Función de Cobb-Douglas

Ecuaciones en diferencias y análisis en escalas de tiempo

K. Fernández Huidobro[1] A. Berrospi Casano[2] B. Torres Ayalas[3] C. Aznarán Laos[4]

23 de noviembre del 2019

Facultad de Ciencias

Universidad Nacional de Ingeniería

Preliminares

Preliminares

En esta sección se explicará los detalles del tema del proyecto y su visión.

Esperamos que esta estructura se mejore considerablemente bajo la guía de nuestro mentor MSc. *Clifford Orlando Torres Ponce*.

Preliminares

Si f es una función de dos variables, a menudo dejamos que una letra como z denote el valor de f en el punto (x, y), así $z = f(x, y)$.

Entonces, llamaremos a x e y las variables independientes, o los *argumentos* de f, mientras que z es llamada la variable independiente, porque el valor z, en general, depende de los valores x e y.

El dominio de la función f es entonces el conjunto de todos los posibles pares de variables independientes, mientras que su *rango* es el conjunto de valores correspondientes de la variable dependientes.

En economía, x e y son llamadas las variables exógenas, mientras que z es la variable endógena.

Definición (Función de Cobb-Douglas)
Una función de dos variables que aparecen en muchos modelos económicos es

$$F(x, y) = Ax^a y^b \tag{1}$$

donde A, a y b son constantes. Usualmente, uno asume que F es definida solo para $x > 0$ e $y > 0$.

A la función de la forma (1) es generalmente llamada la *función de Coubb-Douglas*.

Se usa con mayor frecuencia para describir ciertos procesos de producción. Entonces x e y son llamados factores de entrada, mientras que $F(x, y)$ es el número de unidades producidas, o la salida.

En este caso F es llamada la *función de producción*.

Ejemplo (Función de Cobb-Douglas)
Para la función F dada en el ejemplo (1), encuentre una expresión para $F(2x, 2y)$ y para $F(tx, ty)$, donde t es un número positivo arbitrario. Encuentre también una expresión para $F(x+h, y) - F(x, y)$. Dé interpretaciones económicas.

Demostración.
Encontramos que

$$F(2x, 2y) = A(2x)^a(2y)^b = A2^a x^a 2^b y^b = 2^a 2^b A x^a y^b = 2^{a+b} F(x, y).$$

Cuando F es una función de producción, esto muestra que a cada uno de los factores de entrada es duplicado, entonces la salida es 2^{a+b} veces más grande. Por ejemplo, si $a + b = 1$, entonces duplicando ambos factores de producción implica la duplicación de la salida.

En el caso general,

$$F(tx, ty) = A(tx)^a(ty)^b = At^a x^a t^b y^b = t^{a+b} F(x, y). \tag{*}$$

Demostración (Cont.)
Finalmente, vemos que

$$F\left(x+h,y\right)-F\left(x,y\right)=A(x+y)^{a}y^{b}-Ax^{a}y^{b}=Ay^{b}\left[(x+h)^{a}-x^{a}\right]. \qquad (**)$$

Esto muestra el cambio en la salida cuando el primer factor de entrada es cambiado por h unidades mientras que el otros factor es constante.

Por ejemplo, suponga que $A=100$, $a=1/2$ y $b=1/4$, en cuyo caso $F\left(x,y\right)=100x^{1/2}y^{1/4}$. Si escogemos $x=16$, $y=16$ y $h=1$, la ecuación (**) implica que

$$F\left(16+1,16\right)-F\left(16,16\right)=100\cdot 16^{1/4}\left[17^{1/2}-16^{1/2}\right]=100\cdot 2\left[\sqrt{17}-4\right]\approx 24{,}6.$$

Además, si incrementamos la entrada del primer factor desde 16 hasta 17, manteniendo constando la entrada del segundo factor constante en 16 unidades, entonces incrementamos la producción en alrededor $24{,}6$ unidades.

Observación F es una función homogénea de grado $a + b$.

Teorema (Euler)

Sea la función $f\colon \mathbb{R}^k \to \mathbb{C}$ totalmente diferenciable, positiva, homogénea de grado $\lambda \in \mathbb{R}$. Esto último significa que $f(tx) = t^\lambda f(x)$ para todo $t \in \mathbb{R}_{>0}$ y $x \in \mathbb{R}^k$. Entonces, se aplica a todos los $x \in \mathbb{R}^k$

$$\lambda \cdot f(x) = \sum_{i=1}^{k} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) \cdot x_i = \frac{\partial f}{\partial x_1}(x) \cdot x_1 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_k}(x) \cdot x_k.$$

Corolario (Aplicación a la economía)

Sea $f\colon \mathbb{R}^k_{\geq 0} \to \mathbb{R}$ *la función de producción totalmente diferenciable con economía de escala constante de una compañía. Matemáticamente, esto significa que* f *es positiva y homogénea de grado uno. Entonces, se sigue del teorema 3*

$$f(x) = \sum_{i=1}^{k} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) \cdot x_i = \frac{\partial f}{\partial x_1}(x) \cdot x_1 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_k}(x) \cdot x_k.$$

Bajo el supuesto de una competencia perfecta en todos los mercados de factores, cada factor de producción $x_1, \ldots, x_k$ *se convierte en el equilibrio de mercado* $x^* \in \mathbb{R}^k_{\geq 0}$ *pagado de acuerdo con su ingreso marginal. Esto significa que para cualquier* $i = 1, \ldots, k$*, el factor de remuneración del* i*–ésimo factor de producción* $\frac{\partial f}{\partial x_i^*}(x^*)$ *equivalente. Esto implica que el compañía considerada es un equilibrio de mercado* x^* *no puede obtener ganancias porque la producción completa* $f(x^*)$ *por la remuneración de los factores de producción,* $\sum_{i=1}^{k} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x^*) \cdot x_i^*$*, se gasta.*

Ejemplo (Aplicación del teorema de Euler)

