

# Material do tutor - Tutoria MA111 e MA141

Leonardo Barichello

1 de Julho de 2019

# 1 Introdução

Este material foi desenvolvido para estudantes ingressantes de cursos de Exatas que devem apresentar lacunas no conteúdo que podem comprometer o seu rendimento nas disciplinas de Cálculo Diferencial e Integral e Geometria Analítica.

Em termos de conteúdo, não queremos reforçar os tópicos dessas duas disciplinas nem promover uma revisão de todo o Ensino Médio. Nossa intenção é revisar alguns tópicos do Ensino Médio enfatizando aspectos que estejam diretamente relacionados com tópicos específicos de Cálculo Diferencial e Integral e Geometria Analítica.

Em termos da abordagem, nosso foco não é em fluência na resolução de exercícios, mas no entendimento mais conceitual dos tópicos em questão. Além disso, a tutoria não deve ser um espaço para aulas expositivas nem para resolução expositiva de exercícios. Essas duas dinâmicas já são cobertas pelas aulas das disciplinas e pelas monitorias. O que buscamos aqui é um espaço que se assemelhe a um momento de estudo, no qual o trabalho é feito pelos estudantes, com eventual suporte do tutor quando necessário.

Como tutor, você atenderá dois grupos com cerca de 10 ingressantes cada e terá acesso a um professor que orientará o trabalho dos tutores ao longo de todo o semestre. Para além dos encontros, esperamos de você uma boa preparação antes de cada encontro e algumas tarefas gerenciais relacionadas ao acompanhamento e avaliação das atividades. Suas obrigações devem ficar claras ao longo das próximas seções.

## **O QUE ESPERAMOS DE VOCÊ, TUTOR**

## **Conheça o material**

Esperamos que você, além de resolver todas as questões propostas aos estudantes, leia atentamente os comentários acerca de cada questão para que esteja ciente de algumas nuances que podem passar despercebidas. A ordem das questões, os itens de cada uma delas e até mesmo os valores numéricos de cada item foram pensados cuidadosamente para que o estudante tenha uma experiência gradual e novos elementos sejam inseridos apenas quando os anteriores já tenham sido devidamente abordados.

Sugestões de onde podem surgir dificuldades e como elas podem ser abordadas, bem como de exemplos adicionais e variações das questões, estão presentes ao longo de todo este material. Por isso, esperamos que ele seja uma leitura útil para antes de cada encontro e uma referência para durante.

## **Evite usar lousa**

Pode parecer uma sugestão estranha, mas a mensagem que queremos passar com ela é que a atividade de tutoria não deve virar uma aula expositiva sobre o conteúdo, muito menos aula de resolução de exercícios em que o tutor resolve os exercícios e os estudantes anotam a resolução. Experiências similares em outras universidades mostram que o envolvimento ativo dos estudantes na resolução das questões é fundamental para o sucesso dessa proposta.

Uma estória exagerada pode ser útil para explicar o que esperamos com essa recomendação: um professor universitário, durante seu horário de atendimento, costumava resolver questões em folhas de rascunhos para os estudantes que vinham procurá-lo e, ao final da resolução, perguntava "Você entendeu?" e se a resposta fosse sim, ele jogava o papel fora e dizia "ótimo, então você pode fazer sozinho agora".

Obviamente, você não precisa agir dessa maneira. Confiamos na sua sensibilidade para decidir o que é melhor para a sua turma de estudantes. Mas a mensagem que queremos passar é de que durante as atividades da tutoria, são os estudantes que devem fazer o trabalho, você está ali para oferecer suporte.

## **Responda com perguntas**

Esta atitude está profundamente ligada à sugestão anterior.

Sempre que possível tente responder as perguntas feitas pelos estudantes com novas perguntas que sugiram caminhos ao invés de dar a solução. "O que exatamente você já tentou fazer?", "Você já tentou isso?", "Você já checkou como fulano resolveu?", "Você leu o texto antes da questão?",

“Há algum termo específico que você não conhece?”, são algumas das questões que podem ser usadas em praticamente qualquer ponto dos cadernos. A leitura atenta do material do tutor deve lhe ajudar na identificação e escolha de boas perguntas.

Eventualmente alguns pontos precisam ser explicados de forma mais expositiva, como definições ou propriedades que não sejam discutidas no material. Quando esse for o caso, tente evitar resolver a questão específica que gerou a dúvida e, se o fizer, proponha uma nova questão ao tutorado.

## **Use o grupo**

Duas das intervenções com maior impacto em termos de aprendizagem são tutoria por colegas e apoio individualizado. Embora os grupos com os quais você vai trabalhar não sejam tão pequenos assim, você pode atingir esse efeito no seu grupo de estudantes pedindo que eles se ajudem sempre que houver dúvidas em questões que já tenham sido resolvidas por outros estudantes.

Você vai notar que algumas questões pedem interação entre os estudantes explicitamente, mas você pode expandir isso dentro dos seus grupos. O fato de a quantidade de questões no material não ser muito grande tem como objetivo justamente viabilizar esse tipo de ação, a qual pode parecer lenta inicialmente mas tem grande potencial de impacto em termos de aprendizagem.

## **Não tenha pressa**

O objetivo das atividades de tutoria não é promover a fluência com certos procedimentos, mas promover uma conexão significativa dos conteúdos vistos anteriormente com o que está sendo discutido nas disciplinas principais. Portanto, não apresse seus alunos para que terminem os capítulos dentro de certos prazos. É preferível que um aluno não resolva todas as questões tendo compreendido bem as que resolveu do que ele tenha obtido a resposta correta em todas através de um engajamento superficial.

Apesar de o comprimento dos capítulos terem sido concebidos de modo que a maioria dos tutorados possam concluí-los, é possível que alguns alunos não resolvam todas as questões de algum determinado capítulo. Sem problemas. Nossa recomendação é que você siga para o capítulo seguinte (evitando que o conteúdo da tutoria seja ultrapassado pelo das disciplinas oficiais).

## Planeje

O material que você tem em mãos foi concebido de modo a caber no tempo limitado disponível para as atividades da tutoria. Foram desenvolvidos 11 cadernos para serem desenvolvidos ao longo das 15 semanas do semestre. Cada capítulo deve ser utilizado por uma semana (total de 3 horas).

As 4 semanas de diferença foram intencionalmente deixadas para que feriados, acúmulo de provas e outras interferências não comprometam o andamento das atividades. Entretanto, esses eventos são difíceis de prever com antecedência. Por isso, sugerimos que você cheque o calendário do semestre e verifique como será a distribuição dos seus encontros antes do semestre começar. O site das disciplinas ([www.ime.unicamp.br/ma111](http://www.ime.unicamp.br/ma111) e [www.ime.unicamp.br/ma141](http://www.ime.unicamp.br/ma141)) disponibiliza um cronograma que pode ser muito útil nessa tarefa.

Nossa recomendação é que ao menos um encontro a cada 4 semanas seja reservado para que as atividades previstas nos cadernos sejam colocadas em dia. Caso você tenha mais algum encontro sobrando, sugerimos que você planeje quando usá-los e sugerimos as seguintes opções:

- Um encontro no estilo das monitorias das disciplinas de Cálculo e Geometria Analítica, na qual o foco são exercícios da disciplina. Essa proposta é mais adequada para encontros próximos as provas dessas disciplinas;
- Resolução das questões adicionais propostas no seu material. Você pode selecionar algumas das questões dos capítulos que já foram discutidos e propor aos estudantes;
- Repassar aspectos do capítulo 1 do material do estudantes sobre hábitos de estudo.

Evite pedir aos tutorados que resolvam muitas questões fora das horas da tutoria, pois isso pode se acumular com as atividades das disciplinas regulares e a tutoria pode virar um fardo extra ao invés de uma ajuda.

## ESTRUTURA DO MATERIAL

O material dos estudantes está estruturado da seguinte maneira:

1. Apresentação
2. Pré-requisitos e Auto-avaliação inicial: explicando quais são os pré-requisitos do capítulo, que eventualmente precisam ser estudados antes dos encontros, e uma auto-avaliação sobre o quanto eles acreditam

que sabem sobre alguns tópicos chave para o capítulo;

3. Avaliação Diagnóstica: deve ser resolvida ao final do último encontro do capítulo anterior e te orientará sobre em qual ponto cada estudante deve começar;
4. Questões: onde se concentra a maior parte do conteúdo, formado por questões e por textos discutindo os tópicos em pauta. É importante que os textos sejam lidos pelos estudantes, pois ali são feitas várias conexões fundamentais;
5. Rumo ao livro texto: uma seção com o objetivo de propor questões ou leituras que explicitamente conectem o trabalho deste material com os livros-texto das disciplinas oficiais;
6. Gabarito
7. Registro de progresso: deve ser preenchido pelos estudantes ao final do período alocado para cada capítulo, fotografado por você e enviado ao professor coordenador;
8. Auto-avaliação final: oferecendo uma oportunidade para o estudante comparar a sua evolução e traçar metas de estudo.

O seu material segue estrutura parecida, mas com alguns adicionais.

1. O Quadro de orientação te ajuda a decidir em que ponto os estudantes devem começar cada capítulo de acordo com o desempenho na Avaliação Diagnóstica. Você pode decidir não segui-lo por conta de especificidades dos estudantes e grupos, mas leve-o em conta antes de tomar essa decisão;
2. Ao longo das Questões, há notas laterais salientando aspectos importantes, erros esperados ou estratégias de intervenção para certas situações. É fundamental que essas sugestões sejam lidas e as questões resolvidas por você antes dos encontros;
3. Questões Adicionais traz algumas questões que podem ser propostas aos estudantes que completarem o capítulo com muita antecedência. Use-as com moderação, pois a intenção não é que esse material represente mais um fardo na rotina de estudos dos ingressantes.

Folheie o seu material para se familiarizar com ele e em caso de dúvidas, procure o professor coordenador.

## A ROTINA IDEAL

A lista abaixo descreve a rotina que esperamos para cada semana de tutoria. Obviamente variações podem ocorrer, mas checar a lista pode ajudá-lo a não esquecer de ações importantes e a planejar a sua preparação.

1. Todo capítulo é iniciado com uma pequena Avaliação Diagnóstica. Essa avaliação deve ser resolvida pelos seus tutorados no final do encontro anterior, quando o capítulo anterior for finalizado;
2. Assim que os tutorados finalizarem a Avaliação Diagnóstica, fotografe o Registro de Progresso do capítulo que foi finalizado e as resoluções para as questões diagnósticas;
3. Envie os registros de progresso para o professor que está orientando os tutores;
4. Resolva as questões do próximo capítulo e leia as orientações para o tutor;
5. Corrija as questões da Avaliação Diagnóstica e anote em que ponto do capítulo seguinte cada estudante deverá começar;
6. Durante as 3 horas de atividades, que podem estar distribuídas em 2 ou 3 encontros, os estudantes deverão resolver as questões do caderno;
7. Ao final do último encontro lembre-se de fotografar o Registro de Progresso, pedir que resolvam a Avaliação Diagnóstica para o próximo capítulo e fotografar essa resolução.

---

## APRESENTAÇÃO

Este material foi desenvolvido para estudantes ingressantes de cursos de Exatas que devem apresentar lacunas de conteúdo que podem comprometer o seu rendimento nas disciplinas de Cálculo Diferencial e Integral e Geometria Analítica.

Temos três grandes objetivos com esse projeto. Primeiro, reforçar alguns tópicos matemáticos importantes do Ensino Médio. Segundo, reforçar a conexão entre o que você aprendeu nos últimos anos com o que será ensinado nessas disciplinas. Terceiro, criar um espaço para que o estudante estude ativamente com suporte de um tutor.

A tutoria consiste em 3 horas de atividades semanais (cheque no seu horário como elas estão distribuídas), sempre em pequenos grupos acompanhados por um tutor. Todos os encontros seguirão atividades propostas em cadernos especialmente desenvolvidos de acordo com o objetivo da iniciativa e acompanhando de perto o conteúdo das disciplinas principais.

---

## O QUE ESPERAMOS DE VOCÊ

**Vá com calma.** A quantidade de atividades propostas foi pensada para que haja tempo para resolver todas as questões durante os encontros. Portanto, não corra. Leia atentamente as questões e os textos explicativos antes e depois delas. Uma grande parte da aprendizagem esperada vem dessas explicações. Caso você não termine algum capítulo, não se preocupe. É mais importante que você compreenda cada tópico visto do que chegue ao final apressadamente.

**Seja ativo.** Ao ler o material, tenha certeza de que você entendeu o conteúdo. Volte e cheque as referências, refaça cálculos se for necessário e faça anotações. Jamais deixe de registrar o processo de resolução de uma questão de modo que você consiga relê-lo no futuro se desejar. Recomendamos que você faça anotações tanto no texto quanto nas suas resoluções que lhe permitam tanto entender melhor o que foi feito quanto re-entender caso um dia você o consulte novamente.

**Pergunte.** Peça ajuda aos colegas e ao seu tutor caso não tenha conseguido entender alguma coisa. Não se sinta inibido, pois outros colegas podem ter as mesmas dúvidas que você ou serem capazes de ter explicar algo a partir de um ponto muito parecido com o que você está agora. Mas, ao invés de respostas prontas, procure sugestões ou esclarecimentos que lhe permitam resolver as questões e entender os conceitos de maneira independente.

**Mantenha o engajamento.** Se você não conseguir terminar algum capítulo, não se preocupe. Este material foi concebido pensando nessa possibilidade: todo trabalho feito aqui deve te ajudar nas disciplinas principais cedo ou tarde. Por outro lado, se em algum



momento o conteúdo parecer inútil ou muito fácil, mantenha o engajamento pois os tópicos foram cuidadosamente escolhidos e você notará o efeito do material em breve.

**Registre o seu progresso.** Não deixe de registrar o seu progresso ao final de cada capítulo. Isso é importante para podermos avaliar o quão bem a iniciativa está funcionando e para que você não deixe de completar as atividades propostas.

**Refleta.** Haverão questões explicitamente focadas em lhe fazer refletir sobre os tópicos discutidos e oportunidades para que você pense sobre o que você sabe, o quanto aprendeu e o que pode fazer para melhorar. Essas habilidades são importantes, não as menospreze!

**Não negligencie as disciplinas principais.** O objetivo da tutoria é te ajudar com as duas disciplinas principais e não ser mais um disciplinas por si só. Use o tempo da tutoria para a tutoria, mas não retire tempo de estudo das principais para investir na tutoria. Se a carga de trabalho estiver demais, conversa com seu tutor.

---

## ESTRUTURA DO MATERIAL

A maioria dos capítulos deste material, a partir do próximo, segue a mesma estrutura:

1. Apresentação: explicando porque o tópico em questão foi escolhido para o material e em que ele deve te ajudar nas disciplinas de Cálculo Diferencial e Integral e Geometria Analítica;
2. Pré-requisitos e Auto-avaliação inicial: explicando quais são os pré-requisitos do capítulo, que eventualmente precisam ser estudados antes dos encontros, e oferecendo uma oportunidade para você refletir sobre o seu conhecimento em Matemática;
3. Avaliação Diagnóstica: para que você inicie as atividades do capítulo em um ponto compatível com o seu conhecimento. Dê o seu melhor e a resolva sozinho. Essa avaliação deve ser resolvida ao final do último

encontro do capítulo anterior. Assim, você pode aproveitar os dias antes do próximo encontro para estudar os pré-requisitos e os tópicos que foram difíceis pra você na Avaliação Diagnóstica;

4. Questões: onde se concentra a maior parte do conteúdo, formado por questões e por texto discutindo os tópicos em pauta;
5. Rumo ao livro texto: com o objetivo de propor questões ou leituras que explicitamente conectem o trabalho que você acabou de fazer com o livros-texto das disciplinas oficiais;
6. Gabarito: contém as respostas para quase todas as questões. Use para checar as suas respostas quando você terminar de resolver uma questão, não para copiar a resposta final ou para “forçar” o caminho da resolução;
7. Registro de progresso: para que você registre quais questões resolveu (não importa se certo ou errado). Essa seção é importante para que possamos acompanhar a implementação do projeto e aprimorar o material;
8. Auto-avaliação final: oferecendo uma oportunidade para você comparar a sua evolução e traçar metas de estudo.

---

## REFERÊNCIAS ESSENCIAIS

Este material é bastante auto-contido, mas alguns outros livros serão referenciados tanto para sugerir leituras que expliquem tópicos não cobertos pelo material quanto para indicar leituras de aprofundamento ou continuidade.

A lista a seguir contém todas as referências que serão usadas ao longo do material. Sugerimos que você tenha esses materiais disponíveis durante as atividades da tutoria. Todos podem ser encontrados na biblioteca ou na internet.

- O livro digital Matemática Básica volume 1, de Francisco Magalhães Gomes, professor do IMECC. Disponível em <http://www.ime.unicamp.br/chico>

- O livro digital Matrizes, Vetores e Geometria Analítica, de Reginaldo J. Santos. Disponível em [www.mat.ufmg.br/regi](http://www.mat.ufmg.br/regi)
- O livro físico Álgebra Linear, de José Luiz Boldrini e outros. Amplamente disponível na biblioteca.

Existem também diversos portais com vídeos abordando tópicos de matemática na internet. Enquanto vários deles são bons, alguns não são. A sugestão que fazemos é o Portal do Saber ([portaldosaber.obmep.org.br](http://portaldosaber.obmep.org.br)). Ele se destaca pela organização, qualidade dos vídeos, recursos disponíveis e uniformidade do material.

# Matrizes 2x2

## APRESENTAÇÃO

Matrizes são o objeto central de duas disciplinas fundamentais para quase todos os cursos de exatas no Ensino Superior, Geometria Analítica e Álgebra Linear, além de ferramenta imprescindível para diversas aplicações simples e avançadas nas mais diversas áreas.

O objetivo deste capítulo é revisar as principais propriedades de matrizes focando em matrizes pequenas, de tamanho  $2 \times 2$ . Apesar de se tratar de um caso específico, as matrizes  $2 \times 2$  permitem a exploração de quase todas as propriedades e operações que são estudadas nas duas disciplinas mencionadas acima e trazem duas outras facilidades: reduzem o volume de cálculos e manipulações algébricas envolvidos na resolução das questões e permitem a visualização geométrica de certos cenários. A intenção por trás deste capítulo é, portanto, usar essas vantagens para preparar o terreno para o trabalho com matrizes de dimensões maiores em Geometria Analítica.

Você raramente encontrará matrizes  $2 \times 2$  nos livros-texto, mas caso você esteja com dificuldade para resolver algum exercício pode valer a pena pensar no caso  $2 \times 2$  e depois tentar expandi-lo para a questão original.

## PRÉ-REQUISITOS E AUTO-AVALIAÇÃO INICIAL

Os pré-requisitos para este capítulo são:

- O conceito de matrizes;
- Operações básicas com matrizes.

Esses tópicos não serão cobertos durante as atividades de tutoria. Se você acha que não sabe o suficiente sobre algum deles, sugerimos que se procure material de apoio antes de começar a resolver as questões desse capítulo.

## QUESTÕES DIAGNÓSTICAS

**D1** Seja  $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 6 \end{pmatrix}$  e  $B = \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$ , calcule:

- a)  $3A - B$
- b)  $AB$  (multiplicação da matriz  $A$  pela matriz  $B$ )
- c)  $A^{-1}$
- d)  $\det(A)$ .

Acertar o terceiro item permite um salto substancial nas questões desse capítulo, por isso os valores números envolvidos não são simples. Portanto, seja rigoroso até mesmo com aspectos aritméticos da resolução neste item. Entretanto, erros dessa natureza nos demais itens podem ser relevados se lhe parecer coerente com as demais resoluções.

### Gabarito

a)  $\begin{pmatrix} 8 & 11 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$ , b)  $\begin{pmatrix} 11 & 33 \\ 16 & 34 \end{pmatrix}$ , c)  $\begin{pmatrix} 6/7 & -5/7 \\ -1/7 & -2/7 \end{pmatrix}$ , d) 7.

## QUADRO DE ORIENTAÇÃO

1A	1B	1C	1D	Onde começar
C	E	E	E	Questão 2
C	C	E	E	Questão 3
C	C	C	E	Questão 7
C	C	C	C	Questão 8

### Comentários iniciais

Nesta seção, serão trabalhados conteúdos de matrizes utilizando apenas matrizes  $2 \times 2$ . Essa escolha visa reduzir o volume de manipulações algébricas e cálculos aritméticos e focar nos conceitos e procedimentos centrais. São eles:

- Operações: soma, multiplicação por escalar e multiplicação de matrizes;
- Igualdade de matrizes;
- Matriz inversa: obtenção e significado;
- Cálculo de determinante e propriedades relacionadas a matriz inversa e sistemas lineares;
- Sistemas lineares  $2 \times 2$ : resolução;
- Sistemas lineares  $2 \times 2$ : notação matricial;

É muito importante tentar separar dificuldades relacionadas a manipulações algébricas e cálculos aritméticos de dificuldades conceituais ou de entendimento do procedimento em si (como o de multiplicação de matrizes). Fique atento a isso e tente deixar claro aos estudantes que qual tipo de dificuldade eles estão enfrentando.

## QUESTÕES

Lembre-se de checar com seu tutor em que questão você deve começar.

## Primeiras operações

Os exemplos a seguir ilustram duas operações envolvendo matrizes, a soma e a multiplicação por um número real.

*Exemplo de soma de matrizes:*

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & 10 \\ 5 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 11 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

*Exemplo de multiplicação por escalar:*

$$3 \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{2} \\ 3 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \cdot 1 & 3 \cdot \sqrt{2} \\ 3 \cdot 3 & 3 \cdot -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 3\sqrt{2} \\ 9 & -12 \end{pmatrix}$$

Use esses exemplos como referência para a resolução da questão a seguir.

Q1

Considerando as matrizes  $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$  e  $C = \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$ , realize as operações indicadas abaixo.

- a)  $A + B$
- b)  $C - B$
- c)  $5C + A$
- d)  $3B + \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ \frac{2}{3} & -1 \end{pmatrix}$

## Multiplicação de matrizes

Na questão anterior você realizou somas de matrizes e multiplicação por um número real e ambas as operações são feitas de maneira bastante direta: somamos (ou subtraímos) os elementos das matrizes um a um e multiplicamos os elementos da matriz pelo escalar dado. Na próxima questão, introduziremos a multiplicação entre matrizes (às vezes denotada  $A \times B$ ,  $A \cdot B$  ou simplesmente  $AB$ ).

Essa operação tem duas diferenças importantes.

Note que o item d traz uma fração como elemento de uma das matrizes. Embora esse tópico não seja coberto no material da tutoria, talvez alguns estudantes precisem de ajudar neste ponto. A soma pode ser resolvida igualando-se os denominadores:

$$-6 + \frac{2}{3} = -\frac{6}{1} + \frac{2}{3} = -\frac{18}{3} + \frac{2}{3} = -\frac{16}{3}.$$

Primeiro, o procedimento para executá-lo (mostrado abaixo) é um pouco mais longo do que os anteriores. Segundo, nem todas as propriedades da multiplicação de números reais vale para a multiplicação de matrizes.

*Exemplo de multiplicação de matrizes:*

$$\begin{pmatrix} 6 & 4 \\ 5 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 9 & 2 \\ 7 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \cdot 9 + 4 \cdot 7 & 6 \cdot 2 + 4 \cdot 1 \\ 5 \cdot 9 + (-3) \cdot 7 & 5 \cdot 2 + (-3) \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 82 & 16 \\ 24 & 7 \end{pmatrix}$$

Se a leitura do exemplo acima não o fez lembrar como multiplicar matrizes ou se você nunca estudou esse tópico, leia a seção 1.3.6 do livro Álgebra Linear antes de resolver a questão abaixo.

Q2

Considerando as matrizes  $D = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$ ,  $E = \begin{pmatrix} 7 & 8 \\ 9 & 10 \end{pmatrix}$  e  $F = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$ , realize as operações indicadas abaixo.

- a) DE
- b) EF
- c) FE
- d) FD

Observe que os resultados obtidos nos itens b e c da questão anterior são diferentes. Esse caso ilustra uma propriedade importante da multiplicação de matrizes. Ao contrário dos números reais, onde  $a \times b = b \times a$  para quaisquer valores de  $a$  e  $b$ , no universo das matrizes isso nem sempre é verdade. Para alguns casos isso pode ocorrer (você verá um caso desses no final deste capítulo), mas não se trata de uma regra geral. Por isso, **a ordem das matrizes ao executar uma multiplicação é importante.**

Frações foram evitadas nessa questão para deixar o foco no procedimento de multiplicação, que é mais intrincado que o da soma e multiplicação por escalar. Os itens b e c exploram a questão da não comutatividade da multiplicação entre matrizes. O texto logo após a questão trata desse aspecto.

Note que o item d pede  $F \times D$  e não  $D \times F$  (ordem diferente da que as matrizes são apresentadas no enunciado).



## Propriedades da multiplicação de matrizes

Q3

Usando as matrizes definidas nas duas questões anteriores, realize os cálculos indicados abaixo.

- a)  $A^2$ , lembre-se de que  $A^2 = A \times A$ .
- b)  $B \times C - D^2$
- c)  $F \times (E - A)$

O item c dessa questão pode ser resolvido de duas maneiras: primeiro realizar a soma dentro dos parênteses ou então usar a propriedade distributiva:  $F \times (E - A) = F \times E - F \times A$ . Note que caso você opte pelo segundo caminho, a matriz  $F$  está multiplicando o parênteses pela esquerda, portanto, deve multiplicar as matrizes  $E$  e  $A$  também pela esquerda.

## Igualdade

Assim como com números reais, também é possível criar equações com matrizes, e para resolvê-las é necessário saber o significado da igualdade quando os elementos envolvidos são matrizes. Essencialmente, se duas matrizes são iguais, os termos que ocupam as mesmas posições em cada uma das matrizes devem ser iguais.

Q4

Determine o valor das incógnitas em cada uma das equações abaixo.

- a)  $\begin{pmatrix} 2 & x \\ 3y - 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 7 & z^2 - 25 \end{pmatrix}$
- b)  $3 \begin{pmatrix} -1 & t \\ 0 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ \frac{1}{2} & 0,6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 8 \\ \frac{1}{2} & 9,6 \end{pmatrix}$

## Igualdade, parte 2

Nos casos anteriores, as incógnitas eram elementos de algumas das matrizes envolvidas. Em certas situações a incógnita pode ser a matriz completa. Nesse caso, pode ser útil usar uma matriz genérica, como  $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ , no tamanho adequado e determinar o valor de cada uma de suas entradas. Use essa estratégia na próxima questão.

Q5

Determine as matrizes  $M$  e  $N$  que satisfazem as igualdades a seguir.

Nesta questão a ordem em que as operações devem ser executadas é fundamental, não apenas a ordem das matrizes ao serem multiplicadas. No item c a propriedade distributiva pode ser utilizada, ou seja  $F \times (E - A) = F \times E - F \times A$ . Note que a matriz  $F$  deve multiplicar  $E$  e  $A$  pela esquerda (pois multiplicava o parênteses pela esquerda). Entretanto, fazer a subtração primeiro é o caminho mais simples por diminuir o número de multiplicação que precisam ser realizadas.

Nesse momento, as igualdades envolvendo apenas elementos das matrizes e não as matrizes como um todo. No item a, temos 3 equações (note que o primeiro elemento das duas matrizes é igual) em crescente ordem de dificuldade do ponto de vista das equações envolvidas. No item b, há uma única equação, mas para resolvê-la é necessário operar um pouco com as matrizes. Pode valer a pena mencionar com os estudantes a possibilidade de focar exclusivamente no elemento (1,2) da matriz, já que apenas ele contém uma incógnita.

Agora as igualdades envolvem matrizes inteiras, de modo que todos os seus elementos devem ser obtidos. Não se preocupe com a notação  $m_{i,j}$  nesse momento, ela será introduzida mais adiante. Diferentemente da questão anterior, as equações precisam ser resolvidas em sistemas (ainda que bastante simples) e não isoladamente.

$$\text{a)} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \times M = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ \frac{1}{2} & 4 \end{pmatrix}$$

$$\text{b)} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \times N = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

### Matriz inversa

No item b da questão anterior, a matriz à direita do sinal de igual é chamada de **matriz identidade** (os elementos da diagonal principal são iguais a um e os demais são todos iguais a zero), ou simplesmente I. Quando uma matriz qualquer é multiplicada por I, o resultado é igual à matriz inicial, ou seja, essa matriz se comporta como o número 1 entre os números reais ( $a \times 1 = a$ ). Em contextos mais gerais, esse tipo de elemento é chamado de **elemento neutro da operação**.

Além disso, a matriz N, que você obteve como resposta do item b, é chamada de *inversa* da matriz  $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ ,

pois  $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \times N$  é igual a I, o "1 das matrizes".

Note que essa definição de inversa é similar ao inverso de um número real: o inverso de 3 é  $\frac{1}{3}$ , pois  $3 \times \frac{1}{3} = 1$ . Em termos gerais, a matriz inversa de uma matriz dada A é denotada por  $A^{-1}$  e escreve-se que  $AA^{-1} = I$ .

Matrizes inversas serão muito usadas ao longo das disciplinas de Geometria Analítica e Álgebra Linear, portanto, é importante que você saiba como obtê-las.

Por exemplo, se quisermos obter a matriz inversa  $A^{-1}$  da matriz  $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$ , devemos resolver a seguinte igualdade:

$$A \times A^{-1} = I \longrightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

**REFLITA** → Antes de resolver a questão abaixo, descreva textualmente como você deve proceder para terminar de resolver o exemplo logo acima. Tente cobrir todos os passos do processo, do início até a obtenção da solução.

Essa é a primeira vez que uma pergunta do tipo Reflita é proposta aos estudantes. A intenção é praticar meta-cognição, ou seja, a capacidade de conscientemente planejar, monitorar e avaliar as ações para a resolução de uma questão. Não é necessário cobrar um texto perfeito, descrições esquemáticas devem ser aceitas e até mesmo incentivadas. Porém, é importante que a descrição seja o mais completa possível em termos das etapas para resolução da questão. Esperamos que essas questões tragam à tona aspectos matemáticos que até então estavam ocultos.

**Q6** Determine, se possível, a matriz inversa da:

- a) matriz A usada no exemplo logo acima.
- b) matriz D da questão 2.
- c) da matriz  $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -6 & 3 \end{pmatrix}$ .

Como você deve ter notado no item c acima, **nem toda matriz tem uma inversa**. Entre os números reais, isso ocorre apenas com o número 0, mas entre as matrizes várias não possuem inversa. Isso não é um problema, mas diz muito sobre a matriz em questão. Veremos mais adiante como identificar quais matrizes possuem ou não uma inversa.

### Determinante

Determinante é uma operação que associa toda matriz quadrada a um número real. Durante o Ensino Médio, pouco se discute o significado dessa operação e o foco recai quase que totalmente no procedimento para o cálculo do determinante de certas matrizes quadradas. Em Geometria Analítica e Álgebra Linear o significado do determinante será mais importante, mas para compreendê-lo é necessário dominar o procedimento.

*Exemplo de cálculo do determinante de uma matriz:*

$$\text{Det} \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} = (2 \cdot 5) - (3 \cdot 4) = 10 - 12 = -2$$

Se você nunca calculou o determinante de uma matriz  $2 \times 2$ , peça ao seu tutor ou a um colega que lhe explique o procedimento exemplificado acima. Por enquanto, é necessário apenas saber como calculá-lo, pois o seu significado será discutido nas questões que virão.

**Q7** Calcule o determinante das seguinte matrizes.

- a) matriz A da questão 1.
- b) matriz E da questão 2.
- c)  $\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 1 \\ \frac{1}{2} & 2 \end{pmatrix}$
- d) matriz do item c da questão anterior.

Os cálculos nesta questão vão começar a ficar longos e envolver frações. Portanto, é esperado que os estudantes cometam erros procedimentais. Obviamente é importante corrigir estes erros, mas certifique-se de que os estudantes entenderam os aspectos conceituais por trás dessa questão.

- Como obter a matriz inversa  $M^{-1}$  de uma matriz dada  $M$ : resolvendo as equações resultantes da igualdade  $M \times M^{-1} = I$ ;
- Essa igualdade normalmente leva a sistemas de equações e não equações isoladas.

Nenhuma surpresa nessa questão. Não há necessidade de abordar determinante de matrizes maiores nesse momento (talvez mencionar que este procedimento é um caso particular para matrizes  $2 \times 2$ ).

Entretanto, o texto logo após a questão trata um pouco sobre as diferenças entre uma descrição informal de um resultado matemático e um teorema. Certifique-se de que os estudantes leram o texto, mas a intenção agora não é promover grandes discussões, apenas criar familiaridade.

Note que a única matriz com determinante igual a zero foi a matriz que vimos anteriormente não possuir inversa. Isso não é uma coincidência, mas uma das propriedades mais importantes do determinante. Essa propriedade pode ser descrita informalmente da seguinte maneira: toda matriz com determinante diferente de zero tem inversa e toda matriz com determinante igual a zero não tem inversa. Usando linguagem matemática mais formal, esse resultado seria descrito da seguinte maneira.

**TEOREMA** → *Uma matriz quadrada é invertível se, e somente se, seu determinante é diferente de zero.*

A expressão “se, e somente se” é bastante comum em textos matemáticos formais e significa (usando esse caso como exemplo) que:

1. Se sabemos que uma matriz é invertível, podemos concluir que seu determinante é diferente de zero, e
2. Se sabemos que uma matriz tem determinante diferente de zero, podemos concluir que ela é invertível.

