UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA

FACULTAD DE CIENCIAS

ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA

Cálculo vectorial con coordenadas homogéneas

Mg. Rósulo Perez Cupe

1 de marzo de 2012

Contenido

1 Vectores en el espacio euclidiano **1**

1.1 Vectores en la recta 1

1.2 El espacio vectorial real (EVR) 4

1.3 Producto interno o escalar en $\mathbb{R}^2$ 9

1.4 Dependencia e independencia lineal 16

1.5 La recta en el plano 18

1.6 Vectores en el espacio 25

1.7 La recta en el espacio 33

1.8 El plano en el espacio 37

2 Cónicas **41**

2.1 Relaciones de Equivalencia 41

2.2 Coordenadas homogéneas 45

2.3 Cónicas 49

2.4 Puntos singulares de una cónica 56

2.5 Clasificación primaria de las cónicas 58

2.5.1 Composición de las cónicas degeneradas 59

2.5.2 Composición de las cónicas mediante su intersección con $\mathscr{L}_\infty$. 61

2.6 Cónicas imaginarias 63

2.7 Clasificación total de las cónicas 66

2.8 Rectas tangentes y asíntotas de una cónica 66

2.9 Elementos principales de una cónica no degenerada 70

Capítulo 1

Vectores en el espacio euclidiano

1.1 Vectores en la recta

En esta parte consideramos dados hechos elementales de la geometría como

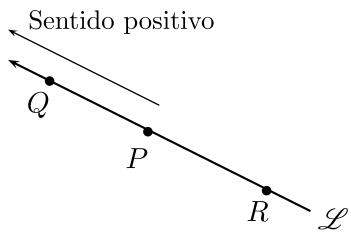
- $\surd$ Por dos puntos pasa una única recta.
- $\surd$ Dos rectas son paralelas si no tienen puntos en común.
- $\surd$ Si dos rectas no son paralelas, entonces eelas tienen un único punto en común.

Noción intuitiva de distancia Fijada una unidad de medida (metros, cm., km., etc.) y dados los puntos P y Q, denotaremos mediante $\mathrm{d}(P, Q)$ a la distancia entre los puntos P y Q. Se puede observar que

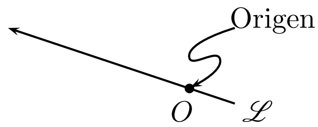
- $\surd$ $\mathrm{d}(P, Q) \geq 0$.
- $\surd$ $\mathrm{d}(P, P) = 0$.
- $\surd$ Si $P \neq Q$, entonces $\mathrm{d}(P, Q) > 0$.
- $\surd$ Si $R \in \overline{PQ}$, entonces $\mathrm{d}(P, Q) = \mathrm{d}(P, R) + \mathrm{d}(R, Q)$.

Recta orientada Es una recta para la cual se ha elegido un sentido positivo y el sentido contrario será llamado negativo.

Ejemplo 1.1. Una recta donde Q está a la derecha de P y R está a la izquierda de P.



Ejemplo 1.2. Una recta en la cual se fija un punto, al cual se le llama *origen*.



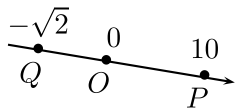
Definamos una relación biunívoca entre los conjuntos $\mathbb{R}$ y Eje

$$\begin{aligned} \mathrm{c} : \text{Eje} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ P &\longmapsto \mathrm{c}(P) \end{aligned}$$

mediante

$$\mathrm{c}(P) = \begin{cases} \mathrm{d}(P, O), & \text{si } P \text{ está a la derecha de } O. \\ 0, & \text{si } P = O. \\ -\,\mathrm{d}(P, O), & \text{si } P \text{ está a la izquierda de} O. \end{cases}$$

la cual es biunívoca. Luego, los elementos correspondientes de ambos conjuntos se pueden ″suspender‶.



Notación.

- Eje : $\overline{Ox}$.
- $\mathrm{c}(P) = d(P, O)$, para todo $P \in \overline{Ox}$.

Ejercicio 1. Sean P y Q puntos en el eje $\overline{Ox}$ cuyas coordenadas son p y q respectivamente. Probar que $\mathrm{d}(P, Q) = |p - q|$.

Solución. Escribamos $\mathrm{d}(P, O) = p$ y $\mathrm{d}(Q, O) = q$; y sin pérdida de generalidad, supongamos que P está a la izquierda de Q; esto implica que $p < q$. Vamos a considerar tres casos (ver Figura 1.1).

Caso 1: Q está a la izquierda de O. En ese caso tenemos que $Q \in \overline{OP}$, entonces $\mathrm{d}(P, O) = \mathrm{d}(P, Q) + \mathrm{d}(Q, O)$; así,

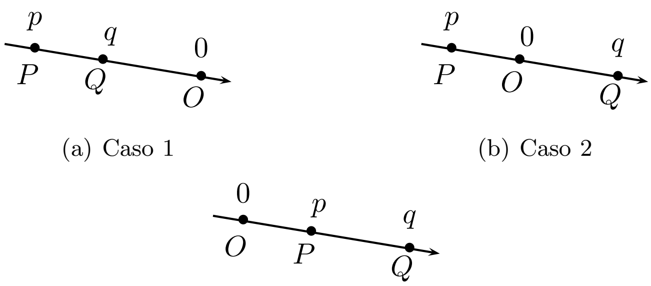
$$\begin{aligned} \mathrm{d}(P, Q) &= \mathrm{d}(P, O) - \mathrm{d}(Q, O) \\ &= -p - (-q) = -p + q = |p - q|. \end{aligned}$$

Caso 2: O está entre P y Q. Esto implica que $O \in \overline{PQ}$, de donde

$$\begin{aligned} \mathrm{d}(P, Q) &= \mathrm{d}(P, O) + \mathrm{d}(O, Q) \\ &= -p + q = |p - q|. \end{aligned}$$

Caso 3: P está a la derecha de O. En este caso $P \in \overline{OQ}$, y de modo análogo al Caso 1, tenemos

$$\begin{aligned} \mathrm{d}(P, Q) &= \mathrm{d}(O, Q) - \mathrm{d}(O, P) \\ &= q - p = |p - q|. \end{aligned}$$ □

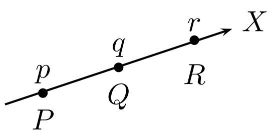


(a) Caso 1 (b) Caso 2

(c) Caso 3

Figure 1.1: Distancia entre dos puntos

Aplicación División de un segmento en una razón dada.

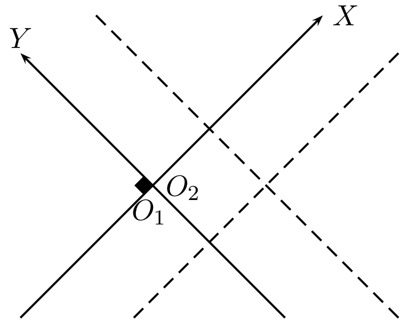


Se tiene que $0 \leq \frac{\mathrm{d}(P,Q)}{\mathrm{d}(P,R)} \leq 1$, así

$$\begin{aligned} \mathrm{d}(P, Q) &= t \cdot \mathrm{d}(P, R) \\ q - p &= t(r - p) = tr - tp \end{aligned}$$

de donde $q = tr + (1 - t)p$, con $t \in [0, 1]$.

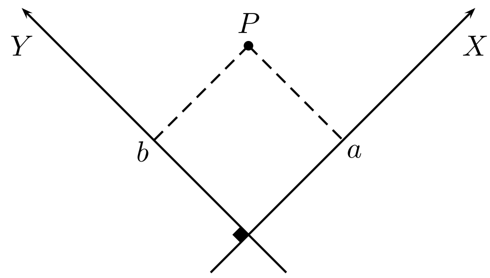
Coordenadas en el plano Sean los conjuntos P =plano y $\mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2$. Definamos una relación biunívoca entre sus elementos. Para ello tomemos los ejes $\overline{O_1x}$ y $\overline{O_2y}$, e intersectemoslos perpendicularmente hasta hacer coincidir sus orígenes.



y definamos

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{c} : \text{Plano} & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ P & \longmapsto & \mathrm{c}(P) = (a, b) \end{array}$$

Esta relación es uno a uno. Por abuso de notación escribimos $P = (a, b)$.



1.2 El espacio vectorial real (EVR)

Un EVR es un conjunto V cuyos elementos son llamados *vectores*, y entre dichos elementos están definidas dos operaciones

$$\begin{array}{rcl} \text{Suma } + : V \times V & \longrightarrow & V \\ (u, v) & \longmapsto & u + v \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} \text{Producto } \cdot : \mathbb{R} \times V & \longrightarrow & V \\ (\lambda, u) & \longmapsto & \lambda \cdot u \end{array}$$

que cumplen las siguientes condiciones:

1. $u + v = v + u$ (conmutativa)

2. $(u + v) + w = u + (v + w)$ y $(\alpha \cdot \beta) \cdot u = \alpha \cdot (\beta \cdot u)$ (asociativa)

3. Existe un elemento $O \in V$ tal que $u+O=u$, para todo $u \in V$ (elemento neutro)

4. Para todo $u \in V$ existe un único $\widehat{u}$, tal que $u+\widehat{u}=0$ (inverso aditivo)

5. $(\alpha+\beta)\cdot u=(\alpha\cdot u)+(\beta\cdot u)$ y $\alpha\cdot(u+v)=(\alpha\cdot u)+(\alpha\cdot v)$ (disyuntiva)

6. $1\cdot v=v$, para todo $v \in V$.

Entonces V será llamado *espacio vectorial real* y sus elementos *vectores*.

Proposición 1.3. *El elemento neutro O es único.*

Demostración. Asumamos que el elemento neutro O no es único; así, existe $O_1 \in V$, distinto de O, tal que $u+O_1=u$, para todo $u \in V$; en particular, para $u=O$ se tiene

$$O+O_1=O \tag{α}$$

pero como O es elemento neutro, también se tiene

$$O_1+O=O_1 \tag{β}$$

y en virtud de (α), (β) y la conmutatividad de la suma

$$O=O+O_1=O_1+O=O_1,$$

una contradicción. Luego, el elemento neutro es único. □

Ejercicio 2. Demostrar que $\widehat{u}$ (inverso aditivo) es único, para cada $u \in V$.

Solución. Sea $u \in V$ y su inverso aditivo $\widehat{u} \in V$. Asumamos que exista $v \in V$ tal que $u+v=0$; así,

$$\widehat{u}=\widehat{u}+0=\widehat{u}+(u+v)=(\widehat{u}+u)+v=0+v=v,$$

luego, $v=\widehat{u}$, esto es, el inverso aditivo es único. □

Ejemplo 1.4. $V=\mathbb{R}$ con $+$, la suma de reales, y $\cdot$, el producto usual de reales, es un espacio vectorial.

Ejemplo 1.5. Sea $V=\mathbb{R}^2$ y para $u=(a,b), v=(c,d) \in \mathbb{R}^2$ definimos

$$\begin{aligned} u+v&=(a+c,b+d)\\ \lambda\cdot u&=(\lambda a,\lambda b)\end{aligned}$$

Veamos si cumplen las condiciones:

1. $u+v=(a+c,b+d)=(c+a,d+b)=v+u$.

2. $\surd$.

3. $O = (0, 0)$.
4. Para todo $u = (a, b) \in \mathbb{R}^2$ existe $\widehat{u} = (-a, -b)$ tal que $u + \widehat{u} = (0, 0) = O$.
5. $\surd$.
6. $1 \cdot (a, b) = (1 \cdot a, 1 \cdot b) = (a, b) = u$.

Por lo tanto, $\mathbb{R}^2$, con $+$ y $\cdot$ así definidos, es un espacio vectorial.

Ejemplo 1.6. Sea $V = \{(x, 0) \in \mathbb{R}^2 / x \in \mathbb{R}^+\}$ con las operaciones

$$\begin{aligned}(x,0) + (y,0) &= (x \cdot y, 0)\\ \alpha \cdot (x,0) &= (x^\alpha, 0),\ \alpha \in \mathbb{R}\end{aligned}$$

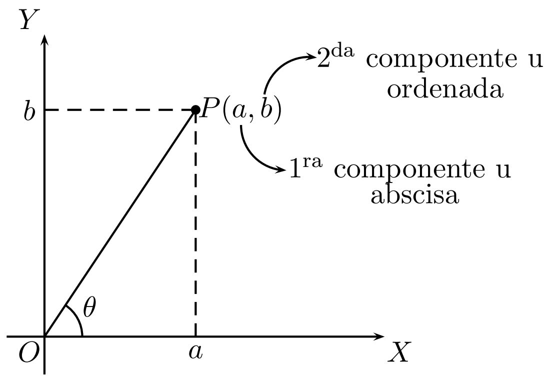
¿Es espacio vectoria? Veamos:

1. $(x, 0) + (y, 0) = (xy, 0) = (yx, 0) = (y, 0) + (x, 0)$.
2. $$\begin{aligned}(x,0) + [(y,0) + (z,0)] &= (x,0) + (yz,0) = (x(yz),0)\\ &= ((xy)z,0) = (xy,0) + (z,0)\\ &= [(x,0) + y,0] + (z,0)\end{aligned}$$
3. Sean $O = (y, 0), u = (x, 0) \in V$. ¿Existirá un valor para y tal que $u + O = u$?
$$(x,0) + (y,0) = (x,0) \text{ si, y sólo si, } y = 1,$$
por lo tanto, $O = (1, 0)$.
4. ¿Para $u = (x, 0) \in V$, existirá $\widehat{u} = (y, 0)$ tal que $u + \widehat{u} = 0$? En efecto, si consideramos $y = {}^1\!/x$ tenemos
$$(x,0) + (y,0) = (x,0) + ({}^1\!/x) = (x \cdot {}^1\!/x, 0) = (1,0),$$
es decir, para $u = (x, 0)$ existe $\widehat{u} = ({}^1\!/x, 0)$ tal que $u + \widehat{u} = O$.
5. Dados α, $\beta \in \mathbb{R}$ y $u = (x, 0) \in V$ tenemos
$$\begin{aligned}(\alpha+\beta) \cdot u = (\alpha+\beta) \cdot (x,0) &= (x^{\alpha+\beta}, 0)\\ &= (x^\alpha, x^\beta, 0) = (x^\alpha, 0) + (x^\beta, 0)\\ &= [\alpha \cdot (x,0)] + [\beta \cdot (x,0)] = (\alpha \cdot u) + (\beta \cdot u)\end{aligned}$$
6. $1 \cdot u = 1 \cdot (x, 0) = (x^1, 0) = (x, 0) = u$

En particular, $\mathbb{R}^2$ con las operaciones

$$(a,b)+(c,d)=(a+c,b+d)$$
$$\alpha\cdot(a,b)=(\alpha\cdot a,\alpha\cdot b)$$

es un espacio vectorial cuyos elementos son llamados vectores, donde además $O=(0,0)$ y para todo $u=(a,b)\in\mathbb{R}^2$ existe $\widehat{u}=(-a,-b)\in\mathbb{R}^2$ tal que $u+\widehat{u}=O$.

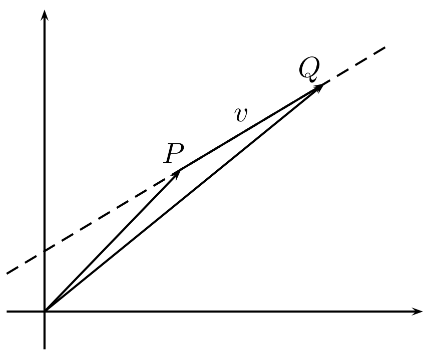


Al punto $P\in\mathbb{R}^2$ se le asocia

- Un radio vector.
- Un ángulo medido en sentido antihorario entre 0° y 360°.
- La longitud del radio vector.

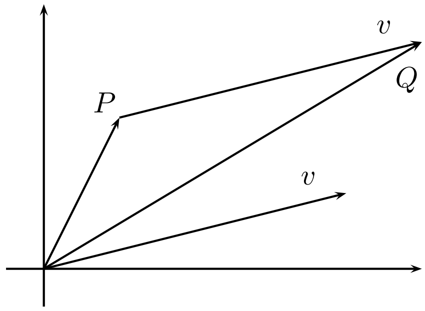
Notación. Longitud del radio vector: $\mathrm{d}(O,P)=\sqrt{a^2+b^2}$.
$\|\overrightarrow{OP}\|=\|\overrightarrow{P}\|$ norma del vector P.

Vector libre



Podemos observar que $Q=P+v$, lo que implica que $-P+Q=-P+(P+v)=(-P+P)+v$ de donde $Q-P=v$. Por lo tanto $v=Q-P=\overline{PQ}$.

Ejemplo 1.7. Sea $P = (1, 2)$, $Q = (5, 3)$, entonces $\overline{PQ} = Q - P = (4, 1) = v$.

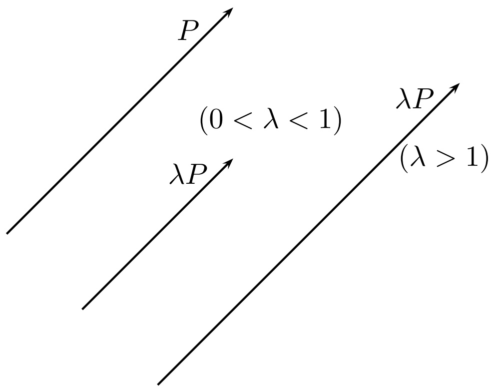


Paralelismo Dos vectores P y Q de $\mathbb{R}^2$ son paralelos si existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $P = \lambda Q$ ó $Q = \lambda P$. Esto lo denotamos por $P \,//\, Q$.

Ejemplo 1.8.

- $P = (3, 2)$, $Q = (-6, -4)$, entonces $P \,//\, Q$ pues $P = -1/2 Q$.
- $P = (3, 2)$, $Q = (-6, -4)$, entonces $P \,//\, Q$ pues $Q = -2P$.
- $P = (0, 0)$, $Q = (3, 2)$, entonces $P \,//\, Q$ pues $P = 0 \cdot Q$.
- $P = (3, 2)$, $Q = (5, 1)$. Si existiera $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $P = \lambda Q$, entonces $3 = 5\lambda$ y $2 = \lambda$, una contradicción, por lo tanto no existe tal λ, lo que implica que P y Q no son paralelos.

Geométricamente tenemos



Si λ es negativo, lo mismo ocurre pero en sentido opuesto. Se puede observar que el vector $(0, 0)$ es siempre paralelo a cualquier otro vector.

Longitud de un vector Si $P = (p_1, p_2) \in \mathbb{R}^2$, entonces la longitud de dicho vector está dado por $\|P\| = \mathrm{d}(O, P) = \sqrt{p_1^2 + p_2^2}$.

Vector unitario Es todo vector cuya longitud es 1.

Ejemplo 1.9. $P = (3/5, 4/5)$, $\|P\| = 1$.

Proposición 1.10. *Todo vector no nulo tiene asociado a sí mismo un vector unitario.*

Demostración. En efecto, si P es cualquier vector no nulo, basta considerar el vector $u_P = \frac{1}{\|p\|}P$. Así

$$\|u_P\| = \left\| \frac{1}{\|P\|} P \right\| = \frac{1}{\|P\|}\|P\| = 1.$$

$\xrightarrow{\qquad\qquad} P$

$\xrightarrow{\qquad} u_P$

□

Observación 1.1. $P = \|P\|u_P$

Ejemplo 1.11. Sea $P = (2, 1)$, entonces $\|P\| = \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5}$; así, $u_P = \frac{1}{\sqrt{5}}(2, 1)$.

1.3 Producto interno o escalar en $\mathbb{R}^2$

La relación $\langle\ \rangle$ definida sonbre $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$

$$\begin{array}{rcl} \langle\ \rangle : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (P, Q) & \longmapsto & \langle P, Q \rangle \end{array}$$

es un producto interno si satisface

1. $\langle P, Q \rangle = \langle Q, P \rangle$.
2. $\langle P, P \rangle \geq 0$, para todo $P \in \mathbb{R}^2$.
3. $\langle P, P \rangle = 0$ si, y sólo si, $P = 0$.
4. $\langle P, \lambda Q \rangle = \langle \lambda P, Q \rangle = \lambda\langle P, Q \rangle$, para todo $\lambda \in \mathbb{R}$.
5. $\langle P, (Q + R) \rangle = \langle P, Q \rangle + \langle P, R \rangle$.

Ejemplo 1.12. Producto interno usual definido por $\langle P, Q \rangle = p_1q_1 + p_2q_2$, siendo $P = (p_1, p_2)$ y $Q = (q_1, q_2)$. Veamos:

1. $\surd$.
2. $\langle P, P \rangle = p_1^+ p_2^2 \geq 0$.
3. $\langle P, P \rangle = p_1^2 + p_2^2 = 0$ si, sólo si, $p_1 = p_2 = 0$.
4. $\langle P, \lambda Q \rangle = p_1(\lambda q_1) + p_2(\lambda q_2) = (\lambda p_1)q_1 + (\lambda p_2)q_2 = \langle \lambda P, Q \rangle$.

5. $\surd$.

Ejemplo 1.13. Sea $\langle P, Q\rangle = p_1q_1 + 2p_2q_2$. Veamos:

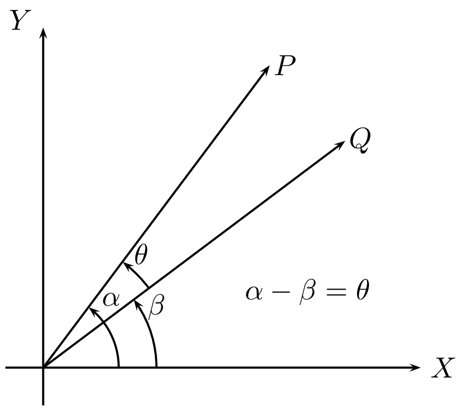
1. $\surd$.
2. $\langle P, P\rangle = p_1^2 + 2p_2^2 \geq 0$.
3. $\langle P, P\rangle = p_1^2 + 2p_2^2 = 0$ si, sólo si, $p_1 = p_2 = 0$.
4. $\langle P, \lambda Q\rangle = p_1(\lambda q_1) + 2p_2(\lambda q_2) = \lambda(p_1q_1 + 2p_2q_2) = \lambda \langle P, Q\rangle$.
5. $\surd$.

Observación 1.2. En tanto no se mencione lo contrario, el producto interno será el usual.

Teorema 1.14. *Sean $P, Q \in \mathbb{R}^2$ y θ el ángulo agudo que forma P y Q. Luego, $\langle P, Q\rangle = \|P\|\|Q\| \cos\theta$.*

Observación 1.3. $P = \|P\| = (\cos\theta, \operatorname{sen}\theta) = (\|P\| \cos\theta, \|P\| \operatorname{sen}\theta)$

Demostración. Si $P = (0, 0)$ ó $Q = (0, 0)$, entonces $\langle P, Q\rangle = 0 \cdot 0 \cos 0 = 0$. Caso contrario, $P, Q \neq (0, 0)$.