Dada la función de producción Cobb-Douglas $f\colon \mathbb{R}^2_{\geq 0} \to \mathbb{R}$, $(K, L) \mapsto \sqrt{KL}$, en el que K y L aquí representan los factores capital o trabajo. f es obviamente diferenciable y homogénea de grado uno, dado que $f(\alpha K, \alpha L) = \alpha f(K, L)$ para todo $\alpha \in \mathbb{R}_{>0}$. Según el teorema de Euler se sigue:

$$K \frac{\partial f}{\partial K}(K, L)(K, L) + L \frac{\partial f}{\partial L}(K, L) = K \cdot \frac{1}{2} \frac{\sqrt{L}}{\sqrt{K}} + L \cdot \frac{1}{2} \frac{\sqrt{K}}{\sqrt{L}} = \sqrt{KL} = f(K, L).$$

Preliminares

La función de producción *Cobb-Douglas* es una forma funcional particular de la función de producción, ampliamente usada para representar la relación tecnológica entre las cantidades de dos o más entradas, particularmente el capital físico y el trabajo, y la cantidad de salida puedes ser reproducida por esas entradas. La forma *Cobb-Douglas* fue desarrollado y probada contra evidencia estadística por Charles Cobb and Paul Douglas durante 1927–1947.

Formulación
En su forma más estándar para la producción un único producto con dos factores, la función es

$$Y = AL^{\beta}K^{\alpha},$$

donde

- Y es la producción total (el valor real de todos los productos producidos en un año).
- L es la aportación laboral, el número total de horas-persona trabajas en un año,
- K es la aportación del capital, el valor real de toda la maquinaria, equipamiento y edificaciones.

- A es el factor de productividad total.
- α y β son las elasticidades de salida del capital y el trabajo respectivamente. Estos valores son constantes determinadas por la tecnología disponible.

La elasticidad del producto mide la capacidad de respuesta del producto a un cambio en los niveles de trabajo o capital utilizados en la producción, con todas las demás cosas constantes.

Por ejemplo, si $\alpha = 0,45$, un aumento del 1 % en el uso de capital conduciría a un aumento de aproximadamente el 0,45 % en la producción.

La función puede mostrar tres casos básicos de rendimientos de escala:

- Rendimientos de escala constantes si $\alpha + \beta = 1$, $-Y$ aumenta en ese mismo cambio proporcional a medida que cambian las entradas L y K.
- Rendimientos de escala decrecientes si $\alpha + \beta < 1$, $-Y$ aumenta en menos de ese cambio proporcional a medida que cambian las entradas L y K.
- Rendimientos de escala crecientes si $\alpha + \beta > 1$, $-Y$ aumenta en más de ese cambio proporcional a medida que cambian las entradas L y K.

En su forma generalizada, la función de Cobb-Douglas modela más de dos productos. La función de Cobb-Douglas puede ser escrita como:

$$f\left(x\right) = A \prod_{i=1}^{L} x_i^{\lambda_i}, \quad x = \left(x_1, \cdots, x_L\right), \tag{2}$$

donde

- A es un parámetro de eficiencia.
- L es el número total de productos.
- $x_1, \ldots, x_L$ son cantidades de productos consumidos, producidos, etc. (no negativas).
- λ_i es un parámetro de elasticidad para el producto i.

Aplicaciones económicas

Teorema (Igualdad de las derivadas cruzadas o teorema de Schwarz)
Supnga que todas m–ésimas derivadas parciales de una función $f(x_1, \ldots, x_n)$ son continuas. Si cualquiera dos de ellas involucran diferenciación con respecto a cada una de las variables el mismo número de veces, entonces ellas son necesariamente iguales.

El contenido de este resultado puede ser explicado como sigue: Sea $m = m_1 + \cdots + m_n$ y suponga que $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ es diferenciable m_1 veces con respecto a x_1, m_2 veces diferenciable con respecto a x_2, ..., y m_n veces diferenciable con respecto a x_n. Suponga que la condición de continuidad es satisfecha por estas derivadas parciales de orden m–ésimo. Entonces terminamos con el mismo resultado sin importar cuál sea el orden de la diferenciación, porque cada una de las derivadas parciales es igual a

$$\frac{\partial^m f}{\partial x_1^{m_1} \partial x_2^{m_2} \cdots \partial x_n^{m_n}}.$$

En particular, para el caso cuando $m = 2$, para $i = 1, \ldots, n$ y $j = 1, \ldots, n$,

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$$

si ambas estas derivadas parciales son continuas.

Ejemplo

Considere la función de producción agricultura $Y = F(K, L, T)$, donde Y es el número de unidades producidas, K es el capital invertido, L es la entrada trabajo y T es el área de tierra agrícola que es usada. Entonces $\partial Y/\partial K = F'_K$ es llamada el *capital del producto marginal*. Esta es la tasa de cambio de la salida Y con respecto a K cuando L y T se mantienen fijos. Similarmente, $\partial Y/\partial L = F'_L$ y $\partial Y/\partial T = F'_T$ son los productos de trabajo y tierra marginales, respectivamente. Por ejemplo, si K es el valor del capital equipado medido en dólares, y $\partial Y/\partial K = 5$, entonces aumentar la entrada de capital en h unidades aumentaría la producción en aproximadamente $5h$ unidades.

Suponga, en particular, que F es la función de Cobb-Douglas $F(K, L, T) = AK^a L^b T^c$, donde A, a, b y c son constantes positivas. Encuentre los productos marginales, y las segundas derivadas parciales. Discuta sus signos.

Demostración.
Los productos marginales son

$$F'_K = AaK^{a-1}L^bT^c, \quad F'_L = AbK^aL^{b-1}T^c, \quad \text{y} \quad F'_T = AcK^aL^bT^{c-1}.$$

Asumiendo que K, L y T son todas positivas, los productos marginales son positivos. Por lo tanto, un incremento en el capital, trabajo o tierra incrementará el número de unidades producidas.

Las segundas derivadas parciales cruzadas, también llamadas parciales mixtas son:

$$F''_{KL} = AabK^{a-1}L^{b-1}T^c, \quad F''_{KT} = AacK^{a-1}L^bT^{c-1}, \quad \text{y} \quad F''_{LT} = AbcK^aL^{b-1}T^{c-1}.$$

Note que estas derivadas son positivas. Llamaremos cada par de factores *complementarios* porque más de uno incrementa el producto marginal de la otra.

