Capítulo 5

Geometría proyectiva

Como ya hemos mencionado, la idea principal detrás de la geometría analítica es la de asociar un sistema de coordenadas al plano. En el capítulo 1 hicimos esto mediante el uso de los axiomas de Euclides. En este capítulo, definiremos en el plano otro sistema de coordenadas, que nos permitirá, en cierto sentido, extenderlo, de modo que cualquier par de rectas tengan intersección no vacía. Recordemos que, de la manera como las rectas son descritas en el capítulo 2, esto no siempre ocurre.

Para definir este nuevo sistema de coordenadas en el plano, que llamaremos *sistema de coordenadas homogéneas*, necesitaremos de la noción de *relación de equivalencia*.

5.1. Relaciones y clases de equivalencia

Empezaremos definiendo la noción de *relación*.

Definición 5.1. Sean A y B conjuntos no vacíos. Una *relación* $\mathcal{R}$ *de* A *a* B es la terna ordenada (A, B, R), donde $R \subset A \times B$. En este caso, al conjunto A se le denomina *conjunto de partida*, al conjunto B se le denomina *conjunto de llegada* y al conjunto R se le denomina *regla de correspondencia* o también *gráfico*.

Ejemplo 5.2. Sean $A = \{1, 2, 3, 4\}$ y $B = \{a, b, c\}$, y consideremos

$$R = \{(1, b), (1, c), (2, a), (4, a)\} \subset A \times B.$$

Entonces $\mathcal{R} = (A, B, R)$ es una relación de A a B.

Debemos hacer énfasis que, según su definición, una relación depende de tres objetos: el conjunto de partida, el de llegada y la regla de correspondencia. Por ejemplo, consideremos $A' = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Entonces $A \subset A'$ y $R \subset A' \times B$. En este caso, la relación $\mathcal{R}' = (A', B, R)$ *no es la misma* que la relación $\mathcal{R}$ definida anteriormente, pese a tener la misma regla de correspondencia. Aún así, para no recargar la notación y mantener compatibilidad con la literatura, denotaremos a las relaciones y a sus reglas de correspondencia con el mismo símbolo.

Ejemplo 5.3. Sean $X = \{n \in \mathbb{N} \,:\, n \text{ es par}\}$ y $Y = \{a, b, c, d, \ldots, z\}$. Entonces

$$R = \{(2, a), (4, z), (10, z), (8, b)\} \subset X \times Y,$$

es una relación de X a Y. Note que estamos denotando con el símbolo R tanto a la relación como a la regla de correspondencia, sin embargo, se tiene claro cuales son los conjuntos de partida y de llegada.

Un caso particular de relación es cuando los conjuntos de partida y de llegada coinciden. Dado $A \neq \emptyset$, diremos que $\mathcal{R}$ es una *relación* en A si $\mathcal{R}$ es una relación de A en A. Además, si $(a, b) \in \mathcal{R}$ entonces también denotaremos $a\mathcal{R}b$.

Definición 5.4. Sea $A \neq \emptyset$ y $\mathcal{R}$ una relación en A. Diremos que $\mathcal{R}$ es

1. *reflexiva*, si $x\mathcal{R}x$, para todo $x \in A$;
2. *simétrica*, si $x\mathcal{R}y$ implica $y\mathcal{R}x$;
3. *transitiva*, si $x\mathcal{R}y$ y $y\mathcal{R}z$ implican $x\mathcal{R}z$.

Además, diremos que $\mathcal{R}$ es de *equivalencia* si $\mathcal{R}$ cumple las tres propiedades anteriores.

Ejemplo 5.5. Sea $A = \mathbb{R}$ y defina $\mathcal{R} = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \,:\, x \leq y\}$. Observe que, para $x, y \in \mathbb{R}$,

$$(x, y) \in \mathcal{R} \iff x\mathcal{R}y \iff x \leq y.$$

Como $x \leq x$, para todo $x \in \mathbb{R}$, entonces $x\mathcal{R}x$. Luego $\mathcal{R}$ es una relación reflexiva. Por otro lado, si $x \leq y$ y $y \leq z$ entonces $x \leq z$. Esto implica que $\mathcal{R}$ es una relación transitiva. Sin embargo, $x \leq y$ no implica en general que $y \leq x$, basta considerar $x = 0$ y $y = 1$. Así, $\mathcal{R}$ no es una relación simétrica.

Ejemplo 5.6. Sea $A = \mathbb{R}$ y defina $\mathcal{S} = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \,:\, |x| = |y|\}$. Así, dado cualquier $x \in \mathbb{R}$, se tiene que $|x| = |x|$, luego $\mathcal{S}$ es una relación reflexiva. Del mismo modo, si $|x| = |y|$ entonces claramente $|y| = |x|$. Entonces $\mathcal{S}$ es simétrica. Finalmente, si $|x| = |y|$ y $|y| = |z|$ entonces $|x| = |z|$. Concluimos que $\mathcal{S}$ es transitiva y por lo tanto, es una relación de equivalencia en $\mathbb{R}$.

Las relaciones de equivalencia no solamente tienen sentido en el ámbito matemático.

Ejemplo 5.7. Sea $A = \{\text{alumnos UNI}\}$, considerando los alumnos matriculados en la UNI actualmente. Luego podemos definir la relación, para $a, b \in A$

$$a \sim b \iff a \text{ y } b \text{ ingresaron el mismo año.}$$

Dado $a \in A$ (es decir, dado un alumno de la UNI), claramente a ingresó el mismo año que si mismo. Esto es cierto para cualquier $a \in A$, luego $\sim$ es reflexiva. Del mismo modo, si a y b ingresaron el mismo año, entonces b y a ingresaron el mismo año. Entonces $\sim$ es simétrica. Finalmente, si a y b ingresaron el mismo año y b y c ingresaron el mismo año, entonces a y c ingresaron el mismo año. Esto quiere decir que $\sim$ es transitiva. Concluimos que $\sim$ es una relación de equivalencia en A.

