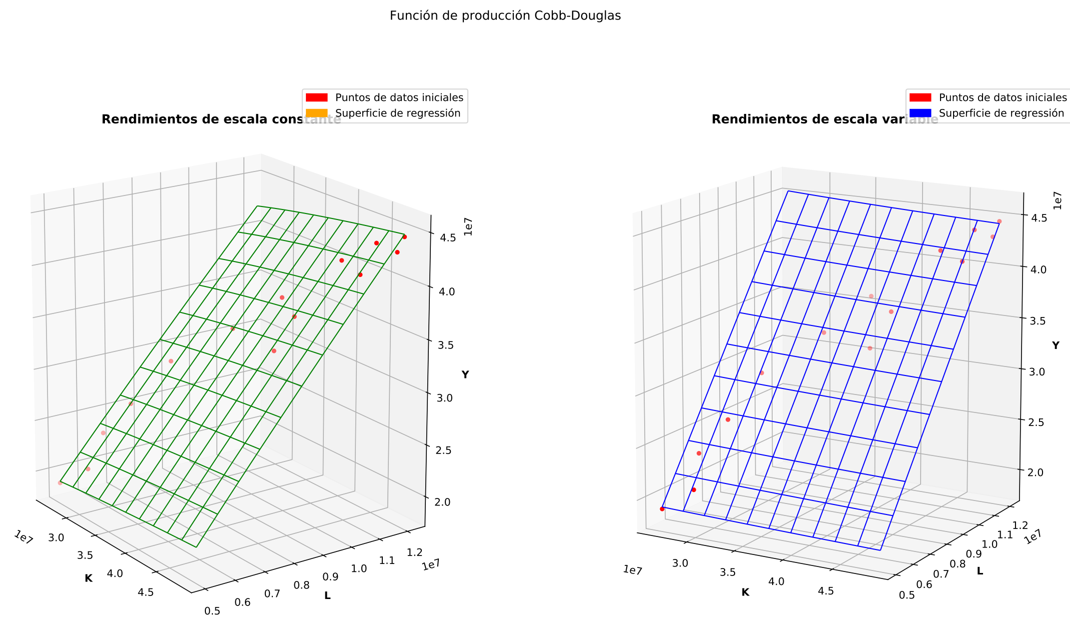
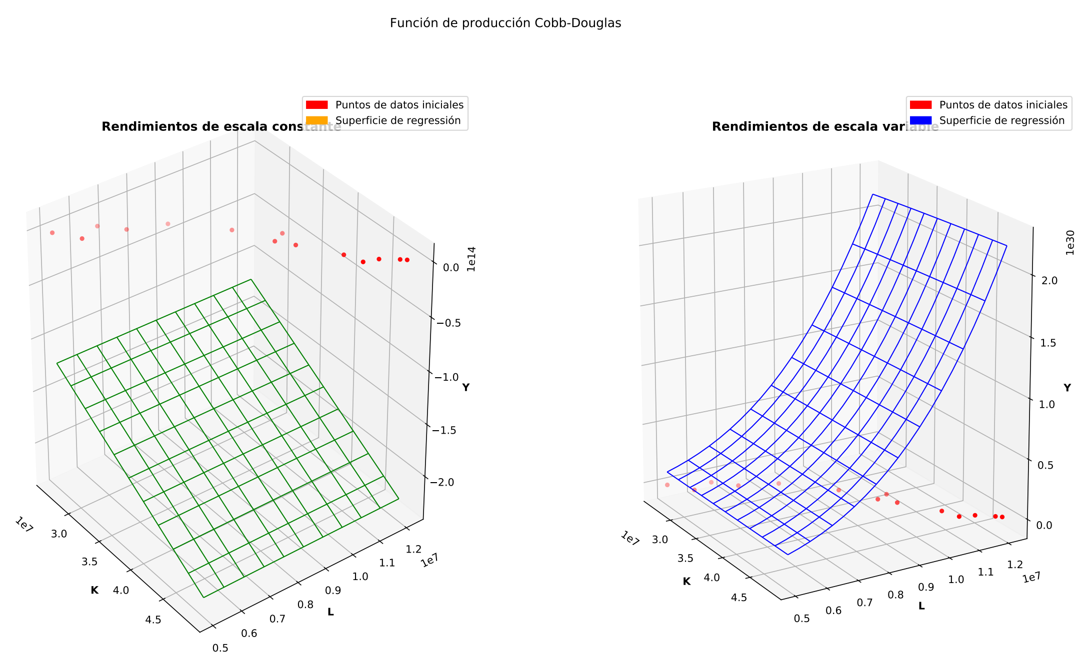
# Resúmenes gráficos

