

# 四旋翼飞行器的动力学建模及 PID 控制

李 俊, 李运堂

(中国计量学院 机电工程学院, 浙江 杭州 310018)

**摘 要:** 为了解决四旋翼飞行器的飞行控制问题, 对四旋翼飞行器进行了动力学建模, 并在动力学建模的基础上设计了 PID 控制器. 通过 Matlab/Simulink 仿真和飞行试验对所设计的 PID 控制器的有效性进行了验证, 仿真结果表明: 在所设定的 PID 参数下, 控制器可以有效地完成四旋翼飞行器的自稳定控制. 飞行试验结果表明: PID 控制器可以有效地校正由于杂乱气流等扰动造成飞行角偏移. 该成果对四旋翼飞行器的自稳定控制具有一定的参考价值和指导意义.

**关键词:** 四旋翼飞行器; 数学模型; PID 控制; Matlab; 动力学分析; 自稳定控制; 仿真; 飞行试验

中图分类号: TP 13

文献标志码: A

## Modeling and PID control for a quadrotor

LI Jun, LI Yuntang

(College of Mechanical and Electrical Engineering, China Jiliang University, Hangzhou 310018, China)

**Abstract:** In order to solve the flying control problem associated with a quadrotor, a dynamic model on quadrotor was developed in this study. Based on the model developed, a PID controller was designed. Also, the effectiveness of the PID controller was tested by Matlab/Simulink simulation and flying test. The simulation result demonstrates that the PID controller is able to robustly stabilize the quadrotor helicopter with given PID parameters. The flying test shows that the PID controller can effectively adjust the deviation of flying angle caused by random airflow. The outcome from this study provides a significant reference for a quadrotor's self-stability control.

**Keywords:** quadrotor; modeling; PID control; Matlab; dynamic analysis; self-stability control; Simulink; flying test

## 0 引 言

近年来, 四旋翼飞行器逐渐成为航空学术研究中新的前沿和热点. 四旋翼飞行器是一种能实现垂直起降的非共轴式多旋翼飞行器<sup>[1]</sup>, 可以只通过调节蝶形分布的四个旋翼的转速, 实现对四旋翼飞行器飞行姿态的控制. 由于不需要尾翼, 四旋翼飞行器结构更加紧凑, 四个旋翼的提升力比单旋翼更加均匀, 因而飞行姿态更加稳定. 另外, 四旋翼飞行器还具有起飞要求低、可悬停等特点<sup>[2]</sup>.

飞行控制是四旋翼飞行器控制中的关键技术. 澳大利亚卧龙岗大学的 Mckerrow 对四旋翼飞行器进行了精确建模. 美国斯坦福大学的 Gabe Hoffman 等人研发出了基于非线性控制律的飞行控制器, 国防科技大学王俊生等设计了基于 FSMC 的飞行控制方法<sup>[3-8]</sup>.

目前研究多集中在非线性控制领域, 由于非线性控制对模型准确性有较强的依赖, 在模型误差存在的条件下, PID 控制更加实用. 本文在四旋翼飞行器动力学建模的基础上设计了 PID 控制器.

## 1 动力学模型的建立

为了获得四旋翼飞行器的数学模型, 首先建立两个基本坐标系: 惯性坐标系  $E(OXYZ)$  和飞行器坐标系  $B(oxyz)$ , 见图 1.

图 1 中, 分别定义欧拉角如下:

偏航角  $\psi$ :  $Ox$  在  $OXY$  平面的投影与  $X$  轴夹角;

俯仰角  $\theta$ :  $Oz$  在  $OXZ$  平面的投影与  $Z$  轴夹角;

翻滚角  $\phi$ :  $Oy$  在  $OYZ$  平面的投影与  $Y$  轴夹角.

