FECHA
15 DE AGOSTO
DEL 2016

Primera clase de Cálculo Vectorial

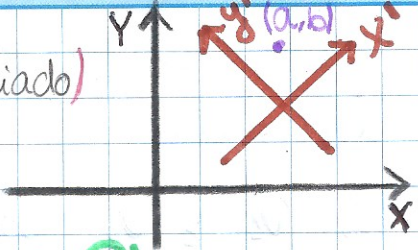
Prof:Juan Cribillero Aching

Cálculo Vectorial

15/08/16

Profesor: Juan Cribillero Aching (licenciado)

email: juan_aching@hotmail.com



Geometría Analítica en el Plano

Consideremos $\mathcal{P}$ un plano conocidas las nociones de puntos recta y plano además algunos conceptos de segmentos, ángulos, etc.

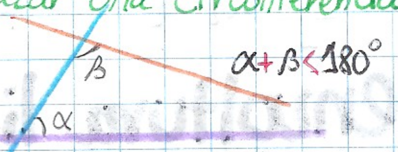
Supongamos que en $\mathcal{P}$ se cumplen los axiomas de Euclides:

1) Por dos puntos distintos, existe sola una recta que las contiene.

2) Todo segmento rectilíneo se puede prolongar indefinidamente.

3) Con un centro y un radio dado se puede trazar una circunferencia.

4) Todos los ángulos rectos son iguales.



5) Si una recta interseca a otras dos formando a un lado ángulos internos, y la suma de estos es menor que dos rectos, las dos rectas prolongadas indefinidamente se encontrarán de ese lado.

¿Qué es una función p-lineal? Pequeña digresión :)

Se dice que la aplicación:

$\phi : V_1 \times \dots \times V_p \to \mathbb{R}$ donde $V_1, \dots, V_p$ son espacios vectoriales de dimensión finita, es una función p-lineal si cumple la condición:

$$\phi(x_1, \dots, x_{i-1}, \alpha x_i + \beta y_i, x_{i+1}, \dots, x_p)$$

$$= \alpha \phi(x_1, \dots, x_p) + \beta \phi(x_1, \dots, x_{i-1}, y_i, x_{i+1}, \dots, x_p),$$

cualesquiera que sean $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $x_j \in V_j$ para $j = 1, \dots, p$ e $y_i \in V_i$.

¡Un dibujo no justifica, se debe practicar las demostraciones!

Libros que recomiendo:

[1] P. R. Halmos Espacios Vectoriales Finito Dimensionales Editorial Limusa. ✓✓

[2] Serge Lang Álgebra ✓✓✓

[3] D. J. S. Robinson A Course in Linear Algebra World Scientific. ✓

[4] Gilbert Strang Linear Algebra and its Applications ✓

Finalmente, supongamos que sabemos medir en este plano $\mathcal{P}$, es decir, dado dos puntos $P, Q \in \mathcal{P}$, podemos determinar la distancia entre P y Q, lo denotaremos $d(P,Q)$

Podemos considerar la distancia como una función

$$d(P,Q) : \mathcal{P} \times \mathcal{P} \to \mathbb{R}$$

que cumple las siguientes condiciones:

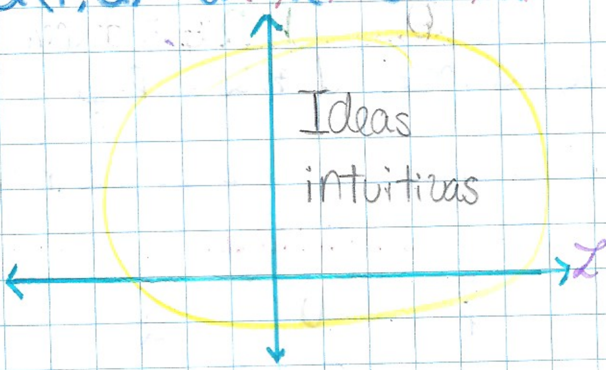
i) $d(P,Q) \geq 0$; $\forall\, P, Q \in \mathcal{P}$.

ii) $d(P,Q) = 0 \Leftrightarrow P = Q$. ($P$ es Q).

iii) $d(P,Q) \leq d(P,R) + d(R,Q)$ $\forall\, P, Q, R \in \mathcal{P}$

iv) $d(P,Q) = d(P,R) + d(R,Q) \Leftrightarrow R$ está en el segmento $\overline{PQ}$.

