Estimación de pose

Lección 06.3

Dr. Pablo Alvarado Moya

MP6127 Visión por Computadora
Programa de Maestría en Electrónica
Énfasis en Procesamiento Digital de Señales
Escuela de Ingeniería Electrónica
Tecnológico de Costa Rica

I Cuatrimestre 2013

Contenido

- Problema:
  estimar pose de un objeto 3D a partir de puntos 2D en imagen
- Relacionado con calibración de la cámara

Calibración de cámara

Calibración tiene dos componentes:

- Calibración extrínseca:
  relación entre sistemas coordenados del entorno y de la cámara.

  Rotación y traslación
- Calibración intrínseca:
  relación de sistema coordenado de la cámara y de la imagen.

  Centro de imagen, razón de aspecto de pixeles, sesgo
- Necesarias para tareas metrológicas

Calibración extrínseca y estimación de pose

- Si se asume sistema coordinado adherido a un objeto

$$\Downarrow$$

$$\text{calibración extrínseca} \equiv \text{estimación de pose}$$

Matrices de calibración

- Matrices relacionan puntos en el espacio $\underline{\mathbf{X}}$ con puntos en la imagen $\underline{\mathbf{x}}$:

$$\underline{\mathbf{x}} = \mathbf{P}\underline{\mathbf{X}}$$
$$\mathbf{P} = \mathbf{K}\left[\mathbf{R} \mid \underline{\mathbf{t}}\right]$$

- $\mathbf{P}$ matriz 3×4 de proyección
- $\mathbf{R}$ matriz 3×3 de rotación
- $\mathbf{t}$ vector 3×1 de traslación
- $\mathbf{K}$ matriz 3×3 de calibración intrínseca

$$\mathbf{R} = \mathbf{R}_x\mathbf{R}_y\mathbf{R}_z \qquad \underline{\mathbf{t}} = \begin{bmatrix} t_x \\ t_y \\ t_z \end{bmatrix} \qquad \mathbf{K} = \begin{bmatrix} \alpha_x & s & x_0 \\ & \alpha_y & y_0 \\ & & 1 \end{bmatrix}$$

- Forma teórica: $\mathbf{R} = \mathbf{R}_x \mathbf{R}_y \mathbf{R}_z$ (ángulos de Euler)

$$\mathbf{R}_x = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\phi & \operatorname{sen}\phi \\ 0 & -\operatorname{sen}\phi & \cos\phi \end{bmatrix} \quad \mathbf{R}_y = \begin{bmatrix} \cos\theta & 0 & \operatorname{sen}\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\operatorname{sen}\theta & 0 & \cos\theta \end{bmatrix} \quad \mathbf{R}_z = \begin{bmatrix} \cos\psi & \operatorname{sen}\psi & 0 \\ -\operatorname{sen}\psi & \cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

  Ver vídeo sobre rotación 3D sobre x

- Problemas:
  - resultado depende de orden de transformaciones
  - rotación final puede cambiar abruptamente con cambios leves de parámetros (*gimbal lock*)

- Solución: rotación sobre eje de rotación $\underline{\hat{\mathbf{n}}}$ y ángulo θ.
- Matriz $\mathbf{R}$ se calcula con fórmula de Rodrigues[1]:

$$\mathbf{R}(\hat{n},\theta) = \mathbf{I} + \operatorname{sen}\theta[\underline{\hat{\mathbf{n}}}]_\times + (1-\cos\theta)[\underline{\hat{\mathbf{n}}}]_\times^2$$

- $[\underline{\hat{\mathbf{n}}}]_\times$ es la forma matricial de producto cruz con:

$$\underline{\hat{\mathbf{n}}} = (\hat{n}_x, \hat{n}_y, \hat{n}_z)$$

$$[\underline{\hat{\mathbf{n}}}]_\times = \begin{bmatrix} 0 & -\hat{n}_z & \hat{n}_y \\ \hat{n}_z & 0 & -\hat{n}_x \\ -\hat{n}_y & \hat{n}_x & 0 \end{bmatrix}$$

