3.4. Algebra lineal de vectores en el espacio

Las definiciones de combinación lineal, generación, independencia lineal y base de $\mathbb{R}^2$ son inmediatamente generalizadas en $\mathbb{R}^3$. En general, son definidas para cualquier *espacio vectorial*. Por completitud, y para recordar las definiciones, las enunciaremos nuevamente.

Definición 3.20. Sean $v_1, \ldots, v_n \in \mathbb{R}^3$ vectores en el plano. Diremos que un vector v es una *combinación lineal* de los vectores $v_1, \ldots, v_n$ si existen coeficientes reales $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ tales que

$$v = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_n v_n.$$

En este caso, diremos que $v_1, \ldots, v_n$ *generan* v. Además, si todo vector $v \in \mathbb{R}^3$ es generado por $v_1, \ldots, v_n$, diremos que $v_1, \ldots, v_n$ *generan* $\mathbb{R}^3$.

Definición 3.21. Diremos que los vectores $v_1, \ldots, v_n \in \mathbb{R}^3$ son *linealmente independientes* si, escribiendo

$$\overline{0} = \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n,$$

con $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}$, la única posibilidad para estos es

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_n = 0.$$

Por otro lado, si $v_1, \ldots, v_n$ no son linealmente independientes entonces se denominan *linealmente dependientes*.

Definición 3.22. Diremos que un conjunto $v_1, \ldots, v_n$ es una *base* de $\mathbb{R}^3$ si estos son linealmente independientes y generan $\mathbb{R}^3$.

Ejemplo 3.23. Sean $v_1 = (1,2,3)$, $v_2 = (2,0,3)$, $v_3 = (-1,1,0)$ y $v = (3,7,0)$. En este caso, tenemos

$$v = (3,7,0) = 2(1,2,3) - 2(-2,0,3) + 3(-1,1,0).$$

Luego v es combinación lineal de v_1, v_2 y v_3. Supongamos que podemos expresar $\overline{0}$ como combinación lineal de v_1, v_2 y v_3, es decir,

$$\overline{0} = (0,0,0) = \alpha(1,2,3) + \beta(-2,0,3) + \gamma(-1,1,0).$$

Luego $\beta = -\alpha$, $2\alpha + \gamma = 0$ y $3\alpha = \gamma$. De aquí, obtenemos que $\alpha = 0$, $\beta = 0$ y $\gamma = 0$. Por lo tanto v_1, v_2 y v_3 son linealmente independientes. Observe que esto no ocurre en $\mathbb{R}^2$, pues probamos que tres vectores cualesquiera siempre son linealmente dependientes.

Finalmente, observamos que v_1, v_2, v_3 generan todo $\mathbb{R}^3$ pues, para $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, arbitrario,

$$\begin{aligned}(x, y, z) = \left(x + y - \frac{2}{3}z\right)(1, 2, 3) \\ + (z - x - y)(2, 0, 3) \\ + \left(\frac{4}{3}z - 2x - y\right)(-1, 1, 0).\end{aligned}$$

Ejemplo 3.24. Consideremos $e_1 = \hat{\imath} = (1, 0, 0)$, $e_2 = \hat{\jmath} = (0, 0, 1)$ y $e_3 = \hat{k} = (0, 0, 1)$. Cualquier $v = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ puede escribirse como

$$v = (x, y, z) = x(1, 0, 0) + y(0, 1, 0) + z(0, 0, 1).$$

Es decir, e_1, e_2 y e_3 generan $\mathbb{R}^3$. Por otro lado, si $(0, 0, 0) = \alpha(1, 0, 0) + \beta(0, 1, 0) + \gamma(0, 0, 1)$ entonces $\alpha = \beta = \gamma = 0$, es decir, e_1, e_2 y e_3 son linealmente independientes. Por lo tanto, forman una base, que es denominada *base canónica* de $\mathbb{R}^3$.

Probaremos que toda base de $\mathbb{R}^3$ posee exactamente tres elementos. Para esto, comenzaremos caracterizando la independencia lineal de dos vectores en el espacio.

