«Дискретная математика: комбинаторика и вероятность»

Домашнее задание

Байдаков Илья

8 ноября 2021 г.

Задание 1

После опроса 250 человек оказалось, что английский знают ровно 210 респондентов, испанский — 100, а оба языка — 80. Сколько из опрошенных не знают ни английского, ни испанского?
Решение. Обозначим различные множества, данные условием задачи:

- Все опрошенные — L, при этом $|L| = 250$
- Знающие английский — E, при этом $|E| = 210$
- Знающие испанский — S, при этом $|S| = 100$

Количество знающих одновременно испанский и английский:

$$|E \cap S| = 80$$

Количество знающих английский и/или испанский:

$$|E \cup S|$$

Количество не знающих английского и испанского, т.е. искомое число:

$$|L \setminus (E \cup S)|$$

Согласно правилу суммы,

$$|E \cup S| = |E| + |S| - |E \cap S| = 210 + 100 - 80 = 230$$

Искомое число вычисляется как разность множеств:

$$|L \setminus (E \cup S)| = 250 - 230 = 20$$

Ответ. 20 опрошенных.

Задание 2

Есть 10 кандидатов на 6 различных вакансий. Каждого кандидата можно взять на любую вакансию. Сколькими способами можно заполнить вакансии? (Каждая вакансия должна быть заполнена ровно одним человеком.)
Решение. В данном случае требуется узнать, сколько способов существует для выбора упорядоченного набора 6 элементов из 10-элементного множества, т.е. число размещений из 10 по 6:

$$A_{10}^{6} = \frac{10!}{(10-6)!} = 151200$$

Ответ. 151200 способами.

Задание 3

Найдите вероятность того, что в случайном шестизначном коде будет хотя бы две одинаковые цифры.
Решение. Количество возможных шестизначных кодов (кардинальность пространства элементарных исходов):

$$|\Omega| = 10^6$$

Пусть A_2 — событие «хотя бы две одинаковые цифры».
Рассмотрим $\neg A_2 =$«все цифры по одному разу». Ему соответствует множество $\Omega \setminus A_2$.
Количество 6-значных кодов, в которых «все цифры по одному разу», при количестве цифр 10, соответствует числу размещений из 10 по 6, т.е. ответу предыдущей задачи:

$$|\Omega \setminus A_2| = 151200$$

По правилу суммы,

$$|A_2| = |\Omega| - |\Omega \setminus A_2| = 10^6 - 151200 = 848800$$

Искомая вероятность, по определению, равна:

$$P(A_2) = |A_2|/|\Omega| = 0,8488$$

Ответ. $P = 0,8488$.

Задание 4

а) Каких натуральных чисел больше среди первого миллиона: тех, в записи которых есть единица или тех, в записи которых её нет?
б) Тот же вопрос для первых 10 миллионов чисел.
Решение. Найдём количество $a^{million}$ чисел среди первого миллиона натуральных чисел, в записи которых есть единица. Первый миллион натуральных чисел записывается как последовательность:

$$0, 1, \dots, 999998, 999999$$

По её виду можно утверждать, что:

$$a^{million} = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6, \qquad (*)$$

где a_x - число x-значных чисел, в записи которых есть единица.
Очевидно, $a_1 = 1$.
Далее,

$$a_2 = 10 + 8 = 18,$$

т.е. 10 цифр от 10 до 19 и 8 цифр в каждом из 8 десятков $(21, 31 \dots 91)$.
Далее,

$$a_3 = 100 + a_1 \cdot 8 + a_2 \cdot 8 = 252,$$

т.е. 100 цифр от 100 до 199, а также 8 цифр $201, 301 \dots 901$, а также 8 раз по a_2. Последнее слагаемое учитывает все трёхзначные числа, в записи которых есть единица, но без нуля во втором разряде (они учтены во втором слагаемом) и без единицы в третьем разряде (они в первом слагаемом). Продолжая далее до a_6 и вынося 8 за скобки, видно, что формулу для a_x можно записать в виде рекуррентной формулы:

$$a_x = \begin{cases} 1 & \text{если } x = 1, \\ \sum\limits_{k=1}^{x-1} a_k \cdot 8 + 10^{x-1} & \text{если } x > 1. \end{cases} \qquad (1)$$

Согласно (*),

$$a^{million} = \sum_{k=1}^{6} a_k = 468559$$

Это меньше половины миллиона, значит, среди первого миллиона натуральных чисел больше тех, в записи которых нет единицы (вопрос ***а***).
Для вопроса ***б***:

$$a^{10-million} = \sum_{k=1}^{7} a_k = 5217031 > 5000000,$$

т.е. ответ противоположный.

Ответ. а — больше без единицы, б — больше с единицей.

