_i$  e dunque segue per l'ipotesi sugli  $R_i$ .  $\square$

**Lemma. 7** Data  $f \in L^2((-\pi, \pi); \mathbb{C})$

$$f \text{ è reale q.o.} \iff c_{-n}(f) = \overline{c_n(f)}$$

**Osservazione.** Notiamo che se  $f \in L^1$  la freccia  $\boxed{\Leftarrow}$  è molto più difficile.

**Dimostrazione Teorema 1.**

- i)  $u_0$  reale  $\implies c_{-n}^0 = \overline{c_n^0} \implies c_{-n}^0 e^{-(-n)^2 t} = \overline{c_n^0 e^{-n^2 t}} \iff c_{-n}(u(t, \cdot)) = \overline{c_n(u(t, \cdot))}$ .
- ii) Sia  $R := [0, +\infty) \times \mathbb{R}$ ,  $\|u_n\|_{L^\infty(R)} = \|c_n^0 e^{-n^2 t}\|_{L^\infty(R)} = |c_n^0|$  dunque  $\sum_{n \in \mathbb{Z}} u_n$  converge totalmente su  $R$  e quindi  $u$  è ben definita e continua su  $R$ .
- iii) Presi  $h, k = 0, 1, 2, \dots$  se proviamo a calcolare  $D_t^h D_x^k u_n = c_n^0 (-n)^{2h} (in)^k e^{-n^2 t} e^{inx}$  vediamo non si riesce a stimare per  $t \rightarrow 0$  infatti

$$\|D_t^h D_x^k u_n\|_{L^\infty(R)} = |c_n^0| \cdot |n|^{2h+k} \xrightarrow{n} \infty.$$

Serve prendere  $\delta > 0$  e sia  $R_\delta := (\delta, +\infty) \times \mathbb{R}$

$$\|D_t^h D_x^k u_n\|_{L^\infty(R_\delta)} = |c_n^0| \cdot |n|^{2h+k} e^{-n^2 \delta}$$

in particolare per ogni  $h, k$  abbiamo che  $|n|^{2h+k} e^{-n^2 \delta} \xrightarrow{n} 0 \implies |n|^{2h+k} e^{-n^2 \delta} \leq m_{h,k} \implies \|D_t^h D_x^k u_n\|_{L^\infty(R_\delta)} \leq m_{h,k} \cdot |c_n^0|$  e quindi  $\sum_n D_t^h D_x^k u_n$  converge totalmente su  $R_\delta$ .

Quindi  $u$  è  $C^\infty$  su  $R_\delta$  per ogni  $\delta > 0$  e siccome  $R_\delta$  è aperto in  $R$  per il Lemma. 6  $u$  è  $C^\infty$  su  $\bigcup_{\delta > 0} R_\delta = (0, +\infty) \times \mathbb{R}$ .

- iv) Essendo che  $u$  è  $2\pi$ -periodica in  $x$ , valgono le condizioni al bordo; inoltre  $u_0$  e  $u(0, \cdot)$  hanno gli stessi coefficienti di Fourier, dunque  $u_0 = u(0, \cdot)$  quasi ovunque, ma essendo continue vale  $u_0 = u(0, \cdot)$  su  $[-\pi, \pi]$ ; infine,  $(u_n)_t = (u_n)_{xx} \implies \sum (u_n)_t = \sum (u_n)_{xx} \implies u_t = u_{xx}$  per  $t > 0$ .

□

Ora enunciamo il teorema di unicità, vogliamo un teorema con il minor numero di ipotesi possibile e che ci dà più informazioni; quindi in questo caso cerchiamo la più grande famiglia di funzioni (quindi la meno regolare possibile) sulla quale vale l'unicità della soluzione.

**Teorema. 2** (Unicità) Sia  $u: [0, T) \times [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{C}$  continua,  $C^1$  nel tempo e  $C^2$  nello spazio per  $t > 0$ . Se  $u$  risolve (P) su  $t > 0$  allora  $u$  è unica.

**Definizione.** Dato  $R$  un rettangolo e  $u: R \rightarrow \mathbb{C}$  diciamo che  $u$  è  $C^k$  nella variabile  $x_i$  se  $\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)^h u$  esiste per  $h = 1, \dots, k$  ed è continua su  $R$ .

**Lemma. 8** Data  $u: I \times [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{C}$  di classe  $C^k$  in  $t \implies c_n(D_t^h u(t, \cdot)) = D_t^h c_n(u(t, \cdot))$  per  $h \leq k$ .

**Dimostrazione.**

$$c_n(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} u(t, x) e^{-inx} dx \implies \dot{c}_n(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} u_t(t, x) e^{-inx} dx = c_n(u_t(t, \cdot))$$

per il teorema di derivazione sotto il segno di integrale (Analisi 2?) □

**Dimostrazione Teorema 2.** Poniamo  $c_n(t) := c_n(u(t, \cdot))$ . Sappiamo che per  $t > 0$  vale  $\dot{c}_n(t) \stackrel{(*)}{=} c_n(u_t(t, \cdot)) \stackrel{(**)}{=} c_n(u_{xx}(t, \cdot)) = -n^2 c_n(t)$ , dove  $(*)$  segue dal Lemma 8 e  $(**)$  segue dalla regolarità dei coefficienti. Dunque i coefficienti  $c_n$  risolvono il problema di Cauchy

$$\begin{cases} \dot{y} = -n^2 y \\ y(0) = c_n^0 \end{cases}$$

che ha un'unica soluzione.

**Nota.** Sia  $y: [0, T) \rightarrow \mathbb{R}^k$  funzione continua su  $[0, T)$  e derivabile su  $(0, T)$  che risolve l'equazione differenziale ordinaria  $\dot{y} = f(t, y)$  su  $(0, T)$  con  $f: [0, T) \times \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^k$  continua. Allora  $y$  è  $\mathcal{C}^1$  su  $[0, T)$  e risolve  $\dot{y} = f(t, y)$  su  $[0, T)$ .

Dalla nota sopra otteniamo che  $c_n$  è unico.  $\square$

**Notazione.**  $\mathcal{C}_{\text{per}}^k = \{f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C} \text{ } \pi\text{-periodiche e } \mathcal{C}^k\}$ .

**Teorema 3** (di non esistenza nel passato). Esiste  $u_0 \in \mathcal{C}_{\text{per}}^\infty$  tale che per ogni  $\delta > 0$  non esiste  $u: (-\delta, 0] \times [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{C}$  soluzione di (P) ( $u$  continua,  $\mathcal{C}^1$  in  $t$  e  $\mathcal{C}^2$  in  $x$  per  $t < 0$ )

**Dimostrazione.** Sia  $u$  su  $(-\delta, 0) \times [-\pi, \pi]$  un'eventuale soluzione. Sia  $c_n(t)$  al solito. Dalla dimostrazione del Teorema 2 abbiamo che  $c_n$  risolve (P').

Quindi  $c_n(t) = c_n^0 e^{-n^2 t}$ . Scegliamo  $c_n^0$  (cioè  $u_0$ ) in modo che

- $c_n^0 = O(|n|^{-a})$  per  $n \rightarrow \pm\infty$  per ogni  $a > 0$ . ( $\Rightarrow \sum |n|^k |c_n^0| < +\infty \quad \forall k \Rightarrow u_0 \in \mathcal{C}_{\text{per}}^\infty$ ).
- $c_n^0 e^{-n^2 t} \not\rightarrow 0$  per ogni  $t < 0$ .

Con un tale  $c_n^0$  la soluzione non esiste al tempo  $t$ . Infatti, se per assurdo esistesse, i coefficienti di Fourier  $c_n(t)$  sarebbero quadrato sommabili<sup>1</sup>, ovvero dovrebbero tendere a zero  $\frac{1}{2}$ .

Prendiamo  $c_n^0 = e^{-|n|}$ .  $\square$

**Esercizio.** Dato  $u_0$  sia  $T_*$  il massimo  $T$  per cui (P) ammette soluzione su  $(-T, 0] \times [-\pi, \pi]$ . Caratterizzare  $T_*$  in termini del comportamento asintotico di  $c_n^0$  per  $n \rightarrow \pm\infty$ .

*Suggerimento.* Guardare  $\log(|c_n^0|)/n^2$ .

## 5.3 Equazione delle onde

Sia  $\Omega \subset \mathbb{R}^d$  aperto,  $I$  intervallo temporale,  $u: I \times \overline{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$ , l'equazione delle onde è

$$u_{tt} = v^2 \nabla u = \nabla_x u = \sum_{i=1}^d \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}$$

dove  $v$  si chiama **velocità di propagazione**.

La soluzione è univocamente determinata specificando

- Le condizioni al bordo (come per il calore), ad esempio quelle di Dirichlet:  $u = v_0$  su  $I \times \partial\Omega$  oppure di Neumann:  $\partial u / \partial \nu = 0$  su  $I \times \partial\Omega$ .
- Condizioni iniziali:  $u(0, \cdot) = u_0, u_t(0, \cdot) = u_1$ .

**Esempio 1.** Per  $d = 1$ ,  $\Omega = [0, 1]$  rappresenta una sbarra sottile di materiale elastico. La sbarra è soggetta a vibrazioni longitudinali (onde sonore). La funzione  $u(t, x)$  rappresenta lo spostamento dalla posizione di riposo  $x$  al tempo  $t$ . In tal caso, l'equazione delle onde è

$$u_{tt} = v^2 u_{xx}.$$

---

<sup>1</sup>Per la disuguaglianza di Bessel.

**Esempio 2.** Per  $d = 2$ ,  $\Omega$  rappresenta una sbarra sottile di materiale elastico che vibra trasversalmente. La funzione  $u(t, x)$  rappresenta lo spostamento verticale del punto di coordinata  $x \in \Omega$  a riposo. Allora  $u$  soddisfa<sup>1</sup>

$$u_{tt} = v^2 \nabla^2 u.$$

## 5.4 Risoluzione dell'equazione delle onde

Consideriamo il caso uno dimensionale. In tal caso l'equazione delle onde è la seguente.

$$\begin{cases} u_{tt} = v^2 u_{xx} \\ u(\cdot, \pi) = u(\cdot, -\pi) \\ u_x(\cdot, \pi) = u_x(\cdot, -\pi) \\ u(0, \cdot) = u_0 \\ u_t(0, \cdot) = u_1 \end{cases} \quad (\text{P})$$

### 5.4.1 Risoluzione formale

Scriviamo  $u(t, x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n(t) e^{inx}$ . Deriviamo in  $t$  e due volte in  $x$ .

$$\begin{aligned} u_{tt} &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} \ddot{c}_n e^{inx} \\ u_{xx} &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} -v^2 n^2 c_n e^{inx} \end{aligned}$$

Abbiamo che

$$\begin{aligned} u_{tt} = v^2 u_{xx} &\iff \ddot{c}_n = -v^2 n^2 c_n \\ u(0, \cdot) = u_0 &\iff c_n(0) = c_n^0 := c_n(u_0) \quad u_t(0, \cdot) = u_1 \iff \dot{c}_n(0) = c_n^1 := c_n(u_1) \end{aligned}$$

Quindi  $u$  risolve (P) se e solo se per ogni  $n$ ,  $c_n$  risolve

$$\begin{cases} \ddot{y} = -n^2 v^2 y \\ y(0) = c_n^0 \\ \dot{y}(0) = c_n^1 \end{cases} \quad (\text{P}')$$

Dunque,

- Per  $n = 0$ ,  $\ddot{y} = 0$  se e solo se  $y$  è un polinomio di primo grado, ovvero  $c_0(t) = c_0^0 + c_0^1 t$ .
- Per  $n \neq 0$ ,  $y = \alpha_n^+ e^{inv t} + \alpha_n^- e^{-inv t}$  con

$$\alpha_n^\pm = \frac{1}{2} \left( c_n^0 \pm \frac{c_n^1}{inv} \right)$$

Quindi, la soluzione è

$$u(t, x) = c_0^0 + c_0^1 t + \sum_{n \neq 0} \left[ \alpha_n^+ e^{in(x+vt)} + \alpha_n^- e^{in(x-vt)} \right] \quad (*)$$

---

<sup>1</sup>Per oscillazioni piccole.



Inoltre,

$$u(t, x) = c_0^0 + c_0^1 t + \varphi^+(x + vt) + \varphi^-(x - vt) \quad (**)$$

con  $\varphi^\pm$  funzioni con coefficienti di Fourier  $\alpha_n^\pm$  che si dicono **onde viaggianti**.

**Nota.** La (\*\*) è specifica delle equazioni delle onde.

## 5.5 Esercitazione del 18 Novembre 2021

### 5.5.1 Esercizi preliminari

Data  $f: [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$  o  $\mathbb{C}$  uno degli esercizi più comuni è doverne calcolare lo sviluppo di Fourier complesso o reale.

**Osservazione.** Ricordiamo che  $c_n(f)$  può essere calcolato anche solo se  $f \in L^1$  inoltre

$$\text{SF}_{\mathbb{C}}(f) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n(f) e^{inx} \quad c_n(f) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx} dx$$

e con base hilbertiana  $\left\{ \frac{e^{inx}}{\sqrt{2\pi}} \mid n \in \mathbb{Z} \right\}$

invece nel caso reale abbiamo visto

$$\text{SF}_{\mathbb{R}}(f) = \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)] + a_0$$

$$a_n(f) = c_n(f) + c_{-n}(f) \quad b_n(f) = i(c_n(f) - c_{-n}(f)) \quad a_0(f) = c_0(f)$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx) dx \quad b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(nx) dx$$

e con base hilbertiana  $\left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{\cos(nx)}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin(nx)}{\sqrt{\pi}} \mid n \geq 1 \right\}$

**Esercizio.** Sia  $f(x) = \cos^2(x) \sin(3x)$ , calcolare i coefficienti di Fourier<sup>1</sup>.

**Svolgimento.** Usiamo lo sviluppo complesso

$$\cos(x) = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \quad \sin(x) = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$$

Dunque possiamo riscrivere  $f(x)$  come

$$\begin{aligned} &= \frac{i}{8} (e^{i2x} + e^{-i2x} + 2) (e^{-i3x} - e^{i3x}) = \\ &= \frac{i}{8} (e^{-ix} + e^{-i5x} + 2e^{-i3x} - e^{i5x} - e^{ix} - 2e^{i3x}) = \\ &= \frac{i}{8} e^{-ix} + \frac{i}{8} e^{-i5x} + \frac{i}{4} e^{-i3x} - \frac{i}{8} e^{i5x} - \frac{i}{8} e^{ix} - \frac{i}{4} e^{i3x}. \end{aligned}$$

Dunque possiamo già scrivere i coefficienti di Fourier complessi di  $f(x)$

$$c_n(f) \neq 0 \iff n = \pm 1, \pm 3, \pm 5$$

$$c_{\pm 1}(f) = \mp \frac{i}{8} \quad c_{\pm 3}(f) = \mp \frac{i}{4} \quad c_{\pm 5}(f) = \mp \frac{i}{8}.$$

<sup>1</sup>Con funzioni ottenute come combinazioni di prodotti di potenze di funzioni trigonometriche (anche con argomento moltiplicato per un naturale) conviene calcolare lo sviluppo complesso e poi passare a quello reale.

Continuiamo ora il conto precedente e ricostruiamo la serie di Fourier reale ricomponendo i termini

$$\begin{aligned} &= -\frac{1}{4} \left( \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} \right) - \frac{i^2}{4} \left( \frac{e^{i3x} - e^{-i3x}}{2i} \right) - \frac{i^2}{4} \left( \frac{e^{i5x} - e^{-i5x}}{2i} \right) = \\ &= \frac{1}{4} \sin(x) + \frac{1}{2} \sin(3x) + \frac{1}{4} \sin(5x), \end{aligned}$$

in particolare possiamo notare che  $f(\pi) = f(-\pi) = 0$  dunque potevamo già dedurre che la serie di Fourier reale sarebbe stata composta solo da seni.

**Esercizio.** Caratterizzare i coefficienti  $c_n(f)$  di una  $f: [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{C}$  in  $L^2$  tale che  $\text{Im}(f) \subseteq \mathbb{R}$ .

*Suggerimento.* Si usa che per  $z \in \mathbb{C}$  vale  $z \in \mathbb{R} \iff z = \bar{z}$ .

**Esercizio.** Determinare la soluzione di (P) e stabilire unicità e regolarità della soluzione  $u: [0, T) \times [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$  o  $\mathbb{C}$ .

$$\begin{cases} u_t = 4u_{xx} \\ u(\cdot, -\pi) = u(\cdot, \pi) \\ u_x(\cdot, -\pi) = u_x(\cdot, \pi) \\ u(0, x) = \cos^2(x) \sin(3x) \end{cases} \quad (\text{P})$$

**Svolgimento.** Per prima cosa troviamo formalmente una soluzione in serie di Fourier  $u(t, x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n(t) e^{inx}$  dove  $c_n(t)$  è il coefficiente di  $u(t, \cdot)$ .

