«Теория вероятностей: Условная вероятность»

Домашнее задание №3

Байдаков Илья

12 марта 2022 г.

Задание 1

В коробке лежат 100 карточек с числами $00, 01, 02, \ldots, 98, 99$. Вася достаёт одну карточку из коробки, считает сумму S_1 и произведение S_2 цифр на ней. Найдите вероятность $P(S_1 = i|S_2 = 0)$, где $i = 0, 1, \ldots, 18$.

Решение.

Запишем, что

$$P(S_2) = \frac{\text{кол-во карточек с 0 в номере}}{100} = \frac{19}{100},$$

а также, имея ввиду карточку 00,

$$P(S_1 = 0 \cap S_2 = 0) = \frac{\text{кол-во карточек с 0 и суммой 0}}{100} = \frac{1}{100}.$$

Имея ввиду карточки 01 и 10 (аналогично для пар карточек $02, 20$ при $S_1 = 2$ т.д.):

$$P(S_1 = 1 \cap S_2 = 0) = \frac{\text{кол-во карточек с 0 и с суммой 1}}{100} = \frac{2}{100}$$

Также заметим, что карточек с нулём в номере и с суммой больше 9 нет в коробке, поэтому для них

$$P(S_1 > 9 \cap S_2 = 0) = 0.$$

Тогда, используя определение условной вероятности:

$$P(S_1 = i|S_2 = 0) = \frac{P(S_1 = i \cap S_2 = 0)}{P(S_2)},$$

получаем **ответ:**
$P(S_1 = i|S_2 = 0) = \frac{1}{19}$ при $i = 0$
$P(S_1 = i|S_2 = 0) = \frac{2}{19}$ при $i = 1, 2, \ldots, 9,$
$P(S_1 = i|S_2 = 0) = 0$ при $i = 10, 11, \ldots, 18.$

Задание 2

Даны две урны. В первой лежат 1 белый и 9 черных шаров, а во второй — 5 белых и 1 черный. Из каждой урны достали по одному шару без возвращения. Оставшиеся в двух урнах шары ссыпали в третью урну. Какова вероятность того, что шар, вытянутый из третьей урны, окажется черным?

Решение.

Заметим, что достать по одному шару из каждой урны можно одним из четырёх способов:

I – из обеих урн по чёрному шару,

II(а) – из первой белый шар, из второй чёрный шар,

II(б) – из первой чёрный шар, из второй белый шар,

III – из обеих урн по белому шару.

При этом II(а) и II(б) равнозначно влияют на вероятность, с которой из третьей урны достанут чёрный шар, и их можно объединить в одно событие II. Тогда события I, II и III создают разбиение пространства Ω.

Найдём вероятности $P(I)$, $P(II)$ и $P(III)$. Учитывая, что события "достать шар определённого цвета из первой урны" и то же "... из второй урны" независимы, а вероятность каждого из них есть отношение шаров определённого цвета к общему кол-ву шаров в урне, находим:

$$P(I) = \frac{9}{10} \cdot \frac{1}{6} = \frac{9}{60}$$

$$P(II) = \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{6} + \frac{9}{10} \cdot \frac{5}{6} = \frac{46}{60}$$

$$P(III) = \frac{1}{10} \cdot \frac{5}{6} = \frac{5}{60}$$

Обозначим событие $A =$ "достать чёрный шар из третьей урны". Учтём, что вероятность достать чёрный шар после событий I, II и III равна отношению чёрных шаров в третьей урне к общему количеству в ней.

Используя формулу полной вероятности, найдём ответ:

$$P(A) = P(A|I) \cdot P(I) + P(A|II) \cdot P(II) + P(A|III) \cdot P(III) =$$

$$= \frac{8}{14} \cdot \frac{9}{60} + \frac{9}{14} \cdot \frac{46}{60} + \frac{10}{14} \cdot \frac{5}{60} \simeq 0.64$$

Ответ. $P \simeq 0.64$.

Задание 3

Три студента пишут контрольную работу из 4-х задач. Первый студент решает любую задачу с вероятностью $\frac{3}{4}$, второй — с вероятностью $\frac{1}{2}$, третий — $\frac{1}{4}$. Преподаватель получил анонимную работу с тремя решенными задачами. Кому скорее всего принадлежит работа? Найдите вероятность, с которой работа принадлежит этому студенту.

