

电 子 科 技 大 学

# 实 验 报 告

学生姓名： 韩博宇

学 号： 2019040708023

课程名称： 数学实验

指导教师： 刘艳

实验时间： 2020 年 6 月 13 日

# 实验题目名称：飞机降落过程模拟

## 一. 实验内容

### 背景

在研究飞机的自动着陆系统时,技术人员需要分析飞机的降落曲线. 根据经验,一架水平飞行的飞机,其降落曲线是一条五次多项式,设飞机的飞行高度为 $h$ ,飞机的着陆点为原点,且在整个降落过程中,飞机始终保持水平飞行姿态,且水平速度保持为常数,出于安全考虑,飞机垂直加速度的最大绝对值不得超过 $g/10$ ,此处 $g$ 是重力加速度。

### 主要任务：

进行以下实验：

- 1) 若飞机从距降落点水平距离 $L$ 处开始降落,确定出飞机的降落曲线. 假设飞机降落参数为: 飞机的水平速度 $u=540\text{km/h}$ ,  $h=10\text{km}$ ,  $L=80\text{km}$ ,绘出飞机降落曲线图形
- 2) 求出飞机能够安全降落时水平距离所能允许的最小值.
- 3) 假设飞机跑道长度为 $3.6\text{km}$ ,已知飞机着陆后匀减速在跑道上滑行,直到完全停下,应用上面给出的飞机飞行参数模拟飞机降落的全过程.

## 二. 实验目的

- 1) 应用微积分中复合函数求导法则解决问题;
- 2) 熟悉算法设计;
- 3) 熟悉绘图方法。

## 三. 实验过程

### 1. 问题分析

本模型主要是对飞机降落曲线进行模拟,以便更好的预测飞机开始降落到着陆的水平距离,为飞机飞行提供理论和数据支撑,保证飞行安全。飞机降落过程中水平方向保持匀速且飞机保持水平飞行姿势,能够保证乘客的舒适性;飞机竖直方向最大加速度不超过 $\frac{g}{10}$ ,保证飞机的飞行安全。在解题时采用待定系数法,

列出飞机的飞行曲线,根据题意解出各项系数;再根据最大加速度不超过 $\frac{g}{10}$ 的

条件求解  $s$  的最小值；最后根据跑道的长度，模拟飞机降落的全过程。

## 2. 模型假设

- 1) 飞机的降落路线为  $y = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 + a_5x^5$  ( $0 \leq x \leq s$ )；
- 2) 飞机在整个降落过程始终保持水平飞行姿态；
- 3) 飞机在整个降落过程垂直加速度的最大绝对值不超过  $\frac{g}{10}$ ；
- 4) 飞机可以看做一个质点（自身高度和长度不计）；
- 5) 飞机开始降落和在原点着地时竖直方向上的加速度与速度大小均为 0。

## 3. 变量与符号说明

变量及符号	变量及符号意义
$u$	飞机的水平速度
$s$	飞机开始降落时距降落点 0 的水平距离
$h$	飞机开始降落时距地面的竖直高度
$x$	飞机降落过程中距降落点 0 的水平距离
$y$	飞机降落过程中距地面的竖直高度
$\frac{dy}{dt}$	飞机降落过程中竖直方向的速度
$\frac{d^2y}{dt^2}$	飞机降落过程中竖直方向的加速度
$g$	重力加速度
$a$	飞机减速过程中的加速度

## 4. 模型建立与算法设计

设飞机的降落路线为： $y = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 + a_5x^5$

飞机在竖直方向的速度大小  $\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx} \frac{dx}{dt} = y'(x)u$

飞机在竖直方向的加速度大小  $\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{d(\frac{dy}{dt})}{dt} = y''(x)u^2$

