FECHA
23 DE AGOSTO DEL 2016

Tercera clase de Cálculo Vectorial

Prof: Gonzalo Marca Castromonte

23/08/16

$\mathbb{R}^2$ → $S \subset \mathbb{R}^2$ Espacio vectorial dentro de otro espacio vectorial

(2 axiomas)

La suma de S es la misma suma de $\mathbb{R}^2$. $0 \in S$, el mismo $0 \in \mathbb{R}^2$.

Tomar la clausura de la adición y la multiplicación por un escalar.

$\mathbb{R}^2$ → Producto interno $\langle , \rangle$ (5 axiomas)

$\mathbb{R}^2$ → norma $\| \ \|$ (4 axiomas)

Espacio vectorial real (10 axiomas)

Distancia en un espacio vectorial

definición: Sea V un $\mathbb{R}$- espacio vectorial

$\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$d: V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$$

una función que cumple con:

d_1: $d(u, w) \geq 0$ El rango de esta función está dentro de $\mathbb{R}^+$ 0

d_2: $d(u, v) = 0 \Leftrightarrow u = v$

d_3: $d(u, v) = d(v, u)$

d_4: $d(u, v) \leq d(u, w) + d(w, v)$

Es posible demostrar los teoremas de geometría con todos los axiomas presentados.

Distancia Canónica

(19) Sea V un $\mathbb{R}$-espacio vectorial con norma $\| \ \|$ y

$$d(u, v) = \| u - v \|$$

Por demostrar d es una distancia en V.

Consejo del profesor Marco:

✓ Construir tablas y horarios, realizar resúmenes.

✓ ejercitar la disciplina

✓ ejercitar la memorización.

demostrar: (i) Sea $u, v \in V$

$$d(u,v) = \|u - v\| \geq 0$$

ii) $\Rightarrow$ Hipótesis: $d(u,v) = 0$

Tesis: $u = v$.

Como $d(u,v) = 0 \Rightarrow \|u - v\| = 0$

Por N2: $\Rightarrow u - v = 0$

$\Rightarrow u = v$

Prueba por el método directo.

$\Leftarrow$ Hipótesis: $u = v$

Tesis: $d(u,v) = 0$

Calcular: $d(u,v) = \|u - v\|$ Por hipótesis

$= \|u - u\|$

$= \|0\|$

Ojo: $\|-w\| = \|w\|$

Por N2:

$= 0$.

iii) $d(u,v) = \|u - v\|$

$= \|-(u - v)\|$

$= \|v - u\|$

$= d(v,u)$

iv) $d(u,v) = \|u - v\|$

$= \|u - w + w - v\|$

Por N4: $\leq \|u-w\|+\|w-v\|$

$\leq d(u,w)+d(w,v)$ ■

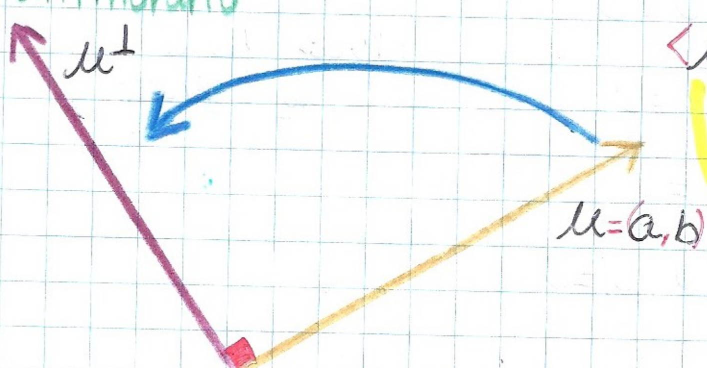
Ortogonal de un vector en $\mathbb{R}^2$

definición: Sea $u=(a,b)\in\mathbb{R}^2$

$$u^{\perp}=(-b,a)$$

Interpretación

antihorario



Note que:

$\langle u, u^{\perp}\rangle = \langle (a,b),(-b,a)\rangle$

Operando término a término

$(a)(-b)+(b)(a)=0.$

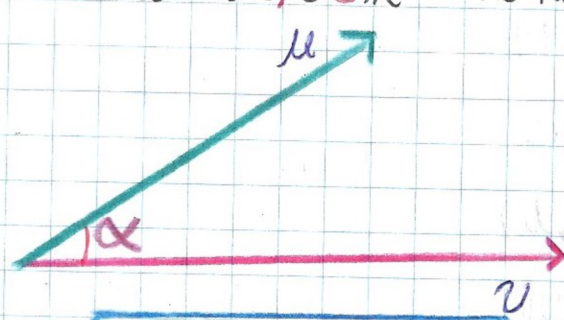
$\Rightarrow u \perp u^{\perp}$

$u^{\perp}$ → Ortogonal de un vector

$\perp$ → Ortogonal de dos vectores

Ángulo entre vectores

Dados dos vectores $u, v\in\mathbb{R}^2$ no nulos



$\Rightarrow \boxed{\cos\alpha = \dfrac{\langle u,v\rangle}{\|u\|\|v\|}}$

Ojo: $\langle u, v\rangle = \|u\|\|v\|.\cos\alpha$

Buscamos los errores.

