FECHA
24 DE AGOSTO DEL 2016

Cuarta clase de Cálculo Vectorial

Prof:Juan Cribillero Aching

24/08/16

Teorema: Sean $u, v \in \mathbb{R}^2$ dos vectores en el plano y θ la medida del ángulo que forman los vectores u y v, entonces:

$$\langle u; v\rangle = \|u\| \, \|v\| \cos\theta$$

En el caso en que $u=\bar{0} \vee v=\bar{0}$: El teorema se cumple para cualquier $\theta \in \mathbb{R}$.

Prueba: Si $u=(0;0)$ o $v=(0;0)$ entonces $\langle u; v\rangle = 0$

$$\langle u; v\rangle = \|u\|\|v\| \cos\theta$$

Supongamos que $u \neq 0$ y $v \neq 0$. Sean α y β las medidas de los ángulos que forman u y v con el semieje positivo X

$$u = \|u\| (\cos\alpha, \operatorname{sen}\alpha) = (\|u\|\cos\alpha ; \|u\| \operatorname{sen}\alpha)$$

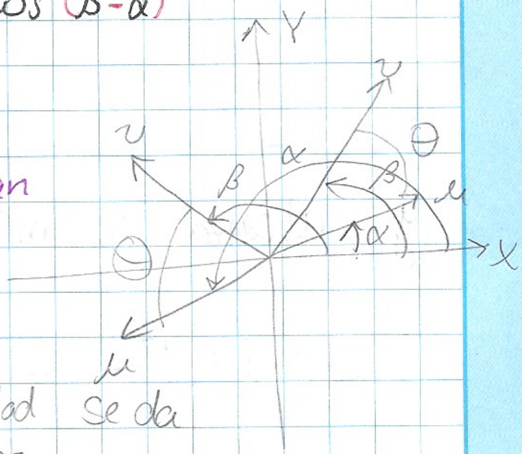
$$v = \|v\| (\cos\beta, \operatorname{sen}\beta) = (\|v\|\cos\beta ; \|v\| \operatorname{sen}\beta)$$

$$\langle u, v\rangle = \|u\| \|v\| \cos\alpha \cos\beta + \|u\|\|v\| \operatorname{sen}\alpha \operatorname{sen}\beta$$

$$= \|u\| \|v\| (\cos\alpha \cos\beta + \operatorname{sen}\alpha \operatorname{sen}\beta)$$

$$= \|u\| \|v\| \cos(\alpha - \beta) = \|u\| \|v\| \cos(\beta - \alpha)$$

$$\langle u; v\rangle = \|u\| \|v\| \cos\theta$$



Donde θ: medida del ángulo que forman u y v.

Corolario: Dados $u; v \in \mathbb{R}^2$,

$|\langle u; v\rangle| \leq \|u\|\|v\|$ y la igualdad se da si y solo si u y v son vectores paralelos.

Prueba: Sean $u, v \in \mathbb{R}^2$ y θ la medida del ángulo que forman u y v.

$$|\langle u; v\rangle| = \big|\, \|u\|\,\|v\| \cos\theta \,\big| \qquad \forall\ \theta \in \mathbb{R}$$

$$= \|u\|\,\|v\|\,|\cos\theta| \qquad |\cos\theta| \leq 1$$

$$|\langle u; v\rangle| \leqslant \|u\|\|v\|$$

Prueba alternativa: Sean $u, v \in \mathbb{R}^2$ es claro que si $v=0$ la desigualdad se cumple.

En el caso que $v \neq 0$ consideremos la función $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por:

$$g(t) = \|u - tv\|^2$$

$$= \langle u - tv, u - tv\rangle$$

$$= \langle u; u - tv\rangle + \langle -tv, u - tv\rangle$$

$$= \langle u - tv; u\rangle - t\langle u - tv, v\rangle$$

$$= \langle u, u\rangle - t\langle v, u\rangle - t\langle u, v\rangle + t^2\langle v, v\rangle$$

$$g(t) = \|u\|^2 - 2t\langle u, v\rangle + t^2\|v\|^2$$

g alcanza su mínimo en $t_0 = -\left(\dfrac{-2\langle u, v\rangle}{2\|v\|^2}\right) = \dfrac{+\langle u, v\rangle}{\|v\|^2}$

$$g(t_0) = \|u\|^2 - 2\left(\frac{\langle u, v\rangle}{\|v\|^2}\right) \times \langle u, v\rangle + \left(\frac{\langle u, v\rangle}{\|v\|^2}\right)^2 \times \|v\|^2$$

Desarrollando:

$$g(t_0) = \|u\|^2 - \frac{\langle u, v\rangle}{\|v\|^2}$$

Como $g(t) \geq 0$; entonces

$$\|u\|^2 - \frac{\langle u; v\rangle^2}{\|v\|^2} \geq 0$$

$$\|u\|^2 \geq \frac{\langle u; v\rangle^2}{\|v\|^2}$$

$$\Rightarrow \langle u; v\rangle^2 \leq \|u\|^2\|v\|^2$$

$$|\langle u; v\rangle| \leq \|u\|\|v\|$$

desigualdad de Cauchy - Schwarz.

La igualdad se da ~~como~~ cuando:

$$g(t) = \|u - tv\|^2 = 0$$

$$u - tv = 0$$

$$u = tv$$

Luego u y v son vectores paralelos.

Definición: Dos vectores $u, v \in \mathbb{R}^2$ se denominan ortogonales si $\langle u; v\rangle = 0$.

