Espacio base dim l.i

Para probar l.d. basta tomar un caso particular.

Universidad Nacional de Ingeniería — Ciclo 2016-II

Facultad de Ciencias - Escuela Profesional de Matemática — Septiembre 07, 2016

CM141: Cálculo Vectorial I

[Temas: Proyección, dependencia Lineal, Base y dimensión]

Segunda Práctica Dirigida de Cálculo Vectorial I

1. Determine el valor de verdad de la siguiente proposición, formulada respecto de un espacio vectorial V: "Todo conjunto que posea al vector nulo es linealmente independiente"

2. Pruebe la equivalencia en $\mathbb{R}^2$: Dos vectores no nulos son linealmente dependientes si, y sólo si, son paralelos.

3. Determine si el conjunto $X = \{(0,0),(1,0)\}$ es linealmente dependiente. con vectores paralelo

4. Considere la colección de vectores $v_1 = (1,2)$, $v_2 = (1,-1)$. Demuestre que esta es una base de $\mathbb{R}^2$. Exprese el vector $v = (2,-1)$ como combinación lineal de tales vectores.

5. Calcule el valor de t, si existe, para que los vectores $(1, t+1)$, $(t-1\,,\,t)$ formen una base de $\mathbb{R}^2$.

6. ¿Existen valores de k para los cuales los vectores $(k\,,1)$ y $(k-1, k)$ forman una base de $\mathbb{R}^2$?.

7. Si $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_m$ son L.I, pruebe que $\vec{v}_1, \vec{v}_2 - \vec{v}_1, \vec{v}_3 - \vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_m - \vec{v}_1$ tambien los son.

8. Halle el espacio generado por los vectores:

   (a) $\vec{u} = (1,1)$ y $\vec{v} = (-3,-3)$

   (b) $\vec{u} = (1,1), \vec{v} = (1,-5), \vec{w} = (4,-20)$

9. Un terreno rectangular $ABCD$, donde $A = (-2,5)$ y $B = (2,1)$ son vértices consecutivos, es tal que la diagonal AC tiene la misma dirección del vector $\vec{v} = (5,1)$. Determine los vértices C y D en el primer cuadrante.

   tiene la misma dir entonces es paralelo

10. Halle el área del cuadrilátero de vértices $A = (2,2)$, $B = (6,5)$, $C = (9,9)$ y $D = (5,6)$.

11. Demuestre que:

    (a) Si $\{u,v\}$ es una base de $\mathbb{R}^2$ y $\alpha \neq 0$ entonces $\{u + \alpha v, v\}$ tambien lo es.

    (b) Tres vectores cualesquiera en $\mathbb{R}^2$ son L.D.

12. Siendo $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^2$ vectores no nulos, pruebe que:

    (a) $\vec{u} \nparallel \vec{v} \Longleftrightarrow \{\vec{u}, \vec{v}\}$ son L.I.

    (b) $\vec{u} \perp \vec{v} \Rightarrow \{\vec{u}, \vec{v}\}$ son L.I. Contradicción

13. Determine si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Justifique su respuesta:

0 con cualquier otro es l.d

(a) Si $\{\vec{u}, \vec{v}\}$ es una base de $\mathbb{R}^2$, entonces $\{\vec{u} + \alpha\vec{v}, \vec{v}\}$ con $\alpha \in \mathbb{R}$ también lo es.

(b) Sean $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^2 \setminus \{\vec{0}\}$, $\vec{u} \perp \vec{v}$ y $t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$:

$$\text{Proy}_{\vec{w}}(\vec{u} + \vec{v}) \neq \vec{0}$$

donde $\vec{w} = \text{Proy}_{\vec{v}}(t\vec{u})$

(c) Sean $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^2$ no nulos. Pruebe que:

$$\vec{u} \perp \vec{v}^{\perp} \iff \vec{u} \parallel \vec{v}$$

14. ¿ Son colineales los puntos $A = (-8,-2), B = (-5,0)$ y $C = (4,6)$?

15. Pruebe que el cuadrilátero de vértices $(4,0), (7,5), (-2,3)$ y $(-5,-2)$, es un paralelogramo.

16. El punto $A(-1,6)$ es uno de los vértices del cuadrado $ABCD$ cuyo centro es el punto $(-\frac{3}{2}, \frac{5}{2})$. Hallar los vértices B, C y D.

17. Sean $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^2$ no nulas. Demostrar:

a) $\left\{proy_{\vec{b}^{\perp}}\vec{a}, proy_{\vec{a}}\vec{b}^{\perp}\right\}$ es l.d si y solo si $\{\vec{a}, \vec{b}^{\perp}\}$ es l.d.

b) $\{a^{\perp}, proy_{\vec{b}}\vec{a}\}$ es l.i si y solo si $\vec{a} \not\perp \vec{b}$.

c) Si $proy_{\vec{a}}\vec{b}$ es un vector unitario, entonces $||\vec{b}|| \geq 1$.

