1 Сканер

1.1 Формулы

1.1.1 Основные определения

Рабочая плоскость — плоскость перпендикулярная оптической оси камеры и проходящая через точку пересечения оптической оси камеры и луча лазера
Измеряемая плоскость — плоскость, до которой измеряется расстояние
Начальная плоскость — плоскость, координата z которой в глобальной СК равна нулю
${}^kX\,{}^kY\,{}^kZ$ — система координат камеры
$({}^kx\,{}^ky\,{}^kz)$ — координата точки в СК камеры
f — фокусное расстояние камеры
H — расстояние от оптического центра камеры до рабочей плоскости; рабочая высота сканера
α — угол между оптической осью камеры и лучём лазера
β — угол отклонения отраженного луча лазера от оптической оси камеры в плоскости ${}^kZ\,{}^kY$
γ — угол отклонения отраженного луча лазера от оптической оси камеры в плоскости ${}^kZ\,{}^kX$
Δx — отклонение лазера от оптического центра на изображении по оси X
Δy — отклонение лазера от оптического центра на изображении по оси Y
$\operatorname{tg}\beta = \dfrac{\Delta y}{f}$ — тангенс угла отклонения лазера в плоскости ${}^kZ\,{}^kY$
$\operatorname{tg}\gamma = \dfrac{\Delta x}{f}$ — тангенс угла отклонения лазера в плоскости ${}^kZ\,{}^kX$

1.1.2 Основные формулы

$$\begin{aligned} {}^kx_p &= H\frac{\operatorname{tg}\alpha\frac{\Delta x}{f}}{\operatorname{tg}\alpha + \frac{\Delta y}{f}} \\ {}^ky_p &= H\frac{\operatorname{tg}\alpha\frac{\Delta y}{f}}{\operatorname{tg}\alpha + \frac{\Delta y}{f}} \\ {}^kz_p &= H\frac{\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}\alpha + \frac{\Delta y}{f}} \end{aligned} \tag{1}$$

Уравнение[1] (1) позволяет рассчитать координаты точки в СК камеры через отклонение лазера на изображении. При этом Δx, Δy и f должны быть выражены в одних единицах - пиксели или миллиметры.

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = R \begin{pmatrix} {}^kx_p \\ {}^kx_p \\ {}^kx_p \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_k \\ y_k \\ z_k \end{pmatrix} \tag{2}$$

Уравнение (2) позволяет рассчитать координаты точки в глобальной СК зная матрицу поворота R и координаты камеры в глобальной СК x_k, y_k, z_k

[1]Вывод уравнений на странице 3 в разделе 1.3

$$\begin{cases} \operatorname{tg}\alpha = \dfrac{h_i \operatorname{tg}\beta_i(\operatorname{tg}\beta_k - \operatorname{tg}\beta_0) - h_k \operatorname{tg}\beta_k(\operatorname{tg}\beta_i - \operatorname{tg}\beta_0)}{h_i(\operatorname{tg}\beta_k - \operatorname{tg}\beta_0) - h_k(\operatorname{tg}\beta_i - \operatorname{tg}\beta_0)} \\ H = h_i \dfrac{(\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta_i)(\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta_0)}{(\operatorname{tg}\beta_i - \operatorname{tg}\beta_0)(r_{32}\operatorname{tg}^2\alpha - r_{33}\operatorname{tg}\alpha)} \end{cases} \quad (3)$$

Система уравнений (3) позволяет найти параметры сканера - рабочую высоту H и угол α - зная высоты измеряемых объектов h_i, h_k, углы отклонения лазера β_i, β_k, соответствующих этим высотам, и угол отклонения луча от начальной плоскости