## Las aplicaciones de la función de producción Cobb-Douglas en la industria

C. Torres Ponce,C. Aznarán Laos,K. Fernández Huidobro,B. Torres Ayalas,A. Berrospi Casano



## Lo más destacado

### **Las aplicaciones de la función de producción Cobb-Douglas en la industria**

C. Torres Ponce,C. Aznarán Laos,K. Fernández Huidobro,B. Torres Ayalas,A. Berrospi Casano

- Modelo de crecimiento económico de Solow-Swan (1940).
- Modelo de crecimiento económico de Ramsey (1920).

# Las aplicaciones de la función de producción Cobb-Douglas en la industria★

Sir C. Torres Ponce[a,b,*] (Investigador), C. Aznarán Laos[a,b,**] (Coordinador), K. Fernández Huidobro[b,c,*], B. Torres Ayalas[b,c,*] y A. Berrospi Casano[b,c,**]

[a] *Facultad de Ciencias - Escuela Profesional de Matemática*
[b] *Facultad de Ciencias - Escuela Profesional de Ciencia de la Computación*
[c] *Universidad Nacional de Ingeniería, Av. Túpac Amaru 210, Rímac, Lima 25, Perú*

INFORMACIÓN DEL ARTÍCULO

*Palabras clave*:
Cobb-Douglas
BEC

RESUMEN

This
A

## 1. Introducción

En economía, una función de producción es una función que especifica la máxima salida posible de una empresa, industria o una economía entera para todas las posibles entradas. En general, una función de producción puede darse como $y = f\left(x_1, x_2, \ldots, x_n\right)$ donde $y$ es la cantidad de salida, $x_1, x_2, \ldots, x_n$ son las entras de factores de producción (tales como el capital, trabajo, tierra o materias primas). No permitiremos la producción conjunta, es decir, los procesos de producción, los cuales tienen múltiples coproductos o salidas. Por supuesto ambas entradas deben ser positivas. Sobre la historia de las funciones de producción mire el trabajo. Varios aspectos de las funciones de producción se tratan en la monografía.

Sean $\mathbb{R}$ y $\mathbb{R}_+$ los conjuntos de números reales y números reales positivos, respectivamente.

**Definición 1.** *Una función $f : \mathbb{R}^n_+ \to \mathbb{R}_+$ es llamada una **función de producción**.*

A continuación, asumimos que las funciones de producción son dos veces continuamente diferenciables. La elasticidad de sustitución fue introducida originalmente por J. R. Hicks (1932) [10] (en el caso de dos entradas) con el propósito de analizar los cambios en la participación de los ingresos del trabajo y el capital. R. G. D. Allen y J. R. Hicks (1934) [3] sugirieron dos generalizaciones del concepto original de elasticidad variable de Hicks. El primer concepto que llamamos elasticidad de sustitución de Hicks se define como sigue.

**Definición 2.** *Sea $f : \mathbb{R}^n_+ \to \mathbb{R}_+$ una función de producción con primeras derivadas parciales no nulas. La función*

$$H_{ij}(\boldsymbol{x}) = -\frac{\frac{1}{x_i f_i} + \frac{1}{x_j f_j}}{\frac{f_{ii}}{\left(f_i\right)^2} - \frac{2 f_{ij}}{f_i f_j} + \frac{f_{jj}}{\left(f_j\right)^2}} \quad \left(\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n_+, i, j = 1, \ldots, n, i \neq j\right) \tag{1}$$

*donde los subíndices de $f$ denotan las derivadas parciales, es decir, $f_i = \frac{\partial f}{\partial x_i}$, $f_{ij} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$, todas las derivadas son tomadas en el punto $\boldsymbol{x}$ y el denominador es asumido distinto de cero) es llamada la **elasticidad de sustitución de Hick** de la i–ésima variable (factor) de producción con respecto a la j–ésima variable (factor) de producción.*

**Definición 3.** *Sea $f : \mathbb{R}^n_+ \to \mathbb{R}_+$ una función de producción. La función*

$$A_{ij}(\boldsymbol{x}) = -\frac{x_1 f_1 + x_2 f_2 + \cdots + x_n f_n}{x_i x_j} \frac{F_{ij}}{F} \quad \left(\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n_+, i, j = 1, \ldots, n, i \neq j\right) \tag{2}$$

