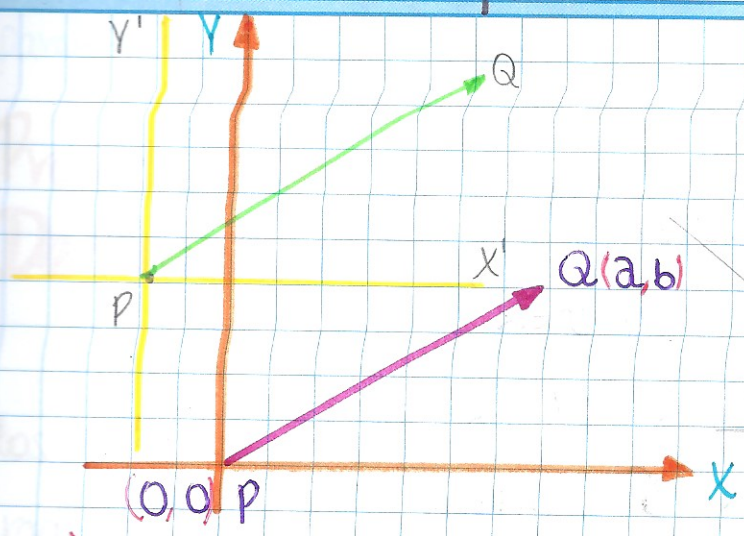
FECHA
22 DE AGOSTO
DEL 2016

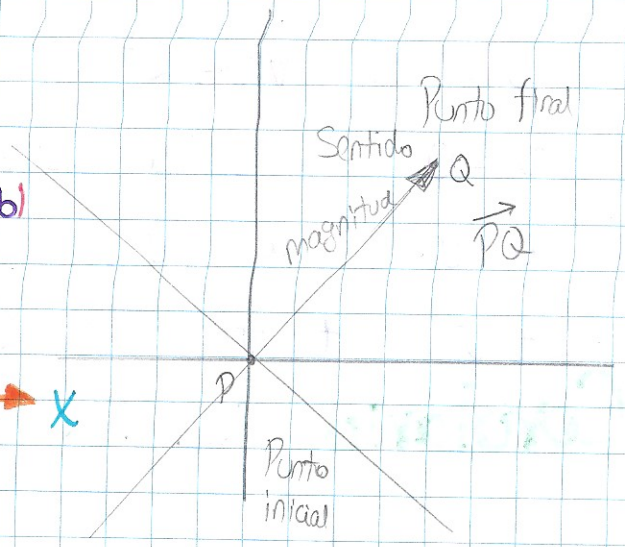
Tercera clase de CálculoVectorial

Prof:Juan Cribillero Aching

Vectores en el plano

22/08/16





$\overrightarrow{PQ}$: vector (radio vector)

$\|\overrightarrow{PQ}\|$: magnitud

Proposición: Fijemos un sistema plano P. Sean $P, Q \in P$ con coordenadas $(P_1 ; P_2)$ y $(Q_1 ; Q_2)$ respectivamente. Entonces el vector $\overrightarrow{PQ}$. Es representado por el par ordenado por

$$Q - P = (q_1 - p_1 \; ; q_2 - p_2)$$

Ejemplo: Consideremos $P, Q \in P$ con coordenadas $(2, 1)$ y $(1; -1)$ respectivamente.

Sea $v = \overrightarrow{PQ}$; entonces $v = Q - P$

$$v = (1 ; -1) - (2 ; 1)$$

$$\therefore v = (-1 ; -2)$$

Definición: Sea $v = (x ; y) \in \mathbb{R}^2$ un vector en el plano, definimos la norma de v (magnitud) como el número.

$$\|v\| = d((0,0) ; (x, y)) = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Podemos considerar la función norma como la función:

$$\|\cdot\| : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$$

Proposición: Se cumplen las siguientes propiedades para la norma de un vector.

1) $\|v\| \geq 0$, $\forall v \in \mathbb{R}^2$

2) $\|v\| = 0$ si y solo si $v = \mathbb{0}$

3) $\|u+v\| \leq \|u\| + \|v\|$, $\forall\ u, v \in \mathbb{R}^2$

4) $\|tv\| = |t|\|v\|$; $\forall\ v \in \mathbb{R}^2$; $\forall t \in \mathbb{R}$

Corolario Sean P Q $\mathcal{P}$ entonces

$$\|\overrightarrow{PQ}\| = d(P,Q) = \|Q-P\|$$

Vectores paralelos

Dos vectores son paralelos si y solo si uno de los vectores es un múltiplo escalar del otro, esto es u y v son paralelos si y solo si o bien $u=0$ o bien existe un escalar $t \in \mathbb{R}$ tal que $u = tv$.

