Tomografía y la transformada de Radon

Lección 07.2

Dr. Pablo Alvarado Moya

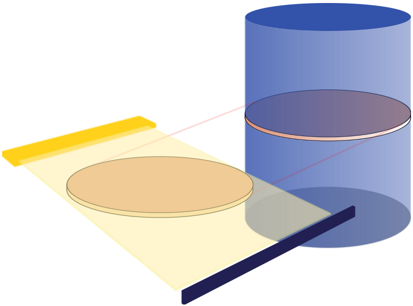
MP6123 Procesamiento Digital de Imágenes
Programa de Maestría en Electrónica
Énfasis en Procesamiento Digital de Señales
Escuela de Ingeniería Electrónica
Tecnológico de Costa Rica

II Cuatrimestre 2012

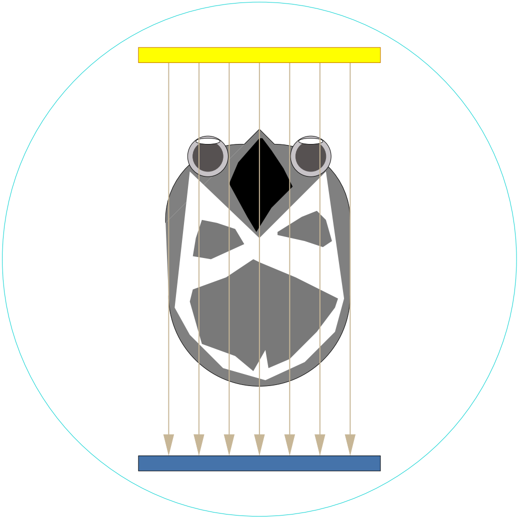
Contenido

¿Qué es tomografía?

- Reconstrucción 3D a partir de múltiples proyecciones
- Radiación debe atravezar los objetos a reconstruir
- Se reducirá problema a sensor 1D y un corte transversal
- Se asume fuente de radiación paralela



