Привет!!

$$y'' + 3y' + 2y = \sin(e^x) \quad (A)$$

Фаза 1

$$y'' + 3y' + 2y = 0 \quad (B)$$

$y(x) = e^{\lambda x}$

$y_1'' + 3y_1' + 2y_1 = 0$
$y_2'' + 3y_2' + 2y_2 = 0$
реш-ия (все) ур-ия B.

$$\lambda^2 + 3\lambda + 2 = 0$$

$$\lambda_1 = -1 \quad \lambda_2 = -2$$

$$\boxed{y(x) = c_1 \cdot \underbrace{e^{-x}}_{y_1} + c_2 \cdot e^{-2x}}$$

Фаза 2 мод-м решение ур-ия B, чтобы получить реш-ия ур-ия A.

$$y(x) = c_1(x) \cdot e^{-x} + c_2(x) \cdot e^{-2x}$$

! одно любое огр-ие на $c_1(x)$ и $c_2(x)$ можно добавить безвозмездно!

$y_1 = e^{-x} \quad y_2 = e^{-2x}$!

$$Dy(x) = c_1'(x) \cdot y_1 + c_2' \cdot y_2 + \quad = 0$$
$$+ c_1 \cdot y_1' + c_2 \cdot y_2'$$

$$(D^2 + 3D + 2I) \cdot (c_1 \cdot y_1 + c_2 \cdot y_2) = RHS$$

$$P(D) \cdot e^{kx} \cdot c(x) = e^{kx} P(D+k) \cdot c(x)$$

$$(D^2+3D+2I)\cdot(C_1\cdot y_1+C_2\cdot y_2)=RHS$$

$$D(C_1y_1+C_2y_2)=C_1Dy_1+C_2\cdot Dy_2+ \; +DC_1\cdot y_1+DC_2\cdot y_2 = 0$$

$$D^2(C_1y_1+C_2y_2)=D(C_1y_1'+C_2y_2')=$$

$$+ \quad =(C_1'y_1'+C_2'y_2')+(C_1y_1''+C_2y_2'')$$

$$3D\cdot(C_1y_1+C_2y_2)=C_1\cdot 3y_1'+C_2\cdot 3y_2'$$

$$2I\cdot(C_1y_1+C_2y_2)=C_1 2y_1+C_2\cdot 2y_2$$

$$\underset{0}{\parallel}\qquad\underset{0}{\parallel}$$

$$=C_1'y_1'+C_2'\cdot y_2'=RHS_{*}$$

$\mathrm{Im}(e^{*})$

$$\begin{cases}\boxed{C_1'\cdot y_1+C_2'\cdot y_2=0}\\ \boxed{C_1'\cdot y_1'+C_2'\cdot y_2'=RHS}\end{cases}$$

$$\begin{pmatrix}y_1 & y_2\\ y_1' & y_2'\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}C_1'\\ C_2'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ RHS\end{pmatrix}$$

Правило Крамера

$\boxed{\text{рецепт}} \rightarrow$

$$C_1'=\frac{\det\begin{pmatrix}\boxed{\begin{matrix}0\\ RHS\end{matrix}} & \begin{matrix}y_2\\ y_2'\end{matrix}\end{pmatrix}}{\det\begin{pmatrix}y_1 & y_2\\ y_1' & y_2'\end{pmatrix}}$$

