

Aufgabe 1: Flohmarkt

Teilnahme-Id: 55628

Bearbeiter dieser Aufgabe:
Michal Boron

April 2021

Inhaltsverzeichnis

1	Lösungsidee	2
1.1	Formulierung des Problems	2
1.2	(Themenbezogene Arbeiten)	3
1.3	Komplexität des Problems	3
1.4	Heuristik	3
1.4.1	Greedy-Algorithmus	3
1.4.2	Heuristisches Verbesserungsverfahren	5
1.5	Diskussion der Ergebnisse	5
1.5.1	Grenzen der Heuristik	5
1.5.2	Qualität der Ergebnisse	5
1.6	Laufzeit	5
2	Umsetzung	5
3	Beispiele	5
3.1	Beispiel 1	5
3.2	Beispiel 2	5
3.3	Beispiel 3	5
3.4	Beispiel 4	5
3.5	Beispiel 5	5
3.6	Beispiel 6	5
3.7	Beispiel 7	5
4	Quellcode	5

Program: erweitere Zeiträume um Minuten

- Definitionen, Modellierung des Problems
- (Themenbezogene Arbeiten)
- Komplexität
 - Notwendigkeit einer Heuristik
- heuristisches Verfahren
 - Greedy-Anlegen am Anfang
 - heuristisches Verbesserungsverfahren
 - * welche Methode?
 - * hill climbing
 - * simuliertes Abglühen
- Diskussion der Ergebnisse
 - Grenzen/Mängel der Heuristik
 - * was wird nicht erkannt? (edge-cases)
 - * was lässt sich nicht eindeutig ausschließen?
 - * getroffene Annahmen
 - Qualität der Ergebnisse
 - * Qualität der Ergebnisse am Anfang (Greedy-Verfahren)
 - * Qualität bzgl. des großen Flächeninhalts, des Gesamtflächeninhalts aller Rechtecke, %
 - * was und wann kann nicht verbessert werden? (Beispiel 4: 7370)
- Laufzeit

1 Lösungsidee

1.1 Formulierung des Problems

Gegeben sei eine Strecke der Länge N und ein Zeitraum von B bis E . Außerdem gegeben sei eine Liste von Z Anmeldungen. Die Anmeldungen betreffen die Vermietung eines Teils der Strecke in einer konkreten Zeitspanne. Jede **Anmeldung** i besteht aus einer Strecke s_i ($0 < s_i \leq N$), einem Mietbeginn b_i ($B \leq b_i < E$) und einem Mietende e_i ($b_i < e_i \leq E$). In diesem Problem werden Strecken in vollständigen Metern behandelt und alle Zeiten werden in vollständigen Stunden angegeben. Obwohl N auf 1000 Meter, B auf 8:00 und E auf 18:00 in der ursprünglichen Aufgabe festgelegt sind, kann die folgende Lösungsidee auf beliebige Größen, die die Aufgabenbedingungen erfüllen, übertragen werden. Das gelieferte Programm kann auch mit unterschiedlichen Werten umgehen.

Die Aufgabe ist ein Optimierungsproblem. Man soll so eine Teilfolge von k Anmeldungen wählen, dass alle gewählten Strecken in den angegebenen Zeiten vermietet werden können, d.h., für jede Anmeldung steht eine freie stetige Strecke der angegebenen Länge in der angegebenen Zeitspanne durchgehend zur Verfügung, und dazu die Mieteinnahmen möglichst hoch sind, wobei der Preis 1 Euro pro Meter pro Stunde beträgt.

Man kann das Problem auf folgende Weise modellieren. Wir setzen: $M := E - B$. Wir bilden ein **großes Rechteck** R der Größe $N \times M$. So kann man analog jede Anmeldung i als ein **kleineres Rechteck** r_i der Größe $s_i \times m_i$ darstellen, wobei $m_i := e_i - b_i$.

So können wir die obige Aufgabe umformulieren: Wähle so eine Teilfolge Z' von Rechtecken aus Z , die eine Anordnung innerhalb von R bilden, dass kein Paar der Rechtecke in Z' sich überdeckt und der Gesamtflächeninhalt aller Rechtecke in Z' maximal ist. Als Fläche eines kleineren Rechtecks r_i bezeichnen wir das Produkt $m_i \times s_i$.

Genauer gesagt: Jedes Rechteck r_i in Z' besitzt 4 Ecken, die den folgenden Punkten entsprechen: $(x_i, b_i), (x_i, e_i), (x_i + s_i, e_i), (x_i + s_i, b_i)$. Man beachte, dass b_i, e_i und s_i fixiert sind. So ist die Aufgabe, nur x_i so zu wählen, dass die Bedingungen der Aufgabe erfüllt werden. Wir können uns dieses Problem

so vorstellen, dass die Länge s_i und die Breite m_i jedes Rechtecks r_i sowie seine Anordnung entlang der y -Achse fixiert sind, und wir das Rechteck entlang der x -Achse zwischen den x -Werten von 0 und $N - s_i$ verschieben können.