Per il teorema di derivazione sotto il segno di integrale abbiamo

$$u_t(t, x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \dot{c}_n(t) e^{inx} \quad \text{con } c_n(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} u(t, x) e^{-inx} dx$$

Le condizioni al bordo assicurano che  $c_n(u_{xx}(t, \cdot)) = -4n^2 c_n(u(t, \cdot))$  da cui otteniamo il seguente problema di Cauchy sui coefficienti

$$\begin{cases} \dot{c}_n(t) = -4n^2 c_n(t) \\ c_n(0) = c_n(u(0, \cdot)) = c_n(\cos^2(x) \sin(3x)) \end{cases} \quad \forall n \in \mathbb{Z}$$

Inoltre dato che  $c_n^0 = 0$  se  $n \neq \pm 1, \pm 3, \pm 5 \implies c_n(t) = 0$  per questi  $n$ , dunque complessivamente i sistemi sono

$$\begin{cases} \dot{c}_1(t) = -4c_1(t) \\ c_1(0) = -\frac{i}{8} \end{cases} \quad \begin{cases} \dot{c}_3(t) = -36c_3(t) \\ c_3(0) = -\frac{i}{4} \end{cases} \quad \begin{cases} \dot{c}_5(t) = -100c_5(t) \\ c_5(0) = -\frac{i}{8} \end{cases}$$

con la condizione  $c_{-n}(t) = \overline{c_n(t)}$ , così otteniamo

$$\begin{aligned} c_1(t) &= -\frac{i}{8} e^{-4t} & c_3(t) &= -\frac{i}{4} e^{-36t} & c_5(t) &= -\frac{i}{8} e^{-100t} \\ c_{-1}(t) &= \frac{i}{8} e^{-4t} & c_{-3}(t) &= \frac{i}{4} e^{-36t} & c_{-5}(t) &= \frac{i}{8} e^{-100t} \end{aligned}$$

ed infine fattorizzando

$$\begin{aligned} u(t, x) &= \frac{e^{-4t}}{4} \left( -\frac{i}{2} e^{ix} + \frac{i}{2} e^{-ix} \right) + \frac{e^{-36t}}{2} \left( -\frac{i}{2} e^{i3x} + \frac{i}{2} e^{-i3x} \right) + \frac{e^{-100t}}{4} \left( -\frac{i}{2} e^{i5x} + \frac{i}{2} e^{-i5x} \right) = \\ &= \frac{1}{4} e^{-4t} \sin(x) + \frac{1}{2} e^{-36t} \sin(3x) + \frac{1}{2} e^{-100t} \sin(5x) \end{aligned}$$

**Esercizio.** Consideriamo il problema (P) dato da

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} + u \\ u(\cdot, -\pi) = u(\cdot, \pi) \\ u_x(\cdot, -\pi) = u_x(\cdot, \pi) \\ u(0, \cdot) = u_0 \end{cases} \quad (\text{P})$$

dove  $u_0(x)$  è  $\cos^2(x) \sin(3x)$  oppure  $\sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{1}{2^{|n|}} e^{inx}$ .

**Svolgimento.** Per ora lavoriamo con  $u_0(x) = \cos^2(x) \sin(3x)$ , notiamo subito che i coefficienti soddisfano l'equazione

$$\begin{cases} \dot{c}_n(t) = -n^2 c_n(t) + c_n(t) = (1 - n^2) c_n(t) \\ c_n(0) = c_n(\cos^2(x) \sin(3x)) \end{cases}$$

da cui  $\dot{c}_n(t) = (1 - n^2) c_n$  con soluzione  $c_n(t) = \gamma e^{(1-n^2)t}$ , quindi ad esempio abbiamo

$$c_{\pm 1}(t) = \mp \frac{i}{8} \quad c_{\pm 3}(t) = \mp \frac{i}{4} e^{-8t} \quad c_{\pm 5}(t) = \mp \frac{i}{8} e^{-24t}$$

Dunque la soluzione finale è

$$\begin{aligned} u(t, x) &= \frac{i}{8} e^{-ix} - \frac{i}{8} e^{ix} + \frac{i}{4} e^{3t} e^{-i3x} + \frac{i}{4} e^{3t} e^{i3x} + \frac{i}{8} e^{-24t} e^{-i5x} + \frac{i}{8} e^{-24t} e^{i5x} = \\ &= -\frac{i}{4} \left( \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2} \right) - \frac{i}{2} e^{-3t} \left( \frac{e^{i3x} - e^{-i3x}}{2} \right) - \frac{i}{4} e^{-24t} \left( \frac{e^{i5x} - e^{-i5x}}{2} \right) = \\ &= \frac{1}{4} \sin(x) - \frac{1}{2} e^{-3t} \sin(3x) - \frac{1}{4} e^{-24t} \sin(5x) \end{aligned}$$

Invece considerando la condizione iniziale  $u_0(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{inx} / 2^{|n|}$  abbiamo che  $c_n(u_0) = 1/2^{|n|}$ , notiamo che i coefficienti sono sommabili

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{1}{2^{|n|}} = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} + 1 < +\infty \quad u(t, x) := \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{1}{2^{|n|}} e^{(1-n^2)t} e^{inx}$$

in particolare formalmente possiamo scriverla meglio come

$$= \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{1}{2^{|n|}} e^{(1-n^2)t} e^{inx} = e^t \left( 1 + \sum_{n>0} \frac{1}{2^{|n|}} e^{(1-n^2)t} \cos(nx) \dots \dots \right)$$

[TODO: Finire meglio questo conto]

**Esercizio.** (della volta scorsa) Consideriamo la funzione

$$f(x) = \sum_{n \neq 0} \frac{\cos(n)}{|n|^{3/2}} e^{inx}$$

- Dire se  $f$  è ben definita e continua.
- Dire se  $f$  è derivabile.

**Svolgimento.**

$$\sum_{n \neq 0} |c_n| = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\cos(n)|}{|n|^{3/2}} \leq 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{3/2}} < +\infty$$

dunque la serie di Fourier converge uniformemente a  $f \implies$  è continua e periodica.

Se  $\sum |n| \cdot |c_n| < +\infty$  si potrebbe dire che  $f$  è derivabile però

$$\sum_{n \neq 0} |n| \cdot |c_n| = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\cos(n)|}{\sqrt{n}} = +\infty \text{ non converge assolutamente}$$

Ma la candidata derivata ha coefficienti  $inc_n$  e non starebbe in  $L^2$  ovvero

$$\sum n^2 |c_n|^2 = +\infty \implies \sum inc_n e^{inx} \notin L^2$$

## 5.6 Risoluzione dell'equazione delle onde

Consideriamo il problema

$$\begin{cases} u_{tt} = v^2 u_{xx} \\ u(\cdot, \pi) = u(\cdot, -\pi) \\ u_x(\cdot, \pi) = u_x(\cdot, -\pi) \\ u(0, \cdot) = u_0 \\ u_t(0, \cdot) = u_1 \end{cases} \quad (\text{P})$$

ed abbiamo visto che ha soluzione

$$u(t, x) = c_0^0 + c_0^1 t + \sum_{n \neq 0} (\alpha_n^+ e^{in(x+vt)} + \alpha_n^- e^{in(x-vt)}) \quad (*)$$

$$\alpha_n^\pm = \frac{1}{2} \left( c_n^0 \pm \frac{c_n^1}{inv} \right).$$

Inoltre, possiamo scrivere l'equazione (\*) come

$$u(t, x) = c_0^0 + c_0^1 t + \varphi^+(x + vt) + \varphi^-(x - vt) \quad (**)$$

dove  $\varphi^+, \varphi^-$  sono funzioni  $2\pi$ -periodiche.

Vedremo i seguenti risultati

- Esistenza usando la forma (\*\*), specifico per equazione delle onde.
- Esistenza usando la forma (\*), che però richiede maggiore regolarità su  $u_0$  e  $u_1$ .
- Unicità.

**Teorema 1.** Dati  $u_0 \in C_{\text{per}}^2, u_1 \in C_{\text{per}}^1$ , allora esistono  $c_0^0, c_0^1 \in \mathbb{C}$  e  $\varphi^+, \varphi^- \in C_{\text{per}}^2$  (con integrale nullo sul periodo) tali che la  $u$  in (\*\*) è di classe  $C^2$  su  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ ,  $2\pi$ -periodica in  $x$  e risolve (P). Inoltre, se  $u_0, u_1$  sono reali  $u$  è reale.

**Lemma 4.** Date  $h, g \in C^1(\mathbb{R})$  con  $g$  primitiva di  $h$  e  $T > 0$  allora  $g$  è  $T$ -periodica  $\iff h$  è  $T$ -periodica e  $\int_0^T h(x) dx = 0$ .

**Dimostrazione.** Notiamo che  $h$  è  $T$ -periodica se e solo se  $\forall x \int_x^{T+x} h(x) dx = \text{cost.}$

$$\int_x^{T+x} h(x) dx = g \Big|_x^{T+x} = g(T+x) - g(x) = 0 \iff g \text{ è } T\text{-periodica}$$

**Dimostrazione Teorema 1.**

*Parte 1.* Se  $c_0^0, c_0^1 \in \mathbb{C}$  e  $\varphi^+, \varphi^- \in C_{\text{per}}^2$  allora la  $u$  data da  $(**)$  è  $C^2$  su  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$  e  $2\pi$ -periodica in  $x$  e risolve  $u_{tt} = v^2 u_{xx}$ .

$$\begin{aligned} u_{tt} &= [\ddot{\varphi}^+(x+vt) + \ddot{\varphi}^-(x-vt)]v^2 \\ u_{xx} &= \ddot{\varphi}^+(x+vt) + \ddot{\varphi}^-(x-vt) \implies u_{tt} = v^2 u_{xx} \end{aligned}$$

*Parte 2.*  $\exists c_0^0, c_0^1 \in \mathbb{R}$  e  $\varphi^+, \varphi^- \in C_{\text{per}}^2$  tali che la  $u$  data da  $(**)$  soddisfa la condizione iniziale in (P), per  $t = 0$ , poste  $\varphi^\pm = \varphi^\pm(x \pm v0)$

$$\begin{cases} c_0^0 + \varphi^+ + \varphi^- = u_0 \\ c_0^1 + v(\dot{\varphi}^+ - \dot{\varphi}^-) = u_1 \end{cases} \implies \begin{cases} \varphi^+ + \varphi^- = u_0 - c_0^0 =: g_0 \in C^2 \\ (\varphi^+ - \varphi^-)' = (u_1 - c_0^1)/v =: h_1 \in C^1 \end{cases}$$

ed ora fissiamo  $c_0^0 = \int_{-\pi}^{\pi} u_0 dx$  e  $c_0^1 = \int_{-\pi}^{\pi} u_1 dx$ . In questo modo possiamo applicare il lemma precedente ed ottenere

$$\begin{cases} \varphi^+ + \varphi^- = g_0 \\ (\varphi^+ - \varphi^-)' = g_1' \end{cases} \implies \varphi^+ = \frac{1}{2}(g_0 + g_1) \quad \varphi^- = \frac{1}{2}(g_0 - g_1)$$

dove  $g_1$  è la primitiva di  $h_1$ . □

**Teorema 2.** Siano  $u_0, u_1 \in C_{\text{per}}^0$  tali che  $\sum n^2 |c_n^0| < +\infty$  e  $\sum |n| \cdot |c_n^1| < +\infty$ . Allora  $(*)$  definisce una funzione  $u: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  di classe  $C^2$ ,  $2\pi$ -periodica in  $x$  che risolve (P). Inoltre, se  $u_0, u_1$  sono reali  $u$  è reale.

**Dimostrazione.**

$$u(t, x) = c_0^0 + c_0^1 t + \sum_{n \neq 0} \left( \underbrace{\alpha^+ e^{in(x+vt)}}_{v_n^+} + \underbrace{\alpha^- e^{in(x-vt)}}_{v_n^-} \right)$$

*Passo 1.* Dimostriamo che  $u \in C^0(\mathbb{R} \times \mathbb{R})$  e  $2\pi$ -periodica in  $x$ .

La funzione  $u$  soddisfa le condizioni di periodicità. Per mostrare la continuità è sufficiente mostrare che la serie converge totalmente su  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ . Notiamo che

$$\|v_n^\pm\|_{L^\infty(\mathbb{R} \times \mathbb{R})} = |\alpha^\pm| = O\left(|c_n^0| + \frac{|c_n^1|}{n}\right),$$

dunque sono sommabili in  $n$ .

*Passo 2.* Mostriamo che  $u \in C^2(\mathbb{R} \times \mathbb{R})$ .

Abbiamo

$$\begin{aligned} D_t^h D_x^k v_n^\pm &= \alpha_n^\pm e^{in(x \pm vt)} (in)^k (ivn)^h \\ \implies \|D_t^h D_x^k v_n^\pm\|_{L^\infty(\mathbb{R} \times \mathbb{R})} &= |\alpha_n^\pm| \cdot |v|^h \cdot |n|^{k+h} = O(|c_n^0| \cdot |n|^{k+h} + |c_n^1| \cdot |n|^{k+h-1}) \end{aligned}$$

che è sommabile se  $k + h \leq 2$  in  $n$ . La serie in  $(*)$  converge totalmente su  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$  con tutte le derivate di ordine  $\leq 2 \implies u \in C^2$ .

*Passo 3.* Dimostriamo che  $u$  risolve l'equazione  $u_{tt} = v^2 u_{xx}$ .

$u$  risolve l'equazione perché derivata e serie commutano e per come abbiamo impostato (P')  
 $c_n(u(0, \cdot)) = c_n(u_0) \implies u(0, \cdot) = u_0$ .  $c_n(u_t(0, \cdot)) = c_n(u_1) \implies u_t(0, \cdot) = u_1$ .

**Teorema 3.** (Unicità) Se  $u: I \times [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{C}$  è  $C^2$  in  $x$  e  $t$  e risolve (P) allora è unica.

**Dimostrazione.** Si ripercorre la stessa dell'equazione del calore. Dimostriamo che i coefficienti  $c_n(t) = c_n(u(t, \cdot))$  definiti per  $t \in I$  risolvono (P')...

## 5.7 Altre applicazioni della serie di Fourier

### 5.7.1 Disuguaglianza isoperimetrica

Sia  $D$  un aperto limitato con frontiera  $C^1$  parametrizzata da un unico cammino  $\gamma$  (quindi niente buchi o più di una componente connessa). Allora  $L^2 \geq 4\pi A$  dove  $L$  è la lunghezza di  $\partial D$  e  $A$  è l'area di  $D$ . Inoltre vale l'uguale se e solo se  $D$  è un disco.

**Dimostrazione.**

Possiamo scegliere  $\gamma: [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{R}^2 \simeq \mathbb{C}$  e  $\gamma$  parametrizzazione di  $\partial D$  in senso antiorario ed a velocità costante (da cui  $|\dot{\gamma}(t)| = L/2\pi$ )

*Passo 1.*

$$L^2 = 2\pi \int_{-\pi}^{\pi} |\dot{\gamma}|^2 dt = 2\pi \|\dot{\gamma}\|_2^2 = 4\pi^2 \sum |c_n(\dot{\gamma})|^2 = 4\pi^2 \sum n^2 |c_n|^2$$

*Passo 2.*

$$A \stackrel{(*)}{=} \frac{1}{2} \langle -i\dot{\gamma}, \gamma \rangle = \frac{1}{2} 2\pi \sum (-i(nc_n))c_n = \pi \sum n|c_n|^2$$

Vediamo che vale questa formula per l'area usata in (\*), poniamo  $\gamma = \gamma_x + i\gamma_y$  allora

$$\begin{aligned} \langle \dot{\gamma}, \gamma \rangle &= \int_{-\pi}^{\pi} \dot{\gamma} \bar{\gamma} dt \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} (\gamma_x - i\gamma_y)(\dot{\gamma}_x + i\dot{\gamma}_y) dt = \\ &= \int_{\gamma} (x - iy)(dx + i dy) = \\ &= \int_D 2i dx dy = 2iA \end{aligned}$$

*Passo 3.* Infine  $L^2 = 4\pi \sum n^2 |c_n|^2$  e  $4\pi A = 4\pi \sum n|c_n|^2$ , dunque segue subito che  $L^2 \geq 4\pi A$  e vale l'uguale se e solo se  $n^2 = n$  o se  $c_n = 0$  per ogni  $n \implies \gamma(t) = c_0 + c_1 e^{it}$  che è una circonferenza di centro  $c_0$  e raggio  $|c_1|$ .

## 5.8 Appendice

Studiamo alcune variazioni dell'equazione del calore.

**Nota.** Un problema del tipo  $u_t = a(t) \cdot u_{xx}$  si può risolvere ripercorrendo i passaggi della risoluzione dell'equazione del calore. Viceversa, il problema  $u_t = a(x) \cdot u_{xx}$  non si può risolvere

allo stesso modo, in quanto, non è vero che il prodotto di serie di Fourier ha come coefficienti il prodotto dei coefficienti.

Studiamo ora variazioni alle condizioni di bordo.

**Osservazione.** Quando proviamo a risolvere  $u_t = u_{xx}$ , passiamo alla serie di Fourier e deriviamo; per fare questo passaggio servono le condizioni al bordo<sup>1</sup>; dunque, togliendo le condizioni di periodicità il sistema non funziona più molto bene.

Introduciamo delle varianti della serie di Fourier.

- **Serie di Fourier reale.** Data  $u \in L^2([-\pi, \pi])$ , definiamo

$$u(x) = \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)] + a_0$$

$$a_n(u) = c_n(u) + c_{-n}(u) \quad b_n(u) = i(c_n(u) - c_{-n}(u)) \quad a_0(u) = c_0(u)$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx) dx \quad b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(nx) dx$$

e con base hilbertiana  $\left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{\cos(nx)}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin(nx)}{\sqrt{\pi}} \mid n \geq 1 \right\}$ .

- **Serie di Fourier su  $[-\pi, \pi]^d$ .** Data  $u \in L^2([-\pi, \pi]^d, \mathbb{C})$ , definiamo

$$u(x) = \sum_{\underline{n} \in \mathbb{Z}^d} c_{\underline{n}} e^{i \underline{n} x} \quad c_{\underline{n}} = c_{\underline{n}}(u) := \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{[-\pi, \pi]^d} u(x) e^{-i \underline{n} x} dx$$

con base di Hilbert

$$\mathcal{F} = \left\{ \frac{e^{i \underline{n} x}}{(2\pi)^{d/2}} : \underline{n} \in \mathbb{Z}^d \right\}$$

C'è da dimostrare che  $\mathcal{F}$  è una base di Hilbert.

