8 января

Упр. 1

$$\frac{2+3i}{1-4i} = ?$$

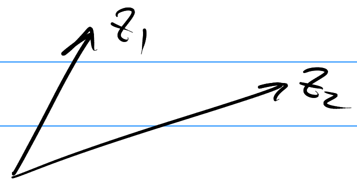
Упр 2

$$z^3 = i$$

$z_1 = ?$ $z_2 = ?$ $z_3 = ?$

идея

$$z_1 \cdot z_2 = w$$



длины умножаем

$$|w| = |z_1| \cdot |z_2|$$

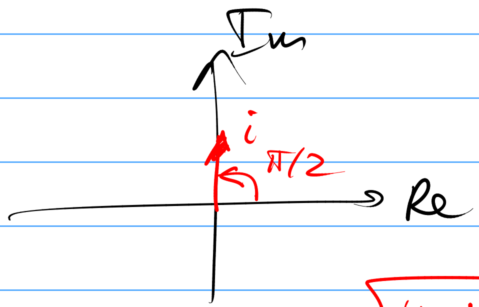
углы складываем (аргументов)

$$\operatorname{Arg} w = \operatorname{Arg} z_1 + \operatorname{Arg} z_2 \pmod{2\pi}$$

$z e^{i\varphi}$

$z^3 = i$ $w = i$ $|i| = 1$

$\operatorname{Arg} i = \frac{\pi}{2}$



$z^3 = i$

ищу:

$$\begin{cases} |z| \cdot |z| \cdot |z| = 1 \\ \operatorname{Arg} z + \operatorname{Arg} z + \operatorname{Arg} z = \frac{\pi}{2} \pmod{2\pi} \end{cases}$$

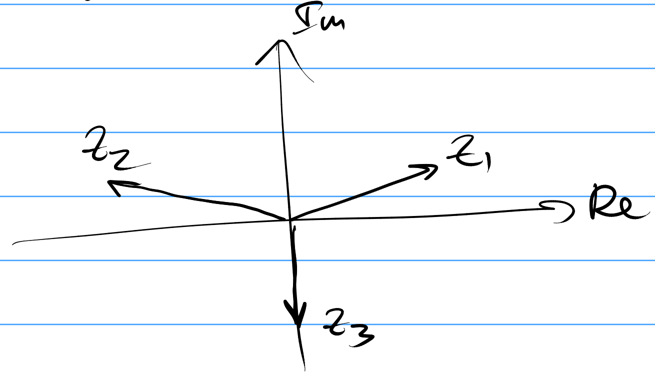
① $|z| = 1$

$\operatorname{Arg} z = \frac{\pi}{2}/3$ $\operatorname{Arg} z = \left(\frac{\pi}{2} + 2\pi\right)/3$ $\operatorname{Arg} z = \left(\frac{\pi}{2} + 4\pi\right)/3$

$\operatorname{Arg} z = \left(\frac{\pi}{2} + 6\pi\right)/3$

$z^3 = i$ $\quad |z_1| = 1 \quad |z_2| = 1 \quad |z_3| = 1$

$\operatorname{Arg} z_1 = \frac{\pi}{6} \quad \operatorname{Arg} z_2 = \frac{5\pi}{6} \quad \operatorname{Arg} z_3 = \frac{9\pi}{6}$



$z_1 = 1 \cdot \exp\left(i\frac{\pi}{6}\right) \quad z_2 = 1 \cdot \exp\left(i\frac{5\pi}{6}\right) \quad z_3 = 1 \cdot \exp\left(i\frac{9\pi}{6}\right)$

$z_1 = 1 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)$

$z_2 = \cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{5\pi}{6}\right) \quad z_3 = \cos\left(\frac{9\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{9\pi}{6}\right)$

$(100)^{\frac{1}{2}} = 10$ (мн.) $\quad \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$(100)^{\frac{1}{2}} \in \{10, -10\}$ (компл.)

$\boxed{\mathbb{C} \to 2^{\mathbb{C}}}$

$e^{\frac{1}{2}} \quad \exp\left(\frac{1}{2}\right)$ одноз.

$D = \frac{d}{dx} \quad D^2 \cdot x^3 \stackrel{?}{=} D \cdot D \cdot x^3 =$

$= D \cdot 3x^2 = 6x$

Теорема о вынесении экспоненты за скобки

(с единицей)

$$P(D)\,(\exp(kx)\,h(x)) = \exp(kx)\cdot P(D+k)\cdot h(x)$$

P – полином

Упр

$$f(x) = \exp(3x)\cdot x^2 = e^{3x}\cdot x^2$$

$$f'' + 3f' - 6f \overset{?}{=} (D^2+3D-6)\cdot(\exp(3x)\cdot x^2)$$

$$= \exp(3x)\,((D+3)^2 + 3\cdot(D+3) - 6)\cdot x^2 =$$

$$= \exp(3x)\,(D^2+6D+9+3D+9-6)\,x^2 =$$

$$= \exp(3x)\,(D^2+9D+12)\,x^2 =$$

$$= \exp(3x)\cdot(2+18x+12x^2)$$

Упр.