*donde $F$ es el determinante de la matriz confinada*

$$M = \begin{bmatrix} 0 & f_1 & \cdots & f_n \\ f_1 & f_{11} & \cdots & f_{1n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ f_n & f_{n1} & \cdots & f_{nn} \end{bmatrix} \tag{3}$$

*y $F_{ij}$ es el cofactor del elemento $f_{ij}$ en el determinante $F$ ($F \neq 0$ es asumida y todas las derivadas son tomadas en el punto $\boldsymbol{x}$) es llamada la **elasticidad de sustitución de Allen** de la i–ésima variable (factor) de producción con respecto a la j–ésima variable (factor) de producción.*

**Definición 4.** *Una función dos veces diferenciable $f : \mathbb{R}^n_+ \to \mathbb{R}_+$ se dice que satisface la **propiedad CES** (elasticidad de sustitución constante) si existe una constante $\sigma \in \mathbb{R}$, $\sigma \neq 0$ tal que*

$$H_{ij}(\boldsymbol{x}) = \sigma \quad \left(\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n_+, i, j = 1, \ldots, n, i \neq j\right). \tag{4}$$

★ Este documento es el resultado de la investigación del proyecto financiado por la Fundación de Matemática de la Facultad de Ciencias.

* Autor correspondiente
** Autor principal correspondiente
ctorresp@uni.edu.pe (C.T. Ponce); caznaranl@uni.pe (C.A. Laos); kfernandezh@uni.pe (K.F. Huidobro); btorresa@uni.pe (B.T. Ayalas); aberrospic@uni.pe (A.B. Casano)
https://carlosal1015.github.io/ (C.A. Laos)
ORCID(s): 0000-0002-3746-252X (C.T. Ponce); 0000-0001-8314-2271 (C.A. Laos)

En la secuela discutimos que hasta qué punto la propiedad CES (4) determina la función de producción.

C.W. Cobb y P.H. Douglas [6] estudiaron cómo la distribución de los ingresos nacionales pueden describirse con ayuda de las funciones de producción. El resultado de su estudio fue la función de producción

$$f(\boldsymbol{x}) = C x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n} \quad \left(\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}_+^n\right)$$

donde $C > 0$, $\alpha_i \neq 0$ $(i = 1, \dots, n)$ son constantes satisfaciendo $\alpha := \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \neq 0$. Llamaremos esta **función de producción Cobb-Douglas (o CD)**.

En 1961, K.J.Arrow, H.B.Chenery, B.S.Minhas y R.M.Solow introdujo una nueva función de producción.

$$f(\boldsymbol{x}) = \left(\beta_1 x_1^{\frac{m}{\beta}} + \cdots + \beta_n x_n^{\frac{m}{\beta}}\right)^{\beta} \quad \left(\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}_+^n\right)$$

donde $\beta_i > 0$ $(i = 1, \dots, n)$, $m \neq 0$, $\beta \neq 0$ son constantes reales. Nos referiremos a la función **Arrow-Chenery-Minhas-Solow** o (ACMS) **función de producción**.

Las funciones de producción CD y ACMS tienen la misma propiedad, llamemoslo así como fácil de verificar $H_{ij} = 1$ para la funciones CD y $H_{ij} = \frac{1}{1-\frac{m}{\beta}}$ para las funciones de producción AMCS si $\frac{m}{\beta} \neq 1$, para $\frac{m}{\beta} = 1$ el denominador de $H_{ij}$ es cero, por lo tanto, este no está definido.

**Definición 5.** *Una función* $F : \mathbb{R}_+^n \to \mathbb{R}_+$ *es llamada* homogénea de grado $m \in \mathbb{R}$ *si*

$$F(t\boldsymbol{x}) = t^m F(\boldsymbol{x})$$

*se cumple para* $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}_+^n$, $t > 0$.

**Definición 6.** *Una función* $F : \mathbb{R}_+^n \to \mathbb{R}_+$ *es llamada* subhomogénea de grado $m \in \mathbb{R}$ *si*

$$F(t\boldsymbol{x}) \leq t^m F(\boldsymbol{x})$$

*se cumple para todo* $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}_+^n$ *y para todo* $t > 1$. *La función* $F$ *es llamada* superhomogénea de grado $m \in \mathbb{R}$ *si la desigualdad inversa se cumple.*

Las funciones homogéneas (sub y superhomogéneas) de grado 1 simplemente se llamarán funciones homogéneas (sub y superhomogéneas).

