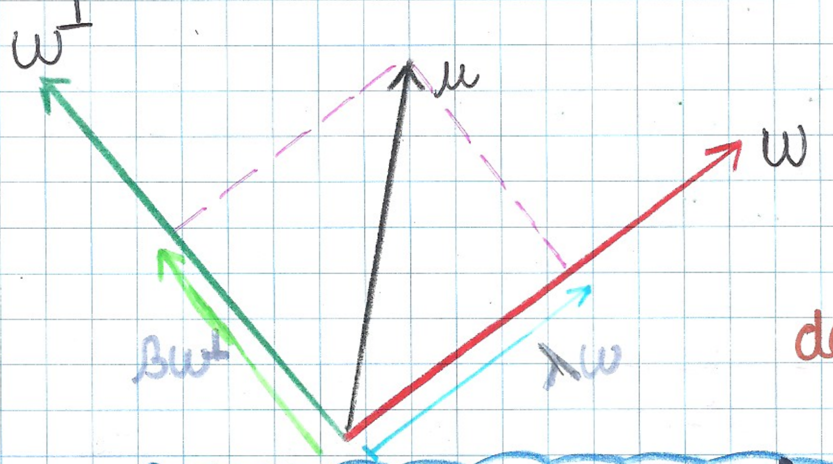
FECHA
25 DE AGOSTO DEL 2016

Cuarta clase de Cálculo Vectorial

Prof: Gonzalo Marca Castromonte

Proyecciones

25/08/16



Componentes de un vector

$$\boxed{u = \lambda w + \beta w^\perp}$$

1° Existencia
2° Unicidad

(26) Sea $w \in \mathbb{R}^2$ no nulo.

Demostración:

Para cada $u \in \mathbb{R}^2$ existen y forma única escalares $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ / $u = \alpha w + \beta w^\perp$

demostración:

Existencia:

Pero $\|w\| = \|w^\perp\|$

Consideremos

$$\alpha := \frac{\langle u, w \rangle}{\|w\|^2}$$

Caracterizar a u y
Caracterizar a w.

También

$$\beta := \frac{\langle u, w^\perp \rangle}{\|w^\perp\|^2}$$

Todas las notaciones son únicas.

Veamos, si estos valores son los adecuados

$u = (x, y)$

$w = (a, b) \Rightarrow w^\perp = (-b, a)$

Ojo: * $(v^{\perp})^{\perp} = -v$

* $\|v^{\perp}\| = \|v\|$

* $(u+v)^{\perp} = u^{\perp} + v^{\perp}$ Negar la suposición última

* $(\lambda u)^{\perp} = \lambda u^{\perp}$

Calculemos:

$$\alpha = \frac{ax+by}{a^2+b^2}$$

Reflexionar y meditar.

$$\beta = \frac{-bx+ay}{a^2+b^2}$$

Calcular:

$$\alpha w + \beta w^{\perp} = (x,y) = u$$

Unicidad:

Si $u = \alpha w + \beta w^{\perp}$ y

$u = \gamma w + \varphi w^{\perp}$

Por demostrar:

$$\alpha = \gamma \wedge \beta = \varphi$$

* $\alpha w + \beta w^{\perp} = \gamma w + \varphi w^{\perp}$

$$(\alpha - \gamma) w = (\varphi - \beta) w^{\perp} \quad \ldots (0)$$

Supongamos que $\alpha - \gamma \neq 0$

$$w = \frac{(\varphi - \beta) w^{\perp}}{\underbrace{(\alpha - \gamma)}_{k}} \quad \ldots (1)$$

Calcular

$$\underbrace{\langle w, w \rangle}_{} = \langle k w^{\perp}, w \rangle = k \underbrace{\langle w^{\perp}, w \rangle}_{} = 0$$

Por P.I.2.

