Aufgabe 1: Flohmarkt

Teilnahme-Id: 55628

Bearbeiter dieser Aufgabe:
Michal Boron

April 2021

Inhaltsverzeichnis

Program: erweitere Zeiträume um Minuten ✓

- Definitionen, Modellierung des Problems ✓
- (Themenbezogene Arbeiten)
- Komplexität ✓
  - Notwendigkeit einer Heuristik ✓
- Konversion ✓
- heuristisches Verfahren
  - Greedy–Anlegen am Anfang ✓
  - heuristisches Verbesserungsverfahren ✓
    - hill climbing ✓
- Diskussion der Ergebnisse ✓
  - Grenzen/Mängel der Heuristik
    - was wird nicht erkannt? (edge–cases)
    - was lässt sich nicht eindeutig ausschließen?
    - getroffene Annahmen
  - Qualität der Ergebnisse ✓
    - Qualität der Ergebnisse am Anfang (Greedy–Verfahren) ✓
    - Qualität bzgl. des großen Flächeninhalt, des Gesamtflächeninhalts aller Rechtecke, % ✓
    - was und wann kann nicht verbessert werden? (Beispiel 4: 7370) ✓
- Laufzeit ✓
- Umsetzung
  - Klasse Rec
  - Klasse Hole
  - Klasse Solver
  - Eingabformat!
- Beispiel s. unten

1 Lösungsidee

1.1 Formulierung des Problems

Gegeben sei eine Strecke der Länge N und ein Zeitraum von B bis E. Außerdem gegeben sei eine Liste von Z Anmeldungen. Die Anmeldugen betreffen die Vermietung eines Teils der Strecke in einer konkreten Zeitspanne. Jede ***Anmeldung*** i besteht aus einer Strecke s_i ($0 < s_i \leqslant N$), einem Mietbeginn b_i ($B \leqslant b_i < E$) und einem Mietende e_i ($b_i < e_i \leqslant E$). In diesem Problem werden Strecken in volltändigen Metern behandelt und alle Zeiten werden in vollständigen Stunden angegeben. Obwohl N auf 1000 Meter, B auf 8:00 und E auf 18:00 in der ursprünglichen Aufgabe festgelegt sind, kann die folgende Lösungidee auf beliebige Größen, die die Aufgabenbedingungen erfüllen, übertragen werden. Das gelieferte Programm kann auch mit unterschiedlichen Werten umgehen.

Die Aufgabe ist ein Optimierungsproblem. Man soll so eine Teilfolge von k Anmeldugen wählen, dass alle gewählten Strecken in den angebenen Zeiten vermietet werden können, d.h., für jede Anmeldung eine freie stetige Strecke der angegbenen Länge in der angegebenen Zeitspanne durchgehend zur Verfügung steht, und dazu die Mieteinnahmen möglichst hoch sind, wobei der Preis 1 Euro pro Meter pro Stunde beträgt.

Man kann das Problem auf folgende Weise modellieren. Wir setzen: $M := E - B$. Wir bilden ein ***großes***

Rechteck R der Größe $N \times M$. So kann man analog jede Anmeldung i als ein ***kleineres Rechteck*** r_i der Größe $s_i \times m_i$ darstellen, wobei $m_i \coloneqq e_i - b_i$.

So können wir die obige Aufgabe umformulieren: Wähle so eine Teilfolge Z' von Rechtecken aus Z, die eine Anordnung innerhalb von R bilden, dass kein Paar der Rechtecke in Z' sich überdeckt und der Gesamtflächeninhalt aller Rechtecke in Z' maximal ist. Als Fläche eines kleineren Rechtecks r_i bezeichnen wir das Produkt $m_i \times s_i$.

Genauer gesagt: Jedes Rechteck r_i in Z' besitzt 4 Ecken, die den folgenden Punkten entsprechen: $(x_i, b_i), (x_i, e_i), (x_i + s_i, e_i), (x_i + s_i, b_i)$. Man beachte, dass b_i, e_i und s_i fixiert sind. So ist die Aufgabe, nur x_i so zu wählen, dass die Bedingungen der Aufgabe erfüllt werden. Wir können uns dieses Problem so vorstellen, dass die Länge s_i und die Breite m_i jedes Rechtecks r_i, sowie seine Anordnung entlang der y–Achse fixiert sind, und wir das Rechteck nur entlang der x–Achse zwischen den x–Werten von 0 und $N - s_i$ verschieben können.

In den weiteren Betrachtungen nennen wir unsere Aufgabe das Flohmarkt–Problem.

1.2 Komplexität des Problems

Wir zeigen, dass Flohmarkt–Problem NP–vollständig ist, indem wir zunächst zeigen, dass es in NP liegt und auch NP–schwer ist.

Offensichtlich kann dieses Problem von einer nichtdeterministischen Turingmaschine bezüglich der Eingabelänge in Polynomialzeit gelöst werden. Gegeben sei eine Platzierung der Rechtecke aus Z innerhalb von R. Man kann leicht einen in Polynomialzeit laufenden Algorithmus entwickeln, der anhand der Koordinaten der kleineren Rechtecke überprüft, ob keines der Rechtecke über die Grenzen von R hinausreicht und ob kein Paar von Rechtecken aus Z sich überdeckt. Somit liegt Flohmarkt–Problem in NP.

Um zu beweisen, dass das Flohmarkt–Problem NP–schwer ist, zeigen wir, dass das 0/1–Rucksackproblem zum Flohmarkt–Problem reduziert werden kann. Das bedeutet: Falls das Flohmarkt–Problem in Polynomialzeit gelöst werden kann, so kann auch das Rucksackproblem. Eine Instanz des Rucksackproblems besteht aus einer Liste von Zahlen, sowie aus einem Rucksack mit einer fixierten Größe. Das Problem besteht darin, die Zahlen in den Rucksack so zu packen, dass ihre Summe maximal ist und sie die Größe des Rucksacks nicht überschreitet. Das 0/1–Rucksackproblem ist NP–vollständig.[2]

TODO: sprawdzić/zmienić źródło

Gegeben sei eine Instanz des Rucksackproblems. Wir können eine entsprechende Instanz des Flohmarkt–Problems auf folgende Weise generieren. Für jede Zahl im Rucksackproblem bilden wir ein Rechteck der Breite 1 und der Länge, die dieser Zahl entspricht. So bilden wir eine Anmeldung im Flohmarkt–Problem, deren Länge der Zahl aus dem Rucksackproblem entspricht und der Unterschied zwischen dem Beginn und dem Ende der Anmeldung beträgt eine Stunde. Außerdem bilden wir ein großes, umschließendes Rechteck, deren Länge der Größe des Rucksacks entspricht und deren Breite ebenfalls 1 beträgt. Somit bilden wir eine Instanz eines Flohmarkts, der eine Stunde dauert und deren Länge der Größe des Rucksacks enspricht. In dem hierdurch entstandenen Problem wählen wir die Rechtecke so, dass sie über die Grenzen des umschließenden Rechtecks nicht hinausreichen und der Gesamtflächeninhalt der kleineren Rechtecke maximal ist. Insbesondere beachte man, dass man die kleineren Rechtecke nur entalng der längeren Seite des großen Rechtecks bewegen darf. Somit ist das Flohmarkt–Problem äquivalent zum ursprünglichen 0/1–Rucksackproblem Wenn wir jede Instanz des Flohmarkt–Problems in Polynomialzeit lösen können, können wir auch jedes 0/1–Rucksackproblem in Polynomialzeit lösen. Somit ist das Flohmarkt–Problem NP–schwer und, da es auch in NP liegt, ist somit auch NP–vollständig.