Ojo: $\|u-v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2 - 2\|u\|\|v\|\cos\alpha$

20) Sean $u, v \in \mathbb{R}^2$ no nulos. Si $u \not\parallel v$, por demostrar

$$au + bv = 0 \Leftrightarrow [a = 0 \wedge b = 0]$$

¡la bicondicional :O, entonces probemos la necesidad y suficiencia!

demostración:

$\Rightarrow$

Hipótesis: $au + bv = 0$

Tesis: $a = 0 \wedge b = 0$. $(a = b = 0)$

Recordemos:

$$p \to (q \wedge r) \equiv (p \to q) \wedge (p \to r)$$

Por demostrar: $a = 0$.

Veamos:

Supongamos $a \neq 0$ en $\mathbb{R}$.

$$\Rightarrow au + bv = 0$$

$$au = -bv$$

$$u = -\frac{b}{a}v$$

¿O sea $u \parallel v$?

¡Pues no! Es una contradicción, todo por suponer que $a \neq 0$, lo correcto debe ser que $a = 0$.

Por demostrar: $b = 0$.

Pero sabemos $a = 0$.

Reemplazando $\underbrace{0u}_{0} + bv = 0$

$\Rightarrow b = 0$ ■

Por el teorema:

$bv = 0 \to b = 0$ ✓ $\vee$ $v = 0$ ✗

¡No olvides que v es no nulo!

(21) Considere en $\mathbb{R}^2$

$u = (x_1, y_1)$

$v = (x_2, y_2)$

$\langle u, v\rangle = x_1 x_2 - 2x_1 y_2 - 2y_1 x_2 + 5y_1 y_2$

Por demostrar $\langle\ \rangle$ es un producto interno en $\mathbb{R}^2$.

Veamos:

Por el primer axioma de producto interno:

Sea $u = (x, y)$.

$$\langle u, u\rangle = x.x - 2xy - 2yx + 5yy = (x-2y)^2 + y^2 \geq 0$$

Por el segundo axioma de producto interno:

necesidad ($\Rightarrow$) Si $\langle u, u\rangle = 0$

$$(x-2y)^2 + y^2 = 0$$

$$\Rightarrow x - 2y = 0 \wedge y = 0$$

$$\Rightarrow x = 0 \wedge y = 0 \quad 0 \in \mathbb{R}$$

$$0 \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow u = (x, y) = (0, 0) = 0$$

Si preguntan ¿es un producto interno?

Buscar un contraejemplo, de lo contrario lo demostraremos.

($\Leftarrow$) suficiencia Verificar. Sugerencia Reemplazar $x = 0 = y$ en $\langle u, u\rangle$

Libro: Análisis matemático (tomo 1) Elon Lages Lima

Falta probar si satisfacen los axiomas 3, 4 y 5 del producto interno.

(22) Sean $u, v \in \mathbb{R}^2$. Demostrar: $|\langle u, v\rangle| \leq 1$, siempre que $\|u\| = \|v\| = 1$.

Adoctrinar

Nota: No es necesario colocar valor absoluto.

demostración:

"Proceso de aprendizaje según el profesor Marca

hipótesis

$\left.\begin{array}{l} \|u\| = 1 \\ \|v\| = 1 \end{array}\right\}$ u y v son vectores unitarias

1° confusión

2° aprendizaje en sí

tesis $\langle u, v\rangle \leq 1$

Descomponer un problema en partes.

Utilizando:

$$|\langle u, v\rangle| \leq \|u\|\|v\|$$

$$\Rightarrow |\langle u, v\rangle| \leq 1$$

Veamos otra forma:

$$\begin{cases} u = (a, b) \\ v = (x, y) \end{cases} \rightsquigarrow \|u\| = \sqrt{a^2+b^2}$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} a^2+b^2 = 1 \\ x^2+y^2 = 1 \end{array}\right\}$$

$$|\langle u, v\rangle| = |\langle (a, b), (x, y)\rangle|$$

$$= |ax+by|$$

$$\leq |ax|+|by|$$

Propiedad:

$$|ax| \leq \frac{a^2+x^2}{2}$$

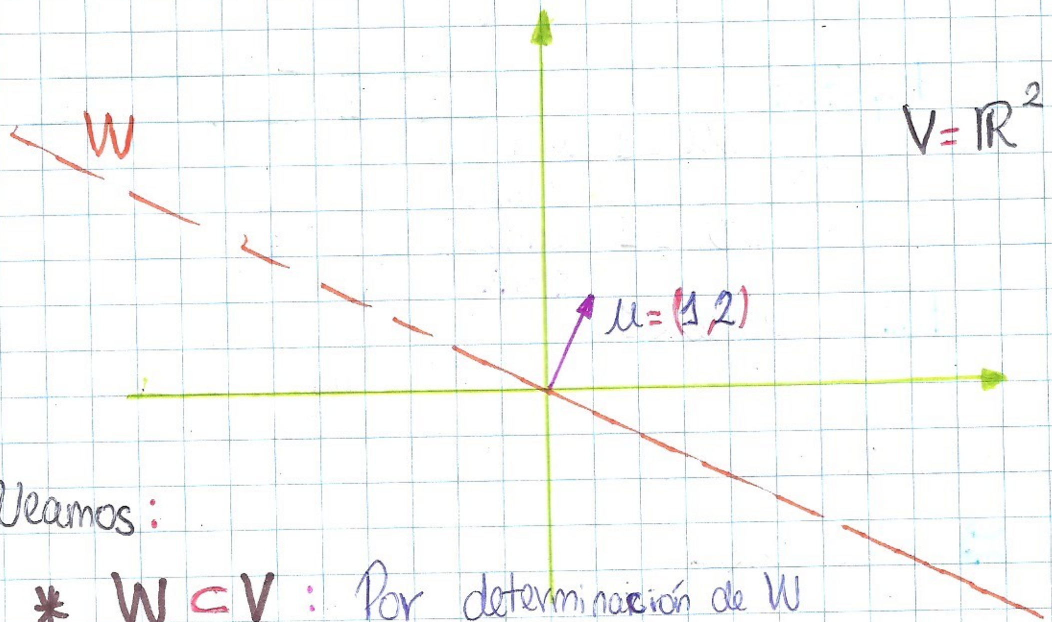
Ojo: $(|a|-|x|)^2 = a^2+x^2-2|ax| \geq 0$

$$\leq \frac{a^2+x^2}{2} + \frac{b^2+y^2}{2} = 1$$

(23) Sea $u \in V$ fijo y $W = \{v \in V : \langle v, u\rangle = 0\}$

Demostración W es un subespacio de V.

$V = \mathbb{R}^2$



Veamos:

* $W \subset V$: Por determinación de W
* $W \neq \emptyset$?

pero $\langle 0, 0 \rangle = 0$

$\Rightarrow 0 \in W$

$\Rightarrow W \neq \emptyset$

definición: Sea U el conjunto Universal

$\emptyset$ es el vacío en U $\Leftrightarrow \forall x \in U,\ x \notin \emptyset$

(i) Sea $v, w \in W$ cualesquiera. Calcular

$$\langle v+w, u \rangle = \langle v, u \rangle + \langle w, u \rangle$$
$$= 0 + 0$$
$$= 0$$

$\Rightarrow v + w \in W$

ii) Verificar. demostrar que W es un espacio vectorial.

(24) Sea $u, v \in \mathbb{R}^2$. Por demostrar $\langle u^\perp, v\rangle = -\langle u, v^\perp\rangle$

demostración:

Consideremos: $u = (a,b)$ y $v = (x,y)$.

Primer cálculo:

$$\langle u^\perp, v\rangle = \langle (-b,a), (x,y)\rangle$$
$$= -bx + ay$$

Segundo cálculo:

$$\langle u, v^\perp\rangle = \langle (a,b), (-y,x)\rangle$$
$$= -ay + bx$$

$$\Rightarrow \langle u^\perp, v\rangle = -\langle u, v^\perp\rangle$$

(25) Sea $u, v \in \mathbb{R}^2$. Por demostrar:

$$\langle u, v\rangle^2 + \langle u, v^\perp\rangle^2 = \|u\|^2 \|v\|^2$$

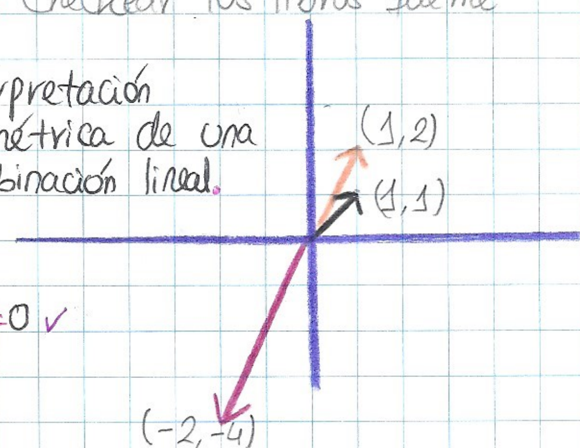
Tarea para el día jueves.

Revisar el libro de Anton Howard, checkear los libros que me recomendó

Propiedad:

- $0 \cdot \vec{v} = 0$ ✓
- $c \cdot 0 = 0$ ✓
- $c \cdot \vec{v} = 0 \Rightarrow c = 0 \vee \vec{v} = 0$ ✓
- $-(-\vec{v}) = \vec{v}$ ✓

Interpretación geométrica de una Combinación lineal.



$(1,1) = a(1,2) + b(-2,-4)$

$(1,1) = (a-2b, 2a-4b)$

$$1 = a - 2b \wedge 1 = 2a - 4b$$
$$1 + 2b = a \wedge 1 = 2(1+2b) - 4b$$
$$1 = 2 + 4b - 4b$$
$$1 = 2 \ (\rightarrow\leftarrow)$$

Prueba para un subespacio $(W \neq \emptyset)$

1) Si $\vec{u}, \vec{v} \in W \rightarrow \vec{u} + \vec{v} \in W$

2) Si $\vec{u} \in W \wedge c \in \mathbb{K} \rightarrow c\vec{u} \in W$.