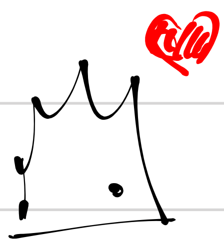
Семинар - 2 ДУ

2022-01-25

Видно? Всё ок?



ДУ первой степени

уже

Разд пер.

$$f(y)\cdot dy = g(x)dx$$

$$\int f\,dy = \int g\,dx$$

Легкая (?) замена

$$y' = 1 + (y-x)^2$$

Вз

$$y - x = z(x)$$
$$y' = z' + 1$$

$$y = x + z$$

$$z' + 1 = 1 + z^2$$

$$\frac{dz}{dx} = z^2$$

! Искусство !

Как сост-ть на экзамен задачку-игрушку?

$$y^2 + y^3x^2 + x^3y = 3$$

$y(x)$

$LHS(x, y)$ $\quad \frac{\partial LHS}{\partial x}$

прод по x

$$2y\cdot y' + 3y^2\cdot y'\cdot x^2 + y^3\cdot 2x + 3x^2\cdot y + x^3\cdot y' = 0$$

$$L(x) = LHS(x, y(x))$$

[секрет]

$$\frac{dL(x)}{dx} = \frac{\partial LHS}{\partial x} + \frac{\partial LHS}{\partial y}\cdot y'(x)$$

$$2xy' + 3y\cdot y'\cdot x^3 + y^2\cdot 2x^2 + 3x^3 + x^4\cdot y'_y = 0$$

Типовые решабельные штуки:

$\boxed{\text{Идея:}}$ $\boxed{\text{скоррелировать более простое решение.}}$

→ аддитивная

→ мультипликативная.

$$\boxed{y' + 2y = x+3} \qquad y(x)$$

Шаг 1. угадаем одно решение.

Шаг 2. Скоррелируем его, чтобы получить остальное.

Шаг 1 $\quad y(x) = \alpha x + \beta$

$$y' = \alpha$$

$$\alpha + 2(\alpha x + \beta) = x + 3$$

коэф. при:	LHS	RHS
x	2α	1
1	$\alpha + 2\beta$	3

$$2\alpha = 1$$

$$\alpha + 2\beta = 3$$

$$\alpha = \frac{1}{2} \quad \beta = \frac{5}{4}$$

$y(x) = \frac{1}{2}x + \frac{5}{4}.$ ← одно угаданное

$\boxed{\text{Метод научного тыка}}$

$\boxed{\text{Шаг 2.}}$

$$y(x) = \frac{1}{2}x + \frac{5}{4} + p(x)$$

найденное $\qquad$ поправка.

$$\boxed{y'_x + 2y = x+3}$$

$$\left(\frac{1}{2}x + \frac{5}{4} + p(x)\right)' + 2\cdot\left(\frac{1}{2}x + \frac{5}{4} + p(x)\right) = x+3$$

$$\boxed{p'(x) + 2p = \boxed{0}}$$ ← $\boxed{\text{здесь сокр-ся ноль!}}$

$p' + 2p = 0$

1 раз.

$$\frac{dp}{dx} = -2p \xrightarrow[(1\dots)]{2\text{ раз}} p(x) = c\cdot e^{-2x}$$

$p=0$?

(разд. пер)

$$\int \frac{dp}{p} = -\int 2dx$$

$$\ln|p| = -2x + C_0$$

$$|p| = e^{-2x}\cdot e^{C_0}$$

$$p = e^{-2x}\cdot(\pm e^{C_0})$$

$$p = c\cdot e^{-2x}, \quad c\in\mathbb{R}$$

$$y(x) = c\cdot e^{-2x} + \frac{1}{2}x + \frac{5}{4} \qquad c\in\mathbb{R} \qquad \text{все}$$

$\boxed{\text{Ср-ения 2}}$

решить попроще, потом скорректировать. $\boxed{\text{м-д Вариации Постоянной}}$

$$y' + 2y = e^{6x}$$

$\boxed{!}$ угад?

$$y(x) = \alpha\cdot e^{6x}$$

$$6\alpha e^{6x} + 2\alpha e^{6x} = e^{6x}$$

Шаг 1. Не хочу это решать!