Da dieses Problem NP–vollständig ist, muss man über einen optimalen Algorithmus zum Flohmarkt–Problem nachdenken. Cormen et al. bechreiben, dass es grundsätzlich drei Ansätze zum Lösen eines NP–vollständigen gibt.[1, S. 1106] Erstens, wenn die Eingabe klein genug ist, reicht ein Algorithmus mit einer exponentieller Laufzeit aus. Allerdings lässt sich diese Idee schlecht umsetzen, wenn die Anzahl der kleineren Rechtecke in der Eingabe sich in Ordnung von Hunderten befindet. Die praktische Laufzeit eines exponentiellen Algorithmus ist wäre in diesem Fall zu groß. Zweitens beschreiben die Autoren, dass man bestimmte Grenzfälle ausgliedern kann, die sich in Polynomialzeit lösen lassen. Diesen Ansatz verwenden wir bei einigen Beispielen und er wird im Abschnitt 1.4.2 besprochen. Drittens kann man einen Algorithmus liefern, der nahezu optimale Ergebnisse in Polynomialzeit liefert — eine Heuristik.

1.3 Heuristik

Wir entwickeln ein heuristisches Verfahren, um diesem Problem zu begegnen. Wir lassen zuerst einen Greedy–Algorithmus laufen, um ein Ausgangsergebnis zu erzeugen und danach führen wir einen Bergsteigeralgorithmus (engl. *hill climbing algorithm*) aus, der das Ausgangsergebnis heuristisch optimiert, indem er ein lokales Maximum durch mehrmalige Mutationen findet.

TODO: Teil mit Muationen verbessern?

1.3.1 Konversion der Eingabe

Wie schon im Abschnitt 1.1 erwähnt wurde, können die Gedanken bezüglich des Flohmarkt–Problems auf andere Größen übetragen werden. Da die Größen des Rechtecks R sowie des Zeitraums fest sind und auf 1000 Metern bzw. auf den Zeitraum von 8:00 is 18:00 beschränkt sind, konvertieren wir die Eingabe, indem wir den Beginn B vom Ende E subtrahieren und den Beginn des Zeitraumes auf 0 setzen. So bleibt auch der Wert M, also die Differenz von E und B, gleich. Analog müssen wir die Eingabe für die kleineren Rechtecke r_i entsprechend konvertieren, indem wir von jedem b_i und e_i den Wert B abziehen. Für die Aufgabe selbst hat diese Konversion keine Bedeutung und funktioniert auch, wenn ein angegebener Zeitraum sich vom ursprünglichen Zeitraum unterscheidet.

Mit dieser Konversion können wir ebenfalls mehrtägige Flohmärkte oder sogar mehrere unterschiedlichen Flohmärkte behandeln. Zur Darstellung eines mehrtägigen Flohmarktes kann man die gesamte Öffnungszeiten des Flohmarkts in Stunden angeben, z.B. der Zeitraum eines Flohmarkts, der zwei Tage von 10:00 bis 17:00 dauert, kann als von 10:00 bis 41:00 (17:00 + 24 Stunden) dargestellt werden. Dann ist der Zeitraum von 17:00 bis 34:00 an keiner Stelle besetzt. Ebenfalls, wenn ein angegebener Zeitraum an einer Stelle unterbrochen ist, etwa dauert der Flohmarkt von 7:00 bis 9:00 und dann von 12:00 bis 15:00, kann der Zeitraum von 7:00 bis 15:00 angegeben werden und alle Anmeldungen, die zumindest zum Teil in der Pausenzeit liegen, können aus der Eingabe entfernt werden oder können gar nicht angegeben werden. Mehrere unterschiedlichen Flohmärkte mit derselben Länge N kann man analog kodieren. Es hängt nur von der Eingabe ab.

Außerdem werden im ursprünglichen Problem alle Zeiten in vollständigen Stunden angegeben. Diese Aufgabe kann sehr leicht zu Zeiten in Minuten ergänzt werden. Das lohnt sich vor allem dann, wenn die Öffnungszeit zur halben Stunde fällt. Dazu konvertiert man die Eingabe am Anfang auf folgende Weise: Man kann einfach alle Zeiten zu Minuten umrechnen, indem man vollständige Stunden mal 60 multipliziert. Obwohl die weiteren Betrachtungen sich grundsätzlich auf vollständige Stunden beziehen (wie in der Aufgabenstellung), soll man nicht vergessen, dass alle diesen Gedanken sich auf Minuten übertragen lassen.

1.3.2 Greedy–Algorithmus

Wir bilden das große Rechteck R auf ein Koordinatensystem ab. Die Seite der Länge N verläuft entlang der x–Achse und die Seite der Länge M entlang der y–Achse. Der Wert B (nach der Konversion) wird entsprechend am Punkt $(0, 0)$ abgebildet (s. Abb. 1)

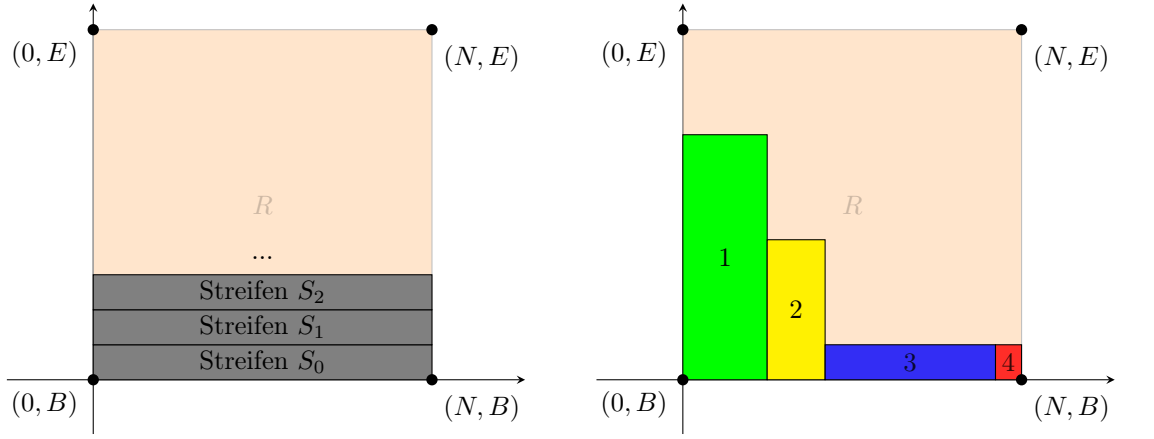
Die Größen N und M sind im Programm fest, unabhängig davon, wie viel sie betragen. Außerdem wurde im Abschnitt 1.1 festegestellt, dass die Größen s_i, b_i und e_i des jeweiligen Rechtecks r_i fest sind und dass wir ein Rechteck r_i nur entlang der x–Achse, also entlang der Seite der Länge N des Rechtecks R, bewegen dürfen. So bietet sich eine Verteilung der kleinere Rechtecke r_i auf kleinere ***Streifen*** der Länge N im Rechteck R entlang der y–Achse (s. Abb. 1a). Die Breite eines solchen Streifen ist äquidistant für alle Streifen und, da man Stände am Flohmarkt nur zu vollständigen Stunden vermietet, beträgt die Breite eines Streifens 1 Stunde.[1] Legen wir die folgende Schreibweise fest: Ein Streifen im Rechteck R, der die Stunde k betrifft, also in der Stunde k beginnt und in der Stunde $k + 1$ endet, nennen wir S_k.

Im Programm sind diese Streifen einfach Listen mit allen kleineren Rechtecken, deren Breite m_i sich in diesem Streifen enthält. Nach der Konversion der Eingabe bilden wir eine Liste Z, in der jedes Rechteck r_i mit seinen genannten Größen s_i, b_i, e_i gespeichert wird. Dann iterieren wir über jedes Rechteck m_i in Z und fügen wir es in jede Liste S_j fir alle j hinzu, die die folgende Bedingung erfüllen: $b_i \leqslant j < e_i$. Das bedeutet, dass ein Rechteck von $b_i = 1$ (nach Konversion, in vollständigen Stunden) bis $e_i = 5$ in den folgenden Streifen enthalten wird: S_1, S_2, S_3, S_4. Im Streifen S_5 wird er nicht enthalten, da die Miete mit dem Anfang der 5. Stunde endet. Wie Streifen implementiert werden, lesen Sie in der Umsetzung.

[1] Wenn man Zeiten zu vollständigen Minuten betrachtet, wird R analog in äquidistante Streifen mit Breite von 1 Minute aufgeteilt.

