新结构货币经济学

胡博

第一章　货币效用函数

1.1　设定

在经济模型中加入货币，最省事的方法是让持有货币的行为本身产生效用。尽管这一方法会因为法币本身并无商品价值且持有法币会有机会成本而招致批评，但将货币持有量直接引入效用函数可以看作是一种"捷径"。那些货币在其中具有实际功效的模型，也可以在某种程度上等价地写成货币效用函数模型。

在这一模型中，假设代表性消费者单期的效用函数为 $u(c_t, m_t)$，其中 $c_t = \frac{C_t}{P_t}$ 为 t 期的实际消费水平（real consumption），C_t 为 t 期的名义消费水平（nominal consumption），即消费的货币价值，P_t 为 t 期的价格水平，$m_t = \frac{M_t}{P_t}$ 为 t 期的实际货币持有量，M_t 为 t 期的名义货币持有量。在接下来的表述中，我们大多数情况下采用大写字母表示名义量，小写字母表示实际量这一惯例。假设 u 为严格单调增的、连续可微的严格凸函数（concave function），满足如下的 Inada 条件：

$$\lim_{c\to 0} u_1(c,m) = \infty, \qquad \lim_{c\to\infty} u_1(c,m) = 0,$$
$$\lim_{m\to 0} u_2(c,m) = \infty, \qquad \lim_{m\to\infty} u_2(c,m) = 0,$$

其中 u_i 表示 u 对于其第 i 个自变量的偏导数。

假设代表性消费者的总效用函数为

$$\sum_{t=0}^{\infty} \beta^t u(c_t, m_t),$$

其中 $\beta \in (0,1)$ 为主观折现因子（subjective discount factor）。其预算约束为

$$Y_t + T_t + (1-\delta)K_t + (1+i_t)B_t + M_t = C_t + K_{t+1} + M_{t+1} + B_{t+1},$$

其中 Y_t 为 t 期的名义产出，K_t 为在第 $t-1$ 期末决定的用在 t 期进行生产的名义资本存量，δ 为资本的折旧因子，B_t 为由消费者在第 $t-1$ 期购买的在第 t 期进行还本付息的附息债券的（名义）面值，i_t 为其名义利率，M_t 为由消费者在第 $t-1$ 期末第 t 期初持有的名义货币量。我们假设货币当局在第 t 期由新发型货币产生的收入以总量的方式转移支付（lump-sum transfer）给消费者，即 $T_t = M_{t+1} - M_t$. 将等式的两边同时处以 P_t 我们得到消费者预算约束的实际量形式：

$$\begin{aligned} y_t + \tau_t + &(1-\delta)k_t + (1+i_t)b_t + m_t \\ &= c_t + k_{t+1} + m_{t+1}(1+\pi_{t+1}) + b_{t+1}(1+\pi_{t+1}), \end{aligned} \tag{1.1}$$

其中 $\pi_t = \frac{P_t}{P_{t-1}} - 1$ 为 t 期的通货膨胀率，$\tau_t = \frac{T_t}{P_t}$。

假设代表性厂商的生产技术为 $f(k_t)$，其中 f 为严格单调增的、连续可微的严格凸函数（concave function），满足

$$\lim_{k\to 0} f'(k) = \infty, \qquad \lim_{k\to\infty} f'(k) = 0.$$

我们假设厂商的生产技术为规模报酬不变的，并且是完全竞争市场。故而在均衡时，厂商的利润为零，$y_t = f(k_t)$。

消费者的最优化问题可以写作

$$\begin{aligned} \max_{\{c_t,k_t,b_t,m_t\}_{t=0}^{\infty}} \quad & \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t u(c_t, m_t) \\ s.t. \quad & f(k_t) + \tau_t + (1-\delta)k_t + (1+i_t)b_t + m_t \\ & = c_t + k_{t+1} + m_t(1+\pi_{t+1}) + b_t(1+\pi_{t+1}). \end{aligned} \tag{1.2}$$

1.2 最优解

为了求得最优解，我们写出问题的拉格朗日函数（Lagrangian）

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t u(c_t, m_t) - \sum_{t=0}^{\infty} \lambda_t [& c_t + k_{t+1} + m_t(1+\pi_{t+1}) + b_t(1+\pi_{t+1}) \\ & - f(k_t) - \tau_t - (1-\delta)k_t - (1+i_t)b_t - m_t], \end{aligned}$$

其中 $\{\lambda_t\}_{t=0}^{\infty}$ 为一系列拉格朗日乘子（Lagrangian multiplier）。最优解满足如下的一阶条件：

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial c_t} = \beta^t u_1(c_t, m_t) - \lambda_t = 0, \tag{1.3}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial k_t} = -\lambda_{t-1} + \lambda_t \left(f'(k_t) + 1 - \delta\right) = 0, \tag{1.4}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial m_t} = \beta^t u_2(c_t, m_t) - \lambda_{t-1}(1+\pi_t) + \lambda_t = 0, \tag{1.5}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial b_t} = -\lambda_{t-1}(1+\pi_t) + \lambda_t(1+i_t) = 0. \tag{1.6}$$

联合(1.3)和(1.5)我们可得

$$\frac{\beta u_2(c_{t+1}, m_{t+1}) + \beta u_1(c_{t+1}, m_{t+1})}{1+\pi_{t+1}} = u_1(c_t, m_t). \tag{1.7}$$

注意到等式到右边为第 t 期选择少消费 1 个实际单位的消费品，即期末多持有 1 单位实际货币带来的效用的边际损失，而左边为这一额外单位的实际货币在第 $t+1$ 期通过货币效用和通过支持消费带来的效用的边际收益。在最优解下它们应该相等。

联合(1.4)和(1.6)我们可得

$$\frac{1+i_t}{1+\pi_t} = f'(k_t) + 1 - \delta. \tag{1.8}$$

等式左边为债券的实际回报率，我们记 $1+r_t = \frac{1+i_t}{1+\pi_t}$。上式表明，在最优的情况下，债券的实际回报率应该等于资本的实际回报率。

联合(1.3)和(1.6)我们可得

$$\frac{\beta u_1(c_{t+1}, m_{t+1})}{u_1(c_t, m_t)} = \frac{1}{1+r_{t+1}}. \tag{1.9}$$

这表明，在最优时，消费的跨期边际替代率（intertemporal marginal rate of substitution, intertemporal MRS）为 $\frac{1}{1+r_{t+1}}$。

我们结合(1.7)和(1.9)可得

$$\frac{u_2(c_t, m_t)}{u_1(c_t, m_t)} = i_t, \tag{1.10}$$

即持有货币的机会成本为 i_t.

上面的式子提供了一组差分方程用以描述各变量随时间的演化关系。除了这些关系以外，一阶条件还包含横截形条件（transversality conditions）:

$$\lim_{t\to\infty} \beta^t u_1(c_t, m_t) x_t = 0,$$

其中 x 取 k, b 和 m。

1.3 稳态均衡

经济学的模型，特别是货币经济学的模型，可以有多种不同的均衡。我们首先考虑一个特别的均衡，即稳态均衡。我们定义稳态均衡为所有实际量不随时间变化的均衡。均衡除了由 (1.1)、(1.7)、(1.8) 和(1.9)确定以外，我们还需要给经济系统提供货币政策变量。

假设我们考虑名义货币增长率为 θ，即 $\frac{M_{t+1}-M_t}{M_t}=\theta$ 的货币政策。稳态均衡中的所有变量的稳态量都以上标 ^{ss} 来表示。由于 $m_t=\frac{M_t}{P_t}$ 在稳态均衡中不变，我们得到价格水平在稳态均衡中也以 θ 的增长率增长，故而 $\pi^{ss}=\theta$。由于没有政府部门，消费者部门的整体债务水平应该为 0, 即 $b^{ss}=0$。同时，$\tau^{ss}=\theta m^{ss}$。故稳定均衡由下列等式确定：

$$\frac{1+i^{ss}}{1+\theta}=f'(k^{ss})+1-\delta, \tag{1.11}$$

$$\frac{1+i^{ss}}{1+\theta}=\frac{1}{\beta}, \tag{1.12}$$

$$\frac{u_2(c^{ss},m^{ss})}{u_1(c^{ss},m^{ss})}=i^{ss}, \tag{1.13}$$

$$c^{ss}=f(k^{ss})-\delta k^{ss}. \tag{1.14}$$

假设稳态均衡存在。根据(1.11)和(1.12)，稳态的实际资本存量独立于名义货币的增长率 θ。再由(1.14)，稳态的实际消费水平也独立于名义货币的增长率。这种实际产出、消费与资本存量不仅与名义货币余额独立，且与名义货币的增长率独立的关系，我们称之为*货币超中性*。

值得注意的是，根据(1.13)，实际货币需求量与稳态的名义利率有关，因而与名义货币的增长率有关。若效用函数为不变替代弹性形式（constant elasticity of substitution，CES）形式：

$$u(c,m)=\left(ac^{1-b}+(1-a)m^{1-b}\right)^{\frac{1}{1-b}},$$

则我们可以由(1.13)得到实际货币关于消费和名义利率的需求函数：

$$\log m^{ss}=\frac{1}{b}\log\frac{1-a}{a}+\log c^{ss}-\frac{1}{b}\log i^{ss}.$$

上式表明，在稳态均衡中，实际货币需求的利率弹性为 $-\frac{1}{b}$。我们可以基于上式的关系来估计实际货币需求。

图 1.1: 货币效用函数模型多重均衡

1.4 多重均衡

我们现在来考察其他“稳态”均衡的可能性。我们保持在稳态均衡中，消费、产出与资本存量的实际量不变这一要求，但是允许实际货币量随时间发生变化。我们重点关注在模型中价格是如何确定的。为了简化分析，我们假设货币供给是不变的，设为 M_0，同时假设效用是可分的，即 u 可以写成 $u(c,m)=v(c)+w(m)$ 的形式。

当效用是可分的时候，结合(1.8)，在均衡中式(1.9)可以简化为

$$\frac{1+i_t}{1+\pi_t}=\frac{1}{\beta}.$$

式(1.10)可以写为

$$\frac{w'\left(\frac{M_0}{P_t}\right)}{v'(c^{ss})}=\frac{1}{\beta}\frac{P_t}{P_{t-1}}-1,$$

即

$$P_{t-1}=\frac{P_t}{\beta\left[\frac{w'\left(\frac{M_0}{P_t}\right)}{v'(c^{ss})}+1\right]},$$

我们不妨记 $P_{t-1}=\phi(P_t)$。由于 $w''<0$, θ 除了 0 以外有且仅有一个不动点，记作 P^* 即 $P^*=\phi(P^*)$。同时，

$$\phi'(P^*)=1+\frac{\beta M_0}{P^*}\frac{w''\left(\frac{M_0}{P^*}\right)}{v'(c^{ss})}<1,$$

则 $(\phi^{-1})'(P^*)>1$。由于 $P_{t+1}=\phi^{-1}(P_t)$，这意味着 P_{t+1} 与 P_t 的关系如图所示。当价格水平偏离 P^* 时，价格会逐渐收缩到 0 或者增长到无穷大。随着 P 收缩到 0，实际货币需求变成无穷大，有可能违背横截性条件。当 P^* 增长到无穷大时，横截性条件不会被违背，因而是有效到均衡。在这些均衡里，均有恶性通货膨胀出现。

