НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

Факультет компьютерных наук

Causal models

Москва, 2021

Разберемся с терминами

Пассивное наблюдение - это то, как “объекты” следуют своему обычному поведению, “привычкам” и естественным склонностям. Мы не вмешиваемся в этот процесс, а просто наблюдаем.

Пример пассивного наблюдения

Чаще ли в ДТП попадают 16-ти летние водители, нежели 18-ти летние?

$$P(A \mid C) - P(B \mid C), C = A \cup B$$

A - 16 y/o

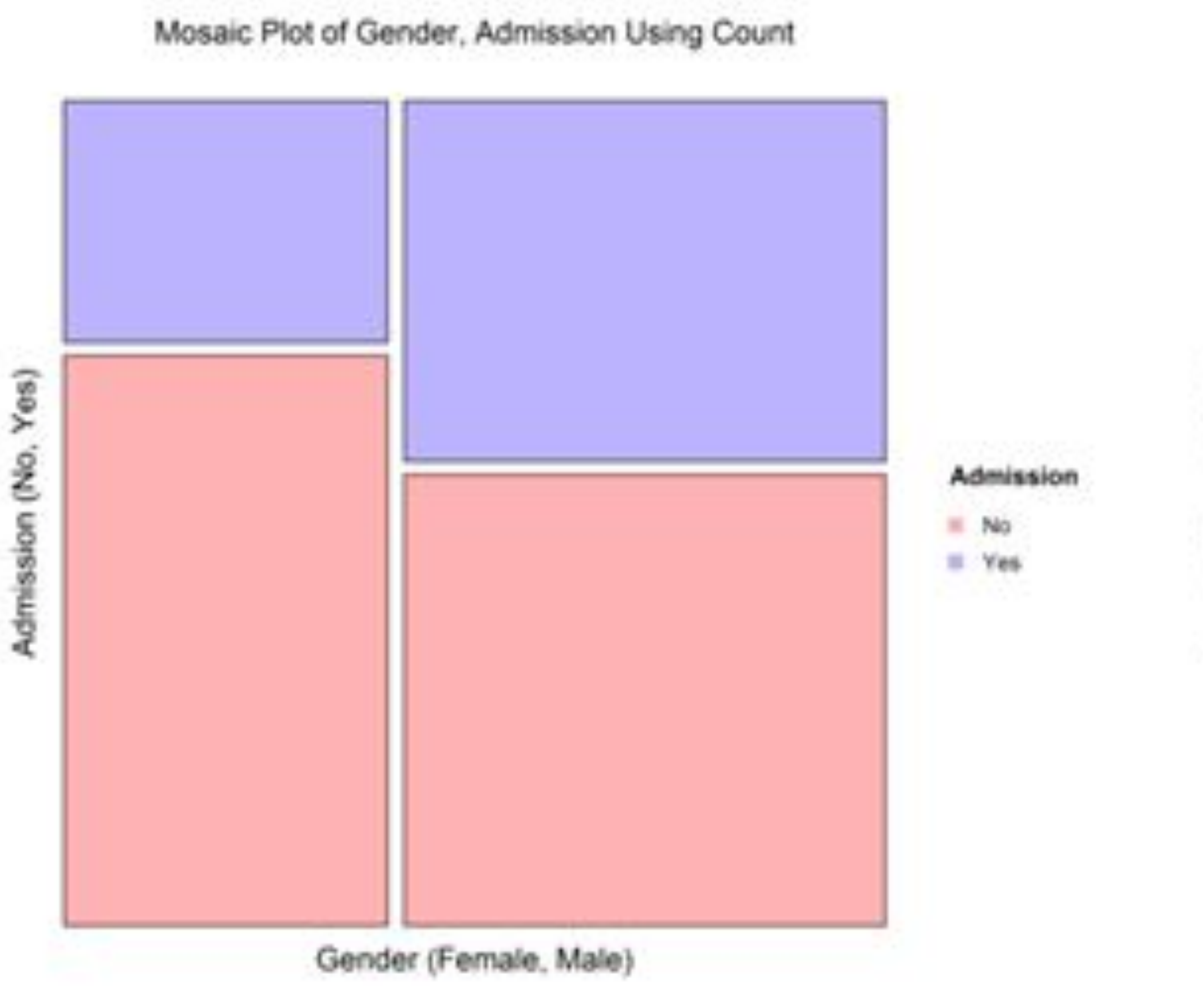
B - 18 y/o

Пример пассивного наблюдения

Уменьшится ли число смертельных ДТП, если мы повысим минимальный возраст вождения на два года?

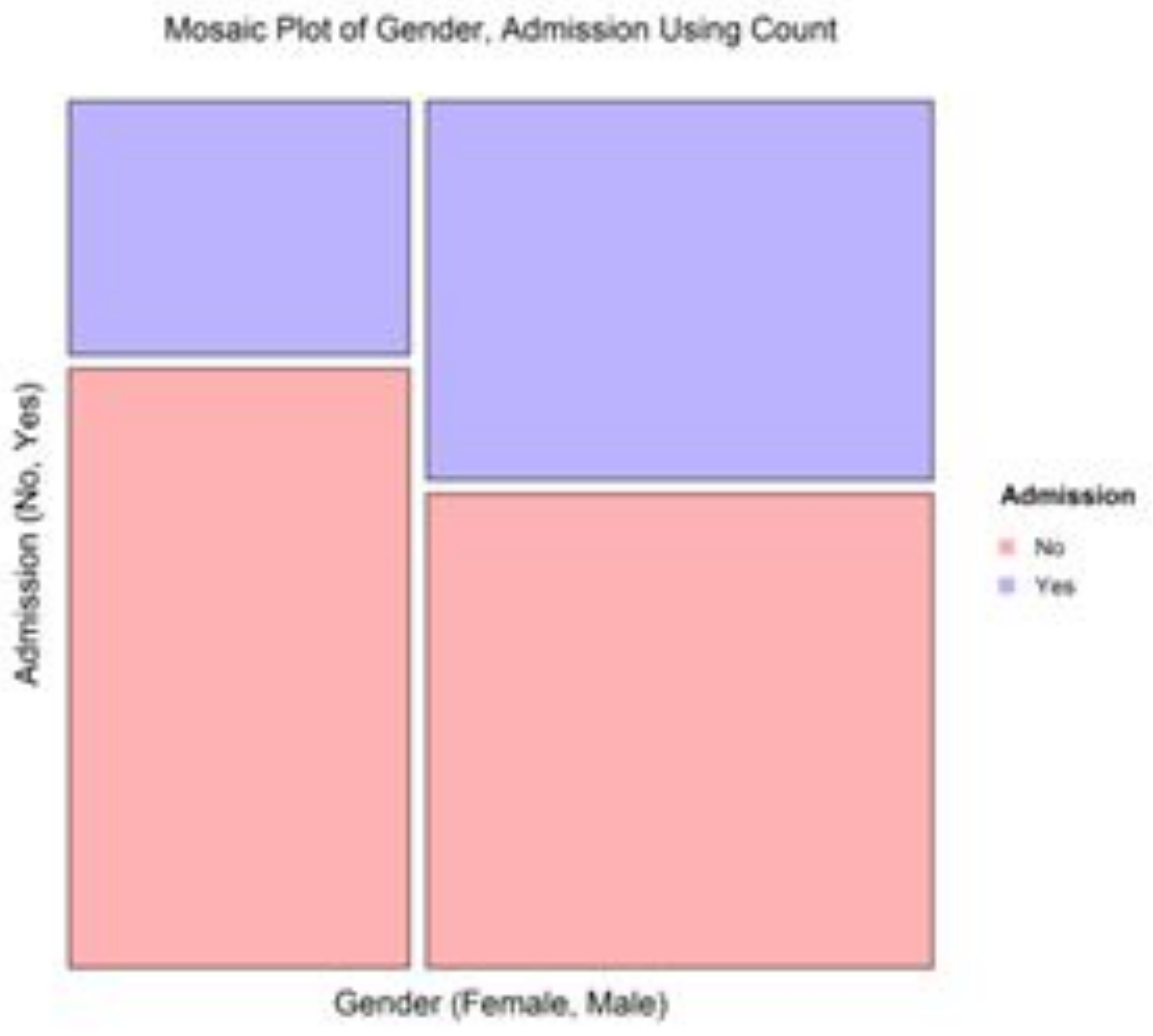
Ограничения, с которыми мы сталкиваемся при наблюдении

