Cálculo Vectorial I.

Espacio Vectorial

- Cuerpos

Un cuerpo K es un conjunto no vacío en el cual están definidas dos operaciones.

$$+ : K \times K \to K \quad \text{(adición)}$$
$$(a,b) \to a+b$$

$$\cdot : K \times K \to K$$
$$(a,b) \to a.b$$

los cuales satisfacen los siguientes axiomas:

A_1) $a+b \in K, \ \forall a, b \in K$

A_2) $a+b = b+a, \ \forall a, b \in K$ (Conmutatividad de la adición)

A_3) $(a+b)+c = a+(b+c), \ \forall a \in K$ (asociativa)

A_4) $\exists e \in K / a+e = a, \ \forall a \in K$ Se denota $e = 0$ llamado "cero" o "elemento neutro aditivo"

A_5) $\forall a \in K, \exists b \in K$ tal que $a+b=0$ denotemos $b = -a$ llamado "opuesto de a" o el "inverso aditivo de a"

M_1) $a.b \in K, \ \forall a, b \in K$

M_2) $a \cdot b = b \cdot a, \ \forall a, b \in K$

M_3) $(a.b).c = a.(b.c), \ \forall a, b, c \in K$

M_4) $\exists \hat{e} \in K, \hat{e} \neq 0$ tal que $a.\hat{e} = a, \ \forall a \in K$ denotemos por $\hat{e} = 1$ llamado "uno" o "elemento neutro multiplicativo"

M_5) Para cada $a \in K$, $a \neq 0$, existe $b \in K$ tal que $a \cdot b = 1$ denotemos $b = a^{-1}$

llamado "inverso de a" o "elemento inverso multiplicativo de a".

$M_6)$ $a.(b+c) = a.b+b.c$, $\forall a,b,c \in K$
(Distributiva)

Ejemplo:

- $\mathbb{N}$ no es un cuerpo
  Para $n \in \mathbb{N}$ se cumple
  $$n+0=n$$
  Para $0 \notin \mathbb{N}$. ($\mathbb{N}$ no es un cuerpo pues no cumple A_4), es decir, no posee elemento neutro aditivo.

- $\mathbb{Z}$ no es un cuerpo pues $\exists m \in \mathbb{Z}-\{0\}$;
  se cumple: $m\cdot\left(\frac{1}{m}\right)=1$
  pero $\frac{1}{m} \notin \mathbb{Z}$ (no se cumple M_5); es decir, no posee inverso multiplicativo

- $\mathbb{Q}$ y $\mathbb{R}$

Definición: Sean V un conjunto no vacío y K un cuerpo, con dos operaciones

$$\oplus : V \times V \to V \quad \text{(suma)}$$
$$(u,v) \to u \oplus v$$

$$\odot : K \times V \to V \quad \text{(multiplicación por un escalar)}$$
$$(\lambda, v) \to \lambda \odot v$$

Decimos que V es un espacio vectorial K o K_espacio vectorial si se satisfacen los siguientes axiomas:

$E_1)$ $u \oplus v \in V$ $\forall u,v \in V$

$E_2)$ $u \oplus v = v \oplus u$, $\forall u,v \in V$

$E_3)$ $(u \oplus v) \oplus w = u \oplus (v \oplus w)$; $\forall u,v,w \in V$

$E_4)$ $\exists\, 0 \in V$ llamado cero o elemento nulo tal que
$$u \oplus 0 = u, \ \forall u \in V$$

$E_5)$ Para cada $u \in V$, $\exists (-u) \in V$ tal que
$$u \oplus (-u) = 0$$
$(-u)$ es llamado el opuesto de u.

$E_1')$ $\lambda \odot u \in V$, $\forall u \in V$, $\forall \lambda \in K$

$E_2')$ $\lambda \odot (\beta \odot u) = (\lambda \odot \beta) \odot u$; $\forall u \in V$; $\forall \lambda, \beta \in K$

$E_3')$ $(\lambda+\beta) \odot u = (\lambda \odot u) \oplus (\beta \odot u)$ $\forall u \in V$ $\forall \lambda, \beta \in K$

$E_4')$ $\lambda \odot (u \oplus v) = (\lambda \odot u) \oplus (\lambda \odot v)$ $\forall u,v \in V$ $\forall \lambda \in K$

$E_5')$ $1 \odot u = u$; $\forall u \in V$

Obs:

1. El K_espacio vectorial V es denotado por $(V,K,\oplus,\odot)$ o por $(V,\oplus,\odot)$
2. Los elementos de V son llamados vectores
3. Si $K=\mathbb{Q}$, se dice que V es un espacio vectorial racional
4. Si $K=\mathbb{R}$, se dice que V es un vector real

Proposición: Para todo K espacio vectorial V se cumple:

a) El cero es único

b) El opuesto de un vector es único.

