

# Soluções do livro "Curso de Análise" vol. 1

Ronald A. Kaiser

14 de Janeiro de 2016

**Notas** As soluções aqui apresentadas não contém seus respectivos enunciados. Algumas hipóteses fornecidas nos enunciados não são reproduzidas aqui, mas são utilizadas em algumas demonstrações. O leitor atento não deve ter dificuldades para acompanhar as soluções. Caso tenha alguma dúvida, recorra à obra original "Curso de análise" (vol. 1) de Elon Lages Lima.

## 1 Capítulo 1

### 1.1 Questão 1

*Demonstração.* Para demonstrarmos que  $X = A \cup B$ , provaremos que **1.**  $X \subset (A \cup B)$  e **2.**  $(A \cup B) \subset X$ .

**1.** Sabemos que  $\forall A$  e  $\forall B$ ,  $A \subset (A \cup B)$  e  $B \subset (A \cup B)$ . Da 2ª hipótese,  $A \subset (A \cup B)$  e  $B \subset (A \cup B) \Rightarrow X \subset (A \cup B)$ .

**2.** A partir da 1ª hipótese e da definição de inclusão,  $x \in A \Rightarrow x \in X$  e  $y \in B \Rightarrow y \in X$ . Assim, todo elemento de A ou de B também pertence a X. Mais formalmente:  $z \in A$  ou  $z \in B \Rightarrow z \in X$ , e pela definição de união,  $z \in (A \cup B) \Rightarrow z \in X$ . Portanto,  $(A \cup B) \subset X$ .

De **1.** e **2.**,  $X = (A \cup B)$ . ■

### 1.2 Questão 2

**Enunciado** Dados os conjuntos A e B, seja X um conjunto com as seguintes propriedades:

1ª  $X \subset A$  e  $X \subset B$

2ª  $Y \subset A$  e  $Y \subset B \Rightarrow Y \subset X$

Prove que  $X = A \cap B$ .

*Demonstração.* Para demonstrarmos que  $X = A \cap B$ , provaremos que **1.**  $X \subset (A \cap B)$  e **2.**  $(A \cap B) \subset X$ .

**1.** A partir da 1ª hipótese e da definição de inclusão, segue que:  $x \in X \Rightarrow x \in A$  e  $x \in X \Rightarrow x \in B$ . Assim, todo elemento de X pertence também aos conjuntos A e B. Portanto,  $x \in X \Rightarrow x \in A$  e  $x \in B$ . Logo, pela definição de interseção,  $x \in X \Rightarrow x \in (A \cap B)$ . Donde concluímos que  $X \subset (A \cap B)$ .

**2.** Sabemos que  $\forall A$  e  $\forall B$ ,  $(A \cap B) \subset A$  e  $(A \cap B) \subset B$ . Da 2ª hipótese, temos que  $(A \cap B) \subset A$  e  $(A \cap B) \subset B \Rightarrow (A \cap B) \subset X$ . Portanto,  $(A \cap B) \subset X$ .

De **1.** e **2.**,  $X = (A \cap B)$ . ■

### 1.3 Questão 3

Provaremos inicialmente que  $A \cap B = \emptyset \Leftrightarrow A \subset B^c$ .

*Demonstração.* Dividiremos a prova em duas partes: **1.**  $A \cap B = \emptyset \Rightarrow A \subset B^c$  e **2.**  $A \subset B^c \Rightarrow A \cap B = \emptyset$ .

**1.**  $\Rightarrow$ ) Suponhamos, por absurdo, que  $A \not\subset B^c$ . Neste caso,  $\exists x|x \in A$  e  $x \notin B^c$ . Mas, pela definição de complementar,  $x \notin B^c \Leftrightarrow x \in B$ . Assim,  $\exists x|x \in A$  e  $x \in B \Leftrightarrow \exists x|x \in (A \cap B)$ . Mas, por hipótese,  $A \cap B = \emptyset$ . Não pode existir tal  $x$ . Um absurdo gerado pela nossa suposição inicial. Portanto,  $A \cap B = \emptyset \Rightarrow A \subset B^c$ .

