Las funciones de Cobb-Douglas como base del espacio vectorial de funciones homogéneas

Zuleyka Díaz Martínez
Mª Pilar García Pineda
José Antonio Núñez del Prado

Universidad Complutense de Madrid
Facultad de Ciencias Económicas y Empresariales
Departamento de Economía Financiera y Contabilidad I
Campus de Somosaguas
28223 Pozuelo de Alarcón (Madrid)
zuleyka@ccee.ucm.es
mpigarci@ccee.ucm.es
janunez48@hotmail.com

RESUMEN

Dado que el conjunto de funciones homogéneas de grado r forma un espacio vectorial real, el objetivo de este trabajo es mostrar que el conjunto de funciones de Cobb-Douglas de grado r, $X^{\alpha}Y^{r-\alpha}$, forma una base de dicho espacio vectorial, lo que puede resultar de interés dada la importancia que las funciones de Cobb- Douglas tienen en Economía.

ABSTRACT

Given that the set of all the homogeneous functions of degree r forms a real vector space, the objective of this work is to show that the set of Cobb-Douglas functions of degree r, X^{α} $Y^{r-\alpha}$, forms a base of this vector space, which could be of interest given the importance of the Cobb-Douglas functions in Economics.

PALABRAS CLAVE: Funciones homogéneas, funciones de Cobb-Douglas, espacio vectorial, base.

INTRODUCCIÓN

La teoría económica clásica, la así denominada teoría marginalista del siglo XIX, partió de la idea de que en un proceso productivo ‹‹*los factores productivos deberían ser retribuidos por el valor de sus productos marginales*››. Su razonamiento fue el siguiente:

1) Supongamos que una empresa produce un único bien empleando dos factores productivos distintos *K, L,* el capital y el trabajo. Sea $y = f(K, L)$ la función de producción de la empresa considerada, donde y simboliza la cantidad de producto y *K* y *L* las cantidades de primer y segundo factor productivos empleadas.

2) Los marginalistas se situaron en *condiciones de equilibrio* en el que las condiciones de mercado hacían que la empresa no tuviese influencia ni en el precio unitario de lo producido, *p*, ni en el de los factores de producción, p_1 y p_2.

3) Por consiguiente, de una parte, lo pagado por la empresa para producir una cantidad *y* de producto sería

$$p_1 K + p_2 L$$

y, de otra parte, el precio total de lo producido sería

$$pf(K, L)$$

con lo que, dadas las condiciones de equilibrio, estas dos cantidades deberían ser iguales entre sí:

$$p_1 K + p_2 L = pf(K, L).$$

4) Ahora bien, dado que los factores productivos *K, L*, deben ser retribuidos en función de su productividad marginal, obtenemos que

$$p_1 = \frac{\partial f}{\partial K} p \text{ y } p_2 = \frac{\partial f}{\partial L} p,$$

con lo que llegamos a la ecuación fundamental

$$p\left(K \frac{\partial f}{\partial K} + L \frac{\partial f}{\partial L} \right) = pf(K, L)$$

que iguala el coste de los factores productivos, expresado por su productividad marginal, con el valor de lo producido.

Eliminando *p* en ambos miembros, obtenemos una ecuación en derivadas parciales cuyas soluciones, de acuerdo con el conocido teorema de EULER para las funciones homogéneas, serán funciones homogéneas de grado 1. Cabe esperar, por consiguiente, que el estudio de este tipo de funciones, las funciones homogéneas, sea relevante para la teoría económica del equilibrio. El objetivo de este artículo es mostrar algunas de sus posibles aplicaciones.