Dem:

b) Sea $u \in V$ y $(-u) \in V$ su opuesto, Supongamos que $\exists\, w \in V$ tal que es opuesto de u, es decir
$$u+w = 0 \quad \cdots (1)$$
además:
$$u+(-u) = 0 \quad \cdots (2)$$

llamado "inverso de a" o "elemento inverso multiplicativo de a".

M_6) $a.(b+c) = a.b + b.c$; $\forall a,b,c \in \mathbb{K}$
(Distributiva)

Ejemplo:

. $\mathbb{N}$ no es un cuerpo
Para $n \in \mathbb{N}$ se cumple
$n + 0 = n$
Para $0 \notin \mathbb{N}$. ($\mathbb{N}$ no es un cuerpo pues no cumple A_4), es decir, no posee elemento neutro aditivo.

. $\mathbb{Z}$ no es un cuerpo pues $\because m \in \mathbb{Z} - \{0\}$;
se cumple: $m \cdot \left(\frac{1}{m}\right) = 1$
pero $\frac{1}{m} \notin \mathbb{Z}$ (no se cumple M_5), es decir, no posee inverso multiplicativo

. $\mathbb{Q}$ y $\mathbb{R}$

Definición: Sean V un conjunto no vacío y $\mathbb{K}$ un cuerpo, con dos operaciones

$\oplus : V \times V \to V$ (suma)
$(u,v) \to u \oplus v$

$\odot : \mathbb{K} \times V \to V$ (multiplicación por un escalar)
$(\lambda, v) \to \lambda \odot v$

Decimos que V es un espacio vectorial $\mathbb{K}$ o $\mathbb{K}$_espacio vectorial si se satisfacen los siguientes axiomas:

E_1) $u \oplus v \in V$ $\forall u, v \in V$

E_2) $w = w + (u + (-u))$
E_3) $= (w + u) + (-u)$
E_4) $= 0 + (-u)$
$= -u$

E_5 Ejemplo: De la siguiente lista de conjuntos determine cuales son espacios vectoriales

a) $W = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x = 0 \vee y = 0\}$ con las operaciones
$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$
$\lambda (x_1, y_1) = (\lambda x_1, \lambda y_1)$, $\lambda \in \mathbb{R}$ (Las operaciones usuales en $\mathbb{R}^2$)

b) $W = \{(x,0) / x > 0\}$ con las operaciones
$(x,0) + (y,0) = (xy, 0)$
$\lambda (x,0) = (x^\lambda, 0)$, $\lambda \in \mathbb{R}$

E_3) $(u+v)+w = u+(v+w)$; $\forall u, v, w \in W$

Sean $u, v, w \in W$ (fijos y arb) entonces $\exists x, y, z \in \mathbb{R}$ con $x>0$, $y>0$ y $z>0$ tal que:
$u = (x;0)$; $v = (y;0)$ y $w = (z;0)$

Veamos:

$$\begin{aligned}(u+v)+(w) &= ((x;0)+(y;0)) + (z;0)\\ &= (x.y, 0) + (z;0)\\ &= ((xy)z;0)\\ &= (x.(y.z);0) = (x;0)+(y.z;0)\\ &= (x,0) + ((y;0)+(z;0))\\ &= u + (v+w)\end{aligned}$$

$\therefore (u+v)+w = u+(v+w)$, $\forall u, w, v \in W$

... y $\mathbb{K}$

Definición: Sean V un conjunto no vacío y $\mathbb{K}$ un cuerpo, con dos operaciones

$\oplus : V \times V \rightarrow V$ (suma)

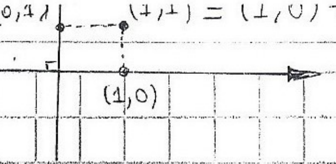
$(u,v) \rightarrow u \oplus v$

$\odot : \mathbb{K} \times V \rightarrow V$ (multiplicación por un escalar)

$(\lambda, v) \rightarrow \lambda \odot v$

Decimos que V es un espacio vectorial $\mathbb{K}$ o $\mathbb{K}$_espacio vectorial si se satisfacen los siguientes axiomas:

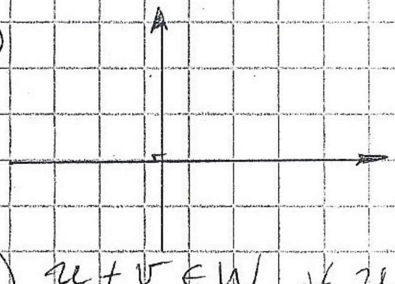
$E_1)$ $u \oplus v \in V \ \forall u, v \in V$



$(1,1) = (1,0) + (0,1)$ para $u = (0,1)$ y $v = (1,0) \in W$

$u + v = (0;1) + (1;0) =$
$= (1;1) \notin W$
(no satisface E_1)

b)



$E_1)$ $u + v \in W, \ \forall u, v \in W$:

Sean $u, v \in W$ (fijos y arbitrarios) entonces $\exists\, x, y \in \mathbb{R}$ con $x > 0$ e $y > 0$ tal que

$u = (x;0) \quad v = (y;0)$

Luego

$u + v \in W$

$\underset{>0}{(x;0)} + \underset{>0}{(y;0)} = \underset{>0}{(x.y;0)}$

Como $x > 0 \wedge y > 0$ entonces $x.y > 0$

$E_2)$ $u + v = v + u, \ \forall u, v \in W$

Sean $u, v \in W$ (fijos y arbitrarios) que entonces $\exists\, x, y\ \mathbb{R}$ con $x > 0$ e $y > 0$ tal que

$u = (x;0) \wedge v = (y;0)$

Luego

$u + v = (x;0) + (y;0) = (x.y;0)$
$= (y.x;0)$
$= (y;0) + (x;0)$
$= v + u$

Como: $x, y \in \mathbb{R}$ (cuerpo) $\Rightarrow x.y = y.x$

$\therefore$ $u + v = v + u, \ \forall u, v \in W$

E_1') $\lambda . u \in W, \forall u \in W,$
$\forall \lambda \in \mathbb{R}$

Sean $u \in W$ y $\lambda \in \mathbb{R}$ (fijos y arbitrarios) entonces $\exists\, x \in \mathbb{R}$ con $x > 0$ tal que

$$u = (x, 0)$$

Vemos que

$$\lambda . u = \lambda . (x, 0) = (x^{\lambda}, 0) \in W$$

E_1') $\lambda . u \in W, \forall u \in W, \forall \lambda \in \mathbb{R}$.

Sean $u \in W$ y $\lambda \in \mathbb{R}$ (fijos y arbitrarios) entonces $\exists\, x \in \mathbb{R}$ con $x > 0$ tal que

$$u = (x, 0)$$

Vemos que

$$\lambda . u = \lambda . (x, 0) = (x^{\lambda}, 0) \in W$$

Como

$$x > 0 \Rightarrow x^{\lambda} > 0 \xrightarrow{\text{entonces}}$$

$$\therefore\ \lambda u \in W, \ \forall u \in W, \forall \lambda \in \mathbb{R}$$

E_2') $\alpha . (\beta . u) = (\alpha . \beta) . u, \ \forall u \in W, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$:

Sean $u \in W$ y $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ (fijos y arb.) entonces $\exists\, x \in \mathbb{R}$ con $x > 0$ tal que

$$u = (x, 0)$$

Vemos que

$$\alpha . (\beta . u) = \alpha (\beta . (x, 0)) = \alpha (x^{\beta}, 0)$$
$$= ((x^{\beta})^{\alpha}, 0)$$
$$= (x^{\beta\alpha}, 0)$$
$$= (x^{\alpha\beta}, 0) = \alpha\beta . (x, 0)$$
$$= (\alpha . \beta) u$$

$$\therefore\ \alpha . (\beta u) = (\alpha . \beta) u, \ \forall u \in W, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

E_3') $\alpha . (u + v) = \alpha . u + \alpha . v, \ \forall u, v \in W, \forall \alpha \in \mathbb{R}$:

Sean $u, v \in W$ y $\alpha \in \mathbb{R}$ (fijos y arb) entonces $\exists\, x, y \in \mathbb{R}$ con $x > 0 \wedge y > 0$ tal que

$$u = (x, 0) \quad y \quad v = (y, 0)$$

Vemos que

$\alpha.(u+v) = \alpha.((x,0)+(y,0))$
$= \alpha.(x.y,0) = ((xy)^{\alpha},0)$
$= (x^{\alpha}y^{\alpha},0)$
$= (x^{\alpha},0)+(y^{\alpha},0)$
$= \alpha(x,0)+\alpha(y,0)$
$= \alpha u + \alpha v$
$\therefore\ \alpha(u+v) = \alpha u + \alpha v,\ \forall\ u,v \in W, \forall\ \alpha \in \mathbb{R}$

