Teoria da Computação

Prof. Maicon R. Zatelli

Aula 6 - Decidibilidade (Linguagens Decidíveis e Linguagens Indecidíveis) - Parte 2

Universidade Federal de Santa Catarina

Florianópolis - Brasil

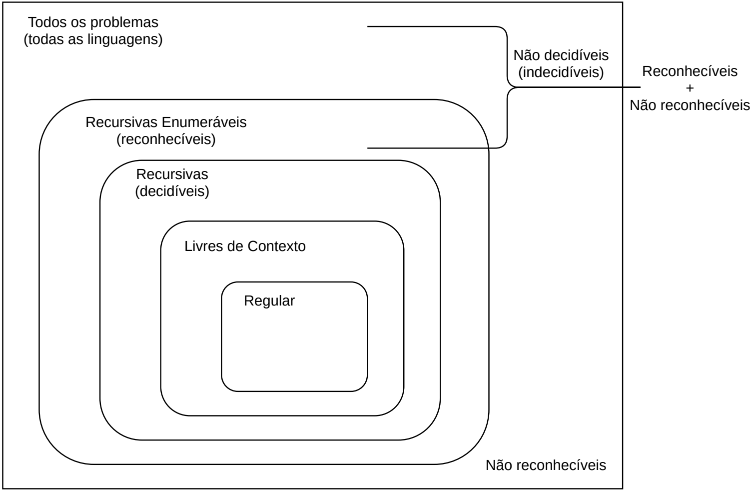
Introdução

- Linguagens decidíveis
- Método da diagonalização
- Linguagens indecidíveis

Material de apoio

- Livro Sipser, Capítulo 4
- Livro Hopcroft, Capítulo 9

Hierarquia de Chomsky



Indecidíveis - são todas as linguagens Turing-reconhecíveis mas não decidíveis e também as linguagens não Turing-reconhecíveis

Indecidibilidade

São os problemas não algoritmicamente solucionáveis

Indecidibilidade

São os problemas não algoritmicamente solucionáveis

Máquina de Turing Universal (MTU)

- Recebe como entrada a descrição de uma MT e a simula com determinada entrada *w*
- A descrição da MT é colocada na fita da MTU, assim como a palavra *w*

Indecidibilidade

São os problemas não algoritmicamente solucionáveis

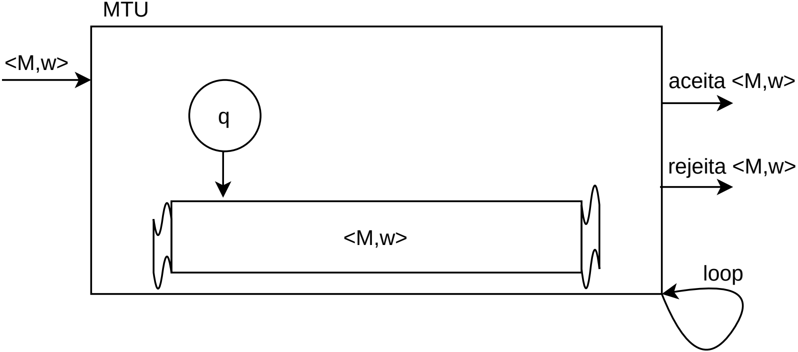
Máquina de Turing Universal (MTU)

- Recebe como entrada a descrição de uma MT e a simula com determinada entrada w
- A descrição da MT é colocada na fita da MTU, assim como a palavra w

A MTU com uma MT M de entrada e uma palavra w faz

- Aceita, se a simulação de M com a entrada w resultar em aceite
- Rejeita, se a simulação de M com a entrada w resultar em rejeite
- Loop, se a simulação de M com a entrada w resultar em loop

Esquema de uma MTU



Uma MTU é como um "sistema operacional"que executa "programas"(neste caso outras MT) com determinadas entradas (neste caso a palavra w)

Problema 9: Testar se uma MT aceita determinada entrada w

Problema 9: Testar se uma MT aceita determinada entrada w

Linguagem: $A_{TM} = \{< M, w > | M$ é uma MT e M aceita a palavra $w\}$

Linguagens Indecidíveis

Problema 9: Testar se uma MT aceita determinada entrada w

Linguagem: $A_{TM} = \{< M, w > | M$ é uma MT e M aceita a palavra $w\}$

Teorema 9: A_{TM} é indecidível

Linguagens Indecidíveis

Problema 9: Testar se uma MT aceita determinada entrada w

Linguagem: $A_{TM} = \{< M, w > | M$ é uma MT e M aceita a palavra $w\}$

Teorema 9: A_{TM} é indecidível

Antes de provar que A_{TM} é indecidível, vamos mostrar que A_{TM} é Turing-reconhecível

Problema 9: Testar se uma MT aceita determinada entrada w

Linguagem: $A_{TM} = \{< M, w > | M$ é uma MT e M aceita a palavra $w\}$

Teorema 9: A_{TM} é indecidível

Antes de provar que A_{TM} é indecidível, vamos mostrar que A_{TM} é Turing-reconhecível

Teorema 10: A_{TM} é Turing-reconhecível

Problema 9: Testar se uma MT aceita determinada entrada w

Linguagem: $A_{TM} = \{< M, w > | M$ é uma MT e M aceita a palavra $w\}$

Teorema 9: A_{TM} é indecidível

Antes de provar que A_{TM} é indecidível, vamos mostrar que A_{TM} é Turing-reconhecível

Teorema 10: A_{TM} é Turing-reconhecível

Prova: prova por construção. Construimos uma MT $M10$ que reconheça A_{TM}

Problema 9: Testar se uma MT aceita determinada entrada w

Linguagem: $A_{TM} = \{< M, w > | M$ é uma MT e M aceita a palavra $w\}$

Teorema 9: A_{TM} é indecidível

Antes de provar que A_{TM} é indecidível, vamos mostrar que A_{TM} é Turing-reconhecível

Teorema 10: A_{TM} é Turing-reconhecível

Prova: prova por construção. Construimos uma MT $M10$ que reconheça A_{TM}

```
M10 com a entrada <M,w>, onde M é uma MT e w é uma palavra, faz:
    1: Simule M com a entrada w
    2: Se M aceita w, aceite (M10 aceita <M,w>)
    3: Se M rejeita w, rejeite (M10 rejeita <M,w>)
```

Problema 9: Testar se uma MT aceita determinada entrada w

Linguagem: $A_{TM} = \{< M, w > | M$ é uma MT e M aceita a palavra $w\}$

Teorema 9: A_{TM} é indecidível

Antes de provar que A_{TM} é indecidível, vamos mostrar que A_{TM} é Turing-reconhecível

Teorema 10: A_{TM} é Turing-reconhecível

Prova: prova por construção. Construimos uma MT $M10$ que reconheça A_{TM}

```
M10 com a entrada <M,w>, onde M é uma MT e w é uma palavra, faz:
    1: Simule M com a entrada w
    2: Se M aceita w, aceite (M10 aceita <M,w>)
    3: Se M rejeita w, rejeite (M10 rejeita <M,w>)
```

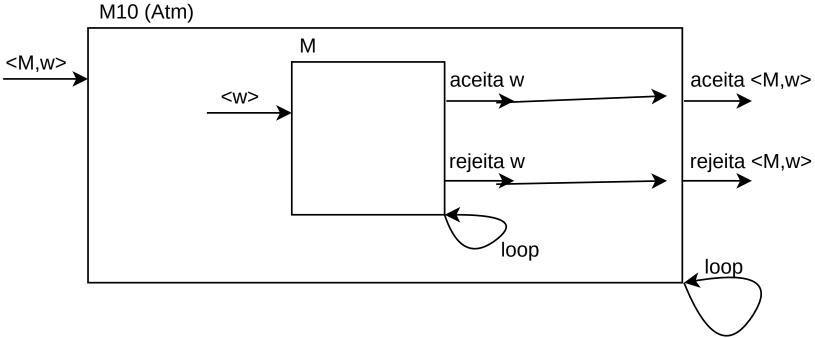
Note que $M10$ ficará em loop se M não aceitar nem rejeitar w