Si $F$ es una función de producción, entonces en economía también los términos rendimientos a escala constantes, rendimientos a escalas decrecientes y crecientes son usados para designar la homogeneidad, subhomogeneidad y superhomogeneidad de las funciones (de producción), respectivamente.

Es bien conocido que las funciones $F$ diferenciables homogéneas de grado $m$ puede ser caracterizados por la ecuación en derivadas parciales de Euler

$$x_1 F_{x_1}(\boldsymbol{x}) + \cdots + x_n F_{x_n}(\boldsymbol{x}) = mF(\boldsymbol{x}) \quad \left(\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}_+^n\right).$$

No se sabe tanto que caracterizaciones similares son válidas para funciones sub y superhomogéneas (compare con).

**Teorema 1.** *Suponga que* $F : \mathbb{R}_+^n \to \mathbb{R}$ *es una función diferenciable en su dominio.* $F$ *es subhomogénea de grado m, es decir,*

$$F(t\boldsymbol{x}) \leq t^m F(\boldsymbol{x}) \tag{5}$$

*se cumple para todo* $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}_+^n$ *y para todo* $t > 1$ *si y solo si*

$$x_1 F_{x_1}(\boldsymbol{x}) + \cdots + x_n F_{x_n}(\boldsymbol{x}) \leq mF(\boldsymbol{x}) \quad \left(\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}_+^n\right) \tag{6}$$

*$F$ es superhomogénea de grado m, es decir, la desigualdad contraria de (5) se cunple si y solo si la inversa de (6) es satisfecha. Si la desigualdad estricta se mantiene en (6) o si en su inversa, entonces también (5) o su inversa es satisfecha con la desigualdad estricta.*

**Observación 1.** *(5) (o su inversa) se cumple para* $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}_+^n$, $t \in \,]0, 1[$ *si y solo si la inversa de (6) (o (6)) es satisfecha.*

*Proof.* Probaremos la proposición solo para funciones subhomogéneas, el caso de las funciones superhomogéneas es análogo.

Necesidad Deduciendo $F$ de (5), dividiendo por $t - 1 > 0$ y tomando el límite $t \to 1^+$ obtenemos (6).

Suficiencia Reemplace en (6) $\boldsymbol{x}$ por $t\boldsymbol{x}$ y reagrupando esto como

$$\frac{t x_1 F_{x_1}(t\boldsymbol{x}) + \cdots + t x_n F_{x_n}(t\boldsymbol{x})}{F(t\boldsymbol{x})} \leq m$$

donde $t > 1$. Esta ecuación puede ser reescrita como

La proposición concerniente a la desigualdad estricta es obvia. □

Suponga que $f : \mathbb{R}_+^2 \to \mathbb{R}_+$ es una función de producción CES de dos variables, entonces

$$-\frac{\frac{1}{x_1 f_1} + \frac{1}{x_2 f_2}}{\frac{f_{11}}{(f_1)^2} - \frac{2 f_{12}}{f_1 f_2} + \frac{f_{22}}{(f_2)^2}} = \sigma \quad \left(x_1, x_2 \in \mathbb{R}_+\right) \tag{7}$$

donde $\sigma \in \mathbb{R}$, $\sigma \neq 0$ es una constante. (7) es una ecuación en derivadas parciales (EDP) de segundo orden que puede ser reducida a dos ecuaciones de primer orden. Encontraremos la solución general de la primera ecuación.. Seguiremos parcialmente a R. Sato [16] quién encontró la solución a un problema de Cauchy especial para ecuación mencionada. El lado izquierdo de (7) puede ser escrito como

$$-\frac{\frac{1}{x_1 f_1} + \frac{1}{x_2 f_2}}{\frac{f_{11}}{(f_1)^2} - \frac{2 f_{12}}{f_1 f_2} + \frac{f_{22}}{(f_2)^2}} = \frac{x_1 f_1 + x_2 f_2}{x_1 x_2 \left(-\frac{f_{11} f_2}{f_1} + 2 f_{12} - \frac{f_{22} f_1}{f_2}\right)}$$
$$= \frac{x_1 + x_2 u}{x_1 x_2 \left(\frac{\partial u}{\partial x_1} - \frac{1}{u}\frac{\partial u}{\partial x_2}\right)}$$

donde

$$u\left(x_1, x_2\right) := \frac{f_1\left(x_1, x_2\right)}{f_2\left(x_1, x_2\right)} \quad \left(x_1, x_2 \in \mathbb{R}_+\right).$$

