Causality: структурные модели причинно-следственных связей

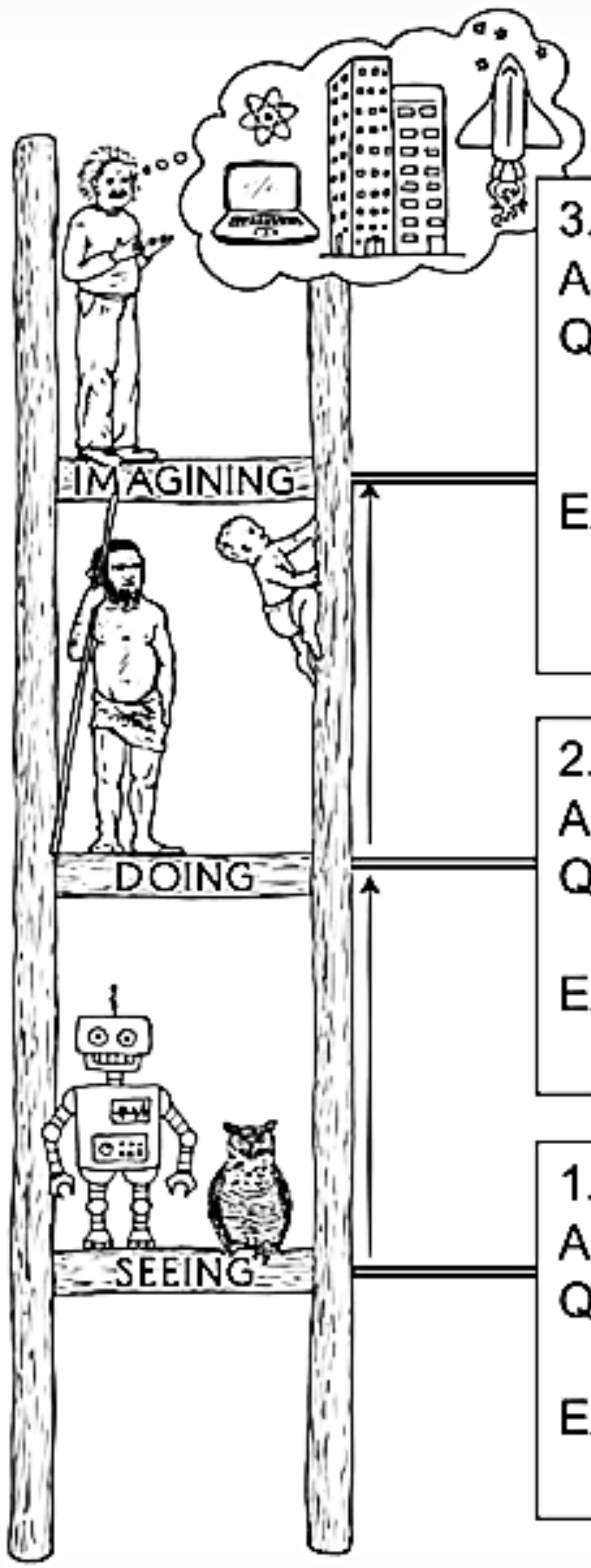
БПМИ192, НИС

Мария Тимонина

Юлия Кокорина

Дмитрий Поздеев

3-LEVEL HIERARCHY



3. COUNTERFACTUALS
ACTIVITY: Imagining, Retrospection, Understanding
QUESTIONS: *What if I had done . . . ? Why?*
(Was it X that caused Y? What if X had not occurred? What if I had acted differently?)
EXAMPLES: Was it the aspirin that stopped my headache? Would Kennedy be alive if Oswald had not killed him? What if I had not smoked the last 2 years?

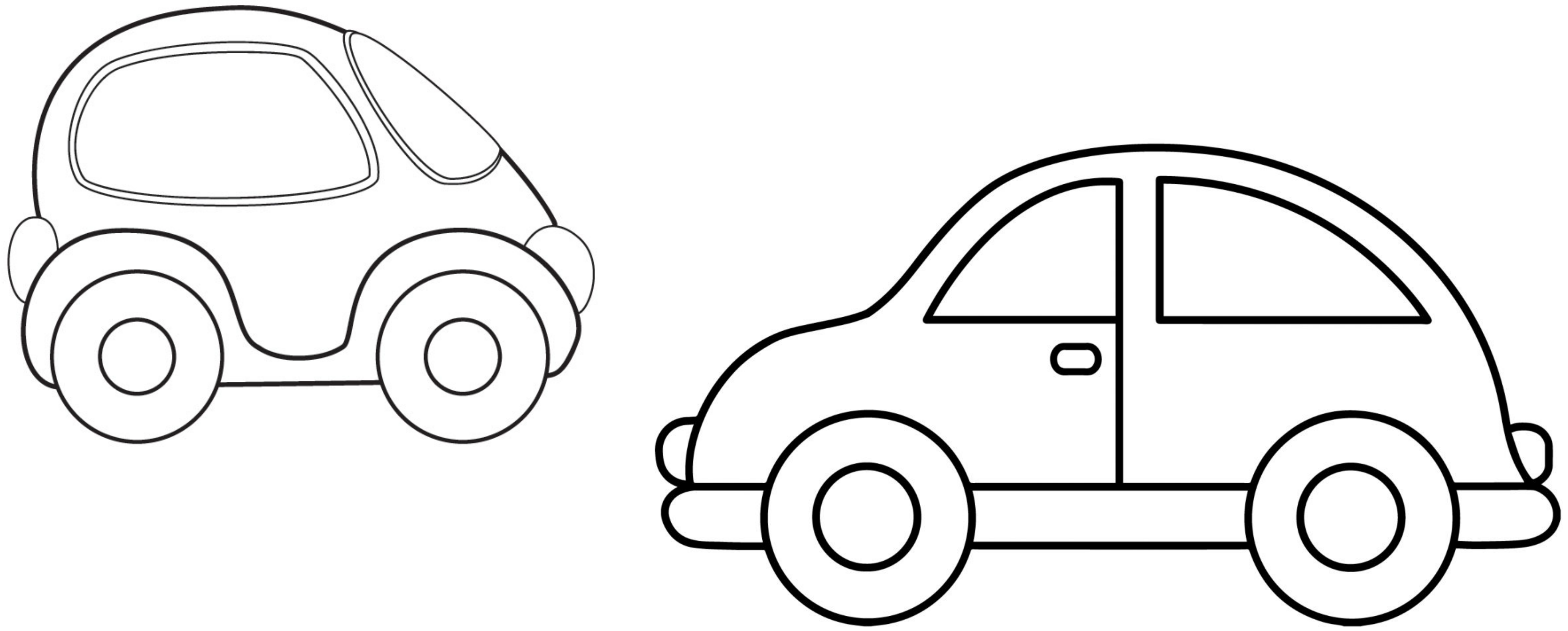
2. INTERVENTION
ACTIVITY: Doing, Intervening
QUESTIONS: *What if I do . . . ? How?*
(What would Y be if I do X?)
EXAMPLES: If I take aspirin, will my headache be cured? What if we ban cigarettes?

1. ASSOCIATION
ACTIVITY: Seeing, Observing
QUESTIONS: *What if I see . . . ?*
(How would seeing X change my belief in Y?)
EXAMPLES: What does a symptom tell me about a disease? What does a survey tell us about the election results?

The Book of Why: The New Science of Cause and Effect · Judea Pearl, Dana Mackenzie · 2018

Наблюдаемое VS возможное гипотетически

- Попадают ли 16-летние водители в ДТП чаще, чем 18-летние?



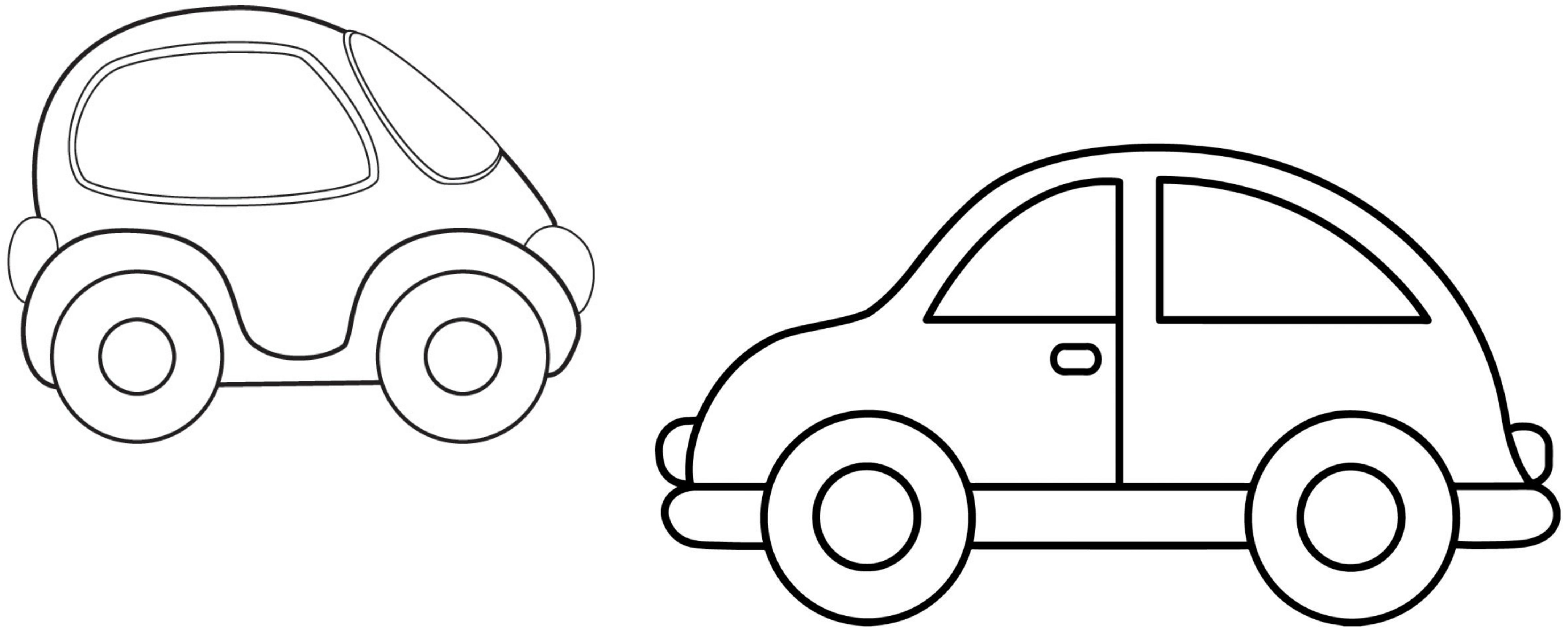
$P(X|Y = 16) \ - \ P(X|Y = 18)$

выборочные условные вероятности

Наблюдаемое VS возможное гипотетически

- Попадают ли 16-летние водители в ДТП чаще, чем 18-летние?

$P(X|Y = 16) - P(X|Y = 18)$



Вопросы бывают устроены сложнее:

Снизится ли количество фиксируемых ежегодно нарушений на дорогах, если повысить минимальный возраст получения прав?

