Práctica Dirigida #1

(20) En $\mathbb{R}^2$

$U=\{(x,y)/x=0\}\subseteq\mathbb{R}^2$

$W=\{(x,y)/y=0\}\subseteq\mathbb{R}^2$

son subespacios de $\mathbb{R}^2$

$U\cup W=\{(x,y)/x=0\}\cup\{(x,y)/y=0\}$

$=\{(x,y)/x=0 \vee y=0\}$

no es un espacio de $\mathbb{R}^2$

(21) $S\cup T$ es un subespacio de V $\Leftrightarrow S\subset T \vee T\subset S$

$(\Leftarrow)$ si $S\subset T \Rightarrow S\cup T=T$
si $T\subset S \Rightarrow S\cup T=S$ son subespacios

$(\Rightarrow)$ Supongamos $S\not\subset T \wedge T\not\subset S$

$\exists u\in S$ tal que $u\notin T$ ... (1)
$\exists v\in T$ tal que $v\notin S$

Como

$u\in S\subset S\cup T \Rightarrow u\in S\cup T$
$v\in T\subset S\cup T \Rightarrow v\in S\cup T$ $\overset{sup}{>}$ $u+v\in S\cup T$ (1)

AFIRMO $u+v\notin T$
$u+v\in S$

Pues, si $u+v\in T$ y $v\in T$
$u=u+v+(-v)\in T$ $(\Rightarrow\Leftarrow)$ (1)

si $u+v\in S \wedge u\in S$
$v=u+v+(-u)\in S$ $(\Rightarrow\Leftarrow)$
$\therefore u+v\notin T\cup S$ $(\Rightarrow\Leftarrow)$ ... (1)

Ejercicio sea n V un esp. vecto real si U y W son subes de V. Diga si los sgtes conjuntos son subesp de V. Justifique su respuesta.

a) $U+W=\{v\in V / v=u+w$ donde $u\in V/$ y $w\in W\}$

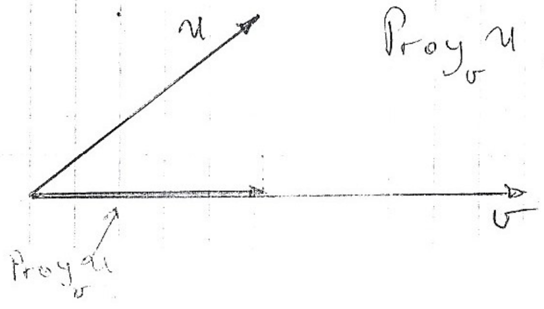
b) $kU=\{v\in V / v=ku$ donde $u\in U$ y $k\in\mathbb{R}\}$

c) $U-W=\{v\in V / v=u-w=u+(-w)$ donde $u\in U$ y $w\in W\}$

Proyección Ortogonal

Definición: Sea V un espacio vectorial real con producto interno $\langle\, ,\rangle$ y dos vectores no nulos u y v.

$\text{Proy}_v u \parallel v$



La proyección ortogonal de u sobre v, denotado por $Proy_v^u$ es el vector

$$Proy_v^u = \frac{\langle u,v\rangle}{\|v\|^2}\, v$$

$$= \underbrace{\frac{\langle u,v\rangle}{\|v\|}}_{Comp_v^u} \cdot \underbrace{\left(\frac{v}{\|v\|}\right)}_{\mu_v}$$

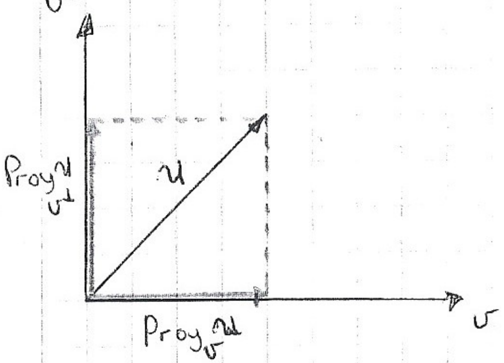
$$Proy_v^u = (comp_v^u)\,\mu_v$$

notemos que

$$\|Proy_v^u\| = |comp_v^u|$$

Ejemplo: En $\mathbb{R}^2$ con Pi canónico. Sean u, v dos vectores no nulos

$\exists\ \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tal que $u = \alpha v + \beta v^{\perp}$?



$$u = Proy_v^u + Proy_{v^{\perp}}^u$$

$$= \underbrace{\left(\frac{\langle u,v\rangle}{\|v\|^2}\right)}_{\alpha} v + \underbrace{\left(\frac{\langle u,v^{\perp}\rangle}{\|v^{\perp}\|^2}\right)}_{\beta} v^{\perp}$$

Para $\alpha = \dfrac{\langle u,v\rangle}{\|v\|^2} \in \mathbb{R}$, $\beta = \dfrac{\langle u,v^{\perp}\rangle}{\|v^{\perp}\|^2} \in \mathbb{R}$

Se cumple: $u = \alpha v + \beta v^{\perp}$

otra forma: Hallaremos $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tal que

$u = \alpha v + \beta v^{\perp}$

- $\langle u,v\rangle = \langle \alpha v + \beta v^{\perp}, v\rangle$

$$= \alpha\langle v,v\rangle + \cancel{\beta\langle v^{\perp},v\rangle}$$

$$\langle u,v\rangle = \alpha\|v\|^2$$

$$\alpha = \frac{\langle u,v\rangle}{\|v\|^2}$$

sgte Cara

$$\cancel{\langle u,v\rangle = \langle \alpha v + \beta v^{\perp}, v\rangle = \alpha\langle v,v\rangle + \beta\langle v^{\perp},v\rangle \Rightarrow \alpha = \frac{\langle u,v\rangle}{\|v\|^2}}$$

