P5 | $\langle \lambda u, v\rangle = \lambda\langle u, v\rangle, \ \forall u, v\in V, \ \forall\lambda\in\mathbb{R}$

Sean $u=(x,y)$, $v=(a,b)\in\mathbb{R}^2$ y $\lambda\in\mathbb{R}$ (fijos y arb)

$$\langle \lambda u, v\rangle = \langle \lambda(x,y), (a,b)\rangle = \langle(\lambda x, \lambda y); (a,b)\rangle$$
$$= \lambda x a + \lambda y b = \lambda(xa+yb)$$
$$= \lambda\langle(x;y);(a;b)\rangle$$
$$= \lambda\langle u; v\rangle$$

▲ $\langle\lambda u; v\rangle = \lambda\langle u, v\rangle, \ \forall u, v\in\mathbb{R}^2, \ \forall\lambda\in\mathbb{R}$

$\therefore$ $\langle\,,\rangle$ es un Producto interno (Pi) en $\mathbb{R}^2$.

Obs: Sea V un espacio vectorial real con producto interno $\langle\,,\rangle$

La operación
$$\|u\| = \sqrt{\langle u, u\rangle}, \ \forall u\in V$$
es una norma en V

Ejercicio

Todo producto interno en V induce una norma

Demostrar

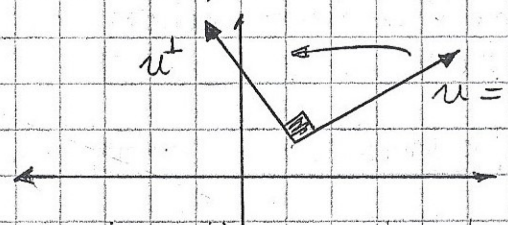
Definición: Sea V un espacio vectorial real con producto interno $\langle\,,\rangle$

Decimos que $u, v\in V$ son ortogonales (o perpendiculares) si $\langle u, v\rangle = 0$ y lo denotamos por $u\perp v$

Obs: En $V=\mathbb{R}^2$ con producto interno canónico $\langle\,,\rangle$.

Para $u=(a;b)\in\mathbb{R}^2$ definimos:
$$u^\perp = (-b; a)$$
que cumple
$$\langle u; u^\perp\rangle = 0$$

esto genera un cuadrado c/ $\langle\,,\rangle$ averiguar



$\|u^\perp\| = \|u\|$

el vector $u^\perp$ es llamado el ortogonal de u.

Proposición: Sea $\mathbb{R}^2$ con producto interno canónico (usual o estándar). Sean $u, v\in\mathbb{R}^2$ no nulos, se cumple:

a) $(u+v)^\perp = u^\perp + v^\perp$

b) $u\perp v \Leftrightarrow u \parallel v^\perp$

c) $\|u\| = \|u^\perp\|$

demostración Ejercicio

($\rightarrow$) Sean $u=(a;b)$, $v=(\alpha,\beta)$ no nulos

$u\perp v \Rightarrow \langle u, v\rangle = 0$
$$a\alpha + b\beta = 0$$

Como v no nulo $\Rightarrow \alpha\neq 0 \vee \beta\neq 0$

sin pérdida de generalidad suponer $\alpha\neq 0$

$a = \left(\frac{-\beta}{\alpha}\right)b \Longrightarrow \underbrace{(a;b)}_{u} = \left(-\frac{\beta}{\alpha}b; b\right) = \underbrace{\frac{b}{\alpha}}_{\neq 0}(-\beta;\alpha) = \lambda v^\perp$

$\therefore u \parallel v^\perp$

(←) Continuar la demostración

Proposición: Sea V un espacio vectorial real con P.i $\langle , \rangle$. Dados $u, v \in V$ se cumple:

$$|\langle u,v\rangle| \leq \|u\|\|v\| \quad \text{(Desigualdad de Schwarz)}$$

demostrar: tenemos los siguientes casos:

I CASO $v = \vec{0}$

$$|\langle u,v\rangle| = |\langle u,0\rangle| = 0 = \|u\|.0 = \|u\|\|v\|$$

II. CASO $v \neq \vec{0} \Rightarrow \|v\| \neq 0$

Consideremos:

$$\lambda = \frac{\langle u,v\rangle}{\|v\|^2} \in \mathbb{R}$$

y

$$w = u - \lambda v \in V$$

AFIRMO: $\langle w,v\rangle = 0$

$$\begin{aligned} \cdot \langle w,v\rangle &= \langle u-\lambda v, v\rangle \\ &= \langle u,v\rangle - \lambda\langle v,v\rangle \\ &= \langle u,v\rangle - \lambda\|v\|^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \langle w,v\rangle &= \langle u,v\rangle - \left(\frac{\langle u,v\rangle}{\|v\|^2}\right)\|v\|^2 \\ &= \langle u,v\rangle - \langle u,v\rangle = 0 \end{aligned}$$

