Teoria da Computação

Prof. Maicon R. Zatelli

Aula 2 - Linguagens Regulares

Universidade Federal de Santa Catarina

Florianópolis - Brasil

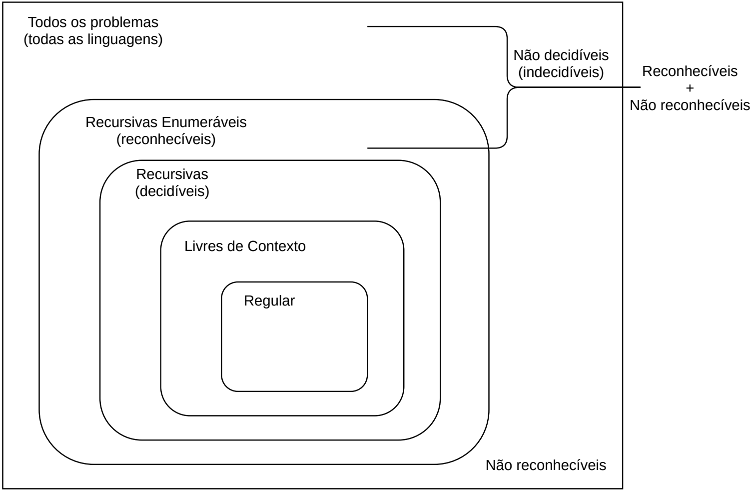
Introdução

- Linguagens regulares
- Autômatos finitos determinísticos
- Autômatos finitos (determinísticos e não-determinísticos)
- Expressões regulares
- Linguagens não regulares e lema do bombeamento

Material de apoio

- Livro Sipser, Capítulo 1
- Livro Hopcroft, Capítulo 2,3,4

Hierarquia de Chomsky



Indecidíveis - são todas as linguagens Turing-reconhecíveis mas não decidíveis e também as linguagens não Turing-reconhecíveis

Linguagens Regulares

São as linguagens mais simples na Hierarquia de Chomsky.

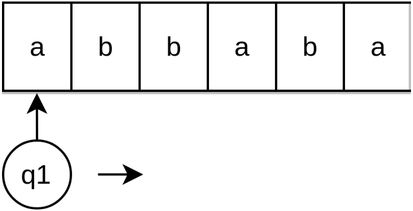
Exemplos de Uso

- Analisador Léxico
- Verificar se tamanho de palavra é ímpar/par
- Verificar se a quantidade de dígitos 1 em uma palavra é ímpar/par
- Pesquisar por ocorrência de um padrão em uma palavra

Autômatos Finitos

Autômato Finito (AF) ou Máquina de Estados Finita são um modelo computacional com uma quantidade extremamente limitada de memória. São reconhecedores (ou aceitadores) da classe de linguagens regulares.

- Não possuem nenhuma memória auxiliar (contador, pilha, etc)
- Apenas armazena o estado atual



Autômatos Finitos podem ser determinísticos (AFD) ou não-determinísticos (AFND).

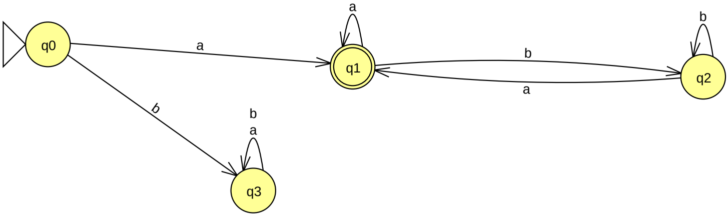
Autômatos Finitos Determinísticos

$AFD = (Q, \Sigma, \delta, q0, F)$

- Q é um conjunto finito de estados
- Σ é um conjunto finito de símbolos (alfabeto)
- $\delta : Q \times \Sigma \rightarrow Q$ é uma função de transição
  - δ(estado atual,símbolo lido) $\rightarrow$ novo estado
- $q0 \in Q$ é um estado inicial
- $F \subseteq Q$ é um conjunto de estados finais

Autômatos Finitos Determinísticos - Diagrama de Estados

$L = \{w | w \in \{a, b\}^{+}$e w começa e termina com $a\}$



Autômatos Finitos Determinísticos - Descrição Formal

$L = \{w | w \in \{a, b\}^{+}$e w começa e termina com $a\}$

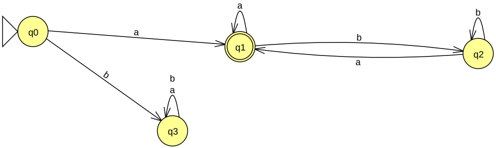
$AFD = (Q, \Sigma, \delta, q0, F)$

- $Q = \{q0, q1, q2, q3\}$
- $\Sigma = \{a, b\}$
- $\delta : Q \times \Sigma \rightarrow Q$
  - $\delta(q0, a) \rightarrow q1$, $\delta(q0, b) \rightarrow q3$,
  - $\delta(q1, a) \rightarrow q1$, $\delta(q1, b) \rightarrow q2$,
  - $\delta(q2, a) \rightarrow q1$, $\delta(q2, b) \rightarrow q2$,
  - $\delta(q3, a) \rightarrow q3$, $\delta(q3, b) \rightarrow q3$
- $q0 = q0$
- $F = \{q1\}$

Autômatos Finitos Determinísticos - Representação Tabular

$L = \{w | w \in \{a, b\}^{+}$e w começa e termina com $a\}$

	a	b
$\rightarrow$ q0	q1	q3
* q1	q1	q2
q2	q1	q2
q3	q3	q3

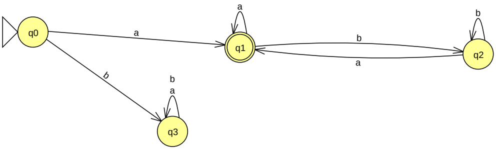


Autômatos Finitos Determinísticos - Execução

$L = \{w | w \in \{a, b\}^{+} \text{e } w \text{ começa e termina com } a\}$

Tome como exemplo a palavra: **ababa**

a	b	a	b	a	
$\uparrow$					
q0					

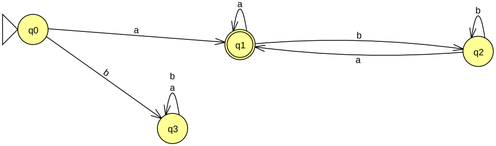


Autômatos Finitos Determinísticos - Execução

$$L = \{w | w \in \{a, b\}^{+} \text{e } w \text{ começa e termina com } a\}$$

Tome como exemplo a palavra: **ababa**

a	b	a	b	a	
	$\uparrow$ q1				

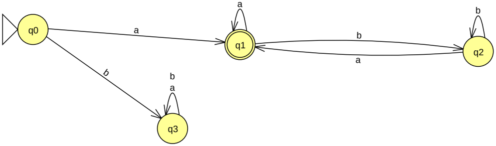


Autômatos Finitos Determinísticos - Execução

$L = \{w | w \in \{a, b\}^{+}\text{e } w \text{ começa e termina com } a\}$

Tome como exemplo a palavra: **ababa**

a	b	a	b	a	
			$\uparrow$ q1		

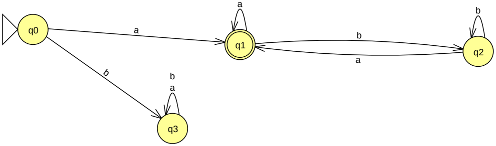


Autômatos Finitos Determinísticos - Execução

$$L = \{w | w \in \{a, b\}^{+} \text{e } w \text{ começa e termina com } a\}$$

Tome como exemplo a palavra: **ababa**

a	b	a	b	a	
				$\uparrow$ q2	

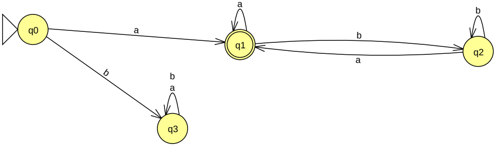


Autômatos Finitos Determinísticos - Execução

$L = \{w | w \in \{a, b\}^{+} \text{e } w \text{ começa e termina com } a\}$

Tome como exemplo a palavra: **ababa**

a	b	a	b	a	
					↑ q1 X



Autômatos Finitos Determinísticos - Execução

- Cabeça somente move-se para direita e troca estado
- Não há memória auxiliar
- Em um AFD deve haver uma transição partindo de cada estado para cada símbolo
- Uma **computação** em um AFD $M = (Q, \Sigma, \delta, q0, F)$ sobre uma palavra $w = w_1 w_2 w_3 ... w_n$, onde w_i é um membro do alfabeto Σ, é uma sequência de estados $r_0, r_1, ..., r_n$, tal que r_0 é igual ao estado inicial de M e $\delta(r_i, w_{i+1}) \rightarrow r_{i+1}$ para $i = 0$ até $n - 1$. A computação **aceita** w se $r_n \in F$ e **rejeita** w se $r_n \notin F$
- Dizemos que M reconhece uma linguagem A se $A = \{w | M \text{ aceita } w\}$
- Uma linguagem L é dita linguagem regular se algum autômato finito M a reconhece, ou seja, $L = L(M)$, onde $L(M)$ é a linguagem reconhecida por M.

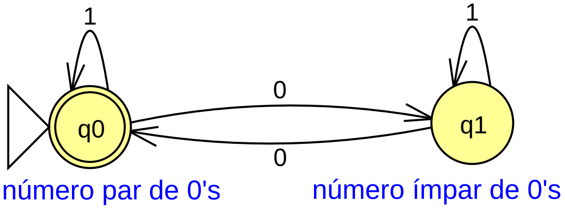
Linguagem Regular vs Autômatos Finitos Determinísticos

Como mostrar que uma linguagem é regular?

- R: construindo um AFD que a reconheça

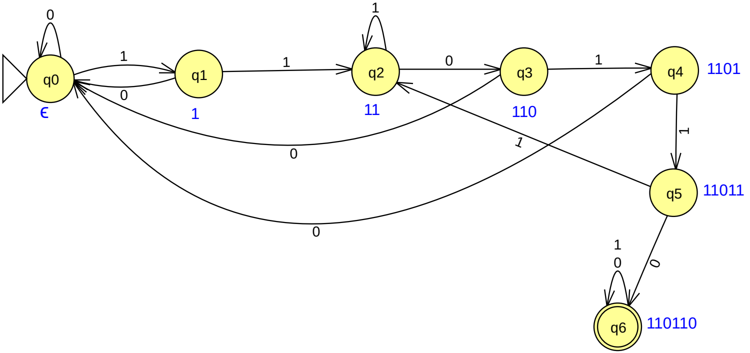
Autômatos Finitos Determinísticos

$L = \{w | w \in \{0,1\}^* \text{e } w \text{ contém um número par de 0's}\}$



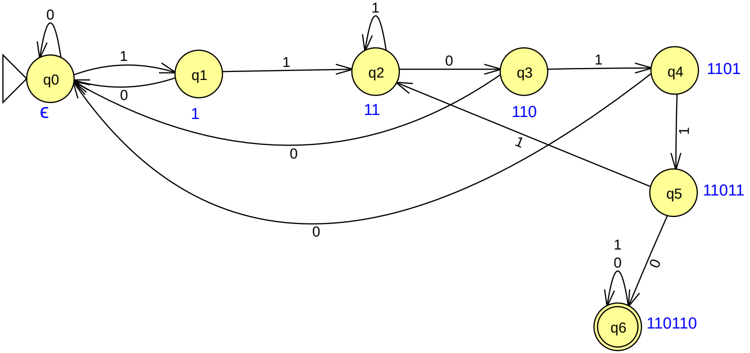
Autômatos Finitos Determinísticos

$L = \{w | w \in \{0,1\}^* \text{e } w \text{ contém } 110110\}$



Autômatos Finitos Determinísticos

$L = \{w | w \in \{0,1\}^* \text{e } w \text{ contém } 110110\}$



E se quero a linguagem cujas palavras não contém 110110?

- O complemento de L, escrito como $\overline{L}$, são as palavras que não pertencem a L.

Linguagens Regulares - Operações - Complemento

O **complemento** é uma **operação fechada** sobre a classe das linguagens regulares, ou seja, se L é uma linguagem regular, então $\overline{L}$ também é uma linguagem regular, e vice-versa.

- $L \subseteq \Sigma^*$
- $\overline{L} = \{w | w \in \Sigma^* \text{ e } w \notin L\}$, ou seja, $\Sigma^* - L$

Prova: por construção.

Prova: por construção.

- Se L é uma linguagem regular, então existe um AFD M que a reconhece.

Prova: por construção.

- Se L é uma linguagem regular, então existe um AFD M que a reconhece.
- Note agora que o complemento de L, $\overline{L}$, contém todas as palavras não reconhecidas por M, ou seja, todas as palavras que ao serem dadas como entrada de M têm sua computação terminada em algum estado de M que não seja final.

Linguagens Regulares - Operações - Complemento

Prova: por construção.

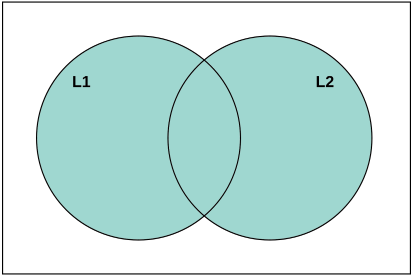
- Se L é uma linguagem regular, então existe um AFD M que a reconhece.
- Note agora que o complemento de L, $\overline{L}$, contém todas as palavras não reconhecidas por M, ou seja, todas as palavras que ao serem dadas como entrada de M têm sua computação terminada em algum estado de M que não seja final.
- Ao inverter os estados finais e não finais de M temos um AFD N que reconhece exatamente a linguagem $\overline{L}$, ou seja:
  - $M = (Q, \Sigma, \delta, q0, F)$
  - $N = (Q, \Sigma, \delta, q0, F')$, onde $F' = Q - F$

Prova: por construção.