Решение.

Обозначим событие A_i = "работа принадлежит i-му студенту" (без информации о решённых задачах), т.е.

$$P(A_1) = P(A_2) = P(A_3) = \frac{1}{3}.$$

Обозначим событие B = "в работе решены три задачи", тогда:

$$P(B|A_1) = (\frac{3}{4})^3 \cdot \frac{1}{4} \simeq 0.105$$

$$P(B|A_2) = (\frac{1}{2})^3 \cdot \frac{1}{2} \simeq 0.063$$

$$P(B|A_3) = (\frac{1}{4})^3 \cdot \frac{3}{4} \simeq 0.012.$$

Значит, работа скорее принадлежит первому студенту, поскольку он с большей вероятностью, чем остальные студенты, решает три задачи из четырёх.

Вероятность, что работа принадлежит ему, есть условная вероятность $P(A_1|B)$ = "работа принадлежит 1-му ст-ту, если решены три задачи". По формуле Байеса:

$$P(A_1|B) = \frac{P(B|A_1)P(A_1)}{P(B)}. \qquad (*)$$

Поскольку A_1, A_2 и A_3 создают разбиение, запишем формулу полной вероятности:

$$P(B) = P(A_1)P(B|A_1) + P(A_2)P(B|A_2) + P(A_3)P(B|A_3) =$$

$$= \frac{1}{3}(0.105 + 0.063 + 0.012) \simeq 0.0599$$

Тогда по формуле (*) находим:

$$P(A_1|B) = \frac{P(B|A_1)P(A_1)}{P(B)} = \frac{0.105 \cdot \frac{1}{3}}{0.0599} \simeq 0.59.$$

Ответ. Скорее всего первому студенту. Вероятность этого $P \simeq 0.59$.

Задание 4

Для оценки числа некоторого редкого вида рыб в озере биологи выловили 5 рыб и пометили их. На следующий день они выловили 2 рыбы. Пусть случайная величина X — число помеченных рыб среди выловленных. При каком количестве N рыб в озере вероятность $P(X = 1)$ максимальна? Найдите распределение случайной величины X при таком N.

Решение.

По определению,

$$P(X = 1) = \frac{\text{"число способов выловить 2 рыбы, в т.ч. 1 помеченую"}}{C_N^2} =$$

$$= \frac{5(N-5)}{\frac{N!}{2!(N-2!)}} = \frac{5(N-5) \cdot 2!(N-2)!}{N!} = \frac{10(N-5)}{N(N-1)}$$

Чтобы найти максимум $P(X = 1)(N)$, исследуем полученное выражение на экстремум:

$$\left(\frac{10(N-5)}{N(N-1)}\right)' = \frac{10N^2 + 100N - 50}{N(N-1)}$$

Приравнивая числитель к нулю и решая квадратное уравнение, получаем, что $N = 5 + 2\sqrt{5} \simeq 9.47$ или $N = 5 - 2\sqrt{5} \simeq 0.52$. Поскольку $N > 5$, подходит первый вариант. Проверяя ближайшие целые числа $N = 9$ и $N = 10$ полученной выше формулой для $P(X = 1)$, находим, что

$$P(X = 1)_{N=9} \quad = \quad P(X = 1)_{N=10} \quad = \quad 0.5(5).$$

Чтобы найти распределение X, будем искать каждую вероятность по определению, отдельно для $N = 9$ и $N = 10$. Например, для $N = 9$ значение $P(X = 2)$ находится так:

$$P(X = 2) = \frac{C_5^2}{C_9^2} = \frac{10}{36} = 0.27(7).$$

Получаем такие распределения:

Для $N = 9$:

X	0	1	2
P	0.16(6)	0.5(5)	0.27(7)

Для $N = 10$:

X	0	1	2
P	0.2(2)	0.5(5)	0.2(2)

Ответ. $N = 9, N = 10$. Распределения приведены в таблицах выше.

Задание 5

Совместное распределение случайных величин задано таблицей.

