Теория вероятностей:вероятностное пространство и независимость

Домашнее задание № 1.

1

1 Для продвижения нового продукта используется реклама в средствах массовой информации и в соцсетях. Вероятность увидеть эту рекламу в средствах массовой информации равна 0.3, а вероятность увидеть ее в соцсетях — 0.2. Предположим, что события «увидеть эту рекламу в средствах массовой информации» и «увидеть рекламу в соцсетях» независимы.

Какова вероятность того, что случайный человек увидит рекламу этого продукта?

Пусть событие A = „увидеть рекламу в СМИ", а
событие B = „увидеть рекламу в СС".
Тогда искомая вероятность: $P(A\cup B)$, т.к. нас устраивает и наступление с-я A, и B.
По правилу суммы (по теореме о сумме вероятностей также):

$$P(A\cup B) = P(A)+P(B)-P(AB) =$$
$$= P(A)+P(B)-P(A)\cdot P(B) = 0{,}2+0{,}3-0{,}2\cdot 0{,}3 = 0{,}44$$

Ответ: $P = 0{,}44$

2

2 Пусть события A и B независимы. Докажите, что
а) $\bar{A}$ и $\bar{B}$ независимы;
б) A и $\bar{B}$ независимы.

а) По определению, если $\bar{A}$ и $\bar{B}$ независимы, то

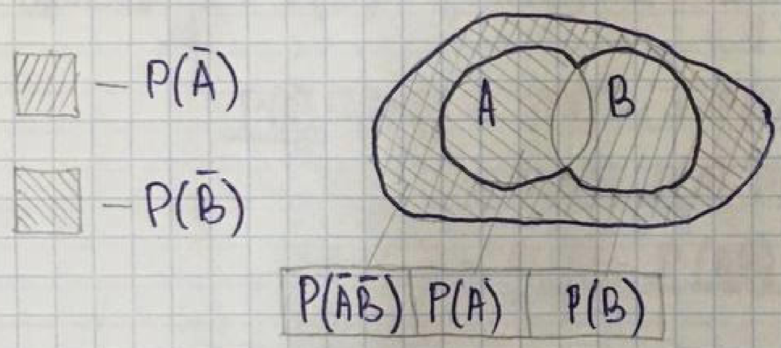
$$P(\bar{A}\bar{B}) = P(\bar{A}) \cdot P(\bar{B}) \qquad (*)$$

Известно, что

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A) \quad \text{и} \quad P(\bar{B}) = 1 - P(B) \qquad (1,2)$$

Из диаграммы ниже видно, что

$$P(\bar{A}\bar{B}) = 1 - P(A \cup B) = 1 - P(A) - P(B) + P(AB) \qquad (3)$$



Тогда, ~~приравнивая~~ подставляя (1,2) и (3) в (*):

$$\underline{1 - P(A) - P(B) + P(AB)} = (1 - P(A)) \cdot (1 - P(B)) \iff$$

$$-//- \quad = 1 - P(A) - P(B) + P(A) \cdot P(B) \iff$$

$$-//- \quad = \underline{1 - P(A) - P(B) + P(AB)}$$

, ч.т.д.

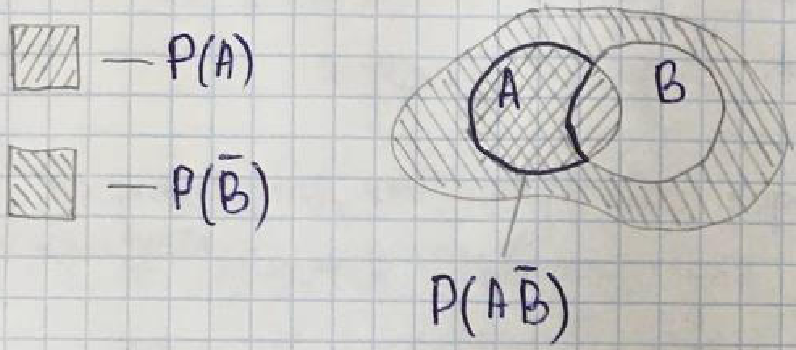
2

б) Аналогично (а), достаточно доказать, что:

$$P(A\bar{B}) = P(A)\cancel{(B}\cdot P(\bar{B}) \qquad (*)$$

Из диаграмма ниже видно, что

$$P(A\bar{B}) = P(A) - P(AB) \qquad (1)$$



Используя $P(\bar{B}) = 1 - P(B)$ и подставляя (1) в (*):

$$\underline{P(A) - P(AB)} = P(A)\cdot(1 - P(B)) \iff$$

$$— // — \; = P(A) - P(A)\cdot P(B) \iff$$

$$— // — \; = \underline{P(A) - P(AB)}$$

, ч.т.д.

3

3 Приведите пример трех событий, которые попарно независимы, но не являются независимыми в совокупности.

1. „Поезд, на котором работник должен ехать на работу, опоздал"

2. „Работник не обладает хорошими манерами"

3. „Работник уволен после опоздания за истерику в адрес машиниста"

(предполагается, что отсутствие хороших манер ~~и~~/или опоздание в отдельности не является поводом для увольнения, а присутствие этих двух факторов сразу — является поводом д/увольн-я)

4

$\boxed{4}$ Новичок играет три партии в теннис против двух противников слабого и сильного. Он должен победить в двух партиях подряд. Порядок партий может быть следующий: слабый – сильный – слабый или сильный – слабый – сильный. Вероятность победить слабого p, вероятность победить сильного q, $q < p$. Результаты партий независимы в совокупности.

Какой вариант предпочтительней для новичка и какова вероятность выиграть?

Определим пространство элементарных исходов игры:

$$\Omega = \{\underline{ВВП}, \underline{ВВВ}, \underline{ПВВ}, ППВ, ППП, ВПП, ПВП, ВПВ\}$$

Подчёркнутые варианты удовл-т условию „победить в 2-х подряд".
Тогда, учитывая, что вероятность проиграть в партии равна $\boxed{P(\text{„проигрыш в партии"}) = 1 - P(\text{„выигрыш в партии"})}$:

- Для варианта „слабый - сильный - слабый":

$$P(\text{„победить в игре"}) = P(ВВП) + P(ВВВ) + P(ПВВ) =$$
$$= pq(1-p) + pqp + (1-p)qp = pq(2-p)$$

- Для варианта „сильный - слабый - сильный":

$$P(\text{„победить в игре"}) = P(ВВП) + P(ВВВ) + P(ПВВ) =$$
$$= qp(1-q) + qpq + (1-q)pq = pq(2-q)$$

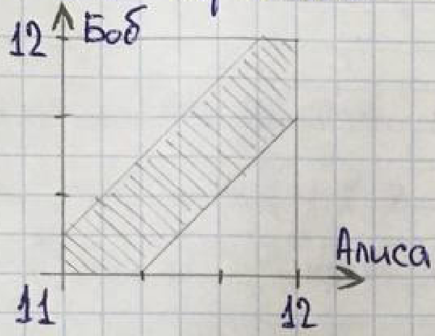
Поскольку $pq(2-q) > pq(2-p)$, вариант „сильный - слабый - сильн." будет предпочтительным.

__Ответ__: „сильный-слабый-сильный" предпочтительный, вероятность выиграть $P = pq(2-q)$.

5

5 Алиса и Боб договорились встретиться с 11:00 до 12:00, но не уточнили время встречи. Боб решил, что придет в выбранный наугад момент времени с 11:00 до 12:00 и будет ждать Алису 20 минут (но в 12:00 уйдет). Алиса тоже решила прийти в случайный момент времени, но ждать Боба 10 минут. Какова вероятность того, что Алиса и Боб встретятся?

