# Системы. Жорданова норм. форма.

Стр-ия 1. дог-ся до структуры и подобрать векторы.

$$\dot y = A \cdot y \qquad A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

(теор)

система из 3-х ур-ий $\rightleftarrows$ одно ур-ие 3-го порядка

(практ)

$$\dddot y + 2\ddot y + 6\dot y - 7y = 0$$

$a = y$

$b = \dot y$

$c = \ddot y$

$$\dot{\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} b \\ c \\ -2c - 6b + 7a \end{pmatrix}$$

$$\dot{\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 7 & -6 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

$$y(t) = \underbrace{c_1}_{\text{скаляр}} \cdot \underbrace{y_1(t)}_{\text{вектор}} + c_2 \cdot y_2(t) + c_3 \cdot y_3(t)$$

$y(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Если предп.: $y_1(t) = v \cdot e^{\lambda t}$ вектор конст, скаляр

$$\dot{y} = A \cdot y$$

$$v \cdot \lambda \cdot \cancel{e^{\lambda t}} = A \cdot v \cdot \cancel{e^{\lambda t}}$$

то он- ся: $\boxed{Av = \lambda v}$

Step2. $v$?

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

$$Av = \lambda v$$

$$(A - \lambda \cdot I) \cdot v = 0$$

вектор

у этой системы есть решение $v \neq 0$ т. если $\det(A - \lambda I) = 0$.

Step1. $\lambda$?

$$\det \begin{bmatrix} 3-\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 3-\lambda & 1 \\ 0 & 0 & 3-\lambda \end{bmatrix} = 0$$

$$(3-\lambda)^3 = 0$$

$\lambda_1 = 3 \quad \lambda_2 = 3 \quad \lambda_3 = 3$

$$\begin{pmatrix} 3-3 & 1 & 0 \\ 0 & 3-3 & 1 \\ 0 & 0 & 3-3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\beta = 0$

$\gamma = 0$

$\alpha$ - любое

$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$y_1(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot e^{3t}$$

с. число

с. вектор

oder: $y(t) = \underbrace{c_1 \cdot v_1 \cdot e^{\lambda t}}_{y_1(t)} + c_2 \cdot y_2(t) + c_3 \cdot y_3(t)$

$c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$

$Av_1 = \lambda \cdot v_1$

$$y_2(t) = (v_2 + v_1 \cdot t) \cdot e^{\lambda t} \qquad \dot{y} = A \cdot y$$

$$(v_2 \cdot \lambda + v_1 \cdot t \cdot \lambda + v_1) \cdot \cancel{e^{\lambda t}} = A (v_2 + v_1 t) \cdot \cancel{e^{\lambda t}}$$

$$v_2 \cdot \lambda + \cancel{v_1 t \cdot \lambda} + v_1 = A v_2 + \cancel{\lambda v_1 \cdot t}$$

$$(A - I\lambda) \cdot v_2 = v_1 \qquad A v_2 = \lambda v_2 + v_1$$

$$\begin{pmatrix} 3-3 & 1 & 0 \\ 0 & 3-3 & 1 \\ 0 & 0 & 3-3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$v_2$

$\gamma = 0$

$\beta = 1$

$\alpha = 2$

oder: $y(t) = c_1 \cdot v_1 \cdot e^{\lambda t} + c_2 \cdot (v_2 + t \cdot v_1) \cdot e^{\lambda t} + c_3 \cdot y_3(t)$

$$y_3 = \left(v_3 + v_2 \cdot t + v_1 \cdot \frac{t^2}{2}\right) \cdot e^{\lambda t} \qquad \dot{y} = A \cdot y$$

$$\left(v_3 \cdot \lambda + v_2 \cdot t \cdot \lambda + v_2 + \cancel{v_1 \cdot \frac{t^2}{2} \cdot \lambda} + v_1 t\right) \cdot \cancel{e^{\lambda t}} =$$

$$= A \cdot \left(v_3 + v_2 t + \cancel{v_1 \frac{t^2}{2}}\right) \cdot \cancel{e^{\lambda t}}$$

$Av_1 = \lambda v_1$

$Av_2 = \lambda v_2 + v_1$

$v_3 \lambda + v_2 = A v_3$

$(A - \lambda I) \cdot v_3 = v_2$

$$(A-\lambda)\cdot v_3 = v_2$$

$$\begin{pmatrix} 3-3 & 1 & 0 \\ 0 & 3-3 & 1 \\ 0 & 0 & 3-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$v_3 = \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \gamma = 1, \quad \beta = 2$$

$$y_3 = \left[ \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{t^2}{2} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right] \cdot e^{3t}$$

$$y_2 = \left( \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right) e^{3t}$$

$$y_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot e^{3t}$$

$$y(t) = c_1 \cdot y_1 + c_2 y_2 + c_3 \cdot y_3 \qquad \forall c_i \in \mathbb{R}$$

$$c_1 = -2 + c_1'$$

---

Альтернатива: матр. эксп.