**2.**  $\Leftarrow$ ) Suponhamos, por absurdo, que  $A \cap B \neq \emptyset$ . Neste caso,  $\exists x|x \in (A \cap B)$ , e pela definição de interseção,  $\exists x|x \in A$  e  $x \in B$ . Mas,  $x \in B \Leftrightarrow x \notin B^c$ . Portanto,  $\exists x|x \in A$  e  $x \notin B^c$ . Logo,  $A \not\subset B^c$ . Uma contradição, pois temos como hipótese  $A \subset B^c$ . Deste modo,  $A \subset B^c \Rightarrow A \cap B = \emptyset$ .

De **1.** e **2.**,  $A \cap B = \emptyset \Leftrightarrow A \subset B^c$ . ■

Agora, vamos demonstrar que  $A \cup B = E \Leftrightarrow A^c \subset B$ .

*Demonstração.* Dividiremos a demonstração em duas partes: **1.**  $A \cup B = E \Rightarrow A^c \subset B$  e **2.**  $A^c \subset B \Rightarrow A \cup B = E$ .

**1.**  $\Rightarrow$ ) Suponhamos, por absurdo, que  $A^c \not\subset B$ . Neste caso,  $\exists x|x \in A^c$  e  $x \notin B$ . Como  $x \notin B \Leftrightarrow x \in B^c$ ,  $\exists x|x \in A^c$  e  $x \in B^c$ . Assim, pela definição de interseção,  $\exists x|x \in (A^c \cap B^c)$ . Pela Lei de *de Morgan*,  $\exists x|x \in (A \cup B)^c$  e portanto,  $\exists x|x \notin (A \cup B)$ . Uma contradição, pois  $A \cup B = E$ . Não pode existir um elemento que não esteja em  $E$ . Sendo assim,  $A \cup B = E \Rightarrow A^c \subset B$ .

**2.**  $\Leftarrow$ ) Suponhamos, por absurdo, que  $A \cup B \neq E$ . Neste caso,  $\exists x|x \notin (A \cup B)$ . Assim,  $\exists x|x \in (A \cup B)^c$ . Por *de Morgan*,  $\exists x|x \in (A^c \cap B^c)$ . Pela definição de interseção,  $\exists x|x \in A^c$  e  $x \in B^c$ . Como  $x \in B^c \Leftrightarrow x \notin B$ ,  $\exists x|x \in A^c$  e  $x \notin B$ . Logo,  $A^c \not\subset B$ . Uma contradição, pois  $A^c \subset B$ . Portanto,  $A^c \subset B \Rightarrow A \cup B = E$ .

De **1.** e **2.**,  $A \cup B = E \Leftrightarrow A^c \subset B$ . ■

### 1.4 Questão 4

*Demonstração.* Dividiremos a demonstração em duas partes: **1.**  $A \subset B \Rightarrow A \cap B^c = \emptyset$  e **2.**  $A \cap B^c = \emptyset \Rightarrow A \subset B$ .

**1.  $\Rightarrow$ )** Suponhamos, por absurdo, que  $A \cap B^c \neq \emptyset$ . Neste caso,  $\exists x|x \in (A \cap B^c)$ . Pela definição de interseção,  $\exists x|x \in A$  e  $x \in B^c$ . Como  $x \in B^c \Leftrightarrow x \notin B$ , então  $\exists x|x \in A$  e  $x \notin B$ . Portanto,  $A \not\subset B$ . Mas  $A \not\subset B$  e  $A \subset B$  (hipótese) não podem ser verdadeiros ao mesmo tempo. Um absurdo gerado pela nossa suposição inicial. Logo,  $A \subset B \Rightarrow A \cap B^c = \emptyset$ .

**2.  $\Leftarrow$ )** Suponhamos, por absurdo, que  $A \not\subset B$ . Neste caso,  $\exists x|x \in A$  e  $x \notin B$ . Assim,  $\exists x|x \in A$  e  $x \in B^c$ . Pela definição de interseção,  $\exists x|x \in (A \cap B^c)$ . Mas não pode existir tal  $x$ , pois por hipótese,  $A \cap B^c = \emptyset$ . Portanto,  $A \cap B^c = \emptyset \Rightarrow A \subset B$ .