1.5 其他表达形式

现在我们考虑问题的另一种表达形式。我们将预算约束重新表达为

$$y_t+\tau_t+(1-\delta)k_{t-1}+\frac{(1+i_{t-1})B_{t-1}}{P_t}+\frac{M_{t-1}}{P_t}=c_t+k_t+\frac{M_t}{P_t}+\frac{B_t}{P_t}.$$

注意到我们所做的，是将资产相关的项的时间下标做了一个变动，即现在 k_t, B_t, M_t 分别表示在 t 期末决定的要留到 $t+1$ 期的实际资本存量、要购买的将在 $t+1$ 期偿还本息的附息债券名义量和要留到 $t+1$ 期的名义货币量。如果我们不改变我们效用函数的写法，那么在现在的表达形式下，我们 t 期末决定的货币持有量进入 t 期的效用函数。而在之前的表达形式中，我们 t 期初，即 $t-1$ 期末决定的货币持有量进入 t 期的效用函数。

在这一变动下，生产函数应该改写为 $y = f(k_{t-1})$。实际预算约束则可以写为

$$f(k_{t-1}) + \tau_t + (1-\delta)k_{t-1} + \frac{(1+i_{t-1})b_{t-1}}{1+\pi_t} + \frac{m_{t-1}}{1+\pi_t} = c_t + k_t + m_t + b_t.$$

最优化问题可以写为

$$\begin{aligned} \max_{\{c_t,k_t,b_t,m_t\}_{t=0}^{\infty}} \quad & \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t u(c_t, m_t) \\ s.t. \quad & f(k_{t-1}) + \tau_t + (1-\delta)k_{t-1} + \frac{(1+i_{t-1})b_{t-1}}{1+\pi_t} + \frac{m_{t-1}}{1+\pi_t} \\ & = c_t + k_{t+1} + m_t + b_t. \end{aligned}$$

问题的一阶条件为

$$\beta^t u(c_t, m_t) - \lambda_t = 0,$$

$$\lambda_{t+1}\left(f'(k_t) + 1 - \delta\right) - \lambda_t = 0,$$

$$\beta^t u_2(c_t, m_t) + \frac{\lambda_{t+1}}{1+\pi_{t+1}} - \lambda_t = 0,$$

$$\lambda_{t+1}\frac{1+i_t}{1+\pi_{t+1}} - \lambda_t = 0.$$

仿照之前的做法，联立相关的等式，我们得到一下最优解条件：

$$u_2(c_t, m_t) + \frac{\beta u_1(c_{t+1}, m_{t+1})}{1+\pi_{t+1}} = u_1(c_t, m_t),$$

$$\frac{1+i_t}{1+\pi_{t+1}} = f'(k_t) + 1 - \delta,$$

$$\frac{\beta u_1(c_{t+1}, m_{t+1})}{u_1(c_t, m_t)} = \frac{1+\pi_{t+1}}{1+i_t},$$

$$\frac{u_2(c_t, m_t)}{u_1(c_t, m_t)} = \frac{i_t}{1+i_t}.$$

注意到在新的写法下，在实际货币不变的稳态均衡中，如果名义货币供给量以 θ 的速率增长，$\tau^{ss} = \frac{\theta}{1+\theta} m^{ss}$。稳态均衡的条件为

$$\frac{1+i^{ss}}{1+\theta} = f'(k^{ss}) + 1 - \delta, \tag{1.15}$$

$$\frac{1+i^{ss}}{1+\theta} = \frac{1}{\beta}, \tag{1.16}$$

$$\frac{u_2(c^{ss}, m^{ss})}{u_1(c^{ss}, m^{ss})} = \frac{i^{ss}}{1+i^{ss}}, \tag{1.17}$$

$$c^{ss} = f(k^{ss}) - \delta k^{ss}. \tag{1.18}$$

在新的写法下，除了式(1.17)跟之前略有差别外，其他的都完全相同。

使用同样的方法，我们可以分析其他稳态均衡的存在。基本的结论和之前是相同的。注意到新的写法下，所以下标为 t 的变量都是在第 t 期就完全确定了的。这为我们处理带有随机外生冲击的动态模型提供了一些符号上的方便。

1.6 动态模型

现在我们考虑具有外生冲击的动态模型。我们假设生产技术收到一个随机外生冲击 z_t 的扰动，即 $y_t = f(k_{t-1}, z_t)$。这时的最优化问题可以写为

$$\begin{aligned}
\max_{\{c_t, k_t, b_t, m_t\}_{t=0}^{\infty}} \quad & \mathbb{E}_0 \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t u(c_t, m_t) \\
s.t. \quad & f(k_{t-1}, z_t) + \tau_t + (1-\delta) k_{t-1} + \frac{(1+i_{t-1}) b_{t-1}}{1+\pi_t} + \frac{m_{t-1}}{1+\pi_t} \\
& = c_t + k_t + m_t + b_t.
\end{aligned}$$

注意到现在问题中的各种变量都是随机变量。我们用 $\mathbb{E}_t$ 表示给定第 t 期的信息集下的条件期望。

这个问题的一阶条件为

$$\beta^t u_1(c_t, m_t) - \lambda_t = 0,$$

$$\mathbb{E}_t[\lambda_{t+1}\left(f'(k_t, z_{t+1}) + 1 - \delta\right)] - \lambda_t = 0,$$

$$\beta^t u_2(c_t, m_t) + \mathbb{E}_t \frac{\lambda_{t+1}}{1+\pi_{t+1}} - \lambda_t = 0,$$

$$\mathbb{E}_t\lambda_{t+1}\frac{1+i_t}{1+\pi_{t+1}}-\lambda_t=0.$$

由这些一阶条件可得

$$\beta\mathbb{E}_t\left[\frac{u_1(c_{t+1},m_{t+1})}{u_1(c_t,m_t)}(f'(k_t,z_{t+1})+1-\delta)\right]=1,$$

$$\frac{u_2(c_t,m_t)}{u_1(c_t,m_t)}=\frac{i_t}{1+i_t},$$

$$\beta\mathbb{E}_t\left[\frac{u_1(c_{t+1},m_{t+1})}{u_1(c_t,m_t)}\frac{1+i_t}{1+\pi_{t+1}}\right]=1.$$

我们需要确定系统中 $c_t,k_t,m_t,i_t,z_t,\pi_t$ 六个变量的动态。因而除了上面三个式子以及预算约束（已经加入了均衡下 $b_t=0$ 的条件）

$$f(k_{t-1},z_t)+(1-\delta)k_{t-1}=c_t+k_t$$

之外，我们还需要设定两个动态条件。首先，我们设名义货币的增长率为 θ_t，即

$$m_t=\frac{1+\theta_t}{1+\pi_t}m_{t-1}.$$

θ_t 的动态会在下面提到。其次，我们也将会在下面设定外生冲击 z_t 的动态。

接下来，我们就可以讨论外生的技术冲击和货币供给量的冲击如何影响经济体系的运行。为了简化动态分析的难度，我们使用对数线性化的技术。我们用上标 ^{ss} 来表示稳态均衡值表示，用

$$\hat{x}=\frac{x-x^{ss}}{x^{ss}}$$

表示 x 偏离其稳态均衡值的比例。我们假设 z 的动态由

$$\hat{z}_t=\rho_z\hat{z}_{t-1}+e_t^z$$

来表示，其中 $\rho_z\in(0,1)$ 是技术冲击的自相关系数，e_t 是一个随机扰动项。由于 θ,i 和 π 已经是增长率了，我们用 $\tilde{}$ 表示偏离量，即 $\tilde{\theta}=\theta-\theta^{ss}$. 我们设定

$$\tilde{\theta}_t=\rho_\theta\tilde{\theta}_{t-1}+\phi\hat{z}_{t-1}+e_t^\theta.$$

假设效用函数为 CES 形式

$$u(c,m)=\left(ac^{1-b}+(1-a)m^{1-b}\right)^{\frac{1}{1-b}},$$

生产函数为 Cobb-Douglas 形式

$$f(k,z)=zk^{\alpha}.$$

为了计算方便，对于 CES 效用函数，不妨记

$$Q=ac^{1-b}+(1-a)m^{1-b}.$$

一阶条件的线性化结果为

$$\begin{aligned}b\frac{(1-a)(m^{ss})^{1-b}}{Q^{ss}}&\left(\mathbb{E}_t\hat{m}_{t+1}-\hat{m}_t-\mathbb{E}_t\hat{c}_{t+1}+\hat{c}_t\right)\\&+\frac{f'(z^{ss},k^{ss})}{f'(z^{ss},k^{ss})+1-\delta}\left(\mathbb{E}_t\hat{z}_{t+1}+(\alpha-1)\hat{k}_t\right)=0,\end{aligned}$$

$$-b\left(\hat{m}_t-\hat{c}_t\right)=\frac{\tilde{i}_t}{i^{ss}(1+i^{ss})},$$

$$b\frac{(1-a)(m^{ss})^{1-b}}{Q^{ss}}\left(\mathbb{E}_t\hat{m}_{t+1}-\hat{m}_t-\mathbb{E}_t\hat{c}_{t+1}+\hat{c}_t\right)+\frac{\tilde{i}}{1+i^{ss}}-\mathbb{E}_t\frac{\tilde{\pi}_{t+1}}{1+\pi^{ss}}=0,$$

$$\frac{f(k^{ss},z^{ss})(\hat{z}_t+\alpha\hat{k}_{t-1})+(1-\delta)k^{ss}\hat{k}_{t-1}}{f(k^{ss},z^{ss})+(1-\delta)k^{ss}}=\frac{c^{ss}\hat{c}_t+k^{ss}\hat{k}_t}{c^{ss}+k^{ss}},$$

$$\hat{m}_t-\hat{m}_{t-1}=\frac{\tilde{\theta}_t}{1+\theta^{ss}}-\frac{\tilde{\pi}_t}{1+\pi^{ss}}.$$

以上的式子连同 $\hat{z}$ 和 $\tilde{\theta}$ 的动态共同构成了一个差分方程系统。在实际的计算中，我们添加了一个方程用以描述实际利率的动态：

$$\tilde{r}_t=\tilde{i}_t-\mathbb{E}_t\tilde{\pi}_{t+1}.$$

我们设定 $\alpha=0.36,\delta=0.019,\beta=0.989,a=0.997,b=3,\rho_z=0.9,\rho_\theta=0.69,\theta^{ss}=0.014,z^{ss}=1$。稳态均衡由(1.15)至(1.18)式给出。在稳态中，$r^{ss}=0.011,\frac{y^{ss}}{k^{ss}}=0.084,\frac{c^{ss}}{k^{ss}}=0.065,\frac{m^{ss}}{k^{ss}}=0.032.$

为了分析模型的动态，我们将描述动态的 8 个方程写成

$$\Gamma_0x_t=\Gamma_1x_{t-1}+\Psi e_t+\Pi\eta_t \tag{1.19}$$

的形式，其中 $x_t=(\hat{c}_t,\hat{m}_t,\hat{k}_t,\tilde{i}_t,\tilde{\pi}_t,\hat{z}_t,\tilde{\theta}_t,\tilde{r}_t)'$ 为模型中的变量，$e_t=(e_t^z,e_t^\theta)'$ 为外生冲击，$\eta_t=(\hat{c}_t-\mathbb{E}_{t-1}c_t,\hat{m}_t-\mathbb{E}_{t-1}m_t,\hat{\pi}_t-\mathbb{E}_{t-1}\pi_t,\hat{z}_t-\mathbb{E}_{t-1}z_t)'$ 为预期误差，$\Gamma_0,\Gamma_1,\Psi,\Pi$ 分别为 $8\times8,8\times8,8\times2,8\times4$ 维矩阵。我们使用 Sims (2001) 的方法求解模型并获得货币冲击和技术冲击的脉冲响应函数。