неизв №1

Вронскиан

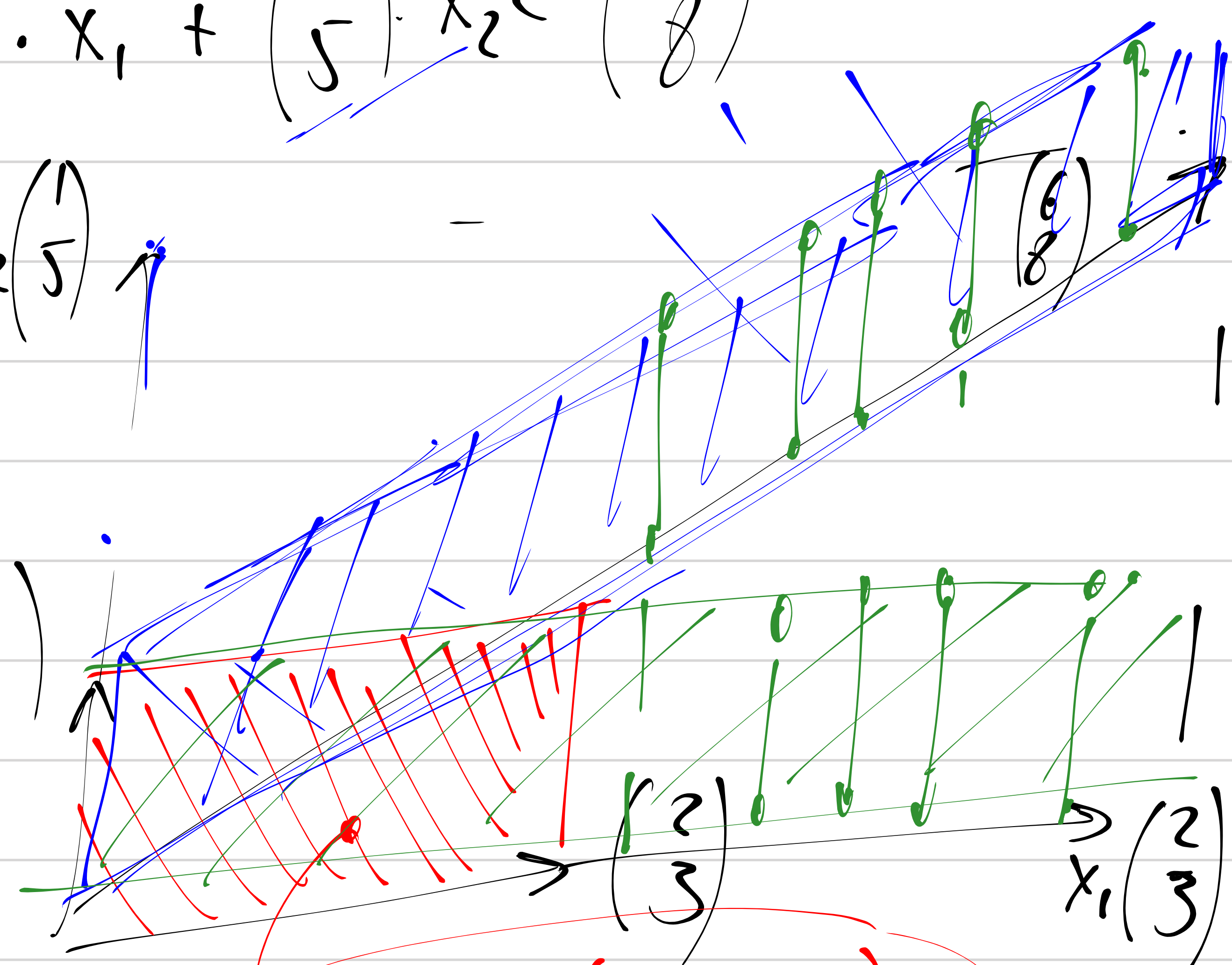
$$C_2'=\frac{\det\begin{pmatrix}\begin{matrix}y_1\\ y_1'\end{matrix} & \boxed{\begin{matrix}0\\ RHS\end{matrix}}\end{pmatrix}}{\det\begin{pmatrix}y_1 & y_2\\ y_1' & y_2'\end{pmatrix}}$$

неизв №2

$$\begin{pmatrix}2&1\\3&5\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6\\8\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}\cdot x_1+\begin{pmatrix}1\\5\end{pmatrix}\cdot x_2=\begin{pmatrix}6\\8\end{pmatrix}$$

$x_2\begin{pmatrix}1\\5\end{pmatrix}$



$$x_1=\frac{S_1}{S}$$

$$S_1=\det\begin{pmatrix}6&1\\8&5\end{pmatrix}$$

знам. $S=\det\begin{pmatrix}2&1\\3&5\end{pmatrix}$

$$\boxed{y''+6y'+8y=x+3}$$

Шаг 1

$$y''+6y'+8y=0 \qquad y(x)=e^{\lambda x}$$

$$\lambda^2+6\lambda+8=0$$

$$\lambda_1=-4 \qquad \lambda_2=-2$$

$$y_1=e^{-4x} \qquad y_2=e^{-2x}$$

Шаг 2

Реш-ие исх-го ур-ия

$$y(x) = C_1(x)\cdot y_1 + C_2(x)\cdot y_2$$

$$y_1 = e^{-4x}$$
$$y_2 = e^{-2x}$$

$$C_1' = \frac{\det\begin{pmatrix} 0 & y_2 \\ x+3 & y_2' \end{pmatrix}}{\det\begin{pmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{pmatrix}} = \frac{-(x+3)\cdot e^{-2x}}{e^{-4x}\cdot(-2)\cdot e^{-2x} - e^{-2x}\cdot(-4)e^{-4x}}$$

$$C_1'(x) = \frac{-(x+3)}{e^{-4x}\cdot\left((-2)+4\right)} = -\frac{1}{2}(x+3)\cdot e^{4x}$$

$$C_1(x)$$

$$C_2'(x) = \frac{\det\begin{pmatrix} y_1 & 0 \\ y_1' & x+3 \end{pmatrix}}{\det\begin{pmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{pmatrix}} = \frac{+(x+3)\cdot e^{-4x}}{2e^{-6x}}$$

$$C_2(x)$$

Упр.