**Dimostrazione** (idea).

- Ortonormalità. È un conto [TO DO].
- Completezza. Si può dimostrare come per  $d = 1$ , oppure si usa il seguente lemma.  
**Lemma.** Sia  $\mathcal{F}_1 := \{e_n^1\}$  base di Hilbert di  $L^2(X_1, \mathbb{C})$  e  $\mathcal{F}_2 := \{e_n^2\}$  base di Hilbert di  $L^2(X_2, \mathbb{C})$ . Allora, una base di Hilbert di  $L^2(X_1 \times X_2, \mathbb{C})$  è

$$\mathcal{F} = \left\{ e_{n_1, n_2}(x_1, x_2) \mid e_{n_1}^1(x_1) e_{n_2}^2(x_2) \right\}$$

*Formula chiave.* Se  $u \in C_{\text{per}}^1(\mathbb{R}^d) = \{\text{funzioni } 2\pi\text{-periodiche in tutte le variabili}\}$ . Abbiamo che

$$c_{\underline{n}}(\nabla u) = i \underline{n} c_{\underline{n}}(u), \quad c_{\underline{n}}(\Delta u) = -|\underline{n}|^2 c_{\underline{n}}(u) \quad \text{se } u \in \mathcal{C}_{\text{per}}^2$$

- **Serie in seni.** Data  $u \in L^2([0, \pi])$ , allora

$$u(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(nx) \quad b_n = b_n(u) := \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} u(x) \sin(nx) dx$$

---

<sup>1</sup> Anche se avevamo derivato le formule formalmente anche a posteriori l'ipotesi delle condizioni al bordo era necessaria.

con base di Hilbert

$$\mathcal{F} = \left\{ \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin(nx) \mid n \geq 1 \right\}$$

**Dimostrazione.** Mostriamo l'ortonormalità e la completezza.

*Ortonormalità.* Sono conti. [TO DO]

*Completezza.* Data  $u \in L^2([0, \pi])$ . Sia  $\tilde{u}$  l'estensione dispari a  $[-\pi, \pi]$ . Allora

$$\tilde{u} = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{a}_n \cos(nx) + \tilde{b}_n \sin(nx) \underset{\tilde{u} \text{ dispari}}{=} \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{b}_n \sin(nx).$$

**Osservazione.** I coefficienti  $\tilde{b}_n = b_n$ . Si può vedere in diversi modi, un modo possibile è questo.

$$\tilde{b}_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \tilde{u}(x) \sin(nx) dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \tilde{u} \sin(nx) dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} u(x) \sin(nx) dx = b_n.$$

**Formula chiave.** Data  $u \in \mathcal{C}^2([0, \pi])$  con condizioni al bordo  $u(\cdot, 0) = u(\cdot, \pi)$ . Allora

$$b_n(\ddot{u}) = -n^2 b_n(u)$$

dove

$$\begin{aligned} b_n(\ddot{u}) &:= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \ddot{u}(x) \sin(nx) dx \\ &= \frac{2}{\pi} \left[ \dot{u}(x) \sin(nx) \right]_0^{\pi} - n \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \dot{u}(x) \cos(nx) dx \\ &= -n \frac{2}{\pi} \left[ u(x) \cos(nx) \right]_0^{\pi} - n^2 \underbrace{\left( \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} u(x) \sin(nx) dx \right)}_{b_n(u)} \\ &= -n^2 b_n(u). \end{aligned}$$

□

**Applicazione** (della serie in seni). Risoluzione di EDP su  $[0, \pi]$  con condizioni di Dirichlet (omogenee) al bordo.

**Esempio.** Risolvere

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} & \text{su } [0, \pi] \\ u(\cdot, 0) = u(\cdot, \pi) = 0 \\ u(0, \cdot) = u_0 \end{cases} \quad (\text{P})$$

**Soluzione.** Poniamo  $b_n^0 := b_n(u_0)$ . Scriviamo  $u(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n(t) \sin(nx)$  serie di seni in  $x$ .

Formalmente,

$$u_t = \sum_{n=1}^{\infty} \dot{b}_n(t) \sin(nx) \quad u_{xx} = \sum_{n=1}^{\infty} -n^2 b_n(t) \sin(nx),$$

dunque

$$u_t = u_{xx} \iff \dot{b}_n(t) = -n^2 b_n(t) \quad \forall t \forall n.$$



Cioè  $b_n(t)$  risolve il problema di Cauchy.

$$\begin{cases} \dot{y} = -n^2 y \\ y(0) = \dot{b}_n. \end{cases} \quad (\text{P}')$$

Ovvero  $b_n(t) = b_n^0 e^{-n^2 t}$ , da cui

$$u(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{b_n^0 e^{-n^2 t} \sin(nx)}_{u_n}. \quad (*)$$

**Teorema 1** (di esistenza nel futuro). Se  $u_0: [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$  è continua è  $\sum_n |b_n^0| < +\infty$  (basta  $u_0 \in \mathcal{C}^1$  e  $u(0) = u(\pi) = 0$ ). Allora la  $u$  in  $(*)$  è ben definita e continua su  $[0, +\infty) \times \mathbb{R}$  e risolve (P).

**Dimostrazione.** Dimostriamo il teorema per passi.

*Passo 1.* Mostriamo che  $u$  è ben definita e continua su  $(0, +\infty) \times \mathbb{R}$ : studiamo la norma del sup. Sia  $R = [0, +\infty) \times \mathbb{R}$ .

$$\|u_n\|_{L^\infty(R)} \leq |b_n^0| \implies u_n \text{ converge totalmente su } \mathbb{R}.$$

*Passo 2.* Mostriamo che  $\mathcal{C}^\infty$  su  $(0, +\infty) \times \mathbb{R}$ . Sia  $R_\delta = (\delta, +\infty) \times \mathbb{R}$ . Stimiamo le derivate.

$$\begin{aligned} D_t^k D_x^h u_n &= b_n^0 (-n^2)^k e^{-n^2 t} \cdot n^h \cdot \underbrace{\dots}_{*} \\ \implies \|D_t^k D_x^h u_n\|_{L^\infty(R_\delta)} &= |b_n^0| \underbrace{e^{-n^2 \delta} \cdot |n|^{2k+h}}_{\substack{\text{limitato in } n \\ \text{perché è infinitesimo in } n}} \end{aligned}$$

Allora le norme delle derivate sono sommabili per ogni  $n$ , dunque  $u \in \mathcal{C}^\infty(R_\delta)$  per ogni  $\delta$ , da cui  $u \in \mathcal{C}^\infty((0, +\infty), \mathbb{R})$ .

*Passo 3.* Mostriamo che la  $u(t, x)$  definita in  $(*)$  risolve (P).

- $u$  risolve  $u_t = u_{xx}$  per  $t > 0$ . Infatti, l'equazione è lineare per quanto mostrato al punto sopra e dunque posso scambiare serie e derivata.
- $u$  soddisfa la condizione iniziale  $u(0, \cdot) = u_0$ , perché hanno gli stessi coefficienti di Fourier.
- Sono soddisfatte anche le condizioni al bordo, infatti

$$u(\cdot, 0) = u(\cdot, \pi) = 0$$

□

**Domanda.** Quale ipotesi su  $u_0$  garantisce  $\sum_n |b_n^0| < +\infty$ ? Basta  $u_0 \in \mathcal{C}^1$  e  $u(0) = u(\pi) = 0$ .

**Teorema 2** (non esistenza nel passato). Esiste  $u_0: [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$   $\mathcal{C}^\infty$ , con  $u_0(0) = u_0(\pi)$  tale che per ogni  $\delta > 0$  (P) non ha alcuna soluzione  $u: (-\delta, 0] \times [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$  continua e  $\mathcal{C}^1$  in  $t$  e  $\mathcal{C}^2$  in  $x$ .

**Teorema 3** (di unicità). Sia  $u: [0, T) \times [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{C}$  continua,  $\mathcal{C}^1$  nel tempo e  $\mathcal{C}^2$  nello spazio per  $t > 0$ . Se  $u$  risolve (P) su  $t > 0$  allora  $u$  è unica.

### 5.8.1 Operatori autoaggiunti

Notiamo che l'efficacia per la soluzione di certe EDP dipende dal fatto che

$$c_n(u) = inc_n(u) \quad b_n(\ddot{u}) = -n^2 b_n(u)$$

che segue (almeno formalmente) da  $(e^{inx})' = ine^{inx}$  e  $(\sin(nx))'' = -n^2 \sin(nx)$ .

Cioè che  $\{e^{inx}/\sqrt{2\pi}\}$  è una base ortonormale di  $L^2([-\pi, \pi], \mathbb{C})$  di autovettori di  $D^1$  e  $\{\sqrt{2/\pi} \sin(x)\}$  è una base ortonormale di  $L^2([0, \pi]; \mathbb{C})$  di autovettori di  $D^2$ .

Analogamente per risolvere  $u_t = \Delta u$  su  $\Omega$ , basterebbe avere  $\{e_n\}$  base ortonormale di  $L^2(\Omega)$  fatta di autovettori del laplaciano.

Per avere una base ortonormale di autovettori di un operatore  $T$  serve che  $T$  sia autoaggiunto (almeno in dimensione finita).

**Definizione.** Dato  $H$  spazio di Hilbert complesso o reale,  $D$  sottospazio denso di  $H$ ,  $T: D \rightarrow H$  lineare (non necessariamente continuo), dico che  $T$  è **autoaggiunto** se  $\langle Tx, y \rangle = \langle x, Ty \rangle$  per ogni  $x, y \in D$ .

**Proposizione.** Dato  $T$  come sopra

- i) Se  $\lambda$  è autovalore di  $T$  (ovvero tale che  $\exists x \neq 0$  tale che  $Tx = \lambda x$ ) allora  $\lambda$  è reale.
- ii) Dati  $\lambda_1 \neq \lambda_2$  autovalori allora  $V_{\lambda_1} \perp V_{\lambda_2}$  dove  $V_\lambda := \{x \mid Tx = \lambda x\}$ .

**Nota.** In dimensione infinita manca un teorema spettrale, ovvero tale che  $\overline{\bigoplus_\lambda V_\lambda} = H$ .

**Esempio 1.** Sia  $H = L^2([-\pi, \pi], \mathbb{C})$ ,  $D = \{u \in C^2(-\pi, \pi) \mid u(-\pi) = u(\pi)\}$  e  $T: D \rightarrow H$  tale che  $u \mapsto iu$ . Mostrare che

- i)  $T$  è autoaggiunto
- ii) Gli autovalori di  $T$  sono  $\lambda_n = n$  con  $n \in \mathbb{Z}$   $V_{\lambda_n} = V_n = \text{Span}\{e^{inx}\}$ .
- iii)  $T$  non è continuo

In questo caso esiste una base ortonormale di  $L^2$  di autovettori di  $T$ . [TO DO: aggiustare].

**Dimostrazione.**

- i) Dati  $u, v \in D(= C^1_{\text{per}})$ , allora

$$\begin{aligned} \langle Tu, v \rangle &= \int_{-\pi}^{\pi} iu\bar{v} dx = |iu\bar{v}|_{-\pi}^{\pi} - \int_{-\pi}^{\pi} iu\bar{v} dx \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} u\bar{v} dx = \langle u, Tv \rangle \end{aligned}$$

- ii) Questo è un esercizio di equazioni differenziali ordinarie. Risolviamo il problema

$$\begin{cases} -iu = \lambda u & \text{su } [-\pi, \pi] \\ u(\pi) = u(-\pi) \end{cases}$$

---

<sup>1</sup>Operatore derivata.

da cui  $\dot{u} - i\lambda u = 0$ , che ha polinomio associato  $t - i\lambda = 0$  con radice  $i\lambda$ . In conclusione la soluzione del problema sopra è  $\alpha e^{i\lambda x}$ .

Dalla condizione al bordo abbiamo che  $\alpha e^{i\lambda\pi} = e^{-i\lambda\pi}$  dunque  $e^{i\lambda\pi} = e^{-i\lambda\pi} \iff e^{2i\lambda\pi} = 1 \iff \lambda \in \mathbb{Z}$ .

iii) Siccome gli autovalori sono illimitati,  $T$  non è continuo.  $\square$

**Esempio 3.** Sia  $H = L^2([-\pi, \pi], \mathbb{C})$   $D = \{u \in C^1(-\pi, \pi)\}$  e  $T: D \rightarrow H$  tale che  $u \mapsto i\dot{u}$ .

**Dimostrazione.** Dati  $u, v \in D$  abbiamo

$$\begin{aligned} \langle Tu, v \rangle &= \int_{-\pi}^{\pi} i\dot{u}\bar{v} dx = |i\dot{u}\bar{v}|_{-\pi}^{\pi} - \int_{-\pi}^{\pi} iu\bar{\dot{v}} dx \\ &= i(u(\pi)\bar{v}(\pi) - u(-\pi)\bar{v}(-\pi)) + \langle u, Tv \rangle \neq \langle u, Tv \rangle. \end{aligned}$$

In quanto, in generale, il termine  $u(\pi)\bar{v}(\pi) - u(-\pi)\bar{v}(-\pi)$  è diverso da zero.

**Esercizio.** Cercare  $T: L^2([0, 1]) \rightarrow L^2([0, 1])$  continuo autoaggiunto senza autovalori.

*Suggerimento.* Cercare  $T$  del tipo  $T: u \mapsto gu$  con  $g \in L^\infty$ .

## 5.9 Esercitazione del 25 Novembre 2021

**Esercizio.** Consideriamo l'equazione alle derivate parziali

$$\begin{cases} u_{ttt}(t, x) = u_{xx}(t, x) & x \in [-\pi, \pi] \\ u(\cdot, \pi) = u(\cdot, -\pi) \\ u_x(\cdot, \pi) = u_x(\cdot, -\pi) \\ u(0, \cdot) = u_0 \\ u_x(0, \cdot) = u_1 \\ u_{xx}(0, \cdot) = u_2 \end{cases} \quad (P)$$

ponendo  $c_n^i := c_n(u_i)$  per  $n \in \mathbb{Z}$  per  $i = 1, 2, 3$ . Segue subito che il problema di Cauchy sui coefficienti è

$$\begin{cases} \ddot{c}_n(t) = -n^2 c_n(t) \\ c_n(0) = c_n^0 \\ \dot{c}_n(0) = c_n^1 \\ \ddot{c}_n(0) = c_n^2 \end{cases} \quad \forall n \in \mathbb{Z} \quad (P')$$

che ha polinomio caratteristico  $p(\lambda) = \lambda^3 + n^2 \implies \lambda^3 = -n^2$  e dunque le soluzioni sono  $\lambda_i = n^{2/3} \zeta_6^{2i-1}$  con  $\zeta_6$  una radice sesta dell'unità. Per comodità per  $i = 1, 2, 3$  poniamo  $z_i := n^{2/3} \omega_i$  con  $\omega_i$  soluzioni di  $\omega^3 = -1$  che possiamo anche riscrivere come

$$\omega_1 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \quad \omega_2 = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i \quad \omega_3 = -1$$

Dunque per  $n \in \mathbb{Z}$  e  $n \neq 0$  la soluzione sarà

$$\begin{cases} c_n(t) = A_n e^{-z_1^n t} + B_n e^{-z_2^n t} + C_n e^{-z_3^n t} \\ c_n(0) = c_n^0 = A_n + B_n + C_n \\ c_n(1) = c_n^1 = A_n z_1^n + B_n z_2^n + C_n z_3^n \\ c_n(2) = c_n^2 = A_n (z_1^n)^2 + B_n (z_2^n)^2 + C_n (z_3^n)^2 \end{cases}$$

e quindi otteniamo il sistema

$$\Rightarrow \begin{cases} c_n^0 = A_n + B_n + C_n \\ n^{-2/3} c_n^1 = A_n \omega_1 + B_n \omega_2 + C_n \omega_3 \\ n^{-4/3} c_n^2 = A_n \omega_1^2 + B_n \omega_2^2 + C_n \omega_3^2 \end{cases} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \omega_1 & \omega_2 & \omega_3 \\ \omega_1^2 & \omega_2^2 & \omega_3^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_n \\ B_n \\ C_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_n^0 \\ n^{-2/3} c_n^1 \\ n^{-4/3} c_n^2 \end{pmatrix}$$

e facendo conti si ottengono  $A_n, B_n$  e  $C_n$  e si scopre che [TODO: Controllare i conti con Mathematica]

$$\begin{aligned} A_n e^{n^{2/3}(t/2+i\sqrt{3}t/2)} &\sim e^{n^{2/3}t/2} \xrightarrow{t \rightarrow \infty} \infty \\ B_n e^{n^{2/3}(t/2-i\sqrt{3}t/2)} &\sim e^{n^{2/3}t/2} \xrightarrow{t \rightarrow \infty} \infty \\ C_n e^{-n^{2/3}t} &\sim e^{-n^{2/3}t} \xrightarrow{t \rightarrow -\infty} \infty \end{aligned}$$

dunque in realtà anche se il problema in partenza sembrava ben definito in realtà non ha soluzione per alcun  $t \in \mathbb{R}$ .

*Conti esatti con Mathematica:*

$$\begin{aligned} A_n &\rightarrow \frac{c_n^0}{3} - \frac{c_n^2}{3n^{4/3}} - \frac{(-1)^{2/3} c_n^2}{3n^{4/3}} - \frac{(-1)^{2/3} c_n^1}{3n^{2/3}}, \\ B_n &\rightarrow \frac{c_n^0}{3} - \frac{c_n^2}{6n^{4/3}} + \frac{ic_n^2}{2\sqrt{3}n^{4/3}} + \frac{c_n^1}{6n^{2/3}} + \frac{ic_n^1}{2\sqrt{3}n^{2/3}}, \\ C_n &\rightarrow \frac{c_n^0}{3} + \frac{c_n^2}{3n^{4/3}} - \frac{c_n^1}{3n^{2/3}} \end{aligned}$$

**Esercizio.** (Equazione del calore senza una condizione al bordo)

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} & x \in [-\pi, \pi] \\ u(\cdot, -\pi) = u(\cdot, \pi) \\ u(0, \cdot) = u_0 = \cos(x/2) \end{cases} \quad (P)$$

i) *Esiste una soluzione?*

Sì in quanto esiste anche con una condizione in più

ii) *È unica?*

Senza periodicità per  $u_x$  non è vero in generale che  $c_n(u_{xx}(t, \cdot)) = -n^2 c_n(u(t, \cdot))$ .

