FECHA
29 DE AGOSTO
DEL 2016

Quinta clase de Cálculo Vectorial

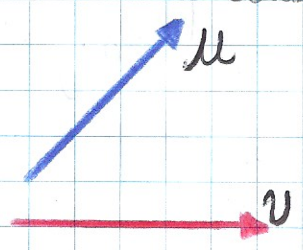
Prof:Juan Cribillero Aching

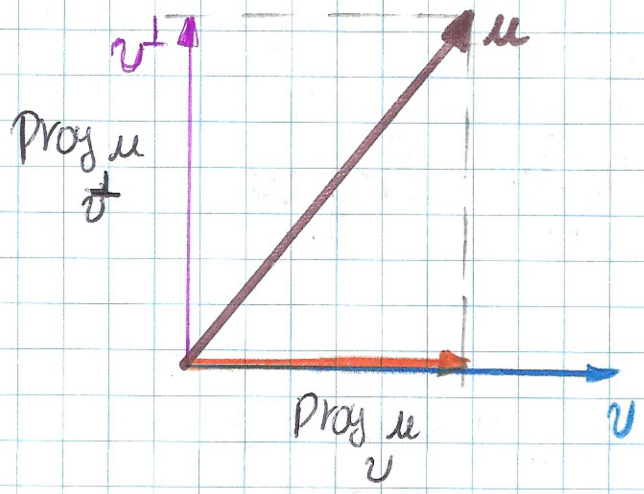
29/08/16

Luego: $u = \text{Proy}_{v}\, u + \text{Proy}_{v^\perp}\, u$

$u = \text{Comp}_{v}\, u \dfrac{v}{\|v\|} + \text{Comp}_{v^\perp} \dfrac{v^\perp}{\|v^\perp\|}$

Un vector cualquiera





¿Se dice proyección o proyección ortogonal?

Son términos diferentes, véase wikipedia :)

Proposición: Sea $v \in \mathbb{R}^2$; $v \neq 0$, entonces

1) $\text{Proy}_{v}\, u = \text{Proy}_{tv}\, u$, $\forall u \in \mathbb{R}^2$; $t \in \mathbb{R}$; $t \neq 0$

Su vector paralelo

2) $\text{Proy}_{v}(u + w) = \text{Proy}_{v}\, u + \text{Proy}_{v}\, w$; $\forall u, w \in \mathbb{R}^2$

3) $\text{Proy}_{v}(tu) = t\, \text{Proy}_{v}\, u$; $\forall u \in \mathbb{R}^2$; $t \in \mathbb{R}$

Prueba:

Sea $v \in \mathbb{R}^2$; $v \neq 0$

1) $\text{Proy}_{tv}\, u = \dfrac{\langle u, tv \rangle}{\|tv\|^2}\, tv$, $\forall u \in \mathbb{R}^2$, $t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

$= \dfrac{t^2 \langle u, v \rangle}{|t|^2 \|v\|^2} \cdot v$

$\text{Proy}_{tv}\, u = \text{Proy}_{v}\, u$ ■

2) Sean $u, w \in \mathbb{R}^2$

$$\text{Proy}_v (u+w) = \frac{\langle u+w, v\rangle}{\|v\|^2} v$$

$$= \frac{\langle u, v\rangle v}{\|v\|^2} + \frac{\langle w, v\rangle v}{\|v\|^2}$$

$$= \text{Proy}_v u + \text{Proy}_v w$$

3) Sea $u \in \mathbb{R}^2$, $t \in \mathbb{R}$.

$$\text{Proy}_v (tu) = \frac{\langle tu, v\rangle}{\|v\|^2} v = \frac{t\langle u, v\rangle v}{\|v\|^2}$$

$$= t \; \text{Proy}_v u$$

Álgebra lineal de vectores en el plano

(V)

Definición: Sean $v_1, v_2, \dots, v_n \in \mathbb{R}^2$ vectores en el plano

Un vector v es una combinación lineal de los vectores $v_1, v_2, v_3, \dots, v_n$

si existen reales $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_n$ tales que:

$$v = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n = \sum_{1}^{n} \alpha_i v_i$$

En este caso se dice que $v_1, v_2, v_3, \dots, v_n$ generan a V.

Además, si todo vector $\mathbb{R}^2$ es generado por $v_1, v_2, v_3, \dots v_n$, entonces se dice que $v_1, v_2, \dots, v_n$ generan a $\mathbb{R}^2$.

Ejemplo: Sean $v_1 = (1; 2)$; $v_2 = (-1; 4)$ $v_3 = (1; 0)$ y v en este caso $v = (3; 7) = \frac{3}{2}(1; 2) + (-1; 4) + \frac{5}{2}(1; 0)$

$$v = \frac{3}{2} v_1 + v_2 + \frac{5}{2} v_3$$

Del mismo modo, expresemos $(0; 0)$ como dos combinaciones lineales diferentes.

