BATAGELJ
VLADIMIR

NEKAJ MALEGA O

KVAZIKOLOBARJIH,

V-GRAFIH

IN VREDNOSTNIH MATRIKAH

LJUBLJANA
DECEMBER
1 9 7 0

0. UVOD

Pričujoči sestavek je nadaljevanje in temeljitejša obdelava idej,ki sem jih že podal v referatih:

"A method for mathematical network description";FCIP 70, Bled,1970

in

"Vrednostna funkcija grafov";ADP seminar 70,Zagreb,1970

V njem bomo najprej spoznali nekaj definicij in izrekov,ki jih bomo v nadaljnjem potrebovali.Nato se bomo seznanili s pojmom v-grafa in vrednostne funkcije.Definirali bomo vrednost dveh točk grafa in tako prišli do vrednostnih matrik.Spoznali bomo pomen n-te potence vrednostne matrike.Zatem bomo čisto formalno definirali ovojnico vrednostne matrike in se povprašali po nje obstoju.Za konec si bomo ogledali še nekaj primerov uporabe dobljenih rezultatov.

Začnimo !

1. GRAF , KVAZIKOLOBAR , MATRIKE NAD KVAZIKOLOBARJEM

Začeli bomo z nekaterimi osnovnimi pojmi teorije grafov. Izmed znanih pristopov k teoriji grafov se mi zdi najboljši pristop A.A. Zykova. Prisluhnimo mu !

D1.1 Graf je urejena trojka

$$\mathcal{G} = (X , U , P)$$

kjer je

X - neprazna množica točk

U - množica povezav $(X \cap U = \emptyset)$

P - incidentor - trimestni predikat, ki zadošča pogojema:

a. P je definiran na kartezičnem produktu $X \times U \times X$

b. $\forall u \in U \ \exists x,y \in X \{P(x,u,y) \wedge \forall t,z \in X [P(t,u,z) \Rightarrow \Rightarrow (x=t \wedge y=z) \vee (x=z \wedge y=t)]\}$

Izjavo $P(x,u,y)$ bomo prebrali : povezava u gre iz točke x v točko y . Točkama x in y bomo rekli tudi krajišči povezave u , pri čemer je v našem primeru x začetek in y konec povezave u . Ločimo tri vrste povezav:

$P(x,u,y) \wedge \neg P(y,u,x)$ - usmerjena povezava

$P(x,u,y) \wedge P(y,u,x)$ - neusmerjena povezava

$P(x,u,x)$ - zanka

Graf je končen, če sta končni množici točk in povezav.

D1.2 Pot po grafu $\mathcal{G}$ imenujemo zaporedje povezav

$$S = (u_i)_{i \in [1,d]}$$

za katerega je resnična izjava

$$\exists x_i , i \in [0,d] : \bigwedge_{i \in [1,d]} P(x_{i-1},u_i,x_i)$$

Točko x_0 imenujemo začetek, x_d pa konec poti S in pišemo tudi

$$S(x_0,x_d) = (u_i)_{i \in [1,d]}$$

V primeru, ko je $x_0 = x_d = x$ pravimo, da je pot cikel, kar napišemo

$$C(x) = (u_i)_{i \in [1,d]}$$

Število d imenujemo dolžina poti

$$d = |S|$$

Pot Z ,ki ustreza praznemu zaporedju in ima dolžino 0 ,imenujemo prazna pot.V množico $\mathcal{S}$ vseh poti po grafu $\mathcal{G}$ lahko uvedemo operacijo spajanje $\circ$ na naslednji način:

Spoj poti S in Q imenujemo,če obstaja,pot P

$$P = S \circ Q$$

za katero velja

$$p_i = \begin{cases} s_i & i \in [1,s] \\ q_{i-s} & i \in [s+1,s+q] \end{cases}$$

Očitno velja:

$$Z \circ S = S \circ Z = S$$

$$(S \circ Q) \circ T = S \circ (Q \circ T)$$

in

$$|S \circ Q| = |S| + |Q|$$

Sem spada tudi trditev: naj bo $S \circ C \circ Q$,kjer je C cikel, pot,potem je pot tudi $S \circ Q$.

Pot imenujemo enostavna ali aciklična,če so vse točke skozi katere gre medseboj različne.Graf,v katerem je vsaka pot enostavna, je acikličen.Za enostavne poti velja izrek:

II.1 Bodi S poljubna enostavna pot v grafu $\mathcal{G}$ z m točkami,potem velja

$$|S| \leq m - 1$$

Torej je v acikličnem grafu $\mathcal{G}$ z m točkami dolžina poljubne poti manjša ali kvečjemu enaka $m - 1$.

Zapustimo sedaj teorijo grafov in si oglejmo minimalno algebrsko strukturo,ki je potrebna za definicijo vrednostne funkcije in v-grafa.Rekli ji bomo kvazikolobar.