Изобразим все вероятные сценарии встречи на графике:



Закрашенная область соответствует событию „Алиса и Боб встретились". Тогда, считая площадь всего квадрата за единицу, вероятность встречи будет равна площади закрашенной области:

$$P(\text{„встреча"}) = 1 - \left(\frac{2}{3}\right)^2 \cdot \frac{1}{2} - \left(\frac{5}{6}\right)^2 \cdot \frac{1}{2} = \frac{31}{72} = 0{,}431$$

Ответ: $P(\text{„встреча"}) = 0{,}431$.

6

6 **а)** Какова вероятность, что из трёх случайно взятых отрезков можно составить треугольник? Считается, что длина каждого из отрезков не превышает 1, и все значения длины одинаково возможны.

Напоминание: из отрезков длины x, y, z можно составить треугольник, когда выполнено три неравенства треугольника: $x + y > z$, $x + z > y$, $y + z > x$.

б) Какова вероятность, что из этих отрезков можно составить остроугольный треугольник?

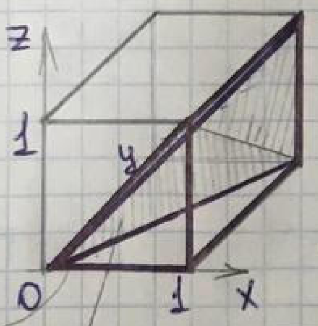
а) Поскольку длины выбираются случайно с бесконечной точностью, считаем, что $x \neq y \neq z$ (где x, y, z — длины).
Обозначим большее число как x, среднее — y, меньшее — z, т.е. $x > y > z$.
Тогда выполняется „автоматически", что

$$x+y>z \quad \text{и} \quad x+z>y \qquad (1,2)$$

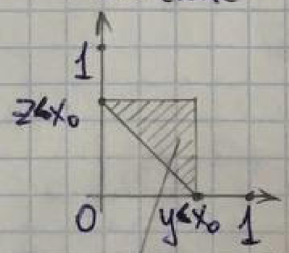
Вероятность составления треугольника равна вероятности лишь того, что

$$y+z>x. \qquad (3)$$

Множество всех возможных x, y и z изобразим на графике:



Сечение в произвольной точке x_0:



область значений, где $y+z>x$

область всех возможных значений (пирамида с основанием в точках $(1,0,0), (1,1,0), (1,1,1), (1,0,1)$ и вершиной в т. $(0,0,0)$.

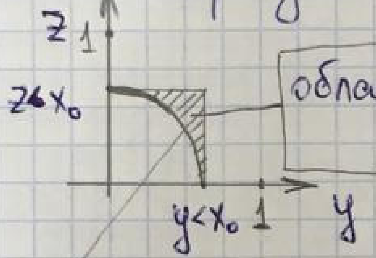
Исходя из показанного сечения, её часть, удовлетворяющая $y+z>x$, равна $\frac{1}{2}$. Это и есть искомая вероятность.

6 б) Будем рассуждать аналогично п.(а), но вместо условия (3) будем использовать более ~~ст~~ сильное условие, исключающее тупой угол напротив большей стороны x:

$$y^2 + z^2 > x^2 , \qquad (4)$$

оно следует из теоремы Пифагора при фиксированном x (или из теоремы косинусов).

Тогда сечение в произвольной точке x_0 изображается:



область значений y и z, удовлетв. $y^2+z^2>x^2$

кривая $y=\sqrt{x_0^2-z^2}$ — четверть окружности

Тогда вероятность, что $y^2+z^2>x^2$, равна доле, которую закрашенная область составляет от квадрата со ст-й x_0:

$$P = \frac{S_{закр}}{S_{кв}} = \frac{S_{кв} - \frac{S_{круга}}{4}}{S_{кв}} = \frac{x_0^2 - \frac{\pi x_0^2}{4}}{x_0^2} = 1 - \frac{\pi}{4} \approx 0{,}215$$

Ответ: (а) $P = \frac{1}{2}$, (б) $P = 1 - \frac{\pi}{4}$.