Soluções do livro "Curso de Análise" vol. 1

Ronald A. Kaiser

9 de Janeiro de 2016

Notas As soluções aqui apresentadas não contém seus respectivos enunciados. Algumas hipóteses fornecidas nos enunciados não são reproduzidas aqui, mas são utilizadas em algumas demonstrações. O leitor atento não deve ter dificuldades para acompanhar as soluções. Caso tenha alguma dúvida, recorra à obra original "Curso de análise"(vol. 1) de Elon Lages Lima.

1 Capítulo 1

1.1 Questão 1

Demonstração. Para demonstrarmos que $X = A \cup B$, provaremos que **1.** $X \subset (A \cup B)$ e **2.** $(A \cup B) \subset X$.

1. Sabemos que $\forall A$ e $\forall B$, $A \subset (A \cup B)$ e $B \subset (A \cup B)$. Da 2^a hipótese, $A \subset (A \cup B)$ e $B \subset (A \cup B) \Rightarrow X \subset (A \cup B)$.

2. A partir da 1^a hipótese e da definição de inclusão, $x \in A \Rightarrow x \in X$ e $y \in B \Rightarrow y \in X$. Assim, todo elemento de A ou de B também pertence a X. Mais formalmente: $z \in A$ ou $z \in B \Rightarrow z \in X$, e pela definição de união, $z \in (A \cup B) \Rightarrow z \in X$. Portanto, $(A \cup B) \subset X$.

De **1.** e **2.**, $X = (A \cup B)$. ■

1.2 Questão 2

Enunciado Dados os conjuntos A e B, seja X um conjunto com as seguintes propriedades:

1^a $X \subset A$ e $X \subset B$

2^a $Y \subset A$ e $Y \subset B \Rightarrow Y \subset X$

Prove que $X = A \cap B$.

Demonstração. Para demonstrarmos que $X = A \cap B$, provaremos que **1.** $X \subset (A \cap B)$ e **2.** $(A \cap B) \subset X$.

1. A partir da 1^a hipótese e da definição de inclusão, segue que: $x \in X \Rightarrow x \in A$ e $x \in X \Rightarrow x \in B$. Assim, todo elemento de X pertence também aos conjuntos A e B. Portanto, $x \in X \Rightarrow x \in A$ e $x \in B$. Logo, pela definição de interseção, $x \in X \Rightarrow x \in (A \cap B)$. Donde concluímos que $X \subset (A \cap B)$.

2. Sabemos que $\forall A$ e $\forall B$, $(A \cap B) \subset A$ e $(A \cap B) \subset B$. Da 2^a hipótese, temos que $(A \cap B) \subset A$ e $(A \cap B) \subset B \Rightarrow (A \cap B) \subset X$. Portanto, $(A \cap B) \subset X$.

De **1.** e **2.**, $X = (A \cap B)$. ■

1.3 Questão 3

Provaremos inicialmente que $A \cap B = \emptyset \Leftrightarrow A \subset B^c$.

Demonstração. Divideremos a prova em duas partes: **1.** $A \cap B = \emptyset \Rightarrow A \subset B^c$ e **2.** $A \subset B^c \Rightarrow A \cap B = \emptyset$.

1. $\Rightarrow$) Suponhamos, por absurdo, que $A \not\subset B^c$. Neste caso, $\exists x | x \in A$ e $x \notin B^c$. Mas, pela definição de complementar, $x \notin B^c \Leftrightarrow x \in B$. Assim, $\exists x | x \in A$ e $x \in B \Leftrightarrow \exists x | x \in (A \cap B)$. Mas, por hipótese, $A \cap B = \emptyset$. Não pode existir tal x. Um absurdo gerado pela nossa suposição inicial. Portanto, $A \cap B = \emptyset \Rightarrow A \subset B^c$.

2. $\Leftarrow$) Suponhamos, por absurdo, que $A \cap B \neq \emptyset$. Neste caso, $\exists x | x \in (A \cap B)$, e pela definição de interseção, $\exists x | x \in A$ e $x \in B$. Mas, $x \in B \Leftrightarrow x \notin B^c$. Portanto, $\exists x | x \in A$ e $x \notin B^c$. Logo, $A \not\subset B^c$. Uma contradição, pois temos como hipótese $A \subset B^c$. Deste modo, $A \subset B^c \Rightarrow A \cap B = \emptyset$.

De **1.** e **2.**, $A \cap B = \emptyset \Leftrightarrow A \subset B^c$. ■

Agora, vamos demonstrar que $A \cup B = E \Leftrightarrow A^c \subset B$.

Demonstração. Dividiremos a demonstração em duas partes: **1.** $A \cup B = E \Rightarrow A^c \subset B$ e **2.** $A^c \subset B \Rightarrow A \cup B = E$.

1. $\Rightarrow$) Suponhamos, por absurdo, que $A^c \not\subset B$. Neste caso, $\exists x | x \in A^c$ e $x \notin B$. Como $x \notin B \Leftrightarrow x \in B^c$, $\exists x | x \in A^c$ e $x \in B^c$. Assim, pela definição de interseção, $\exists x | x \in (A^c \cap B^c)$. Pela Lei de *de Morgan*, $\exists x | x \in (A \cup B)^c$ e portanto, $\exists x | x \notin (A \cup B)$. Uma contradição, pois $A \cup B = E$. Não pode existir um elemento que não esteja em E. Sendo assim, $A \cup B = E \Rightarrow A^c \subset B$.

2. $\Leftarrow$) Suponhamos, por absurdo, que $A \cup B \neq E$. Neste caso, $\exists x | x \notin (A \cup B)$. Assim, $\exists x | x \in (A \cup B)^c$. Por *de Morgan*, $\exists x | x \in (A^c \cap B^c)$. Pela definição de interseção, $\exists x | x \in A^c$ e $x \in B^c$. Como $x \in B^c \Leftrightarrow x \notin B$, $\exists x | x \in A^c$ e $x \notin B$. Logo, $A^c \not\subset B$. Uma contradição, pois $A^c \subset B$. Portanto, $A^c \subset B \Rightarrow A \cup B = E$.

De **1.** e **2.**, $A \cup B = E \Leftrightarrow A^c \subset B$.

■