Aufgabe 1: Flohmarkt

Teilnahme-Id: 55628

Bearbeiter dieser Aufgabe:
Michal Boron

Januar–April 2021

Inhaltsverzeichnis

1 Lösungsidee

1.1 Formulierung des Problems

Gegeben sei eine Strecke der Länge N und ein Zeitraum von B bis E. Außerdem gegeben sei eine Liste von Z Anmeldungen. Die Anmeldugen betreffen die Vermietung eines Teils der Strecke in einer konkreten Zeitspanne. Jede ***Anmeldung*** i besteht aus einer Strecke s_i ($0 < s_i \leqslant N$), einem Mietbeginn b_i ($B \leqslant b_i < E$) und einem Mietende e_i ($b_i < e_i \leqslant E$). In diesem Problem werden Strecken in vollständigen Metern behandelt und alle Zeiten werden in vollständigen Stunden angegeben. Obwohl N auf 1000 Meter, B auf 8:00 und E auf 18:00 in der ursprünglichen Aufgabe festgelegt sind, kann die folgende Lösungidee auf beliebige Größen, die die Aufgabenbedingungen erfüllen, übertragen werden. Das gelieferte Programm kann somit mit unterschiedlichen Werten umgehen.

Die Aufgabe ist ein Optimierungsproblem. Man soll so eine Teilfolge von k Anmeldugen wählen, dass alle gewählten Strecken in den angebenen Zeiten vermietet werden können, d.h., für jede Anmeldung eine freie stetige Strecke der angegbenen Länge in der angegebenen Zeitspanne durchgehend zur Verfügung steht, und dazu die Mieteinnahmen möglichst hoch sind, wobei der Preis 1 Euro pro Meter pro Stunde beträgt.

Man kann das Problem auf folgende Weise modellieren. Wir setzen: $M := E - B$. Wir bilden ein ***großes Rechteck*** R der Größe $N \times M$. So kann man analog jede Anmeldung i als ein ***kleineres Rechteck*** r_i der Größe $s_i \times m_i$ darstellen, wobei $m_i := e_i - b_i$.

So können wir die obige Aufgabe umformulieren: Wähle so eine Teilfolge Z' von Rechtecken aus Z, die eine Anordnung innerhalb von R bilden, dass kein Paar der Rechtecke in Z' sich überdeckt und der Gesamtflächeninhalt aller Rechtecke in Z' maximal ist. Als Fläche eines kleineren Rechtecks r_i bezeichnen wir das Produkt $m_i \times s_i$.

Genauer gesagt: Wenn wir das große Rechteck und die kleineren platzierten Rechtecken an einem Koordinatensystem abbilden, besitzt jedes Rechteck r_i in Z' 4 Ecken, die den folgenden Punkten entsprechen: $(x_i, b_i), (x_i, e_i), (x_i + s_i, e_i), (x_i + s_i, b_i)$. Man beachte, dass b_i, e_i und s_i fixiert sind. So ist die Aufgabe, nur x_i so zu wählen, dass die Bedingungen der Aufgabe erfüllt werden. Wir können uns dieses Problem so vorstellen, dass die Länge s_i und die Breite m_i jedes Rechtecks r_i, sowie seine Anordnung entlang der y–Achse fixiert sind, und wir das Rechteck nur entlang der x–Achse zwischen den x–Werten von 0 und $N - s_i$ verschieben können.

In den weiteren Betrachtungen nennen wir unsere Aufgabe das Flohmarkt–Problem.

1.2 Komplexität des Problems

In diesem Abschnitt zeigen wir, dass Flohmarkt–Problem ein Optimierungsproblem ist, das NP–schwer ist. Es ist unmöglich, einen Algorithmus zu bilden, der in Polynomialzeit prüfen würde, ob ein Ergebnis zum Flohmarkt–Problem optimal ist. Um das zu beweisen, zeigen wir, dass das 0/1–Rucksackproblem zum Flohmarkt-Problem reduziert werden kann. Das bedeutet: Falls das Flohmarkt-Problem in Polynomialzeit gelöst werden kann, so kann auch das Rucksackproblem. Eine Instanz des Rucksackproblems besteht aus einer Liste von Zahlen, sowie aus einem Rucksack mit einer fixierten Größe. Das Problem besteht darin, die Zahlen in den Rucksack so zu packen, dass ihre Summe maximal ist und sie die Größe des Rucksacks nicht überschreitet. Das Optimierungsproblem zum 0/1–Rucksackproblem ist NP–schwer.[3]

Gegeben sei eine Instanz des Rucksackproblems. Wir können eine entsprechende Instanz des Flohmarkt-Problems auf folgende Weise generieren. Für jede Zahl im Rucksackproblem bilden wir ein Rechteck der Breite 1 und der Länge, die dieser Zahl entspricht. So bilden wir eine Anmeldung im Flohmarkt–Problem, deren Länge der Zahl aus dem Rucksackproblem entspricht und der Unterschied zwischen dem Beginn und dem Ende der Anmeldung beträgt eine Stunde. Außerdem bilden wir ein großes, umschließendes Rechteck, deren Länge der Größe des Rucksacks entspricht und deren Breite ebenfalls 1 beträgt. Somit bilden wir eine Instanz eines Flohmarkts, der eine Stunde dauert und deren Länge der Größe des Rucksacks entspricht. In dem hierdurch entstandenen Problem wählen wir die Rechtecke so, dass sie über die Grenzen des umschließenden Rechtecks nicht hinausreichen und der Gesamtflächeninhalt der kleineren Rechtecke maximal ist. Insbesondere beachte man, dass man die kleineren Rechtecke nur entlang der längeren Seite des großen Rechtecks bewegen darf. Somit ist das Flohmarkt–Problem äquivalent zum ursprünglichen 0/1–Rucksackproblem. Wenn wir jede Instanz des Flohmarkt–Problems in Polynomialzeit lösen können, können wir auch jedes 0/1–Rucksackproblem in Polynomialzeit lösen. Somit ist das Flohmarkt–Problem NP–schwer.

Da dieses Problem NP–schwer ist, muss man über einen optimalen Algorithmus zum Flohmarkt–Problem nachdenken. Obwohl Flohmarkt–Problem NP–schwer ist, kann es einen parametrisierten Algorithmus geben, der dieses Problem in Pseudopolynomialzeit lösen würde.[2] Das betrifft beispielsweise das Rucksackproblem, das sich durch einen dynamischen Ansatz in Pseudopolynomialzeit lösen lässt.

Allerdings nutzen wir die Hinweise, die Cormen et al. zum Lösen von NP–vollständigen Problemen in ihrem Buch bechreiben. Grundsätzlich gibt es drei Ansätze zum Lösen eines solchens Problems.[1, S. 1106] Erstens, wenn die Eingabe klein genug ist, reicht ein Algorithmus mit einer exponentieller Laufzeit aus. Allerdings lässt sich diese Idee schlecht umsetzen, solange die Anzahl der kleineren Rechtecke in der Eingabe sich in Ordnung von Hunderten befindet. Die praktische Laufzeit eines exponentiellen Algorithmus wäre in diesem Fall zu groß. Zweitens beschreiben die Autoren, dass man bestimmte Grenzfälle ausgliedern kann, die sich in Polynomialzeit lösen lassen. Diesen Ansatz verwenden wir bei einigen Beispielen und er wird im Abschnitt 1.4.2 besprochen. Drittens kann man einen Algorithmus liefern, der nahezu optimale Ergebnisse in Polynomialzeit liefert — eine Heuristik.

1.3 Heuristik

Wir entwickeln ein heuristisches Verfahren, um diesem Problem zu begegnen. Wir lassen am Anfang einen Greedy–Algorithmus laufen, um ein Ausgangsergebnis zu erzeugen und danach entwickeln wir ein deterministisches Greedy–Verbesserungsverfahren, das die Vorgehensweise eines Bergsteigeralgorithmus (engl. *hill climbing algorithm*) nachahmt. Der Verbesserungsalgorithmus optimiert heuristisch das Ausgangsergebnis, indem er durch mehrmalige Veränderungen der Platzierung ein lokales Maximum sucht.

1.3.1 Konversion der Eingabe

Wie schon im Abschnitt 1.1 erwähnt wurde, können die Gedanken bezüglich des Flohmarkt–Problems auf andere Größen übetragen werden. Da die Größen des Rechtecks R sowie des Zeitraums fest sind und auf 1000 Metern bzw. auf den Zeitraum von 8:00 is 18:00 beschränkt sind, konvertieren wir die Eingabe, indem wir den Beginn B vom Ende E subtrahieren und den Beginn des Zeitraumes auf 0 setzen. So bleibt auch der Wert M, also die Differenz von E und B, gleich. Analog müssen wir die Eingabe für die kleineren Rechtecke r_i entsprechend konvertieren, indem wir von jedem b_i und e_i den Wert B abziehen. Für die Aufgabe selbst hat diese Konversion keine Bedeutung und funktioniert auch, wenn ein angegebener Zeitraum sich vom ursprünglichen Zeitraum unterscheidet.

Mit dieser Konversion können wir ebenfalls mehrtägige Flohmärkte behandeln. Zur Darstellung eines mehrtägigen Flohmarktes kann man die gesamte Öffnungszeiten des Flohmarkts in Stunden angeben, z.B. der Zeitraum eines Flohmarkts, der zwei Tage von 10:00 bis 17:00 dauert, kann als von 10:00 bis 17:00 und von 34:00 bis 41:00 dargestellt werden. Ebenfalls, wenn der Zeitraum eines eintägigen Flohmarkts an einer Stelle unterbrochen ist, etwa dauert der Flohmarkt von 7:00 bis 9:00 und dann von 12:00 bis 15:00, können die beiden Zeiträume in einem Beispiel angegeben werden. Wir können dann diese Instanz lösen, indem wir den ganzen Zeitraum von 7:00 bis 15:00 betrachten und in der Pausenzeit wird keine Anmeldung angenommen. Mehrere unterschiedlichen Flohmärkte mit derselben Länge N kann man analog kodieren. Beispielsweise gründet man eine Firma, die Flohmärkte an vielen Orten organisiert, aber die Firma verfügt nur über Stände mit einer festen Länge. Dann muss man die Eingabe nur entsprechend kodieren.

Außerdem werden im ursprünglichen Problem alle Zeiten in vollständigen Stunden angegeben. Diese Aufgabe kann sehr leicht zu Zeiten in Minuten ergänzt werden. Das lohnt sich vor allem dann, wenn die Öffnungszeit zur halben Stunde fällt. Dazu konvertiert man die Eingabe am Anfang auf folgende Weise: Man kann einfach alle Zeiten zu Minuten umrechnen, indem man vollständige Stunden mal 60 multipliziert. Obwohl die weiteren Betrachtungen sich grundsätzlich auf vollständige Stunden beziehen (wie in der Aufgabenstellung), soll man nicht vergessen, dass alle diesen Gedanken sich auf Minuten übertragen lassen.

1.3.2 Greedy–Algorithmus

Wir bilden das große Rechteck R auf ein Koordinatensystem ab. Die Seite der Länge N verläuft entlang der x–Achse und die Seite der Länge M entlang der y–Achse. Der Wert B (nach der Konversion) wird entsprechend am Punkt $(0, 0)$ abgebildet (s. Abb. 1)

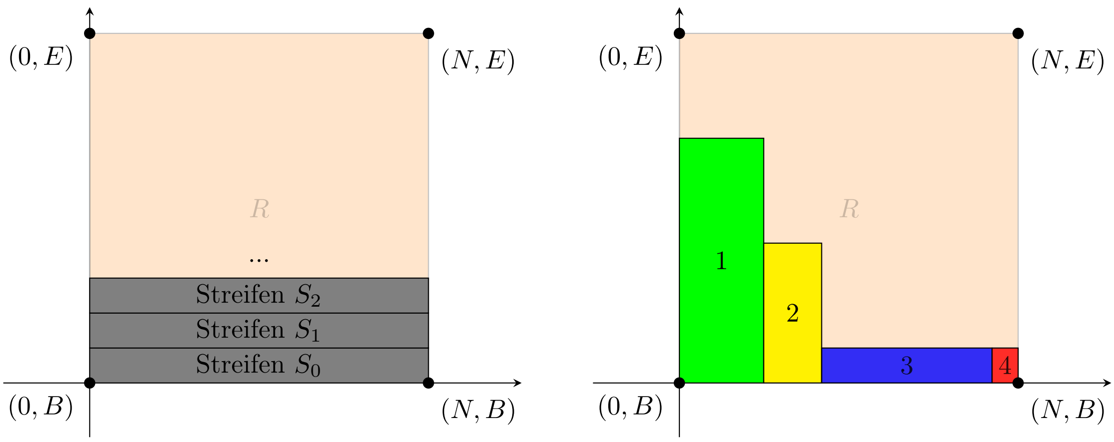
Die Größen N und M sind im Programm fest, unabhängig davon, wie viel sie betragen. Außerdem wurde im Abschnitt 1.1 festegestellt, dass die Größen s_i, b_i und e_i des jeweiligen Rechtecks r_i fest sind und dass wir ein Rechteck r_i nur entlang der x–Achse, also entlang der Seite der Länge N des Rechtecks R, bewegen dürfen. So bietet sich eine Verteilung der kleinere Rechtecke r_i auf kleinere ***Streifen*** der Länge

N im Rechteck R entlang der y–Achse (s. Abb. 1a). Die Breite eines solchen Streifen ist äquidistant für alle Streifen und, da man Stände am Flohmarkt nur zu vollständigen Stunden vermietet, beträgt die Breite eines Streifens 1 Stunde.[1] Ein Streifen ist ein Teil des Rechtecks R und jeder Streifen ist am Anfang leer, da keine Rechtecke in R gelegt sind. Legen wir die folgende Schreibweise fest: Ein Streifen im Rechteck R, der die Stunde k betrifft, also in der Stunde k beginnt und in der Stunde $k+1$ endet, nennen wir *Streifen* k. Außerdem besitzt jeder Streifen k eine Liste S_k. Zu dieser Liste gehören alle kleineren Rechtecke, die zum Streifen k gehören.