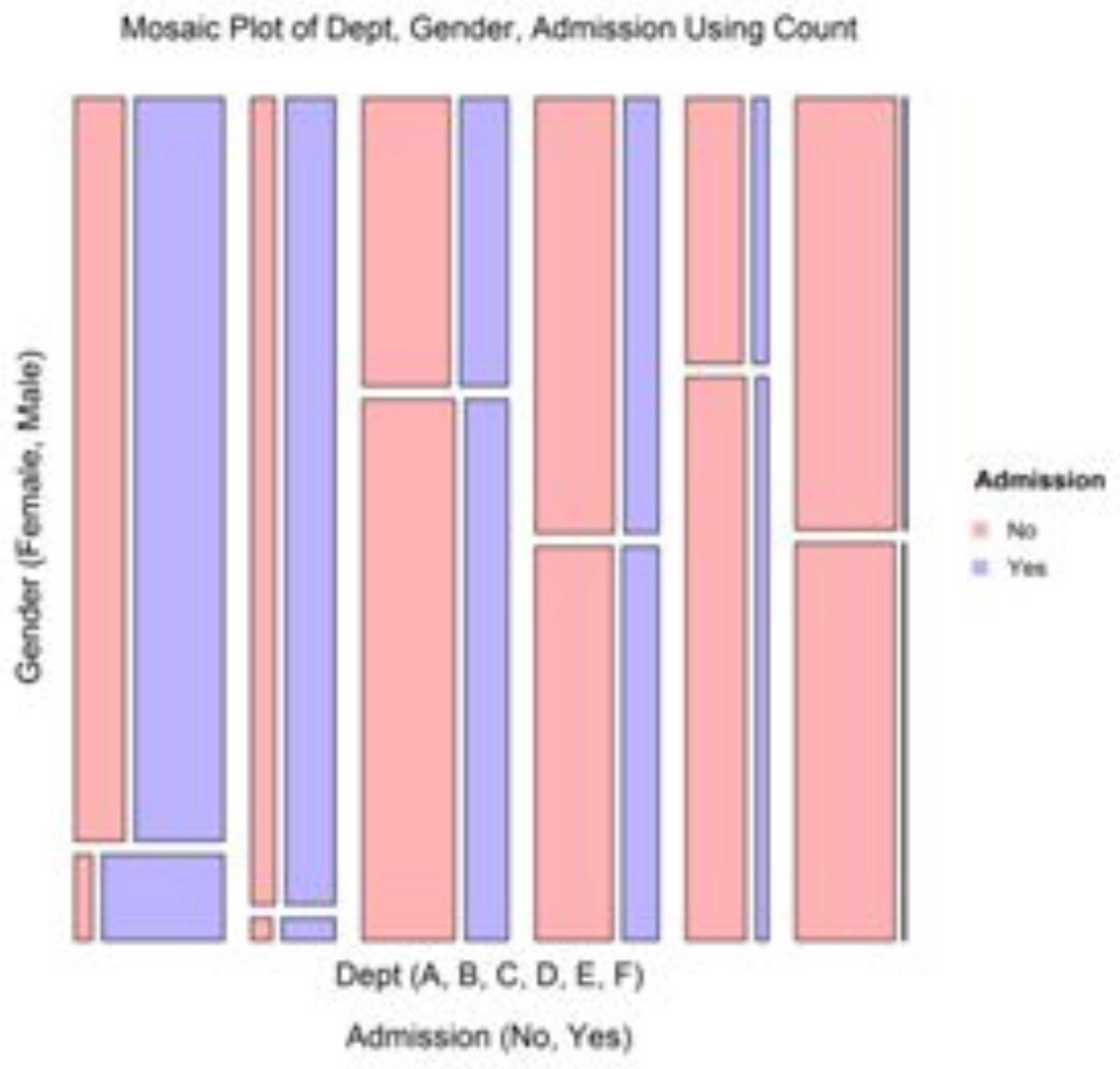
Рассмотрим данные приемной комиссии аспирантуры Калифорнийского университета в Беркли в 1973 году.



Ограничения, с которыми мы сталкиваемся при наблюдении

Рассмотрим данные приемной комиссии аспирантуры Калифорнийского университета в Беркли в 1973 году.



