# TASEP

Божин Ангелов Караиванов

15 юни 2013 г.

Нека с $C_i$ означаваме началните състояния, а с $C'_j$ — крайните, т.е. състоянията, получени след обноваване на всички позиции. Така можем да запишем, че

$$C_i = P^j{}_i C'_j, \tag{1}$$

където $P^j{}_i$ е вероятността от начално състояние $C_i$ да достигнем до крайно състояние $C'_j$. Тук очевидно трябва да е изпълнено условието

$$\sum_j P^j{}_i = 1, \quad \forall i. \tag{2}$$

Матрицата на вероятностите $P^j{}_i$ може да се представи като сума от четири (за $L = 4$) вероятностни матрици, отговарящи на стартиране на алгоритъма на обновяване от различна начална връзка:

$$P^j{}_i = \frac{1}{4} \sum_{a=1}^{4} P^{a,j}{}_i, \tag{3}$$

където $a = 1$ отговаря на последователността $(1,2)(4,1)(3,4)(2,3)$; $a = 2$ — на последователността $(2,3)(1,2)(4,1)(3,4)$; $a = 3$ — $(3,4)(2,3)(1,2)(4,1)$; $a = 4$ — $(4,1)(3,4)(2,3)(1,2)$.

## 1 $L = 4$, $N = 2$

Тук ще използваме следната номерация на състоянията

$$\begin{aligned} C_1 &= (1,1,0,0), \\ C_2 &= (0,1,1,0), \\ C_3 &= (0,0,1,1), \\ C_4 &= (1,0,0,1), \\ C_5 &= (1,0,1,0), \\ C_6 &= (0,1,0,1). \end{aligned} \tag{4}$$

Така можем да запишем всяко начално състояние $C_i$ като линейна суперпозиция на възможните крайни състояния $C'_j$ във вида:

## 1.1 $a = 1$

$$
\begin{aligned}
C_1 &= (1-p)C'_1 + pC'_5, \\
C_2 &= (1-p)C'_2 + p\tilde{p}C'_3 + p(1-\tilde{p})C'_6, \\
C_3 &= (1-p)C'_3 + p\tilde{p}C'_4 + p(1-\tilde{p})C'_5, \\
C_4 &= p\tilde{p}C'_1 + (1-p)C'_4 + p(1-\tilde{p})C'_6, \\
C_5 &= p(1-p)C'_2 + p(1-p)C'_4 + (1-p)^2C'_5 + p^2C'_6, \\
C_6 &= p(1-p)C'_1 + p(1-p)C'_3 + p^2C'_5 + (1-p)^2C'_6.
\end{aligned}
$$

За матрицата $P^1$ с компоненти ${P^{1,j}}_i$, получаваме

$$
P^1 = \begin{pmatrix}
1-p & 0 & 0 & 0 & p & 0 \\
0 & 1-p & p\tilde{p} & 0 & 0 & p(1-\tilde{p}) \\
0 & 0 & 1-p & p\tilde{p} & p(1-\tilde{p}) & 0 \\
p\tilde{p} & 0 & 0 & 1-p & 0 & p(1-\tilde{p}) \\
0 & p(1-p) & 0 & p(1-p) & (1-p)^2 & p^2 \\
p(1-p) & 0 & p(1-p) & 0 & p^2 & (1-p)^2
\end{pmatrix}. \tag{5}
$$

## 1.2 $a = 2$

$$
\begin{aligned}
C_1 &= (1-p)C'_1 + p\tilde{p}C'_2 + p(1-\tilde{p})C'_5, \\
C_2 &= (1-p)C'_2 + pC'_6, \\
C_3 &= (1-p)C'_3 + p\tilde{p}C'_4 + p(1-\tilde{p})C'_5, \\
C_4 &= p\tilde{p}C'_1 + (1-p)C'_4 + p(1-\tilde{p})C'_6, \\
C_5 &= p(1-p)C'_2 + p(1-p)C'_4 + (1-p)^2C'_5 + p^2C'_6, \\
C_6 &= p(1-p)C'_1 + p(1-p)C'_3 + p^2C'_5 + (1-p)^2C'_6.
\end{aligned}
$$