En matemáticas, la gran utilidad de las relaciones de equivalencias es que nos permiten *clasificar* elementos dentro de un conjunto. Recordemos que clasificar elementos en un conjunto significa agrupar elementos con una característica común (el criterio con el que se está clasificando). A cada agrupación de elementos con tal característica común la llamaremos *clase de equivalencia*.

Definición 5.8. Sea $A \neq \emptyset$ y $\sim$ una relación de equivalencia en A. Dado $x \in A$ definimos la *clase de equivalencia* de x como el conjunto

$$[x] = \{y \in A \,:\, x \sim y\}.$$

Es decir, la clase de equivalencia de x es el conjunto de los elementos de A que están relacionados (via la relación $\sim$) con x. A x lo llamaremos *representante* de la clase de equivalencia $[x]$.

Ejemplo 5.9 (Continuación del ejemplo 5.6)**.** Sea $x = 3 \in \mathbb{R}$. Entonces, la clase de equivalencia de $x = 3$ es el conjunto

$$[3] = \{y \in \mathbb{R} \,:\, 3\,\mathcal{S}\,y\}.$$

Observe que $3\,\mathcal{S}\,y$ si, y solamente si, $|y| = |3| = 3$. Luego $y = 3$ o $y = -3$. Esto implica que

$$[3] = \{-3, 3\}.$$

En general, si $a \in \mathbb{R}$ entonces $a\,\mathcal{S}\,b$ si, y solamente si, $|a| = |b|$, es decir, $b = a$ o $b = -a$. Luego, $[a] = \{a, -a\}$. Observe que en este caso, $[-a] = \{a, -a\} = [a]$.

Ejemplo 5.10 (Continuación del ejemplo 5.7)**.** Sea $x = \texttt{Juan}$ un alumno de la UNI que ingresó en el año 2008. Entonces $y \sim \texttt{Juan}$ si, y solo si, y ingresó en el mismo año que $\texttt{Juan}$, esto es, en el año 2008. Luego podemos escribir

$$[\texttt{Juan}] = \{\text{alumnos de la UNI que ingresaron en el 2008}\}.$$

Como $\sim$ es una relación reflexiva, $\texttt{Juan} \sim \texttt{Juan}$, y esto implica que $\texttt{Juan} \in [\texttt{Juan}]$. Observe que el conjunto $[\texttt{Juan}]$ no depende del alumno $\texttt{Juan}$ en sí, sino de la característica en común de los alumnos relacionados con $\texttt{Juan}$. En este caso, $\texttt{Juan}$ es el representante de los alumnos de la UNI que ingresaron en el 2008. Si sabemos que $\texttt{Miguel}$ también ingresó en el 2008 entonces $\texttt{Juan} \sim \texttt{Miguel}$, $[\texttt{Miguel}] = [\texttt{Juan}]$ y $\texttt{Miguel}$ también es un representante de los alumnos UNI que ingresaron en el 2008.

Proposición 5.11. *Sea $A \neq \emptyset$ y $\sim$ una relación de equivalencia en A. Entonces*

1. *$[x] \neq \emptyset$, para todo $x \in A$;*
2. *$[x] \cap [y] \neq \emptyset$ si, y solamente si, $[x] = [y]$;*
3. *$A = \displaystyle\bigcup_{x \in A} [x]$.*

Demostración.

1. Como $\sim$ es reflexiva entonces $x \sim x$, para todo $x \in A$. Entonces $x \in [x]$, que prueba que $[x] \neq \emptyset$.

2. Claramente, si $[x] = [y]$ entonces $[x] \cap [y] = [x] = [y] \neq \emptyset$, por el ítem anterior.

   Recíprocamente, supongamos que existe $z \in [x] \cap [y]$, es decir, $z \sim x$ y $z \sim y$. Esto, por simetría y transitividad de $\sim$, implica que $x \sim y$. Luego, $w \sim x$ junto con $x \sim y$ implica que $w \sim y$. Del mismo modo, $w \sim y$, junto con $y \sim x$ implica que $w \sim x$. Esto prueba que $[x] = [y]$.

3. Como cada $[x] \subset A$ entonces la unión de todos ellos, $\bigcup\limits_{x\in A}[x]$, va a estar contenida en A. Por otro lado, si $w \in A$ entonces $w \in [w] \subset \bigcup\limits_{x\in A}[x]$, es decir, $A \subset \bigcup\limits_{x\in A}[x]$. Esto prueba la igualdad de ambos conjuntos. □

Finalmente, agrupamos todas las clases de equivalencia en un nuevo conjunto.

Definición 5.12. Sea $A \neq \emptyset$ y $\sim$ una relación de equivalencia en A. Definimos el *conjunto cociente* de A sobre $\sim$ como

$$\frac{A}{\sim} = \{[x] \;:\; x \in A\}.$$

Ejemplo 5.13 (Continuación del ejemplo 5.10)**.** Tenemos que el conjunto cociente de $A = \{\text{alumnos UNI}\}$ con la relación $\sim$ es el conjunto cuyos elementos son las clases de equivalencia de elementos de A. Por lo visto en el ejemplo 5.10, cada clase de equivalencia es el conjunto de alumnos de la UNI que ingresaron el mismo año. Así, podemos escribir

$$\frac{A}{\sim} = \{\{\text{ingresos 2013}\}, \{\text{ingresos 2012}\}, \{\text{ingresos 2011}\}, \ldots\}.$$

Note que los elementos de $A/{\sim}$ “clasifican” al conjunto de alumnos de la UNI por año de ingreso.

