Capítulo 1

Geometría analítica en el plano

La idea fundamental que dió origen a la geometría analítica es la de relacionar a los elementos del plano (llamados puntos) con pares ordenados (que son pares de números). Tal relación se denomina *sistema de coordenadas*. Así, un sistema de coordenadas involucra asignarle a cada elemento de un conjunto (que puede ser recta, plano, espacio, esfera, cono, etc.) una cantidad finita (o incluso infinita) de números.

En adelante, consideraremos $\mathcal{P}$ un plano, y supondremos conocidas las nociones de *punto*, *recta*, *segmento*, *ángulo*, etc. Supondremos también que en $\mathcal{P}$ se cumplen los *postulados de Euclides*:

1. por dos puntos diferentes sólo se puede trazar una única línea recta;

2. todo segmento rectilíneo se puede prolongar indefinidamente;

3. con un centro y un radio dado, sólo se puede trazar una única circunferencia;

4. todos los ángulos rectos son iguales;

5. si una recta corta a otras dos formando a un lado ángulos internos, y la suma de estos es menor que dos rectos, las dos rectas prolongadas indefinidamente se encontrarán de ese lado.

Finalmente, supondremos también que sabemos *medir* en nuestro plano, es decir, dados dos elementos $P, Q \in \mathcal{P}$, podemos determinar la distancia entre P y Q. En este caso, denotaremos por $d(P, Q)$ a tal distancia. Podemos considerar entonces la *función distancia* en nuestro plano $\mathcal{P}$, como una función $d : \mathcal{P} \times \mathcal{P} \longrightarrow \mathbb{R}$ que cumple los siguientes hechos inmediatos:

1. $d(P, Q) \geq 0$, para cualquier $P, Q \in \mathcal{P}$;

2. $d(P, Q) = 0$ si, y solamente si, $P = Q$;

3. $d(P, Q) \leq d(P, R) + d(R, Q)$, para cualesquiera $P, Q, R \in \mathcal{P}$;

4. $d(P, Q) = d(P, R) + d(R, Q)$ si, y solamente si, R está en el segmento de recta que une P y Q.

Con estas suposiciones, reconstruiremos la geometría analítica plana estudiada en el colegio y/o academia. Para esto, nuestro objetivo será el de *cuadricular* el plano.

1.1. Sistema de coordenadas cartesianas

Sea $\mathcal{L}$ una recta y consideremos un punto $O \in \mathcal{L}$. Dicho punto O divide a $\mathcal{L}$ en dos partes disjuntas. Escojamos una de estas partes y a los elementos de esta denotémoslos como puntos *a la derecha* de O. Del mismo modo, a los elementos de la parte restante, los llamaremos como puntos *a la izquierda* de O. Así, una vez hecha esta elección, llamaremos a $\mathcal{L}$ como *eje* y a $O \in \mathcal{L}$ como el *origen* del eje $\mathcal{L}$.

Ahora, consideremos $\mathcal{L}$ un eje con origen O. Asignemos a cada punto de $\mathcal{L}$ un número real, de la siguiente manera: dado $P \in \mathcal{L}$, definimos $p \in \mathbb{R}$ como

$$p = \begin{cases} 0, & \text{si } P = O, \\ d(O, P), & \text{si } P \text{ está a la derecha de } O, \\ -d(O, P), & \text{si } P \text{ está a la izquierda de } O. \end{cases}$$

A tal número p lo llamaremos *coordenada* de P asociada al eje $\mathcal{L}$. Es importante observar que la coordenada de un punto P de $\mathcal{L}$ depende del origen O escogido en $\mathcal{L}$ y de que semirecta en $\mathcal{L}$ fue escogida como "a la derecha" de O.

En adelante, dado un eje $\mathcal{L}$, a la semirecta de $\mathcal{L}$ que contiene a los puntos con coordenadas positivas la denominaremos *semieje positivo*, y a la semirecta de $\mathcal{L}$ que contiene a los puntos con coordenadas negativas la denominaremos *semieje negativo*.

Proposición 1.1. *Sean $\mathcal{L}$ un eje, con origen O. Si $P, Q \in \mathcal{L}$ tienen coordenadas $p, q \in \mathbb{R}$, respectivamente, entonces $d(P, Q) = |p - q|$.*

Demostración. Dependiendo de la posición relativa de P, Q y O tenemos seis posibilidades. Probaremos una de ellas y para el resto se procede de manera análoga. Consideremos, por ejemplo, que Q está a la izquierda de O y P a la derecha de O, esto es, $O \in \overline{PQ}$. En este caso, $q = -d(O, Q) \leq 0$, $p = d(O, P) \geq 0$ y así, $d(P, Q) = d(Q, O) + d(O, P) = -q + p = |p - q|$. $\square$

Una vez determinado como asignarle coordenadas a puntos en una recta, podemos hacer lo propio para puntos del plano. Consideremos dos ejes $\mathcal{L}_X$ y $\mathcal{L}_Y$ perpendiculares, ambos con el mismo origen O. Sea $P \in \mathcal{P}$ fijo. Si $P \in \mathcal{L}_Y$ entonces denotemos $P_X = O$. En caso contrario, como $P \notin \mathcal{L}_Y$, por el quinto postulado de Euclides, por P pasa una única recta paralela a $\mathcal{L}_Y$ y así, consideramos P_X como la intersección de tal recta con $\mathcal{L}_X$. Del mismo modo, si $P \in \mathcal{L}_X$ definimos $P_Y = O$ y, de lo contrario, definimos P_Y como la intersección de la única recta paralela a

$\mathcal{L}_X$ que pasa por P con $\mathcal{L}_Y$. Sea $x \in \mathbb{R}$ la coordenada de P_X respecto del eje $\mathcal{L}_X$ y $y \in \mathbb{R}$ la coordenada de P_Y respecto del eje $\mathcal{L}_Y$. Luego, asociamos a P el par ordenado (x, y). Tal par ordenado se denomina *coordenada* de P asociada a los ejes $\mathcal{L}_X$ y $\mathcal{L}_Y$.

Así, teniendo dos ejes perpendiculares con origen común, hemos asignado a cada punto del plano, un par ordenado de números reales. A un par de ejes con estas características, los llamaremos *sistema de coordenadas cartesianas*.

