Material do estudante - Tutoria MA111 e MA141

Leonardo Barichello

1 de Julho de 2019

1 Introdução

APRESENTAÇÃO

Este material foi desenvolvido para estudantes ingressantes de cursos de Exatas que devem apresentar lacunas que conteúdo que podem comprometer o seu rendimento nas disciplinas de Cálculo Diferencial e Integral e Geometria Analítica.

Temos três grandes objetivos com esse projeto. Primeiro, reforçar alguns tópicos matemáticos importantes do Ensino Médio. Segundo, reforçar a conexão entre o que você aprendeu nos últimos anos com o que será ensinado nessas disciplinas. Terceiro, criar um espaço para que o estudante estude ativamente com suporte de um tutor.

A tutoria consiste em 3 horas de atividades semanais (cheque no seu horário como elas estão distribuídas), sempre em pequenos grupos acompanhados por um tutor. Todos os encontros seguirão atividades propostas em cadernos especialmente desenvolvidos de acordo com o objetivo da iniciativa e acompanhando de perto o conteúdo das disciplinas principais.

O QUE ESPERAMOS DE VOCÊ

Vá com calma. A quantidade de atividades propostas foi pensada para que haja tempo para resolver todas as questões durante os encontros. Portanto, não corra. Leia atentamente as questões e os textos explicativos antes e depois delas. Uma grande parte da aprendizagem esperada vem dessas explicações. Caso você não termine algum capítulo, não se preocupe. É mais importante que você compreenda cada tópico visto do que chegue ao final apressadamente.

Seja ativo. Ao ler o material, tenha certeza de que você entendeu o conteúdo. Volte e cheque as referências, refaça cálculos se for necessário e faça anotações. Jamais deixe de registrar o processo de resolução de uma questão de modo que você consiga relê-lo no futuro se desejar. Recomendamos que você faça anotações tanto no texto quanto nas suas resoluções que lhe permitam tanto entender melhor o que foi feito quanto re-entender caso um dia você o consulte novamente.

Pergunte. Peça ajuda aos colegas e ao seu tutor caso não tenha conseguido entender alguma coisa. Não se sinta inibido, pois outros colegas podem ter as mesmas dúvidas que você ou serem capazes de ter explicar algo a partir de um ponto muito parecido com o que você está agora. Mas, ao invés de respostas prontas, procure sugestões ou esclarecimentos que lhe permitam resolver as questões e entender os conceitos de maneira independente.

Mantenha o engajamento. Se você não conseguir terminar algum capítulo, não se preocupe. Este material foi concebido pensando nessa possibilidade: todo trabalho feito aqui deve te ajudar nas disciplinas principais cedo ou tarde. Por outro lado, se em algum momento o conteúdo parecer inútil ou muito fácil, mantenha o engajamento pois os tópicos foram cuidadosamente escolhidos e você notará o efeito do material em breve.

Registre o seu progresso. Não deixe de registrar o seu progresso ao final de cada capítulo. Isso é importante para podermos avaliar o quão bem a iniciativa está funcionando e para que você não deixe de completar as atividades propostas.

Reflita. Haverão questões explicitamente focadas em lhe fazer refletir sobre os tópicos discutidos e oportunidades para que você pense sobre o que você sabe, o quanto aprendeu e o que pode fazer para melhorar. Essas habilidades são importantes, não as menospreze!

Não negligencie as disciplinas principais. O objetivo da tutoria é te ajudar com as duas disciplinas principais e não ser mais um disciplinas por si só. Use o tempo da tutoria para a tutoria, mas não retire tempo de estudo das principais para investir na tutoria. Se a carga de trabalho estiver demais, conversa com seu tutor.

ESTRUTURA DO MATERIAL

A maioria dos capítulos deste material, a partir do próximo, segue a mesma estrutura:

1. Apresentação: explicando porque o tópico em questão foi escolhido para o material e em que ele deve te ajudar nas disciplinas de Cálculo Diferencial e Integral e Geometria Analítica;

2. Pré-requisitos e Auto-avaliação inicial: explicando quais são os pré-requisitos do capítulo, que eventualmente precisam ser estudados antes dos encontros, e oferecendo uma oportunidade para você refletir sobre o seu conhecimento em Matemática;

3. Avaliação Diagnóstica: para que você inicie as atividades do capítulo em um ponto compatível com o seu conhecimento. Dê o seu melhor e a resolva sozinho. Essa avaliação deve ser resolvida ao final do último encontro do capítulo anterior. Assim, você pode aproveitar os dias antes do próximo encontro para estudar os pré-requisitos e os tópicos que foram difíceis pra você na Avaliação Diagnóstica;

4. Questões: onde se concentra a maior parte do conteúdo, formado por questões e por texto discutindo os tópicos em pauta;

5. Rumo ao livro texto: com o objetivo de propor questões ou leituras que explicitamente conectem o trabalho que você acabou de fazer com o livros-texto das disciplinas oficiais;

6. Gabarito: contém as respostas para quase todas as questões. Use para checar as suas respostas quando você terminar de resolver uma questão, não para copiar a resposta final ou para "forçar" o caminho da resolução;

7. Registro de progresso: para que você registre quais questões resolveu (não importa se certo ou errado). Essa seção é importante para que possamos acompanhar a implementação do projeto e aprimorar o material;

8. Auto-avaliação final: oferecendo uma oportunidade para você comparar a sua evolução e traçar metas de estudo.

REFERÊNCIAS ESSENCIAIS

Este material é bastante auto-contido, mas alguns outros livros serão referenciados tanto para sugerir leituras que expliquem tópicos não cobertos pelo material quanto para indicar leituras de aprofundamento ou continuidade.

A lista a seguir contém todas as referências que serão usadas ao longo do material. Sugerimos que você tenha esses materiais disponíveis durante as atividades da tutoria. Todos podem ser encontrados na biblioteca ou na internet.

- O livro digital Matemática Básica volume 1, de Francisco Magalhães Gomes, professor do IMECC. Disponível em http://www.ime.unicamp.br/ chico

- O livro digital Matrizes, Vetores e Geometria Analítica, de Reginaldo J. Santos. Disponível em www.mat.ufmg.br/ regi

- O livro físico Álgebra Linear, de José Luiz Boldrini e outros. Amplamente disponível na biblioteca.

Existem também diversos portais com vídeos abordando tópicos de matemática na internet. Enquanto vários deles são bons, alguns não são. A sugestão que fazemos é o Portal do Saber (portaldosaber.obmep.org.br). Ele se destaca pela organização, qualidade dos vídeos, recursos disponíveis e uniformidade do material.

2 Matrizes 2x2

APRESENTAÇÃO

Matrizes são o objeto central de duas disciplinas fundamentais para quase todos os cursos de exatas no Ensino Superior, Geometria Analítica e Álgebra Linear, além de ferramenta imprescindível para diversas aplicações simples e avançadas nas mais diversas áreas.

O objetivo deste capítulo é revisitar as principais propriedades de matrizes focando em matrizes pequenas, de tamanho 2x2. Apesar de se tratar de um caso específico, as matrizes 2x2 permitem a exploração de quase todas as propriedades e operações que são estudadas nas duas disciplinas mencionadas acima e trazem duas outras facilidades: reduzem o volume de cálculos e manipulações algébricas envolvidos na resolução das questões e permitem a visualização geométrica de certos cenários. A intenção por trás deste capítulo é, portanto, usar essas vantagens para preparar o terreno para o trabalho com matrizes de dimensões maiores em Geometria Analítica.

Você raramente encontrará matrizes 2x2 nos livros-texto, mas caso você esteja com dificuldade para resolver algum exercício pode valer a pena pensar no caso 2x2 e depois tentar expandi-lo para a questão original.

PRÉ-REQUISITOS E AUTO-AVALIAÇÃO INICIAL

Os pré-requisitos para este capítulo são:

- O conceito de matrizes;
- Operações básicas com matrizes.

Esses tópicos não serão cobertos durante as atividades de tutoria. Se você acha que não sabe o suficiente sobre algum deles, sugerimos que se procure material de apoio antes de começar a resolver as questões desse capítulo.

QUESTÕES DIAGNÓSTICAS

D1 Seja $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 6 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$, calcule:

a) $3A - B$

b) AB (multiplicação da matriz A pela matriz B)

c) A^{-1}

d) $\det(A)$.

QUESTÕES

Lembre-se de checar com seu tutor em que questão você deve começar.

Primeiras operações

Os exemplos a seguir ilustram duas operações envolvendo matrizes, a soma e a multiplicação por um número real.

Exemplo de soma de matrizes:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & 10 \\ 5 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 11 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

Exemplo de multiplicação por escalar:

$$3\begin{pmatrix} 1 & \sqrt{2} \\ 3 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \cdot 1 & 3 \cdot \sqrt{2} \\ 3 \cdot 3 & 3 \cdot -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 3\sqrt{2} \\ 9 & -12 \end{pmatrix}$$

Use esses exemplos como referência para a resoluão da questão a seguir.

Q1 Considerando as matrizes $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$ e $C = \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$, realize as operações indicadas abaixo.

a) $A + B$

b) $C - B$

c) $5C + A$

d) $3B + \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ \frac{2}{3} & -1 \end{pmatrix}$

Multiplicação de matrizes

Na questão anterior você realizou somas de matrizes e multiplicação por um número real e ambas as operações são feitas de maneira bastante direta: somamos (ou subtraímos) os elementos das matrizes um a um e multiplicamos os elementos da matriz pelo escalar dado. Na próxima questão, introduziremos a multiplicação entre matrizes (às vezes denotada $A \times B$, $A \cdot B$ ou simplesmente AB).

Essa operação tem duas diferenças importantes. Primeiro, o procedimento para executá-lo (mostrado abaixo) é um pouco mais longo do que os anteriores. Segundo, nem todas as propriedades da multiplicação de números reais vale para a multiplicação de matrizes.

Exemplo de multiplicação de matrizes:

$$\begin{pmatrix} 6 & 4 \\ 5 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 9 & 2 \\ 7 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \cdot 9 + 4 \cdot 7 & 6 \cdot 2 + 4 \cdot 1 \\ 5 \cdot 9 + (-3) \cdot 7 & 5 \cdot 2 + (-3) \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 82 & 16 \\ 24 & 7 \end{pmatrix}$$

Se a leitura do exemplo acima não o fez lembrar como multiplicar matrizes ou se você nunca estudou esse tópico, leia a seção 1.3.6 do livro Álgebra Linear antes de resolver a questão abaixo.

Q2 Considerando as matrizes $D = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$, $E = \begin{pmatrix} 7 & 8 \\ 9 & 10 \end{pmatrix}$ e $F = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$, realize as operações indicadas abaixo.

a) DE

b) EF

c) FE

d) FD

Observe que os resultados obtidos nos itens b e c da questão anterior são diferentes. Esse caso ilustra uma propriedade importante da multiplicação de matrizes. Ao contrário dos números reais, onde $a \times b = b \times a$ para quaisquer valores de a e b, no universo das matrizes isso nem sempre é verdade. Para alguns casos isso pode ocorrer (você verá um caso desses no final deste capítulo), mas não se trata de uma regra geral. Por isso, **a ordem das matrizes ao executar uma multiplicação é importante**.

Propriedades da multiplicação de matrizes

Q3 Usando as matrizes definidas nas duas questões anteriores, realize os cálculos indicados abaixo.

a) A^2, lembre-se de que $A^2 = A \times A$.

b) $B \times C - D^2$

c) $F \times (E - A)$

O item c dessa questão pode ser resolvido de duas maneiras: primeiro realizar a soma dentro dos parênteses ou então usar a propriedade distributiva: $F \times (E - A) = F \times E - F \times A$. Note que caso você opte pelo segundo caminho, a matriz F está multiplicando o parênteses pela esquerda, portanto, deve multiplicar as matrizes E e A também pela esquerda.

Igualdade

Assim como com números reais, também é possível criar equações com matrizes, e para resolvê-las é necessário saber o significado da igualdade quando os elementos envolvidos são matrizes. Essencialmente, se duas matrizes são iguais, os termos que ocupam as mesmas posições em cada uma das matrizes devem ser iguais.

Q4 Determine o valor das incógnitas em cada uma das equações abaixo.

a) $$\begin{pmatrix} 2 & x \\ 3y-1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 7 & z^2-25 \end{pmatrix}$$

b) $$3\begin{pmatrix} -1 & t \\ 0 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ \frac{1}{2} & 0,6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 8 \\ \frac{1}{2} & 9,6 \end{pmatrix}$$

Igualdade, parte 2

Nos casos anteriores, as incógnitas eram elementos de algumas das matrizes envolvidas. Em certas situações a incógnita pode ser a matriz completa. Nesse caso, pode ser útil usar uma matriz genérica, como $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, no tamanho adequado e determinar o valor de cada uma de suas entradas. Use essa estratégia na próxima questão.

Q5 Determine as matrizes M e N que satisfazem as igualdades a seguir.

a) $$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \times M = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ \frac{1}{2} & 4 \end{pmatrix}$$

b) $$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \times N = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Matriz inversa

No item b da questão anterior, a matriz à direita do sinal de igual é chamada de **matriz identidade** (os elementos da diagonal principal são iguais a um e os demais são todos iguais a zero), ou simplesmente I. Quando uma matriz qualquer é multiplicada por I, o resultado é igual à matriz inicial, ou seja, essa matriz se comporta como o número 1 entre os números reais ($a \times 1 = a$). Em contextos mais gerais, esse tipo de elemento é chamado de **elemento neutro da operação**.

Além disso, a matriz N, que você obteve como resposta do item b, é chamada de *inversa* da matriz $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, pois $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \times N$ é igual a I, o "1 das matrizes".

Note que essa definição de inversa é similar ao inverso de um número real: o inverso de 3 é $\frac{1}{3}$, pois $3 \times \frac{1}{3} = 1$. Em termos gerais, a matriz inversa de uma matriz dada A é denotada por A^{-1} e escreve-se que $AA^{-1} = I$.

Matrizes inversas serão muito usadas ao longo das disciplinas de Geometria Analítica e Álgebra Linear, portanto, é importante que você saiba como obtê-las.

Por exemplo, se quisermos obter a matriz inversa A^{-1} da matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$, devemos resolver a seguinte igualdade:

$$A \times A^{-1} = I \longrightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

REFLITA → *Antes de resolver a questão abaixo, descreva textualmente* *como você deve proceder para terminar de resolver o exemplo logo acima. Tente cobrir todos os passos do processo, do início até a obtenção da solução.*

Q6 Determine, se possível, a matriz inversa da:

a) matriz A usada no exemplo logo acima.

b) matriz D da questão 2.

c) da matriz $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -6 & 3 \end{pmatrix}$.

Como você deve ter notado no item c acima, **nem toda matriz tem uma inversa**. Entre os números reais, isso ocorre apenas com o número 0, mas entre as matrizes várias não possuem inversa. Isso não é um problema, mas diz muito sobre a matriz em questão. Veremos mais adiante como identificar quais matrizes possuem ou não uma inversa.

Determinante

Determinante é uma operação que associa toda matriz quadrada a um número real. Durante o Ensino Médio, pouco se discute o significado dessa operação e o foco recai quase que totalmente no procedimento para o cálculo do determinante de certas matrizes quadradas. Em Geometria Analítica e Álgebra Linear o significado do determinante será mais importante, mas para compreendê-lo é necessário dominar o procedimento.

Exemplo de cálculo do determinante de uma matriz:

$$\text{Det}\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} = (2 \cdot 5) - (3 \cdot 4) = 10 - 12 = -2$$

Se você nunca calculou o determinante de uma matriz 2x2, peça ao seu tutor ou a um colega que lhe explique o procedimento exemplificado acima. Por enquanto, é necessário apenas saber como calculá-lo, pois o seu significado será discutido nas questões que virão.

Q7 Calcule o determinante das seguinte matrizes.

a) matriz A da questão 1.

b) matriz E da questão 2.

c) $\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 1 \\ \frac{1}{2} & 2 \end{pmatrix}$

d) matriz do item c da questão anterior.

Note que a única matriz com determinante igual a zero foi a matriz que vimos anteriormente não possuir inversa. Isso não é uma coincidência, mas uma das propriedades mais importantes do determinante. Essa propriedade pode ser descrita informalmente da seguinte maneira: toda matriz com determinante diferente de zero tem inversa e toda matriz com determinante igual a zero não tem inversa. Usando linguagem matemática mais formal, esse resultado seria descrito da seguinte maneira.

TEOREMA → *Uma matriz quadrada é invertível se, e somente se, seu determinante é diferente de zero.*

A expressão “se, e somente se” é bastante comum em textos matemáticos formais e significa (usando esse caso como exemplo) que:

1. Se sabemos que uma matriz é invertível, podemos concluir que seu determinante é diferente de zero, e

2. Se sabemos que uma matriz tem determinante diferente de zero, podemos concluir que ela é invertível.

Esse resultado também pode ser descrito em termos das matrizes com determinante igual a zero:

1. Se sabemos que uma matriz tem determinante igual a zero, podemos concluir que ela não é invertível, e

2. Se sabemos que uma matriz não é invertível, podemos concluir que seu determinante é igual a zero.

Determinantes e matrizes inversas

Q8 Considere a matriz $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & m \end{pmatrix}$.

a) Qual deve ser o valor de m para que o determinante dessa matriz seja igual a 0?

b) Tente obter a matriz M^{-1} para o valor de m obtido no item anterior.

c) Escolha um valor para m que seja diferente do obtido no item a e obtenha M^{-1} para esse valor.

Não importa qual o valor escolhido no item c da questão anterior, se ele for diferente de 6 sempre será possível obter a matriz inversa de M, pois o determinante de M (denotado $\mathrm{Det}(M)$) será diferente de 0. Você pode checar essa conclusão com os valores escolhidos por outros colegas.

Matrizes e sistemas lineares

Considere a igualdade $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}$. Se tentarmos obter os valores de x e y, seguiremos os seguinte passos:

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 2x - 1y \\ 1x + 3y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Igualando termo a termo das matrizes dos dois lados da igualdade, chegamos nas equações $2x - 1y = 3$ e $1x + 3y = 5$, ou seja, resolver a equação matricial dada inicialmente é o mesmo que resolver o sistema de equações abaixo.

$$\begin{cases} 2x - 1y = 3 \\ 1x + 3y = 5 \end{cases}$$

Ver sistemas lineares como matrizes traz algumas vantagens, especialmente no caso de sistemas com mais incógnitas e equações. Por isso é importante que você esteja familiarizado com a ideia.

Q9 Resolva os sistemas lineares dados a seguir.

a) $\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 4 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ -2 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

Determinantes e sistemas lineares

Se você voltar à questão anterior e calcular o determinante das matrizes que multiplicam $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ notará que ambos são diferentes de 0. A seguir, veremos o que ocorre com sistemas obtidos a partit de uma matriz com determinante igual a 0.

Q10 Considere a matriz $S = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -4 & -8 \end{pmatrix}$

a) Calcule $\mathrm{Det}(S)$.

b) Resolva o sistema $S \times \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -15 \end{pmatrix}$

O fato de $\mathrm{Det}(S) = 0$ e de o sistema não admitir solução não é uma coincidência, mas sim um resultado muito importante sobre sistemas lineares: **matrizes com determinantes nulos levam a sistemas lineares sem solução única**.

Determinantes e sistemas lineares, parte 2

Q11 Use o critério discutido acima para determinar se os sistemas abaixo possuem ou não solução única.

a) $\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 5 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 9 & -6 \\ 6 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Finalizando

Q12 Considere a matriz $M = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$.

a) Calcule $\text{Det}(M)$.

b) Obtenha M^{-1}

c) Resolva $M \times \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 17 \end{pmatrix}$

RUMO AO LIVRO-TEXTO

Essa questão foi escolhida para explicar uma classe de questões muito comum em livros de Geometria Analítica: as do tipo “Mostre que”. Essas questões, de maneira geral, pedem que você mostre alguma propriedade que seja válida para contextos mais amplos. Na verdade, são “pequenos teoremas” que estão sendo descritos de maneira um pouco mais informal.

QUESTÃO RESOLVIDA → *Mostre que toda matriz* 2x2 *comuta com a matriz* $A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$ *na multiplicação.*

Essa questão pede que você mostre que a multiplicação de duas matrizes A e B, ambas 2x2, quando uma delas é da forma $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$, é **comutativa**, ou seja, $A \times B = B \times A$. Vimos anteriormente que isso não é verdadeiro para quaisquer matrizes, porém, pode ser verdade para alguns casos específicos, como o proposto na questão.

Para resolver a questão vamos criar uma matriz genérica M de dimensões 2x2: $M = \begin{pmatrix} m_{1,1} & m_{1,2} \\ m_{2,1} & m_{2,2} \end{pmatrix}$. Essa maneira de representar os elementos de uma matriz (usando a versão minúscula da letra que nomeia a matriz e índices para indicar a linha e a coluna de cada elemento no formato *linha, coluna*) é o mais comum, especialmente quando as matrizes tiverem tamanho maiores.

Agora, vamos entender como uma questão desse tipo pode ser resolvida. Note que você deve concluir que $A \times M = M \times A$, portanto, você não pode utilizar essa informação como ponto de partida ou durante a sua resolução. É importante que isso fique claro. Para fins de resolução desta questão, você quer mostrar que $A \times M$ é igual a $M \times A$, mas você ainda não sabe se isso é verdadeiro, por isso não pode utilizar essa informação.

Um erro comum entre estudantes que ainda não se acostumaram com esse tipo de questão é começar com a informação que deve ser demonstrada. Tipicamente, esses estudantes começariam a resolução da seguinte maneira:

$$M \times A = A \times M$$

$$\begin{pmatrix} m_{1,1} & m_{1,2} \\ m_{2,1} & m_{2,2} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} m_{1,1} & m_{1,2} \\ m_{2,1} & m_{2,2} \end{pmatrix}$$

E então fariam a multiplicação das matrizes com a intenção de chegar a resultados iguais dos dois lados da igualdade, o que de fato aconteceria. Mas isso está errado, pois a resolução começa usando a informação que deverá ser demonstrada, ou seja, começa usando uma informação que ainda não sabemos se é verdadeira. Porém, isso pode ser corrigido com uma mudança sutil, mas fundamental do ponto de vista matemático. Vamos começar checando qual seria o resultado de $A \times M$.

$$\begin{aligned} A \times M &= \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} m_{1,1} & m_{1,2} \\ m_{2,1} & m_{2,2} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a \cdot m_{1,1} + 0 \cdot m_{2,1} & a \cdot m_{1,2} + 0 \cdot m_{2,2} \\ 0 \cdot m_{1,1} + a \cdot m_{2,1} & 0 \cdot m_{1,2} + a \cdot m_{2,2} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a \cdot m_{1,1} & a \cdot m_{1,2} \\ a \cdot m_{2,1} & a \cdot m_{2,2} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Agora, verifiquemos o resultado de $M \times A$.

$$
\begin{aligned}
M \times A &= \begin{pmatrix} m_{1,1} & m_{1,2} \\ m_{2,1} & m_{2,2} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} a \cdot m_{1,1} + 0 \cdot m_{1,2} & 0 \cdot m_{1,1} + a \cdot m_{1,2} \\ a \cdot m_{2,1} + 0 \cdot m_{2,2} & 0 \cdot m_{2,1} + a \cdot m_{2,2} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} a \cdot m_{1,1} & a \cdot m_{1,2} \\ a \cdot m_{2,1} & a \cdot m_{2,2} \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

Note que todos os elementos das duas matrizes obtidas são iguais. Portanto, isso nos permite concluir que o primeiro resultado ($A \times M$) é igual ao segundo ($M \times A$), ou seja, que $A \times M = M \times A$, como foi pedido no enunciado.

