FECHA
16 DE AGOSTO DEL 2016

Primera clase de Cálculo Vectorial

Prof: Gonzalo Marca Castromonte

Martes 16 de agosto del 2016 | 16/08/16

Cálculo vectorial I

Esquema general
- * Espacio vectorial (10 axiomas)
- * Subespacio vectorial (2 axiomas)
- * Producto interno (5 axiomas)
- * Norma (4 axiomas)

Conjunto $\mathbb{R}^2$

definición (lleva implícito una bicondicional) Sea $\mathbb{R}$ el conjunto de los números reales.
(Toda definición de un objeto expresa la condición necesaria y suficiente para plantear la definición de tal objeto.)

$$\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(x, y) : x, y \in \mathbb{R}\}$$

Observación:

1. $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \Leftrightarrow [x \in \mathbb{R} \wedge y \in \mathbb{R}]$

2. Llamaremos al conjunto $\mathbb{R}$ como un cuerpo o campo.

Aprender métodos de demostración

A cada elemento de un cuerpo se le llama **escalar.**

En este curso se estudiara desde el punto de vista axiomático.

Espacio Vectorial

Clase

definición: Sea V un conjunto y K un cuerpo, con dos operaciones:

$$+ : V \times V \to V \quad \text{(adición)}$$
$$(u, v) \mapsto u + v$$

$$\cdot : K \times V \mapsto V \quad \text{(multiplicación por un escalar)}$$
$$(\lambda, v) \mapsto \lambda v$$

Bibliografía:

Álgebra Lineal
Carlos Chávez Vega

Existen espacios de matrices, polinomios

3 veces a la semana. Buscar las

Axiomas de la adición:

Espacio Cociente — soluciones.

¿qué tipo de problemas?

Ver dirigidas pasadas.

A1. $\forall u, v \in V, \ u+v \in V$

← Cuantificador universal

A2. $\forall u, v \in V, \ u+v = v+u$

A3. $\forall u, v, w \in V, \ (u+v)+w = u+(v+w)$

Lo definición se comience a construir.

A4. Existe $0 \in V$, tal que: $\forall u \in V$, ~~$u+0=0+u=u$ de~~

Partícula conocimiento

Aplicar a los ejercicios.

A5. Para cada $u \in V$, existe $w \in V /$ $u+w = w+u = 0$.

Proceso de aprendizaje

Notación $\boxed{w = -u}$

Conocimientos previos

Axiomas de la multiplicación por escalar

* Puedo generar conflictos (reordenamiento) $\xrightarrow{\Delta t}$:)

P1. $\forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall u \in V,$ $\lambda u \in V$

Pregunta que el profesor no contestó satisfactoriamente

P2. $\forall \lambda, \beta \in \mathbb{K} \ \forall u \in V, \ \lambda(\beta u) = (\lambda\beta)u$

Aprender método de demostración por contradicción

P3. $\forall \lambda, \beta \in \mathbb{K}, \ \forall u \in V \quad (\lambda+\beta)u = \lambda u + \beta u$

P4. $\forall \lambda \in \mathbb{K}, \ \forall u, v \in V \quad \lambda(u+v) = \lambda u + \lambda v$.

¿en los axiomas está incluido de modo que el cuerpo?

P5. $\forall v \in V, \ 1 . v = v$

¿en los axiomas está incluido el conjunto V?

Se declara los elementos (1 no se declaró) queda implícito. ¿qué sucede si A es vacío?

V juntamente con los 10 axiomas; es un espacio vectorial.

OjO: a) A cada elemento de un espacio vectorial, le llamaremos "vector".

b) Veamos un ejemplo de un espacio vectorial.

método de demostración por contradicción

Consideremos $V \; \mathbb{R}^2$ con campo $\mathbb{K} = \mathbb{R}$

Adición: $(a,b) + (c,d) = (a+c, \; b+d)$ ¿Cómo está definida la inclusión?

Multiplicación por un escalar: $\lambda(x,y) = (\lambda x, \; \lambda y)$

P.D. = Por demostrar

Demostrando los 10 axiomas:

A1. Sea $u = (a,b)$, $v = (c,d) \in V = \mathbb{R}^2$ cualquiera

$\Rightarrow u + v = (a,b) + (c,d) = (a+c, \; b+d) \in V = \mathbb{R}^2$

porque $a+c \in \mathbb{R} \wedge b+d \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow u + v \in V$.

¡hace falta demostrar los 9 axiomas restantes!

3. Sea $V = \{(x;y) \in \mathbb{R} : \; y = x+1\}$

¿V es un espacio vectorial?

Vamos a ver que no es un espacio vectorial.