E_4') $(\alpha+\beta)u = \alpha.u+\beta.u,\ \forall u \in W,\ \forall \alpha,\beta \in \mathbb{R}$:
Sean $u \in W$ y $\alpha,\beta \in \mathbb{R}$ (fijos y arb.)
entonces $\exists\, x \in \mathbb{R}$ con $x>0$ tal que $u=(x,0)$
vemos que
$(\alpha+\beta)u = (\alpha+\beta)(x,0) = (x^{\alpha+\beta},0)$
$= (x^{\alpha}x^{\beta},0) = (x^{\alpha},0)+(x^{\beta},0) = \alpha(x,0)+\beta(x,0)$
$= \alpha.u+\beta v$
$\therefore\ (\alpha+\beta).u = \alpha u+\beta u,\ \forall u \in W, \forall \alpha,\beta \in \mathbb{R}$

E_5') $1.u = u,\ \forall u \in W$:
Sea $u \in W$ (fijo y arbitrario), entonces
$\exists\, x \in \mathbb{R}$ con $x>0$ tal que
$u=(x,0)$
Vemos que:
$1.u = 1(x,0) = (x^1,0) = (x,0) = u$
$\therefore\ 1.u = u,\ \forall u \in W$

Como se cumple todos los axiomas del espacio vectorial se concluye que W con estas operaciones es un espacio vectorial real.

Desarrollar

Ejercicio: Paso 1 ($\Rightarrow$) Paso 2 ($\Leftarrow$)

(1) Probar que $\mathbb{R}^2$ con las operaciones
$(x_1,y_1)+(x_2,y_2) = (x_1+x_2, y_1+y_2)$
$\lambda(x_1,y_1) = (\lambda x_1, \lambda y_1),\ \lambda \in \mathbb{R}$
} son las operaciones usuales en $\mathbb{R}^2$
es un espacio vectorial real.

(2) Diga cual de los sgtes conjuntos es un espacio vectorial real (con las operaciones usuales de $\mathbb{R}^2$). Justifique su respuesta.

a) $V = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / 3x-y=0\}$
b) $V = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / 2x+3y+4=0\}$

Definición: Sean $(V,+,\cdot)$ un K-espacio vectorial y $W \subset V$ no vacío.
Si W con las operaciones + y $\cdot$ del espacio vectorial V es un K-espacio vectorial ($(W,+,\cdot)$ es K-espacio vectorial) se dice que W es un subespacio vectorial de V.

Proposición: Sean $(V,+,\cdot)$ un K-espacio vectorial y $W \subset V$ no vacío.
Entonces W es un subespacio vectorial de V si:
a) $u+v \in W,\ \forall u,v \in W$
b) $\lambda u \in W,\ \forall u \in W, \forall \lambda \in K$

demostración de Ejercicio:

Proposición Sean $(V,+,\cdot)$ un $\mathbb{K}$_espacio vectorial y $W \subset V$ no vacío.
Entonces
W es un subespacio vectorial de V si y solo si
$\alpha.u + \beta.v \in W$, $\forall u, v \in W$
$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}$

demostración Ejercicio

Veamos el ejercicio (2) por el ejercicio (1)
$V=\mathbb{R}^2$ con las operaciones usuale es un espacio vectorial real

$V_1 \subset V \wedge V_2 \subset V$ no vacíos
Vemos que V_1 es un subespacio de V;
Sean $u, v \in V_1$ y $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ (fijos y arb)
entonces $\exists\, x, y, a, b \in \mathbb{R}$ tal que

$u = (x,y)$ con $3x - y = 0$ ...(1)
$v = (a,b)$ con $3a - b = 0$ ...(2)

Vemos que
$$\alpha.u + \beta v = \alpha(x,y) + \beta.(a,b) = (\alpha x, \alpha y) + (\beta a, \beta b)$$
$$= (\underbrace{\alpha x + \beta a}_{m}, \underbrace{\alpha y + \beta b}_{n}) = (m,n)$$

De $\alpha(1) + \beta(2)$ tenemos:

$$\alpha(3x - y) = \alpha.0 = 0$$
$$\beta(3a - b) = \beta.0 = 0 \quad (+)$$
$$\alpha(3x - y) + \beta(3a - b) = 0$$

$$3(\alpha x + \beta a) - (\alpha y + \beta b) = 0$$
$$3m - n = 0$$
entonces
$$\alpha u + \beta v \in V_1$$
$\therefore$ $\alpha u + \beta v \in V_1$ $\forall u, v \in V_1$
$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$
$\Rightarrow$ V_1 es un subespacio vectorial de $V = \mathbb{R}^2$
$\therefore$ V_1 es un espacio vectorial real con las Operaciones usuales de $\mathbb{R}^2$.

