Policy gradient методы

Сухарьков Александр, БПМИ 171

21.02.2020

Содержание

Приближение стратегии

Policy функция, используемая в данных методах -

$$\pi(a|s,\boldsymbol{\theta}) = \Pr\{A_t = a \mid S_t = s, \boldsymbol{\theta}_t = \boldsymbol{\theta}\}$$

Формула градиентного подъема -

$$\boldsymbol{\theta}_{t+1} = \boldsymbol{\theta}_t + \alpha \widehat{\nabla J(\boldsymbol{\theta}_t)}$$

Приближение стратегии

Один из примеров возможной параметризации, экспоненциальное softmax распределение -

$$\pi(a|s,\boldsymbol{\theta}) = \frac{\exp(h(s,a,\boldsymbol{\theta}))}{\sum_b \exp(h(s,b,\boldsymbol{\theta}))}$$

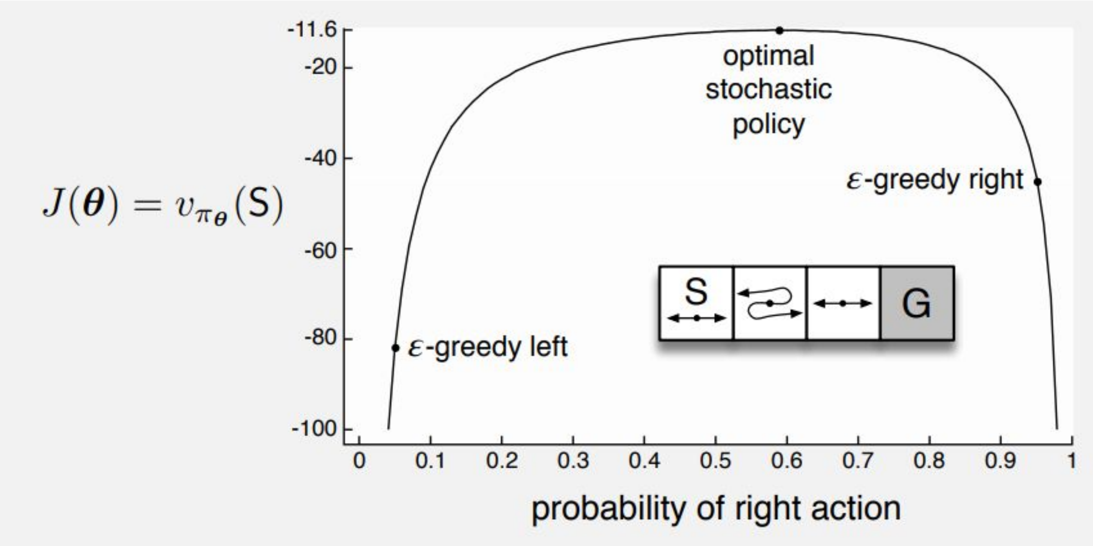
Один из примеров подсчета предпочтений -

$$h(s,a,\boldsymbol{\theta}) = \boldsymbol{\theta}^\top \mathbf{x}(s,a)$$

Преимущества над action-value методами

- Возможность приблизиться к детерминированной стратегии
- У policy gradient методов есть возможность найти оптимальную стохастическую стратегию
- Параметризация может упростить процесс аппроксимации
- Добавляет возможные предварительные знания о стратегии

Приближение стратегии



Policy gradient теорема

Задаем как показатель эффективности ожидаемую награду из начального состояния с использованием стратегии с параметром -

$$J(\boldsymbol{\theta}) \doteq v_{\pi_{\boldsymbol{\theta}}}(s_0)$$

Сама теорема выглядит таким образом -

$$\nabla J(\boldsymbol{\theta}) \propto \sum_s \mu(s) \sum_a q_\pi(s,a) \nabla_{\boldsymbol{\theta}} \pi(a|s,\boldsymbol{\theta})$$

