Prova, implementação e análise de problemas selecionados

Carlos Mattoso, Ian Albuquerque e Leonardo Kaplan

PUC-Rio

Resumo

Neste projeto procuramos provar e implementar soluções para os problemas apresentados em aula da forma mais clara possível. Otimizações foram feitas desde que não obsfuscassem as induções que originam os algoritmos.

I. Introdução

Nos foram apresentados 3 teoremas para provar e implementar:

Para o primeiro teorema, a prova nos foi apresentada, restando apenas a codificação.

No segundo, primeiro enunciamos e provamos um teorema equivalente ao proposto, para então responder o que foi perguntado.

Provamos e implementamos o último teorema, sendo $k = 15$ o maior valor calculado.

Todos os algoritmos foram implementados em C++ , alguns com o uso de bibliotecas externas a fim de otimização.

II. Teorema 1

I. Enunciado

Teorema 1 $x^n - y^n$ é divisível por x - y para quaisquer x e y inteiros e todos o valores de n inteiros e maiores que zero.

II. Prova

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit. Aliquam ultrices scelerisque semper. Donec cursus euismod enim eget sodales. Duis sit amet lacinia leo, at tristique libero. Suspendisse eget placerat felis. Nulla non nibh pharetra, sodales mauris et, tristique arcu. Donec placerat ornare convallis. Vestibulum elementum enim eu aliquet faucibus. Donec rutrum orci at erat tempus, ac pellentesque sapien facilisis. Morbi suscipit euismod ligula, vel laoreet ligula euismod in. Phasellus suscipit neque tellus, ut eleifend dui sollicitudin vel. Vivamus ut hendrerit justo. Curabitur vitae massa ullamcorper, ullamcorper metus nec, condimentum purus. Aenean nec lacus metus. Class aptent taciti sociosqu ad litora torquent per conubia nostra, per inceptos himenaeos. Morbi tincidunt est ut quam molestie convallis.

III. Comentarios

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit. Aliquam ultrices scelerisque semper. Donec cursus euismod enim eget sodales. Duis sit amet lacinia leo, at tristique libero. Suspendisse eget placerat felis. Nulla non nibh pharetra, sodales mauris et, tristique arcu. Donec placerat ornare convallis. Vestibulum elementum enim eu aliquet faucibus. Donec rutrum orci at erat tempus, ac pellentesque sapien facilisis. Morbi suscipit euismod ligula, vel laoreet ligula euismod in. Phasellus suscipit neque tellus, ut eleifend dui sollicitudin vel. Vivamus ut hendrerit justo. Curabitur vitae massa ullamcorper, ullamcorper metus nec, condimentum purus. Aenean nec lacus metus. Class aptent taciti sociosqu ad litora torquent per conubia nostra, per inceptos himenaeos. Morbi tincidunt est ut quam molestie convallis.

III. Teorema 2

I. Enunciado

Teorema 2 O número de números inteiros cujos dígitos pertencem ao conjunto {1, 2, . . . , m} de K dígitos diferentes é dado pelo produto m.(m - 1)...(m - k + 1).

II. Prova

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit. Aliquam ultrices scelerisque semper. Donec cursus euismod enim eget sodales. Duis sit amet lacinia leo, at tristique libero. Suspendisse eget placerat felis. Nulla non nibh pharetra, sodales mauris et, tristique arcu. Donec placerat ornare convallis. Vestibulum elementum enim eu aliquet faucibus. Donec rutrum orci at erat tempus, ac pellentesque sapien facilisis. Morbi suscipit euismod ligula, vel laoreet ligula euismod in. Phasellus suscipit neque tellus, ut eleifend dui sollicitudin vel. Vivamus ut hendrerit justo. Curabitur vitae massa ullamcorper, ullamcorper metus nec, condimentum purus. Aenean nec lacus metus. Class aptent taciti sociosqu ad litora torquent per conubia nostra, per inceptos himenaeos. Morbi tincidunt est ut quam molestie convallis.

III. Comentarios

Primeiro provamos o teorema de que sabe-se enumerar todos estes números. Depois, implementamos o algortimo resultante da prova, que enumera todos os m.(m-1)...(m - k + 1) números, o que permite contá-los.

IV. Teorema 3

I. Enunciado

Teorema 3 Sabe-se construir $2^k - 1$ rodadas de $2^k - 1$ jogos onde cada equipe enfrenta uma equipe diferente em cada rodada.

II. Prova

Teorema(s) do(s) Caso(s) Base(s):

Teorema 3 (0): *(Caso Degenerado)*
$k = 0 \rightarrow n = 2^0 = 1$ equipe
Conjunto de Equipes $E = \{e_1\}$
Não há equipes suficiente para montar nenhum jogo. Como não é possível montar nenhum jogo, não é possível montar nenhuma rodada. Logo: 0 rodadas são possíveis de serem formadas.
Conjunto de Rodadas $R^0 = \emptyset$
Número de rodadas $= 1 = 2^0 - 1 = (n - 1)$

Teorema 3 (1):
$k = 1 \rightarrow n = 2^1 = 2$ equipes
Conjunto de Equipes $E = \{e_1, e_2\}$
Há somente duas equipes. Logo, podemos montar o seguinte conjunto de rodadas:
Conjunto de Rodadas $R^1 = \{R_1\}$
$R_1^1 = \{(e_1, e_2)\}$
Número de rodadas $= 1 = 2^1 - 1 = (n - 1)$
Com essa configuração de rodadas, e_1 joga com e_2, satisfazendo a condição de que cada time jogue com todos os outros.