$P - R - Q$ Simbología



Consejo del profesor:

Llegar puntual al examen.

Sistema de Coordenadas Cartesianas

Sea $\mathcal{L}$ una recta y consideremos un punto $O \in \mathcal{L}$, dicho punto O divide a la recta en dos partes disjuntas y a los elementos de una de (determina) las partes.

Puntos a la derecha de O y a los elementos de la otra parte **puntos a la izquierda** de O.

Consideremos a la recta $\mathcal{L}$ un eje con origen O, asignaremos a cada punto de la recta $\mathcal{L}$ (a cada punto vamos a asignarle un número real) un número real de la siguiente manera:

Dado $P \in \mathcal{L}$, definimos $p \in \mathbb{R}$

La coordenada P, depende de O y de la semirrecta.

$$p = \begin{cases} 0 & , \text{ si } P = O \\ d(O,P) & , \text{ si } P \text{ está a la derecha de } O. \\ -d(O,P) & , \text{ si } P \text{ está a la izquierda de } O. \end{cases}$$

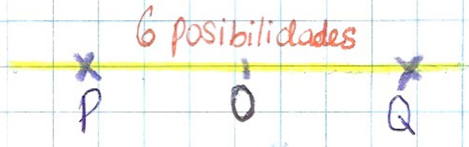
A tal número real p lo llamaremos coordenada de un punto P de la recta $\mathcal{L}$.

En adelante, dado un eje $\mathcal{L}$, la semirrecta que contiene a los puntos de coordenadas positivas lo llamaremos semieje positivo, y a la semirrecta que contiene a los puntos de coordenadas negativas lo llamaremos semieje negativo.

Proposición: Sea $\mathcal{L}$ un eje con origen O. Si $P, Q \in \mathcal{L}$ tienen coordenadas $p, q \in \mathbb{R}$ respectivamente, entonces $d(P,Q) = |p-q|$.

Prueba: Dependiendo de la posición relativa entre los puntos P; Q y O. Tenemos seis posibilidades.

Consideremos una de ellas:



Supongamos que Q está a la izquierda de O y P está a la derecha de O.

$$q = -d(O;Q) \leq 0 \quad y \quad p = d(O;P)$$

$$O \in \overline{PQ} \Leftrightarrow d(P;Q) = d(P;O) + d(O;Q)$$
$$= p + (-q)$$
$$= p - q \geq 0$$

En efecto, la distancia de P a Q es el valor absoluto de p menos q.

$$d(P,Q) = |p-q| \blacksquare$$

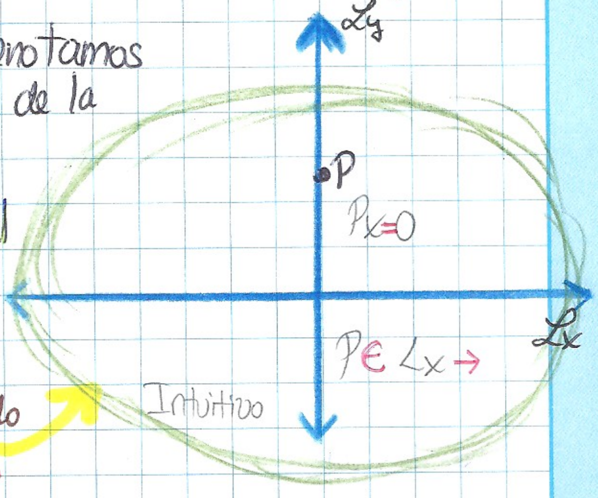
Consideremos dos ejes $\mathcal{L}_x$ y $\mathcal{L}_y$ perpendiculares entre sí con el mismo origen O.