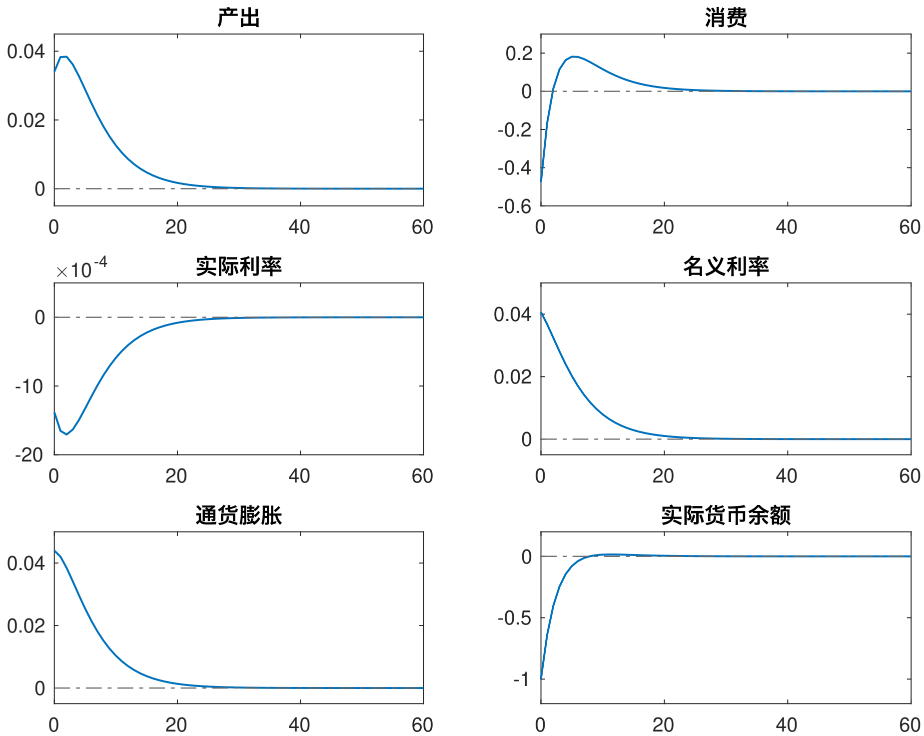


图 1.2: 货币效用函数模型脉冲响应函数（货币冲击）

图 1.2显示的是一个标准差大小的正向的未预期到的货币供给冲击（e_t^θ 冲击）对产出、消费、实际利率、名义利率、通货膨胀和实际货币余额的影响。图中画出了冲击产生之后的当期一直到 60 期之后的各经济变量的脉冲响应。显然，在动态转移过程中，货币已经不再是超中性的了。货币供给的增长率的变化会影响经济中的实际量的值。

图 1.3显示的是一个标准差大小的正向的未预期到的技术冲击（e_t^z 冲击）对于经济变量的影响。图中列出了三种不同的 ρ_z 取值（0.9，0.95，0.6）下各变量的脉冲响应函数。在这三种情况中，我们均设 $\phi = 0$，即货币供给增速不随经济受到的技术冲击而变化。很明显，外生的技术冲击的持久性性越大（即 ρ_z 越大），经济回到稳态均衡值所需要的时间就越久。

图 1.4则列出了不同 ϕ 值（$\rho_z = 0.9, \phi = 0, 0.5, -0.5$）下技术冲击的脉冲响应函数。

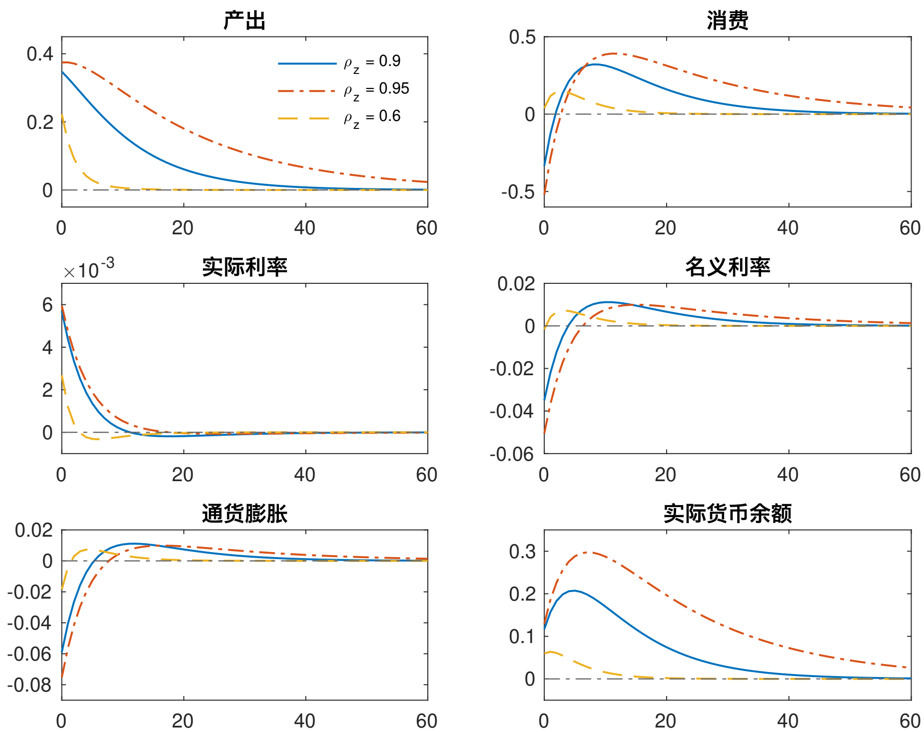


图 1.3: 货币效用函数模型脉冲响应函数（技术冲击，不同 ρ_z 值）

1.7 习题

假设代表性消费者每期有一个单位的时间可以分配用于工作 n_t 和休闲 ℓ_t。消费者的效用函数为

$$u(c_t, m_t, n_t) = \frac{\left[ac_t^{1-b} + (1-a)m_t^{1-b}\right]^{\frac{1-\Phi}{1-b}}}{1-\Phi} + \Psi\frac{(1-n_t)^{1-\eta}}{1-\eta},$$

生产函数为

$$f(k_{t-1}, n_t, z_t) = z_t k_{t-1}^{\alpha} n_t^{1-\alpha}.$$

模型的其他设定与上文中一样。设 $\Phi = 2, \eta = 1$.

1. 若 $n^{ss} = 1/3$，则 Ψ 的值应为多少?

2. 分析经济在受到货币和技术冲击时，产出、就业、实际利率、名义利率、通货膨胀和实际货币存量如何随时间发生变化。

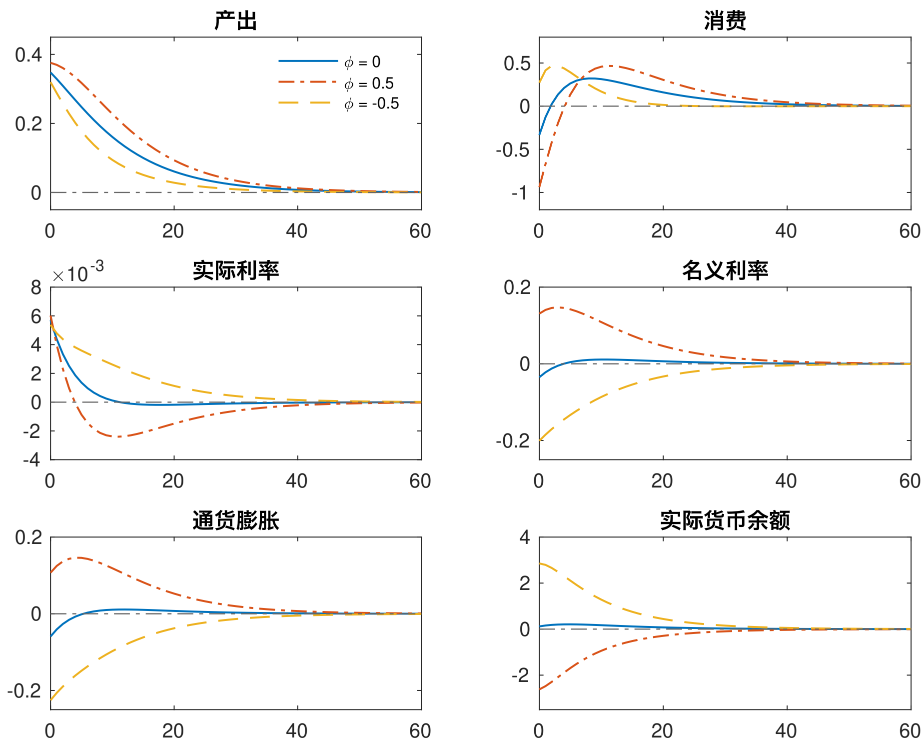


图 1.4: 货币效用函数模型脉冲响应函数（技术冲击，不同 ϕ 值）

3. 在其他参数不变的情况下，若将 b 设为 1，那么上面的结论会发生何种变化?

第二章　货币与交易

这一章我们考虑货币在交易中发挥作用的模型。

2.1　购物时间模型

假设人们消费时需要购物，购物需要花费时间。购物时间可以写成购物量 c_t 与所持有的实际货币 m_t 的函数

$$s_t = g(c_t, m_t).$$

假设购物量越大，购物所花时间越多，即 $g_1(c, m) > 0$。同时假设持有货币越多，就越容易买到想要购买的东西，购物所需的时间就越低，即 $g_2(c, m) \leq 0$。

设每期代表性消费者有一个单位的时间，可以分配用以休闲（ℓ_t）、工作（n_t）和购物（s_t）。消费和休闲产生效用。那么代表性的消费者的单期效用函数为

$$u(c_t, 1 - n_t - s_t) = u(c_t, 1 - n_t - g(c_t, m_t)).$$

注意到在购物时间模型里，消费者的预算约束跟前一章里的设定相比并不发生变化。这意味着，购物时间模型可以写成货币效用函数模型的形式。因而我们可以利用前一章的方法对这一模型进行分析。

2.2　实际资源成本模型

在这一模型里，假设人们购买消费品时需要耗费一定的实际资源，并且该成本随购物量增大而增大，随着实际货币持有量增大而减小。在这一模型中，单期的效用函数依然是 $u(c_t)$ 或者 $u(c_t, n_t)$（取决于是否考虑劳动这一

生产要素)，但消费这的预算约束变为

$$f(k_{t-1})+\tau_t+(1-\delta)k_{t-1}+\frac{(1+i_{t-1})b_{t-1}}{1+\pi_t}+\frac{m_{t-1}}{1+\pi_t}=c_t+k_t+m_t+b_t+\Upsilon(c_t,m_t).$$