O detalhe de não termos escrito a igualdade no início da resolução faz toda a diferença do ponto de vista lógico (não estamos usando algo que não sabemos se é ou não verdadeiro), apesar de fazer pouca diferença em termos dos cálculos realizados.

Agora, tente usar uma abordagem semelhante para a questão a seguir, retirada do livro Matrizes, Vetores e Geometria Analítica.

QUESTÃO DO LIVRO-TEXTO → *Mostre que a matriz* $X = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{y} \\ y & 1 \end{pmatrix}$, *em que* y *é um número real não nulo, verifica a equação* $X^2 = 2X$.

GABARITO

Confira as respostas para as questões e **não se esqueça de registrar o seu progresso**.

Q1 a) $\begin{pmatrix} 5 & 6 \\ -5 & 1 \end{pmatrix}$, b) $\begin{pmatrix} 2 & -6 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$, c) $\begin{pmatrix} 27 & -4 \\ 2 & -10 \end{pmatrix}$, d) $\begin{pmatrix} 14 & 15 \\ -16/3 & -4 \end{pmatrix}$.

Q2 a) $\begin{pmatrix} 41 & 46 \\ 73 & 82 \end{pmatrix}$, b) $\begin{pmatrix} -14 & -17 \\ -18 & -21 \end{pmatrix}$, c) $\begin{pmatrix} -5 & -6 \\ -27 & -30 \end{pmatrix}$, d) $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -12 & -15 \end{pmatrix}$.

Q3 a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -6 & -3 \end{pmatrix}$, b) $\begin{pmatrix} 4 & -34 \\ -39 & -33 \end{pmatrix}$, c) $\begin{pmatrix} 2 & -4 \\ -36 & -30 \end{pmatrix}$.

Q4 a) $x = 3$ e $y = 8/3$ e $z = \pm 5$, b) $t = 2$.

Q5 a) $\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -7/2 & 10 \end{pmatrix}$, b) $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix}$.

Q6 a) $\begin{pmatrix} 3/2 & -1/2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$, b) $\begin{pmatrix} -5/2 & 3/2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$, c) o sistema não tem solução.

Q7 a) 3, b) -2, c) $\frac{1}{6}$, d) 0.

Q8 a) $m = 6$, c) se $m = 1$ então a matriz inversa será $\begin{pmatrix} -1/5 & 2/5 \\ 3/5 & -1/5 \end{pmatrix}$.

Q9 a) $x = 1$ e $y = 2$, b) $x = \frac{3}{2}$ e $y = \frac{1}{2}$.

Q10 a) 0, b) sistema sem solução.

Q11 a) sim, b) não.

Q12 a) 7, b) $\begin{pmatrix} 3/7 & 1/7 \\ -1/7 & 2/7 \end{pmatrix}$, c) $x = 5$, $y = 4$.

AUTO-AVALIAÇÃO FINAL

Avalie o quanto você acha que sabe sobre os seguintes itens após ter resolvido as questões deste capítulo.

3 Potências, equações exponenciais e logaritmos

APRESENTAÇÃO

As disciplinas Cálculo Diferencial e Integral 1 e 2 têm como objeto central o conceito de função. Todas as definições e propriedades aprendidas ao longo dessas disciplinas visam construir duas transformações muito poderosas que podem ser aplicadas a funções: a derivação e a integração. Essas duas transformações emergiram durante o século XVI e permitiram um avanço enorme da matemática aplicada, impulsionando a revolução industral européia e o desenvolvimento de várias áreas da física, como a mecânica de Newton e o estudo das ondas.

Dentro desse universo, algumas funções ocupam um lugar privilegiado por serem muito simples e versáteis. Obviamente essa simplicidade não significa que elas sejam fáceis para o estudante. A função exponencial é uma dessas funções: simples (para calcular derivadas e integrais) e verśateis (podem ser usada para descrever uma gama enorme de problemas).

O objetivo deste capítulo é justamente revisitar os conteúdos que servem de fundamento para o estudo das funções exponenciais: as propriedades da potênciação, a resolução de equações exponenciais e, finalmente, o logaritmo.

PRÉ-REQUISITOS E AUTO-AVALIAÇÃO INICIAL

Os pré-requisitos para este capítulo são:

→ Significado de potenciação;

→ Significado de raízes quadradas e enésimas.

Esses tópicos não serão cobertos durante as atividades de tutoria. Se você acha que não sabe o suficiente sobre algum deles, sugerimos que se procure material de apoio antes de começar a resolver as questões desse capítulo.

QUESTÕES DIAGNÓSTICAS

D1 Escreva as expressões abaixo como uma única potência.

a) $2^5 \cdot 2^3$

b) $\frac{5^{10}}{5^4}$

c) $8(2^{-15} \cdot 4^7)$

D2 Resolva as equações dadas abaixo.

a) $5^{x-4} = 25$

b) $6 \cdot 2^{5+2x} = 48$

c) $\sqrt{3} \cdot 3^{x+3} + 1 = 10$

QUESTÕES

Lembre-se de checar com seu tutor em qual questão você deve começar.

Primeiras propriedades

A interpretação de a^n como sendo o produto do número a por ele mesmo n vezes é um pouco limitada, pois só funciona para valores inteiros positivos de n, mas nos permite obter e interpretar as propriedades mais básicas da potenciação. Se você não está familiarizado com as propriedades listadas abaixo, sugerimos que leia a seção 1.8 do livro Matemática Básica, volume 1 até a página 70 e então volte para esta questão.

- *Produto de potências:* $a^n \cdot a^m = a^{n+m}$
- *Divisão de potências:* $\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$
- *Potência de potência:* $(a^n)^m = a^{n \cdot m}$
- *Elevado a zero:* $a^0 = 1$
- *Potência negativa:* $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$

As propriedades acimas podem ser verificadas rapidamente com exemplos numéricos e demonstradas para o caso de expoentes inteiros positivos. Porém, elas valem para quaisquer expoentes e bases reais, contanto que a base seja positiva.

Q1 Utilize as propriedades acima para transformar as expressões abaixo em novas expressões com o menor número de potências possível.

a) $2^5 \cdot 2^{11} \cdot 2^{-3}$

b) $\frac{5^3 \cdot 5^5}{5^2}$

c) $(3 \cdot 3^8)^2$

d) $(\frac{a^7}{a^2})^{-1}$

e) $4^3 \cdot 2^5$

Erros comuns

Q2 Todas as resoluções mostradas abaixo contêm algum erro. Indique claramente o erro cometido e simplifique a expressão dada corretamente.

a) $3^5 \cdot 9^7 \longrightarrow (3 \cdot 9)^{5+7} = 27^{12}$

b) $(2^3 \cdot 3^5)^2 \longrightarrow 2^3 \cdot 3^{5 \cdot 2} = 2^3 \cdot 3^{10}$

c) $\frac{5^7}{5^{-3}} \longrightarrow 5^{7-3} = 5^4$

d) $(a+b)^2 \longrightarrow a^2 + b^2$

Notação científica

Notação científica nada mais é do que uma forma de representar números especialmente conveniente quando os números envolvidos são muito grandes ou muito pequenos. Por exemplo, ao invés de escrevermos 3000000 podemos escrever simplesmente $3 \cdot 10^6$. Note que checar a potência do 10 na segunda forma é bem mais eficiente do que contar os zeros na primeira. O mesmo pode ser feito com números muito pequenos como $0,000000000002$, que pode ser escrito como $2 \cdot 10^{-12}$. Lembre-se que $10^{-12} = \frac{1}{10^12}$, ou seja, $2 \cdot 10^{-12} = \frac{2}{10^12} = 0,000000000002$.

Como último exemplo, vejamos como representar $0,037$. Poderíamos escrever como $37 \cdot 10^{-3}$, porém, padronizou-se utilizar sempre um número entre 1 e 10 fora da potência, o que não é o caso do 37. Portanto, $0,037$ é comumente rescrito como $3,7 \cdot 10^{-2}$.

Por utilizar potências de 10 intensamente, notação científica se encaixa bem com o tópico que estamos estudando.

Q3 Discuta com seus colegas como simplificar as expressões abaixo envolvendo números dados em notação científica.

a) $\frac{2,4 \cdot 10^5 \cdot 3 \cdot 10^8}{10^3}$

b) $\frac{2,8 \cdot 10^{10} \cdot 6,3 \cdot 10^2}{2,1 \cdot 10^{-4}}$

c) $\frac{1,2 \cdot 10^3}{3 \cdot 10^9}$

d) A luz viaja a uma velocidade de $3 \cdot 10^8$ m/s e a menor distância da Terra a Júpiter é aproximadamente

$6,3 \cdot 10^{11}$ metros. Quanto tempo um pulso de luz leva para percorrer essa distância?

Potências fracionárias

As propridades vistas acima são facilmente compreensíveis se pensarmos em exponentes inteiros positivos, mas expoentes fracionários também têm uma interpretação simples e muito poderosa. Vejamos o que ocorre com um caso simples: o que poderia significar $a^{\frac{1}{2}}$?

Vamos considerar que as propriedades anteriores são válidas para expoentes fracionários. Nesse caso, pra entendermos o significado da expressão acima, poderíamos fazer uma operação de modo a transformar a fração em um número inteiro. Uma opção seria multiplicar $a^{\frac{1}{2}}$ por $a^{\frac{1}{2}}$. Assim, poderíamos somar os expoentes, obtendo 1. Para isso, vamos chamar $a^{\frac{1}{2}}$ de x. Agora vejamos:

$$\begin{aligned}
a^{\frac{1}{2}} &= x && \text{multiplicando os dois lados por } a^{\frac{1}{2}} \\
a^{\frac{1}{2}} \cdot a^{\frac{1}{2}} &= a^{\frac{1}{2}} \cdot x && \text{também podemos usar que } a^{\frac{1}{2}} = x \\
a^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}} &= x \cdot x && \text{somando os expoentes} \\
a^1 &= x^2 && \text{rescrevendo a igualdade} \\
x^2 &= a && \text{aplicando raiz aos dois lados} \\
x &= \sqrt{a} && \text{portanto: } a^{\frac{1}{2}} = \sqrt{a}
\end{aligned}$$

Veja que se admitirmos as propriedades básicas da potenciação no contexto de expoentes fracionários, somos levados à conclusão de que $a^{\frac{1}{2}} = \sqrt{a}$. Essa propriedade pode ser generalizada para o seguinte:

Potências fracionárias: $a^{\frac{n}{m}} = \sqrt[m]{a^n}$, *por exemplo:* $3^{\frac{2}{5}} = \sqrt[5]{3^2}$

Essa propriedade conecta raízes a potências e será muito útil quando você estiver calculando derivadas e integrais envolvendo raízes.

Q4 Use a propriedade anterior para fazer o que se pede em cada item abaixo.

a) Escreva $\sqrt[3]{(x+1)^2}$ na forma de potência.

b) Escreva $a^{\frac{3}{5}}$ na forma de raiz.

c) Escreva $x^3 \cdot \sqrt{x}$ como uma única potência.

d) Escreva $\frac{10^2}{\sqrt[3]{10}}$ como uma única raiz.

e) Escreva $\sqrt{t} \cdot \sqrt[3]{t}$ como uma potência.

Função exponencial

Funções exponenciais são funções em que a variável aparece na potência como em $f(x) = 2^x$. Essa é uma das funções exponenciais mais simples, mas versões mais sofisticadas como $g(x) = 4 \cdot 3^{(2x-1)-5}$ ainda se encaixam nessa mesma família de funções e possuem comportamento muito parecido com $f(x)$.

Q5 Resolva as questões referentes à função exponencial sugeridas abaixo.

a) Sendo $f(x) = 4^x$, obtenha $f(1)$, $f(2)$, $f(0)$, $f(-1)$ e $f(\frac{1}{2})$.

b) Sendo $g(x) = 4 \cdot 3^{2x-1} - 5$, obtenha $g(1)$.

c) Seja $h(x) = 5^{2x+3}$, reescreva a função h de modo que a variável x apareça sozinha no expoente.

Equações exponenciais

Assim como a fórmula de Bhaskara para as equações quadráticas, as equações exponenciais possuem uma estratégia para a sua resolução. Essa estratégia consiste, essencialmente, em manipular algebricamente a equação de modo a escrevê-la como uma igualdade de duas potências com a mesma base. No item a abaixo a equação dada já está nesse formato, portanto, só precisamos igualar os expoentes $2x - 1 = 5$. No item b isso não é verdade, mas podemos rescrever 27 como 3^3 e então igualar os expoentes.

Q6 Resolva as equações abaixo.

a) $2^{2x-1} = 2^5$

b) $27 = 3^{5x-2}$

c) $4^{x+1} = 8^{3+x}$

d) $a^{x^2-12} = a^x$

e) $3 - 5 \cdot 2^{5-3x} = 23$

Mais funções exponenciais

Q7 Considere a função exponencial dada por $f(x) = 3 \cdot 2^x$.

a) Obtenha o valor de x para que $f(x) = 48$

b) Determine o ponto em que $f(x)$ corta o eixo Y do plano cartesiano.

c) Obtenha o valor de x para que $f(x) = 1,5$

Uma nova equação exponencial

Vamos considerar agora a função $f(x) = 10^x$. Suponhamos que queríamos sabor para qual valor de x a função é igual a 50. Se tentarmos resolver a equação $50 = 10^x$ chegamos rapidamente a um impasse: 50 não é uma potência de 10, portanto, não conseguimos escrever a equação como uma igualdade de potências na mesma base. Se testarmos alguns valor para x notamos que $f(x) = 10$ e $f(2) = 100$. Já que intuitivamente a função parece ser crescente (sempre que x aumenta, o valor de $f(x)$ aumenta), é de se esperar que o valor de x_0 para o qual $f(x_0) = 50$ está entre 1 e 2.

Com auxílio de uma calculadora, podemos fazer alguns testes. A operação de exponenciação é normalmente indicada pelo símbolo (̂disponível se posicionarmos o celular na horizontal). Se digitarmos 10 1̂.5, obtemos aproximadamente 31.6. Ou seja, $f(1.5) \approx 31.6$. Isso nos leva a esperar que o valor procurado esteja entre 1.5 e 2.

Q8 Use a calculadora do seu celular para obter o valor de x_0 que satisfaça os itens abaixo com uma cada depois decimal para a função $f(x) = 10^x$.

a) Obtenha x_0 tal que $f(x_0) = 50$

b) Obtenha x_0 tal que $f(x_0) = 200$

Considerando o trabalho necessário para resolver os dois itens anteriores você deve etsar se perguntando se não há uma maneira mais direta para resolver uma equação como $50 = 10^x$; e a resposta felizmente é sim! E o rescurso usado para isso é chamado logaritmo.

Logaritmo

Para entendê-lo, vamos relembrar a relação entre as operações de multiplicação e divisão: se quisermos resolver a equação $50 = 10 \cdot x$, basta dividirmos os dois lados da igualdade por 10.

$$50 = 10 \cdot x \longrightarrow \frac{50}{10} = \frac{10 \cdot x}{10} \longrightarrow 5 = x \longrightarrow x = 5$$

Ou seja, como a incógnita x estava sendo multiplicada por 10, dividimos os dois lados da equação por 10. Nesse sentido, dizemos que a divisão é a operação inversa da multiplicação. No caso da nossa equação original $10^x = 50$, a incógnita aparece como expoente do 10 e o logaritmo é definido justamente como a operação inversa da exponenciação.

Em termos gerais: $\log_a x = b \Leftrightarrow x = a^b$. *E eis alguns exemplos:*

- $\log_{10} 100 = 2$, *pois* $100 = 10^2$
- $\log_2 8 = 3$, *pois* $8 = 2^3$

→ $\log_7 1 = 0$, *pois* $1 = 7^0$

→ $\log_3(1/3) = -1$, *pois* $1/3 = 3^{-1}$

→ $\log_{25} 5 = \frac{1}{2}$, *pois* $5 = 25^{\frac{1}{2}} = \sqrt{25}$

Se os exemplos anteriores não sao familiares pra você, peça ajuda ao seu tutor ou colega pois o entendimento destes exemplos é fundamental para todas as próximas questões.

Q9 Calcule:

a) $\log_4 16$

b) $\log_3 81$

c) $\log_{10} 100000$

d) $\log_2 \frac{1}{2}$

e) $\log_9 3$

Logaritmo na calculadora

Você deve ter notado que os itens da questão anterior tratam de casos que não eram problemáticos se fossem parte de uma equação exponencial, pois os números envolvidos podem ser convertidos para a mesma base, ou seja, os itens anteriores não ajudam a resolver a equação $50 = 10^x$. Para isso, existem dois recursos: a calculadora ou algumas propriedades dos logaritmos. Vamos focar inicialmente na calculadora.

Ao contrário das 4 operações fundamentais que podem ser realizadas com auxílio de ações concretas, como contar nos dedos ou compartilhar elementos igualmente, o logaritmo de um número em uma dada base, se o primeiro não estiver relacionado ao segundo em termos de potências, não pode ser obtido de maneira concreta. Quando os logaritmos foram criados, essa dificuldade era contornada graças a tabelas que literalmente listavam valores de logaritmos a exaustão. Hoje, essas tabelas podem ser trocadas por uma calculadora. No modo científico, as calculadoras de celulares oferecem o botão log, que retorna o logaritmo de um número na base 10 (sempre que a base de um logaritmo estiver omitida, fica-se subentendido que a base é 10).

Se usarmos a calculadora para obter $\log 50$, o resultado (com 5 casas decimais) é 1.69897. Note que se usarmos a calculadora para calcular $10^1.69897$, obteremos aproximadamente 49.99999 como resposta.

Q10 Use a calculadora para obter

a) $\log_{10}200$ (compare com o resultado aproximado que você obteve anteriormente)

b) $\log_{10} 20$

c) $\log_{10} 2$

Propriedades dos logaritmos

Você dete ter notado um padrão nas respostas obtidas acima. Esse padrão está relacionado com uma das propriedades dos logaritmos, que podem ser vistas abaixo.

1. $\log_a(b \cdot c) = \log_a b + \log_a c)$, *por exemplo* $\log_{10} 20 = \log_{10} 2 \cdot 10 = \log_{10} 2 + \log_{10} 10$

2. $\log_a(b/c) = \log_a b - \log_a c)$, *por exemplo* $\log_{10} 5 = \log_{10} 10/2 = \log_{10} 10 - \log_{10} 2$

3. $\log_a b^n = n \cdot \log_a b$, *por exemplo* $\log_{10} 64 = \log_{10} 2^6 = 6 \cdot \log_{10} 2$

4. $\log_c b = \frac{\log_a b}{\log_a c}$, *por exemplo* $\log_2 3 = \frac{\log_{10} 3}{\log_{10} 2}$

Caso você não esteja familiarizado com essas propriedades, sugerimos a leitura da seção Propriedades dos logaritmos do livro Matemática Básica volume 1 (página 478), especialmente a resolução comentada dos problemas.

Q11 Note que se soubermos o valor de $\log_{10} 2$, podemos obter o valor numérico dos três primeiros exemplos acima. Usando a aproximação $\log_{10} 3 \approx 0.48$, obtenha os valores de:

a) $\log_{10} 9$

b) $\log_{10} 30$

c) $\log_{10} 2700$

d) $\log_{10} 0.3$

e) Use sua calculadora para obter uma aproximação para $\log_{10} 5$ e então use a quarta propriedade acima para calcular $\log_3 5$.

REFLITA → *Use sua calculadora para obter calcular* $10^{\log_{10} 2}$ *e* $10^{\log_{10} 3}$. *Você consegue generalizar esse resultado e justificar porque ele é verdadeiro?*

Funções exponenciais e logaritmo

Q12 Considere a função $P(t) = 2 \cdot 10^t - 5$

a) Obtenha $P(0)$ e $P(3)$.

b) Determine t_0 de modo que $P(t_0) = 15$.

c) Determine, com ajuda da calculadora, t_1 de modo que $P(t_1) = -1$.

d) Utilize o valor de $\log_{10} 2$ que você utilizou no item anterior e as propriedades do logaritmo para calcular t_2 de modo que $P(t_2) = 27$.

RUMO AO LIVRO-TEXTO

A questão abaixo foi retirada do livro Cálculo, de James Stewart, seção 1.6.

QUESTÃO RESOLVIDA → *Se uma população de bactérias começa com 100 bactérias e dobra a cada 3 horas, então o número total de bactérias após* t *horas é dado por* $n = f(t) = 100 \cdot 2^{t/3}$.

a) *Quando a população alcançará 5000 bactérias?*

b) *Encontre a inversa dessa função.*

Essa questão mostra uma aplicação bastante comum da função exponencial. A importância dessa função para o Cálculo está justamente no uso que se faz dela para modelar problemas como esse e em algumas propriedades da sua derivada e integral que você estudará em breve.

Para resolver o item a, basta fazer $f(t) = 5000$ e resolver a equação resultante, como mostrado abaixo.

$$
\begin{aligned}
f(t) &= 5000 && \text{usando a expressão de } f(t)\\
100 \cdot 2^{t/3} &= 5000 && \text{dividindo os dois lados por 100}\\
2^{t/3} &= 50 && \text{agora aplicamos log na base 2 aos dois lados da igualdade}\\
\log_2 2^{t/3} &= \log_2 50 && \text{agora aplicamos algumas}\\
(t/3) \cdot \log_2 2 &= \log_2 (2 \cdot 5^2) && \text{propriedades como } \log_2 2 = 1\\
\frac{t}{3} &= \log_2 2 + \log_2 5^2 &&\\
&= 1 + 2 \cdot \log_2 5 && \text{com auxílio da calculadora}\\
&= 1 + 2 \cdot 2,32 &&\\
&= 5,64 && \text{multiplicando os dois lados por 3}\\
t &= 3 \cdot 5,64 = 16,92 &&
\end{aligned}
$$

No item b um novo conceito é mencionado. Não vamos discuti-lo em profundidade aqui mas vamos entender o seu significado e como operacionalizá-lo. A função inversa (normalmente chamada de $f^{-1}(x)$) de uma função $f(x)$ dada é a função que faz a transformação inversa dela.

Por exemplo, a conversão de uma temperatura em graus celsius para Kelvins pode ser obtida pela seguinte transformação $K = C + 273$. Essa fórmula pode ser escrita como uma função: $K(C) = C + 273$. Essa função transforma uma temperatura em graus celsius para Kelvins (a indicação nos parênteses reforça qual valor deve ser dado para que se obtenha o valor da função). A inversa dessa função calcularia uma temperatura em celsius dada uma em Kelvins. Para obtê-la, basa isolarmos o C, ou seja: $C = K - 273$. Usando a notação de função, temos: $C(K) = K - 273$.