- $\langle u,v^{\perp}\rangle = \langle \alpha v + \beta v^{\perp}, v^{\perp}\rangle$

$$= \alpha\langle v,v^{\perp}\rangle + \beta\langle v^{\perp},v^{\perp}\rangle$$

$$\langle u,v^{\perp}\rangle = \beta\,\|v^{\perp}\|^2$$

$$\Rightarrow \beta = \frac{\langle u,v^{\perp}\rangle}{\|v^{\perp}\|^2}$$

Proposición: Sea V el espacio vectorial real con producto interno $\langle , \rangle$.
Sean $u, v, w \in V$ con v no nulo.
Se cumplen:

a) $Proy_v (u+w) = Proy_v u + proy_v w$

b) $Proy_v (\lambda u) = \lambda\, proy_v u, \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$

demostración:

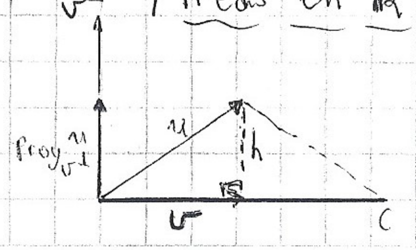
a) $$Proy_v (u+w) = \left(\frac{\langle u+w, v\rangle}{\|v\|^2} \right) v$$

$$= \left(\frac{\langle u, v\rangle + \langle w, v\rangle}{\|v\|^2} \right) v$$

$$= \left(\frac{\langle u, v\rangle}{\|v\|^2} \right) v + \left(\frac{\langle w, v\rangle}{\|v\|^2} \right) v$$

$$= Proy_v u + Proy_v w$$

Áreas en $\mathbb{R}^2$



$$A(R) = \frac{b \cdot h}{2}, \quad b = \|v\|$$
$$h = \|Proy_{v^\perp} u\|$$

Sea $\mathbb{R}^2$ con producto interno canónico.
Dados dos vectores $u, v \in \mathbb{R}^2$ no nulos, el área del triángulo (encerrado) generado por los vectores u y v es dado por

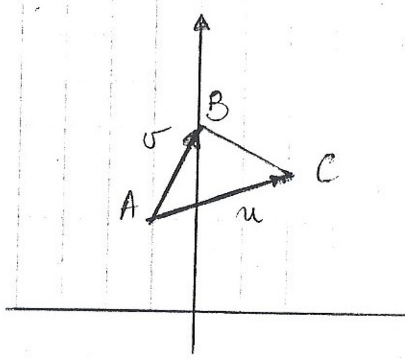
$$A(R) = \frac{\|v\| . \|Proy_{v^\perp} u\|}{2}$$

$$= \frac{\|v\| . |comp_{v^\perp} u|}{2}$$

$$A(R) = \frac{\|v\|}{2} . \frac{|\langle u, v^\perp\rangle|}{\|v\|}$$

$$A(R) = \frac{|\langle u, v^\perp\rangle|}{2}$$

Ejemplo: Calcular el área del triángulo con vértices $(-1;2)$, $(0;4)$ y $(2;3)$.



$u = C - A = (3,1)$

$v = B - A = (1,2)$

$\Downarrow$

$v^\perp = (-2,1)$

$$A = \frac{|\langle u, v^\perp\rangle|}{2}$$

$$A = \frac{1}{2} \left| \langle (3,1), (-2,1) \right|$$

$$A = \frac{1}{2} \left| -6+1 \right|$$

$$A = \frac{5}{2}$$

Dependencia lineal e independencia lineal de Vectores.

Definición: Sea V en un $\mathbb{K}$_espacio vectorial.

Decimos que $v \in V$ es una combinación lineal de los vectores $v_1, v_2, \dots, v_n \in V$ si $\exists$ $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in \mathbb{K}$ tal que

$$v = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_n v_n = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i$$

Obs: ① Toda expresión de la forma $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_n v_n$ donde $\alpha_i \in \mathbb{K}$, $i = 1, \dots, n$ se le denomina combinación lineal de los vectores $v_1, v_2, \dots, v_n \in V$.

② El conjunto de todas las combinaciones lineales de los vectores $v_1, v_2, \dots, v_n \in V$ es un subespacio de V llamado subespacio generado por los vectores $v_1, v_2, \dots, v_n$ o subespacio generado por el conjunto $S = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$

y es denotado por $Span(S)$ o $Span(v_1, v_2, \dots, v_n)$

$$Span(S) = \{\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_n v_n \,/\, \alpha_i \in \mathbb{K}, i = 1, \dots, n\} \subseteq V$$

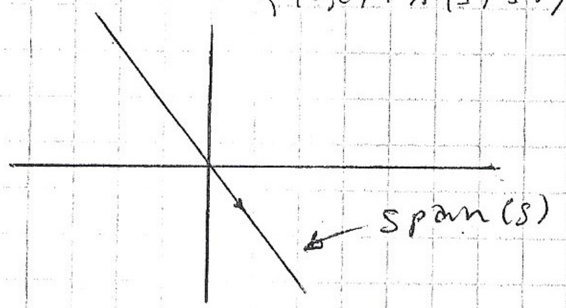
③ Si para $S = \{v_1, \dots, v_n\} \in V$ se cumple que

$$Span(S) = V$$

se dice que S es un conjunto de generadores de V o $\{v_1, \dots, v_n\}$ genera al espacio V.

