Soluções do livro "Curso de Análise" vol. 1

Ronald A. Kaiser

10 de Janeiro de 2016

Notas As soluções aqui apresentadas não contém seus respectivos enunciados. Algumas hipóteses fornecidas nos enunciados não são reproduzidas aqui, mas são utilizadas em algumas demonstrações. O leitor atento não deve ter dificuldades para acompanhar as soluções. Caso tenha alguma dúvida, recorra à obra original "Curso de análise"(vol. 1) de Elon Lages Lima.

1 Capítulo 1

1.1 Questão 1

Demonstração. Para demonstrarmos que $X = A \cup B$, provaremos que **1.** $X \subset (A \cup B)$ e **2.** $(A \cup B) \subset X$.

1. Sabemos que $\forall A$ e $\forall B$, $A \subset (A \cup B)$ e $B \subset (A \cup B)$. Da 2^a hipótese, $A \subset (A \cup B)$ e $B \subset (A \cup B) \Rightarrow X \subset (A \cup B)$.

2. A partir da 1^a hipótese e da definição de inclusão, $x \in A \Rightarrow x \in X$ e $y \in B \Rightarrow y \in X$. Assim, todo elemento de A ou de B também pertence a X. Mais formalmente: $z \in A$ ou $z \in B \Rightarrow z \in X$, e pela definição de união, $z \in (A \cup B) \Rightarrow z \in X$. Portanto, $(A \cup B) \subset X$.

De **1.** e **2.**, $X = (A \cup B)$. ■

1.2 Questão 2

Enunciado Dados os conjuntos A e B, seja X um conjunto com as seguintes propriedades:

1^a $X \subset A$ e $X \subset B$

2^a $Y \subset A$ e $Y \subset B \Rightarrow Y \subset X$

Prove que $X = A \cap B$.

Demonstração. Para demonstrarmos que $X = A \cap B$, provaremos que **1.** $X \subset (A \cap B)$ e **2.** $(A \cap B) \subset X$.

1. A partir da 1^a hipótese e da definição de inclusão, segue que: $x \in X \Rightarrow x \in A$ e $x \in X \Rightarrow x \in B$. Assim, todo elemento de X pertence também aos conjuntos A e B. Portanto, $x \in X \Rightarrow x \in A$ e $x \in B$. Logo, pela definição de interseção, $x \in X \Rightarrow x \in (A \cap B)$. Donde concluímos que $X \subset (A \cap B)$.

2. Sabemos que $\forall A$ e $\forall B$, $(A \cap B) \subset A$ e $(A \cap B) \subset B$. Da 2^a hipótese, temos que $(A \cap B) \subset A$ e $(A \cap B) \subset B \Rightarrow (A \cap B) \subset X$. Portanto, $(A \cap B) \subset X$.

De **1.** e **2.**, $X = (A \cap B)$. ■

1.3 Questão 3

Provaremos inicialmente que $A \cap B = \emptyset \Leftrightarrow A \subset B^c$.

Demonstração. Divideremos a prova em duas partes: **1.** $A \cap B = \emptyset \Rightarrow A \subset B^c$ e **2.** $A \subset B^c \Rightarrow A \cap B = \emptyset$.

1. $\Rightarrow$) Suponhamos, por absurdo, que $A \not\subset B^c$. Neste caso, $\exists x | x \in A$ e $x \notin B^c$. Mas, pela definição de complementar, $x \notin B^c \Leftrightarrow x \in B$. Assim, $\exists x | x \in A$ e $x \in B \Leftrightarrow \exists x | x \in (A \cap B)$. Mas, por hipótese, $A \cap B = \emptyset$. Não pode existir tal x. Um absurdo gerado pela nossa suposição inicial. Portanto, $A \cap B = \emptyset \Rightarrow A \subset B^c$.