1.2 Устройство сканера

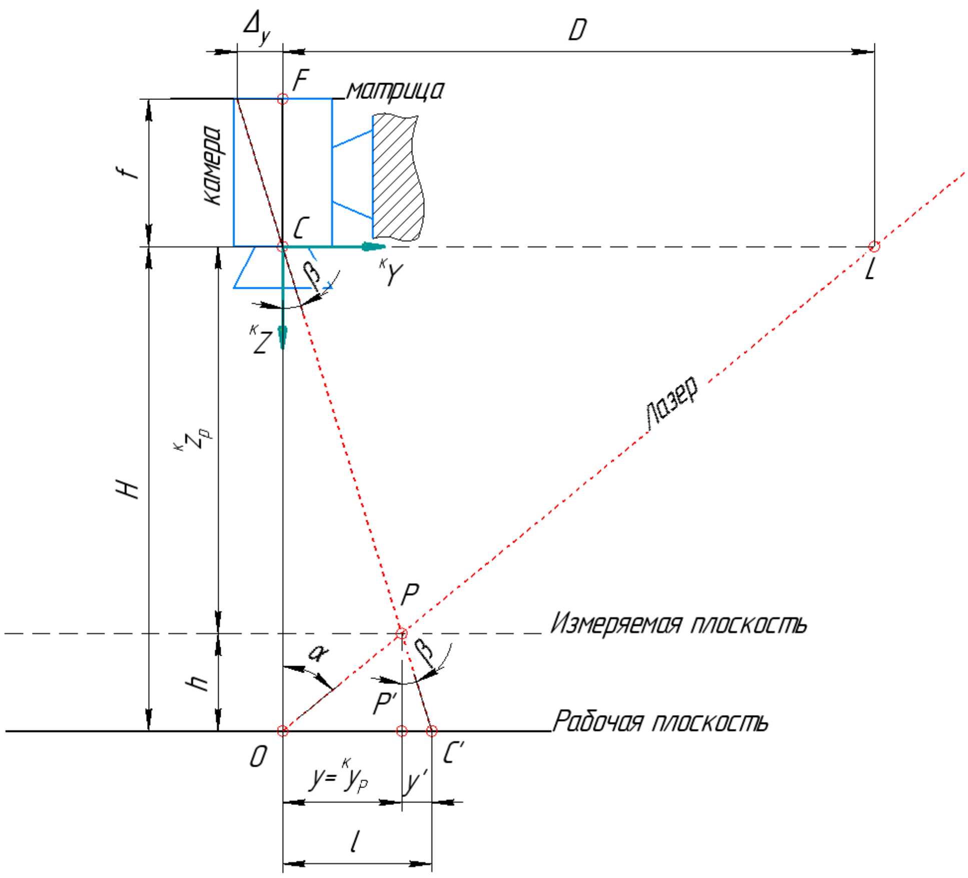

Рис. 1: Схема сканера

O — точка пересечения оптической оси камеры и луча лазера (плоскости свечения лазера)
C — оптический центр камеры, начало координат СК камеры
P — точка пересечения луча лазера и измеряемой плоскости
P' — проекция точки P на рабочую плоскость
h — высота измеряемой плоскости над рабочей плоскостью
l_x, l_y — кажущиеся координаты измеряемой точки
x, y — реальные координаты измеряемой точки
x', y' — разность кажущейся и реальной координаты измеряемой точки

1.3 Вывод формул

1.3.1 Формулы расчёта координат в СК камеры

$$\begin{cases} l = H \operatorname{tg} \beta \\ l = y + y' \end{cases}$$

$$\begin{cases} l = H \operatorname{tg} \beta \\ l = h \operatorname{tg} \alpha + h \operatorname{tg} \beta \end{cases}$$

$$\begin{cases} l = H \operatorname{tg} \beta \\ l = h(\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta) \end{cases}$$

$$h(\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta) = H \operatorname{tg} \beta$$

$$h = H \frac{\operatorname{tg} \beta}{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta}$$

$$^k z_p = H - h = H(1 - \frac{\operatorname{tg} \beta}{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta}) = H \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta}$$

$$^k x_p = (H - h) \operatorname{tg} \gamma = z \operatorname{tg} \gamma = H \frac{\operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \gamma}{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta}$$

$$^k y_p = h \operatorname{tg} \alpha = z \operatorname{tg} \beta = H \frac{\operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta}{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta}$$

$$\boxed{\begin{aligned} ^k x_p &= H \frac{\operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \gamma}{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta} = H \frac{\operatorname{tg} \alpha \frac{\Delta x}{f}}{\operatorname{tg} \alpha + \frac{\Delta y}{f}} \\ ^k y_p &= H \frac{\operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta}{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta} = H \frac{\operatorname{tg} \alpha \frac{\Delta y}{f}}{\operatorname{tg} \alpha + \frac{\Delta y}{f}} \\ ^k z_p &= H \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta} = H \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\operatorname{tg} \alpha + \frac{\Delta y}{f}} \end{aligned}}$$