En virtud de la observación anterior tenemos

$$P = (\|P\| \cos\alpha, \|P\| \operatorname{sen}\alpha) \text{ y } Q = (\|Q\| \cos\beta, \|Q\| \operatorname{sen}\beta),$$

luego,

$$\begin{aligned}\langle P, Q\rangle &= \|P\|\|Q\| \cos\alpha\cos\beta + \|P\|\|Q\| \operatorname{sen}\alpha \operatorname{sen}\beta \\ &= \|P\|\|Q\|(\cos\alpha\cos\beta + \operatorname{sen}\alpha \operatorname{sen}\beta) \\ &= \|P\|\|Q\| \cos(\alpha - \beta) = \|P\|\|Q\| \cos\theta.\end{aligned}$$

□

Debemos notar que este Teorema indica que $\langle P, Q\rangle$ es invariante por traslación y rotación de coordenadas.

Definición 1.15. Diremos que P y Q son *perpendiculares* si, el ángulo entre P y Q, $\theta = 90°$. Es decir, P es *perpendicular* a Q ($P \perp Q$) si, y sólo si, $\langle P, Q\rangle = 0$.

Ejemplo 1.16. Sea $P = (3, 4)$ y $Q = (-12, 9)$. Luego,

$$\langle P, Q\rangle = 3(-12) + 4(9) = 0.$$

Así, $P \perp Q$.

Observación 1.4. La noción de perpendicularidad sólo está establecida para el producto interno usual.

Ejemplo 1.17. Si consideramos el producto interno definido por $\langle P, Q\rangle = p_1q_1+2p_2q_2$, para $P = (1, 1)$ y $Q = (1, -1/2)$, tenemos $\langle P, Q\rangle = 1(1) + 2 \cdot 1(-1/2) = 0$. Pero P no es perpendicular a cualquier otro vector.

Teorema 1.18. *Dado $P \in \mathbb{R}^2$, se tiene $\|P\| = \sqrt{\langle P, P\rangle}$.*

Demostración. En efecto, desde que $P = (\|P\| \cos\alpha, \|P\| \operatorname{sen}\alpha)$ se tiene

$$\langle P, P\rangle = \|P\|^2 \cos^2\alpha + \|P\|^2 \operatorname{sen}^2\alpha = \|P\|^2. \qquad \square$$

Corolario 1. *Sean $P, Q \in \mathbb{R}^2$. Luego*

$$\|P + Q\| \leq \|P\| + \|Q\|.$$

Demostración. En efecto,

$$\begin{aligned} \|P + Q\|^2 &= \langle P + Q, P + Q\rangle = \langle P, P + Q\rangle + \langle Q, P + Q\rangle \\ &= \langle P, P\rangle + \langle P, Q\rangle + \langle Q, P\rangle + \langle Q, Q\rangle \\ &= \|P\|^2 + 2\langle P, Q\rangle + \|Q\|^2. \end{aligned} \tag{γ}$$

Como $\langle P, Q\rangle = \|P\|\|Q\| \cos\theta$, se tiene

$$\begin{aligned} \langle P, Q\rangle &\leq |\langle P, Q\rangle| \leq |\|P\|\|Q\| \cos\theta| \\ &= \|P\|\|Q\||\cos\theta| \leq \|P\|\|Q\|. \end{aligned} \tag{δ}$$

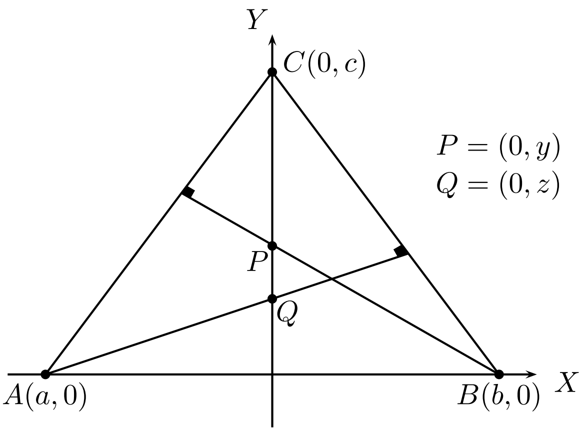
Tomando en cuenta (γ) y (δ) tenemos

$$\begin{aligned} \|P + Q\|^2 &= \|P\|^2 + 2\langle P, Q\rangle + \|Q\|^2 \\ &\leq \|P\|^2 + 2\|P\|\|Q\| + \|Q\|^2 = (\|P\| + \|Q\|)^2. \end{aligned}$$

Por lo tanto, $\|P + Q\| \leq \|P\| + \|Q\|$. $\square$

Ejercicio 3. Probar que las alturas de cualquier triángulo se cortan en un único punto.

Solución. Consideremos un sistema de coordenadas tal que



Se puede observar que $\overrightarrow{AC} \perp \overrightarrow{PB}$; luego,

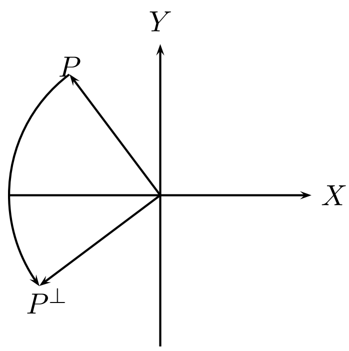
$$\left\langle \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{PB} \right\rangle = \langle (-a,c),(b,-y) \rangle = -ab - yc = 0,$$

de donde $y = {}^{-ab}/_{c}$. También tenemos

$$\left\langle \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{AQ} \right\rangle = \left\langle \overrightarrow{-b,c}, \overrightarrow{-a,z} \right\rangle = ab + cz = 0,$$

de donde $z = {}^{-ab}/_{c}$. Por lo tanto $P = Q$. $\square$

Vector ortogonal Dado el vector $P = (a,b)$, asociado a él, existe el vector $P^{\perp} = (-b,a)$, el cual geométricamente es una rotación de 90° en sentido antihorario.

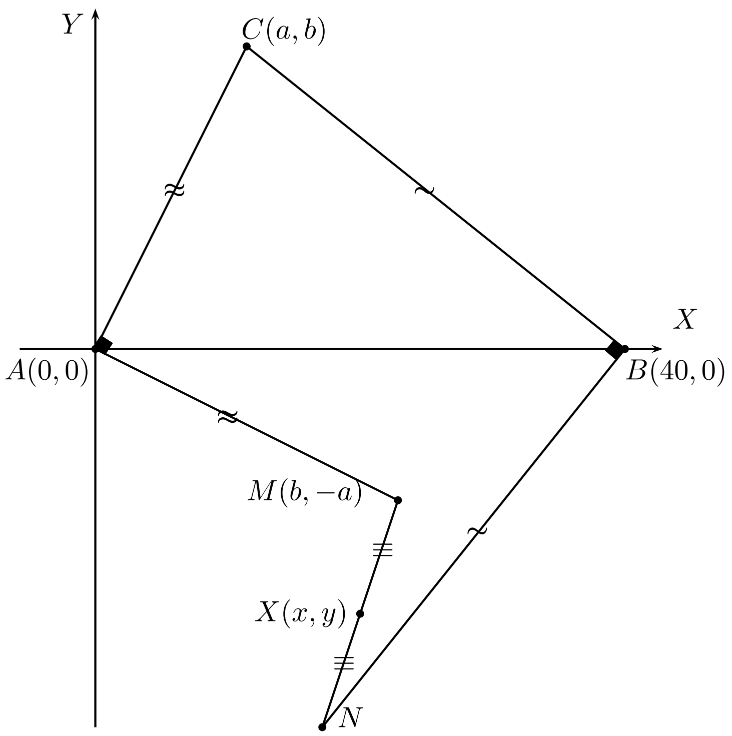


El problema del tesoro escondido Recientemente se encontró un antiguo manuscrito. En él se daban instrucciones para encontrar un tesoro escondido.

Las instrucciones son las siguientes: en la isla hay dos robles A y B, y una palmera C. El tesoro se encuentra en el punto X al cual se llega de la siguiente forma: Caminar de C a A cierto número de pasos; al llegar a A, girar 90° hacia la izquierda y dar la misma cantidad de pasos hasta llegar al punto M.

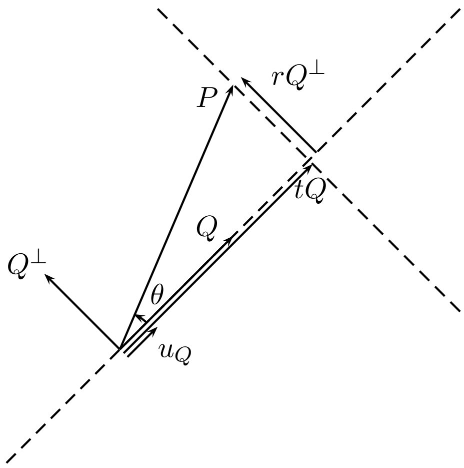
Volver al punto C y caminar ahora hacia B. Al llegar, girar 90° a la derecha y caminar la misma distancia hasta llegar al punto N.

El tesoro se encuentra en el punto medio entre M y N. Al llegar a la isla la expedición encontró los robles, pero la palmera había desaparecido, encontrando además que $d(A, B) = 40$m. ¿Cómo encontraron el tesoro?



Vemos que $\overrightarrow{AC} = (a, b)$, $\overrightarrow{AM} = -\overrightarrow{AC}^{\perp}$, así $M = (b, -a)$. Similarmente $\overrightarrow{BC} = a-40, b$, $\overrightarrow{BN} = \overrightarrow{BC}^{\perp}$, así, $N - B = (-b, a-40)$, lo que implica que $N = (40-b, a-40)$. Por lo tanto $x = \frac{1}{2}(M + N) = (20, -20)$.

Proyección ortogonal Dados los vectores P y Q no nulos tal que forman un ángulo θ



definimos como vector *proyección ortogonal* de P sobre Q al vector

$$\operatorname{Proy}_Q P = tQ, \quad t \in \mathbb{R}$$

Se observa que

$$P = tQ + rQ^{\perp},$$

luego,

$$\begin{aligned}\langle P, Q\rangle &= \left\langle tQ + rQ^{\perp}, Q\right\rangle = t\langle Q, Q\rangle + r\left\langle Q^{\perp}, Q\right\rangle \\ &= r\langle Q, Q\rangle,\end{aligned}$$

de donde

$$t = \frac{\langle P, Q\rangle}{\langle Q, Q\rangle},$$

así,

$$\operatorname{Proy}_Q P = \frac{\langle P, Q\rangle}{\langle Q, Q\rangle} Q.$$

Observación 1.5. Como $\langle Q, Q\rangle = \|Q\|^2$, podemos escribir

$$\operatorname{Proy}_q P = \frac{\langle P, Q\rangle}{\|Q\|^2} Q = \frac{\langle P, Q\rangle}{\|Q\|}\left(\frac{1}{\|Q\|} Q\right) = \frac{\langle P, Q\rangle}{\|Q\|} u_Q.$$

De la observación anterior, podemos observar que

$$\|\operatorname{Proy}_Q P\| = \left\|\frac{\langle P, Q\rangle}{\|Q\|} u_Q\right\| = \left|\frac{\langle P, Q\rangle}{\|Q\|}\right| \|u_Q\| = \frac{|\langle P, Q\rangle|}{\|Q\|},$$

luego, definimos,

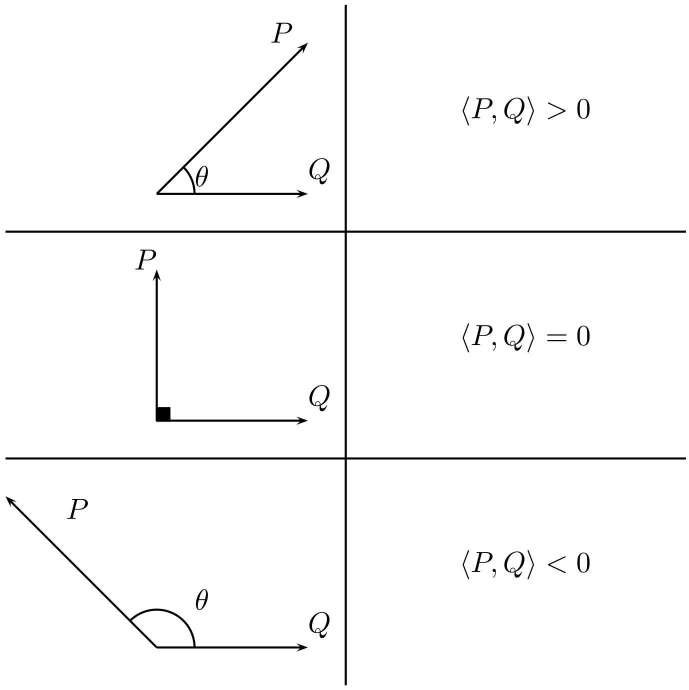
$$\operatorname{Comp}_Q P = \frac{\langle P, Q\rangle}{\|Q\|},$$

como la *componente ortogonal* de P en la dirección Q.

Debemos notar que mientras $\operatorname{Proy}_Q P$ es un vector, $\operatorname{Comp}_Q P$ es un número con signo; además

$$\operatorname{Proy}_Q P = (\operatorname{Comp}_Q P)u_Q.$$

Como $\operatorname{sig}(\operatorname{Comp}_Q P) = \operatorname{sig}(\langle P, Q\rangle)$ pueden ocurrir los siguientes casos:



Ejemplo 1.19. Si $P = (2, -3)$ y $Q = (-3, 4)$, entonces $t = \frac{\langle P,Q\rangle}{\langle Q,Q\rangle} = \frac{-18}{25}$. Luego,

$$\operatorname{Proy}_Q P = \frac{-18}{25}(-3, 4) = \frac{-18}{5}\left(\frac{-3}{5}, \frac{4}{5}\right),$$

de donde $\operatorname{Comp}_Q P = -\frac{18}{5} < 0$

Proposición 1.20. *Sean P, Q y R vectores arbitrarios en $\mathbb{R}^2$. Luego, se tiene las siguientes propiedades:*

1. $\operatorname{Proy}_Q P = \operatorname{Proy}_{2Q} P$.

2. $\operatorname{Proy}_Q(P + R) = \operatorname{Proy}_Q P + \operatorname{Proy}_Q R$.

3. $\operatorname{Proy}_Q \lambda P = \lambda \operatorname{Proy}_Q P$

1.4 Dependencia e independencia lineal

Definición 1.21. Se dice que el conjunto de n vectores $\{p_1, \ldots, p_n\} \subset \mathbb{R}^2$ es *linealmente independiente* (L. I.) si se cumple la siguiente condición: si existen n escalares $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$, tal que,

$$\alpha_1 p_1 + \alpha_2 p_2 + \cdots + \alpha_n p_n = (0,0),$$

entonces

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_n = 0.$$

Observación 1.6. Si el conjunto $\{p_1, \ldots, p_n\}$ es linealmente independiente, se dirá que los vectores $p_1, \ldots, p_n$ son linealmente independientes. En cualquier otro caso, los vectores serán llamados *linealmente dependientes.*

Observación 1.7. En virtud de la definición anterior, los vectores $\{p_1, \ldots, p_n\}$ son LD si, y sólo si, existen $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ tal que

$$\alpha_1 p_1 + \alpha_2 p_2 + \cdots + \alpha_n p_n = (0,0)$$

y algún $\alpha_i \neq 0$.

Observación 1.8. En la definición anterior, el hecho que el conjunto $\{p_1, \ldots, p_n\}$ sea L.I., implica que los escalares $\alpha_i = 0$, con $i = 1, \ldots, n$; es decir, se tiene *solución única.*

Ejemplo 1.22. ¿El conjunto $\{(2,3), (5,1)\}$ es L.I.? Veamos,

$$\alpha(2,3) + \beta(5,1) = (0,0),$$

así tenemos dos ecuaciones

$$\begin{aligned} 2\alpha + 5\beta &= 0, \\ 3\alpha + \beta &= 0, \end{aligned}$$

de donde, tenemos $\alpha = 0 = \beta$. Por lo tanto, el conjunto $\{(2,3), (5,1)\}$ es L.I.

Ejemplo 1.23. ¿El conjunto $\{(2,3), (8,12)\}$ es L.I.? Veamos,

$$\alpha(2,3) + \beta(8,12) = 0.$$

Se tiene las siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned} 2\alpha + 8\beta &= 0, \\ 3\alpha + 12\beta &= 0, \end{aligned}$$

de donde, $\alpha = -4\beta$. De este modo, tenemos infinitas soluciones, es decir, el conjunto $\{(2,3), (8,12)\}$ no es L.I.

Sean P y Q dos vectores cualesquiera en $\mathbb{R}^2$ tal que $P = \lambda Q$, con $\lambda \in \mathbb{R}$. Luego, si

$$\begin{aligned} \alpha P + \beta Q &= \alpha\lambda Q + \beta Q \\ &= (\alpha\lambda + \beta)Q = (0,0). \end{aligned}$$

Si $Q = 0$, entonces $P = 0$; de ese modo en la ecuación anterior α y β puede tomar infinitos valores, y por lo tanto P y Q son L.D.

Si , por el contrario, $Q \neq 0$, entonces, $\alpha\lambda + \beta = 0$; de ese modo

$$\alpha = -\frac{1}{\lambda}\beta.$$

Vemos que el valor de α depende del valor de β, y éste último puede tomar infinitos valores. Por lo tanto $\{P, Q\}$ es L.D.

Vemos que en cualquiera de estos casos $\{P, Q\}$ es L.D. Se concluye que dos vectores en $\mathbb{R}^2$ son L.I. si, y sólo si, dichos vectores no son paralelos.

Teorema 1.24. *En $\mathbb{R}^2$ existen como máximo dos vectores L.I.*

Demostración. En lo expuesto anteriormente, existiría dos ecuaciones en el sistema planteado y n incógnitas ($n \geq 3$), sistema sobredeterminado el cual tiene infinitas soluciones. □

Definición 1.25. Un conjunto de vectores $\{b_1, b_2\}$ es una *base* de $\mathbb{R}^2$ si, y sólo si,

* Dicho conjunto de vectores es L.I.
* Cualquier elemento de $\mathbb{R}^2$ es combinación lineal de dichos vectores.

Observación 1.9. Según lo anterior una base de $\mathbb{R}^2$ puede tener a lo más dos elementos. Exactamente son necesarios dos vectores L.I. para generar una base en $\mathbb{R}^2$; en efecto, dados $P = (a, b)$ y $Q = (c, d)$ dos vectores L.I., ¿$\{P, Q\}$ es base? Veamos

* Verificado.
* ¿Dado $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ arbitrario, existe $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tal que $(x, y) = \alpha P + \beta Q$? De existir tales α y β se debería tener el siguiente sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas:

  $$\begin{aligned} a\alpha + c\beta &= x \\ b\alpha + d\beta &= y \end{aligned}$$

  el cual se cumple si, y sólo si,

  $$\begin{aligned} a\alpha + c\beta &= 0 \\ b\alpha + d\beta &= 0 \end{aligned}$$

  lo que ocurre si, y sólo si, $\alpha = \beta = 0$. Por lo tanto, en $\mathbb{R}^2$, dos vectores L.I. constituyen una base, y cualquier base está constituida por dos vectores L.I.

Ejemplo 1.26. Consideremos la *base canónica* formada por los vectores $i = (1, 0)$ y $j = (0, 1)$.

Ejemplo 1.27. El conjunto $\{(1, 2), (5, 3)\}$ es una base, pues es L.I., en efecto, si tenemos

$$\alpha(1, 2) + \beta(5, 3) = (0, 0),$$

entonces tenemos que

$$\begin{aligned} \alpha + 5\beta &= 0 \\ 2\alpha + 3\beta &= 0 \end{aligned}$$

de donde $\alpha = \beta = 0$. Ahora, dado $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ arbitrario, mostraremos que existe $a, b \in \mathbb{R}$ tal que

$$(x, y) = a(1, 2) + b(5, 3).$$

En efecto, la ecuación anterior se puede escribir en forma matricial como

$$\begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Desde que los vectores $(1, 2)$ y $(5, 3)$ son L.I., la matriz $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 3 \end{smallmatrix}\right)$ tiene inversa, así, al multiplicar dicha inversa por la izquierda a ambos lados de la igualdad anterior, tenemos

$$\begin{pmatrix} -3/7 & 5/7 \\ 2/7 & -1/7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3/7 & 5/7 \\ 2/7 & -1/7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},$$

de donde, para $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ arbitrario, existen $a = \frac{-3x+5y}{7}$ y $b = \frac{2x-y}{7}$ en $\mathbb{R}$ tal que

$$(x, y) = a(1, 2) + b(5, 3).$$

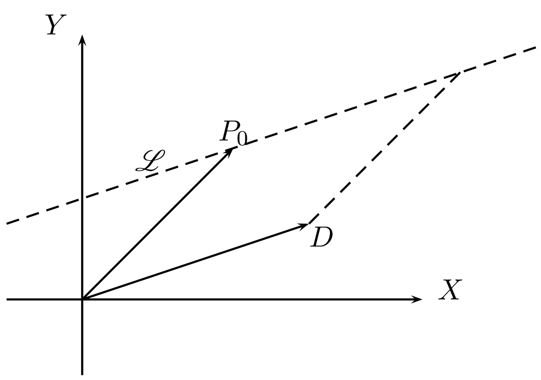
Por lo tanto $\{(1, 2), (5, 3)\}$ es una base de $\mathbb{R}^2$.

1.5 La recta en el plano

Dados los vectores P_0 y $D \neq (0, 0)$ definimos el conjunto

$$\mathscr{L}(P_0, D) = \{P \in \mathbb{R}^2 / P = P_0 + tD, \text{ con } t \in \mathbb{R}\},$$

que es la recta que pasa por P_0 y es generada por D (o cuyo vector direccional es D).



La *ecuación vectorial* de $\mathscr{L}$ es

$$P = P_0 + tD.$$

Observación 1.10. Sean $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ constantes consideremos el conjunto no vacío

$$L(a, b, c) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / ax + by + c = 0\}$$

Lema 1.28. *Sean $a, b, c \in \mathbb{R}$. Si $L(a, b, c) \neq \emptyset$, entonces existen P_0 y D tales que $L(a, b, c) \subset \mathscr{L}(P_0, D)$.*

Demostración. Como $L(a, b, c) \neq \emptyset$, existe (x_0, y_0) tal que $ax_0 + by_0 + c = 0$; luego, podemos tomar

$$P_0 = (x_0, y_0), \qquad D = (-b, a).$$

Sea $(x, y) \in L(a, b, c)$ arbitrario, así, $ax + by + c = 0$. También se tiene

$$ax_0 + by_0 + c = 0,$$

y restando las dos últimas ecuaciones se tiene

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) = 0,$$

es decir

$$\langle (a, b), (x - x_0, y - y_0) \rangle = 0. \tag{1.1}$$

Además,

$$\langle (a, b), 0 \rangle = 0. \tag{1.2}$$

De (1.1) y (1.2) los vectores $(x - x_0, y - y_0)$ y D son *paralelos*, es decir

$$(x - x_0, y - y_0) = tD,$$

lo que implica que $(x, y) = (x_0, y_0) + tD$; esto es, $(x, y) \in \mathscr{L}(P_0, D)$. $\square$

Lema 1.29. *Sean $P_0 = (x_0, y_0)$ y $D = (d_1, d_2) \neq (0, 0)$. Luego, existen $a, b, c \in \mathbb{R}$ tales que*

$$\mathscr{L}(P_0, D) \subset L(a, b, c)$$

Demostración. Sea $P = (x, y) \in \mathscr{L}(P_0, D)$ arbitrario; luego, $(x, y) = (x_0, y_0) + t(d_1, d_2)$, de donde se tiene el sistema de ecuaciones

$$x = x_0 + td_1,$$
$$y = y_0 + td_2.$$

Multiplicando la primera por d_2, y la segunda por d_1, se tiene

$$d_2x = d_2x_0 + td_1d_2,$$
$$d_1y = d_1y_0 + td_1d_2.$$

Luego, restando ambas ecuaciones se tiene $d_2x - d_1y = d_2x_0 - d_2y_0$, de donde se tiene

$$d_2x - d_1y + d_1y_0 - d_2x_0 = 0.$$

Eligiendo $a = d_2$, $b = -d_1$ y $c = d_1y_0 - d_2x_0$, tenemos $(x, y) \in L(a, b, c)$. $\square$

Teorema 1.30. $\mathscr{L}(P_0, D) = L(a, b, c)$.

