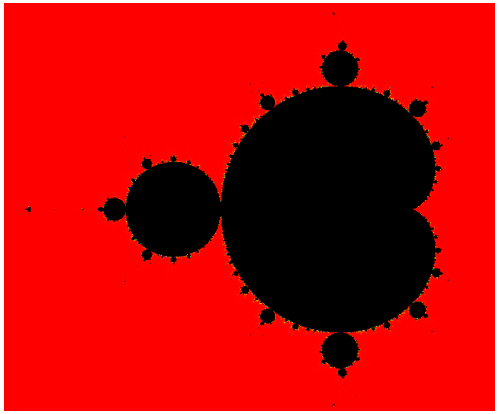
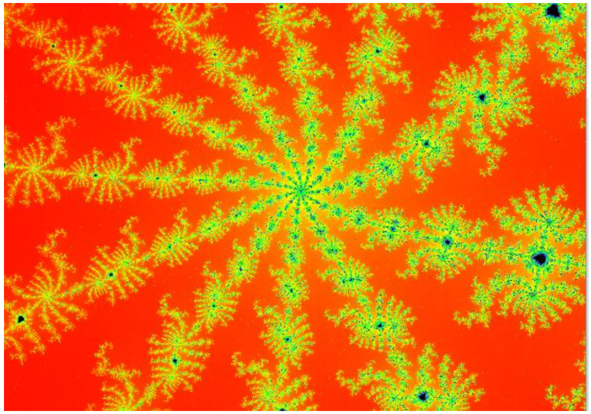
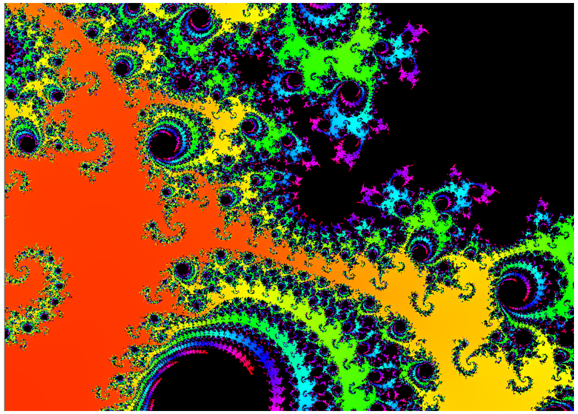
Freie Universität Berlin

VISUALISIERUNG DER MANDELBROTMENGE

Felicia Burtscher

Matthias Kupferschmied

Nora Rülander

Eike Sommer

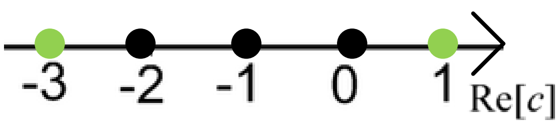
16.09.2015

Seminar: ABV - Einführung in die Visualisierung,
Dozenten: Konstantin Poelke, Prof. Dr. Konrad Polthier

Definition der Mandelbrotmenge

- 1980 veröffentlichte Benoît Mandelbrot eine Arbeit zum Thema Mandelbrotmenge
- Rekursionsvorschrift: $z_{k+1} = z_k{}^2 + c$ mit $c \in \mathbb{C}$ und $z_0 = 0$
- Definition der Mandelbrotmenge M:

  $M := \{ c \in \mathbb{C} : \text{Die Folge } (z_k) \text{ ist beschränkt}\}$



Komplexe Zahlen c, für die die Folge (z_k) beschränkt ist, sind schwarz eingefärbt. Zahlen, für die die Folge divergiert, sind grün eingefärbt.

Beispiel 1: $c = 0{,}1 + 0 \cdot i$

$z_1 = 0 + 0{,}1 = 0{,}1$

$z_2 = (0{,}1)^2 + 0{,}1 = 0{,}11$

$z_3 = (0{,}11)^2 + 0{,}1 = 0{,}1121$

$z_4 = 0{,}11256641$

$z_5 = 0.1126711966602881$

$z_{1000} = 0.1127016653792583$1

Beispiel 2: $c = 1 + 0 \cdot i$

$z_1 = 0 + 1 = 1$

$z_2 = 1^2 + 1 = 2$

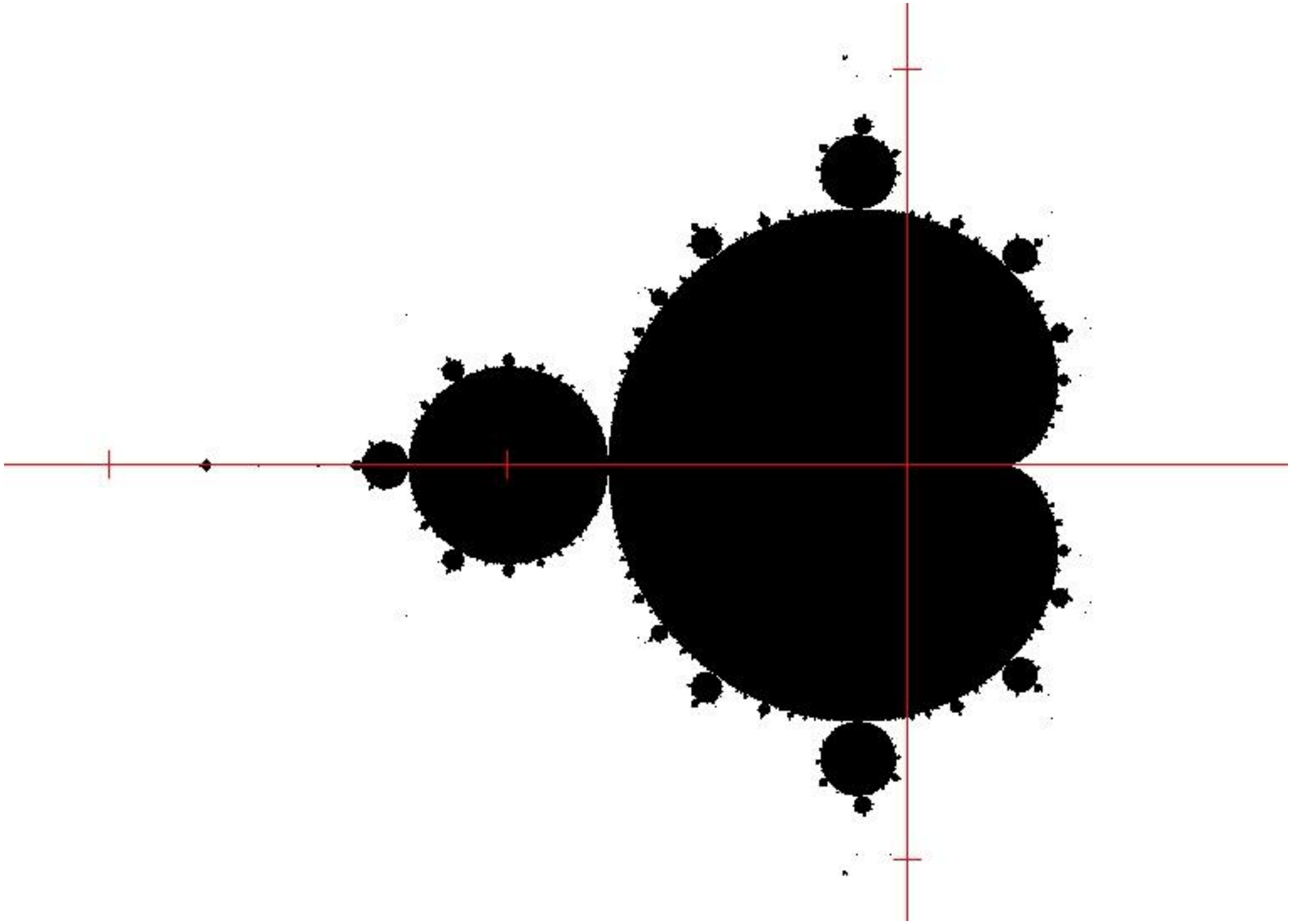
$z_3 = 2^2 + 1 = 5$

$z_4 = 26$

$z_5 = 257$

....

Graphische Darstellung der Mandelbrotmenge



- Alle komplexen Zahlen c, für die die Folge (z_k) beschränkt ist, sind schwarz eingefärbt.
- Gezeigt wird der Ausschnitt der komplexen Zahlenebene:
  - $-2{,}3 \leq \mathrm{Re}(c) \leq 1$
  - $-1{,}2 \leq \mathrm{Im}(c) \leq 1{,}2$
- Herausforderung: Koordinaten-transformation

Beschränktheit

- Wenn c Element der Mandelbrotmenge ist, dann gilt: $M = \{ c \in \mathbb{C} : | z_k | \leq 2$ für alle Iterationsschritte k } $\leftrightarrow$ Wenn $| z_k | > 2$ für ein k, dann ist die Folge (z_k) unbeschränkt und somit c nicht Element der Mandelbrotmenge c.

  Beweisidee: Beweis durch Induktion.

  Proposition 1: Sei $|c| > 2$. Dann gilt: $|c| = | z_1 | < | z_2 | < \ldots < | z_k |$.

  Proposition2: Sei $|c| > 2$. Dann gilt: $| z_k | > | z_2 | + 2^{k-2} - 1) (| z_2 | – | c |)$ für alle $k \geq 2$.

Beispiel 1: $c = 0,1 + 0 \cdot i$
$z_1 = 0,1$, $|z_1| = 0,1$
$z_2 = 0,11$, $|z_2| = 0,11$
....
$|z_{1000}| = 0.11270166537925831$
→ Entscheidung: c gehört zur Menge M

Beispiel 2: $c = 1 + 0 \cdot i$
$z_1 = 1$, $|z_1| = 1$
$z_2 = 2$, $|z_1| = 2$
$z_3 = 5$, $|z_1| = 5$
→ c gehört nicht zur Menge M

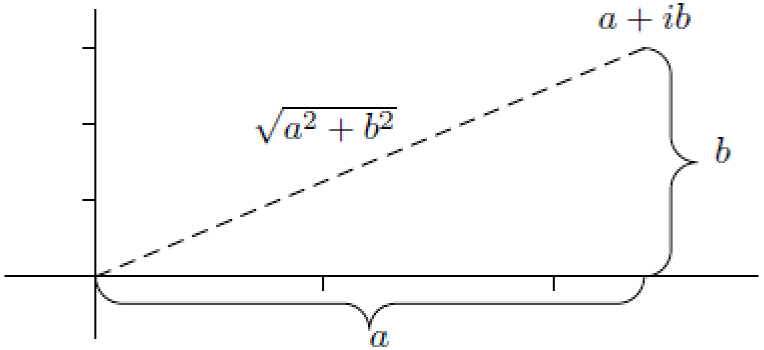
Graphische Darstellung der Mandelbrotmenge

- M ist spiegelsymmetrisch zur reellen Achse.

Beweisskizze: Sei $c = a + bi$ eine komplexe Zahl und $d = a – bi$ die zu c konjugiert komplexe Zahl. Für c und d ergeben sich für die ersten zwei Iterationsschritte:

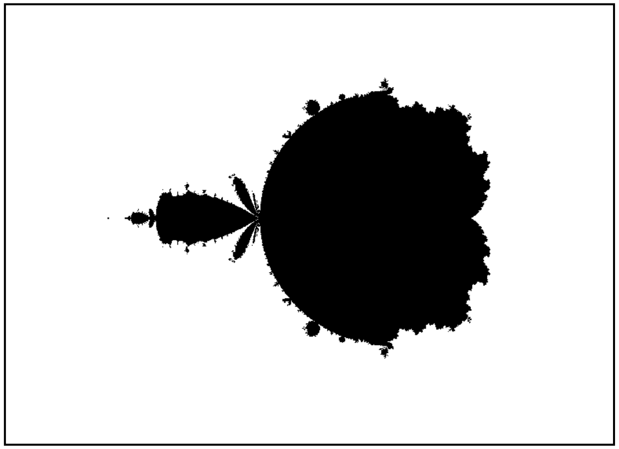
$$
\begin{aligned}
z_1 &= 0 + c = c = a + bi \\
z_2 &= (a + bi)^2 + (a + bi) \\
&= a^2 + 2abi - b^2 + a + bi \\
&= (a^2 - b^2 + a) + (2ab + b)i
\end{aligned}
\qquad
\begin{aligned}
z_1 &= 0 + d = d = a - bi \\
z_2 &= (a - bi)^2 + (a - bi) \\
&= a^2 - 2abi - b^2 + a - bi \\
&= (a^2 - b^2 + a) - (2ab + b)i
\end{aligned}
$$

Der Betrag einer komplexen Zahl c misst die Länge der Strecke vom Nullpunkt zum Punkt c. Deswegen ist der Betrag einer komplexen Zahl und ihrer konjugiert komplexen Zahl gleich.

