FECHA
31 DE AGOSTO
DEL 2016

Sexta clase de Cálculo Vectorial

Prof: Juan Cribillero Aching

31/08/16

Proposición: Sean $v_1; v_2 \in \mathbb{R}^2$ vectores en el plano. Las siguientes operaciones son equivalentes:

1) v_1 y v_2 son paralelos
2) v_1 y v_2 son linealmente dependientes
3) Si $v_1 = (x_1; y_1)$ y $v_2 = (x_2; y_2)$ entonces $x_1 y_2 - x_2 y_1 = 0$.

Prueba:

$(1) \to (2)$: Supongamos que v_1 y v_2 son paralelos, entonces existe $t \in \mathbb{R}$ tal que $v_1 = t v_2$

$\bar{0} = (1) v_1 + (-t) v_2$; como $1 \neq 0$, entonces v_1 y v_2 son linealmente dependientes.

$(2) \to (3)$: Supongamos que v_1 y v_2 son linealmente dependientes, entonces existen $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$ no ambos nulos tal que:

$$\bar{0} = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2$$

Si $v_1 = (x_1, y_1)$ y $v_2 = (x_2, y_2)$ entonces

$$0 = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2$$
$$0 = \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix}$$

el vector columna es no nulo.

Este sistema de ecuaciones lineales tiene solución única si

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow x_1 y_2 - x_2 y_1 = 0$$

Iris colors

(3) → (1): Supongamos que si $v_1 = (x_1, y_1)$; $v_2 = (x_2; y_2)$ tal que

$x_1 y_2 - x_2 y_1 = 0$ entonces $x_1 y_2 = x_2 y_1$.

Si $v_1 = \bar{0}$, entonces no hay nada que probar, ya que el vector nulo es paralelo a cualquier vector.

Si $v_1 \neq \bar{0}$, entonces $x_1 \neq 0 \wedge y_1 \neq 0$.

Luego: $y_2 = \dfrac{x_2}{x_1} y_1$

$$v_2 = (x_2; y_2) = \left(x_2 ; \frac{x_2}{x_1} y_1\right) = \frac{x_2}{x_1}(x_1, y_1) = \left(\frac{x_2}{x_1}\right) v_1$$

$\Rightarrow$ v_1 y v_2 son paralelos.

De manera análoga para v_2.

Comentario: Suponer que $v_2 = \bar{0}$, entonces no hay nada que probar, ya que el vector nulo es paralelo a cualquier vector.

Si $v_2 \neq \bar{0}$, entonces $x_2 \neq 0 \wedge y_2 \neq 0$

Luego: $\dfrac{x_1 . y_2}{x_2} = y_1$

$$v_1 = (x_1; y_1) = \left(x_1 ; \frac{x_1 y_2}{x_2}\right) = \frac{x_1}{x_2}(x_2, y_2) = \left(\frac{x_1}{x_2}\right) v_2$$

$\Rightarrow$ v_1 y v_2 son paralelos ■

Ejemplo: Sean $v \in \mathbb{R}^2$ y $w = \bar{0}$, entonces v y w son paralelos por la proposición anterior v y w son linealmente dependientes

En general: Si $v_1, v_2, v_3, \dots, v_n \in \mathbb{R}^2$ son tales que al menos uno de ellos es el vector nulo, por ejemplo $v_1 = \bar{0}$, entonces $v_1; v_2; v_3; \dots; v_n$ son linealmente dependiente esto es:

$$\bar{0} = (1)v_1 + (0)v_2 + (0)v_3 + \cdots + (0)v_n$$

Ejemplo: Sea $v_1 = (x, y) \neq (0; 0)$ y $v_2 = v_1^{\perp} = (-y, x)$ entonces v_1 y v_2 son linealmente independientes.

En efecto: Supongamos que v_1 y v_2 son linealmente dependientes, entonces v_1 y v_2 son paralelos, luego existe $t \in \mathbb{R}$ tal que

$v_1 = t v_2$, es claro que $t \neq 0$, $(x, y) = t(-y, x)$

$$\begin{cases} x = -ty \\ y = tx \end{cases}$$

$$x = -t(tx) \Rightarrow (1 + t^2)x = 0$$

$$x = 0 \ (\rightarrow\leftarrow)$$

$\therefore$ v_1 y v_2 son linealmente independientes.