Las segunda derivadas parciales directas son

$$F''_{KK} = Aa\,(a-1)\,K^{a-2}L^bT^c, \quad F''_{LL} = Ab\,(b-1)\,K^aL^{b-2}T^c, \quad F''_{TT} = Ac\,(c-1)\,K^aL^bT^{c-2}.$$

Demostración (Cont.)
Por ejemplo, F''_{KK} es la derivada parcial del producto de capital marginal, F'_K con respecto a K.

Si $a < 1$, entonces $F''_{KK} < 0$, y existe una disminución del producto del capital marginal, esto es, un pequeño aumento en el capital invertido conducirá a una disminución en el producto marginal del capital.

Podemos interpretar que esto significa que, aunque pequeños aumentos de capital porque la producción aumentará, así que $F'_K > 0$, este aumento ocurre en una tasa decreciente, dado que $F''_{KK} < 0$.

Similarmente para el trabajo si $b < 1$, y para la tierra si $c < 1$.

Definición
Si $z = f(x, y)$, definimos la elasticidad parcial de z con respecto a x e y por

$$\mathrm{El}_x\, z = \frac{x}{z}\frac{\partial z}{\partial x}, \quad \mathrm{El}_y\,(z) = \frac{y}{z}\frac{\partial z}{\partial y} \tag{3}$$

A menudo los economistas solo se refieren a la elasticidad antes que a la elasticidad parcial. Así, $\mathrm{El}_x\, z$ es la elasticidad de z con respecto a x cuando y se mantiene constante, y $\mathrm{El}_y\, z$ tiene su correspondiente interpretación.

Cuando todas las variables son positivas, las elasticidades pueden expresarse como derivadas logarítmicas. De acuerdo

$$\mathrm{El}_x\, z = \frac{\partial \ln z}{\partial \ln x}, \quad \text{y} \quad \mathrm{El}_y\, z = \frac{\partial \ln z}{\partial \ln y}. \tag{4}$$

Elasticidades parciales

Definición
Si $z = f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = f(\boldsymbol{x})$, definimos la elasticidad (parcial) de z, o de f, con respecto a x_i como la elasticidad de z con respecto a x_i cuando todas las demás variables se mantienen constantes. Así, asumiendo que todas las variables son positivas, podemos escribir

$$\mathrm{El}_i\, z = \frac{x_i}{f(\boldsymbol{x})} \frac{\partial f(\boldsymbol{x})}{\partial x_i} = \frac{x_i}{z} \frac{\partial z}{\partial x_i} = \frac{\partial \ln z}{\partial \ln x_i}. \tag{5}$$

El número $\mathrm{El}_i\, z$ es aproximadamente igual al cambio porcentual en z causado por un $1\,\%$ de incremento en x_i, la i–ésima variable, manteniendo todas las otras x_j constantes.
Entre otras formas de notación de uso común en lugar de $\mathrm{El}_i\, z$, mencionamos: $\mathrm{El}_i\, f(\boldsymbol{x})$, $\mathrm{El}_{x_i}\, z$, ε_i, e_i y $\hat{z}_i$. Este último, por supuesto, se pronuncia “z sombrero i”.

Ejemplo
Suponga que $D = Ax_1^{a_1} x_2^{a_2} \cdots x_n^{a_n}$ es definido para todos los $x_1 > 0$, $x_2 > 0$,...,$x_n > 0$, donde $A > 0$ y $a_1, a_2, \ldots, a_n$ son constantes. Encuentre la elasticidad de D con respecto a x_i, para $i = 1, \ldots, n$.

Demostración.
Debido a que todos los factores excepto $x_i^{a_i}$ son constantes, podemos aplicar la ecuación anterior para obtener el resultado $\mathrm{El}_i\, D = a_i$. □

Elasticidades parciales

Como un caso especial de este ejemplo, suponga que $D_i = Am^{\alpha} p_i^{-\beta} p_j^{\gamma}$, donde m es el ingreso, p_i es el propio precio y p_j es el precio de un bien sustituto.

Entonces, α es la elasticidad ingreso de la demanda. Por otra parte, $-\beta$ es la elasticidad de la demanda con respecto a los cambios en sus propios precios p_i, por eso se llama *elasticidad de precio propio* de la demanda. Sin embargo, debido a que las elasticidades de demanda del precio propio son generalmente negativas, a menudo se describe β antes que $-\beta$ como la elasticidad de la demanda a precio propio.

Finalmente, γ es la elasticidad de la demanda con respecto al precio del sustituto especificado. Por analogía con las derivadas parciales cruzadas, se llama *elasticidad de precio cruzado* de la demanda. Tenga en cuenta que la proporción del ingreso gastado en bienes es

$$\frac{p_i D_i}{m} = Am^{\alpha-1} p_i^{1-\beta} p_j^{\gamma}.$$

Cuando la elasticidad de ingreso $\alpha < 1$, esta proporción es una función de ingreso decreciente. Los economistas describen un producto con esta propiedad como una *necesidad*. Por otro lado, cuando $\alpha > 1$, la proporción de ingreso gastado en un producto i aumenta con el ingreso, en cuyo caso los economistas describen el producto i como un lujo.

Observación

Si $z = f(x_1, \ldots, x_n)$ *es continuamente diferenciable y* $x_i = g_i(t_1, \ldots, t_m)$*, para cada* $i = 1, 2, \ldots, n$ *son todas diferenciables, entonces*

$$\frac{\partial z}{\partial t_j} = \frac{\partial z}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial t_j} + \frac{\partial z}{\partial x_2}\frac{\partial x_2}{\partial t_j} + \cdots + \frac{\partial z}{\partial x_n}\frac{\partial x_n}{\partial t_j}$$

para cada $j = 1, 2, \ldots, m$.