Problema 9: Testar se uma MT aceita determinada entrada w

Linguagem: $A_{TM} = \{< M, w > | M$ é uma MT e M aceita a palavra $w\}$

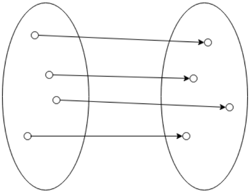
Teorema 10: A_{TM} é Turing-reconhecível

Prova: prova por construção. Construimos uma MT $M10$ que reconheça A_{TM}



Método da Diagonalização de Georg Cantor

Antes de mostrar que A_{TM} é indecidível, vamos aprender o método da diagonalização de Georg Cantor



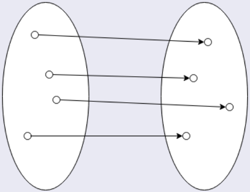
Método da Diagonalização de Georg Cantor

Antes de mostrar que A_{TM} é indecidível, vamos aprender o método da diagonalização de Georg Cantor

- Testar se dois conjuntos infinitos possuem o mesmo tamanho
- Provas por meio de geração de paradoxos

Exemplo 1: O conjunto de números naturais pares possui o mesmo tamanho que o conjunto dos números naturais?

Dois conjuntos possuem o **mesmo tamanho** se é possível parear os elementos dos dois conjuntos por meio de uma função de correspondência



Método da Diagonalização de Georg Cantor

Vamos provar que o conjunto de números naturais pares $\{2, 4, 6, ...\}$ possui o mesmo tamanho que o conjunto dos números naturais $\{1, 2, 3, ...\}$

Método da Diagonalização de Georg Cantor

Vamos provar que o conjunto de números naturais pares $\{2, 4, 6, ...\}$ possui o mesmo tamanho que o conjunto dos números naturais $\{1, 2, 3, ...\}$

n	f(n)
1	2
2	4
3	6
4	8

Método da Diagonalização de Georg Cantor

Vamos provar que o conjunto de números naturais pares $\{2, 4, 6, ...\}$ possui o mesmo tamanho que o conjunto dos números naturais $\{1, 2, 3, ...\}$

n	f(n)
1	2
2	4
3	6
4	8

A função acima é $f(n) = 2n$, que certamente é uma função correspondência

Método da Diagonalização de Georg Cantor

Vamos provar que o conjunto de números naturais pares $\{2, 4, 6, ...\}$ possui o mesmo tamanho que o conjunto dos números naturais $\{1, 2, 3, ...\}$

n	f(n)
1	2
2	4
3	6
4	8

A função acima é $f(n) = 2n$, que certamente é uma função correspondência

Assim, podemos afirmar que o conjunto de números naturais pares possui o mesmo tamanho que o conjunto dos números naturais

Método da Diagonalização de Georg Cantor

Um conjunto A é dito **contável** se ele é finito ou tem o mesmo tamanho que o conjunto dos números naturais $\mathbb{N}$

Método da Diagonalização de Georg Cantor

Um conjunto A é dito **contável** se ele é finito ou tem o mesmo tamanho que o conjunto dos números naturais $\mathbb{N}$

Seja $\mathbb{Q}$ o conjunto dos números racionais $\mathbb{Q} = \{\frac{m}{n} | m, n \in \mathbb{N}\}$

Método da Diagonalização de Georg Cantor

Um conjunto A é dito **contável** se ele é finito ou tem o mesmo tamanho que o conjunto dos números naturais $\mathbb{N}$

Seja $\mathbb{Q}$ o conjunto dos números racionais $\mathbb{Q} = \{\frac{m}{n} | m, n \in \mathbb{N}\}$

$\mathbb{Q}$ é contável?

Método da Diagonalização de Georg Cantor

Um conjunto A é dito **contável** se ele é finito ou tem o mesmo tamanho que o conjunto dos números naturais $\mathbb{N}$

Seja $\mathbb{Q}$ o conjunto dos números racionais $\mathbb{Q} = \{\frac{m}{n} | m, n \in \mathbb{N}\}$

$\mathbb{Q}$ é contável?

n	f(n)
1	1/1
2	1/2
3	1/3
4	1/4
5	1/5

Método da Diagonalização de Georg Cantor

Um conjunto A é dito **contável** se ele é finito ou tem o mesmo tamanho que o conjunto dos números naturais $\mathbb{N}$

Seja $\mathbb{Q}$ o conjunto dos números racionais $\mathbb{Q} = \{\frac{m}{n} | m, n \in \mathbb{N}\}$

$\mathbb{Q}$ é contável?

n	f(n)
1	1/1
2	1/2
3	1/3
4	1/4
5	1/5

- Quando irá chegar em 2/1?

Método da Diagonalização de Georg Cantor

Um conjunto A é dito **contável** se ele é finito ou tem o mesmo tamanho que o conjunto dos números naturais $\mathbb{N}$

Seja $\mathbb{Q}$ o conjunto dos números racionais $\mathbb{Q} = \{\frac{m}{n} | m, n \in \mathbb{N}\}$

$\mathbb{Q}$ é contável?

	1	**2**	**3**	**4**	**5**
1	1/1	1/2	1/3	1/4	1/5
2	2/1	2/2	2/3	2/4	2/5
3	3/1	3/2	3/3	3/4	3/5
4	4/1	4/2	4/3	4/4	4/5
5	5/1	5/2	5/3	5/4	5/5

Método da Diagonalização de Georg Cantor

Um conjunto A é dito **contável** se ele é finito ou tem o mesmo tamanho que o conjunto dos números naturais $\mathbb{N}$

Seja $\mathbb{Q}$ o conjunto dos números racionais $\mathbb{Q} = \{\frac{m}{n} | m, n \in \mathbb{N}\}$

$\mathbb{Q}$ é contável?

	1	**2**	**3**	**4**	**5**
1	1/1	1/2	1/3	1/4	1/5
2	2/1	2/2	2/3	2/4	2/5
3	3/1	3/2	3/3	3/4	3/5
4	4/1	4/2	4/3	4/4	4/5
5	5/1	5/2	5/3	5/4	5/5

Método da Diagonalização de Georg Cantor

Um conjunto A é dito **contável** se ele é finito ou tem o mesmo tamanho que o conjunto dos números naturais $\mathbb{N}$

Seja $\mathbb{Q}$ o conjunto dos números racionais $\mathbb{Q} = \{\frac{m}{n} | m, n \in \mathbb{N}\}$

$\mathbb{Q}$ é contável?

	1	**2**	**3**	**4**	**5**
1	1/1	1/2	1/3	1/4	1/5
2	2/1	2/2	2/3	2/4	2/5
3	3/1	3/2	3/3	3/4	3/5
4	4/1	4/2	4/3	4/4	4/5
5	5/1	5/2	5/3	5/4	5/5

Método da Diagonalização de Georg Cantor

Um conjunto A é dito **contável** se ele é finito ou tem o mesmo tamanho que o conjunto dos números naturais $\mathbb{N}$

Seja $\mathbb{Q}$ o conjunto dos números racionais $\mathbb{Q} = \{\frac{m}{n} | m, n \in \mathbb{N}\}$

$\mathbb{Q}$ é contável?

	1	**2**	**3**	**4**	**5**
1	1/1	1/2	1/3	1/4	1/5
2	2/1	2/2	2/3	2/4	2/5
3	3/1	3/2	3/3	3/4	3/5
4	4/1	4/2	4/3	4/4	4/5
5	5/1	5/2	5/3	5/4	5/5

Método da Diagonalização de Georg Cantor

Um conjunto A é dito **contável** se ele é finito ou tem o mesmo tamanho que o conjunto dos números naturais $\mathbb{N}$

Seja $\mathbb{Q}$ o conjunto dos números racionais $\mathbb{Q} = \{\frac{m}{n} | m, n \in \mathbb{N}\}$

$\mathbb{Q}$ é contável?

