Привет!!

$\boxed{\text{Линейные ур-ние !!}}$ с постоянными коэфф-ми.

→ 200+ лет опыта

→ идея открытия

$$y'' - y' - 6y = e^{5t} + 7 \qquad \underline{y(t)\,?}$$

идея ⇒ рецепт

идея р-д: угадаем одно решение и модиф-ем его до полного множ-ва всех решений.

$$e^{5t} \xrightarrow{d/dt} \longrightarrow \xrightarrow{d/dt} \longrightarrow ?\cdot e^{5t}$$

$$\cos 3t \xrightarrow{d/dt} \longrightarrow \xrightarrow{d/dt} \to \ldots \longrightarrow ?\cos 3t + ?\sin 3t$$

$$t^2+6t+7 \xrightarrow{d/dt} \longrightarrow \text{------} \to ?t+?$$

$$e^{5t}(t^2+6t+7) \xrightarrow{d/dt} \text{----} \xrightarrow{d/dt} e^{5t}(?t^2+?t+?)$$

$$RHS = e^{5t}+7 \qquad \underline{\text{будем гадать:}} \quad y(t) = \alpha\cdot e^{5t}+\beta$$

$$y''-y'-6y = e^{5t}+7$$

$$(\alpha 25\cdot e^{5t}+0)-(\alpha\cdot 5e^{5t}+0)-6(\alpha e^{5t}+\beta) = e^{5t}+7$$

$$\alpha = \frac{1}{14} \qquad \beta = -\frac{7}{6}$$

$$\boxed{y(t) = \frac{1}{14}e^{5t}+\left(-\frac{7}{6}\right)}$$

угаданное решение исх-го ур-ия

$$y(t) = \frac{1}{14}e^{5t} - \frac{7}{6} + h(t)$$

(целиком) решение модиф-го ур-ия с занулённой RHS.

$$y'' - y' - 6y = e^{5t} + 7$$

$$\left(\frac{1}{14}e^{5t} - \frac{7}{6}\right)'' + h'' - \left[\left(\frac{1}{14}e^{5t} - \frac{7}{6}\right)' + h'\right] - 6\left[\left[\frac{1}{14}e^{5t} - \frac{7}{6}\right] + h\right] = e^{5t} + 7$$

$$h'' - h' - 6h = 0$$

цель: хочу свести это ур-ие к ур-нию первой степени!

$$h' = v \qquad v' - v - 6(?) = 0$$

рецепт
1. угадать любое одно решение
2. решить однородное ур-ие с занулённой RHS
3. сложить их.

идея корректировки угаданного решения

$$b_n = 2b_{n-1} \Rightarrow \dots\dots b_n = b_0 \cdot 2^n$$

$$\frac{b_n - b_{n-1}}{1}$$

$$a_n = 7 + 2a_{n-1} \Rightarrow ?$$

$$a_n + c = 2a_{n-1} + 2c \qquad a_n + 7 = 2a_{n-1} + 2 \cdot 7$$

$$b_n = 2b_{n-1}$$

$$a_n + 7 = b_n$$

$$b_n = 2b_{n-1}$$

$$h'' - h' - 6h = 0$$

$$\boxed{h'' - (\lambda_1+\lambda_2)\cdot h' + \lambda_1\cdot\lambda_2 h = 0}$$

$$h'' - 3h' + 2h' - 6h = 0$$

$$h'' - \lambda_1 h' - \lambda_2 h' + \lambda_1 \lambda_2 \cdot h = 0$$

$$h'' - \lambda_1 \cdot h' - \lambda_2 (h' - \lambda_1 h) = 0$$

? ?

$$h'' - 3h' + \boxed{2}(h' - \boxed{3}h) = 0$$

$$v = h' - 3h \qquad v' + 2v = 0$$

$$v' = -2v$$

λ_2

$$v = c\cdot e^{-2t}$$

$$h' - 3h = c\cdot e^{-2t}$$

? e^{-3t}

$$\boxed{h'\cdot e^{-3t} - 3e^{-3t}\cdot h} = c\cdot e^{-5t}$$

$$\underbrace{(h\cdot e^{-3t})' = c\cdot e^{-5t}}_{\int}$$

$$he^{-3t} = \frac{c\cdot e^{-5t}}{-5} + c_2$$

$$h(t) = \frac{c}{-5}\cdot e^{-2t} + c_2\cdot e^{3t}, \quad c, c_2 \in \mathbb{R}$$

$$\frac{c}{-5} = c_1$$

$$\boxed{h(t) = c_1\cdot e^{-2t} + c_2\cdot e^{3t}}$$

Odp.: $y(t) = \frac{1}{14}e^{5t} - \frac{7}{6} + \boxed{c_1\cdot e^{\overset{\lambda_2}{-2t}} + c_2\cdot e^{\overset{\lambda_1}{3t}}}$ $(c_1, c_2 \in \mathbb{R})$

рецепт!