Nach dieser Vorbereitung der Eingabe erfolgt der Lauf unseres Greedy–Algorithmus, der das Ausgangsergebnis liefert. Wir sortieren die Rechtecke r_i in jedem Streifen S_j unabhängig voneinander nach folgenden Kriterien in dieser Reihenfolge: 1) fallend nach dem Wert e_i, 2) aufsteigend nach dem Wert b_i und 3) fallend nach der Fläche jedes Rechtecks. Somit sind die ersten Rechtecke in jeder Liste S_j diejenigen, deren Wert e_i am größten ist — oft diejenigen, die am breitesten im Streifen sind. Die Reihenfolge wurde so gewählt, damit wir in dieser Reihefolge versuchen, die Rechtecke aus den Streifen ins große Rechteck R zu platzieren. Die Idee hinter dieser Platzierung ist, dass wir zuerst die breitesten Rechtecke „links", also an niedrigeren x–Werten, platzieren, so weit es geht. Dann füllen wir die Lücken „rechts" (an größeren x–Werten) mit schmalleren Rechtecken. Die grobe Idee ist, dass wir das Rechteck R quasi vom Punkt $(0, 0)$ bis zum Punkt (N, E) mit immer schmalleren Rechtecken füllen.

Bevor wir zur Beschreibung des Algorithmus übergehen, legen wir noch fest, was eine Lücke ist. Als ***Lücke*** bezeichnen wir eine Strecke zwischen zwei Rechtecken in einem Streifen. Jede Lücke betrifft einen konkreten Streifen j und hat die Koordinaten x_1 und x_2 (stets: $x_1 < x_2$), die den Eckpunkten von zwei Rechtecken in j oder den Seiten des Rechtecks R entsprechen. Ma beachte insbesondere, dass es keine Lücke zwischen zwei Rechtecken gibt, die eine gemeinsame Seite haben. Die *Größe* einer Lücke beträgt: $x_2 - x_1$.



(a) Streifen in einem großen Rechteck R.

(b) Nach der Verarbeitung des Streifens S_0. Die Zahlen stellen die Reihenfolge dar, in der jedes Rechteck platziert wurde.

Abbildung 1: Die Abbildung des Rechtecks R auf einem Koordinatensystem. Die Seiten entlang der x–Achse haben die Länge N und die Seiten entlang der y–Achse haben die Länge M.

Wir verarbeiten Streifen für Streifen in der aufsteigenden Reihenfolge der y–Werte, beginned mit dem 0–ten Streifen. Wir iterieren durch jede Liste S_j und untersuchen jedes Rechteck r_i in diesem Streifen, ob sein Wert b_i gleich dem Wert j ist, also ob das Rechteck (die Anmeldung) mit dem aktuellen Zeitpunkt j beginnt. Außerdem prüfen wir, ob das Rechteck bereits platziert wurde. Wenn die Werte b_i und j übereinstimmen und r_i noch nicht platziert wurde, suchen wir von $x = 0$ bis $x = N$ nach der ersten freien Lücke im Streifen j, die mindestens so groß ist wie die Länge des Rechtecks s_i. Wenn es so eine Lücke gibt, legen wir r_i ins R und übergehen zum Rechteck r_{i+1}. Auf der Abbildung 1b sieht man den verarbeiteten Streifen S_0. Insbesondere erkennt man gut die Reihenfolge der Sortierkriterien der Rechtecke im Strefen.

Nachdem alle Streifen verarbeitet worden sind, ist unser Ausgangsergebnis erzeugt.

In diesem einfachen Algorithmus nutzt man beim Platzieren eines Rechtecks den Vorteil, dass beim Streifen j nur ein Rechteck r_i platziert werden kann, das an diesem Streifen beginnt — es gilt: $b_i = j$. Natürlich können andere Rechtecke bereits platziert sein, aber unsere Vorgehensweise sichert uns, dass es für ein Rechteck r_i genug Platz über diesem Rechteck (genau: s_i) in den weiteren Streifen $S_{b_i+1}, S_{b_i+2}, ..., S_{e_i-1}$ gibt, wenn der Algorithmus entscheidet, dieses Rechteck in R zu platzieren. Diese Beobachtung ist offensichtlich wahr, da man die Streifen von „unten" (beginnend mit den niedrigeren y–Werten im Koordinatensystem) nach „oben" verarbeitet und bei jedem Streifen j prüft, ob es eine genug große Lücke für ein Rechteck r_i gibt. Wenn es eine solche Lücke nicht gibt, bedeutet, dass es im Streifen j und möglicherweise in weiteren Streifen $j + 1, j + 2, ...$ ein Rechteck gibt, das die Platzierung von r_i in j unmöglich macht.

Man kann leicht begründen, dass der vorgestellte Algorithmus als Greedy klassifiziert werden kann. Mit jedem Schritt des Algorithmus wird die aktuell beste Verbesserungsmöglichkeit gewählt. Der Algorithmus

nutzt die sortierte Reihenfolge der Rechtecke im Streifen, um anhand des aktuellen Standes im Streifen eine Entscheidung zu treffen, ob ein Rechteck r_i in R platziert werden kann.

1.3.3 Heuristisches Verbesserungsverfahren

Man kann leicht feststellen, dass, wenn alle Rechtecke aus Z im Laufe des Greedy–Algorithmus in R platziert wurden oder wenn die ganze Fläche von R bedeckt wurde, das Problem für diese Eingabe optimal gelöst wurde. Allerdings lässt sich nicht nachweisen, dass der vorgestellten Algorithmus stets eine optimale Platzierung liefert. Hingegegen kann man sogar festellen, dass es bessere Ergebnisse gibt als die, die am Anfang geliefert werden.

Wir probieren, das Ausgangsergebnis heuristisch zu verbessern. Bezeichnen wir ab jetzt ein beliebiges Ergebnis, also eine beliebige Anordnung der kleineren Rechtecke innerhalb des großen Rechtecks R, die unser Programm liefert, als C. Insbesondere nennen wir unser Ausgangsergebnis C_A.

Offensischtlich kann man mithilfe des obengenannten Greedy–Algorithmus das Ausgangsergebnis nicht optimieren. Wir haben begründet, dass dieser Algorithmus an jeder Stelle stets die aktuell optimale Variante wählt. Außerdem dürfen wir diesen Algorithmus nicht nochmal nutzen, da wir voraussetzen, dass die Streifen in der aufsteigender Reihenfolge ein nach dem anderen verarbeitet werden. Dann kann es sein, dass es sich eine Lücke zwischen den Punkten (x_j, j) und $(x_j + \ell, j)$ der Länge ℓ an einer Stelle in einem Streifen j befindet und dass ein Rechteck r_i mit $s_i < \ell$ theorethisch hineinpassen würde, aber es ist nicht mehr gesichert, dass es die Lücken direkt darüber in oberen Streifen $j+1, j+2, ...$ geben würde.

Deshalb führen wir ein neues Verfahren ein. Sei C eine beliebige Platzierung von Rechtecken innerhalb von R. Nennen wir C *das aktuelle Ergebnis*. Die allgemeine Idee des Verbesserungsverfahrens besteht darin, man führt zu einer Veränderung (Mutation) in C, d.h., ein nicht platziertes Rechteck r wird in R platziert und es müssen ggf. Rechtecke aus R entfernt werden, die mit r kollidieren. So kommt man auf einen neuen Zustand, eine neue Platzierung der Rechtecke C'. Es wird dann überprüft, ob der Gesamtflächeninhalt aller platzierten Rechtecke in der Platzierung C' größer ist als der in der Platzierung C. Wenn ja, wird C' das aktuelle Ergebnis und der Vorgang wiederholt sich, bis es noch möglich ein Zustand C zu weiter verändern. Wir können diesen Ansatz als einen Bersteigeralgorithmus klassifizieren.

Wie kommt es zur Veränderung der Platzierung und wann bestimmen wir, dass es unmöglich ist, einen Zustand weiter zu verändern? Unser Verbesserungsverfahren arbeitet mit Lücken, die nach der Platzierung C_A entstehen. Die Idee ist, man findet eine Lücke in einem Streifen und man legt ein noch nicht platziertes Rechteck r in die Lücke, ggf. muss man die Rechtecke, die mit r kollidieren, aus der Platzierung entfernen und somit entstehen neue Lücken, die mit anderen nicht gelegten Rechtecken gefüllt werden können. So kommt man auf ein neues Ergebnis. Man hört auf, wenn es keine mehr Lücken gibt, für die ein Rechteck zum Platzieren zur Verfügung steht.