	1	**2**	**3**	**4**	**5**
1	1/1	1/2	1/3	1/4	1/5
2	2/1	2/2	2/3	2/4	2/5
3	3/1	3/2	3/3	3/4	3/5
4	4/1	4/2	4/3	4/4	4/5
5	5/1	5/2	5/3	5/4	5/5

Método da Diagonalização de Georg Cantor

Um conjunto A é dito **contável** se ele é finito ou tem o mesmo tamanho que o conjunto dos números naturais $\mathbb{N}$

Seja $\mathbb{Q}$ o conjunto dos números racionais $\mathbb{Q} = \{\frac{m}{n} | m, n \in \mathbb{N}\}$

$\mathbb{Q}$ é contável?

	1	**2**	**3**	**4**	**5**
1	1/1	1/2	1/3	1/4	1/5
2	2/1	2/2	2/3	2/4	2/5
3	3/1	3/2	3/3	3/4	3/5
4	4/1	4/2	4/3	4/4	4/5
5	5/1	5/2	5/3	5/4	5/5

n	f(n)
1	1/1
2	2/1
3	1/2
4	3/1
5	1/3
6	4/1
7	3/2

Método da Diagonalização de Georg Cantor

Um conjunto A é dito **contável** se ele é finito ou tem o mesmo tamanho que o conjunto dos números naturais $\mathbb{N}$

Seja $\mathbb{Q}$ o conjunto dos números racionais $\mathbb{Q} = \{\frac{m}{n} | m, n \in \mathbb{N}\}$

$\mathbb{Q}$ é contável?

- Sim! Provamos mostrando uma forma de fazer pareamento entre os números racionais e os números naturais.

Método da Diagonalização de Georg Cantor

Um conjunto A é dito **incontável** (ou não contável) se ele é infinito e não há uma correspondência de seus elementos com o conjunto do números naturais $\mathbb{N}$

O conjunto dos números reais $\mathbb{R}$ é contável?

- O conjunto dos números reais $\mathbb{R}$ não é contável

Método da Diagonalização de Georg Cantor

Um conjunto A é dito **incontável** (ou não contável) se ele é infinito e não há uma correspondência de seus elementos com o conjunto do números naturais $\mathbb{N}$

O conjunto dos números reais $\mathbb{R}$ é contável?

- O conjunto dos números reais $\mathbb{R}$ não é contável
- Mostraremos que não há uma correspondência com os números naturais $\mathbb{N}$

Método da Diagonalização de Georg Cantor

Um conjunto A é dito **incontável** (ou não contável) se ele é infinito e não há uma correspondência de seus elementos com o conjunto do números naturais $\mathbb{N}$

O conjunto dos números reais $\mathbb{R}$ é contável?

- O conjunto dos números reais $\mathbb{R}$ não é contável
- Mostraremos que não há uma correspondência com os números naturais $\mathbb{N}$
- A prova é por contradição

Método da Diagonalização de Georg Cantor

Um conjunto A é dito **incontável** (ou não contável) se ele é infinito e não há uma correspondência de seus elementos com o conjunto do números naturais $\mathbb{N}$

O conjunto dos números reais $\mathbb{R}$ é contável?

- O conjunto dos números reais $\mathbb{R}$ não é contável
- Mostraremos que não há uma correspondência com os números naturais $\mathbb{N}$
- A prova é por contradição
- Suponha que $\mathbb{R}$ é contável

Método da Diagonalização de Georg Cantor

Um conjunto A é dito **incontável** (ou não contável) se ele é infinito e não há uma correspondência de seus elementos com o conjunto do números naturais $\mathbb{N}$

O conjunto dos números reais $\mathbb{R}$ é contável?

- O conjunto dos números reais $\mathbb{R}$ não é contável
- Mostraremos que não há uma correspondência com os números naturais $\mathbb{N}$
- A prova é por contradição
- Suponha que $\mathbb{R}$ é contável
- Agora mostramos que existe um número real x que não é pareado com nenhum número natural

Método da Diagonalização de Georg Cantor

Um conjunto A é dito **incontável** (ou não contável) se ele é infinito e não há uma correspondência de seus elementos com o conjunto do números naturais $\mathbb{N}$

O conjunto dos números reais $\mathbb{R}$ é contável?

- O conjunto dos números reais $\mathbb{R}$ não é contável
- Mostraremos que não há uma correspondência com os números naturais $\mathbb{N}$
- A prova é por contradição
- Suponha que $\mathbb{R}$ é contável
- Agora mostramos que existe um número real x que não é pareado com nenhum número natural
- Este valor x é construído a partir de uma suposta correspondência entre $\mathbb{R}$ e $\mathbb{N}$

Método da Diagonalização de Georg Cantor

Um conjunto A é dito **incontável** (ou não contável) se ele é infinito e não há uma correspondência de seus elementos com o conjunto do números naturais $\mathbb{N}$

O conjunto dos números reais $\mathbb{R}$ é contável?

- Seja f a função que faz a correspondência entre qualquer natural n com algum real $f(n)$

Método da Diagonalização de Georg Cantor

Um conjunto A é dito **incontável** (ou não contável) se ele é infinito e não há uma correspondência de seus elementos com o conjunto do números naturais $\mathbb{N}$

O conjunto dos números reais $\mathbb{R}$ é contável?

- Seja f a função que faz a correspondência entre qualquer natural n com algum real $f(n)$
- O objetivo é mostrar que $x \neq f(n)$ para qualquer n

Método da Diagonalização de Georg Cantor

Um conjunto A é dito **incontável** (ou não contável) se ele é infinito e não há uma correspondência de seus elementos com o conjunto do números naturais $\mathbb{N}$

O conjunto dos números reais $\mathbb{R}$ é contável?

- Seja f a função que faz a correspondência entre qualquer natural n com algum real $f(n)$
- O objetivo é mostrar que $x \neq f(n)$ para qualquer n
- x é construído como sendo 0. e cada dígito decimal (após o .) é diferente de seu correspondente na mesma posição, ou seja, o i-ésimo dígito de x é diferente do i-ésimo dígito do correspondente do i-ésimo natural

Método da Diagonalização de Georg Cantor

Um conjunto A é dito **incontável** (ou não contável) se ele é infinito e não há uma correspondência de seus elementos com o conjunto do números naturais $\mathbb{N}$

O conjunto dos números reais $\mathbb{R}$ é contável?

- Seja f a função que faz a correspondência entre qualquer natural n com algum real $f(n)$
- O objetivo é mostrar que $x \neq f(n)$ para qualquer n
- x é construído como sendo 0. e cada dígito decimal (após o .) é diferente de seu correspondente na mesma posição, ou seja, o i-ésimo dígito de x é diferente do i-ésimo dígito do correspondente do i-ésimo natural
- Ao construir x, evitaremos também os dígitos 0 e 9, visto que no infinito $0.199999... = 0.20000...$

Método da Diagonalização de Georg Cantor

Um conjunto A é dito **incontável** (ou não contável) se ele é infinito e não há uma correspondência de seus elementos com o conjunto do números naturais $\mathbb{N}$

O conjunto dos números reais $\mathbb{R}$ é contável?

$\mathbb{N}$ n	$\mathbb{R}$ f(n)
1	1.00000000000...
2	37.3724932479...
3	8.32176413156...
4	0.48729834771...
5	913.312837128...
6	3.31383479865...
7	5.31712878156...

$x = 0.$

Método da Diagonalização de Georg Cantor

Um conjunto A é dito **incontável** (ou não contável) se ele é infinito e não há uma correspondência de seus elementos com o conjunto do números naturais $\mathbb{N}$

O conjunto dos números reais $\mathbb{R}$ é contável?