Ejemplo 5.14. Sea $A = \mathbb{R}$ y defina la relación $\sim$ como

$$x \sim y \iff x - y \in \mathbb{Z}.$$

Es fácil comprobar que $\sim$ es una relación de equivalencia. Considerando $x_0 = 0.6 \in \mathbb{R}$, tenemos que $y \sim 0.6$ si, y solamente si, $y = 0.6 + m$, con $m \in \mathbb{Z}$. Así,

$$[0.6] = \{m + 0.6 \;:\; m \in \mathbb{Z}\} = \{\ldots, -1.4, -0.4, 0.6, 1.6, 2.6, \ldots\}.$$

Observe que $[-0.4] = [2.6] = [0.6]$, pues todos los representantes están relacionados por $\sim$. Del mismo modo, para cualquier $x \in \mathbb{R}$,

$$[x] = \{x + m \; : \; m \in \mathbb{Z}\} = \{\ldots, x-2, x-1, x, x+1, x+2, \ldots\}.$$

Luego, $[x+m] = [x]$, para cualquier x. Probaremos ahora que

$$\frac{\mathbb{R}}{\sim} = \{[w] \; : \; w \in [0, 1\rangle\}.$$

En efecto, si $[x] \in \mathbb{R}/\sim$, para $x \in \mathbb{R}$, entonces $w = x - [\![x]\!] \in [0, 1\rangle$, donde $[\![x]\!] \in \mathbb{Z}$ es el máximo entero de x. Luego, $w \sim x$ y por lo tanto, $[x] = [w]$.

5.2. Coordenadas homogéneas y el plano proyectivo

Con las herramientas dadas en la sección anterior, construiremos un nuevo conjunto. Sea $A = \mathbb{R}^3 \setminus \{\overline{0}\}$ y en A definamos la siguiente relación $\sim$, para $u, v \in \mathbb{R}^3$, $u, v \neq \overline{0}$,

$$u \sim v \iff \exists\, t \in \mathbb{R},\; u = tv. \tag{5.1}$$

Es claro que si $u \sim v$ y $u = tv$, $t \in \mathbb{R}$, entonces $t \neq 0$ pues ni u ni v son nulos.

Probaremos que $\sim$ es una relación de equivalencia. Dado $u \in \mathbb{R}^3 \setminus \{\overline{0}\}$, consideramos $t = 1$ y así tenemos $u = 1 \cdot u$, es decir, $u \sim u$. Luego $\sim$ es refleuiva. Dados $u, v \in \mathbb{R}^3 \setminus \{\overline{0}\}$, tales que $u \sim v$ entonces $u = tv$, para algún $t \in \mathbb{R}$. Como $t \neq 0$ entonces definimos $s = 1/t \in \mathbb{R}$ y así, $v = su$, es decir, $v \sim u$. Así, $\sim$ es simétrica. Finalmente, si $u \sim v$ y $v \sim w$, entonces $u = tv$ y $v = sw$, para $t, s \in \mathbb{R}$. Entonces, podemos escribir $u = (ts)w$, es decir, $u \sim w$. Luego, $\sim$ es transitiva y, por lo tanto, relación de equivalencia.

Ejemplo 5.15. Sea $u = (1, 5, 2) \neq \overline{0}$. Entonces $v \sim u$ si, y solo si, $v = t(1, 5, 2)$. Luego, podemos escribir

$$[u] = [(1, 5, 2)] = \{(t, 5t, 2t) \; : \; t \neq 0\}.$$

Note que esta es la recta en $\mathbb{R}^3$ que pasa por $\overline{0}$ y con dirección u, quitándole el punto $\overline{0}$.

Dado $u = (a, b, c) \in \mathbb{R}^3$, $u \neq \overline{0}$, denotaremos

$$[u] = [(a, b, c)] = [a : b : c].$$

Así, $[a : b : c]$ es la recta que pasa por $(0, 0, 0)$ y con dirección (a, b, c), quitándole el punto $(0, 0, 0)$.

Definamos entonces el objeto que nos permitirá extender el plano euclidiano y dotarlo de nuevas coordenadas.

Definición 5.16. Consideremos en $\mathbb{R}^3 \setminus \{\bar{0}\}$ la relación de equivalencia $\sim$ definida como en (5.1). Al conjunto cociente $\dfrac{\mathbb{R}^3 \setminus \{\bar{0}\}}{\sim}$ lo llamaremos *plano proyectivo* y lo denotaremos como $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$. Así,

$$\mathbb{P}^2(\mathbb{R}) = \{[x : y : z] \,:\, (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, (x, y, z) \neq (0, 0, 0)\}.$$

Otras notaciones halladas en la literatura para el plano proyectivo son $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$, $\mathbb{RP}^2$ y $\mathbb{P}^2$. Esta última notación se usa cuando queda claro que trabajamos con números reales, que es el caso. Así, en adelante, denotaremos al plano proyectivo como $\mathbb{P}^2$.