飞行器坐标系到惯性坐标系的转换矩阵为

收稿日期: 2011-05-05

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(50905171)

作者简介: 李 俊 (1986-), 男, 山东 泰安人, 硕士研究生, 主要从事四旋翼飞行器方面的研究. 本文编校: 曾繁慧

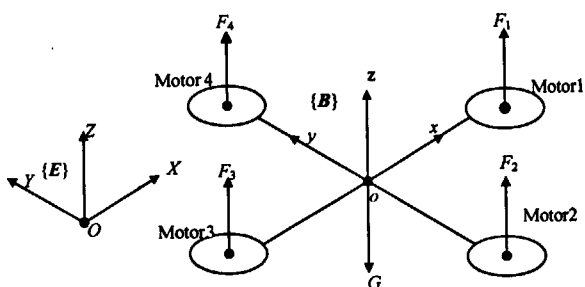


图1 四旋翼飞行器的结构模型

Fig.1 structure model of the quadrotor

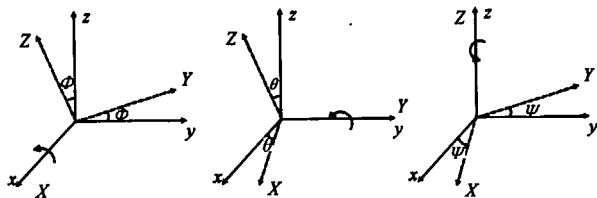


图2 欧拉角

Fig.2 Euler angle

$$R = R_x \cdot R_y \cdot R_z = \begin{bmatrix} \cos\psi\cos\phi & \cos\psi\sin\phi\sin\theta & \cos\psi\sin\phi\cos\theta + \sin\psi\sin\phi \\ \sin\psi\cos\phi & \sin\psi\sin\phi\sin\theta & \sin\psi\sin\phi\cos\theta - \cos\psi\sin\phi \\ -\sin\theta & \cos\theta\sin\phi & \cos\theta\cos\phi \end{bmatrix}$$

为了建立飞行器的动力学模型,不失一般性,对四旋翼飞行器做出如下假设:

- ① 四旋翼飞行器为均匀对称的刚体;
- ② 惯性坐标系 E 的原点与飞行器几何中心及质心位于同一位置;
- ③ 四旋翼飞行器所受阻力和重力不受飞行高度等因素影响,总保持不变;
- ④ 四旋翼飞行器各个方向的拉力与推进器转速的平方成正比例。

定义  $F_x$ 、 $F_y$ 、 $F_z$  为  $F$  在飞行器坐标系三个坐标轴上的分量;  $p$ 、 $q$ 、 $r$  为角速度  $\omega$  在飞行器坐标系三个坐标轴上的分量。

牛顿第二定律和飞行器动力学方程<sup>[9]</sup>可分别表述为向量形式

$$F = m \frac{dV}{dt}, M = \frac{dH}{dt},$$

式中,  $F$  为作用在四旋翼飞行器上的外力和,  $m$  为四旋翼飞行器的质量,  $V$  是飞行器的速度,  $M$  为四旋翼飞行器所受力矩之和,  $H$  为四旋翼飞行器相对于地面坐标系的绝对动量矩。重力  $G$ , 阻力  $D_i$ , 单个旋翼的升力  $T_i$  表示如下

$$G = mg, D_i = \rho C_d \omega_i^2 / 2 = k_d \omega_i^2, T_i = \rho C_l \omega_i^2 / 2 = k_l \omega_i^2.$$

根据受力分析, 牛顿第二定律以及飞行器动力学方程可得到线运动方程, 表述如下

$$\begin{cases} \ddot{x} = (F_x - K_x \dot{x}) / m = (k_l \sum_{i=1}^4 \omega_i^2 (\cos\psi \sin\theta \cos\phi + \sin\psi \sin\phi) - K_x \dot{x}) / m, \\ \ddot{y} = (F_y - K_y \dot{y}) / m = (k_l \sum_{i=1}^4 \omega_i^2 (\sin\psi \sin\phi \cos\phi - \cos\psi \sin\phi) - K_y \dot{y}) / m, \\ \ddot{z} = (F_z - K_z \dot{z} - mg) / m = (k_l \sum_{i=1}^4 \omega_i^2 (\cos\phi \cos\theta) - K_z \dot{z}) / m - g \end{cases}$$

根据欧拉角与飞行器角速度之间的关系可得

$$\begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (p \cos\theta + q \sin\phi \sin\theta + r \cos\phi \sin\theta) / \cos\theta \\ q \cos\phi + r \sin\phi \\ (q \sin\phi + r \cos\phi) / \cos\theta \end{bmatrix}.$$