Cerchiamo una soluzione della forma  $u(t, x) = \cos(x/2)\psi(t)$ . Abbiamo che  $u_t(t, x) = \dot{\psi}(t) \cos(x/2)$  e  $u_{xx}(t, x) = -\cos(x/2)\psi(t)/4$ . Dunque  $\psi(t) = -\psi(t)/4$  e  $\psi(0) = 1 \Rightarrow \psi(t) = e^{-t/4}$ .

**Esercizio.**

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} & x \in [0, \pi] \\ u(t, 0) = 0 & t \in \mathbb{R} \\ u(t, \pi) = t & t \in \mathbb{R} \\ u(0, \cdot) = u_0 \end{cases} \quad (P)$$

L'equazione è lineare, cerchiamo  $u(t, x) = v(t, x) + \psi(t, x)$  in modo che  $v(t, x) = 0$  se  $x = 0, \pi$  e  $\psi(t, 0) = 0$  e  $\psi(t, \pi) = t$  e  $\psi(t, x) = tx/\pi$ .

**Esercizio.**

$$\begin{cases} u_t = u_{xxxx} & x \in [-\pi, \pi] \\ u(\cdot, \pi) = u(\cdot, -\pi) \\ u_x(\cdot, \pi) = u_x(\cdot, -\pi) \\ u_{xx}(\cdot, \pi) = u_{xx}(\cdot, -\pi) \\ u_{xxx}(\cdot, \pi) = u_{xxx}(\cdot, -\pi) \\ u(0, \cdot) = u_0 \end{cases} \quad (\text{P})$$

**Esercizio.**

$$\begin{cases} u_t = u_{xxxx} & x \in [0, \pi] \\ u(\cdot, 0) = u(\cdot, \pi) = 0 \\ u_{xx}(\cdot, 0) = u_{xx}(\cdot, \pi) = 0 \\ u(0, \cdot) = u_0 \end{cases} \quad (\text{P})$$

**Esercizio.** Sia  $V$  il seguente insieme

$$V := \left\{ f \in L^1([1, +\infty)) \mid |f(x)| \leq \frac{1}{x^2} \text{ per q.o. } x \right\}$$

è compatto in  $L^1$ ? e se al posto di  $L^1$  avessimo  $L^2$ ?

[TODO: Espandere]

Intuitivamente  $V \supseteq \{f \mid |f(x)| \leq 1/2 \text{ q.o. in } [1, 2]\}$  che non è compatto in quanto contiene famiglie di funzioni che “oscillano molto” costruite sull’idea della base di Haar.

**Esercizio.** Trovare una funzione in  $L^p([0, +\infty))$  tale però che  $f \notin L^q$  per  $q \neq p$ .

Cercare  $f$  della forma

$$f(x) = \frac{1}{x^\alpha(a + (\ln x)^\beta)}$$

# Capitolo 6

## Trasformata di Fourier

Data  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  poniamo

$$f(x) \stackrel{(*)}{=} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(y) e^{iyx} dy \quad \hat{f}(y) := \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-iyx} dx.$$

Dove  $\hat{u}$  si chiama *trasformata di Fourier*<sup>1</sup> di  $u$  e la formula  $(*)$  si dice *formula di inversione*.

*Derivazione formale* (della formula di inversione). Prendiamo  $f \in \mathcal{C}_C^1(\mathbb{R}, \mathbb{C})$  e  $\delta > 0$  tale che  $\text{supp}(f) \subset [-\pi/\delta, \pi/\delta]$ .

Scriviamo  $f$  in serie di Fourier su  $[-\pi/\delta, \pi/\delta]$  (serve un cambio di variabile per ricondursi alla serie di Fourier su  $[-\pi, \pi]$ ).

$$f(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n^\delta(f) e^{in\delta x}$$
$$c_n^\delta(f) := \frac{\delta}{2\pi} \int_{-\pi/\delta}^{\pi/\delta} f(x) e^{-in\delta x} dx = \frac{\delta}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-in\delta x} dx = \frac{\delta}{2\pi} \hat{f}(n\delta).$$

Dunque,

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{\delta}{2\pi} \underbrace{\hat{f}(n\delta) e^{i(n\delta)x}}_{\hat{f}(y) e^{iyx} \text{ calcolata in } y=n\delta}$$

dove  $\sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{\delta}{2\pi} \hat{f}(n\delta) e^{i(n\delta)x}$  è la somma di Riemann di  $\int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(y) e^{iyx} dy$ . Dunque

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{\delta}{2\pi} \hat{f}(n\delta) e^{i(n\delta)x} \xrightarrow{\delta \rightarrow 0} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(y) e^{iyx} dy.$$

Quest'ultimo passaggio non è giustificato rigorosamente ma si può rendere rigoroso per  $f \in \mathcal{C}_C^1(\mathbb{R})$ .

**Definizione.** Data  $f \in L^1(\mathbb{R}; \mathbb{C})$  la **trasformata di Fourier**  $\hat{f}$  è definita da

$$\hat{f}(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-ixy} dx \quad \forall y \in \mathbb{R}.$$

---

<sup>1</sup>Sostituisce la serie di Fourier quando si passa da funzioni su  $\mathbb{R}$   $2\pi$ -periodiche a funzioni su  $\mathbb{R}$ .

**Teorema.** Data  $f \in L^1(\mathbb{R}; \mathbb{C})$ , allora

- i)  $\widehat{f}$  è ben definita in ogni punto di  $\mathbb{R}$ .
- ii) Vale  $\|\widehat{f}\|_\infty \leq \|f\|_1$ .
- iii)  $\widehat{f}$  è continua
- iv)  $\widehat{f}$  è infinitesima.

**Dimostrazione.**

- i)  $\widehat{f}(y)$  è ben definita per ogni  $y \in \mathbb{R}$ . Infatti,  $f(x)e^{-iyx} \in L^1$  dato che

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)e^{-iyx}| \, dx = \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| \, dx = \|f\|_1.$$

- ii)  $\|\widehat{f}\|_\infty \leq \|f\|_1$ . Infatti,

$$|\widehat{f}|_\infty \leq \int |f(x)e^{-iyx}| \, dx = \|f\|_1$$

- iii)  $\widehat{f}$  è continua. Se  $y_n \rightarrow y$ , allora

$$\widehat{f}(y_n) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-ixy_n} \, dx \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-iny} \, dx = \widehat{f}(y)$$

per convergenza dominata. Infatti, la convergenza puntuale segue dalla continuità dell'esponenziale; mentre la dominazione è data da  $|f(x)e^{-ixy_n}| = |f(x)|$ .

- iv)  $\widehat{f}(y) \xrightarrow{y \rightarrow \pm\infty} 0$  per il lemma di Riemann-Lebesgue.

□

## 6.1 Proprietà della trasformata di Fourier

Data  $f \in L^1(\mathbb{R}; \mathbb{C})$  abbiamo posto

$$\forall y \in \mathbb{R} \quad \mathcal{F}(f)(y) = \widehat{f}(y) := \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-iyx} \, dx$$

ed abbiamo visto che

**Teorema 1.**  $\widehat{f} \in C_0(\mathbb{R}; \mathbb{C})$  e  $\|\widehat{f}\|_\infty \leq \|f\|_1$ .

**Proposizione 2.** Data  $f \in L^1(\mathbb{R}; \mathbb{C})$  allora

- i)  $\forall h \in \mathbb{R}$  vale  $\widehat{\tau_h f} = e^{-ihy} \widehat{f}$
- ii)  $\forall h \in \mathbb{R}$  vale  $\widehat{e^{ihx} f} = \tau_h \widehat{f}$
- iii)  $\forall \delta \neq 0$  vale  $\widehat{\sigma_\delta f} = \widehat{f}(\delta y)$

*Derivazione.* Partendo dalla formula di inversione

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{2\pi} \int \widehat{f}(y) e^{iyx} dy \\ f(x-h) &= \frac{1}{2\pi} \int \underbrace{\widehat{f}(y) e^{-ihy}}_{= \widehat{f(x-h)}} e^{iyx} dy \end{aligned}$$

**Dimostrazione.** Facciamo il calcolo diretto

$$\begin{aligned} \widehat{\tau_h f} &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-h) e^{-ixy} dx = \\ &= \left( \begin{array}{l} t = x-h \\ dt = dx \end{array} \right) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-i(t+h)y} dt = \\ &= e^{-ihy} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-ity} dt = e^{-ihy} \widehat{f}(t). \end{aligned}$$

Analogamente seguono anche le altre □

**Proposizione 3.** Sia  $f \in C^1(\mathbb{R}; \mathbb{C})$  con  $f, f' \in L^1$  allora  $\widehat{f'} = iy\widehat{f}$  (da confrontare con  $c_n(f') = inc_n(f)$  nel caso della serie di Fourier).

*Derivazione.* Si deriva la formula di inversione

$$f'(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{f}(y) iye^{iyx} dy$$

**Dimostrazione.** Vediamo prima una dimostrazione che non funziona e cerchiamo di aggiustarla. Abbiamo che

$$\widehat{f'}(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f'(x) e^{-iyx} dx = \underbrace{\left[ f(x) e^{-iyx} \right]_{-\infty}^{+\infty}}_{=0} + iy \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-iyx} dx = iy\widehat{f}(y)$$

serve che  $f(x) \rightarrow 0$  per  $|x| \rightarrow +\infty$  (ad esempio  $f \in C \cap L^1$  lo implica), in realtà  $f \in C^1$  e  $f, f' \in L^1$  basta, ma la dimostrazione è più complicata.

Argomentiamo come segue,  $f \in L^1 \implies \liminf_{|x| \rightarrow \infty} |f(x)| = 0$  (in quanto se  $\liminf_{|x| \rightarrow \infty} |f(x)| = \delta > 0$  allora la funzione sarebbe  $> \delta$  per  $|x| \rightarrow +\infty$  ed avrebbe integrale  $+\infty$ ) dunque esistono due successioni  $a_n \rightarrow -\infty, b_n \rightarrow +\infty$  tali che  $f(a_n) \rightarrow 0$  e  $f(b_n) \rightarrow 0$  quindi come prima abbiamo

$$\begin{aligned} \widehat{f'}(y) &= \lim_n \int_{a_n}^{b_n} f'(x) e^{iyx} dx = \\ &= \lim_n \int \mathbb{1}_{[a_n, b_n]} f'(x) e^{iyx} dx = \\ &= \lim_n \left( \underbrace{\left[ f(x) e^{-iyx} \right]_{a_n}^{b_n}}_{\rightarrow 0} + iy \int_{a_n}^{b_n} f(x) e^{-iyx} dx \right) = \\ &= \lim_n iy \int_{a_n}^{b_n} f(x) e^{-iyx} dx = \\ &= iy\widehat{f}(y) \end{aligned}$$

□



**Proposizione 4.** Sia  $f \in L^1$  con  $xf \in L^1$ , allora  $\widehat{f} \in C^1(\mathbb{R}; \mathbb{C})$  e  $(\widehat{f})' = -i\widehat{xf}$ .

**Dimostrazione.**

$$\widehat{f}(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-ixy} dx \implies (\widehat{f})'(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)(-ix)e^{-ixy} dx = -i\widehat{xf}$$

**Proposizione 5.** (Derivazione sotto segno di integrale) Sia  $I$  un intervallo di  $\mathbb{R}$ ,  $E$  misurabile in  $\mathbb{R}^d$  e  $g: I \times E \rightarrow \mathbb{C}$  tale che

i)  $g(\cdot, x) \in C^1(I)$  per q.o.  $x \in E$ .

ii)  $\exists h_0, h_1 \in L^1(E)$  tali che

$$|g(t, x)| \leq h_0(x) \quad \text{e} \quad \left| \frac{\partial g}{\partial t}(t, x) \right| \leq h_1(x)$$

allora  $G(t) := \int_E g(t, x) dx$  è ben definita per ogni  $t \in I$  e  $G \in C^1(I)$  e

$$G'(t) = \int_E \frac{\partial}{\partial t} g(t, x) dx$$

**Traccia dimostrazione.**

- *Passo 1:*  $G(t)$  e  $\tilde{G}(t)$  sono ben definite  $\forall t \in I$  (grazie alla dominazione) e continue in  $t$  (usando convergenza dominata e le dominazioni)
- *Passo 2:* Dobbiamo far vedere che  $G$  è  $C^1$  con derivata  $\tilde{G}$ , si usa la seguente forma del teorema fondamentale del calcolo integrale

$$\forall t_0, t_1 \in I \text{ con } t_0 < t_1 \quad G(t_1) - G(t_0) \stackrel{(*)}{=} \int_{t_0}^{t_1} \tilde{G}(t) dt$$

ed usando Fubini-Tonelli in (\*).

**Proposizione 6.** (Prodotto di convoluzione e trasformata di Fourier). Siano  $f_1, f_2 \in L^1(\mathbb{R}; \mathbb{C})$ , allora  $f_1 * f_2 \in L^1$  (già visto) e vale

$$\mathcal{F}(f_1 * f_2) = (\mathcal{F}f_1) \cdot (\mathcal{F}f_2)$$

**Dimostrazione.**

$$\begin{aligned} \widehat{f_1 * f_2}(y) &= \int f_1 * f_2(x) e^{-ixy} dx = \\ &= \iint f_1(x-t) f_2(t) dt e^{-ixy} dx = \\ &= \int \left( \int f_1(x-t) e^{-i(x-t)y} dx \right) f_2(t) e^{-ity} dt = \\ &= \int \widehat{f_1}(y) f_2(t) e^{-ity} dt = \widehat{f_1}(y) \cdot \widehat{f_2}(y) \end{aligned}$$

**Definizione.** Data  $g \in L^1(\mathbb{R}; \mathbb{C})$  definiamo l'**antitrasformata di Fourier** di  $g$  la funzione

$$\check{g}(x) := \int_{-\infty}^{+\infty} g(y) e^{ixy} dy.$$

Cioè  $\check{g}(x) = \widehat{g}(-x)$  e scriviamo anche  $\check{g} = \mathcal{F}^*g$ . Effettivamente  $\mathcal{F}^*$  è l'aggiunto di  $\mathcal{F}$ , almeno formalmente<sup>1</sup> infatti abbiamo

$$\langle \mathcal{F}f, g \rangle = \iint f \overline{e^{ixy}g(y)} dx dy = \int f(x) \overline{\check{g}(x)} dx = \langle f, \mathcal{F}^*g \rangle.$$

**Teorema 7.** Data  $f \in L^1(\mathbb{R}; \mathbb{C})$  tale che  $\widehat{f} \in L^1(\mathbb{R}; \mathbb{C})$  allora

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \mathcal{F}^* \mathcal{F}f = 2\pi f \quad \text{cioè} \quad \int \widehat{f}(x) e^{ixy} dy = 2\pi f(x)$$

**Nota.** Una funzione continua e infinitesima non è, in generale, una funzione  $L^1$ ; in particolare, l'ipotesi  $\widehat{f} \in L^1$  è necessaria e non deriva dalle proprietà già note.

**Dimostrazione.** *Dimostrazione diretta* (passando dalla Delta di Dirac dei fisici):

$$\begin{aligned} \mathcal{F}^* \mathcal{F}f &= \int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{f}(y) e^{iyx} dy = \\ &= \iint f(t) e^{-iyt} dt e^{ixy} dy = \\ &= \int f(t) \underbrace{\int e^{i(x-t)y} dy}_{\text{"}\delta(x-t)\text{"}} dt = f(x) \end{aligned}$$

*Dimostrazione vera:* scegliamo una funzione ausiliaria  $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  tale che

- i)  $\varphi(0) = 1$  continua in 0 e  $\varphi$  limitata
- ii)  $\varphi \in L^1$
- iii)  $\check{\varphi} \in L^1$

e poniamo  $g_\delta(x) := \int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{f}(y) \varphi(\delta y) e^{ixy} dy$ .

- *Passo 1:*  $g_\delta(x) \rightarrow \mathcal{F}^* \mathcal{F}f(x)$  per ogni  $x \in \mathbb{R}$  per convergenza dominata

$$\int \widehat{f}(y) e^{iyx} \varphi(\delta y) dy \xrightarrow{\delta \rightarrow 0} \int \widehat{f}(y) e^{iyx} dy$$

e come dominazione usiamo  $|\widehat{f}(y) e^{iyx} \varphi(\delta y)| \leq |\widehat{f}(y)| \cdot \|\varphi\|_\infty$

- *Passo 2:*  $g_\delta(x) = \int \left( \int f(t) e^{-ity} dt \right) e^{ixy} \varphi(\delta y) dy$ , per Fubini-Tonelli otteniamo

$$\begin{aligned} &= \iint \varphi(\delta y) e^{i(x-t)y} dy f(t) dt = \\ &= \int \sigma_\delta \check{\varphi}(x-t) f(t) dt = \sigma_\delta \check{\varphi} * f(x). \end{aligned}$$

- *Passo 3:*  $g_\delta \rightarrow mf$  in  $L^1$  con  $m = \int_{\mathbb{R}} \check{\varphi}(x) dx$  (per il teorema di approssimazione e per ipotesi).

---

<sup>1</sup>In  $L^1$  non è definito il prodotto scalare.

- *Passo 4:* Usando il primo ed il terzo passo otteniamo  $\mathcal{F}^* \mathcal{F} f = m f$  per quasi ogni  $x$ , in quanto la convergenza puntuale e quella in  $L^1$  devono essere compatibili; in particolare, la convergenza in  $L^1$  a meno di sottosuccessioni equivale alla convergenza puntuale e dunque coincidono.
- *Passo 5:*  $m = 2\pi$  ad esempio prendendo  $\varphi(y) = e^{-|y|}$ , segue che

$$\check{\varphi}(y) = \frac{2}{1+x^2}$$

e dunque  $m = 2\pi$ . In realtà vale per ogni  $\varphi$  che verifica le condizioni dell'ipotesi.

