FECHA
1 DE SEPTIEMBRE DEL 2016

Quinta clase de Cálculo Vectorial

Prof: Gonzalo Marca Castromonte

01 / 09 / 16

Texto: En un espacio vectorial real $\mathbb{R}^2$, todo vector u $\mathbb{R}^2$ no nulo es linealmente independiente, pero no es un generador, pero si consideramos $v \not\parallel u$, luego $\{u, v\}$ es linealmente independiente y un generador de $\mathbb{R}^2$, con lo cual es una base, se concluye que la dimensión en $\mathbb{R}^2$ es 2.

Combinación lineal

definición: Sea V un espacio vectorial en K, $w, u, v \in V$.

w es una combinación de u y v $\Leftrightarrow$ existe $\lambda, \beta \in K$ /

$$w = \lambda u + \beta v$$

(27) Sea $u \in \mathbb{R}^2$ no nulo. Si $u \parallel u^\perp \Rightarrow u = 0$.

demostración:

Por dato: $u \parallel u^\perp$

$\Rightarrow \exists\, \gamma \in \mathbb{R} \,/\, u = \gamma u^\perp$

Calcular:

$$* \langle u, u\rangle = \langle u, \gamma u^\perp \rangle$$

$$= \gamma \langle \underbrace{u, u^\perp}_{0} \rangle$$

Si no se trata del producto interno canónico $\not\Rightarrow \langle\, ,\rangle = 0$.

Clave

$$= \gamma \cdot 0$$

$$= 0$$

Medítalo, piénsalo.

$\Rightarrow \langle u, u \rangle = 0$

$\Rightarrow u = 0.$

Primerio se estudia
Cuerpo
Relación de orden
Propiedad arquimediana
Completez

(28) Considere

$$u=(1,2) \quad y \quad v=(2,4)$$

Por demostrar:

$w=(1,1)$ no es combinación lineal de u y v.

demostración. Supóngase que sí lo es, luego

$$\exists\ \lambda,\beta\in \mathbb{K}$$

$$/\ w=\lambda u+\beta v$$

$$(1,1)=\lambda(1,2)+\beta(2,4)$$

Calculemos

$$\langle (1;1);(-2;1)\rangle = \langle \lambda(1;2)+\beta(2;4),(-2;1)\rangle$$

$$-1=0$$

$$0=1 \quad \times \text{(Teorema)}$$

Finalmente, negamos lo supuesto, es decir, no es combinación lineal.

(29) Por demostrar $(2,1)$ no es combinación lineal de $(1,2)$.

Espacio Generador

definición: Sea V un espacio vectorial y $v\in V$ arbitrario

$$\text{Span}\{v\}=\{\lambda v:\ \lambda\in K\}$$

espacio generador de $\{v\}$

(30) Por demostrar $\text{Span}\{v\}$ es un subespacio vectorial de V.

Span $\{v\} \subset V$ (obvio)

demostración: Span $\{v\} \supset V$ (no directo)

* Span $\{v\} \neq \emptyset$: basta considerar $0 = 0v \in$ Span$\{v\}$

Span$\{v\} \subset V$: por definición de producto por un escalar.

ii) Sea $w_1, w_2 \in$ Span$\{v\}$

$\Rightarrow w_1 = \lambda v$

$w_2 = \beta v$

$\Rightarrow w_1 + w_2 = (\lambda + \beta) v$

$\Rightarrow w_1 + w_2 \in$ Span$\{v\}$

"Es como que no sean paralelos (linealmente independiente), pero para más de dos vectores"

iii) Sea $\gamma \in K$, $w \in$ Span$\{v\}$

Por demostrar: $\gamma w \in$ Span$\{v\}$

$w = \lambda v$

$\Rightarrow \gamma w = \gamma(\lambda v)$

$= (\gamma \lambda) v$

$\Rightarrow \gamma w \in$ Span$\{v\}$

Negación de linealmente independiente:

Al menos uno de ellos ambos (todos) no pueden ser ceros.

