

Transición de fase del IvGFF

simulación mediante M.C.M.C.

Luis Plaza, Felipe Espinosa

MA4402: Simulación estocástica: teoría y laboratorio

22 de diciembre de 2022

tabla de contenidos

1 Contexto

2 Simulaciones

3 Resultados

4 Modelos con borde variable.

5 Bibliografía

tabla de contenidos

1 Contexto

2 Simulaciones

3 Resultados

4 Modelos con borde variable.

5 Bibliografía

como contexto tendremos que Λ es un subconjunto de \mathbb{Z}^2 , y φ sera una variable aleatoria en el siguiente espacio de estados

$$\Omega_{\Lambda, A} := \{\varphi \in \mathbb{Z}^\Lambda; \varphi|_{\partial\Lambda} \in A\}$$

aquí Λ se definirá como la “regilla” dada por los vértices en $\{-n, \dots, n\}$ y las aristas

$$a \sim b \iff \|a - b\| = 1$$

Indicarán las aristas de nuestro grafo.

IvGFF

El IvGFF se podria ver como la v.a. que a valores en $\Omega_{\Lambda,0}$ con una densidad particular

IvGFF

El IvGFF se podría ver como la v.a. que a valores en $\Omega_{\Lambda,0}$ con una densidad particular

Densidad

Para esta v.a. consideraremos la siguiente densidad

$$\mathbb{P}_\beta(\varphi = \omega) \propto \exp\left(-\frac{\beta}{2} \sum_{ij \in \Lambda} (w_i - w_j)^2\right)$$

tabla de contenidos

1 Contexto

2 Simulaciones

3 Resultados

4 Modelos con borde variable.

5 Bibliografía

Metropolis-Hastings

¿Como hacer una cadena de Markov en $\Omega_{\Lambda,0}$?

Metropolis-Hastings

¿Cómo hacer una cadena de Markov en $\Omega_{\Lambda,0}$?

Cadena de Markov

Una cadena natural es proponer un $Y \in \mathbb{Z}$ y un $\lambda_0 \in \Lambda$ y a X_n un paso anterior, hacer

$$X_{n+1} = \begin{cases} X_{n+1}^\lambda = Y & \lambda = \lambda_0 \\ X_{n+1}^\lambda = X_n^\lambda & \sim \end{cases}$$

que es claro nos da una C.M. aquí Y se puede ver como $\mathcal{N}(\frac{1}{4} \sum_{j \sim \lambda_0} x_j, (1/4)\beta)$ la que se le aproxima a su entero más cercano

Matriz de transición

Se puede verificar que en esta cadena tendremos que

$$R_{x^1, x^2} = P(\mathcal{N}(c, \sigma^2) \in [k - 1, k])$$

Con esto notemos que nos interesa es simular algo que este muy cerca de una distribución Gaussiana, lo que nosotrosaremos es Con lo anterior ya tenemos lo suficiente para hacer el Metrópolis-Hastings conocido.

Matriz de transición

Se puede verificar que en esta cadena tendremos que

$$R_{x^1, x^2} = P(\mathcal{N}(c, \sigma^2) \in [k - 1, k])$$

Con esto notemos que nos interesa es simular algo que este muy cerca de una distribución Gaussiana, lo que nosotrosaremos es Con lo anterior ya tenemos lo suficiente para hacer el Metrópolis-Hastings conocido.

Observaciones

- 1 Ocurre una fuerte diferencia de resultados si se intenta repetir el procedimiento anterior pero con y un entero aleatorio uniforme
- 2 De lo anterior se puede especular que en el caso de querer ver una cadena deseada, se puede buscar una con un comportamiento “similar”

tabla de contenidos

1 Contexto

2 Simulaciones

3 Resultados

4 Modelos con borde variable.

5 Bibliografía

Transición de fase

$\varphi \in \Omega_{\Lambda,0}$, veamos c/r a β el valor

$$T\varphi = \left(\frac{1}{|\Lambda|} \sum_{\lambda \in \Lambda} \varphi_\lambda \right)^2$$

Transición de fase

$\varphi \in \Omega_{\Lambda,0}$, veamos c/r a β el valor

$$T\varphi = \left(\frac{1}{|\Lambda|} \sum_{\lambda \in \Lambda} \varphi_\lambda \right)^2$$