En adelante, consideraremos un sistema de coordenadas cartesianas formado por dos ejes: $\mathcal{L}_X$ (denotado $\overrightarrow{Ox}$ y llamado eje x o eje de abscisas) y $\mathcal{L}_Y$ (denotado $\overrightarrow{Oy}$ y llamado eje y o eje de ordenadas). Por simplicidad en la representación gráfica, y también por costumbre, dibujaremos al eje x como una recta horizontal y al eje y como una recta vertical. Además, la región de puntos con pares ordenados con componentes positivas se dibujará “arriba y a la derecha” del origen.

Finalizaremos esta sección estableciendo la fórmula de la distancia en el plano.

Proposición 1.2. *Sean $P, Q \in \mathcal{P}$ con coordenadas (a, b) y (c, d), respectivamente. Entonces*

$$d(P, Q) = \sqrt{(a-c)^2 + (b-d)^2}.$$

Demostración. Sea $\mathcal{L}_1$ la recta paralela al eje x que pasa por P y $\mathcal{L}_2$ la recta paralela al eje y que pasa por Q. Es claro que $\mathcal{L}_1$ y $\mathcal{L}_2$ no son paralelos, luego estas se intersectan en un punto R. Como $\overline{PR} \subset \mathcal{L}_1$, $\overline{RQ} \subset \mathcal{L}_2$ y $\mathcal{L}_1$ es perpendicular a $\mathcal{L}_2$, entonces el triángulo PRQ es un triángulo rectángulo con ángulo recto en R. Probaremos que la distancia de P a R es $|a - c|$. Sea $\mathcal{L}_1'$ la recta paralela al eje y que pasa por P y sea P' la intersección de esta con el eje x. Sea Q' la intersección de $\mathcal{L}_2$ con el eje x. Entonces el cuadrilátero $RPQ'P'$ es un rectángulo, luego $d(P, R) = d(P', Q') = |a - c|$, por la proposición 1.1. De manera análoga, se prueba que la distancia de Q a R es $|b - d|$. Finalmente, por el teorema de Pitágoras, $d(P, Q)^2 = d(P, R)^2 + d(R, Q)^2$, es decir

$$d(P, Q) = \sqrt{(a-c)^2 + (b-d)^2}. \qquad \square$$

1.2. El plano cartesiano

Tenemos identificado entonces el plano $\mathcal{P}$ con el conjunto de pares ordenados de números reales. Tal conjunto lo denotaremos como $\mathbb{R}^2$, más precisamente:

$$\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(x, y) \ : \ x, y \in \mathbb{R}\}.$$

El nombre “par ordenado” proviene del hecho obvio de que es un par de numeros, dispuestos de forma tal que importa el orden en que aparezcan. Por ejemplo, $(-5, 4) \in \mathbb{R}^2$ y $(4, -5) \in \mathbb{R}^2$ pero no se cumple que $(-5, 4) = (4, -5)$. En general, para determinar la igualdad de dos pares ordenados (x, y) y (a, b), debe verificarse

$$x = a \qquad \text{y} \qquad y = b.$$

Dado un par ordenado $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$, diremos que α es la *primera componente* o *componente "x"*, y diremos que β es la *segunda componente* o *componente "y"*.

Así como en el conjunto $\mathbb{R}$ de los números reales existen dos operaciones: la suma y el producto, en $\mathbb{R}^2$ podemos establecer dos operaciones fundamentales: la *suma* de pares ordenados y el *producto* de un par ordenado *por un escalar*.

Definición 1.3. Sean (x, y) y (a, b) elementos de $\mathbb{R}^2$. Definimos la *suma* de (x, y) y (a, b) como el par ordenado

$$(x, y) + (a, b) = (x + y, a + b).$$

Por otro lado, dado $t \in \mathbb{R}$ y $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, definimos el *producto* de (x, y) *por el escalar* t como el par ordenado

$$t \cdot (x, y) = (tx, ty).$$

Las operaciones anteriormente definidas satisfacen las siguientes propiedades.

Proposición 1.4.

1. *La suma es asociativa, es decir* $u + (v + w) = (u + v) + w$, *para todo* $u, v, w \in \mathbb{R}^2$*;*
2. *la suma es conmutativa, es decir* $u + v = v + u$, *para todo* $u, v \in \mathbb{R}^2$*;*
3. *existe un elemento* $\theta \in \mathbb{R}^2$ *tal que* $v + \theta = v$, *para todo* $v \in \mathbb{R}^2$*;*
4. *para todo* $v \in \mathbb{R}^2$, *existe* $w \in \mathbb{R}^2$ *tal que* $v + w = \theta$*;*
5. *la suma y el producto por un escalar son distributivos entre ellos, es decir,* $\alpha(u+v) = \alpha u+\alpha v$ *y* $(\alpha+\beta)v = \alpha v+\beta v$, *para todo* $u, v \in \mathbb{R}^2$ *y* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$*;*
6. *el producto de escalares y el producto por un escalar son asociativos, es decir,* $\alpha(\beta v) = (\alpha\beta)v$, *para todo* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ *y* $v \in \mathbb{R}^2$*;*
7. $1 \in \mathbb{R}$ *también es neutro multiplicativo del producto escalar, es decir,* $1 \cdot v = v$, *para todo* $v \in \mathbb{R}^2$.

Demostración. Probaremos los ítems 2, 3 y 4.

2. Sean $u = (x_u, y_u)$ y $v = (x_v, y_v)$, arbitrarios, entonces

$$u + v = (x_u + x_v, y_u + y_v) = (x_v + x_u, y_v + y_u) = v + u.$$

Observe que hemos usado que la suma de números reales es conmutativa.

3. Para probar la existencia de algo, basta construirlo y mostrarlo explícitamente. Consideremos $\theta = (0, 0) \in \mathbb{R}^2$ (que claramente existe) y probemos que cumple la condición mencionada. Sea $v = (x, y)$ cualquiera, entonces

$$v + \theta = (x + 0, y + 0) = (x, y) = v,$$

como queríamos probar.

4. Consideremos ahora $v = (x, y)$ cualquiera. Para probar que existe $w \in \mathbb{R}^2$ tal que $v + w = \theta$, definimos $w = (-x, -y)$. Entonces

$$v + w = (x, y) + (-x, -y) = (x + (-x), y + (-y)) = (0, 0) = \theta. \quad \square$$

En adelante, al par $(0, 0) \in \mathbb{R}^2$ lo denotaremos con el símbolo $\overline{0}$ o incluso, cuando no haya peligro de confusión, con el símbolo 0. Del mismo modo, si $v = (x, y)$, denotaremos $-v = (-x, -y)$.