Sea $[a : b : c] \in \mathbb{P}^2$ tal que $c \neq 0$. Como para cualquier $t \neq 0$ se tiene $(ta, tb, tc) \in [a : b : c]$ entonces $[ta : tb : tc] = [a : b : c]$, para todo $t \neq 0$. Así, en particular, considerando $t = \dfrac{1}{c} \neq 0$, tenemos

$$[a : b : c] = \left[\frac{a}{c} : \frac{b}{c} : 1\right].$$

Es decir, hemos probado

$$\{[x : y : z] \in \mathbb{P}^2 \,:\, z \neq 0\} \subset \{[x : y : 1] \in \mathbb{P}^2 \,:\, x, y \in \mathbb{R}\}.$$

Como la otra inclusión es inmediata, tenemos la igualdad de los conjuntos anteriores. Entonces podemos escribir

$$\mathbb{P}^2 = \{[x : y : 1] \,:\, x, y \in \mathbb{R}\} \cup \{[x : y : 0] \,:\, x, y \in \mathbb{R}\}.$$

Definición 5.17. Al conjunto

$$\mathbb{A}^2 = \{[x : y : 1] \,:\, x, y \in \mathbb{R}\}$$

lo llamaremos *conjunto de puntos afines* de $\mathbb{P}^2$, o también *puntos propios*, y al conjunto

$$\mathbb{P}^2_\infty = \{[x : y : 0] \,:\, x, y \in \mathbb{R}\}$$

lo llamaremos *conjunto de puntos del infinito*, o también, *puntos impropios*.

Estamos en condiciones de dotar al plano $\mathcal{P}$ de un nuevo sistema de coordenadas.

Proposición 5.18. *Sea* $\varphi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{A}^2$ *definido por*

$$\varphi(x, y) = [x : y : 1].$$

Entonces φ *es una biyección.*

Demostración. Claramente φ es sobreyectiva, pues, si $[x : y : 1] \in \mathbb{A}$ entonces $\varphi(x, y) = [x : y : 1]$. Falta probar que φ es inyectiva. En efecto, sean (x, y) y (a, b) tales que $\varphi(x, y) = \varphi(a, b)$. Luego $[x : y : 1] = [a : b : 1]$, es decir $(x, y, 1) \in [a : b : 1]$. Esto significa que existe $t \neq 0$ tal que $tx = a$, $ty = b$ y $t = 1$, es decir $x = a$ y $y = b$ y, por lo tanto, $(x, y) = (a, b)$. □

Así, la función φ asocia a cada $(x, y) \in \mathbb{R}$ un único elemento de $\mathbb{A}^2$, y viceversa, es decir, todo elemento de $\mathbb{A}^2$ tiene asociado un único $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. De esta manera podemos decir que $\mathbb{A}^2$ es una *copia* de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{P}^2$.

Dado $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, las *coordenadas homogéneas* de (x, y) es cualquier $(X, Y, Z) \in [x : y : 1]$, es decir, la terna (X, Y, Z) satisface $Z \neq 0$ y

$$x = \frac{X}{Z}, \qquad y = \frac{Y}{Z}.$$

Ejemplo 5.19. Sea $(1, 2) \in \mathbb{R}^2$. Entonces

$$[1 : 2 : 1] = \{(t, 2t, t) \in \mathbb{R}^3 \ : \ t \neq 0\}.$$

Por lo tanto, son coordenadas homogéneas de $(1, 2)$ las ternas $(-1, -2, -1)$, $(3, 6, 3)$, $(-4, -8, -4)$, etc.

Ejemplo 5.20. Sea $P_0 \in \mathbb{R}^2$ un punto que en coordenadas homogéneas se representa por $(1, 5, 6)$. Entonces P_0 tiene coordenadas cartesianas

$$(x, y) = \left(\frac{1}{6}, \frac{5}{6}\right).$$

Para evitar esta multiplicidad en las coordenadas homogéneas, en lugar de trabajar con ternas en $\mathbb{R}^3$, trabajaremos con elementos de $\mathbb{A}^2$. Luego, diremos que la representación de $P_0 = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ en coordenadas homogéneas está dada por la clase de equivalencia $[x : y : 1]$.

Finalmente, observamos que $\mathbb{P}^2$ no solamente contiene a los elementos de $\mathbb{A}^2$, sino también a los puntos del infinito, $\mathbb{P}^2_\infty$. Como $\mathbb{A}^2$ está identificado biunívocamente con $\mathbb{R}^2$, entonces podemos decir que $\mathbb{P}^2$ es una extensión del plano $\mathbb{R}^2$. Luego, podemos llamar a $\mathbb{P}^2$ como el *plano euclidiano extendido*.

5.3. Rectas en el plano proyectivo

Para definir rectas en $\mathbb{P}^2$ procederemos de la siguiente manera: consideraremos una recta en $\mathbb{R}^2$ y deduciremos que ecuación satisfacen las coordenadas homogéneas de los puntos de esta.

Sea $\mathcal{L}_0$ una recta en $\mathbb{R}^2$ con ecuación general $ax + by + c = 0$. Sea $(x, y) \in \mathcal{L}_0$ y sea $[X : Y : Z] \in \mathbb{P}^2$ su representación en coordenadas homogéneas. Entonces

$$x = \frac{X}{Z}, \qquad y = \frac{Y}{Z},$$

y por lo tanto $a\dfrac{X}{Z} + b\dfrac{Y}{Z} + c = 0$. Luego, como $Z \neq 0$, multiplicamos por Z la ecuación anterior y tenemos

$$aX + bY + cZ = 0.$$

Así, la representación en coordenadas homogéneas de $\mathcal{L}$ es el conjunto

$$\mathcal{L} = \{[X : Y : Z] \in \mathbb{P}^2 \ : \ aX + bY + cZ = 0\}.$$

Podemos considerar $\mathcal{L}_0$ como "contenida" en $\mathcal{L}$ en el siguiente sentido: si $(x, y) \in \mathcal{L}_0$ entonces $\varphi(x, y) = [x : y : 1] \in \mathcal{L}$. Esta "inclusión" es propia, pues $[-b : a : 0] \in \mathcal{L}$ pero no corresponde a ningún punto de $\mathbb{R}^2$. Observe que $[-b : a : 0]$ es la intersección de $\mathcal{L}$ con $\mathbb{P}^2_\infty$.