$w = 0$ $(\rightarrow\leftarrow)$

Luego, tenemos que negar lo supuesto, es decir,

Componente es el escalar.

$$\alpha = \gamma \quad \ldots (1)$$

reemplazando en (0):

$$(\varphi - \beta) w^{\perp} = 0$$

$\Rightarrow$ Por problema 20.

$$\varphi - \beta = 0 \quad \vee \quad \underbrace{w^{\perp} = 0}$$

$$(w^{\perp})^{\perp} = (0)^{\perp}$$

$$-w = 0$$

$$\Rightarrow \varphi - \beta = 0 \qquad w = 0 \rightarrow\leftarrow$$

$$\varphi = \beta$$

Son paralelos y tiene el mismo sentido

$\uparrow\uparrow$

Observación: Gracias a la unicidad de α y $\beta \in \mathbb{R}$ podemos denotarlo de manera especial

$$\alpha w - \text{Proy}_w u$$

es decir:

$$\text{Proy}_w u = \frac{\langle u, w \rangle}{\|w\|^2} w$$

donde $w \neq 0$.

note que $\text{Proy}_w u$ es un vector.

¿Cómo ganar creditos extra?
ayudante de práctica
Censos nacionales
Ayudantía en expociencia
Guía $1/2$ crédito

Componente de un vector sobre otro

Escalares $\left\{ \text{Comp}_w u = \dfrac{\langle u, w \rangle}{\|w\|} \in \mathbb{R} \right.$

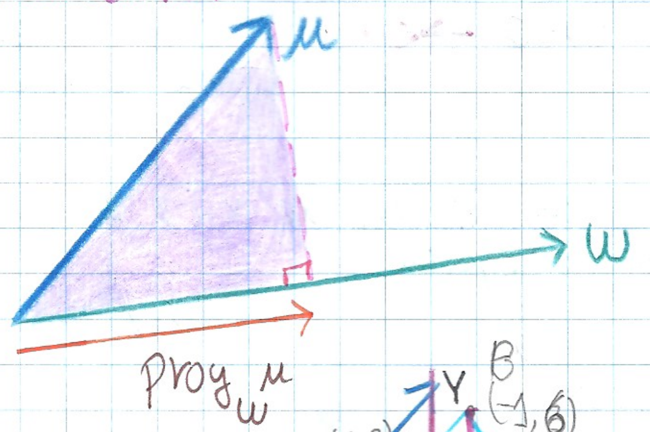
Observación:

1. $\text{Proy}_w u = \underbrace{(\text{Comp}_w u)}_{\in \mathbb{R}} \dfrac{w}{\|w\|}$

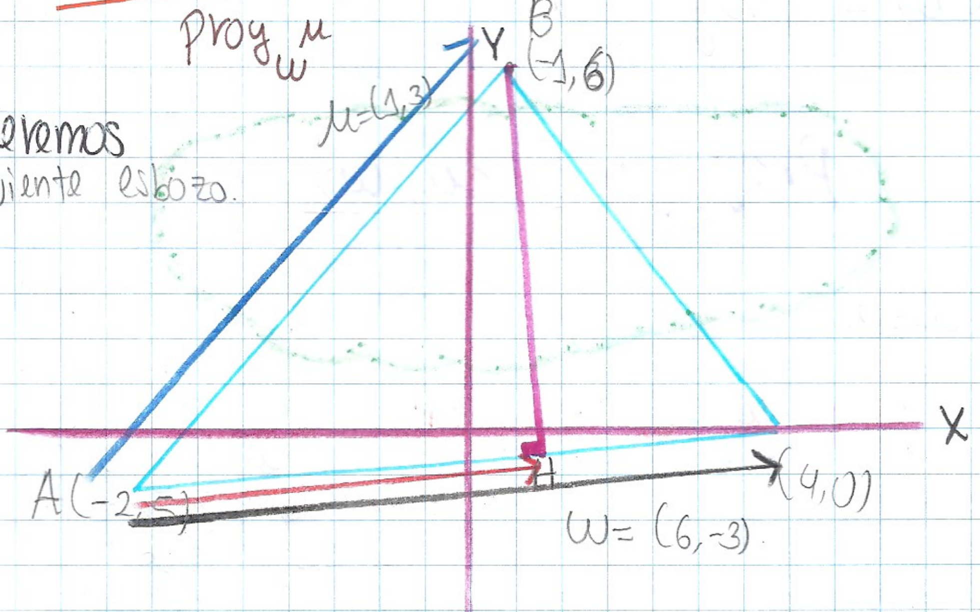
- Si $\text{Comp}_w u > 0 \Rightarrow \text{Proy}_w u \uparrow\uparrow w$

- Si $\text{Comp}_w u < 0 \Rightarrow \text{Proy}_w u \uparrow\downarrow w$

Gráficamente:



Consideremos el siguiente esbozo.