Ejemplo: En $\mathbb{R}^2$. Sea $S = \{(1,-1)\}$

$$Span(S) = \{\lambda(1,-1) \,/\, \lambda \in \mathbb{R}\}$$
$$= \{(0,0) + \lambda(1,-1) \,/\, \lambda \in \mathbb{R}\}$$



- Sea $S = \{(-1,+3), (3,-9)\}$

$$Span(S) = \{\alpha(-1,+3) + \beta(3,-9) \,/\, \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$$
$$= \{\alpha(-1,3) - 3\beta(-1,3) \,/\, \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$$

$= \{ \underbrace{(\alpha - 3\beta)}(-1,3) \,/\, \alpha, \beta \in \mathbb{R} \}$

$= \{ t.(-1,3) / t \in \mathbb{R} \}$ ← Span(S)

• Sea $S = \{(1,0),(0,1)\}$

$Span(S) = \{ \alpha(1,0) + \beta(0,1) / \alpha, \beta \in \mathbb{R} \}$

$= \{ (\alpha, \beta) / \alpha, \beta \in \mathbb{R} \} = \mathbb{R}^2$

$\therefore S = \{(0,1),(1,0)\}$ es un generador de $\mathbb{R}^2$.

Ejemplo: Sea $S = \{(-1,2),(0,3)\}$

Pruebe que S es un generador de $\mathbb{R}^2$

debemos probar que

$Span(S) = \mathbb{R}^2$

$\subseteq$

$\supseteq$

"$\subseteq$": $Span(S) = \{ \underbrace{\underbrace{\alpha \underbrace{(-1,2)}_{\in \mathbb{R}^2}}_{\in \mathbb{R}^2} + \underbrace{\beta \underbrace{(0,3)}_{\in \mathbb{R}^2}}_{\in \mathbb{R}^2}}_{\in \mathbb{R}^2} / \alpha, \beta \in \mathbb{R} \} \subseteq \mathbb{R}^2$

"$\supseteq$": Sea $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ (fijo y arb)

Hallamos $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tal que:

$w = (x,y) = \alpha \underbrace{(-1,2)}_{u} + \beta(0,3)$

$\langle w, u^\perp \rangle = \langle \alpha u + \beta v, u^\perp \rangle = \alpha \cancel{\langle u, u^\perp \rangle} + \beta \langle v, u^\perp \rangle$

$\beta = \dfrac{\langle w, u^\perp \rangle}{\langle v, u^\perp \rangle}$

$= \dfrac{\langle (x,y), (-2,-1) \rangle}{\langle (0,3), (-2,-1) \rangle}$

$\beta = \dfrac{-2x - y}{-3} = \dfrac{2x+y}{3} \in \mathbb{R}$

Analogamente se tiene:

$\alpha = \dfrac{\langle w, v^\perp \rangle}{\langle u, v^\perp \rangle}$

$= \dfrac{\langle (x,y), (-3,0) \rangle}{\langle (-1,2), (-3,0) \rangle}$

$= \dfrac{-3x}{3}$

$\alpha = -x \in \mathbb{R}$

$\therefore (x,y) = (-x)(-1,2) + \left(\dfrac{2x+y}{3}\right)(0,3) \in Span(S)$

$\therefore \mathbb{R}^2 \subseteq Span(S)$

Halle $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tal que

$(-5,4) = \alpha(-1,2) + \beta(0,3)$

$\alpha = -(-5) = 5$

$\beta = \dfrac{2(-5)+4}{3} = -2$

$\rightarrow (-5,4) = 5(-1,2) + (-2)(0,3)$

Sea V un esp. vectorial sobre $\mathbb{K}$

$S := \{v_1, \dots, v_n\} \subseteq V$

$$\mathrm{Span}(S) = \{\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_n v_n \,/\, \alpha_i \in \mathbb{K}, i = 1, 2, \dots n\} \subseteq V$$

Subespacio de V.

Si $\mathrm{span}(S) = V$ se dice que S es un conj. generador de V o que S genera V.

Definición Sea V un $\mathbb{K}$-espacio vectorial. Los vectores $\{v_1, v_2, \dots, v_n\} \subseteq V$ se dice que son linealmente dependientes (l.d) si existen $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in \mathbb{K}$ no todos nulos tal que

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_n v_n = 0 \leftarrow \text{vector nulo en } V.$$

Se dirán linealmente independientes (l.i.) si no son l.d. Es decir

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_n v_n = 0 \;(\text{vector nulo en } V) \Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0 \leftarrow 0 \in \mathbb{K}$$

Ejemplo: En $\mathbb{R}^2$. Digan si los sgtes conjuntos son l.i. o l.d.

a) $\{(1,0), (0,1), (-1,1)\}$

b) $\{(-2,3), (1,1)\}$

c) $\{(1,1), (-1,-1)\}$

d) $\{(0,1)\}$

Sol:

a) Hallemos $\alpha, \beta, \theta \in \mathbb{R}$ tal que:

$$\alpha(1,0) + \beta(0,1) + \theta(-1,1) = (0,0)$$

$\rightarrow \alpha - \theta = 0$, $\beta + \theta = 0$ $\rightarrow \alpha = -\beta = \theta$

Si $\theta \in \mathbb{R} - \{0\}$ se tiene que $\{(1,0), (0,1), (-1,1)\}$ son l.d.

b) Hallemos $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

$$\alpha(-2,3) + \beta(1,1) = (0,0)$$

$-2\alpha + \beta = 0$, $3\alpha + \beta = 0$ $\Rightarrow \beta = 2\alpha \rightarrow \alpha = 0 \rightarrow \beta = 0$ $\Rightarrow \{(-2,3), (1,1)\}$ son l.i.

c) $(-1,-1) = -1(1,1)$

$\rightarrow \underset{\neq 0}{(1)}(-1,-1) + \underset{\neq 0}{(-1)}(1,1) = (0,0) \rightarrow \{(-1,-1), (1,1)\}$ son l.d

d) $\alpha(0,1) = (0,0)$

$\alpha = 0$

$\{0,1\}$ es l.i.