Hallemos:

$$\|u\|^2 = \langle u,u\rangle = \langle w+\lambda v, w+\lambda v\rangle$$

$$\|u\|^2 = \langle w,w\rangle + \lambda\langle w,v\rangle + \lambda\langle v,w\rangle + \lambda^2\langle v,v\rangle$$

$$\|u\|^2 = \|w\|^2 + \lambda^2\|v\|^2 \geq \lambda^2\|v\|^2$$

$$\|u\| \geq \left(\frac{\langle u,v\rangle}{\|v\|^2}\right)^2 \|v\|^2$$

$$\|u\|^2 \geq \frac{(\langle u,v\rangle)^2}{\|v\|^2}$$

$$\Longrightarrow (\langle u,v\rangle)^2 \leq \|u\|^2\|v\|^2$$

$$|\langle u,v\rangle| \leq \|u\|\|v\|$$

Proposición: Sean $u, v \in V$ con P.i $\langle , \rangle$ se cumple:

$$\|u+v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2 \longleftrightarrow \langle u,v\rangle = 0$$

demos:

$$\begin{aligned} (\Longrightarrow) \quad \|u+v\|^2 &= \langle u+v, u+v\rangle \\ &= \langle u,u\rangle + \langle u,v\rangle + \langle v,u\rangle + \langle v,v\rangle \\ &= \underbrace{\|u\|^2 + 2\langle u,v\rangle + \|v\|^2}_{\|u+v\|^2 \text{ (hipótesis)}} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \quad 2\langle u,v\rangle = 0$$

$$\langle u,v\rangle = 0$$

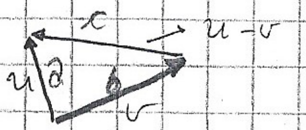
(⇐) Veamos que:

$$\|u+v\|^2 = \langle u+v, u+v\rangle$$
$$= \|u\|^2 + 2\underbrace{\langle u,v\rangle}_{0 \text{ (por hipótesis)}} + \|v\|^2$$

$$\|u+v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2$$

Ángulo entre vectores

Por la ley de Cosenos



Si a, b y c son las longitudes de los lados de un triángulo, se cumple:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\theta$$

y θ es el ángulo entre los lados de longitud a y b

En $V = \mathbb{R}^2$ (o $\mathbb{R}^3$) con P.i $\langle\,,\rangle$ canónico

$\|u\| = a$; $\|v\| = b$ y $\|u-v\| = c$

y θ el ángulo que forman los vectores u, v.

$$\theta = \measuredangle(u,v)$$

reemplazando en la fórmula de la ley de cosenos

$$\|u-v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2 - 2\|u\|\|v\|\cos\theta \ \ldots (1)$$

Como

$$\|u-v\|^2 = \langle u-v, u-v\rangle = \langle u,u\rangle - \langle u,v\rangle - \langle v,u\rangle + \langle v,v\rangle$$
$$= \|u\|^2 + \|v\|^2 - 2\langle u,v\rangle \ \ldots (2)$$

reemplazando (2) en (1):

se tiene

$$\langle u,v\rangle = \|u\|\|v\|\cos\theta$$

$$\Longrightarrow \cos\theta = \frac{\langle u,v\rangle}{\|u\|\|v\|}$$

$$\theta = \arccos\left(\frac{\langle u,v\rangle}{\|u\|\|v\|}\right)$$

- $(V,+,\cdot)$ es un $\mathbb{K}$ espacio vectorial $\Leftrightarrow$ } 10 Axiomas

- Sea $(V,+,\cdot)$ un $\mathbb{K}$ espacio vectorial.
  Si $W \subseteq V$ no vacío tal que $(W,+,\cdot)$ es un $\mathbb{K}$ esp vectorial es un subespacio de V.

- Sea $(V,+,\cdot)$ un $\mathbb{K}$ esp. vectorial
  $W \subseteq V$ es un subespacio de V $\Longleftrightarrow \begin{cases} u+v \in W \\ \cdot\, u \in W, \forall u \in W, \forall \end{cases}$

Práctica Dirigida #1

⑳ En $\mathbb{R}^2$

$U = \{(x,y) / x=0\} \subseteq \mathbb{R}^2$

$W = \{(x,y) / y=0\} \subseteq \mathbb{R}^2$

Son subespacios de $\mathbb{R}^2$

$U \cup W = \{(x,y)/x=0\} \cup \{(x,y)/y=0\}$

$= \{(x,y) / x=0 \vee y=0\}$

no es un espacio de $\mathbb{R}^2$

㉑ $S \cup T$ es un Subespacio de V $\Leftrightarrow S \subset T \vee T \subset S$

$(\Leftarrow)$ si $S \subset T \Rightarrow S \cup T = T$ son subespacios

si $T \subset S \Rightarrow S \cup T = S$

$(\Rightarrow)$ Supongamos $S \not\subset T \wedge T \not\subset S$

$\exists u \in S$ tal que $u \notin T$ ... (1)

$\exists v \in T$ tal que $v \notin S$

Como

$u \in S \subset S \cup T \Rightarrow u \in S \cup T$

$v \in T \subset S \cup T \Rightarrow v \in S \cup T$

$\xrightarrow{\text{Sup}} u+v \in S \cup T$ (1)

AFIRMO $u+v \notin T$

$u+v \notin S$

Pues, si $u+v \in T$ y $v \in T$

$u = u+v+(-v) \in T$ $(\Rightarrow\Leftarrow)$ (1)

si $u+v \in S \wedge u \in S$

$v = u+v+(-u) \in S$ $(\Rightarrow\Leftarrow)$

$\therefore u+v \notin T \cup S$ $(\Rightarrow\Leftarrow)$ ... (1)