Capítulo 2

El plano euclidiano

Las dos ideas fundamentales de la geometría euclidiana son el punto y la recta. En esta, estas dos nociones son descritas de manera imprecisa, siendo sus principales características determinadas por los postulados de Euclides. La ventaja de tener un sistema de coordenadas en el plano es que nos permite definir con precisión estas nociones. Consideremos un plano $\mathcal{P}$, dotado de un sistema de coordenadas cartesiano. Identificando $\mathcal{P}$ con $\mathbb{R}^2$ con este sistema, entonces un *punto* es simplemente un elemento de $\mathbb{R}^2$, es decir, par ordenado $P = (x, y)$. Nuestra tarea ahora será la de "definir" recta, también por medio de nuestro sistema de coordenadas.

2.1. Rectas en el plano

Definiremos una recta mediante dos características de esta: una dirección (dada por un vector) y un punto de paso. A esta definición se le denomina *representación vectorial* de la recta.

Definición 2.1. Sea $P_0 \in \mathcal{P}$ y $v \in \mathbb{R}^2$ un vector no nulo. La *recta* que pasa por P_0 con dirección v es el conjunto

$$\mathcal{L}(P_0, v) = \{P = P_0 + tv \in \mathcal{P} \ : \ t \in \mathbb{R}\}.$$

Ejemplo 2.2. Consideremos $P_0 = (2, -1)$ y $v = (1, 1)$. Entonces

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(P_0, v) &= \{(x, y) = (2, -1) + t(1, 1) \ : \ t \in \mathbb{R}\} \\ &= \{(2 + t, t - 1) \ : \ t \in \mathbb{R}\}.\end{aligned}$$

Así, todo punto $(x, y) \in \mathcal{L}(P_0, v)$ es de la forma

$$x = 2 + t, \qquad y = t - 1.$$

En general, si $P_0 = (x_0, y_0) \in \mathcal{P}$ y $v = (v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2$ entonces todo punto $(x, y) \in \mathcal{L}(P_0, v)$ satisface

$$x = x_0 + tv_1, \qquad y = y_0 + tv_2. \tag{2.1}$$

La ecuación (2.1) se denomina *ecuación paramétrica* de la recta.

Dados dos puntos distintos del plano, sabemos que pasa una única recta por ellos. Para hallarla, basta considerar $v = \overrightarrow{P_0P_1} \neq \overline{0}$ y así definir

$$\mathcal{L}(P_0, P_1) := \mathcal{L}(P_0, \overrightarrow{P_0P_1}).$$

Ejemplo 2.3. Sean $P_0 = (1, 3) \in \mathcal{P}$ y $P_1 = (3, -2) \in \mathcal{P}$. Entonces

$$v = \overrightarrow{P_0P_1} = P_1 - P_0 = (2, -5)$$

y $\mathcal{L} = \mathcal{L}(P_0, v) = \{(x, y) = (1, 3) + t(2, -5) \ : \ t \in \mathbb{R}\}$.

La recta generada por el punto de paso P_0 y el vector dirección v no varia si usamos cualquier punto de la recta y cualquier vector dirección paralelo a v, como muestra la siguiente proposición.

Proposición 2.4. *Sea $\mathcal{L} = \mathcal{L}(P_0, v)$ una recta y sean $r, s \in \mathbb{R}$, con $s \neq 0$. Entonces $\mathcal{L} = \mathcal{L}(P_0 + rv, sv)$.*

Demostración. Como $P_0 + rv \in \mathcal{L}(P_0, v)$ entonces, para todo $t' \in \mathbb{R}$,

$$(P_0 + rv) + t'sv = P_0 + (r + t's)v \in \mathcal{L}(P_0, v),$$

es decir, $\mathcal{L}(P_0 + rv, sv) \subset \mathcal{L}(P_0, v)$. Del mismo modo, para todo $t \in \mathbb{R}$,

$$P_0 + tv = (P_0 + rv) + \frac{t - r}{s} sv \in \mathcal{L}(P_0 + rv, sv),$$

implicando que $\mathcal{L} = \mathcal{L}(P_0, v) = \mathcal{L}(P_0 + rv, sv)$. □

