Geometría epipolar y la matriz esencial

Lección 09.1

Dr. Pablo Alvarado Moya

MP6127 Visión por Computadora
Programa de Maestría en Electrónica
Énfasis en Procesamiento Digital de Señales
Escuela de Ingeniería Electrónica
Tecnológico de Costa Rica

I Cuatrimestre 2013

Contenido

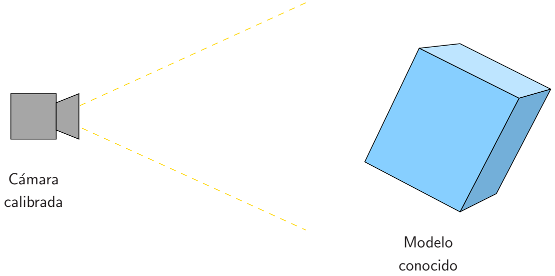
Reconstrucción 3D

- ¿Cómo inferir información 3D de imágenes 2D?
- Métodos
  - Estimación de pose
  - Visión estéreo
  - Estructura desde movimiento
  - Imágenes de rango

Reconstrucción 3D

- ¿Cómo inferir información 3D de imágenes 2D?
- Métodos
  - Estimación de pose ✓
  - Visión estéreo ✓
  - Estructura desde movimiento ←
  - Imágenes de rango

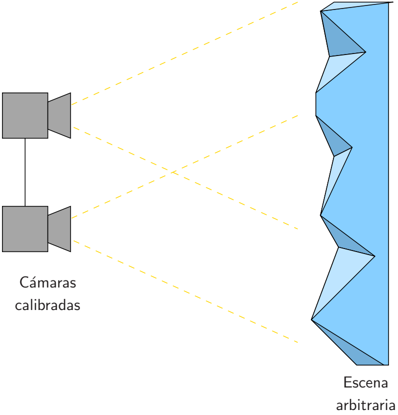
- Primer caso: estimación de pose



Determina relación entre sistemas de referencias de objeto y de cámara

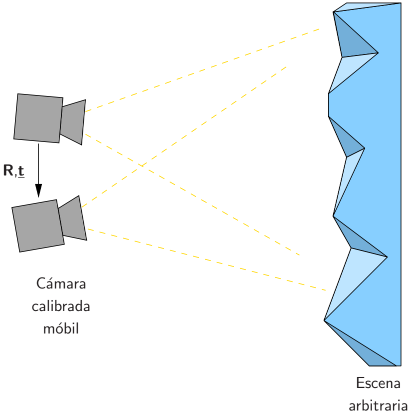
Visión estéreo

- Dos cámaras calibradas, con pose relativa conocida
- Determina posiciones de puntos en escena

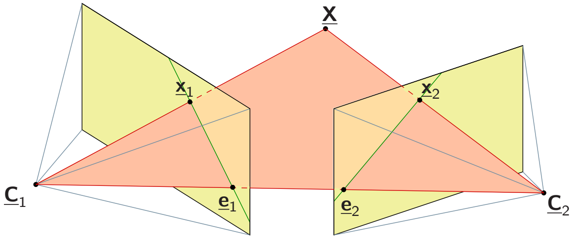


Estructura desde movimiento

- Una cámara móvil calibrada captura escena
- Se determina posición de cámara en cada captura y estructura de la escena

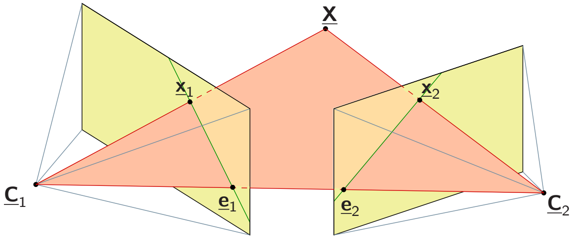


Geometría Epipolar



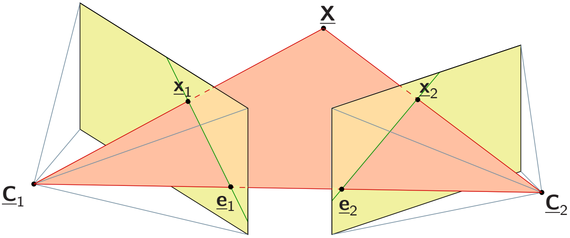
- Asúmase escena con punto $\underline{\mathbf{X}}$ capturado desde dos poses diferentes
- Cámara $\underline{\mathbf{C}}_1$ captura $\underline{\mathbf{x}}_1$
- Conociendo solo $\underline{\mathbf{x}}_1$ ¿dónde se proyecta $\underline{\mathbf{X}}$ en la imagen 2?

