UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA
CICLO 2015-II

Examen Parcial de Cálculo Vectorial I

---

1. Determine el valor de verdad de las siguientes proposiciones (Justifique su respuesta)

   I) Sean $u, v, w \in \mathbb{R}^3$ no nulos, de modo que
   $$\langle u, v\rangle = \langle u, w\rangle = \langle v, w\rangle = 0 \qquad \text{(2pt)}$$
   , entonces $\{u, v, w\}$ son vectores $l.i$.

   II) Sean $u, v, w \in \mathbb{R}^3$ tres vectores $l.d$, entonces dos de ellos cualesquiera son $l.d$. (2pt)

   III) Dado un cubo de arista $a\mathrm{m}$, entonces el volumen de dicho cubo es de $a^3\mathrm{m}^3$. (1pt)

2. Sobre la recta $L : 3x+4y+1 = 0$, encuentre dos puntos M y N en L, de modo que el triángulo MNP, con $P(1,1)$ sea equilátero. (5pt)

3. Sean $u, v \in \mathbb{R}^2$ no nulos, tal que u y v sean no paralelos. Demostrar que existe un único vector $w \in \mathbb{R}^2$ tal quc
   $$\langle u, w\rangle = \langle v, w\rangle = 0 \qquad \text{(5pt)}$$

4. Una de las diagonales de un rombo $\mathbf{R}$, está contenida en la recta $L_1 = \{(a-1, 5a-6) + t(a-3, 1) : t \in \mathbb{R}\}$ y uno de los lados del mismo está contenido en la recta $L_2 = \{(-4a, a-2) + t(3a, a+1) : t \in \mathbb{R}\}$.
   Si $a > 0$ y $(3a+1, 6a)$ es el punto de intersección de las diagonales de $\mathbf{R}$, encontrar los vértices y el área de $\mathbf{R}$. (5pt)

Uni, 14 de Octubre del 2015
Los Profesores [1]

[1] Hecho en LaTeX

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA

FACULTAD DE CIENCIAS

CURSO Cálculo Vectorial I COD. CURSO CM1…

PRÁCTICA [ ] EX. PARCIAL [X] EX. FINAL [ ] EX. SUST. [ ]

Ruiz Castro Victor André 20152606C

APELLIDOS Y NOMBRES (Alumno) CÓDIGO FIRMA

Lima, 14 de Octubre del 2015 Nº Lista ....

NOTA 17 Diecisiete La Rosa

En números En letras Nombre del Profesor Firma del Profesor

CALIFICACIÓN

Preg. Nº	Puntos
1.	5
2.	5
3.	5
4.	2
5.	
6.	
Total	17

1.) I) Supongamos $\{u,v,w\}$ son ld

Entonces $\exists \alpha, \beta, \gamma$, al menos uno diferente de cero /

$$\alpha u + \beta v + \gamma w = 0$$

Por dato:

$$\langle u, v\rangle = \langle u, w\rangle = \langle v, w\rangle = 0$$

$\rightarrow$ $u \perp v$, $u \perp w$, $v \perp w$ (*)

Luego:

$\langle u, \alpha u + \beta v + \gamma w\rangle = \langle u, 0\rangle$ | $\langle v, \alpha u + \beta v + \gamma w\rangle = \langle v, 0\rangle$ | $\langle w, \alpha u + \beta v + \gamma w\rangle = \langle w, 0\rangle$

Por (*): $\alpha \|u\| + 0 + 0 = 0$ | $\beta \|v\| + 0 + 0 = 0$ | $\gamma \|w\| + 0 + 0 = 0$

$\alpha \|u\| = 0$ | $\beta \|v\| = 0$ | $\gamma \|w\| = 0$

Como $u \neq 0$ $\longrightarrow$ $\alpha = 0$ | Como $v \neq 0$ $\rightarrow \beta = 0$ | Como $w \neq 0$ $\rightarrow \gamma = 0$

