Universidad Nacional de Ingeniería
Facultad de Ciencias
Escuela Profesional de Matemática

Ciclo 2017-1

[Cod: CM-142 Curso: Cálculo Vectorial II]
[Los Profesores]

Práctica Dirigida N^o 6

---

1. Encuentre los valores propios de las siguientes matrices:

   a) $\begin{pmatrix} 8 & 9 & 9 \\ 3 & 2 & 3 \\ -9 & -9 & -10 \end{pmatrix}$

   b) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

   c) $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

2. Sean λ_1,λ_2 y λ_3 los autovalores de la matriz $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$. Halle $\lambda_1{}^2 + \lambda_2{}^2 + \lambda_3{}^2$ sin calcular los autovalores de A ni la de A^2.

3. Sea T una transformacion lineal invertible de un espacio vectorial V en si mismo. Muestre que x es un autovalor de T con autovalor λ, entonces x es un autovector de T^{-1} con autovalor λ^{-1}.

4. Sea A una matriz n x n real. Muestre que A y A^T tienen los mimos autovalores.

5. Sea $\beta = \{u_1 = (3, 1, -3), u_2 = (1, -1, 0), u_3 = (0, 1, -1)\}$ un conjunto de vectores propios linealmente independientes, suponga que $A = \begin{pmatrix} 8 & 9 & 9 \\ 3 & 2 & 3 \\ -9 & -9 & -10 \end{pmatrix}$ es la representacion matricial de una transformacion lineal $L : IR^3 \longrightarrow IR^3$ respecto a la base canonica. Encuentre la representacion matricial de L respecto a la base β.

6. Justifique su respuesta, Verdadera o Falsa de la siguiente proposicion: A es una matriz no singular, entonces A es diagonalizable.

7. Demuestre que si L es una transformacion lineal de un espacio U de dimension n en U, entonces L tendra representacion diagonal si L tiene n valores propios y diferentes.

8. Mostrar que una matriz cuadrada A es invertible si y solo si $\lambda = 0$ no es un valor propio de A.

9. Mostrar que si λ es un valor propio de

una matriz invertible A, entonces λ^{-1} es un valor propio de A^{-1}.

10. Sea $L : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ lineal, cuya matriz que lo representa respecto a la base natural de $\mathbb{R}^3$, es: $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$
Determine a) $L(1,2,3)$, b) $L(0,1,1)$

11. Sean $L : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ lineal, suponga que la matriz de L con respecto a la base $S = v_1, v_2$ es $\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$, donde $v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ y $v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$

    a) Calcule $[L(v_1)]_s$ y $[L(v_2)]_s$
    b) Calcule $L(v_1)$ y $L(v_2)$
    c) Calcule $L(-2,3)$.

12. Pruebe que:

    a) Si A es similar a B entonces $|A| = |B|$
    b) Si A es similar a B y A es regular, entonces B es regular y A^{-1} es similar a B^{-1}.

13. Sea A una matriz n x n. Una matriz n x n tiene a lo mas n autovalores linealmente independientes. Asuma que A tiene $n+1$ autovectores tales que cualesquiera n de ellos son linealmente independientes. Muestre que A es un multiplo de la identidad.

14. Una matriz n x n P es una matriz estocastica si satisface las siguientes condiciones:
$p_{i,j} \geq 0 \ \forall i,j = 1,2,...,n$ y $\sum_{i=1}^{n} p_{ij} = 1 \ \forall j = 1,2,...,n$
Muestre que 1 es un autovalor de cualquier matriz estocastica.

15. Muestre que si una matriz A es diagonalizable por una matriz invertible Q entonces A^{-1} es diagonalizable por Q^{-1}.

16. Sea Q una matriz n x n ortogonal, y sea $p(x)$ su polinomio caracteristico. Demuestre que para $\lambda \neq 0$ se tiene $p(\lambda) = \pm\lambda^n p(\frac{1}{\lambda})$.

17. Ecuentre el polinomio caracteristica de las siguientes matrices, halle su polinomio caracterisitico, sus autovalores y autovectores y diga si son diagonalizables.

    a) $\begin{pmatrix} 4 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
    b) $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -1 & 3 & 0 \\ -4 & 13 & 1 \end{pmatrix}$
    c) $\begin{pmatrix} 5 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -7 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

18. Demuestre que dos matrices simetricas son semejantes ortogonalmente si y solo si tienen el mismo polinomio caracteristico.

19. Compruebe que si A y B son matrices semejantes entonces $det(A) = det(B)$. Concluya que matrices semejantes tienen los mismos autovalores.

20. Compruebe que matrices semejantes tienen el mismo rango

21. Compruebe que si A y B son matrices semejantes entonces A^k y B^k son semejantes, para todo $k > 0$

22. a) Halle los autovalores y los autovectores unitarios de la matriz de rotacion: $A = \begin{pmatrix} \operatorname{sen}(\theta) & \cos(\theta) \\ -\cos(\theta) & sen(\theta) \end{pmatrix}$

    b) Diga si los autovectores son mutuamente ortogonales.

23. a) Una transformacion lineal T tal que $T^2 = T$ se dice que es *idempotente*. ¿Que se puede decir sobre los autovalores de una transformacion asi?

    b) Una transformacion lineal T para la cual $T^p = 0$, donde p es un entero positivo se dice que es *nilpotente*. ¿Que se puede decir sobre los autovalores de una transformacion asi?

    c) Una transformacion lineal T tal que $T^2 = I$ se dice que es *involutiva*. ¿Que se puede decir sobre los autovalores de una transformacion asi?

24. Sea x un vector columna no nulo en $\mathbb{R}^{\kappa}$. Entonces xx^T es una matriz n x n y x^Tx es un numero real. Muestre que x^Tx es un autovalor de xx^T y x es su correspondiente autovector.

25. Sea una transformacion lineal T. Muestre que los autovalores correspondientes a autovalores diferentes son linealmente independientes.

26. Sea $H : \mathbb{R}^{\kappa} \to \mathbb{R}^{\kappa}$ la transformación lineal cuya matriz asociada es $M_A^A(H) = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$ y donde $A = \{(-1,0),(0,2)\}$. Determinar:

    a) La regla de correspondencia de la transformación H .

    b) La imagen del vector $u = (-1,3)$ utilizando la matriz $M_A^A(H)$

27. Sea la transformación lineal $S : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, cuya matriz asociada es $M_B^A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, referida a las bases $A = \{(1,1),(0,1)\}$ del dominio y $B = \{(1,0,1),(0,1,1),(1,1,0)\}$ del codominio. Determinar la regla de correspondencia de la transformación S.

Uni, 21 de Junio del 2017.