Repaso de espacios y álgebra lineales

Lección 06.1

Dr. Pablo Alvarado Moya

MP6127 Visión por Computadora
Programa de Maestría en Electrónica
Énfasis en Procesamiento Digital de Señales
Escuela de Ingeniería Electrónica
Tecnológico de Costa Rica

I Cuatrimestre 2013

Contenido

Repaso de espacios vectoriales

¿Qué es un vector?

- En física, se introducen vectores como entidades matemáticas con magnitud y dirección.
- Formalmente, un **vector** es un elemento de un **espacio lineal** o **espacio vectorial**.

¿Qué es un vector?

- En física, se introducen vectores como entidades matemáticas con magnitud y dirección.
- En ingeniería el concepto de vector se asocia a una tupla de n componentes, por ejemplo $[x_1, x_2, \ldots, x_n]^T$.
- Formalmente, un **vector** es un elemento de un **espacio lineal** o **espacio vectorial**.

Espacio vectorial

Un conjunto de vectores $\mathbb{V}$ se denomina **espacio vectorial** o **lineal** sobre un cuerpo $\mathbb{F}$ (usualmente $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$) si

Espacio vectorial

Un conjunto de vectores $\mathbb{V}$ se denomina **espacio vectorial** o **lineal** sobre un cuerpo $\mathbb{F}$ (usualmente $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$) si

- para una operación de adición vectorial en $\mathbb{V}$, denotada $\underline{\mathbf{x}} + \underline{\mathbf{y}}$, con $\underline{\mathbf{x}}, \underline{\mathbf{y}} \in \mathbb{V}$ se cumple que $(\mathbb{V}, \{+\})$ es un grupo abeliano; y

Espacio vectorial

Un conjunto de vectores $\mathbb{V}$ se denomina **espacio vectorial** o **lineal** sobre un cuerpo $\mathbb{F}$ (usualmente $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$) si

- para una operación de adición vectorial en $\mathbb{V}$, denotada $\underline{\mathbf{x}} + \underline{\mathbf{y}}$, con $\underline{\mathbf{x}}, \underline{\mathbf{y}} \in \mathbb{V}$ se cumple que $(\mathbb{V}, \{+\})$ es un grupo abeliano; y
- para una operación de multiplicación escalar en $\mathbb{V}$, denotada como $a\underline{\mathbf{x}}$, con $\underline{\mathbf{x}} \in \mathbb{V}$ y $a \in \mathbb{F}$ se cumplen los siguientes axiomas:

Espacio vectorial

Un conjunto de vectores $\mathbb{V}$ se denomina **espacio vectorial** o **lineal** sobre un cuerpo $\mathbb{F}$ (usualmente $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$) si

- para una operación de adición vectorial en $\mathbb{V}$, denotada $\underline{\mathbf{x}} + \underline{\mathbf{y}}$, con $\underline{\mathbf{x}}, \underline{\mathbf{y}} \in \mathbb{V}$ se cumple que $(\mathbb{V}, \{+\})$ es un grupo abeliano; y
- para una operación de multiplicación escalar en $\mathbb{V}$, denotada como $a\underline{\mathbf{x}}$, con $\underline{\mathbf{x}} \in \mathbb{V}$ y $a \in \mathbb{F}$ se cumplen los siguientes axiomas:
  - $a\underline{\mathbf{x}} \in \mathbb{V}$. ($\mathbb{V}$ es cerrado con respecto a la multiplicación escalar).
  - $a(b\underline{\mathbf{x}}) = (ab)\underline{\mathbf{x}}$. (Asociatividad de la multiplicación escalar en $\mathbb{V}$).
  - Si 1 representa el elemento neutro multiplicativo del cuerpo $\mathbb{F}$ entonces $1\underline{\mathbf{x}} = \underline{\mathbf{x}}$. (Neutralidad de uno).
  - $a(\underline{\mathbf{x}} + \underline{\mathbf{y}}) = a\underline{\mathbf{x}} + a\underline{\mathbf{y}}$. (Distributividad con respecto a la adición vectorial).
  - $(a + b)\underline{\mathbf{x}} = a\underline{\mathbf{x}} + b\underline{\mathbf{x}}$. (Distributividad con respecto a la adición del cuerpo $\mathbb{F}$).