Dl.3 Kvazikolobar je urejena trojka

$$\mathcal{V} = (V\,,\,+\,,\,.)$$

kjer je V neprazna množica, $+$ in $.$ sta binarni operaciji v V ter so izpolnjeni pogoji:

1. $(V\,,\,+)$ je Abelov monoid z ničlo 0
   - a. $\forall a,b \in V : a + b \in V$
   - b. $\forall a,b \in V : a + b = b + a$
   - c. $\forall a,b,c \in V : (a + b) + c = a + (b + c)$
   - d. $\exists 0 \in V\ \forall a \in V : a + 0 = a$
2. $(V\,,\,.)$ je polgrupa
   - a. $\forall a,b \in V : a.b \in V$
   - b. $\forall a,b,c \in V : (a.b).c = a.(b.c)$
3. ničelnost
   - a. $\forall a \in V : a.0 = 0.a = 0$
4. distributivnost
   - a. $\forall a,b,c \in V : a.(b + c) = a.b + a.c$
   - b. $\forall a,b,c \in V : (a + b).c = a.c + b.c$

V primeru,ko je izpolnjen še pogoj

5. $\exists 1 \in V\ \forall a \in V : a.1 = 1.a = a$

govorimo o kvazikolobarju z enoto 1 .Navadno v tem primeru zahtevamo še

6. $1 \neq 0$

V naš kvazikolobar lahko uvedemo relacijo

Dl.4 $$b \leq a \iff a + b = a$$

Za relacijo $\leq$ lahko pokažemo cel kup lastnosti,med katerimi se mi zde najpomembnejše:

- a. $\forall a \in V : a \leq 0 \Rightarrow a = 0$
- b. $\forall a \in V : 0 \leq a$
- c. $\forall a,b \in V : a \leq b \wedge b \leq a \Rightarrow a = b$
- d. $\forall a,b,c \in V : a \leq b \wedge b \leq c \Rightarrow a \leq c$
- e. $\forall a,b,c,d \in V : a \leq b \wedge c \leq d \Rightarrow a + c \leq b + d$
- f. $\forall a,b,c \in V : a \leq b \Rightarrow a.c \leq b.c \wedge c.a \leq c.b$

v idempotentnih kvazikolobarjih velja še

- g. $\forall a,b,c \in V : a + b = c \Rightarrow a \leq c \wedge b \leq c$

Povejmo sedaj,kaj razumemo pod vsoto zaporedja elementov kvazikolobarja,v katerem velja idepotentnostni zakon.

Dl.5 Bodi dano zaporedje $(a_i)_{i\in I}$ elementov kvazikolobarja $\mathcal{V}=(V,+,\cdot)$,v katerem velja idempotentnostni zakon

$$\forall a\in V:\ a+a=a$$

potem imenujemo vsota zaporedja $(a_i)_{i\in I}$,če obstaja, element

$$b=\sum_{i\in I} a_i$$

za katerega velja

a. $\forall i\in I:\ a_i\leqq b$
b. $\forall c\in V:\ (\forall i\in I:\ a_i\leqq c)\Rightarrow b\leqq c$

Oglejmo si še matrike nad kvazikolobarjem.Označimo njih množico z $\mathcal{M}$ .V množici $\mathcal{M}$ lahko po analogiji z običajnim primerom,ko imamo opravka z matrikami nad množico realnih števil,definiramo operaciji seštevanje in množenje matrik.

Dl.6 Bodita

$$\mathbb{A}=[a_{ij}]_{m\times n} \quad \text{in} \quad \mathbb{B}=[b_{ij}]_{m\times n}$$

matriki nad $\mathcal{V}$,potem imenujemo vsota matrik $\mathbb{A}$ in $\mathbb{B}$ matriko

$$\mathbb{A}\oplus\mathbb{B}=[a_{ij}+b_{ij}]_{m\times n}$$

ustrezno operacijo $\oplus$ pa seštevanje.

Dl.7 Bodita

$$\mathbb{A}=[a_{ij}]_{m\times k} \quad \text{in} \quad \mathbb{B}=[b_{ij}]_{k\times n}$$

matriki nad $\mathcal{V}$,potem imenujemo produkt matrik $\mathbb{A}$ in $\mathbb{B}$ matriko

$$\mathbb{A}\times\mathbb{B}=\left[\sum_{s=1}^{k} a_{is}\cdot b_{sj}\right]_{m\times n}$$

ustrezno operacijo x pa množenje.

V nadaljnjem se bomo omejili na kvadratne matrike, za katere velja izrek:

Il.2 Množica M_m vseh kvadratnih matrik reda $m \times m$ nad kvazikolobarjem z enoto $\mathcal{V} = (V, +, .)$ tvori za operaciji $\oplus$ in x kvazikolobar z enoto $\mathcal{M}_m = (M_m, \oplus, x)$.