Nach der Konversion der Eingabe bilden wir eine Liste Z, in der jedes Rechteck r_i mit seinen genannten Größen s_i, b_i, e_i gespeichert wird. Dann iterieren wir über jedes Rechteck m_i in Z und fügen wir es in jede Liste S_j für alle j hinzu, die die folgende Bedingung erfüllen: $b_i \leqslant j < e_i$. Das bedeutet, dass ein Rechteck von $b_i = 1$ (nach Konversion, in vollständigen Stunden) bis $e_i = 5$ in den folgenden Listen enthalten wird: S_1, S_2, S_3, S_4. In S_5 wird er nicht enthalten, da die Miete mit dem Anfang der 5. Stunde endet. Wie die Listen S_j implementiert werden, lesen Sie in der Umsetzung.

Nach dieser Vorbereitung der Eingabe erfolgt der Lauf unseres Greedy–Algorithmus, der das Ausgangsergebnis liefert. Wir sortieren die Rechtecke r_i in jeder Liste S_j unabhängig voneinander nach folgenden Kriterien in dieser Reihenfolge: 1) fallend nach dem Wert e_i, 2) aufsteigend nach dem Wert b_i und 3) fallend nach der Fläche jedes Rechtecks (mehr zu den Sortierkriterien im Abschnitt 1.4.2). Somit sind die ersten Rechtecke in jeder Liste S_j diejenigen, deren Wert e_i am größten ist — oft diejenigen, die am breitesten in S_j sind. Die Reihenfolge wurde so gewählt, damit wir in dieser Reihefolge versuchen, die Rechtecke aus den Listen in die Streifen im großen Rechteck R zu platzieren. Die Idee hinter dieser Platzierung ist, dass wir zuerst die breitesten Rechtecke in einer Liste S_j „links", also an niedrigeren x–Werten, platzieren, so weit es geht. Dann füllen wir die Lücken „rechts" (an größeren x–Werten) mit schmalleren Rechtecken. Die grobe Idee ist, dass wir das Rechteck R quasi vom Punkt $(0, 0)$ bis zum Punkt (N, E) Streifen für Streifen mit immer schmalleren Rechtecken füllen.

Bevor wir zur Beschreibung des Algorithmus übergehen, legen wir noch fest, was eine Lücke ist. Als ***Lücke*** bezeichnen wir eine Strecke zwischen zwei Rechtecken in einem Streifen. Jede Lücke betrifft einen konkreten Streifen j und hat die Koordinaten x_1 und x_2 (stets: $x_1 < x_2$), die den Eckpunkten der zwei Rechtecken in j bzw. den Seiten des Rechtecks R entsprechen. Man beachte insbesondere, dass es keine Lücke zwischen zwei Rechtecken gibt, die eine gemeinsame Seite haben. Als *Größe* oder *Länge* einer Lücke bezeichnen wir: $x_2 - x_1$.



(a) Streifen in einem großen Rechteck R.

(b) Nach der Verarbeitung des Streifens S_0. Die Zahlen stellen die Reihenfolge dar, in der jedes Rechteck platziert wurde.

Abbildung 1: Die Abbildung des Rechtecks R auf einem Koordinatensystem. Die Seiten entlang der x–Achse haben die Länge N und die Seiten entlang der y–Achse haben die Länge M.

Wir verarbeiten Streifen für Streifen in der aufsteigenden Reihenfolge der y–Werte, beginned mit dem 0–ten Streifen. Wir iterieren durch jede Liste S_j und untersuchen jedes Rechteck r_i in S_j, ob sein Wert b_i gleich dem Wert j ist, also ob das Rechteck (die Anmeldung) im Streifen j beginnt. Außerdem prüfen wir, ob das Rechteck bereits platziert wurde. Wenn die Werte b_i und j übereinstimmen und r_i noch nicht platziert wurde, suchen wir von $x = 0$ bis $x = N$ nach der ersten freien Lücke im Streifen j, die

[1] Wenn man Zeiten zu vollständigen Minuten betrachtet, wird R analog in äquidistante Streifen mit Breite von 1 Minute aufgeteilt.

mindestens so groß ist wie die Länge des Rechtecks s_i. Wenn es so eine Lücke gibt, legen wir r_i ins R und übergehen zum Rechteck r_{i+1}. Man beachte, wenn ein Rechteck r_i in R platziert wird, muss ein in alle Streifen, zu denen es gehört, eingefügt werden. Auf der Abbildung 1b sieht man den verarbeiteten Streifen S_0. Insbesondere erkennt man gut die Reihenfolge der Sortierkriterien der Rechtecke im Strefen.

In diesem einfachen Algorithmus nutzt man beim Platzieren eines Rechtecks den Vorteil, dass beim Streifen j nur ein Rechteck r_i platziert werden kann, das in diesem Streifen beginnt — es gilt: $b_i = j$. Natürlich können andere Rechtecke bereits platziert sein, aber unsere Vorgehensweise sichert uns, dass es für ein Rechteck r_i eine Lücke der Größe s_i über diesem Rechteck in den weiteren Streifen $b_i + 1, b_i + 2, ..., e_i - 1$ gibt, wenn der Algorithmus entscheidet, dieses Rechteck in R zu platzieren. Diese Beobachtung ist offensichtlich wahr, da man die Streifen von „unten“ (beginnend mit den niedrigeren y–Werten im Koordinatensystem) nach „oben“ verarbeitet und bei jedem Streifen j prüft, ob es eine genug große Lücke für ein Rechteck r_i gibt. Wenn es eine Lücke im Streifen j für ein Rechteck r_i mit $b_i = j$ nicht gibt, bedeutet, dass es im Streifen j und möglicherweise in weiteren Streifen $j + 1, j + 2, ...$ ein Rechteck gibt, das die Platzierung von r_i in j unmöglich macht.

Nachdem alle Streifen verarbeitet worden sind, ist unser Ausgangsergebnis erzeugt.

Man kann leicht begründen, dass der vorgestellte Algorithmus als Greedy klassifiziert werden kann. Mit jedem Schritt des Algorithmus wird die aktuell beste Verbesserungsmöglichkeit gewählt. Der Algorithmus nutzt die sortierte Reihenfolge der Rechtecke in den Listen S_j, um anhand des aktuellen Standes im Streifen eine Entscheidung zu treffen, ob ein Rechteck r_i in R platziert werden kann.

1.3.3 Heuristisches Verbesserungsverfahren

Man kann leicht feststellen, dass, wenn alle Rechtecke aus Z im Laufe des Greedy–Algorithmus in R platziert wurden oder wenn die ganze Fläche von R bedeckt wurde, das Problem für diese Eingabe optimal gelöst wurde. Allerdings lässt sich nicht nachweisen, dass der vorgestellte Algorithmus stets eine optimale Platzierung liefert. Hingegen kann man sogar festellen, dass es bessere Ergebnisse gibt als die, die am Anfang geliefert werden.

Wir probieren, das Ausgangsergebnis heuristisch zu verbessern. Bezeichnen wir ab jetzt ein beliebiges Ergebnis, also eine beliebige Anordnung der kleineren Rechtecke innerhalb des großen Rechtecks R, die unser Programm liefert, als C. Insbesondere nennen wir unser Ausgangsergebnis C_A.

Offensischtlich kann man mithilfe des obengenannten Greedy–Algorithmus das Ausgangsergebnis nicht optimieren. Wir haben begründet, dass dieser Algorithmus an jeder Stelle stets die aktuell optimale Variante wählt. Außerdem dürfen wir diesen Algorithmus nicht nochmal nutzen, da wir voraussetzen, dass die Streifen in der aufsteigender Reihenfolge ein nach dem anderen verarbeitet werden. Dann kann es sein, dass es sich eine Lücke der Länge ℓ zwischen zwei Punkten (x_j, j) und $(x_j + \ell, j)$ in einem Streifen j befindet und dass ein Rechteck r_i mit $s_i \leqslant \ell$ theoretisch hineinpassen würde, aber es ist nicht mehr gesichert, dass es die Lücken direkt darüber in oberen Streifen $j + 1, j + 2, ...$ geben würde.

Deshalb führen wir ein neues Verfahren ein. Sei C eine beliebige Platzierung von Rechtecken innerhalb von R. Nennen wir C *das aktuelle Ergebnis*. Die allgemeine Idee des Verbesserungsverfahrens besteht darin, man führt zu einer Veränderung in C, indem ein nicht platziertes Rechteck r in R platziert wird, ggf. alle Rechtecke, die mit r kollidieren, aus R entfernt werden und die neu entstandenen Lücken mit nicht gelegten Rechtecken gefüllt werden. So kommt man auf einen neuen Zustand C', also eine neue Platzierung der Rechtecke. Es wird dann überprüft, ob der Gesamtflächeninhalt aller platzierten Rechtecke in der Platzierung C' größer ist als der in der Platzierung C. Wenn ja, wird C' das aktuelle Ergebnis und der Vorgang wiederholt sich, bis es noch möglich ist, ein Zustand C weiter zu verändern. Wir sehen, dieser Ansatz nimmt viel Inspiration aus der Idee der Bersteigeralgorithmen, dennoch lässt er sich schlecht als einer klassifizieren. Unser Algorithmus ist zu deterministisch, es fehlen starke Mutation in seinen Lauf, die das Ergebnis deutlich beinflussen könnten, und es fehlen Anwendungen der Randomisierung.

Wie kommt es zur Veränderung der Platzierung und wann bestimmen wir, dass es unmöglich ist, einen Zustand weiter zu verändern? Unser Verbesserungsverfahren arbeitet mit Lücken, die nach der Platzierung C_A entstehen. Die Idee ist, man findet eine Lücke in einem Streifen und man legt ein noch nicht platziertes Rechteck r in die Lücke, ggf. muss man die Rechtecke, die mit r kollidieren, aus der Platzierung entfernen und somit entstehen neue Lücken, die mit anderen nicht gelegten Rechtecken gefüllt werden können. So kommt man auf ein neues Ergebnis. Man hört auf, wenn es keine Lücken mehr gibt, für die ein Rechteck zum Platzieren zur Verfügung steht.

Zuerst muss man die nicht platzierten Rechtecke für jeden Streifen bestimmen. So legen wir für jeden Streifen j eine Liste U_j fest, in der sich alle Rechtecke aus dem Streifen j befinden, die nicht platziert sind. Die Liste U_j muss man auf eine Weise ordnen. Jedes Rechteck r_i in jeder solchen Liste sortieren wir nach diesen Kriterien: 1) aufsteigend nach der Länge s_i und 2) aufsteigend nach dem Beginn b_i. Die

Entscheidung, diese Sortierkriterien zu wählen, ergibt sich experimentell und wird im Abschnitt 1.4.2 diskutiert.

Danach muss man die Lücken in jedem Streifen in einer Platzierung finden. So legen wir eine Liste H_j für jeden Streifen j fest, in der sich alle Lücken aus diesem Streifen befinden. Man findet sie, indem man durch jedes im Streifen j platziertes Rechteck r_i iteriert und jeweils überprüft, ob das Rechteck r_i mit dem Rechteck r_{i+1} eine gemeinsame Seite haben. Wenn nicht, gibt es eine Lücke zwischen den Rechtecken r_i und r_{i+1}. Dazu muss man auch untersuchen, ob das erste Rechtecks und das letzte Rechteck im Streifen direkt an den Seite des großen Rechtecks liegen. Wenn nicht, enstehen auch Lücken zwischen den Rechtecken und den Seiten des großen Rechtecks R.

Danach werden alle Listen H_j zu einer Liste H zusammengebracht. Diese Liste muss auch auf eine Weise geordnet sein. Experimentell ergeben sich die folgenden Sortierkriterien für jede Lücke L_i: 1) fallend nach der Größe der Lücke L_i und 2) aufsteigend nach dem Index des Streifens. Diese Entscheidung wird ebenfalls im Abschnitt 1.4.2 diskutiert.

Algorithmus 1 Das heuristische Verbesserungsvefahren

Eingabe: R — das große Rechteck, Z — die Liste mit allen kleineren Rechtecken.