Zuerst muss man die nicht platzierten Rechtecke für jeden Streifen bestimmen. So legen wir für jeden Streifen j eine Liste U_j fest, in der sich alle Rechtecke aus j befinden, die nicht platziert wurden. Die Liste U_j muss man auf eine Weise sortieren. Jedes Rechteck r_i in jeder solchen Liste ordnen wir nach diesen Kriterien: 1) aufsteigend nach der Länge s_i und 2) aufsteigend nach dem Beginn b_i. Die Entscheidung, diese Sortierkriterien zu wählen, ergibt sich experimentell und wird im Abschnitt 1.4.2 beschrieben.

Danach muss man die Lücken in einer Platzierung in jedem Streifen finden. So legen wir eine Liste H_j für jeden Streifen j fest, in der sich alle Lücken aus diesem Streifen befinden. Man findet sie, indem man durch jedes im Streifen j platziertes Rechteck r_i iteriert und jeweils überprüft, ob der Wert $x_i + s_i$ gleich dem Wert x_{i+1} ist. Wenn nicht, gibt es eine Lücke zwischen den Rechtecken r_i und r_{i+1}. Dazu muss man auch das erste Rechteck untersuchen, ob die Koordinate x_0 des Rechtecks r_0 dem Wert 0 entspricht bzw. ob die Koordinate $x_l + s_l$ des letzten Rechtecks r_l in diesem Streifen mit dem Wert N übereinstimmt. Wenn nicht, enstehen auch Lücken zwischen den Wänden des großen Rechtecks R.

Danach werden alle Listen H_j zu einer Liste H zusammengebracht. Diese Liste muss auch auf eine Weise geordnet werden. Experimentell ergeben sich die folgenden Sortierkriterien für jede Lücke L_i: 1) fallend nach der Größe der Lücke L_i und 2) aufsteigend nach dem Index des Streifens. Diese Entscheidung wird ebenfalls im Abschnitt 1.4.2 diskutiert.

Der Algorithmus 1 zeigt eine vereinfachte Vorgehensweise des Verbesserungsverfahrens. Die Funktion $getAllHoles(C)$ findet alle Lücken in allen Streifen im Rechteck R in der aktuellen Platzierung C und bestimmt die Liste H. Die Funktion $getRecs(C)$ findet alle nicht platzierten Rechtecke und verteilt sie auf die Listen U_j für jeden Striefen j. Die Funktion $next(C, itH, itR)$ in diesem Algorithmus besteht selbst aus drei Funktionen.

Die erste Funktion bestimmt die nächste Lücke, in die ein nicht platziertes Rechteck eingefügt wird. Es gibt einen Iterator itH, der am Anfang am Beginn der Liste H gestezt wird. Im Laufe des Algorithmus bewegt sich der Iterator und zeigt auf nächste Lücken, Eine Lücke bezeichnen wir als *geeignet*, wenn sie

Algorithmus 1 Das heuristische Verbesserungsvefahren

Eingabe: R — das große Rechteck, Z — die Liste mit allen kleineren Rechtecken.

```
1:  C_A ← Greedy(R, Z)
2:  H ← getAllHoles(C_A)
3:  U ← getRecs(C_A)
4:  C ← C_A
5:  itH ← H.begin
6:  j ← itH.Streifen        ▷ j ist der Index des Streifens, in dem sich die Lücke zum Iterator itH befindet
7:  itR ← U_j.begin
8:  while itH ≠ H.end do
9:      Σ_C ← |C|                    ▷ der Gesamtflächeninhalt aller platzierten Rechtecke in C
10:     C' ← next(C, itH, itR)
11:     itR ← itR + 1
12:     Σ_C' ← |C'|
13:     if Σ_C' > Σ_C then
14:         H ← getAllHoles(C')
15:         U ← getRecs(C')
16:         itH ← H.begin
17:         k ← itH.Streifen
18:         itR ← U_j.begin
19:         C ← C'
20:     end if
21: end while
```

sich in einem Streifen j befindet, zu dem die entsprechende Liste U_j nicht leer ist, d.h., es mindestens ein Rechteck gibt, das in diese Lücke eingefügt werden kann. Somit bewegt sich der Iterator in der Liste H und, wenn er auf eine geeignete Lücke stößt, wird diese Lücke durch die folgenden zwei Funktionen bearbeitet. Insbesondere beachte man, dass die While–Schleife in Zeile 8 abbricht, wenn der Iterator itH zum Ende der Liste H gelangt, also dann, wenn es keine geeigneten Lücken mehr gibt.

Die nächste Funktion wählt ein Rechteck r, das in eine gewählte geeignete Lücke L eingefügt wird. Da die gewählte Lücke sich in einem Streifen j befindet, stammt r aus der Liste U_j. Es gibt auch einen internen Iterator itR für die Liste U_j, der bei jeder neuen Lücke ans Anfang der Liste gesetzt wird. Wenn ein Rechteck r in einem Lauf t der While–Schleife in L eingefügt wird, wird itR danach inkrementiert und im darauf folgenden Lauf der Schleife $t+1$ wird ein unterschiedliches Rechteck in die Lücke L gelegt. Wenn der Iterator itR bis zum Ende der Liste U_j gelangt, wird der Iterator itH in der Liste H inkrementiert und somit eine neue geeignete Lücke gesucht.

Die letzte Funktion nimmt ein unter dem Iterator itR stehendes Rechteck r und legt es in die unter dem Iterator itH stehende Lücke L. Diese Funktion bereitet eine neue Platzierung C' vor. Seien die Koordinaten der Lücke x_1 und x_2 und der Streifen, in dem sich L befindet, sei j. Seien x_r und $x_r + s_r$ die x–Koordinaten von r. Das Rechteck r wird so gelegt, dass $x_2 = x_r + s_r$. Auf diese Weise beträgt der Wert $x_r \coloneqq x_2 - s_r$.[2] Selbstverständlich kann an dieser Stelle zu Kollisionen kommen — Rechtecke können sich überdecken. Vor dem Platzieren prüft man nicht, ob es durchgehend eine Lücke zwischen x_r und $x_r + s_r$ in allen Streifen k gibt, wobei $b_r \leqslant k < e_r$. Deshalb entfernt man nun alle Rechtecke, die mit r kollidieren, also all diejnigen, die zumindest zum Teil zwischen x_r und $x_r + s_r$ in allen Streifen k liegen. So entstehen auch neue Lücken, deshalb versuchen wir an dieser Stelle die Lücken mit anderen Recktecken zu füllen. Dazu verarbeiten wir alle Streifen k ($b_r \leqslant k < e_r$), indem wir jedes in C' noch nicht gelegtes Rechteck r_i in jeder Liste S_k (in der ursrpünglichen Reihenfolge) untersuchen. Wie beim Greedy–Algorithmus am Anfang verusuchen wir, ein Rechteck r_i im Streifen g zu legen nur, wenn $g = b_i$ (und wenn es eine Lücke zwischen x_{r_i} und $x_{r_i} + s_i$ gibt). Allerdings müssen wir die Streifen $b_i + 1, b_i + 2, ..., e_i - 1$ vor dem Platzieren prüfen, ob es in ihnen durchgehend Lücken zwischen x_{r_i} und $x_{r_i} + s_i$ gibt. Nur, wenn in allen Streifen $b_i, b_i + 1, ..., e_i - 1$ diese Lücken bestehen, kann das Rechteck r_i in die Platzierung C' eingefügt werden. Nachdem alle durch Kollision betroffenen Streifen verarbeitet worden sind, ist die Platzierung C' fertig.

