«Линейная алгебра: Линейные отображения»

Домашнее задание №4

Байдаков Илья

22 декабря 2021 г.

Задание 1

Найдите размерность и предъявите базис следующего подпространства в $\mathbb{R}^5$, заданного множеством решений следующей однородной системы линейных уравнений:

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 - 2x_4 + 4x_5 = 0 \\ 4x_1 - 2x_2 + 5x_3 + x_4 + 7x_5 = 0 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 + 8x_4 + 2x_5 = 0 \end{cases}$$

Решение.

Составим матрицу коэффициентов системы и приведём её к каноническому виду:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & -2 & 4 \\ 4 & -2 & 5 & 1 & 7 \\ 2 & -1 & 1 & 8 & 2 \end{pmatrix} \xmapsto{III-I} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & -2 & 4 \\ 4 & -2 & 5 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 10 & -2 \end{pmatrix} \longmapsto$$

$$\xmapsto{II-I\cdot 2} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & 5 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 10 & -2 \end{pmatrix} \xmapsto{III\cdot\frac{1}{2}} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & 5 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\xmapsto{I+II\cdot 4} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 13 & 18 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 5 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & -1 \end{pmatrix} \xmapsto{II-III} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 13 & 18 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & -1 \end{pmatrix} \longmapsto$$

$$\xmapsto{I-III\cdot\frac{18}{5}} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 13 & 18 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & -1 \end{pmatrix} \xmapsto{I+III\cdot\frac{1}{2}} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 13 & 0 & \frac{18}{5} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & -1 \end{pmatrix} \longmapsto$$

$$\xmapsto{I-II\cdot 13} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & \frac{18}{5} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & -1 \end{pmatrix}$$

Теперь видно, что размерность подпространства V, заданного множеством решений нашей однородной системы, равна количеству свободных переменных. У нас это x_2 и x_5:

$$\dim V = 2.$$

Чтобы найти базис подпространства, будем попеременно задавать свободным переменным значения 1, остальных приравнивая к нулю.

$$\begin{cases} x_2 = 1 \\ x_5 = 0 \end{cases} \longrightarrow \quad v_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x_2 = 0 \\ x_5 = 1 \end{cases} \longrightarrow \quad v_5 = \begin{pmatrix} -\frac{9}{5} \\ 0 \\ 0 \\ -\frac{1}{5} \\ 1 \end{pmatrix}$$

Ответ. Размерность подпространства $\dim V = 2$, базис подпространства составлен векторами v_2 и v_5.

Задание 2

Пусть $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ — линейное отображение, причём

$$\varphi \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \ \varphi \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ 9 \end{pmatrix}.$$

Найдите $\varphi \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Решение.

Найдём матрицу линейного отображения A. Матрицы прообразов V и образов W записываются так:

$$V = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, W = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 6 \\ 2 & 9 \end{pmatrix}$$

Тогда матрица A находится из выражения:

$$A = WV^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 6 \\ 2 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 6 \\ 2 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 1\frac{1}{3} \\ 2 & -1 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}$$

Теперь подействуем матрицей A на заданный вектор-прообраз из V:

$$\varphi \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \end{pmatrix} = A \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\frac{2}{3} \\ -11 \\ -24 \end{pmatrix}$$

Ответ. $\varphi \left(\begin{smallmatrix} -4 \\ 3 \end{smallmatrix} \right) = \left(\begin{smallmatrix} 2\frac{2}{3} \\ -11 \\ -24 \end{smallmatrix} \right)$.

Задание 3

Пусть $V = \mathbb{R}[x]_{\leqslant 2}$ – пространство многочленов степени не более 2. Линейный оператор $\varphi\colon V \to V$ в базисе $e = \{1, x, x^2\}$ задаётся матрицей

$$A = A(\varphi, e) = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 2 \\ -1 & 2 & 4 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

а) Найдите $\varphi(x^2)$ и $\varphi(-2x^2 - 4x - 1)$.

б) Существует ли прообраз у многочлена $7x^2+2x-5$? Иными словами, существует ли многочлен $g(x) \in V$ такой, что

$$\varphi(g) = 7x^2 + 2x - 5?$$

Решение.