1: $C_A \leftarrow \text{Greedy}(R, Z)$
2: $H \leftarrow \text{getAllHoles}(C_A)$
3: $U \leftarrow \text{getRecs}(C_A)$
4: $C \leftarrow C_A$
5: $itH \leftarrow H.begin$
6: $j \leftarrow itH.\text{Streifen}$ ▷ j ist der Index des Streifens, in dem sich die Lücke zum Iterator itH befindet
7: $itR \leftarrow U_j.begin$
8: **while** $itH \neq H.end$ **do**
9: $\quad \Sigma_C \leftarrow |C|$ ▷ der Gesamtflächeninhalt aller platzierten Rechtecke in C
10: $\quad C' \leftarrow \text{next}(C, itH, itR)$
11: $\quad \Sigma_{C'} \leftarrow |C'|$
12: $\quad itR \leftarrow itR + 1$
13: $\quad$ **if** $itR = U_j.end$ **then**
14: $\qquad itH \leftarrow itH + 1$
15: $\qquad j \leftarrow itH.\text{Streifen}$
16: $\qquad itR \leftarrow U_j.begin$
17: $\quad$ **end if**
18: $\quad$ **if** $\Sigma_{C'} > \Sigma_C$ **then**
19: $\qquad H \leftarrow \text{getAllHoles}(C')$
20: $\qquad U \leftarrow \text{getRecs}(C')$
21: $\qquad itH \leftarrow H.begin$
22: $\qquad k \leftarrow itH.\text{Streifen}$
23: $\qquad itR \leftarrow U_j.begin$
24: $\qquad C \leftarrow C'$
25: $\quad$ **end if**
26: **end while**

Der Algorithmus 1 zeigt eine vereinfachte Vorgehensweise des Verbesserungsverfahrens. Die Funktion $getAllHoles(C)$ findet alle Lücken in allen Streifen im Rechteck R in der aktuellen Platzierung C und bestimmt die Liste H. Die Funktion $getRecs(C)$ findet alle nicht platzierten Rechtecke und verteilt sie auf die Listen U_j für jeden Streifen j. Die Funktion $next(C, itH, itR)$ besteht in diesem Algorithmus selbst aus drei Funktionen, die im Folgenden beschrieben werden.

Die erste Funktion bestimmt die nächste Lücke, in die ein nicht platziertes Rechteck eingefügt wird. Es gibt einen Iterator itH, der am Anfang am Beginn der Liste H gesetzt wird. Im Laufe des Algorithmus bewegt sich der Iterator und zeigt auf nächste Lücken. Eine Lücke bezeichnen wir als *geeignet*, wenn sie sich in einem Streifen j befindet, zu dem die entsprechende Liste U_j nicht leer ist, d.h., es gibt mindestens ein Rechteck, das in diese Lücke eingefügt werden kann. Somit bewegt sich der Iterator in der Liste H und, wenn er auf eine geeignete Lücke stößt, wird diese Lücke durch die folgenden zwei Funktionen bearbeitet. Insbesondere beachte man, dass die While–Schleife in Zeile 8 abbricht, wenn der Iterator itH zum Ende der Liste H gelangt, also dann, wenn es keine geeigneten Lücken mehr gibt.

Die nächste Funktion wählt ein Rechteck r, das in eine gewählte geeignete Lücke L eingefügt wird.

Da die gewählte Lücke sich in einem Streifen j befindet, stammt r aus der Liste U_j. Es gibt auch einen internen Iterator itR für die Liste U_j, der bei jeder neuen Lücke ans Anfang der Liste gesetzt wird. Wenn ein Rechteck r in einem Lauf t der While–Schleife in L eingefügt wird, wird itR danach inkrementiert und im darauf folgenden Lauf der Schleife $t+1$ wird ein unterschiedliches Rechteck in die Lücke L gelegt. Wenn der Iterator itR bis zum Ende der Liste U_j gelangt, wird der Iterator itH in der Liste H inkrementiert und somit eine neue geeignete Lücke gesucht.

Die letzte Funktion nimmt das unter dem Iterator itR stehende Rechteck r und legt es in die unter dem Iterator itH stehende Lücke L. Diese Funktion bereitet eine neue Platzierung C' vor. Seien die Koordinaten der Lücke x_1 und x_2 und der Streifen, in dem sich L befindet, sei j. Seien x_r und $x_r + s_r$ die x–Koordinaten von r. Das Rechteck r wird in R so gelegt, dass $x_2 = x_r + s_r$. Auf diese Weise beträgt der Wert $x_r \coloneqq x_2 - s_r$.[2] Selbstverstädnlich kann an dieser Stelle zu Kollisionen kommen — Rechtecke können sich überdecken. Vor dem Platzieren prüft man nicht, ob es durchgehend eine Lücke zwischen den Werten x_r und $x_r + s_r$ in allen Streifen k gibt, wobei $b_r \leqslant k < e_r$. Deshalb entfernt man nun alle Rechtecke, die mit r kollidieren, also all diejnigen, die zumindest zum Teil zwischen x_r und $x_r + s_r$ in einem Streifen k liegen. So entstehen auch neue Lücken, deshalb versuchen wir an dieser Stelle die Lücken mit anderen Recktecken zu füllen. Dazu verarbeiten wir alle Streifen k ($b_r \leqslant k < e_r$), indem wir jedes in C' noch nicht gelegtes Rechteck r_i in jeder Liste S_k (in der ursrpünglichen Reihenfolge) untersuchen. Wie beim Greedy–Algorithmus am Anfang versuchen wir, ein Rechteck r_i im Streifen g zu legen nur, wenn $g = b_i$ (und wenn es eine Lücke zwischen x_{r_i} und $x_{r_i} + s_i$ gibt). Allerdings müssen wir die Streifen $b_i + 1, b_i + 2, ..., e_i - 1$ vor dem Platzieren prüfen, ob es in ihnen durchgehend Lücken zwischen x_{r_i} und $x_{r_i} + s_i$ gibt. Nur, wenn in allen Streifen $b_i, b_i + 1, ..., e_i - 1$ diese Lücken bestehen, kann das Rechteck r_i in die Platzierung C' eingefügt werden. Nachdem alle durch Kollision betroffenen Streifen verarbeitet worden sind, ist die Platzierung C' fertig.

Dann erfolgt der Vergleich in Zeile 18. Wenn der Gesamtflächeninhalt der Platzierung C' streng größer ist als der Gesamtflächeninhalt der Platzierung C, wird die neue Platzierung vom Algorithmus akzeptiert und gilt als die aktuelle Platzierung C. Danach muss man offensichtlich alle Lücken und alle nicht gelegten Rechtecke neu bestimmen. Die Iteratoren itH bzw. itR werden auf $H.begin$ bzw. auf $U_k.begin$ gesetzt.

Man kann leicht begründen, dass das Programm auf jeden Fall anhält. Durch den Quasibergsteigeralgorithmus wird ein lokales Maximum gefunden, das bestenfalls auch das Optimum ist. Jedes lokale Maximum kann das Optimum nicht überschreiten. Das Optimum ist auf den Flächeninhalt des großen Rechtecks R beschränkt. Wenn ein lokales Maximum erreicht wird, kann der Algorithmus keine neuen Platzierungen annehmen. Wenn ein lokales Maximum erreicht wird, werden alle geeigenten Lücken und dazu jeweils alle passenden Rechtecke ausprobiert, aber das Programm nimmt keine der neuen Kombinationen an, da sie keinen größeren Flächeninhalt bilden als der des lokalen Maximums. Somit hält das Programm auf jeden Fall an.

1.4 Diskussion der Ergebnisse

1.4.1 Grenzen der Heuristik

Im Abschnitt 1.2 wurde bewiesen, dass das FLOHMARKT–PROBLEM NP–schwer ist. Es gibt faktoriell viele möglichen Anordnungen der Rechtecke. Deshalb für $|Z|$ in der Ordnung von ca. 700 wird eine Brute–Force–Lösung in einer nicht akzeptablen Zeit gelöst. Die Komplexität des FLOHMARKT–PROBLEMs setzt Schranken auf die optimale Lösung des Problems. Man kann keinen in Polynomialzeit laufenden Algorithmus entwicklen, der jede Instanz dieses Problems lösen würde. Das ist der Hauptgrund, warum wir eine Heurstik verwenden. Allerdings, da eine Heuristik nur ein Approximationsalgorithmus ist und nur nahezu optimale Ergebnisse liefert, muss es Kompromisse geben. Dieser Kompromiss betrifft vor allem die Laufzeit und dafür, dass das hier vorgestellte Verfahren in Polynomialzeit läuft, trifft das Programm an vielen Stellen vereinfachte Entscheidungen, die nicht zum optimalen Ergebnis führen können. In diesem Abschnitt diskutieren wir nur über die Grenzen der beiden Greedy–Algorithmen im Programm — über den Greedy–Algorithmus am Anfang und über das heuristische Verbesserungsverfahren — und im Abschnitt 1.4.2 besprechen wir die Ergebnisse.

Im Greedy–Algorithmus am Anfang liegt die Schwierigkeit darin, dass die Platzierung der Rechtecke grundsätzlich von ihrer Reihenfolge in Listen S_j abhängt. Diese hängt dann von den Sortierkriterien ab. Obwohl dank der gewählten Sortierkriterien optimale oder sehr gute Ergebnisse bei vielen Beispielen herauskommen, ist das nicht der Fall bei allen Beispielen (mehr dazu im Abschnitt 1.4.2). Auf jeden Fall

[2] Die Situation, in der $x_r < 0$ gilt, wird in der zweiten Funktion ausgeschlossen. Wenn es zu so einem käme, wird der Iterator itR inkrementiert wird und das nächste Rechteck gewählt.

liefert der Greedy–Algorithmus am Anfang kein optimales Ergebnis zum Beispiel 2, weil dieses Ergebnis im Laufe des Verbesserungsverfahrens optimiert wird.

Im Verbesserungsverfahren wurden mehrere Kompromisse zugunsten der Laufzeit gemacht. Vor allem liegt die Schwierigkeit zugrunde dem Verfahren — warum wird ein Verfahren verwendet, das einen Bergsteigeralgorithmus nachahmt und nicht z. B. ein Verfahren mit simuliertem Abglühen oder ein ganz anderer heuristische Ansatz? Außerdem liegen die Schwierigkeiten des Verbesserungsverfahrens auch an den Reihenfolgen der Listen U_j und der Liste H. Zum Sortieren dieser Listen nutzt man auch festgelegte Sortierkriterien, die nicht zwingend das optimale Ergebnis liefern müssen. Dazu liegt das Problem auch beim Platzieren eines Rechtecks in eine Lücke. Wir entscheiden uns, das Rechteck an die Koordinate x_2 der Lücke zu legen. Man könnte hier eine andere Vorgehensweise anwenden, z. B. man könnte das Rechteck an die Koordinate x_1 orientieren; man könnte auf eine besondere Weise vorgehen, wenn es Rechtecke gibt, die deutlich kleiner sind als eine Lücke; oder man könnte die Rechtecke in darüber und darunter stehenden Streifen in Betracht ziehen, was im Programm nicht gemacht wird. Wie beim Greedy–Algorithmus am Anfang, hängt die Reihenfolge der Rechtecke beim Ausfüllen der Lücken von der Reihenfolge in Listen S_j ab. Weiterhin ist die Weise, auf die Lücken bestimmt werden, ist sehr stark vereinfacht. Man nimmt keinen Bezug darauf, wie breit eine Lücke ist, also wie viele Streifen sie umfasst. Das ist auf jeden Fall eine Schwachstelle des Programms.

1.4.2 Qualität der Ergebnisse

Im vorangegangenen Abschnitt werden die Grenzen der Heuristik erkannt. In diesem Abschnitt diskutieren wir die Qualität der herausgekommenen Ergebnisse.

Zuerst bestimmen wir die Kriterien, unter denen wir ein Ergebnis auswerten:

- Das Verhältnis vom Gesamtflächeninhalt der ins große Rechteck gelegten Rechtecke zum Gesamtflächeninhalt aller Rechtecke.
- Das Verhältnis vom Gesamtflächeninhalt der ins große Rechteck gelegten Rechtecke zum Flächeninhalt des großen Rechtecks.
- Die praktische Laufzeit des Programms für ein Ergebnis.

Diese Kriterien wurden in Bezug auf die Aufgabenstellung gewählt, „um den Organisatoren des Flohmarkts zu helfen.“ Das erste Kriterium gibt den Veranstaltern den Einblick darin, wie viel sie in Bezug auf die Menge des verfügbaren Geldes verdienen — alle Vermieter wollen den Veranstaltern Geld anbieten, aber es hängt von den Organisatoren ab, welche Anmeldungen sie ablehnen und welche annehmen. Das zweite Kriterium gibt den Einblick darin, wie viel Geld die Veranstalter verdienen in Bezug auf den verfügbaren Platz. Die beiden ersten Kriterien liefern natürlich auch die Erkenntnis über die Verlüste, die mit der Auswahl an Anmeldungen verbunden sind. Das dritte Kriterium spielt für die Veranstalter eine praktische Rolle. Sehr wenige Personen würde ein Ergebnis interessieren, das vielleicht um ein paar Promile besser ist, aber dessen Bestimmung mehrere Stunden (oder Tage!) dauert. Deshalb wurde auch die Brute–Force–Lösung ausgeschlossen.