b) Como $0 = (0,0) \in V = \mathbb{R}^2$ donde V es un espacio vectorial real y se cumple
$0 \in W$, $\forall W$ subespacio de V. demostrar ejercicio $\left(0.u = 0, \forall u \in V \atop W \subset V\right)$
$\Downarrow$
V_2 no es un subespacio vectorial de V $\quad \underbrace{0.u}_{\in W} = 0$, $\forall u \in W$

Hip: Supongamos que V_2 es un subespacio de $V=\mathbb{R}^2$
Entonces el vector nulo $0 = (0,0) \in V_2$
$(\Rightarrow\Leftarrow)$
pues
$$2(0) + 3(0) + 4 = 4 \neq 0$$
$$\therefore\ 0 = (0,0) \notin V_2$$

V_2 no es un subespacio vectorial de V.
$\Rightarrow$ V_2 no es un subespacio vectorial real con las operaciones usuales de $\mathbb{R}^2$.

Longitud o norma de un vector

Sean V un espacio vectorial real y la aplicación.

$$\|\cdot\| : V \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$u \longmapsto \|u\|$$

es una norma en V si satisface:

$N_1)$ $\|u\| \geq 0$, $\forall\, u \in V$

$N_2)$ $\|u\| = 0 \Longleftrightarrow u = 0$ (vector nulo de V)

$N_3)$ $\|u+v\| \leq \|u\| + \|v\|$, $\forall\, u, v \in V$

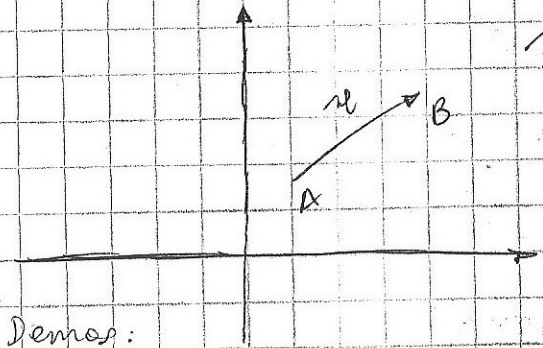
$N_4)$ $\|\lambda u\| = |\lambda|\, \|u\|$, $\forall\, u \in V$, $\forall\, \lambda \in \mathbb{R}$.

Ejemplo En $\mathbb{R}^2$, pruebe que

Para: $u = (x, y)$

$$\|u\| = \|(x,y)\| = \sqrt{x^2+y^2}$$

esta operación define una norma en $\mathbb{R}^2$



$u = \overrightarrow{AB}$
$= B - A$

$\|u\| = \sqrt{x^2+y^2} = u = (x, y)$

Demos:

$N_1)$ Sea $u = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ (fijo y arb)

$\|u\| = \sqrt{x^2+y^2} \geq 0$

$\therefore \|u\| \geq 0$, $\forall\, u \in \mathbb{R}^2$

$N_2)$

$(\Longrightarrow)$ Sea $u = (x,y) \in \mathbb{R}^2$ que cumple

$\|u\| = 0$

$\sqrt{x^2+y^2} = 0$

$x^2+y^2 = 0 \Longrightarrow x = 0 \wedge y = 0$

$\Longrightarrow u = (0,0) = \mathbb{0}$

$(\Longleftarrow)$ Para $u = \mathbb{0} = (0,0) \in \mathbb{R}^2$ se tiene

$\|u\| = \|(0,0)\| = \sqrt{0^2+0^2} = \mathbb{0}$.

N3) Sean $u=(x,y)$ y $v=(a,b)\in\mathbb{R}^2$ (fijos y arb)

Veamos que

$$\|u+v\|^2 = (x+a)^2+(y+b)^2$$
$$= x^2+y^2+a^2+b^2+2(ax+by)$$

$$|ax+by| \leq \sqrt{a^2+b^2}\,\sqrt{x^2+y^2}$$

$$\|u+v\|^2 \leq x^2+y^2+a^2+b^2+2\sqrt{x^2+y^2}\,\sqrt{a^2+b^2}$$
$$\leq \|u\|^2+\|v\|^2+2\|u\|\|v\|$$
$$\leq (\|u\|+\|v\|)^2$$

$$\Rightarrow \|u+v\| \leq \|u\|+\|v\|$$

$\|u+v\| \leq \|u\|+\|v\|,\ \forall u,v\in\mathbb{R}^2$

N4) Sean $u=(x,y)\in\mathbb{R}^2$ y $\lambda\in\mathbb{R}$ (fijos y arb)

Veamos que

$$\|\lambda u\| = \|(\lambda x,\lambda y)\|$$
$$= \sqrt{(\lambda x)^2+(\lambda y)^2} = |\lambda|\,\|u\|$$

$\|\lambda u\| \leq |\lambda|\,\|u\|,\ \forall u\in\mathbb{R}^2,\ \forall\lambda\in\mathbb{R}$

$\therefore\ \|\ \|$ es una norma en $\mathbb{R}^2$.