Proposición 3.25. *Sean $v_1, v_2 \in \mathbb{R}^3$. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. *v_1, v_2 son paralelos;*

2. *v_1, v_2 son linealmente dependientes;*

3. *$v_1 \times v_2 = 0$.*

Demostración. La prueba de que *1* y *2* son equivalentes es análoga a la de la proposición 1.33. Para probar que *1* es equivalente a *3*, basta observar que v_1 y v_2 son paralelos si, y solo si, el ángulo que forman es $\theta = 0$ o $\theta = \pi$, y luego usar el corolario 3.19. □

Corolario 3.26. *Sean $u, v, w \in \mathbb{R}^3$ tales que u es ortogonal a v y a w. Entonces u es paralelo a $v \times w$.*

Demostración. Por la proposición 3.25, basta verificar que $u \times (v \times w) = 0$. En efecto, por la proposición 3.14, ítem *4*, tenemos

$$u \times (v \times w) = \langle u, w\rangle v - \langle u, v\rangle w = 0,$$

pues ambos productos internos son cero, por hipótesis. Esto prueba el resultado. □

Ejemplo 3.27. Considere $v_1 = (1, 2, 0)$, $v_2 = (0, -1, 1)$ y $v_3 = (1, 1, 1)$. Estos son linealmente dependientes pues

$$(0, 0, 0) = (1, 2, 0) + (0, -1, 1) - (1, 1, 1).$$

Sin embargo, estos vectores no son paralelos dos a dos.

En el caso de tres vectores, podemos caracterizar su independencia linear mediante el triple producto escalar. Para esto, probaremos primero dos lemas.

Lema 3.28. *Sean $u, v, w \in \mathbb{R}^3$ linealmente dependientes tales que v, w son linealmente independientes. Entonces u es combinación lineal de v y w.*

Demostración. Como u, v, w son linealmente dependientes, existen escalares $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$, no todos nulos, tales que

$$\alpha u + \beta v + \gamma w = 0.$$

Si $\alpha = 0$ entonces $\beta v + \gamma w = 0$. Esto implica, desde que v, w son linealmente independientes, que $\beta = \gamma = 0$. Esto es una contradicción. Luego $\alpha \neq 0$ y así

$$u = (-\frac{\beta}{\alpha})v + (-\frac{\gamma}{\alpha})w.$$

es decir, u es combinación lineal de v y w. □

Lema 3.29. *Sean $u, v, w \in \mathbb{R}^3$ tales que existe $z \in \mathbb{R}^3$, no nulo, ortogonal a todos ellos. Entonces u, v y w son linealmente dependientes.*

Demostración. Si cualquier par en u, v y w es paralelo, entonces no hay nada que probar. Luego, supongamos que tanto u y v como v y w son linealmente independientes. Entonces $u \times v \neq 0$, $v \times w \neq 0$ y como z es ortogonal a u, v y w entonces, por el corolario 3.26, z es paralelo a $u \times v$ y a $v \times w$. Esto implica que existe $t \in \mathbb{R}$ tal que $u \times v = t(v \times w)$. Así, $(u + tw) \times v = 0$, es decir, $u + tw$ y v son paralelos. Luego, existe $s \in \mathbb{R}$ tal que $u + tw = sv$, es decir,

$$u - sv - tw = 0.$$

Esto prueba que u, v, w son linealmente dependientes. □

Proposición 3.30. *Tres vectores v_1, v_2 y v_3 en $\mathbb{R}^3$ son linealmente dependientes si, y solamente si, $[v_1, v_2, v_3] = 0$.*

Demostración. Supongamos que v_1, v_2, v_3 son linealmente dependientes. Luego, sin perdida de generalidad, podemos suponer que v_1 es combinación lineal de v_2 y v_3, es decir, para escalares $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$,

$$v_1 = \alpha v_2 + \beta v_3.$$

u, v, w ld $\Leftrightarrow$ u comb lin de v y w $\Leftrightarrow$ $u \perp v \times w$ $\Leftrightarrow$ $[u, v, w] = 0$

Multiplicando escalarmente por $v_2 \times v_3$, tenemos

$$\begin{aligned}
[v_1, v_2, v_3] &= \langle v_1, v_2 \times v_3\rangle \\
&= \langle \alpha v_2 + \beta v_3, v_2 \times v_3\rangle \\
&= \alpha\langle v_2, v_2 \times v_3\rangle + \beta\langle v_3, v_2 \times v_3\rangle \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Recíprocamente, supongamos que $[v_1, v_2, v_3] = \langle v_1, v_2 \times v_3\rangle = 0$. Luego $v_2 \times v_3$ es ortogonal a v_1, v_2 y v_3. Por el lema 3.29, v_1, v_2 y v_3 son linealmente dependientes. □

Lema 3.31. *Sean $v_1, \ldots, v_n \in \mathbb{R}^3$ tales que $v_1, \ldots, v_k$ es linealmente dependiente, con $k \leq n$. Entonces $v_1, \ldots, v_n$ es linealmente dependiente.*

Presentaremos ahora el resultado principal de esta sección.