La proposición 1.4 implica que el conjunto $\mathbb{R}^2$, junto con las operaciones de suma y producto por un escalar, cumple los axiomas de *espacio vectorial*.

1.3. Vectores en el plano

Un concepto que no es visto en los cursos básicos de geometría, pero si en los de física, es el de vector. Usualmente, un vector se define como un objeto geométrico que posee *magnitud* y *sentido*, y es representado gráficamente como una flecha. Así, la magnitud y el sentido del vector estarían relacionados al tamaño y dirección a la que apunta la flecha. Otra manera de definir vectores es establecer la noción de *segmento dirigido*, esto es, un segmento de recta en el cual se distinguen el punto de inicio y el punto final.

Para definir, lo más formal posible, la noción de vector, dibujemos una flecha en el plano $\mathcal{P}$ e intentemos determinar sus características. Consideremos el punto P que marca el inicio de la flecha y el punto Q que marca el final (osea el punto del plano donde se ubica la *punta* de la flecha). Observe que para "reconstruir" nuestra flecha basta determinar los puntos P y Q, y determinar el punto de inicio. Así, un *vector* está determinado por un par ordenado de puntos (P, Q), donde P representa el origen del vector y Q el final (o destino) del vector. ¿Que significa "magnitud" y "sentido" en este caso? La magnitud del vector está dada por la distancia entre P y Q. Sin embargo, sin un sistema de coordenadas, el "sentido" no está bien determinado.

Consideremos entonces un sistema de coordenadas cartesianas en $\mathcal{P}$. Entonces, nuestra flecha se encuentra ahora dibujada sobre el plano "cuadriculado". En este caso, tanto P y Q se representan por pares ordenados. Observe que el "sentido" del vector no depende de P, sino de en que posición se encuentra Q respecto de P y en que posición están ambos respecto de los ejes coordenados. Así, consideremos un sistema de coordenadas, con ejes paralelos al sistema original, pero con origen de coordenadas el punto de origen del vector. Entonces, en este nuevo sistema, P tiene coordenadas $(0, 0)$ y la magnitud y el sentido del vector está determinados completamente por las coordenadas de Q. Esto significa que podemos caracterizar un vector por un par ordenado, es decir, por un elemento de $\mathbb{R}^2$.

Es aquí donde surgen confusiones respecto a como interpretar los elementos de $\mathbb{R}^2$. Para fijar las ideas, consideremos el par $(3, 1) \in \mathbb{R}^2$ y fijemos un sistema de coordenadas en $\mathcal{P}$. Por un lado $(3, 1)$ representa al *punto* de $\mathcal{P}$ que está a 3 unidades de distancia y a la derecha del eje y y a 1 unidad de distancia y hacia arriba del eje

x. Por otro lado, $(3,1)$ representa al *vector* en $\mathcal{P}$ que teniendo como origen $(0,0)$ tiene como final $(3,1)$. Más aun, $(3,1)$ representará a cualquier vector en $\mathcal{P}$ con origen P y final Q tal que las coordenadas de Q en un sistema coordenado con ejes paralelos al sistema original y con origen en P son $(3,1)$.

Observación 1.5. Algunos autores usan el nombre *radio vector* para denotar a los vectores que tienen como origen al punto $(0,0)$.

Para ayudar a mitigar este problema, consideraremos símbolos diferentes para denotar puntos y vectores en el plano. Usualmente, denotaremos los puntos del plano con letras mayúsculas (P, Q, R, A,...) y a los vectores con letras minúsculas (v, w, n,...). Además, al vector con origen P y destino Q lo denotaremos como $\overrightarrow{PQ}$.

Proposición 1.6. *Fijemos un sistema de coordenadas en $\mathcal{P}$. Sean $P,Q \in \mathcal{P}$ con coordenadas (p_1,p_2) y (q_1,q_2), respectivamente. Entonces el vector $\overrightarrow{PQ}$ es representado por el par ordenado $Q - P = (q_1 - p_1, q_2 - p_2)$.*

Ejemplo 1.7. Consideremos $P, Q \in \mathcal{P}$ con coordenadas $(2,1)$ y $(1,-1)$ respectivamente. Sea $v = \overrightarrow{PQ}$. Entonces $v = Q - P = (-1,-2)$.

¿Cómo se interpretan geométricamente las operaciones de suma y producto por un escalar de $\mathbb{R}^2$? Si consideramos los elementos de $\mathbb{R}^2$ como vectores, podemos interpretar dichas operaciones. Para el caso de la suma, si $v = (x_1,y_1)$ y $w = (x_2,y_2)$ son (radio) vectores en el plano, entonces $v + w = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$ es el (radio) vector cuyo final es el punto final del vector w, considerando como su origen el punto final del vector v. Del mismo modo, si $u = (x,y)$ es un (radio) vector y $t > 0$, entonces $t \cdot u$ es el (radio) vector cuya magnitud es la magnitud de u multiplicada por t y cuyo sentido es el mismo de u. Si $t = 0$ entonces $t \cdot u$ es el *vector nulo*, es decir, el vector con magnitud cero. Finalmente, si $t < 0$ entonces $t \cdot u$ es el vector con la misma magnitud que $(-t) \cdot u$ y sentido opuesto.

Note que estas operaciones no tienen sentido geométrico si interpretamos los elementos de $\mathbb{R}^2$ como puntos. Así, al decir que $\mathbb{R}^2$ es un espacio vectorial, estamos interpretando los elementos de $\mathbb{R}^2$ como vectores en el plano y no como puntos del plano.

Para terminar de caracterizar los vectores en el plano, recordemos que la *magnitud* de un vector es la distancia entre sus puntos de origen y destino. Tal propiedad de un vector puede caracterizarse de la siguiente manera.

Definición 1.8. Sea $v = (x,y) \in \mathbb{R}^2$ un vector en el plano. Definimos la *norma* (o *magnitud*) de v como el número

$$\|v\| = d((0,0),(x,y)) = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Así, la norma de un vector se interpreta como el tamaño del vector. Observe que la norma está definida como la distancia del punto final del radio vector v a su origen (que es el origen del sistema de coordenadas). Podemos considerar entonces la *función norma* como la función $\|\cdot\| : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$.

