Конспекты к экзамену по математическому анализу
Лектор: Абжандадзе Зураб Леванович

Егор Федоров Вадим Беловласка Максим Барсуков

2022 — 2023

Оглавление

Глава 1

Первый семестр

1.1 Множество. Некоторые действия с множеством

Множество — произвольная совокупность объектов, формального определения множества нет.

Множество, не содержащее ни одного элемента обозначается как $\emptyset$.

Способы задать множество:

- Перечисление элементов: $X = \{1, 3, 7\}$
- По условию: $Y = \{x \in \mathbb{Z} \colon x \vdots 3\}$

Операции на множествах:

- $A \cap B := \{x \in A \mid x \in B\}$ — пересечение
- $A \cup B := \{x \mid (x \in A \vee x \in B)\}$ — объединение
- $A \setminus B := \{x \in A \mid x \notin B\}$ — разность
- $A \triangle B := (A \cup B) \setminus (A \cap B)$ — симметрическая разность
- Пусть U — универсум (объемлющее множество), тогда $\bar{A} := \{x \in U \mid x \notin A\}$

1.2 Действительные числа. Ограниченные (сверху, снизу) числовые множества

Поле действительных (вещественных) чисел. Обозначается за $\mathbb{R}$.

На нем определены операциии сложения $(+ \colon \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R})$ и умножения $(\cdot \colon \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R})$.

Имеет несколько свойств (аксиом):

1. Коммутативность сложения: $\forall a, b \in \mathbb{R} \colon a + b = b + a$
2. Ассоциативность сложения: $\forall a, b, c \in \mathbb{R} : a + (b + c) = (a + b) + c$.
3. Существование нуля (нейтрального элемента по сложению): $\exists 0 \in \mathbb{R} \colon \forall a \in \mathbb{R} \colon a + 0 = 0 + a = a$.
4. Существование противоположного (обратного по сложению) элемента: $\forall a \in \mathbb{R}\, \exists (-a) \in \mathbb{R} \colon a + (-a) = 0$.
5. Коммутативность умножения: $\forall a, b \in \mathbb{R} \colon a \cdot b = b \cdot a$
6. Ассоциативность умножения: $\forall a, b, c \in \mathbb{R} \colon (a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$.
7. Существование единицы (нейтрального элемента по умножению): $\exists 1 \in R \colon \forall a \in R \colon a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$
8. Существование обратного элемента по умножению: $\forall a \in \mathbb{R} \colon \exists a^{-1} \colon a \cdot a^{-1} = 1$
9. Дистрибутивность: $\forall a, b, c \in \mathbb{R} \colon a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$.
10. Нетривиальность поля: $1 \neq 0$.

1.2.1 Аксиомы порядка

- Рефлексивность: $a \leqslant a$.
- Антисимметричность: $(a \leqslant b) \land (b \leqslant a) \Rightarrow a = b$.
- Транзитивность: $(a \leqslant b) \land (b \leqslant c) \Rightarrow a \leqslant c$.
- Линейная упорядноченность: $\forall a, b \in \mathbb{R}\colon (a < b) \lor (a = b) \lor (b < a)$.
- Связь сложения и порядка: $\forall c \in \mathbb{R}\colon (a < b) \Rightarrow (a + c < b + c)$.
- Связь умножения и порядка: $(0 \leqslant a) \land (0 \leqslant b) \Rightarrow (0 \leqslant a \cdot b)$.

Аксоима Архимеда: $\forall a, b \in \mathbb{R}, a \leqslant b, \exists n \in \mathbb{N}\colon an > b$

1.2.2 Ограниченные числовые множества

Определение 1.1. *Числовое множество X называется ограниченным сверху, если $\exists b \in \mathbb{R}\colon \forall x \in X \Rightarrow x \leqslant b$*

Числовое множество X называется ограниченным снизу, если $\exists a \in \mathbb{R}\colon \forall x \in X \Rightarrow a \leqslant x$.

Множество $\mathbb{N}$ ограничено снизу числом 1. Если $a, b \in \mathbb{R}$, то отрезок $[a, b]$ — ограниченное множество. Множества $\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{I}$ — примеры неограниченных множеств.

1.3 Неограниченность множества натуральных чисел. Теорема о числах 2^n.

Теорема 1.1. *Множество натуральных чисел не ограничено сверху.*

Доказательство. Предположим обратное. Пусть s — верхняя граница $\mathbb{N}$. Тогда возьмем $k \in \mathbb{N}\colon k \leqslant s, k \to \max$. Заметим, что $s < k + 1$, а $k + 1 \in \mathbb{N}$. Получаем противоречие с предположением об ограниченности. ☐

$$(a + \alpha)^n \geqslant 1 + na, \alpha \geqslant -1 \parallel (a + \alpha)^n > 1 + na, \alpha > -1 \tag{1.1}$$

Теорема 1.2 (Теорема о числах 2^n). *Среди чисел вида 2^n встречаются сколь угодно большие.*

Доказательство. По неравенству 1.1 $2^n = (1 + 1)^n > 1 + n \in \mathbb{N}$, а множество натуральных чисел не ограничено. ☐

1.4 Отношение эквивалентности. Счетные и несчетные множества

Пусть $\sim$ — бинарное отношение на множестве X. Тогда $\sim$ называется **отношением эквивалентности**, если для него выполнены следующие условия:

1. Рефлексивность: $\forall x \in X : x \sim x$
2. Симметричность: $\forall x \in X : x \sim y \Rightarrow y \sim x$.
3. Транзитивность: $\forall x \in X : (x \sim y) \land (y \sim z) \Rightarrow x \sim z$.

Пусть $f\colon X \to Y$ — отображение.

- Если $\forall x_1, x_2 \in X : x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$, то f — **инъекция**.
- Если $\forall y \in Y : \exists x \in X : f(x) = y$, то f — **сюръекция**.
- Если f — инъекция и сюръекция одновременно, то f — **биекция**.

Если между двумя множествами существует биективное отображение, то множества называются **равномощными**.
Если между множеством X и $\mathbb{N}$ существует биекция, то X называется **счетным множеством**.
Если между множеством X и $\mathbb{R}$ существует биекция, то X называется **несчетным множеством**.
Конечное или счетное множество называется **не более чем счетным**.
Отображение называется обратимым тогда и только тогда, когда оно является биекцией.

1.5 Модуль действительного числа.

$$a \in \mathbb{R}, |a| = \begin{cases} a, & a \geq 0 \\ -a, & a < 0 \end{cases}$$

Свойства модуля:

- $|x| = |-x|$
- $|x| \leq a \Leftrightarrow -a \leq x \leq a$
- $|x+y| \leq |x| + |y|$
- $||x| - |y|| \leq |x - y|$

  Доказательство. $|x+y| \leq |x|+|y|$, $|x| = |x-y+y| \leq |x-y|+|y| \Rightarrow |x|-|y| \leq |x-y|$, $|x-y| = |y-x| \Rightarrow |y-x| \geqslant |y|-|x| \Rightarrow ||x|-|y|| \leq |x-y|$ □

- $|x-y| = |y-x|$

1.6 Комплексные числа

Поле комплексных чисел ($\mathbb{C}$) — расширения поля вещественных чисел ($\mathbb{R}$).

$$z \in \mathbb{C}, z = (a,b) = a + bi \quad a, b \in \mathbb{R}$$

$$(a_1, b_1) + (a_2, b_2) = a_1 + b_1 i + a_2 + b_2 i = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)i = (a_1 + a_2, b_1 + b_2)$$

$$(a_1, b_1) \cdot (a_2, b_2) = (a_1 + b_1 i) \cdot (a_2 + b_2 i) = a_1 a_2 + a_1 b_2 i + a_2 b_1 i + b_1 b_2 i^2 = a_1 a_2 + a_1 b_2 i + a_2 b_1 i - (b_1 b_2) =$$
$$(a_1 a_2 - b_1 b_2) + i(a_1 b_2 + a_2 b_1) = (a_1 a_2 - b_1 b_2, a_1 b_2 + a_2 b_1)$$

1.7 Модуль и аргумент комплексного числа

Пусть $z \in \mathbb{C}$, $z = (a, b)$. Тогда $r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$. Обозначим за $\varphi = \arg(z)$ такое число, что $\cos(\arg(z)) = \frac{a}{r}, \sin(\arg(z)) = \frac{b}{r}$.