Combinación lineal

El vector $\underline{\mathbf{x}}$ es una **combinación lineal** de los vectores $\underline{\mathbf{u}}_1, \underline{\mathbf{u}}_2, \ldots, \underline{\mathbf{u}}_n$ si

$$\underline{\mathbf{x}} = c_1\underline{\mathbf{u}}_1 + c_2\underline{\mathbf{u}}_2 + \ldots + c_n\underline{\mathbf{u}}_n$$

con $c_i \in \mathbb{F}$.

Independencia lineal

El conjunto $\mathcal{U} = \{\underline{\mathbf{u}}_1, \underline{\mathbf{u}}_2, \ldots, \underline{\mathbf{u}}_n\} \subset \mathbb{V}$ es:

- **linealmente dependiente** si algún $\underline{\mathbf{u}}_i$ es una combinación lineal de otros elementos de $\mathcal{U}$.
- **linealmente independiente** si $c_1\underline{\mathbf{u}}_1 + c_2\underline{\mathbf{u}}_2 + \ldots + c_n\underline{\mathbf{u}}_n = \underline{\mathbf{0}}$ solo con $c_1 = \ldots = c_n = 0$.

- un conjunto que contiene un solo vector, es libre si el vector es no nulo,
- el vector nulo $\underline{\mathbf{0}}$ no forma parte de ningún sistema libre,
- todo subconjunto de un sistema libre es también libre,
- el número máximo de vectores de un sistema libre es igual a la **dimensión** de dichos vectores.

- Un espacio lineal $\mathbb{V}$ se dice **engendrado** por el conjunto de vectores

$$\mathcal{U} = \{\underline{\mathbf{u}}_1, \underline{\mathbf{u}}_2, \ldots, \underline{\mathbf{u}}_n\} \subset \mathbb{V}$$

si contiene **todas** las combinaciones lineales de los vectores de $\mathcal{U}$, al que se denomina entonces **conjunto generador** del espacio (ingl. *to span a space*).

Generación de espacios

- Un espacio lineal $\mathbb{V}$ se dice **engendrado** por el conjunto de vectores
$$\mathcal{U} = \{\underline{\mathbf{u}}_1, \underline{\mathbf{u}}_2, \ldots, \underline{\mathbf{u}}_n\} \subset \mathbb{V}$$
si contiene **todas** las combinaciones lineales de los vectores de $\mathcal{U}$, al que se denomina entonces **conjunto generador** del espacio (ingl. *to span a space*).
- A cada elemento del conjunto $\mathcal{U}$ se le denomina en este contexto **vector generador**.

Generación de espacios

- Un espacio lineal $\mathbb{V}$ se dice **engendrado** por el conjunto de vectores
$$\mathcal{U} = \{\underline{\mathbf{u}}_1, \underline{\mathbf{u}}_2, \ldots, \underline{\mathbf{u}}_n\} \subset \mathbb{V}$$
si contiene **todas** las combinaciones lineales de los vectores de $\mathcal{U}$, al que se denomina entonces **conjunto generador** del espacio (ingl. *to span a space*).
- A cada elemento del conjunto $\mathcal{U}$ se le denomina en este contexto **vector generador**.
- Este espacio no varía si

Generación de espacios

- Un espacio lineal $\mathbb{V}$ se dice **engendrado** por el conjunto de vectores
$$\mathcal{U} = \{\underline{\mathbf{u}}_1, \underline{\mathbf{u}}_2, \ldots, \underline{\mathbf{u}}_n\} \subset \mathbb{V}$$
si contiene **todas** las combinaciones lineales de los vectores de $\mathcal{U}$, al que se denomina entonces **conjunto generador** del espacio (ingl. *to span a space*).
- A cada elemento del conjunto $\mathcal{U}$ se le denomina en este contexto **vector generador**.
- Este espacio no varía si
  - se multiplica cualquier vector generador por un escalar no nulo,