Corolario 2.5. *Sean $P_0 \in \mathcal{P}$ y $v \in \mathbb{R}^2$, $v \neq 0$, entonces*

1. *para cualquier $P \in \mathcal{L}(P_0, v)$, $\mathcal{L}(P, v) = \mathcal{L}(P_0, v)$;*
2. *para cualquier $w \neq 0$ paralelo a v, $\mathcal{L}(P_0, w) = \mathcal{L}(P_0, v)$;*
3. *para cualquier $P \in \mathcal{L}(P_0, v)$ y cualquier $w \neq 0$ paralelo a v, $\mathcal{L}(P, w) = \mathcal{L}(P_0, v)$.*

Ejemplo 2.6. Sean $P_0 = (-1, 5) \in \mathcal{P}$ y $v = (-1, 1) \in \mathbb{R}^2$. Entonces $\mathcal{L} = \mathcal{L}(P_0, v)$ tiene como ecuaciones paramétricas

$$x = -1 - t, \qquad y = 5 + t.$$

Consideremos por ejemplo $t = -3$. Entonces $P = (x, y) = (2, 2) \in \mathcal{L}$. Por otro lado $w = 7v = (-7, 7)$ es paralelo a v. Luego, por el teorema 2.4,

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}(P_0, v) = \mathcal{L}(P, w).$$

Observe que si consideramos $\mathcal{L} = \mathcal{L}(P, w)$, el punto P_0 se representa como

$$P_0 = P + \frac{3}{7} w.$$

Sea $P_0 \in \mathcal{P}$, $v \in \mathbb{R}^2$ y cualquier $P \in \mathcal{L}(P_0, v)$. Entonces, para algún $t \in \mathbb{R}$, $P = P_0 + tv$. Esto implica que $\overrightarrow{P_0P} = P - P_0 = tv$, es decir, el vector $\overrightarrow{P_0P}$ es paralelo a v.

Supongamos $P_0 = (x_0, y_0)$ y $v = (v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2$, y consideremos la recta $\mathcal{L}(P_0, v)$. Dado $P = P_0 + tv \in \mathcal{L}(P_0, v)$, tenemos

$$\langle P - P_0, v^\perp \rangle = \langle tv, v^\perp \rangle = 0.$$

Luego, si $P = (x, y)$ entonces

$$0 = \langle (x - x_0, y - y_0), (-v_2, v_1) \rangle = -v_2 x + v_2 x_0 + v_1 y - v_1 y_0.$$

Definiendo $a = -v_2$, $b = v_1$ y $c = v_2 x_0 - v_1 y_0$, concluimos que si $P = (x, y) \in \mathcal{L}(P_0, v)$ entonces

$$ax + by + c = 0.$$

Recíprocamente, si $P = (x, y) \in \mathcal{P}$ es tal que $ax + by + c = 0$, con $a = -v_2$, $b = v_1$ y $c = v_2 x_0 - v_1 y_0$ entonces

$$\begin{aligned} 0 = ax + by + c &= (-v_2)x + v_1 y + (v_2 x_0 - v_1 y_0) \\ &= \langle (x - x_0, y - y_0), (-v_2, v_1) \rangle = \langle P - P_0, v^\perp \rangle. \end{aligned}$$

Es decir $P - P_0$ debe ser paralelo a v y por tanto $P = P_0 + tv \in \mathcal{L}(P_0, v)$. Esto prueba que $P = (x, y) \in \mathcal{L}(P_0, v)$ si, y solamente si, P satisface la ecuación

$$ax + by + c = 0,$$

con $a = -v_2$, $b = v_1$ y $c = v_2 x_0 - v_1 y_0$.