2. $\Leftarrow$) Suponhamos, por absurdo, que $A \cap B \neq \emptyset$. Neste caso, $\exists x | x \in (A \cap B)$, e pela definição de interseção, $\exists x | x \in A$ e $x \in B$. Mas, $x \in B \Leftrightarrow x \notin B^c$. Portanto, $\exists x | x \in A$ e $x \notin B^c$. Logo, $A \not\subset B^c$. Uma contradição, pois temos como hipótese $A \subset B^c$. Deste modo, $A \subset B^c \Rightarrow A \cap B = \emptyset$.

De **1.** e **2.**, $A \cap B = \emptyset \Leftrightarrow A \subset B^c$. ■

Agora, vamos demonstrar que $A \cup B = E \Leftrightarrow A^c \subset B$.

Demonstração. Dividiremos a demonstração em duas partes: **1.** $A \cup B = E \Rightarrow A^c \subset B$ e **2.** $A^c \subset B \Rightarrow A \cup B = E$.

1. $\Rightarrow$) Suponhamos, por absurdo, que $A^c \not\subset B$. Neste caso, $\exists x | x \in A^c$ e $x \notin B$. Como $x \notin B \Leftrightarrow x \in B^c$, $\exists x | x \in A^c$ e $x \in B^c$. Assim, pela definição de interseção, $\exists x | x \in (A^c \cap B^c)$. Pela Lei de *de Morgan*, $\exists x | x \in (A \cup B)^c$ e portanto, $\exists x | x \notin (A \cup B)$. Uma contradição, pois $A \cup B = E$. Não pode existir um elemento que não esteja em E. Sendo assim, $A \cup B = E \Rightarrow A^c \subset B$.

2. $\Leftarrow$) Suponhamos, por absurdo, que $A \cup B \neq E$. Neste caso, $\exists x | x \notin (A \cup B)$. Assim, $\exists x | x \in (A \cup B)^c$. Por *de Morgan*, $\exists x | x \in (A^c \cap B^c)$. Pela definição de interseção, $\exists x | x \in A^c$ e $x \in B^c$. Como $x \in B^c \Leftrightarrow x \notin B$, $\exists x | x \in A^c$ e $x \notin B$. Logo, $A^c \not\subset B$. Uma contradição, pois $A^c \subset B$. Portanto, $A^c \subset B \Rightarrow A \cup B = E$.

De **1.** e **2.**, $A \cup B = E \Leftrightarrow A^c \subset B$. ■

1.4 Questão 4

Demonstração. Dividiremos a demonstração em duas partes: **1.** $A \subset B \Rightarrow A \cap B^c = \emptyset$ e **2.** $A \cap B^c = \emptyset \Rightarrow A \subset B$.

1. $\Rightarrow$) Suponhamos, por absurdo, que $A \cap B^c \neq \emptyset$. Neste caso, $\exists x | x \in (A \cap B^c)$. Pela definição de interseção, $\exists x | x \in A$ e $x \in B^c$. Como $x \in B^c \Leftrightarrow x \notin B$, então $\exists x | x \in A$ e $x \notin B$. Portanto, $A \not\subset B$. Mas $A \not\subset B$ e $A \subset B$ (hipótese) não podem ser verdadeiros ao mesmo tempo. Um absurdo gerado pela nossa suposição inicial. Logo, $A \subset B \Rightarrow A \cap B^c = \emptyset$.

2. $\Leftarrow$) Suponhamos, por absurdo, que $A \not\subset B$. Neste caso, $\exists x | x \in A$ e $x \notin B$. Assim, $\exists x | x \in A$ e $x \in B^c$. Pela definição de interseção, $\exists x | x \in (A \cap B^c)$. Mas não pode existir tal x, pois por hipótese, $A \cap B^c = \emptyset$. Portanto, $A \cap B^c = \emptyset \Rightarrow A \subset B$.

De **1.** e **2.**, $A \subset B \Leftrightarrow A \cap B^c = \emptyset$. ■

1.5 Questão 5

Seja $A = \{1\}$, $B = \{2\}$ e $C = \{3\}$. Assim, $(A \cup B) \cap C = \emptyset$ e $A \cup (B \cap C) = \{1\}$. Logo, temos $(A \cup B) \cap C \neq A \cup (B \cap C)$.