De (7) la nueva función desconocida $u$ satisface la EDP de primer orden

$$\frac{\partial u}{\partial x_1}-\frac{1}{u}\frac{\partial u}{\partial x_2}=\frac{u}{\sigma x_1}+\frac{1}{\sigma x_2}.$$

Esta EDP es simplicada si introducimos la función $v=\ln u$ provista que $u\left(x_1,x_2\right)>0$ (caso contrario, si $u\left(x_1,x_2\right)<0$, usamos la sustitución $v=\ln(-u)$). Restringiéndonos al primer caso, la ecuación transformada dice

$$e^u\frac{\partial v}{\partial x_1}-\frac{\partial v}{\partial x_2}=\frac{e^v}{\sigma x_1}+\frac{1}{\sigma x_2},$$

o

$$e^v\frac{\partial}{\partial x_1}\left(v-\ln x_1^{\frac{1}{\sigma}}\right)=\frac{\partial}{\partial x_2}\left(v+\ln x_2^{\frac{1}{\sigma}}\right).$$

Esta ecuación se simplifica aún más si usamos la nueva función desconocida

$$w\left(x_1,x_2\right):=v\left(x_1,x_2\right)-\ln x_1^{\frac{1}{\sigma}}+\ln x_2^{\frac{1}{\sigma}}.$$

Entonces,

$$\begin{aligned}e^v=e^w\left(\frac{x_1}{x_2}\right)^{\frac{1}{\sigma}},\quad &\frac{\partial}{\partial x_1}\left(v-\ln x_1^{\frac{1}{\sigma}}\right)\\ &=\frac{\partial w}{\partial x_1},\quad \frac{\partial}{\partial x_2}\left(v+\ln x_2^{\frac{1}{\sigma}}\right)=\frac{\partial w}{\partial x_2}\end{aligned}$$

por consiguiente

$$e^w\left(\frac{x_1}{x_2}\right)^{\frac{1}{\sigma}}\frac{\partial w}{\partial x_1}-\frac{\partial w}{\partial x_2}=0. \tag{8}$$

(8) es una ecuación diferencial parcial cuasi lineal homogénea de primer orden en dos variables. Tomando su solución general en forma implícita $\phi\left(x_1,x_2,w\right)=0$ se sabe (ver [19], pp. 279-283) que para $\phi$ la EDP lineal homogénea

$$e^w\left(\frac{x_1}{x_2}\right)^{\frac{1}{\sigma}}\frac{\partial \phi}{\partial x_1}-\frac{\partial \phi}{\partial x_2}+0\frac{\partial \phi}{\partial w}=0$$

se cumple. Su sistema característico es

$$\frac{dx_1}{e^w\left(\frac{x_1}{x_2}\right)^{\frac{1}{\sigma}}}=\frac{dx_2}{-1}=\frac{dw}{0}$$

o

$$\frac{dw}{dx_2}=0,\quad \frac{dx_1}{dx_2}=-e^w\left(\frac{x_1}{x_2}\right)^{\frac{1}{\sigma}}.$$

Primero, encontramos dos primeras integrales independientes de este sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias. De la primera ecuación obtenemos $w=C_0$ ($C_0$ es una constante arbitraria), luego con $e^{C_0}=C_1>0$ separando las variables en la segunda ecuación obtenemos

$$\frac{dx_1}{x_1^{\frac{1}{\sigma}}}=-C_1\frac{dx_2}{x_2^{\frac{1}{\sigma}}}.$$

Integrando obtenemos

$$\begin{aligned}\ln x_1&=-C_1\ln x_2+C_2\quad \text{si } \sigma=1\\ x_1^{1-\frac{1}{\sigma}}&=-C_1x_2^{1-\frac{1}{\sigma}}+C_2\text{si } \sigma\neq 1.\end{aligned} \tag{9}$$

Las primeras integrales son soluciones para $C_1$, $C_2$ del sistema consistente de (9) y $e^w=C_1$. Estas son $C_1=e^w$, $C_2=\ln x_1+e^w\ln x_2$ si $\sigma=1$ y $C_1=e^w$, $C_2=x_1^{1-\frac{1}{\sigma}}+e^wx_2^{1-\frac{1}{\sigma}}$ si $\sigma\neq 1$. Finalmente, la solución general de (8)

$$\begin{aligned}&\phi\left(e^w,\ln x_1+e^w\ln x_2\right)=0,\quad \text{si } \sigma=1,\\ &\phi\left(e^w,x_1^{1-\frac{1}{\sigma}}e^wx_2^{1-\frac{1}{\sigma}}+\right)=0,\quad \text{si } \sigma\neq 1,\end{aligned}$$