前文已经假设四旋翼飞行器质量和结构均匀对称, 所以, 其惯性矩阵可定义为对角阵  $I$ 。

通过动量矩的计算, 可得到  $M$  在飞行器坐标系三个轴向分量  $M_x$ 、 $M_y$ 、 $M_z$  的角运动方程

$$\begin{bmatrix} \dot{p} \\ \dot{q} \\ \dot{r} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [M_x + (I_x - I_z)qr] / I_x \\ [M_y + (I_z - I_x)rp] / I_y \\ [M_z + (I_x - I_y)pq] / I_z \end{bmatrix}.$$

定义  $U_1$ 、 $U_2$ 、 $U_3$ 、 $U_4$  为四旋翼飞行器的四个独立控制通道的控制输入量

$$\begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_1 + F_2 + F_3 + F_4 \\ F_4 - F_2 \\ F_3 - F_1 \\ F_2 + F_4 - F_3 - F_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_l \sum_{i=1}^4 \omega_i^2 \\ k_l (\omega_4^2 - \omega_2^2) \\ k_l (\omega_3^2 - \omega_1^2) \\ k_d (\omega_1^2 - \omega_2^2 + \omega_3^2 - \omega_4^2) \end{bmatrix},$$

式中,  $U_1$  为垂直速度控制量,  $U_2$  为翻滚输入控制量,  $U_3$  为俯仰控制量,  $U_4$  为偏航控制量。  $\omega$  为旋翼转速,  $F_i$  为旋翼所受拉力。

结合线运动方程和角运动方程可得到四旋翼飞行器的非线性运动方程: 其中  $l$  为旋翼中心到坐标系原点的距离,  $k_l$  为风阻系数。

在无风及慢速飞行的情况下, 可以先忽略阻力系数进行研究<sup>[10]</sup>, 整理后的数学模型如下

$$\begin{cases} \ddot{x} = (\cos\psi \sin\theta \cos\phi + \sin\psi \sin\phi) U_1 / m, \\ \ddot{y} = (\sin\psi \sin\phi \cos\phi - \cos\psi \sin\phi) U_1 / m, \\ \ddot{z} = (\cos\phi \cos\theta) U_1 / m - g, \end{cases}$$

$$\begin{cases} \ddot{\phi} = [IU_2 + \dot{\theta}\psi(I_y - I_x)] / I_x, \\ \ddot{\theta} = [IU_3 + \dot{\phi}\psi(I_z - I_x)] / I_y, \\ \ddot{\psi} = [U_4 + \dot{\phi}\dot{\theta}(I_x - I_y)] / I_z. \end{cases}$$

## 2 PID 控制研究

上文引入了四个控制量  $u$ , 因而把复杂的非线性耦合模型分解成了四个独立的控制通道, 那么, 整个模型可以看成由线运动和角运动两个独立的子系统构成, 通过上文建模可知, 角运动不受线运动的影响, 而线运动受角运动的影响。

在此基础上使用小扰动法处理, 忽略附加小扰动后, 可以得到四旋翼飞行器的运动方程

$$m\dot{x} = Ax + Bu,$$

$$x = [\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, p, q, r, \theta, \phi, \psi]^T,$$

$$u = [u_1, u_2, u_3, u_4]^T.$$

由于姿态角和角速度之间是准积分关系, 为了简化控制系统, 假设姿态角和角速度之间有简单的

积分关系, 即:  $\dot{\phi} = p, \dot{\theta} = q, \dot{\psi} = r$ .

根据笔者制作的四旋翼飞行器试验机, 并参阅有关文献, 得出四旋翼飞行器参数表 1.

表 1 四旋翼飞行器参数

Tab. 1 parameters of the quadrotor	
参数	数值
$m/\text{kg}$	1.2
$l/\text{m}$	0.2
$k_t \times 10^{-5}/(\text{N}\cdot\text{s}^2)$	3.13
$k_d \times 10^{-7}/(\text{N}\cdot\text{ms}^2)$	7.5
$I_x \times 10^{-3}/(\text{kg}\cdot\text{m}^2)$	2.353
$I_y \times 10^{-3}/(\text{kg}\cdot\text{m}^2)$	2.353
$I_z \times 10^{-2}/(\text{kg}\cdot\text{m}^2)$	5.262

根据系统的传递函数  $G(s) = (sI - A)^{-1}B$  及四旋翼飞行器的参数表(表 1), 可得各控制通道的传递函数(表 2).