In conclusione, riportiamo la verifica di Fubini-Tonelli:

$$\iint |f(t) e^{-ity} e^{ixy} \varphi(\delta y)| dt dy = \iint |f(t)| \cdot |\varphi(\delta y)| dt dy = \|f\|_1 \cdot \|\varphi(\delta y)\|_1 < +\infty$$

□

**Corollario 8.** Date  $f_1, f_2 \in L^1$  tali che  $\widehat{f_1} = \widehat{f_2} \implies f_1 = f_2$  quasi ovunque cioè  $\mathcal{F}$  è iniettiva, cioè  $f$  è univocamente determinata da  $\widehat{f}$ .

**Dimostrazione.** Per ipotesi,  $\widehat{f_1} - \widehat{f_2} = \widehat{f_1 - f_2} = 0$ . Applicando il Teorema 7 a  $\widehat{f_1 - f_2}$  (possiamo farlo perché  $0 \in L^1$ ) otteniamo

$$0 = \int \widehat{f_1 - f_2}(x) e^{ixy} dy = 2\pi(f_1(x) - f_2(x)) \Rightarrow f_1(x) = f_2(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

□

**Esercizio.** Date  $f_1, f_2 \in L^1([-\pi, \pi]; \mathbb{C})$  e tali che per ogni  $n \in \mathbb{Z}$  vale  $c_n(f_1) = c_n(f_2)$  allora  $f_1 = f_2$  quasi ovunque (e  $c_n(f) = 0$  per ogni  $n \implies f = 0$  q.o.).

## 6.2 Trasformata di Fourier su $L^2$

Abbiamo visto che la *serie di Fourier* si definisce naturalmente su  $L^2$  (uno spazio di Hilbert) mentre la *trasformata di Fourier* ha bisogno di  $L^1$  che non è uno spazio di Hilbert. Vedremo ora come estendere la trasformata di Fourier ad  $L^2$  e come poter fare i conti.

**Proposizione 1.** Data  $f \in L^1(\mathbb{R}; \mathbb{C}) \cap L^2(\mathbb{R}; \mathbb{C})$  vale  $\|\widehat{f}\|_2 = \sqrt{2\pi} \|f\|_2$ .

**Teorema 2.**  $\mathcal{F}$  si estende per continuità da  $L^1 \cap L^2$  a tutto  $L^2$  e  $\mathcal{F}/\sqrt{2\pi}$  risulta essere un'isometria (come operatore a valori in  $L^2$ ).

**Corollario 3.** (Identità di Plancherel).  $\forall f_1, f_2 \in L^2(\mathbb{R}; \mathbb{C})$  vale  $\langle \widehat{f_1}, \widehat{f_2} \rangle = 2\pi \langle f_1, f_2 \rangle$ .

**Osservazione.** Come si può calcolare  $\widehat{f}$  per  $f \in L^2 \setminus L^1$ ? Se per quasi ogni  $y \in \mathbb{R}$  esiste il limite

$$\lim_n \underbrace{\int_{-n}^n f(x) e^{-ixy} dx}_{\widehat{f_n}(y)}$$

allora coincide con  $\widehat{f}(y)$ .

Infatti, per ogni  $n$  posto  $f_n := f \cdot \mathbb{1}_{[-n, n]}$  abbiamo che  $\lim_n \int_{-n}^n f(x) e^{-ixy} dx = \widehat{f_n}(x)$ . A questo punto, osserviamo che  $f_n \rightarrow f$  in  $L^2$  (da controllare per esercizio) e quindi  $\widehat{f_n} \rightarrow \widehat{f}$  in  $L^2$

(segue dalla continuità della trasformata). Siccome per ipotesi  $\widehat{f}_n$  converge puntualmente quasi ovunque allora  $\widehat{f}_n \rightarrow \widehat{f}$  puntualmente quasi ovunque.

Intuitivamente, il Teorema 2 e l'identità di polarizzazione danno il Corollario 3. mentre il Teorema 2 segue dalla Proposizione 1. più un fatto noto usando che  $L^1 \cap L^2$  è denso in  $L^2$ .

**Fatto Noto.** Dati  $X$  e  $Y$  spazi metrici,  $Y$  completo e  $D$  denso in  $X$ ,  $g: D \rightarrow Y$  uniformemente continua allora  $g$  ammette un'unica estensione  $G: X \rightarrow Y$  continua. (Inoltre se  $X$  e  $Y$  sono spazi normati e  $g$  è lineare allora anche  $G$  è lineare)

### Dimostrazione Proposizione 1.

*Dimostrazione che non funziona:* Proviamo a svolgere il calcolo diretto

$$\begin{aligned}\|\widehat{f}\|_2^2 &= \int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{f}(y) \overline{\widehat{f}(y)} dy \\ &= \iiint f(x) e^{-ixy} \overline{f(t)} e^{-ity} dt dx dy = \\ &= \iint f(x) \overline{f(t)} \underbrace{\left( \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-iy(t-x)} dy \right)}_{\delta(x-t)} dt dx = \\ &= \int \left( \int f(x) \delta(x-t) dx \right) \overline{f(t)} dt = \\ &= 2\pi \int f(t) \overline{f(t)} dt = 2\pi \|f\|_2^2\end{aligned}$$

vediamo però che compare l'integrale  $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-iy(t-x)} dy$  e serve assumere che corrisponda a  $\delta(x-t)$  dove  $\delta$  è la “funzione Delta di Dirac”, vediamo ora la dimostrazione formale usando una funzione ausiliaria.

*Dimostrazione formale:* Prendiamo  $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow [0, +\infty]$  tale che

- i)  $\varphi$  continua in 0, crescente per  $y < 0$  e decrescente per  $y > 0$  e  $\varphi(0) = 1$ .
- ii)  $\varphi \in L^1$  e  $\check{\varphi} \in L^1$ .

Poniamo per ogni  $\delta$

$$I_\delta = \int_{-\infty}^{+\infty} |\widehat{f}(y)|^2 \varphi(\delta y) dy \stackrel{?}{\rightarrow} \int_{-\infty}^{+\infty} |f(y)|^2$$

- *Passo 1:*  $I_\delta \xrightarrow{\delta \rightarrow 0} \|\widehat{f}\|_2^2$  per convergenza monotona usando l'ipotesi di crescita/descrescenza prima/dopo lo 0.

- *Passo 2:*

$$\begin{aligned}
I_\delta &= \int \widehat{f}(y) \overline{\widehat{f}(y)} \varphi(\delta y) dy = \\
&= \int \left( \int f(x) e^{-ixy} dx \right) \left( \int \overline{f(t)} e^{ity} dt \right) \varphi(\delta y) dy = \\
&\stackrel{\text{FT}}{=} \iint f(x) \overline{f(t)} \underbrace{\left( \int \varphi(\delta y) e^{i(t-x)y} dy \right)}_{\sigma_\delta \check{\varphi}(t-x)} dx dy = \\
&= \int (f(x) \sigma_\delta \check{\varphi}(t-x) dx) \overline{f(t)} dt = \\
&= \int f * \sigma_\delta \check{\varphi}(t) \cdot \overline{f(t)} dt = \\
&= \langle f * \sigma_\delta \check{\varphi}; f \rangle
\end{aligned}$$

e possiamo applicare il teorema di Fubini-Tonelli in quanto le ipotesi sono verificate infatti

$$\begin{aligned}
&\iiint |f(x) \overline{f(t)}| e^{i(t-x)y} \varphi(\delta y) dx dt dy = \\
&= \iiint |f(x)| \cdot |f(t)| \cdot |\varphi(\delta y)| dx dt dy = \\
&= \|f\|_1^2 \|\varphi(\delta y)\|_1 < +\infty
\end{aligned}$$

e  $\|\varphi(\delta y)\|_1 < +\infty$  poiché  $\varphi \in L^1$ .

- *Passo 3:*  $I_\delta \xrightarrow{\delta \rightarrow 0} 2\pi \|f\|_2^2$ . Infatti  $I_\delta = \langle f * \sigma_\delta \check{\varphi}; f \rangle$  e

$$\sigma_\delta \check{\varphi} \xrightarrow{\text{in } L^2} mf \quad \text{con } m = \int \check{\varphi}(x) dx$$

- *Passo 4:* Infine  $m = 2\pi$  ad esempio prendendo  $\varphi(y) = e^{-|y|}$

$$\check{\varphi}(x) = \frac{2}{1+x^2} \in L^1$$

ed in questo caso  $m$  si calcola.

□

### 6.2.1 Proprietà della trasformata di Fourier in $L^2$

**Proposizione 4.**

- $\widehat{\tau_h f} = e^{-ihy} \widehat{f}$
- $\widehat{e^{ihx} f} = \tau_h \widehat{f}$
- $\widehat{\sigma_h f} = \widehat{f}(\delta y)$

**Dimostrazione.** Le identità valgono in  $L^1 \cap L^2$  che è denso in  $L^2$  e dunque si estendono per continuità ad  $L^2$ .

**Proposizione 5.** Se  $f \in C^1(\mathbb{R}; \mathbb{C})$  e  $f \in L^1 \cup L^2$  e  $f' \in L^1 \cup L^2 \implies \widehat{f'} = iy \widehat{f}$ .

**Dimostrazione.** La stessa fatta per  $f, f' \in L^1$ . Si parte da  $a_n, b_n$  tali che  $a_n \rightarrow -\infty$  e  $b_n \rightarrow +\infty$  con  $f(a_n) \rightarrow 0$  e  $f(b_n) \rightarrow 0$  e si integra per parti

$$\begin{aligned}\mathcal{F}(f' \cdot \mathbb{1}_{[a_n, b_n]}) &= \int_{a_n}^{b_n} f'(x) e^{-ixy} dx \\ &= \underbrace{\left[ f(x) e^{-ixy} \right]_{a_n}^{b_n}}_{\rightarrow 0} + iy \int_{a_n}^{b_n} f(x) e^{-ixy} dx = iy \mathcal{F}(f \cdot \mathbb{1}_{[a_n, b_n]}).\end{aligned}$$

Per concludere si dimostra che

$$\begin{aligned}\mathcal{F}(f' \cdot \mathbb{1}_{[a_n, b_n]}) &\xrightarrow{n \rightarrow \infty} \mathcal{F}(f') \text{ in } L^2 \\ \mathcal{F}(f \cdot \mathbb{1}_{[a_n, b_n]}) &\xrightarrow{n \rightarrow \infty} \mathcal{F}(f) \text{ in } L^2\end{aligned}$$

Ovvero si dimostra che

$$\begin{aligned}\int_{b_n}^{+\infty} |f(x) e^{-ixy}|^2 dx + \int_{-\infty}^{a_n} |f(x) e^{-ixy}|^2 dx &\xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \\ \int_{b_n}^{+\infty} |f'(x) e^{-ixy}|^2 dx + \int_{-\infty}^{a_n} |f'(x) e^{-ixy}|^2 dx &\xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0\end{aligned}$$

Ma questo è vero in quanto  $f, f' \in L^2$ .

**Proposizione 6.** Se  $f \in C^1, f \in L^1, f' \in L^2 \implies \widehat{f} \in L^1$  e soddisfa le ipotesi del teorema di inversione.

**Dimostrazione.** Sappiamo che  $iyf = \widehat{f}' \in L^2 \implies y\widehat{f} \in L^2$ .

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}} |\widehat{f}(y)| dy &= \int_{|y| \leq 1} |\widehat{f}(y)| dy + \int_{|y| \geq 1} |\widehat{f}(y)| dy \\ &\leq 2\|\widehat{f}\|_{\infty} + \int_{|y| \geq 1} |\widehat{f}(y)y| \frac{1}{|y|} dy \\ &\leq 2\|f\|_1 + \|\widehat{f}y\|_2 \left( \int_{|y| \geq 1} \frac{1}{|y|^2} dy \right)^{1/2} \\ &\leq 2\|f\|_1 + 2\|f'\|_2\end{aligned}$$

**Corollario.**  $f \in C_C^1 \implies f, \widehat{f} \in L^1$

**Proposizione 7.** Se  $f_1, f_2 \in L^2(\mathbb{R}; \mathbb{C})$  (e dunque  $f_1 f_2 \in L^1(\mathbb{R}; \mathbb{C})$  per Hölder) allora

$$2\pi \widehat{f_1 f_2} = \widehat{f_1} * \widehat{f_2}$$

**Dimostrazione.**  $f_1, f_2 \in L^2 \implies f_1 f_2 \in L^1$  segue da Hölder. Dimostriamo la proposizione per  $f_1, f_2 \in C_C^1 \implies f_1, f_2, f_1 f_2 \in C_C^1 \implies$  tutte in  $L^1$  e con trasformate in  $L^1$ .

$$\mathcal{F}^* \left( \frac{1}{2\pi} \widehat{f_1} * \widehat{f_2} \right) = \frac{1}{2\pi} \mathcal{F}^*(\widehat{f_1}) \mathcal{F}^*(\widehat{f_2}) = \frac{1}{2\pi} (2\pi f_1) \cdot (2\pi f_2) = 2\pi f_1 \cdot f_2 = \mathcal{F}^*(\widehat{f_1 f_2})$$

ed usando che  $\mathcal{F}^*$  è iniettiva otteniamo che  $2\pi \widehat{f_1 f_2} = \widehat{f_1} * \widehat{f_2}$ .

Per  $f_1, f_2 \in L^2$  si procede per continuità e si approssimano  $f_1$  ed  $f_2$  con  $f_{1,n}$  e  $f_{2,n}$  in  $C_C^1$ .  $\square$

## 6.3 Conclusione sulla TdF

**Proposizione 4.** (di 2 lezioni fa) Se  $f, xf \in L^1(\mathbb{R}; \mathbb{C})$ , allora  $\widehat{f} \in C^1(\mathbb{R}; \mathbb{C})$  e  $(\widehat{f})' = -ix\widehat{f}$ .

**Corollario.** Se  $f, x^k f \in L^1$  con  $k = 1, 2, \dots$ , allora  $x^h f \in L^1$  per ogni  $h = 0, \dots, k$  e  $\widehat{f} \in C_0^k$  e  $D^h \widehat{f} = \widehat{(-ix)^h f}$ .

**Dimostrazione.** Vale  $|x^h| \leq 1 + |x|^k$  per ogni  $x$  e per ogni  $h = 1, \dots, k$ . Allora  $|x^h f| \leq (1 + |x|^k)|f| \in L^1$ . Il resto dell'enunciato è per induzione su  $k$ .

**Corollario.** Se  $x^k f \in L^1$  per ogni  $k = 0, 1, \dots$ ,<sup>1</sup> allora  $\widehat{f} \in C^\infty$  (anzi  $C_0^\infty$  siccome le derivate sono trasformate).

**Teorema** (Paley-Weiner). Se  $e^{\alpha|x|} \cdot f(x) \in L^1$  per qualche  $\alpha > 0$ , allora  $\widehat{f}$  è analitica<sup>2</sup>.

**Dimostrazione.** In  $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \simeq \mathbb{C}$  definisco  $g(z)$ .

Ricordiamo che  $\widehat{f}(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-iyx} dx$ . Poniamo

$$g(z) := \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-izx} dx$$

*Passo 1.*  $g(z)$  è definita per ogni  $z \in \mathbb{R} \times [-\alpha, \alpha]$ . Infatti,

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-izx} dx = \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|e^{tx} dt \leq \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|e^{\alpha|x|} dx < +\infty$$

*Passo 2.* Mostriamo che  $g(z)$  è olomorfa su  $\mathbb{R} \times (-\alpha, \alpha)$ . Sviluppo  $g$  in serie di potenze in 0.

**Nota.** Questo mi serve per dire che è olomorfa in una palla di raggio  $\alpha$  centrata in 0. Per concludere bisogna traslare il centro la palla per tutta la retta reale e mostrare la stessa cosa [TO DO: spiegare meglio + disegno palla].

$$g(z) = \int_{\mathbb{R}} f(x)e^{-izx} dx = \int_{\mathbb{R}} f(x) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-izx)^n}{n!} dx \stackrel{(*)}{=} \sum_{n=0}^{\infty} \left( \int_{\mathbb{R}} \frac{(-ix)^n}{n!} f(x) dx \right) z^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

La serie  $\sum_n a_n z^n$  è convergente per  $|z| \leq \alpha$ , quindi  $g$  è olomorfa su  $B(0, \alpha)$ . Notiamo che in  $(*)$  abbiamo usato Fubini-Tonelli; controlliamo che potevamo applicarlo, dunque verifichiamo quanto segue.

$$\int_{\mathbb{R}} |f(x)| \sum_{n=0}^{\infty} \left| \frac{(-izx)^n}{n!} \right| dx < +\infty$$

Abbiamo

$$\int_{\mathbb{R}} |f(x)| \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|zx|^n}{n!} dx = \int_{\mathbb{R}} |f(x)| e^{|z||x|} dx \stackrel{\text{se } |z| \leq \alpha}{\leq} \int_{\mathbb{R}} |f(x)| e^{\alpha|x|} dx$$

Per concludere si dimostra (allo stesso modo) che  $g$  si sviluppa in serie in ogni punto  $y_0 \in \mathbb{R}$  con raggio di convergenza  $\alpha$ . □

<sup>1</sup>Questa condizione è implicata, ad esempio, dall'ipotesi  $f \in C_C$

<sup>2</sup>Restrizione di  $g: \underbrace{\mathbb{R} \times (-\alpha, \alpha)}_{\mathbb{R} \times \mathbb{R} \simeq \mathbb{C}} \rightarrow \mathbb{C}$  olomorfa

**Corollario.** Se  $f \in L^1$  è olomorfa e a supporto compatto allora  $\hat{f}$  è la restrizione di  $g: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  olomorfa [TO DO: controllare].

**Nota.** Se  $f \in L^1$  e a supporto compatto, si ha  $f(x)e^{\alpha|x|} \in L^1$  per ogni  $\alpha$ .

## 6.4 Applicazioni TdF

Risoluzione equazioni del calore su  $\mathbb{R}$ .

