Objetivos

- El objetivo general del presente artículo es difundir lo más claramente posible la teoría económica relacionada a una función de producción particular.

Objetivos específicos:

- Conocer las características fundamentales de la función de producción Cobb-Douglas.
- Desarrollar el programa informático en un lenguaje de programación adecuad, para visualizar gráficamente la forma de las funciones de producción estudiada.
- Graficar la función de producción de Cobb-Douglas.

Preliminar

En el mundo real no todas las magnitudes dependen de una sola variable sino de dos o más.

En las matemáticas existen ciertas funciones que van de un vector a un número real, esas funciones son las funciones reales de variable vectorial.

El tema central de la ciencia económica es la producción de bienes y servicios. La actividad de producción la efectúan ciertas unidades a las que llamaremos empresas.

La teoría económica de la producción, se ocupa precisamente de este tema particular y su objetivo es brindar al empresario, información necesaria para que la empresa organice de manera eficiente su proceso de producción.

Las funciones de producción no dependen de una sola variable, lo que nos indica que estas son funciones reales de variable vectorial, ya que estas se pueden expresar en términos matemáticos como

$$Q = f(T, L, Rn, K)$$

Donde:

Q: Cantidad de producto obtenido

T: El factor tierra

L: El factor trabajo

Rn: Recursos naturales

K: bienes de capital

Función de producción de Cobb-Douglas

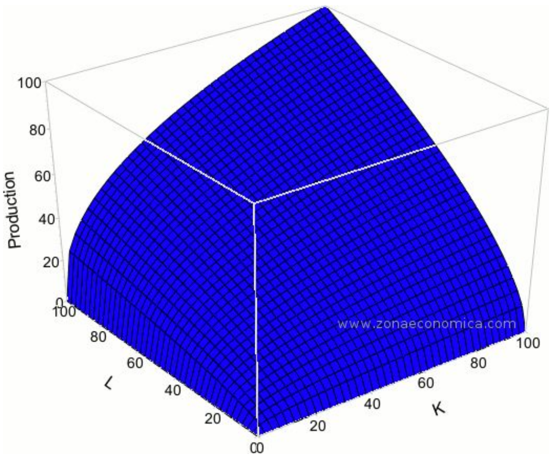
En 1928, Charles Cobb y Paul Douglas publicaron un estudio en el que modelaron el crecimiento de la economía estadounidense durante el periodo 1899-1922. Ellos consideraron una simplificación de la economía en la que la producción está determinada por la cantidad de mano de obra empleada y la cantidad de capital invertido.

Esta función de producción presenta la forma:

$$P(L,K) = bL^{\alpha}K^{\beta}$$

α y β son las elasticidades producto del trabajo y el capital, respectivamente. Estos valores son constantes determinadas por la tecnología disponible.

Gráficamente:



La elasticidad del producto mide la respuesta del producto a un cambio en los niveles del trabajo o del capital usados en la producción, si permanecen constantes los demás factores.

Por ejemplo, si $\alpha = 0{,}15$, un aumento del 1% en la cantidad de trabajo, provocaría un incremento aproximado del 0,15% en el volumen del producto.

Así, si: $\alpha + \beta = 1$, La función de producción tiene rendimientos de escala constantes, es decir que si T y K aumenta cada uno el 20%, Q aumenta también el 20%. Esto significa que la función Cobb-Douglas es homogénea de grado 1 e implica que el costo mínimo es independiente del volumen de la producción y depende sólo de los precios relativos de los factores de producción.

Si $\alpha + \beta < 1$, rendimientos de escala son descendentes, y si $\alpha + \beta > 1$ los rendimientos de escala son crecientes.

Suponiendo competencia perfecta, α y β pueden ser obtenidos como la cuota de T y de K con respecto a Q. Un avance tecnológico que aumenta el parámetro A incrementa proporcionalmente el producto marginal de T y de K.

Evidencia estadística han mostrado que las proporciones de trabajo y capital con respecto al producto total fueron constantes a través del tiempo en los países desarrollados, lo cual explicaron Cobb y Douglas ajustando estadísticamente una regresión de mínimos cuadrados de su función de producción.

Si bien hay numerosos factores que afectan el comportamiento de la economía, el modelo resulto ser sorprendentemente preciso. La función que utilizaron para hacer este modelo de la producción tenía la forma siguiente:

$$P(L,K) = bL^{\alpha}K^{1-\alpha} \qquad [1]$$

donde P es la producción total (el valor monetario de todos los artículos producidos en un año), L es la cantidad de mano de obra (el número total de hombres-hora trabajados en un año) y K es la cantidad de capital invertido (el valor monetario de toda la maquinaria, equipos y edificios).

Más adelante demostraremos la forma en la que la ecuación 1 se obtiene a partir de ciertas suposiciones económicas.