Ejemplo: Sean $u, v \in V$ y V un esp. vectorial real

Si $\{u, v\}$ son l.i ¿$\{\underbrace{2u-v}_{w_1}, \underbrace{v-u}_{w_2}\}$ son l.i?

Hallaremos $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tal que

$$\alpha w_1 + \beta w_2 = 0$$
$$\alpha(2u-v) + \beta(v-u) = 0$$
$$(2\alpha - \beta)u + (\beta - \alpha)v = 0$$
$$\Rightarrow 2\alpha - \beta = 0 \ \wedge \ \beta - \alpha = 0$$

$$(+)\downarrow \begin{array}{l} 2\alpha - \beta = 0 \\ \beta - \alpha = 0 \\ \hline \alpha = 0 \Rightarrow \beta = 0 \end{array}$$

$\blacktriangle$ $\{w_1, w_2\}$ son l.i.

Ejemplo: En $\mathbb{R}^2$. Sea $u \in \mathbb{R}^2$ no nulo.

¿$\{u, u^\perp\}$ son l.i?

Hallaremos $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tal que

$$\alpha u + \beta u^\perp = 0$$
$$\langle \alpha u + \beta u^\perp, u^\perp \rangle = \langle 0, u^\perp \rangle = 0$$
$$\alpha \langle u, u^\perp \rangle + \beta \langle u^\perp, u^\perp \rangle = 0$$
$$\beta \cdot \underbrace{\|u^\perp\|^2}_{\neq 0} = 0 \Longrightarrow \beta = 0$$

$$\langle \alpha u + \beta u^\perp, u \rangle = \langle 0, u \rangle = 0$$
$$\alpha \langle u, u \rangle + \beta \langle u^\perp, u \rangle = 0$$
$$\alpha \underbrace{\|u\|^2}_{\neq 0} = 0 \Rightarrow \alpha = 0$$

$\{u, u^\perp\}$ son l.i.

Ejercicio: En $\mathbb{R}^2$ sean $u, v \in \mathbb{R}^2$ no nulo.

Pruebe que:

$u \parallel v \longleftrightarrow \{u, v\}$ son l.d.

(o $u \nparallel v \longleftrightarrow \{u, v\}$ son l.i.)

Definición: Sea V un $\mathbb{K}$-espacio vectorial y $S \subseteq V$ no vacío. Decimos que S es una base de V si S es un conjunto linealmente independiente y además genera V.

Es decir:

$S \subseteq V$ es una base de V $\Longleftrightarrow \begin{cases} \cdot\, S \text{ es l.i.} \\ \cdot\, \operatorname{Span}(S) = V \end{cases}$

Ejemplo: Sea $S = \{(-1,2), (2,1)\} \subseteq \mathbb{R}^2$

¿S es una base de $\mathbb{R}^2$?

· S es l.i:

Como $(-1,2) \nparallel (2,1)$ entonces

$S = \{(-1,2), (2,1)\}$ es l.i. ✓

· $\operatorname{Span}(S) = \mathbb{R}^2$:

"$\subseteq$" $\operatorname{Span}(S) = \{\underbrace{\alpha(-1,2) + \underbrace{\beta(2,1)}_{\in \mathbb{R}^2}}_{\in \mathbb{R}^2} / \alpha, \beta \in \mathbb{R}\} \subseteq \mathbb{R}^2$ ✓

"$\supseteq$": Sea $u = (x,y) \in \mathbb{R}^2$ (fijos y arb). Hallaremos $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tal que: $(x,y) = \alpha(-1,2) + \beta(2,1)$

Sabemos que:

$$\alpha = \frac{\langle (x,y), (-1,2) \rangle}{\langle (-1,2), (-1,2) \rangle} = \frac{2y-x}{5}$$

$(-1,2)^{\perp}$

$$\beta = \frac{\langle (x,y), (-2,-1) \rangle}{\langle (2,1), (-2,-1) \rangle} = \frac{-2x-y}{-5} = \frac{2x+y}{5}$$

Como: $u = (x;y) = \left(\frac{2y-x}{5}\right)(-1,2) + \left(\frac{2x+y}{5}\right)(2,1) \in Span(S)$

$\therefore u \in Span(S)$

$\therefore \mathbb{R}^2 \subseteq Span(S)$

$\Rightarrow S$ genera $\mathbb{R}^2$ //

$\therefore S$ es una base de $\mathbb{R}^2$ //

Ejercicio: Pruebe que $\{(1,0),(0,1)\}$ es una base de $\mathbb{R}^2$ (llamada base canónica)

Obs: Un espacio vectorial tiene varias bases.

Ejemplo: Sean V un espacio vectorial real y $\{u,v\} \subseteq V$ no nulos.
Si $\{u,v\}$ es una base de V.

a) ¿$\{2u-v, v-u\}$ es una base de V?
b) ¿$\{2u-v, v-u, u\}$ es una base de V?

a) ¿$S = \{2u-v, v-u\}$ es base de V?

