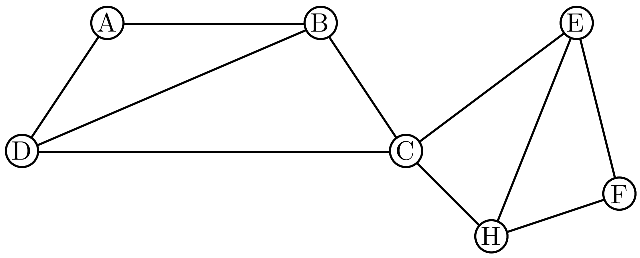
«Дискретная математика: неориентированные графы»

Домашнее задание

Байдаков Илья

11 ноября 2021 г.

Задание 1



Граф G изображен на рисунке выше.

а) Найдите максимальную длину простого цикла в графе G. Укажите все различные простые циклы максимальной длины.

б) Верно ли, что если в графе G удалить любое ребро, то из любой его вершины можно будет добраться до любой? При положительном ответе приведите обоснование, при отрицательном — укажите ребро, которое можно удалить, и вершины, между которыми не будет пути.

в) Какое минимальное количество рёбер необходимо удалить из графа G, чтобы он стал несвязным?

Решение.

а) Максимальная длина простого цикла в графе G равна 4. Это циклы $ABCDA$ и $CEFHC$.

б) Верно, если в графе G удалить любое ребро, то из любой его вершины можно будет добраться до любой вершины.

Обоснование. Приведём три утверждения.

Утв. 1. Каждое ребро графа G принадлежит простому циклу (доказывается перебором всех рёбер).

Утв. 2. Условие «Из любой вершины графа можно будет добраться до любой вершины» соответствует условию «Граф будет связным» по определению связности.

Утв. 3. «Если в графе есть простой цикл, удалим из него произвольное ребро. Граф останется связным» (известно с лекции).

Согласно утверждению 3, с учётом утв. 1 и 2, из любой вершины можно будет добраться до любой вершины при удалении любого ребра.

в) Минимальное количество рёбер, которое необходимо удалить, чтобы граф G стал несвязным: 2. Это следует из пункта **(б)** и из примера удаления двух рёбер, например, BC и DC, при которых граф становится несвязным.

Задание 2

В государстве 100 городов, и из каждого из них выходит 4 дороги в другие города этого государства. Сколько всего дорог в государстве?

Решение. Условие задачи можно представить в виде графа G, где дороги — рёбра, а города — вершины. Согласно лемме о рукопожатиях,

$$\sum_{v_i \in V} \deg v_i = 2|E|.$$

Таким образом, число дорог

$$|E| = \frac{\sum\limits_{v_i \in V} \deg v_i}{2} = \frac{4 \cdot 100}{2} = 200$$

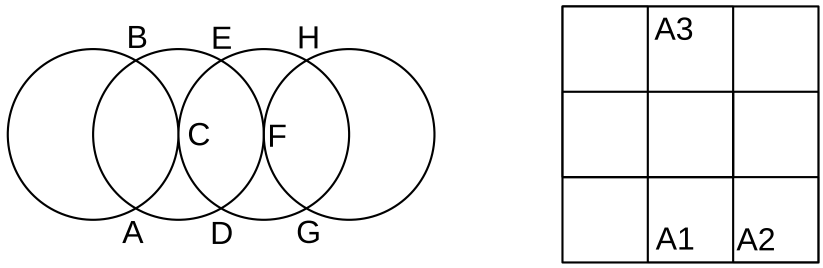
Ответ. 200 дорог.

Задание 3

Можно ли нарисовать картинки на рисунке ниже, не отрывая карандаша от бумаги и проходя по каждой линии по одному разу?

Если можно, то покажите, как это сделать.

Если нельзя, то докажите, что это сделать невозможно.



а) б)

Решение.

а) Можно. Картинка представима в виде графа, и тогда условие «Не отрывая карандаша от бумаги и проходя по каждой линии по одному разу» соответствует «В графе существует эйлеров путь или эйлеров цикл».

По критерию существования эйлерова цикла, эйлеров цикл существует тогда и только тогда, когда все вершины имеют четную степень. В данном графе все вершины имеют чётную степень.

Как сделать: провести эйлеров цикл $ABADGHGFHEFDCEBCA$, где AB, GH — «внешние» рёбра графа, а BA, HG — «внутренние».