Cobb y Douglas emplearon datos económicos publicados por el gobierno para obtener la tabla 1. Tomaron el año 1899 como base y le asignaron un valor de 100 a cada variable P, L y K, para 1899. Los valores para los otros años se expresan como porcentajes de las cifras de 1899.

Tabla 1. Datos estadísticos de la economía estadounidense

Cobb y Douglas utilizaron el método de cuadrados mínimos para ajustar los datos de la tabla 1 a la función

$$P(L,K) = 1.01L^{0.75}K^{0.25} \qquad [2]$$

Si utilizamos el modelo dado por la función de la ecuación 2 para calcular la producción en los años 1910 y 1920, obtenemos los valores

$$P(147,208) = 1.01(147)^{0.75}(208)^{0.25} \approx 161.9$$

$$P(194,407) = 1.01(194)^{0.75}(407)^{0.25} \approx 235.8$$

Que son bastante cercanos a los valores reales de 159 y 231.

La función de producción [1] se ha utilizado posteriormente en numerosas ocasiones, que varían desde empresas individuales hasta problemas económicos mundiales. Esta función es conocida como la "función de producción de Cobb-Douglas". Su dominio es $\{((L,K)) \ / \ L \geq 0, \ K \geq 0 \ \}$ porque L y K representan mano de obra y capital y, por tanto, nunca son negativas.

Demostración de la ecuación [1]:

Anteriormente describimos la obra de Cobb Y Douglas para modelar la producción total P de un sistema económico, como una función de la cantidad de trabajo L y la inversión de capital K. aquí empleamos derivadas parciales para demostrar cómo es que la forma particular de su modelo se sigue de ciertas suposiciones que ellos hicieron acerca de la economía.

Si la función de producción se denota por $P = P(L,K)$, entonces la derivada parcial $\partial P/\partial L$ es la razón de cambio de la producción con respecto a la cantidad de mano de obra. Los economistas la llaman producción marginal con respecto a la mano de obra o productividad marginal de la mano de obra. Del mismo modo, la derivada parcial $\partial P/\partial K$ es la razón de cambio de la producción con respecto al capital y se denomina productividad marginal del capital. En estos términos, las suposiciones hechas por Cobb y Douglas se expresan como sigue.

i. Si desaparece ya sea la mano de obra o el capital, desparece la producción.
ii. La productividad marginal de la mano de obra es proporcional a la cantidad de producción por unidad de mano de obra.
iii. La productividad marginal de capital es proporcional a la cantidad de producción por unidad de capital.

Debido a que la producción por unidad de mano de obra es P/L, la suposición (ii.) dice que

$$\frac{\partial P}{\partial L} = \alpha \frac{P}{L}$$

para cierta constante α. Si conservamos K constante ($K = K_0$), entonces esta ecuación diferencial parcial se convierte en una ecuación diferencial ordinaria:

$$\frac{dP}{dL} = \alpha \frac{P}{L}$$

Si resolvemos esta ecuación diferencial de variables separables por los métodos de la sección 9.3 (véase también ejercicio 73), obtenemos

$$P(L,K_0) = C_1(K_0)L^{\alpha} \qquad (*)$$

Note que hemos escrito la constante C_1 como función de K_0 porque podría depender del valor de K_0.

Análogamente, la suposición (iii.) dice que

$$\frac{\partial P}{\partial K} = \beta \frac{P}{K}$$

y podemos resolver esta ecuación diferencial para obtener

$$P(L_0,K) = C_2(L_0)K^{\beta} \qquad (**)$$

Comparando las ecuaciones (*) y (**), tenemos

$$P(L,K) = bL^{\alpha} K^{\beta} \qquad (***)$$

donde b es una constante independiente de L y de K. La suposición (i.) muestra que $\alpha>0$ y $\beta>0$.

Note de la ecuación (***) que si mano de obra y capital aumentan ambos en un factor m, entonces

$$P(mL,mK) = b(mL)^{\alpha} (mK)^{\beta} = m^{\alpha+\beta} bL^{\alpha} K^{\beta} = m^{\alpha+\beta} P(L,K)$$

Si $\alpha+\beta = 1$, entonces $P(mL,mK) = mP(L,K)$, que significa que la producción también aumenta en un factor de m. Esta es la razón por la que Cobb y Douglas supusieron que $\alpha+\beta = 1$ y, por tanto,

$$P(L,K) = bL^{\alpha}K^{1-\alpha} \qquad \blacksquare$$

Linealidad de la función de producción de Cobb-Douglas:

La función general de Cobb-Douglas

$$P(L,K) = bL^{\alpha}K^{1-\alpha}$$

también puede expresarse como

$$\ln ln\, \frac{P}{K} \;=\; \ln ln\, b \;+ \alpha \;\ln ln\, \frac{L}{K} \qquad [3]$$