$D+3 = D+3I$

$D+3\cdot I$

$D\cdot(x^2) = 2x$

$I\cdot(x^2) = x^2$

$$y''' - 8y'' + 25y' - 26y = (\cos x)\cdot e^{4x}$$

шаг 1

$y(x) =$ одно угаданное решение +

\+ все решения ур-ия с нулевой RHS
„однородного ур-ия"

шаг 2

$$s(x) = (\alpha\cos x + \beta\sin x)\cdot e^{4x}$$

$$(D^3 - 8D^2 + 25D - 26)\, e^{4x}\cdot(\alpha\cos x + \beta\sin x) =$$

$$= e^{4x}((D+4)^3 - 8(D+4)^2 + 25(D+4) - 26)\cdot(\alpha\cos x + \beta\sin x) =$$

$$= e^{4x}\left(D^3 + 3\cdot D^2\cdot 4 + 3D\cdot 16 + 64 - 8(D^2 + 16 + 8D) + 25D + 100 - 26\right)$$

$$\cdot(\alpha\cos x + \beta\sin x) = e^{4x}\cdot\left(D^3 + 4D^2 + D(48 - 64 + 25) + 138\right)\cdot$$

$$\cdot(\alpha\cos x + \beta\sin x) = e^{4x}\left(D^3 + 4D^2 + 9D + 138\right)\cdot(\alpha\cos + \beta\sin)$$

$$= e^{4x}\big(\alpha\sin x - \beta\cos x + 4(-\alpha\cos x - \beta\sin x) + 9(-\alpha\sin + \beta\cos)$$
$$+ 138(\alpha\cos + \beta\sin)\big) =$$

$$= e^{4x}\left(\sin x\,(-8\alpha + 134\beta) + \cos x\,(8\beta + 134\alpha)\right)$$

$$= \boxed{e^{4x}\cdot\cos x}$$

RHS

$$\begin{cases} -8\alpha + 134\beta = 0 \\ 8\beta + 134\alpha = 1 \end{cases}$$

Шаг 2

$$y''' - 8y'' + 25y' - 26y = 0$$

ищем решения вида $y(x) = e^{\lambda x}$

$$y' = \lambda\cdot e^{\lambda x}$$
$$y'' = \lambda^2 e^{\lambda x}$$
$$y''' = \lambda^3\cdot e^{\lambda x}$$

$$z' = \lambda_1 z$$
$$f' = \lambda_2 f$$
$$\vdots$$

$$\lambda^3 e^{\lambda x} - 8\lambda^2\cdot e^{\lambda x} + 25\lambda\cdot e^{\lambda x} - 26 e^{\lambda x} = 0$$

$$\boxed{\lambda^3 - 8\lambda^2 + 25\lambda - 26 = 0}$$ ← характ-ое ур-ие.

$\lambda_1 = 2$ (угадали его)

$$\begin{array}{r|l} \lambda^3 - 8\lambda^2 + 25\lambda - 26 & \lambda - 2 \\ \cline{2-2} -\ \lambda^3 - 2\lambda^2 & \lambda^2 - 6\lambda + 13 \\ \cline{1-1} -6\lambda^2 + 25\lambda - 26 & \\ -\ -6\lambda^2 + 12\lambda & \\ \cline{1-1} 13\lambda - 26 & \end{array}$$

$$\lambda^2 - 6\lambda + 13 = 0$$

$$y'' - 3y' + 2y = 0$$
$$1, 2$$

$$\boxed{y'' - y' - 2y' + 2y = 0}$$

$$(y' - y)' - 2(y' - y) = 0$$

$$z' - 2z = 0$$

$$z' = 2z$$

...

$$(\lambda^2-6\lambda+9)+4=0$$

$$(\lambda-3)^2+4=0$$

$$(\lambda-3)^2=-4$$

$$\lambda-3=\pm 2i \qquad i^2=-1$$

$$(2i)^2=-4$$

$$(-2i)^2=-4$$

$\boxed{\text{итого:}}$ $\lambda_1=2 \quad \lambda_2=3+2i \quad \lambda_3=3-2i$

$\boxed{\text{без кратных корней}}$

$\lambda\in\mathbb{R} \longrightarrow C\cdot e^{\lambda x}$

$\lambda_1=a+bi$, $\lambda_2=a-bi$ $\longrightarrow e^{ax}\cdot(c_1\cdot\cos bx+ c_2\sin bx)$

$$y(x)=c_1\cdot e^{2x}+e^{3x}\cdot(c_2\cdot\cos 2x+c_3\cdot\sin 2x)$$

Ответ: $y(x)=e^{4x}\cdot(\alpha\cos x+\beta\sin x)+c_1\cdot e^{2x}+e^{3x}(c_2\cos 2x+c_3\cdot\sin 2x)$,

из системы лин ур.