Prueba analítica y gráfica.

$\vec{AH} = \operatorname{proy}_w u = \frac{\langle u, w \rangle}{\|w\|^2} . w = \frac{-3}{45}(6;-3)$

$= \frac{1}{15}(-6;3) = \left(\frac{-6}{15}; \frac{3}{15}\right)$

Desde un punto "salen" los vectores, se vuelven concurrentes.

$\Rightarrow H = A + \vec{AH} = A + \operatorname{proy}_w u.$

Propiedades fundamentales

Meditar, introducirte en el problema.

Si $w \neq 0$.

(1) $\operatorname{Proy}_w (\lambda u) = \lambda \operatorname{proy}_w u$

(2) $\operatorname{Proy}_{\lambda w} (u) = \operatorname{proy}_w u$, $\lambda \neq 0$

(3) $\operatorname{Proy}_w (u+v) = \operatorname{proy}_w u + \operatorname{proy}_w v$

(4) $\operatorname{Comp}_w (u+v) = \operatorname{comp}_w u + \operatorname{comp}_w v$

escalar

(5) $\operatorname{Comp}_w (\lambda u) = \lambda \operatorname{comp}_w u$

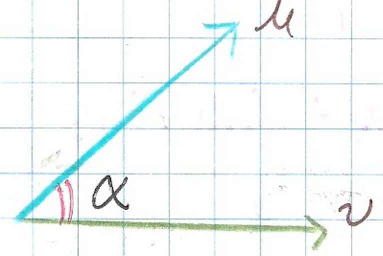
(6) Sean $u = (1, \alpha)$, $v = (1, 1)$

Si la medida del ángulo formado por u y v es $45°$.

Halle α

Veamos:

Sabemos



Caracterizar otro producto interno.

$\langle u, v \rangle = \cos\alpha . \|u\| \|v\|$

$$\Rightarrow \alpha + 1 = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{\alpha^2+1}$$

$$\Rightarrow \alpha + 1 = \sqrt{\alpha^2+1}$$

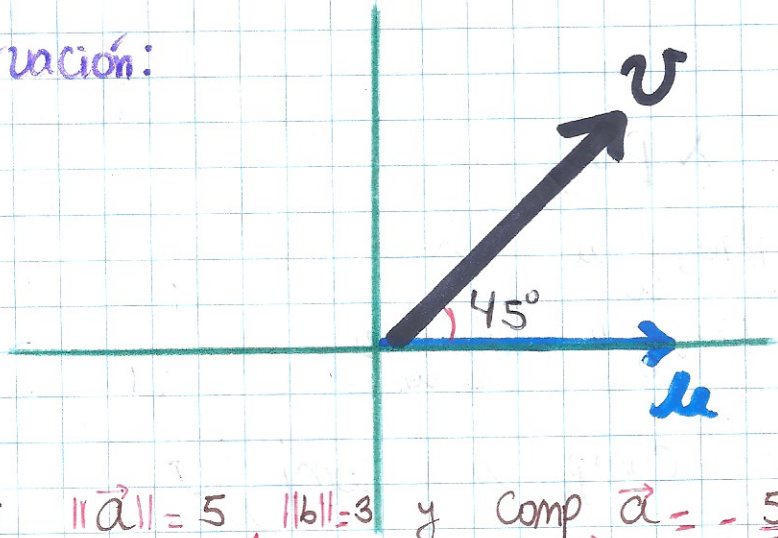
$$\Rightarrow \quad \alpha + 1 \geq 0$$

$$(\alpha+1)^2 = \alpha^2 + 1$$

$$2\alpha = 0$$

$$\alpha = 0$$

Observación:



(7) Si $\|\vec{a}\| = 5$, $\|b\| = 3$ y $\text{Comp}_{\vec{b}} \vec{a} = -\frac{5}{2}$.

Halle $\|\vec{a} - \vec{b}\|$.

(8) Por demostrar

Si $\langle \rangle_1$ y $\langle \rangle_2$ son dos productos internos en V.