Generación de espacios

- Un espacio lineal $\mathbb{V}$ se dice **engendrado** por el conjunto de vectores

$$\mathcal{U} = \{\underline{\mathbf{u}}_1, \underline{\mathbf{u}}_2, \ldots, \underline{\mathbf{u}}_n\} \subset \mathbb{V}$$

  si contiene **todas** las combinaciones lineales de los vectores de $\mathcal{U}$, al que se denomina entonces **conjunto generador** del espacio (ingl. *to span a space*).
- A cada elemento del conjunto $\mathcal{U}$ se le denomina en este contexto **vector generador**.
- Este espacio no varía si
  - se multiplica cualquier vector generador por un escalar no nulo,
  - se suma un generador con otro,

Generación de espacios

- Un espacio lineal $\mathbb{V}$ se dice **engendrado** por el conjunto de vectores
$$\mathcal{U} = \{\underline{\mathbf{u}}_1, \underline{\mathbf{u}}_2, \ldots, \underline{\mathbf{u}}_n\} \subset \mathbb{V}$$
si contiene **todas** las combinaciones lineales de los vectores de $\mathcal{U}$, al que se denomina entonces **conjunto generador** del espacio (ingl. *to span a space*).
- A cada elemento del conjunto $\mathcal{U}$ se le denomina en este contexto **vector generador**.
- Este espacio no varía si
    - se multiplica cualquier vector generador por un escalar no nulo,
    - se suma un generador con otro,
    - si se suprimen los generadores que son una combinación lineal de los demás.

El subconjunto $\mathbb{W} \subset \mathbb{V}$ es un **subespacio** de $\mathbb{V}$ si es cerrado ante la suma vectorial y la multiplicación escalar.

Los subespacios tienen las siguientes propiedades:

- Todo espacio lineal $\mathbb{V}$ contiene al menos dos subespacios: el mismo $\mathbb{V}$ y $\{\underline{\mathbf{0}}\}$.

Subespacio

El subconjunto $\mathbb{W} \subset \mathbb{V}$ es un **subespacio** de $\mathbb{V}$ si es cerrado ante la suma vectorial y la multiplicación escalar.

Los subespacios tienen las siguientes propiedades:

- Todo espacio lineal $\mathbb{V}$ contiene al menos dos subespacios: el mismo $\mathbb{V}$ y $\{\underline{\mathbf{0}}\}$.
- La intersección $\mathbb{W}_1 \cap \mathbb{W}_2$ de dos subespacios lineales $\mathbb{W}_1$ y $\mathbb{W}_2$ del mismo espacio lineal $\mathbb{V}$ es a su vez un subespacio lineal.

Subespacio

El subconjunto $\mathbb{W} \subset \mathbb{V}$ es un **subespacio** de $\mathbb{V}$ si es cerrado ante la suma vectorial y la multiplicación escalar.

Los subespacios tienen las siguientes propiedades:

- Todo espacio lineal $\mathbb{V}$ contiene al menos dos subespacios: el mismo $\mathbb{V}$ y $\{\underline{\mathbf{0}}\}$.
- La intersección $\mathbb{W}_1 \cap \mathbb{W}_2$ de dos subespacios lineales $\mathbb{W}_1$ y $\mathbb{W}_2$ del mismo espacio lineal $\mathbb{V}$ es a su vez un subespacio lineal.
- La unión $\mathbb{W}_1 \cup \mathbb{W}_2$ de dos subespacios lineales $\mathbb{W}_1$ y $\mathbb{W}_2$ del mismo espacio lineal $\mathbb{V}$ **no** necesariamente es un subespacio lineal.

- $\mathcal{U}$ es una **base** de $\mathbb{V}$ si los vectores generadores $\underline{\mathbf{u}}_i \in \mathcal{U}$ son linealmente independientes.

Base

- $\mathcal{U}$ es una **base** de $\mathbb{V}$ si los vectores generadores $\underline{\mathbf{u}}_i \in \mathcal{U}$ son linealmente independientes.
- Todo espacio lineal $\mathbb{V} \neq \{\underline{\mathbf{0}}\}$ posee al menos una base.

Base

- $\mathcal{U}$ es una **base** de $\mathbb{V}$ si los vectores generadores $\underline{\mathbf{u}}_i \in \mathcal{U}$ son linealmente independientes.
- Todo espacio lineal $\mathbb{V} \neq \{\underline{\mathbf{0}}\}$ posee al menos una base.
- Si existen varias bases, todas contienen el mismo número de vectores generadores.