表 2 各通道传递函数

Tab. 2 transfer functions of each channel	
通道	传递函数
俯仰通道	$G_1 = \frac{\theta}{u_1} = \frac{56.95s + 4391}{s^3 + 105s^2 + 870s + 4430}$
翻滚通道	$G_2 = \frac{\phi}{u_2} = \frac{65s + 4560}{s^3 + 109s^2 + 1023s + 2935}$
偏航角	$G_3 = \frac{\psi}{u_3} = \frac{105}{s^2 + 413s}$
X 轴向与俯仰角	$G_4 = \frac{x}{\theta} = \frac{\dot{x}}{s\theta} = \frac{-190s + 567}{s(57.95s + 4400)}$
Z 轴	$G_6 = \frac{z}{u_4} = \frac{\dot{z}}{su_4} = \frac{1.63}{s(s+5)}$
Y 轴向与翻滚角	$G_5 = \frac{y}{\phi} = \frac{\dot{y}}{s\phi} = \frac{-276.4s + 743.5}{s(61s + 4463)}$

## 3 仿真与试验

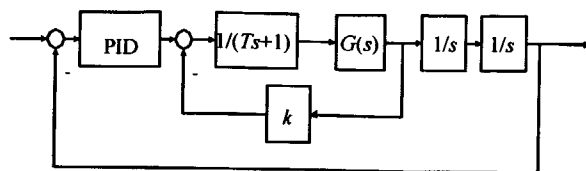


图 3 控制系统框图

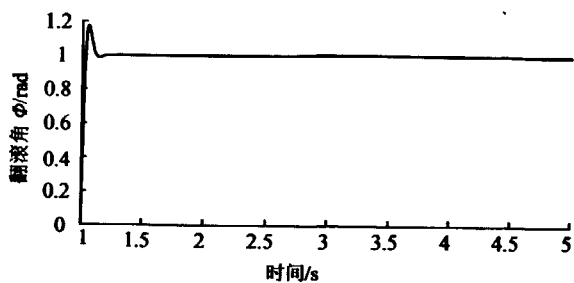
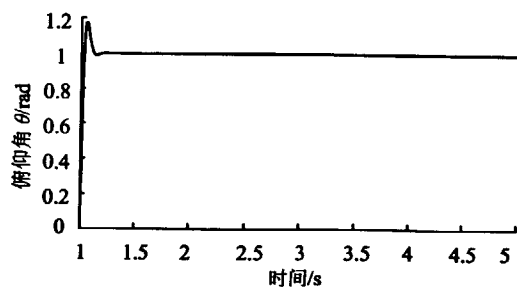
Fig. 3 block diagram of control system

根据 PID 系统的结构图(图 3), 搭建 simulink 模型并仿真, 经过调试, 参数取值见表 2, 所设计的控制器的位置阶跃响应图线及姿态阶跃响应图线见图 4, 依次是俯仰角, 翻滚角, 偏航角, X 轴向, Z 轴向, Y 轴向。

表 3 仿真参数取值表

Tab. 3 parameters of the quadrotor			
$N$	$K_{pm}$	$K_{in}$	$K_{dn}$
1	2	0.01	1
2	2	6	0.1
3	3	0.01	1
4	2	8	0.1
5	3	1	1
6	30	1	1