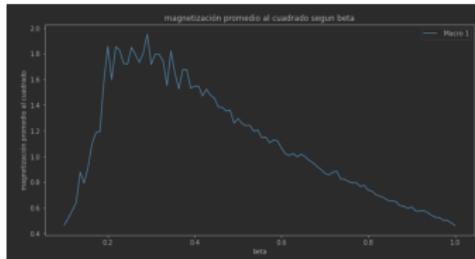
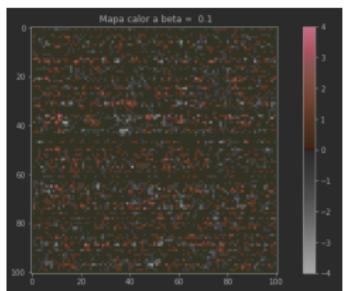
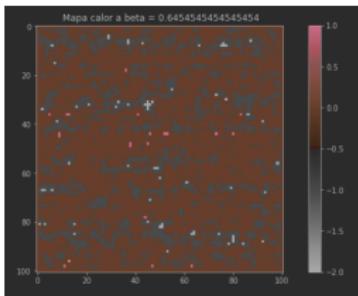


Figura: grafica de $T\varphi$ para varios β

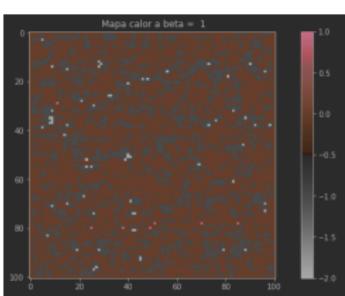
Observando algunas simulaciones



(a)



(b)



(c)

