Transformee Fourier

Herbert Groscot

2 juillet 2018

Disclaimer

Ce sont des notes de cours imparfaites qui n'ont absolument rien d'officiel. Le professeur n'a eu strictement aucune implication dans la création de ce fichier. Il n'engage personne et en particulier ni le professeur ni les étudiants qui l'ont écrit.

C'est juste des élèves quelconques qui font de leur mieux pour suivre en cours et vous partager leurs notes pour vous aider dans vos révisions.

Sur ce, bon travail :).

Table des matières

1 Historique

Dans la musique, on peut retrouver des gammes 'non-dissonantes'.
Les instruments etaient accordes a l'oreille avec une note de base.
Cela creait des dissonnances.

2 Introduction

Peut on obtenir un signal elementaire avec des signaux elementaire ?

On va s'interesser aux conditions qui font qu'un signal est compose de signaux elementaires.

$$f(t)$$
$$f('periode')2\pi$$

2.1 Definition

$$e^{\alpha z}(derivee) \rightarrow \alpha e^{\alpha z}$$
$$e^{\alpha z}(primitive) \rightarrow \frac{1}{\alpha} * e^{\alpha z}$$

$$\begin{aligned}
g(t) &= \sum_{k \in Z} e_n e^{int} \\
\int_0^{2\pi} g(t) e^{-int} dt &= \int_0^{2x} \sum_{m \in Z} e_m e^{imt} e^{imt} dt \\
&= \sum_{m \in Z} c_m \int_0^{2\pi} e^{i(m-n)t} dt \\
&= c_n \int_0^{2\pi} + \sum_{m \neq n} e^{i(m-n)t} dt \\
&= 2\pi c_n + 0
\end{aligned}$$

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g(t) e^{-int} dt$$

2.2 Definition 2

Une fonction periodique est une somme de fonction elementaires.

2.3 Definition 3

Prenons f de periode 2π
La serie de Fourier de f est :

$$b_0 + \sum_{n=1}^{\inf} b_n \cos(nt) + \sum_{n=1}^{\inf} a_n \sin(nt)$$
$$\sum_{n \in Z} c_n e^{int}$$

$$\begin{aligned} b_0 &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t)dt \\ b_n &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t)\cos(nt)dt \\ a_n &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t)\sin(nt)dt \\ c_n &= \frac{1}{2\pi} f(t) e^{-int} dt \end{aligned}$$

$n > 0$

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{b_n + i a_n}{2} \\ c_{-n} &= \frac{b_n - i a_n}{2} \end{aligned}$$

$n = 0$

$$c_0 = b_0$$

f a valeur nulle.
a_n et b_n reels

f est paire
$\forall a_n = 0$
f est impaire
$\forall b_n = 0$

Ensemble de fonctions periodiques :
- continue
- continent derivable
- Integrale
- "Pas trop de discontinuite"
- ...

Un ensemble E choisi.
Espace vectoriel.
f et $g \in$ E

$\alpha_1\beta \in C$
$\alpha f + \beta g \in E$

$$< f, g > = \frac{1}{2\pi} \int f(t)\overline{g}(t)dt$$

$$\begin{aligned} < f, g > &= \frac{1}{2\pi} \int f\overline{f}(t)dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int |f|^2 dt \end{aligned}$$

ressemble a $||f||^2$

$$< e^{int}, e^{int} > = 0$$

$n \neq m$

$$< e^{int}, e^{imt} > = 1$$

$$\sum_{n \in Z} < f, e^{in} > e^{int}$$

En dimension 3,e_1, e_2, e_3etant des espaces vectoriels, on peut exprimer $u(x, y, z)$, tq :
$u = (u.e_1)e_1 + (u.e_2)e_2 + (u.e_3)e_3$

3 Convergence

3.1 Theoreme

f classe C^2
Convergence
$f(t) = \sum c_n e^{int}$

Fonction "reguliere par morceau"
- Un nombre fini de discontinuites
- nombre fini d'extrema

Si f continu en t ; $f(t) = \sum c_n e^{int}$
Si f discontinu en t : $\sum c_n e^{int} = (\frac{1}{2}(f(t-) + f(t+)))$

3.2 Phenomene de Gibbs.

3.2.1 Integration et derivation

$$\begin{aligned}\sum_{a}^{b} e^{int}dt &= (b-a)c_0 + \sum_{n\neq 0} C_n \int_a^b e^{int}dt \\ &= (b-a)c_0 + \sum_{n\neq 0} \frac{C_n}{in}(e^{inb} - e^{ina})\end{aligned}$$

Pour la derivation :
Hypothese f continu derivable
f' regulier par morceaux

$$\begin{aligned}\sum inc_n e^{int} &= f'(t)...continue \\ &= \frac{1}{2}(f'(t+) + f'(t-))...discontinue\end{aligned}$$

3.2.2 Exemple

$$\begin{aligned}f(t) = 1 sit \in] -a, +a[\\ 0 ailleurs sur [-\pi, \pi] \\ ... \\ f(t) = \frac{a}{\pi} + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\inf} \frac{\sin(na)}{n} cos(nt)\end{aligned}$$

3.2.3 Cas particulier

$$f(t) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \sum_{R=0}^{\inf} \frac{(-1)^k}{2k+1} \cos{(2k+1)t}$$

$$f(t) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \sum_{k=0}^{\inf} \frac{1}{2k=1} \sin((2k+1)t)$$

