Universidad Nacional de Ingeniería

Facultad de Ciencias

Ciclo: 2015-2

[Cod: CM 141 Curso: Cálculo Vectorial I]

[Tema:Rectas en el plano cartesiano y el espacio tridimensional.]

Practica Dirigida N°3

1. Dado un triángulo de vértices $A(2,-2), B(-1,4)$ y $C(4,5)$. Determine
   a) El ortocentro de dicho triángulo.
   b) El área de dicho triángulo.
2. Determine las ecuaciones de las rectas que pasen por el punto $(2,-1)$ y que formen cada una un ángulo de 45° con la recta $2x-3y+7=0$.
3. Demuestre que el espacio $\mathbb{R}^2$, no un es una recta.
4. Pruebe que la ecuación general de la recta que pasa por $(x_1,y_1),(x_2,y_2) \in P$ puntos distintos puede ser determinada mediante

$$\det\begin{bmatrix} 1 & x & y \\ 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \end{bmatrix} = 0.$$

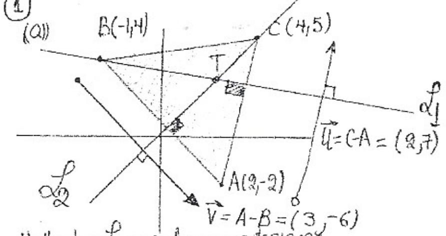
5. Represente vectorialmente la recta mediatriz de los puntos $(2,4)$ y $(4,-6)$.
6. Dadas las rectas $L_1 : x+2y-3=0$ y $L_2 : 2x-y+1=0$. Determine las ecuaciones de las rectas que pasen por el punto $P(1,1)$ y que forme ángulos iguales con las dos rectas.
7. Demuestre que las tres medianas de un triángulo son concurrentes, es decir, se cortan en un punto.
8. Encuentre las ecuaciones vectorial y paramétrica de la recta que pasa por $(2,3)$ y es perpendicular a la recta que pasa por los puntos $(1,1)$ y $(-6,4)$. Determine, de ser posible, su ecuación cartesiana.
9. Dadas las ecuaciones de dos lados de un rectángulo $L_1 : 2x-3y+5=0$ y $L_2 : 3x+2y-7=0$ y uno de los vértices $A(2,-3)$. Determine las ecuaciones de los otros dos lados de este rectángulo.
10. Determine el ángulo que forman las rectas $3x-y+5=0; 2x+y+3=0$ al cortarse.
11. Dada las rectas $L_1 : ax+by+c=0$ y $L_2 : ax+by+d=0$. Demuestre que la distancia entre dichas rectas esta dada por medio de la expresión siguiente $d(L_1,L_2)=\frac{|c-d|}{\sqrt{a^2+b^2}}$.
12. Determine utilizando proyecciones, la distancia del punto $(3,-1)$ a la recta $3x-4y+12=0$.
13. Determine las ecuaciones de las rectas que formen 45° con el eje X y están a una distancia de $\sqrt{2}$ unidades del punto $P(3,4)$.
14. Halle las ecuaciones de las bisectrices de los ángulos formados por las rectas $7x-y+7=0$ y $x-y+2=0$.
15. Condorito se encuentra en el punto $A(-7,1)$ y debe llegar al punto $B(-5,5)$ pasando por la orilla del río para sacar agua. Si la orilla del río se encuentra sobre la recta $L : 2x-y-5=0$. Halle el punto P en la orilla del río de modo que recorra la menor distancia posible.
16. Calcule el área del cuadrilátero convexo $ABCD$, sabiendo que $A(0,0), B(4,-2), C(6,8)$ y $D(0,4)$.
17. El punto $A(1,-1)$ es el centro de un cuadrado uno de cuyos lados esta en la recta $x-2y+12=0$. Determine las ecuaciones de las rectas donde están los otros tres lados. Determine igualmente los vértices del cuadrado.
18. Hallar las ecuaciones de los lados de un triángulo, si uno de sus vértices es el punto $B(-4,-5)$ y las ecuaciones de dos alturas del triángulo son $5x+3y-4=0$ y $3x+8y+13=0$.
19. Dada el punto $A(10,5)$ que pertenece a la recta $L : y=ax$. Determine un punto P sobre el eje X, de modo que el triángulo OAP con $O=(0,0)$, tenga área igual a $20u^2$.
20. Halle el área encerrada por las rectas $\{(1,1)+t(3,4), t\in\mathbb{R}\}, \{(2,0)+t(-3,2), t\in\mathbb{R}\}$ y $\{(-5,3)+t(0,-3), t\in\mathbb{R}\}$.
21. Dada dos rectas en el plano $L_1 : ax+by+c=0$ y $L_2 : dx+ey+f=0$. Demostrar que si α es la medida del ángulo agudo que forma las dos rectas, entonces se tiene que $cos(\alpha)=\frac{|ad+bc|}{\sqrt{a^2+b^2}\sqrt{d^2+e^2}}$
22. Determine la medida del ángulo que forman las rectas $3x+y-1=0$ y $-x+2y+5=0$.
23. Considere $\vec{a},\vec{b},\vec{c}\in\mathbb{R}^3$. Probar que $Pro_{(10\,\vec{b})}\vec{a}=\vec{b}$ si y solo si $\vec{b}\perp(\vec{b}-\vec{a})$.
24. Sean $u,v\in\mathbb{R}^3$ vectores no nulos. Demuestre que $u\times v=0$ si y solo si u y v son linealmente dependiente.
25. Considere $u=(2,3,5), v=(-4,7,8)$ y $w=(0,13,18)$. ¿Los vectores u,v,w son LI.
26. Considere $u(1,2,3), v(-2,5,6)$ dos vectores en $\mathbb{R}^3$. Complete con un vector w, de modo que sea $\{u,v,w\}$ una base para $\mathbb{R}^3$.
27. Sean los vectores $v=(-1,2,-3), w=(2,1,-1)$. Si $v=a+b$ donde a es paralela a w y b es ortogonal a w. Determine los vectores a y b.
28. Dado los vectores $\vec{a}=(1,-2,3)$ y $\vec{b}=(3,1,2)$, halle todos los vectores $\vec{c}\in\mathbb{R}^3$ de modo que
   a) $\|\vec{c}\|=\sqrt{84}$.
   b) $\vec{c}=\alpha\vec{a}+\beta\vec{b}, \vec{c}\perp\vec{b}$.
29. Demuestre que $\{(1,2,3),(-3,4,6)\}$ no genera al espacio $\mathbb{R}^3$.
30. Demuestre: Dos vectores no nulos $u=(a_1,a_2,a_3)$ y $v=(b_1,b_2,b_3)$ son paralelos si y solo si $a_1b_2-a_2b_1=a_2b_3-a_3b_2=0. = a_1b_3-b_1a_3$
31. Dados $u=(2,-1,2)$ y $v=(-2,2,1)$. Hallar $w\in\mathbb{R}^3$ con $\|w\|=3$ tal que $w.u=w.v=0$.
32. Considere $S=\{(1,2,3),(0,0,1)\}$. Determine $S^\perp$.
33. Sabiendo que $S=\{(1,1,-1)\}$. Calcule $S^\perp$.
34. Sean los vectores $(2-t,-2,3),(1,1-t,1)$ y $(1,3,-1-t)$. ¿Qué valores debe tomar $t\in\mathbb{R}$ para que los vectores dados sean L.I o L.D?