Ničla kvazikolobarja $\mathcal{M}_m$ je matrika

$$\mathbb{O} = [0]_{m \times m}$$

ki ima za elemente same ničle, enica pa matrika

$$\mathbb{I} = [\delta_{ij}]_{m \times m}$$

ki ima po diagonali enice, drugje pa ničle. Gornji izrek nam omogoča definicijo potence in (asociativnost) zagotavlja nje enoličnost.

Dl.8 n-ta potenca kvadratne matrike $\mathbb{P}$ imenujemo matriko $\mathbb{P}^n$ definirano rekurzivno z enačbama:

a. $\mathbb{P}^0 = \mathbb{I}$

b. $\mathbb{P}^{k+1} = \mathbb{P}^k \times \mathbb{P} \qquad k \in N, \ (0 \in N)$

Kaj lahko se prepričamo v pravilnost trditve

$$\mathbb{P}^k \times \mathbb{P}^n = \mathbb{P}^{k+n} \qquad k,n \in N$$

Tudi relacijo $\leq$ lahko prenesemo na matrike

Dl.9 $\forall \mathbb{A}, \mathbb{B} \in \mathcal{M}_m : \mathbb{A} \leq \mathbb{B} \Longleftrightarrow \mathbb{A} \oplus \mathbb{B} = \mathbb{B} \Longleftrightarrow$
$\Longleftrightarrow \forall i,j \in \{1,m\} : a_{ij} \leq b_{ij}$

Tudi za matrike veljajo vse prej naštete lastnosti relacije $\leq$, saj je $\mathcal{M}_m$ kvazikolobar.

2. v-GRAFI IN VREDNOSTNE MATRIKE

V praksi se pogosto izkaže, da je informacija, ki nam jo daje o obravnavanem sistemu običajen graf, premajhna. Precejšen del tovrstnih problemov zajamemo, če pripišemo posameznim povezavam neko količino ali znak - vrednost. Tako dobimo v-graf.

D2.1 v-graf je urejena peterka

$$\mathcal{G}(v) = (X, U, P, \mathcal{V}, v)$$

kjer je

(X, U, P) - graf iz D1.1

$\mathcal{V} = (V, +, \cdot)$ - algebrska struktura, ki je vsaj kvazikolobar z enoto 1

$v : U \longrightarrow V$ - preslikava imenovana vrednost

Pojem vrednosti lahko razširimo na poljubno pot oziroma družino poti po v-grafu.

D2.2 Bodi $S = (u_i)_{i \in I}$ pot in $\mathcal{S} = (S_j)_{j \in J}$ družina poti po v-grafu $\mathcal{G}(v)$, potem po definiciji velja:

a. $v(Z) = 1$

b. $v(S) = \prod_{i \in I} v(u_i)$

c. $v(\emptyset) = 0$

d. $v(\mathcal{S}) = \sum_{j \in J} v(S_j)$

kjer je Z prazna pot in $\emptyset$ prazna družina poti.

S pomočjo definicije D2.2 lahko definiramo vrednost vseh povezav iz točke x_i v točko x_j.

D2.3 Vrednost v_{ij} vseh povezav iz točke x_i v točko x_j v-grafa $\mathcal{G}(v)$ je enaka

$$v_{ij} = v(U_{ij}) = \sum_{u \in U_{ij}} v(u)$$

kjer je

$$U_{ij} = \{ u \mid u \in U \wedge P(x_i, u, x_j) \}$$

Očitno velja

$$U_{ij} = \emptyset \Longrightarrow v_{ij} = 0$$

Tako dobljene vrednosti lahko razvrstimo v matriko, ki ji bomo rekli vrednostna matrika.

D2.4 Vrednostna matrika v-grafa $\mathcal{G}(v)$ je matrika

$$\mathbf{V} = [v_{ij}]_{m \times m}$$

kjer je

v_{ij} - vrednost vseh povezav iz točke x_i v točko x_j

m - moč množice točk X

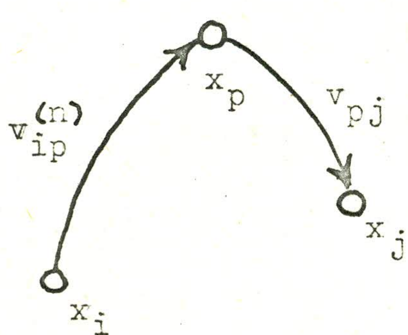
Za n-to potenco $\mathbf{V}^n$ vrednostne matrike velja izrek:

I2.1 Element $v_{ij}^{(n)}$ n-te potence $\mathbf{V}^n$ vrednostne matrike $\mathbf{V}$ je enak vrednosti vseh poti dolžine n iz točke x_i v točko x_j.

