«Линейная алгебра: Векторные пространства, базис, ранг»

Домашнее задание №3

Байдаков Илья

8 декабря 2021 г.

Задание 1

Используя формулы разложения определителя по строке/столбцу, вычислите следующий определитель:

$$\det\begin{pmatrix} a_0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ a_1 & t & -1 & 0 & 0 \\ a_2 & 0 & t & -1 & 0 \\ a_3 & 0 & 0 & t & -1 \\ a_4 & 0 & 0 & 0 & t \end{pmatrix}$$

Запишите ответ в виде многочлена от t.

Решение.
Воспользуемся формулой разложения по столбцу 1:

$$\det = a_0 \cdot A_{1,1} + a_1 \cdot A_{1,2} + a_2 \cdot A_{1,3} + a_3 \cdot A_{14} + a_4 \cdot A_{1,5} \qquad (*)$$

Посчитаем алгебраические дополнения:

$$A_{1,1} = (-1)^2 \begin{vmatrix} t & -1 & 0 & 0 \\ 0 & t & -1 & 0 \\ 0 & 0 & t & -1 \\ 0 & 0 & 0 & t \end{vmatrix} = t^4,$$

$$A_{1,2} = (-1)^3 \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & t & -1 & 0 \\ 0 & 0 & t & -1 \\ 0 & 0 & 0 & t \end{vmatrix} = t^3,$$

$$A_{1,3} = (-1)^4 \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ t & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & t & -1 \\ 0 & 0 & 0 & t \end{vmatrix} = \det \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ t & -1 \end{vmatrix} \cdot \det \begin{vmatrix} t & -1 \\ 0 & t \end{vmatrix} = 1 \cdot t^2 = t^2$$

$$A_{1,4} = (-1)^5 \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ t & -1 & 0 & 0 \\ 0 & t & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & t \end{vmatrix} = t,$$

$$A_{1,5} = (-1)^6 \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ t & -1 & 0 & 0 \\ 0 & t & -1 & 0 \\ 0 & 0 & t & -1 \end{vmatrix} = 1$$

Получаем ответ по формуле (*).

Ответ. $\det = f(t) = a_0 \cdot t^4 + a_1 \cdot t^3 + a_2 \cdot t^2 + a_3 \cdot t + a_4$

Задание 2

а) Пусть $V = M_2(\mathbb{R})$, $U = \{\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \mid a + d = 0\}$. Покажите, что U – подпространство V. Иными словами, нужно показать, что множество 2×2 матриц с нулевым следом является подпространством пространства всех вещественных 2×2 матриц (*следом* матрицы называется сумма элементов главной диагонали матрицы). Найдите размерность U и предъявите некоторый базис U.

б) В выбранном базисе найдите координаты матрицы $\left(\begin{smallmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ (то есть укажите, как эта матрица выражается через базисные).

Решение.
а) Если U - подпространство V, то выполняются следующие условия:

- Если $u, v \in U$, то и $u + v \in U$.
  В нашем случае, для произвольных матриц $u = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$ и $v = \left(\begin{smallmatrix} e & f \\ g & h \end{smallmatrix}\right)$ из U: матрица
  $$x = u + v = \left(\begin{smallmatrix} a+e & b+f \\ c+g & d+h \end{smallmatrix}\right) \in U,$$
  потому что:
  $$\begin{cases} a + d = 0 \\ e + h = 0 \end{cases} \longrightarrow (a + e) + (d + h) = 0$$

- Если $u \in U$,и $r \in \mathbb{R}$ то $r \cdot u \in U$.
  В нашем случае, для произвольной матрицы $u = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$ из U и $r \in \mathbb{R}$:
  $$r \cdot u = \begin{pmatrix} r \cdot a & r \cdot b \\ r \cdot c & r \cdot d \end{pmatrix} \in U,$$
  потому что
  $$a + d = 0 \longrightarrow r \cdot a + r \cdot d = 0$$

Поскольку эти два условия выполняются, то U – подпространство V.

Пример базиса U:

$$S_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, S_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, S_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Размерность U равна числу элементов в его базисе, т.е. $\dim U = 3$
б) Матрица $\left(\begin{smallmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ через указанный выше базис выражается так:

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = S_1 \cdot (-1) + S_2 \cdot 2 + S_3 \cdot 3.$$

Задание 3

Найдите все значения $\lambda \in \mathbb{R}$, при которых вектор v линейно выражается через векторы a_1, a_2, a_3, где

$$a_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix},\ a_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ 8 \end{pmatrix},\ a_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -6 \\ 1 \end{pmatrix},\ v = \begin{pmatrix} 7 \\ -2 \\ \lambda \end{pmatrix}.$$

Решение.