30 de setiembre del 2015[†]

[†]Hecho en LaTeX

Resoluciones

(1)



- Hallando $\mathcal{L}_1$ en su forma cartesiana:

$\mathcal{L}_1 : 2x+7y+C=0$

pero $(-1,4)\in\mathcal{L}_1 \Rightarrow -2+28+C=0 \Rightarrow \{C=-26\}$

$\Rightarrow \mathcal{L}_1 : 2x+7y-26=0$ (1)

- Hallando $\mathcal{L}_2$:

$\mathcal{L}_2 : 3x-6y+C=0$, pero $C\in\mathcal{L}_2 \Rightarrow -3-24+C=0$
$\Rightarrow \{C=27\}$

$\Rightarrow \mathcal{L}_2 : 3x-6y+27=0$

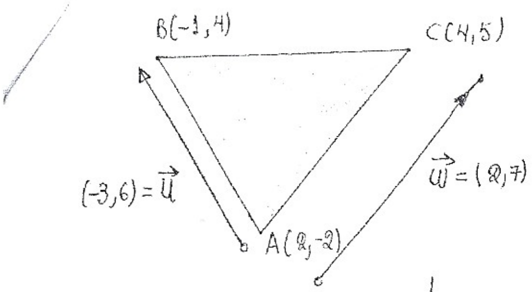
- Finalmente, basta encontrar $\mathcal{L}_1\cap\mathcal{L}_2=\{T\}$, T: es el ortocentro.

$2x+7y-26=0$
$3x-6y+27=0$

$\Rightarrow x=\frac{26-7y}{2}=\frac{6y-27}{3} \Rightarrow y=4 \wedge x=-1$

$\Rightarrow \{T=(-1;4)\}$

b))

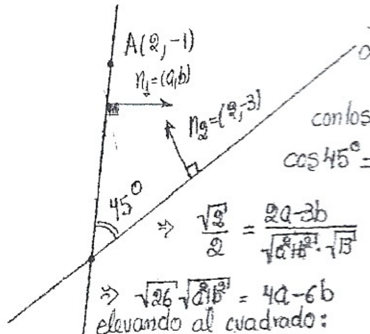


Sabemos: $\text{Área}_{\Delta} = \frac{1}{2}\left|\langle \vec{u}, \vec{w}^{\perp} \rangle\right|$

$$= \frac{1}{2}\left|\langle (-3,6),(-7,2)\rangle\right|$$

$$= \frac{1}{2}\left|21+12\right| = \frac{1}{2}\cdot 33 = 16{,}5\ u^2$$

(2)



$\mathcal{L}: 2x-3y+7=0$

con los vectores normales

$$\cos 45^\circ = \frac{\langle n_1, n_2\rangle}{\|n_1\|\,\|n_2\|}$$

$$\Rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{2a-3b}{\sqrt{a^2+b^2}\cdot\sqrt{13}}$$

$$\Rightarrow \sqrt{26}\sqrt{a^2+b^2} = 4a-6b$$

elevando al cuadrado:

$$26(a^2+b^2) = 16a^2+36b^2-48ab$$

$$\Rightarrow 10a^2+48ab-10b^2=0 \Rightarrow 5a^2+24ab-5b^2=0$$

$$\begin{matrix} 5a & -b \\ a & 5b \end{matrix}$$

$$\Rightarrow a=\frac{b}{5} \lor a=5b \Rightarrow b=5a \lor a=5b$$

caso 1: si $b=5a \Rightarrow n_1=(a,b)=(a,5a)\,/\!/\,(1,5)$

Hallando la recta: $\mathcal{L}_1: x+5y+C=0$, pero $A\in\mathcal{L}_1$

$$\Rightarrow 2-5+C=0 \Rightarrow C=3 \Rightarrow \mathcal{L}_1: x+5y+3=0$$

Caso 2: si $a=5b \Rightarrow n_1=(a,b)=(5b,b)\,/\!/\,(5,1)$

$\Rightarrow \mathcal{L}_1: 5x+y+C=0$ pero $A(2,-1)\in\mathcal{L}_1 \Rightarrow 10-1+C=0$

$$\Rightarrow C=-9$$

$$\Rightarrow \mathcal{L}_1: 5x+y-9=0$$

(3)

Supóngase que $\mathbb{R}^2$, si es una recta, luego existe $P_0\in\mathbb{R}^2$ y $\vec{u}\in\mathbb{R}^2$ no nulo, tal que:

$$\mathbb{R}^2 = \{p\in\mathbb{R}^2 : p = P_0 + t\vec{u},\ t\in\mathbb{R}\} \quad (1)$$

ahora sea $w = P_0 + \vec{u}^{\perp} \in \mathbb{R}^2$

luego de (1), $\exists t_0\in\mathbb{R}/$

$$w = P_0 + t_0\vec{u}$$

$$\Rightarrow P_0 + \vec{u}^{\perp} = t_0\vec{u} + P_0$$

$$\Rightarrow \vec{u}^{\perp} = t_0\vec{u}$$

note que $t_0 \neq 0$

calculemos

$$\langle \vec{u}^{\perp}, \vec{u}^{\perp}\rangle = \langle t_0\vec{u}, \vec{u}^{\perp}\rangle$$

$$= t_0\langle \vec{u}, \vec{u}^{\perp}\rangle = t_0\cdot 0 = 0$$

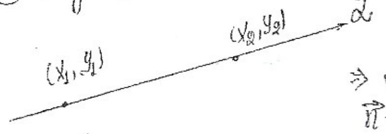
$$\Rightarrow \langle \vec{u}^{\perp}, \vec{u}^{\perp}\rangle = 0$$

$$\Rightarrow \vec{u}^{\perp} = 0 \Rightarrow (\vec{u}^{\perp})^{\perp} = 0^{\perp} \Rightarrow -\vec{u} = \vec{0}$$

$\Rightarrow \vec{u} = 0$ NO!.