• ¿S es l.i?

Por el ejemplo anterior se probó que S es l.i/

• ¿S genera V?

$$Span(S) = \{\alpha(2u-v) + \beta(v-u) \mid \alpha,\beta \in \mathbb{R}\}$$
$$= \{\underbrace{(2\alpha-\beta)}_{s}u + \underbrace{(\beta-\alpha)}_{t}v \mid \alpha,\beta \in \mathbb{R}\}$$
$$= \{s.u + t.v \mid s,t \in \mathbb{R}\} = Span(\{u,v\})$$
$$= V.$$

$Span(S) = Span(\{u,v\})$

$(\subseteq)$

$(\supseteq)$

"$\subseteq$": Sea $w \in Span(S)$, entonces $\exists\, \alpha,\beta \in \mathbb{R}$ tal que:

$$w = \alpha(2u-v) + \beta(v-u)$$
$$= \underbrace{(2\alpha-\beta)}_{\in\mathbb{R}}u + \underbrace{(\beta-\alpha)}_{\in\mathbb{R}}v \in Span\{(u,v)\}$$

$\therefore Span(S) \subseteq Span\{(u,v)\}$

"$\supseteq$" Sea $w \in Span(\{u,v\})$ entonces $\exists\, \alpha,\beta \in \mathbb{R}$.

$$w = \alpha u + \beta v$$

"$\supseteq$" Hallaremos $\theta, \gamma \in \mathbb{R}$ tal que.

$$\alpha u + \beta v = \theta(2u-v) + \gamma(v-u)$$
$$(2\theta-\gamma)u + (\gamma-\theta)v = \alpha u + \beta v$$
$$(2\theta-\gamma-\alpha)u + (\gamma-\theta-\beta)v = 0$$

Por ser $\{u,v\}$ base de $V \Rightarrow \{u,v\}$ son l.i.

$\Rightarrow 2\theta - \gamma - \alpha = 0 \quad \Rightarrow \alpha = 2\theta - \gamma$

$\gamma - \theta - \beta = 0 \quad \Rightarrow \beta = \gamma - \theta$

$\alpha - \beta = 3\theta \longrightarrow \theta = \dfrac{\alpha-\beta}{3}$

Sean $\{u, v\}$ l.i.
Si $\alpha u + \beta v = a u + b v$
Pruebe que
$\alpha = a \wedge \beta = b$

$\gamma = \beta + \theta$
$= \beta + \dfrac{\alpha-\beta}{3}$
$= \dfrac{2\beta+\alpha}{3}$

$\Rightarrow W = \underbrace{\left(\dfrac{\alpha-\beta}{3}\right)}_{\in \mathbb{R}}(2u-v) + \underbrace{\left(\dfrac{2\beta+\alpha}{3}\right)}_{\in \mathbb{R}}(v-u) \in Span(S)$

$\blacktriangle$ $Span(\{u,v\}) \subseteq Span(S)$

$\therefore Span(S) = Span(\{u,v\}) = V$

Por ser base

$\blacktriangle$ S es base de V ///

Practica Dirigida N° 2

* Sea $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \ldots + \alpha_n v_n = 0$

decimos que es l.i si y solo si
$\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_n = 0$
Caso contrario diremos que es l.d.

2. Sean $v_1, v_2 \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ dos vectores

($\Rightarrow$) Si v_1, v_2 son l.d
entonces existen $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$, donde al menos uno de ellos es diferente de cero, tal que
$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 = 0$

$\left(\begin{array}{l} v_1 = (1,2) \;;\; v_2 = (2,4) \\ \quad 2v_1 + (-1)v_2 = 0 \end{array} \right)$

Supongamos que $\alpha_1 \neq 0$
$\Rightarrow \alpha_1 v_1 = -\alpha_2 v_2$
$\Rightarrow v_1 = \left(\dfrac{-\alpha_2}{\alpha_1}\right) v_2 \Rightarrow v_1 // v_2$

($\Leftarrow$) Supongamos que $v_1 // v_2$
si existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que
$v_1 = \lambda v_2$ o $v_2 = \lambda v_1$.
$\Rightarrow$ si $v_1 = \lambda v_2$
$\Rightarrow (1)v_1 + (-\lambda v_2) = 0 \Rightarrow v_1$ y v_2 son l.d.

7. Si $v_1, v_2, \ldots, v_m$ son l.i
mostremos que $v_1, v_2 - v_1, v_3 - v_1, \ldots, v_m - v_1$ es l.i
$\alpha_1 v_1 + \alpha_2(v_2 - v_1) + \alpha_3(v_3 - v_1) + \ldots + \alpha_m(v_m - v_1) = 0$
$(\alpha_1 - \alpha_2 - \alpha_3 - \ldots \alpha_m)v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3 + \ldots + \alpha_m v_m = 0$
como $v_1, v_2, \ldots, v_m$ son l.i.

$\Longrightarrow \alpha_1 - \alpha_2 - \alpha_3 - \cdots - \alpha_m = 0$

$\alpha_2 = 0$

$\alpha_3 = 0$

$\vdots$

$\alpha_m = 0$

$\Longrightarrow \alpha_1 = 0 \Rightarrow \{v_1, v_2 - v_1, v_3 - v_1, \dots, v_m - v_1\}$ son l.i.

5. $S = \{(1, t+1), (t-1, t)\}$ sea base, entonces S un conjunto l.i.

