Capítulo 3

Geometría analítica en el espacio

En este capítulo estableceremos las nociones básicas de geometría analítica en el espacio. Del mismo modo que trabajamos con el plano, el objetivo es asociarle al espacio $\mathcal{E}$ un sistema de coordenadas, sin embargo, no entraremos en detalles de como hacer esto (aunque la construcción es completamente análoga.)

3.1. Sistema de coordenadas en el espacio

Consideraremos $\mathcal{E}$ dotado de tres ejes, perpendiculares entre si y con el origen en común. De este modo, cada punto de $P \in \mathcal{E}$ tiene asociado una *terna ordenada*, es decir, un elemento del conjunto

$$\mathbb{R}^3 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(x, y, z) \ : \ x, y, z \in \mathbb{R}\}.$$

Para representar gráficamente el sistema de coordenadas que estamos considerando, llamaremos a los tres ejes coordenados como *eje* x, *eje* y y *eje* z. Además, si en el plano formado por los ejes x y y, estos están ubicados de manera usual (el eje x visto como una recta horizontal, el eje y visto como una recta vertical y sus semiejes positivos ubicados apuntado hacia la derecha y hacia arriba, respectivamente) entonces el semieje z positivo lo consideraremos como "escapando" del plano xy.

Del mismo modo que lo hecho en el plano, una terna ordenada representará tanto puntos del espacio como vectores en el espacio, pudiendo estos ser "radio vectores" o "vectores libres". Interpretando las ternas ordenadas como radio vectores podemos establecer, nuevamente, la suma de ternas ordenadas y el producto de una terna por un escalar.

Definición 3.1. Sean (x, y, z) y (a, b, c) elementos de $\mathbb{R}^3$. Definimos la *suma* de (x, y, z) y (a, b, c) como la terna ordenada

$$(x, y, z) + (a, b, c) = (x + a, y + b, z + c).$$

Por otro lado, dado $t \in \mathbb{R}$ y $(x, y, z) \in \mathbb{R}^2$, definimos el *producto* de (x, y) *por el escalar* t como

$$t \cdot (x, y, z) = (tx, ty, tz).$$

Estas operaciones cumplen las mismas propiedades que satisfacen sus análogas en $\mathbb{R}^2$, dadas en la proposición 1.4. Así, este hecho nos permite decir que $\mathbb{R}^3$ es un *espacio vectorial real*.

Proposición 3.2.

1. *La suma es asociativa, es decir* $u + (v + w) = (u + v) + w$*, para todo* $u, v, w \in \mathbb{R}^3$*;*

2. *la suma es conmutativa, es decir* $u + v = v + u$*, para todo* $u, v \in \mathbb{R}^3$*;*

3. *existe un elemento* $\theta \in \mathbb{R}^2$ *tal que* $v + \theta = v$*, para todo* $v \in \mathbb{R}^3$*;*

4. *para todo* $v \in \mathbb{R}^3$*, existe* $w \in \mathbb{R}^3$ *tal que* $v + w = \theta$*;*

5. *la suma y el producto por un escalar son distributivos entre ellos, es decir,* $\alpha(u+v) = \alpha u+\alpha v$ *y* $(\alpha+\beta)v = \alpha v+\beta v$*, para todo* $u, v \in \mathbb{R}^3$ *y* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$*;*

6. *el producto de escalares y el producto por un escalar son asociativos, es decir,* $\alpha(\beta v) = (\alpha\beta)v$*, para todo* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ *y* $v \in \mathbb{R}^3$*;*

7. $1 \in \mathbb{R}$ *también es neutro multiplicativo del producto escalar, es decir,* $1 \cdot v = v$*, para todo* $v \in \mathbb{R}^3$.

Otra definición que tiene su análogo en $\mathbb{R}^2$ es la de *paralelismo* de vectores. Diremos que dos vectores u y v son *paralelos* si $u = 0$ o existe $t \in \mathbb{R}$ tal que $u = tv$.

3.2. Geometría de vectores en el espacio

La geometria obtenida de considerar vectores en el espacio (representados por ternas ordenadas) es similar en el sentido de definición a lo hecho para el caso del plano.

La primera definición que adaptaremos para nuestro caso será la de *producto interno* de vectores.