[1] Olinde Rodrigues (1795-1851) banquero y matemático francés

Grados de libertad

- Volviendo: $\underline{\mathbf{x}} = \mathbf{P}\underline{\mathbf{X}}$

$$\underline{\tilde{\mathbf{x}}}_i = \begin{bmatrix} \tilde{x}_i \\ \tilde{y}_i \\ D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_{00} & p_{01} & p_{02} & p_{03} \\ p_{10} & p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{20} & p_{21} & p_{22} & p_{23} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_i \\ Y_i \\ Z_i \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\underline{\mathbf{x}}_i = \frac{1}{D} \begin{bmatrix} \tilde{x}_i \\ \tilde{y}_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{p_{00}X_i + p_{01}Y_i + p_{02}Z_i + p_{03}}{p_{20}X_i + p_{21}Y_i + p_{22}Z_i + p_{23}} \\ \frac{p_{10}X_i + p_{11}Y_i + p_{12}Z_i + p_{13}}{p_{20}X_i + p_{21}Y_i + p_{22}Z_i + p_{23}} \end{bmatrix}$$

- Si $\mathbf{P}$ se multiplica por una constante, resultado no cambia
- Si constante se elije $1/p_{23}$ se elimina una variable
- No tiene entonces 12 grados de libertad, sino solo 11:
  - 5 intrínsecos: α_x, α_y, s, x_0, y_0
  - 3 rotaciones: respecto a x, a y y a z
  - 3 traslaciones: respecto a x, a y y a z

- Cada correspondencia $(\underline{\mathbf{x}}_i, \underline{\mathbf{X}}_i)$ produce dos ecuaciones:

$$\underline{\mathbf{x}}_i = \begin{bmatrix} x_i \\ y_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{p_{00}X_i+p_{01}Y_i+p_{02}Z_i+p_{03}}{p_{20}X_i+p_{21}Y_i+p_{22}Z_i+p_{23}} \\ \frac{p_{10}X_i+p_{11}Y_i+p_{12}Z_i+p_{13}}{p_{20}X_i+p_{21}Y_i+p_{22}Z_i+p_{23}} \end{bmatrix}$$

  de donde se observa que

$$x_i\left(p_{20}X_i + p_{21}Y_i + p_{22}Z_i + p_{23}\right) = p_{00}X_i + p_{01}Y_i + p_{02}Z_i + p_{03}$$
$$y_i\left(p_{20}X_i + p_{21}Y_i + p_{22}Z_i + p_{23}\right) = p_{10}X_i + p_{11}Y_i + p_{12}Z_i + p_{13}$$

- En formato matricial, con 6 correspondencias se obtiene (asumiendo $p_{23} = 1$)

$$\begin{bmatrix} X_i & Y_i & Z_i & 0 & 0 & 0 & 0 & -x_iX_i & -x_iY_i & -x_iZ_i \\ 0 & 0 & 0 & 0 & X_i & Y_i & Z_i & -y_iX_i & -y_iY_i & -y_iZ_i \\ X_{i+1} & Y_{i+1} & Z_{i+1} & 0 & 0 & 0 & 0 & -x_{i+1}X_{i+1} & -x_{i+1}Y_{i+1} & -x_{i+1}Z_{i+1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & X_{i+1} & Y_{i+1} & Z_{i+1} & -y_{i+1}X_{i+1} & -y_{i+1}Y_{i+1} & -y_{i+1}Z_{i+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ X_{i+5} & Y_{i+5} & Z_{i+5} & 0 & 0 & 0 & 0 & -x_{i+5}X_{i+5} & -x_{i+5}Y_{i+5} & -x_{i+5}Z_{i+5} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & X_{i+5} & Y_{i+5} & Z_{i+5} & -y_{i+5}X_{i+5} & -y_{i+5}Y_{i+5} & -y_{i+5}Z_{i+5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{00} \\ p_{01} \\ p_{02} \\ p_{03} \\ p_{10} \\ p_{11} \\ p_{12} \\ p_{13} \\ p_{20} \\ p_{21} \\ p_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_i \\ y_i \\ x_{i+1} \\ y_{i+1} \\ \vdots \\ x_{i+5} \\ y_{i+5} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A}\underline{\mathbf{p}} = \underline{\mathbf{b}}$$