Dokaz: Dokazovali bomo s pomočjo popolne indukcije. Izrek očitno velja za $n = 0$ in $n = 1$. Pokažimo še, da iz veljavnosti izreka za naravno število n sledi veljavnost za naravno število n+1. To ne bo težko. Naj bo

$$P = \{ p \mid v_{ip}^{(n)} \neq 0 \wedge v_{pj} \neq 0 \}$$

potem je po definiciji vrednosti družine poti vrednost $v_{ij}(n+1)$ vseh poti dolžine n+1 iz točke x_i v točko x_j enaka



$$v_{ij}(n+1) = \sum_{p \in P} v_{ip}^{(n)} \cdot v_{pj}$$

No, ker pa je za poljuben $p \in [1,m] \setminus P$ produkt $v_{ip}^{(n)} \cdot v_{pj}$ enak 0, se vrednost $v_{ij}(n+1)$ nič ne spremeni, če sumiramo kar po vsem celoštevilčnem intervalu $[1,m]$

$$v_{ij}(n+1) = \sum_{p=1}^{m} v_{ip}^{(n)} \cdot v_{pj}$$

Torej je res:

$$v_{ij}(n+1) = v_{ij}^{(n+1)}$$

s čemer je po principu popolne indukcije izrek dokazan.

V posebnem primeru,ko je vrednost v_{ij} enaka številu povezav,ki vodijo iz točke x_i v točko x_j dobimo znani izrek: element $v_{ij}^{(n)}$ n-te potence $\mathbb{W}^n$ matrike povezanosti $\mathbb{W}$ grafa $\mathcal{G}$ je enak številu vseh poti dolžine n iz točke x_i v točko x_j.

Izrek I2.1 ima za posledico izrek:

I2.2 Za vrednostno matriko $\mathbb{W}$ končnega acikličnega v-grafa z m točkami velja

$$\exists n_o \leq m-1 \ \forall n > n_o : \ \mathbb{W}^n = \mathbb{O}$$

(n_o je dolžina najdaljše poti po v-grafu)

Dokaz: Bodi n_o dolžina najdaljše poti po v-grafu in

$$U_{ij}^{(n)} = \{ s(x_i,x_j) \mid |s(x_i,x_j)| = n \}$$

potem iz I1.1 sledi

$$\exists n_o \leq m-1 \ \forall n > n_o \ \forall i,j \in \{1,m\} : \ U_{ij}^{(n)} = \emptyset$$

od tu pa po D2.2/c

$$\exists n_o \leq m-1 \ \forall n > n_o \ \forall i,j \in \{1,m\} : \ v_{ij}^{(n)} = 0$$

kar je ekvivalentno trditvi izreka.

3. OVOJNICA VREDNOSTNE MATRIKE

Po analogiji z relacijam prirejenimi matrikami,ki jih srečamo pri Bergeovih grafih,lahko definiramo za dano vrednostno matriko $\mathbb{W}$ njeno ovojnico $\mathbb{W}^*$,ki ustreza strogi tranzitivni ovojnici matrike povezanosti Bergeovega grafa.

D3.1 Ovojnica vrednostne matrike $\mathbb{W}$ imenujemo,če obstaja, matriko

$$\mathbb{W}^* = \sum_{k \in N} \mathbb{W}^k$$

Postavi se vprašanje eksistence ovojnice $\mathbb{W}^*$ .Iz prej povedanega sledi izrek:

I3.1 Za končen acikličen v-graf $\mathcal{G}(V)$ z m točkami ovojnica $\mathbb{W}^*$ vrednostne matrike $\mathbb{W}$ obstaja in velja

$$\exists n_0 \leq m-1 \quad \forall n > n_0 : \quad \mathbb{W}^* = \sum_{k=0}^{n} \mathbb{W}^k$$

<u>Dokaz:</u> Izrek je trivialna posledica izreka I2.2 .

Kako pa matriko $\mathbb{W}^*$ izračunamo ? V splošnem je to lahko precej garaško delo - poiskati moramo vse neničelne potence matrike $\mathbb{W}$ in jih sešteti.Zato smo lahko zelo veseli,če ugotovimo,da v kvazikolobarju $\mathcal{V}$ velja idempotentnostni zakon. V tem primeru je

$$(\mathbb{I} \oplus \mathbb{W})^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \mathbb{W}^k = \sum_{k=0}^{n} \mathbb{W}^k$$

od tu pa po I3.1 sledi pravilnost trditve

$$\exists n_0 \leq m-1 \quad \forall n > n_0 : \quad \mathbb{W}^* = (\mathbb{I} \oplus \mathbb{W})^n$$

To pomeni,da lahko s pomočjo zaporedja

$$\left((\mathbb{I} \oplus \mathbb{W})^{2^i}\right)_{i \in \{0,s\}}$$

izračunamo matriko $\mathbb{W}^*$ z največ

$$s = 1 + \left[\log_2 (m-2)\right]$$

množenji matrik.