Recordemos que si $ax + by + c = 0$ es la ecuación general de $\mathcal{L}_0$, entonces $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$ y $\mathcal{L}_0$ también tendrá como ecuación general a $(ta)x + (tb)y + (tc) = 0$, para cualquier $t \neq 0$. Esto significa que la ecuación de $\mathcal{L}_0$ no depende de (a, b, c) en sí, sino del conjunto de los múltiplos de (a, b, c), es decir, de $[a : b : c]$. Esto motiva la siguiente definición.

Definición 5.21. Sea $[a : b : c] \in \mathbb{P}^2$. La *recta proyectiva* asociada a $[a : b : c]$, o simplemente, *recta* en $\mathbb{P}^2$, es el conjunto

$$\mathcal{L}[a : b : c] = \{[X : Y : Z] \in \mathbb{P}^2 \ : \ aX + bY + cZ = 0\}.$$

Si $(a, b) \neq (0, 0)$ entonces $\mathcal{L}[a : b : c]$ representará una recta en $\mathbb{R}^2$. En efecto, consideremos la recta $\mathcal{L}_0 = \mathcal{L}(a, b, c)$, con ecuación general $ax + by + c = 0$. Entonces $(x, y) \in \mathcal{L}(a, b, c)$ si, y solamente si, $[x : y : 1] \in \mathcal{L}[a : b : c]$.

En caso $[a : b : c] \in \mathbb{P}^2$ y $(a, b) = (0, 0)$, se tiene que $c \neq 0$. Luego $[a : b : c] = [0 : 0 : 1]$ y así tenemos la recta

$$\mathcal{L}[0 : 0 : 1] = \{[X : Y : Z] \ : \ Z = 0\} = \mathbb{P}^2_\infty.$$

Es decir, el conjunto de los puntos del infinito $\mathbb{P}^2_\infty$ es una recta en $\mathbb{P}^2$, la que llamaremos *recta del infinito*. Esta recta proyectiva no representa ninguna recta en $\mathbb{R}^2$.

Sea $\mathcal{L} = \mathcal{L}[a : b : c]$ una recta en $\mathbb{P}^2$ que representa a la recta $\mathcal{L}(a, b, c)$ de $\mathbb{R}^2$ (es decir, $(a, b) \neq (0, 0)$). Estudiaremos la intersección de $\mathcal{L}$ con la recta del infinito $\mathbb{P}^2_\infty$. Sea $[X_0 : Y_0 : Z_0] \in \mathcal{L} \cap \mathbb{P}^2_\infty$. Entonces $Z_0 = 0$ y

$$aX_0 + bY_0 = 0.$$

Esto implica que $\langle (a, b), (X_0, Y_0) \rangle = 0$, por lo tanto (X_0, Y_0) es paralelo a $(a, b)^\perp = (-b, a)$. Concluimos que, para algún $t \in \mathbb{R}$,

$$(X_0, Y_0, Z_0) = t(-b, a, 0),$$

y, así, $[X_0 : Y_0 : Z_0] = [-b : a : 0]$. Esto significa que $[-b : a : 0]$ es la intersección de $\mathcal{L}$ con $\mathbb{P}^2_\infty$. Luego, toda recta de $\mathbb{P}^2$ diferente a $\mathbb{P}^2_\infty$, interseca a este en un único punto.

Sean (x_1, y_1) y (x_2, y_2) puntos en $\mathbb{R}^2$ y $\mathcal{L}_0$ la recta que pasa por ellos. No es difícil comprobar que

$$(y_1 - y_2)x + (x_2 - x_1)y + (x_1y_2 - x_2y_1) = 0,$$

es la ecuación general de $\mathcal{L}$. Luego, si $P = [X_1 : Y_1 : Z_1]$ y $Q = [X_2 : Y_2 : Z_2]$ son elementos de $\mathbb{A}^2$, representados por $(x_1, y_1) = (X_1/Z_1, Y_1/Z_1)$ y $(x_2, y_2) = (X_2/Z_2, Y_2/Z_2)$, la recta en $\mathbb{R}^2$ que pasa por ellos esta dada por

$$\left(\frac{Y_1}{Z_1} - \frac{Y_2}{Z_2}\right)x + \left(\frac{X_2}{Z_2} - \frac{X_1}{Z_1}\right)y + \left(\frac{X_1}{Z_1}\frac{Y_2}{Z_2} - \frac{X_2}{Z_2}\frac{Y_1}{Z_1}\right) = 0,$$

o equivalentemente,

$$(Y_1Z_2 - Y_2Z_1)x + (X_2Z_1 - X_1Z_2)y + (X_1Y_2 - X_2Y_1) = 0.$$

Así, la *recta $\mathcal{L}(P, Q)$ que pasa por los puntos* $P = [X_1 : Y_1 : Z_1]$ y $Q = [X_2 : Y_2 : Z_2]$ en $\mathbb{P}^2$ (no necesariamente en $\mathbb{A}^2$), con $P \neq Q$, es la recta proyectiva dada por

$$(Y_1Z_2 - Y_2Z_1)X + (X_2Z_1 - X_1Z_2)Y + (X_1Y_2 - X_2Y_1)Z = 0.$$

Es inmediato verificar que esta ecuación puede ser obtenida de calcular el determinante

$$\det\begin{bmatrix} X & Y & Z \\ X_1 & Y_1 & Z_1 \\ X_2 & Y_2 & Z_2 \end{bmatrix} = 0.$$

Esta representación se denomina *ecuación algebraica* de la recta $\mathcal{L}(P, Q)$.