Sea $p \in P$ fijo. Si $p \in \mathcal{L}_y$, entonces denotemos $P_x = 0$.

En caso contrario $p \notin \mathcal{L}_y$, por el (quinto) postulado de Euclides, por p pasa una única recta paralela a $\mathcal{L}_y$ y así consideramos P_x la intersección de tal recta con $\mathcal{L}_x$.

Pseudofija:
En la calificada puede venir **Linear subspace**

Del mismo modo: Si $p \in \mathcal{L}_x$, entonces denotamos $P_y = 0$ y de lo contrario P_y como intersección de la única recta paralela a $\mathcal{L}_y$ que pasa por P.

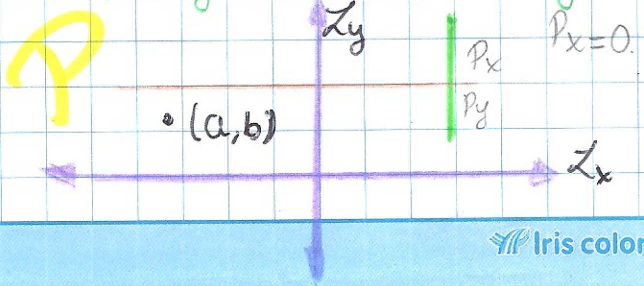


Sea $x \in \mathbb{R}$ la coordenada de P_x respecto al eje $\mathcal{L}_x$ y $y \in \mathbb{R}$ la coordenada de P_y respecto al eje $\mathcal{L}_y$.

Luego asociamos al punto P el par ordenado $(x;y)$. Crear el Sistema Coordenado cartesiano.

Tal par ordenado se denomina Coordenada de P asociados a los ejes $\mathcal{L}_x$ y $\mathcal{L}_y$.

Así, teniendo un par de ejes perpendiculares con origen común, hemos asignado un par ordenado de números reales.

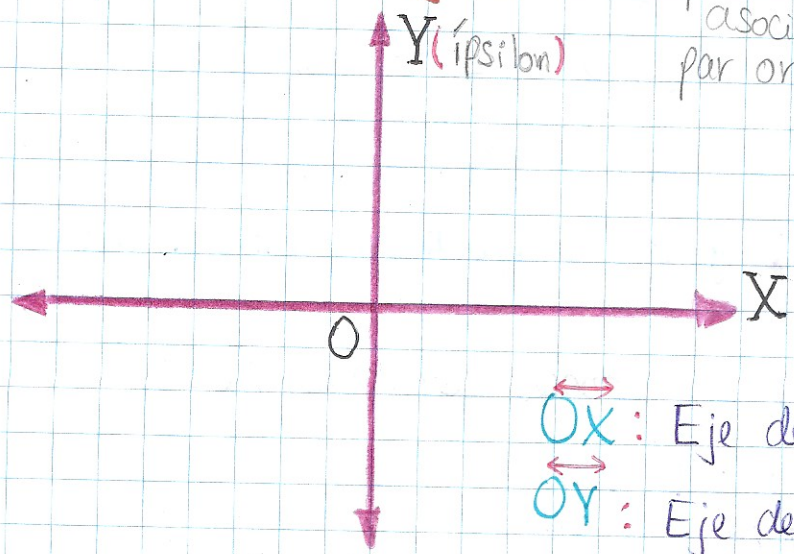


Resolver sin necesidad de dibujar.

A un par de ejes con estas características se le denomina **Sistema de coordenadas cartesianas.**

Representación gráfica

A cada punto del plano le estamos asociando un par ordenado.



$\overleftrightarrow{OX}$: Eje de abscisas

$\overleftrightarrow{OY}$: Eje de ordenadas