Tabelle 1 stellt die Ergebnisse zu den Beispielen von 1 bis 7 aus der BWINF–Webseite dar. In den ersten zwei Spalten befinden sich entsprechend die Sortierkriterien für Liste H und die Listen U_j. Die Sortierkriterien werden in der Tabelle 2 erläutert. Die erste Zeile in der Tabelle stellt die Ergebnisse bevor dem Lauf des Verbesserungsverfahrens dar. Die Zahlen zwischen den Spalten „Bsp. 1“ und „Bsp. 7“ sind die Ergebnisse in [m $\times$ h] (nach der Aufgabenstellung: auch in Euro), die das Programm unter Verwendung von den angegebenen Sortierkriterien liefert. Dazu ist zu beachten, dass der Flächeninhalt des Rechtecks R in allen abgebildeten Beispielen 10000 beträgt.

Man kann leicht feststellen, dass der Greedy–Algorithmus sehr gute Ergebnisse liefert, die manchmal nur um winzige Prozentpunkte durch den Verbesserungsalgorithmus verbessert werden.

Im Beispiel 1 werden alle Rechtecke bereits beim Lauf des Greedy–Algorihtmus am Anfang platziert. Wenn man den Gesamtflächeninhalt aller Rechtecke aus diesem Beispiel ausrechnet, kommt man auf die Zahl 8028. Das ist also das optimale Ergebnis. Ebenfalls ist beim Beispiel 6 sehr leicht zu erkennen, dass der Gredy-Algorithmus das optimale Ergebnis liefert, da alle Rechtecke aus dem Beispiel platziert und die Fläche des großen Rechtecks vollständig bedeckt wurden.

Das Beispiel 3 ist ein sehr interessanter Fall. Weder werden alle Rechtecke aus diesem Beispiel platziert (das ist sowieso unmöglich, da der Gesamtflächeninhalt aller Rechtecke 10010 beträgt), noch ist die Fläche des großen Rechtecks völlig bedeckt. Allerdings, wenn wir die Ergebnisse jedes Streifens einzeln betrachten, stellen wir fest, dass der Flohmarkt von 11:00 bis 17:00 vollständig durchgehend ausgebucht

Kriterien H	Kriterien U_j	Bsp. 1	Bsp. 2	Bsp. 3	Bsp. 4	Bsp. 5	Bsp. 6	Bsp. 7
Bevor dem Verbesserungsverfahren		8028	9056	8778	7370	7962	10000	9959
greaterHolesSize	smallerSize	8028	9077	8778	7370	8705	10000	9979
	greaterSize	8028	9077	8778	7370	8705	10000	9973
	smallerArea	8028	9077	8778	7370	8705	10000	9979
	greaterSize	8028	9077	8778	7370	8705	10000	9973
	greaterEnd	8028	9077	8778	7370	8705	10000	9973
smallerHolesSize	smallerSize	8028	9077	8778	7370	8599	10000	9980
	greaterSize	8028	9077	8778	7370	8599	10000	9973
	smallerArea	8028	9077	8778	7370	8599	10000	9980
	greaterArea	8028	9077	8778	7370	8599	10000	9973
	greaterEnd	8028	9077	8778	7370	8599	10000	9991

Tabelle 1: Die Ergebnisse zu den Beispielen 1–7. Die erste Zeile enthält die Ausgangsergebnisse, bevor man den Verbesserungsalgorithmus laufen lässt. Die ersten zwei Spalten stellen die verwendeten Sortierkriterien für die Liste H und die Listen U_j dar. Die Spalten von Bsp. 1 bis Bsp. 7 sind die Ergebnisse in [m × h] nach dem Lauf des Verbesserungsalgorithmus. Man beachte, dass die Kriterien, die für den Lauf des Programms und die im Abschnitt 1.3.3 beschrieben werden, sind diejenigen aus der zweiten Zeile. (s. Tabelle 2 für die Erklärungen der Sortierkriterien.)

Name	1. Kriterium	2. Kriterium	3. Kriterium
greaterHolesSize	Lückengröße fallend	Streifenindex aufsteigend	
smallerHolesSize	Lückengröße aufsteigend	Streifenindex aufsteigend	
smallerSize	s_i aufsteigend	b_i aufsteigend	
greaterSize	s_i fallend	b_i aufsteigend	
smallerArea	$s_i \times m_i$ aufsteigend	b_i aufsteigend	
greaterArea	$s_i \times m_i$ fallend	b_i aufsteigend	
greaterEnd	e_i fallend	b_i aufsteigend	$s_i \times m_i$ fallend

Tabelle 2: Die ersten zwei Zeilen sind die Sortierkriterien nur für die Liste H mit Lücken. Die restlichen Zeilen sind die Sortierkriterien für die Listen U_j für jedes Rechteck r_i.

ist, also beträgt der Flächeninhalt jedes Streifens von 3 bis 8 (einschließlich) 1000. Das bedeutet, man kann das Ergebnis für diese Streifen nicht verbessern. Man kann auch feststellen, dass alle Rechtecke, die zu den Streifen 0, 1, 2, 9 gehören, platziert wurden. Das bedeutet, dass die restliche Fläche mit keinen Rechtecken bedeckt werden kann. Das bedeutet, dass 8778 das optimale Ergebnis für dieses Beispiel ist, weil man dieses Ergebnis nicht verbessern kann.

Die Situation mit dem Beispiel 4 sieht ähnlich aus. Obwohl nicht alle Rechtecke platziert werden (wieder beträgt der Gesamtflächeninhalt aller Rechtecke mehr als 10000) und es noch viel freien Platz im großen Rechteck gibt (mehr als ein Viertel des Flächeninhalts), ist dieses Ergebnis optimal. Man kann per Hand prüfen, dass jede Kombination mit den zwei nicht gelegten Rechtecken kein besseres Ergebnis ergibt.

Dann bleiben noch die Ergebnisse zu den Beispielen 2, 5 und 7. Da die Anzahl an kleineren Rechtecken zu groß ist, um die Ergebnisse per Hand zu prüfen und wir keinen Brute–Force–Algorithmus laufen lassen, kann man schwer sagen, wie weit die Ergebnisse von den Optima abweichen. Zur Auswertung dieser Ergebnisse verwenden wir unsere festgelegten Kriterien.

Das Ergebnis zum Beispiel 2 bevor dem Lauf des Greedy-Algorithmus am Anfang beträgt 9056. Dieser Gesamtflächeninhalt entspricht 90,5% des Flächeninhalts des großen Rechtecks und ebenfalls 90,5% des Gesamtflächeninhalts aller Rechtecke in diesem Beispiel. Man beachte, dass der Gesamtflächeninhalt aller Rechtecke 10000 überschreitet. Durch das Verbesserungsalgorithmus steigt das Anfangsergebnis auf 9077, also eine Verbesserung um 0,2 Prozentpunkte. In diesem Beispiel gibt es 603 Rechtecke und das sind Anmeldungen, deren Wert s_i hauptsächlich zwischen 1 und 6 liegt. Die praktische Laufzeit des Algorihtmus schließt sich im Bereich von 20 Sekunden auf einem modernen Recher.[3] Der Wert 90,7% ist akzeptabel in Bezug auf die möglichen Einkommen und auf den verfügbaren Platz und aus praktischer Sicht ist es schwer, sich ein besseres Ergebnis innerhalb von 20 Sekunden zu wünschen, solange die Ermittlung eines qualitativen Ergbnises per Hand sehr lange dauern würde. Es ist anhand der Tabelle 1 festzustellen, dass das Ergebnis sich nach dem Lauf des Verbesserungsalgorithmus unter Verwendung von

[3]Die genaue Laufzeit ist nicht interessant, ohne dass die technischen Spezifikationen des Rechners angegeben werden.

beliebigen Kriterien um denselben Wert verbessert.

Das Anfangsergebnis zum Beispiel 7 ist 9959 und beträgt genau 99,59% des Flächeninhalts des Rechtecks R und des Gesamtflächeninhalts aller Rechtecke. In diesem Beispiel gibt es 566 Anmeldungen, davon haben die meisten den Wert s_i im Bereich von 1 bis 6, aber im Vergleich zum Beispiel 2 gibt Rechtecke, die einen Wert s_i im Bereich 10–40 besitzen. Wenn man die Sortierkriterien `greaterHolesSize` und `smallerSize` wählt, also diejenigen, die für das Program gewählt wurden und die im Abschnitt 1.3.3 beschrieben werden, liefert das Verbesserungsverfahren ein Ergebnis um 0,2 Prozentpunkte besser. Wir stellen fest, die anderen Kombinationen der Sortierkriterien und insbesondere die Kombination aus der letzen Zeile der Tabelle liefert ein besseres Ergebnis. Das bedeutet, dass der Wert 9978 auf jeden Fall nicht optimal ist. Allgeimein ist der Wert 9978 aus praktischer Sicht völlig akzeptabel. Es ist kaum möglich, innerhalb von einer Sekunde so einen Wert zu erreichen, wenn man eine Platzierung der Rechtecke per Hand bestimmt. Aus praktischer Sicht ist der Wert 9991 auch nicht von einem bedeutenden Unterschied zu 9978 und sind die beiden Werte sehr nah am Optimum.

Als letztes bleibt das Beispiel 5, das 25 große Rechtecke umfasst, und zu dem der Greedy–Algorithmus am Anfang das Ergebnis 7962 liefert. Der Gesamtflächeninhalt aller Rechtecke beträgt mehr als 300000 und somit entspricht das Ergebnis 79,6% des Flächeninhalts des Rechtecks R und 25,7% des Gesamtflächeninhalts aller Rechtecke. Das Verbesserungsverfahren unter Verwendung von den Sortierkriterien `greaterHolesSize` liefert einen Wert 8705, also ist das eine Verbesserung um 7,4% Prozentpunkte. Hingegen beträgt das verbesserte Ergebnis nur 8599, wenn man die Sortierkriterien `smalllerHolesSize` verwendet. Es ist schwer zu beurteilen, wie weit das Ergebnis vom Optimum abweicht. Allerdings ist 87% des Flächeninhalts des großen Rechtecks, also des verfügbaren Platzes, noch in Ordnung und so ein Wert ist aus praktischer Sicht wünschenswert.

TODO: s. TeX-Datei dazu

Die deutlichste Verbesserung im Beispiel 5 liegt zugrunde der Entscheidung, die Sortierkriterien `greaterHolesSize` und `smallerSize` zu wählen. Eventuell könnte man den Algorithmus so entwickeln, dass man ihn 10–mal laufen lässt und in jedem Lauf andere Kriterien wählt. Dann könnte einfach das Maxmimum aus diesen Ergebnissen gezogen werden. In vielen Heuristiken ist es genau die Idee, verschiedene Methoden zusammen zu verknüpfen. Bei allen Beispielen außer 2 dauert die Laufzeit des ganzen Programm etwa eine Sekunde, was praktisch eine sehr gute Laufzeit darstellt, und die Qualität der Ergebnisse ist in diesem Zusammenhang sehr gut, wenn man dies mit einer faktoriellen Laufzeit eines Brute–Force–Lösung vergleicht. Die durch den Bergsteigerlagorithmus gefundenen Maxima liegen höchstwahrscheinlich sehr nah an den Optima.

Zum Vergleich wurde auch ein Ansatz mit simulierten Abglühen und ein Ansatz, in dem die Reihenfolgen der Rechtecke in den Listen zufällig war, ausprobiert, aber die Ergebnisse waren allgemein schlechter als die, die der Quasibergsteigeralgorithmus liefert.

1.5 Laufzeit

- M — die Breite des großen Rechtecks R, die Anzahl der Streifen
- n — $|Z|$, also die Anzahl der kleineren Rechtecke

Die Größe M in der Aufgabe tritt in vollständigen Stunden vor. Wenn die Eingabe zu Minuten konvertiert wird, wird diese Variable in vollständigen Minuten betrachtet. Im Abschnitt 1.3.2 wird beschrieben, dass die Breite jedes Streifens 1 Stunde bzw. 1 Minute entspricht. Somit kann man die Größe M auch als die Anzahl der Streifen betrachten.

- Vorbereitung der Eingabe: $O(M \cdot n \log n)$ (worst–case)
  - Einlesen aller Rechtecke und Erstellung der Liste Z: $O(n)$
  - Erstellung von Listen `placedRectangles`, `unusedRectangles` und `holes` für jeden Streifen (s. Umsetzung): $O(M)$
  - Verteilung jedes Rechtecks auf die Listen S_j, zu denen sie gehören: $O(M \cdot n)$ (worst–case)
    Im schlimmsten Fall gehört jedes Rechteck zu jeder Liste S_j, wenn jede Anmeldung den ganzen Zeitraum eines Flohmarkts betrifft. So muss jedes Rechteck in jede Liste S_j hinzugefügt werden.
  - Sortierung der Listen S_j: $O(M \cdot n \log n)$ (worst–case)
    Es gibt M Listen und in jeder Liste kann es im schlimmsten Fall alle Rechtecke geben. Die linear–logarithmische Laufzeit ist durch das Sortieren verursacht.