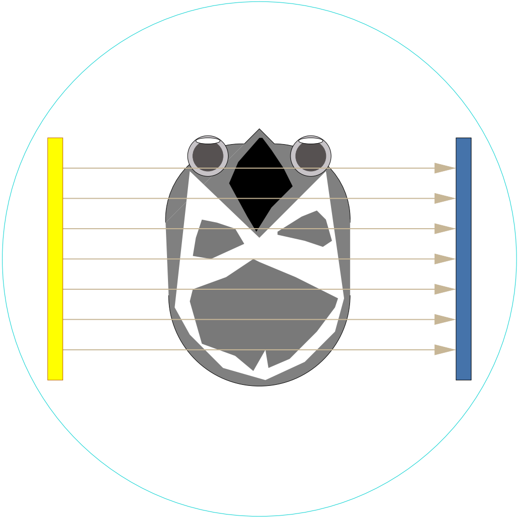
Múltiples proyecciones



Múltiples proyecciones

Múltiples proyecciones

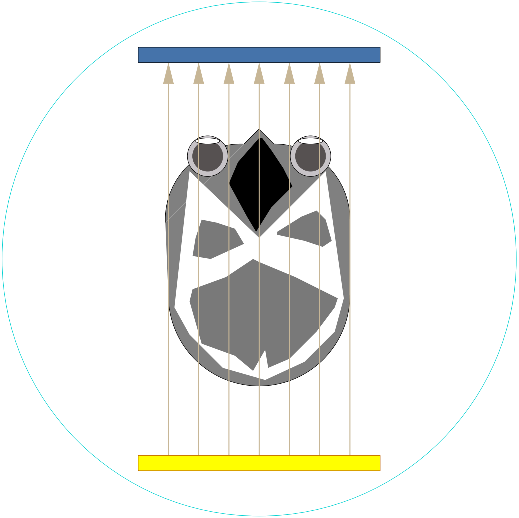
Múltiples proyecciones



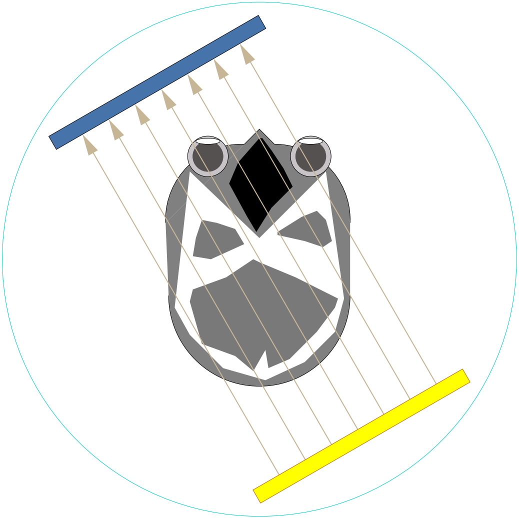
Múltiples proyecciones

Múltiples proyecciones

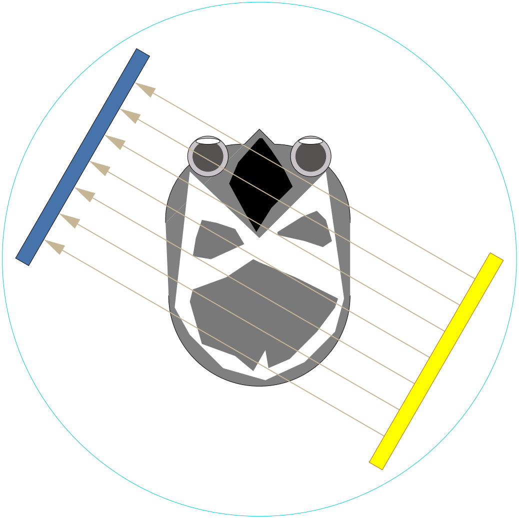
Múltiples proyecciones



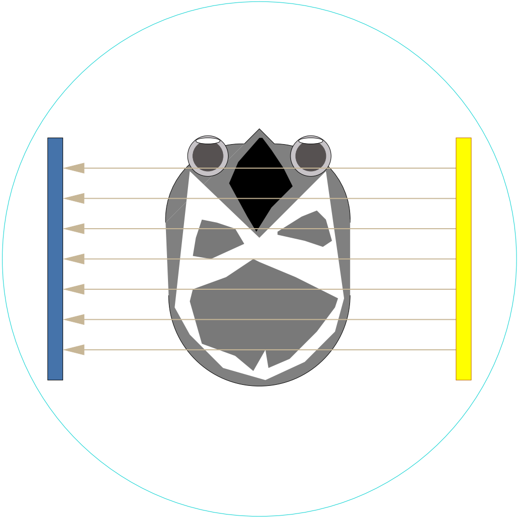
Múltiples proyecciones



Múltiples proyecciones

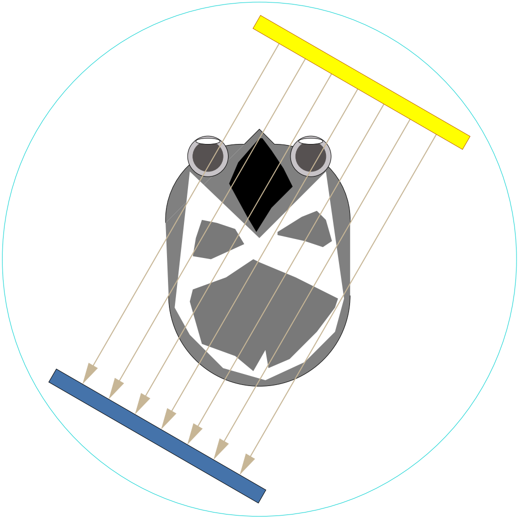


Múltiples proyecciones



Múltiples proyecciones

Múltiples proyecciones



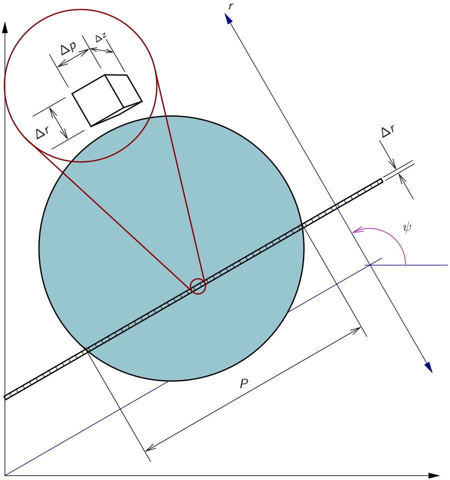
Interpretación de proyección

- Canal del rayo $P\Delta r\Delta z$
- Sensor $\Delta r\Delta z$
- Elemento $\Delta p\Delta r\Delta z$ en p
- Incide flujo $\phi_i(p)$
- Transfiere flujo $\phi_o(p)$
- Coefic. de absorción μ

$$\phi_o(p) = \phi_i(p)e^{-\mu\Delta p}$$

- Flujo total recibido

$$\phi(r,\psi) = \phi_0 \prod_{p=0}^{P-1} e^{-\mu(p)\Delta p}$$



- Flujo total recibido

$$\phi(r,\psi) = \phi_0 \prod_{p=0}^{P-1} e^{-\mu(p)\Delta p}$$

- Sustitución de producto por sumas

$$-g_p(r,\psi) = \ln \frac{\phi(r,\psi)}{\phi_0} = \ln \left(\prod_{p=0}^{P-1} e^{-\mu(p)\Delta p} \right) = -\sum_{p=0}^{P-1} \mu(p)\Delta p$$