Esse resultado também pode ser descrito em termos das matrizes com determinante igual a zero:

1. Se sabemos que uma matriz tem determinante igual a zero, podemos concluir que ela não é invertível, e
2. Se sabemos que uma matriz não é invertível, podemos concluir que seu determinante é igual a zero.

### **Determinantes e matrizes inversas**

**Q8** Considere a matriz  $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & m \end{pmatrix}$ .

- a) Qual deve ser o valor de  $m$  para que o determinante dessa matriz seja igual a 0?
- b) Tente obter a matriz  $M^{-1}$  para o valor de  $m$  obtido no item anterior.
- c) Escolha um valor para  $m$  que seja diferente do obtido no item a e obtenha  $M^{-1}$  para esse valor.

Não importa qual o valor escolhido no item c da questão anterior, se ele for diferente de 6 sempre será possível obter a matriz inversa de  $M$ , pois o determinante de  $M$

Mais uma vez, não há nenhuma surpresa nessa questão. Incentive os estudantes a comparar os resultados obtidos no item c tendo a seguinte conclusão em mente: o determinante é igual a 0 apenas se  $m = 6$ .

(denotado  $\text{Det}(M)$ ) será diferente de 0. Você pode checar essa conclusão com os valores escolhidos por outros colegas.

### Matrizes e sistemas lineares

Considere a igualdade  $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}$ . Se tentarmos obter os valores de  $x$  e  $y$ , seguiremos os seguintes passos:

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 2x - 1y \\ 1x + 3y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Igualando termo a termo das matrizes dos dois lados da igualdade, chegamos nas equações  $2x - 1y = 3$  e  $1x + 3y = 5$ , ou seja, resolver a equação matricial dada inicialmente é o mesmo que resolver o sistema de equações abaixo.

$$\begin{cases} 2x - 1y = 3 \\ 1x + 3y = 5 \end{cases}$$

Ver sistemas lineares como matrizes traz algumas vantagens, especialmente no caso de sistemas com mais incógnitas e equações. Por isso é importante que você esteja familiarizado com a ideia.



Resolva os sistemas lineares dados a seguir.

- a)  $\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 4 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ -2 \end{pmatrix}$
- b)  $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

Trata-se apenas de uma questão para prática e familiarização com a representação de sistemas lineares na forma de matrizes.

### Determinantes e sistemas lineares

Se você voltar à questão anterior e calcular o determinante das matrizes que multiplicam  $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$  notará que ambos são diferentes de 0. A seguir, veremos o que ocorre com sistemas obtidos a partir de uma matriz com determinante igual a 0.



Considere a matriz  $S = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -4 & -8 \end{pmatrix}$

Os estudantes podem estranhar o resultado do item b (sistema sem solução). Nesse caso, você pode mostrar a eles que se a primeira equação for multiplicada por  $-2$  a equação resultante é contraditória com a segunda equação.

a) Calcule  $\text{Det}(S)$ .

b) Resolva o sistema  $S \times \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -15 \end{pmatrix}$

O fato de  $\text{Det}(S) = 0$  e de o sistema não admitir solução não é uma coincidência, mas sim um resultado muito importante sobre sistemas lineares: **matrizes com determinantes nulos levam a sistemas lineares sem solução única.**

## Determinantes e sistemas lineares, parte 2

Q11

Use o critério discutido acima para determinar se os sistemas abaixo possuem ou não solução única.

a)  $\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 5 \end{pmatrix}$

b)  $\begin{pmatrix} 9 & -6 \\ 6 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

## Finalizando

Q12

Considere a matriz  $M = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ .

a) Calcule  $\text{Det}(M)$ .

b) Obtenha  $M^{-1}$

c) Resolva  $M \times \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 17 \end{pmatrix}$

Trata-se apenas de uma questão para prática do cálculo de determinantes e fixação do resultado envolvendo determinantes e sistemas lineares.

Um detalhe não foi discutido em profundidade no material do estudante: determinante igual a zero pode resultar em um sistema impossível ou um sistema possível e indeterminado (admite infinitas soluções). Um exemplo desse segundo caso pode ser obtido mudando o elemento  $-15$  da matriz do item 5 questão 10 para  $-12$ . A distinção entre esses dois casos não pode ser feita via determinante.

Essa questão abarca os tópicos mais importantes deste capítulo do ponto de vista do suporte para Geometria Analítica.

## RUMO AO LIVRO-TEXTO

Essa questão foi escolhida para explicar uma classe de questões muito comum em livros de Geometria Analítica: as do tipo “Mostre que”. Essas questões, de maneira geral, pedem que você mostre alguma propriedade que seja válida para contextos mais amplos.

O objetivo é discutir uma questão do que tipo “mostre que”, tão comuns no ensino superior mas raramente abordadas no ensino médio. O ponto central a ser enfatizado aqui é a necessidade de não usar a hipótese (aquilo que se quer mostrar verdadeiro) ao longo da demonstração. No caso da questão resolvida e da proposta, utilizar a hipótese não facilita a resolução, mas incorre em uma inconsistência lógica. Portanto, basta cuidado na apresentação da resolução para que isso não aconteça. Ao checar a resolução da questão proposta, seja bastante rigoroso com esse aspecto.

Na verdade, são “pequenos teoremas” que estão sendo descritos de maneira um pouco mais informal.

QUESTÃO RESOLVIDA → *Mostre que toda matriz  $2 \times 2$  comuta com a matriz  $A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$  na multiplicação.*

Essa questão pede que você mostre que a multiplicação de duas matrizes  $A$  e  $B$ , ambas  $2 \times 2$ , quando uma delas é da forma  $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$ , é **comutativa**, ou seja,  $A \times B = B \times A$ .

Vimos anteriormente que isso não é verdadeiro para quaisquer matrizes, porém, pode ser verdade para alguns casos específicos, como o proposto na questão.

Para resolver a questão vamos criar uma matriz genérica  $M$  de dimensões  $2 \times 2$ :  $M = \begin{pmatrix} m_{1,1} & m_{1,2} \\ m_{2,1} & m_{2,2} \end{pmatrix}$ . Essa maneira de representar os elementos de uma matriz (usando a versão minúscula da letra que nomeia a matriz e índices para indicar a linha e a coluna de cada elemento no formato *linha, coluna*) é o mais comum, especialmente quando as matrizes tiverem tamanho maiores.

Agora, vamos entender como uma questão desse tipo pode ser resolvida. Note que você deve concluir que  $A \times M = M \times A$ , portanto, você não pode utilizar essa informação como ponto de partida ou durante a sua resolução. É importante que isso fique claro. Para fins de resolução desta questão, você quer mostrar que  $A \times M$  é igual a  $M \times A$ , mas você ainda não sabe se isso é verdadeiro, por isso não pode utilizar essa informação.

Um erro comum entre estudantes que ainda não se acostumaram com esse tipo de questão é começar com a informação que deve ser demonstrada. Tipicamente, esses estudantes começariam a resolução da seguinte maneira:

$$M \times A = A \times M$$
$$\begin{pmatrix} m_{1,1} & m_{1,2} \\ m_{2,1} & m_{2,2} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} m_{1,1} & m_{1,2} \\ m_{2,1} & m_{2,2} \end{pmatrix}$$

E então fariam a multiplicação das matrizes com a intenção de chegar a resultados iguais dos dois lados da igualdade, o que de fato aconteceria. Mas isso está errado, pois a resolução começa usando a informação que deverá ser demonstrada, ou seja, começa usando

uma informação que ainda não sabemos se é verdadeira. Porém, isso pode ser corrigido com uma mudança sutil, mas fundamental do ponto de vista matemático. Vamos começar checando qual seria o resultado de  $A \times M$ .

$$\begin{aligned} A \times M &= \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} m_{1,1} & m_{1,2} \\ m_{2,1} & m_{2,2} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a \cdot m_{1,1} + 0 \cdot m_{2,1} & a \cdot m_{1,2} + 0 \cdot m_{2,2} \\ 0 \cdot m_{1,1} + a \cdot m_{2,1} & 0 \cdot m_{1,2} + a \cdot m_{2,2} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a \cdot m_{1,1} & a \cdot m_{1,2} \\ a \cdot m_{2,1} & a \cdot m_{2,2} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Agora, verifiquemos o resultado de  $M \times A$ .

$$\begin{aligned} M \times A &= \begin{pmatrix} m_{1,1} & m_{1,2} \\ m_{2,1} & m_{2,2} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a \cdot m_{1,1} + 0 \cdot m_{1,2} & 0 \cdot m_{1,1} + a \cdot m_{1,2} \\ a \cdot m_{2,1} + 0 \cdot m_{2,2} & 0 \cdot m_{2,1} + a \cdot m_{2,2} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a \cdot m_{1,1} & a \cdot m_{1,2} \\ a \cdot m_{2,1} & a \cdot m_{2,2} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Note que todos os elementos das duas matrizes obtidas são iguais. Portanto, isso nos permite concluir que o primeiro resultado ( $A \times M$ ) é igual ao segundo ( $M \times A$ ), ou seja, que  $A \times M = M \times A$ , como foi pedido no enunciado.

O detalhe de não termos escrito a igualdade no início da resolução faz toda a diferença do ponto de vista lógico (não estamos usando algo que não sabemos se é ou não verdadeiro), apesar de fazer pouca diferença em termos dos cálculos realizados.

Agora, tente usar uma abordagem semelhante para a questão a seguir, retirada do livro *Matrizes, Vetores e Geometria Analítica*.

QUESTÃO DO LIVRO-TEXTO → Mostre que a matriz  $X = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{y} \\ y & 1 \end{pmatrix}$ , em que  $y$  é um número real não nulo, verifica a equação  $X^2 = 2X$ .



## Questões adicionais

**A1** Seja  $A$  uma matriz diagonal de dimensões  $2 \times 2$

- a) Calcule  $A^2$  e  $A^3$ .
- b) O que deve ocorrer com a matriz  $A^n$ ?

**A2** Considere a matriz  $M = \begin{pmatrix} 2 & \sqrt{6} \\ \sqrt{2} & x \end{pmatrix}$ .

- a) Obtenha  $x$  para que o determinante dessa matriz seja igual a 0.
- b) Obtenha  $x$  para que o determinante dessa matriz seja igual a  $\sqrt{3}$ .
- c) Obtenha a  $M^{-1}$  para o valor de  $m$  calculado no item b.

**A3** Considere o sistema  $\begin{pmatrix} 12 & a \\ 9 & 6 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ t \end{pmatrix}$ .

- a) Determine o valor de  $a$  para que o sistema não admita solução única.
- b) Considerando o valor de  $a$  obtido no item anterior, qual deve ser o valor de  $t$  para que o sistema tenha infinitas soluções?

Insista que os estudantes devem de fato escrever a resposta do item b tentando ser o mais claros e completos possível. Uma possibilidade é dizer que os elementos  $b$  da matriz  $B = A^n$  são dados por  $b_{i,j} = a_{i,j}^n$ , ou seja, a potência da matriz pode ser "distribuída" internamente para os elementos.

Essa questão não envolve conceitos novos, mas demanda manipulações algébricas com raízes quadradas, que podem gerar certas dificuldades.

Essa questão envolve uma situação nova: a determinação do valor de  $t$  para que o sistema tenha infinitas soluções. Esse caso ocorre quando as linhas do sistema são múltiplas uma da outra.

Caso os alunos tenham resolvido essas questões, sugerimos os exercícios das seções 1.6 (matrizes e operações), 2.6 (sistemas lineares) e 3.10 (determinantes e matrizes inversas) do livro Álgebra Linear. Entretanto, essa lista contém questões com matrizes de dimensões maiores.

## GABARITO

Confira as respostas para as questões e **não se esqueça de registrar o seu progresso.**


- Q1 a)  $\begin{pmatrix} 5 & 6 \\ -5 & 1 \end{pmatrix}$ , b)  $\begin{pmatrix} 2 & -6 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$ , c)  $\begin{pmatrix} 27 & -4 \\ 2 & -10 \end{pmatrix}$ , d)  $\begin{pmatrix} 14 & 15 \\ -16/3 & -4 \end{pmatrix}$ .
- Q2 a)  $\begin{pmatrix} 41 & 46 \\ 73 & 82 \end{pmatrix}$ , b)  $\begin{pmatrix} -14 & -17 \\ -18 & -21 \end{pmatrix}$ , c)  $\begin{pmatrix} -5 & -6 \\ -27 & -30 \end{pmatrix}$ , d)  $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -12 & -15 \end{pmatrix}$ .
- Q3 a)  $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -6 & -3 \end{pmatrix}$ , b)  $\begin{pmatrix} 4 & -34 \\ -39 & -33 \end{pmatrix}$ , c)  $\begin{pmatrix} 2 & -4 \\ -36 & -30 \end{pmatrix}$ .
- Q4 a)  $x = 3$  e  $y = 8/3$  e  $z = \pm 5$ , b)  $t = 2$ .
- Q5 a)  $\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -7/2 & 10 \end{pmatrix}$ , b)  $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix}$ .
- Q6 a)  $\begin{pmatrix} 3/2 & -1/2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ , b)  $\begin{pmatrix} -5/2 & 3/2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ , c) o sistema não tem solução.
- Q7 a) 3, b) -2, c)  $\frac{1}{6}$ , d) 0.
- Q8 a)  $m = 6$ , c) se  $m = 1$  então a matriz inversa será  $\begin{pmatrix} -1/5 & 2/5 \\ 3/5 & -1/5 \end{pmatrix}$ .
- Q9 a)  $x = 1$  e  $y = 2$ , b)  $x = \frac{3}{2}$  e  $y = \frac{1}{2}$ .
- Q10 a) 0, b) sistema sem solução.
- Q11 a) sim, b) não.

**Q12** a) 7, b)  $\begin{pmatrix} 3/7 & 1/7 \\ -1/7 & 2/7 \end{pmatrix}$ , c)  $x = 5$ ,  $y = 4$ .

---

## AUTO-AVALIAÇÃO FINAL

Avalie o quanto você acha que sabe sobre os seguintes itens após ter resolvido as questões deste capítulo.



# Potências, equações exponenciais e logaritmos

---

## APRESENTAÇÃO

As disciplinas Cálculo Diferencial e Integral 1 e 2 têm como objeto central o conceito de função. Todas as definições e propriedades aprendidas ao longo dessas disciplinas visam construir duas transformações muito poderosas que podem ser aplicadas a funções: a derivação e a integração. Essas duas transformações emergiram durante o século XVI e permitiram um avanço enorme da matemática aplicada, impulsionando a revolução industrial européia e o desenvolvimento de várias áreas da física, como a mecânica de Newton e o estudo das ondas.

Dentro desse universo, algumas funções ocupam um lugar privilegiado por serem muito simples e versáteis. Obviamente essa simplicidade não significa que elas sejam fáceis para o estudante. A função exponencial é uma dessas funções: simples (para calcular derivadas e integrais) e versáteis (podem ser usada para descrever uma gama enorme de problemas).

O objetivo deste capítulo é justamente revisitar os conteúdos que servem de fundamento para o estudo das funções exponenciais: as propriedades da potenciação, a resolução de equações exponenciais e, finalmente, o logaritmo.

## PRÉ-REQUISITOS E AUTO-AVALIAÇÃO INICIAL

Os pré-requisitos para este capítulo são:

- Significado de potenciação;
- Significado de raízes quadradas e enésimas.

Esses tópicos não serão cobertos durante as atividades de tutoria. Se você acha que não sabe o suficiente sobre algum deles, sugerimos que se procure material de apoio antes de começar a resolver as questões desse capítulo.

## QUESTÕES DIAGNÓSTICAS

**D1** Escreva as expressões abaixo como uma única potência.

- a)  $2^5 \cdot 2^3$
- b)  $\frac{5^{10}}{5^4}$
- c)  $8(2^{-15} \cdot 4^7)$

### Gabarito

a)  $2^8$ , b)  $5^6$ , c)  $2^2$ .

**D2** Resolva as equações dadas abaixo.

- a)  $5^{x-4} = 25$
- b)  $6 \cdot 2^{5+2x} = 48$
- c)  $\sqrt{3} \cdot 3^{x+3} + 1 = 10$

## Gabarito

a)  $x = 6$ , b)  $x = -1$ , c)  $x = -1.5 = -\frac{3}{2}$ .

## QUADRO DE ORIENTAÇÃO

1A e 1B e 1C	2A e 2B	2C	Onde começar
C	E	E	Questão 2
C	C	E	Questão 3
C	C	C	Questão 7

## QUESTÕES

### Comentários iniciais

Neste capítulo, serão trabalhados conteúdos relacionados a equações exponenciais e logaritmos com algumas pitadas de função exponencial. O objetivo é garantir que os estudantes saibam as propriedades básicas dessas duas operações. Você notará que os exercícios propostos não exploram encadeamentos muito longos de manipulações algébricas, como questões de vestibulares clássicos, mas sim casos básicos que serão encontrados frequentemente por esses estudantes ao longo de disciplinas de Cálculo.

A ênfase aqui, portanto, não deve ser em resolver uma quantidade enorme de exercícios e praticar à exaustão todas as propriedades, nem de discutir igualdades intrincadas em que manipulações algébricas inusitadas são necessárias. Pelo contrário, a segurança em utilizar as propriedades deve ser o objetivo.

### Início do conteúdo para o aluno

Lembre-se de checar com seu tutor em qual questão você deve começar.

### Primeiras propriedades

A interpretação de  $a^n$  como sendo o produto do número  $a$  por ele mesmo  $n$  vezes é um pouco limitada, pois só funciona para valores inteiros positivos de  $n$ , mas nos permite obter e interpretar as propriedades mais básicas da potenciação. Se você não está familiarizado com as propriedades listadas abaixo, sugerimos que leia a seção 1.8 do livro Matemática Básica, volume 1 até a página 70 e então volte para esta questão.

- Produto de potências:  $a^n \cdot a^m = a^{n+m}$
- Divisão de potências:  $\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$
- Potência de potência:  $(a^n)^m = a^{n \cdot m}$
- Elevado a zero:  $a^0 = 1$

→ Potência negativa:  $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$

As propriedades acima podem ser verificadas rapidamente com exemplos numéricos e demonstradas para o caso de expoentes inteiros positivos. Porém, elas valem para quaisquer expoentes e bases reais, contanto que a base seja positiva.

Q1

Utilize as propriedades acima para transformar as expressões abaixo em novas expressões com o menor número de potências possível.

- a)  $2^5 \cdot 2^{11} \cdot 2^{-3}$
- b)  $\frac{5^3 \cdot 5^5}{5^2}$
- c)  $(3 \cdot 3^8)^2$
- d)  $\left(\frac{a^7}{a^2}\right)^{-1}$
- e)  $4^3 \cdot 2^5$

Essa questão trata das propriedades mais básicas das potências. Se os estudantes estiverem com dificuldade para resolver estes itens, insista que leiam a seção 1.8 do livro *Matemática Básica*, volume 1, na qual essas propriedades são apresentadas e discutidas. Pode valer a pena pedir aos estudantes que tenham ido bem nas questões diagnósticas para que ajudem os colegas com dificuldade nessa questão.

### Erros comuns

Q2

Todas as resoluções mostradas abaixo contêm algum erro. Indique claramente o erro cometido e simplifique a expressão dada corretamente.

- a)  $3^5 \cdot 9^7 \rightarrow (3 \cdot 9)^{5+7} = 27^{12}$
- b)  $(2^3 \cdot 3^5)^2 \rightarrow 2^3 \cdot 3^{5 \cdot 2} = 2^3 \cdot 3^{10}$
- c)  $\frac{5^7}{5^{-3}} \rightarrow 5^{7-3} = 5^4$
- d)  $(a + b)^2 \rightarrow a^2 + b^2$

A intenção dessa questão é reforçar as propriedades básicas através de um tipo diferente de pergunta, que exige um nível de consciência um pouco maior do estudante. Se achar adequado, peça que os estudantes descrevam textualmente onde está o erro ao responderem cada um dos itens.

### Notação científica

Notação científica nada mais é do que uma forma de representar números especialmente conveniente quando os números envolvidos são muito grandes ou muito pequenos. Por exemplo, ao invés de escrevermos 3000000 podemos escrever simplesmente  $3 \cdot 10^6$ . Note que checar a potência do 10 na segunda forma é bem mais eficiente do que contar os zeros na primeira. O mesmo pode ser feito com números muito pequenos como 0,000000000002, que pode ser escrito como  $2 \cdot 10^{-12}$ . Lembre-se que  $10^{-12} = \frac{1}{10^{12}}$ , ou seja,



$$2 \cdot 10^{-12} = \frac{2}{10^{12}} = 0,000000000002.$$

Como último exemplo, vejamos como representar 0,037. Poderíamos escrever como  $37 \cdot 10^{-3}$ , porém, padronizou-se utilizar sempre um número entre 1 e 10 fora da potência, o que não é o caso do 37. Portanto, 0,037 é comumente rescrito como  $3,7 \cdot 10^{-2}$ .

Por utilizar potências de 10 intensamente, notação científica se encaixa bem com o tópico que estamos estudando.



Discuta com seus colegas como simplificar as expressões abaixo envolvendo números dados em notação científica.

- a)  $\frac{2,4 \cdot 10^5 \cdot 3 \cdot 10^8}{10^3}$
- b)  $\frac{2,8 \cdot 10^{10} \cdot 6,3 \cdot 10^2}{2,1 \cdot 10^{-4}}$
- c)  $\frac{1,2 \cdot 10^3}{3 \cdot 10^9}$
- d) A luz viaja a uma velocidade de  $3 \cdot 10^8$  m/s e a menor distância da Terra a Júpiter é aproximadamente  $6,3 \cdot 10^{11}$  metros. Quanto tempo um pulso de luz leva para percorrer essa distância?

### Potências fracionárias

As propriedades vistas acima são facilmente compreensíveis se pensarmos em expoentes inteiros positivos, mas expoentes fracionários também têm uma interpretação simples e muito poderosa. Vejamos o que ocorre com um caso simples: o que poderia significar  $a^{\frac{1}{2}}$ ?

Vamos considerar que as propriedades anteriores são válidas para expoentes fracionários. Nesse caso, para entendermos o significado da expressão acima, poderíamos fazer uma operação de modo a transformar a fração em um número inteiro. Uma opção seria multiplicar  $a^{\frac{1}{2}}$  por  $a^{\frac{1}{2}}$ . Assim, poderíamos somar os expoentes, obtendo 1. Para isso, vamos chamar  $a^{\frac{1}{2}}$  de  $x$ . Agora vejamos:

O objetivo desta questão não é discutir notação científica em detalhes. Acima de tudo, queremos que os estudantes estejam familiarizados com essa notação, que é de fato bastante comum no ensino superior (por isso o item d), e aumentem um pouco a fluência com algumas propriedades de potência.

No item c seria necessário um "ajuste" ao valor que multiplica a potência de 10 para que a resposta esteja em notação científica, pois o esperado é que seja obtido  $0,4 \cdot 10^{-6}$ . Não é necessário ser rigoroso com a notação científica, mas essa oportunidade pode ser interessante para discutir propriedades de potência:

$$0,4 \cdot 10^{-6} = (4 \cdot 10^{-1}) \cdot 10^{-6} = 4 \cdot 10^{-1} \cdot 10^{-6} = 4 \cdot 10^{-7}.$$

No item d, peça aos estudantes que chequem se a descrição dada cobre o que foi feito nos itens a, b e c. Mais uma vez, o rigor é menos importante do que a completude da descrição.

$$\begin{aligned}
 a^{\frac{1}{2}} &= x && \text{multiplicando os dois lados por } a^{\frac{1}{2}} \\
 a^{\frac{1}{2}} \cdot a^{\frac{1}{2}} &= a^{\frac{1}{2}} \cdot x && \text{também podemos usar que } a^{\frac{1}{2}} = x \\
 a^{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}} &= x \cdot x && \text{somando os expoentes} \\
 a^1 &= x^2 && \text{rescrevendo a igualdade} \\
 x^2 &= a && \text{aplicando raiz aos dois lados} \\
 x &= \sqrt{a} && \text{portanto: } a^{\frac{1}{2}} = \sqrt{a}
 \end{aligned}$$

Veja que se admitirmos as propriedades básicas da potenciação no contexto de expoentes fracionários, somos levados à conclusão de que  $a^{\frac{1}{2}} = \sqrt{a}$ . Essa propriedade pode ser generalizada para o seguinte:

*Potências fracionárias:  $a^{\frac{n}{m}} = \sqrt[m]{a^n}$ , por exemplo:  $3^{\frac{2}{5}} = \sqrt[5]{3^2}$*

Essa propriedade conecta raízes a potências e será muito útil quando você estiver calculando derivadas e integrais envolvendo raízes.

**Q4** Use a propriedade anterior para fazer o que se pede em cada item abaixo.

- Escreva  $\sqrt[3]{(x+1)^2}$  na forma de potência.
- Escreva  $a^{\frac{3}{5}}$  na forma de raiz.
- Escreva  $x^3 \cdot \sqrt{x}$  como uma única potência.
- Escreva  $\frac{10^2}{\sqrt[3]{10}}$  como uma única raiz.
- Escreva  $\sqrt{t} \cdot \sqrt[3]{t}$  como uma potência.

Seguindo a tônica deste capítulo, o objetivo aqui não é explorar casos super intrincados com diversas raízes, mas saber como usar a propriedade em questão para casos que serão comuns em exercícios de Cálculo.

## Função exponencial

Funções exponenciais são funções em que a variável aparece na potência como em  $f(x) = 2^x$ . Essa é uma das funções exponenciais mais simples, mas versões mais sofisticadas como  $g(x) = 4 \cdot 3^{(2x-1)-5}$  ainda se encaixam nessa mesma família de funções e possuem comportamento muito parecido com  $f(x)$ .

**Q5** Resolva as questões referentes à função exponencial sugeridas abaixo.

O gráfico e as propriedades da função exponencial serão discutidas nas aulas da disciplina de Cálculo. O tópico foi trazido para este material para servir como contexto para um pouco mais de prática com potências e para retomar a notação de funções. Note que neste momento, o que se espera são apenas cálculos envolvendo potências.

O terceiro item tem o intuito de introduzir a transformação  $5^{2x+3} = 5^3 \cdot (5^2)^x$ . Essa transformação é importante para demonstrar algumas das propriedades da derivada da

- a) Sendo  $f(x) = 4^x$ , obtenha  $f(1)$ ,  $f(2)$ ,  $f(0)$ ,  $f(-1)$  e  $f(\frac{1}{2})$ .
- b) Sendo  $g(x) = 4 \cdot 3^{2x-1} - 5$ , obtenha  $g(1)$ .
- c) Seja  $h(x) = 5^{2x+3}$ , reescreva a função  $h$  de modo que a variável  $x$  apareça sozinha no expoente.

### Equações exponenciais

Assim como a fórmula de Bhaskara para as equações quadráticas, as equações exponenciais possuem uma estratégia para a sua resolução. Essa estratégia consiste, essencialmente, em manipular algebricamente a equação de modo a escrevê-la como uma igualdade de duas potências com a mesma base. No item a abaixo a equação dada já está nesse formato, portanto, só precisamos igualar os expoentes  $2x - 1 = 5$ . No item b isso não é verdade, mas podemos reescrever 27 como  $3^3$  e então igualar os expoentes.

Q6

Resolva as equações abaixo.

- a)  $2^{2x-1} = 2^5$
- b)  $27 = 3^{5x-2}$
- c)  $4^{x+1} = 8^{3+x}$
- d)  $a^{x^2-12} = a^x$
- e)  $3 - 5 \cdot 2^{5-3x} = 23$

Todas as equações acima podem ser resolvidas reduzindo os termos de cada lado da igualdade para potências da mesma base. O quarto item recai em uma equação quadrática e o último envolve somas e multiplicações que devem ser resolvidas antes de se obter uma equação com apenas duas potências na mesma base.

### Mais funções exponenciais

Q7

Considere a função exponencial dada por  $f(x) = 3 \cdot 2^x$ .

- a) Obtenha o valor de  $x$  para que  $f(x) = 48$
- b) Determine o ponto em que  $f(x)$  corta o eixo Y do plano cartesiano.
- c) Obtenha o valor de  $x$  para que  $f(x) = 1,5$

Estas questões, diferentemente das anteriores sobre função exponencial, recaem em equações. Todas podem ser resolvidas com técnicas equivalentes às que foram usadas na questão anterior. Note que a resposta do item b deve ser um ponto, ou seja, deve ser na forma  $(x; y)$ . No último item, pode ser útil usar  $1,5 = \frac{3}{2}$ .

### Uma nova equação exponencial

Vamos considerar agora a função  $f(x) = 10^x$ . Suponhamos que queríamos saber para qual valor de  $x$  a função é igual a 50. Se tentarmos resolver a equação  $50 = 10^x$  chegamos rapidamente a um impasse: 50 não é

uma potência de 10, portanto, não conseguimos escrever a equação como uma igualdade de potências na mesma base. Se testarmos alguns valores para  $x$  notamos que  $f(x) = 10$  e  $f(2) = 100$ . Já que intuitivamente a função parece ser crescente (sempre que  $x$  aumenta, o valor de  $f(x)$  aumenta), é de se esperar que o valor de  $x_0$  para o qual  $f(x_0) = 50$  está entre 1 e 2.

Com auxílio de uma calculadora, podemos fazer alguns testes. A operação de exponenciação é normalmente indicada pelo símbolo (disponível se posicionarmos o celular na horizontal). Se digitarmos  $10 \uparrow 1.5$ , obtemos aproximadamente 31.6. Ou seja,  $f(1.5) \approx 31.6$ . Isso nos leva a esperar que o valor procurado esteja entre 1.5 e 2.



Use a calculadora do seu celular para obter o valor de  $x_0$  que satisfaça os itens abaixo com uma cada depois decimal para a função  $f(x) = 10^x$ .

- a) Obtenha  $x_0$  tal que  $f(x_0) = 50$
- b) Obtenha  $x_0$  tal que  $f(x_0) = 200$

Considerando o trabalho necessário para resolver os dois itens anteriores você deve estar se perguntando se não há uma maneira mais direta para resolver uma equação como  $50 = 10^x$ ; e a resposta felizmente é sim! E o recurso usado para isso é chamado logaritmo.

## Logaritmo

Para entendê-lo, vamos relembrar a relação entre as operações de multiplicação e divisão: se quisermos resolver a equação  $50 = 10 \cdot x$ , basta dividirmos os dois lados da igualdade por 10.

$$50 = 10 \cdot x \longrightarrow \frac{50}{10} = \frac{10 \cdot x}{10} \longrightarrow 5 = x \longrightarrow x = 5$$

Ou seja, como a incógnita  $x$  estava sendo multiplicada por 10, dividimos os dois lados da equação por 10. Nesse sentido, dizemos que a divisão é a operação inversa da multiplicação. No caso da nossa equação original  $10^x = 50$ , a incógnita aparece como expoente do 10 e o logaritmo é definido justamente como a operação inversa da exponenciação.

O objetivo desta questão é preparar o terreno para a introdução dos logaritmos na próxima questão. Nesse momento, queremos que os estudantes notem a possibilidade de encontrar valores não inteiros para potências de modo que satisfaçam certas igualdades.

O botão aparece na maioria das calculadoras de celular se deitarmos a tela.

Em termos gerais:  $\log_a x = b \Leftrightarrow x = a^b$ . E eis alguns exemplos:

→  $\log_{10} 100 = 2$ , pois  $100 = 10^2$

→  $\log_2 8 = 3$ , pois  $8 = 2^3$

→  $\log_7 1 = 0$ , pois  $1 = 7^0$

→  $\log_3 (1/3) = -1$ , pois  $1/3 = 3^{-1}$

→  $\log_{25} 5 = \frac{1}{2}$ , pois  $5 = 25^{\frac{1}{2}} = \sqrt{25}$

Se os exemplos anteriores não são familiares pra você, peça ajuda ao seu tutor ou colega pois o entendimento destes exemplos é fundamental para todas as próximas questões.



Calcule:

- a)  $\log_4 16$
- b)  $\log_3 81$
- c)  $\log_{10} 100000$
- d)  $\log_2 \frac{1}{2}$
- e)  $\log_9 3$

### Logaritmo na calculadora

Você deve ter notado que os itens da questão anterior tratam de casos que não eram problemáticos se fossem parte de uma equação exponencial, pois os números envolvidos podem ser convertidos para a mesma base, ou seja, os itens anteriores não ajudam a resolver a equação  $50 = 10^x$ . Para isso, existem dois recursos: a calculadora ou algumas propriedades dos logaritmos. Vamos focar inicialmente na calculadora.

Ao contrário das 4 operações fundamentais que podem ser realizadas com auxílio de ações concretas, como contar nos dedos ou compartilhar elementos igualmente, o logaritmo de um número em uma dada base, se o primeiro não estiver relacionado ao segundo em termos de potências, não pode ser obtido de maneira concreta. Quando os logaritmos foram criados, essa dificuldade era contornada graças a tabelas que literalmente

Note que os itens desta questão são simples. O objetivo é ter certeza de que os estudantes conhecem o conceito de logaritmo. Insista que leiam o texto de introdução à questão e os exemplos. Mesmo assim, talvez seja necessária alguma explicação adicional caso o conceito seja totalmente desconhecido. Você pode usar os exemplos e pequenas variações deles.