Тогда тригонометрическая форма записи комплексного числа — $(r\cos(\varphi), r\sin(\varphi))$.

Еще одна форма записи — $z = r(\cos(\varphi) + i \cdot \sin(\varphi))$.

Если модуль равен 1, то можно записать в экспоненциальной форме — $e^{i\varphi} = \cos\varphi + i \cdot \sin\varphi$.

1.8 Формула Муавра, извлечение корня из комплексного числа

Теорема 1.3 (Формула Муавра)**.** *Пусть* $z = (r\cos(\varphi), r\sin(\varphi))$. *Тогда:* $|z^n| = |z|^n = r^n$, $\arg(z^n) = n \cdot \arg(z) = n \cdot \varphi$

Для нахождения корня степени n из комплексного числа $z = (r\cos(\varphi), r\sin(\varphi))$ решим следующее уравнение

$$a^n = z \tag{1}$$

Пусть $\arg(a) = \psi, |a| = p$.

По Формуле Муавра

$$p = |a|^n = |a^n| = |z| = r \Longleftrightarrow p = \sqrt[n]{r}$$

$$n \cdot \psi = n \cdot \arg(z) + 2\pi k = \varphi + 2\pi k \Longleftrightarrow \psi = \frac{\varphi + 2\pi k}{n}$$

В данном уравнении получается n различных решений при $k \in \{0, \dots, n-1\}$. Тогда для данного числа $z \neq 0$ существует ровно n корней степени n.

1.9 Линейное и Евклидовое пространство, неравенство Коши-Буняковского

Пусть K — поле, V — множество, над которым определены следующие операции:

- $+\colon V \times V \to V$
- $\cdot\colon K \times V \to V$

Также поле должно удовлетворять следующим условиям:

1. Ассоциативность сложения
2. Коммутативность сложения
3. Ноль
4. Обратный элемент
5. Дистрибутивность
6. Ассоциативность умножения
7. Нейтральный элемент по умножению: $\exists 1 \in V \colon \forall a \in V \colon 1 \cdot a = a$

Евклидовым пространство называется такое векторное пространство, над которым задана операция скалярного умножения $(V \times V \to K)$, обладающая следующими свойствами:

- Коммутативность $\forall x, y \in V \colon x \cdot y = y \cdot x$
- $\forall x, y \in V, \tau \in K \colon (\tau x)y = \tau(xy)$
- Дистрибутивность: $\forall x, y, z \in V \colon (x + y)z = xz + yz$
- $\forall x \in V \colon x \cdot x \geqslant 0$, причем $xx = 0 \iff x = 0$

Нормой вектора x называется элемент поля $K \colon ||x|| = \sqrt{x \cdot x}$.

$$\forall x, y \in V \colon |x \cdot y| \leqslant ||x|| \cdot ||y|| \tag{1}$$

Неравенство (1) называется неравенство Коши-Буняковского.

1.10 Метрическое пространство, открытые и замкнутые множества

Метрическим пространством называется упорядоченная пара (X, ρ), где $\rho\colon X \times X \to \mathbb{R}^+$, причем $\forall x, y \in X \colon \rho(x, y) \geqslant y$.

Также для ρ должны выполняться следующее:

- Аксиома тождества: $\rho(x, y) = 0 \iff x = y$
- Аксиома симметрии: $\rho(x, y) = \rho(y, x)$
- Аксиома треугольника: $\rho(x, z) \leqslant \rho(x, y) + \rho(y, z)$.

Определение 1.2 (Открытый шар)**.** *Пусть (X, ρ) — метрическое пространство, $r \in \mathbb{R}^+, a \in X$. Тогда* ***открытый шар*** *— это множество $V_r(a) = \{x \in X \colon \rho(a, x) < r\}$.*

Определение 1.3 (Открытое множество)**.** *Множество U называется открытым, если*

$$\forall x_0 \in U \, \exists \varepsilon > 0 \colon \quad V_\varepsilon(x_0) \subset U$$

То есть каждая точка этого множества входит в него вместе с какой-то окрестностью.
На $\mathbb{R}$ интервал является открытым множеством, а отрезок — нет.

Определение 1.4 (Замкнутое множество)**.** *Множество $F \subset X$ называется* ***замкнутым*** *в метрическом пространстве (X, ρ) если множество $\overline{F} = X \setminus F$ — открыто.*

Свойства замкнутых множеств:

- *$X, \emptyset$ замкнуты.*
- *Если $F_{\alpha \alpha \in A}$, $\forall \alpha \in A \colon F_\alpha$ — замкнуто, то $\bigcap_{\alpha \in A} F_\alpha$ — замкнуто.*
- *Если $F_1, \ldots, F_n$ — замкнуты, то $\bigcup$*

1.11 Нормированное пространство

Определение 1.5. ***Нормированное пространство*** *— упорядоченная пара $(X, || \, ||)$, где X — векторное пространство, $|| \, ||\colon X \to \mathbb{R}^+$, причем для $|| \, ||$ должны выполняться следующие условия:*

- $\forall x \in X : ||x|| \geqslant 0, ||X|| = 0 \iff x = 0.$
- $\forall x \in X, \lambda \in \mathbb{R}\colon ||\lambda x|| = |\lambda| \cdot ||x||$
- $\forall x, y, z \in X : ||x + y|| \leqslant ||x|| + ||y||$

1.12 Определение предела числовой последовательности

Определение 1.6.

$$\lim_{n\to\infty} x_n = A \iff \forall\varepsilon > 0\colon \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N}\colon \forall n > N(\varepsilon) \Rightarrow |x_n - A| < \varepsilon$$

1.13 Единственность предела числовой последовательности

Теорема 1.4. *Последовательность может иметь не более одного предела.*

Доказательство. Предположим, существует последовательность x_n такая, что $\lim\limits_{n\to\infty} = a$ и $\lim\limits_{n\to\infty} = b$, причем $a \neq b$.

$$\forall\varepsilon > 0 \quad \exists N_1(\varepsilon)\colon \forall n > N_1(\varepsilon)\ |x_n - a| < \varepsilon \tag{1}$$

$$\forall\varepsilon > 0 \quad \exists N_2(\varepsilon)\colon \forall n > N_2(\varepsilon)\ |x_n - b| < \varepsilon \tag{2}$$

Выберем для (1) и (2) один и тот же $\frac{\varepsilon}{2} = \frac{|a-b|}{2} > 0$.
Тогда $\exists N_1(\frac{\varepsilon}{2})\colon \forall n > N_1(\frac{\varepsilon}{2})\ |x_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}$, $\exists N_2(\frac{\varepsilon}{2})\colon \forall n > N_2(\frac{\varepsilon}{2})\ |x_n - b| < \frac{\varepsilon}{2}$,
Возьмем $n > \max\left(N_1\left(\frac{\varepsilon}{2}\right), N_2\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)\right)$.

$$|x_n - a| < \frac{\varepsilon}{2} \qquad |x_n - b| < \frac{\varepsilon}{2}$$

$$|x_n - a| + |x_n - b| < \varepsilon$$

По неравенству треугольника:

$$|a - x_n + x_n - b| < |x_n - a| + |x_n - b|$$

$$|a - b| < |x_n - a| + |x_n - b|$$

$$\varepsilon = |a - b| < |x_n - a| + |x_n - b| < \varepsilon$$

$$\varepsilon < \varepsilon$$

Противоречие, значит предел последовательности единственен.

