«Линейная алгебра: Обратная матрица. Определитель»

Домашнее задание

Байдаков Илья

30 ноября 2021 г.

Задание 1

Найдите матрицу A^{-1}, где

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

Решение. Воспользуемся методом Жордана—Гаусса:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xmapsto[III-II\cdot 3]{I-II} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & -3 & 1 \end{array}\right) \longmapsto$$

$$\xmapsto{III\cdot\frac{1}{3}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & \frac{1}{3} \end{array}\right)$$

Ответ. $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$

Задание 2

Найдите матрицу X, удовлетворяющую равенству

$$\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}\cdot X\cdot\begin{pmatrix}1&1&1\\1&2&3\\1&4&9\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&4&6\\3&6&9\end{pmatrix}$$

Решение. Известно: если P и Q — квадратные обратимые матрицы, то

$$PXQ=S \qquad \Leftrightarrow \qquad X=P^{-1}SQ^{-1}.$$

Введём обозначения:

$$P=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix},Q=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&2&3\\1&4&9\end{pmatrix},S=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&4&6\\3&6&9\end{pmatrix}$$

Найдём P^{-1}:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}0&0&1&1&0&0\\0&1&0&0&1&0\\1&0&0&0&0&1\end{array}\right)\overset{I\Leftrightarrow III}{\longmapsto}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&0&0&1\\0&1&0&0&1&0\\0&0&1&1&0&0\end{array}\right)\longmapsto P^{-1}=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}.$$

Найдём Q^{-1}:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&1&1&1&0&0\\1&2&3&0&1&0\\1&4&9&0&0&1\end{array}\right)\overset{\substack{II-I\\III-I}}{\longmapsto}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&1&1&1&0&0\\0&1&2&-1&1&0\\0&3&8&-1&0&1\end{array}\right)\longmapsto$$

$$\overset{III-3\cdot II}{\longmapsto}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&1&1&1&0&0\\0&1&2&-1&1&0\\0&0&2&2&-3&1\end{array}\right)\overset{III\cdot\frac{1}{2}}{\longmapsto}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&1&1&1&0&0\\0&1&2&-1&1&0\\0&0&1&1&-\frac{3}{2}&\frac{1}{2}\end{array}\right)\longmapsto$$

$$\overset{II-2\cdot III}{\longmapsto}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&1&1&1&0&0\\0&1&0&-3&4&-1\\0&0&1&1&-\frac{3}{2}&\frac{1}{2}\end{array}\right)\overset{I-II-III}{\longmapsto}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&3&-\frac{5}{2}&\frac{1}{2}\\0&1&0&-3&4&-1\\0&0&1&1&-\frac{3}{2}&\frac{1}{2}\end{array}\right)\longmapsto$$

$$\longmapsto Q^{-1}=\begin{pmatrix}3&-\frac{5}{2}&\frac{1}{2}\\-3&4&-1\\1&-\frac{3}{2}&\frac{1}{2}\end{pmatrix}.$$

Посчитаем X:

$$X = P^{-1}SQ^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & -\frac{5}{2} & \frac{1}{2} \\ -3 & 4 & -1 \\ 1 & -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ответ. $X = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$

Задание 3

Найдите определитель матрицы A

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

Решение. Приведём матрицу к треугольному виду:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & 5 \end{pmatrix} \overset{\substack{III-I\cdot 3 \\ II-I\cdot 5}}{\longmapsto} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -9 & -11 \\ 0 & -4 & -4 \end{pmatrix} \overset{III-II\cdot\frac{4}{9}}{\longmapsto} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -9 & -11 \\ 0 & 0 & \frac{8}{9} \end{pmatrix}$$

Тогда определитель будет равен произведению элементов на главной диагонали:

$$det(A) = 1 \cdot -9 \cdot \frac{8}{9} = -8$$

Ответ. Определитель равен -8.

Задание 4

Используя общее определение для определителя $n \times n$, вычислите следующий определитель:

$$\begin{vmatrix} x & y & 0 & 0 \\ 0 & x & y & 0 \\ 0 & 0 & x & y \\ y & 0 & 0 & x \end{vmatrix}$$

Решение. Посчитаем отдельно все слагаемые S определителя, множители которых не содержат нулевых элементов:

- $$\begin{vmatrix} \color{red}{x} & y & 0 & 0 \\ 0 & \color{red}{x} & y & 0 \\ 0 & 0 & \color{red}{x} & y \\ y & 0 & 0 & \color{red}{x} \end{vmatrix}, \qquad sgn(\sigma) = -1^0 = 1, \qquad S = x^4$$
- $$\begin{vmatrix} x & \color{red}{y} & 0 & 0 \\ 0 & x & \color{red}{y} & 0 \\ 0 & 0 & x & \color{red}{y} \\ \color{red}{y} & 0 & 0 & x \end{vmatrix}, \qquad sgn(\sigma) = -1^3 = -1, \qquad S = -y^4$$

Других вариантов нет, значит,

$$\begin{vmatrix} x & y & 0 & 0 \\ 0 & x & y & 0 \\ 0 & 0 & x & y \\ y & 0 & 0 & x \end{vmatrix} = x^4 - y^4.$$

Ответ. Определитель равен $x^4 - y^4$.

Задание 5

С помощью приведения матрицы к треугольному виду вычислите определитель размера $n \times n$, где $n \geqslant 2$:

$$\begin{vmatrix} 4 & 3 & \dots & 3 & 3 \\ 3 & 4 & \dots & 3 & 3 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 3 & 3 & \dots & 4 & 3 \\ 3 & 3 & \dots & 3 & 4 \end{vmatrix}$$

Дайте ответ в зависимости от n.