Kdaj pa obstaja ovojnica $\mathbb{W}^*$ za končne ciklične v-grafe ? Najprej mi je uspelo pokazati,da obstaja za take grafe,v katerih je vrednost poljubnega cikla enaka 1 (zadosti je že,da zahtevamo,da je vrednost poljubnega enostavnega cikla enaka 1), vendar je to precej huda zahteva.Nato sem pokazal,da $\mathbb{W}^*$ obstaja,če je $\mathcal{V}$ idempotenten Abelov kvazikolobar z enoto.No, končno sem prišel do izreka:

I3.2 Naj v v-grafu $\mathcal{G}(V)$ velja absorbcijski zakon

$$\forall a \in V : \quad 1 + a = 1$$

potem za $\mathcal{G}(V)$ ovojnica $\mathbb{W}^*$ obstaja; točneje

$$\exists n_o \leqslant m-1 \ \forall n \geqslant n_o : \quad \mathbf{W}^* = (\mathbf{I} \oplus \mathbf{W})^n$$

kjer je n_o dolžina najdaljše enostavne poti po v-grafu $\mathcal{G}(v)$ in m moč množice točk X .

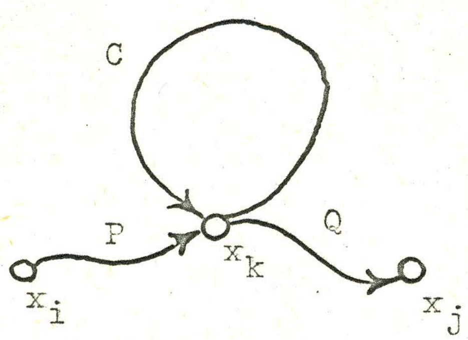
<u>Dokaz:</u> Naj bo

$$\mathbf{W}_n = (\mathbf{I} \oplus \mathbf{W})^n$$

in $v_{ij}(n)$ element matrike $\mathbf{W}_n$,ki ustreza paru (x_i,x_j).
Ker velja

$$\mathbf{W}_n = (\mathbf{I} \oplus \mathbf{W})^n = \sum_{k=0}^{n} \mathbf{W}^k$$

je po I2.1 $v_{ij}(n)$ očitno enak vrednosti vseh poti iz točke x_i v točko x_j ,katerih dolžina ni večja od n .To pomeni,da za $n \geqslant n_o$ $v_{ij}(n)$ vsebuje vrednosti vseh enostavnih poti iz x_i v x_j .Kako pa je s cikličnimi potmi ? Vzemimo poljubno pot $S \in \mathcal{S}_{ij}$,kjer je $\mathcal{S}_{ij}$ množica vseh poti iz x_i v x_j , tako,da ima v neki točki x_k cikel C .Potemtakem se da zapisati v obliki



$$S = P \circ C \circ Q$$

kjer je

$$P \in \mathcal{S}_{ik} \quad \text{in} \quad Q \in \mathcal{S}_{kj}$$

Poglejmo sedaj vrednost vsote

$$v(P \circ Q) + v(S) = v(P \circ Q) + v(P \circ C \circ Q) = v(P) \cdot v(Q) + v(P) \cdot v(C) \cdot v(Q) = v(P) \cdot (1 + v(C)) \cdot v(Q) = v(P) \cdot v(Q) = v(P \circ Q)$$

Iz gornjega je očitno

$$\forall i,j \in [1,m] \ \forall S \in \mathcal{S}_{ij} : \ v_{ij}(n_o) + v(S) = v_{ij}(n_o)$$

od tu pa po D1.5 sledi naprej

$$\forall i,j \in [1,m] : \ v^*_{ij} = \sum_{S \in \mathcal{S}_{ij}} v(S) = v_{ij}(n_o)$$

oziroma

$$W_{n_o} = W^*$$

Še končni sklep.Zaporedje $\left(W_k \right)_{k \in N}$ je naraščajoče

$$\forall k \in N : W_k \leq W_{k+1} \leq W^*$$

ker pa je $W_{n_o} = W^*$,sledi končno

$$\forall n \geq n_o : W_n = W_{n_o} = W^*$$

s čemer je izrek dokazan,saj je zaradi Il.1 $n_o \leq m-1$.

Iz izreka vidimo,da lahko pri izračunu ovojnice cikličnega v -grafa nad kvazikolobarjem,v katerem velja absorbcijski zakon, uporabimo isto metodo,kot smo jo že navedli za izračun ovojnice acikličnega v-grafa nad idempotentnim kvazikolobarjem.

