

# Analisi 3

Appunti di Analisi 3 del corso di Giovanni Alberti e Maria Stella Gelli

Arianna Carelli e Antonio De Lucreziis

I Semestre 2021/2022

# Indice

<b>1</b>	<b>Teoria della misura</b>	<b>4</b>
1.1	Misure astratte . . . . .	4
1.2	Esempi di misure . . . . .	5
1.3	Funzioni misurabili . . . . .	6
1.3.1	Funzioni semplici . . . . .	6
1.4	Integrale . . . . .	6
1.5	Teoremi di convergenza . . . . .	8
1.5.1	Fubini-Tonelli . . . . .	9
1.6	Esercizi . . . . .	10
1.6.1	Teoria della misura . . . . .	10
1.6.2	Funzioni misurabili rispetto alla misura di Lebesgue . . . . .	11
1.6.3	Formula di cambio di variabile applicata a funzioni radiali . . . . .	13
<b>2</b>	<b>Spazi <math>L^p</math> e convoluzione</b>	<b>16</b>
2.1	Disuguaglianze . . . . .	16
2.1.1	Disuguaglianza di Jensen . . . . .	16
2.1.2	Disuguaglianza di Young . . . . .	18
2.1.3	Disuguaglianza di Hölder . . . . .	19
2.1.4	Disuguaglianza di Minkowski . . . . .	20
2.2	Costruzione spazi $L^p$ . . . . .	21
2.3	Prodotto scalare su $L^2$ . . . . .	22
2.4	Completezza degli spazi $L^p$ . . . . .	23
2.5	Alcune proprietà viste a esercitazione degli spazi $L^p$ . . . . .	26
2.5.1	Confrontabilità degli spazi di $L^p$ . . . . .	26
2.5.2	Separabilità degli spazi $L^p$ . . . . .	26
2.6	Nozioni di convergenza per successioni di funzioni . . . . .	27
2.7	Controesempi sulle convergenze . . . . .	30
2.8	Approssimazioni di funzioni in $L^p$ . . . . .	30
2.9	Complementi su approssimazioni di funzioni in $L^p$ . . . . .	32

2.10	Appendice . . . . .	35
2.11	Esercizi . . . . .	36
2.11.1	Esercizi su spazi $L^p(X)$ al variare di $p$ e dello spazio $X$ . . . . .	36
2.11.2	Sottospazi limitati, chiusi e compatti di $L^p$ . . . . .	37
2.11.3	Spazi $\ell^p$ . . . . .	39
2.11.4	Continuità operatori lineari . . . . .	40
<b>3</b>	<b>Convoluzione</b>	<b>44</b>
3.1	Derivata e Convoluzione . . . . .	49
3.2	Approssimazione per convoluzione . . . . .	50
3.3	Esercizi . . . . .	52
3.3.1	Convoluzione . . . . .	52
3.3.2	Approssimazioni per convoluzione . . . . .	53
<b>4</b>	<b>Spazi di Hilbert</b>	<b>54</b>
4.1	Spazi di Hilbert complessi . . . . .	59
4.2	Esempi di basi Hilbertiane . . . . .	60
4.2.1	Polinomi . . . . .	60
4.2.2	Base di Haar . . . . .	60
4.3	Esercizi . . . . .	61
4.3.1	Basi Hilbertiane e proiezioni . . . . .	61
<b>5</b>	<b>Serie di Fourier</b>	<b>64</b>
5.1	Regolarità di $f$ e dei coefficienti . . . . .	68
5.2	Convergenza puntuale della serie di Fourier . . . . .	70
5.3	Esercizi . . . . .	73
5.3.1	Serie di Fourier . . . . .	73
<b>6</b>	<b>Applicazioni della serie di Fourier</b>	<b>76</b>
6.1	Equazione del calore . . . . .	76
6.2	Risoluzione dell'equazione del calore (su $\mathbb{S}^1$ ) . . . . .	77
6.2.1	Risoluzione formale . . . . .	77
6.3	Equazione delle onde . . . . .	81
6.4	Risoluzione dell'equazione delle onde . . . . .	81
6.4.1	Risoluzione formale . . . . .	81
6.5	Altre applicazioni della serie di Fourier . . . . .	84
6.5.1	Disuguaglianza isoperimetrica . . . . .	84
6.6	Appendice . . . . .	85

6.6.1	Basi di Hilbert rilevanti . . . . .	85
6.6.2	Operatori autoaggiunti . . . . .	88
6.7	Esercizi . . . . .	90
6.7.1	Calcolo dei coefficienti di Fourier . . . . .	90
6.7.2	Applicazione serie di Fourier: risoluzione di PDE . . . . .	91
6.7.3	Operatori autoaggiunti . . . . .	95
<b>7</b>	<b>Trasformata di Fourier</b>	<b>98</b>
7.1	Proprietà della trasformata di Fourier . . . . .	99
7.2	Trasformata di Fourier su $L^2$ . . . . .	104
7.2.1	Proprietà della trasformata di Fourier in $L^2$ . . . . .	106
7.3	Conclusione sulla TdF . . . . .	108
7.4	Applicazioni TdF . . . . .	109
7.5	Esercizi . . . . .	110
7.5.1	Calcolo TdF - prima parte . . . . .	110
7.5.2	Calcolo TdF - seconda parte . . . . .	112
<b>8</b>	<b>Integrazione di superfici</b>	<b>115</b>
8.1	Superfici . . . . .	115
8.2	Misure su superfici . . . . .	117
8.3	Superfici $k$ -dimensionali in $\mathbb{R}^d$ di classe $C^1$ . . . . .	118
8.4	$k$ -covettori . . . . .	120
8.5	Integrazione di $k$ -forme su superfici . . . . .	121

# Capitolo 1

## Teoria della misura

### 1.1 Misure astratte

**Definizione.** Uno spazio misurabile è una terna  $(X, \mathcal{A}, \mu)$  tale che

- $X$  è un insieme qualunque.
- $\mathcal{A}$  è una  $\sigma$ -algebra di sottoinsiemi di  $X$  (chiamata  $\sigma$ -algebra dei misurabili) ovvero una famiglia di sottoinsiemi di  $X$  che rispetta le seguenti proprietà:
  - $\emptyset, X \in \mathcal{A}$ .
  - $\mathcal{A}$  è chiusa per complementare, unione e intersezione numerabile.
- $\mu$  è una misura su  $X$ , ossia una funzione  $\mu: \mathcal{A} \rightarrow [0, +\infty]$   $\sigma$ -addittiva, cioè tale che data una famiglia numerabile  $\{E_k\} \subset \mathcal{A}$  disgiunta e posto  $E := \bigcup E_n$ , allora

$$\mu(E) = \sum_n \mu(E_n).$$

**Notazione.** Data una successione crescente di insiemi  $E_1 \subset E_2 \subset \dots \subset E_n \subset \dots$  con  $\bigcup E_n = E$ , scriviamo  $E_n \uparrow E$ .

**Proprietà.**

- $\mu(\emptyset) = 0$
- *Monotonia:* Dati  $E, E' \in \mathcal{A}$  e  $E \subset E'$ , allora  $\mu(E) \leq \mu(E')$ .
- Data  $E_n \uparrow E$ , vale  $\mu(E) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(E_n) = \sup_n \mu(E_n)$ .
- Se  $E_n \downarrow E$  e  $\mu(E_{\bar{n}}) < +\infty$  per qualche  $\bar{n}$ , allora  $\mu(E) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(E_n) = \inf_n \mu(E_n)$ .
- *Subadditività:* Se  $E \subset \bigcup E_n$ , allora  $\mu(E) \leq \sum_n \mu(E_n)$ .

**Osservazione.** Dato  $X' \in \mathcal{A}$  si possono restringere  $\mathcal{A}$  e  $\mu$  a  $X'$  nel modo ovvio.

**Definizioni.**

- $\mu$  si dice **completa** se  $F \subset E, E \in \mathcal{A}$  e  $\mu(E) = 0$ , allora  $F \in \mathcal{A}$  (e di conseguenza  $\mu(F) = 0$ ).

- $\mu$  si dice **finita** se  $\mu(X) < +\infty$ .
- $\mu$  si dice  **$\sigma$ -finita** se esiste una successione  $\{E_n\}$  con  $E_n \subset E_{n+1}$  tale che  $\bigcup E_n = X$  con  $\mu(E_n) < +\infty$  per ogni  $n$ .

**Notazione.** Sia  $P(X)$  un predicato che dipende da  $x \in X$  allora si dice che  $P(X)$  **vale  $\mu$ -quasi ogni  $x \in X$**  se l'insieme  $\{x \mid P(x) \text{ è falso}\}$  è (contenuto in) un insieme di misura  $\mu$  nulla.

D'ora in poi consideriamo solo misure complete.

## 1.2 Esempi di misure

- **Misura che conta i punti.**

$$X \text{ insieme} \quad \mathcal{A} := \mathcal{P}(X) \quad \mu(E) := \#E \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$$

- **Delta di Dirac in  $x_0$ .**

$$X \text{ insieme, } x_0 \in X \text{ fissato} \quad \mathcal{A} := \mathcal{P}(X) \quad \mu(E) := \delta_{x_0}(E) = \mathbb{1}_E(x_0)$$

- **Misura di Lebesgue.**

$$X = \mathbb{R}^n \quad \mathcal{M}^n \text{ } \sigma\text{-algebra dei misurabili secondo Lebesgue} \quad \mathcal{L}^n \text{ misura di Lebesgue}$$

Dato  $R$  parallelepipedo in  $\mathbb{R}^n$ , cioè  $R = \prod_{k=1}^n I_k$  con  $I_k$  intervalli in  $\mathbb{R}$ . Si pone

$$\text{vol}_n(R) := \prod_{k=1}^n \text{lung}(I_k)$$

per ogni  $E \subset \mathbb{R}^n$  (assumendo  $\text{lung}([a, b]) = b - a$ ). Infine poniamo

$$\mathcal{L}^n(E) := \inf \left\{ \sum_i \text{vol}_n(R_i) \mid \{R_i\} \text{ tale che } E \subset \bigcup_i R_i \right\}.$$

**Osservazioni.**

- $\mathcal{L}^n(R) = \text{vol}_n(R)$ .
- $\mathcal{L}^n$  non è  $\sigma$ -addittiva su  $\mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ .

Il secondo punto giustifica l'introduzione della  $\sigma$ -algebra dei **misurabili secondo Lebesgue** che denotiamo con  $\mathcal{M}^n$ .

Dato  $E \subset \mathbb{R}^n$  si dice che  $E$  è misurabile (secondo Lebesgue) se

$$\forall \varepsilon > 0 \exists A \text{ aperto e } C \text{ chiuso, tali che } C \subset E \subset A \text{ e } \mathcal{L}^n(A \setminus C) \leq \varepsilon.$$

**Osservazioni.**

- Per ogni  $E$  misurabile vale

$$\mathcal{L}^n(E) = \inf \{ \mathcal{L}^n(A) : A \text{ aperto, } A \supset E \} = \sup \{ \mathcal{L}^n(K) : K \text{ compatto, } K \subset E \}.$$

- Notiamo che se  $F \subset E$  con  $E \subset \mathcal{M}^n$  e  $\mathcal{L}^n(E) = 0$ , allora  $F \in \mathcal{M}^n$ . Ovvero la misura di Lebesgue è completa!

**Notazione.**  $|E| := \mathcal{L}^n(E)$

## 1.3 Funzioni misurabili

**Definizione.** Dato  $(X, \mathcal{A}, \mu)$  e  $f: X \rightarrow \mathbb{R}$  (o al posto di  $\mathbb{R}$  in  $Y$  spazio topologico), diciamo che  $f$  è **misurabile** (più precisamente  $\mathcal{A}$ -misurabile), se

$$\forall A \text{ aperto } f^{-1}(A) \in \mathcal{A}$$

**Osservazioni.**

- Dato  $E \subset X$ , vale  $E \in \mathcal{A}$  se solo se  $\mathbb{1}_E$  è misurabile.
- La classe delle funzioni misurabili è chiusa rispetto a molte operazioni
  - *Somma, prodotto* (se hanno senso nello spazio immagine della funzione).
  - *Composizione con funzione continua*: Se  $f: X \rightarrow Y$  continua e  $g: Y \rightarrow Y'$  continua, allora  $g \circ f$  è misurabile.
  - *Convergenza puntuale*: data una successione di  $f_n$  misurabili e  $f_n \rightarrow f$  puntualmente, allora  $f$  è misurabile.
  - $\liminf$  e  $\limsup$  (almeno nel caso  $Y = \mathbb{R}$ ).

### 1.3.1 Funzioni semplici

**Definizione.** Definiamo la classe delle **funzione semplici** come

$$\mathcal{S} := \left\{ f: X \rightarrow \mathbb{R} \mid f = \sum_i \alpha_i \mathbb{1}_{E_i} \text{ con } E_i \text{ misurabili e } \{\alpha_i\} \text{ finito} \right\}$$

**Osservazione.** La rappresentazione di una funzione semplice come combinazione lineare di indicatori di insiemi *non è unica*, però se necessario possiamo prendere gli  $E_i$  disgiunti.

## 1.4 Integrale

**Definizione.** Diamo la definizione di  $\int_X f \, d\mu$  per passi

- i) Se  $f \in \mathcal{S}$  e  $f \geq 0$  cioè  $f = \sum_i \alpha_i \mathbb{1}_{E_i}$  con  $\alpha_i \geq 0$  allora poniamo

$$\int_X f \, d\mu := \sum_i \alpha_i \mu(E_i),$$

convenendo che  $0 \cdot +\infty = 0$  in quanto la misura di un insieme non è necessariamente finita.

- ii) Se  $f: X \rightarrow [0, +\infty]$  misurabile si pone

$$\int_X f \, d\mu := \sup_{\substack{g \in \mathcal{S} \\ 0 \leq g \leq f}} \int_X g \, d\mu.$$

iii)  $f: X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  misurabile si dice **integrabile** se

$$\int_X f^+ d\mu < +\infty \quad \text{oppure} \quad \int_X f^- d\mu < +\infty.$$

e per tali  $f$  si pone

$$\int_X f d\mu := \int_X f^+ d\mu - \int_X f^- d\mu.$$

iv)  $f: X \rightarrow \mathbb{R}^n$  si dice **sommabile** (o di **classe**  $\mathcal{L}^1$ ) se  $\int_X |f| d\mu < +\infty$ . In tal caso, se  $\int_X f_i^\pm d\mu < +\infty$  per ogni  $f_i$  componente di  $f$ , allora  $\int_X f d\mu$  esiste ed è finito.

Per tali  $f$  si pone

$$\int_X f d\mu := \left( \int_X f_1 d\mu, \dots, \int_X f_n d\mu \right).$$

**Notazione.** Scriveremo spesso  $\int_E f(x) dx$  invece di  $\int_E f d\mathcal{L}^n$ .

**Osservazioni.**

- L'integrale è lineare (sulle funzioni sommabili).
- I passaggi i) e ii) danno lo stesso risultato per  $f$  semplice  $\geq 0$ .
- La definizione in ii) ha senso per ogni  $f: X \rightarrow [0, +\infty]$  anche non misurabile. Ma in generale vale solo che

$$\int_X f_1 + f_2 d\mu \geq \int_X f_1 d\mu + \int_X f_2 d\mu.$$

- Dato  $E \in \mathcal{A}$ ,  $f$  misurabile su  $E$ , notiamo che vale l'uguaglianza

$$\int_E f d\mu := \int_X f \cdot \mathbb{1}_E d\mu.$$

- Si può definire l'integrale anche per  $f: X \rightarrow Y$  con  $Y$  spazio vettoriale normato finito dimensionale<sup>1</sup> ed  $f$  sommabile.
- Se  $f_1 = f_2$   $\mu$ -q.o. allora  $\int_X f_1 d\mu = \int_X f_2 d\mu$ .
- Si definisce  $\int_X f d\mu$  anche se  $f$  è misurabile e definita su  $X \setminus N$  con  $\mu(N) = 0$ .
- Se  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  è integrabile secondo Riemann allora è misurabile secondo Lebesgue e le due nozioni di integrale coincidono.

**Nota.** Lo stesso vale per integrali impropri di funzioni positive. Ma nel caso più generale non vale: se consideriamo la funzione

$$f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R} \quad f(x) := \frac{\sin x}{x}$$

allora l'integrale di  $f$  definito su  $(0, +\infty)$  esiste come integrale improprio ma non secondo Lebesgue, infatti

$$\int_0^{+\infty} f^+ dx = \int_0^{+\infty} f^- dx = +\infty$$

---

<sup>1</sup>È necessario avere uno spazio vettoriale, perché serve la linearità e la moltiplicazione per scalare



- $\int_X f \, d\delta_{x_0} = f(x_0)$
- Se  $X = \mathbb{N}$  e  $\mu$  è la misura che conta i punti l'integrale è

$$\int_X f \, d\mu = \sum_{n=0}^{\infty} f(n)$$

per le  $f$  positive o tali che  $\sum f^+(n) < +\infty$  oppure  $\sum f^-(n) < +\infty$ .

**Nota.** Come prima nel caso di funzioni non sempre positive ci sono casi in cui la serie solita non è definita come integrale di una misura, ad esempio

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$$

esiste come serie ma non come integrale.

- Dato  $X$  qualunque,  $\mu$  misura che conta i punti e  $f: X \rightarrow [0, +\infty]$  possiamo definire la somma di tutti i valori di  $f$

$$\sum_{x \in X} f(x) := \int_X f \, d\mu.$$

## 1.5 Teoremi di convergenza

Sia  $(X, \mathcal{A}, \mu)$  come in precedenza.

**Teorema** (di convergenza monotona o Beppo-Levi). Date  $f_n: X \rightarrow [0, +\infty]$  misurabili, tali che  $f_n \uparrow f$  ovunque in  $X$ , allora<sup>1</sup>

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_X f_n \, d\mu = \int_X f \, d\mu$$

ed in particolare il termine a sinistra è crescente quindi è proprio un sup ovvero  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_X f_n \, d\mu = \sup_n \int_X f_n \, d\mu$ .

**Teorema** (lemma di Fatou). Date  $f_n: X \rightarrow [0, +\infty]$  misurabili, allora

$$\liminf_{n \rightarrow +\infty} \int_X f \, d\mu \geq \int_X \left( \liminf_{n \rightarrow +\infty} f_n \right) \, d\mu.$$

**Teorema** (di convergenza dominata o di Lebesgue). Date  $f_n: X \rightarrow \mathbb{R}$  (o anche  $\mathbb{R}^n$ ) misurabili con le seguenti proprietà

- *Convergenza puntuale:*  $f_n(x) \rightarrow f(x)$  per ogni  $x \in X$ .
- *Dominazione:* Esiste  $g: X \rightarrow [0, +\infty]$  sommabile tale che  $|f_n(x)| \leq g(x)$  per ogni  $x \in X$  e per ogni  $n \in \mathbb{N}$ .

allora

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_X f_n \, d\mu = \int_X f \, d\mu.$$

---

<sup>1</sup>Mnemonica:  $\sup_n \int_X f_n \, d\mu = \int_X \sup_n f_n \, d\mu$

**Nota.** La seconda proprietà è essenziale; sostituirla con  $\int_X |f_n| \, d\mu \leq C < +\infty$  non basta!

**Definizione.** Data una *densità*  $\rho: \mathbb{R}^n \rightarrow [0, +\infty]$  misurabile, la **misura  $\mu$  con densità  $\rho$**  è data da

$$\forall E \in \mathcal{A} \quad \mu(E) := \int_E \rho \, dx$$

**Osservazioni.**

- $\mathbb{R}^n$  e  $\mathcal{L}^n$  possono essere sostituiti da  $X$  e  $\tilde{\mu}$ .
- il fatto che  $\mu$  è una misura segue da Beppo Levi, in particolare serve per mostrare la subadditività.

**Teorema** (di cambio di variabile). Siano  $\Omega$  e  $\Omega'$  aperti di  $\mathbb{R}^n$ ,  $\Phi: \Omega \rightarrow \Omega'$  un diffeomorfismo<sup>1</sup> di classe  $C^1$  e  $f: \Omega' \rightarrow [0, +\infty]$  misurabile. Allora

$$\int_{\Omega'} f(x') \, dx' = \int_{\Omega} f(\Phi(x)) |\det(\nabla \Phi(x))| \, dx.$$

La stessa formula vale per  $f$  a valori in  $\overline{\mathbb{R}}$  integrabile e per  $f$  a valori in  $\mathbb{R}^n$  sommabile.

**Osservazioni.**

- Se  $n = 1$ ,  $|\det(\nabla \Phi(x))| = |\Phi'(x)|$  e non  $\Phi'(x)$  come nella formula vista ad Analisi 1 (l'informazione del segno viene data dall'inversione degli estremi).
- Indebolire le ipotesi su  $\Phi$  è delicato. Basta  $\Phi$  di classe  $C^1$  e  $\forall x' \in \Omega' \# \Phi^{-1}(x') = 1$  (supponendo  $\Phi$  iniettiva la proprietà precedente segue immediatamente). Se  $\Phi$  non è "quasi" iniettiva bisogna correggere la formula per tenere conto della molteplicità.
- Quest'ultima osservazione serve giusto per far funzionare il cambio in coordinate polari che non è iniettivo solo nell'origine.

**Formula di cambio di variabile applicata a funzioni radiali.** Sia  $f: [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  misurabile (di solito si richiede misurabile e positiva oppure sommabile). Allora per il teorema di cambio di variabili vale la seguente

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(|x|) \, dx = c_n \cdot \int_0^{+\infty} f(\rho) \rho^{n-1} \, d\rho,$$

dove  $c_n = n \mathcal{L}^n(\mathcal{B}(0, 1))$ .

### 1.5.1 Fubini-Tonelli

Di seguito riportiamo il teorema di Fubini-Tonelli per la misura di Lebesgue.

**Teorema** (di Fubini-Tonelli). Sia  $\mathbb{R}^{n_1} \times \mathbb{R}^{n_2} \simeq \mathbb{R}^n$  con  $n = n_1 + n_2$ ,  $E := E_1 \times E_2$  dove  $E_1, E_2$  sono misurabili e  $f$  è una funzione misurabile definita su  $E$ . Se  $f$  ha valori in  $[0, +\infty]$  allora

$$\int_E f \, d\mu = \int_{E_2} \int_{E_1} f(x_1, x_2) \, dx_1 \, dx_2 = \int_{E_1} \int_{E_2} f(x_1, x_2) \, dx_2 \, dx_1$$

---

<sup>1</sup>funzione differenziabile con inversa differenziabile.

Vale lo stesso per  $f$  a valori in  $\mathbb{R}$  o in  $\mathbb{R}^n$  sommabile.

**Osservazioni.** Possiamo generalizzare il teorema di Fubini-Tonelli a misure generiche ed ottenere alcuni risultati utili che useremo ogni tanto.

- Se  $X_1, X_2$  sono spazi con misure  $\mu_1, \mu_2$  (con opportune ipotesi) vale:

$$\int_{E_2} \int_{E_1} f(x_1, x_2) d\mu_1(x_1) d\mu_2(x_2) = \int_{E_1} \int_{E_2} f(x_1, x_2) d\mu_2(x_2) d\mu_1(x_1).$$

se  $f \geq 0$  oppure  $\int_{X_1} \int_{X_2} |f| d\mu_2(x_2) d\mu_1(x_1) < +\infty$ .

- **Teorema** (di scambio serie-integrale). Se  $X_1 \subset \mathbb{R}$  (oppure  $X_1 \subset \mathbb{R}^n$ ),  $\mu_1 = \mathcal{L}^n$  e  $X_2 = \mathbb{N}$ ,  $\mu_2$  è la misura che conta i punti, allora la formula sopra diventa

$$\sum_{n=0}^{\infty} \int_{X_1} f_n(x) dx = \int_{X_1} \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x) dx.$$

se  $f_i \geq 0$  oppure  $\sum_i \int_{X_1} |f_i(x)| dx < +\infty$ .

- **Teorema** (di scambio di serie). Se  $X_1 = X_2 = \mathbb{N}$  e  $\mu_1 = \mu_2$  è la misura che conta i punti la formula sopra diventa

$$\sum_{j=0}^{\infty} \sum_{i=0}^{\infty} a_{i,j} = \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} a_{i,j}$$

se  $a_{i,j} \geq 0$  oppure  $\sum_i \sum_j |a_{i,j}| < +\infty$ .

## 1.6 Esercizi

### 1.6.1 Teoria della misura

Di seguito riportiamo alcune proprietà di base di teoria della misura.

**Proprietà.**

- i) Se  $A \subset B$ , allora  $\mu(A) \leq \mu(B)$ .

**Dimostrazione.** Scomponiamo  $B = (B \setminus A) \cup (A \cap B)$ . Per ipotesi  $A \cap B = A$  ed essendo la misura positiva segue che

$$\mu(B) = \underbrace{\mu(B \setminus A)}_{\geq 0} + \mu(A) \geq \mu(A).$$

- ii) Dati due insiemi  $A, B$  misurabili, vale

$$\mu(A \cup B) \leq \mu(A) + \mu(B).$$

**Dimostrazione.** La disuguaglianza segue dalle seguenti uguaglianze.

$$\begin{aligned} \mu(A) &= \mu(A \setminus B) + \mu(A \cap B) \\ \mu(B) &= \mu(B \setminus A) + \mu(A \cap B) \\ \mu(A \cup B) &= \mu(A \setminus B) + \mu(B \setminus A) + \mu(A \cap B). \end{aligned}$$

iii) Data una successione di insiemi  $E_1 \subset E_2 \subset \dots \subset \dots$ , si ha

$$\mu\left(\bigcup_i E_i\right) = \sup_i \mu(E_i) = \lim_i \mu(E_i).$$

iv) Data una successione di insiemi  $E_1 \supset E_2 \supset \dots \supset \dots$  e  $\mu(E_1) < +\infty$ , si ha

$$\mu\left(\bigcap_i E_i\right) = \lim_i \mu(E_i).$$

**Esercizio** (Numerabile subaddittività). Dato  $E \in \mathcal{A}$ ,  $E \subset \bigcup_i E_i$  dove  $E_i \in \mathcal{A}$ . Allora

$$\mu(E) \leq \sum_i \mu(E_i).$$

**Dimostrazione** (Idea). Basta dimostrare che  $\mu\left(\bigcup_i E_i\right) \leq \sum_i \mu(E_i)$ . Infatti per quanto visto prima  $\mu(E) \leq \mu\left(\bigcup_i E_i\right)$ . Prima dimostriamo per induzione  $\mu\left(\bigcup_{i=1}^N E_i\right) \leq \sum_{i=1}^N \mu(E_i)$ .

Il passo base  $n = 2$  è stato visto al punto ii). Una volta dimostrata la proprietà sopra, si nota che  $\sum_{i=1}^N \mu(E_i)$  è limitata per ogni  $N$ , e dunque è limitato anche il suo limite, da cui la tesi.  $\square$

## 1.6.2 Funzioni misurabili rispetto alla misura di Lebesgue

Si ricorda che le funzioni *continue*, *semplici* e *semicontinue* sono classi di funzioni misurabili. Due osservazioni sulle funzioni semicontinue.

- Le funzioni semicontinue sono *boreliane*.
- La proprietà di misurabilità delle funzioni semicontinue è necessaria per l'enunciato della disuguaglianza di Jensen.

**Controesempio** (disuguaglianza di Jensen). Notiamo che l'ipotesi di semicontinuità inferiore della funzione  $f$  è necessaria per la validità della disuguaglianza di Jensen. Infatti, definiamo  $f$  come segue

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x \in (0, 1) \\ +\infty & \text{altrimenti} \end{cases}.$$

Osserviamo che la funzione  $f$  così definita è convessa ma non semicontinua inferiormente.

Ora definiamo la funzione  $u : X \rightarrow \mathbb{R}$  con  $X = (0, 2)$ , come la funzione costante di valore  $1/2$ . Calcoliamo l'integrale di  $u(x)$  su  $X$ .

$$\int_X u(x) dx = 1.$$

In tal caso vale  $f\left(\int_X u(x) dx\right) = +\infty$ . D'altra parte  $\int_X f \circ u dx = 0$ , dunque l'ipotesi di semicontinuità inferiore è necessaria.

**Fatto.** Date  $\varphi_1, \varphi_2$  funzioni semplici su  $\mathbb{R}$  con misura di Lebesgue. Allora  $\varphi_1 \vee \varphi_2$  e  $\varphi_1 \wedge \varphi_2$  sono ancora funzioni semplici.

**Lemma.** Data  $f: X \rightarrow [0, +\infty]$  misurabile

$$\int_X f \, d\mu = 0 \iff f = 0 \text{ q.o. su } X$$

**Dimostrazione.**

$\Rightarrow$  Dato che  $f$  è non negativa, il dominio  $X$  può essere riscritto come

$$X = \{x \in X \mid f(x) \geq 0\} = \{x \in X \mid f(x) > 0\} \cup \{x \in X \mid f(x) = 0\}$$

ricordiamo che  $(0, +\infty) = \bigcup_{n \geq 1} (\frac{1}{n}, +\infty)$ , dunque possiamo riscrivere una parte di  $X$  come segue e poi passare alle misure

$$\begin{aligned} \{x \in X \mid f(x) > 0\} &= \bigcup_{n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}} \left\{x \in X \mid f(x) \geq \frac{1}{n}\right\} \\ \implies \mu(\{x \in X \mid f(x) > 0\}) &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \mu\left(\left\{x \in X \mid f(x) \geq \frac{1}{n}\right\}\right) \end{aligned}$$

in questo modo otteniamo la seguente caratterizzazione dell'insieme su cui  $f$  è positiva

$$\mu(\{x \in X \mid f(x) > 0\}) > 0 \iff \exists \bar{n} \text{ tale che } \mu(\{x \in X \mid f(x) \geq 1/\bar{n}\}) > 0$$

A questo punto possiamo maggiorare come segue

$$0 = \int_X f \, d\mu \geq \int_{\{f \geq \frac{1}{n}\}} f \, d\mu \geq \frac{1}{n} \mu\left(\left\{x \mid f(x) \geq \frac{1}{n}\right\}\right).$$

da cui ricaviamo che  $\forall n$  vale

$$\mu\left(\left\{x \mid f(x) \geq \frac{1}{n}\right\}\right) = 0$$

e si conclude osservando che

$$\mu(\{x \mid f(x) > 0\}) = \lim_n \mu\left(\left\{x \mid f(x) \geq \frac{1}{n}\right\}\right) = 0$$

$\Leftarrow$  Dal fatto che  $f$  è positiva possiamo scrivere

$$\int_X f \, d\mu = \sup_{\substack{g \leq f \\ g \text{ semplice}}} \int_X g \, d\mu = \sup \sum_i \alpha_i \mu(E_i) = 0.$$

□

**Osservazione** (sup essenziale di funzioni misurabili). Data  $f$  misurabile, definiamo

$$\|f\|_{\infty, X} := \inf \{m \in [0, +\infty] \mid |f(x)| \leq m \text{ quasi ovunque}\}.$$

Se  $\|f\|_{\infty} < +\infty$ , allora diciamo che esiste una costante  $L > 0$  con  $L = \|f\|_{\infty, X}$ , tale che

$$|f(x)| \leq L$$

quasi ovunque. Infatti, per definizione di  $\inf$ ,  $L = \lim_n m_n$ , dove  $m_n$  verificano

$$|f(x)| \leq m_n \quad \forall x \in X \setminus N_m, \quad \mu(N_m) = 0.$$

Definiamo  $N = \bigcup_m N_m$ , da cui si ottiene

$$\mu(N) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(N_m) = 0.$$

Ovvero  $N$  è trascurabile. Preso  $x \in X \setminus N$ , vale

$$|f(x)| \leq m_n \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

### 1.6.3 Formula di cambio di variabile applicata a funzioni radiali

Sia  $f: [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  misurabile (di solito si richiede misurabile e positiva oppure sommabile). Allora per il teorema di cambio di variabili vale la seguente

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(|x|) \, dx = c_n \cdot \int_0^{+\infty} f(\rho) \rho^{n-1} \, d\rho,$$

dove  $c_n = n \mathcal{L}^n(\mathcal{B}(0, 1))$ .

Applichiamo questa formula alla stima di integrali di funzioni positive.

**Esercizio.** Sia

$$\psi(x) = \frac{1}{\|x\|^\alpha}$$

su  $\mathcal{B}(0, 1) \in \mathbb{R}^n$ . Notiamo che  $\psi(x) = f(\|x\|)$  con  $f = 1/t^\alpha$ . Usiamo la formula appena introdotta per determinare gli  $\alpha \in \mathbb{R}$  per i quali  $\psi$  è sommabile su  $\mathcal{B}(0, 1)$ .

$$\int_{\mathcal{B}(0,1)} \psi(x) \, dx = c_n \int_0^1 \frac{1}{\rho^\alpha} \rho^{n-1} \, d\rho = c_n \int_0^1 \rho^{n-1-\alpha} \, d\rho = \begin{cases} \log(\rho) & n = \alpha \\ \frac{\rho^{n-\alpha}}{n-\alpha} & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Concludendo,

$$\int_{\mathcal{B}(0,1)} \frac{1}{\|x\|^\alpha} \, dx < +\infty \iff n > \alpha.$$

**Esercizio.** Con passaggi analoghi al precedente otteniamo

$$\int_{\mathbb{R}^n \setminus \mathcal{B}(0,1)} \frac{1}{\|x\|^\alpha} \, dx < +\infty \iff n < \alpha.$$

**Esercizio.** Vediamo per quali valori di  $\beta$  il seguente integrale converge

$$\int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{(\|x\| + \|x\|^2)^\beta} \, dx$$

Vale la seguente catena di uguaglianze.

$$\int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{(\|x\| + \|x\|^2)^\beta} \, dx = \int_{\mathcal{B}(0,1)} \frac{1}{(\|x\| + \|x\|^2)^\beta} \, dx + \int_{\mathbb{R}^n \setminus \mathcal{B}(0,1)} \frac{1}{(\|x\| + \|x\|^2)^\beta} \, dx.$$

Studiamo separatamente i due pezzi dell'integrale.

$$\begin{aligned} \int_{B(0,1)} \frac{1}{(\|x\| + \|x\|^2)^\beta} dx &= c_n \int_{B(0,1)} \frac{1}{(\rho + \rho^2)^\beta} \rho^{n-1} d\rho = c_n \int_0^1 \frac{1}{\rho^\beta} \cdot \frac{\rho^{n-1}}{(1+\rho)^\beta} d\rho \\ &\approx \int_0^1 \rho^{n-1-\beta} d\rho < +\infty \iff \beta < n. \end{aligned}$$

Inoltre,

$$\int_{\mathbb{R}^n \setminus B(0,1)} \frac{1}{(\|x\| + \|x\|^2)^\beta} dx = \int_{\mathbb{R}^n \setminus B(0,1)} \frac{1}{\rho^{2\beta}} \cdot \frac{\rho^{n-1}}{(\frac{1}{\rho} + 1)^\beta} d\rho \approx \int_1^{+\infty} \frac{\rho^{n-1}}{\rho^{2\beta}} d\rho < +\infty \iff 2\beta > n.$$

In conclusione, l'integrale è finito se  $n > \beta > n/2$ .

**Esercizio.** Studiare l'insieme di finitezza al variare del parametro  $\alpha$  dell'integrale

$$\int_{[0,1]^n} \frac{1}{\|x\|_1^\alpha} dx.$$

Osserviamo che la norma 1 e 2 sono legate dalle seguenti disuguaglianze

$$\frac{\|x\|_1}{n} \leq \|x\|_2 \leq \|x\|_1.$$

Studiamo una maggiorazione per l'integrale

$$\int_{[0,1]^n} \frac{1}{\|x\|_1^\alpha} dx \leq \int_{[0,1]^n} \frac{1}{\|x\|^\alpha} dx \leq \int_{B(0,\sqrt{n})} \frac{1}{\|x\|^\alpha} dx < +\infty \iff \alpha < n,$$

dunque

$$\int_{[0,1]^n} \frac{1}{\|x\|_1^\alpha} dx < +\infty \quad \text{se } \alpha < n.$$

Vediamo ora una minorazione.

$$\int_{[0,1]^n} \frac{1}{\|x\|_1^\alpha} dx = \frac{1}{2^n} \int_{[-1,1]^n} \frac{1}{\|x\|_1^\alpha} dx \geq \frac{1}{2^n} \int_{B(0,1)} \frac{1}{\|x\|_1^\alpha} dx \approx \int_{B(0,1)} \frac{1}{\|x\|^\alpha} dx < +\infty \iff \alpha < n.$$

Dunque l'integrale  $\int_{[0,1]^n} \frac{1}{\|x\|_1^\alpha} dx$  converge se e solo se  $\alpha < n$ .

**Esercizi per casa.**

(1) Dimostrare che date  $f, g$  misurabili ed  $r, p_1, p_2 > 0$  tali che  $1/r = 1/p_1 + 1/p_2$ . Allora vale

$$\|f \cdot g\|_r \leq \|f\|_{p_1} \cdot \|g\|_{p_2}.$$

*Suggerimento.* Usare Hölder osservando che  $1 = \frac{r}{p_1} + \frac{r}{p_2} = \frac{1}{(p_1/r)} + \frac{1}{(p_2/r)}.$

**Dimostrazione.** Vale quanto segue.

$$\begin{aligned} \|f \cdot g\|_r^r &= \int_X |f \cdot g|^r d\mu = \int_X |f^r| \cdot |g^r| d\mu \stackrel{\text{Holder}}{\leq} \|f^r\|_{p_1/r} \cdot \|f^r\|_{p_2/r} \\ &= \left( \int_X |f|^{r \cdot p_1/r} \right)^{r/p_1} \cdot \left( \int_X |g|^{r \cdot p_2/r} \right)^{r/p_2} = \|f\|_{p_1}^r \cdot \|g\|_{p_2}^r = (\|f\|_{p_1} \cdot \|g\|_{p_2})^r \\ &\implies \|f \cdot g\|_r \leq \|f\|_{p_1} \cdot \|g\|_{p_2}. \end{aligned}$$

□

(2) Dimostrare che date  $f_1, \dots, f_n$  misurabili e  $p_i > 0$  tali che  $1/p_1 + \dots + 1/p_n = 1$  si ha

$$\|f_1 \cdots f_n\|_1 \leq \|f_1\|_{p_1} \cdots \|f_n\|_{p_n}.$$

*Suggerimento.* Fare il primo passo dell'induzione e usare la formula precedente scegliendo  $r$  in modo corretto.

**Dimostrazione.** Dimostriamo per induzione la seguente proprietà più generale.

Siano  $f_1, \dots, f_n$  misurabili e  $r > 1$ . Allora, per i  $p_i > 0$  tali che  $1/p_1 + \dots + 1/p_n = r$  si ha

$$\|f_1 \cdots f_n\|_r \leq \|f_1\|_{p_1} \cdots \|f_n\|_{p_n}.$$

*Passo base.* Vero per il punto (1).

*Passo induttivo*  $[n-1 \Rightarrow n]$ . Supponiamo di aver dimostrato per ogni  $r > 1$  la disuguaglianza sopra. Allora

$$\|f_1 \cdots f_n\|_r = \|(f_1 \cdots f_{n-1}) \cdot f_n\|_r \stackrel{(1)}{\leq} \|f_1 \cdots f_{n-1}\|_p \cdot \|f_n\|_{p_n}, \quad \text{dove } r = 1/p + 1/p_n.$$

Notando che  $1/p = 1/r - 1/p_{n-1} = 1/p_1 + \dots + 1/p_{n-1}$  e usando l'ipotesi induttiva otteniamo la tesi.  $\square$



# Capitolo 2

## Spazi $L^p$ e convoluzione

### 2.1 Disuguaglianze

#### 2.1.1 Disuguaglianza di Jensen

Ricordiamo che una funzione  $f: \mathbb{R}^d \rightarrow [-\infty, +\infty]$  è **convessa** se e solo se dati  $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}^d$  e  $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in [0, 1]$  con  $\sum_i \lambda_i = 1$  abbiamo che

$$f\left(\sum_i \lambda_i x_i\right) \leq \sum_i \lambda_i f(x_i)$$

**Definizione.** Una funzione  $f: X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  si dice **semicontinua inferiormente nel punto**  $x_0 \in X$  se per ogni  $t \in \mathbb{R}$  con  $t < f(x_0)$  esiste  $U \in \mathcal{I}(x_0)$  tale che  $t < f(y)$  per ogni  $y \in U$ . Infine  $f$  si dice **semicontinua inferiormente su  $X$**  se lo è in ogni  $x \in X$ .

**Proprietà.** Dalla definizione segue che  $f: X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  è semicontinua inferiormente in  $x_0 \in X$  se e solo se

$$f(x) \leq \sup_{U \in \mathcal{I}(x_0)} \inf_{y \in U} f(y) = \liminf_{x \rightarrow x_0} f(x).$$

**Teorema (Jensen).** Dato  $(X, \mathcal{A}, \mu)$  con  $\mu(X) = 1$  e  $f: \mathbb{R}^d \rightarrow [-\infty, +\infty]$  convessa e semi-continua inferiormente (S.C.I.) e  $u: X \rightarrow \mathbb{R}^d$  sommabile allora vale

$$f\left(\int_X u \, d\mu\right) \leq \int_X f \circ u \, d\mu$$

e  $f \circ u$  è integrabile.

**Osservazioni.**

- $(f \circ u)^-$  ha integrale finito.
- Interpretando  $\mu$  come probabilità si riscrive come  $\mathbb{E}[f \circ \mu] \geq f(\mathbb{E}[u])$ .

- Se  $u$  è una funzione semplice, cioè  $u = \sum_i y_i \cdot \mathbb{1}_{E_i}$  con  $E_i$  disgiunti e  $\bigcup E_i = X$  allora posti  $\lambda_i = \mu(E_i)$  abbiamo

$$\int_X f \circ u \, d\mu = \int_X \sum_i f(y_i) \cdot \mathbb{1}_{E_i} \, d\mu = \sum_i \lambda_i f(y_i) \geq f\left(\sum_i \lambda_i y_i\right) = f\left(\int_X u \, d\mu\right)$$

Questo ci darebbe una strada per dimostrare in generale per passi il teorema di Jensen ma in realtà si presentano vari problemi tecnici.

- Ogni funzione convessa e S.C.I. su  $\Omega$  convesso in  $\mathbb{R}^d$  si estende a  $\tilde{f}: \mathbb{R}^d \rightarrow (-\infty, +\infty]$  convessa e S.C.I.; ad esempio se  $\Omega = (0, +\infty)$

$$f(y) = \frac{1}{y} \quad \rightsquigarrow \quad \tilde{f}(y) = \begin{cases} +\infty & y \leq 0 \\ \frac{1}{y} & y > 0 \end{cases}$$

- L'ipotesi di semi-continuità è non banale perché le funzioni convesse sono continue solo se a valori in  $\mathbb{R}$ , ad esempio per  $k$  costante la funzione

$$f(y) := \begin{cases} k & y < 0 \\ +\infty & y \geq 0 \end{cases}$$

è convessa ma non semi-continua inferiormente (e neanche continua).

**Dimostrazione.** Poniamo  $y_0 := \int_X u \, d\mu$ , allora la tesi diventa

$$f\left(\int_X u \, d\mu\right) \leq \int_X f \circ u \, d\mu \quad \Longleftrightarrow \quad f(y_0) \leq \int_X f \circ u \, d\mu.$$

Prendiamo  $\phi: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$  affine (ovvero  $\phi(y) = a \cdot y + b$  con  $a \in \mathbb{R}^d$  e  $b \in \mathbb{R}$ ) tale che  $\phi \leq f$ , allora

$$\int_X f \circ u \, d\mu \underset{(*)}{\geq} \int_X \phi \circ u \, d\mu = \int_X a \cdot u + b \, d\mu = ay_0 + b = \phi(y_0)$$

Concludiamo usando il seguente lemma di caratterizzazione delle funzioni convesse ed S.C.I.

**Lemma.** Ogni  $f: \mathbb{R}^d \rightarrow (-\infty, +\infty]$  convessa e S.C.I. è tale che

$$\forall y_0 \in \mathbb{R}^d \quad \sup_{\substack{\phi \text{ affine} \\ \phi \leq f}} \phi(y_0) = f(y_0)$$

Infine, si dimostra che  $(f \circ u)^-$  è integrabile. Dal fatto che  $f \circ u \geq \phi \circ u$  con  $\phi \circ u$  sommabile<sup>1</sup> si ha che

$$\begin{aligned} &\implies (f \circ u)^- \leq (\phi \circ u)^- \\ &\implies (f \circ u)^- \quad \text{è sommabile} \\ &\implies f \circ u \quad \text{è integrabile} \end{aligned}$$

---

<sup>1</sup> $u$  è sommabile e  $\phi$  è affine.

□

**Nota.** Nel caso  $d = 1$  e  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  possiamo usare il fatto che le funzioni convesse ammettono sempre derivata destra o sinistra, il sup diventa un massimo e ci basta prendere come  $\phi$  la retta tangente in  $(y_0, f(y_0))$  o una con pendenza compresa tra  $f'(y_0^-)$  e  $f'(y_0^+)$ .

**Definizione.** Dati  $p_1, p_2 \in [1, +\infty]$  diciamo che sono **coniugati** se

$$\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} = 1$$

convenendo che  $1/\infty = 0$ .

Fissiamo  $p \in [1, +\infty]$  detto *esponente di sommabilità* e sia  $(X, \mathcal{A}, \mu)$  come sempre.

**Definizione.** Data  $f: X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  o  $\mathbb{R}^d$  misurabile, la **norma**  $p$  di  $f$  è

$$\|f\|_p := \left( \int_X |f|^p d\mu \right)^{1/p} \quad p \in [1, +\infty)$$

mentre per  $p = +\infty$  poniamo

$$\|f\|_\infty = \text{supess } f(x) := \inf \{m \in [0, +\infty] \mid |f(x)| \leq m \text{ per } \mu\text{-q.o. } x\}.$$

**Nota.** In realtà queste sono solo delle semi-norme.

- $\|f\|_\infty \leq \sup_{x \in X} |f(x)|$
- $\|f\|_p = 0 \iff f = 0$  quasi ovunque

**Dimostrazione.**

$\Rightarrow$  [TODO: Facile ma non ovvia]

$\Leftarrow$  Ovvio.

□

- Se  $f_1 = f_2$  quasi ovunque  $\implies \|f_1\|_p = \|f_2\|_p$ .

**Dimostrazione.**  $f_1 = f_2$  quasi ovunque  $\implies \exists D \subset X$  con  $\mu(D) = 0$  tale che  $f_1(x) = f_2(x)$  su  $X \setminus D$ , usiamo il fatto che l'integrale non cambia se modifichiamo la funzione su un insieme di misura nulla

$$\|f_1\|_p^p = \int_X |f_1|^p d\mu = \int_{X \setminus D} |f_1|^p d\mu = \int_{X \setminus D} |f_2|^p d\mu = \int_X |f_2|^p d\mu = \|f_2\|_p^p$$

□

### 2.1.2 Disuguaglianza di Young

**Proposizione.** Per ogni  $a_1, a_2 \geq 0$  e  $\lambda_1, \lambda_2 > 0$  con  $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$  abbiamo che

$$a_1^{\lambda_1} a_2^{\lambda_2} \leq \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2$$

inoltre vale l'uguale se e solo se  $a_1 = a_2$ .

**Dimostrazione.** Se  $a_1$  o  $a_2 = 0$  allora è ovvia. Supponiamo dunque  $a_1, a_2 > 0$ . Per la concavità del logaritmo abbiamo

$$\lambda_1 \log a_1 + \lambda_2 \log a_2 \leq \log(\lambda_1 a_2 + \lambda_2 a_2), \iff \log(a_1^{\lambda_1} a_2^{\lambda_2}) \leq \log(\lambda_1 a_2 + \lambda_2 a_2)$$

e dalla monotonia

$$a_1^{\lambda_1} a_2^{\lambda_2} \leq \lambda_1 a_2 + \lambda_2 a_2.$$

Infine, il se e solo se per l'uguale segue dal fatto che il logaritmo è *strettamente concavo*.  $\square$

### 2.1.3 Disuguaglianza di Hölder

**Proposizione.** Date  $f_1, f_2: X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  o  $\mathbb{R}^d$  e  $p_1, p_2$  esponenti coniugati allora

$$\int_X |f_1| \cdot |f_2| d\mu \leq \|f_1\|_{p_1} \cdot \|f_2\|_{p_2}$$

vale anche per  $p = +\infty$  convenendo che  $+\infty \cdot 0 = 0$  nel membro di destra.

**Dimostrazione.** Se  $\|f_1\|_{p_1} = 0$  o  $+\infty$  e anche  $\|f_2\|_{p_2} = 0$  o  $+\infty$  la dimostrazione è immediata, supponiamo dunque  $\|f_1\|_{p_1}, \|f_2\|_{p_2} > 0$  e finiti.