За матрицата $P^2$ с компоненти ${P^{2,j}}_i$, получаваме

$$
P^2 = \begin{pmatrix}
1-p & p\tilde{p} & 0 & 0 & p(1-\tilde{p}) & 0 \\
0 & 1-p & 0 & 0 & 0 & p \\
0 & 0 & 1-p & p\tilde{p} & p(1-\tilde{p}) & 0 \\
p\tilde{p} & 0 & 0 & 1-p & 0 & p(1-\tilde{p}) \\
0 & p(1-p) & 0 & p(1-p) & (1-p)^2 & p^2 \\
p(1-p) & 0 & p(1-p) & 0 & p^2 & (1-p)^2
\end{pmatrix}. \tag{6}
$$

## 1.3 $a = 3$

$$
\begin{aligned}
C_1 &= (1-p)C'_1 + p\tilde{p}C'_2 + p(1-\tilde{p})C'_5, \\
C_2 &= (1-p)C'_2 + p\tilde{p}C'_3 + p(1-\tilde{p})C'_6, \\
C_3 &= (1-p)C'_3 + pC'_5, \\
C_4 &= p\tilde{p}C'_1 + (1-p)C'_4 + p(1-\tilde{p})C'_6, \\
C_5 &= p(1-p)C'_2 + p(1-p)C'_4 + (1-p)^2C'_5 + p^2C'_6, \\
C_6 &= p(1-p)C'_1 + p(1-p)C'_3 + p^2C'_5 + (1-p)^2C'_6.
\end{aligned}
$$

За матрицата $P^3$ с компоненти ${P^{3,j}}_i$, получаваме

$$P^3 = \begin{pmatrix} 1-p & p\tilde{p} & 0 & 0 & p(1-\tilde{p}) & 0 \\ 0 & 1-p & p\tilde{p} & 0 & 0 & p(1-\tilde{p}) \\ 0 & 0 & 1-p & 0 & p & 0 \\ p\tilde{p} & 0 & 0 & 1-p & 0 & p(1-\tilde{p}) \\ 0 & p(1-p) & 0 & p(1-p) & (1-p)^2 & p^2 \\ p(1-p) & 0 & p(1-p) & 0 & p^2 & (1-p)^2 \end{pmatrix}. \quad (7)$$

### 1.4 $a = 4$

$$\begin{aligned} C_1 &= (1-p)C'_1 + p\tilde{p}C'_2 + p(1-\tilde{p})C'_5, \\ C_2 &= (1-p)C'_2 + p\tilde{p}C'_3 + p(1-\tilde{p})C'_6, \\ C_3 &= (1-p)C'_3 + p\tilde{p}C'_4 + p(1-\tilde{p})C'_5, \\ C_4 &= (1-p)C'_4 + pC'_6, \\ C_5 &= p(1-p)C'_2 + p(1-p)C'_4 + (1-p)^2C'_5 + p^2C'_6, \\ C_6 &= p(1-p)C'_1 + p(1-p)C'_3 + p^2C'_5 + (1-p)^2C'_6. \end{aligned}$$

За матрицата $P^4$ с компоненти ${P^{4,j}}_i$, получаваме

$$P^4 = \begin{pmatrix} 1-p & p\tilde{p} & 0 & 0 & p(1-\tilde{p}) & 0 \\ 0 & 1-p & p\tilde{p} & 0 & 0 & p(1-\tilde{p}) \\ 0 & 0 & 1-p & p\tilde{p} & p(1-\tilde{p}) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1-p & 0 & p \\ 0 & p(1-p) & 0 & p(1-p) & (1-p)^2 & p^2 \\ p(1-p) & 0 & p(1-p) & 0 & p^2 & (1-p)^2 \end{pmatrix}. \quad (8)$$

### 1.5 Вероятности за състоянията

Общата вероятностна матрица има вида

$$P = \begin{pmatrix} 1-p & \frac{3}{4}p\tilde{p} & 0 & 0 & p\left(1-\frac{3}{4}\tilde{p}\right) & 0 \\ 0 & 1-p & \frac{3}{4}p\tilde{p} & 0 & 0 & p\left(1-\frac{3}{4}\tilde{p}\right) \\ 0 & 0 & 1-p & \frac{3}{4}p\tilde{p} & p\left(1-\frac{3}{4}\tilde{p}\right) & 0 \\ \frac{3}{4}p\tilde{p} & 0 & 0 & 1-p & 0 & p\left(1-\frac{3}{4}\tilde{p}\right) \\ 0 & p(1-p) & 0 & p(1-p) & (1-p)^2 & p^2 \\ p(1-p) & 0 & p(1-p) & 0 & p^2 & (1-p)^2 \end{pmatrix} \quad (9)$$

Виждаме, че сумите по редовете на тази матрица дават единици, т. е. условието за нормиравка е изпълнено.