Teorema do Passo Indutivo:

Teorema 3 (k) → Teorema 3 (k+1)
Pela hipótese indutiva sabe-se construir o conjunto de rodadas R^k para um número de equipes $n = 2^k$.
Deseja-se provar que sabe-se construir o conjunto de rodadas R^{k+1} para um número de equipes $n' = 2^{k+1} = 2 * 2^k = 2n$.
Sejam o conjunto de equipes:
$E = \{e_1, e_2, \ldots, e_{2n}\}$
Separemos dois subconjuntos de E:
$E_1 = \{e_1, e_2, ..., e_n\}$
$E_2 = \{e_{n+1}, e_{n+2}, \ldots, e_{2n}\}$
Observe que:
$card(E_1) = card(E_2) = n = 2^k$
$E_1 \cup E_2 = E$
$E_1 \cap E_2 = \emptyset$
Pela hipótese indutiva, sabe-se construir as rodadas referentes a E_1 e E_2, uma vez que em cada time existem exatos $n = 2^k$ equipes.

Faltam apenas as partidas que envolvem uma equipe de E_1 com uma equipe de E_2
Denotemos, respectivamente, o conjunto de rodadas relativos a E_1 e E_2 como R^{k,E_1} e R^{k,E_2} e cada rodada como R_i^{k,E_1} e R_j^{k,E_2} para $1 \leq i, j \leq (n-1)$.
Montemos o conjunto de rodadas R^{k+1} como $R^{k+1} = \{R_1^{k+1}, R_2^{k+1}, \ldots, R_{2n-1}^{k+1}\}$ tal que:
Primeiras n-1 rodadas (Partidas que ocorrem internamente entre equipes de E_1 e E_2):
$R_i^{k+1} = R_i^{k,E_1} \cup R_i^{k,E_2}\ \forall i \in \mathbb{N}, 1 \leq i \leq (n-1)$
Próximas n rodadas (partidas que envolvem uma equipe de E_1 com uma equipe de E_2):
$R_{n+\tau}^{k+1} = \{(e_{1+((j+\tau)\%n)}, e_{j+n}) \in \mathbb{E}^2 | j \in \mathbb{N}, 1 \leq j \leq n\ \}\ \forall \tau \in \mathbb{Z}, 0 \leq \tau \leq (n-1)$
Observar que $e_{1+((j+\tau)\%n)} \in E_1$ e $e_{j+n} \in E_2$ para todos os valores de j e τ nos limites estipulados.
Notar ainda que dado um j, variando-se τ nos limites estipulados, têm-se que $e_{j+n} \in E_2$ joga com todos os elementos de E_1 e que variar j nos limites estipulados equivale a percorrer-se os elementos de E_2.
Uma vez que todo elemento de E_1 e E_2 jogou com os próprios elementos de seu respectivo conjunto assim como com todos os elemntos do outro conjunto e como $E_1 \cup E_2 = E$ então R^{k+1} é um conjunto de rodadas que satisfaz o teorema. Observar que $card(R^{k+1}) = 2n-1$, conforme esperado.
Sabe-se , portanto, construir o conjunto de rodadas R^{k+1} para um número de equipes.

III. Comentarios

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit. Aliquam ultrices scelerisque semper. Donec cursus euismod enim eget sodales. Duis sit amet lacinia leo, at tristique libero. Suspendisse eget placerat felis. Nulla non nibh pharetra, sodales mauris et, tristique arcu. Donec placerat ornare convallis. Vestibulum elementum enim eu aliquet faucibus. Donec rutrum orci at erat tempus, ac pellentesque sapien facilisis. Morbi suscipit euismod ligula, vel laoreet ligula euismod in. Phasellus suscipit neque tellus, ut eleifend dui sollicitudin vel. Vivamus ut hendrerit justo. Curabitur vitae massa ullamcorper, ullamcorper metus nec, condimentum purus. Aenean nec lacus metus. Class aptent taciti sociosqu ad litora torquent per conubia nostra, per inceptos himenaeos. Morbi tincidunt est ut quam molestie convallis.

V. Conclusão

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit. Aliquam ultrices scelerisque semper. Donec cursus euismod enim eget sodales. Duis sit amet lacinia leo, at tristique libero. Suspendisse eget placerat felis. Nulla non nibh pharetra, sodales mauris et, tristique arcu. Donec placerat ornare convallis. Vestibulum elementum enim eu aliquet faucibus. Donec rutrum orci at erat tempus, ac pellentesque sapien facilisis. Morbi suscipit euismod ligula, vel laoreet ligula euismod in. Phasellus suscipit neque tellus, ut eleifend dui sollicitudin vel. Vivamus ut hendrerit justo.

Curabitur vitae massa ullamcorper, ullamcorper metus nec, condimentum purus. Aenean nec lacus metus. Class aptent taciti sociosqu ad litora torquent per conubia nostra, per inceptos himenaeos. Morbi tincidunt est ut quam molestie convallis.