Uma opção interessante é pedir aos estudantes que criem novos exemplos com algumas restrições: dada uma base (calcule 3 logaritmos na base 6), dado um resultado (crie 2 logaritmos cujo valor seja igual a 5) ou dado o logaritmando (calcule o log de 64 em duas bases diferentes). Por enquanto, se restrinja a valores inteiros.

listavam valores de logaritmos a exaustão. Hoje, essas tabelas podem ser trocadas por uma calculadora. No modo científico, as calculadoras de celulares oferecem o botão log, que retorna o logaritmo de um número na base 10 (sempre que a base de um logaritmo estiver omitida, fica-se subentendido que a base é 10).

Se usarmos a calculadora para obter  $\log 50$ , o resultado (com 5 casas decimais) é 1.69897. Note que se usarmos a calculadora para calcular  $10^{1.69897}$ , obteremos aproximadamente 49.99999 como resposta.

Q10

Use a calculadora para obter

- a)  $\log_{10} 200$  (compare com o resultado aproximado que você obteve anteriormente)
- b)  $\log_{10} 20$
- c)  $\log_{10} 2$

Antes de introduzir as propriedades de logaritmos achamos interessante introduzir o uso da calculadora (por isso a escolha da base 10), pois o uso que se fazia dos logaritmos no passado era muito semelhante, mas através de tabelas. Mais do que aprender a usar o aplicativo, a nossa intenção é de que os estudantes interajam com a relação entre logaritmos e exponenciais, calculando um através do outro.

### Propriedades dos logaritmos

Você deve ter notado um padrão nas respostas obtidas acima. Esse padrão está relacionado com uma das propriedades dos logaritmos, que podem ser vistas abaixo.

1.  $\log_a(b \cdot c) = \log_a b + \log_a c$ , por exemplo  $\log_{10} 20 = \log_{10} 2 \cdot 10 = \log_{10} 2 + \log_{10} 10$
2.  $\log_a(b/c) = \log_a b - \log_a c$ , por exemplo  $\log_{10} 5 = \log_{10} 10/2 = \log_{10} 10 - \log_{10} 2$
3.  $\log_a b^n = n \cdot \log_a b$ , por exemplo  $\log_{10} 64 = \log_{10} 2^6 = 6 \cdot \log_{10} 2$
4.  $\log_c b = \frac{\log_a b}{\log_a c}$ , por exemplo  $\log_2 3 = \frac{\log_{10} 3}{\log_{10} 2}$

Caso você não esteja familiarizado com essas propriedades, sugerimos a leitura da seção Propriedades dos logaritmos do livro Matemática Básica volume 1 (página 478), especialmente a resolução comentada dos problemas.

Q11

Note que se soubermos o valor de  $\log_{10} 2$ , podemos obter o valor numérico dos três primeiros exemplos acima. Usando a aproximação  $\log_{10} 3 \approx 0.48$ , obtenha os valores de:

Agora chegamos às propriedades dos logaritmos. Note que não se trata de uma lista longa para prática de cada uma das propriedades. Isso não significa negar a importância da prática visando fluência, mas o público que esperamos atingir com essas atividades são os ingressantes que tenham alguma familiaridade com esses conteúdos e precisam de um apoio para atingir um nível um pouco mais alto de conhecimento e para fazer a transição e conexão para o ensino superior.

- a)  $\log_{10} 9$
- b)  $\log_{10} 30$
- c)  $\log_{10} 2700$
- d)  $\log_{10} 0.3$
- e) Use sua calculadora para obter uma aproximação para  $\log_{10} 5$  e então use a quarta propriedade acima para calcular  $\log_3 5$ .

REFLITA → Use sua calculadora para obter calcular  $10^{\log_{10} 2}$  e  $10^{\log_{10} 3}$ . Você consegue generalizar esse resultado e justificar porque ele é verdadeiro?

### Funções exponenciais e logaritmo

Q12

Considere a função  $P(t) = 2 \cdot 10^t - 5$

- a) Obtenha  $P(0)$  e  $P(3)$ .
- b) Determine  $t_0$  de modo que  $P(t_0) = 15$ .
- c) Determine, com ajuda da calculadora,  $t_1$  de modo que  $P(t_1) = -1$ .
- d) Utilize o valor de  $\log_{10} 2$  que você utilizou no item anterior e as propriedades do logaritmo para calcular  $t_2$  de modo que  $P(t_2) = 27$ .

Insista que os estudantes respondam a essa questão por escrito e discutam com os colegas. O uso de calculadora para testar outros casos deve ser incentivado. Note que o resultado pode ser estendido para qualquer base (a base 10 foi utilizada apenas por ser mais comum em calculadoras).

Essa última questão reúne todos os tópicos vistos neste capítulo sem trazer nenhuma novidade.

## RUMO AO LIVRO-TEXTO

A questão abaixo foi retirada do livro Cálculo, de James Stewart, seção 1.6.

QUESTÃO RESOLVIDA → Se uma população de bactérias começa com 100 bactérias e dobra a cada 3 horas, então o número total de bactérias após  $t$  horas é dado por  $n = f(t) = 100 \cdot 2^{t/3}$ .

- a) Quando a população alcançará 5000 bactérias?
- b) Encontre a inversa dessa função.

Essa questão mostra uma aplicação bastante comum da função exponencial. A importância dessa função para o Cálculo está justamente no uso que se faz dela para modelar problemas como esse e em algumas propriedades da sua derivada e integral que você estudará em breve.

Para resolver o item a, basta fazer  $f(t) = 5000$  e resolver a equação resultante, como mostrado abaixo.

$f(t) = 5000$	usando a expressão de $f(t)$
$100 \cdot 2^{t/3} = 5000$	dividindo os dois lados por 100
$2^{t/3} = 50$	agora aplicamos log na base 2
$\log_2 2^{t/3} = \log_2 50$	aos dois lados da igualdade
$(t/3) \cdot \log_2 2 = \log_2 (2 \cdot 5^2)$	agora aplicamos algumas
$\frac{t}{3} = \log_2 2 + \log_2 5^2$	propriedades como $\log_2 2 = 1$
$= 1 + 2 \cdot \log_2 5$	com auxílio da calculadora
$= 1 + 2 \cdot 2,32$	
$= 5,64$	multiplicando os dois lados
	por 3
$t = 3 \cdot 5,64 = 16,92$	

No item b um novo conceito é mencionado. Não vamos discuti-lo em profundidade aqui mas vamos entender o seu significado e como operacionalizá-lo. A função inversa (normalmente chamada de  $f^{-1}(x)$ ) de uma

As questões dessa seção são aplicações clássicas da função exponencial a problemas de crescimento cuja resolução exige o uso de logaritmos. Não é necessário insistir que os estudantes usem todas as propriedades de logaritmo ao longo da resolução, podendo parte do trabalho ser feito pela calculadora, pois mesmo assim as propriedades mais importantes serão necessárias.

Como você pode ver, no item b o conceito de função inversa é introduzido. Não há necessidade de se preocupar com restrições e questões de domínio neste ponto. O objetivo é que os estudantes compreendam a ideia de função inversa e saibam, em linhas gerais, como proceder para obtê-la.



função  $f(x)$  dada é a função que faz a transformação inversa dela.

Por exemplo, a conversão de uma temperatura em graus celsius para Kelvins pode ser obtida pela seguinte transformação  $K = C + 273$ . Essa fórmula pode ser escrita como uma função:  $K(C) = C + 273$ . Essa função transforma uma temperatura em graus celsius para Kelvins (a indicação nos parênteses reforça qual valor deve ser dado para que se obtenha o valor da função). A inversa dessa função calcularia uma temperatura em celsius dada uma em Kelvins. Para obtê-la, basta isolarmos o  $C$ , ou seja:  $C = K - 273$ . Usando a notação de função, temos:  $C(K) = K - 273$ .

No caso da nossa questão, devemos isolar o  $t$  e obter uma expressão contendo  $n$  (é mais conveniente usar simplesmente  $n$  ou  $f$  ao invés de  $f(t)$  para evitar confusão durante as manipulações algébricas). Vejamos:

$$\begin{aligned} n &= 100 \cdot 2^{t/3} && \text{dividindo os dois lados por 100} \\ \frac{n}{100} &= 2^{t/3} && \text{aplicando log aos dois lados} \\ \log_2\left(\frac{n}{100}\right) &= \log_2 2^{t/3} && \text{aplicando algumas propriedades} \\ &= \frac{t}{3} \cdot \log_2 2 \\ &= \frac{t}{3} && \text{multiplicando os dois lados por 3} \\ t &= 3 \cdot \log_2\left(\frac{n}{100}\right) \end{aligned}$$

Usando a notação de funções, podemos escrever  $t(n) = 3 \cdot \log_2\left(\frac{n}{100}\right)$  e dizer que  $t(n)$  é a função inversa de  $f(t)$ . Também poderíamos usar algumas propriedades de logaritmos pra escrever a expressão final em outros formatos.

A próxima questão, pra você resolver, foi adaptada do livro Cálculo, de James Stewart, seção 1.6.

QUESTÃO DO LIVRO-TEXTO → Quando o flash de uma câmera é disparado, a bateria imediatamente começa a carregar o capacitor do flash, que armazena energia elétrica de acordo com a equação  $Q(t) = Q_0(1 - 2^{-1.4t})$ , com  $t$  medido em segundos.

- a) Quando tempo é necessário para que  $Q$  seja igual a 90% de  $Q_0$ ? Use a calculadora para obter os logs necessários.

Note que no item a não é dado um valor absoluto para a carga. Isso talvez gere alguma estranheza por parte dos estudantes.

**b)** *Encontre a inversa da função  $Q(t)$ .*

## GABARITO

Confira as respostas para as questões e **não se esqueça de registrar o seu progresso.**

- Q1** a)  $2^{13}$ , b)  $5^6$ , c)  $3^{18}$ , d)  $a^{-5}$ , e)  $2^{11}$ .
- Q2** a)  $3^{19}$ , b)  $2^6 \cdot 3^{10}$ , c)  $5^{10}$ , d)  $a^2 + 2ab + b^2$ .
- Q3** a)  $7,2 \cdot 10^7$ , b)  $8,4 \cdot 10^{16}$ , c)  $4 \cdot 10^{-7}$ , d)  $2,1 \cdot 10^3$ .
- Q4** a)  $(x+1)^{\frac{2}{3}}$ , b)  $\sqrt[5]{a^3}$ , c)  $x^{\frac{7}{2}}$ , d)  $\sqrt[3]{10^5}$ , e)  $\sqrt[6]{t^5}$ .
- Q5** a) 4, 16, 1,  $\frac{1}{4}$ , 2, b) 7, c)  $h(x) = 125 \cdot 25^x$ .
- Q6** a)  $x = 3$ , b)  $x = 1$ , c)  $x = -7$ , d)  $x = 4$  ou  $-3$ , e)  $x = 1$ .
- Q7** a)  $x = 4$ , b)  $(0; 3)$ , c)  $x = -1$ .
- Q8**  $x_0 \approx 1,7$ , b)  $x_0 \approx 2,3$ .
- Q9** a) 2, b) 4, c) 5, d)  $-1$ , e)  $1/2$ .
- Q10** a) 2.301, b) 1.301, c) 0.301.
- Q11** a) 0,96, b) 1,48, c) 3,44, d)  $-0,52$ , e) 1,46.
- Q12** a)  $-3$  e 1995, b)  $t_0 = 1$ , c) 0,3, d) 1,2.

## AUTO-AVALIAÇÃO FINAL

Avalie o quanto você acha que sabe sobre os seguintes itens após ter resolvido as questões deste capítulo.

# 4 Polinômios e afins

---

## APRESENTAÇÃO

Polinômios são expressões algébricas extremamente versáteis e com propriedades que os tornam boas opções para diversas aplicações. Ao longo da disciplina de Cálculo você notará que a maioria dos conceitos e teoremas será introduzida através de exemplos envolvendo polinômios. Isso ocorre pela simplicidade das funções polinomiais em comparação com outros tipos de função, pelo menos no contexto dessa disciplina.

Ao longo do seu Ensino Médio você deve ter estudado polinômios em diversos momentos diferentes: equações do primeiro e do segundo grau, fatoração, funções afim e quadrática e talvez até mesmo alguns tópicos sobre polinômios de graus maiores.

Neste capítulo, vamos revistar alguns desses tópicos pensando nos usos que você fará deles em Cálculo e para ter certeza de que você tem fluência com as habilidades mais fundamentais deste tópico.

## PRÉ-REQUISITOS E AUTO-AVALIAÇÃO INICIAL

Os pré-requisitos para este capítulo são:

- Resolução de equações do segundo grau;
- Produto de binômios.

Esses tópicos não serão cobertos durante as atividades de tutoria. Se você acha que não sabe o suficiente sobre algum deles, sugerimos que se procure material de apoio antes de começar a resolver as questões desse capítulo.

## QUESTÕES DIAGNÓSTICAS

**D1** Fatore a expressão algébrica

$$3x^2 - 12x - 36$$

.

**D2** Faça a soma

$$\frac{2}{x} + \frac{3}{x-1}$$

.

### Gabarito

1)  $3(x-6)(x+2)$ , 2)  $(5x-2)/(x^2-x)$ .

## QUADRO DE ORIENTAÇÃO

1A	1B	1C	1D	Onde começar
C	E	E	E	Questão 2
C	C	E	E	Questão 3
C	C	C	E	Questão 7
C	C	C	C	Questão 8

## QUESTÕES

Lembre-se de checar com seu tutor em qual questão você deve começar.

### Comentários iniciais

Nesta seção, serão trabalhados conteúdos relacionados principalmente à manipulação algébrica de polinômios e frações algébricas e, nas últimas questões, acerca de funções que envolvam estes elementos. O objetivo é promover a fluência dos estudantes com algumas manipulações algébricas recorrentes nas disciplinas básicas de matemática focando em expressões que são comuns na disciplina de Cálculo Diferencial e Integral. Os principais conceitos abordados são

- Fatoração de expressões quadráticas;
- Soma de frações algébricas;
- Resolução de equações envolvendo frações algébricas;
- Introdução à funções racionais;

No início, este capítulo propõe questões que tentam promover a fluência com procedimentos considerados fundamentais, como obtenção de raízes de equações quadráticas, fatoração e soma de frações algébricas. Nessa etapa, é importante que os alunos consigam resolver as questões sem cometer muitos erros procedimentais. Se algum estudante estiver cometendo-os, sugira mais questões semelhantes antes de deixá-lo avançar.

No final, o capítulo se torna mais conceitual e é importante que não haja pressa e que os estudantes resolvam as questões buscando entender o que estão fazendo.

### Equações quadráticas

As equações quadráticas podem ser apresentadas em vários formatos diferentes, cada um deles com suas vantagens e desvantagens.

Q1

As equações quadráticas abaixo estão apresentadas em três formatos diferentes. Resolva cada uma delas usando método que lhe parecer mais adequado.

Espera-se que os estudantes não tenham dificuldades com essa questão, mas certifique-se de que eles leram a discussão após a questão.

- a)  $x^2 - 2x - 15 = 0$
- b)  $(x - 5)(x + 3) = 0$
- c)  $(x - 1)^2 - 16 = 0$

Você deve ter obtido as mesmas raízes para as três equações. Isso ocorreu porque, na verdade, as três equações são a mesma equação apresentada de forma diferente.

A primeira forma, chamada de desenvolvida, é a mais comum e facilita a aplicação da forma de Bhaskara. Note que apesar da fórmula de Bhaskara te dar as raízes após alguns cálculos, não é possível identificá-las diretamente apenas olhando para a equação.

A segunda forma é chamada de fatorada e apesar de demandar algumas manipulações algébricas para permitir o uso da fórmula de Bhaskara, isso não é necessário, pois as raízes podem ser identificadas na expressão algébrica dada. Isso ocorre porque a forma fatorada apresenta a equação como um produto de fatores,  $(x - 5)(x + 3)$  nesse caso, igualado a zero. Como um produto só é igual a zero se um dos fatores for igual a zero, podemos resolver  $(x - 5) = 0$  e  $(x + 3) = 0$  para obter as soluções da equação.

A terceira forma é bem pouco comum, mas também permite a resolução sem o uso da fórmula de Bhaskara. Se você usou a fórmula para resolvê-la cheque se algum colega resolveu sem usá-la ou chame o seu tutor para que ele lhe mostre como.

### **A forma fatorada**

A grande vantagem da forma fatorada está no fato de ela simplificar a equação: uma equação que originalmente era de segundo grau (envolvia a incógnita ao quadrado) foi transformada em uma produto de fatores que são de primeiro grau (nada de quadrados neles), essa transformação simplifica diversas manipulações que podem ser feitas na expressão. Como vimos acima, facilita inclusive a identificação de raízes.



Obtenha as raízes das equações abaixo.

- a)  $(x + 2)(x - 1) = 0$
- b)  $(x - \frac{2}{3})(2x - 4) = 0$



- c)  $5(x + 1)(2x - 1) = 0$
- d)  $x(6 - 2x) = 0$
- e)  $-3(x + \sqrt{5})(2x - \sqrt{12}) = 0$

Certifique-se de que os estudantes compreenderam o princípio de igualar os fatores multiplicado a zero caso a equação esteja igualada a zero. Você pode, inclusive, propor a equação  $x^2 + 2x = -1$  para ver se eles notam que esse método não pode ser usado nesse caso.

Uma das raízes do último item envolve uma raiz que pode ser simplificada.

REFLITA → Com base no que foi visto até este ponto:

- a) *Crie uma equação na forma fatorada e na forma desenvolvida que tenha raízes iguais a 3 e 4.*
- b) *Cheque com seus colegas se eles criaram a mesma equação.*
- c) *Crie uma outra equação, diferente da criada no item a, mas que tenha as mesmas raízes.*

A intenção aqui é salientar o papel da constante ao rescrevermos uma expressão na forma fatorada. Se os estudantes estiverem com dificuldade peça que chequem as raízes de  $x^2 - 7x + 10$  e  $3x^2 - 21x + 30$ .

## Fatoração

Com as questões anteriores, você já deve ter chegado a um método que lhe permitiria transformar uma expressão do tipo  $ax^2 + bx + c$  em outra expressão equivalente na forma  $a(x - r_1)(x - r_2)$ , mas vejamos como seria esse processo para o caso  $2x^2 + 8x + 6 = 0$ .

Primeiro, obtemos as raízes de  $2x^2 + 8x + 6 = 0$  usando a fórmula de Bhaskara:  $-1$  e  $-3$ . Agora, escrevemos uma expressão fatorada que tenha essas mesmas raízes:  $(x + 1)(x + 3)$ . Ainda falta um passo: note que se desenvolvemos o produto em  $(x + 1)(x + 3)$  obtemos  $x^2 + 4x + 3$ , que não é igual à expressão inicial. O que nos falta é multiplicar a expressão fatorada por 2, obtendo  $2(x + 1)(x + 3)$ .

Note que esse último passo não altera as raízes e faz com que cheguemos exatamente na expressão dada originalmente se desenvolvermos o produto.

Use essa abordagem para resolver a próxima questão.

**Q3**

Fatore as expressões abaixo.

- a)  $x^2 - 4x + 3$
- b)  $3x^2 + 9x + 6$
- c)  $\frac{x^2}{2} + 2x - 16$
- d)  $5x^2 - 20$
- e)  $x^2 + 6x$

Essa questão encerra a primeira parte deste capítulo. Se os estudantes estiverem com dificuldades, crie mais itens como estes para que eles resolvam antes de seguir para a próxima questão, pois ela introduzirá novos conceitos e procedimentos. Algumas sugestões:  $x^2 + 3x + 2$ ,  $x^2 + 4x - 5$ ,  $2x^2 - 4x - 2$ ,  $6x^2 - 4x$ ,  $5x^2 - 80$  e  $15 + 2x - x^2$ .

**Frações**

O próximo passo deste capítulo é aplicar o que vimos até aqui em expressões envolvendo frações com incógnitas no numerador e denominador, mas para isso vamos relembrar como fazer a soma de duas frações simples:  $\frac{2}{5} + \frac{3}{7}$ .

$$\frac{2}{5} + \frac{3}{7} = \frac{7 \cdot 2}{7 \cdot 5} + \frac{5 \cdot 3}{5 \cdot 7} = \frac{7 \cdot 2 + 5 \cdot 3}{7 \cdot 5} = \frac{14 + 15}{35} = \frac{29}{35}$$

Se usarmos frações que envolvam expressões um pouco mais complicadas, na verdade, nada deve mudar. Por exemplo, se fizermos a seguinte soma:  $\frac{2}{5} + \frac{3}{(x+1)}$ .

$$\frac{2}{5} + \frac{3}{(x+1)} = \frac{(x+1) \cdot 2}{(x+1) \cdot 5} + \frac{5 \cdot 3}{5 \cdot (x+1)} = \frac{(x+1) \cdot 2 + 5 \cdot 3}{(x+1) \cdot 5} = \frac{2x + 2 + 15}{5x + 5} = \frac{2x + 17}{5x + 5}$$

**Q4**

Calcule as seguintes somas de frações:

- a)  $\frac{x}{2} - \frac{3}{5}$
- b)  $\frac{2}{5} + \frac{(x+1)}{7}$
- c)  $\frac{1}{2-x} + \frac{1}{3}$
- d)  $\frac{x+3}{2} + \frac{x-1}{4}$
- e)  $\frac{2}{x-1} + \frac{1}{2x+3}$

É importante não ter pressa e resolver essas questões de modo que os estudantes entendam o que está acontecendo. Insista na analogia entre as duas somas de frações mostradas no início e, se necessário, crie mais exemplos.

### Mais um pouco de fração

Assim como podemos simplificar a fração  $\frac{6}{9}$  obtendo  $\frac{2}{3}$ , podemos fazer simplificações em frações envolvendo expressões com incógnitas e o princípio é o mesmo: se o numerador e o denominador forem o produto de um mesmo fator, esse fator pode ser simplificado.

Por exemplo, a fração  $\frac{10}{4x-6}$  pode ser rescrita como  $\frac{2 \cdot 5}{2 \cdot (2x-3)}$ , logo, podemos simplificar o fator 2, obtendo  $\frac{5}{2x-3}$ .

**Q5** Nesse tipo de situação, alguns erros são muito comuns. Abaixo, temos três simplificações para a fração  $\frac{6x}{2x+12}$ . Discuta com seus colegas qual delas está correta e descreva com suas palavras o erro cometido nas incorretas.

a)  $\frac{6x}{2x+12} \rightarrow \frac{3 \cdot 2x}{2x+12} \rightarrow \frac{3}{1+12} = \frac{3}{13}$

b)  $\frac{6x}{2x+12} \rightarrow \frac{2 \cdot 3x}{2 \cdot (x+6)} \rightarrow \frac{3x}{x+6}$

c)  $\frac{6x}{2x+12} \rightarrow \frac{6x}{2x+6 \cdot 2} \rightarrow \frac{x}{2x+2}$

Insista para que os estudantes de fato resolvam e discutam essa questão e descrevam textualmente os erros cometidos em cada uma delas.

**Q6** Agora, simplifique algumas frações.

a)  $\frac{6}{12x+9}$

b)  $\frac{20x+12}{4}$

c)  $\frac{6x+4}{2-10x}$

### Em busca de fatores para simplificar

Entretanto, as simplificações que mais nos interessam são aquelas em que diminuimos as potências que aparecem no numerador e denominador, comoveremos a seguir

**Q7** Fatore o denominador da fração  $\frac{2x+8}{x^2+x-12}$  e a rescreva com o denominador na forma fatorada.

Note que um dos fatores do denominador é  $(x + 4)$  e que o numerador pode ser reescrito como  $2(x + 4)$ , logo, o fator  $(x + 4)$  pode ser simplificado:

$$\frac{2x + 8}{x^2 + x - 12} = \frac{2(x + 4)}{(x + 4)(x - 3)} = \frac{2}{(x - 3)}$$

Essa simplificação é especialmente útil porque fez com que o numerador e o denominador ficassem algebricamente mais simples. Mas se ela lhe parece estranha, escolha alguns valores de  $x$  e substitua tanto na fração dada originalmente quanto na obtida acima e veja que os resultados serão iguais.

**Uma observação importante:** ao eliminarmos o fator  $(x + 4)$ , estamos retirando uma informação potencialmente importante. Como frações não podem ter denominadores iguais a zero, na fração dada originalmente,  $x$  não poderia ser igual a  $-4$  e  $3$ . Portanto, para que a nova expressão seja realmente equivalente à original temos que manter essa restrição mesmo que  $x = -4$  não seja mais um problema para o novo denominador. Portanto, ao fazer esse tipo de simplificação, anote ao longo da resolução e restrição  $x \neq -4$  pois isso pode influenciar em alguma etapa futura.



Simplifique algumas frações e não se esqueça de anotar as eventuais restrições.

- a)  $\frac{2x-2}{x^2+9x-10}$
- b)  $\frac{3x+9}{x^2+12x+27}$
- c)  $\frac{3x^2+4x}{3x+4}$
- d)  $\frac{x^2-4}{2+x}$
- e)  $\frac{x^2-3x+2}{x^2-5x+6}$

A quantidade de itens nessa questão é intencionalmente grande para promover um pouco de fluência com as manipulações algébricas envolvidas. Caso algum estudante esteja errando muito, você pode usar trechos do capítulo 2.12 do livro Matemática básica - volume 1, note que ele tem muitos exemplos resolvidos.

## Equações

Expressões algébricas como as que vimos acima não são muito comuns em um curso de Cálculo, mas elas aparecem o tempo todo em funções, como veremos nos próximos blocos. Entretanto, antes disso, vejamos algumas equações envolvendo expressões como as que vimos anteriormente.

Considere a equação  $\frac{4}{x-3} = 2$ . O primeiro aspecto a ser observado é que  $x \neq 3$ , pois nesse caso o denominador seria igual a zero. Isso significa que se ao final da resolução da equação o resultado obtido for 3, essa solução deverá ser descartada. Voltando à resolução, como temos uma igualdade de frações (2 pode ser visto como  $\frac{2}{1}$ ), podemos “multiplicar cruzado” para resolvê-la:

$$\frac{4}{x-3} = 2 \longrightarrow \frac{4}{x-3} = \frac{2}{1} \longrightarrow 4 \cdot 1 = 2 \cdot (x-3) \longrightarrow 4 = 2x-6 \longrightarrow 2x = 10 \longrightarrow x = 5$$

**Q9** Resolva a equação  $\frac{5-x}{6} = \frac{3}{4}$ .

Mas nem sempre as equações são dadas na forma de uma igualdade entre duas frações, como é o caso de  $\frac{6}{x+1} + \frac{1}{x-1} = 2$ . Nessa situação, é necessário realizar a soma das frações dadas para então resolver a equação como feito acima.

**Q10** Resolva a equação  $\frac{4}{x-1} + \frac{5}{x+2} = 3$ .

### Questão 10:

Esta questão é crucial para o andamento do capítulo, pois sintetiza tudo que foi feito até este ponto. Não apresse os estudantes e certifique-se de que todos a resolveram. Se julgar adequado, proponha outras equações, como:  $\frac{x+5}{x-3} = 2$  e  $\frac{6}{x+1} + \frac{1}{x-1} = 2$ .

## Uma função racional

Funções racionais são aquelas cujas expressões algébricas envolvem frações nas quais o numerador e o denominador são polinômios, como  $g(x) = \frac{1}{x}$ ,  $h(x) = \frac{x-1}{3-x}$ ,  $r(x) = \frac{2}{x^2-3x+3}$  ou  $q(x) = 4 - \frac{2x+1}{x-5}$ .

Nesta parte, vamos tentar entender como se comporta o gráfico de uma função desse tipo.

**Q11** Considere a função  $f(x) = \frac{6}{x-2} + 1$ .

- a) Calcule  $f(0)$ ,  $f(1)$ ,  $f(-1)$ ,  $f(3)$ ,  $f(4)$  e  $f(5)$ .

- b) Obtenha o valor de  $x$  para o qual  $f(x) = 0$ .
- c) Obtenha mais um ponto, a sua escolha, que pertença ao gráfico da função.
- d) Marque esses pontos em um plano cartesiano.

A função  $f(x)$  foi escolhida com cuidado para que os pontos obtidos e as suas propriedades sejam fáceis de visualizar. Insista para que os estudantes sigam os passos propostos nessas questões.

**Q12** Agora vamos investigar alguns casos especiais pra essa função.

- a) Qual é o valor de  $f(2)$ ?
- b) Para qual valor de  $x$  temos que  $f(x) = 1$ ?

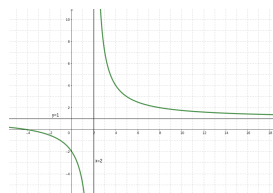
O resultado do item significa que o valor 2 não faz parte do domínio da função, ou seja,  $f(2)$  não está definido. Isso deve aparecer no gráfico da função como algum tipo de anomalia, como um buraco, uma ruptura ou uma mudança abrupta de comportamento quando o gráfico chegar perto da reta vertical  $x = 2$

Já o item b significa que a função nunca terá valor igual a 1, ou seja, se traçarmos uma reta horizontal  $y = 1$ , o gráfico da função jamais deverá cruzar essa reta.

**Q13** Acrescente à lápis as duas retas mencionadas acima no plano cartesiano em que você marcou os pontos da função  $f(x)$  e discuta com seus colegas como deve ser o gráfico da função levando em conta os comentários acima.

Neste momento, você deve conversar com os estudantes visando orientar tanto o uso de termos adequados (se aproxima, tende a, nunca cruza) quanto a interpretação dos resultados obtidos, pois o gráfico aqui proposto deve ser inédito para a maioria dos estudantes.

O gráfico da função  $f(x) = \frac{6}{x-2} + 1$  está representado abaixo. Note que ele não corta a reta  $y = 1$  e não toca a reta  $x = 2$ . Essas retas são chamadas de **assíntotas** e serão discutidas em detalhes pelo seu professor de cálculo.



### Mais uma função racional

Q14

Use a abordagem do bloco anterior para esboçar o gráfico da função  $r(x) = \frac{2x}{x-3}$ .

Deixe que os estudantes resolvam esta questão por conta própria, mesmo que tome muito tempo. Se estiverem com dificuldade, sugira que voltem e tentem seguir as ideias por trás dos itens das duas questões anteriores.

## RUMO AO LIVRO-TEXTO

Antes de seguir para a questão abaixo, leia a seção 2.2 do livro *Calculus*, de James Stewart, do exemplo 8 até o final do exemplo 9, que segue transcrito abaixo.

QUESTÃO RESOLVIDA → Encontre  $\lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{2x}{x-3}$  e  $\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{2x}{x-3}$ .

É importante que os estudantes de fato voltem e leiam a seção sugerida no livro. Afinal, o propósito desta seção é aproximar mais explicitamente o conteúdo abordado neste material ao abordado nas disciplinas regulares. Sem lê-la, os estudantes não conseguirão entender a discussão a seguir.

Note que essa é a mesma função que você resolveu na última questão antes desta seção. A análise feita no livro conecta as discussões apresentadas aqui com conteúdos que serão explorados de maneira mais formal pelo seu professor de Cálculo.

Como dito no livro, essa função tem uma **assíntota vertical**, que ocorre quando  $x = 3$ . Para valores de  $x$  menores do que 3, a função assume valores negativos cada vez maiores à medida que  $x$  se aproxima de 3. Você pode checar isso calculando o valor da função quando  $x = 2,9$  e  $2,99$ . Por outro lado, quando os valores de  $x$  são maiores do que 3, a função assume valores positivos cada vez maiores à medida que  $x$  se aproxima de 3, como  $x = 3,1$  e  $3,01$ .

Além dessa assíntota, e esse aspecto o livro não discutiu, temos uma **assíntota horizontal** em  $y = 2$ . O gráfico da função nunca toca essa reta, mas se aproxima dela se tomarmos valores de  $x$  positivamente muito grandes (como 100 ou 1000) ou negativamente muito grandes (como  $-100$  ou  $-1000$ ).

A próxima questão, pra você resolver, foi retirada do livro *Cálculo*, de James Stewart, seção 2.2.

QUESTÃO DO LIVRO-TEXTO → Considere  $f(x) = \frac{x}{x^2 - x - 2}$ .



- a) Encontre as assíntotas verticais da função  $f(x)$ .
- b) Confirme a sua resposta plotando o gráfico da função. Dica: use o software Geogebra no seu celular, notebook ou PC.

Se houver muita dificuldade, sugira que aos estudantes que testem alguns valores de  $x$  e de  $y$  e esbocem o gráfico da função manualmente.

