Projeto de SNEDO: Modelo de Van der Pol

Amadeus Folego da Silva

Prof. Dr. André Fonseca - CMCC

Resumo

Neste trabalho é apresentado o modelo de Van der Pol e sua contextualização histórica; é feita uma breve análise qualitativa, apresentados resultados de simulações realizadas com os métodos numéricos Runge-Kutta de quarta ordem, Euler melhorado e a interpretação destes; por final são apresentados os códigos dos métodos utilizados.

Sumário

Capítulo 1

Introdução histórica

Ao trabalhar com válvulas pela Philips, o engenheiro elétrico e físico holandês Balthasar Van der Pol notou algumas oscilações que tendiam a um ciclo-limite quando o circuito era induzido em suas proximidades, e propôs um modelo chamado de oscilador de Van der Pol.

O modelo consiste, basicamente, de uma equação diferencial ordinária de segunda ordem, com um parâmetro de amortecimento negativo associado, que pode ser escrita como:

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} + \mu(y^2-1)\frac{dy(t)}{dt} + y(t) \quad = \quad acos(bt)\,;\ \mu, a, b \in \Re$$

Alguns fenômenos têm relação com este modelo: em 1927, van der Mark e van der Pol publicaram um trabalho na Nature relatando a presença de um ruído irregular ao induzir circuitos a certas frequências naturais; ao ser extendido, esse modelo pode ser aplicado nos potenciais de ação de neurônios; em sismologia pode ser utilizado para modelar duas placas de uma falha geológica.

O relato do ruído irregular é tido como uma das primeiras evidências de caos determinístico.

Até hoje, extensões do modelo de Van der Pol são comuns em problemas reais e modelos mais gerais de sistemas dinâmicos tiveram como base sua formulação.

Capítulo 2

Interpretação dos resultados

Breve análise

Voltemos à equação de Van der Pol original e tratemos o caso $\mu > 0$:

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} + \mu(y^2 - 1)\frac{dy(t)}{dt} + y(t) \quad = \quad acos(bt)\,;\, \mu, a, b \in \Re$$

Foi provado por Liénard que, sob estas condições, o oscilador sempre tende a um ciclo-limite, este teorema é chamado de Teorema de Liénard.[1]

Trabalharemos com o oscilador não forçado, isto é, o modelo de Van der Pol com $a = 0$. Reescrevendo a equação de Van der Pol em duas equações diferenciais de primeira ordem, através da inclusão da variável $x(t)$, e incluindo condições iniciais :

$$\begin{cases} y'(t) = x(t) & x(t_0) = x_0 \\ x'(t) = \mu(1 - y^2)x - y & y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

Para efeito de simplicidade, mas sem perder a generalidade vamos assumir, em geral, $x_0 = 0$ e $y_0 = 2$.

As simulações serão realizadas utilizando o script *rungekutta4o2.m*, com passo igual a 2e-3; exceto na última seção.

Na última seção é comparada a convergência do método Runge-Kutta de quarta ordem com o Euler melhorado para o modelo de Van der Pol, tendo como base a simulação do modelo com o método ode45 do Matlab.

Amortecimento positivo

Quando $\mu < 0$ e pequenas quantidades de $y(t)$, o sistema é amortecido, isto é, $y \to 0$ conforme $t \to \infty$.

No entanto, para quantidades de $y(t)$ maiores o sistema explode. Uma simulação para este caso não é apresentada, o sistema evolui tão rápido que facilmente foge da escala.