Решение. Определитель матрицы треугольного вида равен произведению элементов на главной диагонали матрицы. Проследим, что происходит с этими элементами при преобразовании к нижней треугольной матрице, начиная с нижней строки .

Для $n = 2$:

$$\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \xmapsto{I-II} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \xmapsto{I+II\cdot\frac{1}{4}} \begin{pmatrix} \frac{7}{4} & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

Для $n = 3$:

$$\begin{pmatrix} 4 & 3 & 3 \\ 3 & 4 & 3 \\ 3 & 3 & 4 \end{pmatrix} \xmapsto[(II-III)+III\cdot\frac{1}{4}]{I-II} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ \frac{3}{4} & \frac{7}{4} & 0 \\ 3 & 3 & 4 \end{pmatrix} \xmapsto{I+II\cdot\frac{4}{7}} \begin{pmatrix} \frac{10}{7} & 0 & 0 \\ \frac{3}{4} & \frac{7}{4} & 0 \\ 3 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

Для $n = 4$:

$$\begin{pmatrix} 4 & 3 & 3 & 3 \\ 3 & 4 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 4 & 3 \\ 3 & 3 & 4 & 4 \end{pmatrix} \xmapsto{\substack{I-II \\ II-III \\ (III-IV)+IV\cdot\frac{1}{4}}} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ \frac{3}{4} & \frac{3}{4} & \frac{7}{4} & 0 \\ 3 & 3 & 4 & 4 \end{pmatrix} \longmapsto$$

$$\xmapsto{II+III\cdot\frac{4}{7}} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ \frac{3}{7} & \frac{10}{7} & 0 & 0 \\ \frac{3}{4} & \frac{3}{4} & \frac{7}{4} & 0 \\ 3 & 3 & 4 & 4 \end{pmatrix} \xmapsto{I+II\cdot\frac{7}{10}} \begin{pmatrix} \frac{13}{10} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{3}{7} & \frac{10}{7} & 0 & 0 \\ \frac{3}{4} & \frac{3}{4} & \frac{7}{4} & 0 \\ 3 & 3 & 4 & 4 \end{pmatrix}$$

Сделаем наблюдения:

- Преобразования строк одинаковы для n-й, $(n-1)$-й и т.д. строки для любой матрицы $n \times n$
- Значения элементов на главной диагонали и слева от неё одинаковы для n-й, $(n-1)$-й и т.д. строки для любой матрицы $n \times n$
- Элемент $a_{1,1}$ всегда есть сумма 1 и произведения $a_{2,1} \times \frac{1}{a_{2,2}}$

Учитывая это, утверждаем, что каждый элемент на главной диагонали может быть выражен только через n и значения элементов на n-й строке матрицы. Все эти элементы составляют последовательность чисел S_n для $n \geq 2$:

$$S_n = \frac{7}{4}, \frac{10}{7}, \frac{13}{10}, \frac{16}{13}, \ldots$$

каждый член которой можно выразить через n:

$$S_n = \frac{3n+1}{3n-2}.$$

Тогда определитель матрицы $n \times n$ записывается в виде:

$$det = 4 \cdot \prod_{2}^{n} \frac{3n+1}{3n-2}.$$

Ответ. Определитель равен $4 \cdot \prod_2^n \frac{3n+1}{3n-2}$.

Задание 6

Используя формулы Крамера, решите следующую систему линейных уравнений:

$$\begin{cases} -x_1 + \dfrac{x_2}{2} + 3x_3 = 2 \\ -2x_1 + 3x_2 + 11x_3 = 2 \\ \ \ 4x_1 - 2x_2 - 11x_3 = 2 \end{cases}$$

Решение.

Имеем

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1/2 & 3 \\ -2 & 3 & 11 \\ 4 & -2 & -11 \end{pmatrix}, B_1 = \begin{pmatrix} 2 & 1/2 & 3 \\ 2 & 3 & 11 \\ 2 & -2 & -11 \end{pmatrix},$$

$$B_2 = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ -2 & 2 & 11 \\ 4 & 2 & -11 \end{pmatrix}, B_3 = \begin{pmatrix} -1 & 1/2 & 2 \\ -2 & 3 & 2 \\ 4 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

Отсюда $\det A = -2, \det B_1 = -30, \det B_2 = 52, \det B_3 = -20$.

Далее $x_1 = \frac{-30}{-2} = 15, x_2 = \frac{52}{-2} = -26, x3 = \frac{-20}{-2} = 10$.

Ответ. $x_1 = 15, x_2 = -26, x3 = 10$.

Задание 6

Пусть $A \in M_n(\mathbb{R})$ такова, что $A^m = 0$ для некоторого натурального m. Покажите, что матрица $(E - A)$ обратима (*указание: найдите явный вид обратной матрицы*).

Решение.

Заметим, что при умножении матрицы $(E - A)$ на матрицу вида $(E+A^1+A^2+\ldots+A^{m-1})$ матрица A, входящая в оба множителя,сокращается и произведением является E:

$$(E - A) \cdot (E + A^1 + A^2 + \cdot + A^{m-1}) =$$
$$= E^2 + EA^1 + EA^2 + ... + EA^{m-1} - AE - A^2 - A^3 - ... - A^{m-1} - A^m =$$
$$= E - A^m = E$$

По определению, матрица $A \in M_n(\mathbb{R})$ обратима, если существует $R \in M_n(\mathbb{R})$ такая, что $AR = E$, что и было показано.

Итак, явный вид матрицы обратной матрицы:

$$(E - A)^{-1} = E + \sum_{k=1}^{m-1} A^k.$$