Demostración. Es conclusión de los Lemas 1.28 y 1.29. □

Debemos notar que si $P = (x_0, y_0)$ y $D = (-b, a)$,

$$\mathscr{L}(P_0, D) \rightleftarrows L(a, b, c),$$

$a = d_2$, $b0 - d_1$ y $c = \left\langle P_0, D^{\perp} \right\rangle$.

Observación 1.11. La ecuación

$$P = P_0 + tD$$

es llamada *ecuación vectorial* de $\mathscr{L}$, mientra que la ecuación

$$ax + by + c = 0$$

es llamada *ecuación general* de $\mathscr{L}$.

Ejemplo 1.31. Sea $\mathscr{L}(P_0, D)$, con $P_0 = (5, 3)$ y $D = (1, 2)$. Luego, tomando $a = 2$, $b = -1$ y $c = \langle (5, 3), (-2, 1) \rangle$ se tiene la ecuación general $2x - y - 7 = 0$; así

$$\begin{aligned} \mathscr{L}(P_0, D) &= \{P/P = (5, 3) + t(2, 1); t \in \mathbb{R}\} \\ &= \{(x, y)/2x - y - 7 = 0\} = L(2, -1, -7) \end{aligned}$$

Ejemplo 1.32. Sea $L(2, -1, -4)$; luego, tomando $P_0 = (2, 0)$ y $D = (-1, 2)$, tenemos

$$\begin{aligned} L(2, 1, -4) &= \{(x, y)/2x + y - 4 = 0\} \\ &= \{P/P = (2, 0) + t(-1, 2); t \in \mathbb{R}\} = \mathscr{L}(P_0, D) \end{aligned}$$

Observación 1.12.

- $*$ La posición de una recta respecto a los ejes (vertical y horizontal) está determinado por D; así, si

$$\begin{aligned} D//\text{Eje } Y &\longrightarrow \mathscr{L} \text{ es vertical.} \\ D//\text{Eje } X &\longrightarrow \mathscr{L} \text{ es horizontal.} \end{aligned}$$

- $*$ La posición relativa entre dos rectas está dado por sus vectores direccionales. Sean $\mathscr{L}_1(P_0, D_1)$ y $\mathscr{L}_2(Q_0, D_2)$ dos rectas. Luego, $\mathscr{L}_1 // \mathscr{L}_2$ si, y sólo si, $D_1 // D_2$; y $\mathscr{L}_1 \perp \mathscr{L}_2$ si, y sólo si, $D_1 \perp D_2$.

Forma normal de la ecuación de una recta Sea $\mathscr{L}(P_0, D) = L(a, b, c)$ una recta no vertical ($b \neq 0$). Luego su ecuación está dada por

$$ax + by + c = 0,$$

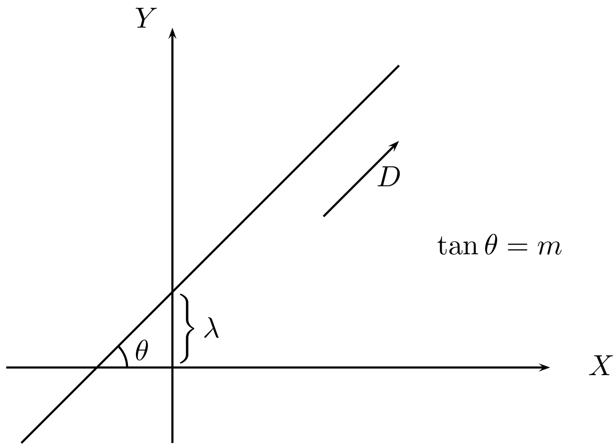
esto ocurre si, y sólo si,

$$y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b}.$$

Escribamos $m = -\frac{a}{b} = \frac{d_2}{d_1}$ y $\lambda = -\frac{c}{b} = \frac{\langle P_0, D^\perp \rangle}{d_1}$. Así, se tiene la ecuación

$$y = mx + \lambda,$$

donde m es llamada *pendiente* y λ, *punto de paso.*



En conclusión, si $b \neq 0$, entonces

$$\mathscr{L}(P_0, D) = L(a, b, c) = \mathscr{L}(m, \lambda),$$

donde $\mathscr{L}(m, \lambda) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / y = mx + \lambda\}$.

Características del paralelismo y perpendicularidad Sean las rectas

$$\mathscr{L}_1(P_0, D_1) = L_1(a_1, b_1, c_1) = \mathscr{L}_1(m_1, \lambda_1),$$
$$\mathscr{L}_2(Q_0, D_2) = L_2(a_2, b_2, c_2) = \mathscr{L}_2(m_2, \lambda_2).$$

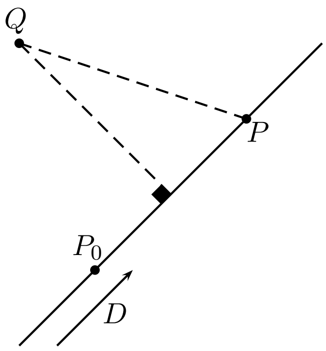
Luego se tiene

$$\begin{aligned} \mathscr{L}_1 // \mathscr{L}_2 &\iff D_1 // D_2 \\ &\iff (-b_1, a_1) // (-b_2, a_2) \\ &\iff {}^{a_1}/_{a_2} = {}^{-b_1}/_{-b_2} \\ &\iff {}^{-a_1}/_{b_1} = {}^{-a_2}/_{b_2} \\ &\iff m_1 = m_2. \end{aligned}$$

Además,

$$\begin{aligned}\mathscr{L}_1 \perp \mathscr{L}_2 &\iff D_1 \perp D_2\\ &\iff (-b_1, a_1) \perp (-b_2, a_2)\\ &\iff a_1a_2 + b_1b_2 = 0\\ &\iff (-a_1/b_1)(-a_2/b_2) + 1 = 0\\ &\iff m_1m_2 = 1.\end{aligned}$$

Distancia de un punto hacia una recta Sean el punto Q y la recta $\mathscr{L}(P_0, D)$



Observación 1.13. el conjunto $\{\mathrm{d}(Q, P)/P \in \mathscr{L}(P_0, D)\}$ está acotado inferiormente por 0. Luego, posee ínfimo, esto es,

$$\mathrm{d}(Q, \mathscr{L}) = \inf\{\mathrm{d}(Q, P)/P \in\ll (P_0, D)\},$$

por lo tanto, existe $P^* \in \mathscr{L}(P_0, D)$ tal que $\mathrm{d}(Q, \mathscr{L}) = \mathrm{d}(Q, P^*)$, así, $P^* = P_0 + tD$, para algún t.

Se observa que $\left\langle \overline{QP^*}, D\right\rangle = \langle P^* - Q, D\rangle = 0$, de donde $\langle P_0 - Q, D\rangle + t\,\langle D, D\rangle = 0$, lo que implica que

$$t = \frac{\langle Q - P_0, D\rangle}{\langle D, D\rangle}.$$

Ejemplo 1.33. Calcule la distancia del punto Q a $\mathscr{L}(P_0, D)$, donde $Q = (-5, 2)$, $P_0 = (1, 2)$ y $D = (3, 4)$.

Solución. $Q - P_0 = (-6, 0)$, luego

$$t = \frac{\langle Q - P_0, D\rangle}{\langle D, D\rangle} = -\frac{18}{25},$$

de donde $P^* = (1, 2) - \frac{18}{25}(3, 4) = \left(-\frac{29}{25}, -\frac{22}{25}\right)$. Por lo tanto

$$\mathrm{d}(Q, \mathscr{L}) = \mathrm{d}(Q, P^*) = \sqrt{\left(-\frac{29}{25} + 5\right)^2 + \left(-\frac{22}{25} - 2\right)^2} = \frac{24}{5}. \qquad \square$$

Fórmula de la distancia usando la ecuación general Se puede observar que

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}(Q,\mathscr{L}) &= \left\|\mathrm{Proy}_{D^{\perp}}\,\overrightarrow{P_0Q}\right\| = \left|\mathrm{Comp}_{D^{\perp}}\,\overrightarrow{P_0Q}\right| \\
&= \left|\frac{\left\langle \overrightarrow{P_0Q}, D^{\perp}\right\rangle}{\|D^{\perp}\|}\right| = \frac{|-aq_1+ax_0-bq_2+by_0|}{\sqrt{a^2+b^2}}
\end{aligned}$$

y haciendo $c = ax_0 + by_0$ se tiene

$$\mathrm{d}(Q.\mathscr{L}) = \frac{|aq_1+bq_2+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

En el ejemplo anterior tenemos $a = 4$, $b = -3$, $c = y_0d_1 - x_0d_2 = 2$. Por lo tanto, $\mathscr{L}(P_o, D) = L(4, -3, 2)$; así,

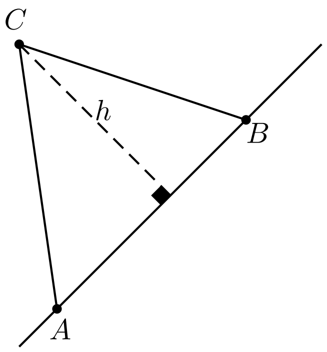
$$\mathrm{d}(Q,\mathscr{L}) = \frac{|4(-5)-3(2)+2|}{\sqrt{4^2+(-3)^2}} = \frac{24}{5}.$$

Ejercicio 4. Sean $L_1(a, b, c)$ y $L_2(a, b, \widehat{c})$ rectas paralelas. Probar que

$$\mathrm{d}(\mathscr{L}_1,\mathscr{L}_2) = \left|\mathrm{Comp}_{D^{\perp}}\,\overrightarrow{Q_0P_0}\right| = \frac{c-\widehat{c}}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

Ejemplo 1.34. Dados tres puntos diferentes entre sí $A = (a_1, a_2)$, $B = (b_1, b_2)$ y $C = (c_1, c_2)$, calcule el área de la región triangular determinada por estos tres puntos, en términos de sus coordenadas.

Demostración. Si hacemos $A = P_0$, $D = \overrightarrow{AB}$, tenemos $\mathscr{L}(P_0, D) = L(a, b, c)$,



donde

$$a = b_2 - a_2, \quad b = a_1 - b_1, \quad c = a_2(b_1 - a_1) - a_1(b_2 - a_2).$$

Luego, el área es

$$A = \frac{1}{2}\|\overrightarrow{AB}\| \times h.$$

Recordemos que $\|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2} = \sqrt{b^2 + a^2}$ y

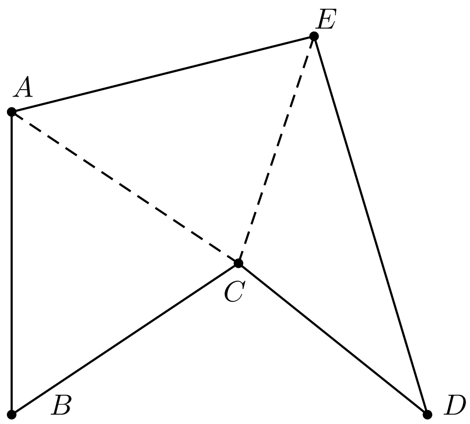
$$h = \mathrm{d}(Q, \mathscr{L}) = \frac{|ac_1 + b_2 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}},$$

así,

$$\begin{aligned}
\text{Área} &= \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + b^2}\frac{|ac_1 + bc_2 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} \\
&= \frac{1}{2}\big|b_2c_1 - a_2c_1 + a_1c_2 - b_1c_2 + a_2b_1 - a_2a_1 - a_1b_2 + a_1a_2\big| \\
&= \frac{1}{2}\begin{vmatrix} c_1 & c_2 \\ a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}|\Sigma_1 - \Sigma_2|,
\end{aligned}$$

donde $\Sigma_1 = b_2c_1 + a_1c_2 + a_2b_1$ y $\Sigma_2 = a_2c_1 + b_1c_2 + a_1b_2$. □

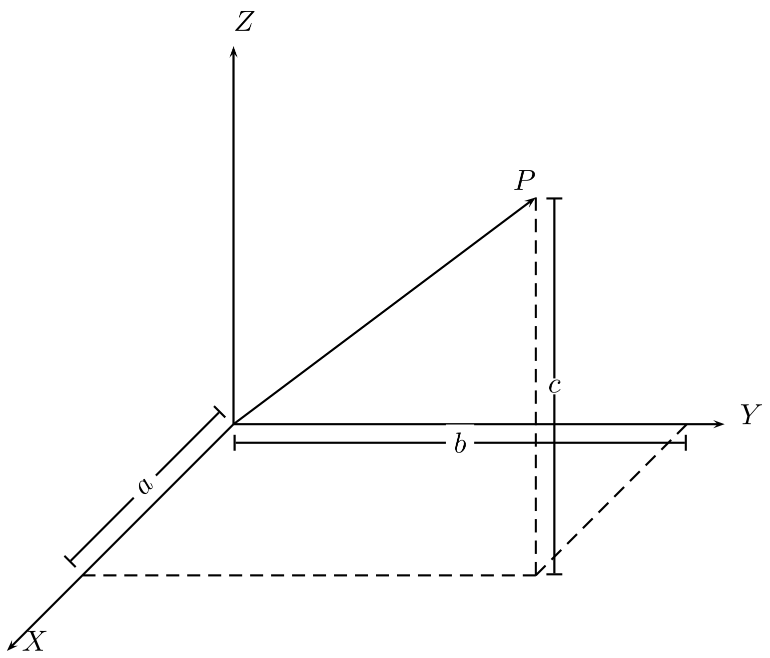
Para regiones poligonales basta con triangulizar



Así,

$$\text{Área} = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} B \\ C \\ D \\ E \\ A \\ B \end{vmatrix}$$

1.6 Vectores en el espacio



P tiene coordenadas (a, b, c). Luego, si $\alpha = \measuredangle(\overrightarrow{OP}, \overrightarrow{OX})$, $\beta = \measuredangle(\overrightarrow{OP}, \overrightarrow{OY})$, $\gamma = \measuredangle(\overrightarrow{OP}, \overrightarrow{OZ})$, vemos que

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1.$$

Denotamos $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^3$. Si sobre $\mathbb{R}^3$ definimos las operaciones

$$\begin{aligned} P \oplus Q &= (p_1 + q_1, p_2 + q_2, p_3 + q_3), \\ \lambda \odot P &= (\lambda p_1, \lambda p_2, \lambda p_3), \end{aligned}$$

para todo $P = (p_1, p_2, p_3), Q = (q_1, q_2, q_3) \in \mathbb{R}^3$ y todo $\lambda \in \mathbb{R}$, entonces se puede observar que $\mathbb{R}^3$ es un espacio vectorial.

Definición 1.35. Se dice que P y Q en $\mathbb{R}^3$ son paralelos si, y sólo si, existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que

$$P = \lambda Q.$$

Definición 1.36. Dado $P = (p_1, p_2, p_3) \in \mathbb{R}^3$, se define su longitud como

$$\|P\| = \sqrt{p_1^2 + p_2^2 + p_3^2}.$$

Definición 1.37. Cualquier vector $P \in \mathbb{R}^3$, con norma $\|P\| = 1$ es llamado *vector unitario.*

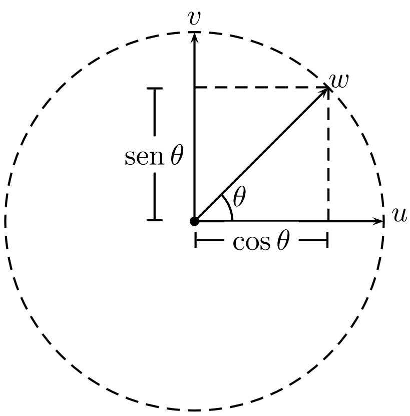
Observación 1.14. Asociado a $P \neq 0$, existe un vector unitario $u_P = \frac{1}{\|P\|}P$.

Definición 1.38. Para $P = (p_1, p_2, p_3)$ y $Q = (q_1, q_2, q_3)$, se define el producto interno

$$\langle P, Q \rangle = p_1 q_1 + p_2 q_2 + p_3 q_3.$$

Teorema 1.39. *Si u y w son vectores unitarios en $\mathbb{R}^3$ y θ es el ángulo entre ellos, entonces $\langle u, w \rangle = \cos\theta$.*

Demostración. Consideremos el siguiente gráfico



Se puede observar que $w = \cos\theta u + \operatorname{sen}\theta v$. Calculando

$$\langle u, w \rangle = \langle u, \cos\theta u + \operatorname{sen}\theta v \rangle = \cos\theta \langle u, u \rangle + \operatorname{sen}\theta \langle u, v \rangle = \cos\theta \|u\|^2 = \cos\theta. \qquad \square$$

Sean P y Q dos vectores cualesquiera no nulos. Considerando los vectores

$$u = \frac{1}{\|P\|}P \text{ y } w = \frac{1}{\|Q\|}Q,$$

y el ángulo entre ellos $\theta = \measuredangle(P, Q)$, tenemos que

$$\left\langle \frac{1}{\|P\|}P, \frac{1}{\|Q\|}Q \right\rangle,$$

en virtud del teorema anterior.

Corolario 2. *Si P y Q son vectores arbitrarios, con $\theta = \measuredangle(P, Q)$, entonces*

$$\langle P, Q \rangle = \|P\|\|Q\| \cos\theta.$$

Demostración. Sea $\theta = \measuredangle(P, Q)$. Si $P = 0$ ó $Q = 0$, entonces $\langle P, Q \rangle = \|P\|\|Q\| \cos\theta = 0$ desde que $\|P\| = 0$ ó $\|Q\| = 0$.

Caso contrario, si P y Q son no nulos, entonces para los vectores $u_P = \frac{1}{\|P\|}P$ y $u_Q = \frac{1}{\|Q\|}Q$ se tiene

$$\langle u_P, u_Q \rangle = \cos\theta,$$

en virtud del teorema anterior. Esta última ecuación se escribe como

$$\left\langle \frac{1}{\|P\|}P, \frac{1}{\|Q\|}Q \right\rangle = \cos\theta,$$

de donde, se tiene

$$\langle P, Q \rangle = \|P\|\|Q\|\cos\theta. \qquad \square$$

Definición 1.40. Se dice que dos vectores P y Q son *perpendiculares* ($P \perp Q$) si, y sólo si, $\langle P, Q \rangle = 0$.

Observación 1.15. El vector nulo es perpendicular a cualquier vector.

Observación 1.16. Dados dos vectores no nulos, el ángulo entre ellos se puede calcular mediante

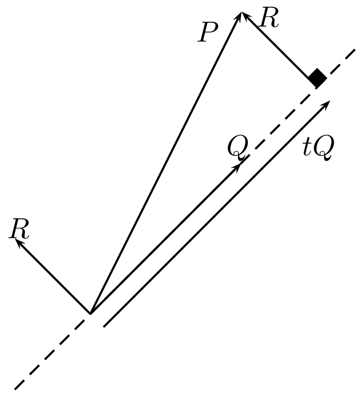
$$\theta = \arccos\left(\frac{\langle P, Q \rangle}{\|P\|\|Q\|} \right).$$

Proyección ortogonal y componente

Definición 1.41. Dados P y Q vectores no nulos de $\mathbb{R}^3$, se define la proyección de P sobre Q como

$$\operatorname{Proy}_Q P = \frac{\langle P, Q \rangle}{\langle Q, Q \rangle} Q = \frac{\langle P, Q \rangle}{\|Q\|} u_Q = (\operatorname{Comp}_Q P) u_Q.$$

Siempre es posible construir un vector R tal que $\langle Q, R \rangle = 0$



Del gráfico vemos que $P = tQ + R$, de donde $\langle P, Q \rangle = t\langle Q, Q \rangle$. Notemos que en $\mathbb{R}^3$ también se cumple

$$\|P + Q\|^2 = \|P\|^2 + 2\langle P, Q \rangle + \|Q\|^2.$$

Independencia lineal y bases Un conjunto $\{p_1, \ldots, p_n\} \subset \mathbb{R}^3$ es L.I. si, y sólo si,

$$\alpha_1 p_1 + \alpha_2 p_2 + \cdots + \alpha_n p_n = (0,0,0)$$

implica que $\alpha_i = 0$, para $i = 1, \ldots, n$.

Ejemplo 1.42. ¿Los vectores $P = (2,1,3)$ y $Q = (6,3,9)$ son L.I.?

Solución. Consideremos la ecuación

$$\alpha(2,1,3) + \beta(6,3,9) = (0,0,0),$$

de donde se obtiene el sistema

$$\begin{aligned} 2\alpha + 6\beta &= 0, \\ \alpha + 3\beta &= 0, \\ 3\alpha + 9\beta &= 0. \end{aligned}$$

Esto implica que $\alpha = -3\beta$, es decir, α y β pueden tomar infinitos valores. Por lo tanto, P y Q no son L.I. □

Ejemplo 1.43. ¿Los vectores $P = (2,1,3)$ y $Q = (1,1,5)$ son L.I.?

Solución. Veamos; dada la ecuación

$$\alpha(2,1,3) + \beta(1,1,5) = (0,0,0),$$

se tiene el sistema

$$\begin{aligned} 2\alpha + \beta &= 0, \\ \alpha + \beta &= 0, \\ 3\alpha + 5\beta &= 0. \end{aligned}$$

Esto implica que $\alpha = \beta = 0$. Por lo tanto P y Q son L.I. □

Teorema 1.44. *Cualquier subconjunto de un conjunto de vectores L.I. también es L.I.*

Observación 1.17. Para verificar si tres vectores en $\mathbb{R}^3$ son L.I. debemos

i) Verificar si alguno es nulo.

ii) Verificar si un par de ellos son paralelos.

iii) Plantear el sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas.

En $\mathbb{R}^3$ existen a lo más tres vectores L.I.