- *Caso 1:* se  $p_1 = 1, p_2 = +\infty$  allora

$$\int_X |f_1| \cdot |f_2| d\mu \leq \int_X |f_1| \cdot \|f_2\|_{\infty} d\mu = \|f_2\|_{\infty} \cdot \int_X |f_1| d\mu = \|f_2\|_{\infty} \cdot \|f_1\|_1$$

- *Caso 2:* se  $1 < p_1, p_2 < +\infty$ , introduciamo un parametro  $\gamma > 0$  allora

$$\int_X |f_1| \cdot |f_2| d\mu = \int_X (\gamma^{p_1} \cdot |f_1|^{p_1})^{1/p_1} \cdot (\gamma^{-p_2} \cdot |f_2|^{p_2})^{1/p_2} d\mu$$

a questo punto chiamiamo per comodità  $g_1 := \gamma^{p_1} \cdot |f_1|^{p_1}$ ,  $\lambda_1 := 1/p_1$  e  $g_2 := \gamma^{-p_2} \cdot |f_2|^{p_2}$ ,  $\lambda_2 := 1/p_2$  da cui

$$\begin{aligned} &= \int_X g_1^{\lambda_1} \cdot g_2^{\lambda_2} d\mu \stackrel{\text{Young}}{\leq} \int_X \lambda_1 g_1 + \lambda_2 g_2 d\mu = \lambda_1 \gamma^{p_1} \int_X |f_1|^{p_1} d\mu + \lambda_2 \gamma^{-p_2} \int_X |f_2|^{p_2} d\mu \\ &= \lambda_1 \gamma^{p_1} \cdot \|f_1\|_{p_1}^{p_1} + \lambda_2 \gamma^{-p_2} \cdot \|f_2\|_{p_2}^{p_2} \end{aligned}$$

posti ora  $a_1 := \gamma^{p_1} \|f_1\|_{p_1}^{p_1}$  e  $a_2 := \gamma^{-p_2} \|f_2\|_{p_2}^{p_2}$ , per  $\gamma \rightarrow 0$  abbiamo che  $a_1 \rightarrow 0, a_2 \rightarrow +\infty$  mentre per  $\gamma \rightarrow +\infty$  abbiamo che  $a_1 \rightarrow +\infty, a_2 \rightarrow 0$  dunque per il teorema del valor medio esisterà  $\gamma$  tale che  $a_1 = a_2$ , ma allora siamo nel caso dell'uguaglianza per la disuguaglianza di Young dunque

$$\lambda_1 \gamma^{p_1} \|f_1\|_{p_1}^{p_1} + \lambda_2 \gamma^{-p_2} \|f_2\|_{p_2}^{p_2} = \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 = a_1^{\lambda_1} \cdot a_2^{\lambda_2} = \|f_1\|_{p_1} \cdot \|f_2\|_{p_2}$$

$\square$

**Osservazione.** La disuguaglianza di Hölder può essere generalizzata a  $n$  funzioni, date  $f_1, \dots, f_n$  e  $p_1, \dots, p_n$  con  $\frac{1}{p_1} + \dots + \frac{1}{p_n} = 1$  allora

$$\int_X \prod_i^n |f_i| d\mu \leq \prod_i^n \|f_i\|_{p_i}$$

### 2.1.4 Disuguaglianza di Minkowski

**Proposizione.** Consideriamo sempre  $(X, \mathcal{A}, \mu)$  e sia  $p \in [1, +\infty]$  un esponente di sommabilità ed  $f_1, f_2: X \rightarrow \mathbb{R}$  oppure  $\mathbb{R}^d$ . Allora vale la disuguaglianza triangolare

$$\|f_1 + f_2\|_p \leq \|f_1\|_p + \|f_2\|_p.$$

**Dimostrazione.**

- *Caso 1:* se  $p = 1$  o  $p = +\infty$ , allora svolgiamo il calcolo diretto

- Se  $p = 1$

$$\|f_1 + f_2\|_1 = \int_X |f_1 + f_2| d\mu \leq \int_X |f_1| + |f_2| d\mu = \int_X |f_1| d\mu + \int_X |f_2| d\mu = \|f_1\|_1 + \|f_2\|_1$$

- Se  $p = +\infty$  allora poniamo  $D$  l'insieme di *misura nulla* che realizza su  $X \setminus D$  il  $\sup_{X \setminus D} |f_1 + f_2|$  ovvero  $\sup_{X \setminus D} |f_1 + f_2| = \sup_{X \setminus D} |f_1 + f_2|$

$$\begin{aligned} \|f_1 + f_2\|_\infty &= \sup_{X \setminus D} |f_1 + f_2| = \sup_{X \setminus D} |f_1 + f_2| \leq \sup_{X \setminus D} (|f_1| + |f_2|) \\ &= \sup_{X \setminus D} |f_1| + \sup_{X \setminus D} |f_2| = \sup_{X \setminus D} |f_1| + \sup_{X \setminus D} |f_2| = \|f_1\|_\infty + \|f_2\|_\infty \end{aligned}$$

- *Caso 2:* se  $1 < p < +\infty$  e  $0 < \|f_1 + f_2\|_p < +\infty$

$$\begin{aligned} \|f_1 + f_2\|_p^p &= \int_X |f_1 + f_2|^p d\mu \leq \int_X (|f_1| + |f_2|) \cdot |f_1 + f_2|^{p-1} d\mu = \\ &= \int_X |f_1| \cdot |f_1 + f_2|^{p-1} d\mu + \int_X |f_2| \cdot |f_1 + f_2|^{p-1} d\mu = \end{aligned}$$

ora introduciamo  $q$  esponente coniugato di  $p$  e notiamo

$$q = \frac{p}{p-1} \quad \text{e} \quad \| |f|^{p-1} \|_q = \|f\|_p^{p-1}$$

ora continuiamo a svolgere il conto di prima usando Hölder con esponenti  $p$  e  $q$

$$\begin{aligned} &\stackrel{\text{Hölder}}{\leq} \|f_1\|_p \cdot \| |f_1 + f_2|^{p-1} \|_q + \|f_2\|_p \cdot \| |f_1 + f_2|^{p-1} \|_q = \\ &= (\|f_1\|_p + \|f_2\|_p) \cdot \| |f_1 + f_2|^{p-1} \|_q = (\|f_1\|_p + \|f_2\|_p) \cdot \|f_1 + f_2\|_p^{p-1} \end{aligned}$$

infine per l'ipotesi  $\|f_1 + f_2\|_p > 0$  possiamo dividere per l'ultimo fattore e ottenere la tesi.

- *Caso 3:* se  $1 < p < +\infty$  ma  $\|f_1 + f_2\| = 0$  o  $+\infty$  allora se  $\|f_1 + f_2\| = 0$  la disuguaglianza è banale mentre se  $\|f_1 + f_2\| = +\infty$  si usa la seguente disuguaglianza

$$\|f_1 + f_2\|_p^p \leq 2^{p-1} (\|f_1\|_p^p + \|f_2\|_p^p),$$

che si ottiene usando la convessità della funzione  $x \mapsto x^p$  e la combinazione affine  $\frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_2$  infatti

$$\left(\frac{x}{2} + \frac{y}{2}\right)^p \leq \frac{1}{2}x^p + \frac{1}{2}y^p \implies \frac{1}{2^{p-1}}(x+y)^p \leq x^p + y^p \implies (x+y)^p \leq 2^{p-1}(x^p + y^p).$$

□

<sup>1</sup>Si usa questa strategia perché il  $\sup$  non soddisfa le proprietà del modulo e della somma del  $\sup$ .

## 2.2 Costruzione spazi $L^p$

Fissiamo  $(X, \mathcal{A}, \mu)$  come sempre.

**Definizione.** Sia  $\mathcal{L}^p$  l'insieme delle funzioni  $f: X \rightarrow \mathbb{R}$  o  $\mathbb{R}^d$  misurabili tali che  $\|f\|_p < +\infty$ .

**Osservazioni.**

- $\mathcal{L}^p$  è un sottospazio vettoriale dello spazio vettoriale dato da  $\{f: X \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ misurabile}\}$  e  $\|\cdot\|_p$  è una semi-norma.

**Dimostrazione.**

- $\mathcal{L}^p$  è chiuso per somma e moltiplicazione per scalari.
- Dalla definizione segue subito  $\|\lambda f\|_p = |\lambda| \cdot \|f\|_p$  l'omogeneità della norma.
- Dalla disuguaglianza di Minkowski segue che  $\|\cdot\|_p$  è una semi-norma.
- In particolare non è una norma se  $\{0\} \subsetneq \{f \mid \|f\|_p = 0\}$  ovvero se  $\mathcal{A}$  contiene insiemi non vuoti di misura nulla.
- In generale dato  $V$  spazio vettoriale e  $\|\cdot\|$  semi-norma su  $V$  possiamo introdurre  $N := \{v \mid \|v\| = 0\}$ .  $N$  risulta essere un sottospazio di  $V$  e la norma data da  $\|[v]\| := \|v\|$  per  $[v] \in V/N$  è ben definita ed è proprio una norma su  $V/N$ .
- Nel caso della norma  $\|\cdot\|_p$  abbiamo che  $[f_1] = [f_2] \iff [f_1 - f_2] = 0 \iff f_1 - f_2 = 0$  quasi ovunque.

**Definizione.** Poniamo  $N := \{f \mid \|f\|_p = 0\}$  e definiamo gli **spazi  $L^p$**  come

$$L^p := \mathcal{L}^p / N = \mathcal{L}^p / \sim \quad \|[f]\|_p := \|f\|_p$$

**Notazione.** Ogni tanto serve precisare meglio l'insieme di partenza e di arrivo degli spazi  $L^p$  ed in tal caso useremo le seguenti notazioni

$$L^p = L^p(X) = L^p(X, \mu) = L^p(X, \mathcal{A}, \mu) = L^p(X, \mu; \mathbb{R}^d).$$

**Nota.** Nella pratica non si parla mai di “classi di funzioni” e si lavora direttamente parlando di “funzioni in  $L^p$ ”. Le “operazioni” comuni non creano problemi però in certi casi bisogna stare attenti di star lavorando con oggetti ben definiti. Ad esempio:

- Preso  $x_0 \in X$ , consideriamo l'insieme  $\{f \in L^p \mid f(x_0) = 0\}$ . Notiamo che non è un sottoinsieme ben definito (a meno che  $\mu(\{x_0\}) > 0$  ovvero che la misura sia atomica) di  $L^p$ , in quanto possiamo variare  $f$  su un insieme di misura nulla.
- Invece ad esempio il seguente insieme è ben definito

$$\left\{ f \in L^1 \mid \int_X f \, d\mu = 0 \right\}$$

## 2.3 Prodotto scalare su $L^2$

Dato  $f_1, f_2 \in L^2(X)$  si pone

$$\langle f_1, f_2 \rangle := \int_X f_1 \cdot f_2 \, d\mu.$$

**Osservazioni.**

- La definizione di  $\langle f_1, f_2 \rangle$  è ben posta, infatti basta far vedere che  $\int_X |f_1 f_2| \, d\mu < +\infty$  ma per Hölder abbiamo

$$\int_X |f_1 f_2| \, d\mu \leq \|f_1\|_2 \|f_2\|_2 < +\infty$$

- $\|f\|_2^2 = \langle f, f \rangle$  per ogni  $f \in L^2(X)$ .
- Inoltre,  $\left| \int_X f_1 f_2 \, d\mu \right| \leq \int_X |f_1 f_2| \, d\mu$  quindi

$$|\langle f_1, f_2 \rangle| \leq \|f_1\|_2 \|f_2\|_2 \quad (\text{Cauchy-Schwartz}).$$

- L'operatore  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  è un prodotto scalare definito positivo.

**Osservazioni.**

- Dato  $C$  spazio vettoriale reale con prodotto scalare  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ , allora  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  si ricava dalla norma associata  $\|\cdot\|$  tramite l'identità di polarizzazione:

$$\langle v_1, v_2 \rangle = \frac{1}{4} \left( \|v_1 + v_2\|^2 - \|v_1 - v_2\|^2 \right).$$

- Dato  $V$  come sopra, vale l'identità del parallelogramma:

$$\|v_1 + v_2\|^2 + \|v_1 - v_2\|^2 = 2\|v_1\|^2 + 2\|v_2\|^2 \quad \forall v_1, v_2 \in V.$$

Usando questa identità si dimostra che la norma di  $L^p$  deriva da un prodotto scalare solo per  $p = 2$ .

**Proprietà.** Sia  $V$  uno spazio vettoriale con norma  $\|\cdot\|$ . Allora vale l'identità del parallelogramma se e solo se  $\|\cdot\|$  deriva da un prodotto scalare.

**Esempio.** La norma di  $L^p([-1, 1])$ , deriva da un prodotto scalare solo per  $p = 2$ . Prendiamo  $f_1 = \mathbb{1}_{[-1, 0]}$  e  $f_2 = \mathbb{1}_{[0, +1]}$ . Allora

$$\begin{aligned} \|f_1 + f_2\|_p^p &= \int_{-1}^1 1 \, dx = 2 \Rightarrow \|f_1 + f_2\|_p = 2^{1/p} \\ \|f_1 - f_2\|_p &= \|f_1 + f_2\|_p = 2^{1/p}, \quad \|f_1\|_p = \|f_2\|_p = 1 \end{aligned}$$

Se vale l'identità del parallelogramma allora

$$\|f_1 + f_2\|_p^2 + \|f_1 - f_2\|_p^2 = 2\|f_1\|_p^2 + 2\|f_2\|_p^2$$

cioè

$$2^{2/p} + 2^{2/p} = 2 \cdot 1 + 2 \cdot 1 \iff p = 2.$$

Dunque l'unica possibilità per verificare la regola del parallelogramma è che  $p = 2$ .

**Domanda.** Per quali  $X, \mathcal{A}, \mu$  vale la stessa conclusione?

## 2.4 Completezza degli spazi $L^p$

Vediamo ora la proprietà più importante degli spazi  $L^p$ .

**Teorema.** Lo spazio  $L^p$  è completo per ogni  $p \in [1, +\infty]$ .

**Lemma 1.** Dato  $(Y, d)$  spazio metrico, allora

i) Ogni successione  $(y_n)$  tale che

$$\sum_{n=1}^{\infty} d(y_n, y_{n+1}) < +\infty$$

è di Cauchy.

ii) Se ogni  $(y_n)$  tale che  $\sum_{n=1}^{\infty} d(y_n, y_{n+1}) < +\infty$  converge allora  $Y$  è completo.

**Osservazione.** Non tutte le successioni di Cauchy  $(y_n)$  soddisfano quella condizione. Ad esempio la successione  $(-1)^n/n$  definita su  $\mathbb{R}$  è di Cauchy però

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{(-1)^{n+1}}{n+1} - \frac{(-1)^n}{n} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n^2+n} \approx \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \rightarrow \infty.$$

**Nota.** Per mostrare la completezza degli spazi  $L^p$  è sufficiente verificare la convergenza per una sottoclasse propria delle successioni di Cauchy.

**Dimostrazione.**

i) Vorremmo vedere che  $\forall \varepsilon \exists N$  tale che  $\forall m, n > N$  si ha  $d(y_m, y_n) \leq \varepsilon$ . Presi  $n > m$  abbiamo che

$$d(y_m, y_n) \leq \sum_{k=m}^{n-1} d(y_k, y_{k+1}) \leq \sum_{k=m}^{\infty} d(y_k, y_{k+1}) \rightarrow 0$$

in quanto *coda di una serie convergente*, quindi

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists m_\varepsilon \text{ tale che } \sum_{k=m_\varepsilon}^{\infty} d(y_k, y_{k+1}) < \varepsilon \implies \forall n > m \geq m_\varepsilon \quad d(y_m, y_n) \leq \varepsilon$$

ii) Sia  $(y_n)$  una successione di Cauchy, mostriamo che converge. Osserviamo che esiste una sottosuccessione  $(y_{n_k})$  tale che

$$\sum_{k=1}^{\infty} d(y_{n_k}, y_{n_{k+1}}) < +\infty.$$

Infatti,  $\forall k \exists n_k$  tale che  $\forall n, m \geq n_k \quad d(y_m, y_n) \leq 1/2^k$  e dunque  $d(y_{n_k}, y_{n_{k+1}}) \leq 1/2^k$ . Per ipotesi  $(y_{n_k})$  converge a un qualche  $y \in Y$ , da cui la tesi<sup>1</sup>.  $\square$

---

<sup>1</sup>Data una successione di Cauchy  $x_n$ , se una sottosuccessione  $x_{n_k}$  converge, allora converge anche la successione.



**Lemma 2.** Dato  $Y$  spazio normato, i seguenti fatti sono equivalenti

i)  $Y$  è completo.

ii) Per ogni successione  $(y_n)$  tale che  $\sum_{n=1}^{\infty} \|y_n\| < +\infty$ , la serie  $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$  converge <sup>1</sup>.

**Dimostrazione.** i)  $\Rightarrow$  ii). Dobbiamo mostrare che  $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$  è di Cauchy. Per il Lemma 1 basta mostrare che la successione

$$z_n := \sum_{k=1}^n y_k \quad \text{soddisfa la proprietà} \quad \sum_{n=1}^{\infty} d(z_{n+1}, z_n) < +\infty.$$

Espandendo la formula sopra

$$\sum_{n=1}^{\infty} d(z_{n+1}, z_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \left\| \sum_{k=1}^{n+1} y_k - \sum_{k=1}^n y_k \right\| = \sum_{n=1}^{\infty} \|y_{n+1}\|$$

che è finito per ipotesi.

ii)  $\Rightarrow$  i). Utilizziamo l'enunciato ii) del Lemma 2: mostriamo ogni  $(y_n)$  che soddisfa la proprietà  $\sum_n d(y_n, y_{n+1}) < +\infty$  converge. Definiamo la successione  $z_n := y_{n+1} - y_n$ . Per ipotesi, essendo che  $\sum_n \|z_n\| < +\infty$ , la serie  $\sum_n z_n$  converge. Indicando con  $L$  il limite della serie, abbiamo che  $\lim_n y_n = L + y_1$ .

□

**Lemma 3** (Minkowski per somme infinite). Date delle funzioni  $(g_n)$  positive su  $X$  allora

$$\left\| \sum_{n=1}^{\infty} g_n \right\|_p \leq \sum_{n=1}^{\infty} \|g_n\|_p$$

**Dimostrazione.** Per ogni  $N$  abbiamo che

$$\left\| \sum_{n=1}^N g_n \right\|_p^p \leq \left( \sum_{n=1}^N \|g_n\|_p \right)^p \leq \left( \sum_{n=1}^{\infty} \|g_n\|_p \right)^p$$

e per convergenza monotona possiamo passare il termine di sinistra al limite

$$\lim_N \left\| \sum_{n=1}^N g_n \right\|_p^p = \lim_N \int_X \left( \sum_{n=1}^N g_n \right)^p d\mu = \int_X \left( \lim_N \sum_{n=1}^N g_n \right)^p d\mu = \left\| \sum_{n=1}^{\infty} g_n \right\|_p^p$$

□

**Dimostrazione** (Completezza spazi  $L^p$ ).

- Se  $p = +\infty$ : si tratta di vedere che data  $(f_n)$  di Cauchy in  $L^\infty(X)$  esiste  $N$  con  $\mu(N) = 0$  tale che  $(f_n)$  è di Cauchy rispetto allora norma del sup in  $X \setminus N$  che sappiamo essere completa per il punto ii) del Lemma 2<sup>2</sup>.

Determiniamo un tale  $N$ . Dato che  $(f_n)$  è di Cauchy in  $L^\infty(X)$  significa che

$$\forall k \exists n_k: \forall n, m > n_k: \|f_n - f_m\|_{L^\infty} < \frac{1}{2^k}, \quad \|f_n - f_m\|_{L^\infty} = \sup_{X \setminus N_{n,m}^k} |f_n - f_m|$$

<sup>1</sup>Nel senso che esiste  $y$  tale che  $\left\| y - \sum_{n=1}^N y_n \right\| \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 0$ .

<sup>2</sup>Dato che se  $\sum \|y_n\|_\infty < +\infty \Rightarrow \sum y_n < +\infty$

per un certo insieme  $N_{n,m}^k$  di misura nulla. Definiamo  $N^k = \bigcup_{n,m \in \mathbb{N}} N_{n,m}^k$  che ha misura nulla perché unione misurabile di insiemi di misura nulla. Infine definiamo  $N := \bigcup_{k \in \mathbb{N}} N^k$  anch'esso di misura nulla che è l'insieme cercato.

- Se  $p < +\infty$ : per il Lemma 2, basta far vedere che data  $(f_n) \subset L^p(X)$  tale che  $\sum_{n=1}^{\infty} \|f_n\|_p < +\infty$  allora  $\sum_n f_n$  converge a qualche  $f \in L^p(X)$ .

La dimostrazione è suddivisa in tre passi, prima costruiamo  $f$ , poi mostriamo che  $f_n$  converge a  $f$  ed infine mostriamo  $f \in L^p(X)$ .

◦ *Passo 1.* Per ipotesi abbiamo

$$\infty > \sum_{n=1}^{\infty} \|f_n\|_p = \sum_{n=1}^{\infty} \| |f_n| \|_p \geq \left\| \sum_{n=1}^{\infty} |f_n| \right\|_p = \left( \int \left( \sum_{n=1}^{\infty} |f_n(x)| \right)^p d\mu(x) \right)^{1/p}$$

quindi  $\sum_{n=1}^{\infty} |f_n(x)| < +\infty$  per ogni  $x \in X \setminus E$  con  $\mu(E) = 0$ . Quindi  $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$  converge a qualche  $f(x)$  per ogni  $x \in X \setminus E$  ed a questo punto ci basta estendere  $f$  a zero in  $E$ <sup>1</sup>.

◦ *Passo 2.* Fissiamo  $N$  ed osserviamo che  $\forall x \in X \setminus E$  abbiamo

$$\left| f(x) - \sum_{n=1}^N f_n(x) \right| = \left| \sum_{n=N+1}^{\infty} f_n(x) \right| \leq \sum_{n=N+1}^{\infty} |f_n(x)|$$

da cui otteniamo

$$\left\| f - \sum_{n=1}^N f_n \right\|_p \leq \left\| \sum_{n=N+1}^{\infty} |f_n| \right\|_p \leq \sum_{n=N+1}^{\infty} \|f_n\|_p$$

dove l'ultimo termine è la coda di una serie convergente.

◦ *Passo 3.* In particolare rileggendo il passo precedente per  $N = 0$  otteniamo

$$\|f\|_p \leq \sum_{n=1}^{\infty} \|f_n\|_p < +\infty \implies f \in L^p$$

□

**Esercizio.**<sup>2</sup> Sia  $f: X \rightarrow [0, +\infty]$  allora  $\int_X f d\mu < +\infty \implies f(x) < +\infty$  per quasi ogni  $x$ .

**Dimostrazione.** Sia  $E := \{x \mid f(x) = +\infty\}$ , allora l'idea è che

$$\infty > \int_X f d\mu \geq \int_E f d\mu = +\infty \cdot \mu(E).$$

Oppure, osserviamo che  $\forall m \in [0, +\infty)$  abbiamo  $f \cdot \mathbb{1}_E \geq m \cdot \mathbb{1}_E$  per ogni  $x \in E$  quindi integrando ricaviamo

$$\underbrace{\int_E f d\mu}_I \geq m \cdot \mu(E) \implies \mu(E) \leq \frac{I}{m} \xrightarrow{m \rightarrow +\infty} 0$$

□

<sup>1</sup>Una costruzione alternativa degli spazi  $L^p$  potrebbe anche partire da *funzioni definite quasi ovunque*, questo ovvierebbe al problema di estendere a 0 la funzione  $f$  appena costruita. Però diventa più complicato mostrare di essere in uno spazio vettoriale poiché per esempio serve ridefinire  $+$  per funzioni definite quasi ovunque.

<sup>2</sup>In questo corso non è strettamente necessario ricordarsi come si facciano tutti questi esercizi di teoria della misura ma è bene saperli applicare in automatico quando serve.

## 2.5 Alcune proprietà viste a esercitazione degli spazi $L^p$

### 2.5.1 Confrontabilità degli spazi di $L^p$

**Osservazioni.** Valgono le seguenti

- Sia  $X \in \mathbb{R}^n$ ,  $\mu$  misura di Lebesgue e  $1 \leq p_1 < p_2 \leq +\infty$ . In generale non posso confrontare gli spazi  $L^p$ . Tuttavia, se  $\mu(X) < +\infty$ , allora

$$L^{p_2}(X) \subset L^{p_1}(X) \quad \text{se } p_1 < p_2.$$

- Dato  $Y \in L^p(X)$  un sottoinsieme che eredita la norma  $\|\cdot\|_{L^p}$ , allora  $Y$  è completo  $\iff Y$  è chiuso.
- Negli spazi  $L^p$  i sottoinsiemi chiusi e limitati non sono compatti. In particolare, le palle  $Y = \{f \in L^p \mid \|f\|_{L^p} \leq 1\}$  non sono compatte.

### 2.5.2 Separabilità degli spazi $L^p$

**Proposizione.** Si ha che  $L^p(\mathbb{R}^d, \mu)$  con  $\mu$  la misura di Lebesgue, è separabile se e solo se  $p \neq +\infty$ . Lo stesso risultato vale per  $\ell^p$ .

**Osservazione.** La proposizione è valida anche per  $L^p(X, \mu)$  con  $X \subset \mathbb{R}^d$  aperto.

Sia  $1 \leq p < +\infty$ ,  $L^p(\mathbb{R}^d, \mu)$  con  $\mu$  la misura di Lebesgue. Le funzioni semplici costituite da somme finite di insiemi di misura finita sono dense in  $L^p(\mathbb{R}^d)$ .

Prendiamo una base numerabile di  $\mathbb{R}^d$  e la indichiamo con  $\mathcal{B}$ . L'insieme

$$Y = \left\{ \sum_{i=1}^n \alpha_i \mathbb{1}_{B_i} \mid B_i \in \mathcal{B}, \alpha_i \in \mathbb{Q} \right\}$$

è numerabile. Vediamo che è denso in  $L^p(\mathbb{R}^d)$ .

*Idea.* È sufficiente approssimare le funzioni semplici a somma finita  $\sum_{i=1}^N \alpha_i \mathbb{1}_{E_i}$ . In particolare, ci basta approssimare  $\alpha \cdot \mathbb{1}_E$ . Essendo  $\alpha \in \mathbb{R}$  troviamo una successione di razionali  $\alpha_j$  tali che  $\alpha_j \xrightarrow{j \rightarrow \infty} \alpha$ . Dunque, rimane da approssimare l'insieme  $E$ .

Fissiamo  $E$  e supponiamo dapprima  $E$  aperto. Possiamo scrivere  $E$  come unione arbitraria di elementi della base  $\mathcal{B}$

$$E = \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i.$$

Per approssimare  $E$  consideriamo gli insiemi  $E_N = \bigcup_{i=1}^N B_i$ . Otteniamo  $|E| = \lim_N |E_N|$ , da cui  $|E \setminus E_N| \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} 0$ . Concludiamo notando che il caso  $E$  arbitrario si fa approssimandolo con una famiglia di aperti.

Per  $\ell^p$  con  $p < +\infty$  definiamo

$$Y = \{ \{x_n\} \mid x_n = 0 \text{ definitivamente, } x_n \in \mathbb{Q} \}$$

e verifico che è numerabile e separabile.

**Domanda.** Cosa succede per  $p = +\infty$ ?

Consideriamo  $L^\infty([0, +\infty], \mu)$  con  $\mu$  di Lebesgue e  $E_n = [n, n+1]$ . Definiamo l'insieme

$$Z = \left\{ \forall J \subset \mathbb{N} \quad u = \sum_{j \in J} \mathbb{1}_{E_j} \right\}.$$

$Z$  ha la cardinalità delle parti di  $\mathbb{N}$  cioè è più che numerabile. Osserviamo che per ogni  $u, v \in Z$ ,  $u \neq v$  si ha che  $\|u - v\|_{L^\infty(\mathbb{R})} = 1$ . Se per assurdo esistesse un insieme denso e numerabile  $D$  in  $L^\infty$ , per definizione di insieme denso dovremmo trovare per ogni palla di raggio minore di 1 e centro in un qualsiasi elemento di  $Z$ , un elemento di  $D$ . Ma questo è impossibile in quanto  $D$  ha cardinalità numerabile e  $Z$  la cardinalità del continuo.

Vediamo che  $l^\infty$  non è separabile. Sia  $Y = \{\underline{x}^k\}_{k \in \mathbb{N}}$ , allora definiamo  $\underline{z} \in l^\infty$  come segue

$$z_n = \begin{cases} 0 & \text{se } |x_n^n| > 1 \\ 2 & \text{se } |x_n^n| \leq 1 \end{cases}$$

In questo modo otteniamo  $\|\underline{x}^k - \underline{z}\|_{l^\infty} \geq 1$  per ogni  $k$ , dunque  $\{\underline{x}^k\}_k$  non può essere denso.

## 2.6 Nozioni di convergenza per successioni di funzioni

Fissiamo  $X, \mathcal{A}, \mu$  e prendiamo  $f, f_n: X \rightarrow \mathbb{R}$  (o  $\mathbb{R}^k$ ) misurabili.

**Definizione.** Riportiamo le definizioni di alcune nozioni di convergenza.

- **Uniforme** :  $\forall \varepsilon \exists n_\varepsilon$  tale che  $\|f - f_n\| < \varepsilon \quad \forall n > n_\varepsilon$ .
- **Puntuale** :  $f_n(x) \rightarrow f(x) \quad \forall x \in X$ .
- **Puntuale  $\mu$ -quasi ovunque** :  $f_n(x) \rightarrow f(x)$  per  $\mu$ -q.o.  $x \in X$ .
- **In  $L^p$**  :  $\|f_n - f\|_p \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ .
- **In misura** :  $\forall \varepsilon > 0 \quad \mu(\{x \mid |f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon\}) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ .

**Osservazione.** Abbiamo le seguenti implicazioni ovvie delle diverse nozioni di convergenza:

$$\text{uniforme} \Rightarrow \text{puntuale} \Rightarrow \text{puntuale } \mu \text{ q.o.}$$

**Proposizione.** Valgono le seguenti.

- i) Data  $f_n \rightarrow f$  q.o. e  $\mu(X) < +\infty$ , allora  $f_n \rightarrow f$  in misura.
- ii) (*Severini-Egorov*): Data  $f_n \rightarrow f$  q.o. e  $\mu(X) < +\infty$ , allora  $\forall \delta > 0$  esiste  $E \in \mathcal{A}$  tale che  $\mu(E) < \delta$  e  $f_n \rightarrow f$  uniformemente su  $X \setminus E$ .
- iii)  $f_n \rightarrow f$  in  $L^p$ ,  $p < +\infty$ , allora  $f_n \rightarrow f$  in misura.
- iii')  $f_n \rightarrow f \in L^\infty$ , allora  $\exists E$  tale che  $\mu(E) = 0$  e  $f_n \rightarrow f$  uniformemente su  $X \setminus E$ .
- iv)  $f_n \rightarrow f$  in misura, allora  $\exists n_k$  tale che  $f_{n_k} \rightarrow f$   $\mu$ -q.o.
- v)  $f_n \rightarrow f$  in  $L^p$ , allora  $\exists n_k$  tale che  $f_{n_k} \rightarrow f$   $\mu$ -q.o.

**Osservazione.** In i) e ii) l'ipotesi  $\mu(X) < +\infty$  è necessaria. Infatti, preso  $X = \mathbb{R}$  e  $f_n = \mathbb{1}_{[n, +\infty)}$  si ha che  $f_n \rightarrow 0$  ovunque ma  $f_n$  non converge a 0 in misura, e  $f_n$  non converge a 0 uniformemente in  $\mathbb{R} \setminus E$  per ogni  $E$  di misura finita.

**Lemma** (disuguaglianza di Markov). Data  $g: X \rightarrow [0, +\infty]$  misurabile e  $m > 0$  si ha

$$\mu(\{x \in X \mid g(x) \geq m\}) \leq \frac{1}{m} \int_X g \, d\mu$$

**Dimostrazione.** Poniamo  $E := \{x \in X \mid g(x) \geq m\}$ . Osserviamo che  $g \geq m \cdot \mathbb{1}_E$ . Dunque vale

$$\int_X g \, d\mu \geq \int_X m \cdot \mathbb{1}_E \, d\mu = m \cdot \mu(\{x \in X \mid g(x) \geq m\}).$$

□

**Lemma** (Borel-Cantelli). Dati  $(E_n) \subset \mathcal{A}$  tali che  $\sum \mu(E_n) < +\infty$ , l'insieme

$$E := \{x \in X \mid x \in E_n \text{ frequentemente}\}$$

ha misura nulla. Cioè per  $\mu$ -q.o.  $x$  vale  $x \notin E_n$  definitivamente (in  $n$ .)

**Dimostrazione.** Osserviamo che

$$E = \bigcap_{m=1}^{\infty} \underbrace{\left( \bigcup_{n=m}^{\infty} E_n \right)}_{F_m}.$$

Allora

$$\mu(E) \underbrace{=}_{F_m \downarrow E \text{ e } \mu(F_1) < +\infty} \lim_{m \rightarrow \infty} \mu(F_m) \leq \lim_{m \rightarrow \infty} \underbrace{\sum_{n=m}^{\infty} \mu(E_n)}_{\text{coda serie convergente}} = 0.$$

**Osservazione.** L'ipotesi  $\sum \mu(E_n) < +\infty$  non può essere sostituita con  $\mu(E_n) \rightarrow 0$ .

Ora dimostriamo la proposizione.

**Dimostrazione.** Definiamo gli insiemi

$$A_n^\varepsilon := \{x \in X : |f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon\},$$

$$B_m^\varepsilon := \{x \in X : |f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon \text{ per qualche } n \geq m\} = \bigcup_{n=m}^{\infty} A_n^\varepsilon,$$

$$B^\varepsilon := \{x \in X : |f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon \text{ frequentemente}\} = \{x \in A_n^\varepsilon \text{ frequentemente}\} = \bigcap_{m=1}^{\infty} B_m^\varepsilon.$$

i) Dobbiamo mostrare che  $\lim_{m \rightarrow \infty} \mu(B_m^\varepsilon) = 0$ . Per ipotesi,  $f_n \rightarrow f$  quasi ovunque, cioè  $\mu(B^\varepsilon) = 0$  per ogni  $\varepsilon > 0$ , ma  $B_m^\varepsilon \downarrow B^\varepsilon$  e  $\mu(X) < +\infty$ . Allora

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \mu(B_m^\varepsilon) = \mu(B^\varepsilon) = 0 \implies \lim_{m \rightarrow \infty} \mu(A_m^\varepsilon) = 0.$$

dato che  $A_m^\varepsilon \subset B_m^\varepsilon$ .

- ii) Dalla dimostrazione precedente abbiamo  $\lim_{m \rightarrow \infty} \mu(B_m^\varepsilon) = 0$ . Allora per ogni  $k$  esiste un  $m_k$  tale che  $\mu(B_{m_k}^{1/k}) \leq \delta/2^k$ . Poniamo  $E := \bigcup_k B_{m_k}^{1/k}$  per ogni  $k$ ; allora  $\mu(E) \leq \delta$ . Inoltre,

$$\begin{aligned} x \in X \setminus E &\implies x \notin B_{m_k}^{1/k} \forall k \iff x \notin A_n^{1/k} \forall k, n \geq m_k \\ &\implies |f(x) - f_n(x)| < \frac{1}{k} \quad \forall k, n \geq m_k \\ &\implies \sup_{x \in X \setminus E} |f(x) - f_n(x)| \leq \frac{1}{k} \quad \forall k, n \geq m_k \\ &\implies f - f_m \text{ uniformemente su } X \setminus E. \end{aligned}$$

- iii) Dobbiamo mostrare che per ogni  $\varepsilon > 0$   $\mu(A_n^\varepsilon) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ . Usando la disuguaglianza di Markov ottengo

$$\mu\left(A_n^\varepsilon = \left\{x \mid \overbrace{|f_n(x) - f(x)|^p}^g \geq \varepsilon^p\right\}\right) \leq \frac{1}{\varepsilon^p} \int_X g \, d\mu = \frac{1}{\varepsilon^p} \|f_n - f\|_p^p \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

- iii') Definiamo  $E_n := \{x \mid |f_n(x) - f(x)| > \|f_n - f\|_\infty\}$  per ogni  $n$ , allora  $\mu(E_n) = 0$ . Poniamo  $E = \bigcup_n E_n$  e  $\mu(E) = 0$ , dunque

$$\sup_{x \in X \setminus E} |f_n(x) - f(x)| \leq \|f_n - f\|_\infty \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

- iv) Per ipotesi,  $f_n \rightarrow f$  in misura, cioè

$$\begin{aligned} \forall \varepsilon > 0 \quad \mu(A_n^\varepsilon) &\xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \\ \implies \forall k \exists n_k: \mu(A_{n_k}^{1/k}) &\leq \frac{1}{2^k} \\ \implies \sum_k \mu(A_{n_k}^{1/k}) &< +\infty. \end{aligned}$$

Allora per Borel-Cantelli, si ha per  $\mu$ -quasi ogni  $x$ ,  $x \notin A_{n_k}^{1/k}$  definitivamente in  $k$ , cioè  $\|f_{n_k}(x) - f(x)\| < 1/k$  definitivamente in  $k$ , cioè  $f_{n_k}(x) \xrightarrow{k} f(x)$ .

- v) Vogliamo mostrare che  $f_n \rightarrow f$  in  $L^p \implies \exists n_k$  tale che  $f_{n_k} \rightarrow f$  quasi ovunque. Consideriamo due casi

- se  $p < +\infty$ , allora  $f_n \rightarrow f$  in  $L^p \implies f_n \rightarrow f$  in misura, da cui  $\exists n_k$  tale che  $f_{n_k} \rightarrow f$  quasi ovunque
- se  $p = +\infty$ , allora  $f_n \rightarrow f$  uniformemente su  $X \setminus E$  con  $\mu(E) = 0 \implies f_n \rightarrow f$  puntualmente su  $X \setminus E \implies f_n \rightarrow f$  quasi ovunque.

□

## 2.7 Controesempi sulle convergenze

Vediamo un controesempio che mostra che tutte le implicazioni sui vari tipi di convergenza sono ottimali ovvero

- i)  $f_n \rightarrow f$  in misura  $\not\Rightarrow f_n \rightarrow f$  q.o.
- ii)  $f_n \rightarrow f$  in  $L^p$  con  $p < +\infty$   $\not\Rightarrow f_n \rightarrow f$  q.o.
- iii)  $\mu(E_n) \rightarrow 0$   $\not\Rightarrow$  per q.o  $x$  si ha  $x \notin E_n$  definitivamente.

**Dimostrazione.** Consideriamo gli insiemi  $I_1 = [1, 1 + \frac{1}{2}]$ ,  $I_2 = [1 + \frac{1}{2}, 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}]$ ,  $\dots$

$$I_n := \left[ \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}, \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k} \right]$$

e consideriamo la loro proiezione “modulo”  $[0, 1]$  usando la funzione  $p: \mathbb{R} \rightarrow [0, 1)$  *parte frazionaria* data da

$$p(x) := x - \lfloor x \rfloor$$

e chiamiamo  $E_n := p(I_n)$ . Per ogni  $n$  abbiamo che  $|I_n| = |E_n| = 1/n$  e  $\bigcup_n I_n = [1, +\infty)$  (in quanto  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = +\infty$ ) e quindi ogni  $x \in [0, 1)$  appartiene ad  $E_n$  per infiniti  $n$  ed in particolare questo mostra la iii).

Per la i) basta notare che  $\mathbb{1}_{E_n} \rightarrow 0$  in misura (in quanto  $|E_n| \rightarrow 0$ ) ma  $\mathbb{1}_{E_n} \not\rightarrow 0$   $\mu$ -q.o. dato che  $x \in E_n$  per infiniti  $n$ , anzi  $\forall x \in [0, 1) \mathbb{1}_{E_n}(x) \not\rightarrow 0$  e la ii) segue analogamente.  $\square$

## 2.8 Approssimazioni di funzioni in $L^p$

Vediamo ora alcune classi di funzioni dense in  $L^p$  che risulteranno essere un utile strumento da usare nelle dimostrazioni.

**Nota.** Ricordiamo la nozione di insieme denso in uno spazio metrico. Sia  $(X, d)$  uno spazio metrico e  $Y \subset X$ . Allora  $Y$  è denso in  $X$  se e solo se per ogni  $x \in X$ , esiste una successione  $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$  in  $Y$  tale che  $x = \lim_n y_n$ .

Per ora sia  $(X, \mathcal{A}, \mu)$  in generale.

**Proposizione 1.** Le funzioni limitate in  $L^p$  sono dense in  $L^p$ .

**Dimostrazione.** Data  $f \in L^p(X)$  cerchiamo una successione di funzioni  $f_n \in L^p(X)$  limitate tali che  $f_n \rightarrow f$  in  $L^p$ , consideriamo

$$f_n(x) := (f(x) \wedge n) \vee (-n)$$

vorremmo mostrare che  $f_n \rightarrow f$  in  $L^p$  ovvero

$$\|f_n - f\|_p^p = \int_X |f_n - f|^p d\mu \rightarrow 0$$

intanto osserviamo che, per la *convergenza puntuale*, basta osservare che se  $n \geq |f(x)|$  abbiamo che  $\forall x \ f_n(x) = f(x) \implies f_n(x) \xrightarrow{n} f(x) \implies |f_n(x) - f(x)|^p \rightarrow 0$ .

Per concludere basta applicare *convergenza dominata* usando come dominazione direttamente  $|f(x) - f_n(x)| \leq |f(x)| \implies |f(x) - f_n(x)|^p \leq |f(x)|^p$  e notiamo che  $|f|^p \in L^1(X)$ .  $\square$

**Proposizione 2.** Sia  $\widetilde{\mathcal{S}} := \text{Span}(\{\mathbb{1}_E \mid E \in \mathcal{A}, \mu(E) < +\infty\})$ , allora  $\widetilde{\mathcal{S}}$  è denso in  $L^p(X)$ .

**Dimostrazione.** Data  $f \in L^p(X)$  cerchiamo una successione che approssima  $f$  in  $\widetilde{\mathcal{S}}$ .

- *Caso 1:* Se  $f \geq 0$  allora fissiamo  $\varepsilon > 0$  e per ogni  $k = 1, 2, \dots$  e poniamo

$$A_\varepsilon^k := \{x \mid k\varepsilon \leq f(x) \leq (k+1)\varepsilon\}$$

risulta che  $A_\varepsilon^k$  è misurabile ed ha misura finita<sup>1</sup>. Ora consideriamo la successione di funzioni parametrizzata da  $\varepsilon$  data da

$$f_\varepsilon(x) := \sum_{1 \leq k \leq 1/\varepsilon^2} k\varepsilon \cdot \mathbb{1}_{A_\varepsilon^k}(x) \in \widetilde{\mathcal{S}}$$

Osserviamo che vale anche  $\max f_\varepsilon(x) = \max\{k\varepsilon \mid k\varepsilon \leq f(x) \text{ e } k \leq 1/\varepsilon^2\}$  e mostriamo la seguente<sup>2</sup>

$$\int_X |f(x) - f_\varepsilon(x)|^p d\mu(x) \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0$$

- *Convergenza puntuale:* Per l'identità precedente abbiamo che  $0 \leq f(x) - f_\varepsilon(x) \leq \varepsilon$  se  $f(x) \leq 1/\varepsilon + \varepsilon$ .
- *Dominazione:* Possiamo usare nuovamente  $|f(x) - f_\varepsilon(x)|^p \leq |f(x)|^p < +\infty$  in quanto  $f \in L^p(X)$ .
- *Caso 2:* Sia  $f: X \rightarrow \mathbb{R}$  allora si può rifare la dimostrazione precedente oppure si può semplicemente considerare  $f_\varepsilon := (f^+)_\varepsilon - (f^-)_\varepsilon$ .

$\square$

Generalizziamo la proposizione al caso di  $f: X \rightarrow \mathbb{R}^d$  come segue

**Proposizione 2bis** (Generalizzata). Sia  $\widetilde{\mathcal{S}} := \left\{ \sum_i \alpha_i \mathbb{1}_{E_i} \mid \alpha_i \in \mathbb{R}^d, E_i \in \mathcal{A}, \mu(E_i) < +\infty \right\}$ . Allora  $\widetilde{\mathcal{S}}$  è denso in  $L^p(X; \mathbb{R}^d)$ .

**Dimostrazione.** (Idea) Basta approssimare componente per componente.  $\square$

Sia ora  $X$  uno *spazio metrico* e  $\{\text{aperti}\} \subset \mathcal{A}$ .

**Proposizione 3.** Sia  $\widetilde{\mathcal{S}}_\ell := \{\sum_i \alpha_i \mathbb{1}_{E_i} \mid \alpha_i \in \mathbb{R}^d, E_i \in \mathcal{A}, \mu(E_i) < +\infty, E_i \text{ limitati}\}$  allora  $\widetilde{\mathcal{S}}_\ell$  è denso in  $L^p(X; \mathbb{R}^d)$  per  $p < +\infty$ .

<sup>1</sup>È misurabile in quanto preimmagine di un misurabile, ed ha misura finita in quanto  $f \in L^p(X)$ .

<sup>2</sup>Notiamo che qui stiamo applicando il teorema di *convergenza dominata* su una famiglia parametrizzata da  $\varepsilon$  e non su una successione ma si può verificare facilmente che il teorema (ed anche gli altri risultati di convergenza di successioni di funzioni) si può estendere semplicemente prendendo  $\varepsilon = 1/n$  per  $n \rightarrow \infty$ .



**Dimostrazione.** Si dimostra che  $\widetilde{\mathcal{F}}_\ell$  è denso in  $\mathcal{F}$  che a sua volta, per la proposizione precedente, è denso in  $L^p$ . Dal lemma seguente si ottiene la tesi.

**Lemma 1.** Dato  $E \in \mathcal{A}$ ,  $\mu(E) < +\infty$  esiste  $E_n \in \mathcal{A}$  con  $E_n$  limitati tali che  $E_n \subset E$  e  $\mu(E \setminus E_n) \rightarrow 0$  e quindi  $\|\mathbb{1}_E - \mathbb{1}_{E_n}\|_p = \mu(E \setminus E_n)^{1/p} \xrightarrow{n} 0$  (e  $\mathbb{1}_{E_n} \in \widetilde{\mathcal{F}}_\ell$ ).

**Dim.** Dato  $E$  con  $\mu(E) < +\infty$  prendiamo  $x_0 \in X$  e poniamo  $E_n := E \cap \mathcal{B}(x_0, n)$ ;  $E_n \subset E$  e  $E \setminus E_n \downarrow \emptyset \implies \mu(E \setminus E_n) \xrightarrow{n} 0$ .

□

**Osservazione.** In generale l'enunciato non vale per  $p = +\infty$ . Ad esempio, preso  $L^\infty(\mathbb{R})$  e  $f = 1$  non si può approssimare con funzioni a supporto limitato; in particolare, data  $g$  con supporto  $A$  limitato  $|f - g| = 1$  su  $\mathbb{R} \setminus A$  e siccome  $|\mathbb{R} \setminus A| > 0$  abbiamo  $\|f - g\|_\infty \geq 1$ .

Ora siano  $X \subset \mathbb{R}^n$ ,  $\mu = \mathcal{L}^n$  e  $C_C(\mathbb{R}^n) := \{\text{funzioni continue a supporto compatto}\}$ , dove il **supporto** è definito come la chiusura dell'insieme dei punti in cui la funzione è non zero  $\text{supp}(f) := \overline{\{x \mid f(x) \neq 0\}}$ , in quanto per le funzioni continue l'insieme  $\{x \mid f(x) \neq 0\}$  è sempre aperto e dunque mai veramente compatto, a parte quando è vuoto.

**Proposizione 4.** Le funzioni in  $C_C(\mathbb{R}^n)$  ristrette a  $X$  sono dense in  $L^p(X)$  per  $p < +\infty$ .

Vediamo prima alcuni lemmi.

**Lemma 2.** (di Urysohn) Dati  $C_0, C_1$  chiusi disgiunti in  $X$  spazio metrico esiste una funzione  $f: X \rightarrow [0, 1]$  continua tale che  $f = 0$  su  $C_0$  e  $f = 1$  su  $C_1$ .

**Dimostrazione.** Posta  $d(x, C) = \inf\{d(x, y) \mid y \in C\}$  basta considerare

$$f(x) = \frac{d(x, C_0)}{d(x, C_0) + d(x, C_1)}.$$

**Lemma 3.** Dato  $E \subset \mathbb{R}^n$  limitato (e quindi di misura finita) esiste  $f_\varepsilon \in C_C(\mathbb{R}^n)$  tale che  $f_\varepsilon \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \mathbb{1}_E$  in  $L^p(\mathbb{R}^n)$  e quindi in  $L^p(X)$ .