根据题意可得：

- 1) 开始降落时，飞机距地面的竖直高度为  $h$ ，即：

$$a_0 + a_1s + a_2s^2 + a_3s^3 + a_4s^4 + a_5s^5 = h$$

2) 刚刚降落时，飞机距地面的竖直高度为 0，即：

$$a_0 = 0$$

3) 开始降落时，飞机竖直方向的速度为 0，即：

$$u(a_1 + 2a_2s + 3a_3s^2 + 4a_4s^3 + 5a_5s^4) = 0$$

4) 刚刚降落时，飞机竖直方向的速度为 0，即：

$$a_1 = 0$$

5) 开始降落时，飞机竖直方向的加速度为 0，即：

$$u^2(2a_2 + 6a_3s + 12a_4s^2 + 20a_5s^3) = 0$$

6) 刚刚降落时，飞机竖直方向的加速度为 0，即：

$$2a_2u^2 = 0$$

$$\text{即} \begin{cases} a_0 + a_1s + a_2s^2 + a_3s^3 + a_4s^4 + a_5s^5 = h \\ a_0 = 0 \\ u(a_1 + 2a_2s + 3a_3s^2 + 4a_4s^3 + 5a_5s^4) = 0 \\ a_1 = 0 \\ u^2(2a_2 + 6a_3s + 12a_4s^2 + 20a_5s^3) = 0 \\ 2a_2u^2 = 0 \end{cases}$$

利用 matlab 编程 (matlab 程序见 附件 1)，解得：

$$\begin{array}{ll} a_0 = & a_3 = \\ 0 & (10h)/s^3 \\ \\ a_1 = & a_4 = \\ 0 & -(15h)/s^4 \\ \\ a_2 = & a_5 = \\ 0 & (6h)/s^5 \end{array}$$

即：

$$a_0 = 0, \quad a_1 = 0, \quad a_2 = 0, \quad a_3 = \frac{10h}{s^3}, \quad a_4 = -\frac{15h}{s^4}, \quad a_5 = \frac{6h}{s^5}$$

因此，飞机降落的曲线为：

$$y = \frac{10h}{s^3}x^3 - \frac{15h}{s^4}x^4 + \frac{6h}{s^5}x^5 \quad x \in [0, s]$$

## 5. 运行结果及结果分析

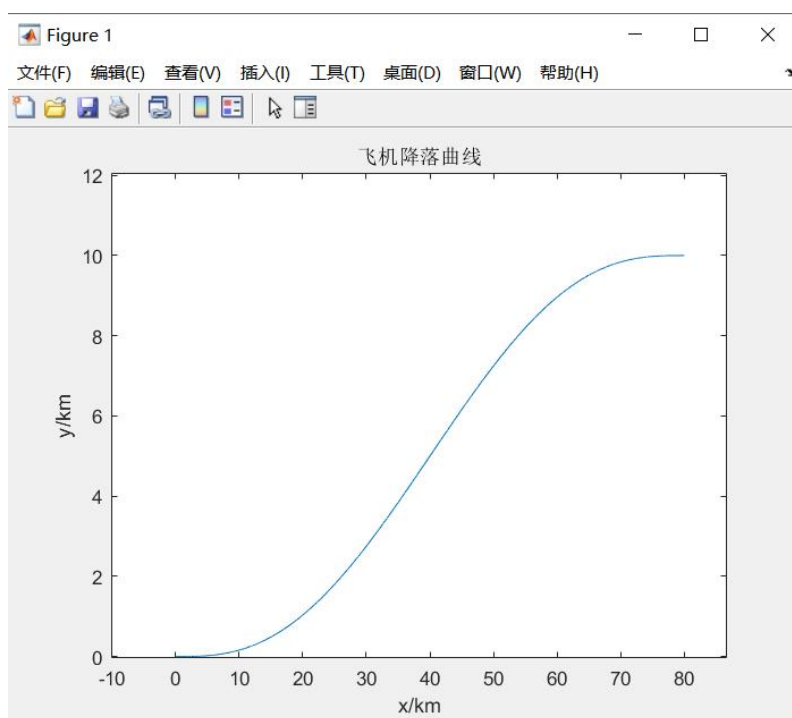
1) 当  $s=L$  时，飞机降落曲线为：  $y = \frac{10h}{L^3}x^3 - \frac{15h}{L^4}x^4 + \frac{6h}{L^5}x^5 \quad x \in [0, L]$