- Se L é uma linguagem regular, então existe um AFD M que a reconhece.
- Note agora que o complemento de L, $\overline{L}$, contém todas as palavras não reconhecidas por M, ou seja, todas as palavras que ao serem dadas como entrada de M têm sua computação terminada em algum estado de M que não seja final.
- Ao inverter os estados finais e não finais de M temos um AFD N que reconhece exatamente a linguagem $\overline{L}$, ou seja:
  - $M = (Q, \Sigma, \delta, q0, F)$
  - $N = (Q, \Sigma, \delta, q0, F')$, onde $F' = Q - F$
- Como temos um AFD que reconhece $\overline{L}$, então sabemos que ela também é uma linguagem regular.

Linguagens Regulares - Operações - União

Seja $L1, L2 \subseteq \Sigma^*$ e $L1$ e $L2$ sendo regulares, então $L = L1 \cup L2$ também é uma linguagem regular. A classe das linguagens regulares é fechada na operação de união.



Linguagens Regulares - Operações - União

Intuição para a prova:

- Sendo que $L1$ e $L2$ são linguagens regulares, existem os AFDs $M1$ que reconhece $L1$ e $M2$ que reconhece $L2$
- Pode-se rodar $M1$ e $M2$ em paralelo para uma mesma entrada w
- $\delta((q, r), x) = (\delta_1(q, x), \delta_2(r, x))$, onde q é um estado de $M1$, r é um estado de $M2$, x é o símbolo lido, δ_1 é a função de transição de $M1$ e δ_2 é a função de transição de $M2$
- Se $M1$ **ou** $M2$ aceitar w, então $w \in L$, onde $L = L1 \cup L2$

Linguagens Regulares - Operações - União

Prova: por construção.

Prova: por construção.

- Sejam os AFDs $M1$ e $M2$ que reconhecem $L1$ e $L2$, respectivamente
  - $M1 = (Q_1, \Sigma, \delta_1, q0_1, F_1)$
  - $M2 = (Q_2, \Sigma, \delta_2, q0_2, F_2)$

Prova: por construção.

- Sejam os AFDs $M1$ e $M2$ que reconhecem $L1$ e $L2$, respectivamente
  - $M1 = (Q_1, \Sigma, \delta_1, q0_1, F_1)$
  - $M2 = (Q_2, \Sigma, \delta_2, q0_2, F_2)$
- Vamos construir o autômato $M3$ que reconhece a linguagem $L = L1 \cup L2$
  - $M3 = (Q_3, \Sigma, \delta_3, q0_3, F_3)$, onde

Prova: por construção.

- Sejam os AFDs $M1$ e $M2$ que reconhecem $L1$ e $L2$, respectivamente
  - $M1 = (Q_1, \Sigma, \delta_1, q0_1, F_1)$
  - $M2 = (Q_2, \Sigma, \delta_2, q0_2, F_2)$
- Vamos construir o autômato $M3$ que reconhece a linguagem $L = L1 \cup L2$
  - $M3 = (Q_3, \Sigma, \delta_3, q0_3, F_3)$, onde
  - $Q_3 = Q_1 \times Q_2$, ou seja, $Q_3 = \{(q_1, q_2) | q_1 \in Q_1 \text{ e } q_2 \in Q_2\}$

Linguagens Regulares - Operações - União

Prova: por construção.

- Sejam os AFDs $M1$ e $M2$ que reconhecem $L1$ e $L2$, respectivamente
  - $M1 = (Q_1, \Sigma, \delta_1, q0_1, F_1)$
  - $M2 = (Q_2, \Sigma, \delta_2, q0_2, F_2)$
- Vamos construir o autômato $M3$ que reconhece a linguagem $L = L1 \cup L2$
  - $M3 = (Q_3, \Sigma, \delta_3, q0_3, F_3)$, onde
  - $Q_3 = Q_1 \times Q_2$, ou seja, $Q_3 = \{(q_1, q_2) | q_1 \in Q_1 \text{ e } q_2 \in Q_2\}$
  - $q0_3 = (q0_1, q0_2)$

Prova: por construção.

- Sejam os AFDs $M1$ e $M2$ que reconhecem $L1$ e $L2$, respectivamente
    - $M1 = (Q_1, \Sigma, \delta_1, q0_1, F_1)$
    - $M2 = (Q_2, \Sigma, \delta_2, q0_2, F_2)$
- Vamos construir o autômato $M3$ que reconhece a linguagem $L = L1 \cup L2$
    - $M3 = (Q_3, \Sigma, \delta_3, q0_3, F_3)$, onde
    - $Q_3 = Q_1 \times Q_2$, ou seja, $Q_3 = \{(q_1, q_2) | q_1 \in Q_1$ e $q_2 \in Q_2\}$
    - $q0_3 = (q0_1, q0_2)$
    - $\delta_3((q_1, q_2), x) = (\delta_1(q_1, x), \delta_2(q_2, x))$, onde $q_1 \in Q_1$ e $q_2 \in Q_2$

Prova: por construção.

- Sejam os AFDs $M1$ e $M2$ que reconhecem $L1$ e $L2$, respectivamente
  - $M1 = (Q_1, \Sigma, \delta_1, q0_1, F_1)$
  - $M2 = (Q_2, \Sigma, \delta_2, q0_2, F_2)$
- Vamos construir o autômato $M3$ que reconhece a linguagem $L = L1 \cup L2$
  - $M3 = (Q_3, \Sigma, \delta_3, q0_3, F_3)$, onde
  - $Q_3 = Q_1 \times Q_2$, ou seja, $Q_3 = \{(q_1, q_2) | q_1 \in Q_1 \text{ e } q_2 \in Q_2\}$
  - $q0_3 = (q0_1, q0_2)$
  - $\delta_3((q_1, q_2), x) = (\delta_1(q_1, x), \delta_2(q_2, x))$, onde $q_1 \in Q_1$ e $q_2 \in Q_2$
  - $F_3 = \{(q_1, q_2) | q_1 \in F_1 \textbf{ ou } q_2 \in F_2\}$

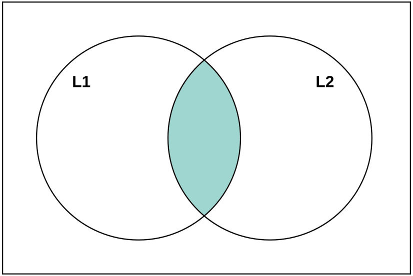
Linguagens Regulares - Operações - União

Prova: por construção.

- Sejam os AFDs $M1$ e $M2$ que reconhecem $L1$ e $L2$, respectivamente
  - $M1 = (Q_1, \Sigma, \delta_1, q0_1, F_1)$
  - $M2 = (Q_2, \Sigma, \delta_2, q0_2, F_2)$
- Vamos construir o autômato $M3$ que reconhece a linguagem $L = L1 \cup L2$
  - $M3 = (Q_3, \Sigma, \delta_3, q0_3, F_3)$, onde
  - $Q_3 = Q_1 \times Q_2$, ou seja, $Q_3 = \{(q_1, q_2) | q_1 \in Q_1 \text{ e } q_2 \in Q_2\}$
  - $q0_3 = (q0_1, q0_2)$
  - $\delta_3((q_1, q_2), x) = (\delta_1(q_1, x), \delta_2(q_2, x))$, onde $q_1 \in Q_1$ e $q_2 \in Q_2$
  - $F_3 = \{(q_1, q_2) | q_1 \in F_1 \textbf{ ou } q_2 \in F_2\}$
- Note que $L(M3) = L1 \cup L2$

Linguagens Regulares - Operações - Intersecção

Seja $L1, L2 \subseteq \Sigma^*$ e $L1$ e $L2$ sendo regulares, então $L = L1 \cap L2$ também é uma linguagem regular. A classe das linguagens regulares é fechada na operação de intersecção.



Intuição para a prova:

- Sendo que $L1$ e $L2$ são linguagens regulares, existem os AFDs $M1$ que reconhece $L1$ e $M2$ que reconhece $L2$
- Pode-se rodar $M1$ e $M2$ em paralelo para uma mesma entrada w
- $\delta((q, r), x) = (\delta_1(q, x), \delta_2(r, x))$, onde q é um estado de $M1$, r é um estado de $M2$, x é o símbolo lido, δ_1 é a função de transição de $M1$ e δ_2 é a função de transição de $M2$
- Se $M1$ **e** $M2$ aceitar w, então $w \in L$, onde $L = L1 \cap L2$

Prova: por construção.

Prova: por construção.

- Sejam os AFDs $M1$ e $M2$ que reconhecem $L1$ e $L2$, respectivamente
  - $M1 = (Q_1, \Sigma, \delta_1, q0_1, F_1)$
  - $M2 = (Q_2, \Sigma, \delta_2, q0_2, F_2)$

Linguagens Regulares - Operações - Intersecção

Prova: por construção.

- Sejam os AFDs $M1$ e $M2$ que reconhecem $L1$ e $L2$, respectivamente
    - $M1 = (Q_1, \Sigma, \delta_1, q0_1, F_1)$
    - $M2 = (Q_2, \Sigma, \delta_2, q0_2, F_2)$
- Vamos construir o autômato $M3$ que reconhece a linguagem $L = L1 \cap L2$
    - $M3 = (Q_3, \Sigma, \delta_3, q0_3, F_3)$, onde

Prova: por construção.

- Sejam os AFDs $M1$ e $M2$ que reconhecem $L1$ e $L2$, respectivamente
  - $M1 = (Q_1, \Sigma, \delta_1, q0_1, F_1)$
  - $M2 = (Q_2, \Sigma, \delta_2, q0_2, F_2)$
- Vamos construir o autômato $M3$ que reconhece a linguagem $L = L1 \cap L2$
  - $M3 = (Q_3, \Sigma, \delta_3, q0_3, F_3)$, onde
  - $Q_3 = Q_1 \times Q_2$, ou seja, $Q_3 = \{(q_1, q_2) | q_1 \in Q_1 \text{ e } q_2 \in Q_2\}$

Prova: por construção.

- Sejam os AFDs $M1$ e $M2$ que reconhecem $L1$ e $L2$, respectivamente
  - $M1 = (Q_1, \Sigma, \delta_1, q0_1, F_1)$
  - $M2 = (Q_2, \Sigma, \delta_2, q0_2, F_2)$
- Vamos construir o autômato $M3$ que reconhece a linguagem $L = L1 \cap L2$
  - $M3 = (Q_3, \Sigma, \delta_3, q0_3, F_3)$, onde
  - $Q_3 = Q_1 \times Q_2$, ou seja, $Q_3 = \{(q_1, q_2) | q_1 \in Q_1 \text{ e } q_2 \in Q_2\}$
  - $q0_3 = (q0_1, q0_2)$

Prova: por construção.

- Sejam os AFDs $M1$ e $M2$ que reconhecem $L1$ e $L2$, respectivamente
  - $M1 = (Q_1, \Sigma, \delta_1, q0_1, F_1)$
  - $M2 = (Q_2, \Sigma, \delta_2, q0_2, F_2)$
- Vamos construir o autômato $M3$ que reconhece a linguagem $L = L1 \cap L2$
  - $M3 = (Q_3, \Sigma, \delta_3, q0_3, F_3)$, onde
  - $Q_3 = Q_1 \times Q_2$, ou seja, $Q_3 = \{(q_1, q_2) | q_1 \in Q_1 \text{ e } q_2 \in Q_2\}$
  - $q0_3 = (q0_1, q0_2)$
  - $\delta_3((q_1, q_2), x) = (\delta_1(q_1, x), \delta_2(q_2, x))$, onde $q_1 \in Q_1$ e $q_2 \in Q_2$

Linguagens Regulares - Operações - Intersecção

Prova: por construção.

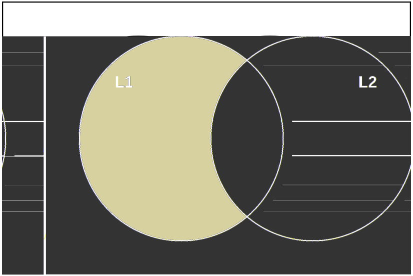
- Sejam os AFDs $M1$ e $M2$ que reconhecem $L1$ e $L2$, respectivamente
  - $M1 = (Q_1, \Sigma, \delta_1, q0_1, F_1)$
  - $M2 = (Q_2, \Sigma, \delta_2, q0_2, F_2)$
- Vamos construir o autômato $M3$ que reconhece a linguagem $L = L1 \cap L2$
  - $M3 = (Q_3, \Sigma, \delta_3, q0_3, F_3)$, onde
  - $Q_3 = Q_1 \times Q_2$, ou seja, $Q_3 = \{(q_1, q_2) | q_1 \in Q_1 \text{ e } q_2 \in Q_2\}$
  - $q0_3 = (q0_1, q0_2)$
  - $\delta_3((q_1, q_2), x) = (\delta_1(q_1, x), \delta_2(q_2, x))$, onde $q_1 \in Q_1$ e $q_2 \in Q_2$
  - $F_3 = \{(q_1, q_2) | q_1 \in F_1 \textbf{ e } q_2 \in F_2\}$

Prova: por construção.