б) Нельзя. Доказательство. Картинка представима в виде графа, у которого количество вершин с нечётной степенью больше двух, а это не удовлетворяет критериям существования эйлерова цикла и эйлерова пути.

Задание 4

В дереве на 2021 вершинах ровно три вершины имеют степень 1. Сколько вершин имеют степень 3?

Решение. Дерево содержит только одну вершину степени 3. Докажем от обратного.

Допустим, вершин со степенью $\deg v = 3$ две или больше двух. Поскольку мы имеем дерево, то каждое из двух рёбер этих вершин является основанием ветвей, а у каждой ветви есть как минимум одна висячая вершина. Тогда минимальное суммарное число висячих вершин в дереве равно произведению «2 $\times$ число вершин со степенью 3», т.е. больше или равно четырём, что противоречит условию задачи. Значит, исходное предположение было неверным.

Ответ. Одна вершина имеет степень 3.

Задание 5

У некоторого графа на 6 вершинах ровно 11 ребер. Докажите, что этот граф связен.

Доказательство. Предположим, что граф не связен. Рассмотрим возможные случаи:

- Граф имеет две компоненты связности, с 5 и 1 вершинами. Тогда по формуле для числа рёбер в полном графе для K_5 имеем:
$$K_5 = \frac{n(n-1)}{2} = 10,$$
т.е. первая компонента связности имеет не более 10 рёбер, а вторая не более 0 рёбер, т.е. условие задачи не может быть выполнено.

- Граф имеет две компоненты связности, с 4 и 2 вершинами. Будет не более 7 рёбер, т.е. условие не выполнено.

- Граф имеет две компоненты связности по 3 вершины. Будет не более 6 рёбер, т.е. условие не выполнено.

- Граф имеет три компоненты связности по 2 вершины. Будет не более 3 рёбер, т.е. условие не выполнено.

- Граф имеет шесть компонент связности по 1 вершине в каждой. Тогда рёбер нет.

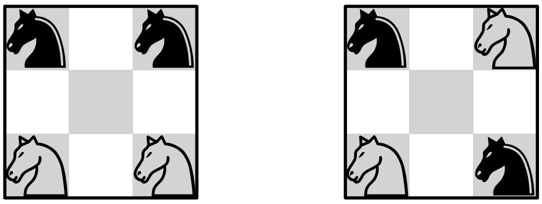
Мы пришли к противоречию. Значит, исходное предположение не верно и данный граф связен.

Задание 6

Можно ли за несколько ходов (по шахматным правилам и не выходя за пределы доски 3×3) поставить коней так, чтобы из расположения на левой картинке получилось расположение коней на правой?

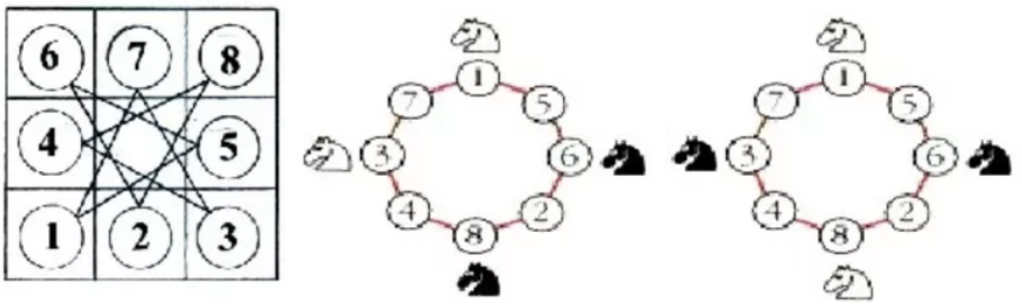
Если можно, то укажите последовательность шагов.

Если нельзя, то докажите, что это сделать невозможно.



Поставить коней так, как указано в условии задачи, нельзя.

Доказательство. Задача представима в виде графа, где каждой клетке, на которую может перейти любой из коней, соответствуют вершины, а рёбрам вершины соответствуют возможные ходы коня из этой клетки. Для исходного и требуемого расположения соответствуют такие графы (по центру и справа):



Поскольку кони могут двигаться по графу только на смежные вершины, то для перехода из исходного положения в требуемое как минимум одному из коней нужно «перескочить» соседнего коня или занять его место. Это не соответствует шахматным правилам. Других путей нет, значит, такой переход неосуществим.