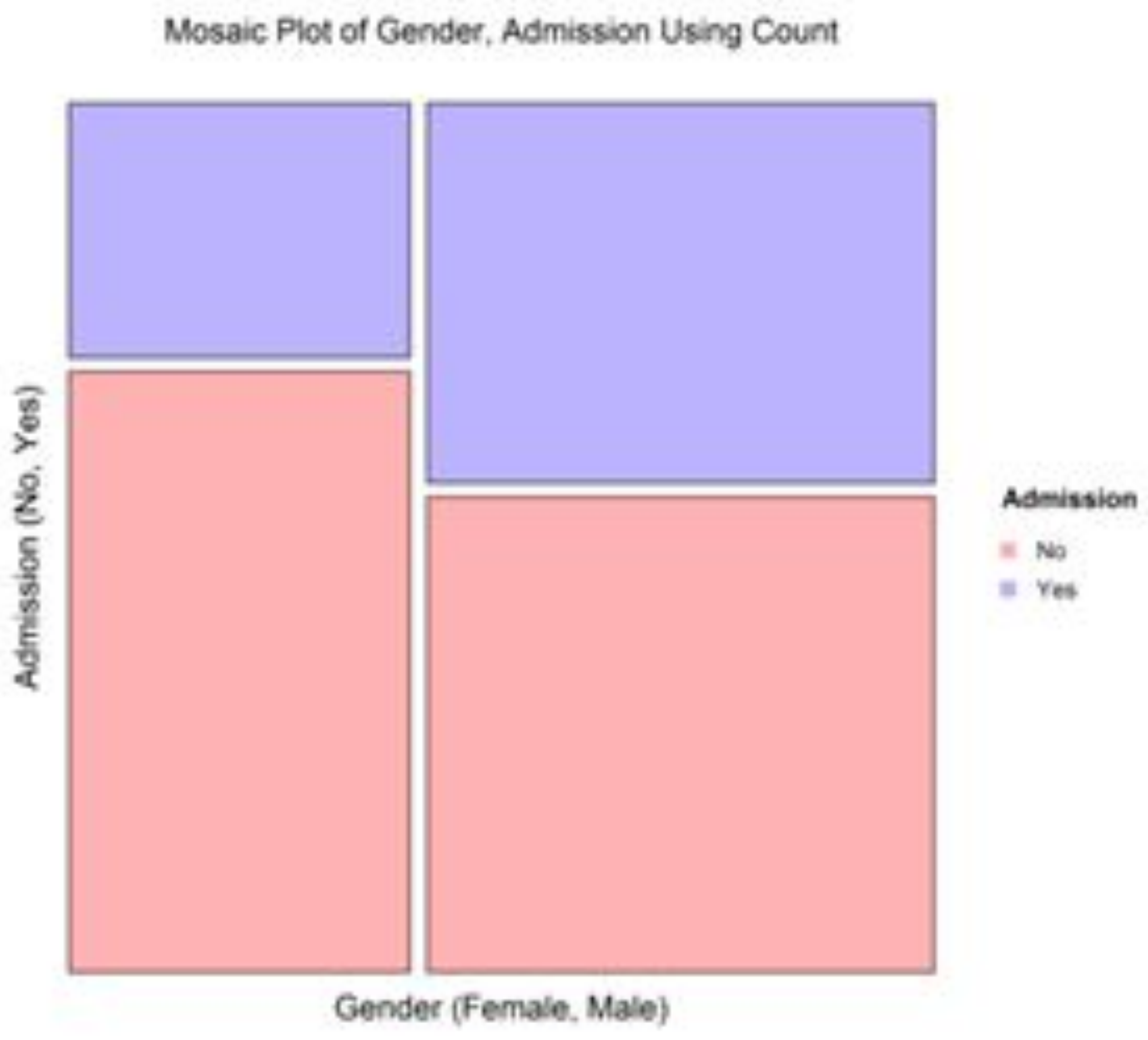


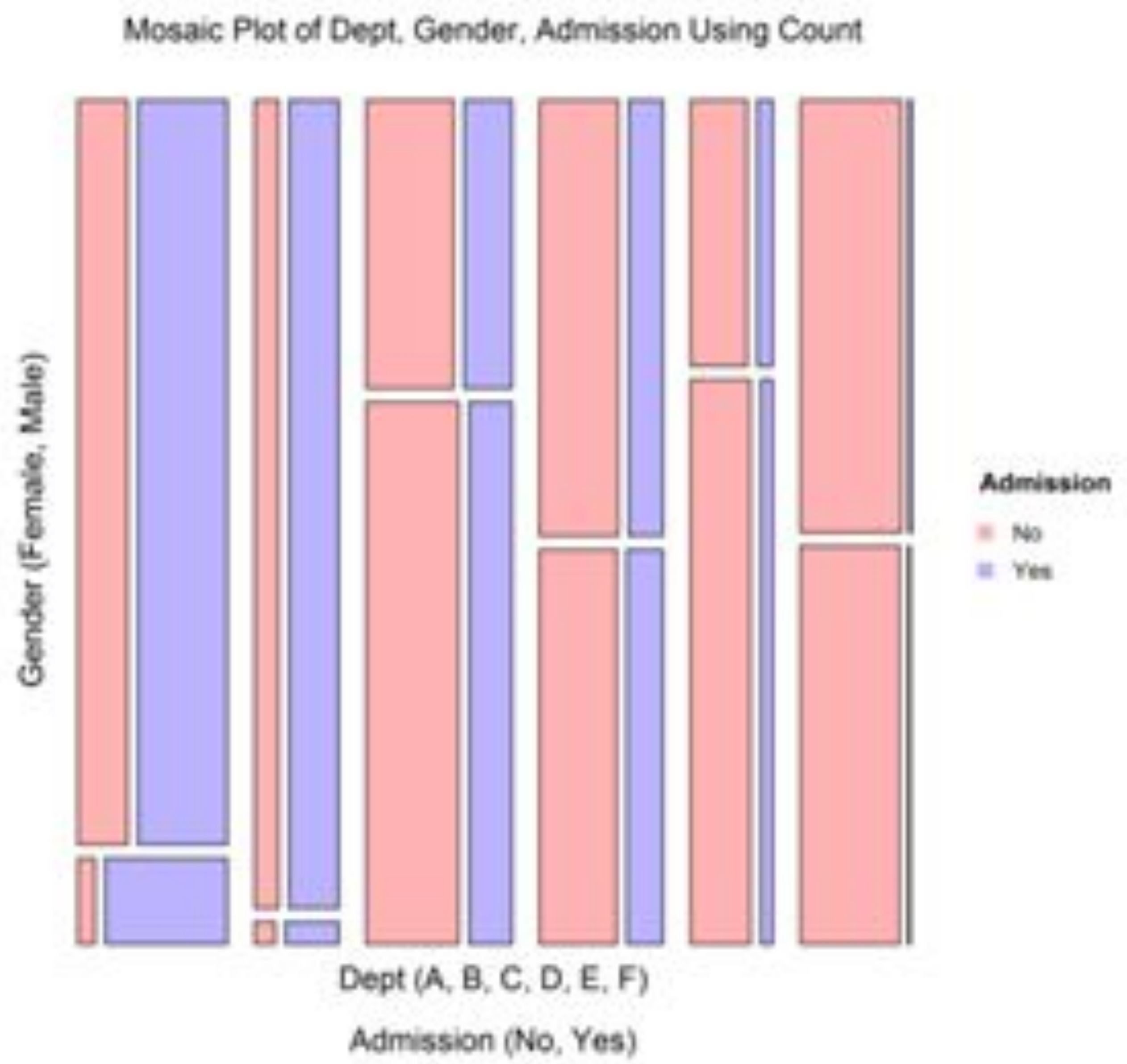
Парадокс Симпсона

С точки зрения теории вероятности здесь нет ничего необычного:

1. $\mathbb{P}[\boldsymbol{Y}|\boldsymbol{A}] < \mathbb{P}[\boldsymbol{Y}|\neg\boldsymbol{A}]$
2. $\mathbb{P}[\boldsymbol{Y}|\boldsymbol{A}, \boldsymbol{Z} = z] > \mathbb{P}[\boldsymbol{Y}|\neg\boldsymbol{A}, \boldsymbol{Z} = z], \forall z \in \boldsymbol{Z}$

Вернемся к примеру университета в Беркли





UC Berkeley admissions data from 1973.

	Men		**Women**	
Department	Applied	Admitted (%)	Applied	Admitted (%)
A	825	62	108	**82**
B	520	60	25	**68**
C	325	**37**	593	34
D	417	33	375	**35**
E	191	**28**	393	24
F	373	6	341	**7**

Структурная причинная модель (Structural causal model) -

- **Программа для генерации совместного распределения из независимых “шумовых” переменных с помощью последовательности формальных инструкций.**

  Задается набором переменных с соответствующей формой:

$$X_i := f_i(P_i, U_i), \qquad i = 1, \ldots, d\,.$$

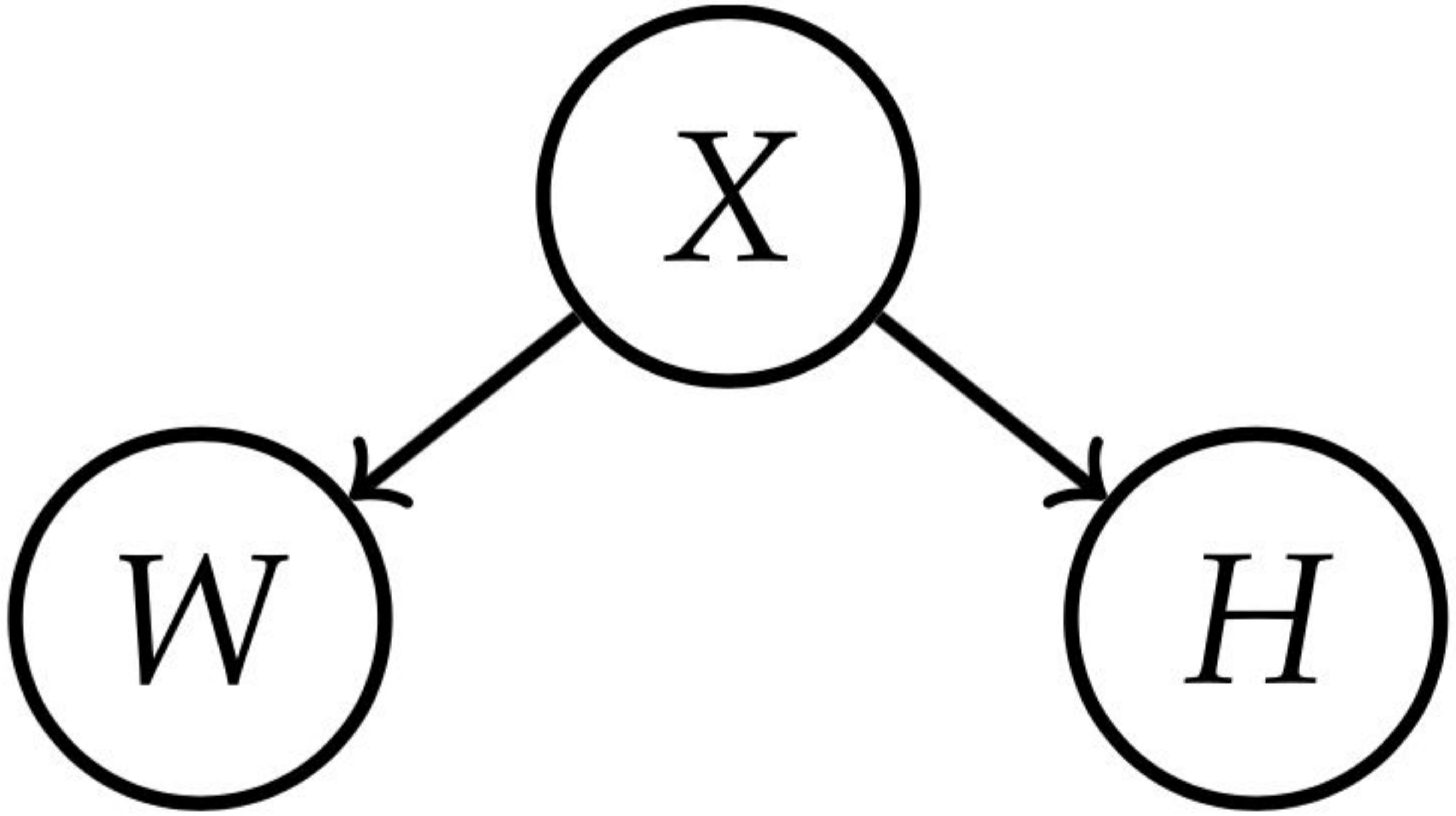
$P_i \subseteq \{X_1, \ldots, X_d\}$ - **подмножество родительских переменных**

$U_1, \ldots, U_d$ - **случайные независимые переменные, которые мы называем шумом**

Простой пример

Группа людей, у которых:

- P(Регулярно тренируются) = 1/2
- P(Склонность к избыточному весу) = 1/3



Пусть:

X - индикатор регулярных физических упражнений

W - индикатор наличия избыточного веса

H - индикатор наличия сердечного заболевания

Простой пример

1. Бернулиевские случайные величины: $U_1 \sim B(\frac{1}{2}),\ U_2 \sim B(\frac{1}{3}),\ U_3 \sim B(\frac{1}{3})$
2. $X := U_1$
3. $W :=$ если $X = 1$, тогда 0, иначе U_2
4. $H :=$ если $X = 1$, тогда 0, иначе U_3

Простой пример

X	W	H
0	1	1
1	0	0
1	1	1
1	1	0
0	1	0
...	...	...

Простой пример

Означает ли это, что избыточный вес вызывает сердечные заболевания в нашей модели? Ответ - нет

Простой пример

Более формально, программа более эффективна. Мы могли бы, например, взять W:=1, что приведет к новому распределению. Получившаяся программа выглядит следующим образом:

2. $X := U_1$

3. $W := 1$

4. $H :=$ если $X = 1$, тогда 0, иначе U_3

Еще один пример

Замена W:=1 в этой модели приводит к увеличению вероятности физических нагрузок, следовательно, снижает вероятность сердечных заболеваний.