Tenemos: $\alpha = \beta = \gamma = 0$ ($\rightarrow\leftarrow$) por lo tanto $\{u, v, w\}$ son li $\boxed{\text{es V}}$

II) Contra ejemplo

$\{(1,0,0), (0,1,0), (0,0,0)\}$ son ld

Pues $0(1,0,0) + 0(0,1,0) + \lambda(0,0,0) = (0,0,0)$, $\forall \lambda \neq 0$

Escojemos 2 cualesquiera y hacemos una combinación lineal igual a cero

$$\alpha(1,0,0) + \beta(0,1,0) = (0,0,0)$$

Luego: $\langle (1,0,0), \alpha(1,0,0) + \beta(0,1,0)\rangle = 0$ | $\langle (0,1,0), \alpha(1,0,0) + \beta(0,1,0)\rangle = 0$

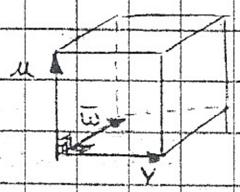
$\alpha \|(1,0,0)\| = 0$ | $\beta \|(0,1,0)\| = 0$

$\rightarrow \alpha = 0$ | $\rightarrow \beta = 0$

Como $\alpha = \beta = 0$ Son li

$\boxed{\text{es F}}$

III)



Notamos que : $u \perp v$, $u \perp w$, $v \perp w$

Sabemos :

$Vol = V = A_b \cdot h$

A_b = area base

h = altura

luego: $A_b = \|v\| \|w\| \operatorname{sen} 90°$

$A_b = \|v \times w\|$

$h = \operatorname{Comp}_{v \times w}^{u} = \frac{\langle u, v \times w \rangle}{\|v \times w\|}$

Entonces $\boxed{V = \langle u, v \times w \rangle = \|u\| \|v \times w\| \cos\theta}$

Como : $u \perp v \wedge u \perp w \rightarrow u \parallel v \times w$

$\rightarrow \theta = 0 \rightarrow \cos\theta = 1$

$\rightarrow V = \|u\| \|v \times w\| = \|u\| \|v\| \|w\| \operatorname{sen} 90°$

$V = \|u\| \|v\| \|w\|$

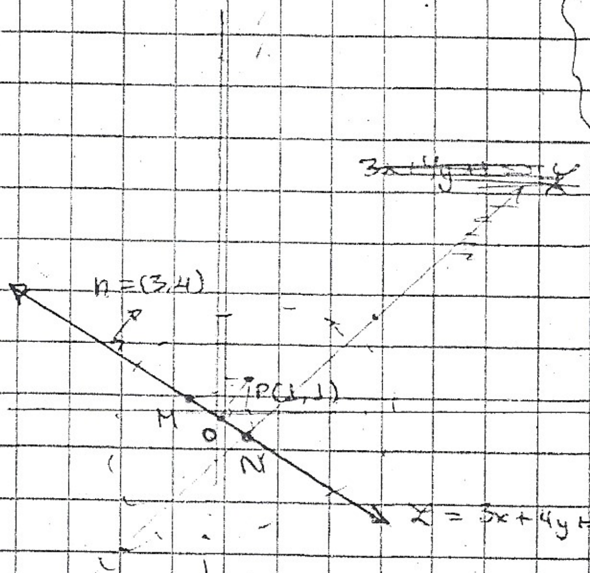
Por dato: $\|u\| = \|v\| = \|w\| = am$

$\rightarrow V = (am).(am).(am)$

$\boxed{V = a^3 m^3}$

$\boxed{\text{es } V}$

2.