Вектор v линейно выражается через векторы a_1, a_2, a_3, когда у этой системы есть решения:

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 7 \\ 3x_1 + 7x_2 + -6x_3 = -2 \qquad (*) \\ 5x_1 + 8x_2 + x_3 = \lambda \end{cases}$$

Перепишем в матричном виде:

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 7 & -6 \\ 5 & 8 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ -2 \\ \lambda \end{pmatrix}$$

Решим систему для известных значений вектора v:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 1 & 7 \\ 3 & 7 & -6 & -2 \end{array}\right) \xmapsto{II-I} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 1 & 7 \\ 1 & 4 & -7 & -9 \end{array}\right) \longmapsto$$

$$\xmapsto{I-II} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 8 & 16 \\ 1 & 4 & -7 & -9 \end{array}\right) \xmapsto{II-I} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 8 & 16 \\ 0 & 5 & -15 & -25 \end{array}\right) \longmapsto$$

$$\xmapsto{I+II\cdot\frac{1}{5}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 5 & 11 \\ 0 & 5 & -15 & -25 \end{array}\right) \xmapsto{II\cdot\frac{1}{5}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 5 & 11 \\ 0 & 1 & -3 & -5 \end{array}\right)$$

Имеем x_1 и x_2 главными переменными, а x_3 — свободной. Полученная матрица соответствует системе уравнений:

$$\begin{cases} x_1 + 5x_3 = 11 \\ x_2 - 3x_3 = -5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 11 - 5x_3 \\ x_2 = -5 + 3x_3 \end{cases}, \qquad x_3 \in \mathbb{R}.$$

При таких значениях x_1, x_2 и x_3 вектор v линейно выражается через a_1, a_2, a_3. Посмотрим, какие значения при этом будет принимать λ, подставив найденные значения в (*):

$$\lambda = 5x_1 + 8x_2 + x_3 = 5(11 - 5x_3) + 8(-5 + 3x_3) + x_3 =$$

$$= 55 - 25x_3 - 40 + 24x_3 + x_3 = 15$$

Таким образом, вектор v линейно выражается через векторы a_1, a_2, a_3 при $\lambda = 15$.
Ответ. $\lambda = 15$.

Задание 4

Найдите какой-нибудь базис системы векторов и выразите через него все остальные векторы системы:
$a_1 = (2, -1, 3, 5)$, $a_2 = (4, -3, 1, 3)$, $a_3 = (3, -2, 3, 4)$,
$a_4 = (4, -1, 15, 17)$, $a_5 = (7, -6, -7, 0)$.
Решение.
Запишем векторы по строкам в матрицу:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 & 4 & 7 \\ -1 & -3 & -2 & -1 & -6 \\ 3 & 1 & 3 & 15 & -7 \\ 5 & 3 & 4 & 17 & 0 \end{pmatrix}$$

Приведём её элементарными преобразованиями строк к каноническому ступенчатому виду:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 & 4 & 7 \\ -1 & -3 & -2 & -1 & -6 \\ 3 & 1 & 3 & 15 & -7 \\ 5 & 3 & 4 & 17 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Поскольку при преобразовании к ступенчатому виду одна из координат оказалась «утеряна», то в качестве базисных возьмём те вектора, которые соответствуют главным координатам матрицы A' в исходной матрице A.

Итак, базис исходной системы векторов:

$$a_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}, a_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, a_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Выразим через этот базис все остальные векторы системы:

$$2a_1 - 3a_2 + 4a_3 = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 15 \\ 17 \end{pmatrix} = a_4,$$

и последний

$$a_1 + 5a_2 - 5a_3 = \begin{pmatrix} 7 \\ -6 \\ -7 \\ 0 \end{pmatrix} = a_5.$$

Задание 5

Для каждого значения $\lambda \in \mathbb{R}$ найдите ранг матрицы

$$A = \begin{pmatrix} -\lambda & 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & -\lambda & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & -\lambda & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & -\lambda & 1 \end{pmatrix}.$$

Решение.
Рассмотрим подматрицу B максимального размера:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ -\lambda & 3 & 2 & 1 \\ 3 & -\lambda & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -\lambda & 1 \end{pmatrix}.$$

Если B обратима для некоторых λ, значит, для этих λ минорный ранг матрицы A будет равен максимально возможному, т.е. 4.

