UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA

FACULTAD DE CIENCIAS

CURSO: Cálculo Vectorial I   COD. CURSO:

PRACTICA: 1   SECCIÓN: B

APELLIDOS Y NOMBRES (Alumno) — CODIGO — FIRMA

Lima, 31 de agosto del 2016   N° Lista

NOTA: 15 (En números) — Quince (En letras) — Nombre del Profesor — Firma del Profesor

CALIFICACIÓN

Preg N°	Puntos
1	4
2	3.0
3	4
4	—
5	4
6	
Total	

1.

A_1) Cerradura de la adición

sean $u=(u_1,u_2)$, $v=(v_1+v_2)\in V$

$$u+v=(\underset{>0}{u_1};\underset{>0}{u_2})+(\underset{>0}{v_1},\underset{>0}{v_2})=(\underbrace{u_1v_1}_{>0},\underbrace{u_2v_2}_{>0})\in V$$

si $\underbrace{u_1}_{>0}\cdot\underbrace{v_1}_{>0}>0 \Rightarrow u+v\in V$.

A_2) Conmutatividad

$$u+v=(u_1,u_2)+(v_1+v_2)$$
$$=(u_1\cdot v_1, u_2v_2)$$
$$=(v_1\cdot u_1, v_2u_2)$$
$$=(v_1,v_2)+(u_1,u_2)$$
$$=v+u$$

A_3) Asociativa

$$u+(v+w)=(u_1,u_2)+\left((v_1,v_2)+(w_1,w_2)\right)$$
$$=(u_1,u_2)+(v_1w_1,v_2w_2)$$
$$=(u_1(v_1w_1),u_2(v_2w_2))$$
$$=((u_1v_1)w_1,(u_2v_2)w_2)$$
$$=(u_1v_1,u_2v_2)+(w_1,w_2)$$
$$=((u_1,u_2)+(v_1,v_2))+(w_1,w_2)$$
$$=(u+v)+w$$

A_4) Neutro aditivo

$u+\vec{0}=u$, $\vec{0}$ (elemento neutro aditivo)

si tomamos $\vec{0}=(1,1)\in V$

$$u+\vec{0}=u$$
$$(u_1,u_2)+(1,1)=(u_1\cdot 1,u_2\cdot 1)$$
$$=(u_1,u_2)=u.$$

A_5) Elemento inverso Aditivo

$\forall u\in V$, $\exists(-u)\in V$ tal que:

$$u+(-u)=\vec{0}.$$

Sea $u=(x,y)$ y $(-u)=(x^{-1},y^{-1})$ cualesquiera.

$$u+(-u)=\vec{0}$$
$$(x,y)+(x^{-1},y^{-1})=(1,1)$$
$$(x\cdot x^{-1},y\cdot y^{-1})=(1,1)$$
$$(1,1)=(1,1)$$

M_1) Cerradura de la multiplicación

sean $u=(u_1,u_2)\in V$, $\lambda\in\mathbb{R}$

$$\lambda u=\lambda(u_1,u_2)=(u_1^{\lambda},u_2^{\lambda})\in V$$

si $u_1>0\longrightarrow u_1^{\lambda}>0$, $\forall\lambda\in\mathbb{R}$

$u_2>0\longrightarrow u_2^{\lambda}>0$, $\forall\lambda\in\mathbb{R}$.

$$\Rightarrow \lambda u\in V$$

M2) <u>Conmutatividad</u>

Sean $u=(u_1,u_2)\in V$, $\lambda,\beta\in\mathbb{R}$ (fijos y arbitrarios)

$$\lambda\cdot(\beta u)=\lambda(\beta\cdot(u_1,u_2))$$
$$=\lambda(u_1^{\beta},u_2^{\beta})$$
$$=((u_1^{\beta})^{\lambda},(u_2^{\beta})^{\lambda})$$
$$=(u_1^{\lambda\beta},u_2^{\lambda\beta})$$
$$=(\lambda\beta)(u_1,u_2)$$
$$=(\lambda\beta)\cdot u \quad \blacksquare$$