$$\dot{y} = Ay \implies y(t) = \boxed{e^{At}} \cdot y(0) \quad !!$$

$$e^{At} \,? \qquad A = P \cdot J \cdot P^{-1}$$

$$e^{At} = I + At + \frac{1}{2!}(At)^2 + \frac{1}{3!}(At)^3 + \ldots$$

$$= P \cdot I P^{-1} + P \cdot Jt \cdot P^{-1} + \frac{1}{2!} P \cdot (Jt)^2 \cdot P^{-1} \ldots$$

$$\boxed{= P \cdot e^{Jt} \cdot P^{-1}}$$

$$e^{\begin{bmatrix}3&1&0\\0&3&1\\0&0&3\end{bmatrix}\cdot t} = \begin{bmatrix}1 & t & t^2/2\\ 0 & 1 & t\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix} e^{3t}$$

---

$$\begin{pmatrix}3&0&0\\0&3&0\\0&0&3\end{pmatrix} \longrightarrow$$

$$\begin{pmatrix}3&0.000001&0\\0&3&0.00001\\0&0&3\end{pmatrix} \longrightarrow$$

---

Случай компл.-но сопр-х.
и RHS≠0.

$\lambda$ a+bi, a-bi; $\lambda$ RHS

$$\dot{y} = Ay + f \qquad f = \begin{pmatrix}e^{3t}\\ t\end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix}2 & -3\\ 3 & 2\end{pmatrix}$$

$$\det(A - \lambda I) = 0.$$

решим более простую:

$$\boxed{\dot{z} = A\cdot z + 0}$$

$$\det\begin{pmatrix}2-\lambda & -3\\ 3 & 2-\lambda\end{pmatrix} = 0$$

$$(2-\lambda)^2 + 9 = 0$$

$$\lambda_1 = 2-3i \qquad \lambda_2 = 2+3i$$

$$(A - \lambda_1 \cdot I)\cdot v_1 = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}3i & -3\\ 3 & 3i\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$$

$\alpha = i$
$\beta = -1$

$$v_1 = \begin{pmatrix}i\\ -1\end{pmatrix}$$

$$\lambda_1 = 2-3i \qquad \lambda_2 = 2+3i$$

$$v_1 = \begin{pmatrix} i \\ -1 \end{pmatrix} \qquad v_2 = \begin{pmatrix} -i \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$y_1 = d_1 \cdot \begin{pmatrix} i \\ -1 \end{pmatrix} \cdot e^{(2-3i)t} \qquad y_2 = d_2 \cdot \begin{pmatrix} -i \\ -1 \end{pmatrix} \cdot e^{(2+3i)t}$$

$$d_1 \in \mathbb{C} \qquad d_2 \in \mathbb{C}$$

$$c_1 \cdot \mathrm{Re}\left( \begin{pmatrix} i \\ -1 \end{pmatrix} \cdot e^{(2-3i)t} \right) + c_2 \cdot \mathrm{Im}\left( \begin{pmatrix} i \\ -1 \end{pmatrix} e^{(2-3i)t} \right) =$$

$$c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

$$= e^{2t} \left[ c_1 \cdot \mathrm{Re}\left( \begin{pmatrix} i \\ -1 \end{pmatrix} \cdot (\cos 3t - i \sin 3t) \right) + \right.$$
$$\left. + c_2 \cdot \mathrm{Im}\left( \begin{pmatrix} i \\ -1 \end{pmatrix} \cdot (\cos 3t - i \sin 3t) \right) \right] =$$

$$z(t) = e^{2t} \cdot \left[ c_1 \cdot \begin{pmatrix} \sin 3t \\ -\cos 3t \end{pmatrix} + c_2 \cdot \begin{pmatrix} \cos 3t \\ \sin 3t \end{pmatrix} \right]$$

где $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$

$$\dot{z} = Az \qquad \dot{Z}c = A \cdot Z_1 \cdot c$$

$$z = Z_1 \cdot c = \begin{bmatrix} e^{2t} \sin 3t & e^{2t} \cos 3t \\ e^{2t}(-\cos 3t) & e^{2t} \sin 3t \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}$$

$$\dot{y} = Ay + b \qquad b = \begin{pmatrix} e^{3t} \\ t \end{pmatrix}$$

$\boxed{y = Z_1 \cdot c(t)}$ ответ для исходной системы.

$$\boxed{\dot{Z} \cdot c} + Z \cdot \dot{c} = \boxed{A \cdot Z_1 \cdot c} + b$$

$$\begin{pmatrix} \dot{c}_1 \\ \dot{c}_2 \end{pmatrix} = \dot{c} = Z^{-1} b = \begin{bmatrix} e^{2t} \sin 3t & e^{2t} \cos 3t \\ e^{2t}(-\cos 3t) & e^{2t} \sin 3t \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} e^{3t} \\ t \end{pmatrix}$$

...