Вероятностите $P_j$ за поява на крайното състояние $C'_j$ от кое да е начално състояние $C_i$ се получава като съберем редовете на матрицата $P$:

$$P_j \equiv \frac{1}{6}\sum_{i=1}^{6} {P^j}_i. \quad (10)$$

Така получаваме:

$$P_1 = P_2 = P_3 = P_4 = \frac{1}{6} + \frac{p\tilde{p}}{8} - \frac{p^2}{6} = \frac{4-4p^2+3p\tilde{p}}{24}, \quad (11)$$

$$P_5 = P_6 = \frac{1}{6} - \frac{p\tilde{p}}{4} + \frac{p^2}{3} = \frac{2 - 3p\tilde{p} + 4p^2}{12}. \tag{12}$$

За случая $p = \tilde{p}$ горните формули приемат вида

$$P_1 = \frac{4 - p^2}{24} = \frac{1}{6} - \frac{p^2}{24}, \tag{13}$$

$$P_6 = \frac{2 + p^2}{12} = \frac{1}{6} + \frac{p^2}{12}, \tag{14}$$

откъдето получаваме за $0 \le p \le 1$: $\frac{1}{6} \ge P_1 \ge \frac{1}{8}$ и $\frac{1}{6} \le P_6 \le \frac{1}{4}$, т. е. при $p = 0$: $P_1 = P_6$, а при $p = 1$: $P_6 = 2P_1$.

Друга теоретична проверка на общите формули на вероятностите $P_j$ е случаят на "твърдо" движение ($p = 1$) при абсолютно отблъскване ($\tilde{p} = 0$). Тогава получаваме $P_1 = 0$ и $P_6 = 1/2$, което указва интуитивно ясния извод, че всички "двучастични състояния" (състояния, при които двете частици са една до друга, т. е. състоянията $C_i$, $i = 1, 2, 3, 4$) се разпадат.

# 2 $L = 4$, $N = 3$

Тук ще използваме следната номерация на състоянията

$$\begin{aligned} C_1 &= (1, 1, 1, 0), \\ C_2 &= (1, 1, 0, 1), \\ C_3 &= (1, 0, 1, 1), \\ C_4 &= (0, 1, 1, 1). \end{aligned} \tag{15}$$

Така можем да запишем всяко начално състояние $C_i$ като линейна суперпозиция на възможните крайни състояния $C'_j$ във вида:

## 2.1 $a = 1$

$$C_1 = (1-p)C'_1 + p(1-\tilde{p})C'_2 + p\tilde{p}C'_3,$$
$$C_2 = (1-p)C'_2 + pC'_3,$$
$$C_3 = p\tilde{p}(1-\tilde{p})C'_1 + p\tilde{p}^2C'_2 + (1-p)C'_3 + p(1-\tilde{p})C'_4,$$
$$C_4 = p(1-\tilde{p})C'_1 + p\tilde{p}(1-\tilde{p})C'_2 + p\tilde{p}^2C'_3 + (1-p)C'_4.$$

За матрицата $P^1$ с компоненти $P^{1,j}{}_i$, получаваме

$$P^1 = \begin{pmatrix} 1-p & p(1-\tilde{p}) & p\tilde{p} & 0 \\ 0 & 1-p & p & 0 \\ p\tilde{p}(1-\tilde{p}) & p\tilde{p}^2 & 1-p & p(1-\tilde{p}) \\ p(1-\tilde{p}) & p\tilde{p}(1-\tilde{p}) & p\tilde{p}^2 & 1-p \end{pmatrix}. \tag{16}$$

## 2.2 $a = 2$

$$C_1 = (1-p)C_1' + pC_2',$$
$$C_2 = (1-p)C_2' + p(1-\tilde{p})C_3' + p\tilde{p}(1-\tilde{p})C_4' + p\tilde{p}^2C_1',$$
$$C_3 = p\tilde{p}(1-\tilde{p})C_1' + p\tilde{p}^2C_2' + (1-p)C_3' + p(1-\tilde{p})C_4',$$
$$C_4 = p(1-\tilde{p})C_1' + p\tilde{p}C_2' + (1-p)C_4',$$