Definición 2.7. Sea $\mathcal{L}$ una recta tal que, todo punto $(x, y) \in \mathcal{L}$ satisface

$$ax + by + c = 0. \tag{2.2}$$

La ecuación (2.2) se denomina *ecuación general de la recta* $\mathcal{L}$. En este caso, denotaremos $\mathcal{L} = \mathcal{L}(a, b, c) = \{(x, y) \in \mathcal{P} \ : \ ax + by + c = 0\}$.

Claramente, $\mathcal{L}(a, b, c) = \mathcal{L}(ta, tb, tc)$, para todo $t \neq 0$. Luego, la ecuación general de una recta no es única. Además, observe que el conjunto $\mathcal{L}(a, b, c)$ no siempre representa una recta. Por ejemplo, $\mathcal{L}(0, 0, 0) = \mathcal{P}$ y $\mathcal{L}(0, 0, 1) = \emptyset$.

Ejemplo 2.8. Consideremos la recta dada en el ejemplo 2.6, $\mathcal{L} = \mathcal{L}(P_0, v)$, con $P_0 = (-1, 5) \in \mathcal{P}$ y $v = (-1, 1) \in \mathbb{R}^2$. Por lo visto anteriormente, tenemos que $a = -1$, $b = -1$ y $c = 4$. Luego, $-x - y + 4 = 0$ es una ecuación general de $\mathcal{L}$. Multiplicando esta ecuación por -1, tenemos la también ecuación general de $\mathcal{L}$,

$$x + y - 4 = 0.$$

Ya hemos probado que toda recta en representación vectorial puede ser representada mediante su ecuación general. Recíprocamente, sea $\mathcal{L}$ una recta con ecuación general

$$ax + by + c = 0.$$

Observe que no puede ocurrir que $a = b = 0$ en la ecuación anterior, pues esto implicaría que $\mathcal{L} = \emptyset$ o $\mathcal{L} = \mathcal{P}$, dependiendo del valor de c. Luego, suponemos que $(a, b) \neq 0$. Sea $v = (a, b)^{\perp} = (-b, a)$ y definamos $P_0 = (x_0, y_0) \in \mathcal{P}$ como

$$(x_0, y_0) = \begin{cases} (1, -\frac{c}{b}), & \text{si } a = 0, \\ (-\frac{b+c}{a}, 1), & \text{si } a \neq 0. \end{cases}$$

Observe que P_0 está bien definido y satisface la ecuación general de $\mathcal{L}$, es decir,

$$ax_0 + by_0 + c = 0.$$

Probaremos ahora que $\mathcal{L} = \mathcal{L}(P_0, v)$. Claramente, si $P = P_0 + tv = (x_0 - tb, y_0 + ta) \in \mathcal{L}(P_0, v)$ entonces

$$a(x_0 - tb) + b(y_0 + ta) + c = (ax_0 + by_0 + c) + (abt - abt) = 0,$$

es decir $P \in \mathcal{L}$. Sea ahora $P = (x, y) \in \mathcal{L}$, entonces $ax + by + c = 0$. Así, tenemos

$$0 = a(x - x_0) + b(y - y_0) = \langle (a, b), (x - x_0, y - y_0) \rangle,$$

es decir, $P - P_0$ es ortogonal a (a, b), luego es paralelo a $(a, b)^{\perp} = v$. Esto implica que existe $t \in \mathbb{R}$ tal que $P - P_0 = tv$. Por lo tanto, $P \in \mathcal{L}(P_0, v)$.

