Linguagens Não-Regulares

Área de Conhecimento em Algoritmos e Teoria - DCC/UFMG

Fundamentos de Teoria da Computação

2021/1

Linguagens Não-Regulares: Introdução

- Os autômatos finitos podem reconhecer muitas linguagens úteis.
- Porém, estas máquinas não podem reconhecer todas as linguagens.

  Ou seja, existem linguagens não-regulares, que estão além do poder de reconhecimento dos autômatos finitos.
- A intuição por detrás da limitação dos autômatos finitos é que eles têm memória muito limitada e, portanto, "se perdem em contagens longas".

  Intuitivamente, qualquer linguagem cujas cadeias precisem satisfazer uma condição de contagem de símbolos complicada o suficiente não pode ser uma linguagem regular.
- Aqui vamos estudar **linguagens não-regulares**, usando a poderosa ferramenta do **Lema do Bombeamento**.

O Lema do Bombeamento para linguagens regulares

Lema do Bombeamento: Definição formal

- <u>**Lema**</u> **Lema do Bombeamento (LB).** Se A é uma linguagem regular, então existe um número p (o **comprimento de bombeamento**) tal que, se s é qualquer cadeia de A de comprimento no mínimo p, então s pode ser dividida em três partes,

$$s = xyz,$$

satisfazendo as seguintes condições:

1. para cada $i \geq 0$, $xy^iz \in A$,
2. $|y| > 0$, e
3. $|xy| \leq p$.

Demonstração. A demonstração completa é dada no livro-texto; aqui veremos sua essência.

Seja $M = (Q, \Sigma, \delta, q_1, F)$ um AFD que reconhece A.

Atribuímos ao comprimento de bombeamento p o total $|Q|$ de estados de M.

Primeiro note que se a linguagem não tem nenhuma cadeia com mais do que p símbolos, o lema vale por vacuidade.

Lema do Bombeamento: Definição formal

- **Demonstração.** (Continuação)

  Caso contrário, para qualquer cadeia $s \in A$ com mais que p símbolos, pelo menos um mesmo estado do autômato tem que ser visitado mais de uma vez. Isto acontece porque num AFD a cada símbolo lido um estado é visitado, e se há mais símbolos que estados o *Princípio da Casa dos Pombos* garante que pelo menos um estado é visitado mais de uma vez.

  Para ilustrar essa ideia, note que na figura abaixo o estado q_9 é visitado duas vezes ao se reconhecer a cadeia s que tem mais que $p = |Q|$ símbolos.

$$
\begin{array}{ccccccccccccccccccc}
s = & & s_1 & & s_2 & & s_3 & & s_4 & & s_5 & & s_6 & & \cdots & & s_n & \\
 & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\
 & q_1 & & q_3 & & q_{20} & & q_9 & & q_{17} & & q_9 & & q_6 & & q_{35} & & q_{13}
\end{array}
$$

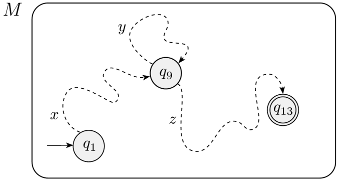
  Isso quer dizer que parte da cadeia s é reconhecida em um *loop* no AFD: a subcadeia visitada entre os estados que se repetem.

  No exemplo acima, os símbolos s_4 e s_5 são consumidos dentro do *loop*.

Lema do Bombeamento: Definição formal

- **Demonstração.** (Continuação)

  Isso quer dizer que a cadeia s pode ser quebrada em três partes $s = xyz$, em que y representa uma subcadeia não-vazia que é garantidamente consumida em um *loop*.



  Note que o fato de y ser não-vazia se reflete na Condição (2) do lema:

$$|y| > 0.$$

  (Mas note que já quanto às partes x e z não temos nenhuma garantia: elas podem ou não ser vazias, e podem ou não ter *loops* também.)

Lema do Bombeamento: Definição formal

- **Demonstração.** (Continuação)

  Note também que durante o reconhecimento da cadeia s, o *loop* y deve ser atingido e percorrido antes de ser ultrapassado o número de estados do autômato.

  Isto se reflete na Condição (3) do lema:

  $$|xy| \leq p.$$

  Logo, se o AFD M reconhece $s = xyz$, em que y é consumida em um *loop*, qualquer cadeia em que o mesmo *loop* de y seja usado um número qualquer de vezes também deve ser reconhecida por M (e, portanto, também pertence à linguagem A).