Ejemplo 5.22. Sea $P = [1 : -1 : 1]$ y $Q = [4 : 0 : 2]$, que representan a los puntos $(1, -1)$ y $(2, 0)$ de $\mathbb{R}^2$, respectivamente. Entonces la recta $\mathcal{L}(P, Q)$ está dada por

$$0 = \det\begin{bmatrix} X & Y & Z \\ 1 & -1 & 1 \\ 4 & 0 & 2 \end{bmatrix} = -2X + 2Y + 4Z = 2(-X + Y + 2Z).$$

Luego, la recta proyectiva que pasa por P y Q es $\mathcal{L}[-1 : 1 : 2]$. Por otro lado, esto implica que la recta que pasa por $(1, -1)$ y $(2, 0)$ tiene ecuación general

$$-x + y + 2 = 0.$$

Ejemplo 5.23. Sea $P = [1 : -1 : 1]$ y $Q = [2 : 3 : 0]$. Como en el ejemplo anterior, P representa a $(1, -1)$, sin embargo Q es un punto del infinito y no representa ningún punto en $\mathbb{R}^2$. No obstante, la recta $\mathcal{L}(P, Q)$ está dada por

$$0 = \det\begin{bmatrix} X & Y & Z \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \end{bmatrix} = -3X + 2Y + 5Z.$$

Luego, la recta proyectiva que pasa por P y Q es $\mathcal{L}[-3:2:5]$. Esta recta proyectiva representa en $\mathbb{P}^2$ a la recta $\mathcal{L}_0$ en $\mathbb{R}^2$ que tiene ecuación general

$$-3x + 2y + 5 = 0.$$

Claramente $(1,-1) \in \mathcal{L}_0$ y notemos que $(2,3)$ es el vector dirección de $\mathcal{L}_0$.

El comportamiento de los ejemplos anteriores puede ser probado en general.

Proposición 5.24. *Sean $P \in \mathbb{A}^2$, $Q \in \mathbb{P}^2$ y P_0 el punto de $\mathbb{R}^2$ que tiene a P como coordenada homogénea. Considere $\mathcal{L}$ la recta proyectiva que pasa por P y Q. Entonces $\mathcal{L}$ representa a una recta $\mathcal{L}_0$ en $\mathbb{R}^2$ y*

1. *si $Q \in \mathbb{A}^2$ entonces $\mathcal{L}_0 = \mathcal{L}(P_0, Q_0)$, donde Q tiene a Q_0 como coordenada homogénea;*

2. *si $Q \in \mathbb{P}^2_\infty$ entonces $\mathcal{L}_0 = \mathcal{L}(P, v)$, donde $v = (v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2$ es tal que $Q = [v_1 : v_2 : 0]$.*

Demostración. Como $P \in \mathbb{A}^2$ entonces $\mathcal{L} \neq \mathbb{P}^2_\infty$ y, por tanto, representa a una recta en $\mathbb{R}^2$. Si $P = [X_1 : Y_1 : Z_1]$ y $Q = [X_2 : Y_2 : Z_2]$ entonces la recta $\mathcal{L}$ tiene ecuación

$$(Y_1Z_2 - Y_2Z_1)X + (X_2Z_1 - X_1Z_2)Y + (X_1Y_2 - X_2Y_1)Z = 0,$$

y por lo tanto $\mathcal{L}_0$ tiene ecuación general

$$(Y_1Z_2 - Y_2Z_1)x + (X_2Z_1 - X_1Z_2)y + (X_1Y_2 - X_2Y_1) = 0. \tag{5.2}$$

Es inmediato comprobar que $P_0 = (X_1/Z_1, Y_1/Z_1) \in \mathcal{L}_0$. Si $Q \in \mathbb{A}^2$ entonces Q es coordenada homogénea de $Q_0 = (X_2/Z_2, Y_2/Z_2)$ el cual, mediante un cálculo de rutina, está en $\mathcal{L}_0$. Así $\mathcal{L}_0 = \mathcal{L}(P, Q)$. Por otro lado, si $Q \in \mathbb{P}^2_\infty$ entonces $Z_2 = 0$ y por (5.2), la ecuación general de $\mathcal{L}_0$ sería

$$(-Y_2Z_1)x + (X_2Z_1)y + (X_1Y_2 - X_2Y_1) = 0,$$

o, equivalentemente,

$$-Y_2x + X_2y + \frac{X_1Y_2 - X_2Y_1}{Z_1} = 0.$$

Observamos, de esta ecuación general, que $\mathcal{L}_0$ tiene vector dirección $v = (X_2, Y_2)$, lo que prueba la proposición. $\square$

Sean $P = [X_1 : Y_1 : Z_1]$ y $Q = [X_2 : Y_2 : Z_2]$ puntos distintos en $\mathbb{P}^2$ y $R = [X : Y : Z] \in \mathcal{L}(P, Q)$. Entonces

$$\det \begin{bmatrix} X & Y & Z \\ X_1 & Y_1 & Z_1 \\ X_2 & Y_2 & Z_2 \end{bmatrix} = 0,$$

y, por lo tanto, los vectores de $\mathbb{R}^3$, (X_1, Y_1, Z_1), (X_2, Y_2, Z_2) y (X, Y, Z) son linealmente dependientes. Como P y Q son distintos entonces (X_1, Y_1, Z_1) y (X_2, Y_2, Z_2) no son paralelos y, así, son linealmente independientes. Luego deben existir $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, no ambos nulos, tales que

$$(X, Y, Z) = \lambda(X_1, Y_1, Z_1) + \mu(X_2, Y_2, Z_2).$$

Tomando clase de equivalencia obtenemos

$$[X : Y : Z] = \Big[\lambda(X_1, Y_1, Z_1) + \mu(X_2, Y_2, Z_2)\Big]. \tag{5.3}$$

Esta última ecuación será escrita de ahora en adelante como

$$[X : Y : Z] = \lambda[X_1 : Y_1 : Z_1] + \mu[X_2 : Y_2 : Z_2], \tag{5.4}$$

o, en componentes,

$$\begin{aligned} X &= \lambda X_1 + \mu X_2, \\ Y &= \lambda Y_1 + \mu Y_2, \\ Z &= \lambda Z_1 + \mu Z_2. \end{aligned} \tag{5.5}$$

Tanto (5.4) o (5.5) serán llamadas *ecuaciones paramétricas* de la recta $\mathcal{L}(P, Q)$.