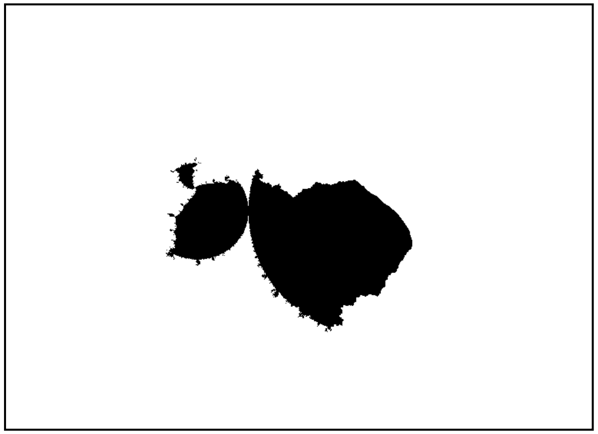


: $|a + ib| = \sqrt{a^2 + b^2}$

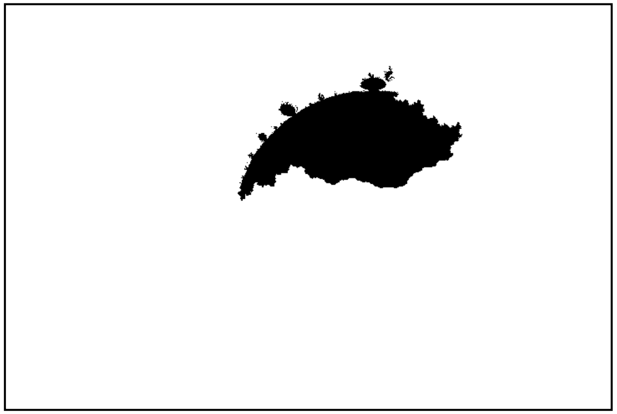
Variation von z_0



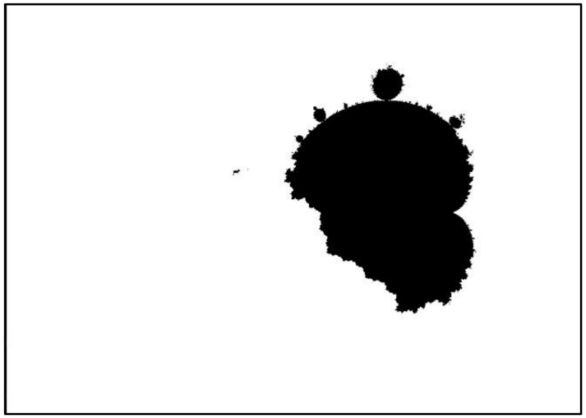
$z_0 = 0.5 + 0i$



$z_0 = -1 + 0.5i$

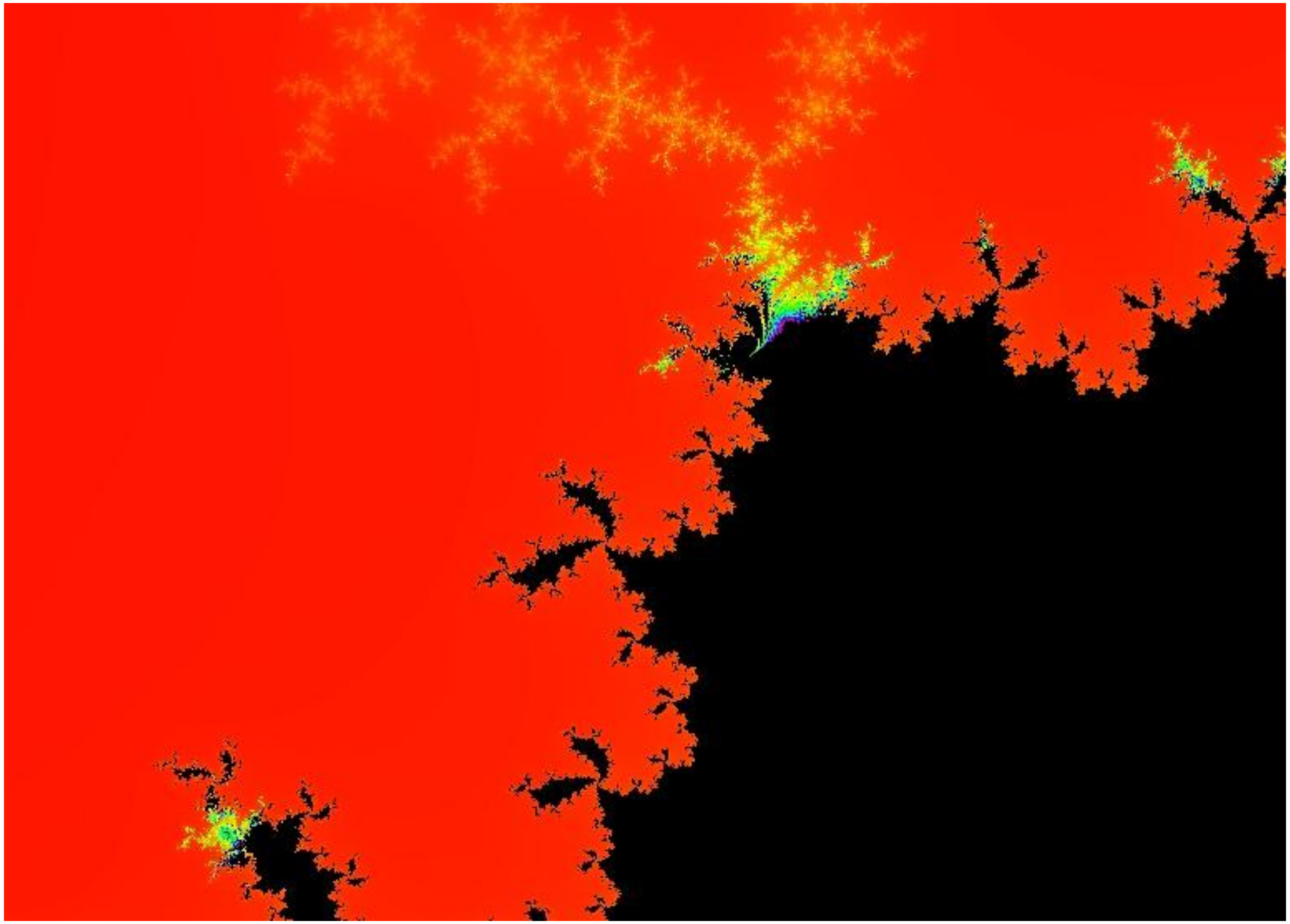


$z_0 = 1 + 0.2i$



$z_0 = -0.5 + 0.5i$

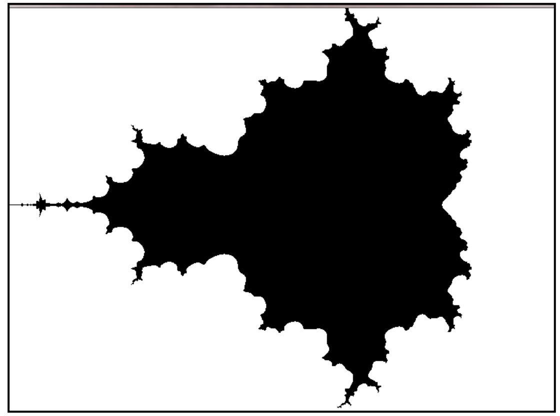
Variation von z_0



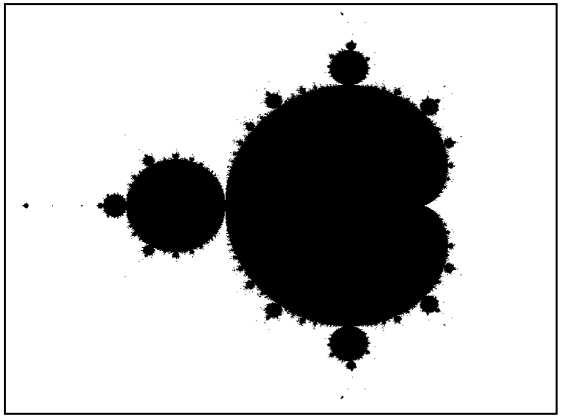
„lineare“ Farbprojektion mit Startwert $z_0 = -0.5 + 0.5i$

Verschiedene Iterationsstufen

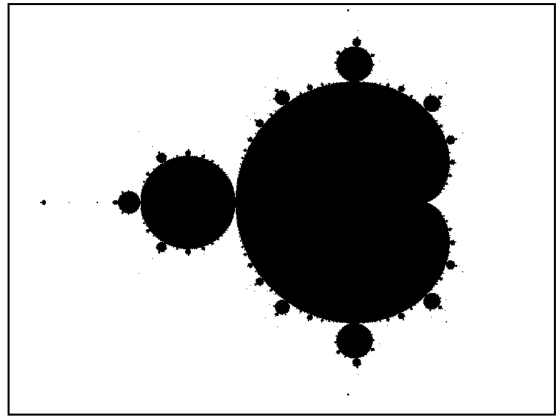
1 Iteration



10 Iterationen



100 Iterationen

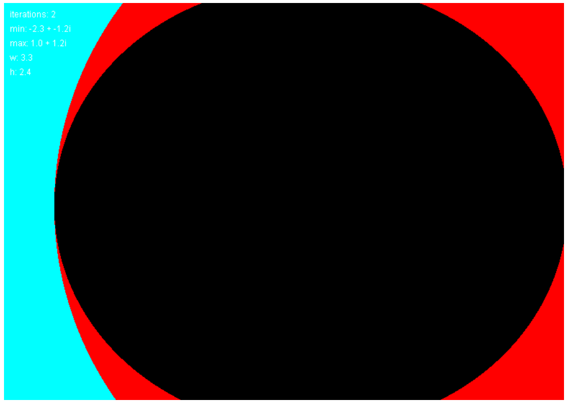


1000 Iterationen

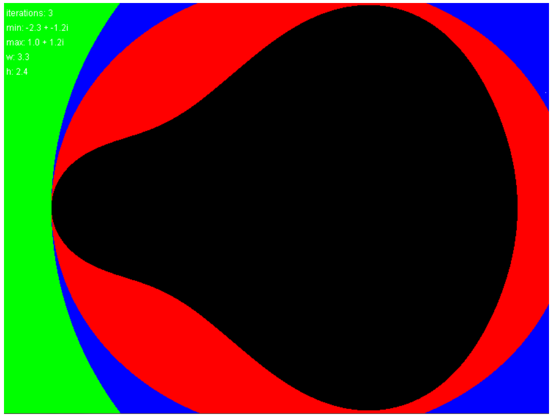
- Alle Punkte c, die betragsmäßig kleiner als 2 sind, liegen in einem Kreis mit Radius 2.
- Mit steigender Iterationszahl nähert sich die Darstellung der tatsächlichen Menge an.

Verschiedene Iterationsstufen

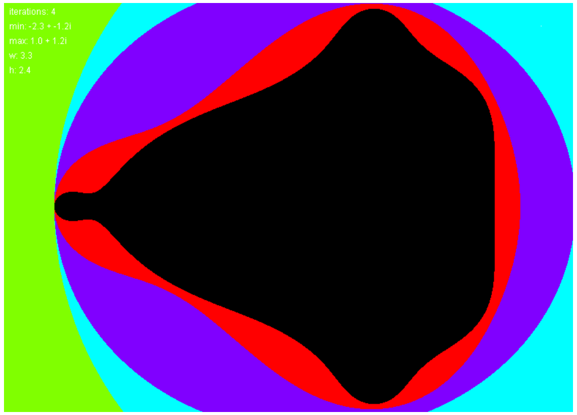
1 Iteration



2 Iterationen



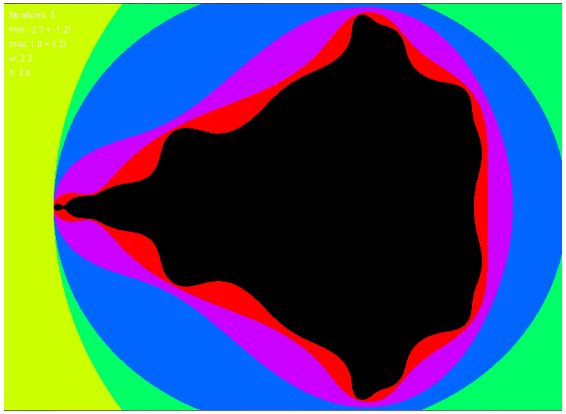
3 Iterationen



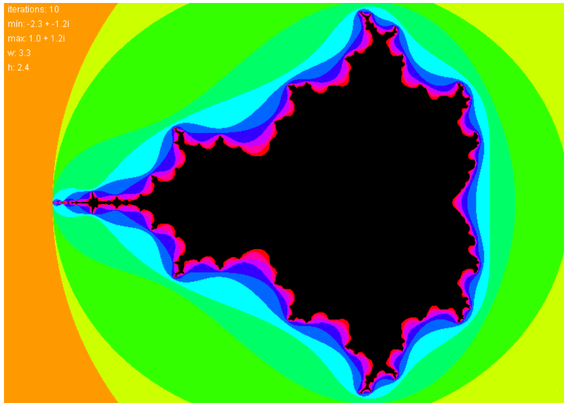
4 Iterationen

- Der Farbverlauf gibt an, wie viele Iterationsschritte benötigt werden, um herauszufinden, dass der Punkt c außerhalb der Mandelbrotmenge liegt.
- Die Iterationsschritte werden linear auf den Farbraum projiziert.

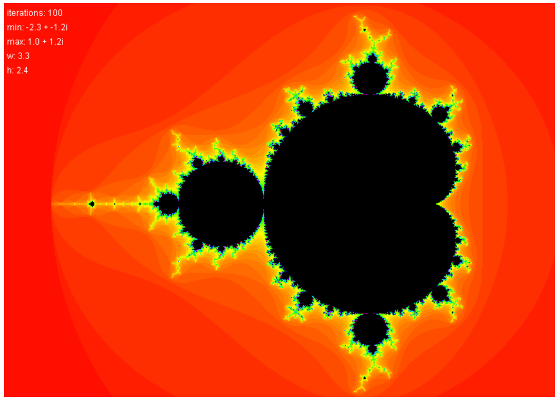
Verschiedene Iterationsstufen



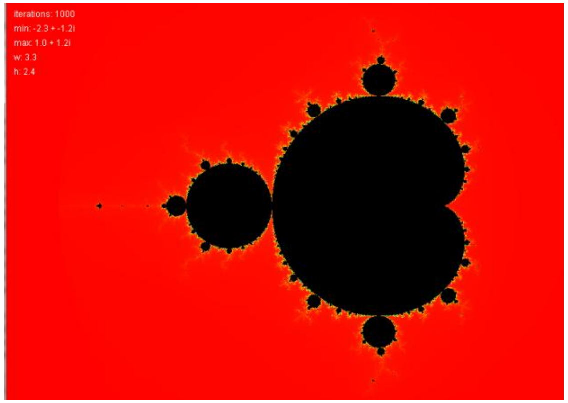
5 Iterationen



10 Iterationen



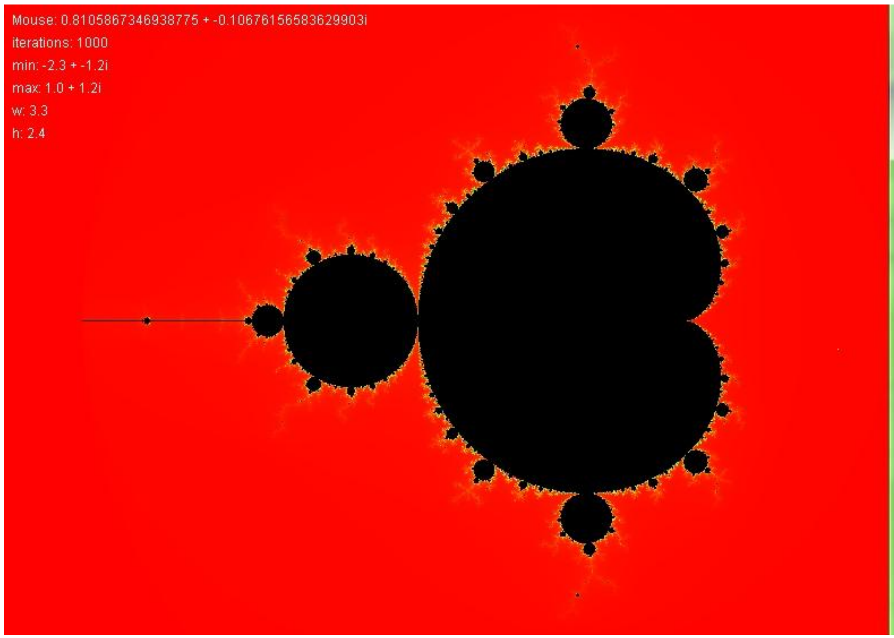
100 Iterationen



1000 Iterationen

- Der Farbverlauf zeigt, dass bei vielen komplexen Zahlen c , nach relativ wenig Iterationsschritten deutlich wird, dass die Folge unbeschränkt ist.