  Isto se reflete na Condição (1) do lema:

  $$\forall i \geq 0 : xy^i z \in A.$$

  E assim mostramos que todas as Condições (1), (2) e (3) do lema são satisfeitas para toda linguagem regular.

  $\square$

Lema do Bombeamento: Intuição

- Intuitivamente, o Lema do Bombeamento diz que AFDs "se perdem em contagens longas":

    1. Para qualquer cadeia grande o suficiente, o único jeito de o AFD aceitar a cadeia é fazendo pelo menos *loop*.
    2. Se um AFD reconhece uma cadeia passando por um *loop* uma vez, qualquer cadeia que passe pelo *loop* um número qualquer de vezes (e termine no mesmo estado final) também tem que ser aceita pelo AFD.

- Essa propriedade dos AFDs diz, intuitivamente, que linguagens regulares não podem ter cadeias que necessitem de contagem complexa de símbolos.

  Isto quer dizer que o LB pode ser usado para mostrar que uma linguagem <u>não é regular</u>.

Observações sobre o uso do Lema do Bombeamento

- Podemos usar o Lema do Bombeamento para mostrar, por contradição, que uma linguagem L não é regular:
  1. Assumimos que L seja regular.
  2. Demonstramos que L não satisfaz o LB.
  3. Concluímos que L não pode ser regular.
- O uso do LB pode parecer difícil de entender a princípio; as observações seguintes tentam explicar seu uso.

Observações sobre o uso do Lema do Bombeamento

- **Observação 1 sobre o LB:**

  O LB diz que *"Se uma linguagem L é regular, então existe uma constante p tal que para toda cadeia $s \in L$ tal que $|s| \geq p$, existe uma divisão da cadeia em $s = xyz$ para a qual as Condições (1), (2) e (3) do LB valem."*

  - Isto pode ser formalizado em lógica de predicados como:

    "Se uma linguagem L é regular, então

    $$\exists p \in \mathbb{N} : \forall s \in L : [\ (|s| \geq p) \rightarrow (\exists\, div(s) : cond_1 \wedge cond_2 \wedge cond_3)\ ]'' , \quad (\star)$$

    onde:

    - $div(s)$ é uma função que divide a cadeia s em uma concatenação xyz;
    - $cond_1$, $cond_2$ e $cond_3$ são as Condições (1), (2) e (3) do LB, respectivamente.

Observações sobre o uso do Lema do Bombeamento

- **Observação 2 sobre o LB:**

  A nossa demonstração por contradição parte do princípio de que a linguagem L é regular, mas nega a cláusula $(\star)$ de conclusão do LB.

  Relembrando suas aulas de lógica, note que a negação da cláusula $(\star)$ é:

  $$\forall p \in \mathbb{N} : \exists s \in L : [\ (|s| \geq p) \wedge (\forall\, div(s) : (cond_2 \wedge cond_3) \rightarrow \neg cond_1)\ ]\,.$$

  Ou seja, nossa demonstração por contradição

  1. assume que L seja regular,
  2. e demonstra que o LB falha para L ao mostrar que

     "para toda constante p, existe uma cadeia $s \in L$ tal que $|s| \geq p$ e, para qualquer divisão de s em xyz, se as Condições (2) e (3) do LB forem verdadeiras, a Condição (1) tem que necessariamente ser falsa. "

  Como o LB não pode falhar, a única conclusão da nossa demonstração é que L não pode ser regular!

Lema do Bombeamento: Como usar

- Baseados nas observações anteriores, podemos, usar o Lema do Bombeamento para mostrar, por contradição, que uma linguagem L não é regular da seguinte forma:

  1. Assuma que L seja regular.
  2. Pelo LB, o passo (1) acima garante que existe um comprimento p tal que toda cadeia $s \in L$ com comprimento maior que p possa ser bombeada.
  3. Agora, encontre uma cadeia $s \in L$ com comprimento maior que p que não possa ser bombeada, mostrando que para <u>qualquer divisão</u> de $s = xyz$ satisfazendo

     - a Condição (2) do LB: $|y| > 0$, e
     - a Condição (3) do LB: $|xy| \leq p$,

     existe pelo menos um valor de i tal que

     - $xy^iz \notin L$, o que fere a Condição (1) do LB.
  4. Como chegamos a uma contradição, pois o passo (3) contradiz o passo (2), a hipótese do passo (1) deve ser falsa, e L não pode ser uma linguagem regular.

Lema do Bombeamento: Exemplos

- $\boxed{\text{Exemplo 1}}$ Use o Lema do Bombeamento para mostrar que a linguagem $B = \{0^n 1^n \mid n \geq 0\}$ não é regular.