- Resolver con Descomposición de Valores Singulares

$$\begin{aligned} \mathbf{A}\underline{\mathbf{p}} &= \underline{\mathbf{b}} \\ \mathbf{UWV}^T\underline{\mathbf{p}} &= \underline{\mathbf{b}} \\ \underline{\mathbf{p}} &= \mathbf{VW}^{-1}\mathbf{U}^T\underline{\mathbf{b}} \end{aligned}$$

Mínimos cuadrados no lineales

- Usualmente se obtienen resultados más precisos con métodos iterativos de mínimos cuadrados no lineales:

$$\underline{\mathbf{p}}^{(k+1)} = \underline{\mathbf{p}}^{(k)} + \Delta\underline{\mathbf{p}}^{(k)}$$

- Se busca minimizar el error

$$E_{NLS}(\Delta\underline{\mathbf{p}}^{(k)}) = \sum_i \left\| \underline{\mathbf{r}}_i^{k+1} \right\|^2 = \sum_i \left\| \underline{\mathbf{f}}(\underline{\mathbf{x}}_i; \underline{\mathbf{p}} + \Delta\underline{\mathbf{p}}) - \underline{\mathbf{x}}_i' \right\|^2$$

Matrices extrínseca e intrínseca

- $\mathbf{P} = \mathbf{K}[\mathbf{R} \mid \underline{\mathbf{t}}]$ y $\mathbf{K}$ es triangular superior
- se recupera $\mathbf{K}$ y $\mathbf{R}$ de la submatriz izquierda de 3×3 de $\mathbf{P}$ con descomposición RQ.

Algoritmos iterativos

- Métodos más precisos son iterativos que modelan parámetros de $\mathbf{R}$, $\underline{\mathbf{t}}$ y $\mathbf{K}$ directamente:

$$\underline{\mathbf{x}}_i = \underline{\mathbf{f}}(\underline{\mathbf{X}}_i; \mathbf{R}, \underline{\mathbf{t}}, \mathbf{K})$$

minimizando

$$E_{\mathrm{NLP}} = \sum_i \left\| \frac{\partial \underline{\mathbf{f}}}{\partial \mathbf{R}} \Delta \mathbf{R} + \frac{\partial \underline{\mathbf{f}}}{\partial \underline{\mathbf{t}}} \Delta \underline{\mathbf{t}} + \frac{\partial \underline{\mathbf{f}}}{\partial \mathbf{K}} \Delta \mathbf{K} + \underline{\mathbf{r}}_i^{(k)} \right\|^2$$

- $\underline{\mathbf{r}}_i^{(k)}$ el residuo: diferencia entre valor estimado y valor medido en la k-ésima iteración:

$$\underline{\mathbf{r}}_i^{(k)} = \hat{\underline{\mathbf{x}}}_i'^{(k)} - \underline{\mathbf{x}}_i'$$

Problemas PnP

- Si se conoce $\mathbf{K}$ solo restan 6 parámetros por estimar: 3 rotaciones y 3 traslaciones
- Solo 3 correspondencias necesarias: problema de perspectiva-3-puntos (P3P)
- Con más puntos se generaliza a problema (PnP)
- Se buscan soluciones numéricamente estables
- Algunos métodos trabajan con distancias de los puntos de referencia en el sistema de la cámara.
- Otros métodos más rápidos y precisos usan puntos de control y logran resolver PnP de forma no iterativa en $\mathcal{O}(n)$

Materiales opcionales

- Curso del Prof. William Hoff en el *Colorado School of Mines*
- Lección de estimación de pose 1
- Lección de estimación de pose 2

Resumen

Este documento ha sido elaborado con software libre incluyendo LaTeX, Beamer, GNUPlot, GNU/Octave, XFig, Inkscape, LTI-Lib-2, GNU-Make, Kazam, Xournal y Subversion en GNU/Linux