Así, de este modo, establecemos que el vector $u=0$ es paralelo a cualquier vector en $\mathbb{R}^2$.

Vector unitario

Un vector es unitario si la norma del vector es igual a uno ($1 \in \mathbb{R}$), esto es, $u \in \mathbb{R}^2$ es unitario si y solo si $\|u\| = 1$.

Dado $v \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ cualquier vector en el plano, entonces el vector

$u = \dfrac{v}{\|v\|}$ es un vector unitario.

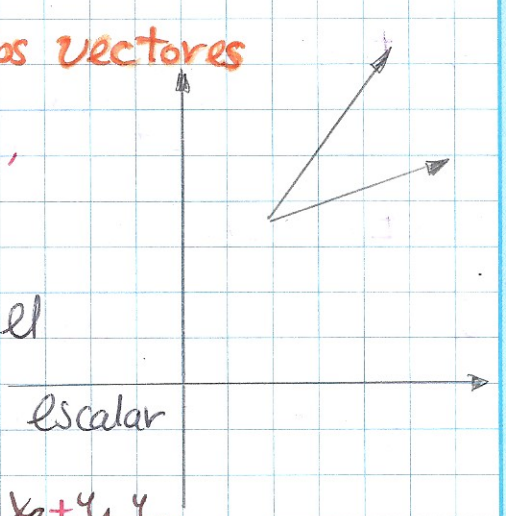
En efecto: $\|u\| = \left\| \dfrac{v}{\|v\|} \right\| = \left\| \dfrac{1}{\underbrace{\|v\|}_{>0}} \cdot v \right\| = \dfrac{1}{\|v\|} \|v\|$

$\|u\| = 1$

$\therefore$ u es un vector unitario. Luego, $v = \|v\| u$

Esto quiere decir, que todo vector no nulo es paralelo a un vector unitario.

Producto interno y ángulo entre dos vectores



Definición: Sea $u=(x_1, y_1)$,

$v=(x_2, y_2)$

dos vectores en el plano, definimos el producto interno de u con v como el escalar

$$\langle u, v\rangle = \langle (x_1,y_1);(x_2,y_2)\rangle = x_1x_2+y_1y_2$$

En este caso podemos considerar al producto interno como una función

$$\langle\ ;\ \rangle : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$(u,v) \longmapsto \langle u,v\rangle$$

Proposición: Se cumplen las siguientes propiedades del producto interno:

1) $\langle u, v\rangle = \langle v, u\rangle$; $\forall\, u, v \in \mathbb{R}^2$

2) $\langle u, u\rangle \geq 0$; $\forall\, u \in \mathbb{R}^2$

3) $\langle u, u\rangle = 0 \Leftrightarrow u=0$.

4) $\langle tu, v\rangle = t\langle u, v\rangle$, $\forall\, u, v \in \mathbb{R}^2$, $t \in \mathbb{R}$.

5) $\langle u+v, w\rangle = \langle u, w\rangle + \langle v, w\rangle$; $\forall\, u, v, w \in \mathbb{R}^2$

Prueba: Sean $u=(x_1, y_1)$, $v=(x_2, y_2)$ y $w=(x_3, y_3)$ son vectores en el plano ; $t \in \mathbb{R}$.

1) $\langle u, v\rangle = x_1x_2 + y_1y_2 = x_2x_1 + y_2y_1 = \langle v; u\rangle$