由题意可知，  $x = L - ut \quad t \in [0, \frac{L}{u}]$

带入飞机降落曲线，得：  $y = \frac{10h}{L^3}(L-ut)^3 - \frac{15h}{L^4}(L-ut)^4 + \frac{6h}{L^5}(L-ut)^5 \quad t \in [0, \frac{L}{u}]$

因此，  $\begin{cases} x = L - ut \\ y = \frac{10h}{L^3}(L-ut)^3 - \frac{15h}{L^4}(L-ut)^4 + \frac{6h}{L^5}(L-ut)^5 \end{cases} \quad t \in [0, \frac{L}{u}]$

当  $u=540\text{km/h}$ ，  $h=10\text{km}$ ，  $L=80\text{km}$  时，编写程序（matlab 程序见 附件 2）绘出飞机降落图形如下：



2) 飞机降落的曲线为：  $y = \frac{10h}{s^3}x^3 - \frac{15h}{s^4}x^4 + \frac{6h}{s^5}x^5 \quad x \in [0, s]$

编写程序（matlab 程序见 附件 3）计算出在降落过程中最大加速度如下：

a =

$$u^2 * ((60 * h * x) / s^3 - (180 * h * x^2) / s^4 + (120 * h * x^3) / s^5)$$

da =

$$u^2 * ((60 * h) / s^3 - (360 * h * x) / s^4 + (360 * h * x^2) / s^5)$$

x0 =

$$\frac{-(s * (3^{1/2}) - 3)) / 6}{(s * (3^{1/2}) + 3)) / 6}$$

a0 =

$$\frac{(10 * 3^{1/2} * h * u^2) / (3 * s^2)}{-(10 * 3^{1/2} * h * u^2) / (3 * s^2)}$$

由程序运行结果可知，

飞机在竖直方向的加速度大小  $\frac{d^2 y}{dt^2} = \frac{60h}{s^3} u^2 x - \frac{180h}{s^4} u^2 x^2 + \frac{120h}{s^5} u^2 x^3$

$$\text{记 } \alpha(x) = \frac{60h}{s^3} u^2 x - \frac{180h}{s^4} u^2 x^2 + \frac{120h}{s^5} u^2 x^3$$

$$\text{令 } \alpha'(x) = \frac{60h}{s^3} u^2 - \frac{360h}{s^4} u^2 x + \frac{360h}{s^5} u^2 x^2 = 0$$

$$\text{当 } x_0 = -\frac{\sqrt{3}-3}{6}s \text{ 时, } \alpha(x) \text{ 在 } [0, s] \text{ 取得最大值 } \frac{10\sqrt{3}}{3s^2} hu^2$$

$$\text{根据题意有 } \frac{10\sqrt{3}}{3s^2} hu^2 \leq \frac{g}{10}$$

$$\text{即: } s \geq 10u \sqrt{\frac{\sqrt{3}h}{3g}}$$

所以，飞机能够安全降落时水平距离所能允许的最小值为  $10u \sqrt{\frac{\sqrt{3}h}{3g}}$

3) ①飞机降落过程:

由问题 1) 可知飞机降落曲线为:

$$\begin{cases} x = s - ut \\ y = \frac{10h}{s^3}(s - ut)^3 - \frac{15h}{s^4}(s - ut)^4 + \frac{6h}{s^5}(s - ut)^5 \end{cases} \quad t \in [0, \frac{s}{u}]$$

②飞机减速过程:

飞机速度减为 0 的过程中, 有:  $u^2 = 2ax$

由于  $x \leq L_{\text{跑道}}$

所以,  $a \geq \frac{u^2}{2L_{\text{跑道}}}$

若飞机刚好在跑道尽头减速为 0, 则有:

$$\begin{cases} x = -[u(t - \frac{s}{u}) - \frac{u^2}{4L_{\text{跑道}}}(t - \frac{s}{u})^2] \\ y = 0 \end{cases} \quad t \in (\frac{s}{u}, \frac{2L_{\text{跑道}} + s}{u}]$$