18. Demostrar que $\{(0,1), (2,3), (-2,5)\}$ no son vectores l.i pero si generan al espacio $\mathbb{R}^2$.

19. Sea $u \in \mathbb{R}^2$ no nulo. Demostrar:

a) $\{u\}$ es linealmente independiente.

b) $\{u\}$ no es generador de $\mathbb{R}^2$.

20. Dado el $\triangle ABC$, $D = (-3,1)$, $E = (-2,13)$ y $F = (-12,9)$ son respectivamente los puntos medios de $\overline{AB}, \overline{BC}$ y $\overline{AC}$. Encontrar:

a) $proy_{\overrightarrow{BA}}\overrightarrow{DE}$.

b) El área del $\triangle ADF$.

21. Halla el valor de "a" para que los vectores $u = (a-5, 4)$ y $v = (2a, -1)$ sean linealmente independiente.

22. Sobre un trapecio $ABCD$ ($\overline{BC} // \overline{AD}$) se toma los puntos E, y F, puntos medios de $\overline{BC}$ y $\overline{AD}$, respectivamente. si $\overline{EF} = m\overline{AB} + n\overline{CA}$. Halle $m^2 + n^2$.

23. Indicar V o F, donde $\vec{a} \neq 0$ y $b \neq 0$

a) $[(\vec{a}^{\perp})^{\perp}]^{\perp} = \vec{a}$.

b) $proy_{\vec{b}}^{\perp}\vec{a} = proy_{\vec{a}^{\perp}}\vec{b} \Rightarrow \vec{a} = \vec{b}$

c) $||proy_{\vec{b}}\vec{a} + proy_{\vec{b}}^{\perp}\vec{a}|| = ||\vec{a}||$.

24. Indicar si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas;

a) Si $\vec{a} // \vec{b} \Rightarrow proy_{\vec{b}}\vec{a} = \vec{b}$

b) Si $\vec{a}$ y $\vec{b}$ no son ortogonales y $\vec{a} \neq \vec{0} \Rightarrow proy_{\vec{b}}\vec{a} = -proy_{-\vec{b}}\vec{a}$.

25. Sean $v_1, v_2 \in \mathbb{R}^2$. Demostrar las siguientes equivalencias:

a) v_1, v_2 son paralelos

b) v_1, v_2 son linealmente dependientes

c) Si $v_1 = (x_1, y_1)$ y $v_2 = (x_2, y_2)$ entonces $x_1y_2 - x_2y_1 = 0$.

26. Sean V un espacio vectorial y $v_1, v_2, \cdots, v_n$ vectores en V tales que $v_1, v_2, \cdots, v_k$ son linealmente dependientes. Si $k \leq n$, mostrar que

$v_1, v_2, \cdots, v_n$ es lienalmente dependientes.

27. Si v_1 y v_2 generan a $\mathbb{R}^2$. Pruebe que dichos vectores son linealmente independientes.

28. Determine la validez de cada una de las proposiciones formuladas para los vectores $u = (1, 2)$, $v = (-4, -8)$ y cuyo espacio generado es S.

    (a) El espacio generado por v y u, es S.

    (b) El espacio generado por u y kv, $k \neq 0$, es S.

    (c) El espacio generado por u y $u + kv$, $k \neq 0$, es S.

29. Analice, en cada caso, si la colección de vectores es linealmente dependiente o linealmente independiente.

    (a) $u = (1, 2)$ y $v = (-1, -3)$

    (b) $u = (-4, 2)$ y $v = (12, -6)$

30. Determine si el conjunto $F = \{(x\,,\,y) \,:\, 2x + y = 0\}$, provisto de las operaciones usuales de $\mathbb{R}^2$, es en si mismo un espacio vectorial. Si lo es, hállele una base.

31. Sea $B = \{u_1, u_2, u_3, u_4\}$ una base de un espacio vectorial de dimensión 4. Determine si los vectores $2u_1 + 3u_2, u_3 - u_4, u_1 - u_3 + 3u_4$ y u_4 forman una base de V.

32. Sea $\beta = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ una base de un espacio vectorial V con producto interno. Dados n números reales arbitrarios $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, pruebe que existe un único vector $w \in V$ tal que: $\langle w, v_1 \rangle = \alpha_1, \langle w, v_2 \rangle = \alpha_2, \ldots, \langle w, v_n \rangle = \alpha_n$

†

†Hecho en LaTeX / Los Profesores.