Función de Cobb-Douglas

Ecuaciones en diferencias y análisis en escalas de tiempo

K. Fernández Huidobro[1] A. Berrospi Casano[2] B. Torres Ayalas[3] C. Aznarán Laos[4]

22 de octubre del 2019

Facultad de Ciencias

Universidad Nacional de Ingeniería

Preliminares

Preliminares

En esta sección se explicará los detalles del tema del proyecto y su visión.

Esperamos que esta estructura se mejore considerablemente bajo la guía de nuestro mentor MSc. *Clifford Orlando Torres Ponce.*

Preliminares

Si f es una función de dos variables, a menudo dejamos que una letra como z denote el valor de f en el punto (x, y), así $z = f(x, y)$.

Entonces, llamaremos a x e y las variables independientes, o los *argumentos* de f, mientras que z es llamada la variable independiente, porque el valor z, en general, depende de los valores x e y.

El dominio de la función f es entonces el conjunto de todos los posibles pares de variables independientes, mientras que su *rango* es el conjunto de valores correspondientes de la variable dependientes.

En economía, x e y son llamadas las variables exógenas, mientras que z es la variable endógena.

Definición (Función de Cobb-Douglas)
Una función de dos variables que aparecen en muchos modelos económicos es

$$F(x, y) = Ax^a y^b \tag{1}$$

donde A, a y b son constantes. Usualmente, uno asume que F es definida solo para $x > 0$ e $y > 0$.

A la función de la forma (1) es generalmente llamada la *función de Coubb-Douglas*.

Se usa con mayor frecuencia para describir ciertos procesos de producción. Entonces x e y son llamados factores de entrada, mientras que $F(x, y)$ es el número de unidades producidas, o la salida.

En este caso F es llamada la *función de producción*.

Ejemplo (Función de Cobb-Douglas)
Para la función F dada en el ejemplo (1), encuentre una expresión para $F(2x, 2y)$ y para $F(tx, ty)$, donde t es un número positivo arbitrario. Encuentre también una expresión para $F(x+h, y) - F(x, y)$. Dé interpretaciones económicas.

Demostración.
Encontramos que

$$F(2x, 2y) = A(2x)^a(2y)^b = A2^a x^a 2^b y^b = 2^a 2^b A x^a y^b = 2^{a+b} F(x, y).$$

Cuando F es una función de producción, esto muestra que a cada uno de los factores de entrada es duplicado, entonces la salida es 2^{a+b} veces más grande. Por ejemplo, si $a + b = 1$, entonces duplicando ambos factores de producción implica la duplicación de la salida.

En el caso general,

$$F(tx, ty) = A(tx)^a(ty)^b = At^a x^a t^b y^b = t^{a+b} F(x, y). \tag{*}$$

Demostración (Cont.)
Finalmente, vemos que

$$F\left(x+h,y\right)-F\left(x,y\right)=A(x+y)^{a}y^{b}-Ax^{a}y^{b}=Ay^{b}\left[\left(x+h\right)^{a}-x^{a}\right]. \tag{**}$$

Esto muestra el cambio en la salida cuando el primer factor de entrada es cambiado por h unidades mientras que el otros factor es constante.

Por ejemplo, suponga que $A=100$, $a=1/2$ y $b=1/4$, en cuyo caso $F\left(x,y\right)=100x^{1/2}y^{1/4}$. Si escogemos $x=16$, $y=16$ y $h=1$, la ecuación (**) implica que

$$F\left(16+1,16\right)-F\left(16,16\right)=100\cdot 16^{1/4}\left[17^{1/2}-16^{1/2}\right]=100\cdot 2\left[\sqrt{17}-4\right]\approx 24{,}6.$$

Además, si incrementamos la entrada del primer factor desde 16 hasta 17, manteniendo constando la entrada del segundo factor constante en 16 unidades, entonces incrementamos la producción en alrededor $24{,}6$ unidades.

Observación F es una función homogénea de grado $a+b$.