- Sejam os AFDs $M1$ e $M2$ que reconhecem $L1$ e $L2$, respectivamente
  - $M1 = (Q_1, \Sigma, \delta_1, q0_1, F_1)$
  - $M2 = (Q_2, \Sigma, \delta_2, q0_2, F_2)$
- Vamos construir o autômato $M3$ que reconhece a linguagem $L = L1 \cap L2$
  - $M3 = (Q_3, \Sigma, \delta_3, q0_3, F_3)$, onde
  - $Q_3 = Q_1 \times Q_2$, ou seja, $Q_3 = \{(q_1, q_2) | q_1 \in Q_1 \text{ e } q_2 \in Q_2\}$
  - $q0_3 = (q0_1, q0_2)$
  - $\delta_3((q_1, q_2), x) = (\delta_1(q_1, x), \delta_2(q_2, x))$, onde $q_1 \in Q_1$ e $q_2 \in Q_2$
  - $F_3 = \{(q_1, q_2) | q_1 \in F_1 \textbf{ e } q_2 \in F_2\}$
- Note que $L(M3) = L1 \cap L2$

Linguagens Regulares - Operações - Diferença

Seja $L1, L2 \subseteq \Sigma^*$ e $L1$ e $L2$ sendo regulares, então $L = L1 - L2$ também é uma linguagem regular. A classe das linguagens regulares é fechada na operação de diferença.



Intuição para a prova:

- Sendo que $L1$ e $L2$ são linguagens regulares, existem os AFDs $M1$ que reconhece $L1$ e $M2$ que reconhece $L2$
- Pode-se rodar $M1$ e $M2$ em paralelo para uma mesma entrada w
- $\delta((q, r), x) = (\delta_1(q, x), \delta_2(r, x))$, onde q é um estado de $M1$, r é um estado de $M2$, x é o símbolo lido, δ_1 é a função de transição de $M1$ e δ_2 é a função de transição de $M2$
- Se $M1$ aceitar w **e** $M2$ rejeitar w, então $w \in L$, onde $L = L1 - L2$

Linguagens Regulares - Operações - Diferença

Prova: por construção.

Prova: por construção.

- Sejam os AFDs $M1$ e $M2$ que reconhecem $L1$ e $L2$, respectivamente
  - $M1 = (Q_1, \Sigma, \delta_1, q0_1, F_1)$
  - $M2 = (Q_2, \Sigma, \delta_2, q0_2, F_2)$

Linguagens Regulares - Operações - Diferença

Prova: por construção.

- Sejam os AFDs $M1$ e $M2$ que reconhecem $L1$ e $L2$, respectivamente
  - $M1 = (Q_1, \Sigma, \delta_1, q0_1, F_1)$
  - $M2 = (Q_2, \Sigma, \delta_2, q0_2, F_2)$
- Vamos construir o autômato $M3$ que reconhece a linguagem $L = L1 - L2$
  - $M3 = (Q_3, \Sigma, \delta_3, q0_3, F_3)$, onde

Prova: por construção.

- Sejam os AFDs $M1$ e $M2$ que reconhecem $L1$ e $L2$, respectivamente
    - $M1 = (Q_1, \Sigma, \delta_1, q0_1, F_1)$
    - $M2 = (Q_2, \Sigma, \delta_2, q0_2, F_2)$
- Vamos construir o autômato $M3$ que reconhece a linguagem $L = L1 - L2$
    - $M3 = (Q_3, \Sigma, \delta_3, q0_3, F_3)$, onde
    - $Q_3 = Q_1 \times Q_2$, ou seja, $Q_3 = \{(q_1, q_2) | q_1 \in Q_1 \text{ e } q_2 \in Q_2\}$

Linguagens Regulares - Operações - Diferença

Prova: por construção.

- Sejam os AFDs $M1$ e $M2$ que reconhecem $L1$ e $L2$, respectivamente
  - $M1 = (Q_1, \Sigma, \delta_1, q0_1, F_1)$
  - $M2 = (Q_2, \Sigma, \delta_2, q0_2, F_2)$
- Vamos construir o autômato $M3$ que reconhece a linguagem $L = L1 - L2$
  - $M3 = (Q_3, \Sigma, \delta_3, q0_3, F_3)$, onde
  - $Q_3 = Q_1 \times Q_2$, ou seja, $Q_3 = \{(q_1, q_2) | q_1 \in Q_1 \text{ e } q_2 \in Q_2\}$
  - $q0_3 = (q0_1, q0_2)$

Linguagens Regulares - Operações - Diferença

Prova: por construção.

- Sejam os AFDs $M1$ e $M2$ que reconhecem $L1$ e $L2$, respectivamente
  - $M1 = (Q_1, \Sigma, \delta_1, q0_1, F_1)$
  - $M2 = (Q_2, \Sigma, \delta_2, q0_2, F_2)$
- Vamos construir o autômato $M3$ que reconhece a linguagem $L = L1 - L2$
  - $M3 = (Q_3, \Sigma, \delta_3, q0_3, F_3)$, onde
  - $Q_3 = Q_1 \times Q_2$, ou seja, $Q_3 = \{(q_1, q_2) | q_1 \in Q_1$ e $q_2 \in Q_2\}$
  - $q0_3 = (q0_1, q0_2)$
  - $\delta_3((q_1, q_2), x) = (\delta_1(q_1, x), \delta_2(q_2, x))$, onde $q_1 \in Q_1$ e $q_2 \in Q_2$

Linguagens Regulares - Operações - Diferença

Prova: por construção.

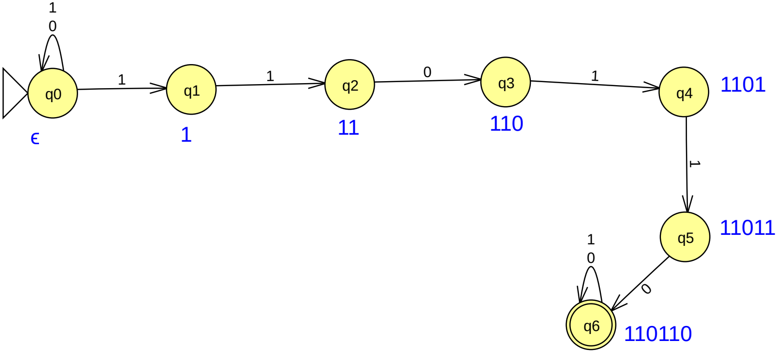
- Sejam os AFDs $M1$ e $M2$ que reconhecem $L1$ e $L2$, respectivamente
  - $M1 = (Q_1, \Sigma, \delta_1, q0_1, F_1)$
  - $M2 = (Q_2, \Sigma, \delta_2, q0_2, F_2)$
- Vamos construir o autômato $M3$ que reconhece a linguagem $L = L1 - L2$
  - $M3 = (Q_3, \Sigma, \delta_3, q0_3, F_3)$, onde
  - $Q_3 = Q_1 \times Q_2$, ou seja, $Q_3 = \{(q_1, q_2) | q_1 \in Q_1 \text{ e } q_2 \in Q_2\}$
  - $q0_3 = (q0_1, q0_2)$
  - $\delta_3((q_1, q_2), x) = (\delta_1(q_1, x), \delta_2(q_2, x))$, onde $q_1 \in Q_1$ e $q_2 \in Q_2$
  - $F_3 = \{(q_1, q_2) | q_1 \in F_1 \textbf{ e } q_2 \notin F_2\}$

Prova: por construção.

- Sejam os AFDs $M1$ e $M2$ que reconhecem $L1$ e $L2$, respectivamente
  - $M1 = (Q_1, \Sigma, \delta_1, q0_1, F_1)$
  - $M2 = (Q_2, \Sigma, \delta_2, q0_2, F_2)$
- Vamos construir o autômato $M3$ que reconhece a linguagem $L = L1 - L2$
  - $M3 = (Q_3, \Sigma, \delta_3, q0_3, F_3)$, onde
  - $Q_3 = Q_1 \times Q_2$, ou seja, $Q_3 = \{(q_1, q_2) | q_1 \in Q_1 \text{ e } q_2 \in Q_2\}$
  - $q0_3 = (q0_1, q0_2)$
  - $\delta_3((q_1, q_2), x) = (\delta_1(q_1, x), \delta_2(q_2, x))$, onde $q_1 \in Q_1$ e $q_2 \in Q_2$
  - $F_3 = \{(q_1, q_2) | q_1 \in F_1 \textbf{ e } q_2 \notin F_2\}$
- Note que $L(M3) = L1 - L2$

Autômatos Finitos Não-Determinísticos (AFND)

$$L = \{w | w \in \{0,1\}^* \text{e } w \text{ contém } 110110\}$$



Autômatos Finitos Não-Determinísticos (AFND)

$AFND = (Q, \Sigma, \delta, q0, F)$

- Q é um conjunto finito de estados
- Σ é um conjunto finito de símbolos (alfabeto)
- $\delta : Q \times (\Sigma \cup \{\varepsilon\}) \rightarrow P(Q)$ é uma função de transição, onde $P(Q)$ é o conjunto de partes de Q
  - δ(estado atual,símbolo lido ou ε) $\rightarrow$ conjunto de novos estados
- $q0 \in Q$ é um estado inicial
- $F \subseteq Q$ é um conjunto de estados finais

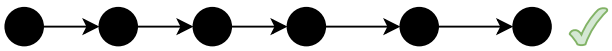
AFND - Execução

- Cabeça somente move-se para direita e troca estado
- Não há memória auxiliar
- Em um AFND podem haver várias transições com o mesmo símbolo a partir de um mesmo estado e para estados diferentes
- Algumas transições podem ser disparadas sem consumir nenhum símbolo da entrada, ou seja, elas podem ser transições com ε. Neste caso os AFND são chamados de ε-AFND
- Uma **computação** em um AFND (sem transições ε) $M = (Q, \Sigma, \delta, q0, F)$ sobre uma palavra $w = w_1 w_2 w_3 ... w_n$, onde w_i é um membro do alfabeto Σ, é uma sequência de estados $r_0, r_1, ..., r_n$, tal que r_0 é igual ao estado inicial de M e $r_{i+1} \in \delta(r_i, w_{i+1})$ para $i = 0$ até $n - 1$. A computação **aceita** w se algum $r_n \in F$ e **rejeita** w se todos $r_n \notin F$
- Note que $\delta(r_i, w_{i+1})$ é o conjunto de todos os estados possíveis de serem alcançados a partir do estado r_i com o símbolo w_{i+1}

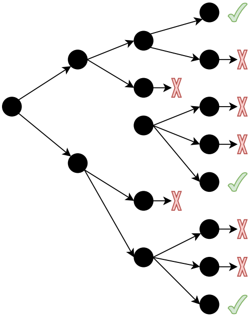
AFND - Execução - Intuição

- Faz escolha de qual estado será o próximo a cada estado. Se não der certo com uma escolha, tenta outra. O AFND tenta todas as escolhas "ao mesmo tempo".
- O AFND aceita uma entrada se alguma escolha levar até um estado final
- O AFND rejeita uma entrada se nenhuma escolha levar até um estado final

Computação em AFD



Computação em AFND



AFND x AFD

- Um AFND é mais poderoso que um AFD?
- Um AFND é equivalente a um AFD?

AFND x AFD

- Um AFND é mais poderoso que um AFD?
- Um AFND é equivalente a um AFD?

Teorema: se uma linguagem L é aceita por um AFD, então L é aceita por um AFND

AFND x AFD

- Um AFND é mais poderoso que um AFD?
- Um AFND é equivalente a um AFD?

Teorema: se uma linguagem L é aceita por um AFD, então L é aceita por um AFND

- **Prova**: note que todo AFD é um AFND que respeita as restrições impostas pelos AFDs. Assim, se L é aceita por um AFD, então L é também aceita por um AFND. Então, a classe de linguagens aceitas por um AFND inclui todas as linguagens aceitas por um AFD, portanto, todas as linguagens regulares

AFND x AFD

Teorema: se uma linguagem L é aceita por um AFND, então L é aceita por um AFD

AFND x AFD

Teorema: se uma linguagem L é aceita por um AFND, então L é aceita por um AFD

- **Prova**: vamos mostrar agora que se M é um AFND, $L(M)$ é uma linguagem regular

AFND x AFD

Teorema: se uma linguagem L é aceita por um AFND, então L é aceita por um AFD

- **Prova**: vamos mostrar agora que se M é um AFND, $L(M)$ é uma linguagem regular
- Fazemos isso construindo um AFD M' a partir de um AFND M, assim mostramos também que AFND e AFD são equivalentes, ou seja, $L(M) = L(M')$

AFND x AFD

Teorema: se uma linguagem L é aceita por um AFND, então L é aceita por um AFD

- **Prova**: vamos mostrar agora que se M é um AFND, $L(M)$ é uma linguagem regular
- Fazemos isso construindo um AFD M' a partir de um AFND M, assim mostramos também que AFND e AFD são equivalentes, ou seja, $L(M) = L(M')$
- O AFD M' irá "lembrar"quais estados o AFND M poderia estar com a entrada w em determinado instante. Isso só funciona pois Q é finito.

