Transición de fase del lvGFF

simulación mediante M.C.M.C.

Luis Plaza, Felipe Espinosa

MA4402: Simulación estocástica: teoría y laboratorio

22 de diciembre de 2022

tabla de contenidos

tabla de contenidos

como contexto tendremos que Λ es un subconjunto de $\mathbb{Z}^2$, y φ sera una variable aleatoria en el siguiente espacio de estados

$$\Omega_{\Lambda,A} := \{\varphi \in \mathbb{Z}^{\Lambda}; \varphi|_{\partial\Lambda} \in A\}$$

aquí Λ se definirá como la "regilla" dada por los vértices en $\{-n, ..n\}$ y las aristas

$$a \sim b \Longleftrightarrow \|a - b\| = 1$$

$_\Lambda$ indicaran las aristas de nuestro grafo.

lvGFF

El lvGFF se podria ver como la v.a. que a valores en $\Omega_{\Lambda,0}$ con una densidad particular

lvGFF

El lvGFF se podria ver como la v.a. que a valores en $\Omega_{\Lambda,0}$ con una densidad particular

Densidad

Para esta v.a. consideraremos la siguiente densidad

$$\mathbb{P}_\beta(\varphi = \omega) \propto \exp(-\frac{\beta}{2}\sum_{ij\in\Lambda}(w_i - w_j)^2)$$

tabla de contenidos

Metropolis-Hasting

¿Como hacer una cadena de Markov en $\Omega_{\Lambda,0}$?

Metropolis-Hasting

¿Como hacer una cadena de Markov en $\Omega_{\Lambda,0}$?

Cadena de Markov

Una cadena natural es proponer un $Y \in \mathbb{Z}$ y un $\lambda_0 \in \Lambda$ y a X_n un paso anterior, hacer

$$X_{n+1} = \begin{cases} X^{\lambda}_{n+1} = Y & \lambda = \lambda_0 \\ X^{\lambda}_{n+1} = X^{\lambda}_n & \sim \end{cases}$$

que es claro nos da una C.M. aquí Y se puede ver como $\mathcal{N}(\frac{1}{4}\sum_{j\sim\lambda_0} x_j, (1/4\beta)$la que se le aproxima a su entero más cercano

Matriz de transición

Se puede verificar que en esta cadena tendremos que

$$R_{x^1,x^2} = P(\mathcal{N}(c,\sigma^2) \in [k-1,k])$$

Con esto notemos que nos interesa es simular algo que este muy cerca de una distribución Gaussiana, lo que nosotros haremos es Con lo anterior ya tenemos lo suficiente para hacer el Metrópolis-Hasting conocido.

Matriz de transición

Se puede verificar que en esta cadena tendremos que

$$R_{x^1,x^2} = P(\mathcal{N}(c,\sigma^2) \in [k-1,k])$$

Con esto notemos que nos interesa es simular algo que este muy cerca de una distribución Gaussiana, lo que nosotros haremos es Con lo anterior ya tenemos lo suficiente para hacer el Metrópolis-Hasting conocido.

Observaciones

1. Ocurre una fuerte diferencia de resultados si se intenta repetir el procedimiento anterior pero con y un entero aleatorio uniforme
2. De lo anterior se puede especular que en el caso de querer ver una cadena deseada, se puede buscar una con un comportamiento "similar"

tabla de contenidos

Transición de fase

$\varphi \in \Omega_{\Lambda,0}$, veamos c/r a β el valor

$$T\varphi = \left(\frac{1}{|\Lambda|}\sum_{\lambda\in\Lambda}\varphi_\lambda\right)^2$$

Transición de fase

$\varphi \in \Omega_{\Lambda,0}$, veamos c/r a β el valor

$$T\varphi = \left(\frac{1}{|\Lambda|}\sum_{\lambda\in\Lambda}\varphi_\lambda\right)^2$$

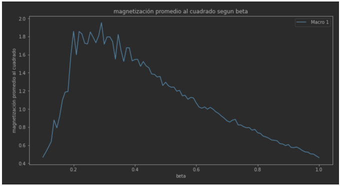
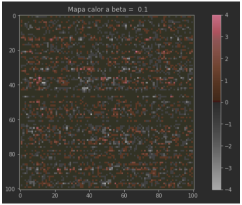
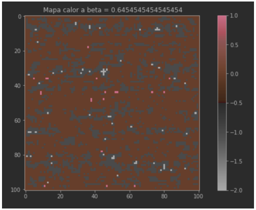


Figura: grafica de $T\varphi$ para varios β

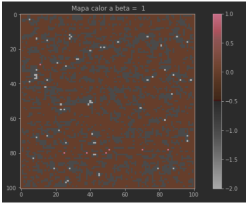
Observando algunas simulaciones



(a)