其中 Υ 为购物的成本函数。

如果我们重新定义标准化过的消费量 $\bar{c}_t=c_t+\Upsilon(c_t,m_t)$，那么我们可以得到 c_t 关于 $\bar{c}_t$ 和 m_t 的表达式，即 $c_t=h(\bar{c}_t,m_t)$，则我们的最优化问题可以写作

$$\begin{aligned}\max_{\{c_t,k_t,b_t,m_t\}_{t=0}^{\infty}} \quad & \sum_{t=0}^{\infty}\beta^t u(h(\bar{c}_t,m_t))\\ s.t. \quad & f(k_{t-1})+\tau_t+(1-\delta)k_{t-1}+\frac{(1+i_{t-1})b_{t-1}}{1+\pi_t}+\frac{m_{t-1}}{1+\pi_t}\\ & =\bar{c}_t+k_{t+1}+m_t+b_t.\end{aligned}$$

跟购物时间模型一样，我们把实际资源成本模型也写成了货币效用模型的形式。要注意的是，这里的消费是重新定义过的。

2.3 预留现金模型

预留现金模型（cash in advance）假设人们在购买 c_t 的商品前，必须持有相同数量的货币。因而消费者在原来的预算约束上，又多了一条预留现金约束，即

$$P_tc_t\le M_{t-1}+T_t+(1+i_{t-1})B_{t-1}-B_t.$$

由于持有货币有机会成本，上面的约束实际是紧的，即等号成立。写成实际量的形式则为

$$c_t=\frac{m_{t-1}}{1+\pi_t}+\tau_t+\frac{1+i_{t-1}}{1+\pi_t}b_{t-1}-b_t.$$

消费者的问题可以写为

$$\begin{aligned}\max_{\{c_t,k_t,b_t,m_t\}_{t=0}^{\infty}} \quad & \mathbb{E}_0\sum_{t=0}^{\infty}\beta^t u(c_t,n_t)\\ s.t. \quad & f(k_{t-1},n_t,z_t)+\tau_t+(1-\delta)k_{t-1}+\frac{(1+i_{t-1})b_{t-1}}{1+\pi_t}+\frac{m_{t-1}}{1+\pi_t}\\ & =c_t+k_t+m_t+b_t,\\ & c_t=\frac{m_{t-1}}{1+\pi_t}+\tau_t+\frac{1+i_{t-1}}{1+\pi_t}b_{t-1}-b_t.\end{aligned}$$

令预算约束对应的拉格朗日乘子为 λ_t，预留现金约束对应的拉格朗日乘子为 μ_t。则问题的一阶条件为

$$\beta^t u_1(c_t, n_t) - \lambda_t - \mu_t = 0, \tag{2.1}$$

$$\beta^t u_2(c_t, n_t) + \lambda_t f_2(k_{t-1}, n_t, z_t) = 0, \tag{2.2}$$

$$-\lambda_t + \mathbb{E}_t\left[(\lambda_{t+1} + \mu_{t+1})\frac{1}{1+\pi_{t+1}}\right] = 0, \tag{2.3}$$

$$-(\lambda_t + \mu_t) + \mathbb{E}_t\left[(\lambda_{t+1} + \mu_{t+1})\frac{1+i_t}{1+\pi_{t+1}}\right] = 0, \tag{2.4}$$

$$-\lambda_t + \mathbb{E}_t\left[\lambda_{t+1}(f_1(k_t, n_{t+1}, z_{t+1}) + 1 - \delta)\right] = 0. \tag{2.5}$$

由式(2.1)和(2.4)我们可得欧拉方程

$$\beta\mathbb{E}_t\left[\frac{u_1(c_{t+1}, n_{t+1})}{u_1(c_t, n_t)}\frac{1+i_t}{1+\pi_{t+1}}\right] = 1. \tag{2.6}$$

式(2.6)结合(2.1)和(2.3)可得

$$\lambda_t = \frac{1}{1+i_t}\beta^t u_1(c_t, n_t), \quad \mu_t = \frac{i_t}{1+i_t}\beta^t u_1(c_t, n_t).$$

以上的结果代入(2.2)和(2.5)分别可得

$$-\frac{u_2(c_t, n_t)}{u_1(c_t, n_t)} = \frac{1}{1+i_t}f_2(k_{t-1}, n_t, z_t), \tag{2.7}$$

$$\beta\mathbb{E}_t\left[\frac{u_1(c_{t+1}, n_{t+1})}{u_1(c_t, n_t)}\frac{1+i_t}{1+i_{t+1}}(f_1(k_t, n_{t+1}, z_{t+1}) + 1 - \delta)\right] = 1. \tag{2.8}$$

与上一章类似，式(2.6)、(2.7)、(2.8)、预算约束、预留现金约束、θ_t 的定义式、z_t 的外生动态、θ_t 的外生动态共同构成了一个八方程系统描述 $c_t, n_t, k_t, b_t, m_t, i_t, z_t, \theta_t$ 的动态。我们可以类似地计算稳态均衡并且得到外生冲击的脉冲响应函数。例如我们可以设

$$u(c, n) = \frac{c^{1-\Phi}}{1-\Phi} + \Psi\frac{(1-n)^{1-\eta}}{1-\eta}.$$

第三章　财政与货币

这一章我们考虑财政与货币的互动。考虑这一互动至少有两方面的原因。第一是最优通货膨胀率。在基础的货币效用模型中，私人持有货币的机会成本为 i_t 或者 $\frac{i_t}{1+i_t}$，而发行货币的成本为 0。如果这两个值不相等，那么会带来整体经济的效率损失。故从一个社会计划者看来，最优的通货膨胀率为利率等于 0 时的通货膨胀率，即最优通货膨胀率应该为 $\beta-1$，为负值。但是当我们考虑经济中存在公共部门并且公共部门需要通过扭曲性的税收来为其支出融资的话，通货膨胀带来的通胀税可以抵消为了维持预算平衡所需要的扭曲性税收。此时最优通货膨胀率就会发生变化。

另一方面，财政政策可能会影响价格水平。在基础的货币效用模型中，通货膨胀率与货币供给的增速保持相同。货币政策完全决定了经济中的价格水平及通货膨胀。然而在含有公共部门的经济体系中，财政和货币政策的互动关系决定了通货膨胀既可以由货币政策决定，也可以由财政政策决定，或者是由他们同时决定。

在财政政策与货币政策的互动中，最关键的是政府的预算约束。假设在 $t-1$ 期公众购买的将在 t 名义利率为 i_{t-1} 的政府债务的名义水平为 B_{t-1}，则我们有

$$G_t + (1+i_{t-1})B_{t-1} = T_t + B_t + (H_t - H_{t-1}),$$

其中 G_t 为政府购买支出，T_t 为政府的财政（税收）收入，H_t 为央行发行的基础货币（高能货币）。若两边除以 P_t，我们得到约束的实际量形式：

$$g_t + \frac{1+i_{t-1}}{1+\pi_t}b_{t-1} = \tau_t + b_t + h_t - \frac{1}{1+\pi_t}h_{t-1}.$$

根据上面的式子，政府的总的支出，即政府购买加上政府需要偿还的债券的利息，需要通过以下三种渠道来进行融资。一是通过征税。二是通过发行新

的政府债券，三是通过铸币税，即

$$s_t = h_t - \frac{1}{1+\pi_t}h_{t-1} = (h_t - h_{t-1}) + \frac{\pi_t}{1+\pi_t}h_{t-1}.$$

我们如果定义政府的总债务水平 $d_t = b_t + h_t$，那么预算约束式可以写成

$$g_t + \frac{1+i_{t-1}}{1+\pi_t}d_{t-1} = \tau_t + d_t + \frac{i_{t-1}}{1+\pi_t}h_{t-1}.$$

我们也可以把 $\frac{i_{t-1}}{1+\pi_t}h_{t-1}$ 这一项定义为铸币税。这一定义更加直观地反映了政府印钞来还债时的逻辑。

由于政府总是可以通过发新债的方法来为其活动融资，单期的预算约束对于政府实际并没有约束作用。真正起到约束作用的是跨期的预算约束，即

$$\sum_{t=0}^{\infty}\frac{g_t}{\prod_{j=0}^{t}\frac{1+i_j}{1+\pi_{j+1}}} = \sum_{t=0}^{\infty}\frac{\tau_t}{\prod_{j=0}^{t}\frac{1+i_j}{1+\pi_{j+1}}} + \sum_{t=0}^{\infty}\frac{s_t}{\prod_{j=0}^{t}\frac{1+i_j}{1+\pi_{j+1}}}$$

在后面的分析中，为了方便起见，我们不区分 H_t 与 M_t。H_t 与 M_t 的具体关系取决于 M_t 的定义。

3.1 货币主义算术

Sargent et al. (1981) 用他们称之为"令人不悦的货币主义算术（unpleasant monetarist arithmetic）"来说明货币政策不一定能决定长期的通货膨胀。他们将政府的预算约束写成

$$g_t + (1 + r_{t-1})b_{t-1} = \tau_t + b_t + \frac{M_t - M_{t-1}}{P_t},$$

其中 r_t 为实际利率，并且假设实际利率不随时间发生变化。同时他们假设政府的购买支出 g_t 和税收收入 τ_t 的路径是给定。在第 0 至第 T 期，货币政策是给定的，第 0 期的名义货币供给为 M_0，之后以 θ 的速率增加直至第 T 期。在第 0 至第 T 期间，由于货币供给是给定的，政府债券被动调整从而使政府收支平衡。T 开始期以后，政府的财政政策的原则变为保持实际政府债券量不变，即于所有 $t > T$，$b_t = B_T$。此时货币供给需要被动调整以保证铸币税收入能够平衡政府的财政收支。

他们进一步假设货币需求是货币数量论的形式，即 $PY = HV$，并且总产出 Y 和货币流通速度 V 都不变。因而物价水平是货币供给量的固定倍

数，记作 $P_t = \frac{1}{h}H_t$. 叠加当期的政府预算约束，我们可得

$$b_T = (1+r)^T b_0 + \sum_{t=1}^{T}(1+r)^{T-t}(g_t - \tau_t) - \frac{h\theta}{1+\theta}\sum_{j=0}^{T-1}(1+r)^j.$$

对于 $t > T$，我们有

$$\frac{P_t - P_{t-1}}{P_t} = \frac{1}{h}(g_t - \tau_t + rb_T).$$

当在 0 至 T 期时，如果我们降低货币供给增长率，会降低这段时期内的通货膨胀率，但是会使 b_T 增加。由于 b_T 的增加导致将来的利息支付增加，而政府又只能通过铸币税来支付这些额外的利息，故而 t 期以后的通货膨胀率会增加。

Sargent et al. (1981) 还构建了一个模型。在模型中当期货币增长率的下降反而会导致当期通货膨胀率的上升。

3.2 货币政策与财政政策的互动

我们现在介绍 Leeper (1991) 的货币政策与财政政策互动模型。假设代表性消费者面临的优化问题为

$$\begin{aligned} \max \quad & \mathbb{E}_0 \sum_{t=0}^{\infty}\beta^t(\ln c_t + \ln m_t) \\ s.t. \quad & c_t + m_t + b_t + \tau_t = y + \frac{m_{t-1}}{1+\pi_t} + \frac{1+i_{t-1}}{1+\pi_t}b_{t-1}, \end{aligned}$$