AFND x AFD

Prova: por construção

AFND x AFD

Prova: por construção

- Seja $M = (Q, \Sigma, \delta, q0, F)$ um AFND que reconhece alguma linguagem L

AFND x AFD

Prova: por construção

- Seja $M = (Q, \Sigma, \delta, q0, F)$ um AFND que reconhece alguma linguagem L
- Vamos constuir um AFD $M' = (Q', \Sigma, \delta', q0', F')$ a partir de M e que reconheça L

AFND x AFD

Prova: por construção

- Seja $M = (Q, \Sigma, \delta, q0, F)$ um AFND que reconhece alguma linguagem L
- Vamos constuir um AFD $M' = (Q', \Sigma, \delta', q0', F')$ a partir de M e que reconheça L
- Inicialmente vamos desconsiderar transições ε

AFND x AFD

Prova: por construção

- Seja $M = (Q, \Sigma, \delta, q0, F)$ um AFND que reconhece alguma linguagem L
- Vamos constuir um AFD $M' = (Q', \Sigma, \delta', q0', F')$ a partir de M e que reconheça L
- Inicialmente vamos desconsiderar transições ε
- $Q' = P(Q)$

AFND x AFD

Prova: por construção

- Seja $M = (Q, \Sigma, \delta, q0, F)$ um AFND que reconhece alguma linguagem L
- Vamos constuir um AFD $M' = (Q', \Sigma, \delta', q0', F')$ a partir de M e que reconheça L
- Inicialmente vamos desconsiderar transições ε
- $Q' = P(Q)$
- $q0' = \{q0\}$

AFND x AFD

Prova: por construção

- Seja $M = (Q, \Sigma, \delta, q0, F)$ um AFND que reconhece alguma linguagem L
- Vamos constuir um AFD $M' = (Q', \Sigma, \delta', q0', F')$ a partir de M e que reconheça L
- Inicialmente vamos desconsiderar transições ε
- $Q' = P(Q)$
- $q0' = \{q0\}$
- δ' = para cada $R \in Q'$ e $a \in \Sigma$, temos que $\delta'(R, a) = R'$, onde $R' = \bigcup_{r \in R} \delta(r, a)$
  - R' conterá todos os estados alcançados a partir de cada estado r com cada símbolo a considerando o autômato M

AFND x AFD

Prova: por construção

- Seja $M = (Q, \Sigma, \delta, q0, F)$ um AFND que reconhece alguma linguagem L
- Vamos constuir um AFD $M' = (Q', \Sigma, \delta', q0', F')$ a partir de M e que reconheça L
- Inicialmente vamos desconsiderar transições ε
- $Q' = P(Q)$
- $q0' = \{q0\}$
- δ' = para cada $R \in Q'$ e $a \in \Sigma$, temos que $\delta'(R, a) = R'$, onde $R' = \bigcup_{r \in R} \delta(r, a)$
  - R' conterá todos os estados alcançados a partir de cada estado r com cada símbolo a considerando o autômato M
- $F' = \{R \in Q' | R \cap F \neq \emptyset\}$, ou seja, um estado R é final se ele possui algum estado final de M

AFND x AFD

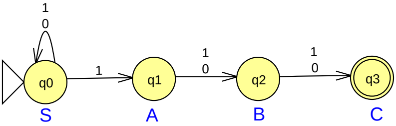
Provamos os seguintes teoremas:

- **Teorema**: se uma linguagem L é aceita por um AFND, então L é aceita por um AFD
- **Teorema**: se uma linguagem L é aceita por um AFD, então L é aceita por um AFND

Portanto, pode-se concluir também que os teoremas abaixo também estão provados

- **Teorema**: uma linguagem L é aceita por um AFND se e somente se L é aceita por um AFD
- **Teorema**: uma linguagem L é regular se e somente se existe um AFND que a reconhece

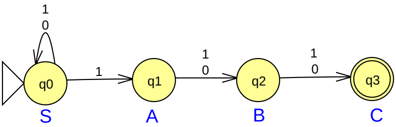
AFND x AFD - Exemplo



	0	1
→ S	{S}	{S,A}
A	{B}	{B}
B	{C}	{C}
* C	{}	{}

	0	1
→ {S}		

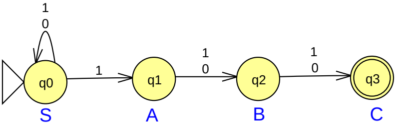
AFND x AFD - Exemplo



	0	1
$\rightarrow$ S	{S}	{S,A}
A	{B}	{B}
B	{C}	{C}
* C	{}	{}

	0	1
$\rightarrow$ {S}	{S}	{S,A}

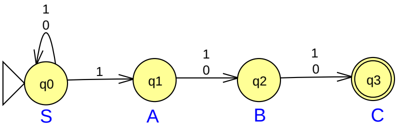
AFND x AFD - Exemplo



	0	1
→ S	{S}	{S,A}
A	{B}	{B}
B	{C}	{C}
* C	{}	{}

	0	1
→ {S}	{S}	{S,A}
{S,A}		

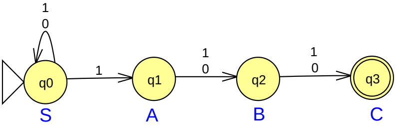
AFND x AFD - Exemplo



	0	1
$\rightarrow$ S	{S}	{S,A}
A	{B}	{B}
B	{C}	{C}
* C	{}	{}

	0	1
$\rightarrow$ {S}	{S}	{S,A}
{S,A}	{S,B}	{S,A,B}

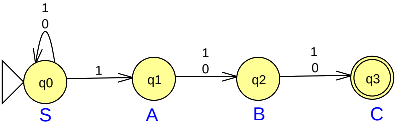
AFND x AFD - Exemplo



	0	1
→ S	{S}	{S,A}
A	{B}	{B}
B	{C}	{C}
* C	{}	{}

	0	1
→ {S}	{S}	{S,A}
{S,A}	{S,B}	{S,A,B}
{S,B}		
{S,A,B}		

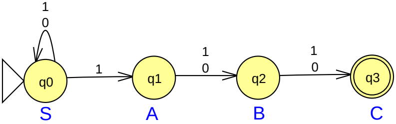
AFND x AFD - Exemplo



	0	1
$\rightarrow$ S	{S}	{S,A}
A	{B}	{B}
B	{C}	{C}
* C	{}	{}

	0	1
$\rightarrow$ {S}	{S}	{S,A}
{S,A}	{S,B}	{S,A,B}
{S,B}	{S,C}	{S,A,C}
{S,A,B}		

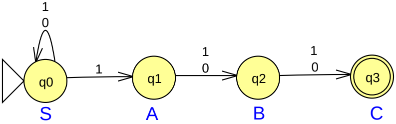
AFND x AFD - Exemplo



	0	1
$\rightarrow$ S	{S}	{S,A}
A	{B}	{B}
B	{C}	{C}
* C	{}	{}

	0	1
$\rightarrow$ {S}	{S}	{S,A}
{S,A}	{S,B}	{S,A,B}
{S,B}	{S,C}	{S,A,C}
{S,A,B}		
{S,C}		
{S,A,C}		

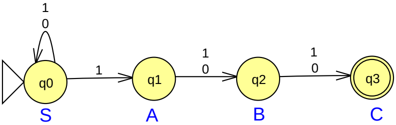
AFND x AFD - Exemplo



	0	1
$\rightarrow$ S	{S}	{S,A}
A	{B}	{B}
B	{C}	{C}
* C	{}	{}

	0	1
$\rightarrow$ {S}	{S}	{S,A}
{S,A}	{S,B}	{S,A,B}
{S,B}	{S,C}	{S,A,C}
{S,A,B}	{S,B,C}	{S,A,B,C}
{S,C}		
{S,A,C}		

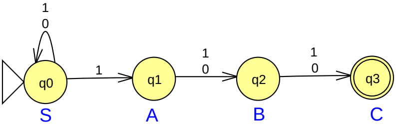
AFND x AFD - Exemplo



	0	1
→ S	{S}	{S,A}
A	{B}	{B}
B	{C}	{C}
* C	{}	{}

	0	1
→ {S}	{S}	{S,A}
{S,A}	{S,B}	{S,A,B}
{S,B}	{S,C}	{S,A,C}
{S,A,B}	{S,B,C}	{S,A,B,C}
{S,C}		
{S,A,C}		
{S,B,C}		
{S,A,B,C}		

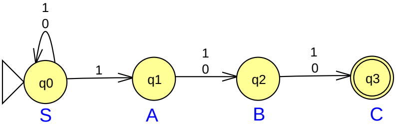
AFND x AFD - Exemplo



	0	1
$\rightarrow$ S	{S}	{S,A}
A	{B}	{B}
B	{C}	{C}
* C	{}	{}

	0	1
$\rightarrow$ {S}	{S}	{S,A}
{S,A}	{S,B}	{S,A,B}
{S,B}	{S,C}	{S,A,C}
{S,A,B}	{S,B,C}	{S,A,B,C}
{S,C}	{S}	{S,A}
{S,A,C}		
{S,B,C}		
{S,A,B,C}		

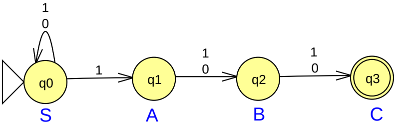
AFND x AFD - Exemplo



	0	1
$\rightarrow$ S	{S}	{S,A}
A	{B}	{B}
B	{C}	{C}
* C	{}	{}

	0	1
$\rightarrow$ {S}	{S}	{S,A}
{S,A}	{S,B}	{S,A,B}
{S,B}	{S,C}	{S,A,C}
{S,A,B}	{S,B,C}	{S,A,B,C}
{S,C}	{S}	{S,A}
{S,A,C}	{S,B}	{S,A,B}
{S,B,C}		
{S,A,B,C}		

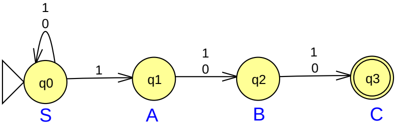
AFND x AFD - Exemplo



	0	1
$\rightarrow$ S	{S}	{S,A}
A	{B}	{B}
B	{C}	{C}
* C	{}	{}

	0	1
$\rightarrow$ {S}	{S}	{S,A}
{S,A}	{S,B}	{S,A,B}
{S,B}	{S,C}	{S,A,C}
{S,A,B}	{S,B,C}	{S,A,B,C}
{S,C}	{S}	{S,A}
{S,A,C}	{S,B}	{S,A,B}
{S,B,C}	{S,C}	{S,A,C}
{S,A,B,C}		

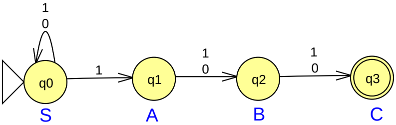
AFND x AFD - Exemplo



	0	1
$\rightarrow$ S	{S}	{S,A}
A	{B}	{B}
B	{C}	{C}
* C	{}	{}

	0	1
$\rightarrow$ {S}	{S}	{S,A}
{S,A}	{S,B}	{S,A,B}
{S,B}	{S,C}	{S,A,C}
{S,A,B}	{S,B,C}	{S,A,B,C}
{S,C}	{S}	{S,A}
{S,A,C}	{S,B}	{S,A,B}
{S,B,C}	{S,C}	{S,A,C}
{S,A,B,C}	{S,B,C}	{S,A,B,C}

AFND x AFD - Exemplo



	0	1
→ S	{S}	{S,A}
A	{B}	{B}
B	{C}	{C}
* C	{}	{}

	0	1
→ {S}	{S}	{S,A}
{S,A}	{S,B}	{S,A,B}
{S,B}	{S,C}	{S,A,C}
{S,A,B}	{S,B,C}	{S,A,B,C}
* {S,C}	{S}	{S,A}
* {S,A,C}	{S,B}	{S,A,B}
* {S,B,C}	{S,C}	{S,A,C}
* {S,A,B,C}	{S,B,C}	{S,A,B,C}

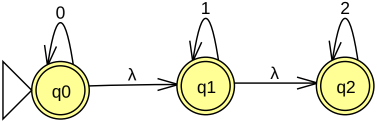
AFND com transições ε (ε-AFND)

Com transições ε, definimos o conceito de ε-Fecho(q) ou $E(q)$, sendo que este é o conjunto de todos os estados que podem ser alcançados a partir de um estado q com zero ou mais transições ε.

Da mesma forma, ε-Fecho(R) ou $E(R)$ é o conjunto de todos os estados que podem ser alcançados a partir de qualquer estado de R com zero ou mais transições ε.

- **Teorema**: uma linguagem L é aceita por um ε-AFND se e somente se L é aceita por um AFD
- **Teorema**: uma linguagem L é regular se e somente se existe um ε-AFND que a reconhece

AFND com transições ε (ε-AFND)



$E(q0) = \{q0, q1, q2\}$

$E(q1) = \{q1, q2\}$

$E(q2) = \{q2\}$

$E(\delta(\{q0, q1\}, 1)) = \{\mathbf{q1}, q2\}$ (alcança-se o estado q1 e então inclui-se todos os demais estados alcançados a partir de q1 com zero ou mais transições vazias

$E(\delta(\{q0, q1, q2\}, 0)) = \{\mathbf{q0}, q1, q2\}$ (alcança-se o estado q0 e então inclui-se todos os demais estados alcançados a partir de q0 com zero ou mais transições vazias

ε-AFND x AFD - Equivalência

Teorema: se uma linguagem L é aceita por um AFD, então L é aceita por um ε-AFND

ε-AFND x AFD - Equivalência

Teorema: se uma linguagem L é aceita por um AFD, então L é aceita por um ε-AFND

- **Prova**: note que todo AFD é um ε-AFND que respeita as restrições impostas pelos AFDs. Assim, se L é aceita por um AFD, então L é também aceita por um ε-AFND. Então, a classe de linguagens aceitas por um ε-AFND inclui todas as linguagens aceitas por um AFD, portanto, todas as linguagens regulares

ε-AFND x AFD - Equivalência

Teorema: se uma linguagem L é aceita por um ε-AFND, então L é aceita por um AFD

ε-AFND x AFD - Equivalência

Teorema: se uma linguagem L é aceita por um ε-AFND, então L é aceita por um AFD

- **Prova**: vamos mostrar agora que se M é um ε-AFND, $L(M)$ é uma linguagem regular

ε-AFND x AFD - Equivalência

Teorema: se uma linguagem L é aceita por um ε-AFND, então L é aceita por um AFD

- **Prova**: vamos mostrar agora que se M é um ε-AFND, $L(M)$ é uma linguagem regular
- Fazemos isso construindo um AFD M' a partir de um ε-AFND M, assim mostramos também que ε-AFND e AFD são equivalentes, ou seja, $L(M) = L(M')$

ε-AFND x AFD - Equivalência

Teorema: se uma linguagem L é aceita por um ε-AFND, então L é aceita por um AFD

- **Prova**: vamos mostrar agora que se M é um ε-AFND, $L(M)$ é uma linguagem regular
- Fazemos isso construindo um AFD M' a partir de um ε-AFND M, assim mostramos também que ε-AFND e AFD são equivalentes, ou seja, $L(M) = L(M')$
- O AFD M' irá "lembrar"quais estados o ε-AFND M poderia estar com a entrada w em determinado instante. Isso só funciona pois Q é finito.