tabla de contenidos

1 Contexto

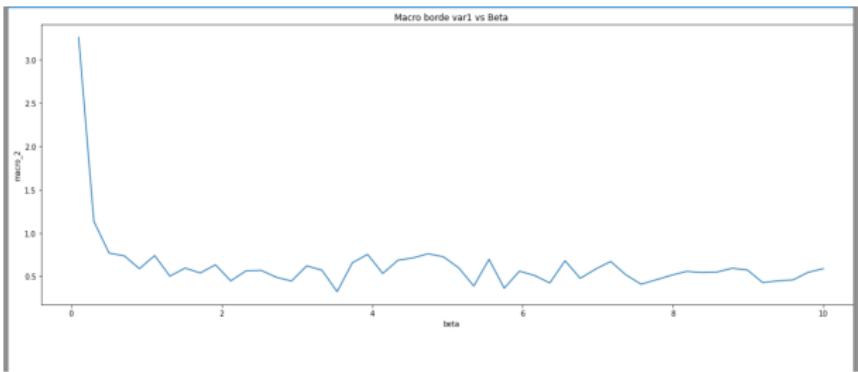
2 Simulaciones

3 Resultados

4 Modelos con borde variable.

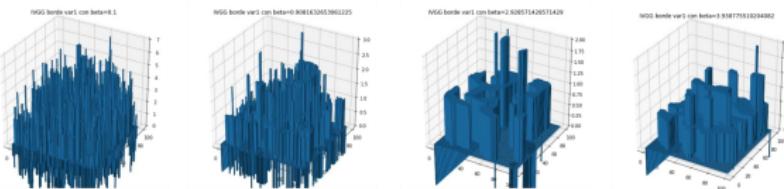
5 Bibliografía

Borde variable en el tiempo



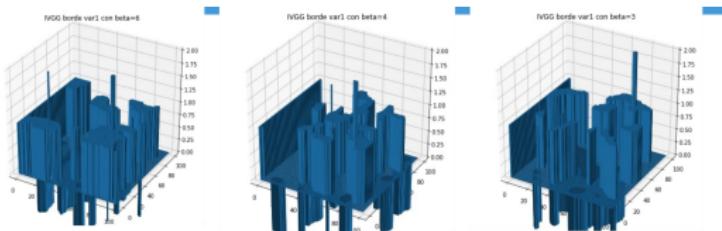
Figura

Borde variable en el tiempo



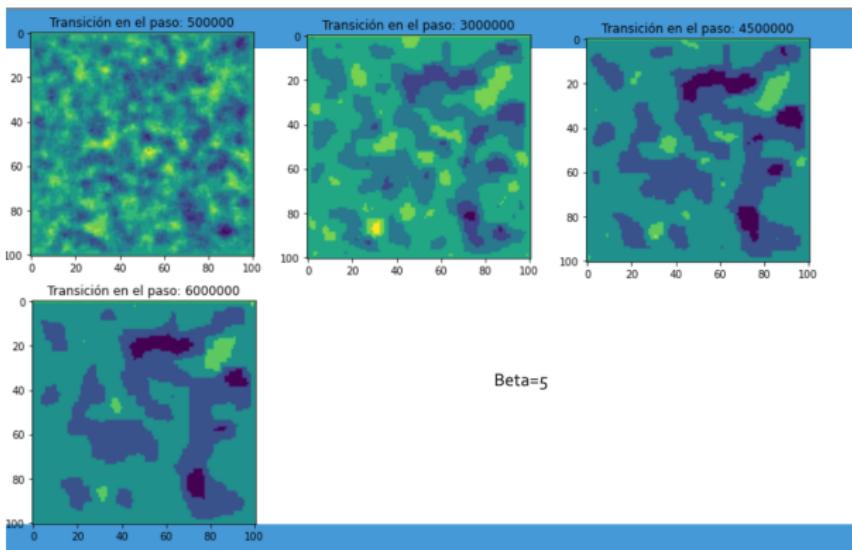
Figura

Borde variable en el tiempo