Observación: Si $v = (1; 2) \in \mathbb{R}^2$

$\Rightarrow$ Span$\{v\}$ es una recta en $\mathbb{R}^2$ que pasa por el origen $(0,0)$.

definición Sea V un espacio vectorial $u, v \in V$

Span $\{u, v\} = \{\lambda u + \beta v : \lambda, \beta \in K\}$

(31) Demostrar Span$\{u, v\}$ es un subespacio de V

Sugerencia: ver el problema 30.

Linealidad en un espacio vectorial

definición: Sea V un espacio vectorial en $\mathbb{K}$ $u, v \in V$.

u y v son linealmente independientes (l.i.)

$$\Leftrightarrow \left[\text{Si } \lambda u + \beta v = 0 \Rightarrow \lambda = 0 \wedge \beta = 0 \right]$$

(32) Demostrar que $\forall u \in \mathbb{R}^2$ no nulo u y $u^{\perp}$ son vectores linealmente independientes. $(\square)$

$\mathbb{R}$ $\mathbb{R}^2$

demostración: Sea $\langle \lambda u + \beta u^{\perp} = 0 \rangle$ Calculemos $\langle 0, u \rangle = 0$

¡Paso clave!

$\langle \lambda u + \beta u^{\perp}, u \rangle = 0$ reemplazando 0 por $\lambda u + \beta u^{\perp}$

$\lambda \langle u, u \rangle = 0$ porque $\langle \lambda u, u \rangle + \langle \beta u^{\perp}, u \rangle = \lambda \langle u, u \rangle + \beta \langle u, u^{\perp} \rangle$
$= \lambda \langle u, u \rangle + 0$
$= \lambda \langle u, u \rangle$.

$\Rightarrow \lambda = 0 \vee \underbrace{\langle u, u \rangle = 0}_{u = 0}$ ✗ Por axioma 2, pero u es no nulo!

$\Rightarrow \lambda = 0$, reemplazando en $(\square)$ $0 \cdot u + \beta u^{\perp} = 0 \Rightarrow \beta u^{\perp} = 0$

Si $\beta u^{\perp} = 0 \Rightarrow \beta = 0 \vee u^{\perp} = 0$

Se concluye que $\beta = 0$. $(u^{\perp})^{\perp} = 0^{\perp} \Rightarrow -u = 0 \Rightarrow u = 0$ ✗

O sea $\alpha = \beta = 0$. ¡u no es nulo!

(33) Por demostrar que $u = (1,2)$ y $v = (2,4)$ no son linealmente independientes.

demostración: Negando la definición de linealmente independiente:

> u y v no son linealmente independiente sí y solo sí
>
> $\exists \lambda \neq 0 \vee \beta \neq 0 \,/\, \lambda u + \beta v = 0$.

Basta considerar $\lambda = 2$, $\beta = -1$ Calcule $\lambda u + \beta v = (0,0)$.

Pregunta de Oromion: ¿Cuándo la envolvtura lineal coincide con el span?

(34) Sea V un espacio vectorial, $u \in V$.

Por demostrar $\{u, 0\}$ no es linealmente independiente.

definición:

basta considerar $0.u + 1.0 = 0$ $\square$

$0, 1 \in \mathbb{R}$

Notación: $\{u, v\}$ es linealmente dependiente (l.d.)

$\Leftrightarrow$ $\{u, v\}$ no es linealmente independiente (l.i.)

Generador de un espacio vectorial

definición: Sea V un espacio vectorial y $u, v \in V$.

$\{u, v\}$ genera al espacio V $\underset{\text{sí y solo sí}}{\Leftrightarrow}$ $V = \text{Span}\{u, v\}$

necesidad y suficiencia

Observación:

$\{u, v\}$ genera a V $\Leftrightarrow$ para cada $w \in V$,

$\exists\, \lambda, \beta \in \mathbb{K}$ / $w = \lambda u + \beta v$.