ε-AFND x AFD - Equivalência

Prova: por construção

ε-AFND x AFD - Equivalência

Prova: por construção

- Seja $M = (Q, \Sigma, \delta, q0, F)$ um ε-AFND que reconhece alguma linguagem L

ε-AFND x AFD - Equivalência

Prova: por construção

- Seja $M = (Q, \Sigma, \delta, q0, F)$ um ε-AFND que reconhece alguma linguagem L
- Vamos constuir um AFD $M' = (Q', \Sigma, \delta', q0', F')$ a partir de M e que reconheça L

ε-AFND x AFD - Equivalência

Prova: por construção

- Seja $M = (Q, \Sigma, \delta, q0, F)$ um ε-AFND que reconhece alguma linguagem L
- Vamos constuir um AFD $M' = (Q', \Sigma, \delta', q0', F')$ a partir de M e que reconheça L
- $Q' = P(Q)$

ε-AFND x AFD - Equivalência

Prova: por construção

- Seja $M = (Q, \Sigma, \delta, q0, F)$ um ε-AFND que reconhece alguma linguagem L
- Vamos constuir um AFD $M' = (Q', \Sigma, \delta', q0', F')$ a partir de M e que reconheça L
- $Q' = P(Q)$
- $q0' = \mathbf{E}(\{q0\})$

ε-AFND x AFD - Equivalência

Prova: por construção

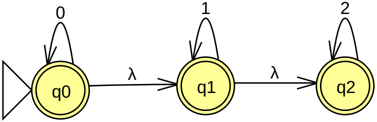
- Seja $M = (Q, \Sigma, \delta, q0, F)$ um ε-AFND que reconhece alguma linguagem L
- Vamos constuir um AFD $M' = (Q', \Sigma, \delta', q0', F')$ a partir de M e que reconheça L
- $Q' = P(Q)$
- $q0' = \mathbf{E}(\{q0\})$
- δ' = para cada $R \in Q'$ e $a \in \Sigma$, temos que $\delta'(R, a) = R'$, onde $R' = \bigcup_{r \in R} \mathbf{E}(\delta(r, a))$
  - R' conterá todos os estados alcançados a partir de cada estado r com cada símbolo a ou transições ε considerando o autômato M

ε-AFND x AFD - Equivalência

Prova: por construção

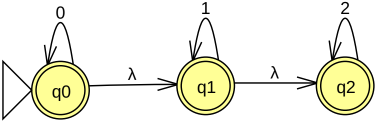
- Seja $M = (Q, \Sigma, \delta, q0, F)$ um ε-AFND que reconhece alguma linguagem L
- Vamos constuir um AFD $M' = (Q', \Sigma, \delta', q0', F')$ a partir de M e que reconheça L
- $Q' = P(Q)$
- $q0' = \mathbf{E}(\{q0\})$
- δ' = para cada $R \in Q'$ e $a \in \Sigma$, temos que $\delta'(R, a) = R'$, onde $R' = \bigcup_{r \in R} \mathbf{E}(\delta(r, a))$
    - R' conterá todos os estados alcançados a partir de cada estado r com cada símbolo a ou transições ε considerando o autômato M
- $F' = \{R \in Q' | R \cap F \neq \emptyset\}$, ou seja, um estado R é final se ele possui algum estado final de M

ε-AFND x AFD - Equivalência - Exemplo



Para facilitar, primeiro computamos o ε-Fecho de todos os estados do ε-AFND

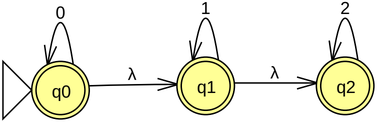
ε-AFND x AFD - Equivalência - Exemplo



Para facilitar, primeiro computamos o ε-Fecho de todos os estados do ε-AFND

$E(q0) = \{q0, q1, q2\}$, $E(q1) = \{q1, q2\}$, $E(q2) = \{q2\}$

ε-AFND x AFD - Equivalência - Exemplo

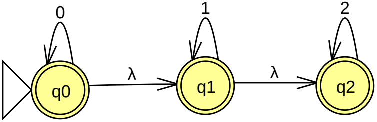


Para facilitar, primeiro computamos o ε-Fecho de todos os estados do ε-AFND

$E(q0) = \{q0, q1, q2\}$, $E(q1) = \{q1, q2\}$, $E(q2) = \{q2\}$

Identificamos agora o estado inicial do AFD M', que é dado por $E(q0)$,

ε-AFND x AFD - Equivalência - Exemplo

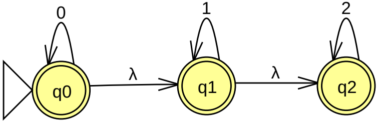


Para facilitar, primeiro computamos o ε-Fecho de todos os estados do ε-AFND

$E(q0) = \{q0, q1, q2\}$, $E(q1) = \{q1, q2\}$, $E(q2) = \{q2\}$

Identificamos agora o estado inicial do AFD M', que é dado por $E(q0)$, assim, $q0' = E(q0) = \{q0, q1, q2\}$

ε-AFND x AFD - Equivalência - Exemplo

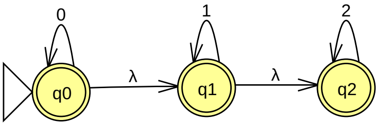


$$E(q0) = \{q0, q1, q2\}$$
$$E(q1) = \{q1, q2\}$$
$$E(q2) = \{q2\}$$
$$q0' = E(q0) = \{q0, q1, q2\}$$

Agora podemos construir o AFD M' seguindo o procedimento apresentado anteriormente

	0	1	2
$\rightarrow$ {q0,q1,q2}			

ε-AFND x AFD - Equivalência - Exemplo

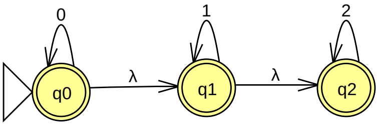


$$E(q0) = \{q0, q1, q2\}$$
$$E(q1) = \{q1, q2\}$$
$$E(q2) = \{q2\}$$
$$q0' = E(q0) = \{q0, q1, q2\}$$

Agora podemos construir o AFD M' seguindo o procedimento apresentado anteriormente

	0	1	
$\rightarrow$ {q0,q1,q2}	$E(\delta(\{q0, q1, q2\}, 0))$	$E(\delta(\{q0, q1, q2\}, 1))$	$E(\delta(\{q0$

ε-AFND x AFD - Equivalência - Exemplo

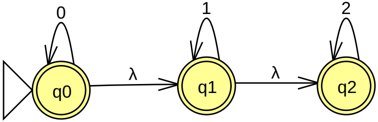


$$E(q0) = \{q0, q1, q2\}$$
$$E(q1) = \{q1, q2\}$$
$$E(q2) = \{q2\}$$
$$q0' = E(q0) = \{q0, q1, q2\}$$

Agora podemos construir o AFD M' seguindo o procedimento apresentado anteriormente

	0	1	2
$\rightarrow$ {q0,q1,q2}	{**q0**,q1,q2}	$E(\delta(\{q0, q1, q2\}, 1))$	$E(\delta(\{q0, q1, q2\},$

ε-AFND x AFD - Equivalência - Exemplo

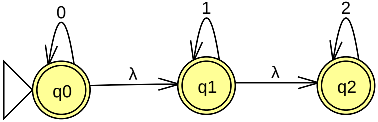


$$E(q0) = \{q0, q1, q2\}$$
$$E(q1) = \{q1, q2\}$$
$$E(q2) = \{q2\}$$
$$q0' = E(q0) = \{q0, q1, q2\}$$

Agora podemos construir o AFD M' seguindo o procedimento apresentado anteriormente

	0	1	2
$\rightarrow$ {q0,q1,q2}	{**q0**,q1,q2}	{**q1**,q2}	$E(\delta(\{q0, q1, q2\}, 2))$

ε-AFND x AFD - Equivalência - Exemplo

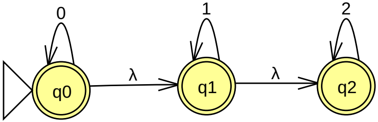


$E(q0) = \{q0, q1, q2\}$
$E(q1) = \{q1, q2\}$
$E(q2) = \{q2\}$
$q0' = E(q0) = \{q0, q1, q2\}$

Agora podemos construir o AFD M' seguindo o procedimento apresentado anteriormente

	0	1	2
$\rightarrow$ {q0,q1,q2}	{**q0**,q1,q2}	{**q1**,q2}	{**q2**}

ε-AFND x AFD - Equivalência - Exemplo

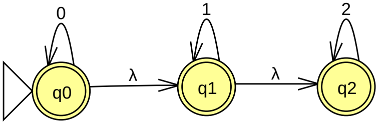


$$E(q0) = \{q0, q1, q2\}$$
$$E(q1) = \{q1, q2\}$$
$$E(q2) = \{q2\}$$
$$q0' = E(q0) = \{q0, q1, q2\}$$

Agora podemos construir o AFD M' seguindo o procedimento apresentado anteriormente

	0	1	2
$\rightarrow$ {q0,q1,q2}	{**q0**,q1,q2}	{**q1**,q2}	**{q2}**
{q1,q2}			
{q2}			

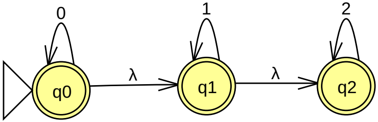
ε-AFND x AFD - Equivalência - Exemplo



$$E(q0) = \{q0, q1, q2\}$$
$$E(q1) = \{q1, q2\}$$
$$E(q2) = \{q2\}$$
$$q0' = E(q0) = \{q0, q1, q2\}$$

Agora podemos construir o AFD M' seguindo o procedimento apresentado anteriormente

	0	1	2
$\rightarrow$ {q0,q1,q2}	{**q0**,q1,q2}	{**q1**,q2}	{**q2**}
{q1,q2}	$E(\delta(\{q1, q2\}, 0))$	$E(\delta(\{q1, q2\}, 1))$	$E(\delta(\{q1, q2\}, 2$
{q2}	$E(\delta(\{q2\}, 0))$	$E(\delta(\{q2\}, 1))$	$E(\delta(\{q2\}, 2))$

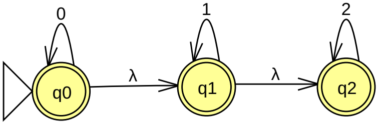


$$E(q0) = \{q0, q1, q2\}$$
$$E(q1) = \{q1, q2\}$$
$$E(q2) = \{q2\}$$
$$q0' = E(q0) = \{q0, q1, q2\}$$

Agora podemos construir o AFD M' seguindo o procedimento apresentado anteriormente

	0	1	2
$\rightarrow$ {q0,q1,q2}	{**q0**,q1,q2}	{**q1**,q2}	**{q2}**
{q1,q2}	{}	{**q1**,q2}	**{q2}**
{q2}	$E(\delta(\{q2\}, 0))$	$E(\delta(\{q2\}, 1))$	$E(\delta(\{q2\}, 2))$

ε-AFND x AFD - Equivalência - Exemplo

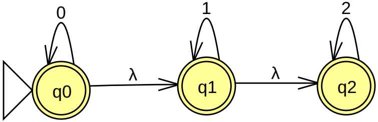


$$E(q0) = \{q0, q1, q2\}$$
$$E(q1) = \{q1, q2\}$$
$$E(q2) = \{q2\}$$
$$q0' = E(q0) = \{q0, q1, q2\}$$

Agora podemos construir o AFD M' seguindo o procedimento apresentado anteriormente

	0	1	2
$\rightarrow$ {q0,q1,q2}	**{q0**,q1,q2**}**	**{q1**,q2**}**	**{q2}**
{q1,q2}	{}	**{q1**,q2**}**	**{q2}**
{q2}	$E(\delta(\{q2\},0))$	$E(\delta(\{q2\},1))$	$E(\delta(\{q2\},2))$
{}	$E(\delta(\{\},0))$	$E(\delta(\{\},1))$	$E(\delta(\{\},2))$

ε-AFND x AFD - Equivalência - Exemplo

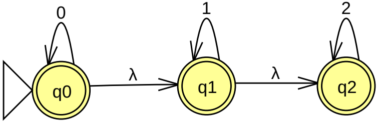


$$E(q0) = \{q0, q1, q2\}$$
$$E(q1) = \{q1, q2\}$$
$$E(q2) = \{q2\}$$
$$q0' = E(q0) = \{q0, q1, q2\}$$

Agora podemos construir o AFD M' seguindo o procedimento apresentado anteriormente

	0	1	2
$\rightarrow$ {q0,q1,q2}	{**q0**,q1,q2}	{**q1**,q2}	**{q2}**
{q1,q2}	{}	{**q1**,q2}	**{q2}**
{q2}	{}	{}	**{q2}**
{}	$E(\delta(\{\}, 0))$	$E(\delta(\{\}, 1))$	$E(\delta(\{\}, 2))$

ε-AFND x AFD - Equivalência - Exemplo

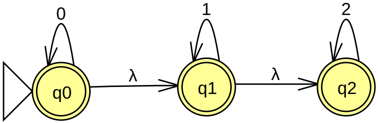


$$E(q0) = \{q0, q1, q2\}$$
$$E(q1) = \{q1, q2\}$$
$$E(q2) = \{q2\}$$
$$q0' = E(q0) = \{q0, q1, q2\}$$