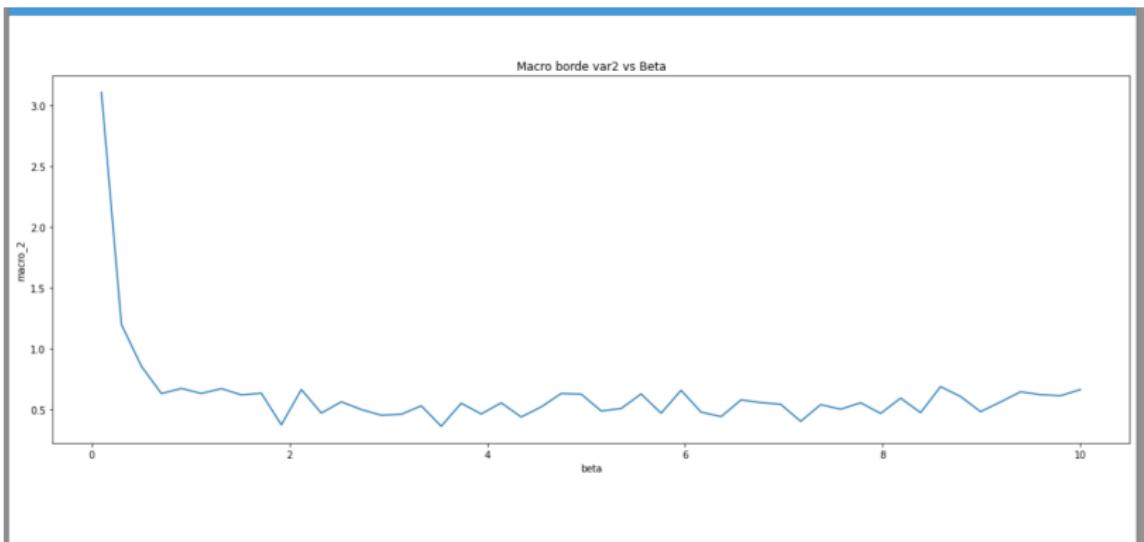
Figura

Borde variable en el tiempo



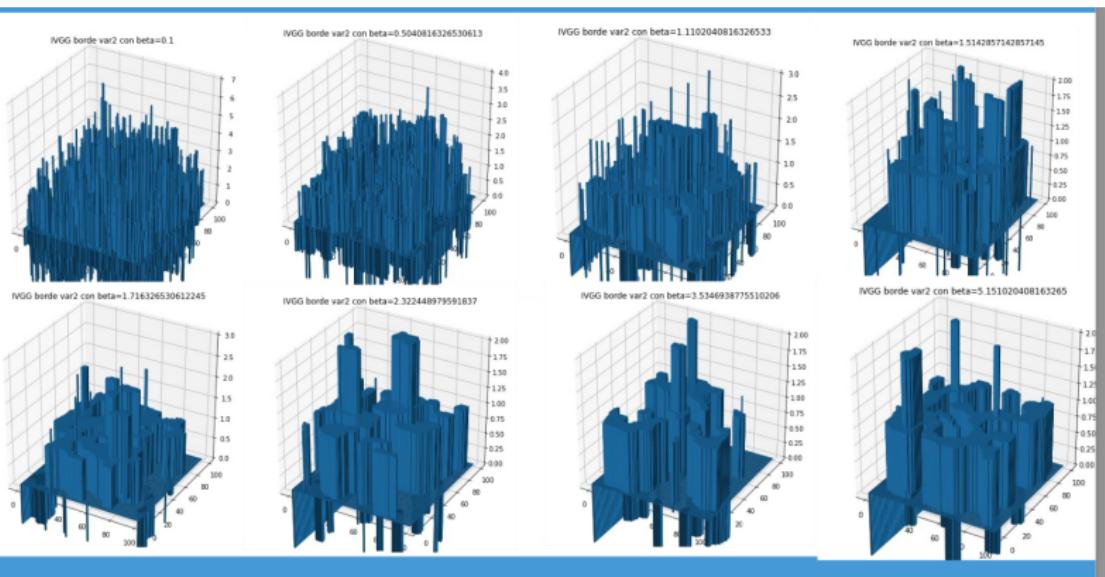
Figura

Borde variable en el tiempo



Figura

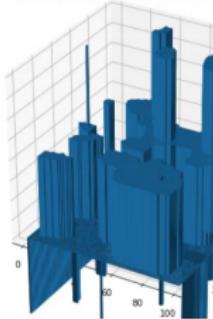
Borde variable en el tiempo



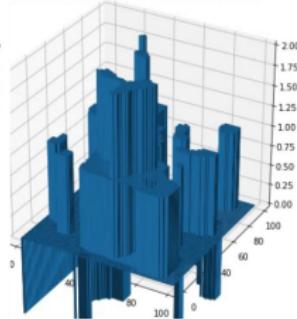
Figura

Borde variable en el tiempo

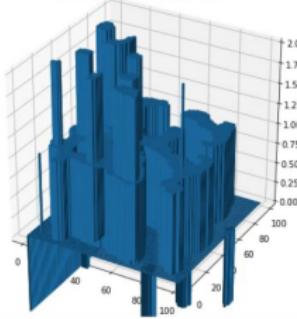
IVGG borde var2 con beta=7.373469387755102



