FECHA
17 DE AGOSTO
DEL 2016

Segunda clase de Cálculo Vectorial

Prof:Juan Cribillero Aching

Plano Cartesiano

17 / 08 / 16

Tenemos identificado el plano P con un conjunto de pares ordenados de números. Tal plano se denota por $\mathbb{R}^2$.

$$\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(x,y) : \ x, y \in \mathbb{R}\}$$

Dos pares ordenados (x,y), (a,b) son iguales si y solo si

$x = a$ e $y = b$.

Dado un par ordenado $\alpha \ \beta \ \mathbb{R}^2$ α es la primera componente y β es la segunda componente.

Definición: Sean (x,y) y (a,b) elementos de $\mathbb{R}^2$, definimos la **suma de** (x,y) **y** (a,b) como el par ordenado

$$(x, y) + (a,b) = (x+a, \ y+b).$$

Por otro lado, dado $t \in \mathbb{R}$; definimos la **multiplicación** de (x,y) por el escalar t como el par ordenado

$$t(x,y) = (tx, \ ty).$$

Las operaciones anteriormente definidas satisfacen las siguientes propiedades.

Proposición:

1. La suma es asociativa $(u+v)+w = u+(v+w)$, $\forall \, u, v, w \in \mathbb{R}^2$
2. La suma es conmutativa $u+v = v+u$, $\forall \, u, v \in \mathbb{R}^2$ (pares ordenados)
3. Existe el elemento $\theta \in \mathbb{R}^2$, tal que $\theta + v = v$; $\forall \, v \in \mathbb{R}^2$.
4. Para todo $v \in \mathbb{R}^2$, existe $w \in \mathbb{R}^2$ tal que $v + w = \theta$.
5. La suma y la multiplicación por un escalar son distributivas

i) $\alpha(u+v) = \alpha u + \alpha v$, $\forall \, u, v \in \mathbb{R}^2$, $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ ii) $(\alpha+\beta)u = \alpha u + \beta u$, $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ $\forall v \in \mathbb{R}^2$.

6. El producto de escalares y el producto por un escalar son asociativos.

$$\alpha(\beta v) = (\alpha\beta)v \ , \quad \forall v \in \mathbb{R}^2$$

7. $1 \in \mathbb{R}$ es el elemento neutro multiplicativo de la multiplicación por un escalar.

$$1 . v = v \ , \quad \forall v \in \mathbb{R}^2$$

Consejo del profesor: En la práctica se debe escribir que axioma se utiliza.

Prueba:

2) Sean $u = (u_1, u_2)$, $v = (v_1, v_2)$

$$u + v = (u_1 + v_1 ; u_2 + v_2)$$
$$= (v_1 + u_1 ; v_2 + u_2)$$
$$u + v = v + u.$$

3) Sea $\Theta = (0;0) \in \mathbb{R}^2$ (Claramente existe)

Veamos que cumpla tal condición.

Sea $v = (v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2$, luego $\Theta + v = (0 + v_1 , 0 + v_2)$
$= (v_1, v_2)$
$\Theta + v = v.$

4) Sea $v = (v_1 ; v_2) \in \mathbb{R}^2$

Veamos que existe $w \in \mathbb{R}^2$ tal que $v + w = \Theta$.

Definimos $w = (-v_1, -v_2) \in \mathbb{R}^2$

$$v + w = (v_1 + (-v_1) , v_2 + (-v_2))$$
$$= (0, 0)$$
$$v + w = \Theta$$

La proposición anterior implica que el conjunto $\mathbb{R}^2$ con las de adición y multiplicación por un escalar cumple los axiomas de un **espacio vectorial**.

Proposición: El elemento $\Theta \in \mathbb{R}^2$ (neutro) es único.

Prueba: Supongamos que no es único, así existe $\Theta' \in \mathbb{R}^2$ distinto de Θ tal que $\Theta' + v = v$; $\forall v \in \mathbb{R}^2$.

En particular para $v = (0,0) = \Theta$

$$\Theta' + \Theta = \Theta \quad \Rightarrow \quad \Theta' = \Theta \; (\rightarrow\leftarrow) \; \therefore$$ El elemento neutro es único.

Proposición: El elemento inverso aditivo $w \in \mathbb{R}^2$ de $v \in \mathbb{R}^2$ es único.