Para que sea equilátero:

$d(PM) = d(PN) = d(MN) = 2d$

y : $d(P, L) = d\sqrt{3}$

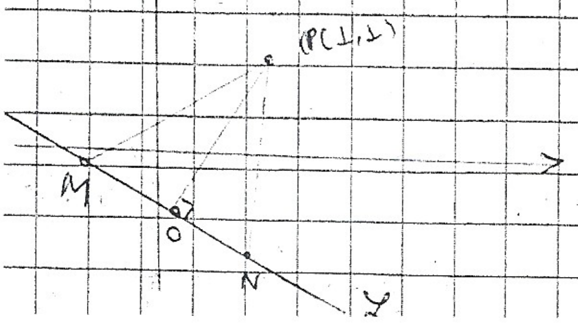
luego $d(P, L) = \frac{|3+4+1|}{5} = \frac{8}{5} = d\sqrt{3}$

$\rightarrow d = \frac{8\sqrt{3}}{15}$

Entonces: $OP = \frac{n}{\|n\|} \frac{8}{5} = (3,4) \frac{8}{25}$

$P - O = \left(\frac{24}{25}, \frac{32}{25}\right)$

$O = \left(\frac{1}{25}, -\frac{7}{25}\right)$



luego:

$N = O + \frac{n^{\perp}}{\|n\|} \underbrace{\frac{8\sqrt{3}}{15}}_{d} = \left(\frac{1}{25}, \frac{-7}{25}\right) + (4,-3) \frac{8\sqrt{3}}{75}$

$$\boxed{N = \left(\frac{3 + 32\sqrt{3}}{75}, \frac{-21 - 24\sqrt{3}}{75}\right)}$$

$M = O - \frac{n^{\perp}}{\|n\|} \underbrace{\frac{8\sqrt{3}}{15}}_{d} = \left(\frac{1}{25}, \frac{-7}{25}\right) - (4,-3) \frac{8\sqrt{3}}{75}$

$$\boxed{M = \left(\frac{3 - 32\sqrt{3}}{75}, \frac{-21 + 24\sqrt{3}}{75}\right)}$$

Sabemos:

$\langle u, \bar{0} \rangle = \langle v, \bar{0} \rangle = 0 \quad \wedge \quad \bar{0} \in \mathbb{R}^2$

Supongamos que existe $w \neq \bar{0} \;/\; \langle u, w \rangle = \langle v, w \rangle = 0 \quad \wedge \; w \in \mathbb{R}^2$

Como: $\langle u, w \rangle = 0 \qquad \langle v, w \rangle = 0$

$\rightarrow u \perp w \qquad \rightarrow v \perp w$

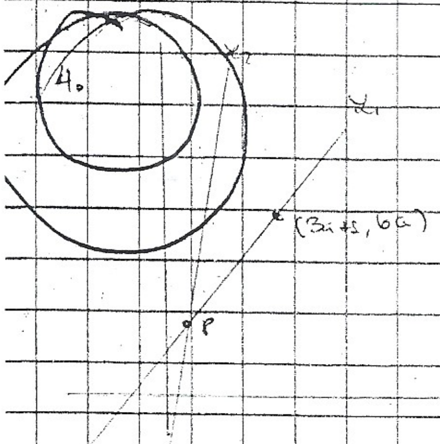
Como $u, v \perp w \rightarrow u \parallel v \quad (\rightarrow \leftarrow)$

contradice la condición $u \nparallel v$

Por lo tanto: $w = \bar{0}$

Entonces $\exists ! \; w = 0 \in \mathbb{R}^2 \;/\; \langle u, w \rangle = \langle v, w \rangle = 0$

4.



$P \in x_1 \wedge x_2$

$P = (a-2 ; 5a-6) + t(a-3 ; 1)$

$P = (-4a ; a-2) + t'(3a , a+1)$

~~$3a$~~ $= -4a + t' 3a$

~~$6a$~~ $= a-2 + t'(a+1) \quad / \quad 6a = a(t'+1) + t' - 2$

Resolviendo:

$a = 1/2 \qquad t' = \qquad t =$

$3a + 1 = a - 3 + ta - 3t$

$6a = 5a - 6 + t$

Resolviendo: $a = 4 \; ; \; t = 10 \; ; \; t' = 29/2$