Entonces

$\langle \ \rangle_1 + \langle \ \rangle_2$ es también un producto interno.

demostración:

$$[u, v] : \langle u, v\rangle_1 + \langle u, v\rangle_2$$

P.I. 1. Sea $u \in V$ arbitrario

$$\Rightarrow \langle u, u\rangle_1 \geq 0$$

Iris colors

$\langle u, u\rangle_2 \geq 0$

Sumando:

$[u, u] \geq 0$ ✓

Sumando se obtiene

Por definición $[u, u] \geq 0$.

P.I. 2

$(\Rightarrow)$ **Hipótesis:** $[u, u] = 0$

Tesis: $u = 0$

$\Rightarrow \langle u, u\rangle_1 + \langle u, u\rangle_2 = 0 \quad (1)$

Se concluye necesariamente que $[u, u] > 0$

Suponer $\langle u, u\rangle_1 \neq 0$

$\Rightarrow \langle u, u\rangle_1 > 0 \quad (2)$

(1) en (2)

$0 > \langle u, u\rangle_2 \quad (\rightarrow\leftarrow)$

no puede ser negativa.

necesidad $\rightarrow$

suficiencia $\leftarrow$

$\Rightarrow$ negando lo supuesto

$\langle u, u\rangle_1 = 0$

$\Rightarrow u = 0.$

$(\Leftarrow)$: Hipótesis: $u = 0$

Primero, lo natural.

Tesis: $[u, u] = 0$.

P.I. 3. Por demostrar:

$[\lambda u, v] = \lambda[u, v]$

$\langle u, v\rangle \leq \|u\|\|v\|$

$[\lambda u, v] = \langle \lambda u, v\rangle_1 + \langle \lambda u, v\rangle_2$

Buscar estrategia, inténtalo

$= \lambda(\langle u, v\rangle_1 + \langle u, v\rangle_2)$

$= \lambda[u, v].$

P.I.4 y P.I.5 Se deja al estudiante.

(9) Sean a y b dos vectores en $\mathbb{R}^2$ no nulos.

Si

$$\mathrm{Proy}_a(\mathrm{Proy}_b a) = \mathrm{Proy}_b(\mathrm{Proy}_a b)$$

Por demostrar:

$$a /\!/ b^{\perp} \vee a = b$$

demostrar con la hipótesis:

$$\frac{\left\langle \frac{\langle a,b\rangle b}{\|b\|^2}, a \right\rangle}{\|a\|^2} a = \frac{\left\langle \frac{\langle b,a\rangle a}{\|a\|^2}, b \right\rangle}{\|b\|^2} b$$

$$\left(\frac{\langle a,b\rangle\langle b,a\rangle}{\cancel{\|b\|^2}\,\cancel{\|a\|^2}}\right) a = \left(\frac{\langle b,a\rangle\langle a,b\rangle}{\cancel{\|a\|^2}\,\cancel{\|b\|^2}}\right) b$$

$$\langle a,b\rangle^2 (a-b) = 0$$

$\Rightarrow \langle a,b\rangle^2 = 0 \vee a-b=0 \Rightarrow \langle a,b\rangle = 0 \vee a=b$

$\Rightarrow a \perp b \vee a=b$. **Observación:** $a /\!/ b \Leftrightarrow \langle a, b^{\perp}\rangle = 0$

10) Sea $a \in \mathbb{R}^2$ no nulo, $b \in \mathbb{R}^2$. Por demostrar: $\mathrm{Comp}_a(a^{\perp}+b) \leq \|b\|$

demostración: $\mathrm{Comp}_a(a^{\perp}+b) = \frac{\langle a^{\perp}+b, a\rangle}{\|a\|} = \frac{\langle a^{\perp}, a\rangle}{\|a\|} + \frac{\langle b, a\rangle}{\|a\|} = 0 + \frac{\langle a, b\rangle}{\|a\|}$

Por el teorema $|\langle a,b\rangle| \leq \|a\|\,\|b\|$ de Cauchy-Schwarz

$\leq \frac{|\langle a,b\rangle|}{\|a\|} \leq \frac{\|a\|\|b\|}{\|a\|} = \|b\|$

$|\langle a,b\rangle| \leq \|a\|\|b\|$

Tarea:

Si $\mathrm{proy}_v u = (1;2)$ y $\mathrm{proy}_u v = (-1;1)$. Hallar u y v en $\mathbb{R}^2$.