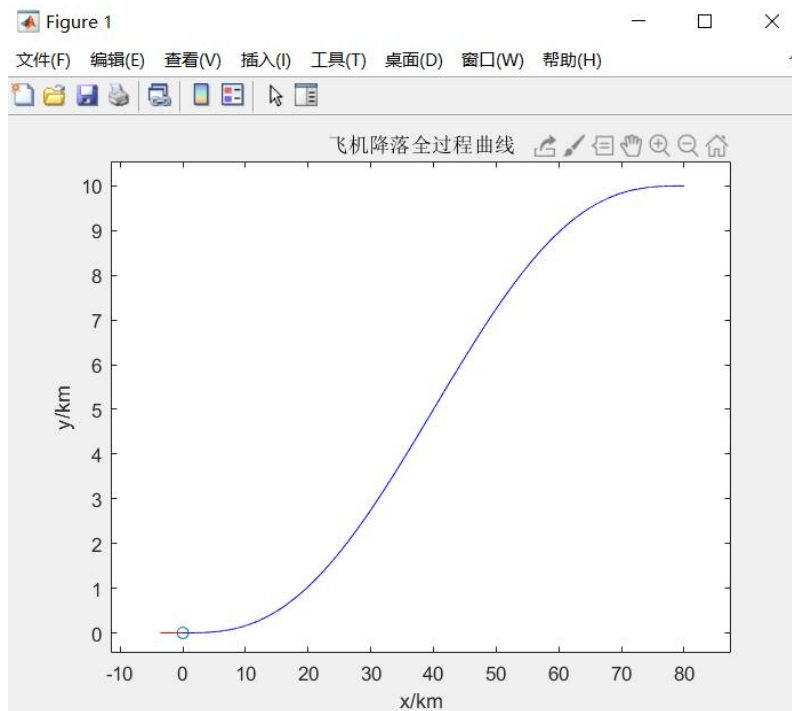
当  $u=540\text{km/h}$ ,  $h=10\text{km}$ ,  $s=L=80\text{km}$ ,  $L_{\text{跑道}}=3.6\text{km}$  时, 飞机降落的全过程如下:

$$\begin{cases} x = 80 - 540t \\ y = \frac{1}{5120}(80 - 540t)^3 - \frac{3}{819200}(80 - 540t)^4 + \frac{3}{163840000}(80 - 540t)^5 \end{cases} \quad t \in [0, \frac{4}{27}]$$

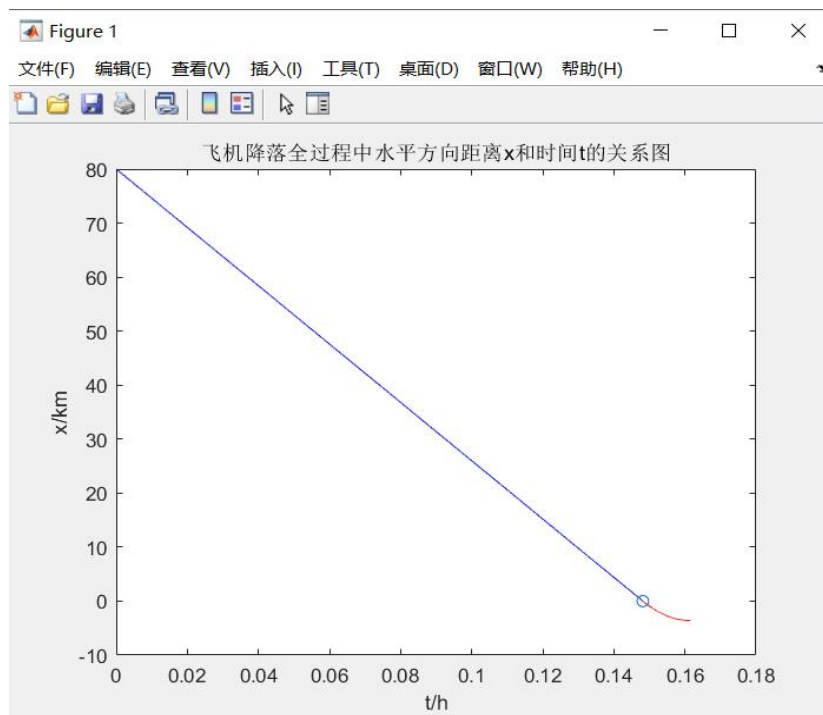
$$\begin{cases} x = 20250t^2 - 6540t - \frac{4720}{9} \\ y = 0 \end{cases} \quad t \in (\frac{4}{27}, \frac{109}{675}]$$