Agora podemos construir o AFD M' seguindo o procedimento apresentado anteriormente

	0	1	2
$\rightarrow$ {q0,q1,q2}	{**q0**,q1,q2}	{**q1**,q2}	{**q2**}
{q1,q2}	{}	{**q1**,q2}	{**q2**}
{q2}	{}	{}	{**q2**}
{}	{}	{}	{}

ε-AFND x AFD - Equivalência - Exemplo

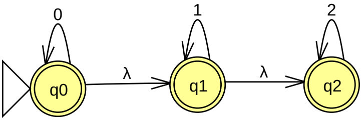


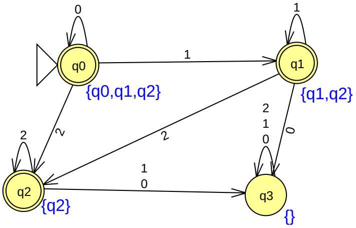
$$E(q0) = \{q0, q1, q2\}$$
$$E(q1) = \{q1, q2\}$$
$$E(q2) = \{q2\}$$
$$q0' = E(q0) = \{q0, q1, q2\}$$

Agora podemos construir o AFD M' seguindo o procedimento apresentado anteriormente

	0	1	2
$\rightarrow$ * {q0,q1,q2}	{**q0**,q1,q2}	{**q1**,q2}	{**q2**}
* {q1,q2}	{}	{**q1**,q2}	{**q2**}
* {q2}	{}	{}	{**q2**}
{}	{}	{}	{}

ε-AFND x AFD - Equivalência - Exemplo





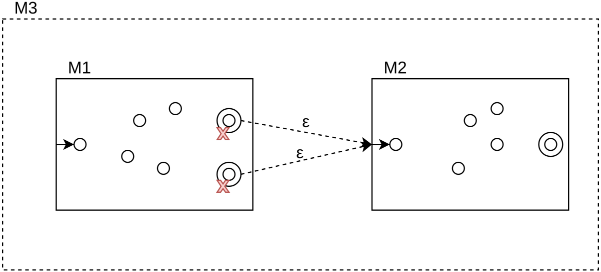
	0	1	2
$\rightarrow$ * {q0,q1,q2}	{**q0**,q1,q2}	{**q1**,q2}	{**q2**}
* {q1,q2}	{}	{**q1**,q2}	{**q2**}
* {q2}	{}	{}	{**q2**}
{}	{}	{}	{}

Linguagens Regulares - Operações - Concatenação

Seja $L1, L2 \subseteq \Sigma^*$ e $L1$ e $L2$ sendo regulares, então $L = L1 \circ L2$ também é uma linguagem regular. A classe das linguagens regulares é fechada na operação de concatenação.

Prova: por construção.

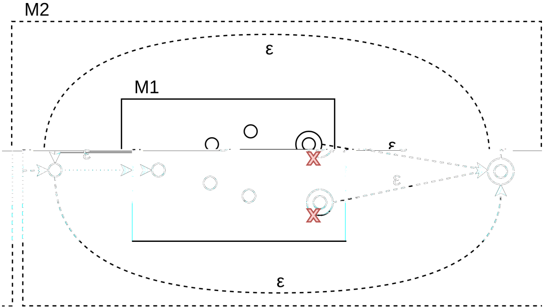
- Sejam os AFDs $M1$ e $M2$ que reconhecem $L1$ e $L2$, respectivamente
- Vamos construir o autômato $M3$ que reconhece a linguagem $L = L1 \circ L2$ conforme o esquema abaixo



Seja $A \subseteq \Sigma^*$ e A sendo regular, então $L = A^*$ também é uma linguagem regular. A classe das linguagens regulares é fechada na operação de fecho de Kleene.

Prova: por construção.

- Seja o AFD $M1$ que reconhece A
- Vamos construir o autômato $M2$ que reconhece a linguagem $L = A^*$ conforme o esquema abaixo



Expressão regular (ER) é outra forma de representar linguagens regulares

- Utiliza os símbolos do alfabeto e alguns caracteres especiais, por exemplo, para representar a quantidade de vezes que um terminal ou grupo de terminais se repetem dentro da formação de uma palavra
- Uma ER é expressa por meio de operações de concatenação, união e fecho de Kleene sobre linguagens

Linguagens Regulares - Expressões Regulares

Uma expressão regular R sobre um alfabeto Σ é definida como:

1. a, onde $a \in \Sigma$. Representa a linguagem $\{a\} = L(a)$
2. ε representa a linguagem $\{\varepsilon\} = L(\varepsilon)$
3. $\emptyset$ representa a linguagem $\{\} = L(\emptyset)$
4. $R_1 + R_2$, onde R_1 e R_2 são ER e representa a linguagem resultante de $L(R_1) \cup L(R_2)$
5. $R_1 \circ R_2$ ou $R_1 R_2$, onde R_1 e R_2 são ER e representa a linguagem resultante de $L(R_1) \circ L(R_2)$
6. R_1^*, onde R_1 é uma ER e representa a linguagem resultante de $L(R_1)^*$

Linguagens Regulares - Expressões Regulares

Uma expressão regular R sobre um alfabeto Σ é definida como:

1. a, onde $a \in \Sigma$. Representa a linguagem $\{a\} = L(a)$
2. ε representa a linguagem $\{\varepsilon\} = L(\varepsilon)$
3. $\emptyset$ representa a linguagem $\{\} = L(\emptyset)$
4. $R_1 + R_2$, onde R_1 e R_2 são ER e representa a linguagem resultante de $L(R_1) \cup L(R_2)$
5. $R_1 \circ R_2$ ou $R_1 R_2$, onde R_1 e R_2 são ER e representa a linguagem resultante de $L(R_1) \circ L(R_2)$
6. R_1^*, onde R_1 é uma ER e representa a linguagem resultante de $L(R_1)^*$

Exemplo: seja o alfabeto $\Sigma = \{a, b\}$

a e **b** são ER então pela regra 4 **a** + **b** também é uma ER.

Linguagens Regulares - Expressões Regulares - Exemplo

$L1 = \{w | w \in \{a, b\}^*$ e w começa e termina com $a\}$

Linguagens Regulares - Expressões Regulares - Exemplo

$L1 = \{w | w \in \{a, b\}^*$ e w começa e termina com $a\}$

- $a | a(a + b)^* a = a + a(a + b)^* a$

Linguagens Regulares - Expressões Regulares - Exemplo

$L1 = \{w | w \in \{a, b\}^*$ e w começa e termina com $a\}$

- $a | a(a + b)^* a = a + a(a + b)^* a$

$(a + b)^* bbb(a + b)^*$

Linguagens Regulares - Expressões Regulares - Exemplo

$L1 = \{w|w \in \{a,b\}^*$ e w começa e termina com $a\}$

- $a|a(a+b)^*a = a + a(a+b)^*a$

$(a+b)^*bbb(a+b)^*$

- $L2 = \{w|w \in \{a,b\}^*$ e w contém a subcadeia $bbb\}$

Linguagens Regulares - Expressões Regulares - Exemplo

$L1 = \{w | w \in \{a, b\}^*$ e w começa e termina com $a\}$

- $a | a(a+b)^*a = a + a(a+b)^*a$

$(a+b)^*bbb(a+b)^*$

- $L2 = \{w | w \in \{a, b\}^*$ e w contém a subcadeia $bbb\}$

$((a+b)(a+b))^*$

Linguagens Regulares - Expressões Regulares - Exemplo

$L1 = \{w | w \in \{a, b\}^*$ e w começa e termina com $a\}$

- $a | a(a + b)^* a = a + a(a + b)^* a$

$(a + b)^* bbb(a + b)^*$

- $L2 = \{w | w \in \{a, b\}^*$ e w contém a subcadeia $bbb\}$

$((a + b)(a + b))^*$

- $L3 = \{w | w \in \{a, b\}^*$ e $|w|$ é par $\}$

Linguagens Regulares - Expressões Regulares - Exemplo

$L1 = \{w | w \in \{a, b\}^*$ e w começa e termina com $a\}$

- $a | a(a + b)^* a = a + a(a + b)^* a$

$(a + b)^* bbb(a + b)^*$

- $L2 = \{w | w \in \{a, b\}^*$ e w contém a subcadeia $bbb\}$

$((a + b)(a + b))^*$

- $L3 = \{w | w \in \{a, b\}^*$ e $|w|$ é par $\}$

Tente:

- $L4 = \{w | w \in \{a, b\}^*$ e o número de a's é par $\}$
- $L5 = \{w | w \in \{a, b\}^*$ e w começa e termina com a mesma letra $\}$

Teorema: uma linguagem é regular se e somente se alguma expressão regular a descreve

Prova: precisamos provar as duas direções

- Lemma 1: Se uma linguagem é descrita por uma expressão regular, então ela é regular
- Lemma 2: Se uma linguagem é regular, então ela é descrita por uma expressão regular

Lemma 1: Se uma linguagem é descrita por uma expressão regular, então ela é regular

Prova: por construção

- Já sabemos que uma linguagem é regular se e somente se algum AFD a reconhece. Sabemos também que AFND, ε-AFND e AFD são equivalentes. Assim, podemos mostrar que ER e AFs são equivalentes para tanto provar o Lemma 1 como o Lemma 2.

Lemma 1: Se uma linguagem é descrita por uma expressão regular, então ela é regular
Prova: por construção

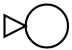
- Já sabemos que uma linguagem é regular se e somente se algum AFD a reconhece. Sabemos também que AFND, ε-AFND e AFD são equivalentes. Assim, podemos mostrar que ER e AFs são equivalentes para tanto provar o Lemma 1 como o Lemma 2.
- Mostraremos aqui como provar o Lemma 1, construindo um ε-AFND a partir de uma ER

Lemma 1: Se uma linguagem é descrita por uma expressão regular, então ela é regular
Prova: por construção

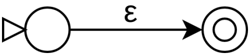
- Já sabemos que uma linguagem é regular se e somente se algum AFD a reconhece. Sabemos também que AFND, ε-AFND e AFD são equivalentes. Assim, podemos mostrar que ER e AFs são equivalentes para tanto provar o Lemma 1 como o Lemma 2.
- Mostraremos aqui como provar o Lemma 1, construindo um ε-AFND a partir de uma ER
- Para isso, basta criarmos para cada regra de construção de ER um ε-AFND equivalente

Autômatos Finitos x Expressões Regulares

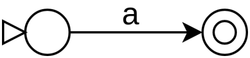
$\emptyset$



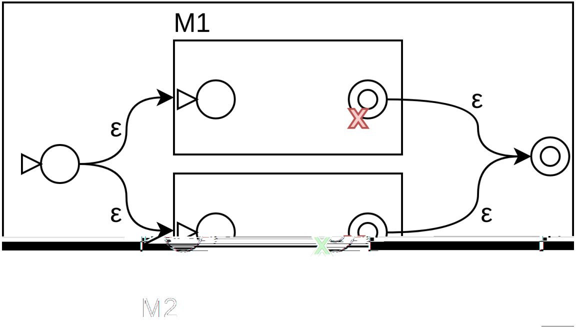
ε



a

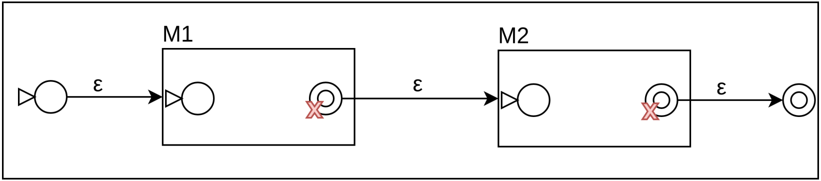


$$R_1 + R_2$$



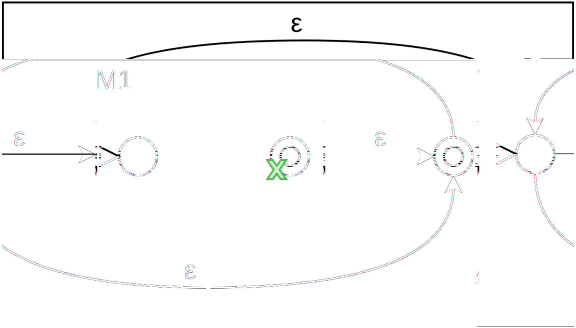
Autômatos Finitos x Expressões Regulares

$$R_1 \circ R_2$$



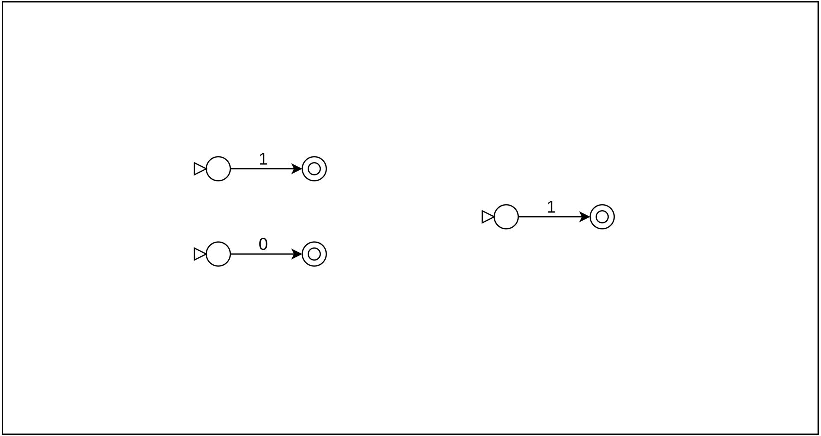
Autômatos Finitos x Expressões Regulares