donde $\phi$ es una función diferenciable arbitraria. Regresando a las variables originales, obtenemos

$$\begin{aligned}&\phi\left(\frac{f_1}{f_2}\left(\frac{x_2}{x_1}\right)^{\frac{1}{\sigma}},\ln x_1+\frac{f_1}{f_2}\left(\frac{x_2}{x_1}\right)^{\frac{1}{\sigma}}\ln x_2\right)=0,\quad \text{si } \sigma=1\\ &\phi\left(\frac{f_1}{f_2}\left(\frac{x_2}{x_1}\right)^{\frac{1}{\sigma}},x_1^{1-\frac{1}{\sigma}}+\frac{f_1}{f_2}\left(\frac{x_2}{x_1}\right)^{\frac{1}{\sigma}}x_2^{1-\frac{1}{\sigma}}\right)=0,\quad \text{si } \sigma\neq 1\end{aligned} \tag{10}$$

El siguiente paso para encontrar la función de producción $f$ sería resolver (10) la relación $\frac{f_1}{f_2}$ en función de $x_1$, $x_2$, es decir, encontrar una función $G$ tal que $\frac{f_1}{f_2}=G\left(x_1,x_2\right)$. Luego resolviendo la EDP segunda lineal

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}-G\left(x_1,x_2\right)\frac{\partial f}{\partial x_2}=0$$

obtenemos las funciones CES más generales.

*Desafortunadamente no podemos encontrar todas las soluciones* $\frac{f_1}{f_2}$ de (10), ya que esta relación aparece en ambas variables de $\phi$. Sin embargo, podemos encontrar varias familias de $\phi$ para las cuales se puede encontrar la solución.

Para las funciones CES de más de dos variables, la situación es aún más complicada.

**Definición 7.** *Una función $f:\mathbb{R}_+^n\to\mathbb{R}$ es llamada una* ***cuasi suma****, si existen funciones continuas estrictamente monótonas $g_i:\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}$ ($i=1,\ldots,n$) y existe un intervalo $I\subset\mathbb{R}$ de longitud positiva y una función continua estrictamente monótina $g: I\to\mathbb{R}_+$ tal que para cualquier $\boldsymbol{x}=\left(x_1,\ldots,x_n\right)\in\mathbb{R}_+^n$ tenemos $g_1\left(x_1\right)+\cdots+g_n\left(x_n\right)\in I$ y*

$$f(\boldsymbol{x})=g\left(g_1\left(x_1\right)+\cdots+g_n\left(x_n\right)\right). \tag{11}$$

La justificación para estudiar las funciones de producción de forma cuasi-suma es que estas funciones aparecen como soluciones de la ecuación de la bisimetría general y están relacionadas con el problema de la agregación consistente, ver J. Aczél y Gy. Maksa [1], Gy. Maksa [13].

Nuestra primera observación es que si *una función de producción es de forma cuasi-suma* (11), entonces su *elasticidad de sustitución de Hicks* de la $i$–ésima variable de producción con respecto a la $j$–ésima variable de producción no depende de la función $g$. Escriba $h(\boldsymbol{x}) = g_1(x_1) + \cdots + g_n(x_n)$ luego

$$f(\boldsymbol{x}) = g(h(\boldsymbol{x})) = g(g_1)(x_1) + \cdots + g_n(x_n) \quad \left(x \in \mathbb{R}_+^n\right).$$

Un simple cálculo muestra que

$$\begin{aligned} f_{x_i}(\boldsymbol{x}) &= g'(h(\boldsymbol{x}))\, g_i'(x_i) \\ f_{x_i x_i}(\boldsymbol{x}) &= g''(h(\boldsymbol{x}))\left(g_i'(x_i)\right)^2 + g'(h(\boldsymbol{x}))\, g_i''(x_i) \\ f_{x_i x_j}(\boldsymbol{x}) &= g''(h(\boldsymbol{x}))\, g_i'(x_i)\, g_j'(x_j) \end{aligned}$$

así,

$$\begin{aligned} &\boldsymbol{H}_{ij}(\boldsymbol{x}) \\ &= \frac{-\frac{1}{x_i g'(h) g_i'} - \frac{1}{x_j g'(h) g_j'}}{\frac{g''(h)(g_i')^2 + g'(h) g_i''}{(g'(h) g_i')^2} - \frac{2 g''(h) g_i' g_j'}{(g'(h))^2 g_i' g_j'} + \frac{g''(h)\left(g_j'\right)^2 + g'(h) g_j''}{\left(g'(h) g_j'\right)^2}} \\ &= \frac{-\frac{1}{x_i g_i'} - \frac{1}{x_j g_j'}}{\frac{g_i''}{(g_i')^2} + \frac{g_j''}{\left(g_j'\right)^2}} \qquad (12) \end{aligned}$$

donde las derivadas de $g_i$ $(i = 1, \ldots, n)$ son tomadas en el punto $x_i$ y $h$ es tomado en $\boldsymbol{x}$. Esto prueba nuestra afirmación.