No caso da nossa questão, devemos isolar o t e obter uma expressão contendo n (é mais conveniente usar simplesmente n ou f ao invés de $f(t)$ para evitar confusão durante as manipulações algébricas). Vejamos:

$$
\begin{aligned}
n &= 100 \cdot 2^{t/3} && \text{dividindo os dois lados por 100} \\
\frac{n}{100} &= 2^{t/3} && \text{aplicando log aos dois lados} \\
\log_2(\frac{n}{100}) &= \log_2 2^{t/3} && \text{aplicando algumas propriedades} \\
&= \frac{t}{3} \cdot \log_2 2 && \\
&= \frac{t}{3} && \text{multiplicando os dois lados por 3} \\
t &= 3 \cdot \log_2(\frac{n}{100}) &&
\end{aligned}
$$

Usando a notação de funções, podemos escrever $t(n) = 3 \cdot \log_2(\frac{n}{100})$ e dizer que $t(n)$ é a função inversa de $f(t)$. Também poderíamos usar algumas propriedades de logaritmos pra escrever a expressão final em outros formatos.

A próxima questão, pra você resolver, foi adaptada do livro Cálculo, de James Stewart, seção 1.6.

QUESTÃO DO LIVRO-TEXTO → *Quando o flash de uma câmera é disparado, a bateria imediatamente começa a carregar o capacitor do flash, que armazena energia elétrica de acordo com a equação* $Q(t) = Q_0(1 - 2^{-1.4t})$*, com* t *medido em segundos.*

a) *Quando tempo é necessário para que* Q *seja igual a 90% de* Q_0*? Use a calculadora para obter os logs necessários.*

b) *Encontre a inversa da função* $Q(t)$.

GABARITO

Confira as respostas para as questões e **não se esqueça de registrar o seu progresso**.

Q1 a) 2^{13}, b) 5^6, c) 3^{18}, d)a^{-5}, e) 2^{11}.

Q2 a) 3^{19}, b) $2^6 \cdot 3^{10}$, c) 5^{10}, d)$a^2 + 2ab + b^2$.

Q3 a) $7, 2cdot10^7$, b) $8, 4cdot10^{16}$, c) $4cdot10^{-7}$, d) $2, 1cdot10^3$.

Q4 a) $(x+1)^{\frac{2}{3}}$, b) $\sqrt[5]{a^3}$, c) $x^{\frac{7}{2}}$, d) $\sqrt[3]{10^5}$, e) $\sqrt[6]{t^5}$.

Q5 a) 4, 16, 1, $\frac{1}{4}$, 2, b) 7, c) $h(x) = 125 \cdot 25^x$.

Q6 a) $x = 3$, b) $x = 1$, c) $x = -7$, d) $x = 4ou - 3$, e) $x = 1$.

Q7 a) $x = 4$, b) $(0; 3)$, c) $x = -1$.

Q8 $x_0 \approx 1, 7$, b) $x_0 \approx 2, 3$.

Q9 a) 2, b) 4, c) 5, d)-1, e) $1/2$.

Q10 a) 2.301, b) 1.301, c) 0.301.

Q11 a) $0,96$, b) $1,48$, c) $3,44$, d)$-0,52$, e) $1,46$.

Q12 a) -3 e 1995, b) $t_0 = 1$, c)$0,3$, d) $1,2$.

AUTO-AVALIAÇÃO FINAL

Avalie o quanto você acha que sabe sobre os seguintes itens após ter resolvido as questões deste capítulo.

4 Polinômios e afins

APRESENTAÇÃO

Polinômios são expressões algébricas extremamente versáteis e com propriedades que os tornam boas opções para diversas aplicações. Ao longo da disciplina de Cálculo você notará que a maioria dos conceitos e teoremas será introduzida através de exemplos envolvendo polinômios. Isso ocorre pela simplicidade das funções polinomiais em comparação com outros tipos de função, pelo menos no contexto dessa disciplina.

Ao longo do seu Ensino Médio você deve ter estudado polinômios em diversos momentos diferentes: equações do primeiro e do segundo grau, fatoração, funções afim e quadrática e talvez até mesmo alguns tópicos sobre polinômios de graus maiores.

Neste capítulo, vamos revistar alguns desses tópicos pensando nos usos que você fará deles em Cálculo e para ter certeza de que você tem fluência com as habilidades mais fundamentais deste tópico.

PRÉ-REQUISITOS E AUTO-AVALIAÇÃO INICIAL

Os pré-requisitos para este capítulo são:

- Resolução de equações do segundo grau;
- Produto de binômios.

Esses tópicos não serão cobertos durante as atividades de tutoria. Se você acha que não sabe o suficiente sobre algum deles, sugerimos que se procure material de apoio antes de começar a resolver as questões desse capítulo.

QUESTÕES DIAGNÓSTICAS

D1 Fatore a expressão algébrica

$$3x^2 - 12x - 36$$

.

D2 Faça a soma

$$\frac{2}{x} + \frac{3}{x-1}$$

.

QUESTÕES

Lembre-se de checar com seu tutor em qual questão você deve começar.

Equações quadráticas

As equações quadráticas podem ser apresentadas em vários formatos diferentes, cada um deles com suas vantagens e desvantagens.

Q1 As equações quadráticas abaixo estão apresentadas em três formatos diferentes. Resolva cada uma delas usando método que lhe parecer mais adequado.

a) $x^2 - 2x - 15 = 0$

b) $(x - 5)(x + 3) = 0$

c) $(x - 1)^2 - 16 = 0$

Você deve ter obtido as mesmas raízes para as três equações. Isso ocorreu porque, na verdade, as três equações são a mesma equação apresentada de forma diferente.

A primeira forma, chamada de desenvolvida, é a mais comum e facilita a aplicação da forma de Bhaskara. Note que apesar da fórmula de Bháskara te dar as raízes após alguns cálculos, não é possível identificá-las diretamente apenas olhando para a equação.

A segunda forma é chamada de fatorada e apesar de demandar algumas manipulações algérbicas para permitir o uso da fórmula de Bhaskara, isso não é necessário, pois as raízes podem ser identificadas na expressão algébrica dada. Isso ocorre porque a forma fatorada apresenta a equação como um produto de fatores, $(x-5)(x+3)$ nesse caso, igualado a zero. Como um produto so é igual a zero se um dos fatores for igual a zero, podemos resolver $(x-5)=0$ e $(x+3)=0$ para obter as soluções da equação.

A terceira forma é bem pouco comum, mas também permite a resolução sem o uso da fórmula de Bháskara. Se você usou a fórmula para resolvê-la cheque se algum colega resolveu sem usá-la ou chame o seu tutor para que ele lhe mostre como.

A forma fatorada

A grande vantagem da forma fatorada está no fato de ela simplificar a equação: uma equação que originalmente era de segundo grau (envolvia a incógnita ao quadrado) foi transformada em uma produto de fatores que são de primeiro grau (nada de quadrados neles), essa transformação simplifica diversas manipulações que podem ser feitas na expressão. Como vimos acima, facilita inclusive a identificação de raízes.

Q2 Obtenha as raízes das equações abaixo.

a) $(x+2)(x-1)=0$

b) $(x-\frac{2}{3})(2x-4)=0$

c) $5(x+1)(2x-1)=0$

d) $x(6-2x)=0$

e) $-3(x+\sqrt{5})(2x-\sqrt{12})=0$

REFLITA → *Com base no que foi visto até este ponto:*

a) *Crie uma equação na forma fatorada e na forma desenvolvida que tenha raízes iguais a 3 e 4.*

b) *Cheque com seus colegas se eles criaram a mesma equação.*

c) *Crie uma outra equação, diferente da criada no item a, mas que tenha as mesmas raízes.*

Fatoração

Com as questões anteriores, você já deve ter chegado a um método que lhe permitiria transformar uma expressão do tipo ax^2+bx+c em outra expressão equivalente na forma $a(x-r_1)(x-r_2)$, mas vejamos como seria esse processo para o caso $2x^2+8x+6=0$.

Primeiro, obtemos as raízes de $2x^2+8x+6=0$ usando a fórmula de Bhaskara: -1 e -3. Agora, escrevemos uma expressão fatorada que tenha essas mesmas raízes: $(x+1)(x+3)$. Ainda falta um passo: note que se desenvolvemos o produto em $(x+1)(x+3)$ obtemos x^2+4x+3, que não é igual à expressão inicial. O que nos falta é multiplicar a expressão fatorada por 2, obtendo $2(x+1)(x+3)$.

Note que esse último passo não altera as raízes e faz com que cheguemos exatamente na expressão dada originalmente se desenvolvermos o produto.

Use essa abordagem para resolver a próxima questão.

Q3 Fatore as expressões abaixo.

a) $x^2 - 4x + 3$

b) $3x^2 + 9x + 6$

c) $\frac{x^2}{2} + 2x - 16$

d) $5x^2 - 20$

e) $x^2 + 6x$

Frações

O próximo passo deste capítulo é aplicar o que vimos até aqui em expressões envolvendo frações com incógnitas no numerador e denominador, mas para isso vamos relembrar como fazer a soma de duas frações simples: $\frac{2}{5} + \frac{3}{7}$.

$$\frac{2}{5} + \frac{3}{7} = \frac{7 \cdot 2}{7 \cdot 5} + \frac{5 \cdot 3}{5 \cdot 7} = \frac{7 \cdot 2 + 5 \cdot 3}{7 \cdot 5} = \frac{14 + 15}{35} = \frac{29}{35}$$

Se usarmos frações que envolvam expressões um pouco mais complicadas, na verdade, nada deve mudar. Por exemplo, se fizermos a eguinte soma: $\frac{2}{5} + \frac{3}{(x+1)}$.

$$\frac{2}{5} + \frac{3}{(x+1)} = \frac{(x+1) \cdot 2}{(x+1) \cdot 5} + \frac{5 \cdot 3}{5 \cdot (x+1)} = \frac{(x+1) \cdot 2 + 5 \cdot 3}{(x+1) \cdot 5} = \frac{2x + 2 + 15}{5x + 5} = \frac{2x}{5x}$$

Q4 Calcule as seguintes somas de frações:

a) $\frac{x}{2} - \frac{3}{5}$

b) $\frac{2}{5} + \frac{(x+1)}{7}$

c) $\frac{1}{2-x} + \frac{1}{3}$

d) $\frac{x+3}{2} + \frac{x-1}{4}$

e) $\frac{2}{x-1} + \frac{1}{2x+3}$

Mais um pouco de fração

Assim como podemos simplificar a fração $\frac{6}{9}$ obtendo $\frac{2}{3}$, podemos fazer simplificações em frações envolvendo expressões com incógnitas e o princípio é o mesmo: se o numerador e o denominador forem o produto de um mesmo fator, esse fator pode ser simplificado.

Por exemplo, a fração $\frac{10}{4x-6}$ pode ser rescrita como $\frac{2 \cdot 5}{2 \cdot (2x-3)}$, logo, podemos simplificar o fator 2, obtendo $\frac{5}{2x-3}$.

Q5 Nesse tipo de situação, alguns erros são muito comuns. Abaixo, temos três simplificações para a fração $\frac{6x}{2x+12}$. Discuta com seus colegas qual delas está correta e descreva com suas palavras o erro cometido nas incorretas.

a) $\frac{6x}{2x+12} \longrightarrow \frac{3 \cdot 2x}{2x+12} \longrightarrow \frac{3}{1+12} = \frac{3}{13}$

b) $\frac{6x}{2x+12} \longrightarrow \frac{2 \cdot 3x}{2 \cdot (x+6)} \longrightarrow \frac{3x}{x+6}$

c) $\frac{6x}{2x+12} \longrightarrow \frac{6x}{2x+6 \cdot 2} \longrightarrow \frac{x}{2x+2}$

Q6 Agora, simplifique algumas frações.

a) $\frac{6}{12x+9}$

b) $\frac{20x+12}{4}$

c) $\frac{6x+4}{2-10x}$

Em busca de fatores para simplificar

Entretanto, as simplificações que mais nos interessam são aquelas em que diminuímos as potências que aparecem no numerador e denominador, comoveremos a seguir

Q7 Fatore o denominador da fração $\frac{2x+8}{x^2+x-12}$ e a rescreva com o denominador na forma fatorada.

Note que um dos fatores do denominador é $(x+4)$ e que o numerador pode ser rescrito como $2(x+4)$, logo, o fator $(x+4)$ pode ser simplificado:

$$\frac{2x+8}{x^2+x-12} = \frac{2(x+4)}{(x+4)(x-3)} = \frac{2}{(x-3)}$$

Essa simplificação é especialmente útil porque fez com que o numerador e o denominador ficassem algebricamente mais simples. Mas se ela lhe parece estranha, escolha alguns valores de x e substitua tanto na fração dada originalmente quanto na obtida acima e veja que os resultados serão iguais.

Uma observação importante: ao eliminarmos o fator $(x+4)$, estamos retirando uma informação potencialmente importante. Como frações não podem ter denominadores iguais a zero, na fração dada originalmente, x não poderia ser igual a -4 e 3.

Portanto, para que a nova expressão seja realmente equivalente à original temos que manter essa restrição mesmo que $x = -4$ não seja mais um problema para o novo denominador. Portanto, ao fazer esse tipo de simplificação, anote ao longo da resolução e restrição $x \neq -4$ pois isso pode influenciar em alguma etapa futura.

Q8 Simplifique algumas frações e não se esqueça de anotar as eventuais restrições.

a) $\frac{2x-2}{x^2+9x-10}$

b) $\frac{3x+9}{x^2+12x+27}$

c) $\frac{3x^2+4x}{3x+4}$

d) $\frac{x^2-4}{2+x}$

e) $\frac{x^2-3x+2}{x^2-5x+6}$

Equações

Expressões algébricas como as que vimos acima não são muito comuns em um curso de Cálculo, mas elas aparecem o tempo todo em funções, como veremos nos próximos blocos. Entretanto, antes disso, vejamos algumas equações envolvendo expressões como as que vimos anteriormente.

Considere a equação $\frac{4}{x-3} = 2$. O primeiro aspecto a ser observado é que $x \neq 3$, pois nesse caso o denominador seria igual a zero. Isso significa que se ao final da resolução da equação o resultado obtido for 3, essa solução deverá ser descartada. Voltando à resolução, como temos uma igualdade de frações (2 pode ser visto como $\frac{2}{1}$), podemos "multiplicar cruzado" para resolvê-la:

$$\frac{4}{x-3} = 2 \longrightarrow \frac{4}{x-3} = \frac{2}{1} \longrightarrow 4 \cdot 1 = 2 \cdot (x-3) \longrightarrow 4 = 2x-6 \longrightarrow 2x = 10 \longrightarrow x$$

Q9 Resolva a equação $\frac{5-x}{6} = \frac{3}{4}$.

Mas nem sempre as equações são dadas na forma de uma igualdade entre duas frações, como é o caso de $\frac{6}{x+1} + \frac{1}{x-1} = 2$. Nessa situações, é necessário realizar a soma das frações dadas para então resolver a equação como feito acima.

Q10 Resolva a equação $\frac{4}{x-1} + \frac{5}{x+2} = 3$.

Questão 10:

Uma função racional

Funções racionais são aquelas cujas expressões algébricas envolvem frações nas quais o numerador e o denominador são polinômios, como $g(x) = \frac{1}{x}$, $h(x) = \frac{x-1}{3-x}$, $r(x) = \frac{2}{x^2-3x+3}$ ou $q(x) = 4 - \frac{2x+1}{x-5}$.

Nesta parte, vamos tentar entender como se comporta o gráfico de uma função desse tipo.

Q11 Considere a função $f(x) = \frac{6}{x-2} + 1$.

a) Calcule $f(0)$, $f(1)$, $f(-1)$, $f(3)$, $f(4)$ e $f(5)$.

b) Obtenha o valor de x para o qual $f(x) = 0$.

c) Obtenha mais um ponto, a sua escolha, que pertença ao gráfico da função.

d) Marque esses pontos em um plano cartesiano.

Q12 Agora vamos investigar alguns casos especiais pra essa função.

a) Qual é o valor de $f(2)$?

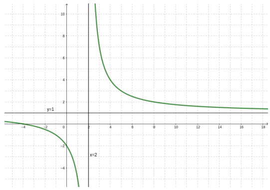
b) Para qual valor de x temos que $f(x) = 1$?

O resultado do item significa que o valor 2 não faz parte do domínio da função, ou seja, $f(2)$ não está definido. Isso deve aparecer no gráfico da função como algum tipo de anomalia, como um buraco, uma ruptura ou uma mudança abrupta de comportamento quando o gráfico chegar perto da reta vertical $x = 2$

Já o item b significa que a funçao nunca terá valor igual a 1, ou seja, se traçarmos uma reta horizontal $y = 1$, o gráfico da função jamais deverá cruzar essa reta.

Q13 Acrescente à lápis as duas retas mencionadas acima no plano cartesiano em que você marcou os pontos da função $f(x)$ e discuta com seus colegas como deve ser o gráfico da função levando em conta os comentários acima.

O gráfico da função $f(x) = \frac{6}{x-2} + 1$ está representado abaixo. Note que ele não corta a reta $y = 1$ e não toca a reta $x = 2$. Essas retas são chamadas de **assíntotas** e serão dsicutidas em detalhes pelo seu professor de cálculo.



Mais uma função racional

Q14 Use a abordagem do bloco anterior para esboçar o gráfico da função $r(x) = \frac{2x}{x-3}$.

RUMO AO LIVRO-TEXTO

Antes de seguir para a questão abaixo, leia a seção 2.2 do livro Calculus, de James Stewart, do exemplo 8 até o final do exemplo 9, que segue transcrito abaixo.

QUESTÃO RESOLVIDA → *Encontre* $\lim_{x \to 3^+} \frac{2x}{x-3}$ *e* $\lim_{x \to 3^-} \frac{2x}{x-3}$.

Note que essa é a mesma função que você resolveu na última questão antes desta seção. A análise feita no livro conecta as discussão apresentadas aqui com conteúdos que serão explorados de maneira mais formal pelo seu professor de Cálculo.

Como dito no livro, essa função tem uma **assíntota vertical**, que ocorre quando $x = 3$. Para valores de x menores do que 3, a função assume valores negativos cada vez maiores à medida que x se aproxima de 3. Você pode checar isso calculando o valor da função quando $x = 2,9$ e $2,99$. Por outro lado, quando os valores de x são maiores do que 3, a função assuma valores positivos cada vez maiores à medida que x se aproxima de 3, como $x = 3,1$ e $3,01$.

Além dessa assíntota, e esse aspecto o livro não discutiu, temos uma **assíntota horizontal** em $y = 2$. O gráfico da função nunca toca essa reta, mas se aproxima dela se tomarmos valores de x positivamente muito grandes (como 100 ou 1000) ou negativamente muito grandes (como -100 ou -1000).

A próxima questão, pra você resolver, foi retirada do livro Cálculo, de James Stewart, seção 2.2.

QUESTÃO DO LIVRO-TEXTO → *Considere* $f(x) = \frac{x}{x^2-x-2}$.

a) *Encontre as assíntotas verticais da função* $f(x)$.

b) *Confirme a sua resposta plotando o gráfico da função. Dica: use o software Geogebra no seu celular, notebook ou PC.*

GABARITO

Confira as respostas para as questões e **não se esqueça de registrar o seu progresso**.

Q1 a) $x = 5$ e $x = -3$, b) $x = 5$ e $x = -3$, c) $x = 5$ e $x = -3$.

Q2 a) $x = -2$ e $x = 1$, b) $x = 2/3$ e $x = 1$, c) $x = -1$ e $x = 1/2$, d) $x = 0$ e $x = 3$, e) $x = -\sqrt{5}$ e $x = \sqrt{3}$.

Q3 a) $(x-3)(x-1)$, b) $(x+2)(x+1)$, c) $(x+8)(x-4)$, d) $5(x+2)(x-2)$, e) $x(x+6)$,

Q4 a) $\frac{5x-6}{10}$, b) $\frac{5x+19}{35}$, c) $\frac{6-x}{6-3x}$, d) $\frac{6x+10}{8}$, e) $\frac{5x+5}{2x^2+x-3}$.

Q5 a) errado, b) certo, c) errado.

Q6 a) $\frac{2}{4x+3}$, b) $5x+3$, c) $\frac{3x+2}{1-5x}$.

Q7 $\frac{2x+8}{(x+4)(x-3)}$.

Q8 a) $\frac{2}{x+10}$, b) $\frac{3}{x+9}$, c) x, d) $x-2$, e) $\frac{x-1}{x-3}$.

Q9 $1/2$.

Q10 $x=-1$ e $x=3$.

Q11 a) $f(0)=-2$, $f(1)=-5$, $f(-1)=-1$, $f(3)=7$, $f(4)=4$, $f(5)=3$, b)$x=-4$.

Q12 a) $f(2)$ não é definido, b) não exist x tal que $f(x)=1$.

Q13

5 Trigonometria e Vetores

APRESENTAÇÃO

Além de ser uma disciplina em si mesma, a Geometria Analítica inaugura um jeito de encarar problemas geométricos que será o mais comum durante disciplinas matemáticas no ensino superior. A Geometria Analítica nasce da junção de técnicas da Álgebra (equações, funções) e da Geometria Plana (medidas, ângulos, semelhança) graças ao uso de um sistema de eixos cartesianos. Mas além de permitir o uso de elementos desses dois universos, essa junção abre portas para a criação de novos elementos, como os vetores.

O que faremos neste capítulo é revisitar alguns conceitos centrais da trigonometria que você deve ter estudado no Ensino Médio, mas agora enfatizaremos os usos que serão feitos na disciplina de Geometria Analítica. Além disso, utilizaremos constantemente eixos cartesianos em questões que poderiam ser formuladas apenas com elementos geométricos e utilizaremos vetores para formular e resolver algumas das questões.

PRÉ-REQUISITOS E AUTO-AVALIAÇÃO INICIAL

Os pré-requisitos para este capítulo são:

- Noções básicas de trigonometria no triângulo retângulo (seno e cosseno);
- Noções básicas sobre plano cartesiano (coordenadas).

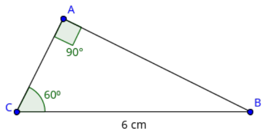
Esses tópicos não serão cobertos durante as atividades de tutoria. Se você acha que não sabe o suficiente sobre algum deles, sugerimos que se procure material de apoio antes de começar a resolver as questões desse capítulo.

QUESTÕES DIAGNÓSTICAS

D1 Considerando a figura abaixo, calcule:

a) A medida do segmento $\overline{AB}$.

b) Seja D a intersecção do lado CB com a altura do triângulo relativa ao vértice A, calcule o comprimento de $\overline{\text{BD}}$.



D2 Qual é a medida em graus do ângulo formado entre o eixo X e o segmento de reta que liga a origem ao ponto $(3; 1)$? *Você pode usar a calculadora se julgar necessário.*

QUESTÕES

Lembre-se de checar com seu tutor em qual questão você deve começar.

Seno e cosseno

Em Geometria Plana, definimos seno e cosseno de um ângulo α como sendo iguais a:

$$\sin(\alpha) = \frac{\textit{cateto oposto}}{\textit{hipotenusa}} \;\; e \;\; \cos(\alpha) = \frac{\textit{cateto adjacente}}{\textit{hipotenusa}}$$

O valor do seno e do cosseno dos ângulos 0°, 30°, 45°, 60°e 90°, chamados de ângulos notáveis, são simples e recorrentes em problemas de geometria plana, portanto, espera-se que estudantes os tenham memorizados.