其中 y 为每期固定的禀赋收入。

消费者的一阶最优条件为

$$\beta\mathbb{E}_t\left[\frac{1+i_t}{1+\pi_{t+1}}\right] = 1, \tag{3.1}$$

$$m_t = c^{ss}\frac{1+i_t}{i_t}. \tag{3.2}$$

政府的预算约束为

$$b_t + m_t + \tau_t = g + \frac{m_{t-1}}{1+\pi_t} + \frac{1+i_{t-1}}{1+\pi_t}b_{t-1}, \tag{3.3}$$

其中 g 为政府购买的支出，假设为定值。

假设货币政策的设定使得

$$i_t = \alpha_0 + \alpha\pi_t + \theta_t,$$

$$\theta_t = \rho_\theta \theta_{t-1} + \varepsilon_t^\theta,$$

其中 θ_t 为一个一阶自回归的扰动项，表示未预期到的货币政策冲击。财政政策的设定为

$$\tau_t = \gamma_0 + \gamma b_{t-1} + \psi_t,$$

$$\psi_t = \rho_\psi \psi_{t-1} + \varepsilon_t^\psi,$$

其中 ψ_t 为一个一阶自回归的扰动项，表示未预期到的财政政策冲击。

将(3.2)和政策规则代入(3.1)和(3.3)并进行线性化，我们得到如下的两个方程的动态系统：

$$\mathbb{E}_t \tilde{\pi}_{t+1} = \alpha\beta\tilde{\pi}_t + \beta\theta_t, \tag{3.4}$$

$$\phi_1\tilde{\pi}_t + \tilde{b}_t + \phi_2\tilde{\pi}_{t-1} - (\beta^{-1} - \gamma)\tilde{b}_{t-1} + \phi_3\theta_t + \psi_t + \phi_4\theta_{t-1} = 0,$$

其中，

$$\phi_1 = \frac{c^{ss}}{i^{ss}}\left[\frac{1}{\beta(1+\pi^{ss})} - \frac{\alpha}{i^{ss}}\right] + \frac{b^{ss}}{\beta(1+\pi^{ss})},$$

$$\phi_2 = \frac{\alpha}{1+\pi^{ss}}\left[\frac{c^{ss}}{(i^{ss})^2} - b\right],$$

$$\phi_3 = -\frac{c^{ss}}{(i^{ss})^2},$$

$$\phi_4 = \frac{1}{1+\pi^{ss}}\left[\frac{c^{ss}}{(i^{ss})^2} - b\right].$$

将以上的两方程系统写成(1.19)的形式。注意到

$$\Gamma_0^{-1}\Gamma_1 = \begin{bmatrix} \alpha\beta & 0 \\ -(\alpha\beta\phi_1 + \phi_2) & \beta^{-1} - \gamma \end{bmatrix}$$

的两个特征根为 $\alpha\beta$ 和 $\beta^{-1} - \gamma$, Leeper (1991) 将动态系统的解根据参数取值分为四种情况。

- 当 $|\alpha\beta| > 1$ 且 $|\beta^{-1} - \gamma| < 1$ 时，系统有一个唯一的不发散的解。此时称货币政策是“积极”，财政政策是“消极”的。
- 当 $|\alpha\beta| < 1$ 且 $|\beta^{-1} - \gamma| > 1$ 时，系统有一个唯一的不发散的解。此时称货币政策是“消极”，财政政策是“积极”的。

- 当 $|\alpha\beta| < 1$ 且 $|\beta^{-1} - \gamma| < 1$ 时，系统有无穷多个不发散的解。此时称货币政策是“消极”，财政政策是“消极”的。

- 当 $|\alpha\beta| > 1$ 且 $|\beta^{-1} - \gamma| > 1$ 时，系统没有不发散的解。此时称货币政策是“积极”，财政政策是“积极”的。

当货币政策积极，财政政策消极的时候，通货膨胀可以通过将(3.4)向前解得到，即

$$\tilde{\pi}_t = \frac{\beta\theta_t}{\rho_\theta - \alpha\beta}.$$

通货膨胀由货币政策完全决定。政府债务水平由货币政策和财政政策联合决定。

当财政政策积极，货币政策消极当时候，为了更好地说明情况，我们考虑 $\alpha = 0, \gamma = 0$ 的特殊情形。此时我们可解得

$$\tilde{\pi}_t = -\frac{1}{\phi_1}\psi_t + \beta\theta_{t-1},$$

$$\tilde{b}_t = \frac{c^{ss}}{(i^{ss})^2}\theta_t,$$

$$\tilde{m}_t = -\frac{c^{ss}}{(i^{ss})^2}\theta_t.$$

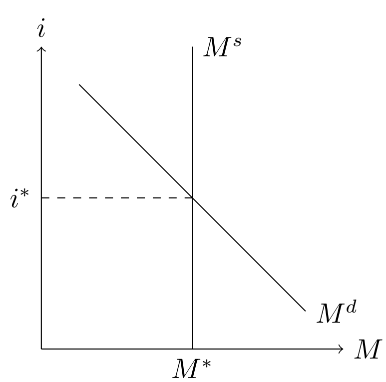
通货膨胀由财政政策和历史的货币政策决定。当期的货币政策只决定政府总负债的构成成分（债券还是货币）。

第四章　货币与宏观经济

货币政策对于总产出、就业、物价等宏观经济变量的影响过程，称为货币政策的传导机制。这一章我们首先讨论传统的货币与宏观经济模型。后面我们引入新凯恩斯模型。

4.1　利率决定理论

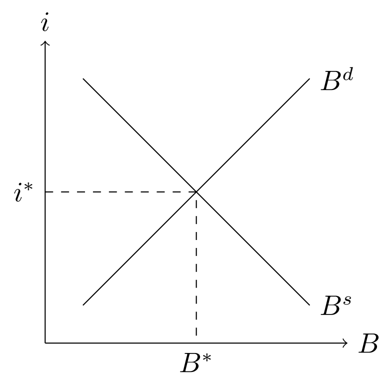
我们介绍两种传统的利率决定的理论，即凯恩斯的流动性偏好理论和可贷资金理论。凯恩斯的流动性偏好理论从货币市场的角度出发考虑利率是如何决定的。凯恩斯认为，货币供给由货币当局决定，短期内可以认为是不变的。因而图中的货币的供给曲线是一条垂直的直线。持有货币相对于其他生息的资产而言的机会成本是利率的增函数，因而货币的需求曲线是向下倾斜的。货币的供给曲线与需求曲线交点对应的利率则为凯恩斯流动性偏好理论决定的均衡利率。



在流动性偏好理论中，收入水平的上升会提高货币需求，进而引起利率上升。价格水平的上升会导致实际货币余额下降，进而会引致对货币需求的

上升，从而引起利率上升。这与我们在货币效用函数模型中推出的货币需求函数的结论是一致的。当央行增加货币供给时，货币供给曲线向右移动，均衡利率有下降。货币供给增加还会引起收入、价格和通货膨胀预期的变化。此三者的变化均会使货币需求曲线右移，因而货币供给增加对于利率的影响的总的方向是不确定的，取决于它引致的需求变化的大小和时滞。

可贷资金理论则从债券市场出发考虑利率是如何决定的。债券购买相当于为市场提供资金，因而是资金的供给方。债券的需求量是利率的增函数，因而债券的需求曲线是向上倾斜的。债券发行相当于在市场上借入资金，因而是自己的需求方。债券供给量是利率的减函数，因而债券的供给曲线是向下倾斜的。两个曲线的交点对应的利率就是均衡利率。



影响债券需求的因素有财富水平、债券相对于替代资产的预期收益率、债券相对于替代资产的风险、债券相对于替代资产的流动性等。影响债券供给的因素有企业等部门的投资机会的盈利能力、预期通货膨胀、政府经济活动等。

与货币效用模型对比，上面的两个利率决定理论都是货币效用模型中的某些局部。货币效用模型同时考虑了货币市场和债券市场在决定利率以及其他经济变量中的作用。

4.2 IS-LM 模型

货币效用模型中假设价格调整是具有完全的弹性的。当经济状况发生变化时价格可以迅速完全地进行调整。传统的 IS-LM 模型则假设价格在短期中是刚性的，即短期中价格水平是不变的。经济的产出和利率由商品市场

和货币市场的均衡来决定。

在商品市场中，若不考虑政府购买和进出口，总产出（总收入）则为消费与投资之和，即

$$Y = C + I.$$

若认为消费是总收入的增函数，记做 $Y = C(Y), 0 < C'(Y) < 1$，投资为利率的减函数，记做 $I = I(i), I'(i) < 0$，则有

$$Y = C(Y) + I(i).$$

上式隐含的总产出和利率的关系，构成了 IS 曲线。对上式全微分，我们得到

$$\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}Y} = \frac{1 - C'(Y)}{I'(i)} < 0.$$

即 IS 曲线为一条向下倾斜的曲线。

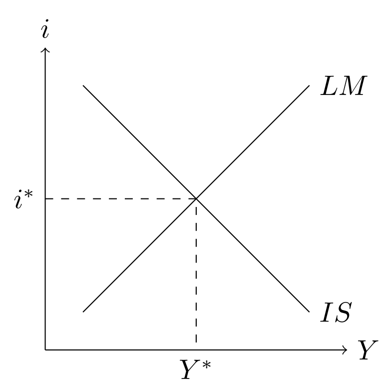
在货币市场，货币需求由流动性偏好理论决定，记做

$$M^d = f(Y, i), \qquad f_1(Y, i) > 0, f_2(Y, i) < 0.$$

若货币供给量为 M，则货币市场处在均衡时，有 $M = f(Y, i)$。上式隐含的总产出与利率的关系，构成了 LM 曲线。对上式进行全微分，我们得到

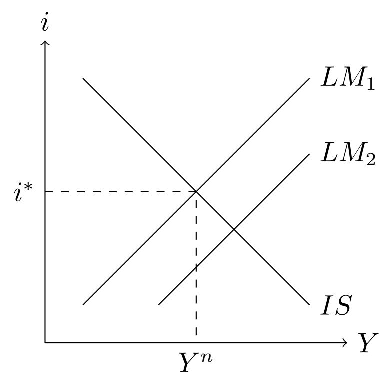
$$\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}Y} = -\frac{f_1(Y, i)}{f_2(Y, i)} > 0.$$

即 LM 曲线为一条向上倾斜的曲线。

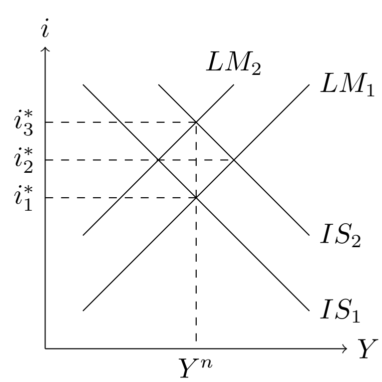


IS 与 LM 曲线的交点，即为商品市场与货币市场同时达到均衡时经济所处的点。

由于 IS-LM 模型假设价格是刚性的，因而在使用 IS-LM 进行长期分析时，需要引入自然率的概念。产出自然率是指在价格水平没有上升或下降压力时的总产出。作为例子，我们先假设经济处在自然率水平的均衡上。此时两条曲线分别为 IS_1 和 LM_1，总产出为 Y^n。当货币供应量增加时，LM 曲线右移至 LM_2，产出超过自然率水平，物价开始上升。由于 IS 曲线衡量的是实际量，不随价格水平发生变化，因而 IS 曲线的位置不变。价格上升使得货币需求增加，LM 曲线逐渐左移，直到回复到 LM_1 的水平。此时产出恢复到自然率的水平，价格没有进一步变动的压力。