Ejemplo 2.9. Consideremos la recta $\mathcal{L}$ con ecuación general

$$7x - 3y + 5 = 0.$$

Consideremos $P_0 = (-\frac{2}{7}, 1) \in \mathcal{L}$ y $v = (7, -3)^{\perp} = (3, 7)$. Por lo visto anteriormente, $\mathcal{L} = \mathcal{L}(P_0, v)$, es decir, todo $P = (x, y) \in \mathcal{L}$ cumple

$$(x, y) = (-\frac{2}{7} + 3t, 1 + 7t).$$

Finalmente, consideremos $\mathcal{L}$ una recta no vertical, con ecuación general $a_0x + b_0y + c_0 = 0$. Como la recta no es vertical entonces $b_0 \neq 0$ y así obtenemos,

$$y = -\frac{a_0}{b_0}x - c_0$$

donde, denotando $m = -\dfrac{a_0}{b_0}$ y $b = -c_0$, tenemos la *ecuación normal* de $\mathcal{L}$,

$$y = mx + b.$$

Llamaremos a m como la *pendiente* de $\mathcal{L}$. Algunos autores llaman a b como el *intercepto* de $\mathcal{L}$.

Sea $\mathcal{L} = \mathcal{L}(P_0, v) = \mathcal{L}(a_0, b_0, c_0)$ una recta no vertical. Si $v = (v_1, v_2)$ entonces

$$m = -\frac{a_0}{b_0} = \frac{v_2}{v_1} = \tan(\theta),$$

donde θ es el ángulo que forma el vector v con el semieje x positivo.

Por otro lado, si tenemos una recta $\mathcal{L}$, no vertical, cuya ecuación normal es $y = mx + b$ entonces es inmediato verificar que $\mathcal{L} = \mathcal{L}(m, -1, b)$. Luego, $\mathcal{L}$ tendrá como vector dirección a $v = (1, m)$.

2.2. Posiciones y distancias relativas entre rectas

Comenzaremos estableciendo dos definiciones importantes al momento de estudiar dos rectas en el plano.

Definición 2.10. Sean $\mathcal{L}_1 = \mathcal{L}(P_1, v_1)$ y $\mathcal{L}_2 = \mathcal{L}(P_2, v_2)$ rectas en el plano. Diremos que $\mathcal{L}_1$ y $\mathcal{L}_2$ son *paralelas* si sus vectores dirección v_1 y v_2 son paralelos. Del mismo modo, diremos que $\mathcal{L}_1$ y $\mathcal{L}_2$ son *ortogonales* si v_1 y v_2 son ortogonales.

Proposición 2.11. *Sean $\mathcal{L}_1 = \mathcal{L}(a_1, b_1, c_1)$ y $\mathcal{L}_2 = \mathcal{L}(a_2, b_2, c_2)$ rectas en el plano. Entonces*

1. *$\mathcal{L}_1$ y $\mathcal{L}_2$ son paralelos si, y solamente si, (a_1, b_1) y (a_2, b_2) son paralelos;*
2. *$\mathcal{L}_1$ y $\mathcal{L}_2$ son ortogonales si, y solamente si, (a_1, b_1) y (a_2, b_2) son ortogonales.*

Demostración. Recordemos que si $\mathcal{L} = \mathcal{L}(a, b, c)$ entonces $v = (-b, a)$ es el vector dirección de $\mathcal{L}$. Así, basta observar que (a, b) y (c, d) son paralelos (respectivamente, ortogonales) si, y solamente si, $(-b, a)$ y $(-d, c)$ son paralelos (respectivamente, ortogonales). $\square$

El siguiente lema caracteriza el comportamiento de dos rectas distintas en el plano.

Lema 2.12. *Sean $\mathcal{L}_1 = \mathcal{L}(P_1, v_1) = \mathcal{L}(a_1, b_1, c_1)$ y $\mathcal{L}_2 = \mathcal{L}(P_2, v_2) = \mathcal{L}(a_2, b_2, c_2)$ rectas distintas en el plano. Entonces $\mathcal{L}_1$ y $\mathcal{L}_2$ son paralelas si, y solamente si, $\mathcal{L}_1 \cap \mathcal{L}_2 = \emptyset$.*