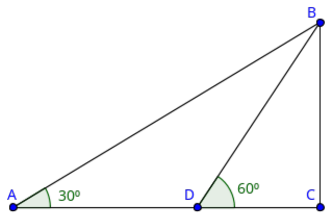
	0°	*30°*	*45°*	*60°*	*90°*
seno	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
cosseno	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0

Q1 Sabendo que $\overline{AB} = 6$ e $B\hat{C}D$ na figura abaixo, calcule o comprimento dos segmentos:

a) $\overline{BC}$

b) $\overline{BD}$

c) $\overline{AD}$



Seno e cosseno de ângulos quaisquer

Os valores listados na tabela acima são importantes, mas ângulos podem ocorrer em quaisquer medidas. Nesses casos, você pode usar a sua calculadora (a menos que o valor exato ou alguma aproximação específica seja fornecida). Na maioria dos celulares os botões cos e sin ficam disponíveis apenas no modo científico (acessível ao colocar o celular na horizontal) e é fundamental checar se o ângulo deve ser dado em graus (DEG) ou radianos (RAD).

Q2 Use o seu celular pra obter:

a) $\sin(\frac{4\pi}{9})$, arredondado para 2 casas decimais.

b) $\cos(\frac{\pi}{12})$, arredondado para 2 casas decimais.

c) $\sin(18°)$, arredondado para 1 casa decimal.

d) $\cos(22.5°)$, arredondado para 1 casa decimal.

e) $\cos(1,5)$, arredondado para 2 casas decimais.

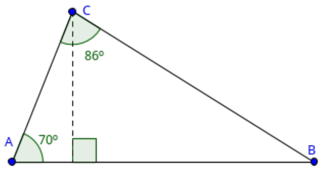
Deste ponto em diante, use a calculadora sempre que os ângulos envolvidos não sejam notáveis e quando nenhuma aproximação for fornecida. Caso nenhum arredondamento específico seja pedido, use sempre duas casas decimais.

Geometria com ângulos quaisquer

Q3 Sabendo que na figura abaixo $\overline{AC} = 4$ obtenha a medida dos segmentos pedidos abaixo. Use uma calculadora se necessário.

a) A altura do triângulo relativa ao lado $\overline{AB}$.

b) $\overline{CB}$



Obtendo o ângulo a partir do seno ou cosseno

Se você souber que um ângulo de um triângulo retângulo tem seno igual a $\frac{1}{2}$ você sabe que se trata de um ângulo de 30°, mas isso só é possível porque este valor está entre os poucos que fazem parte da tabela de valores notáveis. A pergunta então é como você pode saber a medida em graus ou radianos de um ângulo cujo seno é igual a $0,7$, por exemplo?

A resposta está nas funções **arcosseno** (arcsin, em inglês) e **arcocosseno** (arccos, em inglês). Por serem as funções inversas do seno e do cosseno, também são chamadas algumas vezes de $\sin^{-1}$ e $\cos^{-1}$. Tente encontrar essas funções na calculadora do seu celular (além de acessar o modo científico, em algumas calculadoras é necessário ativar o modo de funções inversas - INV) e calcular $\sin^{-1}(0.5)$. O resultado deve ser aproximadamente 0.5236 (que é igual a $\pi/6$) ou 30°.

Q4 Use as funções $\sin^{-1}$ e $\cos^{-1}$ da sua calculadora para obter:

a) A medida em radianos, com duas casas decimais, do ângulo cujo seno é igual a $0,7$. Dica: procure pela opção DEG e RAD na calculadora para alternar entre graus e radianos.

b) A medida em radianos, com duas casas decimais, do ângulo cujo cosseno é igual a $0,4$.

c) A medida em graus, com zero casas decimais, do ângulo cujo seno é igual a $0,6$.

d) A medida em graus, com zero casas decimais, do ângulo cujo cosseno é igual a $0,87$.

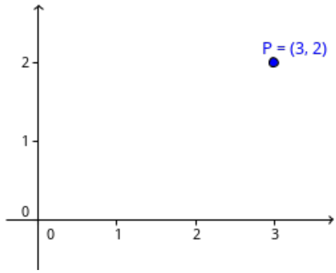
Ângulos e eixos cartesianos

Q5 Considerando a imagem abaixo, calcule:

a) O comprimento do segmento $\overline{OP}$. O *se refere à origem, ou seja, ao ponto* $(0;0)$.

b) O seno e o cosseno do ângulo determinado pelo segmento $\overline{OP}$ e o eixo X.

c) A medida em radianos e em graus desse ângulo.



Vetores

Na questão anterior, mais do que o ponto P, o elemento chave foi o segmento $\overline{OP}$. Em Geometria Analítica um dos conceitos mais importantes é o de **vetor**. Um vetor pode ser pensado como um segmento com direção, tipicamente uma seta. No caso da questão anterior, poderíamos falar do vetor $\overrightarrow{OP}$, ou simplesmente $\overrightarrow{P}$ uma vez que a outra extremidade é a origem.

Todo vetor possui três propriedades que o definem: a **norma** (nome dado ao comprimento se estivéssemos pensando em um segmento), a **direção** (dada pelo ângulo entre o vetor e a parte positiva do eixo X no sentido anti-horário) e o **sentido** (no caso do nosso exemplo, o sentido é de O a P e não de P a O).

Pode parecer artificial usar esse conceito já que ele pode ser descrito em termos dos pontos das extremidades do vetor ou do segmento conectando esses dois pontos, mas o conceito de vetor abre novas possibilidades bastante poderosas em matemática pura, que serão estudadas em disciplinas como Geometria Analítica e Álgebra Linear, e em diversas aplicações, em Física e engenharias em geral.

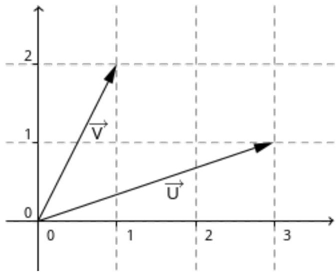
Não estudaremos essas potencialidades dos vetores neste capítulo, mas utilizaremos o conceito em algumas questões para que você se familiarize com ele gradualmente.

Q6 Considere os dois vetores representados abaixo.

a) Calcule a norma de $\vec{V}$ e $\vec{U}$.

b) Obtenha, em graus, os ângulos determinados por $\vec{V}$ e $\vec{U}$.

c) Determine, em graus, a medida do ângulo entre $\vec{V}$ e $\vec{U}$.



Mais vetores

Q7 Determine as coordenadas e represente em um plano cartesiano os vetores cuja norma e ângulo são dados abaixo.

a) Vetor $\vec{V}$ com norma 3 e ângulo 40°.

b) Vetor $\vec{U}$ com norma 2 e ângulo 150°.

Área entre vetores

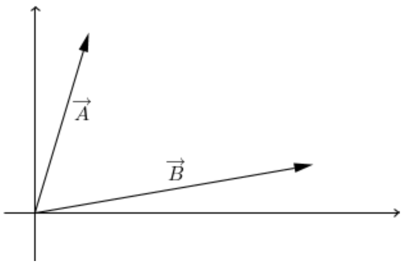
Q8 Considere os dois vetores da questão 6 ($\overrightarrow{V} = (1, 2)$ e $\overrightarrow{U} = (3, 1)$). Vamos calcular a área do triângulo determinado pela origem e pela extremidade desses vetores.

a) Recupere da questão 6 os valores das normas e do ângulo entre os vetores e represente o triângulo em questão em um plano cartesiano com essas informações.

b) Trace a altura do triângulo relativa à $\overrightarrow{U}$.

c) Calcule o comprimento dessa altura usando o seno do ângulo entre os vetores.

d) Calcule a área do triângulo usando $\overrightarrow{U}$ como base.



Se não tivéssemos usado valores numéricos para essa questão, você teria chegado à fórmula $A = \frac{1}{2} \cdot \text{lado } 1 \times \text{lado } 2 \times \sin(\alpha)$, em que o comprimento dos lados são iguais a norma dos vetores e α é o ângulo entre eles.

Imagine agora que o comprimento dos dois vetores estão fixos, mas é possível girar $\overrightarrow{A}$ em torno da origem. A medida que $\overrightarrow{A}$ se aproxima de $\overrightarrow{B}$, três variáveis se comportam de maneira semelhante: o ângulo α entre os vetores, a área do triângulo determinado pelos vetores e $\sin(\alpha)$ diminuem. Por outro lado, se afastarmos $\overrightarrow{A}$ de $\overrightarrow{B}$ até formar um ângulo reto essas três variáveis aumentam.

De certa maneira podemos interpretar essas três variáveis como sendo medidas de perpendicularidade entre dois vetores. Em Geometria Analítica essa ideia será capturada pela operação chamada **produto vetorial**.

Área entre vetores, 2

Q9 Calcule a área do triângulo determinado pelos vetores $\overrightarrow{V} = (2;2)$ e $\overrightarrow{U} = (4;1)$ usando a estratégia usada na questão anterior.

Note que o valor obtido foi muito próximo de 3. Na realidade, se os cálculos fossem realizados sem aproximações, o resultado seria exatamente 3 e isso poderia ser verificado pelo método de "contar quadradinhos" já que as coordenadas dos vetores são números inteiros (bastaria considerar a área do retângulo 4×2 construído ao redor do triângulo e subtrair a área dos triângulos que não interessam. Tente!).

Projeção ortogonal

Q10 Considere os dois vetores da questão anterior ($\overrightarrow{V} = (2,2)$ e $\overrightarrow{U} = (4,1)$).

a) Recupere da questão anterior os valores das normas e do ângulo entre os vetores e represente-os em um plano cartesiano.

b) Trace a altura do triângulo relativa à $\overrightarrow{U}$ e chame de C a intersecção dessa altura com $\overrightarrow{U}$.

c) Calcule o comprimento do vetor $\overrightarrow{OC}$.

O vetor $\overrightarrow{OC}$ é chamado de **projeção ortogonal** de $\overrightarrow{V}$ em $\overrightarrow{U}$. A importância da projeção ortogonal está no fato de que ela pode ser interpretada como sendo a "parte" de $\overrightarrow{V}$ que atua na direção estabelecida por $\overrightarrow{U}$. Essa ideia é central em várias áreas da Física quando forças agem em um objeto e deseja-se estudar o efeito dessa força em uma determinada direção.

Note que neste caso, a projeção ortogonal está relacionada com o cosseno do ângulo entre os vetores. De modo análogo ao que concluímos para o seno/ área/ perpendicularidade, podemos dizer que o cosseno é uma medida de proximidade entre vetores (quando mais próximos, menor o ângulo e mais próximo de 1 o seu cosseno). Essa ideia será capturada e generalizada para outros contextos com mais de duas dimensões pela operação chamada **produto escalar**, que será bastante usada em Geometria Analítica.

Projeção ortogonal, 2

REFLITA → *Descreva com suas palavras como você deve proceder para obter o comprimento da projeção ortogonal de um vetor dado sobre um segundo vetor dado.*

Use a resposta anterior para se orientar ao longo da resolução da próxima questão. Inclusive, se algo surgir durante a resolução, volte e reajuste a resposta à questão anterior.

Q11

Calcule o comprimento da projeção ortogonal de $\overrightarrow{V} = (1; \sqrt{3})$ em $\overrightarrow{U} = (2; 2)$.

Encolhendo e esticando um vetor

Q12 Considere o vetor $\overrightarrow{V} = (4; 3)$.

a) Qual é a norma deste vetor?

b) Divida as duas dimensões de $\overrightarrow{V}$ pela sua norma de modo a obter um novo vetor que chamaremos de $\overrightarrow{V_1}$. Qual é a norma de $\overrightarrow{V_1}$?

c) Se você dobrar as dimensões de $\overrightarrow{V_1}$ o que vai ocorrer com a sua norma?

O que você fez no item b da questão anterior foi obter um **vetor unitário** (com norma igual a 1) que tem a mesma direção e sentido que um vetor dado. Para isso, você apenas dividiu as suas dimensões pela norma do vetor, "encolhendo-o". No item c você dobrou a norma desse vetor multiplicando as suas coordenadas por dois.

Esse processo será útil na seção Rumo ao livro-texto.

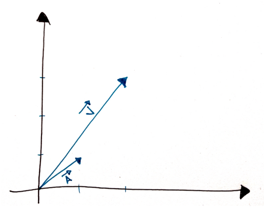
RUMO AO LIVRO-TEXTO

A questão a seguir não foi retirada de um dos livro-textos de Geometria Analítica, mas explora uma ideia bastante importante nessa disciplina (decomposição de vetores) em um contexto um pouco mais simples (duas dimensões) do que será feito na disciplina (três ou mais dimensões).

A proposta desta questão é reunir o que foi feito com seno, cosseno e norma nas questões anteriores para entender como decompor um vetor dado em dois vetores perpendiculares.

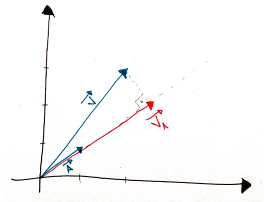
QUESTÃO RESOLVIDA → *Decomponha o vetor* $\overrightarrow{V} = (1;3)$ *como soma de dois vetores perpendiculares de modo que um deles esteja na mesma direção do vetor* $\overrightarrow{A} = (1;1)$.

Vamos começar representando os vetores como mostrado abaixo.



A questão pede que decomponhamos $\overrightarrow{V}$ como soma de dois outros vetores. Vamos chamá-los de $\overrightarrow{V_A}$ e $\overrightarrow{V_B}$. Também é pedido que um deles, digamos $\overrightarrow{V_A}$, esteja na mesma direção de $\overrightarrow{A}$ enquanto que o outro, $\overrightarrow{V_B}$, seja perpendicular a ele.

Vamos focar em $\overrightarrow{V_A}$ por enquanto. Ele pode ser representado como mostrado abaixo.



Para obtê-lo, basta sabermos o comprimento da projeção ortogonal de $\overrightarrow{V}$ sobre $\overrightarrow{A}$ e então ajustarmos o comprimento de $\overrightarrow{A}$.

Como vimos em questões anteriores, o comprimento de $\overrightarrow{V_A}$ é obtido via cosseno do ângulo entre os vetores. O ângulo determinado por $\overrightarrow{A}$ é igual a 45°, pois suas duas dimensões são iguais. O cosseno do ângulo α, determinado por $\overrightarrow{V}$, é igual a $\frac{1}{\sqrt{10}} = \frac{\sqrt{10}}{10} \approx 0,32$. Portanto, $\alpha = \arccos(0,32) \approx 71,6°$ e o ângulo entre os vetores é igual a $71,6 - 45 = 26,6$ graus.

Com base nessa informação, temos que o comprimento de $\overrightarrow{V_A}$ é dado por:

$$||\overrightarrow{V_A}|| = \cos(22,6) \cdot \sqrt{10} \approx 0,89 \cdot \sqrt{10}$$

Agora, como $\overrightarrow{V_A}$ aponta para a mesma direção de $\overrightarrow{A}$, vamos fazer com que a norma de $\overrightarrow{A}$ seja igual ao valor que foi obtido acima.

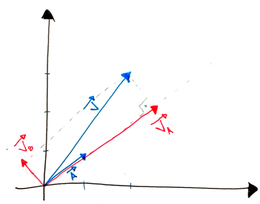
Primeiro, dividimos as dimensões de $\overrightarrow{V_A}$ pela sua norma ($\sqrt{2}$): $(\frac{1}{\sqrt{2}}; \frac{1}{\sqrt{2}})$.

Segundo, multiplicamos o resultado obtido acima pela norma desejada ($0,89 \cdot \sqrt{10}$):
$(\frac{0,89 \cdot \sqrt{10}}{\sqrt{2}}; \frac{0,89 \cdot \sqrt{10}}{\sqrt{2}}) = (0,89 \cdot \sqrt{5}; 0,89 \cdot \sqrt{5})$.

Esse é o vetor $\overrightarrow{V_A}$. Note que suas coordenadas podem ser approximadas para $(2,0; 2,0)$.

A segunda parte da questão é mais simples. O enunciado nos pediu que o $\overrightarrow{V}$ seja decomposto como uma soma de dois vetores, ou seja, $\overrightarrow{V} = \overrightarrow{V_A} + \overrightarrow{V_B}$, como já obtivemos $\overrightarrow{V_A}$, temos que $\overrightarrow{V_B} = \overrightarrow{V} - \overrightarrow{V_A}$, logo:
$\overrightarrow{V_B} = (1; 3) - (2; 2) = (-1; 1)$.

Representando todos os vetores na figura abaixo, note que as dimensões de $\overrightarrow{V_B}$ são compatíveis com o que foi pedido pela questão, $\overrightarrow{V_A}$ e $\overrightarrow{V_B}$ serem perpendiculares, e eles são a resposta final.



Agora, tente aplicar o mesmo raciocínio para resolver a questão a seguir. Tente ser estratégico no uso de frações ou aproximações.

QUESTÃO DO LIVRO-TEXTO → *Decomponha o vetor* $\overrightarrow{V} = (3; 4)$ *como soma de dois vetores perpendiculares de modo que um deles esteja na mesma direção do vetor* $\overrightarrow{A} = (12; 5)$.

AUTO-AVALIAÇÃO FINAL

Avalie o quanto você acha que sabe sobre os seguintes itens após ter resolvido as questões deste capítulo.

6 Troca de variáveis e composição de funções

APRESENTAÇÃO

Este talvez seja o primeiro capítulo cujo foco é muito mais uma ferramenta (ou duas) do que um tópico em si mesmo. O uso que se faz de troca de variáveis e composição de funções ao longo das disciplinas de Cálculo é instrumental, com intuito de viabilizar alguma técnica de deriavação ou integração ou mesmo para o cálculo de algum limite.

Exatamente por esse motivo, esses dois itens acabam não sendo abordados explicitamente pelos professores dessas disciplinas que, conscientemente ou não, acabam assumindo que os seus estudantes tem uma fluência mínima em ambos.

O que faremos ao longo deste capítulo é explorar diversos casos de troca de variáveis e de composição de funções visando explicitamente os usos que se faz em Cálculo Diferencial e Integral 1, de limites até integrais.

PRÉ-REQUISITOS E AUTO-AVALIAÇÃO INICIAL

Os pré-requisitos para este capítulo são:

- Resolução de equações do primeiro e segundo graus;
- Noções básicas sobre funções.

Esses tópicos não serão cobertos durante as atividades de tutoria. Se você acha que não sabe o suficiente sobre algum deles, sugerimos que procure material de apoio antes de começar a resolver as questões desse capítulo.

QUESTÕES DIAGNÓSTICAS

D1 Resolva a equação $x^6 - 9x^3 + 8 = 0$.

D2 Seja $f(x) = 2x + 1$ e $g(x) = 3 - x^2$.

a) Qual é o valor de $f(g(1))$?

b) Qual é a expressão algébrica de $f(g(x))$?

D3 Considere a função $h(x) = 6x - 9$.

a) Obtenha $h^{-1}(x)$, ou seja, a função inversa de $h(x)$.

b) Qual é o valor de $h^{-1}(3)$?

QUESTÕES

Lembre-se de checar com seu tutor em qual questão você deve começar.

Troca de variáveis em equações

Em algumas circunstâncias uma equação pode parecer não se encaixar em nenhum dos casos que sabemos resolver. Por exemplo, você provavelmente não conhece nenhuma estratégia para resolver uma equação que envolva x^4. Nesses casos, uma das possibilidades é tentarmos converter a equação para um formato mais simples ou familiar e uma das maneiras de conseguir esse efeito é fazendo uma troca de variáveis estratégica.

Por exemplo, a equação $x^4 - 13x^2 + 36 = 0$ é uma equação polinomial de quarto grau, para a qual ninguém costuma saber um método de resolução. Entretanto, note como ela se parece com uma equação quadrática (com x^4 onde gostaríamos que fosse x^2 e x^2 onde gostaríamos de um x). Para de fato transformá-la em uma equação quadrática podemos fazer a troca de variáveis $x^2 = t$ (o que significa que $x^4 = t^2$). Fazendo a troca, obtemos $t^2 - 13t + 36 = 0$.

Q1 Com base nas equações discutidas acima, responda os itens a seguir.

a) Obtenha os valores de t que satisfazem a equação $t^2 - 13t + 36 = 0$.

b) Lembrando que a troca de variáveis que fizemos foi $x^2 = t$, obtenha os valores de x referentes aos valores de t obtidos no item anterior.

c) Você encontrou quatro valores para x no item anterior (caso contrário, cheque suas respostas com a de seus colegas ou tutor). Verifique, substituindo em $x^4 - 13x^2 + 36 = 0$, que todos satisfazem essa equação.

O que fizemos foi uma troca de variáveis que viabilizou a resolução de uma equação que inicialmente parecia fora do alcance das ferramentas que conhecemos. Algumas vezes a troca de variáveis será fácil de notar analisando a equação, outras vezes não muito.

Trocas de variáveis

Q2 Resolva cada uma das equações a seguir usando a troca de variáveis dada.

a) $(x^2+1)^2 - 6(x^2+1) + 5 = 0$, usando a troca $t = x^2 + 1$.

b) $x + \sqrt{x+2} = 18$, usando a troca $a = \sqrt{x+2}$.

c) $2^x - 4^x = -2$, usando a troca $y = 2^x$.

d) $(x^2-5)^2 - 1 = 0$, usando uma troca a sua escolha.

Nas equações anteriores, ao voltarmos para a variável original acabamos “perdendo” alguma das possíveis soluções. Isso é normal e pode acontecer dependendo da equação e da troca de variável realizada. Por esse motivo, é especialmente importante checar as soluções obtidas especialmente uando as trocas de variáveis envolvendo operações com domínio limitado, como raízes e logaritmos.

Troca de variáveis em expressões

Ao calcularmos limites, por exemplo, lidamos com expressões algébricas ao invés de equações. Nesse contexto, trocas de variáveis podem ser úteis para transformar as expressões dadas para um formato mais simples. Por exemplo, calcular o limite de uma expressão como $\frac{x}{\sqrt{x-1}}$ é mais trabalhoso do que de uma expressão como $\frac{y^2+1}{y}$, pois essa última pode ser facilmente convertida em parcelas mais simples: $\frac{y^2+1}{y} = \frac{y^2}{y} + \frac{1}{y} = y + \frac{1}{y}$.

A troca de variável usada para transformar a primeira na segunda foi $y = \sqrt{x-1}$. Essa ideia é relativamente simples de ter já que o valor de y é o denominador inteiro (denominadores complicados são muito mais trabalhosos do que numeradores complicados). Mas da troca no denominador, o numerador precisa ser atualizado para a nova variável. Como $y = \sqrt{x-1}$, temos que $y^2 = x - 1$ e, portanto, $y^2 - 1 = x$. Dessa forma, podemos trocar todas as ocorrências de x por $y^2 - 1$ completando a troca de variáveis.

Q3 Faça uma troca de variável que mude as expressões abaixo para um formato que você considere mais simples para manipulações algébricas. Não se esqueça de indicar a troca utilizada.

a) $\frac{sqrt 4 + x - 2}{x}$

b) $x \cdot \sin(\frac{1}{x})$

c) $\sqrt{x} \cdot \log x$

Em algumas situações, pode parecer que uma determinada troca de variáveis não simplificou de fato uma expressão. Na verdade, em várias situações isso depende de quem está resolvendo a questão. Algumas pessoas preferem evitar denominadores complicados, outros raízes complicadas e outros preferem evitar trocas de variáveis. A decisão de qual troca usar pode depender das habilidades que você se sente mais confortável em usar. Mas é desejável ter familiaridade com esse recurso, pois certas situações dependem fortemente dela.