Luego, $\mathbb{R}^2$ es imposible que sea una recta □

(4) Gráficas



Punto de paso: $P=(x_1,y_1)$

vector director: $\vec{v} = (x_2-x_1, y_2-y_1)$

$\Rightarrow$ vector normal: $\vec{n} = \vec{v}^{\perp} = (y_1-y_2, x_2-x_1)$

$$\Rightarrow \mathcal{L}: (y_1-y_2)x + (x_2-x_1)y + C = 0$$

pero $(x_1,y_1)\in\mathcal{L}$

$$\Rightarrow (y_1-y_2)x_1 + (x_2-x_1)y_1 + C = 0$$

$$\Rightarrow C = -x_1y_1 + x_1y_2 - y_1x_2 + x_1y_1$$

$$\Rightarrow \mathcal{L}: (y_1-y_2)x + (x_2-x_1)y + (-\cancel{x_1y_1} + x_1y_2 - y_1x_2 + \cancel{x_1y_1}) = 0 \quad (1)$$

Por otro lado:

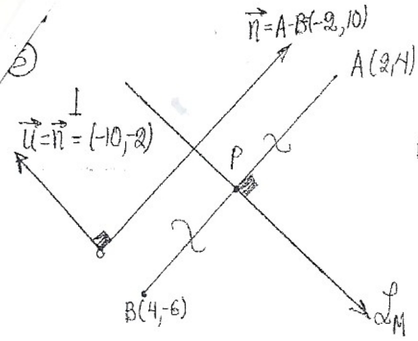
$$\det\begin{bmatrix} 1 & x & y \\ 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \end{bmatrix} = x_1y_2 + xy_1 + x_2y - (x_1y + x_2y_1 + xy_2) = 0$$

$$\Rightarrow (y_1-y_2)x + (x_2-x_1)y + (x_1y_2 - y_1x_2) = 0 \quad (2)$$

de (1) y (2)

Se obtiene que es lo mismo, la recta que el determinante □

(6)



$P = \frac{A+B}{2} = \frac{(6,-2)}{2} = (3,-1)$

Para la recta $\mathcal{L}_M$:

punto de Paso: $P(3,-1)$

vector director: $\vec{u} = \vec{n}^{\perp} = (-10,-2) \parallel (5,1)$

Luego:

Ecuación vectorial: $\mathcal{L}: p = (3,-1) + t(5,1),\ \forall t \in \mathbb{R}$.

Ecuación paramétrica: $\boxed{\begin{array}{l} x = 3+5t \\ y = -1+t \end{array}}$, con $t \in \mathbb{R}$ como parámetro.

Ecuación cartesiana:

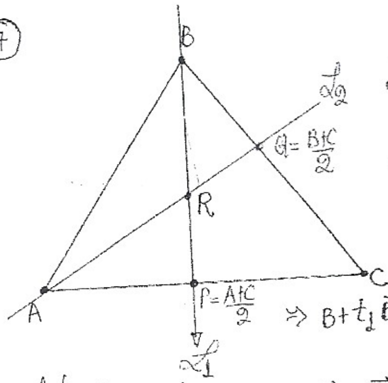
Su normal es: $\vec{n} = (-2,10) \parallel (1,-5)$

$\mathcal{L}: x - 5y + C = 0$

pero $P = (3,-1) \in \mathcal{L} \Rightarrow 3 + 5 + C = 0 \Rightarrow C = -8$

$\mathcal{L}: x - 5y - 8 = 0$ ∎

(7)



· Hallando $\mathcal{L}_1$:

$\mathcal{L}_1: p(x,y) = B + t\,\overrightarrow{BP}$

· Hallando $\mathcal{L}_2$:

$\mathcal{L}_2: (x,y) = A + t\,\overrightarrow{AQ}$

· Hallando R:

$R = B + t_1\overrightarrow{BP}$ (1)

$R = A + t_2\overrightarrow{AQ}$

$\Rightarrow B + t_1\overrightarrow{BP} = A + t_2\overrightarrow{AQ}$

calculemos:

$\langle B + t_1\overrightarrow{BP}, \overrightarrow{AQ}^{\perp} \rangle = \langle A + t_2\overrightarrow{AQ}, \overrightarrow{AQ}^{\perp} \rangle$

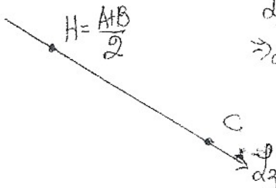
$\langle B, \overrightarrow{AQ}^{\perp} \rangle + t_1 \langle \overrightarrow{BP}, \overrightarrow{AQ}^{\perp} \rangle = \langle A, \overrightarrow{AQ}^{\perp} \rangle$

ojo: como $\overrightarrow{BP} \nparallel \overrightarrow{AQ} \Rightarrow \langle \overrightarrow{BP}, \overrightarrow{AQ}^{\perp} \rangle \neq 0$

$\Rightarrow t_1 = \frac{\langle A, \overrightarrow{AQ}^{\perp} \rangle - \langle B, \overrightarrow{AQ}^{\perp} \rangle}{\langle \overrightarrow{BP}, \overrightarrow{AQ}^{\perp} \rangle} = \frac{\langle A-B, \overrightarrow{AQ}^{\perp} \rangle}{\langle \overrightarrow{BP}, \overrightarrow{AQ}^{\perp} \rangle}$

$\overset{en (1)}{\Rightarrow} R = B + t_1\overrightarrow{BP}$

· Hallando la mediana que parte de "C" hacia H.

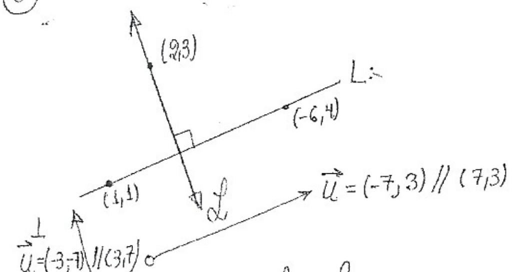


$\mathcal{L}_3: H + t\,\overrightarrow{HC}$

$\Rightarrow \mathcal{L}_3: (x,y) = H + t\,\overrightarrow{HC},\ t \in \mathbb{R}$

basta probar que $R \in \mathcal{L}_3$

(8)



· Hallando la ecuación vectorial de $\mathcal{L}$:

$(x,y) = (2,3) + t(3,7),\ t \in \mathbb{R}$.

· Hallando la ecuación paramétrica:

$x = 2+3t$

$y = 3+7t$ con $t \in \mathbb{R}$.