Weiter nennen wir unsere Aufgabe das FLOHMARKT-PROBLEM.

TODO: check, reformulate

1.2 (Themenbezogene Arbeiten)

1.3 Komplexität des Problems

Betrachten wir das zu FLOHMARKT-PROBLEM zugehörige Entscheidungsproblem: Gegeben ein umschließendes Rechteck R und eine Liste Z von Rechtecken mit fixierten Länge, Breite und Anordnung entlang der y -Achse, können alle Rechtecke aus Z innerhalb von R so platziert werden, dass sie sich paarweise nicht überlappen?

Wir zeigen, dass FLOHMARKT-PROBLEM NP-vollständig ist, indem wir zunächst zeigen, dass es in NP liegt und auch NP-schwer ist.

Offensichtlich kann dieses Problem von einer nichtdeterministischen Turingmaschine bezüglich der Eingabelänge in Polynomialzeit gelöst werden. Gegeben sei eine Platzierung der Rechtecke aus Z innerhalb von R . Man kann leicht einen in Polynomialzeit laufenden Algorithmus entwickeln, der anhand der Koordinaten der kleineren Rechtecke überprüft, ob keines der Rechtecke über die Grenzen von R hinausreicht und ob kein Paar von Rechtecken aus Z sich überlappt. Somit liegt FLOHMARKT-PROBLEM in NP.

TODO: Zeige, das Problem ist NP (überprüfbar in P)

Zeige, das Problem ist NP-schwer: Reduktion zu einem anderen NP-voll. oder NP-schweren Problem.

Die Reduktionsfunktion muss in Polynomialzeit laufen.

<https://stackoverflow.com/questions/4294270/how-to-prove-that-a-problem-is-np-complete>

TODO: Notwendigkeit einer Heuristik

1.4 Heuristik

Wir entwickeln ein heuristisches Verfahren, um diesem Problem zu begegnen. Wir lassen zuerst einen Greedy-Algorithmus laufen, um ein Ausgangsergebnis zu erzeugen und danach führen wir einen Bergsteigeralgorithmus (engl. *hill climbing algorithm*) aus, der das Ausgangsergebnis heuristisch optimiert, indem er ein lokales Maximum durch mehrmalige Mutationen findet.

TODO: Vielleicht doch ein besserer Algorithmus? Testen!

1.4.1 Greedy-Algorithmus

Wie schon im Abschnitt 1.1 erwähnt wurde, können die Gedanken bezüglich des FLOHMARKT-PROBLEM auf andere Größen übertragen werden. Da die Größen des Rechtecks R sowie des Zeitraums fest sind und auf 1000 Metern bzw. auf den Zeitraum von 8:00 bis 18:00 beschränkt sind, konvertieren wir die Eingabe, indem wir den Beginn des Zeitraumes auf 0 setzen, d.h., wir subtrahieren den Anfang B vom Ende E . So bleibt auch der Wert M , also die Differenz von E und B , gleich. Analog müssen wir die Eingabe der kleineren Rechtecke r_i entsprechend konvertieren, indem wir von jedem b_i und e_i den Wert B abziehen. Für die Aufgabe hat diese Konversion keine Bedeutung und funktioniert auch, wenn ein angegebener Zeitraum sich vom ursprünglichen Zeitraum unterscheidet. Mit dieser Konversion können wir ebenfalls mehrtägige Flohmärkte oder sogar mehrere unterschiedlichen Flohmärkte behandeln. Wenn der angegebene Zeitraum an einer Stelle unterbrochen ist, etwa von 7:00 bis 9:00 und dann von 12:00 bis 15:00, ist es auch kein Problem, dann kann der Zeitraum von 7:00 bis 15:00 angegeben werden und die Zeiten zwischen 9:00 und 12:00 bleiben unbesetzt. Mehrtägige Flohmärkte können auf dieselbe Weise behandelt werden: Die gesamte Öffnungszeiten des Flohmarktes können in Stunden angegeben werden, zum Beispiel der Zeitraum eines Flohmarkts, der zwei Tage von 10:00 bis 17:00 dauert, kann als von 10:00 bis 41:00 (17:00 + 24 Stunden) dargestellt werden. Mehrere unterschiedlichen Flohmärkte kann man analog kodieren. Es hängt nur von der Eingabe ab.

TODO: Beispiele dazu

TODO: Erwähne Zeiten in Minuten

Nach der Konversion der Eingabe bilden wir eine Liste Z , in der jedes Rechteck r_i mit seinen genannten Größen s_i, b_i, e_i gespeichert.