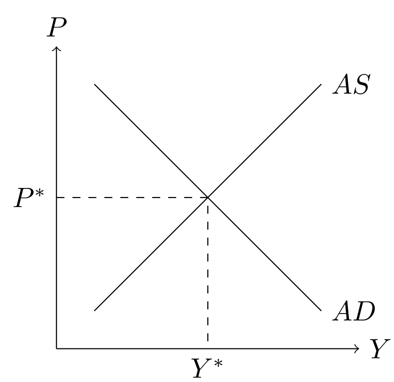
我们再来看财政政策的影响。假设经济处于自然率水平的均衡上。当政府支出增加时，IS 曲线右移至 IS_2, 利率上升至 i_2^*，产出上升至 Y_2。产出超过自然率水平，物价开始上升。高物价使得货币需求上升，LM 曲线向左移动。直至 LM 曲线与 IS_2 的交点对应的产出水平为 Y^n 时，物价稳定，LM 曲线才没有进一步移动的趋势。在 IS-LM 模型中，财政政策在长期中只有挤出效应。上升的利率挤出了投资和净出口，总产出是不变的。



4.3 总需求总供给模型

经济的总需求曲线描述了需求侧物价和产出之间的关系。总需求曲线基于 IS-LM 模型导出。当价格上升时，实际货币余额下降，货币需求上升，LM 曲线左移，产出下降。因而总需求曲线是一条向下的曲线。

古典经济学派认为，工资和物价具有完全弹性。在不同的价格水平下，若劳动力市场出现供需不平衡的情况，工资就会进行调整，使得就业一直维持在充分就业的状态。总产出因而也一直维持在充分就业产出的水平。因而古典学派的总供给曲线是一条位于充分就业水平上的直线。凯恩斯认为短期内价格是刚性的，因而凯恩斯的总供给曲线是一条水平线。这两种都是极端的情况。而现实中的物价和工资既不是完全弹性的，也不是完全刚性的，而是具有某种粘性的。常规的总供给曲线曲线因而介于两者之间，为向上倾斜的曲线。



4.4 新凯恩斯模型

新凯恩斯模型在价格完全弹性的货币效用模型基础上，引入了名义工资或价格粘性。在最基本的模型中，我们不考虑资本，只考虑劳动作为生产要素。基本模型由代表性消费者、垄断竞争的厂商以及中央银行构成。

4.4.1 消费者问题

代表性消费者的最优化问题为

$$\begin{aligned}\max \quad & \mathbb{E}_0\sum_{t=0}^{\infty}\beta^t\left[\frac{c_t^{1-\sigma}}{1-\sigma}+\gamma\frac{m_t^{1-b}}{1-b}-\chi\frac{n_t^{1+\eta}}{1+\eta}\right]\\ s.t.\quad & c_t+m_t+b_t=w_tn_t+\frac{m_{t-1}}{1+\pi_t}+\frac{(1+i_{t-1})b_{t-1}}{1+\pi_t}+\Pi_t,\end{aligned}$$

其中，c_t 最终消费品，m_t 为实际货币余额，n_t 为劳动供给，w_t 为实际工资，b_t 为实际债券持有量，i_t 为名义利率，π_t 为通货膨胀，Π_t 为消费者从企业得到的实际利润。家庭问题的一阶条件为

$$\beta\mathbb{E}_t\left[\frac{c_{t+1}^{-\sigma}}{c_t^{-\sigma}}\frac{1+i_t}{1+\pi_{t+1}}\right]=1, \tag{4.1}$$

$$\frac{\gamma m_t^{-b}}{c_t^{-\sigma}}=\frac{i_t}{1+i_t}, \tag{4.2}$$

$$\frac{\chi n_t^{\eta}}{c_t^{-\sigma}}=w_t. \tag{4.3}$$

4.4.2 最终消费品生产

最终消费品由不同厂商的中间产品组成。假设企业的数量为测度为 1 的连续统，消费者对于标号为 j 的厂商生产的中间品的需求为 c_{tj}，该中间品的价格为 p_{tj}，则中间产品的最优组合问题为

$$\begin{aligned}\min \quad & \int_0^1 p_{tj}c_{tj}\mathrm{d}i\\ s.t.\quad & c_t=\left[\int_0^1 c_{tj}^{\frac{\theta-1}{\theta}}\mathrm{d}j\right]^{\frac{\theta}{\theta-1}}.\end{aligned}$$

构造拉格朗日函数

$$\mathcal{L}=\int_0^1 p_{tj}c_{tj}\mathrm{d}i-\lambda_t\left(\left[\int_0^1 c_{tj}^{\frac{\theta-1}{\theta}}\mathrm{d}j\right]^{\frac{\theta}{\theta-1}}-c_t\right).$$

对 c_{tj} 求一阶条件可得

$$p_{tj}-\lambda_t\left[\int_0^1 c_{tj}^{\frac{\theta-1}{\theta}}\mathrm{d}j\right]^{\frac{1}{\theta-1}}c_{tj}^{-\frac{1}{\theta}}=0,$$

即

$$c_{tj} = \left(\frac{p_{tj}}{\lambda_t}\right)^{-\theta} c_t.$$

将上式代回一阶条件可得

$$\lambda_t = \left(\int_0^1 p_{tj}^{1-\theta} \mathrm{d}j\right)^{\frac{1}{1-\theta}}.$$

注意到上式给出的是最终消费品的影子价格。因而我们不妨定义 $P_t = \left(\int_0^1 p_{tj}^{1-\theta} \mathrm{d}j\right)^{\frac{1}{1-\theta}}$ 为最终消费品的价格，即物价水平。中间产品的需求则为

$$c_{tj} = \left(\frac{p_{tj}}{P_t}\right)^{-\theta} c_t.$$

4.4.3 中间厂商问题

假设中间品厂商的生产技术为 $y_{tj} = z_t n_{tj}^{1-\alpha}$，其中 z_t 衡量技术水平，n_{tj} 是 j 企业雇佣的劳动力的数量。我们在这里引入价格粘性，即在每一期，只有 $(1-\omega)$ 比例的企业能够调整其产品价格，剩下 ω 比例的企业只能维持上一期的产品价格水平。故对于一个在 s 期能够调整其价格的企业而言，其最优化问题为

$$\max_{p_{sj}^*} \quad \mathbb{E}_s \sum_{i=0}^{\infty} \omega^i Q_{s,s+i} \left[\frac{p_{sj}^*}{P_{s+i}} \left(\frac{p_{sj}^*}{P_{s+i}}\right)^{-\theta} c_{s+i} - \varphi_{s+i,j}^* \left(\frac{p_{sj}^*}{P_{s+i}}\right)^{-\theta} c_{s+i}\right],$$

其中 p_{sj}^* 为这个企业在 s 期选择的价格。$\varphi_{s+i,j}^* = \frac{w_{s+i}}{(1-\alpha) z_{s+i} (n_{s+i,j}^*)^{-\alpha}}$ 为这一在 s 期时选择了价格的企业在后面的所有期都不能改变价格情况下每期的边际成本。$Q_{s,s+i}$ 为第 s 和第 $s+i$ 期之间的实际折现因子。假设模型中的企业由消费者拥有，那么恰当的贴现因子应由将来和现在的消费的边际效用来确定，即

$$Q_{s,s+i} = \frac{\beta^i c_{s+i}^{-\sigma}}{c_s^{-\sigma}}.$$

将折现因子的定义和中间品的需求函数代入可调整价格企业的最优化问题，我们得到问题的一阶条件：

$$\mathbb{E}_s \sum_{i=0}^{\infty} \omega^i Q_{s,s+i} \left[(1-\theta)\frac{p_{sj}^*}{P_{s+i}} + \theta \varphi_{s+i,j}^*\right] \frac{1}{p_{sj}^*} \left(\frac{p_{sj}^*}{P_{s+i}}\right)^{-\theta} c_{s+i} = 0,$$

即

$$\frac{p_{sj}^*}{P_s} = \frac{\theta}{\theta-1}\frac{\mathbb{E}_s \sum_{i=0}^{\infty}\omega^i\beta^i c_{s+i}^{1-\sigma}\varphi_{s+i,j}^*\left(\frac{P_{s+i}}{P_s}\right)^{\theta}}{\mathbb{E}_s \sum_{i=0}^{\infty}\omega^i\beta^i c_{s+i}^{1-\sigma}\left(\frac{P_{s+i}}{P_s}\right)^{\theta-1}}. \tag{4.4}$$

注意上式作为最优条件，是对那些在 s 期可以调整价格的企业而言的。当价格可以灵活调整，即 $\omega=0$ 时，我们有

$$\frac{p_{sj}^*}{P_s} = \frac{\theta}{\theta-1}\varphi_{sj}^*,$$

即企业的定价为其边际成本乘以其价格加成 $\mu = \frac{\theta}{\theta-1}$。这是垄断竞争的标准结论。当价格有粘性时，企业的定价就与此标准结论不同，因为企业在制订价格时，需要考虑到将来不能修改价格的可能。

在任意一期，由于那些可以调整价格的企业事前是对称的，并且这些企业在调价期的行为不取决于调价期之前的状态，因而他们选择的调整后的价格是相同的，即 $p_{tj}^* = p_t^*$。同样的道理适用于其他带星号的变量。我们假设可以修改价格的企业在所有的企业中是均匀分布的，因而物价总水平的动态服从

$$P_t = \left[(1-\omega)(p_t^*)^{1-\theta} + \omega\int_0^1 p_{t-1,j}^{1-\theta}\mathrm{d}j\right]^{\frac{1}{1-\theta}},$$

即

$$P_t^{1-\theta} = (1-\omega)(p_t^*)^{1-\theta} + \omega P_{t-1}^{1-\theta}. \tag{4.5}$$

均衡时市场出清要求

$$y_t = c_t, \tag{4.6}$$

$$n_t = \int_0^1 n_{tj}\mathrm{d}j = \int_0^1\left(\frac{c_{tj}}{z_t}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}\mathrm{d}j = \left(\frac{c_t}{z_t}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}\int_0^1\left(\frac{p_{tj}}{P_t}\right)^{-\frac{\theta}{1-\alpha}}\mathrm{d}j \tag{4.7}$$

式(4.1)至(4.7)这 7 个式子加上货币政策构成了新凯恩斯模型的动态方程组。

将式(4.5)在通货膨胀为 0 的稳态附近进行对数线性化我们可得

$$\hat{p}_t^* = \frac{1}{1-\omega}\hat{P}_t - \frac{\omega}{1-\omega}\hat{P}_{t-1} = \frac{\omega}{1-\omega}\pi_t + \hat{P}_t. \tag{4.8}$$

当在稳态时，我们有 $p_j^{ss} = P^{ss}$，因而式(4.7)对数线性化得到

$$\begin{aligned}\hat{n}_t &= \frac{1}{1-\alpha}(\hat{c}_t - \hat{z}_t) + \int_0^1 \frac{(p_j^{ss}/P^{ss})^{-\frac{\theta}{1-\alpha}}}{\int_0^1 (p_j^{ss}/P^{ss})^{-\frac{\theta}{1-\alpha}}\mathrm{d}j}\left(-\frac{\theta}{1-\alpha}\right)(\hat{P}_t - \hat{p}_{tj})\mathrm{d}j \\ &= \frac{1}{1-\alpha}(\hat{c}_t - \hat{z}_t) - \frac{\theta}{1-\alpha}\int_0^1(\hat{P}_t - \hat{p}_{tj})\mathrm{d}j.\end{aligned}$$