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} (x \in \mathbb{R}) \\ u(0, \cdot) = u_0 \end{cases}$$

**Risoluzione formale.** Denotiamo con  $\hat{u} := \hat{u}(t, y)$  la trasformata di Fourier rispetto alla variabile  $x$

$$\hat{u}_t(t, y) = \int \frac{\partial}{\partial t} u(t, x) e^{-ixy} dx = \frac{\partial}{\partial t} \left( \int u(t, x) e^{-ixy} dx \right) = \hat{u}_t$$

Inoltre,  $\hat{u}_t = \widehat{u_{xx}} = (iy)^2 \hat{u} = -y^2 \hat{u}$ . Quindi, per ogni  $y$ ,  $\hat{u}(\cdot, y)$  risolve

$$\begin{cases} \dot{z} = -y^2 z \\ z(0) = \widehat{u_0}(y) \end{cases} \quad (\text{P})$$

Soluzione generale  $z = \alpha e^{-y^2 t}$ , da cui la soluzione per (P) è  $\hat{u}(t, y) = \widehat{u_0}(y) e^{-y^2 t}$ .

Siano

$$\rho(x) := \frac{e^{-x^2/2}}{\sqrt{2\pi}}, \quad \widehat{\sigma_{\sqrt{2t}} \rho} = \hat{\rho}(\sqrt{2t}y).$$

Però è noto che<sup>1</sup>  $\hat{\rho}(y) = e^{-y^2/2} \implies \hat{\rho}(\sqrt{2t}y) = e^{-(\sqrt{2t}y)^2/2} = e^{-y^2 t}$ . Da cui

$$\hat{u}(t, y) = \widehat{u_0}(y) e^{-y^2 t} = \widehat{u_0}(y) \cdot \widehat{\sigma_{\sqrt{2t}} \rho}(y) = \mathcal{F}(u_0 * \sigma_{\sqrt{2t}} \rho) \implies u(t, y) = u_0 * (\sigma_{\sqrt{2t}} \rho)$$

Dunque

$$u(t, x) := \begin{cases} u_0(x) & \text{per } t = 0 \\ u_0 * \sigma_{\sqrt{2t}} \rho(x) & \text{per } t > 0 \end{cases} \quad (*)$$

**Teorema.** Se  $u_0: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  è continua e limitata, allora  $u$  data in (\*) è ben definita su  $[0, +\infty) \times \mathbb{R}$ , continua,  $C^\infty$  per  $t > 0$  e risolve (P).

Data  $u: [0, T) \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  soluzione di (P) tale che esiste  $h_0, h_1 \in L^1(\mathbb{R})$  tali che

$$|u(t, x)| \leq h_0(x), \quad |u_t(t, x)| \leq h_1(x)$$

allora  $\hat{u}(\cdot, y)$  è univocamente determinata su  $[0, T)$ , dunque  $u$  è univocamente determinata per l'iniettività di TdF.

---

<sup>1</sup>Si vede all'esercitazione che segue?



## 6.5 Esercitazione del 2 dicembre

Ricordiamo la definizione della trasformata di Fourier

$$\mathcal{F}(f) = \widehat{f}(y) = \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-ixy} dx, \quad f \in L^1(\mathbb{R}; \mathbb{C}), \quad f \in L^1(\mathbb{R})$$

dove  $\mathcal{F}: L^1(\mathbb{R}; \mathbb{C}) \rightarrow L^\infty(\mathbb{R}) \cap C_0(\mathbb{R})$ , in quanto  $\|\widehat{f}\|_\infty \leq \|f\|_1$ .

**Proprietà.** Ricordiamo le proprietà viste a lezione.

- i)  $\widehat{\tau_h f}(y) = e^{-iyh} \widehat{f}(y)$  per ogni  $h \in \mathbb{R}$ , dove  $\sigma_h f(x) = f(x - h)$
- ii)  $\widehat{e^{ihx} f}(y) = \tau_h \widehat{f}(y)$
- iii) Legame tra trasformata e derivata.
  - $f \in C^1(\mathbb{R})$ ,  $f, f' \in L^1(\mathbb{R}; \mathbb{C})$ , allora  $\widehat{f'}(y) = iy \widehat{f}(y)$ .
  - $f \in L^1(\mathbb{R}; \mathbb{C})$  e  $xf(x) \in L^1(\mathbb{R}; \mathbb{C})$ ,  $(1 + |x|)f(x) \in L^1(\mathbb{R}; \mathbb{C})$ , allora  $\widehat{f} \in C^1(\mathbb{R})$  e  $(\widehat{f})' = -i \widehat{xf(x)}$ .
- Nota. Le ipotesi  $f \in L^1(\mathbb{R}; \mathbb{C})$  e  $xf(x) \in L^1(\mathbb{R}; \mathbb{C})$  sono equivalenti a  $(1 + |x|)f(x) \in L^1(\mathbb{R}; \mathbb{C})$ .
- iv) Vale  $\widehat{f * g} = \widehat{f} \cdot \widehat{g}$ .

Riportiamo un esercizio già posto con una soluzione alternativa.

**Esercizio.** Dire se esiste  $v \in L^1$  non banale tale che

- $v * v = v$
- $g * v = g$  per ogni  $g \in L^1$ .

**Soluzione.** La risposta è no per entrambi i punti. Infatti,

- Se per assurdo valesse tale identità, passando alle trasformate si avrebbe

$$\widehat{v * v} = (\widehat{v})^2 \implies \widehat{v}(\widehat{v} - 1) = 0.$$

Ovvero,  $\widehat{v} = \{0, 1\}$ . Osserviamo subito che non è possibile che  $\widehat{v}$  assuma entrambi i valori in quanto funzione continua; d'altra parte non è possibile che  $\widehat{v} = 1$ , in quanto è anche infinitesima, dunque  $\widehat{v} = 0 \implies v = 0$ .

- Analogamente al punto precedente si avrebbe  $\widehat{v} = 1$  ma ciò non è possibile.

**Esercizio 1.** Calcolare la trasformata di Fourier della funzione  $f(x) = e^{-|x|}$ .

**Soluzione.** Abbiamo

$$\begin{aligned}
 \hat{f}(y) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-|x|} e^{-ixy} dx = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-|x|} \cos(xy) dx - i \int_{-\infty}^{\infty} \overbrace{e^{-|x|} \sin(xy)}^{\text{integrale definito di funzione dispari} = 0} dx = 2 \int_0^{\infty} e^{-x} \cos(xy) dx \\
 &= 2 \int_0^{\infty} e^{-x} \operatorname{Re} e^{ixy} dx = 2 \int_0^{\infty} \operatorname{Re} (e^{-x} \cdot e^{ixy}) dx = 2 \operatorname{Re} \left[ \int_0^{\infty} e^{-x} e^{ixy} dx \right] = 2 \operatorname{Re} \left[ \frac{e^{x(iy-1)}}{(iy-1)} \right]_0^{\infty} \\
 &= 2 \operatorname{Re} \left[ -\frac{1}{iy-1} + \underbrace{\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{e^{x(iy-1)}}{iy-1}}_{=0} \right] = 2 \operatorname{Re} \left[ -\frac{1}{iy-1} \right] = 2 \operatorname{Re} \left[ -\frac{1}{iy-1} \cdot \frac{iy+1}{iy+1} \right] \\
 &= 2 \operatorname{Re} \left[ \frac{iy+1}{1+y^2} \right].
 \end{aligned}$$

In conclusione,  $\hat{f}(y) = \frac{2}{1+y^2}$ .

**Esercizio 2.** Calcolare la trasformata di Fourier della funzione  $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ .

**Soluzione.** Calcoliamo  $\hat{f}(y) = \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{-ixy}}{1+x^2} dx$ . Dal fatto che  $f \in L^1$  e usando il teorema di convergenza dominata, possiamo scrivere  $\hat{f}(y)$  come

$$\hat{f}(y) = \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{-R}^R \frac{e^{-ixy}}{1+x^2} dx$$

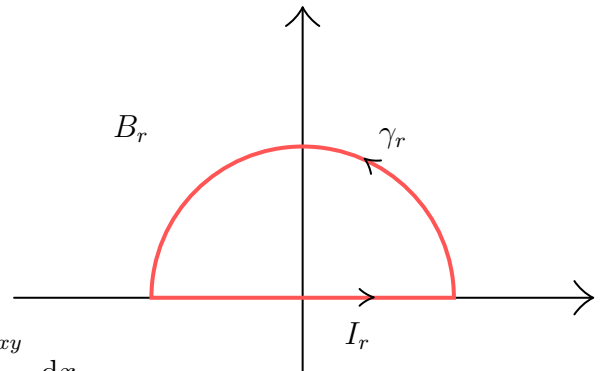
*Idea.* Calcolare questo integrale con il metodo dei residui, ponendo  $\frac{e^{-ixy}}{1+x^2} = \frac{e^{-izy}}{1+z^2} \Big|_{z \text{ reale}}$

Per il teorema dei residui:

$$\int_{B_r} g(z) dz = 2\pi i \sum_{\substack{z_i \text{ singolarit\`a} \\ \text{di } g \text{ in } B_r}} \operatorname{res}(g, z_i)$$

$$\text{Inoltre } \int_{B_r} g(z) dz = \underbrace{\int_{I_r} g(z) dz}_{I_r := \text{bordo sotto}} + \underbrace{\int_{\gamma_r} g(x) dx}_{\gamma_r := \text{semicirconferenza}} = \int_{-r}^r \frac{e^{-ixy}}{1+x^2} dx.$$

$\xrightarrow{r \rightarrow \infty} 0$



- Verifichiamo che  $\int_{\gamma_r} g(x) \xrightarrow{r \rightarrow \infty} 0$  dove  $[0, \pi] \ni \theta \mapsto r e^{i\theta}$ .

Poniamo  $z = x + it$ , dunque  $yz = xy + yit$ , da cui  $g(z) = g(x + it) = (e^{-ixy} e^{ty}) / (1 + (x + it)^2)$ . Dunque,

$$\int_0^\pi g(e^{i\theta} r) r d\theta \implies \int_0^\pi \frac{e^{-ri \cos \theta} e^{r \sin \theta y}}{(1 + r^2 e^{i2\theta})} r d\theta \xrightarrow{r \rightarrow \pm\infty} 0 \quad \text{se } y < 0.$$

Per il caso  $y > 0$  si ripercorre lo stesso procedimento ma si utilizza la curva  $[\pi, 2\pi] \ni \theta \mapsto r e^{i\theta}$ .

- Calcoliamo i residui: l'unico residuo di  $g$  è nel punto  $i$  che si tratta di una singolarità semplice (nel caso  $y > 0$  la singolarità è in  $-i$ ).

$$\lim_{r \rightarrow \pm\infty} 2\pi i \operatorname{res}(g, i) = \pi e^y$$

Considerando anche il caso  $y > 0$  la trasformata di Fourier diviene  $\pi e^{-|y|}$ .

[TO DO]. Riportare il teorema dei residui con i metodi di base per calcolare i residui?

## 6.6 Esercitazione del 13 Dicembre 2021

### 6.6.1 Operatori autoaggiunti

[TODO: Pezzo iniziale mancante]

#### Esercizi.

- 1) Esempio classico di  $H = L^2([-\pi, \pi]; \mathbb{C})$  e  $D = \{u \in C^1([-\pi, \pi]; \mathbb{C}) \mid u(-\pi) = u(\pi)\}$  e  $Tu = iu$  allora  $T$  è un operatore autoaggiunto ed ha autovalori  $\lambda = n \in \mathbb{Z}$ .
- 2)  $H = L^2([0, \pi]; \mathbb{R})$  e  $D = \{u \in C^2([0, \pi]) \mid u(0) = 0 \text{ e } u(\pi) = 0\}$  sono dette condizioni di Dirichlet con  $Tu = -\ddot{u}$ .

Ora usiamo sempre  $Tu = -\ddot{u}$  ma su domini differenti.

- 3)  $D_3 = \{u \in C^2([0, \pi]) \mid \dot{u}(0) = 0 \text{ e } \dot{u}(\pi) = 0\}$  sono dette condizioni di Neumann.
- 4)  $D_4 = \{u \in C^2([0, \pi]) \mid u(0) = 0 \text{ e } \dot{u}(\pi) = 0\}$  sono dette condizioni di Robin.

Dire per 2), 3) e 4) rispondere alle seguenti

- L'operatore  $T$  è autoaggiunto e controllare se il relativo  $D$  è denso in  $L^2$
- Controllare se esistono autovalori ed eventualmente dire chi sono gli autovettori.
- Stabilire se esiste una base Hilbertiana di autovettori.

#### Risoluzione.

- 2)  $D_2$  è denso. Vediamo l'operatore è autoaggiunto

$$\begin{aligned} \langle Tu, v \rangle &= \int_0^\pi (-\ddot{u}(x))v(x) \, dx = \underbrace{-\dot{u}(x)v(x)}_{v(0)=v(\pi)=0} \Big|_0^\pi - \int_0^\pi (-\dot{u}(x))\dot{v}(x) \, dx = \int_0^\pi \dot{u}(x)\dot{v}(x) \, dx \\ \langle u, Tv \rangle &= \int_0^\pi u(x)(-\ddot{v}(x)) \, dx = \underbrace{u(x)(-\dot{v}(x))}_{u(0)=u(\pi)=0} \Big|_0^\pi - \int_0^\pi \dot{u}(x)(-\dot{v}(x)) \, dx = \int_0^\pi \dot{u}(x)\dot{v}(x) \, dx \end{aligned}$$

dunque  $\langle Tu, v \rangle = \langle \dot{u}, \dot{v} \rangle = \langle u, Tv \rangle$ .

Inoltre  $T$  è anche definito positivo infatti  $\langle Tu, u \rangle = \langle \dot{u}, \dot{u} \rangle = \|\dot{u}\|_{L^2}^2 \geq 0$ .

Cerchiamo gli autovalori quindi poniamo  $-\ddot{u} = Tu = \lambda u$  con  $\lambda \geq 0$  e  $u \in D_2$ . Segue  $p(t) = t^2 + \lambda \implies t = \pm i\sqrt{\lambda}$  se  $\lambda \neq 0$ .

Se  $\lambda = 0$  invece otteniamo  $\ddot{u} = 0 \implies u(x) = ax + b$  ma per le condizioni al bordo segue  $a, b = 0$  e dunque  $u = 0 \implies \lambda = 0$  non è autovalore.

Invece se  $\lambda > 0$  abbiamo  $u(x) = A \cos(\sqrt{\lambda}x) + B \sin(\sqrt{\lambda}x)$  e segue  $A = 0$  e  $\lambda = n^2$  per  $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ .

- 3)  $D_2$  è denso e similmente si vede che anche in questo caso  $T$  è autoaggiunto. Anche in questo caso  $T$  è definito positivo perché vale sempre  $\langle Tu, v \rangle = \langle \dot{u}, \dot{v} \rangle$ .

Per cercare gli autovalori risolviamo il seguente sistema

$$\begin{cases} -\ddot{u} = \lambda u \\ \dot{u}(0) = 0 \\ \dot{u}(\pi) = 0 \end{cases}$$

Se  $\lambda = 0$  allora  $u(x) = \text{cost.}$  è un autovettore per l'autovalore 0.

Se invece  $\lambda \neq 0$  allora  $u(x) = A \cos(\sqrt{\lambda}x) + B \sin(\sqrt{\lambda}x) \implies \cos(nx)$  è un autovettore e  $\lambda = n^2$  per  $n = 1, 2, \dots$ .

- 4) In questo caso vediamo che vale sempre  $\langle Tu, v \rangle = \langle \dot{u}, \dot{v} \rangle$  ma per motivi diversi infatti

$$\begin{aligned} \langle Tu, v \rangle &= \int_0^\pi (-\ddot{u}(x))v(x) dx = \underbrace{-\dot{u}(x)v(x) \Big|_0^\pi}_{\dot{u}(\pi)=0, v(0)=0} - \int_0^\pi (-\dot{u}(x))\dot{v}(x) dx = \int_0^\pi \dot{u}(x)\dot{v}(x) dx \\ \langle u, Tv \rangle &= \int_0^\pi u(x)(-\ddot{v}(x)) dx = \underbrace{u(x)(-\dot{v}(x)) \Big|_0^\pi}_{\dot{v}(\pi)=0, u(0)=0} - \int_0^\pi \dot{u}(x)(-\dot{v}(x)) dx = \int_0^\pi \dot{u}(x)\dot{v}(x) dx \end{aligned}$$

Considerando il sistema  $-\ddot{u} = \lambda u$  con le condizioni al bordo di Robin caso  $\lambda = 0$  non è un autovalore mentre se  $\lambda \neq 0$  abbiamo che  $\dot{u}(x) = \sqrt{\lambda}B \cos(\sqrt{\lambda}x) = 0$  per  $x = \pi$  dunque  $\sqrt{\lambda} = n + 1/2$  per  $n = 0, 1, 2, \dots$  e gli autovettori sono

$$u_n(x) = \sin \left( \left( n + \frac{1}{2} \right) x \right)$$

**Osservazione.**  $T: D \rightarrow L^2$  operatore lineare e continuo  $\iff \exists M > 0$  tale che  $\|Tu\|_2 \leq M \|u\|$  per ogni  $u \in D$ .

Vediamo ad esempio che  $D_1$  non è continuo infatti gli autovalori sono  $\lambda_n = n^2 \implies n^2 \|u_n\|_2 \leq M \|u_n\|_2 \implies M \geq n^2$  per ogni  $n$ . Dunque  $M$  è illimitato e l'operatore non può essere continuo.

**Esempio.** Se ad esempio abbiamo  $Tu = -\ddot{u}$  con  $\widetilde{D} = \{u \in C^2 \mid u(0) = u(\pi) = 1\}$  allora  $T$  non è autoaggiunto e basta trovare  $u, v$  tali che

$$\langle Tu, v \rangle \neq \langle u, Tv \rangle$$

**Esercizio.**

- i) Sia  $T_1: \ell^2 \rightarrow \ell^2$  dato da

$$T_1((x_n)_{n>0}) = (0, x_1, x_2, \dots)$$

ii) Sia  $T_2: \ell^2 \rightarrow \ell^2$  dato da

$$T_2((x_n)_{n>0}) = (x_2, x_3, \dots)$$

Dire se sono autoaggiunti ed eventualmente chi sono gli autovalori.