**Dimostrazione.** Per regolarità della misura di Lebesgue abbiamo che per ogni  $\varepsilon$  esistono  $C_\varepsilon \subset E \subset A_\varepsilon$  tali che  $|A_\varepsilon \setminus C_\varepsilon| \leq \varepsilon$ . Per il Lemma 2 possiamo definire la classe di funzioni  $f_\varepsilon: \mathbb{R}^n \rightarrow [0, 1]$  continue tali che

$$f_\varepsilon = 1 \text{ su } C_\varepsilon \quad f_\varepsilon = 0 \text{ su } \mathbb{R}^n \setminus A_\varepsilon.$$

In particolare, sappiamo che su  $A_\varepsilon \setminus C_\varepsilon$  vale  $|f_\varepsilon - \mathbb{1}_E| \leq 1$ . Allora,

$$\begin{aligned} \|f_\varepsilon - \mathbb{1}_E\|_p^p &= \int_{A_\varepsilon \setminus C_\varepsilon} |f_\varepsilon - \mathbb{1}_E|^p dx \leq \int_{A_\varepsilon \setminus C_\varepsilon} \mathbb{1}_{A_\varepsilon \setminus C_\varepsilon} dx = |A_\varepsilon \setminus C_\varepsilon| \leq \varepsilon^{1/p} \\ &\implies \|f_\varepsilon - \mathbb{1}_E\|_p^p \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0. \end{aligned}$$

□

**Dimostrazione Proposizione 4.** Per la Proposizione 3 basta approssimare la classe delle funzioni a supporto limitato (e di misura finita). Dunque, per il Lemma 3 si ha la tesi.

## 2.9 Complementi su approssimazioni di funzioni in $L^p$

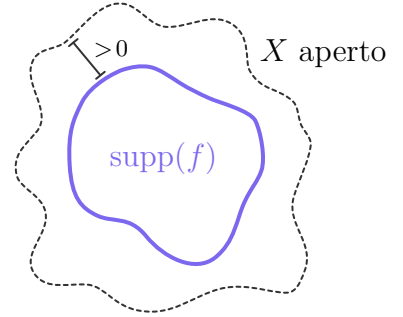
Sia  $X$  misurabile in  $\mathbb{R}^n$  con  $\mu = \mathcal{L}^n$  su  $X$ . In precedenza abbiamo visto che

**Proposizione 3.** Le funzioni in  $C_C(\mathbb{R}^n)$  ristrette a  $X$  sono dense in  $L^p$  se  $p < +\infty$ .

**Osservazione.** Si vede facilmente che  $C_C(\mathbb{R}^n) \subset L^p(\mathbb{R}^n)$ .

**Domanda.** Vale un risultato analogo per le funzioni  $C_C(X)$ ?

Le funzioni continue a supporto compatto in  $X$  sono continue anche su  $\mathbb{R}^n$  solo se  $X$  è aperto, in quanto il supporto ha veramente distanza non nulla dal bordo e possiamo estendere con continuità la funzione a 0 fuori da  $X$ .



**Proposizione 4.** Sia  $X$  aperto di  $\mathbb{R}^n$ ,  $\mu = \mathcal{L}^n$  allora  $C_C(X)$  è denso in  $L^p$  per ogni  $p < +\infty$ .

**Dimostrazione.**

- $\mathcal{S}_C := \{\text{funzioni semplici con supporto compatto in } X\}$  è denso in  $L^p(X)$  per ogni  $p < +\infty$ .
- Dato  $E$  relativamente compatto<sup>1</sup> in  $X$  esiste  $f_n \in C_C(X)$  tale che  $f_n \rightarrow \mathbb{1}_E$  in  $L^p$  per ogni  $p < +\infty$ .  $\square$

La Proposizione 3 non vale per  $p = +\infty$ , intuitivamente in quanto data  $f \in L^\infty(X)$  discontinua, se trovassimo  $f_n \rightarrow f$  in  $L^\infty(X)$  con  $f_n$  continue avremmo  $f_n \rightarrow f$  uniformemente e dunque  $f$  continua. Per spiegare meglio il perché la Proposizione 3 non si estende al caso  $p = +\infty$  consideriamo quanto segue.

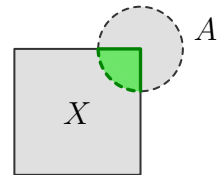
**Fatto.** In generale vale che data  $f: X \rightarrow \mathbb{R}$  misurabile,  $\|f\|_\infty \leq \sup_{x \in X} |f(x)|$  (detta anche *norma del sup*)

**Esercizio.** Se  $X$  è aperto<sup>2</sup> in  $\mathbb{R}^n$  e  $\mu = \mathcal{L}^n$  e  $f: X \rightarrow \mathbb{R}$  continua, allora  $\|f\|_\infty = \sup_{x \in X} |f(x)|$ .

**Soluzione.** Se per assurdo  $\exists x \in X$  tale che  $\|f\|_\infty < |f(x)|$  allora la continuità di  $f$  implica che esiste un intorno di  $x$  in cui  $\|f\|_\infty < |f(x)|$ ; ma un intorno contiene una palla aperta di misura positiva.  $\nmid$

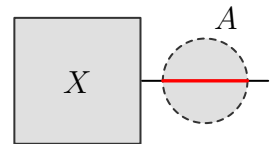
Consideriamo la funzione

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$



e vediamo che  $\nexists f_n: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  tale che  $f_n \rightarrow f$  in  $L^\infty$  e  $(f_n) \subset C_c(\mathbb{R})$ .

Se esistesse  $(f_n)_n$ , allora sarebbe di Cauchy rispetto alla norma  $\|\cdot\|_\infty$  allora per continuità  $(f_n)_n$  è di Cauchy anche rispetto alla norma del sup  $\implies f_n \rightarrow \tilde{f}$  uniformemente con  $\tilde{f}$  continua, quindi  $\tilde{f} = f$  quasi ovunque ma questo non è possibile per la  $f$  definita sopra.



(In particolare dato  $E = \{x \mid f(x) = \tilde{f}(x)\}$ , prendiamo  $x_n, y_n \in E$  tali che  $x_n \uparrow 0$  e  $y_n \downarrow 0$  ma i limiti di  $f$  sono 0 e 1  $\nmid$ )

<sup>1</sup>Un sottospazio relativamente compatto di uno spazio topologico è un sottoinsieme dello spazio topologico la cui chiusura è compatta.

<sup>2</sup>In particolare possiamo anche estenderci a  $X \subseteq \mathbb{R}^n$  tali che ogni  $A$  aperto relativamente a  $X$  abbia misura positiva.

**Teorema** (di Lusin). Dato  $X \subset \mathbb{R}^d, \mu = \mathcal{L}^d$  e data  $f: X \rightarrow \mathbb{R}$  o  $\mathbb{R}^m$  misurabile e  $\varepsilon > 0$ , esiste  $E$  aperto in  $X$  con  $|E| \leq \varepsilon$  tale che  $f$  è continua su  $X \setminus E$  (la restrizione di  $f$  a  $X \setminus E$  è continua)

**Osservazione.** In generale  $f$  può essere non continua in tutti i punti di  $X$ , infatti  $E$  può essere denso e  $X \setminus E$  avere parte interna vuota.

**Dimostrazione.** Basta trovare  $E$  misurabile (per ottenere  $E$  aperto si usa la regolarità della misura)

- *Caso 1:*  $f \in L^1(X)$  e  $|X| < +\infty$

Abbiamo che  $f \in L^1 \implies \exists f_n$  continue tali che  $f_n \rightarrow f$  in  $L^1 \implies f_n \rightarrow f$  in misura e per Severini-Egorov esiste  $E$  tale che  $|E| \leq \varepsilon$  e  $f_n \rightarrow f$  uniformemente su  $X \setminus E \implies f$  è continua su  $X \setminus E$ .

- *Caso 2:*  $f$  qualunque misurabile e  $|X| < +\infty$

**Lemma.** Dati  $X, \mathcal{A}, \mu$  con  $\mu(X) < +\infty$  e data  $f: X \rightarrow \mathbb{R}$  misurabile e  $\varepsilon > 0$  esiste  $F$  misurabile con  $\mu(F) \leq \varepsilon$  tale che  $f$  è limitata su  $X \setminus F$ .

**Dimostrazione.**  $\forall m > 0$  sia  $F_m := \{x \mid |f(x)| > m\}$  allora  $F_m \downarrow \emptyset \implies \mu(F_m) \downarrow 0$  e quindi esiste  $m$  tale che  $\mu(F_m) \leq \varepsilon$ .

Quindi data  $f$  qualunque misurabile e  $|X| < +\infty$  esiste  $F$  misurabile tale che  $|F| \leq \varepsilon/2$  e con  $f$  limitata su  $X \setminus F \implies f \in L^\infty(X \setminus F) \subset L^1(X \setminus F)$ , dunque per il *Caso 1* esiste  $E$  misurabile tale che  $|E| \leq \varepsilon/2$  e  $f$  è continua su  $X \setminus (E \cup F)$  e  $\mu(E \cup F) \leq \varepsilon$

- *Caso 3:*  $f$  qualunque misurabile

Per ogni  $n$  poniamo  $X_n := X \cap B(0, n)$  per il *Caso 2* esistono  $E_n$  misurabili con  $|E_n| \leq \varepsilon/2^n$  tali che  $f$  è continua su  $X_n \setminus E_n$ , infine prendo  $E := \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$  con  $\mu(E) \leq \varepsilon \implies f$  è continua su  $X_n \setminus E$  per ogni  $n \implies f$  è continua su  $X \setminus E$ .

□

**Lemma** (di estensione di Tietze). Dato  $X$  spazio metrico e  $C \subset X$  chiuso,  $f: C \rightarrow \mathbb{R}$  continua allora  $f$  si estende a una funzione continua su  $X$ .

Usando questo lemma possiamo enunciare nuovamente il teorema precedente come segue

**Teorema** (di Lusin'). Data  $f: X \rightarrow \mathbb{R}$  misurabile e  $\varepsilon > 0$ , esiste  $E$  aperto con  $|E| \leq \varepsilon$  e  $g: X \rightarrow \mathbb{R}$  continua tale che  $f = g$  su  $X \setminus E$ .  
Inoltre se  $f \in L^p(X)$  e  $p < +\infty$  si può anche chiedere che  $\|f - g\|_p \leq \varepsilon$ .

## 2.10 Appendice

**Proposizione.** Siano  $V, W$  spazi normati,  $T: V \rightarrow W$  lineare. Sono fatti equivalenti

- i)  $T$  è continua in 0.
- ii)  $T$  è continua.
- iii)  $T$  è lipschitziana, cioè esiste una costante  $c < +\infty$  tale che  $\|Tv - Tv'\|_W \leq c \|v - v'\|_V$ .
- iv) Esiste una costante  $c$  tale che  $\|Tv\|_W \leq c \|v\|_V$  per ogni  $v \in V$ .
- v) Esiste una costante  $c$  tale che  $\|Tv\|_W \leq c$  per ogni  $v \in V$ ,  $\|v\|_V = 1$ .

**Dimostrazione.** v)  $\Rightarrow$  iv). Vale la seguente

$$\|Tv\|_W \underset{v=\lambda\tilde{v}, \|\tilde{v}\|_V=1}{=} |\lambda| \|T\tilde{v}\|_W \leq c\lambda = c \|v\|_V.$$

iv)  $\Rightarrow$  iii). Vale la seguente

$$\|Tv - Tv'\|_W = \|T(v - v')\|_W \leq c \|v - v'\|_W.$$

iii)  $\Rightarrow$  ii) e ii)  $\Rightarrow$  i) sono ovvie.

i)  $\Rightarrow$  v).  $T$  continua in 0, dunque esiste  $\delta > 0$  tale che

$$\|Tv - T0\|_W \leq 1 \quad \text{se} \quad \|v - 0\|_V \leq \delta,$$

cioè

$$\|Tv\| \leq 1 \quad \text{se} \quad \|v\| \leq \delta,$$

da cui segue che  $\|Tv\| \leq 1/\delta$  se  $\|v\| \leq 1$ . □

**Osservazione.** Le costanti ottimali iii), iv), v) sono uguali e valgono

$$c = \sup_{\|v\|_V \leq 1} \|Tv\|_W.$$

**Esempi.**

- i) Sia  $(X, \mathcal{A}, \mu)$  coma al solito, con  $\mu(X) < +\infty$ . Allora, dati  $1 \leq p_1 < p_2 \leq +\infty$ , vale

$$L^{p_2}(X) \subset L^{p_1}(X). \quad (\star)$$

Inoltre, l'inclusione  $i: L^{p_2}(X) \rightarrow L^{p_1}(X)$  è continua.

**Dimostrazione.** La dimostrazione di  $(\star)$  segue dalla stima

$$\|u\|_{p_1} \underset{\text{Hölder generalizzato}}{\leq} \|\mathbb{1}_X\|_q \|u\|_{p_2} \quad \text{dove} \quad q = \frac{p_1 p_2}{p_2 - p_1}.$$

Dove

$$\|\mathbb{1}_X\|_{\frac{p_1 p_2}{p_2 - p_1}} \|u\|_{p_2} = (\mu(X))^{\frac{1}{p_1} - \frac{1}{p_2}} \|u\|_{p_2}.$$

Quanto sopra soddisfa la condizione al punto iv). □

ii) L'applicazione  $L^1(X) \ni u \mapsto \int u \, d\mu \in \mathbb{R}$  è continua.

**Dimostrazione.** Infatti, vale

$$\left| \int_X u \, d\mu \right| \leq \int_X |u| \, d\mu = \|u\|_1.$$

Quanto sopra soddisfa la condizione al punto iv).  $\square$

iii) Cosa possiamo dire invece dell'applicazione  $L^p(X) \ni u \mapsto \int u \, d\mu \in \mathbb{R}$ ? Se  $\mu(X) < +\infty$  la continuità segue dagli esempi i) e ii) sopra. Se invece  $\mu(X) = +\infty$ ? Per esempio  $L^2(\mathbb{R})$ ? [TO DO].

## 2.11 Esercizi

### 2.11.1 Esercizi su spazi $L^p(X)$ al variare di $p$ e dello spazio $X$

Sia  $X \subset \mathbb{R}^n$ ,  $\mu$  la misura di Lebesgue e  $1 \leq p_1 \leq p_2$ .

**Domanda.** Possiamo confrontare gli spazi  $L^{p_1}(X)$  e  $L^{p_2}(X)$ ? In generale no.

Vediamo informalmente perché. Posto  $X = (0, +\infty)$ , gli integrali

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+x)^{\beta p}} \, dx, \quad \int_0^{+\infty} \frac{1}{x^{\beta p}} \cdot \mathbb{1}_{[0,1]}(x) \, dx = \int_0^1 \frac{1}{x^{\beta p}} \, dx$$

sono maggiorati dall'integrale di  $1/x^\alpha$  dove l'esponente  $\alpha$  è rispettivamente più piccolo e più grande di  $\beta \cdot p$ .

Utilizziamo questa intuizione per vedere formalmente che gli spazi  $L^p(0, +\infty)$  non sono confrontabili.

Cerchiamo una funzione  $f \in L^{p_1}(0, +\infty) \setminus L^{p_2}(0, +\infty)$  e una funzione  $g \in L^{p_2}(0, +\infty) \setminus L^{p_1}(0, +\infty)$ . La funzione  $f$  definita come segue

$$f(x) := \begin{cases} 1/x^\beta & x \in (0, 1) \\ 0 & x \geq 1 \end{cases}$$

ha integrale

$$\int_0^{+\infty} f(x)^{p_1} \, dx = \int_0^1 \frac{1}{x^{\beta p_1}} \, dx < +\infty \iff \beta \cdot p_1 < 1$$

e

$$\int_0^{+\infty} f(x)^{p_2} \, dx = \int_0^1 \frac{1}{x^{\beta p_2}} \, dx = +\infty \iff \beta \cdot p_2 \geq 1.$$

Dunque, basta prendere  $\beta \in [1/p_2, 1/p_1)$ .

Ora cerchiamo  $g \in L^{p_2}(0, +\infty) \setminus L^{p_1}(0, +\infty)$ . Definiamo  $g(x)$  come segue

$$g(x) := \frac{1}{(1+x)^\alpha}$$

da cui

$$\int_0^{+\infty} g(x)^{p_2} dx < +\infty \iff \alpha \cdot p_2 > 1 \quad \text{e} \quad \int_0^{+\infty} g(x)^{p_1} dx = +\infty \iff \alpha \cdot p_1 \leq 1$$

*Conclusione.* In generale non c'è confrontabilità fra gli spazi  $L^p$ . La confrontabilità, dipende infatti dall'insieme  $X$  su cui sono definiti.

**Nota.** Un caso particolare è dato ponendo  $p_1 < p_2$  e  $\mu(X) < +\infty$ . In tal caso  $L^{p_2}(X) \subset L^{p_1}(X)$ . Data  $f \in L^{p_2}(X)$ , cioè con  $\int_X |f|^{p_2} d\mu < +\infty$  vediamo che  $\int_X |f|^{p_1} d\mu < +\infty$ .

Usiamo Hölder:

$$\begin{aligned} \int_X |f|^{p_1} d\mu &\leq \left( \int_X \overbrace{|f(x)|^{p_1 p}}^{|h(x)|^p} d\mu \right)^{1/p} \cdot \left( \int_X 1^q d\mu \right)^{1/q} \underset{p=p_2/p_1}{\leq} \left( \int_X |f|^{p_2} d\mu \right)^{p_1/p_2} \left( \int_X 1^q d\mu \right)^{1/q} \\ &\underset{q=(1-\frac{1}{p})^{-1}=\frac{p}{p-1}=\frac{p_2/p_1}{p_2-p_1}}{=} \|f\|_{L^{p_2}(X)}^{p_1} \cdot \mu(X)^{\frac{p_2-p_1}{p_2}}. \end{aligned}$$

Dunque

$$\|f\|_{L^{p_1}(X)} \leq \|f\|_{L^{p_2}(X)} \cdot \mu(X)^{\frac{p_2-p_1}{p_1 p_2}}.$$

L'inclusione

$$\begin{aligned} i: L^{p_2} &\rightarrow L^{p_1}(X) \\ f &\mapsto f \end{aligned}$$

è ben definita per quanto fatto sopra.

**Esercizio.** [TO DO] Vedere con quale topologia l'inclusione risulta continua.

**Esercizio.** [TO DO] Dato  $p \geq 1$ , stabilire se esistono  $X, \mu, f \in L^p(X)$  e  $f \notin L^q(X)$  per ogni  $q \neq p, q \geq 1$ .

*Suggerimento.* Pensare a  $X = (0, +\infty)$ ,  $\mu$  misura di Lebesgue.

**Osservazione.**  $L^p(X)$  è uno spazio vettoriale di dimensione infinita, ossia ogni base algebrica ha cardinalità infinita. Vediamo il caso  $X = (0, 1)$ . Per trovare una base infinita, cerchiamo per ogni  $N \in \mathbb{N}$ , un insieme di funzioni  $f_1, \dots, f_N \in L^p(0, 1)$  tali che siano linearmente indipendenti. Vale a dire, presi  $\lambda_1, \dots, \lambda_N \in \mathbb{R}$  vale  $\lambda_1 f_1 + \dots + \lambda_N f_N = 0$  se e solo se  $\lambda_1 = \dots = \lambda_N = 0$ .

Ad esempio, definiamo  $f_i := \mathbb{1}_{i/N, (i+1)/N}$  (questa costruzione si può riprodurre per ogni  $N \in \mathbb{N}$ ).

### 2.11.2 Sottospazi limitati, chiusi e compatti di $L^p$

Ricordiamo che, essendo  $L^p(X)$  uno spazio metrico, dato  $Y \subset L^p$  vale la seguente caratterizzazione:

$Y$  è compatto  $\iff Y$  è compatto per successioni  $\iff Y$  chiuso e totalmente limitato.

**Osservazione.**  $Y \subset L^p(X)$  è un sottoinsieme che eredita la norma  $\|\cdot\|_{L^p}$ :

$Y$  è completo  $\iff Y$  è chiuso.

**Osservazione.** In  $L^p$  i sottoinsiemi chiusi e limitati non sono compatti<sup>1</sup>! In particolare le palle

$$Y = \{f \in L^p \mid \|f\|_{L^p} \leq 1\}$$

non sono compatte.

Ad esempio, mostriamo che in  $L^p(0, 1)$  le palle

$$B = \{f \in L^p \mid \|f\|_{L^p} \leq 1\}$$

non sono compatte. Per farlo, esibiamo una successione  $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset B$  che non ammette sottosuccessioni convergenti. La costruiamo in modo che non abbia sottosuccessioni di Cauchy

$$f_n: (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}, \quad \|f_n - f_m\|_{L^p} \geq c_0 > 0 \quad \forall n \neq m.$$

Cerco  $A_n \subset (0, 1)$  tale che  $|A_n \cap A_m| = 0$  per ogni  $n \neq m$ . Definiamo  $f_n$  come segue

$$f_n(x) := \begin{cases} 0 & \text{se } x \in (0, 1) \setminus (1/(n+1), 1/n) \\ c_n > 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

dove  $c_n$  è tale che

$$\left( \int_{1/(n+1)}^{1/n} c_n^p \right)^{1/p} = 1 \iff c_n^p \cdot (1/n - 1/(n+1)) = 1 \iff c_n^p = n \cdot (n+1).$$

Calcoliamo ora  $\|f_n - f_m\|_{L^p}^p$  con  $n \neq m$ :

$$\int_0^1 |f_n(x) - f_m(x)|^p dx = \int_{(1/n, 1/(n+1)) \cup (1/(m+1), 1/m)} |f_n - f_m|^p dx = \int_{1/(n+1)}^{1/n} |f_n|^p dx + \int_{1/(m+1)}^{1/m} |f_m|^p dx = 1 + 1 = 2.$$

Si osserva che quanto detto sopra vale anche per  $p = +\infty$ .

**Esercizio.** [TO DO] Sia  $E = \{f \in L^1(1, +\infty) \mid |f(x)| \leq 1/x^2 \text{ e } x \in [1, +\infty)\}$ .

- $E$  è limitato in  $L^1$ ?
- $E$  è chiuso in  $L^1$ ?
- $E$  è compatto in  $L^1$ ?

**Soluzione.**

i) Dimostriamo che  $\|f\|_{L^1} < C$  per ogni  $f \in E$ .

$$\|f\|_{L^1} = \int_1^\infty |f(x)| dx \leq \int_1^\infty 1/x^2 dx < C.$$

ii)  $E$  è chiuso. Ci basta dimostrare che se  $\{f_n\} \in E$  è convergente a  $f$  allora  $f \in E$ . Questo equivale a dimostrare che  $|f(x)| < 1/x^2$ . Dal fatto che  $\{f_n\} \in E$  è convergente in  $L^1$ , abbiamo che esiste una sottosuccessione  $\{f_{n_k}\}$  che converge puntualmente a  $f$ . Essendo che  $|f_{n_k}| < 1/x^2$  per ogni  $x \in [1, +\infty)$ , per la continuità del modulo segue la tesi.

---

<sup>1</sup>Uno spazio metrico è compatto se solo se è completo e totalmente limitato. Inoltre, uno spazio metrico  $X$  si dice totalmente limitato se  $\forall \varepsilon > 0$  esiste  $B_\varepsilon^1, \dots, B_\varepsilon^n$  tale che  $X \subset \bigcup_{i=1}^n B_\varepsilon^i$ .

iii) Da fare [TO DO]

**Esercizio.** [TO DO]

- Dire se  $f_n(x) = x^n$ ,  $n = 0, \dots, N$  è un insieme di funzioni linearmente indipendenti in  $L^p([0, 1])$ .
- Dire se  $\{f_n\} \subset L^p(0, 1)$  è compatta in  $L^p(0, 1)$ .

*Suggerimento.* Studiare il limite puntuale.

**Soluzione.**

i) Ovvio

ii) Dimostriamo che non è compatto. Se per assurdo lo fosse, dalla successione  $(f_n)$  potremmo estrarre una sottosuccessione convergente  $(f_{n_k})$  in  $L^p([0, 1])$ ; denotiamo il limite con  $f$ . Per i risultati visti sulla convergenza, da  $(f_{n_k})$  potremmo estrarre una sottosuccessione convergente quasi ovunque a  $f$ . Ma questo è assurdo perché  $\lim_n f_n = +\infty$ .

### 2.11.3 Spazi $\ell^p$

Prendiamo  $X = \mathbb{N}$  e  $\mu = \#$  la misura che conta i punti.

**Osservazione.** Definiamo

$$\ell^p = L^p(\mathbb{N}, \#) = \left\{ (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \left| \sum_{n=0}^{+\infty} |x_n|^p < +\infty \right. \right\}$$

con  $p \geq 1$  e  $p \neq +\infty$ , e

$$\ell^\infty = \{\text{successioni limitate}\} = \left\{ (x_n) \left| \sup_{n \in \mathbb{N}} |x_n| < +\infty \right. \right\}.$$

**Esempio** (di insieme non compatto in  $\ell^1$ ). Consideriamo la successione  $(e_i)$  definita come

$$(e_i)_n := \begin{cases} 0 & \text{se } n \neq i \\ 1 & \text{se } n = i \end{cases}$$

si osserva inoltre che le successioni così definite sono linearmente indipendenti e generano se sono infiniti.

**Esempio** (di insieme compatto in  $\ell^1$ ). Sia  $F = \{(x_n)_n \in \ell^1 \mid |x_n| \leq 1/n^2 \quad \forall n \in \mathbb{N}\}$ . Noto subito che  $F$  è limitato, infatti, presa

$$\underline{x} = (x_n) \in F, \quad \|\underline{x}\|_{\ell^1} = \sum_{n=0}^{+\infty} |x_n| \leq \sum_{n=0}^{+\infty} 1/n^2 < +\infty.$$

$F$  è anche chiuso.

**Osservazione.** Data una successione  $(\underline{x}^k) \subset \ell^1$ , se  $\underline{x}^k \xrightarrow{\ell^1} \underline{x}^\infty$ , vuol dire che

$$\|\underline{x}^k - \underline{x}^\infty\|_{\ell^1} = \sum_{n=0}^{+\infty} |x_n^k - x_n^\infty| \xrightarrow{k} 0.$$



In particolare, per ogni  $n \in \mathbb{N}$  fissato,  $\lim_k (x_n^k - x_n^\infty) = 0$ .

$F$  è chiuso perché se  $(\underline{x}^k) \subset F$  e  $\underline{x}^k \xrightarrow{\ell^1} \underline{x}^\infty$ , allora per ogni  $n \in \mathbb{N}$  vale

$$|x_n^k| \leq 1/n^2 \quad \text{e} \quad \underbrace{\lim_{k \rightarrow +\infty} |x_n^k|}_{x_n^\infty} \leq 1/n^2.$$

Dimostriamo che è compatto per successioni. Prendiamo  $(\underline{x}^k) \subset F$ , ogni componente  $x_n$  è equilimitata, quindi a meno di sottosuccessioni  $x_n^{k_j}$  converge a  $x_n^\infty$ . A meno di diagonalizzare, possiamo supporre che la successione  $k_j$  non dipenda da  $n$ . Inoltre gli elementi  $x_n^{k_j}$  sono dominati da  $y = (1/n^2)$ . Concludiamo usando il teorema di convergenza dominata di Lebesgue.

#### 2.11.4 Continuità operatori lineari

Data  $T: X \rightarrow Y$  lineare tra  $X, Y$  spazi normati, allora  $T$  è continua se e solo se esiste  $C > 0$  tale che  $\|T(x)\|_Y \leq C \|x\|_X$  per ogni  $x \in X$ .

Applichiamo questo risultato.

- i) Sia  $X = \mathbb{R}^d$ . L'applicazione  $L^1(\mathbb{R}^d) \ni u \xrightarrow{T} \int_{\mathbb{R}^d} u \, dx$  è lineare e continua in quanto limitata. Infatti:

$$|T(u)| = \left| \int_{\mathbb{R}^d} u \, dx \right| \leq \int_{\mathbb{R}^d} |u| \, dx = \|u\|_{L^1(\mathbb{R}^d)}.$$

- ii) Studiamo ora il caso per  $p > 1$ . Data  $u \in L^p(\mathbb{R}^d)$ , l'applicazione

$$u \mapsto \int_{\mathbb{R}^d} u \, dx$$

potrebbe non essere ben definita.

Ad esempio se restringiamo il dominio a  $L^p(\mathbb{R}^d) \cap L^1(\mathbb{R}^d)$  l'applicazione sopra è ben definita, ma in generale non è continua. Più formalmente, la mappa

$$T: (L^p \cap L^1(\mathbb{R}^d), \|\cdot\|_{L^p}) \rightarrow \mathbb{R}$$

è lineare ma non continua.

Studiamo il caso reale, ovvero  $d = 1$ .

Per verificare quanto sopra, utilizziamo la definizione di continuità per successioni. Definiamo una successione di funzioni a supporto compatto  $u_n$ , che sappiamo essere in tutti gli spazi  $L^p$ , e verifichiamo che  $\lim_n T(u_n) \neq T(u_\infty)$  dove  $u_\infty := \lim_n u_n$ .

Definiamo la successione come segue:

$$u_n(x) = \frac{1}{n} \mathbb{1}_{[n, 2n]} = \begin{cases} \frac{1}{n} & \text{se } n \leq x \leq 2n \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Noto quanto segue

- $u_\infty = 0$ , infatti, posto  $E_n = [n, 2n]$

$$\|u_n - 0\|_{L^p(\mathbb{R})}^p = \|u_n\|_{L^p(\mathbb{R})}^p = \int_{\mathbb{R}} u_n^p(x) \, dx = \frac{1}{n^p} \cdot |E_n| = \frac{n}{n^p} = \frac{1}{n^{p-1}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

- $T(u_n) \equiv 1$ , infatti

$$T(u_n) = \int_{\mathbb{R}} u_n dx = \frac{1}{n} |E_n| = 1.$$

In conclusione, rispetto alla convergenza in  $L^p$  vale  $T(u_n) \not\rightarrow T(u_\infty) = T(0) = 0$ .

Un altro modo per dimostrare quanto sopra è verificare che, per ogni  $C > 0$ , esiste una funzione  $u \in L^p(\mathbb{R}^d) \cap L^1(\mathbb{R}^d)$  tale per cui

$$\left| \int_{\mathbb{R}} u dx \right| > C \left( \int_{\mathbb{R}} |u|^p dx \right)^{1/p}.$$

Notiamo che questo è proprio l'esercizio che segue.

**Esercizio.** Fissato  $C > 0$ , trovare  $u \in L^p \cap L^1(\mathbb{R})$  tale che

$$\left| \int_{\mathbb{R}} u dx \right| > C \|u\|_{L^p(\mathbb{R})} \quad (\star)$$

**Dimostrazione.** Fissato  $C > 0$ , cerchiamo una funzione in  $L^p$  il cui integrale in modulo sia maggiore di  $C$  per la sua norma  $L^p$ . Per trovare  $u$  consideriamo la successione di funzioni definita come segue

$$f_n = \begin{cases} 1/x & 1 \leq x \leq n \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}.$$

Le funzioni  $f_n$  sono a supporto compatto e stanno in ogni  $L^p$ . Notiamo che  $f_n \uparrow f$  definita come

$$f = \begin{cases} 1/x & x > 1 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

ed  $f \in L^p$  per ogni  $p > 1$ . In particolare,  $\left( \int_{\mathbb{R}} |f_n|^p \right)^{1/p} \leq \left( \int_{\mathbb{R}} |f|^p \right)^{1/p} \underset{f \in L^p \forall p > 1}{\leq} +\infty$  per ogni  $n$ .

Quindi il secondo membro di  $(\star)$  è maggiorato da una costante che non dipende da  $n$ . D'altra parte, per Beppo Levi  $\lim_n \int_{\mathbb{R}} f_n dx = \int_{\mathbb{R}} f dx$  che non sta in  $L^1$ . In conclusione, esiste un  $n$  abbastanza grande per cui vale  $(\star)$ .  $\square$

**Esercizio.** Sia  $p \geq 1$  e  $E = \left\{ u \in L^p(-1, 1) : \int_{-1}^1 u dx = 0 \right\}$ .

i) Dire se  $E$  è limitato in  $L^p(-1, 1)$ .

ii) Dire se  $E$  è chiuso in  $L^p(-1, 1)$ .

**Soluzione.**

i) Dimostrare che  $E$  è limitato in  $L^p(-1, 1)$  equivale a dimostrare che esiste  $M > 0$  tale che ogni  $u \in L^p(-1, 1)$ ,  $\int_{-1}^1 u dx = 0$  verifica  $\|u\|_{L^p} \leq M$ .

Vediamo che  $E$  non è limitato. Preso  $M > 0$ , riesco sempre a trovare una funzione maggiore di  $M$  in norma. Ad esempio la funzione definita come

$$u(x) := \begin{cases} M & \text{se } x \in (0, 1) \\ -M & \text{se } x \in (-1, 0) \end{cases}$$

ha norma  $\|u\|_{L^p}^p = 2M^p$ .

**Nota.** Aveva senso cercare il controesempio nella classe delle funzioni dispari e limitate, perché hanno media zero, e perché sono in tutti gli  $L^p$ .

ii) Vediamo che  $E$  è chiuso.

**Nota.** Possiamo dimostrarlo usando i teoremi di convergenza, ma seguiremo un'altra strada.

- *Caso*  $p > 1$ . Definiamo l'operatore

$$T: L^p(-1, 1) \rightarrow \mathbb{R} \\ u \mapsto \int_{-1}^1 u \, dx$$

è ben definito. Infatti, per Hölder vale

$$\left| \int_{-1}^1 1 \cdot u \, dx \right| \leq \left( \int_{-1}^1 |u|^p \, dx \right)^{1/p} (1^q)^{1/q}$$

dove  $q = \frac{p}{p-1}$ . Allora

$$|T(u)| \leq \|u\|_{L^p(-1,1)} \cdot 2^{\frac{p}{p-1}}.$$

Dunque  $T$  è continuo in  $L^p$  per ogni  $p > 1$ .

- *Caso*  $p = 1$ . L'operatore sopra è continuo anche per  $p = 1$ . Grazie alla stima vista prima

$$|T(u)| = \left| \int_{-1}^1 u \, dx \right| \leq \int_{-1}^1 |u| \, dx = \|u\|_{L^1}.$$

Dunque  $T$  è continua e  $T^{-1}(0) = E$ , dunque  $E$  è chiuso.

**Esercizio.** [TO DO] Sia  $p \geq 1$ . Definiamo

$$F = \left\{ v \in L^p(\mathbb{R}) \mid \int_0^1 v(x) \, dx - 2 \int_{-1}^0 v(x) \, dx = 3 \right\}.$$

Dire se  $F$  è chiuso in  $(L^p(\mathbb{R}), \|\cdot\|_{L^p(\mathbb{R})})$ .

**Esercizio.** [TO DO] Sia

$$G = \left\{ v \in L^p(0, 2\pi) \mid \int_0^{2\pi} v(x) \sin(x) \, dx = 1 \right\}.$$

Dire se  $G$  è chiuso in  $L^2(0, 2\pi)$ .

**Domanda.** Dato  $L^p(X, \mu)$  e  $V$  sottospazio di  $L^p(X, \mu)$ , posso dire che  $V$  è chiuso?

In generale no! Infatti esistono sottospazi densi in  $L^p(X, \mu)$ .

Ad esempio in  $\ell^2$  consideriamo l'insieme denso

$$V = \{\{x_n\} \mid x_n = 0 \text{ definitivamente}\}.$$

Vediamo che non è chiuso. Sia  $\underline{x} \in \ell^2$ , definita come  $\underline{x} = \{1/n\}_{n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}}$ , diciamo che  $\underline{x} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \underline{x}^n$  dove

$$x_n^k = \begin{cases} \frac{1}{n} & 1 \leq n \leq k \\ 0 & n > k, n = 0 \end{cases}$$

abbiamo che

$$\|\underline{x} - \underline{x}^k\|_{\ell^2}^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |x_n - x_n^k|^2 = \sum_{n=k+1}^{+\infty} |x_n|^2 = \sum_{n=k+1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} 0.$$

Vediamo un altro esempio. Siano  $X = \mathbb{R}$ ,  $\mu$  la misura di Lebesgue e  $p > 1$ . In tal caso, l'insieme  $L^p \cap L^1(\mathbb{R})$  è un sottospazio denso in  $(L^1(\mathbb{R}), \|\cdot\|_{L^1})$  e  $(L^p(\mathbb{R}), \|\cdot\|_{L^p})$ .

**Nota.** L'insieme  $L^2(\mathbb{R}) \cap L^1(\mathbb{R})$  è un sottospazio proprio di  $L^1(\mathbb{R})$ . Diciamo che non è chiuso in  $\|\cdot\|_{L^1(\mathbb{R})}$  perché è denso. Infatti,

$$C_C(\mathbb{R}) \subset L^2(\mathbb{R}) \cap L^1(\mathbb{R}).$$

# Capitolo 3

## Convoluzione

**Definizione.** Date  $f_1, f_2: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$  misurabili, il **prodotto di convoluzione**  $f_1 * f_2$  è la funzione (da  $\mathbb{R}^d$  a  $\mathbb{R}$ ) data da

$$f_1 * f_2(x) = \int_{\mathbb{R}^d} f_1(x-y)f_2(y) \, dy$$

**Osservazioni.**

- i) La definizione sopra è ben posta se  $f_1, f_2 \geq 0$  ( $f_1 * f_2(x)$  può essere anche  $+\infty$ ). In generale non è ben posta per funzioni a valori reali (non è detto che l'integrale esista).

Ad esempio, se prendiamo  $f_1 = 1$  e  $f_2 = \sin x$  con  $d = 1$ , allora  $f_1 * f_2(x)$  non è definito per alcun  $x$ .

- ii) Se  $f_1 * f_2(x)$  esiste, allora  $f_1 * f_2(x) = f_2 * f_1(x)$ , infatti

$$f_1 * f_2(x) = \int_{\mathbb{R}^d} f_1(x-y)f_2(y) \, dy = \left( \begin{matrix} t := x-y \\ dt = dy \end{matrix} \right) = \int_{\mathbb{R}^d} f_1(t)f_2(x-t) \, dt = f_2 * f_1(x).$$

- iii) È importante che  $f_1, f_2$  siano definite su  $\mathbb{R}^d$  e che la misura sia quella di Lebesgue.

In realtà, si può generalizzare quanto sopra rimpiazzando  $(\mathbb{R}^d, \mathcal{L}^d)$  con  $(G, \mu)$ , dove  $G$  è un gruppo commutativo e  $\mu$  una misura su  $G$  invariante per traslazione. Per esempio,  $\mathbb{Z}$  con la misura che conta i punti. Cioè  $f_1, f_2: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}$ , vale

$$f_1 * f_2(n) := \sum_{m \in \mathbb{Z}} f_1(n-m)f_2(m).$$

- iv) Data  $f$  distribuzione di massa (continua) su  $\mathbb{R}^3$ , il potenziale gravitazionale generato è

$$v(x) = \int_{y \in \mathbb{R}^d} \frac{1}{|x-y|} \rho(y) \, dy$$

cioè  $v = g * \rho$ , dove  $g(x) = 1/|x|$  è il potenziale di una massa puntuale in 0.

- v) Se  $X_1, X_2$  sono variabili aleatorie (reali) con distribuzione di probabilità continua  $p_1, p_2$  e  $X_1, X_2$  sono indipendenti, allora  $X_1 + X_2$  ha distribuzione di probabilità  $p_1 * p_2$ . (Facile per  $X_1, X_2$  in  $\mathbb{Z}$ ).

**Proposizione 1.** Se  $|f_1| * |f_2|(x) < +\infty$  allora  $f_1 * f_2(x)$  è ben definito, in quanto  $f_1 * f_2(x) \leq |f_1 * f_2(x)| \leq |f_1| * |f_2|(x)$ .

**Dimostrazione.** Basta osservare che,

$$\begin{aligned} f_1 * f_2(x) &= \int_{\mathbb{R}^d} f_1(x-y) \cdot f_2(y) \, dy \leq \left| \int_{\mathbb{R}^d} f_1(x-y) \cdot f_2(y) \, dy \right| \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^d} |f_1(x-y) \cdot f_2(y)| \, dy = |f_1| * |f_2|(x) < +\infty. \end{aligned}$$

□

**Corollario 2.** Se  $|f_1| * |f_2| \in L^p(\mathbb{R}^d)$  con  $1 \leq p \leq +\infty$  allora  $f_1 * f_2(x)$  è ben definito per quasi ogni  $x \in \mathbb{R}^d$  e  $\|f_1 * f_2\|_p \leq \| |f_1| * |f_2| \|_p$ .

**Dimostrazione.** Dato che  $|f_1| * |f_2| \in L^p$  segue che

$$\int_{\mathbb{R}^d} (|f_1| * |f_2|(x))^p \, dx < +\infty \implies f_1 * f_2(x) \leq |f_1| * |f_2|(x) < +\infty \quad \forall x \in \mathbb{R}^d.$$

Inoltre

$$\begin{aligned} \|f_1 * f_2\|_p^p &= \int_{\mathbb{R}^d} \left| \left( \int_{\mathbb{R}^d} f_1(x-y) \cdot f_2(y) \, dy \right) \right|^p \, dx \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^d} \left( \int_{\mathbb{R}^d} |f_1(x-y)| \cdot |f_2(y)| \, dy \right)^p \, dx = \| |f_1| * |f_2| \|_p^p \end{aligned}$$

□

**Teorema 3** (disuguaglianza di Young per convoluzione.) Se  $f_1 \in L^{p_1}(\mathbb{R}^d)$  e  $f_2 \in L^{p_2}(\mathbb{R}^d)$  e preso  $r \geq 1$  tale che

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} - 1, \quad (*)$$

allora  $f_1 * f_2$  è ben definito quasi ovunque e

$$\|f_1 * f_2\|_r \leq \|f_1\|_{p_1} \cdot \|f_2\|_{p_2} \quad (**)$$

**Osservazioni.**

- Nel caso di prima 1 e sin  $x$  sono solo in  $L^\infty$  infatti viene  $r = -1$  e la disuguaglianza non ha senso.
- Supponiamo di avere  $\|f_1 * f_2\|_r \leq C \cdot \|f_1\|_{p_1}^{\alpha_1} \cdot \|f_2\|_{p_2}^{\alpha_2}$  allora vediamo che per ogni  $f_1, f_2$  positive deve valere necessariamente  $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$  e  $1/r = 1/p_1 + 1/p_2 - 1$ .

**Dimostrazione.** Vediamo prima  $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$  e successivamente  $1/r = 1/p_1 + 1/p_2 - 1$ .

◦ Per ogni  $\lambda > 0$  consideriamo  $\lambda f_1$  e  $f_2$ , allora

$$\|(\lambda f_1) * f_2\|_r = \|\lambda(f_1 * f_2)\|_r = \lambda \|f_1 * f_2\|_r$$

ma abbiamo anche

$$\|(\lambda f_1) * f_2\|_r \leq C \cdot \|\lambda f_1\|_{p_1}^{\alpha_1} \cdot \|f_2\|_{p_2}^{\alpha_2} = C \cdot \lambda^{\alpha_1} \|f_1\|_{p_1}^{\alpha_1} \cdot \|f_2\|_{p_2}^{\alpha_2},$$

da cui necessariamente  $\alpha_1 = 1$  e similmente si dimostra che  $\alpha_2 = 1$ .

◦ Data  $f: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$  e  $\lambda > 0$  poniamo  $R_\lambda f(x) := f(x/\lambda)$  allora abbiamo

$$\begin{aligned} \|(R_\lambda f_1) * (R_\lambda f_2)\|_r &= \left\| \int_{\mathbb{R}^d} f_1\left(\frac{x-y}{\lambda}\right) \cdot f_2\left(\frac{y}{\lambda}\right) dy \right\| = \left( \lambda^d dt = \frac{y}{\lambda} dy \right) \\ &= \lambda^d \cdot \left\| \int_{\mathbb{R}^d} f_1\left(\frac{x}{\lambda} - t\right) \cdot f_2(t) dt \right\| \\ &= \lambda^d \cdot \|R_\lambda(f_1 * f_2)\|_r. \end{aligned}$$

Similmente si dimostra che  $\|R_\lambda(g)\|_r = \lambda^{d/r} \|g\|_r$ , da cui otteniamo

$$\|(R_\lambda f_1) * (R_\lambda f_2)\|_r = \lambda^{d(1+\frac{1}{r})} \|f_1 * f_2\|_r.$$

Ma anche

$$\begin{aligned} \lambda^{d(1+\frac{1}{r})} \|f_1 * f_2\|_r &= \|(R_\lambda f_1) * (R_\lambda f_2)\|_r \stackrel{(\star\star)}{\leq} C \cdot \|R_\lambda f_1\|_{p_1} \cdot \|R_\lambda f_2\|_{p_2} \\ &= C \cdot \lambda^{d(\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2})} \cdot \|f_1\|_{p_1} \cdot \|f_2\|_{p_2}. \end{aligned}$$

Dunque abbiamo  $\lambda^{d(1+1/r)} \leq C \cdot \lambda^{d(1/p_1+1/p_2)}$  per ogni  $\lambda > 0$  e quindi  $1 + 1/r = 1/p_1 + 1/p_2$ .  $\square$

**Dimostrazione Teorema 3.** Per via del Corollario 2. ci basta dimostrare  $(\star\star)$  se  $f_1, f_2 \geq 0$ .

- *Caso facile.* Se  $p_1 = p_2 = 1$  e  $r = 1$

$$\begin{aligned} \|f_1 * f_2\|_1 &= \int f_1 * f_2(x) dx = \iint f_1(x-y) f_2(y) dy dx = \int f_2(y) \int f_1(x-y) dx dy = \\ &= \int \|f_1\|_1 \cdot f_2(y) dy = \|f_1\|_1 \cdot \|f_2\|_1 \end{aligned}$$

- *Caso leggermente meno facile.* Se  $p_1 = p, p_2 = 1$  e  $r = p$ . Vogliamo vedere che

$$\|f_1 * f_2\|_p \leq \|f_1\|_p \cdot \|f_2\|_1$$

allora

$$\begin{aligned} \|f_1 * f_2\|_p &= \int_{\mathbb{R}^d} \underbrace{(f_1 * f_2)^p}_h dx = \int h \cdot h^{p-1} dx = \iint f_1(x-y) f_2(y) h^{p-1}(x) dy dx = \\ &= \iint f_1(y-x) h^{p-1}(x) dx f_2(y) dy \stackrel{\text{H\"older}}{\leq} \int \|f_1(y-\cdot)\|_p \|h^{p-1}\|_{p'} f_2(y) dy \end{aligned}$$

con  $p'$  esponente coniugato a  $p$ . Inoltre notiamo che  $\|f_1(y-\cdot)\|_p = \|f_1\|_p$  per invarianza di  $\mathcal{L}^d$  per riflessioni e traslazioni. Infine otteniamo

$$\|f_1\|_p \|h^{p-1}\|_{p'} \|f_2\|_1 = \|f_1\|_p \|h\|_p^{p-1} \|f_2\|_1.$$

Dunque,  $\|f_1 * f_2\|_p^p \leq \|f_1 * f_2\|_p^{p-1} \|f_1\|_p \|f_2\|_1 \implies \|f_1 * f_2\|_p \leq \|f_1\|_p \|f_2\|_1$ . Quest'ultima implicazione però è valida solo nel caso in cui  $0 < \|f_1 * f_2\|_p < +\infty$ . Resterebbero da controllare i due casi in cui la norma è 0 oppure  $+\infty$ . Il primo è ovvio; il secondo invece si fa per approssimazione e passando al limite.

Consideriamo  $f_1, f_2$  e approssimiamole con  $f_{1,n}, f_{2,n}$  a supporto compatto (e limitate<sup>1</sup>), allora vale  $\|f_{1,n} * f_{1,n}\|_p \leq \|f_{1,n}\|_p \cdot \|f_{2,n}\|_1$  e passando al limite si ottiene la tesi. In particolare possiamo costruire le  $f_n$  come

$$f_n(x) := (f(x) \cdot \mathbb{1}_{\mathcal{B}(0,n)}(x)) \wedge n$$

**Osservazione.** Se  $f_2 \geq 0$  e  $\int f_2 dx = 1$  allora  $\|f_1 * f_2\|_p \leq \|f_1\|_p$  è una versione semplificata della proposizione precedente, in particolare la dimostrazione si semplifica in quanto possiamo pensare a  $f_2$  come distribuzione di probabilità e quindi  $f_1 * f_2$  è una “media pesata” delle traslazioni di  $f_1$  o più precisamente una combinazione convessa “integrale”.

- *Caso generale.* Non lo facciamo perché servono mille mila parametri e non è troppo interessante.

□

Nel caso  $r = +\infty$  gli esponenti  $p_1$  e  $p_2$  sono proprio coniugati e possiamo rafforzare la tesi del teorema precedente.