4 Formulaire

4.1 Identite de Parseval

http://www.bibmath.net/dico/index.php?action=affiche&quoi=./p/parseval.html

4.2 Densite Gausienne

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\frac{x^2}{\sigma^2}}$$

$$F(f)(u) = e^{-\frac{1}{2}\sigma^2 u^2}$$

4.3 Translation

$$F(f(x-a))(u) = e^{iau}F(f)(u)$$

4.4 Modulation

$$F(e^{i\omega_0 x}f(u)) = F(u-\omega_0)$$

4.5 Changement d'echelle

$$F(f(ux)) = \frac{1}{|a|}F(\frac{u}{a})$$

4.6 Conjugaison

$$F(\overline{f}(x)) = \overline{F(f)}(-u)$$

4.7 Derivation

$$F(f)(u) = \int f(x)e^{-iux}dx$$
$$F(f')(u) = iuF(f)(u)$$

4.8 Theoreme de Parseval

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |F(u)|^2 du$$
$$\int_{-\infty}^{\infty} F(u)\overline{G}(u)du$$

4.9 Convolution

$$f * g(x) = \int_{x\in R} f(u)g(x-a)du$$
$$F(f*g)(u) = F(f)(u).F(g)(u)$$

De plus si $f, g \in L^2$

$$F(fg) = F(f) * F(g)$$

4.10 fonction "porte"

$$F(\pi_a)(u) = 2\frac{\sin(au)}{u}$$

4.11 Distribution de Dirac

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi_0(t)dt = 1$$

δ_0 : Distribution de Dirac

$$F(\delta_0)(u) = \int e^{iux}\delta_0(x)dx = 1$$
$$\int f(x)\delta_a(x)dx = f(a)$$
$$F(\delta_a)(u) = e^{-iau}$$

5 Transformée de Fourier

5.1 Introduction

Définition :

$$\forall f \in L^1, \quad \mathcal{F}(f)(u) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{e}^{-iux}\,\mathrm{d}t$$

Attention à la normalisation !

Condition d'existence :
Si $f \in L^1(\mathbb{R})$, alors $\mathcal{F}(f)$ est
— Continue
— Croissante
— $\lim_{u\to\infty} \mathcal{F}(f)(u) = 0$
Si $f \in L^2(\mathbb{R})$, c'est plus compliqué.

5.2 Densité Gaussienne

Avec $\sigma > 0$, on a :

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\frac{x^2}{\sigma^2}}$$
$$\mathcal{F}(f)(u) = e^{-\frac{1}{2}\sigma^2u^2}$$

5.3 Linéarité

$$\mathcal{F}(\lambda f + \mu g) = \lambda\mathcal{F}(f) + \mu\mathcal{F}(g)$$

5.4 Translation

$$F(f(x-a)(u) = e^{iau}\mathcal{F}(f)(u)$$

5.5 Modulation

$$\mathcal{F}(e^{i\omega_0 x} f(u)) = \mathcal{F}(u - \omega_0)$$

5.6 Conjugaison

$$\mathcal{F}(\overline{f}(x)) = \overline{\mathcal{F}(f)}(-u)$$

5.7 Changement d'échelle

$$\mathcal{F}(f(ax)) = \frac{1}{|a|}\mathcal{F}\left(\frac{u}{a}\right)$$

5.8 Dérivation

$$\mathcal{F}(f')(u) = iu\mathcal{F}(f)(u)$$

On peut dériver en faisant une multiplication !

5.9 Inversion

On a f prériodique et :

$$f(t) = \sum c_n e^{int}$$

Et

$$c_n = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2x} f(t)e^{-int}\mathrm{d}t$$

On a donc :

$$\mathcal{F}(u) = \int f(t)e^{-iut}\mathrm{d}t$$
$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int \mathcal{F}(u)e^{-iux}\mathrm{d}t$$

5.10 Convolution

Si on a :

$$f \times g(x) = \int_{x\in\mathbb{R}} f(u)g(x-a)\mathrm{d}u$$

Alors :

$$F(f \cdot g)(u) = F(f)(u) \cdot F(g)(u)$$

De plus si $f, g \in L^2$

$$F(fg) = F(f) * F(g)$$

5.11 Théorème de Parseval

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |F(u)|^2 \mathrm{d}u$$
$$\int_{-\infty}^{\infty} F(u)\overline{G}(u) du$$

6 Exemples

6.1 Fonction "porte"

$$F(\mathit{\Pi}_a)(u) = 2\frac{\sin(au)}{u}$$

On notera que

$$\int_{\infty}^{+\infty} \mathit{\Pi}_a^2 dx = 2a$$
$$\frac{1}{2\pi} \int_{\infty}^{+\infty} 4\frac{\sin(au)^2}{u^2} du = 2a$$
$$\int_{\infty}^{+\infty} \left(\frac{\sin(u)}{u^2}\right)^2 du = \frac{2}{4} \times 2\pi = \pi$$

6.2 Distribution de Dirac

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi_\sigma(t) dt = 1$$

Où σ petit.
δ_0 : Distribution de Dirac

$$F(\delta_0)(u) = \int e^{iux} \delta_0(x) dx = 1$$
$$\int f(x)\delta_a(x) dx = f(a)$$
$$F(\delta_a)(u) = e^{-iau}$$

6.3 Fonction de Lorentz

On a

$$f(x) = \frac{a}{\pi} \frac{1}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a\pi} \frac{1}{1 + \left(\frac{x}{a}\right)^2}$$

Donc :

$$\mathcal{F}(f)(u) = e^{-a|u|}$$