- Der Greedy–Algorithmus am Anfang: $O(M \cdot n^2)$ (worst–case, amortisierte Laufzeit)
  Obwohl man die Funktion zur Verarbeitung eines Streifens M–mal laufen lässt, kann eine Laufzeitanalyse pro Lauf dieser Funktion zu pessimistisch sein. Es ist unmöglich, dass ein Platz für n Rechtecke M–mal gesucht wird, da wir voraussetzen, dass jedes Rechteck r_i nur im Streifen b_i gelegt werden kann und außerdem können n Rechtecke nicht M–mal platziert werden, da jedes Rechteck nur einmal gelegt werden kann. Stattdessen analysieren wir die Laufzeit für das Platzieren jedes Rechtecks allein, deshalb wird die endliche Laufzeit mal n multipliziert, da man im schlimmsten Fall alle n Rechtecke ins R legen muss.
  - Das Finden der passenden, freien x–Koordinaten: $O(n)$ (worst–case)
    Im schlimmsten Fall muss man in einem Streifen über $n - 1$ Rechtecke iterieren, um einen freien Platz für ein Rechteck zu finden.
  - Das Finden der genauen Stelle in den restlichen Streifen: $O(M \cdot n)$ (worst–case)
    Nicht in jedem Streifen müssen sich dieselben Rechtecke befinden und ein Rechteck kann zu mehreren Steifen gehören. In jedem Streifen muss man die genaue Position zum Platzieren des Rechtecks finden und dazu muss man im schlimmsten Fall über $n - 1$ Rechtecke im Streifen iterieren. Wenn man die richtige Stelle im Streifen findet, erfolgt die Einfügen–Operation in eine `list` in C++ erfolgt in $O(1)$.[4] Im schlimmsten Fall gehört ein Rechteck zu allen Streifen, deshalb muss die endliche Laufzeit mal M multipliziert werden.
- Ein Lauf des Verbesserungsalgorithmus pro ein Paar Lücke–Rechteck: $O(M \cdot n^2)$ (worst–case, amortisierte Laufzeit)
  - Berechnung des Gesamtflächeninhalts aller platzierten Rechtecke: $O(n)$ (worst–case)
    Im schlimmsten Fall können alle Rechtecke ins große Rechteck R gelegt werden.
  - Bestimmung aller nicht gelegten Rechtecke: $O(M \cdot n \log n)$ (worst–case)
    Im schlimmsten Fall gibt es ein gelegtes Rechteck, das genauso groß ist wie R, und somit alle $n - 1$ restlichen kleineren Rechtecke zu Listen U_j gehören. Im schlimmsten Fall können alle diese restlichen Rechtecke zu allen Listen U_j gehören. Die linear–logarithmische Laufzeit ist mit dem Sortieren der Listen U_j verbunden.
  - Auffinden aller Lücken: $O(M \cdot n \log n)$ (worst–case)
    Im schlimmsten Fall gibt es in jedem Streifen $n + 1$ Lücken, wenn kein Paar der Rechtecke in demselben Streifen eine gemeinsame Seite hat — dann gibt es Lücken auf beiden Seiten jedes Rechtecks. Dazu kann es im schlimmsten Fall n Rechtecke in jedem Streifen geben. Die linear–logarithmische Laufzeit ist mit dem Sortieren der Liste H verbunden.
  - Entfernung aller kollidierenden Rechtecke: $O(M \cdot n)$ (worst–case)
    Beim Einfügen eines Rechtecks r in eine Lücke muss man in allen Streifen, zu denen r gehört, prüfen, ob es Kollisionen gibt. Im schlimmsten Fall gehört ein Rechteck zu allen M Streifen und man muss in allen Streifen $n - 1$ Rechtecke entfernen.
  - Einfügen neuer Rechtecke in neue Lücken: $O(M \cdot n^2)$ (worst–case, amortisierte Laufzeit)
    In diesem Teil lohnt es sich mehr, eine amortisierte Laufzeitanalyse pro Rechteck durchzuführen. Im schlimmsten Fall muss man $n - 1$ Rechtecke ins Rechteck R einfügen. Im schlimmsten Fall gehört jedes Rechteck zu jedem der M Streifen. Beim Einfügen jedes Rechtecks r muss man zuerst die potenziellen Koordinaten für r im Streifen b_r finden. Dazu kann man im schlimmsten Fall über $n - 1$ Rechtecke iterieren. Dann muss man in jedem Streifen, zu dem r gehört, prüfen, ob es genug Platz dafür gibt. Dazu muss man im schlimmsten über alle Rechtecke im Streifen iterieren. Dann wird das Rechteck zu allen Streifen eingefügt, zu denen es gehört. Somit ergibt sich pro Rechteck r die Laufzeit: $O(M \cdot n)$
  - Zurücksetzung der ursprünglichen Platzierung: $O(M \cdot n)$ (worst–case)
    Wenn eine Platzierung einen niedrigeren Flächeninhalt besitzt als die usprüngliche Anordnung, wird diese Platzierung vom Algorithmus abgelehnt und die ursprünliche Anordnung wird zurückgesetzt. Dazu muss man den Inhalt aus allen M Streifen kopieren, wobei es sich in jedem Streifen höchstens n Rechtecke befinden können.

Wie man im Algorithmus 1 erkennt, unterscheidet man zwischen zwei möglichen Läufen des Verbesserungsalgorithmus in der While–Schleife: Wenn ein neues Ergebnis angenommen wird und falls nicht. Wenn ein Ergebnis angenommen wird, muss man zusätzlich die Funktionen zur Bestimmung aller Lücken

[4] https://en.cppreference.com/w/cpp/container/list/insert

und aller nicht gelegten Rechtecke laufen lassen. Wie wir in den Betrachtungen zur Laufzeitanalyse zum Verbesserungsalgorithmus pro ein Paar Lücke–Rechteck sehen, besitzen diese zwei Funktionen niedrigere Laufzeiten als die Gesamtlaufzeit der restlichen Prozesse, deshalb unterscheiden wir nicht zwischen den Laufzeiten der Laüfe des While–Schleife, in denen ein Ergebnis angenommen wird, und denjenigen, in denen das nicht der Fall ist. Somit ergibt sich die folgende Laufzeit für ein Paar von einer Lücke L und einem Rechteck r, wobei r in L eingefügt werden soll: $O(M \cdot n^2)$ (worst–case).

Nun bestimmen wir die Anzahl an Paaren Lücke–Rechteck, die vom Verbesserungsalgorithmus verarbeitet werden. Die Funktion zur Bestimmung aller nicht gelegten Rechtecke kann höchstens $n - 1$ Rechtecke und die Funktion zum Auffinden aller Lücken kann höchstens $M \cdot n$ Lücken finden. Allerdings, wenn $n - 1$ Rechtecke nicht gelegt sind, gibt es höchstens nur $2M$ Lücken. Wenn die Anzahl der Lücken wächst, sinkt die Anzahl der nicht gelegten Rechtecke. Deshalb gibt es am meisten Möglichkeiten, wenn die beiden Anzahlen halbiert werden. So gibt es am meisten $O(M \cdot n/2 \cdot n/2) = O(M \cdot n^2)$ Möglichkeiten.

Im schlimmsten Fall muss man alle diesen Kombinationen durchgehen, bis man bei einem Ergebnis gelangt, das vom Verbesserungsalgorithmus angenommen wird. So legen wir fest, die Laufzeit des Verbesserungsalgorithmus für jede Kombination der Lücken und Rechtecke aus einem Paar von Listen H und U_j beträgt im worst–case:

$$O(M \cdot n^2 \cdot M \cdot n^2) = O(M^2 \cdot n^4).$$

Es bleibt noch die Abschätzung, wie viel mal man die Listen H und U_j bestimmt. Allgemein kann man die Laufzeit eines Bergsteigeralgorithmus schwer abschätzen. Allerdings ist ein Ergebnis auf den Flächeninhalt des großen Rechtecks R beschränkt und die Einheiten in dieser Aufgabe sind ganzzahlig (vollständige Meter, vollständige Stunden/Minuten). So können wir feststellen, dass die Ergebnisse des Verbesserungsalgorithmus mit jeder neuen Bestimmung der Listen H und U_j eine streng monoton wachsende Funktion bilden. Es gibt also eine feste Anzahl an möglichen Verbesserungen. Theoretisch könnte es einen Fall geben, in dem das Anfangsergebnis nach dem Lauf des Greedy–Algorithmus 1 beträgt und in dem dieses Ergebnis mit jeder neuen Bestimmung der Listen H und U_j um 1 verbessert wird, aber diese Situation ist aus praktischer Sicht kaum vorstellbar. Deshalb führen wir eine Variable k, deren Wert zwischen 1 und $N \times M$ liegt, die dafür steht, wie oft die Listen H und U_j bestimmt werden müssen. In den Beispielen 1–7 überschreitet k nicht 10. So beträgt die finale Laufzeit im worst–case:

$$O(k \cdot M^2 \cdot n^4).$$

Literatur

[1] T.H. Cormen u. a. *Introduction To Algorithms. Third edtition.* Introduction to Algorithms. MIT Press, 2009. ISBN: 9780262533058.

[2] Marek Cygan u. a. *Parameterized Algorithms.* Springer, 2016.

[3] Michael R. Garey und David S. Johnson. *Computers and intractability: a guide to the theory of NP-completeness.* W.H. Freeman und Company, 2009.

2 Umsetzung

2.1 Klasse `Rec`

Rechtecke werden im Programm als Objekte der Klasse `Rec` dargestellt. Diese Klasse besitzt 5 Attribute. Es gibt: `b`, `e` und `size`, die den Werten b_i, e_i und s_i eines Rechtecks r_i entsprechen. Außerdem gibt es die Attribute `x1` und `x2`, die den x–Koordinaten eines Rechtecks entsprechen. Wenn ein Rechteck gelegt wird, werden die beiden Koordinaten festgelegt und es gilt dann immer: `x1` + `size` = `x2`. Wenn ein Rechteck nicht platziert ist, sind die beiden Variablen zu -1 gesetzt.

Außer den standardmäßigen Getter– und Setter–Methoden gibt es auch eine Methode `getArea()`, die den Flächeninhalt des Rechtecks ausgibt, indem (`e` − `b`) × `m` ausgerechnet wird.

2.2 Klasse `Hole`

Die Lücken stellt man als Objekte der Klasse `Hole` dar. In dieser Klasse gibt es 3 Attribute: `x1`, `x2` und `stripe`. Sie stellen die Koordinaten x_1 und x_2 einer Lücke dar und `stripe` ist der Index des Streifens, in dem die Lücke auftritt.

2.3 Hilfsfunktionen

Es gibt drei Hilfsfunktionen, die die Eingabe verarbeiten und die zu keiner Klasse gehören.

Es gibt eine Funktion `timeToMinutes()`, die zur Umwandlung der Zeitangaben dient. Sie nimmt einen String als Argument, das entweder im Format `"H"` oder `"H:MM"` ist. `H` ist dabei ein beliebiger Integer, der Stunden angibt, und `MM` ist eine zweistellige Zahl, die Minuten angibt. Wenn die Eingabe Minuten enthält, wird die als String eingegebene Zeit zu Minuten umgewandelt, indem `H` mal 60 multipliziert wird. Sonst erfolgt keine Konversion und `H` wird nur zu einem Integer umgewandelt. Ausgegeben wird ein Paar bestehend aus der umgewandelten Zeit und einem Integer, in dem das Eingabeformat kodiert wird: 0 steht für Stunden und 1 für Minuten.

Die Funktion `processInput()` verarbeitet den String mit den Öffnungszeiten des Flohmarkts. Diese Funktion nimmt als Argument einen String, der aus $2k$ Zahlen besteht. Die Funktion teilt den String in eingeständige Uhrzeiten auf. Jede Uhrzeiten wird mithilfe der Funktion `timeToMinutes()` zu Stunden bzw. zu Minuten umgewandelt. Dann wird diese Folge von Zahlen als ein `vector<int>` mit dem Eingabeformat (wie oben) ausgegeben.

Es gibt noch die Funktion `calculateRecess()`. Diese Funktion nimmt als Argument einen `vector` von Integers, in dem die Uhrzeiten gespeichert sind. In diesem `vector` steht jede gerade bzw. ungerade Zahl für die Öffnungs– bzw. Schließungszeit. Ausgegeben wird ein Integer — die Summe der Unterschiede zwischen jedem k–ten Schließungs– und jedem $k+1$–ten Öffnungszeitpunkt. Diese Summe ist wichtig, weil man die Schließungszeit des Flohmarkts vom Endergebnis abziehen soll, wenn der Zeitraum des Flohmarkts unterbrochen ist.

2.4 Klasse `Solver`

In dieser Klasse wird das vorgestellte Verfahren implementiert.