**Teorema 4** (caso  $r = +\infty$  del Teorema 3). Dati  $p_1$  e  $p_2$  esponenti coniugati e  $f_1 \in L^{p_1}(\mathbb{R}^d)$ ,  $f_2 \in L^{p_2}(\mathbb{R}^d)$ , allora

- i)  $f_1 * f_2(x)$  è ben definito per ogni  $x \in \mathbb{R}^d$
- ii)  $|f_1 * f_2(x)| \leq \|f_1\|_{p_1} \|f_2\|_{p_2}$
- iii)  $f_1 * f_2$  è uniformemente continua
- iv) Se  $1 < p_1, p_2 < +\infty$  allora  $f_1 * f_2 \rightarrow 0$  per  $|x| \rightarrow +\infty$

Premettiamo i seguenti risultati.

**Proposizione 5.** Data  $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$  con  $p < +\infty$  la mappa

$$\begin{aligned} \tau_h f : \mathbb{R}^d &\rightarrow L^p(\mathbb{R}^d) \\ h &\mapsto f(\cdot - h) \end{aligned}$$

è continua.

**Dimostrazione.** Per prima cosa notiamo che basta vedere solo la continuità in 0 in quanto

$$\tau_{h'} f - \tau_h f = \tau_h(\tau_{h'-h} f - f) \implies \|\tau_{h'} f - \tau_h f\|_p = \|\tau_{h'-h} f - f\|_p.$$

Dimostriamo ora la proposizione in due passi.

- *Caso 1:*  $f \in C_c(\mathbb{R}^d)$

$$\|\tau_h f - f\|_p^p = \int_{\mathbb{R}^d} |f(x-h) - f(x)|^p dx \xrightarrow{|h| \rightarrow 0} 0$$

per convergenza dominata, verifichiamo però che siano rispettate le ipotesi

- i) La convergenza puntuale, ovvero  $|f(x-h) - f(x)|^p \xrightarrow{|h| \rightarrow 0} 0$  segue direttamente dalla continuità di  $f$ .

---

<sup>1</sup>Le funzioni continue a supporto compatto sono limitate per Weierstrass.



- ii) Come dominazione invece usiamo  $|f(x-h) - f(x)|^p \leq (2 \|f\|_\infty)^p \cdot \mathbb{1}_{B(0, R+1)}$  usando che  $f \in C_C \implies \text{supp}(f) \subset \overline{B(0, R)}$  e poi che

$$\text{supp}(f(\cdot - h) - f(\cdot)) \subset \overline{B(0, R + |h|)}$$

infine se  $|h| < 1$  come raggio ci basta prendere  $R + 1$ .

- *Caso 2:*  $f$  qualunque Dato  $\varepsilon > 0$  prendiamo  $g \in C_C(\mathbb{R}^d)$  tale che  $\|g - f\| \leq \varepsilon$  allora aggiungiamo a sottraiamo  $g + \tau_h g$  e raggruppiamo in modo da ottenere

$$\begin{aligned} \tau_h f - f &= \tau_h(f - g) + (\tau_h g - g) + (g - f) \\ \implies \|\tau_h f - f\|_p &\leq \underbrace{\|\tau_h(f - g)\|_p}_{\leq \varepsilon} + \|\tau_h g - g\|_p + \underbrace{\|g - f\|_p}_{\leq \varepsilon} \leq 2\varepsilon + \underbrace{\|\tau_h g - g\|_p}_{\rightarrow 0 \text{ per Caso 1}} \end{aligned}$$

dunque  $\limsup_{|h| \rightarrow 0} \|\tau_h f - f\|_p \leq 2\varepsilon$  ma per arbitrarietà di  $\varepsilon$  otteniamo anche che  $\|\tau_h f - f\|_p \rightarrow 0$  per  $|h| \rightarrow 0$ .

□

**Lemma 6.** Lo spazio  $C_0(\mathbb{R}^d) = \{f: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R} \text{ continue con } f(x) \rightarrow 0 \text{ per } |x| \rightarrow \infty\}$  è chiuso rispetto alla convergenza uniforme.

**Dimostrazione Teorema 4.**

- i) Osserviamo che

$$|f_1| * |f_2|(x) = \int_{\mathbb{R}^d} |f_1(x-y)| \cdot |f_2(y)| dy \stackrel{\text{Hölder}}{\leq} \|f_1(x - \cdot)\|_{p_1} \|f_2\|_{p_2} = \|f_1\|_{p_1} \|f_2\|_{p_2}$$

e concludiamo per la Proposizione 1.

- ii) Dal punto precedente abbiamo che  $|f_1| * |f_2|(x) \leq \|f_1\|_{p_1} \|f_2\|_{p_2}$ , da cui si conclude banalmente.
- iii) Uno tra  $p_1$  e  $p_2$  è finito; supponiamo lo sia  $p_1$ . Fissiamo  $x, h \in \mathbb{R}^d$

$$f_1 * f_2(x+h) - f_1 * f_2(x) = \int_{\mathbb{R}^d} (f_1(x+h-y) - f_1(x-y)) f_2(y) dy,$$

quindi

$$\begin{aligned} |f_1 * f_2(x+h) - f_1 * f_2(x)| &\leq \int |f_1(x+h-y) - f_1(x-y)| |f_2(y)| dy \\ &\stackrel{\text{Holder}}{\leq} \|f_1(x+h-\cdot) - f_1(x-\cdot)\|_{p_1} \|f_2\|_{p_2} \\ &= \|f_1(\cdot - h) - f_1(\cdot)\|_{p_1} \|f_2\|_{p_2} \\ &= \underbrace{\|\tau_h f_1 - f_1\|_{p_1}}_{\xrightarrow{h \rightarrow 0} 0} \|f_2\|_{p_2} \\ &\quad \text{Proposizione 5} \end{aligned}$$

da cui segue la tesi<sup>1</sup>.

---

<sup>1</sup>*Nota.* In generale, quanto appena mostrato ci direbbe che la funzione è continua, ma essendo che stiamo maggiorando con una quantità indipendente da  $x$  segue l'uniforme continuità.

iv) Approssimiamo  $f_1$  e  $f_2$  con  $f_{1,n}$  e  $f_{2,n} \in \mathcal{C}_C(\mathbb{R}^d)$  in  $L^{p_1}$  e  $L^{p_2}$  rispettivamente.

Osserviamo che  $f_{1,n} * f_{2,n} \in \mathcal{C}_C(\mathbb{R}^d) \subset \mathcal{C}_0(\mathbb{R}^d)$ . Per il Lemma 6 basta dimostrare che  $f_{1,n} * f_{2,n} \rightarrow f_1 * f_2$  uniformemente

$$\begin{aligned} \|f_{1,n} * f_{2,n} - f_1 * f_2\|_\infty &= \|(f_{1,n} * f_{2,n} - f_{1,n} * f_2) + (f_{1,n} * f_2 - f_1 * f_2)\|_\infty \\ &\leq \|f_{1,n} * (f_{2,n} - f_2)\|_\infty + \|(f_{1,n} - f_1) * f_2\|_\infty \\ &\stackrel{ii)}{\leq} \underbrace{\|f_{1,n}\|_{p_1}}_{\rightarrow \|f_1\|_{p_1}} \underbrace{\|f_{2,n} - f_2\|_{p_2}}_{\rightarrow 0} + \underbrace{\|f_{1,n} - f_1\|_{p_1}}_{\rightarrow 0} \|f_2\|_{p_2}. \end{aligned}$$

Quindi  $\|f_{1,n} * f_{2,n} - f_1 * f_2\|_\infty \rightarrow 0$ . □

## 3.1 Derivata e Convoluzione

**Osservazione.** Osserviamo che la convoluzione si comporta bene con l'operatore di traslazione definito precedentemente, infatti  $\tau_h(f_1 * f_2) = (\tau_h f_1) * f_2$  in quanto

$$\tau_h(f_1 * f_2) = f_1 * f_2(x - h) = \int f_1(x - h - y) \cdot f_2(y) dy = \int \tau_h f_1(x - y) \cdot f_2(y) dy = (\tau_h f_1) * f_2$$

quindi “formalmente” possiamo calcolare il seguente rapporto incrementale

$$\frac{\tau_h(f_1 * f_2) - f_1 * f_2}{h} = \frac{\tau_h f_1 - f_1}{h} * f_2 \implies (f_1 * f_2)' = (f_1)' * f_2$$

Vediamo ora di formalizzare questo risultato.

**Teorema.** Dati  $p_1$  e  $p_2$  esponenti coniugati, se

- $f_1 \in C^1(\mathbb{R}^d)$ ,  $f_1$  e  $\nabla f_1 \in L^{p_1}(\mathbb{R}^d)$
- $f_2 \in L^{p_2}(\mathbb{R}^d)$

allora  $f_1 * f_2 \in C^1$  con  $\nabla(f_1 * f_2) = (\nabla f_1) * f_2$ .

**Nota.** Ha senso anche se  $\nabla f_1$  è a valori vettoriali. In tal caso  $\frac{\partial}{\partial x_i}(f_1 * f_2) = \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_i}\right) * f_2$  per  $i = 1, \dots, d$ .

Premettiamo il seguente.

**Lemma.** Date  $g, h: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  continue e tali che

$$g(x) - g(a) = \int_a^x h(t) dt \quad \forall x \in [a, b]$$

allora  $g \in C^1$  e  $g' = h$ .

**Dimostrazione Proposizione.**

- $d = 1$ . Per il Lemma basta dimostrare che  $\forall -\infty < a < x < +\infty$  vale

$$f_1 * f_2(x) - f_1 * f_2(a) = \int_a^x f_1' * f_2(t) dt.$$

Infatti

$$\begin{aligned}
\int_a^x f'_1 * f_2(t) dt &= \int_a^x \int_{-\infty}^{\infty} f'_1(t-y) f_2(y) dy dt \\
&\stackrel{(*)}{=} \int_{-\infty}^{\infty} \int_a^x f'_1(t-y) dt \cdot f_2(y) dy \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} (f_1(x-y) - f_1(a-y)) \cdot f_2(y) dy \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} f_1(x-y) f_2(y) dy - \int_{-\infty}^{\infty} f_1(a-y) f_2(y) dy \\
&= f_1 * f_2(x) - f_1 * f_2(a).
\end{aligned}$$

In (\*) abbiamo usato Fubini-Tonelli:

$$\int_a^x \int_{-\infty}^{\infty} |f'_1(t-y)| \cdot |f_2(y)| dy dt \leq \int_a^x \|f'_1(t-\cdot)\|_{p_1} \cdot \|f_2\|_{p_2} dt = \|f'_1\|_{p_1} \cdot \|f_2\|_{p_2} \cdot (x-a).$$

- per  $d > 1$  dato  $i = 1, \dots, d$  basta semplicemente considerare le proiezioni infatti

$$\int_a^x \frac{\partial f_1}{\partial x_i} * f_2(x_1, \dots, \overset{(i)}{t}, \dots, x_d) dt = f_1 * f_2(x_1, \dots, \overset{(i)}{x}, \dots, x_d) - f_1 * f_2(x_1, \dots, \overset{(i)}{a}, \dots, x_d)$$

□

**Corollario.** Data  $f_1 \in C_C^\infty(\mathbb{R}^d)$  (da cui segue  $\nabla^k \in L^q(\mathbb{R}^d)$  per ogni  $k = 0, 1, \dots$  e  $1 \leq q < +\infty$ ) e  $f_2 \in L^p(\mathbb{R}^d)$  allora  $f_1 * f_2 \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$  (anzi  $\nabla^k(f_1 * f_2) \in C_0(\mathbb{R}^d)$  per ogni  $k$ ) e vale la formula nota<sup>1</sup>

$$\nabla^k(f_1 * f_2) = (\nabla^k f_1) * f_2 \quad \forall k = 1, \dots$$

**Dimostrazione.** Si dimostra per induzione su  $k$ . [TO DO: da fare]

## 3.2 Approssimazione per convoluzione

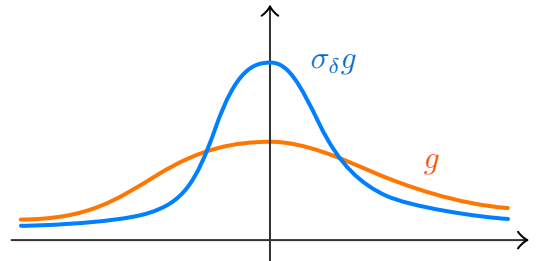
**Definizione.** Per prima cosa data una funzione  $g: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$  e  $\delta \neq 0$  poniamo

$$\sigma_\delta g(x) := \frac{1}{\delta^d} g\left(\frac{x}{\delta}\right)$$

e notiamo che questa trasformazione preserva la norma  $L^1$ . Infatti, il valore  $1/\delta^d$  è proprio il modulo del determinante dello Jacobiano del cambio di variabile.

**Teorema.** Data  $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$  e  $g \in L^1(\mathbb{R}^d)$  con  $1 \leq p < +\infty$  e posto  $m := \int_{\mathbb{R}^d} g(x) dx$ , allora

$$f * \sigma_\delta g \xrightarrow{\delta \rightarrow 0} mf \quad \text{in } L^p(\mathbb{R}^d).$$



<sup>1</sup>dato che  $\nabla^k f_1$  ha valori in  $\mathbb{R}^k$  e  $f_2$  in  $\mathbb{R}$ , dobbiamo definire  $\nabla^k f_1 * f_2$  [TO DO: da fare].

**Interpretazione.** Se  $g_2 \geq 0$  con  $\int g \, dx = 1$  (dunque  $g$  distribuzione di probabilità) allora  $f * g$  possiamo pensarla come media pesata di traslate di  $f$ , dunque facendo  $f * \sigma_\delta g$  stiamo pesando sempre di più i valori delle traslate vicino a 0.

**Nota.** Per  $p = +\infty$  il teorema non vale. Infatti, la funzione  $f = \mathbb{1}_{[0,+\infty]} \in L^\infty$ ; le funzioni  $f * \sigma_\delta g$  sono continue ma non convergono in  $L^\infty$  a  $mf = f$ . Infatti, le successioni continue convergono in  $L^\infty$  a funzioni che coincidono, a meno di insiemi di misura nulla, con funzioni continue, ed  $f$  non è possibile modificarla in un insieme di misura nulla in modo che coincida con una funzione continua.

**Dimostrazione.** Per ora consideriamo  $g$  generica e ripercorriamo una dimostrazione simile a quella fatta per la disuguaglianza di Young

$$\begin{aligned} \|f * g - mf\|_p^p &= \int_{\mathbb{R}^d} \underbrace{|f * g - mf|}_h^p \, dx \\ &= \int |f * g - mf| \cdot h^{p-1} \, dx \\ &= \int \left| \int f(x-y)g(y) \, dy - f(x) \int g(y) \, dy \right| \cdot h^{p-1}(x) \, dx \\ &\leq \int \int |f(x-y) - f(x)| \cdot |g(y)| \, dy \cdot h^{p-1}(x) \, dx \\ &\stackrel{(*)}{=} \int \left( \int |f(x-y) - f(x)| h^{p-1}(x) \, dx \right) |g(y)| \, dy, \end{aligned}$$

dove in (\*) abbiamo usato Fubini-Tonelli. Ora prendiamo  $q$  tale che  $1/p + 1/q = 1$  allora per Hölder abbiamo

$$\begin{aligned} &\leq \int \|f(\cdot - y) - f(\cdot)\|_p \|h^{p-1}\|_q \cdot |g(y)| \, dy \\ &= \|h\|_p^{p-1} \int_{\mathbb{R}^d} \|\tau_y f - f\|_p \cdot |g(y)| \, dy \end{aligned}$$

dunque abbiamo ricavato che

$$\|f * g - mf\|_p^p \leq \|f * g - mf\|_p^{p-1} \int_{\mathbb{R}^d} \|\tau_y f - f\|_p \cdot |g(y)| \, dy$$

ed ora applicando questa stima a  $\sigma_\delta g$  invece che a  $g$  otteniamo

$$\|f * \sigma_\delta g - mf\|_p \leq \int_{\mathbb{R}^d} \|\tau_y f - f\|_p \cdot |\sigma_\delta g(y)| \, dy,$$

infine ponendo  $z = y/\delta$  e  $dz = 1/\delta^d \, dy$  e sostituendo nell'integrale

$$= \int_{\mathbb{R}^d} \|\tau_{\delta z} f - f\|_p \cdot |g(z)| \, dz \xrightarrow{\delta \rightarrow 0} 0$$

per *convergenza dominata*, verifichiamone le ipotesi

- i) La convergenza puntuale segue in quanto  $\|\tau_{\delta z} f - f\|_p \xrightarrow{\delta \rightarrow 0} 0$  per ogni  $z$ .
- ii) Come dominazione prendiamo  $2\|f\|_p \cdot |g| \in L^1$ .

□

**Corollario.** Sia  $g \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$  con  $\int g \, dx = 1$  e  $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$  e  $1 \leq p < +\infty$  allora  $\sigma_\delta g * f \xrightarrow{\delta \rightarrow 0} f$  in  $L^p(\mathbb{R}^d)$  e  $\sigma_\delta g * f \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$ .

**Osservazione.** Dal corollario segue che per  $p \in [1, \infty)$  il sottospazio  $C^\infty \subset L^p(\mathbb{R}^d)$  è denso in  $L^p(\mathbb{R}^d)$ ; dunque ogni  $C^k \subset L^p(\mathbb{R}^d)$  è denso.

## 3.3 Esercizi

### 3.3.1 Convoluzione

Sia  $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$  e sia  $g: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$  continua a supporto compatto<sup>1</sup>.

$$|g(x) - g(y)| \leq M |x - y|_{\mathbb{R}^d}.$$

**Esercizio.** Dimostrare che  $f * g$  è ben definita e lipschitziana, dove  $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$  e  $g \in \mathcal{C}_C^0(\mathbb{R}^d)$ . Verifichiamo che la convoluzione è ben definita. Dal fatto che  $g \in \mathcal{C}_C^0(\mathbb{R}^d)$  abbiamo in particolare che  $g$  è limitata, da cui

$$f * g = \int_{\mathbb{R}^d} f(x - y) \cdot g(y) \, dy \stackrel{|g| \leq M}{\leq} M \cdot \int_{\mathbb{R}^d} f(x - y) \, dy \stackrel{f \in L^1(\mathbb{R}^d)}{<} +\infty.$$

Ora verifichiamo che  $f * g$  è lipschitziana. Consideriamo  $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^d$

$$|f * g(x_1) - f * g(x_2)| = \left| \int_{\mathbb{R}^d} f(x_1 - y) g(y) \, dy - \int_{\mathbb{R}^d} f(x_2 - y) g(y) \, dy \right|$$

Usiamo la proprietà che, essendo  $f * g$  ben definita, si ha  $f * g(x) = g * f(x)$ . Da cui

$$\begin{aligned} |f * g(x_1) - f * g(x_2)| &= \left| \int_{\mathbb{R}^d} g(x_1 - y) f(y) \, dy - \int_{\mathbb{R}^d} g(x_2 - y) f(y) \, dy \right| \\ &= \left| \int_{\mathbb{R}^d} (g(x_1 - y) - g(x_2 - y)) f(y) \, dy \right| \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^d} |g(x_1 - y) - g(x_2 - y)| |f(y)| \, dy \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^d} M |(x_1 - y) - (x_2 - y)| |f(y)| \, dy \leq M |x_1 - x_2| \cdot \|f\|_{L^1(\mathbb{R}^d)}. \end{aligned}$$

**Esercizio.** [TO DO] Se  $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$  e  $g$  a supporto compatto è  $\alpha$ -Hölderiana allora anche  $f * g$  lo è.

**Esercizio.** [TO DO] Presa  $f(x) = \mathbb{1}_{[0,1]}$  in  $\mathbb{R}$ , calcolare  $f * f$ .

---

<sup>1</sup>In tal caso  $g$  è lipschitziana.

### 3.3.2 Approssimazioni per convoluzione

Abbiamo visto che data  $g \in L^1(\mathbb{R}^d)$  con  $\int g \, dx = 1$  allora per ogni  $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$  abbiamo  $f_\delta := f * \sigma_\delta g \xrightarrow{\delta \rightarrow 0} f$  in  $L^p(\mathbb{R}^d)$  per  $p \neq \infty$ .

**Esercizio.** Dire se esiste  $v \in L^1(\mathbb{R})$  tale che sia elemento neutro della convoluzione, ovvero

$$\forall f \in L^1(\mathbb{R}) \quad f * v = f.$$

**Soluzione.** Una tale  $v$  non esiste, per vederlo scegliamo opportunamente  $\bar{f}$  e usiamo l'equazione. Scelgo  $g \in C_c^\infty(\mathbb{R})$  e defiamo  $\sigma_\delta g = 1/\delta g(1/\delta)$ . Abbiamo che  $\sigma_\delta g * v = \sigma_\delta g$  per ogni  $\delta$ . Per il teorema abbiamo che  $\sigma_\delta g * v = \sigma_\delta g \xrightarrow{\delta \rightarrow 0} v$  in  $L^1(\mathbb{R})$ , ma  $\sigma_\delta g \xrightarrow{\delta \rightarrow 0} 0$  quasi ovunque in  $L^1(\mathbb{R})$ . Allora  $v = 0$  q.o. in  $L^1(\mathbb{R})$ , dunque non può valere  $f * v = f$  per ogni  $f \in L^1(\mathbb{R})$ .

**Esercizio.** [TO DO: per casa.] Sia  $f$  misurabile su  $\mathbb{R}^d$  tale che  $\int_E f \, dx = 0$  per ogni  $E$  misurabile di  $\mathbb{R}^d$ . Dimostrare che  $f = 0$  q.o. su  $\mathbb{R}^d$ .

*Suggerimento.* Considerare l'integrale sull'insieme  $\{x \in \mathbb{R}^d \mid f(x) = 0\} \cup \{x \in \mathbb{R}^d \mid f(x) \neq 0\}$  e verificare che, se denotiamo  $A = \{x \in \mathbb{R}^d \mid f(x) \neq 0\}$ , allora  $|A| = 0$ .

**Esercizio.** Sia  $f$  Lebesgue-misurabile su  $\mathbb{R}^d$  tale che  $\forall B$  palla su  $\mathbb{R}^d$

$$\int_B f \, dx = 0$$

Dimostrare che  $f = 0$  quasi ovunque su  $\mathbb{R}^d$ .

**Soluzione.** Considero  $g = \mathbb{1}_{[0,1]} \in L^1(\mathbb{R}^d)$ . Per quanto fatto in classe so che

$$\sigma_\delta g * f \xrightarrow{\delta \rightarrow 0} mf$$

dunque se  $\sigma_\delta g * f = 0$  per ogni  $\delta$  ho finito.

$$\sigma_\delta g * f(y) = \int_{\mathbb{R}^d} \sigma_\delta \mathbb{1}_{[0,1]}(y-x) \cdot f(x) \, dx = \frac{1}{\delta^d} \int_{B(y,\delta)} f(x) \, dx = 0$$

**Esercizio.** Sia  $p \geq 1$  allora  $\{u \in L^p(\mathbb{R}) \mid \int u \, dx = 0\} \subseteq L^p(\mathbb{R})$  è denso in  $L^p(\mathbb{R})$ ?

# Capitolo 4

## Spazi di Hilbert

Sia  $H$  spazio vettoriale reale con prodotto scalare  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  definito positivo e norma indotta  $\| \cdot \|$  definita come  $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$ .

Si ricorda l'identità di polarizzazione

$$\langle x_1, x_2 \rangle = \frac{1}{4} \left( \|x_1 + x_2\|^2 - \|x_1 - x_2\|^2 \right).$$

**Nota.** Siccome  $\| \cdot \|$  è continua, dalla formula di polarizzazione segue che il prodotto scalare è continuo.

**Definizione.**  $H$  si dice **spazio di Hilbert** se è completo.

**Esempi.**

- Dato  $(X, \mathcal{A}, \mu)$ , gli spazi  $L^2(X), L^2(X, \mathbb{R}^m)$  sono spazi di Hilbert.
- Lo spazio  $\ell^2 = \left\{ (x_n) \mid \sum_{n=0}^{\infty} x_n^2 < +\infty \right\}$  è uno spazio di Hilbert.

**Definizione.**  $\mathcal{F} \subset H$  è un **sistema ortonormale** se

$$\|e\| = 1 \quad \forall e \in \mathcal{F}, \quad \langle e, e' \rangle = 0 \quad \forall e \neq e' \in \mathcal{F}.$$

**Definizione.**  $\mathcal{F}$  si dice **completo** se  $\overline{\text{Span}(\mathcal{F})} = H$ . In tal caso  $\mathcal{F}$  si dice **base di Hilbert**.

**Osservazione.** In generale una base di Hilbert  $\mathcal{F} \subset H$  non è anche una base algebrica di  $H$ .

L'esempio che segue spiega quanto appena detto.

**Esempio.** In  $\ell^2$  una base ortonormale è  $\mathcal{F} = \{e_n \mid n \in \mathbb{N}\}$  con  $e_n = (0, \dots, 0, \overset{(n)}{1}, 0, \dots)$ . Infatti, il fatto che siano ortonormali è banale; verifichiamo che sia una base.

Studiamo  $\text{Span}(\mathcal{F}) = \{x = (x_0, x_1, \dots) \mid x_n \text{ è definitivamente nullo}\}$ : dato  $x \in \ell^2$  e  $m = \mathbb{N}$ , definiamo

$$P_m x := (x_0, x_1, \dots, x_m, 0, \dots).$$

Allora  $\text{Span}(\mathcal{F}) \supset P_m x \xrightarrow{m \rightarrow +\infty} x$  in  $\ell^2$ . Infatti,

$$x - P_m x = (0, \dots, 0, x_{m+1}, x_{m+2}, \dots).$$

---

<sup>1</sup>Lo span sono combinazioni lineari finite.

Dunque

$$\|x - P_m x\| = \sum_{n=m+1}^{\infty} x_n^2 \xrightarrow{m \rightarrow +\infty} 0.$$

**Teorema 1.** (della base di Hilbert.) Dato  $H$  spazio di Hilbert,  $\mathcal{F}$  sistema ortonormale al più numerabile, ovvero  $\mathcal{F} = \{e_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ . Definiamo per ogni  $x \in H$ ,  $n \in \mathbb{N}$  l'elemento  $x_n = \langle x, e_n \rangle$ . Allora

- i) Vale  $\sum_n x_n^2 \leq \|x\|^2$  (**Disuguaglianza di Bessel**).
- ii) La somma  $\sum_n x_n e_n$  converge a qualche  $\bar{x} \in H$  e  $\bar{x}_n = x_n$  per ogni  $n$ .
- iii) Vale  $\|\bar{x}\|^2 = \sum_n x_n^2 \leq \|x\|^2$ .
- iv) Se  $x - \bar{x} \perp \mathcal{F}$ , allora  $x - \bar{x} \perp \overline{\text{Span}(\mathcal{F})}$ , ovvero  $\bar{x}$  è la proiezione di  $x$  su  $\overline{\text{Span}(\mathcal{F})}$ .
- v) Se  $\mathcal{F}$  è completo, allora  $x = \bar{x}$  e in particolare

$$x = \sum_{n=0}^{\infty} x_n e_n, \quad \|x\|^2 = \sum_{n=0}^{\infty} x_n^2 \quad (\textbf{Identità di Parseval}).$$

Alla dimostrazione del teorema premettiamo il seguente lemma.

**Lemma 2.** Siano  $H$  e  $\mathcal{F}$  come nel teorema. Data  $(a_n) \in \ell^2$ , allora

- i) La serie  $\sum_n a_n e_n$  converge a qualche  $\bar{x} \in H$ .
- ii)  $\bar{x}_n = a_n$  per ogni  $n$ .
- iii)  $\|\bar{x}\|^2 = \sum_n a_n^2$ .

**Dimostrazione.**

- i) Dimostriamo che  $y_n = \sum_{n=1}^m a_n e_n$  è di Cauchy in  $H$ . Se  $m' > m$ , vale

$$y_{m'} - y_m = \sum_{n=m+1}^{m'} a_n e_n \implies \|y_{m'} - y_m\|^2 = \left\| \sum_{n=m+1}^{m'} a_n e_n \right\|^2 = \sum_{n=m+1}^{m'} a_n^2 \leq \sum_{n=m+1}^{\infty} a_n^2 < +\infty.$$

Dunque, per ogni  $\varepsilon$  esiste  $m_\varepsilon$  tale che  $\sum_{m_\varepsilon+1}^{\infty} a_n^2 \leq \varepsilon^2$ , per cui

$$\|y_{m'} - y_m\|^2 \leq \sum_{m+1}^{m'} a_n^2 \leq \sum_{m_\varepsilon+1}^{\infty} a_n^2 \leq \varepsilon^2 \quad \forall m, m' \geq m_\varepsilon.$$

- ii) Se  $m \geq n$ ,  $\langle y_m, e_n \rangle = a_n$ , dunque, per continuità del prodotto scalare

$$a_n = \langle y_m, e_n \rangle \xrightarrow{m \rightarrow \infty} \langle \bar{x}, e_n \rangle = \bar{x}_n.$$



iii) Si ha l'uguaglianza  $\|y_m\|^2 = \sum_{n=1}^m a_n^2$ , per cui passando al limite per  $m \rightarrow +\infty$  otteniamo

$$\begin{aligned} \|y_m\|^2 &\xrightarrow{m \rightarrow \infty} \|\bar{x}\|^2 \\ &\parallel \\ \sum_{n=0}^m a_n^2 &\xrightarrow{m \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^{\infty} a_n^2 \end{aligned}$$

□

### Dimostrazione Teorema 1.

i) Studiamo la somma  $x = \sum_{n=0}^m x_n e_n + \overbrace{\quad}^{\text{resto}} y$ .

Notiamo che  $x$  è somma di vettori ortogonali, infatti  $y$  è ortogonale a  $\sum_{n=0}^m x_n e_n$  :

$$\langle y, e_i \rangle = \left\langle x - \sum_{n=0}^m x_n e_n, e_i \right\rangle = \langle x, e_i \rangle - \sum_{n=0}^m x_n \underbrace{\langle e_n, e_i \rangle}_{\delta_{i,n}} = x_i - x_i = 0.$$

Essendo che  $x$  è somma di vettori ortogonali abbiamo

$$\|x\|^2 = \sum_{n=1}^m x_n^2 + \|y\|^2 \geq \sum_{n=1}^m x_n^2.$$

Passando al limite per  $m \rightarrow +\infty$  otteniamo

$$\|x\|^2 \geq \sum_{n=1}^{\infty} x_n^2.$$

ii) Segue dal lemma notando che il punto precedente ci dice che la successione  $(x_n)$  è a quadrato sommabile.

iii) Segue banalmente dai primi due punti.

iv) Notiamo che  $\langle x - \bar{x}, e_n \rangle = x_n - \bar{x}_n \stackrel{\text{ii)}}{=} 0$  per ogni  $n$ . Cioè

$$x - \bar{x} \perp e_n \implies x - \bar{x} \perp \text{Span}(\mathcal{F}) \implies x - \bar{x} \underset{\substack{\text{continuità} \\ \text{pr. scalare}}}{\perp} \overline{\text{Span}(\mathcal{F})}$$

v)  $x - \bar{x} \perp \overline{\text{Span}(\mathcal{F})} \underset{\mathcal{F} \text{ è completo}}{=} H \implies x - \bar{x} = 0$ , cioè  $x = \bar{x}$ .

□

**Corollario 3.** Siano  $H$  spazio di Hilbert,  $\mathcal{F} = \{e_n \mid n \in \mathbb{N}\}$  base di Hilbert,  $x, x' \in H$ . Valgono le seguenti.

i)  $x_n = x'_n \quad \forall n \in \mathbb{N} \iff x = x'$  ( $\Leftarrow$  è ovvia).

ii)  $\langle x, x' \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} x_n x'_n$  (**Identità di Parseval**).

iii) L'applicazione  $H \ni x \mapsto (x_n) \in \ell^2$  è un'isometria surgettiva<sup>a</sup>.

---

<sup>a</sup>In particolare è bigettiva ma l'iniettività è ovvia.

### Dimostrazione.

- i) Per l'enunciato v) se due vettori hanno la stessa rappresentazione rispetto a una base di Hilbert coincidono.
- ii) La tesi segue usando l'identità di polarizzazione congiuntamente all'enunciato v) del teorema:

$$\begin{aligned}\langle x, x' \rangle &= \frac{1}{4} (\|x + x'\|^2 - \|x - x'\|^2) = \frac{1}{4} \left( \sum_n \overbrace{(x_n + x'_n)^2}^{x_n^2 + x_n'^2 + 2x_n x'_n} - \sum_n \overbrace{(x_n - x'_n)^2}^{x_n^2 + x_n'^2 - 2x_n x'_n} \right) \\ &= \frac{1}{4} \left( \cancel{\sum x_n^2} + \cancel{\sum x_n'^2} + 2 \sum x_n x'_n - \cancel{\sum x_n^2} - \cancel{\sum x_n'^2} + 2 \sum x_n x'_n \right).\end{aligned}$$

- iii) Il fatto che l'applicazione sia un'isometria segue da Parseval; che sia iniettiva dal fatto che  $\mathcal{F}$  è una base di Hilbert e che sia surgettiva dai punti i) e ii) del Lemma 2.

□

### Osservazioni.

- Gli enunciati i) e v) non richiedono  $H$  completo, mentre ii) non è vero se  $H$  non è completo.
- Se  $H$  è uno spazio di Hilbert e  $\mathcal{F}$  sistema ortonormale infinito, allora  $\mathcal{F}$  non è mai una base algebrica<sup>1</sup>. Dunque, combinazioni lineari finite di  $\mathcal{F}$  non sono mai uguali ad  $H$ , ovvero  $\text{Span}(\mathcal{F}) \subsetneq H$ .

**Dimostrazione.** Presi  $(e_n) \subset \mathcal{F}$ , consideriamo  $\bar{x} = \sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n} e_n$ . Allora  $\bar{x} \in H \setminus \text{Span}(\mathcal{F})$ .

- Siano  $H$  uno spazio di Hilbert di dimensione infinita e  $\mathcal{F}$  una base di Hilbert. Allora  $\mathcal{F}$  è numerabile se e solo se  $H$  è separabile.

### Dimostrazione.

⇒ Vale  $H = \overline{\text{Span}(\mathcal{F})} = \overline{\text{Span}_{\mathbb{Q}}(\mathcal{F})}$ . Concludiamo notando che  $\overline{\text{Span}_{\mathbb{Q}}(\mathcal{F})}$  è numerabile se  $\mathcal{F}$  è numerabile.

⇐ Se  $\mathcal{F}$  non fosse numerabile, siccome  $\|e - e'\| = \sqrt{2} \quad \forall e, e' \in \mathcal{F}$ , potremmo definire per ogni elemento di  $\mathcal{F}$  una palla di raggio  $\sqrt{2}/2$ , dunque potremmo definire un insieme di palle disgiunte. Dato un sottoinsieme denso di  $H$ , per definizione, deve intersecare ogni palla e dunque deve essere più che numerabile, dunque  $H$  non sarebbe separabile.

**Esempio.** Lo spazio  $H = L^2(X)$ , con  $X = \mathbb{R}^n$ ,  $\mu$  misura di Lebesgue ha base di Hilbert numerabile.

---

<sup>1</sup>Per base algebrica s'intende un insieme di vettori di uno spazio vettoriale le cui combinazioni lineari generano tutto lo spazio.

- Dato  $\mathcal{F}$  sistema ortonormale in  $H$ , allora  $\mathcal{F}$  è completo se e solo se  $\mathcal{F}$  è massimale (nella classe dei sistemi ortonormali rispetto all'inclusione).

**Dimostrazione.**

$\Rightarrow$  Dato che  $\mathcal{F}$  è completo segue che  $\overline{\text{Span}(\mathcal{F})} = X$ , quindi

$$\mathcal{F}^\perp = (\text{Span}(\mathcal{F}))^\perp \underset{\substack{\text{continuità del} \\ \text{prodotto scalare}}}{=} \overline{\text{Span}(\mathcal{F})}^\perp = H^\perp = \{0\}.$$

dunque  $\mathcal{F}$  è massimale.

$\Leftarrow$  Se  $\mathcal{F}$  non è completo, esiste  $x \in H \setminus \overline{\text{Span}(\mathcal{F})}$ . Definiamo  $\bar{x}$  come nel Teorema 1. Notiamo che  $x - \bar{x} \perp \text{Span}(\mathcal{F})$ , dunque  $x - \bar{x} \perp \mathcal{F}$  e  $x - \bar{x} \neq \{0\}$ , da cui  $\mathcal{F} \cup \left\{ \frac{x - \bar{x}}{\|x - \bar{x}\|} \right\}$  è un sistema ortonormale che include strettamente  $\mathcal{F}$ .  $\nexists$

**Osservazione.** Nell'implicazione  $\Rightarrow$  non abbiamo usato la completezza di  $H$ .

- Ogni sistema ortonormale  $\mathcal{F}$  si completa a  $\tilde{\mathcal{F}}$  base di Hilbert di  $H$ .

**Dimostrazione.** Sia  $X = \{ \mathcal{F} \text{ sistema ortonormale in } H \text{ tale che } \tilde{\mathcal{F}} \subset \mathcal{F} \}$ . Per Zorn,  $X$  contiene un elemento massimale. Denotiamolo con  $\tilde{\mathcal{F}}$ . Allora  $\tilde{\mathcal{F}}$  è una base di Hilbert.

**Teorema 4.** Dato  $V$  sottospazio vettoriale chiuso di  $H$ . Allora

- $H = V + V^\perp$ , cioè per ogni  $x \in H$  esiste  $\bar{x} \in V$  e  $\tilde{x} \in V^\perp$  tale che  $x = \bar{x} + \tilde{x}$ .
- Gli elementi  $\bar{x}$  e  $\tilde{x}$  sono univocamente determinati (e indicati con  $x_V$  e  $x_V^\perp$ ).
- $\bar{x}$  è caratterizzato come l'elemento di  $V$  più vicino a  $x$ .

**Dimostrazione.**

- Dato che  $V$  è chiuso,  $V$  è completo, cioè  $V$  è un sottospazio di  $H$ , dunque  $V$  ammette base ortonormale  $\mathcal{F} = \{e_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ . Definiamo  $\bar{x} \in \overline{\text{Span}(\mathcal{F})}$  come nel Teorema 1 e  $\tilde{x} := x - \bar{x} \perp \overline{\text{Span}(\mathcal{F})} = V$  (per iv)) dunque  $\tilde{x} \in V^\perp$ .
- Se  $x = \bar{x} + \tilde{x} = \bar{x}' + \tilde{x}'$ , dove  $\bar{x}, \bar{x}' \in V$  e  $\tilde{x}, \tilde{x}' \in V^\perp$ , allora

$$\bar{x} - \bar{x}' = \tilde{x}' - \tilde{x} \underset{V \cap V^\perp = \{0\}}{\implies} \bar{x} - \bar{x}' = \tilde{x}' - \tilde{x} = 0.$$

- Per ogni  $y \in V$  sia  $f(y) = \|x - y\|^2$ . Mostriamo che  $\bar{x}$  è l'unico minimo di  $f$ .

$$f(y) = \|x - y\|^2 = \|\underbrace{x - \bar{x}}_{\in V^\perp} + \underbrace{\bar{x} - y}_{\in V}\|^2 = \|x - \bar{x}\|^2 + \|\bar{x} - y\|^2 = f(\bar{x}) + \|\bar{x} - y\|^2 \geq f(\bar{x}).$$

□

**Osservazione.** Serve  $V$  chiuso. Se per esempio  $V$  è denso in  $H$  ma  $V \neq H$ , allora

$$\overline{V^\perp} = \overline{V}^\perp = H^\perp = \{0\} \implies V \subseteq V + V^\perp \subseteq V + \overline{V^\perp} = V \subsetneq H.$$

Un esempio di tale  $V$  è  $\text{Span}(\mathcal{F})$  con  $\mathcal{F}$  base di  $H$  ( $H$  di dimensione infinita).

**Teorema 5** (di rappresentazione di Riesz.) Sia  $H$  spazio di Hilbert. Dato  $\Lambda: H \rightarrow \mathbb{R}$  lineare e continuo, esiste  $x_0 \in H$  tale che

$$\Lambda(x) = \langle x, x_0 \rangle \quad \text{per ogni } x \in H. \quad (*)$$

**Lemma 6.** Dato  $\Lambda: X \rightarrow \mathbb{R}$  lineare,  $(\ker \Lambda)^\perp$  ha dimensione 0 o 1.

**Dimostrazione** Se per assurdo  $\dim(\ker \Lambda)^\perp \geq 2$ , allora  $(\ker \Lambda)^\perp$  conterrebbe un sottospazio  $W$  di dimensione 2. Dunque,  $\dim(\ker \Lambda|_W) = \{1, 2\}$ , essendo che  $\dim \mathbb{R} = 1$ . Ma questo non è possibile, in quanto abbiamo definito  $W \subset \ker^\perp$ .  $\square$

**Dimostrazione Teorema 5.** Sia  $V := \ker \Lambda$ . Dato che  $\Lambda$  è continuo segue che  $V$  è chiuso. Se  $V = H \implies \Lambda \cong 0$  e prendiamo  $x_0 = 0$ .

Se  $V \neq H$ , allora  $V^\perp \neq \{0\}$  e definiamo  $x_1 \in V^\perp$  con  $\|x_1\| = 1$ . Poniamo  $x_0 := cx_1$  con  $c := \Lambda x_1$  e  $\tilde{\Lambda}(x) := \langle x, x_0 \rangle$ . Abbiamo che

- $x \in V \implies x \perp x_1 \implies x \perp x_0 \implies \tilde{\Lambda} = 0 = \Lambda(x)$ . Quindi  $\tilde{\Lambda} = \Lambda$  su  $V$ .
- $\tilde{\Lambda}(x_1) = \langle x_1, x_0 \rangle = \langle x_1, cx_1 \rangle = c \|x_1\|^2 = c = \Lambda(x_1)$ . Quindi  $\tilde{\Lambda} = \Lambda$  su  $\text{Span}(x_1) = V^\perp$  che ha dimensione 0 o 1 per il Lemma 6.
- $\tilde{\Lambda} = \Lambda$  su  $V + V^\perp = H$ .

$\square$

**Osservazione.** Esistono funzioni  $\Lambda: H \rightarrow \mathbb{R}$  lineari ma non continue se  $H$  ha dimensione infinita.

**Dimostrazione.** Prendo  $\Lambda: H \rightarrow \mathbb{R}$  lineare definito come

$$\begin{cases} \Lambda(e_n) = n & \forall n \\ \Lambda(e) = \text{qualsiasi } e \in \mathcal{G} \setminus \{e_n\}. \end{cases}$$

Allora

$$+\infty = \sup_n |\Lambda(e_n)| \leq \sup_{\|x\| \leq 1} |\Lambda(x)|$$

da cui segue che  $\Lambda$  non è continuo.

## 4.1 Spazi di Hilbert complessi

**Definizione.** Sia  $H$  uno spazio vettoriale su  $\mathbb{C}$  con prodotto hermitiano  $\langle \cdot; \cdot \rangle$ , ovvero tale che

- $\langle \cdot; \cdot \rangle$  è lineare nella prima variabile
- $\langle x; x' \rangle = \overline{\langle x', x \rangle}$  ovvero è antilineare nella seconda variabile.
- $\langle x; x \rangle \geq 0$  per ogni  $x$  e vale 0 se e solo se  $x = 0$ .

Analogamente si pone  $\|x\| := \sqrt{\langle x; x \rangle}$ . C'è un'identità di polarizzazione ma è leggermente diversa dalla versione reale.

**Definizione.**  $H$  si dice di Hilbert se è **completo**.

**Esempio.** Su  $L^2(X; \mathbb{C})$  si mette il prodotto scalare dato da

$$\langle u; v \rangle := \int_X u \cdot \bar{v} d\mu.$$

**Teorema.** (della base di Hilbert per spazi complessi) Dato  $\mathcal{F} = \{e_n\}$  sistema ortonormale in  $H$  e  $x \in H$  allora per ogni  $n$  si pone<sup>1</sup>

$$x_n = \langle x; e_n \rangle$$

Vale anche l'identità di Parseval  $\|x\|^2 = \sum |x_n|^2$  dove  $|\cdot|$  è il modulo di un numero complesso, in particolare nella versione con prodotto scalare diventa

$$\langle x, x' \rangle = \sum_n x_n \overline{x'_n}.$$

## 4.2 Esempi di basi Hilbertiane

### 4.2.1 Polinomi

La base data da  $\{1, x, x^2, \dots, x^n, \dots\}$  opportunamente ortonormalizzata è una base di  $L^2[0, 1]$  (anche di  $L^2(\mathbb{R})$ ) per il teorema di Stone-Weierstrass.

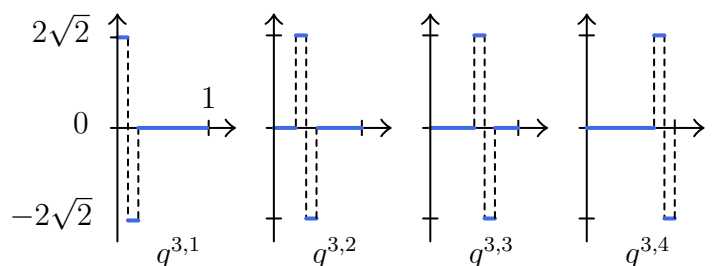
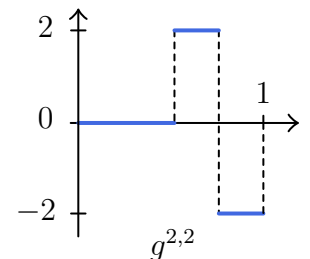
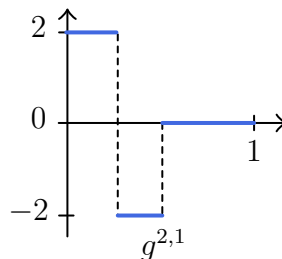
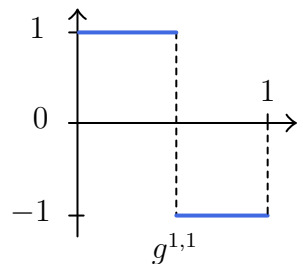
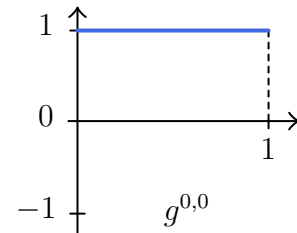
### 4.2.2 Base di Haar

Vediamo la base di Haar data da due indici  $n, k$  dove  $n$  indica l'ampiezza delle “onde” (anche dette *wavelet*) e  $k$  il posizionamento dell'onda. Sia  $n \in \mathbb{N}$  e  $k = 1, \dots, 2^n$  e poniamo

$$g^{0,0} := \mathbb{1}_{[0,1]} \quad g^{n,k} := 2^{\frac{n-1}{2}} \left( \mathbb{1}_{\left[\frac{2k-2}{2^n}, \frac{2k-1}{2^n}\right]} - \mathbb{1}_{\left[\frac{2k-1}{2^n}, \frac{2k}{2^n}\right]} \right)$$

Inoltre  $\|g^{n,k}\|_{L^2[0,1]} = 1$  ed anche  $\|g^{0,0}\|_{L^2[0,1]} = 1$ . Vedremo che  $\{g^{n,k} \mid n \geq 1, k = 1, \dots, 2^n\} \cup \{g^{0,0}\}$  formano un sistema ortonormale.

- $\langle g^{n,k}, g^{0,0} \rangle = 0$ : È ovvio in quanto le  $g^{n,k}$  hanno media nulla.
- $\langle g^{n,k}, g^{n',k'} \rangle = 0$ : Se  $n = n'$  i supporti sono sempre disgiunti altrimenti  $n \neq n'$ , se supponiamo  $n < n'$  allora i supporti o sono disgiunti e si conclude come prima o il supporto di  $g^{n',k'}$  è contenuto in quello di  $g^{n,k}$ . In tal caso però  $g^{n,k}$  è costante su  $g^{n',k'}$  e dunque l'integrale è sempre nullo.



<sup>1</sup>E non  $\langle e_n; x \rangle$ !

Inoltre è anche una base hilbertiana, per combinazioni algebriche si ottengono tutti gli intervalli della forma

$$I_k := \left[ \frac{k-1}{2^n}, \frac{k}{2^n} \right] \rightsquigarrow \mathbb{1}_{I_k}$$

ad esempio normalizzando  $g^{n,k} + 2^{\frac{n-1}{2}} g^{0,0}$  otteniamo uno degli intervalli di sopra di lunghezza  $1/2^{n+1}$ .

Vedremo che possiamo estendere la base di Haar a tutto  $\mathbb{R}$  però è più difficile... [TODO: Ehm aggiungere la parte dopo quando verrà fatta]

## 4.3 Esercizi

### 4.3.1 Basi Hilbertiane e proiezioni

**Esercizio.** Sia  $H = L^2(-1, 1)$  e sia  $V = \text{Span}\{1, x, x^2\}$ . Verificare che  $V$  è un sottospazio chiuso e calcolare la proiezione di  $\sin x$  su  $V$ .

*Notazione.* Indichiamo con  $\|\cdot\|$  la norma  $\|\cdot\|_{L^2(-1,1)}$  e con  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  il prodotto scalare su  $L^2$ .