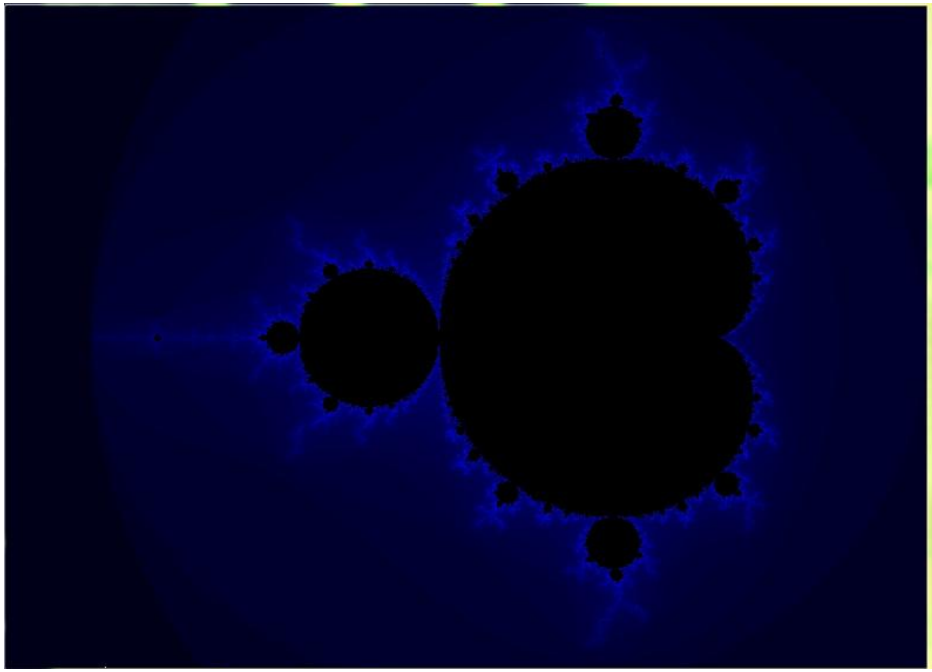
Numerisches Problem



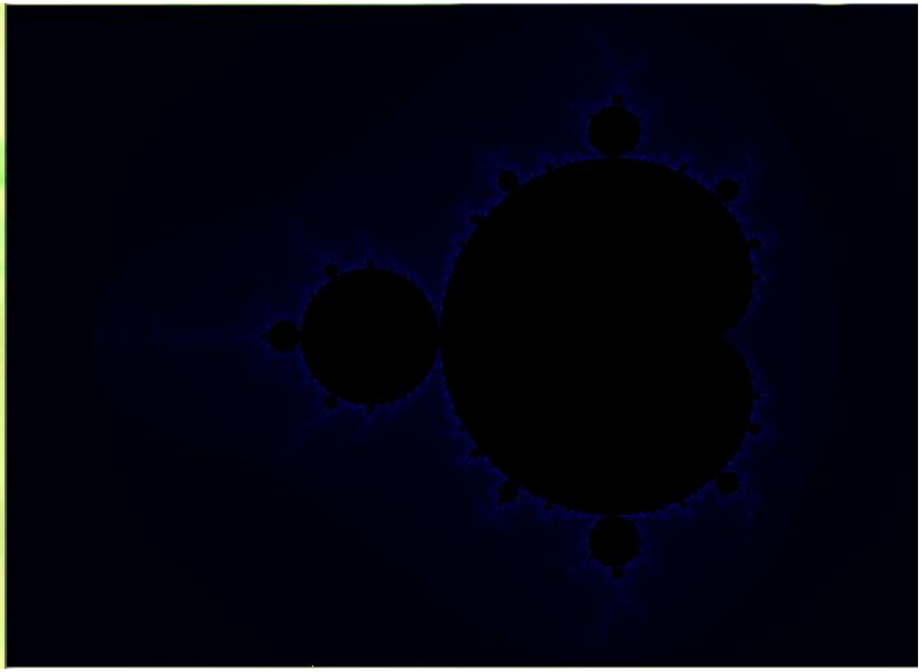
Die schwarze Linie ist ein Detail, das größer dargestellt wird, als es ist.

Durch Erhöhung der Bildhöhe um einen Pixel verschwindet das Artefakt.

Farbverläufe

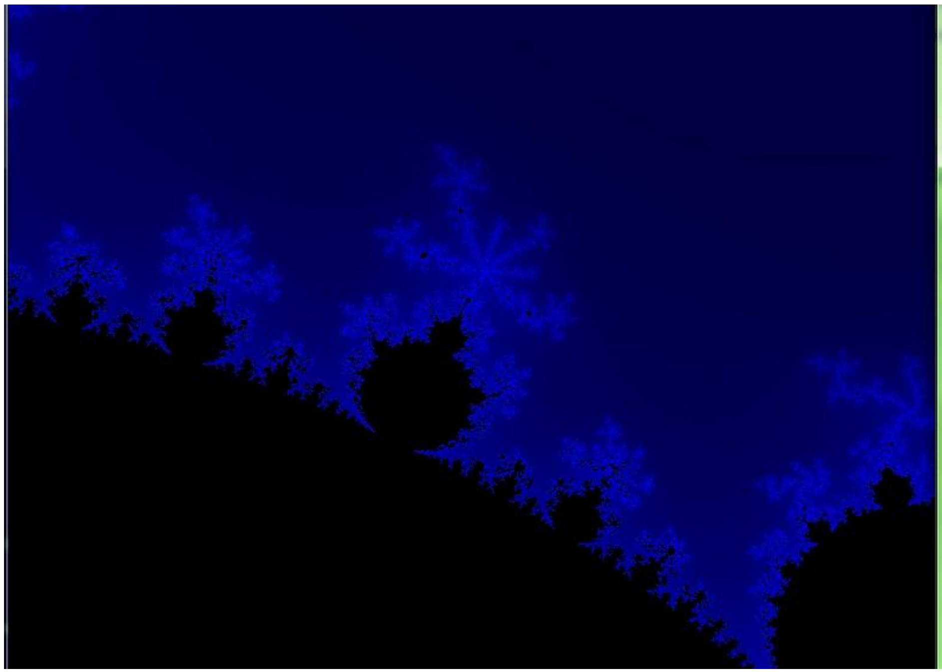


Blauer Kanal
„Wurzel“ – Projektion
100 Iterationen

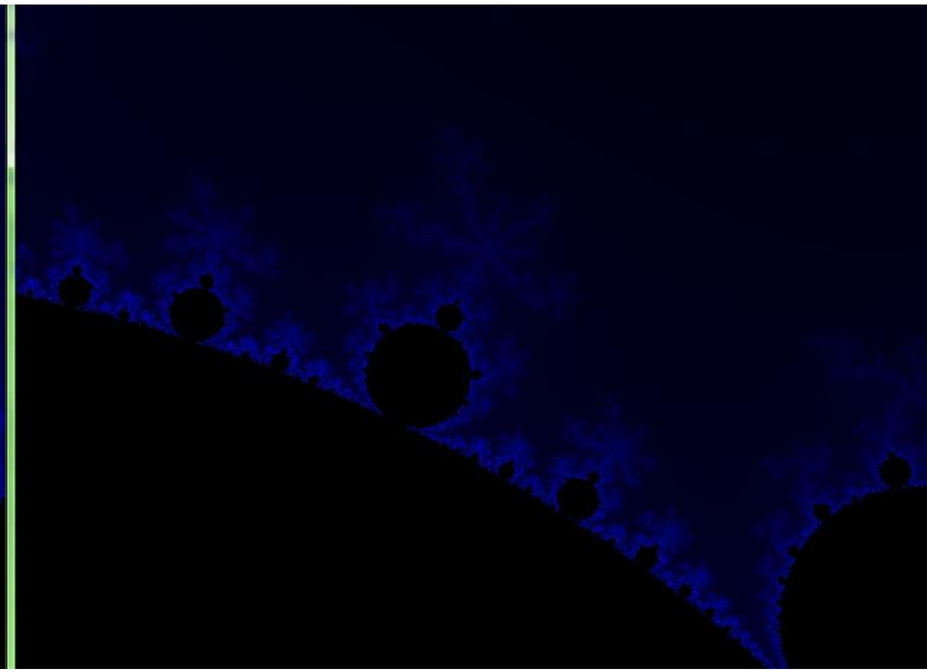


Blauer Kanal
„Wurzel“ – Projektion
1000 Iterationen

Farbverläufe

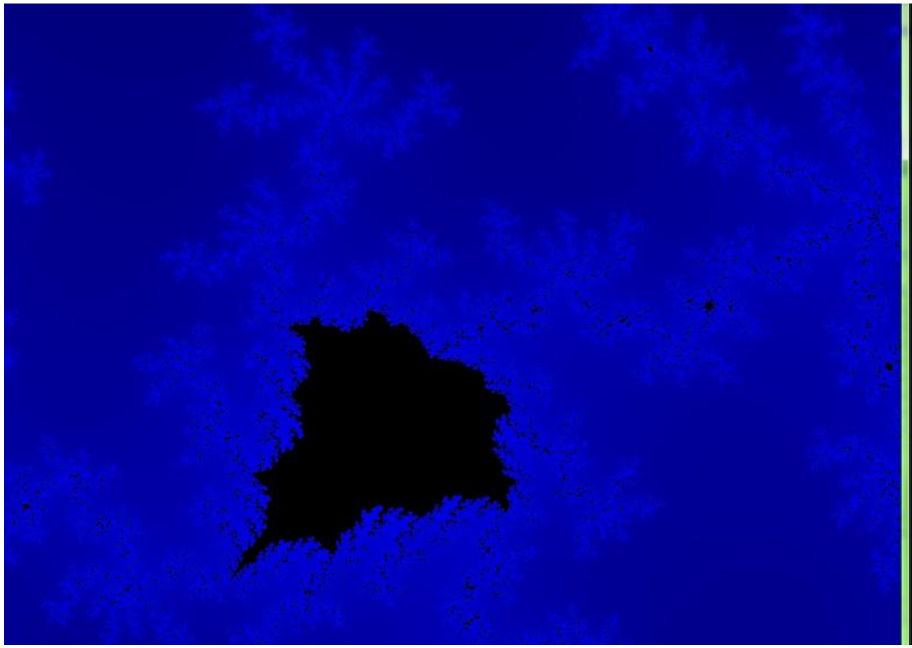


Blauer Kanal
zweimal gezoomt
„Wurzel“ – Projektion
100 Iterationen

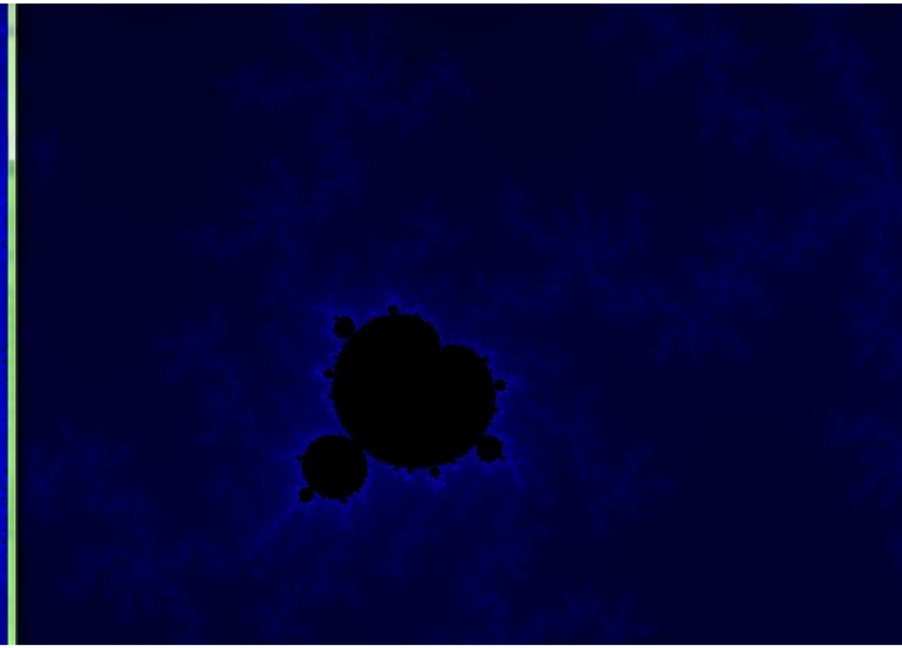


Blauer Kanal
zweimal gezoomt
„Wurzel“ – Projektion
1000 Iterationen

Farbverläufe

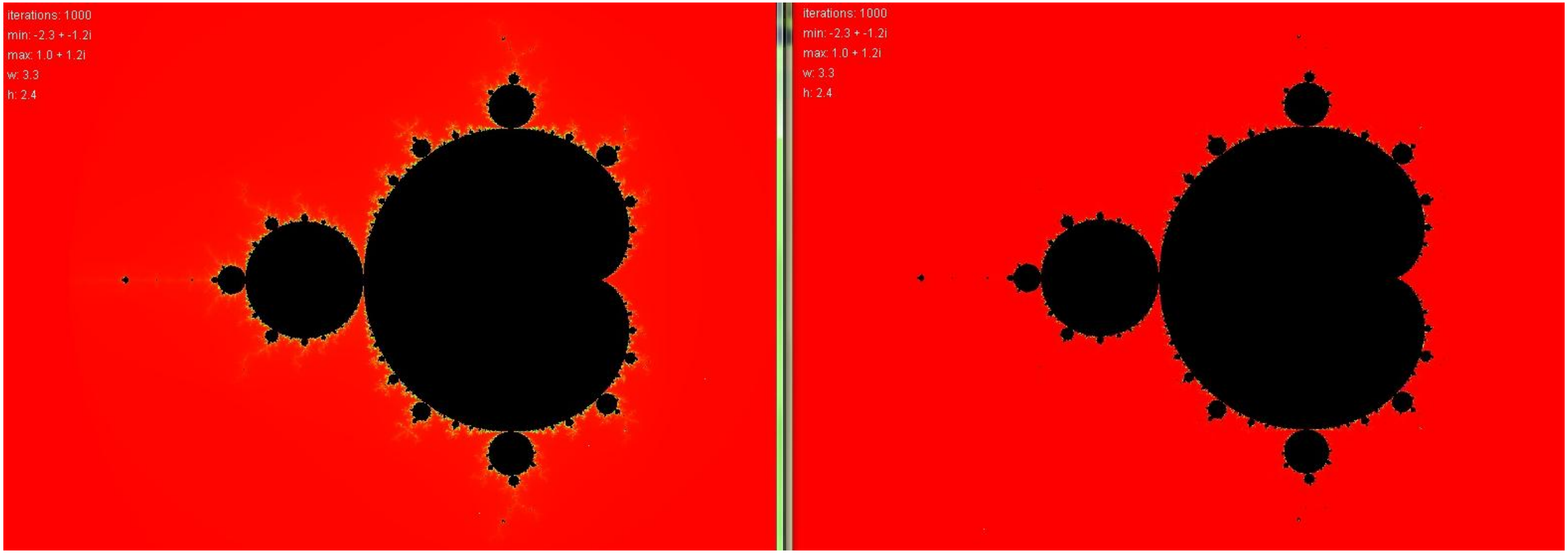


Blauer Kanal
zweimal gezoomt
„Wurzel“ – Projektion
100 Iterationen



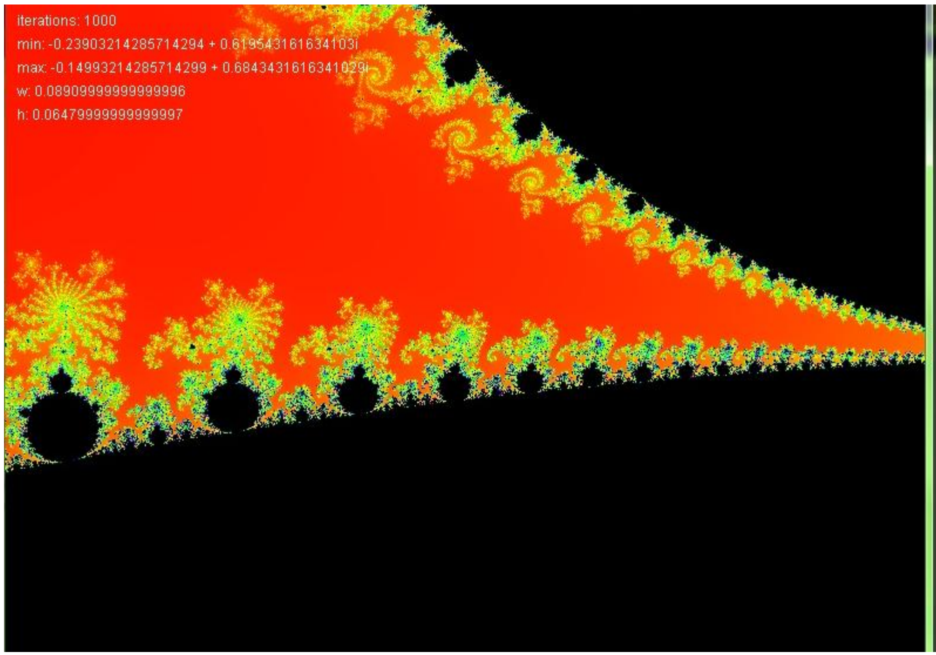
Blauer Kanal
zweimal gezoomt
„Wurzel“ – Projektion
1000 Iterationen