## GABARITO

Confira as respostas para as questões e **não se esqueça de registrar o seu progresso.**

- Q1 a)  $x = 5$  e  $x = -3$ , b)  $x = 5$  e  $x = -3$ , c)  $x = 5$  e  $x = -3$ .
- Q2 a)  $x = -2$  e  $x = 1$ , b)  $x = 2/3$  e  $x = 1$ , c)  $x = -1$  e  $x = 1/2$ ,  
d)  $x = 0$  e  $x = 3$ , e)  $x = -\sqrt{5}$  e  $x = \sqrt{3}$ .
- Q3 a)  $(x-3)(x-1)$ , b)  $(x+2)(x+1)$ , c)  $(x+8)(x-4)$ , d)  
 $5(x+2)(x-2)$ , e)  $x(x+6)$ ,
- Q4 a)  $\frac{5x-6}{10}$ , b)  $\frac{5x+19}{35}$ , c)  $\frac{6-x}{6-3x}$ , d)  $\frac{6x+10}{8}$ , e)  $\frac{5x+5}{2x^2+x-3}$ .
- Q5 a) errado, b) certo, c) errado.
- Q6 a)  $\frac{2}{4x+3}$ , b)  $5x+3$ , c)  $\frac{3x+2}{1-5x}$ .
- Q7  $\frac{2x+8}{(x+4)(x-3)}$ .
- Q8 a)  $\frac{2}{x+10}$ , b)  $\frac{3}{x+9}$ , c)  $x$ , d)  $x-2$ , e)  $\frac{x-1}{x-3}$ .
- Q9  $1/2$ .
- Q10  $x = -1$  e  $x = 3$ .
- Q11 a)  $f(0) = -2$ ,  $f(1) = -5$ ,  $f(-1) = -1$ ,  $f(3) = 7$ ,  $f(4) = 4$ ,  
 $f(5) = 3$ , b)  $x = -4$ .

**Q12** a)  $f(2)$  não é definido, b) não exist  $x$  tal que  $f(x) = 1$ .

**Q13**

### Questões adicionais

Para este capítulo, vamos propor apenas uma questão adicional similar as últimas resolvidas pelos estudantes. Porém, se for necessário você pode extrair diversos exemplos e questões para a parte sobre frações algébricas e equações da seção 2.12 do Matemática básica - volume 1.

**A1** Esboce o gráfico da função  $q(x) = \frac{12}{x^2 - 7x + 10}$ .

# Trigonometria e Vetores

## APRESENTAÇÃO

Além de ser uma disciplina em si mesma, a Geometria Analítica inaugura um jeito de encarar problemas geométricos que será o mais comum durante disciplinas matemáticas no ensino superior. A Geometria Analítica nasce da junção de técnicas da Álgebra (equações, funções) e da Geometria Plana (medidas, ângulos, semelhança) graças ao uso de um sistema de eixos cartesianos. Mas além de permitir o uso de elementos desses dois universos, essa junção abre portas para a criação de novos elementos, como os vetores.

O que faremos neste capítulo é revisitar alguns conceitos centrais da trigonometria que você deve ter estudado no Ensino Médio, mas agora enfatizaremos os usos que serão feitos na disciplina de Geometria Analítica. Além disso, utilizaremos constantemente eixos cartesianos em questões que poderiam ser formuladas apenas com elementos geométricos e utilizaremos vetores para formular e resolver algumas das questões.

## PRÉ-REQUISITOS E AUTO-AVALIAÇÃO INICIAL

Os pré-requisitos para este capítulo são:

- Noções básicas de trigonometria no triângulo retângulo (seno e cosseno);
- Noções básicas sobre plano cartesiano (coordenadas).

Esses tópicos não serão cobertos durante as atividades de tutoria. Se você acha que não sabe o suficiente sobre algum deles, sugerimos que se procure material de apoio antes de começar a resolver as questões desse capítulo.

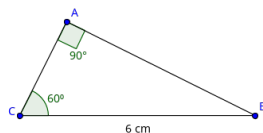
## QUESTÕES DIAGNÓSTICAS

**D1** Considerando a figura abaixo, calcule:

- A medida do segmento  $\overline{AB}$ .
- Seja D a intersecção do lado CB com a altura do triângulo relativa ao vértice A, calcule o comprimento de BD.

### Gabarito

a)  $3\sqrt{3}$ , b)  $9/2$ .



**D2** Qual é a medida em graus do ângulo formado entre o eixo X e o segmento de reta que liga a origem ao ponto (3; 1)? *Você pode usar a calculadora se julgar necessário.*

### Gabarito

a) aproximadamente  $18,4^\circ$ .

## QUADRO DE ORIENTAÇÃO

1A e 1B	2	Onde começar
C	E	Questão 2
C	C	Questão 5

## QUESTÕES

### Comentários iniciais

Neste capítulo, serão trabalhados conteúdos relacionados a trigonometria e vetores. A intenção é focar em aspectos da trigonometria que estejam mais próximos do que será usado em Geometria Analítica, porém, limitados ao contexto do plano cartesiano (duas dimensões).

As questões propostas não serão arranjos complicados de segmentos e círculos nos quais propriedades geométricas devem ser identificadas. No geral, a interpretação geométrica das questões será simples e a atenção será focada no uso que se faz das relações seno e cosseno e na interpretação vetorial dessas relações.

Vetores serão utilizados na formulação de algumas questões ao invés de pontos e segmentos, que são mais comuns ao longo do Ensino Médio. A intenção é familiarizar o estudante com esse conceito sem explorar suas propriedades específicas.

As funções inversas, arcosseno e arcocosseno, também serão utilizadas com bastante frequência, mas a ênfase não será no comportamento delas como função, mas no seu uso para resolução e interpretação de problemas de geometria plana.

Este capítulo difere dos demais deste material em uma outra característica. Livros de Geometria Analítica raramente lidam com objetos bidimensionais pois nesse contexto as generalizações por trás de conceitos como produto escalar e vetorial são pouquíssimo úteis (e relações trigonométricas bastam). Por isso, não foi possível indicar referências externas ao longo do capítulo e usar uma questão de fato extraída de um livro-texto ao final. Enquanto isso certamente representa uma perda em termos da proposta do material, esperamos construir ao longo dele um entendimento conceitual mais robusto em duas dimensões de conceitos que serão estudados exaustivamente em mais dimensões em Geometria Analítica e Álgebra Linear.

### Início do conteúdo para o aluno

Lembre-se de checar com seu tutor em qual questão você deve começar.

## Seno e cosseno

Em Geometria Plana, definimos seno e cosseno de um ângulo  $\alpha$  como sendo iguais a:

$$\sin(\alpha) = \frac{\text{cateto oposto}}{\text{hipotenusa}} \text{ e } \cos(\alpha) = \frac{\text{cateto adjacente}}{\text{hipotenusa}}$$

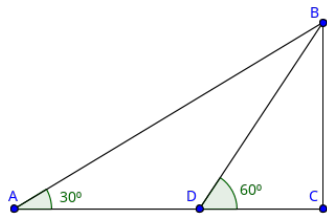
O valor do seno e do cosseno dos ângulos  $0^\circ$ ,  $30^\circ$ ,  $45^\circ$ ,  $60^\circ$  e  $90^\circ$ , chamados de ângulos notáveis, são simples e recorrentes em problemas de geometria plana, portanto, espera-se que estudantes os tenham memorizados.

	$0^\circ$	$30^\circ$	$45^\circ$	$60^\circ$	$90^\circ$
seno	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
cosseno	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0

Q1

Sabendo que  $\overline{AB} = 6$  e  $\hat{B}CD$  na figura abaixo, calcule o comprimento dos segmentos:

- a)  $\overline{BC}$
- b)  $\overline{BD}$
- c)  $\overline{AD}$



## Seno e cosseno de ângulos quaisquer

Os valores listados na tabela acima são importantes, mas ângulos podem ocorrer em quaisquer medidas. Nesses casos, você pode usar a sua calculadora (a menos que o valor exato ou alguma aproximação específica seja fornecida). Na maioria dos celulares os botões cos e sin ficam disponíveis apenas no modo científico (acessível ao colocar o celular na horizontal) e é fundamental checar se o ângulo deve ser dado em graus (DEG) ou radianos (RAD).

Q2

Use o seu celular pra obter:

O objetivo desta questão é iniciar o uso das relações trigonométricas seno e cosseno em um problema relativamente simples de geometria plana. O terceiro item é o único que não pode ser resolvido diretamente via aplicação de uma relação trigonométrica, ele exige o cálculo de AC e DC. Além disso, a resposta final depende de uma subtração envolvendo raízes. Esteja atento para o caso de seus estudantes estarem com dificuldades nessa manipulação algébrica ao invés dos conceitos trigonométricos.

Se você achar que os estudantes tiveram dificuldade nessa questão, proponha variações em torno da mesma configuração dando como valores iniciais os dois ângulos (note que o mais externo deve ser menor do que o interno e por enquanto é desejável usar apenas ângulos notáveis) e o comprimento de um dos vários segmentos disponíveis. Como o objetivo é reforçar as relações trigonométricas e não praticar problemas de geometria, a repetição da configuração não é um problema.

A intenção dessa questão é apenas ter certeza de que os estudantes sabem usar a calculadora dos seus celulares para obter o seno e o cosseno de ângulos dados em graus e em radianos. Além disso, insista que façam os arredondamentos corretamente pois isso será usado ao longo deste capítulo todo.

O último item é intencionalmente dubio: a falta do  $\pi$  induz a leitura do valor sendo em graus, mas note que o símbolo  $^\circ$  não está presente, portanto, trata-se sim de uma medida em radianos. A

- a)  $\sin(\frac{4\pi}{9})$ , arredondado para 2 casas decimais.
- b)  $\cos(\frac{\pi}{12})$ , arredondado para 2 casas decimais.
- c)  $\sin(18^\circ)$ , arredondado para 1 casa decimal.
- d)  $\cos(22.5^\circ)$ , arredondado para 1 casa decimal.
- e)  $\cos(1,5)$ , arredondado para 2 casas decimais.

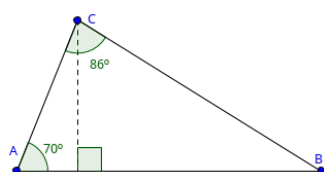
Deste ponto em diante, use a calculadora sempre que os ângulos envolvidos não sejam notáveis e quando nenhuma aproximação for fornecida. Caso nenhum arredondamento específico seja pedido, use sempre duas casas decimais.

### Geometria com ângulos quaisquer



Sabendo que na figura abaixo  $\overline{AC} = 4$  obtenha a medida dos segmentos pedidos abaixo. Use uma calculadora se necessário.

- a) A altura do triângulo relativa ao lado  $\overline{AB}$ .
- b)  $\overline{CB}$



A estrutura geométrica da questão não deve ser o foco da atenção dos estudantes, pois o objetivo desta questão é que usem a calculadora para obter o seno e cosseno de ângulos não notáveis. Propriedades básicas como a soma dos ângulos internos de um triângulo e o fato de o ângulo  $\hat{C}$  não ser dividido ao meio pela altura podem emergir.

Assim como na primeira questão, você pode gerar variações dessa questão de maneira rápida: mesmo diagrama, dois ângulos dados e uma medida.

### Obtendo o ângulo a partir do seno ou cosseno

Se você souber que um ângulo de um triângulo retângulo tem seno igual a  $\frac{1}{2}$  você sabe que se trata de um ângulo de  $30^\circ$ , mas isso só é possível porque este valor está entre os poucos que fazem parte da tabela de valores notáveis. A pergunta então é como você pode saber a medida em graus ou radianos de um ângulo cujo seno é igual a 0,7, por exemplo?

A resposta está nas funções **arcosseno** (arcsin, em inglês) e **arcocosseno** (arccos, em inglês). Por serem as funções inversas do seno e do cosseno, também são chamadas algumas vezes de  $\sin^{-1}$  e  $\cos^{-1}$ . Tente encontrar essas funções na calculadora do seu celular (além de acessar o modo científico, em algumas calculadoras é necessário ativar o modo de funções



inversas - INV) e calcular  $\sin^{-1}(0.5)$ . O resultado deve ser aproximadamente 0.5236 (que é igual a  $\pi/6$ ) ou  $30^\circ$ .

Q4

Use as funções  $\sin^{-1}$  e  $\cos^{-1}$  da sua calculadora para obter:

- a) A medida em radianos, com duas casas decimais, do ângulo cujo seno é igual a 0,7. Dica: procure pela opção DEG e RAD na calculadora para alternar entre graus e radianos.
- b) A medida em radianos, com duas casas decimais, do ângulo cujo cosseno é igual a 0,4.
- c) A medida em graus, com zero casas decimais, do ângulo cujo seno é igual a 0,6.
- d) A medida em graus, com zero casas decimais, do ângulo cujo cosseno é igual a 0,87.

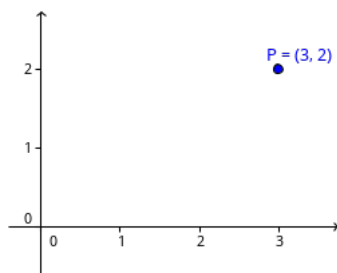
As funções arcosseno e arcocosseno são introduzidas aqui com o intuito de expandir as possibilidades de trabalho com ângulos e relações trigonométricas para além dos valores notáveis.

### Ângulos e eixos cartesianos

Q5

Considerando a imagem abaixo, calcule:

- a) O comprimento do segmento  $\overline{OP}$ . O se refere à origem, ou seja, ao ponto (0;0).
- b) O seno e o cosseno do ângulo determinado pelo segmento  $\overline{OP}$  e o eixo X.
- c) A medida em radianos e em graus desse ângulo.



### Vetores

Na questão anterior, mais do que o ponto P, o elemento chave foi o segmento  $\overline{OP}$ . Em Geometria Analítica um dos conceitos mais importantes é o de **vetor**. Um vetor pode ser pensado como um segmento com direção, tipicamente uma seta. No caso da questão anterior, poderíamos falar do vetor  $\overrightarrow{OP}$ , ou simplesmente  $\vec{P}$  uma vez que a outra extremidade é a origem.

Todo vetor possui três propriedades que o definem: a **norma** (nome dado ao comprimento se estivéssemos pensando em um segmento), a **direção** (dada pelo ângulo entre o vetor e a parte positiva do eixo X no sentido anti-horário) e o **sentido** (no caso do nosso exemplo, o sentido é de O a P e não de P a O).

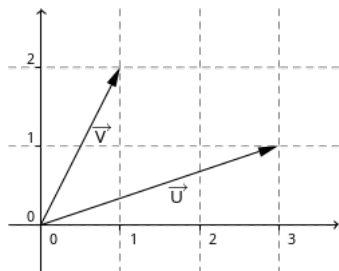
Pode parecer artificial usar esse conceito já que ele pode ser descrito em termos dos pontos das extremidades do vetor ou do segmento conectando esses dois pontos, mas o conceito de vetor abre novas possibilidades bastante poderosas em matemática pura, que serão estudadas em disciplinas como Geometria Analítica e Álgebra Linear, e em diversas aplicações, em Física e engenharias em geral.

Não estudaremos essas potencialidades dos vetores neste capítulo, mas utilizaremos o conceito em algumas questões para que você se familiarize com ele gradualmente.

Q6

Considere os dois vetores representados abaixo.

- Calcule a norma de  $\vec{V}$  e  $\vec{U}$ .
- Obtenha, em graus, os ângulos determinados por  $\vec{V}$  e  $\vec{U}$ .
- Determine, em graus, a medida do ângulo entre  $\vec{V}$  e  $\vec{U}$ .



Essas duas questões servem como fixação do uso das funções arcosseno e arcocosseno bem como para introduzir o eixo cartesiano e o conceito de vetor. Não se preocupe com tecnicidades do conceito de vetor neste ponto (isso é conteúdo para Geometria Analítica).

### Mais vetores

Q7

Determine as coordenadas e represente em um plano cartesiano os vetores cuja norma e ângulo são dados abaixo.

- Vetor  $\vec{V}$  com norma 3 e ângulo  $40^\circ$ .
- Vetor  $\vec{U}$  com norma 2 e ângulo  $150^\circ$ .

Faça questão que os estudantes comecem a resolver essa questão fazendo um esboço destes vetores. A posição precisa não é importante, mas aproximações coerentes com os ângulos (o segundo vetor deve estar no segundo quadrante) e normas (o primeiro deve ser mais longo que o segundo) dadas são.

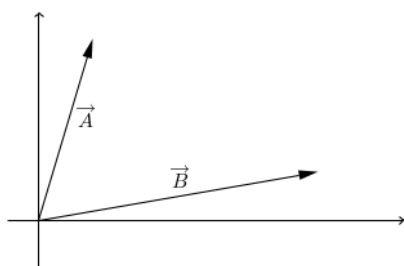
Para o segundo item, não use o valor de seno e cosseno de  $150^\circ$ , mas sim o fato de o vetor formar um ângulo de  $30^\circ$  com o lado negativo do eixo X. Além disso, nesse item deve-se utilizar o valor tabelado para o cosseno e seno de  $30^\circ$  e não a calculadora.

## Área entre vetores

Q8

Considere os dois vetores da questão 6 ( $\vec{V} = (1, 2)$  e  $\vec{U} = (3, 1)$ ). Vamos calcular a área do triângulo determinado pela origem e pela extremidade desses vetores.

- Recupere da questão 6 os valores das normas e do ângulo entre os vetores e represente o triângulo em questão em um plano cartesiano com essas informações.
- Trace a altura do triângulo relativa à  $\vec{U}$ .
- Calcule o comprimento dessa altura usando o seno do ângulo entre os vetores.
- Calcule a área do triângulo usando  $\vec{U}$  como base.



Se não tivéssemos usado valores numéricos para essa questão, você teria chegado à fórmula

$A = \frac{1}{2} \cdot \text{lado 1} \times \text{lado 2} \times \sin(\alpha)$ , em que o comprimento dos lados são iguais a norma dos vetores e  $\alpha$  é o ângulo entre eles.

Imagine agora que o comprimento dos dois vetores estão fixos, mas é possível girar  $\vec{A}$  em torno da origem. A medida que  $\vec{A}$  se aproxima de  $\vec{B}$ , três variáveis se comportam de maneira semelhante: o ângulo  $\alpha$  entre os vetores, a área do triângulo determinado pelos vetores e  $\sin(\alpha)$  diminuem. Por outro lado, se afastarmos  $\vec{A}$  de  $\vec{B}$  até formar um ângulo reto essas três variáveis aumentam.

De certa maneira podemos interpretar essas três variáveis como sendo medidas de perpendicularidade entre dois vetores. Em Geometria Analítica essa ideia será capturada pela operação chamada **produto vetorial**.

## Área entre vetores, 2

Q9

Calcule a área do triângulo determinado pelos vetores  $\vec{V} = (2; 2)$  e  $\vec{U} = (4; 1)$  usando a estratégia usada na questão anterior.

Essas duas questões tem o objetivo de mostrar a relação entre o seno e a área compreendida entre dois vetores. O mesmo raciocínio poderia ser aplicado ao paralelogramo determinado pelos dois vetores. Essa relação é central para a definição do produto vetorial. A grande diferença é que o produto vetorial generaliza essa relação para contextos com mais dimensões e foco nas coordenadas dos vetores, como seria de se esperar em geometria analítica.

Vale ressaltar que o ângulo entre os vetores também poderia ser calculado com auxílio de

Note que o valor obtido foi muito próximo de 3. Na realidade, se os cálculos fossem realizados sem aproximações, o resultado seria exatamente 3 e isso poderia ser verificado pelo método de “contar quadradinhos” já que as coordenadas dos vetores são números inteiros (bastaria considerar a área do retângulo  $4 \times 2$  construído ao redor do triângulo e subtrair a área dos triângulos que não interessam. Tente!).

### Projeção ortogonal

**Q10** Considere os dois vetores da questão anterior ( $\vec{V} = (2, 2)$  e  $\vec{U} = (4, 1)$ ).

- Recupere da questão anterior os valores das normas e do ângulo entre os vetores e represente-os em um plano cartesiano.
- Trace a altura do triângulo relativa à  $\vec{U}$  e chame de C a intersecção dessa altura com  $\vec{U}$ .
- Calcule o comprimento do vetor  $\overrightarrow{OC}$ .

O vetor  $\overrightarrow{OC}$  é chamado de **projeção ortogonal** de  $\vec{V}$  em  $\vec{U}$ . A importância da projeção ortogonal está no fato de que ela pode ser interpretada como sendo a “parte” de  $\vec{V}$  que atua na direção estabelecida por  $\vec{U}$ . Essa ideia é central em várias áreas da Física quando forças agem em um objeto e deseja-se estudar o efeito dessa força em uma determinada direção.

Note que neste caso, a projeção ortogonal está relacionada com o cosseno do ângulo entre os vetores. De modo análogo ao que concluímos para o seno/ área/ perpendicularidade, podemos dizer que o cosseno é uma medida de proximidade entre vetores (quando mais próximos, menor o ângulo e mais próximo de 1 o seu cosseno). Essa ideia será capturada e generalizada para outros contextos com mais de duas dimensões pela operação chamada **produto escalar**, que será bastante usada em Geometria Analítica.

## Projeção ortogonal, 2

REFLITA → Descreva com suas palavras como você deve proceder para obter o comprimento da projeção ortogonal de um vetor dado sobre um segundo vetor dado.

Use a resposta anterior para se orientar ao longo da resolução da próxima questão. Inclusive, se algo surgir durante a resolução, volte e reajuste a resposta à questão anterior.

### Q11

Calcule o comprimento da projeção ortogonal de  $\vec{V} = (1; \sqrt{3})$  em  $\vec{U} = (2; 2)$ .

## Encolhendo e esticando um vetor

### Q12

Considere o vetor  $\vec{V} = (4; 3)$ .

- a) Qual é a norma deste vetor?
- b) Divida as duas dimensões de  $\vec{V}$  pela sua norma de modo a obter um novo vetor que chamaremos de  $\vec{V}_1$ . Qual é a norma de  $\vec{V}_1$ ?
- c) Se você dobrar as dimensões de  $\vec{V}_1$  o que vai ocorrer com a sua norma?

O que você fez no item b da questão anterior foi obter um **vetor unitário** (com norma igual a 1) que tem a mesma direção e sentido que um vetor dado. Para isso, você apenas dividiu as suas dimensões pela norma do vetor, “encolhendo-o”. No item c você dobrou a norma desse vetor multiplicando as suas coordenadas por dois.

Esse processo será útil na seção Rumo ao livro-texto.

## RUMO AO LIVRO-TEXTO

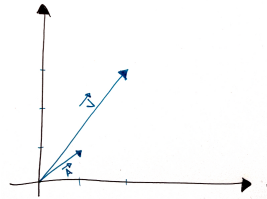
A questão a seguir não foi retirada de um dos livros-textos de Geometria Analítica, mas explora uma ideia bastante importante nessa disciplina (decomposição de vetores) em um contexto um pouco mais simples (duas dimensões) do que será feito na

disciplina (três ou mais dimensões).

A proposta desta questão é reunir o que foi feito com seno, cosseno e norma nas questões anteriores para entender como decompor um vetor dado em dois vetores perpendiculares.

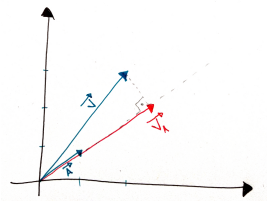
QUESTÃO RESOLVIDA → Decomponha o vetor  $\vec{V} = (1; 3)$  como soma de dois vetores perpendiculares de modo que um deles esteja na mesma direção do vetor  $\vec{A} = (1; 1)$ .

Vamos começar representando os vetores como mostrado abaixo.



A questão pede que decomponhamos  $\vec{V}$  como soma de dois outros vetores. Vamos chamá-los de  $\vec{V}_A$  e  $\vec{V}_B$ . Também é pedido que um deles, digamos  $\vec{V}_A$ , esteja na mesma direção de  $\vec{A}$  enquanto que o outro,  $\vec{V}_B$ , seja perpendicular a ele.

Vamos focar em  $\vec{V}_A$  por enquanto. Ele pode ser representado como mostrado abaixo.



Para obtê-lo, basta sabermos o comprimento da projeção ortogonal de  $\vec{V}$  sobre  $\vec{A}$  e então ajustarmos o comprimento de  $\vec{A}$ .

Como vimos em questões anteriores, o comprimento de  $\vec{V}_A$  é obtido via cosseno do ângulo entre os vetores. O ângulo determinado por  $\vec{A}$  é igual a  $45^\circ$ , pois suas duas dimensões são iguais. O cosseno do ângulo  $\alpha$ , determinado por  $\vec{V}$ , é igual a  $\frac{1}{\sqrt{10}} = \frac{\sqrt{10}}{10} \approx 0,32$ . Portanto,  $\alpha = \arccos(0,32) \approx 71,6^\circ$  e o ângulo entre os vetores é igual a  $71,6 - 45 = 26,6$  graus.

Com base nessa informação, temos que o comprimento de  $\vec{V}_A$  é dado por:

$$\|\vec{V}_A\| = \cos(22,6) \cdot \sqrt{10} \approx 0,89 \cdot \sqrt{10}$$

Agora, como  $\vec{V}_A$  aponta para a mesma direção de  $\vec{A}$ , vamos fazer com que a norma de  $\vec{A}$  seja igual ao valor que foi obtido acima.

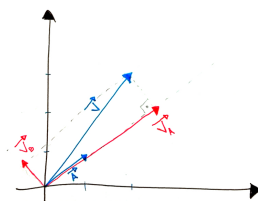
Primeiro, dividimos as dimensões de  $\vec{V}_A$  pela sua norma ( $\sqrt{2}$ ):  $(\frac{1}{\sqrt{2}}; \frac{1}{\sqrt{2}})$ .

Segundo, multiplicamos o resultado obtido acima pela norma desejada ( $0,89 \cdot \sqrt{10}$ ):  
 $(\frac{0,89 \cdot \sqrt{10}}{\sqrt{2}}; \frac{0,89 \cdot \sqrt{10}}{\sqrt{2}}) = (0,89 \cdot \sqrt{5}; 0,89 \cdot \sqrt{5})$ .

Esse é o vetor  $\vec{V}_A$ . Note que suas coordenadas podem ser aproximadas para  $(2,0; 2,0)$ .

A segunda parte da questão é mais simples. O enunciado nos pediu que o  $\vec{V}$  seja decomposto como uma soma de dois vetores, ou seja,  $\vec{V} = \vec{V}_A + \vec{V}_B$ , como já obtivemos  $\vec{V}_A$ , temos que  $\vec{V}_B = \vec{V} - \vec{V}_A$ , logo:  
 $\vec{V}_B = (1; 3) - (2; 2) = (-1; 1)$ .

Representando todos os vetores na figura abaixo, note que as dimensões de  $\vec{V}_B$  são compatíveis com o que foi pedido pela questão,  $\vec{V}_A$  e  $\vec{V}_B$  serem perpendiculares, e eles são a resposta final.



Agora, tente aplicar o mesmo raciocínio para resolver a questão a seguir. Tente ser estratégico no uso de frações ou aproximações.

QUESTÃO DO LIVRO-TEXTO → Decomponha o vetor  $\vec{V} = (3; 4)$  como soma de dois vetores perpendiculares de modo que um deles esteja na mesma direção do vetor  $\vec{A} = (12; 5)$ .

### Questões adicionais

**A.1** Decomponha o vetor  $\vec{V} = (2; 2\sqrt{3})$  em uma soma de vetores perpendiculares de modo que um deles esteja na direção sugerida pelo vetor  $\vec{A} = (4; -2)$ .

Essa questão é similar ao que foi discutido na seção Rumor ao Livro-texto, mas usa pela primeira vez um vetor que não está no primeiro quadrante. Isso foi usado com reserva ao longo deste capítulo porque não estamos trabalhando com ângulos maiores do que  $90^\circ$  por enquanto. Entretanto, essa questão pode ser resolvida sem que isso seja necessário, basta observar o comportamento dos ângulos após representar os vetores no plano cartesiano.

**A2**

Considere os vetores  $\vec{A} = (\sqrt{3}; 1)$  e  $\vec{B} = (-1; 1)$ .

- a) Esboce com cuidado ambos em um plano cartesiano.
- b) Esboce a decomposição de  $\vec{B}$  como uma soma de vetores perpendiculares de modo que um deles esteja na direção sugerida pelo vetor  $\vec{A}$
- c) Estime visualmente as coordenadas da decomposição de  $\vec{B}$ .

Como este capítulo foi totalmente baseado em vetores com apenas duas dimensões, não foi possível indicar materiais complementares. Caso algum estudante chegue a este ponto antes do final das atividades, sugerimos a leitura da seção 8.1 do livro Álgebra Linear para uma introdução ao produto escalar e vetorial ou da seção 3.1 do livro Matrizes, Vetores e Geometria Analítica sobre soma, subtração e multiplicação por escalas de vetores.

O objetivo dessa questão é que os estudantes discutam como deve se comportar a decomposição de vetores cujo ângulo de separação seja maior do que  $90^\circ$ . O cálculo em si não é importante, pois o procedimento já foi repetido pelos estudantes algumas vezes ao longo do capítulo, por isso incentive: o cuidado com o esboço do item a e a discussão em torno do item b.



## GABARITO

- Q1 a) 3, b)  $2\sqrt{3}$ , c)  $2\sqrt{3}$ .
- Q2 a) 0,98, b) 0,97, c) 0,3, d) 0,9, e) 0,07.
- Q3 a) 3,76, b) 9,24.
- Q4 a) 0,78, b) 1,16, c)  $37^\circ$ , d)  $30^\circ$ .
- Q5 a)  $\sqrt{13}$ , b) o seno vale  $2\sqrt{13}/13$  e o cosseno  $3\sqrt{13}/13$ , c)  $0,59$  e  $34^\circ$ .
- Q6 a)  $\|V\| = \sqrt{5}$  e  $\|U\| = \sqrt{10}$ , b)  $63^\circ$  e  $18^\circ$ , c)  $45^\circ$ .
- Q7 a)  $(2,30; 1,93)$ , b)  $(-\sqrt{3}; 1,00)$ .
- Q8 c)  $\sqrt{10}/2$ , d)  $\frac{5}{2}$ .
- Q9 a) 2,42.
- Q10 a) 2.301, b) 1.301, c) 0.301.
- Q11 1,93.
- Questão 12:** a) 5, b) 1, c) dobrar também.
- Q12 a) 5, b) 1, c) dobrar também.

## AUTO-AVALIAÇÃO FINAL

Avalie o quanto você acha que sabe sobre os seguintes itens após ter resolvido as questões deste capítulo.

# Troca de variáveis e composição de funções

---

## APRESENTAÇÃO

Este talvez seja o primeiro capítulo cujo foco é muito mais uma ferramenta (ou duas) do que um tópico em si mesmo. O uso que se faz de troca de variáveis e composição de funções ao longo das disciplinas de Cálculo é instrumental, com intuito de viabilizar alguma técnica de derivação ou integração ou mesmo para o cálculo de algum limite.

Exatamente por esse motivo, esses dois itens acabam não sendo abordados explicitamente pelos professores dessas disciplinas que, conscientemente ou não, acabam assumindo que os seus estudantes tem uma fluência mínima em ambos.

O que faremos ao longo deste capítulo é explorar diversos casos de troca de variáveis e de composição de funções visando explicitamente os usos que se faz em Cálculo Diferencial e Integral 1, de limites até integrais.

## PRÉ-REQUISITOS E AUTO-AVALIAÇÃO INICIAL

Os pré-requisitos para este capítulo são:

- Resolução de equações do primeiro e segundo graus;
- Noções básicas sobre funções.

Esses tópicos não serão cobertos durante as atividades de tutoria. Se você acha que não sabe o suficiente sobre algum deles, sugerimos que procure material de apoio antes de começar a resolver as questões desse capítulo.

## QUESTÕES DIAGNÓSTICAS

**D1** Resolva a equação  $x^6 - 9x^3 + 8 = 0$ .

**D2** Seja  $f(x) = 2x + 1$  e  $g(x) = 3 - x^2$ .

- a) Qual é o valor de  $f(g(1))$ ?
- b) Qual é a expressão algébrica de  $f(g(x))$ ?

**D3** Considere a função  $h(x) = 6x - 9$ .

- a) Obtenha  $h^{-1}(x)$ , ou seja, a função inversa de  $h(x)$ .
- b) Qual é o valor de  $h^{-1}(3)$ ?

### Gabarito

## GABARITO

**Questão 1:** 1 e 2. **Questão 2:** a)  $f(g(1)) = 5$ , b)  $f(g(x)) = -2x^2 + 7$ .

**Questão 3:** a)  $h^{-1}(x) = \frac{x+9}{6}$ , b) 2.

## QUADRO DE ORIENTAÇÃO

1	2A e 2B	3A e 3B	Onde começar
C	E	E	Questão 4
C	C	C	Questão 12

## COMENTÁRIOS INICIAIS

O grande objetivo deste capítulo é revisar troca de variáveis e composição de funções tendo em mente os usos que se faz destas para obter derivadas (via regra da cadeia) e integrais (via troca de variáveis). Seguindo a tônica dos capítulos anteriores, a ênfase não é na fluência com os procedimentos (isso pode ser feito nas listas de MA111) mas no fortalecimento mais conceitual.

Ao final do capítulo, também revisitamos o conceito de função inversa também seguindo uma ênfase mais conceitual.

O material conscientemente evita discussões relacionadas a domínio e imagens pois a abordagem dada a funções aqui não segue uma rota formal. Caso necessário, o professor de MA111 deverá cubrir esses aspectos.

## QUESTÕES

Lembre-se de checar com seu tutor em qual questão você deve começar.

### Troca de variáveis em equações

Em algumas circunstâncias uma equação pode parecer não se encaixar em nenhum dos casos que sabemos resolver. Por exemplo, você provavelmente não conhece nenhuma estratégia para resolver uma equação que envolva  $x^4$ . Nesses casos, uma das possibilidades é tentarmos converter a equação para um formato mais simples ou familiar e uma das maneiras de conseguir esse efeito é fazendo uma troca de variáveis estratégica.