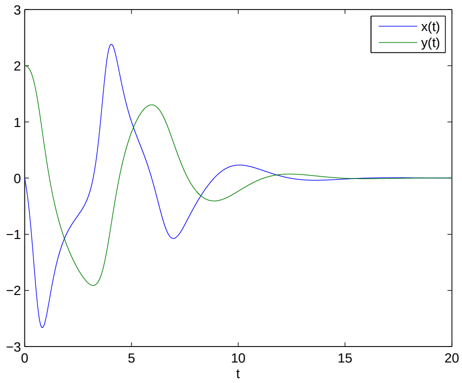

Figura 2.1: Simulação do modelo com $\mu = -1$

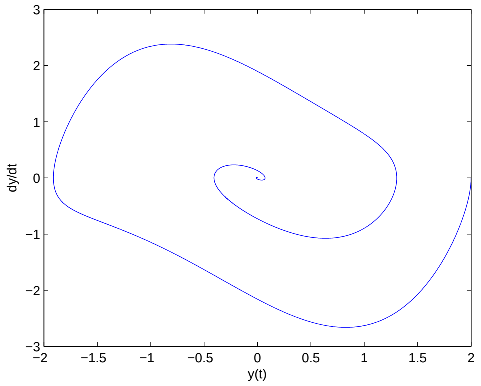

Figura 2.2: Gráfico de fase com $\mu = -1$

Conjectura-se que a bacia de atração será a região circunscrita por um círculo de raio 2. A origem será um sorvedouro e único ponto de equilíbrio.

Baixo amortecimento

Note que, quando $\mu \approx 0$ e positivo, o oscilador se aproxima do oscilador harmônico e o ciclo-limite no gráfico de fase se aproxima de um círculo com raio 2. No entanto, conforme μ aumenta, o ciclo começa a tomar uma forma particular.

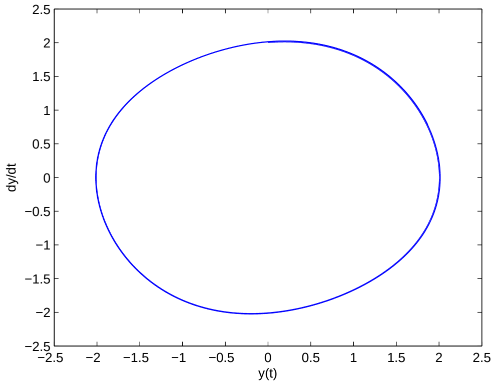

Figura 2.3: Ciclo limite para $\mu = 0.1$

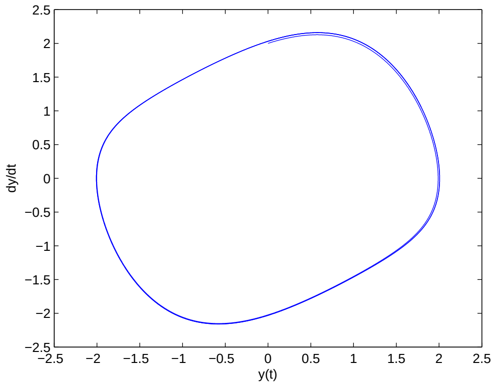

Figura 2.4: Ciclo limite para $\mu = 0.4$

Auto-sustentação

Observe que a equação de Van der Pol é da forma:

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} + p(y)\frac{dy(t)}{dt} + y(t) \quad = \quad 0$$

Onde $p(y)$ é uma função de amortecimento, neste caso temos um amortecimento não-linear com $p(y) = \mu(y^2 - 1)$, $\mu > 0$. Quando $p(y) > 0$, isto é, $|y| > 1$, o sistema é amortecido positivamente, $|y(t)|$ começa a decrescer com o tempo; e quando $p(y) < 0$, isto é, $|y| < 1$, o sistema é amortecido positivamente, $|y(t)|$ começa a crescer com o tempo.

Então temos uma situação onde o sistema tende a se auto-sustentar com o tempo [2]. Ele perde energia quando $|y(t)|$ é grande e 'ganha' energia quando $|y(t)|$ é pequeno, o que o faz tender ao ciclo-limite exceto para o ponto $x_0 = 0$, $y_0 = 0$, que é um ponto de equilíbrio instável.

