«Линейная алгебра: метод Гаусса и матрицы»

Домашнее задание

Байдаков Илья

21 ноября 2021 г.

Задание 1

Решите систему линейных уравнений:

$$\begin{cases} 6x + 12y + 5z + t = -6 \\ 9x + 18y + 17z - 8t = -9 \\ 5x + 10y + 4z + t = -5 \end{cases}$$

Решение. Запишем расширенную матрицу системы:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 6 & 12 & 5 & 1 & -6 \\ 9 & 18 & 17 & -8 & -9 \\ 5 & 10 & 4 & 1 & -5 \end{array}\right) \overset{I-III}{\longmapsto} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 & -1 \\ 9 & 18 & 17 & -8 & -9 \\ 5 & 10 & 4 & 1 & -5 \end{array}\right) \longmapsto$$

$$\overset{\substack{III-5I \\ II-9\cdot I}}{\longmapsto} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 8 & -8 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right) \overset{II+8\cdot III}{\longmapsto} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right).$$

Имеем x и z главными неизвестными, а y и t — свободными. Полученная матрица соответствует системе уравнений:

$$\begin{cases} x + 2y + z = -1 \\ z = t \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x = -2y - t - 1 \\ z = t \end{cases}.$$

Ответ. $x = -2y - t - 1$, $z = t$, где $y, t \in \mathbb{R}$.

Задание 2

Система линейных уравнений называется *совместной*, если она имеет хотя бы одно решение (в вещественных числах). Определите, при каких значениях параметра $\lambda \in \mathbb{R}$ следующая система является совместной, а при каких — нет (*явное решение системы предъявлять не обязательно*):

$$\begin{cases} 8x_1 + 6x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 5 \\ -12x_1 - 3x_2 - 3x_3 + 3x_4 = -6 \\ 4x_1 + 5x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 3 \\ \lambda x_1 + 4x_2 + x_3 + 4x_4 = 2 \end{cases}$$

Решение. Запишем расширенную матрицу системы:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 8 & 6 & 3 & 2 & 5 \\ -12 & -3 & -3 & 3 & -6 \\ 4 & 5 & 2 & 3 & 3 \\ \lambda & 4 & 1 & 4 & 2 \end{array}\right) \xmapsto{I-2\cdot III} \left(\begin{array}{cccc|c} 0 & -4 & -1 & -4 & -1 \\ -12 & -3 & -3 & 3 & -6 \\ 4 & 5 & 2 & 3 & 3 \\ \lambda & 4 & 1 & 4 & 2 \end{array}\right) \longmapsto$$

$$\xmapsto{I+IV} \left(\begin{array}{cccc|c} \lambda & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 12 & 3 & 12 & 15 \\ 4 & 5 & 2 & 3 & 3 \\ \lambda & 4 & 1 & 4 & 2 \end{array}\right).$$

Таким образом, из полученной матрицы следует, что

$$\lambda = 1.$$

Дальнейшими преобразованиями с учётом $\lambda = 1$ система может быть приведена к ступенчатому виду. Значит $\lambda = 1$ является условием совместности системы.

Ответ. Система совместна при $\lambda = 1$ и несовместна при $\lambda \neq 1$.

Задание 3

Найдите многочлен $f(x)$ третьей степени, для которого

$$f(1) = 1,\ f(-1) = 13,\ f(2) = 7,\ f(-3) = 17.$$

Решение. Общий вид искомого многочлена $f(x)$:

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = m.$$

Подставляя x в этот многочлен, составим систему из четырёх линейных уравнений, в которых a, b, c, d — неизвестные. Запишем и преобразуем расширенную матрицу такой системы:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 & 13 \\ 8 & 4 & 2 & 1 & 7 \\ -27 & 9 & -3 & 1 & 17 \end{array}\right) \xmapsto[III-8\cdot I]{II+I} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 2 & 14 \\ 0 & -4 & -6 & -7 & -1 \\ -27 & 9 & -3 & 1 & 17 \end{array}\right) \longmapsto$$