(35) Por demostrar. Sea $u = (1, 2)$,

$v = (2, 1)$ $\Rightarrow$ $\{u, v\}$ genera a $\mathbb{R}^2$.

demostración:

base de un espacio vectorial

dimensión de V es 2.

me piden $\mathbb{R}^2 = \text{Span}\{u, v\}$ $\mathbb{R}^2$ es el espacio generado de u y v.

equivalentemente

Sea $w = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ arbitrario.

Estrategia: Uso del producto interno para resolver ecuaciones.

buscando:
(Significa en borrador)

$$w = \lambda u + \beta v$$

$$\langle w, v^{\perp} \rangle = \langle \lambda u + \beta v, v^{\perp} \rangle$$

$$\begin{aligned} \langle w, v^{\perp} \rangle &= \langle \lambda u, v^{\perp} \rangle + \langle \beta v, v^{\perp} \rangle \\ &= \langle \lambda u, v^{\perp} \rangle + \beta \langle v, v^{\perp} \rangle \\ &= \lambda \langle u, v^{\perp} \rangle + \beta \cdot 0 \\ &= \lambda \underbrace{\langle u, v^{\perp} \rangle}_{} \quad (1) \end{aligned}$$

$\Rightarrow \lambda = \dfrac{\langle w, v^{\perp} \rangle}{\langle u, v^{\perp} \rangle}$ también $\beta = \dfrac{\langle w, u^{\perp} \rangle}{\langle v, u^{\perp} \rangle}$ qué es fantomasgórico

$\Rightarrow \lambda = \dfrac{\langle (x;y), (-1;2) \rangle}{\langle (1;2), (-1;2) \rangle}$ y $\beta = \dfrac{\langle (x;y), (-2;1) \rangle}{\langle (2;1), (-2;1) \rangle}$

$\lambda = \dfrac{-x + 2y}{-1 + 4}$ y $\beta = \dfrac{-2x + y}{-4 + 1}$

$\lambda = \dfrac{2y - x}{3}$ y $\beta = \dfrac{y - 2x}{-3} = \dfrac{2x - y}{3}$

Nota: Así no se demuestra, es informal, no se sabe qué es λ ni nada, es un paso intermedio para encontrar la solución.

Ahora formalizando calculemos: $\lambda u + \beta v$

$\lambda u+\beta v = \frac{2y-x}{3}(1,2) + \frac{2x-y}{3}(2,1) = (x,y) = w$

Base de un espacio vectorial

Puede ser para $1, 2, \ldots, n$ vectores.

definición: Sea V un espacio vectorial, $u, v \in V$.

$\{u, v\}$ es una base para V, siempre y cuando cumpla las dos condiciones siguientes:

i) u y v son linealmente independientes

ii) $\{u, v\}$ generan a V.

((36) Sea $u=(1,2)$ y $v=(2,1)$. Por demostrar: $\{u,v\}$ es una base para $\mathbb{R}^2$.

demostración: (i) Si $\lambda u+\beta v=0$

$$\lambda(1,2)+\beta(2,1)=(0,0)$$

$$\left.\begin{array}{l} \lambda+2\beta=0 \\ 2\lambda+\beta=0 \end{array}\right\} \lambda=0=\beta.$$

ii) Se ha demostrado en el problema 35. ¡qué astuto!

(37) Por demostrar $\{(1,2)\}$ no es una base para $\mathbb{R}^2$.

Dimensión de un Espacio Vectorial (finita)

(Dimensión de Hamel)

definición: Sea V un espacio vectorial (de tipo finito), $n \in \mathbb{N}$

$\dim(V)=n \Leftrightarrow \exists\ B=\{v_1,\ldots,v_n\}$ base para V.

OjO: $\dim(\mathbb{R}^2) = 2$.

Tarea

i) Ver en youtube el primer capítulo de Fantasmagórico creado por el escritor Ichiro Suzuki.

ii) Sean $u, v \in \mathbb{R}^2$ no nulos y $u \not\parallel v$.

Probar que existe y es único el vector $w \in \mathbb{R}^2$ tal que $\langle u, w \rangle = \langle v, w \rangle = 0$.