De **1.** e **2.**,  $A \subset B \Leftrightarrow A \cap B^c = \emptyset$ . ■

### 1.5 Questão 5

Seja  $A = \{1\}$ ,  $B = \{2\}$  e  $C = \{3\}$ . Assim,  $(A \cup B) \cap C = \emptyset$  e  $A \cup (B \cap C) = \{1\}$ . Logo, temos  $(A \cup B) \cap C \neq A \cup (B \cap C)$ .

### 1.6 Questão 6

*Demonstração.* Dividiremos a demonstração de  $X = A^c$  em duas etapas: **1.**  $X \subset A^c$  e **2.**  $A^c \subset X$ .

**1.  $\Rightarrow$ )** Suponhamos, por absurdo, que  $X \not\subset A^c$ . Neste caso,  $\exists x|x \in X$  e  $x \notin A^c$ . Sendo assim, por definição de complementar,  $\exists x|x \in X$  e  $x \in A$ . Por definição de interseção,  $\exists x|x \in (X \cap A)$ . Mas, por hipótese,  $A \cap X = \emptyset$ , não pode existir tal  $x$ . Da contradição segue que, de fato,  $X \subset A^c$ .

**2.  $\Leftarrow$ )** Suponhamos, por absurdo, que  $A^c \not\subset X$ . Neste caso,  $\exists x|x \in A^c$  e  $x \notin X$ . Por definição de complementar,  $\exists x|x \in A^c$  e  $x \in X^c$ . Por definição de interseção,  $\exists x|x \in (A^c \cap X^c)$ . Por *de Morgan*,  $\exists x|x \in (A \cup B)^c$ . E, novamente, pela definição de complementar,  $\exists x|x \notin (A \cup B)$ . Uma contradição, pois parte da hipótese garante que  $A \cup B = E$ . Não pode existir tal  $x$  que não esteja em  $E$ . Assim, como o absurdo provém da nossa suposição inicial, concluímos que  $A^c \subset X$ .

De **1.** e **2.**,  $X = A^c$ . ■

### 1.7 Questão 7

Vamos provar inicialmente que  $A \subset B \Rightarrow B \cap (A \cup C) = (B \cap C) \cup A, \forall C$ .

*Demonstração.* Por distributividade,  $B \cap (A \cup C) = (B \cap A) \cup (B \cap C)$ . Como, por hipótese,  $A \subset B$ , então  $B \cap A = A$ . Assim,  $(B \cap A) \cup (B \cap C) = A \cup (B \cap C)$ .

Por comutatividade,  $A \cup (B \cap C) = (B \cap C) \cup A$ . Como  $C$  não possui nada em particular, temos que,  $B \cap (A \cup C) = (B \cap C) \cup A, \forall C$ . ■

Agora, vamos provar que  $\exists C | B \cap (A \cup C) = (B \cap C) \cup A \Rightarrow A \subset B$ .

*Demonstração.* Se  $B \cap (A \cup C) = (B \cap C) \cup A$ , então  $(B \cap C) \cup A \subset B \cap (A \cup C)$ . Agora, consideremos um  $x \in A$ . Se  $x \in A$ , então  $x \in (B \cap C) \cup A$ . Mas,  $(B \cap C) \cup A \subset B \cap (A \cup C)$ , então,  $x \in B \cap (A \cup C)$ . Portanto,  $x \in B$ . Como todo  $x$  em  $A$  também está em  $B$ ,  $A \subset B$ . ■

## 1.8 Questão 8

*Demonstração.* Dividiremos a demonstração em duas partes: **1.**  $A = B \Rightarrow (A \cap B^c) \cup (A^c \cap B) = \emptyset$  e **2.**  $(A \cap B^c) \cup (A^c \cap B) = \emptyset \Rightarrow A = B$ .

**1.  $\Rightarrow$**  Como  $A = B$ , então  $(A \cap B^c) \cup (A^c \cap B) = (A \cap A^c) \cup (A^c \cap A)$ . Mas, por comutatividade,  $A \cap A^c = A^c \cap A$ . Assim,  $(A \cap A^c) \cup (A^c \cap A) = A \cap A^c$ . Mas, nenhum elemento pode estar em um conjunto e em seu complementar ao mesmo tempo, portanto,  $A \cap A^c = \emptyset$ . Logo,  $(A \cap B^c) \cup (A^c \cap B) = \emptyset$ , quando  $A = B$ .