Ejercicio: En $\mathbb{R}^2$, pruebe que la operación definida por

$$\|(x,y)\| = |x|+|y|$$

es una norma en $\mathbb{R}^2$

Obs: En el espacio vectorial real $\mathbb{R}^2$ la norma del vector $v=(x,y)$ dada por

$$\|v\| = \sqrt{x^2+y^2}$$

es llamada norma euclidiana (o usual en $\mathbb{R}^2$).

23/08/16

En $\mathbb{R}^2$ para $u=(x;y)\in\mathbb{R}^2$

$$\|u\| = \sqrt{x^2+y^2}$$

define una norma en $\mathbb{R}^2$ llamada norma Euclideana en $\mathbb{R}^2$ (norma usual en $\mathbb{R}^2$).

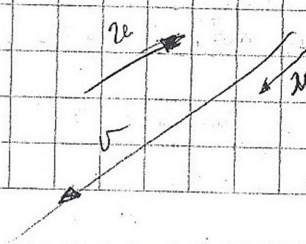
Ejercicio: Considerando el espacio vectorial real $V=\mathbb{R}^3$. Pruebe que para $u=(x,y,z)\in V$ la operación $\|u\| = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$ define una norma en $\mathbb{R}^3$ llamada norma Euclideana en $\mathbb{R}^3$

Paralelismo de Vectores

Definición: Sea el espacio vectorial real V. Dos vectores $u, v\in V$ son paralelos si existe $\lambda\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$ tal que

$$u=\lambda v$$

y se denota por $u \parallel v$



$$u_v = \frac{v}{\|v\|}$$

$$u_v \parallel v$$

Definición: Sea V un espacio vectorial real y norma $\| \ \|$ en V.
Sea $v \in V$ no nulo; el valor que tiene la misma dirección que v y norma igual a 1, es el vector:

$$u = u_v = \frac{v}{\|v\|}$$

llamado vector unitario en la dirección de v.

notemos que

$$v = \|v\| \, u_v$$

Proposición: En $\mathbb{R}^2$. Sean $u = (a,b)$, $v = (c,d) \in \mathbb{R}^2$ vectores no nulos. Pruebe que:

$$u \parallel v \iff ad - bc = 0$$

($\Rightarrow$) Por hipótesis $u \parallel v$ entonces $\exists \lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ tal que

$$u = \lambda v$$

$$(a,b) = \lambda (c,d) = (\lambda c, \lambda d)$$

$a = \lambda c \ \wedge \ b = \lambda d$

vemos que:

$ad - bc = (\lambda c)\, d - (\lambda d)\, c = 0$

($\Leftarrow$) Por hipótesis se tiene que

$$ad - bc = 0 \quad \dots (1)$$

Como $u = (a;b)$ es un vector no nulo, entonces

$$a \neq 0 \ \vee \ b \neq 0$$

Sin pérdida de generalidad, podemos considerar que $a \neq 0$

De (1) se tiene

$$d = \frac{bc}{a} \quad \dots (2)$$

Vemos que:

$$\Rightarrow v = (c;d) = \left(c ; \frac{bc}{a}\right)$$

$$= \underbrace{\left(\frac{c}{a}\right)} (a,b)$$

$$v = \lambda . u$$

AFIRMO $\lambda = \frac{c}{a} \neq 0$

Supongamos que $\lambda = 0 \Rightarrow c = 0$
de (2) se tiene $d = 0 \Rightarrow v = (c,d) = (0,0)$

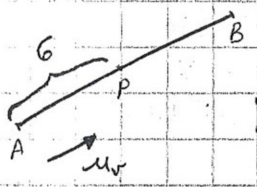
$(\Rightarrow \Leftarrow)$

$\therefore \lambda \neq 0$

$\therefore \exists \lambda \in \mathbb{R} - \{0\} \ / \ v = \lambda u$

$\Rightarrow v \parallel u \Rightarrow u \parallel v$.