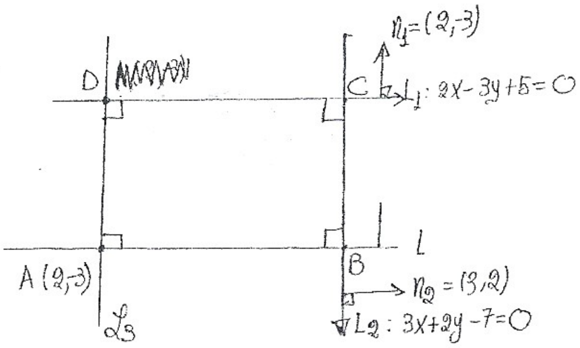
· Ecuación normal de $\mathcal{L}$:

$\langle (x-2, y-3), (7,-3) \rangle = 0$

$\Rightarrow 7(x-2) + (-3)(y-3) = 0$

$7x - 14 - 3y + 9 = 0 \Rightarrow 7x - 3y - 5 = 0$

(9)



· Hallando C:

$\left.\begin{array}{l} 2x - 3y + 5 = 0 \\ 3x + 2y - 7 = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow x = \frac{3y-5}{2} = \frac{7-2y}{3} \Rightarrow 9y - 15 = 14 - 4y$

$\Rightarrow 13y = 29$

$y = \frac{29}{13}$

$x = \frac{11}{13}$

$\Rightarrow C = \left(\frac{11}{13}, \frac{29}{13}\right)$

· Hallando $\mathcal{L}_3$: $(x,y) = (2,-3) + t\,\overbrace{(2,-3)}^{n_1} = (2t+2, -3t-3)$

· Ahora $\mathcal{L}_3 \cap \mathcal{L}_1$:

$\left.\begin{array}{l} 2x - 3y + 5 = 0 \\ (x,y) = (2t+2, -3t-3) \end{array}\right\}$ $2(2t+2) - 3(-3t-3) + 5 = 0$

$4t + 4 + 9t + 9 + 5 = 0$

$13t + 18 = 0$

$t = -\frac{18}{13}$

$\Rightarrow D = (2t+2, -3t-3)$

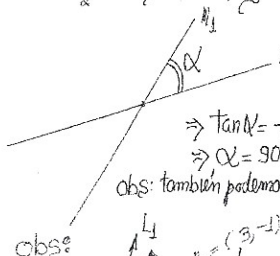
$D = \left(-\frac{36}{13} + 2, \frac{54}{13} - 3\right) = \left(-\frac{10}{13}, \frac{15}{13}\right) \Rightarrow D = \left(-\frac{10}{13}, \frac{15}{13}\right)$

· Lo mismo hallar B de: $B - C = A - D \Rightarrow B = C + A - D$.

10

$L_1: 3x-y+5=0 \Rightarrow y=3x+5 \Rightarrow m_1=3$

$L_2: 2x+y+3=0 \Rightarrow y=-2x-3 \Rightarrow m_2=-2$



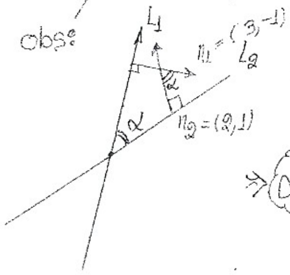
$$\tan\alpha=\frac{m_1-m_2}{1+m_1m_2}=\frac{3-(-2)}{1+(3)(-2)}=\frac{5}{1-6}=-1$$

$\Rightarrow \tan\alpha=-1$

$\Rightarrow \alpha=90°+45°=135°$.

obs: también podemos decir que es $45°$.

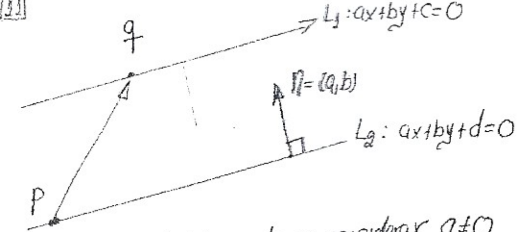
obs:



$$\cos\alpha=\frac{\langle n_1,n_2\rangle}{\|n_1\|\|n_2\|}=\frac{\langle(3,-1),(2,1)\rangle}{\sqrt{10}\cdot\sqrt{5}}=\frac{5}{\sqrt{50}}=\frac{\sqrt{25}}{\sqrt{50}}=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$\Rightarrow \alpha=45°$

11



como $a\neq0 \vee b\neq0$, podemos considerar $a\neq0$

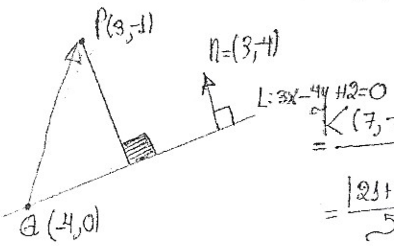
$\Rightarrow p=\left(-\frac{d}{a},0\right)$; $q=\left(-\frac{c}{a},0\right)$

Luego

$$d(L_1,L_2)=\|\text{Proy}_n \vec{pq}\|=\frac{|\langle\vec{pq},n\rangle|}{\|n\|}=\frac{\left|\left\langle\left(-\frac{c}{a}+\frac{d}{a},0\right),(a,b)\right\rangle\right|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

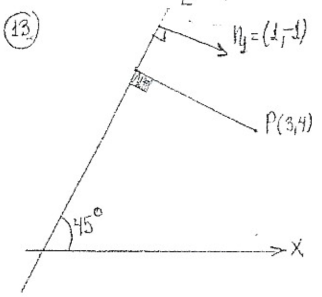
$$=\frac{|c-d|}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

12



$$d(P,L)=\|\text{Proy}_n \vec{QP}\|=\frac{|\langle\vec{QP},n\rangle|}{\|n\|}=\frac{|\langle(7,-1),(3,-4)\rangle|}{5}=\frac{|21+4|}{5}=\frac{25}{5}=5$$

13



caso1: si $m_L=\tan 45°=1$

$\Rightarrow$ La normal es $\vec{n}_1=(1,-1)$

nota que el vector director es: $v=(1,m)$

$\Rightarrow L: x-y+C=0$

por distancia

$$\sqrt{2}=\frac{|3-4+C|}{\sqrt{2}}$$

$\Rightarrow 2=|C-1|$

$\Rightarrow C-1=2 \vee C-1=-2$

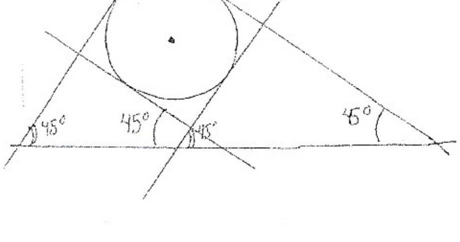
$\Rightarrow C=3 \vee C=-1$

si $C=3 \Rightarrow L: x-y+3=0$ ✓

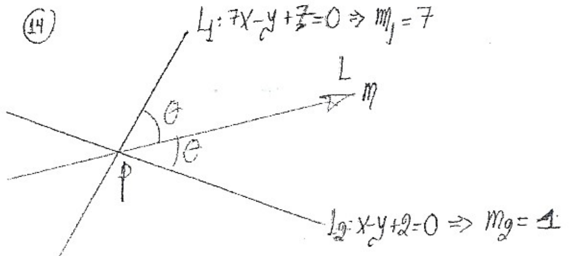
si $C=-1 \Rightarrow L: x-y-1=0$ ✓

caso2: si $m_L=-1$ (ver!)