1. FUNCIONES HOMOGÉNEAS Y ALGUNAS DE SUS PROPIEDADES.

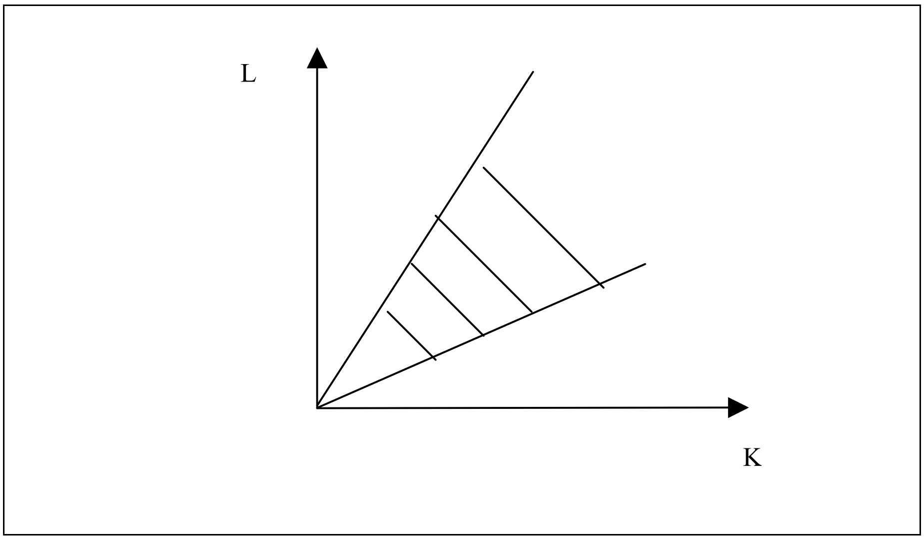
Definición: Funciones homogéneas.

Se dice que una función $f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ es *homogénea de grado r* si se cumple que:

$$f(\lambda x_1,...,\lambda x_n) = \lambda^r f(x_1,...,x_n)$$

para todo $\lambda > 0$ y para todo $(x_1,...,x_n)$ perteneciente al dominio de definición de f.

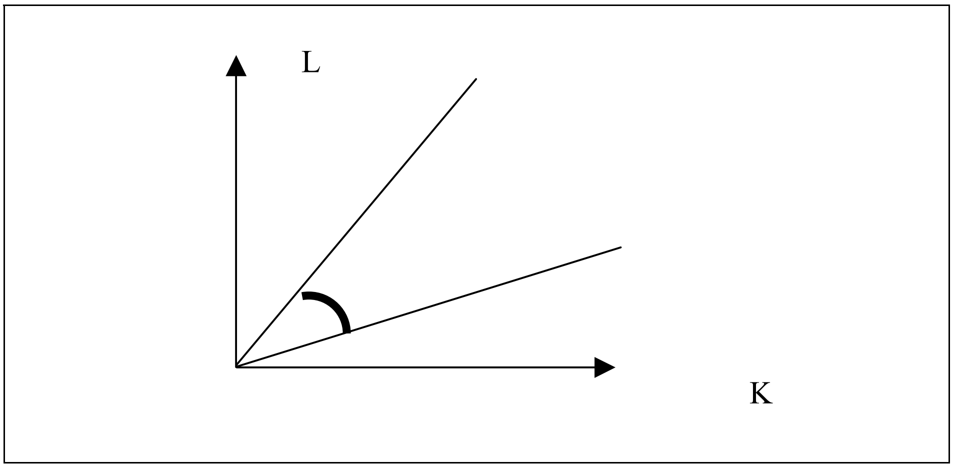
Por la definición anterior, el dominio de definición de f deberá ser un **cono** de $\mathbb{R}^n$, es decir, un conjunto C de $\mathbb{R}^n$ con la propiedad de que si $(x_1,...,x_n) \in C \Rightarrow (\lambda x_1,...,\lambda x_n) \in C$. Como además, en el caso económico, los factores productivos deberían ser positivos se ve que el dominio de f será de la forma



Propiedades de las funciones homogéneas.

1. Las funciones homogéneas de grado r con el mismo dominio de definición forman un ESPACIO VECTORIAL REAL: Si f y g son homogéneas de grado r también lo son las funciones $f+g$ y αf $\alpha \in \mathbb{R}$. Este hecho es la propiedad fundamental que utilizaremos.

2. Una función homogénea queda determinada conociendo los valores que toma sobre la frontera de la bola unidad.



3. Si $f(K,L)$ es homogénea de grado r, $f(K,L)$ puede escribirse como
$$f(K,L)=K^r g\left(\frac{L}{K}\right)=L^r h\left(\frac{K}{L}\right),$$
donde *g* y *h* son funciones de una variable, y, recíprocamente, cualquier función de una variable *(K/L)* multiplicada por L^r o de una variable *(L/K)* multiplicada por K^r son funciones homogéneas.