Base

- $\mathcal{U}$ es una **base** de $\mathbb{V}$ si los vectores generadores $\underline{\mathbf{u}}_i \in \mathcal{U}$ son linealmente independientes.
- Todo espacio lineal $\mathbb{V} \neq \{\underline{\mathbf{0}}\}$ posee al menos una base.
- Si existen varias bases, todas contienen el mismo número de vectores generadores.
- Este número de vectores de la base es la **dimensión** del espacio lineal.

Teorema Fundamental del Álgebra Lineal

Para un espacio $\mathbb{V}$ con n dimensiones

1. toda base de $\mathbb{V}$ tiene exactamente n elementos,

Teorema Fundamental del Álgebra Lineal

Para un espacio $\mathbb{V}$ con n dimensiones

1. toda base de $\mathbb{V}$ tiene exactamente n elementos,
2. todo subconjunto linealmente independiente de $\mathbb{V}$ tiene a lo sumo n elementos y corresponde a una base de $\mathbb{V}$ si y solo si tiene exactamente n elementos,

Teorema Fundamental del Álgebra Lineal

Para un espacio $\mathbb{V}$ con n dimensiones

1. toda base de $\mathbb{V}$ tiene exactamente n elementos,
2. todo subconjunto linealmente independiente de $\mathbb{V}$ tiene a lo sumo n elementos y corresponde a una base de $\mathbb{V}$ si y solo si tiene exactamente n elementos,
3. cualquier subconjunto de $\mathbb{V}$ que actúa como conjunto generador de $\mathbb{V}$ debe tener al menos n elementos y es una base si y solo si tiene exactamente n elementos,

Teorema Fundamental del Álgebra Lineal

Para un espacio $\mathbb{V}$ con n dimensiones

1. toda base de $\mathbb{V}$ tiene exactamente n elementos,
2. todo subconjunto linealmente independiente de $\mathbb{V}$ tiene a lo sumo n elementos y corresponde a una base de $\mathbb{V}$ si y solo si tiene exactamente n elementos,
3. cualquier subconjunto de $\mathbb{V}$ que actúa como conjunto generador de $\mathbb{V}$ debe tener al menos n elementos y es una base si y solo si tiene exactamente n elementos,
4. si los elementos de una determinada base en $\mathbb{V}$ se toman en un **orden determinado**, cualquier elemento de $\mathbb{V}$ puede entonces ser representado por una sucesión única de **coordenadas**.

Unicidad de coeficientes

El último punto indica que si $\mathbb{V}$ tiene como base a

$$\mathcal{U} = \{\underline{\mathbf{u}}_1, \underline{\mathbf{u}}_2, \ldots, \underline{\mathbf{u}}_n\}$$

entonces un vector

$$\underline{\mathbf{x}} = c_1\underline{\mathbf{u}}_1 + c_2\underline{\mathbf{u}}_2 + \ldots + c_n\underline{\mathbf{u}}_n$$

puede representarse utilizando tan solo los coeficientes c_i y manteniendo fija la base: $\underline{\mathbf{x}} = [c_1, c_2, \ldots, c_n]^T$.

Unicidad de coeficientes

Ninguna otra sucesión puede representar con la misma base al vector $\underline{\mathbf{x}}$, puesto que si existiese alguna otra representación equivalente

$$\underline{\mathbf{x}} = d_1\underline{\mathbf{u}}_1 + d_2\underline{\mathbf{u}}_2 + \ldots + d_n\underline{\mathbf{u}}_n$$

entonces la diferencia de ambas representaciones debería ser cero y

$$(d_1 - c_1)\underline{\mathbf{u}}_1 + (d_2 - c_2)\underline{\mathbf{u}}_2 + \ldots + (d_n - c_n)\underline{\mathbf{u}}_n = \underline{\mathbf{0}}$$

se cumple solo si $d_i = c_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$ por el requisito de que la base $\mathcal{U}$ debe ser linealmente independiente.