2. $W := U_2$

3. $X :=$ если $W = 0$, тогда 0, иначе U_1

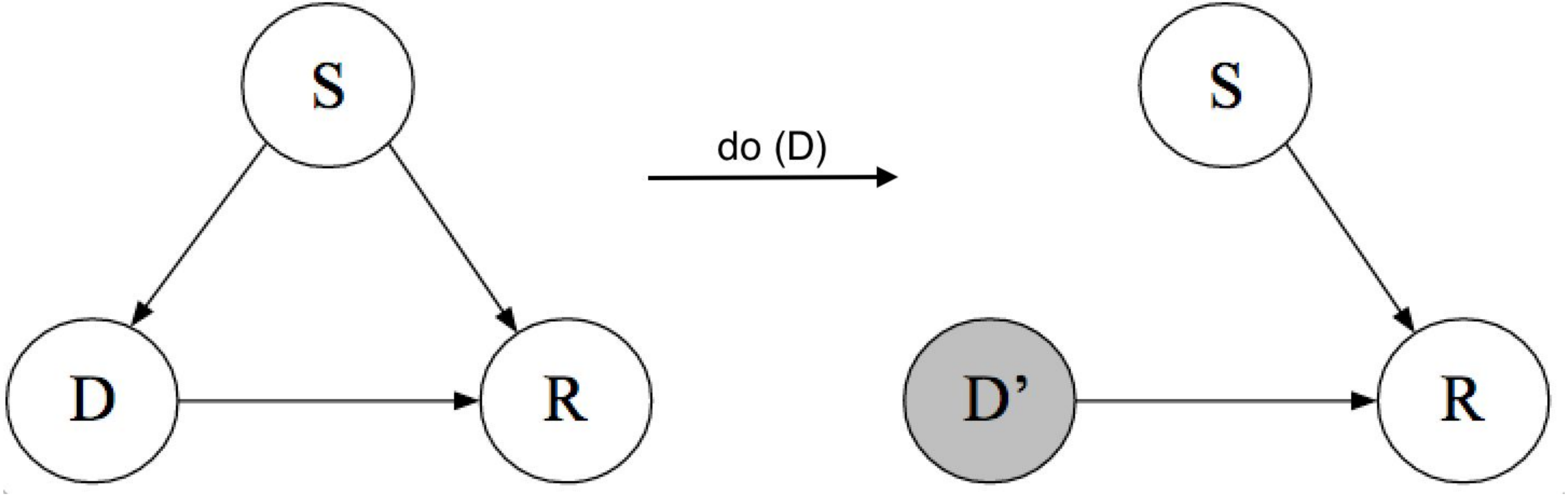
4. $H :=$ если $X = 1$, тогда 0, иначе U_3

$\mathrm{do}(W := 1).$

Структурные причинные модели

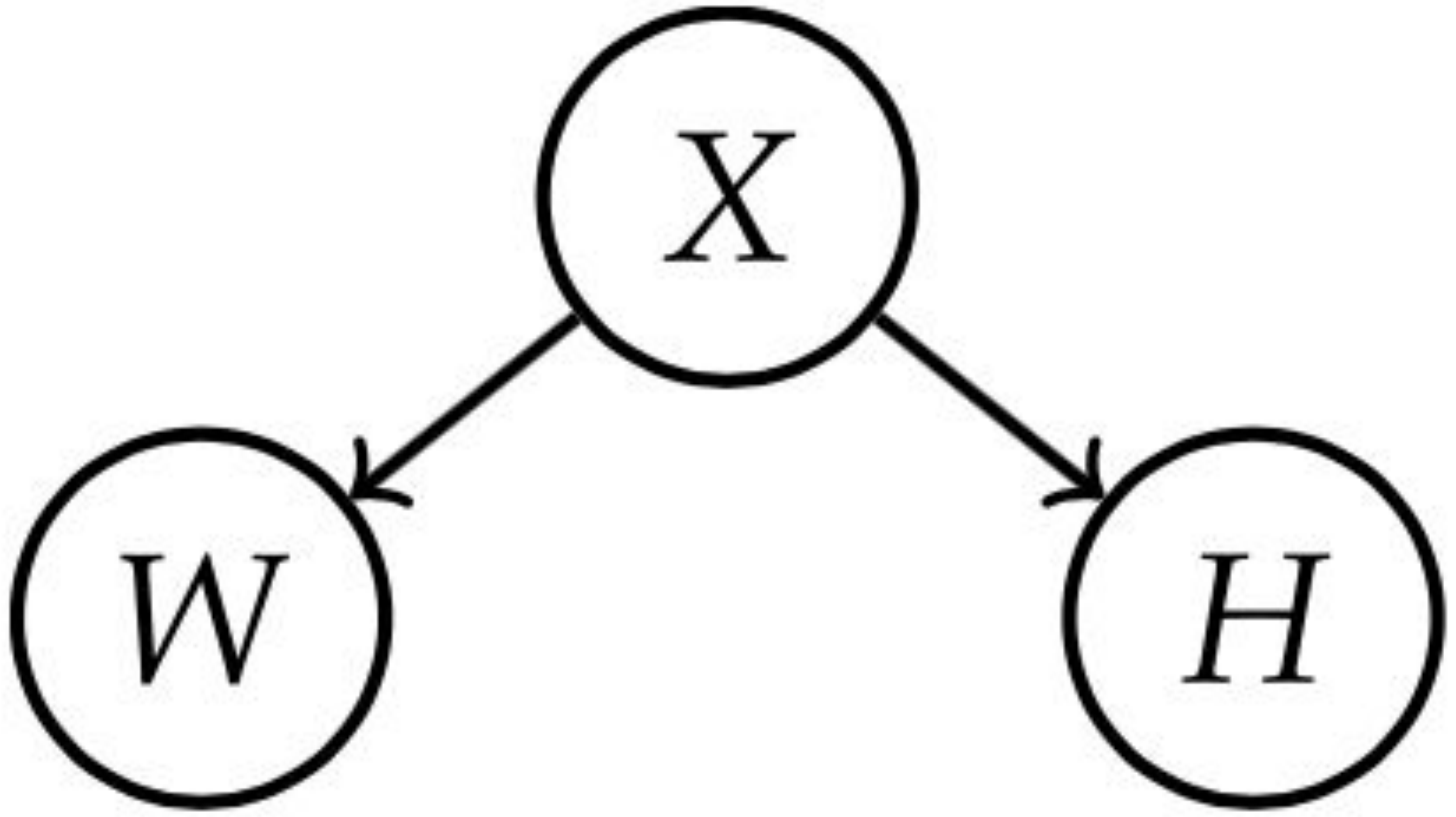
Структурные причинные модели дают нам формальное исчисление для рассуждений о последствиях гипотетических действий.