Definición 1.45. Una *base* en $\mathbb{R}^3$ es cualquier conjunto de tres vectores L.I. que genera todo el espacio $\mathbb{R}^3$. Es decir, P, Q, Q es base de $\mathbb{R}^3$ si, y sólo si, dado $x \in \mathbb{R}^3$,

* $\{P, Q, R\}$ es L.I.
* Existen únicos α, β, γ en $\mathbb{R}$ tal que

$$x = \alpha P + \beta Q + \gamma R$$

Ejemplo 1.46. Sean los vectores $\widehat{\imath} = (1, 0, 0)$, $\widehat{\jmath} = (0, 1, 0)$ y $\widehat{k} = (0, 0, 1)$. Luego, el conjunto $\{\widehat{\imath}, \widehat{\jmath}, \widehat{k}\}$ es llamado *base canónica* de $\mathbb{R}^3$.

Producto vectorial en $\mathbb{R}^3$ Sean $P = (p_1, p_2, p_3)$ y $Q = (q_1, q_2, q_3)$ en $\mathbb{R}^3$, tal que P y Q son L.I., y $x = (a, b, c)$ un tercer vector en $\mathbb{R}^3$. ¿Bajo qué condiciones sobre a, b, c x es perpendicular a P y Q; es decir,

$$\langle P, x \rangle = 0, \qquad \langle Q, x \rangle = 0.$$

De las últimas igualdades se tiene el siguiente sistema:

$$\begin{aligned} ap_1 + bp_2 + cp_3 &= 0, \\ aq_1 + bq_2 + cq_3 &= 0, \end{aligned}$$

con dos ecuaciones y tres incógnitas. Si fijamos c tenemos un sistema de dos ecuaciones y dos incógnitas:

$$\begin{aligned} ap_1 + bp_2 &= -cp_3, \\ aq_1 + bq_2 &= -cq_3. \end{aligned}$$

Aplicando la regla de Cramer, se tiene

$$a = \frac{\det \begin{pmatrix} -cp_3 & p_2 \\ -cq_3 & q_2 \end{pmatrix}}{\det \begin{pmatrix} p_1 & p_2 \\ q_1 & q_2 \end{pmatrix}} = \frac{c(p_2q_3 - p_3q_2)}{p_1q_2 - p_2q_1},$$

$$b = \frac{\det \begin{pmatrix} p_1 & -cp_3 \\ q_1 & -cq_3 \end{pmatrix}}{\det \begin{pmatrix} p_1 & p_2 \\ q_1 & q_2 \end{pmatrix}} = \frac{c(p_3q_1 - p_1q_3)}{p_1q_2 - p_2q_1}.$$

Es suficiente tomar

$$\begin{aligned} a &= p_2q_3 - p_3q_2, \\ b &= p_3q_1 - p_1q_3 = -(p_1q_3 - p_3q_1), \\ c &= p_1q_2 - p_2q_1. \end{aligned}$$

Ejemplo 1.47. Dado $P = (2, 1, 5)$ y $Q = (3, -4, 2)$, luego

$$\begin{aligned} x &= \Big(1(2) - (5)(-4); -\big(2(2) - (5)(3)\big); 2(-4) - 1(3)\Big) \\ &= (22, 11, -11) \,//\, (2, 1, -1). \end{aligned}$$

Luego, se tiene

$$\langle P, x \rangle = 0 = \langle Q, x \rangle .$$

Siendo $P = (p_1, p_2, p_3)$ y $Q = (q_1, q_2, q_3)$, se define el vector $P \times Q$ mediante

$$\begin{aligned} P \times Q &= \big(p_2q_3 - p_3q_2, -(p_1q_3 - p_3q_1), p_1q_2 - p_2q_1\big) \\ &= a \cdot \widehat{i} + b \cdot \widehat{j} + c \cdot \widehat{k} = (-1)^{1+1} a \cdot \widehat{i} + (-1)^{1+2} b \cdot \widehat{j} + (-1)^{1+3} c \cdot \widehat{k} \\ &= \det \overrightarrow{\begin{pmatrix} \widehat{i} & \widehat{j} & \widehat{k} \\ p_1 & p_2 & p_3 \\ q_1 & q_2 & q_3 \end{pmatrix}} \\ &= (-1)^{1+1} \widehat{i} \det \begin{pmatrix} p_2 & p_3 \\ q_2 & q_3 \end{pmatrix} + (-1)^{1+2} \widehat{j} \det \begin{pmatrix} p_1 & p_3 \\ q_1 & q_3 \end{pmatrix} + (-1)^{1+3} \widehat{k} \det \begin{pmatrix} p_1 & p_2 \\ q_1 & q_2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Proposición 1.48. *Dados los vectores P, Q, R en $\mathbb{R}^3$, se tienen las siguientes propiedades:*

i) $P \times Q = -Q \times P$.

ii) $P \times (Q + R) = P \times Q + P \times R$.

iii) $(\lambda P) \times Q = P \times (\lambda Q) = \lambda(P \times Q)$, *para cualquier* $\lambda \in \mathbb{R}$.

iv) $P \times (Q \times R) = \langle P, R \rangle Q - \langle P, Q \rangle R$.

v) $P \,//\, Q$ *si, y sólo si,* $P \times Q = (0, 0, 0)$.

vi) $\|P \times Q\| = \|P\|\|Q\|$ *si, y sólo si,* $P \perp Q$.

vii) $\|P \times Q\|$ *es el área del paralelogramo formado por* P *y* Q.

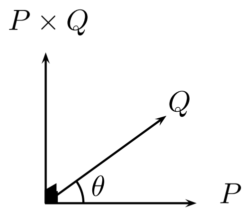
viii) $\|P \times Q\|^2 + \langle P, Q \rangle^2 = \|P\|^2\|Q\|^2$.

Ejemplo 1.49. Sean $P = (1, 3, 4)$ y $Q = (2, 0, 5)$, luego

$$P \times Q = \det \begin{pmatrix} \widehat{i} & \widehat{j} & \widehat{k} \\ 1 & 3 & 4 \\ 2 & 0 & 5 \end{pmatrix} = (15, 3, -6).$$

Se observa que $(P \times Q) \perp P$.

Geométricamente



El área del paralelogramo es

$$A = \|P \times Q\| = \|P\|\|Q\| \operatorname{sen} \theta.$$

Triple producto escalar Dados $P = (p_1, p_2, p_3)$, $Q = (q_1, q_2, q_3)$ y $R = (r_1, r_2, r_3)$ definimos y denotamos

$$[P, Q, R] = \langle P, Q \times R \rangle .$$

Considerando el orden que mantiene el triple producto escalar, podemos escribirlo como

$$[P, Q, R] = \det \begin{pmatrix} p_1 & p_2 & p_3 \\ q_1 & q_2 & q_3 \\ r_1 & r_2 & r_3 \end{pmatrix}$$

Ejemplo 1.50. Sea $P = (2, 1, 5)$, $Q = (1, 2, 1)$ y $R = (-2, 1, 3)$, luego,

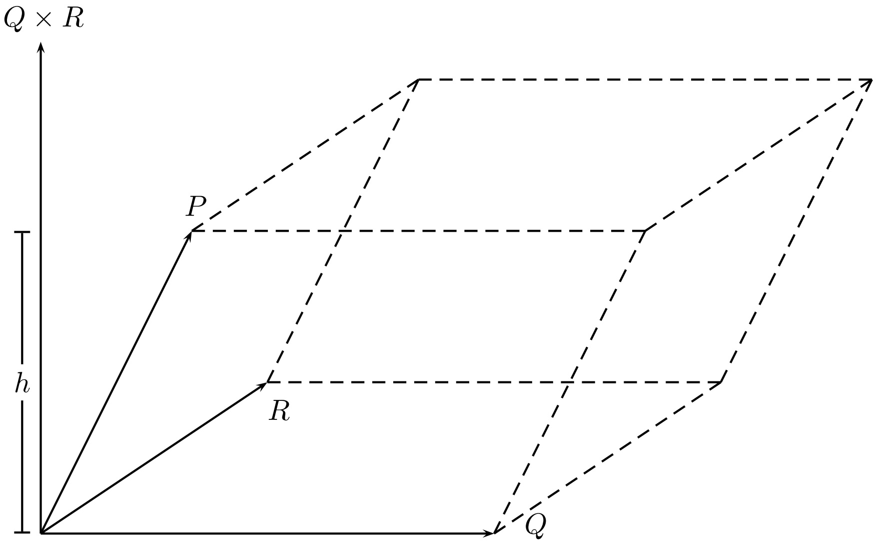
$$\begin{aligned} [P, Q, R] &= \langle (2, 1, 5), (1, 2, 1) \times (-2, 1, 3) \rangle \\ &= \langle (2, 1, 5), (5, -5, 5) \rangle = 30. \end{aligned}$$

También,

$$\begin{aligned} [P, Q, R] &= \det \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & \\ -2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \\ &= (-1)^{2+1} \times 1 \times (-2) + (-1)^{2+2} \times 2 \times 16 + (-1)^{2+3} \times 1 \times 4 = 30. \end{aligned}$$

Teorema 1.51. *Los vectores P, Q y R son L.I. si, y sólo si, $[P, Q, R] \neq 0$.*

Teorema 1.52. *Sean P, Q y R vectores arbitrarios*



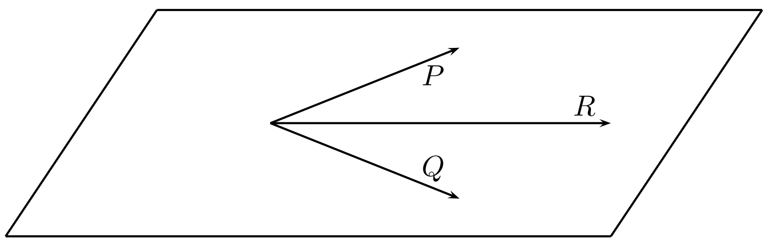
$$h = |\operatorname{Comp}_{Q\times R} P| = \left|\frac{\langle P, Q\times R\rangle}{\|Q\times R\|}\right|.$$

Luego,

$$Vol = A.base \times altura = \|Q\times R\|\left|\frac{\langle P, Q\times R\rangle}{\|Q\times R\|}\right| = |[P, Q, R]|$$

Proposición 1.53 (Independencia lineal)**.** *Sean P, Q y R vectores en $\mathbb{R}^3$ tal que $[P, Q, R] = 0$. Luego, si, P y Q son L.I., entonces existen únicos escalares α y β tales que*

$$R = \alpha P + \beta Q.$$



Demostración. Sean P y Q vectores L.I. Si $R = 0$, entonces existen únicos α, β tales que

$$\alpha P + \beta Q = 0 = R.$$

Por otra parte, si $R \neq 0$, entonces, como $[P, Q, R] = 0$, se tiene que P, Q y R son L.D. Así, existen λ_1, λ_2 y λ_3, no todos nulos, tales que

$$\lambda_1 P + \lambda_2 Q + \lambda_3 R = 0.$$

Si $\lambda_3 = 0$, entonces se tiene

$$\lambda_1 P + \lambda_2 Q = 0,$$

y en virtud de la hiptésis, $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$, pero esto implica que $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3$ sean nulos, una contradicción. Por lo tanto $\lambda_3 \neq 0$, lo que implica que

$$R = \left(-\frac{\lambda_1}{\lambda_3}\right)P + \left(-\frac{\lambda_2}{\lambda_3}\right)Q = \alpha P + \beta Q,$$

probando la existencia de los escalares. Ahora, supongamos que existe θ y γ tales que

$$R = \alpha P + \gamma Q = \theta P + \gamma Q,$$

de donde

$$(\alpha - \theta)P + (\beta - \gamma)Q = 0.$$

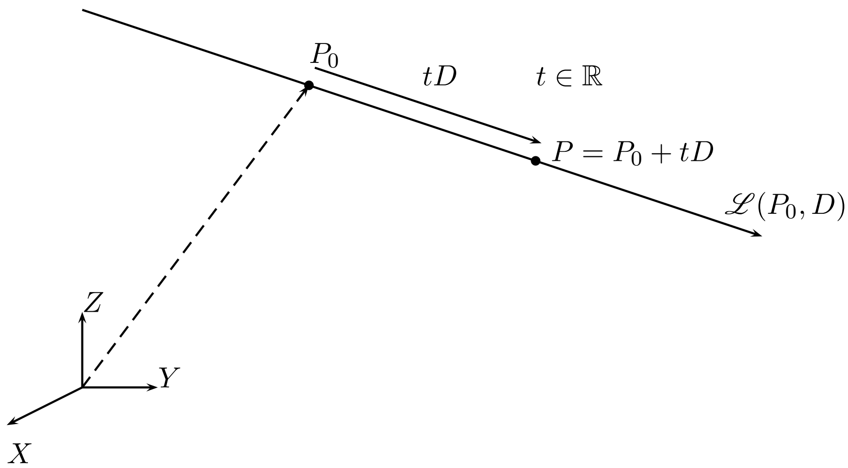
Pero, como por hipótesis P y Q son L.I., se tiene $\alpha - \theta = \beta - \gamma = 0$; así α y β son únicos. $\square$

1.7 La recta en el espacio

Sean $P_0 \in \mathbb{R}^3$ arbitrario y $D \in \mathbb{R}^3$ no nulo. Luego, el conjunto

$$\mathscr{L}(P_0, D) = \{P \in \mathbb{R}^3 / P = P_0 + tD; t \in \mathbb{R}\}$$

es la recta que pasa por P_0 y es paralelo o está generado por D.



Tenemos el siguiente sistema, llamado *ecuación paramétrica*,

$$\begin{aligned} x &= x_0 + td_1, \\ y &= y_0 + td_2, \\ z &= z_0 + td_3, \end{aligned}$$

de donde se tiene la *ecuacón simétrica*,

$$t = \frac{x - x_0}{d_1} = \frac{y - y_0}{d_2} = \frac{z - z_0}{d_3},$$

con d_1, d_2 y d_3 son no nulos.

Proposición 1.54. *Sean* $\mathscr{L}_1(P_0, D_1)$ *y* $\mathscr{L}_2(Q_0, D_2)$ *dos rectas tales que* $D_1 \,/\!/\, D_2$*. Luego,* $\mathscr{L}_1 \cap \mathscr{L}_2 \neq \emptyset$ *si, y sólo si* $\mathscr{L}_1 = \mathscr{L}_2$*.*

Demostración. Si $\mathscr{L}_1 = \mathscr{L}_2$, entonces $\mathscr{L}_1 \cap \mathscr{L}_2 = \mathscr{L}_1 \neq \emptyset$.

Recíprocamente, desde que $\mathscr{L}_1 \cap \mathscr{L}_2 \neq \emptyset$, existe P tal que $P \in \mathscr{L}_1$ y $P \in \mathscr{L}_2$, así,

$$P_0 + tD_1 = P = Q_0 + rD_2. \tag{1.3}$$

Sea $Q \in \mathscr{L}_1$ arbitrario, esto es, $Q = P_0 + sD_1$; luego,

$$Q = Q_0 + rD_2 - tD_1 + sD_1,$$

en virtud de la ecuación (1.3). Por hipótesis se tiene $D_1 \,/\!/\, D_2$, luego la igualdad anterior queda

$$\begin{aligned} Q &= Q_0 + rD_2 + (s-t)\lambda D_2, \\ Q &= Q_0 + \alpha D_2, \end{aligned}$$

esto es, $Q \in \mathscr{L}_2$, lo que implica $\mathscr{L}_1 \subset \mathscr{L}_2$.

De modo similar, se tiene $\mathscr{L}_2 \subset \mathscr{L}_1$; por lo tanto $\mathscr{L}_1 = \mathscr{L}_2$. □

Definición 1.55. Se dice que $\mathscr{L}_1(P_0, D_1)$ y $\mathscr{L}_2(Q_0, D_2)$ son *paralelos* si, y sólo si,

i) $\mathscr{L}_1 \cap \mathscr{L}_2 = \emptyset$.

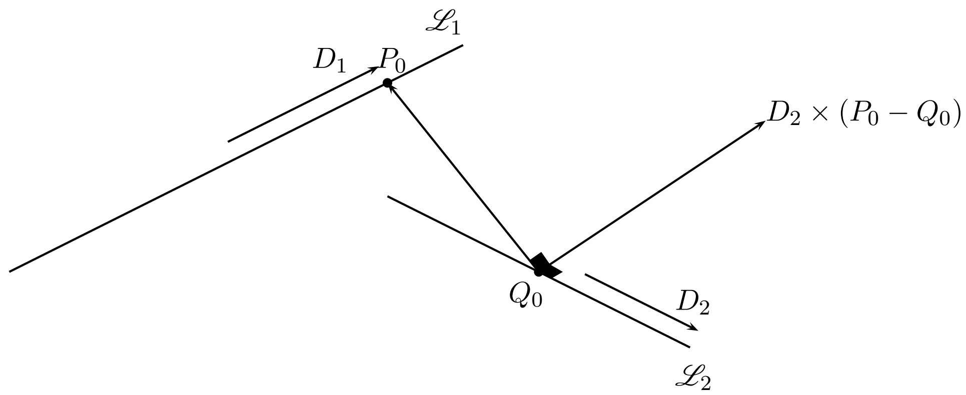
ii) $D_1 \,/\!/\, D_2$.

Definición 1.56. Se dice que $\mathscr{L}_1(P_0, D_1)$ y $\mathscr{L}_2(Q_0, D_2)$ son *alabeadas* (o se cruzan en el espacio) si, y sólo si,

i) $\mathscr{L}_1 \cap \mathscr{L}_2 = \emptyset$.

ii) $D_1 \not\!/\!\!/ D_2$.

Teorema 1.57. *Las rectas* $\mathscr{L}_1(P_0, D_1)$ *y* $\mathscr{L}_2(Q_0, D_2)$ *son alabeadas si, y sólo si,* $[D_1, D_2, P_0 - Q_0] \neq 0$*.*



Demostración. Sean $\mathscr{L}_1(P_0, D_1)$ y $\mathscr{L}_2(Q_0, D_2)$ rectas alabeadas. Por contradicción, asumamos que $[D_1, D_2, P - 0 - Q_0] = 0$ y como $D_1 \not\parallel D_2$, entonces D_1 y D_2 son L.I. En virtud del Teorema de la Independencia lineal, existen α y β en $\mathbb{R}$ tales que

$$P_0 - Q_0 = \alpha D_1 + \beta D_2,$$

lo que implica que

$$P_0 + (-\alpha D_1) = Q_0 + \beta D_2,$$

y por lo tanto $\mathscr{L}_1 \cap \mathscr{L}_2 \neq \emptyset$, una contradicción pues, por hipótesis, $\mathscr{L}_1$ y $\mathscr{L}_2$ son alabeadas.

Recíprocamente, sabemos que $[D_1, D_2, P_0 - Q_0] \neq 0$ si, y sólo si, D_1, D_2 y $P_0 - Q_0$ son L.I., en virtud del Teorema 1.51, lo que implica que $D_1 \;//\; D_2$. Para mostrar que $\mathscr{L}_1$ y $\mathscr{L}_2$ son alabeadas, debemos mostrar que $\mathscr{L}_1 \cap \mathscr{L}_2 = \emptyset$.

Asumamos lo contrario; luego, existe P tal que $P \in \mathscr{L}_1$ y $P \in \mathscr{L}_2$, por lo tanto

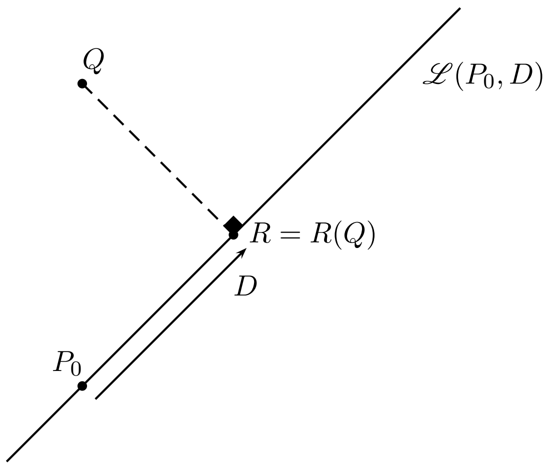
$$P_0 + tD_1 = P = Q_0 + rD_2,$$

lo que implica

$$tD_1 + (-r)D_2 + (P_0 - Q_0) = 0,$$

una contradicción, pues D_1, D_2 y $P_0 - Q_0$ son L.I. por hipótesis. Por lo tanto, $\mathscr{L}_1$ y $\mathscr{L}_2$ son alabeadas. □

Proyección ortogonal de un punto hacia una recta



R es la *proyección ortogonal* del punto Q sobre la recta $\mathscr{L}$, $R = P_0 + tD$. Del gráfico podemos ver

$$\begin{aligned} 0 = \left\langle \overrightarrow{QR}, D \right\rangle &= \langle P_0 + tD - Q, D \rangle \\ &= \langle P_0 - Q, D \rangle + t \langle D, D \rangle, \end{aligned}$$

de donde

$$t = \frac{\langle Q - P_0, D\rangle}{\langle D, D\rangle}.$$

Por lo tanto,

$$R = R(Q) = P_0 + \frac{\langle Q - P, D\rangle}{\langle D, D\rangle} D.$$

Ejemplo 1.58. Sean $Q = (2, 1, 3)$ y $\mathscr{L}(P_0, D)$, con $P_0 = (1, 1, 2)$ y $D = (2, -1, 5)$. Luego,

$$t = \frac{\langle (2,1,3) - (1,1,2), (2,-1,5)\rangle}{\langle D, D\rangle} = \frac{7}{30},$$

y por lo tanto,

$$R = (1, 1, 2) + \left(\frac{7}{15}, \frac{-7}{30}, \frac{7}{6}\right) = \left(\frac{22}{15}, \frac{23}{30}, \frac{19}{6}\right).$$

Notamos que

$$\mathrm{d}(Q, \mathscr{L}) = \mathrm{d}(Q, R).$$

Consideremos

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}^2(Q, R) &= \|Q - R\|^2 = \|Q - P_0 - tD\|^2 = \langle Q - P_0 - tD, Q - P_0 - tD\rangle \\
&= \|Q - P_0\|^2 - 2t\langle Q - P_0, D\rangle + \|tD\|^2 \\
&= \|Q - P_0\|^2 - 2t\frac{\langle Q - P_0, D\rangle^2}{\langle D, D\rangle} + \frac{\langle Q - P_0, D\rangle^2}{\|D\|^4} \cdot \|D\|^2 \\
&= \|Q - P_0\|^2 - 2\frac{\langle Q - P_0, D\rangle^2}{\|D\|^2} + \frac{\langle Q - P_0, D\rangle^2}{\|D\|^2} \\
&= \|Q - P - 0\|^2 - \frac{\langle Q - P_0, D\rangle^2}{\|D\|^2} \\
&= \frac{\|Q - P_0\|^2\|D\|^2 - \langle Q - P_0, D\rangle^2}{\|D\|^2} = \frac{\|(Q - P_0) \times D\|^2}{\|D\|^2}.
\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\mathrm{d}(Q, \mathscr{L}) = \frac{\|(Q - P_0) \times D\|}{\|D\|}.$$

Observación 1.18.

- $\|P \times Q\|^2 + \langle P, Q\rangle^2 = \|P\|^2\|Q\|^2$.
- $\|P \pm Q\|^2 = \|P\|^2 \pm 2\langle P, Q\rangle + \|Q\|^2$.

Ejemplo 1.59. Calcular $\mathrm{d}(Q, \mathscr{L}(P_0, D))$, donde $Q = (2, 1, 3)$, $P_0 = (1, 1, 2)$ y $D = (2, -1, 5)$.