Sin embargo, para cuasi sumas, la propiedad CES determina las formas funcionales de las funciones internas $g_i$.

**Teorema 2.** *Suponga que la función de producción $f : \mathbb{R}_+^n \to \mathbb{R}_+$ es una forma cuasi suma (11) donde las funciones $g$, $g_i$ $(i = 1, \ldots, n)$ son dos veces diferenciables y tienen primeras derivadas no nulas. Si $f$ satisface la propiedad CES, entonces las funciones $g_i$ $(i = 1, \ldots, n)$ tienen las siguientes formas*

$$g_i(x) = \begin{cases} \frac{\sigma x^{1-\frac{1}{\sigma}}}{C_i(\sigma-1)} + D_i, & si\ \sigma \neq 1, \\ \frac{\ln x}{C_i} + D_i, & si\ \sigma = 1, \end{cases} \qquad (13)$$

*donde $C_i$, $D_i$ son constante no nulas arbitrarias.*

*Si $n = 2$ y $\sigma \neq 1$, entonces, las funciones (13), $g_1$ y $g_2$ pueden tener la forma*

$$g_1(x) = \frac{\ln\left|\frac{\sigma d_1 x^{1-\frac{1}{\sigma}}}{\sigma-1} + C_1\right|}{d_1} + D_1, \quad g_2(x) = \frac{\ln\left|\frac{-\sigma d_1 x^{1-\frac{1}{\sigma}}}{\sigma-1} + C_2\right|}{-d_1} + D_2, \qquad (14)$$

*donde $d_1 \neq 0$, $D_1$, $D_2$ son constantes arbitrarias, $C_1$, $C_2$ son constantes que satisfacen las condiciones*

$$\text{signo}\, C_1 = \text{signo}\, \frac{(\sigma-1)}{\sigma d_1}, \quad y \quad \text{signo}\, C_2 = -\,\text{signo}\, \frac{(\sigma-1)}{\sigma d_1}. \qquad (15)$$

*Recíprocamente, si $g_i$ tiene la forma (13), (14) (con (15) satisfecho), entonces (4) se mantiene.*

*Proof.* Por la identidad

$$\frac{g''(x)}{(g'(x))^2} = -\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{g'(x)}\right)$$

podemos reescribir (12) como

$$\boldsymbol{H}_{ij}(\boldsymbol{x}) = \frac{-\left(\frac{1}{x_i}\frac{1}{g_i'} + \frac{1}{x_j}\frac{1}{g_j'}\right)}{\left(\frac{1}{g_i'}\right)' + \left(\frac{1}{g_j'}\right)'}.$$

Este muestra que las sustituciones $k_i(x_i) := \frac{1}{g_i'(x_i)}$ simplificará nuestras fórmulas. De hecho, con la ayuda de $k_i$, la ecuación (4) pasa a

$$\sigma k_i'(x_i) - \frac{1}{x_i} k_i(x_i) = -\left(\sigma k_j'(x_j) - \frac{1}{x_j} k_j(x_j)\right).$$

Aquí, el lado derecho depende solo de $x_j$ mientras que el lado izquierdo depende solo de $x_i$, por lo tanto, ambos lados deben ser constantes (dependiendo solo del subíndice $i$). Así concluimos que

$$k_i'(x_i) - \frac{1}{\sigma x_i} k_i(x_i) = d_i \quad (i = 1, \ldots, n). \qquad (16)$$

Para las constantes $d_i$, tenemos $d_i + d_j = 0$ si $i, j \in \{1, \ldots, n\}$, $i \neq j$.

Si $n = 2$, entonces tenemos la única ecuación $d_1 + d_2 = 0$, así, $d_2 = -d_1$ con $d_1 \in \mathbb{R}$ arbitrario.