M3) <u>Asociativa (1)</u>

Sean $u=(u_1,u_2)\in V$, $\lambda,\beta\in\mathbb{R}$

$$(\lambda+\beta)\cdot u=(\lambda+\beta)(u_1,u_2)=(u_1^{(\lambda+\beta)},u_2^{(\lambda+\beta)})$$
$$=(u_1^{\alpha}\cdot u_1^{\beta},u_2^{\alpha}\cdot u_2^{\beta})=(u_1^{\alpha},u_2^{\alpha})+(u_1^{\beta},u_2^{\beta})$$
$$=\alpha\cdot(u_1,u_2)+\beta\cdot(u_1,u_2$$
$$=\alpha\cdot u+\beta\cdot u \quad \blacksquare$$

M4) <u>Asociativa (2)</u>

Sean $u=(u_1,u_2)$, $v=(v_1,v_2)\in V$, $\lambda\in\mathbb{R}$.

$$\lambda\cdot(u+v)=\lambda((u_1,u_2)+(v_1,v_2))$$
$$=\lambda(u_1v_1,u_2v_2)=((u_1\cdot v_1)^{\lambda},(u_2\cdot v_2)^{\lambda})$$
$$=(u_1^{\lambda}\cdot v_1^{\lambda},u_2^{\lambda}\cdot v_2^{\lambda})=(u_1^{\lambda},u_2^{\lambda})+(v_1^{\lambda},v_2^{\lambda})$$
$$=\lambda\cdot(u_1,u_2)+\lambda(v_1,v_2)$$
$$=\lambda\cdot u+\lambda\cdot v \quad \blacksquare$$

M5) <u>Elemento neutro multiplicativo</u>

$$1\cdot u=1\cdot(u_1,u_2)=(u_1^{1},u_2^{1})$$
$$=(u_1,u_2)=u.$$

2.(a) $S,T\subset V$

$\underbrace{S\subset V}\wedge\underbrace{T\subset V}$

$(x\in S\to x\in V)\wedge(y\in T\to y\in V)$

$\to x,y\in V$

Por axioma de cerradura de la adición

$x+y\in V.$

$\Rightarrow x+y\in S \vee x+y\in T$

$\Rightarrow x\in S\wedge x\in T$

1er caso) $x+y\in S$, sabemos que como $x\in S$, por axioma de inverso aditivo $(-x)\in S$, por cerradura de la adición

$x+y+(-x)\in S$

$\to y\in S$

$\Rightarrow y\in S\wedge y\in T$

2do caso) $x+y\in T$, sabemos que como $y\in S$, por axioma de inverso aditivo $(-y)\in S$, por cerradura de la adición.

$x+y+(-y)\in T$

$\to x\in T$

3er caso) $x+y\in T\wedge x+y\in S$

$x+y\in T\cap S$

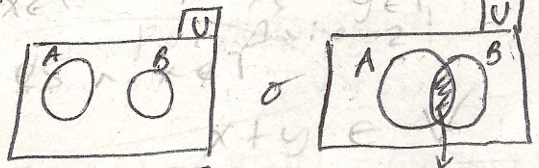
$\Longrightarrow T\cap S\subset V.$

~~Por definición o propiedad~~

Por propiedad de conjuntos

$A,B\subset U$

$\to A\cap B\subset U$



$A\cap B=\emptyset\subset U \quad \vee \quad A\cap B\subset U$

Tanto para el caso 1 y 2:

Caso 1: $x\in S\wedge x\in T$

$x\in S\cap T$

$\Rightarrow S\cap T\subset V$

Caso 2: $y\in S\wedge y\in T$

$y\in S\cap T$

$\Rightarrow S\cap T\subset V.$ $\blacksquare$

(b)

(c) sabemos que: $u \perp v$

$$u=(m,n) \Rightarrow v=(-n,m)$$

$\rightarrow \langle u,v\rangle = 0$, si $u \perp v$

Calculando:

$$\|u+xv\|^2 = \langle u+xv, u+xv\rangle$$

$$= \langle u,u\rangle + \langle xv,xv\rangle + 2\langle u,xv\rangle$$

$$= \|u\|^2 + x^2\|v\|^2 + 2x\underbrace{\langle u,v\rangle}_{0}$$

$$\|u+xv\|^2 = \|u\|^2 + x^2\|v\|^2 \geq \|u\|^2$$

$$\|u+xv\|^2 \geq \|u\|^2$$

$$\|u+xv\| \geq \|u\|, \forall x \in \mathbb{R}.$$

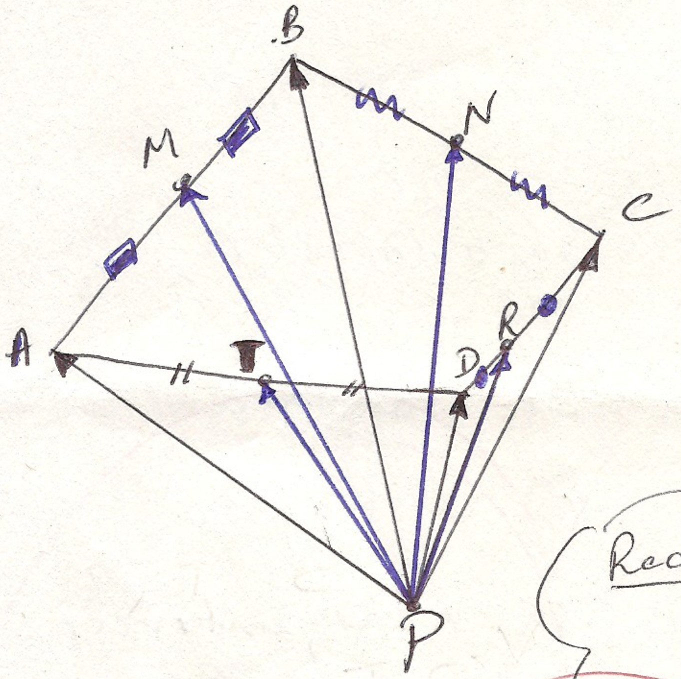
Sabemos: el producto interno induce la norma:

$$\|u\| = \sqrt{\langle u,u\rangle}$$

$$\|u\|^2 = \langle u,u\rangle.$$

- si $u \perp v$, entonces $\langle u,v\rangle = 0$.

5.



notamos que:

$$2\vec{PT} = \vec{PD} + \vec{PA}$$

$$2\vec{PD} = \vec{PA} + \vec{PC}$$

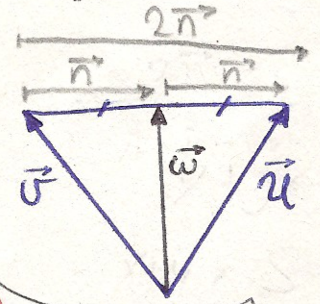
$$2\vec{PN} = \vec{PC} + \vec{PB} \quad (+)$$

$$2\vec{PM} = \vec{PA} + \vec{PB}$$

$$2\vec{PT} + 2\vec{PD} + 2\vec{PN} + 2\vec{PM} = 2\vec{PA} + \vec{PB} + 2\vec{PC} + 2\vec{PD}$$

$$\vec{PM} + \vec{PN} + \vec{PR} + \vec{PT} = \vec{PA} + \vec{PB} + \vec{PC} + \vec{PC}$$

Recordar:



$$\vec{u} = \vec{w} + \vec{n}$$

$$\vec{u} = \vec{v} + 2\vec{n}$$

$$2\vec{w} = \vec{u} + \vec{v} \ldots$$

3. sea $u=(m,n)$ y $v=\lambda u \rightarrow v=(\lambda m, \lambda n)$

si $u=(m,n) \rightarrow u^{\perp}=(-n,m)$

dato: $u \neq 0 \wedge v \neq 0$

→ atrás

$\rightarrow v = \lambda v$, $u \neq 0 \wedge v \neq 0$, $v = (p,q)$
$\rightarrow u = (m,n) \rightarrow u^{\perp} = (-n,m)$

$\rightarrow (p,q) = \lambda(m,n)$
$(p,q) = (\lambda m, \lambda n)$
$\lambda \neq 0$, dcl escal

$(-n,m) = a(m,n) + b(p,q)$
$(-n,m) = (am,an) + b(\lambda m, \lambda n)$
$(-n,m) = (am + b\lambda m, an + b\lambda n)$

$-n = (a+b\lambda)m \quad \wedge \quad m = an + b\lambda n$
$m = (a+b\lambda)n$
$-n = (a+b\lambda)(a+b\lambda n)$

NO con Lapiz

$-n = (a+b\lambda)m$
$\wedge$
$m = (a+b\lambda)n$

$-n = (a+b\lambda)^2 n$
$0 = ((a+b\lambda)^2 + 1)n$

si $n = 0$, entonces
$m = 0$
$\rightarrow u = (m,n) = (0,0)$
$(\rightarrow \leftarrow)$
contradicción