$\mathbb{N}$ n	$\mathbb{R}$ f(n)
1	$1.\underline{0}000000000...$
2	37.3724932479...
3	8.32176413156...
4	0.48729834771...
5	913.312837128...
6	3.31383479865...
7	5.31712878156...

x = 0.1

Método da Diagonalização de Georg Cantor

Um conjunto A é dito **incontável** (ou não contável) se ele é infinito e não há uma correspondência de seus elementos com o conjunto do números naturais $\mathbb{N}$

O conjunto dos números reais $\mathbb{R}$ é contável?

$\mathbb{N}$ n	$\mathbb{R}$ f(n)
1	$1.\underline{\mathbf{0}}000000000\ldots$
2	$37.3\underline{\mathbf{7}}24932479\ldots$
3	8.32176413156...
4	0.48729834771...
5	913.312837128...
6	3.31383479865...
7	5.31712878156...

$x = 0.18$

Método da Diagonalização de Georg Cantor

Um conjunto A é dito **incontável** (ou não contável) se ele é infinito e não há uma correspondência de seus elementos com o conjunto do números naturais $\mathbb{N}$

O conjunto dos números reais $\mathbb{R}$ é contável?

$\mathbb{N}$ n	$\mathbb{R}$ f(n)
1	1.$\underline{\mathbf{0}}$000000000...
2	37.3$\underline{\mathbf{7}}$24932479...
3	8.32$\underline{\mathbf{1}}$76413156...
4	0.48729834771...
5	913.312837128...
6	3.31383479865...
7	5.31712878156...

$x = 0.182$

Método da Diagonalização de Georg Cantor

Um conjunto A é dito **incontável** (ou não contável) se ele é infinito e não há uma correspondência de seus elementos com o conjunto do números naturais $\mathbb{N}$

O conjunto dos números reais $\mathbb{R}$ é contável?

$\mathbb{N}$ n	$\mathbb{R}$ f(n)
1	1.$\underline{\mathbf{0}}$0000000000...
2	37.3$\underline{\mathbf{7}}$24932479...
3	8.32$\underline{\mathbf{1}}$76413156...
4	0.487$\underline{\mathbf{2}}$9834771...
5	913.312837128...
6	3.31383479865...
7	5.31712878156...

x = 0.1823

Método da Diagonalização de Georg Cantor

Um conjunto A é dito **incontável** (ou não contável) se ele é infinito e não há uma correspondência de seus elementos com o conjunto do números naturais $\mathbb{N}$

O conjunto dos números reais $\mathbb{R}$ é contável?

$\mathbb{N}$ n	$\mathbb{R}$ f(n)
1	$1.\underline{\mathbf{0}}000000000...$
2	$37.3\underline{\mathbf{7}}24932479...$
3	$8.32\underline{\mathbf{1}}76413156...$
4	$0.487\underline{\mathbf{2}}9834771...$
5	$913.3128\underline{\mathbf{3}}7128...$
6	3.31383479865...
7	5.31712878156...

x = 0.18234

Método da Diagonalização de Georg Cantor

Um conjunto A é dito **incontável** (ou não contável) se ele é infinito e não há uma correspondência de seus elementos com o conjunto do números naturais $\mathbb{N}$

O conjunto dos números reais $\mathbb{R}$ é contável?

$\mathbb{N}$ n	$\mathbb{R}$ f(n)
1	$1.\underline{\mathbf{0}}000000000...$
2	$37.3\underline{\mathbf{7}}24932479...$
3	$8.32\underline{\mathbf{1}}76413156...$
4	$0.487\underline{\mathbf{2}}9834771...$
5	$913.3128\underline{\mathbf{3}}7128...$
6	$3.31383\underline{\mathbf{4}}79865...$
7	5.31712878156...

$x = 0.182345$

Método da Diagonalização de Georg Cantor

Um conjunto A é dito **incontável** (ou não contável) se ele é infinito e não há uma correspondência de seus elementos com o conjunto do números naturais $\mathbb{N}$

O conjunto dos números reais $\mathbb{R}$ é contável?

$\mathbb{N}$ n	$\mathbb{R}$ f(n)
1	$1.\underline{\mathbf{0}}0000000000\ldots$
2	$37.3\underline{\mathbf{7}}24932479\ldots$
3	$8.32\underline{\mathbf{1}}76413156\ldots$
4	$0.487\underline{\mathbf{2}}9834771\ldots$
5	$913.3128\underline{\mathbf{3}}7128\ldots$
6	$3.31383\underline{\mathbf{4}}79865\ldots$
7	$5.317128\underline{\mathbf{7}}8156\ldots$

$x = 0.1823456\ldots$

Método da Diagonalização de Georg Cantor

Um conjunto A é dito **incontável** (ou não contável) se ele é infinito e não há uma correspondência de seus elementos com o conjunto do números naturais $\mathbb{N}$

O conjunto dos números reais $\mathbb{R}$ é contável?

$\mathbb{N}$ n	$\mathbb{R}$ f(n)
1	$1.\underline{\mathbf{0}}000000000...$
2	$37.3\underline{\mathbf{7}}24932479...$
3	$8.32\underline{\mathbf{1}}76413156...$
4	$0.487\underline{\mathbf{2}}9834771...$
5	$913.3128\underline{\mathbf{3}}7128...$
6	$3.31383\underline{\mathbf{4}}79865...$
7	$5.317128\underline{\mathbf{7}}8156...$
k	$......................\underline{\mathbf{k}}...$

$x = 0.1823456...k'$, onde $k' \neq k$

Método da Diagonalização de Georg Cantor

Um conjunto A é dito **incontável** (ou não contável) se ele é infinito e não há uma correspondência de seus elementos com o conjunto do números naturais $\mathbb{N}$

O conjunto dos números reais $\mathbb{R}$ é contável?

$\mathbb{N}$ n	$\mathbb{R}$ f(n)
1	$1.\underline{\mathbf{0}}000000000...$
2	$37.3\underline{\mathbf{7}}24932479...$
3	$8.32\underline{\mathbf{1}}76413156...$
4	$0.487\underline{\mathbf{2}}9834771...$
5	$913.3128\underline{\mathbf{3}}7128...$
6	$3.31383\underline{\mathbf{4}}79865...$
7	$5.317128\underline{\mathbf{7}}8156...$
k	$.....................\underline{\mathbf{k}}...$

x $= 0.1823456...k'$, onde $k' \neq k$

Note que independentemente de qual natural k for escolhido como correspondente de x, x nunca será seu correspondente, pois o k-ésimo dígito de x será diferente de $f(k)$

Método da Diagonalização de Georg Cantor

Um conjunto A é dito **incontável** (ou não contável) se ele é infinito e não há uma correspondência de seus elementos com o conjunto do números naturais $\mathbb{N}$

O conjunto dos números reais $\mathbb{R}$ é contável?

$\mathbb{N}$ n	$\mathbb{R}$ f(n)
1	1.$\underline{\mathbf{0}}$0000000000...
2	37.3$\underline{\mathbf{7}}$24932479...
3	8.32$\underline{\mathbf{1}}$76413156...
4	0.487$\underline{\mathbf{2}}$9834771...
5	913.3128$\underline{\mathbf{3}}$7128...
6	3.31383$\underline{\mathbf{4}}$79865...
7	5.317128$\underline{\mathbf{7}}$8156...
k	.......................$\underline{\mathbf{k}}$...

x $= 0.1823456...k'$, onde $k' \neq k$

Note que independentemente de qual natural k for escolhido como correspondente de x, x nunca será seu correspondente, pois o k-ésimo dígito de x será diferente de $f(k)$

Assim, não há uma correspondência válida para x e então não é possível criar qualquer correspondência entre $\mathbb{N}$ e $\mathbb{R}$

Método da Diagonalização de Georg Cantor

Teorema: O conjunto de Máquinas de Turing é contável

Método da Diagonalização de Georg Cantor

Teorema: O conjunto de Máquinas de Turing é contável

Prova: por construção

Teorema: O conjunto de Máquinas de Turing é contável

Prova: por construção

- Note que o conjunto de palavras sobre algum alfabeto é sempre contável, visto que há uma correspondência entre $\mathbb{N}$ e Σ^*

Método da Diagonalização de Georg Cantor

Teorema: O conjunto de Máquinas de Turing é contável

Prova: por construção

- Note que o conjunto de palavras sobre algum alfabeto é sempre contável, visto que há uma correspondência entre $\mathbb{N}$ e Σ^*
- Podemos parear todas as palavras com 0 símbolos, depois 1 símbolo, depois $2, 3, 4, n$ símbolos, visto que há sempre um conjunto finito de palavras para cada tamanho.