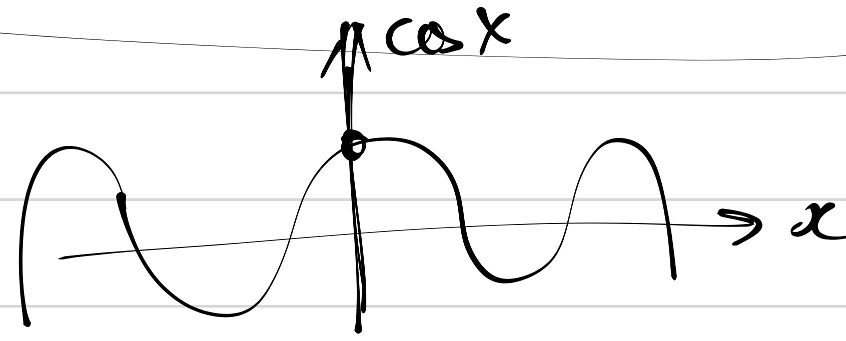
$$\exp\left(\begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 6 & 10 \end{pmatrix}\right) \overset{?}{=}$$

$$\cos\left(\begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 6 & 10 \end{pmatrix}\right) \overset{?}{=}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

def : $\exp(A) = I + A + \frac{1}{2!}\cdot A^2 + \frac{1}{3!} A^3 + \frac{1}{4!} A^4 + \ldots$

def : $\cos(A) =$



$$= I - \frac{1}{2!}\cdot A^2 + \frac{1}{4!} A^4 - \ldots$$

SVD (сингл. разложение)

$$\underset{n\times k}{A} = U\cdot\Sigma\cdot V^T$$

Σ - диаг.

$U^T U = I$

$V^T V = I$

если родился под счастливой звездой

$$\underset{n\times n}{A} = \underset{n\times n}{U}\cdot\underset{n\times n}{\Sigma}\cdot\underset{n\times n}{U^{-1}}$$

Σ диаг из λ_i

U - из собст. векторов

если кол-во лин-но нез-х векторов равно n.

(с. числа)

$$\det\begin{pmatrix} 5-\lambda & 6 \\ 6 & 10-\lambda \end{pmatrix} = (5-\lambda)\cdot(10-\lambda) - 36 = 0$$

$$\lambda^2 + 50 - 36 - 15\lambda = 0.$$

$$\lambda^2 - 15\lambda + 14 = 0$$

$\lambda_1 = 1$

$\lambda_2 = 14$

$$\begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 6 & 10 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = 14 \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$$

$$A \cdot v = 14 I \cdot v$$

$$(A - 14I) \cdot v = 0$$

$$\lambda_1 = 14 \qquad \begin{pmatrix} -9 & 6 \\ 6 & -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

с. для $\lambda_2 = 1$

$\lambda = 14$

$$v = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \end{pmatrix}$$ ← один из с. век-в.

$\lambda_2 = 1$

$$\begin{pmatrix} 5-1 & 6 \\ 6 & 10-1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_2 = 1 \qquad \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 6 & 9 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

с. для $\lambda_1 = 14$

$\lambda = 1$

$$v = \begin{pmatrix} 6 \\ -4 \end{pmatrix}$$ один из с. век

$$A = \underbrace{\begin{pmatrix} 6 & 4 \\ -4 & 6 \end{pmatrix}}_{U} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 14 \end{pmatrix}}_{\Sigma} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 6 & 4 \\ -4 & 6 \end{pmatrix}^{-1}}_{U^{-1}}$$

$$A^2 = U \Sigma \boxed{U^{-1} \cdot U} \cdot \Sigma U^{-1} = U \cdot \begin{pmatrix} 1^2 & 0 \\ 0 & 14^2 \end{pmatrix} \cdot U^{-1}$$

$$A^3 = U \cdot \begin{pmatrix} 1^3 & 0 \\ 0 & 14^3 \end{pmatrix} \cdot U^{-1}$$

$$\exp(A) =$$

$$= \underset{U \cdot U^{-1}}{I} + U \cdot \Sigma U^{-1} + \frac{1}{2!} \cdot U \Sigma^2 \cdot U^{-1} + \frac{1}{3!} U \cdot \Sigma^3 \cdot U^{-1} + \dots$$

$$= U \left[I + \Sigma + \frac{1}{2!} \cdot \Sigma^2 + \frac{1}{3!} \Sigma^3 + \dots \right] U^{-1}$$

$$= \begin{pmatrix} 6 & 4 \\ -4 & 6 \end{pmatrix} \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 14 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1/2! & 0 \\ 0 & 14^2/2! \end{pmatrix} + \dots \right) \cdot \begin{pmatrix} & \\ & \end{pmatrix}^{-1}$$

$$= \begin{pmatrix} 6 & 4 \\ -4 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \exp(1) & 0 \\ 0 & \exp(14) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 6 & 4 \\ -4 & 6 \end{pmatrix}^{-1}$$

$$y'(x) = 5 \cdot y(x)$$

$$y(x) = C_1 \cdot \boxed{\exp(5x)}$$

$$y(x) = \begin{pmatrix} a(x) \\ b(x) \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a'(x) \\ b'(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 6 & 10 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a(x) \\ b(x) \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a(x) \\ b(x) \end{pmatrix} = \exp\left(\begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 6 & 10 \end{pmatrix} \cdot x \right) \cdot \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix}$$