«Теория вероятностей: Математическое ожидание и дисперсия»

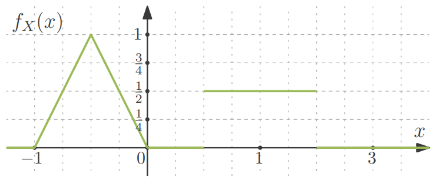
Домашнее задание №4

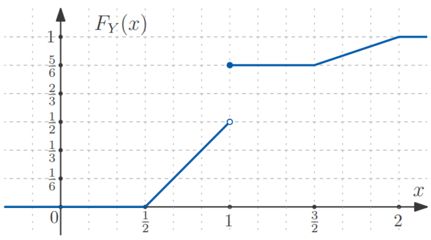
Байдаков Илья

15 марта 2022 г.

Задание 1

График функции плотности случайной величины X изображен на рисунке ниже. Найдите математическое ожидание случайной величины X.





Решение.

Воспользуемся геометрической интерпретацией мат. ожидания как центра масс на графике функции плотности. Масса сосредоточена в двух одинаковых по массе областях при $x \in [-1; 0]$ и $x \in [\frac{1}{2}; 1\frac{1}{2}]$ с центрами тяжести соответственно в т. $x_1 = -\frac{1}{2}$ и $x_2 = 1$. Тогда общий центр тяжести находится в т. $x = \frac{1}{4}$.

Ответ. $\mathbb{E}X = \frac{1}{4}$.

Задание 2

График функции распределения случайной величины Y изображен на рисунке выше. Найдите математическое ожидание случайной величины Y.

Решение.

Воспользуемся геометрической интерпретацией мат. ожидания как площади под/над графиком функции распределения. В данном случае $S = 1 \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} + \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} \cdot (3 + \frac{3}{2}) = 1$.

Ответ. $\mathbb{E}Y = 1$.

Задание 3

Считается, что число запросов на сервере за некоторый промежуток времени хорошо моделирует распределение Пуассона с параметром λ равным частоте запросов. А время между двумя последовательными запросами имеет показательное распределение (это одно из названий экспоненциального распределения) с тем же параметром. Пусть X — число запросов за час, а частота запросов равняется 10 в час (т.е. $\lambda = 10$).

а) Чему в этих предположениях равняется среднее число запросов за час?

б) Чему равняется среднее время между двумя последовательными запросами? Ответ укажите в минутах.

в) Пусть $Y = e^X$ параметр, определяющий нагрузку на сервер в зависимости от количества запросов X. Найдите $\mathbb{E}Y$.

Решение.

а) Среднее число запросов в час равняется λ согласно физическому смыслу распределения Пуассона.

б) Среднее время между двумя запросами равняется

$$t = \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{10} \text{ ч} = 6 \text{ мин.}$$

в)

$$\mathbb{E}Y = \mathbb{E}(g(X)) = \sum_{k=0}^{\infty} g(a_k) P(X = a_k) =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} e^k e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} = e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(e\lambda)^k}{k!} = e^{-\lambda} \cdot e^{e\lambda} = e^{\lambda(e-1)} \simeq 29000345.$$

Ответ. а) Равняется λ. **б)** 6 мин. **в)** $\simeq 29$ млн.

Задание 4

Случайные величины $X \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$ и $Y \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$ независимы и имеют нормальное распределение с параметрами $\mu_1 = 1$, $\sigma_1^2 = 4$ и $\mu_2 = 0$, $\sigma_2^2 = 1$.

а) Найдите дисперсию случайной величины $(X-2)/2$.

б) Найдите дисперсию случайной величины $2X - 3Y$.

в) Найдите математическое ожидание случайной величины $(X-Y)^2$.

Решение.