1.3.2 Формулы определения параметров сканера

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ^k x_p \\ ^k y_p \\ ^k z_p \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_k \\ y_k \\ z_k \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ^k z_p \operatorname{tg} \gamma \\ ^k z_p \operatorname{tg} \beta \\ ^k z_p \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_k \\ y_k \\ z_k \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = {}^k z_p \begin{pmatrix} r_{11} \operatorname{tg} \gamma + r_{12} \operatorname{tg} \beta + r_{13} + \frac{x_k}{^k z_p} \\ r_{21} \operatorname{tg} \gamma + r_{22} \operatorname{tg} \beta + r_{23} + \frac{y_k}{^k z_p} \\ r_{31} \operatorname{tg} \gamma + r_{32} \operatorname{tg} \beta + r_{33} + \frac{z_k}{^k z_p} \end{pmatrix}$$

$$x = {}^k z_p (r_{11} \operatorname{tg} \gamma + r_{12} \operatorname{tg} \beta + r_{13}) + x_k$$

$$y = {}^k z_p (r_{21} \operatorname{tg} \gamma + r_{22} \operatorname{tg} \beta + r_{23}) + y_k$$

$$z = {}^k z_p (r_{31} \operatorname{tg} \gamma + r_{32} \operatorname{tg} \beta + r_{33}) + z_k$$

Пусть высота измеряемого объекта равна $h_i = z_i - z_0$, где z_0 это z координата плоскости на которой лежит объект, z_i это z координата объекта.

$$z_i = {}^k z_i(r_{31} \operatorname{tg} \gamma_i + r_{32} \operatorname{tg} \beta_i + r_{33}) + z_k$$
$$z_i = H \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta_i}(r_{31} \operatorname{tg} \gamma_i + r_{32} \operatorname{tg} \beta_i + r_{33}) + z_k$$
$$z_i = H \frac{\operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \gamma_i}{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta_i} r_{31} + H \frac{\operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta_i}{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta_i} r_{32} + H \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta_i} r_{33} + z_k$$

$$\begin{aligned} h_i =& H \frac{\operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \gamma_i}{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta_i} r_{31} + H \frac{\operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta_i}{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta_i} r_{32} + H \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta_i} r_{33} - \\ & - H \frac{\operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \gamma_0}{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta_0} r_{31} + H \frac{\operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta_0}{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta_0} r_{32} + H \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta_0} r_{33} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} h_i = & r_{31} H \operatorname{tg} \alpha \left(\frac{\operatorname{tg} \gamma_i}{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta_i} - \frac{\operatorname{tg} \gamma_0}{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta_0} \right) + \\ & + r_{32} H \operatorname{tg} \alpha \left(\frac{\operatorname{tg} \beta_i}{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta_i} - \frac{\operatorname{tg} \beta_0}{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta_0} \right) + \\ & + r_{33} H \operatorname{tg} \alpha \left(\frac{1}{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta_i} - \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta_0} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} h_i =& r_{31} H \operatorname{tg} \alpha \left(\frac{\operatorname{tg} \gamma_i}{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta_i} - \frac{\operatorname{tg} \gamma_0}{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta_0} \right) + \\ & + r_{32} H \operatorname{tg} \alpha \frac{\operatorname{tg} \beta_i (\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta_0) - \beta_0 (\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta_i)}{(\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta_i)(\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta_0)} + \\ & + r_{33} H \operatorname{tg} \alpha \frac{\operatorname{tg} \beta_0 - \operatorname{tg} \beta_i}{(\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta_i)(\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta_0)} \end{aligned}$$

Пусть $\operatorname{tg} \gamma_0$ и $\operatorname{tg} \gamma_i$ равны нулю, т.е. объект находится посередине кадра, тогда

$$h_i = r_{32} H \operatorname{tg} \alpha \frac{\operatorname{tg} \alpha (\operatorname{tg} \beta_i - \operatorname{tg} \beta_0)}{(\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta_i)(\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta_0)} - r_{33} H \operatorname{tg} \alpha \frac{\operatorname{tg} \beta_i - \operatorname{tg} \beta_0}{(\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta_i)(\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta_0)}$$
$$h_i = H \operatorname{tg} \alpha \frac{\operatorname{tg} \beta_i - \operatorname{tg} \beta_0}{(\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta_i)(\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta_0)} (r_{32} \operatorname{tg} \alpha - r_{33})$$

