

Домашнее задание 3

30.11.2021

1. Используя формулы разложения определителя по строке/столбцу, вычислите следующий определитель:

$$\det \begin{pmatrix} a_0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ a_1 & t & -1 & 0 & 0 \\ a_2 & 0 & t & -1 & 0 \\ a_3 & 0 & 0 & t & -1 \\ a_4 & 0 & 0 & 0 & t \end{pmatrix}$$

Запишите ответ в виде многочлена от t .

2. а) Пусть $V = M_2(\mathbb{R})$, $U = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mid a + d = 0 \right\}$. Покажите, что U – подпространство V . Иными словами, нужно показать, что множество 2×2 матриц с нулевым следом является подпространством пространства всех вещественных 2×2 матриц (*следом* матрицы называется сумма элементов главной диагонали матрицы). Найдите размерность U и предъявите некоторый базис U .

б) В выбранном базисе найдите координаты матрицы $\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ (то есть укажите, как эта матрица выражается через базисные).

3. Найдите все значения $\lambda \in \mathbb{R}$, при которых вектор v линейно выражается через векторы a_1, a_2, a_3 , где

$$a_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}, a_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ 8 \end{pmatrix}, a_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -6 \\ 1 \end{pmatrix}, v = \begin{pmatrix} 7 \\ -2 \\ \lambda \end{pmatrix}.$$

4. Найдите какой-нибудь базис системы векторов и выразите через него все остальные векторы системы:

$$a_1 = (2, -1, 3, 5), a_2 = (4, -3, 1, 3), a_3 = (3, -2, 3, 4), a_4 = (4, -1, 15, 17), a_5 = (7, -6, -7, 0).$$

5. Для каждого значения $\lambda \in \mathbb{R}$ найдите ранг матрицы

$$\begin{pmatrix} -\lambda & 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & -\lambda & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & -\lambda & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & -\lambda & 1 \end{pmatrix}.$$

6. Известно, что присоединенная к A матрица (то есть транспонированная матрица алгебраических дополнений) равна

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 3 & -4 & 3 \\ -9 & 10 & -7 \end{pmatrix}.$$

Чему может равняться матрица A ? (указание: присоединенная матрица имеет отношение к явной формуле для обратной матрицы – подумайте, как ее можно применить здесь)