V posebnem primeru,ko je $\mathcal{V}$ Booleova algebra je gornji izrek ekvivalenten prvemu Luncovemu (Luntsovemu) izreku za matrike preklopnih vezij.

4. UPORABA

Na naslednjih treh straneh bomo najprej spoznali program za izračun ovojnice matrike nad kvazikolobarjem,v katerem velja absorbcijski zakon,v primeru,ko je $V \subset Z$ .Nato bomo naš program nekoliko spremenili in napisali program,ki nam bo dal rešitev naloge : poišči za dano cestno omrežje najkrajšo pot med poljubnima krajema ter določi njeno dolžino.Nalogo bomo reševali s pomočjo kvazikolobarja (N , min , +) z ničlo ∞ (simulirali jo bomo kar z nekim zadosti velikim številom; v našem primeru 999) in enico 0 .Kaj lahko se je prepričati, da naš kvazikolobar zadošča I3.2 .Pri pisanju programa bomo upoštevali še simetričnost vrednostne matrike W ,kar občutno zmanjša število operacij.Na tretji strani pa si bomo lahko ogledali rešitev naloge za nekoliko okrnjeno cestno omrežje jugozahodne Slovenije.

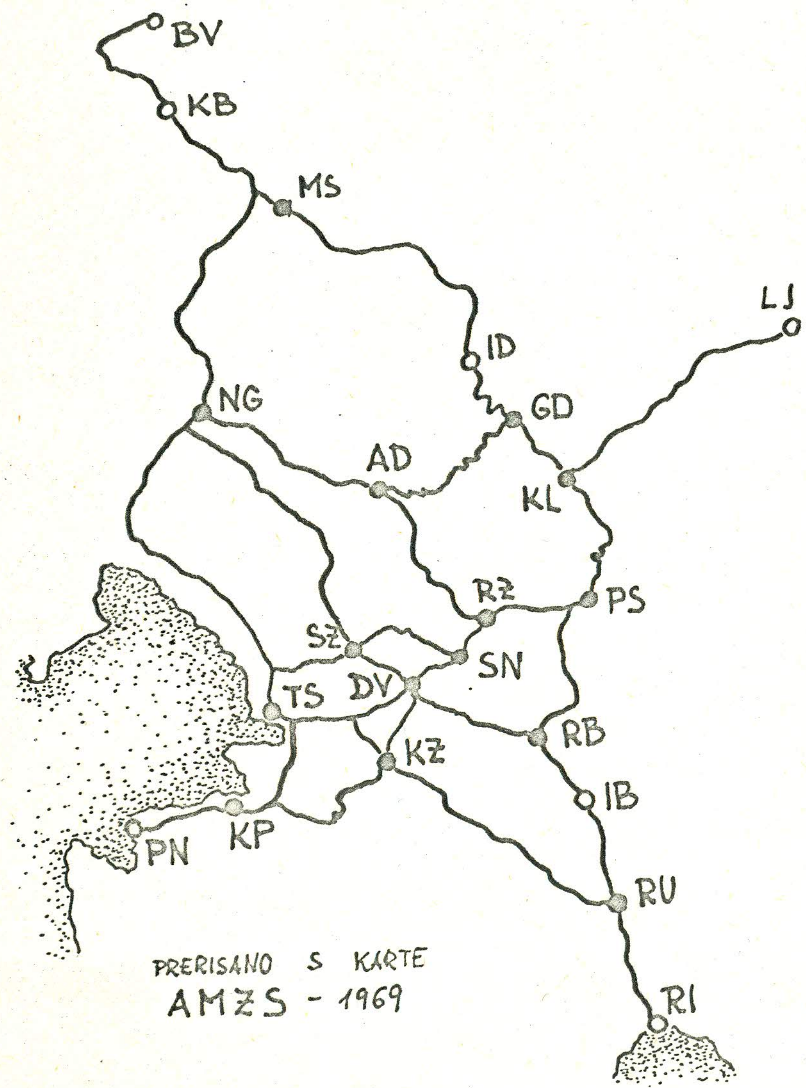
```
// FOR
*ONE WORD INTEGERS
* IOCS(CARD,1132PRINTER)
* LIST SOURCE PROGRAM
C      IZRACUN OVOJNICE V-GRAFA NAD CELOSTEVILCNIM KVAZIKOLOBARJEM
       INTEGER VALUE(2,29,29),ZERO,ONE
       DIMENSION LIST(29),NAME(3,24)
C      FUNKCIJE - OPERACIJE V KVAZIKOLOBARJU
       NSUM(NX,NY)=NX+NY-NX*NY
       NPRO(NX,NY)=NX*NY
C      BRANJE PODATKOV
       READ(2,1) N,ZERO,ONE
     1 FORMAT(3I6)
       READ(2,2) ((NAME(I,J),J=1,24),I=1,3)
     2 FORMAT(24A2)
       READ(2,3) (LIST(I),I=1,N)
     3 FORMAT(29A2)
       DO 4 I=1,N
     4 READ(2,5) (VALUE(1,I,J),J=1,N)
     5 FORMAT(29I2)
C      IZPIS PODATKOV
       WRITE(3,6) (NAME(1,I),I=1,24)
     6 FORMAT(1H1,10X,24A2)
       WRITE(3,7) (NAME(2,I),I=1,24)
     7 FORMAT(1H ,/,10X,24A2,///)
       WRITE(3,8) (LIST(I),I=1,N)
     8 FORMAT(5X,29(2X,A2))
       DO 9 I=1,N
     9 WRITE(3,10) LIST(I),(VALUE(1,I,J),J=1,N)
    10 FORMAT(/,2X,A2,1X,29I4)
C      IZRACUN OVOJNICE
       DO 11 I=1,N
    11 VALUE(1,I,I)=NSUM(VALUE(1,I,I),ONE)
       NN=ALOG(FLOAT(N-2))/ALOG(2.) + 1
       DO 12 L=1,NN
       LL=L/2