Dann erfolgt der Vergleich in Zeile 13. Wenn der Gesamtflächeninhalt der Platzierung C' streng größer ist als der Gesamtflächeninhalt der Platzierung C, wird die neue Platzierung vom Algorithmus akzeptiert

[2] Die Situation, in der $x_r < 0$ gilt, wird schon in der zweiten Funktion dadurch ausgeschlossen, dass der Iterator itR inkrementiert wird und das nächste Rechteck gewählt wird.

und gilt als die aktuelle Platzierung C. Danach muss man offensichtlich alle Lücken und alle nicht gelegten Rechtecke neu bestimmen. Die Iteratoren itH bzw. itR werden auf $H.begin$ bzw. $U_k.begin$ gesetzt.

Man kann leicht begründen, dass das Programm auf jeden Fall anhält. Durch den Bergsteigeralgorithmus wird ein lokales Maximum gefunden, das bestenfalls auch das Optimum ist. Jedes lokale Maximum kann das Optimum nicht überschreiten. Das Optimum ist auf den Flächeninhalt des großen Rechtecks R beschränkt. Wenn ein lokales Maximum erreicht wird, kann der Algorithmus keine neue Platzierungen annehmen. Wenn ein lokales Maximum erreicht wird, werden alle geeigenten Lücken und dazu jeweils alle passenden Rechtecke ausprobiert, aber das Programm nimmt keine der neuen Kombinationen an, da sie keinen größeren Flächeninhalt bilden als der des lokalen Maximums. Somit hält das Programm auf jeden Fall an.

1.4 Diskussion der Ergebnisse

1.4.1 Grenzen der Heuristik

Im Abschnitt 1.2 wurde bewiesen, dass das Flohmarkt–Problem NP–vollständig ist. Es gibt $|Z|!$ mögliche Anordnungen der Rechtecke. Deshalb für $|Z|$ in der Ordnung von ca. 700 wird eine Brute–Force–Lösungin einer nicht akzeptablen Zeit gelöst. Das ist auch der Grund, warum wir eine Heurstik verwenden. Allerdings, da eine Heuristik ein Approxiamationsalgorithmus ist und nur nahezu optimale Ergebnisse liefert, muss es Kompromisse geben. Dieser Kompromiss betrifft vor allem die Laufzeit und dafür, dass der Algorithmus in Polynomialzeit läuft, trifft das Programm an vielen Stellen vereinfachte Entscheidungen, die nicht zum optimalen Ergebnis führen. In diesem Abschnitt diskutieren wir nur über die Grenzen der Heuristiken im Programm und im Abschnitt 1.4.2 besprechen wir die Ergebnisse.

Im Greedy–Algorithmus am Anfang liegt die Schwierigkeit darin, dass die Platzierung der Rechtecke grundsätzlich von ihrer Reihenfolge in Listen S_j abhängt. Diese hängt dann von den Sortierkriterien ab. Obwohl dank der gewählten Sortierkriterien optimale oder sehr gute Ergebnisse bei vielen Beispielen herauskommen, ist das nicht der Fall bei allen Beispielen (mehr dazu im Abschnitt 1.4.2). Auf jeden Fall liefert der Greedy–Algorithmus kein optimales Ergebnis zum Beispiel 2, weil dieses Ergebnis im Laufe des Verbesserungsverfahrens verbessert wird.

Im Verbesserungsverfahren wurden mehrere Kompromisse zugunsten der Laufzeit gemacht. Vor allem liegt die Schwierigkeit zugrunde dem Verfahren — warum ein Bergsteigeralgorithmus und nicht z.B. ein Verfahren mit simuliertem Abglühen oder ein ganz anderer heuristische Ansatz? Außerdem liegen die Schwierigkeiten des Verbesserungsverfahrens auch an der Reihenfolgen der Listen U_j und der Liste H. Zum Sortieren dieser Listen nutzt man auch festgelegte Sortierkriterien, die nicht zwingend das optimale Ergebnis liefern müssen. Dazu liegt das Problem auch beim Platzieren eines Rechtecks in eine Lücke. Wir entscheiden uns, das Rechteck an die Koordinate x_2 der Lücke zu legen. Man könnte hier eine andere Vorgensweise anwenden, z.B. man könnte das Rechteck an die Koordinate x_1 orientieren, man könnte auf eine besondere Weise vorgehen, wenn das Rechteck deutlich kleiner ist als die Lücke, oder man könnte die Rechtecke in darüber und darunter stehenden Streifen in Betracht ziehen. Wie beim Greedy–Algorithmus am Anfang, hängt die Reihenfolge der Rechtecke beim Ausfüllen der Lücken von der Reihenfolge in Listen S_j ab.

1.4.2 Qualität der Ergebnisse

Im vorangegangenen Abschnitt werden die Grenzen der Heuristik erkannt. In diese Abschnitt diskutieren wir die Qualität der herausgekommenen Ergebnisse.

Zuerst bestimmen wir die Kriterien, unter denen wir ein Ergebnis auswerten:

- Der Verhältnis vom Gesamtflächeninhalt der ins große Rechteck gelegten Rechtecke zu Gesamtflächeninhalt aller Rechtecke.
- Da Verhältnis vom Gesamtflächeninhalt der ins große Rechteck gelegten Rechtecke zum Flächeninhalt des großen Rechtecks.
- Die praktische Laufzeit des Programms für ein Ergebnis.

Diese Kriterien wurden in Bezug auf die Aufgabenstellung gewählt, „um den Organisatoren des Flohmarkts zu helfen“. Das erste Kriterium gibt den Veranstaltern den Einblick darin, wie viel sie in Bezug auf die Menge des verfügbaren Geldes verdienen — alle Vermieter wollen den Veranstaltern Geld anbieten, aber es hängt von den Organisatoren ab, welche Anmeldungen sie ablehnen und welche annehmen. Das zweite Kriterium gibt den Einblick darin, wie viel Geld die Veranstalter verdienen in Bezug auf den

verfügbaren Platz. Die beiden ersten Kriterien liefern natürlich auch die Erkenntnis über die Verlüste, die mit der Auswahl an Anmeldungen verbunden sind. Das dritte Kriterium spielt für die Veranstalter eine praktische Rolle. Sehr wenige Personen würde ein Ergebnis interessieren, das vielleicht um ein paar Prozent besser ist, aber dessen Bestimmung mehrere Stunden (oder Tage!) dauert. Deshalb wurde auch die Brute–Force–Lösung ausgeschlossen.

Tabelle 1 stellt die Ergebnisse zu den Beispielen von 1 bis 7 aus der BWINF–Webseite dar. In den ersten zwei Spalten befinden sich entsprechend die Sortierkriterien für Liste H und die Listen U_j. Die Sortierkriterien werden in der Tabelle 2 erläutert. Die erste Zeile in der Tabelle stellt die Ergebnisse bevor dem Lauf des Verbesserungsverfahrens dar. Die Zahlen zwischen den Spalten „Bsp. 1“ und „Bsp. 7“ sind die Ergebnisse in [m × h] (nach der Aufgabenstellung: auch in Euro), die das Programm unter Verwendung von den angegebenen Sortierkriterien liefert. Dazu ist zu beachten, dass der Flächeninhalt des Rechtecks R in allen abgebildeten Beispielen 10000 beträgt.

Kriterien H	Kriterien U_j	Bsp. 1	Bsp. 2	Bsp. 3	Bsp. 4	Bsp. 5	Bsp. 6	Bsp. 7
Bevor dem Verbesserungsverfahren		8028	9056	8778	7370	7962	10000	9959
`greaterHolesSize`	`smallerSize`	8028	9077	8778	7370	8705	10000	9979
	`greaterSize`	8028	9077	8778	7370	8705	10000	9973
	`smallerArea`	8028	9077	8778	7370	8705	10000	9979
	`greaterSize`	8028	9077	8778	7370	8705	10000	9973
	`greaterEnd`	8028	9077	8778	7370	8705	10000	9973
`smallerHolesSize`	`smallerSize`	8028	9077	8778	7370	8599	10000	9980
	`greaterSize`	8028	9077	8778	7370	8599	10000	9973
	`smallerArea`	8028	9077	8778	7370	8599	10000	9980
	`greaterArea`	8028	9077	8778	7370	8599	10000	9973
	`greaterEnd`	8028	9077	8778	7370	8599	10000	9991

Tabelle 1: Ergebnisse zu den Beispielen 1–7. Die erste Zeile enthält die Ausgangsergebnisse, bevor man den Verbesserungsalgorithmus laufen lässt. Die ersten zwei Spalten stellen die verwendeten Sortierkriterien für die Liste H und die Listen U_j dar. Die Spalten von Bsp. 1 bis Bsp. 7 sind die Ergebnisse in [m × h] nach dem Lauf des Verbesserungsalgorithmus. Man beachte, dass die Kriterien, die für den Lauf des Programms und die im Abschnitt 1.3.3 beschrieben werden, sind diejenigen aus der zweiten Zeile. (s. Tabelle 2 für die Erklärungen der Sortierkriterien.)