а) В базисе $e = \{1, x, x^2\}$ многочлен x^2 соответствует вектору

$$v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

а значит,

$$\varphi(x^2) = A(\varphi, e) \cdot v_1 = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 2 \\ -1 & 2 & 4 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Получаем, что искомый многочлен имеет вид:

$$w_1 = 2x^2 + 4x + 2.$$

Аналогично, многочлен $-2x^2 - 4x - 1$ соответствует вектору

$$v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ -4 \\ -2 \end{pmatrix},$$

а значит,

$$\varphi(-2x^2 - 4x - 1) = A \cdot v_2 = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 2 \\ -1 & 2 & 4 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ -4 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -15 \\ -15 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Получаем, что искомый многочлен имеет вид:

$$w_2 = -15x - 15.$$

б) Если прообраз g у многочлена $w = 7x^2 + 2x - 5$ существует, то должно выполняться равенство:

$$A \cdot g = w \quad \longrightarrow \quad A \begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \\ g_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ 2 \\ 7 \end{pmatrix}.$$

Получили систему линейных уравнений. Если решение удастся получить методом Гаусса, то $g(x)$ существует. Запишем расширенную матрицу системы и приведём её к каноническому виду:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 3 & 2 & -5 \\ -1 & 2 & 4 & 2 \\ 0 & -1 & 2 & 7 \end{array}\right) \longmapsto \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -8 & -16 \\ 0 & 1 & -2 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Принимая g_1, g_2 главными переменными, а g_3 — зависимой, получаем решение:

$$\begin{cases} g_1 = 8g_3 - 16 \\ g_2 = 2g_3 - 7 \\ g_3 \in \mathbb{R} \end{cases} \longrightarrow \qquad g = \begin{pmatrix} 8g_3 - 16 \\ 2g_3 - 7 \\ g_3 \end{pmatrix}, g_3 \in \mathbb{R}$$

Вектор g найден. Значит, прообраз существует.

Ответ. а) $w_1 = 2x^2 + 4x + 2, w_2 = -15x - 15$. б) Существует.

3(б) - ошибка,
прообраза не
существует

Задание 4

В пространстве $\mathbb{R}^3$ заданы следующие векторы:

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \ v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \ v_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \ u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \ u_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \ u_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Найдите матрицу A линейного оператора $\varphi\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, заданного по правилу $x \mapsto Ax$, такого, что $Av_i = u_i$ при $i = 1, 2, 3$.

Решение.

Если матрица A такого линейного оператора существует, должно выполняться равенство:

$$A \cdot V = U \quad \longrightarrow \quad A \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Это матричное уравнение можно решить домножением на V^{-1} справа:

$$A = U \cdot V^{-1} = U \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}^{-1} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 & 5 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & -3 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 5 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ответ. $A = \left(\begin{smallmatrix} -3 & 5 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$.

Задание 5

В пространстве $\mathbb{R}^3$ заданы следующие векторы:

$$v_1 = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix}5\\8\\2\end{pmatrix}, v_4 = \begin{pmatrix}-1\\-2\\1\end{pmatrix}, v_5 = \begin{pmatrix}3\\5\\-1\end{pmatrix}.$$

Существует ли линейное отображение $\varphi\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ такое, что $\varphi(v_i) = u_i$ при $i = 1, 2, 3, 4, 5$, где

$$u_1 = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, u_2 = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}, u_3 = \begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}, u_4 = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}, u_5 = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}?$$

Решение.

Рассмотрим те из векторов-прообразов v_i, которые составляют базис $\mathbb{R}^3$: v_2, v_3 и v_4, и соответствующие им векторы-образы:

$$V = \begin{pmatrix}1 & 5 & -1\\2 & 8 & -2\\0 & 2 & 1\end{pmatrix}, U = \begin{pmatrix}0 & 2 & 0\\1 & 3 & 0\end{pmatrix}$$

Если отображение φ существует, то справедливо, что:

$$A(\varphi)V = U \quad \longrightarrow \quad A(\varphi) = UV^{-1} =$$

$$\begin{pmatrix}0 & 2 & 0\\1 & 3 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 5 & -1\\2 & 8 & -2\\0 & 2 & 1\end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix}0 & 2 & 0\\1 & 3 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-6 & \frac{7}{2} & 1\\1 & -\frac{1}{2} & 0\\-2 & 1 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2 & -1 & 0\\-3 & 2 & 1\end{pmatrix}$$

Составим матрицу V^* из всех данных нам векторов-прообразов и проверим, правильно ли матрица отображения работает с ними:

$$U^* = A(\varphi)V^* = \begin{pmatrix}2 & -1 & 0\\-3 & 2 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1 & 5 & -1 & 3\\1 & 2 & 8 & -2 & 5\\1 & 0 & 2 & 1 & -1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0 & 2 & 0 & 1\\0 & 1 & 3 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

Столбцы матрицы U^* соответствуют векторам u_i, значит, отображение существует.

