FECHA
18 DE AGOSTO
DEL 2016

Segunda clase de Cálculo Vectorial

Prof: Gonzalo Marca Castromonte

Recordemos: Axiomas que debe cumplir un Producto interno: 18/08/16

P.1. $\langle u, v \rangle \geq 0$

P.2. $\langle u, u \rangle = 0 \Leftrightarrow u = 0.$

P.3. $\langle \lambda u, v \rangle = \lambda \langle u, v \rangle$

P.4. $\langle u+v, w \rangle = \langle u, w \rangle + \langle v, w \rangle$

P.5. $\langle u, v \rangle = \langle v, u \rangle$

Técnica del contraejemplo (negar un concepto)

Ejemplo (Clarifica un concepto)

Para probar lo contrario, se debe buscar por lo menos un contraejemplo.

(9) Sean U y V dos subespacios de W. Demostrar $U \cap V$ es un subespacio para W.

(Se generaliza para 2 o más subespacios vectoriales)

Demostración:

Por el problema 5, vamos a demostrar las dos condiciones

* Como $U \subset W$

$V \subset W$

por ser subespacios

$\Rightarrow (U \cap V) \subset W.$

* Como $0 \in U$

$0 \in V$

$\Rightarrow 0 \in U \cap V$

$\Rightarrow U \cap V \neq \emptyset$

Ahora veamos el par de condiciones

((ii)) Sean

$u \in U \cap V$ y $v \in U \cap V$

dos cualesquiera

$\Rightarrow (u \in U \wedge u \in V) \wedge (v \in U \wedge v \in V)$

$\Rightarrow (u \in U \wedge v \in U) \wedge (u \in V \wedge v \in V)$

$\Rightarrow u+v \in U \wedge u+v \in V$

$\Rightarrow u+v \in U \cap V.$

ii) Sea $\lambda \in K$, $u \in U \cap V$.

$\Rightarrow u \in U \wedge u \in V.$

$\Rightarrow \lambda u \in U \wedge \lambda u \in V.$

$\lambda u \in U \cap V$

Finalmente $U \cap V$ es un subespacio de W.

Conjetura de Goldbach:

"Todo número par mayor que 2 puede escribirse como suma de dos elementos de $\mathbb{P}$."

$4 = 2+2$
$6 = 3+3$
$8 = 5+3$
$10 = 5+5$
$\vdots$

No me contestó, ¿la hipótesis de Riemann es una conjetura?

Obvio que sí lo es.

(10) Si tenemos U y V subespacios de W.

¿ $U \cup V$ es un subespacio de W?

Veamos:

La respuesta es falsa.

Veamos un contraejemplo.

$W = \mathbb{R}^2$ espacio vectorial $\mathbb{R}^2$

$U = \{(x,0) : x \in \mathbb{R}\}$

$V = \{(0,y) : y \in \mathbb{R}\}$

Subespacios de W.

Conjetura débil de Goldbach

"Todo número impar mayor que 5 puede expresarse como suma de tres números primos".

Probado por mi ídolo Harald Andrés Helfgott Seier.

Comprobar puntualmente

Pero la unión $U \cup V$ no es subespacio de W, ya que

$(1;0) \in U \cup V$

$(0;3) \in U \cup V$

pero $(1;0)+(0;3)=(1;3) \notin U \cup V$

Aplicación y función
Son sinónimos, para mí no.

$((1,1))$ Sea $u=(a,b)$

$v=(c,d) \in \mathbb{R}^2$

$\langle u, v \rangle = ac - bd$

Nosotros trabajamos con el espacio de Euclides,
no espacio de Hilbert,
no espacio de Banach,
no espacio topológico,
no espacio métrico.

¿$\langle , \rangle$ es un p.i. (producto interno) para $\mathbb{R}^2$?

demostración: Si es un p.i. (5 axiomas)
No es un p.i. (contraejemplo)

Norma de un espacio vectorial

Consideremos $u=(4,4)$

Calculemos

$\langle u, u \rangle = \langle (4,4), (4,4) \rangle = 16-16=0$

$\Rightarrow \langle u, u \rangle = 0$

Por PI2

$\Rightarrow u=(0;0)$ ✗

Se dice que es una norma inducida por el producto interno "sale" naturalmente y depende del producto interno.