Name	1. Kriterium	2. Kriterium	3. Kriterium
`greaterHolesSize`	Lückengröße fallend	Streifenindex aufsteigend	
`smallerHolesSize`	Lückengröße aufsteigend	Streifenindex aufsteigend	
`smallerSize`	s_i aufsteigend	b_i aufsteigend	
`greaterSize`	s_i fallend	b_i aufsteigend	
`smallerArea`	$s_i \times m_i$ aufsteigend	b_i aufsteigend	
`greaterArea`	$s_i \times m_i$ fallend	b_i aufsteigend	
`greaterEnd`	e_i fallend	b_i aufsteigend	$s_i \times m_i$ fallend

Tabelle 2: Die erste zwei Zeilen sind Sortierkriterien nur für die Liste H mit Lücken. Die restlichen Zeilen sind Sortierkriterien für die Listen U_j für jedes Rechteck r_i.

Man kann leicht feststellen, dass der Greedy–Algorithmus sehr gute Ergebnisse liefert, die manchmal nur um winzige Prozentpunkte durch den Verbesserungsalgorithmus verbessert werden.

Im Beispiel 1 werden alle Rechtecke bereits beim Lauf des Greedy–Algorihtmus am Anfang platziert. Wenn man den Gesamtflächeninhalt aller Rechtecke aus diesem Beispiel ausrechnet, kommt man auf die Zahl 8028. Das ist also das optimale Ergebnis. Ebenfalls ist beim Beispiel 6 sehr leicht zu erkennen, dass der Gredy-Algorithmus das optimale Ergebnis liefert, da alle Rechtecke aus dem Beispiel platziert und die Fläche des großen Rechtecks vollständig bedeckt wurden.

Das Beispiel 3 ist ein sehr interessanter Fall. Weder werden alle Rechtecke aus diesem Beispiel platziert (das ist sowieso unmöglich, da der Gesamtflächeninhalt aller Rechtecke 10010 beträgt), noch ist die Fläche nicht des großen Rechtecks völlig bedeckt. Allerdings, wenn wir die Ergebnisse jedes Streifens einzeln betrachten, stellen wir fest, dass der Flohmarkt von 11:00 bis 17:00 vollständig durchgehend ausgebucht ist, also beträgt der Flächeninhalt jedes Streifens von S_3 bis S_8 (einschließlich) 1000. Das bedeutet, man

kann das Ergebnis für diese Streifen nicht verbessern. Man kann auch feststellen, dass alle Rechtecke, die zu den Streifen S_0, S_1, S_2, S_9 gehören, platziert wurden. Das bedeutet, dass der restliche Flächeninhalt (von 1000 subtrahiert) mit keinen Rechtecken bedeckt werden kann. Das bedeutet, dass 8778 das optimale Ergebnis für dieses Beispiel ist, weil man dieses Ergebnis nicht verbessern kann.

Die Situation mit dem Beispiel 4 sieht ähnlich aus. Obwohl nicht alle Rechtecke platziert werden (wieder beträgt der Gesamtflächeninhalt aller Rechtecke mehr als 10000) und es noch viel freien Platz im großen Rechteck gibt (mehr als ein Viertel des Flächeninhalts), ist dieses Ergebnis optimal. Man kann per Hand prüfen, dass jede Kombination mit den zwei nicht gelegten Rechtecken kein besseres Ergebnis ergibt.

Dann bleiben noch die Ergebnisse zu den Beispielen 2, 5 und 7. Da die Anzahl an kleineren Rechtecken zu groß ist, um die Ergebnisse per Hand zu prüfen und wir keinen Brute–Force–Algorithmus laufen lassen, kann man schwer sagen, wie weit die Ergebnisse von den Optima abweichen. Zur Auswertung dieser Ergebnisse verwenden wir unsere festgelegten Kriterien.

Das Ergebnis zum Beispiel 2 bevor dem Lauf des Greedy-Algorithmus am Anfang beträgt 9056. Dieser Gesamtflächeninhalt entspricht 90,5% des Flächeninhalts des großen Rechtecks und ebenfalls 90,5% des Gesamtflächeninhalts aller Rechtecke in diesem Beispiel. Man beachte, dass der Gesamtflächeninhalt aller Rechtecke 10000 überschreitet. Durch das Verbesserungsalgorithmus steigt das Anfangsergebnis auf 9077, also eine Verbesserung um 0,2 Prozentpunkte. In diesem Beispiel gibt es 603 Rechtecke und das sind Anmeldungen, deren Wert s_i hauptsächlich zwischen 1 und 6 liegt. Die praktische Laufzeit des Algorihtmus schließt sich im Bereich von 20 Sekunden auf einem modernen Recher.[3] Der Wert 90,7% ist akzeptabel in Bezug auf die möglichen Einkommen und auf den verfügbaren Platz und aus praktischer Sicht ist es schwer, sich ein besseres Ergebnis innerhalb von 20 Sekunden zu wünschen, solange die Ermittlung eines qualitativen Ergbnises per Hand sehr lange dauern würde. Es ist anhand der Tabelle 1 festzustellen, dass das Ergebnis sich nach dem Lauf des Verbesserungsalgorithmus unter Verwendung von allen Kriterien um denselben Wert verbessert.

Das Anfangsergebnis zum Beispiel 7 ist 9959 und beträgt genau 99,59% des Flächeninhalts des Rechtecks R und des Gesamtflächeninhalts aller Rechtecke. In diesem Beispiel gibt es 566 Anmeldungen, davon haben die meisten den Wert s_i im Bereich von 1 bis 6, aber im Vergleich zum Beispiel 2 gibt Rechtecke, die einen Wert s_i im Bereich 10–40 besitzen. Wenn man die Sortierkriterien `greaterHolesSize` und `smallerSize` wählt, also diejenigen, die für das Program gewählt wurden und die im Abschnitt 1.3.3 beschrieben werden, liefert das Verbesserungsverfahren ein Ergebnis um 0,2 Prozentpunkte besser. Wir stellen fest, die andere Kombinatione der Sortierkriterien und insbesondere die Kombination aus der letzen Zeile der Tabelle liefert ein besseres Ergebnis. Da bedeutets, dass der Wert 9979 auf jeden Fall nicht optimal ist. Allgeimein ist der Wert 9979 völlig akzeptabel aus praktischer Sicht. Es ist kaum möglich, innerhalb von einer Sekunde so einen Wert zu erreichen, wenn man eine Platzierung der Rechtecke per Hand bestimmt. Aus praktischer Sicht ist der Wert 9991 auch nicht von einem bedeutenden Unterschied zu 9979 und sind die beiden Werte sehr nah am Optimum.

Als letztes bleibt das Beispiel 5, das 25 große Rechtecke umfasst, und zu dem der Greedy–Algorithmus am Anfang das Ergebnis 7962 liefert. Der Gesamtflächeninhalt aller Rechtecke beträgt mehr als 300000 und somit entspricht das Ergebnis 79,6% des Flächeninhalts des Rechtecks R und 25,7% des Gesamtflächeninhalts aller Rechtecke. Das Verbesserungsverfahren unter Verwendung von den Sortierkriterien `greaterHolesSize` liefert einen Wert 8705, also ist das eine Verbesserung um 7,4% Prozentpunkte. Hingegen beträgt das verbesserte Ergebnis nur 8599, wenn man die Sortierkriterien `smalllerHolesSize` verwendet. Es ist schwer zu beurteilen, wie weit das Ergebnis vom Optimum abweicht. Allerdings ist 87% des Flächeninhalts des großen Rechtecks, also des verfügbaren Platzes, noch in Ordnung und so ein Wert ist aus praktischer Sicht wünschenswrt.