$$\xmapsto[III+2\cdot II]{I-II\cdot\frac{1}{2}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 & 13 \\ 0 & 0 & -6 & -3 & 27 \\ -27 & 9 & -3 & 1 & 17 \end{array}\right) \xmapsto[III\cdot\frac{1}{3}]{VI+27\cdot I} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & -6 \\ 0 & 2 & 0 & 2 & 14 \\ 0 & 0 & -2 & -1 & 9 \\ 0 & 9 & 24 & 1 & -145 \end{array}\right) \longmapsto$$

$$\xmapsto{IV-\frac{II\cdot\frac{9}{2}}{8}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 2 & 14 \\ 0 & 0 & -2 & -1 & 9 \\ 0 & 0 & 24 & -8 & -208 \end{array}\right) \xmapsto{\frac{VI+12\cdot III}{-20}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & -6 \\ 0 & 2 & 0 & 2 & 14 \\ 0 & 0 & -2 & -1 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 5 \end{array}\right) \longmapsto$$

$$\xmapsto{II\cdot\frac{1}{2}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & -6 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & -2 & -1 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 5 \end{array}\right) \xmapsto[II-IV]{\frac{III+IV}{-\frac{1}{2}}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & -6 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 5 \end{array}\right) \longmapsto$$

$$\xmapsto{I-III} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 5 \end{array}\right).$$

Из преобразованной матрицы следует решение системы уравнений:

$$\begin{cases} a = 1 \\ b = 2 \\ c = -7 \\ d = 5. \end{cases}$$

Значит, искомый многочлен имеет вид

$$f(x) = x^3 + 2x^2 - 7x + 5.$$

Ответ. $f(x) = x^3 + 2x^2 - 7x + 5$.

Задание 4

Вычислите:

$$(A^TB^T + B^TA)^T - ((2BA)^T - E^3)^2 - A^TB - BA,$$

где

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 0 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Решение.
Преобразуем выражение:

$$\begin{aligned}
&(A^TB^T + B^TA)^T - ((2BA)^T - E^3)^2 - A^TB - BA \Leftrightarrow \\
&((BA)^T + B^TA)^T - ((2BA)^T - E^3)^2 - A^TB - BA \Leftrightarrow \\
&((BA)^T)^T + (B^TA)^T - ((2BA)^T - E^3)^2 - A^TB - BA \Leftrightarrow \\
&BA + A^T(B^T)^T - ((2BA)^T - E^3)^2 - A^TB - BA \Leftrightarrow \\
&BA + A^TB - ((2BA)^T - E^3)^2 - A^TB - BA \Leftrightarrow \\
&-(2(BA)^T - E^3)^2
\end{aligned}$$

Теперь вычислим:

$$BA = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Далее,

$$(BA)^T = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}, 2(BA)^T = \begin{pmatrix} 6 & -2 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}$$

С лекции известно, что:

$$E^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$(2BA)^T - E^3 = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 0 & 7 \end{pmatrix},$$

$$((2BA)^T - E^3)^2 = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 0 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 0 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 25 & -24 \\ 0 & 49 \end{pmatrix}.$$

Окончательно:

$$-((2BA)^T - E^3)^2 = \begin{pmatrix} -25 & 24 \\ 0 & -49 \end{pmatrix}.$$

Ответ. $\begin{pmatrix} -25 & 24 \\ 0 & -49 \end{pmatrix}$.

Задание 5

Найдите все матрицы, коммутирующие с матрицей $\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$.

Решение.

Запишем элементы искомой матрицы в виде переменных. Она должна быть той же размерности, что и данная. Тогда верно, что матрица:

$$\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a+3c & -b+3d \\ 2a+5c & 2b+5d \end{pmatrix}$$

совпадает с матрицей

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a+2b & 3a+5b \\ -c+2d & 3c+5d \end{pmatrix},$$

т.е.

$$\begin{pmatrix} -a+3c & -b+3d \\ 2a+5c & 2b+5d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a+2b & 3a+5b \\ -c+2d & 3c+5d \end{pmatrix}.$$

Приравняем соответствующие элементы матриц и получим систему уравнений:

$$\begin{cases} -a+3c = -a+2b \\ -b+3d = 6a+5b \\ 2a+5c = -c+2d \\ 2b+5d = 3c+5d \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} 3c = 2b \\ 3d = 3a+6b \end{cases}$$

Принимая, a и b главными неизвестными, а c и d — свободными, получаем:

$$\begin{cases} c = \dfrac{2}{3}b \\ d = a+2b \end{cases}$$

Искомые матрицы:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ \frac{2}{3}b & a+2b \end{pmatrix},$$

где $a,\ b \in \mathbb{R}$.