Доказательство теоремы

$$
\begin{aligned}
\nabla v_\pi(s) &= \nabla \left[\sum_a \pi(a|s) q_\pi(s,a) \right], \quad \text{for all } s \in \mathcal{S} \\
&= \sum_a \Big[\nabla \pi(a|s) q_\pi(s,a) + \pi(a|s) \nabla q_\pi(s,a) \Big] \\
&= \sum_a \Big[\nabla \pi(a|s) q_\pi(s,a) + \pi(a|s) \nabla \sum_{s',r} p(s',r\,|\,s,a) \big(r + v_\pi(s') \big) \Big] \\
&= \sum_a \Big[\nabla \pi(a|s) q_\pi(s,a) + \pi(a|s) \sum_{s'} p(s'\,|\,s,a) \nabla v_\pi(s') \Big] \\
&= \sum_a \Big[\nabla \pi(a|s) q_\pi(s,a) + \pi(a|s) \sum_{s'} p(s'\,|\,s,a) \\
&\qquad \sum_{a'} \big[\nabla \pi(a'|s') q_\pi(s',a') + \pi(a'|s') \sum_{s''} p(s''\,|\,s',a') \nabla v_\pi(s'') \big] \Big] \\
&= \sum_{x \in \mathcal{S}} \sum_{k=0}^{\infty} \Pr(s \to x, k, \pi) \sum_a \nabla \pi(a|x) q_\pi(x,a)
\end{aligned}
$$

Доказательство теоремы

$$
\begin{aligned}
\nabla J(\boldsymbol{\theta}) &= \nabla v_\pi(s_0) \\
&= \sum_s \left(\sum_{k=0}^{\infty} \Pr(s_0 \rightarrow s, k, \pi) \right) \sum_a \nabla \pi(a|s) q_\pi(s,a) \\
&= \sum_s \eta(s) \sum_a \nabla \pi(a|s) q_\pi(s,a) \\
&= \left(\sum_s \eta(s) \right) \sum_s \frac{\eta(s)}{\sum_s \eta(s)} \sum_a \nabla \pi(a|s) q_\pi(s,a) \\
&\propto \sum_s \mu(s) \sum_a \nabla \pi(a|s) q_\pi(s,a). \qquad \text{Q.E.D.}
\end{aligned}
$$

Log-derivative trick

$$\nabla_\theta \log p(\mathbf{x};\theta) = \frac{\nabla_\theta p(\mathbf{x};\theta)}{p(\mathbf{x};\theta)}$$

Свойства score функции:

1. Главное вычисление оценки максимального правдоподобия
2. Математическое ожидание равно нулю

$$\mathbb{E}_{p(x;\theta)}[\nabla_\theta \log p(\mathbf{x};\theta)] = \mathbb{E}_{p(x;\theta)}\left[\frac{\nabla_\theta p(\mathbf{x};\theta)}{p(\mathbf{x};\theta)}\right]$$

$$= \int p(\mathbf{x};\theta)\frac{\nabla_\theta p(\mathbf{x};\theta)}{p(\mathbf{x};\theta)}dx = \nabla_\theta \int p(\mathbf{x};\theta)dx = \nabla_\theta 1 = 0$$

3. Дисперсия является информацией Фишера

$$\mathbb{V}[\nabla_\theta \log p(\mathbf{x};\theta)] = \mathcal{I}(\theta) = \mathbb{E}_{p(x;\theta)}[\nabla_\theta \log p(\mathbf{x};\theta)\nabla_\theta \log p(\mathbf{x};\theta)^\top]$$

Log-derivative trick

Хотим посчитать градиент от математического ожидания -

$$\nabla_\theta \mathbb{E}_{p(z;\theta)}[f(z)] = \nabla_\theta \int p(z;\theta) f(z) dz$$

Сведем это равенство к решаемому виду -

$$\nabla_\theta \mathbb{E}_{p(z;\theta)}[f(z)] = \mathbb{E}_{p(z;\theta)}[f(z) \nabla_\theta \log p(z;\theta)]$$