Elasticidades parciales

Un pequeño cambio en una variable básica t_j desencadena una reacción en cadena. En primer lugar, cualquier x_i depende de t_j en general, por lo que cambia cuando t_j ha cambiado. Esto afecta a su vez a z. La contribución de la derivada total de z con respecto a t_j que resulta de los cambios en x_i es $(\partial z/\partial x_i)(\partial x_i/\partial t_j)$. La fórmula (6) muestra

$$F_j'(\boldsymbol{t}) = f_1'(\boldsymbol{x})\frac{\partial g_1}{\partial t_j}(\boldsymbol{t}) + f_2'(\boldsymbol{x})\frac{\partial g_2}{\partial t_j}(\boldsymbol{t}) + \cdots + f_n'(\boldsymbol{x})\frac{\partial g_n}{\partial t_j}(\boldsymbol{t}). \tag{6}$$

Ejemplo

Considere la función de producción agrícola $Y = F(K, L, T)$, donde Y es el tamaño de la cosecha, K es el capital invertido, L es el trabajo y T es la tierra agrícola utilizada para cultivar. Suponga que K, L y T son todas funciones del tiempo, que es denotado por t. Entonces de acuerdo con (6), uno tiene

$$\frac{\mathrm{d}Z}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial F}{\partial K}\frac{\mathrm{d}K}{\mathrm{d}t} + \frac{\partial F}{\partial L}\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}t}\frac{\partial F}{\partial T}\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t}.$$

Ejemplo

En el caso especial cuando F es la función de Cobb-Douglas $F(K, L, T) = AK^a L^b T^c$, entonces

$$\frac{\mathrm{d}Y}{\mathrm{d}t} = aAK^{a-1}L^b T^c \frac{\mathrm{d}K}{\mathrm{d}t} + bAK^a L^{b-1} T^c \frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}t} + cAK^a L^b T^{c-1} \frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} *$$

Denotando las derivadas temporales por puntos, y dividiendo cada término en (7) por $Y = AK^a L^b T^c$, tenemos

$$\frac{\dot{Y}}{Y} = a\frac{\dot{K}}{K} + b\frac{\dot{L}}{L} + c\frac{\dot{T}}{T}.$$

La tasa relativa de cambio de la salida es, por lo tanto, la suma ponderada de las tasas relativas del cambio del capital, trabajo y tierra. Los pesos son las respectivas potencias a, b y c.

Elasticidad de sustitución

Los economistas con frecuencia están interesados en la pendiente de la recta tangente a la curva de nivel en un punto particular. Frecuentemente, la curva de nivel está inclinada hacia abajo, pero los economistas prefieren una respuesta positiva. Así, podemos cambiar el signo de la pendiente, y usar un nombre especial

Definición (Tasa marginal de sustitución)

$$R_{yx} = \frac{F'_x(x, y)}{F'_y(x, y)} \tag{7}$$

es conocida como la *tasa marginal de sustitución de y por x*, abreviadamente como MRS.

Note que $R_{yx} = -y' \approx -\frac{\Delta y}{\Delta x}$ cuando nos movemos a largo de la curva de nivel $F(x, y) = c$. Si $\Delta x = -1$ en particular, entonces $R_{yx} \approx \Delta y$. Así, R_{yx} es aproximadamente la cantidad de y podemos agregar por unidad de x removida, si permanecemos en la misma curva de nivel.

Ejemplo

Sea $F(K, L) = 100$ una isocuanta para la función de producción, donde K es la entrada de capital, L es la entrada de trabajo y 100 es la salida. Vea la figura 1. En todos los puntos P, Q y R se producen 100 unidades. En P un pequeño capital de entrada y bastante entrada de trabajo son empleados.

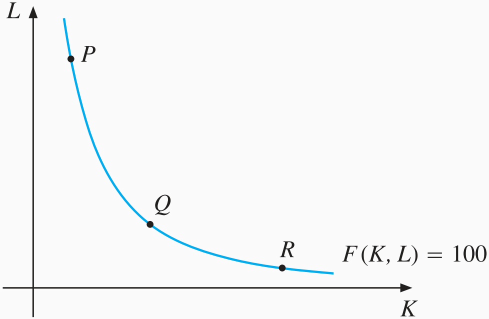

Figura 1: Una isocuanta.

La pendiente de la isocuanta en P es aproximadamente -4, así que el MRS en P es aproximadamente 4.

Esto significa que para cada cuatro unidades de trabajo que se llevan, agregando solo una unidad de capital nos asegurará que la salida permanece en (aproximadamente) 100 unidades. Siempre que se elijan unidades para que el capital y el trabajo tengan el mismo precio, el capital en P es más “valioso” que el trabajo.

En Q el MRS es aproximadamente 1, así que el capital y el trabajo son igualmente “valiosos”.

Finalmente, en R, el MRS es aproximadamente $\frac{1}{5}$, así en este punto aproximadamente cinco unidades de capital son requeridos para compensar la pérdida de una unidad de trabajo.

Observación
Esto nos da una aproximación a la curva $y = f(x)$ en que la coordenada y de B es una aproximación a la coordenada y de A en la gráfica de $y = f(x)$.

Ejemplo

Considere la curva de nivel $F(x, y) = c$ para la función F de dos variables, como es mostrado en la figura 2 La MRS varía a lo largo de la curva.

En el punto P, R_{yx} es un número positivo grande. En Q, el número R_{yx} es alrededor 1, y en R este es alrededor de $0{,}2$. Cuando nos movemos a lo largo de la curva de nivel desde la izquierda hacia la derecha, R_{yx} será estrictamente decreciente con valores en algún intervalo positivo I.

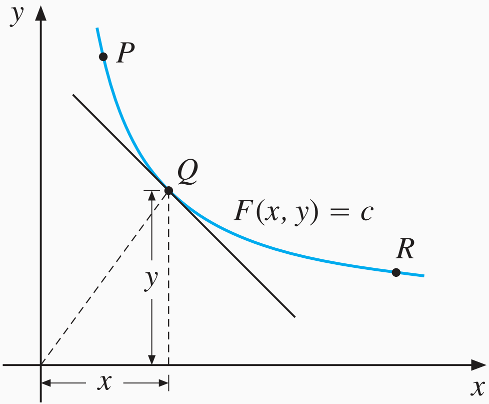

Figura 2: R_{yy} en Q.

