

# Soluções do livro "Curso de Análise" vol. 1

Ronald A. Kaiser

9 de Janeiro de 2016

**Notas** As soluções aqui apresentadas não contém seus respectivos enunciados. Algumas hipóteses fornecidas no livro não são enunciadas aqui, mas são utilizadas em algumas demonstrações. O leitor atento não deve ter dificuldades para acompanhar as soluções. Caso tenha alguma dúvida, recorra à obra original "Curso de análise" (vol. 1) de Elon Lages Lima.

## 1 Capítulo 1

### 1.1 Questão 1

*Demonstração.* Para demonstrarmos que  $X = A \cup B$ , provaremos que **1.**  $X \subset (A \cup B)$  e **2.**  $(A \cup B) \subset X$ .

**1.** Sabemos que  $\forall A$  e  $\forall B$ ,  $A \subset (A \cup B)$  e  $B \subset (A \cup B)$ . Da 2ª hipótese,  $A \subset (A \cup B)$  e  $B \subset (A \cup B) \Rightarrow X \subset (A \cup B)$ .

**2.** A partir da 1ª hipótese e da definição de inclusão,  $x \in A \Rightarrow x \in X$  e  $y \in B \Rightarrow y \in X$ . Assim, todo elemento de A ou de B também pertence a X. Mais formalmente:  $z \in A$  ou  $z \in B \Rightarrow z \in X$ , e pela definição de união,  $z \in (A \cup B) \Rightarrow z \in X$ . Portanto,  $(A \cup B) \subset X$ .

De **1.** e **2.**,  $X = (A \cup B)$ . ■

### 1.2 Questão 2

**Enunciado** Dados os conjuntos A e B, seja X um conjunto com as seguintes propriedades:

1ª  $X \subset A$  e  $X \subset B$

2ª  $Y \subset A$  e  $Y \subset B \Rightarrow Y \subset X$

Prove que  $X = A \cap B$ .

*Demonstração.* Para demonstrarmos que  $X = A \cap B$ , provaremos que **1.**  $X \subset (A \cap B)$  e **2.**  $(A \cap B) \subset X$ .

**1.** A partir da 1ª hipótese e da definição de inclusão, segue que:  $x \in X \Rightarrow x \in A$  e  $x \in X \Rightarrow x \in B$ . Assim, todo elemento de X pertence também aos conjuntos A e B. Portanto,  $x \in X \Rightarrow x \in A$  e  $x \in B$ . Logo, pela definição de interseção,  $x \in X \Rightarrow x \in (A \cap B)$ . Donde concluímos que  $X \subset (A \cap B)$ .

**2.** Sabemos que  $\forall A$  e  $\forall B$ ,  $(A \cap B) \subset A$  e  $(A \cap B) \subset B$ . Da 2ª hipótese, temos que  $(A \cap B) \subset A$  e  $(A \cap B) \subset B \Rightarrow (A \cap B) \subset X$ . Portanto,  $(A \cap B) \subset X$ .

De **1.** e **2.**,  $X = (A \cap B)$ . ■

### 1.3 Questão 3

*Demonstração.* Provaremos inicialmente que  $A \cap B = \emptyset \Leftrightarrow A \subset B^c$ .

**1.**  $\Rightarrow$ ) Suponhamos, por absurdo, que  $A \not\subset B^c$ . Neste caso,  $\exists x | x \in A$  e  $x \notin B^c$ . Mas, pela definição de complementar,  $x \notin B^c \Leftrightarrow x \in B$ . Assim,  $\exists x | x \in A$  e  $x \in B \Rightarrow \exists x | x \in (A \cap B)$ . Mas, por hipótese,  $A \cap B = \emptyset$ . Não pode existir tal  $x$ . Um absurdo gerado pela nossa suposição inicial. Portanto,  $A \cap B = \emptyset \Rightarrow A \subset B^c$ .

**2.**  $\Leftarrow$ ) TODO

De **1.** e **2.**,  $A \cap B = \emptyset \Leftrightarrow A \subset B^c$ . ■