*Esercizi più da compito sono invece cose del tipo...*

**Esercizio.** Sia  $H = L^2([0, \pi] \times [0, \pi]; \mathbb{R})$  e  $Tu = -\Delta u = -u_{xx} - u_{yy}$

- $D_1 = \{u \in C^2([0, \pi] \times [0, \pi]; \mathbb{R}) \mid u|_{\partial Q} = 0\}$
- $D_2 = \{u \in C^2([0, \pi] \times [0, \pi]; \mathbb{R}) \mid \nabla u|_{\partial Q} = 0\}$
- $D_3 = \{u \in C^2([0, \pi] \times [0, \pi]; \mathbb{R}) \mid u = 0 \text{ su due lati paralleli e } \nabla u = 0 \text{ sugli altri due}\}$

e dire se l'operatore è autoaggiunto ed eventualmente trovare gli autovalori.

## 6.6.2 Calcolo Trasformate di Fourier

Abbiamo visto che le trasformate di  $f(x) = e^{-|x|}$  e  $g(x) = 1/(1+x^2)$  sono rispettivamente

$$\widehat{f}(y) = \frac{2}{1+y^2} \quad \widehat{g}(y) = \pi e^{-|y|}$$

Vorremo provare a trovare ora le trasformate funzioni come  $x^2 e^{-|x|}$  o  $x/(1+x^2)$  usando le proprietà delle trasformate con le derivate. Ricordiamo che

$$\begin{aligned} f, f' \in L^1 &\implies \widehat{f'}(y) = iy\widehat{f}(y) \\ f, xf \in L^1 &\implies \widehat{f'}(y) = -ix\widehat{f}(y) \end{aligned}$$

dunque intuitivamente per  $x^2 e^{-|x|}$  possiamo fare

$$x^2 e^{-|x|} = i(-i)x(xe^{-|x|}) \implies \mathcal{F}(i(-i)x(xe^{-|x|})) = i(\mathcal{F}(xe^{-|x|}))'(y)$$

ora dobbiamo calcolare  $\mathcal{F}(xe^{-|x|})(y)$

$$\mathcal{F}(xe^{-|x|})(y) = i\mathcal{F}(-ixe^{-|x|}) = i\mathcal{F}(e^{-|x|})'(y) = i\left(\frac{2}{1+y^2}\right)' = \frac{-4iy}{(1+y^2)^2}$$

dunque in conclusione abbiamo

$$\mathcal{F}(x^2 e^{-|x|})(y) = i\left(\frac{-4iy}{(1+y^2)^2}\right)' = 4\left(\frac{y}{(1+y^2)^2}\right)'$$

Invece per quanto riguarda

$$g(x) = \frac{x}{1+x^2} \notin L^1$$

però è in  $L^2$  ma per poterne calcolare la trasformata di Fourier dovremmo passare per delle troncate di  $g(x)$ . Possiamo però vedere chi dovrebbe essere il candidato formale usando le tecniche di prima

$$\frac{x}{1+x^2} = \frac{i(-ix)}{1+x^2} \rightsquigarrow i\mathcal{F}\left((-ix)\frac{1}{1+x^2}\right)(y) = i\mathcal{F}\left(\frac{1}{1+x^2}\right)'(y) = i\pi(e^{-|y|})'(y)$$

però notiamo che la derivata di  $e^{-|y|}$  non è ben definita in 0.

**Esercizio.** Calcolare la trasformata di Fourier di

$$f(x) = \mathbb{1}_{[-r,r]}(x)$$

Iniziamo a svolgere il conto

$$\widehat{f}(y) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathbb{1}_{[-r,r]}(x) e^{-ixy} dx = \int_{-r}^r e^{-ixy} dx = \begin{cases} 2r & xy = 0 \\ \int_{-r}^r e^{-ixy} dx & xy \neq 0 \end{cases}$$

nel caso  $xy \neq 0$  continuiamo a svolgere il conto

$$\int_{-ry}^{ry} \frac{e^{-it}}{y} dt = \frac{1}{y} \int_{-ry}^{ry} [\cos(t) - \underbrace{i \sin(t)}_{\text{dispari}}] dt = \frac{2}{y} \sin(ry)$$

dunque in conclusione abbiamo

$$\mathcal{F}(\mathbb{1}_{[-r,r]}(x)) = \begin{cases} 2r & y = 0 \\ \frac{2}{y} \sin(ry) & y \neq 0 \end{cases}$$

**Esercizio.** Un esercizio simile è calcolare  $\mathcal{F}(\mathbb{1}_{[0,r]}(x))$ , ovvero il caso non centrato e poi provare a calcolare (come integrale improprio di Analisi 1) l'integrale

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt = \lim_{r \rightarrow \infty} \int_0^r \frac{\sin(t)}{t} dt$$

## Trasformata della Gaussiana

Calcoliamo ora la trasformata della funzione gaussiana  $e^{-x^2/2}$ .

- **Metodo I:** Troviamo un'equazione differenziale (lineare) risolta dalla gaussiana, sia  $f(x) = e^{-x^2/2}$  allora vale

$$f'(x) = -xe^{-x^2/2} = -xf(x)$$

e per il decadimento della gaussiana abbiamo che  $f, f' \in L^1$  dunque

$$iy\widehat{f}(y) = \widehat{f'(x)}(y) = -i\mathcal{F}(-xf(x))(y) = i(\widehat{f})'(y)$$

dunque  $\widehat{f} = h(y)$  con  $h$  tale che  $h'(y) = -yh(y) \implies h(y) = ke^{-y^2/2}$ , rimane da trovare  $k$ . Calcoliamo direttamente  $h(0)$

$$\begin{aligned} h(0) &= \widehat{e^{-x^2/2}}(0) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/2} e^{-ix \cdot 0} dx = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/2} dx = \sqrt{2\pi} \\ \implies \widehat{e^{-x^2/2}} &= \sqrt{2\pi} e^{-y^2/2} \end{aligned}$$

- **Metodo II:** Studiamo la funzione di variabile complessa  $g(z) = e^{-z^2/2}$  e integriamola lungo un percorso che passi per  $[-r, r] \times \{0\} \subset \mathbb{R}^2 \approx \mathbb{C}$ .

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(\widehat{e^{-x^2/2}})(y) &= \int_{\mathbb{R}} e^{-x^2/2} \cdot e^{-ixy} dx = \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{1}{2}(x^2+2ixy)} dx \\ &= \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{1}{2}(x^2+2ixy+y^2-y^2)} dx = \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{1}{2}(x^2+2ixy+y^2)} \cdot e^{-y^2/2} dx \\ &= e^{-y^2/2} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{1}{2}(x^2+2ixy+y^2)} dx = e^{-y^2/2} \lim_{r \rightarrow \infty} \int_{-r}^r \underbrace{e^{-\frac{1}{2}(x+iy)^2}}_{g(x+iy)} dx \end{aligned}$$

Consideriamo ora il rettangolo  $D_r := \{z \mid \operatorname{Im} z \in [0, iy] \text{ e } \operatorname{Re} z \in [-r, r]\}$  dunque poiché  $g(z)$  non ha poli su  $D_r$  abbiamo

$$\int_{\partial D_r} g = \sum \operatorname{Res.} \text{ su } D_r = 0$$

$$0 = \int_{-r}^r g(x+it) dx - \int_{-r}^r g(x+iy) dx + \int_0^{iy} g(r+iy) dt - \int_0^{iy} \underbrace{g(-r+iy)}_{\sim e^{-(r+it)^2} \xrightarrow{r \rightarrow \infty} 0} dt$$

infatti più precisamente i termini verticali vanno a zero

$$\int_0^y e^{-(r+it)^2/2} dt = e^{-r^2/2} \int_0^y e^{-itr-t^2/2} dt = ye^{-r^2/2} \xrightarrow{r \rightarrow +\infty} 0$$

In conclusione abbiamo

$$\begin{aligned} \widehat{e^{-x^2/2}}(y) &= \lim_{r \rightarrow +\infty} \int_{-r}^r e^{-y^2/2} e^{-(x+iy)^2/2} dx = e^{-y^2/2} \left[ \lim_{r \rightarrow +\infty} \int_{-r}^r e^{-x^2/2} dx + o(1) \right] = \\ &= e^{-y^2/2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/2} dx = \sqrt{2\pi} e^{-y^2/2} \end{aligned}$$

□

# Capitolo 7

## Integrazione di superfici

### 7.1 Superfici

**Definizione.** Data  $f: \Omega \subset \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^d$  di classe  $C^1$  e dato  $x \in \Omega$ , la mappa lineare da  $\mathbb{R}^k$  a  $\mathbb{R}^d$  associata alla matrice  $\nabla f(x)$  si dice **differenziale di  $f$  in  $x$**  e si indica con  $d_x f$ .

**Nota.** La mappa  $d_x f$  è univocamente determinata da

$$f(x+h) = f(x) + d_x f \cdot h + o(|h|),$$

dove  $d_x f$  è il termine di primo grado dello sviluppo di Taylor di  $f$ .

**Definizione.** Siano  $1 \leq k \leq d$  e  $m = 1, 2, \dots$ . L'insieme  $\Sigma \subset \mathbb{R}^d$  si definisce **superficie** (senza bordo) di dimensione  $k$  e classe  $C^m$  se per ogni  $x \in \Sigma$  esiste  $U$  intorno aperto<sup>1</sup> di  $x$  ed esiste una mappa  $\phi: D \rightarrow \mathbb{R}^d \in C^m$  con  $D$  aperto di  $\mathbb{R}^k$  tale che

- $\phi(D) = \Sigma \cap U$
- $\phi: D \rightarrow \Sigma \cap U$  è un omeomorfismo
- $\nabla \phi(s)$  ha rango massimo ( $= k$ ) per ogni  $s \in D$

Ovvero  $\phi$  è una **parametrizzazione locale** della superficie

**Osservazione.** Se  $k = d$  abbiamo che  $\Sigma$  è una superficie se e solo se  $\Sigma$  è aperto.

**Proposizione.** Dati  $k, d, m$  come sopra,  $\Sigma \subset \mathbb{R}^d$  e  $x \in \Sigma$  sono fatti equivalenti

- Esistono  $U$  e  $\phi: D \rightarrow \Sigma \cap U$  tale che  $\phi$  è una parametrizzazione regolare
- Esistono  $U$  intorno di  $x$  e  $g: U \rightarrow \mathbb{R}^{d-k} \in C^m$  tale che
  - $\Sigma \cap U = g^{-1}(0)$
  - $\nabla g$  ha rango massimo, ovvero  $d - k$
- Esistono  $U$  intorno di  $x$  e  $h: \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^{d-k}$  di classe  $C^m$  tale che  $\Sigma \cap U = \Gamma_h \cap U$  (dove  $\Gamma_h$  è il grafico di  $h$ ) avendo identificato  $\mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{d-k}$  con  $\mathbb{R}^d$  tramite una scelta di  $k$  coordinate tra le  $d$  di  $\mathbb{R}^d$

---

<sup>1</sup>D'ora in avanti gli intorni saranno sempre aperti.



### Esempi.

- $\mathbb{S}^{d-1} = \{x \in \mathbb{R}^d \mid |x| = 1\}$  è una superficie senza bordo di dimensione  $d - 1$  e classe  $C^\infty$  in  $\mathbb{R}^d$
- $\mathbb{D} = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid x_3 = 0 \text{ e } |x| < 1\}$  è una superficie 2-dimensionale in  $\mathbb{R}^3$
- $\overline{\mathbb{D}}$  non lo è! (È una superficie con bordo)

[TO DO]: disegni in blu sul quaderno

**Definizione.** Data  $\Sigma$  superficie e fissato  $x \in \Sigma$ , lo **spazio tangente** a  $\Sigma$  in  $x$  è  $T_x \Sigma := \text{Im}(d_x \phi)$  dove  $\phi: D \rightarrow \Sigma \cap U$  è una parametrizzazione regolare e  $x = \phi(s)$  con  $s \in D$ .

**Nota.** Lo spazio tangente è uno spazio vettoriale di stessa dimensione della superficie.

### Proposizione.

- $T_x \Sigma = \{\dot{\gamma}(0) \mid \gamma: [0, \delta) \rightarrow \Sigma \text{ cammino } C^1 \text{ con } \gamma(0) = x\}$
- Data  $g: U \rightarrow \mathbb{R}^{d-k}$  tale che  $\Sigma \cap U = g^{-1}(0)$ ,  $\text{rk}(\nabla g) = d - k$  su  $U$ , allora

$$T_x \Sigma = \ker(d_x g) = \{\nabla g_1(x), \dots, \nabla g_{n-k}(x)\}^\perp$$

**Definizione.** Data  $\Sigma$  superficie in  $\mathbb{R}^d$  di classe  $C^m$ ,  $f: \Sigma \rightarrow \mathbb{R}^{d'}$ , diciamo che  $f$  è di classe  $C^{m'}$ , con  $m' \leq m$  se per ogni  $x \in \Sigma$  se esistono  $U$  e  $\phi: D \rightarrow \Sigma \cap U$  parametrizzazione regolare, tale che  $f \circ \phi: D \rightarrow \mathbb{R}^{d'}$  è di classe  $C^{m'}$  con  $D$  aperto di  $\mathbb{R}^k$ .

**Proposizione.**  $f \in C^{m'} \iff \exists A$  aperto di  $\mathbb{R}^d$  che contiene  $\Sigma$  e  $F: A \rightarrow \mathbb{R}^{d'}$  estensione di  $f$  di classe  $C^{m'}$ .

**Osservazione.** Se  $\phi: D \rightarrow \Sigma \cap U$  è una parametrizzazione regolare, allora  $\phi^{-1}: \Sigma \cap U \rightarrow D \subset \mathbb{R}^k$  è  $C^m$ . La mappa  $\phi^{-1}$  viene definita **carta**.

**Definizione.** Data  $f: \Sigma \rightarrow \mathbb{R}^{d'}$  di classe (almeno)  $C^1$  e  $x \in \Sigma$ ,

$$\begin{aligned} d_x f: T_x \Sigma &\longrightarrow \mathbb{R}^{d'} \\ \dot{\gamma}(0) &\longmapsto (f \circ \gamma)'(0) \quad \gamma: [0, \delta) \rightarrow \Sigma, \gamma \in C^1, \gamma(0) = x \end{aligned}$$

**Proposizione.** Data  $F: A \rightarrow \mathbb{R}^{d'}$  estensione  $C^1$  di  $f$ , con  $A \subset \mathbb{R}^d$ , allora

$$d_x f = d_x F|_{T_x \Sigma}$$

**Osservazione.** Se  $f: \Sigma \rightarrow \Sigma'$ , dove  $\Sigma \subset \mathbb{R}^d$  e  $\Sigma' \subset \mathbb{R}^{d'}$  allora  $\text{Im}(d_x f) \subset T_{f(x)} \Sigma'$ . Quindi,  $d_x f: T_x \Sigma \rightarrow T_{f(x)} \Sigma'$ .

## 7.2 Misure su superfici

In questa sezione studiamo la misura di Lebesgue su superfici definite tramite parametrizzazione<sup>1</sup>.

**Definizione.** Dati  $V$  spazio vettoriale  $k$ -dimensionale dotato di prodotto scalare (per esempio  $V$  sottospazi di  $\mathbb{R}^d$ ), la **misura di Lebesgue**  $\sigma_k$  su  $V$  è data dall'identificazione di  $V$  con  $\mathbb{R}^k$  tramite la scelta di una base ortonormale.

---

<sup>1</sup>Coincide con la definizione di Hausdorff

**Nota.**  $\sigma_k$  non dipende dalla scelta della base.

**Definizione.** Siano  $V, V'$  spazi vettoriali di dimensione  $k$  dotati di prodotto scalare e  $\Lambda: V \rightarrow V'$  lineare. Poniamo

$$|\det \Lambda| := |\det M|,$$

dove  $M$  è una matrice  $k \times k$  associata a  $\Lambda$  dalla scelta di basi ortonormali su  $V$  e  $V'$ .

**Nota.** Si verifica che la definizione è ben posta, ovvero non dipende dalla scelta delle basi. Inoltre, si verifica che per ogni  $E \subset V$  misurabile si ha  $\sigma_k(\Lambda(E)) = |\det \Lambda| \cdot \sigma_k(E)$  (formula di cambio di variabile negli integrali).

**Definizione.** Sia  $\Lambda: V \rightarrow W$ , con  $V, W$  spazi vettoriali, non necessariamente di stessa dimensione. Poniamo  $V' := \text{Im}(\Lambda)$  e

$$|\det \Lambda| := \begin{cases} 0 & \text{se } \text{rk}(\Lambda) < k \\ \text{come prima} & \text{se } \text{rk}(\Lambda) = k \text{ e } \dim V' = \dim V \end{cases}$$

**Proposizione 1.** Se  $\Lambda: \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^d$  allora

$$|\det \Lambda|^2 = \det(N^t N) \quad (1)$$

dove  $N$  è una matrice  $d \times k$  associata a  $\Lambda$ . E inoltre

$$|\det \Lambda|^2 = \sum_{\substack{Q \text{ minore} \\ k \times k \text{ di } N}} \det(Q)^2 \quad (2)$$

**Osservazione.** Questa proposizione implica che non è necessario trovare una base ortormale dell'immagine di  $\Lambda$  per calcolarne il determinante.

**Dimostrazione.**

- (1) Supponiamo  $\Lambda$  iniettiva (il caso  $\Lambda$  non iniettivo per esercizio), scegliamo una base ortormale  $e_1, \dots, e_k$  di  $\text{Im}(\Lambda)$  e una matrice  $M$   $k \times k$  associata a  $\Lambda$ . Sia  $B \in \mathbb{R}^{d \times k}$  una matrice avente colonne uguali a  $e_1, \dots, e_k$ . Allora  $N = BM$ . Dunque,

$$\det(N^t N) = \det(M^t \underbrace{B^t B}_{=I} M) = \det(M^t M) = (\det M)^2 =: |\det \Lambda|^2.$$

- (2) La seconda formula richiede la formula di Binet generalizzata.

