1 Сканер

1.1 Формулы

1.1.1 Основные определения

Рабочая плоскость — плоскость перпендикулярная оптической оси камеры и проходящая через точку пересечения оптической оси камеры и луча лазера
Измеряемая плоскость — плоскость, до которой измеряется расстояние
Начальная плоскость — плоскость, координата z которой в глобальной СК равна нулю
${}^kX\,{}^kY\,{}^kZ$ — система координат камеры
$({}^kx\,{}^ky\,{}^kz)$ — координата точки в СК камеры
f — фокусное расстояние камеры
H — расстояние от оптического центра камеры до рабочей плоскости; рабочая высота сканера
α — угол между оптической осью камеры и лучём лазера
β — угол отклонения отраженного луча лазера от оптической оси камеры в плоскости ${}^kZ\,{}^kY$
γ — угол отклонения отраженного луча лазера от оптической оси камеры в плоскости ${}^kZ\,{}^kX$
Δx — отклонение лазера от оптического центра на изображении по оси X
Δy — отклонение лазера от оптического центра на изображении по оси Y
$\operatorname{tg}\beta = \dfrac{\Delta y}{f}$ — тангенс угла отклонения лазера в плоскости ${}^kZ\,{}^kY$
$\operatorname{tg}\gamma = \dfrac{\Delta x}{f}$ — тангенс угла отклонения лазера в плоскости ${}^kZ\,{}^kX$

1.1.2 Основные формулы

$$
\begin{aligned}
{}^kx_p &= H\frac{\operatorname{tg}\alpha\frac{\Delta x}{f}}{\operatorname{tg}\alpha + \frac{\Delta y}{f}} \\
{}^ky_p &= H\frac{\operatorname{tg}\alpha\frac{\Delta y}{f}}{\operatorname{tg}\alpha + \frac{\Delta y}{f}} \\
{}^kz_p &= H\frac{\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}\alpha + \frac{\Delta y}{f}}
\end{aligned}
\tag{1}
$$

Уравнение[1] (1) позволяет рассчитать координаты точки в СК камеры через отклонение лазера на изображении. При этом Δx, Δy и f должны быть выражены в одних единицах - пиксели или миллиметры.

$$
\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = R \begin{pmatrix} {}^kx_p \\ {}^kx_p \\ {}^kx_p \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_k \\ y_k \\ z_k \end{pmatrix} \tag{2}
$$

Уравнение (2) позволяет рассчитать координаты точки в глобальной СК зная матрицу поворота R и координаты камеры в глобальной СК x_k, y_k, z_k

[1] Вывод уравнений на странице 3 в разделе 1.3

$$\begin{cases} \operatorname{tg}\alpha = \dfrac{h_k \operatorname{tg}\beta_k(\operatorname{tg}\beta_i - \operatorname{tg}\beta_0) - h_i \operatorname{tg}\beta_i(\operatorname{tg}\beta_k - \operatorname{tg}\beta_0)}{h_i(\operatorname{tg}\beta_k - \operatorname{tg}\beta_0) - h_k(\operatorname{tg}\beta_i - \operatorname{tg}\beta_0)} \\ H = h_i \dfrac{(\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta_i)(\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta_0)}{(\operatorname{tg}\beta_i - \operatorname{tg}\beta_0)(r_{32}\operatorname{tg}^2\alpha - r_{33}\operatorname{tg}\alpha)} \end{cases} \tag{3}$$

Система уравнений (3) позволяет найти параметры сканера - рабочую высоту H и угол α - зная высоты измеряемых объектов h_i, h_k, углы отклонения лазера β_i, β_k, соответствующих этим высотам, и угол отклонения луча от начальной плоскости