IVGG borde var2 con beta=8.989795918367347



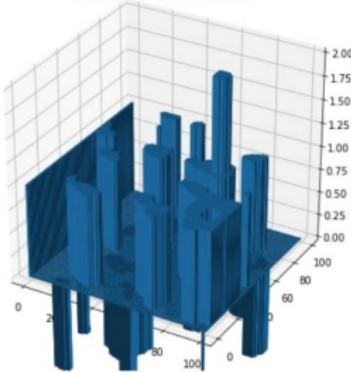
IVGG borde var2 con beta=10.0



Figura

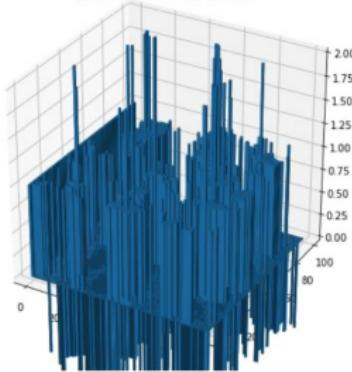
Borde variable en el tiempo

IVGG borde var2 con beta=3



Promedio= 0.08

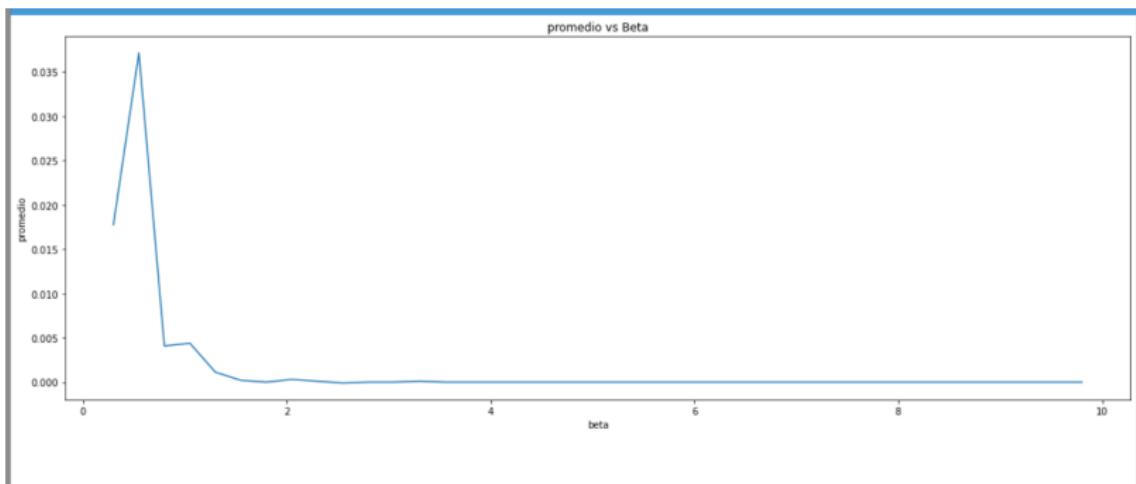
IVGG borde var2 con beta=1



Promedio= -0.03

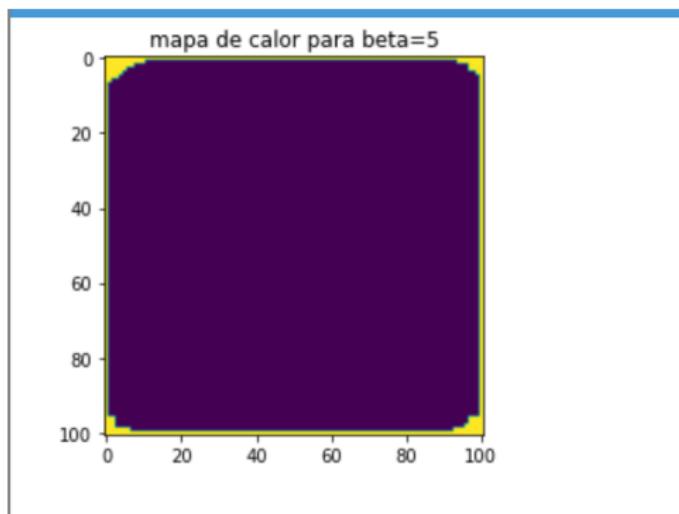
Figura

Borde variable en el tiempo



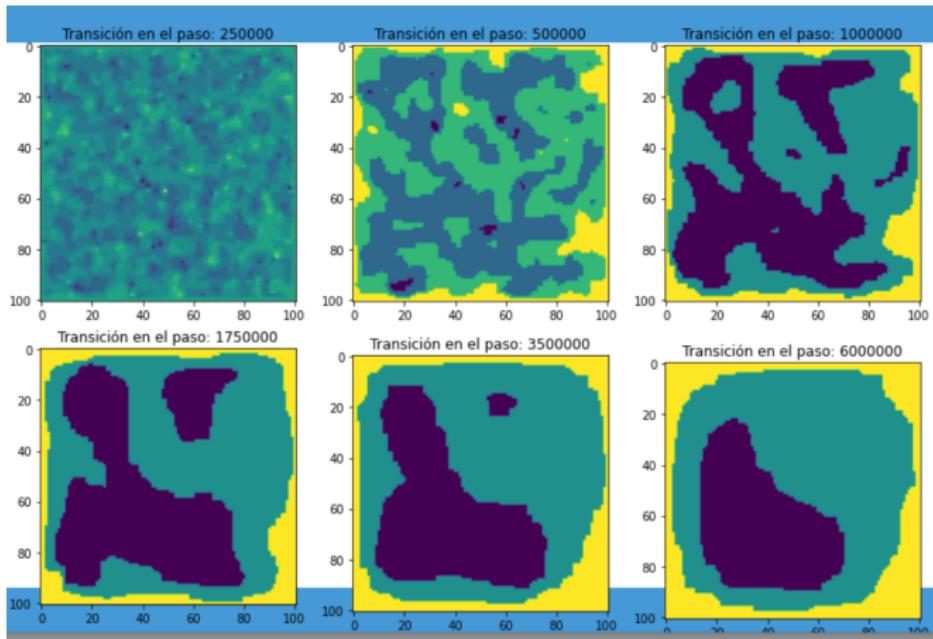
Figura

Borde variable en el tiempo



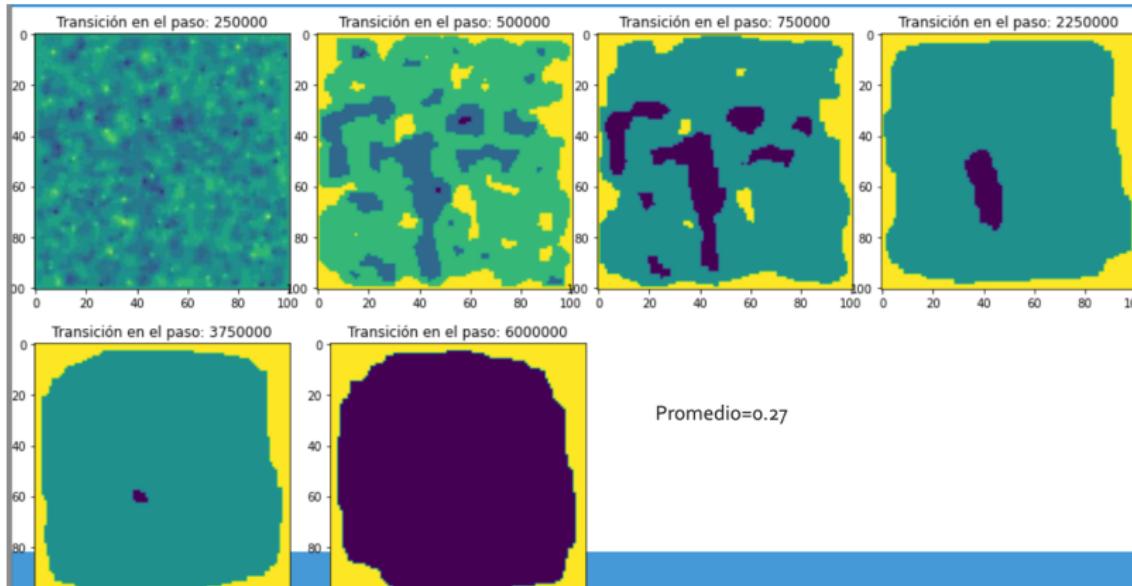
Figura

Borde variable en el tiempo