Supongamos que V sí es un espacio vectorial (E.V.) ← notación de clase

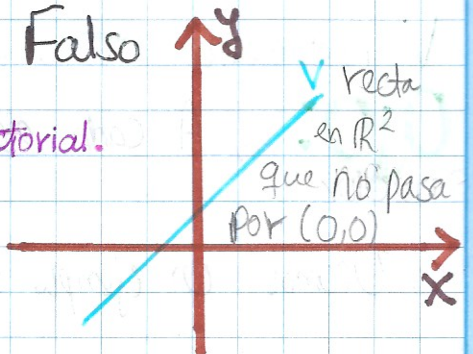
Luego: $(2;3) \in V \wedge (0;1) \in V$

$\Rightarrow (2;3) + (0;1) \in V$

$\Rightarrow (2;4) \in V$
$\quad\;\; \overset{\shortparallel}{x} \;\; \overset{\shortparallel}{y}$

Pero $4 = 2 + 1$

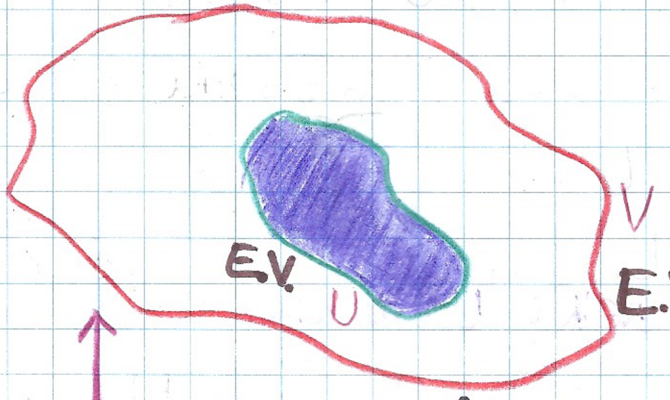
Falso



Negando lo supuesto, V no es un espacio vectorial.

Subespacios

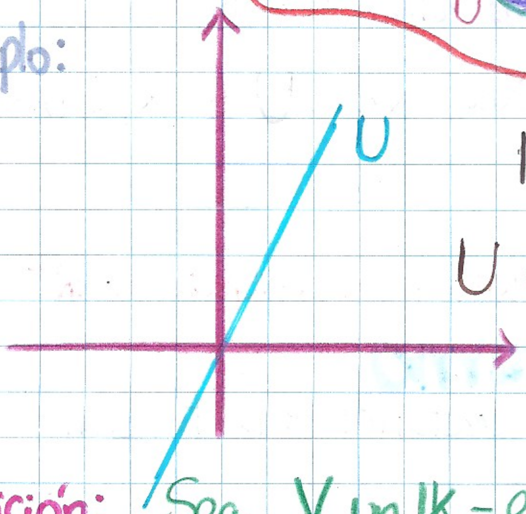
$U \subset V$



La curiosidad es importante.

$\rightarrow$ U es un subespacio de V.

Ejemplo:



$\mathbb{R}^2$ (espacio vectorial)

U es un subespacio de $V = \mathbb{R}^2$.

definición: Sea V un $\mathbb{K}$-espacio vectorial, juntamente con las operaciones de V.

4. Sea $U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = 5x\}$ Por demostrar, U es un subespacio de $\mathbb{R}^2$.

demostrar: Es obligatorio, poder demostrar los 10 axiomas.

Youtube: Documental Completo "El hombre con 7 segundos de memoria"

A1. Sea $u = (a, b)$, $v = (c, d)$ elementos de U (vectores en U) cualesquiera.

$$\Rightarrow \begin{matrix} b = 5a \\ d = 5c \end{matrix} \Rightarrow \underbrace{b+d}_{y} = 5\underbrace{(a+c)}_{x} \Rightarrow (a+c, b+d) \in U$$

$\rightarrow u + v \in U$ $\quad U \leq W$ Se lee U es un subespacio vectorial de W.

Se sugiere demostrar los nueve axiomas restantes.

5. Demostrar: Sea V un $\mathbb{K}$-espacio vectorial, $U \subset V$ no vacío.

U es un subespacio de V $\Leftrightarrow$ i) $\forall u, v \in U$, $u + v \in U$.
ii) $\forall \lambda \in \mathbb{K}$, $\forall u \in U$, $\lambda u \in U$.

6. Sea $U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = y\}$ Por demostrar, U es un subespacio de $\mathbb{R}^2$.

demostración: Vamos a utilizar el problema 5

(i) Sea $u=(a,b)$, $v=(c,d)\in U$ Cualesquiera

Porque $\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2 \Leftrightarrow x=y$.

$$a=b \ \wedge \ c=d \Rightarrow \underbrace{a+c}_{x} = \underbrace{b+d}_{y} \Rightarrow (a+c, b+d)\in U$$

$$\Rightarrow (a,b)+(c,d)\in U$$

$$\Rightarrow u+v\in U.$$

a mi parecer debe ir $\in U$. ¿qué "opinan"?