Proposición 1.9. *Se cumplen las siguientes propiedades de la norma de un vector:*

1. $\|v\| \geq 0$*, para todo* $v \in \mathbb{R}^2$*;*

2. $\|v\| = 0$ *si, y solo si,* $v = 0$*;*

3. $\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$*, para todo* $u, v \in \mathbb{R}^2$*;*

4. $\|t \cdot v\| = |t|\|v\|$*, para todo* $v \in \mathbb{R}^2$*,* $t \in \mathbb{R}$*.*

Juntando la proposición anterior y la proposición 1.6 obtenemos

Corolario 1.10. *Si* $P, Q \in \mathcal{P}$ *entonces*

$$d(P, Q) = \|\overrightarrow{PQ}\| = \|P - Q\|.$$

Finalizaremos la sección estableciendo dos definiciones que usaremos a menudo. Diremos que dos vectores son *paralelos* si uno es el producto del otro por un escalar. Escrito en notación simbólica, diremos que los vectores v y w son paralelos si, o bien $v = 0$ o bien existe $t \in \mathbb{R}$ tal que $v = tw$. De este modo, establecemos por definición que el vector 0 es paralelo a cualquier vector de $\mathbb{R}^2$.

Diremos que un vector es *unitario* si este tiene norma igual a 1. En notación simbólica, u es unitario si $\|u\| = 1$. Dado cualquier $v \in \mathbb{R}^2$, $v \neq 0$, entonces el vector $u = \dfrac{1}{\|v\|}v$ satisface

$$\|u\| = \left\| \frac{1}{\|v\|}v \right\| = \frac{1}{\|v\|}\|v\| = 1.$$

Es decir u es unitario y $v = \|v\|u$. Esto quiere decir que todo vector no nulo es paralelo a un vector unitario.

1.4. Producto interno y ángulo entre vectores

Un concepto importante al momento de trabajar con vectores es el *ángulo* entre estos. Un caso particular importante es cuando dos vectores son *perpendiculares*, esto es, cuando forman un ángulo recto. Dado que ahora representamos vectores en el plano como elementos de $\mathbb{R}^2$, es necesaria una manera de determinar el ángulo de dos vectores a partir de sus representaciones como pares ordenados. Para esto, introduciremos la noción de *producto interno*.

Definición 1.11. Sean $v = (x_1, y_1)$ y $w = (x_2, y_2)$ vectores en el plano. Definimos el *producto interno* de v con w como el escalar

$$\langle v, w\rangle = \langle (x_1, y_1), (x_2, y_2)\rangle = x_1x_2 + y_1y_2.$$

Observación 1.12. Es usual en la literatura llamar al producto interno como *producto escalar* y denotar $\langle v, w\rangle$ como $v \cdot w$. Nosotros no usaremos tal notación en principio para no confundir con el término "producto por un escalar" y también para estar acorde a los libros de matemática más avanzada.

Podemos considerar al producto interno como una función. En este caso, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ denota una función con dominio $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$ (cuyos elementos son pares de pares ordenados) y su rango es $\mathbb{R}$. Claramente no escribiremos $\langle \cdot, \cdot \rangle(u, v)$ sino $\langle u, v\rangle$.

La siguiente proposición contiene las principales propiedades del producto interno.

Proposición 1.13. *Se cumplen las siguientes propiedades del producto interno:*

1. $\langle u, v\rangle = \langle v, u\rangle$, *para todo* $u, v \in \mathbb{R}^2$*;*
2. $\langle u, u\rangle \geq 0$, *para todo* $u \in \mathbb{R}^2$*;*
3. $\langle u, u\rangle = 0$ *si, y solo si,* $u = 0$*;*
4. $\langle tu, v\rangle = t\langle u, v\rangle$, *para todo* $u, v \in \mathbb{R}^2$ *y* $t \in \mathbb{R}$*;*
5. $\langle u + v, w\rangle = \langle u, w\rangle + \langle v, w\rangle$, *para todo* $u, v, w \in \mathbb{R}^2$.

Demostración. Consideremos $u = (x_1, y_1)$, $v = (x_2, y_2)$, $w = (x_3, y_3)$ y $t \in \mathbb{R}$, arbitrarios. En este caso,

$$\langle v, u\rangle = x_2x_1 + y_2y_1 = x_1x_2 + y_1y_2 = \langle u, v\rangle,$$
$$\langle u, u\rangle = x_1x_1 + y_1y_1 = x_1^2 + y_1^2 \geq 0,$$
$$\langle tu, v\rangle = \langle (tx_1, ty_1), (x_2, y_2)\rangle = tx_1x_2 + ty_1y_2 = t(x_1x_2 + y_1y_2) = t\langle u, v\rangle,$$

lo que prueba *1*, *2* y *4*. Si $u = (0, 0)$ entonces $\langle u, u\rangle = 0 + 0 = 0$, trivialmente. Recíprocamente, si $\langle u, u\rangle = 0$ entonces $x_1^2 + y_1^2 = 0$, y esto implica que $x_1 = y_1 = 0$, es decir, $u = 0$. Así, hemos probado 3. Finalmente,

$$\begin{aligned}
\langle u + v, w\rangle &= \langle (x_1 + x_2, y_1 + y_2), (x_3, y_3)\rangle \\
&= (x_1 + x_2)x_3 + (y_1 + y_2)y_3 \\
&= x_1x_3 + x_2x_3 + y_1y_3 + y_2y_3 \\
&= (x_1x_3 + y_1y_3) + (x_2x_3 + y_2y_3) \\
&= \langle u, w\rangle + \langle v, w\rangle.
\end{aligned}$$

Esto prueba 5. $\square$

Sea $v = (x, y) \in \mathbb{R}^2$, entonces

$$\langle v, v\rangle = x^2 + y^2 = \|v\|^2.$$

Luego, podemos obtener la norma de un vector a partir del producto interno, de la siguiente manera
$$\|v\| = \sqrt{\langle v, v\rangle}.$$
Del mismo modo, la distancia entre dos puntos P y Q está dada por
$$d(P,Q) = \|P-Q\| = \sqrt{\langle P-Q, P-Q\rangle}.$$

Ahora, usaremos el producto interno para determinar el ángulo entre vectores. Comenzaremos con el siguiente lema.