Log-derivative trick

$$\nabla_\theta \mathbb{E}_{p(z;\theta)}[f(z)] = \int \nabla_\theta p(z;\theta) f(z) dz$$

$$= \int \frac{p(z;\theta)}{p(z;\theta)} \nabla_\theta p(z;\theta) f(z) dz$$

$$= \int p(z;\theta) \nabla_\theta \log p(z;\theta) f(z) dz = \mathbb{E}_{p(z;\theta)}[f(z) \nabla_\theta \log p(z;\theta)]$$

REINFORCE

Должны преобразовать теорему так, чтобы ее можно было бы использовать в градиентном подъеме:

$$\nabla J(\boldsymbol{\theta}) \propto \sum_s \mu(s) \sum_a q_\pi(s,a) \nabla_{\boldsymbol{\theta}} \pi(a|s,\boldsymbol{\theta})$$
$$= \mathbb{E}_\pi\left[\sum_a q_\pi(S_t,a) \nabla_{\boldsymbol{\theta}} \pi(a|S_t,\boldsymbol{\theta})\right]$$

REINFORCE

$$
\begin{aligned}
\nabla J(\boldsymbol{\theta}) &= \mathbb{E}_\pi\left[\sum_a \pi(a|S_t,\boldsymbol{\theta}) q_\pi(S_t,a) \frac{\nabla_{\boldsymbol{\theta}} \pi(a|S_t,\boldsymbol{\theta})}{\pi(a|S_t,\boldsymbol{\theta})}\right] \\
&= \mathbb{E}_\pi\left[q_\pi(S_t,A_t) \frac{\nabla_{\boldsymbol{\theta}} \pi(A_t|S_t,\boldsymbol{\theta})}{\pi(A_t|S_t,\boldsymbol{\theta})}\right] && \text{(replacing } a \text{ by the sample } A_t \sim \pi) \\
&= \mathbb{E}_\pi\left[G_t \frac{\nabla_{\boldsymbol{\theta}} \pi(A_t|S_t,\boldsymbol{\theta})}{\pi(A_t|S_t,\boldsymbol{\theta})}\right] && \text{(because } \mathbb{E}_\pi[G_t|S_t,A_t] = q_\pi(S_t,A_t))
\end{aligned}
$$

REINFORCE

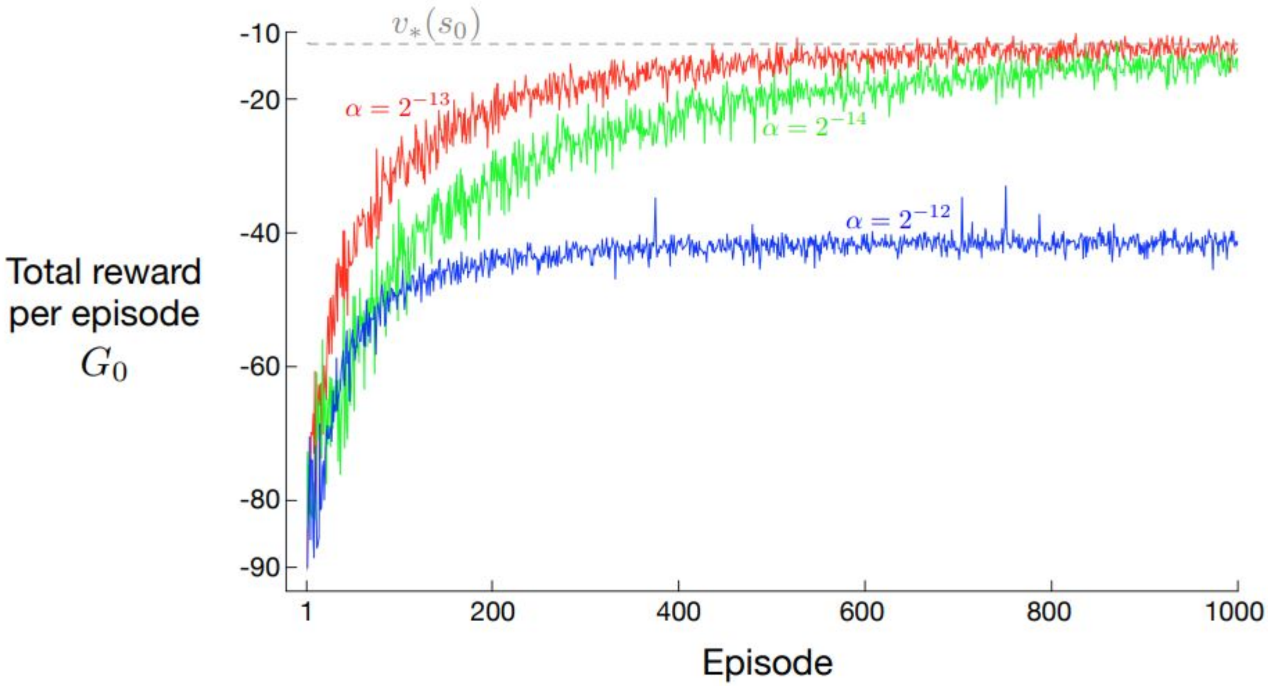
Подставляем полученное в формулу градиентного подъема -