Решение через правило произведения ($9^6 > 10^6/2$ и $9^7 < 10^7/2$) пришло в голову уже после оформления вышеприведённого.

Задание 5

Найдите вероятность дубля при броске двух кубиков (дубль означает, что на обоих кубиках выпало одинаковое значение).
Решение. Количество возможных исходов при броске двух кубиков, по правилу произведения:

$$|\Omega| = 6^2.$$

Пусть событие A_2 — выпадение дубля, т.е. $A_2 = \{11, 22, 33, 44, 55, 66\}$.
Вероятность выпадения дубля:

$$P(A_2) = \frac{|A_2|}{|\Omega|} = \frac{1}{6}.$$

Ответ. $P = 1/6$.

Задание 6

Команда принимает участие в турнире, где сыграет *четыре* игры.
Вероятность выиграть в первом матче равна $1/2$. Вероятность выигрыша после победы в предыдущем матче возрастает до $2/3$, а после поражения уменьшается до $1/3$. Какова вероятность
а) выиграть не менее двух игр?
б) выиграть ровно две игры?
Решение. Для ответа на вопрос **(а)** рассмотрим отрицательное событие к событию W_{2+} =«выиграть не менее двух игр», т.е. $\neg W_{2+}$ =«проиграть три или четыре игры»:

$$\neg W_{2+} = \{\textit{ПППВ, ППВП, ПВПП, ВППП, ПППП}\}.$$

Найдём вероятность такого события. Для этого посчитаем вероятность каждого из пяти исходов в $\neg W_{2+}$ и найдём их сумму.

Для каждого из случаев $\{\textit{ПППВ,ВППП}\}$ вероятность будет произведением множителей $1/2, 2/3, 2/3, 1/3$, т.е. $2/27$. Для каждого из случаев $\{\textit{ППВП,ПВПП}\}$ вероятность будет произведением множителей $1/2, 2/3,$

$1/3, 1/3$, т.е. $1/27$. Для случая $\{ПППП\}$ вероятность будет произведением множителей $1/2, 2/3$,$2/3, 2/3$, т.е. $4/27$. Сумма вероятностей этих пяти исходов есть вероятность события:

$$P(\neg W_{2+}) = 2/27 \cdot 2 + 1/27 \cdot 2 + 4/27 = 10/27.$$

Значит, вероятность искомого события W_{2+} — вероятность отрицания к событию $\neg W_{2+}$:

$$P(W_{2+}) = 1 - 10/27 = 17/27.$$

Для ответа на вопрос **(б)** будем использовать аналогичный подход. Рассмотрим отрицательное событие к событию $W_2 =$«выиграть две игры», т.е. $\neg W_2 =$«проиграть все игры, выиграть все игры, проиграть одну игру, выиграть одну игру».

По условию задачи вероятности «выиграть» или «проиграть» численно равны при симметрично равных исходах остальных игр, значит, первые два исхода в $\neg W_2$ имеют одинаковую вероятность, так же, как и два последних. Они уже рассчитаны в пункте **(а)**. Сложим их:

$$P(\neg W_2) = 4/27 \cdot 2 + (1/27 + 2/27) \cdot 2 \cdot 2 = 20/27.$$

Аналогично, вероятность искомого события W_2:

$$P(W_2) = 1 - 20/27 = 7/27.$$

Ответ. а — $17/27$, б — $7/27$.

Задание 7

Монету бросают восемь раз. Найдите вероятности событий:

а) A — "орел выпал 6 раз";

б) B — "орел выпал не менее трех раз".

Решение. Количество возможных исходов эксперимента при броске монеты восемь раз, по правилу произведения:

$$|\Omega| = 2^8.$$

Количество возможных исходов, соответствующих событию «орёл выпал 6 раз» соответствует числу сочетаний из 8 по 2, т.е.

$$|A| = C_8^2 = \frac{8!}{2!(8-2)!} = 28.$$

Вероятность события, по определению:

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{28}{2^8} = \frac{7}{64}.$$

Для ответа на вопрос **(б)** рассмотрим событие, отрицательное к событию $B =$«орёл выпал не менее трёх раз», т.е. $\neg B =$«орёл выпал один или два раза».

Для «орёл выпал два раза» количество возможных исходов численно равно рассчитанному в пункте **(а)**, т.е. 28.

Для «орёл выпал один раз» количество возможных исходов рассчитывается аналогично как число сочетаний из 8 по 1 и равно 8.

Сразу рассчитаем вероятность отрицания к событию $\neg B =$«орёл выпал один или два раза», суммируя количество возможных исходов:

$$P(B) = 1 - \frac{28 + 8}{2^8} = \frac{55}{64}.$$

Ответ. $P(A) = 7/64$, $P(B) = 55/64$.

7(б) - ошибка, учтены не все случаи