Ответ. $\begin{pmatrix} a & b \\ \frac{2}{3}b & a+2b \end{pmatrix}$, $a,\ b \in \mathbb{R}$.

Задание 6

Для произвольных $n \times n$ матриц A и B предложите способ вычисления выражения

$$3BA^4 + B^2A^3 - 3BA^3B - B^2A^2B,$$

в котором используется лишь константное (не зависящее от n) количество указанных выше операций, и при этом **не более 4-х** операций умножения матрицы на матрицу. Разрешается выделять дополнительную память — хранить в памяти константное число $n \times n$ матриц (возможно, зависящих от A, B), которые могут быть использованы при промежуточных вычислениях.

Решение.

Преобразуем выражение:

$$\begin{aligned}
&3BA^4 + B^2A^3 - 3BA^3B - B^2A^2B \Leftrightarrow \\
&3BA^3(A-B) + B^2A^2(A-B) \Leftrightarrow \\
&3BA \cdot A^2(A-B) + B^2 \cdot A^2(A-B) \Leftrightarrow \\
&(3BA + B^2)A^2(A-B) \Leftrightarrow \\
&B(3A+B)A^2(A-B).
\end{aligned}$$

Тогда вычисление предлагается провести так:

- Выделить память для хранения A, B, $3A$, $(3A+B)$, A^2 и $(A-B)$
- Вычислить $3A$, $(3A+B)$ и $(A-B)$
- Вычислить A^2 (1-я операция умножения)
- Вычислить $B \cdot (3A+B) \cdot A^2 \cdot (A-B)$ (2-я, 3-я и 4-я операции умножения)

Задание 7

Студент перемножил следующие матрицы, расположив их в некотором порядке (были использованы все матрицы):

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 2 & -1 & 0 \\ 1 & 4 & -3 & 2 & 2 \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 3 \\ -2 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

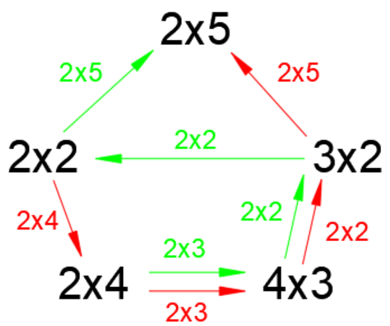
$$C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \; D = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \; F = \begin{pmatrix} -4 & 1 \\ 12 & -7 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Вычислите матрицу, которую он получил (перечислите все возможные варианты).

Решение.

Составим орграф, в котором вершины — размер $m \times n$ матрицы, а рёбра соединяют те вершины, для которых определено умножение матриц.

При этом заметим, что матрица с уникальным количеством столбцов или строк только одна, это A. Значит, в произведении нескольких матриц она должна быть последней, т.к. в противном случае ей не найдётся сомножителя. Поэтому рёбра начнём строить от A в обратном порядке. Граф показан ниже. Рёбра подписаны размером матрицы, получившейся при перемножении на предыдущем шаге.



Таким образом, есть две последовательности, в которые можно поставить матрицы для перемножения. Порядок перемножения не рассматривается, т.к. по условию для ответа требуется только вычисленная матрица. Возможные варианты последовательностей и вычисленных матриц:

- $D \cdot C \cdot B \cdot F \cdot A = \begin{pmatrix} -35 & -7 & -14 & 7 & 0 \\ -1 & 15 & -14 & 9 & 8 \end{pmatrix}$
- $C \cdot B \cdot F \cdot D \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -3 & 2 & 2 \\ 137 & 16 & 65 & -34 & -6 \end{pmatrix}$