Va $\in U$ ✓

(ii) Sea $u=(a,b)\in U \wedge \lambda\in\mathbb{R}$ Cualesquiera.

Por que $\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2 \Leftrightarrow x=y$.

$$\Rightarrow a=b \Rightarrow \underbrace{\lambda a}_{x} = \underbrace{\lambda b}_{y} \Rightarrow (\lambda a, \lambda b)\in U \Rightarrow \lambda(a,b)\in U$$

$$\Rightarrow \lambda u\in U. \ \blacksquare$$

(7) Toda recta que pase por el origen, es un subespacio de $\mathbb{R}^2$.

Producto interno

definición: Sea V un $\mathbb{R}$-espacio vectorial y la función:

$$\langle\,\rangle : V\times V \to \mathbb{R}$$
$$(u,v)\mapsto \langle u,v\rangle$$

tal que:

P.I. 1. $\forall u\in V$, $\langle u,u\rangle \geq 0$ (no negativa) definida positiva

P.I. 2. $\langle u,u\rangle = 0 \Leftrightarrow u=0$

P.I. 3. $\langle \lambda u, v\rangle = \lambda\langle u,v\rangle$

P.I. 4. $\langle u+v, w\rangle = \langle u,w\rangle + \langle v,w\rangle$

P.I. 5. $\langle u,v\rangle = \langle v,u\rangle$ en general $\langle x_1, x_2\rangle = \overline{\langle x_2, x_1\rangle}$

Diremos que $\langle\,\rangle$ es un producto interno (P.I.) en el espacio V.

(8) Considere la función:

Sea $u=(a,b)$ y $v=(c,d)$.

$$\langle u,v\rangle = ac+bd$$

Se le llama producto interno Canónico de los vectores u y v.

Iris colors

Continua.

De (8): $\langle u, v\rangle = ac+bd$, si $u=(a,b) \wedge v=(c,d)$.

Para probarlo, tenemos que verificar los 5 axiomas de producto interno.

Veamos:

P.I.1: Sea $u=(a,b)\in\mathbb{R}^2$. Calculemos $\langle u, u\rangle$

$\langle u,u\rangle = a.a+b.b = a^2+b^2 \geq 0.$

P.I.2: ¡Es una bicondicional! (re fácil) $p\leftrightarrow q \equiv (p\rightarrow q)\wedge(q\rightarrow p)$

$\Rightarrow$ Hipótesis: $\langle u,u\rangle = 0$

Tesis: $u=0$

Consideremos $u=(a,b)\in\mathbb{R}^2$

$\Rightarrow \langle u, u\rangle = 0$

$\Rightarrow \langle (a,b),(a,b)\rangle = 0$

$\Rightarrow a.a+b.b = 0$ Por definición de producto interno canónico.

$\Rightarrow a^2+b^2=0$

$\Rightarrow a=0 \wedge b=0.$ Porque $a, b\in\mathbb{R}$

$\Rightarrow u=(0,0)$ Ceros como números reales

$\Rightarrow u=0$ Cero como vector nulo

$\Leftarrow$ Hipótesis: $u=0$

Tesis: $\langle u,u\rangle = 0$

Iris colors

Veamos la hipótesis: $u=(0,0)$

$$\Rightarrow \langle u, u\rangle = \langle (0,0);(0,0)\rangle$$

$= 0.0+0.0$ Por definición de producto interno canónico

$= 0+0$

$= 0$ elemento neutro.

P.I. 3:

Sea $u=(a,b)$ y $v=(c,d)$

Operando:

$$\langle \lambda u, v\rangle = \langle \lambda(a,b);(c,d)\rangle$$

$= \langle (\lambda a, \lambda b);(c;d)\rangle$

$= (\lambda a)c + (\lambda b)d$ Por definición de producto interno canónico.

$= \lambda(ac+bd)$

$= \lambda\langle (a,b);(c,d)\rangle$

$= \lambda\langle u;v\rangle$

Dejamos al estudiante P.I.4. y P.I.5.

Resumen
- Espacio vectorial y sus 10 axiomas
- Subespacio vectorial y su cerradura
- Producto interno en $\mathbb{R}$ (en $\mathbb{C}$ es más bonito) 5 axiomas

Sugerencia del profesor Gustavo Marca Castromonte:

Estudiar con el material de consulta y entrar a página web (buscar en google: Educamate).