Método da Diagonalização de Georg Cantor

Teorema: O conjunto de Máquinas de Turing é contável

Prova: por construção

- Note que o conjunto de palavras sobre algum alfabeto é sempre contável, visto que há uma correspondência entre $\mathbb{N}$ e Σ^*
- Podemos parear todas as palavras com 0 símbolos, depois 1 símbolo, depois $2, 3, 4, n$ símbolos, visto que há sempre um conjunto finito de palavras para cada tamanho.
- Exemplo: $\Sigma = \{0, 1\}$

$\mathbb{N}$ n	Σ^* f(n)
1	ε
2	0
3	1
4	00
5	01
6	10
7	11

Método da Diagonalização de Georg Cantor

Teorema: O conjunto de Máquinas de Turing é contável

Prova: por construção

- Como uma MT pode ser descrita por meio de símbolos, então o conjunto de todas as MT também será contável, visto que até mesmo nem todas as palavras são representações válidas de MT.

Método da Diagonalização de Georg Cantor

Teorema: O conjunto de Máquinas de Turing é contável

Prova: por construção

- Como uma MT pode ser descrita por meio de símbolos, então o conjunto de todas as MT também será contável, visto que até mesmo nem todas as palavras são representações válidas de MT.

$\mathbb{N}$ n	Σ^* f(n)
1	1
2	11
3	000
4	101
5	1101
6	11110
7	1110101

Método da Diagonalização de Georg Cantor

Teorema: Algumas linguagens não são Turing-reconhecíveis

Prova: por construção

- Primeiramente, mostraremos que o conjunto de todas as sequências binárias $\mathbb{B}$ infinitas são incontáveis

Método da Diagonalização de Georg Cantor

Teorema: Algumas linguagens não são Turing-reconhecíveis

Prova: por construção

- Primeiramente, mostraremos que o conjunto de todas as sequências binárias $\mathbb{B}$ infinitas são incontáveis
- A ideia da prova é a mesma para os números reais

Método da Diagonalização de Georg Cantor

Teorema: Algumas linguagens não são Turing-reconhecíveis

Prova: por construção

- Primeiramente, mostraremos que o conjunto de todas as sequências binárias $\mathbb{B}$ infinitas são incontáveis
- A ideia da prova é a mesma para os números reais

$\mathbb{N}$ n	$\mathbb{B}$ f(n)
1	<u>**0**</u>0000000000...
2	1<u>**1**</u>011101010...
3	10<u>**1**</u>00011011...
4	110<u>**0**</u>1110111...
5	0110<u>**1**</u>101001...
6	01010<u>**1**</u>10101...
7	111000<u>**0**</u>1111...
k	..................<u>**k**</u>...

x = 1001001...k', onde $k' \neq k$

Método da Diagonalização de Georg Cantor

Teorema: Algumas linguagens não são Turing-reconhecíveis

Prova: por construção

- Primeiramente, mostraremos que o conjunto de todas as sequências binárias $\mathbb{B}$ infinitas são incontáveis
- A ideia da prova é a mesma para os números reais

$\mathbb{N}$ n	$\mathbb{B}$ f(n)
1	<u>**0**</u>0000000000...
2	1<u>**1**</u>011101010...
3	10<u>**1**</u>00011011...
4	110<u>**0**</u>1110111...
5	0110<u>**1**</u>101001...
6	01010<u>**1**</u>10101...
7	111000<u>**0**</u>1111...
k	.................<u>**k**</u>...

x $=$ 1001001...k', onde $k' \neq k$

Note que independentemente de qual natural k for escolhido como correspondente de x, x nunca será seu correspondente, pois o k-ésimo dígito de x será diferente de $f(k)$

Método da Diagonalização de Georg Cantor

Teorema: Algumas linguagens não são Turing-reconhecíveis

Prova: por construção

- Primeiramente, mostraremos que o conjunto de todas as sequências binárias $\mathbb{B}$ infinitas são incontáveis
- A ideia da prova é a mesma para os números reais

$\mathbb{N}$ n	$\mathbb{B}$ f(n)
1	<u>**0**</u>0000000000...
2	1<u>**1**</u>011101010...
3	10<u>**1**</u>00011011...
4	110<u>**0**</u>1110111...
5	0110<u>**1**</u>101001...
6	01010<u>**1**</u>10101...
7	111000<u>**0**</u>1111...
k	....................<u>**k**</u>...

x $=$ 1001001...k', onde $k' \neq k$

Note que independentemente de qual natural k for escolhido como correspondente de x, x nunca será seu correspondente, pois o k-ésimo dígito de x será diferente de $f(k)$

Assim, não há uma correspondência válida para x e então não é possível criar qualquer correspondência entre $\mathbb{N}$ e $\mathbb{B}$

Método da Diagonalização de Georg Cantor

Teorema: Algumas linguagens não são Turing-reconhecíveis

Prova: por construção

- Agora seja $\mathbb{L}$ o conjunto de todas as linguagens sobre Σ

Método da Diagonalização de Georg Cantor

Teorema: Algumas linguagens não são Turing-reconhecíveis

Prova: por construção

- Agora seja $\mathbb{L}$ o conjunto de todas as linguagens sobre Σ
- Mostraremos que $\mathbb{L}$ é incontável por meio de uma correspondência com $\mathbb{B}$

Método da Diagonalização de Georg Cantor

Teorema: Algumas linguagens não são Turing-reconhecíveis

Prova: por construção

- Agora seja $\mathbb{L}$ o conjunto de todas as linguagens sobre Σ
- Mostraremos que $\mathbb{L}$ é incontável por meio de uma correspondência com $\mathbb{B}$
- Uma linguagem pode ser dada por meio de uma sequência infinita binária na forma:

Σ^*	ε	0	1	01	10	00	11	...
L		0		01		00		...
B_L	0	1	0	1	0	1	0	...

Método da Diagonalização de Georg Cantor

Teorema: Algumas linguagens não são Turing-reconhecíveis

Prova: por construção

- Agora seja $\mathbb{L}$ o conjunto de todas as linguagens sobre Σ
- Mostraremos que $\mathbb{L}$ é incontável por meio de uma correspondência com $\mathbb{B}$
- Uma linguagem pode ser dada por meio de uma sequência infinita binária na forma:

Σ^*	ε	0	1	01	10	00	11	...
L		0		01		00		...
B_L	0	1	0	1	0	1	0	...

- Cada posição de $B_L = 0101010...$ indica se a palavra pertence ou não à L

Método da Diagonalização de Georg Cantor

Teorema: Algumas linguagens não são Turing-reconhecíveis

Prova: por construção

- Agora seja $\mathbb{L}$ o conjunto de todas as linguagens sobre Σ
- Mostraremos que $\mathbb{L}$ é incontável por meio de uma correspondência com $\mathbb{B}$
- Uma linguagem pode ser dada por meio de uma sequência infinita binária na forma:

Σ^*	ε	0	1	01	10	00	11	...
L		0		01		00		...
B_L	0	1	0	1	0	1	0	...

- Cada posição de $B_L = 0101010...$ indica se a palavra pertence ou não à L
- Note que cada linguagem possui exatamente uma única sequência binária infinita

Método da Diagonalização de Georg Cantor

Teorema: Algumas linguagens não são Turing-reconhecíveis

Prova: por construção

- Agora seja $\mathbb{L}$ o conjunto de todas as linguagens sobre Σ
- Mostraremos que $\mathbb{L}$ é incontável por meio de uma correspondência com $\mathbb{B}$
- Uma linguagem pode ser dada por meio de uma sequência infinita binária na forma:

Σ^*	ε	0	1	01	10	00	11	...
L		0		01		00		...
B_L	0	1	0	1	0	1	0	...