Demostración. Supongamos que $\mathcal{L}_1$ y $\mathcal{L}_2$ son paralelas y tienen un punto en común P. Luego, $v_1 = tv_2$ y, por el corolario 2.5,

$$\mathcal{L}_1 = \mathcal{L}(P, v_1) = \mathcal{L}(P, tv_2) = \mathcal{L}(P, v_2) = \mathcal{L}_2,$$

lo cual contradice la hipótesis de $\mathcal{L}_1 \neq \mathcal{L}_2$. Luego si $\mathcal{L}_1$ y $\mathcal{L}_2$ son paralelas, no pueden poseer puntos en común, es decir $\mathcal{L}_1 \cap \mathcal{L}_2 = \emptyset$. Recíprocamente, supongamos que $\mathcal{L}_1$ y $\mathcal{L}_2$ no son paralelas. Entonces v_1 y v_2 son linealmente independientes y, por el teorema 1.35, v_1 y v_2 generan $\mathbb{R}^2$. Luego, para $\overrightarrow{P_1P_2} = P_2 - P_1$, existen $r, s \in \mathbb{R}$ tales que

$$P_2 - P_1 = rv_1 + sv_2,$$

es decir, $P = P_2 - sv_2 = P_1 + rv_1$. Esto prueba que $P \in \mathcal{L}_1 \cap \mathcal{L}_2 \neq \emptyset$. $\square$

Una aplicación inmediata del lema anterior nos permite caracterizar las posiciones relativas de dos rectas en el plano.

Teorema 2.13. *Dadas dos rectas en el plano, ocurre una, y solamente una, de las siguientes posibilidades:*

1. *las rectas son paralelas y no disjuntas (por ende, iguales);*
2. *las rectas son paralelas y disjuntas;*
3. *las rectas no son paralelas y poseen un único punto en común.*

En el caso que $\mathcal{L}_1 = \mathcal{L}(P_1, v_1)$ y $\mathcal{L}_2 = \mathcal{L}(P_2, v_2)$ no sean paralelas, estas poseen un punto en común $Q = P_1 + tv_1 = P_2 + sv_2$. Entonces,

$$P_1 - P_2 + tv_1 = sv_2.$$

Tomando producto interno con $v_2^\perp$, podemos despejar t y obtener

$$t = \frac{\langle P_2 - P_1, v_2^\perp \rangle}{\langle v_1, v_2^\perp \rangle}.$$

Observe que $\langle v_1, v_2^\perp \rangle \neq 0$ pues v_1 y v_2 no son paralelos. Análogamente, podemos obtener el valor de s,

$$s = -\frac{\langle P_2 - P_1, v_1^\perp \rangle}{\langle v_2, v_1^\perp \rangle}.$$

Así, tenemos

$$Q = P_1 + \frac{\langle \overrightarrow{P_1P_2}, v_2^\perp \rangle}{\langle v_1, v_2^\perp \rangle} v_1 = P_2 - \frac{\langle \overrightarrow{P_1P_2}, v_1^\perp \rangle}{\langle v_2, v_1^\perp \rangle} v_2. \tag{2.3}$$

Observación 2.14. Consideremos el caso particular que $\mathcal{L}(P_1, v)$ y $\mathcal{L}(P_2, w)$ sean ortogonales. Sin perdida de generalidad, podemos considerar que $w = v^\perp$, luego podemos reescribir la ecuación (2.3) como

$$Q = P_1 + \frac{\langle \overrightarrow{P_1P_2}, v \rangle}{\|v\|^2} v = P_2 - \frac{\langle \overrightarrow{P_1P_2}, v^\perp \rangle}{\|v^\perp\|^2} v^\perp,$$

es decir,

$$Q = P_1 + \operatorname{Proy}_v \overrightarrow{P_1P_2} = P_2 - \operatorname{Proy}_{v^\perp} \overrightarrow{P_1P_2}.$$

