Universidad Nacional de Ingeniería

Facultad de Ciencias - Escuela Profesional de Matemática **Ciclo 2016-2**

Práctica Dirigida N^{0}01 de Cálculo Vectorial I - CM141 **agosto 24 del 2016**

[Temas: Espacio vectorial bidimensional, gráficas, paralelismo, longitud, producto escalar y norma.]

1. **Pruebe que el elemento nulo en un espacio vectorial es único y para cada vector existe un único elemento aditivo.** opuesto

2. **Sea V un espacio vectorial donde u, v, $w \in V$, $\alpha \in \mathbb{R}$. Pruebe:**

   ✓ *a)* $w + u = w + v \Rightarrow u = v.$

   escalar

   ✓ *b)* $0 \cdot v = \theta.$

   c) $\alpha \cdot \theta = \theta.$

   d) $(-1) \cdot v = -v.$

   e) $u + (-v) = u - v.$

3. **Con la operaciones ~~de~~ usuales en $\mathbb{R}^2$, diga cual de los siguientes conjuntos es un espacio vectorial, justifique su respuesta.**

   a) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x = 0 \vee y = 0\}.$

   b) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / xy = 0\}.$

   c) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / ax + by = 0\}$ con $a, b \in \mathbb{R}$.

   d) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x = y^2\}.$

   e) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x + y = 2\}.$

   f) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / 2x - 5y = 0\}.$

   g) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x \geq y\}.$

   h) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / |x| = |y|\}.$

   i) $\{(t, e^t) / t \in \mathbb{R}\}.$

   j) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / y = mx\}$ con $m \in \mathbb{R}$.

4. **Sea $W = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x - y \in \mathbb{Z}\}$ con las operaciones triviales. ¿W es un $\mathbb{R}$-espacio vectorial?.**

5. **Sobre $\mathbb{R}^2$ se define :**

$$(x, y) \oplus (x', y') = (x + \cancel{y'}\,x', y + y')$$

$$\lambda \odot (x, y) = \left(\frac{\lambda}{2}x, \frac{\lambda}{2}y\right)$$

¿Es $\mathbb{R}^2$ un espacio vectorial con estas operaciones?

6. **Sobre $\mathbb{R}^2$ se define :**

$$(x_1, y_1) \oplus (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, 2y_1 + 2y_2)$$

$$\lambda \odot (x, y) = (\lambda x_{\cancel{1}}, \lambda y_{\cancel{1}}), \lambda \in \mathbb{R}$$

¿Es $\mathbb{R}^2$ un espacio vectorial con estas operaciones?

7. **Considero $V = \mathbb{R}^2$ se define :**

$$(a, b) + (c, d) = \left(\frac{a + c}{2}, \frac{b + d}{2}\right)$$

$$\lambda \cdot (a, b) = (\lambda a, \lambda b), \lambda \in \mathbb{R}$$

¿ $(V, +, \cdot)$ un $\mathbb{R}$-espacio vectorial ?.

8. **Sea $V = \{(x, 0) / x \in \mathbb{R}^+\}$ con las operaciones**

$$(x, 0) + (y, 0) = (xy, 0)$$

$$\alpha(x, 0) = (x^\alpha, 0)$$

Demostrar que V es un $\mathbb{R}$-espacio vectorial.

puntos colineales.

9. **Sean $A = (a_1, a_2)$, $B = (b_1, b_2)$ y $C = (c_1, c_2)$. Si la $d(A, B) = m$ y $d(B, C) = n$, halle B en función de A, C, m y n.**

10. **Demostrar que si los vectores $\overrightarrow{a}$ y $\overrightarrow{b}$ no tiene la misma dirección, la igualdad vectorial $x\overrightarrow{a} + y\overrightarrow{b} = \overrightarrow{0}$ implica que $x = y = 0$.**

11. Demostrar que si $\overrightarrow{a}$ y $\overrightarrow{b}$ son dos vectores cuyas direcciones se cortan, la igualdad vectorial $x_1\overrightarrow{a} + y_1\overrightarrow{b} = x_2\overrightarrow{a} + y_2\overrightarrow{b}$ implica que $x_1 = x_2$ e $y_1 = y_2$.

12. Demostrar que las diagonales de un paralelogramo se cortan en su punto medio.

13. Demostrar que el polígono que resulta al unir los puntos medios de los lados de un cuadrilátero, es un paralelogramo.

14. Sea ABC un triángulo y P, Q y R los puntos medios de sus lados. Si M es un punto interior del triángulo. Probar que

$$\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{NP} + \overrightarrow{MQ} + \overrightarrow{MR}$$

15. Dado $u = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, halle $v \in \mathbb{R}^2$ tal que $||u|| = ||u+v|| = ||v||$.

16. Dado $u \in \mathbb{R}^2$ tal que $||u|| = 1$, halle $v \in \mathbb{R}^2$ tal que $||u - v|| = ||v|| = 1$.

17. Sea V un espacio vectorial sobre el cuerpo K. Demuestre que si $\lambda v = 0$, entonces $\lambda = 0$ ó $v = 0$.

18. Sea $V = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 4x - y = 0\}$. Pruebe que V es un subespacio vectorial sobre $\mathbb{R}$, de $\mathbb{R}^2$.