Intervention – возможное действие, вмешательство

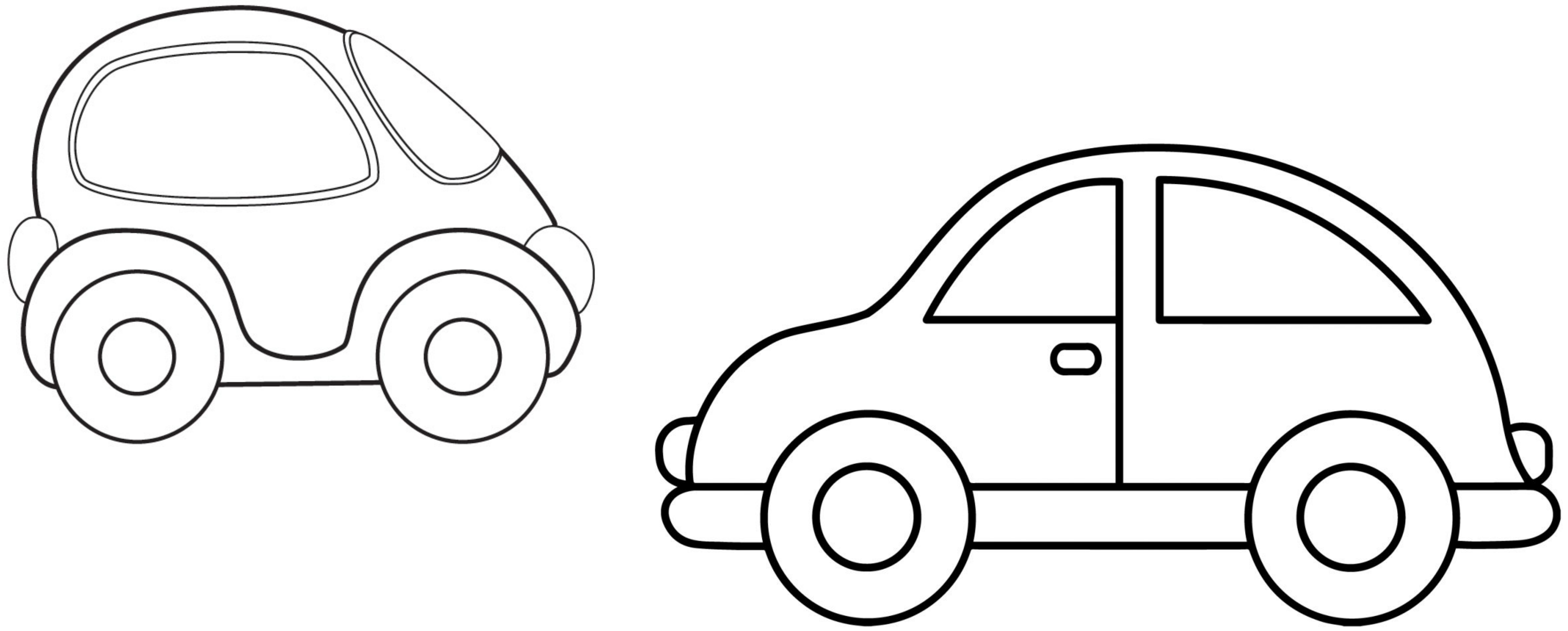
Наблюдаемое VS возможное гипотетически

- Попадают ли 16-летние водители в ДТП чаще, чем 18-летние?

$P(X|Y = 16) - P(X|Y = 18)$

Вопросы бывают устроены сложнее:

Снизится ли количество фиксируемых ежегодно нарушений на дорогах, если повысить минимальный возраст получения прав?

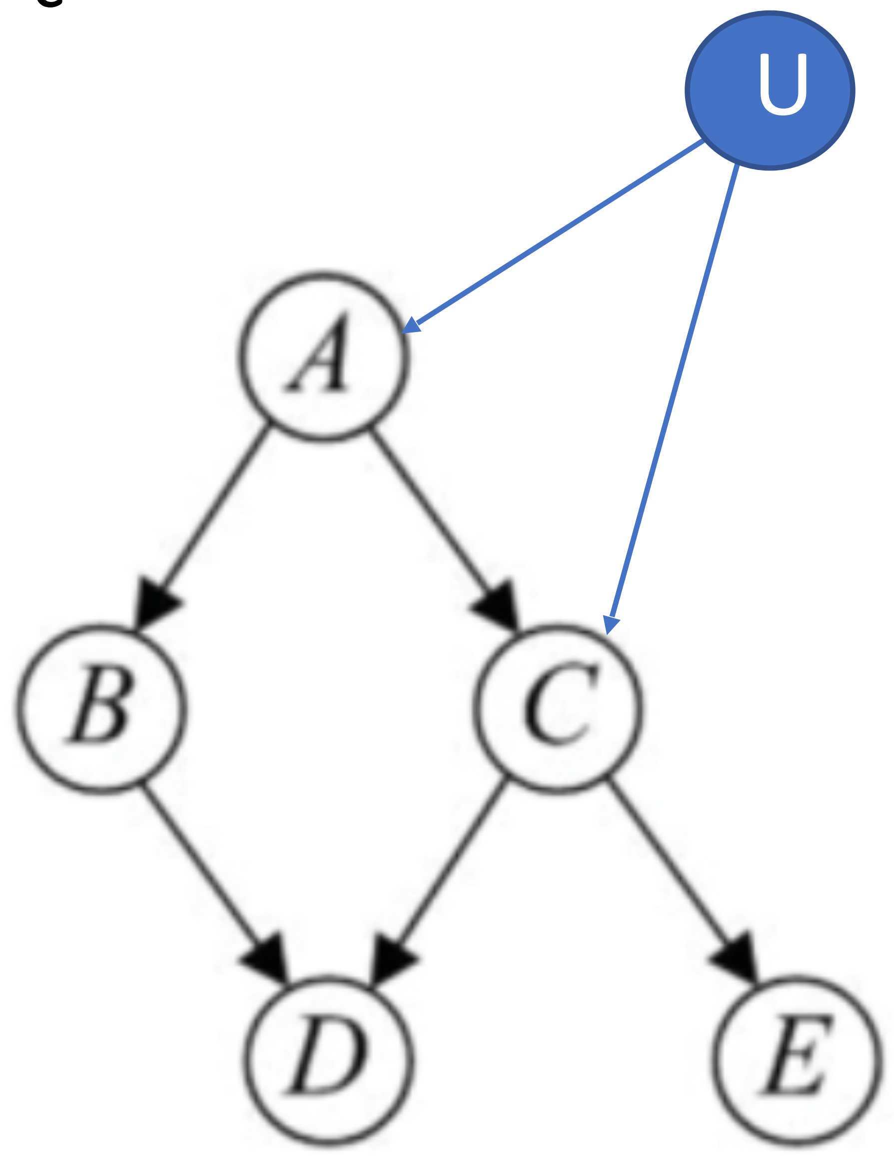


Intervention – возможное действие, вмешательство

Было ли бы число аварий на дорогах меньшим сейчас, если бы такой закон ввели три года назад?

Structural Causal model

- ациклический граф
- последовательность инструкций для генерации совместного распределения, начиная с независимых шумовых переменных



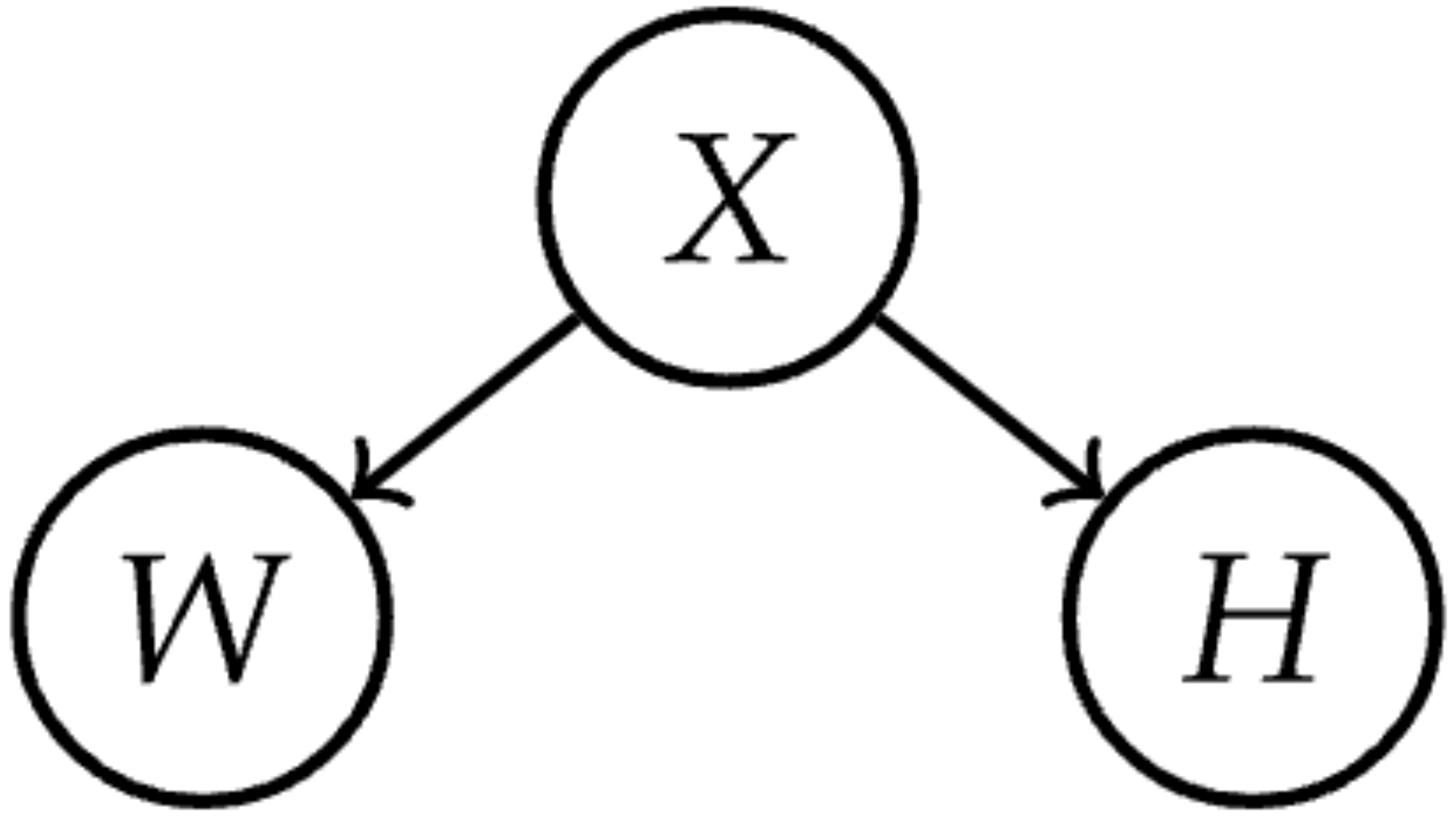
$$X_i := f_i(P_i, U_i), \qquad i = 1, ..., d\,.$$

где

$P_i \subseteq \{X_1, ..., X_d\}$ - это подмножество родительских вершин i-ой вершины графа, «непосредственных причин»

$U_1, ..., U_d$- это шум, внешние случайные величины. От них мы потребуем совместной независимости.