где $c_1, c_2, c_3\in\mathbb{R}$

$\boxed{\text{с кратными корнями}}$: каждый повтор даёт домножение на x.

$\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=7 \to c_1 e^{7x}+c_2\cdot x\cdot e^{7x}+c_3\cdot x^2\cdot e^{7x}$

$\lambda_1=3+6i \quad \lambda_3=3+6i \quad \lambda_5=3+6i$

$\lambda_2=3-6i \quad \lambda_4=3-6i \quad \lambda_6=3-6i$

$$e^{3x}(c_1\cos 6x+c_2\cdot\sin 6x)+e^{3x}\cdot x(c_3\cdot\cos 6x+c_4\cdot\sin 6x)+e^{3x}\cdot x^2\cdot(c_5\cos 6x+c_6\sin 6x)$$

Упр

Шаг 1

$$y'' - 4y' + 4y = e^{2x} \cdot x \quad \text{(исходное)}$$

$$y'' - 4y' + 4y = 0 \quad \text{(однор-ое)}$$

$y = e^{\lambda x}$ $\qquad \lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0$

$$(\lambda - 2)^2 = 0$$

$$\lambda_1 = 2 \quad \lambda_2 = 2$$

решение однор-го: $y(x) = c_1 \cdot e^{2x} + c_2 \cdot x \cdot e^{2x}$, где $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

Шаг 2 угадывать решение ?

кандидат 1

$$RHS = e^{2x} \cdot x \to y(x) = e^{2x}(\alpha x + \beta)$$

кандидат 2

$$y(x) = x^2 e^{2x}(\alpha x + \beta) \qquad e^{2x} \cdot P(x)$$

$$= e^{2x}(\alpha x^3 + \beta x^2)$$

$$= e^{2x} \cdot \alpha x^3 + \beta \cdot e^{2x} \cdot x^2$$

не реш-не одно-го

не реш-не одн-го

$$(D^2 - 4D + 4) \cdot (e^{2x}(\alpha x^3 + \beta x^2)) =$$

$$= e^{2x}\left((D+2)^2 - 4(D+2) + 4\right)(\alpha x^3 + \beta x^2) =$$

$$= \cancel{e^{2x}}(D^2 + 4D + 4 - 4D - 8 + 4) \cdot (\alpha x^3 + \beta x^2) = \cancel{e^{2x}} \cdot x$$

$$D^2 \cdot (\alpha x^3 + \beta x^2) = x$$

$$6\alpha x + 2\beta = x$$

$$\alpha = \frac{1}{6} \qquad \beta = 0$$

ответ: $y(x) = c_1 \cdot e^{2x} + c_2 x e^{2x} + e^{2x}\left(\frac{1}{6}x^3\right)$, $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$

Упр $\quad y'' + 3y' + 2y = \sin(e^x)$

Шаг 1

$$\lambda^2 + 3\lambda + 2 = 0$$

$$\lambda_1 = -1 \qquad \lambda_2 = -2$$

решение однородного (не исх-го)

$$\boxed{y(x) = C_1 \cdot e^{-x} + C_2 \cdot e^{-2x}}, \text{ где } C_1, C_2 \in \mathbb{R}$$

Шаг 2

$$y(x) = C_1(x) \cdot e^{-x} + C_2(x) \cdot e^{-2x}$$

+ можем добавить одну (любую) связку на $C_1(x)$, $C_2(x)$

$$C_1'(x) \cdot e^{-x} + C_2'(x) \cdot e^{-2x} = 0$$

$$y'(x) = -C_1 \cdot e^{-x} - 2C_2 \cdot e^{-2x} + \boxed{C_1' \cdot e^{-x} + C_2' \cdot e^{-2x}}$$

$$(D^2 + 3D + 2) \cdot (C_1 e^{-x} + C_2 \cdot e^{-2x}) = \sin(e^x)$$

$$[e^{-x}((D-1)^2 + 3(D-1) + 2) \cdot C_1 +$$

$$+ e^{-2x} \cdot ((D-2)^2 + 3(D-2) + 2) \cdot C_2] = \sin(e^x)$$

$$[e^{-x}(D^2 + D) \cdot C_1 + e^{-2x}(D^2 - D) \cdot C_2] = \sin(e^x)$$

$$[e^{-x}[D+1] \cdot C_1' + e^{-2x} \cdot (D-1) \cdot C_2'] = \sin(e^x)$$

$$((D+1)+1) \cdot e^{-x} \cdot C_1' + (D+2-1) \cdot e^{-2x} \cdot C_2' = \sin(e^x)$$

$$C_1' = \boxed{} \qquad C_1(x)$$

$$C_2' = \boxed{} \qquad C_2(x)$$