Lema 1.14. *Sea $v = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ un vector no nulo. Entonces*
$$v = (x, y) = \|v\|(\cos(\theta), \operatorname{sen}(\theta)),$$
donde θ es el ángulo que forma el vector v con el semieje x positivo.

Demostración. Consideremos los puntos $P = (x, y)$ y $Q = (x, 0)$. Entonces el triángulo OQP es rectángulo, con ángulo recto en Q. Sea $\phi = \angle POQ$, entonces
$$\cos(\phi) = \frac{d(Q,O)}{d(P,O)} = \frac{|x|}{\|v\|} \quad \text{y} \quad \operatorname{sen}(\phi) = \frac{d(P,Q)}{d(P,O)} = \frac{|y|}{\|v\|}.$$
Se consideran cuatro posibilidades, dependiendo en que parte del plano se encuentre v. Supongamos que v está en el primer cuadrante. Entonces $x \geq 0$, $y \geq 0$ y $\theta = \phi$. Luego
$$v = (x, y) = (\|v\|\cos(\theta), \|v\|\operatorname{sen}(\theta)) = \|v\|(\cos(\theta), \operatorname{sen}(\theta)).$$

Los casos restantes se demuestran de manera análoga. Por ejemplo, supongamos que v está en el cuarto cuadrante. Entonces $x \geq 0$, $y \leq 0$ y $\theta = 2\pi - \phi$. Luego
$$\cos(\theta) = \cos(2\pi - \phi) = \cos(\phi) = \frac{x}{\|v\|},$$
$$\sin(\theta) = \sin(2\pi - \phi) = -\operatorname{sen}(\phi) = -\frac{(-y)}{\|v\|} = \frac{y}{\|v\|},$$
y así tenemos probado este caso. □

Teorema 1.15. *Sean $u, v \in \mathbb{R}^2$ y θ el ángulo que forman u y v. Entonces*
$$\langle u, v\rangle = \|u\|\|v\|\cos(\theta). \tag{1.1}$$

Observación 1.16. En el caso que u o v sea nulo, el ángulo entre u y v no está bien definido. Sin embargo, en este caso, el teorema se cumple para cualquier $\theta \in \mathbb{R}$.

Demostración. Si $u = 0$ o $v = 0$ entonces $\langle u, v\rangle = 0 = \|u\|\|v\|\cos(\theta)$, para cualquier $\theta \in \mathbb{R}$. Supongamos que $u \neq 0$ y $v \neq 0$, y sean α y β los ángulos que forman u y v con el semieje x. Por el lema 1.14, tenemos

$$u = (\|u\|\cos(\alpha), \|u\|\operatorname{sen}(\alpha)), \quad v = (\|v\|\cos(\beta), \|v\|\operatorname{sen}(\beta)).$$

Luego

$$\begin{aligned}\langle u, v\rangle &= \|u\|\|v\|\cos(\alpha)\cos(\beta) + \|u\|\|v\|\operatorname{sen}(\alpha)\operatorname{sen}(\beta)\\ &= \|u\|\|v\|(\cos(\alpha)\cos(\beta) + \operatorname{sen}(\alpha)\operatorname{sen}(\beta))\\ &= \|u\|\|v\|\cos(\alpha-\beta) = \|u\|\|v\|\cos(\beta-\alpha).\end{aligned}$$

El resultado se sigue observando que el ángulo que forman los vectores u y v es o bien $\alpha - \beta$ o bien $\beta - \alpha$. □

Una consecuencia importante del teorema anterior es la *desigualdad de Cauchy-Schwarz.*

Corolario 1.17. *Dados $u, v \in \mathbb{R}^2$,*

$$|\langle u, v\rangle| \leq \|u\|\|v\|,$$

y la igualdad se da si, y solo si, u y v son paralelos.

Demostración. Basta tomar valor absoluto en la ecuación (1.1) y observar que $|\cos(\theta)| \leq 1$, para todo $\theta \in \mathbb{R}$. Finalmente, la segunda parte del corolario se sigue observando que la igualdad se da si, y solo si, $\cos(\theta) = 1$, es decir, $\theta = 0$ o π. □

Observación 1.18. La demostración que hemos de la desigualdad de Cauchy-Schwarz hace uso de la fórmula explícita del producto interno que definimos. La siguiente demostración alternativa, en cambio, solo hace uso de las propiedades intrínsecas del producto interno. Dados $u, v \in \mathbb{R}^2$, es claro que la desigualdad se cumple si $v = 0$. En el caso que $v \neq 0$, consideremos la función $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida como

$$g(t) = \|u - tv\|^2 = \langle u - tv, u - tv\rangle = \|u\|^2 - 2t\langle u, v\rangle + t^2\|v\|^2.$$

Observe que $g(t)$ es un polinomio cuadrático, cuyo coeficiente cuadrático es no negativo. No es difícil concluir que esta función alcanza su mínimo en el punto $t_0 = \dfrac{\langle u, v\rangle}{\|v\|^2}$ cuyo valor es

$$g(t_0) = \|u\|^2 - 2\frac{\langle u, v\rangle^2}{\|v\|^2} + \frac{\langle u, v\rangle^2}{\|v\|^2} = \|u\|^2 - \frac{\langle u, v\rangle^2}{\|v\|^2}.$$

Como $g(t_0) \geq 0$ entonces $\|u\|^2 - \dfrac{\langle u, v\rangle^2}{\|v\|^2} \geq 0$. Esto implica la desigualdad. Observe que se da la igualdad si y solo si $g(t_0) = \|u - t_0 v\|^2 = 0$, es decir $u = t_0 v$.

Definición 1.19. Diremos que dos vectores $u, v \in \mathbb{R}^2$ son *ortogonales* si $\langle u, v\rangle = 0$.

La siguiente consecuencia importante del teorema 1.15 relaciona las nociones de perpendicularidad y ortogonalidad.

Corolario 1.20. *Dos vectores $u, v \in \mathbb{R}^2$, no nulos, son perpendiculares si, y solo si, $\langle u, v\rangle = 0$.*

Demostración. Basta observar que $\langle u, v\rangle = 0$ si, y solamente si, $\cos(\theta) = 0$, donde θ es el ángulo que forman. Luego $\theta = \dfrac{\pi}{2}$ o $\theta = \dfrac{3\pi}{2}$. □

El corolario anterior simplifica bastante los cálculos para determinar si dos vectores son perpendiculares, pues basta comprobar que su producto interno es 0.

