«Дискретная математика: множества и логика»

Домашнее задание

Байдаков Илья

10 марта 2022 г.

Задание 1

Какие из следующих равенств выполнены для любых множеств A, B и C? Если равенство верно, то докажите его. Если не выполнено, то приведите контрпример.

a) $A \setminus (A \cap B) = A \cap (A \setminus B)$.
Равенство верно, выполняется для любых множеств A и B.
Доказательство. Заменим множества A и B на высказывания a, b; операции со множествами на операции с высказываниями:

- $A \cap B$ заменим на $a \wedge b$,
- $A \setminus B$ заменим на $\neg(a \to b)$ (известно с занятия), и так далее.

Выражение приводится к виду:

$$a \wedge (\neg(a \wedge b)) = a \wedge (\neg(a \to b))$$

По виду выражения можно утверждать, что проверить его верность можно, проверив верность выражения

$$a \wedge x = a \wedge y, \qquad (*)$$

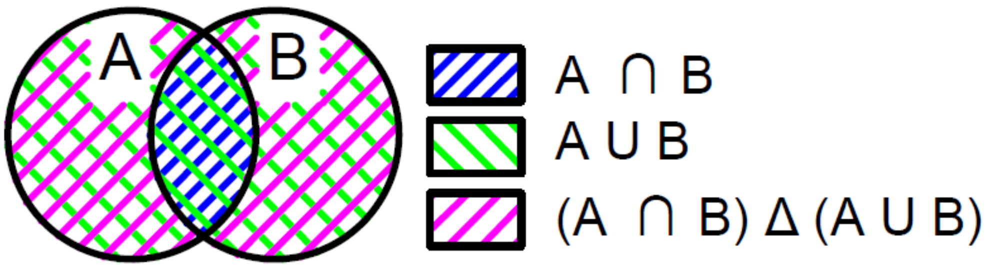
где $x = \neg(a \wedge b)$, а $y = \neg(a \to b)$.

Для этого воспользуемся таблицей истинности:

a	b	$x = \neg(a \wedge b)$	$y = \neg(a \to b)$	$a \wedge x$	$a \wedge y$
0	0	1	0	0	0
0	1	1	0	0	0
1	0	1	1	1	1
1	1	0	0	0	0

Выражение (*) верно для всех пар значений a, b, следовательно, исходное выражение тоже верно для любых множеств A и B.

б) $(A \cup B)\triangle(A \cap B) = A\triangle B$;
Равенство верно, выполняется для любых множеств A и B.
Доказательство. Построим диаграмму Эйлера-Венна для левой части равенства:



Из диаграммы видно, что область значений $(A\cup B)\triangle(A\cap B)$ совпадает с областью значений $A\triangle B$ (последнее не обозначено на диаграмме отдельно). Это значит, что равенство верно.

в) $((A\backslash B) \cup (A\backslash C)) \cap (A\backslash(B \cap C)) = A\backslash(B \cup C)$.
Равенство не верно.
Доказательство. Для контрпримера возьмём множества
$A = \{1, 2\}, B = \{2, 3\}, C = \{3, 4\}$.
Тогда

$$(\{1\} \cup \{1, 2\}) \cap (\{1, 2\}\backslash\{3\}) = \{1, 2\}\backslash\{2, 3, 4\};$$
$$\{1, 2\} \cap \{1, 2\} \neq \{1\},$$

значит, равенство не выполнено для любых множеств A, B и C.

Ответ: Равенства (а), (б) выполнены для любых множеств A, B и C.

Задание 2

Верно ли, что для любых множеств A и B выполняется включение

$$(A \cup B) \setminus B \subseteq A?$$

Верно, включение выполняется для любых A и B.
Решение:
по определению, $A \cup B$ помимо всех элементов A содержит все элементы B. Так же по определению, $(A \cup B) \setminus B$ содержит все элементы из $A \cup B$, кроме элементов, содержащихся в B.
Возможны характерные случаи:

- Если A и B имеют общие элементы, то $(A \cup B) \setminus B$ будет иметь меньше элементов, чем A, но принадлежащих A;
- Если A и B состоят из одинаковых элементов, и/или
A — пустое множество,
то $(A \cup B) \setminus B$ будет пустым множеством;
- Если A и B не имеют общих элементов, $(A \cup B) \setminus B$ будет состоять только из элементов A.

Таким образом, в каждом из возможных случаев включение будет выполняться.