1.2 Устройство сканера

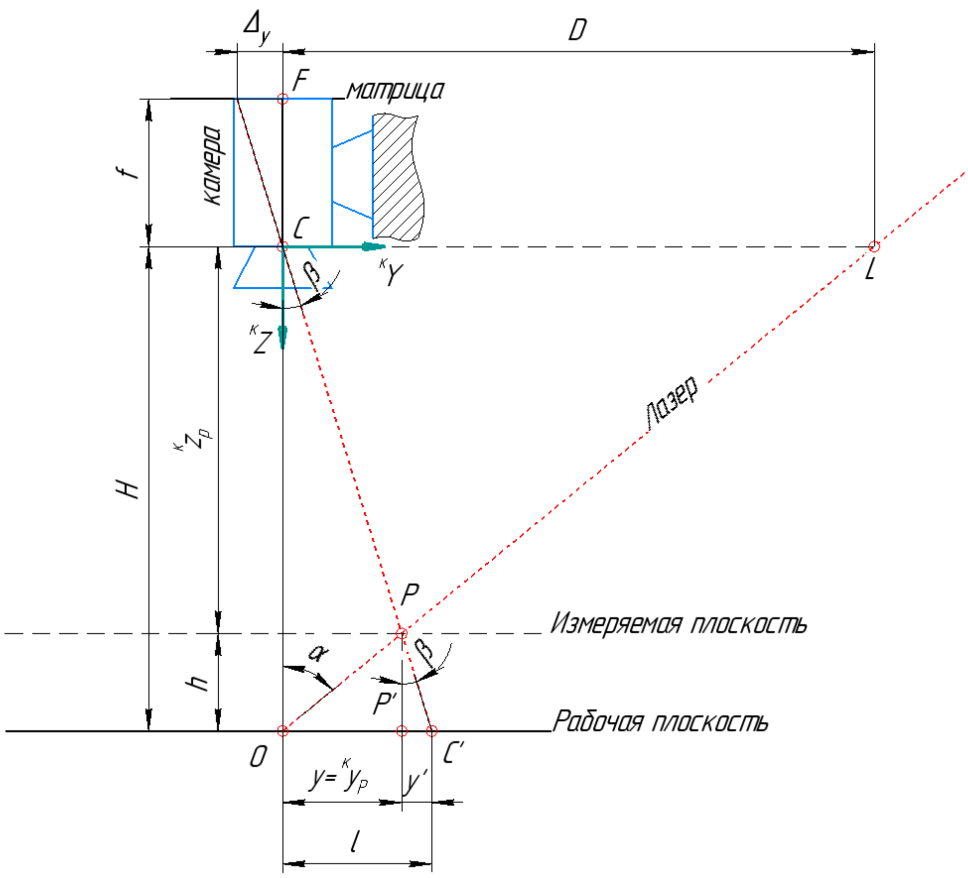

Рис. 1: Схема сканера

O — точка пересечения оптической оси камеры и луча лазера (плоскости свечения лазера)
C — оптический центр камеры, начало координат СК камеры
P — точка пересечения луча лазера и измеряемой плоскости
P' — проекция точки P на рабочую плоскость
h — высота измеряемой плоскости над рабочей плоскостью
l_x, l_y — кажущиеся координаты измеряемой точки
x, y — реальные координаты измеряемой точки
x', y' — разность кажущейся и реальной координаты измеряемой точки

1.3 Вывод формул

1.3.1 Формулы расчёта координат в СК камеры

$$\begin{cases} l = H \operatorname{tg} \beta \\ l = y + y' \end{cases}$$

$$\begin{cases} l = H \operatorname{tg} \beta \\ l = h \operatorname{tg} \alpha + h \operatorname{tg} \beta \end{cases}$$

$$\begin{cases} l = H \operatorname{tg} \beta \\ l = h(\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta) \end{cases}$$

$$h(\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta) = H \operatorname{tg} \beta$$

$$h = H \frac{\operatorname{tg} \beta}{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta}$$

$${}^k z_p = H - h = H(1 - \frac{\operatorname{tg} \beta}{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta}) = H \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta}$$

$${}^k x_p = (H - h) \operatorname{tg} \gamma = z \operatorname{tg} \gamma = H \frac{\operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \gamma}{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta}$$

$${}^k y_p = h \operatorname{tg} \alpha = z \operatorname{tg} \beta = H \frac{\operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta}{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta}$$

$$\boxed{\begin{aligned} {}^k x_p &= H \frac{\operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \gamma}{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta} = H \frac{\operatorname{tg} \alpha \frac{\Delta x}{f}}{\operatorname{tg} \alpha + \frac{\Delta y}{f}} \\ {}^k y_p &= H \frac{\operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta}{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta} = H \frac{\operatorname{tg} \alpha \frac{\Delta y}{f}}{\operatorname{tg} \alpha + \frac{\Delta y}{f}} \\ {}^k z_p &= H \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta} = H \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\operatorname{tg} \alpha + \frac{\Delta y}{f}} \end{aligned}}$$