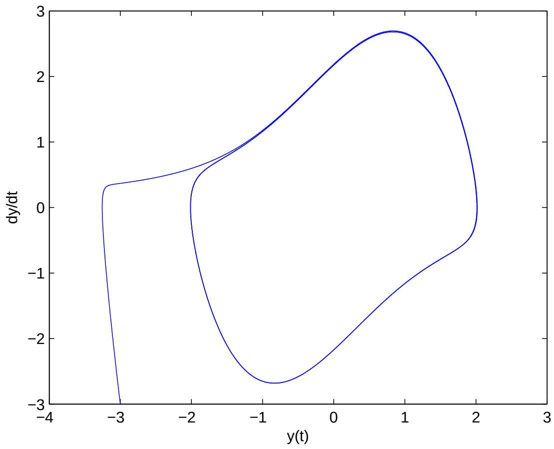

Figura 2.5: Simulação para $\mu = 1$, $(x_0, y_0) = (-3, -3)$

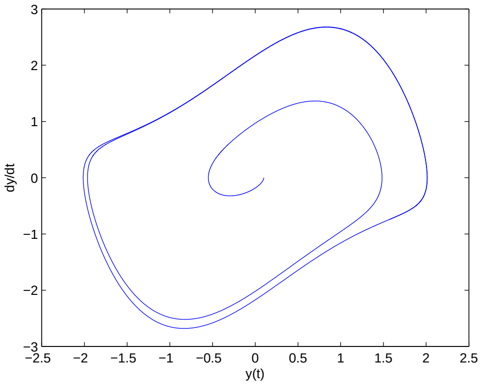

Figura 2.6: Simulação para $\mu = 1$, $y_0 = 0.1$

Convergência do método e confiabilidade dos resultados

Primeiramente vamos comparar o método Runge-Kutta de quarta ordem e Euler melhorado com passo 2e-3, implementados respectivamente nos script's *rungekutta4o2.m* e *eulermelhoradoo2.m*, com o método ode45 do Matlab a fim de que possamos utilizá-lo como base de comparação confiável futuramente.

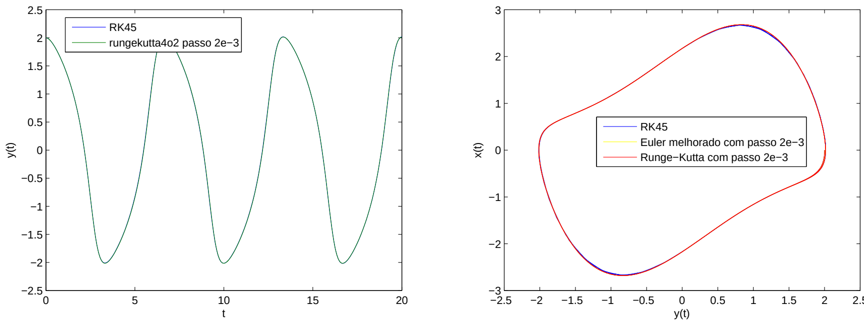

Figura 2.7: Simulação com $\mu = 1$

Nota-se que, a menos de grandes variações de $y(t)$, os métodos convergem bem com passo baixo.

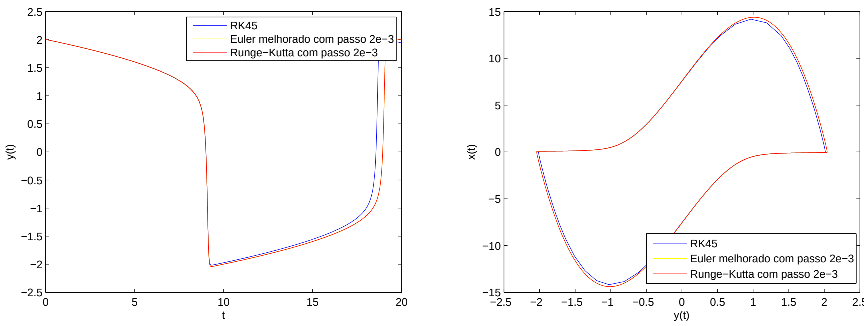

Figura 2.8: Simulação com $\mu = 10$

As curvas dos métodos implementados se confundem nas figuras anteriores. Poderia ter sido utilizado o método de Euler melhorado ao invés do Runge-Kutta.

A variedade de situações simuladas, o baixo custo computacional e o fato do segundo método convergir melhor em variações mais altas motivaram a escolha. Fica bem mais evidente a diferença quando o passo é aumentado em duas ordens de grandeza.

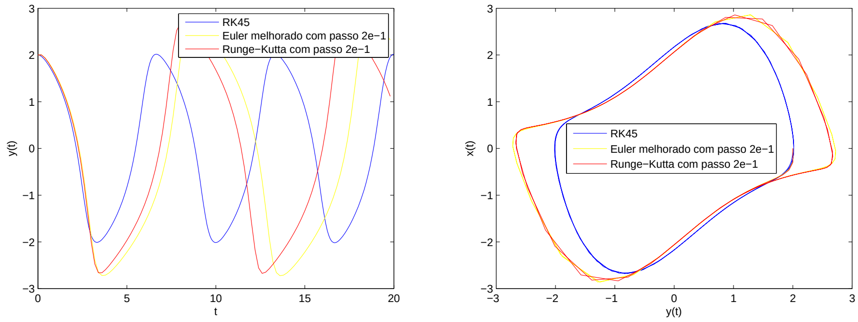

Figura 2.9: Simulação com $\mu = 1$

Finalmente, justifica-se a opção de método utilizado na breve análise pela confiabilidade verificada aqui nesta seção.