La propiedad de las funciones homogéneas de grado *r*, definidas sobre el mismo cono C de R^2, de formar un espacio vectorial sobre el cuerpo de los números reales nos asegura, por el teorema de la existencia de una base de la teoría de los espacios vectoriales, que dicho espacio vectorial ha de tener una base. Como es sabido, una de las funciones homogéneas más usadas en Economía es la función de Cobb-Douglas $f(K,L)=K^{\alpha}L^{r-\alpha}$, un "*polinomio homogéneo de grado r*". Un teorema, recientemente demostrado por nosotros (García Pineda, M. P. y Núñez del Prado, J. A., 2003), muestra que dichas funciones de Cobb-Douglas, conforme α varía en algún intervalo $[A,B]$ o en $\mathbb{R}$ son base de dicho espacio vectorial.

TEOREMA

1) Sea C un cono de $\mathbb{R}^2$, $[C,D]$ un intervalo en el que varían los exponentes α. Entonces $\int_C^D f(\alpha)x^{\alpha}y^{r-\alpha}d\alpha=0 \quad \forall(x,y)\in C \;\Rightarrow\; f(\alpha)\equiv 0$, es decir, las funciones de Cobb-Douglas $\left\{x^{\alpha}y^{r-\alpha}\right\}_{\alpha\in[C,D]}$ son linealmente independientes.

2) Sea $H(x,y)$ una función homogénea continua en un cono C de $\mathbb{R}^2_+$. Entonces $H(x,y)$ puede escribirse como

$$H(x,y)=\int_C^D f(\alpha)x^\alpha y^{r-\alpha}d\alpha$$

para una cierta función $f(\alpha)$, es decir, las funciones de Cobb-Douglas $\left\{x^\alpha y^{r-\alpha}\right\}_{\alpha\in[C,D]}$ son sistema de generadores.

Este teorema, junto con la ecuación de EULER que caracteriza las funciones de producción de la teoría marginalista clásica como funciones homogéneas diferenciables, da una justificación matemática de la importancia que las funciones de Cobb-Douglas han tenido siempre en Economía ya que, en condiciones de equilibrio de mercado, las funciones de producción han de ser, por el teorema de EULER, homogéneas, y, según el teorema anterior, todas las funciones homogéneas diferenciables de grado r son combinaciones lineales de las de Cobb-Douglas que aparecen así como las componentes básicas de las funciones de producción homogéneas.

2. APLICACIONES.

Consideraremos dos posibles aplicaciones:

1. La primera aplicación consiste en dar una interpretación económica del significado de las combinaciones lineales de varias funciones de Cobb-Douglas que generan todas las funciones homogéneas de producción. Sea, por simplicidad, una combinación lineal $AK^{\alpha_1}L^{r-\alpha_1}+BK^{\alpha_2}L^{r-\alpha_2}$ de dos funciones de Cobb-Douglas: esta función de producción se interpreta, de modo natural, como la función de producción de un empresario que posee dos empresas que fabrican un mismo producto con dos sistemas de producción diferentes; en la primera empresa el capital y el trabajo producen como $K^{\alpha_1}L^{r-\alpha_1}$ mientras que en la segunda, más moderna, la producción viene dada por $K^{\alpha_2}L^{r-\alpha_2}$ con lo que la producción total de ambas fábricas es la combinación lineal de ambas producciones, o lo que es lo mismo, la combinación lineal de dos funciones de producción linealmente independientes de Cobb-Douglas. Se ve así que, en general, una función de producción homogénea diferenciable arbitraria puede imaginarse como si fuese la suma o combinación lineal de un número finito o infinito de "empresas", cada una de las cuales se ajusta a una función de producción de Cobb-Douglas.

2. Funciones CES.

Las funciones de producción CES, funciones de elasticidad constante, son funciones de producción muy estudiadas en Economía de la forma $f(K, L) = [A_1K^p + A_2L^p]^{1/p}$. Son funciones de rendimientos constantes a escala y se comprueba que, aunque no son funciones de producción de COBB-DOUGLAS, sí son funciones homogéneas de grado 1:

$f(\lambda K, \lambda L) = [A_1 (\lambda K)^p + A_2 (\lambda L)^p]^{1/p} = [\lambda^p (A_1 K^p + A_2 L^p)]^{1/p} = \lambda [A_1 K^p + A_2 L^p]^{1/p}$

$= \lambda f(K, L)$.