Die Attribute `N` und `M` entsprechen den Zahlen N und M aus dem Abschnitt 1.1. Es gibt das Attribut `START`, das dem Wert B entspricht. Die Variable `recess` entspricht der Dauer der Schließungszeit des Flohmarkts, wenn sein Zeitraum unterbrochen ist. Der Integer `format` speichert das Zeitformat, das in der Eingabedatei auftriit. Die Kodierung ist dieselbe wie oben.

An dieser Stelle muss man erwähnen, dass kleinere Rechtecke im Programm als Zeiger zu den Objekten von `Rec` dargestellt werden. Diese Entscheidung wurde aus diesem Grund getroffen, damit es nur eine Kopie eines Rechtecks in der Klasse `Solver` gibt und damit jeder Prozess im Programm einen direkten Zugriff auf jedes Rechteck hat.

In der Klasse `Solver` gibt es einen `vector<Rec*>` namens `rectangles`, der alle Rechtecke aus diesem Beispiel speichert und der der Liste Z aus dem Abschnitt 1.1 entspricht. Es gibt zwei `vector` von `vector<Rec*>` mit den Namen `rectangles_stripes` und `unusedRectangles`. Die beiden haben die Größe `M` und der erste entspricht den Listen S_j und der zweite den Listen U_j. Dazu gibt es einen `vector` von `set<Rec*>` der Größe `M` namens `placed`, in dem alle Rechtecke auftreten, die in den Streifen platziert sind. Wir verwenden `set<Rec*>` aus dem Grund, dass die Rechtecke in diesem Container automatisch in der sortierten Reihenfolge der Koordinaten `x2` behalten werden. Außerdem kann man Rechtecke in `set` sehr einfach einfügen. Es gibt noch einen `vector` von `vector<Hole>` der Größe `M` namens `holes`, in dem alle Lücken aus jedem Streifen gespeichert werden. Dazu gibt es noch einen `vector` mit dem Namen `all_holes`, in dem alle Lücken aus allen Streifen hinzugefügt werden.

Die Methode `readFile()` liest die Daten aus der Textdatei ein. Diese Methode nimmt als Argument einen String mit der Adresse der Datei in dem Rechner. Das Eingabeformat in den Textdateien mit den Beispielen wurde geändert. Die erste Zeile beinhaltet die Zahl N. Die zweite Zeile enthält eine Folge von Öffnungszeiten des Flohmarkts. Die Uhrzeit mit einem geraden Index ist jeweils der Beginn und die Uhrzeit mit einem ungeraden Index ist jeweils die Schließungszeit. Die dritte Zeile enthält die Anzahl der Anmeldungen n und es folgen n Zeilen mit den Anmeldungen. So wird zuerst die Zahl `N` eingelesen. Danach folgt ein String mit einer geraden Anzahl an Öffnugs– und Schließungszeiten des Flohmarkts. Dies wird mittels der Funktion `processInput()` eingelesen. Dann wird die gesamte Pausenzeit des Flohmarkts mithilfe der Funktion `calculateRecess()` ermittelt und in der Variable `recess` gespeichert. Dann werden die Variablen `M` und `START` bestimmt. Es folgen danach die n Anmeldungen, die jeweils mittels der Funktion `timeToMinutes()` verarbeitet und in `rectangles` gespeichert werden.

Im Programm gibt es die Methode `run()`, die den Lauf des Programms ausführt. In dieser Funktion wird die Methode `distributeToStripes()` ausgeführt, die alle Rechtecke aus `rectangles` auf die `vector rectangles_stripes` verteilt und die diese Listen danach unter Verwendung von den Sortierkriterien `greaterEnd` einzeln sortiert. Danach folgt der Lauf der Methode `processStripe()` für jeden Streifen. Hier werden die Streifen im Greedy–Algorithmus verarbeitet. Es wird durch jedes Rechteck `r` in jedem `vector rectangles_stripes` iteriert. Es wird geprüft, ob die Koordinaten des Rechtecks `r` -1 betragen und ob das Rechteck in dem verarbeiteten Streifen beginnt. Dann wird es für `r` nach einer Lücke im Streifen in `placed` gesucht. Die Funktion `findNearestHole()` gibt die Koordinate `x1` für `r` aus, wenn es Platz für dieses Rechteck gibt. Sonst wird -1 ausgegeben. Wenn `x1` ausgegeben wird, wird dann auch `x2` gesetzt und das Rechteck `r` wird in alle Streifen in `placed` eingefügt, zu denen es gehört.

Nachdem die Methode `processStripe()` für alle Streifen ausgeführt worden ist, wird der Gesamtflächeninhalt aller platzierten Rechtecke mittels der Methode `calculateAreaUsed()` bestimmt und es wird geprüft, ob die Koordinaten aller Rechtecke in `rectangles` größer sind als -1. Wenn entweder der Gesamtflächeninhalt gleich dem Produkt `N` $\times$ `M` ist oder wenn alle Rechtecke platziert wurden, wird das Programm an dieser Stelle abgebrochen. Wenn nicht, wird die Methode `runOptimization()` laufen lassen, die das Verbesserungsverfahren ausführt.

In der Methode `runOptimization()` gibt es eine Variable `area`, in der der Gesamtflächeninhalt einer Platzierung gespeichert wird, und eine boolsche Variable `result`, die dafür steht, ob eine neue Platzierung vom Algorithmus angenommen wird. Am Anfang hat `result` den Wert `true`, da das Ausgangsergebnis angenommen werden muss. Außerdem gibt es ein Objekt `hole` der Klasse `Hole`, das der aktuellen Lücke entspricht, in die ein nicht gelegtes Rechteck eingefügt wird. Dazu gibt es ein Paar aus `Rec*` und `pair<int, int>` namens `rep`. In dieser Variable wird ein Rechteck zum Einfügen in die Lücke `hole` gespeichert. `pair<int, int>` enthält die Koordinaten der Lücke, in die `Rec*` eingefügt werden soll. Weiterhin gibt es zwei Iteratoren `itH` und `itR` wie im Algorithmus 1.

Dann beginnt die Do–While–Schleife, die solange läuft, bis es eine Lücke gibt, in die ein Rechteck eingefügt werden könnte. In der Schleife gibt es eine Fallunterscheidung: Wenn `result` den Wert `true` hat und wenn nicht. Wenn die ursprüngliche Platzierung vom Algorithmus angenommen wurde, werden zuerst der Wert `area` mittels der Funktion `calculateAreaUsed()`, die Listen `unusedRectangles` mittels der Methode `determineUnused()` und die Liste `all_holes` mittels der Funktion `findHoles()` bestimmt. Da wir die Lücken und die nicht gelegten Rechtecke gerade bestimmten, werden `itH` und `itR` auf an die Anfänge der Liste `all_holes` und der Liste `unusedRectangles` im Streifen, zu dem die Lücke unter dem Iterator `itH` gehört, gesetzt. Dann wird die nächste Lücke `hole` mittels der Methode `findNextHole()` bestimmt und das nächste Rechteck `rep` mittels der Methode `findReplacement()`. Bevor man `rep` in `hole` einfügt, muss man prüfen, ob die Ausgabe der beiden genannten Funktionen richtig ist. Es kann beispielsweise sein, dass `hole` in so einem Streifen liegt, in dem alle Rechtecke platziert wurden und somit kann man kein Rechteck in `hole` einfügen. Dazu ist die folgende While–Schleife. Wenn mit dem Rechteck oder mit der Lücke etwas falsch ist, wird in `pair<int,int>` in `rep` ein negativer Wert ausgegeben. Der Wert -1 steht dafür, dass es keine Lücken mehr gibt, in die ein Rechteck eingefügt werden kann, also wird an dieser Stelle die Do–While–Schleife abgebrochen. Der Wert -2 steht dafür, dass der Iterator ans Ende von `unusedRectangles` in diesem Streifen gelangt ist und dass der Iterator `itH` inkrementiert werden muss und eine neue Lücke gefunden werden muss. Der Wert -3 bedeutet, dass das Rechteck in `hole` nicht eingefügt werden kann, da die Koordinate `x2` der Lücke kleiner ist als die Länge des Rechtecks `size`. So würde das Recheck über die Grenzen des großen Rechtecks hinausreichen, wenn es in diese Lücke platziert würde. Diese While–Schleife wiederholt sich solange, bis eine Lücke gefunden wird, in die man ein Rechteck platzieren kann. Dann wird die Methode `removeCollisions` ausgeführt, die die mit dem eingefügten Rechteck kollidierenden Rechtecke aus der Platzierung entfernt und in der eine neue Platzierung mit neuen Rechtecken generiert wird. Diese Methode gibt einen boolschen Wert aus, der besagt, ob die neue Platzierung besser ist als die vorherige. Danach wiederholt sich die Do–While–Schleife.

Der Fall in der Do–While–Schleife für den Wert `result = false` ist analog zum ersten Fall, mit der Ausnahme, dass die Funktionen `calculateAreaUsed`, `determineUnused()` und `findHoles()` nicht ausgeführt werden.

Die Methode `findHoles()` findet alle Lücken in allen Listen `placed`. Sie nimmt als Argument den Index des Streifens `p`. Wenn `p = -1`, wird die Funktion auf allen Streifen ausgeführt. Es wird über jedes Rechteck im jedem Streifen iteriert und es wird geprüft, ob der Wert `x2` eines Rechtecks mit dem Wert `x1` des darauffolgenden Rechtecks übereinstimmt und ob das erste Rechteck im Streifen den Wert `x1 = 0` und das letzte Rechteck im Streifen den Wert `x2 = N` besitzen. Wenn nicht, wird eine Lücke mit den Koordinaten, die den Koordinaten der genannten Rechtecke entsprechen, und der Nummer des Streifens als ein Objekt der Klasse `Hole` in die Liste `holes` zu diesem Streifen hinzugefügt. Am Ende werden die Listen `holes` aus jedem Streifen zu einer gemeinsamen Liste `all_holes` zusammengebracht und nach den Sortierkriterien `greaterHolesSize` sortiert.

Die Methode `findNextHole()` nimmt als Argument den Iterator `itH`. In der Liste `all_holes` wird geprüft, ob sich unter dem Iterator eine Lücke befindet, zu der es ein Rechteck im Streifen, in dem sich die Lücke befindet, in der Liste `unusedRectangles` gibt. Wenn nicht, wird `itH` inkrementiert, bis so eine Lücke gefunden wird. Wenn der Iterator zum Ende der Liste `all_holes` gelangt, wird eine Lücke mit Koordinaten -1 als Objekt der Klasse `Hole` ausgegeben, was bedeutet, dass die Do–While–Schleife abgebrochen werden soll.

Die Methode `findReplacement()` nimmt zwei Argumente: ein Objekt `hole` der Klasse `Hole`, also eine Lücke, die von der Funktion `findNextHole()` ausgegeben wurde, und den Iterator `itR`. In dieser Methode wird geprüft, ob `hole` den Wert -1 hat. Wenn ja, wird ebenfalls der Wert -1 ausgegeben. Danach wird geprüft, ob der Iterator `itR` das Ende der Liste `unusedRectangles` in dem in `hole` angegebenen Streifen erreichte. Wenn ja, wird der Wert -2 ausgegeben. Ansonsten wird eine Variable `rep` erstellt, die auf das Rechteck unter dem Iterator `itR` in `unusedRectangles` gesetzt wird. Anschließend wird geprüft, ob die Koordinate `x2` der Lücke `hole` nicht kleiner ist als die Größe `size` von `rep`. Wenn doch, wird -3 ausgegeben. Sonst wird `rep` mit den Koordinaten der Lücke `x2` ausgegeben.

In der Methode `removeCollisions()` wird ein Paar bestehend aus einem Rechteck und den Koordinaten einer Lücke als Argument genommen. Es wird eine Kopie des ganzen `vector placed` gemacht und `placedOld` genannt. Das Rechteck, das in die Lücke eingefügt wird, nennen wir `rr` und die Lücke `hole`. Dann werden die Koordinaten von `rr` gesetzt: `rr->x2 = hole.second` und `rr->x1 = rr->x2 - getSize`. Danach werden in `oldPlaced` alle Rechtecke gesucht, die mit `rr` kollidieren, also wird es geprüft, ob es Rechtecke gibt, deren Wert `x1` kleiner ist als der Wert `x2` des Rechtecks `rr`, wobei `rr` vor einem solchen Rechteck steht. Alle kollidierenden Rechtecke werden in eine Liste `collisions` hinzugefügt. Danach werden die Werte `x1` und `x2` aller Rechtecke, die zu `collisions` gehören, zu -1 gesetzt. Als Nächstes werden alle Rechtecke, deren Koordinaten -1 betragen, aus `placed` entfernt. Danach wird die Funktion `addNew` ausgeführt, die das Rechteck `rr` und ggf. die neuen anderen Rechtecke in `placed` einfügt. Sie gibt eine Liste mit Rechtecken aus, die neu platziert werden. Sie heißt `added`. Danach wird der Gesamtflächeninhalt mittels der Funktion `calculateAreaUsed()` bestimmt. Wenn der neue Gesamtflächeninhalt größer ist als der vorherige, wird die Methode `removeCollisions()` mit dem ausgegebenen Wert `true` abgebrochen. Falls nicht, werden die Koordinaten aller neu eingefügten Rechtecke aus der Liste `added` zu -1 gesetzt und die ursprünglichen Koordinaten der kollidierenden Rechtecke werden zurückgesetzt. `placed` wird zu `oldPlaced` gesetzt, die Funktion gibt den Wert `false` aus und bricht ab.