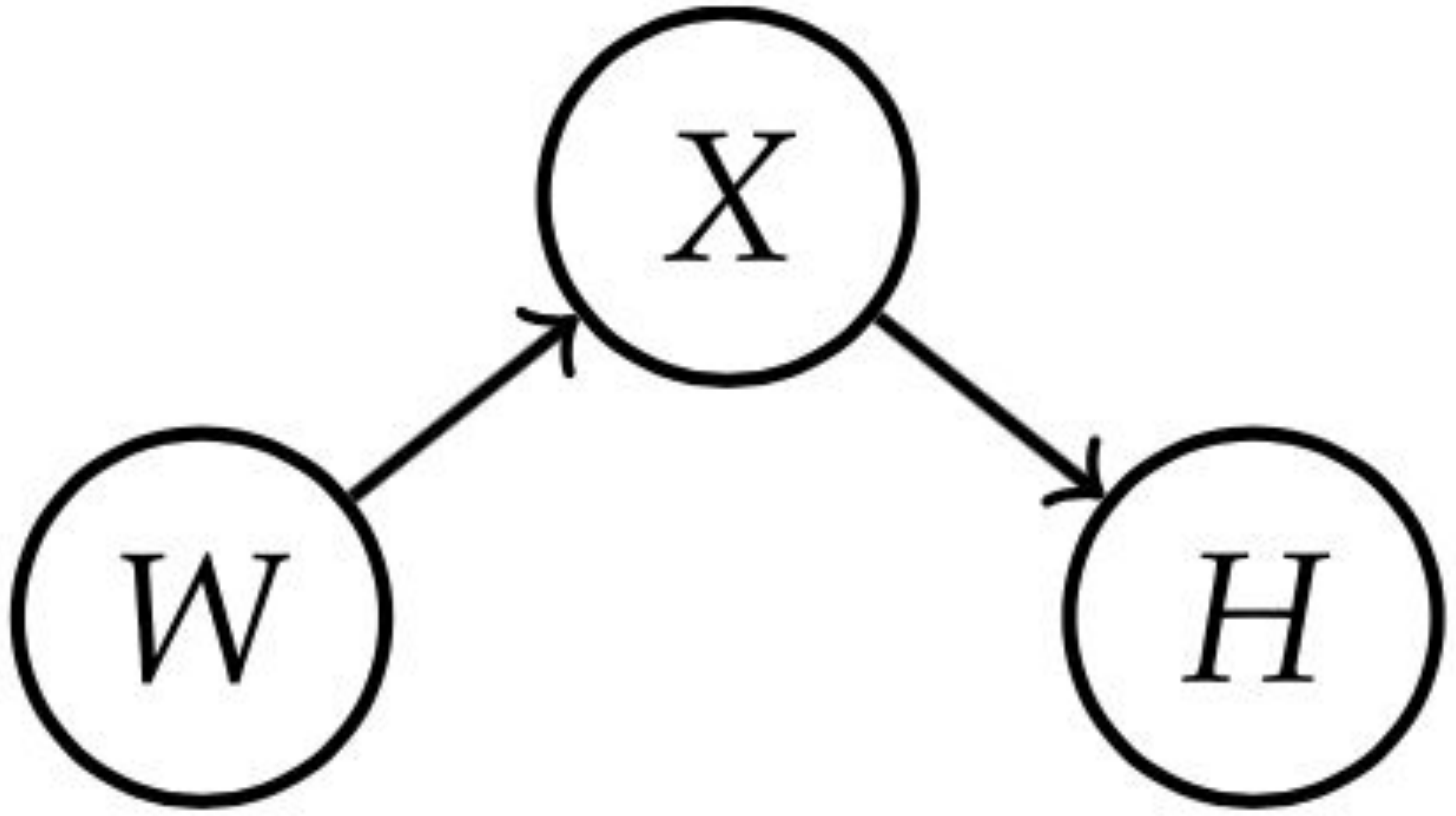
Do-operator



Графы

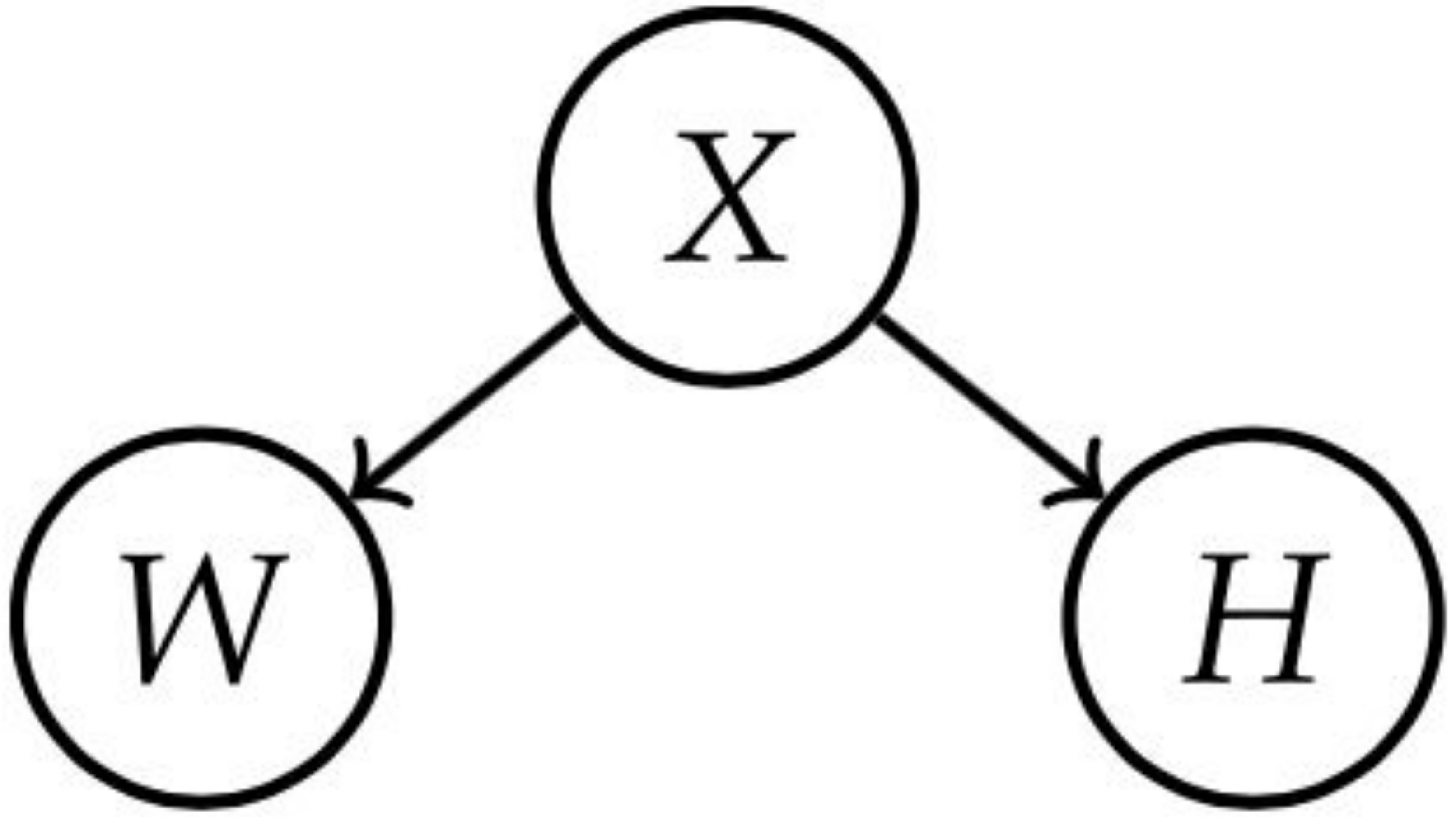
Приведем графики для двух гипотетических групп людей из нашего примера сердечные заболевания:

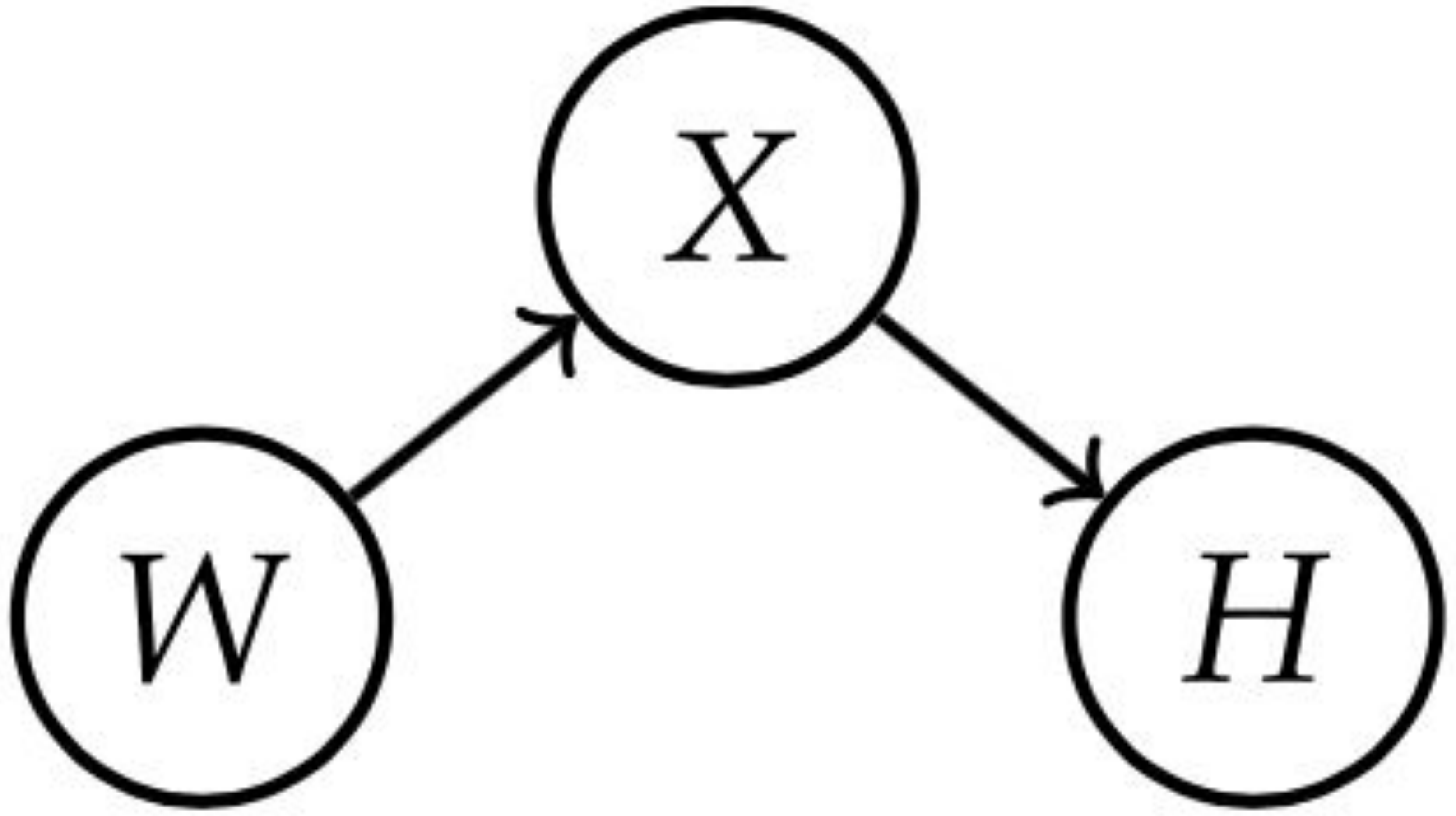




Графы

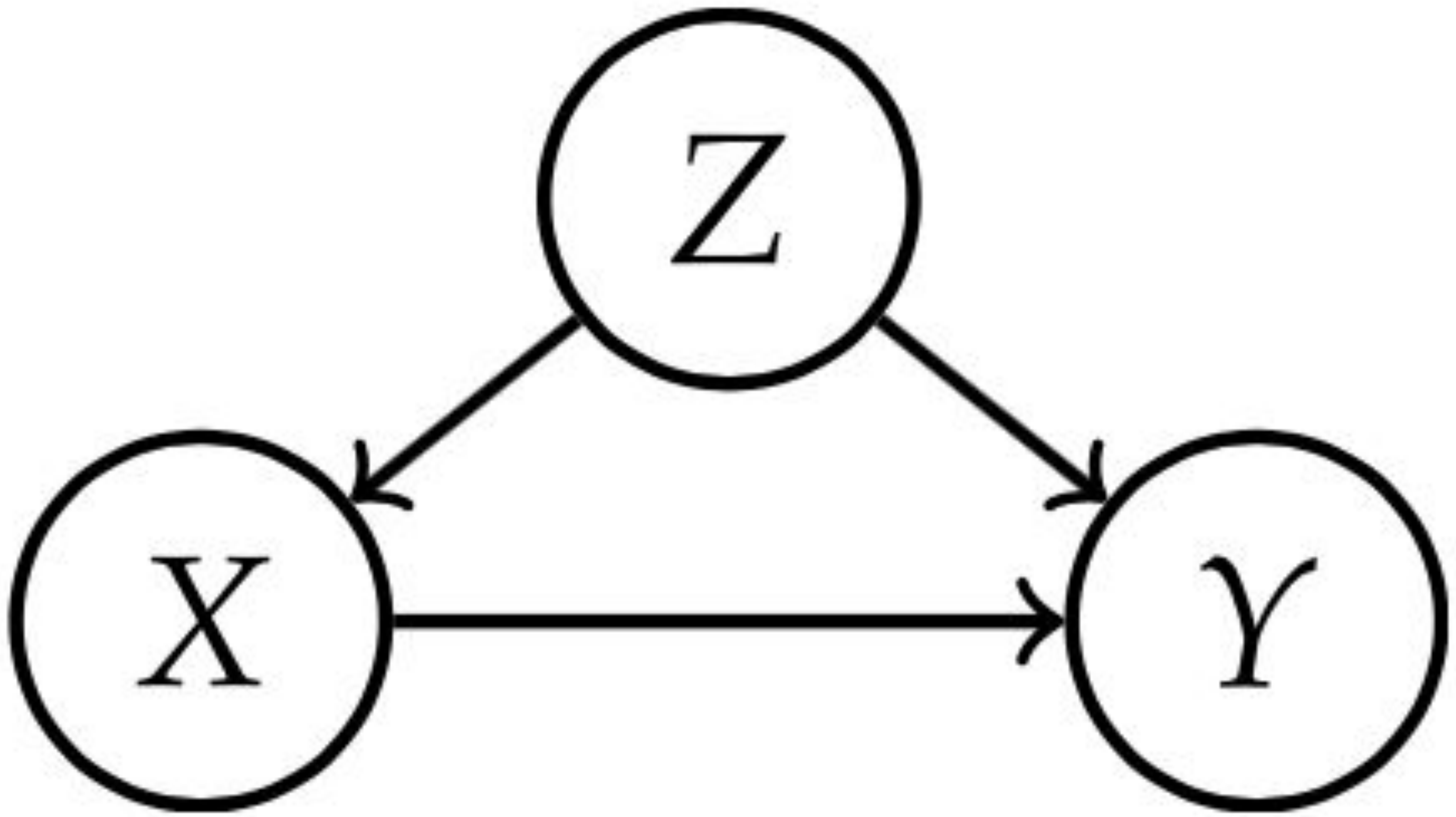
Приведем графики для двух гипотетических группы людей из нашего примера сердечные заболевания:





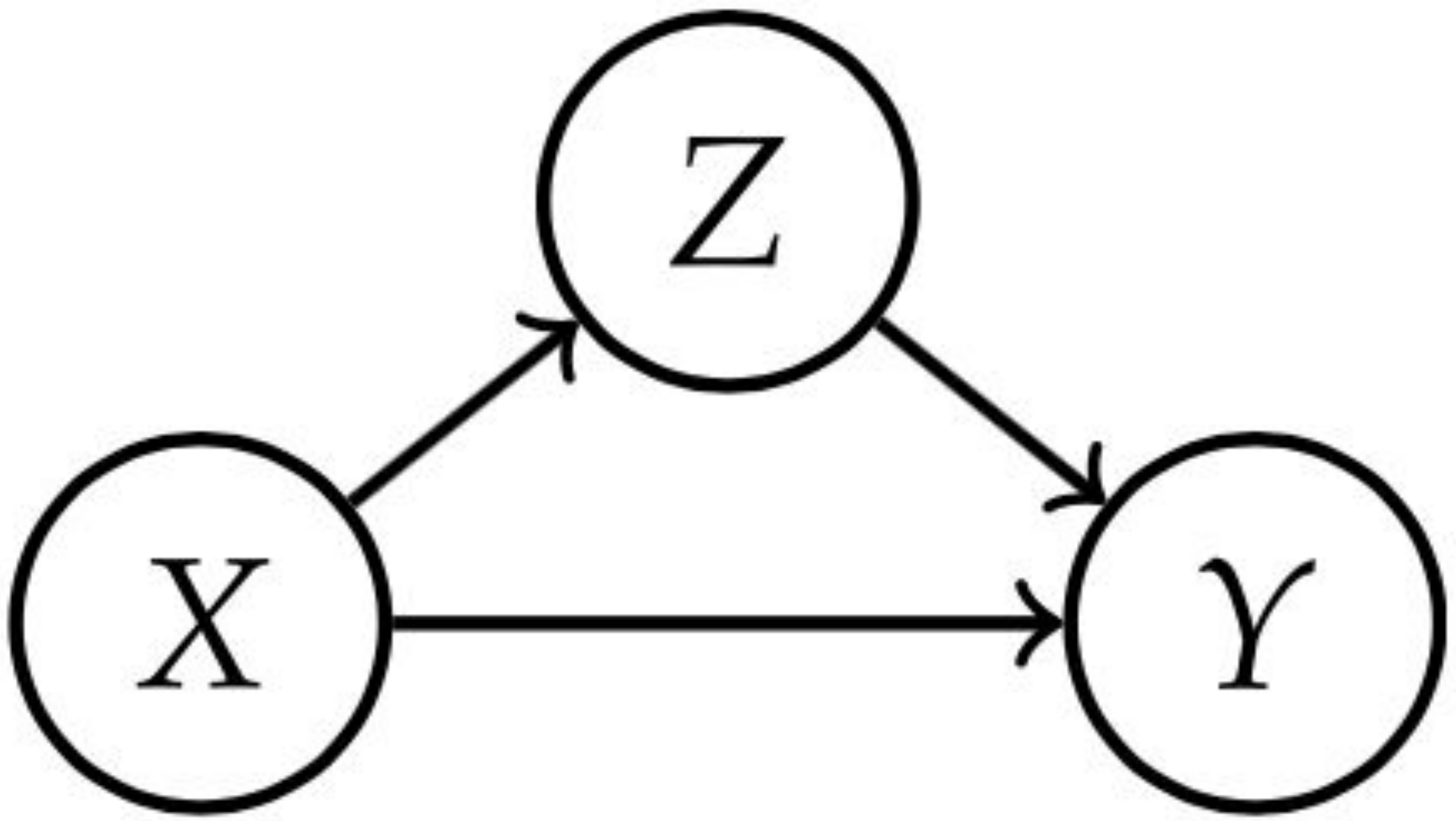
Графы - вилка

Эти два эффекта имеют общую причину. В данном случае узел Z является общей причиной X и Y.