Repaso de álgebra lineal

Vector columna

Vector de n dimensiones

$$\underline{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

Vector fila

Vector de n dimensiones

$$\underline{\mathbf{x}}^T = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \end{bmatrix}$$

Matriz

Matriz de $n \times m$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{bmatrix}$$

- n: filas
- m: columnas
- En notación a_{ij} primer subíndice es la fila y segundo la columna

Matriz en vectores

Matriz $n \times m$ $\mathbf{A}$ se compone de n vectores fila

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{\mathbf{a}}_{1\cdot}^T \\ \underline{\mathbf{a}}_{2\cdot}^T \\ \vdots \\ \underline{\mathbf{a}}_{n\cdot}^T \end{bmatrix}$$

o m vectores columna.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{\mathbf{a}}_{\cdot 1} & \underline{\mathbf{a}}_{\cdot 2} & \cdots & \underline{\mathbf{a}}_{\cdot m} \end{bmatrix}$$

Vectores como matrices

Observe que todo vector es un tipo particular de matriz, de dimension $1 \times m$ para un vector fila o $n \times 1$ para un vector columna.

Matriz transpuesta

Si

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{bmatrix}$$

entonces su transpuesta es

$$\mathbf{A}^T = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1m} & a_{2m} & \cdots & a_{nm} \end{bmatrix}$$

en otras palabras, si $\mathbf{B} = \mathbf{A}^T$ entonces $b_{ij} = a_{ji}$

Matriz es **simétrica** si $\mathbf{A} = \mathbf{A}^T$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

es decir $a_{ij} = a_{ji}$.

Matriz es **diagonal** si todos los elementos son cero excepto aquellos en la diagonal

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & & & \\ & a_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Matriz identidad

Matriz es diagonal con todos sus elementos no nulos iguales a uno

$$\mathbf{I} = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{bmatrix}$$

Matriz triangular superior

Matriz es triangular superior si $a_{ij} = 0$ para todo $i > j$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Matriz triangular inferior

Matriz es triangular inferior si $a_{ij} = 0$ para todo $i < j$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & & & \\ a_{21} & a_{22} & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{bmatrix}$$

La matriz a bandas tiene todos los elementos cero excepto una banda centrada en la diagonal principal

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & & & \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & & \\ & a_{32} & a_{33} & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & & \ddots & a_{nm} \end{bmatrix}$$

Cuando el ancho de la banda tiene tres diagnonales la matriz se denomina **tridiagonal**

Producto escalar-matriz

El producto $s\mathbf{A}$ es otra matriz con todos los componentes escalados

$$s\mathbf{A} = s\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} sa_{11} & sa_{12} & \cdots & sa_{1m} \\ sa_{21} & sa_{22} & \cdots & sa_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ sa_{n1} & sa_{n2} & \cdots & sa_{nm} \end{bmatrix}$$

Suma de matrices

Suma definida para dos matrices de idéntico tamaño:

$$\mathbf{C} = \mathbf{A} + \mathbf{B} \Leftrightarrow c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$$

Producto punto entre vectores

- El producto punto está definido para dos vectores de dimension n, y es un valor **escalar** calculado con:

$$\underline{\mathbf{x}} \cdot \underline{\mathbf{y}} = \underline{\mathbf{x}}^T \underline{\mathbf{y}} = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \cdots x_n y_n = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

- El producto punto es un tipo de producto *interno* y por tanto se puede denotar también como $\langle \underline{\mathbf{x}}, \underline{\mathbf{y}} \rangle$
- Obsérvese que

$$\underline{\mathbf{x}} \cdot \underline{\mathbf{x}} = \underline{\mathbf{x}}^T \underline{\mathbf{x}} = x_1^2 + x_2^2 + \cdots x_n^2 = \|\underline{\mathbf{x}}\|^2$$

Producto externo entre vectores

El producto externo está definido para dos vectores y es una **matriz** de dimensiones $n \times m$ con n el tamaño del primer vector y m el tamaño del segundo vector:

$$\underline{\mathbf{x}}\underline{\mathbf{y}}^T = \begin{bmatrix} x_1 y_1 & x_1 y_2 & \cdots & x_1 y_n \\ x_2 y_1 & x_2 y_2 & \cdots & x_2 y_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_n y_1 & x_n y_2 & \cdots & x_n y_n \end{bmatrix}$$