Teorema (Euler)

Sea la función $f\colon \mathbb{R}^k \to \mathbb{C}$ totalmente diferenciable, positiva, homogénea de grado $\lambda \in \mathbb{R}$. Esto último significa que $f(tx) = t^{\lambda} f(x)$ para todo $t \in \mathbb{R}_{>0}$ y $x \in \mathbb{R}^k$. Entonces, se aplica a todos los $x \in \mathbb{R}^k$

$$\lambda \cdot f(x) = \sum_{i=1}^{k} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) \cdot x_i = \frac{\partial f}{\partial x_1}(x) \cdot x_1 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_k}(x) \cdot x_k.$$

Corolario (Aplicación a la economía)

Sea $f\colon \mathbb{R}^k_{\geq 0} \to \mathbb{R}$ *la función de producción totalmente diferenciable con economía de escala constante de una compañía. Matemáticamente, esto significa que* f *es positiva y homogénea de grado uno. Entonces, se sigue del teorema 3*

$$f(x) = \sum_{i=1}^{k} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) \cdot x_i = \frac{\partial f}{\partial x_1}(x) \cdot x_1 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_k}(x) \cdot x_k.$$

Bajo el supuesto de una competencia perfecta en todos los mercados de factores, cada factor de producción $x_1, \ldots, x_k$ *se convierte en el equilibrio de mercado* $x^* \in \mathbb{R}^k_{\geq 0}$ *pagado de acuerdo con su ingreso marginal. Esto significa que para cualquier* $i = 1, \ldots, k$*, el factor de remuneración del* i*–ésimo factor de producción* $\frac{\partial f}{\partial x_i^*}(x^*)$ *equivalente. Esto implica que el compañía considerada es un equilibrio de mercado* x^* *no puede obtener ganancias porque la producción completa* $f(x^*)$ *por la remuneración de los factores de producción,* $\sum_{i=1}^{k} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x^*) \cdot x_i^*$*, se gasta.*

Ejemplo (Aplicación del teorema de Euler)

Dada la función de producción Cobb-Douglas $f\colon \mathbb{R}^2_{\geq 0} \to \mathbb{R}$, $(K, L) \mapsto \sqrt{KL}$, en el que K y L aquí representan los factores capital o trabajo. f es obviamente diferenciable y homogénea de grado uno, dado que $f(\alpha K, \alpha L) = \alpha f(K, L)$ para todo $\alpha \in \mathbb{R}_{>0}$. Según el teorema de Euler se sigue:

$$K \frac{\partial f}{\partial K}(K, L)(K, L) + L \frac{\partial f}{\partial L}(K, L) = K \cdot \frac{1}{2} \frac{\sqrt{L}}{\sqrt{K}} + L \cdot \frac{1}{2} \frac{\sqrt{K}}{\sqrt{L}} = \sqrt{KL} = f(K, L).$$

La función de producción *Cobb-Douglas* es una forma funcional particular de la función de producción, ampliamente usada para representar la relación tecnológica entre las cantidades de dos o más entradas, particularmente el capital físico y el trabajo, y la cantidad de salida puedes ser reproducida por esas entradas. La forma *Cobb-Douglas* fue desarrollado y probada contra evidencia estadística por Charles Cobb and Paul Douglas durante $1927 - -1947$.

Formulación
En su forma más estándar para la producción un único producto con dos factores, la función es

$$Y = AL^{\beta}K^{\alpha},$$

donde

- Y es la producción total (el valor real de todos los productos producidos en un año).
- L es la aportación laboral, el número total de horas-persona trabajas en un año,
- K es la aportación del capital, el valor real de toda la maquinaria, equipamiento y edificaciones.
- A es el factor de productividad total.

Preliminares

La función puede mostrar tres casos básicos de rendimientos de escala:

- Rendimientos de escala constantes si $\alpha + \beta = 1$, $-Y$ aumenta en ese mismo cambio proporcional a medida que cambian las entradas L y K.
- Rendimientos de escala decrecientes si $\alpha + \beta < 1$, $-Y$ aumenta en menos de ese cambio proporcional a medida que cambian las entradas L y K.
- Rendimientos de escala crecientes si $\alpha + \beta > 1$, $-Y$ aumenta en más de ese cambio proporcional a medida que cambian las entradas L y K.

En su forma generalizada, la función de Cobb-Douglas modela más de dos productos. La función de Cobb-Douglas puede ser escrita como:

$$f(x) = A \prod_{i=1}^{L} x_i^{\lambda_i}, \quad x = (x_1, \cdots, x_L), \tag{2}$$

donde

- A es un parámetro de eficiencia.
- L es el número total de productos.
- $x_1, \ldots, x_L$ son cantidades de productos consumidos, producidos, etc. (no negativas).
- λ_i es un parámetro de elasticidad para el producto i.