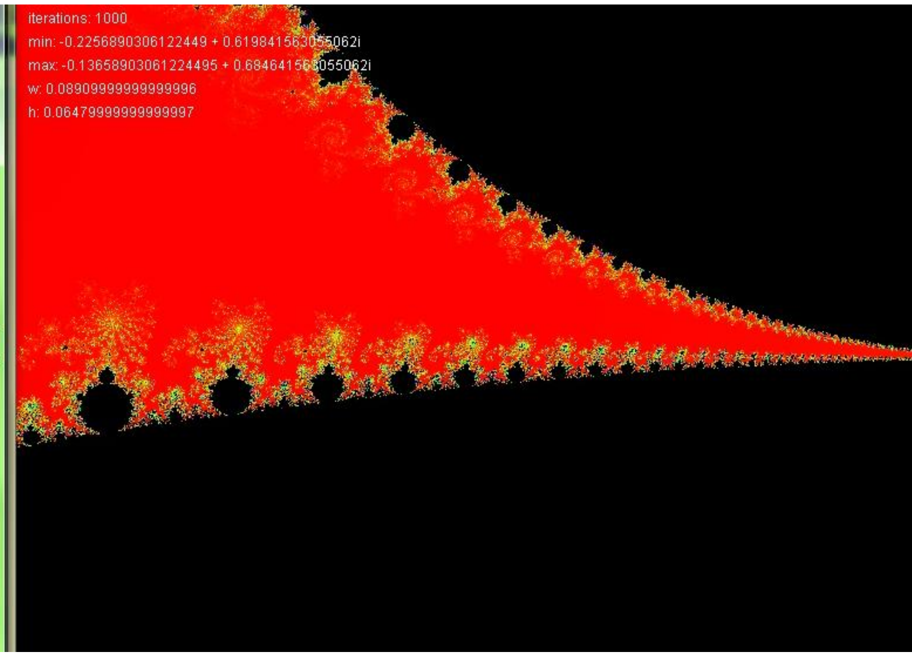
Farbverläufe



„lineare“ Farbprojektion „quadratische“ Farbprojektion

Farbverläufe

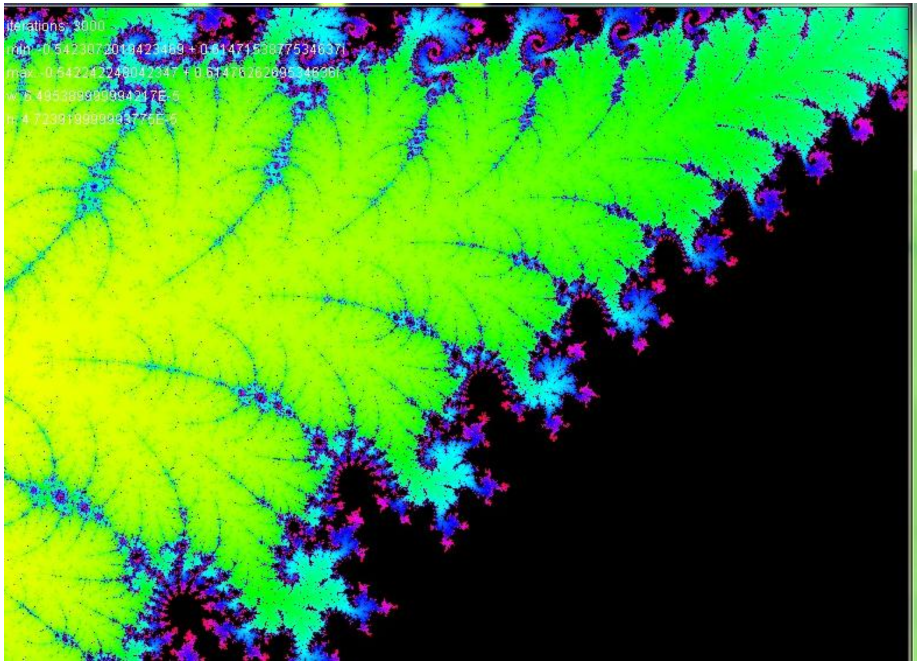




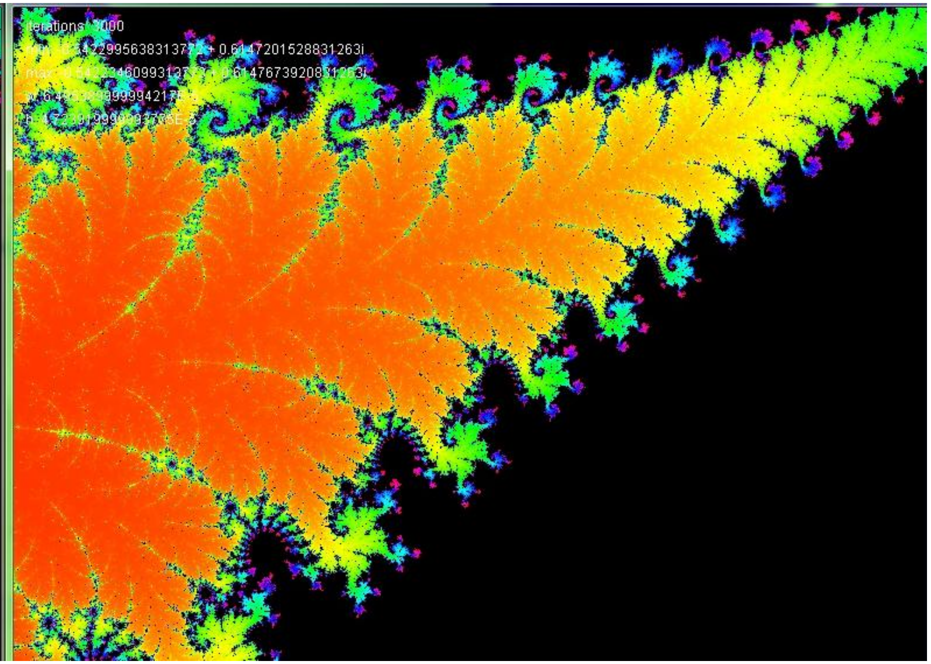
„lineare“ Farbprojektion
3 mal gezoomt

„quadratische“ Farbprojektion
3 mal gezoomt

Farbverläufe

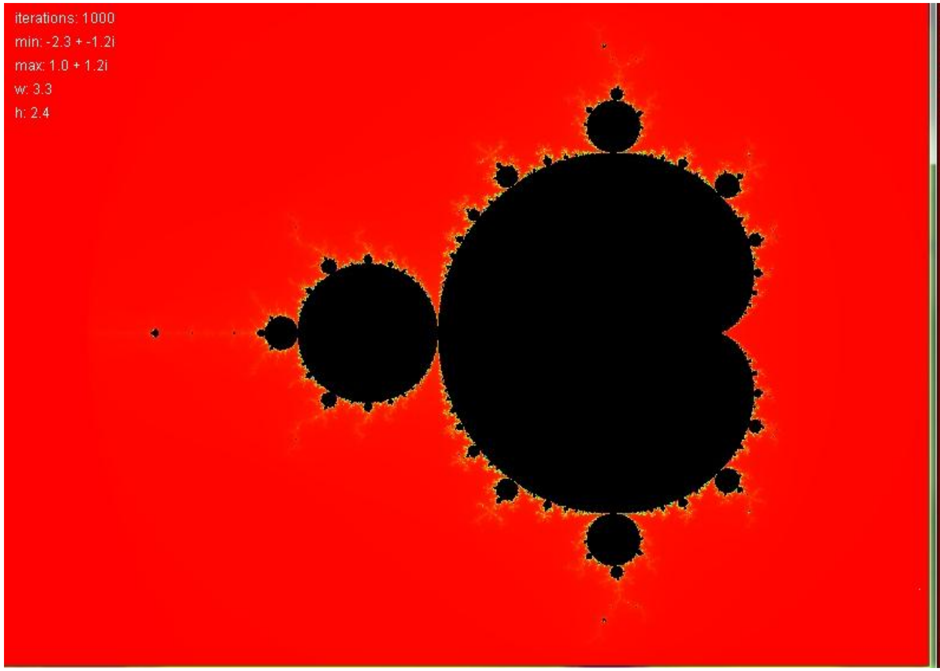


„lineare“ Farbprojektion
8 mal gezoomt

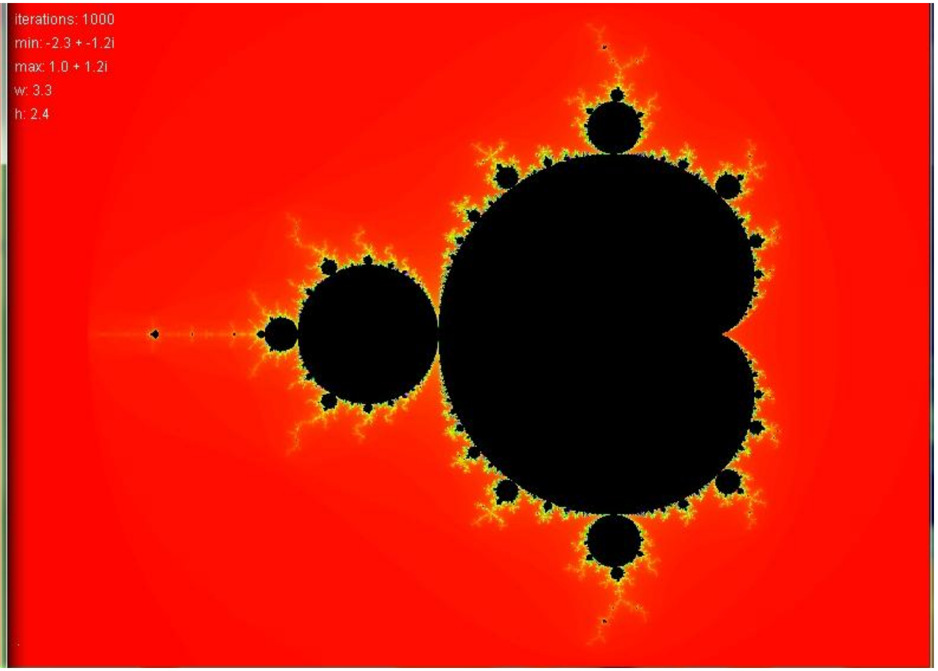


„quadratische“ Farbprojektion
8 mal gezoomt

Farbverläufe