Ejemplo 5.25. Sean $P = [6 : -4 : 2]$ y $Q = [3 : 2 : -1]$. Entonces la recta $\mathcal{L}(P, Q)$ tiene ecuación paramétrica

$$[X : Y : Z] = \lambda[6 : -4 : 2] + \mu[3 : 2 : -1].$$

Así, tenemos

$$\begin{aligned} X &= 6\lambda + 3\mu, \\ Y &= -4\lambda + 2\mu, \\ Z &= 2\lambda - \mu. \end{aligned}$$

Observación 5.26. Debemos hacer énfasis que la ecuación (5.4) es un abuso de notación. Estrictamente hablando, la ecuación paramétrica de una recta proyectiva debe escribirse como en la ecuación (5.3).

5.4. Cónicas

En esta sección, estudiaremos las cónicas desde el punto de vista de la geometría proyectiva. Para esto, comenzaremos estableciendo detalles importantes de las cónicas en el plano cartesiano.

Sean $\varepsilon > 0$, $\mathcal{L}_0$ una recta en $\mathbb{R}^2$ y $F_0 \in \mathcal{P}$. Una *conica* en el plano es el conjunto

$$\mathcal{C}_0 = \left\{ P_0 \in \mathcal{P} \,:\, \frac{d(P_0, F_0)}{d(P_0, \mathcal{L}_0)} = \varepsilon \right\}.$$

En este caso, llamaremos a ε como la *excentricidad* de $\mathcal{C}_0$, a $\mathcal{L}_0$ como la *recta directriz* de $\mathcal{C}_0$ y a F_0 como el *foco* de $\mathcal{C}_0$. Podemos establecer, por definición, que si $\varepsilon < 1$ entonces $\mathcal{C}_0$ es una *elipse*, si $\varepsilon = 1$ entonces $\mathcal{C}_0$ es una *parábola* y si $\varepsilon > 1$ entonces $\mathcal{C}_0$ es una hipérbola. Estas son las llamadas *cónicas usuales*.

Si escribimos $F_0 = (x_0, y_0)$, $\mathcal{L}_0 = \mathcal{L}(a, b, c)$ y $P_0 = (x, y) \in \mathcal{C}$, entonces P_0 cumplirá

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = \varepsilon^2 \frac{(ax + by + c)^2}{a^2 + b^2},$$

o, escrito de forma polinomial,

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0,$$

donde

$$\begin{aligned} a_{11} &= 1 - \frac{a^2\varepsilon^2}{a^2 + b^2}, & a_{22} &= 1 - \frac{b^2\varepsilon^2}{a^2 + b^2}, \\ a_{12} &= -\frac{ab\varepsilon^2}{a^2 + b^2}, & a_{13} &= -\frac{ac\varepsilon^2}{a^2 + b^2} - x_0, \\ a_{23} &= -\frac{bc\varepsilon^2}{a^2 + b^2} - y_0, & a_{33} &= -\frac{c^2\varepsilon^2}{a^2 + b^2} + x_0^2 + y_0^2. \end{aligned}$$

Esto motiva la siguiente definición.

Definición 5.27. Una *cónica* en el plano cartesiano $\mathbb{R}^2$ es el lugar geométrico de los puntos de $\mathbb{R}^2$ que satisfacen una ecuación de la forma

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0. \tag{5.6}$$

Así, si $\mathcal{C}_0$ es una cónica entonces

$$\mathcal{C}_0 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ (x, y) \text{ satisface (5.6)}\}.$$

Además, la ecuación (5.6) será llamada *ecuación general* de la cónica.

Ahora convertiremos la ecuación (5.6) a coordenadas homogéneas. Sea $(x, y) \in \mathcal{C}_0$, donde $\mathcal{C}_0$ es una cónica, y sea $[X : Y : Z]$ su representación en coordenadas homogéneas. Entonces $x = X/Z$, $y = Y/Z$ y, reemplazando en (5.6), obtenemos

$$a_{11}\frac{X^2}{Z^2} + 2a_{12}\frac{XY}{Z^2} + a_{22}\frac{Y^2}{Z^2} + 2a_{13}\frac{X}{Z} + 2a_{23}\frac{Y}{Z} + a_{33} = 0.$$

Multiplicando por $Z^2 \neq 0$,

$$a_{11}X^2 + 2a_{12}XY + a_{22}Y^2 + 2a_{13}XZ + 2a_{23}YZ + a_{33}Z^2 = 0. \tag{5.7}$$

Esto motiva la definición de una cónica en $\mathbb{P}^2$.

Definición 5.28. Diremos que $\mathcal{C}$ en $\mathbb{P}^2$ es una *cónica* si $\mathcal{C}$ tiene la forma

$$\mathcal{C} = \{[X : Y : Z] \in \mathbb{P}^2 \ : \ [X : Y : Z] \text{ satisface (5.7)}\}.$$

Podemos escribir la ecuación (5.7) de manera matricial como

$$\begin{bmatrix} X & Y & Z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} = 0$$

Observe que $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{bmatrix}$ es una matriz de orden 3×3 y simétrica, es decir $A = A^\top$. Luego, toda cónica en $\mathbb{P}^2$ tiene asociada una matriz simétrica 3×3.