Разберем модельную задачку



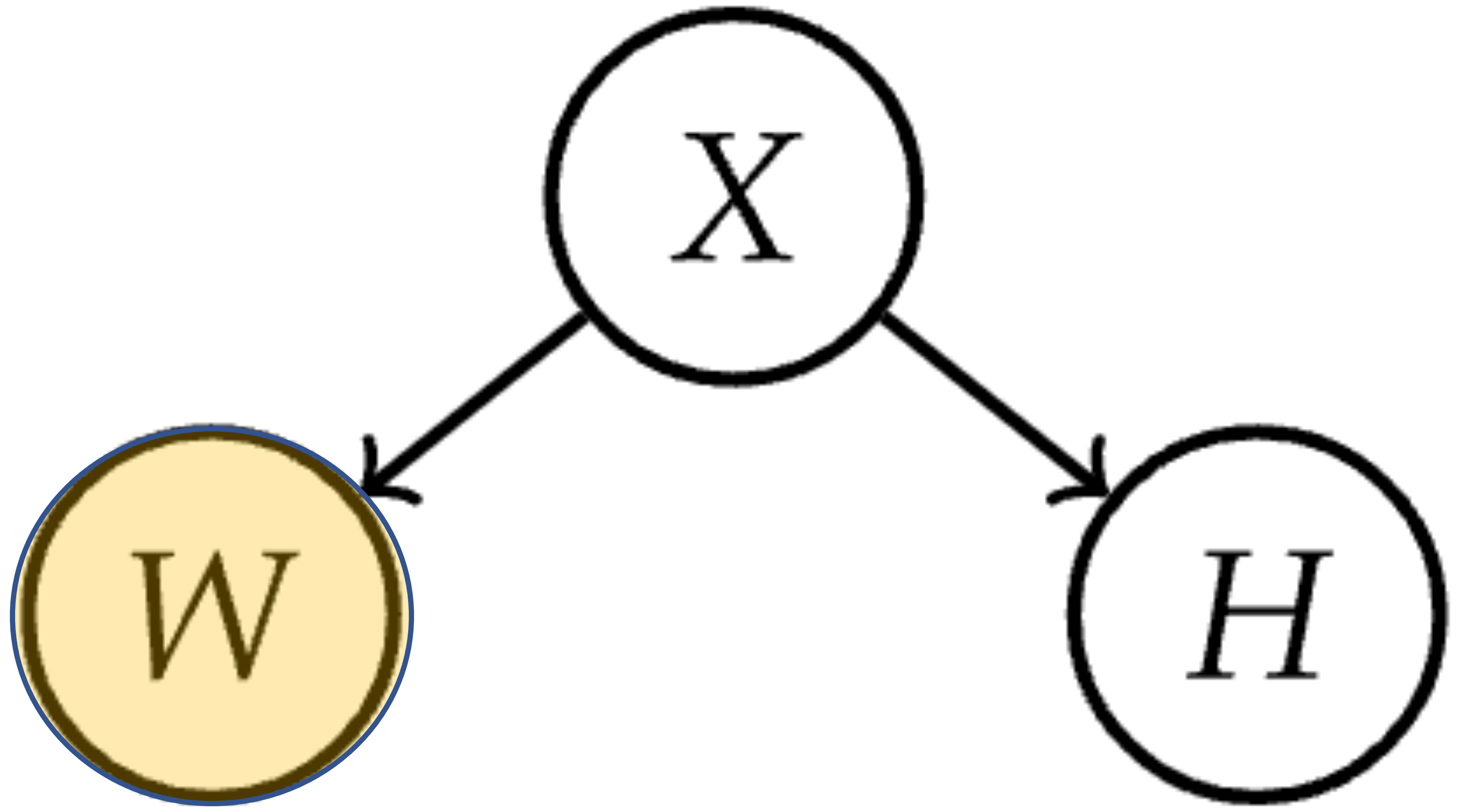
$$X := U_1 \sim \mathrm{B}(1/2)$$

$$W := \text{if } X = 1 \text{ then } 0 \text{ else } U_2 \sim \mathrm{B}(1/3)$$

$$H := \text{if } X = 1 \text{ then } 0 \text{ else } U_3 \sim \mathrm{B}(1/3)$$

Интуитивно переменные W и H – наличие у человека лишнего веса и проблем с сердцем – не должны коррелировать

Разберем модельную задачку



$$\boxed{W = 1}$$

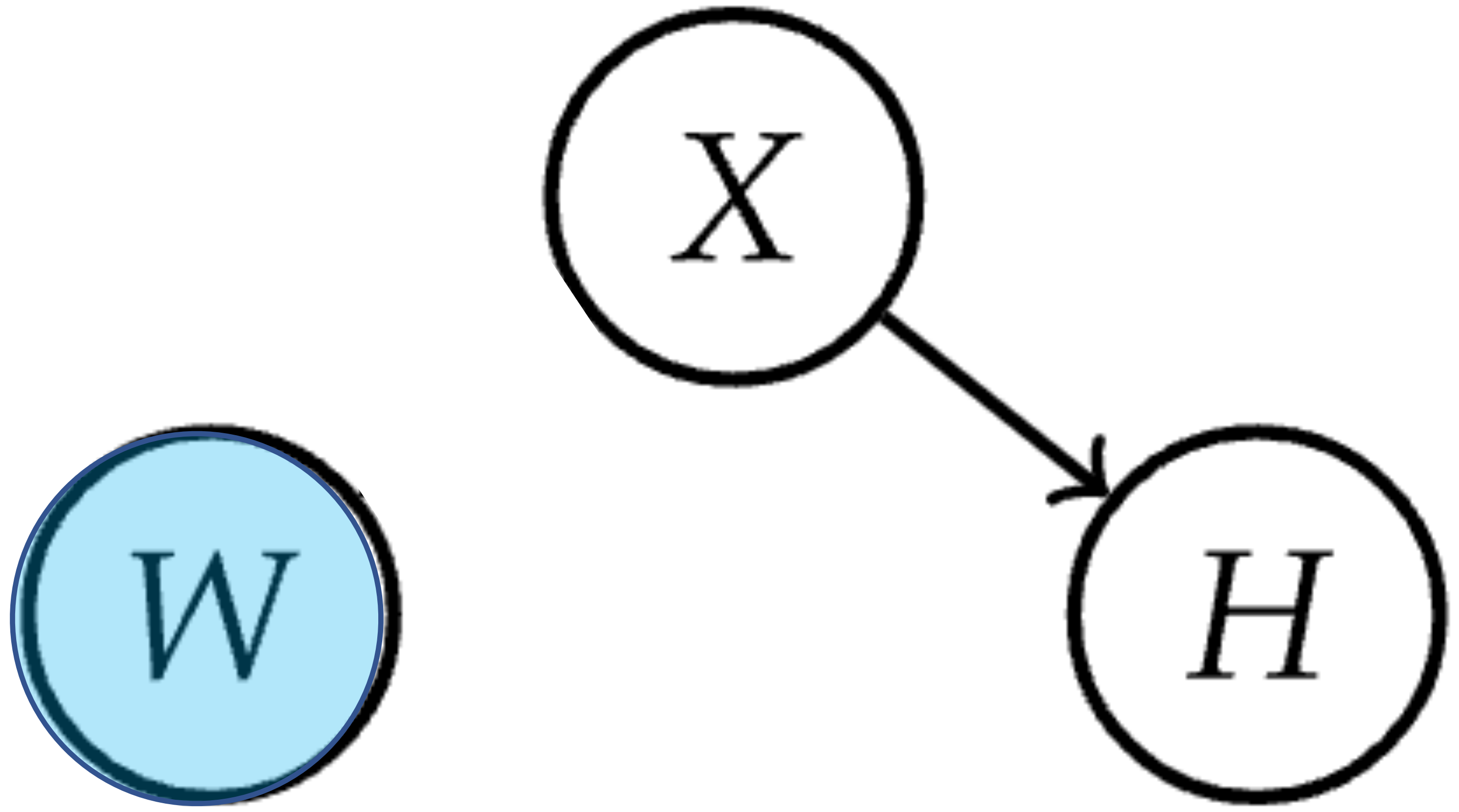
$$X := U_1 \sim \mathrm{B}(1/2)$$

$$W := \text{if } X = 1 \text{ then } 0 \text{ else } U_2 \sim \mathrm{B}(1/3)$$

$$H := \text{if } X = 1 \text{ then } 0 \text{ else } U_3 \sim \mathrm{B}(1/3)$$

$$\mathbb{P}(H|W = 1) =$$

Разберем модельную задачку



$$X := U_1 \sim \mathrm{B}(1/2)$$

$$W := 1$$

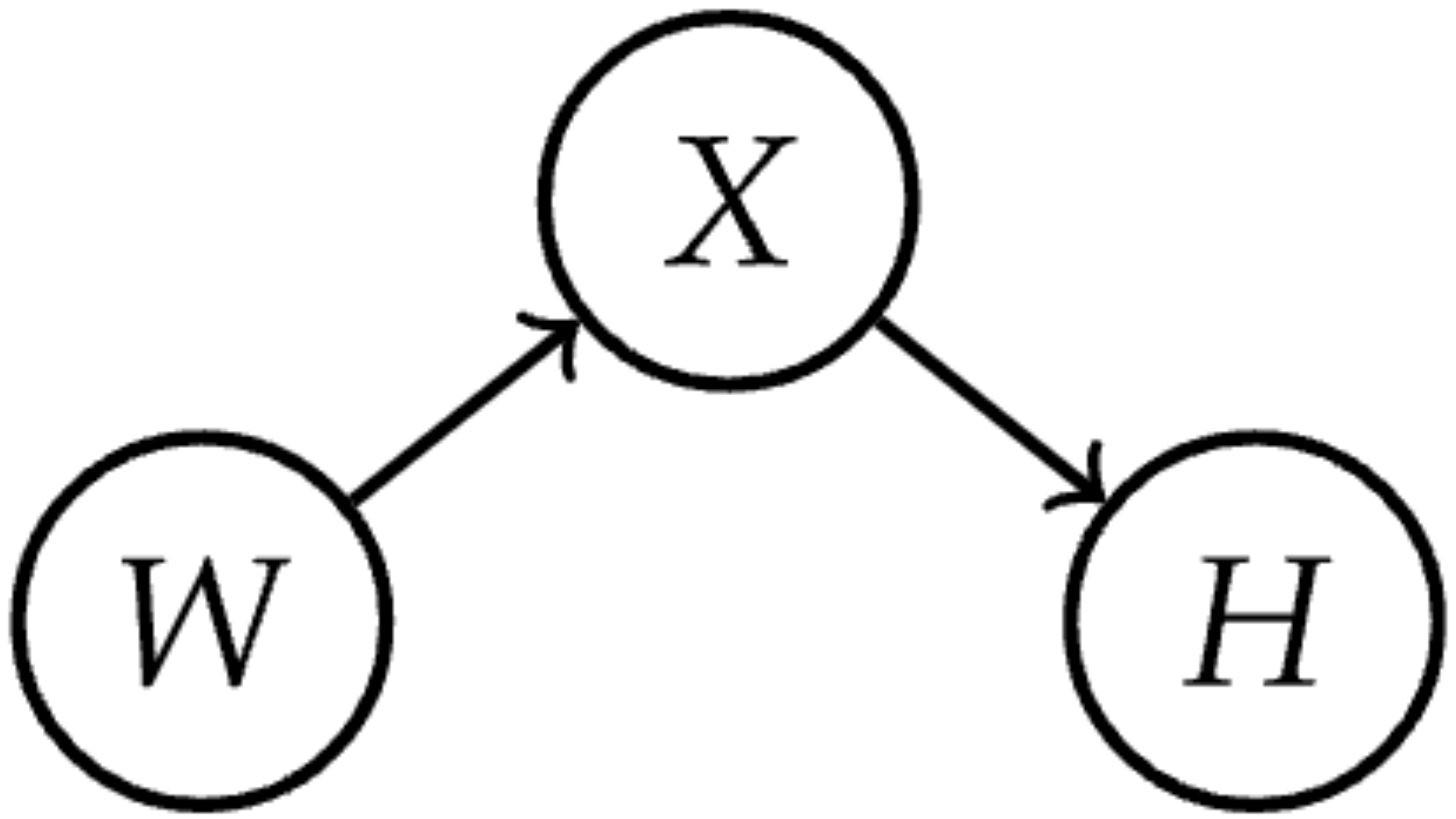
$$H := \text{if } X = 1 \text{ then } 0 \text{ else } U_3 \sim \mathrm{B}(1/3)$$

$$\boxed{W := 1}$$

$$\mathbb{P}(H | do(W := 1)) =$$

Распределение изменилось!