2) $\langle u, u\rangle = x_1x_1 + y_1y_1 = x_1^2 + y_1^2 \geq 0$

3) $(\Leftarrow)$ Si $u=(0;0)$, entonces $\langle u; u\rangle = 0$

$(\Rightarrow)\ \langle u, u\rangle = 0 \Rightarrow x_1^2 + y_1^2 = 0$

$\Rightarrow x_1 = 0 \wedge y_1 = 0$

$\Rightarrow u = (0;0)$

4) $\langle t u; v\rangle = \langle (t x_1; t y_1); (x_2; y_2)\rangle$

$= t x_1 x_2 + t y_1 y_2$

$= t(x_1 x_2 + y_1 y_2)$ $\qquad v = \overrightarrow{PQ}$

$\langle t u; v\rangle = t\langle u; v\rangle$

5) $\langle u+v; w\rangle = \langle (x_1+x_2; y_1+y_2); (x_3; y_3)\rangle$

$= (x_1+x_2)x_3 + (y_1+y_2)y_3$

$= x_1 . x_3 + x_2 . x_3 + y_1 . y_3 + y_2 . y_3$

$\langle u+v; w\rangle = \langle u; w\rangle + \langle v; w\rangle$

Nota: Sea $v \in \mathbb{R}^2$, entonces $\langle v; v\rangle = \|v\|^2$

Luego:

$$\boxed{\|v\| = \sqrt{\langle v; v\rangle}}$$

Del mismo modo la distancia entre los puntos P Q P está dado por

$$\boxed{d(P;Q) = \sqrt{\langle Q-P; Q-P\rangle}}$$

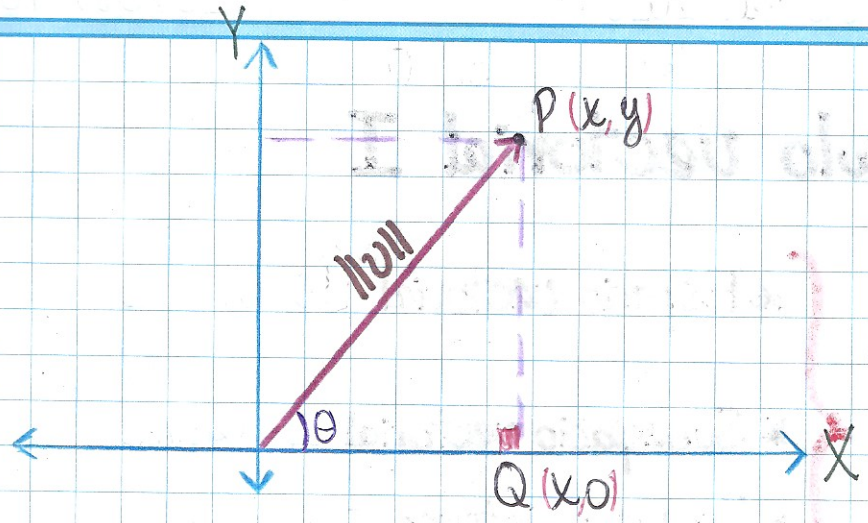
Lema: Sea $v = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ un vector no nulo del plano, entonces

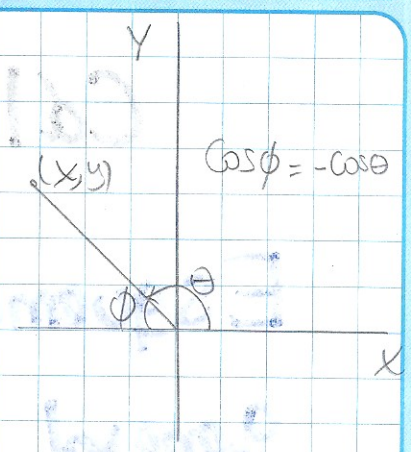
$v = (x, y) = \|v\| (\cos\theta, \operatorname{sen}\theta)$

Donde θ: Medida del ángulo que forma el vector v con el semieje x positivo.

Prueba: Consideremos $P = (x; y)$ y $Q = (x; 0)$

$$\cos\theta = \frac{d(Q,0)}{d(P,0)} = \frac{d(Q,0)}{\|v\|} \Rightarrow \|v\| \cos\theta = d(Q,0) = x$$





$$\operatorname{Sen}\theta = \frac{d(P,Q)}{d(P,O)} = \frac{d(P,Q)}{\|v\|} \Rightarrow \|v\| \operatorname{Sen}\theta = d(P,Q) = y$$

Luego: $v = (x, y) = (\|v\| \cos\theta, \|v\| \operatorname{Sen}\theta)$

$\therefore\ v = \|v\| (\cos\theta, \operatorname{Sen}\theta)$ ■

Las otras tres posibilidades se demuestran de forma análoga.

Teorema: Sean $u, v \in \mathbb{R}^2$ y θ la medida del ángulo que forman los vectores, entonces.

$$\langle u, v \rangle = \|u\| \|v\| \cos\theta$$