Teorema 3.32. *Tres vectores $v_1, v_2, v_3 \in \mathbb{R}^3$ son linealmente independientes si, y solamente si, generan $\mathbb{R}^3$.*

Demostración. Escribamos $v_i = (x_i, y_i, z_i)$, para $i = 1, 2, 3$. Dado $v = (x, y, z)$ cualquiera, nuestro objetivo es hallar escalares $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}$ tales que $v = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3$. Esto es equivalente a resolver el sistema matricial

$$\begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}.$$

Como $\det\begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{bmatrix} = [v_1, v_2, v_3] \neq 0$ entonces la regla de Cramer nos permite resolver explícitamente este sistema. En este caso, tenemos

$$\alpha_1 = \frac{[v, v_2, v_3]}{[v_1, v_2, v_3]}, \qquad \alpha_2 = \frac{[v_1, v, v_3]}{[v_1, v_2, v_3]}, \qquad \alpha_3 = \frac{[v_1, v_2, v]}{[v_1, v_2, v_3]}.$$

Recíprocamente, supongamos que v_1, v_2 y v_3 son linealmente dependientes. En caso todos ellos sean paralelos entre sí, basta elegir cualquier vector $v \in \mathbb{R}^3$ no paralelo de modo que no podrá ser escrito como combinación lineal de v_1, v_2, v_3. Supongamos ahora, sin perdida de generalidad, v_2 y v_3 no son paralelos, por ende, son linealmente independientes. Por el lema 3.28, v_1 es combinación lineal de v_2 y v_3. Luego $v = v_2 \times v_3 \neq 0$ es ortogonal a v_1, v_2, v_3. En particular, v no es generado por v_1, v_2, v_3. □

La demostración del siguiente corolario es análoga a la del corolario 3.33.

Corolario 3.33. *Sea $v_1, \ldots, v_n \in \mathbb{R}^3$ un conjunto linealmente independiente. Entonces $n \leq 3$.*

Supongamos que $v_1, \ldots, v_n$ es una base de $\mathbb{R}^3$, entonces es linealmente independiente. Luego por el corolario 3.33, $n \leq 3$. Pero dos vectores, o menos, no pueden generar todo $\mathbb{R}^3$, luego $n = 3$. Así, toda base de $\mathbb{R}^3$ posee tres elementos. En conclusión, $\mathbb{R}^3$ es un espacio vectorial de dimensión tres.

Capítulo 4

Rectas y planos en el espacio

Euclides, en su libro "Los Elementos", definió a la recta como "una longitud, sin anchura, que yace por igual respecto de los puntos que están en ella". Del mismo modo, definió *superficie* como "aquello que solo tiene longitud y anchura" y *superficie plana* como "aquella superficie que yace por igual respecto de las líneas que están en ella". La geometría analítica permite formalizar estas nociones, del mismo modo como fue hecho para la recta en el capítulo 2.

Figura 4.1: Alexis de Clairault

4.1. Rectas en el espacio

La definición de recta en el espacio es análoga a su definición en el plano, mediante un punto de paso y un vector dirección. Esta representación se denomina *ecuación vectorial* de la recta.

Definición 4.1. Sea $P_0 \in \mathcal{E}$ y $v \in \mathbb{R}^3$ un vector no nulo. La *recta* que pasa por P_0 con dirección v es el conjunto

$$\mathcal{L}(P_0, v) = \{P = P_0 + tv \in \mathcal{P} \ : \ t \in \mathbb{R}\}.$$

Observe que $P \in \mathcal{L}(P_0, v)$ si, y solo si, $\overrightarrow{PP_0}$ y v son paralelos.

Dados $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ y $v = (v_1, v_2, v_3)$, consideremos la recta $\mathcal{L}(P_0, v)$. Si $P = (x, y, z) \in \mathcal{L}(P_0, v)$ entonces existe $t \in \mathbb{R}$ tal que $P = P_0 + tv$, es decir,

$$x = x_0 + tv_1, \qquad y = y_0 + tv_2, \qquad z = z_0 + tv_3. \tag{4.1}$$

Esta representación de la coordenadas de la recta se denomina *ecuación paramétrica* de la recta.

Si suponemos que $v_1, v_2, v_3 \neq 0$, entonces podemos despejar t en la ecuación (4.1) para obtener

$$t = \frac{x - x_0}{v_1} = \frac{y - y_0}{v_2} = \frac{z - z_0}{v_3}.$$

A esta relación se le denomina *ecuación continua* de la recta.

Proposición 4.2. *Sea $\mathcal{L} = \mathcal{L}(P_0, v)$ una recta en el espacio. Si $P \in \mathcal{L}$ y $w \neq \overline{0}$ es paralelo a v entonces $\mathcal{L} = \mathcal{L}(P, w)$.*

Podríamos pensar que una generalización de la ecuación general de la recta en el plano, $ax + by + cz + d = 0$, serviría como *ecuación general* de la recta en el espacio, sin embargo, este no es el caso. Del mismo modo, no es posible generalizar la *ecuación normal*, ni la noción de pendiente.