Ejemplo 1.21. Sea $v = (2, 5) \in \mathbb{R}^2$. Entonces $(10, -4)$, $(-5, 2)$, $(15, -6)$ son todos ortogonales a v pues

$$\begin{aligned}\langle(2,5),(10,-4)\rangle &= 2\times 10 + 5\times(-4) = 20-20 = 0,\\ \langle(2,5),(-5,2)\rangle &= 2\times(-5) + 5\times 2 = -10+10 = 0,\\ \langle(2,5),(15,-6)\rangle &= 2\times 15 + 5\times(-6) = 30-30 = 0.\end{aligned}$$

Observe que $(10, -4)$, $(-5, 2)$, $(15, -6)$ son todos paralelos entre si. ¿Existirá vector en $\mathbb{R}^2$, ortogonal a $(2, 5)$ pero no paralelo a $(-5, 2)$? La respuesta es no, es decir, todo vector ortogonal a $(2, 5)$ debe ser paralelo a $(-5, 2)$.

Observamos que, en general, un vector en $\mathbb{R}^2$ posee infinitos vectores ortogonales a el, y todos estos son paralelos entre sí. Dotaremos a uno de estos una notación especial. Dado $v = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ definimos su *ortogonal* como $v^\perp = (-y, x)$. Claramente $\langle v, v^\perp\rangle = 0$ y $\|v^\perp\| = \|v\|$. Geométricamente $v^\perp$ es una rotación de 90° de v en sentido antihorario. Es inmediato ver que $(v^\perp)^\perp = -v$.

Consideremos ahora u y v en $\mathbb{R}^2$, con $v \neq 0$. Por lo visto en la observación 1.18, $t_0 = \dfrac{\langle u, v\rangle}{\|v\|^2}$ es el que minimiza la función $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $g(t) = \|u - tv\|^2$. Denotemos $w = t_0 v = \dfrac{\langle u, v\rangle}{\|v\|^2} v$, entonces w es paralelo a v. Además,

$$\langle v, u-w\rangle = \langle v, u\rangle - \langle v, w\rangle = \langle u, v\rangle - \frac{\langle u, v\rangle}{\|v\|^2}\|v\|^2 = 0.$$

Es decir $u - w$ es ortogonal a v, luego es paralelo a $v^\perp$. Así, tenemos la siguiente descomposición de u,

$$u = w + (u-w) = t_0 v + s_0 v^\perp, \tag{1.2}$$

donde s_0 existe pues $u - w$ es paralelo a $v^\perp$. No es difícil concluir que

$$s_0 = \frac{\langle u, v^\perp\rangle}{\|v^\perp\|^2} = \frac{\langle u, v^\perp\rangle}{\|v\|^2}.$$

Definición 1.22. Sea $v \in \mathbb{R}^2$, no nulo. Dado $u \in \mathbb{R}^2$, definimos la *proyección ortogonal* de u sobre v como el vector

$$\operatorname{Proy}_v u = \frac{\langle u, v\rangle}{\|v\|^2} v.$$

Con esta definición, la ecuación (1.2) se expresa como

$$u = \operatorname{Proy}_v u + \operatorname{Proy}_{v^\perp} u,$$

y de aquí, de inmediato tenemos que $\operatorname{Proy}_{v^\perp} u = u - \operatorname{Proy}_v u$.

Por otro lado, la ecuación (1.2) también puede escribirse como

$$u = \frac{\langle u, v\rangle}{\|v\|} \cdot \frac{v}{\|v\|} + \frac{\langle u, v^\perp\rangle}{\|v^\perp\|} \cdot \frac{v^\perp}{\|v^\perp\|},$$

Observe que $\dfrac{v}{\|v\|}$ y $\dfrac{v^\perp}{\|v^\perp\|}$ son unitarios, luego

$$\|\operatorname{Proy}_v u\| = \frac{|\langle u, v\rangle|}{\|v\|} \quad \text{y} \quad \|\operatorname{Proy}_{v^\perp} u\| = \frac{|\langle u, v\rangle|}{\|v\|}.$$

Definición 1.23. Sea $v \in \mathbb{R}^2$, no nulo. Dado $u \in \mathbb{R}^2$, definimos la *componente ortogonal* de u sobre v como

$$\operatorname{Comp}_v u = \frac{\langle u, v\rangle}{\|v\|}.$$

Así, concluimos los cálculos anteriores escribiendo

$$u = \operatorname{Proy}_v u + \operatorname{Proy}_{v^\perp} u = \operatorname{Comp}_v u \cdot \frac{v}{\|v\|} + \operatorname{Comp}_{v^\perp} u \cdot \frac{v^\perp}{\|v^\perp\|}. \tag{1.3}$$

Finalmente, presentamos propiedades inmediatas de la proyección ortogonal.

Proposición 1.24. *Sea $v \in \mathbb{R}^2$, $v \neq 0$. Entonces*

1. $\operatorname{Proy}_v u = \operatorname{Proy}_{t\cdot v} u$, *para todo* $u \in \mathbb{R}^2$ *y* $t \in \mathbb{R}$, $t \neq 0$*;*
2. $\operatorname{Proy}_v(u + w) = \operatorname{Proy}_v u + \operatorname{Proy}_v w$, *para todo* $u, w \in \mathbb{R}^2$*;*
3. $\operatorname{Proy}_v(t \cdot u) = t \cdot \operatorname{Proy}_v u$, *para todo* $u \in \mathbb{R}^2$ *y* $t \in \mathbb{R}$.

1.5. Álgebra lineal de vectores en el plano

Definición 1.25. Sean $v_1, \ldots, v_n \in \mathbb{R}^2$ vectores en el plano. Diremos que un vector v es una *combinación lineal* de los vectores $v_1, \ldots, v_n$ si existen coeficientes reales $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ tales que

$$v = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_n v_n.$$

En este caso, diremos que $v_1, \ldots, v_n$ *generan* v. Además, si todo vector $v \in \mathbb{R}^2$ es generado por $v_1, \ldots, v_n$, diremos que $v_1, \ldots, v_n$ *generan* $\mathbb{R}^2$.