Solución. $Q - P_0 = (1,0,1)$ y

$$(Q-P_0)\times D = \det\begin{pmatrix} i & j & k \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 5 \end{pmatrix} = (1,-3,-1).$$

Por lo tanto,

$$\mathrm{d}(Q, \mathscr{L}(P_0, D)) = \frac{\sqrt{1+9+1}}{\sqrt{4+1+25}} = \frac{\sqrt{11}}{\sqrt{30}}. \qquad \square$$

Ejercicio 5.

1. Dados $\mathscr{L} : (10,7,-9) + t(1,2,-1)$ y $Q = (13,1,0)$, hallar A y B sobre $\mathscr{L}$ tal que el triángulo ABQ sea equilátero.

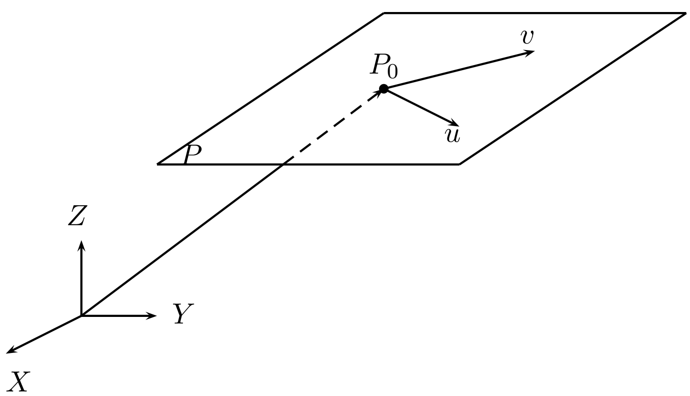
2. Dadas las rectas $\mathscr{L}_1 : (1,0,-1) + t(1,1,2)$, con $t \in \mathbb{R}$, y $\mathscr{L}_2 : (-1,3,4) + s(-2,3,1)$; hallar la ecuación de una recta $\mathscr{L}$ tal que $\mathscr{L} \perp \mathscr{L}_1$ y $\mathscr{L} \perp \mathscr{L}_2$. Además, $\mathscr{L}$ interseca a ambas rectas, determine, así mismo, los puntos de intersección.

1.8 El plano en el espacio

Sean P_0 un punto en $\mathbb{R}^3$ y u, v dos vectores libres L.I., luego, definimos al conjunto

$$P(P_0, u, v) = \{P \in \mathbb{R}^3 / P = P_0 + tu + rv; t, r \in \mathbb{R}\},$$

como el plano que pasa por P_0 generado por los vectores u y v,



Observación 1.19. Dados $n \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ y $\lambda \in \mathbb{R}$, definimos

$$P(n, \lambda) = \{P \in \mathbb{R}^3 / \langle P, n\rangle = \lambda\}.$$

Lema 1.60. *Dado $P(n,\lambda)$, existen P_0, u y v tales que $P(P_0,u,v) = P(n,\lambda)$.*

Demostración. Sea $n = (n_1, n_2, n_3) \neq (0,0,0)$, con $n_1 \neq 0$, y $\lambda \in \mathbb{R}$. Tomemos

$$P_0 = (\lambda/n_1, 0, 0), \quad u = (-n_2, n_1, 0), \quad v = (n_3, 0, -n_1),$$

y recordemos que

$$u \times v = \det \begin{pmatrix} i & j & k \\ -n_2 & n_1 & 0 \\ n_3 & 0 & -n_1 \end{pmatrix} = (-n_1^2, -n_1 n_2, -n_1 n_3) = -n_1(n_1, n_2, n_3) = -n_1 \cdot n.$$

Sea $P \in P(P_0, u, v)$ arbitrario, entonces $P = P_0 + tu + rv$, con $t, r \in \mathbb{R}$. Luego, tomando producto interno con n tenemos,

$$\langle P, n \rangle = \langle P_0, n \rangle + t \langle u, n \rangle + r \langle v, n \rangle = \lambda,$$

lo que implica que $P \in P(n, \lambda)$ y, por lo tanto, $P(P_0, u, v) \subset P(n, \lambda)$.

Por otra parte, sea $P \in P(n, \lambda)$ arbitrario, entonces $\langle P, n \rangle = \lambda$, esto es,

$$p_1 n_1 + p_2 n_2 + p_3 n_3 = \lambda.$$

Seleccionamos los números

$$t = \frac{p_2}{n_1} \text{ y } r = -\frac{p_3}{n_1}.$$

Luego, hacemos

$$\begin{aligned} p_1 &= \frac{\lambda}{n_1} + t(-n_2) + r n_3, \\ p_2 &= 0 + t n_1 + 0, \\ p_3 &= 0 + 0 + r(-n_1), \end{aligned}$$

esto es, $P = P_0 + tu + rv$. Por lo tanto, $P \in P(P_0, u, v)$, lo que implica $P(n, \lambda) \subset P(P_0, u, v)$. De las dos inclusiones se tiene que existen P_0, u y v tales que $P(n, \lambda) = P(P_0, u, v)$. $\square$

Ejemplo 1.61. Sea el conjunto $P(n, \lambda)$, con $n = (3, 0, 1)$ y $\lambda = -10$. Luego, $P(n, \lambda)$ representa al plano $P(P_0, u, v)$, donde

$$\begin{aligned} P_0 &= (-10/3, 0, 0) \\ u &= (0, 3, 0) \\ v &= (1, 0, -3). \end{aligned}$$

Observación 1.20. Si $n_2 \neq 0$, se debe tomar

$$P_0 = (0, \lambda/n_2, 0), \quad u = (-n_2, n_1, 0), \quad v = (0, n_3, -n_2).$$

Ejercicio 6. Si $n_3 \neq 0$, seleccione P_0, u y v.

Lema 1.62. *Dado* $P(P_0, u, v)$*, existen* $n \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ *y* $\lambda \in \mathbb{R}$ *tal que* $P(P_0, u, v) = P(n, \lambda)$*.*

Demostración. Sea P_0, u y v, con u y v L.I. Tomemos

$$n = u \times v \neq (0,0,0) \text{ y } \lambda = \langle P_0, n \rangle .$$

Sea $P \in P(P_0, u, v)$ arbitrario; luego,

$$\langle P, n \rangle = \langle P_0, n \rangle + t \langle u, n \rangle + r \langle v, n \rangle = \lambda,$$

de donde $P \in P(n, \lambda)$, lo que implica que $P(P_0, u, v) \subset P(n, \lambda)$.

Por otra parte, dado $P \in P(n, \lambda)$ arbitrario se tiene

$$\langle P, n \rangle = \lambda = \langle P_0, n \rangle ,$$

de donde

$$\langle P - P_0, n \rangle = \langle P - P_0, u \times v \rangle = [P - P_0, u, v] = 0.$$

Como u y v son L.I., en virtud del Teorema de la Independencia linea, existen únicos $t, r \in \mathbb{R}$ tales que

$$P - P_0 = tu + rv,$$

lo que implica que $P = P_0 + tu + rv$, esto es, $P \in P(P_0, u, v)$. Por lo tanto $P(n, \lambda) \subset P(P_0, u, v)$.

De ambas inclusiones, se conluye que $P(n, \lambda) = P(P_0, u, v)$. $\square$

Ejemplo 1.63. Dado $P(P_0, u, v)$, con
P_0

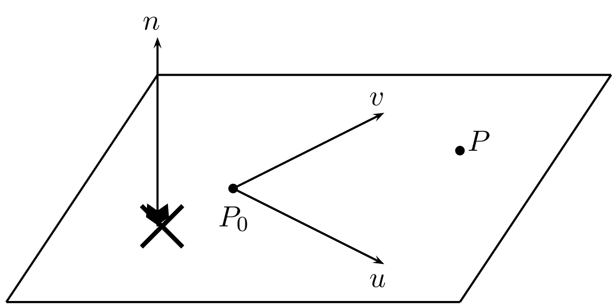
$$P_0 = (2,1,3), \quad u = (1,1,6), \quad v = (3,0,2),$$

basta tomar

$$n = u \times v = (2, 16, -3), \quad \lambda = \langle P_0, n \rangle = 11,$$

de manera que

$$\{P \in \mathbb{R}^3 / P = P_0 + tu + rv; t, r \in \mathbb{R}\} = \{P \in \mathbb{R}^3 / \langle P, n \rangle = \lambda\}$$

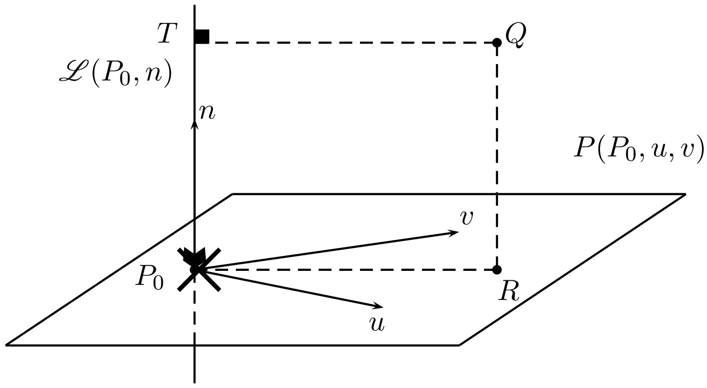


Sean $P_1 = P_1(n_1, \lambda)$ y $P_2 = P_2(n_2, \lambda_2)$. Se dice que $P_1 \,/\!/\, P_2$ si, y sólo si,

- $P_1 \cap P_2 \neq \emptyset$. $\qquad P_0$
- $n_1 \,/\!/\, n_2$.

Ejercicio 7. Sean los planos $P_1 = P_1(n_1, \lambda_1)$ y $P_2 = P_2(n_2, \lambda_2)$. Luego, $P_1 = P_2$ si, y sólo si, $n_1 \,/\!/\, n_2$ y $P_1 \cap P_2 \neq \emptyset$.

Distancia de un punto al plano



La distancia del punto Q al plano $P(P_0, u, v)$ es

$$\mathrm{d}(Q, P(P_0, u, v)) = \mathrm{d}(Q, R) = \|\overrightarrow{QR}\| = \|\overrightarrow{TP_0}\|.$$

Notemos que $\overrightarrow{P_0T} = \mathrm{Proy}_{\mathscr{L}}\, Q$, de donde

$$T = P_0 + \frac{\langle Q - P_0, n\rangle}{\langle n, n\rangle} n.$$

Luego,

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}(Q, P(P_0, u, v)) = \|T - p_0\| &= \left\| \frac{\langle Q - P_0, n\rangle}{\langle n, n\rangle} n \right\| \\
&= \left| \frac{\langle Q - P_0, n\rangle}{\|n\|^2} \right| \|n\| = \frac{|\langle Q - P_0, n\rangle|}{\|n\|} \\
&= \frac{|[Q - P_0, u, v]|}{\|u \times v\|}.
\end{aligned}$$

Capítulo 2

Cónicas

2.1 Relaciones de Equivalencia

Dado el conjunto $A \neq \emptyset$, se define

$$\mathscr{R} \subset A \times A$$

como una relación sobre A.

Ejemplo 2.1. Sobre $A = \{2, 3, 5, 7, 9, 10\}$ podemos definimos relaciones

$$\begin{aligned}
&\mathscr{R}_1 = \emptyset. \\
&\mathscr{R}_2 = \{(2,2), (3,3), (5,5), (7,7), (9,9), (10,10)\}. \\
&\mathscr{R}_3 = \{(2,2), (3,3), (2,3)\} \\
&\mathscr{R}_4 = \{(3,5), (5,3), (3,3)\} \\
&\mathscr{R}_5 = A \times A
\end{aligned}$$

Tipos especiales de relación Sea $\mathscr{R}$ una relación sobre A, luego, se dice que

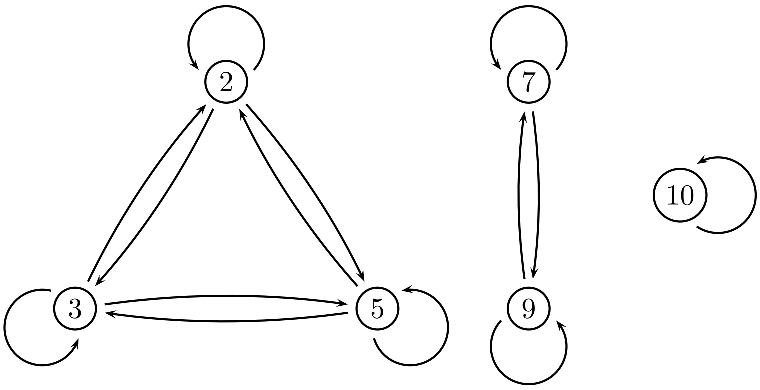
- $\mathscr{R}$ es *reflexiva* si para todo $x \in A$ se tiene $(x, x) \in \mathscr{R}$. Son reflexivas $\mathscr{R}_2$, $\mathscr{R}_5$ y $\mathscr{R}_1$.
- $\mathscr{R}$ es *simétrica* si $(x, y) \in \mathscr{R}$ implica que $(y, x) \in \mathscr{R}$. Son simétricas $\mathscr{R}_1$, $\mathscr{R}_2$, $\mathscr{R}_4$ y $\mathscr{R}_5$.
- $\mathscr{R}$ es *transitiva* si $(x, y), (y, z) \in \mathscr{R}$ implican que $(x, z) \in \mathscr{R}$. Son transitivas $\mathscr{R}_1$, $\mathscr{R}_2$ y $\mathscr{R}_3$.

Observación 2.1. En $\mathscr{R}_4$ se tiene $(5,3), (3,5) \in \mathscr{R}_4$ pero $(5,5) \notin \mathscr{R}_4$. Por lo tanto $\mathscr{R}_4$ no es transitiva.

Definición 2.2. Se dice que $\mathscr{R}$ es una relación de *equivalencia* si es simultáneamente reflexiva, simétrica y transitiva.

Ejemplo 2.3. Son relaciones de equivalencia $\mathscr{R}_1$, $\mathscr{R}_2$ y $\mathscr{R}_5$.

Gráficamente podemos expresar que $(a, b) \in \mathscr{R}$ equivale a $\text{a} \longrightarrow \text{b}$. Así, podemos considerar



de donde tenemos que

$$\begin{aligned}\mathscr{R} = \{&(2,2),(3,3),(5,5),(7,7),(9,9),(10,10),\\ &(2,3),(3,2),(3,5),(5,3),(2,5),(5,2),(7,9),(9,7)\}\end{aligned}$$

es una relación de equivalencia.

Definición 2.4. Si $\mathscr{R}$ es una relación de equivalencia sobre $A \neq \emptyset$, para cada $x \in A$ definimos el conjunto

$$[x] = \{a \in A/(a, x) \in \mathscr{R}\}$$

como la *clase de equivalencia* del elemento x.

Observación 2.2. Este conjunto agrupa a todos los elementos de A que están relacionados con x.

Ejemplo 2.5. Respecto a la relación de equivalencia anterior se tiene

- $[2] = \{2, 3, 5\} = [3] = [5]$.
- $[7] = \{7, 9\} = [9]$.
- $[10] = \{10\}$.

Definición 2.6. Sea $\mathscr{R}$ una relación de equivalencia sobre $A \neq \emptyset$. Luego se define el *conjunto cociente* de A por $\mathscr{R}$ al conjunto

$$\frac{A}{\mathscr{R}} = \{[x]/x \in A\}.$$

Observación 2.3. El conjunto $\frac{A}{\mathscr{R}}$ es una partición de A mediante $\mathscr{R}$.

Ejemplo 2.7. Sea $A = \{2, 3, 5, 7, 9, 10\}$ y $\mathscr{R}$ la relación de equivalencia anterior. Luego,

$$\begin{aligned}\frac{A}{\mathscr{R}} &= \{[2], [3], [5], [7], [9], [10]\} \\ &= \{[2], [7], [10]\} = \big\{\{2, 3, 5\}, \{7, 9\}, \{10\}\big\}\end{aligned}$$

Ejemplo 2.8. Sea $A = \mathbb{Z}$ y $\mathscr{R}$ la relación sobre A tal que $(a, b) \in \mathscr{R}$ si, y sólo si, $a - b = \mathring{3}$. Veamos si $\mathscr{R}$ es una relación de equivalencia,

- Para todo $x \in \mathbb{Z}$ se tiene $x - x = 0 = \mathring{3}$, entonces $(x, x) \in \mathscr{R}$ y, por lo tanto, $\mathscr{R}$ es reflexiva.
- Si $(x, y)\mathscr{R}$, entonces $x - y = \mathring{3}$, de donde $y - x = \mathring{3}$. Esto implica que $(y, x) \in \mathscr{R}$ y, por lo tanto $\mathscr{R}$ es simétrica.
- Si $(x, y), (y, z) \in \mathscr{R}$, entonces

  $$\begin{aligned} x - y &= \mathring{3}, \\ y - z &= \mathring{3}. \end{aligned}$$

  Sumando ambas ecuaciones tenemos $x - z = \mathring{3}$, de donde $(x, z) \in \mathscr{R}$. Por lo tanto, $\mathscr{R}$ es transitiva.

De lo anterior concluimos que $\mathscr{R}$ es una relación de equivalencia. Ahora calculemos la clases de equivalencia:

- $$\begin{aligned}[1] &= \{a \in \mathbb{Z}/a - 1 = \mathring{3}\} = \text{enteros } \mathring{3} + 1 \\ &= \{\dots, -5, -2, 1, 4, 7, \dots\} = [4], [7], \dots\end{aligned}$$
- $[2] = \{a \in \mathbb{Z}/a - 2 = \mathring{3}\} = \{\dots, -1, 2, 5, 8, \dots\}$.
- $[3] = \{a \in \mathbb{Z}/a - 3 = \mathring{3}\} = \{\dots, -3, 0, 3, 6, \dots\}$.

Luego,

$$\frac{\mathbb{Z}}{\mathscr{R}} = \{[1], [2], [3]\},$$

es decir, $\mathbb{Z}$ es particionado en tres conjuntos disjuntos $\mathring{3}$, $\mathring{3} + 1$ y $\mathring{3} + 2$.

Ejemplo 2.9. Sea $A = \mathbb{R}^2$, $P_0 = (5, 2)$, $D = (2, 3)$ y $\mathscr{L}(P_0, D)$. Además, consideremos $\mathscr{R}$, la relación sobre A, tal que $(P, Q) \in \mathscr{R}$ si, y sólo si, $(P - Q) \,/\!/\, D$, esto es,

$$\mathscr{R} = \Big\{\big((1, 1), (5, 7)\big), \big((1, 2), (3, 5)\big), \dots\Big\}.$$

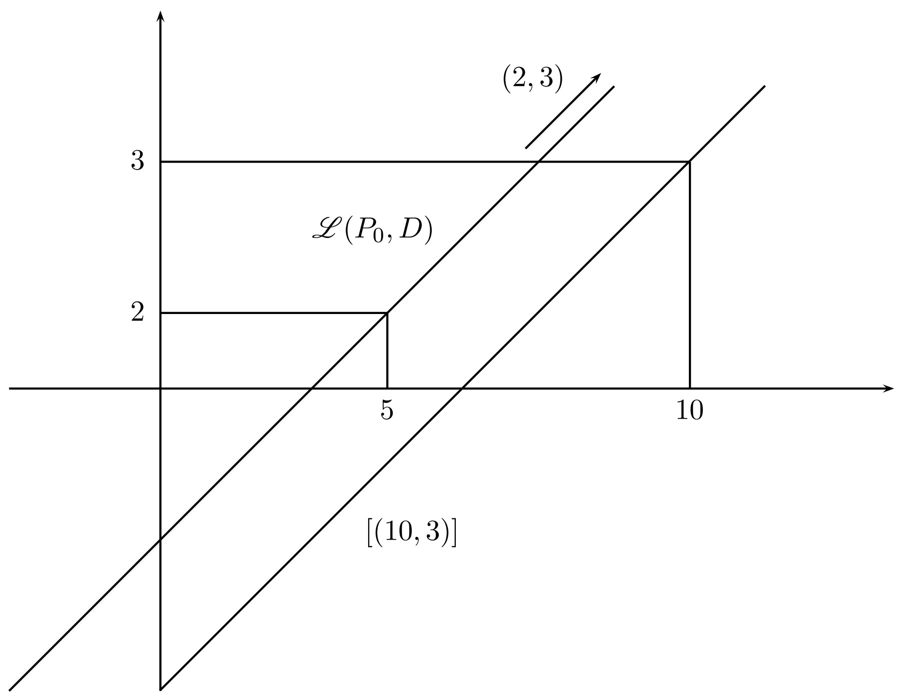
Veamos si $\mathscr{R}$ es una relación de equivalencia,

- Para todo $P \in \mathbb{R}^2$, se tiene $P - P = 0 \,//\, D$; luego, $(P, P) \in \mathscr{R}$.
- Si $(P, Q) \in \mathscr{R}$, entonces $P - Q \,//\, D$, de donde $Q - P \,//\, D$. Por lo tanto, $(Q, P) \in \mathscr{R}$.
- Si $(P, Q), (Q, R) \in \mathscr{R}$, entonces $P - Q = \alpha D$ y $Q - R = \beta D$. Sumando ambas ecuaciones se tiene
$$P - R = (\alpha + \beta)D,$$
es decir, $P - R \,//\, D$. Por lo tanto, $(P, R) \in \mathscr{R}$.

Así, $\mathscr{R}$ es una relación de equivalencia.

Sea $x = (10, 3)$, luego,

$$\begin{aligned}[(10,3)] &= \{P \in \mathbb{R}^2 / P - (10,3) \,//\, D\}\\ &= \{P \in \mathbb{R}^2 / P - (10,3) = \lambda D\}\\ &= \{P \in \mathbb{R}^2 / P = (10,3) + \lambda D\}\end{aligned}$$



Proposición 2.10. *Sea $\mathscr{R}$ una relación de equivalencia sobre $A \neq \emptyset$. Luego,*

i) $x \in [x]$.

ii) $[x] = [y]$ *si, y sólo si,* $(x, y) \in \mathscr{R}$.

iii) $[x] \neq [y]$ *si, y sólo si,* $[x] \cap [y] = \emptyset$.

Demostración.

i) Como $\mathscr{R}$ es de equivalencia, entonces $\mathscr{R}$ es reflexiva; así, para todo $x \in A$ se tiene $(x,x) \in \mathscr{R}$. Por lo tanto, $x \in [x] = \{y/(y,x) \in \mathscr{R}\}$.

ii) Sea $[x] = [y]$; luego, $x \in [y]$, esto es $(x,y) \in \mathscr{R}$. Recíprocamente, sea $(x,y) \in \mathscr{R}$; luego para $z \in [x]$ arbitrario se tiene que $(z,x) \in \mathscr{R}$, y en virtud de la transitividad de $\mathscr{R}$, $(z,y) \in \mathscr{R}$, es decir $z \in [y]$. Por lo tanto, $[x] \subset [y]$. Similarmente se tiene $[y] \subset [x]$. Ambas inclusiones implican que $[x] = [y]$.

iii) Supongamos que $[x] \neq [y]$. Si existiera algún elemento $z \in [x] \cap [y]$ tendríamos $(z,x),(z,y) \in \mathscr{R}$ y, en virtud de la simetría, se seguiría que $(x,z),(z,y) \in \mathscr{R}$. Luego, debido a la transitividad tendríamos que $(x,y) \in \mathscr{R}$, pero esto implica que $[x] = [y]$, en virtud del inciso anterior contradiciendo la hipótesis inicial. Por lo tanto, $[x] \cap [y] = \emptyset$.