Demonstração.

Vamos demonstrar por contradição. Assuma que B seja regular, e que, portanto, ela satisfaça o Lema do Bombeamento.

Seja p o comprimento de bombeamento. Escolha s como a cadeia $0^p 1^p \in B$. Como $s \in B$ e $|s| \geq p$, o LB diz que se pode dividir s em três partes $s = xyz$, onde para qualquer $i \geq 0$, $xy^i z \in B$. Vamos considerar três casos que mostram que qualquer divisão de s torna este resultado impossível.

1. A cadeia y tem apenas 0s. Neste caso a cadeia $xyyz$ tem mais 0s que 1s, e não pode pertencer a B, o que contradiz a Condição (1) do LB.
2. A cadeia y tem apenas 1s. Neste caso a cadeia $xyyz$ tem mais 1s que 0s, e não pode pertencer a B, o que contradiz a Condição (1) do LB.
3. A cadeia y tem tanto 0s quanto 1s. Neste caso a cadeia $xyyz$ pode até ter o mesmo número de 0s e 1s, mas alguns 1s vêm antes de alguns 0s. Logo $xyyz$ não pode pertencer a B, o que contradiz a Condição (1) do LB. $\square$

Lema do Bombeamento: Exemplos

- $\boxed{\text{Exemplo 2}}$ Use o Lema do Bombeamento para mostrar que a linguagem $C = \{w \in \{0,1\}^* \mid w \text{ tem o mesmo número de 0s e 1s}\}$ não é regular.

Demonstração.
Vamos demonstrar por contradição. Assuma que C seja regular, e que, portanto, ela satisfaça o Lema do Bombeamento.

Seja p o comprimento de bombeamento. Escolha s como a cadeia $0^p1^p \in C$. Como $s \in C$ e $|s| \geq p$, o LB diz que se pode dividir s em três partes $s = xyz$, onde para qualquer $i \geq 0$, $xy^iz \in C$.

Nesta demonstração vamos usar a Condição (3) do LB, que diz que $|xy| \leq p$. Como s começa com 0^p, isto quer dizer que y só pode ter 0s. Além disso, a Condição (2) diz que y tem pelo menos um 0.

Neste caso a cadeia $xyyz$ tem mais 0s que 1s, e não pode pertencer a C, o que contradiz a Condição (1) do LB. $\square$

Lema do Bombeamento: Exemplos

- $\boxed{\text{Exemplo 3}}$ Use o Lema do Bombeamento para mostrar que a linguagem $F = \{ww \mid w \in \{0,1\}^*\}$ não é regular.

  Demonstração.
  Suponha, ao contrário, que F seja regular. Seja p o comprimento de bombeamento dado pelo LB. Seja s a cadeia $0^p1^p0^p1^p \in F$. Como $s \in F$ e $|s| \geq p$, o LB garante que s pode ser dividida em três partes $s = xyz$ satisfazendo as três condições do lema. Mostramos que isso não é possível.

  Vamos novamente usar a Condição (3) do LB, que diz que $|xy| \leq p$. Isso quer dizer que y só pode ter 0s, uma vez que s começa com p 0s. Logo, a cadeia $xyyz$ será da forma $0^k1^p0^p1^p$, com $k \geq p$, e, portanto não pertence a L. Isto contradiz o LB. $\square$

Lema do Bombeamento: Exemplos

- $\boxed{\text{Exemplo 4}}$ Use o Lema do Bombeamento para mostrar que a linguagem $D = \{1^{n^2} \mid n \geq 0\}$ não é regular.

  Demonstração.
  Suponha, ao contrário, que D seja regular. Seja p o comprimento de bombeamento dado pelo LB. Seja s a cadeia $1^{p^2} \in D$. Como $s \in D$ e $|s| \geq p$, o LB garante que s pode ser dividida em três partes $s = xyz$ satisfazendo as três condições do lema. Mostramos que isso não é possível.

  Para esta demonstração, temos que ter um tanto especial de criatividade.

  Note que a sequência de quadrados perfeitos é

  $$0, 1, 4, 9, 16, 25, 36, 40, \ldots,$$

  de forma que a distância entre dois membros sucessivos da sequência é crescente.

Lema do Bombeamento: Exemplos

- $\boxed{\text{Exemplo 4}}$ (Continuação)

Agora considere as duas cadeias xyz e xy^2z, cujos tamanhos diferem pelo comprimento da subcadeia y a mais na segunda cadeia.