将相应的图像用 matlab 绘制出, 其中蓝色线代表飞机降落过程, 红色线代表飞机降落后在地面减速过程, 空心圆圈 o 代表飞机刚刚降落的时刻。

编写程序 (matlab 程序见 附件 4) 绘出飞机降落全过程的图形如下:

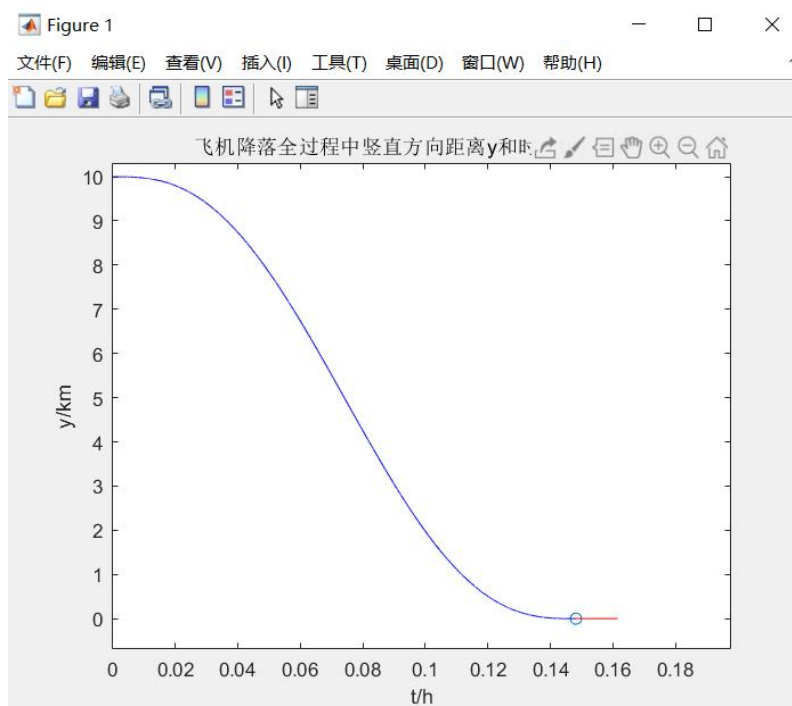


编写程序（matlab 程序见 附件 5）绘出飞机降落全过程中水平方向距离  $x$  和时间  $t$  的关系图如下：



编写程序（matlab 程序见 附件 6）绘出飞机降落全过程中竖直方向距离  $y$  和时间  $t$  的关系图如下：





#### 四. 优缺点及改进方向

优点：

飞机降落过程中考虑比较周全，利用微分的知识解决了相关问题；模型假设合理，基本符合实际，具有参考性和可推广性；

缺点：

飞机在降落时由于自身长度、宽度、高度都会影响飞机的受力和距离估算，从而影响飞机的安全性，因此不能仅仅看做一个质点，需要更加细致的考虑和计算；

改进方向：

具体问题具体分析，全面考虑，从而更好的利用所学解决问题。

#### 五. 心得体会与总结

本次实验和生活联系紧密，通过飞机降落这一问题既锻炼了我使用 matlab 的能力，又提升了我数学建模的能力。

通过这次实验我认识到：数学实验课上学到的只是 matlab 的理论知识，想要将其运用到实际生活中，我们还需要将问题转化为数学语言进而转化为程序的能力；在做题前要仔细分析题目，提炼有效信息，例如本题中“降落曲线是一条