Norma de un espacio vectorial

$K = \mathbb{R}$

definición: Sea V espacio vectorial real,

$\| \ \| : V \to \mathbb{R}$ una función

$v \mapsto \|v\|$

$\| \ \|$ es una norma para $V \Leftrightarrow$ cumple con:

N1 $\forall u \in V \ , \ \|u\| \geq 0$

N2 $\|u\| = 0 \Leftrightarrow u = 0$

N3 $\|\lambda u\| = |\lambda| \, \|u\|$

N4 $\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$

Observación: Si un espacio vectorial V, posee una norma, le llamaremos "espacio vectorial normado"

(12) Sea $V = \mathbb{R}^2$ y definimos $u = (x, y)$

$$\|(x,y)\| = \sqrt{x^2 + y^2} \qquad \langle u, u \rangle$$

es una norma llamada norma euclidiana.

Así: $\|(2,-1)\| = \sqrt{5}$

(13) Sea $V = \mathbb{R}^2$, consideremos $u = (x, y) \in \mathbb{R}^2$

$$\|u\| = |x| + |y|$$

Veamos si es una norma:

N1. Sea $u = (x, y)$

$$\|u\| = |x| + |y| \geq 0 \ ✓$$

N2.: $(\Rightarrow)$ $\|u\|=0$, $u=(x,y)$

$$\Rightarrow |x|+|y|=0$$

$$\Rightarrow x=0 \wedge y=0$$

$$\Rightarrow u=(0,0)$$

$(\Leftarrow)$ Sea $u=(0,0)$ Calculemos

$$\|u\| = |0|+|0|=0$$

N3. Sea $\lambda \in \mathbb{R}$, $u=(x,y)$

$$\|\lambda u\| = \|\lambda(x,y)\|$$

$$= \|(\lambda x, \lambda y)\|$$

$$= |\lambda x| + |\lambda y|$$

$$= |\lambda|(|x|+|y|)$$

$$= |\lambda|\,\|u\|$$

N4. $u=(x,y)$ Calculemos:

$v=(a,b)$ $\|u+v\| = \|(x+a, y+b)\|$

Propiedad: $|x+a| \leq |x|+|a|$ $= |x+a| + |y+b|$

Está asociado es un producto interno general. $\leq |x|+|a|+|y|+|b|$

Si es el clásico entonces, "sale" el general. $\leq (|x|+|y|)+(|a|+|b|)$

Ojo: Esta es una norma llamada, $\leq \|u\|+\|v\|$

norma de la suma.

Teorema de Cauchy-Schwarz para espacios vectoriales.

$\langle u, u\rangle = 0$

$\Rightarrow u=0$

Norma inducida por un Producto interno

por ser un producto interno.

((1)) Sea V un espacio vectorial con p.i. $\langle\,\rangle$ asociado.

Consideremos:

$$\|u\| = \sqrt{\langle u, u\rangle}$$

Demos: $\|\ \|$ es una norma en V.

N1. $\|u\| = \sqrt{\langle u,u\rangle} \geq 0$

$\langle u,u\rangle \geq 0$

N2.
($\Rightarrow$) Si $\|u\| = 0$

$\Rightarrow \sqrt{\langle u, u\rangle} = 0$

$\Rightarrow \langle u, u\rangle = 0$

$\Rightarrow u = 0.$

($\Leftarrow$) Si $u = 0$

Calculemos

$\|u\| = \sqrt{\langle u, u\rangle}$

$= \sqrt{\langle 0, 0\rangle} = \sqrt{0} = 0$

P.I.2

N3.
$\|\lambda u\| = \sqrt{\langle \lambda u, \lambda u\rangle}$

$= \sqrt{\lambda^2 \langle u, u\rangle}$

$= |\lambda| \sqrt{\langle u, u\rangle}$

$= |\lambda|\ \|u\|.$

N4 Recordemos

$|\langle u, v\rangle| \leq \|u\|\ \|v\|$ Teorema de Cauchy-Schwarz

$\|u+v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2 + 2\langle u, v\rangle$

$\|u-v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2 - 2\langle u, v\rangle$

Por lo tanto

$\|u+v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2 + 2\langle u, v\rangle$

$\leq \|u\|^2 + \|v\|^2 + 2|\langle u, v\rangle|$

$\langle u, v\rangle \leq |\langle u, v\rangle|$

$\leq \|u\|^2 + \|v\|^2 + 2\|u\|\|v\|$ Extrayendo la raíz cuadrada,

$\|u+v\| \leq \|u\| + \|v\|$ ■

Vectores paralelos

definición: Sea V un espacio vectorial $u, v \in V$.