Note que pela condição (3) do LB, $|xy| \leq p$, logo $|y| \leq p$.

Como temos que $|xyz| = p^2$, então $|xy^2z| \leq p^2 + p$.

Mas $p^2 + p \; < \; p^2 + 2p + 1 \; = \; (p + 1)^2$. Como a condição (2) diz que $|y| > 0$, temos que $|xy^2z| > p^2$.

Juntando nossas conclusões, temos que $p^2 < |xy^2z| < (p + 1)^2$.

Ou seja, $|xy^2z|$ está estritamente entre dois quadrados perfeitos consecutivos, e, portanto, $|xy^2z|$ não pode ser um quadrado perfeito.

Dessa forma, chegamos à contradição de que $xy^2z \neq D$ e concluímos que D não é regular.

$\square$

Lema do Bombeamento: Exemplos

- $\boxed{\text{Exemplo 5}}$ Use o Lema do Bombeamento para mostrar que a linguagem $E = \{0^i 1^j \mid i > j\}$ não é regular.

  Demonstração.
  Suponha, ao contrário, que E seja regular. Seja p o comprimento de bombeamento dado pelo LB. Seja s a cadeia $0^{p+1}1^p \in E$. Como $s \in E$ e $|s| \geq p$, o LB garante que s pode ser dividida em três partes $s = xyz$ satisfazendo as três condições do lema. Mostramos que isso não é possível.

  Pela Condição (3) do LB, y contém somente 0s, e pela condição (2) y tem pelo menos um 0. Logo a cadeia $xy^0z = xz$ é da forma 0^k1^p, com $k \leq p$ (pois os 0s de y foram retirados da cadeia), o que contradiz a Condição (1) do lema.

  □

Observações sobre o uso do Lema do Bombeamento

- Note que o LB diz que se uma linguagem é regular, então a linguagem satisfaz uma série de condições.

  Por isso, o LB serve APENAS para mostrar que uma linguagem NÃO é regular.

- Entretanto, o LB não é um "se, e somente se": sua conversa não é verdadeira.

  Isto é, existem linguagens que não são regulares, mas que satisfazem a série de condições do LB, como as seguintes:

  1. $\{\mathtt{a}\mathtt{b}^n\mathtt{c}^n \mid n \geq 0\} \cup \{\mathtt{a}^k w \mid k \geq 2,\ w \in \Sigma^* \text{ não começa com } \mathtt{a}\}$
  2. $\{ww^R x \mid w, x \in \{0,1\}^+\}$

  (Um desafio para você é mostrar que tais linguagens: (i) satisfazem o LB; mas (ii) não são regulares.)

  Por isso, o LB NÃO pode ser usado para mostrar que uma linguagem É regular.

Provando que uma linguagem não é regular usando propriedades de fechamento

Observações sobre o uso do Lema do Bombeamento

- Já vimos que as linguagens regulares são fechadas sob as operações de:
  - união,
  - interseção,
  - concatenação,
  - fecho de Kleene, e
  - complemento.
- Vimos que podemos demonstrar que uma linguagem é regular usando propriedades de fechamento.

  Mais especificamente, vimos que podemos demonstrar que uma L é regular ao escrever L como a composição de linguagens regulares usando as operações acima.
- Entretanto, podemos usar as propriedades de fechamento para demonstrar que uma linguagem não é regular.

Lema do Bombeamento: Exemplos

- $\boxed{\text{Exemplo 6}}$ Usando o Lema do Bombeamento, já demonstramos que a linguagem $C = \{w \in \{0, 1\}^* \mid w \text{ tem o mesmo número de 0s e 1s}\}$ não é regular. Mostre que a linguagem C não é regular usando a propriedade de fechamento sobre linguagens regulares.

Demonstração.

Vamos começar notando que a linguagem 0^*1^* é regular, pois ela é representada por uma expressão regular.

Agora, note que $C \cap 0^*1^* = \{0^n1^n \mid n \geq 0\}$, pois C é a linguagem em que cada cadeia tem o mesmo número de 0s e 1s, e $\{0^n1^n \mid n \geq 0\}$ é a linguagem em que todos os 1s vêm após todos os 0s.

Mas como as linguagens regulares são fechadas sob interseção, se C fosse regular, sua interseção com a linguagem regular 0^*1^* também deveria ser regular, mas não é: $\{0^n1^n \mid n \geq 0\}$ não é regular.

Logo, concluímos que C não pode ser regular. $\square$