Elasticidad de sustitución

Para cada valor de R_{yx} en I, existe un punto correspondiente (x, y) en la curva de nivel $F(x, y) = c$, así un valor correspondiente de $\frac{y}{x}$. La fracción $\frac{y}{x}$ es por lo tanto una función de R_{zx} y se define la siguiente:

Definición
Cuando $F(x, y) = c$, la *elasticidad de sustitución entre* y *y* x es

$$\sigma_{yx} = \mathrm{El}_{R_{yx}}\left(\frac{y}{x}\right).$$

Así, σ_{xy} es la elasticidad de sustitución de la fracción $\frac{y}{x}$ con respecto a la MRS. Más o menos, σ_{yx} es el porcentaje de cambio en la fracción $\frac{y}{x}$ cuando nos movemos a lo largo de la curva de nivel $F(x, y) = c$ lo suficientemente lejos para que R_{yx} incremente en un $1\,\%$.

Observación
Note que σ_{yx} es simétrico en x e y. De hecho, $R_{xy} = \frac{1}{R_{yx}}$, así que la fórmula logarítmica para elasticidades implica que $\sigma_{xy} = \sigma_{yx}$.

Ejemplo
Calcule la elasticidad de sustitución σ_{KL} de la función Cobb-Douglas $F(K,L) = AK^a L^b$.

Demostración.
La MRS de K para L es

$$R_{KL} = \frac{F'_L}{F'_K} = \frac{bAK^a L^{b-1}}{aAK^{a-1}L^b} = \frac{b}{a}\frac{K}{L}.$$

Por lo tanto, $\frac{K}{L} = \left(\frac{a}{b}\right) R_{KL}$. La elasticidad de la última expresión con respecto a R_{KL} es 1. Así, $\sigma_{KL} = 1$ para la función de Cobb-Douglas. □

Ejemplo
Encuentre la elasticidad de sustitución para la función CES

$$F(K,L) = A\left(aK^{-\rho} + bL^{-\rho}\right)^{-\mu/\rho}$$

donde A, a, b, μ y ρ son constantes, $A > 0$, $a > 0$, $b > 0$, $\mu \neq 0$, $\rho > -1$ y $\rho \neq 0$.

Elasticidad de sustitución

Demostración.
Aquí

$$F'_K = A\left(-\frac{\mu}{\rho}\right)\left(aK^{-\rho} + bL^{-\rho}\right)^{\left(-\frac{\mu}{\rho}\right)-1} a\left(-\rho\right)K^{-\rho-1},$$

$$F'_L = A\left(-\frac{\mu}{\rho}\right)\left(aK^{-\rho} + bL^{-\rho}\right)^{\left(-\frac{\mu}{\rho}\right)-1} b\left(-\rho\right)L^{-\rho-1}.$$

Así,

$$R_{KL} = \frac{F'_L}{F'_K} = \frac{b}{a}\frac{L^{-\rho-1}}{K^{-\rho-1}} = \frac{b}{a}\left(\frac{K}{L}\right)^{\rho+1}$$

y por lo tanto

$$\frac{K}{L} = \left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{(\rho+1)}}\left(R_{KL}\right)^{\frac{1}{(\rho+1)}}$$

.

Demostración (Cont.)
Recordando que la elasticidad de Ax^b con respecto a x es b, implica que

$$\sigma_{KL} = \mathrm{El}_{R_{KL}}\left(\frac{K}{L}\right) = \frac{1}{\rho + 1}.$$

Hemos mostrado que la función F tiene elasticidad de sustitución constante $\frac{1}{(\rho+1)}$. Este, por supuesto, es la razón porqué F es llamada la función CES "elasticidad de sustitución constante"

Observación
Note que la elasticidad de sustitución para la función CES tiende a 1 cuando $\rho \to 0$, el cual es precisamente la elasticidad de sustitución para la función Cobb-Douglas en el ejemplo anterior.

Definición
Una función f de dos variables x e y son definidas en un dominio D se dice que es *homogénea de grado* k si, para cualquier (x, y) en D,

$$f(tx, ty) = t^k f(x, y)$$

para cualquier $t > 0$. En otras palabras, esto significa que multiplicando ambas variables por un factor positivo t multiplicaremos el valor de la función por el factor t^k.

El grado de homogeneidad de una función puede ser un número arbitrario, positivo, cero o negativo. Anteriormente, determinamos el grado de homogeneidad para varias funciones particulares.

Un polinomio es homogéneo de grado k si y solo si la suma de sus exponentes en cada término es k. Otros tipos de polinomios con diferentes sumas de exponentes en diferentes términos, tales como $f(x.y) = 1 + xy$ o $g(x, y) = x^3 + xy$ no son homogéneas de cualquier grado.

Elasticidad de sustitución

La función $f(x, y)$ es homogénea de grado k si y solo si

$$xf_1'(x, y) + yf_2'(x, y) = kf(x, y) \tag{8}$$

Esta es una fácil demostración que la ecuación (12.6.2) debe mantenerse cuando f es homogénea de grado k:

Diferenciando cada lado de la ecuación (12.6.1) con respecto a t, usando la regla de la cadena para diferenciar el lado izquierdo de la ecuación. El resultado es

$$xf_1'(tx, ty) + yf_2'(tx, ty) = kt^{k-1}f(x, y) .$$

Haciendo $t = 1$ se obtiene $xf_1'(x, y) + yf_2'(x, y) = kf(x, y)$ inmediatamente.