Juntando funções

Assim como os números reais, funções podem ser combinadas através de operações. As possibilidades mais simples são soma, subtração, multiplicação e divisão. Por exemplo, se temos $f(x) = 2x + 3$ e $g(x) = 5^x$, então a multiplicação dessas funções é representada por $f \cdot g$ e pode ser obtida multiplicando-se as expressões algébricas dessas funções: $f \cdot g = (2x + 3)(5^x)$. Do mesmo modo, a soma dessas funções é dada por: $f + g = 2x + 3 + 5^x$.

Se essas ideias não são familiares pra você, sugerimos a leitura das seção 3.9 do livro Matemática básica - volume 1 até o final do Exemplo 3.

O que veremos nessa questão é uma outra maneira de combinar funções, a **composição de funções**.

Q4 A fórmula $C = \frac{5(F-32)}{9}$ permite a conversão de temperaturas em Fahrenheit para Celsius. A fórmula $K = C + 273$ permite a conversão de uma temperatura em Celsius para Kelvin.

a) Quanto é 50°Fahrenheit em Celsius?

b) Quanto é 50°Fahrenheit em Kelvin?

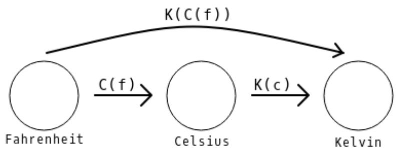
c) Quanto é 77°Fahrenheit em Kelvin?

d) Obtenha uma fórmula que converta temperaturas Fahrenheit diretamente para Kelvin.

e) Use essa fórmula para obter converter 23°Fahrenheit em Kelvin.

Nessa questão, essas expressões que foram chamadas de fómulas podem ser vistas como funções. Usando a nomenclatura convencional, podemos escrevê-las da seguinte maneira: $C(f) = \frac{5(f-32)}{9}$ e $K(c) = c + 273$. Quando escrevemos $C(f)$ estamos simplesmente deixando claro que a variável C varia de acordo com a variável f. O que você fez no item d da questão acima foi compor as funções $C(f)$ e $K(c)$ de modo a obter uma nova função $K(f)$ que obtem o valor em Kelvin de uma temperatura dada originalmente em Fahrenheit. Formalmente, dizemos que $K(f) = K(c) \circ C(f)$. Se distinguirmos explicitamente $K(f)$ de $K(c)$ chamando a primeira de K_2, por exemplo, podemos escrever apenas que $K_2 = K \circ C$ ou que $K_2(f) = K(C(f))$.

O diagrama abaixo mostra uma maneira de visualizar o efeito dessas funções em conjuntos de valores dados. A função $C(f)$ toma valores em Fahrenheit e os converte em valores em Celsius. A função $K(c)$ toma valores em Celcisus e os converte em Kelvin. Já a função composta $K(C(f))$ toma valores em Fahrenheit e os converte diretamente em Kelvin, fazendo o trabalho das duas funções de uma vez so.



Vamos explorar a fundo a ideia de funções compostas nas próximas questões.

Composição de funções

Vamos voltar à notação tradicional de função.

A partir das funções $f(x) = 2x + 3$ *e* $g(x) = 5^x$, *podemos obter as seguintes composições:*

$$f \circ g = f(g(x)) = 2 \cdot 5^x + 3$$

$$g \circ f = g(f(x)) = 5^{2x+3}$$

Para obter $f(g(x))$, que é o mesmo que $f \circ g$, devemos substituir a variável x na função $f(x)$ pela função $g(x)$.

$$f(x) = 2x + 3$$
$$f(x) = 2x + 3$$
$$f(g) = 2g + 3$$
$$f(g(x)) = 2g(x) + 3$$
$$f(g(x)) = 2 \cdot 5^x + 3$$
$$f(g(x)) = 2 \cdot 5^x + 3$$

Caso você não tenha entendido o que foi feito acima, sugerimos a leitura dos problemas 4, 5 e 6 a partir da página 350 do livro Matemática básica - volume 1.

Q5 Responda aos itens abaixo considerando as duas funções usadas como exemplo logo acima.

a) Qual é o valor de $f(g(1))$?

b) Para qual valor de x temos $f(g(x)) = 53$?

c) Qual é o valor de $g(f(1))$?

d) Para qual valor de x temos $g(f(x)) = 5$?

É importante que esteja claro pra você que $f(g(x))$ e $g(f(x))$ são funções diferentes. Veja que os itens a e d acima resultaram em valores diferentes. Além disso, a expressão algébrica de $f(g(x))$ é diferente da de $g(f(x))$.

Descompondo funções

Embora composição de funções seja fundamental para modelar fenômenos complexos, ao longo da disciplina de cálculo é bastante útil conseguir "descompor" uma função dada em duas funções mais simples.

Por exemplo, a função $f(x) = \sin(x^2 - 9)$ pode ser vista como uma composição das funções $g(x) = \sin(x)$ e $h(x) = x^2 - 9$. Nesse caso, $f(x) = g(h(x))$. Também poderíamos usar as funções $i(x) = \sin(x - 9)$ e $j(x) = x^2$ e escrever corretamente que $f(x) = i(j(x))$. A escolha da primeira ou segunda composição depende dos seus objetivos. Em Cálculo, você usará essa estratégia para calcular a derivada de uma função, portanto, seu foco deve ser em quebrar a função em partes que você saiba derivar.

Q6 Escreva as funções abaixo como a composição de duas funções a sua escolha. Indique tanto as novas funções como a ordem em que foram compostas para obter a função dada.

a) $a(x) = 3 + \cos^2(x)$

b) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x-5}}$

c) $p(x) = 3 \cdot 2^{x-1}$

d) $t(x) = (\sin(x) + 1)(\sin(x) + 2)$

Composição ou multiplicação

Como dito anteriormente, o objetivo de descompor uma função dada nas disciplinas de cálculo é viabilizar o cálculo de derivadas (pela regra da cadeia) ou integrais. Porém, em alguns casos quebrar uma função dada como um produto de duas funções mais simples pode ser mais útil (graças à regra do produto).

Considere, por exemplo, a função $f(x) = (3x + 1). \sin(x)$. Se tentarmos reescrevê-la como uma composição de duas funções, poderíamos usar $g(x) = 3x + 1$, mas a outra função precisaria ser $h(x) = x. \sin(\frac{x-1}{3})$ para que ao calcularmos $h(g(x))$ o argumento de sin fosse igual a x. Nesse caso, a decomposição da função não simplificou muito a função dada. Entretanto, poderíamos ver $f(x)$ como sendo o produto de $g(x) = 3x + 1$ e $i(x) = \sin(x)$, essas sim são funções mais simples de derivar ou integrar.

Q7 Rescreva as funções abaixo como a composição ou a multiplicação de outras duas funções mais simples.

a) $f(x) = x^2 \cdot 3^x$

b) $g(x) = \frac{x+3}{x+4}$

c) $p(x) = \cos(x^2 - 1)$

d) $m(x) = \frac{2^x}{1+2^x}$

O último item pode ser visto como uma composição envolvendo 2^x ou como um quociente. Cada opção tem suas vantagens em desvantagens relacionadas à dificuldade de calcular as derivadas das novas funções e à dificuldade de usar regra da cadeia, do produto ou do quociente.

Uma composição especial

Q8 Considere as funções $m(x) = 2x - 6$ e $n(x) = \frac{x}{2} + 3$

a) Obtenha a expressão algébrica de $m(n(x))$.

b) Obtenha a expressão algébrica de $n(m(x))$.

Nos itens acima você deve ter obtido que $m(n(x)) = x$ e $n(m(x)) = x$. Toda função da forma $f(x) = x$ é chamada de identidade pois $f(1) = 1$, $f(2) = 2$, $f(3) = 3$, $f(-17) = -17$, $f(1000) = 1000$... Quando a composição de duas funções é igual à identidade, dizemos que uma delas é a **função inversa** da outra. No caso da questão acima, dizemos que $m(x)$ é a função inversa de $n(x)$ e vice-versa. No caso geral, a inversa de uma função $f(x)$ é representada por $f^{-1}(x)$.

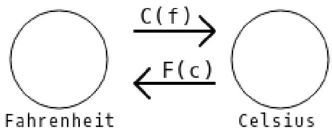
Funções inversas

Q9 Utilize a expressão $C = \frac{5(F-32)}{9}$, dada no começo deste capítulo para converter uma temperatura em celsius para fahrenheits, para responder as questões abaixo.

a) Rescreva a fórmula acima isolando F ao invés de C.

b) Use a resposta do item anterior para obter o valor em fahrenheits para a temperatura de 35°Celsius.

Agora pense nas fórmulas acima, a dada no enunciado e a obtida no item b, como funções. Podemos escrevê-las como $C(f) = \frac{5(f-32)}{9}$ e $F(c) = \frac{9c+160}{5}$. A primeira delas retorna uma temperatura em celsius a partir de um valor dado em fahrenheits. A segunda retorna um valor em fahrenheits a partir de um valor dado em celsius. Ou seja, elas fazem trabalhos inversos!



Esse é justamente o significado de duas funções serem inversas.

Q10 Verifique se a composição $C \circ F$ resulta na função identidade.

Obtendo funções inversas

O exemplo acima nos oferece não apenas uma interpretação para funções compostas, mas também um método para obtê-las: se você quer obter a inversa de $f(x)$, isole a variável x e obtenha uma expressão envolvendo y. Por exemplo, a inversa de $f(x) = 2 + \frac{1}{x}$ pode ser obtida da seguinte maneira:

$$\begin{aligned}
f(x) &= 2 + \frac{1}{x} && \text{por conveniência, vamos trocar } f(x) \text{ por } y \\
y &= 2 + \frac{1}{x} && \text{subtraindo 2 dos dois lados} \\
y - 2 &= \frac{1}{x} && \text{invertendo os dois lados da igualdade} \\
\frac{1}{y-2} &= x && \text{rescrevendo a igualdade} \\
x &= \frac{1}{y-2}
\end{aligned}$$

A expressão algébrica da função inversa foi obtida na última linha acima. Porém, escrevendo na forma convencional de funções, dizemos que a inversa de $f(x)$ é $f^{-1}(x) = \frac{1}{x-2}$. Usa-se x como variável apenas por convenção, especialmente em casos em que as funções são dadas de forma não contextualizadas.

REFLITA → *Antes de resolver a questão abaixo, descreva com suas palavras como você deve proceder para resolvê-lo do início até a resposta final, dada no forma f^{-1}.*

Q11 Use a técnica discutida anteriormente para obter a função inversa das seguintes funções.

a) $f(x) = 4x - 8$.

b) $g(x) = \frac{3}{x-1} + 2$.

c) $h(x) = 3 + \log(2x)$.

d) $p(x) = \sin(3x - 10)$.

e) $c(x) = 2^{x+5}$.

RUMO AO LIVRO-TEXTO

Nessa altura do curso de Cálculo, você já viu como derivar algumas funções, como as polinomiais e exponenciais. Entretanto, uma função como $f(x) = 2^{x^3+1}$, apesar de envolver uma exponencial e um polinômio, não se encaixa exatamente em nenhuma dessas categorias. Para esse tipo de situação, você estudará técnicas como a regra do produto, do quociente e da cadeia. A regra do produto (e do quociente) é útil para casos em que a função dada pode ser vista como um produto (ou quociente) de duas funções mais fáceis de derivar. A regra da cadeia permite calcular a derivada de uma função que possa ser decomposta em funções mais simples, lidando apenas com estas.

Não se preocupe em decorar a regra da cadeia ou entender os seus porquês neste momento, pois você terá aulas sobre ela em breve. Mas vejamos o que ela diz para resolver uma questão de um dos livros-texto.

Seja $f(x)$ uma função que pode ser decomposta em $g(h(x))$. Então, a sua derivada pode ser dada por:

$$f'(x) = h'(x) \cdot g'(h(x))$$

A questão abaixo foi retirada da seção 3.5 do livro Calculus, de James Stewart.

QUESTÃO RESOLVIDA → *Encontre a derivada de* $y = 10^{1-x^2}$.

Note que a função dada não se enquadra em nenhum dos tipos de função básicos que você sabe como derivar. Porém, ela pode ser decomposta em uma exponencial simples ($f(x) = 10^x$)e um polinômio ($g(x) = 1 - x^2$) e essas duas funções você já deve saber como derivar.

$$f'(x) = \log(10).10^x$$
$$g'(x) = -2x$$

Agora, vamos checar a regra da cadeia tendo em mente que $y = f(g(x))$.

$$y' = g'(x) \cdot f'(g(x))$$

A primeira parte é simples, basta substituir $g'(x) = -2x$, resultando em $y' = -2x \cdot f'(g(x))$.

A segunda parte é a composição de $f'(x)$ com $g(x)$. Como $f'(x) = \log(10).10^x$, temos que:

$$f'(x) = \log(10).10^x$$
$$f'(g(x)) = \log(10).10^{g(x)}$$
$$f'(g(x)) = \log(10).10^{1-x^2}$$

Portanto:

$$y' = -2x \cdot \log(10).10^{1-x^2} \qquad \text{rescrevendo o lado direito da igualdade}$$
$$y' = -2\log(10) \cdot x \cdot 10^{1-x^2}$$

Agora, tente aplicar a regra da cadeia para resolver a questão abaixo, também retirada do livro Calculus, de James Stewart.

QUESTÃO DO LIVRO-TEXTO → *Encontre a derivada de* $y = e^{\sqrt{x}}$.

GABARITO

Q1 a) 3, b) $2\sqrt{3}$, c) $2\sqrt{3}$.

Q2 a) $0,98$, b) $0,97$, c) $0,3$, d)$0,9$, e) $0,07$.

Q3 a) $3,76$, b) $9,24$.

Q4 a) $0,78$, b) $1,16$, c) $37°$, d) $30°$.

Q5 a) $\sqrt{13}$, b) o seno vale $2\sqrt{13}/13$ e o cosseno $3\sqrt{13}/13$, c) $0,59$ e $34°$.

Q6 a) $\|V\| = \sqrt{5}$ e $\|U\| = \sqrt{10}$, b) $63°$ e $18°$, c) $45°$.

Q7 a) $(2,30; 1,93)$, b) $(-\sqrt{3}; 1,00)$.

Q8 c) $\sqrt{10}/2$, d) $\frac{5}{2}$.

Q9 a) $2,42$.

Q10 a) 2.301, b) 1.301, c) 0.301.

Q11 $1,93$.

Questão 12: a) 5, b) 1, c) dobrar também.

Q12 a) 5, b) 1, c) dobrar também.

Q1 a) 9 e 4, b) ± 3 e ± 2.

Q2 a) 0, 2 e -2, b) 14 e 23, c) 1, d) ± 2, $\pm\sqrt{6}$.

Q3 a) $\frac{1}{t+2}$, b) $\frac{\sin(t)}{t}$, com $t = 1/x$, c) $2t \cdot \log(t)$, com $t = \sqrt{x}$.

Q4 a) $10°$ celsius, b) 283 kelvin, c) 298 kelvin, d) $K = \frac{5(F-32)}{9} + 273$, e) 267 kelvin.

Q5 a) 13, b) $x = 2$, c) 5^5, d) $x = -1$.

Q6 a) $a(x) = b(c(x))$, $b(x) = 3 + x^2$ e $c(x) = \cos(x)$, b) $f(x) = g(h(x))$, $g(x) = 1/x$ e $h(x) = \sqrt{x-5}$, c) $p(x) = q(r(x))$, $q(x) = 3.2^x$ e $r(x) = x - 1$, d) $t(x) = u(v(x))$, $u(x) = x(x+1)$ e $v(x) = \operatorname{sen}(x) + 1$.

Q7 a) $f(x) = g(x).h(x)$, $g(x) = x^2$ e $h(x) = 3^x$, b) $g(x) = n(x)/d(x)$, $n(x) = x + 3$ e $d(x) = x + 4$, c) $p(x) = q(r(x))$, $q(x) = \cos(x)$ e $r(x) = x^2 - 1$, d) $g(x) = h(x)/i(x)$, $h(x) = x + 3$ e $i(x) = x + 4$.

Q8 a) $m(n(x)) = x$, b) $n(m(x)) = x$.

Q9 a) $F = \frac{9C}{5} + 32$, b) $95°$ fahrenheit.

Q10 $C \circ F = C$

Q11 a) $f^{-1}(x) = \frac{x+8}{4}$, b) $g^{-1}(x) = \frac{3}{x-2} + 1$, c) $h^{-1}(x) = \frac{10^{x-3}}{2}$, d) $p^{-1}(x) = \frac{\arcsin(y)+10}{3}$, e) $c^{-1}(x) = \log_2(y) - 5$.

7 Equação de retas e circunferências

APRESENTAÇÃO

Parte da disciplina Geometria Analítica se dedica a estudar as expressões algébricas que representam curvas importantes por sua simplicidade, generalidade ou aplicações específicas. Dentre essas curvas podemos mencionar retas, planos, circunferências, cônicas e quádricas. Neste capítulo, vamos estudar retas e circunferências no plano visando explorar aspectos que serão úteis no estudo das demais curvas mencionadas tanto no plano quanto no espaço.

PRÉ-REQUISITOS E AUTO-AVALIAÇÃO INICIAL

Os pré-requisitos para este capítulo são:

- → Equação da reta;
- → Distância entre pontos no plano.

Esses tópicos não serão cobertos durante as atividades de tutoria. Se você acha que não sabe o suficiente sobre algum deles, sugerimos que se procure material de apoio antes de começar a resolver as questões desse capítulo.

QUESTÕES DIAGNÓSTICAS

D1 Considere os pontos $P = (1;3)$ e $Q = (-1;-1)$.

a) Obtenha a equação da reta que passa pelos dois pontos.

b) Dê a equação de uma reta diferente e paralela à encontrada no item a.

D2 Considere as retas dadas pelas equações $2y + 3x - 1 = 0$ e $y - 4x + 3 = 0$.

a) Obtenha o ponto de intersecção entre as duas retas.

b) Represente as retas em um plano cartesiano.

QUESTÕES

Vamos começar esse capítulo com uma das propriedades básicas das retas no plano: dois pontos determinam uma reta.

Pontos e retas

Q1 Considere os pontos $P = (1;1)$ e $Q = (3;5)$.

a) Marque os dois pontos em um eixo cartesiano.

b) Trace a reta que passa pelos dois pontos.

c) Avaliando visualmente, você diria que quais dos seguintes pontos estão sobre a reta: $A = (-1;2)$,$B = (4;4)$, $C = (2;3)$, $D = (-1;-3)$?

d) Avaliando visualmente, em quais pontos essa reta parece cortar os eixos X e Y?

Para traçar a reta na questão acima, você provavelmente posicionou a sua régua sobre os dois pontos que havia marcado no eixo cartesiano. Ao posicionar sobre os dois pontos a régua ficou com a sua posição totalmente definida (um ponto só permitiria girar a régua). Esse é o significado concreto da propriedade "dois pontos determinam uma única reta".

Equação da reta

O equivalente algébrico da propriedade mencionada acima é que dados dois pontos (diferentes) temos informação suficiente para determinar a equação da reta que passa por eles.

Existem vários métodos para resolver essa questão, mas se você não sabe como obter a equação de uma reta a partir de dois pontos, peça ajuda a um colega ou ao tutor para resolver a questão a seguir.

Q2 Obtenha a equação da reta que passa pelos pontos $P = (1;1)$ e $Q = (3;5)$.

Você deve ter obtido a equação $y = 2x - 1$ na questão acima, entretanto, essa reta poderia ser representada algebricamente por expressões que, apesar de serem equivalentes a essa, tem um formato bastante diferente. Esses diferentes formatos e suas propriedades é um dos tópicos centrais deste capítulo.

Agora, vamos usar a equação da reta para responder a questões muito parecida com as que foram respondidas visualmente no questão 1.

Q3 Considere a reta dada pela equação $y = 2x - 1$, responda:

a) Qual é o ponto de coordenada X igual a 10 que pertence a essa reta?E de coordenada Y igual a -3?

b) Em que pontos ela corta os eixos X e Y?

c) Quais dos pontos $A = (-1;2)$, $B = (4;4)$, $C = (2;3)$ e $D = (-1;-3)$ pertencem a ela?

d) Dê as coordenadas de um ponto do quarto quadrante (valores de X positivos e de Y negativos) que pertença à reta.

Equação da reta na forma reduzida

Chamamos de **forma reduzida** a equação da reta dada no formato $y = mx + c$. Esse formato é bastante comum pois é conveniente também para o estudo de funções (basta usar $f(x)$ ao invés de y). Mas além disso, ele possui algumas vantagens.

O valor de c está relacionado com o ponto em que a reta corta o eixo Y e é chamado de **coeficiente linear**. O valor de m, chamado de **coeficiente angular**, está relacionado com a inclinação da reta: $m > 0$ implica uma reta crescente, $m = 0$ uma reta horizontal e $m < 0$ uma reta decrescente. No geral, essas duas informações são suficientes para um bom esboço da reta em um plano cartesiano.

Se você não sabe como fazer o esboço de uma reta a partir dessas duas informações sem precisar montar uma tabela com pontos, sugerimos uma leitura da seção 3.4 do livro Matemática Básica volume 1 até o final do exemplo 2 antes de resolver a questão abaixo.

Q4 Usando um único plano cartesiano, esboce as retas dadas pelas equações: $y = x + 1$, $y = -2x - 4$, $y = \frac{x}{2}$ e $y = \frac{x}{2} - 1$.

Você deve ter notado que duas das retas anteriores são paralelas entre si. Observe as semelhanças e diferenças entre as equações delas e, com base nisso, responda a questão a seguir.

Q5 Dê a equação de uma reta paralela à reta $y = 2x - 1$.

Como você deve ter notado, para que duas retas, dadas na forma reduzida, sejam paralelas basta que seus coeficientes angulares sejam iguais e coeficientes lineares sejam diferentes.

Equação da reta na forma geral

Um outro formato para a apresentação da equação de uma reta é a chamada **forma geral**, mostrada abaixo:

$$ay + bx + c = 0$$

Q6 Dada a reta de equação $4y + 6x - 4 = 0$, faça o que se pede:

a) Determine os pontos em que ela corta os eixos X e Y.

b) Esboce a reta em um plano cartesino.

Note que nesse caso nem a inclinação da reta nem o ponto de intersecção com o eixo Y estão claros na equação da reta. Nesse sentido, a forma geral é menos prática do que a forma reduzida. Porém, ela tem sim algumas vantagens.