19. Sea U, W dos subespacios de V. Demostrar que $U \cap W$ es también un subespacio de V.

20. ¿La unión de dos subespacios de V, es también un subespacio de V.

21. Sean S y T subespacios de V. Demostrar que $S \cup T$ es un subespacio si y solo si $S \subset T$ o $T \subset S$.

22. Considere $V = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = 2x\}$. Pruebe que V es un subespacio vectorial real, de $\mathbb{R}^2$.

23. Considere $V = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = 3x - 6\}$. Pruebe que V no es un espacio vectorial real, de $\mathbb{R}^2$.

24. Demostrar que $v \nparallel w$, con $v = (6, 2)$ y $w = (3, 4)$.

25. Sean $u, v \in \mathbb{R}^2$ dos vectores unitarios y paralelos. Demuestre que $\| u^{\perp} + v \| = \sqrt{2}$.

26. Demostrar que el segmento que une los puntos medios de dos lados de un triángulo, es paralelo y la mitad de la longitud del tercer lado.

27. Sobre $\mathbb{R}^2$ se define la operación se define

$$\langle u, v\rangle = u_1v_1 + u_2v_2 - 2u_1v_2$$

donde $u = (u_1, u_2)$, $v = (v_1, v_2)$.
¿Define esta un producto interno?

28. Probar que si $\forall v \in V, < w, v >= 0$, entonces $w = 0$.

29. Sean $u, v \in \mathbb{R}^2$ dos vectores no nulos. sabiendo que $u \nparallel v$. Demostrar que $au + bv = 0 \Leftrightarrow a = b = 0$.

30. Sean $u, v \in \mathbb{R}^2$ dos vectores. Demostrar que $\| u^{\perp} + v \| = \| u - v^{\perp} \|$.

31. Si $\overrightarrow{u}$ y $\overrightarrow{v} \in \mathbb{R}^2$ tiene la misma longitud, entonces probar que $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}$ y $\overrightarrow{u} - \overrightarrow{v}$ son ortogonales.

32. Sean $u, v \in \mathbb{R}^2$ dos vectores. Demostrar que $u^{\perp} + v = u + v^{\perp}$, entonces $u = v$.

33. Sea $<,>$ un producto interno en un espacio vectorial V. Demostrar que $\forall v \in V, < 0, v >= 0$.

34. Sean M, N y R los puntos medios de los lados de un triángulo ABC y P un punto exterior de ella. Demostrar que

$$\overrightarrow{PM} + \overrightarrow{PN} + \overrightarrow{PR} = \overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC}$$

35. Demuestre que si $u, v \in \mathbb{R}^2$ son dos vectores no nulos y de igual longitud, entonces $u + v$ biseca al ángulo entre los vectores u y v.

36. Sean $\vec{a} \in \mathbb{R}^2$ no nulo y $\vec{b} \in \mathbb{R}^2$. Pruebe que el vector

$$\vec{v} = \vec{b} - \frac{\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle}{\| \vec{a} \|^2} \vec{a}$$

es perpendicular al vector $\vec{a}$.

37. Considere los puntos $A(1, 2), C(-4, 3)$. Encontrar un punto $B \in \mathbb{R}^2$ de modo que el triángulo ABC sea rectángulo, recto en B. (determine la curva generada por los B)

38. Sean $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^2$. Demostrar que $\vec{u} \parallel \vec{v}$ si y solo si $\langle \vec{u}, \vec{v}^{\perp} \rangle = 0$

39. En un espacio con producto interno demostrar que $\| u + v \|^2 + \| u - v \|^2 = 2(\| u \|^2 + \| v \|^2)$.

40. En un espacio con producto interno, demuestre que

$$\langle u, v \rangle = \frac{1}{4} \| u + v \|^2 - \frac{1}{4} \| u - v \|^2 .$$

41. Sea V un espacio vectorial. Dados dos productos internos en V, ¿ la suma de ellos, es también un producto interno en V?

42. Considere $\vec{a}$ y $\vec{b}$ dos vectores no nulos en $\mathbb{R}^2$ y que $\| \vec{a} \| = \| \vec{b} \| - \| \vec{a} - \vec{b} \|$. ¿Qué puede afirmar de $\vec{a}$ y $\vec{b}$?

43. Siendo $\vec{a}$ y $\vec{b}$ vectores distintos, pruebe que

$$\left| \frac{\| \vec{a} \| - \| \vec{b} \|}{\| \vec{a} - \vec{b} \|} \right| \leq 1$$

44. Sabiendo que $\vec{a} \cdot \vec{u} = \vec{b} \cdot \vec{u}, \forall \vec{u} \in \mathbb{R}^2$. Pruebe que $\vec{a} = \vec{b}$

45. Las coordenadas de dos de los vértices de un cuadrado son $(1, 4)$ y $(4, 8)$. Halle las coordenadas de los otros dos.

46. Demostrar que las diagonales de un paralelogramo se cortan en su punto medio.

47. Demostrar que las diagonales de un paralelogramo se cortan perpendicularmente si, y sólo si, dicho paralelogramo es un rombo.

48. Considere $u \in \mathbb{R}^2$ un vector fijo en el plano. Sea $V = \{v \in \mathbb{R}^2 : \langle u, v \rangle = 0\}$, demostrar que V es un espacio vectorial real.

†

†Los Profesores/Hecho en LaTeX