ojo



14



$$\tan\theta=\frac{m_1-m}{1+m_1m}=\frac{m-m_2}{1+m\,m_2}$$

$$\Rightarrow \frac{7-m}{1+7m}=\frac{m-1}{1+m} \Rightarrow 7+7m-m-m^2=m+7m^2-1-7m$$

$\Rightarrow -m^2+6m+7=7m^2-6m-1$

$0=8m^2-12m-8$

$\Rightarrow 2m^2-3m-2=0$

$$\Rightarrow m=\frac{3\pm\sqrt{9+16}}{4}=\frac{3\pm5}{4}$$

$\Rightarrow m=2 \vee m=-\frac{1}{2}$

- Hallando $L_1\cap L_2$: $\left.\begin{array}{l}7x-y+7=0\\ x-y+2=0\end{array}\right\}$ $6x+5=0 \Rightarrow x=-\frac{5}{6}$

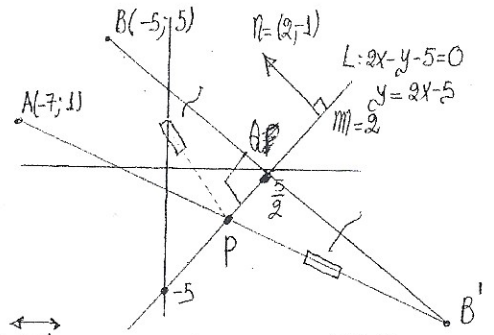
$\Rightarrow -\frac{35}{6}+7=y \Rightarrow y=\frac{7}{6}$

$\Rightarrow P=\left(-\frac{5}{6},\frac{7}{6}\right)$

Si $m=2 \Rightarrow L: \dfrac{y-\frac{7}{6}}{x+\frac{5}{6}}=2 \Rightarrow y-\frac{7}{6}=2x+\frac{10}{6} \Rightarrow 6y-7=12x+10 \Rightarrow 12x-6y+17=0$

Si $m=-\frac{1}{2} \Rightarrow L: \dfrac{y-\frac{7}{6}}{x+\frac{5}{6}}=-\frac{1}{2} \Rightarrow 2y-\frac{14}{6}=-x-\frac{5}{6} \Rightarrow 12y-14=-6x-5 \Rightarrow 6x+12y-9=0$

(15)



• $\overleftrightarrow{BB'}$: $(x,y) = B + t\,n = (-5;5) + t(2;-1)$

$\left.\begin{array}{l} x = -5+2t \\ y = 5-t \end{array}\right\}$

• Hallando $L \cap \overleftrightarrow{BB'}$:

como $L: 2x-y-5=0 \Rightarrow 2(-5+2t)-(5-t)-5=0$

$-10+4t-5+t-5=0 \Rightarrow 5t-20=0 \Rightarrow \boxed{t=4}$

$\Rightarrow Q = (-5,5)+4(2,-1) = (3;1)$

• Hallando B': $Q = \dfrac{B+B'}{2} \Rightarrow B' = 2Q - B = 2(3,1)-(-5,5)$

$= (6,2)+(5,-5) = (11,-3)$

$\Rightarrow B' = (11;-3)$

• Hallando la recta: $\overleftrightarrow{AB'}$: $\dfrac{y-1}{x-(-7)} = \dfrac{-3-(1)}{11-(-7)} \Rightarrow \dfrac{y-1}{x+7} = \dfrac{-4}{18} = -\dfrac{2}{9}$

$\Rightarrow 9y-9 = -2x-14$

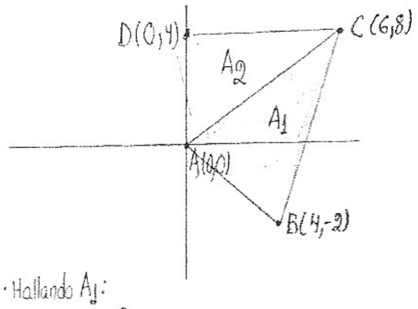
$\Rightarrow 2x+9y+5=0$

- Hallando P: $L \cap \overleftrightarrow{AB'} = \{P\}$: $\left.\begin{array}{l} 2x-y-5=0 \\ 2x+9y+5=0 \end{array}\right\}$ $10y+10=0$ $\boxed{y=-1}$

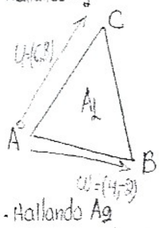
$\Rightarrow \boxed{x=2}$

$\Rightarrow P(2;-1)$

(16)

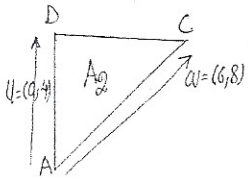


• Hallando A_1:



$A_1 = \dfrac{|\langle u, w^{\perp}\rangle|}{2} = \dfrac{|\langle (6,8),(2,4)\rangle|}{2} = \dfrac{12+32}{2} = \dfrac{44}{2} = 22$

• Hallando A_2



$A_2 = \dfrac{|\langle u, w^{\perp}\rangle|}{2} = \dfrac{|\langle (0,4),(-8,6)\rangle|}{2} = \dfrac{|24|}{2} = 12$

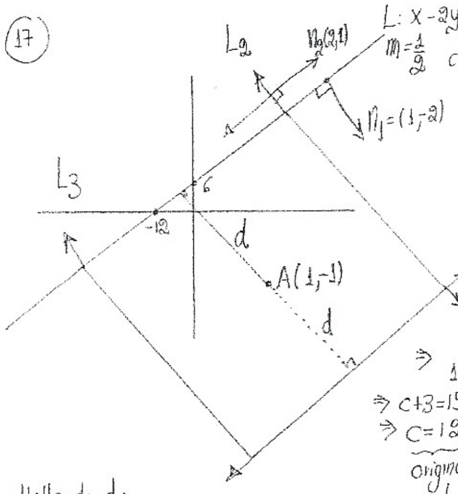
Rta: $A_1 + A_2 = 34$

otra forma:

0	0	0	
0	4	-2	0
-12	6	8	32
0	0	4	24
0	0	0	0
B=-12		A=56	

$\text{Área} = \dfrac{|A-B|}{2} = \dfrac{68}{2} = 34$

(17)