Die Methode `addNew()` nimmt als Argument das Rechteck zum Einfügen in eine Lücke. Es wird in dieser Funktion in `placed` an der richtigen Stelle platziert. Dann lässt man die Funktion `processStripeReturn()`, die probiert, neue Rechtecke in `placed` zu platzieren, für jeden Streifen laufen. Die Methode `placed` funktioniert ähnlich wie die Methode `processStripe`. Es wird für jeden Streifen die Liste `rectangles_stripes` iteriert und bei jedem iterierten Rechteck `r` wird geprüft, ob er mit dem verarbeiteten Streifen beginnt und ob er nicht platziert wurde. Dann wird mittels der Funktion `findNearestHole()` die nächste Lücke in diesem Streifen in `placed` gesucht. Wenn es so eine Lücke gibt, wird geprüft, ob die Lücken in allen Streifen in `placed` bestehen, zu denen das iterierte Rechteck gehört. Wenn ja, wird dieses Rechteck in alle diesen Streifen in `placed` eingefügt. Diese Methode gibt eine Liste `added` aus, in der sich alle neu eingefügten Rechtecke befinden. In der Methode `addNew` wird die Liste `added` aus allen Streifen zusammengebracht und ausgegeben.

3 Beispiele

Das Format der Eingabe wurde geändert. Die erste Zeile beinhaltet die Zahl N. Die zweite Zeile enthält eine Folge von Öffnungszeiten des Flohmarkts. Die Uhrzeit mit einem geradem Index ist jeweils der Beginn und die Uhrzeit mit einem ungeraden Index ist jeweils das Ende.[5] Die dritte Zeile enthält die Anzahl der Anmeldungen n und es folgen n Zeilen mit den Anmeldungen.

Um das Zeitformat zu ändern, müssen die Zahlen im Format `H:MM` angegeben werden, wobei die `H` eine beliebige natürliche Zahl (mit 0) sein kann und die Minuten `MM` immer als eine zweistellige Zahl dargestellt werden müssen.

Der Übersichtlichkeit halber befinden sich die genauen Standorte zu Anmeldungen zu jedem Beispiel in den angehängten csv–Dateien. In den Tabellen entsprechen die Werte x_1 und x_2 den Werten x_r und $x_r + s_r$ jedes Rechtecks r. Dazu bedeuten die Wert der Koordinaten von -1, dass ein Rechteck nicht platziert ist.

3.1 Beispiel 1

Der Flächeninhalt des großen Rechtecks: $\boxed{10000\ [\mathrm{m} \cdot \mathrm{h}]}$

Der Gesamtflächeninhalt aller platzierten Rechtecke: $\boxed{8028\ [\mathrm{m} \cdot \mathrm{h}]}$

Der Gesamtflächeninhalt aller Rechtecke: $\boxed{8028\ [\mathrm{m} \cdot \mathrm{h}]}$

3.2 Beispiel 2

Der Flächeninhalt des großen Rechtecks: $\boxed{10000\ [\mathrm{m} \cdot \mathrm{h}]}$

Der Gesamtflächeninhalt aller platzierten Rechtecke: $\boxed{9077\ [\mathrm{m} \cdot \mathrm{h}]}$

Der Gesamtflächeninhalt aller Rechtecke: $\boxed{10002\ [\mathrm{m} \cdot \mathrm{h}]}$

3.3 Beispiel 3

Der Flächeninhalt des großen Rechtecks: $\boxed{10000\ [\mathrm{m} \cdot \mathrm{h}]}$

Der Gesamtflächeninhalt aller platzierten Rechtecke: $\boxed{8778\ [\mathrm{m} \cdot \mathrm{h}]}$

Der Gesamtflächeninhalt aller Rechtecke: $\boxed{10010\ [\mathrm{m} \cdot \mathrm{h}]}$

3.4 Beispiel 4

Der Flächeninhalt des großen Rechtecks: $\boxed{10000\ [\mathrm{m} \cdot \mathrm{h}]}$

Der Gesamtflächeninhalt aller platzierten Rechtecke: $\boxed{7370\ [\mathrm{m} \cdot \mathrm{h}]}$

Der Gesamtflächeninhalt aller Rechtecke: $\boxed{10534\ [\mathrm{m} \cdot \mathrm{h}]}$

3.5 Beispiel 5

Der Flächeninhalt des großen Rechtecks: $\boxed{10000\ [\mathrm{m} \cdot \mathrm{h}]}$

Der Gesamtflächeninhalt aller platzierten Rechtecke: $\boxed{8705\ [\mathrm{m} \cdot \mathrm{h}]}$

Der Gesamtflächeninhalt aller Rechtecke: $\boxed{30940\ [\mathrm{m} \cdot \mathrm{h}]}$

3.6 Beispiel 6

Der Flächeninhalt des großen Rechtecks: $\boxed{10000\ [\mathrm{m} \cdot \mathrm{h}]}$

Der Gesamtflächeninhalt aller platzierten Rechtecke: $\boxed{10000\ [\mathrm{m} \cdot \mathrm{h}]}$

Der Gesamtflächeninhalt aller Rechtecke: $\boxed{10000\ [\mathrm{m} \cdot \mathrm{h}]}$

[5] Indexierung beginnt mit 0.

3.7 Beispiel 7

Der Flächeninhalt des großen Rechtecks: $\boxed{10000\ [\mathrm{m}\cdot\mathrm{h}]}$

Der Gesamtflächeninhalt aller platzierten Rechtecke: $\boxed{9978\ [\mathrm{m}\cdot\mathrm{h}]}$

Der Gesamtflächeninhalt aller Rechtecke: $\boxed{10000\ [\mathrm{m}\cdot\mathrm{h}]}$

3.8 Beispiel 8

Besonderheit: Die Länge N und der Zeitraum von B bis E des Flohmarkts sind verschieden von der Aufgabenstellung.

Der Flächeninhalt des großen Rechtecks: $\boxed{4776\ [\mathrm{m}\cdot\mathrm{h}]}$

Der Gesamtflächeninhalt aller platzierten Rechtecke: $\boxed{4427\ [\mathrm{m}\cdot\mathrm{h}]}$

Der Gesamtflächeninhalt aller Rechtecke: $\boxed{17228\ [\mathrm{m}\cdot\mathrm{h}]}$

3.9 Beispiel 9

Besonderheit: Der Flohmarkt dauert zwei Tage: Jeweils von 8:00 bis 18:00. Der Zeitraum des Flohmarkts ist dementsprechend unterborchen.

Der Flächeninhalt des großen Rechtecks: $\boxed{7600\ [\mathrm{m}\cdot\mathrm{h}]}$

Der Gesamtflächeninhalt aller platzierten Rechtecke: $\boxed{7591\ [\mathrm{m}\cdot\mathrm{h}]}$

Der Gesamtflächeninhalt aller Rechtecke: $\boxed{10000\ [\mathrm{m}\cdot\mathrm{h}]}$

3.10 Beispiel 10

Besonderheit: Das Zeitformat ist in Minuten.

Der Flächeninhalt des großen Rechtecks: $\boxed{95274\ [\mathrm{m}\cdot\mathrm{min}]}$

Der Gesamtflächeninhalt aller platzierten Rechtecke: $\boxed{61796\ [\mathrm{m}\cdot\mathrm{h}]}$

Der Gesamtflächeninhalt aller Rechtecke: $\boxed{68611\ [\mathrm{m}\cdot\mathrm{h}]}$

4 Quellcode

```
//der Lauf des Programms
void Solver::run(){
  //die Rechtecke werden auf die Streifen verteilt,
  // durch die sie verlaufen
  distributeToStripes();

  //jeder Streifen wird verarbeitet, indem der erste
  //  Greedy-Algorithmus angewendet wird
  for (int i = 0; i < M; i++)
    processStripe(i);

  //Indikator dafuer, ob alle Rechtecke platziert wurden
  bool all = true;
  for (auto r: rectangles)
    if (r->x1 == -1)
      all = false;

  //der Gesamtflaecheninhalt der platzierten Rechtecke wird berechnet
  int area = calculateAreaUsed();
  if (all || getM()*getN() == area)
    return;

  //wenn nicht alle Rechtecke platziert wurden
  //  oder das grosse Rechteck nicht vollstaendig mit Rechtecken
  //  bedeckt ist, laesst man das heuristische Verbesserungsverfahren laufen
  runOptimization();
}

//der Lauf des heuristischen Verbesserungsverfahrens
void Solver::runOptimization(){
  //der Gesamtflaecheninhalt aller platzierten Rechtecke
  int area;

  //der Indikator dafuer, ob eine Platzierung angenommen wurde
  bool result = true;

  //die Luecke
  Hole hole;

  //das Rechteck mit den Kooridnaten der Luecke, in die
  //  es eingefuegt werden soll
  pair<Rec*, iPair> rep;

  //die Iteratoren zur Liste unusedRectangles und zur
  //  Liste all_holes
  int itR = 0, itH = 0;
  do {
    //falls die vorherige Platzierung vom Algorithmus
    //  angenommen wurde
    if (result){
      //der Gesamtflaecheninhalt aller platzierten Rechteck
      //  wird bestimmt
      area = calculateAreaUsed();

      //alle nicht gelegten Rechtecke werden bestimmt
      determineUnused();
      //alle Luecken werden bestimmt
      findHoles();

      //eine Luecke wird gewaehlt
      hole = findNextHole(itH = 0);
      //ein Rechteck wird anhand der Luecke gewaehlt
      rep = findReplacement(hole, itR = 0);

      //wenn es Probleme mit dem Rechteck oder mit
      //  der Luecke gibt
      while (rep.second.second < 0){
        //es gibt keine Luecken mehr
        if (rep.second.second == -1)
          return;