**2.  $\Leftarrow$**  Suponhamos, por absurdo, que  $A \neq B$ . Assim,  $A \not\subset B$  ou  $B \not\subset A$ .

No primeiro caso,  $A \not\subset B \Rightarrow \exists x | x \in A$  e  $x \notin B$ . Pela definição de complementar,  $\exists x | x \in A$  e  $x \in B^c$ , e pela definição de interseção,  $\exists x | x \in (A \cap B^c)$ . Assim,  $A \cap B^c \supset \{x\}$  e, por conseguinte,  $(A \cap B^c) \cup (A^c \cap B) \supset \{x\}$ . Logo,  $(A \cap B^c) \cup (A^c \cap B) \neq \emptyset$ . Uma contradição, pois, por hipótese,  $(A \cap B^c) \cup (A^c \cap B) = \emptyset$ . Portanto,  $A \subset B$ .

De modo análogo, no segundo caso,  $B \not\subset A \Rightarrow \exists x | x \in B$  e  $x \notin A$ . Pela definição de complementar,  $\exists x | x \in B$  e  $x \in A^c$ , e pela definição de interseção,  $\exists x | x \in (B \cap A^c)$ . Assim,  $B \cap A^c = A^c \cap B \supset \{x\}$  e, por conseguinte,  $(A \cap B^c) \cup (A^c \cap B) \supset \{x\}$ . Logo,  $(A \cap B^c) \cup (A^c \cap B) \neq \emptyset$ . Uma contradição, pois, por hipótese,  $(A \cap B^c) \cup (A^c \cap B) = \emptyset$ . Portanto,  $B \subset A$ .

Em ambos os casos, nossa suposição gerou absurdos. Logo,  $(A \cap B^c) \cup (A^c \cap B) = \emptyset \Rightarrow A = B$ .

Assim, de **1.** e **2.**,  $A = B \Leftrightarrow (A \cap B^c) \cup (A^c \cap B) = \emptyset$ . ■

## 1.9 Questão 9

*Demonstração.* Dividiremos a demonstração em duas partes: **1.**  $(A - B) \cup (B - A) \subset (A \cup B) - (A \cap B)$  e **2.**  $(A \cup B) - (A \cap B) \subset (A - B) \cup (B - A)$ .

**1.  $\Rightarrow$**  Seja  $x \in (A - B) \cup (B - A)$ . Pela definição de união, sabemos que  $x \in (A - B)$  ou  $x \in (B - A)$ .

No primeiro caso, se  $x \in (A - B)$ , então  $x \in A$  e  $x \notin B$ . Mas, se  $x \in A$ , então,  $x \in (A \cup B)$ . Como  $x \notin B$ , então  $x \notin (A \cap B)$ . Assim,  $x \in (A \cup B)$  e  $x \notin (A \cap B)$ . Portanto, por definição de diferença,  $x \in (A \cup B) - (A \cap B)$ .

No segundo caso, se  $x \in (B - A)$ , então  $x \in B$  e  $x \notin A$ . Mas, se  $x \in B$ , então,  $x \in (A \cup B)$ . Como  $x \notin A$ , então  $x \notin (A \cap B)$ . Assim,  $x \in (A \cup B)$  e  $x \notin (A \cap B)$ . Portanto, por definição de diferença,  $x \in (A \cup B) - (A \cap B)$ .

Em qualquer caso,  $(A - B) \cup (B - A) \subset (A \cup B) - (A \cap B)$ .

**2.  $\Leftarrow$**  Seja  $x \in (A \cup B) - (A \cap B)$ . Pela definição de diferença,  $x \in (A \cup B)$  e  $x \notin (A \cap B)$ . Se  $x \in (A \cup B)$ , então, pela definição de união,  $x \in A$  ou  $x \in B$ . Vejamos cada caso.

Se  $x \in A$ , então,  $x \notin B$ , pois  $x \notin (A \cap B)$ . Portanto,  $x \in (A - B)$ .

Se  $x \in B$ , então,  $x \notin A$ , pois  $x \notin (A \cap B)$ . Portanto,  $x \in (B - A)$ .

Em qualquer caso,  $(A \cup B) - (A \cap B) \subset (A - B) \cup (B - A)$ .

De **1.** e **2.**,  $(A - B) \cup (B - A) = (A \cup B) - (A \cap B)$ . ■