Ahora consideremos el caso en que $\mathcal{L}_1 = \mathcal{L}(a_1, b_1, c_1)$ y $\mathcal{L}_2 = \mathcal{L}(a_2, b_2, c_2)$. Como estas son paralelas, entonces (a_1, b_1) y (a_2, b_2) no son paralelos y, por la proposición 1.31,

$$\Delta = a_1 b_2 - a_2 b_1 \neq 0.$$

Luego, el sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} a_1 x + b_1 y &= -c_1 \\ a_2 x + b_2 y &= -c_2 \end{aligned}$$

posee una única solución (x_0, y_0) que precisamente son las coordenadas del punto de intersección de las rectas $\mathcal{L}_1$ y $\mathcal{L}_2$. Por la regla de Cramer, tenemos

$$x_0 = \frac{c_2 b_1 - c_1 b_2}{a_1 b_2 - a_2 b_1}, \qquad y_0 = \frac{a_2 c_1 - a_1 c_2}{a_1 b_2 - a_2 b_1}.$$

Sea $\mathcal{L} = \mathcal{L}(P, v)$ una recta y Q un punto que no pertenece a $\mathcal{L}$. Intentaremos calcular la *distancia del punto Q a la recta $\mathcal{L}$*. Esta distancia puede ser definida como la menor distancia posible entre Q y cualquier punto de la recta $\mathcal{L}$. Así, consideremos la función real $h : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida como

$$h(t) = d(Q, P + tv)^2 = \|Q - P - tv\|^2 = \|\overrightarrow{PQ} - tv\|^2.$$

Observamos que h es precisamente la función g definida en la observación 1.18, considerando $u = \overrightarrow{PQ}$, cuyo mínimo se alcanzaba en

$$t_0 = \frac{\langle \overrightarrow{PQ}, v \rangle}{\|v\|^2}$$

Luego,

$$h(t_0) = \|\overrightarrow{PQ} - t_0 v\|^2 = \left\| \overrightarrow{PQ} - \operatorname{Proy}_v \overrightarrow{PQ} \right\|^2.$$

Recordemos que, por la ecuación (1.3),

$$\overrightarrow{PQ} = \operatorname{Proy}_v \overrightarrow{PQ} + \operatorname{Proy}_{v^\perp} \overrightarrow{PQ}.$$

Así, concluimos que la distancia buscada es

$$d(Q, \mathcal{L}) = \|\operatorname{Proy}_{v^\perp} \overrightarrow{PQ}\| = \frac{|\langle \overrightarrow{PQ}, v^\perp \rangle|}{\|v\|}. \tag{2.4}$$

En el caso que $\mathcal{L} = \mathcal{L}(a, b, c)$, encontraremos una fórmula para $d(Q, \mathcal{L})$. Escribamos $Q = (x_0, y_0)$ y sea $P = (x_1, y_1) \in \mathcal{L}$ un punto de paso de $\mathcal{L}$. Además, sin perdida de generalidad, podemos suponer que el vector dirección v de $\mathcal{L}$ es tal que $v^\perp = (a, b)$. Reemplazando en (2.4),

$$\begin{aligned} d(Q, \mathcal{L}) &= \frac{|\langle \overrightarrow{PQ}, v^\perp \rangle|}{\|v\|} \\ &= \frac{|\langle (x_0 - x_1, y_0 - y_1), (a, b) \rangle|}{\sqrt{a^2 + b^2}} \\ &= \frac{|ax_0 + by_0 - (ax_1 + by_1)|}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \end{aligned}$$

y, recordando que $P = (x_1, y_1) \in \mathcal{L}(a, b, c)$ implica $ax_1 + by_1 = -c$, obtenemos

$$d(Q, \mathcal{L}) = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}. \tag{2.5}$$

Finalmente, dadas dos rectas $\mathcal{L}_1$ y $\mathcal{L}_2$ paralelas, definimos la *distancia* entre ellas como la distancia de cualquier punto de $\mathcal{L}_1$ a $\mathcal{L}_2$. Denotaremos a esta distancia como $d(\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2)$.