Notemos otras tres interesantes propiedades generales de funciones $f(x, y)$ que son homogéneas de grado k:

$$f_1'(x, y) \text{ y } f_2'(x, y) \text{ son ambas homogéneas de grado } k-1 \tag{9}$$

$$f(x, y) = x^k f\left(1, \frac{y}{x}\right) = y^k f\left(\frac{x}{y}, 1\right) \text{ puesto que } x > 0 \text{ y } y > 0 \tag{10}$$

y

$$x^2 f_{11}''(x, y) + 2xy f_{12}''(x, y) + y^2 f_{22}''(x, y) = k(k-1) f(x, y) \tag{11}$$

Nuevamente, estos resultados no son difíciles de probar:

Para probar (12.6.3), mantenga t e y constantes y diferencia parcialmente con respecto a x la ecuación (12.6.1). Luego, $tf_1'(tx, ty) = t^k f_1'(x, y)$, así $f_1'(tx, ty) = t^{k-1} f_1'(x, y)$, en consecuencia mostramos que $f_1'(x, y)$ es homogénea de grado $k-1$.

El mismo argumento muestra que $f_2'(x, y)$ es homogénea de grado $k - 1$. Uno puede probar que las desigualdades en (12.6.4) al reemplazar t en (12.6.1) primero por $\frac{1}{x}$ y luego por $\frac{1}{y}$, respectivamente. Finalmente, para mostrar (12.6.5), asuma que $f(x, y)$ es dos veces continuamente diferenciable, notemos primero que debido a $f_1'(x, y)$ y $f_2'(x, y)$ son ambas homogéneas de grado $k - 1$, por el teorema de Euler, podemos aplicar separadamente a f_1' y luego a f_2'. Esto implica que

$$xf_{11}''(x, y) + yf_{12}''(x, y) = (k - 1) f_1'(x, y) \tag{12}$$
$$xf_{21}''(x, y) + yf_{22}''(x, y) = (k - 1) f_2'(x, y) . \tag{13}$$

Déjenos ahora multiplicar la primera de estas ecuaciones por x, la segunda por y, y luego sumarlas. Debido a que f es C^2, por el teorema de Schwarz implica que $f_{12}'' = f_{21}''$, entonces el resultado es

$$x^2 f_{11}''(x, y) + 2xyf_{12}''(x, y) + y^2 f_{22}''(x, y) = (k - 1)\left[xf_1'(x, y) + yf_2'(x, y)\right] .$$

Por el teorema de Euler, sin embargo, $xf_1'(x, y) + yf_2'(x, y) = kf(x, y)$, así (12.6.5) es verificado.

Ejemplo
Suponga que la función de producción $Y = F(K, L)$ es homogénea de grado 1. Muestra que uno puede expresar el cociente salida–trabajo $\frac{Y}{L}$ como una función $\frac{Y}{L} = f\left(\frac{K}{L}\right)$ del cociente capital–trabajo $k = \frac{K}{L}$, donde $f(k) = F(k, 1)$. Encuentre la forma de f cuando F es la función de Cobb-Douglas, con $a + b = 1$.

Demostración.
Debido a que F es homogénea de grado 1, es un caso especial de (12.6.4) uno tiene

$$Y = F(K, L) = F\left(L\left(\frac{K}{L}\right), L \cdot 1\right) = LF(k, 1) = Lf(k) \text{ donde } k = \frac{K}{L}.$$

Cuando $F(K, L) = AK^a L^{1-a}$, entonces $f(k) = F(k, 1) = Ak^a$. □

Aspectos geométricos de las funciones homogéneas

Las funciones homogéneas en dos variables tienen algunas propiedades geométricas interesantes.

Sea $f(x, y)$ una función homogénea de grado k. Considere un rayo en el plano xy desde el origen pasando por el punto $(x_0, y_0) \neq (0, 0)$.

Un punto arbitrario en este rayo es de la forma (tx_0, ty_0) para algún número positivo t. Si dejamos $f(x_0, y_0) = c$, entonces $f(tx_0, ty_0) = t^k f(x_0, y_0) = t^k c$.

Por encima de cualquier rayo en el plano xy pasando por el punto (x_0, y_0), la porción relativa a la gráfica de f por lo tanto consiste de la curva $z = t^k c$, donde t mide la distancia a lo largo del rayo desde el origen, y $c = f(x_0, y_0)$. Una función que es homogénea de grado k está completamente determinada si su valor es conocido en un punto sobre cada rayo pasando el origen, como en la figura 3

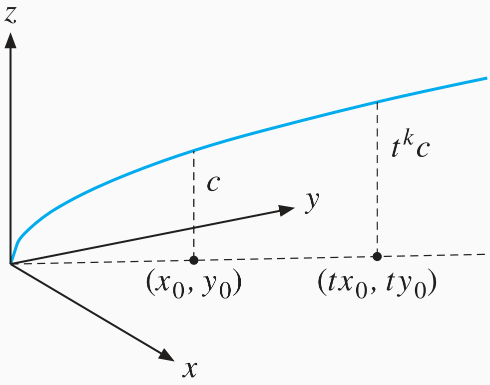

Figura 3: Función f a lo largo de un rayo.

En particular, sea $k = 1$, así que $f(x, y)$ es homogénea de grado 1. La curva $z = t^k c$ acostada verticalmente hacia arriba sobre cada rayo que pasa por el origen, es entonces la recta $z = tc$. Debido a esto, a menudo se dice que el *gráfico de una función homogénea de grado* 1 es generado por rectas que pasan por el origen. La figura 4 ilustra esto.

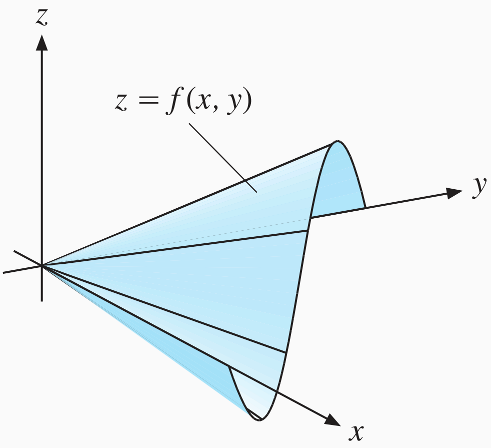

Figura 4: f es homogénea de grado 1.

Aspectos geométricos de las funciones homogéneas

Hemos visto cómo, para una función $f(x, y)$ de dos variables, es a menudo conveniente considerar sus curvas de nivel en el plano xy en vez de su gráfica tridimensional.