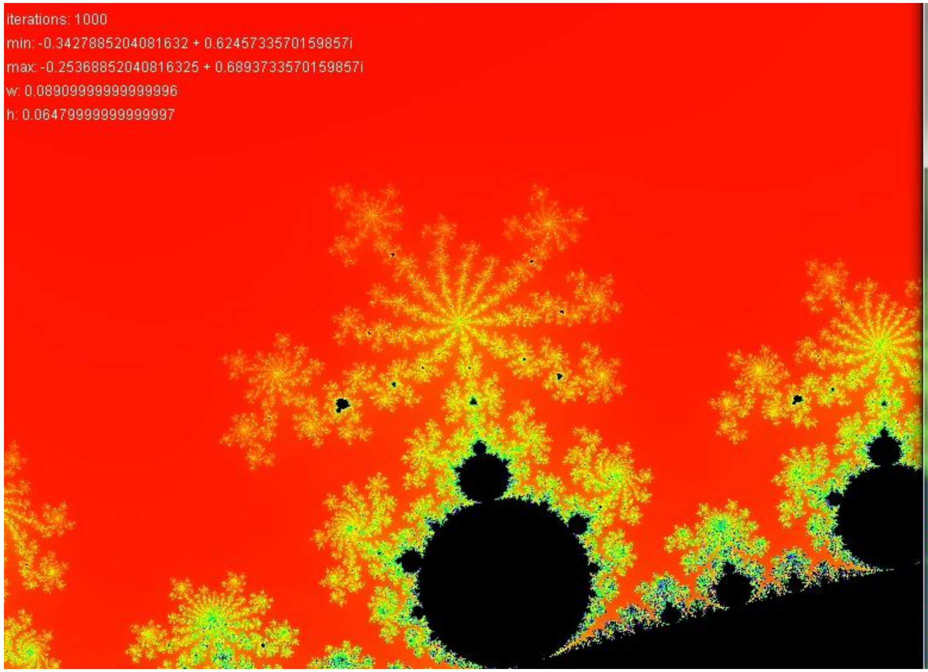


„einfache“ Farbprojektion

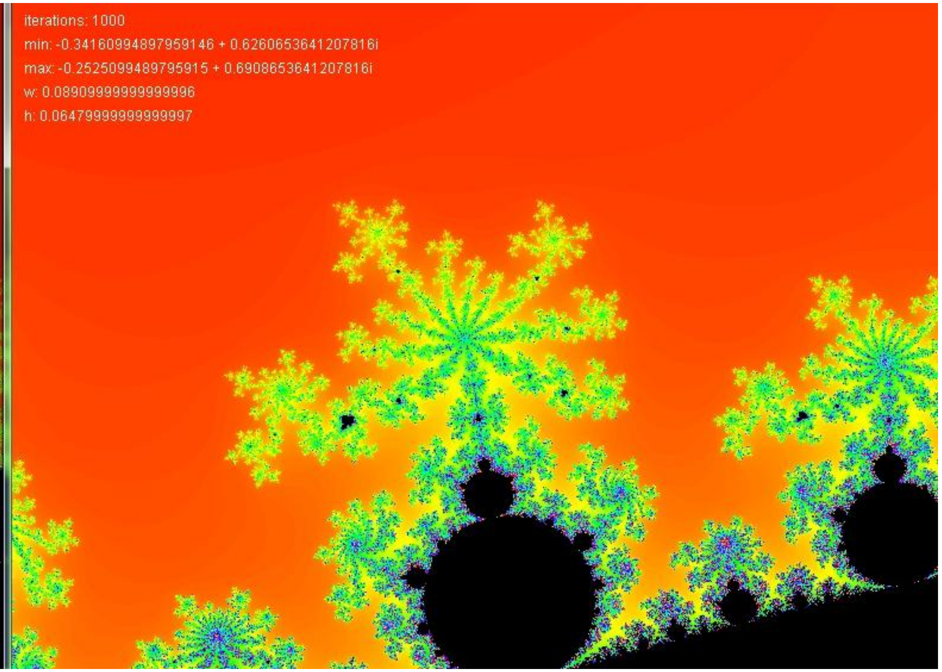


„dreifache“ Farbprojektion

Farbverläufe



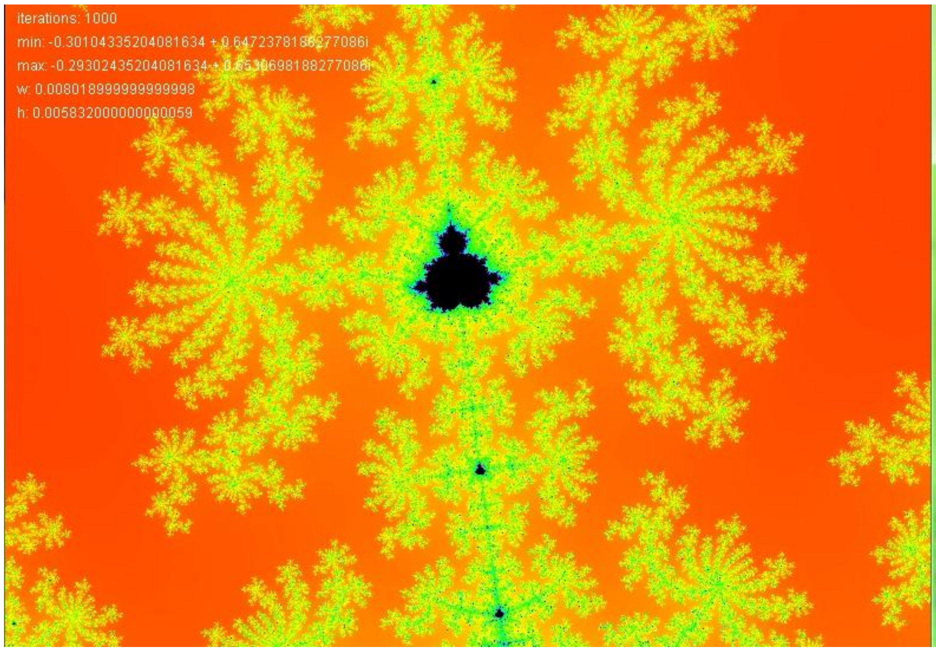
„einfache“ Farbprojektion
3 mal gezoomt

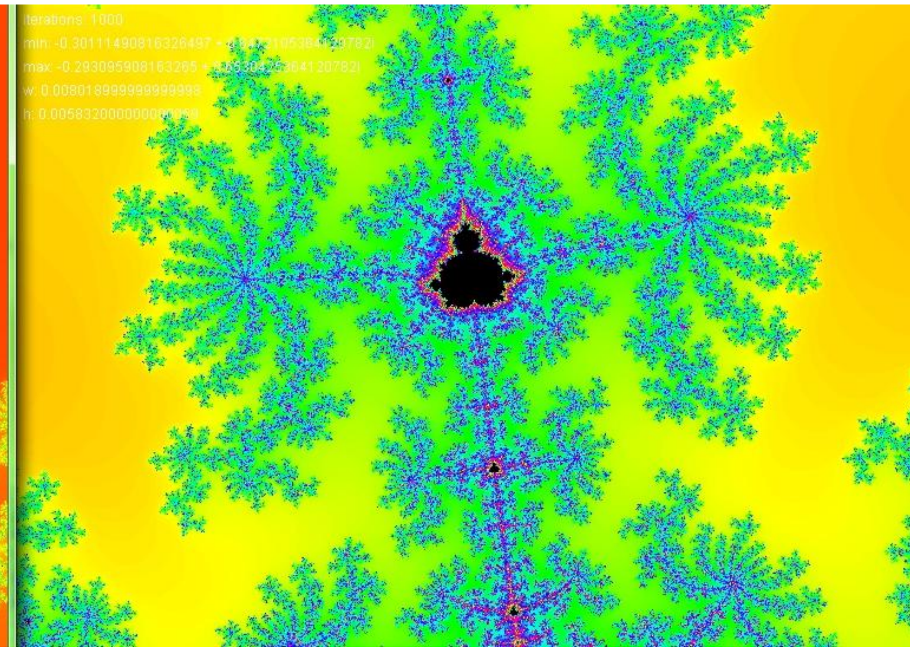


„dreifache“ Farbprojektion
3 mal gezoomt

Freie Universität Berlin

Farbverläufe



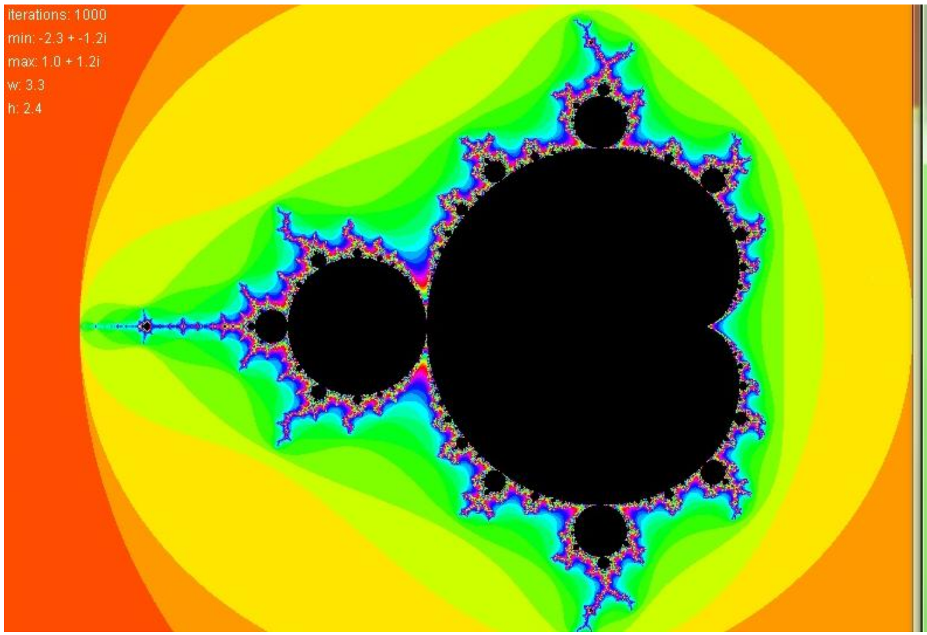


„einfache“ Farbprojektion
5 mal gezoomt

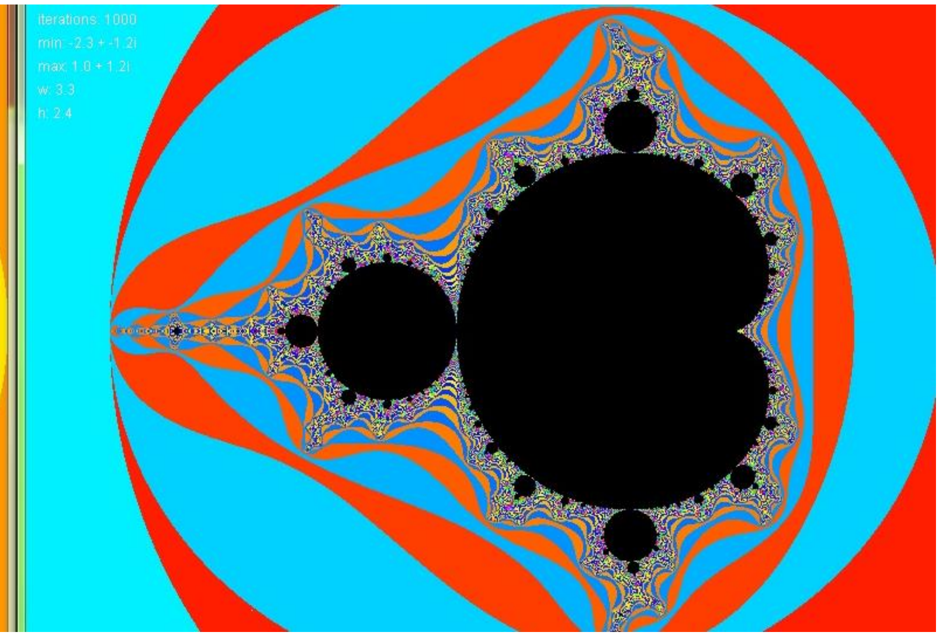
„dreifache“ Farbprojektion
5 mal gezoomt