Si $n \geq 3$, entonces todos los $d_i$'s deben ser cero, cuando $d_1 + d_2 = d_1 + d_3 = \cdots = d_1 + d_n = 0$, así, $d_2 = d_3 = \cdots = d_n = -d_1$. De $d_2 + d_3 = 0$, tenemos $d_1 = 0$, en consecuencia $d_2 = \cdots = d_n = 0$.

Por lo tanto, hemos probado que (4) se cumple si y solo si

$$g_i(x) = \int \frac{dx}{k_i(x)}, \quad \left(x \in \mathbb{R}_+, i = 1, \ldots, n\right)$$

donde $k_i$ satisface (16), con $d_1 \in \mathbb{R}$, $d_2 = -d_1$, si $n = 2$, y $d_1 = \cdots = d_n = 0$, si $n \geq 3$. □

Es un simple ejercico ver que la *solución general de la ecuación diferencial de primer orden no homogénea*

$$k'(x) - \frac{1}{\sigma x} k(x) = d \quad \left(x \in I \subseteq \mathbb{R}_+\right)$$

es

$$k(x) = \begin{cases} \frac{\sigma d x}{\sigma-1} + C x^{\frac{1}{\sigma}}, & \text{si } \sigma \neq 1 \\ d x \ln x + C x, & \text{si } \sigma = 1, \end{cases}$$

donde $C \in \mathbb{R}$ es una constante arbitraria. Es más, para $d \neq 0$ usando las sustituciones $u = \frac{\sigma d x^{1-\frac{1}{\sigma}}}{\sigma-1} + C$ respectivamente $u = d \ln x + C$ en las integraciones tenemos

$$\int \frac{dx}{k(x)} = \begin{cases} \frac{\sigma x^{1-\frac{1}{\sigma}}}{C(\sigma-1)} + D, & \text{si } d = 0, C \neq 0, \sigma \neq 1, \\ \frac{\ln x}{C} + D, & \text{si } d = 0, C \neq 0, \sigma = 1, \\ \frac{\ln\left|\frac{\sigma d x^{1-\frac{1}{\sigma}}}{\sigma-1} + C\right|}{d} + D, & \text{si } d \neq 0, \sigma \neq 1, \\ \frac{\ln|d \ln x + C|}{d} + D, & \text{si } d \neq 0, \sigma = 1, \end{cases} \tag{17}$$

donde $D \in \mathbb{R}$ es una constante arbitraria.

Si $n = 2$, entonces, de acuerdo con los cálculos previos, obtenemos $g_1$, $g_2$ de (11) haciendo esto $C = C_1, C_2$, $D = D_1, D_2$, $d = d_1, -d_1$, respectivamente. Por lo tanto, asumiendo $d_1 \neq 0$, obtenemos

$$\begin{aligned} g_1(x) &= \frac{\ln\left|\frac{\sigma d_1 x^{1-\frac{1}{\sigma}}}{\sigma-1} + C_1\right|}{d_1} + D_1, \quad g_2(x) &&= \frac{\ln\left|\frac{-\sigma d_1 x^{1-\frac{1}{\sigma}}}{\sigma-1} + C_2\right|}{-d_1} + D_2, \quad \text{si } \sigma \neq 1, \\ g_1(x) &= \frac{\ln\left|d_1 \ln x + C_1\right|}{d_1} + D_1, \quad g_2(x) &&= \frac{\ln\left|-d_1 \ln x + C_2\right|}{-d_1} + D_2, \quad \text{si } \sigma = 1. \end{aligned}$$

Estas funciones deben definirse para todos los números positivos. Este requisito excluye las soluciones $g_1, g_2$ para $\sigma = 1$, ya que en este caso la función $x \to d_1 \ln x + C_1$ siempre tiene un cero positivo $x_0 = e^{-C_1/d_1}$ por lo que $g_1$ no está definido en $x_0$. Para $\sigma \neq 1$ la situación es diferente. En este caso, $g_1$, $g_2$ se definen para todos los números positivos si y solo si las funciones $x \to \frac{\sigma d_1 x^{1-\frac{1}{\sigma}}}{\sigma-1} + C_1$, $x \to \frac{-\sigma d_1 x^{1-\frac{1}{\sigma}}}{\sigma-1} + C_2$ no tienen ceros positivos, es decir, si $-\frac{C_1(\sigma-1)}{\sigma d_1} < 0$, y $\frac{C_2(\sigma-1)}{\sigma d_1} < 0$, o si

## 2. Regresión lineal

## CRediT authorship contribution statement

**C. Torres Ponce:** Conceptualization of this study, Methodology, Software. **K. Fernández Huidobro:** Data curation, Writing - Original draft preparation.