- Cada posição de $B_L = 0101010...$ indica se a palavra pertence ou não à L
- Note que cada linguagem possui exatamente uma única sequência binária infinita
- Note também que cada sequência binária infinita está associada a uma única linguagem

Método da Diagonalização de Georg Cantor

Teorema: Algumas linguagens não são Turing-reconhecíveis

Prova: por construção

- Assim, há uma correspondência entre $\mathbb{B}$ e $\mathbb{L}$ e como $\mathbb{B}$ é incontável, $\mathbb{L}$ é incontável

Método da Diagonalização de Georg Cantor

Teorema: Algumas linguagens não são Turing-reconhecíveis

Prova: por construção

- Assim, há uma correspondência entre $\mathbb{B}$ e $\mathbb{L}$ e como $\mathbb{B}$ é incontável, $\mathbb{L}$ é incontável
- Sabemos também que cada MT reconhece uma única linguagem e o conjunto das MT é contável, então o conjunto de linguagens reconhecidas pelas MT é contável

Método da Diagonalização de Georg Cantor

Teorema: Algumas linguagens não são Turing-reconhecíveis

Prova: por construção

- Assim, há uma correspondência entre $\mathbb{B}$ e $\mathbb{L}$ e como $\mathbb{B}$ é incontável, $\mathbb{L}$ é incontável
- Sabemos também que cada MT reconhece uma única linguagem e o conjunto das MT é contável, então o conjunto de linguagens reconhecidas pelas MT é contável
- Mas, se $\mathbb{L}$ é incontável, então certamente $\mathbb{L}$ apresenta linguagens não reconhecidas por nenhuma MT

Paradoxo do barbeiro: suponha que há uma cidade em que existe um único barbeiro

- O barbeiro só barbeia homens que não se barbeiam
- Alguns homens barbeiam a si próprios e outros vão ao barbeiro

Método da Diagonalização de Georg Cantor

Paradoxo do barbeiro: suponha que há uma cidade em que existe um único barbeiro

- O barbeiro só barbeia homens que não se barbeiam
- Alguns homens barbeiam a si próprios e outros vão ao barbeiro

Quem barbeia o barbeiro?

Método da Diagonalização de Georg Cantor

Paradoxo do barbeiro: suponha que há uma cidade em que existe um único barbeiro

- O barbeiro só barbeia homens que não se barbeiam
- Alguns homens barbeiam a si próprios e outros vão ao barbeiro

Quem barbeia o barbeiro?

	1	2	3	...
1	1			...
2		0		...
3			1	...
...				...
				...

Método da Diagonalização de Georg Cantor

Paradoxo do barbeiro: suponha que há uma cidade em que existe um único barbeiro

- O barbeiro só barbeia homens que não se barbeiam
- Alguns homens barbeiam a si próprios e outros vão ao barbeiro

Quem barbeia o barbeiro?

	1	2	3	...	B
1	1			...	
2		0		...	
3			1	...	
...				...	
B				...	

Método da Diagonalização de Georg Cantor

Paradoxo do barbeiro: suponha que há uma cidade em que existe um único barbeiro

- O barbeiro só barbeia homens que não se barbeiam
- Alguns homens barbeiam a si próprios e outros vão ao barbeiro

Quem barbeia o barbeiro?

	1	2	3	...	B
1	1			...	
2		0		...	
3			1	...	
...				...	
B	0	1	0	...	?

Método da Diagonalização de Georg Cantor

Paradoxo do barbeiro: suponha que há uma cidade em que existe um único barbeiro

- O barbeiro só barbeia homens que não se barbeiam
- Alguns homens barbeiam a si próprios e outros vão ao barbeiro

Quem barbeia o barbeiro?

	1	2	3	...	B
1	1			...	
2		0		...	
3			1	...	
...				...	
B	0	1	0	...	?

- Se ? $= 1$, então o barbeiro barbeia a sí próprio, mas então ? deveria ser 0.

Método da Diagonalização de Georg Cantor

Paradoxo do barbeiro: suponha que há uma cidade em que existe um único barbeiro

- O barbeiro só barbeia homens que não se barbeiam
- Alguns homens barbeiam a si próprios e outros vão ao barbeiro

Quem barbeia o barbeiro?

	1	2	3	...	B
1	1			...	
2		0		...	
3			1	...	
...				...	
B	0	1	0	...	?

- Se ? $= 1$, então o barbeiro barbeia a sí próprio, mas então ? deveria ser 0.
- Se ? $= 0$, então o barbeiro não se barbeia e deve ir ao barbeiro para se barbear, então ? deveria ser 1.

Método da Diagonalização de Georg Cantor

Paradoxo do barbeiro: suponha que há uma cidade em que existe um único barbeiro

- O barbeiro só barbeia homens que não se barbeiam
- Alguns homens barbeiam a si próprios e outros vão ao barbeiro

Quem barbeia o barbeiro?

	1	2	3	...	B
1	1			...	
2		0		...	
3			1	...	
...				...	
B	0	1	0	...	?

- Se ? = 1, então o barbeiro barbeia a sí próprio, mas então ? deveria ser 0.
- Se ? = 0, então o barbeiro não se barbeia e deve ir ao barbeiro para se barbear, então ? deveria ser 1. Paradoxo!

Problema 9: Testar se uma MT aceita determinada entrada w

Linguagem: $A_{TM} = \{< M, w > | M$ é uma MT e M aceita a palavra $w\}$

Problema 9: Testar se uma MT aceita determinada entrada w

Linguagem: $A_{TM} = \{< M, w > | M$ é uma MT e M aceita a palavra $w\}$

Teorema 9: A_{TM} é indecidível

Problema 9: Testar se uma MT aceita determinada entrada w

Linguagem: $A_{TM} = \{< M, w > | M$ é uma MT e M aceita a palavra $w\}$

Teorema 9: A_{TM} é indecidível

Prova: prova por contradição. Usamos diagonalização.

Problema 9: Testar se uma MT aceita determinada entrada w

Linguagem: $A_{TM} = \{< M, w > | M$ é uma MT e M aceita a palavra $w\}$

Teorema 9: A_{TM} é indecidível

Prova: prova por contradição. Usamos diagonalização.

Assuma que A_{TM} é decidível e H é um decisor para A_{TM}

```
H com a entrada <M,w>, onde M é uma MT e w uma palavra, faz:
    1: Simule M com a entrada w
    2: Se M aceita w, aceite (H aceita <M,w>)
    3: Se M rejeita w, rejeite (H rejeita <M,w>)
```

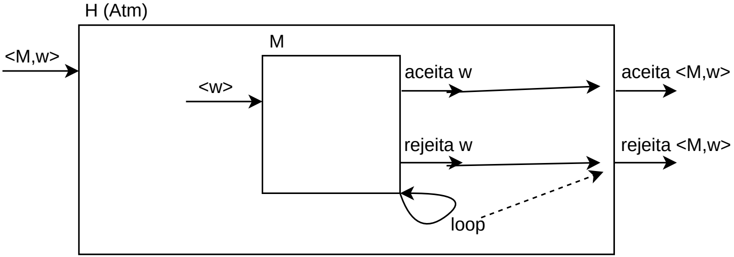
Problema 9: Testar se uma MT aceita determinada entrada w

Linguagem: $A_{TM} = \{< M, w > | M$ é uma MT e M aceita a palavra $w\}$

Teorema 9: A_{TM} é indecidível

Prova: prova por contradição. Usamos diagonalização.

Assuma que A_{TM} é decidível e H é um decisor para A_{TM}



Problema 9: Testar se uma MT aceita determinada entrada w

Linguagem: $A_{TM} = \{< M, w > | M$ é uma MT e M aceita a palavra $w\}$

Teorema 9: A_{TM} é indecidível

Prova: prova por contradição. Usamos diagonalização.