а) Используя свойства дисперсии $\mathbf{Var}(X \sim N) = \sigma^2$ и $\mathbf{Var}(cX) = c^2\mathbf{Var}(X)$:

$$\mathbf{Var}[(X-2)/2] = \mathbf{Var}(\frac{1}{2}X) + \mathbf{Var}(-1) = \frac{1}{4}\mathbf{Var}(X) + 0 = \frac{1}{4} \cdot \sigma_1^2 = 1.$$

б) Используя условие независимости сл. величин:,

$$\mathbf{Var}(2X - 3Y) = \mathbf{Var}(2X) + \mathbf{Var}(-3Y) =$$
$$= 4\mathbf{Var}(X) + (-3)^2\mathbf{Var}(Y) = 4 \cdot 4 + 9 \cdot 1 = 25.$$

в) Распишем квадрат разности, воспользуемся свойством линейности мат. ожидания и формулой для связи дисперсии и мат. ожидания:

$$\mathbb{E}(X^2) = \mathbf{Var}(X) + (\mathbb{E}X)^2 = \sigma_1^2 + \mu_1^2 = 5, \qquad \mathbb{E}(Y^2) = 1.$$

Получим:

$$\mathbb{E}(X-Y)^2 = \mathbb{E}(X^2) - 2\mathbb{E}X \cdot \mathbb{E}Y + \mathbb{E}(Y^2) = 5 - 2 \cdot 1 \cdot 0 + 1 = 6.$$

Ответ. а) $\mathbf{Var} = 1$, б) $\mathbf{Var} = 25$ в) $\mathbb{E} = 6$.

Задание 5

Докажите, что
$\min\limits_{a \in \mathbb{R}} \mathbb{E}(X-a)^2$ равен $\mathbf{Var}(X)$ и достигается только при $a = \mathbb{E}X$.

Доказательство.

Раскроем скобки:

$$\mathbb{E}(X-a)^2 = \mathbb{E}(X^2 - 2a\mathbb{E}X + a^2) = \mathbb{E}(X^2) - 2a\mathbb{E}X + a^2.$$

Результат будет зависеть от значений последних двух членов, т.к. только они зависят от a. Исследуем их на экстремумы относительно a:

$$(-2a\mathbb{E}X + a^2)' = 2a - 2\mathbb{E}X \qquad (*)$$

Приравнивая (*) к нулю, получаем $a = \mathbb{E}X$. Тогда:

$$\min \mathbb{E}(X-a)^2 = \mathbb{E}(X - \mathbb{E}X)^2 = \mathbf{Var}(X), \text{ ч.т.д.}$$

Задание 6

В мешке имеется 10 шаров, из которых 6 белых и 4 чёрных, и мы дважды вытаскиваем из него шар, не возвращая обратно.

Найдите **а)** распределение, **б)** математическое ожидание и **в)** дисперсию количества чёрных шаров среди вынутых.

г) Изменится ли ответ, если вынимать шары следующим образом: вытащили первый шар и положили обратно, а затем вытащили второй шар?

Решение.

а) Пусть X - случайная величина, равная количеству чёрных шаров среди вытащенных. Она может принимать значения $0, 1$ и 2.

$$P(X=0) = \frac{6}{10} \cdot \frac{5}{9} = \frac{15}{45}$$

$$P(X=1) = \frac{6}{10} \cdot \frac{4}{9} + \frac{4}{10} \cdot \frac{6}{9} = \frac{24}{45}$$

$$P(X=2) = \frac{4}{10} \cdot \frac{3}{9} = \frac{6}{45}$$

б) Математическое ожидание найдём по определению:

$$\mathbb{E}X = 0 \cdot \frac{15}{45} + 1 \cdot \frac{24}{45} + 2 \cdot \frac{6}{45} = 0.8$$

в) Дисперсия:

$$\mathbf{Var}(X) = \mathbb{E}(X^2) - (\mathbb{E}X)^2 = 0.426(6), \text{где}$$

$$\mathbb{E}(X^2) = 0 \cdot \frac{15}{45} + 1 \cdot \frac{24}{45} + 2^2 \cdot \frac{6}{45} = \frac{48}{45}$$

г) Изменится, т.к. распределение вероятностей будет другое. Например,

$$P(X=0) = \frac{6}{10} \cdot \frac{6}{10} = 0.36$$

Ответ.

а)

X	0	1	2
P	15/45	24/45	6/45

б) $\mathbb{E}X = 0.8$,

в) $\mathbf{Var}(X) = 0.426(6)$,

г) Изменится.