用同样的方法对数线性化 P_t 的定义式我们得到 $\int_0^1(\hat{P}_t - \hat{p}_{tj})\mathrm{d}j = 0$。故而

$$\hat{n}_t = \frac{1}{1-\alpha}(\hat{c}_t - \hat{z}_t) = \frac{1}{1-\alpha}(\hat{y}_t - \hat{z}_t). \tag{4.9}$$

定义经济的平均边际成本为

$$\varphi_t = \frac{w_t}{(1-\alpha)z_t n_t^{-\alpha}},$$

对数线性化可得

$$\hat{\varphi}_t = \hat{w}_t - \hat{z}_t + \alpha\hat{n}_t = \hat{w}_t - \hat{z}_t + \frac{\alpha}{1-\alpha}(\hat{y}_t - \hat{z}_t).$$

对于在 s 期调整价格的企业而言，利用 $\varphi^*_{s+i,j} = \frac{w_{s+i}}{(1-\alpha)z_{s+i}(n^*_{s+i,j})^{-\alpha}}$ 以及 $y_{tj} = z_t n_{tj}^{1-\alpha}$ 我们可得

$$\hat{\varphi}^*_{s+i} = \hat{w}_{s+i} - \hat{z}_{s+i} + \alpha\hat{n}^*_{s+i} = \hat{w}_{s+i} - \hat{z}_{s+i} + \frac{\alpha}{1-\alpha}(\hat{y}^*_{s+i} - \hat{z}_{s+i}),$$

其中 y^*_{s+i} 为在 s 期调整价格的企业在之后不能调整价格情况下的产出。由于

$$y_{s+i} = \left(\frac{p^*_s}{P_{s+i}}\right)^{-\theta} c_{s+i} = \left(\frac{p^*_s}{P_{s+i}}\right)^{-\theta} y_{s+i},$$

结合上三式我们有

$$\hat{\varphi}^*_{s+i} = \hat{\varphi}_{s+i} + \frac{\alpha}{1-\alpha}(\hat{y}^*_{s+i} - \hat{y}_{s+i}) = \hat{\varphi}_{s+i} - \frac{\alpha\theta}{1-\alpha}(\hat{p}^*_s - \hat{P}_{s+i}). \tag{4.10}$$

将式(4.4)在通货膨胀为 0 的稳态附近进行对数线性化我们可得

$$\hat{p}^*_s - \hat{P}_s = (1-\omega\beta)\sum_{i=0}^{\infty}\omega^i\beta^i\mathbb{E}_s(\hat{\varphi}^*_{s+i} + \hat{P}_{s+i} - \hat{P}_s).$$

将(4.10)代入上式可进一步整理成

$$\begin{aligned}
\hat{p}^*_s &= (1-\omega\beta)\sum_{i=0}^{\infty}\omega^i\beta^i\mathbb{E}_s\left(\frac{1-\alpha}{1-\alpha+\alpha\theta}\hat{\varphi}_{s+i} + \hat{P}_{s+i}\right) \\
&= (1-\omega\beta)\left(\frac{1-\alpha}{1-\alpha+\alpha\theta}\hat{\varphi}_s + \hat{P}_s\right) + (1-\omega\beta)\omega\beta\mathbb{E}_s\sum_{i=0}^{\infty}\omega^i\beta^i\mathbb{E}_{s+1}\left(\frac{1-\alpha}{1-\alpha+\alpha\theta}\hat{\varphi}_{s+1+i} + \hat{P}_{s+1+i}\right) \\
&= (1-\omega\beta)\left(\frac{1-\alpha}{1-\alpha+\alpha\theta}\hat{\varphi}_s + \hat{P}_s\right) + \omega\beta\mathbb{E}_s\hat{p}^*_{s+1}.
\end{aligned}$$

将(4.8)代入，经整理可得

$$\pi_t = \beta\mathbb{E}_t\pi_{t+1} + \tilde{\kappa}\hat{\varphi}_t, \tag{4.11}$$

其中

$$\tilde{\kappa} = \frac{(1-\omega)(1-\beta\omega)}{\omega}\frac{1-\alpha}{1-\alpha+\alpha\theta},$$

φ_t 为在 t 期经济中厂商的平均实际边际成本。上面的式子通常被称为新凯恩斯菲利普斯曲线（New-Keynesian Phillips curve）。它表明，驱动通货膨胀的，是实际边际成本以及预期通货膨胀。向前解上式我们可得

$$\pi_t = \tilde{\kappa}\sum_{i=0}^{\infty}\beta^i\mathbb{E}_t\hat{\varphi}_{t+i},$$

即通货膨胀是当前及未来实际边际成本贴现值的函数。

利用(4.9)，对数线性化(4.3)可得

$$\hat{\varphi}_t = \hat{w}_t - \hat{z}_t + \alpha\hat{n}_t = \eta\hat{n}_t + \sigma\hat{c}_t - \hat{z}_t + \alpha\hat{n}_t = \left(\sigma + \frac{\alpha+\eta}{1-\alpha}\right)\hat{y}_t - \frac{1+\eta}{1-\alpha}\hat{z}_t.$$

注意到如果价格具有完全弹性时，

$$\varphi_t = \frac{\theta-1}{\theta},$$

故而价格完全弹性时

$$0 = \left(\sigma + \frac{\alpha+\eta}{1-\alpha}\right)\hat{y}_t^f - \frac{1+\eta}{1-\alpha}\hat{z}_t.$$

其中 $\hat{y}^f$ 为灵活价格下的产出。故而我们有

$$\hat{\varphi}_t = \left(\sigma + \frac{\alpha+\eta}{1-\alpha}\right)(\hat{y} - \hat{y}^f).$$

我们定义 $x_t = \hat{y}_t - \hat{y}_t^f$ 为实际情况下的产出与灵活价格均衡产出之间的缺口，则我们的菲利普斯曲线可以写作

$$\pi_t = \beta\mathbb{E}_t\pi_{t+1} + \kappa x_t, \tag{4.12}$$

其中

$$\kappa = \left(\sigma + \frac{\alpha+\eta}{1-\alpha}\right)\tilde{\kappa} = \left(\sigma + \frac{\alpha+\eta}{1-\alpha}\right)\frac{(1-\omega)(1-\beta\omega)}{\omega}\frac{1-\alpha}{1-\alpha+\alpha\theta}.$$

由于菲利普斯曲线是从企业层面导出的均衡条件，它相当于传统模型中的总供给方程。

对数线性化欧拉方程我们得到

$$\hat{c}_t = \mathbb{E}_t\hat{c}_{t+1} - \frac{1}{\sigma}(\hat{i}_t - \mathbb{E}_t\pi_{t+1}),$$

其中 $\hat{i}_t = \frac{1}{1+i^{ss}}(i_t - i^{ss}) = \frac{i_t - r}{1+r}, r = \frac{1}{\beta} - 1$ 为稳态时的实际利率。将上式写为

$$x_t = \mathbb{E}_t x_{t+1} - \frac{1}{\sigma}(\hat{i}_t - \mathbb{E}_t \pi_{t+1}) + u_t, \tag{4.13}$$

其中 $u_t = \mathbb{E}_t \hat{y}^f_{t+1} - \hat{y}^f_t = \frac{1+\eta}{\sigma(1-\alpha)+\alpha+\eta}(\mathbb{E}_t \hat{z}_{t+1} - \hat{z}_t)$ 由外生冲击决定。上式被称为动态 IS 方程，相当于传统模型中的总需求方程。

动态 IS 方程和菲利普斯曲线刻画了经济中通货膨胀和产出的动态。如果加上外生冲击的动态以及利率政策，我们就得到了一个完整的体系，可以用以研究经济动态。我们考虑三种货币政策。一种货币政策是将利率设定为纯外生的，即

$$\hat{i}_t = v_t,$$

其中 v_t 是平稳的随机过程。将货币政策方程代入 IS 方程中，联立菲利普斯曲线，我们可以将系统写成

$$\begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{\sigma} \\ 0 & \beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbb{E}_t x_{t+1} \\ \mathbb{E}_t \pi_{t+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\kappa & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_t \\ \pi_t \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{v_t}{\sigma} - u_t \\ 0 \end{bmatrix}.$$

当且仅当

$$\begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{\sigma} \\ 0 & \beta \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\kappa & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 + \frac{\kappa}{\beta\sigma} & -\frac{1}{\beta\sigma} \\ -\frac{\kappa}{\beta} & \frac{1}{\beta} \end{bmatrix}$$

的两个特征根均在单位圆外时，方程组才有唯一的不发散的解。然而，可以证明，该矩阵有一个特征根在单位圆内，一个特征根在单位圆外。故而在这种货币政策的体系下，经济有多个不发散的均衡。

为了理解这种情况，我们假设预期的通货膨胀上升。由于名义利率是外生给定的，因而实际利率会下降，其扩张效应会带来产出增加。产出的提高推升了通货膨胀，即通货膨胀是自我实现的。

我们考虑的第二种货币政策为

$$\hat{i}_t = \phi_\pi \pi_t + v_t.$$

此时通货膨胀与产出缺口的方程可以写为

$$\begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{\sigma} \\ 0 & \beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbb{E}_t x_{t+1} \\ \mathbb{E}_t \pi_{t+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{\phi_\pi}{\sigma} \\ -\kappa & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_t \\ \pi_t \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{v_t}{\sigma} - u_t \\ 0 \end{bmatrix}.$$

刻画解稳定性的相应的矩阵为

$$\begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{\sigma} \\ 0 & \beta \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 & \frac{\phi_\pi}{\sigma} \\ -\kappa & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 + \frac{\kappa}{\beta\sigma} & \frac{\beta\phi_\pi - 1}{\beta\sigma} \\ -\frac{\kappa}{\beta} & \frac{1}{\beta} \end{bmatrix}.$$

可以证明，当 $\phi_\pi > 1$ 时，系统有唯一的不发散的解。即当央行对于通货膨胀作出足够强烈的反应时，经济系统才有唯一稳定的解。

第三种货币政策为

$$\hat{i}_t = \phi_\pi \pi_t + \phi_x x_t + v_t.$$

这种形式的政策规则被称为泰勒规则（Taylor rule）。此时的方程组可以写为

$$\begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{\sigma} \\ 0 & \beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbb{E}_t x_{t+1} \\ \mathbb{E}_t \pi_{t+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+\frac{\phi_x}{\sigma} & \frac{\phi_\pi}{\sigma} \\ -\kappa & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_t \\ \pi_t \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{v_t}{\sigma} - u_t \\ 0 \end{bmatrix}.$$

刻画解稳定性的相应的矩阵为

$$\begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{\sigma} \\ 0 & \beta \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1+\frac{\phi_x}{\sigma} & \frac{\phi_\pi}{\sigma} \\ -\kappa & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+\frac{\phi_x}{\sigma}+\frac{\kappa}{\beta\sigma} & \frac{\beta\phi_\pi - 1}{\beta\sigma} \\ -\frac{\kappa}{\beta} & \frac{1}{\beta} \end{bmatrix}.$$