$\alpha_1(1, t+1) + \alpha_2(t-1, t) = 0$

$(\alpha_1 + \alpha_2(t-1), \alpha_1(t+1) + \alpha_2 t) = 0$

$\Longrightarrow \begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2(t-1) = 0 \\ \alpha_1(t+1) + \alpha_2 t = 0 \end{cases} \quad \Delta = \begin{vmatrix} 1 & (t-1) \\ (t+1) & t \end{vmatrix}$

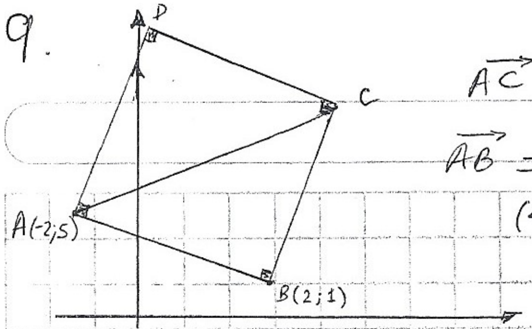
$= t - t^2 + 1$

$= -(t^2 - t - 1) \neq 0$

$t \neq \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$

$\Rightarrow S$ es l.i. $\forall t \in \mathbb{R} \setminus \{\frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}\}$

9.



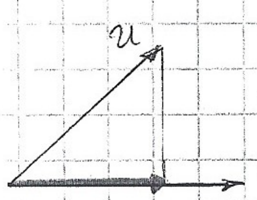
$\vec{AC} = \lambda(5;1)$

$\vec{AB} = (4,-4) = \text{Proy}_{\vec{AB}} \vec{AC}$

$(4,-4) = \frac{\langle \lambda(5,1), (4,-4)\rangle (4,-4)}{32}$

$(4,-4) = \frac{16\lambda(4,-4)}{32}$

$\lambda = 2$



$\text{Proy}_v u = \frac{\langle u, v\rangle v}{\|v\|^2}$, $\text{comp}_v u = \frac{\langle u, v\rangle}{\|v\|}$

$\rightarrow \vec{AC} = 2(5,1) = (10,2)$

$C - A = (10,2)$

$C = (-2,5) + (10,2) = (8,7)$

$\vec{AD} \parallel \vec{BC}$ y $\|\vec{AD}\| = \|\vec{BC}\|$

$\Rightarrow \vec{AD} = \lambda \vec{BC} \Rightarrow \|\vec{AD}\| = \|\lambda \vec{BC}\|$

$\|\vec{AD}\| = |\lambda| . \|\vec{BC}\|$

$|\lambda| = 1 \Rightarrow \lambda = \pm 1$

$\Rightarrow$ de la condición $\lambda = 1$

$\Rightarrow \vec{AD} = (6,6)$

$D = A + (6,6)$

$D = (4,11)$

10. $S = \{(0,1), (2,3), (-2,5)\}$

$\alpha_1(0,1) + \alpha_2(2,3) + \alpha_3(-2,5) = 0$

$\rightarrow 2\alpha_2 - 2\alpha_3 = 0 \longleftrightarrow \alpha_2 = \alpha_3 = 1$

$\alpha_1 + 3\alpha_2 + 5\alpha_3 = 0 \rightarrow \alpha_1 = -8$

dim(V) : dimensión de V

#{S} : número de elementos de S.

V un espacio vect

$S = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\} \subseteq V$ es una base de V $\Longleftrightarrow \begin{cases} \bullet\ S \text{ es l.i} \\ \bullet\ \text{Span}(S)=V \end{cases}$

Práctica Dirigida # 2

31) Sea $B = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ una base de un esp vect V (de dimensión 4)

¿ $S = \{\overbrace{2v_1 + 3v_2}^{w_1}, \overbrace{v_3 - v_4}^{w_2}, \overbrace{v_1 - v_3 + 3v_4}^{w_3}, \overbrace{v_4}^{w_4}\}$ es una base de V?

dim(V) = #{S}

donde S es una base de V.

• ¿ S es l.i?

Hallemos $\alpha, \beta, \theta, \gamma \in \mathbb{R}$ tal que

$$\alpha w_1 + \beta w_2 + \theta w_3 + \gamma w_4 = 0$$

$$\alpha(2v_1 + 3v_2) + \beta(v_3 - v_4) + \theta(v_1 - v_3 + 3v_4) + \gamma(v_4) = 0$$

$$(2\alpha + \theta)v_1 + (3\alpha)v_2 + (\beta - \theta)v_3 + (3\theta - \beta + \gamma)v_4 = 0$$

Como $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ es base de V, entonces son l.i.

$$\Longrightarrow \begin{cases} 2\alpha + \theta = 0 \\ 3\alpha = 0 \\ \beta - \theta = 0 \\ 3\theta - \beta + \gamma = 0 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} \theta = 0 \\ \alpha = 0 \\ \beta = 0 \\ \gamma = 0 \end{cases}$$

∴ $\alpha = \beta = \theta = \gamma = 0$

∴ $\{w_1, w_2, w_3, w_4\}$ son l.i.

• ¿ Span(S) = V ?