El producto matriz-vector

$$\underline{\mathbf{c}} = \mathbf{A}\underline{\mathbf{b}} = \begin{bmatrix} \underline{\mathbf{a}}_{1\cdot}^{T} \\ \underline{\mathbf{a}}_{2\cdot}^{T} \\ \vdots \\ \underline{\mathbf{a}}_{n\cdot}^{T} \end{bmatrix} \underline{\mathbf{b}} = \begin{bmatrix} \underline{\mathbf{a}}_{1\cdot} \cdot \underline{\mathbf{b}} \\ \underline{\mathbf{a}}_{2\cdot} \cdot \underline{\mathbf{b}} \\ \vdots \\ \underline{\mathbf{a}}_{n\cdot} \cdot \underline{\mathbf{b}} \end{bmatrix}$$

Otra forma de ver el producto matriz-vector es como combinación lineal de los vectores columna:

$$\underline{\mathbf{c}} = \mathbf{A}\underline{\mathbf{b}} = \begin{bmatrix} \underline{\mathbf{a}}_{\cdot 1} & \underline{\mathbf{a}}_{\cdot 2} & \cdots & \underline{\mathbf{a}}_{\cdot m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix} = b_1\underline{\mathbf{a}}_{\cdot 1} + b_2\underline{\mathbf{a}}_{\cdot 2} + \cdots + b_m\underline{\mathbf{a}}_{\cdot m}$$

Observe la similitud con el producto punto.

Por ejemplo:

$$\begin{bmatrix}1 & 0 & 2\\ 2 & 1 & 0\\ 0 & 2 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\ \frac{1}{2}\\ 2\end{bmatrix} = 1\begin{bmatrix}1\\ 2\\ 0\end{bmatrix} + \frac{1}{2}\begin{bmatrix}0\\ 1\\ 2\end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix}2\\ 0\\ 1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}5\\ \frac{5}{2}\\ 3\end{bmatrix}$$

(representación gráfica en gnuplot)

Observese ahora el producto vector-matriz

$$
\begin{aligned}
\underline{\mathbf{c}}^T = \underline{\mathbf{b}}^T \mathbf{A} &= \underline{\mathbf{b}}^T \begin{bmatrix} \underline{\mathbf{a}}_{\cdot 1} & \underline{\mathbf{a}}_{\cdot 2} & \cdots & \underline{\mathbf{a}}_{\cdot n} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \underline{\mathbf{b}} \cdot \underline{\mathbf{a}}_{\cdot 1} & \underline{\mathbf{b}} \cdot \underline{\mathbf{a}}_{\cdot 2} & \cdots & \underline{\mathbf{b}} \cdot \underline{\mathbf{a}}_{\cdot n} \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

Otra forma de ver el producto vector-matriz es como combinación lineal de los vectores fila:

$$\underline{\mathbf{c}}^T = \underline{\mathbf{b}}^T \mathbf{A} = \begin{bmatrix} b_1 & b_2 & \cdots & b_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{\mathbf{a}}_{1\cdot} \\ \underline{\mathbf{a}}_{2\cdot} \\ \vdots \\ \underline{\mathbf{a}}_{n\cdot} \end{bmatrix} = b_1 \underline{\mathbf{a}}_{1\cdot} + b_2 \underline{\mathbf{a}}_{2\cdot} + \cdots + b_n \underline{\mathbf{a}}_{n\cdot}$$

Observe de nuevo la similitud con el producto punto.