Luego, si se concede que x = $\ln ln\, \frac{L}{K}$, y = $\ln ln\, \frac{P}{K}$, la ecuación [3] se convierte en la ecuación lineal

$$y = \alpha x + \ln ln\, b$$

Demostración de la ecuación [3]:

Tenemos la ecuación

$$P = bL^{\alpha}K^{1-\alpha}$$

Luego,

$$\frac{P}{K} = bL^{\alpha}K^{1-\alpha}$$

$$\frac{P}{K} = b\left(\frac{L}{K}\right)^{\alpha}$$

$$\ln\left(\frac{P}{K}\right) = \ln\left(b\left(\frac{L}{K}\right)^{\alpha}\right)$$

$$\ln\left(\frac{P}{K}\right) = \ln(b) + \ln\left(\frac{L}{K}\right)^{\alpha}$$

por lo tanto,

$$\ln\left(\frac{P}{K}\right) = \ln(b) + \alpha\ln\left(\frac{L}{K}\right)$$

Ahora utilizando los valores de la tabla 1, se obtiene los valores de $\frac{P}{K}$ para los años 1899-1922.

Tabla 2. Datos estadísticos de la economía estadounidense con los valores de

Después de ingresar los pares (x,y) en una calculadora gráfica, la línea de regresión de mínimos cuadrados resultante a través de los puntos es aproximadamente $y = 0.75136x + 0.01053$, que redondeamos a

$$y = 0.75x + 0.01.$$

Con esta ecuación podemos demostrar la ecuación [2].

Demostración de la ecuación [2]:

Comparando la ecuación obtenida $y = 0.75x + 0.01$con $y = \alpha x + \ln ln\, b$, tenemos

$\alpha = 0.75$ y $\ln b = 0.01$, entonces $b = e^{0.01} \approx 1.01$.

Por lo tanto, la función de producción de Cobb-Douglas $P = bL^{\alpha}K^{1-\alpha}$, reemplazando los valores sería:

$$P(L,K) = 1.01L^{0.75}K^{0.25} \quad .$$

Criticas al trabajo de Cobb-Douglas:

Actualmente algunos expertos, expresan dudas sobre la constancia de esta relación a través del tiempo. Ni Cobb, ni Douglas aportaron una razón teórica por la cual los exponentes α y β deberían mantenerse constantes en el tiempo o entre sectores de la economía. Hay que recordar que la naturaleza de la maquinaria y de otros bienes de capital (K) difiere entre períodos y de acuerdo al bien que vaya a producirse. Así también las habilidades o calidades del trabajo (L).

Por otra parte, la función Cobb-Douglas no fue desarrollada en base de ningún conocimiento de la ingeniería, la tecnología, o de la gerencia del proceso de producción. Fue en cambio desarrollada por sus coincidencias con la teoría económica de sus atractivas características matemáticas, tales como la los rendimientos marginales decrecientes de los diferentes factores de producción.

No hay microfundamentos o análisis del comportamiento de los agentes individuales con respecto a esta función. Los economistas han insistido más recientemente en que hay que explicar la micrológica de procesos en gran escala, lo cual no logra la función Cobb-Douglas.

También existen críticas al uso de esta función desde la economía biofísica, las cuales ponen en duda su significado operacional.

Aplicaciones:

1. A pesar de las críticas, la función Cobb-Douglas ha sido aplicada en contextos diferentes a la producción. Ha sido aplicada a la función de utilidad, así:

$$U(x_1, x_2) = x_1^{\alpha} x_2^{\beta}$$

donde x_1 y x_2 son las cantidades consumidas de un bien 1 y un bien 2.

2. La forma general de la función Cobb-Douglas:

$$q = c \prod_i x_i^{\alpha_i}$$

El índice corresponde a los factores de producción (por ejemplo las cantidades de trabajo o de capital utilizadas para producir un bien).

3. Por otra parte, el modelo de crecimiento de Solow parte de una función Cobb–Douglas de producción

$$P = bL^{\alpha}K^{1-\alpha}$$

y concluye determinando la importancia crucial de la tecnología para el crecimiento continuado. En la investigación del ciclo económico, los modelos del ciclo real utilizan y profundizan los trabajos de Solow.

Conclusiones

Se espera haber contribuido a un mejor entendimiento de la economía de la producción a partir del desarrollo teórico expuesto. Asimismo, que el lector pueda no solo estudiar la teoría con ecuaciones y tablas, elementos que definen las funciones de producción, sino también pueda visualizar gráficamente las figuras que le corresponden. La función de producción de Cobb-Douglas estimada para la economía estadounidense, establece que la mayor parte de las variaciones que ocurren en la producción total, se explica por las variaciones en la formación bruta de capital fijo y la población ocupada en el periodo analizado.