Freie Universität Berlin

Farbverläufe

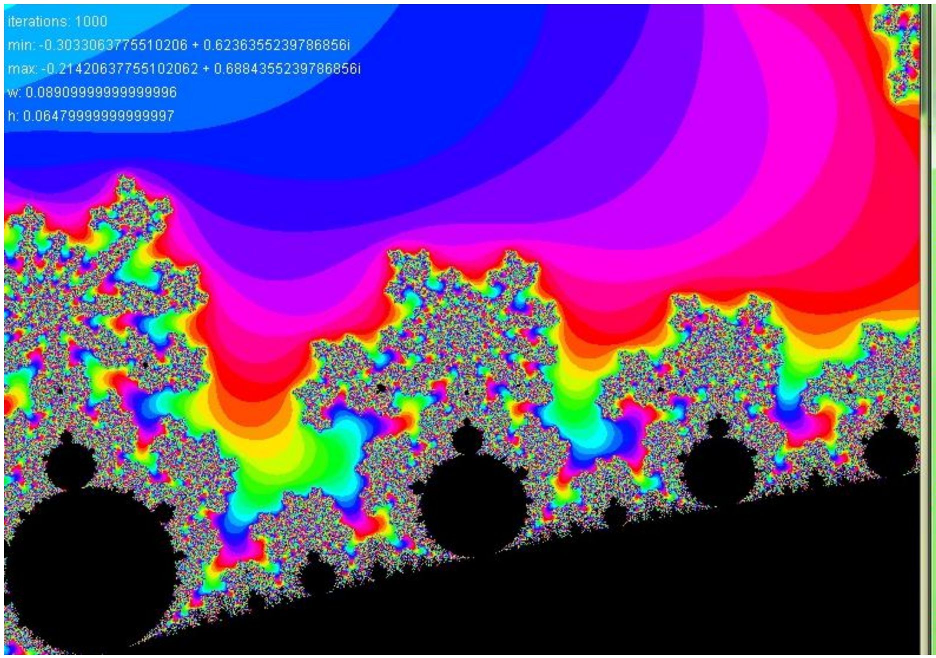


„50-fache“ Projektion

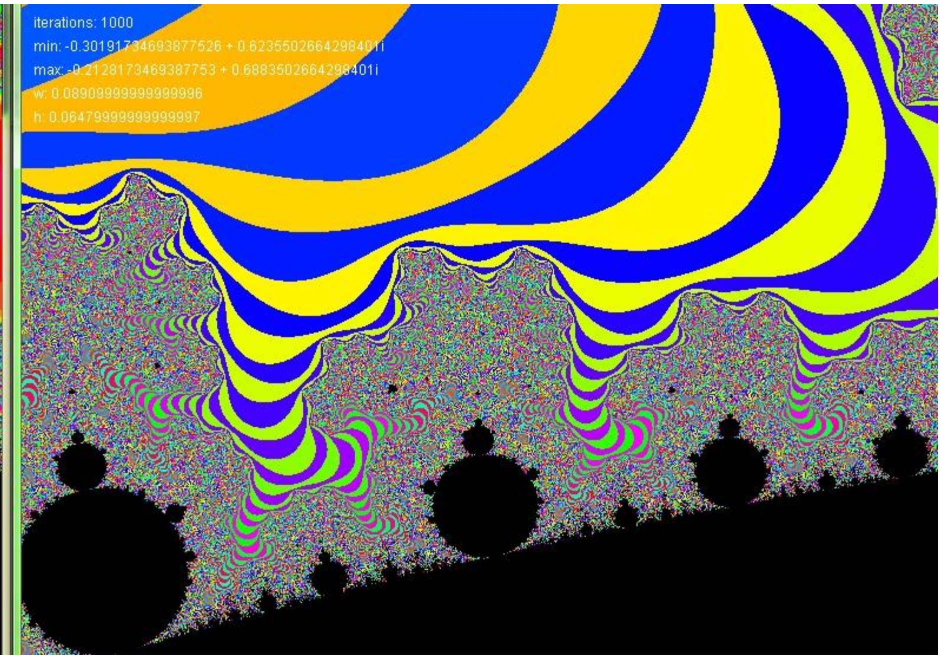


„510-fache“ Projektion

Farbverläufe

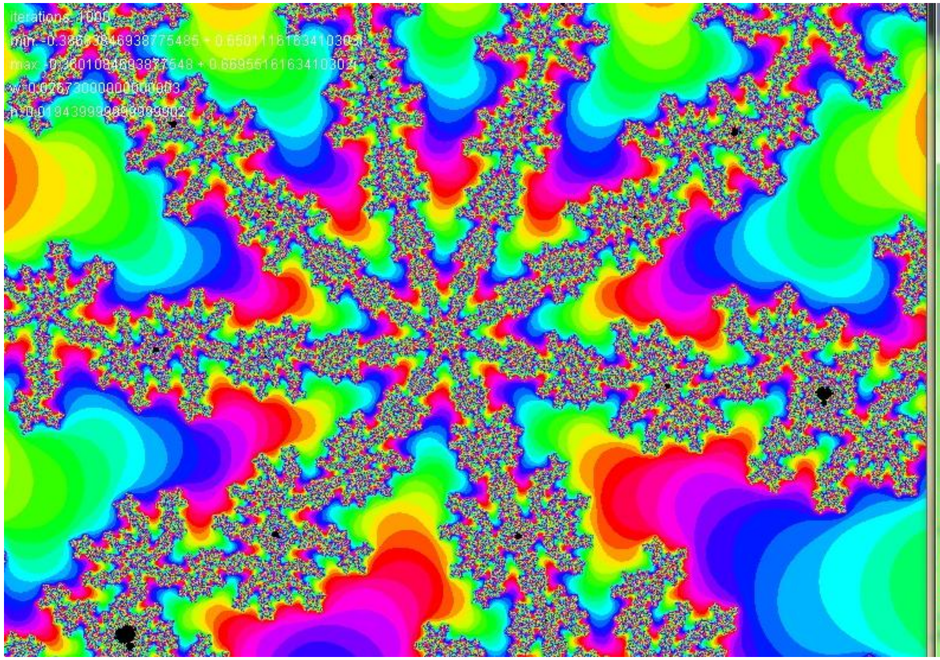


„50-fache“ Projektion
3 mal gezoomt

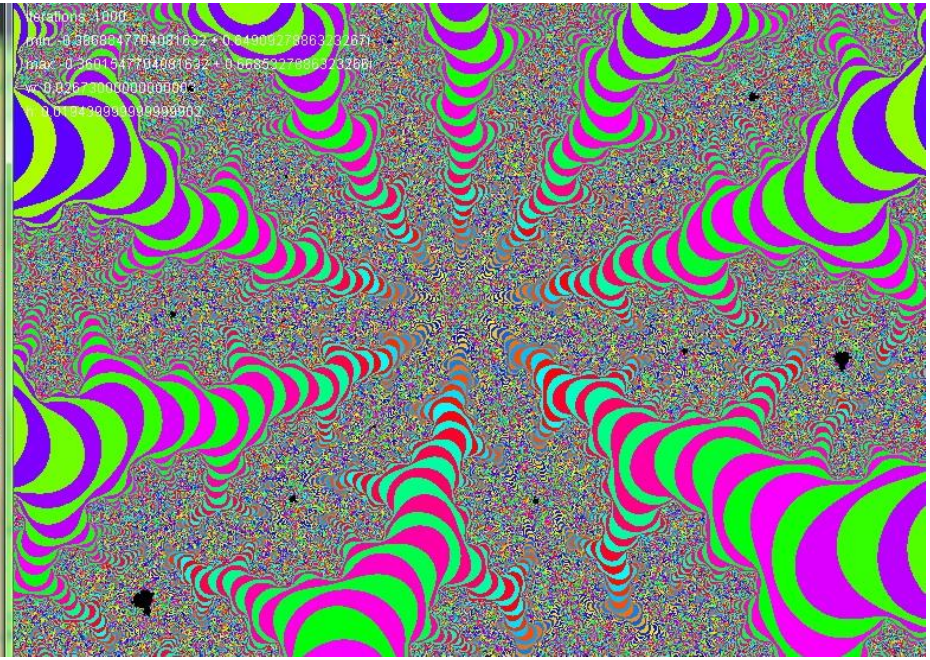


„510-fache“ Projektion
3 mal gezoomt

Farbverläufe

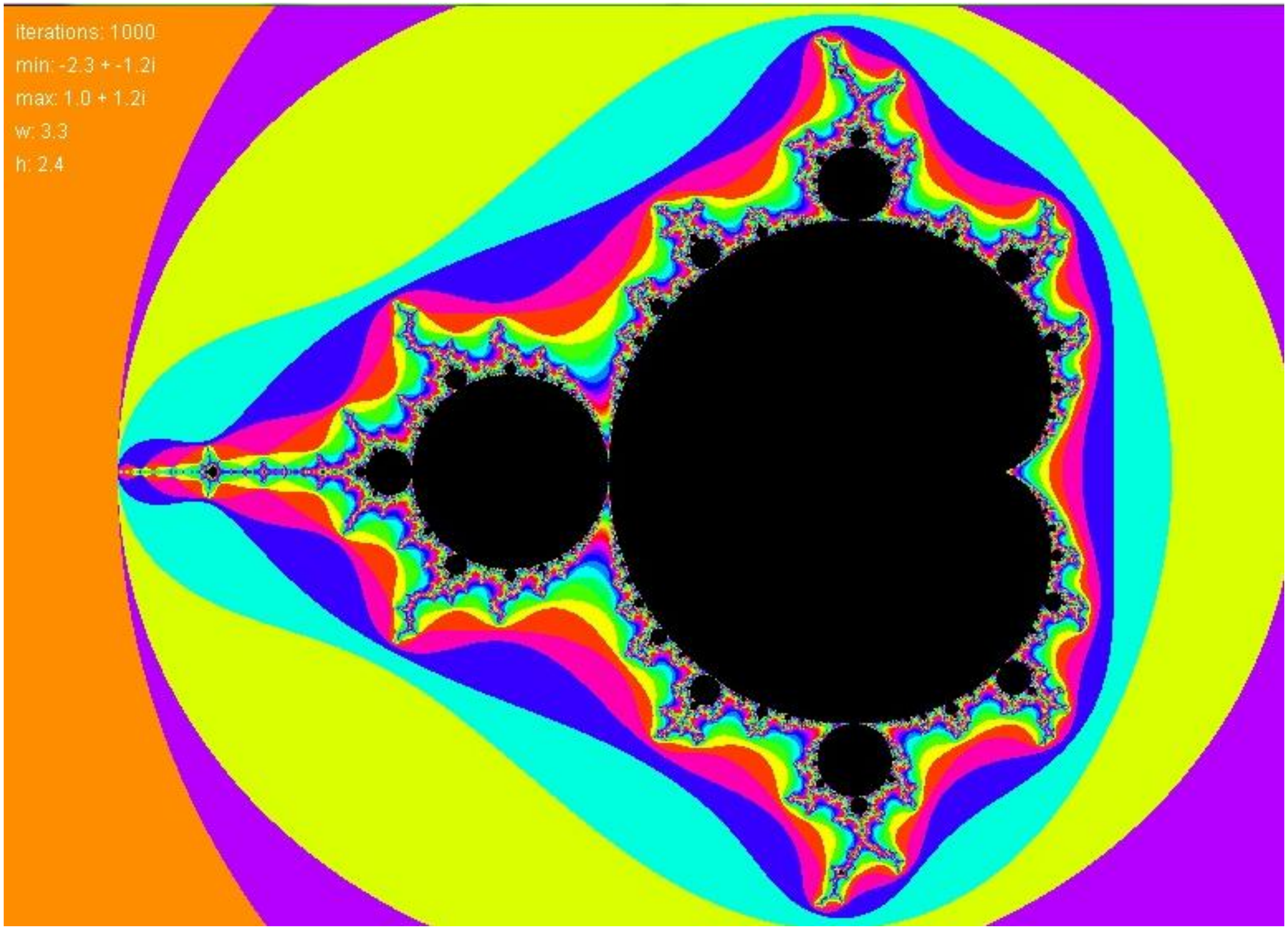


„50-fache“ Projektion
5 mal gezoomt



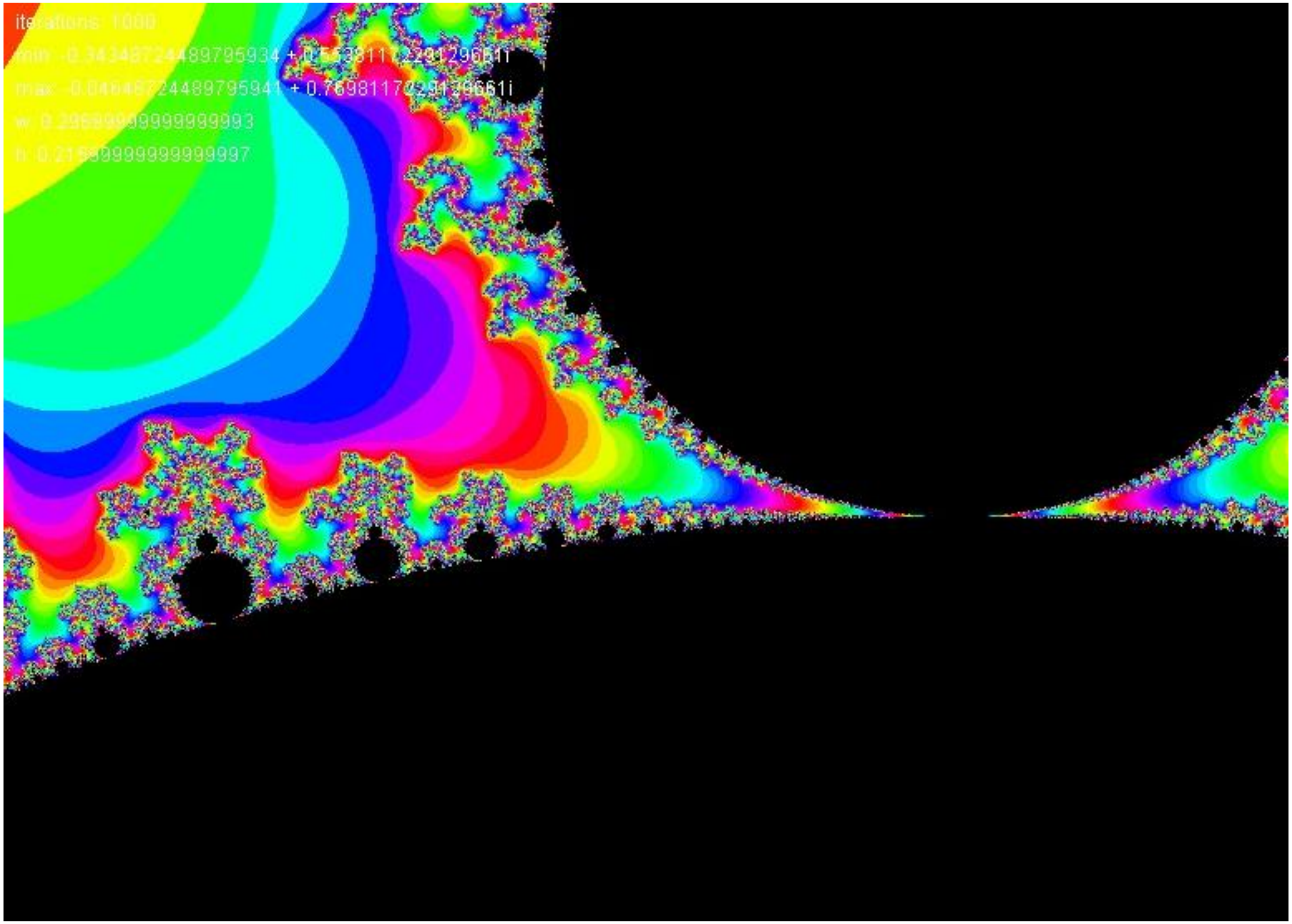
„510-fache“ Projektion
5 mal gezoomt

Farbverläufe



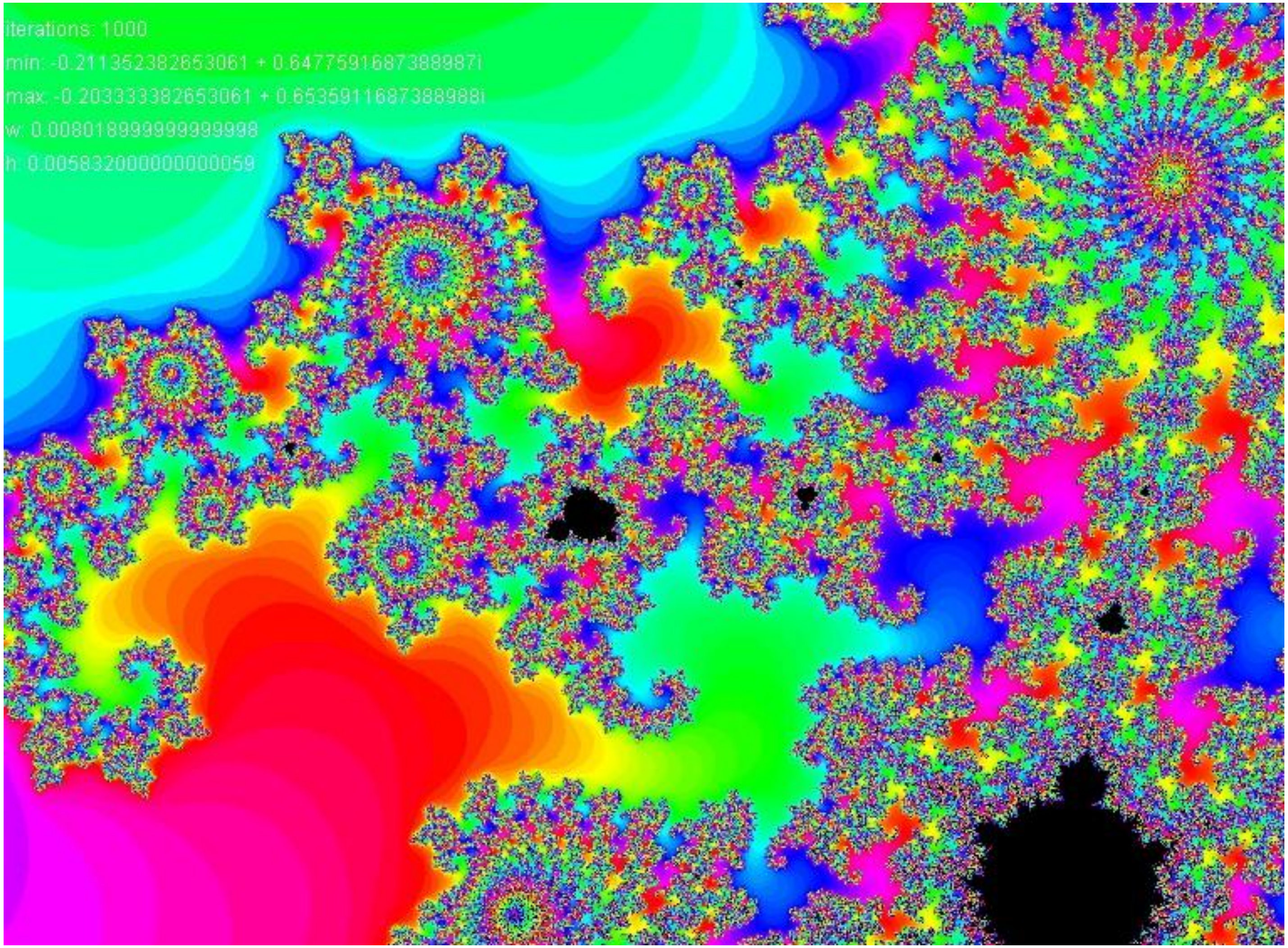
„logarithmische “ Farbprojektion

Farbverläufe



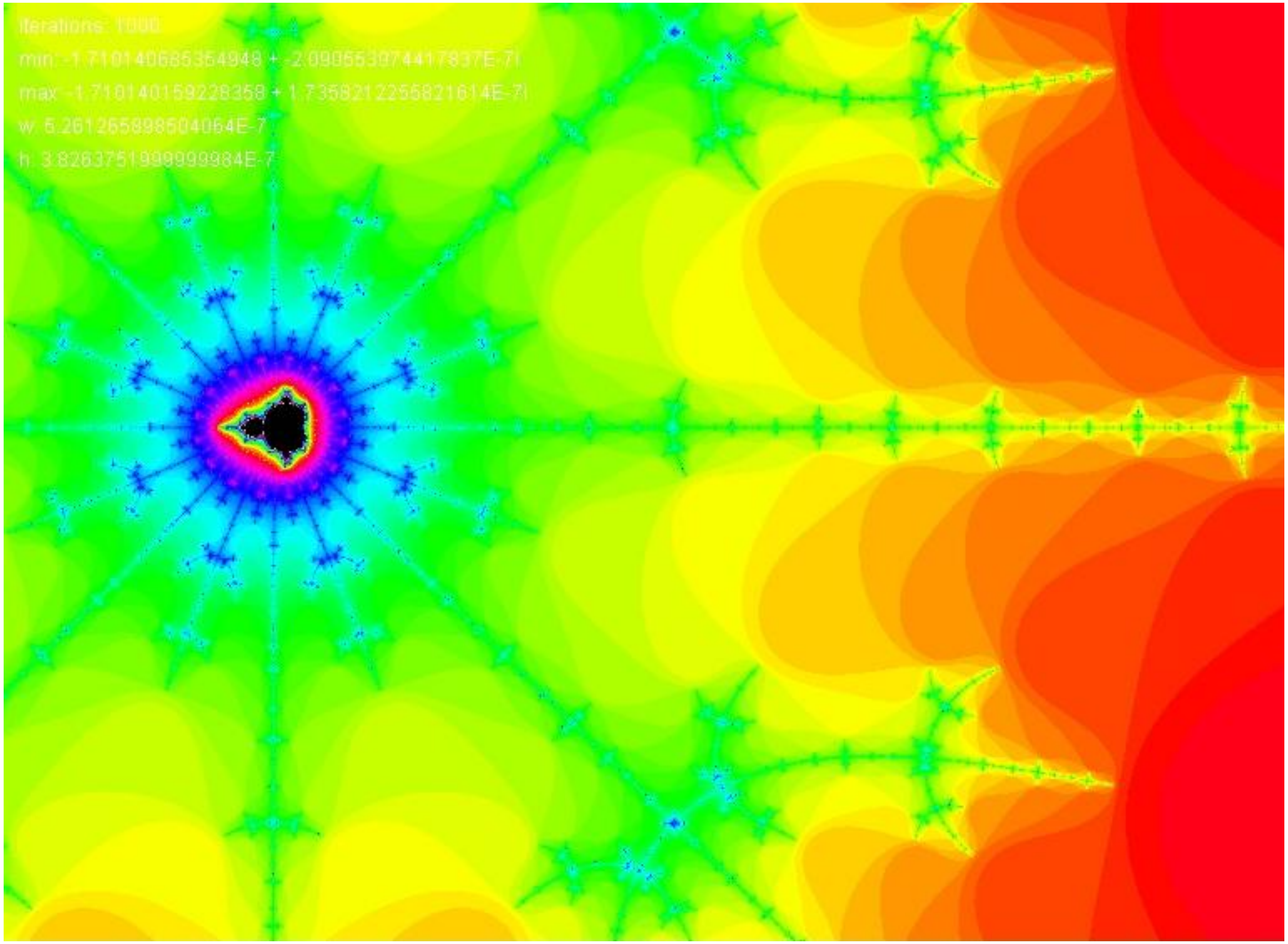
„logarithmische “
Farbprojektion
2 mal gezoomt

Farbverläufe



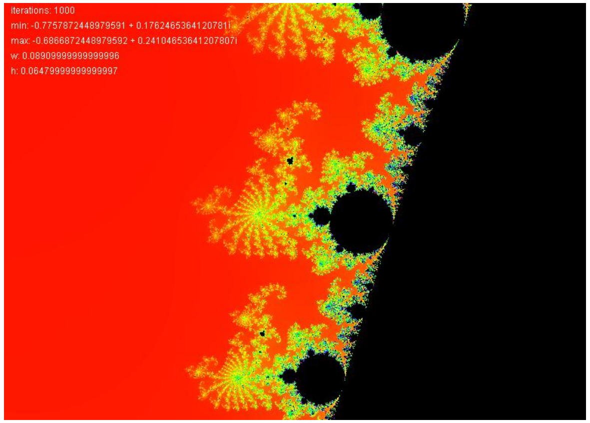
„logarithmische “
Farbprojektion
5 mal gezoomt

Farbverläufe

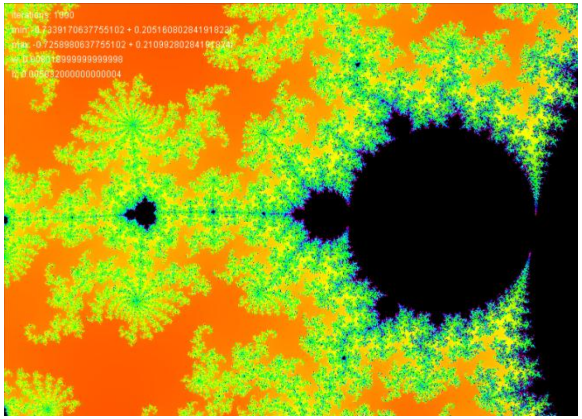