□

1.14 Критерий Коши о существовании предела числ. последовательности

Теорема 1.5 (Критерий Коши)**.** *Пусть x_n — числовая последовательность с элементами из $\mathbb{R}$. x_n имеет предел в $\mathbb{R}$ тогда и только тогда, когда*

$$\forall\varepsilon > 0\, \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N}\colon \forall m, n \in \mathbb{N}\colon |x_m - x_n| < \varepsilon$$

Доказательство. $\Rightarrow$:
Пусть $\lim_{n\to\infty} x_n = a$, нужно доказать что $\forall\varepsilon > 0\, \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N}\colon \forall m, n \in \mathbb{N}\, |a_m - a_n| < \varepsilon$

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a \iff \forall\varepsilon > 0\, \exists N(\varepsilon)\, \forall n > N(\varepsilon)\colon |a_n - a| < \varepsilon$$

Возьмем два $n, m > N(\frac{\varepsilon}{2})$. Тогда справедливы неравенства:

$$|x_n - a| < \frac{\varepsilon}{2} \qquad |x_m - a| < \frac{\varepsilon}{2}$$

$$|x_n - a| + |x_m - a| < \varepsilon$$

По неравенству треугольника $|x_n - x_m| < |x_n - a| + |x_m - a|$. Значит

$$|x_n - x_m| < |x_n - a| + |x_m - a| < \varepsilon$$

$\Leftarrow$:
Пусть $\forall\varepsilon > 0\, \exists N(\varepsilon)\, \forall n, m > N(\varepsilon)\, |x_n - x_m| < \varepsilon$. Необходимо доказать, что $\exists a\colon \forall\varepsilon > 0\, \exists N(\varepsilon)\, \forall n > N(\varepsilon)\colon |x_n - a| < \varepsilon$.
Предположим обратное, то есть

$$\forall a\colon \exists\varepsilon > 0\, \forall N(\varepsilon)\, \exists n > N(\varepsilon)\colon |x_n - a| > \varepsilon$$

□

1.15 Теорема об ограниченности сходящихся последователей

Теорема 1.6 (Теорема об ограниченности сходящихся последователей)**.** *Если числовая последовательность имеет конечный предел, то она ограничена.*

Доказательство. Пусть последовательность $x_n \in \mathbb{R}$ имеет конечный предел $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$.

Возьмем $\varepsilon = 1$. Тогда, начиная с некоторого $n > N(\varepsilon)$ $|x_n - a| < \varepsilon \Rightarrow x_n < a + \varepsilon$.

Возьмем максимум из чисел $a_1, \dots, a_n$. Пусть $M = \max(a_1, \dots, a_n)$. Тогда $a_1, \dots, a_n \leqslant M$. При этом все числа после a_n будут меньше, чем $a + \varepsilon = a + 1$. Тогда вся последовательность будет меньше, чем $\max(a + 1, M)$.

Возьмем минимум из чисел $a_1, \dots, a_n$. Тогда $m = \min(a_1, \dots, a_n)$, $m \leqslant a_1, \dots, a_n$. При этом все числа после a_n будут больше, чем $a - \varepsilon = a - 1$. Значит вся последовательность будет больше, чем $\min(a - 1, m)$.

Таким образом, последовательность ограничена. □

1.16 Теорема о предельном переходе в неравенствах

Теорема 1.7. *Если элементы сходящийся последовательности x_n, начиная с некоторого номера удовлетворяют неравенству $x_n \geqslant b$, то и предел этой последовательности $\lim\limits_{n\to\infty} = a$ удовлетворяет неравенству $a \geqslant b$.*

Доказательство. Предположим обратное, пусть $a < b$. Возьмем для предела $\varepsilon = b - a > 0$. Тогда для какого-то $n > N(\varepsilon)$

$$|x_n - a| < b - a$$

$$a - b < x_n - a < b - a$$

$$2a - b < x_n < b$$

$$x_n < b$$

Противоречие с условием $x_n \geqslant b$, значит $a \geqslant b$. □

1.17 Теорема о двух полицейских

Теорема 1.8 (Теорема о двух полицейских)**.** *Если последовательность a_n такая, что $b_n \leqslant a_n \leqslant c_n$ начиная с некоторого n, причем $\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} c_n = A$, то $\lim_{n\to\infty} a_n = A$,*

Доказательство.

$$\forall \varepsilon > 0 \, \exists N_1(\varepsilon) \, \forall n > N_1(\varepsilon) \colon |b_n - A| < \varepsilon$$

$$\forall \varepsilon > 0 \, \exists N_2(\varepsilon) \, \forall n > N_2(\varepsilon) \colon |c_n - A| < \varepsilon$$

Возьмем ε для обоих пределов и $n > \max(N_1(\varepsilon), N_2(\varepsilon))$.

$$|b_n - A| < \varepsilon \qquad |c_n - A| < \varepsilon$$

$$A - \varepsilon < b_n < A + \varepsilon \qquad A - \varepsilon < c_n < A + \varepsilon$$

Так как $b_n \leqslant a_n \leqslant c_n$, то

$$A - \varepsilon < b_n \leqslant a_n \leqslant c_n < A + \varepsilon$$

$$A - \varepsilon < a_n < A + \varepsilon$$

Таким образом,

$$\forall \varepsilon > 0 \, \exists N(\varepsilon) \, \forall n > N(\varepsilon) \colon |a_n - A| < \varepsilon \iff \lim_{n\to\infty} a_n = A$$

□

1.18 Теорема Вейерштрасса. Число Эйлера.

Теорема 1.9 (Теорема Вейерштрасса)**.** *Если неубывающая (невозрастающая) последовательность x_n ограничена сверху (снизу), то она сходится.*

Рассмотрим последовательность $x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$. Разложим по биному Ньютона:

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \sum_{i=0}^{n} \left(C_n^i \left(\frac{1}{n}\right)^i\right) = 1 + n \cdot \frac{1}{n} + \dots + \frac{n(n-1)\cdots(n-n+1)}{1 \cdot 2 \cdots n} \cdot \frac{1}{n^n} = 1 + 1 + \frac{1}{2!} \cdot \left(1 - \frac{1}{n}\right) + \dots + \frac{1}{n!}\left(1 - \frac{1}{n}\right) \cdots \left(1 - \frac{n-1}{n}\right)$$

При переходе к x_{n+1} добавиться новый положительный член, а каждый из написанных членов увеличиться, так как любой множитель вида $1 - \frac{s}{n}$ замениться большим множителем $1 - \frac{s}{n+1}$.

Таким образом, $x_{n+1} > x_n$, а значит последовательность возрастает.

Оценим выражение с помощью геометрической последовательности:

$$x_n < 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!} < 2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}}$$

Тогда $\sum\limits_{i=1}^{n-1} 2^n < 1$, а значит $x_n < 3$. При этом очевидно, что $0 < x_n$.

Значит, последвоательность x_n монотонно возрастает и ограничена, а значит имеет предел. Предел данной последовательности обозначают числом Эйлера.

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$$

1.19 Бесконечно малые последовательности

1.20 Числовой ряд и его сумма. Критерии Коши его существования

Определение 1.7. *Пусть дана последовательность a_n. Формальная сумма $a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots$ называется **числовым рядом**.*

Для обозначения используется краткая форма записи: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$.

