$$\operatorname{Var}(x,y) = \sum_{i=0}^{n-1} (I_{i,1} + I_{i,2}\cos x + I_{i,3}\cos y)^2 + (I_{i,2}\sin x + I_{i,3}\sin y)^2 - \tag{1}$$

$$\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} (I_{i,1} + I_{i,2}\cos x + I_{i,3}\cos y)^2 + (I_{i,2}\sin x + I_{i,3}\sin y)^2)^2 \tag{2}$$

Es sei $\phi_i(x,y) = (I_{i,1} + I_{i,2}\cos x + I_{i,3}\cos y)^2 + (I_{i,2}\sin x + I_{i,3}\sin y)^2$. Dann folgt

$$\operatorname{Var}(x,y) = \sum_{i=0}^{n-1}\left(\phi_i(x,y) - \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}\phi_i(x,y)\right)^2 \tag{3}$$

Weiter folgt für den inneren Teil der Summe:

$$\partial_j \operatorname{Var}(x,y)_i = \partial_j\phi_i(x,y) - \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}\partial_j\phi_i(x,y) \tag{4}$$

Wegen der Linearität der Ableitung, lässt sich der Diferentialoperator in die Summe hereinziehen, daher folgt mit der Kettenregel

$$\partial_j \operatorname{Var}(x,y) = \sum_{i=0}^{n-1} 2\left(\partial_j\phi_i(x,y) - \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}\partial_j\phi_i(x,y)\right)\left(\phi_i(x,y) - \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}\phi_i(x,y)\right) \tag{5}$$

Weiter folgt

$$\partial_x\phi_i(x,y) = I_{i,2}^2\sin^2 x + I_{i,2}\cos^2 x = I_{i,2}^2 \tag{6}$$

Analog folgt

$$\partial_y\phi_i(x,y) = I_{i,3}^2\sin^2 x + I_{i,2}\cos^2 x = I_{i,3}^2 = I_{i,3}^2 \tag{7}$$

Alles einsetzen ergibt damit

$$\nabla \operatorname{Var}(x,y) = \begin{pmatrix} \sum_{i=0}^{n-1} 2\left(I_{i,2} - \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} I_{i,2}\right)\left(\phi_i(x,y) - \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}\phi_i(x,y)\right) \\ \sum_{i=0}^{n-1} 2\left(I_{i,3} - \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} I_{i,3}\right)\left(\phi_i(x,y) - \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}\phi_i(x,y)\right) \end{pmatrix} \tag{8}$$

mit $k_{x,i} = 2\left(I_{i,2} - \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} I_{i,2}\right)$ und $k_{y,i} = 2\left(I_{i,3} - \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} I_{i,3}\right)$ folgt schließlich

$$\nabla \operatorname{Var}(x,y) = \begin{pmatrix} \sum_{i=0}^{n-1} k_{x,i}\left(\phi_i(x,y) - \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}\phi_i(x,y)\right) \\ \sum_{i=0}^{n-1} k_{y,i}\left(\phi_i(x,y) - \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}\phi_i(x,y)\right) \end{pmatrix} \tag{9}$$

Schließlich lässt sich die Summe herausziehen, sodass folgt

$$\nabla \operatorname{Var}(x,y) = \sum_{i=0}^{n-1}\begin{pmatrix} k_{x,i}\left(\phi_i(x,y) - \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}\phi_i(x,y)\right) \\ k_{y,i}\left(\phi_i(x,y) - \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}\phi_i(x,y)\right) \end{pmatrix} \tag{10}$$