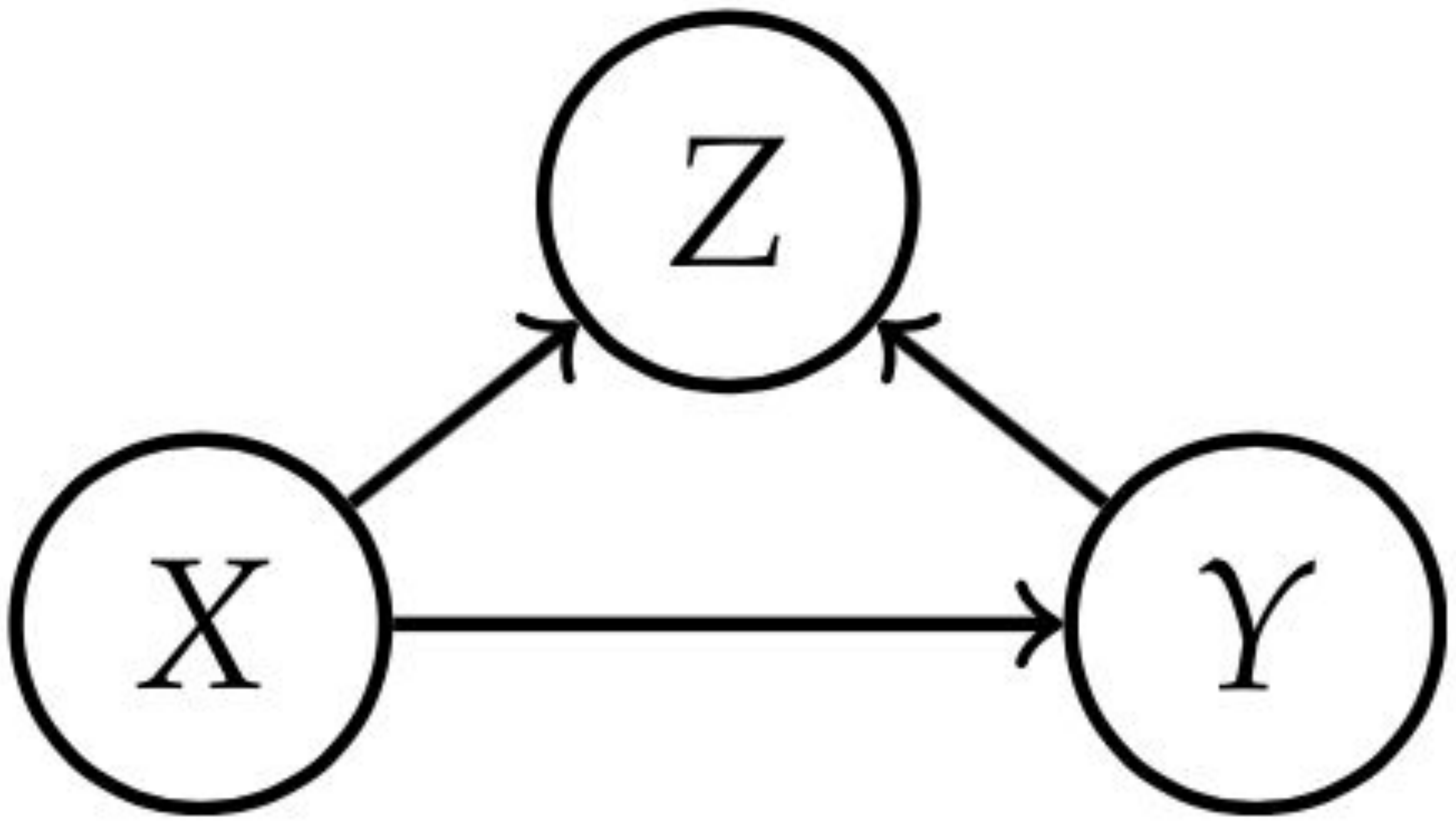
Графы - посредники

В этой модели Z является посредником в том смысле, что он опосредует изменения, в результате чего он может иметь место в Y



Графы - collider

В коллайдерах несколько причин влияет на один результат.



Причинно-следственные связи - Смешивание (Confounding)

Расхождение между интервенционными утверждениями и условными утверждениями настолько важно, что оно имеет хорошо известное название: condounding.

Мы говорим, что X и Y смешиваются, когда причина действия X на Y не совпадает с соответствующей условной вероятностью.

Причинно-следственные связи - Смешивание (Confounding)

Формула корректировки

$$\mathbb{P}\{Y = y \mid \mathrm{do}(X := x)\} = \sum_z \mathbb{P}\{Y = y \mid X = x, PA = z\}\mathbb{P}\{PA = z\}$$

Она дает нам один из способов оценки эффекта do-вмешательства в терминах условных вероятностей.

Критерий бэкдора (*The backdoor criterion*)

Две переменные смешиваются, если между ними существует так называемый бэкдорный путь.

Бэкдорный путь (backdoor path) от X до Y - это любой путь, начинающийся с X с входящим ("⟵") в X ребром, например:

$$X \leftarrow A \rightarrow B \leftarrow C \rightarrow Y$$

Интуитивно, бэкдорные пути позволяют передавать информацию из X в Y способом, который не является причинно-следственным.

Экспериментирование, рандомизация, потенциальные результаты

Мы можем записать два потенциальных результата (с лечением и без) в виде математического уравнения, введя булеву переменную T, которая равна 1, если человек получает лечение, и 0 в противном случае. В этом случае получим:

$$Y = TA + (1 - T)B\,.$$

Экспериментирование, рандомизация, потенциальные результаты

Мы можем записать это в виде формулы шансы на лечение:

$$\frac{\bar{A}}{1-\bar{A}} \cdot \frac{1-\bar{B}}{\bar{B}}.$$

Это измеряет уменьшение (или увеличение!) вероятности наступления неблагоприятного события при применении лечения.

Экспериментирование, рандомизация, потенциальные результаты

В рандомизированном контролируемом исследовании группа испытуемых случайным образом разделяется на контрольную группу и группу лечения. При чем, ни испытуемые, ни врачи не знают, к какой группе кто относится

Экспериментирование, рандомизация, потенциальные результаты

Предположим, что мы независимо и идентично отбираем подгруппу людей размера n. Мы случайным образом назначаем переменную лечения T_ii каждому человеку. Тогда получаем:

$$\mu_A^{(n)} = \frac{2}{n}\sum_{j=1}^{n} T_j A_j$$

и

$$\mu_B^{(n)} = \frac{2}{n}\sum_{j=1}^{n} (1 - T_j) B_j$$

Экспериментирование, рандомизация, потенциальные результаты

Таким образом, делать выводы о причинах сложно даже тогда, когда мы можем проводить тщательные и аккуратные эксперименты.

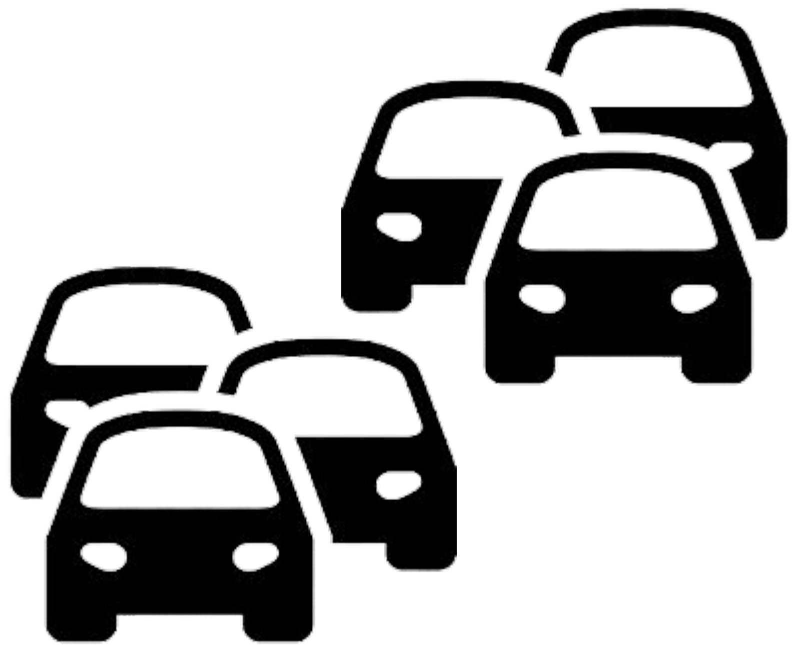
Теперь мы перейдем к осознанию того, как выяснение причины из наблюдения чревато осложнениями.

Гипотетические ситуации

Гипотетические ситуации

Пример:

Вы едете в машине и попадаете в пробку



Вопрос:

Попали ли бы вы в пробку,
если бы выбрали другую дорогу?

