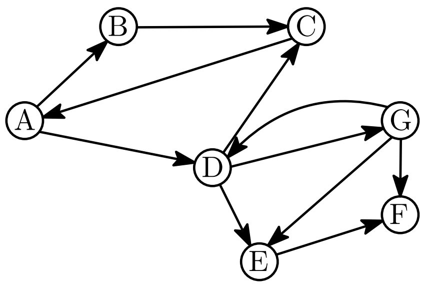
«Дискретная математика: комбинаторика и вероятность»

Домашнее задание

Байдаков Илья

11 ноября 2021 г.

Задание 1



Граф G изображен на рисунке выше.
а) Найдите максимальную длину простого цикла в графе G. Укажите все различные простые циклы максимальной длины. (Достаточно предъявить ответ)
б) Найдите компоненты сильной связности графа G. (Достаточно предъявить ответ)
в) Какое минимальное число рёбер необходимо добавить в граф G, чтобы он стал сильно связным? (Необходимо обоснование ответа)

Решение.
а) Максимальная длина простого цикла в графе G равна трём. Это циклы $ADCA$ и $ABCA$.
б) Компоненты сильной связности: ABC, $ADGC$, E, F.
в) Одно ребро достаточно добавить.
Обоснование. Рассмотрим ребро FA. Оно соединяет компоненты сильной связности F и $ADGC$, F и ABC. Из $ADGC$ достижима E, а из неё F. Значит, все ранее описанные компоненты сильной связности попарно достижимы и новый граф будет связным.

Задание 2

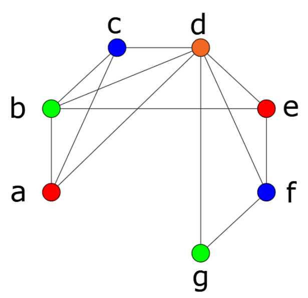
В некоторой компании 7 рабочих групп a, b, c, d, e, f и g. В пятницу необходимо провести собрания в каждой рабочей группе по отдельности, причем каждое собрание можно планировать в один из 4 временных слотов:
9:00 - 10:45, 11:00 - 12:45, 13:15 - 15:00 и 15:15 - 17:00.
Кроме того, некоторые сотрудники участвуют сразу в нескольких группах:

- есть те, кто одновременно состоят в a, b, c и d;
- несколько сотрудников состоят в g, f и d одновременно;
- часть состоит в группах b, d и e одновременно;
- и еще один человек работает в e и f.

Собрания в разных группах можно проводить в одно и то же время, если нет сотрудников, которые в этот момент должны быть сразу на нескольких разных собраниях.

Получится ли провести все собрания в пятницу? Какое минимальное количество временных слотов необходимо?

Решение. Задача представима в виде графа с вершинами — группами сотрудников, а рёбра проведены между теми группами сотрудников, которые нельзя приглашать на собрание в одно и то же время. Раскраска графа в минимальное количество цветов позволяет узнать минимальное количество временных слотов.



Слот 1 — a, e
Слот 2 — b, g
Слот 3 — c, f
Слот 4 — d

Минимальное количество цветов для раскраски равно четырём, т. к. граф содержит полный граф K_4, который можно раскрасить минимум 4 цветами. В терминах задачи наличие K_4 означает, что провести собрания с сотрудниками из групп a, b, c, d можно только в четыре разных временных слота.
Ответ. Получится. Необходимо минимум 4 временных слота.

Задание 3

Напомним, что граф называется двудольным, если его можно правильно раскрасить в два цвета.
а) Какое наибольшее число ребер может быть в простом двудольном графе на k белых и m чёрных вершинах? (В нем не должно быть ребер, соединяющих вершины одинакового цвета.)
б) Какое наибольшее количество рёбер может быть в двудольном графе на $2n$ вершинах?

Решение.
а) Наибольшее количество рёбер определяется формулой:

$$\max(|E|) = k \times m = m \times k,$$

поскольку в таком графе каждая из k вершин белого цвета имеет m рёбер, соединяющихся с m вершинами чёрного цвета, и наоборот.

б) Допустим, наш двудольный граф состоит из чёрных и белых вершин и число чёрных вершин x. Тогда белых вершин $2n - x$. Согласно **(а)**, максимальное число рёбер в таком графе представляется функцией от x

$$max(|E|) = f(x) = (2n - x)x = 2nx - x^2.$$

Это парабола «рогами вниз», которая имеет максимум в точке, являющейся решением уравнения

$$f'(x) = 2n - 2x = 0,$$

т. е. $x_{max(|E|)} = n$. Подставляя это значение в $f(x)$, получаем ответ:

$$max(|E|) = (2n - n)n = n^2.$$

Ответ. (а) — наибольшее количество рёбер равно $m \times k$. **(б)** — наибольшее количество рёбер равно n^2.

Задание 4

Рассмотрим алфавит, состоящий только из двух букв a и b. Все возможные слова, которые можно получить в этом алфавите, назовем языком.
а) Докажите, что в этом языке можно составить слово, в котором любая трехбуквенная комбинация этих двух букв (aaa, aab, $\dots$, bba, bbb) встречается ровно один раз.
б) Существует ли слово, которое удовлетворяет условию предыдущего пункта и начинается на $abba$? Если существует, то укажите его. Если не существует, то объясните, почему это невозможно.

Решение.
а) Доказательство. Данная задача представима в виде графа, в котором вершины — уникальные трёхбуквенные комбинации. Тогда условие **(а)** соответствует наличию в этом графе гамильтонова пути, в котором при переходе от каждой вершины u к последующей вершине v сохраняется условие: последние две буквы в трёхбуквенной комбинации u совпадают с первыми двумя буквами v. Такой путь и соответствующее ему слово можно составить, например, таким образом:

$$(aaa, aab, abb, bbb, bba, bab, aba, baa) \to aaabbbabaa,$$

что доказывает возможность составления такого слова.
б) Не существует.
Объяснение. Докажем от противного. Допустим, такое слово существует. Тогда в последующих буквах этого слова должна встретиться комбинация bbb. Перед этой комбинацией может быть буква a или b:

- если a, то комбинация abb встретится как минимум второй раз;
- если b, то комбинация bbb будет встречаться как минимум дважды.

Это противоречит условию в **(а)**, поэтому такого слова не существует.