$L_1: x-2y+C=0$

pero: $d(A,L_1) = \dfrac{|1-2(-1)+C|}{\sqrt{5}}$, $3\sqrt{5}$

$\Rightarrow 15 = |C+3|$

$\Rightarrow C+3=15 \;\vee\; C+3=-15$

$\Rightarrow C=12 \;\vee\; C=-18$

origina L   origina L_1

$\Rightarrow L_1: x-2y-18=0$

• Hallando d:

$d = d(A,L) = \dfrac{|1-2(-1)+12|}{\sqrt{5}} = \dfrac{15}{\sqrt{5}} = 3\sqrt{5}$

• Hallando L_2:

como tiene normal $n_2 = (2,1) \Rightarrow L_2: 2x+y+C=0$

ahora $d(A,L_2) = 3\sqrt{5} \Rightarrow \dfrac{|2-1+C|}{\sqrt{5}} = 3\sqrt{5}$

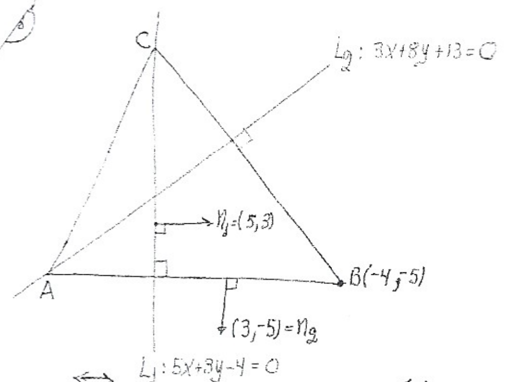
$\Rightarrow |C+1| = 15$

$\Rightarrow C = 14 \;\vee\; C=-16$

$\Rightarrow L_2: 2x+y+14=0$ (para C=14)

$L_3: 2x+y-16=0$ (para C=16).

18)



· Hallando $\overleftrightarrow{AB}$: $3x-5y+C=0$, pero $B\in\overleftrightarrow{AB} \Rightarrow -12+25+C=0$

$\Rightarrow C=-13$

$\Rightarrow \boxed{\overleftrightarrow{AB}: 3x-5y-13=0}$

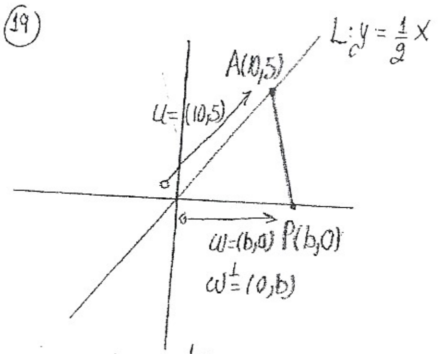
· Hallando A: $\overleftrightarrow{AB}\cap L_2=\{A\}$

$\left.\begin{matrix}3x+8y+13=0\\3x-5y-13=0\end{matrix}\right\}$ $13y+26=0 \Rightarrow \begin{cases}y=-2\\x=1\end{cases} \Rightarrow \boxed{A=(1;-2)}$.

· igual se hallar $\overleftrightarrow{CB}$ y el punto C

· Luego con A y C se conoce $\overleftrightarrow{AC}$.

19)



$\Rightarrow A=\dfrac{|\langle u,\omega^{\perp}\rangle|}{2} \Rightarrow 20=\dfrac{|5b|}{2} \Rightarrow 8=|b| \Rightarrow b=\pm 8$

$\Rightarrow P(8,0) \vee P(-8,0)$

20)

$\mathcal{L}_1: (x,y)=(1,1)+t(3,4)=(3t+1, 4t+1)$

$\mathcal{L}_2: (x,y)=(2,0)+t(-3,2)=(-3t+2, 2t)$

$\mathcal{L}_3: (x,y)=(-5, -3t+3)$

· Hallando $\mathcal{L}_1\cap\mathcal{L}_2=\{A\}$:

$(x,y)=(3t+1, 4t+1)=(-3b+2, 2b)$

$\Rightarrow 3t+1=-3b+2$ (1)

$4t+1=2b$ (2)

de (2): $b=\dfrac{4t+1}{2}$ (3)

(3) en (1): $3t+1=-3\left(\dfrac{4t+1}{2}\right)+2$

$\Rightarrow 2(3t+1)=-3(4t+1)+4 \Rightarrow 6t+2=-12t-3+4 \Rightarrow 6t+2=-12t+1$

$\Rightarrow 18t=-1 \Rightarrow t=-\frac{1}{18}$

$\Rightarrow A=\left(3\left(-\frac{1}{18}\right)+1, 4\left(-\frac{1}{18}\right)+1\right)=\left(\frac{15}{18}, \frac{14}{18}\right)$.

· Hallando $\mathcal{L}_1\cap\mathcal{L}_3=\{B\}$:

$\Rightarrow (x,y)=(3t+1, 4t+1)=(-5, -3t_1+3)$

$\left.\begin{matrix}3t+1=-5\\4t+1=-3t_1+3\end{matrix}\right\} \Rightarrow t=-2 \Rightarrow \boxed{B=(-5;-7)}$

· Hallando $\mathcal{L}_2\cap\mathcal{L}_3=\{C\}$:

$C=(x,y)=(-3t+2, 2t)=(-5, -3t_2+3)$

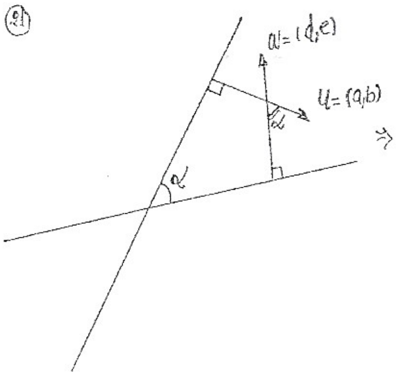
$\Rightarrow -3t+2=-5$

$\Rightarrow 7=3t \Rightarrow t=\frac{7}{3}$

$\Rightarrow C=\left(-3\left(\frac{7}{3}\right)+2, 2\left(\frac{7}{3}\right)\right)=\left(-5; \frac{14}{3}\right)$.

· Finalmente, hallamos el área del $\triangle ABC$.

21)

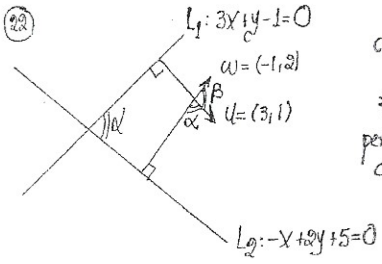


por teoría.