Другой тип зависимости



$$U_1 \sim \mathrm{B}(1/2), U_2 \sim \mathrm{B}(1/3), U_3 \sim \mathrm{B}(1/3)$$

2. $W := U_2$

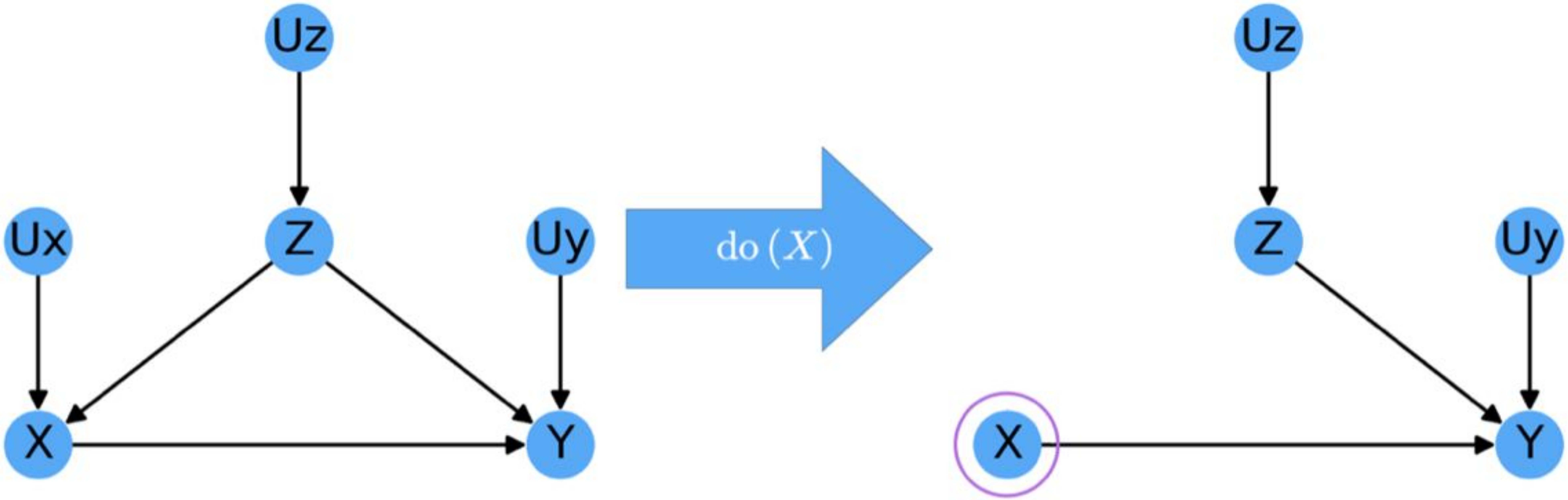
3. $X := \text{if } W = 0 \text{ then } 0 \text{ else } U_1$

4. $H := \text{if } X = 1 \text{ then } 0 \text{ else } U_3$

$\boxed{W = 1}$

$\boxed{W := 1}$

Do-operator

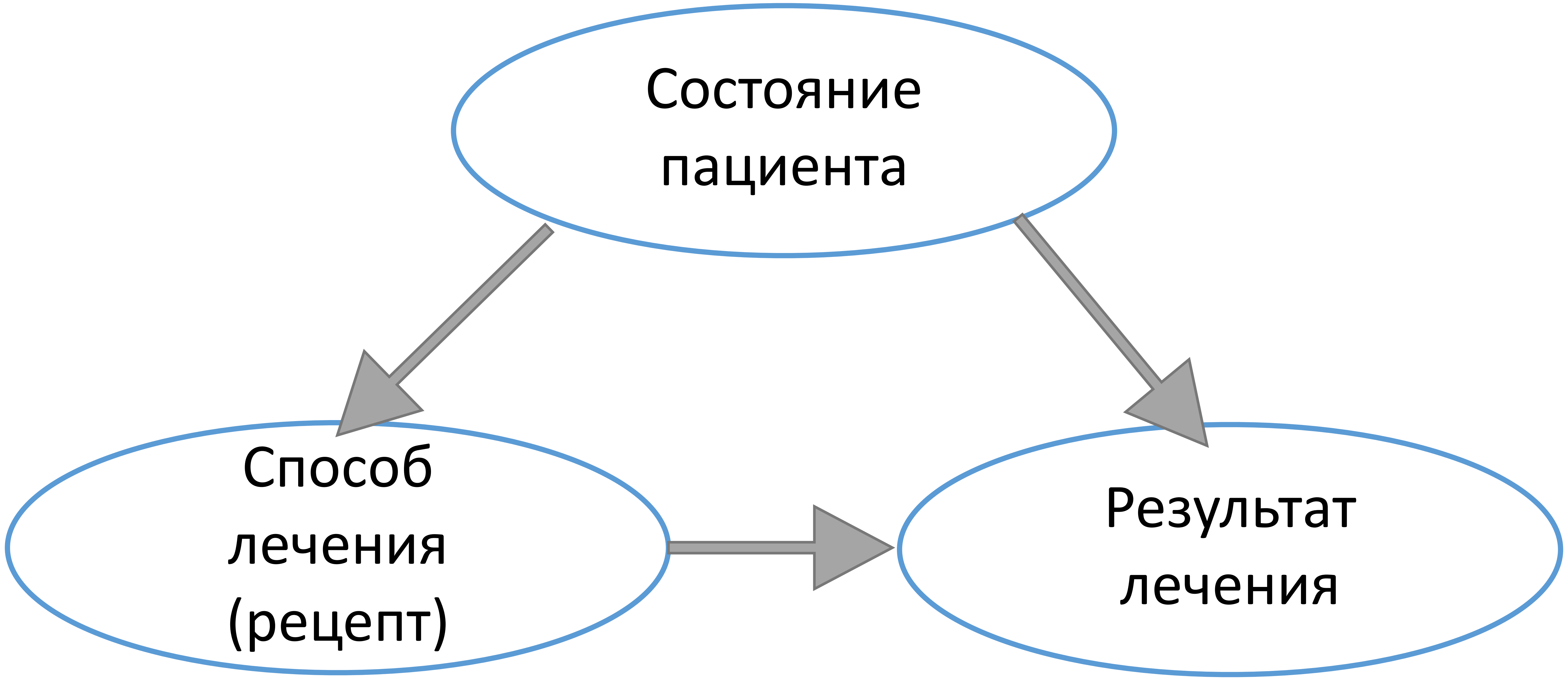


$P\,(X, Y, Z)$

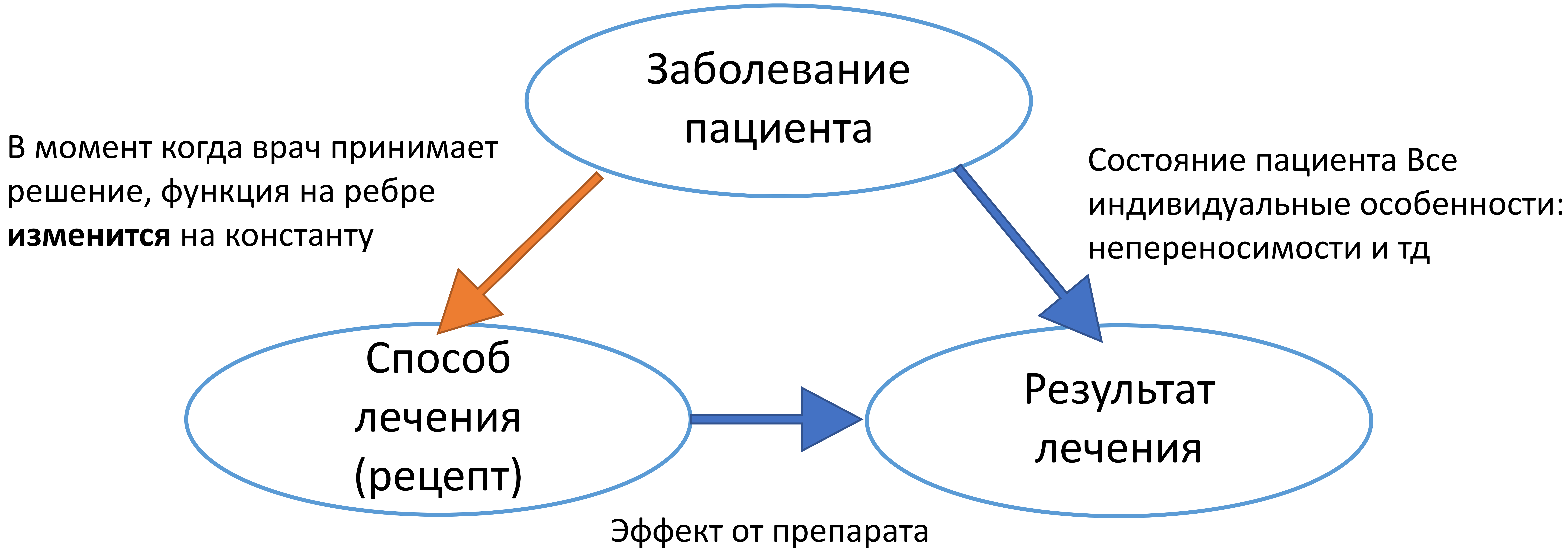
$P_m\,(X, Y, Z)$

$P_m\,(X) = x$

Не одинаковые связи



Confounded – связанные переменные



Quiz: Будем считать $P(y|do(x))$ или $P(y|x)$?

- Кейс 1: Доктор

  Вы работаете в больнице. Ваш пациент сдает анализ, по результатам которого Вы хотите выбрать лучший способ его лечения.

