Linearization

Sea un sistema dinamico no lineal

$$\frac{dx}{dt} = f(x,u) \text{ --(1)}$$

U: variable de entrada
X: variable de salida

Taylor serie:

$$f(x,u) \approx f(x_s,u_s) + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\bigg|_{x_s,u_s} \right)(x - x_s) + \left(\frac{\partial f}{\partial u}\bigg|_{x_s,u_s} \right)(x - u_s) + T.O.S \text{ --------------------------(2)}$$

Dado que la expansion se realiza alrededor del estado estacionario, esto significa que la ecuación se puede reescribir como:

$$\frac{dx_s}{dt} = f(x_s,u_s) = 0 \text{ --(3)}$$

la derivada de la ecuacion valuada en un estado estacionario es cero
restando (3) de (1)

$$\frac{dx}{dt} - \frac{dx_s}{dt} = 0 = f(x,u) - f(x_s,u_s)$$

$$\frac{dx}{dt} - \frac{dx_s}{dt} = 0 = f(x - x_s, u - u_s)$$

$$\frac{d(x - x_s)}{dt} = \frac{d\overline{x}}{dt} \text{ -----------------------------(4)}$$

$$\frac{d\overline{x}}{dt} = 0 = f(\overline{x},\overline{u})$$

$\overline{x} = x - x_s$ representa el alejamiento o desviacion de la variable x del estado estacionario xs.

Y sustituyendo en (3)

Reescribiendo:

$\frac{d\overline{x}}{dt} = f(x,u)$ y recordando que $f(x_s,u_s) = 0$

$$\boxed{\frac{d\overline{x}}{dt} = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\bigg|_{x_s,u_s} \right)\overline{x} + \left(\frac{\partial f}{\partial u}\bigg|_{x_s,u_s} \right)\overline{u}}$$

$$\frac{d\overline{x}}{dt} = a\overline{x} + b\overline{u}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}\bigg|_{x_s,u_s} = a$$

$$\frac{\partial f}{\partial u}\bigg|_{x_s,u_s} = b$$

Ejemplo 1:

Considerese la operación isotérmica de un reactor tanque agitado donde se efectua la reacción de segundo orden A → B. El modelo matemático del proceso, el cual describe la variación de la concentración del reactivo A, está dada por:

$$\frac{dC_A}{dt} = \frac{Q}{V}\left(C_{Ao} - C_A\right) - kC_A^2$$

Linealizar el modelo suponiendo que la entrada al proceso es el flujo volumétrico Q y la salida, o respuesta, es la concentración CA.

Definiendo:

$$f\left(C_A, Q\right) = \frac{Q}{V}\left(C_{Ao} - C_A\right) - kC_A^2$$

Linealizando alrededor de un punto $\left(C_A^s, Q^s\right)$

$$f\left(C_A, Q\right) = f\left(C_A^s, Q^s\right) + \left(\left.\frac{\partial f}{\partial C_A}\right|_{C_A^s, Q^s}\right)\left(C_A - C_A^s\right) + \left(\left.\frac{\partial f}{\partial Q}\right|_{C_A^s, Q^s}\right)\left(Q - Q^s\right) + T.O.S$$

Dado que: $f\left(C_A^s, Q^s\right) = 0$

Reordenando:

$$f\left(C_A, Q\right) = \cancel{f\left(C_A^s, Q^s\right)} + \left(\left.\frac{\partial f}{\partial C_A}\right|_{C_A^s, Q^s}\right)\bar{C}_A + \left(\left.\frac{\partial f}{\partial Q}\right|_{C_A^s, Q^s}\right)\bar{Q}$$

$$f\left(C_A, Q\right) = \left(\left.\frac{\partial f}{\partial C_A}\right|_{C_A^s, Q^s}\right)\bar{C}_A + \left(\left.\frac{\partial f}{\partial Q}\right|_{C_A^s, Q^s}\right)\bar{Q}$$

$$\frac{dC_A}{dt} = \left(\left.\frac{\partial f}{\partial C_A}\right|_{C_A^s, Q^s}\right)\bar{C}_A + \left(\left.\frac{\partial f}{\partial Q}\right|_{C_A^s, Q^s}\right)\bar{Q}$$

El lado izquierdo puede escribirse en terminos de variables de desviación:

$$\frac{dC_A}{dt} = \frac{d\left(C_A - C_A^s\right)}{dt} = \frac{d\bar{C}_A}{dt}$$

Entonces:

$$\frac{d\bar{C}_A}{dt} = \left(\left.\frac{\partial f}{\partial C_A}\right|_{C_A^s, Q^s}\right)\bar{C}_A + \left(\left.\frac{\partial f}{\partial Q}\right|_{C_A^s, Q^s}\right)\bar{Q}$$

Evaluando las derivadas parciales:

$$\left.\frac{\partial f}{\partial C_A}\right|_{C_A^s, Q^s} = \left.\left[-\frac{Q}{V} - 2kC_A\right]\right|_{C_A^s, Q^s} = -\frac{Q^s}{V} - 2kC_A^s$$

$$\left.\frac{\partial f}{\partial Q}\right|_{C_A^s, Q^s} = \left[\frac{\left(C_{Ao} - C_A\right)}{V}\right]_{C_A^s, Q^s} = \frac{\left(C_{Ao} - C_A^s\right)}{V}$$

Finalmente:

$$\boxed{\frac{d\bar{C}_A}{dt} = \left(-\frac{Q^s}{V} - 2kC_A^s\right)\bar{C}_A + \left(\frac{C_{Ao} - C_A^s}{V}\right)\bar{Q}}$$