Die Größen N und M sind im Programm fest, unabhängig davon, wie viel sie betragen. Außerdem wurde im Abschnitt 1.1 festgestellt, dass die Größen s_i, b_i und e_i des jeweiligen Rechtecks r_i fest sind und dass wir nur ein Rechteck r_i entlang der x -Achse, also entlang der Seite der Länge N des Rechtecks R bewegen dürfen. So bietet sich eine Verteilung der kleineren Rechtecke r_i auf kleinere **Streifen** der Länge N im Rechteck R entlang der Seite der Länge N . Die Breite eines solchen Streifen ist äquidistant für alle Streifen und, da man Stände am Flohmarkt nur zu vollständigen Stunden vermieten kann, lässt sich die Breite eines Streifens zu einer vollständigen Stunde bestimmen.

TODO: Minuten erwähnen

Im Programm sind diese Streifen einfach Listen mit allen kleineren Rechtecken, deren Breite m_i sich in diesem Streifen enthält. Legen wir die folgende Schreibweise fest: Ein Streifen im Rechteck R , der die Stunde k betrifft, also in der Stunde k beginnt und in der Stunde $k+1$ endet, nennen wir S_k . Das bedeutet, dass ein Rechteck von $b_i = 1$ (nach Konversion, in vollständigen Stunden) und $e_i = 5$ in den folgenden Streifen enthalten wird: S_1, S_2, S_3, S_4 . Im Streifen S_5 wird er nicht enthalten, da die Miete mit dem Anfang der 5. Stunde endet. Wie Streifen implementiert werden, lesen Sie in der Umsetzung.

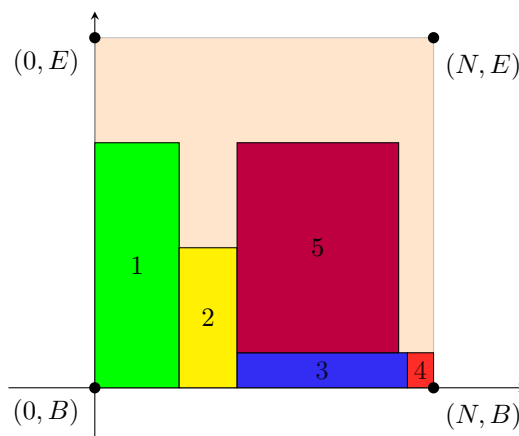
Nach dieser Vorbereitung der Eingabe erfolgt der Lauf unseres Greedy-Algorithmus, der das Ausgangsergebnis liefert. Wir sortieren die Rechtecke in jeder Liste S_i unabhängig voneinander nach folgenden Kriterien in dieser Reihenfolge: 1) fallend nach dem Wert e_i , 2) aufsteigend nach dem Wert b_i und 3) fallend nach der Fläche jedes Rechtecks. Somit sind die ersten Rechtecke in jeder Liste S_i diejenigen, deren Wert e_i am größten ist — oft diejenigen, die am breitesten im Streifen sind.

TODO: warum diese Reihenfolge? najpierw załatwiamy od lewej największe, po prawej upychamy najmniejszychymi

Diese Reihenfolge wurde so gewählt, dass wir in dieser Reihenfolge versuchen, die Rechtecke aus den Streifen ins große Rechteck R zu platzieren.

Stellen wir uns vor, die das Rechteck R liegt auf auf einem Koordinatensystem. Die Seite der Länge N verläuft entlang der x -Achse und die Seite der Länge M entlang der y -Achse. Der Wert B (nach der Konversion) wird entsprechend am Punkt $(0,0)$ abgebildet. Wir verarbeiten Streifen für Streifen in der aufsteigenden Reihenfolge der y -Werte beginnend mit dem 0-ten Streifen. Wir iterieren durch jede Liste S_i und untersuchen jedes Rechteck r_j in diesem Streifen, ob sein Wert b_j gleich dem Wert i , also ob das Rechteck (die Anmeldung) mit dem aktuellen Zeitpunkt i beginnt. Außerdem prüfen wir, ob ein Rechteck bereits platziert wurde. Wenn ein

Damit kann man sich vorstellen, dass wir das Rechteck R quasi vom Punkt $(0,0)$ bis zum Punkt (N,E) mit kleineren Rechtecken füllen. Nach



TODO: wie werden die Rechtecke gelegt?

- binary search
- was sind die Folgen? was will man damit erreichen?

1.4.2 Heuristisches Verbesserungsverfahren

1.5 Diskussion der Ergebnisse

1.5.1 Grenzen der Heuristik

1.5.2 Qualität der Ergebnisse

1.6 Laufzeit

2 Umsetzung

3 Beispiele

3.1 Beispiel 1

3.2 Beispiel 2

3.3 Beispiel 3

3.4 Beispiel 4

3.5 Beispiel 5

3.6 Beispiel 6

3.7 Beispiel 7

4 Quellcode