4.1.1. Posición relativa entre rectas

Definición 4.3. Diremos que dos rectas son *paralelas* (respectivamente, *ortogonales*) si sus vectores dirección son paralelos (respectivamente, ortogonales).

Comenzaremos caracterizando a las rectas paralelas en el espacio.

Proposición 4.4. *Sean $\mathcal{L}_1$ y $\mathcal{L}_2$ rectas paralelas en el espacio. Entonces $\mathcal{L}_1 = \mathcal{L}_2$ o $\mathcal{L}_1 \cap \mathcal{L}_2 = \emptyset$.*

Demostración. Si $\mathcal{L}_1 \cap \mathcal{L}_2 = \emptyset$ entonces no hay nada que probar. Supongamos que existe $R \in \mathcal{L}_1 \cap \mathcal{L}_2$ y sean v_1 y v_2 los vectores dirección de $\mathcal{L}_1$ y $\mathcal{L}_2$, respectivamente. Entonces por la proposición 4.2,

$$\mathcal{L}_1 = \mathcal{L}(R, v_1) = \mathcal{L}(R, v_2) = \mathcal{L}_2. \qquad \square$$

Es posible tener en el espacio dos rectas no paralelas que no se intersecan. Por ejemplo, considere $P_1 = (0, 0, 0)$, $v_1 = (1, 0, 0)$, $P_2 = (0, 0, 1)$, $v_2 = (0, 1, 0)$ y las rectas $\mathcal{L}_1 = \mathcal{L}(P_1, v_1)$ y $\mathcal{L}_2 = \mathcal{L}(P_2, v_2)$, cuyos vectores dirección no son paralelos. Si se tuviera $R \in \mathcal{L}_1 \cap \mathcal{L}_2$ entonces existen $t, s \in \mathbb{R}$ tales que

$$R = P_1 + tv_1 = (t, 0, 0) = (0, s, 1) = P_2 + sv_2,$$

lo cual es claramente imposible.

Definición 4.5. Diremos que dos rectas $\mathcal{L}_1$ y $\mathcal{L}_2$ son *alabeadas* (o *se cruzan*) si no son paralelas y no se intersecan.

Es posible caracterizar cuando dos rectas son alabeadas mediante el triple producto escalar.

Teorema 4.6. *Sean $\mathcal{L}_1 = \mathcal{L}(P_1, v_1)$ y $\mathcal{L}_2 = \mathcal{L}(P_2, v_2)$ rectas en el espacio. Entonces $\mathcal{L}_1$ y $\mathcal{L}_2$ son alabeadas si, y solamente si, $[\overrightarrow{P_2P_1}, v_1, v_2] \neq 0$.*

Demostración. Probaremos que las negaciones son equivalentes. Supongamos que $\mathcal{L}_1$ y $\mathcal{L}_2$ no son alabeadas, entonces o son paralelas o se cortan en un punto $R \in \mathcal{L}_1 \cap \mathcal{L}_2$. Si son paralelas, entonces sus vectores dirección son paralelos y, por lo tanto, linealmente dependientes. Luego $\overrightarrow{P_2P_1}$, v_1 y v_2 son también linealmente dependientes y por ende $[\overrightarrow{P_2P_1}, v_1, v_2] = 0$. Por otro lado, si $R \in \mathcal{L}_1 \cap \mathcal{L}_2$ entonces existen $t, s \in \mathbb{R}$ tales que

$$R = P_1 + tv_1 = P_2 + sv_2.$$

Luego $\overrightarrow{P_2P_1} + tv_1 - sv_2 = \overline{0}$, es decir, $\overrightarrow{P_2P_1}$, v_1 y v_2 son también linealmente dependientes y por ende $[\overrightarrow{P_2P_1}, v_1, v_2] = 0$.

Recíprocamente, si $[\overrightarrow{P_2P_1}, v_1, v_2] = 0$ entonces $\overrightarrow{P_2P_1}$, v_1 y v_2 son linealmente dependientes. Si v_1 y v_2 son paralelos entonces $\mathcal{L}_1$ y $\mathcal{L}_2$ no pueden ser alabeadas por definición. Si v_1 y v_2 no son paralelos entonces, por el lema 3.28, $\overrightarrow{P_2P_1}$ es combinación lineal de v_1 y v_2. Luego, existen $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tales que

$$P_2 - P_1 = \overrightarrow{P_2P_1} = \alpha v_1 + \beta v_2.$$

Así, basta definir $R = P_1 + \alpha v_1 = P_2 - \beta v_2 \in \mathcal{L}_1 \cap \mathcal{L}_2$ para probar que $\mathcal{L}_1$ y $\mathcal{L}_2$ no son alabeadas. $\square$