   Ahora, supongamos que $[x] \cap [y] = \emptyset$. Si $[x] = [y]$, entonces $(x,y) \in \mathscr{R}$, de donde $x \in [y]$ e $y \in [x]$, lo que implica que $[x] \cap [y] \neq \emptyset$ contradiciendo la hipótesis. Por lo tanto $[x] \neq [y]$. □

2.2 Coordenadas homogéneas

En esta parte, consideramos que todo par de rectas en $\mathbb{R}^2$ tiene un punto de intesección. Para esto consideramos dos tipos de puntos,

- Punto finito o propio: Aquel cuyas componentes son finitas. Por ejemplo $(3,2)$, $(10^{100},4)$.
- Punto infinito o impropio: Aquel donde alguna componente es $+\infty$ ó $-\infty$. Por ejemplo $(-\infty,5)$, $(0,\infty)$.

Definición 2.11. A cada punto $P = (x,y) \in \mathbb{R}^2$ le asociamos la terna ordenada (x_1,x_2,x_3), a la cual denominamos *coordenadas homogéneas* de P, en donde

$$x = \frac{x_1}{x_3}, \qquad y = \frac{x_2}{x_3}.$$

Ejemplo 2.12. Para $P = (2,3)$ se tiene infinitas coordenadas homogéneas, a saber,

$$(4,6,2),(-6,-9,-3),\ldots,(2,3,1),\ldots$$

Observación 2.4. Dado $P = (a,b) \in \mathbb{R}^2$, sus coordenadas homogéneas están dadas por $k(a,b,1)$, para todo $k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Es decir, cada punto tiene infinitas coordenadas homogéneas.

Ejemplo 2.13. ¿Cuál es la coordenadas cartesiana de $(8,3,2)$? De acuerdo a la definición se tiene

$$x = \frac{8}{2} = 4, \qquad y = \frac{3}{2},$$

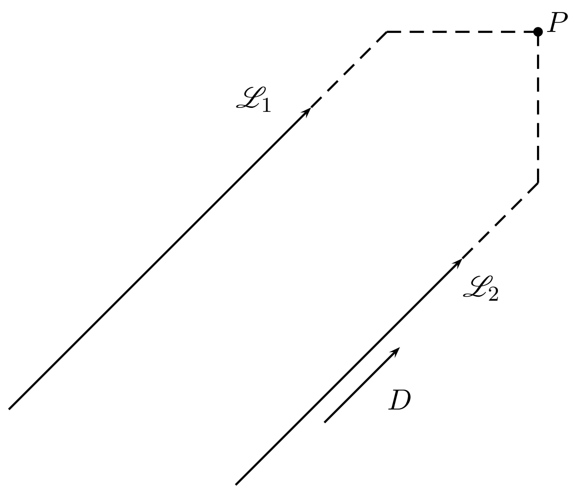
de donde la coordenada cartesiana de $(8,3,2)$ es $(4, 3/2)$.

Ejemplo 2.14. Hallar la coordenada cartesiana de $(5,-3,0)$. Debemos tener en cuenta, en virtud de la definición, que

$$x=\frac{5}{0}=+\infty, \qquad y=\frac{-3}{0}=-\infty.$$

Entonces, $P=(+\infty,-\infty)$.

Observación 2.5. Sean $\mathscr{L}_1=\mathscr{L}_1(a,b,c)$ y $\mathscr{L}_2=\mathscr{L}_2(a,b,\widehat{c})$ dos rectas paralelas. Luego, $\mathscr{L}_1$ y $\mathscr{L}_2$ se intersecan en $P=(a,b,0)$, el cual es un punto impropio o infinito.



Observación 2.6. Dos rectas no paralelas se intersecan en un punto *propio* y dos rectas paralelas se cortan en un punto *impropio*. Si estas rectas tienen como dirección (m,n), entonces se intersecan en $(m,n,0)$.

Ecuación de la recta en coordenadas homogéneas Sea $\mathscr{L}(a,b,c)$ la ecuación de una recta, es decir, $ax+by+c=0$. Considerando

$$x=\frac{x_1}{x_3}, \qquad y=\frac{x_2}{x_3},$$

tenemos

$$a\frac{x_1}{x_3}+b\frac{x_2}{x_3}+c=0,$$

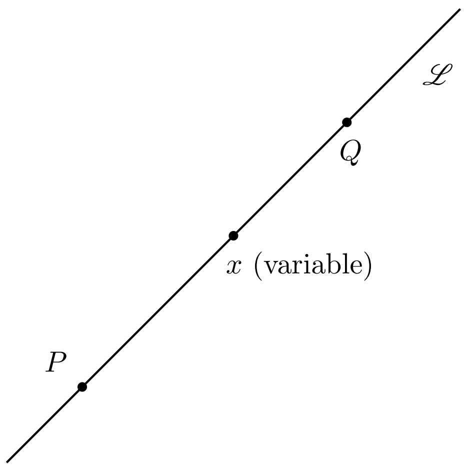
lo que implica

$$ax_1+bx_2+cx_3=0.$$

Es decir,

$$\begin{aligned}\mathscr{L}(a,b,c)&=\{(x,y)/ax+by+c=0\}\\&=\{(x_1,x_2,x_3)/ax_1+bx_2+cx_3=0\}.\end{aligned}$$

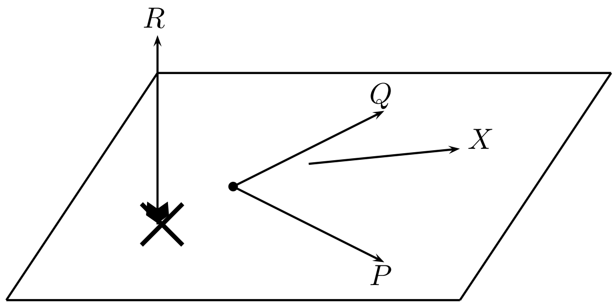
Sean P y Q en $\mathscr{L}$ tales que $P\neq Q$, donde $P=(p_1,p_2,p_3)$ y $Q=(q_1,q_2,q_3)$. Además, consideremos $x=(x_1,x_2,x_3)$ un punto arbitrario de $\mathscr{L}$, y $R=(a,b,c)$.



Como $P, Q \in \mathscr{L}$, entonces $P, Q \perp R$, lo cual implica que

$$ap_1 + bp_2 + cp_3 = 0,$$
$$aq_1 + bq_2 + cq_3 = 0.$$

Desde que $P \neq Q$ se tiene que P y Q no son paralelos. Luego, para cada $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathscr{L}$ se tiene $ax_1 + bx_2 + cx_3 = 0$



Luego, $x = \lambda P + \mu Q$, con $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Por lo tanto,

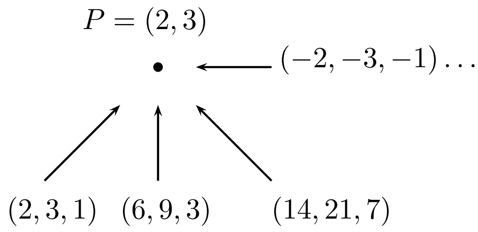
$$\mathscr{L} = \{x = (x_1, x_2, x_3)/x = \lambda P + \mu Q; \lambda, \mu \in \mathbb{R}\},$$

donde

$$x_1 = \lambda p_1 + \mu q_1$$
$$x_2 = \lambda p_2 + muq_2$$
$$x_3 = \lambda p_3 + \mu q_3$$

Ejemplo 2.15. Sea $x = (x_1, x_2, x_3) = (3\lambda + 4\mu, \lambda - \mu, 3\mu)$, entonces $P = (3, 1, 0)$ y $Q = (4, -1, 3)$.

Observación 2.7. Sea $P = (2, 3) \in \mathbb{R}^2$, luego



de donde

$$P = (2, 3, 1) \equiv (6, 9, 3) \equiv (14, 21, 7) \equiv (-2, -3, -1) \equiv (2k, 3k, k),$$

para todo $k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Sea

$$\begin{aligned}\mathscr{L}(a, b, c) &= \{(x, y)/ax + by + c = 0\} \\ &= \{(x_1, x_2, x_3)/ax_1 + bx_2 + cx_3 = 0\}.\end{aligned}$$

Si $P = (p_1, p_2, p_3)$ y $Q = (q_1, q_2, q_3)$ están en $\mathscr{L}$, tales que $P \neq Q$, entonces,

$$\mathscr{L}(a, b, c) = \{X = (x_1, x_2, x_3)/x + \lambda P + \mu Q; \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}.$$

Así, se tiene la ecuación paramétrica

$$\begin{aligned}x_1 &= \lambda p_1 + \mu q_1 \\ x_2 &= \lambda p_2 + \mu q_2 \\ x_3 &= \lambda p_3 + \mu q_3\end{aligned}$$

Ejemplo 2.16. Sean $\mathscr{L} : 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 0$, $P = (1, 1, 5)$ y $Q = (-3, 2, 0)$ en $\mathscr{L}$. Luego,

$$\begin{aligned}x_1 &= \lambda - 3\mu \\ x_2 &= \lambda + 2\mu \\ x_3 &= 5\lambda\end{aligned}$$

Ejemplo 2.17. Sea $\mathscr{L}$ representada por las ecuación paramétrica

$$\begin{aligned}x_1 &= 2\lambda - \mu \\ x_2 &= \lambda + \mu \\ x_3 &= 5\mu,\end{aligned}$$

de donde, $x_1 - 2x_2 = -3\mu$ y $x_3 = 5\mu$. Esto ocurre si, y sólo si, $x_1 - 2x_2 = -3({x_3}/{5})$, esto es,

$$5x_1 - 10x_2 + 3x_3 = 0.$$

Definición 2.18. Se define la *recta del infinito en el plano* como el conjunto

$$\mathscr{L}_\infty = \{(x_1, x_2, x_3)/x_3 = 0\} \setminus (0, 0, 0).$$

Definición 2.19. Se define el *plano ampliado* como $\overline{\mathbb{R}}^2 = \mathbb{R}^2 \cup (\mathscr{L}_\infty)$.

Definición 2.20. Sea $A = (a_{ij})$ una matriz de orden 3×3. Se define la *matriz transpuesta* de A como

$$A^T = (a_{ji}).$$

Definición 2.21. Se dice que una matriz A es simétrica si, y sólo si $A = A^T$.

Definición 2.22. Sea A^i_j la subamtriz obtenida al eliminar la fila i y la columna j de la matriz A. Luego, se define

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} \times \det A^i_j.$$

Ejemplo 2.23.

$$A_{23} = (-1)^{2+3} \times \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix}.$$

2.3 Cónicas

Definición 2.24. Sobre $\overline{\mathbb{R}}^2$ sean $F = (\alpha, \beta)$, un punto fijo, $\mathscr{L} : ax + by + c = 0$, una recta fija, y $e \geq 0$, una constante. Definimos el lugar geométrico

$$\mathscr{C} = \left\{ P = (x, y)/\frac{\mathrm{d}(P, F)}{\mathrm{d}(P, \mathscr{L})} = e \right\},$$

como una *cónica*.

Desarrollando la ecuación $\mathrm{d}^2(P, F) = e^2\, \mathrm{d}^2(P, \mathscr{L})$, es decir,

$$(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = e^2 \frac{(ax + by + c)^2}{a^2 + b^2},$$

obtenemos

$$Mx^2 + 2Nxy + Py^2 + 2Qx + 2Py + T = 0,$$

donde M, N, P, Q, R y T son constantes que dependen de a, b, c, e, α y β.

Considerando

$$x = \frac{x_1}{x_3} \text{ e } y = \frac{x_2}{x_3},$$

se tiene

$$Mx_1^2 + 2Nx_1x_2 + Px_2^2 + 2Qx_1x_3 + 2Rx_2x_3 + Tx_3^2 = 0,$$

que es llamada *ecuación general de la cónica en coordenadas homogéneas.*

Observación 2.8. Sea

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}$$

una matriz simétrica y $x = (x_1, x_2, x_3)$ un punto genérico. Luego

$$\begin{aligned} xAx^T &= (x_1, x_2, x_3) \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \\ &= a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2 + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + 2a_{23}x_2x_3. \end{aligned}$$

Es decir, si hacemos $M = a_{11}$, $N = a_{22}$, $T = a_{33}$, $N = a_{12}$, $Q = a_{13}$ y $R = a_{23}$, se tiene

$$\begin{aligned} \mathscr{C} &= \{(x, y)/Mx^2 + 2Nxy + Py^2 + 2Qx + 2Ry + T = 0\} \\ &= \{x = (x_1, x_2, x_3)/a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2 + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + 2a_{23}x_2x_3 = 0\} \\ &= \{x = (x_1, x_2, x_3)/xAx^T = 0\} \end{aligned}$$

Ejemplo 2.25. Hallar la matriz de la cónica $\mathscr{C}$ cuya ecuación general es

$$2x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 + 6x_1x_2 + 7x_1x_3 + 8x_2x_3 = 0.$$

En virtud de la observación anterior, vemos que

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 7/2 \\ 3 & 1 & 4 \\ 7/2 & 4 & -1 \end{pmatrix}.$$

Luego, $\mathscr{C} : xAx^T = 0$.

Ejemplo 2.26. Dado

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 10 \\ 4 & 1 & -3 \\ 10 & -3 & 5 \end{pmatrix},$$

hallar la ecuación general de $\mathscr{C}$.

De acuerdo a la observación anterior tenemos que la ecuación general de $\mathscr{C}$ es

$$2x_1^2 + x_2^2 + 5x_3^2 + 8x_1x_2 + 20x_1x_3 - 6x_2x_3 = 0$$

En virtud de la Observación 2.8, podemos decir que

$$\mathscr{C} = \{x = (x_1, x_2, x_3)/xAx^T = 0; A = A^T\}$$

es una cónica, cuya matriz de representación es la matriz simétrica A.

Definición 2.27. Sean $\mathscr{C} : xAx^T = 0$, una cónica, y $P = (p_1, p_2, p_3)$, un punto. Luego, definimos al conjunto

$$\mathrm{polar}(P) = \{x = (x_1, x_2, x_3)/PAx^T = 0\},$$

como el *polar* del punto P respecto a la cónica $\mathscr{C}$.

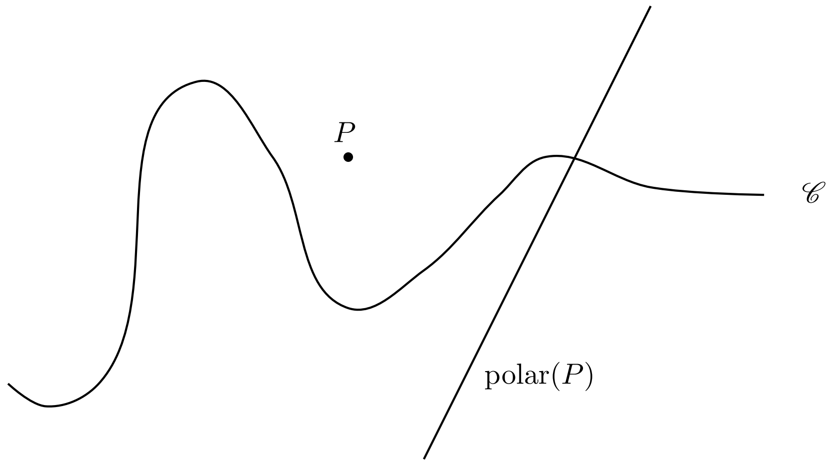
Observación 2.9. Considerando que

$$PA = (p_1, p_2, p_3)\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix} = (a, b, c),$$

se tiene qe la ecuación $PAx^T = 0$ es equivalente a

$$ax_1 + bx_2 + cx_3 = 0,$$

la cual representa a una recta. Geométricamente se tiene



Definición 2.28. Dados una cónica $\mathscr{C} : xAx^T = 0$ y una recta $\mathscr{L} : ax_1 + bx_2 + cx_3 = 0$, existe un punto $P = (p_1, p_2, p_3)$ tal que

$$\mathrm{polar}(P) = \mathscr{L}.$$

A este punto se le conoce como *polo* de la recta $\mathscr{L}$ y se le denota por polo($\mathscr{L}$).

Ejemplo 2.29. Con respecto a $\mathscr{C} : xAx^T = 0$, con

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 4 \\ 2 & 4 & 1 \end{pmatrix},$$

a) Calcular el polar de $P = (3, 1, 2)$. Veamos,

$$PA = (3, 1, 2) \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 4 \\ 2 & 4 & 1 \end{pmatrix} = (11, 11, 12).$$

Luego.

$$\mathrm{polar}(P) = \{(x_1, x_2, x_3)/11x_1 + 11x_2 + 12x_3 = 0\}.$$

b) Sea $P = (p_1, p_2, p_3)$ un punto tal que $\mathrm{polar}(P) = \mathscr{L} : x_1 + x_2 + 2x_3 = 0$, esto es,

$$(p_1, p_2, p_3) \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 4 \\ 2 & 4 & 1 \end{pmatrix} = (1, 1, -2).$$

Tomando transpuesta término a término se tiene

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 4 \\ 2 & 4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix},$$

lo que se puede escribir como un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas,

$$\begin{aligned} 2p_1 + p_2 + 2p_3 &= 1, \\ p_1 + 0 + 4p_3 &= 1, \\ 2p_1 + 4p_2 + p_3 &= -2, \end{aligned}$$

el cual tiene por solución $P = (p_1, p_2, p_3) = (1, -1, 0)$, que es el polo de $\mathscr{L}$.

Proposición 2.30. *Dados $\mathscr{C} : xAx^T = 0$ una cónica y P un punto. Luego, $P \in \mathrm{polar}(Q)$, para todo $Q \in \mathrm{polar}(P)$*

Demostración. Sean $\mathrm{polar}(P) = \{x/PAx^T = 0\}$, $\mathrm{polar}(Q) = \{x/QAx^T = 0\}$ y $Q = (q_1, q_2, q_3) \in \mathrm{polar}(P)$. Luego, $PAQ^T = 0$, y tomando transpuesta tenemos $QAP^T = 0$, de donde, $P \in \mathrm{polar}(Q)$. $\square$

Intersección entre una recta y una cónica Sean $\mathscr{C} : xAx^T = 0$, una cónica, y $\mathscr{L} : x = \lambda P + \mu Q$, la recta que pasa por los puntos P y Q. Hallemos $\mathscr{L} \cap \mathscr{C}$ reemplazando la ecuación de $\mathscr{L}$ en la de $\mathscr{C}$, esto es,

$$\begin{aligned} 0 &= (\lambda P + \mu Q)A(\lambda P + \mu Q)^T = (\lambda P + \mu Q)\big[A(\lambda P^T + \mu Q^T)\big] \\ &= (\lambda P + \mu Q)(\lambda AP^T + \mu AQ^T) = \lambda^2 PAP^T + \lambda\mu PAQ^T + \mu\lambda QAP^T + \mu^2 QAQ^T. \end{aligned}$$

Desde que PAQ^T y QAP^T están en $\mathbb{R}$ se tiene

$$QAP^T = (QAP^T)^T = PAQ^T,$$

luego,

$$PAP^2\lambda + 2\mu PAQ^T\lambda + \mu^2 QAQ^T = 0,$$

y haciendo $a = PAP^T$, $b = PAQ^T$ y $c = QAQ^T$, tenemos la *ecuación característica*

$$a\lambda^2 + 2mub\lambda + \mu^2 c = 0,$$

cuyas soluciones, con variable λ, son

$$\lambda = -2\mu b \pm \frac{\sqrt{4\mu^2b^2 - 4\mu^2ac}}{2a}.$$

Ejemplo 2.31. Hallar la intersección entre $\mathscr{C} : x_1^2 + x_2^2 - 25x_3^2 = 0$ y $\mathscr{L} : x = \lambda P + \mu Q$, con $P = (0,0)$ y $Q = (8,6)$.

La matriz de la cónica es

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -25 \end{pmatrix}$$

y las coordenadas homogéneas de los puntos P y Q son

$$P = (0,0,1) \text{ y } Q = (8,6,1).$$

Luego,

$$PA = (0,0,1)\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -25 \end{pmatrix} = (0,0,-25)$$

y

$$QA = (8,6,1)\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -25 \end{pmatrix} = (8,6,-25).$$

Así,

$$a = PAP^T = (0,0,-25)\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = -25$$

$$b = PAQ^T = (0,0,-25)\begin{pmatrix} 8 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix} = -25$$

$$c = QAQ^T = (8,6,-25)\begin{pmatrix} 8 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix} = 75.$$

Luego, la ecuación característica (simplificando coeficientes) es

$$\lambda^2 + (2\mu)\lambda - 3\mu^2 = 0,$$

que tiene por soluciones

$$\lambda = -3\mu \text{ y } \lambda = \mu.$$

Por lo tanto, se tienen dos puntos de intersección:

1. $x = \lambda P + \mu Q = \mu P + \mu Q = \mu(P + Q) \equiv P + Q = (8, 6, 2) \equiv (4, 3)$.
2. $x = \lambda P + \mu Q = -3\mu P + \mu Q \equiv Q - 3P = (8, 6, -2) \equiv (-4, -3)$.

Definición 2.32. Sea A una matriz de 3×3. Definimos el *rango* de A como la cantidad de filas L.I. (considerando a las filas como elementos de $\mathbb{R}^3$). Se denota por $\operatorname{ran}(A)$

Observación 2.10. $\operatorname{ran}(A)$ puede ser 1, 2 ó 3.

Ejemplo 2.33.

i) Sean $P = (2, 1, 0)$, $Q = (0, 1, 2)$ y $R = (0, 0, 1)$ las filas de una matriz A, visto como elementos de $\mathbb{R}^3$. Luego,

$$[P, Q, R] = \det A = 2 \neq 0,$$

de donde P, Q y R son L.I., es decir $\operatorname{ran}(A)$.

ii) Sean $P = (2, 1, 4)$, $Q = (1, 2, 1)$ y $R = (1, -1, 0)$ las filas de una matriz A, como en el caso anterior. Luego

$$[P, Q, R] = \det A = 0,$$

es decir, $\operatorname{ran}(A) \neq 3$. Se puede observar que $Q = P - R$, es decir, $0 = P - R - Q$. Por lo tanto, $\{P, Q, R\}$ son L.D. Como hay dos filas L.I., entonces $\operatorname{ran}(A) = 2$.

iii) Consideremos a los vectores, de $\mathbb{R}^3$, $P = (1, -3, 2)$, $Q = (5, -15, 10)$ y $R = (-6, 18, -12)$ como filas de una matriz A. Vemos que

$$[P, Q, R] = \det A = 0,$$

por lo tanto $\operatorname{ran}(A) \neq 3$. Podemos notar que una sola fila es L.I., es decir, $\operatorname{ran}(A) = 1$

Observación 2.11. Se tiene la siguiente *regla práctica para determinar el rango de una matriz* 3×3: con operaciones elementales (OE) sobre las filas de una matriz

- Multiplicar una fila por una constante no nula.
- Intercambiar dos filas.