*Сумма $S_n = \sum\limits_{i=1}^{n} a_i$ называется **частичной суммой ряда**.*

*Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ называется **сходящимся**, если существует конечный предел S последовательности его частичных сумм: $S = \lim\limits_{n\to\infty} S_n$. Число S называется **суммой ряда**, при этом пишут $S = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$.*

Теорема 1.10 (Критерий Коши)**.** *Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится тогда и только тогда, когда*

$$\forall \varepsilon > 0\, \exists N(\varepsilon)\, \forall m > N, \forall p \in \mathbb{N}: \quad |\sum_{i=m}^{m+p} a_i| < \varepsilon$$

1.21 Гармонический ряд, ряд геометрической прогрессии, абсолютная сходимость

Определение 1.8. *Ряд $\sum a_n$ сходится **абсолютно**, если сходится ряд его модулей $\sum |a_n|$.*

Определение 1.9. ***Гармонический ряд** — сумма, составленная из бесконечного количества членов, обратных последовательным числам натурального ряда.*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} + \cdots$$

*Гармонический ряд **не сходится**.*

Определение 1.10. ***Геометрическая прогрессия** — последовательность вида $a_1, a_1q, a_1q^2, a_1 \cdots$. Общий член задается формулой $a_n = a_1 \cdots q^{n-1}$.*

Частичная сумма геометрической прогресси $\sum\limits_{i=1}^{n} a_1 q^{i-1}$ может быть найдена по формуле $\sum\limits_{i=1}^{n} a_1 q^{i-1} = \frac{a_1(q^n-1)}{q-1}$.

Если $|q| < 1$, то ряд геометрической прогрессии сходится:

$$\lim_{n\to\infty} \left(\sum_{i=1}^{n} a_1 q^n\right) = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{a_1\left(q^n - 1\right)}{q-1}\right) = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{-a_1}{q-1}\right) = \frac{a_1}{1-q}$$

1.22 Признаки Даламбера, Коши, Лейбница

Теорема 1.11 (Признак Даламбера)**.** *Пусть дан числовой ряд $\sum_{i=1}^{\infty} a_n$. $d = \lim_{n\Rightarrow\infty} |\frac{a_{n+1}}{a_n}|$. Если $d > 1$, то ряд расходится. Если $0 < d < 1$, то ряд сходится.*

Доказательство. Очевидно. □

Теорема 1.12 (Признак Коши)**.** *Пусть дан числовой ряд $\sum_{i=1}^{\infty} a_n, a_n \geqslant 0$. $d = \lim_{n\Rightarrow\infty} \sqrt[n]{a_n}$. Если $d > 1$, то ряд расходится. Если $0 < d < 1$, то ряд сходится.*

Теорема 1.13 (Признак Лейбница)**.** *Пусть a_n — знакочередующийся ряд, $S_n = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \ldots$, $a_n > 0$.*

Тогда, если $a_{n+1} < a_n, \lim_{n\to\infty} a_n = 0$, то ряд сходится.

1.23 Предел функции. Эквивалентность

Определение 1.11 (Предел функции по Коши)**.**

$$\lim_{x\to x_0} = A \iff \forall\varepsilon>0\,\exists\delta(\varepsilon)>0\colon \forall x\colon 0<|x-x_0|<\delta(\varepsilon)\Rightarrow|f(x)-A|<\varepsilon$$

ИЛИ

$$\forall\varepsilon>0\,\exists\delta(\varepsilon)>0\colon\forall x\in\dot{U}_\delta(x_0)\colon f(x)\in U_\varepsilon(b)$$

где $U_\delta\dot{(}x_0) = U_\delta(x)\setminus x_0 = \{x\in R\colon 0<|x-x_0|<\delta\}$

Определение 1.12 (Предел функции по Гейне)**.**

$$\lim_{x\to x_0} = A\Leftrightarrow\forall\{x_n\}:(x_n\to x_0)\wedge(x_n\neq x_0)\Rightarrow\lim_{n\to\infty}f(x_n)=A$$

Теорема 1.14. *Определение предела функции по Коши эквивалентно определению по Гейне.*

Доказательство. Докажем, что из определения по Коши следует определение по Гейне. Пусть $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$. Тогда

$$\forall\varepsilon_1>0\,\exists\delta_1(\varepsilon_1)>0\,\forall x\colon 0<|x-x_0|<\delta_1(\varepsilon_1)\Rightarrow|f(x)-A|<\varepsilon_1 \tag{1}$$

Пусть x_n — произвольная последовательность, причем $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x_0$, и $x_n\neq x_0$.

$$\forall\varepsilon_2>0\,\exists N(\varepsilon_2)\colon\forall n>N(\varepsilon)\colon|x_n-x_0|<\varepsilon_2 \tag{2}$$

Тогда для всех $n>N(\varepsilon_2)$ выполняется: $0<|x_n-x_0|<\varepsilon_2$.
Положим $N(\varepsilon)\coloneqq N_2(\delta_1(\varepsilon))$. Тогда $\forall n>N(\varepsilon):0<|x_n-x_0|<\delta_1(\varepsilon)$. Из этого по (2)

$$0<|x_n-x_0|<\delta_1(\varepsilon)\Rightarrow|f(x_n)-A|<\varepsilon$$

Значит для любой последовательности $\{x_n\}:x_n\to x_0,x_n\neq x_0$ следует, что $f(x_n)\to a$, то есть из определения по Коши следует определение по Гейне.

Докажем, что из определения по Гейне следует определение по Коши. Предположим, что существует такая функция $f(x)$, что для нее выполняется определение по Гейне, но не выполняется определение по Коши.

Пусть $\forall\{x_n\}:x_n\to x_0,x_n\neq x_0\Rightarrow f(x_n)\to A$. При этом, раз не выполняется определение по Коши, то справедливо следующее выражение:

$$\exists\varepsilon_1>0\,\forall\delta_1>0\,\exists x(\delta_1)\colon(0<|x(\delta_1)-x_0|<\delta_1)\wedge(|f(x(\delta_1))-A|\geqslant\varepsilon_1)$$

Возьмем последовательность $\delta_n=\frac{1}{n}$.
Тогда

$$|x_n-x_0|<\delta_n$$
$$x_0-\frac{1}{n}<x_n<x_0+\frac{1}{n}$$

По Теореме о двух полицейских тогда $x_n\to x_0$, Однако $|f(x_n)-b|\geqslant\varepsilon_1>0$, а значит $f(x_n)\not\to A$.,

Таким образом, мы построили последовательность, удовлетворяющую определению предела по Гейне, для которой $f(x_n)\not\to A$.

□

1.24 Односторонние пределы.

Определение 1.13. *Левый предел:*

$$\lim_{x\to x_0-0}f(x)=a\iff\forall\varepsilon>0\,\exists\delta(\varepsilon)>0\colon\forall x\colon x_0-\delta(\varepsilon)<x<x_0\Rightarrow|f(x)-a|<\varepsilon$$

Правый предел:

$$\lim_{x\to x_0+0}f(x)=a\iff\forall\varepsilon>0\,\exists\delta(\varepsilon)>0\colon\forall x\colon x_0<x<x_0+\delta(\varepsilon)\Rightarrow|f(x)-a|<\varepsilon$$

Очевидно, что $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=a\iff\begin{cases}\lim\limits_{x\to x_0-0}f(x)=a\\ \lim\limits_{x\to x_0+0}f(x)=a\end{cases}$

1.25 Связь между пределом, ее значением и бесконечно малой величиной.