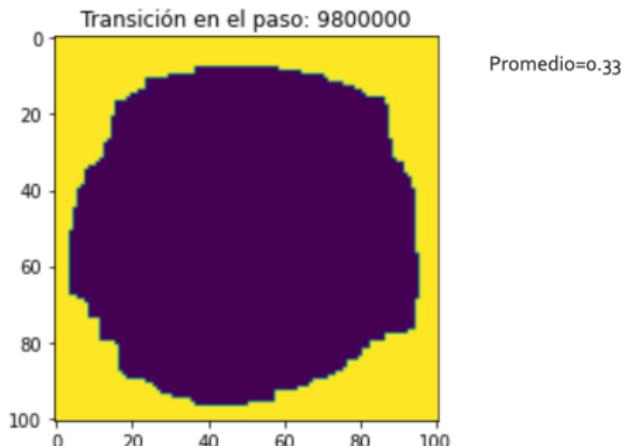
Figura

Borde variable en el tiempo



Figura

Borde variable en el tiempo



Figura

tabla de contenidos

1 Contexto

2 Simulaciones

3 Resultados

4 Modelos con borde variable.

5 Bibliografía

Bibliografía consultada

-  HANS-OTTO GEORGI, *Gibbs measure and phase transition*, sección 6.3
-  FRIEDI VELENIK, *Statiscal mechanics of lattice systems. A concrete mathematical introduction*, capítulo 1 págs 34 - 46.
-  ETIENNE PARDOUX, *Markov processes and applications, algorithms, networks genome and finance*, capítulo 3, sección 3.1