       N1=1+L-2*LL
       N2=2*(1+LL)-L
       DO 12 I=1,N
       DO 12 J=1,N
       VALUE(N1,I,J)=ZERO
       DO 12 K=1,N
    12 VALUE(N1,I,J)=NSUM(VALUE(N1,I,J),NPRO(VALUE(N2,I,K),
      *VALUE(N2,K,J)))
C      IZPIS OVOJNICE
       WRITE(3,6) (NAME(1,I),I=1,24)
       WRITE(3,7) (NAME(3,I),I=1,24)
       WRITE(3,8) (LIST(I),I=1,N)
       DO 13 I=1,N
    13 WRITE(3,10) LIST(I),(VALUE(N1,I,J),J=1,N)
       CALL EXIT
       END

FEATURES SUPPORTED
 ONE WORD INTEGERS
 IOCS
```

```
// FOR
*ONE WORD INTEGERS
*IOCS(1132 PRINTER,CARD)
*LIST SOURCE PROGRAM
      INTEGER VALUE(2,29,29),ZERO,ONE,PATH(29,29)
      DIMENSION NAME(2,24),LIST(29)
      NSUM(NX,NY)=(IABS(NX+NY)-IABS(NX-NY))/2
      NPRO(NX,NY)=NX+NY
      READ(2,1) N,ZERO,ONE,MARK
    1 FORMAT(3I6,A2)
      READ(2,2) ((NAME(I,J),J=1,24),I=1,2)
    2 FORMAT(24A2)
      READ(2,3) (LIST(I),I=1,N)
    3 FORMAT(29A2)
      DO 4 I=1,N
    4 READ(2,5) (VALUE(1,I,J),J=1,N)
    5 FORMAT(15I4)
      DO 6 I=1,N
      VALUE(1,I,I)=ONE
      VALUE(2,I,I)=ONE
      DO 6 J=1,N
    6 PATH(I,J)=MARK
      NN=ALOG(FLOAT(N-2))/ALOG(2.) + 1
      DO 11 L=1,NN
      LL=L/2
      N1=1+L-2*LL
      N2=2*(1+LL)-L
      DO 11 I=2,N
      II=I-1
      DO 11 J=1,II
      VALUE(N1,I,J)=ZERO
      DO 8 K=1,N
      NP=NPRO(VALUE(N2,I,K),VALUE(N2,K,J))
      VALUE(N1,I,J)=NSUM(VALUE(N1,I,J),NP)
      IF(VALUE(N1,I,J)-NP) 8,7,8
    7 NREST=K
    8 CONTINUE
      IF(NREST-I) 9,11,9
    9 IF(NREST-J) 10,11,10
   10 PATH(I,J)=LIST(NREST)
      PATH(J,I)=LIST(NREST)
   11 VALUE(N1,J,I)=VALUE(N1,I,J)
      WRITE(3,12) (NAME(1,I),I=1,24)
   12 FORMAT(1H1,10X,24A2)
      WRITE(3,13) (NAME(2,I),I=1,24)
   13 FORMAT(1H ,/,10X,24A2,///)
      WRITE(3,14) (LIST(I),I=1,N)
   14 FORMAT(6X,29(2X,A2))
      WRITE(3,15)
   15 FORMAT(/)
      WRITE(3,16) LIST(1),(PATH(1,J),J=1,N)
   16 FORMAT(1H+,2X,A2,1X,29(2X,A2))
      DO 19 I=2,N
      II=I-1
      DO 17 J=1,II
   17 PATH(I,J)=16448
      WRITE(3,18) (VALUE(N1,I,J),J=1,II)
   18 FORMAT(/,6X,29I4)
   19 WRITE(3,16) LIST(I),(PATH(I,J),J=1,N)
      CALL EXIT
      END
```