Así para cualquier $v \in \mathbb{R}^2$; v y $v^{\perp}$ son linealmente independientes.

Lema: Sean $v_1, v_2, \ldots, v_n \in \mathbb{R}^2$ tales que $v_1, v_2, \ldots, v_k$ son linealmente dependientes $k \leq n$, entonces $v_1; v_2; v_3; \ldots; v_n$ son linealmente dependientes.

Prueba: Sean $v_1, v_2, v_3, \ldots, v_n \in \mathbb{R}^2$ como $v_1, v_2, v_3, \ldots, v_k$ son linealmente dependientes $\forall k \leq n$, entonces existen $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_k$ no todos nulos tales que

$$\bar{0} = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3 + \cdots + \alpha_k v_k$$

Definiendo: $\alpha_{k+1} = \alpha_{k+2} = \alpha_{k+3} = \cdots = \alpha_n = 0$

$$\bar{0} = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3 + \cdots + \alpha_k v_k + \alpha_{k+1} v_{k+1} + \cdots + \alpha_n v_n$$

Se observa α_i, $\forall i = 1, 2, \ldots, n$ no todos son nulos.

$\therefore$ $v_1; v_2; v_3; \ldots; v_n$ son linealmente dependientes.

Teorema: Sean $v_1; v_2 \in \mathbb{R}^2$ dos vectores linealmente independientes, entonces v_1 y v_2 generan a $\mathbb{R}^2$.
El recíproco del teorema es verdadero.

Prueba: Consideremos $v_1 = (x_1; y_1)$ y $v_2 = (x_2; y_2)$ como v_1 y v_2 son linealmente independiente, entonces $x_1 y_2 - x_2 y_1 \neq 0$

Dado $v = (x; y) \in \mathbb{R}^2$ Consideremos

¿De dónde salen α_1 y α_2? Pues resolviendo el sistema usando quizá la regla de Cramer.

$$\alpha_1 = \frac{x y_2 - x_2 y}{x_1 y_2 - x_2 y_1} \wedge \alpha_2 = \frac{x_1 y - x y_1}{x_1 y_2 - x_2 y_1}$$

$$(x, y) = \left(\frac{x_2 y - x y_2}{x_1 y_2 - x_2 y_1}\right)(x_1; y_1) + \left(\frac{x_1 y - x y_1}{x_1 y_2 - x_2 y_1}\right)(x_2; y_2)$$

$v = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2$. $\therefore$ v_1 y v_2 generan a $\mathbb{R}^2$.

Corolario: Sean $v_1; v_2; v_3; \dots; v_n \in \mathbb{R}^2$ vectores linealmente independientes, entonces $n \leq 2$.

Prueba: Por el lema anterior, basta probar que cualquier terna $v_1; v_2; v_3$ son linealmente dependientes.

Como v_1 y v_2 son linealmente independientes, por el teorema $v_1 + v_2$ generan a $\mathbb{R}^2$; esto es $v_3 = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2$.

$$\bar{0} = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + (-1) v_3$$

$(-1) \neq 0$; entonces $v_1; v_2$ y v_3 son linealmente dependientes

$\therefore$ $n \leq 2$.

Proposición: Si v_1, v_2 generan a $\mathbb{R}^2$, entonces v_1 y v_2 son linealmente independientes.

Prueba: Supongamos que v_1 y v_2 son linealmente dependientes entonces existe $t \mathbb{R}$ tal que $v_1 = t v_2$.

Dado $v \in \mathbb{R}^2$ tal que $v = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2$

$$v = \alpha_1 (t v_2) + \alpha_2 v_2$$

$$v = (\alpha_1 t + \alpha_2) v_2$$

$(\rightarrow \leftarrow)$

∴ v_1 y v_2 generan a $\mathbb{R}^2$

v_1 y v_2 deben generar ambos, no únicamente v_2. De allí la contradicción

Toda base de $\mathbb{R}^2$ son 2 vectores

La dimensión de la base es 2.