Die deutlichste Verbesserung im Beispiel 5 liegt zugrunde der Entscheidung, die Sortierkriterien `greaterHolesSize` und `smallerSize` zu wählen. Bei allen Beispielen außer 2 dauert die Laufzeit des ganzen Programm etwa eine Sekunde, was praktisch eine sehr gute Laufzeit darstellt, und die Qualität der Ergebnisse ist in diesem Zusammenhang sehr gut, wenn man dies mit einer faktoriellen Laufzeit eines Brute–Force–Lösung vergleicht. Die durch den Bergsteigerlagorithmus gefundenen Maxima liegen höchstwahrscheinlich sehr nah an den Optima.

Zum Vergleich wurde auch ein Ansatz mit simulierten Abglühen ausprobiert, aber die Ergebnisse war allgemein schlechter als die, die der Bergsteigeralgorithmus liefert.

1.5 Laufzeit

- M — die Breite des großen Rechtecks R, die Anzahl der Streifen

[3] Die genaue Laufzeit ist nicht interessant, ohne dass die technischen Spezifikationen des Rechners angegeben werden.

- n — $|Z|$, also die Anzahl der kleineren Rechtecke

Die Größe M in der Aufgabe tritt in vollständigen Stunden vor. Wenn die Eingabe zu Minuten konvertiert wird, wird diese Variable in vollständigen Minuten betrachtet. Im Abschnitt Abschnitt 1.3.2 wird beschrieben, dass die Breite jedes Streifens 1 Stunde bzw. 1 Minute entspricht. Somit kann man die Größe M auch als die Anzahl der Streifen betrachten.

- Vorbereitung der Eingabe: $O(M \cdot n \log n)$ (worst–case)
  - Einlesen aller Rechtecke und Erstellung der Liste Z: $O(n)$
  - Erstellung von Listen `placedRectangles`, `unusedRectangles` und `holes` für jeden Streifen (s. Umsetzung): $O(M)$
  - Verteilung jedes Rechtecks auf die Streifen, zu denen es gehört: $O(M \cdot n)$ (worst–case)
    Im schlimmsten Fall gehört jedes Rechteck zu jedem Streifen, wenn jede Anmeldung den ganzen Zeitraum eines Flohmarkts betrifft. So muss jedes Rechteck in jeden Streifen hinzugefügt werden.
  - Sortierung der Listen S_i: $O(M \cdot n \log n)$ (worst–case)
    Es gibt M Listen und in jeder Liste kann es im schlimmsten Fall alle Rechtecke geben. Die linear–logarithmische Laufzeit ist durch das Sortieren verursacht.
- Der Greedy–Algorithmus am Anfang: $O(n(n + M \log n))$ (worst–case, amortisierte Laufzeit)
  Obwohl man die Funktion zur Verarbeitung eines Streifens M–mal laufen lässt, kann eine Laufzeitanalyse pro Lauf dieser Funktion zu pessimistisch sein. Es ist unmöglich, dass ein Platz für n Rechtecke M–mal gesucht wird, da wir voraussetzen, dass jedes Rechteck r_i nur im Streifen b_i gelegt werden kann und außerdem können n Rechtecke nicht M–mal platziert werden, da jedes Rechteck nur einmal gelegt werden kann. Stattdessen analysieren wir die Laufzeit für das Platzieren jedes Rechtecks allein, deshalb wird die endliche Laufzeit mal n multipliziert, da man im schlimmsten Fall alle n Rechtecke ins R legen muss.
  - Das Finden der passenden, freien x–Koordinaten: $O(n)$ (worst–case)
    Im schlimmsten Fall muss man in einem Streifen über $n - 1$ Rechtecke iterieren, um einen freien Platz für ein Rechteck zu finden.
  - Das Finden der genauen Stelle in den Listen S_j: $O(M \log n)$ (worst–case)
    Nicht in jedem Streifen müssen sich dieselben Rechtecke befinden und ein Rechteck kann zu mehreren Steifen gehören. In jedem Streifen muss man die genaue Position zum Platzieren des Rechtecks finden. Das erfolgt mittels der eingebauten Funktion `upper_bound`, die in C++ in $O(\log n)$ läuft.[4]. Die Einfügen–Operation in eine `list` in C++ erfolgt in $O(1)$.[5] Im schlimmsten Fall gehört ein Rechteck zu allen Streifen, deshalb muss die endliche Laufzeit mal M multipliziert werden.
- Ein Lauf des Verbesserungsalgorithmus pro ein Paar Lücke–Rechteck: $O(n(n + M \log n))$ (worst–case, amortisierte Laufzeit)
  - Berechnung des Gesamtflächeninhalts aller platzierten Rechtecke: $O(n)$ (worst–case)
    Im schlimmsten Fall können alle Rechtecke ins große Rechteck R gelegt werden.
  - Bestimmung aller nicht gelegten Rechtecke: $O(M \cdot n \log n)$ (worst–case)
    Im schlimmsten Fall gibt es ein gelegtes Rechteck, das genauso groß ist wie R, und somit alle $n - 1$ restlichen kleineren Rechtecke zu Listen U_j gehören. Im schlimmsten Fall können alle diese restlichen Rechtecke zu allen Streifen gehören. Die linear–logarithmische Laufzeit ist mit dem Sortieren der Listen U_j verbunden.
  - Auffinden aller Lücken: $O(M \cdot n \log n)$ (worst–case)
    Im schlimmsten Fall gibt es in jedem Streifen $n + 1$ Lücken, wenn kein Paar der Rechtecke in demselben Streifen eine gemeinsame Seite hat — dann gibt es Lücken auf beiden Seiten jedes Rechtecks. Dazu kann es im schlimmsten Fall n Rechtecke in jedem Streifen geben. Die linear–logarithmische Laufzeit ist mit dem Sortieren der Liste H verbunden.

[4] https://en.cppreference.com/w/cpp/algorithm/upper_bound
[5] https://en.cppreference.com/w/cpp/container/list/insert

- Entfernung aller kollidierenden Rechtecke: $O(M \cdot n)$ (worst–case)
  Beim Einfügen eines Rechtecks r in eine Lücke muss man in allen Streifen, zu denen r gehört, prüfen, ob es Kollisionen gibt. Im schlimmsten Fall gehört ein Rechteck zu allen M Streifen und man muss in allen Streifen $n-1$ Rechtecke entfernen.
- Einfügen neuer Rechtecke in neue Lücken: $O(n(n + M \log n))$ (worst–case, amortisierte Laufzeit)
  In diesem Teil lohnt es sich mehr, eine amortisierte Laufzeitanalyse pro Rechteck durchzuführen. Im schlimmsten Fall muss man $n-1$ Rechtecke ins Rechteck R einfügen. Im schlimmsten Fall gehört jedes Rechteck zu jedem der M Streifen. Beim Einfügen jedes Rechtecks r muss man zuerst die potenziellen Koordinaten für r im Streifen b_r finden. Dazu kann man im schlimmsten Fall über $n-1$ Rechtecke iterieren. Dann muss man in jedem Streifen, zu dem r gehört, prüfen, ob es genug Platz dafür gibt. Das wird wieder mittels der Funktion `upper_bound` ermittelt, die in logarithmischer Zeit läuft. Dann wird das Rechteck zu allen Streifen eingefügt, zu denen es gehört. Somit ergibt sich pro Rechteck r die Laufzeit: $O(n + M \log n))$
- Zurücksetzung der ursprünglichen Platzierung: $O(M \cdot n)$ (worst–case)
  Wenn eine Platzierung einen niedrigeren Flächeninhalt besitzt als die usprüngliche Anordnung, wird diese Platzierung vom Algorithmus abgelehnt und die ursprünliche Anordnung wird zurückgesetzt. Dazu muss man den Inhalt aus allen M Streifen kopieren, wobei es sich in jedem Streifen höchstens n Rechtecke befinden können.