R_1^*



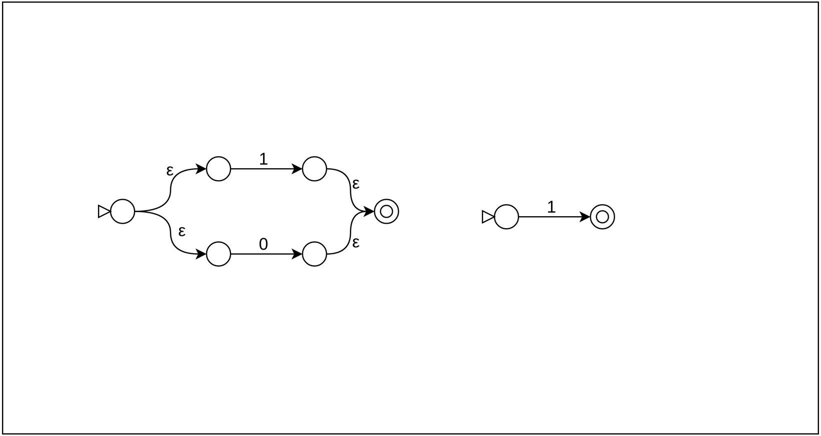
Autômatos Finitos x Expressões Regulares - Exemplo

$(1 + 0)^{*}1$



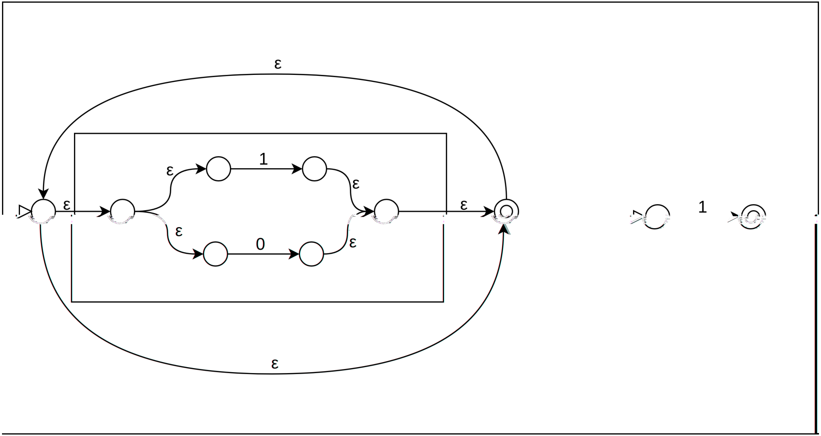
Autômatos Finitos x Expressões Regulares - Exemplo

$(1 + 0)^*1$



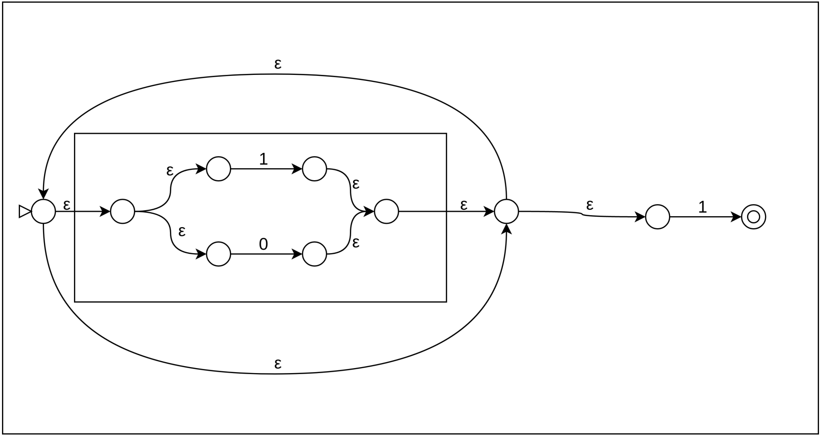
Autômatos Finitos x Expressões Regulares - Exemplo

$(1 + 0)^*1$



Autômatos Finitos x Expressões Regulares - Exemplo

$(1 + 0)^*1$



Autômatos Finitos x Expressões Regulares

- Determinize o autômato anterior
- Tente criar o autômato equivalente para a ER $(10)^*(1+0)1$
- Para a prova do Lemma 2, veja o livro do Sipser, Cap 1 (Lemma 1.60)

Podemos usar expressões regulares também para provar que as linguagens regulares são fechadas em certas operações, por exemplo, a operação de concatenação, onde se L_1 e L_2 são linguagens regulares, então $L = L_1 \circ L_2$ também é regular.

Prova: se L_1 e L_2 são linguagens regulares então existem expressões regulares que descrevem as mesmas. Sejam elas, R_1 e R_2, respectivamente, assim $L(R_1) = L_1$ e $L(R_2) = L_2$.

- Note agora que $L(R_1 \circ R_2) = L(R_1) \circ L(R_2)$, ou seja, a linguagem resultante da concatenação das ERs R_1 e R_2 é exatamente a mesma linguagem resultante da concatenação das linguagens descritas por R_1 e R_2

Linguagens Regulares - Propriedades de Fechamento

As propriedades de fechamento podem ser utilizadas, dentre outras coisas, para determinar que uma linguagem não pertence a certa classe de linguagens. Por exemplo, podemos facilmente mostrar que L não é uma linguagem regular simplesmente provando que $\overline{L}$ não é uma linguagem regular.

- Note que as linguagens regulares são fechadas em complemento, então se L e $\overline{L}$ devem ser regulares, assim, se $\overline{L}$ não é regular, então L também não é regular.

Como mostrar que uma linguagem é regular?

Como mostrar que uma linguagem é regular?

- Construir um autômato finito que a reconheça ou uma expressão regular que a descreve

Linguagens Não Regulares e Lema do Bombeamento

Como mostrar que uma linguagem é regular?

- Construir um autômato finito que a reconheça ou uma expressão regular que a descreve

Como mostrar que uma linguagem não é regular?

Linguagens Não Regulares e Lema do Bombeamento

Como mostrar que uma linguagem é regular?

- Construir um autômato finito que a reconheça ou uma expressão regular que a descreve

Como mostrar que uma linguagem não é regular?

- Usar propriedades de fechamento
- Usar o lema do bombeamento (pumping lemma)

Linguagens Não Regulares e Lema do Bombeamento

O lema do bombeamento baseia-se na ideia de que se uma linguagem L é regular, logo, existe um AFD com n estados que a reconhece, sendo n finito

O lema do bombeamento baseia-se na ideia de que se uma linguagem L é regular, logo, existe um AFD com n estados que a reconhece, sendo n finito

- Para toda palavra $w \in L$ que tem comprimento maior ou igual a n, ou seja, $|w| \geq n$, então o AFD assume algum estado mais de uma vez durante o processo de reconhecimento de w e portanto há um ciclo no AFD

O lema do bombeamento baseia-se na ideia de que se uma linguagem L é regular, logo, existe um AFD com n estados que a reconhece, sendo n finito

- Para toda palavra $w \in L$ que tem comprimento maior ou igual a n, ou seja, $|w| \geq n$, então o AFD assume algum estado mais de uma vez durante o processo de reconhecimento de w e portanto há um ciclo no AFD
- Então, existe uma forma de dividir w da seguinte forma $w = uvz$, tal que $|uv| \leq n$ e $|v| \geq 1$, onde a subcadeia v é a parte de w que é reconhecida pelo ciclo

Linguagens Não Regulares e Lema do Bombeamento

O lema do bombeamento baseia-se na ideia de que se uma linguagem L é regular, logo, existe um AFD com n estados que a reconhece, sendo n finito

- Para toda palavra $w \in L$ que tem comprimento maior ou igual a n, ou seja, $|w| \geq n$, então o AFD assume algum estado mais de uma vez durante o processo de reconhecimento de w e portanto há um ciclo no AFD
- Então, existe uma forma de dividir w da seguinte forma $w = uvz$, tal que $|uv| \leq n$ e $|v| \geq 1$, onde a subcadeia v é a parte de w que é reconhecida pelo ciclo
- Portanto, temos que $uv^iz \in L$ para todo $i \geq 0$

Se uma linguagem é regular, então ela certamente satisfaz o lema do bombeamento, porém nem toda linguagem que satisfaz o lema do bombeamento é regular

$L = \{w | w \in \{a, b\}^+ \text{ e } w = a^n b^n \text{ e } n \geq 1\}$

Vamos mostrar que L não é regular

Linguagens Não Regulares e Lema do Bombeamento

$L = \{w | w \in \{a, b\}^+ \text{ e } w = a^n b^n \text{ e } n \geq 1\}$

Vamos mostrar que L não é regular

Prova: por contradição

$L = \{w | w \in \{a, b\}^+ \text{ e } w = a^n b^n \text{ e } n \geq 1\}$

Vamos mostrar que L não é regular

Prova: por contradição

- Suponha que L é regular, então existe um AFD de tamanho k que a reconhece

$L = \{w | w \in \{a, b\}^+ \text{ e } w = a^n b^n \text{ e } n \geq 1\}$

Vamos mostrar que L não é regular

Prova: por contradição

- Suponha que L é regular, então existe um AFD de tamanho k que a reconhece
- Seja agora $w = a^k b^k \in L$. Note que $|w| \geq k$.

$L = \{w | w \in \{a, b\}^+ \text{ e } w = a^n b^n \text{ e } n \geq 1\}$

Vamos mostrar que L não é regular

Prova: por contradição

- Suponha que L é regular, então existe um AFD de tamanho k que a reconhece
- Seja agora $w = a^k b^k \in L$. Note que $|w| \geq k$.
- Então, podemos dividir $w = uvz$, tal que $|uv| \leq k$ e $|v| \geq 1$

$L = \{w | w \in \{a, b\}^+ \text{ e } w = a^n b^n \text{ e } n \geq 1\}$

Vamos mostrar que L não é regular

Prova: por contradição

- Suponha que L é regular, então existe um AFD de tamanho k que a reconhece
- Seja agora $w = a^k b^k \in L$. Note que $|w| \geq k$.
- Então, podemos dividir $w = uvz$, tal que $|uv| \leq k$ e $|v| \geq 1$
- Deveríamos poder verificar que $uv^i z \in L$ para todo $i \geq 0$

$L = \{w | w \in \{a, b\}^+ \text{ e } w = a^n b^n \text{ e } n \geq 1\}$

Vamos mostrar que L não é regular

Prova: por contradição

- Suponha que L é regular, então existe um AFD de tamanho k que a reconhece
- Seja agora $w = a^k b^k \in L$. Note que $|w| \geq k$.
- Então, podemos dividir $w = uvz$, tal que $|uv| \leq k$ e $|v| \geq 1$
- Deveríamos poder verificar que $uv^i z \in L$ para todo $i \geq 0$
- Porém, note que se $|uv| \leq k$ temos que a subcadeia uv conterá apenas símbolos a, inclusive v, visto que $|v| \geq 1$

$L = \{w | w \in \{a, b\}^+ \text{ e } w = a^n b^n \text{ e } n \geq 1\}$

Vamos mostrar que L não é regular

Prova: por contradição

- Suponha que L é regular, então existe um AFD de tamanho k que a reconhece
- Seja agora $w = a^k b^k \in L$. Note que $|w| \geq k$.
- Então, podemos dividir $w = uvz$, tal que $|uv| \leq k$ e $|v| \geq 1$
- Deveríamos poder verificar que $uv^i z \in L$ para todo $i \geq 0$
- Porém, note que se $|uv| \leq k$ temos que a subcadeia uv conterá apenas símbolos a, inclusive v, visto que $|v| \geq 1$
- Então, se fizermos $i = 0$ temos que $uv^0 z \notin L$, pois certamente estaremos removendo ao menos um símbolo a

Linguagens Não Regulares e Lema do Bombeamento

$L = \{w | w \in \{a, b\}^+ \text{ e } w = a^n b^n \text{ e } n \geq 1\}$

Vamos mostrar que L não é regular

Prova: por contradição

- Suponha que L é regular, então existe um AFD de tamanho k que a reconhece
- Seja agora $w = a^k b^k \in L$. Note que $|w| \geq k$.
- Então, podemos dividir $w = uvz$, tal que $|uv| \leq k$ e $|v| \geq 1$
- Deveríamos poder verificar que $uv^i z \in L$ para todo $i \geq 0$
- Porém, note que se $|uv| \leq k$ temos que a subcadeia uv conterá apenas símbolos a, inclusive v, visto que $|v| \geq 1$
- Então, se fizermos $i = 0$ temos que $uv^0 z \notin L$, pois certamente estaremos removendo ao menos um símbolo a
- L não pode ser regular!

$L = \{w | w \in \{1\}^* \text{ e } w = 1^{n^2} \text{ e } n \geq 0\}$

Vamos mostrar que L não é regular

$L = \{w | w \in \{1\}^* \text{ e } w = 1^{n^2} \text{ e } n \geq 0\}$

Vamos mostrar que L não é regular

Prova: por contradição

$L = \{w | w \in \{1\}^* \text{ e } w = 1^{n^2} \text{ e } n \geq 0\}$

Vamos mostrar que L não é regular

Prova: por contradição

- Suponha que L é regular, então existe um AFD de tamanho k que a reconhece

$L = \{w|w \in \{1\}^* \text{ e } w = 1^{n^2} \text{ e } n \geq 0\}$

Vamos mostrar que L não é regular

Prova: por contradição

- Suponha que L é regular, então existe um AFD de tamanho k que a reconhece
- Seja agora $w = 1^{k^2} \in L$. Note que $|w| \geq k$.