$\boxed{\text{Решу попроще!}}$

$$y' + 2y = 0$$

$$y' = -2y \longrightarrow y(x) = c\cdot e^{-2x}$$

Шаг 2.

$$y(x) = e^{-2x}\cdot p(x)$$

реш-ние исходного $=$ $\boxed{\text{одно реше-ние с RHS}=0}$ $\cdot\, p(x)$

$$y(x) = p(x)\cdot e^{-2x}$$

$$\left(p(x)\cdot e^{-2x}\right)' + 2\cdot\left(p(x)\cdot e^{-2x}\right) = e^{6x}$$

$$p'\cdot e^{-2x} + \boxed{p\cdot(-2)\cdot e^{-2x} + 2p\cdot e^{-2x}} = e^{6x}$$

(! это исчезнет, если всё верно сделано!)

$$p'\cdot e^{-2x} = e^{6x}$$

$$p' = e^{8x}$$

$$p(x) = \frac{e^{8x}}{8} + C, \quad C \in \mathbb{R}$$

Ответ: $y(x) = \left(\frac{e^{8x}}{8} + C\right)\cdot e^{-2x} = Ce^{-2x} + \frac{e^{6x}}{8}$

все решения ур-ия с RHS = 0

одно решение исх-го

Бесполезная теорема.

если есть $Adx + Bdy = 0$

то его всегда можно на что-то домножить чтобы получилось выражение вида

$$F'_x \cdot dx + F'_y \cdot dy = 0$$

(ур-ие в полных дифф) exact DE

$$dF = 0$$

все реш-ия $F(x,y) = c$.

$$\boxed{\underbrace{(2x+y)}_{A}dx + \underbrace{(x+\cos y)}_{B}dy = 0.}$$

[!] [?] $A = F'_x \quad B = F'_y$ $\quad F''_{xy} = F''_{yx} \quad A'_y = B'_x\,?$

$A'_y = 1 \quad B'_x = 1 \quad$!!

$$(2x+y)\,dx + (x+\cos y)\,dy = 0.$$

$\underset{A}{(2x+y)}$ $\quad$ $\underset{B}{(x+\cos y)}$

! ? $A = F'_x \quad B = F'_y$ $\qquad$ $F''_{xy} = F''_{yx}$ $\qquad$ $A'_y = B'_x$?

$A'_y = 1$ $\qquad$ $B'_x = 1$ $\qquad$!!

условие точности ДУ

$$\begin{cases} F'_x = 2x+y \\ F'_y = x+\cos y \end{cases} \qquad F?$$

$$F = \int 2x+y\,\underline{dx} = \boxed{x^2 + yx + c(y)}$$

$$F'_y = 0 + x + c'(y) = x + \cos y$$

$c'(y) = \cos y$ $\qquad$ если условие точности вып-но, то здесь x сократится

$c(y) = \sin y + d, \quad d \in \mathbb{R}$

$$F(x,y) = x^2 + yx + \sin y + d$$

Ответ: $\boxed{x^2 + yx + \sin y + d = 0}$, где $d \in \mathbb{R}$

Частая замена.

$$\frac{dy}{dx} = h(x,y)$$

замена:

$$y(x) = x\cdot z(x)$$

однородная ф-ция

def $\boxed{h(tx,ty) = t^k\cdot h(x,y)}$

$$h_1(x,y) = x^2+y^2 \qquad h(tx,ty) = t^2 h(x,y)$$

$$h_2(x,y) = \frac{x+y}{y} \qquad h(tx,ty) = t^0 h(x,y)$$

$$\boxed{(y-x)dx + xdy = 0}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x-y}{x}$$

однородная ф-ция

$\boxed{\text{Это заяц!}}$

замена:

$$y(x) = x\cdot z(x)$$

$$y'(x) = x\cdot z' + 1\cdot z$$

$$xz' + z = \frac{x - xz}{x}$$

$$xz' + z = 1 - z$$

$$x\frac{dz}{dx} = 1-2z$$

$\boxed{\text{А вдруг?}}$

$$1-2z = 0$$

$$z = \frac{1}{2}\ ?$$

$$\frac{dz}{1-2z} = \frac{dx}{x}$$

$$\int\frac{dz}{1-2z} = \int\frac{dx}{x}$$

$$\ln|1-2z|\cdot\left(-\frac{1}{2}\right) = \ln|x| + C$$

...

Ур-ие Бернулли.

$$y' + f(x)\cdot y = g(x)\cdot y^n$$

$$\boxed{y' + 6y = x\cdot y^5}$$

из-за RHS нет линейности по y, y'

$y \equiv 0$?

$$\frac{y'}{y^5} + 6\cdot\frac{1}{y^4} = x$$

шаг А шаг Б

шаг А - это почти произв-ая от шаг Б.

$$z(x) = \frac{1}{y^4(x)} = y^{-4}(x)$$

$$z'(x) = y^{-5}(x)\cdot(-4)\cdot y'(x)$$

$$\frac{z'(x)}{(-4)} + 6\cdot z = x$$

$$z' - 24z = -4x$$

Шаг 1. угадать одно решение (простое)

Шаг 2. подправить аддитивно.

Шаг 1 $z(x) = \alpha x + \beta$.

$$\alpha - 24(\alpha x + \beta) \equiv -4x$$

$\vdots$ $\alpha = \dots$

$\beta = \dots$

Шаг 2

$$z(x) = \alpha x + \beta + p(x)$$