Definición 3.3. Sean $v = (x_1, y_1, z_1)$ y $w = (x_2, y_2, z_2)$ vectores en el espacio. Definimos el *producto interno* de v con w como el escalar

$$\langle v, w\rangle = \langle (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2)\rangle = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2.$$

Nuevamente, tenemos las propiedades fundamentales del producto interno.

Proposición 3.4. *Se cumplen las siguientes propiedades del producto interno:*

1. $\langle u, v\rangle = \langle v, u\rangle$*, para todo* $u, v \in \mathbb{R}^3$*;*

2. $\langle u, u\rangle \geq 0$*, para todo* $u \in \mathbb{R}^3$*;*

3. $\langle u, u\rangle = 0$ *si, y solo si,* $u = 0$*;*

4. $\langle tu, v\rangle = t\langle u, v\rangle$*, para todo* $u, v \in \mathbb{R}^3$ *y* $t \in \mathbb{R}$*;*

5. $\langle u + v, w\rangle = \langle u, w\rangle + \langle v, w\rangle$*, para todo* $u, v, w \in \mathbb{R}^3$.

Definiremos ahora la *norma* de vectores en el espacio.

Definición 3.5. Sea $v = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Definimos la *norma* del vector v como

$$\|v\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

Es inmediato verificar que $\|v\| = \sqrt{\langle v, v\rangle}$. Por ende, las propiedades fundamentales de la norma también se verifican.

Proposición 3.6. *Se cumplen las siguientes propiedades de la norma de un vector:*

1. $\|v\| \geq 0$*, para todo* $v \in \mathbb{R}^3$*;*

2. $\|v\| = 0$ *si, y solo si,* $v = 0$*;*

3. $\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$*, para todo* $u, v \in \mathbb{R}^3$*;*

4. $\|t \cdot v\| = |t|\|v\|$*, para todo* $v \in \mathbb{R}^3$*,* $t \in \mathbb{R}$.

Debido a las propiedades del producto interno, podemos reutilizar la prueba dada en la observación 1.18 para obtener la *desigualdad de Cauchy-Schwarz*.

Teorema 3.7. *Dados* $u, v \in \mathbb{R}^3$*,*

$$|\langle u, v\rangle| \leq \|u\|\|v\|,$$

y la igualdad se da si, y solo si, u *y* v *son paralelos.*

Dados dos puntos $P, Q \in \mathcal{E}$, podemos hallar la *distancia* entre ellos mediante la norma del vector con origen en P y final en Q.

Definición 3.8. Dados P, Q puntos en el espacio $\mathcal{E}$, la *distancia* entre P y Q es dada por

$$d(P, Q) = \|P - Q\| = \sqrt{\langle P - Q, P - Q\rangle}.$$

Así, si $P = (x_1, y_1, z_1)$ y $Q = (x_2, y_2, z_2)$ entonces

$$d(P, Q) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2}$$

Por supuesto, la distancia entre puntos del espacio cumple las propiedades fundamentales de la distancia.

1. $d(P, Q) \geq 0$, para cualquier $P, Q \in \mathcal{E}$;

2. $d(P, Q) = 0$ si, y solamente si, $P = Q$;

3. $d(P,Q) \leq d(P,R) + d(R,Q)$, para cualesquiera $P, Q, R \in \mathcal{E}$;

Además, $d(P,Q) = d(P,R) + d(R,Q)$ si, y solamente si, R está en el segmento de recta que une P y Q. Esto permite llamar a la distancia que hemos definido como *distancia euclidiana*.

Un vector $v \in \mathbb{R}^3$ se denomina *unitario* si $\|v\| = 1$. Observamos que, como en el caso del plano, todo vector $v \neq 0$ es paralelo a un vector unitario, pues

$$v = \|v\| \frac{v}{\|v\|}.$$

y $\dfrac{v}{\|v\|}$ es unitario.

Mediante el producto interno, podemos generalizar la noción de *ortogonalidad* al espacio.

Definición 3.9. Diremos que dos vectores $u, v \in \mathbb{R}^3$ son *ortogonales* si $\langle u, v \rangle = 0$.

Observe que no hemos establecido aún el ángulo entre vectores en el espacio. La *fórmula* para el cálculo del ángulo será análoga al caso del plano.