Corolario: Dos vectores $u, v \in \mathbb{R}^2$ no nulos son perpendiculares si y solo si $\langle u; v\rangle = 0$.

Prueba: Sean $u, v \in \mathbb{R}^2$ no nulos.

$$\langle u; v\rangle = 0 \Leftrightarrow \cos\theta = 0$$

$$\theta = \frac{\pi}{2}$$

$$\theta = \frac{3\pi}{2}$$

Ejemplo:

Sea $v = (2, 5) \in \mathbb{R}^2$, entonces $(-5; 2)$ $(10; -4)$ $(15; -6)$ son perpendiculares a v.

$\langle (2;5);\ (-5;2) \rangle = -10 + 10 = 0$

$\langle (2;5);\ (10;-4) \rangle = 20 - 20 = 0$

$\langle (2;5);\ (15;-6) \rangle = 30 - 30 = 0$

Dado $v = (x;y) \in \mathbb{R}^2$ definimos el ortogonal de v como

$v^{\perp} = (-y; x)$

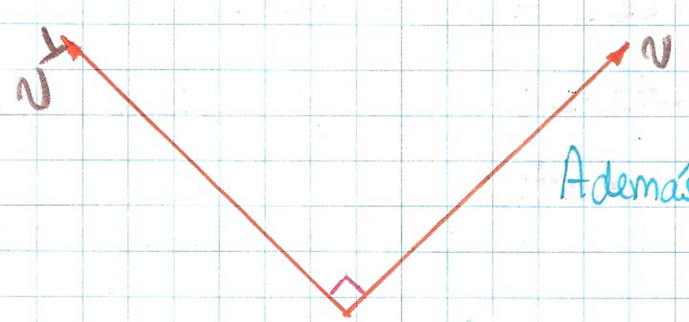
Es claro:

$$\langle v; v^{\perp} \rangle = x.-y + y.x = 0$$

$$\| v^{\perp} \| = \sqrt{(-y)^2 + x^2} = \| v \|$$

Geométricamente

$v^{\perp}$ es una rotación de $90°$ del vector v en sentido antihorario



Además $(v^{\perp})^{\perp} = -v$

Proyección ortogonal

Consideremos $u, v \in \mathbb{R}^2$, con $v \neq 0$.

Por lo anterior: $t_0 = \dfrac{\langle u, v \rangle}{\|v\|^2}$

minimiza a $g(t) = \|u - tv\|^2$

Denotemos: $w = t_0 v = \dfrac{\langle u, v \rangle}{\|v\|^2} v$

Entonces w es paralelo a v.

Además:

$\langle v; u-w \rangle = \langle v; u \rangle - \langle v; w \rangle$

$= \langle u; v \rangle - \langle v; \frac{\langle u, v \rangle}{\|v\|^2} . v \rangle$

$= \langle u; v \rangle - \frac{\langle u; v \rangle}{\cancel{\|v\|^2}} . \cancel{\langle v, v \rangle}$

$\langle v; u-w \rangle = 0$

Un vector tiene infinitos vectores ortogonales y estos, este familia de vectores son paralelos entre sí.

Es decir: $u-w$ es paralelo a $v^\perp$.

Así tenemos la siguiente descomposición del vector u

$$u = w + (u-w)$$

$$u = t_0 v + S_0 v^\perp$$

Donde S_0 existe pues $u-w$ es paralelo a $v^\perp$.

$\langle u, v^\perp \rangle = \langle t_0 . v + S_0 v^\perp; v^\perp \rangle = t_0 \cancel{\langle v; v^\perp \rangle}^{0} + S_0 \underbrace{\langle v^\perp; v^\perp \rangle}_{\|v^\perp\|^2}$

$$S_0 = \frac{\langle u; v^\perp \rangle}{\|v^\perp\|^2}$$

Definición: Sea $v \in \mathbb{R}^2$, no nulo. Dado $u \in \mathbb{R}^2$, se define la proyección ortogonal de u sobre v como el vector

$$\text{Proy}_v u = \frac{\langle u, v \rangle}{\|v\|^2} . v \quad \ldots (1)$$

Con esta definición se puede expresar el vector u

$$u = \text{Proy}_v u + \text{Proy}_{v^\perp} u$$

Luego:

$$\text{Proy}_{v^\perp} u = u - \text{Proy}_v u$$

De (1): $$\text{Proy}_{v}\, u = \frac{\langle u, v\rangle}{\|v\|} \times \frac{v}{\|v\|}$$

$$\text{Proy}_{v}\, u = \frac{\langle u, v^{\perp}\rangle}{\|v^{\perp}\|} \times \frac{v^{\perp}}{\|v^{\perp}\|}$$

Se observa que:

$\dfrac{v}{\|v\|}$ y $\dfrac{v^{\perp}}{\|v^{\perp}\|}$ Son vectores unitarios

Luego:

$$\|\text{Proy}_{v}\, u\| = \frac{|\langle u, v\rangle|}{\|v\|} \times 1$$

$$\|\text{Proy}_{v^{\perp}}\, u\| = \frac{|\langle u, v^{\perp}\rangle|}{\|v^{\perp}\|} \times 1$$

Definición: Sea $v \in \mathbb{R}^2$ no nulo. Dado $u \in \mathbb{R}^2$, se define la Componente ortogonal de u sobre v como el escalar

$$\text{Comp}_{v}\, u = \frac{\langle u, v\rangle}{\|v\|}$$