- Podemos então construir uma outra MT D que usa H como subrotina

Problema 9: Testar se uma MT aceita determinada entrada w

Linguagem: $A_{TM} = \{< M, w > | M$ é uma MT e M aceita a palavra $w\}$

Teorema 9: A_{TM} é indecidível

Prova: prova por contradição. Usamos diagonalização.

- Podemos então construir uma outra MT D que usa H como subrotina
- D recebe apenas uma descrição de MT como entrada $< M >$ e então simula a MT H passando como entrada $< M, < M >>$, ou seja, D quer saber se M aceita a própria descrição

Linguagens Indecidíveis

Problema 9: Testar se uma MT aceita determinada entrada w

Linguagem: $A_{TM} = \{< M, w > | M$ é uma MT e M aceita a palavra $w\}$

Teorema 9: A_{TM} é indecidível

Prova: prova por contradição. Usamos diagonalização.

- Podemos então construir uma outra MT D que usa H como subrotina
- D recebe apenas uma descrição de MT como entrada $< M >$ e então simula a MT H passando como entrada $< M, < M >>$, ou seja, D quer saber se M aceita a própria descrição
- Por fim, D inverte a resposta dada por H

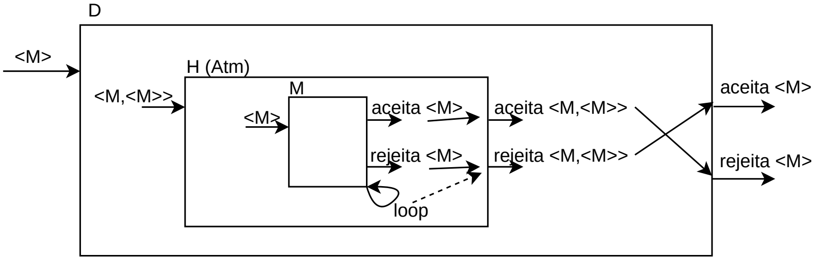
```
D com a entrada <M>, onde M é uma MT, faz:
    1: Simule H com a entrada <M,<M>>
    2: Se H aceita <M,<M>>, rejeite (D rejeita <M>)
    3: Se H rejeita <M,<M>>, aceite (D aceita <M>)
```

Problema 9: Testar se uma MT aceita determinada entrada w

Linguagem: $A_{TM} = \{< M, w > | M$ é uma MT e M aceita a palavra $w\}$

Teorema 9: A_{TM} é indecidível

```
D com a entrada <M>, onde M é uma MT, faz:
    1: Simule H com a entrada <M,<M>>
    2: Se H aceita <M,<M>>, rejeite (D rejeita <M>)
    3: Se H rejeita <M,<M>>, aceite (D aceita <M>)
```



Problema 9: Testar se uma MT aceita determinada entrada w

Linguagem: $A_{TM} = \{< M, w > | M$ é uma MT e M aceita a palavra $w\}$

Teorema 9: A_{TM} é indecidível

Comportamento de M_i com a entrada $< M_j >$

	$< M_1 >$	$< M_2 >$	$< M_3 >$	$< M_4 >$	...
M_1					...
M_2					...
M_3					...
M_4					...
...	...	...	...	...	...

Problema 9: Testar se uma MT aceita determinada entrada w

Linguagem: $A_{TM} = \{< M, w > | M$ é uma MT e M aceita a palavra $w\}$

Teorema 9: A_{TM} é indecidível

Comportamento de M_i com a entrada $< M_j >$

	$< M_1 >$	$< M_2 >$	$< M_3 >$	$< M_4 >$	...
M_1	a	r	a	l	...
M_2	a	l	r	a	...
M_3	a	r	r	l	...
M_4	l	a	l	a	...
...	...	...	...	...	...

Linguagens Indecidíveis

Problema 9: Testar se uma MT aceita determinada entrada w

Linguagem: $A_{TM} = \{< M, w > | M$ é uma MT e M aceita a palavra $w\}$

Teorema 9: A_{TM} é indecidível

Comportamento de M_i com a entrada $< M_j >$

	$< M_1 >$	$< M_2 >$	$< M_3 >$	$< M_4 >$	...
M_1	**a**	r	a	l	...
M_2	a	**l**	r	a	...
M_3	a	r	**r**	l	...
M_4	l	a	l	**a**	...
...	...	...	...	...	...

Problema 9: Testar se uma MT aceita determinada entrada w

Linguagem: $A_{TM} = \{< M, w > | M$ é uma MT e M aceita a palavra $w\}$

Teorema 9: A_{TM} é indecidível

Comportamento de H com a entrada $< M_i, < M_j >>$

H	$< M_1 >$	$< M_2 >$	$< M_3 >$	$< M_4 >$	...
M_1	**a**	r	a	r	...
M_2	a	**r**	r	a	...
M_3	a	r	**r**	r	...
M_4	r	a	r	**a**	...
...	...	...	...	...	...

Problema 9: Testar se uma MT aceita determinada entrada w

Linguagem: $A_{TM} = \{< M, w > | M$ é uma MT e M aceita a palavra $w\}$

Teorema 9: A_{TM} é indecidível

Comportamento de H com a entrada $< M_i, < M_j >>$

H	$< M_1 >$	$< M_2 >$	$< M_3 >$	$< M_4 >$	...
M_1	**a**	r	a	r	...
M_2	a	**r**	r	a	...
M_3	a	r	**r**	r	...
M_4	r	a	r	**a**	...
...	...	...	...	...	...
D	r	a	a	r	...

Problema 9: Testar se uma MT aceita determinada entrada w

Linguagem: $A_{TM} = \{< M, w > | M$ é uma MT e M aceita a palavra $w\}$

Teorema 9: A_{TM} é indecidível

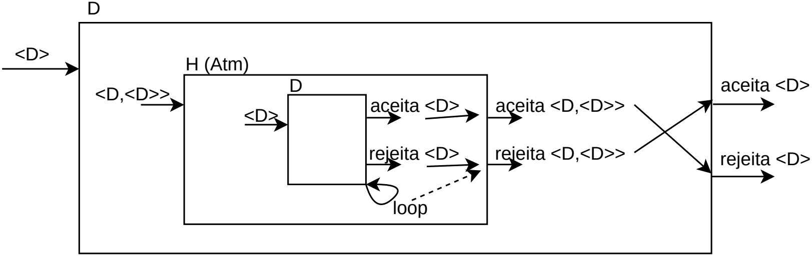
O que ocorre se passarmos $< D >$ como entrada para D?

Problema 9: Testar se uma MT aceita determinada entrada w

Linguagem: $A_{TM} = \{< M, w > | M$ é uma MT e M aceita a palavra $w\}$

Teorema 9: A_{TM} é indecidível

O que ocorre se passarmos $< D >$ como entrada para D?



Linguagens Indecidíveis

Problema 9: Testar se uma MT aceita determinada entrada w

Linguagem: $A_{TM} = \{< M, w > | M$ é uma MT e M aceita a palavra $w\}$

Teorema 9: A_{TM} é indecidível

O que ocorre se passarmos $< D >$ como entrada para D?

H	$< M_1 >$	$< M_2 >$	$< M_3 >$	$< M_4 >$	...	$< D >$
M_1	**a**	r	a	r	...	
M_2	a	**r**	r	a	...	
M_3	a	r	**r**	r	...	
M_4	r	a	r	**a**	...	
...	...	...	...	...	...	
D	r	a	a	r	...	**?**

Problema 9: Testar se uma MT aceita determinada entrada w

Linguagem: $A_{TM} = \{< M, w > | M$ é uma MT e M aceita a palavra $w\}$

Teorema 9: A_{TM} é indecidível

O que ocorre se passarmos $< D >$ como entrada para D?