Приведём B к треугольному виду:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ -\lambda & 3 & 2 & 1 \\ 3 & -\lambda & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -\lambda & 1 \end{pmatrix} \overset{III-I}{\longmapsto} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ -\lambda & 3 & 2 & 1 \\ 2 & -\lambda-2 & -2 & 0 \\ 2 & 1 & -\lambda & 1 \end{pmatrix} \longmapsto$$

$$\overset{II-I}{\longmapsto} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ -\lambda-1 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & -\lambda-2 & -2 & 0 \\ 2 & 1 & -\lambda & 1 \end{pmatrix} \overset{I-IV}{\longmapsto} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 3+\lambda & 0 \\ -\lambda-1 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & -\lambda-2 & -2 & 0 \\ 2 & 1 & -\lambda & 1 \end{pmatrix} \longmapsto$$

$$\overset{II-III\cdot\frac{1}{2}}{\longmapsto} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 3+\lambda & 0 \\ -\lambda-2 & \frac{1}{2}\lambda+2 & 0 & 0 \\ 2 & -\lambda-2 & -2 & 0 \\ 2 & 1 & -\lambda & 1 \end{pmatrix} \underset{\lambda\neq-4}{\overset{II\cdot\frac{2}{(\lambda+4)}}{\longmapsto}} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 3+\lambda & 0 \\ -\frac{2(\lambda+2)}{(\lambda+4)} & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -\lambda-2 & -2 & 0 \\ 2 & 1 & -\lambda & 1 \end{pmatrix} \longmapsto$$

$$\overset{I-II}{\longmapsto} \begin{pmatrix} \frac{2(\lambda+2)}{(\lambda+4)}-1 & 0 & 3+\lambda & 0 \\ -\frac{2(\lambda+2)}{(\lambda+4)} & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -(\lambda+2) & -2 & 0 \\ 2 & 1 & -\lambda & 1 \end{pmatrix} \underset{\lambda\neq-2}{\overset{III\cdot\frac{1}{(\lambda+2)}}{\longmapsto}} \begin{pmatrix} \frac{2(\lambda+2)}{(\lambda+4)}-1 & 0 & 3+\lambda & 0 \\ -\frac{2(\lambda+2)}{(\lambda+4)} & 1 & 0 & 0 \\ \frac{2}{(\lambda+2)} & -1 & -\frac{2}{(\lambda+2)} & 0 \\ 2 & 1 & -\lambda & 1 \end{pmatrix} \longmapsto$$

$$\overset{III+II}{\longmapsto} \begin{pmatrix} \frac{2(\lambda+2)}{(\lambda+4)}-1 & 0 & 3+\lambda & 0 \\ -\frac{2(\lambda+2)}{(\lambda+4)} & 1 & 0 & 0 \\ \frac{2}{(\lambda+2)}-\frac{2(\lambda+2)}{(\lambda+4)} & 0 & -\frac{2}{(\lambda+2)} & 0 \\ 2 & 1 & -\lambda & 1 \end{pmatrix} \overset{III\cdot(-\frac{(\lambda+2)}{2})}{\longmapsto} \begin{pmatrix} \frac{2(\lambda+2)}{(\lambda+4)}-1 & 0 & 3+\lambda & 0 \\ -\frac{2(\lambda+2)}{(\lambda+4)} & 1 & 0 & 0 \\ \frac{(\lambda+2)^2}{(\lambda+4)}-1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -\lambda & 1 \end{pmatrix} \longmapsto$$

$$\xmapsto{I-III\cdot(\lambda+3)} \begin{pmatrix} \frac{2(\lambda+2)}{(\lambda+4)} - 1 + (\lambda+3) - \frac{(\lambda+2)^2}{(\lambda+4)} \cdot (\lambda+3) & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{2(\lambda+2)}{(\lambda+4)} & 1 & 0 & 0 \\ \frac{(\lambda+2)^2}{(\lambda+4)} - 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -\lambda & 1 \end{pmatrix}$$

Мы привели подматрицу B к треугольному виду, в котором только один элемент на главной диагонали зависит от λ, при этом в выводе не допускалось, что $\lambda = -4$ и $\lambda = -2$. Если a_{11} этой подматрицы не равен нулю для каких-либо λ, то для этих λ выполняется: $\det B \neq 0 \longrightarrow$ $\longrightarrow \text{rk } B = 4 \longrightarrow \text{rk } A = 4$.

Решим уравнение $a_{11} = 0$:

$$\frac{2(\lambda+2)}{(\lambda+4)} - 1 + (3+\lambda) - \frac{(\lambda+2)^2}{(\lambda+4)} \cdot (3+\lambda) = 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{2(\lambda+2) - (\lambda+2)^2(3+\lambda)}{(\lambda+4)} + \lambda + 2 = 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{2(\lambda+2) - (\lambda+2)^2(3+\lambda) + (\lambda+2)(\lambda+4)}{(\lambda+4)} = 0 \quad \longrightarrow$$

$$\longrightarrow \quad 2(\lambda+2) - (\lambda+2)^2(3+\lambda) + (\lambda+2)(\lambda+4) = 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad (\lambda+2)[2 - (\lambda+2)(3+\lambda) + (\lambda+4)] = 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad (\lambda+2)(-\lambda^2 - 4\lambda) = 0 \quad \longrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} \lambda + 2 = 0 \\ -\lambda(\lambda+4) = 0 \end{array}\right. \quad \longrightarrow$$

$$\longrightarrow \left[\begin{array}{l} \lambda = -2 \\ \lambda = 0 \\ \lambda = -4 \end{array}\right. .$$

Так мы доказали, что ранг матрицы A равен 4 для всех значений $\lambda \in \mathbb{R}$, кроме $\lambda = 0$, $\lambda = -2$ и $\lambda = -4$, для которых ранг пока неизвестен.

