第2問

$$\xi = \cos\frac{2\pi}{N} + i\sin\frac{2\pi}{N}$$

$$X_k = \sum_{n=0}^{N-1} x_n \xi^{-nk}$$

(1) $\xi^N = 1$ より.

$$X_{N-k} = \sum_{n=0}^{N-1} x_n \xi^{-n(N-k)} = \sum_{n=0}^{N-1} x_n \xi^{-n(-k)} = X_{-k} \quad \square$$

(2) $T = 8,\ N = 4,\ x_0 = 0,\ x_1 = 0,\ x_2 = 1,\ x_3 = 1$ である.

$t = 0 \quad 2 \quad 4 \quad 6$

また. $\xi = \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2} = i$.

$$X_0 = \sum_{n=0}^{3} x_n = 0 + 0 + 1 + 1 = 2.$$

$$X_1 = \sum_{n=0}^{3} x_n \xi^{-n} = \xi^{-2} + \xi^{-3} = i^{-2} + i^{-3} = -1 + i$$

$$X_{-1} = \sum_{n=0}^{3} x_n \xi^{-n} = \xi^{2} + \xi^{3} = i^{2} + i^{3} = -1 - i$$

$$X_2 = X_{-2} = \sum_{n=0}^{3} x_n \xi^{2n} = \xi^4 + \xi^6 = i^4 + i^6 = 1 - 1 = 0$$

$$\therefore\ a_0 = \frac{1}{4}(X_0 + X_0) = 1.$$

$$a_1 = \frac{1}{4}(X_1 + X_{-1}) = \frac{1}{4}\{(-1+i) + (-1-i)\} = -\frac{1}{2}$$

$$a_2 = \frac{1}{4}(X_2 + X_{-2}) = 0.$$

$$b_1 = \frac{i}{4}(X_1 - X_{-1}) = \frac{i}{4}\{(-1+i) - (-1-i)\} = -\frac{1}{2}$$

以上より.

$$w(t) \fallingdotseq \frac{a_0}{2} + \left(a_1\cos\frac{\pi}{4}t + b_1\sin\frac{\pi}{4}t\right) + \frac{a_2}{2}\cos\frac{\pi}{2}t$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}t + \sin\frac{\pi}{4}t\right)$$

//

問題5.

(1). y_1, y_2, y_3 それぞれ $x_1, x_2, \cdots x_n$ への n 通りの移り方があるので

写像 $Y \to X$ の総数は $\underline{n^3}$ コ

$x_1, x_2, \cdots, x_n$ の n コのうち, y_1, y_2, y_3 から移る3要素の

選び方は $_nP_3 = n(n-1)(n-2)$ 通りあるので,

単射 $Y \to X$ の総数は $\underline{n(n-1)(n-2)}$ コ

($n=1, 2$ の時に存在しないことを明記してないので減点くらったはず)

(2) $x_1, x_2, \cdots, x_n$ それぞれ y_1, y_2, y_3 への 3通りの移り方があるので,

写像 $X \to Y$ の総数は $\underline{3^n}$ コ

全射の総数は, X の元が, Y の3つの元のうち, ちょうど1つまたは2つに移る場合の数を, 写像の総数 3^n から引いたものである.

i) Y の元のうち1つに移る場合は, y_1, y_2, y_3 のうちどれに移るかで 3通りある.

ii) Y の元のうち2つに移る場合は, y_1, y_2, y_3 のうちどの2つに移るかで $_3C_2 = 3$ 通りあり, その各々に対して, X の n コの元のうちどれから移ってきたかで $\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} {}_nC_k = 2^n - 2$ 通りある

以上より, 全射 $X \to Y$ の総数は

$$3^n - \{3 + 3(2^n - 2)\} = \underline{3^n - 3\cdot 2^n + 3} \text{ コ}$$

問題6

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

（この時点でミスってる (1,3) の余因子…）

(1) 固有値を λ とすると、

$$0 = |A - \lambda I| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 & 1 \\ 1 & -\lambda & 1 \\ 1 & -1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)\begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -1 & 2-\lambda \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (1-\lambda)(\lambda^2 - 2\lambda + 2)$$

$$\therefore \lambda = 1,\ 1 \pm i.$$

$\lambda = 1$ の時、

$$A - \lambda I = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \therefore \text{固有ベクトル} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$\lambda = 1 + i$ の時、

$$A - \lambda I = \begin{pmatrix} -i & -1 & 1 \\ 1 & -1-i & 1 \\ 1 & 1 & 1-i \end{pmatrix} \longrightarrow ???$$

（分かるはずがない）

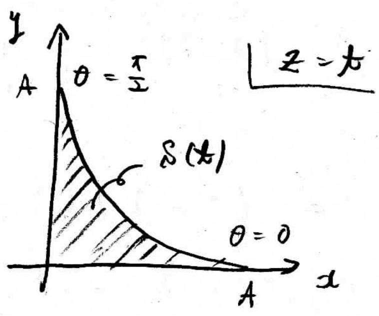
問題7.

$$x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}+z^{\frac{2}{3}}\leq 1.$$

図形の対称性より、求めるVは、与えられた図形のうち $x\geq 0,\ y\geq 0,\ z\geq 0$ の部分Fの体積 v を8倍したものである。

Fを平面 $z=t$ $(0\leq t\leq 1)$ で切ると、断面は

$$x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}\leq 1-t^{\frac{2}{3}} =: A^{\frac{2}{3}} \quad (x\geq 0,\ y\geq 0)$$



$x=A\cos^3\theta,\ y=A\sin^3\theta$ とおくと、

$dx=-3A\cos^2\theta\sin\theta\,d\theta$ で、Fの断面積 $S(t)$ は、

$$S(t)=\int_0^A y\,dx=\int_{\frac{\pi}{2}}^{0}A\sin^3\theta\cdot(-3A\cos^2\theta\sin\theta)\,d\theta$$

$$=3A^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin^4\theta-\sin^6\theta)\,d\theta=3A^2\left(\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}-\frac{5}{6}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{2}$$

$$=\frac{3}{32}\pi A^2=\frac{3}{32}\pi\left(1-t^{\frac{2}{3}}\right)^3$$

よって

$$v=\int_0^1 S(t)\,dt=\frac{3}{32}\pi\int_0^1\left(1-t^{\frac{2}{3}}\right)^3dt$$

$$=\frac{3}{32}\pi\int_0^1\left(1-3t^{\frac{2}{3}}+3t^{\frac{4}{3}}-t^2\right)dt$$

$$=\frac{3}{32}\pi\left[t-\frac{9}{5}t^{\frac{5}{3}}+\frac{9}{7}t^{\frac{7}{3}}-\frac{1}{3}t^3\right]_0^1$$

$$=\frac{\pi}{70}$$

以上より

$$V=8v=\frac{4}{35}\pi$$ //