Wie man im Algorithmus 1 erkennt, unterscheidet man zwischen zwei möglichen Läufen des Verbesserungsalgorithmus in der While–Schleife: Wenn ein neues Ergebnis angenommen wird und falls nicht. Wenn ein Ergebnis angenommen wird, muss man zusätzlich die Funktionen zur Bestimmung aller Lücken und aller nicht gelegten Rechtecke laufen lassen. Wie wir in den Betrachtungen zur Laufzeitanalyse zum Verbesserungsalgorithmus pro ein Paar Lücke–Rechteck sehen, besitzen diese zwei Funktionen niedrigere Laufzeiten als die Gesamtlaufzeit der restlichen Prozesse, deshalb unterscheiden wir nicht zwischen den Laufzeiten der Laüfe des While–Schleife, in denen ein Ergebnis angenommen wird, und denjenigen, in denen das nicht der Fall ist. Somit ergibt sich die folgende Laufzeit für ein Paar von einer Lücke L und einem Rechteck r, wobei r in L eingefügt werden soll: $O(n(n + M \log n))$ (worst–case).

Nun bestimmen wir die Anzahl an Paaren Lücke–Rechteck, die vom Verbesserungsalgorithmus verarbeitet werden. Die Funktion zur Bestimmung aller nicht gelegten Rechtecke kann höchstens $n-1$ Rechtecke und die Funktion zum Auffinden aller Lücken kann höchstens $M \cdot n$ Lücken finden. Allerdings, wenn $n-1$ Rechtecke nicht gelegt sind, gibt es höchstens nur $2M$ Lücken. Wenn die Anzahl der Lücken wächst, sinkt die Anzahl der nicht gelegten Rechtecke. Deshalb gibt es am meisten Möglichkeiten, wenn die beiden Anzahlen halbiert werden. So gibt es am meisten $O(M \cdot n/2 \cdot n/2) = O(M \cdot n^2)$ Möglichkeiten.

Im schlimmsten Fall muss man alle diese Kombinationen durchgehen, bis man bei einem Ergebnis gelangt, das vom Verbesserungsalgorithmus angenommen wird. So legen wir fest, die Laufzeit des Verbesserungsalgorithmus für jede Kombination der Lücken und Rechtecke aus einem Paar von Listen H und U_j beträgt im worst–case:

$$O(n(n + M \log n) \cdot M \cdot n^2) = O(M \cdot n^4).$$

Es bleibt noch die Abschätzung, wie viel mal man die Listen H und U_j bestimmt. Allgemein kann man die Läufzeit eines Bergsteigeralgorithmus schwer abschätzen. Allerdings ist ein Ergebnis auf den Flächeninhalt des großen Rechtecks R beschränkt und die Einheiten in dieser Aufgabe sind ganzzahlig (vollständige Meter, vollständige Stunden/Minuten). So können wir feststellen, dass die Ergebnisse des Verbesserungsalgorithmus mit jeder neuen Bestimmung der Listen H und U_j eine streng monoton wachsende Funktion bilden. Es gibt also eine feste Anzahl an möglichen Verbesserungen. Theoretisch könnte es einen Fall geben, in dem das Aufgangsergebnis nach dem Lauf des Greedy–Algorithmus 1 beträgt und in dem dieses Ergebnis mit jeder neuen Bestimmung der Listen H und U_j um 1 verbessert wird, aber diese Situation ist aus praktischer Sicht kaum vorstellbar. Deshalb führen wir eine Variable k, deren Wert zwischen 1 und $N \times M$ liegt, die dafür steht, wie oft die Listen H und U_j bestimmt werden müssen. In den Beispielen 1–7 überschreitet k nicht 10. So beträgt die finale Laufzeit im worst–case:

$$O(k \cdot M \cdot n^4).$$

Literatur

[1] T.H. Cormen u. a. *Introduction To Algorithms. Third edtition.* Introduction to Algorithms. MIT Press, 2009. ISBN: 9780262533058.

[2] Zhang Li'ang und Geng Suyun. „The Complexity of the 0/1 Multiknapsack Problem“. In: *Journal of Computer Science and Technology* 1.1 (1986), 46–50.

2 Umsetzung

TODO: Eingabeformat von Minuten erwähnen

3 Beispiele

Der Übersichtlichkeit halber befinden sich die genauen Standorte zu Anmeldungen zu jedem Beispiel in den angehängten csv–Dateien. In den Tabellen entsprechen die Werte x_1 und x_2 den Werten x_r und $x_r + s_r$ jedes Rechtecks r.

3.1 Beispiel 1

Der Flächeninhalt des großen Rechtecks: $\boxed{10000\ [\mathrm{m} \cdot \mathrm{h}]}$

Der Gesamtflächeninhalt aller platzierten Rechtecke: $\boxed{8028\ [\mathrm{m} \cdot \mathrm{h}]}$

Der Gesamtflächeninhalt aller Rechtecke: $\boxed{8028\ [\mathrm{m} \cdot \mathrm{h}]}$

3.2 Beispiel 2

Der Flächeninhalt des großen Rechtecks: $\boxed{10000\ [\mathrm{m} \cdot \mathrm{h}]}$

Der Gesamtflächeninhalt aller platzierten Rechtecke: $\boxed{9077\ [\mathrm{m} \cdot \mathrm{h}]}$

Der Gesamtflächeninhalt aller Rechtecke: $\boxed{10002\ [\mathrm{m} \cdot \mathrm{h}]}$

3.3 Beispiel 3

Der Flächeninhalt des großen Rechtecks: $\boxed{10000\ [\mathrm{m} \cdot \mathrm{h}]}$

Der Gesamtflächeninhalt aller platzierten Rechtecke: $\boxed{8778\ [\mathrm{m} \cdot \mathrm{h}]}$

Der Gesamtflächeninhalt aller Rechtecke: $\boxed{10010\ [\mathrm{m} \cdot \mathrm{h}]}$

3.4 Beispiel 4

Der Flächeninhalt des großen Rechtecks: $\boxed{10000\ [\mathrm{m} \cdot \mathrm{h}]}$

Der Gesamtflächeninhalt aller platzierten Rechtecke: $\boxed{7370\ [\mathrm{m} \cdot \mathrm{h}]}$

Der Gesamtflächeninhalt aller Rechtecke: $\boxed{10534\ [\mathrm{m} \cdot \mathrm{h}]}$

3.5 Beispiel 5

Der Flächeninhalt des großen Rechtecks: $\boxed{10000\ [\mathrm{m} \cdot \mathrm{h}]}$

Der Gesamtflächeninhalt aller platzierten Rechtecke: $\boxed{8705\ [\mathrm{m} \cdot \mathrm{h}]}$

Der Gesamtflächeninhalt aller Rechtecke: $\boxed{30940\ [\mathrm{m} \cdot \mathrm{h}]}$

3.6 Beispiel 6

Der Flächeninhalt des großen Rechtecks: $\boxed{10000\ [\mathrm{m} \cdot \mathrm{h}]}$

Der Gesamtflächeninhalt aller platzierten Rechtecke: $\boxed{10000\ [\mathrm{m} \cdot \mathrm{h}]}$

Der Gesamtflächeninhalt aller Rechtecke: $\boxed{10000\ [\mathrm{m} \cdot \mathrm{h}]}$

3.7 Beispiel 7

Der Flächeninhalt des großen Rechtecks: $\boxed{10000\ [\text{m} \cdot \text{h}]}$

Der Gesamtflächeninhalt aller platzierten Rechtecke: $\boxed{9979\ [\text{m} \cdot \text{h}]}$

Der Gesamtflächeninhalt aller Rechtecke: $\boxed{10000\ [\text{m} \cdot \text{h}]}$

Weitere Beispiele:

- s. Abschnitt Konversion
- andere Zeiten ✓(Bsp 8)
- andere Länge ✓(Bsp 8)
- mehrtägiger Flohmarkt
- mehrere Flohmärkte ~~+ mehrere Flohmärkte mit unterschiedlichen Längen~~
- unterbrochener Zeitraum ✓(Bsp 10; Pause 12-13)
- unterbrochene Länge
- Minuten
- edge–cases, bei denen der Algorithmus nicht funktioniert

4 Quellcode