1.3.2 Формулы определения параметров сканера

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} {}^k x_p \\ {}^k y_p \\ {}^k z_p \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_k \\ y_k \\ z_k \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} {}^k z_p \operatorname{tg} \gamma \\ {}^k z_p \operatorname{tg} \beta \\ {}^k z_p \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_k \\ y_k \\ z_k \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = {}^k z_p \begin{pmatrix} r_{11} \operatorname{tg} \gamma + r_{12} \operatorname{tg} \beta + r_{13} + \frac{x_k}{{}^k z_p} \\ r_{21} \operatorname{tg} \gamma + r_{22} \operatorname{tg} \beta + r_{23} + \frac{y_k}{{}^k z_p} \\ r_{31} \operatorname{tg} \gamma + r_{32} \operatorname{tg} \beta + r_{33} + \frac{z_k}{{}^k z_p} \end{pmatrix}$$

$$x = {}^k z_p (r_{11} \operatorname{tg} \gamma + r_{12} \operatorname{tg} \beta + r_{13}) + x_k$$

$$y = {}^k z_p (r_{21} \operatorname{tg} \gamma + r_{22} \operatorname{tg} \beta + r_{23}) + y_k$$

$$z = {}^k z_p (r_{31} \operatorname{tg} \gamma + r_{32} \operatorname{tg} \beta + r_{33}) + z_k$$

Пусть высота измеряемого объекта равна $h_i = z_i - z_0$, где z_0 это z координата плоскости на которой лежит объект, z_i это z координата объекта.

$$
\begin{aligned}
z_i &= {}^k z_i(r_{31}\operatorname{tg}\gamma_i + r_{32}\operatorname{tg}\beta_i + r_{33}) + z_k \\
z_i &= H\frac{\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta_i}(r_{31}\operatorname{tg}\gamma_i + r_{32}\operatorname{tg}\beta_i + r_{33}) + z_k \\
z_i &= H\frac{\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\gamma_i}{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta_i}r_{31} + H\frac{\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta_i}{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta_i}r_{32} + H\frac{\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta_i}r_{33} + z_k \\
h_i &= \left(H\frac{\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\gamma_i}{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta_i}r_{31} + H\frac{\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta_i}{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta_i}r_{32} + H\frac{\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta_i}r_{33}\right) - \\
&- \left(H\frac{\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\gamma_0}{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta_0}r_{31} + H\frac{\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta_0}{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta_0}r_{32} + H\frac{\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta_0}r_{33}\right)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
h_i = r_{31}H\operatorname{tg}\alpha&\left(\frac{\operatorname{tg}\gamma_i}{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta_i} - \frac{\operatorname{tg}\gamma_0}{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta_0}\right) + \\
+r_{32}H\operatorname{tg}\alpha&\left(\frac{\operatorname{tg}\beta_i}{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta_i} - \frac{\operatorname{tg}\beta_0}{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta_0}\right) + \\
+r_{33}H\operatorname{tg}\alpha&\left(\frac{1}{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta_i} - \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta_0}\right)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
h_i =& r_{31}H\operatorname{tg}\alpha\left(\frac{\operatorname{tg}\gamma_i}{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta_i} - \frac{\operatorname{tg}\gamma_0}{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta_0}\right) + \\
&+r_{32}H\operatorname{tg}\alpha\frac{\operatorname{tg}\beta_i(\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta_0) - \operatorname{tg}\beta_0(\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta_i)}{(\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta_i)(\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta_0)} + \\
&+r_{33}H\operatorname{tg}\alpha\frac{\operatorname{tg}\beta_0 - \operatorname{tg}\beta_i}{(\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta_i)(\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta_0)}
\end{aligned}
$$

Пусть $\operatorname{tg}\gamma_0$ и $\operatorname{tg}\gamma_i$ равны нулю, т.е. объект находится посередине кадра, тогда

$$
h_i = r_{32}H\operatorname{tg}\alpha\frac{\operatorname{tg}\alpha(\operatorname{tg}\beta_i - \operatorname{tg}\beta_0)}{(\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta_i)(\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta_0)} - r_{33}H\operatorname{tg}\alpha\frac{\operatorname{tg}\beta_i - \operatorname{tg}\beta_0}{(\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta_i)(\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta_0)}
$$

$$
h_i = H\operatorname{tg}\alpha\frac{\operatorname{tg}\beta_i - \operatorname{tg}\beta_0}{(\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta_i)(\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta_0)}(r_{32}\operatorname{tg}\alpha - r_{33})
$$