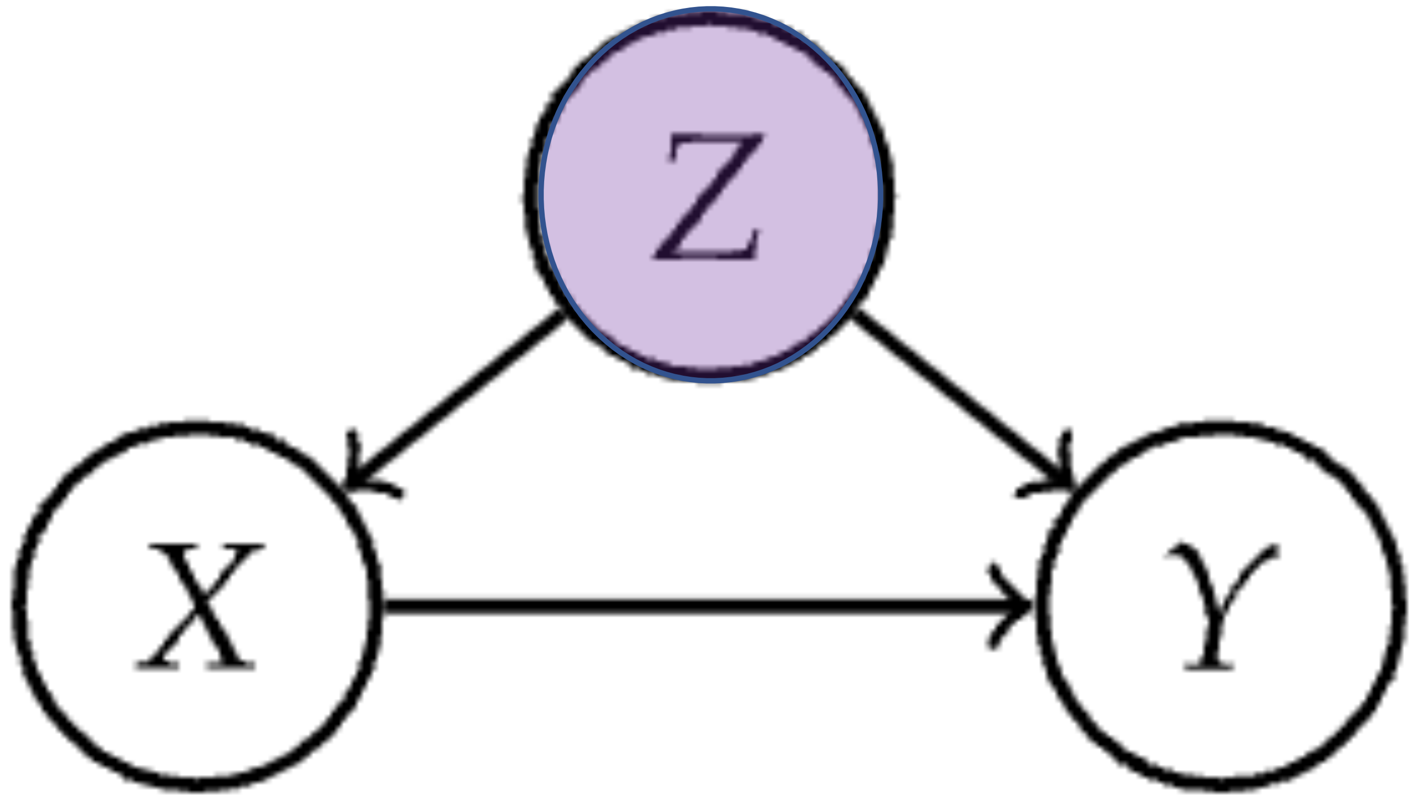
- Кейс 2: Insurance – страховой агент

  Вы работаете в страховой компании и хотите предложить клиентам новый продукт – страховку для людей, которые собираются проходить лечение лекарством А. Вам нужно оценить вероятность наступления страхового случая, чтобы потом рассчитать цену продукта.

- Кейс 3: Ученый

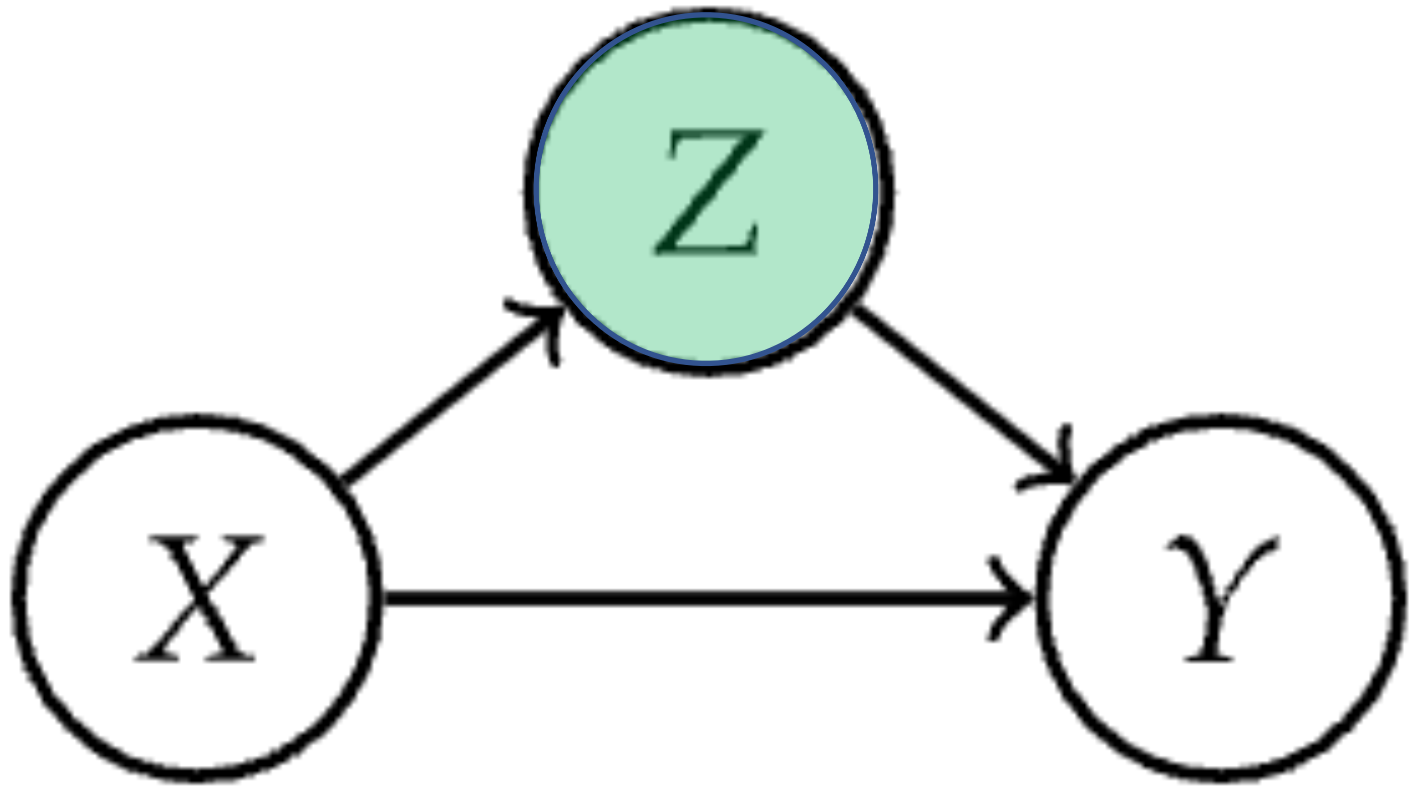
  Вы – исследователь и хотите изучить болезнь (почечную недостаточность).

Типы связей в каузальных графах



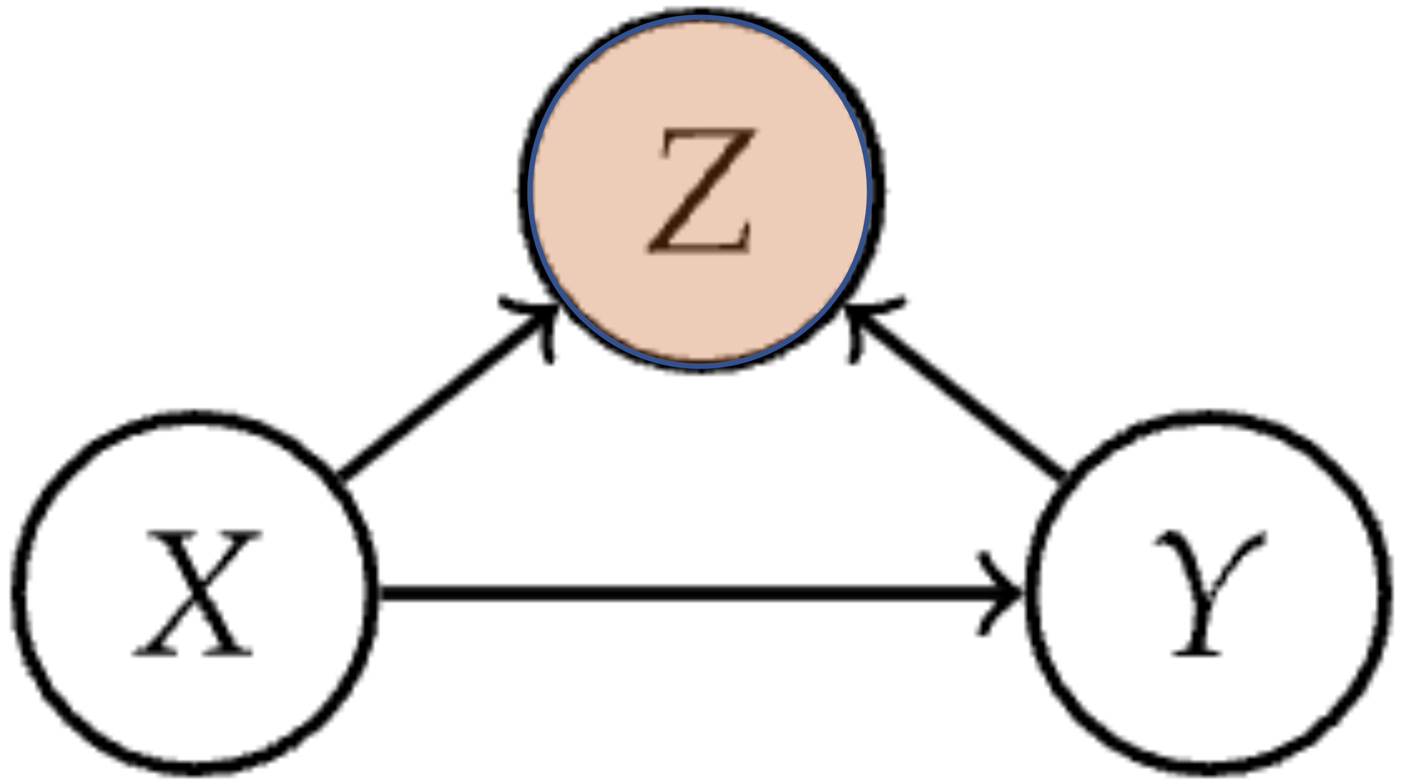
Общая причина

Делает X и Y
связанными косвенно



Один из путей от X к Y

Не создает confounded
связи, только causal



Общее следствие

Условие на Z изменяет
совместное распределение

Спутанные переменные

- X и Y называются спутанными, если:

$$\mathrm{P}\{Y = y \,|\, do(X := x)\} \neq \mathrm{P}\{Y = y \,|\, X = x\}$$

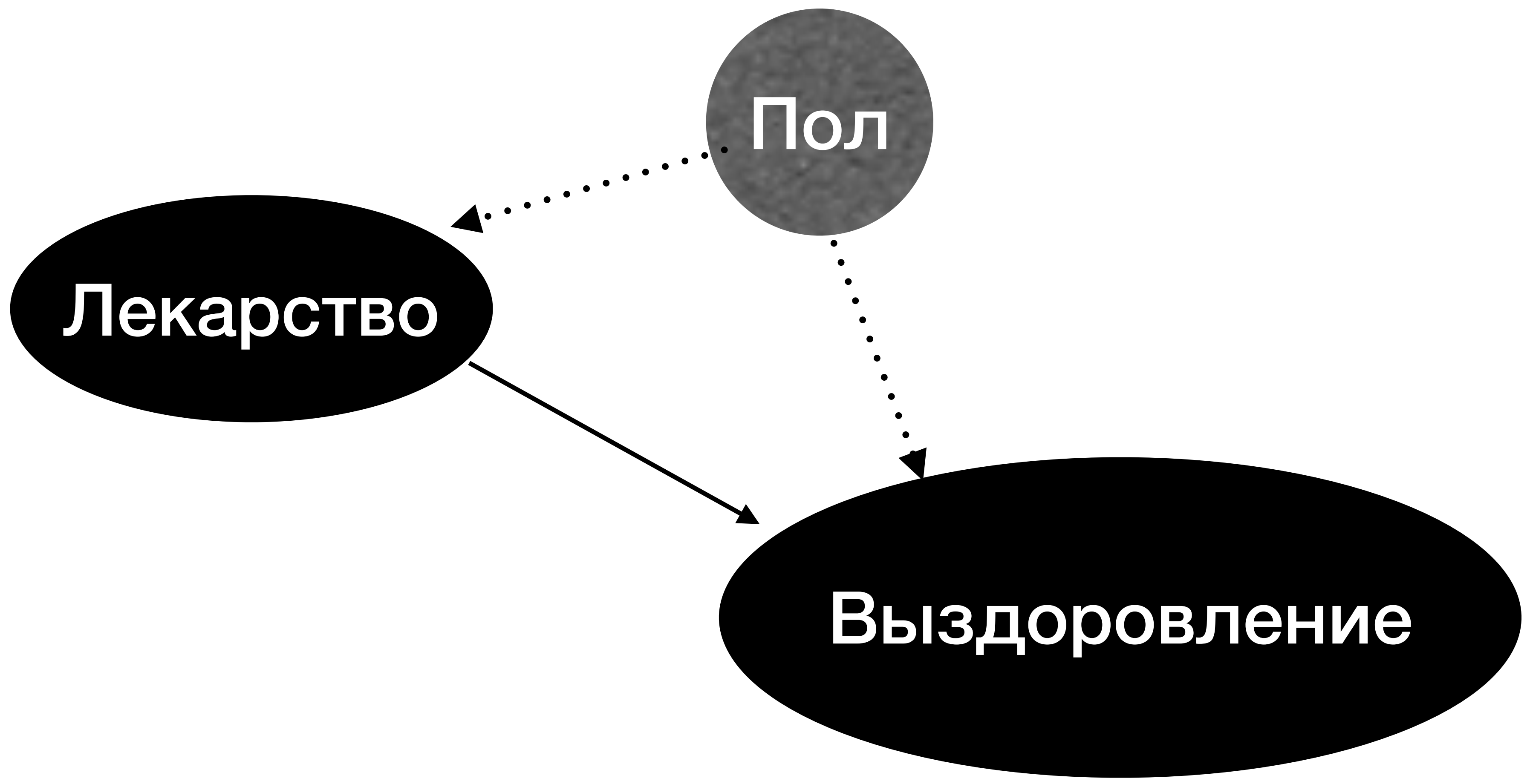
- Adjustment формула:

$$\mathrm{P}\{Y = y \,|\, do(X := x)\} = \sum_{z} \mathrm{P}\{Y = y \,|\, X = x, PA = z\} \cdot \mathrm{P}\{PA = z\}$$

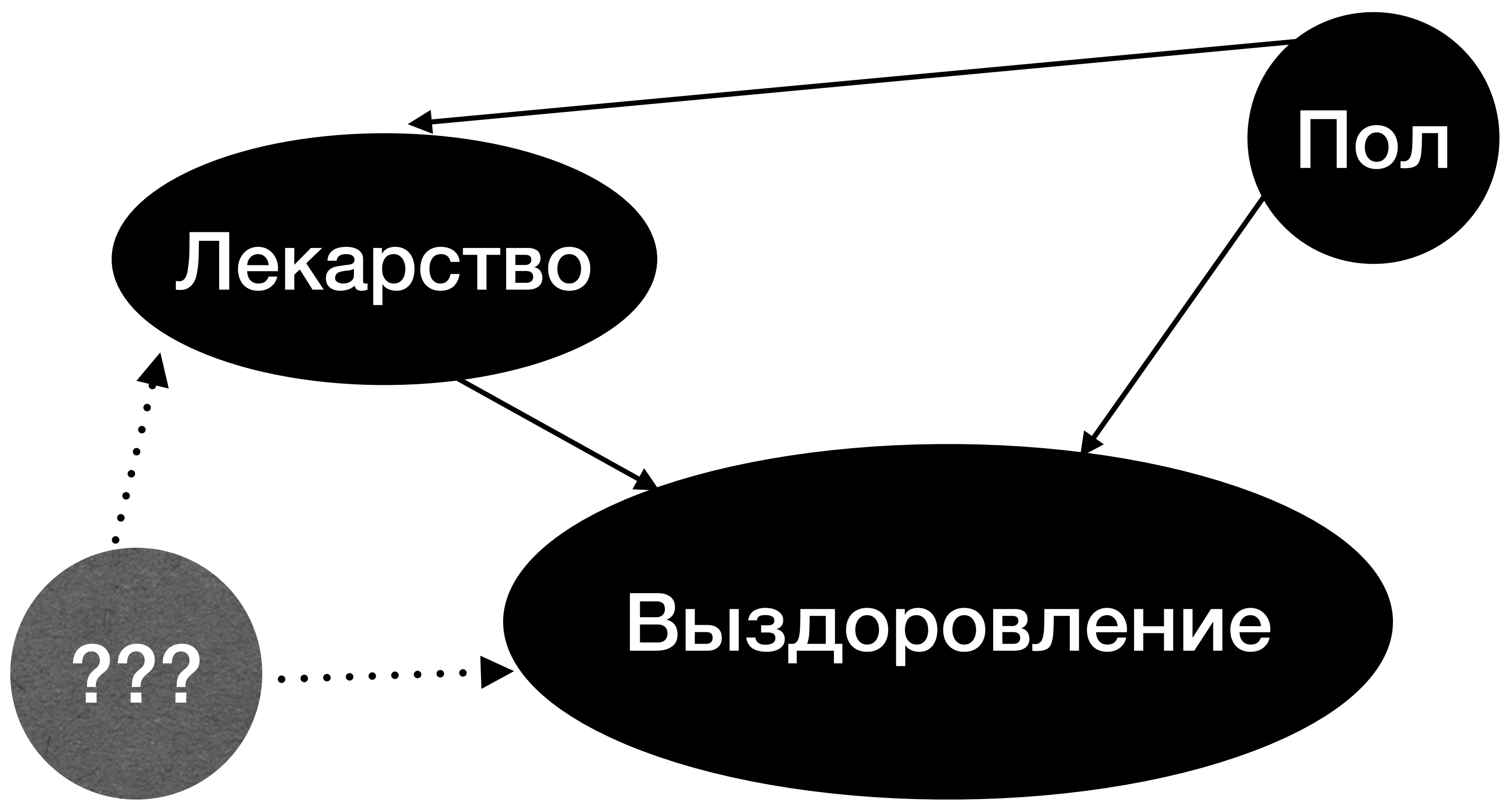
$$\mathrm{P}\{Y = y \,|\, X = x\} = \sum_{z} \mathrm{P}\{Y = y \,|\, X = x, PA = z\} \cdot \mathrm{P}\{PA = z \,|\, X = x\}$$

Пример применения adjustment формулы

Recovery	Drug	No Drug
Total	273/350 (78%)	289/350 (83%)



Пример применения adjustment формулы



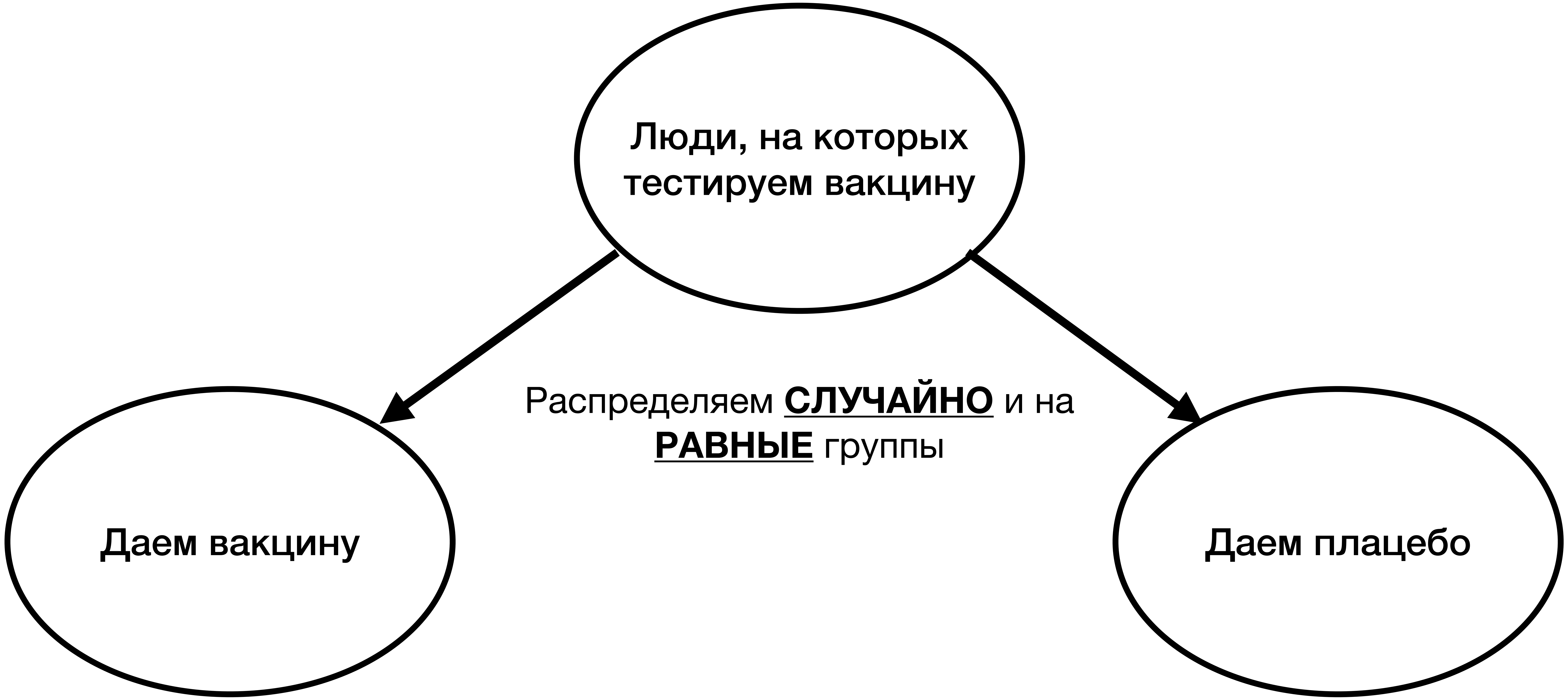
Recovery	Drug	No Drug
Men	81/87 (93%)	234/270 (87%)
Women	192/263 (73%)	55/80 (69%)
Total	273/350 (78%)	289/350 (83%)

$$P\left(\text{Recovery}|\text{do}\left(\text{Drug}\right)\right) \quad = \quad 0.93 \cdot \frac{87+270}{700} + 0.73 \cdot \frac{263+80}{700} = 0.832$$

$$P\left(\text{Recovery}|\text{do}\left(\text{No Drug}\right)\right) \quad = \quad 0.87 \cdot \frac{87+270}{700} + 0.69 \cdot \frac{263+80}{700} = 0.7818$$

Как бороться со спутанными переменными?