**Soluzione.** Vediamo come risolvere questo esercizio in tre modi diversi.

i) Dato  $H$  spazio di Hilbert separabile, e dato un sottospazio  $V \subset H$ , vediamo come trovare la proiezione di un elemento  $x \in H$  su  $V$ . Procediamo come segue.

- Controlliamo che  $V$  sia chiuso.
- Calcoliamo una base hilbertiana di  $V$  che indichiamo con  $\{e_1, \dots, e_n, \dots\}$ .

Il tal caso, la proiezione di un elemento  $x \in H$  su  $V$  è data da

$$p_V(x) = \sum_n \langle x, e_n \rangle e_n.$$

**Esercizio.** [TO DO: per casa] Ogni sottospazio di dimensione finita di uno spazio di Hilbert o di  $L^p$  è chiuso (e in particolare ha parte interna vuota).

Abbiamo una base di  $V$  data da  $\{1, x, x^2\}$  (è una base in quanto sono linearmente indipendenti: si può verificare mostrando che  $\forall x \in [-1, 1] \lambda_1 + \lambda_2 x + \lambda_3 x^2 = 0 \implies \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$  usando la teoria sulle equazioni di II grado oppure si può derivare e man mano ottenere più informazioni su  $\lambda_3, \lambda_2, \lambda_1$ ).

Volendo usare la base scritta sopra per calcolare la proiezione di  $\sin x$  su  $V$ , dovremmo prima applicare Gram-Schmidt alla base  $\{1, x, x^2\}$  per determinare una base Hilbertiana:

$$\begin{aligned} e_1 &= \frac{1}{\|1\|} = \frac{1}{\sqrt{2}} \\ e_2 &= \frac{x - \langle x, \frac{1}{\sqrt{2}} \rangle \cdot 1}{\left\| x - \langle x, \frac{1}{\sqrt{2}} \rangle \cdot 1 \right\|} \\ e_3 &= \frac{x^2 - \langle x^2, e_1 \rangle \cdot e_1 - \langle x^2, e_2 \rangle \cdot e_2}{\left\| x^2 - \langle x^2, e_1 \rangle \cdot e_1 - \langle x^2, e_2 \rangle \cdot e_2 \right\|} \end{aligned}$$

e successivamente calcolare  $p_V(\sin x)$  con la formula scritta sopra.

- ii) Alternativamente, possiamo direttamente cercare la proiezione di  $\sin x$  su  $V$ . Determiniamo  $a, b, c$  tali che  $a + bx + cx^2$  sia  $p_V(x) = \sin x$  allora posto  $f(x) := \sin x - a - bx - cx^2$  abbiamo  $f(x) \in V^\perp \iff$  si verificano le seguenti condizioni

$$\langle f(x), 1 \rangle = 0 \quad \langle f(x), x \rangle = 0 \quad \langle f(x), x^2 \rangle = 0$$

Ad esempio da  $\langle f(x), 1 \rangle = 0$  otteniamo

$$0 = \int_{-1}^1 (\sin x - a - bx - cx^2) \cdot 1 \, dx = \underbrace{\int_{-1}^1 \sin x \, dx}_{=0} - 2a - b \underbrace{\int_{-1}^1 x \, dx}_{=0} - c \int_{-1}^1 x^2 \, dx \implies 0 = -2a - \frac{2}{3}c$$

ed analogamente si procede con  $x$  e  $x^2$ ... [TODO: Da finire]

- iii) Un altro modo è considerare la funzione  $g(a, b, c) := \|\sin x - a - bx - cx^2\|_{L^2(-1,1)}$  che è continua, coerciva, etc. e imponendo  $\nabla_{a,b,c} g = 0$  si minimizza e si ottengono  $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$  che verificano  $p_V(\sin x)$ .

**Esercizio.** Sia  $X = \{u \in L^2(\mathbb{R}) \mid \int_0^2 u \, dx = 0\}$ , dire se è un sottospazio chiuso, calcolare  $X^\perp$  per una generica  $u \in L^2(\mathbb{R})$  e determinare le proiezioni  $p_X(u)$  e  $p_{X^\perp}(u)$ .

**Soluzione.** La mappa  $T$  lineare data da

$$u \mapsto \int_0^2 u \, dx$$

è ben definita, lineare e continua, allora  $X$  è proprio  $T^{-1}(0)$  dunque è un sottospazio chiuso.

**Osservazione.** Notiamo che

$$T(u) = \int_{\mathbb{R}} u(x) \cdot \mathbb{1}_{[0,2]}(x) \, dx = \langle u, g \rangle_{L^2(\mathbb{R})}, \quad g = \mathbb{1}_{[0,2]}(x) \in L^2(\mathbb{R}).$$

Calcoliamo ora  $X^\perp$  e le proiezioni  $p_X, p_{X^\perp}$ . Abbiamo che  $X = \{u \in L^2(\mathbb{R}) \mid \langle u, g \rangle = 0\}$  dove  $g = \mathbb{1}_{[0,2]}(x)$ , dunque<sup>1</sup>  $X = \text{Span}(g)^\perp \implies X^\perp = (\text{Span}(g)^\perp)^\perp = \overline{\text{Span}(g)} = \text{Span } g$ .

Notiamo<sup>2</sup> che

$$L^2(\mathbb{R}) = \text{Span}_{\mathbb{R}} \left\{ \frac{g}{\|g\|_{L^2}} \right\} \oplus \left\{ \frac{g^\perp}{\|g^\perp\|_{L^2}} \right\}.$$

Calcoliamo  $p_X(u)$  come segue

$$p_X(u) = u - \left\langle u, \frac{g}{\|g\|_{L^2}} \right\rangle \cdot \frac{g}{\|g\|_{L^2}},$$

dove

$$\|g\|_{L^2} = \left( \int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_{[0,2]}(x)^2 \, dx \right)^{1/2} = \sqrt{2}$$

e dunque

$$p_X(u) = u - \left( \int_0^2 u \, dx \right) \cdot \frac{\mathbb{1}_{[0,2]}}{2}$$

<sup>1</sup>Dato  $\mathcal{F} \subset H$  spazio di Hilbert,  $(\mathcal{F}^\perp)^\perp = \overline{\text{Span } \mathcal{F}}$

<sup>2</sup>Con  $g/\|g\|_{L^2}$  indichiamo una base normalizzata di  $g^\perp$ .

Un controllo veloce per verificare di aver fatto i conti corretti è quello di vedere che  $p_X(u) \in X$ , dunque di verificare che  $\int_0^2 p_X(u) \, dx = 0$ .

Per calcolare  $p_{X^\perp}(u)$  usiamo la seguente.

**Osservazione.** Vale  $u = p_X(u) + p_{X^\perp}(u)$ .

In conclusione,

$$p_{X^\perp}(u) = u - p_X(u) = \left( \int_0^2 u \, dx \right) \cdot \frac{\mathbb{1}_{[0,2]}}{2}.$$

**Esercizio.** [TO DO: per casa.] Sia  $V = \{\underline{x} = (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \ell^2 \mid x_1 + x_3 + x_5 = 0\}$ . Dire se  $V$  è chiuso in  $\ell^2$  e calcolare  $p_V$  e  $p_{V^\perp}$ .



# Capitolo 5

## Serie di Fourier

Lo scopo della serie di Fourier (complessa) è di rappresentare una funzione  $f: [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{C}$  (o più in generale una funzione  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$   $2\pi$ -periodica) come

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}$$

In particolare, chiamiamo i coefficienti  $c_n$  **coefficienti di Fourier** di  $f(x)$  e tutta l'espressione a destra **serie di Fourier** di  $f(x)$ .

**Motivazione.** La rappresentazione in serie di Fourier serve ad esempio a risolvere certe equazioni alle derivate parziali ed è anche utilizzata per la “compressione dati”.

**Problemi.**

- Come si trovano (se esistono) i coefficienti di Fourier?
- Ed in che senso la serie converge?

**Osservazione.** La serie appena vista è indicizzata da  $-\infty$  a  $+\infty$ , più avanti vedremo che la definizione esatta non sarà importante ma per ora usiamo la definizione

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n := \lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{n=-N}^N a_n$$

ed ogni tanto scriveremo anche  $\sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n$  per brevità.

**Teorema 1.** L'insieme  $\mathcal{F} = \left\{ e_n(x) := \frac{e^{inx}}{\sqrt{2\pi}} \right\}$  è una base ortonormale di  $L^2([-\pi, \pi]; \mathbb{C})$ .

Da cui segue che

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} \langle f; e_n \rangle \cdot e_n = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \left( \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \frac{\overline{e^{int}}}{\sqrt{2\pi}} dt \right) \frac{e^{inx}}{\sqrt{2\pi}} \\ &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{1}{2\pi} \underbrace{\left( \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-int} dt \right)}_{c_n} e^{inx} \end{aligned}$$

**Definizione.** Data  $f \in L^2([-\pi, \pi]; \mathbb{C})$  i coefficienti di Fourier di  $f$  sono

$$c_n = c_n(f) := \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx} dx.$$

Notiamo in particolare che è anche ben definito anche per  $f \in L^1$  (anche se per ora non ci dice molto in quanto  $L^1$  non è uno spazio di Hilbert).

**Corollario.** Per ogni  $f \in L^2([-\pi, \pi]; \mathbb{C})$  abbiamo

i) La serie  $\sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n e^{inx}$  converge a  $f$  in  $L^2$ .

ii) Vale l'identità di Parseval

$$\|f\|_2^2 = 2\pi \sum_{n \in \mathbb{Z}} |c_n|^2 \quad \langle f, g \rangle = 2\pi \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n(f) \overline{c_n(g)}$$

**Osservazione.** Usando la i) ed il fatto che la convergenza in  $L^2$  implica la convergenza quasi ovunque a meno di sottosuccessioni otteniamo che  $\forall f \exists N_n \uparrow \infty$  tale che

$$\sum_{n=-N_k}^{N_k} c_n e^{inx} \xrightarrow{k} f(x) \quad \forall x \in [-\pi, \pi].$$

In particolare nel 1966 Carleson ha dimostrato che in realtà vale proprio

$$\sum_{n=-N}^N c_n e^{inx} \xrightarrow{N} f(x) \quad \forall x.$$

Prima di dimostrare il Teorema 1 riportiamo il teorema di Stone-Weierstrass.

**Teorema** (di Stone-Weierstrass.) Sia  $K$  uno spazio compatto e  $T_2$  (essenzialmente è uno spazio metrico compatto) e siano

- $C(K)$  l'insieme delle funzioni continue reali su  $K$ ,
- $C(K; \mathbb{C})$  le funzioni continue complesse su  $K$

entrambe dotate della norma del sup.

Dato  $\mathcal{A} \subset C(K)$  diciamo che è una **sottoalgebra** se è uno spazio vettoriale e chiuso rispetto al prodotto e diciamo che **separa i punti** se  $\forall x_1, x_2 \in K$  con  $x_1 \neq x_2$  allora  $\exists f \in \mathcal{A}$  tale che  $f(x_1) \neq f(x_2)$ .

- *Caso reale:* se  $\mathcal{A}$  è una sottoalgebra di  $C(K)$  che separa i punti e contiene le costanti allora  $\overline{\mathcal{A}} = C(K)$ .
- *Caso complesso:* se  $\mathcal{A}$  è una sottoalgebra di  $C(K; \mathbb{C})$  che separa i punti, contiene le costanti ed è *chiusa per coniugio* allora  $\overline{\mathcal{A}} = C(K; \mathbb{C})$ .

**Osservazioni.**

- Se  $K = [0, 1]$ ,  $\mathcal{A}$  = “polinomi reali”  $\implies \overline{\mathcal{A}} = C(K; \mathbb{C})$ .

- L'ipotesi di separare i punti è necessaria, se ad esempio  $\exists x_1, x_2$  tali che  $x_1 \neq x_2$  e per ogni  $f$  abbiamo  $f(x_1) = f(x_2)$  allora varrà analogamente anche per ogni funzione nella chiusura ma le funzioni continue separano i punti<sup>1</sup>.
- È anche necessario che  $\mathcal{A} \supset$  “costanti”, ad esempio dato  $x_0 \in K$  ed  $\mathcal{A} := \{f \in C(K) \mid f(x_0) = 0\}$  abbiamo che  $\overline{\mathcal{A}} = \mathcal{A} \subsetneq C(K)$ .
- Anche la chiusura per coniugio è necessaria, infatti ad esempio preso  $K = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq 1\}$ ,  $\mathcal{A} =$  “polinomi complessi”,  $\mathcal{A}$  separa i punti e contiene le costanti però  $\overline{\mathcal{A}}$  sono solo le funzioni olomorfe su  $K$ .

Vorremmo applicare questo teorema alle funzioni  $2\pi$ -periodiche ristrette a  $[-\pi, \pi]$  che però non verificano la separazione dei punti in quanto per la periodicità  $f(-\pi) = f(\pi)$ . Nel seguente corollario vediamo come possiamo estendere leggermente il teorema passando ai quozienti topologici.

**Corollario.** Sia  $\mathcal{A}$  una sottoalgebra di  $C(K)$  (o analogamente per  $C(K; \mathbb{C})$ ) che contiene le costanti (e nel caso complesso anche chiusa per coniugio). Definiamo la relazione di equivalenza  $x_1 \sim x_2$  se  $f(x_1) = f(x_2)$  per ogni  $f \in \mathcal{A}$ . Allora,

$$\overline{\mathcal{A}} = \{f \in C(K) \mid f(x_1) = f(x_2) \text{ se } x_1 \sim x_2\}.$$

**Dimostrazione Corollario.** È chiaro che  $\mathcal{A} \subset X := \{f \in C(K) \mid f(x_1) = f(x_2) \text{ se } x_1 \sim x_2\}$ . Data  $g \in X$ , definiamo  $\tilde{g}: K/\sim \rightarrow \mathbb{C}$  in modo che  $g = \tilde{g} \circ \pi$ . Osserviamo che  $K/\sim$  è compatto e  $T_2$  e che  $\tilde{\mathcal{A}} = \{\tilde{f} \mid f \in \mathcal{A}\}$  soddisfa le ipotesi del teorema di Stone-

$$\begin{array}{ccc} K & \xrightarrow{g} & \mathbb{C} \\ \downarrow \pi & \nearrow \tilde{g} & \\ K/\sim & & \end{array}$$

Weierstrass, quindi  $\tilde{\mathcal{A}} = C(K/\sim; \mathbb{C})$ , quindi per ogni  $g \in X$  esiste una successione  $\tilde{g}_n \in \tilde{\mathcal{A}}$  tale che  $\tilde{g}_n \rightarrow \tilde{g}$  uniformemente e quindi  $g_n \rightarrow g$  uniformemente.

□

**Dimostrazione Teorema 1.** Vogliamo vedere che

i)  $\mathcal{F}$  è un sistema ortonormale.

*Dimostrazione.* Basta calcolare  $\langle e_n; e_m \rangle$  per ogni  $n, m \in \mathbb{Z}$

$$\langle e_n; e_m \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{inx}}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{\overline{e^{inx}}}{\sqrt{2\pi}} dx = \begin{cases} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} 1 dx = 1 & \text{se } n = m \\ \frac{1}{2\pi} \left[ \frac{e^{i(n-m)x}}{i(n-m)} \right]_{-\pi}^{\pi} = 0 & \text{se } n \neq m \end{cases}$$

ii)  $\mathcal{F}$  è completo.

*Dimostrazione.* Questo punto richiede il teorema di Stone-Weierstrass.

Consideriamo

$$\mathcal{A} = \text{Span}_{\mathbb{C}}(\mathcal{F}) = \left\{ \sum_n a_n e^{inx} \right\} = \{p(e^{inx}) \mid p \text{ polinomio a esponenti interi}\}.$$

Segue che  $\mathcal{A}$  è una sottoalgebra che separa i punti di  $K$  tranne  $-\pi$  e  $\pi$  ed è chiusa per coniugio.

---

<sup>1</sup>Basta prendere una funzione lineare.

Per il Corollario, indicando con  $\overline{\mathcal{A}}^C$  la chiusura di  $\mathcal{A}$  rispetto alla norma del sup e con  $\overline{\mathcal{A}}^{L^2}$  la chiusura rispetto alla norma  $L^2$ , si ottiene

$$\begin{aligned}
\overline{\mathcal{A}}^C &= \{g \in C([- \pi, \pi; \mathbb{C}]) : g(-\pi) = g(\pi)\} \\
&\Downarrow \\
\overline{\mathcal{A}}^{L^2} &\supset \{g \in C([- \pi, \pi; \mathbb{C}]) : g(-\pi) = g(\pi)\} \\
&\Downarrow * \\
\overline{\mathcal{A}}^{L^2} &\supset C([- \pi, \pi; \mathbb{C}]) \\
&\Downarrow \\
\overline{\mathcal{A}}^{L^2} &\underbrace{=}_{\text{densità di } C \text{ in } L^2} L^2([- \pi, \pi; \mathbb{C}])
\end{aligned}$$

dove  $*$  deriva dal fatto che

$$\overline{\{g \in C([- \pi, \pi; \mathbb{C}]) : g(-\pi) = g(\pi)\}} = C([- \pi, \pi; \mathbb{C}]).$$

Infatti, data  $g \in C([- \pi, \pi; \mathbb{C}])$  definisco la successione  $(g_n)$  come  $g_n := g \cdot \varphi_n$  dove  $\varphi_n$  sono tali che  $\varphi_n(-\pi) = \varphi_n(\pi) = 0$ ,  $\varphi_n = 1$  su  $[1/n - \pi, \pi - 1/n]$ . Concludiamo osservando che  $g_n \rightarrow g$  in  $L^2$ . [TO DO: disegno delle  $\varphi_n$ ]

□

**Esempio** (calcolo coefficienti di Fourier).

- $\cos x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2} = \frac{1}{2}e^{ix} + \frac{1}{2}e^{-ix}$ , allora  $c_n = \begin{cases} \frac{1}{2} & n = \pm 1 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$ .
- $(\sin x)^2 = \left(\frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}\right)^2 = \frac{1}{4}e^{2ix} + \frac{1}{2} - \frac{1}{4}e^{-2ix}$ , allora  $c_n = \begin{cases} -\frac{1}{4} & n = \pm 2 \\ \frac{1}{2} & n = 0 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$ .
- $f(x) = x$ ,  $c_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = 0$ . Per  $n \neq 0$ :

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x e^{-inx} dx = \frac{1}{2\pi} \left| \frac{x e^{-inx}}{-in} \right|_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{-inx}}{-in} dx = \frac{(-1)^n i}{n}.$$

Calcoliamo ora  $\sum_{n \in \mathbb{Z}} |c_n|^2$ . Valgono le uguaglianze

$$\begin{aligned}
\sum_{n \in \mathbb{Z}} |c_n|^2 i &= 2 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} \\
\sum_{n \in \mathbb{Z}} |c_n|^2 i &= \frac{1}{2\pi} \|x\|_2^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x^2 dx = \frac{2}{2\pi} \cdot \frac{\pi^3}{3} = \frac{\pi^2}{3}.
\end{aligned}$$

Dunque  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$ .

## 5.1 Regolarità di $f$ e dei coefficienti

**Proposizione 1.** Data  $f \in [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{C}$  tale che

(R)  $f \in C^1$  (basta  $f$  continua e  $C^1$  a tratti).

(CB)  $f(-\pi) = f(\pi)$ .

Allora  $c_n(f') \stackrel{(*)}{=} in c_n(f)$ .

Derivazione formale della formula

$$f(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n e^{inx} \xrightarrow{\text{derivata}} f'(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} in c_n e^{inx}$$

**Dimostrazione.** Vale quanto segue

$$\begin{aligned} c_n(f') &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)' e^{-inx} dx \\ &\stackrel{\substack{f(-\pi)=f(\pi), e^{-in\pi}=e^{-in(-\pi)} \\ \text{int. per parti}}}{=} \frac{1}{2\pi} \left[ \overbrace{f(x)e^{-inx}}^{\pi} \right]_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)(-in)e^{-inx} dx \\ &= (in) \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-inx} dx = in c_n(f). \end{aligned}$$

□

**Nota.** La formula della derivata nel caso di cui non valga la condizione al bordo (CB) si dimostra allo stesso modo ma il primo termine dell'integrazione per parti non si cancella.

**Osservazione.** In verità, basta ancora meno. Possiamo riformulare la Proposizione 1 come segue.

**Proposizione 1'.** Data  $f: [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{C}$  tale che

(R')  $f$  è continua.

(CB) esiste  $g \in L^1([-\pi, \pi], \mathbb{C})$  tale che  $f(x) = f(-\pi) + \int_{-\pi}^x g(t) dt$ .

Allora la formula  $(*)$  diventa  $c_n(g) = in c_n(f)$ .

**Proposizione 2.** Data  $f$  come nella Proposizione 1, valgono le seguenti

- i)  $\sum_{n \in \mathbb{Z}} n^2 |c_n(f)|^2 = \frac{\|f'\|_2^2}{2\pi} < +\infty$ .
- ii)  $\sum_{n \in \mathbb{Z}} |n|^\alpha |c_n(f)| < +\infty$  per ogni  $\alpha < 1/2$ .
- iii) La serie di Fourier converge <sup>1</sup>totalmente.

---

<sup>1</sup> $\sum a_n(x)$  converge totalmente se converge la serie  $\sum \|a_n(x)\|_\infty$ .

**Dimostrazione.**

$$\text{i)} \sum_{n \in \mathbb{Z}} n^2 |c_n(f)|^2 \stackrel{(*)}{=} \sum_{n \in \mathbb{Z}} |c_n(f')|^2 \stackrel{\text{Parseval}}{=} \|f'\|_2^2 / 2\pi \stackrel{f' \in L^\infty([- \pi, \pi], \mathbb{C}) \subset L^2([- \pi, \pi], \mathbb{C})}{<} +\infty.$$

$$\text{ii)} \sum_{n \in \mathbb{Z}} |n|^\alpha |c_n(f)| \stackrel{(n \neq 0)}{\leq} \sum_{n \in \mathbb{Z}} |n| |c_n(f)| \cdot \frac{1}{|n|^{1-\alpha}} \stackrel{\text{C-S per } \ell^2}{\leq} \overbrace{\left( \sum_{n \in \mathbb{Z}} |n|^2 |c_n(f)|^2 \right)^{1/2}}^{< +\infty \text{ per il punto ii)}} \cdot \overbrace{\left( \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{1}{|n|^{2-2\alpha}} \right)^{1/2}}^{\alpha < 1/2 \Rightarrow < +\infty} < +\infty.$$

$$\text{iii)} \text{ Dal punto precedente con } \alpha = 0 \text{ otteniamo } \sum_{n \in \mathbb{Z}} \|c_n(f)e^{inx}\|_\infty = \sum_{n \in \mathbb{Z}} |c_n(f)| < +\infty. \quad \square$$

**Proposizione 3.** Data  $f \in [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{C}$  tale che

$(R_k) \ f \in C^k$  (oppure  $f \in C^{k-1}$  e  $D^{k-1}f$  è  $C^1$  a tratti).

$(CB_{k-1}) \ D^h f(-\pi) = D^h f(\pi)$  per  $h = 0, 1, \dots, k-1$ .

Allora

i)  $c_n(D^h f) = (in)^h c_n(f)$  per ogni  $n \in \mathbb{Z}$  per ogni  $h = 1, \dots, k$ .

$$\text{ii)} \sum_{n \in \mathbb{Z}} |n|^{2k} |c_n(f)|^2 \leq \frac{\|D^k f\|_2^2}{2\pi} < +\infty.$$

$$\text{iii)} \sum_{n \in \mathbb{Z}} |n|^\alpha |c_n(f)| < +\infty \text{ per ogni } \alpha < k - 1/2.$$

iv) La serie di Fourier di  $f$  converge totalmente con tutte le derivate fino all'ordine  $k-1$ .

**Proposizione 4.** Se  $f$  è continua e  $\sum_{n \in \mathbb{Z}} |n|^{k-1} |c_n(f)| < +\infty$  allora  $f \in C^{k-1}$  e soddisfa  $(CB_{k-1})$ .

**Dimostrazione.** Preso  $h = 0, 1, \dots, k-1$  vale

$$\begin{aligned} D^h(c_n(f)e^{inx}) &= c_n(f)(in)^h e^{inx} \\ \|D^h(c_n(f)e^{inx})\| &= |c_n(f)| |n|^h \leq |c_n(f)| |n|^{k-1}. \end{aligned}$$

Dunque  $\sum D^h(c_n(f)e^{inx})$  converge totalmente (e quindi uniformemente) con tutte le derivate fino all'ordine  $k-1$  dunque per il teorema di derivazione per serie segue la tesi.  $\square$

**Osservazione.**  $f \in C^{k-1}([- \pi, \pi]) + (CB_{k-1})$  se e solo se  $f$  è la restrizione a  $[- \pi, \pi]$  di una funzione  $2\pi$ -periodica e  $C^{k-1}$ .

## 5.2 Convergenza puntuale della serie di Fourier

**Teorema.** Data  $f \in L^1([-\pi, \pi], \mathbb{C})$  (estesa in modo  $2\pi$ -periodico a tutto  $\mathbb{R}$ ),  $\bar{x} \in \mathbb{R}$  e  $f$  è  $\alpha$ -Hölderiana con  $\alpha > 0$ , cioè esistono  $\delta > 0$  e  $M < +\infty$  per cui

$$|f(\bar{x} + t) - f(\bar{x})| \leq M |t|^\alpha \quad \text{per } t \text{ tale che } |t| < \delta,$$

allora  $\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(f) e^{in\bar{x}}$  converge a  $f(\bar{x})$ . Cioè  $\sum_{n=-N}^N c_n(f) e^{in\bar{x}} \xrightarrow{N \rightarrow \infty} f(\bar{x})$

*Lavoro preparatorio:* rappresentare somme parziali di serie di Fourier con "convoluzione":

Data  $f \in L^1([-\pi, \pi], \mathbb{C})$ ,  $N = 1, 2, \dots$  (estesa a funzioni  $2\pi$ -periodiche su  $\mathbb{R}$ ).

$$S_N f(x) := \sum_{n=-N}^N c_n e^{inx}$$

Riscriviamo

$$\begin{aligned} S_N f(x) &:= \sum_{n=-N}^N c_n e^{inx} = \sum_{n=-N}^N \frac{1}{2\pi} \left( \int_{-\pi}^{\pi} f(y) e^{-iny} dy \right) e^{inx} \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(y) \left( \sum_{n=-N}^N e^{in(x-y)} \right) dy. \end{aligned}$$

Poniamo  $D_N(z) := \sum_{n=-N}^N e^{inz}$  che si definisce **nucleo di Dirichlet**. Allora

$$\begin{aligned} S_N f(x) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(y) D_N(x-y) dy \quad \underbrace{x-y=t, dy=dt}_{\text{cambio di variabile}} \frac{1}{2\pi} \int_{x-\pi}^{x+\pi} f(x-t) D_N(t) dt \\ &\stackrel{(\star)}{=} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x-t) D_N(t) dt \end{aligned}$$

Dove  $(\star)$  è il seguente lemma.

**Lemma.** Se  $g$  è  $T$ -periodica e  $g \in L^1([-\pi, \pi], \mathbb{C})$ , allora

$$\int_0^T g(\tau) d\tau = \int_c^{c+T} g(\tau-s) d\tau \quad \forall s \forall c.$$

Ne segue che

$$S_N f(x) := \sum_{n=-N}^N c_n(f) e^{inx} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x-t) D_N(t) dt$$

dove

$$D_N(t) = \sum_{n=-N}^N e^{int} = \frac{\sin((N+1/2)t)}{\sin(t/2)}.$$

Infatti,

$$\begin{aligned}
D_N(t) &= \sum_{-N}^N e^{int} = \sum_{-N}^N (e^{it})^n = e^{-iNt} \cdot \sum_{n=0}^{2N} (e^{it})^n \\
&= \frac{e^{-i(N+1/2)t}}{e^{-it/2}} \cdot \frac{e^{(2N+1)it} - 1}{e^{it} - 1} = \frac{e^{(N+1/2)it} - e^{-(N+1/2)it}}{e^{it/2} - e^{-it/2}} \\
&= \frac{\sin((N+1/2)t)}{\sin(t/2)}.
\end{aligned}$$

Il seguente lemma riassume quanto detto finora.

**Lemma** (di rappresentazione di  $S_n f$  come convoluzione). Data  $f \in L^1([-\pi, \pi; \mathbb{C}])$  (estesa a funzioni  $2\pi$ -periodiche su  $\mathbb{R}$ ) vale

$$S_N f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x-t) D_N(t) dt$$

con

$$D_N(t) := \sum_{n=-N}^N e^{int} = \frac{\sin\left(\left(N + \frac{1}{2}\right)t\right)}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)}, \quad \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} D_N(t) dt = 1.$$

**Lemma** (di Riemann-Lebesgue (generalizzato)). Data  $g \in L^1(\mathbb{R})$  e  $h \in L^\infty(\mathbb{R})$  con  $h$   $T$ -periodica, allora

$$\int_{\mathbb{R}} g(x) h(yx) dx \xrightarrow{y \rightarrow \pm\infty} \underbrace{\left( \int_{\mathbb{R}} g(x) dx \right)}_a \underbrace{\left( \int_0^T h(x) dx \right)}_m$$

**Dimostrazione.** Per ogni  $s, y$  poniamo  $\Phi(y, s) := \int_{\mathbb{R}} g(x) h(yx + s) dx$  con  $s, y \in \mathbb{R}$ . Dunque, vogliamo dimostrare che  $\Phi(y, 0) \xrightarrow{y \rightarrow \pm\infty} am$ . Vedremo che valgono le seguenti

i)  $\forall y \int_0^T \Phi(y, s) ds = am.$

ii)  $\forall s \Phi(y, s) - \Phi(y, 0) \xrightarrow{y \rightarrow \pm\infty} 0.$

da cui segue subito che

$$\Phi(y, 0) - ma = \int_0^T \Phi(y, 0) - \Phi(y, s) ds \xrightarrow{y \rightarrow \pm\infty} 0$$

per convergenza dominata; dove dalla ii) segue la convergenza puntuale e come dominazione usiamo

$$|\Phi(y, 0) - \Phi(y, s)| \leq 2 \|g\|_1 \|h\|_\infty.$$

Mostriamo ora i due punti.



i) Esplicitiamo e applichiamo Fubini-Tonelli

$$\begin{aligned}\int_0^T \Phi(y, s) \, ds &= \int_0^T \int_{\mathbb{R}} g(x) h(yx + s) \, dx \, ds = \int_{\mathbb{R}} \underbrace{\int_0^T h(yx + s) \, ds}_m \cdot g(x) \, dx \\ &= m \int_{\mathbb{R}} g(x) \, dx = ma\end{aligned}$$

e possiamo usare Fubini-Tonelli in quanto

$$\int_{\mathbb{R}} \int_0^T |h(yx + s)| \, ds \cdot |g(x)| \, dx \leq \int_{\mathbb{R}} \|h\|_{\infty} |g(x)| \, dx = \|h\|_{\infty} \cdot \|g\|_1.$$

ii) Notiamo che

$$\begin{aligned}\Phi(y, s) &= \int_{\mathbb{R}} g(x) h(y(x + s/y)) \, dx = \left( \begin{matrix} t = x + s/y \\ dt = dx \end{matrix} \right) = \int_{\mathbb{R}} g(t - s/y) h(yt) \, dt \\ \implies \Phi(y, s) - \Phi(y, 0) &= \int_{\mathbb{R}} \left( g\left(t - \frac{s}{y}\right) - g(t) \right) h(yt) \, dt \\ \implies |\Phi(y, s) - \Phi(y, 0)| &= \int_{\mathbb{R}} |\tau_{s/y} g - g| \cdot |h(yt)| \, dt \leq \|\tau_{s/y} g - g\|_1 \cdot \|h\|_{\infty} \xrightarrow{y \rightarrow \pm\infty} 0.\end{aligned}$$

□

**Dimostrazione del Teorema.**

$$\begin{aligned}S_N f(\bar{x}) - f(\bar{x}) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\bar{x} - t) D_N(t) \, dt - \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\bar{x}) D_N(t) \, dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (f(\bar{x} - t) - f(\bar{x})) D_N(t) \, dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{f(\bar{x} - t) - f(\bar{x})}{\sin \frac{t}{2}} \sin \left( \left( N + \frac{1}{2} \right) t \right) \, dt \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} g(t) \cdot \sin \left( \left( N + \frac{1}{2} \right) t \right) \, dt\end{aligned}$$

Applicando il Lemma di Riemann-Lebesgue otteniamo:

$$S_N f(\bar{x}) - f(\bar{x}) \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} \left( \int g(x) \, dx \right) \cdot \int_0^{\pi} \sin x \, dx = 0.$$

In particolare, per applicare il lemma serve  $g \in L^1([-\pi, \pi])$ ; ma infatti per  $|t| \leq \delta$

$$|g(t)| \leq \frac{|f(\bar{x} - t) - f(\bar{x})|}{|\sin \frac{t}{2}|} \leq \frac{M|t|^{\alpha}}{|t|/\pi} = \frac{M\pi}{|t|^{1-\alpha}} \in L^1([-\delta, \delta]).$$

Invece per  $\delta \leq |t| \leq \pi$  basta

$$|g(t)| \leq \frac{|f(\bar{x} - t)| + |f(\bar{x})|}{\sin \frac{\delta}{2}} \in L^1([-\pi, \pi]).$$

□

Vale la seguente generalizzazione del teorema di convergenza puntuale della serie di Fourier.

**Proposizione.** Data  $f \in L^1([-\pi, \pi])$  estesa per periodicità e dato  $\bar{x}$  tale che esistano i limiti a destra e sinistra di  $f$  in  $\bar{x}$  detti  $L^+$  e  $L^-$  ed  $f$   $\alpha$ -Hölderiana a sinistra e destra si può vedere che vale

$$S_N f(\bar{x}) \xrightarrow{N} \frac{L^+ + L^-}{2}.$$

## 5.3 Esercizi

### 5.3.1 Serie di Fourier

Consideriamo  $L^2([-\pi, \pi], \mathbb{C})$ . Ricordiamo che  $e^{inx} = \cos(nx) + i \sin(nx)$ . Abbiamo

$$\begin{aligned} \sum_{n=-N}^N c_n e^{inx} &= c_0(f) + \sum_{n=1}^N (c_n(f) e^{inx} + c_{-n} e^{inx}) \\ &= c_0(f) + \sum_{n=1}^N [(c_n(f) + c_{-n}(f)) \cos(nx) + i(c_n(f) - c_{-n}(f)) \sin(nx)] \\ &= c_0(f) + \sum_{n=1}^N a_n(f) \cos(nx) + b_n(f) \sin(nx) \end{aligned}$$

con

$$\begin{cases} a_n(f) = c_n(f) + c_{-n}(f) \\ b_n(f) = i c_n(f) - i c_{-n}(f) \\ a_0(f) = c_0(f) \end{cases}$$

Passando al limite per  $N \rightarrow +\infty$

$$f(x) \xrightarrow{L^2} \sum_{n=-N}^N c_n e^{inx} \stackrel{(*)}{=} c_0(f) + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n(f) \cos(nx) + b_n(f) \sin(nx)$$

**Nota.** L'uguaglianza  $(*)$  ha bisogno di qualche spiegazione: come sappiamo che la serie a destra converge? Usiamo il fatto, che mostriamo sotto, che  $\{1, \cos(nx), \sin(nx), n > 1\}$  sono un sistema ortogonale, dunque per la disuguaglianza di Bessel segue la convergenza.

**Osservazione.** Gli elementi  $\{1, \sin(nx), \cos(nx)\}$  sono ortogonali per  $n \geq 1$  in  $L^2([-\pi, \pi], \mathbb{C})$ . Infatti, ricordiamo che

$$\begin{aligned} \cos(nx) &= \frac{e^{inx} + e^{-inx}}{2} \\ \sin(nx) &= \frac{e^{inx} - e^{-inx}}{2i}. \end{aligned}$$

- È banale verificare che  $\langle 1, \cos(nx) \rangle = \langle 1, \sin(nx) \rangle = 0$ ;
- Verifichiamo ora che valga  $\langle \cos(nx), \sin(mx) \rangle = 0$  per ogni  $n, m$ , dunque calcoliamo:

$$\langle \sin(nx), \sin(mx) \rangle = \frac{1}{4} \langle e^{-inx} - e^{inx}, e^{-imx} - e^{imx} \rangle = 0.$$

Ora normalizziamo:  $\left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{\cos(nx)}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin(nx)}{\sqrt{\pi}}, n \geq 1 \right\}$ .

In conclusione, abbiamo ottenuto che

- $L^2([-\pi, \pi], \mathbb{C})$  ha base Hilbertiana  $\left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{\cos(nx)}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin(nx)}{\sqrt{\pi}} \right\}_{\mathbb{C}}$
- $L^2([-\pi, \pi], \mathbb{R})$  ha base Hilbertiana  $\left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{\cos(nx)}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin(nx)}{\sqrt{\pi}} \right\}_{\mathbb{R}}$

**Esercizio.** Se  $f$  è a valori reali, dimostrare che  $a_n(f)$  e  $b_n(f)$  sono anch'essi reali. [TO DO]

*Sketch.* Si dimostra che  $a_n(f) = \overline{a_n(f)}$ ,  $b_n(f) = \overline{b_n(f)}$  e per farlo si usano le espressioni di  $a_n, b_n$  in funzione dei coefficienti di Fourier complessi scritte sopra.

**Esercizio.** Trovare la base di Fourier complessa e reale di  $L^2([a, b], \mathbb{C})$ .

**Soluzione.** Data  $f(x) \in L^2([a, b], \mathbb{C})$ , definiamo la funzione

$$F(y) := f\left((y + \pi)\frac{b-a}{2\pi} + a\right) = f(x).$$

Notiamo che  $F \in L^2([-\pi, \pi], \mathbb{C})$ , dunque ha espansione in serie di Fourier:

$$\begin{aligned} F(y) &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n(F) e^{iny}, & c_n(F) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F(y) e^{-iny} dy \\ & & &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f\left((y + \pi)\frac{b-a}{2\pi} + a\right) e^{-iny} dy. \end{aligned}$$

Usando il cambio di variabile  $y = (x - a)\frac{2\pi}{b-a} - \pi$  si ottiene

$$\begin{aligned} c_n(f) &= \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) \exp\left[\left((x-a)\frac{2\pi}{b-a} - \pi\right)(-in)\right] dx \\ &= \frac{(-1)^n}{b-a} \exp\left[\frac{2\pi a}{b-a} in\right] \int_a^b f(x) \exp\left[\frac{2\pi x}{b-a}(-in)\right] dx \end{aligned}$$

Da cui

$$f(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n(f) \exp\left[\frac{2\pi}{b-a} xin\right], \quad c_n(f) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) \exp\left[-\frac{2\pi}{b-a} xin\right].$$

**Esercizio.** Dato un intero  $N \geq 2$ , dimostrare che  $f$  è  $2\pi/N$ -periodica se e solo se  $c_n = 0$  per ogni  $n$  che non è multiplo di  $N$ .

**Soluzione.** [TO DO: da fare]

**Esercizi classici.** Fissata una funzione  $f \in L^2$ , calcolare i coefficienti di Fourier complessi (e reali).

Calcoliamo i coefficienti di  $f(x) = x^2$ .

$$\begin{aligned} c_n(f) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x^2 e^{-inx} dx = \frac{1}{2\pi} \left[ \frac{e^{-inx}}{-in} x^2 \right]_{-\pi}^{\pi} - \int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{-inx}}{-in} 2x dx \\ &= - \int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{-inx}}{-in} 2x dx = -\frac{i}{\pi n} \left[ \left[ \frac{e^{-inx}}{-in} \right]_{-\pi}^{\pi} - \int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{-inx}}{-in} dx \right] \\ &= \frac{-i\pi \cos(-n\pi) + \cos(-n(-\pi))}{-in} + \frac{i}{\pi n} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{-inx}}{-in} dx \\ &= \frac{2}{n^2} + \frac{i}{\pi n} \cdot 0 = \frac{2}{n^2} (-1)^n \\ &\implies c_n(f) = \frac{2}{n^2} (-1)^n. \end{aligned}$$

Infine

$$c_0(f) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x^2 dx = \frac{1}{2\pi} \frac{2}{3} \pi^3 = \frac{1}{3} \pi^2.$$

Per Parseval  $\|f\|_{L^2}^2 = 2\pi \sum_{n \in \mathbb{Z}} |c_n(f)|^2$ . Da cui

$$\int_{-\pi}^{\pi} x^4 dx = \|x^2\|_{L^2}^2 = 2\pi \cdot \left[ \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{4}{n^4} + \frac{\pi^2}{3} \right].$$

**Nota.** Potevamo ottenere i coefficienti di  $f(x) = x^2$ , applicando il teorema della derivata.

**Domande.**

- Abbiamo visto che  $c_n(x^2) = \frac{2(-1)^n}{n^2}$  e dedotto che  $c_n(2x) = in \frac{2(-1)^n}{n^2} = \frac{2(-1)^n i}{n}$ .
- Vorremmo calcolare  $c_n(2)$ , possiamo applicare il teorema sulla formula della derivata?

**Esercizio.**

- Calcolare i coefficienti di Fourier complessi di  $x^3$  e vedere se vale  $c_n(3x^2) = inc_n(x^3)$ .
- Calcolare i coefficienti reali di  $x^2$ .

**Esercizio.** Sia  $f(x)$  definita da  $\sum_{n \in \mathbb{Z}} \gamma_n e^{inx}$  con  $\begin{cases} \gamma_n = \frac{\cos(n)}{|n|^{3/2}} \\ \gamma_0 = 1 \end{cases}$

**Domande.**

- $f$  è ben definita?
- $f$  è continua?
- $f$  è derivabile?

**Dimostrazione.**

- Sì, infatti  $2 \sum_{n=1}^{+\infty} |\gamma_n|^2 \leq 2 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^3} < +\infty$ .
- Suggerimento.* Usare la Proposizione 3 della parte della regolarità dei coefficienti della serie di Fourier.

# Capitolo 6

## Applicazioni della serie di Fourier

### 6.1 Equazione del calore

Sia  $\Omega$  un aperto di  $\mathbb{R}^d$  e  $u(t, x): [0, T) \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  e chiamiamo  $x$  la *variabile spaziale* e  $t$  la *variabile temporale*. In dimensione 3 l'insieme  $\Omega$  rappresenta un solido di materiale conduttore omogeneo e  $u(t, x)$  rappresenta la temperatura in  $x$  all'istante  $t$ . Dunque  $u$  risolve l'equazione del calore

$$u_t = c \cdot \Delta u$$

dove con  $u_t$  indichiamo la derivata parziale di  $u$  rispetto al tempo,  $c$  è una costante fisica che porremo uguale ad 1 e  $\Delta u$  è il laplaciano rispetto alle dimensioni spaziali ovvero

$$\Delta u = \sum_{i=1}^d \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} = \operatorname{div}(\nabla_x u).$$

Vedremo che la soluzione di  $u_t = \Delta u$  esiste ed è unica specificando  $u(0, \cdot) = u_0$  condizione iniziale con  $u_0: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  data e delle condizioni al bordo come ad esempio

- *Condizioni di Dirichlet:*  $u = v_0$  su  $[0, T) \times \partial\Omega$  con  $v_0$  funzione fissata. Possiamo pensare come fissare delle sorgenti di calore costanti sul bordo.
- *Condizioni di Neumann:*  $\frac{\partial u}{\partial \nu}$  con  $\nu$  direzione normale al bordo. Essenzialmente ci sta dicendo che non c'è scambio di calore con l'esterno.

In particolare scriveremo

$$\begin{cases} u_t = \Delta u & \text{su } \Omega \\ u(0, \cdot) = u_0 \\ \text{Una delle condizioni al bordo su } \partial\Omega \dots \end{cases}$$

## 6.2 Risoluzione dell'equazione del calore (su $\mathbb{S}^1$ )

Come conduttore consideriamo un anello di materiale omogeneo e sottile che parametrizziamo con  $[-\pi, \pi]$ . Dunque consideriamo  $u: [0, T) \times [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$  con le condizioni

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} \\ u(\cdot, \pi) = u(\cdot, -\pi) \\ u_x(\cdot, \pi) = u_x(\cdot, -\pi) \\ u(0, \cdot) = u_0 \end{cases} \quad (\text{P})$$

in particolare la (ii) e la (iii) condizione non sono né quelle di Dirichlet né di Neumann, sono delle condizioni che effettivamente ci dicono che siamo “su  $\mathbb{S}^1$ ”<sup>1</sup>; invece l'ultima è la condizione iniziale ed  $u_0$  è data.

### 6.2.1 Risoluzione formale

Scriviamo  $u$  in serie di Fourier rispetto a  $x$  cioè

$$u(t, x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n e^{inx}$$

con  $c_n := c_n(u(t, \cdot))$  da cui derivando formalmente dentro le sommatorie otteniamo che  $u_t$  e  $u_{xx}$  SONO

$$\begin{aligned} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \dot{c}_n(t) e^{inx} = u_t = u_{xx} &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} -n^2 c_n(t) e^{inx} \\ u_t = u_{xx} \iff \dot{c}_n(t) = -n^2 c_n(t) \quad \forall n \forall t \quad \text{e} \quad u(0, \cdot) = u_0 &\iff c_n(0) = c_n(u_0) =: c_n^0 \end{aligned}$$

Dunque risolvere (P) equivale per ogni  $n$  che  $c_n$  che risolva il problema di Cauchy dato da

$$\begin{cases} \dot{y} = -n^2 y \\ y(0) = c_n^0 \end{cases} \quad (\text{P}') \quad (P')$$

con soluzione  $y(t) = \alpha e^{-n^2 t}$  cioè  $c_n(t) = c_n^0 e^{-n^2 t}$  e quindi abbiamo

$$u(t, x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n^0 e^{-n^2 t} e^{inx} \quad (*)$$

Studiando questa soluzione formale possiamo fare le seguenti osservazioni che poi diventeranno dei teoremi

- *La soluzione esiste per  $t \in [0, +\infty)$  ed è molto regolare per  $t > 0$*

Vedremo che la soluzione formale è proprio una soluzione al problema per  $t \geq 0$ , in particolare il termine  $e^{-n^2 t} \rightarrow 0$  in modo più che polinomiale ed infatti vedremo che la soluzione sarà proprio  $C^\infty$  per  $t > 0$ .

- *La soluzione è unica*

Tutti i problemi di Cauchy per i coefficienti  $c_n(t)$  hanno un'unica soluzione dunque anche la soluzione  $u$  è unica.

---

<sup>1</sup>Bastano solo queste condizioni sulla funzione e sulla sua derivata perché intuitivamente le altre seguono applicando la (i).

- In generale non esiste soluzione nel passato.

Se il numero di coefficienti  $c_n^0 \neq 0$  è infinito allora il termine  $e^{-n^2 t} \rightarrow +\infty$  molto velocemente per  $t < 0$  e la serie diverge.

**Teorema 1** (Esistenza e Regolarità).

Se  $u_0: [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{C}$  (presa in  $L^2$ ) continua e tale che  $\sum_{n \in \mathbb{Z}} |c_n^0| < +\infty$ , allora

$$u(t, x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \underbrace{c_n^0 e^{-n^2 t} e^{inx}}_{u_n(t, x)}$$

definisce una funzione  $u: [0, +\infty) \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  tale che

- i)  $u$  è  $2\pi$ -periodica in  $x$  ed è reale se  $u_0$  è reale.
- ii)  $u$  è continua.
- iii)  $u$  è  $C^\infty$  su  $(0, +\infty) \times \mathbb{R}$ .
- iv) Risolve (P). In particolare vale  $u_{tt} = u_{xx}$  e valgono le condizioni di periodicità per  $t > 0$ ; e infine vale  $u(0, \cdot) = u_0$  su  $[-\pi, \pi]$ .

Vediamo alcuni lemmi tecnici preparatori.

**Notazione.**  $R :=$  rettangolo di  $\mathbb{R}^d$ .

**Lemma 4.** Date  $v_n: R \rightarrow \mathbb{C}$  di classe  $C^k$  con  $k = 1, 2, \dots, +\infty$  tali che

- $v_n \rightarrow v$  uniformemente.
- $\forall \underline{h} = (h_1, \dots, h_d) \in \mathbb{N}^d$  con  $|\underline{h}| := h_1 + \dots + h_d \leq k$  (se  $k = +\infty$  allora basta  $|\underline{h}| < +\infty$ ) posto

$$D^{\underline{h}} v_n := \frac{\partial^k}{\partial x_1^{h_1} \dots \partial x_d^{h_d}} v_n$$

$D^{\underline{h}} v_n \rightarrow D^{\underline{h}} v$  converge uniformemente.

allora  $v \in C^k$  e  $D^{\underline{h}} v = \lim_n D^{\underline{h}} v_n$ .