Teorema del corte central y la rotación

- Recuérdese el teorema del corte central:

$$I(\omega_x, 0) = \mathscr{F}\left\{\sum_{y=0}^{R-1} i(x, y)\right\}$$

o en el espacio continuo

$$I(\Omega_x, 0) = \mathscr{F}\left\{\int_0^R i(x, y)\, dy\right\}$$

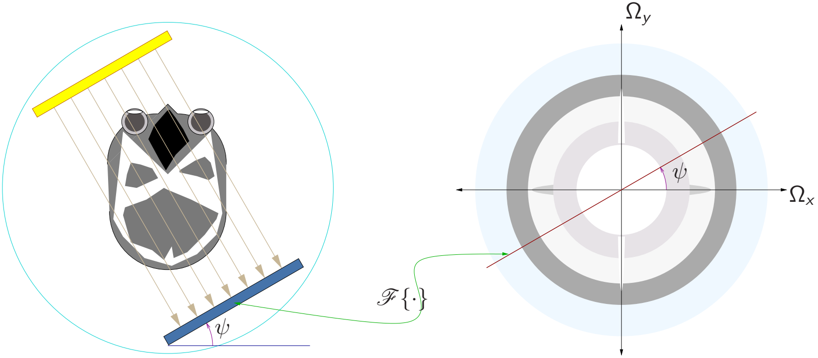
- Recuérdese la propiedad de rotación:

$$i(\mathbf{R}\underline{\mathbf{x}}) \circ\!\!-\!\!\bullet\ I\left(\mathbf{R}\underline{\mathbf{\Omega}}\right)$$

- Combinación:

Proyección en ángulo ψ $\circ\!\!-\!\!\bullet$ Linea espectral en ψ

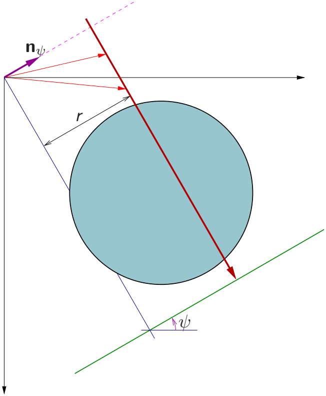
Ilustración de proyección con ángulo ψ



Transformada de Radon

Proyección sobre r, con ángulo ψ:

$$P(r,\psi) = \iint i(\underline{\mathbf{x}})\delta(\underline{\mathbf{x}}^T\underline{\mathbf{n}}_\psi - r)\,dx\,dy$$



- Si $\underline{\mathbf{x}}$ sobre **rayo de proyección**
- y $\underline{\mathbf{n}}_\psi$ vector normal a **rayo**
- entonces $\underline{\mathbf{x}} \cdot \underline{\mathbf{n}}_\psi = \underline{\mathbf{x}}^T\underline{\mathbf{n}}_\psi = r$
- r: mínima distancia de **rayo** a origen
- $\delta(\underline{\mathbf{x}}^T\underline{\mathbf{n}}_\psi - r)$

Reconstrucción espectral

- Reconstrucción espectral en coordenadas polares:

$$I(\Omega_r, \psi) = \mathscr{F}\left\{P(r, \psi)\right\}$$

  donde para cada ψ se realiza una TF-1D
- El resultado de cada ψ se suma al espectro (una línea que pasa por la frecuencia cero).
- Muestreo angular elevado para poder cubrir espectro
- Traslape de líneas espectrales alrededor del origen conduce a a distorsión de forma $D(\underline{\mathbf{\Omega}}) = 1/\rho(\underline{\mathbf{\Omega}})$ ($\rho(\cdot)$: distancia a origen)
- Corrección de espectro resultante con $H(\underline{\mathbf{\Omega}}) = \rho(\underline{\mathbf{\Omega}})$
- Transformada inversa reconstruye imagen en el espacio
- Todos los pasos anteriores se realizan en el espacio.

Resumen

Este documento ha sido elaborado con software libre incluyendo LaTeX, Beamer, GNUPlot, GNU/Octave, XFig, Inkscape, LTI-Lib-2, GNU-Make y Subversion en GNU/Linux