Capítulo 3

Código implementado

vanderpol.m

```
function [t,x,y] = vanderpol(mu, n, I, C, metodo)

% Função que simula o modelo de Van der Pol com parâmetro mu, n número de iterações, intervalo na forma [ti tf], condições iniciais na forma [x0 y0], e nome do método a ser utilizado

   S.dy = @(t,x) x ;
   S.dx = @(t,x,y) mu*(1-y^2)*x-y ;
   eval(['[t x y] = ' metodo 'o2plota(S,n,I,C,''Van der Pol para \mu=' num2str(mu) ''')'])
   subplot(2,1,1)
      plot(t,x,'r',t,y,'b')
      legend('x(t)','y(t)')
      xlabel('t')
   subplot(2,1,2)
      plot(x,y)
      xlabel('x(t)')
      ylabel('y(t)')
end
```

rungekutta4o2.m

```
function [t,x,y] = rungekutta4o2(S,n,I,C)

% Entradas: conjunto handle com S.dx(t,x,y) e S.dy(t,x), número de iterações, intervalo no formato [ti tf], conjunto de condições no formato [y0 x0]

    h = (I(2)-I(1))/n ; % calculo passo
    t(1) = I(1); % condições iniciais
    x(1) = C(1);
    y(1) = C(2);
    for i=1:n-1  % faço as iterações
        t(i+1) = t(i) + h ;
        k(1) = S.dy(t(i),x(i)) ; % calculo próximo y
        k(2) = S.dy(t(i)+h/2 ,x(i)+(h/2)*k(1)) ;
        k(3) = S.dy(t(i)+h/2 ,x(i)+(h/2)*k(2)) ;
        k(4) = S.dy(t(i)+h ,x(i)+h*k(3)) ;
        y(i+1) = y(i) + (h/6)*(k*[1 2 2 1]') ;
        k(1) = S.dx(t(i),x(i),y(i)) ; % calculo próximo x
        k(2) = S.dx(t(i)+h/2 ,x(i)+(h/2)*k(1) ,y(i)) ;
        k(3) = S.dx(t(i)+h/2 ,x(i)+(h/2)*k(2) ,y(i)) ;
        k(4) = S.dx(t(i)+h ,x(i)+h*k(3) ,y(i)) ;
        x(i+1) = x(i) + (h/6)*(k*[1 2 2 1]') ;
    end
end
```

eulermelhoradoo2.m

```
function [t,x,y] = eulermelhoradoo2(S,n,I,C)

% Entradas: conjunto handle com S.dx(t,x,y) e S.dy(t,x), número de iterações, intervalo no formato [ti tf], conjunto de condições no formato [y0 x0]

   h = (I(2)-I(1))/n; % calculo passo
   t(1) = I(1); % condições iniciais
   y(1) = C(2);
   x(1) = C(1);
   for i=1:n-1 % faço as iterações
      t(i+1) = t(i) + h ;
      k(1) = S.dy(t(i),x(i)) ; % calculo próximo y
      k(2) = S.dy(t(i)+h/2 ,x(i)+(h/2)*k(1)) ;
      y(i+1) = y(i) + h*k(2) ;
      k(1) = S.dx(t(i),x(i),y(i)) ; % calculo próximo x
      k(2) = S.dx(t(i)+h/2 ,x(i)+(h/2)*k(1),y(i)) ;
      x(i+1) = x(i) + h*k(2) ;
   end
end
```

Referências Bibliográficas

[1] M. W. Hirsch; S. Smale; R. L. Devaney. *Differential Equation, Dynamical Systems & An Introduction to Chaos, Second Edition.* Elsevier Academic Press, 2004.

[2] L. H. A. Monteiro. *Sistemas Dinâmicos, Segunda Edição.* Livraria da Física, 2006.