Crecimiento económico

Ejemplo
Sea $X = X(t)$ que denota el producto nacional, $K = K(t)$ el capital disponible y $L = L(t)$ el número de trabajadores en un país en el tiempo t. Suponga que, para todo $t \geq 0$,

1. $X = \sqrt{K}\sqrt{L}$.
2. $\dot{K} = 0{,}4X$.
3. $L = e^{0{,}04t}$.

Derive de estas ecuaciones a una sola ecuación diferencial para $K = K(t)$, y encuentre la solución de la ecuación cuando $K(0) = 10000$.

De las ecuaciones 1–3, derivamos la única ecuación diferencial

$$\dot{K} = \frac{\mathrm{d}K}{\mathrm{d}t} = 0{,}4\sqrt{K}\sqrt{L} = 0{,}4e^{0{,}02t}\sqrt{K}.$$

Esto es claramente separable. Usando este método resultas las siguientes ecuaciones.

1. $\frac{1}{\sqrt{K}}\mathrm{d}K = 0{,}4e^{0{,}02t}\mathrm{d}t$,
2. $\int \frac{1}{\sqrt{K}}\mathrm{d}K = \int 0{,}04e^{0{,}02t}\mathrm{d}t$,
3. $2\sqrt{K} = 20e^{0{,}02t} + C$.

Si $K = 10000$ para $t = 0$, entonces $2\sqrt{10000} = 20 + C$, así $C = 180$. Entonces $\sqrt{K} = 10e^{0{,}02t} + 90$, y así la solución requerida es

$$K\left(t\right) = \left(10e^{0{,}02t} + 90\right)^2 = 100\left(e^{0{,}02t} + 9\right)^2.$$

La relación capital–trabajo tiene un valor límite algo extraño en este modelo: cuando $t \to \infty$, así

$$\frac{K\left(t\right)}{L\left(t\right)} = 100 \times \frac{\left(e^{0{,}02t} + 9\right)^2}{e^{0{,}04t}} = 100\left[\frac{e^{0{,}02t} + 9}{e^{0{,}02t}}\right]^2 = 100\left(1 + 9e^{-0{,}02t}\right)^2 \to 100.$$

El modelo Ramsey comienza con una función de producción agregada que satisface las *condiciones de Inada*.

Definición (Condiciones de Inada)
Dada una función continuamente diferenciable $f\colon X \to Y$, donde $X = \left\{x : x \in \mathbb{R}^n_+\right\}$ e $Y = \{y : y \in \mathbb{R}_+\}$, las condiciones son:

- el valor de la función $f\left(x\right)$ en $x = 0$ es cero.
- la función es cóncava en X, es decir, la matriz Hessiana $H_{ij} = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}\right)$ necesariamente es semidefinida negativa. Económicamente esto implica que los rendimientos marginales para las entradas x_i son positivas, es decir, $\partial f\left(x\right)/\partial x_i > 0$, pero decreciente, es decir, $\partial^2 f\left(x\right)/\partial x_i^2 < 0$.
- El límite de la primera derivada positiva es infinitamente positiva cuando x_i tiende a cero.
- El límite de la primera derivada es cero cuando x_i tiende al más infinito.

Definición (Movimiento de la acumulación del capital)

$$\dot{k} = f(k) - \delta k - c. \tag{3}$$

$$U_0 = \int_0^{\infty} e^{-\rho t} U(C)\, \mathrm{d}t. \tag{4}$$

Referencias

- Libros

Knut Sydsaeter, Peter Hammond, Arne Strom y Andrés Carvajal. *Essential Mathematics for Economic Analysis*. Pearson Education, 2016. ISBN: 9781292074610.

William H. Greene. *Econometric Analysis*. Pearson Education, 2018. ISBN: 9780134461366.

- Artículo matemático

Ken-Ichi Inada. “On the Stability of Growth Equilibria in Two-Sector Models”. En: *The Review of Economic Studies* 31.2 (1964), págs. 127-142. ISSN: 00346527, 1467937X. URL: `http://www.jstor.org/stable/2296195`.

Paul H. Douglas. “The Cobb-Douglas Production Function Once Again: Its History, Its Testing, and Some New Empirical Values”. En: *Journal of Political Economy* 84.5 (1976), págs. 903-915. ISSN: 00223808, 1537534X.

- Sitio web