**Dimostrazione.** Si parte dal caso  $d = 1$  e  $k = 1$  e si procede per induzione. [TODO: Esercizio]  $\square$

**Corollario. 5** Date  $u_n: R \rightarrow \mathbb{C}$  di classe  $C^k$  con  $k = 1, \dots, +\infty$  tali che

$$\forall \underline{h} \text{ con } |\underline{h}| \leq k \quad \sum_n \|D^{\underline{h}} u_n\| < +\infty$$

allora  $u := \sum_n u_n$  è una funzione ben definita su  $R$  e  $C^k$  e  $D^{\underline{h}} u = \sum_n D^{\underline{h}} u_n$  per ogni  $\underline{h}$  con  $|\underline{h}| \leq k$ .

In particolare se  $\sum_n \|D^{\underline{h}} u_n\|_\infty < +\infty$  per ogni  $\underline{h} \in \mathbb{N}^d$  allora  $u$  è  $C^\infty$ .

**Lemma. 6** Data  $u: R \rightarrow \mathbb{C}$  e rettangoli  $R_i \subset R$  relativamente aperti in  $R$  tali che  $u$  è  $C^k$  sugli  $R_i$  per ogni  $i$  allora  $u$  è di classe  $C^k$  su  $\tilde{R} := \bigcup_i R_i$ .

**Lemma. 7** Data  $f \in L^2((-\pi, \pi); \mathbb{C})$

$$f \text{ è reale q.o.} \iff c_{-n}(f) = \overline{c_n(f)}$$

**Osservazione.** Notiamo che se  $f \in L^1$  la freccia  $\boxed{\Leftarrow}$  è molto più difficile.

**Dimostrazione Teorema 1.**

- i)  $u_0$  reale  $\implies c_{-n}^0 = \overline{c_n^0} \implies c_{-n}^0 e^{-(-n)^2 t} = \overline{c_n^0 e^{-n^2 t}} \iff c_{-n}(u(t, \cdot)) = \overline{c_n(u(t, \cdot))}$ .
- ii) Sia  $R := [0, +\infty) \times \mathbb{R}$ ,  $\|u_n\|_{L^\infty(R)} = \|c_n^0 e^{-n^2 t}\|_{L^\infty(R)} = |c_n^0|$  dunque  $\sum_{n \in \mathbb{Z}} u_n$  converge totalmente su  $R$  e quindi  $u$  è ben definita e continua su  $R$ .
- iii) Presi  $h, k = 0, 1, 2, \dots$  se proviamo a calcolare  $D_t^h D_x^k u_n = c_n^0 (-n)^{2h} (in)^k e^{-n^2 t} e^{inx}$  vediamo non si riesce a stimare per  $t \rightarrow 0$  infatti

$$\|D_t^h D_x^k u_n\|_{L^\infty(R)} = |c_n^0| \cdot |n|^{2h+k} \xrightarrow{n} \infty.$$

Serve prendere  $\delta > 0$  e sia  $R_\delta := (\delta, +\infty) \times \mathbb{R}$

$$\|D_t^h D_x^k u_n\|_{L^\infty(R_\delta)} = |c_n^0| \cdot |n|^{2h+k} e^{-n^2 \delta}$$

in particolare per ogni  $h, k$  abbiamo che  $|n|^{2h+k} e^{-n^2 \delta} \xrightarrow{n} 0 \implies |n|^{2h+k} e^{-n^2 \delta} \leq m_{h,k} \implies \|D_t^h D_x^k u_n\|_{L^\infty(R_\delta)} \leq m_{h,k} \cdot |c_n^0|$  e quindi  $\sum_n D_t^h D_x^k u_n$  converge totalmente su  $R_\delta$ .

Quindi  $u$  è  $C^\infty$  su  $R_\delta$  per ogni  $\delta > 0$  e siccome  $R_\delta$  è aperto in  $R$  per il Lemma. 6  $u$  è  $C^\infty$  su  $\bigcup_{\delta > 0} R_\delta = (0, +\infty) \times \mathbb{R}$ .

- iv) Essendo che  $u$  è  $2\pi$ -periodica in  $x$ , valgono le condizioni al bordo; inoltre  $u_0$  e  $u(0, \cdot)$  hanno gli stessi coefficienti di Fourier, dunque  $u_0 = u(0, \cdot)$  quasi ovunque, ma essendo continue vale  $u_0 = u(0, \cdot)$  su  $[-\pi, \pi]^1$ .

Per mostrare che  $u_t = u_{xx}$  osserviamo che  $(u_n)_t = (u_n)_{xx}$  e che l'equazione è lineare omogenea:

$$u_t = \left( \sum_n u_n \right)_t \stackrel{\text{Cor 5}}{=} \sum_n (u_n)_t = \sum_n (u_n)_{xx} \stackrel{\text{Cor 5}}{=} \left( \sum_n u_n \right)_{xx} = u_{xx}.$$

□

Ora enunciamo il teorema di unicità, vogliamo un teorema con il minor numero di ipotesi possibile e che ci dà più informazioni; quindi in questo caso cerchiamo la più grande famiglia di funzioni (quindi la meno regolare possibile) sulla quale vale l'unicità della soluzione.

**Teorema. 2** (Unicità) Sia  $u: [0, T) \times [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{C}$  continua,  $C^1$  nel tempo e  $C^2$  nello spazio per  $t > 0$ . Se  $u$  risolve (P) su  $t > 0$  allora  $u$  è unica.

<sup>1</sup>I coefficienti di Fourier sono prodotti scalari in  $L^2$  dunque sono definiti a meno di insiemi di misura nulla.



**Definizione.** Dato  $R$  un rettangolo e  $u: R \rightarrow \mathbb{C}$  diciamo che  $u$  è  $C^k$  nella variabile  $x_i$  se  $\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)^h u$  esiste per  $h = 1, \dots, k$  ed è continua su  $R$ .

**Lemma 8.** Sia  $u: I \times [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{C}$  e sia  $c_n(t) := c_n(u(t, \cdot))$  per ogni  $n$ .

- Se  $u$  è continua  $c_n$  è continua su  $I$ .
- Se  $u$  è  $C^k$  allora  $c_n$  è  $C^k$  su  $I$  e  $c_n(D_t^h u(t, \cdot)) = D_t^h c_n(u(t, \cdot))$  per  $h \leq k$ .

**Dimostrazione.** Si ricorda che

$$c_n(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} u(t, x) e^{-inx} dx.$$

La continuità segue dal teorema di convergenza dominata<sup>1</sup>. Il resto dell'enunciato segue dal teorema di derivazione sotto il segno di integrale (applicato  $k$ -volte per l'ultima parte dell'enunciato).  $\square$

**Lemma 9.** Sia  $y: [0, T) \rightarrow \mathbb{R}^k$  funzione continua su  $[0, T)$  e derivabile su  $(0, T)$  che risolve l'equazione differenziale ordinaria  $\dot{y} = f(t, y)$  su  $(0, T)$  con  $f: [0, T) \times \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^k$  continua. Allora  $y$  è  $C^1$  su  $[0, T)$  e risolve  $\dot{y} = f(t, y)$  su  $[0, T)$ .

**Dimostrazione Teorema 2.** Poniamo  $c_n(t) := c_n(u(t, \cdot))$ . Sappiamo che per  $t > 0$  vale  $\dot{c}_n(t) \stackrel{(*)}{=} c_n(u_t(t, \cdot)) = c_n(u_{xx}(t, \cdot)) \stackrel{(**)}{=} -n^2 c_n(t)$ , dove  $(*)$  segue dal Lemma 8 e  $(**)$  segue dalla regolarità dei coefficienti. Dunque, per il Lemma 9, i coefficienti  $c_n$  risolvono il problema di Cauchy

$$\begin{cases} \dot{y} = -n^2 y \\ y(0) = c_n^0 \end{cases}$$

che ha un'unica soluzione.  $\square$

**Notazione.**  $\mathcal{C}_{\text{per}}^k = \{f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C} \text{ } \pi\text{-periodiche e } C^k\}$ .

**Teorema 3** (di non esistenza nel passato). Esiste  $u_0 \in \mathcal{C}_{\text{per}}^\infty$  tale che per ogni  $\delta > 0$  non esiste  $u: (-\delta, 0] \times [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{C}$  soluzione di (P) ( $u$  continua,  $C^1$  in  $t$  e  $C^2$  in  $x$  per  $t < 0$ )

**Dimostrazione.** Sia  $u$  su  $(-\delta, 0) \times [-\pi, \pi]$  un'eventuale soluzione. Sia  $c_n(t)$  al solito. Dalla dimostrazione del Teorema 2 abbiamo che  $c_n$  risolve (P').

Quindi  $c_n(t) = c_n^0 e^{-n^2 t}$ . Scegliamo  $c_n^0$  (cioè  $u_0$ ) in modo che

- $c_n^0 = O(|n|^{-a})$  per  $n \rightarrow \pm\infty$  per ogni  $a > 0$ . ( $\Rightarrow \sum |n|^k |c_n^0| < +\infty \quad \forall k \Rightarrow u_0 \in \mathcal{C}_{\text{per}}^\infty$ ).
- $c_n^0 e^{-n^2 t} \nrightarrow 0$  per ogni  $t < 0$ .

Con un tale  $c_n^0$  la soluzione non esiste al tempo  $t$ . Infatti, se per assurdo esistesse, i coefficienti di Fourier  $c_n(t)$  sarebbero quadrato sommabili<sup>2</sup>, ovvero dovrebbero tendere a zero  $\not\downarrow$ .

Prendiamo  $c_n^0 = e^{-|n|}$ .  $\square$

<sup>1</sup> $u(t, x)$  funzione continua dunque limitata su  $I$ .

<sup>2</sup>Per la disuguaglianza di Bessel.

**Esercizio.** Dato  $u_0$  sia  $T_*$  il massimo  $T$  per cui (P) ammette soluzione su  $(-T, 0] \times [-\pi, \pi]$ . Caratterizzare  $T_*$  in termini del comportamento asintotico di  $c_n^0$  per  $n \rightarrow \pm\infty$ .

*Suggerimento.* Guardare  $\log(|c_n^0|)/n^2$ .

## 6.3 Equazione delle onde

Sia  $\Omega \subset \mathbb{R}^d$  aperto,  $I$  intervallo temporale,  $u: I \times \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$ , l'equazione delle onde è

$$u_{tt} = v^2 \nabla^2 u = \nabla_x^2 u = \sum_{i=1}^d \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}$$

dove  $v$  si chiama **velocità di propagazione**.

La soluzione è univocamente determinata specificando

- Le condizioni al bordo (come per il calore), ad esempio quelle di Dirichlet:  $u = v_0$  su  $I \times \partial\Omega$  oppure di Neumann:  $\partial u / \partial \nu = 0$  su  $I \times \partial\Omega$ .
- Condizioni iniziali:  $u(0, \cdot) = u_0, u_t(0, \cdot) = u_1$ .

**Esempio 1.** Per  $d = 1$ ,  $\Omega = [0, 1]$  rappresenta una sbarra sottile di materiale elastico. La sbarra è soggetta a vibrazioni longitudinali (onde sonore). La funzione  $u(t, x)$  rappresenta lo spostamento dalla posizione di riposo  $x$  al tempo  $t$ . In tal caso, l'equazione delle onde è

$$u_{tt} = v^2 u_{xx}.$$

**Esempio 2.** Per  $d = 2$ ,  $\Omega$  rappresenta una sbarra sottile di materiale elastico che vibra trasversalmente. La funzione  $u(t, x)$  rappresenta lo spostamento verticale del punto di coordinata  $x \in \Omega$  a riposo. Allora  $u$  soddisfa (per oscillazioni piccole).

$$u_{tt} = v^2 \nabla^2 u.$$

## 6.4 Risoluzione dell'equazione delle onde

Consideriamo il caso uno dimensionale. In tal caso l'equazione delle onde è la seguente.

$$\begin{cases} u_{tt} = v^2 u_{xx} \\ u(\cdot, \pi) = u(\cdot, -\pi) \\ u_x(\cdot, \pi) = u_x(\cdot, -\pi) \\ u(0, \cdot) = u_0 \\ u_t(0, \cdot) = u_1 \end{cases} \quad (\text{P})$$

### 6.4.1 Risoluzione formale

Scriviamo  $u(t, x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n(t) e^{inx}$ . Deriviamo in  $t$  e due volte in  $x$ .

$$\begin{aligned} u_{tt} &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} \ddot{c}_n e^{inx} \\ u_{xx} &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} -v^2 n^2 c_n e^{inx} \end{aligned}$$

Abbiamo che

$$u_{tt} = v^2 u_{xx} \iff \ddot{c}_n = -v^2 n^2 c_n$$

$$u(0, \cdot) = u_0 \iff c_n(0) = c_n^0 := c_n(u_0) \quad u_t(0, \cdot) = u_1 \iff \dot{c}_n(0) = c_n^1 := c_n(u_1)$$

Quindi  $u$  risolve (P) se e solo se per ogni  $n$ ,  $c_n$  risolve

$$\begin{cases} \ddot{y} = -n^2 v^2 y \\ y(0) = c_n^0 \\ \dot{y}(0) = c_n^1 \end{cases} \quad (\text{P}')$$

Dunque,

- Per  $n = 0$ ,  $\ddot{y} = 0$  se e solo se  $y$  è un polinomio di primo grado, ovvero  $c_0(t) = c_0^0 + c_0^1 t$ .
- Per  $n \neq 0$ ,  $y = \alpha_n^+ e^{inv t} + \alpha_n^- e^{-inv t}$  con

$$\alpha_n^\pm = \frac{1}{2} \left( c_n^0 \pm \frac{c_n^1}{inv} \right)$$

Quindi, la soluzione è

$$u(t, x) = c_0^0 + c_0^1 t + \sum_{n \neq 0} \left[ \alpha_n^+ e^{in(x+vt)} + \alpha_n^- e^{in(x-vt)} \right] \quad (*)$$

Inoltre,

$$u(t, x) = c_0^0 + c_0^1 t + \varphi^+(x + vt) + \varphi^-(x - vt) \quad (**)$$

con  $\varphi^\pm$  funzioni con coefficienti di Fourier  $\alpha_n^\pm$  che si dicono **onde viaggianti**.

**Nota.** La (\*\*) è specifica delle equazioni delle onde.

Vedremo i seguenti risultati

- Esistenza usando la forma (\*\*), specifico per equazione delle onde.
- Esistenza usando la forma (\*), che però richiede maggiore regolarità su  $u_0$  e  $u_1$ .
- Unicità.

**Teorema 1.** Dati  $u_0 \in C_{\text{per}}^2, u_1 \in C_{\text{per}}^1$ , allora esistono  $c_0^0, c_0^1 \in \mathbb{C}$  e  $\varphi^+, \varphi^- \in C_{\text{per}}^2$  (con integrale nullo sul periodo) tali che la  $u$  in (\*\*) è di classe  $C^2$  su  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ ,  $2\pi$ -periodica in  $x$  e risolve (P). Inoltre, se  $u_0, u_1$  sono reali  $u$  è reale.

**Lemma 4.** Date  $h, g \in C^1(\mathbb{R})$  con  $g$  primitiva di  $h$  e  $T > 0$  allora  $g$  è  $T$ -periodica  $\iff h$  è  $T$ -periodica e  $\int_0^T h(x) dx = 0$ .

**Dimostrazione.** Notiamo che  $h$  è  $T$ -periodica se e solo se  $\forall x \int_x^{T+x} h(x) dx = \text{cost.}$

$$\int_x^{T+x} h(x) dx = g \Big|_x^{T+x} = g(T+x) - g(x) = 0 \iff g \text{ è } T\text{-periodica}$$

### Dimostrazione Teorema 1.

Parte 1. Se  $c_0^0, c_0^1 \in \mathbb{C}$  e  $\varphi^+, \varphi^- \in C_{\text{per}}^2$  allora la  $u$  data da  $(**)$  è  $C^2$  su  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$  e  $2\pi$ -periodica in  $x$  e risolve  $u_{tt} = v^2 u_{xx}$ .

$$\begin{aligned} u_{tt} &= [\ddot{\varphi}^+(x+vt) + \ddot{\varphi}^-(x-vt)]v^2 \\ u_{xx} &= \ddot{\varphi}^+(x+vt) + \ddot{\varphi}^-(x-vt) \end{aligned} \implies u_{tt} = v^2 u_{xx}$$

Parte 2.  $\exists c_0^0, c_0^1 \in \mathbb{R}$  e  $\varphi^+, \varphi^- \in C_{\text{per}}^2$  tali che la  $u$  data da  $(**)$  soddisfa la condizione iniziale in (P), per  $t = 0$ , poste  $\varphi^\pm = \varphi^\pm(x \pm v_0)$

$$\begin{cases} c_0^0 + \varphi^+ + \varphi^- = u_0 \\ c_0^1 + v(\dot{\varphi}^+ - \dot{\varphi}^-) = u_1 \end{cases} \implies \begin{cases} \varphi^+ + \varphi^- = u_0 - c_0^0 =: g_0 \in C^2 \\ (\varphi^+ - \varphi^-)' = (u_1 - c_0^1)/v =: h_1 \in C^1 \end{cases}$$

ed ora fissiamo  $c_0^0 = \int_{-\pi}^{\pi} u_0 dx$  e  $c_0^1 = \int_{-\pi}^{\pi} u_1 dx$ . In questo modo possiamo applicare il lemma precedente ed ottenere

$$\begin{cases} \varphi^+ + \varphi^- = g_0 \\ (\varphi^+ - \varphi^-)' = g_1' \end{cases} \implies \varphi^+ = \frac{1}{2}(g_0 + g_1) \quad \varphi^- = \frac{1}{2}(g_0 - g_1)$$

dove  $g_1$  è la primitiva di  $h_1$ . □

**Teorema 2.** Siano  $u_0, u_1: [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{C}$  continue e tali che

$$\sum n^2 |c_n^0| < +\infty \quad \sum |n| \cdot |c_n^1| < +\infty.$$

Allora  $(*)$  definisce una funzione  $u: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  di classe  $C^2$ ,  $2\pi$ -periodica in  $x$  che risolve (P). Inoltre, se  $u_0, u_1$  sono reali  $u$  è reale.

### Dimostrazione.

$$u(t, x) = c_0^0 + c_0^1 t + \sum_{n \neq 0} (\underbrace{\alpha_n^+ e^{in(x+vt)}}_{v_n^+} + \underbrace{\alpha_n^- e^{in(x-vt)}}_{v_n^-})$$

Passo 1 Dimostriamo che  $u \in C^0(\mathbb{R} \times \mathbb{R})$  e  $2\pi$ -periodica in  $x$ .

La funzione  $u$  soddisfa le condizioni di periodicità. Per mostrare la continuità è sufficiente mostrare che la serie converge totalmente su  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ . Notiamo che

$$\|v_n^\pm\|_{L^\infty(\mathbb{R} \times \mathbb{R})} = |\alpha_n^\pm| = O\left(|c_n^0| + \frac{|c_n^1|}{n}\right),$$

dunque sono sommabili in  $n$ .

Passo 2 Mostriamo che  $u \in C^2(\mathbb{R} \times \mathbb{R})$ .

Abbiamo

$$\begin{aligned} D_t^h D_x^k v_n^\pm &= \alpha_n^\pm e^{in(x \pm vt)} (in)^k (ivn)^h \\ \implies \|D_t^h D_x^k v_n^\pm\|_{L^\infty(\mathbb{R} \times \mathbb{R})} &= |\alpha_n^\pm| \cdot |v|^h \cdot |n|^{k+h} = O(|c_n^0| \cdot |n|^{k+h} + |c_n^1| \cdot |n|^{k+h-1}) \end{aligned}$$

che è sommabile se  $k + h \leq 2$  in  $n$ . La serie in  $(*)$  converge totalmente su  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$  con tutte le derivate di ordine  $\leq 2 \implies u \in C^2$ .

**Passo 3** Dimostriamo che  $u$  risolve il problema (P).

Notiamo che  $u(t, x)$  risolve l'equazione  $u_{tt} = v^2 u_{xx}$  usando il lemma che ci garantisce di poter scambiare serie e derivata usando la regolarità  $C^2$  dimostrata al punto precedente. Inoltre

$$\begin{aligned} c_n(u(0, \cdot)) &= c_n(u_0) \implies u(0, \cdot) = u_0 \\ c_n(u_t(0, \cdot)) &\stackrel{\text{Lem 8}}{=} \dot{c}_n(u(0, \cdot)) = c_n(u_1) \implies u_t(0, \cdot) = u_1. \end{aligned}$$

perché le funzioni sono continue.

**Teorema 3** (Unicità). Se  $u: I \times [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{C}$  è  $C^2$  in  $x$  e  $t$  e risolve (P) allora è unica.

**Dimostrazione.** Si ripercorre la stessa dell'equazione del calore.

**Nota.**  $I$  è un intervallo che può contenere lo zero.

## 6.5 Altre applicazioni della serie di Fourier

### 6.5.1 Disuguaglianza isoperimetrica

Sia  $D$  un aperto limitato con frontiera  $C^1$  parametrizzata da un unico cammino  $\gamma$  (quindi niente buchi o più di una componente connessa). Allora  $L^2 \geq 4\pi A$  dove  $L$  è la lunghezza di  $\partial D$  e  $A$  è l'area di  $D$ . Inoltre vale l'uguale se e solo se  $D$  è un disco.

**Dimostrazione.**

Possiamo scegliere  $\gamma: [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{R}^2 \simeq \mathbb{C}$  e  $\gamma$  parametrizzazione di  $\partial D$  in senso antiorario ed a velocità costante (da cui  $|\dot{\gamma}(t)| = L/2\pi$ )

*Passo 1.*

$$L^2 = 2\pi \int_{-\pi}^{\pi} |\dot{\gamma}|^2 dt = 2\pi \|\dot{\gamma}\|_2^2 = 4\pi^2 \sum |c_n(\dot{\gamma})|^2 = 4\pi^2 \sum n^2 |c_n|^2$$

*Passo 2.*

$$A \stackrel{(*)}{=} \frac{1}{2} \langle -i\dot{\gamma}, \gamma \rangle = \frac{1}{2} 2\pi \sum (-i(nc_n))c_n = \pi \sum n|c_n|^2$$

Vediamo che vale questa formula per l'area usata in (\*), poniamo  $\gamma = \gamma_x + i\gamma_y$  allora

$$\begin{aligned} \langle \dot{\gamma}, \gamma \rangle &= \int_{-\pi}^{\pi} \dot{\gamma} \bar{\gamma} dt \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} (\gamma_x - i\gamma_y)(\dot{\gamma}_x + i\dot{\gamma}_y) dt = \\ &= \int_{\gamma} (x - iy)(dx + i dy) = \\ &= \int_D 2i dx dy = 2iA \end{aligned}$$

*Passo 3.* Infine  $L^2 = 4\pi \sum n^2 |c_n|^2$  e  $4\pi A = 4\pi \sum n |c_n|^2$ , dunque segue subito che  $L^2 \geq 4\pi A$  e vale l'uguale se e solo se  $n^2 = n$  o se  $c_n = 0$  per ogni  $n \implies \gamma(t) = c_0 + c_1 e^{it}$  che è una circonferenza di centro  $c_0$  e raggio  $|c_1|$ .

## 6.6 Appendice

Studiamo alcune variazioni dell'equazione del calore.

**Nota.** Un problema del tipo  $u_t = a(t) \cdot u_{xx}$  si può risolvere ripercorrendo i passaggi della risoluzione dell'equazione del calore. Viceversa, il problema  $u_t = a(x) \cdot u_{xx}$  non si può risolvere allo stesso modo, in quanto, non è vero che il prodotto di serie di Fourier ha come coefficienti il prodotto dei coefficienti.

Studiamo ora variazioni alle condizioni di bordo.

**Osservazione.** Quando proviamo a risolvere  $u_t = u_{xx}$ , passiamo alla serie di Fourier e deriviamo; per fare questo passaggio servono le condizioni al bordo<sup>1</sup>; dunque, togliendo le condizioni di periodicità il sistema non funziona più molto bene.

Introduciamo delle varianti della serie di Fourier.

### 6.6.1 Basi di Hilbert rilevanti

- **Serie di Fourier reale.** Data  $u \in L^2([-\pi, \pi])$ , definiamo

$$u(x) = \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)] + a_0$$

$$a_n(u) = c_n(u) + c_{-n}(u) \quad b_n(u) = i(c_n(u) - c_{-n}(u)) \quad a_0(u) = c_0(u)$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx) dx \quad b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(nx) dx$$

$$\text{e con base hilbertiana } \left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{\cos(nx)}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin(nx)}{\sqrt{\pi}} \mid n \geq 1 \right\}.$$

- **Serie di Fourier su  $[-\pi, \pi]^d$ .** Data  $u \in L^2([-\pi, \pi]^d, \mathbb{C})$ , definiamo

$$u(x) = \sum_{\underline{n} \in \mathbb{Z}^d} c_{\underline{n}} e^{i \underline{n} x} \quad c_{\underline{n}} = c_{\underline{n}}(u) := \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{[-\pi, \pi]^d} u(x) e^{-i \underline{n} x} dx$$

con base di Hilbert

$$\mathcal{F} = \left\{ \frac{e^{i \underline{n} x}}{(2\pi)^{d/2}} : \underline{n} \in \mathbb{Z}^d \right\}$$

C'è da dimostrare che  $\mathcal{F}$  è una base di Hilbert.

**Dimostrazione** (idea).

- Ortonormalità. È un conto [TO DO].
- Completezza. Si può dimostrare come per  $d = 1$ , oppure si usa il seguente lemma.  
**Lemma.** Sia  $\mathcal{F}_1 := \{e_n^1\}$  base di Hilbert di  $L^2(X_1, \mathbb{C})$  e  $\mathcal{F}_2 := \{e_n^2\}$  base di Hilbert di  $L^2(X_2, \mathbb{C})$ . Allora, una base di Hilbert di  $L^2(X_1 \times X_2, \mathbb{C})$  è

$$\mathcal{F} = \left\{ e_{n_1, n_2}(x_1, x_2) \mid e_{n_1}^1(x_1) e_{n_2}^2(x_2) \right\}$$

---

<sup>1</sup> Anche se avevamo derivato le formule formalmente anche a posteriori l'ipotesi delle condizioni al bordo era necessaria.

*Formula chiave.* Se  $u \in C_{\text{per}}^1(\mathbb{R}^d) = \{\text{funzioni } 2\pi\text{-periodiche in tutte le variabili}\}$ . Abbiamo che

$$c_{\underline{n}}(\nabla u) = i\underline{n}c_{\underline{n}}(u), \quad c_{\underline{n}}(\Delta u) = -|\underline{n}|^2 c_{\underline{n}}(u) \quad \text{se } u \in \mathcal{C}_{\text{per}}^2$$

- **Serie in seni.** Data  $u \in L^2([0, \pi])$ , allora

$$u(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(nx) \quad b_n = b_n(u) := \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} u(x) \sin(nx) \, dx$$

con base di Hilbert

$$\mathcal{F} = \left\{ \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin(nx) \mid n \geq 1 \right\}$$

**Dimostrazione.** Mostriamo l'ortonormalità e la completezza.

*Ortonormalità.* Sono conti.

*Completezza.* Data  $u \in L^2([0, \pi])$ . Sia  $\tilde{u}$  l'estensione dispari a  $[-\pi, \pi]$ . Allora

$$\tilde{u} = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{a}_n \cos(nx) + \tilde{b}_n \sin(nx) \underset{\tilde{u} \text{ dispari}}{=} \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{b}_n \sin(nx).$$

**Osservazione.** I coefficienti  $\tilde{b}_n = b_n$ . Si può vedere in diversi modi, un modo possibile è questo.

$$\tilde{b}_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \tilde{u}(x) \sin(nx) \, dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \tilde{u} \sin(nx) \, dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} u(x) \sin(nx) \, dx = b_n.$$

**Formula chiave.** Data  $u \in \mathcal{C}^2([0, \pi])$  con condizioni al bordo  $u(\cdot, 0) = u(\cdot, \pi)$ . Allora

$$b_n(\ddot{u}) = -n^2 b_n(u)$$

dove

$$\begin{aligned} b_n(\ddot{u}) &:= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \ddot{u}(x) \sin(nx) \, dx \\ &= \frac{2}{\pi} \left[ \dot{u}(x) \sin(nx) \right]_0^{\pi} - n \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \dot{u}(x) \cos(nx) \, dx \\ &= -n \frac{2}{\pi} \left[ u(x) \cos(nx) \right]_0^{\pi} - n^2 \underbrace{\left( \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} u(x) \sin(nx) \, dx \right)}_{b_n(u)} \\ &= -n^2 b_n(u). \end{aligned}$$

□

**Applicazione** (della serie in seni). Risoluzione di EDP su  $[0, \pi]$  con condizioni di Dirichlet (omogenee) al bordo.

**Esempio.** Risolvere

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} & \text{su } [0, \pi] \\ u(\cdot, 0) = u(\cdot, \pi) = 0 \\ u(0, \cdot) = u_0 \end{cases} \quad (\text{P})$$

**Soluzione.** Poniamo  $b_n^0 := b_n(u_0)$ . Scriviamo  $u(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n(t) \sin(nx)$  serie di seni in  $x$ .

Formalmente,

$$u_t = \sum_{n=1}^{\infty} \dot{b}_n(t) \sin(nx) \quad u_{xx} = \sum_{n=1}^{\infty} -n^2 b_n(t) \sin(nx),$$

dunque

$$u_t = u_{xx} \iff \dot{b}_n(t) = -n^2 b_n(t) \quad \forall t \forall n.$$

Cioè  $b_n(t)$  risolve il problema di Cauchy.

$$\begin{cases} \dot{y} = -n^2 y \\ y(0) = \dot{b}_n. \end{cases} \quad (\text{P}')$$

Ovvero  $b_n(t) = b_n^0 e^{-n^2 t}$ , da cui

$$u(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{b_n^0 e^{-n^2 t} \sin(nx)}_{u_n}. \quad (*)$$

**Teorema 1** (di esistenza nel futuro). Se  $u_0: [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$  è continua è  $\sum_n |b_n^0| < +\infty$  (basta  $u_0 \in \mathcal{C}^1$  e  $u(0) = u(\pi) = 0$ ). Allora la  $u$  in  $(*)$  è ben definita e continua su  $[0, +\infty) \times \mathbb{R}$  e risolve (P).

**Dimostrazione.** Dimostriamo il teorema per passi.

*Passo 1.* Mostriamo che  $u$  è ben definita e continua su  $(0, +\infty) \times \mathbb{R}$ : studiamo la norma del sup. Sia  $R = [0, +\infty) \times \mathbb{R}$ .

$$\|u_n\|_{L^\infty(R)} \leq |b_n^0| \implies u_n \text{ converge totalmente su } \mathbb{R}.$$

*Passo 2.* Mostriamo che  $\mathcal{C}^\infty$  su  $(0, +\infty) \times \mathbb{R}$ . Sia  $R_\delta = (\delta, +\infty) \times \mathbb{R}$ . Stimiamo le derivate.

$$\begin{aligned} D_t^k D_x^h u_n &= b_n^0 (-n^2)^k e^{-n^2 t} \cdot n^h \cdot \underbrace{\dots}_{\star} \\ \implies \|D_t^k D_x^h u_n\|_{L^\infty(R_\delta)} &= |b_n^0| \underbrace{e^{-n^2 \delta} \cdot |n|^{2k+h}}_{\substack{\text{limitato in } n \\ \text{perché è infinitesimo in } n}} \end{aligned}$$

Allora le norme delle derivate sono sommabili per ogni  $n$ , dunque  $u \in \mathcal{C}^\infty(R_\delta)$  per ogni  $\delta$ , da cui  $u \in \mathcal{C}^\infty((0, +\infty), \mathbb{R})$ .

*Passo 3.* Mostriamo che la  $u(t, x)$  definita in  $(*)$  risolve (P).

- $u$  risolve  $u_t = u_{xx}$  per  $t > 0$ . Infatti, l'equazione è lineare per quanto mostrato al punto sopra e dunque posso scambiare serie e derivata.
- $u$  soddisfa la condizione iniziale  $u(0, \cdot) = u_0$ , perché hanno gli stessi coefficienti di Fourier.
- Sono soddisfatte anche le condizioni al bordo, infatti

$$u(\cdot, 0) = u(\cdot, \pi) = 0$$



□

**Domanda.** Quale ipotesi su  $u_0$  garantisce  $\sum_n |b_n^0| < +\infty$ ? Basta  $u_0 \in \mathcal{C}^1$  e  $u(0) = u(\pi) = 0$ .

**Teorema 2** (non esistenza nel passato). Esiste  $u_0: [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R} \mathcal{C}^\infty$ , con  $u_0(0) = u_0(\pi)$  tale che per ogni  $\delta > 0$  (P) non ha alcuna soluzione  $u: (-\delta, 0] \times [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$  continua e  $\mathcal{C}^1$  in  $t$  e  $\mathcal{C}^2$  in  $x$ .

**Teorema 3** (di unicità). Sia  $u: [0, T) \times [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{C}$  continua,  $\mathcal{C}^1$  nel tempo e  $\mathcal{C}^2$  nello spazio per  $t > 0$ . Se  $u$  risolve (P) su  $t > 0$  allora  $u$  è unica.

## 6.6.2 Operatori autoaggiunti

Notiamo che l'efficacia per la soluzione di certe EDP dipende dal fatto che

$$c_n(u) = inc_n(u) \quad b_n(\ddot{u}) = -n^2 b_n(u)$$

che segue (almeno formalmente) da  $(e^{inx})' = ine^{inx}$  e  $(\sin(nx))'' = -n^2 \sin(nx)$ .

Cioè che  $\{e^{inx}/\sqrt{2\pi}\}$  è una base ortonormale di  $L^2([-\pi, \pi], \mathbb{C})$  di autovettori di  $D^1$  e  $\{\sqrt{2/\pi} \sin(x)\}$  è una base ortonormale di  $L^2([0, \pi]; \mathbb{C})$  di autovettori di  $D^2$ .

Analogamente per risolvere  $u_t = \Delta u$  su  $\Omega$ , basterebbe avere  $\{e_n\}$  base ortonormale di  $L^2(\Omega)$  fatta di autovettori del laplaciano.

Per avere una base ortonormale di autovettori di un operatore  $T$  serve che  $T$  sia autoaggiunto (almeno in dimensione finita).

**Definizione.** Dato  $H$  spazio di Hilbert complesso o reale,  $D$  sottospazio denso di  $H$ ,  $T: D \rightarrow H$  lineare (non necessariamente continuo), dico che  $T$  è **autoaggiunto** se  $\langle Tx, y \rangle = \langle x, Ty \rangle$  per ogni  $x, y \in D$ . Infine, si dice che  $T$  è **definito positivo** se  $\langle Tx, x \rangle > 0$ .

**Proposizione.** Dato  $T$  come sopra

- i) Se  $\lambda$  è autovalore di  $T$  (ovvero tale che  $\exists x \neq 0$  tale che  $Tx = \lambda x$ ) allora  $\lambda$  è reale.
- ii) Dati  $\lambda_1 \neq \lambda_2$  autovalori allora  $V_{\lambda_1} \perp V_{\lambda_2}$  dove  $V_\lambda := \{x \mid Tx = \lambda x\}$ .
- iii) Se  $T$  è definito positivo allora  $\underbrace{\langle Tx, x \rangle}_{\text{è reale}} > 0$  per ogni  $x \in D$  dunque ogni autovalore è  $> 0$ .

**Attenzione!** Per dimostrare che gli autovettori di un operatore autoaggiunto  $T$  formano una base di  $L^2(\Omega)$  è necessario verificare la completezza: infatti, il teorema garantisce solamente l'ortogonalità. Per dimostrare la completezza si può, per esempio, usare il teorema di Stone-Weierstrass.

**Nota.** In dimensione infinita manca un teorema spettrale, ovvero tale che  $\overline{\bigoplus_\lambda V_\lambda} = H$ .

---

<sup>1</sup>Operatore derivata.

**Esempio 1.** Sia  $H = L^2([-\pi, \pi], \mathbb{C})$ ,  $D = \{u \in C^2(-\pi, \pi) \mid u(-\pi) = u(\pi)\}$  e  $T: D \rightarrow H$  tale che  $u \mapsto i\dot{u}$ . Mostrare che

- i)  $T$  è autoaggiunto
- ii) Gli autovalori di  $T$  sono  $\lambda_n = n$  con  $n \in \mathbb{Z}$   $V_{\lambda_n} = V_n = \text{Span}\{e^{inx}\}$ .
- iii)  $T$  non è continuo

In questo caso esiste una base ortonormale di  $L^2$  di autovettori di  $T$ .

**Dimostrazione.**

- i) Dati  $u, v \in D(= \mathcal{C}_{\text{per}}^1)$ , allora

$$\langle Tu, v \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} i\dot{u}\bar{v} \, dx = \left[ iu\bar{v} \right]_{-\pi}^{\pi} - \int_{-\pi}^{\pi} iu\dot{\bar{v}} \, dx = \int_{-\pi}^{\pi} u\overline{i\dot{v}} \, dx$$

- ii) Questo è un esercizio di equazioni differenziali ordinarie. Risolviamo il problema

$$\begin{cases} i\dot{u} = \lambda u & \text{su } [-\pi, \pi] \\ u(\pi) = u(-\pi) \end{cases}$$

da cui  $\dot{u} + i\lambda u = 0$ , che ha polinomio associato  $t + i\lambda = 0$  con radice  $-i\lambda$ . In conclusione la soluzione del problema sopra è  $\alpha e^{-i\lambda x}$ .

Dalla condizione al bordo abbiamo che  $\alpha e^{i\lambda\pi} = \alpha e^{-i\lambda\pi}$  dunque  $e^{i\lambda\pi} = e^{-i\lambda\pi} \iff e^{2i\lambda\pi} = 1 \iff \lambda \in \mathbb{Z}$ .

- iii) Siccome gli autovalori sono illimitati,  $T$  non è continuo. □

**Esempio 3.** Sia  $H = L^2([-\pi, \pi], \mathbb{C})$   $D = \{u \in C^1(-\pi, \pi)\}$  e  $T: D \rightarrow H$  tale che  $u \mapsto i\dot{u}$ .

**Dimostrazione.** Dati  $u, v \in D$  abbiamo

$$\begin{aligned} \langle Tu, v \rangle &= \int_{-\pi}^{\pi} i\dot{u}\bar{v} \, dx = \left[ iu\bar{v} \right]_{-\pi}^{\pi} - \int_{-\pi}^{\pi} iu\dot{\bar{v}} \, dx \\ &= i(u(\pi)\bar{v}(\pi) - u(-\pi)\bar{v}(-\pi)) + \langle u, Tv \rangle \neq \langle u, Tv \rangle. \end{aligned}$$

In quanto, in generale, il termine  $u(\pi)\bar{v}(\pi) - u(-\pi)\bar{v}(-\pi)$  è diverso da zero.

**Esercizio.** Cercare  $T: L^2([0, 1]) \rightarrow L^2([0, 1])$  continuo autoaggiunto senza autovalori.

*Suggerimento.* Cercare  $T$  del tipo  $T: u \mapsto gu$  con  $g \in L^\infty$ .

## 6.7 Esercizi

### 6.7.1 Calcolo dei coefficienti di Fourier

Data  $f: [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$  o  $\mathbb{C}$  uno degli esercizi più comuni è doverne calcolare lo sviluppo di Fourier complesso o reale.

**Osservazione.** Ricordiamo che  $c_n(f)$  può essere calcolato anche solo se  $f \in L^1$  inoltre

$$\text{SF}_{\mathbb{C}}(f) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n(f) e^{inx} \quad c_n(f) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx} dx$$

e con base hilbertiana  $\left\{ \frac{e^{inx}}{\sqrt{2\pi}} \mid n \in \mathbb{Z} \right\}$

invece nel caso reale abbiamo visto

$$\text{SF}_{\mathbb{R}}(f) = \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)] + a_0$$

$$a_n(f) = c_n(f) + c_{-n}(f) \quad b_n(f) = i(c_n(f) - c_{-n}(f)) \quad a_0(f) = c_0(f)$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx) dx \quad b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(nx) dx$$

e con base hilbertiana  $\left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{\cos(nx)}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin(nx)}{\sqrt{\pi}} \mid n \geq 1 \right\}$

**Esercizio.** Sia  $f(x) = \cos^2(x) \sin(3x)$ , calcolare i coefficienti di Fourier<sup>1</sup>.

**Svolgimento.** Usiamo lo sviluppo complesso

$$\cos(x) = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \quad \sin(x) = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$$

Dunque possiamo riscrivere  $f(x)$  come

$$\begin{aligned} &= \frac{i}{8} (e^{i2x} + e^{-i2x} + 2) (e^{-i3x} - e^{i3x}) = \\ &= \frac{i}{8} (e^{-ix} + e^{-i5x} + 2e^{-i3x} - e^{i5x} - e^{ix} - 2e^{i3x}) = \\ &= \frac{i}{8} e^{-ix} + \frac{i}{8} e^{-i5x} + \frac{i}{4} e^{-i3x} - \frac{i}{8} e^{i5x} - \frac{i}{8} e^{ix} - \frac{i}{4} e^{i3x}. \end{aligned}$$

Dunque possiamo già scrivere i coefficienti di Fourier complessi di  $f(x)$

$$c_n(f) \neq 0 \iff n = \pm 1, \pm 3, \pm 5$$

$$c_{\pm 1}(f) = \mp \frac{i}{8} \quad c_{\pm 3}(f) = \mp \frac{i}{4} \quad c_{\pm 5}(f) = \mp \frac{i}{8}.$$

Continuiamo ora il conto precedente e ricostruiamo la serie di Fourier reale ricomponendo i termini

$$\begin{aligned} &= -\frac{i^2}{4} \left( \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} \right) - \frac{i^2}{2} \left( \frac{e^{i3x} - e^{-i3x}}{2i} \right) - \frac{i^2}{4} \left( \frac{e^{i5x} - e^{-i5x}}{2i} \right) = \\ &= \frac{1}{4} \sin(x) + \frac{1}{2} \sin(3x) + \frac{1}{4} \sin(5x), \end{aligned}$$

---

<sup>1</sup>Con funzioni ottenute come combinazioni di prodotti di potenze di funzioni trigonometriche (anche con argomento moltiplicato per un naturale) conviene calcolare lo sviluppo complesso e poi passare a quello reale.

in particolare possiamo notare che  $f(\pi) = f(-\pi) = 0$  dunque potevamo già dedurre che la serie di Fourier reale sarebbe stata composta solo da seni.

**Esercizio.** Caratterizzare i coefficienti  $c_n(f)$  di una  $f: [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{C}$  in  $L^2$  tale che  $\text{Im}(f) \subseteq \mathbb{R}$ .

*Suggerimento.* Si usa che per  $z \in \mathbb{C}$  vale  $z \in \mathbb{R} \iff z = \bar{z}$ .

## 6.7.2 Applicazione serie di Fourier: risoluzione di PDE

**Esercizio.** Determinare la soluzione di (P) e stabilire unicità e regolarità della soluzione  $u: [0, T) \times [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$  o  $\mathbb{C}$ .

$$\begin{cases} u_t = 4u_{xx} \\ u(\cdot, -\pi) = u(\cdot, \pi) \\ u_x(\cdot, -\pi) = u_x(\cdot, \pi) \\ u(0, x) = \cos^2(x) \sin(3x) \end{cases} \quad (\text{P})$$

**Svolgimento.** Per prima cosa troviamo formalmente una soluzione in serie di Fourier  $u(t, x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n(t) e^{inx}$  dove  $c_n(t)$  è il coefficiente di  $u(t, \cdot)$ .

Per il teorema di derivazione sotto il segno di integrale abbiamo

$$u_t(t, x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \dot{c}_n(t) e^{inx} \quad \text{con } c_n(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} u(t, x) e^{-inx} dx$$

Le condizioni al bordo assicurano che  $c_n(u_{xx}(t, \cdot)) = -4n^2 c_n(u(t, \cdot))$  da cui otteniamo il seguente problema di Cauchy sui coefficienti

$$\begin{cases} \dot{c}_n(t) = -4n^2 c_n(t) \\ c_n(0) = c_n(u(0, \cdot)) = c_n(\cos^2(x) \sin(3x)) \end{cases} \quad \forall n \in \mathbb{Z}$$

Inoltre dato che  $c_n^0 = 0$  se  $n \neq \pm 1, \pm 3, \pm 5 \implies c_n(t) = 0$  per questi  $n$ , dunque complessivamente i sistemi sono

$$\begin{cases} \dot{c}_1(t) = -4c_1(t) \\ c_1(0) = -\frac{i}{8} \end{cases} \quad \begin{cases} \dot{c}_3(t) = -36c_3(t) \\ c_3(0) = -\frac{i}{4} \end{cases} \quad \begin{cases} \dot{c}_5(t) = -100c_5(t) \\ c_5(0) = -\frac{i}{8} \end{cases}$$

con la condizione  $c_{-n}(t) = \overline{c_n(t)}$ , così otteniamo

$$\begin{aligned} c_1(t) &= -\frac{i}{8} e^{-4t} & c_3(t) &= -\frac{i}{4} e^{-36t} & c_5(t) &= -\frac{i}{8} e^{-100t} \\ c_{-1}(t) &= \frac{i}{8} e^{-4t} & c_{-3}(t) &= \frac{i}{4} e^{-36t} & c_{-5}(t) &= \frac{i}{8} e^{-100t} \end{aligned}$$

ed infine fattorizzando

$$\begin{aligned} u(t, x) &= \frac{e^{-4t}}{4} \left( -\frac{i}{2} e^{ix} + \frac{i}{2} e^{-ix} \right) + \frac{e^{-36t}}{2} \left( -\frac{i}{2} e^{i3x} + \frac{i}{2} e^{-i3x} \right) + \frac{e^{-100t}}{4} \left( -\frac{i}{2} e^{i5x} + \frac{i}{2} e^{-i5x} \right) = \\ &= \frac{1}{4} e^{-4t} \sin(x) + \frac{1}{2} e^{-36t} \sin(3x) + \frac{1}{2} e^{-100t} \sin(5x) \end{aligned}$$

**Esercizio.** Consideriamo il problema (P) dato da

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} + u \\ u(\cdot, -\pi) = u(\cdot, \pi) \\ u_x(\cdot, -\pi) = u_x(\cdot, \pi) \\ u(0, \cdot) = u_0 \end{cases} \quad (\text{P})$$

dove  $u_0(x)$  è  $\cos^2(x) \sin(3x)$  oppure  $\sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{1}{2^{|n|}} e^{inx}$ .

**Svolgimento.** Per ora lavoriamo con  $u_0(x) = \cos^2(x) \sin(3x)$ , notiamo subito che i coefficienti soddisfano l'equazione

$$\begin{cases} \dot{c}_n(t) = -n^2 c_n(t) + c_n(t) = (1 - n^2) c_n(t) \\ c_n(0) = c_n(\cos^2(x) \sin(3x)) \end{cases}$$

da cui  $\dot{c}_n(t) = (1 - n^2) c_n$  con soluzione  $c_n(t) = \gamma e^{(1-n^2)t}$ , quindi ad esempio abbiamo

$$c_{\pm 1}(t) = \mp \frac{i}{8} \quad c_{\pm 3}(t) = \mp \frac{i}{4} e^{-8t} \quad c_{\pm 5}(t) = \mp \frac{i}{8} e^{-24t}$$

Dunque la soluzione finale è

$$\begin{aligned} u(t, x) &= \frac{i}{8} e^{-ix} - \frac{i}{8} e^{ix} + \frac{i}{4} e^{3t} e^{-i3x} + \frac{i}{4} e^{3t} e^{i3x} + \frac{i}{8} e^{-24t} e^{-i5x} + \frac{i}{8} e^{-24t} e^{i5x} = \\ &= -\frac{i}{4} \left( \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2} \right) - \frac{i}{2} e^{-3t} \left( \frac{e^{i3x} - e^{-i3x}}{2} \right) - \frac{i}{4} e^{-24t} \left( \frac{e^{i5x} - e^{-i5x}}{2} \right) = \\ &= \frac{1}{4} \sin(x) - \frac{1}{2} e^{-3t} \sin(3x) - \frac{1}{4} e^{-24t} \sin(5x) \end{aligned}$$

Invece considerando la condizione iniziale  $u_0(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{inx} / 2^{|n|}$  abbiamo che  $c_n(u_0) = 1/2^{|n|}$ , notiamo che i coefficienti sono sommabili

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{1}{2^{|n|}} = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} + 1 < +\infty \quad u(t, x) := \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{1}{2^{|n|}} e^{(1-n^2)t} e^{inx}$$

in particolare formalmente possiamo scriverla meglio come

$$= \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{1}{2^{|n|}} e^{(1-n^2)t} e^{inx} = e^t \left( 1 + \sum_{n>0} \frac{1}{2^{|n|}} e^{(1-n^2)t} \cos(nx) \dots \dots \right)$$

[TODO: Finire meglio questo conto]

**Esercizio.** (della volta scorsa) Consideriamo la funzione

$$f(x) = \sum_{n \neq 0} \frac{\cos(n)}{|n|^{3/2}} e^{inx}$$

- Dire se  $f$  è ben definita e continua.
- Dire se  $f$  è derivabile.