仿真结果表明: 系统超调量较小, 稳态误差几乎为零, 响应速度较快, 系统仿真验证了 PID 控制的有效性。



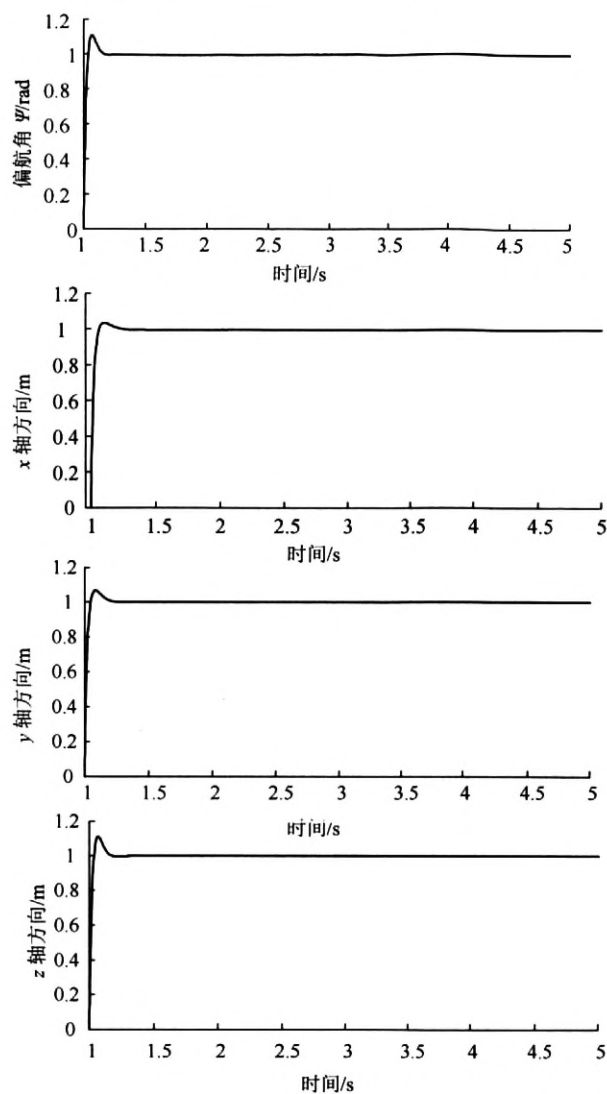


图 4 位置与姿态单位阶跃响应

Fig. 4 step response of position and attitude

考虑到仿真结果与实际实际飞行存在差别,为了验证 PID 控制器的可行性,本文通过自行设计制作的四旋翼飞行器(图 5)进行了飞行试验,并通过外场试验最终确定各个参数。



图 5 四旋翼飞行器实物

Fig. 5 picture of the quadrotor

飞行器的空中姿态数据由角速度传感器采集并通过蓝牙设备传输至下位机。试验结果如图 6, 四旋

翼飞行器在 44 s 时离地升空, 44~54 s 在空中飞行, 俯仰角, 滚动角和航向角的角度变化很小(5° 以内)。试验结果表明: PID 控制可以调整由于微风等扰动造成的飞行器姿态变化。

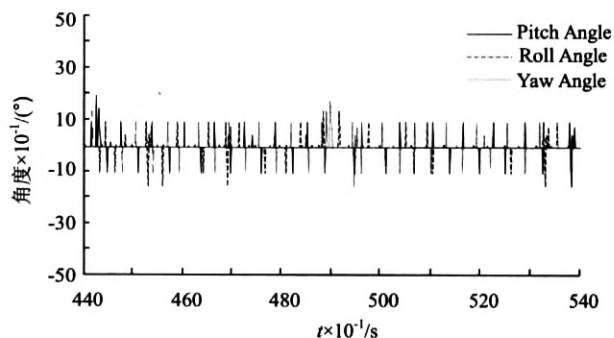


图 6 飞行试验结果

Fig. 6 test results of the flying experiment

## 4 结 论

本文对四旋翼飞行器进行了动力学建模, 并在动力学建模的基础上设计了 PID 控制器。系统仿真验证了 PID 控制的有效性。飞行试验结果表明, PID 控制可以实现四旋翼飞行器稳定控制。

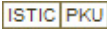
## 参考文献:

- [1] 聂博文. 微小型四旋翼飞行器的研究现状与关键技术[J]. 电光与控制, 2007, 14(6): 113-117.
- [2] Santos M. Intelligent fuzzy controller of a quadrotor[J]. ISKE., 1990, 37(3): 347-353.
- [3] Salih, A.L. Modelling and PID controller design for a quadrotor unmanned air vehicle[J]. IEEE AQTR., 2010, 39(5): 697-699.
- [4] 郑大钟. 线性系统理论[M]. 北京: 清华大学出版社, 1990.
- [5] 杨庆华, 宋召青. 四旋翼飞行器的建模控制与仿真[J]. 海军工程学院学报, 2009, 24(5): 499-502.
- [6] Mian A, Wang Daobo. Nonlinear flight control strategy for an underactuated quadrotor aerial robot[J]. IEEE AQTR, 2008(1): 8-16.
- [7] 彭晓华, 屠兴汉. 求解模糊非线性系统[J]. 辽宁工程技术大学学报: 自然科学版, 2010, 29(5): 776-780.
- [8] 周权, 黄向华. 四旋翼微型飞行平台姿态稳定控制试验研究[J]. 传感器与微系统, 2009, 28(5): 72-79.
- [9] Ly Dat Minh. Modeling and control of quadrotor MAV using vision based measurement[J]. IEEE Trans. Circuits Syst., 2010, 33(4): 70-77.
- [10] 张天光. 捷联惯性导航技术[M]. 北京: 国防工业出版社, 2007.

# 四旋翼飞行器的动力学建模及PID控制

作者：[李俊](#), [李运堂](#), [LI Jun](#), [LI Yuntang](#)

作者单位：[中国计量学院机电工程学院, 浙江杭州, 310018](#)

刊名：[辽宁工程技术大学学报（自然科学版）](#) 

英文刊名：[Journal of Liaoning Technical University\(Natural Science Edition\)](#)

年, 卷(期)：2012, 31(1)

被引用次数：6次

## 参考文献(10条)

1. [聂博文](#) [微小型四旋翼飞行器的研究现状与关键技术](#)[期刊论文]-[电光与控制](#) 2007(06)
2. [Santos M](#) [Intelligent fuzzy controller of a quadrotor](#) 1990(03)
3. [Salih,A.L](#) [Modelling and PID controller design for a quadrotor unmanned air vehicle](#) 2010(05)
4. [郑大钟](#) [线性系统理论](#) 1990
5. [杨庆华](#); [宋召青](#) [四旋翼飞行器的建模控制与仿真](#) 2009(05)
6. [Mian A](#); [Wang Daobo](#) [Nonlinear flight control strategy, for an underactuated quadrotor aerial robot](#) 2008(01)
7. [彭晓华](#); [屠兴汉](#) [求解模糊非线性系统](#)[期刊论文]-[辽宁工程技术大学学报\(自然科学版\)](#) 2010(05)
8. [周权](#); [黄向华](#) [四旋翼微型飞行平台姿态稳定控制试验研究](#)[期刊论文]-[传感器与微系统](#) 2009(05)
9. [Ly Dat Minh](#) [Modeling and control of quadrotor MAV using vision based measurement](#) 2010(04)
10. [张天光](#) [捷联惯性导航技术](#) 2007

## 引证文献(6条)

1. [陈航科](#); [张东升](#); [盛晓超](#); [王凯](#) [四旋翼飞行器悬停状态姿态控制建模与仿真](#)[期刊论文]-[计算机仿真](#) 2013(11)
2. [刘兆中](#) [对四轴飞行器的姿态控制器的设计与仿真](#)[期刊论文]-[科技资讯](#) 2013(6)
3. [胡琴](#); [施雅](#); [陈嘉聪](#); [邢洋](#) [四旋翼自主飞行器系统](#)[期刊论文]-[科技致富向导](#) 2013(24)
4. [王史春](#) [四旋翼飞行器PID优化控制](#)[期刊论文]-[河北科技大学学报](#) 2013(5)
5. [朱斌](#); [张楠](#); [胡南](#); [李宏峰](#) [煤矿救援机器人的多体动力学](#)[期刊论文]-[辽宁工程技术大学学报（自然科学版）](#) 2013(10)
6. [张昕](#); [曹云峰](#); [庄丽奎](#); [王彪](#); [王西超](#); [王平](#) [基于SysML的飞控系统模型重用技术](#)[期刊论文]-[太赫兹科学与电子信息学报](#) 2013(4)

引用本文格式：[李俊](#); [李运堂](#); [LI Jun](#); [LI Yuntang](#) [四旋翼飞行器的动力学建模及PID控制](#)[期刊论文]-[辽宁工程技术大学学报（自然科学版）](#) 2012(1)