$$\boldsymbol{\theta}_{t+1} \doteq \boldsymbol{\theta}_t + \alpha G_t \frac{\nabla_{\boldsymbol{\theta}} \pi(A_t|S_t, \boldsymbol{\theta}_t)}{\pi(A_t|S_t, \boldsymbol{\theta}_t)}$$

REINFORCE

Input: a differentiable policy parameterization $\pi(a|s, \boldsymbol{\theta})$
Initialize policy parameter $\boldsymbol{\theta} \in \mathbb{R}^{d'}$
Repeat forever:
    Generate an episode $S_0, A_0, R_1, \ldots, S_{T-1}, A_{T-1}, R_T$, following $\pi(\cdot|\cdot, \boldsymbol{\theta})$
    For each step of the episode $t = 0, \ldots, T-1$:
        $G \leftarrow$ return from step t
        $\boldsymbol{\theta} \leftarrow \boldsymbol{\theta} + \alpha\gamma^t G \nabla_{\boldsymbol{\theta}} \ln \pi(A_t|S_t, \boldsymbol{\theta})$

REINFORCE



$v_*(s_0)$
-10
-20
-40
-60
-80
-90
$\alpha = 2^{-13}$
$\alpha = 2^{-14}$
$\alpha = 2^{-12}$
Total reward per episode G_0
1
200
400
600
800
1000
Episode

REINFORCE с бейзлайном

Отличается от REINFORCE добавлением бейзлайна в policy gradient теорему

$$\nabla J(\boldsymbol{\theta}) \propto \sum_s \mu(s) \sum_a \Big(q_\pi(s,a) - b(s) \Big) \nabla_{\boldsymbol{\theta}} \pi(a|s,\boldsymbol{\theta})$$

Можем так сделать, потому что

$$\sum_a b(s) \nabla_{\boldsymbol{\theta}} \pi(a|s,\boldsymbol{\theta}) \ = \ b(s) \nabla_{\boldsymbol{\theta}} \sum_a \pi(a|s,\boldsymbol{\theta}) \ = \ b(s) \nabla_{\boldsymbol{\theta}} 1 \ = \ 0$$

Получаем новую формулу градиентного подъема

$$\boldsymbol{\theta}_{t+1} \doteq \boldsymbol{\theta}_t + \alpha \Big(G_t - b(S_t) \Big) \frac{\nabla_{\boldsymbol{\theta}} \pi(A_t|S_t,\boldsymbol{\theta}_t)}{\pi(A_t|S_t,\boldsymbol{\theta}_t)}$$