Definición 3.10. Sean u y v vectores en $\mathbb{R}^3$. El *ángulo* entre u y v es el ángulo $\theta \in [0, \pi]$ tal que

$$\cos(\theta) = \frac{\langle u, v \rangle}{\|u\| \|v\|}.$$

Queremos ahora definir la proyección ortogonal de un vector sobre otro no nulo. Consideremos u y v en $\mathbb{R}^3$, con $v \neq 0$. Nuevamente, por lo visto en la observación 1.18, $t_0 = \dfrac{\langle u, v \rangle}{\|v\|^2}$ es el que minimiza la función $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $g(t) = \|u - tv\|^2$. Denotemos $w = t_0 v = \dfrac{\langle u, v \rangle}{\|v\|^2} v$, entonces w es paralelo a v. Además,

$$\langle v, u - w \rangle = \langle v, u \rangle - \langle v, w \rangle = \langle u, v \rangle - \frac{\langle u, v \rangle}{\|v\|^2} \|v\|^2 = 0.$$

Es decir $u - w$ es ortogonal a v. Como en el caso del plano, daremos nombre propio al vector w.

Definición 3.11. Sea $v \in \mathbb{R}^2$, no nulo. Dado $u \in \mathbb{R}^2$, definimos la *proyección ortogonal* de u sobre v como el vector

$$\operatorname{Proy}_v u = \frac{\langle u, v \rangle}{\|v\|^2} v.$$

Del mismo modo, definimos la *componente ortogonal* de u sobre v como

$$\operatorname{Comp}_v u = \frac{\langle u, v \rangle}{\|v\|}.$$

Finalmente, observamos que se cumplen propiedades análogas a las de la proyección ortogonal en el plano.

Proposición 3.12. *Sea* $v \in \mathbb{R}^2$, $v \neq 0$. *Entonces*

1. $\operatorname{Proy}_v u = \operatorname{Proy}_{t\cdot v} u$, *para todo* $u \in \mathbb{R}^3$ *y* $t \in \mathbb{R}$, $t \neq 0$*;*
2. $\operatorname{Proy}_v(u + w) = \operatorname{Proy}_v u + \operatorname{Proy}_v w$, *para todo* $u, w \in \mathbb{R}^3$*;*
3. $\operatorname{Proy}_v(t \cdot u) = t \cdot \operatorname{Proy}_v u$, *para todo* $u \in \mathbb{R}^3$ *y* $t \in \mathbb{R}$*.*

3.3. El producto vectorial y el triple producto escalar

Observemos que no hemos definido el análogo en $\mathbb{R}^3$ de la noción de *vector ortogonal* de $v \in \mathbb{R}^3$. Recordemos que en el caso del plano, si $u \in \mathbb{R}^2$ entonces todo vector ortogonal a u era paralelo a $u^\perp$. Dicho de otra manera, $u^\perp$ *genera* a los vectores ortogonales de u. Esto no es el caso en el espacio, pues, dado un vector $v \in \mathbb{R}^3$, existen infinitos vectores ortogonales a v no paralelos entre si.

Ejemplo 3.13. Sea $v = (1, 1, 1)$. Podemos considerar, para cada $t \in [0, \frac{\pi}{2}\rangle$, el vector $u_t = (\cos(t)^2, \sin(t)^2, -1)$. Claramente v y u_t son ortogonales, para cualquier t. Además, es inmediato verificar que u_t y u_s no son paralelos, cuando $t \neq s$.

Así como el vector *ortogonal* en el plano fue definido para hallar rápidamente un vector perpendicular a uno dado, el *producto vectorial* de dos vectores nos permitirá hallar un vector perpendicular a dos vectores dados en el espacio.

Sean $u = (x_1, y_1, z_1)$ y $v = (x_2, y_2, z_2)$ vectores en $\mathbb{R}^3$. Definimos el *producto vectorial* de u y v mediante sus componentes, como

$$u \times v = (y_1z_2 - z_1y_2, z_1x_2 - x_1z_2, x_1y_2 - y_1x_2).$$

Es usual en la literatura encontrar la siguiente fórmula nemotécnica del producto vectorial

$$\begin{aligned} u \times v &= \det \begin{bmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{bmatrix}, \\ &= \det \begin{bmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{bmatrix} \hat{\imath} - \det \begin{bmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{bmatrix} \hat{\jmath} + \det \begin{bmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{bmatrix} \hat{k} \end{aligned}$$

donde $\hat{\imath}, \hat{\jmath}, \hat{k}$ son los vectores canónicos de $\mathbb{R}^3$.