Теорема 1.15. $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A,\ \alpha(x)$ *— БМ*
$\forall\varepsilon>0\exists\delta(\varepsilon)>0:\forall x_{x\neq x_0}:|x-x_0|<\delta(\varepsilon)\Rightarrow|\alpha(x)|<\varepsilon$
$\forall\varepsilon>0\exists\delta(\varepsilon)>0:\forall x_{x\neq x_0}:|x-x_0|<\delta(\varepsilon)\Rightarrow|f(x)-A|<\varepsilon$
$\Rightarrow(f(x)-A)$ *— БМ,* $\Rightarrow f(x)-A\coloneqq\alpha(x),\Rightarrow f(x)=A+\alpha(x)$

1.26 Непрерывные функции.

Определение 1.14. *Пусть функция f определена в некоторой окрестности точки x_0 и в самой точке x_0. f непрерывна в точке x_0, если*

$$\lim_{x \to x_0} = f(x_0)$$

*Если функция определена в некоторой окрестности точки x_0, но не является непрерывной в данной точке, то говорят, что функция **терпит разрыв** в этой точке.*

Теорема 1.16. *Пусть функции f и g непрерывны в точке x_0. Тогда:*

- *функция $h(x) = f(x) + g(x)$ непрерывна в x_0*
- *функция $u(x) = f(x)g(x)$ непрерывна в x_0*
- *функция $v(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ непрерывна в x_0 если $g(x_0) \neq 0$*

Доказательство.

$$\lim_{x \to x_0} h(x) = \lim_{x \to x_0} (f(x) + g(x)) = \lim_{x \to x_0} (f(x)) + \lim_{x \to x_0} (g(x)) = f(x_0) + g(x_0) = h(x_0)$$

$$\lim_{x \to x_0} u(x) = \lim_{x \to x_0} (f(x) \cdot g(x)) = \lim_{x \to x_0} (f(x)) \cdot \lim_{x \to x_0} (g(x)) = f(x_0) \cdot g(x_0) = u(x_0)$$

$$\lim_{x \to x_0} v(x) = \lim_{x \to x_0} \left(\frac{f(x)}{g(x)} \right) = \frac{\lim\limits_{x \to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x \to x_0} g(x)} = \frac{f(x_0)}{g(x_0)} = v(x_0)$$

□

1.27 Равномерная непрерывность. Компактное множество (опр, без док-ва). Теорема Кантора (без док-ва).

Определение 1.15 (Равномерная непрерывность). *Функция называется **равномерно непрерывной**, если*

$$\forall \varepsilon > 0 \colon \exists \delta(\varepsilon) > 0 \colon \forall x_1, x_2 \colon (|x_1 - x_2| < \delta(\varepsilon)) \Rightarrow (|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon)$$

Определение 1.16 (Компактное множество). *Конечное множество — множество, в любом покрытии которого открытыми множествами найдется конечное подпокрытие. В $\mathbb{R}$ компактами являются замкнутые ограниченные множества.*

Отрезок $[a, b]$ является компактным множеством. Интервал не является компактом.

Теорема 1.17 (Теорема Кантора о равномерной непрерывности). *Непрерывная функция, определенная на компакте, равномерно непрерывна на нем.*

1.28 Различные формы записи непрерывности функции в точке.

Определение 1.17. *Пусть функция f определена в точке x_0 и некоторой ее окрестности $U_\delta(x_0)$. f - непрерывная в точке x_0, если она определена в точке x_0 и некоторой ее окрестности $U_\delta(x_0)$ и $\exists \lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ и $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$*

Остальные формы записи остаются загадкой

Еще одно определение найденное на просторах интернета:

Определение 1.18. *Функция $f(x)$ называется непрерывной в точке x_0, если в этой точке бесконечно малому приращению аргумента соответствует бесконечно малое приращение функции, то есть*

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta f(x) = 0$$

Определение 1.19. *Если функция f не является непрерывной в точке x_0, то она называется разрывной.*

Следствие 1.17.1. *Функция разрывна, если:*

1. *Не определена в точке x_0*
2. *Определена в точке x_0, но не определена в окрестности $U_\delta(x_0)$*
3. $\nexists \lim\limits_{x \to x_0} f(x) \iff (\nexists \lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x)) \vee (\nexists \lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x)) \vee (\exists \lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x) \neq \lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x))$
4. $\exists \lim\limits_{x \to x_0} f(x) \neq f(x_0)$

1.29 Классификация точек разрыва функции.

Если функция не является непрерывной в точке x_0, то она называется **разрывной**.

$$\nexists \lim_{x\to x_0} f(x) \Leftrightarrow \nexists \lim_{x\to x_0-0} f(x) \vee \nexists \lim_{x\to x_0+0} f(x) \vee \exists \lim_{x\to x_0-0} f(x) \neq \exists \lim_{x\to x_0+0} f(x)$$

Например: Ф-ция Дирихле — разрывная в каждой точке

$$D(x) = \begin{cases} 1 & \text{x - рациональное} \\ 0 & \text{x - иррациональное} \end{cases}$$

Пусть $f: E \to \mathbb{R}$, $x_1, x_2 \in E$, тогда $\omega(f, E) = sup|f(x_1) - f(x_2)|$ — **колебания** функции f на E.

1. **Разрыв I-го рода (Устранимый разрыв)** — когда в одной точке x_0 $\exists \lim\limits_{x\to x_0} f(x) \neq f(x_0)$. *Пример:* $f(x) = \frac{x^2}{x}$
2. **Разрыв II-го рода** — когда в одной точке x_0 функция $f(x)$ не имеет хотя бы одного из односторонних пределов или хотя бы один из них бесконечен.

   Пример: $f(x) = \frac{1}{x^2}$, $f(x) = \frac{|x|}{x}$

Скачок функции $f(x)$ в точке x_0 называется разность пределов справа и слева $\Delta = f(x_0 + 0) - f(x_0 - 0)$. Если скачок функции в $x_0 \neq 0$, то это **разрыв функции I-го рода**.

1.30 Бесконечно малые и бесконечно большие функции. Сравнение бесконечно малых.

1.30.1 Бесконечно малая функция

Определение 1.20. ***Бесконечно малая*** *— числовая функция или последовательность, стремящаяся к (пределу которой равен) нулю.*

Функция называется бесконечно малой в окрестности точки x_0, если $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = 0$.

Функция называется бесконечно малой на бесконечности, если $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$ либо $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$.

Также бесконечно малой является функция, представляющая собой разность функции и её предела, то есть если $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = a$, то $f(x) - a = \alpha(x)$, $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x) - a) = 0$.

Подчеркнём, что бесконечно малую величину следует понимать как переменную величину (функцию), которая лишь в процессе своего изменения [при стремлении x к a (из $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0$)] делается меньше произвольного числа (ε).

1.30.2 Бесконечно большая функция

Определение 1.21. ***Бесконечно большая*** *— числовая функция или последовательность, стремящаяся к (предел которой равен) бесконечности определённого знака.*

Функция называется бесконечно большой в окрестности точки x_0, если $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \infty$.

Функция называется бесконечно большой на бесконечности, если $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \infty$ либо $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \infty$.

Как и в случае бесконечно малых, необходимо отметить, что ни одно отдельно взятое значение бесконечно большой величины не может быть названо как «бесконечно большое» — бесконечно большая величина — это функция, которая лишь в процессе своего изменения может стать больше произвольно взятого числа.

1.30.3 Сравнение бесконечно малых

Допустим, у нас есть бесконечно малые при одном и том же $x \to a$ величины $\alpha(x)$ и $\beta(x)$.

Если $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{\beta}{\alpha} = 1$, то α β — эквивалентные бесконечно малые.