Пример

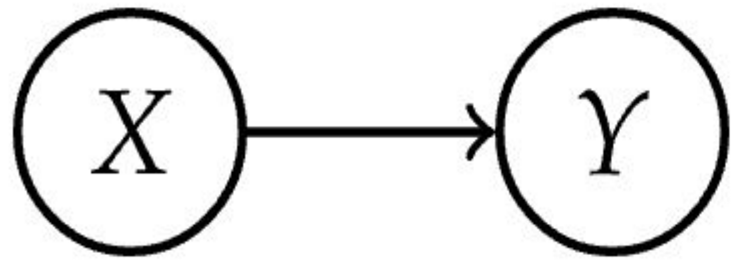
Добавим конкретику в ситуацию с дорогой:

- $\boldsymbol{X} \in \{\mathbf{0}, \mathbf{1}\}$ – номер дороги
- $\mathbf{U} \in \{\mathbf{0}, \mathbf{1}\}$ – хороший день или плохой
- $\boldsymbol{U_0} \in \{\mathbf{0}, \mathbf{1}\}$ – наличие ДТП на 0 дороге
- $\boldsymbol{U_1} \in \{\mathbf{0}, \mathbf{1}\}$ – наличие ДТП на 1 дороге
- $\boldsymbol{U_0}, \boldsymbol{U_1}, \boldsymbol{U}, \boldsymbol{X} \sim Bern(0.5)$ и независимы

Пример

Введем случайную величину $Y \in \{0, 1\}$ – наблюдаем пробку или нет

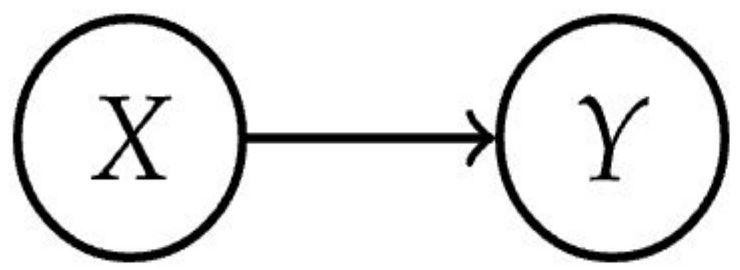
$$Y = X \cdot \max(U_1, U) + (1 - X) \cdot \max(U_0, U)$$



Пример

Введем случайную величину $Y \in \{0, 1\}$ – наблюдаем пробку или нет

$$Y = X \cdot \max(U_1, U) + (1 - X) \cdot \max(U_0, U)$$



Наблюдение: $X = 1, Y = 1$

Пример

Что делать? Может, вот так?

- do$(X \coloneqq 0)$
- Вычислить $\mathrm{P}(Y = 0)$

Пример

Что делать? Может, вот так?

- do($X \coloneqq 0$)
- Вычислить $\mathrm{P}(Y = 0)$

Получаем: $\mathrm{P}(U = 0) \cdot \mathrm{P}(U_0 = 0) = 0.5 \ \cdot 0.5 = 0.25$

Пример

Возможные значения переменных шума

До наблюдения

U	U_1
0	1
1	1
1	0
0	0

После наблюдения

U	U_1
0	1
1	1
1	0

Совместное распределение изменилось!

Пример

Порядок действий

- Посчитать новое распределение
- do($X := 0$)
- Вычислить $\mathrm{P}_1(Y = 0)$

Пример

Порядок действий

- Посчитать новое распределение
- do($X := 0$)
- Вычислить $\mathrm{P}_1(Y = 0)$

Получаем: $\mathrm{P}_1(U = 0) \cdot \mathrm{P}_1(U_0 = 0) = 1/3 \ \cdot 1/2 = 1/6$

Структура потенциальных результатов

Структура потенциальных результатов

Идея:

ввести случайные величины, отвечающие результатам гипотетических ситуаций

Структура потенциальных результатов

Идея:
ввести случайные величины, отвечающие результатам гипотетических ситуаций

Чуть более конкретнее:

- $\boldsymbol{W} \in \{\mathbf{0}, \mathbf{1}\}$ – индикатор воздействия
- $\boldsymbol{Y_0}$ – результат при $\mathrm{W} = 0$
- $\boldsymbol{Y_1}$ – результат при $X = 1$

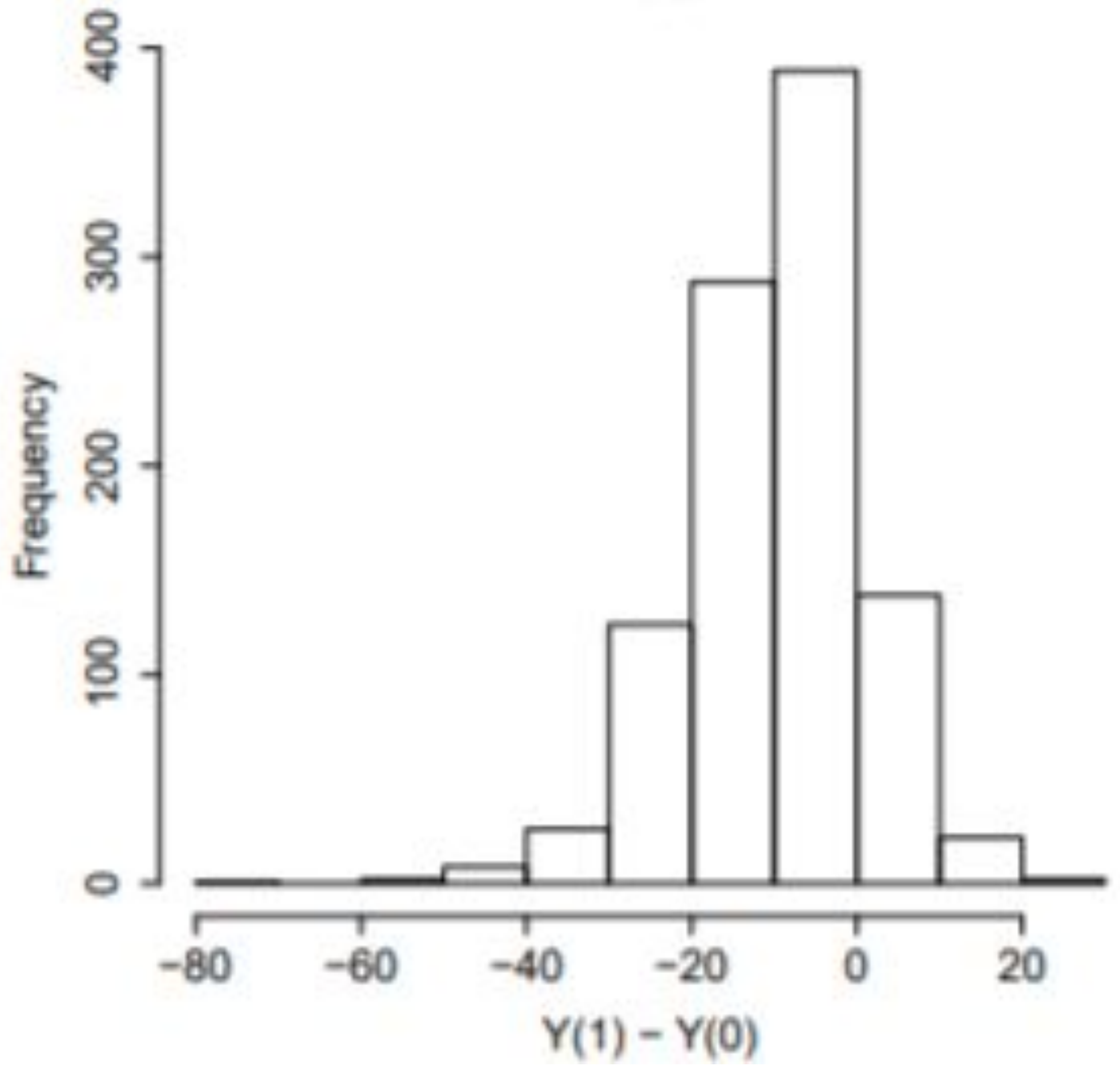
В качестве результата обычно хотим получить оценку **ATE**:

$$\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{E}[\boldsymbol{Y_1}] - \boldsymbol{E}[\boldsymbol{Y_2}]$$

Пример

$\boldsymbol{Y_i}$ – это индекс качества воздуха для $\boldsymbol{i}$-го дня
$\boldsymbol{W}$ – это ограничение на вождение, чтобы уменьшить трафик

$Y_i(0)$	$Y_i(1)$	τ_i
154.68	153.49	-1.20
135.67	120.40	-15.27
103.46	117.68	14.23
117.62	95.08	-22.54
161.11	146.73	-14.39
117.89	105.05	-12.84
84.00	75.59	-8.41
73.32	65.68	-7.63
100.07	93.80	-6.28
103.81	82.30	-21.51
...	...	...
111.68	101.47	-10.21



Пример

$\boldsymbol{Y_i}$ – это индекс качества воздуха для $\boldsymbol{i}$-го дня
$\boldsymbol{W}$ – это ограничение на вождение, чтобы уменьшить трафик

$Y_i(0)$	$Y_i(1)$	τ_i
154.68	—	—
135.67	—	—
—	117.68	—
—	95.08	—
—	146.73	—
117.89	—	—
—	75.59	—
—	65.68	—
100.07	—	—
—	82.30	—
...	...	...
110.59	100.52	—

На практике для каждого объекта мы наблюдаем лишь один результат

Оцениваем $\hat{\boldsymbol{\tau}} = 100.52 - 110.59 = -10.07$

Усложняем пример

Для каждого объекта i вводится вектор $\boldsymbol{X_i}$ – набор признаков

Хочется уметь оценивать CATE = $\tau(X) = E[Y_i(1) - Y_i(0) \mid X]$

Вопрос: Зачем?

Заключение

Рассмотрим преимущества и недостатки каждого подхода

Структурная каузальная модель

- Кодирует больше предположений о переменных
- Дает больше информации
- Сложнее в построении

Модель потенциальных результатов

- Проще в построении
- Широкий набор статистических подходов к данным
- Требует аккуратности в использовании

НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

www.text Телефон.: +X (XXX) XXX XXXX Адрес: ТекстТекстТекстТекстТекстТекстТекстТекстТекстТекстТекстТекстТекст