„logarithmische "
Farbprojektion
11 mal gezoomt

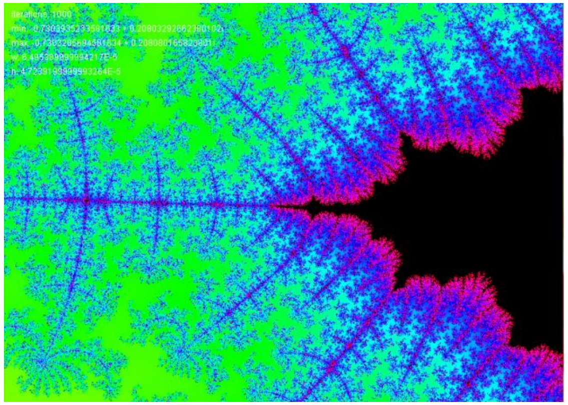
Strukturreichtum am Rand der Mandelbrotmenge



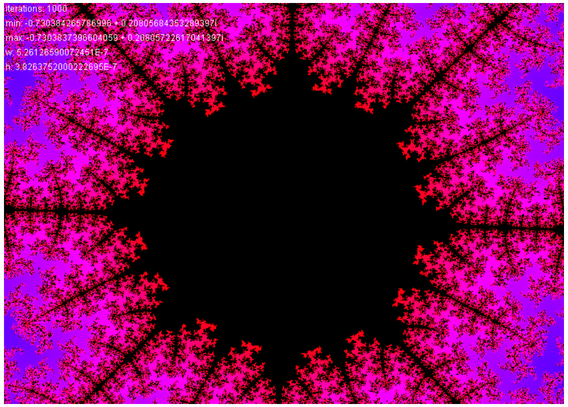
3 mal gezoomt



5 mal gezoomt



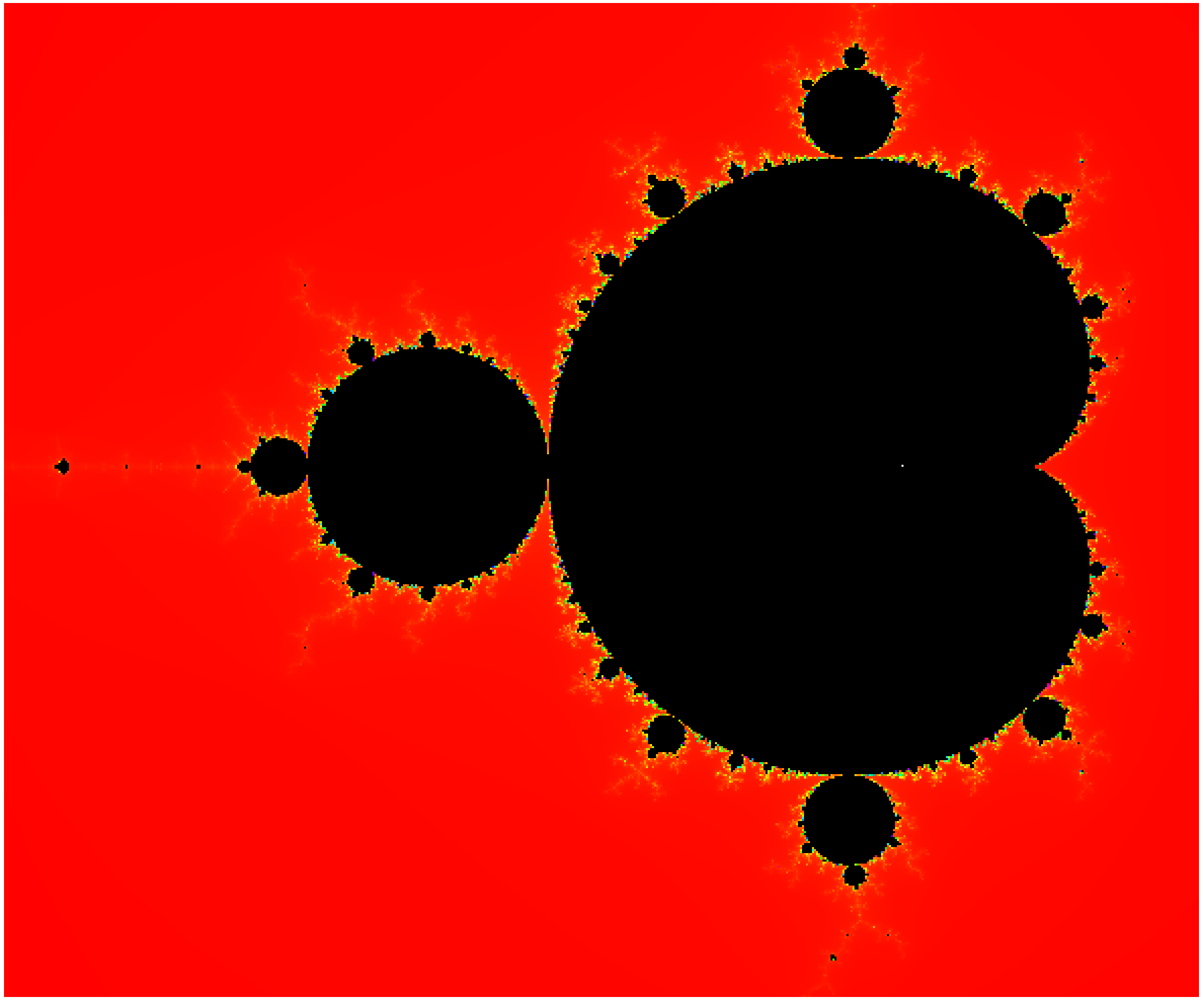
9 mal gezoomt



13 mal gezoomt

- Zoomfaktor: 0,2
- Bei fortgesetzter Ausschnittsvergrößerung bilden sich ähnliche Strukturen, wie am Anfangszustand.
- Herausforderung beim Programmieren : Parallelisieren des Codes (Multi-Threading), Image Buffering
- Weitere Optimierungsideen: Zwischenspeicherung von Daten, Nutzen mathematischer Eigenschaften der Mandelbrotmenge, Optimieren der Rechengenauigkeit.

Verhalten der Folgenglieder



Konvergenz

Beispiel 1: $c = 0,1 + 0 \cdot i$

$z_1 = 0 + 0,1 = 0,1$

$z_2 = (0,1)^2 + 0,1 = 0,11$

$z_3 = 0,1121$

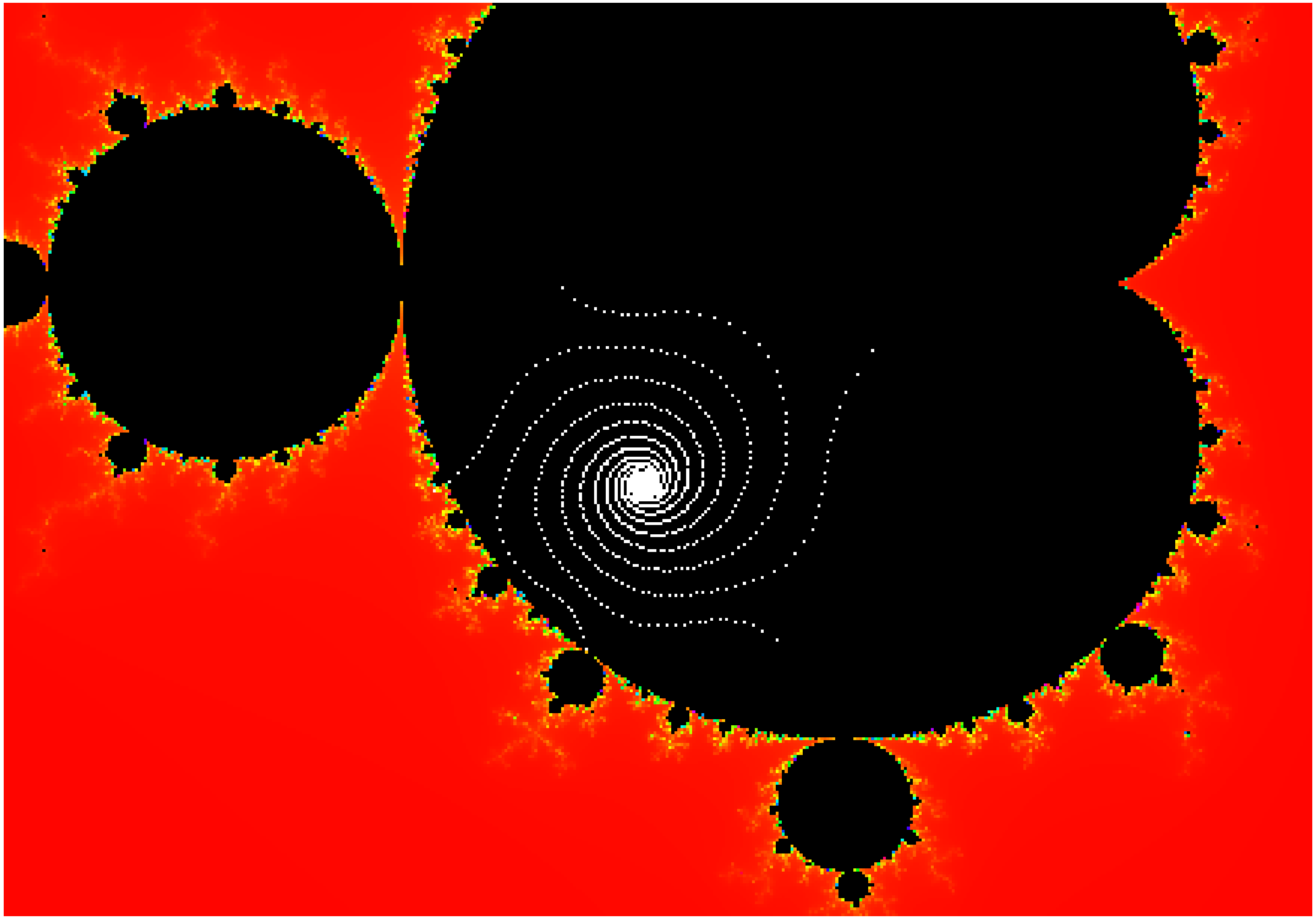
$z_4 = 0,11256641$

$z_5 = 0.1126711966602881$

….