五次多项式”、“着陆点为原点”、“在整个降落过程中，飞机始终保持水平飞行姿态，且水平速度保持为常数”、“飞机垂直加速度的最大绝对值不得超过  $g/10$ ”等都是非常重要的信息，需要提炼出来；在建模过程中要考虑细致，找到合适的条件，才能使模型完美，例如本题中找到“开始降落时和将要落地时飞机竖直方向的速度和加速度都为 0”这一条件非常重要；在编程求解过程中要灵活运用所学知识，选取合适的语句求解，还要特别注意同一功能在不同版本软件上语句语法的区别，例如本题中在使用 solve 语句时，由于我的软件版本为 2019a，使用老师讲的 solve 语句语法时就出现了错误。

总之，这个实验和数学实验这门课让我收获很多，相信这学期在课上学到的知识定会让我收益终身。

## 六. 对本实验问题的设计提出改进意见

本次实验问题的设计考查较为全面，但对于曲线拟合的知识未考查。希望老师能增加实验任务，以考察曲线拟合等知识，例如：给出一些飞机实际在降落过程中的位置坐标，让学生拟合降落曲线，并与理论计算对比，求出误差。

## 附件

### 附件 1. 模型建立中求解已知方程组的 MATLAB 程序

```
syms s h u a0 a1 a2 a3 a4 a5;
eq1=a0+a1*s+a2*s^2+a3*s^3+a4*s^4+a5*s^5-h;
eq2=a0;
eq3=u*(a1+2*a2*s+3*a3*s^2+4*a4*s^3+5*a5*s^4);
eq4=a1;
eq5=u^2*(2*a2+6*a3*s+12*a4*s^2+20*a5*s^3);
eq6=2*a2*u^2;
[a0 a1 a2 a3 a4
a5]=solve(eq1,eq2,eq3,eq4,eq5,eq6,a0,a1,a2,a3,a4,a5)
```

### 附件 2. 问题 1 中绘制飞机降落图线的 MATLAB 程序

```
h=10;
L=80;
x=0:0.01:L;
y=(10.*h/L.^3).*x.^3-(15.*h/L.^4).*x.^4+(6.*h/L.^5).*x.^5;
plot(x,y)
xlabel('x/km');
ylabel('y/km');
title('飞机降落曲线');
```

### 附件 3. 问题 2 中计算飞机在降落过程中最大加速度的 MATLAB 程序

```
syms s u h x y;
y=(10.*h/s.^3).*x.^3-(15.*h/s.^4).*x.^4+(6.*h/s.^5).*x.^5;
a=u^2*diff(y,x,2)
da=diff(a,x,1)
x0=solve(da,x)
a0=simplify(subs(a,x,x0))
```

### 附件 4. 问题 3 中绘制飞机降落全过程图线的 MATLAB 程序

```
h=10;
L=80;
L2=-3.6;
x1=0:0.01:L;
y1=(10.*h/L.^3).*x1.^3-(15.*h/L.^4).*x1.^4+(6.*h/L.^5).*x1.^5;
x2=L2:0.01:0;
y2=0.*x2;
plot(x1,y1,'b',x2,y2,'r',0,0,'o')
xlabel('x/km');
ylabel('y/km');
title('飞机降落全过程曲线');
```

### 附件 5. 问题 3 中绘制飞机降落全过程中水平方向距离 x 和时间 t 的关系图的 MATLAB 程序

```

t1=linspace(0,4/27,10000);
t2=linspace(4/27,109/675,10000);
x1=80-540.*t1;
x2=20250.*t2.^2-6540.*t2+4720/9;
plot(t1,x1,'b',t2,x2,'r',4/27,0,'o')
xlabel('t/h');
ylabel('x/km');
title('飞机降落全过程中水平方向距离 x 和时间 t 的关系图');

```

#### 附件 6. 问题 3 中绘制飞机降落全过程中竖直方向距离 y 和时间 t 的关系图的 MATLAB 程序

```

t1=linspace(0,4/27,10000);
t2=linspace(4/27,109/675,10000);
y1=1./5120.*(80-540.*t1).^3-3./819200.*(80-540.*t1).^4+3./163840000.*(80-540.*t1).^5;
y2=0.*t2;
plot(t1,y1,'b',t2,y2,'r',4/27,0,'o')
xlabel('t/h');
ylabel('y/km');
title('飞机降落全过程中竖直方向距离 y 和时间 t 的关系图');

```