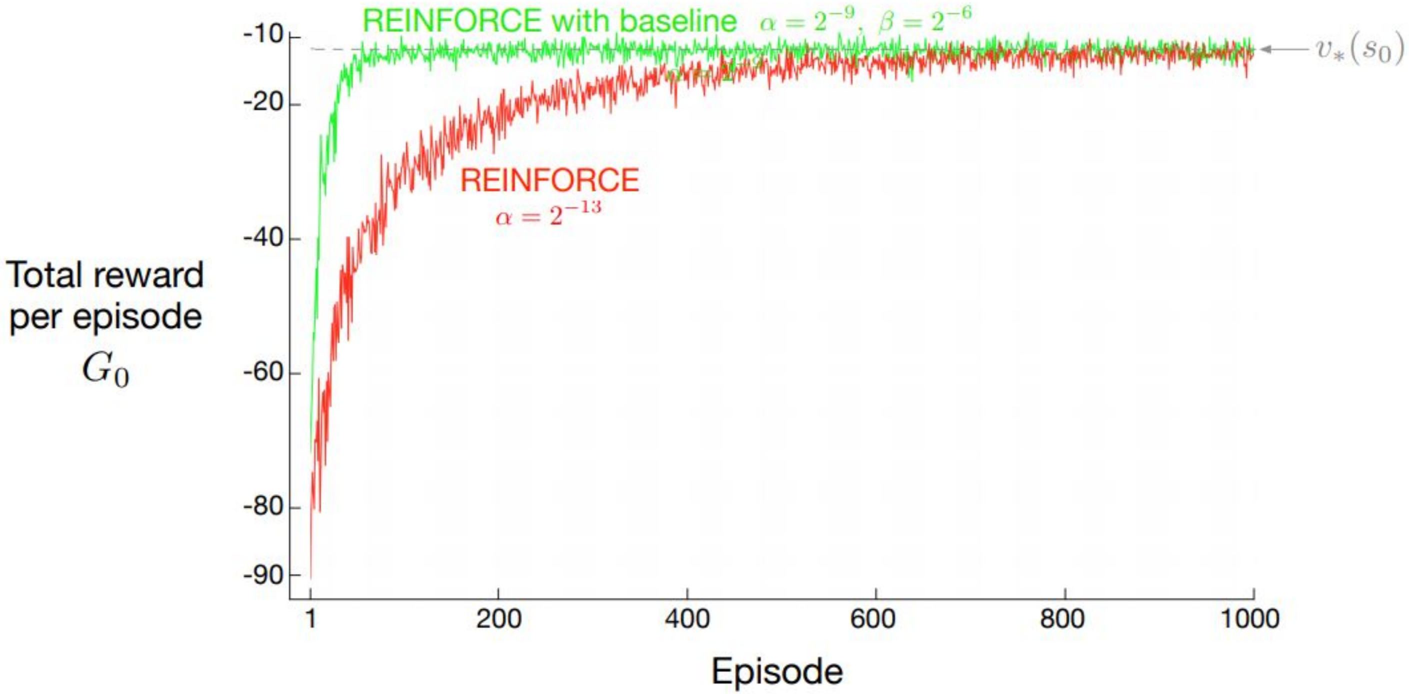
REINFORCE с бейзлайном

Input: a differentiable policy parameterization $\pi(a|s, \boldsymbol{\theta})$
Input: a differentiable state-value parameterization $\hat{v}(s,\mathbf{w})$
Parameters: step sizes $\alpha^{\boldsymbol{\theta}} > 0$, $\alpha^{\mathbf{w}} > 0$

Initialize policy parameter $\boldsymbol{\theta} \in \mathbb{R}^{d'}$ and state-value weights $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^d$
Repeat forever:
  Generate an episode $S_0, A_0, R_1, \ldots, S_{T-1}, A_{T-1}, R_T$, following $\pi(\cdot|\cdot, \boldsymbol{\theta})$
  For each step of the episode $t = 0, \ldots, T-1$:
    $G_t \leftarrow$ return from step t
    $\delta \leftarrow G_t - \hat{v}(S_t,\mathbf{w})$
    $\mathbf{w} \leftarrow \mathbf{w} + \alpha^{\mathbf{w}} \gamma^t \delta \nabla_{\mathbf{w}} \hat{v}(S_t,\mathbf{w})$
    $\boldsymbol{\theta} \leftarrow \boldsymbol{\theta} + \alpha^{\boldsymbol{\theta}} \gamma^t \delta \nabla_{\boldsymbol{\theta}} \ln \pi(A_t|S_t, \boldsymbol{\theta})$