**Svolgimento.**

$$\sum_{n \neq 0} |c_n| = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\cos(n)|}{|n|^{3/2}} \leq 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{3/2}} < +\infty$$

dunque la serie di Fourier converge uniformemente a  $f \implies$  è continua e periodica.

Se  $\sum |n| \cdot |c_n| < +\infty$  si potrebbe dire che  $f$  è derivabile però

$$\sum_{n \neq 0} |n| \cdot |c_n| = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\cos(n)|}{\sqrt{n}} = +\infty \text{ non converge assolutamente}$$

Ma la candidata derivata ha coefficienti  $inc_n$  e non starebbe in  $L^2$  ovvero

$$\sum n^2 |c_n|^2 = +\infty \implies \sum inc_n e^{inx} \notin L^2$$

**Esercizio.** Consideriamo l'equazione alle derivate parziali

$$\begin{cases} u_{ttt}(t, x) = u_{xx}(t, x) & x \in [-\pi, \pi] \\ u(\cdot, \pi) = u(\cdot, -\pi) \\ u_x(\cdot, \pi) = u_x(\cdot, -\pi) \\ u(0, \cdot) = u_0 \\ u_x(0, \cdot) = u_1 \\ u_{xx}(0, \cdot) = u_2 \end{cases} \quad (P)$$

ponendo  $c_n^i := c_n(u_i)$  per  $n \in \mathbb{Z}$  per  $i = 1, 2, 3$ . Segue subito che il problema di Cauchy sui coefficienti è

$$\begin{cases} \ddot{c}_n(t) = -n^2 c_n(t) \\ c_n(0) = c_n^0 \\ \dot{c}_n(0) = c_n^1 \\ \ddot{c}_n(0) = c_n^2 \end{cases} \quad \forall n \in \mathbb{Z} \quad (P')$$

che ha polinomio caratteristico  $p(\lambda) = \lambda^3 + n^2 \implies \lambda^3 = -n^2$  e dunque le soluzioni sono  $\lambda_i = n^{2/3} \zeta_6^{2i-1}$  con  $\zeta_6$  una radice sesta dell'unità. Per comodità per  $i = 1, 2, 3$  poniamo  $z_i := n^{2/3} \omega_i$  con  $\omega_i$  soluzioni di  $\omega^3 = -1$  che possiamo anche riscrivere come

$$\omega_1 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \quad \omega_2 = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i \quad \omega_3 = -1$$

Dunque per  $n \in \mathbb{Z}$  e  $n \neq 0$  la soluzione sarà

$$\begin{cases} c_n(t) = A_n e^{-z_1^n t} + B_n e^{-z_2^n t} + C_n e^{-z_3^n t} \\ c_n(0) = c_n^0 = A_n + B_n + C_n \\ c_n(1) = c_n^1 = A_n z_1^n + B_n z_2^n + C_n z_3^n \\ c_n(2) = c_n^2 = A_n (z_1^n)^2 + B_n (z_2^n)^2 + C_n (z_3^n)^2 \end{cases}$$

e quindi otteniamo il sistema

$$\implies \begin{cases} c_n^0 = A_n + B_n + C_n \\ n^{-2/3} c_n^1 = A_n \omega_1 + B_n \omega_2 + C_n \omega_3 \\ n^{-4/3} c_n^2 = A_n \omega_1^2 + B_n \omega_2^2 + C_n \omega_3^2 \end{cases} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \omega_1 & \omega_2 & \omega_3 \\ \omega_1^2 & \omega_2^2 & \omega_3^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_n \\ B_n \\ C_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_n^0 \\ n^{-2/3} c_n^1 \\ n^{-4/3} c_n^2 \end{pmatrix}$$

e facendo conti si ottengono  $A_n, B_n$  e  $C_n$  e si scopre che [TODO: Controllare i conti con Mathematica]

$$\begin{aligned} A_n e^{n^{2/3}(t/2 + i\sqrt{3}t/2)} &\sim e^{n^{2/3}t/2} \xrightarrow{t \rightarrow \infty} \infty \\ B_n e^{n^{2/3}(t/2 - i\sqrt{3}t/2)} &\sim e^{n^{2/3}t/2} \xrightarrow{t \rightarrow \infty} \infty \\ C_n e^{-n^{2/3}t} &\sim e^{-n^{2/3}t} \xrightarrow{t \rightarrow -\infty} \infty \end{aligned}$$

dunque in realtà anche se il problema in partenza sembrava ben definito in realtà non ha soluzione per alcun  $t \in \mathbb{R}$ .

Conti esatti con Mathematica:

$$\begin{aligned} A_n &\rightarrow \frac{c_n^0}{3} - \frac{c_n^2}{3n^{4/3}} - \frac{(-1)^{2/3}c_n^2}{3n^{4/3}} - \frac{(-1)^{2/3}c_n^1}{3n^{2/3}}, \\ B_n &\rightarrow \frac{c_n^0}{3} - \frac{c_n^2}{6n^{4/3}} + \frac{ic_n^2}{2\sqrt{3}n^{4/3}} + \frac{c_n^1}{6n^{2/3}} + \frac{ic_n^1}{2\sqrt{3}n^{2/3}}, \\ C_n &\rightarrow \frac{c_n^0}{3} + \frac{c_n^2}{3n^{4/3}} - \frac{c_n^1}{3n^{2/3}} \end{aligned}$$

**Esercizio.** (Equazione del calore senza una condizione al bordo)

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} & x \in [-\pi, \pi] \\ u(\cdot, -\pi) = u(\cdot, \pi) \\ u(0, \cdot) = u_0 = \cos(x/2) \end{cases} \quad (P)$$

i) *Esiste una soluzione?*

Sì in quanto esiste anche con una condizione in più

ii) *È unica?*

Senza periodicità per  $u_x$  non è vero in generale che  $c_n(u_{xx}(t, \cdot)) = -n^2 c_n(u(t, \cdot))$ .

Cerchiamo una soluzione della forma  $u(t, x) = \cos(x/2)\psi(t)$ . Abbiamo che  $u_t(t, x) = \dot{\psi}(t)\cos(x/2)$  e  $u_{xx}(t, x) = -\cos(x/2)\psi(t)/4$ . Dunque  $\dot{\psi}(t) = -\psi(t)/4$  e  $\psi(0) = 1 \implies \psi(t) = e^{-t/4}$ .

**Esercizio.**

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} & x \in [0, \pi] \\ u(t, 0) = 0 & t \in \mathbb{R} \\ u(t, \pi) = t & t \in \mathbb{R} \\ u(0, \cdot) = u_0 \end{cases} \quad (P)$$

L'equazione è lineare, cerchiamo  $u(t, x) = v(t, x) + \psi(t, x)$  in modo che  $v(t, x) = 0$  se  $x = 0, \pi$  e  $\psi(t, 0) = 0$  e  $\psi(t, \pi) = t$  e  $\psi(t, x) = tx/\pi$ .

**Esercizio.**

$$\begin{cases} u_t = u_{xxxx} & x \in [-\pi, \pi] \\ u(\cdot, \pi) = u(\cdot, -\pi) \\ u_x(\cdot, \pi) = u_x(\cdot, -\pi) \\ u_{xx}(\cdot, \pi) = u_{xx}(\cdot, -\pi) \\ u_{xxx}(\cdot, \pi) = u_{xxx}(\cdot, -\pi) \\ u(0, \cdot) = u_0 \end{cases} \quad (P)$$

**Esercizio.**

$$\begin{cases} u_t = u_{xxxx} & x \in [0, \pi] \\ u(\cdot, 0) = u(\cdot, \pi) = 0 \\ u_{xx}(\cdot, 0) = u_{xx}(\cdot, \pi) = 0 \\ u(0, \cdot) = u_0 \end{cases} \quad (P)$$

**Esercizio.** Sia  $V$  il seguente insieme

$$V := \left\{ f \in L^1([1, +\infty)) \mid |f(x)| \leq \frac{1}{x^2} \text{ per q.o. } x \right\}$$

è compatto in  $L^1$ ? e se al posto di  $L^1$  avessimo  $L^2$ ?

[TODO: Espandere]

Intuitivamente  $V \supseteq \{f \mid |f(x)| \leq 1/2 \text{ q.o. in } [1, 2]\}$  che non è compatto in quanto contiene famiglie di funzioni che “oscillano molto” costruite sull’idea della base di Haar.

**Esercizio.** Trovare una funzione in  $L^p([0, +\infty))$  tale però che  $f \notin L^q$  per  $q \neq p$ .

Cercare  $f$  della forma

$$f(x) = \frac{1}{x^\alpha(a + (\ln x)^\beta)}$$

### 6.7.3 Operatori autoaggiunti

**Esercizi.**

- 1) Esempio classico di  $H = L^2([-\pi, \pi]; \mathbb{C})$  e  $D = \{u \in C^1([-\pi, \pi]; \mathbb{C}) \mid u(-\pi) = u(\pi)\}$  e  $Tu = i\dot{u}$  allora  $T$  è un operatore autoaggiunto ed ha autovalori  $\lambda = n \in \mathbb{Z}$ .
- 2)  $H = L^2([0, \pi]; \mathbb{R})$  e  $D = \{u \in C^2([0, \pi]) \mid u(0) = 0 \text{ e } u(\pi) = 0\}$  sono dette condizioni di Dirichlet con  $Tu = -\ddot{u}$ .

Ora usiamo sempre  $Tu = -\ddot{u}$  ma su domini differenti.

- 3)  $D_3 = \{u \in C^2([0, \pi]) \mid \dot{u}(0) = 0 \text{ e } \dot{u}(\pi) = 0\}$  sono dette condizioni di Neumann.
- 4)  $D_4 = \{u \in C^2([0, \pi]) \mid u(0) = 0 \text{ e } \dot{u}(\pi) = 0\}$  sono dette condizioni di Robin.

Dire per 2), 3) e 4) rispondere alle seguenti

- L’operatore  $T$  è autoaggiunto e controllare se il relativo  $D$  è denso in  $L^2$
- Controllare se esistono autovalori ed eventualmente dire chi sono gli autovettori.
- Stabilire se esiste una base Hilbertiana di autovettori.

**Risoluzione.**

- 2)  $D_2$  è denso. Vediamo l’operatore è autoaggiunto

$$\begin{aligned}\langle Tu, v \rangle &= \int_0^\pi (-\ddot{u}(x))v(x) \, dx = \underbrace{-\dot{u}(x)v(x)}_{v(0)=v(\pi)=0} \Big|_0^\pi - \int_0^\pi (-\dot{u}(x))\dot{v}(x) \, dx = \int_0^\pi \dot{u}(x)\dot{v}(x) \, dx \\ \langle u, Tv \rangle &= \int_0^\pi u(x)(-\ddot{v}(x)) \, dx = \underbrace{u(x)(-\dot{v}(x))}_{u(0)=u(\pi)=0} \Big|_0^\pi - \int_0^\pi \dot{u}(x)(-\dot{v}(x)) \, dx = \int_0^\pi \dot{u}(x)\dot{v}(x) \, dx\end{aligned}$$

dunque  $\langle Tu, v \rangle = \langle \dot{u}, \dot{v} \rangle = \langle u, Tv \rangle$ .

Inoltre  $T$  è anche definito positivo infatti  $\langle Tu, u \rangle = \langle \dot{u}, \dot{u} \rangle = \|\dot{u}\|_{L^2}^2 \geq 0$ .

Cerchiamo gli autovalori quindi poniamo  $-\ddot{u} = Tu = \lambda u$  con  $\lambda \geq 0$  e  $u \in D_2$ . Segue  $p(t) = t^2 + \lambda \implies t = \pm i\sqrt{\lambda}$  se  $\lambda \neq 0$ .

Se  $\lambda = 0$  invece otteniamo  $\ddot{u} = 0 \implies u(x) = ax + b$  ma per le condizioni al bordo segue  $a, b = 0$  e dunque  $u = 0 \implies \lambda = 0$  non è autovalore.



Invece se  $\lambda > 0$  abbiamo  $u(x) = A \cos(\sqrt{\lambda}x) + B \sin(\sqrt{\lambda}x)$  e segue  $A = 0$  e  $\lambda = n^2$  per  $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ .

- 3)  $D_2$  è denso e similmente si vede che anche in questo caso  $T$  è autoaggiunto. Anche in questo caso  $T$  è definito positivo perché vale sempre  $\langle Tu, v \rangle = \langle \dot{u}, \dot{v} \rangle$ .

Per cercare gli autovalori risolviamo il seguente sistema

$$\begin{cases} -\ddot{u} = \lambda u \\ \dot{u}(0) = 0 \\ \dot{u}(\pi) = 0 \end{cases}$$

Se  $\lambda = 0$  allora  $u(x) = \text{cost.}$  è un autovettore per l'autovalore 0.

Se invece  $\lambda \neq 0$  allora  $u(x) = A \cos(\sqrt{\lambda}x) + B \sin(\sqrt{\lambda}x) \implies \cos(nx)$  è un autovettore e  $\lambda = n^2$  per  $n = 1, 2, \dots$

- 4) In questo caso vediamo che vale sempre  $\langle Tu, v \rangle = \langle \dot{u}, \dot{v} \rangle$  ma per motivi diversi infatti

$$\begin{aligned} \langle Tu, v \rangle &= \int_0^\pi (-\ddot{u}(x))v(x) dx = \underbrace{-\dot{u}(x)v(x)}_{\dot{u}(\pi)=0, v(0)=0} \Big|_0^\pi - \int_0^\pi (-\dot{u}(x))\dot{v}(x) dx = \int_0^\pi \dot{u}(x)\dot{v}(x) dx \\ \langle u, Tv \rangle &= \int_0^\pi u(x)(-\ddot{v}(x)) dx = \underbrace{u(x)(-\dot{v}(x))}_{\dot{v}(\pi)=0, u(0)=0} \Big|_0^\pi - \int_0^\pi \dot{u}(x)(-\dot{v}(x)) dx = \int_0^\pi \dot{u}(x)\dot{v}(x) dx \end{aligned}$$

Considerando il sistema  $-\ddot{u} = \lambda u$  con le condizioni al bordo di Robin caso  $\lambda = 0$  non è un autovalore mentre se  $\lambda \neq 0$  abbiamo che  $\dot{u}(x) = \sqrt{\lambda}B \cos(\sqrt{\lambda}x) = 0$  per  $x = \pi$  dunque  $\sqrt{\lambda} = n + 1/2$  per  $n = 0, 1, 2, \dots$  e gli autovettori sono

$$u_n(x) = \sin \left( \left( n + \frac{1}{2} \right) x \right)$$

**Osservazione.**  $T: D \rightarrow L^2$  operatore lineare e continuo  $\iff \exists M > 0$  tale che  $\|Tu\|_2 \leq M \|u\|$  per ogni  $u \in D$ .

Vediamo ad esempio che  $D_1$  non è continuo infatti gli autovalori sono  $\lambda_n = n^2 \implies n^2 \|u_n\|_2 \leq M \|u_n\|_2 \implies M \geq n^2$  per ogni  $n$ . Dunque  $M$  è illimitato e l'operatore non può essere continuo.

**Esempio.** Se ad esempio abbiamo  $Tu = -\ddot{u}$  con  $\widetilde{D} = \{u \in C^2 \mid u(0) = u(\pi) = 1\}$  allora  $T$  non è autoaggiunto e basta trovare  $u, v$  tali che

$$\langle Tu, v \rangle \neq \langle u, Tv \rangle$$

**Esercizio.**

- i) Sia  $T_1: \ell^2 \rightarrow \ell^2$  dato da

$$T_1((x_n)_{n>0}) = (0, x_1, x_2, \dots)$$

- ii) Sia  $T_2: \ell^2 \rightarrow \ell^2$  dato da

$$T_2((x_n)_{n>0}) = (x_2, x_3, \dots)$$

Dire se sono autoaggiunti ed eventualmente chi sono gli autovalori.

*Esercizi più da compito sono invece cose del tipo...*

**Esercizio.** Sia  $H = L^2([0, \pi] \times [0, \pi]; \mathbb{R})$  e  $Tu = -\Delta u = -u_{xx} - u_{yy}$

- $D_1 = \{u \in C^2([0, \pi] \times [0, \pi]; \mathbb{R}) \mid u|_{\partial Q} = 0\}$
- $D_2 = \{u \in C^2([0, \pi] \times [0, \pi]; \mathbb{R}) \mid \nabla u|_{\partial Q} = 0\}$
- $D_3 = \{u \in C^2([0, \pi] \times [0, \pi]; \mathbb{R}) \mid u = 0 \text{ su due lati paralleli e } \nabla u = 0 \text{ sugli altri due}\}$

e dire se l'operatore è autoaggiunto ed eventualmente trovare gli autovalori.

# Capitolo 7

## Trasformata di Fourier

Data  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  poniamo

$$f(x) \stackrel{(*)}{=} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(y) e^{iyx} dy \quad \hat{f}(y) := \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-iyx} dx.$$

Dove  $\hat{u}$  si chiama *trasformata di Fourier*<sup>1</sup> di  $u$  e la formula  $(*)$  si dice *formula di inversione*.

*Derivazione formale* (della formula di inversione). Prendiamo  $f \in \mathcal{C}_C^1(\mathbb{R}, \mathbb{C})$  e  $\delta > 0$  tale che  $\text{supp}(f) \subset [-\pi/\delta, \pi/\delta]$ .

Scriviamo  $f$  in serie di Fourier su  $[-\pi/\delta, \pi/\delta]$  (serve un cambio di variabile per ricondursi alla serie di Fourier su  $[-\pi, \pi]$ ).

$$f(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n^\delta(f) e^{in\delta x}$$
$$c_n^\delta(f) := \frac{\delta}{2\pi} \int_{-\pi/\delta}^{\pi/\delta} f(x) e^{-in\delta x} dx = \frac{\delta}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-in\delta x} dx = \frac{\delta}{2\pi} \hat{f}(n\delta).$$

Dunque,

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{\delta}{2\pi} \underbrace{\hat{f}(n\delta) e^{i(n\delta)x}}_{\hat{f}(y) e^{iyx} \text{ calcolata in } y=n\delta}$$

dove  $\sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{\delta}{2\pi} \hat{f}(n\delta) e^{i(n\delta)x}$  è la somma di Riemann di  $\int_{-\infty}^{\infty} \hat{f} e^{iyx} dy$ . Dunque

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{\delta}{2\pi} \hat{f}(n\delta) e^{i(n\delta)x} \xrightarrow{\delta \rightarrow 0} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(y) e^{iyx} dy.$$

Quest'ultimo passaggio non è giustificato rigorosamente ma si può rendere rigoroso per  $f \in \mathcal{C}_C^1(\mathbb{R})$ .

**Definizione.** Data  $f \in L^1(\mathbb{R}; \mathbb{C})$  la **trasformata di Fourier**  $\hat{f}$  è definita da

$$\hat{f}(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-ixy} dx \quad \forall y \in \mathbb{R}.$$

---

<sup>1</sup>Sostituisce la serie di Fourier quando si passa da funzioni su  $\mathbb{R}$   $2\pi$ -periodiche a funzioni su  $\mathbb{R}$ .

**Teorema.** Data  $f \in L^1(\mathbb{R}; \mathbb{C})$ , allora

- i)  $\widehat{f}$  è ben definita in ogni punto di  $\mathbb{R}$ .
- ii) Vale  $\|\widehat{f}\|_\infty \leq \|f\|_1$ .
- iii)  $\widehat{f}$  è continua
- iv)  $\widehat{f}$  è infinitesima.

**Dimostrazione.**

- i)  $\widehat{f}(y)$  è ben definita per ogni  $y \in \mathbb{R}$ . Infatti,  $f(x)e^{-iyx} \in L^1$  dato che

$$\|\widehat{f}\|_1 \leq \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)e^{-iyx}| dx = \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx = \|f\|_1.$$

- ii)  $\|\widehat{f}\|_\infty \leq \|f\|_1$ . Infatti,

$$|\widehat{f}| \leq \int |f(x)e^{-iyx}| dx = \|f\|_1$$

- iii)  $\widehat{f}$  è continua. Se  $y_n \rightarrow y$ , allora

$$\widehat{f}(y_n) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-ixy_n} dx \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-iny} dx = \widehat{f}(y)$$

per convergenza dominata. Infatti, la convergenza puntuale segue dalla continuità dell'esponenziale; mentre la dominazione è data da  $|f(x)e^{-iyx}| = |f(x)|$ .

- iv)  $\widehat{f}(y) \xrightarrow{y \rightarrow \pm\infty} 0$  per il lemma di Riemann-Lebesgue.

□

## 7.1 Proprietà della trasformata di Fourier

Data  $f \in L^1(\mathbb{R}; \mathbb{C})$  abbiamo posto

$$\forall y \in \mathbb{R} \quad \mathcal{F}(f)(y) = \widehat{f}(y) := \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-iyx} dx$$

ed abbiamo visto che

**Teorema 1.**  $\widehat{f} \in C_0(\mathbb{R}; \mathbb{C})$  e  $\|\widehat{f}\|_\infty \leq \|f\|_1$ .

**Proposizione 2.** Data  $f \in L^1(\mathbb{R}; \mathbb{C})$  allora

- i)  $\forall h \in \mathbb{R}$  vale  $\widehat{\tau_h f} = e^{-ihy} \widehat{f}$
- ii)  $\forall h \in \mathbb{R}$  vale  $\widehat{e^{ihx} f} = \tau_h \widehat{f}$
- iii)  $\forall \delta \neq 0$  vale  $\widehat{\sigma_\delta f} = \widehat{f}(\delta y)$

*Derivazione.* Partendo dalla formula di inversione

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{2\pi} \int \widehat{f}(y) e^{iyx} dy \\ f(x-h) &= \frac{1}{2\pi} \int \underbrace{\widehat{f}(y) e^{-ihy}}_{=\widehat{f(x-h)}} e^{iyx} dy \end{aligned}$$

**Dimostrazione.** Facciamo il calcolo diretto

$$\begin{aligned} \widehat{\tau_h f} &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-h) e^{-ixy} dx = \\ &= \left( \begin{array}{l} t = x-h \\ dt = dx \end{array} \right) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-i(t+h)y} dt = \\ &= e^{-ihy} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-ity} dt = e^{-ihy} \widehat{f}(t). \end{aligned}$$

Analogamente seguono anche le altre □

**Proposizione 3.** Sia  $f \in C^1(\mathbb{R}; \mathbb{C})$  con  $f, f' \in L^1$  allora  $\widehat{f'} = iy\widehat{f}$  (da confrontare con  $c_n(f') = inc_n(f)$  nel caso della serie di Fourier).

*Derivazione.* Si deriva la formula di inversione

$$f'(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{f}(y) iye^{ixy} dy$$

**Dimostrazione.** Vediamo prima una dimostrazione che non funziona e cerchiamo di aggiustarla. Abbiamo che

$$\widehat{f'}(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f'(x) e^{-iyx} dx = \underbrace{\left[ f(x) e^{-iyx} \right]_{-\infty}^{+\infty}}_{(*)} + iy \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-iyx} dx = iy\widehat{f}(y)$$

serve che  $f(x) \rightarrow 0$  per  $|x| \rightarrow +\infty$  per far sì che  $(*) = 0$ .

**Nota.**  $f \in C \cap L^1$  non implica che  $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow \pm\infty} 0$ , tuttavia  $f \in C^1 \cap L^1$  e  $f' \in L^1$  sì, però la dimostrazione è più complicata.

Argomentiamo come segue:  $f \in L^1 \implies \liminf_{|x| \rightarrow \infty} |f(x)| = 0$ , in quanto se  $\liminf_{|x| \rightarrow \infty} |f(x)| = \delta > 0$  allora la funzione sarebbe  $> \delta$  per  $|x| \rightarrow +\infty$  ed avrebbe integrale  $+\infty$ , dunque esistono due successioni  $a_n \rightarrow -\infty, b_n \rightarrow +\infty$  tali che  $f(a_n) \rightarrow 0$  e  $f(b_n) \rightarrow 0$  quindi come prima abbiamo

$$\begin{aligned} \widehat{f'}(y) &\stackrel{(*)}{=} \lim_n \int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_{[a_n, b_n]} f'(x) e^{iyx} dx = \\ &= \lim_n \int_{a_n}^{b_n} f'(x) e^{iyx} dx = \\ &= \lim_n \left( \underbrace{\left[ f(x) e^{-iyx} \right]_{a_n}^{b_n}}_{\rightarrow 0} + iy \int_{a_n}^{b_n} f(x) e^{-iyx} dx \right) = \\ &= \lim_n iy \int_{a_n}^{b_n} f(x) e^{-iyx} dx = \\ &= iy\widehat{f}(y) \end{aligned}$$

dove (\*) segue dal teorema di convergenza dominata.  $\square$

**Proposizione 4.** Sia  $f \in L^1$  con  $xf \in L^1$ , allora  $\widehat{f} \in C^1(\mathbb{R}; \mathbb{C})$  e  $(\widehat{f})' = -i\widehat{xf}$ .

**Dimostrazione.** Per il teorema di derivazione sotto il segno di integrale:

$$\widehat{f}(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-ixy} dx \implies (\widehat{f})'(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)(-ix)e^{-ixy} dx = -i\widehat{xf}$$

**Proposizione 5.** (Derivazione sotto segno di integrale) Sia  $I$  un intervallo di  $\mathbb{R}$ ,  $E$  misurabile in  $\mathbb{R}^d$  e  $g: I \times E \rightarrow \mathbb{C}$  tale che

i)  $g(\cdot, x) \in C^1(I)$  per q.o.  $x \in E$ .

ii)  $\exists h_0, h_1 \in L^1(E)$  tali che

$$|g(t, x)| \leq h_0(x) \quad \text{e} \quad \left| \frac{\partial g}{\partial t}(t, x) \right| \leq h_1(x)$$

allora  $G(t) := \int_E g(t, x) dx$  è ben definita per ogni  $t \in I$  e  $G \in C^1(I)$  e

$$G'(t) = \int_E \frac{\partial}{\partial t} g(t, x) dx$$

**Traccia dimostrazione.**

- *Passo 1:*  $G(t)$  e  $\tilde{G}(t)$  sono ben definite  $\forall t \in I$  (grazie alla dominazione) e continue in  $t$  (usando convergenza dominata e le dominazioni)
- *Passo 2:* Dobbiamo far vedere che  $G$  è  $C^1$  con derivata  $\tilde{G}$ , si usa la seguente forma del teorema fondamentale del calcolo integrale

$$\forall t_0, t_1 \in I \text{ con } t_0 < t_1 \quad G(t_1) - G(t_0) \stackrel{(*)}{=} \int_{t_0}^{t_1} \tilde{G}(t) dt$$

ed usando Fubini-Tonelli in (\*).

**Proposizione 6.** (Prodotto di convoluzione e trasformata di Fourier). Siano  $f_1, f_2 \in L^1(\mathbb{R}; \mathbb{C})$ , allora  $f_1 * f_2 \in L^1$  (già visto) e vale

$$\mathcal{F}(f_1 * f_2) = (\mathcal{F}f_1) \cdot (\mathcal{F}f_2)$$

**Dimostrazione.**

$$\begin{aligned} \widehat{f_1 * f_2}(y) &= \int f_1 * f_2(x) e^{-ixy} dx = \\ &= \iint f_1(x-t) f_2(t) dt e^{-ixy} dx = \\ &= \int \left( \int f_1(x-t) e^{-i(x-t)y} dx \right) f_2(t) e^{-ity} dt = \\ &= \int \widehat{f_1}(y) f_2(t) e^{-ity} dt = \widehat{f_1}(y) \cdot \widehat{f_2}(y) \end{aligned}$$

**Definizione.** Data  $g \in L^1(\mathbb{R}; \mathbb{C})$  definiamo l'**antitrasformata di Fourier** di  $g$  la funzione

$$\check{g}(x) := \int_{-\infty}^{+\infty} g(y) e^{ixy} dy.$$

Cioè  $\check{g}(x) = \widehat{g}(-x)$  e scriviamo anche  $\check{g} = \mathcal{F}^* g$ . Effettivamente  $\mathcal{F}^*$  è l'aggiunto di  $\mathcal{F}$ , almeno formalmente<sup>1</sup> infatti abbiamo

$$\langle \mathcal{F}f, g \rangle = \iint f e^{\overline{ixy} g(y)} dx dy = \int f(x) \overline{\check{g}(x)} dx = \langle f, \mathcal{F}^* g \rangle.$$

**Teorema 7.** Data  $f \in L^1(\mathbb{R}; \mathbb{C})$  tale che  $\widehat{f} \in L^1(\mathbb{R}; \mathbb{C})$  allora

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \mathcal{F}^* \mathcal{F} f = 2\pi f \quad \text{cioè} \quad \int \widehat{f}(x) e^{ixy} dy = 2\pi f(x)$$

**Nota.** Una funzione continua e infinitesima non è, in generale, una funzione  $L^1$ ; in particolare, l'ipotesi  $\widehat{f} \in L^1$  è necessaria e non deriva dalle proprietà già note.

**Dimostrazione.** *Dimostrazione scorretta* (passando dalla Delta di Dirac dei fisici):

$$\begin{aligned} \mathcal{F}^* \mathcal{F} f &= \int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{f}(y) e^{iyx} dy = \\ &= \iint f(t) e^{-iyt} dt e^{ixy} dy = \\ &\stackrel{\text{non si può usare Fubini}^1}{\rightarrow} = \int f(t) \underbrace{\int e^{i(x-t)y} dy}_{\text{"}\delta(x-t)\text{"}} dt = f(x) \end{aligned}$$

*Dimostrazione vera:* scegliamo una funzione ausiliaria  $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  tale che

- i)  $\varphi(0) = 1$  continua in 0 e  $\varphi$  limitata
- ii)  $\varphi \in L^1$
- iii)  $\check{\varphi} \in L^1$

e poniamo  $g_\delta(x) := \int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{f}(y) \varphi(\delta y) e^{ixy} dy$ .

- *Passo 1.*  $g_\delta(x) \rightarrow \mathcal{F}^* \mathcal{F} f(x)$  per ogni  $x \in \mathbb{R}$  per convergenza dominata. Infatti:

$$\int \widehat{f}(y) e^{iyx} \varphi(\delta y) dy \xrightarrow{\delta \rightarrow 0} \int \widehat{f}(y) e^{iyx} dy$$

e come dominazione usiamo  $|\widehat{f}(y) e^{iyx} \varphi(\delta y)| \leq |\widehat{f}(y)| \cdot \|\varphi\|_\infty$

<sup>1</sup>In  $L^1$  non è definito il prodotto scalare.

<sup>1</sup>Infatti  $f \in L^1$  non basta per garantire che  $\iint |f(t)| < \infty$ .

- *Passo 2.* Per Fubini Tonelli vale

$$g_\delta(x) = \int \widehat{f} e^{ixy} \varphi(\delta y) dy = \int \left( \int f(t) e^{-ity} dt \right) e^{ixy} \varphi(\delta y) dy \\ \stackrel{\text{Fubini}}{=} \int f(t) \left( \int \varphi(\delta y) e^{i(x-t)y} dy \right) dt,$$

dato che

$$\iint |f(t) e^{-ity} e^{ixy} \varphi(\delta y)| dt dy = \iint |f(t)| |\varphi(\delta y)| dt dy = \|f\|_1 \cdot \|\varphi(\delta \cdot)\|_1 < +\infty.$$

Dunque otteniamo

$$g_\delta(x) = \int f(t) \overbrace{\left( \int \varphi(\delta y) e^{i(x-t)y} dy \right)}^{\substack{\text{antitrasf. di } \varphi(\delta y) \\ \text{calcolata in } x-t \text{ ovvero } \sigma_\delta \check{\varphi}(x-t)}} dt \\ = \int f(t) \sigma_\delta \check{\varphi}(x-t) dt = f * \sigma_\delta \check{\varphi}(x).$$

- *Passo 3.* Siccome  $f \in L^1$  e  $\check{\varphi} \in L^1$ , per il teorema di approssimazione per convoluzione segue

$$g_\delta(x) = f * \sigma_\delta \check{\varphi}(x) \xrightarrow{\delta \rightarrow 0} m f(x) \quad \text{in } L^1, \quad \text{dove} \quad m = \int \check{\varphi}(y) dy.$$

- *Passo 4.* Usando il primo ed il terzo passo otteniamo  $\mathcal{F}^* \mathcal{F} f = m f$  per quasi ogni  $x$ , in quanto la convergenza puntuale e quella in  $L^1$  devono essere compatibili.
- *Passo 5.* Resta da dimostrare che  $m = 2\pi$ . Prendendo  $\varphi(y) = e^{-|y|}$  segue che

$$\check{\varphi}(x) = \frac{2}{1+x^2}$$

e dunque  $m = 2\pi$ . In realtà vale per ogni  $\varphi$  che verifica le condizioni dell'ipotesi.

□

**Corollario 8.** Date  $f_1, f_2 \in L^1$  tali che  $\widehat{f_1} = \widehat{f_2} \implies f_1 = f_2$  quasi ovunque cioè  $\mathcal{F}$  è iniettiva, cioè  $f$  è univocamente determinata da  $\widehat{f}$ .

**Dimostrazione.** Per ipotesi,  $\widehat{f_1} - \widehat{f_2} = \widehat{f_1 - f_2} = 0$ . Applicando il Teorema 7 a  $\widehat{f_1 - f_2}$  (possiamo farlo perché  $0 \in L^1$ ) otteniamo

$$0 = \int \widehat{f_1 - f_2}(x) e^{ixy} dy = 2\pi(f_1(x) - f_2(x)) \implies f_1(x) = f_2(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

□

**Esercizio.** Date  $f_1, f_2 \in L^1([-\pi, \pi]; \mathbb{C})$  e tali che per ogni  $n \in \mathbb{Z}$  vale  $c_n(f_1) = c_n(f_2)$  allora  $f_1 = f_2$  quasi ovunque (e  $c_n(f) = 0$  per ogni  $n \implies f = 0$  q.o.).

**Osservazione.** Data  $(f_n)$  successione di funzioni in  $L^1$  con  $f_n \rightarrow f$  in  $L^1$ , allora  $\widehat{f_n} \rightarrow \widehat{f}$  uniformemente<sup>1</sup>.

---

<sup>1</sup>Basta applicare la definizione di convergenza uniforme più il teorema di convergenza dominata.



## 7.2 Trasformata di Fourier su $L^2$

Abbiamo visto che la *serie di Fourier* si definisce naturalmente su  $L^2$  (uno spazio di Hilbert) mentre la *trasformata di Fourier* ha bisogno di  $L^1$  che non è uno spazio di Hilbert. Vedremo ora come estendere la trasformata di Fourier ad  $L^2$  e come poter fare i conti.

**Proposizione 1.** Data  $f \in L^1(\mathbb{R}; \mathbb{C}) \cap L^2(\mathbb{R}; \mathbb{C})$  vale  $\|\widehat{f}\|_2 = \sqrt{2\pi} \|f\|_2$ .

**Teorema 2.**  $\mathcal{F}$  si estende per continuità da  $L^1 \cap L^2$  a tutto  $L^2$  e  $\mathcal{F}/\sqrt{2\pi}$  risulta essere un'isometria<sup>1</sup> (come operatore a valori in  $L^2$ ).

**Dimostrazione.** Segue dalla Proposizione 1 e dal seguente lemma di estensione.

**Lemma.** Dati  $X$  e  $Y$  spazi metrici,  $Y$  completo e  $D$  denso in  $X$ ,  $g: D \rightarrow Y$  uniformemente continua allora  $g$  ammette un'unica estensione  $G: X \rightarrow Y$  continua. (Inoltre se  $X$  e  $Y$  sono spazi normati e  $g$  è lineare allora anche  $G$  è lineare).  $\square$

**Corollario 3.** (Identità di Plancherel). Per ogni  $f_1, f_2 \in L^2(\mathbb{R}; \mathbb{C})$  vale  $\langle \widehat{f_1}, \widehat{f_2} \rangle = 2\pi \langle f_1, f_2 \rangle$ .

**Dimostrazione.** Segue dal Teorema 2 e dall'identità di polarizzazione. Infatti,

$$\begin{aligned} \langle \widehat{f_1}, \widehat{f_2} \rangle &\stackrel{\text{identità pol}}{=} \frac{1}{4} \left( \|\widehat{f_1} + \widehat{f_2}\|^2 + \|\widehat{f_1} - \widehat{f_2}\|^2 \right) \\ &\stackrel{\text{Teo 2}}{\rightarrow} = \frac{2\pi}{4} \left( \|f_1 + f_2\|^2 + \|f_1 - f_2\|^2 \right) \\ &= 2\pi \langle f_1, f_2 \rangle. \end{aligned}$$

$\square$

### Dimostrazione Proposizione 1.

*Dimostrazione che non funziona.* Proviamo a svolgere il calcolo diretto:

$$\begin{aligned} \|\widehat{f}\|_2^2 &= \int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{f}(y) \overline{\widehat{f}(y)} dy \\ &= \iiint f(x) e^{-ixy} \overline{f(t) e^{-ity}} dt dx dy \\ \text{Non posso usare Fubini} \rightarrow &= \iint f(x) \overline{f(t)} \underbrace{\left( \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-iy(t-x)} dy \right)}_{\delta(x-t)} dt dx \\ &= \int \left( \int f(x) \delta(x-t) dx \right) \overline{f(t)} dt \\ &= 2\pi \int f(t) \overline{f(t)} dt = 2\pi \|f\|_2^2 \end{aligned}$$

*Dimostrazione formale.* Prendiamo  $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow [0, +\infty]$  tale che

i)  $\varphi$  continua in 0, crescente per  $y < 0$  e decrescente per  $y > 0$  e  $\varphi(0) = 1$ .

ii)  $\varphi \in L^1$  e  $\check{\varphi} \in L^1$ .

---

<sup>1</sup>dunque è uniformemente continua.

- *Passo 1.* Poniamo per ogni  $\delta$

$$I_\delta = \int_{-\infty}^{+\infty} |\widehat{f}(y)|^2 \varphi(\delta y) dy \xrightarrow{\delta \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{+\infty} |f(y)|^2 dy \quad \text{per Beppo Levi.}$$

- *Passo 2.*

$$\begin{aligned} I_\delta &= \int \widehat{f}(y) \overline{\widehat{f}(y)} \varphi(\delta y) dy = \\ &= \int \left( \int f(x) e^{-ixy} dx \right) \left( \int \overline{f(t)} e^{ity} dt \right) \varphi(\delta y) dy = \\ &\stackrel{\text{FT}}{=} \iint f(x) \overline{f(t)} \underbrace{\left( \int \varphi(\delta y) e^{i(t-x)y} dy \right)}_{\sigma_\delta \check{\varphi}(t-x)} dx dt = \\ &= \int (f(x) \sigma_\delta \check{\varphi}(t-x) dx) \overline{f(t)} dt = \\ &= \int f * \sigma_\delta \check{\varphi}(t) \cdot \overline{f(t)} dt = \\ &= \langle f * \sigma_\delta \check{\varphi}; f \rangle \end{aligned}$$

e possiamo applicare il teorema di Fubini-Tonelli in quanto le ipotesi sono verificate, infatti

$$\begin{aligned} &\iiint |f(x) \overline{f(t)}| e^{i(t-x)y} \varphi(\delta y) dx dt dy = \\ &= \iiint |f(x)| \cdot |f(t)| \cdot |\varphi(\delta y)| dx dt dy = \\ &= \|f\|_1^2 \|\varphi(\delta y)\|_1 < +\infty \end{aligned}$$

e  $\|\varphi(\delta y)\|_1 < +\infty$  poiché  $\varphi \in L^1$ .

- *Passo 3.*  $I_\delta \xrightarrow{\delta \rightarrow 0} 2\pi \|f\|_2^2$ . Infatti  $I_\delta = \langle f * \sigma_\delta \check{\varphi}; f \rangle$  e

$$\sigma_\delta \check{\varphi} \xrightarrow{\text{in } L^2} mf \quad \text{con } m = \int \check{\varphi}(x) dx$$

- *Passo 4.* Infine  $m = 2\pi$  ad esempio prendendo  $\varphi(y) = e^{-|y|}$

$$\check{\varphi}(x) = \frac{2}{1+x^2} \in L^1.$$

□

### Calcolo TdF su $L^2 \setminus L^1$ .

Non si può applicare la formula per  $f \in L^1$ . Tuttavia osserviamo che

$$f_n := f \cdot \mathbb{1}_{[-n,n]} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} f \quad \text{in } L^2$$

e  $f_n \in L^1$ . Quindi  $\widehat{f_n}$  si calcola con la solita formula e converge a  $\widehat{f} \in L^2$ . Se esiste il limite puntuale q.o. di

$$\widehat{f_n}(y) = \int_{-n}^n f(x) e^{-ixy} dx$$

allora deve coincidere con  $\widehat{f}$  cioè vale

$$\widehat{f}(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-ixy} dx \quad \text{per q.o. } x$$

con l'integrale inteso come integrale improprio (nel senso di Analisi 1) e non nel senso di Lebesgue.

### 7.2.1 Proprietà della trasformata di Fourier in $L^2$

**Proposizione 4.**

- $\widehat{\tau_h f} = e^{-ihy} \widehat{f}$
- $\widehat{e^{ihx} f} = \tau_h \widehat{f}$
- $\widehat{\sigma_h f} = \widehat{f}(\delta y)$

**Dimostrazione.** Le identità valgono in  $L^1 \cap L^2$  che è denso in  $L^2$  e dunque si estendono per continuità ad  $L^2$ .

**Proposizione 5.** Se  $f \in C^1(\mathbb{R}; \mathbb{C})$  e  $f \in L^1 \cup L^2$  e  $f' \in L^1 \cup L^2 \implies \widehat{f'} = iy \widehat{f}$ .

**Dimostrazione.** La stessa fatta per  $f, f' \in L^1$ . Si parte da  $a_n, b_n$  tali che  $a_n \rightarrow -\infty$  e  $b_n \rightarrow +\infty$  con  $f(a_n) \rightarrow 0$  e  $f(b_n) \rightarrow 0$  e si integra per parti

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(f' \cdot \mathbb{1}_{[a_n, b_n]}) &= \int_{a_n}^{b_n} f'(x) e^{-ixy} dx \\ &= \underbrace{\left[ f(x) e^{-ixy} \right]_{a_n}^{b_n}}_{\rightarrow 0} + iy \int_{a_n}^{b_n} f(x) e^{-iyx} dx = iy \mathcal{F}(f \cdot \mathbb{1}_{[a_n, b_n]}). \end{aligned}$$

Per concludere si dimostra che

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(f' \cdot \mathbb{1}_{[a_n, b_n]}) &\xrightarrow{n \rightarrow \infty} \mathcal{F}(f') \text{ in } L^2 \\ \mathcal{F}(f \cdot \mathbb{1}_{[a_n, b_n]}) &\xrightarrow{n \rightarrow \infty} \mathcal{F}(f) \text{ in } L^2 \end{aligned}$$

Ovvero si dimostra che

$$\begin{aligned} \int_{b_n}^{+\infty} |f(x) e^{-ixy}|^2 dx + \int_{-\infty}^{a_n} |f(x) e^{-ixy}|^2 dx &\xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \\ \int_{b_n}^{+\infty} |f'(x) e^{-ixy}|^2 dx + \int_{-\infty}^{a_n} |f'(x) e^{-ixy}|^2 dx &\xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \end{aligned}$$

Ma questo è vero in quanto  $f, f' \in L^2$ .

**Proposizione 6.** Se  $f \in C^1, f \in L^1, f' \in L^2 \implies \widehat{f} \in L^1$  e soddisfa le ipotesi del teorema di inversione.

**Dimostrazione.** Sappiamo che  $iy\widehat{f} = \widehat{f}' \in L^2 \implies y\widehat{f} \in L^2$ .

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} |\widehat{f}(y)| dy &= \int_{|y| \leq 1} |\widehat{f}(y)| dy + \int_{|y| \geq 1} |\widehat{f}(y)| dy \\ &\leq 2\|\widehat{f}\|_{\infty} + \int_{|y| \geq 1} |\widehat{f}(y)y| \frac{1}{|y|} dy \\ &\leq 2\|f\|_1 + \|\widehat{f}y\|_2 \left( \int_{|y| \geq 1} \frac{1}{|y|^2} dy \right)^{1/2} \\ &\leq 2\|f\|_1 + 2\|f'\|_2 \end{aligned}$$

**Corollario.**  $f \in C_C^1 \implies f, \widehat{f} \in L^1$

**Proposizione 7.** Se  $f_1, f_2 \in L^2(\mathbb{R}; \mathbb{C})$  (e dunque  $f_1 f_2 \in L^1(\mathbb{R}; \mathbb{C})$  per Hölder) allora

$$2\pi \widehat{f_1 f_2} = \widehat{f_1} * \widehat{f_2}$$

**Dimostrazione.** Dimostriamo l'identità per casi.

Per prima cosa osserviamo che  $f_1, f_2 \in L^2 \implies f_1 f_2 \in L^1$  per Hölder.

Caso 1.  $f_1, f_2 \in C_C^1$ . In tal caso

$$f_1, f_2, \widehat{f_1}, \widehat{f_2}, f_1 f_2, \widehat{f_1 f_2} \in L^1$$

quindi

$$\mathcal{F}^* \left( \frac{1}{2\pi} \widehat{f_1} * \widehat{f_2} \right) = \frac{1}{2\pi} \mathcal{F}^*(\mathcal{F}(f_1)) \mathcal{F}^*(\mathcal{F}(f_2)) = 2\pi f_1 f_2 = \mathcal{F}^* \left( \widehat{f_1 f_2} \right)$$

e per l'iniettività di  $\mathcal{F}^*$  segue

$$\frac{1}{2\pi} \widehat{f_1} * \widehat{f_2} = \widehat{f_1 f_2} \quad \text{ovunque.}$$

Caso 2. Prendiamo  $(f_{1,n}), (f_{2,n}) \subset C_C^1$  tali che

$$f_{1,n} \xrightarrow{L^2} f_1 \quad f_{2,n} \xrightarrow{L^2} f_2$$

allora

- $\mathcal{F}(f_{1,n} f_{2,n}) = \frac{1}{2\pi} \widehat{f_{1,n}} * \widehat{f_{2,n}}$
- $f_{1,n} f_{2,n} \xrightarrow{L^1} f_1 f_2 \implies \mathcal{F}(f_{1,n} \cdot f_{2,n}) \xrightarrow{C_0} \widehat{f_1 f_2}$
- $\widehat{f_{1,n}} \xrightarrow{L^2} \widehat{f_1}; \widehat{f_{2,n}} \xrightarrow{L^2} \widehat{f_2} \implies \widehat{f_{1,n}} * \widehat{f_{2,n}} \xrightarrow{L^\infty} \widehat{f_1} * \widehat{f_2}$

Dove abbiamo usato che gli operatori

$$\cdot: L^2 \times L^2 \longrightarrow L^1 \quad *: L^2 \times L^2 \longrightarrow L^\infty$$

sono continui (è da verificare). □

## 7.3 Conclusione sulla TdF

**Proposizione 4.** (di 2 lezioni fa) Se  $f, xf \in L^1(\mathbb{R}; \mathbb{C})$ , allora  $\hat{f} \in C^1(\mathbb{R}; \mathbb{C})$  e  $(\hat{f})' = -ix\hat{f}$ .

**Corollario.** Se  $f, x^k f \in L^1$  con  $k = 1, 2, \dots$ , allora  $x^h f \in L^1$  per ogni  $h = 0, \dots, k$  e  $\hat{f} \in C_0^k$  e  $D^h \hat{f} = \widehat{(-ix)^h f}$ .

**Dimostrazione.** Vale  $|x^h| \leq 1 + |x|^k$  per ogni  $x$  e per ogni  $h = 1, \dots, k$ . Allora  $|x^h f| \leq (1 + |x|^k)|f| \in L^1$ . Il resto dell'enunciato è per induzione su  $k$  usando la Proposizione 4.

**Corollario.** Se  $x^k f \in L^1$  per ogni  $k = 0, 1, \dots$ ,<sup>1</sup> allora  $\hat{f} \in C^\infty$  (anzi  $C_0^\infty$  siccome le derivate sono trasformate).

**Teorema** (Paley-Weiner). Se  $e^{\alpha|x|} \cdot f(x) \in L^1$  per qualche  $\alpha > 0$ , allora  $\hat{f}$  è analitica<sup>2</sup>.

**Dimostrazione.** In  $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \simeq_{\substack{y \\ t}} \mathbb{C}_{z=y+it}$  definisco  $g(z)$ .

Ricordiamo che  $\hat{f}(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-iyx} dx$ . Poniamo

$$g(z) := \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-izx} dx$$

*Passo 1.*  $g(z)$  è definita per ogni  $z \in \mathbb{R} \times [-\alpha, \alpha]$ . Infatti,

$$\left| \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-izx} dx \right| \leq \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|e^{tx} dt \leq \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|e^{\alpha|x|} dx < +\infty$$

*Passo 2.* Mostriamo che  $g(z)$  è olomorfa su  $\mathbb{R} \times (-\alpha, \alpha)$ . Sviluppo  $g$  in serie di potenze in 0.