Por exemplo, a equação  $x^4 - 13x^2 + 36 = 0$  é uma equação polinomial de quarto grau, para a qual ninguém costuma saber um método de resolução. Entretanto, note como ela se parece com uma equação quadrática (com  $x^4$  onde gostaríamos que fosse  $x^2$  e  $x^2$  onde gostaríamos de um  $x$ ). Para de fato transformá-la em uma equação quadrática podemos fazer a troca de variáveis  $x^2 = t$  (o que significa que  $x^4 = t^2$ ). Fazendo a troca, obtemos  $t^2 - 13t + 36 = 0$ .

Q1

Com base nas equações discutidas acima, responda os itens a seguir.

- a) Obtenha os valores de  $t$  que satisfazem a equação  $t^2 - 13t + 36 = 0$ .
- b) Lembrando que a troca de variáveis que fizemos foi  $x^2 = t$ , obtenha os valores de  $x$  referentes aos valores de  $t$  obtidos no item anterior.
- c) Você encontrou quatro valores para  $x$  no item anterior (caso contrário, cheque suas respostas com a de seus colegas ou tutor). Verifique, substituindo em  $x^4 - 13x^2 + 36 = 0$ , que todos satisfazem essa equação.

O que fizemos foi uma troca de variáveis que viabilizou a resolução de uma equação que inicialmente parecia fora do alcance das ferramentas que conhecemos.

O objetivo desta questão é introduzir a ideia de troca de variáveis com um caso bastante simples. É importante que os estudantes entendam a diferença entre as soluções para a equação original e para a equação transformada.

Algumas vezes a troca de variáveis será fácil de notar analisando a equação, outras vezes não muito.

### Trocas de variáveis



Resolva cada uma das equações a seguir usando a troca de variáveis dada.

- a)  $(x^2 + 1)^2 - 6(x^2 + 1) + 5 = 0$ , usando a troca  $t = x^2 + 1$ .
- b)  $x + \sqrt{x + 2} = 18$ , usando a troca  $a = \sqrt{x + 2}$ .
- c)  $2^x - 4^x = -2$ , usando a troca  $y = 2^x$ .
- d)  $(x^2 - 5)^2 - 1 = 0$ , usando uma troca a sua escolha.

Nas equações anteriores, ao voltarmos para a variável original acabamos “perdendo” alguma das possíveis soluções. Isso é normal e pode acontecer dependendo da equação e da troca de variável realizada. Por esse motivo, é especialmente importante checar as soluções obtidas especialmente usando as trocas de variáveis envolvendo operações com domínio limitado, como raízes e logaritmos.

### Troca de variáveis em expressões

Ao calcularmos limites, por exemplo, lidamos com expressões algébricas ao invés de equações. Nesse contexto, trocas de variáveis podem ser úteis para transformar as expressões dadas para um formato mais simples. Por exemplo, calcular o limite de uma expressão como  $\frac{x}{\sqrt{x-1}}$  é mais trabalhoso do que de uma expressão como  $\frac{y^2+1}{y}$ , pois essa última pode ser facilmente convertida em parcelas mais simples:  $\frac{y^2+1}{y} = \frac{y^2}{y} + \frac{1}{y} = y + \frac{1}{y}$ .

A troca de variável usada para transformar a primeira na segunda foi  $y = \sqrt{x-1}$ . Essa ideia é relativamente simples de ter já que o valor de  $y$  é o denominador inteiro (denominadores complicados são muito mais trabalhosos do que numeradores complicados). Mas da troca no denominador, o numerador precisa ser atualizado para a nova variável. Como  $y = \sqrt{x-1}$ , temos que  $y^2 = x-1$  e, portanto,  $y^2 - 1 = x$ . Dessa forma, podemos trocar todas as ocorrências de  $x$  por  $y^2 - 1$  completando a troca de variáveis.

Questão para promover um pouco de prática com troca de variáveis, mas as questões levantam aspectos conceituais importantes:

- O item a resulta em apenas 3 soluções, ao invés das 4 esperadas (0 é uma raiz dupla);
- O item b envolve duas trocas diferentes ( $a = \sqrt{x+2}$  e  $x = a^2 - 2$ );
- O item c tem uma apresentação um pouco diferente que exige a percepção de  $4^x$  como sendo igual a  $(2^x)^2$ . Além disso, um dos valores de  $y$  não gera uma solução válida para a equação original.
- O item d, além de não dar a troca, vai resultar em raízes não inteiras.

## Q3

Faça uma troca de variável que mude as expressões abaixo para um formato que você considere mais simples para manipulações algébricas. Não se esqueça de indicar a troca utilizada.

a)  $\frac{\sqrt{4+x}-2}{x}$

b)  $x \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right)$

c)  $\sqrt{x} \cdot \log x$

Em algumas situações, pode parecer que uma determinada troca de variáveis não simplificou de fato uma expressão. Na verdade, em várias situações isso depende de quem está resolvendo a questão. Algumas pessoas preferem evitar denominadores complicados, outros raízes complicadas e outros preferem evitar trocas de variáveis. A decisão de qual troca usar pode depender das habilidades que você se sente mais confortável em usar. Mas é desejável ter familiaridade com esse recurso, pois certas situações dependem fortemente dela.

### Juntando funções

Assim como os números reais, funções podem ser combinadas através de operações. As possibilidades mais simples são soma, subtração, multiplicação e divisão. Por exemplo, se temos  $f(x) = 2x + 3$  e  $g(x) = 5^x$ , então a multiplicação dessas funções é representada por  $f \cdot g$  e pode ser obtida multiplicando-se as expressões algébricas dessas funções:  $f \cdot g = (2x + 3)(5^x)$ . Do mesmo modo, a soma dessas funções é dada por:  $f + g = 2x + 3 + 5^x$ .

Se essas ideias não são familiares pra você, sugerimos a leitura das seção 3.9 do livro Matemática básica - volume 1 até o final do Exemplo 3.

O que veremos nessa questão é uma outra maneira de combinar funções, a **composição de funções**.

## Q4

A fórmula  $C = \frac{5(F-32)}{9}$  permite a conversão de temperaturas em Fahrenheit para Celsius. A fórmula  $K = C + 273$  permite a conversão de uma temperatura em Celsius para Kelvin.

- a) Quanto é  $50^\circ$  Fahrenheit em Celsius?

A primeira troca se parece bastante com exemplo feito anteriormente, entretanto, permite uma simplificação extra ao final. Se a trocar realizada for  $t = \sqrt{4+x}$ , a expressão obtida será  $\frac{t-2}{t-4}$  que, por sua vez, pode ser simplificada da seguinte maneira:  $\frac{t-2}{t-4} \cdot \frac{t-2}{(t-2)(t+2)} = \frac{1}{t+2}$ . Não é fundamental que os estudantes notem essa última simplificação, já que este não é o foco deste capítulo, mas você pode chamar a atenção para esse aspecto caso julgue adequado.

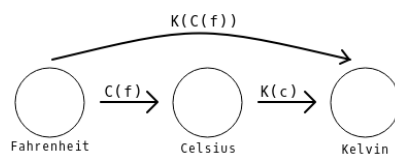
O item b depende da percepção de que a expressão  $\sin(x)/x$  costuma ser útil no cálculo de limites, portanto, vale a pena "forçar" a sua ocorrência.

Por fim, apesar de o item c permitir poucas simplificações, uma troca que faça com que a potência apareça no logaritmando pode ser útil, já que logaritmos permitem a "remoção" de potências. É esperado que estudantes fiquem hesitantes nesse item, por acharem que a trocar de variável não vai simplificar substancialmente a expressão. Mostre que a troca  $t = \sqrt{x}$  elimina uma raiz acrescentando apenas uma multiplicação por número real.

- b) Quanto é 50° Fahrenheit em Kelvin?
- c) Quanto é 77° Fahrenheit em Kelvin?
- d) Obtenha uma fórmula que converta temperaturas Fahrenheit diretamente para Kelvin.
- e) Use essa fórmula para obter converter 23° Fahrenheit em Kelvin.

Nessa questão, essas expressões que foram chamadas de fórmulas podem ser vistas como funções. Usando a nomenclatura convencional, podemos escrevê-las da seguinte maneira:  $C(f) = \frac{5(f-32)}{9}$  e  $K(c) = c + 273$ . Quando escrevemos  $C(f)$  estamos simplesmente deixando claro que a variável  $C$  varia de acordo com a variável  $f$ . O que você fez no item d da questão acima foi compor as funções  $C(f)$  e  $K(c)$  de modo a obter uma nova função  $K(f)$  que obtem o valor em Kelvin de uma temperatura dada originalmente em Fahrenheit. Formalmente, dizemos que  $K(f) = K(c) \circ C(f)$ . Se distinguirmos explicitamente  $K(f)$  de  $K(c)$  chamando a primeira de  $K_2$ , por exemplo, podemos escrever apenas que  $K_2 = K \circ C$  ou que  $K_2(f) = K(C(f))$ .

O diagrama abaixo mostra uma maneira de visualizar o efeito dessas funções em conjuntos de valores dados. A função  $C(f)$  toma valores em Fahrenheit e os converte em valores em Celsius. A função  $K(c)$  toma valores em Celsius e os converte em Kelvin. Já a função composta  $K(C(f))$  toma valores em Fahrenheit e os converte diretamente em Kelvin, fazendo o trabalho das duas funções de uma vez so.



Vamos explorar a fundo a ideia de funções compostas nas próximas questões.

### Composição de funções

Vamos voltar à notação tradicional de função.

Essa questão introduz composição de funções através de um exemplo contextualizado. Nesse caso, a contextualização facilita o entendimento dos significados dessa operação, mas também limita as possibilidades (por exemplo, não faria sentido obter a composta  $C(K)$ ).



A partir das funções  $f(x) = 2x + 3$  e  $g(x) = 5^x$ , podemos obter as seguintes composições:

$$f \circ g = f(g(x)) = 2 \cdot 5^x + 3$$

$$g \circ f = g(f(x)) = 5^{2x+3}$$

Para obter  $f(g(x))$ , que é o mesmo que  $f \circ g$ , devemos substituir a variável  $x$  na função  $f(x)$  pela função  $g(x)$ .

$$f(x) = 2x + 3$$

$$f(x) = 2x + 3$$

$$f(g) = 2g + 3$$

$$f(g(x)) = 2g(x) + 3$$

$$f(g(x)) = 2 \cdot 5^x + 3$$

$$f(g(x)) = 2 \cdot 5^x + 3$$

Caso você não tenha entendido o que foi feito acima, sugerimos a leitura dos problemas 4, 5 e 6 a partir da página 350 do livro Matemática básica - volume 1.



Responda aos itens abaixo considerando as duas funções usadas como exemplo logo acima.

- a) Qual é o valor de  $f(g(1))$ ?
- b) Para qual valor de  $x$  temos  $f(g(x)) = 53$ ?
- c) Qual é o valor de  $g(f(1))$ ?
- d) Para qual valor de  $x$  temos  $g(f(x)) = 5$ ?

É importante que esteja claro pra você que  $f(g(x))$  e  $g(f(x))$  são funções diferentes. Veja que os itens a e d acima resultaram em valores diferentes. Além disso, a expressão algébrica de  $f(g(x))$  é diferente da de  $g(f(x))$ .

O objetivo dessa questão é voltar para um contexto mais abstrato mas ainda procedendo com bastante calma para ter certeza de que o conceito de função composta foi assimilado.

### Descompondo funções

Embora composição de funções seja fundamental para modelar fenômenos complexos, ao longo da disciplina de cálculo é bastante útil conseguir “descompor” uma função dada em duas funções mais simples.

Por exemplo, a função  $f(x) = \sin(x^2 - 9)$  pode ser vista como uma composição das funções  $g(x) = \sin(x)$  e  $h(x) = x^2 - 9$ . Nesse caso,  $f(x) = g(h(x))$ . Também poderíamos usar as funções  $i(x) = \sin(x - 9)$  e  $j(x) = x^2$  e escrever corretamente que  $f(x) = i(j(x))$ . A escolha da primeira ou segunda composição depende dos seus objetivos. Em Cálculo, você usará essa estratégia para calcular a derivada de uma função, portanto, seu foco deve ser em quebrar a função em partes que você saiba derivar.

Q6

Escreva as funções abaixo como a composição de duas funções a sua escolha. Indique tanto as novas funções como a ordem em que foram compostas para obter a função dada.

- a)  $a(x) = 3 + \cos^2(x)$
- b)  $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x-5}}$
- c)  $p(x) = 3 \cdot 2^{x-1}$
- d)  $t(x) = (\sin(x) + 1)(\sin(x) + 2)$

### Composição ou multiplicação

Como dito anteriormente, o objetivo de descompor uma função dada nas disciplinas de cálculo é viabilizar o cálculo de derivadas (pela regra da cadeia) ou integrais. Porém, em alguns casos quebrar uma função dada como um produto de duas funções mais simples pode ser mais útil (graças à regra do produto).

Considere, por exemplo, a função  $f(x) = (3x + 1) \cdot \sin(x)$ . Se tentarmos reescrevê-la como uma composição de duas funções, poderíamos usar  $g(x) = 3x + 1$ , mas a outra função precisaria ser  $h(x) = x \cdot \sin(\frac{x-1}{3})$  para que ao calcularmos  $h(g(x))$  o argumento de  $\sin$  fosse igual a  $x$ . Nesse caso, a decomposição da função não simplificou muito a função dada. Entretanto, poderíamos ver  $f(x)$  como sendo o produto de  $g(x) = 3x + 1$  e  $i(x) = \sin(x)$ , essas sim são funções mais simples de derivar ou integrar.

Q7

Rescreva as funções abaixo como a composição ou a multiplicação de outras duas funções mais simples.


- a)  $f(x) = x^2 \cdot 3^x$

Esse tipo de exercício é importante para um bom uso da regra da cadeia. Cada item admite mais do que uma resposta e você pode incentivar a comparação com as soluções de colegas tendo em mente o critério "qual dessas decomposições são mais fáceis de derivar isoladamente?" ou apenas "você saberia derivar as novas funções obtidas?". As respostas a essas perguntas também não são únicas, mas podem ajudar como critério de exclusão de algumas das possibilidades.

- b)  $g(x) = \frac{x+3}{x+4}$
- c)  $p(x) = \cos(x^2 - 1)$
- d)  $m(x) = \frac{2^x}{1+2^x}$

O último item pode ser visto como uma composição envolvendo  $2^x$  ou como um quociente. Cada opção tem suas vantagens em desvantagens relacionadas à dificuldade de calcular as derivadas das novas funções e à dificuldade de usar regra da cadeia, do produto ou do quociente.


### Uma composição especial

 Considere as funções  $m(x) = 2x - 6$  e  $n(x) = \frac{x}{2} + 3$

- a) Obtenha a expressão algébrica de  $m(n(x))$ .
- b) Obtenha a expressão algébrica de  $n(m(x))$ .

Nos itens acima você deve ter obtido que  $m(n(x)) = x$  e  $n(m(x)) = x$ . Toda função da forma  $f(x) = x$  é chamada de identidade pois  $f(1) = 1$ ,  $f(2) = 2$ ,  $f(3) = 3$ ,  $f(-17) = -17$ ,  $f(1000) = 1000$ ... Quando a composição de duas funções é igual à identidade, dizemos que uma delas é a **função inversa** da outra. No caso da questão acima, dizemos que  $m(x)$  é a função inversa de  $n(x)$  e vice-versa. No caso geral, a inversa de uma função  $f(x)$  é representada por  $f^{-1}(x)$ .

### Funções inversas

 Utilize a expressão  $C = \frac{5(F-32)}{9}$ , dada no começo deste capítulo para converter uma temperatura em celsius para fahrenheit, para responder as questões abaixo.

- a) Rescreva a fórmula acima isolando  $F$  ao invés de  $C$ .
- b) Use a resposta do item anterior para obter o valor em fahrenheit para a temperatura de  $35^\circ\text{Celsius}$ .

Agora pense nas fórmulas acima, a dada no enunciado e a obtida no item b, como funções. Podemos escrevê-las

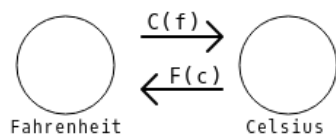
Além de oferecer mais um pouco de prática com a decomposição de funções, essa questão oferece uma oportunidade para considerar as diferenças entre produto e composição de funções, o que é fundamental para decidir qual estratégia usar para derivar uma função.

Introdução de funções inversas com um exemplo simples, mas abstrato. Aqui, uma função ser inversa da outra significa a composição resultar na identidade, o que não é tão óbvio na interpretação a seguir (contextualizada), em que funções inversas são vistas como funções que fazem a transformação contrária uma da outra.

Nesse caso, o uso de um contexto facilita o entendimento de porquê o procedimento de isolar a outra variável funciona. Além disso, reforça a ideia de transformação inversa (de Celsius para Fahrenheit ou de Fahrenheit para Celsius).

Não tenha pressa com essas duas últimas questões. Se julgar explore explicitamente a transformação ponto a ponto: se  $f(x_0) = y_0$  então  $f^{-1}(y_0) = x_0$ . Isso pode ser feito facilmente convertendo e desconvertendo uma temperatura, mas o impacto deve ser maior com o exemplo abstrato: escolha um valor qualquer de  $x$ , aplique em  $m(x)$ , agora pegue esse resultado e aplique em  $n(x)$  e você obterá  $x$  novamente.

como  $C(f) = \frac{5(f-32)}{9}$  e  $F(c) = \frac{9c+160}{5}$ . A primeira delas retorna uma temperatura em celsius a partir de um valor dado em fahrenheit. A segunda retorna um valor em fahrenheit a partir de um valor dado em celsius. Ou seja, elas fazem trabalhos inversos!



Esse é justamente o significado de duas funções serem inversas.

**Q10** Verifique se a composição  $C \circ F$  resulta na função identidade.

Insista para que os estudantes resolvam essa questão.

### Obtendo funções inversas

O exemplo acima nos oferece não apenas uma interpretação para funções compostas, mas também um método para obtê-las: se você quer obter a inversa de  $f(x)$ , isole a variável  $x$  e obtenha uma expressão envolvendo  $y$ . Por exemplo, a inversa de  $f(x) = 2 + \frac{1}{x}$  pode ser obtida da seguinte maneira:

$$\begin{aligned}
 f(x) &= 2 + \frac{1}{x} && \text{por conveniência, vamos trocar } f(x) \text{ por } y \\
 y &= 2 + \frac{1}{x} && \text{subtraindo 2 dos dois lados} \\
 y - 2 &= \frac{1}{x} && \text{invertendo os dois lados da igualdade} \\
 \frac{1}{y - 2} &= x && \text{rescrevendo a igualdade} \\
 x &= \frac{1}{y - 2}
 \end{aligned}$$

A expressão algébrica da função inversa foi obtida na última linha acima. Porém, escrevendo na forma convencional de funções, dizemos que a inversa de  $f(x)$  é  $f^{-1}(x) = \frac{1}{x-2}$ . Usa-se  $x$  como variável apenas por convenção, especialmente em casos em que as funções são dadas de forma não contextualizadas.

**REFLITA** → Antes de resolver a questão abaixo, descreva com suas palavras como você deve proceder para resolvê-lo do início até a resposta final, dada no forma  $f^{-1}$ .

**Q11** Use a técnica discutida anteriormente para obter a função inversa das seguintes funções.

- a)  $f(x) = 4x - 8$ .
- b)  $g(x) = \frac{3}{x-1} + 2$ .
- c)  $h(x) = 3 + \log(2x)$ .
- d)  $p(x) = \sin(3x - 10)$ .
- e)  $c(x) = 2^{x+5}$ .

## RUMO AO LIVRO-TEXTO

Nessa altura do curso de Cálculo, você já viu como derivar algumas funções, como as polinomiais e exponenciais. Entretanto, uma função como  $f(x) = 2^{x^3+1}$ , apesar de envolver uma exponencial e um polinômio, não se encaixa exatamente em nenhuma dessas categorias. Para esse tipo de situação, você estudará técnicas como a regra do produto, do quociente e da cadeia. A regra do produto (e do quociente) é útil para casos em que a função dada pode ser vista como um produto (ou quociente) de duas funções mais fáceis de derivar. A regra da cadeia permite calcular a derivada de uma função que possa ser decomposta em funções mais simples, lidando apenas com estas.

Não se preocupe em decorar a regra da cadeia ou entender os seus porquês neste momento, pois você terá aulas sobre ela em breve. Mas vejamos o que ela diz para resolver uma questão de um dos livros-texto.

Seja  $f(x)$  uma função que pode ser decomposta em  $g(h(x))$ . Então, a sua derivada pode ser dada por:

$$f'(x) = h'(x) \cdot g'(h(x))$$

Essa questão é do tipo **Refleta**. Como antes, insista para que os estudantes a resolvam adequadamente, escrevendo o que fariam para resolver o item seguinte. Descrições completas são importantes para salientar aspectos que talvez eles mesmos não tenham notado. Note que a questão pede que a função inversa seja dada na forma  $f^{-1}(x)$ , portanto, após isolar a variável  $x$  em termos de  $y$ , é necessário ajustar a nomenclatura.

Os itens dessa questão não exigem grandes manipulações algébricas, mas dependem de os estudantes lembrarem quais são as inversas de funções como as trigonométricas e exponenciais. Isso foi tratado em capítulos anteriores, mas do ponto de vista de operações, não funções. Isso pode gerar dúvidas. Não tenha pressa e, caso necessário, gere mais exercícios com estrutura semelhante aos dados (evite excesso de manipulações algébricas) para que os estudantes possam praticar esse novo uso dessas operações.

A proposta desta questão é aplicar explicitamente o que foi visto neste capítulo em um tópico da disciplina de Cálculo. Ela é simples do ponto de vista algébrico, mas a resolução neste momento deve oferecer uma conexão bastante explícita entre as atividades da tutoria e da disciplina MA111.

A questão abaixo foi retirada da seção 3.5 do livro Calculus, de James Stewart.

QUESTÃO RESOLVIDA → Encontre a derivada de  $y = 10^{1-x^2}$ .

Note que a função dada não se enquadra em nenhum dos tipos de função básicos que você sabe como derivar. Porém, ela pode ser decomposta em uma exponencial simples ( $f(x) = 10^x$ ) e um polinômio ( $g(x) = 1 - x^2$ ) e essas duas funções você já deve saber como derivar.

$$f'(x) = \log(10) \cdot 10^x$$

$$g'(x) = -2x$$

Agora, vamos checar a regra da cadeia tendo em mente que  $y = f(g(x))$ .

$$y' = g'(x) \cdot f'(g(x))$$

A primeira parte é simples, basta substituir  $g'(x) = -2x$ , resultando em  $y' = -2x \cdot f'(g(x))$ .

A segunda parte é a composição de  $f'(x)$  com  $g(x)$ . Como  $f'(x) = \log(10) \cdot 10^x$ , temos que:

$$f'(x) = \log(10) \cdot 10^x$$

$$f'(g(x)) = \log(10) \cdot 10^{g(x)}$$

$$f'(g(x)) = \log(10) \cdot 10^{1-x^2}$$

Portanto:

$$y' = -2x \cdot \log(10) \cdot 10^{1-x^2} \quad \text{rescrevendo o lado direito da igualdade}$$
$$y' = -2\log(10) \cdot x \cdot 10^{1-x^2}$$

Agora, tente aplicar a regra da cadeia para resolver a questão abaixo, também retirada do livro Calculus, de James Stewart.

## GABARITO

- Q1 a) 9 e 4, b)  $\pm 3$  e  $\pm 2$ .
- Q2 a) 0, 2 e  $-2$ , b) 14 e 23, c) 1, d)  $\pm 2$ ,  $\pm \sqrt{6}$ .
- Q3 a)  $\frac{1}{t+2}$ , b)  $\frac{\sin(t)}{t}$ , com  $t = 1/x$ , c)  $2t \cdot \log(t)$ , com  $t = \sqrt{x}$ .
- Q4 a)  $10^\circ$  celsius, b) 283 kelvin, c) 298 kelvin, d)  $K = \frac{5(F-32)}{9} + 273$ , e) 267 kelvin.
- Q5 a) 13, b)  $x = 2$ , c)  $5^5$ , d)  $x = -1$ .
- Q6 a)  $\alpha(x) = b(c(x))$ ,  $b(x) = 3 + x^2$  e  $c(x) = \cos(x)$ , b)  $f(x) = g(h(x))$ ,  $g(x) = 1/x$  e  $h(x) = \sqrt{x-5}$ , c)  $p(x) = q(r(x))$ ,  $q(x) = 3 \cdot 2^x$  e  $r(x) = x - 1$ , d)  $t(x) = u(v(x))$ ,  $u(x) = x(x+1)$  e  $v(x) = \sin(x) + 1$ .
- Q7 a)  $f(x) = g(x) \cdot h(x)$ ,  $g(x) = x^2$  e  $h(x) = 3^x$ , b)  $g(x) = n(x)/d(x)$ ,  $n(x) = x + 3$  e  $d(x) = x + 4$ , c)  $p(x) = q(r(x))$ ,  $q(x) = \cos(x)$  e  $r(x) = x^2 - 1$ , d)  $g(x) = h(x)/i(x)$ ,  $h(x) = x + 3$  e  $i(x) = x + 4$ .
- Q8 a)  $m(n(x)) = x$ , b)  $n(m(x)) = x$ .
- Q9 a)  $F = \frac{9C}{5} + 32$ , b)  $95^\circ$  fahrenheit.
- Q10  $C \circ F = C$
- Q11 a)  $f^{-1}(x) = \frac{x+8}{4}$ , b)  $g^{-1}(x) = \frac{3}{x-2} + 1$ , c)  $h^{-1}(x) = \frac{10^{x-3}}{2}$ , d)  $p^{-1}(x) = \frac{\arcsin(y)+10}{3}$ , e)  $c^{-1}(x) = \log_2(y) - 5$ .

## QUESTÕES ADICIONAIS

Caso seja necessário, os exercícios 8, 9, 10, 18 e 19 da lista 3.9 do livro Matemática Básica podem ser propostos. Todos eles enfatizam os tópicos que foram discutidos ao longo deste capítulo.

**A1** Obtenha a derivada das funções  $f(x) = \sin(x^2)$  e  $g(x) = \sin^2(x)$ .

Antes de sugerir essa questão, certifique-se que derivadas de funções trigonométricas já foram abordadas em Cálculo. Se desejar propor mais questões desse tipo, foque em exemplo que não resultem em muitas manipulações algébricas, assim os estudantes poderão focar atenção nas funções e nas interações entre elas.

**A2** A forma algébrica explícita de algumas funções inversas são difíceis de obter. Esse é o caso, por exemplo, de algumas funções quadráticas como  $i(x) = x^2 - 4x + 3$  mas não é o caso de outras como  $e(x) = 2x^2 - 3$ . Obtenha a função inversa das funções quadrática abaixo.

- a)  $e(x) = 2x^2 - 3$
- b)  $f(x) = (x - 5)^2$
- c)  $h(x) = x^2 - 4x + 4$ . Sugestão: tente transformá-la no formato do item anterior.
- d)  $i(x) = x^2 - 4x + 1$ . Sugestão: tente transformá-la no formato do item anterior.

Essa questão deve ser vista como um desafio e dada apenas a estudantes que tiverem dominado os tópicos principais do capítulo. Ela não promove maior entendimento destes tópicos, apenas estende, em termos de dificuldade, as estratégias para obter a função inversa de uma função quadrática.



# Equação de retas e circunferências

## APRESENTAÇÃO

Parte da disciplina Geometria Analítica se dedica a estudar as expressões algébricas que representam curvas importantes por sua simplicidade, generalidade ou aplicações específicas. Dentre essas curvas podemos mencionar retas, planos, circunferências, cônicas e quádras. Neste capítulo, vamos estudar retas e circunferências no plano visando explorar aspectos que serão úteis no estudo das demais curvas mencionadas tanto no plano quanto no espaço.

## COMENTÁRIOS INICIAIS

Esse capítulo trata da equação da reta e da circunferência (no plano) em três formatos diferentes: reduzida ( $y = ax + b$  e  $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$ ), geral ( $ax + by + c = 0$  e  $ax^2 + bx + cy^2 + ey + f = 0$ ) e paramétrica.

Para além desses tópicos específicos, este capítulo também pretende tocar em alguns aspectos que serão importantes no tratamento de outros objetos em Geometria Analítica, como vetor normal de um plano (ao tratar da equação geral da reta), identificação de cônicas (ao tratar da forma geral da circunferência) e equações paramétricas em geral (ao tratar desses dois casos específicos). Esses aspectos são abordados de maneira indireta, mas são bastante importantes.

## PRÉ-REQUISITOS E AUTO-AVALIAÇÃO INICIAL

Os pré-requisitos para este capítulo são:

- Equação da reta;
- Distância entre pontos no plano.

Esses tópicos não serão cobertos durante as atividades de tutoria. Se você acha que não sabe o suficiente sobre algum deles, sugerimos que se procure material de apoio antes de começar a resolver as questões desse capítulo.

## QUESTÕES DIAGNÓSTICAS

**D1** Considere os pontos  $P = (1;3)$  e  $Q = (-1;-1)$ .

- a) Obtenha a equação da reta que passa pelos dois pontos.
- b) Dê a equação de uma reta diferente e paralela à encontrada no item a.

**D2** Considere as retas dadas pelas equações  $2y + 3x - 1 = 0$  e  $y - 4x + 3 = 0$ .

- a) Obtenha o ponto de intersecção entre as duas retas.
- b) Represente as retas em um plano cartesiano.

## GABARITO

**Questão 1:** a)  $y = 2x + 1$ , b) No caso de uma equação na forma reduzida, basta ter coeficiente angular igual a 2 e coeficiente linear diferente de  $-1$ . No caso de a equação estar em outro formato, é necessário converter para a forma reduzida.

**Questão 2:** a)  $(-1/2; 1)$ . b) É importante apenas que as retas se cruzem em um ponto coerente com a resposta anterior, uma seja crescente e a outra decrescente.

## QUADRO DE ORIENTAÇÃO

1A	1B	2A e 2B	Onde começar
C	E	E	Questão 2
C	C	E	Questão 6
C	C	C	Questão 7

## QUESTÕES

Vamos começar esse capítulo com uma das propriedades básicas das retas no plano: dois pontos determinam uma reta.

### Pontos e retas

Q1

- Considere os pontos  $P = (1; 1)$  e  $Q = (3; 5)$ .
- a) Marque os dois pontos em um eixo cartesiano.
  - b) Trace a reta que passa pelos dois pontos.
  - c) Avaliando visualmente, você diria que quais dos seguintes pontos estão sobre a reta:  
 $A = (-1; 2)$ ,  $B = (4; 4)$ ,  $C = (2; 3)$ ,  $D = (-1; -3)$ ?
  - d) Avaliando visualmente, em quais pontos essa reta parece cortar os eixos  $X$  e  $Y$ ?

Para traçar a reta na questão acima, você provavelmente posicionou a sua régua sobre os dois pontos que havia marcado no eixo cartesiano. Ao posicionar sobre os dois pontos a régua ficou com a sua posição totalmente definida (um ponto só permitiria girar a régua). Esse é o significado concreto da propriedade “dois pontos determinam uma única reta”.

### Equação da reta

O equivalente algébrico da propriedade mencionada acima é que dados dois pontos (diferentes) temos informação suficiente para determinar a equação da reta que passa por eles.

Existem vários métodos para resolver essa questão, mas se você não sabe como obter a equação de uma reta a partir de dois pontos, peça ajuda a um colega ou ao tutor para resolver a questão a seguir.

Q2

- Obtenha a equação da reta que passa pelos pontos  $P = (1; 1)$  e  $Q = (3; 5)$ .

Essa questão é bem introdutória e só será resolvida pelos estudantes que não acertaram nenhuma questão na avaliação diagnóstica. Nossa intenção é começar com algo puramente visual e introduzir elementos gradativamente. Dificuldades nessa questão podem significar uma defasagem bastante grande em conteúdos bastante básicos. Não tenha pressa e deixe que os estudantes com dificuldade resolvam lentamente as questões vindouras.

O ponto D pode ser dúbio em uma análise visual, como mostrado no gabarito, e isso reforça a vantagem da expressão algébrica.

Você deve ter obtido a equação  $y = 2x - 1$  na questão acima, entretanto, essa reta poderia ser representada algebricamente por expressões que, apesar de serem equivalentes a essa, tem um formato bastante diferente. Esses diferentes formatos e suas propriedades é um dos tópicos centrais deste capítulo.

Agora, vamos usar a equação da reta para responder a questões muito parecida com as que foram respondidas visualmente no questão 1.

Q3

Considere a reta dada pela equação  $y = 2x - 1$ , responda:

- a) Qual é o ponto de coordenada X igual a 10 que pertence a essa reta? E de coordenada Y igual a  $-3$ ?
- b) Em que pontos ela corta os eixos X e Y?
- c) Quais dos pontos  $A = (-1; 2)$ ,  $B = (4; 4)$ ,  $C = (2; 3)$  e  $D = (-1; -3)$  pertencem a ela?
- d) Dê as coordenadas de um ponto do quarto quadrante (valores de X positivos e de Y negativos) que pertença à reta.