Возможный вариант задания длины шага $\alpha^{\mathbf{w}}$: $\alpha^{\mathbf{w}} = 0.1/\mathbb{E}\left[\|\nabla_{\mathbf{w}} \hat{v}(S_t,\mathbf{w})\|_{\mu}^2\right]$

Сравнение двух вариантов REINFORCE



One-step Actor-Critic

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\theta}_{t+1} &\doteq \boldsymbol{\theta}_t + \alpha\Big(G_{t:t+1} - \hat{v}(S_t,\mathbf{w})\Big)\frac{\nabla_{\boldsymbol{\theta}}\pi(A_t|S_t,\boldsymbol{\theta}_t)}{\pi(A_t|S_t,\boldsymbol{\theta}_t)} \\
&= \boldsymbol{\theta}_t + \alpha\Big(R_{t+1} + \gamma\hat{v}(S_{t+1},\mathbf{w}) - \hat{v}(S_t,\mathbf{w})\Big)\frac{\nabla_{\boldsymbol{\theta}}\pi(A_t|S_t,\boldsymbol{\theta}_t)}{\pi(A_t|S_t,\boldsymbol{\theta}_t)} \\
&= \boldsymbol{\theta}_t + \alpha\delta_t\frac{\nabla_{\boldsymbol{\theta}}\pi(A_t|S_t,\boldsymbol{\theta}_t)}{\pi(A_t|S_t,\boldsymbol{\theta}_t)}.
\end{aligned}$$

One-step Actor-Critic

Input: a differentiable policy parameterization $\pi(a|s,\boldsymbol{\theta})$
Input: a differentiable state-value parameterization $\hat{v}(s,\mathbf{w})$
Parameters: step sizes $\alpha^{\boldsymbol{\theta}} > 0$, $\alpha^{\mathbf{w}} > 0$

Initialize policy parameter $\boldsymbol{\theta} \in \mathbb{R}^{d'}$ and state-value weights $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^{d}$
Repeat forever:
    Initialize S (first state of episode)
    $I \leftarrow 1$
    While S is not terminal:
        $A \sim \pi(\cdot|S,\boldsymbol{\theta})$
        Take action A, observe S', R
        $\delta \leftarrow R + \gamma\hat{v}(S',\mathbf{w}) - \hat{v}(S,\mathbf{w})$ (if S' is terminal, then $\hat{v}(S',\mathbf{w}) \doteq 0$)
        $\mathbf{w} \leftarrow \mathbf{w} + \alpha^{\mathbf{w}} I \delta \nabla_{\mathbf{w}} \hat{v}(S,\mathbf{w})$
        $\boldsymbol{\theta} \leftarrow \boldsymbol{\theta} + \alpha^{\boldsymbol{\theta}} I \delta \nabla_{\boldsymbol{\theta}} \ln \pi(A|S,\boldsymbol{\theta})$
        $I \leftarrow \gamma I$
        $S \leftarrow S'$

Вопросы

1. Какие свойства у score функции? Распишите одно из свойств с помощью log-derivative трюка.
2. Опишите алгоритм работы REINFORCE с бейзлайном.
3. Опишите алгоритм работы one-step actor-critic метода.

Список литературы

1. Richard S. Sutton and Andrew G. Barto, Reinforcement Learning: An Introduction, глава 13
2. http://blog.shakirm.com/2015/11/machine-learning-trick-of-the-day-5-log-derivative-trick/ (Log-derivative trick)
3. https://medium.com/@aminamollaysa/policy-gradients-and-log-derivative-trick-4aad962e43e0
4. https://lilianweng.github.io/lil-log/2018/04/08/policy-gradient-algorithms.html