**Nota.** Questo mi serve per dire che è olomorfa in una palla di raggio  $\alpha$  centrata in 0. Per concludere bisogna traslare il centro la palla per tutta la retta reale e mostrare la stessa cosa.

$$g(z) = \int_{\mathbb{R}} f(x)e^{-izx} dx = \int_{\mathbb{R}} f(x) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-izx)^n}{n!} dx \stackrel{(*)}{=} \sum_{n=0}^{\infty} \left( \int_{\mathbb{R}} \frac{(-ix)^n}{n!} f(x) dx \right) z^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

La serie  $\sum_n a_n z^n$  è convergente per  $|z| \leq \alpha$ , quindi  $g$  è olomorfa su  $B(0, \alpha)$ . Notiamo che in  $(*)$  abbiamo usato Fubini-Tonelli; controlliamo che potevamo applicarlo, dunque verifichiamo quanto segue.

$$\int_{\mathbb{R}} |f(x)| \sum_{n=0}^{\infty} \left| \frac{(-izx)^n}{n!} \right| dx < +\infty$$

Abbiamo

$$\int_{\mathbb{R}} |f(x)| \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|zx|^n}{n!} dx = \int_{\mathbb{R}} |f(x)| e^{|z||x|} dx \stackrel{\text{se } |z| \leq \alpha}{\leq} \int_{\mathbb{R}} |f(x)| e^{\alpha|x|} dx$$

Per concludere si dimostra (allo stesso modo) che  $g$  si sviluppa in serie in ogni punto  $y_0 \in \mathbb{R}$  con raggio di convergenza  $\alpha$ .  $\square$

**Corollario.** Se  $f \in L^1$  e  $f$  ha supporto compatto allora  $\hat{f}$  è analitica, anzi  $\hat{f}$  coincide su  $\mathbb{R}$  con una funzione olomorfa  $g: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ .

**Nota.** Se  $f \in L^1$  e a supporto compatto, si ha  $f(x)e^{\alpha|x|} \in L^1$  per ogni  $\alpha$ .

<sup>1</sup>Questa condizione è implicata, ad esempio, dall'ipotesi  $f \in C_C$

<sup>2</sup>Restrizione di  $g: \underbrace{\mathbb{R} \times (-\alpha, \alpha)}_{\mathbb{R} \times \mathbb{R} \simeq \mathbb{C}} \rightarrow \mathbb{C}$  olomorfa

## 7.4 Applicazioni TdF

Risoluzione equazioni del calore su  $\mathbb{R}$ .

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} (x \in \mathbb{R}) \\ u(0, \cdot) = u_0 \end{cases}$$

**Risoluzione formale.** Denotiamo con  $\widehat{u} := \widehat{u}(t, y)$  la trasformata di Fourier rispetto alla variabile  $x$

$$\widehat{u}_t(t, y) = \int \frac{\partial}{\partial t} u(t, x) e^{-ixy} dx = \frac{\partial}{\partial t} \left( \int u(t, x) e^{-ixy} dx \right) = \widehat{u}_t$$

Inoltre,  $\widehat{u}_t = \widehat{u_{xx}} = (iy)^2 \widehat{u} = -y^2 \widehat{u}$ . Quindi, per ogni  $y$ ,  $\widehat{u}(\cdot, y)$  risolve

$$\begin{cases} \dot{z} = -y^2 z \\ z(0) = \widehat{u_0}(y) \end{cases} \quad (\text{P})$$

Soluzione generale  $z = \alpha e^{-y^2 t}$ , da cui la soluzione per (P) è  $\widehat{u}(t, y) = \widehat{u_0}(y) e^{-y^2 t}$ .

Siano

$$\rho(x) := \frac{e^{-x^2/2}}{\sqrt{2\pi}}, \quad \widehat{\sigma_{\sqrt{2t}} \rho} = \widehat{\rho}(\sqrt{2t}y).$$

Però è noto che<sup>1</sup>  $\widehat{\rho}(y) = e^{-y^2/2} \implies \widehat{\rho}(\sqrt{2t}y) = e^{-(\sqrt{2t}y)^2/2} = e^{-y^2 t}$ . Da cui

$$\widehat{u}(t, y) = \widehat{u_0}(y) e^{-y^2 t} = \widehat{u_0}(y) \cdot \widehat{\sigma_{\sqrt{2t}} \rho}(y) = \mathcal{F}(u_0 * \sigma_{\sqrt{2t}} \rho) \implies u(t, y) = u_0 * (\sigma_{\sqrt{2t}} \rho)$$

Dunque

$$u(t, x) := \begin{cases} u_0(x) & \text{per } t = 0 \\ u_0 * \sigma_{\sqrt{2t}} \rho(x) & \text{per } t > 0 \end{cases} \quad (*)$$

**Teorema.** Se  $u_0: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  è continua e limitata, allora  $u$  data in (\*) è ben definita su  $[0, +\infty) \times \mathbb{R}$ , continua,  $C^\infty$  per  $t > 0$  e risolve (P).

Data  $u: [0, T) \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  soluzione di (P) tale che esiste  $h_0, h_1 \in L^1(\mathbb{R})$  tali che

$$|u(t, x)| \leq h_0(x), \quad |u_t(t, x)| \leq h_1(x)$$

allora  $\widehat{u}(\cdot, y)$  è univocamente determinata su  $[0, T)$ , dunque  $u$  è univocamente determinata per l'iniettività di TdF.

---

<sup>1</sup>Si vede all'esercitazione che segue?

## 7.5 Esercizi

### 7.5.1 Calcolo TdF - prima parte

Ricordiamo la definizione della trasformata di Fourier

$$\mathcal{F}(f) = \widehat{f}(y) = \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-ixy} dx, \quad f \in L^1(\mathbb{R}; \mathbb{C}), \quad f \in L^1(\mathbb{R})$$

dove  $\mathcal{F}: L^1(\mathbb{R}; \mathbb{C}) \rightarrow L^\infty(\mathbb{R}) \cap C_0(\mathbb{R})$ , in quanto  $\|\widehat{f}\|_\infty \leq \|f\|_1$ .

**Proprietà.** Ricordiamo le proprietà viste a lezione.

- i)  $\widehat{\tau_h f}(y) = e^{-iyh} \widehat{f}(y)$  per ogni  $h \in \mathbb{R}$ , dove  $\sigma_h f(x) = f(x - h)$
- ii)  $\widehat{e^{ihx} f}(y) = \tau_h \widehat{f}(y)$
- iii) Legame tra trasformata e derivata.
  - $f \in C^1(\mathbb{R})$ ,  $f, f' \in L^1(\mathbb{R}; \mathbb{C})$ , allora  $\widehat{f}'(y) = iy \widehat{f}(y)$ .
  - $f \in L^1(\mathbb{R}; \mathbb{C})$  e  $xf(x) \in L^1(\mathbb{R}; \mathbb{C})$ ,  $(1 + |x|)f(x) \in L^1(\mathbb{R}; \mathbb{C})$ , allora  $\widehat{f} \in C^1(\mathbb{R})$  e  $(\widehat{f})' = -ix \widehat{f}(x)$ .

**Nota.** Le ipotesi  $f \in L^1(\mathbb{R}; \mathbb{C})$  e  $xf(x) \in L^1(\mathbb{R}; \mathbb{C})$  sono equivalenti a  $(1 + |x|)f(x) \in L^1(\mathbb{R}; \mathbb{C})$ .

- iv) Vale  $\widehat{f * g} = \widehat{f} \cdot \widehat{g}$ .

Riportiamo un esercizio già posto con una soluzione alternativa.

**Esercizio.** Dire se esiste  $v \in L^1$  non banale tale che

- $v * v = v$
- $g * v = g$  per ogni  $g \in L^1$ .

**Soluzione.** La risposta è no per entrambi i punti. Infatti,

- Se per assurdo valesse tale identità, passando alle trasformate si avrebbe

$$\widehat{v * v} = (\widehat{v})^2 \implies \widehat{v}(\widehat{v} - 1) = 0.$$

Ovvero,  $\widehat{v} = \{0, 1\}$ . Osserviamo subito che non è possibile che  $\widehat{v}$  assuma entrambi i valori in quanto funzione continua; d'altra parte non è possibile che  $\widehat{v} = 1$ , in quanto è anche infinitesima, dunque  $\widehat{v} = 0 \implies v = 0$ .

- Analogamente al punto precedente si avrebbe  $\widehat{v} = 1$  ma ciò non è possibile.

**Esercizio 1.** Calcolare la trasformata di Fourier della funzione  $f(x) = e^{-|x|}$ .

**Soluzione.** Abbiamo

$$\begin{aligned}
 \hat{f}(y) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-|x|} e^{-ixy} dx = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-|x|} \cos(xy) dx - i \int_{-\infty}^{\infty} \overbrace{e^{-|x|} \sin(xy)}^{\text{integrale definito di funzione dispari} = 0} dx = 2 \int_0^{\infty} e^{-x} \cos(xy) dx \\
 &= 2 \int_0^{\infty} e^{-x} \operatorname{Re} e^{ixy} dx = 2 \int_0^{\infty} \operatorname{Re} (e^{-x} \cdot e^{ixy}) dx = 2 \operatorname{Re} \left[ \int_0^{\infty} e^{-x} e^{ixy} dx \right] = 2 \operatorname{Re} \left[ \frac{e^{x(iy-1)}}{(iy-1)} \right]_0^{\infty} \\
 &= 2 \operatorname{Re} \left[ -\frac{1}{iy-1} + \underbrace{\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{e^{x(iy-1)}}{iy-1}}_{=0} \right] = 2 \operatorname{Re} \left[ -\frac{1}{iy-1} \right] = 2 \operatorname{Re} \left[ -\frac{1}{iy-1} \cdot \frac{iy+1}{iy+1} \right] \\
 &= 2 \operatorname{Re} \left[ \frac{iy+1}{1+y^2} \right].
 \end{aligned}$$

In conclusione,  $\hat{f}(y) = \frac{2}{1+y^2}$ .

**Esercizio 2.** Calcolare la trasformata di Fourier della funzione  $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ .

**Soluzione.** Calcoliamo  $\hat{f}(y) = \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{-ixy}}{1+x^2} dx$ . Dal fatto che  $f \in L^1$  e usando il teorema di convergenza dominata, possiamo scrivere  $\hat{f}(y)$  come

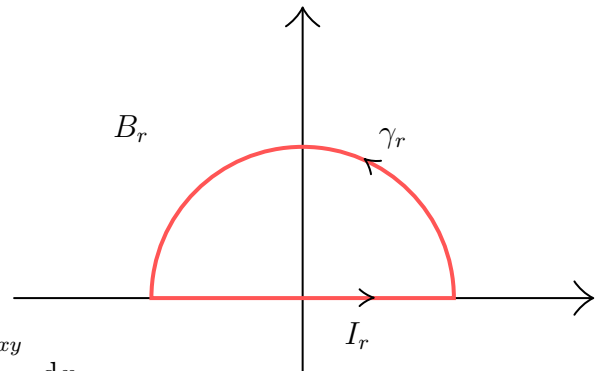
$$\hat{f}(y) = \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{-R}^R \frac{e^{-ixy}}{1+x^2} dx$$

*Idea.* Calcolare questo integrale con il metodo dei residui, ponendo  $\frac{e^{-ixy}}{1+x^2} = \frac{e^{-izy}}{1+z^2} \Big|_{z \text{ reale}}$

Per il teorema dei residui:

$$\int_{B_r} g(z) dz = 2\pi i \sum_{\substack{z_i \text{ singolarit\`a} \\ \text{di } g \text{ in } B_r}} \operatorname{res}(g, z_i)$$

$$\text{Inoltre } \int_{B_r} g(z) dz = \int_{I_r} g(z) dx + \underbrace{\int_{\gamma_r} g(x) dx}_{\xrightarrow{r \rightarrow \infty} 0} = \int_{-r}^r \frac{e^{-ixy}}{1+x^2} dx.$$



- Verifichiamo che  $\int_{\gamma_r} g(x) \xrightarrow{r \rightarrow \infty} 0$  dove  $[0, \pi] \ni \theta \mapsto r e^{i\theta}$ .

Calcoliamo

$$\int_0^\pi g(e^{i\theta} r) r d\theta \implies \int_0^\pi \frac{e^{-iry \cos \theta} e^{r \sin \theta y}}{(1+r^2 e^{i2\theta})} r d\theta \xrightarrow{r \rightarrow \pm\infty} 0 \quad \text{se } y < 0.$$

Per il caso  $y > 0$  si ripercorre lo stesso procedimento ma si utilizza la curva  $[\pi, 2\pi] \ni \theta \mapsto r e^{i\theta}$ .



- Calcoliamo i residui: l'unico residuo di  $g$  è nel punto  $i$  che si tratta di una singolarità semplice (nel caso  $y > 0$  la singolarità è in  $-i$ ).

$$\lim_{r \rightarrow \pm\infty} 2\pi i \operatorname{res}(g, i) = \pi e^y$$

Considerando anche il caso  $y > 0$  la trasformata di Fourier diviene  $\pi e^{-|y|}$ .

### 7.5.2 Calcolo TdF - seconda parte

Abbiamo visto che le trasformate di  $f(x) = e^{-|x|}$  e  $g(x) = 1/(1+x^2)$  sono rispettivamente

$$\widehat{f}(y) = \frac{2}{1+y^2} \quad \widehat{g}(y) = \pi e^{-|y|}$$

Vorremo provare a trovare ora le trasformate funzioni come  $x^2 e^{-|x|}$  o  $x/(1+x^2)$  usando le proprietà delle trasformate con le derivate. Ricordiamo che

$$\begin{aligned} f, f' \in L^1 &\implies \widehat{f'}(y) = iy \widehat{f}(y) \\ f, xf \in L^1 &\implies \widehat{f'}(y) = -ix \widehat{f}(y) \end{aligned}$$

dunque intuitivamente per  $x^2 e^{-|x|}$  possiamo fare

$$x^2 e^{-|x|} = i(-i)x(xe^{-|x|}) \implies \mathcal{F}(i(-i)x(xe^{-|x|})) = i(\mathcal{F}(xe^{-|x|}))'(y)$$

ora dobbiamo calcolare  $\mathcal{F}(xe^{-|x|})(y)$

$$\mathcal{F}(xe^{-|x|})(y) = i\mathcal{F}(-ixe^{-|x|}) = i\mathcal{F}(e^{-|x|})'(y) = i \left( \frac{2}{1+y^2} \right)' = \frac{-4iy}{(1+y^2)^2}$$

dunque in conclusione abbiamo

$$\mathcal{F}(x^2 e^{-|x|})(y) = i \left( \frac{-4iy}{(1+y^2)^2} \right)' = 4 \left( \frac{y}{(1+y^2)^2} \right)'$$

Invece per quanto riguarda

$$g(x) = \frac{x}{1+x^2} \notin L^1$$

però è in  $L^2$  ma per poterne calcolare la trasformata di Fourier dovremmo passare per delle troncate di  $g(x)$  come riportato nell'Osservazione vista a teoria.

**Nota.** Possiamo però vedere chi dovrebbe essere il candidato formale usando le tecniche di prima

$$\frac{x}{1+x^2} = \frac{i(-ix)}{1+x^2} \rightsquigarrow i\mathcal{F}\left((-ix)\frac{1}{1+x^2}\right)(y) = i\mathcal{F}\left(\frac{1}{1+x^2}\right)'(y) = i\pi(e^{-|y|})'(y)$$

però notiamo che la derivata di  $e^{-|y|}$  non è ben definita in 0.

**Esercizio.** Calcolare la trasformata di Fourier di

$$f(x) = \mathbb{1}_{[-r,r]}(x)$$

Iniziamo a svolgere il conto

$$\widehat{f}(y) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathbb{1}_{[-r,r]}(x) e^{-ixy} dx = \int_{-r}^r e^{-ixy} dx = \begin{cases} 2r & y = 0 \\ \int_{-r}^r e^{-ixy} dx & y \neq 0 \end{cases}$$

nel caso  $y \neq 0$  continuiamo a svolgere il conto

$$\int_{-ry}^{ry} \frac{e^{-it}}{y} dt = \frac{1}{y} \int_{-ry}^{ry} [\underbrace{\cos(t) - i \sin(t)}_{\text{dispari}}] dt = \frac{2}{y} \sin(ry)$$

dunque in conclusione abbiamo

$$\mathcal{F}(\mathbb{1}_{[-r,r]}(x)) = \begin{cases} 2r & y = 0 \\ \frac{2}{y} \sin(ry) & y \neq 0 \end{cases}$$

**Esercizio.** Un esercizio simile è calcolare  $\mathcal{F}(\mathbb{1}_{[0,r]}(x))$ , ovvero il caso non centrato e poi provare a calcolare (come integrale improprio di Analisi 1) l'integrale

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt = \lim_{r \rightarrow \infty} \int_0^r \frac{\sin(t)}{t} dt$$

## Trasformata della Gaussiana

Calcoliamo ora la trasformata della funzione gaussiana  $e^{-x^2/2}$ .

- **Metodo I:** Troviamo un'equazione differenziale (lineare) risolta dalla gaussiana, sia  $f(x) = e^{-x^2/2}$  allora vale

$$f'(x) = -xe^{-x^2/2} = -xf(x)$$

e per il decadimento della gaussiana abbiamo che  $f, f' \in L^1$  dunque

$$iy\widehat{f}(y) = \widehat{f'(x)}(y) = -i\mathcal{F}(-xf(x))(y) = i(\widehat{f})'(y)$$

dunque  $\widehat{f} = h(y)$  con  $h$  tale che  $h'(y) = -yh(y) \implies h(y) = ke^{-y^2/2}$ , rimane da trovare  $k$ . Calcoliamo direttamente  $h(0)$

$$\begin{aligned} h(0) &= \widehat{e^{-x^2/2}}(0) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/2} e^{-ix \cdot 0} dx = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/2} dx = \sqrt{2\pi} \\ &\implies \widehat{e^{-x^2/2}} = \sqrt{2\pi} e^{-y^2/2} \end{aligned}$$

- **Metodo II:** Studiamo la funzione di variabile complessa  $g(z) = e^{-z^2/2}$  e integriamola lungo un percorso che passi per  $[-r, r] \times \{0\} \subset \mathbb{R}^2 \approx \mathbb{C}$ .

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(\widehat{e^{-x^2/2}})(y) &= \int_{\mathbb{R}} e^{-x^2/2} \cdot e^{-ixy} dx = \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{1}{2}(x^2+2ixy)} dx \\ &= \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{1}{2}(x^2+2ixy+y^2-y^2)} dx = \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{1}{2}(x^2+2ixy+y^2)} \cdot e^{-y^2/2} dx \\ &= e^{-y^2/2} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{1}{2}(x^2+2ixy+y^2)} dx = e^{-y^2/2} \lim_{r \rightarrow \infty} \int_{-r}^r \underbrace{e^{-\frac{1}{2}(x+iy)^2}}_{g(x+iy)} dx \end{aligned}$$

Consideriamo ora il rettangolo  $D_r := \{z \mid \operatorname{Im} z \in [0, iy] \text{ e } \operatorname{Re} z \in [-r, r]\}$  dunque poiché  $g(z)$  non ha poli su  $D_r$  abbiamo

$$\int_{\partial D_r} g = \sum \operatorname{Res.} \text{ su } D_r = 0$$

$$0 = \int_{-r}^r g(x) dx - \int_{-r}^r g(x + iy) dx + i \int_0^y g(r + ix) dx - i \int_0^y g(-r + i(y - x)) dx.$$

I termini verticali vanno a zero, infatti:

$$\int_0^y e^{-(r+ix)^2/2} dx = e^{-r^2/2} \int_0^y e^{-ixr-x^2/2} dx \leq ye^{-r^2/2} \xrightarrow{r \rightarrow +\infty} 0.$$

L'altro integrale è analogo. In conclusione abbiamo

$$\begin{aligned} \widehat{e^{-x^2/2}}(y) &= \lim_{r \rightarrow +\infty} \int_{-r}^r e^{-y^2/2} e^{-(x+iy)^2/2} dx = e^{-y^2/2} \left[ \lim_{r \rightarrow +\infty} \int_{-r}^r e^{-x^2/2} dx + o(1) \right] = \\ &= e^{-y^2/2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/2} dx = \sqrt{2\pi} e^{-y^2/2} \end{aligned}$$

□

# Capitolo 8

## Integrazione di superfici

### 8.1 Superfici

**Definizione.** Data  $f: \Omega \subset \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^d$  di classe  $C^1$  e dato  $x \in \Omega$ , la mappa lineare da  $\mathbb{R}^k$  a  $\mathbb{R}^d$  associata alla matrice  $\nabla f(x)$  si dice **differenziale di  $f$  in  $x$**  e si indica con  $d_x f$ .

**Nota.** La mappa  $d_x f$  è univocamente determinata da

$$f(x+h) = f(x) + d_x f \cdot h + o(|h|),$$

dove  $d_x f$  è il termine di primo grado dello sviluppo di Taylor di  $f$ .

**Definizione.** Siano  $1 \leq k \leq d$  e  $m \geq 1$ . L'insieme  $\Sigma \subset \mathbb{R}^d$  si definisce **superficie** (senza bordo) di dimensione  $k$  e classe  $C^m$  se per ogni  $x \in \Sigma$  esiste  $U$  intorno aperto<sup>1</sup> di  $x$  ed esiste una mappa  $\phi: D \rightarrow \mathbb{R}^d$  di classe  $C^m$  con  $D$  aperto di  $\mathbb{R}^k$  tale che

- $\phi(D) = \Sigma \cap U$
- $\phi: D \rightarrow \Sigma \cap U$  è un omeomorfismo
- $\nabla \phi(s)$  ha rango massimo ( $= k$ ) per ogni  $s \in D$

Ovvero  $\phi$  è una **parametrizzazione locale** della superficie.

**Osservazione.** Se  $k = d$  abbiamo che  $\Sigma$  è una superficie se e solo se  $\Sigma$  è aperto.

**Proposizione.** Dati  $k, d, m$  come sopra,  $\Sigma \subset \mathbb{R}^d$  e  $x \in \Sigma$  sono fatti equivalenti

- Esistono  $U$  e  $\phi: D \rightarrow \Sigma \cap U$  tale che  $\phi$  è una parametrizzazione regolare.
- Esistono  $U$  intorno di  $x$  e  $g: U \rightarrow \mathbb{R}^{d-k} \in C^m$  tale che
  - $\Sigma \cap U = g^{-1}(0)$
  - $\nabla g$  ha rango massimo, ovvero  $d - k$ .
- Esistono  $U$  intorno di  $x$  e  $h: \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^{d-k}$  di classe  $C^m$  tale che  $\Sigma \cap U = \Gamma_h \cap U$  (dove  $\Gamma_h$  è il grafico di  $h$ ) avendo identificato  $\mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{d-k}$  con  $\mathbb{R}^d$  tramite una scelta di  $k$  coordinate tra le  $d$  di  $\mathbb{R}^d$ .

---

<sup>1</sup>D'ora in avanti gli intorni saranno sempre aperti.

### Esempi.

- $\mathbb{S}^{d-1} = \{x \in \mathbb{R}^d \mid |x| = 1\}$  è una superficie senza bordo di dimensione  $d - 1$  e classe  $C^\infty$  in  $\mathbb{R}^d$
- $\mathbb{D} = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid x_3 = 0 \text{ e } |x| < 1\}$  è una superficie 2-dimensionale in  $\mathbb{R}^3$
- $\overline{\mathbb{D}}$  non lo è! (È una superficie con bordo)

**Definizione.** Data  $\Sigma$  superficie e fissato  $x \in \Sigma$ , lo **spazio tangente** a  $\Sigma$  in  $x$  è  $T_x \Sigma := \text{Im}(\text{d}_x \phi)$  dove  $\phi: D \rightarrow \Sigma \cap U$  è una parametrizzazione regolare e  $x = \phi(s)$  con  $s \in D$ .

**Nota.** Lo spazio tangente è uno spazio vettoriale di stessa dimensione della superficie.

### Proposizione.

- $T_x \Sigma = \{\dot{\gamma}(0) \mid \gamma: [0, \delta) \rightarrow \Sigma \text{ cammino } C^1 \text{ con } \gamma(0) = x\}$
- Data  $g: U \rightarrow \mathbb{R}^{d-k}$  tale che  $\Sigma \cap U = g^{-1}(0)$ ,  $\text{rk}(\nabla g) = d - k$  su  $U$ , allora

$$T_x \Sigma = \ker(\text{d}_x g) = \{\nabla g_1(x), \dots, \nabla g_{d-k}(x)\}^\perp$$

**Definizione.** Data  $\Sigma$  superficie in  $\mathbb{R}^d$  di classe  $C^m$ ,  $f: \Sigma \rightarrow \mathbb{R}^{d'}$ , diciamo che  $f$  è di classe  $C^{m'}$ , con  $m' \leq m$  se per ogni  $x \in \Sigma$  se esistono  $U$  e  $\phi: D \rightarrow \Sigma \cap U$  parametrizzazione regolare, tale che  $f \circ \phi: D \rightarrow \mathbb{R}^{d'}$  è di classe  $C^{m'}$  con  $D$  aperto di  $\mathbb{R}^k$ .

**Proposizione.**  $f \in C^{m'} \iff \exists A$  aperto di  $\mathbb{R}^d$  che contiene  $\Sigma$  e  $F: A \rightarrow \mathbb{R}^{d'}$  estensione di  $f$  di classe  $C^{m'}$ .

**Osservazione.** Se  $\phi: D \rightarrow \Sigma \cap U$  è una parametrizzazione regolare, allora  $\phi^{-1}: \Sigma \cap U \rightarrow D \subset \mathbb{R}^k$  è  $C^m$ . La mappa  $\phi^{-1}$  viene definita **carta**.

**Definizione.** Data  $f: \Sigma \rightarrow \mathbb{R}^{d'}$  di classe (almeno)  $C^1$  e  $x \in \Sigma$ ,

$$\begin{aligned} \text{d}_x f: T_x \Sigma &\longrightarrow \mathbb{R}^{d'} \\ \dot{\gamma}(0) &\longmapsto (f \circ \gamma)'(0) \quad \gamma: [0, \delta) \rightarrow \Sigma, \gamma \in C^1, \gamma(0) = x \end{aligned}$$

**Proposizione.** Data  $F: A \rightarrow \mathbb{R}^{d'}$  estensione  $C^1$  di  $f$ , con  $A \subset \mathbb{R}^d$ , allora

$$\text{d}_x f = \text{d}_x F|_{T_x \Sigma}$$

**Osservazione.** Se  $f: \Sigma \rightarrow \Sigma'$ , dove  $\Sigma \subset \mathbb{R}^d$  e  $\Sigma' \subset \mathbb{R}^{d'}$  allora  $\text{Im}(\text{d}_x f) \subset T_{f(x)} \Sigma'$ . Quindi,  $\text{d}_x f: T_x \Sigma \rightarrow T_{f(x)} \Sigma'$ .

**Nota.** L'osservazione sopra è utile per dimostrare che sottoinsieme  $\Sigma$  di  $\mathbb{R}^d$  non è una superficie. Infatti, data  $f: \mathbb{R}^d \rightarrow \Sigma$  derivabile abbiamo  $\text{Im}(\text{d}_x f) \subset T_{f(x)} \Sigma'$ , dunque se  $\dim(\text{Im}(\text{d}_x f)) > \dim \Sigma = \dim T_{f(x)} \Sigma$  segue che  $\Sigma$  non è può essere una superficie.

## 8.2 Misure su superfici

In questa sezione studiamo la misura di Lebesgue su superfici definite tramite parametrizzazione<sup>1</sup>.

**Definizione.** Dati  $V$  spazio vettoriale  $k$ -dimensionale dotato di prodotto scalare (per esempio  $V$  sottospazi di  $\mathbb{R}^d$ ), la **misura di Lebesgue**  $\sigma_k$  su  $V$  è data dall'identificazione di  $V$  con  $\mathbb{R}^k$  tramite la scelta di una base ortonormale.

**Nota.**  $\sigma_k$  non dipende dalla scelta della base.

**Definizione.** Siano  $V, V'$  spazi vettoriali di dimensione  $k$  dotati di prodotto scalare e  $\Lambda: V \rightarrow V'$  lineare. Poniamo

$$|\det \Lambda| := |\det M|,$$

dove  $M$  è una matrice  $k \times k$  associata a  $\Lambda$  dalla scelta di basi ortonormali su  $V$  e  $V'$ .

**Nota.** Si verifica che la definizione è ben posta, ovvero non dipende dalla scelta delle basi. Inoltre, si verifica che per ogni  $E \subset V$  misurabile si ha  $\sigma_k(\Lambda(E)) = |\det \Lambda| \cdot \sigma_k(E)$  (formula di cambio di variabile negli integrali).

**Definizione.** Sia  $\Lambda: V \rightarrow W$ , con  $V, W$  spazi vettoriali, non necessariamente di stessa dimensione. Poniamo  $V' := \text{Im}(\Lambda)$  e

$$|\det \Lambda| := \begin{cases} 0 & \text{se } \text{rk}(\Lambda) < k \\ \text{come prima} & \text{se } \text{rk}(\Lambda) = k \text{ e } \dim V' = \dim V \end{cases}$$

**Proposizione 1.** Se  $\Lambda: \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^d$  allora

$$|\det \Lambda|^2 = \det(N^t N) \quad (1)$$

dove  $N$  è una matrice  $d \times k$  associata a  $\Lambda$ . E inoltre

$$|\det \Lambda|^2 = \sum_{\substack{Q \text{ minore} \\ k \times k \text{ di } N}} \det(Q)^2 \quad (2)$$

**Osservazione.** Questa proposizione implica che non è necessario trovare una base ortormale dell'immagine di  $\Lambda$  per calcolarne il determinante.

**Dimostrazione.**

- (1) Supponiamo  $\Lambda$  iniettiva (il caso  $\Lambda$  non iniettivo per esercizio), scegliamo una base ortonormale  $e_1, \dots, e_k$  di  $\text{Im}(\Lambda)$  e una matrice  $M$   $k \times k$  associata a  $\Lambda$ . Sia  $B \in \mathbb{R}^{d \times k}$  una matrice avente colonne uguali a  $e_1, \dots, e_k$ . Allora  $N = BM$ . Dunque,

$$\det(N^t N) = \det(M^t \underbrace{B^t B}_{=I} M) = \det(M^t M) = (\det M)^2 =: |\det \Lambda|^2.$$

- (2) La seconda formula richiede la formula di Binet generalizzata.

□

---

<sup>1</sup>Coincide con la definizione di Hausdorff

### 8.3 Superfici $k$ -dimensionali in $\mathbb{R}^d$ di classe $C^1$

**Definizione.** Un insieme  $E \subset \Sigma$  è **misurabile** (secondo Lebesgue) se  $\forall \phi: D \rightarrow \Sigma \cap U$  parametrizzazione regolare e  $D \subset \mathbb{R}^k$ , l'insieme  $\phi^{-1}(E \cap U) \subset \mathbb{R}^k$  è misurabile secondo Lebesgue.

**Notazione.**  $\mathcal{M}(\Sigma) := \{E \subset \Sigma \text{ misurabili}\}$ .

**Proposizione 1.** Esiste un'unica misura  $\sigma_k$  su  $\mathcal{M}(\Sigma)$  tale che per ogni  $E$  misurabile e per ogni  $\phi: D \rightarrow \Sigma \cap U$  parametrizzazione regolare

$$\sigma_k(E \cap U) = \int_{\phi^{-1}(E \cap U)} \overbrace{|\det(\mathrm{d}_s \phi)|}^{J\phi(s)} \mathrm{d}s. \quad (1)$$

**Commenti.**

- $\sigma_k$  misura di volume  $k$ -dimensionale su  $\Sigma$ .
- $\sigma_k$  coincide con la misura di Hausdorff  $\mathcal{H}^k$  ristretta a  $\Sigma$ .
- $J\phi(s) := |\det \mathrm{d}_s \phi| = \sqrt{\det(\nabla^t \phi(s) \nabla \phi(s))} = \sqrt{\sum_Q (\det Q)^2}$  dove  $Q$  sono i minori  $k \times k$  di  $\nabla \phi(s)$ .
- Se  $k = 1$ , vale  $J\phi(s) = \sqrt{\det(\phi'(s))^t \phi'(s)} = |\phi'(s)|$ .

**Dimostrazione.**

*Passo 1:* costruzione di  $\sigma_k$ .

Prendiamo  $\sigma_i: D_i \rightarrow \Sigma \cap U_i$  parametrizzazioni regolari, dove  $\{D_i\}$  è una famiglia numerabile, tale che  $\Sigma \subset \bigcup U_i$ . Prendiamo  $\Sigma_i$  misurabili e disgiunti tali che  $\bigcup \Sigma_i = \Sigma$  e  $\Sigma_i \subset U_i$ .

Per ogni  $E \in \mathcal{M}(\Sigma)$  poniamo

$$\sigma_k(E) = \sum_i \int_{\phi^{-1}(E \cap \Sigma_i)} J\phi_i(s) \mathrm{d}s$$

Evitiamo di verificare che sia una misura  $\sigma$ -addittiva.

Per dimostrare la proposizione si usa il seguente lemma.

**Lemma.** Date  $\phi: D \rightarrow \Sigma \cap U$  e  $\tilde{\phi}: \tilde{D} \rightarrow \Sigma \cap \tilde{U}$  e  $E$  misurabili contenuto in  $U \cap \tilde{U}$ , allora

$$\int_{\phi^{-1}(E)} J\phi(s) \mathrm{d}s = \int_{\tilde{\phi}^{-1}(E)} J\tilde{\phi}(\tilde{s}) \mathrm{d}\tilde{s} \quad (2)$$

**Dimostrazione lemma.** Usiamo il cambio di variabile  $s = \phi^{-1}(\tilde{\phi}(\tilde{s})) =: g(\tilde{s})$ .

$$\begin{aligned} \int_F J\phi(s) \mathrm{d}s &= \int_{g^{-1}(F)=\tilde{F}} J\phi(s) Jg(\tilde{s}) \mathrm{d}\tilde{s} = \int_{\tilde{F}} |\det(\mathrm{d}_s \phi)| \cdot |\det(\mathrm{d}_{\tilde{s}} g)| \mathrm{d}\tilde{s} \\ &= \int_{\tilde{F}} |\det(\mathrm{d}_{\tilde{s}}(\phi \circ g))| \mathrm{d}\tilde{s} = \int_{\tilde{F}} J\tilde{\phi}(\tilde{s}) \mathrm{d}(\tilde{s}) \end{aligned}$$

Da cui la tesi. □

**Corollario 2.** Data  $\phi: D \rightarrow \Sigma \cap U$   $C^1$  parametrizzazione bigettiva (non necessariamente regolare),  $f: \Sigma \cap U \rightarrow \mathbb{R}$  misurabile e integrabile rispetto a  $\sigma_k$ .

$$\int_{\Sigma \cap U} f(x) d\sigma_k(x) = \int_D f(\phi(s)) J\phi(s) ds \quad (3)$$

Se  $\phi: D \rightarrow \Sigma \cap U$  è solo  $C^1$ , come vanno corrette (1) e (3)?

$$\int_{E \cap U} \# \phi^{-1}(x) d\sigma_k(x) = \int_{\phi^{-1}(E \cap U)} J\phi(s) ds \quad (1')$$

e

$$\int_{E \cap U} f(x) \# \phi^{-1}(x) d\sigma_k(x) = \int_D f(\phi(s)) J\phi(s) ds \quad (3')$$

**Nota.** Le formule sopra giustificano il fatto che parametrizzazione non esattamente bigettive possono essere usate lo stesso per il calcolo dei volumi.

**Esempio.** Parametrizzazione di  $\mathbb{S}^d \subset \mathbb{R}^{d+1}$  con coordinate sferiche.

Consideriamo  $\phi_d: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{S}^d$  definita come

$$\phi_d(\alpha_1, \dots, \alpha_d) = (\cos \alpha_1, \sin \alpha_1 \cos \alpha_2, \sin \alpha_1 \sin \alpha_2 \cos \alpha_3, \dots, \sin \alpha_1 \cdots \sin \alpha_{d-1} \cos \alpha_d, \sin \alpha_1 \cdots \sin \alpha_d)$$

Definizione ricorsiva

$$\phi_1(\alpha_1) = (\cos \alpha_1, \sin \alpha_1), \quad \phi_d(\alpha) = (\cos \alpha_1, \sin \alpha_1 \cdot \phi_{d-1}(\alpha_2, \dots, \alpha_d))$$

Dunque

- $\phi_d([0, \pi]^{d-1} \times [0, 2\pi]) = \mathbb{S}^d$  è una parametrizzazione in coordinate sferiche ed è iniettiva.
- $J\phi_d(\alpha) = \sin(\alpha_1)^{d-1} \sin(\alpha_2)^{d-2} \cdots \sin(\alpha_{d-1})^1$

*Nota.* In  $J\phi_d(\alpha)$  non c'è il modulo perché i primi  $d-1$  angoli sono in  $[0, \pi]$  e il seno è positivo in questo intervallo.

**Memo.** Data  $f(s): \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$  il grafico  $\Gamma_f$  di  $f$  è una superficie di dimensione  $d$  parametrizzata da  $\phi: s \mapsto (s, f(s))$  e avente Jacobiano

$$J_\phi(s) = \sqrt{1 + |\nabla f(s)|}.$$

**Proposizione 3.** Sia  $\Sigma$  superficie come al solito. Allora esiste un'unica misura  $\mu$  sui  $\mathcal{M}(\Sigma)$  tale che per ogni  $\varepsilon > 0$  esiste  $\delta > 0$  tale che data  $f: \Sigma \cap U \rightarrow \mathbb{R}^k \in C^1$  che è  $\delta$ -isometria, cioè

$$\frac{1}{1+\delta}|x-x'| \leq |f(x)-f(x')| \leq (1+\delta)|x-x'| \quad \forall x, x' \in \Sigma \cap U \quad (P)$$

Allora

$$\frac{1}{1+\varepsilon}\sigma_k(E) \leq |f(E)| \leq (1+\varepsilon)\sigma_k(E) \quad \forall E \text{ mis } \subset \Sigma \cap U$$

**Corollario 4.** Poiché  $\sigma_k$  e la restrizione di  $\mathcal{H}^k$  a  $\Sigma$  hanno la proprietà (P), coincidono.

**Dimostrazione** (Unicità). Prendiamo  $\mu, \mu'$  che soddisfano (P). Fissiamo  $E, \varepsilon > 0$  e  $\delta$  di conseguenza usando (P). Allora



- Per ogni  $x \in \Sigma$  esiste  $\phi_x: U_x \cap \Sigma \rightarrow \mathbb{R}^k$  tale che  $d_x \phi_x: T_x \Sigma \rightarrow \mathbb{R}^k$  è un'isometria.
- per ogni  $x$  esiste  $V_x \subset U_x$  tale che  $\phi_x: \Sigma \cap V_x \rightarrow \mathbb{R}^k$  è  $\delta$ -isometria.
- Ricopriamo  $\Sigma$  con una successione  $V_i := V_{x_i}$ .
- Scriviamo  $E = \bigsqcup_i E_i$  con  $E_i \subset V_i$ .

Per (P) abbiamo che

$$\begin{aligned} \frac{1}{1+\varepsilon} \mu(E_i) &\leq |f(E_i)| \leq (1+\varepsilon) \mu(E_i) \\ \frac{1}{1+\varepsilon} \tilde{\mu}(E_i) &\leq |f(E_i)| \leq (1+\varepsilon) \tilde{\mu}(E_i) \end{aligned}$$

da cui incrociando le disuguaglianze otteniamo

$$\begin{aligned} \frac{1}{(1+\varepsilon)^2} \mu(E_i) &\leq \tilde{\mu}(E_i) \leq (1+\varepsilon)^2 \mu(E_i) \\ \Rightarrow \frac{1}{(1+\varepsilon)^2} \tilde{\mu}(E_i) &\leq \mu(E_i) \leq (1+\varepsilon)^2 \tilde{\mu}(E_i) \end{aligned}$$

e per arbitrarietà di  $\varepsilon$  ricaviamo  $\mu(E) = \tilde{\mu}(E)$ . Per arbitrarietà di  $E$  otteniamo  $\mu = \tilde{\mu}$ .  $\square$

## 8.4 $k$ -covettori

Dato  $V$  spazio vettoriale su  $\mathbb{R}$  e  $k = 1, 2, \dots$ , l'applicazione  $\alpha: V^k \rightarrow \mathbb{R}$  si dice  **$k$ -covettore o  $k$ -lineare e alternante** se

- è lineare in ogni variabile
- per ogni  $\sigma$  permutazione in  $S_k$ ,  $\alpha(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(k)}) = \text{sgn}(\sigma) \alpha(v_1, \dots, v_k)$  (equivalentemente,  $\alpha$  cambia segno scambiando due variabili).

**Notazione.**  $\Lambda^k(V) := \{\alpha \text{ } k\text{-covettori su } V\}$ . Formalmente  $\Lambda^0(V) := \{0\}$ .

**Osservazione.**

- $\Lambda^k(V)$  è uno spazio vettoriale.
- $\Lambda^1(V) = V^*$  duale di  $V$ .
- $\det$  è  $n$ -lineare alternante nelle colonne (o righe).
- Se  $v_1, \dots, v_k$  sono linearmente dipendenti, allora  $\alpha(v_1, \dots, v_k) = 0$ .
- Se  $k > \dim V$ , allora  $\Lambda^k(V) = \{0\}$ .

**Definizione.** Dati  $V, V'$  spazi vettoriali,  $T: V \rightarrow V'$  lineare,  $\alpha \in \Lambda^k(V')$ , il **pull-back** di  $\alpha$  secondo  $T$  è

$$T^\# \alpha \in \Lambda^k(V) \quad \text{dato da} \quad T^\# \alpha(v_1, \dots, v_k) = \alpha(Tv_1, \dots, Tv_k)$$

Inoltre, dati  $\alpha \in \Lambda^k(V), \beta \in \Lambda^h(V)$  si definisce **prodotto esterno** e si indica con  $\alpha \wedge \beta \in \Lambda^{k+h}(V)$  quanto segue

$$\alpha \wedge \beta(v_1, \dots, v_{k+h}) = \frac{1}{k!h!} \sum_{\sigma \in S_{k+h}} \text{sgn}(\sigma) \alpha(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(k)}) \beta(v_{\sigma(k+1)}, \dots, v_{\sigma(k+h)})$$

## 8.5 Integrazione di $k$ -forme su superfici

**Proposizione 0.** Il prodotto esterno  $\wedge$  è distributivo (rispetto a  $+$ ), associativo e anticommutativo, ovvero  $\alpha \wedge \beta = (-1)^{hk} \beta \wedge \alpha$ .

Data  $e_1, \dots, e_d$  base di  $V$ ,  $e_1^*, \dots, e_d^*$  è una base di  $V^*$ . Denotiamo con  $I(d, k) := \{\underline{i} = (i_1, \dots, i_k) \text{ con } 1 \leq i_1 \leq \dots \leq i_k \leq d\}$  l'insieme di multiindici. Per ogni  $\underline{i} \in I(d, k)$  indichiamo con  $e_{\underline{i}}^* = e_{i_1}^* \wedge \dots \wedge e_{i_k}^* \in \Lambda^k(V)$ . Data una matrice  $d \times k$   $A$ ,  $A_{\underline{i}}$  è il minore di  $A$  dato dalle righe  $i_1, \dots, i_k$ .

**Proposizione 1.**  $e_{\underline{i}}^*(v_1, \dots, v_k) = \det(A_{\underline{i}})$ , dove  $A \in R^{d \times k}$  matrice delle coordinate di  $v_1, \dots, v_k$ , cioè  $A_{ij} = (v_j)_i$ .

**Dimostrazione.** Per induzione su  $k$ .

- $k = 1$ . OK
- *Passo induttivo*  $k - 1 \rightarrow k$ . Scriviamo  $e_{\underline{i}}^* = e_{i_1} \wedge e_{\underline{i}'}$  con  $\underline{i}' = (i_2, \dots, i_k)$ . Usando la definizione di prodotto esterno e l'ipotesi induttiva notiamo che questo è uguale allo sviluppo per la prima riga di  $\det(A_{\underline{i}})$

□

**Proposizione 2.** Posta  $\{e_{\underline{i}} : \underline{i} \in I(d, k)\}$  è una base di  $\Lambda^k(V)$  e in particolare per ogni  $\alpha \in \Lambda^k(V)$

$$\alpha = \sum_{\underline{i} \in I(d, k)} \alpha(e_{\underline{i}}) e_{\underline{i}}^*$$

**Dimostrazione.** Definiamo  $\tilde{\alpha}$  come sopra. Prendiamo  $\underline{i} \in I(d, k)$ , allora

$$\tilde{\alpha}(e_{j_1}, \dots, e_{j_k}) = \sum_{\underline{i}} \alpha(e_{i_1}, \dots, e_{i_k}) \cdot \underbrace{e_{\underline{i}}^*(e_{j_1}, \dots, e_{j_k})}_{=\delta_{ij}} = \alpha(e_{j_1}, \dots, e_{j_k})$$

Si conclude per linearità e alternanza.

**Corollario.** Vale la seguente identità

$$\dim \Lambda^k(V) = \#I(d, k) = \begin{cases} \binom{d}{k} & \text{se } k < d \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

**Proposizione 3** (Formula di Binet generalizzata). Dati  $A, B$  matrici di  $d \times k$  con  $k < d$ , allora

$$\det(B^t A) = \sum_{\underline{i} \in I(d, k)} \det(B_{\underline{i}}) \det(A_{\underline{i}})$$

**Dimostrazione.** Basta definire  $\alpha(v_1, \dots, v_k) = \det(B^t A)$  dove  $A$  è la matrice avente colonne pari a  $v_1, \dots, v_k$ . Bisogna verificare che  $\alpha$  è  $k$ -lineare alternante ([TO DO]), da cui segue che

$$\det(B^t A) = \alpha(v_1, \dots, v_k) \underset{\text{Prop 2}}{=} \sum_{\underline{i}} \underbrace{\alpha(e_{i_1}^*, \dots, e_{i_k}^*)}_{\det(B_{\underline{i}}^t)} \cdot \underbrace{e_{\underline{i}}^*(v_1, \dots, v_k)}_{\det A_{\underline{i}}}$$

□

**Osservazione.** Nel caso in cui  $B = A$ , otteniamo la formula

$$\det(A^t A) = \sum_{\substack{Q \text{ minore} \\ k \times k \text{ di } A}} \det(Q)^2.$$

**Caso particolare**  $V = \mathbb{R}^d$ . Indichiamo con  $e_1, \dots, e_d$  i vettori della base canonica,  $dx_1, \dots, dx_d$  base duale di  $\mathbb{R}^d$ ,  $dx_{\underline{i}} := e_{\underline{i}}^*$  base canonica di  $\Lambda^k(\mathbb{R}^d)$ .

**Esempio.**

$$\begin{aligned} (dx_1 + 2dx_2) \wedge (2dx_1 \wedge dx_3 - dx_2 \wedge dx_4) \\ = 2dx_1 \wedge dx_1 \wedge dx_3 - dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_4 + 4dx_2 \wedge dx_1 \wedge dx_3 - 2dx_2 \wedge dx_2 \wedge dx_4 \\ = -dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_4 - 4dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3. \end{aligned}$$

**Nota.** Nel prodotto esterno si cancellano tutti i termini con indici ripetuti.

**Definizione.** Dato  $\Omega \subset \mathbb{R}^d$  aperto, una  **$k$ -forma**  $\omega$  su  $\Omega$  è una "funzione" da  $\Omega$  in  $\Lambda^k(\mathbb{R}^d)$ . In coordinate,  $\omega(x) = \sum_{\underline{i} \in I(d,k)} w_{\underline{i}}(x) \cdot dx_{\underline{i}}$ .

Il **differenziale esterno** di una  $k$ -forma  $\omega$  su  $\Omega$  di classe  $C^1$  è la  $k+1$ -forma su  $\Omega$  di classe almeno  $C^0$  data da

- $k = 0$ . In tal caso  $f$  è una funzione (0-forma) e  $df(x) = d_x f = \sum \frac{\partial w_{\underline{i}}(x)}{\partial x_j} dx_j \wedge dx_{\underline{i}}$
- $k > 0$   $d\omega := \sum_{\underline{i} \in I(d,k)} d\omega_{\underline{i}}(x) \wedge dx_{\underline{i}} = \sum_{\underline{i} \in I(d,k)} \sum_{j=1}^d \frac{\partial \omega_{\underline{i}}(x)}{\partial x_j} dx_j \wedge dx_{\underline{i}}$ .

**Proposizione** (Leibniz). Valgono le seguenti.

- $d(\omega_1 \wedge \omega_2) = d\omega_1 \wedge \omega_2 + (-1)^{k_1} \omega_1 \wedge d\omega_2$
- $d^2\omega = 0$