¿Qué podemos decir sobre las curvas de nivel de una función homogénea?

Resulta que *para una función homogénea, incluso si solo se conoce sus curvas de nivel, también lo son sus otras curvas de nivel*. Para ver esto, considere una función $f(x, y)$ que es homogénea de grado k, y sea $f(x, y) = c$ una de sus curvas de nivel, como se ilustra en la figura 5.

Aspectos geométricos de las funciones homogéneas

Ahora explicamos cómo construir la curva de nivel que pasa un por un punto arbitrario A no acostado en $f(x,y) = c$ en un punto D con coordenadas (x_1, y_1). Las coordenadas de A tendrán la forma (tx_1, ty_1) para algún valor de t que en la figura es alrededor de 1,7.

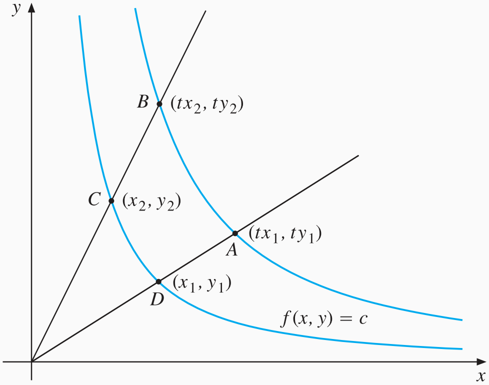

Figura 5: Curvas de nivel de una función homogénea.

Con el fin de construir un nuevo punto en la misma curva de nivel como A, dibuje un nuevo rayo pasando por el origen. Suponga que este rayo intersecta la curva de nivel original $f(x, y) = c$ en (x_2, y_2). Ahora use el valor de t encontrado antes para determinar el nuevo punto B con coordenadas (tx_2, ty_2). Ahora este nuevo punto B en la misma curva de nivel como A debido a que $f(tx_2, ty_2) = t^k f(x_2, y_2) = t^k c = t^k f(x_1, y_1) = f(tx_1, ty_1)$. Repitiendo esta construcción para diferentes rayos a través del origen que intersecta la curva de nivel $f(x, y) = c$, podemos encontrar tantos punto como deseemos en la nueva curva de nivel $f(x, y) = f(tx_1, ty_1)$.

El procedimiento argumentado muestra que una función homogénea $f(x, y)$ está completamente determinada por cualquiera de sus curvas de nivel y por su grado de homogeneidad. La forma de cada curva de nivel de una función homogénea es con frecuencia determinado especificando sus elasticidades de sustitución.

Otro punto que vale la pena notar en relación con la figura 5 es que las tangentes a las curvas de nivel a lo largo de cada rayo son paralelas. Mantenemos el supuesto que f es homogénea de grado k. Si la curva de nivel es $f(x, y) = c$, su pendiente en el punto (x, y) es $-f_1'(x, y) / f_2'(x, y)$. En el punto A en la figura 12.6.3 la pendiente es

$$-\frac{f_1'(tx_1, ty_1)}{f_2'(tx_1, ty_1)} = -\frac{t^{k-1} f_1'(x_1, y_1)}{t^{k-1} f_2'(x_1, y_1)} = -\frac{f_1'(x_1, y_1)}{f_2'(x_1, y_1)} \qquad (*)$$

donde hemos usado la ecuación (12.6.3), expresando el hecho que las derivadas parciales de f son homogéneas de grado $k - 1$.

Las igualdades en (*) establecen que dos curvas de nivel pasando por A y D tiene las mismas pendientes en esos puntos. Se sigue que, en cualquier punto a largo de un rayo pasando por el origen, la pendiente de la curva de nivel correspondiente muestra que es la misma. Declarado de manera diferente, después de quitar los signos menos, (*) muestra que la tasa marginal de sustitución de y por x es una función homogénea de grado 0.

Suponga que f es una función de n variables definida en su domino D. El conjunto D es llamado un *cono* si, cuando $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in D$ y $t > 0$, el punto $(tx_1, tx_2, \dots, tx_n)$ también se encuentra en D. Cuando D es un cono, diremos que la función f es *homogénea de grado k en D* si

$$f\left(tx_1, tx_2, \dots, tx_n\right) = t^k f\left(x_1, x_2, \dots, x_n\right) \tag{14}$$

para todo $t > 0$. La constante k puede ser cualquier número real, positivo, cero o negativo.

Teorema

Suponga que f es una función diferenciable de n variables, definida en un cono abierto D. Entonces, f es homogénea de grado k si, y solo si, la siguiente ecuación se cumple para todo $\boldsymbol{x}$ en D:

$$\sum_{i=1}^{n} x_i f_i'\left(\boldsymbol{x}\right) = kf\left(\boldsymbol{x}\right) \tag{15}$$

La prueba de este resultado no es difícil, y complementa el argumento dado por el teorema 12.6.1:

Demostración.
Suponga que f es homogénea de grado k, así satisface la ecuación (14). Diferenciando esta ecuación con respecto a t, cuando $\boldsymbol{x}$ es fijado, resulta

$$\sum_{i=1}^{n} x_i f_i'\left(t\boldsymbol{x}\right) = kt^{k-1} f\left(\boldsymbol{x}\right).$$

Haciendo $t = 1$ da (15) inmediatamente.

Para probar la recíproca, asuma que la ecuación (15) es válida para cualquier $\boldsymbol{x}$ en el cono D. Mantenga $\boldsymbol{x}$ fijado y defina la función g para todo $t > 0$ por $g\left(t\right) = t^{-k} f\left(t\boldsymbol{x}\right) - f\left(\boldsymbol{x}\right)$.

Demostración (Cont.)
Entonces, diferenciando da

$$g'(t) = -kt^{-k-1} f(t\boldsymbol{x}) + t^{-k} \sum_{i=1}^{n} x_i f_i'(t\boldsymbol{x}) . \tag{16}$$

Debido a que $t\boldsymbol{x}$ se encuentra en D, la ecuación (15) también debe ser válida cuando cada x_i es reemplazada por tx_i. Se sigue que $\sum_{i=1}^{n} (tx_i) f_i'(t\boldsymbol{x}) = kf(t\boldsymbol{x})$.