Vantagens da forma geral, 1

A primera delas se refere a possibilidade de representar retas verticais. Por exemplo, a reta vertical que corta o eixo X em $(3; 0)$ tem equação $x = 3$. Pare e pense. Essa equação pode ser interpretada da seguinte maneira: para qualquer valor de y que você escolher, o valor de x

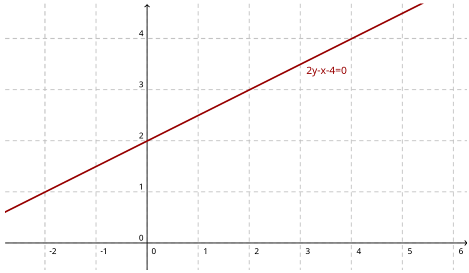
será sempre igual a 3. Qualquer ponto com $x \neq 3$ não pertencerá a essa reta. Isso significa que os pontos dessa reta são exatamente todos os pontos "empilhados" verticalmente sobre a marcação 3 no eixo x, ou seja, sobre o ponto $(3;0)$.

Uma reta horizontal que corte o eixo Y no ponto $(0;4)$ terá equação $y = 4$. (Pare e pense sobre a interpretação dessa equação).

A diferença entre esses dois casos é que $y = 4$ está na forma reduzida (podemos vê-la como $y = 0x + 4$), mas $x = 3$ não (pois precisaríamos de um 0 multiplicando y, o que não pode ocorrer na forma reduzida, pois não há uma constante multiplicando y). Entretanto, ambas as equações e encaixam na forma geral: $x - 3 = 0$ (que pode ser vista como $0y + x - 3 = 0$) e $y - 4 = 0$ (que pode ser vista como $y + 0x - 4 = 0$).

Portanto, a forma geral comporta casos válidos do ponto de vista geométrico que a forma reduzida não comporta.

Q7 Esboce o gráfico das retas com equações iguais a $x - 5 = 0$, $y + 1 = 0$, $2x + 1 = 0$ e $y = 0$.



Vantagens da forma geral, 2

Outra vantagem da forma geral se refere ao **vetor normal** à reta. Esse é o nome dado a um vetor (qualquer um deles) que seja perpendicular à reta. Esse vetor é muito importante para obtermos a equação de planos em Geometria Analítica. Para compreendermos essa propriedade, vamos considerar a reta de equação $2y - x - 4 = 0$, que está traçada abaixo.

Q8 Em relação à reta acima:

a) Use o quadriculado para traçar um vetor perpendicular à reta a partir do ponto $(0; 2)$. Sugestão: trace um vetor que termine em um dos vértices do quadriculado.

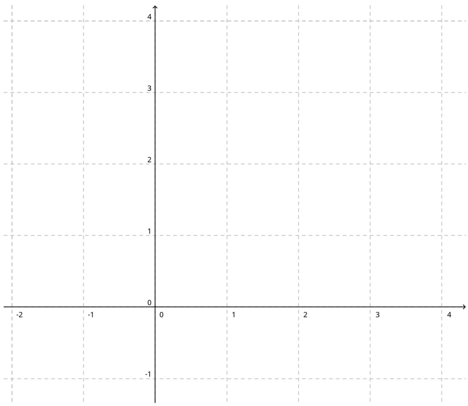
b) Qual é esse vetor?

Você deve ter obtido o vetor $\binom{-1}{2}$. Note que as coordenadas x e y desse vetor são iguais aos coeficientes que multiplicam x e y na equação dada. Essa propriedade é bastante poderosa quando lidarmos com planos pois é mais simples indicar a **direção** de um plano por um vetor normal do que por inclinações em relação aos eixos.

Porém, note também que o vetor normal indica apenas a direção da reta. Ainda nos resta determinar a posição dessa reta. Isso é feito, de maneira geral, dando um ponto que pertence à reta. Dado o vetor normal e mais um ponto, a equação da reta pode ser determinada.

Q9 Seja $\overrightarrow{V} = \binom{1}{2}$ e $P = (1;1)$.

a) Marque o ponto P no quadriculado abaixo e o vetor $\overrightarrow{V}$ começando em P.



b) Visualmente, trace uma reta que passa por P e é perpendicular a $\overrightarrow{V}$.

c) Obtenha a equação dessa reta.

d) Obtenha a equação de uma nova reta que passa pelo ponto $Q = (3;2)$ e tem vetor normal igual a $\overrightarrow{U} = \binom{5}{-1}$.

REFLITA → *Compare com seus colegas o método que você utilizou pra resolver o último item da questão acima e descreva com suas palavras o método que lhe parece o melhor para resolvê-la quando a informação dada é um ponto e o vetor normal da reta.*

Uma nova forma

Uma terceira forma de representar algebricamente uma reta é a **forma paramétrica**. Apesar de ser pouco usada para retas e planos, a forma paramétrica pode facilitar enormemente o tratamento algébrico de algumas curvas e reforça conceitos que serão estudados em Álgebra Linear, como o de combinação linear. Por esse motivo, veremos como utilizá-la.

A ideia por trás de representações paramétricas é a introdução de uma nova variável (parâmetro) que vai ser usada para gerar as coordenadas X e Y de cada ponto pertencente à curva em questão. Isso significa que a expressão não vai relacionar uma coordenada à outra através de uma equação, mas sim usar um parâmetro para gerar os pares de valores para as coordenadas.

Tipicamente, uma equação paramétrica tem o seguinte formato: $(x, y) = (2t - 1; 4 - t^2)$ ou $\begin{cases} x = 2t - 1 \\ y = 4 - t^2 \end{cases}$, ambos representando exatamente a mesma curva (que não é uma reta, nesse caso).

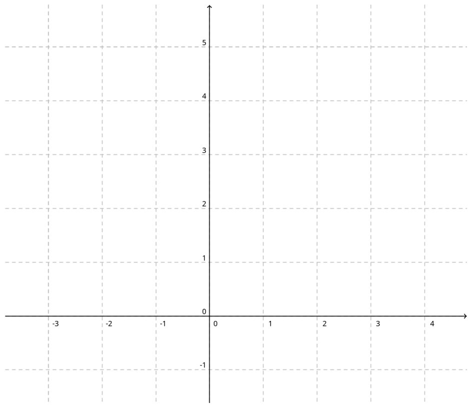
Sendo assim, para cada valor de t, obtemos valores para as coordenadas X e Y de um ponto que pertence à curva. Por exemplo, para $t = 0$ temos o ponto $(-1; 4)$ e para $t = 1$ temos o ponto $(1; 3)$.

Para que uma equação paramétrica no plano seja uma reta, é necessário e suficiente que suas equações sejam lineares em termos de t, ou seja, tenham o formato $at + b$. Por exemplo, $(x, y) = (2t - 1; t + 3)$.

Q10 Em relação à reta dada pela equação $(x, y) = (2t - 1; t + 3)$, faça o que se pede.

a) Obtenha as coordenadas dos pontos para $t = 0$, $t = 2$ e $t = -1$.

b) Marque esses pontos no plano cartesiano abaixo e confirme que eles pertencem a uma mesma reta, ou seja, estão alinhados.



c) Determine para quais valores de t essa reta cruza os eixos X e Y.

Essa mesma equação pode ser rescrita como mostrado abaixo.

$$(x, y) = (2t-1; t+3) = (-1+2t; 3+t) = (-1; 3)+(2t; -t) = (-1; 3)+(2; -1)\cdot t$$

A forma mais à direita salienta dois aspectos: o ponto $(-1; 3)$ obtido quando $t = 0$ que pode ser interpretado como início da curva, e a direção $(2; -1)$ na qual a reta avança à medida que o valor de t aumenta. Dessa maneira, interpretar o parâmetro t como sendo o tempo é um recurso comum neste contexto.

Todas as formas

Q11 Considere os pontos $P = (1; 1)$ e $Q = (3; 5)$.

a) Marque esses pontos em um plano cartesiano e trace a reta que passa por eles.

b) Obtenha a equação dessa reta na forma reduzida (suportamente a mais simples para o caso em que dois pontos são dados).

c) Obtenha a equação na forma geral manipulando algebricamente a equação obtida no item anterior.

d) Use a equação na forma geral para obter o vetor normal e trace-o no mesmo plano cartesiano.

e) Obtenha uma equação paramétrca que represente essa mesma reta usando as ideias de ponto inicial e direção da reta.

Para finalizar as questões sobre retas, discuta a questão a seguinte usando as respostas obtidas por seus colegas.

REFLITA → *Compare com seus colegas para ver se todos obtiveram as mesmas respostas para os itens b, c e e. Em quais desses itens é possível obter respostas diferentes corretas?*

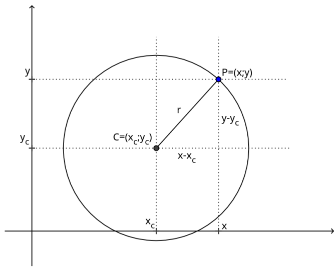
Circunferência

Agora vamos deixar para trás as retas e focar a atenção nas expressões algébricas que representam circunferências.

A forma mais comum de representá-las é a chamada **forma reduzida**: $(x - x_c)^2 + (y - y_c)^2 = r^2$, em que x e

y são as coordenadas dos pontos que pertencem à circunferência, x_c e y_c são as coordenadas do centro e r é a medida do raio.

Essa expressão é obtida diretamente da definição de circunferência como sendo os pontos $(x; y)$ que estão a uma mesma distante r de um ponto $(x_c; y_c)$ chamado centro. A aplicação do teorema de pitágoras na imagem ao lado gera exatamente a expressão dada acima.



Q12 Use a equação dada acima para responder as questões abaixo.

a) Qual é a equação da circunferência com centro em $(2; 1)$ e raio 3?

b) Qual é a equação da circunferência com centro na origem e raio 1?

c) Qual é o centro e raio da circunferência dada pela equação $(x - 1)^2 + (y + 3)^2 = 4$?

A forma geral de uma circunferência

A forma geral de uma circunferência é obtida ao desenvolvermos os quadrados da forma reduzida e simplificarmos a expressão de modo que seja igual a zero. Veja o que ocorre com a equação dada no item c acima.

$$
\begin{aligned}
(x-1)^2 + (y+3)^2 &= 4 && \text{desenvolvendo as potências}\\
(x^2-2x+1) + (y^2+6y+9) &= 4 && \text{agrupando termos}\\
x^2-2x+y^2+6y+1+9-4 &= 0 && \text{subtraindo 4 dos dois lados}\\
x^2-2x+y^2+6y+6 &= 0
\end{aligned}
$$

A última linha acima nos dá a forma geral da equação da circunferência discutida no item c da questão anterior. Note que as coordenadas do centro e o raio da circunferência não são mais claros na expressão. Mesmo assim, essa forma é usada por ser um caso específico de uma família de curvas chamadas cônicas, as quais podem ser descritas por equações com formato muito parecido com a forma geral de uma circunferência. Você estudará essas curvas em breve em Geometria Analítica.

Uma das situações comuns neste contexto é ter que identificar exatamente qual curva é representada por uma equação dada na forma geral. No momento, só conhecemos a circunferência, mas ainda resta o desafio de identificar seu centro e raio dada a sua equação na forma geral.

Vejamos o que poderia ser feito em relação à equação $x^2+8x+y^2-6y-11=0$. Primeiro, note que o termo independente, -11 é bem pouco útil, pois ele é o resultado da soma do termo independente resultante do primeiro quadrado, do segundo quadrado e do quadrado do raio. Os termos x^2 e y^2 também não oferecem muita informação sobre a forma reduzida, mas os termos $8x$ e $-6y$ podem ser úteis. Ambos são resultados puros de expressões do tipo $(x+a)^2$ e $(y+b)^2$. Tendo em mente que $(x+a)^2 = x^2 + 2ax + a^2$, descobrimos que $8x$ só pode ter vindo de um expressão do tipo $(x+4)^2$ e $-6y$ de $(y-3)^2$. Logo, a forma reduzida da nossa circunferência deve ser $(x+4)^2 + (y-3)^2 = r^2$, ou seja, já sabemos que o centro da circunferência é $(-4; 3)$.

Agora, vamos focar no raio. Se desenvolvermos os quadrados da expressão acima, obtemos $x^2 + 8x + y^2 - 6y + 25 - r^2 = 0$. Logo, $25 - r^2 = -11$, o que implica que $r = 6$. Portanto, a circunferência de equação $x^2 + 8x + y^2 - 6y - 11 = 0$ tem centro em $(-4; 3)$ e raio igual a 6.

Q13 Obtenha o raio e centro da circunferência dada pela equação $x^2 + 2x + y^2 - 8y + 13 = 0$

Q14 Visando praticar um pouco mais o uso da forma geral de uma circunferência, faça o que se pede a seguir:

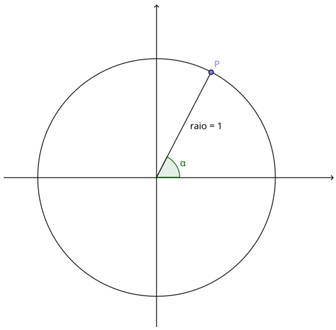
a) Escolha o centro e raio de uma circunferência, escreva a sua forma reduzida e desenvolva-a de modo a obter a sua forma geral.

b) Passe apenas a forma geral para um colega e obtenha o centro e raio da circunferência por trás da forma geral que ele te passou.

c) Cheque se ambos acertaram a questão.

A forma paramétrica de uma circunferência

A equação paramétrica da circunferência é especialmente importante por oferecer uma conexão entre expressões do tipo polinomial e as relações trigonométricas. Vamos focar nas circunferências de raio 1 com centro na origem, como mostrado abaixo.



Q15 Considerando a figura acima:

a) Como a coordenada X do ponto P pode ser obtido em termos do ângulo α?

b) Como a coordenada Y do ponto P pode ser obtido em termos do ângulo α?

c) Se considerarmos α como parâmetro, como ficaria a equação paramétrica da circunferência mostrada acima?

A simplicidade dessa equação paramétrica é um dos motivos dela ser tão amplamente utilizada, tanto para descrever curvas mais complexas quanto para calcular integrais.

Explorado a forma paramétrica da circunferência

Para finalizar esse capítulo, vamos explorar um pouco mais a forma paramétrica da circunferência.

As questões a seguir são um pouco mais abertas do que as que você resolveu até agora e você vai precisar explorá-las um pouco mais autonomamente para conseguir resolvê-las. Por serem mais abertas, essas questões não possuem resposta no gabarito. Discuta as suas soluções com seus colegas e tutor.

Q16 Você obteve a equação $(x; y) = (\cos(t); \sin(t))$ para a circunferência de centro na origem e raio 1 na questão anterior. Quais são as semelhanças e diferenças entre ela e a curva obtida pela equação $(x; y) = (\sin(t); \cos(t))$?

Q17 Qual deve ser a equação paramétrica da circunferência com centro na origem e raio igual a 3?

Q18 Esboce a curva gerada pela equação paramétrica $(x; y) = (3\cos(t); 4\sin(t))$. Como você descreveria essa curva?

Q19 Qual deve ser a equação paramétrica da circunferência de raio 1 e centro em $(2; 3)$?

RUMO AO LIVRO-TEXTO

Neste capítulo, discutido diferentes formas de representar retas no plano cartesiano, ou seja, em um contexto com duas dimensões. Porém, em Geometria Analítica, você normalmente vai lidar com objetos no espaço, ou seja, em um contexto com três dimensões.

Essa mudança acrescenta um certo nível de dificuldade, mas quase tudo que discutidos aqui pode ser extrapolado ou usado como referência para entender o que ocorre em três dimensões. Por esse motivo, ao invés de resolver e propor uma questão do livro texto nesta seção, vamos sugerir uma leitura. Se você completou as questões propostas neste capítulo, sugerimos que você leia a seção 4.1 do livro Matrizes, Vetores e Geometria Analítica na qual o autor introduz as equações de planos e retas no espaço. Preste atenção especial aos exemplos e não se preocupe com as demonstrações na sua primeira leitura (volte a elas no futuro).

Com isso, esperamos que você consiga dar mais significados aos conceitos que serão discutidos na disciplina.

GABARITO

Confira as respostas para as questões e **não se esqueça de registrar o seu progresso**.

Q1

Q2 $y = 2x - 1$

Q3 a) $(10; 19)$ e $(-1; -3)$, b) $(1/2; 0)$ e $(0; -1)$, c) Apenas C e D.

Q4

Q5 $y = 2x - 2$, por exemplo.

Q6 a) $(2/3; 0)$ e $(0; 1)$, b) cheque com seu tutor ou colega.

Q7

Q8 a) cheque com seu tutor, b) b) $(-1; 2)$ é uma possibilidade correta..

Q9 a) e b) abaixo, c)$2y + x - 3 = 0$, d) $-y + 5x - 13 = 0$.

Q10 a) $(-1; 3)$, $(3; 5)$ e $(-3; 2)$, c) $t = -3$ e $t = 1/2$.

Q11 b) $y = 2x - 1$, c) $y - 2x + 1 = 0$, d) $\overrightarrow{V} = (-2; 1)$, e) $(x; y) = (1; 1) + (2; 4) \cdot t$.

Q12 a) $(x-2)^2+(y-1)^2=3^2$, b) $x^2+y^2=1$, c) $(1;-3)$ e $r=2$.

Q13 $(-1;+4)$ e $r=2$.

Q14 a) $x=\cos(\alpha)$, b) $y=\sin(\alpha)$, c) $(x;y)=(\cos(\alpha);\sin(\alpha))$.

AUTO-AVALIAÇÃO FINAL

Avalie o quanto você acha que sabe sobre os seguintes itens após ter resolvido as questões deste capítulo.

	Nada	Muito pouco	Noções gerais	Bastante
Traçar o gráfico de uma reta dada a sua equação				
Obter a equação de uma reta dados dois pontos				
Identificar a equação de uma circunferência				

Cheque como foi o seu progresso comparando essas respostas com as que você deu antes de estudar este capítulo. Caso você não tenha atingido o nível "Bastante" em algum dos tópicos acima, liste abaixo qual ação concreta você fará nos próximos dias para atingi-lo:

8 Transformações em gráficos

APRESENTAÇÃO

Uma parte grande do curso de Cálculo se dedica a compreender e analisar o gráfico de uma função através de suas derivadas.

De fato, a primeira e segunda derivadas de uma função oferecem informações que seriam, sem essas ferramentas, difíceis de avaliar com base apenas na expressão algébrica de uma função. Entretanto, algumas características podem ser identificadas sem o uso de derivadas e algumas transformações relativamente simples podem ser usadas para criar novas funções a partir das funções elementares que você já deve conhecer.

O que pretendemos neste capítulo é explorar exatamente essas características e transformações em preparação para as dicussões sobre gráficos de funções que virão em breve envolvendo derivadas.

PRÉ-REQUISITOS E AUTO-AVALIAÇÃO INICIAL

Os pré-requisitos para este capítulo são:

→ Esboço de gráficos de funções elementares.

Esses tópicos não serão cobertos durante as atividades de tutoria. Se você acha que não sabe o suficiente sobre algum deles, sugerimos que procure material de apoio antes de começar a resolver as questões desse capítulo.

QUESTÕES DIAGNÓSTICAS

D1 Esboce o gráfico de $p(x) = (x-1)(x+1)(x+3)$.

D2 Obtenha a expressão algébrica de uma função seno cuja imagem seja o intervalo $2 \leqslant y \leqslant 10$ e com período igual a π.

QUESTÕES

Como o foco deste capítulo é traçar o gráfico de funções, você notará que o estilo das questões será um pouco diferente. Progrida sem pressa, traçando todos os gráficos pedidos com atenção. Esse capítulo é uma boa oportunidade para se acostumar com esse tipo de questão.

Esperamos que ao final você terá adquirido uma boa fluência e será capaz de esboçar gráficos com mais confiança.

Gráfico de funções elementares

Vamos começar este capítulo estabelecendo o gráfico de algumas funções que você já deve conhecer: linear, quadrática, exponencial e trigonométricas.

Se você já está familiarizado com elas, trace-as e depois confira a lista de características dada para se assegurar de que o seu esboço satisfaz as características esperadas.

Se você não está familiarizado, sugerimos que você: 1) monte uma tabela de valores para x e y com diversos pontos, 2) marque esses pontos no eixo cartesiano, 3) quando você estiver convencido sobre o formato do gráfico, trace-o.

Caso esses passos não façam sentido pra você, leia os exemplos 9 e 10 das páginas 302 e 303 do livro

Matemática básica - volume 1.

Por fim, eis algumas recomendações que você pode seguir:

→ Marque os pontos e esboce as curvas a lápis para que você possa apagá-las caso erre ou caso queira melhorá-las depois;

→ Tente obter pontos em vários quadrantes, ou seja, use valores de x positivos e negativos para montar a sua tabela;

→ Escolhe a escala dos eixos X e Y levando em conta os valores obtidos na sua tabela. Não há necessidade de que as escalas sejam iguais;

→ Indique pelo menos um valor numérico em cada um dos eixos para que a escala fique clara;

→ Preste atenção especial aos pontos em que o gráfico corta o eixo Y (quando $x = 0$) e o eixo X (as raízes, ou seja, quando $f(x) = 0$).

Q1 Use os eixos cartesianos dados na próxima página para esboçar o gráfico das funções pedidas abaixo.

a) $f(x) = x + 1$

b) $g(x) = x^2$

c) $h(x) = 2^x$

d) $i(x) = \sqrt{x}$

e) $j(x) = \sin(x)$

f) $l(x) = \cos(x)$

Uma vez desenhados os gráficos acima, cheque se os seus esboços satisfazem todas as características abaixo. Caso não, volte e os corrija.

- ☐ O gráfico de $f(x)$ deve ser uma reta. Os eixos podem estar na mesma escala e, nesse caso, a reta deve ter inclinação de $45°$;
- ☐ O gráfico de $f(x)$ não deve ser "curto", como se fosse um segmento de reta, mas sim longo, cruzando eixos e indo além dos pontos marcados por você, sugerindo uma reta;
- ☐ O gráfico de $g(x)$ deve passar pela origem e ser simétrico em relação ao eixo Y;
- ☐ O gráfico de $g(x)$ deve ficar cada vez mais vertical a medida que os valores de x se afastam de zero, mas não deve ficar de fato vertical;
- ☐ O gráfico de $h(x)$ deve se aproximar cada vez mais do eixo X a medida que os valores de x tendem a menos

infinito, mas jamais deve cruzá-lo;

- ☐ O gráfico de $h(x)$ deve ficar crescer muito rapidamente a medida que os valores de x aumentam, sem jamais ficar vertical;

- ☐ O gráfico de $i(x)$ deve estar totalmente no primeiro quadrante;

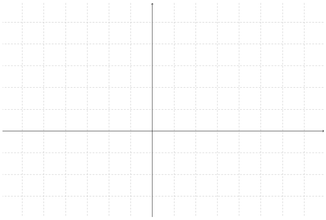
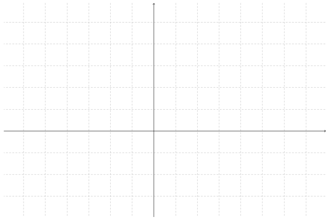
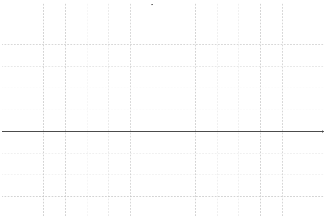
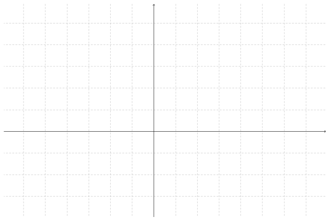
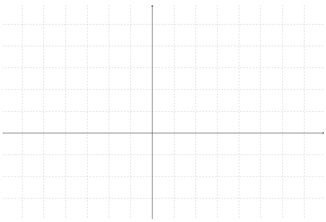
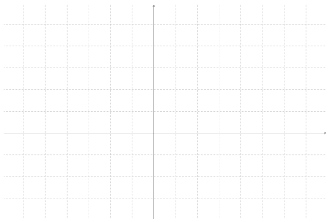
- ☐ O gráfico de $i(x)$ deve ser sempre crescente, mas cada vez mais lentamente (ficando mais horizontal a medida que x cresce);

- ☐ O gráfico de $j(x)$ e $l(x)$ deve indicar claramente que as funções variam entre 1 e -1. Isso deve ser feito com indicações claras de valores no eixo Y;

- ☐ O gráfico de $j(x)$ e $l(x)$ deve indicar claramente que o período das funções é igual a 2π, pu seja, a distância horizontal entre dois máximos consecutivos deve ser igual a 2π. Isso deve ser feito com indicações claras de valores no eixo X.