Имея минимум два объекта известной высоты можем решить систему уравнений и найти H и $\operatorname{tg} \alpha$

$$\begin{cases} h_i = H \operatorname{tg} \alpha \dfrac{\operatorname{tg} \beta_i - \operatorname{tg} \beta_0}{(\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta_i)(\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta_0)} (r_{32} \operatorname{tg} \alpha - r_{33}) \\ h_k = H \operatorname{tg} \alpha \dfrac{\operatorname{tg} \beta_k - \operatorname{tg} \beta_0}{(\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta_k)(\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta_0)} (r_{32} \operatorname{tg} \alpha - r_{33}) \end{cases}$$

$$\frac{h_i}{h_k} = \frac{(\operatorname{tg} \beta_i - \operatorname{tg} \beta_0)(\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta_k)}{(\operatorname{tg} \beta_k - \operatorname{tg} \beta_0)(\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta_i)}$$
$$\frac{h_i}{h_k} = \frac{\operatorname{tg} \alpha (\operatorname{tg} \beta_i - \operatorname{tg} \beta_0) - \operatorname{tg} \beta_k (\operatorname{tg} \beta_i - \operatorname{tg} \beta_0)}{\operatorname{tg} \alpha (\operatorname{tg} \beta_k - \operatorname{tg} \beta_0) - \operatorname{tg} \beta_i (\operatorname{tg} \beta_k - \operatorname{tg} \beta_0)}$$
$$h_i (\operatorname{tg} \alpha (\operatorname{tg} \beta_k - \operatorname{tg} \beta_0) - \operatorname{tg} \beta_i (\operatorname{tg} \beta_k - \operatorname{tg} \beta_0)) = h_k (\operatorname{tg} \alpha (\operatorname{tg} \beta_i - \operatorname{tg} \beta_0) - \operatorname{tg} \beta_k (\operatorname{tg} \beta_i - \operatorname{tg} \beta_0))$$
$$h_i \operatorname{tg} \alpha (\operatorname{tg} \beta_k - \operatorname{tg} \beta_0) - h_k \operatorname{tg} \alpha (\operatorname{tg} \beta_i - \operatorname{tg} \beta_0) = h_i \operatorname{tg} \beta_i (\operatorname{tg} \beta_k - \operatorname{tg} \beta_0) - h_k \operatorname{tg} \beta_k (\operatorname{tg} \beta_i - \operatorname{tg} \beta_0)$$
$$\operatorname{tg} \alpha (h_i (\operatorname{tg} \beta_k - \operatorname{tg} \beta_0) - h_k (\operatorname{tg} \beta_i - \operatorname{tg} \beta_0)) = h_i \operatorname{tg} \beta_i (\operatorname{tg} \beta_k - \operatorname{tg} \beta_0) - h_k \operatorname{tg} \beta_k (\operatorname{tg} \beta_i - \operatorname{tg} \beta_0)$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{h_i \operatorname{tg}\beta_i(\operatorname{tg}\beta_k - \operatorname{tg}\beta_0) - h_k \operatorname{tg}\beta_k(\operatorname{tg}\beta_i - \operatorname{tg}\beta_0)}{h_i(\operatorname{tg}\beta_k - \operatorname{tg}\beta_0) - h_k(\operatorname{tg}\beta_i - \operatorname{tg}\beta_0)} \tag{$*$}$$

Уравнение (*) позволяет найти $\operatorname{tg}\alpha$ при известных значениях высот объектов h_i, h_k, углах отклонения лазера β_i, β_k, соответствующих этим высотам, и угла отклонения луча от начальной плоскости. Подставив таким образом получившееся значение в систему уравнений, можно найти рабочую высоту H сканера.

$$\boxed{\begin{cases} \operatorname{tg}\alpha = \dfrac{h_i \operatorname{tg}\beta_i(\operatorname{tg}\beta_k - \operatorname{tg}\beta_0) - h_k \operatorname{tg}\beta_k(\operatorname{tg}\beta_i - \operatorname{tg}\beta_0)}{h_i(\operatorname{tg}\beta_k - \operatorname{tg}\beta_0) - h_k(\operatorname{tg}\beta_i - \operatorname{tg}\beta_0)} \\ H = h_i \dfrac{(\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta_i)(\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta_0)}{(\operatorname{tg}\beta_i - \operatorname{tg}\beta_0)(r_{32}\operatorname{tg}^2\alpha - r_{33}\operatorname{tg}\alpha)} \end{cases}}$$