$u /\!/ v \Leftrightarrow (\exists \lambda \in \mathbb{R},\ u = \lambda v) \vee (\exists \beta \in \mathbb{R},\ v = \beta u)$

15. Sean $u = (2;10)$ y $v = (1;2)$ Por demostrar: $u /\!/ v$.

Supongamos que $u /\!/ v$. $\Rightarrow u = \lambda v \vee v = \beta u$.

Consideremos

$$u = \lambda v$$

$$(2;10) = \lambda(1;2)$$

$$(2;10) = (\lambda; 2\lambda)$$

$\boxed{2 = \lambda}$

¿?

$10 = 2\lambda \Rightarrow \boxed{5 = \lambda}$

¿2 es igual a 5? ¿Quizá en un anillo con característica cero?
Ver el libro de Kenneth Hoffman - Ray Kunze Álgebra lineal. Contradicción
$\therefore$ u no es paralelo a v.

Vectores ortogonales

definición: Sea V un espacio vectorial (e.v.) con producto interno (p.i.) $u, v \in V$.

$u \perp v \Leftrightarrow \langle u, v\rangle = 0$.

(16) P.D.

$$\|u+v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2 + 2\langle u, v\rangle$$

90° no implica ortogonalidad (excepto en el producto canónico estándar) demostración:

Observación: La norma del teorema es la inducida

$$\|u\| = \sqrt{\langle u, u\rangle}$$

Veamos:

$$\|u+v\|^2 = \langle u+v, u+v\rangle$$

$$= \langle u, u\rangle + \langle u, v\rangle + \langle v, u\rangle + \langle v, v\rangle$$

$$= \|u\|^2 + \|v\|^2 + 2\langle u, v\rangle$$

(17) Por demostrar:

$$\|u-v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2 - 2\langle u, v\rangle$$

(18) Demostrar

Si $u, v \in V$

$$\Rightarrow |\langle u, v\rangle| \leq \|u\| \, \|v\|$$

demostración:

Caso 1: Si $u=0 \vee v=0$.

Ojo: $\left.\begin{array}{l}\langle 0, w\rangle = 0 \\ \langle w, 0\rangle = 0\end{array}\right\}$ Por demostrar

$$\Rightarrow |\langle u, v\rangle| = 0$$

$$\frac{p}{\therefore\ p \vee q}$$

$= \Rightarrow \leq$

También:

$$\|u\| \, \|v\| = 0$$

$$\Rightarrow |\langle u, v\rangle| = \|u\| \, \|v\|$$

$$\Rightarrow \langle u, v\rangle \leq \|u\| \, \|v\|$$ ✓

Caso 2: Si $u \neq 0 \wedge v \neq 0$

Construimos:

$$* \quad w = v - \frac{\langle u, v\rangle u}{\|u\|^2}$$

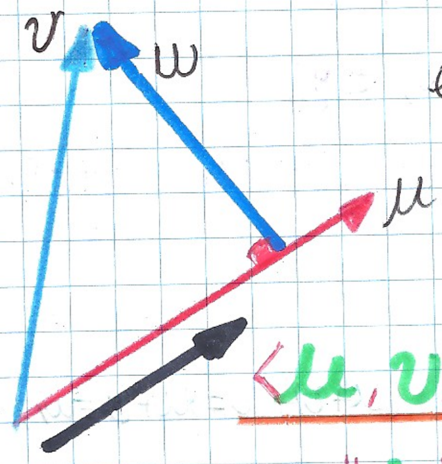
$\Rightarrow$ Sabemos $\langle w, w\rangle \geq 0$

$$\Rightarrow \left\langle v - \frac{\langle u, v\rangle u}{\|u\|^2}, v - \frac{\langle u, v\rangle u}{\|u\|^2} \right\rangle \geq 0$$

Verificar:

$\Rightarrow \langle u, v\rangle^2 \leq \|u\|^2 \|v\|^2$

$\Rightarrow |\langle u, v\rangle| \leq \|u\|\|v\|$



$$\frac{\langle u, v\rangle u}{\|u\|^2}$$

demostrar: Sea V un espacio vectorial con producto interno y $u, v \in V$.

$u \perp v \Leftrightarrow \langle u, v\rangle = 0$.