Y \ X	-1	$\frac{1}{2}$	2
0	0.1	0.2	0.04
1	0.05	0.1	0.2
2	0	0.06	0.25

а) Какова вероятность того, что $X = \frac{1}{2}$, а $Y = 1$?
б) Найдите $P(X = -1)$
в) Найдите $P(Y = 1)$
г) Найдите $P(X^2 + Y = 2)$.

Ответ.
а) $P(X = \frac{1}{2}, Y = 1) = 0.1$ б) $P(X = -1) = 0.15$
в) $P(Y = 1) = 0.35$
г) $P(X^2+Y = 2) = 0.05$, т.к. это возможно только при $X = -1, Y = 1$.

Задание 6

Совместное распределение двух непрерывных случайных величин X и Y задано плотностью $f_{X,Y}(x, y) = \frac{1}{4}e^{-|x|-|y|}$.

Верно ли, что случайные величины X и Y независимы?

Ответ.

Верно, потому что существует разложение $f_{X,Y}(x, y) = f_X(x) \cdot f_Y(y) = \frac{1}{2}e^{-|x|} \cdot \frac{1}{2}e^{-|y|}$, при этом $f_X(x)$ и $f_Y(y)$ удовлетворяют свойствам плотности случайной величины.

Задание 7

Случайная величина X имеет плотность $f_X(x) = \frac{1}{\pi(x^2+1)}$, а Y имеет плотность $f_Y(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$. Какова плотность совместного распределения X и Y , если известно, что они независимы?

Ответ.

Плотность совместного распределения является произведением данных плотностей:

$$f_{X,Y}(x_1, x_2) = \frac{1}{\pi(x_1^2+1)} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x_2^2}{2}}.$$

Задание 8

Функция распределения случайного вектора (X, Y) имеет вид

$$F_{X,Y}(x, y) = \frac{1}{\pi^2}\operatorname{arctg}(x)\cdot\operatorname{arctg}(y) + \frac{1}{2\pi}\operatorname{arctg}(x) + \frac{1}{2\pi}\operatorname{arctg}(y) + \frac{1}{4}$$

Чему равняется вероятность $P(1 < X \le \sqrt{3}, 0 < Y \le 1)$?

Решение.

$$P(1 < X \le \sqrt{3}, 0 < Y \le 1) = F_{X,Y}(\sqrt{3}, 1) - F_{X,Y}(1, 0) =$$

$$\frac{1}{\pi^2}\operatorname{arctg}(\sqrt{3})\cdot\operatorname{arctg}(1) + \frac{1}{2\pi}\operatorname{arctg}(\sqrt{3}) + \frac{1}{2\pi}\operatorname{arctg}(1) + \frac{1}{4} -$$

$$-\frac{1}{\pi^2}\operatorname{arctg}(1)\cdot\operatorname{arctg}(0) - \frac{1}{2\pi}\operatorname{arctg}(1) - \frac{1}{2\pi}\operatorname{arctg}(0) - \frac{1}{4} =$$

$$= \frac{1}{\pi^2}\operatorname{arctg}(\sqrt{3})\cdot\operatorname{arctg}(1) + \frac{1}{2\pi}\operatorname{arctg}(\sqrt{3}) - \frac{1}{\pi^2}\operatorname{arctg}(1)\cdot\operatorname{arctg}(0) - \frac{1}{2\pi}\operatorname{arctg}(0) =$$

$$= \frac{1}{\pi^2}\operatorname{arctg}(1)(\operatorname{arctg}(\sqrt{3}) - \operatorname{arctg}(0)) + \frac{1}{2\pi}(\operatorname{arctg}(\sqrt{3}) - \operatorname{arctg}(0)) =$$

$$= (\operatorname{arctg}(\sqrt{3}) - \operatorname{arctg}(0))(\frac{1}{\pi^2}\operatorname{arctg}(1) + \frac{1}{2\pi}) =$$

$$= (\frac{\pi}{3} - 0)(\frac{1}{\pi^2}\cdot\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2\pi}) = \frac{\pi^2}{12\pi^2} + \frac{\pi}{6\pi} = \frac{1}{12} + \frac{1}{6} = \frac{1}{4}$$

Ответ. $P = \frac{1}{4}$.

Задание 8 - допущена неизвестная ошибка
(проверяющий поставил оценку 8 из 10)