El producto entre una matriz $\mathbf{A}$ de dimensión $n \times m$ por otra matriz $\mathbf{B}$ de dimension $m \times l$ es la matriz

$$\mathbf{C} = \mathbf{AB} = \begin{bmatrix} \underline{\mathbf{a}}_{1\cdot}^T \\ \underline{\mathbf{a}}_{2\cdot}^T \\ \vdots \\ \underline{\mathbf{a}}_{n\cdot}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{\mathbf{b}}_{\cdot 1} & \underline{\mathbf{b}}_{\cdot 2} & \cdots & \underline{\mathbf{b}}_{\cdot l} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \underline{\mathbf{a}}_{1\cdot} \cdot \underline{\mathbf{b}}_{\cdot 1} & \underline{\mathbf{a}}_{1\cdot} \cdot \underline{\mathbf{b}}_{\cdot 2} & \cdots & \underline{\mathbf{a}}_{1\cdot} \cdot \underline{\mathbf{b}}_{\cdot l} \\ \underline{\mathbf{a}}_{2\cdot} \cdot \underline{\mathbf{b}}_{\cdot 1} & \underline{\mathbf{a}}_{2\cdot} \cdot \underline{\mathbf{b}}_{\cdot 2} & \cdots & \underline{\mathbf{a}}_{2\cdot} \cdot \underline{\mathbf{b}}_{\cdot l} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \underline{\mathbf{a}}_{n\cdot} \cdot \underline{\mathbf{b}}_{\cdot 1} & \underline{\mathbf{a}}_{n\cdot} \cdot \underline{\mathbf{b}}_{\cdot 2} & \cdots & \underline{\mathbf{a}}_{n\cdot} \cdot \underline{\mathbf{b}}_{\cdot l} \end{bmatrix}$$

que es una matriz de $n \times l$.
Note la similitud con el producto externo de vectores.

Este producto se puede reinterpretar como:

$$
\begin{aligned}
\mathbf{C} = \mathbf{AB} &= \begin{bmatrix} \underline{\mathbf{a}}_{\cdot 1} & \underline{\mathbf{a}}_{\cdot 2} & \cdots & \underline{\mathbf{a}}_{\cdot n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{\mathbf{b}}_{\cdot 1} & \underline{\mathbf{b}}_{\cdot 2} & \cdots & \underline{\mathbf{b}}_{\cdot l} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \mathbf{A}\underline{\mathbf{b}}_{\cdot 1} & \mathbf{A}\underline{\mathbf{b}}_{\cdot 2} & \cdots & \mathbf{A}\underline{\mathbf{b}}_{\cdot l} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \underline{\mathbf{a}}_{1\cdot}^T \\ \underline{\mathbf{a}}_{2\cdot}^T \\ \vdots \\ \underline{\mathbf{a}}_{n\cdot}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{\mathbf{b}}_{1\cdot}^T \\ \underline{\mathbf{b}}_{2\cdot}^T \\ \vdots \\ \underline{\mathbf{b}}_{n\cdot}^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{\mathbf{a}}_{1\cdot}^T\mathbf{B} \\ \underline{\mathbf{a}}_{2\cdot}^T\mathbf{B} \\ \vdots \\ \underline{\mathbf{a}}_{n\cdot}^T\mathbf{B} \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

El producto de dos matrices puede intepretarse como combinaciones lineales de las columnas de la primera matriz, o de las filas de la segunda matriz.

Propiedades del producto matricial

- El producto matricial **NO** es conmutativo

$$\mathbf{AB} \neq \mathbf{BA}$$

- Si las dimensiones lo permiten, el producto matricial **sí** es asociativo

$$(\mathbf{AB})\mathbf{C} = \mathbf{A}(\mathbf{BC})$$

- Si las dimensiones lo permiten, el producto matricial es distributivo

$$(\mathbf{A} + \mathbf{B})\mathbf{C} = \mathbf{AC} + \mathbf{BC}$$

Inversa de una matriz

Una matriz cuadrada $\mathbf{A}$ es invertible si existe otra matriz $\mathbf{A}^{-1}$ tal que

$$\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} = \mathbf{I}$$

$\mathbf{A}^{-1}$ es la matriz inversa de $\mathbf{A}$.