Prueba: Sea $v \in \mathbb{R}^2$ y el elemento inverso aditivo $w \in \mathbb{R}^2$.

Supongamos que no es único esto es existe w' $\mathbb{R}^2$ tal que $w' + v = \Theta$

Luego: $w' = w' + \Theta = w' + (v + w) = (w' + v) + w = \Theta + w = w$.

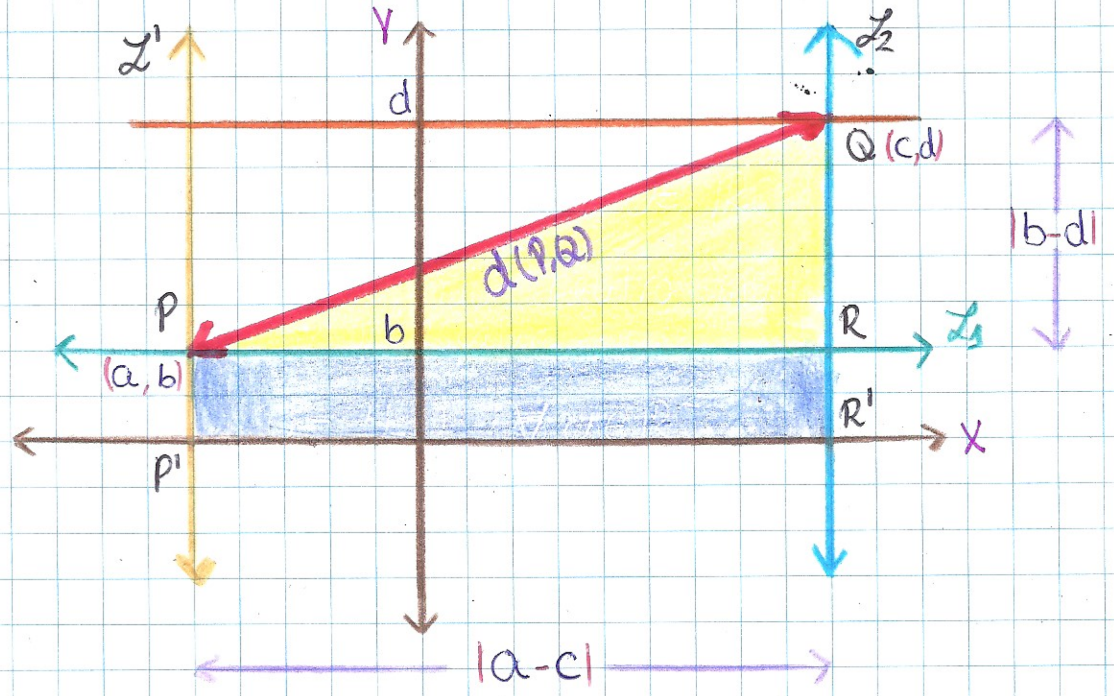
El elemento inverso aditivo $w \in \mathbb{R}^2$ de $v \in \mathbb{R}^2$ es único.

Proposición: Sean $P, Q \in \mathcal{P}$ con coordenadas (a, b) y (c, d) respectivamente, entonces

$$\boxed{d(P, Q) = \sqrt{(a-c)^2 + (b-d)^2}}$$

Prueba: Sea $\mathcal{L}_1$ la recta paralela al eje X que pasa por P y $\mathcal{L}_2$ la recta paralela al eje Y que pasa por Q y estas se intersecan en el punto R

Como $\overline{PR} \subset \mathcal{L}_1$, $\overline{RQ} \subset \mathcal{L}_2$, $\mathcal{L}_1$ y $\mathcal{L}_2$ son perpendiculares entonces $\triangle PRQ$ es un triángulo rectángulo.



Vemos que $d(P,R) = |a-c|$, en efecto, sea $\mathcal{L}'$ la recta paralela al eje Y que pasa por por P, entonces $PRR'P'$ es un rectángulo, luego

$$d(P,R) = d(P',R') = |a-c|$$

De manera análoga se demuestra que $d(Q,R) = |b-d|$

Finalmente por el teorema de Pitágoras de Samos

$$d(P,Q)^2 = |a-c|^2 + |b-d|^2$$

$$\therefore \quad d(P,Q) = \sqrt{(a-c)^2 + (b-d)^2} \quad \blacksquare$$