Solo piden que existan, pueden haber múltiples maneras. ¿existirá un teorema que lo pruebe?

$$(0;0) = 0(1,2) + 0(-1,4) + 0(1,0)$$

$$(0,0) = (-2)(1,2) + (-1,4) + 3(1,0)$$

Finalmente veamos v_1; v_2 y v_3 generan a $\mathbb{R}^2$; en efecto:

Sea v x y $\mathbb{R}^2$ luego

$$(x, y) = \frac{y}{2}(1; 2) + 0(-1; 4) + \left(x - \frac{y}{2}\right)(1; 0)$$

$$v = \left(\frac{y}{2}\right) v_1 + 0 v_2 + \left(x - \frac{y}{2}\right)(1; 0)$$

Ejemplo: Sean $v_1 = (1, 0)$ y $v_2 = (1; 1)$

En este caso v_1 y v_2 generan a $\mathbb{R}^2$?

En efecto: Sean $v = (x, y) \in \mathbb{R}^2$

$$(x; y) = (x - y)(1; 0) + y(1, 1)$$

$$v = (x - y) v_1 + y . v_2$$

Luego v_1 y v_2 generan a $\mathbb{R}^2$.

Observación: Dado cualquier conjunto de vectores $v_1, \ldots, v_n \in \mathbb{R}^2$, el vector 0 $\mathbb{R}^2$ es una combinación lineal de $v_1, v_2, v_3, \ldots, v_n$; esto es

$$\vec{0} = (0)\vec{v_1} + (0)\vec{v_2} + \cdots (0)\vec{v_n}$$

Definición: Sean $v_1, v_2, \ldots, v_n \in \mathbb{R}^2$ vectores en el plano, se dice que son linealmente independientes si escribiendo Solución única $\Rightarrow$ l. i.

$$\bar{0} = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3 + \cdots + \alpha_n v_n.$$

con $\alpha_1; \alpha_2; \alpha_3; \ldots; \alpha_n \in \mathbb{R}$, la única posibilidad para esto es

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_n = 0.$$

Por otro lado, si $v_1; v_2; v_3; \ldots; v_n \in \mathbb{R}^2$ no son linealmente independientes, entonces se denominan linealmente independientes.

Ejemplo: Veamos que $v_1 = (1,0)$ y $v_2 = (1;1)$ son linealmente independientes

En efecto: Sean α_1 α_2 $\mathbb{R}$ tal que $\bar{0} = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2$

$$(0,0) = \alpha_1 (1,0) + \alpha_2 (1,1)$$

$$\alpha_1 + \alpha_2 = 0$$

$$\alpha_2 = 0$$

Luego: $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$.

$\therefore$ v_1 y v_2 son linealmente independientes

Ejemplo: Veamos que $v_1 = (1;2)$, $v_2 = (-1;4)$ y $v_3 = (1;0)$ son linealmente dependientes.

En efecto:

$$\bar{0} = -2(1;2) + (1)(-1;4) + 3(1;0)$$

$\therefore$ v_1, v_2, v_3 son linealmente dependientes.

Ejemplo: Sean $v_1 = (2;4)$ y $v_2 = (4;8)$ los vectores en el plano v_1 y v_2 son linealmente dependientes.

En efecto:

$$\bar{0} = (-2)(2;4) + (1)(4;8)$$

$$\bar{0} = (-2)v_1 + (1)v_2$$

$\therefore$ v_1 y v_2 son linealmente dependientes

Iris colors

Proposición: Sean $v_1, v_2 \in \mathbb{R}^2$ las siguientes afirmaciones son equivalentes:

1) v_1 y v_2 son paralelos.

2) v_1 y v_2 son linealmente dependientes.

3) Si $v_1 = (x_1, y_1)$ y $v_2 = (x_2, y_2)$, entonces $x_1 y_2 - x_2 y_1 = 0$.

Resumiendo y añadiendo:

Definición: Sea $S = \{x_i\}_1^n$ un subconjunto no vacío de un espacio vectorial V. Una combinación lineal de S es un vector de la forma

$$\sum_1^n \alpha_i x_i$$ donde $\alpha_i \in \mathbb{K}$. El conjunto de todas las combinaciones lineales de S se denota por $L(S)$ y se llama **envoltura lineal** de S.

Proposición: La envoltura lineal de cada subconjunto no vacío S de un espacio vectorial V es un subespacio de V.

Definición: Dado $S \subseteq V$ se dice que su **envoltura lineal** $\mathcal{L}(S)$ es el subespacio generado por S. Si U es un subespacio de V, un generador de U es un subconjunto S de V tal que $U = \mathcal{L}(S)$.

Definición: Sean $f_1, \dots, f_n$ funciones reales definidas en $[a, b]$ derivables hasta el orden $n-1$, entonces se llama wronskiano de tales funciones a

$$W = \det \begin{pmatrix} f_1(x) & f_2(x) & \cdots & f_n(x) \\ f_1'(x) & f_2'(x) & \cdots & f_n'(x) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ f_1(x)^{n-1} & f_2(x)^{n-1} & \cdots & f_n(x)^{n-1} \end{pmatrix}$$

Teorema: Si existe un punto $x_0 \in [a, b]$ tal que $W(x_0) \neq 0$, entonces las funciones $f_1, \dots, f_n$ son linealmente independientes.

Definición: Una **base** de un espacio vectorial es un conjunto l.i. que lo genera.