保证经济有唯一不发散均衡的一个必要条件是 $\kappa(\phi_\pi - 1) + (1-\beta)\phi_x > 0$。

为了展示经济动态，我们考虑一个系统，其货币政策为 $\hat{i}_t = \phi_\pi \pi_t + \phi_x x_t + v_t$，模型中的参数为 $\beta = 0.99, \sigma = \eta = 1, b = 1/4, \theta = 6, \alpha = 1/3, \omega = 2/3, \phi_\pi = 1.5, \phi_x = 1/8$, v 为一个 AR（1）过程，自回归系数为 0.5，z 为一个 AR（1）过程，自回归系数为 0.5。我们的模型中每一期相当于一个季度，因而 $\beta = 0.99$ 相当于经济中稳态的年实际利率为 4%。$\omega = 2/3$ 相当于价格调整的平均时长为三个季度。

当经济受到一个单位的利率冲击时，经济的脉冲响应如下图所示。图中也分别显示了将 α 设为 2/3 时以及将 ϕ_x 设为 0 时的货币冲击的脉冲响应。

4.5 带有资本的新凯恩斯模型

我们考虑资本和劳动同时作为生产要素的新凯恩斯模型。假设资本由消费者拥有。中间厂商向消费者以 r_t 的价格租借资本。[1]消费者最优化问题变为

$$\max \quad \mathbb{E}_0 \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \left[\frac{c_t^{1-\sigma}}{1-\sigma} + \gamma \frac{m_t^{1-b}}{1-b} - \chi \frac{n_t^{1+\eta}}{1+\eta} \right]$$

$$s.t. \quad c_t + m_t + b_t + k_t = r_t k_{t-1} + w_t n_t + \frac{m_{t-1}}{1+\pi_t} + \frac{(1+i_{t-1})b_{t-1}}{1+\pi_t} + (1-\delta)k_{t-1} + \Pi_t,$$

[1] 若令厂商拥有资本，则由于不同厂商资本积累的路径不同，问题会变得复杂。

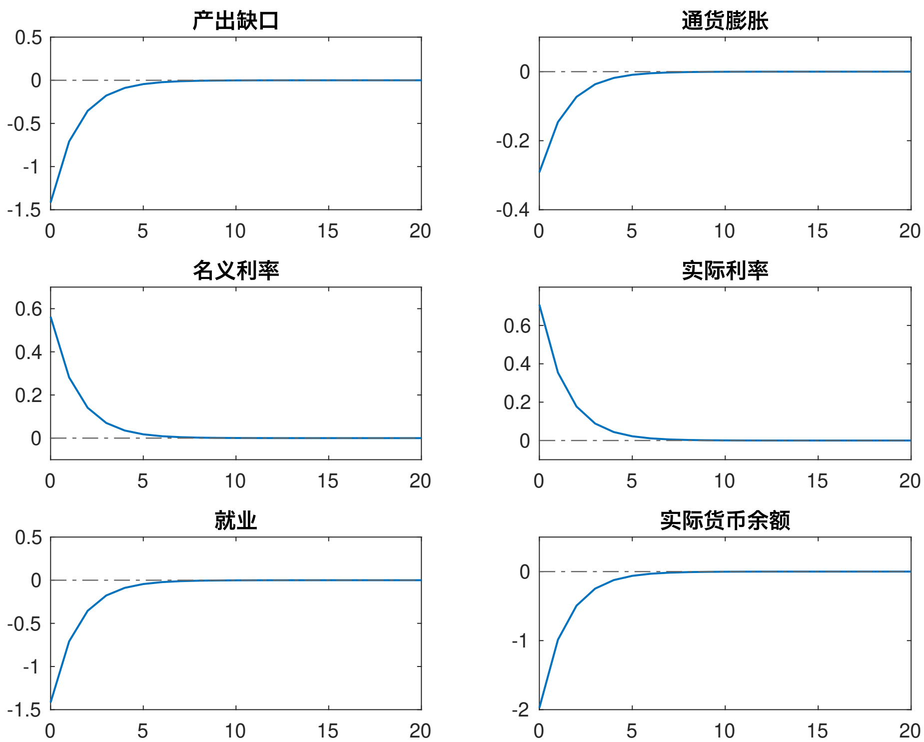


图 4.1: 新凯恩斯模型脉冲响应函数（货币冲击）

一阶条件为(4.1)至(4.3)式及

$$\beta \mathbb{E}_t \left[\frac{c_{t+1}^{-\sigma}}{c_t^{-\sigma}} (r_{t+1} + 1 - \delta) \right] = 1.$$

假设由中间产品生成最终产品的问题不变。中间厂商生产技术为

$$y_{tj} = z_t k_{t-1,j}^{\alpha} n_{tj}^{1-\alpha},$$

价格调整的机制不变，即每期只有 ω 比例的企业能调整其产品的价格。给定某个生产产量 y°，中间厂商雇佣资本和劳动的最优化问题为

$$\begin{aligned} \min \quad & w_t n_{tj} + r_t k_{t-1,j} \\ s.t. \quad & z_t k_{t-1,j}^{\alpha} n_{tj}^{1-\alpha} = y^{\circ}. \end{aligned}$$

最优时

$$\frac{n_{tj}}{k_{t-1,j}} = \frac{r_t}{w_t} \frac{1-\alpha}{\alpha},$$

$$k_{t-1,j} = \frac{y^\circ}{z_t}\left(\frac{w_t}{r_t}\frac{\alpha}{1-\alpha}\right)^{1-\alpha},$$

$$n_{tj} = \frac{y^\circ}{z_t}\left(\frac{w_t}{r_t}\frac{\alpha}{1-\alpha}\right)^{-\alpha}.$$

代入最优化问题可得最优时的总成本为

$$TC(y^\circ) = \frac{y^\circ}{z_t} w_t^{1-\alpha} r_t^\alpha \alpha^{-\alpha}(1-\alpha)^{-(1-\alpha)},$$

由于生产函数为规模报酬不变的，因而边际成本

$$\varphi_t = \frac{1}{z_t} w_t^{1-\alpha} r_t^\alpha \alpha^{-\alpha}(1-\alpha)^{-(1-\alpha)}.$$

中间厂商的产品价格调整问题未发生任何实质性的改变，式(4.4)、(4.5)、(4.8)、(4.11)依然成立，只是边际成本 φ_t 的表达式发生了变化。此时我们有

$$\hat{\varphi}_t = (1-\alpha)\hat{w}_t + \alpha\hat{r}_t - \hat{z}_t.$$

由劳动力市场出清我们可得

$$n_t = \int_0^1 n_{tj}\mathrm{d}j = \frac{c_t}{z_t}\left(\frac{w_t}{r_t}\frac{\alpha}{1-\alpha}\right)^{-\alpha}\int_0^1 (\hat{P}_t - \hat{p}_{tj})\mathrm{d}j,$$

对数线性化后可得

$$\hat{n}_t = \hat{c}_t - \hat{z}_t - \alpha(\hat{w}_t - \hat{r}_t).$$

由资本市场出清我们可得

$$k_{t-1} = \int_0^1 k_{t-1,j}\mathrm{d}j = \frac{c_t}{z_t}\left(\frac{w_t}{r_t}\frac{\alpha}{1-\alpha}\right)^{1-\alpha}\int_0^1 (\hat{P}_t - \hat{p}_{tj})\mathrm{d}j,$$

对数线性化后可得

$$\hat{k}_{t-1} = \hat{c}_t - \hat{z}_t + (1-\alpha)(\hat{w}_t - \hat{r}_t).$$

最终产品市场均衡要求

$$y_t = c_t + s_t$$

其中 s_t 为投资。资本积累的方程式为

$$k_t = (1-\delta)k_{t-1} + s_t.$$

在加上外生的技术冲击动态以及货币政策，我们就得到一个完整的经济体系。

为了方便起见，我们将完整的对数线性化系统汇总如下：

$$\hat{c}_t = \mathbb{E}_t\hat{c}_{t+1} - \frac{1}{\sigma}(\hat{i}_t - \mathbb{E}_t\pi_{t+1}),$$

$$\sigma\hat{c}_t - b\hat{m}_t = \frac{\hat{i}_t}{1+i^{ss}},$$

$$\eta\hat{n}_t + \sigma\hat{c}_t = \hat{w}_t,$$

$$\sigma(\mathbb{E}_t\hat{c}_{t+1} - \hat{c}_t) = \frac{r^{ss}}{r^{ss}+1-\delta}\mathbb{E}_t\hat{r}_{t+1},$$

$$\pi_t = \beta\mathbb{E}_t\pi_{t+1} + \frac{(1-\omega)(1-\beta\omega)}{\omega}\hat{\varphi}_t,$$

$$\hat{\varphi}_t = (1-\alpha)\hat{w}_t + \alpha\hat{r}_t - \hat{z}_t,$$

$$\hat{n}_t = \hat{c}_t - \hat{z}_t - \alpha(\hat{w}_t - \hat{r}_t),$$

$$\hat{k}_{t-1} = \hat{c}_t - \hat{z}_t + (1-\alpha)(\hat{w}_t - \hat{r}_t),$$

$$y^{ss}\hat{y}_t = c^{ss}\hat{c}_t + s^{ss}\hat{s}_t,$$

$$\hat{k}_t = (1-\delta)\hat{k}_{t-1} + \delta\hat{s}_t.$$

上面 10 个等式中含有 $y_t, c_t, s_t, k_t, n_t, m_t, w_t, r_t, i_t, \pi_t, \varphi_t, z_t$ 这 12 个量。为了完成这个模型，我们只需要一个等式来描述外生技术冲击 z_t 的动态以及一个等式来给出货币政策规则。

4.6 习题

考虑基本的新凯恩斯模型。

1. 在通胀为零的稳态附近线性化(4.4)和(4.5)得到新凯恩斯菲利普斯曲线。（推导中可能会使用到如下的技巧：如果 $A_t = \sum_{i=0}^{\infty} B_{t+i}$，那么 $A_t = B_t + A_{t+1}$。）

从现在开始假设人们的单期效用函数为

$$\psi_t\frac{c_t^{1-\sigma}}{1-\sigma} + \gamma\frac{m_t^{1-b}}{1-b} - \chi_t\frac{n_t^{1+\eta}}{1+\eta},$$

其中 ψ_t 和 χ_t 为对偏好的随机冲击，均值均为 1。模型中其他的设定不变。

2. 推导消费者劳动供给的一阶条件。说明劳动供给如何取决于偏好冲击。
3. 推导经济中灵活价格均衡产出 $\hat{y}_t^f$ 的表达式。它如何受到偏好冲击的影响?
4. 当存在偏好冲击的时候，新凯恩斯菲利普斯曲线会发生变化吗?
5. 使用上一节中的参数的取值。请你设定一个 ψ_t 的偏好冲击的形式，并给出在此设定下对于 ψ_t 的冲击如何影响经济中的变量。

参考文献

LEEPER E M, 1991. Equilibria under 'active' and 'passive' monetary and fiscal policies[J]. Journal of Monetary Economics, 27(1): 129-147.

SARGENT T J, WALLACE N, 1981. Some unpleasant monetarist arithmetic[J]. Federal Reserve Bank of Minneapolis Quarterly Review, 5(3): 1-17.

SIMS C A, 2001. Solving linear rational expectations models[J]. Computational Economics, 20: 1-20.