Se sigue de esta definición que el vector $u \times v$ es ortogonal a u y a v a la vez, pues

$$\begin{aligned} \langle u, u \times v\rangle &= x_1(y_1z_2 - z_1y_2) + y_1(z_1x_2 - x_1z_2) + z_1(x_1y_2 - y_1x_2), \\ &= 0, \\ \langle v, u \times v\rangle &= x_2(y_1z_2 - z_1y_2) + y_2(z_1x_2 - x_1z_2) + z_2(x_1y_2 - y_1x_2), \\ &= 0. \end{aligned}$$

Geométricamente, el producto vectorial de dos vectores u y v es un vector ortogonal a ambos, siempre y cuando no sean paralelos. La dirección de $u \times v$ en el espacio se determina mediante la *regla de la mano derecha*.

La siguiente proposición contiene a las propiedades fundamentales del producto vectorial.

Proposición 3.14. *Se cumplen las siguientes propiedades del producto vectorial en el espacio.*

1. $u \times v = -v \times u$, *para todo* $u, v \in \mathbb{R}^3$*;*
2. $(tu) \times v = t(u \times v) = u \times (tv)$, *para todo* $t \in \mathbb{R}$, $u, v \in \mathbb{R}^3$*;*
3. $u \times (v + w) = u \times v + u \times w$, *para todo* $u, v, w \in \mathbb{R}^3$*;*
4. $u \times (v \times w) = \langle u, w \rangle v - \langle u, v \rangle w$, *para todo* $u, v, w \in \mathbb{R}^3$.

Observación 3.15. Sin usar propiedades del determinante, la prueba de esta proposición es laboriosa, a menos que se establezca cierta notación que **no** usaremos más adelante. Dado $w \in \mathbb{R}^3$, denotemos por w_k a la k-ésima componente de w. Luego si $u^1, u^2 \in \mathbb{R}^3$ entonces $u^1 = (u^1_1, u^1_2, u^1_3)$ y $u^2 = (u^2_1, u^2_2, u^2_3)$. Observemos que en este caso, la k-ésima componente del producto vectorial de u^1 y u^2 es dada por

$$(u^1 \times u^2)_k = (-1)^{k+1}(u^1_i u^2_j - u^1_j u^2_i),$$

donde $\{i, j, k\} = \{1, 2, 3\}$ e $i < j$.

Demostración de la proposición 3.14.

1. Dado cualquier componente $k \in \{1, 2, 3\}$, tenemos

$$\begin{aligned}[u^1 \times u^2]_k &= (-1)^{k+1}(u^1_i u^2_j - u^1_j u^2_i), \\ &= -(-1)^{k+1}(u^2_i u^1_j - u^2_j u^1_i) = -[u^2 \times u^1]_k.\end{aligned}$$

   Luego, $u^1 \times u^2 = -u^2 \times u^1$.

2. Sea $t \in \mathbb{R}$ cualquiera. Para cualquier componente k,

$$\begin{aligned}[(tu^1) \times u^2]_k &= (-1)^{k+1}((tu^1_i)u^2_j - (tu^1_j)u^2_i), \\ &= t(-1)^{k+1}(u^1_i u^2_j - u^1_j u^2_i) = t[u^1 \times u^2]_k.\end{aligned}$$

   Del mismo modo se prueba que $[(tu^1) \times u^2]_k = [u^1 \times (tu^2)]_k$.

3. Dado $u^3 \in \mathbb{R}^3$, tenemos, para cualquier componente k,

$$\begin{aligned}[u^1 \times (u^2 + u^3)]_k &= (-1)^{k+1}(u^1_i (u^2 + u^3)_j - u^1_j (u^2 + u^3)_i) \\ &= (-1)^{k+1}(u^1_i u^2_j + u^1_i u^3_j - u^1_j u^2_i - u^1_j u^3_i) \\ &= (-1)^{k+1}(u^1_i u^2_j - u^1_j u^2_i) + (-1)^{k+1}(u^1_i u^3_j - u^1_j u^3_i) \\ &= [u^1 \times u^2]_k + [u^1 \times u^3]_k.\end{aligned}$$