- Sumar a una fila un múltiplo de otro.

Teorema 2.34. *Si B es resultado de aplicar una cantidad finita de OE a las filas de A, entonces*

$$\mathrm{ran}(A) = \mathrm{ran}(B).$$

A la matriz B se le denomina *matriz escalonada* y tiene alguna de las formas siguientes:

- Matriz escalonada de rango 3,

$$\begin{pmatrix} 1 & * & * \\ 0 & 1 & * \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

- Matriz escalonada de rango 2,

$$\begin{pmatrix} 1 & * & * \\ 0 & 1 & * \\ 0 & 0 & \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & * & * \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & * \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

- Matriz escalonada de rango 1,

$$\begin{pmatrix} 1 & * & * \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & * \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ejemplo 2.35. Sea la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -11 \\ -2 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & -3 \end{pmatrix},$$

y calculemos su matriz escalonada correspondiente:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -11 \\ -2 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow{f_1 \times f_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ -2 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & -11 \end{pmatrix} \xrightarrow[f_3 - 2f_1]{f_2 + 2f_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 3 & -5 \\ 0 & 3 & -5 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{f_3 - f_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 3 & -5 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{1/3 f_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -5/3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = B,$$

de donde $\mathrm{ran}(A) = \mathrm{ran}(B) = 2$.

2.4 Puntos singulares de una cónica

Sea $\mathscr{C}$ una cónica, con ecuación

$$(x_1, x_2, x_3)\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0.$$

Asociamos a la cónica $\mathscr{C}$ el sistema de ecuaciones

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Definición 2.36. Cualquier solución $(x_1, x_2, x_3) \neq (0, 0, 0)$ del sistema asociado a la matriz de la cónica $\mathscr{C}$, se denomina *punto singular* de $\mathscr{C}$.

Proposición 2.37. *Si un punto $x = (x_1, x_2, x_3)$ es un punto singular de $\mathscr{C}$, entonces $x \in \mathscr{C}$.*

Teorema 2.38. *El sistema asociado a $\mathscr{C}$ tiene solución no nula si, y sólo si,* $\det A = 0$.

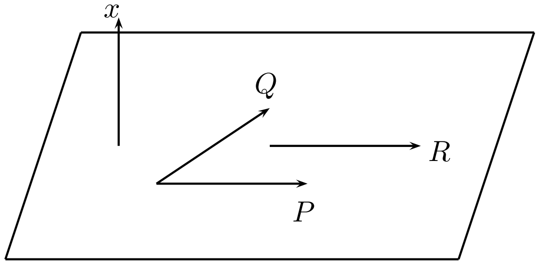
Demostración. Sean $P = (a_{11}, a_{12}, a_{13})$, $Q = (a_{12}, a_{22}, a_{23})$ y $R = (a_{13}, a_{23}, a_{33})$ las filas de la matriz A. Asumamos que el sistema asociado a $\mathscr{C}$ tiene solución no nula, es decir, existe $x = (x_1, x_2, x_3) \neq (0, 0, 0)$ tal que

$$Ax = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Esto implica que

$$\langle P, x\rangle = \langle Q, x\rangle = \langle R, x\rangle = 0,$$

así, los vectores P, Q y R son perpendiculares a x,



de donde, $[P, Q, R] = \det A = 0$.

Recíprocamente, supongamos que $\det A = 0$, luego, $\operatorname{ran}(A) = 2$ ó $\operatorname{ran}(A) = 1$. Si $\operatorname{ran}(A) = 2$, entonces A tiene dos filas L.I., digamos P y Q. Por lo tanto $R = \alpha P + \beta Q$, con $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Sea $x = P \times Q \neq (0,0,0)$, con
$$\langle P, x\rangle = \langle Q, x\rangle = \langle R, x\rangle = 0,$$
esto es,
$$Ax = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$
Así, $x \neq (0,0,0)$ resuelve el sistema asociado a $\mathscr{C}$.

Por otra parte, si $\operatorname{ran}(A) = 1$, entonces A sólo tiene una fila L.I., digamos $P = (a_{11}, a_{12}, a_{13}) \neq (0,0,0)$. Considerando $a_{12} \neq 0$, sea $x = (-a_{12}, a_{11}, 0) \neq (0,0,0)$, donde
$$\langle P, x\rangle = \langle Q, x\rangle = \langle R, x\rangle = 0,$$
y como en el párrafo anterior,
$$Ax = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$
de donde $x \neq (0,0,0)$ resuelve el sistema asociado a $\mathscr{C}$. □

Corolario 3. *Una cónica* $\mathscr{C} : xAx^T = 0$ *posee puntos singulares si, y sólo si,* $\det A = 0$.

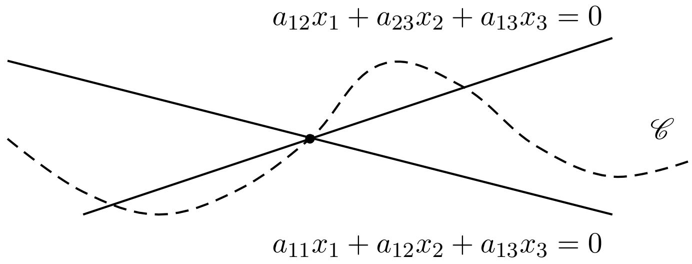
Demostración. Por definición, se tiene que los puntos singulares de una cónica son las soluciones no nulas de su sistema asociado, y en virtud del teorema anterior, se tiene el resultado. □

Consideremos el sistema asociado a $\mathscr{C}$,
$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 &= 0 \\ a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 &= 0 \\ a_{13}x_1 + a_{23}x_2 + a_{33}x_3 &= 0 \end{aligned}$$
Hallaremos los puntos singulares de una cónica $\mathscr{C} : xAx^Y = 0$. Como debe ocurrir $\det A = 0$, entonces se tiene dos casos:

1. $\operatorname{ran}(A) = 2$, así el sistema asociado se transforma en dos ecuaciones con tres incógnitas. Resolviendo dicho sistema, es decir, haciendo
$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 &= -a_{13}x_3 \\ a_{12}x_1 + a_{22}x_2 &= -a_{23}x_3, \end{aligned}$$
por la regla de Crammer se tiene
$$x_1 = \frac{\det \begin{pmatrix} -a_{13}x_3 & a_{12} \\ -a_{23}x_3 & a_{22} \end{pmatrix}}{\det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}} \quad \text{y} \quad x_2 = \frac{\det \begin{pmatrix} a_{11} & -a_{13}x_3 \\ a_{12} & -a_{23}x_3 \end{pmatrix}}{\det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}}.$$

Teniendo en cuenta la definición de A_{ij}, se tiene que el punto singular x tiene por coordenadas homogéneas

$$x = (x_1, x_2, x_3) = \left(\frac{A_{13}}{A_{33}}x_3, \frac{A_{23}}{A_{33}}x_3, x_3\right) \equiv (A_{13}, A_{23}, A_{33}) = H.$$



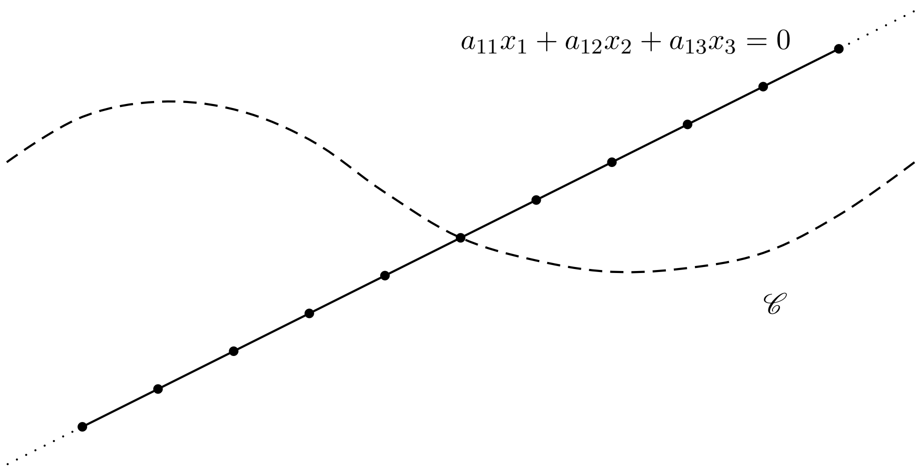
2. ran$(A) = 1$. En este caso, el sistema asociado se transforma en una ecuación con tres incógnita. Es decir,

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = 0.$$

Luego, el conjunto de puntos singulares está dado por

$$\{(x_1, x_2, x_3)/a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = 0\},$$

así, existen infinitos puntos singulares.



2.5 Clasificación primaria de las cónicas

Definición 2.39. Sea $\mathscr{C} : xAx^T = 0$ una cónica. Luego, $\mathscr{C}$ es una cónica *degenerada* si posee puntos singulares,y *no degenerada* en caso contrario.

Observación 2.12. De la definición, se tiene que una cónica $\mathscr{C} : xAx^T = 0$ es degenerada si, y sólo si, $\det A = 0$, y no degenerada si, y sólo si, $\det A \neq 0$.

2.5.1 Composición de las cónicas degeneradas

¿De qué está formada una cónica degenerada?

Análisis del caso $\mathrm{ran}(A) = 2$

Proposición 2.40. *Sea* $\mathscr{C} : xAx^T = 0$ *una cónica degenerada de rango* 2*,* $P, Q \in \mathscr{C}$ *y* $\mathscr{L}_{PQ} : x = \lambda P + \mu Q$*, la recta que pasa por* P *y* Q*. Luego,* $PAQ^T = 0$ *si, y sólo si,* $\mathscr{L}_{PQ} \subset \mathscr{C}$*.*

Demostración. Asumamos que $PAQ^T = 0$. Sea $x \in \mathscr{L}_{PQ}$ arbitrario, esto es, $x = \lambda P + \mu Q$. Luego, se tiene

$$\begin{aligned} xAx^T &= (\lambda P + \mu Q)A(\lambda P + \mu Q)^T \\ &= \lambda^2 PAP^T + 2\mu\lambda PAQ^T + \mu^2 QAQ^T = 0, \end{aligned}$$

desde que $PAP^T = PAQ^T = QAQ^T = 0$. Por lo tanto $x \in \mathscr{C}$, y como x es arbitrario se tiene que $\mathscr{L}_{PQ} \subset \mathscr{C}$.

Recíprocamente, asumamos que $\mathscr{L}_{PQ} \subset \mathscr{C}$. Luego, para todo $x \in \mathscr{L}_{PQ}$ se tiene que $xAx^T = 0$. Como $x = \lambda P + \mu Q$, entonces

$$\begin{aligned} 0 = xAx^T &= (\lambda P + \mu Q)A(\lambda P + \mu Q)^T \\ &= \lambda^2 PAP^T + 2\mu\lambda PAQ^T + \mu^2 QAQ^T. \end{aligned}$$

Como P y Q están en $\mathscr{C}$, se tiene que $PAP^T = QAQ^T = 0$, lo que implica que la ecuación anterior queda

$$2\mu\lambda PAQ^T = 0.$$

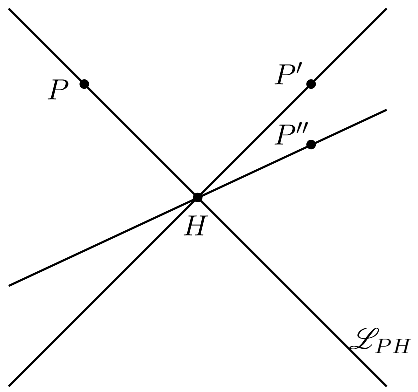
Como x es arbitrario, en particular podríamos elegir $x = \lambda P + \mu Q$ tal que $\lambda, \mu \neq 0$, de donde, a partir de la ecuación anterior, se concluye que $PAQ^T = 0$. $\square$

Lema 2.41. *Sea* H *el único punto singular de* $\mathscr{C}$*. Luego, para todo* $P \in \mathscr{C}$*, se tiene* $\mathscr{L}_{PH} \subset \mathscr{C}$*.*

Demostración. Sea H el único punto singular de $\mathscr{C}$ y $P \in \mathscr{C}$ arbitrario. Tomemos $x = \lambda P + \mu H$ un elemento cualquiera de $\mathscr{L}_{PH}$. Luego,

$$\begin{aligned} xAx^T &= (\lambda P + \mu H)A(\lambda P + \mu H)^T \\ &= \lambda^2 PAP^T + 2\mu\lambda PAH^T + \mu^2 HAH^T = 0 \end{aligned}$$

pues $PAP^T = HAH^T = 0$ y $AH^T = (0, 0, 0)^T$. Por lo tanto, $x \in \mathscr{C}$.



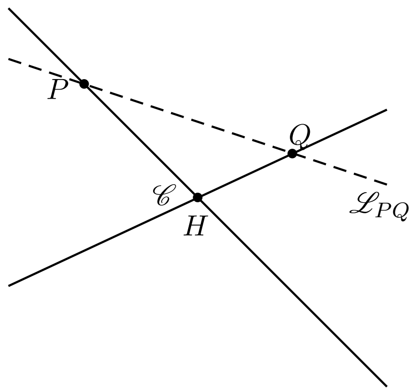
$\mathscr{C}$ está formado por rectas que pasan por H. □

Lema 2.42. *Para todo $P, Q \in \mathscr{C}$ no alineados con H se tiene que $\mathscr{L}_{PQ} \cap \mathscr{C} = \{P, Q\}$.*

Demostración. Sean $\mathscr{L}_{PQ} : x = \lambda P + \mu Q$ y $\mathscr{C} : xAx^T = 0$. Efectuando la intersección de $\mathscr{L}_{PQ}$ y $\mathscr{C}$ se tiene que resolver

$$(\lambda P + \mu Q)A(\lambda P + \mu Q)^T = 0.$$

Esta ecuación genera una cuadrática, la cual proporciona dos soluciones como máximo.



□

Es decir, de los Lemas 2.41 y 2.42 se concluye la forma de la cónica.

Análisis del caso $\operatorname{ran}(A) = 1$ En el sistema asociado

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 &= 0 \\ a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 &= 0 \\ a_{13}x_1 + a_{23}x_2 + a_{33}x_3 &= 0 \end{aligned}$$

se tiene

$$\begin{aligned}
\frac{a_{11}}{a_{12}} &= \frac{a_{12}}{a_{22}} \Rightarrow a_{11}a_{22} = a_{12}^2,\\
\frac{a_{11}}{a_{13}} &= \frac{a_{13}}{a_{33}} \Rightarrow a_{11}a_{33} = a_{13}^2,\\
\frac{a_{22}}{a_{23}} &= \frac{a_{23}}{a_{33}} \Rightarrow a_{22}a_{33} = a_{23}^2.
\end{aligned}$$

Luego, reemplazando en la ecuación de $\mathscr{C}$ se tiene

$$a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2 + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + 2a_{23}x_2x_3 = 0.$$

o lo que es lo mismo,

$$\begin{aligned}
0 &= a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2 \pm 2\sqrt{a_{11}a_{12}}x_1x_2 \pm 2\sqrt{a_{11}a_{33}}x_1x_3 \pm 2\sqrt{a_{22}a_{33}}x_2x_3\\
&\big(\pm\sqrt{a_{11}}x_1 \pm \sqrt{a_{22}}x_2 \pm \sqrt{a_{33}}x_3\big)^2,
\end{aligned}$$

la cual es una recta doble.

2.5.2 Composición de las cónicas mediante su intersección con $\mathscr{L}_\infty$

Sea $\mathscr{C} : a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2 + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + 2a_{23}x_2x_3 = 0$ una cónica y $\mathscr{L}_\infty : x_3 = 0$, la recta en el infinito. En la intersección se tiene que

$$a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + 2a_{12}x_1x_2 = 0.$$

Considerando la ecuación anterior con variable x_1, su discriminante es

$$D = 4a_{12}^2x_2^2 - 4a_{11}a_{22}x_2^2 = 4x_2^2(a_{12}^2 - a_{11}a_{22}) = 4x_2^2(-A_{33}),$$

de donde

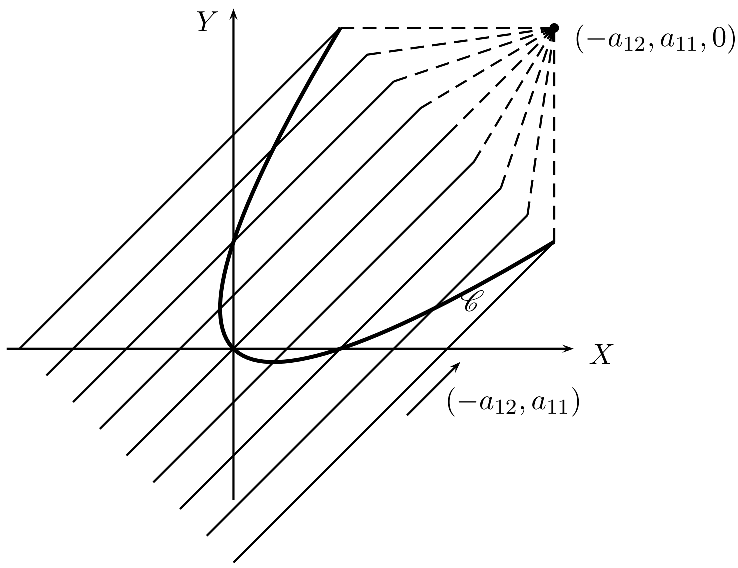
$$x_1 = \frac{-2a_{12}x_2 \pm 2x_2\sqrt{-A_{33}}}{2a_{11}} = \left(\frac{-a_{12}}{a_{11}} \pm \frac{\sqrt{-A_{33}}}{a_{11}}\right)x_2.$$

Así, los puntos de intersección son

$$\big(-a_{12} + \sqrt{-A_{33}}, a_{11}, 0\big) \text{ y } \big(-a_{12} - \sqrt{-A_{33}}, a_{11}, 0\big).$$

En el caso en que $\mathscr{C}$ sea no degenerada tenemos tres posibilidades:

- Cuando $A_{33} = 0$. En ese caso, se tiene un solo punto impropio $(-a_{12}, a_{11}, 0)$. Luego, decimos que la cónica $\mathscr{C}$ es una *parábola*

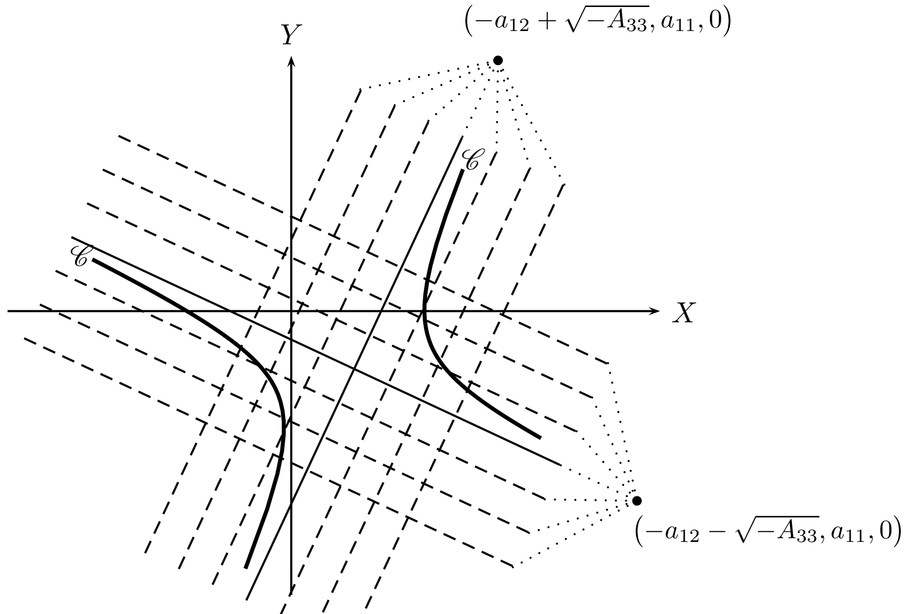


Ejemplo 2.43. Sea la cónica $\mathscr{C} : x^2 - 2xy + y^2 + 4x - 6y + 1 = 0$, la cual tiene por matriz asociada

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & -3 \\ 2 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

con $A_{33} = 0$.

- Cuando $A_{33} < 0$. Aquí se tienen los puntos impropios $(-a_{12} - \sqrt{A_{33}}, a_{11}, 0)$ y $(-a_{12} + \sqrt{-A_{33}}, a_{11}, 0)$. Luego, decimos que la cónica es una *hipérbola*

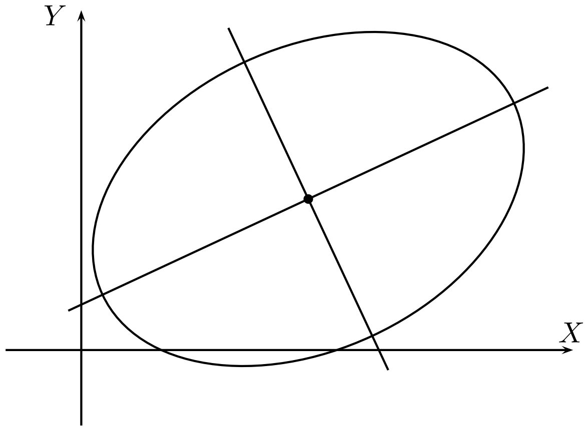


Ejemplo 2.44. Consideremos la cónica $\mathscr{C} : x^2 + 2xy - y^2 - 6x + 4y - 3 = 0$, cuya matriz asociada es

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 1 & -1 & 2 \\ -3 & 2 & -3 \end{pmatrix},$$

donde $A_{33} = -2 < 0$.

- Cuando $A_{33} > 0$. En este caso se tiene una elipse



Ejemplo 2.45. Sea la cónica $\mathscr{C} : 5x^2 + 6xy + 5y^2 - 4x - 4 = 0$, cuya matriz es

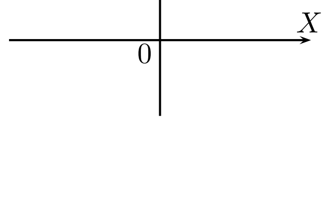
$$A = \begin{pmatrix} 5 & 3 & -2 \\ 3 & 5 & 2 \\ -2 & 2 & -4 \end{pmatrix},$$

con $A_{33} = 16 > 0$.

2.6 Cónicas imaginarias

Sea $\mathscr{C} : xAx^T$ una cónica. Se dice que $\mathscr{C}$ es *imaginaria* si todos sus puntos son imaginarios excepto el punto $H = (A_{13}, A_{23}, A_{33})$.

Caracterización de una cónica imaginaria Sean $\mathscr{C} : xAx^T = 0$ una cónica imaginaria y $\mathscr{L} : y = k$, con k constante arbitraria, una recta real. ¿Qué se obtiene de $\mathscr{C} \cap \mathscr{L}$?