Если $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{\beta}{\alpha} \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ (предел конечен и не равен 0), то α и β являются бесконечно малыми одного (одинакового) порядка. Обозначение: $\alpha \asymp \beta$.

Если $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{\beta}{\alpha} = 0$, то β — бесконечно малая более высокого порядка, чем α. Обозначение: $\beta \prec \alpha$.

Если $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{\beta}{\alpha} = \infty$, то β — бесконечно малая более низкого порядка, чем α. Обозначение: $\alpha \prec \beta$.

Если $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{\beta}{\alpha^m} = c$ (предел конечен и не равен 0), то бесконечно малая величина β имеет m-й порядок малости относительно бесконечно малой α.

1.31 Свойства бесконечно малых функций.

- Алгебраическая сумма конечного числа бесконечно малых функций есть бесконечно малая функция ($\alpha(x) \pm \beta(x)$ — БМ).
- Произведение бесконечно малых — бесконечно малая ($\alpha(x) \cdot \beta(x)$ — БМ).
- Если f — ограничена в окрестности точки x_0, а $\alpha(x)$ — бесконечно малая, то $f(x_0) \cdot \alpha(x)$ — бесконечно малая.
- Как следствие, произведение бесконечно малой на константу — бесконечно малая.
- Если $\alpha(x)$ — бесконечно малая функция, то $\beta(x) = \dfrac{1}{\alpha(x)}$ — бесконечно большая функция и наоборот.

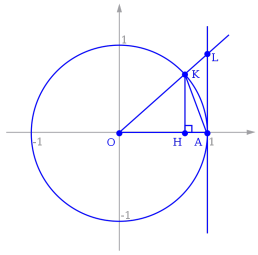
1.32 Первый замечательный предел.

Теорема 1.18 (Первый замечательный предел)**.**

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$$

Доказательство. Рассмотрим односторонние пределы $\lim_{x\to+0}\frac{\sin x}{x}$ и $\lim_{x\to-0}\frac{\sin x}{x}$ и докажем, что они равны 1.

Рассмотрим случай $x\in\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$. Отложим этот угол на единичной окружности так, чтобы его вершина совпадала с началом координат, а одна сторона совпадала с осью OX. Пусть K — точка пересечения второй стороны угла с единичной окружностью, а точка L — с касательной к этой окружности в точке $A=(1;0)$. Точка H — проекция точки K на ось OX.



Очевидно, что:
$S_{\triangle OKA}<S_{sectKOA}<S_{\triangle OAL}$ (1) (где $S_{sectKOA}$ — площадь сектора KOA)
Поскольку $|KH|=\sin x$, $|LA|=\operatorname{tg}x$:

$$S_{\triangle OKA}=\frac{1}{2}\cdot|OA|\cdot|KH|=\frac{1}{2}\cdot 1\cdot\sin x=\frac{\sin x}{2}$$

$$S_{sectKOA}=\frac{1}{2}\cdot|OA|^2\cdot x=\frac{x}{2}$$

$$S_{\triangle OAL}=\frac{1}{2}\cdot|OA|\cdot|LA|=\frac{\operatorname{tg}x}{2}$$

Подставляя в (1), получим: $\frac{\sin x}{2}<\frac{x}{2}<\frac{\operatorname{tg}x}{2}$
Так как при $x\to+0:\sin x>0$, $x>0$, $\operatorname{tg}x>0$: $\frac{1}{\operatorname{tg}x}<\frac{1}{x}<\frac{1}{\sin x}$
Умножаем на $\sin x$: $\cos x<\frac{\sin x}{x}<1$
Перейдём к пределу:

$$\lim_{x\to+0}\cos x\leqslant\lim_{x\to+0}\frac{\sin x}{x}\leqslant 1$$

$$1\leqslant\lim_{x\to+0}\frac{\sin x}{x}\leqslant 1$$

$$\lim_{x\to+0}\frac{\sin x}{x}=1$$

Найдём левый односторонний предел (так как функция четна, в этом нет необходимости, достаточно доказать это для правого предела):

$$\lim_{x\to-0}\frac{\sin x}{x}=\begin{bmatrix}u=-x\\x=-u\\u\to+0\\x\to-0\end{bmatrix}=\lim_{u\to+0}\frac{\sin(-u)}{-u}=\lim_{u\to+0}\frac{-\sin(u)}{-u}=\lim_{u\to+0}\frac{\sin(u)}{u}=1$$

Правый и левый односторонний пределы существуют и равны 1, а значит и сам предел равен 1.

Следствие 1.18.1.

- $\lim_{x\to0}\frac{\operatorname{tg}x}{x}=1$
- $\lim_{x\to0}\frac{\arcsin x}{x}=1$
- $\lim_{x\to0}\frac{\operatorname{arctg}x}{x}=1$
- $\lim_{x\to0}\frac{1-\cos x}{\frac{x^2}{2}}=1$

$\square$

1.33 Второй замечательный предел.

Теорема 1.19 (Второй замечательный предел)**.**

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$$

Доказательство. Зная, что второй замечательный предел верен для натуральных значений x, докажем второй замечательный предел для вещественных x, то есть докажем, что $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e;\ x \in \mathbb{R}$. Рассмотрим два случая:

1. Пусть $x \to +\infty$. Каждое значение x заключено между двумя положительными целыми числами: $n \leqslant x < n+1$, где $n = [x]$ — это целая часть x.

Отсюда следует:

$$\frac{1}{n+1} < \frac{1}{x} \leqslant \frac{1}{n} \iff 1+\frac{1}{n+1} < 1+\frac{1}{x} \leqslant 1+\frac{1}{n}$$

$$\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^n < \left(1+\frac{1}{x}\right)^x \leqslant \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$$

Если $x \to +\infty$, то $n \to \infty$. Поэтому, согласно пределу $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$, имеем:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^n = \frac{\lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n+1})^{n+1}}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)} = \frac{e}{1} = e$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \cdot \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right) = e\cdot 1 = e.$$

По признаку (о пределе промежуточной функции) существования пределов $\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$.

2. Пусть $x \to -\infty$. Сделаем подстановку $-x = t$, тогда

$$\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = \lim_{t\to+\infty}\left(1-\frac{1}{t}\right)^{-t} = \lim_{t\to+\infty}\left(\frac{t}{t-1}\right)^t = \lim_{t\to+\infty}\left(1+\frac{1}{t-1}\right)^t =$$

$$= \lim_{t\to+\infty}\left(1+\frac{1}{t-1}\right)^{t-1} \cdot \lim_{t\to+\infty}\left(1+\frac{1}{t-1}\right)^1 = e\cdot 1 = e.$$

Очевидно, из двух этих случаев вытекает, что $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$ для вещественного x. □

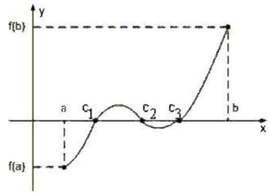
Следствие 1.19.1.

- $\lim_{u\to 0}(1+u)^{\frac{1}{u}} = e$
- $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{k}{x}\right)^x = e^k$
- $\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x} = 1$
- $\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x} = 1$
- $\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x\ln a} = 1$ *для* $a > 0,\ a \neq$
- $\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^\alpha-1}{\alpha x} = 1$
- $\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{k}{x}\right)^x = e^{-k}$

1.34 Свойства непрерывных функций на отрезке. Теорема Вейерштрасса (без док-ва).