□

## 7.3 Superfici $k$ -dimensionali in $\mathbb{R}^d$ di classe $C^1$

**Definizione.** Un insieme  $E \subset \Sigma$  è **misurabile** (secondo Lebesgue) se  $\forall \phi: D \rightarrow \Sigma \cap U$  parametrizzazione regolare e  $D \subset \mathbb{R}^k$ , l'insieme  $\phi^{-1}(E \cap U) \subset \mathbb{R}^k$  è misurabile secondo Lebesgue.

**Notazione.**  $\mathcal{M}(\Sigma) := \{E \subset \Sigma \text{ misurabili}\}.$

**Proposizione 1.** Esiste un'unica misura  $\sigma_k$  su  $\mathcal{M}(\Sigma)$  tale che per ogni  $E$  misurabile e per ogni  $\phi: D \rightarrow \Sigma \cap U$  parametrizzazione regolare

$$\sigma_k(E \cap U) = \int_{\phi^{-1}(E \cap U)} \overbrace{|\det(\text{d}_s \phi)|}^{J\phi(s)} \text{d}s. \quad (1)$$

## Commenti.

- $\sigma_k$  misura di volume  $k$ -dimensionale su  $\Sigma$ .
- $\sigma_k$  coincide con la misura di Hausdorff  $\mathcal{H}^k$  ristretta a  $\Sigma$ .
- $J\phi(s) := |\det J_s\phi| = \sqrt{\det(\nabla^t\phi(s)\nabla\phi(s))} = \sqrt{\sum_Q (\det Q)^2}$  dove  $Q$  sono i minori  $k \times k$  si  $\nabla\phi(s)$ .
- Se  $k = 1$ , vale  $J\phi(s) = \sqrt{\det(\phi'(s))^t\phi'(s)} = |\phi'(s)|$ .

## Dimostrazione.

*Passo 1:* costruzione di  $\sigma_k$ .

Prendiamo  $\sigma_i: D_i \rightarrow \Sigma \cap U_i$  parametrizzazioni regolari, dove  $\{D_i\}$  è una famiglia numerabile, tale che  $\Sigma \subset \bigcup U_i$ . Prendiamo  $\Sigma_i$  misurabili e disgiunti tali che  $\bigcup \Sigma_i = \Sigma$  e  $\Sigma_i \subset U_i$ .

Per ogni  $E \in \mathcal{M}(\Sigma)$  poniamo

$$\sigma_k(E) = \sum_i \int_{\phi^{-1}(E \cap \Sigma_i)} J\phi_i(s) \, ds$$

Evitiamo di verificare che sia una misura  $\sigma$ -addittiva.

Per dimostrare la proposizione si usa il seguente lemma.

**Lemma.** Date  $\phi: D \rightarrow \Sigma \cap U$  e  $\tilde{\phi}: \tilde{D} \rightarrow \Sigma \cap \tilde{U}$  e  $E$  misurabili contenuto in  $U \cap \tilde{U}$ , allora

$$\int_{\phi^{-1}(E)} J\phi(s) \, ds = \int_{\tilde{\phi}^{-1}(E)} J\tilde{\phi}(\tilde{s}) \, d\tilde{s} \quad (2)$$

**Dimostrazione lemma.** Usiamo il cambio di variabile  $s = \phi^{-1}(\tilde{\phi}(\tilde{s})) =: g(\tilde{s})$ .

$$\begin{aligned} \int_F J\phi(s) \, ds &= \int_{g^{-1}(F)=\tilde{F}} J\phi(s) Jg(\tilde{s}) \, d\tilde{s} = \int_{\tilde{F}} |\det(\mathrm{d}_s\phi)| \cdot |\det(\mathrm{d}_{\tilde{s}}g)| \, d\tilde{s} \\ &= \int_{\tilde{F}} |\det(\mathrm{d}_{\tilde{s}}(\phi \circ g))| \, d\tilde{s} = \int_{\tilde{F}} J\tilde{\phi}(\tilde{s}) \, d\tilde{s} \end{aligned}$$

Da cui la tesi. □

**Corollario 2.** Data  $\phi: D \rightarrow \Sigma \cap U$   $C^1$  parametrizzazione bigettiva (non necessariamente regolare),  $f: \Sigma \cap U \rightarrow \mathbb{R}$  misurabile e integrabile rispetto a  $\sigma_k$ .

$$\int_{\Sigma \cap U} f(x) \, d\sigma_k(x) = \int_D f(\phi(s)) J\phi(s) \, ds \quad (3)$$

Se  $\phi: D \rightarrow \Sigma \cap U$  è solo  $C^1$ , come vanno corrette (1) e (3)?

$$\int_{E \cap U} \# \phi^{-1}(x) \, d\sigma_k(x) = \int_{\phi^{-1}(E \cap U)} J\phi(s) \, ds \quad (1')$$

e

$$\int_{E \cap U} f(x) \# \phi^{-1}(x) \, d\sigma_k(x) = \int_D f(\phi(s)) J\phi(s) \, ds \quad (3')$$

**Nota.** Le formule sopra giustificano il fatto che parametrizzazione non esattamente bigettive possono essere usate lo stesso per il calcolo dei volumi.

**Esempio.** Parametrizzazione di  $\mathbb{S}^d \subset \mathbb{R}^{d+1}$  con coordinate sferiche.

Consideriamo  $\phi_d: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{S}^d$  definita come

$$\phi_d(\alpha_1, \dots, \alpha_d) = (\cos \alpha_1, \sin \alpha_1 \cos \alpha_2, \sin \alpha_1 \sin \alpha_2 \cos \alpha_3, \dots, \sin \alpha_1 \cdots \sin \alpha_{d-1} \cos \alpha_d, \sin \alpha_1 \cdots \sin \alpha_d)$$

Definizione ricorsiva

$$\phi_1(\alpha_1) = (\cos \alpha_1, \sin \alpha_1), \quad \phi_d(\alpha) = (\cos \alpha_1, \sin \alpha_1 \cdot \phi_{d-1}(\alpha_2, \dots, \alpha_d))$$

Dunque

- $\phi_d([0, \pi]^{d-1} \times [0, 2\pi]) = \mathbb{S}^d$  è una parametrizzazione in coordinate sferiche ed è iniettiva.
- $J\phi_d(\alpha) = \sin(\alpha_1)^{d-1} \sin(\alpha_2)^{d-2} \cdots \sin(\alpha_{d-1})^1$

**Proposizione 3.** Sia  $\Sigma$  superficie come al solito. Allora esiste un'unica misura  $\mu$  sui  $\mathcal{M}(\Sigma)$  tale che per ogni  $\varepsilon > 0$  esiste  $\delta > 0$  tale che data  $f: \Sigma \cap U \rightarrow \mathbb{R}^k \in C^1$  che è  $\delta$ -isometria, cioè

$$\frac{1}{1+\delta}|x-x'| \leq |f(x) - f(x')| \leq (1+\delta)|x-x'| \quad \forall x, x' \in \Sigma \cap U \quad (\text{P})$$

Allora

$$\frac{1}{1+\varepsilon}\sigma_k(E) \leq |f(E)| \leq (1+\varepsilon)\sigma_k(E) \quad \forall E \text{ mis } \subset \Sigma \cap U$$

**Corollario 4.** Poichè  $\sigma_k$  e la restrizione di  $\mathcal{H}^k$  a  $\Sigma$  hanno la proprietà (P), coincidono.

**Dimostrazione** (Unicità). Prendiamo  $\mu, \mu'$  che soddisfano (P). Fissiamo  $E, \varepsilon > 0$  e  $\delta$  di conseguenza usando (P). Allora

- Per ogni  $x \in \Sigma$  esiste  $\phi_x: U_x \cap \Sigma \rightarrow \mathbb{R}^k$  tale che  $d_x \phi_x: T_x \Sigma \rightarrow \mathbb{R}^k$  è un'isometria.
- per ogni  $x$  esiste  $V_x \subset U_x$  tale che  $\phi_x: \Sigma \cap V_x \rightarrow \mathbb{R}^k$  è  $\delta$ -isometria.
- Ricopriamo  $\Sigma$  con una successione  $V_i := V_{x_i}$ .
- Scriviamo  $E = \bigsqcup_i E_i$  con  $E_i \subset V_i$ .

Per (P) abbiamo che

$$\begin{aligned} \frac{1}{1+\varepsilon}\mu(E_i) &\leq |f(E_i)| \leq (1+\varepsilon)\mu(E_i) \\ \frac{1}{1+\varepsilon}\tilde{\mu}(E_i) &\leq |f(E_i)| \leq (1+\varepsilon)\tilde{\mu}(E_i) \end{aligned}$$

da cui incrociando le disuguaglianze otteniamo

$$\begin{aligned} \frac{1}{(1+\varepsilon)^2}\mu(E_i) &\leq \tilde{\mu}(E_i) \leq (1+\varepsilon)^2\mu(E_i) \\ \Rightarrow \frac{1}{(1+\varepsilon)^2}\tilde{\mu}(E_i) &\leq \mu(E_i) \leq (1+\varepsilon)^2\tilde{\mu}(E_i) \end{aligned}$$

e per arbitrarietà di  $\varepsilon$  ricaviamo  $\mu(E) = \tilde{\mu}(E)$ . Per arbitrarietà di  $E$  otteniamo  $\mu = \tilde{\mu}$ .  $\square$

## 7.4 $k$ -covettori

Dato  $V$  spazio vettoriale su  $\mathbb{R}$  e  $k = 1, 2, \dots$ , l'applicazione  $\alpha: V^k \rightarrow \mathbb{R}$  si dice  **$k$ -covettore o  $k$ -lineare e alternante** se

- è lineare in ogni variabile
- per ogni  $\sigma$  permutazione in  $S_k$ ,  $\alpha(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(k)}) = \text{sgn}(\sigma)\alpha(v_1, \dots, v_k)$  (equivalentemente,  $\alpha$  cambia segno scambiando due variabili).

**Notazione.**  $\Lambda^k(V) := \{\alpha \text{ } k\text{-covettori su } V\}$ . Formalmente  $\Lambda^0(V) := \{0\}$ .

**Osservazione.**

- $\Lambda^k(V)$  è uno spazio vettoriale.
- $\Lambda^1(V) = V^*$  duale di  $V$ .
- $\det$  è  $n$ -lineare alternante nelle colonne (o righe).
- Se  $v_1, \dots, v_k$  sono linearmente dipendenti, allora  $\alpha(v_1, \dots, v_k) = 0$ .
- Se  $k > \dim V$ , allora  $\Lambda^k(V) = \{0\}$ .

**Definizione.** Dati  $V, V'$  spazi vettoriali,  $T: V \rightarrow V'$  lineare,  $\alpha \in \Lambda^k(V')$ , il **pull-back** di  $\alpha$  secondo  $T$  è

$$T^\# \alpha \in \Lambda^k(V) \quad \text{dato da} \quad T^\# \alpha(v_1, \dots, v_k) = \alpha(Tv_1, \dots, Tv_k)$$

Inoltre, dati  $\alpha \in \Lambda^k(V), \beta \in \Lambda^h(V)$  si definisce **prodotto esterno** e si indica con  $\alpha \wedge \beta \in \Lambda^{k+h}(V)$  quanto segue

$$\alpha \wedge \beta(v_1, \dots, v_{k+h}) = \frac{1}{k!h!} \sum_{\sigma \in S_{k+h}} \text{sgn}(\sigma) \alpha(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(k)}) \beta(v_{\sigma(k+1)}, \dots, v_{\sigma(k+h)})$$

## 7.5 Integrazione di $k$ -forme su superfici

**Proposizione 0.** Il prodotto esterno  $\wedge$  è distributivo (rispetto a  $+$ ), associativo e anticommutativo, ovvero  $\alpha \wedge \beta = (-1)^{hk} \beta \wedge \alpha$ .

Data  $e_1, \dots, e_d$  base di  $V$ ,  $e_1^*, \dots, e_d^*$  è una base di  $V^*$ . Denotiamo con  $I(d, k) := \{\underline{i} = (i_1, \dots, i_k) \text{ con } 1 \leq i_1 \leq \dots \leq i_k \leq d\}$  l'insieme di multiindici. Per ogni  $\underline{i} \in I(d, k)$  indichiamo con  $e_{\underline{i}}^* = e_{i_1}^* \wedge \dots \wedge e_{i_k}^* \in \Lambda^k(V)$ . Data una matrice  $d \times k$   $A$ ,  $A_{\underline{i}}$  è il minore di  $A$  dato dalle righe  $i_1, \dots, i_k$ .

**Proposizione 1.**  $e_{\underline{i}}^*(v_1, \dots, v_k) = \det(A_{\underline{i}})$ , dove  $A \in R^{d \times k}$  matrice delle coordinate di  $v_1, \dots, v_k$ , cioè  $A_{ij} = (v_j)_i$ .

**Dimostrazione.** Per induzione su  $k$ .

- $k = 1$ . OK
- *Passo induttivo*  $k - 1 \rightarrow k$ . Scriviamo  $e_{\underline{i}}^* = e_{i_1}^* \wedge e_{\underline{i}'}^*$  con  $\underline{i}' = (i_2, \dots, i_k)$ . Usando la definizione di prodotto esterno e l'ipotesi induttiva notiamo che questo è uguale allo sviluppo per la prima riga di  $\det(A_{\underline{i}})$

□

**Proposizione 2.** Posta  $\{e_{\underline{i}}: \underline{i} \in I(d, k)\}$  è una base di  $\Lambda^k(V)$  e in particolare per ogni  $\alpha \in \Lambda^k(V)$

$$\alpha = \sum_{\underline{i} \in I(d, k)} \alpha(e_{\underline{i}}) e_{\underline{i}}^*$$

**Dimostrazione.** Definiamo  $\tilde{\alpha}$  come sopra. Prendiamo  $\underline{i} \in I(d, k)$ , allora

$$\tilde{\alpha}(e_{j_1}, \dots, e_{j_k}) = \sum_{\underline{i}} \alpha(e_{i_1}, \dots, e_{i_k}) \cdot \underbrace{e_{\underline{i}}^*(e_{j_1}, \dots, e_{j_k})}_{=\delta_{\underline{i}j}} = \alpha(e_{j_1}, \dots, e_{j_k})$$

Si conclude per linearità e alternanza.

**Corollario.** Vale la seguente identità

$$\dim \Lambda^k(V) = \#I(d, k) = \begin{cases} \binom{d}{k} & \text{se } k < d \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

**Proposizione 3** (Formula di Binet generalizzata). Dati  $A, B$  matrici di  $d \times k$  con  $k < d$ , allora

$$\det(B^t A) = \sum_{\underline{i} \in I(d, k)} \det(B_{\underline{i}}) \det(A_{\underline{i}})$$

**Dimostrazione.** Basta definire  $\alpha(v_1, \dots, v_k) = \det(B^t A)$  dove  $A$  è la matrice avente colonne pari a  $v_1, \dots, v_k$ . Bisogna verificare che  $\alpha$  è  $k$ -lineare alternante ([TO DO]), da cui segue che

$$\det(B^t A) = \alpha(v_1, \dots, v_k) \stackrel{\text{Prop 2}}{=} \sum_{\underline{i}} \underbrace{\alpha(e_{i_1}^*, \dots, e_{i_k}^*)}_{\det(B_{\underline{i}}^t)} \cdot \underbrace{e_{\underline{i}}^*(v_1, \dots, v_k)}_{\det A_{\underline{i}}}$$

□

**Osservazione.** Nel caso in cui  $B = A$ , otteniamo la formula

$$\det(A^t A) = \sum_{\substack{Q \text{ minore} \\ k \times k \text{ di } A}} \det(Q)^2.$$

**Caso particolare**  $V = \mathbb{R}^d$ . Indichiamo con  $e_1, \dots, e_d$  i vettori della base canonica,  $dx_1, \dots, dx_d$  base duale di  $\mathbb{R}^d$ ,  $dx_{\underline{i}} := e_{\underline{i}}^*$  base canonica di  $\Lambda^k(\mathbb{R}^d)$ .

**Esempio.**

$$\begin{aligned} & (dx_1 + 2dx_2) \wedge (2dx_1 \wedge dx_3 - dx_2 \wedge dx_4) \\ &= 2dx_1 \wedge dx_1 \wedge dx_3 - dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_4 + 4dx_2 \wedge dx_1 \wedge dx_3 - 2dx_2 \wedge dx_2 \wedge dx_4 \\ &= -dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_4 - 4dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3. \end{aligned}$$

**Nota.** Nel prodotto esterno si cancellano tutti i termini con indici ripetuti.

**Definizione.** Dato  $\Omega \subset \mathbb{R}^d$  aperto, una  $k$ -forma  $\omega$  su  $\Omega$  è una "funzione" da  $\Omega$  in  $\Lambda^k(\mathbb{R}^d)$ . In coordinate,  $\omega(x) = \sum_{\underline{i} \in I(d, k)} w_{\underline{i}}(x) \cdot dx_{\underline{i}}$ .

Il **differenziale esterno** di una  $k$ -forma  $\omega$  su  $\Omega$  di classe  $C^1$  è la  $k+1$ -forma su  $\Omega$  di classe almeno  $C^0$  data da

- $k = 0$ . In tal caso  $f$  è una funzione (0-forma) e  $df(x) = d_x f = \sum \frac{\partial w_{\underline{i}}(x)}{\partial x_j} dx_j \wedge dx_{\underline{i}}$
- $k > 0$   $d\omega := \sum_{\underline{i} \in I(d,k)} d\omega_{\underline{i}}(x) \wedge dx_{\underline{i}} = \sum_{\underline{i} \in I(d,k)} \sum_{j=1}^d \frac{\partial \omega_{\underline{i}}(x)}{\partial x_j} dx_j \wedge dx_{\underline{i}}$ .

**Proposizione** (Leibniz). Valgono le seguenti.

- $d(\omega_1 \wedge \omega_2) = d\omega_1 \wedge \omega_2 + (-1)^{k_1} \omega_1 \wedge d\omega_2$
- $d^2\omega = 0$