Ответ. Отображение существует.

Задание 6

Найти собственные значения и собственные векторы следующих матриц:

$$\text{а)} \begin{pmatrix} 2 & 8 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad \text{б)} \begin{pmatrix} 4 & -5 & 2 \\ 5 & -7 & 3 \\ 6 & -9 & 4 \end{pmatrix}.$$

Укажите базис собственных подпространств V_λ для каждого собственного значения λ.

Решение.

а) Составим характеристический многочлен $\chi_A(\lambda)$:

$$\chi_A(\lambda) = \det(\lambda E - A) = \begin{vmatrix} \lambda - 2 & -8 \\ -3 & \lambda - 4 \end{vmatrix} =$$

$$= (\lambda - 4)(\lambda - 2) - 24 = \lambda^2 - 6\lambda - 16 \quad \longrightarrow \quad \begin{cases} \lambda_1 = -2 \\ \lambda_2 = 8 \end{cases}$$

Следуя алгоритму поиска базиса подпространств V_λ, найдём ФСР:

$$A - \lambda_1 E = \begin{pmatrix} 4 & 8 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} \overset{\text{Элем. преобр.}}{\longmapsto} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \longrightarrow \quad v_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$A - \lambda_2 E = \begin{pmatrix} -6 & 8 \\ 3 & -4 \end{pmatrix} \overset{\text{Элем. преобр.}}{\longmapsto} \begin{pmatrix} 1 & -\frac{4}{3} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \longrightarrow \quad v_2 = \begin{pmatrix} \frac{4}{3} \\ 1 \end{pmatrix}$$

Значит, имеет два собственных значения матрицы, у каждого из которых есть подпространство, имеющее один базисный вектор.

б) Составим характеристический многочлен $\chi_A(\lambda)$:

$$\chi_A(\lambda) = \det(\lambda E - A) = \begin{vmatrix} \lambda - 4 & 5 & -2 \\ -5 & \lambda + 7 & -3 \\ -6 & 9 & \lambda - 4 \end{vmatrix} =$$

$$= (\lambda - 4)^2(\lambda + 7) + 90 + 90 - 12(\lambda + 7) + 25(\lambda - 4) + 27(\lambda - 4) =$$

$$= \lambda^3 - \lambda^2 = \lambda^2(\lambda - 1) \quad \longrightarrow \quad \begin{cases} \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = 1 \end{cases}$$

Теперь найдём ФСР:

$$A - \lambda_1 E = A \overset{\text{Элем. преобр.}}{\longmapsto} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{3} \\ 0 & 1 & -\frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \longrightarrow \quad v_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$A - \lambda_2 E = \begin{pmatrix} 3 & -5 & 2 \\ 5 & -8 & 3 \\ 6 & -9 & 3 \end{pmatrix} \xmapsto{\text{Элем. преобр.}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \longrightarrow \quad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Ответ.

а) Собственные значения:
$\lambda_1 = -2$, $\lambda_2 = 8$,
базисы подпространств:
$V_{\lambda 1} = \langle\{v_1\}\rangle$, $v_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$,
$V_{\lambda 2} = \langle\{v_2\}\rangle$, $v_2 = \begin{pmatrix} \frac{4}{3} \\ 1 \end{pmatrix}$,
собственные векторы:
$v_{\lambda 1} = x \cdot v_{\lambda 1}$,
$v_{\lambda 2} = x \cdot v_{\lambda 2}, x \in \mathbb{R}$

б) Собственные значения:
$\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 1$,
базисы подпространств:
$V_{\lambda 1} = \langle\{v_1\}\rangle$, $v_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \\ 1 \end{pmatrix}$,
$V_{\lambda 2} = \langle\{v_2\}\rangle$, $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$,
собственные векторы:
$v_{\lambda 1} = x \cdot v_{\lambda 1}$,
$v_{\lambda 2} = x \cdot v_{\lambda 2}, x \in \mathbb{R}$