4. Dado $k \in \{1,2,3\}$, sean $i,j \in \{1,2,3\}$, $i < j$ tales que $\{i,j,k\} = \{1,2,3\}$. Tenemos tres posibilidades para i,j,k, todas análogas. Probaremos el caso en que $i < j < k$, es decir $i = 1$, $j = 2$ y $k = 3$. En este caso

$$\begin{aligned}
[u^1 \times (u^2 \times u^3)]_3 &= (u_1^1(u^2 \times u^3)_2 - u_2^1(u^2 \times u^3)_1) \\
&= u_1^1(u_3^2 u_1^3 - u_1^2 u_3^3) - u_2^1(u_2^2 u_3^3 - u_3^2 u_2^3) \\
&= u_1^1 u_3^2 u_1^3 + u_2^1 u_3^2 u_2^3 - (u_1^1 u_1^2 u_3^3 + u_2^1 u_2^2 u_3^3) \\
&= (u_1^1 u_1^3 + u_2^1 u_2^3) u_3^2 - (u_1^1 u_1^2 + u_2^1 u_2^2) u_3^3 \\
&= (u_1^1 u_1^3 + u_2^1 u_2^3 + u_3^1 u_3^3) u_3^2 - (u_1^1 u_1^2 + u_2^1 u_2^2 + u_3^1 u_3^2) u_3^3 \\
&= [\langle u^1, u^3 \rangle u^2 - \langle u^1, u^2 \rangle u^3]_3.
\end{aligned}$$

□

Es inmediato de las propiedades anteriores el siguiente corolario.

Corolario 3.16. *Dados $u, v, w \in \mathbb{R}^3$, tenemos $(u+v) \times w = u \times w + v \times w$.*

Se sigue de la propiedad *1.* de la proposición 3.14 que el producto vectorial no es conmutativo. Más aún, es fácil verificar que tampoco es asociativo. Por ejemplo consideremos $u = (1,0,0)$ y $v = w = (1,1,0)$. Entonces $u \times v = (0,0,1)$, $(u \times v) \times w = (-1,1,0)$, $v \times w = (0,0,0)$ y así,

$$(u \times v) \times w = (-1,1,0) \neq (0,0,0) = u \times (v \times w).$$

Mediante el producto vectorial, podemos definir el *triple producto escalar* de tres vectores $u, v, w \in \mathbb{R}^3$ como

$$[u,v,w] = \langle u, v \times w \rangle.$$

En caso $u = (x_1, y_1, z_1)$, $v = (x_2, y_2, z_2)$ y $w = (x_3, y_3, z_3)$, tenemos

$$\begin{aligned}
[u,v,w] &= \langle u, v \times w \rangle \\
&= x_1(y_2 z_3 - z_2 y_3) + y_1(z_2 x_3 - x_2 z_3) + z_1(x_2 y_3 - y_2 x_3), \\
&= x_1(y_2 z_3 - z_2 y_3) - y_1(x_2 z_3 - z_2 x_3) + z_1(x_2 y_3 - y_2 x_3), \\
&= \det \begin{bmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

Comenzaremos probando una propiedad de conmutatividad del triple producto escalar.

Proposición 3.17. *Dados $u, v, w \in \mathbb{R}^3$, se tiene $[u,v,w] = [v,w,u] = [w,u,v]$.*

Demostración. Es consecuencia de la invariancia por intercambio de filas del determinante. □

Podemos relacionar el producto vectorial con el producto interno de la siguiente manera.

Proposición 3.18. *Sean $u, v \in \mathbb{R}^3$, entonces*

$$\|u \times v\|^2 = \|u\|^2\|v\|^2 - \langle u, v\rangle^2.$$

Demostración. Usando la proposición 3.17 y el ítem *4. de la proposición 3.14, tenemos*

$$\begin{aligned}\|u \times v\|^2 &= \langle u \times v, u \times v\rangle = [u \times v, u, v],\\ &= [u, v, u \times v] = \langle u, v \times (u \times v)\rangle,\\ &= \langle u, \langle v, v\rangle u - \langle v, u\rangle v\rangle,\\ &= \|v\|^2\|u\|^2 - \langle u, v\rangle^2.\end{aligned}$$ □

Corolario 3.19. *Sean $u, v \in \mathbb{R}^3$ y $\theta \in [0, \pi]$ el ángulo entre ellos. Entonces*

$$\|u \times v\| = \|u\|\|v\| \operatorname{sen}(\theta).$$

Observe que la fórmula anterior es el área del paralelogramo cuyos lados están dados por los vectores u y v.