Ejemplo: En $V = \mathbb{R}^2$. Sea el segmento de recta AB con $A = (-2;1)$ y $B = (6,5)$.
Encontrar el punto "P" en AB que diste 6 unidades del punto A.



$\|\overrightarrow{AP}\| = 6$

Sea $u = \overrightarrow{AB} = B - A = (6;5) - (-2;-1) = (8;6)$

Con

$$\|u\| = \|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{8^2+6^2} = 10$$

Sabemos:

$$\overrightarrow{AP} = \|\overrightarrow{AP}\| u_v = 6u_v = 6\frac{u}{\|u\|} = \frac{6}{10}u = \frac{3}{5}u$$

$$\overrightarrow{AP} = \frac{3}{5}(8;6) = \left(\frac{24}{5};\frac{18}{5}\right)$$

Como

$$\overrightarrow{AP} = P - A \Rightarrow P = A + \overrightarrow{AP}$$

$$P = (-2;-1) + \left(\frac{24}{5};\frac{18}{5}\right) = \left(\frac{14}{5};\frac{13}{5}\right)$$

Ejemplo: Sea el espacio vectorial real V con norma $\|\ \|$. Pruebe que:

Si $u, v \in V$ distintos

entonces

$$\left|\frac{\|u\| - \|v\|}{\|u-v\|}\right| \le 1$$

Sabemos que: $\|u+v\| \le \|u\| + \|v\|$ (desigualdad triangular)

Como: $u = v + (u-v)$ "aplicando desigualdad triangular"

$$\|u\| = \|v + (u-v)\| \le \|v\| + \|u-v\|$$

$$\Rightarrow \|u\| - \|v\| \le \|\underbrace{u-v}_{\neq 0}\|$$ (como u y v son distintos) $\longrightarrow \|\ \| \neq 0$

$$\Rightarrow \frac{\|u\| - \|v\|}{\|u-v\|} \le 1 \quad \ldots (1)$$

Y además

$$v = u + (v-u)$$

$$\|v\| = \|u + (v-u)\| \le \|u\| + \|v-u\|$$

$$\|v\| - \|u\| \le \|v-u\|$$

$$\|v\| - \|u\| \le |-1| \cdot \|u-v\|$$

$$-\|u-v\| \le \|u\| - \|v\|$$

$$-1 \le \frac{\|u\| - \|v\|}{\|u-v\|} \quad \ldots (2)$$

de (1) y (2) se tiene que:

$$\left|\frac{\|u\| - \|v\|}{\|u-v\|}\right| \le 1$$

Definición: Sea V un espacio vectorial real. Un producto interno sobre V es una aplicación.

$$\langle\, , \rangle : V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$(u;v) \longmapsto \langle u;v\rangle \quad (u.v)$$

que satisface las siguientes propiedades:

P1) $\langle u,u\rangle \ge 0, \ \forall u \in V$

P2) $\langle u,u\rangle = 0 \longleftrightarrow u = 0$ (vector nulo de V)

P3) $\langle u,v\rangle = \langle v,u\rangle, \ \forall u, v \in V$

P4) $\langle u+v, w\rangle = \langle u,w\rangle + \langle v,w\rangle, \ \forall u, v, w \in V$

P5) $\langle \lambda u, v\rangle = \lambda\langle u,v\rangle, \ \forall u, v \in V, \ \forall \lambda \in \mathbb{R}$

Ejemplo: En $V=\mathbb{R}^2$

Diga si la operación $\langle , \rangle$ definidas para $u=(x_1, y_1)$, $v=(x_2, y_2) \in V$ por

a) $\langle u, v\rangle = 2x_1y_1 - 2x_2y_2$

b) $\langle u, v\rangle = x_1x_2 + y_1y_2$

es un producto interno en V?

Demostración:

a) La operación $\langle , \rangle$ no es producto interno en V.

P1| Sea $u=(x,y) \in V = \mathbb{R}^2$ (fijo y arb)

$\langle u,u\rangle = 2xy - 2xy = 0 \geq 0$

$\therefore \langle u,u\rangle \geq 0$

$\Rightarrow \langle u,u\rangle \geq 0, \forall u \in V$

P2| Por lo anterior tenemos

$\langle u,u\rangle = 0, \forall u \in V$

Contradice P2|

Para $u=(-1;1) \neq (0,0) = \vec{0}$

Se tiene

$\langle u,u\rangle = 0$

no cumple P2|

$\therefore \langle , \rangle$ no es producto interno en V.

b) La $\langle , \rangle$ es un producto interno en $V=\mathbb{R}^2$, llamado Producto interno canónico en $\mathbb{R}^2$ (usual). Pues:

Canónico ... mn ... ados

P1| $\langle u,u\rangle \geq 0, \forall u \in V$:

Sea $u=(x;y) \in \mathbb{R}^2$ (fijos y arb)

como $\langle u,u\rangle = x^2+y^2 \geq 0$

$\therefore \langle u;u\rangle \geq 0, \forall u \in \mathbb{R}^2$

P2| $\langle u,u\rangle = 0 \leftrightarrow u = \vec{0}$

($\Rightarrow$) Sea $u=(x,y) \in \mathbb{R}^2$ tal que

$\langle u,u\rangle = 0$

$x^2+y^2 = 0 \rightarrow x=0 \wedge y=0$

$\therefore u=(0,0)=\vec{0}$

($\Leftarrow$) Para $u=(0,0)$ se tiene

$\langle u,u\rangle = 0^2+0^2=0$

P3| $\langle u,v\rangle = \langle v,u\rangle, \forall u,v \in V$.

Sean $u=(x,y)$, $v=(a,b) \in \mathbb{R}^2$ (fijos y arb)

Vemos que

$\langle u,v\rangle = \langle (x,y);(a;b)\rangle = xa+yb$

$= ax+by = \langle (a;b);(x;y)\rangle$

$= \langle v;u\rangle$

$\therefore \langle u;v\rangle = \langle v;u\rangle, \forall u,v \in \mathbb{R}^2$.

P4| $\langle u+v,w\rangle = \langle u,w\rangle + \langle v,w\rangle, \forall u,v,w \in V$:

Sean $u=(x;y)$, $v=(a;b)$, $w=(\alpha;\beta) \in \mathbb{R}^2$ (fijos y arb)

$\langle u+v, w\rangle = \langle (x+a;y+b);(\alpha;\beta)\rangle$

$= (x+a)\alpha + (y+b)\beta$

$= x\alpha + a\alpha + y\beta + b\beta$

$= (x\alpha + y\beta) + (a\alpha + b\beta)$

$= \langle (x,y),(\alpha,\beta)\rangle + \langle (a;b);(\alpha;\beta)\rangle$

$= \langle u;w\rangle + \langle v;w\rangle$

$\therefore \langle u+v,w\rangle = \langle u;w\rangle + \langle v;w\rangle, \forall v,u,w \in \mathbb{R}^2$

P5 | $\langle \lambda u, v \rangle = \lambda \langle u, v \rangle$, $\forall u, v \in V$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$

Sean $u = (x,y)$, $v = (a,b) \in \mathbb{R}^2$ y $\lambda \in \mathbb{R}$ (fijos y arb)

$$\langle \lambda u, v \rangle = \langle \lambda (x,y), (a,b) \rangle = \langle (\lambda x, \lambda y); (a,b) \rangle$$
$$= \lambda x a + \lambda y b = \lambda (xa + yb)$$
$$= \lambda \langle (x;y); (a;b) \rangle$$
$$= \lambda \langle u; v \rangle$$

∴ $\langle \lambda u; v \rangle = \lambda \langle u, v \rangle$, $\forall u, v \in \mathbb{R}^2$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$

∴ $\langle , \rangle$ es un Producto interno (Pi) en $\mathbb{R}^2$.

Obs: Sea V un espacio vectorial real con producto interno $\langle , \rangle$

La operación
$$\|u\| = \sqrt{\langle u, u \rangle}, \quad \forall u \in V$$
es una norma en V

Ejercicio

Demostrar

Todo producto interno en V induce una norma

Definición: Sea V un espacio vectorial real con producto interno $\langle , \rangle$

Demos que $u, v \in V$ son ortogonales (o perpendiculares) si $\langle u, v \rangle = 0$ y lo denotamos por $u \perp v$

Obs: En $V = \mathbb{R}^2$ con producto interno canónico $\langle , \rangle$.

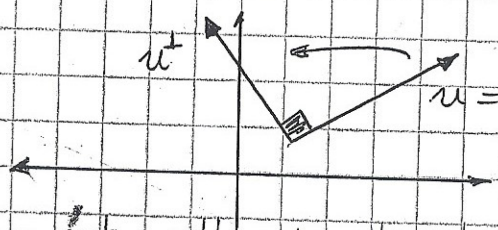
Para $u = (a;b) \in \mathbb{R}^2$ definimos:

$$u^{\perp} = (-b; a)$$

que cumple

$$\langle u; u^{\perp} \rangle = 0$$

esto genera un cuadrado $\langle ; \rangle$ averiguar.



el vector $u^{\perp}$ es llamado el ortogonal de u.