Имея минимум два объекта известной высоты можем решить систему уравнений и найти H и $\operatorname{tg}\alpha$

$$
\begin{cases}
h_i = H\operatorname{tg}\alpha\dfrac{\operatorname{tg}\beta_i - \operatorname{tg}\beta_0}{(\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta_i)(\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta_0)}(r_{32}\operatorname{tg}\alpha - r_{33}) \\
h_k = H\operatorname{tg}\alpha\dfrac{\operatorname{tg}\beta_k - \operatorname{tg}\beta_0}{(\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta_k)(\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta_0)}(r_{32}\operatorname{tg}\alpha - r_{33})
\end{cases}
$$

$$
\frac{h_i}{h_k} = \frac{(\operatorname{tg}\beta_i - \operatorname{tg}\beta_0)(\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta_k)}{(\operatorname{tg}\beta_k - \operatorname{tg}\beta_0)(\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta_i)}
$$

$$
\frac{h_i}{h_k} = \frac{\operatorname{tg}\alpha(\operatorname{tg}\beta_i - \operatorname{tg}\beta_0) + \operatorname{tg}\beta_k(\operatorname{tg}\beta_i - \operatorname{tg}\beta_0)}{\operatorname{tg}\alpha(\operatorname{tg}\beta_k - \operatorname{tg}\beta_0) + \operatorname{tg}\beta_i(\operatorname{tg}\beta_k - \operatorname{tg}\beta_0)}
$$

$$
h_i(\operatorname{tg}\alpha(\operatorname{tg}\beta_k - \operatorname{tg}\beta_0) + \operatorname{tg}\beta_i(\operatorname{tg}\beta_k - \operatorname{tg}\beta_0)) = h_k(\operatorname{tg}\alpha(\operatorname{tg}\beta_i - \operatorname{tg}\beta_0) + \operatorname{tg}\beta_k(\operatorname{tg}\beta_i - \operatorname{tg}\beta_0))
$$

$$
h_i\operatorname{tg}\alpha(\operatorname{tg}\beta_k - \operatorname{tg}\beta_0) - h_k\operatorname{tg}\alpha(\operatorname{tg}\beta_i - \operatorname{tg}\beta_0) = h_k\operatorname{tg}\beta_k(\operatorname{tg}\beta_i - \operatorname{tg}\beta_0) - h_i\operatorname{tg}\beta_i(\operatorname{tg}\beta_k - \operatorname{tg}\beta_0)
$$

$$
\operatorname{tg}\alpha(h_i(\operatorname{tg}\beta_k - \operatorname{tg}\beta_0) - h_k(\operatorname{tg}\beta_i - \operatorname{tg}\beta_0)) = h_k\operatorname{tg}\beta_k(\operatorname{tg}\beta_i - \operatorname{tg}\beta_0) - h_i\operatorname{tg}\beta_i(\operatorname{tg}\beta_k - \operatorname{tg}\beta_0)
$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{h_k \operatorname{tg}\beta_k(\operatorname{tg}\beta_i - \operatorname{tg}\beta_0) - h_i \operatorname{tg}\beta_i(\operatorname{tg}\beta_k - \operatorname{tg}\beta_0)}{h_i(\operatorname{tg}\beta_k - \operatorname{tg}\beta_0) - h_k(\operatorname{tg}\beta_i - \operatorname{tg}\beta_0)} \tag{$*$}$$

Уравнение (*) позволяет найти $\operatorname{tg}\alpha$ при известных значениях высот объектов h_i, h_k, углах отклонения лазера β_i, β_k, соответствующих этим высотам, и угла отклонения луча от начальной плоскости. Подставив таким образом получившееся значение в систему уравнений, можно найти рабочую высоту H сканера.

$$\boxed{\begin{cases} \operatorname{tg}\alpha = \dfrac{h_k \operatorname{tg}\beta_k(\operatorname{tg}\beta_i - \operatorname{tg}\beta_0) - h_i \operatorname{tg}\beta_i(\operatorname{tg}\beta_k - \operatorname{tg}\beta_0)}{h_i(\operatorname{tg}\beta_k - \operatorname{tg}\beta_0) - h_k(\operatorname{tg}\beta_i - \operatorname{tg}\beta_0)} \\ \quad H = h_i \dfrac{(\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta_i)(\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta_0)}{(\operatorname{tg}\beta_i - \operatorname{tg}\beta_0)(r_{32}\operatorname{tg}^2\alpha - r_{33}\operatorname{tg}\alpha)} \end{cases}}$$