CESTNO OMREZJE JUGOZAHODNE SLOVENIJE

MATRIKA NAJKRAJSIH CEST IN RAZDALJ



	AD	DV	GD	KL	KP	KZ	MS	NG	PS	RB	RU	RZ	SN	SZ	TS
AD	**	SN	**	GD	SN	SN	NG	**	RZ	SN	SN	**	RZ	SN	SN
DV	36	**	SN	SN	KZ	**	SZ	SZ	SN	**	RB	SN	**	**	**
GD	25	59	**	**	SN	SN	**	AD	KL	PS	PS	PS	PS	SN	SN
KL	37	47	12	**	SN	SN	GD	GD	**	PS	RB	PS	RZ	RZ	SN
KP	70	34	93	81	**	**	TS	TS	SN	KZ	KZ	SN	KZ	TS	**
KZ	46	10	69	57	24	**	TS	TS	SN	DV	**	SN	DV	DV	**
MS	59	80	50	62	93	89	**	**	KL	SZ	TS	NG	SZ	NG	NG
NG	26	47	51	63	60	56	33	**	RZ	SZ	TS	AD	SZ	**	**
PS	33	27	32	20	61	37	82	59	**	**	RB	**	RZ	SN	SN
RB	55	19	54	42	53	29	99	66	22	**	**	SN	DV	DV	DV
RU	80	44	79	67	58	34	123	90	47	25	**	SN	RB	RB	KZ
RZ	21	15	44	32	49	25	80	47	12	34	59	**	**	SN	SN
SN	28	8	51	39	42	18	86	53	19	27	52	7	**	**	DV
SZ	43	9	66	54	38	19	71	38	34	28	53	22	15	**	**
TS	56	20	79	67	21	17	72	39	47	39	51	35	28	17	**

5. ZAKLJUČEK

Z dobljenimi rezultati seveda še nismo povedali vsega. Vzemimo idempotenten kvazikolobar z enoto $\mathcal{V} = (V, +, \cdot)$ in definirajmo v smislu DI.5 za poljuben $a \in V$

$$a^* = \sum_{k \in N} a^k$$

Z $*$ smo pravzaprav dobili v $\mathcal{V}$ novo operacijo, ki ji bomo rekli iteracija. Na ta način razširjena algebrska struktura

$$\mathcal{V} = (V, +, \cdot, *)$$

pa je naša stara znanka - algebra regularnih izrazov.

Naj v nadaljnem $\mathcal{V}$ pomeni algebro regularnih izrazov. Definirajmo množenje $\otimes$ dveh kvadratnih matrik $\mathbb{A}$ in $\mathbb{B}$ nad $\mathcal{V}$ na naslednji način

$$\mathbb{A} \otimes \mathbb{B} = \mathbb{C}$$

kjer je

$$c_{ij} = \begin{cases} \left(\sum_{k=1}^{m} a_{ik} \cdot b_{kj}\right)^* & i = j \\ \sum_{k=1}^{m} a_{ik} \cdot b_{kj} & i \neq j \end{cases}$$

in nato, ker operacija $\otimes$ ni asociativna in zato ne moremo definirati potence, ki bi bila neodvisna od zaporedja množenj posameznih faktorjev, rekurzivno še zaporedje $(\mathbb{R}_k)_{k \in N^+}$

a. $\mathbb{R}_1 = \mathbb{V} \otimes \mathbb{I}$

b. $\mathbb{R}_{n+1} = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{R}_{n+1-k} \otimes \mathbb{R}_k \qquad n \in N^+$

Domnevam, da velja izrek

$$\exists n_0 \in N \ \forall n \geq n_0 : \ \mathbb{V}^* = \mathbb{R}_n$$

6. LITERATURA

1. Batagelj V. : A method for mathematical network description ; FCIP 70 , Bled , 1970
2. Batagelj V. : Vrednostna funkcija grafov ; ADP seminar '70 , Zagreb , 1970
3. Ginzburg A. : Algebraic theory of automata ; Academic press , New York - London , 1968
4. Gluškov V. M. : Sintez cifrovyh avtomatov ; FIZMATGIZ , Moskva , 1962
5. Pair C. : Notions sur la théorie des graphes ; Université de Nancy , Nancy , 1969/70
6. Vidav I. : Algebra ; Univerza v Ljubljani , Ljubljana , 1965
7. Virant J. : Teorija preklopnih vezij ; Univerza v Ljubljani , Ljubljana , 1969
8. Zykov A. A. : Teorija konečnyh grafov I ; Nauka , Novosibirsk , 1969