"$\subseteq$": Sea $w \in \text{Span}(S)$ (fijo y arb.) entonces $\exists\, \alpha, \beta, \theta, \gamma \in \mathbb{R}$ tal que

$$w = \alpha w_1 + \beta w_2 + \theta w_3 + \gamma w_4$$

$$w = \alpha(2v_1 + 3v_2) + \beta(v_3 - v_4) + \theta(v_1 - v_3 + 3v_4) + \gamma v_4$$

$$w = \underbrace{(2\alpha + \theta)}_{\in \mathbb{R}} v_1 + \underbrace{(3\alpha)}_{\in \mathbb{R}} v_2 + \underbrace{(\beta - \theta)}_{\in \mathbb{R}} v_3 + \underbrace{(3\theta - \beta + \gamma)}_{\in \mathbb{R}} v_4 \in \text{Span}(B)$$

Como B es una base de V entonces Span(B) = V

$\Longrightarrow w \in V$

∴ Span(S) $\subseteq$ V

"$\supseteq$": Sea $w \in V = \text{Span}(B)$ (fijo y arb.)

$\Longrightarrow \exists\, r, s, t, m \in \mathbb{R}$ tal que

$$w = r v_1 + s v_2 + t v_3 + m v_4$$

Hallar $\alpha, \beta, \theta, \gamma \in \mathbb{R}$

$$w = \alpha w_1 + \beta w_2 + \theta w_3 + \gamma w_4$$
$$= (2\alpha + \theta)v_1 + (3\alpha)v_2 + (\beta - \theta)v_3 + (3\theta - \beta + \gamma)v_4$$

Esto sucede si:

$$2\alpha + \theta = r$$
$$3\alpha = s \longrightarrow \boxed{\alpha = \frac{s}{3}}$$
$$\beta - \theta = t$$
$$3\theta - \beta + \gamma = m$$

$$\boxed{\theta = r - \frac{2s}{3}}$$

$$\boxed{\beta = t + r - \frac{2s}{3}}$$

$$\gamma = m + \left(t + r - \frac{2s}{3}\right) - 3r + 2s$$

$$\boxed{\gamma = m + t - 2r + \frac{4s}{3}}$$

∴ $w = \frac{s}{3}(2v_1 + 3v_2) + \left(t + r - \frac{2s}{3}\right)(v_3 - v_4) + \left(r - \frac{2s}{3}\right)(v_1 - v_3 + 3v_4)$

$\quad + \left(m + t - 2r + \frac{4s}{3}\right) v_4$

$$= \underbrace{\frac{s}{3}}_{\in \mathbb{R}}(w_1) + \underbrace{\left(t + r - \frac{2s}{3}\right)}_{\in \mathbb{R}} w_2 + \underbrace{\left(r - \frac{2s}{3}\right)}_{\in \mathbb{R}} w_3 + \underbrace{\left(m + t - 2r + \frac{4s}{3}\right)}_{\in \mathbb{R}} w_4 \in \text{Span}(S)$$

$V \subseteq \text{Span}(S)$

$\therefore V = \text{Span}(S)$ ✓

$\triangle$ S es una base de V $_{//}$.

(11.) b) Sean $\{u, v, w\} \subseteq \mathbb{R}^2$ probar que son l.d.

I CASO: $\{u, v\}$ son l.d.

$\exists\ \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ambos no nulos tal que

$$\alpha u + \beta v = 0$$

$$\alpha u + \beta v + (0) w = 0$$

Como α y β ambos son no nulos

$\Rightarrow \{u, v, w\}$ son l.d. ✓

II CASO: $\{u, v\}$ son l.i. $\Rightarrow \{u, v\}$ es una base de $\mathbb{R}^2$

ejercicio

Como $w \in \mathbb{R}^2 = \text{Span}(\{u, v\})$

$\Rightarrow \exists\ \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tal que

$$w = \alpha u + \beta(v)$$

$$\alpha u + \beta v + \underbrace{(-1)}_{\neq 0} w = 0$$

$\Rightarrow \{u, v, w\}$ son l.d. $_{//}$.

(B2) $\beta = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ base de V con $\langle , \rangle$.

y $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{K}$

Sea $w \in V$ tal que

$$\langle w, v_i \rangle = \alpha_i \quad , \forall i = 1, \ldots, n.$$

Probar que w es único.

Supongamos que existe otro $v \in V$ tal que

$$\langle v, v_i \rangle = \alpha_i \ , \forall i = 1, \ldots, n$$

Para cada $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$

$$\langle w, v_i \rangle = \alpha_i = \langle v, v_i \rangle$$

$$\langle \underbrace{w - v}_{u}, v_i \rangle = 0$$

Sea $\{v_1, \ldots, v_n\}$ base de V

$\Rightarrow$ Si $\langle u, v_i \rangle = 0 \quad , \forall i = 1, \ldots, n \ \ldots (*)$

$\Rightarrow u = 0$

Como $u \in V = \text{Span}(\{v_1, \ldots, v_n\})$

$\Rightarrow \exists\ \theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_n \in \mathbb{K}$ tal que

$$u = \theta_1 v_1 + \theta_2 v_2 + \ldots + \theta_n v_n.$$

$\langle u, u \rangle = \langle \theta_1 v_1 + \theta_2 v_2 + \ldots + \theta_n v_n, u \rangle$

$= \theta_1 \cancel{\langle v_1, u \rangle} + \theta_2 \cancel{\langle v_2, u \rangle} + \ldots + \theta_n \cancel{\langle v_n, u \rangle}$

$= 0.$

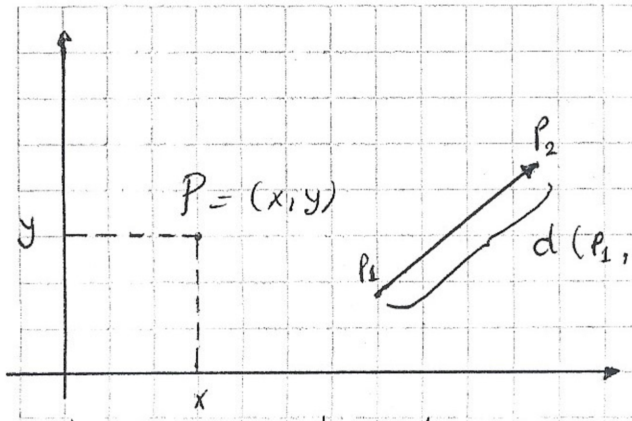
$\triangle$ $\langle u, u \rangle = 0 \Rightarrow u = 0$

$\Rightarrow w - v = 0$

$\Rightarrow w = v_{//}$.