### Equação da reta na forma reduzida

Chamamos de **forma reduzida** a equação da reta dada no formato  $y = mx + c$ . Esse formato é bastante comum pois é conveniente também para o estudo de funções (basta usar  $f(x)$  ao invés de  $y$ ). Mas além disso, ele possui algumas vantagens.

O valor de  $c$  está relacionado com o ponto em que a reta corta o eixo Y e é chamado de **coeficiente linear**. O valor de  $m$ , chamado de **coeficiente angular**, está relacionado com a inclinação da reta:  $m > 0$  implica uma reta crescente,  $m = 0$  uma reta horizontal e  $m < 0$  uma reta decrescente. No geral, essas duas informações são suficientes para um bom esboço da reta em um plano cartesiano.

Se você não sabe como fazer o esboço de uma reta a partir dessas duas informações sem precisar montar uma tabela com pontos, sugerimos uma leitura da seção 3.4 do livro Matemática Básica volume 1 até o final do

A questão acima ainda é bastante básica considerando o ponto do semestre em que esse capítulo está sendo usado. Se algum estudante estiver com dificuldade, crie algumas variações escolhendo pares de pontos e peça que resolvam por dois métodos diferentes: 1) obtendo o coeficiente angular e então o coeficiente linear e 2) usando a forma  $y = ax + b$  e resolvendo o sistema para  $a$  e  $b$ .

O objetivo dessa questão é contrapor a valiação visual da primeira questão com a avaliação algébrica (e você pode explicitar isso) e certificar de que os estudantes estão familiarizados com conceitos e propriedades bastante elementares, como intersecção com os eixos e quadrantes.

Em caso de dificuldades, gere variações da questão criando outras equações de reta na forma reduzida e propondo questões similares.

exemplo 2 antes de resolver a questão abaixo.

Q4

Usando um único plano cartesiano, esboce as retas dadas pelas equações:  $y = x + 1$ ,  $y = -2x - 4$ ,  $y = \frac{x}{2}$  e  $y = \frac{x}{2} - 1$ .

Você deve ter notado que duas das retas anteriores são paralelas entre si. Observe as semelhanças e diferenças entre as equações delas e, com base nisso, responda a questão a seguir.

Q5

Dê a equação de uma reta paralela à reta  $y = 2x - 1$ .

Como você deve ter notado, para que duas retas, dadas na forma reduzida, sejam paralelas basta que seus coeficientes angulares sejam iguais e coeficientes lineares sejam diferentes.

### Equação da reta na forma geral

Um outro formato para a apresentação da equação de uma reta é a chamada **forma geral**, mostrada abaixo:

$$ay + bx + c = 0$$

Q6

Dada a reta de equação  $4y + 6x - 4 = 0$ , faça o que se pede:

- Determine os pontos em que ela corta os eixos X e Y.
- Esboce a reta em um plano cartesiano.

Note que nesse caso nem a inclinação da reta nem o ponto de intersecção com o eixo Y estão claros na equação da reta. Nesse sentido, a forma geral é menos prática do que a forma reduzida. Porém, ela tem algumas vantagens.

### Vantagens da forma geral, 1

A primeira delas se refere a possibilidade de representar retas verticais. Por exemplo, a reta vertical que corta o eixo X em  $(3;0)$  tem equação  $x = 3$ . Pare e pense. Essa

Mais do que precisão, é importante que os estudantes acertem as diferenças e semelhanças entre as representações: qual é mais verticalizada? Qual cruza o eixo Y mais abaixo? Qual cruza o eixo X mais à direita? Cheque esses detalhes e peça que refaçam prestando atenção a esses aspectos se necessário.

Espera-se que aqui os estudantes sejam capazes de uma generalização simples envolvendo coeficiente angular. Você pode pedir a eles que escrevam essa propriedade como um complemento a essa questão.

Questão simples para introduzir a forma geral. Nenhuma dificuldade é esperada.

equação pode ser interpretada da seguinte maneira: para qualquer valor de  $y$  que você escolher, o valor de  $x$  será sempre igual a 3. Qualquer ponto com  $x \neq 3$  não pertencerá a essa reta. Isso significa que os pontos dessa reta são exatamente todos os pontos “empilhados” verticalmente sobre a marcação 3 no eixo  $x$ , ou seja, sobre o ponto  $(3; 0)$ .

Uma reta horizontal que corte o eixo  $Y$  no ponto  $(0; 4)$  terá equação  $y = 4$ . (Pare e pense sobre a interpretação dessa equação).

A diferença entre esses dois casos é que  $y = 4$  está na forma reduzida (podemos vê-la como  $y = 0x + 4$ ), mas  $x = 3$  não (pois precisaríamos de um 0 multiplicando  $y$ , o que não pode ocorrer na forma reduzida, pois não há uma constante multiplicando  $y$ ). Entretanto, ambas as equações encaixam na forma geral:  $x - 3 = 0$  (que pode ser vista como  $0y + x - 3 = 0$ ) e  $y - 4 = 0$  (que pode ser vista como  $y + 0x - 4 = 0$ ).

Portanto, a forma geral comporta casos válidos do ponto de vista geométrico que a forma reduzida não comporta.

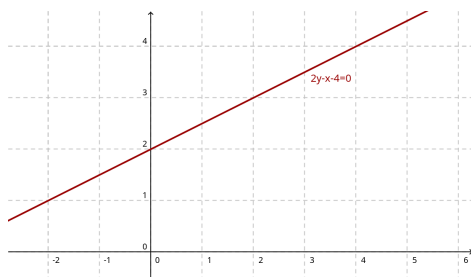


Esboce o gráfico das retas com equações iguais a  $x - 5 = 0$ ,  $y + 1 = 0$ ,  $2x + 1 = 0$  e  $y = 0$ .

Note que a primeira reta é um caso especial (vertical), que não é uma função mas é perfeitamente válida como um objeto geométrico usado em Geometria Analítica. A última é uma reta horizontal e representa uma função constante.

## Vantagens da forma geral, 2

Outra vantagem da forma geral se refere ao **vetor normal** à reta. Esse é o nome dado a um vetor (qualquer um deles) que seja perpendicular à reta. Esse vetor é muito importante para obtermos a equação de planos em Geometria Analítica. Para compreendermos essa propriedade, vamos considerar a reta de equação  $2y - x - 4 = 0$ , que está traçada abaixo.



Em relação à reta acima:

- Use o quadriculado para traçar um vetor perpendicular à

reta a partir do ponto  $(0; 2)$ . Sugestão: trace um vetor que termine em um dos vértices do quadriculado.

- b) Qual é esse vetor?

Você deve ter obtido o vetor  $\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ . Note que as coordenadas  $x$  e  $y$  desse vetor são iguais aos coeficientes que multiplicam  $x$  e  $y$  na equação dada. Essa propriedade é bastante poderosa quando lidarmos com planos pois é mais simples indicar a **direção** de um plano por um vetor normal do que por inclinações em relação aos eixos.

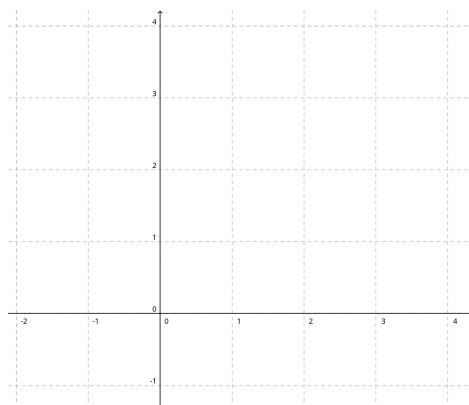
Porém, note também que o vetor normal indica apenas a direção da reta. Ainda nos resta determinar a posição dessa reta. Isso é feito, de maneira geral, dando um ponto que pertence à reta. Dado o vetor normal e mais um ponto, a equação da reta pode ser determinada.

Essa propriedade é muito utilizada em Geometria Analítica e raramente abordada no Ensino Médio. Apesar de não parecer tão poderosa em duas dimensões, ela facilita muitos cálculos no espaço. Inclusive, essa propriedade está relacionada com a fórmula para obtenção do coeficiente angular de uma reta perpendicular a uma dada no plano.



Seja  $\vec{V} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$  e  $P = (1; 1)$ .

- a) Marque o ponto  $P$  no quadriculado abaixo e o vetor  $\vec{V}$  começando em  $P$ .



- b) Visualmente, trace uma reta que passa por  $P$  e é perpendicular a  $\vec{V}$ .
- c) Obtenha a equação dessa reta.
- d) Obtenha a equação de uma nova reta que passa pelo ponto  $Q = (3; 2)$  e tem vetor normal igual a  $\vec{U} = \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \end{pmatrix}$ .

REFLITA → Compare com seus colegas o método que você utilizou pra

Essa questão soa incomum no contexto do Ensino Médio, mas para planos no espaço o vetor normal é uma referência de direção muito mais eficiente do que as inclinações do plano em relação aos eixos, por isso ela foi incluída aqui. A intenção é fazer com que o estudante perceba que dependendo das informações disponíveis, a forma geral pode ser mais conveniente do que a reduzida.

O último item da questão anterior pode ser resolvido usando apenas a forma geral (método novo, mas mais simples) ou passando-se pela forma reduzida (método familiar, mas mais longo).



resolver o último item da questão acima e descreva com suas palavras o método que lhe parece o melhor para resolvê-la quando a informação dada é um ponto e o vetor normal da reta.

### Uma nova forma

Uma terceira forma de representar algebricamente uma reta é a **forma paramétrica**. Apesar de ser pouco usada para retas e planos, a forma paramétrica pode facilitar enormemente o tratamento algébrico de algumas curvas e reforça conceitos que serão estudados em Álgebra Linear, como o de combinação linear. Por esse motivo, veremos como utilizá-la.

A ideia por trás de representações paramétricas é a introdução de uma nova variável (parâmetro) que vai ser usada para gerar as coordenadas  $X$  e  $Y$  de cada ponto pertencente à curva em questão. Isso significa que a expressão não vai relacionar uma coordenada à outra através de uma equação, mas sim usar um parâmetro para gerar os pares de valores para as coordenadas.

Tipicamente, uma equação paramétrica tem o seguinte

$$\text{formato: } (x, y) = (2t - 1; 4 - t^2) \text{ ou } \begin{cases} x = 2t - 1 \\ y = 4 - t^2 \end{cases},$$

ambos representando exatamente a mesma curva (que não é uma reta, nesse caso).

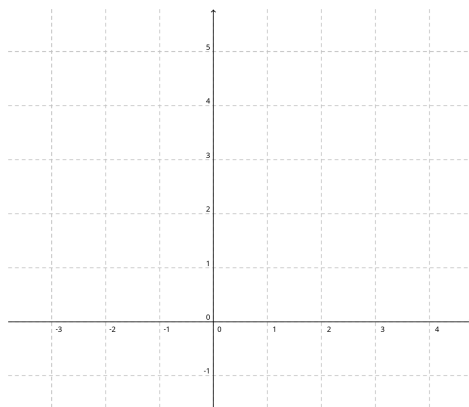
Sendo assim, para cada valor de  $t$ , obtemos valores para as coordenadas  $X$  e  $Y$  de um ponto que pertence à curva. Por exemplo, para  $t = 0$  temos o ponto  $(-1; 4)$  e para  $t = 1$  temos o ponto  $(1; 3)$ .

Para que uma equação paramétrica no plano seja uma reta, é necessário e suficiente que suas equações sejam lineares em termos de  $t$ , ou seja, tenham o formato  $at + b$ . Por exemplo,  $(x, y) = (2t - 1; t + 3)$ .

#### Q10

Em relação à reta dada pela equação  $(x, y) = (2t - 1; t + 3)$ , faça o que se pede.

- Obtenha as coordenadas dos pontos para  $t = 0$ ,  $t = 2$  e  $t = -1$ .
- Marque esses pontos no plano cartesiano abaixo e confirme que eles pertencem a uma mesma reta, ou seja, estão alinhados.
- Determine para quais valores de  $t$  essa reta cruza os



eixos X e Y.

Essa mesma equação pode ser rescrita como mostrado abaixo.

$$(x, y) = (2t-1; t+3) = (-1+2t; 3+t) = (-1; 3) + (2t; t) = (-1; 3) + (2; 1) \cdot t$$

A forma mais à direita salienta dois aspectos: o ponto  $(-1; 3)$  obtido quando  $t = 0$  que pode ser interpretado como início da curva, e a direção  $(2; 1)$  na qual a reta avança à medida que o valor de  $t$  aumenta. Dessa maneira, interpretar o parâmetro  $t$  como sendo o tempo é um recurso comum neste contexto.

Neste ponto a forma paramétrica é introduzida. Apesar de não oferecer tantas vantagens para retas e planos, a forma paramétrica não é muito discutida no Ensino Médio e introduzi-la com um objeto simples como retas no plano pode facilitar o seu uso para curvas mais complexas. Nenhuma dificuldade específica é esperada nessa questão.

### Todas as formas

Q11

Considere os pontos  $P = (1; 1)$  e  $Q = (3; 5)$ .

- Marque esses pontos em um plano cartesiano e trace a reta que passa por eles.
- Obtenha a equação dessa reta na forma reduzida (suportamente a mais simples para o caso em que dois pontos são dados).
- Obtenha a equação na forma geral manipulando algebricamente a equação obtida no item anterior.
- Use a equação na forma geral para obter o vetor normal e trace-o no mesmo plano cartesiano.
- Obtenha uma equação paramétrica que represente essa mesma reta usando as ideias de ponto inicial e direção da reta.

Para finalizar as questões sobre retas, discuta a questão a seguinte usando as respostas obtidas por seus colegas.

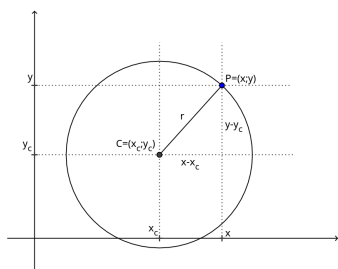
REFLITA → Compare com seus colegas para ver se todos obtiveram as mesmas respostas para os itens b, c e e. Em quais desses itens é possível obter respostas diferentes corretas?

## Circunferência

Agora vamos deixar para trás as retas e focar a atenção nas expressões algébricas que representam circunferências.

A forma mais comum de representá-las é a chamada **forma reduzida**:  $(x - x_c)^2 + (y - y_c)^2 = r^2$ , em que  $x$  e  $y$  são as coordenadas dos pontos que pertencem à circunferência,  $x_c$  e  $y_c$  são as coordenadas do centro e  $r$  é a medida do raio.

Essa expressão é obtida diretamente da definição de circunferência como sendo os pontos  $(x; y)$  que estão a uma mesma distância  $r$  de um ponto  $(x_c; y_c)$  chamado centro. A aplicação do teorema de pitágoras na imagem ao lado gera exatamente a expressão dada acima.



**Q12** Use a equação dada acima para responder as questões abaixo.

- Qual é a equação da circunferência com centro em  $(2; 1)$  e raio 3?
- Qual é a equação da circunferência com centro na origem e raio 1?
- Qual é o centro e raio da circunferência dada pela equação  $(x - 1)^2 + (y + 3)^2 = 4$ ?

Essa questão conclui a parte sobre retas, reunindo todas as formas vistas e sugerindo a conversão entre elas. A última delas deve ser a mais desafiadora por ser nova aos estudantes. Nossa sugestão é que se use uma abordagem intuitiva que começa com a escolha visual de um ponto inicial e depois de um vetor de direção e então a montagem da reta. A questão seguinte, do tipo Reflita, deve promover um pouco de discussão sobre essas escolhas.

A forma reduzida é única para cada reta (não vertical), mas a forma geral e a paramétrica admitem diversas equações para uma mesma reta (do ponto de vista geométrico). A forma geral pode ser multiplicada por constantes gerando novas equações para uma mesma reta. A forma paramétrica pode ter diferentes pontos iniciais e diferentes vetores direção (múltiplos um do outro). Pode-se argumentar que diferentes pontos iniciais e diferentes vetores de direção geram retas diferentes (no contexto da Física estaríamos falando de um mesmo trajeto iniciado em locais e com velocidades diferentes), mas a representação visual delas é a mesma.

Dependendo do andamento dos estudantes, esse pode ser um bom ponto de parada, já que o tópico vai mudar substancialmente. Essa decisão deve ser tomada com base nas dificuldades apresentadas pelos seus estudantes ou pelo eventual atraso dos capítulos de material em relação aos conteúdos das disciplinas regulares.

Essa questão não deve gerar muitas dúvidas. Para estudantes com dificuldades, você pode pedir que desenvolvam os quadrados e reescrevam as equações igualando-as à zero, pois esse é o ponto de partida para a próxima questão.

### A forma geral de uma circunferência

A forma geral de uma circunferência é obtida ao desenvolvermos os quadrados da forma reduzida e simplificarmos a expressão de modo que seja igual a zero. Veja o que ocorre com a equação dada no item c acima.

$$\begin{aligned}(x-1)^2 + (y+3)^2 &= 4 && \text{desenvolvendo as potências} \\(x^2 - 2x + 1) + (y^2 + 6y + 9) &= 4 && \text{agrupando termos} \\x^2 - 2x + y^2 + 6y + 1 + 9 - 4 &= 0 && \text{subtraindo 4 dos dois lados} \\x^2 - 2x + y^2 + 6y + 6 &= 0\end{aligned}$$

A última linha acima nos dá a forma geral da equação da circunferência discutida no item c da questão anterior. Note que as coordenadas do centro e o raio da circunferência não são mais claros na expressão. Mesmo assim, essa forma é usada por ser um caso específico de uma família de curvas chamadas cônicas, as quais podem ser descritas por equações com formato muito parecido com a forma geral de uma circunferência. Você estudará essas curvas em breve em Geometria Analítica.

Uma das situações comuns neste contexto é ter que identificar exatamente qual curva é representada por uma equação dada na forma geral. No momento, só conhecemos a circunferência, mas ainda resta o desafio de identificar seu centro e raio dada a sua equação na forma geral.

Vejamos o que poderia ser feito em relação à equação  $x^2 + 8x + y^2 - 6y - 11 = 0$ . Primeiro, note que o termo independente,  $-11$  é bem pouco útil, pois ele é o resultado da soma do termo independente resultante do primeiro quadrado, do segundo quadrado e do quadrado do raio. Os termos  $x^2$  e  $y^2$  também não oferecem muita informação sobre a forma reduzida, mas os termos  $8x$  e  $-6y$  podem ser úteis. Ambos são resultados puros de expressões do tipo  $(x+a)^2$  e  $(y+b)^2$ . Tendo em mente que  $(x+a)^2 = x^2 + 2ax + a^2$ , descobrimos que  $8x$  só pode ter vindo de uma expressão do tipo  $(x+4)^2$  e  $-6y$  de  $(y-3)^2$ . Logo, a forma reduzida da nossa circunferência deve ser  $(x+4)^2 + (y-3)^2 = r^2$ , ou seja, já sabemos que o centro da circunferência é  $(-4;3)$ .

Agora, vamos focar no raio. Se desenvolvermos os

quadrados da expressão acima, obtemos  $x^2 + 8x + y^2 - 6y + 25 - r^2 = 0$ . Logo,  $25 - r^2 = -11$ , o que implica que  $r = 6$ . Portanto, a circunferência de equação  $x^2 + 8x + y^2 - 6y - 11 = 0$  tem centro em  $(-4; 3)$  e raio igual a 6.

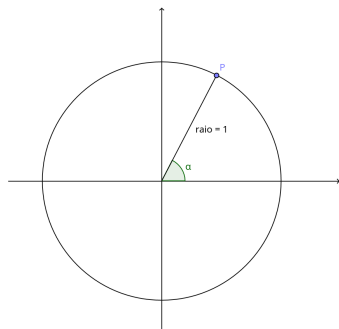
**Q13** Obtenha o raio e centro da circunferência dada pela equação  $x^2 + 2x + y^2 - 8y + 13 = 0$

**Q14** Visando praticar um pouco mais o uso da forma geral de uma circunferência, faça o que se pede a seguir:

- Escolha o centro e raio de uma circunferência, escreva a sua forma reduzida e desenvolva-a de modo a obter a sua forma geral.
- Passe apenas a forma geral para um colega e obtenha o centro e raio da circunferência por trás da forma geral que ele te passou.
- Cheque se ambos acertaram a questão.

### A forma paramétrica de uma circunferência

A equação paramétrica da circunferência é especialmente importante por oferecer uma conexão entre expressões do tipo polinomial e as relações trigonométricas. Vamos focar nas circunferências de raio 1 com centro na origem, como mostrado abaixo.



**Q15** Considerando a figura acima:

- Como a coordenada X do ponto P pode ser obtido em termos do ângulo  $\alpha$ ?
- Como a coordenada Y do ponto P pode ser obtido em

Essa questão é substancialmente mais difícil do que a anterior, mas pode ser resolvida do mesmo modo que o exemplo discutido no texto foi. Insista que os estudantes leiam o texto que antecede a questão antes de resolvê-la. Apesar de estarmos explorando apenas a circunferência, esse tipo de questão é comum em Geometria Analítica no contexto mais geral das curvas cônicas, portanto, não tenha pressa e certifique-se de que os estudantes entenderam o método ao invés de terem criado algum tipo de procedimento rígido para ele.

Não tenha pressa e gaste todo o tempo necessário para que essa questão seja bem entendida.

Como esse tipo de questão será comum logo mais em Geometria Analítica propomos mais uma questão similar para ser resolvida com um colega.

A questão visa apenas promover um pouco de prática com a forma geral da circunferência e de tópicos e procedimentos relacionados usando uma dinâmica um pouco diferente para trabalho em duplas.

termos do ângulo  $\alpha$ ?

- c) Se considerarmos  $\alpha$  como parâmetro, como ficaria a equação paramétrica da circunferência mostrada acima?

A simplicidade dessa equação paramétrica é um dos motivos dela ser tão amplamente utilizada, tanto para descrever curvas mais complexas quanto para calcular integrais.

### Explorado a forma paramétrica da circunferência

Para finalizar esse capítulo, vamos explorar um pouco mais a forma paramétrica da circunferência.

As questões a seguir são um pouco mais abertas do que as que você resolveu até agora e você vai precisar explorá-las um pouco mais autonomamente para conseguir resolvê-las. Por serem mais abertas, essas questões não possuem resposta no gabarito. Discuta as suas soluções com seus colegas e tutor.

**Q16** Você obteve a equação  $(x; y) = (\cos(t); \sin(t))$  para a circunferência de centro na origem e raio 1 na questão anterior. Quais são as semelhanças e diferenças entre ela e a curva obtida pela equação  $(x; y) = (\sin(t); \cos(t))$ ?

**Q17** Qual deve ser a equação paramétrica da circunferência com centro na origem e raio igual a 3?

**Q18** Esboce a curva gerada pela equação paramétrica  $(x; y) = (3 \cos(t); 4 \sin(t))$ . Como você descreveria essa curva?

**Q19** Qual deve ser a equação paramétrica da circunferência de raio 1 e centro em  $(2; 3)$ ?

Neste ponto a forma paramétrica da circunferência é introduzida. Apesar de não usual, essa forma ainda é bastante simples e não esperamos dificuldades. Essa equação especificamente não aparece na ementa de Geometria Analítica, mas a sua simplicidade facilita a exploração de equações paramétricas como um todo. Esse é o objetivo do bloco de questões a seguir: criar alguma familiaridade com equações paramétricas simples.

Fique atento com as questões anteriores, pois elas tem um caráter menos diretivo e mais aberto. Os estudantes podem se sentir perdidos por terem menos orientações explícitas sobre como proceder. Evite ser diretivo e foque em sugestões mais genéricas como: que tal tentar alterar um pouco a equação que você já conhece? Marque alguns pontos para essa equação e veja se você nota algo.

A única diferença se refere ao ponto em que a curva começa ( $t = 0$ ).

A equação é  $(x; y) = (3 \cos(t); 3 \sin(t))$ . Pode ser que os estudantes pensem em somar unidades à expressão de cada coordenada. Se surgir essa ideia, sugira que marquem alguns pontos (os ângulos múltiplos de  $90^\circ$  já são suficientes para notar o comportamento geral da curva).

Trata-se de uma elipse. Note que a aparência da curva não é suficiente para afirmar que de fato se trata de uma elipse (seria necessário demonstrar que a curva atende a definição formal de elipse).

A solução agora é obtida somando uma constante à expressão de cada coordenada.

## RUMO AO LIVRO-TEXTO

Neste capítulo, discutido diferentes formas de representar retas no plano cartesiano, ou seja, em um contexto com duas dimensões. Porém, em Geometria Analítica, você normalmente vai lidar com objetos no espaço, ou seja, em um contexto com três dimensões.

Essa mudança acrescenta um certo nível de dificuldade, mas quase tudo que discutidos aqui pode ser extrapolado ou usado como referência para entender o que ocorre em três dimensões. Por esse motivo, ao invés de resolver e propor uma questão do livro texto nesta seção, vamos sugerir uma leitura. Se você completou as questões propostas neste capítulo, sugerimos que você leia a seção 4.1 do livro Matrizes, Vetores e Geometria Analítica na qual o autor introduz as equações de planos e retas no espaço. Preste atenção especial aos exemplos e não se preocupe com as demonstrações na sua primeira leitura (volte a elas no futuro).

Com isso, esperamos que você consiga dar mais significados aos conceitos que serão discutidos na disciplina.

## GABARITO

Confira as respostas para as questões e **não se esqueça de registrar o seu progresso.**

Q1

Q2

$$y = 2x - 1$$

Q3

a)  $(10; 19)$  e  $(-1; -3)$ , b)  $(1/2; 0)$  e  $(0; -1)$ , c) Apenas C e D.

Q4

Q5

$$y = 2x - 2, \text{ por exemplo.}$$

- Q6 a)  $(2/3; 0)$  e  $(0; 1)$ , b) cheque com seu tutor ou colega.
- Q7
- Q8 a) cheque com seu tutor, b)  $(-1; 2)$  é uma possibilidade correta..
- Q9 a) e b) abaixo, c)  $2y + x - 3 = 0$ , d)  $-y + 5x - 13 = 0$ .
- Q10 a)  $(-1; 3)$ ,  $(3; 5)$  e  $(-3; 2)$ , c)  $t = -3$  e  $t = 1/2$ .
- Q11 b)  $y = 2x - 1$ , c)  $y - 2x + 1 = 0$ , d)  $\vec{V} = (-2; 1)$ , e)  $(x; y) = (1; 1) + (2; 4) \cdot t$ .
- Q12 a)  $(x - 2)^2 + (y - 1)^2 = 3^2$ , b)  $x^2 + y^2 = 1$ , c)  $(1; -3)$  e  $r = 2$ .
- Q13  $(-1; +4)$  e  $r = 2$ .
- Q14 a)  $x = \cos(\alpha)$ , b)  $y = \sin(\alpha)$ , c)  $(x; y) = (\cos(\alpha); \sin(\alpha))$ .

## AUTO-AVALIAÇÃO FINAL

Avalie o quanto você acha que sabe sobre os seguintes itens após ter resolvido as questões deste capítulo.

	Nada	Muito pouco	Noções gerais	Bastante
Traçar o gráfico de uma reta dada a sua equação				
Obter a equação de uma reta dados dois pontos				
Identificar a equação de uma circunferência				



Cheque como foi o seu progresso comparando essas respostas com as que você deu antes de estudar este capítulo. Caso você não tenha atingido o nível “Bastante” em algum dos tópicos acima, liste abaixo qual ação concreta você fará nos próximos dias para atingi-lo:

# Transformações em gráficos

## APRESENTAÇÃO

Uma parte grande do curso de Cálculo se dedica a compreender e analisar o gráfico de uma função através de suas derivadas.

De fato, a primeira e segunda derivadas de uma função oferecem informações que seriam, sem essas ferramentas, difíceis de avaliar com base apenas na expressão algébrica de uma função. Entretanto, algumas características podem ser identificadas sem o uso de derivadas e algumas transformações relativamente simples podem ser usadas para criar novas funções a partir das funções elementares que você já deve conhecer.

O que pretendemos neste capítulo é explorar exatamente essas características e transformações em preparação para as discussões sobre gráficos de funções que virão em breve envolvendo derivadas.

## COMENTÁRIOS INICIAIS

Esse capítulo é inteiramente focado em gráficos. Seu objetivo mais explícito é trabalhar com as três transformações que podem ser realizadas em gráficos de funções através da soma e produto por uma constante. Esse conteúdo é abordado na seção 1.3 do livro *Calculus*, ou seja, uma seção que já ficou para trás à bastante tempo. Nossa intenção é que a discussão feita aqui em tópicos que podem ser discutidos durante o Ensino Médio facilite o entendimento de aspectos que serão discutidos na

disciplina de Cálculo em breve, quando derivadas forem usadas para auxiliar no esboço de gráficos.

Além disso, o capítulo tem a intenção indireta de reforçar uma habilidade mais básica que pode não ter sido dominada por muitos estudantes: o esboço de gráficos de funções.

Por conta do foco escolhido, esse capítulo tem um número menor de questões, mas espera-se que os estudantes gastem muito mais tempo nos itens que pedem o esboço de um gráfico. Dependendo do ritmo do seu grupo, pode ser que o capítulo não seja completado em dois encontros. Nesse caso, sugerimos que você **não** aloque mais encontros a ele pois acreditamos que a prática com o esboço de gráficos (mesmo que não tenha sido com todos os gráficos aqui propostos) já será benéfica aos estudantes.

## PRÉ-REQUISITOS E AUTO-AVALIAÇÃO INICIAL

Os pré-requisitos para este capítulo são:

- Esboço de gráficos de funções elementares.

Esses tópicos não serão cobertos durante as atividades de tutoria. Se você acha que não sabe o suficiente sobre algum deles, sugerimos que procure material de apoio antes de começar a resolver as questões desse capítulo.

## QUESTÕES DIAGNÓSTICAS

- D1** Esboce o gráfico de  $p(x) = (x - 1)(x + 1)(x + 3)$ .
- D2** Obtenha a expressão algébrica de uma função seno cuja imagem seja o intervalo  $2 \leq y \leq 10$  e com período igual a  $\pi$ .

## GABARITO

**Questão 1:** Os três detalhes importantes nessa representação gráfica são: as três raízes ( $-1$ ,  $1$  e  $3$ ), o ponto em que o gráfico corta o eixo Y ( $(0, 3)$ ) e o comportamento do gráfico quando  $x$  cresce positivamente (gráfico crescente) e quando  $x$  cresce negativamente (gráfico decrescente).

## QUADRO DE ORIENTAÇÃO

Neste capítulo, o quadro de orientação não é necessário, pois queremos que os estudantes passem por todas as questões. A questão diagnóstica deve ser usada apenas para lhe informar a respeito do ritmo que você deve esperar dos estudantes. Estudantes que tenham acertado a questão diagnóstica não devem ter dificuldade em esboçar gráficos e devem, portanto, avançar muito mais rapidamente ao longo das questões.

## QUESTÕES

Como o foco deste capítulo é traçar o gráfico de funções, você notará que o estilo das questões será um pouco diferente. Progrida sem pressa, traçando todos os gráficos pedidos com atenção. Esse capítulo é uma boa oportunidade para se acostumar com esse tipo de questão.

Esperamos que ao final você terá adquirido uma boa fluência e será capaz de esboçar gráficos com mais confiança.

### Gráfico de funções elementares

Vamos começar este capítulo estabelecendo o gráfico de algumas funções que você já deve conhecer: linear, quadrática, exponencial e trigonométricas.

Se você já está familiarizado com elas, trace-as e depois confira a lista de características dada para se assegurar de que o seu esboço satisfaz as características esperadas.

Se você não está familiarizado, sugerimos que você: 1) monte uma tabela de valores para  $x$  e  $y$  com diversos pontos, 2) marque esses pontos no eixo cartesiano, 3) quando você estiver convencido sobre o formato do gráfico, trace-o.

Caso esses passos não façam sentido pra você, leia os exemplos 9 e 10 das páginas 302 e 303 do livro Matemática básica - volume 1.

Por fim, eis algumas recomendações que você pode seguir:

- Marque os pontos e esboce as curvas a lápis para que você possa apagá-las caso erre ou caso queira melhorá-las depois;
- Tente obter pontos em vários quadrantes, ou seja, use valores de  $x$  positivos e negativos para montar a sua tabela;
- Escolhe a escala dos eixos  $X$  e  $Y$  levando em conta os valores obtidos na sua tabela. Não há necessidade de

que as escalas sejam iguais;

- Indique pelo menos um valor numérico em cada um dos eixos para que a escala fique clara;
- Preste atenção especial aos pontos em que o gráfico corta o eixo Y (quando  $x = 0$ ) e o eixo X (as raízes, ou seja, quando  $f(x) = 0$ ).

## Q1

Use os eixos cartesianos dados na próxima página para esboçar o gráfico das funções pedidas abaixo.