$\cos\alpha=\dfrac{|\langle u,\omega\rangle|}{\|u\|\,\|\omega\|}$

$\Rightarrow \cos\alpha=\dfrac{|ad+be|}{\sqrt{a^2+b^2}\cdot\sqrt{d^2+e^2}}$, ~~[illegible]~~

22)



$\cos\alpha=\dfrac{\langle u,\omega\rangle}{\|u\|\,\|\omega\|}=\dfrac{-3+2}{\sqrt{5}\,\sqrt{10}}=-\dfrac{1}{\sqrt{50}}$

$\Rightarrow \alpha$ es obtuso

pero $(\pi-\beta)$

$\cos\beta=-\cos\alpha=-\left(-\frac{1}{\sqrt{50}}\right)=\dfrac{\sqrt{50}}{50}$

Rtas α o β es el ángulo pedido.

(24) ($\Rightarrow$)

Por dato $Proy_{(10\vec{b})}\vec{a} = \vec{b} \Rightarrow \frac{\langle \vec{a}, 10\vec{b}\rangle}{\|10\vec{b}\|^2} 10.\vec{b} = \vec{b}$

$\Rightarrow \frac{\langle \vec{a},\vec{b}\rangle}{\|\vec{b}\|^2}\vec{b} = \vec{b}$, como $\vec{b}\neq 0$

$\Rightarrow \frac{\langle \vec{a},\vec{b}\rangle}{\|\vec{b}\|^2} = 1 \Rightarrow \langle\vec{a},\vec{b}\rangle = \|\vec{b}\|^2$ (1)

calculamos

$\langle \vec{b}, \vec{b}-\vec{a}\rangle = \langle\vec{b},\vec{b}\rangle - \langle\vec{b},\vec{a}\rangle$

$\underset{(1)}{=} \|\vec{b}\|^2 - \|\vec{b}\|^2 = 0$

($\Leftarrow$) Por dato $\vec{b}\perp(\vec{b}-\vec{a})$

$\Rightarrow \langle\vec{b},\vec{b}-\vec{a}\rangle = 0$

$\Rightarrow \|\vec{b}\|^2 = \langle a,b\rangle$ (1)

calculamos

$Proy_{(10\vec{b})}\vec{a} = Proy_{\vec{b}}\vec{a} = \frac{\langle\vec{a},\vec{b}\rangle}{\|\vec{b}\|^2}\vec{b} \underset{(1)}{=} \vec{b}$.

(24) ($\Rightarrow$)

P.D $\{u,v\}$ son L.D

demos:

Sabemos $\|u\times v\| = \|u\|\,\|v\|\,|sen\,\alpha|$

$\Rightarrow 0 = \|u\|\,\|v\|\,sen\,\alpha$, como $\|u\|\neq 0$, $\|v\|\neq 0$

$\Rightarrow sen\,\alpha = 0$

$\Rightarrow \alpha = 0°$ ó $\alpha = 180°$

$\Rightarrow u \parallel v$

$\Rightarrow \{u,v\}$ son L.D.

($\Leftarrow$) como u y v son L.D

$\Rightarrow \exists \lambda,\beta\in\mathbb{R}$, no todos nulos / $\lambda u + \beta v = 0$

sea $\lambda\neq 0$

$\Rightarrow u = \left(-\frac{\beta}{\lambda}\right)v$

calculemos

$u\times v = \left(-\frac{\beta}{\lambda}v\right)\times v = \left(-\frac{\beta}{\lambda}\right)\underbrace{(v\times v)}_{0} = 0$.

(25) calculamos:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 5 \\ -4 & 7 & 8 \\ 0 & 13 & 18 \end{vmatrix} = 14\times 18 - 20\times 13 + 0 - [0 + 26\times 8 - 12\times 18] = 0$$

$\Rightarrow \{u, v, y\ w\}$ es L.D.

(26)

$u = (1,2,3)$

$v = (-2,5,6)$

tomamos

$w = u\times v = \left(\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 6\end{vmatrix}; -\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 6\end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 5\end{vmatrix}\right)$

$= (-3,-12,9) \parallel (1,4,-3)$

tomaré $w_1 = (1,4,-3)$

• Afir: $u, v\ y\ w_1$ es L.I

calculamos

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 5 & 6 \\ 1 & 4 & -3 \end{vmatrix} = -15 - 24 + 12 - [15 + 24 + 12] = -27 - [51] = -78 \neq 0$$

$\Rightarrow u, v\ y\ w_1$ son L.I.

Ahora como la $dim(\mathbb{R}^3) = 3$

$\Rightarrow u, v\ y\ w_1$ es tambien un generador para $\mathbb{R}^3$, otra forma es probar el generado por definición.

(27) $v = (-1,2,-3)$

$w = (2,1,-1)$

$\Rightarrow v = a + b$, $a = \lambda w = \lambda(2,1,-1)$, $b\perp w$

$\Rightarrow v = \lambda w + b$

$\Rightarrow v\cdot w = \lambda(w\cdot w) + \underbrace{b\cdot w}_{0}$

$\Rightarrow (-2+2+3) = \lambda(4+1+1) \Rightarrow 3 = 6\lambda \Rightarrow \boxed{\lambda = \frac{1}{2}}$

$\Rightarrow a = \frac{1}{2}(2,1,-1) = \left(1,\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right)$.

pero $v = a + b$

$\Rightarrow b = v - a$

$= (-1,2,-3) - \left(1,\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right) = \left(-2,\frac{3}{2},-\frac{5}{2}\right)$

$\Rightarrow a = \left(1,\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right)$

$b = \left(-2,\frac{3}{2},-\frac{5}{2}\right)$

8) $\vec{c} = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$

- $\sqrt{x^2+y^2+z^2} = \sqrt{84} \Rightarrow x^2+y^2+z^2 = 84$ (1)
- $\vec{c} \perp \vec{b}$

$\Rightarrow 3x + y + 2z = 0$ (2)

- $\vec{c} = \alpha \vec{a} + \beta \vec{b}$, $\vec{c} = (x, y, z)$

$\Rightarrow (x, y, z) = (\alpha + 3\beta, -2\alpha + \beta, 3\alpha + 2\beta)$ (3)

$x = \alpha + 3\beta$
$y = -2\alpha + \beta$ (4)
$z = 3\alpha + 2\beta$.

de (4) y (2):

$3(\alpha + 3\beta) + (-2\alpha + \beta) + 2(3\alpha + 2\beta) = 0$

$7\alpha + 14\beta = 0$

$\boxed{\alpha = -2\beta}$

$\Rightarrow$ de (4) $\left.\begin{aligned} x &= \beta \\ y &= 5\beta \\ z &= -4\beta \end{aligned}\right\}$

en (1): $\beta^2 + 25\beta^2 + 16\beta^2 = 84 \Rightarrow 42\beta^2 = 84 \Rightarrow \beta^2 = 2$