догадаться угадывать решение вида $h(t) = e^{\lambda t}$

$$h'' - h' - 6h = 0$$

$$\lambda^2 e^{\lambda t} - \lambda e^{\lambda t} - 6e^{\lambda t} = 0$$

характ-ое ур-ие

$$\lambda^2 - \lambda - 6 = 0$$

$\lambda_1 = 3 \quad \lambda_2 = -2$

особо $(*)$ $\lambda_1 = \lambda_2$; $\lambda_1, \lambda_2 \notin \mathbb{R}$; $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$

$$h(t) = c_1 \cdot e^{3t} + c_2 \cdot e^{-2t}, \text{ где } c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

$$\boxed{y'' - 2y' + 10y = 6.}$$

$\boxed{\text{1. угадывание}}$ $\quad y = 0{,}6$

$RHS = 6 \longrightarrow y(x) = c$

$RHS = e^{5x} \longrightarrow y(x) = c \cdot e^{5x}$

$RHS = \cos 3x \longrightarrow y(x) = a_1 \cos 3x + a_2 \sin 3x$

$(*)$

$y = c$

$$y(x) = 0.6 + h(x), \text{ где } h'' - 2h' + 10h = 0$$

2. Решаем однородное ур-ие

$$h'' - 2h' + 10h = 0$$

будем искать решение вида $h(x) = e^{\lambda x}$

$$\lambda^2 \cdot e^{\lambda x} - 2\lambda \cdot e^{\lambda x} + 10 e^{\lambda x} = 0$$

$$\lambda^2 - 2\lambda + 10 = 0$$

$$\lambda^2 - 2\lambda + 1 + 9 = 0$$

$$(\lambda - 1)^2 + 9 = 0$$

$$(\lambda - 1)^2 = -9$$

$$\lambda = 1 \pm 3i$$

$\lambda_1 = 1 + 3i$

$\lambda_2 = 1 - 3i$

рецепт: $h(x) = e^{1x} \cdot (k_1 \cos 3x + k_2 \sin 3x)$

$e^{\varphi \cdot i} = \cos\varphi + i\sin\varphi$

$c_1 \in \mathbb{C}$ $\quad c_2 \in \mathbb{C}$

$$h(x) = c_1 \cdot e^{(1+3i)x} + c_2 \cdot e^{(1-3i)x}$$

нашли все комплекснозначные $h(x)$ $\quad h: \mathbb{R} \to \mathbb{C}$

$$e^{(1+3i)\cdot x} = e^{x} \cdot e^{3x \cdot i} = e^{x} \cdot (\cos 3x + i\sin 3x)$$

$$h(x) = \underbrace{(a_1 + b_1 i)}_{c_1} \cdot e^{x} \cdot (\cos 3x + i \sin 3x) +$$

$$+ \underbrace{(a_2 + b_2 i)}_{c_2} \cdot e^{x} (\cos 3x - i \sin 3x) =$$

$$= e^{x} \cdot (k_1 \cos 3x + k_2 \sin 3x + k_3 i \cos 3x + k_4 i \sin 3x) =$$

a_1, a_2, b_1, b_2 $\qquad 0 \qquad 0$

$k_3 = b_1 + b_2 \qquad b_1 + b_2 = 0$

$k_4 = a_1 - a_2 \qquad a_1 - a_2 = 0$

$c_1 = a + bi \qquad c_2 = \bar{c_1} = a - bi$

$h(x) = e^{x} \cdot (k_1 \cdot \cos 3x + k_2 \sin 3x)$, где k_1 и $k_2 \in \mathbb{R}$

$\Downarrow \qquad ? \qquad ?$

$y(x) = a6 + e^{1x} \cdot (k_1 \cos 3x + k_2 \cdot \sin 3x)$, — // —

(кратный корень)

$$h'' - 4h' + 4h = 0.$$

$$\lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0$$

$$\lambda_1 = 2 \quad \lambda_2 = 2$$

$$h'' - (2+2)\cdot h' + 2\cdot 2h = 0$$

$$h'' - 2h' - 2h' + 2\cdot 2h = 0$$

$$(h'' - 2h') - 2\cdot(h' - 2h) = 0$$

$$v = h' - 2h \qquad v' - 2v = 0$$

$$\boxed{v(t) = c\cdot e^{+2t}}$$

$$\boxed{h' - 2h = c\cdot e^{2t}} \qquad \cdot e^{-2t}$$

$$e^{-2t}\cdot h' - 2\cdot e^{-2t}\cdot h = c\cdot 1$$

$$(h\cdot e^{-2t})' = c$$

$$h\cdot e^{-2t} = ct + d$$

$$\boxed{h = ct\cdot e^{2t} + d\cdot e^{2t}}$$

решение: $h'' - 6h' + 9h = 0$ $\quad \lambda_1 = 3 \quad \lambda_2 = 3$

$$\boxed{h(t) = ce^{3t} + de^{3t}\cdot t}$$

$$h'''' \ldots\ldots\ldots = 0$$

$$\lambda_1 = 2+3i \quad \lambda_2 = 2-3i \qquad \lambda_3 = 7 \quad \lambda_4 = 9 \quad \lambda_5 = 9$$

$$h(t) = c_3\cdot e^{7t} + c_4\cdot e^{9t} + c_5 e^{9t}\cdot t + e^{2t}(c_1\cdot\cos 3t + c_2\cdot\sin 3t)$$