Теорема 1.20 (Вторая теорема Больцано – Коши о промежуточном значении). *Пусть функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$ и есть произвольное число C, находящееся между значениями функции на концах отрезка: $A = f(a)$ и $B = f(b)$. Тогда существует точка $\xi \in [a, b]$, для которой $f(\xi) = C$.*

Теорема 1.21 (Первая теорема Больцано – Коши). *Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$ и принимает на его концах значения разных знаков ($f(a) \cdot f(b) < 0$), то среди внутренних точек отрезка имеется по крайней мере одна точка ξ, такая, что $f(\xi) = 0$*



Следствие 1.21.1. *Пусть функция f непрерывна на отрезке $[a, b]$ и $m = \underset{[a,b]}{min} f$, $M = \underset{[a,b]}{max} f$. Тогда функция принимает на отрезке все значения из $[m, M]$ и только эти значения: $m \leqslant f(x) \leqslant M$ при $a \leqslant x \leqslant b$.*

1.34.1 Теоремы Вайерштрасса о непрерывных на отрезке функциях

Теорема 1.22 (Теорема Вайерштрасса об ограниченности непрерывной функции). *Функция, непрерывная на отрезке $[a, b]$, ограничена на этом отрезке. Другими словами, $\exists M \in \mathbb{R}$ такое, что*

$$\forall x \in [a, b] \ |f(x)| < M$$

Теорема 1.23 (Теорема Вайерштрасса о достижении точной верхней и нижней грани). *Если функция f непрерывна на отрезке $[a, b]$, то она достигает своей точной верхней грани и точной нижней грани:*

$$\exists \xi \in [a, b] : f(\xi) = \underset{x \in [a,b]}{sup} f(x)$$

$$\exists \overline{\xi} \in [a, b] : f(\overline{\xi}) = \underset{x \in [a,b]}{inf} f(x)$$

Теорема 1.24 (Теорема Вайерштрасса). *Если функция f непрерывна на отрезке $[a, b]$, то она принимает все промежуточные значения между $f(a)$ и $f(b)$*

1.35 Определение производной. Дифференциал функции.

1.36

1.37

1.38

1.39

1.40 Производная обратной функции. Производная сложной функции. Логарифмическая производная.

Определение 1.22. *$g : I \to I_1$ $f : I_1 \to \mathbb{R}$ $(f \circ g)(a) = f(g(a))$ — композиция функций*

Теорема 1.25. *Если g дифференцируема в точке a, f дифференцируема в точке $g(a)$, $\Rightarrow$ $(f \circ g)$ дифференцируема в точке a и $(f \circ g)'(a) = f'(g(a)) \cdot g'(a)$*

Определение 1.23. *Производная обратной функции*

$y = f(x),\ x = \varphi(y),\ y'_x = f'(x),\ x'_y = \lim\limits_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta y}, \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x},\ \Delta x \to 0 \Rightarrow \Delta y \to 0,\ \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\frac{\Delta x}{\Delta y}} = \frac{1}{\lim\limits_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta y}}$

$\boxed{x'_y = \dfrac{1}{y'_x}}$

Определение 1.24. *Логарифмическая производная*

$$y = f(x),\ \ln y = \ln(f(x)),\ \frac{y'}{y} = (\ln(f(x)))',\ y' = y(\ln(f(x)))'$$

Example:
$y = x^x,\ \ln y = x \ln x,\ \frac{1}{y} \cdot y = \ln x + 1,\ y' = y \ln x + y$
$y' = x^x \cdot \ln x + x^x$

1.41 Таблица производных

1. $c' = 0$
2. $y = u^\alpha,\ y' = \alpha u^{\alpha-1} \cdot u' \parallel y = \sqrt{u}\ y' = \frac{u'}{2\sqrt{u}} \parallel y = \frac{1}{u}\ y' = \frac{u'}{u^2}$
3. $y = a^u,\ y' = a^u \cdot \ln a \cdot u' \parallel y = \exp^u\ \ y' = \exp^u \cdot u'$
4. $y = \log_a,\ u\ y' = \frac{u'}{u \ln a} \parallel (\ln u)' = \frac{u'}{u}$
5. $y = \sin(u),\ y' = \cos(u) \cdot u'$
6. $y = \cos(u),\ y' = -\sin(u) \cdot u'$
7. $y = \mathrm{tg}(u),\ y' = \frac{u'}{\cos^2(u)}$
8. $y = \mathrm{ctg}(u),\ y' = \frac{u'}{\sin^2(u)}$
9. $y = \arcsin(u),\ y' = \frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$
10. $y = \arccos(u),\ y' = -\frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$
11. $y = \mathrm{arctg}(u),\ y' = \frac{u'}{1+u^2}$
12. $y = \mathrm{arcctg}(u),\ y' = -\frac{u'}{1+u^2}$

1.42 Производные высших порядков.

Не проходилось на курсе

1.43 Теорема Ферма

Теорема 1.26 (о равенстве нулю производной)**.** *Если дифференцируемая функция $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ в точке $x_0 \in (a, b)$ имеет экстремум, то $f'(x_0) = 0$*

Доказательство. Предположим, что $f(x_0) = \max\limits_{x \in (a,b)} f(x)$. Тогда $\forall x \in (a, b)$: $f(x) \leqslant f(x_0)$.

Поэтому:

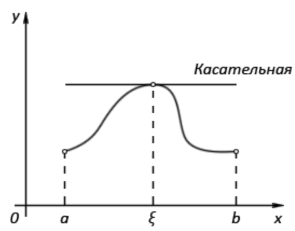
$$f'_-(x_0) = \lim_{x \to x_0 - 0} \left(\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \right) \geqslant 0$$

$$f'_+(x_0) = \lim_{x \to x_0 + 0} \left(\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \right) \leqslant 0$$

Если производная $f'(x_0)$ определена, то получаем $0 \leqslant f'_-(x_0) = f'(x_0) = f'_+(x_0) \leqslant 0$, то есть $f'(x_0) = 0$.
Если x_0 — точка локального минимума функции f, то доказательство аналогично. □

1.44 Теорема Ролля (радость препода-тролля)

Теорема 1.27. *Пусть функция $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ непрерывна на $[a, b]$, дифференцируема в (a, b) и на концах отрезка принимает одинаковое значение $f(a) = f(b)$, тогда $\exists \xi, a < \xi < b : f'(\xi) = 0$.*



Доказательство. Если функция на отрезке постоянна, то утверждение очевидно, поскольку производная функции равна нулю в любой точке интервала.
Если же нет, поскольку функция непрерывна на $[a, b]$, то согласно теореме Вейерштрасса, она принимает своё наибольшее или наименьшее значение в некоторой точке интервала, то есть имеет в этой точке локальный экстремум, и по лемме Ферма производная в этой точке равна 0. □

1.45 Теорема Коши

Теорема 1.28 (о среднем значении)**.** *Пусть функции $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ непрерывны на отрезке $[a, b]$, дифференцируемы на интервале (a, b) и $\forall x \in (a, b) g'(x) \neq 0$. Тогда $\exists \xi, a < \xi < b$, такое что*

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$$

Доказательство. Для доказательства введём функцию $\varphi(x) = \big(f(b) - f(a)\big)\big(g(x) - g(a)\big) - \big(g(b) - g(a)\big)\big(f(x) - f(a)\big)$.

Легко видеть, что для неё выполнены условия теоремы Ролля. Воспользовавшись этой теоремой, получим, что существует точка $\xi \in (a, b)$, в которой производная функции φ равна нулю:

$$\varphi'(\xi) = \big(f(b) - f(a)\big)g'(\xi) - \big(g(b) - g(a)\big)f'(\xi) = 0$$

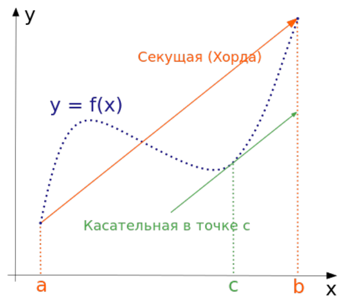
Перенеся в этом равенстве второе слагаемое вправо мы получим формулу из общей формулировки теоремы.