Случайное контролируемое исследование



Вакцины

- $Y = \begin{cases} Y_T & \text{если дали вакицину} \\ Y_C & \text{если не дали вакцину} \end{cases}$
- Хотим знать Y_T, Y_C для каждого человека
- Но не получится!

Разные метрики качества лекарства

- Average Treatment Effect $= \overline{Y_T} - \overline{Y_C}$

Далее $Y \in \{0,1\}$

- Odds Ratio $= \dfrac{\overline{Y_T}}{1 - \overline{Y_T}} \cdot \dfrac{1 - \overline{Y_C}}{\overline{Y_C}}$

- Risk Ratio $= \dfrac{\overline{Y_T}}{\overline{Y_C}}$

- Effectiveness = 1 - Risk Ratio

Другий способы борьбы

Допустимые переменные

- X - допустимая, если

$$P\{Y = y \mid do(T := t)\} = \sum_x P\{Y = y \mid T = t, X = x\} \cdot P\{X = x\}$$

- Сразу получаем способ подсчета do-оператора(если найдем такую переменную)(так можно делать только если $P\{T = t, X = x\} > 0 \forall x, t$):

1. Собрать данные $(t_i, y_i, x_i)_{i=1}^n$

2. Вычислить оценки условных и обычных вероятностей из правой части

3. Собрать взвешенную сумму

Другие способы борьбы

Проблемы предыдущего подхода

- Большая область значения X
  - X может отвечать сразу за много параметров: возраст, пол, вес и т.д.
- При увеличении количества признаков область определения увеличивается очень быстро:
  - Увеличивается вычислительная сложность
  - Чтобы добиться хороших оценок нужна большая выборка

Дальше мы будем хотеть найти следующую величину:

$ATE = \mathbb{E}[Y|do(T := 1)] - \mathbb{E}[Y|do(T := 0)]$ — average treatment effect

Сведение к ML
Propensity scores

- Пусть $T \in \{0,1\}$. Обозначим за $e(x) := \mathbb{E}[T | X = x]$ - propensity score
- Пусть X - допустимая переменная и $e(x) \neq 0 \, \forall x$. Тогда

$$\mathbb{E}[Y | do(T := 1)] = \mathbb{E}\left[\frac{YT}{e(X)}\right] \text{ и } \mathbb{E}[Y | do(T := 0)] = \mathbb{E}\left[\frac{Y(1-T)}{1-e(X)}\right]$$

Значит, $ATE = \mathbb{E}\left[Y\left(\frac{T}{e(X)} - \frac{1-T}{1-e(X)}\right)\right]$ – inverse propensity score weighting.

Сведение к ML

Propensity scores

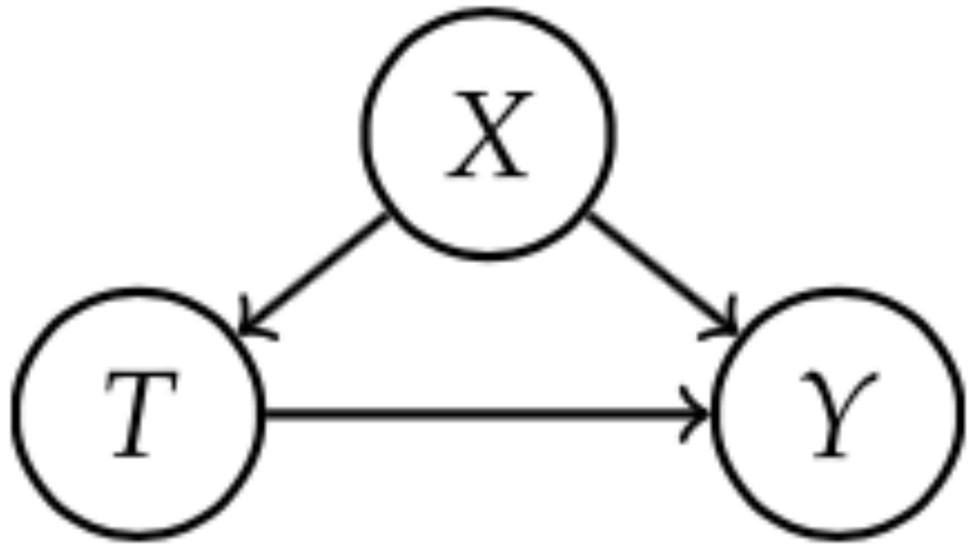
- Делаем пары $(x_i, e_i) \Rightarrow$ запускаем какую-нибудь модель, которая будет предсказывать $\hat{e}(x)$. Будем надеяться, что это оценка получилась хорошей для всех x.

- Считаем ответ по формуле:

$$\hat{ATE} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{t_i y_i}{\hat{e}(x_i)} - \frac{(1-t_i)y_i}{1-\hat{e}(x_i)}$$

Сведение к ML
Double machine learning

- $Y = \tau T + g(X) + U$
- $T = f(X) + V$
- Мы хотим понять, чему равно $\tau = ATE$
- $\mathbb{E}[Y|X] = \tau\mathbb{E}[T|X] + g(X)$
- $\tilde{Y} := Y - \mathbb{E}[Y|X] = \tau(T - \mathbb{E}[T|X]) + U \;\; =: \tau\tilde{T} + U,$



Сведение к ML

Double machine learning

- Находим $\mathbb{E}[Y|X]$ и $\mathbb{E}[T|X]$ из (X, T, Y)
- Находим с помощью регрессии $\hat{\tau} : \hat{Y} = \hat{\tau}\hat{T} + U$

Еще свед́ения

Heterogeneous treatment effects

- $\tau(x) = \mathbb{E}[Y | do(T := 1), X = x] - \mathbb{E}[Y | do(T := 0), X = x]$ – conditional ATE

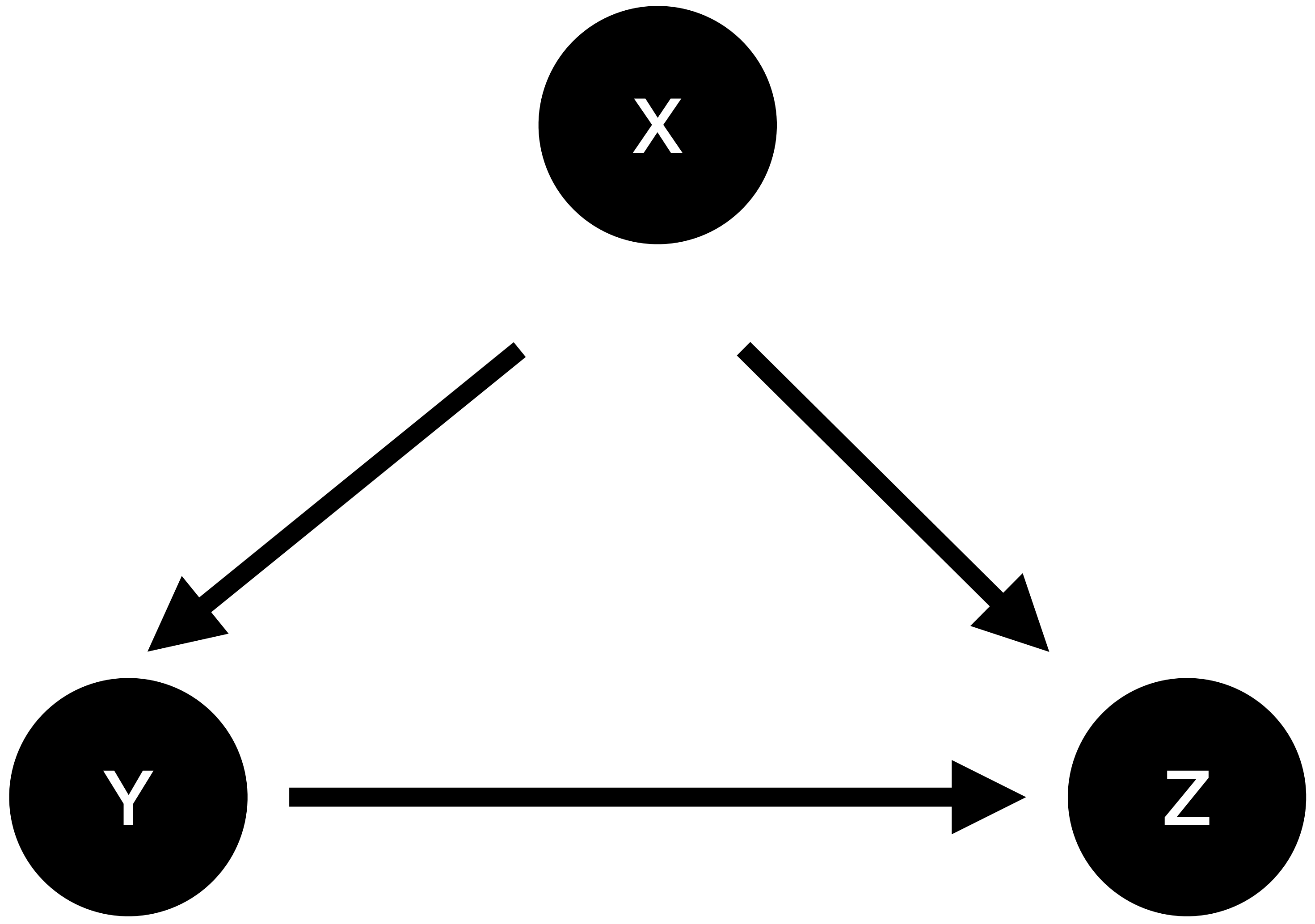
- Можно использовать оба предыдущих метода:

  - $\tau(x) = \mathbb{E}\left[Y\left(\frac{T}{e(X)} - \frac{1-T}{1-e(X)}\right) | X = x\right]$

  - $\hat{Y} = \hat{\tau}(X)\hat{T} + U$, где $\hat{\tau}(X)$ лежит в некотором классе функций

Model	Predict in i.i.d. setting	Predict under distr. shift/intervention	Answer counter-factual questions	Obtain physical insight	Learn from data
Mechanistic/physical	yes	yes	yes	yes	?
Structural causal	yes	yes	yes	?	?
Causal graphical	yes	yes	no	?	?
Statistical	yes	no	no	no	yes

Graph Causal Models



+

Data

The 4 key steps

1. **Modeling:** Create a causal graph
2. **Identification:** Formulate what to estimate
3. **Estimation:** Compute the estimate
4. ???