$\Rightarrow \beta = \pm 2$

caso 1: si $\beta = 2 \Rightarrow \vec{c} = (2, 10, -8)$

caso 2: si $\beta = -2 \Rightarrow \vec{c} = (-2, -10, 8)$ ✗

(30) Supóngase lo contrario, es decir, $Span\{u, v\} = \mathbb{R}^3$

$u = (1, 2, 3)$
$v = (-3, 4, 6)$

tomemos $w = u \times v = (0, -15, 10) \parallel (0, -3, 2)$

consid $w_1 = (0, -3, 2) \in \mathbb{R}^3$

$\Rightarrow w_1 = \lambda u + \beta v \Rightarrow$ calculemos

$w_1 \times w_1 = (\lambda u + \beta v) \times w_1$
$= \lambda (u \times w_1) + \beta (v \times w_1)$
$= \lambda 0 + \beta 0$
$= 0$

$\Rightarrow w_1 = 0$ No!

(31) ($\Rightarrow$) Por hipótesis $u = \lambda v \vee v = \beta u$, pero como u y v son vectores no nulos, sin pérdida de generalidad $u = \lambda v$

$\Rightarrow (a_1, a_2, a_3) = \lambda (b_1, b_2, b_3) \Rightarrow a_1 = \lambda b_1$, $a_2 = \lambda b_2$ y $a_3 = \lambda b_3$

calculemos:
$a_1 b_2 - a_2 \cdot b_1 = (\lambda b_1) b_2 - (\lambda b_2) b_1 = 0$

calculemos
$a_1 b_3 - b_1 a_3 = 0$

calculemos
$a_2 b_3 - a_3 b_2 = (\lambda b_2) b_3 - (\lambda b_3) b_2 = 0$

($\Leftarrow$)
calculemos
$u \times v = (a_1, a_2, a_3) \times (b_1, b_2, b_3)$
$= (\underbrace{a_2 b_3 - b_2 a_3}_{0}, \underbrace{-a_1 b_3 + b_1 a_3}_{0}, \underbrace{a_1 b_2 - b_1 a_2}_{0})$

$\Rightarrow u \times v = 0$
$\Rightarrow$ por propiedad $u \parallel v$.

(32) $w = (x, y, z)$

- $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ (0)
- $w \cdot u = 0 \Rightarrow 2x - y + 2z = 0$ (1)
- $w \cdot v = 0 \Rightarrow -2x + 2y + z = 0$ (2)

(1) + (2): $y + 3z = 0$
$y = -3z$

en (1): $2x + 3z + 2z = 0 \Rightarrow x = -\frac{5}{2} z$

en (0)
$\left(-\frac{5}{2} z\right)^2 + (-3z)^2 + z^2 = 9$

$\frac{25}{4} z^2 + 9z^2 + z^2 = 9$

$\Rightarrow 25z^2 + 36z^2 + 4z^2 = 9 \Rightarrow 65 z^2 = 9 \Rightarrow z = \pm \frac{3\sqrt{65}}{65}$

caso 1: $z = \frac{3\sqrt{65}}{65} \Rightarrow x = -\frac{5}{2} \cdot \frac{3\sqrt{65}}{65} = -\frac{3\sqrt{65}}{26}$, $y = -\frac{9\sqrt{65}}{65}$

$\Rightarrow w = \left(-\frac{3\sqrt{65}}{26}, -\frac{9\sqrt{65}}{65}, \frac{3\sqrt{65}}{65}\right)$.

caso 2: si $z = -\frac{3\sqrt{65}}{65}$ ✓

(33) $u = (1, 2, 3)$
$v = (0, 0, 1)$

$\Rightarrow w = u \times v = (2, -1, 0)$

considere $L = \{\lambda w : \lambda \in \mathbb{R}\}$

Afirmamos: $S^\perp = L$

en efecto:

($\subset$) Sea $z \in S^\perp \Rightarrow z \perp u \wedge z \perp v$
$\Rightarrow z \cdot u = 0 \wedge z \cdot v = 0$

calculemos:
$z \times (u \times v) = \underbrace{(z \cdot v)}_{0} u - \underbrace{(z \cdot u)}_{0} v = 0$

$\Rightarrow$ por propiedad $z \parallel u \times v \Rightarrow z \parallel w \Rightarrow w \neq 0$

$\Rightarrow z = \lambda w$, para algún $\lambda \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow z \in L$.

($\supset$) Sea $z \in L$

$\Rightarrow z = \lambda w$, para algún $\lambda \in \mathbb{R}$

cálculo 1:
$z \cdot u = (\lambda w) \cdot u = \lambda ((u \times v) \cdot u) = \lambda 0 = 0 \Rightarrow z \perp u$

cálculo 2:
$z \cdot v = 0 \Rightarrow z \perp v$

$\Rightarrow z \in S^\perp$ □

(34) Sea $u=(1,1,-1)$

Sea $P=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x+y-z=0\}$

afirmamos: $S^{\perp}=P$

$(\subset)$

Sea $w=(a,b,c)\in S^{\perp} \Rightarrow w\perp(1,1,-1) \Rightarrow (a,b,c)\perp(1,1,-1)$

$\Rightarrow a+b-c=0$

cumple con $(a,b,c)\in P$

$\Rightarrow w\in P$

$(\supset)$

Sea $w=(a,b,c)\in P \Rightarrow a+b-c=0$

calculo:

$w\cdot u=(a,b,c)\cdot(1,1,-1)= a+b-c=0$

$\Rightarrow w\perp(1,1,-1)$

$\Rightarrow w\in S^{\perp}$ □

(35)

caso 1: Queremos saber los valores de $t\in\mathbb{R}$, para que sean L.D

$\Rightarrow [u,v,w]=0$ con $u=(2-t,-2,3)$
$v=(1,1-t,1)$
$w=(1,3,-1-t)$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} 2-t & -2 & 3 \\ 1 & 1-t & 1 \\ 1 & 3 & -1-t \end{vmatrix}=0$$

$\Rightarrow \underbrace{(2-t)(1-t)(-1-t)}+9-2-[\underbrace{3(1-t)+3(2-t)-2(-1-t)}]=0$

$-t^3+2t^2+t-2+7-11+4t=0$

$t^3-2t^2-5t+6=0 \Rightarrow (t-1)(t-3)(t+2)=0$

$\Rightarrow t=1 \vee t=3 \vee t=-2.$

$\therefore$ u,v y w son LD $\Leftrightarrow [t=1 \vee t=3 \vee t=-2]$

u,v y w son LI $\Leftrightarrow [t\neq1 \wedge t\neq3 \wedge t\neq-2]$.