H	$< M_1 >$	$< M_2 >$	$< M_3 >$	$< M_4 >$	...	$< D >$
M_1	**<u>a</u>**	r	a	r	...	
M_2	a	**<u>r</u>**	r	a	...	
M_3	a	r	**<u>r</u>**	r	...	
M_4	r	a	r	**<u>a</u>**	...	
...	...	...	...	...	...	
D	r	a	a	r	...	**<u>?</u>**

Se H é uma MT decisora, ela deve decidir para a entrada D

Problema 9: Testar se uma MT aceita determinada entrada w

Linguagem: $A_{TM} = \{< M, w > | M$ é uma MT e M aceita a palavra $w\}$

Teorema 9: A_{TM} é indecidível

Note que D com a entrada $< D >$ resulta em:

- Aceita se D não aceita $< D >$
- Rejeita se D aceita $< D >$

Problema 9: Testar se uma MT aceita determinada entrada w

Linguagem: $A_{TM} = \{< M, w > | M$ é uma MT e M aceita a palavra $w\}$

Teorema 9: A_{TM} é indecidível

Note que D com a entrada $< D >$ resulta em:

- Aceita se D não aceita $< D >$
- Rejeita se D aceita $< D >$

Temos um paradoxo!

Problema 9: Testar se uma MT aceita determinada entrada w

Linguagem: $A_{TM} = \{< M, w > | M$ é uma MT e M aceita a palavra $w\}$

Teorema 9: A_{TM} é indecidível

Note que D com a entrada $< D >$ resulta em:

- Aceita se D não aceita $< D >$
- Rejeita se D aceita $< D >$

Temos um paradoxo! Se D aceita $< D >$ $(? = a)$, então significa que D rejeita $< D >$ e então $? = r$.

Problema 9: Testar se uma MT aceita determinada entrada w

Linguagem: $A_{TM} = \{< M, w > | M$ é uma MT e M aceita a palavra $w\}$

Teorema 9: A_{TM} é indecidível

Note que D com a entrada $< D >$ resulta em:

- Aceita se D não aceita $< D >$
- Rejeita se D aceita $< D >$

Temos um paradoxo! Se D aceita $< D >$ ($? = a$), então significa que D rejeita $< D >$ e então $? = r$.

Não há uma linha para D na tabela de H, assim D não pode existir e nem mesmo H, pois se H é decisora, a linha para D deveria estar lá

Corolário: $\overline{A_{TM}}$ não é Turing-reconhecível

Prova:

Corolário: $\overline{A_{TM}}$ não é Turing-reconhecível

Prova:

- Sabemos que A_{TM} é Turing-reconhecível e também que A_{TM} é indecidível

Corolário: $\overline{A_{TM}}$ não é Turing-reconhecível

Prova:

- Sabemos que A_{TM} é Turing-reconhecível e também que A_{TM} é indecidível
- Se $\overline{A_{TM}}$ fosse Turing-reconhecível, então A_{TM} seria decidível e isso contraria o teorema 9, provado anteriormente

Definição: Dizemos que uma linguagem é co-Turing-reconhecível se ela é o complemento de uma linguagem Turing-reconhecível

Definição: Dizemos que uma linguagem é co-Turing-reconhecível se ela é o complemento de uma linguagem Turing-reconhecível

Teorema: Uma linguagem L é decidível se e somente se ela é Turing-reconhecível e co-Turing-reconhecível

Definição: Dizemos que uma linguagem é co-Turing-reconhecível se ela é o complemento de uma linguagem Turing-reconhecível

Teorema: Uma linguagem L é decidível se e somente se ela é Turing-reconhecível e co-Turing-reconhecível

Prova: por ser "se somente se"devemos provar os dois sentidos

Definição: Dizemos que uma linguagem é co-Turing-reconhecível se ela é o complemento de uma linguagem Turing-reconhecível

Teorema: Uma linguagem L é decidível se e somente se ela é Turing-reconhecível e co-Turing-reconhecível

Prova: por ser "se somente se"devemos provar os dois sentidos

1. Se L é uma linguagem decidível, então ela é Turing-reconhecível e co-Turing-reconhecível
2. Se L é Turing-reconhecível e co-Turing-reconhecível, então L é decidível

Lemma 1: Se L é uma linguagem decidível, então ela é Turing-reconhecível e co-Turing-reconhecível

Prova: por construção.

Lemma 1: Se L é uma linguagem decidível, então ela é Turing-reconhecível e co-Turing-reconhecível

Prova: por construção.

- Suponha que L é decidível

Lemma 1: Se L é uma linguagem decidível, então ela é Turing-reconhecível e co-Turing-reconhecível

Prova: por construção.

- Suponha que L é decidível
- Então há um decisor M que a decide

Lemma 1: Se L é uma linguagem decidível, então ela é Turing-reconhecível e co-Turing-reconhecível

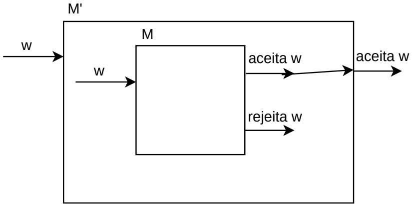
Prova: por construção.

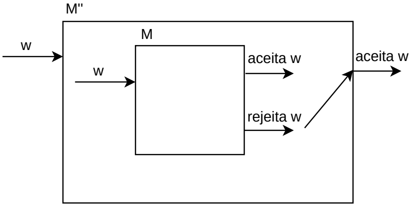
- Suponha que L é decidível
- Então há um decisor M que a decide
- Vamos construir reconhecedores para L e $\overline{L}$ usando M com subrotina, sendo eles M' e M'' respectivamente

Lemma 1: Se L é uma linguagem decidível, então ela é Turing-reconhecível e co-Turing-reconhecível

Prova: por construção.

- Suponha que L é decidível
- Então há um decisor M que a decide
- Vamos construir reconhecedores para L e $\overline{L}$ usando M com subrotina, sendo eles M' e M'' respectivamente





Lemma 2: Se L é Turing-reconhecível e co-Turing-reconhecível, então L é decidível

Prova: por construção.

Lemma 2: Se L é Turing-reconhecível e co-Turing-reconhecível, então L é decidível

Prova: por construção.

- Suponha que L é Turing-reconhecível e co-Turing-reconhecível

Lemma 2: Se L é Turing-reconhecível e co-Turing-reconhecível, então L é decidível

Prova: por construção.

- Suponha que L é Turing-reconhecível e co-Turing-reconhecível
- Então há reconhecedores tanto para L como para $\overline{L}$, sendo eles $M1$ e $M2$, respectivamente

Lemma 2: Se L é Turing-reconhecível e co-Turing-reconhecível, então L é decidível

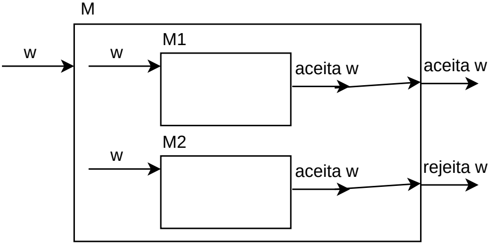
Prova: por construção.

- Suponha que L é Turing-reconhecível e co-Turing-reconhecível
- Então há reconhecedores tanto para L como para $\overline{L}$, sendo eles $M1$ e $M2$, respectivamente
- Vamos construir um decisor M para L que utilize $M1$ e $M2$ como subrotinas

Lemma 2: Se L é Turing-reconhecível e co-Turing-reconhecível, então L é decidível

Prova: por construção.

- Suponha que L é Turing-reconhecível e co-Turing-reconhecível
- Então há reconhecedores tanto para L como para $\overline{L}$, sendo eles $M1$ e $M2$, respectivamente
- Vamos construir um decisor M para L que utilize $M1$ e $M2$ como subrotinas



Conclusão

- Linguagens decidíveis
- Método da diagonalização
- Linguagens indecidíveis

Material de apoio

- Livro Sipser, Capítulo 4
- Livro Hopcroft, Capítulo 9