Домашнее задание 4

07.12.2021

1. Найдите размерность и предъявите базис следующего подпространства в $\mathbb{R}^5$, заданного множеством решений следующей однородной системы линейных уравнений:

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 - 2x_4 + 4x_5 = 0 \\ 4x_1 - 2x_2 + 5x_3 + x_4 + 7x_5 = 0 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 + 8x_4 + 2x_5 = 0 \end{cases}$$

2. Пусть $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ — линейное отображение, причём

$$\varphi \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \ \varphi \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ 9 \end{pmatrix}.$$

Найдите $\varphi \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \end{pmatrix}$.

3. Пусть $V = \mathbb{R}[x]_{\leqslant 2}$ – пространство многочленов степени не более 2. Линейный оператор $\varphi\colon V \to V$ в базисе $e = \{1, x, x^2\}$ задаётся матрицей

$$A = A(\varphi, e) = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 2 \\ -1 & 2 & 4 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

а) Найдите $\varphi(x^2)$ и $\varphi(-2x^2 - 4x - 1)$.

б) Существует ли прообраз у многочлена $7x^2 + 2x - 5$? Иными словами, существует ли многочлен $g(x) \in V$ такой, что

$$\varphi(g) = 7x^2 + 2x - 5?$$

4. В пространстве $\mathbb{R}^3$ заданы следующие векторы:

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \ v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \ v_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \ u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \ u_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \ u_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Найдите матрицу A линейного оператора $\varphi\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, заданного по правилу $x \mapsto Ax$, такого, что $Av_i = u_i$ при $i = 1, 2, 3$.

5. В пространстве $\mathbb{R}^3$ заданы следующие векторы:

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 5 \\ 8 \\ 2 \end{pmatrix}, v_4 = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, v_5 = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Существует ли линейное отображение $\varphi\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ такое, что $\varphi(v_i) = u_i$ при $i = 1, 2, 3, 4, 5$, где

$$u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, u_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, u_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}, u_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, u_5 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}?$$

6. Найти собственные значения и собственные векторы следующих матриц:

$$\text{а) } \begin{pmatrix} 2 & 8 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad \text{б) } \begin{pmatrix} 4 & -5 & 2 \\ 5 & -7 & 3 \\ 6 & -9 & 4 \end{pmatrix}.$$

Укажите базис собственных подпространств V_λ для каждого собственного значения λ.