Для оставшихся значений посчитаем ранг матрицы A приведением к ступенчатому виду:

Для $\lambda = 0$:

$$A_{\lambda=0} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 0 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 & 1 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \longmapsto \text{rk } A_{\lambda=0} = 3.$$

Для $\lambda = -2$:

$$A_{\lambda=-2} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & -2 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & -2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{4} \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \longmapsto \text{rk } A_{\lambda=-2} = 3.$$

Для $\lambda = -4$:

$$A_{\lambda=-4} = \begin{pmatrix} -4 & 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & -4 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & -4 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & -4 & 1 \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{5} \\ 0 & 1 & 0 & 1 & \frac{1}{5} \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \longmapsto \text{rk } A_{\lambda=-4} = 3.$$

Теперь все значения $\lambda \in \mathbb{R}$ рассмотрены.

Ответ. rk $A = 3$ при $\lambda = 0$, $\lambda = -2$ и $\lambda = -4$. Для других $\lambda \in \mathbb{R}$ будет rk $A = 4$.

Задание 6

Известно, что присоединенная к A матрица (то есть транспонированная матрица алгебраических дополнений) равна

$$\widehat{A} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 3 & -4 & 3 \\ -9 & 10 & -7 \end{pmatrix}.$$

Чему может равняться матрица A?

Решение.

Запишем формулу для явного вида обратной матрицы:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\widehat{A},$$

отсюда

$$\widehat{A} = A^{-1} \cdot \det A.$$

Если матрица $\widehat{A}$ обратима, то будет справедливо равенство:

$$(\widehat{A})^{-1} \cdot \widehat{A} = E \quad \longrightarrow \quad (\widehat{A})^{-1} A^{-1} \cdot \det A = E.$$

Сравнивая это равенство с равенством $A \cdot A^{-1} = E$, находим, что

$$A = (\widehat{A})^{-1} \cdot \det A,$$

т.е. найдя $(\widehat{A})^{-1}$, мы будем знать матрицу A с точностью до умножения на константу. Найдём $(\widehat{A})^{-1}$:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & -4 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ -9 & 10 & -7 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xmapsto{III+3\cdot II} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & -4 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & 0 & 3 & 1 \end{array}\right) \longmapsto$$

$$\xmapsto{I-III} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 1 & -3 & -1 \\ 3 & -4 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & 0 & 3 & 1 \end{array}\right) \xmapsto{II-3\cdot I} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 1 & -3 & -1 \\ 0 & -4 & 6 & -3 & 10 & 3 \\ 0 & -2 & 2 & 0 & 3 & 1 \end{array}\right) \longmapsto$$

$$\xmapsto{II-3\cdot III} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 1 & -3 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & 0 & 3 & 1 \end{array}\right) \xmapsto{II\cdot\frac{1}{2}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 1 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -2 & 2 & 0 & 3 & 1 \end{array}\right) \longmapsto$$

$$\xmapsto{III+2\cdot II} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 1 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -3 & 4 & 1 \end{array}\right) \xmapsto{III\cdot\frac{1}{2}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 1 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{3}{2} & 2 & \frac{1}{2} \end{array}\right) \longmapsto$$

$$\xmapsto{I+III} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & -1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{3}{2} & 2 & \frac{1}{2} \end{array}\right) \longmapsto (\widehat{A})^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -1 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{3}{2} & 2 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Таким образом,

$$A = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -1 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{3}{2} & 2 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \cdot \det A.$$

Предположим, что у A были целочисленные коэффициенты. В таком случае $\det A = 2 \cdot n$, где $n \in \mathbb{R}$. Тогда при $n = 1$, что соответствует $\det A = 2$, будем иметь первую матрицу-«претендент»:

$$A_{run1} = \begin{pmatrix} -1 & -2 & -1 \\ -3 & 1 & 0 \\ -3 & 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

Проверим A_{run1} на соответствие условию задачи, составив транспонированную матрицу её алгебраических дополнений:

$$\widehat{A_{run1}} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 3 & -4 & 3 \\ -9 & 10 & -7 \end{pmatrix} = \widehat{A}.$$

Равенство выполнилось. Следовательно, исходная матрица действительно может иметь такой вид, как A_{run1}.

Ответ. A может равняться $\begin{pmatrix} -1 & -2 & -1 \\ -3 & 1 & 0 \\ -3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$.