Por consiguiente podrán expresarse como combinaciones lineales de funciones de producción de COBB-DOUGLAS de grado 1. En este caso la combinación lineal se obtiene de la siguiente forma:

en primer lugar podemos escribir $f(K, L)$ como

$$f(K,L) = \left[A_1 K^p + A_2 L^p\right]^{\frac{1}{p}} = L\left[A_1\left(\frac{K}{L}\right)^p + A_2\right]^{\frac{1}{p}}$$

que no es otra cosa que una (la tercera) de las propiedades de las funciones homogéneas que expusimos anteriormente. Ahora se considera la función

$$g\left(\frac{K}{L}\right) = \left[A_1\left(\frac{K}{L}\right)^p + A_2\right]^{\frac{1}{p}}$$

que es función diferenciable C^∞ y la desarrollamos en serie de potencias en un punto $\frac{K_0}{L_0}$ obteniendo:

$$g\left(\frac{K}{L}\right) = g\left(\frac{K_0}{L_0}\right) + \frac{\partial g}{\partial K}(K_0, L_0)\left(\frac{K}{L} - \frac{K_0}{L_0}\right) + \frac{\partial g}{\partial L}(K_0, L_0)\left(\frac{K}{L} - \frac{K_0}{L_0}\right) +$$
$$\frac{1}{2!}\left[\frac{\partial^2 g}{\partial K^2}(K_0, L_0)\left(\frac{K}{L} - \frac{K_0}{L_0}\right)^2 + \dots\right]$$

$$f(K,L) = \boldsymbol{L} g\left(\frac{K}{L}\right) = \boldsymbol{L} g\left(\frac{K_0}{L_0}\right) +$$
$$\frac{\partial g}{\partial K}(K_0, L_0)\boldsymbol{K} - \frac{\partial g}{\partial K}(K_0, L_0)\frac{K_0}{L_0}\boldsymbol{L} + \frac{\partial g}{\partial L}(K_0, L_0)\boldsymbol{K} - \frac{\partial g}{\partial L}(K_0, L_0)\frac{K_0}{L_0}\boldsymbol{L} +$$
$$\frac{1}{2!}\left[\frac{\partial^2 g}{\partial K^2}(K_0, L_0)\boldsymbol{K^2 L^{-1}} + \frac{\partial^2 g}{\partial K^2}(K_0, L_0)\left(\frac{K_0}{L_0}\right)^2 \boldsymbol{L} - 2\frac{\partial^2 g}{\partial K^2}(K_0, L_0)\frac{K_0}{L_0}\boldsymbol{K} + \dots\right]$$

desarrollo en el que se ve que todos los términos son múltiplos de funciones homogéneas de COBB-DOUGLAS de grado 1 en las variables $\boldsymbol{K}$ y $\boldsymbol{L}$ por lo que las funciones de producción CES son una combinación lineal numerable de las de COBB-DOUGLAS. Como antes, una empresa cuya función de producción sea CES puede imaginarse descompuesta en una cantidad numerable de "subempresas" cada una del tipo de COBB-DOUGLAS.

BIBLIOGRAFÍA

Abellanas, L. y Galindo, A. (1987). Espacios de Hilbert. Eudema Universidad. Madrid.

Anthony, M. y Biggs, N. (2001). Matemáticas para la Economía y las Finanzas. Cambridge University Press. Madrid.

Aubin, J. P. (1979). Applied Functional Analysis. John Wiley & Sons. New York.

Aubin, J. P. (1994). Initiation á l'Analyse Appliquée. Masson. París.

De La Hoz Gándara, M. A. y González Montesinos, M. T. (2000). Introducción al Análisis Matemático para la Economía. Servicio de Publicaciones de la Universidad de Cádiz.

García Pineda, M. P. y Núñez del Prado, J. A. (2003). Una base del espacio de funciones homogéneas. Documento de Trabajo no publicado. Universidad Complutense de Madrid.

Griffel, D. H. (1993). Applied functional analysis. Ellis Horwood. London.

Kreps, D. M. (1994). Curso de teoría microeconómica. McGraw-Hill. Madrid.

Riesz, F. y Nagy, B. (1990). Functional Analysis. Dover Publications. New York.

Varian, H. R. (1998). Análisis Microeconómico. Antoni Bosch, editor. Barcelona.