- a)  $f(x) = x + 1$
- b)  $g(x) = x^2$
- c)  $h(x) = 2^x$
- d)  $i(x) = \sqrt{x}$
- e)  $j(x) = \sin(x)$
- f)  $l(x) = \cos(x)$

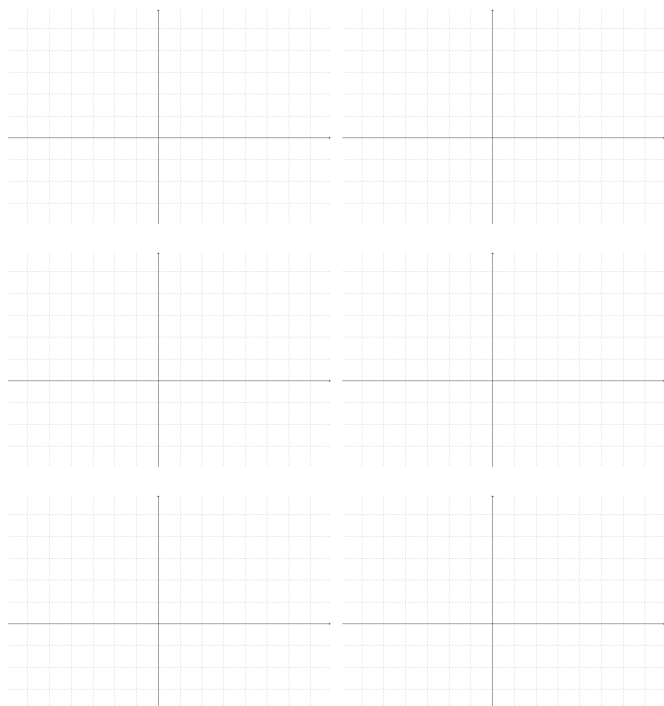
Uma vez desenhados os gráficos acima, cheque se os seus esboços satisfazem todas as características abaixo. Caso não, volte e os corrija.

- ☐ O gráfico de  $f(x)$  deve ser uma reta. Os eixos podem estar na mesma escala e, nesse caso, a reta deve ter inclinação de  $45^\circ$ ;
- ☐ O gráfico de  $f(x)$  não deve ser “curto”, como se fosse um segmento de reta, mas sim longo, cruzando eixos e indo além dos pontos marcados por você, sugerindo uma reta;
- ☐ O gráfico de  $g(x)$  deve passar pela origem e ser simétrico em relação ao eixo Y;
- ☐ O gráfico de  $g(x)$  deve ficar cada vez mais vertical a medida que os valores de  $x$  se afastam de zero, mas não deve ficar de fato vertical;
- ☐ O gráfico de  $h(x)$  deve se aproximar cada vez mais do eixo X a medida que os valores de  $x$  tendem a menos infinito, mas jamais deve cruzá-lo;
- ☐ O gráfico de  $h(x)$  deve ficar crescer muito rapidamente a medida que os valores de  $x$  aumentam, sem jamais ficar vertical;
- ☐ O gráfico de  $i(x)$  deve estar totalmente no primeiro quadrante;
- ☐ O gráfico de  $i(x)$  deve ser sempre crescente, mas cada vez mais lentamente (ficando mais horizontal a medida que  $x$  cresce);

Essa primeira questão servirá de base para todo o capítulo. A ideia é que os estudantes obtenham novos gráficos e os comparem com esses. Portanto, é de fundamental importância que os gráficos aqui estejam bem feitos. Por essa razão sugerimos a lista de checagem logo após a questão e várias instruções antes dela. Insista para que ambas sejam seguidas, especialmente se seus estudantes tiverem dificuldade na questão diagnóstica.

- ☐ O gráfico de  $j(x)$  e  $l(x)$  deve indicar claramente que as funções variam entre 1 e -1. Isso deve ser feito com indicações claras de valores no eixo Y;
- ☐ O gráfico de  $j(x)$  e  $l(x)$  deve indicar claramente que o período das funções é igual a  $2\pi$ , ou seja, a distância horizontal entre dois máximos consecutivos deve ser igual a  $2\pi$ . Isso deve ser feito com indicações claras de valores no eixo X.
- ☐ O gráfico de  $j(x)$  deve passar pela origem;
- ☐ O gráfico de  $l(x)$  deve cortar o eixo Y no ponto  $(0; 1)$ .





## Falando sobre gráficos

Existem três conceitos que são muito utilizados para descrever o gráfico de funções ou trechos específicos destes: crescente, decrescente e concavidade.

Esses três conceitos podem ser definidos formalmente e, dada uma função na sua forma algébrica, é possível demonstrar qual deles se aplica ao comportamento da função em um determinado ponto. Porém, aqui faremos uma abordagem mais intuitiva e visual, uma vez que a abordagem formal será feita na disciplina de Cálculo.

Um detalhe importante: ao avaliarmos visualmente o gráfico de uma função devemos “ler” o gráfico da esquerda para a direita (valores de  $x$  aumentando).

Dizemos que um trecho de um gráfico de uma função é **crescente** quando os valores de  $y$  aumentam a medida que os de  $x$  aumentam. Em termos gráficos, o segmento de curva em questão deve estar subindo (se analisarmos da esquerda pra direita). Por exemplo, o gráfico de  $i(x) = \sqrt{x}$  é crescente em todo o seu domínio (volte e cheque se você concorda com essa afirmação), enquanto o gráfico de  $j(x) = \sin(x)$  é crescente em alguns trechos (como o intervalo em que ele corta o eixo  $Y$ , de  $-\pi/2$  a  $\pi/2$ ) e não em outros.

Um exemplo de trecho **decrescente** ocorre na função  $g(x) = x^2$ , quando  $x < 0$ . Note que a curva nessa parte está descendo (se analisarmos da esquerda pra direita). Mas isso muda assim que a função cruza a origem e ela passa a ser crescente.



Considerando os gráficos traçados anteriormente, faça o que se pede em cada item.

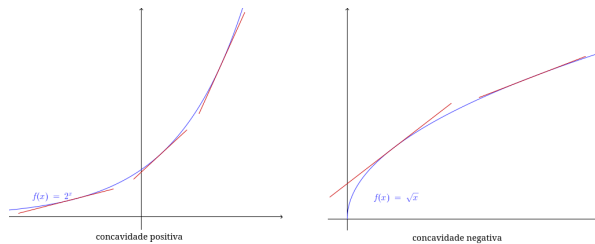
- a) A função  $f(x)$  é crescente ou decrescente?
- b) A função  $h(x)$  é crescente ou decrescente?
- c) Identifique um trecho em que a função  $l(x) = \cos(x)$  é crescente e outro em que ela é decrescente.

O conceito de **concavidade** surge ao compararmos o formato das gráficos de  $h(x) = 2^x$  e  $i(x) = \sqrt{x}$ . Ambos são crescentes, mas se comportam de maneira diferente:  $h(x)$  fica cada vez mais vertical enquanto que  $i(x)$  fica cada vez mais horizontal. A diferença entre eles está na

O objetivo da questão e da próxima é introduzir um vocabulário que será muito utilizado em breve pelo professor de MA111. Como enfatizado no texto, não é importante se preocupar com o rigor dos conceitos mas com a interpretação visual deles. Use gestos e exemplos informais para explicar o significado de crescente e decrescente e de concavidade positiva ou negativa.

concauidade de cada um deles. Diz-se que  $h(x) = 2^x$  tem concauidade positiva enquanto  $i(x) = \sqrt{x}$  tem concauidade negativa.

Para distinguirmos esses dois casos visualmente, podemos traçar pequenas tangentes aos gráficos em alguns pontos. Se todas as tangentes ficarem abaixo do gráfico em um intervalo (como no gráfico à esquerda abaixo) dizemos que ela tem concauidade positiva nesse intervalo. Caso contrário, a concauidade é negativa (como no gráfico à direita abaixo).



Considerando os gráficos traçados no começo deste capítulo, faça o que se pede em cada item.

- Qual é a concauidade da função  $g(x)$ ? Ela mantém essa mesma concauidade para todo o seu domínio?
- Identifique um trecho em que a função  $j(x) = \sin(x)$  tem concauidade positiva e outro com concauidade negativa.

### Aviso

Deste ponto em diante, os gráficos devem ser esboçados no seu caderno. Sugerimos que use **caneta** para traçar os eixos e **lápiz** para esboçar as curvas obtidas.

Além disso, todas as questões a seguir dependem da comparação de novos gráficos com os gráficos feitos na questão 1. Para facilitar a comparação, sugerimos que você use a **mesma escala** utilizada para esboçar o gráfico de referência.

Maiss uma vez, não tenha pressa ao resolver as questões a seguir. Se for necessário, faça uma tabela de valores, marque alguns pontos e então esboce o gráfico.

### Negativo

Vamos começar investigando o que ocorre com o gráfico de funções quando introduzimos sinais de negativo em suas expressões. Tecnicamente, o que estamos fazendo é

multiplicando a função como um todo ou a variável por  $-1$ .

**Q4** Usando como referência o gráfico de  $h(x)$ :

- a) Esboce o gráfico das funções  $a(x) = -(2^x)$  e  $b(x) = 2^{-x}$ ?
- b) Como você descreveria o impacto causado pela multiplicação da função como um todo por  $-1$  ( $a(x) = -(2^x)$ )?
- c) Como você descreveria o impacto causado pela multiplicação da variável por  $-1$  ( $b(x) = 2^{-x}$ )?

### Soma de constante à função

**Q5** Usando como referência o gráfico de  $i(x)$ :

- a) Esboce o gráfico da função  $c(x) = \sqrt{x} + 2$ .
- b) Descreva o efeito gráfico de somarmos uma constante a uma função dada.
- c) Descreva com suas palavras, sem esboça-lo, como seria o gráfico da função  $c(x) = \sqrt{x} - 1$  em relação ao gráfico de  $i(x)$ .

### Multiplicação da função por uma constante

**Q6** Usando como referência o gráfico de  $l(x)$ :

- a) Esboce o gráfico da função  $d(x) = 2 \cos(x)$ .
- b) Descreva o efeito gráfico de multiplicarmos uma função dada por uma constante.
- c) O que ocorrerá se a constante for positiva, mas menor do que 1?

### Mais casos envolvendo somas

**Q7** Usando como referência o gráfico de  $g(x)$ :

- a) Esboce os gráficos das funções  $p(x) = x^2 + 1$  e  $q(x) = (x + 1)^2$ .

Essas são as duas primeiras questões em que as funções iniciais são modificadas e o efeito nos seus gráficos são analisados. Incentive que os estudantes usem as suas palavras para descrever os efeitos, mas tente introduzir pouco a pouco termos mais precisos como reflexão em relação aos eixos e translação.

Se seus estudantes ainda precisarem da tabela de valores para esboçar os gráficos, dê tempo para que façam dessa forma. Essa prática é importante e, mesmo que demorada, deve promover habilidades importantes.

O efeito discutido nessa questão, informalmente tratado como um encolhimento ou esticamento, pode ser descrito em termos da imagem da função ou, no caso de funções trigonométricas, de suas amplitudes. Aproveite a oportunidade para utilizar esses conceitos quando interagir com seus estudantes.

- b) Descreva o que aconteceu com o gráfico de  $p(x)$ .
- c) Descreva o que aconteceu com o gráfico de  $q(x)$ .
- d) Qual é a diferença do que foi feito com  $g(x)$  para obter  $p(x)$  e  $q(x)$ ?
- e) Qual transformação deve ser feita na função  $e(x) = \sin(x)$  para que o seu gráfico se desloque horizontalmente 2 unidades para a direita?

Em funções periódicas, como as trigonométricas, o deslocamento horizontal é chamado de mudança de fase.

### Outra multiplicação



- Usando como referência o gráfico de  $e(x)$ :
- a) Esboce os gráficos das funções  $t(x) = \sin(2x)$  e  $u(x) = \sin(2\pi x)$ .
  - b) Qual é o período de cada uma das funções?
  - c) Como você descreveria o efeito na função seno de multiplicarmos a variável por uma constante?

### Finalização

Nas questões anteriores você pôde visualizar o efeito que quatro transformações algébricas diferentes:

- multiplicar a função por uma constante;
- multiplicar a variável por uma constante;
- somar uma constante à função;
- somar uma constante à variável.

Cada uma dessas transformações algébricas causa um efeito geométrico no gráfico da função. Esses efeitos são mais simples de visualizar em algumas funções específicas, sendo bem difíceis de visualizar em outros casos.

Poderíamos fazer uma lista das transformações e seus efeitos para que você decorasse e soubesse identificar rapidamente certas características de certas funções, porém, não é esse o foco deste material. O que

O conceito de período é introduzido no enunciado dessa questão. Existe uma fórmula que costumava ser ensinada no Ensino Médio para resolver o item b, mas é importante que ela **não** seja usada nessa questão. Ao contrário, pode-se argumentar verbalmente algo como: a função seno completa seu ciclo quando  $x$  varia de 0 a  $2\pi$  (pense no ciclo trigonométrico). Como  $x$  está sendo multiplicado por 2 (no caso da função  $t(x)$ ), quando ele varia de 0 até  $\pi$ , a multiplicação já varia de 0 a  $2\pi$ , completando o ciclo "antes".

Nossa intenção não é de que os estudantes terminem este capítulo com uma lista de mudanças algébricas e seus efeitos no gráfico. O importante é que eles criem uma sensibilidade em relação a possíveis efeitos que mudanças simples podem causar no gráfico e, paralelamente, se sintam mais confortáveis em esboçar gráficos a partir de expressões algébricas acertando seus principais elementos.

pretendemos é que você saiba que transformações algébricas como soma e multiplicação, seja da função como um todo ou da variável, têm efeitos previsíveis no gráfico da função e que esses efeitos são essencialmente de dois tipos:

- deslocamento (vertical ou horizontal);
- encolhimento/esticamento (vertical ou horizontal).

Ter esses efeitos em mente deve facilitar o seu trabalho quando você também utilizar derivadas para esboçar o gráfico de uma função dada.

Na questão a seguir, você deverá esboçar quatro gráficos em um mesmo eixo cartesiano. Muito mais importante do que a precisão e os detalhes dos gráficos, é a possibilidade de compararmos qualitativamente o comportamento geral de um com o outro.



Esboce em um mesmo eixo cartesiano e **sem utilizar uma tabela de valores** o gráfico das quatro funções abaixo. Sugestão: use 4 cores diferentes.

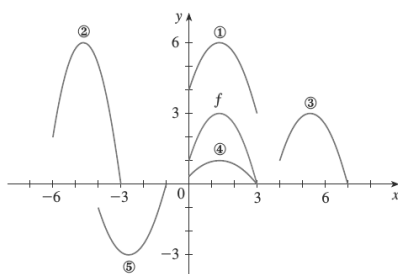
- a)  $j_a(x) = 2 \sin(x)$
- b)  $j_b(x) = \sin\left(\frac{x}{4}\right)$
- c)  $j_c(x) = \sin(x) - 1$
- d)  $j_d(x) = \sin(x + \pi)$

Neste ponto do material, é importante que os estudantes tentem esboçar os gráficos sem utilizar tabelas de valores. Se eles não tiverem generalizado os efeitos discutidos, peça que voltem e encontrem as questões em que a mesma mudança algébrica tenha sido feita e analisem o efeito no gráfico. Essa questão sintetiza todo o conteúdo do capítulo, mas não tente transformá-la em uma lista associando cada transformação algébrica com um efeito geométrico, pois o que queremos aqui é criar uma familiaridade mais qualitativa na análise de gráficos de funções.

## RUMO AO LIVRO-TEXTO

A questão abaixo foi retirada da seção 1.3 do livro Calculus, de James Stewart. Pode parecer um retrocesso em termos de conteúdo voltar para o primeiro capítulo do livro, mas essa seção está fortemente ligada ao que será discutido no capítulo 4 e ao que discutimos neste capítulo.

QUESTÃO RESOLVIDA → O gráfico de  $y = f(x)$  é dado abaixo associe as expressões algébricas abaixo aos outros gráficos dados e dê uma razão para as suas escolhas.



- a)  $y = f(x - 4)$
- b)  $y = f(x) + 3$
- c)  $y = \frac{1}{3}f(x)$
- d)  $y = -f(x + 4)$
- e)  $y = 2f(x + 6)$

Nessa questão, a expressão algébrica da função não foi dada, apenas o seu gráfico. Note que o gráfico  $f$  está definido apenas no intervalo de 0 a 3. Algumas outras conclusões podem ser tiradas facilmente do gráfico, como  $f(0) = 1$ ,  $f(3) = 0$  e o valor máximo da função é 3.

Para começarmos a identificar qual dos demais gráficos se referem a cada uma das transformações dadas, vamos começar com os gráficos mais parecidos com o de  $f$ . Na minha opinião, 1 e 3 são os mais simples, pois ambos parecem ter exatamente o mesmo formato e estarem apenas deslocados horizontalmente ou verticalmente. Começando por 1, os valores da função parecem ser

As questões discutida e resolvida deste capítulo lidam com o gráfico de funções sem que haja uma expressão algébrica estabelecida para elas. Trata-se de mais um passo de abstração dentro do conteúdo aqui discutido.

exatamente 3 unidades maiores do que  $f$ , ou seja, teríamos que somar 3 à função, ou seja, o gráfico 1 corresponde à expressão  $b$ .

Por outro lado, o gráfico 3 foi deslocado 4 unidades para a direita, o que é compatível com a expressão  $a$ .

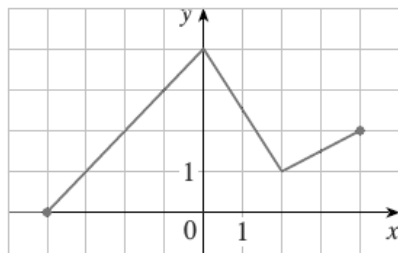
O gráfico 4 parece não ter sido deslocado, apenas “achado”. Note que o máximo da função passou a ser 1 ao invés de 3. Esse efeito é alcançado ao dividirmos a função por 3, o que é compatível com a expressão  $c$ .

Nos restam os gráficos 5 e 2. Note que o gráfico 5 está refletido, além de ter sido deslocado. Sabemos que um gráfico é refletido verticalmente quando a função como um todo é multiplicada por  $-1$ , e isso é compatível com a expressão  $d$ .

Portanto, o gráfico 2 deve vir da expressão  $e$ . Isso é coerente, pois esse gráfico foi claramente “esticado” verticalmente, o que é compatível com a expressão  $e$ .

Agora, resolva a questão a seguir, retirada da mesma seção do livro Calculus.

QUESTÃO DO LIVRO-TEXTO → O gráfico de  $f$  é dado abaixo. Esboce o gráfico das seguintes funções:



- a)**  $y = f(x + 4)$
- b)**  $y = f(x) + 4$
- c)**  $y = 2f(x)$
- d)**  $y = -\frac{1}{2}f(x) + 3$



## GABARITO

Confira as respostas para as questões e **não se esqueça de registrar o seu progresso.**

Questões sobre esboço de gráficos não terão gabarito, com exceção da questão 10.

- Q1** Questão sem gabarito. Cheque a lista logo após a questão para cobrir características básicas de cada gráfico e pergunte a seu tutor se os esboços estão bons.
- Q2** a) crescente, b)  $g(x)$  é decrescente para  $x < 0$  e crescente para  $x > 0$ .
- Q3** a) concavidade positiva, b) no intervalo  $0x < \pi$ .
- Q4** **Questão 4:** b) O gráfico foi refletido verticalmente, ou seja, em relação ao eixo X, c) O gráfico foi refletido horizontalmente, ou seja, em relação ao eixo Y.
- Q5** b) o gráfico da função se desloca verticalmente, c) o gráfico se deslocaria para baixo, passando a assumirmos alguns valores positivos. Seu mínimo seria em  $(0; -1)$  e raiz em  $(1; 0)$ .
- Q6** b) O gráfico da função é esticado verticalmente, b) O gráfico será encolhido verticalmente, c) O gráfico será refletido verticalmente e depois encolhido ou esticado, dependendo do módulo da constante.
- Q7** b) Foi deslocado uma unidade para cima, c) Foi deslocado uma unidade para a esquerda, c) em  $p(x)$  a constante foi soma à função e em  $q(x)$  à variável, d)  $e(x) = \sin(x - 2)$ .
- Q8** b) O período de  $t(x)$  é  $\pi$  e o de  $u(x)$  é 1, c) O gráfico da função é encolhido horizontalmente. Se a função for periódica, podemos dizer que o seu período foi alterado.
- Q9**

## REGISTRO DE PROGRESSO

Essa parte por enquanto fica com conteúdo vazio até que seja decidido como será feito o controle do progresso.

## AUTO-AVALIAÇÃO FINAL

Avalie o quanto você acha que sabe sobre os seguintes itens após ter resolvido as questões deste capítulo.

	Nada	Muito pouco	Noções gerais	Bastante
Traçar o gráfico de uma função simples				
Deslocar o gráfico de uma função no plano cartesiano				
Obter a expressão algébrica de uma função a partir do seu gráfico				

Cheque como foi o seu progresso comparando essas respostas com as que você deu antes de estudar este capítulo. Caso você não tenha atingido o nível “Bastante” em algum dos tópicos acima, liste abaixo qual ação concreta você fará nos próximos dias para atingi-lo:



# Revisão para integrais por partes

---

## APRESENTAÇÃO

O objetivo deste capítulo é promover uma revisão de alguns tópicos e habilidades que são necessárias para dominar a técnica de integração chamada **integração por partes**.

Você notará uma diferença grande entre o tom adotado neste capítulo (e nos próximos) e o tom dos anteriores. Isso se deve ao fato de a abordagem ter intencionalmente mudado: ao invés de revisitarmos tópicos do Ensino Médio de um ponto de vista mais conceitual visando oferecer suporte para as disciplinas Cálculo Diferencial e Integral e Geometria Analítica, faremos uma revisão mais focada em tópicos que já foram abordados nessas disciplinas e serão utilizados intensamente em tópicos vindouros.

Além da mudança no conteúdo, a extensão do capítulo também mudou: agora está mais curto. A intenção é que você possa resolver todas as questões aqui presentes em um único encontro da tutoria e utilize o tempo restante para resolver, com auxílio do tutor, exercícios das listas oficiais das disciplinas sobre o tópico que acabou de estudar.

Por fim, retiramos as questões diagnósticas e a auto-avaliação porque os tópicos que serão tratados aqui são novidade para todos os estudantes e esperamos que todos vocês resolvam o capítulo na íntegra.

## NOTA EXPLICATIVA

Este capítulo é o primeiro dos três capítulos finais da tutoria. Estes capítulos tem uma proposta diferente dos capítulos anteriores. O motivo dessa mudança está no fato de o conteúdo de Cálculo Diferencial e Integral e Geometria Analítica terem atingido um ponto em que os pré-requisitos são outros tópicos vistos anteriormente nas mesmas disciplinas e não mais tópicos que poderiam ter sido estudados anteriormente no Ensino Médio.

Na verdade, os três capítulos estão focados em tópicos de Cálculo Diferencial e Integral e são bastante específicos (técnicas de integração) e parece-nos mais razoável propor atividades mais focadas no uso específico que será feito de conteúdos como frações algébricas, identidades trigonométricas e regra do produto. Dessa forma, o ritmo mais dialogado e conceitual adotado anteriormente dá lugar a uma ênfase mais explícita nas técnicas mencionadas.

Também houveram mudanças na estrutura do material. São elas:

- **Não há mais questões diagnósticas**, já que esperamos que os tópicos aqui tratados serão novos para todos os estudantes. Consequentemente, não há mais um quadro de orientação e para o estudante não há mais quadro de auto-avaliação;
- **A seção Rumo ao Livro-Texto foi removida**. Ao final das questões, sugerimos a leitura de uma seção e alguns exemplos do livro-texto. A intenção é que após essa leitura, os estudantes estejam prontos para resolver questões das listas de exercícios oficiais da disciplina. Pelo mesmo motivo não sugerimos questões adicionais para o tutor;
- **O capítulo é mais curto** e o tempo restante deve ser usado para auxiliar os estudantes na resolução de questões da lista de exercícios oficial da disciplina.

Um detalhe importante continua igual: dê tempo para que os estudantes resolvam as questões com atenção, leiam os textos e compreendam o que estão fazendo. Apesar das questões mais focadas, a tutoria deve continuar focando em entendimento dos conceitos e não para prática de resolução de exercícios.

VOcê também notará que há menos notas laterais no seu material. Isso se deve ao fato de as questões neste capítulo serem muito mais diretas, ligadas ao conteúdo regular da disciplina e menos conceituais.

## COMENTÁRIOS INICIAIS

Este capítulo é focado no uso da regra do produto com o objetivo de calcular integrais usando a técnica chamada de integração por partes. Ao longo do texto, tentaremos focar mais na regra do produto em si e não nas integrais, pois isso será feito pelo professor de MA111.

Nosso objetivo aqui não é sistematizar o método através de fórmulas como  $\int u dv = uv - \int v du$ . Ao contrário, o que queremos é revisar a regra do produto e deixar claro como ela pode ser usada para calcular algumas integrais que envolvem produtos de funções simples.

Será comum ao longo do capítulo a manipulação algébrica de igualdades envolvendo integrais e derivadas. Seus estudantes provavelmente estranharam esse processo, mas isso ocorre simplesmente pelo fato de as igualdades envolverem integrais e derivadas. As regras para manipulação de igualdades continuam valendo: somar dos dois lados, multiplicar dos dois lados assim por diante. No final das contas, isso é tudo que precisaremos para este capítulo.

## QUANDO USAR

Este capítulo deve ser resolvido logo antes do professor de MA111 abordar integração por partes ou logo que ele iniciar esse tópico.

## CONTEÚDOS ANTERIORES

O conteúdo central desta revisão é a regra do produto para derivação de funções, ou seja, não tem problema começar a resolver as questões se você não estiver tão seguro em relação a esse tópico. Porém, os tópicos abaixo são pré-requisitos para este capítulo:

- Derivada das funções exponenciais, polinomiais, trigonométricas e logarítmicas.

Esses tópicos não serão cobertos durante as atividades de tutoria. Se você acha que não sabe o suficiente sobre

algum deles, sugerimos que procure material de apoio antes de começar a resolver as questões deste capítulo.

## QUESTÕES

A regra do produto foi introduzida como uma técnica para obter a derivada de funções que podem ser vistas como um produto de duas funções mais simples como, por exemplo,  $f(x) = x^3 \cdot 2^x$ . Essa função pode ser vista como o produto das funções  $g(x) = x^3$  e  $h(x) = 2^x$ , ambas simples de derivar isoladamente.

A regra do produto nos diz que:

$$\text{Seja } f(x) = g(x) \cdot h(x), \text{ então} \\ f'(x) = g'(x) \cdot h(x) + g(x) \cdot h'(x).$$

Aplicando ao nosso exemplo, temos que  $g'(x) = 3x^2$  e  $h'(x) = \ln(2) \cdot 2^x$ , portanto:

$$\begin{aligned} f'(x) &= g'(x) \cdot h(x) + g(x) \cdot h'(x) \\ &= (3x^2) \cdot (2^x) + (x^3) \cdot (\ln(2) \cdot 2^x) \\ &= 3x^2 \cdot 2^x + \ln(2) \cdot x^3 \cdot 2^x \end{aligned}$$

O objetivo desta lista é relembrar essa técnica e praticar a fluência com ela. Também veremos como utilizá-la para a obtenção de integrais que não podem ser calculadas diretamente.

### Regra do produto

Vamos começar praticando a regra do produto.

Q1

Use a regra do produto para calcular a derivada das seguintes funções.

- a)  $f(x) = x \cdot e^x$
- b)  $g(x) = x \cdot \cos(x)$
- c)  $h(x) = x \cdot \sin(x)$
- d)  $i(x) = x \cdot \ln(x)$

O capítulo começa com uma revisão sobre a regra do produto, focada em casos que são normalmente usados como introdução para integração por partes.

e)  $j(x) = x^2 \cdot \ln(x)$

### Uma integral não elementar

Na questão anterior bastou aplicar a regra do produto para obtermos a derivada de  $f(x) = x \cdot e^x$ , que é dada por  $f'(x) = e^x + x \cdot e^x$ . Será que isso nos ajuda a calcular a integral de  $f(x)$ , ou seja,  $\int x \cdot e^x dx$ ?

Note primeiro que  $\int x \cdot e^x dx$  não pode ser resolvida através de uma troca de variáveis (teríamos que fazer  $u = e^x$ , o que criaria um logaritmo ao substituirmos  $x$ ). Como claramente se trata de um produto de duas funções que isoladamente são muito simples de derivar e integrar, vamos tentar usar o resultado obtido na item a acima.

Para tanto, note que a segunda parcela de  $f'(x) = e^x + x \cdot e^x$  é igual à função que queremos integrar. Portanto, vamos isolar essa parte, obtendo  $f'(x) - e^x = x \cdot e^x$  ou, finalmente,  $x \cdot e^x = f'(x) - e^x$ . Agora, vamos integrar os dois lados da igualdade.

$$\begin{aligned} \int x \cdot e^x dx &= \int (f'(x) - e^x) dx && \text{Usando propriedades das integrais} \\ \int x \cdot e^x dx &= \int f'(x) dx - \int e^x dx && \text{Sabemos que } \int f'(x) dx = f(x) + c_1 \\ \int x \cdot e^x dx &= f(x) + c_1 - \int e^x dx && \text{Calculando uma das integrais} \\ \int x \cdot e^x dx &= f(x) + c_1 - e^x + c_2 && \text{Lembre-se de que } f(x) = x \cdot e^x \\ \int x \cdot e^x dx &= x \cdot e^x + c_1 - e^x + c_2 && \text{Combinando as constantes} \\ \int x \cdot e^x dx &= x \cdot e^x - e^x + c \end{aligned}$$

Na última linha acima obtemos a integral desejada. Em resumo, o que fizemos foi isolar a expressão que queríamos integrar no resultado da aplicação da regra do produto e, depois, integramos os dois lados da igualdade.



Façamos o mesmo com o resultado do item b da primeira questão para calcular  $\int x \cdot \sin(x) dx$ .

- a) Isole  $x \cdot \sin(x)$  no resultado obtido no item b da primeira questão.

As duas questões a seguir propõem dois casos bastante simples de integração por partes. Insista que os estudantes leiam e entendam o processo feito logo acima.



- b) Integre os dois lados da igualdade obtendo  $\int x \cdot \sin(x) dx$ .

**Q3** Faça o mesmo com o resultado do item c para calcular  $\int x \cdot \cos(x) dx$

### Logaritmos

Você já notou que apesar de ser uma função simples você ainda não calculou a integral de  $a(x) = \ln(x)$ ? Isso ocorre porque a técnica que você usou acima é necessária para calcular essa integral.

**Q4** Use o resultado do item d da primeira questão para calcular  $\int \ln(x) dx$ .

Agora que você já praticou esse processo algumas vezes, tente resolver a questão a seguir.

**Q5** Use o resultado do item e da primeira questão obter a integral de uma função não elementar.

- a) Qual é essa função?
- b) Qual é a sua integral?

Dessa vez, o estudante não sabe qual integral irá obter ao final do processo. Esse não costuma ser o caso em exercícios regulares da disciplina, mas pode ajudar a promover a familiaridade com os elementos envolvidos na técnica de integração por partes.

### Um novo caso

Veja que na questão anterior, começamos aplicando a regra do produto à função  $j(x) = x^2 \cdot \ln(x)$  e terminamos obtendo a integral de  $x \cdot \ln(x)$ . Na questão 4, começamos aplicando a regra do produto à função  $i(x) = x \cdot \ln(x)$  e terminamos obtendo a integral de  $\ln(x)$ . Você já deve ter notado um padrão nesses resultados, mas se ainda não, aplique a regra do produto para obter a derivada da função  $t(x) = x^3 \cdot \ln(x)$  e observe as potências dos termos obtidos.

**Q6** Obtenha  $\int x^5 \cdot \ln(x) dx$ .

Uma vez um pouco familiarizados com o processo, essa questão demanda um pouco de reconhecimento de padrões. O texto logo antes da questão sugere um exemplo mais simples que pode ser resolvido antes caso o estudante não saiba o que fazer. Insista na sugestão caso isso ocorra.

## Duas vezes

Em alguns casos, duas regras do produto aplicadas a funções diferentes podem ser combinadas gerando resultado úteis, como acontecerá na questão a seguir.



Vamos tentar obter  $\int e^x \cdot \cos(x) dx$ .

- a) Comece aplicando a regra do produto à função  $f(x) = e^x \cdot \cos(x)$  e integrando os dois lados da igualdade.
- b) Faça o mesmo processo com a função  $g(x) = e^x \cdot \sin(x)$ .
- c) Note que as duas expressões acima possuem vários termos em comum. Some as duas igualdades e tente isolar os termos de modo a obter uma expressão para  $\int e^x \cdot \cos(x) dx$  que não envolva outras integrais.

Essa última questão é um pouco mais sofisticada por combinar resultados de duas regras do produto diferentes. Mas esperamos que ainda não seja tão complicado a ponto de ofuscar o processo por trás da resolução.

## MENSAGEM FINAL

O processo que você utilizou para resolver todas as questões anteriores é a justificativa por trás da técnica de integração conhecida como **integral por partes** que será discutida pelo seu professor de MA111. Esse processo pode ser condensado através da fórmula mostrada abaixo.

$$\int f(x) \cdot g'(x) dx = f(x) \cdot g(x) - \int f'(x) g(x) dx$$

Essa fórmula facilita o uso dessa técnica no cálculo de integrais, porém, ela nada mais é do que uma síntese do que fizemos anteriormente: regra do produto, isolamento da parcela que interessa e integração dos dois lados da igualdade.

Nossa sugestão é que agora você leia a seção 7.1 do livro Calculus até o final do quarto exemplo e então resolva os exercícios da lista oficial de MA111 sobre integração por partes.