Geometría Epipolar



- Asúmase escena con punto $\underline{\mathbf{X}}$ capturado desde dos poses diferentes
- Cámara $\underline{\mathbf{C}}_1$ captura $\underline{\mathbf{x}}_1$
- Conociendo solo $\underline{\mathbf{x}}_1$ ¿dónde se proyecta $\underline{\mathbf{X}}$ en la imagen 2?
- Respuesta: **En línea epipolar**

Línea Epipolar

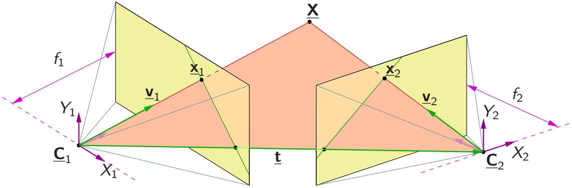


- Por $\underline{\mathbf{C}}_1$, $\underline{\mathbf{C}}_2$ y $\underline{\mathbf{X}}$ pasa **plano epipolar**
- Puntos $\underline{\mathbf{x}}_1$ y $\underline{\mathbf{x}}_2$ se encuentran sobre **líneas epipolares**
  $\Rightarrow$ Intersección de plano epipolar con planos de cámara
- Punto $\underline{\mathbf{x}}_i$ representa al rayo $\overrightarrow{\underline{\mathbf{X}}\underline{\mathbf{C}}_i}$ en imagen i
- Linea epipolar en imagen j es imagen del rayo $\overrightarrow{\underline{\mathbf{X}}\underline{\mathbf{C}}_i}$ $\qquad (i \neq j)$
- El **epipolo** $\underline{\mathbf{e}}_i$ es la imagen del centro $\underline{\mathbf{C}}_j$ en imagen i

Coordenadas normalizadas

- Matriz de proyección de cámara: $\mathbf{P}_i = \mathbf{K}_i[\mathbf{R}_i \mid \underline{\mathbf{t}}_i]$
- Imagen de punto $\underline{\mathbf{X}}$ es: $\underline{\mathbf{x}}_i = \mathbf{P}_i\underline{\mathbf{X}}$
- Con $\mathbf{K}_i$ conocida sea $\hat{\underline{\mathbf{x}}}_i = \mathbf{K}_i^{-1}\underline{\mathbf{x}}_i = [\mathbf{R}_i \mid \underline{\mathbf{t}}_i]\underline{\mathbf{X}}$
- $\hat{\underline{\mathbf{x}}}_i$ es el punto expresado en **coordenadas normalizadas**
- Interpretación: $\hat{\underline{\mathbf{x}}}_i$ equivale a $\underline{\mathbf{X}}$ visto por una cámara "normalizada" con matriz de calibración intrínseca $\mathbf{I}$
- Por eso a matriz de proyección $\mathbf{K}_i^{-1}\mathbf{P}_i = [\mathbf{R}_i \mid \underline{\mathbf{t}}_i]$ se le denomina **cámara normalizada**
- Recuérdese que $\mathbf{R}_i$ alínea el sistema de cámara con sistema global (de $\underline{\mathbf{X}}$)