За матрицата $P^2$ с компоненти $P^{2,j}{}_i$, получаваме

$$P^2 = \begin{pmatrix} 1-p & p & 0 & 0 \\ p\tilde{p}^2 & 1-p & p(1-\tilde{p}) & p\tilde{p}(1-\tilde{p}) \\ p\tilde{p}(1-\tilde{p}) & p\tilde{p}^2 & 1-p & p(1-\tilde{p}) \\ p(1-\tilde{p}) & p\tilde{p} & 0 & 1-p \end{pmatrix} \tag{17}$$

## 2.3 $a = 3$

$$C_1 = (1-p)C_1' + p(1-\tilde{p})C_2' + p\tilde{p}(1-\tilde{p})C_3' + p\tilde{p}^2C_4',$$
$$C_2 = p\tilde{p}^2C_1' + (1-p)C_2' + p(1-\tilde{p})C_3' + p\tilde{p}(1-\tilde{p})C_4',$$
$$C_3 = p\tilde{p}C_1' + (1-p)C_3' + p(1-\tilde{p})C_4',$$
$$C_4 = pC_1' + (1-p)C_4',$$

За матрицата $P^3$ с компоненти $P^{3,j}{}_i$, получаваме

$$P^3 = \begin{pmatrix} 1-p & p(1-\tilde{p}) & p\tilde{p}(1-\tilde{p}) & p\tilde{p}^2 \\ p\tilde{p}^2 & 1-p & p(1-\tilde{p}) & p\tilde{p}(1-\tilde{p}) \\ p\tilde{p} & 0 & 1-p & p(1-\tilde{p}) \\ p & 0 & 0 & 1-p \end{pmatrix} \tag{18}$$

## 2.4 $a = 4$

$$C_1 = (1-p)C_1' + p(1-\tilde{p})C_2' + p\tilde{p}(1-\tilde{p})C_3' + p\tilde{p}^2C_4',$$
$$C_2 = (1-p)C_2' + p(1-\tilde{p})C_3' + p\tilde{p}C_4',$$
$$C_3 = (1-p)C_3' + pC_4',$$
$$C_4 = p(1-\tilde{p})C_1' + p\tilde{p}(1-\tilde{p})C_2' + p\tilde{p}^2C_3' + (1-p)C_4',$$

За матрицата $P^4$ с компоненти $P^{4,j}{}_i$, получаваме

$$P^4 = \begin{pmatrix} 1-p & p(1-\tilde{p}) & p\tilde{p}(1-\tilde{p}) & p\tilde{p}^2 \\ 0 & 1-p & p(1-\tilde{p}) & p\tilde{p} \\ 0 & 0 & 1-p & p \\ p(1-\tilde{p}) & p\tilde{p}(1-\tilde{p}) & p\tilde{p}^2 & 1-p \end{pmatrix} \tag{19}$$

### 2.5 Вероятности за състоянията

Общата вероятностна матрица има вида

$$P = \begin{pmatrix} 1-p & p-\frac{3}{4}p\tilde{p} & p\tilde{p}\left(\frac{3}{4}-\frac{1}{2}\tilde{p}\right) & \frac{1}{2}p\tilde{p}^2 \\ \frac{1}{2}p\tilde{p}^2 & 1-p & p-\frac{3}{4}p\tilde{p} & p\tilde{p}\left(\frac{3}{4}-\frac{1}{2}\tilde{p}\right) \\ p\tilde{p}\left(\frac{3}{4}-\frac{1}{2}\tilde{p}\right) & \frac{1}{2}p\tilde{p}^2 & 1-p & p-\frac{3}{4}p\tilde{p} \\ p-\frac{3}{4}p\tilde{p} & p\tilde{p}\left(\frac{3}{4}-\frac{1}{2}\tilde{p}\right) & \frac{1}{2}p\tilde{p}^2 & 1-p \end{pmatrix} \tag{20}$$

Виждаме, че сумите по редовете на тази матрица дават единици, т. е. условието за нормировка е изпълнено.

Вероятностите $P_j$ за поява на крайното състояние $C'_j$ от кое да е начално състояние $C_i$ се получава като съберем редовете на матрицата $P$:

$$P_j \equiv \frac{1}{4}\sum_{i=1}^{4} P^j{}_i. \tag{21}$$

Така получаваме:

$$P_1 = P_2 = P_3 = P_4 = \frac{1}{4}. \tag{22}$$