- ☐ O gráfico de $j(x)$ deve passar pela origem;

- ☐ O gráfico de $l(x)$ deve cortar o eixo Y no ponto $(0; 1)$.

Falando sobre gráficos

Existem três conceitos que são muito utilizados para descrever o gráfico de funções ou trechos específicos destes: crescente, decrescente e concavidade.

Esses três conceitos podem ser definidos formalmente e, dada uma função na sua forma algébrica, é possível demonstrar qual deles se aplica ao comportamento da função em um determinado ponto. Porém, aqui faremos uma abordagem mais intuitiva e visual, uma vez que a abordagem formal será feita na disciplina de Cálculo.

Um detalhe importante: ao avaliarmos visualmente o gráfico de uma função devemos "ler" o gráfico da esquerda para a direita (valores de x aumentando).

Dizemos que um trecho de um gráfico de uma função é **crescente** quando os valores de y aumentam a medida que os de x aumentam. Em termos gráficos, o segmento de curva em questão deve estar subindo (se analisarmos da esquerda pra direita). Por exemplo, o gráfico de $i(x) = \sqrt{x}$ é crescente em todo o seu domínio (volte e cheque se você concorda com essa afirmação), enquanto o gráfico de $j(x) = \sin(x)$ é crescente em alguns trechos (como o intervalo em que ele corta o eixo Y, de $-\pi/2$ a $\pi/2$) e não em outros.

Um exemplo de trecho **decrescente** ocorre na função $g(x) = x^2$, quando $x < 0$. Note que a curva nessa parte está descendo (se analisarmos da esquerda pra direita). Mas isso muda assim que a função cruza a origem e ela passa a ser crescente.

Q2 Considerando os gráficos traçados anteriormente, faça o que se pede em cada item.

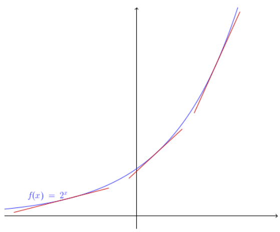
a) A função $f(x)$ é crescente ou decrescente?

b) A função $h(x)$ é crescente ou decrescente?

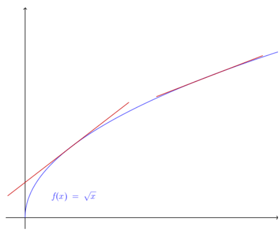
c) Identifique um trecho em que a função $l(x) = \cos(x)$ é crescente e outro em que ela é decrescente.

O conceito de **concavidade** surge ao compararmos o formato das gráficos de $h(x) = 2^x$ e $i(x) = \sqrt{x}$. Ambos são crescentes, mas se comportam de maneira diferente: $h(x)$ fica cada vez mais vertical enquanto que $i(x)$ fica cada vez mais horizontal. A diferença entre eles está na concavidade de cada um deles. Diz-se que $h(x) = 2^x$ tem concavidade positiva enquanto $i(x) = \sqrt{x}$ tem concavidade negativa.

Para distinguirmos esses dois casos visualmente, podemos traçar pequenas tangentes aos gráficos em alguns pontos. Se todas as tangentes ficarem abaixo do gráfico em um intervalo (como no gráfico à esquerda abaixo) dizemos que ela tem concavidade positiva nesse intervalo. Caso contrário, a concavidade é negativa (como no gráfico à direita abaixo).



concavidade positiva



concavidade negativa

Q3 Considerando os gráficos traçados no começo deste capítulo, faça o que se pede em cada item.

a) Qual é a concavidade da função $g(x)$? Ela mantém essa mesma concavidade para todo o seu domínio?

b) Identifique um trecho em que a função $j(x) = \sin(x)$ tem concavidade positiva e outro com concavidade negativa.

Aviso

Deste ponto em diante, os gráficos devem ser esboçados no seu caderno. Sugerimos que use **caneta** para traçar os eixos e **lápis** para esboçar as curvas obtidas.

Além disso, todas as questões a seguir dependem da comparação de novos gráficos com os gráficos feitos na questão 1. Para facilitar a comparação, sugerimos que você use a **mesma escala** utilizada para esboçar o gráfico de referência.

Maiss uma vez, não tenha pressa ao resolver as questões a seguir. Se for necessário, faça uma tabela de valores, marque alguns pontos e então esboce o gráfico.

Negativo

Vamos começar investigando o que ocorre com o gráfico de funções quando introduzimos sinais de negativo em suas expressões. Tecnicamente, o que estamos fazendo é multiplicando a função como um todo ou a variável por -1.

Q4 Usando como referência o gráfico de $h(x)$:

a) Esboce o gráfico das funções $a(x) = -(2^x)$ e $b(x) = 2^{-x}$?

b) Como você descreveria o impacto causado pela multiplicação da função como um todo por -1 $(a(x) = -(2^x))$?

c) Como você descreveria o impacto causado pela multiplicação da variável por -1 ($b(x) = 2^{-x}$)?

Soma de constante à função

Q5 Usando como referência o gráfico de $i(x)$:

a) Esboce o gráfico da função $c(x) = \sqrt{x} + 2$.

b) Descreva o efeito gráfico de somarmos uma constante a uma função dada.

c) Descreva com suas palavras, sem esboça-lo, como seria o gráfico da função $c(x) = \sqrt{x} - 1$ em relação ao gráfico de $i(x)$.

Multiplicação da função por uma constante

Q6 Usando como referência o gráfico de $l(x)$:

a) Esboce o gráfico da função $d(x) = 2\cos(x)$.

b) Descreva o efeito gráfico de multiplicarmos uma função dada por uma constante.

c) O que ocorrerá se a constante for positiva, mas menor do que 1?

Mais casos envolvendo somas

Q7 Usando como referência o gráfico de $g(x)$:

a) Esboce os gráficos das funções $p(x) = x^2 + 1$ e $q(x) = (x+1)^2$.

b) Descreva o que aconteceu com o gráfico de $p(x)$.

c) Descreva o que aconteceu com o gráfico de $q(x)$.

d) Qual é a diferença do que foi feito com $g(x)$ para obter $p(x)$ e $q(x)$?

e) Qual transformação deve ser feita na função $e(x) = \sin(x)$ para que o seu gráfico se desloque horizontalmente 2 unidades para a direita?

Outra multiplicação

Q8 Usando como referência o gráfico de $e(x)$:

a) Esboce os gráficos das funções $t(x) = \sin(2x)$ e $u(x) = \sin(2\pi x)$.

b) Qual é o período de cada uma das funções?

c) Como você descreveria o efeito na função seno de multiplicarmos a variável por uma constante?

Finalização

Nas questões anteriores você pôde visualizar o efeito que quatro transformações algébricas diferentes:

→ multiplicar a função por uma constante;

→ multiplicar a variável por uma constante;

→ somar uma constante à função;

→ somar uma constante à variável.

Cada uma dessas transformações algébricas causa um efeito geométrico no gráfico da função. Esses efeitos são mais simples de visualizar em algumas funções específicas, sendo bem difíceis de visualizar em outros casos.

Poderíamos fazer uma lista dos transformações e seus efeitos para que você decorasse e soubesse identificar rapidamente certas características de certas funções, porém, não é esse o foco deste material. O que pretendemos é que você saiba que transformações algébricas como soma e multiplicação, seja da função como um todo ou da variável, têm efeitos previsíveis no gráfico da função e que esses efeitos são essencialmente de dois tipos:

→ deslocamento (vertical ou horizontal);

→ encolhimento/esticamento (vertical ou horizontal).

Ter esses efeitos em mente deve facilitar o seu trabalho quando você também utilizar derivadas para esboçar o gráfico de uma função dada.

Na questão a seguir, você deverá esboçar quatro gráficos em um mesmo eixo cartesiano. Muito mais importante do que a precisão e os detalhes dos gráficos, é a possibilidade de compararmos qualitativamente o comportamento geral de um com o outro.

Q9 Esboce em um mesmo eixo cartesiano e **sem utilizar uma tabela de valores** o gráfico das quatro funções abaixo. Sugestão: use 4 cores diferentes.

a) $j_a(x) = 2\sin(x)$

b) $j_b(x) = \sin(\frac{x}{4})$

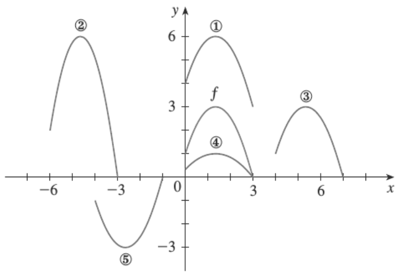
c) $j_c(x) = \sin(x) - 1$

d) $j_d(x) = \sin(x + \pi)$

RUMO AO LIVRO-TEXTO

A questão abaixo foi retirada da seção 1.3 do livro Calculus, de James Stewart. Pode parecer um retrocesso em termos de conteúdo voltar para o primeiro capítulo do livro, mas essa seção está fortemente ligada ao que será discutido no capítulo 4 e ao que discutimos neste capítulo.

QUESTÃO RESOLVIDA → *O gráfico de* $y = f(x)$ *é dado abaixo associe as expressões algébricas abaixo ao outros gráficos dados e dê uma razão para as suas escolhas.*



a) $y = f(x-4)$

b) $y = f(x) + 3$

c) $y = \frac{1}{3}f(x)$

d) $y = -f(x+4)$

e) $y = 2f(x+6)$

Nessa questão, a expressão algébrica da função não foi dada, apenas o seu gráfico. Note que o gráfico f está definido apenas no intervalo de 0 a 3. Algumas outras conclusões podem ser tiradas facilmente do gráfico, como $f(0) = 1$, $f(3) = 0$ e o valor máximo da função é 3.

Para começarmos a identificar qual dos demais gráficos se referem a cada uma das transformações dadas, vamos começar com os gráficos mais parecidos com o de f. Na minha opinião, *1* e *3* são os mais simples, pois ambos parecem ter exatamente o mesmo formato e estarem apenas deslocados horizontalmente ou verticalmente. Começando por *1*, os valores da função parecem ser exatamente 3 unidades maiores do que f, ou seja, teríamos que somar 3 à função, ou seja, o gráfico *1* corresponde à expressão *b*.

Por outro lado, o gráfico *3* foi deslocado 4 unidades para a direita, o que é compatível com a expressão *a*.

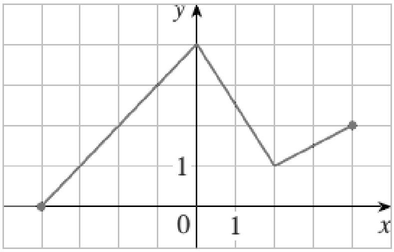
O gráfico *4* parece não ter sido deslocado, apenas "achatado". Note que o máximo da função passou a ser 1 ao invés de 3. Esse efeito é alcançado ao dividirmos a função por 3, o que é compatível com a expressão *c*.

Nos restam os gráficos *5* e *2*. Note que o gráfico *5* está refletido, além de ter sido deslocado. Sabemos que um gráfico é refletido verticalmente quando a função como um todo é multiplicada por -1, e isso é compativel com a expressão *d*.

Portanto, o gráfico *2* deve vir da expressão *e*. Isso é coerente, pois esse gráfico foi claramente "esticado" verticalmente, o que é compatível com a expressão *e*.

Agora, resolva a questão a seguir, retirada da mesma seção do livro Calculus.

QUESTÃO DO LIVRO-TEXTO → *O gráfico de* f *é dado abaixo. Esboce o gráfico das seguintes funções:*



a) $y = f(x+4)$

b) $y = f(x) + 4$

c) $y = 2f(x)$

d) $y = -\frac{1}{2}f(x) + 3$

GABARITO

Confira as respostas para as questões e **não se esqueça de registrar o seu progresso**.

Questões sobre esboço de gráficos não terão gabarito, com exceção da questão 10.

Q1 Questão sem gabarito. Cheque a lista logo após a questão para cobrir características básicas de cada gráfico e pergunte a seu tutor se os esboços estão bons.

Q2 a) crescente, b) $g(x)$ é decrescente para $x < 0$ e crescente para $x > 0$.

Q3 a) concavidade positiva, b) no intervalo $0x < \pi$.

Q4 **Questão 4:** b) O gráfico foi refletido verticalmente, ou seja, em relação ao eixo X, c) O gráfico foi refletido horizontalmente, ou seja, em relação ao eixo Y.

Q5 b) o gráfico da função se desloca verticalmente, c) o gráfico se deslocaria para baixo, passando a assumirmos alguns valores positivos. Seu mínimo seria em $(0; -1)$ e raiz em $(1; 0)$.

Q6 b) O gráfico da função é esticado verticalmente, b) O gráfico será encolhido verticalmente, c) O gráfico será refletido verticalmente e depois encolhido ou esticado, dependendo do módulo da constante.

Q7 b) Foi deslocado uma unidade para cima, c) Foi deslocado uma unidade para a esquerda, c) em $p(x)$ a constante foi soma à função e em $q(x)$ à variável, d) $e(x) = \sin(x - 2)$.

Q8 b) O periodo de $t(x)$ é π e o de $u(x)$ é 1, c) O gráfico da função é encolhido horizontalmente. Se a função for periódica, podemos dizer que o seu período foi alterado.

Q9

REGISTRO DE PROGRESSO

Essa parte por enquanto fica com conteúdo vazio até que seja decidido como será feito o controle do progresso.

AUTO-AVALIAÇÃO FINAL

Avalie o quanto você acha que sabe sobre os seguintes itens após ter resolvido as questões deste capítulo.

	Nada	Muito pouco	Noções gerais	Bastante
Traçar o gráfico de uma função simples				
Deslocar o gráfico de uma função no plano cartesiano				
Obter a expressão algébrica de uma função a partir do seu gráfico				

Cheque como foi o seu progresso comparando essas respostas com as que você deu antes de estudar este capítulo. Caso você não tenha atingido o nível "Bastante" em algum dos tópicos acima, liste abaixo qual ação concreta você fará nos próximos dias para atingi-lo:

9

Revisão para integrais por partes

APRESENTAÇÃO

O objetivo deste capítulo é promover uma revisão de alguns tópicos e habilidades que são necessárias para dominar a técnica de integração chamada **integração por partes**.

Você notará uma diferença grande entre o tom adotado neste capítulo (e nos próximos) e o tom dos anteriores. Isso se deve ao fato de a abordagem ter intencionalente mudado: ao invés de revisitarmos tópicos do Ensino Médio de um ponto de vista mais conceitual visando oferecer suporte para as disciplinas Cálculo Diferencial e Integral e Geometria Analítica, faremos uma revisão mais focada em tópicos que já foram abordados nessas disciplinas e serão utilizados intensamente em tópicos vindouros.

Além da mudança no conteúdo, a entensão do capítulo também mudou: agora está mais curto. A intenção é que você possa resolver todas as questões aqui presentes em um único encontro da tutoria e utilize o tempo restante para resolver, com auxílio do tutor, exercícios das listas oficiais das disciplinas sobre o tópico que acabou de estudar.

Por fim, retiramos as questões diagnósticas e a auto-avaliação porque os tópicos que serão tratados aqui são novidade para todos os estudantes e esperamos que todos vocês resolvam o capítulo na íntegra.

QUANDO USAR

Este capítulo deve ser resolvido logo antes do professor de MA111 abordar integração por partes ou logo que ele iniciar esse tópico.

CONTEÚDOS ANTERIORES

O conteúdo central desta revisão é a regra do produto para derivação de funções, ou seja, não tem problema começar a resolver as questões se você não estiver tão seguro em relação a esse tópico. Porém, os tópicos abaixo são pré-requisitos para este capítulo:

→ Derivada das funções exponenciais, polinomiais, trigonométricas e logarítmicas.

Esses tópicos não serão cobertos durante as atividades de tutoria. Se você acha que não sabe o suficiente sobre algum deles, sugerimos que procure material de apoio antes de começar a resolver as questões deste capítulo.

QUESTÕES

A regra do produto foi introduzida como uma técnica para obter a derivada de funções que podem ser vistas como um produto de duas funções mais simples como, por exemplo, $f(x) = x^3.2^x$. Essa função pode ser vista como o produto das funções $g(x) = x^3$ e $h(x) = 2^x$, ambas simples de derivar isoladamente.

A regra do produto nos diz que:

> Seja $f(x) = g(x).h(x)$, então
> $f'(x) = g'(x).h(x) + g(x).h'(x)$.

Aplicando ao nosso exemplo, temos que $g'(x) = 3x^2$ e $h'(x) = \ln(2).2^x$, portanto:

$$\begin{aligned} f'(x) &= g'(x).h(x) + g(x).h'(x) \\ &= (3x^2).(2^x) + (x^3).(\ln(2).2^x) \\ &= 3x^2.2^x + \ln(2).x^3.2^x \end{aligned}$$

O objetivo desta lista é relembrar essa técnica e praticar a fluência com ela. Também veremos como utilizá-la para a otenção de integrais que não podem ser calculadas diretamente.

Regra do produto

Vamos começar praticando a regra do produto.

Q1 Use a regra do produto para calcular a derivada das seguintes funções.

a) $f(x) = x.e^x$

b) $g(x) = x.\cos(x)$

c) $h(x) = x.\sin(x)$

d) $i(x) = x.\ln(x)$

e) $j(x) = x^2.\ln(x)$

Uma integral não elementar

Na questão anterior bastou aplicar a regra do produto para obtermos a derivada de $f(x) = x.e^x$, que é dada por $f'(x) = e^x + x.e^x$. Será que isso nos ajuda a calcular a integral de $f(x)$, ou seja, $\int x.e^x dx$?

Note primeiro que $\int x.e^x dx$ não pode ser resolvida através de uma troca de variáveis (teríamos que fazer $u = e^x$, o que criaria um logaritmo ao substituirmos x). Como claramente se trata de um produto de duas funções que isoladamente são muito simples de derivar e integrar, vamos tentar usar o resultado obtido na item a acima.

Para tanto, note que a segunda parcela de $f'(x) = e^x + x.e^x$ é igual à função que queremos integrar. Portanto, vamos isolar essa parte, obtendo $f'(x) - e^x = x.e^x$ ou, finalmente, $x.e^x = f'(x) - e^x$.

Agora, vamos integrar os dois lados da igualdade.

$$\int x.e^x dx = \int (f'(x) - e^x) dx \qquad \text{Usando propriedades das integrais}$$
$$\int x.e^x dx = \int f'(x) dx - \int e^x dx \qquad \text{Sabemos que } \int f'(x) dx = f(x) + c_1$$
$$\int x.e^x dx = f(x) + c_1 - \int e^x dx \qquad \text{Calculando uma das integrais}$$
$$\int x.e^x dx = f(x) + c_1 - e^x + c_2 \qquad \text{Lembre-se de que } f(x) = x.e^x$$
$$\int x.e^x dx = x.e^x + c_1 - e^x + c_2 \qquad \text{Combinando as constantes}$$
$$\int x.e^x dx = x.e^x - e^x + c$$

Na última linha acima obtemos a integral desejada. Em resumo, o que fizemos foi isolar a expressão que queríamos integrar no resultado da aplicação da regra do produto e, depois, integramos os dois lados da igualdade.

Q2 Façamos o mesmo com o resultado do item b da primeira questão para calcular $\int x.\sin(x) dx$.

a) Isole $x.\sin(x)$ no resultado obtido no item b da primeira questão.

b) Integre os dois lados da igualdade obtendo $\int x.\sin(x) dx$.

Q3 Faça o mesmo com o resultado do item c para calcular $\int x.\cos(x) dx$

Logaritmos

Você já notou que apesar de ser uma função simples você ainda não calculou a integral de $a(x) = \ln(x)$? Isso ocorre porque a técnica que você usou acima é necessária para calcular essa integral.

Q4 Use o resultado do item d da primeira questão para calcular $\int \ln(x)dx$.

Agora que você já praticou esse processo algumas vezes, tente resolver a questão a seguir.

Q5 Use o resultado do item e da primeira questão obter a integral de uma função não elementar.

a) Qual é essa função?

b) Qual é a sua integral?

Um novo caso

Veja que na questão anterior, começamos aplicando a regra do produto à função $j(x) = x^2.\ln(x)$ e terminamos obtendo a integral de $x.\ln(x)$. Na questão 4, começamos aplicando a regra do produto à função $i(x) = x.\ln(x)$ e terminamos obtendo a integral de $\ln(x)$. Você já deve ter notado um padrão nesses resultados, mas se ainda não, aplique a regra do produto para obter a derivada da função $t(x) = x^3.\ln(x)$ e observe as potências dos termos obtidos.

Q6 Obtenha $\int x^5.\ln(x)dx$.

Duas vezes

Em alguns casos, duas regras do produto aplicadas a funções diferentes podem ser combinadas gerando resultado úteis, como acontecerá na questão a seguir.

Q7 Vamos tentar obter $\int e^x.\cos(x)dx$.

a) Comece aplicando a regra do produto à função $f(x) = e^x.\cos(x)$ e integrando os dois lados da igualdade.

b) Faça o mesmo processo com a função $g(x) = e^x.\sin(x)$.

c) Note que as duas expressões acima possuem vários termos em comum. Some as duas igualdades e tente isolar os termos de modo a obter uma expressão para $\int e^x.\cos(x)dx$ que não envolva outras integrais.

MENSAGEM FINAL

O processo que você utilizou para resolver todas as questões anteriores é a justificativa por trás da técnica de integração conhecida como **integral por partes** que será discutida pelo seu professor de MA111. Esse processo pode ser condensado através da fórmula mostrada abaixo.

$$\int f(x).g'(x)dx = f(x).g(x) - \int f'(x)g(x)dx$$

Essa fórmula facilita o uso dessa técnica no cálculo de integrais, porém, ela nada mais é do que uma síntese do que fizemos anteriormente: regra do produto, isolamento da parcela que interessa e integração dos dois lados da igualdade.

Nossa sugestão é que agora você leia a seção 7.1 do livro Calculus até o final do quarto exemplo e então resolva os exercícios da lista oficial de MA111 sobre integração por partes.

Aproveite a disponibilidade do tutor e a introdução feita acima para ter certeza de que você compreende bem o uso dessa técnica. Sugerimos que você priorize o entendimento do processo no lugar da quantidade de questões resolvidas e deixe essa parte para um segundo momento quando estiver estudando depois da tutoria.

GABARITO

Confira as respostas para as questões e **não se esqueça de registrar o seu progresso**.