The 4 key steps of causal inference

1. **Modeling:** Create a causal graph
2. **Identification:** Formulate what to estimate
3. **Estimation:** Compute the estimate
4. **Refutation:** Validate the assumptions

The 4 key steps of causal inference

1. **Modeling:** Create a causal graph
2. **Identification:** Formulate what to estimate
3. **Estimation:** Compute the estimate
4. **Refutation:** Validate the assumptions

Что самое сложное?

The 4 key steps of causal inference

1. **Modeling:** Create a causal graph
2. **Identification:** Formulate what to estimate
3. **Estimation:** Compute the estimate
4. **Refutation:** Validate the assumptions

Что самое сложное?

Intuition about causal graphs

- Assumptions are encoded by *missing edges*, and *direction of edges*

Intuition about causal graphs

- Assumptions are encoded by *missing edges*, and *direction of edges*
- Graph cannot be learn from data alone

Intuition about causal graphs

- Assumptions are encoded by *missing edges*, and *direction of edges*
- Graph cannot be learn from data alone
- No test, no cross-validation

Intuition about causal graphs

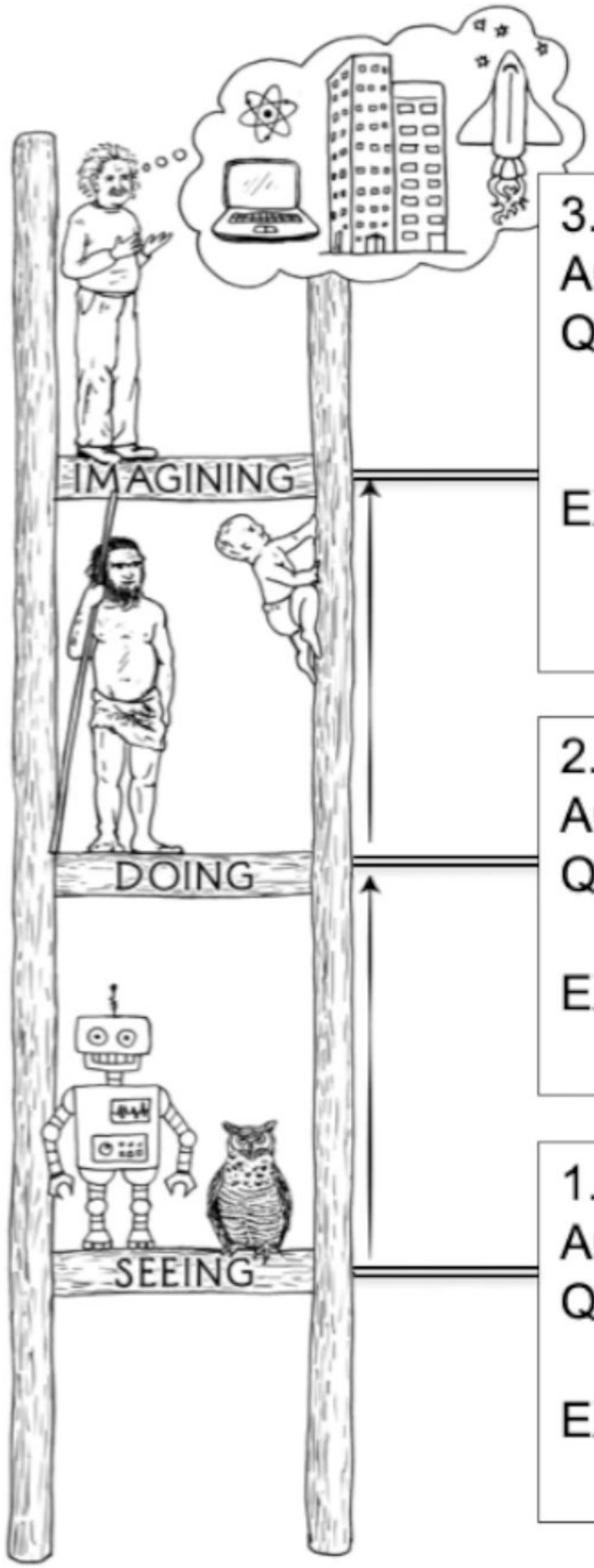
- Assumptions are encoded by *missing edges*, and *direction of edges*
- Graph cannot be learn from data alone
- No test, no cross-validation
- Do for as many assumptions as possible

Counterfactuals

- **Interventional question:**
  How does the probability of heart failure change if we convince a patient to exercise regularly?

- **Counterfactual question:**
  Would a given patient have suffered heart failure if they had started exercising a year earlier?

3-LEVEL HIERARCHY



3. COUNTERFACTUALS

ACTIVITY: Imagining, Retrospection, Understanding

QUESTIONS: *What if I had done . . . ? Why?*
(Was it X that caused Y? What if X had not occurred? What if I had acted differently?)

EXAMPLES: Was it the aspirin that stopped my headache? Would Kennedy be alive if Oswald had not killed him? What if I had not smoked the last 2 years?

2. INTERVENTION

ACTIVITY: Doing, Intervening

QUESTIONS: *What if I do . . . ? How?*
(What would Y be if I do X?)

EXAMPLES: If I take aspirin, will my headache be cured? What if we ban cigarettes?

1. ASSOCIATION

ACTIVITY: Seeing, Observing

QUESTIONS: *What if I see . . . ?*
(How would seeing X change my belief in Y?)

EXAMPLES: What does a symptom tell me about a disease? What does a survey tell us about the election results?

Example

Randomly choose R (route).

Y - is bad traffic

If B (bad day) == 1 then Y = 1.

Else with $U_R \sim B(1/2)$ there is an accident.

$$\begin{cases} R \sim B(1/2) \\ W \sim B(1/2) \\ U_0, U_1 \sim B(1/2) \end{cases}$$

Example

Randomly choose R (route).

If B (bad traffic day) == 1 then Y = 1.

Else with $U_R \sim B(1/2)$ there is an accident.

$$\begin{cases} R \sim B(1/2) \\ B \sim B(1/2) \\ B_0, B_1 \sim B(1/2) \end{cases}$$

Suppose R = 1, Y = 1.

Would we have been better off taking the alternative route this morning?

Example

$$Y = R\max(B, B_1) + (1 - R)\max(B, B_0)$$

How to find?

Do-operator $P(Y | do\{R = 0\})$ and we get (1 / 2) * (1 / 2) = 1 / 4.

Example

B	B_1
0	1
1	0
1	1

$$Y = R\max(B, B_1) + (1 - R)\max(B, B_0)$$

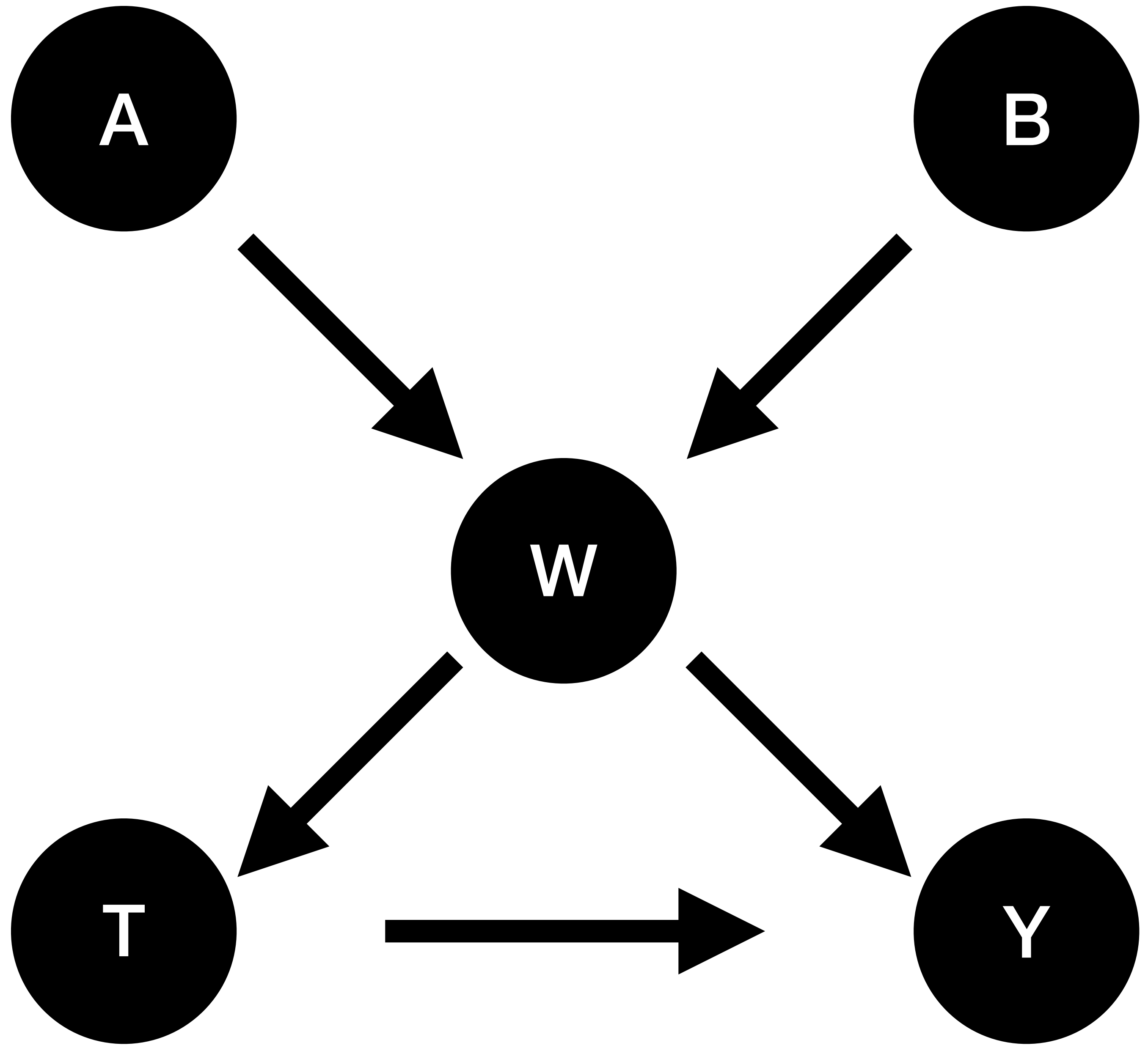
We get new distribution B'. Then we apply Do-operator:

$$Y = \max(B', B_0) \implies P(Y = 0 \,|\, do(R = 0)) = 1/3 \cdot 1/2 = 1/6$$

Connection with ML

- Recommendation systems
- Robustness and Generalisation
- Reinforcement Learning

Some tests



$$A \perp\!\!\!\perp B$$

$$A \perp\!\!\!\perp T \mid W$$

$$B \perp\!\!\!\perp T \mid W$$