Multiplicando esta ecuación por t^{-k-1} y usando esto para sustituir por el último término de (*) implica que, para cualquier $t > 0$, uno tiene

$$g'(t) = -kt^{-k-1} f(t\boldsymbol{x}) + t^{-k-1} kf(t\boldsymbol{x}) = 0.$$

Se sigue que $g(t)$ debe ser una constante C. Obviamente, $g(1) = 0$, así que $C = 0$, lo que implica que $g(t) = 0$ para todo $t > 0$. De acuerdo con la definición de g, esto prueba que $f(t\boldsymbol{x}) = t^k f(\boldsymbol{x})$, así que f en realidad es homogénea de grado k.

Una versión interesante de la ecuación de Euler, ecuación (15), es obtenida dividiendo cada término de la ecuación por $f(f(\boldsymbol{x}))$, dado que este número no es 0. Recordando la definición de la elasticidad paricial, $\mathrm{El}_i\, f(\boldsymbol{x}) = \left(\frac{x_i}{f(\boldsymbol{x})}\right) f_i'(\boldsymbol{x})$, tenemos

$$\mathrm{El}_1\, f(\boldsymbol{x}) + \mathrm{El}_2\, f(\boldsymbol{x}) + \cdots + \mathrm{El}_n\, f(\boldsymbol{x}) = k \tag{17}$$

Así, la suma de las elasticidades parciales de una función de n variables que es homogénea de grado k debe ser igual a k.

Definición
Sea f una función de n variables $\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ definida en un cono K. Entonces, f es llamada *homotética* si

$$\forall \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in K, f(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{y}), t > 0 \implies f(t\boldsymbol{x}) = f(t\boldsymbol{y}).$$

Crecimiento económico

Ejemplo
Sea $X = X(t)$ que denota el producto nacional, $K = K(t)$ el capital disponible y $L = L(t)$ el número de trabajadores en un país en el tiempo t. Suponga que, para todo $t \geq 0$,

1. $X = \sqrt{K}\sqrt{L}$.
2. $\dot{K} = 0{,}4X$.
3. $L = e^{0{,}04t}$.

Derive de estas ecuaciones a una sola ecuación diferencial para $K = K(t)$, y encuentre la solución de la ecuación cuando $K(0) = 10000$.

De las ecuaciones 1–3, derivamos la única ecuación diferencial

$$\dot{K} = \frac{\mathrm{d}K}{\mathrm{d}t} = 0{,}4\sqrt{K}\sqrt{L} = 0{,}4e^{0{,}02t}\sqrt{K}.$$

Esto es claramente separable. Usando este método resultas las siguientes ecuaciones.

1. $\frac{1}{\sqrt{K}}\mathrm{d}K = 0{,}4e^{0{,}02t}\mathrm{d}t$,
2. $\int \frac{1}{\sqrt{K}}\mathrm{d}K = \int 0{,}04e^{0{,}02t}\mathrm{d}t$,
3. $2\sqrt{K} = 20e^{0{,}02t} + C$.

Si $K = 10000$ para $t = 0$, entonces $2\sqrt{10000} = 20 + C$, así $C = 180$. Entonces $\sqrt{K} = 10e^{0{,}02t} + 90$, y así la solución requerida es

$$K\left(t\right) = \left(10e^{0{,}02t} + 90\right)^2 = 100\left(e^{0{,}02t} + 9\right)^2.$$

La relación capital–trabajo tiene un valor límite algo extraño en este modelo: cuando $t \to \infty$, así

$$\frac{K\left(t\right)}{L\left(t\right)} = 100 \times \frac{\left(e^{0{,}02t} + 9\right)^2}{e^{0{,}04t}} = 100\left[\frac{e^{0{,}02t} + 9}{e^{0{,}02t}}\right]^2 = 100\left(1 + 9e^{-0{,}02t}\right)^2 \to 100.$$

El modelo Ramsey comienza con una función de producción agregada que satisface las *condiciones de Inada*.

Definición (Condiciones de Inada)
Dada una función continuamente diferenciable $f\colon X \to Y$, donde $X = \left\{x : x \in \mathbb{R}_+^n\right\}$ e $Y = \{y : y \in \mathbb{R}_+\}$, las condiciones son:

- el valor de la función $f(x)$ en $x = 0$ es cero.
- la función es cóncava en X, es decir, la matriz Hessiana $H_{ij} = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}\right)$ necesariamente es semidefinida negativa. Económicamente esto implica que los rendimientos marginales para las entradas x_i son positivas, es decir, $\partial f(x) / \partial x_i > 0$, pero decreciente, es decir, $\partial^2 f(x) / \partial x_i^2 < 0$.
- El límite de la primera derivada positiva es infinitamente positiva cuando x_i tiende a cero.
- El límite de la primera derivada es cero cuando x_i tiende al más infinito.

Definición (Movimiento de la acumulación del capital)

$$\dot{k} = f\left(k\right) - \delta k - c. \tag{18}$$

$$U_0 = \int_0^\infty e^{-\rho t} U\left(C\right) \mathrm{d}t. \tag{19}$$

Referencias

- Libros

Knut Sydsaeter, Peter Hammond, Arne Strom y Andrés Carvajal. *Essential Mathematics for Economic Analysis*. Pearson Education, 2016. ISBN: 9781292074610.

William H. Greene. *Econometric Analysis*. Pearson Education, 2018. ISBN: 9780134461366.

- Artículo matemático

Ken-Ichi Inada. “On the Stability of Growth Equilibria in Two-Sector Models”. En: *The Review of Economic Studies* 31.2 (1964), págs. 127-142. ISSN: 00346527, 1467937X. URL: `http://www.jstor.org/stable/2296195`.

Paul H. Douglas. “The Cobb-Douglas Production Function Once Again: Its History, Its Testing, and Some New Empirical Values”. En: *Journal of Political Economy* 84.5 (1976), págs. 903-915. ISSN: 00223808, 1537534X.

- Sitio web