Geometría Vectorial en el plano

El plano Euclídiano $\mathbb{R}^2 = \{(x,y) / x, y \in \mathbb{R}\}$



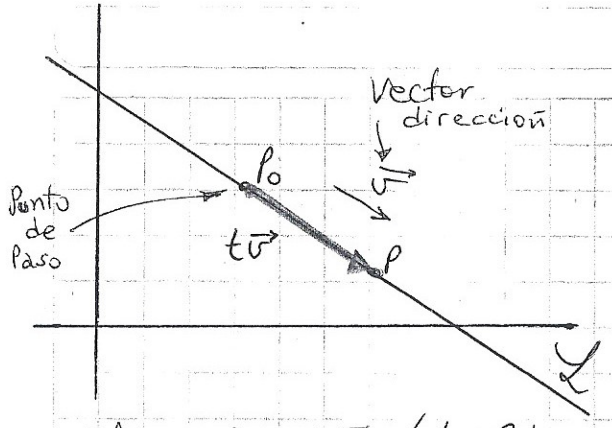
donde cada elemento $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ se le denomina punto.

Definición: La distancia entre dos puntos P_1 y $P_2 \in \mathbb{R}^2$ es igual a la longitud del vector $\overrightarrow{P_1P_2}$, es decir

$$d(P_1, P_2) = \|\overrightarrow{P_1 P_2}\| = \|P_2 - P_1\|$$

Definición: Un conjunto $\mathcal{L} \subseteq \mathbb{R}^2$ se le llama recta, si existe un punto $P_0 \in \mathbb{R}^2$ y un vector $\vec{v} = (a;b)$ no nulo tal que

$$\mathcal{L} = \{P = (x,y) \in \mathbb{R}^2 / P = P_0 + t\vec{v}, t \in \mathbb{R}\}$$



"La recta que pasa por P_0 y es paralela o con dirección $\vec{v}$"

$$\mathcal{L} = \{P_0 + t\vec{v} / t \in \mathbb{R}\}$$

Llamada también la forma vectorial de la recta denotada por $\mathcal{L} = \mathcal{L}(P_0, \vec{v})$

Proposición: Sea el conjunto

$$\mathcal{L}_{(a,b,c)} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / ax + by + c = 0\}$$

Si $\mathcal{L}_{(a,b,c)} \neq \emptyset$ y $\mathcal{L}_{(a,b,c)} \neq \mathbb{R}^2$ entonces $\mathcal{L}_{(a,b,c)}$ es una recta.

demostración: tenemos los sgtes casos para "b"

I caso: $b = 0$ entonces

$$ax + by + c = 0 \Longrightarrow x = -\frac{c}{a}$$

AFIRMO $a \neq 0$

$$\left(\text{Si } a = 0 \Longrightarrow c = 0 \Longrightarrow \mathcal{L}_{(0;0;0)} = \mathbb{R}^2 \; (\Rightarrow\Leftarrow) \right)$$

$$\Rightarrow \mathcal{L}(a,0,c) = \{(x,y) / x = \frac{-c}{a}, y \in \mathbb{R}\}$$

$$= \{(\frac{-c}{a}, y) / y \in \mathbb{R}\}$$

$$= \{\underbrace{(-\frac{c}{a}, 0)}_{P_0} + y.\underbrace{(0,1)}_{\vec{v}} / y \in \mathbb{R}\}$$

$$= \mathcal{L}\left((-\frac{c}{a}, 0), \overrightarrow{(0,1)}\right)$$

$\Rightarrow \mathcal{L}(a,0,c)$ es una recta

II CASO: $b \neq 0$

Sea $P_0 = (x_0; y_0) \in \mathcal{L}_{(a,b,c)}$ (fijo y arb.) y $\vec{v} = (-b, a)$ no nulo.

entonces:

$$a x_0 + b y_0 + c = 0 \quad \cdots (1)$$

AFIRMO: $\mathcal{L}(a,b,c) = \mathcal{L}(P_0, \vec{v})$

"$\subseteq$": Sea $(x,y) \in \mathcal{L}(a,b,c)$ (fijo y arb.) entonces

$$ax + by + c = 0 \quad \cdots (2)$$

de (1) y (2)

$$a x_0 + b y_0 = a x + b y$$

$$a(\cancel{x_0}x - x_0) + b(y - y_0) = 0$$

$$\langle (a,b), (x-x_0, y-y_0) \rangle = 0$$

$$(x - x_0, y - y_0) \parallel (-b, a)$$

$\Rightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ tal que

$$(x - x_0; y - y_0) = \lambda(-b, a)$$

$$(x, y) = P_0 + \lambda \vec{v} \in \mathcal{L}(P_0, \vec{v})$$

$$\therefore \mathcal{L}_{(a,b,c)} \subseteq \mathcal{L}(P_0, \vec{v})$$