Observación 5.29. Para simplificar la notación, en adelante representaremos a $[X : Y : Z] \in \mathbb{P}^2$ como el vector columna $\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix}$. De este modo, si $P = [X : Y : Z]$ y $Q = [X' : Y' : Z']$ entonces $Q = AP$ será una abreviación de escribir

$$\begin{bmatrix} X' \\ Y' \\ Z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix}$$

Además, $P^\top$ representará al vector fila $\begin{bmatrix} X & Y & Z \end{bmatrix}$.

De este modo, podemos abreviar la notación para las cónicas. Dada una matriz A de orden 3×3 y simétrica, la cónica $\mathcal{C}$ en $\mathbb{P}^2$ asociada a A está dada por

$$\mathcal{C} = \{P \in \mathbb{P}^2 \ : \ P^\top A P = 0\}.$$

Ejemplo 5.30. Sea $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1/2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$. Entonces la cónica $\mathcal{C}$ asociada a A tiene ecuación

$$X^2 + \frac{1}{2}Y^2 + 2Z^2 - 2XZ - 2YZ = 0,$$

que, en coordenadas cartesianas, se escribe como

$$x^2 + \frac{1}{2}y^2 + 2 - 2x - 2y = 0.$$

Luego, $\mathcal{C}$ representa a la cónica en $\mathbb{R}^2$ con ecuación

$$(x-1)^2 + \frac{(y-2)^2}{2} = 1,$$

la cual es una elipse, con centro $(h, k) = (1, 2)$ y semiejes $a = 1$ y $b = \sqrt{2}$.

No siempre una matriz simétrica genera una cónica en el sentido usual.

Ejemplo 5.31. Sea $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$. Entonces la cónica $\mathcal{C}$ asociada a A tiene ecuación

$$X^2 - Z^2 = 0,$$

que, en coordenadas cartesianas, se escribe como

$$x^2 - 1 = 0.$$

Si consideramos $\mathcal{C} = \{(x, y) \ : \ x^2 = 1\}$, este conjunto es formado por dos rectas verticales en $\mathbb{R}^2$, con ordenadas 1 y -1. Claramente $\mathcal{C}$ no una de las cónicas *usuales*.

Ejemplo 5.32. Sea $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. Entonces la cónica $\mathcal{C}$ asociada a A tiene ecuación

$$X^2 + Y^2 = 0,$$

que, en coordenadas cartesianas, se escribe como

$$x^2 + y^2 = 0.$$

Claramente $\mathcal{C} = \{(x, y) \ : \ x^2 + y^2 = 0\} = \{(0, 0)\}$, es decir, este conjunto es formado por un único punto de $\mathbb{R}^2$.

Para diferenciar cuando una cónica en $\mathbb{P}^2$ representa, o no, a una cónica *usual* en $\mathbb{R}^2$, usaremos la matriz asociada a la cónica.

Definición 5.33. Sea $\mathcal{C}$ una cónica en $\mathbb{P}^2$ y A su matriz asociada. Diremos que $\mathcal{C}$ es *degenerada* si $\det(A) = 0$. En caso contrario, diremos que $\mathcal{C}$ es *no degenerada*.

Es inmediato de la definición que las cónicas en los ejemplos 5.31 y 5.32 son degeneradas y la cónica del ejemplo 5.30 es no degenerada.

Este criterior de clasificación de cónicas es aún insuficiente, pues incluso cónicas no degeneradas podrían no representar a ninguna cónica usual.

Ejemplo 5.34. Sea $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. Entonces la cónica $\mathcal{C}$ asociada a A es no degenerada y tiene ecuación

$$X^2 + Y^2 + Z^2 = 0.$$

que, en coordenadas cartesianas, se escribe como

$$x^2 + y^2 + 1 = 0.$$

Luego, $\mathcal{C} = \{(x, y) \ : \ x^2 + y^2 + 1 = 0\} = \emptyset$, es decir, la cónica asociada a la matriz identidad es no degenerada, sin embargo, no representa a ninguna cónica usual.

5.5. Intersección de rectas con cónicas

Sea $\mathcal{C}$ una cónica con matriz asociada A y $\mathcal{L} = \mathcal{L}(P, Q)$ la recta que pasa por los puntos P y Q de $\mathbb{P}^2$, P y Q arbitrarios pero distintos. Queremos estudiar la intersección entre $\mathcal{C}$ y $\mathcal{L}$. Para esto, un elemento $R \in \mathcal{C} \cap \mathcal{L}$ debe satisfacer

$$\begin{aligned} R^\top AR &= 0, \\ R &= \alpha P + \beta Q, \end{aligned}$$

para ciertos $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $(\alpha, \beta) \neq (0, 0)$. Combinando ambas ecuaciones obtenemos el sistema cuadrático

$$\begin{aligned} 0 &= (\alpha P + \beta Q)^\top A(\alpha P + \beta Q) \\ &= \alpha^2 P^\top AP + 2\alpha\beta P^\top AQ + \beta^2 Q^\top AQ. \end{aligned} \tag{5.8}$$

La primera posibilidad es que $P \in \mathcal{C}$. En este caso $P^\top AP = 0$ y la ecuación (5.8) se escribiría como

$$\begin{aligned} 0 &= 2\alpha\beta P^\top AQ + \beta^2 Q^\top AQ \\ &= \beta(2\alpha P^\top AQ + \beta Q^\top AQ). \end{aligned}$$