Aproveite a disponibilidade do tutor e a introdução feita

acima para ter certeza de que você compreende bem o uso dessa técnica. Sugerimos que você priorize o entendimento do processo no lugar da quantidade de questões resolvidas e deixe essa parte para um segundo momento quando estiver estudando depois da tutoria.

## COMENTÁRIOS FINAIS

A abordagem que usamos ao longo deste capítulo não é a mais prática para uso da técnica de integração por partes. Fórmulas como a que foi apresentada no início do capítulo facilitam a aplicação do método e diminuem a necessidade de "sacadas", como a que foi necessária na questão 7. Entretanto, isso será feito pelo professor de MA111.

Quando completarem a lista, sugerimos aos estudantes a leitura da seção e de alguns exemplos referente a essa técnica no livro Calculus. Em seguida, eles devem resolver questões da lista de exercícios da disciplina. Quando chegarem a este ponto, não exija que os estudantes usem o método que usamos ao longo do capítulo, mas sim o método que o professor da disciplina estiver utilizando.

## GABARITO

Confira as respostas para as questões e **não se esqueça de registrar o seu progresso.**

Q1 a)  $f'(x) = e^x + xe^x$ , b)  $g'(x) = \cos(x) - x \sin(x)$ , c)  $h'(x) = \sin(x) + x \cos(x)$ , d)  $i'(x) = \ln(x) + 1$ , e)  $i'(x) = 2x \cdot \ln(x) + x$ .

Q2 a)  $x \sin(x) = \cos(x) - g'(x)$ , b)  $\int x \sin(x) dx = \sin(x) - x \cos(x) + c$ .

Q3  $\int x \cos(x) dx = \cos(x) + x \sin(x) + c$ .

Q4  $\int \ln(x) dx = x \cdot \ln(x) - x + c$ .

Q5 a)  $f(x) = x \cdot \ln(x)$ , b)  $\int x \cdot \ln(x) dx = \frac{x^2 \ln(x)}{2} - \frac{x^2}{4} + c$ .

Q6  $\int x^5 \cdot \ln(x) dx = \frac{x^6 \ln(x)}{6} - \frac{x^6}{36} + c.$

Q7 a)  $e^x \cdot \sin(x) = \int e^x \sin(x) dx + \int e^x \cos(x) dx$ , b)  
 $e^x \cdot \cos(x) = \int e^x \cos(x) dx - \int e^x \sin(x) dx$ , c)  
 $\int e^x \cos(x) dx = \frac{e^x \cos(x) + e^x \sin(x)}{2}.$

# 1 Revisão para integrais trigonométricas

## APRESENTAÇÃO

Este capítulo usará a integral de uma função aparentemente simples,  $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$ , como mote para revisar alguns conteúdos utilizados em duas técnicas de integração ligadas a funções trigonométricas que você irá estudar em MA111.

Em linhas gerais, o que queremos reforçar neste capítulo são algumas igualdades envolvendo senos, cossenos e tangentes que nos permitirão fazer mudanças estratégicas em certas funções de modo a torná-las mais simples de integrar.

## COMENTÁRIOS INICIAIS

Esse capítulo é focado em algumas identidades trigonométricas que são fundamentais para as técnicas de integração chamadas **integrais trigonométricas** e **substituição trigonométricas**.

Além de relembrar essas identidades, este capítulo foca em usos compatíveis com o que será feito na disciplina de Cálculo Diferencial e Integral.

Ao longo do capítulo algumas integrais envolvendo as funções trigonométricas seno, cosseno e tangente serão necessárias.

Um ponto importante em relação às identidades trigonométricas é que os estudantes vejam que todas podem ser obtidas a partir de um conjunto menor formado, essencialmente por:

$$\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$$

$$\sin(a + b) = \sin(a) \cos(b) + \sin(b) \cos(a)$$

$$\cos(a + b) = \cos(a) \cos(b) - \sin(a) \sin(b)$$

A primeira pode ser rapidamente obtida a partir do teorema de pitágoras, mas as outras duas são mais trabalhosas para obter e precisam ser decoradas. Além de lembrar das identidades acima, é importante saber como usá-la e esperamos que a sequência de questões propostas faça esse trabalho.

## QUANDO USAR

Este capítulo deve ser resolvido antes do professor de MA111 abordar substituição trigonométrica e integrais trigonométricas, ou assim que ele iniciar esses tópicos.

## CONTEÚDOS ANTERIORES

O conteúdo deste capítulo gira em torno das funções trigonométricas com que você vem trabalhando na disciplina MA111. Como o nosso foco aqui será menos no cálculo das integrais e mais nas transformações que podemos fazer em alguns integrandos, os pré-requisitos deste capítulo são:

- Definição de seno e cosseno;
- Definição de tangente e secante.
- Integral e derivada das funções seno e cosseno.

Esses tópicos não serão cobertos durante as atividades de tutoria. Se você acha que não sabe o suficiente sobre

algum deles, sugerimos que volte ao capítulo sobre polinômios deste material e os revise.

## QUESTÕES

Como dito na introdução, vamos explorar a integral da função real  $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$ . Antes de partirmos para a sua integral de fato, vamos explorar alguns aspectos da função.

### Domínio, imagem e gráfico

Vamos começar com algumas propriedades fundamentais dessa função.

**Q1** Considerando a função  $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$ , responda:

- a) Qual é o seu domínio?
- b) Quais são as raízes da função?
- c) Em que ponto o seu gráfico corta o eixo Y?
- d) Qual é a imagem da função?

Como você deve ter concluído nas questões acima, essa função é definida apenas no intervalo  $[-2; 2]$ . Fora dele, teríamos a raiz de um número negativo, o que não é definido nos números reais.

No que diz respeito à imagem da função, é importante salientar que a expressão  $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$  poderia ser interpretada como ambígua, já que não esclarece se deve ser tomada a raiz positiva ou negativa de  $4 - x^2$  e uma função deve assumir um único valor para cada valor de  $x$ . Entretanto, convencionalmente, o símbolo de raiz quadrada no contexto de funções deve ser interpretado como a raiz quadrada positiva. Nesse caso, a imagem da função é o intervalo  $[0; 2]$ .

**Q2** Manipule algebricamente a função na forma  $y = \sqrt{4 - x^2}$  de modo a obter uma expressão que seja familiar.

- a) Que curva essa expressão representa?
- b) Esboce o gráfico da função  $f(x)$ .

As duas primeiras questões bastante introdutórias e tem como objetivo estabelecer bem o cenário que servirá para este capítulo. Na verdade, o capítulo todo girará em torno da resolução (e entendimento) da integral de  $f(x)$ .



## Significado da integral

Ainda em aspectos introdutórios, essa questão tenta salientar uma possível conexão entre a integral pedida e funções trigonométricas.

Q3

Vamos considerar agora a integral  $\int_{-2}^2 f(x) dx$ .

- a) Qual é o significado geométrico dessa integral?
- b) Com base na resposta anterior, qual deve ser o valor da integral (sem efetuar a integração de fato)?

Por se tratar da área de um semi-círculo de raio 2, sabemos que a integral de  $f(x)$  entre  $-2$  e  $2$  deve ser igual a  $\frac{1}{2} \cdot \pi 2^2 = 2\pi$ . Em princípio, esse valor deve parecer estranho: como obteríamos  $\pi$  a partir de uma expressão algébrica que envolve apenas somas, multiplicações e raízes? Essa conexão é o que está por trás da técnica de integração chamada substituição trigonométrica e esse é o tópico central deste capítulo.

### Transformando a integral, tentativa 1

Apesar de parecer relativamente simples, a integral  $\int \sqrt{4-x^2} dx$  não é nem um pouco simples de resolver através de trocas de variáveis.

Q4

Para que você sinta a dificuldade, tente obter um integrando mais simples usando a troca de variáveis  $u = 4 - x^2$ . Qual é a nova integral obtida?

Você pode tentar outras trocas de variáveis, mas provavelmente você vai chegar em situações muito próximas à que você obteve acima: alguma raiz quadrada acaba reaparecendo, o que dificulta a obtenção de uma primitiva para a função.

Essa questão busca convencer o estudante de que a integral pedida não pode ser resolvida através de uma simples troca de variável. Não deixe que eles gastem muito tempo com ela.

### Transformando a integral, tentativa 2

O que faremos então é uma grande mudança na abordagem. Primeiro, note que  $\sqrt{4-x^2}$  se parece com expressões que ocorrem ao resolvermos questões envolvendo teorema de pitágoras.

Q5

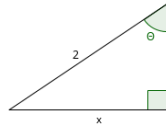
Considerando o triângulo retângulo abaixo:

- a) Use o teorema de pitágoras para obter uma expressão

Com essa questão introduzimos um argumento geométrico para a troca de variáveis que será feita e que fundamenta a técnica de integração chamada de substituição trigonométrica. O argumento é bastante simples, mas muito poderoso e pode ser estendido na direção de coordenadas polares, mas isso não será feito aqui.

para o comprimento do cateto vertical.

- b) Use as relações trigonométricas acerca do ângulo  $\theta$  para obter uma outra expressão para o comprimento do cateto vertical.
- c) Use as relações trigonométricas acerca do ângulo  $\theta$  para obter uma outra expressão para o comprimento do cateto  $x$ .



Note que o cateto vertical pode ser expresso de duas maneiras, como a raiz da função dada inicialmente ou em termos do  $\sin(\theta)$ . Como sabemos como integrar senos, vamos tentar usar essa ideia para uma troca de variáveis que nos ajude de fato.

Q6

Rescreva a integral  $\int_{-2}^2 \sqrt{4-x^2} dx$  usando a troca de variáveis  $\sqrt{4-x^2} = \cos(\theta)$  (lembre-se que  $x = 2 \sin(\theta)$ ).

Não se esqueça de ajustar os limites da integral. Como  $x = 2 \sin(\theta)$ , e  $x$  deve variar de  $-2$  a  $2$  a opção mais simples é variarmos  $\theta$  de  $-\pi/2$  a  $\pi/2$ . Portanto, nossa nova integral é:

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} 2 \cos(\theta) \cdot 2 \cos(\theta) d\theta = 4 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2(\theta) d\theta$$

O objetivo de obter uma integral que não envolve-se raízes foi atingido!

### Pare e pense

A transformação feita acima foi bem sucedida por um motivo: ao fazermos a troca  $x = 2 \sin(\theta)$  também pudemos trocar a expressão  $\sqrt{4-x^2}$  por  $\cos(\theta)$ . Vimos essa troca no triângulo, mas ela pode ser vista algebricamente graças à igualdade trigonométrica fundamental  $\sin^2(\alpha) + \cos^2(\alpha) = 1$ . Ela implica que  $\sin^2(\alpha) = 1 - \cos^2(\alpha)$ . Portanto:

$$\sqrt{4-x^2} = \sqrt{4-4\sin^2(\theta)} = \sqrt{4-4(1-\cos^2(\theta))} = \sqrt{\cos^2(\theta)} = \cos(\theta)$$

Finalmente foi realizada a troca de variáveis.

Apesar de o texto salientar que o diferencial e os limites da integral devem ser ajustados, certifique-se de que os estudantes estão dando atenção a esses pontos. Se eles estiverem com muitas dificuldades nesse momento é provável que estejam com dificuldades em integrais como um todo. Nesse caso, sugira que calculem as integrais indefinidas  $\int e^{2x+3} dx$  e  $\int x \cdot \sin(x^2) dx$ . Se os estudantes não conseguirem resolvê-las, eles estão com dificuldades mais básicas sobre a regra da substituição e você pode recomendar a leitura dos exemplos da seção 5.5 do livro Calculus. Se eles conseguirem, provavelmente vale a pena ajudá-los passo-a-passo com a troca de variáveis desse caso especificamente.

Essa visão algébrica do processo é útil para que você possa aplicar essa troca em mais situações, não apenas naquelas que possam ser interpretadas em um triângulo retângulo. Por isso, o quadro abaixo traz as três variações da igualdade trigonométrica fundamental que lhe podem ser úteis.

$$\sin^2(\alpha) + \cos^2(\alpha) = 1$$

$$\tan^2(\alpha) + 1 = \sec^2(\alpha)$$

Note que, na verdade, a segunda igualdade pode ser obtidas a partir da primeira, basta dividir todos os termos dela por  $\cos^2(\alpha)$ .



Considerando as igualdades acima:

- Qual troca de variável você utilizaria se a função a ser integrada fosse  $g(x) = \sqrt{1+x^2}$ ?
- Como ficaria a integral  $\int \sqrt{1+x^2} dx$  quando essa troca for completada?

Essa questão foi incluída para chamar a atenção para o impacto que o sinal do termo dentro da raiz tem sobre a escolha da troca a ser usada. e para mostrar que a técnica pode ser aplicada em mais alguns casos.

### Voltando à integral

Antes da seção anterior, tínhamos chegado em  $4 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2(\theta) d\theta$ . Porém, mais uma vez, apesar da integral de  $\cos(\theta)$  ser simples, a de  $\cos^2(\theta)$  não é.

Se você tentar fazer a troca de variáveis  $u = \cos(\theta)$ , vai notar que um seno aparecerá na expressão quando você transformar  $d\theta$  em  $du$ . Esse problema é bastante comum quando integramos potências de seno e cosseno. O que pode ser feito para contornar essa dificuldade é utilizar uma outra família de igualdades trigonométricas. Talvez você as tenha estudado no Ensino Médio, caso não, sugerimos que memorize as duas igualdades mostradas abaixo, pois serão muito usadas nas listas de MA111.

$$\cos(2\alpha) = 2\cos^2(\alpha) - 1$$

$$\sin(2\alpha) = 2\sin(\alpha) \cdot \cos(\alpha)$$

Note que a primeira delas permite transformar um cosseno ao quadrado em um cosseno, enquanto que a segunda permite transformar um produto de seno por

cosseno em um seno apenas. Essas igualdades são úteis para mudarmos o formato de potências de funções trigonométricas para formatos mais simples de integrar, como faremos agora.

Antes de retomarmos a integral, resolva a seguinte questão sobre as igualdades acima para que você se familiarize com o uso que será feito delas em MA111.

Q8

Considerando as igualdades acima:

- a) Isole  $\cos^2(\alpha)$  na primeira igualdade.
- b) Use a igualdade  $\sin^2(\alpha) + \cos^2(\alpha) = 1$  e a resposta do item anterior para obter uma expressão que transforma  $\sin^2(\alpha)$  em  $\cos(2\alpha)$ .
- c) Rescreva a expressão  $\sin^4(\alpha)$  como uma expressão composta por senos e cossenos com as menores potências possíveis.

Note que a expressão obtida no item c acima pode parecer complicada, mas não envolve nenhuma potência e seria simples de integrar, ou seja, você fez quase todo o trabalho necessário para calcular  $\int \sin^4(x) dx$ .

Agora, voltemos à nossa integral.

Q9

Rescreva  $4 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2(\theta) d\theta$ , usando as igualdades anteriores, de modo que não haja mais potências no integrando.

O que você fez na questão acima não é uma mudança de variável, mas sim uma manipulação algébrica que resultou em uma nova expressão equivalente à que tínhamos antes. Note que a expressão que você acabou de obter não tem mais cosseno ao quadrado e é mais simples de integrar.

Q10

Finalize essa questão calculando o valor da integral definida obtida na questão anterior.

Você deve ter obtido  $2\pi$  como resposta, assim como havíamos previsto no início do capítulo.

Essa questão explora as igualdades frequentemente utilizadas na técnica de integração chamada de integrais trigonométricas e que é normalmente aplicada a potências de senos e cossenos. Como ressaltado no texto para o aluno, as igualdades permitem a redução da potência em senos e cossenos e ambas derivam das fórmulas de  $\sin(\alpha + \beta)$  e  $\cos(\alpha + \beta)$ .

O último item da questão exige o uso da identidade duas vezes consecutivas. Apesar de destoar das demais questões propostas devido à quantidade de manipulações algébricas, insista que os estudantes o resolvam por inteiro pois isso será esperado deles em MA111.

Após a sequência de passos seguida nas questões anteriores, a integral final é relativamente simples e o resultado é esperado:  $2\pi$ . Fique atento a pequenas variações na resposta que podem advir de erros procedimentais, como a omissão de algum sinal ou de perda de alguma constante.

## MENSAGEM FINAL

O grande objetivo deste capítulo era relembrar algumas identidades trigonométricas que são usadas com frequência quando utilizamos as técnicas de integração chamadas substituição trigonométrica e integrais trigonométricas.

A primeira família de igualdades (que derivam de  $\sin^2(\alpha) + \cos^2(\alpha) = 1$ ) nos permitem:

- 1) Converter senos em cossenos, ou vice-versa;
- 2) Lidar com expressões do tipo  $a^2 - x^2$  fazendo a troca  $x = \sin(\alpha)$ ;
- 3) Lidar com expressões do tipo  $a^2 + x^2$  fazendo a troca  $x = \tan(\alpha)$ .

A segunda família de igualdades, envolvendo  $\sin(2\alpha)$  e  $\cos(2\alpha)$ , nos permite:

- 1) Reduzir potências de funções trigonométricas para potências menores ( $\cos^2(\alpha)$  em  $\cos(2\alpha)$ ), por exemplo;
- 2) Converter expressões com produtos de senos e cossenos em expressões envolvendo  $\sin(2\alpha)$ .

Sugerimos agora que você leia os exemplos 1, 2 e 3 da seção 7.2 do livro Calculus e os exemplos 1, 2, 3 e 4 da seção 7.3. Em seguida, parta para a lista de exercícios da disciplina.

## COMENTÁRIOS FINAIS

Durante as atividades da tutoria não se preocupe em identificar e listar todos os casos em que as duas técnicas de integração em questão costumam ser sub-divididas. Isso será feito pelo professor de MA111. Por outro lado, é importante que os estudantes consigam lembrar das identidades trigonométricas utilizadas ao longo do capítulo. Insista na importância desse aspecto!

Após resolverem as questões propostas, sugerimos aos estudantes que leiam alguns exemplos das seções 7.2 e 7.3 do livro Calculus e então partam para a lista de exercícios da disciplina.

## GABARITO

Confira as respostas para as questões e **não se esqueça de registrar o seu progresso.**

- Q1 a)  $[-2; 2]$ , b)  $-2$  e  $2$ , c)  $(0; 2)$ , d)  $[0; 2]$ .
- Q2 a) circunferência de raio 2 e centro na origem.
- Q3 a) a integral é igual à área de uma semi-circunferência de raio 2, b)  $2\pi$ .
- Q4  $-2 \int \sqrt{4u - u^2} du$
- Q5 a)  $\sqrt{4 - x^2}$ , b)  $2 \cos(\theta)$ , c)  $2 \sin(\theta)$ .
- Q6  $4 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2(\theta) d\theta$ .
- Q7 a)  $x = \tan(\alpha)$  e, portanto,  $\sqrt{4 + x^2} = \sec(\alpha)$ , b)  $\int \sec^3(\alpha) d\alpha$ .
- Q8 a)  $\cos^2(\alpha) = \frac{\cos(2\alpha) + 1}{2}$ , b)  $\sin^2(\alpha) = \frac{1 - \cos(2\alpha)}{2}$ , c)  $\sin^4(\alpha) = \frac{1}{8} \cdot (3 - 4 \cos(2\alpha) + \cos(4\alpha))$ .
- Q9  $2 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (\cos(2\theta) + 1) d\theta$

# 11

# Revisão para frações parciais

## APRESENTAÇÃO

A motivação para essa técnica de integração vem do fato de que integrais do tipo  $\int \frac{c}{ax+b} dx$  são simples de calcular enquanto que integrais como  $\int \frac{ax^3+bx^2+cx+d}{dx^2+ex+f} dx$  não são. Na verdade, a integral de uma função dada pela razão entre dois polinômios com grau maior ou igual a 2 é bastante complicada sem essa técnica.

O que faremos nesse capítulo é uma revisão dos aspectos algébricos necessários para o uso dessa técnica, sem nos preocuparmos de fato com o cálculo das integrais. O seu professor de MA111 cobrirá esse último aspecto.

## COMENTÁRIOS INICIAIS

Esse capítulo é inteiramente focado em como transformar frações algébricas (em que numerador e denominador são polinômios) de modo a rescrevê-las como uma soma de polinômios e frações em que o denominador seja um polinômio do primeiro grau.

Esse processo faz parte da técnica chamada de integração por frações parciais, mas focaremos na transformação das frações, sem entrar em detalhes sobre como calcular as integrais. Isso deverá ser feito pelo professor de MA111.



---

## QUANDO USAR

Este capítulo deve ser resolvido antes do professor de MA111 abordar integração por frações parciais.

---

## CONTEÚDOS ANTERIORES

Todo o conteúdo deste capítulo gira em torno de manipulações algébricas com frações envolvendo polinômios. Portanto, é fundamental que você tenha estudado o capítulo sobre polinômios deste material. Especificamente, os tópicos a seguir são pré-requisitos para este capítulo:

- Igualdade de polinômios;
- Divisão de polinômios.

Esses tópicos não serão cobertos durante as atividades de tutoria. Se você acha que não sabe o suficiente sobre algum deles, sugerimos que volte ao capítulo sobre polinômios deste material e os revise.

## QUESTÕES

O nosso objetivo ao longo das próximas questões será transformar a expressão  $\frac{x^3+5x}{x^2+3x+2}$  em uma expressão que seja composta por uma soma de um polinômios e frações que tenham polinômios de primeiro grau como denominadores, ou seja, algo como  $p(x) + \frac{a}{bx+c}$  (talvez seja necessário mais de uma fração com formato semelhante).

### Raízes

Vamos começar revisando algumas transformações básicas.

Q1

Considerando o numerador e o denominador da fração  $\frac{x^3+5x}{x^2+3x+2}$  separadamente, responda:

- a) Quais são as raízes de  $x^2 + 3x + 2$ ?
- b) Escreva  $x^2 + 3x + 2$  na forma fatorada.
- c) Quais são as raízes reais de  $x^3 + 5x$ ?
- d) Escreva  $x^3 + 5x$  na forma fatorada.
- e) Rescreva a fração com as formas fatoradas.

Note que não há nenhum fator em comum entre numerador e denominador para que possamos simplificar a fração dada.

### Fração imprópria

Você deve se lembrar do conceito de fração imprópria. Um exemplo é a fração  $\frac{7}{3}$ . Ela é chamada de imprópria porque 7 é maior do que 3, portanto, ela pode ser reescrita como um número inteiro mais uma fração própria:  $\frac{7}{3} = \frac{6+1}{3} = \frac{6}{3} + \frac{1}{3} = 2 + \frac{1}{3}$ .

Algo similar pode ser dito da nossa fração, como o numerador tem grau maior do que o denominador, se efetuarmos a divisão entre os polinômios vamos obter uma expressão equivalente mas com uma parte fracionária mais simples.

Q2

Efetue a divisão de  $x^3 + 5x$  por  $x^2 + 3x + 2$ . Caso você não se lembre exatamente como proceder, leia o exemplo 2 do capítulo 4.2 do livro Matemática Básica - volume 1.

A explicação que segue a questão é conceitualmente muito importante. Certifique-se de que os estudantes a leram e entenderam. Se necessário, faça o caminho inverso para mostrar que a igualdade vale: multiplique o resultado da divisão pelo divisor e some o resto para obter o polinômio que foi dividido originalmente. Pode valer a pena sugerir mais algum exemplo (criados aleatoriamente com polinômios de graus entre 2 a 5) para os estudantes com dificuldade.

Você deve ter obtido o quociente  $(x - 3)$  e resto  $(12x + 6)$ . Isso significa que  $x^3 + 5x$  é igual a  $(x^2 + 3x + 2)(x - 3) + (12x + 6)$ . Se você está estranhando essa igualdade, leia a questão seguinte do capítulo Y.

Dessa forma, podemos rescrever a fração inicial como mostrado abaixo:

$$\begin{aligned}\frac{x^3 + 5x}{x^2 + 3x + 2} &= \frac{(x^2 + 3x + 2)(x - 3) + (12x + 6)}{x^2 + 3x + 2} \\ &= \frac{(x^2 + 3x + 2)(x - 3)}{x^2 + 3x + 2} + \frac{12x + 6}{x^2 + 3x + 2} \\ &= (x - 3) + \frac{12x + 6}{x^2 + 3x + 2}\end{aligned}$$

Veja que nessa expressão, a primeira parcela é simples de integrar e a segunda já tem um numerador com grau menor do que a original. Vamos focar apenas em  $\frac{12x+6}{x^2+3x+2}$  deste ponto em diante.

### Mudando as frações

Se você recuperar a forma fatorada obtida na primeira questão, podemos escrever  $\frac{12x+6}{x^2+3x+2}$  na forma  $\frac{12x+6}{(x+1)(x+2)}$ . Essa forma sugere que essa fração poderia ser rescrita como uma soma de frações com  $(x + 1)$  e  $(x + 2)$  como denominadores, ou seja, como uma soma do tipo  $\frac{A}{x+1} + \frac{B}{x+2}$  para algum valor de A e B.

Q3

Para fins de prática, efetue a soma  $\frac{3}{x+1} + \frac{4}{x+2}$ .

Essa questão pretende apenas confirmar que os estudantes se lembram como efetuar essa soma. Se necessário, sugira alguns exemplos adicionais com o mesmo formato: números reais no numerador e polinômios do primeira grau no denominador.

Voltando à nossa fração de interesse,  $\frac{12x+6}{(x+1)(x+2)}$ , como o numerador é de grau 1, é razoável esperar que existam números reais A e B que façam com que ela possa ser rescrita na forma  $\frac{A}{x+1} + \frac{B}{x+2}$ .

Q4

Efetue a soma  $\frac{A}{x+1} + \frac{B}{x+2}$  e escreva o numerador na forma de um binômio, ou seja, no formato  $mx + n$ .

Você deve ter obtido a fração  $\frac{(A+B)x + (2A+B)}{x^2+3x+2}$  na questão acima. Se igualarmos essa fração à  $\frac{12x+6}{x^2+3x+2}$  (note que os denominadores são iguais), concluímos que  $(A+B)x + (2A+B) = 12x + 6$ .

Q5

Determine o valor de A e B para a igualdade de polinômios  $(A+B)x + (2A+B) = 12x + 6$  seja satisfeita.

Isso significa que  $\frac{12x+6}{x^2+3x+2}$  é igual a  $\frac{-6}{x+1} + \frac{18}{x+2}$ . Essas duas frações são chamadas de frações parciais.

Em conclusão, a fração que tínhamos inicialmente pode ser rescrita seguindo as transformações abaixo:

$$\frac{x^3 + 5x}{x^2 + 3x + 2} = (x - 3) + \frac{12x + 6}{x^2 + 3x + 2} = (x - 3) + \frac{-6}{x + 1} + \frac{18}{x + 2}$$

Você pode verificar se a igualdade acima está correta desenvolvendo a expressão mais à direita e verificando se você chega na forma dada inicialmente (sugiro que isso seja feito caso você não se sinta confortável com as manipulações algébricas realizadas até aqui).

Finalmente, note que a fração inicial não era simples de integrar, mas a obtida ao final do processo é (basta fazer a troca  $u = x + 1$  para a primeira fração e  $t = x + 2$  para a segunda).

### Três casos iniciais

Para compreender o processo como um todo, vamos fazer três casos incompletos. No primeiro, é necessário apenas a primeira parte, ou seja, dividir os polinômios de modo a não termos mais uma fração imprópria. No segundo podemos ir direto para as frações parciais, sem

A resposta esperada para essa questão é

$$\frac{(A+B)x + (2A+B)}{x^2 + 3x + 2}, \text{ ou seja, o numerador tem um formato pouco usual.}$$

Pode ser que seus estudantes tenham dificuldade em vislumbrar esse formato. Mostre que nele os termos do binômio ficam claros e, dessa forma, poderemos fazer a comparação da próxima questão.

Note que não é o valor de  $x$  que deve ser determinado, mas sim o valor de A e B para que os polinômios dos dois lados da igualdade sejam idênticos.

Isso feito, a questão foi resolvida. Você pode optar por calcular a integral de fato com seus estudantes se julgar adequado.

As questões a seguir sintetizam o processo como um todo, mas sem o auxílio dos itens dividindo o processo em etapas curtas.

As três questões abaixo são casos incompletos do procedimento realizado nas questões anteriores. A intenção é tornar mais saliente cada uma das etapas para que o estudante se conscientize do que está fazendo (e o que é de fato necessário fazer) ao longo do processo.

precisar dividir os polinômios. O terceiro também será incompleto, mas cabe a você concluir onde.

**Q6** Transforme a fração  $\frac{x^3+6x^2+11x+6}{x^2-2}$  de modo que seja escrita como uma soma de um polinômio com uma fração algébrica não imprópria.

**Q7** Transforme a fração  $\frac{2x-7}{x^2+3x-4}$  em uma soma de frações cujos denominadores sejam binômios do tipo  $ax + b$  e e numeradores sejam números reais.

Por fim, essa fração poderá ser simplificada diretamente para um formato bom para o cálculo de integrais, sem necessidade de obter frações parciais.

**Q8** Rescreva a fração  $\frac{x^2+x}{x^3-x}$  em um formato mais simples para integração.

Note que na questão anterior não foi necessário obter as frações parciais, pois a fração restante depois da divisão de polinômios já possuía denominador do primeiro grau e um número real como numerador.

### Um caso completo

Agora vamos resolver um caso completo. Não se preocupe em terminar rapidamente. A intenção aqui é compreender cada etapa do processo para que, quando o tópico for abordado em MA111, você saiba se orientar dentre os diversos casos que serão discutidos.

**Q9** Vamos transformar a fração  $\frac{(x+5)(x+2)(x-2)(x-1)}{x^3+4x^2-x-4}$  em uma soma que envolva frações com denominadores mais simples.

- Fatore o denominador e rescreva a fração simplificando fatores, se possível.
- Desenvolva os fatores que sobraram no numerador e rescreva a fração.
- Como o grau do numerador é maior do que o do denominador, faça a divisão do numerador pelo denominador de modo a rescrever a fração dada como uma soma de um polinômio com uma fração com numerador de grau menor.

Note que nessa questão, não foi pedido ao estudante que obtenha as frações parciais, apenas que se reduza a fração algébrica dada a uma nova expressão em que o polinômio no numerador tenha grau menor do que o do denominador. Se houver tempo, sugira que eles finalizem o processo até o final.

Já a próxima questão não exige a realização da divisão de polinômios e parte diretamente para a obtenção das frações parciais.

- d) Como a parte fracionária obtida tem numerador do primeiro grau e denominador do segundo grau que pode ser fatorado, iguale a parte fracionária a uma soma de frações do tipo  $\frac{A}{x+1} + \frac{B}{x+4}$ . Quais são os valores de A e B?
- e) Qual é a forma final da expressão dada inicialmente?

Essa última questão demanda todos os passos feitos ao longo das cinco primeiras questões. Se você julgar adequado, pode sugerir a alguns de seus estudantes que tentem fazer sem seguir os itens. Não esperamos que eles tenham decorado as etapas, mas sim entendido a necessidade, função e significado de cada uma delas, mesmo que demorem para operacionalizá-las.

## MENSAGEM FINAL

O processo que você utilizou para resolver a questão anterior é a justificativa por trás da técnica de integração conhecida como **frações parciais**. Os exemplos discutidos pertencem, na verdade, a um mesmo caso (denominador com todas as raízes reais e diferentes). Nas aulas de Cálculo você verá como o método precisa ser ajustado quando o denominador possui raízes iguais ou quando alguma de suas raízes não é real. Porém, a essência da técnica é o que fizemos aqui: dividir os polinômios de modo a reduzir o grau do polinômio no numerador e depois tentar encontrar frações parciais cuja soma seja igual à parte fracionária restante.

Nossa sugestão é que agora você leia a seção 7.4 do livro Calculus até o final do terceiro exemplo e então comece a resolver os exercícios da lista oficial de MA111 sobre frações parciais.

## COMENTÁRIOS FINAIS

A técnica de frações parciais é um pouco mais intrincada do que o que apresentamos neste capítulo. Isso é necessário para que ela possa ser aplicada em uma gama maior de situações, porém, a nossa intenção era apresentar as principais ideias por trás do método, sem discutir algumas das suas minúcias. A introdução desses detalhes ocorrerá ao longo dos exemplos da elitura sugerida aos estudantes logo acima.

## GABARITO

Q1 a)  $-1e-2$ , b)  $(x+1)(x+2)$ , c)  $0$ , d)  $x(x^2+5)$ , e)  $\frac{x(x^2+5)}{(x+1)(x+2)}$

Q2  $\frac{7x+10}{(x+1)(x+2)}$

Q3  $\frac{(A+B)x+(2A+B)}{x^2+3x+2}$

Q4  $A = -6$  e  $B = 18$

Q5  $x + 6 + \frac{13x+18}{x^2-2}$

Q6  $\frac{3}{x+4} + \frac{-1}{x-1}$

Q7  $\frac{1}{x-1}$

Q8 a)  $\frac{(x+5)(x+2)(x-2)}{(x+4)(x+1)}$ , b)  $\frac{x^3+5x^2-4x-20}{x^2+5x+4}$ , c)  $x + \frac{-8x-20}{x^2+5x+4}$ , d)  $A = -4$  e  $B = -4$ , e)  $x + \frac{-4}{x+1} + \frac{-4}{x+4}$