$z_{1000} = 0.1127016653792583 1$

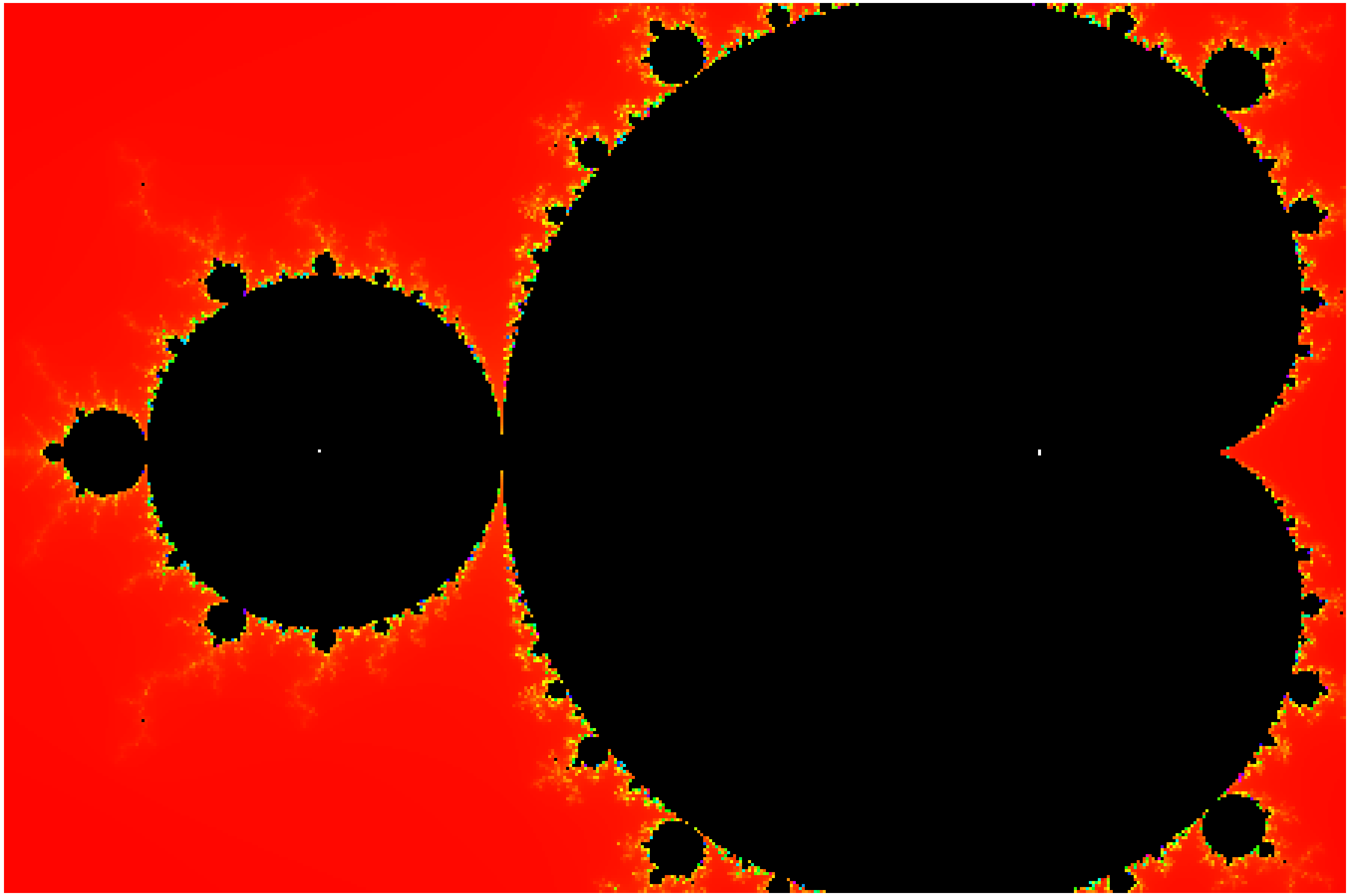
Verhalten der Folgenglieder



Konvergenz

Freie Universität Berlin

Verhalten der Folgenglieder



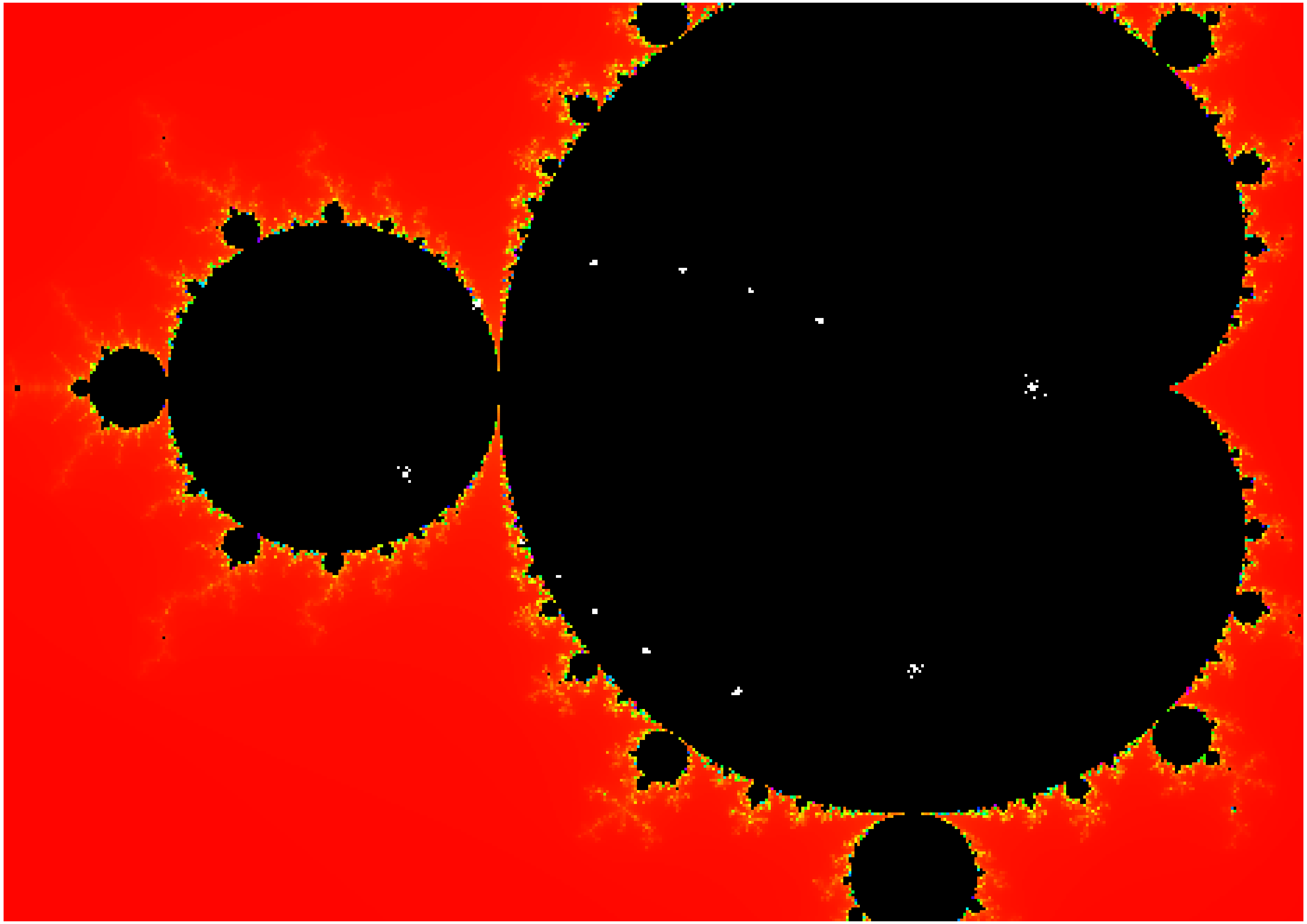
Periodischer Grenzzyklus

Beispiel 3: $c = -1$

$z_1 = (-1)^2 - 1 = 0$

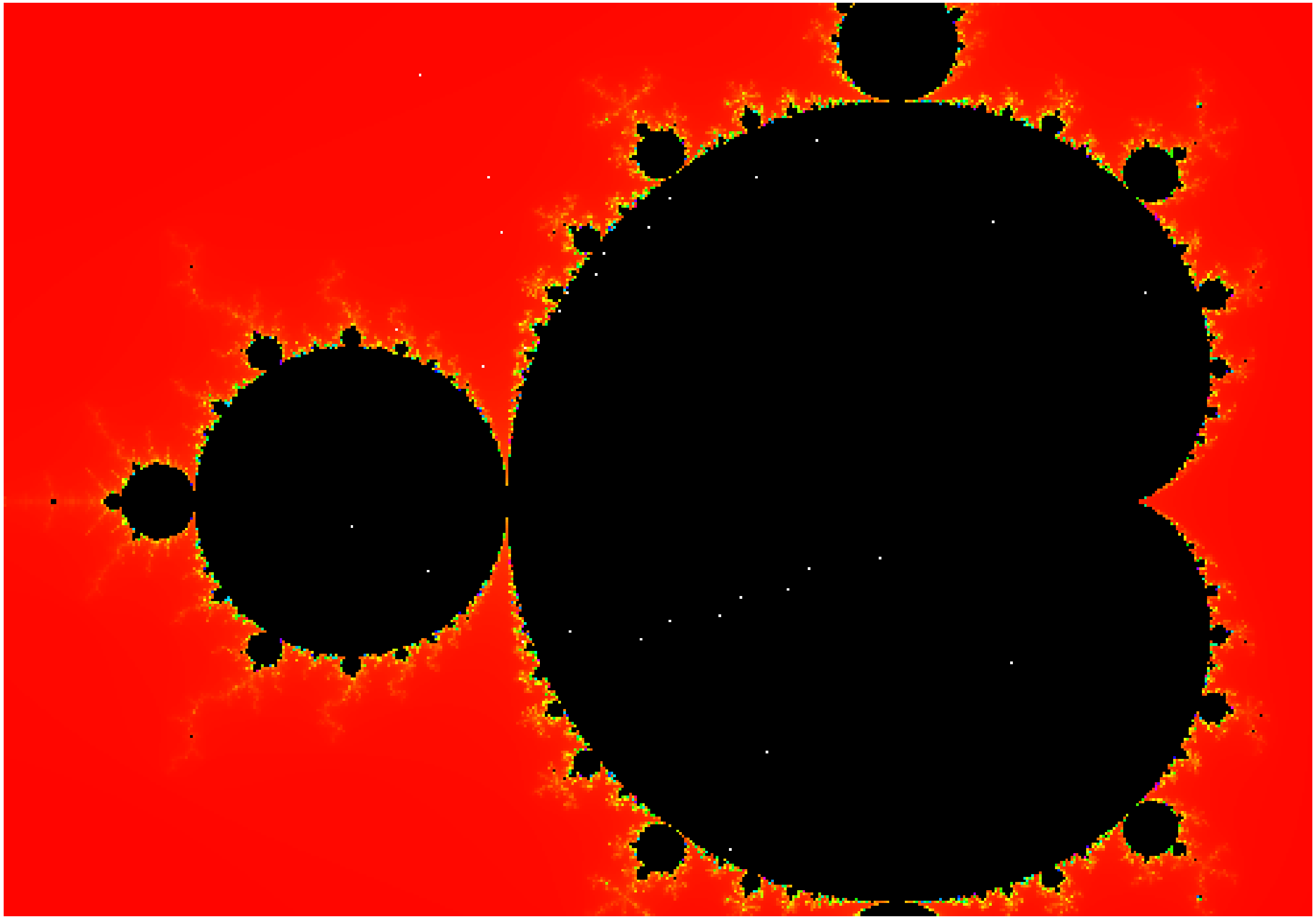
$z_2 = 0^2 - 1 = -1$

Verhalten der Folgenglieder



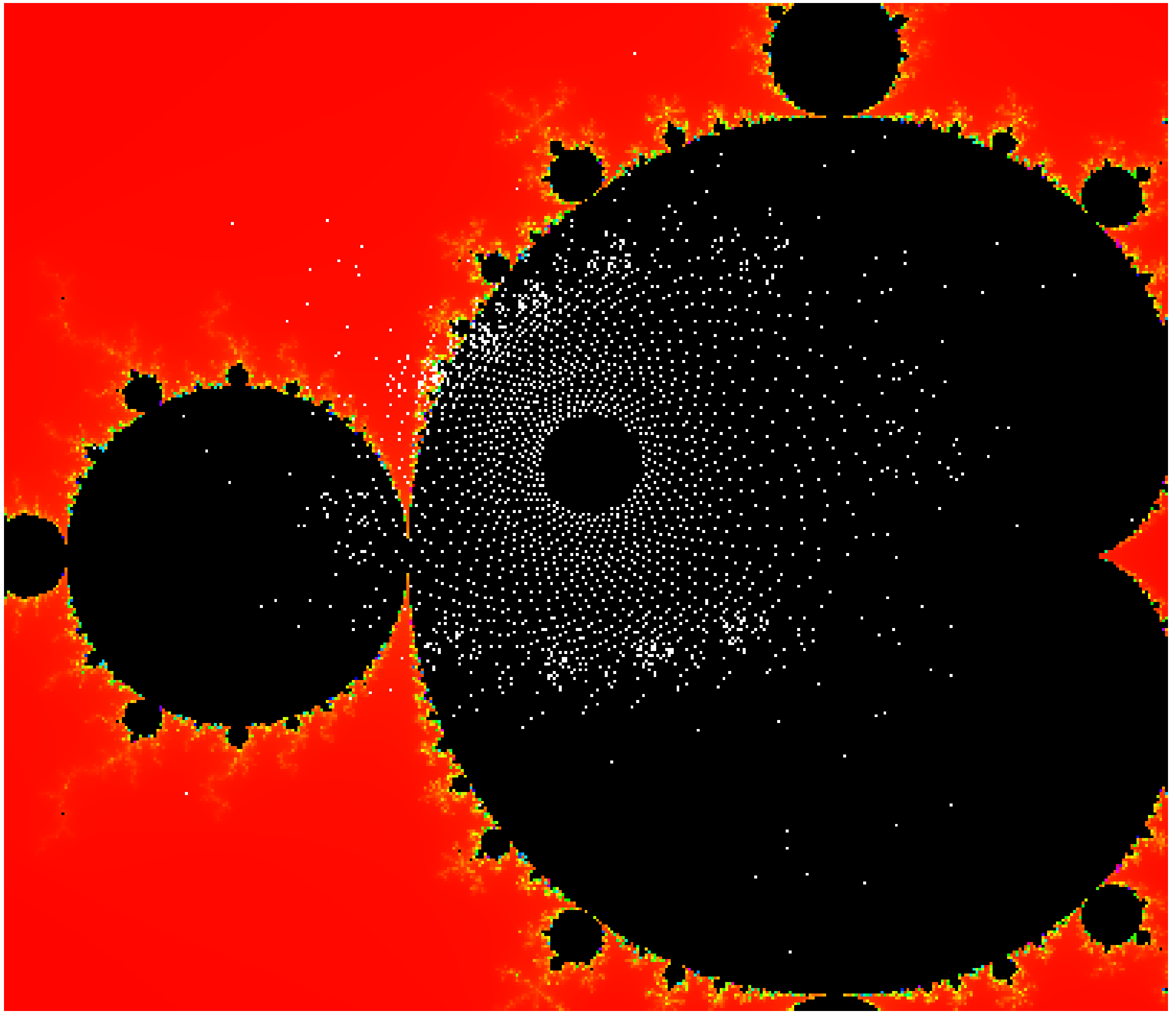
Periodischer Grenzzyklus

Verhalten der Folgenglieder



Chaotisches Verhalten

Verhalten der Folgenglieder



Wechselhaftes Verhalten

Freie Universität Berlin

Quellen

Mandelbrot, B. (2013): Die fraktale Geometrie der Natur. Springer.

Mandelbrotmenge.http://www.math.kit.edu/iana2/~mandel/seite/media/vl6.pdf
(aufgerufen am 15.09.2015).