```

```
        //itR ist ans Ande der Liste unusedRectangles gelangt
        if (rep.second.second == -2){
          hole = findNextHole(++itH);
          rep = findReplacement(hole, itR = 0);
        }

        //das Rechteck kann nicht in diese Luecke
        //  eingefuegt werden
        if (rep.second.second == -3)
          rep = findReplacement(hole, ++itR);
      }
      //das Rechteck wird in die gewaehlte Luecke platziert,
      //  Kollisionen werden behoben, neue Rechtecke werden
      //  eingefuegt, eine Platzierung wird angenommen oder abgelehnt
      result = removeCollisions(area, rep);
    }
    else {
      //ein Rechteck wird anhand der Luecke gewaehlt
      rep = findReplacement(hole, ++itR);
      //wenn es Probleme mit dem Rechteck oder mit
      //  der Luecke gibt
      while (rep.second.second < 0){
        //es gibt keine Luecken mehr
        if (rep.second.second == -1)
          return;

        //itR ist ans Ande der Liste unusedRectangles gelangt
        if (rep.second.second == -2){
          hole = findNextHole(++itH);
          rep = findReplacement(hole, itR = 0);
        }

        //das Rechteck kann nicht in diese Luecke
        //  eingefuegt werden
        if (rep.second.second == -3)
          rep = findReplacement(hole, ++itR);
      }
      //das Rechteck wird in die gewaehlte Luecke platziert,
      //  Kollisionen werden behoben, neue Rechtecke werden
      //  eingefuegt, eine Platzierung wird angenommen oder abgelehnt
      result = removeCollisions(area, rep);
    }

  } while(rep.second.second > -1);

  return;
}

//diese Methode verteilt jedes Rechteck auf die Streifen,
//  ueber die es verlaeuft
void Solver::distributeToStripes(){
  //die Listen mit den Listen S_j
  rectangles_stripes = vector<vector<Rec*>> (M);

  //jedes Rechteck wird zu jeder Liste rectangles_stripes
  //  eingefuegt, zu der es gehoert
  for (auto r: rectangles) {
    for (int i = r->getBegin(); i < r->getEnd(); i++)
      rectangles_stripes[i].pb(r);
  }

  //jede der Lsite wird sortiert
  for (int i = 0; i < M; i++)
    sort(rectangles_stripes[i].begin(), rectangles_stripes[i].end(), greaterEnd);
}

//diese Methode findet alle nicht platzierten Rechtecke in einem
//  Streifen p; p = -1 steht fuer alle Streifen
void Solver::determineUnused(int p){
  if (p == -1){
    for (int i = 0; i < M; i++)
      unusedRectangles[i].clear();
    for (int i = 0; i < M; i++)
```

```
      determineUnused(i);

    //jede der Liste wird sortiert
    for (int i = 0; i < M; i++)
      sort(unusedRectangles[i].begin(), unusedRectangles[i].end(), smallerSize);
  }
  else {
    //in jedem Streifen wird jedes Rechteck
    //  geprueft, ob es nicht platziert wurde
    for (auto r: rectangles_stripes[p])
      if (r->x1 == -1)
        unusedRectangles[p].pb(r);
  }
}

//diese Methode findet alle Luecken im Streifen p;
//  p = -1 steht fuer alle Streifen
void Solver::findHoles(int p){
  if (p == -1){
    //alle urspruenglichen Luecken werden entfernt
    for (int i = 0; i < M; i++)
      holes[i].clear();
    all_holes.clear();

    for (int i = 0; i < M; i++)
      findHoles(i);

    //die Luecken werden sortiert
    sort(all_holes.begin(), all_holes.end(), greaterHolesSize);
  }
  else {
    //es wird geprueft, ob es Luecken zwischen
    //zwei nebeneinander stehenden Rechtecken gibt

    //1. Rechteck
    auto it = placed[p].begin();
    for (; it != placed[p].end(); it++){
      //2. Rechteck
      auto it2 = it;
      it2++;

      //Gibt es eine Luecke zwischen der Seite des grossen Rechtecks
      //  und dem ersten Rechteck im Streifen?
      if (it == placed[p].begin() && (*it)->x1 > 0)
        holes[p].emplace_back(0, (*it)->x1, p);

      //Gibt es eine Luecke zwischen der Seite des grossen Rechtecks
      //  und dem letzten Rechteck im Streifen?
      if (it2 == placed[p].end()){
        if ((*it)->x2 < N)
          holes[p].emplace_back((*it)->x2, N, p);
      }
      //Gibt es eine Luecke zwischen den Rechtecken it und it2?
      else if ((*it)->x2 < (*it2)->x1)
        holes[p].emplace_back((*it)->x2, (*it2)->x1, p);
    }
    //alle Luecken werden in all_holes hinzugefuegt
    for (auto h: holes[p])
      all_holes.pb(h);
  }
}

//diese Methode findet die naechste leere Luecke im Streifen p
//  fuer ein Rechteck r
int Solver::findNearestHole(Rec* r, int p){
  auto it = placed[p].begin();

  //falls es in einem Streifen p noch keine Rechtecke gibt,
  //  kann r am Anfang platziert werden
  if (placed[p].empty())
    return 0;

  //falls es eine genug grosse Luecke am Anfang des Streifens gibt,
```

```
  //  kann r dort platziert werden
  if ((*it)->x1 >= r->getSize())
    return 0;

  //es wird ueber die Rechtecke im Streifen p iteriert
  for (; it != placed[p].end(); it++){
    auto it2 = it;
    it2++;

    //wenn it das letzte Rechteck im Streifen ist
    if (it2 == placed[p].end()) {
      //es wird gepruegt, ob es eine genug Luecke zur Wand
      //  des grossen Rechtecks gibt
      if (N - (*it)->x2 >= r->getSize())
        return (*it)->x2;
      //falls es unmoeglich ist, das Rechteck zu platzieren,
      //  wird -1 ausgegeben
      else
        return -1;
    }

    //falls es eine genug grosse Luecke zwischen zwei Rechtecken
    //  im Streifen gibt
    if ((*it2)->x1 - (*it)->x2 >= r->getSize()){
      return (*it)->x2;
    }
  }

  //falls es unmoeglich ist, das Rechteck zu platzieren,
  //  wird -1 ausgegeben
  return -1;
}

//diese Methode verarbeitet den Streifen p beim Lauf
//  des Greedy-Algorithmus am Anfang
void Solver::processStripe(int p){
  //es wird durch die Rechtecke im Streifen p iteriert
  for(auto r: rectangles_stripes[p]){
    //falls das Rechteck bereits platziert wurde oder
    //  nicht mit dem Streifen beginnt,
    //  wird zum naechten Rechteck uebergegangen
    if (r->x1 > -1 || r->getBegin() < p)
      continue;

    //falls es noch keine Rechtecke im Streifen gibt,
    //  wird das Rechteck ans Anfang platziert
    if (placed[p].empty())
      r->x1 = 0;
    else {
      //es wird die naechste Luecke im Streifen p fuer
      //  dieses Rechteck gesucht
      int curr = findNearestHole(r, p);

      //falls so eine Luecke gefunden wurde, wird
      //  die x1 Koordinate des Rechtecks r gesetzt
      if (curr > -1)
        r->x1 = curr;
      //falls so eine Luecke nicht gefunden wurde,
      //  wird zum naechsten Rechteck uebergegangen
      else
        continue;
    }

    //die Koordinate x2 zum Rechteck r wird gesetzt
    r->x2 = r->x1 + r->getSize();

    //in alle Streifen, zu denen r gehoert, wird
    //  r an der richtigen Stelle eingefuegt
    for (int i = r->getBegin(); i < r->getEnd(); i++)
      placed[i].insert(r);
  }
}
```

```
//diese Methode verarbeitet den Streifen p beim Lauf
//  des Verbesserungsalgorithmus
vector<Rec*> Solver::processStripeReturn(int p){
  //ein vector mit allen neu eingefuegten Rechtecken
  vector<Rec*> added;

  //es wird durch die Rechtecke im Streifen p iteriert
  for(auto r: rectangles_stripes[p]){
    //falls das Rechteck bereits platziert wurde oder
    //  nicht mit dem Streifen beginnt,
    //  wird zum naechten Rechteck uebergegangen
    if (r->x1 > -1 || r->getBegin() < p)
      continue;

    //die naechste Luecke wird im Streifen p fuer
    //  dieses Rechteck gesucht
    int curr = findNearestHole(r, p);

    //das iterierte Rechteck wird kopiert
    Rec rr(r->getSize(), r->getBegin(), r->getEnd());
    rr.x1 = curr;
    rr.x2 = curr + rr.getSize();
    Rec *rr_p = &rr;

    //falls so eine Luecke gefunden wurde, wird geprueft, ob es genug
    //  Platz in anderen Streifen gibt
    if (curr > -1){
      for (int i = r->getBegin()+1; i < r->getEnd(); i++){
        //die potenzielle Stelle fuer das Rechteck rr wird im Streifen
        //  gefunden
        auto it = upper_bound(placed[i].begin(), placed[i].end(), rr_p, smallerx2);

        //die Koordinate x1 des Rechtecks unter dem Iterator it
        int curr_x1;
        //die Koordinate x2 des davor stehenden Rechtecks
        int prev_x2;

        //falls it sich am Ende der Liste befindet,
        //  wird curr_x1 zu N gesetzt
        if (it != placed[i].end())
          curr_x1 = (*it)->x1;
        else
          curr_x1 = N;

        //falls it sich am Anfang der Liste befindet,
        //  wird prev_x2 zu 0 gesetzt
        if (it != placed[i].begin())
          prev_x2 = (*(--it))->x2;
        else
          prev_x2 = 0;

        //es wird geprueft, ob das Rechteck platziert
        //werden kann
        if (curr_x1 - prev_x2 < rr.getSize() ||
          curr_x1 < curr + rr.getSize()
          || prev_x2 > rr.x1) {
          goto next;
        }
      }
      //die Koordinate x1 wird dem Rechteck r gesetzt
      r->x1 = curr;
    }
    else {
      next:
      continue;
    }

    //das Rechteck wird in alle Streifen eingefuegt,
    //  zu denen es gehoert
    r->x2 = r->x1 + r->getSize();
    for (int i = r->getBegin(); i < r->getEnd(); i++)
      placed[i].insert(r);
    added.pb(r);
```

```
  }
  return added;
}

//diese Methode findet die naechste groesste Luecke im ganzen
//  grossen Rechtek; itH ist ein Iterator fuer die Liste all_holes
Hole Solver::findNextHole(int itH){
  for (; itH < int(all_holes.size()); itH++)
    //es wird geprueft, ob die Luecke nicht in einem Streifen
    //  liegt, in dem alle Rechtecke platziert sind
    if (!unusedRectangles[all_holes[itH].stripe].empty()){
      return all_holes[itH];
    }


  //falls es keine Luecken mehr gibt
  Hole h(-1, -1);
  return h;
}

//diese Methode findet ein noch nicht platziertes Rechteck
// fuer einer Luecke hole; itR ist ein Iterator fuer unusedRectangles
pair<Rec*, iPair> Solver::findReplacement(Hole hole, int itR){
  //der Streifen, zu dem die Luecke gehoert
  int stripe = hole.stripe;

  Rec *rep;
  Rec a(-1,-1,-1);
  Rec *a_p = &a;

  //falls es keine Luecken mehr gibt
  if (stripe == -1)
    return {a_p, {-1, -1}};

  //falls es keine Rechtecke mehr gibt,
  //weil der Iterator da Ende der Liste erreicht
  if (unusedRectangles[stripe].empty() ||
    itR > int(unusedRectangles[stripe].size() -1)){
    return {a_p, {-2, -2}};
  }

  //das Rechteck wird aus der Lsite unusedRectangles abgelesen
  rep = unusedRectangles[stripe][itR];

  //falls das Rechteck ueber die Grenzen des grossen Rechtecks
  //  hinausreichen wuerde
  if (rep->getSize() > hole.x2)
    return {a_p, {-3, -3}};

  //zurueckgegeben wird das Rechteck und die Koordinaten der Luecke
  return make_pair(rep, make_pair(hole.x1, hole.x2));
}

//die Methode versucht im Verbesserungsverfahren, neue Rechtecke
//  ins grosse Rechteck zu legen
vector<Rec*> Solver::addNew(Rec* rep){
  //ein vector mit allen neu eingefuegten Rechtecke
  vector<Rec*> added;

  //das Rechteck wird in alle Streifen eingefuegt
  for (int i = rep->getBegin(); i < rep->getEnd(); i++)
    placed[i].insert(rep);
  added.pb(rep);

  //alle Streifen werden verarbeitet, um potenziell neue
  //  Rechtecke einzufuegen
  for (int i = 0; i < M; i++){
    auto v = processStripeReturn(i);
    added.insert(added.end(), v.begin(), v.end());
  }

  return added;
}
```

```cpp

//diese Methode entfernt alle Rechtecke, die mit einem im Verbesserungsverfahren
//  gelegten Rechteck kollidieren und aktualisiert die Platzierung,
//  falls es sich ein besserer Gesamtflaecheninhalt ergibt
bool Solver::removeCollisions(int area, pair<Rec*, iPair> rep){
  //alle Streifen mit allen platzierten Rechtecken werden kopiert
  auto placedOld = placed;

  //alle kollidierenden Rechtecke
  vector<pair<set<Rec*, setRecSort>::iterator, Rec>> collisions;

  //alle Rechtecke, die man entfernen muss
  vector<pair<int, set<Rec*, setRecSort>::iterator>> to_remove;
  auto [rr, hole] = rep;

  //die Koordinaten des einzufuegenden Recktecks werden
  //  festgelegt
  rr->x2 = hole.second;
  rr->x1 = rr->x2 - rr->getSize();

  Rec rep_c = *rr;
  rep_c.x2 = rep_c.x1;
  Rec *rr_p = &rep_c;

  //alle Kollisionen werden gesucht
  for (int i = rr->getBegin(); i < rr->getEnd(); i++){
    //die Stelle in jedem Streifn fuer die Platzierung wird gesucht
    auto it = upper_bound(placedOld[i].begin(), placedOld[i].end(), rr_p, smallerx2);

    //alle Kollisionen werden in collisions gespeichert
    for (; it != placedOld[i].end() && ((*it)->x1 <= rr->x2); it++){
      Rec &r_copy = *(*it);
      collisions.pb({it, r_copy});
    }
  }

  //die Koordinaten aller kollidierenden Rechtecke werden auf -1 gesetzt
  for (auto [it, r_copy]: collisions){
    (*it)->x1 = -1;
    (*it)->x2 = -1;
  }

  //alle Rechtecke mit Koordinaten -1 werden aus der Platzierung entfernt
  for (int i = 0; i < M; i++){
    for (auto it = placed[i].begin(); it != placed[i].end(); it++)
      if ((*it)->x1 == -1)
        to_remove.pb({i, it});
  }
  for (auto [stripe, it]: to_remove)
    placed[stripe].erase(it);

  //neue Rechtecke werden in die Platzierung eingefuegt
  vector<Rec*> added = addNew(rr);

  //der Gesamtflaecheninhalt aller neu platzierten Rechtecke
  //  wird berechnet
  int new_area = calculateAreaUsed();
  double diff = new_area - area;

  //die neue Platzierung wird angenommen
  if (diff > 0) {
    return true;
  }
  //die neue Platzierung wird abgelehnt
  else {
    //alle neu eingefuegten Rechtecke werden entfernt
    for (auto r: added){
      r->x1 = -1;
      r->x2 = -1;
    }

    //die Koordinaten aller urspruenglich kollidierenden
    //  Rechtecke werden zurueckgesetzt
```

```
    for (auto [it, r_copy]: collisions){
      (*it)->x1 = r_copy.x1;
      (*it)->x2 = r_copy.x2;
    }

    //die Platzierung wird zurueckgesetzt
    placed = placedOld;
    return false;
  }
}


//diese Methode gibt den Gesamtflaecheninhalt aller Rechtecke,
//  die platziert wurden
int Solver::calculateAreaUsed(){
  int sum = 0;
  for (auto r: rectangles)
    if (r->x1 > -1)
      sum += r->getArea();
  return sum;
}
```