Ejemplo 1.26. Sean $v_1 = (1,2)$, $v_2 = (-1,4)$, $v_3 = (1,0)$ y $v = (3,7)$. En este caso, tenemos

$$v = (3,7) = \frac{3}{2}(1,2) + (-1,4) + \frac{5}{2}(1,0).$$

Luego v es combinación lineal de v_1, v_2 y v_3. Observe que esta no es la única manera de expresar v como combinación lineal de v_1, v_2, v_3, por ejemplo

$$v = (3,7) = \frac{7}{2}(1,2) + 0(-1,4) - \frac{1}{2}(1,0).$$

Del mismo modo, podemos escribir $(0,0)$ como dos diferentes combinaciones lineales de v_1, v_2, v_3, a saber

$$(0,0) = 0(1,2) + 0(-1,4) + 0(1,0) = -2(1,2) + (-1,4) + 3(1,0).$$

Finalmente, observamos que v_1, v_2, v_3 generan todo $\mathbb{R}^2$ pues, para $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, arbitrario,

$$(x,y) = \frac{y}{2}(1,2) + 0(-1,4) + \left(x - \frac{y}{2}\right)(1,0).$$

Ejemplo 1.27. Sean $v_1 = (1,0)$ y $v_2 = (1,1)$. En este caso, para cualquier $(x,y) \in \mathbb{R}^2$,

$$(x,y) = (x-y)(1,0) + y(1,1).$$

Luego v_1 y v_2 generan $\mathbb{R}^2$.

Observación 1.28. Dado cualquier conjunto de vectores $v_1, \ldots, v_n$, el vector $\overline{0} \in \mathbb{R}^2$ siempre es combinación lineal de estos, de la siguiente manera

$$\overline{0} = 0 \cdot v_1 + \cdots + 0 \cdot v_n.$$

La *unicidad* que poseen los coeficientes de las combinaciones lineales de los vectores $(1,0)$ y $(1,1)$ es una propiedad importante y digna de tener nombre propio.

Definición 1.29. Diremos que los vectores $v_1, \ldots, v_n \in \mathbb{R}^2$ son *linealmente independientes* si, escribiendo

$$\overline{0} = \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n,$$

con $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}$, la única posibilidad para estos es

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_n = 0.$$

Por otro lado, si $v_1, \ldots, v_n$ no son linealmente independientes entonces se denominan *linealmente dependientes*.

Probemos que $(1, 0)$ y $(1, 1)$ son linealmente independientes. Sean $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tales que

$$(0, 0) = \alpha(1, 0) + \beta(1, 1).$$

Entonces $0 = \alpha + \beta$ y $0 = \beta$. Esto implica que $\alpha = \beta = 0$, es decir, la única posibilidad para α y β es ser ambos cero. Así, los vectores $(1, 0)$ y $(1, 1)$ tienen la propiedad de ser linealmente independientes y al mismo tiempo generar todo $\mathbb{R}^2$.

Definición 1.30. Diremos que un conjunto $v_1, \ldots, v_n$ es una *base* de $\mathbb{R}^2$ si estos son linealmente independientes y generan $\mathbb{R}^2$.

Los vectores $v_1 = (1, 2)$, $v_2 = (-1, 4)$ y $v_3 = (1, 0)$ del ejemplo 3.17 son linealmente dependientes, pues podemos escribir

$$(0, 0) = (-2) \cdot (1, 2) + 1 \cdot (-1, 4) + 3 \cdot (1, 0).$$

En general, los vectores $v_1, \ldots, v_n$ son linealmente dependientes si existen escalares $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}$, no todos nulos, tales que

$$\overline{0} = \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n.$$

Ejemplo 1.31. Considere $v_1 = (2, 3)$ y $v_2 = (8, 12)$. Estos son linealmente dependientes pues

$$(0, 0) = -4(2, 3) + (8, 12). \tag{1.4}$$

Más aún, de (1.4), tenemos que $(8, 12) = 4(2, 3)$, es decir, $(2, 3)$ y $(8, 12)$ son paralelos.

El comportamiento del ejemplo anterior ocurre en general, como muestra la siguiente proposición.

Proposición 1.32. *Sean $v_1, v_2 \in \mathbb{R}^2$. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. *v_1, v_2 son paralelos;*
2. *v_1, v_2 son linealmente dependientes;*
3. *si $v_1 = (x_1, y_1)$ y $v_2 = (x_2, y_2)$ entonces $x_1 y_2 - x_2 y_1 = 0$.*

Demostración. Supongamos que v_1, v_2 son paralelos, entonces existe $t \in \mathbb{R}$ tal que $v_1 = t v_2$. Esto implica que

$$\overline{0} = v_1 - t v_2 = 1 \cdot v_1 + (-t) \cdot v_2.$$

Como $1 \neq 0$ entonces concluimos que v_1 y v_2 son linealmente dependientes.

Supongamos que v_1 y v_2 son linealmente dependientes. Entonces existen $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, no ambos nulos, tales que $\overline{0} = \alpha v_1 + \beta v_2$, es decir

$$0 = \alpha x_1 + \beta x_2, \tag{1.5}$$

$$0 = \alpha y_1 + \beta y_2. \tag{1.6}$$

De aquí, consideremos cuatro posibilidades:

1. si $x_1 = 0$ y $\beta \neq 0$ entonces, de (1.5), $x_2 = 0$ y así $x_1y_2 - x_2y_1 = 0$;

2. si $x_1 = 0$ y $\beta = 0$ entonces $\alpha \neq 0$ y, de (1.6), $y_1 = 0$, esto implica $x_1y_2 - x_2y_1 = 0$;

3. si $x_1 \neq 0$ y $\beta \neq 0$ entonces, de (1.5),

$$-\frac{\alpha}{\beta} = \frac{x_2}{x_1},$$

y por lo tanto, de (1.6) $y_2 = -\frac{\alpha}{\beta}y_1 = \frac{x_2}{x_1}y_1$;

4. si $x_1 \neq 0$ y $\beta = 0$ entonces, de (1.5), $\alpha = 0$, que es una contradicción. Luego este caso no puede darse.

Así, en cualquier caso, hemos probado que $x_1y_2 - x_2y_1 = 0$.