Coplanaridad



- Los vectores $\overrightarrow{\underline{\mathbf{C}}_1\underline{\mathbf{x}}_1}$, $\overrightarrow{\underline{\mathbf{C}}_2\underline{\mathbf{x}}_2}$ y $\overrightarrow{\underline{\mathbf{C}}_1\underline{\mathbf{C}}_2}$ son coplanares
- Eso implica que $\overrightarrow{\underline{\mathbf{C}}_1\underline{\mathbf{x}}_1} \cdot (\overrightarrow{\underline{\mathbf{C}}_1\underline{\mathbf{C}}_2} \times \overrightarrow{\underline{\mathbf{C}}_2\underline{\mathbf{x}}_2}) = 0$
- $\underline{\mathbf{v}}_1$ y $\underline{\mathbf{v}}_2$ los vectores **de dirección** respecto al sistemas de referencia de cada cámara: $\underline{\mathbf{v}}_i = \frac{\mathbf{K}_i^{-1}\underline{\mathbf{x}}_i}{\|\mathbf{K}_i^{-1}\underline{\mathbf{x}}_i\|} = \frac{\hat{\underline{\mathbf{x}}}_i}{\|\hat{\underline{\mathbf{x}}}_i\|}$
- Observe que $\hat{\underline{\mathbf{x}}}_i$ tiene misma dirección que $\underline{\mathbf{v}}_i$

- Sean las cámaras normalizadas $\mathbf{P}_1 = [\mathbf{R}_1 \mid \underline{\mathbf{t}_1}]$ y $\mathbf{P}_2 = [\mathbf{R}_2 \mid \underline{\mathbf{t}}_2]$
- Sea $\underline{\check{\mathbf{X}}}$ el punto $\underline{\mathbf{X}}$ en coordenadas no homogéneas
- Se cumple

$$\begin{aligned}\underline{\hat{\mathbf{x}}}_i &= [\mathbf{R}_i \mid \underline{\mathbf{t_i}}]\underline{\mathbf{X}} = \mathbf{R}_i\underline{\check{\mathbf{X}}} + \underline{\mathbf{t_i}} \Rightarrow \\ \underline{\check{\mathbf{X}}} &= \mathbf{R}_i^{-1}\underline{\hat{\mathbf{x}}}_i - \mathbf{R}_i^{-1}\underline{\mathbf{t_i}}\end{aligned}$$

- Sea el sistema de cámara 1 la referencia: i.e. $\mathbf{P_1} = [\mathbf{I} \mid \underline{\mathbf{0}}]$ entonces

$$\begin{aligned}\mathbf{R}_1^{-1}\underline{\hat{\mathbf{x}}}_1 - \mathbf{R}_1^{-1}\underline{\mathbf{t_1}} &= \mathbf{R}_2^{-1}\underline{\hat{\mathbf{x}}}_2 - \mathbf{R}_2^{-1}\underline{\mathbf{t_2}} \\ \underline{\hat{\mathbf{x}}}_1 &= \mathbf{R}_2^{-1}\underline{\hat{\mathbf{x}}}_2 - \mathbf{R}_2^{-1}\underline{\mathbf{t_2}} \\ \mathbf{R}_2\underline{\hat{\mathbf{x}}}_1 &= \underline{\hat{\mathbf{x}}}_2 - \underline{\mathbf{t_2}} \\ \mathbf{R}_2\underline{\hat{\mathbf{x}}}_1 + \underline{\mathbf{t_2}} &= \underline{\hat{\mathbf{x}}}_2\end{aligned}$$

- Con el producto cruz "$\underline{\mathbf{t}}_2 \times$" a ambos lados:

$$\underline{\mathbf{t}_2} \times \mathbf{R}_2 \underline{\hat{\mathbf{x}}}_1 + \underbrace{\underline{\mathbf{t}_2} \times \underline{\mathbf{t}_2}}_{\underline{\mathbf{0}}} = \underline{\mathbf{t}_2} \times \underline{\hat{\mathbf{x}}}_2$$

$$[\underline{\mathbf{t}_2}]_\times \mathbf{R}_2 \underline{\hat{\mathbf{x}}}_1 = [\underline{\mathbf{t}_2}]_\times \underline{\hat{\mathbf{x}}}_2$$

donde $[\underline{\mathbf{t}}]_\times$ es la matriz equivalente del producto cruz:

$$[\underline{\mathbf{t}}]_\times = \begin{bmatrix} 0 & -t_z & t_y \\ t_z & 0 & -t_x \\ -t_y & t_x & 0 \end{bmatrix}$$

que es antisimétrica: $[\underline{\mathbf{t}}]_\times^T = -[\underline{\mathbf{t}}]_\times$

- Haciendo el producto punto con $\underline{\hat{\mathbf{x}}}_2$ a ambos lados:

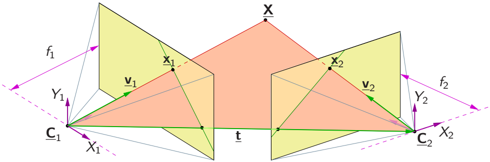
$$\begin{aligned}\underline{\hat{\mathbf{x}}}_2 \cdot [\underline{\mathbf{t_2}}]_\times \mathbf{R}_2 \underline{\hat{\mathbf{x}}}_1 &= \underline{\hat{\mathbf{x}}}_2 \cdot [\underline{\mathbf{t_2}}]_\times \underline{\hat{\mathbf{x}}}_2 \\ \underline{\hat{\mathbf{x}}}_2^T [\underline{\mathbf{t_2}}]_\times \mathbf{R}_2 \underline{\hat{\mathbf{x}}}_1 &= \underline{\hat{\mathbf{x}}}_2^T [\underline{\mathbf{t_2}}]_\times \underline{\hat{\mathbf{x}}}_2\end{aligned}$$

- $\underline{\mathbf{t_2}} \times \underline{\hat{\mathbf{x}}}_2$ es ortogonal a $\underline{\hat{\mathbf{x}}}_2 \Rightarrow \underline{\hat{\mathbf{x}}}_2 \cdot (\underline{\mathbf{t_2}} \times \underline{\hat{\mathbf{x}}}_2) = 0$
- Finalmente

$$\underline{\hat{\mathbf{x}}}_2^T \underbrace{([\underline{\mathbf{t_2}}]_\times \mathbf{R}_2)}_{\mathbf{E}} \underline{\hat{\mathbf{x}}}_1 = 0$$

- $\underline{\hat{\mathbf{x}}}_2^T \mathbf{E} \underline{\hat{\mathbf{x}}}_1 = 0$ se conoce como **restricción epipolar**
- $\mathbf{E} = [\underline{\mathbf{t_2}}]_\times \mathbf{R}_2$ se conoce como la **matriz esencial**

Mapeo punto a línea



$$\underline{\hat{\mathbf{x}}}_2^T \mathbf{E} \underline{\hat{\mathbf{x}}}_1 = 0$$

- La matriz esencial $\mathbf{E}$ mapea $\underline{\hat{\mathbf{x}}}_1$ en imagen 1 a la linea $\underline{\mathbf{l}}_2 = \mathbf{E}\underline{\hat{\mathbf{x}}}_1$ en la imagen 2, pues $\underline{\hat{\mathbf{x}}}_2^T \underline{\mathbf{l}}_2 = 0$.
- Todas esas líneas pasan por el epipolo $\underline{\mathbf{e}}_2$
- El epipolo es la proyección del vector $\underline{\mathbf{t}}$ sobre la imagen

Simetría

- Si $\underline{\hat{\mathbf{x}}}_2^T \mathbf{E} \underline{\hat{\mathbf{x}}}_1 = 0$ entonces

$$\begin{aligned} \underline{\hat{\mathbf{x}}}_2 \cdot \mathbf{E}\underline{\hat{\mathbf{x}}}_1 = (\mathbf{E}\underline{\hat{\mathbf{x}}}_1) \cdot \underline{\hat{\mathbf{x}}}_2 = (\mathbf{E}\underline{\hat{\mathbf{x}}}_1)^T \underline{\hat{\mathbf{x}}}_2 &= 0 \\ \underline{\hat{\mathbf{x}}}_1^T \mathbf{E}^T \underline{\hat{\mathbf{x}}}_2 &= 0 \end{aligned}$$

- La matriz esencial $\mathbf{E}^T$ mapea $\underline{\hat{\mathbf{x}}}_2$ en imagen 2 a la linea $\underline{\mathbf{l}}_1 = \mathbf{E}^T \underline{\hat{\mathbf{x}}}_2$ en la imagen 1, pues $\underline{\hat{\mathbf{x}}}_1^T \underline{\mathbf{l}}_1 = 0$.
- Todas esas líneas pasan por el epipolo $\underline{\mathbf{e}}_1$

Resumen

Este documento ha sido elaborado con software libre incluyendo LaTeX, Beamer, GNUPlot, GNU/Octave, XFig, Inkscape, LTI-Lib-2, GNU-Make, Kazam, Xournal y Subversion en GNU/Linux