Задание 3

Докажите, что $\neg(a \vee (b \oplus 1)) \wedge (a \to 1) = \neg a \wedge b$.
Доказательство.
Подстановкой констант в $b \oplus 1$ получаем $b \oplus 1 = \neg b$.
Согласно таблице истинности, $a \to 1 = 1$.
Получаем:

$$\neg(a \vee \neg b) \wedge 1 = \neg a \wedge b.$$

По закону поглащения, $x \wedge 1 = x$:

$$\neg(a \vee \neg b) = \neg a \wedge b.$$

По законам Моргана, $\neg(a \vee b) = \neg a \wedge \neg b$; $\neg(\neg b) = b$:

$$\neg a \wedge b = \neg a \wedge b.$$

Задание 4

Для каких из ниже приведенных чисел ложно высказывание: «Число четно $\wedge$ (В числе 7 цифр $\to \neg$(Третий разряд числа четный))»?

а) 0 **б)** 1234567, **в)** 2222222, **г)** 123457.

Решение: Упростим высказывание. Для этого выведем вспомогательную формулу

$$b \to \neg c = \neg(b \wedge c). \quad (*)$$

Формула (*) следует из таблицы истинности:

a	b	$a \to \neg b$	$\neg(a \wedge b)$
0	0	1	1
0	1	1	1
1	0	1	1
1	1	0	0

Обозначим высказывания:
a=«Число чётно»,
b=«В числе 7 цифр»,
c=«Третий разряд числа чётный».
Получаем формулу $a \wedge (b \to \neg c)$. Из (*) следует:

$$a \wedge (b \to \neg c) = a \wedge \neg(b \wedge c).$$

Нам необходимо указать те числа, для которых это высказывание ложно. Высказывание $a \wedge \neg(b \wedge \neg c)$ ложно, когда его отрицание $\neg(a \wedge \neg(b \wedge \neg c))$ истинно. Используя законы Моргана

$$\neg(a \wedge \neg(b \wedge c)) = \neg a \vee \neg\neg(b \wedge c) = \neg a \vee (b \wedge c).$$

Т.е. подходят те слова, для которых верно или $\neg a$, или $(b \wedge c)$.

Поскольку $\neg a = \neg$ «Число четно» $=$ «Число нечетно», то осталось найти нечетные числа, или те, в которых 7 цифр и третий разряд чётный.

Такими числами являются 1) 1234567, 2) 123457, 3) 2222222.

Задание 5

Пусть $A = \{7, 5, 1, 4, 2, 6, 3\}$, $B = \{x \mid x = 2k,\ k \in \mathbb{Z}\}$, $C = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$. Для каких $x \in C$ предикат «$(x \in A) \to \neg(x \in B)$» обращается в истину?

Решение: Упростим предикат «$(x \in A) \to \neg(x \in B)$» = $= a(x) \to \neg b(x)$, где $a(x)$ и $b(x)$ обозначают предикаты $(x \in A)$ и $(x \in B)$.

Согласно формуле (*) из предыдущего задания

$$a(x) \to \neg b(x) = \neg(a(x) \wedge b(x)).$$

Предикату $\neg(a(x) \wedge c(x))$ соответствует множество $x \notin (A \cap B)$.
Итак, для решения задачи нужно найти элементы из C, которые не являются элементами множества $A \cap B$, т.е. найти множество $C \setminus (A \cap B)$.
B - множество чётных чисел, A - множество целых чисел от 1 до 7 включительно. Значит, $A \cap B = \{2, 4, 6\}$. Таким образом, $C \setminus \{2, 4, 6\} =$ $= \{0, 1, 3, 5, 7, 8, 9\}$.

Ответ: Для 0,1,3,5,7,8,9.

Задание 6

Докажите, что сумма первых n четных натуральных чисел равняется

$$2 + 4 + 6 + 8 + \ldots + 2n = n(n + 1).$$

Доказательство.
Обозначим равенство через A_n и докажем его по индукции.

- Базис индукции (A_1):
  Докажем утверждение для $n = 1$:

  $$2 = 1(1 + 1).$$

- Шаг индукции (A_{n+1}):
  Предположим, что A_n верно, то есть

  $$2 + 4 + 6 + 8 + \ldots + 2n = n(n + 1).$$

Докажем утверждение для $n+1$. Прибавим к обеим частям равенства число $2(n+1)$:

$$2+4+6+8+\ldots+2n+2(n+1) = n(n+1)+2(n+1) = n^2+3n+2 = (n+1)(n+2),$$

то есть A_{n+1}. Шаг индукции и всё доказательство завершены.