Finalmente, supongamos que $x_1y_2 = x_2y_1$. Si $v_1 = \overline{0}$ entonces no hay nada que probar. Así, supongamos que $v_1 \neq 0$, es decir $x_1 \neq 0$ o $y_1 \neq 0$. Si $x_1 \neq 0$ entonces $y_2 = y_1\frac{x_2}{x_1}$ y

$$v_2 = (x_2, y_2) = \frac{x_2}{x_1}(x_1, y_1) = \frac{x_2}{x_1}v_1.$$

Del mismo modo, si $y_1 \neq 0$ entonces $x_2 = x_1\frac{y_2}{y_1}$ y

$$v_2 = (x_2, y_2) = \frac{y_2}{y_1}(x_1, y_1) = \frac{y_2}{y_1}v_1.$$

En ambos casos, tenemos que v_1 y v_2 son paralelos. □

Ejemplo 1.33. Si $v \in \mathbb{R}^2$ y $w = \overline{0}$ entonces v y w son paralelos y por tanto v y w son linealmente dependientes. En general, si $v_1, \ldots, v_n$ son tales que al menos uno de ellos es el vector nulo, por ejemplo $v_1 = \overline{0}$, entonces son linealmente dependientes pues

$$\overline{0} = 1 \cdot \overline{v}_1 + 0 \cdot v_2 + \cdots + 0 \cdot v_n = 1 \cdot \overline{0}.$$

Ejemplo 1.34. Sea $v_1 = (x, y) \neq (0, 0)$ y $v_2 = v_1^{\perp} = (-y, x)$. Supongamos que v_1 y v_2 son paralelos, es decir, existe $t \in \mathbb{R}$ tal que $(x, y) = t(-y, x)$. Es obvio que $t \neq 0$, luego tenemos el sistema

$$-ty = x, \qquad tx = y,$$

que implica que $0 = (t^2 + 1)y$. Como $t^2 + 1 > 0$, para cualquier t, entonces $y = 0$ y por tanto $x = 0$. Esto es una contradicción pues $v_1 \neq \overline{0}$. Esta contradicción surge de suponer que v_1 y v_2 son paralelos. Así, para cualquier $v \in \mathbb{R}^2$, v y $v^{\perp}$ son linealmente independientes.

¿Cuantos elementos posee una base de $\mathbb{R}^2$? Hasta ahora hemos exhibido una base de dos elementos, sin embargo, no sabemos *a priori* si podremos encontrar bases de más elementos. Probaremos que en $\mathbb{R}^2$ toda base posee exactamente dos elementos.

Lema 1.35. *Sean $v_1, \ldots, v_n \in \mathbb{R}^2$ tales que $v_1, \ldots, v_k$ es linealmente dependiente, con $k \leq n$. Entonces $v_1, \ldots, v_n$ es linealmente dependiente.*

Demostración. Como $v_1, \ldots, v_k$ es linealmente dependiente entonces existen escalares $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$, no todos nulos, tales que

$$\overline{0} = \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_k v_k.$$

Definiendo $\alpha_{k+1} = \cdots = \alpha_n = 0$, tenemos

$$\overline{0} = \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_k v_k + \alpha_{k+1} v_{k+1} + \cdots + \alpha_n v_n,$$

donde nuevamente $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ no son todos nulos. Así, $v_1, \ldots, v_n$ son linealmente dependientes. □

Presentaremos ahora el resultado principal de esta sección.

Teorema 1.36. *Sean $v_1, v_2 \in \mathbb{R}^2$ linealmente independientes. Entonces v_1 y v_2 generan $\mathbb{R}^2$.*

Demostración. Consideremos $v_1 = (x_1, y_1)$ y $v_2 = (x_2, y_2)$. Por la proposición 1.32, tenemos que $x_1 y_2 - x_2 y_1 \neq 0$. Dado cualquier $v = (x, y) \in \mathbb{R}^2$, consideremos

$$\alpha = \frac{x y_2 - x_2 y}{x_1 y_2 - x_2 y_1}, \qquad \beta = \frac{x_1 y - x y_1}{x_1 y_2 - x_2 y_1}.$$

Luego, un cálculo de rutina muestra que

$$\alpha v_1 + \beta v_2 = v,$$

es decir, v es generado por v_1, v_2. □

Observación 1.37. En la demostración anterior, los valores de α y β fueron obtenidos al aplicar la *regla de Cramer* al sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} \alpha x_1 + \beta x_2 &= x, \\ \alpha y_1 + \beta y_2 &= y. \end{aligned}$$

Corolario 1.38. *Sea $v_1, \ldots, v_n \in \mathbb{R}^2$ un conjunto linealmente independiente. Entonces $n \leq 2$.*

Demostración. Por el lema 3.22, basta probar que cualquier terna de vectores v_1, v_2, v_3 es linealmente dependiente. Esto es inmediato si v_1 y v_2 son paralelos. Luego, supongamos que v_1 y v_2 son linealmente independientes, entonces, por el teorema 3.23, v_3 es generado v_1 y v_2, es decir, $v_3 = \alpha v_1 + \beta v_2$. Luego,

$$\overline{0} = \alpha v_1 + \beta v_2 - v_3,$$

y como $-1 \neq 0$ entonces v_1, v_2, v_3 es linealmente dependiente. □

El recíproco del teorema 3.23 también se cumple.

Proposición 1.39. *Si v_1, v_2 generan $\mathbb{R}^2$ entonces son linealmente independientes.*

Demostración. Supongamos que v_1 y v_2 no son linealmente independientes. Entonces existe $t \in \mathbb{R}$ tal que $v_2 = tv_1$. Luego, como todo $v \in \mathbb{R}^2$ es generado por v_1, v_2,

$$v = \alpha v_1 + \beta v_2 = (\alpha + t\beta)v_1,$$

es decir, todo $v \in \mathbb{R}^2$ es paralelo a v_1, lo cual es una contradicción. □

Supongamos que $v_1, \ldots, v_n$ es una base de $\mathbb{R}^2$, entonces es linealmente independiente. Luego por el corolario 3.25, $n \leq 2$. Pero si $n = 1$ entonces v_1 no puede generar todo $\mathbb{R}^2$, luego $n = 2$. Así, toda base de $\mathbb{R}^2$ posee dos elementos.

Este hecho hace que podamos establecer la *dimensión* de $\mathbb{R}^2$ como la cantidad de elementos que posee cualquier base de $\mathbb{R}^2$. En este caso, como toda base posee dos elementos, tenemos que $\mathbb{R}^2$ tiene dimensión dos.