Q1 a) $f'(x) = e^x + xe^x$, b) $g'(x) = \cos(x) - x\sin(x)$, c) $h'(x) = \sin(x) + x\cos(x)$, d) $i'(x) = \ln(x) + 1$, e) $i'(x) = 2x.\ln(x) + x$.

Q2 a) $x\sin(x) = \cos(x) - g'(x)$, b) $\int x\sin(x)dx = \sin(x) - x\cos(x) + c$.

Q3 $\int x\cos(x)dx = \cos(x) + x\sin(x) + c.$

Q4 $\int \ln(x)dx = x.\ln(x) - x + c.$

Q5 a) $f(x) = x.\ln(x)$, b) $\int x.\ln(x)dx = \frac{x^2\ln(x)}{2} - \frac{x^2}{4} + c.$

Q6 $\int x^5.\ln(x)dx = \frac{x^6\ln(x)}{6} - \frac{x^6}{36} + c.$

Q7 a) $e^x.\sin(x) = \int e^x\sin(x)dx + \int e^x\cos(x)dx$, b) $e^x.\cos(x) = \int e^x\cos(x)dx - \int e^x\sin(x)dx$, c) $\int e^x\cos(x)dx = \frac{e^x\cos(x)+e^x\sin(x)}{2}.$

10 Revisão para integrais trigonométricas

APRESENTAÇÃO

Este capítulo usará a integral de uma função aparentemente simples, $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$, como mote para revisar alguns conteúdos utilizados em duas técnicas de integração ligadas a funções trigonométricas que você irá estudar em MA111.

Em linhas gerais, o que queremos reforçar neste capítulo são algumas igualdades envolvendo senos, cossenos e tangentes que nos permitirão fazer mudanças estratégicas em certas funções de modo a torná-las mais simples de integrar.

QUANDO USAR

Este capítulo deve ser resolvido antes do professor de MA111 abordar substituição trigonométrica e integrais trigonométricas, ou assim que ele iniciar esses tópicos.

CONTEÚDOS ANTERIORES

O conteúdo deste capítulo gira em torno das funções trigonométricas com que você vem trabalhando na disciplina MA111. Como o nosso foco aqui será menos no cálculo das integrais e mais nas transformações que podemos fazer em alguns integrandos, os pré-requisitos deste capítulo são:

→ Definição de seno e cosseno;

→ Definição de tangente e secante.

→ Integral e derivada das funções seno e cosseno.

Esses tópicos não serão cobertos durante as atividades de tutoria. Se você acha que não sabe o suficiente sobre algum deles, sugerimos que volte ao capítulo sobre polinômios deste material e os revise.

QUESTÕES

Como dito na introdução, vamos explorar a integral da função real $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$. Antes de partirmos para a sua integral de fato, vamos explorar alguns aspectos da função.

Domínio, imagem e gráfico

Vamos começar com algumas propriedades fundamentais dessa função.

Q1 Considerando a função $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$, responda:

a) Qual é o seu domínio?

b) Quais são as raízes da função?

c) Em que ponto o seu gráfico corta o eixo Y?

d) Qual é a imagem da função?

Como você deve ter concluido nas questões acima, essa função é definida apenas no intervalo $[-2; 2]$. Fora dele, teríamos a raiz de um número negativo, o que não é definido nos números reais.

No que diz respeito à imagem da função, é importante salientar que a expressão $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$ poderia ser interpretada como ambígua, já que não esclarece se deve ser tomada a raiz positiva ou negativa de $4 - x^2$ e uma função deve assumir um único valor para cada valor de x. Entretanto, convencionalmente, o símbolo de raiz quadrada no contexto de funções deve ser interpretado como a raiz quadrada positiva. Nesse caso, a imagem da função é o intervalo $[0; 2]$

Q2 Manipule algebricamente a função na forma $y = \sqrt{4 - x^2}$ de modo a obter uma expressão que seja familiar.

a) Que curva essa expressão representa?

b) Esboce o gŕafico da função $f(x)$.

Significado da integral

Q3 Vamos considerar agora a integral $\int_{-2}^{2} f(x) dx$.

a) Qual é o significado geométrico dessa integral?

b) Com base na resposta anterior, qual deve ser o valor da integral (sem efetuar a integração de fato)?

Por se tratar da área de um semi-círculo de raio 2, sabemos que a integral de $f(x)$ entre -2 e 2 deve ser igual a $\frac{1}{2} \cdot \pi 2^2 = 2\pi$. Em princípio, esse valor deve parecer estranho: como obteríamos π a partir de uma expressão algébrica que envolve apenas somas, multiplicações e raízes? Essa conexão é o que está por trás da técnica de integração chamada substituição trigonométrica e esse é o tópico central deste capítulo.

Transformando a integral, tentativa 1

Apesar de parecer relativamente simples, a integral $\int \sqrt{4 - x^2} dx$ não é nem um pouco simples de resolver através de trocas de variáveis.

Q4 Para que você sinta a dificuldade, tente obter um integrando mais simples usando a troca de variáveis $u = 4 - x^2$. Qual é a nova integral obtida?

Você pode tentar outras trocas de variáveis, mas provavelmente você vai chegar em situações muito próximas à que você obteve acima: alguma raiz quadrada acaba reaparecendo, o que dificulta a obtenção de uma primitiva para a função.

Transformando a integral, tentativa 2

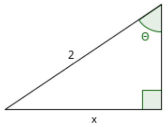
O que faremos então é uma grande mudança na abordagem. Primeiro, note que $\sqrt{4 - x^2}$ se parece com expressões que ocorrem ao resolvermos questões envolvendo teorema de pitágoras.

Q5 Considerando o triângulo retângulo abaixo:

a) Use o teorema de pitágoras para obter uma expressão para o comprimento do cateto vertical.

b) Use as relações trigonométricas acerca do ângulo θ para obter uma outra expressão para o comprimento do cateto vertical.

c) Use as relações trigonométricas acerca do ângulo θ para obter uma outra expressão para o comprimento do cateto x.



Note que o cateto vertical pode ser expresso de duas maneiras, como a raiz da função dada inicialmente ou em termos do $\sin(\theta)$. Como sabemos como integrar senos, vamos tentar usar essa ideia para uma troca de variáveis que nos ajude de fato.

Q6 Rescreva a integral $\int_{-2}^{2} \sqrt{4-x^2}dx$ usando a troca de variáveis $\sqrt{4-x^2} = \cos(\theta)$ (lembre-se que $x = 2\sin(\theta)$).

Não se esqueça de ajustar os limites da integral. Como $x = 2\sin(\theta)$, e x deve variar de -2 a 2 a opção mais simples é variarmos θ de $-\pi/2$ a $\pi/2$. Portanto, nossa nova integral é:

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} 2\cos(\theta).2\cos(\theta)d\theta = 4\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2(\theta)d\theta$$

O objetivo de obter uma integral que não envolve-se raízes foi atingido!

Pare e pense

A transformação feita acima foi bem sucedida por um motivo: ao fazermos a troca $x = 2\sin(\theta)$ também pudemos trocar a expressão $\sqrt{4-x^2}$ por $\cos(\theta)$. Vimos essa troca no triângulo, mas ela pode ser vista algebricamente graças à igualdade trigonométrica fundamental $\sin^2(\alpha) + \cos^2(\alpha) = 1$. Ela implica que $\sin^2(\alpha) = 1 - \cos^2(\alpha)$. Portanto:

$$\sqrt{4-x^2} = \sqrt{4-4\sin^2(\theta)} = \sqrt{4-4(1-\cos^2(\theta))} = \sqrt{\cos^2(\theta)} = \cos(\theta)$$

Essa visão algébrica do processo é útil para que você possa aplicar essa troca em mais situações, não apenas naquelas que possam ser interpretadas em um triângulo retângulo. Por isso, o quadro abaixo traz as três variações da igualdade trigonométrica fundamental que lhe podem ser úteis.

$$\sin^2(\alpha) + \cos^2(\alpha) = 1$$
$$\tan^2(\alpha) + 1 = \sec^2(\alpha)$$

Note que, na verdade, a segunda igualdade pode ser obtidas a partir da primeira, basta dividir todos os termos dela por $\cos^2(\alpha)$.

Q7 Considerando as igualdades acima:

a) Qual troca de variável você utilizaria se a função a ser integrada fosse $g(x) = \sqrt{1+x^2}$?

b) Como ficaria a integral $\int \sqrt{1+x^2}dx$ quando essa troca for completada?

Voltando à integral

Antes da seção anterior, tínhamos chegado em $4\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2(\theta)d\theta$. Porém, mais uma vez, apesar da integral de $\cos(\theta)$ ser simples, a de $\cos^2(\theta)$ não é.

Se você tentar fazer a troca de variáveis $u = \cos(\theta)$, vai notar que um seno aparecerá na expressão quando você transformar $d\theta$ em du. Esse problema é bastante comum quando integramos potências de seno e cosseno. O que pode ser feito para contornar essa dificuldade é utilizar uma outra família de igualdades trigonométricas. Talvez você as tenha estudado no Ensino Médio, caso não, sugerimos que memorize as duas igualdades mostradas abaixo, pois serão muito usadas nas listas de MA111.

$$\cos(2\alpha) = 2\cos^2(\alpha) - 1$$
$$\sin(2\alpha) = 2\sin(\alpha).\cos(\alpha)$$

Note que a primeira delas permite transformar um cosseno ao quadrado em um cosseno, enquanto que a segunda permite transformar um produto de seno por cosseno em um seno apenas. Essas igualdades são úteis para mudarmos o formato de potências de funções trigonométricas para formatos mais simples de integrar, como faremos agora.

Antes de retomarmos a integral, resolva a seguinte questão sobre as igualdades acima para que você se familiarize com o uso que será feito delas em MA111.

Q8 Considerando as igualdades acima:

a) Isole $\cos^2(\alpha)$ na primeira igualdade.

b) Use a igualdade $\sin^2(a) + \cos^2(a) = 1$ e a resposta do item anterior para obter uma expressão que transforma $\sin^2(a)$ em $\cos(2a)$.

c) Rescreva a expressão $\sin^4(a)$ como uma expressão composta por senos e cossenos com as menores potências possíveis.

Note que a expressão obtida no item c acima pode parecer complicada, mas não envolve nenhuma potência e seria simples de integrar, ou seja, você fez quase todo o trabalho necessário para calcular $\int \sin^4(x)dx$.

Agora, voltemos à nossa integral.

Q9 Rescreva $4\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2(\theta)d\theta$, usando as igualdades anteriores, de modo que não haja mais potências no integrando.

O que você fez na questão acima não é uma mudança de variável, mas sim uma manipulação algébrica que resultou em uma nova expressão equivalente à que tínhamos antes. Note que a expressão que você acabou de obter não tem mais cosseno ao quadrado e é mais simples de integrar.

Q10 Finalize essa questão calculando o valor da integral definida obtida na questão anterior.

Você deve ter obtido 2π como resposta, assim como havíamos previsto no início do capítulo.

MENSAGEM FINAL

O grande objetivo deste capítulo era relembrar algumas identidades trigonométricas que são usadas com frequência quando utilizamos as técnicas de integração chamadas substituição trigonométrica e integrais trigonométricas.

A primeira família de igualdades (que derivam de $\sin^2(\alpha) + \cos^2(alpha) = 1$) nos permitem:

1) Converter senos em cossenos, ou vice-versa;

2) Lidar com expressões do tipo $a^2 - x^2$ fazendo a troca $x = \sin(\alpha)$;

3) Lidar com expressões do tipo $a^2 + x^2$ fazendo a troca $x = \tan(\alpha)$.

A segunda família de igualdades, envolvendo $\sin(2\alpha)$ e $\cos(2\alpha)$, nos permite:

1) Reduzir potências de funções trigonométricas para potências menores ($\cos^2(alpha)$ em $\cos(2\alpha)$), por exemplo;

2) Converter expressões com produtos de senos e cossenos em expressões envolvendo $\sin(2\alpha)$.

Sugerimos agora que você leia os exemplos 1, 2 e 3 da seção 7.2 do livro Calculus e os exemplos 1, 2, 3 e 4 da seção 7.3. Em seguida, parta para a lista de exercícios da disciplina.

GABARITO

Confira as respostas para as questões e **não se esqueça de registrar o seu progresso**.

Q1 a) $[-2;2]$, b) -2 e 2, c) $(0;2)$, d) $[0;2]$.

Q2 a) circunferência de raio 2 e centro na origem.

Q3 a) a integral é igual à área de uma semi-circunferência de raio 2, b) 2π.

Q4 $-2\int\sqrt{4u-u^2}du$

Q5 a) $\sqrt{4-x^2}$, b) $2\cos(\theta)$, c) $2\sin(\theta)$.

Q6 $4\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos^2(\theta)d\theta$.

Q7 a) $x=\tan(\alpha)$ e, portanto, $\sqrt{(4+x^2)}=\sec(\alpha)$, b) $\int\sec^3(\alpha)d\alpha$.

Q8 a) $\cos^2(\alpha)=\frac{\cos(2\alpha)+1}{2}$, b) $\sin^2(\alpha)=\frac{1-\cos(2\alpha)}{2}$, c) $\sin^4(\alpha)=\frac{1}{8}\cdot(3-4\cos(2\alpha)+\cos(4\alpha))$.

Q9 $2\int_{-\pi/2}^{\pi/2}(\cos(2\theta)+1)d\theta$

11 Revisão para frações parciais

APRESENTAÇÃO

A motivação para essa técnica de integração vem do fato de que integrais do tipo $\int \frac{c}{ax+b}dx$ são simples de calcular enquanto que integrais como $\int \frac{ax^3+bx^2+cx+d}{dx^2+ex+f}dx$ não são. Na verdade, a integral de uma função dada pela razão entre dois polinômios com grau maior ou igual a 2 é bastante complicada sem essa técnica.

O que faremos nesse capítulo é uma revisão dos aspectos algébricos necessários para o uso dessa técnica, sem nos preocuparmos de fato com o cálculo das integrais. O seu professor de MA111 cobrirá esse último aspecto.

QUANDO USAR

Este capítulo deve ser resolvido antes do professor de MA111 abordar integração por frações parciais.

CONTEÚDOS ANTERIORES

Todo o conteúdo deste capítulo gira em torno de manipulações algébricas com frações envolvendo polinômios. Portanto, é fundamental que você tenha estudado o capítulo sobre polinômios deste material. Especificamente, os tópicos a seguir são pré-requisitos para este capítulo:

→ Igualdade de polinômios;

→ Divisão de polinômios.

Esses tópicos não serão cobertos durante as atividades de tutoria. Se você acha que não sabe o suficiente sobre algum deles, sugerimos que volte ao capítulo sobre polinômios deste material e os revise.

QUESTÕES

O nosso objetivo ao longo das próximas questões será transformar a expressão $\frac{x^3+5x}{x^2+3x+2}$ em uma expressão que seja composta por uma soma de um polinômios e frações que tenham polinômios de primeiro grau como denominadores, ou seja, algo como $p(x) + \frac{a}{bx+c}$ (talvez seja necessáro mais de uma fração com formato semelhante).

Raízes

Vamos começar revisando algumas transformações básicas.

Q1 Considerando o numerador e o denominador da fração $\frac{x^3+5x}{x^2+3x+2}$ separadamente, responda:

a) Quais são as raízes de $x^2 + 3x + 2$?

b) Escreva $x^2 + 3x + 2$ na forma fatorada.

c) Quais são as raízes reais de $x^3 + 5x$?

d) Escreva $x^3 + 5x$ na forma fatorada.

e) Rescreva a fração com as formas fatoradas.

Note que não há nenhum fator em comum entre numerador e denominador para que possamos simplificar a fração dada.

Fração imprópria

Você deve se lembrar do conceito de fração imprópria. Um exemplo é a fração $\frac{7}{3}$. Ela é chamada de imprópria porque 7 é maior do que 3, portanto, ela pode ser rescrita como um número inteiro mais uma fração própria:$\frac{7}{3} = \frac{6+1}{3} = \frac{6}{3} + \frac{1}{3} = 2 + \frac{1}{3}$.

Algo similar pode ser dito da nossa fração, como o numerador tem grau maior do que o denominador, se efetuarmos a divisão entre os polinômios vamos obter uma expressão equivalente mas com uma parte fracionária mais simples.

Q2 Efetue a divisão de $x^3 + 5x$ por $x^2 + 3x + 2$. Caso você não se lembre exatamente como proceder, leia o exemplo 2 do capítulo 4.2 do livro Matemática Básica - volume 1.

A explicação que segue a questão é conceitualmente muito importante. Certifique-se de que os estudantes a leram e entenderam. Se necessário, faça o caminho inverso para mostrar que a igualdade vale: multiplique o resultado da divisão pelo divisor e some o resto para obter o polinômio que foi dividido originalmente. Pode valer a pena sugerir mais algum exemplo (criados aleatoriamente com polinômios de graus entre 2 a 5) para os estudantes com dificuldade.

Você deve ter obtido o quociente $(x - 3)$ e resto $(12x + 6)$. Isso significa que $x^3 + 5x$ é igual a $(x^2 + 3x + 2)(x - 3) + (12x + 6)$. Se você está estranhando essa igualdade, leia a questão seguinte do capítulo Y.

Dessa forma, podemos rescrever a fração inicial como mostrado abaixo:

$$\begin{aligned}\frac{x^3+5x}{x^2+3x+2} &= \frac{(x^2+3x+2)(x-3)+(12x+6)}{x^2+3x+2} \\ &= \frac{(x^2+3x+2)(x-3)}{x^2+3x+2} + \frac{12x+6}{x^2+3x+2} \\ &= (x-3) + \frac{12x+6}{x^2+3x+2}\end{aligned}$$

Veja que nessa expressão, a primeira parcela é simples de integrar e a segunda já tem um numerador com grau menor do que a original. Vamos focar apenas em $\frac{12x+6}{x^2+3x+2}$ deste ponto em diante.

Mudando as frações

Se você recuperar a forma fatorada obtida na primeira questão, podemos escrever $\frac{12x+6}{x^2+3x+2}$ na forma $\frac{12x+6}{(x+1)(x+2)}$. Essa forma sugere que essa fração poderia ser rescrita como uma soma de frações com $(x+1)$ e $(x+2)$ como denominadores, ou seja, como uma soma do tipo $\frac{A}{x+1} + \frac{B}{x+2}$ para algum valor de A e B.

Q3 Para fins de prática, efetue a soma $\frac{3}{x+1} + \frac{4}{x+2}$.

Voltando à nossa fração de interesse, $\frac{12x+6}{(x+1)(x+2)}$, como o numerador é de grau 1, é razoável esperar que existam números reais A e B que façam com que ela possa ser rescrita na forma $\frac{A}{x+1} + \frac{B}{x+2}$.

Q4 Efetue a soma $\frac{A}{x+1} + \frac{B}{x+2}$ e escreva o numerador na forma de um binômio, ou seja, no formato $mx+n$.

Você deve ter obtido a fração $\frac{(A+B)x+(2A+B)}{x^2+3x+2}$ na questão acima. Se igualarmos essa fração à $\frac{12x+6}{x^2+3x+2}$ (note que os denominadores são iguais), concluímos que $(A+B)x+(2A+B)=12x+6$.

Q5 Determine o valor de A e B para a igualdade de polinômios $(A+B)x+(2A+b)=12x+6$ seja satisfeita.

Isso significa que $\frac{12x+6}{x^2+3x+2}$ é igual a $\frac{-6}{x+1}+\frac{18}{x+2}$. Essas duas frações são chamadas de frações parciais.

Em conclusão, a fração que tínhamos inicialmente pode ser rescrita seguindo as transformações abaixo:

$$\frac{x^3+5x}{x^2+3x+2}=(x-3)+\frac{12x+6}{x^2+3x+2}=(x-3)+\frac{-6}{x+1}+\frac{18}{x+2}$$

Você pode verificar se a igualdade acima está correta desenvolvendo a expressão mais à direita e verificando se você chega na forma dada inicialmente (sugiro que isso seja feito caso você não se sinta confortável com as manipulações algébricas realizadas até aqui).

Finalmente, note que a fração inicial não era simples de integrar, mas a obtida ao final do processo é (basta fazer a troca $u=x+1$ para a primeira fração e $t=x+2$ para a segunda).

Três casos iniciais

Para compreender o processo como um todo, vamos fazer três casos incompletos. No primeiro, é necessário apenas a primeira parte, ou seja, dividir os polinômios de modo a não termos mais uma fração imprópria. No segundo podemos ir direto para as frações parciais, sem precisar dividir os polinômios. O terceiro também será incompleto, mas cabe a você concluir onde.

Q6 Transforme a fração $\frac{x^3+6x^2+11x+6}{x^2-2}$ de modo que seja escrita como uma soma de um polinômio com uma fração algébrica não imprópria.

Q7 Transforme a fração $\frac{2x-7}{x^2+3x-4}$ em uma soma de frações cujos denominadores sejam binômios do tipo $ax + b$ e e numeradores sejam números reais.

Por fim, essa fração poderá ser simplificada diretamente para um formato bom para o cálculo de integrais, sem necessidade de obter frações parciais.

Q8 Rescreva a fração $\frac{x^2+x}{x^3-x}$ em um formato mais simples para integração.

Note que na questão anterior não foi necessário obter as frações parciais, pois a fração restante depois da divisão de polinômios já possuía denominador do primeiro grau e um número real como numerador.

Um caso completo

Agora vamos resolver um caso completo. Não se preocupe em terminar rapidamente. A intenção aqui é compreender cada etapa do processo para que, quando o tópico for abordado em MA111, você saiba se orientar dentre os diversos casos que serão discutidos.

Q9 Vamos transformar a fração $\frac{(x+5)(x+2)(x-2)(x-1)}{x^3+4x^2-x-4}$ em uma soma que envolva frações com denominadores mais simples.

a) Fatore o denominador e rescreva a fração simplificando fatores, se possível.

b) Desenvolva os fatores que sobraram no numerador e rescreva a fração.

c) Como o grau do numerador é maior do que o do denominador, faça a divisão do numerador pelo denominador de modo a rescrever a fração dada como uma soma de um polinômio com uma fração com numerador de grau menor.

d) Como a parte fracionária obtida tem numerador do primeiro grau e denominador do segundo grau que pode ser fatorado, iguale a parte fracionária a uma soma de frações do tipo $\frac{A}{x+1} + \frac{B}{x+4}$. Quais são os valores de A e B?

e) Qual é a forma final da expressão dada inicialmente?

MENSAGEM FINAL

O processo que você utilizou para resolver a questão anterior é a justificativa por trás da técnica de integração conhecida como **frações parciais**. Os exemplos discutidos pertencem, na verdade, a um mesmo caso (denominador com todas as raízes reais e diferentes). Nas aulas de Cálculo você verá como o método precisa ser ajustado quando o denominador possui raízes iguais ou quando alguma de suas raízes não é real. Porém, a essência da técnica é o que fizemos aqui: dividir os polinômios de modo a reduzir o grau do polinômio no numerador e depois tentar encontrar frações parciais cuja soma seja igual à parte fracionária restante.

Nossa sugestão é que agora você leia a seção 7.4 do livro Calculus até o final do terceiro exemplo e então comece a resolver os exercícios da lista oficial de MA111 sobre frações parciais.