Se observa que la ecuación cuadrática obtenida al hallar $\mathscr{C} \cap \mathscr{L}$ debe tener discriminante menor que 0.

$$\mathscr{C} : a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2 + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + 2a_{23}x_2x_3 = 0$$
$$\mathscr{L} : x_2 = kx_3.$$

Reemplacemos la ecuación de $\mathscr{L}$ en la de $\mathscr{C}$, así tenemos

$$a_{11}x_1^2 + a_{22}(kx_3)^2 + a_{33}x_3^2 + 2a_{12}x_1(kx_3) + 2a_{13}x_1x_3 + 2a_{33}(kx_3)x_3 = 0.$$

Si hacemos $a = a_{11}$, $b = 2(a_{12}k + a_{13})x_3$ y $c = (a_{22}k^2 + a_{33} + 2a_{23}k)x_3^2$, la ecuación anterior se transforma en la siguiente cuadática, con variable x_1,

$$ax_1^2 + bx_1 + c = 0,$$

cuya discriminante $b^2 - 4ac < 0$, es decir,

$$(a_{12}k + a_{13})^2 - a_11(a_{22}k^2 + a_{33} + 2a_{23}k) < 0.$$

Operando y reagrupando en la inecuación anterior tenemos

$$(a_{12}^2 - a_{11}a_{22})k^2 + 2(a_{12}a_{13} - a_{11}a_{23})k + (a_{13}^2 - a_{11}a_{33}) < 0;$$

y recordando de A_{ij}, se tiene que la inecuación anterior toma la forma

$$-A_{33}k^2 + 2A_{23}k + (-A_{22}) < 0,$$

o lo que es lo mismo

$$A_{33}k^2 - 2A_{23}k + A_{22} > 0,$$

para cualquier k en $\mathbb{R}$; lo que ocurre si, y sólo si, $A_{33} > 0$ y $A_{23}^2 - A_{22}A_{33} < 0$, que es conocida como la *condición general para que una cónica sea imaginaria.*

Observación 2.13. De acuerdo a la identidad

$$A_{22}A_{33} - A_{23}^2 = a_{11} \times \det A$$

se tiene que la condición general para que una cónica $\mathscr{C}$ sea imaginaria, se puede escribir como

$$A_{33} > 0, \qquad a_{11} \det A > 0.$$

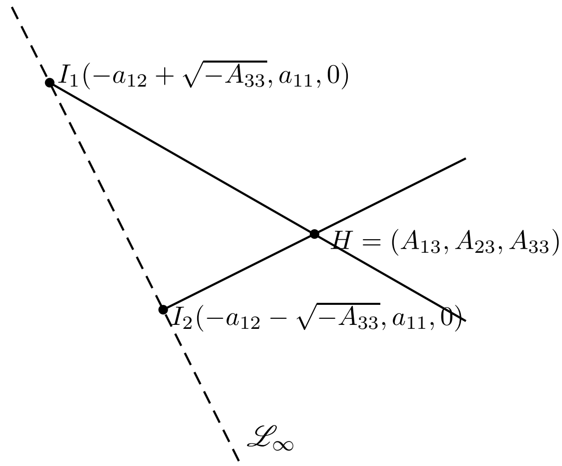
En virtu de la observación anterior, qué cónicas pueden ser imaginarias. Veamos,

- Si $\mathscr{C}$ es no degenerada, sólo la elipse ($A_{33} > 0$) podría ser imaginaria en caso que además cumpla $a_{11} \det A > 0$.

- Si $\mathscr{C}$ es degenerada, tenemos dos casos:

  - Si $\operatorname{ran}(A) = 1$, entonces $\mathscr{C}$ es una recta doble siempre real.

– Si $\operatorname{ran}(A) = 2$,



Cuando $A_{33} > 0$, la elipse degenera en dos rectas imaginarias que se cortan en el punto H.
Cuando $A_{33} < 0$, los puntos I_1 e I_2 son reales. Luego, conjuntamente con H, conforman dos rectas siempre reales, es decir, la hipérbola ha degenerado en dos rectas reales.
Cuando $A_{33} = 0$, $I_1 = I_2 = (-a_{12}, a_{11}, 0)$ y, conjuntamente con H (real), da lugar a una recta dobre ($x_3 = 0$), pues $H \in \mathscr{L}_\infty$. Sin embargo, al ser $A_{33} = 0$, $\mathscr{C}$ está compuesta de dos rectas paralelas, las cuales podrían ser imaginarias. De la condición general para que una cónica sea imaginaria, se tiene

$$-2A_{23}k + A_{22} > 0,$$

para todo $k \in \mathbb{R}$. Luego,

$$A_{23} = 0 \text{ y } A_{22} > 0.$$

Observación 2.14. La cónica $\mathscr{C}$ está formada por dos rectas paralelas si, y sólo si, la ecuación de $\mathscr{C}$ tiene la forma $(ax + by + c)(dx + cy + f) = 0$. En ese caso, luego de operar y agrupar, la ecuación queda

$$adx^2 + (af + cd)x + cf + (bf + c^2)y + (ac + bd)xy + bcy^2 = 0,$$

de donde, su matriz asociada es

$$A = \begin{pmatrix} ad & \frac{ac+bd}{2} & \frac{af+cd}{2} \\ \frac{ac+bd}{2} & bc & \frac{bf+c^2}{2} \\ \frac{af+cd}{2} & \frac{bf+c^2}{2} & cf \end{pmatrix},$$

y

$$A_{23} = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} ad & \frac{ac+bd}{2} \\ \frac{af+cd}{2} & \frac{bf+c^2}{2} \end{vmatrix} = 0.$$

Por lo tanto, la única condición es $A_{22} > 0$.

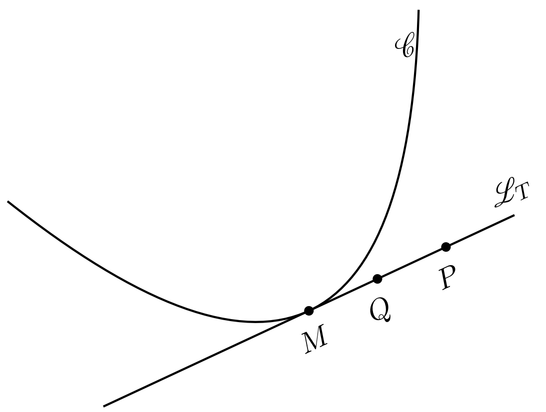
2.7 Clasificación total de las cónicas

Sea $\mathscr{C} : xAx^T = 0$, luego podemos tener la siguiente clasificación:

1. Cónica no degenerada ($\det A \neq 0$)
   (a) $A_{33} > 0$ elipse (imaginaria si además $a_{11} \det A > 0$).
   (b) $A_{33} < 0$ hipérbola (siempre real).
   (c) $A_{33} = 0$ parábola (siempre real).
2. Cónica degenerada
   (a) De rango 2
      i. $A_{33} > 0$ elipse que degenera en dos rectas siempre imaginarias.
      ii. $A_{33} < 0$ hipérbola que degenera en dos rectas siempre reales.
      iii. $A_{33}00$ parábola que degenera en dos rectas paralelas (imaginarias si además $A_{22} > 0$).
   (b) De rango 1, recta doble siempre real.

2.8 Rectas tangentes y asíntotas de una cónica

Sean $\mathscr{C} : xAx^T = 0$ una cónica, $P = (p_1, p_2, p_3)$ un punto fijo (desde la cual se traza una tangente), $Q = (x_1, x_2, x_3)$ un punto variable (pertenenciente a la recta tangente) y M el punto de contacto entre la cónica y la recta tangente.



Siendo $\mathscr{L}_T : x = \lambda P + \mu Q$, con $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, y $\mathscr{C} : xAx^T = 0$, se tiene $M = \mathscr{L}_T \cap \mathscr{C}$. Es decir,

$$\begin{aligned} 0 &= (\lambda P + \mu Q)A(\lambda P + \mu Q)^T \\ &= (PAP^T)\lambda^2 + (2\mu PAQ^T)\lambda + QAQ^T\mu^2. \end{aligned}$$

Esta última cuadrática proporciona una solución, denominada *condición de tangencia*. Es decir, discrimante nulo, esto es,

$$(PAQ^T)^2 - (PAP^T)(QAQ^T) = 0.$$

Esta ecuación caracteriza a los puntos de $\mathscr{L}_T = \{Q = (x_1, x_2, x_3)\}$, la cual, a su vez, es la ecuación de una cónica de rango 2.

Puede ocurrir

1. $P \in \mathscr{C} : (PAQ^T)^2 = 0 \Leftrightarrow PAQ^T = 0$. En particular, si P es un punto impropio, entonces $\mathscr{L}_T$ es la recta asíntota.

2. $P \notin \mathscr{C}$

Ejemplo 2.46. Sea $\mathscr{C} : x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 - 2x_1x_3 = 0$. Hallar la ecuación de la tangente trazada desde

1. $P = (2, 1, 1)$, entonces $P \in \mathscr{C}$. Tenemos

$$PA = (2, 1, 1) \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} = (1, 1, -3),$$

de donde $\mathscr{L}_T : x_1 + x_2 - 3x_3 = 0$.

2. $P = (3, 0, 1)$, entonces $P \notin \mathscr{L}$. Tenemos

$$PA = (3, 0, 1) \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} = (2, 0, -4).$$

Reemplazando en la ecuación característica de $\mathscr{L}_T$ se tiene

$$(2x_1 - 4x_3)^2 - 2(x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 - 2x_1x_3) = 0,$$

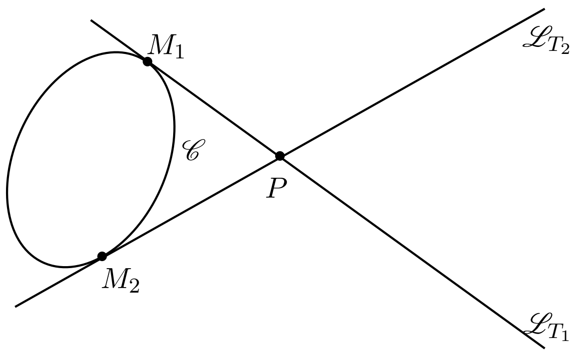
la cual, al ser desarrollada resulta

$$x_1^2 - x_2^2 + 9x_3^2 - 6x_1x_3 = 0,$$

que es equivalente a

$$x^2 - 6x - (y^2 - 9) = (x - y - 3)(x + y - 3) = 0.$$

Veamos gráficamente



Vemos que $\mathscr{L}_{T_1} = \text{polar}(M_1)$ y $\mathscr{L}_{T_2} = \text{polar}(M_2)$. Luego $M_1 = \text{polar}(P) \cap \mathscr{C}$, de donde $\mathscr{L}_{T_1} : Q = \lambda M_1 + \mu P$. También, $M_2 = \text{polar}(P) \cap \mathscr{C}$, lo que implica que $\mathscr{L}_{T_2} : Q = \lambda M_2 + \mu P$.

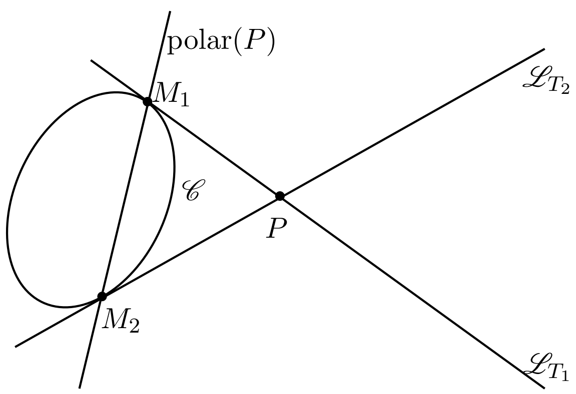
Ecuación característica de $\mathscr{L}_T$ Sea $\mathscr{L}_T$ con ecuación

$$(PAQ^T)^2 - (PAP^T)(QAQ^T) = (ax_1 + bx_2 + cx_3)(dx_1 + ex_2 + fx_3) = 0.$$

Tenemos dos casos

1. Cuando $P \in \mathscr{C}$, entonces $PAP^T = 0$. Así, se tiene $\mathscr{L}_T : (PAQ^T)^2 = 0$, lo que implica que $PAQ^T = 0$. Se puede notar que $\mathscr{L}_T = \text{polar}(P)$; además, en caso de ser P punto impropio, entonces $\mathscr{L}_T$ se convierte en asíntota.

2. Cuando $P \notin \mathscr{C}$. Una forma de hallar $\mathscr{L}_T$ es factorizando la ecuación característica, es decir,
$$(PAQ^T)^2 - (PAP^T)(QAQ^T) = 0,$$
que es equivalente a
$$(ax_1 + bx_2 + cx_3)(dx_1 + ex_2 + fx_3) = 0.$$
Otra alternativa es geométrica:



Vemos que $\mathscr{L}_{T_1} = \text{polar}(M_1)$ y $\mathscr{L}_{T_2} = \text{polar}(M_2)$. Además $\{M_1, M_2\} = \mathscr{C} \cap \text{polar}(P)$, que es la intersección entre una recta y una cónica.

Ejemplo 2.47. Hallar las rectas tangentes a $\mathscr{C} : x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 - 2x_1x_3 = 0$ trazadas desde los puntos

- $P = (2, 1, 1)$
- $P = (3, 0, 1)$
- $P = (0, 0, 1)$

Notemos que la matriz asociada a la cónica es

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

y $Q = (x_1, x_2, x_3) \in \mathscr{L}_T$.

1. Si $P = (2, 1, 1) \in \mathscr{C}$, entonces $\mathscr{L}_T = \text{polar}(P)$ y

$$PA = (2, 1, 1) \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} = (1, 1, -3).$$

Luego, $\mathscr{L}_T : (x_1 + x_2 - 3x_3)^2 = 0$.

2. Cuando $P = (3, 0, 1)$, se resuelve como en el Ejemplo 2.46. Ahí teniamos $PA = (2, 0, -4)$, luego,

$$\text{polar}(P) = x_1 - 2x_3 = 0.$$

Tomando los puntos $R = (2, 1, 1)$ y $S = (2, 0, 1)$ en $\text{polar}(P)$, vemos que

$$\text{polar}(P) : \lambda R + \mu S.$$

Ahora, hallemos $\mathscr{C} \cap \text{polar}(P)$; para esto hacemos

$$\begin{aligned} 0 &= (\lambda R + \mu S)A(\lambda R + \mu S)^T \\ &= \lambda^2 RAR^T + 2\mu\lambda RAS^T + \mu^2 SAS^T, \end{aligned}$$

en donde vemos que

$$\begin{aligned} RAR^T &= (2, 1, 1) \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = (1, 1, -3) \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \\ RAS^T &= (1, 1, -3) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = -1 \\ SAS^T &= (2, 0, 1) \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = (1, 0, -3) \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = -1. \end{aligned}$$

Así, $\mathscr{C} \cap \operatorname{polar}(P)$ queda de la forma

$$\mathscr{C} \cap \operatorname{polar}(P) = \mu(\mu + 2\lambda) = 0,$$

de donde $\mu = 0$ ó $\mu = -2\lambda$.

Si $\mu = 0$, entonces se tiene $M_1 = (2, 1, -1)$; y si $\mu = -2\lambda$, entonces $M_2 = (-2, 1, -1)$. Por lo tanto,

$$\begin{cases} \mathscr{L}_{T_1} : \operatorname{polar}(M_1) \\ \mathscr{L}_{T_2} : \operatorname{polar}(M_2) \end{cases}$$

3. Se deja como ejercicio (verificar que la ecuación característica es una cónica degenerada de rango 2 y además imaginaria).

2.9 Elementos principales de una cónica no degenerada

Sea $\mathscr{C} : xAx^T = 0$ una cónica no degenerada.

Definición 2.48. El *centro* $C = (c_1, c_2, c_3)$ de $\mathscr{C}$ es un punto tal que $\operatorname{polar}(C) = \mathscr{L}_\infty$ si, y sólo si, $C = \operatorname{polo}(\mathscr{L}_\infty)$.

Luego, C es solución del sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} a_{11}c_1 + a_{12}c_2 + a_{13}c_3 &= 0 \\ a_{12}c_1 + a_{22}c_2 + a_{23}c_3 &= 0 \\ a_{13}c_1 + a_{23}c_2 + a_{33}c_3 &= 0 \end{aligned}$$

que es equivalente a la ecuación

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

De acuerdo a la regla de Crammer, el centro de una cónica no degenerada está dada por

$$C = (c_1, c_2, c_3) = \left(\frac{A_{13}}{\det A}, \frac{A_{23}}{\det A}, \frac{A_{33}}{\det A} \right).$$

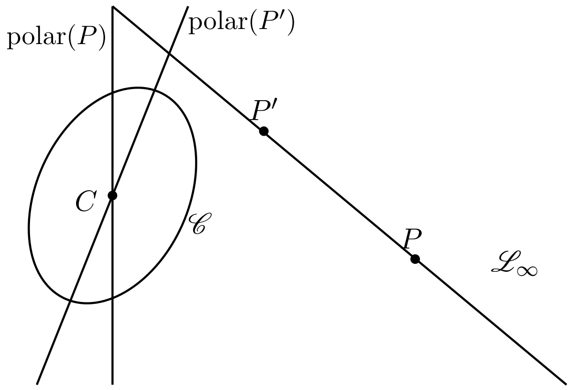
Observación 2.15. En caso de tener $A_{33} = 0$, decimos que no hay centro, pues la parábola no tiene centro.

Ejemplo 2.49. Sea $\mathscr{C} : 5x^2 + 4xy + 5y^2 - 9 = 0$, luego, su matriz asociada es

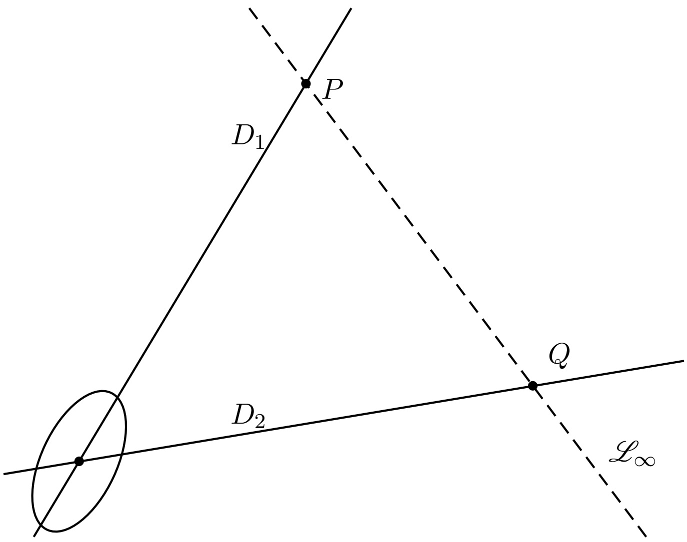
$$A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & -9 \end{pmatrix},$$

con $\det A = -189 \neq 0$. Como $A_{33} = 25 - 4 > 0$, la cónica es una elipse; además, $A_{13} = A_{23} = 0$, lo que implica que el centro de $\mathscr{C}$ es $C = (0, 0, 21)$.

Definición 2.50. Un *diámetro* de la cónica de $\mathscr{C}$ es la recta polar de algún punto de $\mathscr{L}_\infty$.



Definición 2.51. Se dice que dos diámetros son *conjugados* si cada uno de ellos contiene el polo del otro.



Vemos que $D_2 = \text{polar}(P)$ si, y sólo si, $P = \text{polo}(D_2)$. Similarmente, $D_1 = \text{polar}(Q)$ si, y sólo si, $Q = \text{polo}(D_1)$. Además, $\text{polo}(D_2) = P \in D_1$ y $\text{polo}(D_1) = Q \in D_2$, lo que implica que D_1 y D_2 son conjugados.

Teorema 2.52. *Si m y m' son las pendientes de dos diámetros conjugados, entonces*

$$m' = -\frac{a_{11} + a_{12}m}{a_{12} + a_{22}m}.$$

Demostración. Sean D_1 y D_2 los diámetros conjugados y m, m' sus pendientes respectivas, donde

$$D_1 : y - C_2 = m(x - C_1) \equiv \frac{x - C_1}{1} = \frac{y - C_2}{m}.$$

Luego, $P = (1, m, 0) \in D_1 \cap \mathscr{L}_\infty$. Además, como D_1 y D_2 son conjugados, se tiene que polar$(P) = D_2$. Ahora expresemos el polar(P),

$$(x_1, x_2, x_3) \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ m \\ 0 \end{pmatrix} = 0$$

que es equivalente a

$$\Leftrightarrow (x_1, x_2, x_3) \begin{pmatrix} a_{11} + ma_{12} \\ a_{12} + ma_{22} \\ a_{13} + ma_{23} \end{pmatrix} = 0$$

o lo que es lo mismo

$$(a_{11} + ma_{12})x_1 + (a_{12} + ma_{22})x_2 + (a_{13} + ma_{23})x_3 = 0,$$

cuya pendiente es

$$m' = -\frac{a_{11} + ma_{12}}{a_{12} + ma_{22}}. \qquad \square$$

Definición 2.53. Si dos diámetros conjugados son, además, conjugados, entonces dichos diámetros se llaman *ejes*.

Desde que los ejes son perpendiculares, se tiene

$$m' = -\frac{1}{m},$$

y en virtud del teorema anterior,

$$-\frac{1}{m} = -\frac{a_{11} + a_{12}m}{a_{12} + a_{22}m},$$

lo que implica

$$a_{12}m^2 + (a_{11} - a_{22})m - a_{12} = 0.$$

Esta ecuación cuadrática proporciona las direcciones (pendientes) de los dos únicos diámetros conjugados y perpendiculares (ejes).

Observación 2.16. Una vez hallada la dirección (pendiente) de un eje, es posible hallar su ecuación pues dicho eje pasa además por el centro.

Definición 2.54. A la intersección de los ejes con la cónica se llama *vértice.*

Ejemplo 2.55. Hallar el centro, los ejes, y los vértices de $\mathscr{C} : x^2 + 4y^2 - 6x - 16y + 21 = 0$. Notemos que la matriz de $\mathscr{C}$ es

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 4 & -8 \\ -3 & -8 & 21 \end{pmatrix},$$

cuyo rango es 3. Además $A_{13} = 12$, $A_{23} = 8$ y $A_{33} = 4$; así, el centro tiene por coordenadas $(12, 8, 4) \equiv (3, 2)$.

Los ejes son $y = -2$ y $x = 3$; y los vértices son $(5, -2)$ y $(1, -2)$.

Ejercicio 8. Hallar el centro, los ejes y los vértices para $\mathscr{C} : 4x^2 - 20xy + 25y^2 - 15x - 6y = 0$.

Definición 2.56. Los *focos* de una cónica $\mathscr{C} : xAx^T = 0$ no degenerado son los puntos reales $F(\alpha, \beta)$ tales que las rectas tangentes trazadas desde ellos a $\mathscr{C}$ son las rectas imaginarias

$$\begin{aligned} y - \beta &= i(x - \alpha) \\ y - \beta &= -i(x - \alpha). \end{aligned}$$

Observación 2.17. Se debe exigir un sólo punto de contacto.

Ejercicio 9. Si $\mathscr{C} : xy + 2x - 2 = 0$, hallar $F = (\alpha, \beta)$.