В оригинальной формулировке остаётся разделить равенство на $g'(\xi)$ и $g(b)-g(a)$. Оба эти числа будут ненулевыми. Значит, $\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$. □

1.46 Теорема Лагранжа. Следствие теоремы Лагранжа

Теорема 1.29 (**Формула конечных приращений** или **теорема Лагранжа о среднем значении**). *Пусть функция $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ непрерывна на отрезке $[a,b]$, дифференцируема на интервале (a,b), тогда*

$$\exists \xi, a < \xi < b: \qquad f(b) - f(a) = (b-a) \cdot f'(\xi) \Longleftrightarrow f'(\xi) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$



Геометрически *это можно переформулировать так: на отрезке $[a,b]$ найдётся точка, в которой касательная параллельна хорде, проходящей через точки графика, соответствующие концам отрезка.*

Доказательство. Для доказательства введём функцию $g(x) = x$. Заметим, что $g'(x) = 1 \neq 0$. Тогда по теореме Коши для функций f и g, $\exists \xi \in (a,b)$, такое что

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = \frac{f'(\xi)}{1} = f'(\xi)$$

□

Следствие 1.29.1. *Если $f'(x) = 0$ на некотором промежутке (a,b), то функция $f(x) = const$ на этом промежутке.*

Доказательство. Пусть $f'(x) = 0$ для любого $x \in (a,b)$. Возьмем произвольные x_1 и x_2 из (a, b) и пусть $x_1 < x_2$. Тогда по теореме Лагранжа 1.29 существует точка $c \in (a,b)$ такая, что $f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1)$. Но по условию $f'(x) = 0$, стало быть, $f'(c) = 0$, где $x_1 < c < x_2$. Поэтому имеем $f(x_2) - f(x_1) = 0$ или $f(x_2) = f(x_1)$. А так как x_1 и x_2 – произвольные точки из (a,b), то имеем f(x) = c. □

Следствие 1.29.2. *Если две функции имеют равные производные на некотором промежутке, то они отличаются друг от друга на постоянное слагаемое ($f'(x) = g'(x) \Rightarrow f(x) = g(x) + const$).*

Доказательство. Пусть $f_1'(x) = f_2'(x)$ при $x \in (a,b)$. Тогда $(f_1(x) - f_2(x))' = f_1'(x) - f_2'(x) = 0$. Следовательно, согласно следствию 1, функция $f_1(x) - f_2(x)$ есть постоянная, т.е. $f_1(x) - f_2(x) = c$ для $\forall x \in (a,b)$. □

1.47 Правило Лопиталя

Теорема 1.30. *Если $f(x)$, $g(x)$ — действительнозначные функции, дифференцируемые в $\dot{U}(a)$, где a — действительное число или один из символов $+\infty, -\infty, \infty$, причём*

1. $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$ *или* ∞;
2. $g'(x) \neq 0$ *в* $\dot{U}(a)$
3. *существует* $\lim\limits_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$;

тогда существует $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$.
Пределы также могут быть односторонними.

Доказательство. Раскрытие неопределенности $\frac{0}{0}$. До– или переопределяя функции f и g в точке a, можно считать, что $f(a) = g(a) = 0$. На пределы и производные это никак не повлияет, поскольку они не зависят от того, чему равны функции в точке a.

Тогда

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)} = \cdots$$

Применим теорему Коши к отрезку $[a,x]$. Существует такая точка $c(x) \in (a,x)$, что дробь под знаком предела равна $\frac{f'(c(x))}{g'(c(x))}$ (Теорема Коши для фиксированного отрезка даёт фиксированную точку c, а в нашем случае для каждого x свой отрезок, поэтому точка c зависит от x).

Можно продолжить равенство:

$$\cdots = \lim_{x\to a} \frac{f'(c(x))}{g'(c(x))} = \cdots$$

Заметим, что $c(x) \to a$ при $x \to a$ и $c(x) \neq a$, поскольку $c(x) \in (a, x)$ (по теореме о двух милиционерах). Значит, можно использовать теорему о пределе сложной функции. Имеем:

$$\dots = \lim_{c \to a} \frac{f'(c)}{g'(c)} = L.$$

$\square$

1.48 Признак монотонности функций

Определение 1.25. *Функция $f(x)$ называется **возрастающей** на промежутке (a, b), если для $\forall x_1, x_2 \in (a, b)$ из того, что $x_1 < x_2$, следует, что $f(x_1) < f(x_2)$*

*Функция $f(x)$ называется **убывающей** на промежутке (a, b), если для $\forall x_1, x_2 \in (a, b)$ из того, что $x_1 < x_2$, следует, что $f(x_1) > f(x_2)$*

Для того чтобы функция $f(x)$ была монотонной на (a, b), необходимо и достаточно, чтобы $f(x)$ дифференцируема на (a, b), а $f'(x)$ не меняла свой знак на всем промежутке. При этом, если $f'(x) > 0$, то функция возрастает на этом промежутке, а если $f'(x) < 0$ — то убывает.

Если при этом допускается и равенство нулю производной в каких-то точках, то говорят о нестрогом возрастании или убывании.

1.49 Необходимые условия экстремума

Если дифференцируемая функция f в точке x_0 имеет локальный экстремум, то $f'(x_0) = 0$.

Точки, в которых $f'(x_0) = 0$ — **стационарные точки**.

Точки, в которых $f'(x_0) = 0$ или $\nexists f'(x_0)$ — **критические точки**.

1.50 Достаточные условия экстремума

1. **Первое достаточное условие:** Если непрерывная функция $f(x)$ дифференцируема в некоторой окрестности критической точки x_0 и при переходе через нее (слева направо) производная меняет знак с плюса на минус, то x_0 есть точка максимума; с минуса на плюс — то x_0 есть точка минимума.

   Доказательство. Рассмотрим окрестность точки x_0. Пусть $f'(x) > 0, \forall x \in (x_0 - \delta; x_0)$ и $f'(x) < 0, \forall x \in (x_0; x_0 + \delta)$. Тогда функция $f(x)$ возрастает на интервале $(x_0 - \delta; x_0)$, а на интервале $(x_0; x_0 + \delta)$ она убывает. Отсюда следует, что значение $f(x)$ в точке x_0 является наибольшим на интервале $(x_0 - \delta; x_0 + \delta)$, т.е. $f(x) < f(x_0)$ для всех $x \in (x_0 - \delta; x_0) \cup (x_0; x_0 + \delta)$. Следовательно x_0 есть точка максимума. $\square$

2. **Второе достаточное условие:** Если в точке x_0 первая производная функции $f(x)$ равна нулю ($f'(x_0) = 0$), а вторая производная в точке x_0 существует и отличная от нуля ($f''(x_0) \neq 0$), то при $f''(x_0) < 0$ в точке x_0 функция имеет максимум, а при $f''(x_0) > 0$ — минимум.

   Доказательство. Пусть $f''(x_0) > 0$. Т.к. $f''(x_0) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{f'(x_0 + \Delta x) - f'(x_0)}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{f'(x_0 + \Delta x)}{\Delta x} > 0$, то $\frac{f'(x_0 + \Delta x)}{\Delta x} > 0$ в достаточно малой окрестности точки x_0. Если $\Delta x < 0$, то $f'(x_0 + \Delta x) < 0$, если $\Delta x > 0$, то $f'(x_0 + \Delta x) > 0$. Из этого следует, что при переходе через точку x_0 первая производная меняет знак с минуса на плюс. Следовательно x_0 есть точка минимума. $\square$