En el caso de tener tres vectores $u, v, w \in \mathbb{R}^3$, que supondremos que no están contenidos en un mismo plano, podemos calcular el volumen del paralelepípedo que forman. Supongamos que la base del paralelepípedo es formada por v y w y que el vector u no está en el plano formado por v y w. Luego, por definición, el volumen del paralelepípedo será dado por

$$V = \text{altura} \times \text{área de la base}.$$

Observe que la altura será la magnitud del vector $\operatorname{Proy}_{v\times w} u$ y que el área de la base es dada por $\|v \times w\|$. Luego como $\|\operatorname{Proy}_{v\times w} u\| = \dfrac{|[u, v, w]|}{\|v \times w\|}$, tenemos

$$V = |[u, v, w]|.$$

Es decir, $|[u, v, w]|$ es el volumen del paralelepípedo cuyos lados son los vectores u, v y w.

3.4. Algebra lineal de vectores en el espacio

Las definiciones de combinación lineal, generación, independencia lineal y base de $\mathbb{R}^2$ son inmediatamente generalizadas en $\mathbb{R}^3$. En general, son definidas para cualquier *espacio vectorial*. Por completitud, y para recordar las definiciones, las enunciaremos nuevamente.

Definición 3.20. Sean $v_1, \ldots, v_n \in \mathbb{R}^3$ vectores en el plano. Diremos que un vector v es una *combinación lineal* de los vectores $v_1, \ldots, v_n$ si existen coeficientes reales $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ tales que

$$v = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_n v_n.$$

En este caso, diremos que $v_1, \ldots, v_n$ *generan* v. Además, si todo vector $v \in \mathbb{R}^3$ es generado por $v_1, \ldots, v_n$, diremos que $v_1, \ldots, v_n$ *generan* $\mathbb{R}^3$.

Definición 3.21. Diremos que los vectores $v_1, \ldots, v_n \in \mathbb{R}^3$ son *linealmente independientes* si, escribiendo

$$\overline{0} = \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n,$$

con $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}$, la única posibilidad para estos es

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_n = 0.$$

Por otro lado, si $v_1, \ldots, v_n$ no son linealmente independientes entonces se denominan *linealmente dependientes*.

Definición 3.22. Diremos que un conjunto $v_1, \ldots, v_n$ es una *base* de $\mathbb{R}^3$ si estos son linealmente independientes y generan $\mathbb{R}^3$.

Ejemplo 3.23. Sean $v_1 = (1, 2, 3)$, $v_2 = (2, 0, 3)$, $v_3 = (-1, 1, 0)$ y $v = (3, 7, 0)$. En este caso, tenemos

$$v = (3, 7, 0) = 2(1, 2, 3) - 2(-2, 0, 3) + 3(-1, 1, 0).$$

Luego v es combinación lineal de v_1, v_2 y v_3. Supongamos que podemos expresar $\overline{0}$ como combinación lineal de v_1, v_2 y v_3, es decir,

$$\overline{0} = (0, 0, 0) = \alpha(1, 2, 3) + \beta(-2, 0, 3) + \gamma(-1, 1, 0).$$

Luego $\beta = -\alpha$, $2\alpha + \gamma = 0$ y $3\alpha = \gamma$. De aquí, obtenemos que $\alpha = 0$, $\beta = 0$ y $\gamma = 0$. Por lo tanto v_1, v_2 y v_3 son linealmente independientes. Observe que esto no ocurre en $\mathbb{R}^2$, pues probamos que tres vectores cualesquiera siempre son linealmente dependientes.

Finalmente, observamos que v_1, v_2, v_3 generan todo $\mathbb{R}^3$ pues, para $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, arbitrario,

$$\begin{aligned}(x, y, z) = \left(x + y - \frac{2}{3}z\right)(1, 2, 3) \\ + (z - x - y)(2, 0, 3) \\ + \left(\frac{4}{3}z - 2x - y\right)(-1, 1, 0).\end{aligned}$$