Linguagens Não Regulares e Lema do Bombeamento

$L = \{w | w \in \{1\}^* \text{ e } w = 1^{n^2} \text{ e } n \geq 0\}$

Vamos mostrar que L não é regular

Prova: por contradição

- Suponha que L é regular, então existe um AFD de tamanho k que a reconhece
- Seja agora $w = 1^{k^2} \in L$. Note que $|w| \geq k$.
- Então, podemos dividir $w = uvz$, tal que $|uv| \leq k$ e $|v| \geq 1$

Linguagens Não Regulares e Lema do Bombeamento

$L = \{w | w \in \{1\}^* \text{ e } w = 1^{n^2} \text{ e } n \geq 0\}$

Vamos mostrar que L não é regular

Prova: por contradição

- Suponha que L é regular, então existe um AFD de tamanho k que a reconhece
- Seja agora $w = 1^{k^2} \in L$. Note que $|w| \geq k$.
- Então, podemos dividir $w = uvz$, tal que $|uv| \leq k$ e $|v| \geq 1$
- Deveríamos poder verificar que $uv^iz \in L$ para todo $i \geq 0$

$L = \{w | w \in \{1\}^* \text{ e } w = 1^{n^2} \text{ e } n \geq 0\}$

Vamos mostrar que L não é regular

Prova: por contradição

- Suponha que L é regular, então existe um AFD de tamanho k que a reconhece
- Seja agora $w = 1^{k^2} \in L$. Note que $|w| \geq k$.
- Então, podemos dividir $w = uvz$, tal que $|uv| \leq k$ e $|v| \geq 1$
- Deveríamos poder verificar que $uv^iz \in L$ para todo $i \geq 0$
- Porém, note que se $|w| = k^2$ e $|uv| \leq k$ e fizermos $i = 2$ temos que $uv^2z \notin L$, pois $|uv^2z| = k^2 + k$ no máximo e $|uv^2z| = k^2 + 1$ no mínimo

Linguagens Não Regulares e Lema do Bombeamento

$L = \{w | w \in \{1\}^* \text{ e } w = 1^{n^2} \text{ e } n \geq 0\}$

Vamos mostrar que L não é regular

Prova: por contradição

- Suponha que L é regular, então existe um AFD de tamanho k que a reconhece
- Seja agora $w = 1^{k^2} \in L$. Note que $|w| \geq k$.
- Então, podemos dividir $w = uvz$, tal que $|uv| \leq k$ e $|v| \geq 1$
- Deveríamos poder verificar que $uv^iz \in L$ para todo $i \geq 0$
- Porém, note que se $|w| = k^2$ e $|uv| \leq k$ e fizermos $i = 2$ temos que $uv^2z \notin L$, pois $|uv^2z| = k^2 + k$ no máximo e $|uv^2z| = k^2 + 1$ no mínimo
- Mas veja que o próximo quadrado perfeito após k^2 seria $(k+1)^2$, portanto $k^2 < k^2 + 1 < k^2 + k < (k+1)^2 = k^2 + 2k + 1$

Linguagens Não Regulares e Lema do Bombeamento

$L = \{w | w \in \{1\}^* \text{ e } w = 1^{n^2} \text{ e } n \geq 0\}$

Vamos mostrar que L não é regular

Prova: por contradição

- Suponha que L é regular, então existe um AFD de tamanho k que a reconhece
- Seja agora $w = 1^{k^2} \in L$. Note que $|w| \geq k$.
- Então, podemos dividir $w = uvz$, tal que $|uv| \leq k$ e $|v| \geq 1$
- Deveríamos poder verificar que $uv^iz \in L$ para todo $i \geq 0$
- Porém, note que se $|w| = k^2$ e $|uv| \leq k$ e fizermos $i = 2$ temos que $uv^2z \notin L$, pois $|uv^2z| = k^2 + k$ no máximo e $|uv^2z| = k^2 + 1$ no mínimo
- Mas veja que o próximo quadrado perfeito após k^2 seria $(k+1)^2$, portanto $k^2 < k^2 + 1 < k^2 + k < (k+1)^2 = k^2 + 2k + 1$
- L não pode ser regular!

Linguagens Não Regulares e Lema do Bombeamento

Paradigma do adversário.

Vamos inicialmente reescrever o lema do bombeamento em expressões lógicas para o caso de L ser uma linguagem regular.

1. $\exists n$, onde n é o número de estados de um AFD que reconheça L
2. $\forall w \in L$, onde $|w| \geq n$
3. $\exists u, v, z$, tal que $w = uvz$, $|uv| \leq n$, $|v| \geq 1$
4. $\forall i \geq 0$, $uv^iz \in L$

Paradigma do adversário.

Vamos agora reescrever o paradigma do adversário considerando L uma linguagem que não seja uma linguagem regular.

1. $\forall n$, onde n é o número de estados de um AFD que reconheça L
2. $\exists w \in L$, onde $|w| \geq n$
3. $\forall u, v, z$, tal que $w = uvz$, $|uv| \leq n$, $|v| \geq 1$
4. $\exists i \geq 0$, $uv^iz \notin L$

Paradigma do adversário.

Vamos agora reescrever o paradigma do adversário considerando L uma linguagem que não seja uma linguagem regular.

1. $\forall n$, onde n é o número de estados de um AFD que reconheça L
2. $\exists w \in L$, onde $|w| \geq n$
3. $\forall u, v, z$, tal que $w = uvz$, $|uv| \leq n$, $|v| \geq 1$
4. $\exists i \geq 0$, $uv^i z \notin L$

Durante o processo de prova utilizando o paradigma do adversário, faremos uma espécie de "jogo", onde o adversário escolhe sempre $\forall$ e o provador (você) escolhe $\exists$

$L = \{w | w \in \{0,1\}^* \text{ e } w = w^R \text{ e } n \geq 1\}$

Vamos mostrar que L não é regular utilizando o paradigma do adversário

$L = \{w | w \in \{0, 1\}^* \text{ e } w = w^R \text{ e } n \geq 1\}$

Vamos mostrar que L não é regular utilizando o paradigma do adversário

1. Adversário: $\forall n$, onde n é o número de estados de um AFD que reconheça L

$L = \{w | w \in \{0,1\}^* \text{ e } w = w^R \text{ e } n \geq 1\}$

Vamos mostrar que L não é regular utilizando o paradigma do adversário

1. Adversário: $\forall n$, onde n é o número de estados de um AFD que reconheça L
   - $n = k$

Linguagens Não Regulares e Lema do Bombeamento

$L = \{w | w \in \{0,1\}^* \text{ e } w = w^R \text{ e } n \geq 1\}$

Vamos mostrar que L não é regular utilizando o paradigma do adversário

1. Adversário: $\forall n$, onde n é o número de estados de um AFD que reconheça L
    - $n = k$
2. Provador: $\exists w \in L$, onde $|w| \geq k$

Linguagens Não Regulares e Lema do Bombeamento

$L = \{w|w \in \{0,1\}^* \text{ e } w = w^R \text{ e } n \geq 1\}$

Vamos mostrar que L não é regular utilizando o paradigma do adversário

1. Adversário: $\forall n$, onde n é o número de estados de um AFD que reconheça L
   - $n = k$
2. Provador: $\exists w \in L$, onde $|w| \geq k$
   - $w = 0^{\lceil k/2 \rceil} 1 0^{\lceil k/2 \rceil}$

$L = \{w | w \in \{0,1\}^* \text{ e } w = w^R \text{ e } n \geq 1\}$

Vamos mostrar que L não é regular utilizando o paradigma do adversário

1. Adversário: $\forall n$, onde n é o número de estados de um AFD que reconheça L
   - $n = k$
2. Provador: $\exists w \in L$, onde $|w| \geq k$
   - $w = 0^{\lceil k/2 \rceil} 1 0^{\lceil k/2 \rceil}$
3. Adversário: $\forall u, v, z$, tal que $w = uvz$, $|uv| \leq n$, $|v| \geq 1$

Linguagens Não Regulares e Lema do Bombeamento

$L = \{w | w \in \{0,1\}^* \text{ e } w = w^R \text{ e } n \geq 1\}$

Vamos mostrar que L não é regular utilizando o paradigma do adversário

1. Adversário: $\forall n$, onde n é o número de estados de um AFD que reconheça L
   - $n = k$
2. Provador: $\exists w \in L$, onde $|w| \geq k$
   - $w = 0^{\lceil k/2 \rceil} 1 0^{\lceil k/2 \rceil}$
3. Adversário: $\forall u, v, z$, tal que $w = uvz$, $|uv| \leq n$, $|v| \geq 1$
   - $u = 0^{\lceil k/2 \rceil}$
   - $v = 1$
   - $z = 0^{\lceil k/2 \rceil}$

Linguagens Não Regulares e Lema do Bombeamento

$L = \{w | w \in \{0,1\}^* \text{ e } w = w^R \text{ e } n \geq 1\}$

Vamos mostrar que L não é regular utilizando o paradigma do adversário

1. Adversário: $\forall n$, onde n é o número de estados de um AFD que reconheça L
   - $n = k$
2. Provador: $\exists w \in L$, onde $|w| \geq k$
   - $w = 0^{\lceil k/2 \rceil} 1 0^{\lceil k/2 \rceil}$
3. Adversário: $\forall u, v, z$, tal que $w = uvz$, $|uv| \leq n$, $|v| \geq 1$
   - $u = 0^{\lceil k/2 \rceil}$
   - $v = 1$
   - $z = 0^{\lceil k/2 \rceil}$
4. Provador: $\exists i \geq 0$, $uv^iz \notin L$
   - Note que qualquer i que o provador tentar escolher, tem-se que v será repetido zero ou mais vezes, mas a palavra resultante sempre será palíndromo.

$L = \{w | w \in \{0,1\}^* \text{ e } w = w^R \text{ e } n \geq 1\}$

Vamos mostrar que L não é regular utilizando o paradigma do adversário

...

Por fim, o adversário venceu o jogo, o que significa que as escolhas feitas pelo provador foram ruins ou a linguagem é realmente uma linguagem regular

$L = \{w | w \in \{0, 1\}^* \text{ e } w = w^R \text{ e } n \geq 1\}$

Vamos tentar novamente.

$L = \{w | w \in \{0,1\}^* \text{ e } w = w^R \text{ e } n \geq 1\}$

Vamos tentar novamente.

1. Adversário: $\forall n$, onde n é o número de estados de um AFD que reconheça L

Linguagens Não Regulares e Lema do Bombeamento

$L = \{w | w \in \{0,1\}^* \text{ e } w = w^R \text{ e } n \geq 1\}$

Vamos tentar novamente.

1. Adversário: $\forall n$, onde n é o número de estados de um AFD que reconheça L
    - $n = k$

$L = \{w | w \in \{0,1\}^* \text{ e } w = w^R \text{ e } n \geq 1\}$

Vamos tentar novamente.

1. Adversário: $\forall n$, onde n é o número de estados de um AFD que reconheça L
   - $n = k$
2. Provador: $\exists w \in L$, onde $|w| \geq k$

$L = \{w | w \in \{0,1\}^* \text{ e } w = w^R \text{ e } n \geq 1\}$

Vamos tentar novamente.

1. Adversário: $\forall n$, onde n é o número de estados de um AFD que reconheça L
   - $n = k$

2. Provador: $\exists w \in L$, onde $|w| \geq k$
   - $w = 0^k 1 0^k$

Linguagens Não Regulares e Lema do Bombeamento

$L = \{w | w \in \{0,1\}^* \text{ e } w = w^R \text{ e } n \geq 1\}$

Vamos tentar novamente.

1. Adversário: $\forall n$, onde n é o número de estados de um AFD que reconheça L
   - $n = k$
2. Provador: $\exists w \in L$, onde $|w| \geq k$
   - $w = 0^k 1 0^k$
3. Adversário: $\forall u, v, z$, tal que $w = uvz$, $|uv| \leq n$, $|v| \geq 1$

$$L = \{w | w \in \{0,1\}^* \text{ e } w = w^R \text{ e } n \geq 1\}$$

Vamos tentar novamente.

1. Adversário: $\forall n$, onde n é o número de estados de um AFD que reconheça L
   - $n = k$
2. Provador: $\exists w \in L$, onde $|w| \geq k$
   - $w = 0^k 1 0^k$
3. Adversário: $\forall u, v, z$, tal que $w = uvz$, $|uv| \leq n$, $|v| \geq 1$
   - Note que independentemente da escolha do adversário, uv sempre conterá apenas 0's e v conterá ao menos um 0

Linguagens Não Regulares e Lema do Bombeamento

$L = \{w | w \in \{0,1\}^* \text{ e } w = w^R \text{ e } n \geq 1\}$

Vamos tentar novamente.

1. Adversário: $\forall n$, onde n é o número de estados de um AFD que reconheça L
   - $n = k$
2. Provador: $\exists w \in L$, onde $|w| \geq k$
   - $w = 0^k 1 0^k$
3. Adversário: $\forall u, v, z$, tal que $w = uvz$, $|uv| \leq n$, $|v| \geq 1$
   - Note que independentemente da escolha do adversário, uv sempre conterá apenas 0's e v conterá ao menos um 0
4. Provador: $\exists i \geq 0$, $uv^i z \notin L$
   - $i = 0$

$L = \{w | w \in \{0,1\}^* \text{ e } w = w^R \text{ e } n \geq 1\}$

Vamos tentar novamente.

...

Por fim, o provador venceu o jogo, pois ao escolher $i = 0$ e sabendo que v contém ao menos um 0 estaremos removendo um símbolo 0 da palavra w. Veja que ao fazer isso, o número de 0's antes do 1 é menor que o número de 0's depois do 1, ou seja, a palavra resultante não é palíndromo e a linguagem não é uma linguagem regular

Conclusão

- Linguagens regulares
- Autômatos finitos determinísticos
- Autômatos finitos (determinísticos e não-determinísticos)
- Expressões regulares
- Linguagens não regulares e lema do bombeamento

Material de apoio

- Livro Sipser, Capítulo 1
- Livro Hopcroft, Capítulo 2,3,4