Una matriz es **ortogonal** si se cumple $\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^T$ y por tanto $\mathbf{A}^T\mathbf{A} = \mathbf{A}\mathbf{A}^T = I$

$$
\begin{aligned}
\mathbf{A}\mathbf{A}^T &= \begin{bmatrix} \underline{\mathbf{a}}_{1\cdot}^T \\ \underline{\mathbf{a}}_{2\cdot}^T \\ \vdots \\ \underline{\mathbf{a}}_{n\cdot}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{\mathbf{a}}_{1\cdot} & \underline{\mathbf{a}}_{2\cdot} & \cdots & \underline{\mathbf{a}}_{n\cdot} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \underline{\mathbf{a}}_{1\cdot} \cdot \underline{\mathbf{a}}_{1\cdot} & \underline{\mathbf{a}}_{1\cdot} \cdot \underline{\mathbf{a}}_{2\cdot} & \cdots & \underline{\mathbf{a}}_{1\cdot} \cdot \underline{\mathbf{a}}_{1\cdot} \\ \underline{\mathbf{a}}_{2\cdot} \cdot \underline{\mathbf{a}}_{1\cdot} & \underline{\mathbf{a}}_{2\cdot} \cdot \underline{\mathbf{a}}_{2\cdot} & \cdots & \underline{\mathbf{a}}_{2\cdot} \cdot \underline{\mathbf{a}}_{1\cdot} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \underline{\mathbf{a}}_{n\cdot} \cdot \underline{\mathbf{a}}_{1\cdot} & \underline{\mathbf{a}}_{n\cdot} \cdot \underline{\mathbf{a}}_{2\cdot} & \cdots & \underline{\mathbf{a}}_{n\cdot} \cdot \underline{\mathbf{a}}_{1\cdot} \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

Los vectores (fila y columna) son ortogonales entre sí.

La determinante de una matriz cuadrada $\mathbf{A}$ se denota como $|\mathbf{A}|$ o $\det \mathbf{A}$ y se calcula para una matriz 2×2 con

$$|\mathbf{A}| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

y para una matriz de mayor orden como

$$|\mathbf{A}| = \sum_{j=1}^{n} a_{fj} |\mathbf{A}_{fj}|$$

donde $\mathbf{A}_{fj}$ es la matriz adjunta de a_{fj} dada por $(-1)^{f+j}\mathbf{M}_{fj}$, y $\mathbf{M}_{fj}$ es el menor complementario de a_{fj}, es decir, una matriz $(n-1) \times (n-1)$ obtenida eliminando la fila f y la columna j de la matriz $\mathbf{A}$.

Propiedades de la determinante

Sea $\mathbf{A}$ una matriz cuadrada de $n \times n$

- $|s\mathbf{A}| = s^n|\mathbf{A}|$
- $|\mathbf{I}| = 1$
- Distributividad: $|\mathbf{AB}| = |\mathbf{A}||\mathbf{B}|$
- $|\mathbf{I}| = 1 = |\mathbf{AA}^{-1}| = |\mathbf{A}||\mathbf{A}^{-1}| \Rightarrow |\mathbf{A}^{-1}| = 1/|\mathbf{A}|$
- $|\mathbf{A}| = |\mathbf{A}^T|$

Traza de una matriz

La traza de una matriz es la suma de los elementos en su diagonal

$$\mathrm{tr}(\mathbf{A}) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$$

Todo sistema de ecuaciones lineales se puede expresar de la forma

$$\mathbf{A}\underline{\mathbf{x}} = \underline{\mathbf{b}}$$

que representa a

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

o en forma tradicional

$$\begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \cdots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & + & \vdots & + & \vdots & + & \vdots & = & \vdots \\ a_{n1}x_1 & + & a_{n2}x_2 & + & \cdots & + & a_{nn}x_n & = & b_n \end{array}$$

Rango de una matriz

- Obsérvese que $\mathbf{A}\underline{\mathbf{x}} = \underline{\mathbf{b}}$ tiene solución solo si $\underline{\mathbf{b}}$ se encuentra en el espacio engendrado por las columnas de $\mathbf{A}$.
- Dicho espacio se denomina **alcance** de la matriz (ingl. *range*)
- La dimensión de dicho espacio se conoce como rango (ingl. *rank*)
- Es igual al número de columnas independientes
- También se denomina rango columna
- Se define el rango fila como dual de lo anterior con filas.

Resumen

Este documento ha sido elaborado con software libre incluyendo LaTeX, Beamer, GNUPlot, GNU/Octave, XFig, Inkscape, LTI-Lib-2, GNU-Make, Kazam, Xournal y Subversion en GNU/Linux