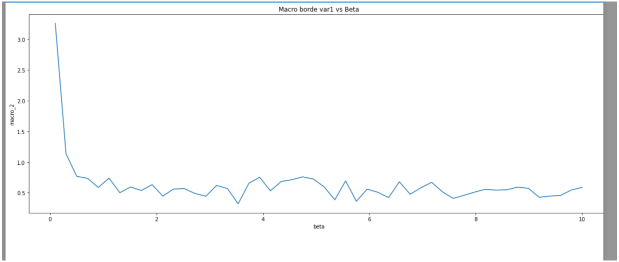
(b)



(c)

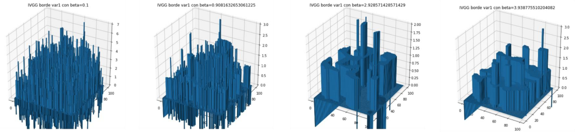
tabla de contenidos

Borde variable en el tiempo



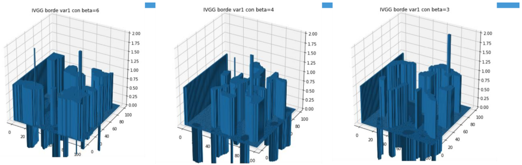
Figura

Borde variable en el tiempo



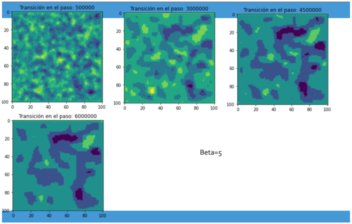
Figura

Borde variable en el tiempo



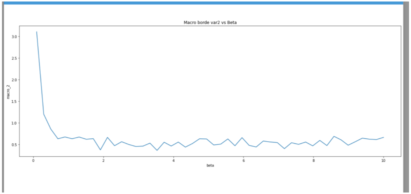
Figura

Borde variable en el tiempo



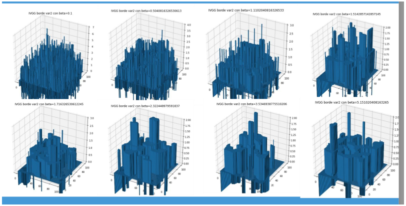
Figura

Borde variable en el tiempo



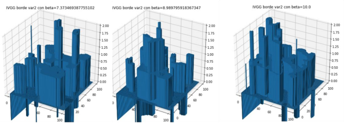
Figura

Borde variable en el tiempo



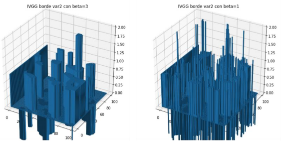
Figura

Borde variable en el tiempo



Figura

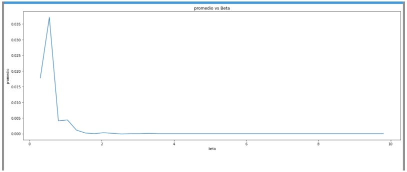
Borde variable en el tiempo



Promedio= 0.08 Promedio= -0.03

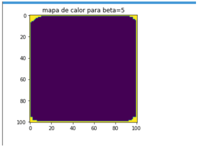
Figura

Borde variable en el tiempo



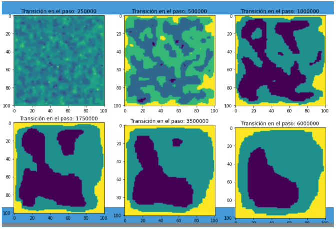
Figura

Borde variable en el tiempo



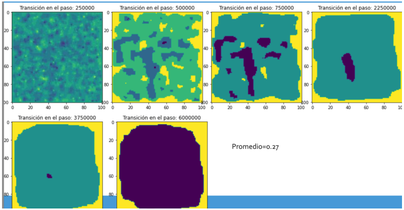
Figura

Borde variable en el tiempo



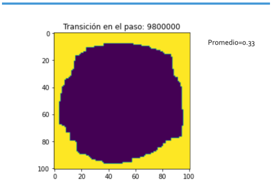
Figura

Borde variable en el tiempo



Figura

Borde variable en el tiempo



Figura

tabla de contenidos

Bibliografía consultada

- Hans-Otto Georgi, *Gibbs measure and phase transition*, seccion 6.3
- Friedi Velenik, *Statiscal mechanics of lattice systems. A concrete mathematical introduction*, capitulo 1 pags 34 - 46.
- Etienne Pardoux, *Markov processes and aplications, algorithms, networks genome and finance*, capitulo 3, sección 3.1