# Projeto de Iniciação Científica

## Introdução aos Métodos Matemáticos da Física Teórica

Este é um projeto de iniciação científica, para o estudante *Rodrigo de Azeredo Orselli*, do Curso de Ciências Moleculares da USP. O projeto tem duração de cerca de 20 meses (até o final de 2015).

**Resumo.** A tônica do projeto é o aprimoramento da formação em Física e Matemática do estudante visando prepará-lo para seu futuro envolvimento em projetos de pesquisa em áreas da Física-Matemática e da Física Teórica em geral. Em linhas gerais, procuraremos avançar no sentido de preparar o estudante em temas relacionados à Análise Funcional, Geometria Diferencial, Mecânica Clássica e Mecânica Quântica com vistas a um estudo futuro mais aprofundado da Teoria Clássica de Campos e da Teoria da Relatividade Geral e à uma introdução à Teoria Quântica de Campos. Um pequeno projeto de trabalho a ser elaborado em paralelo ao programa de estudos é mencionado ao final.

**Introdução e Objetivos.** Os primeiros passos, já sendo seguidos, serão voltados a um estudo introdutório de Topologia, em especial, de espaços métricos, e Análise, com noções básicas da teoria da medida e integração. Em uma segunda etapa o estudante dirigirá seus esforços no sentido de estudar as noções básicas de espaços de Banach e de Hilbert. Como subproduto imediato do trabalho realizado nessa etapa, o estudante poderá inteirar-se de alguns teoremas fundamentais sobre existência e unicidade de soluções de equações diferenciais ordinárias ou parciais. Esse estudo preliminar deverá estender-se por um período de cerca de seis meses e poderá seguir os capítulos correspondentes de uma extensa série de Notas do autor (JCAB) [14], além eventualmente dos textos clássicos lá citados. Esse estudo não será meramente passivo, pois o estudante deverá contribuir com aperfeiçoamentos e complementações às referidas Notas.

Em paralelo, o estudante deverá iniciar-se no estudo dos formalismos Lagrangiano e Hamiltoniano da Mecânica Clássica e da Teoria Clássica de Campos, sendo para tal recomendadas referências como [1] e [2].

É necessário frisar que o projeto de estudo inicial delineado acima não se fará independentemente da assistência pelo estudante a certas disciplinas específicas ministradas no IFUSP e/ou no IME-USP, tais como as de Física-

Matemática, Mecânica, Eletromagnetismo, Relatividade Especial e Geral, Mecânica Quântica etc. Essas disciplinas serão especificadas em separado.

No que concerne à Mecânica Quântica, mencionamos que após o estudante ter adquirido sua formação física básica nessa disciplina através da assistência a cursos, poderá ser dada continuidade a um estudo mais aprofundado da teoria de operadores em espaços de Hilbert, envolvendo, por exemplo, um estudo detalhado do teorema espectral (como exposto em [14]).

Os instrumentos adquiridos na etapa mencionada acima permitirão ao estudante lançar-se com mais desenvoltura em novas direções mais voltadas ao interesse físico, envolvendo um estudo introdutório da Teoria da Relatividade Geral ou da Teoria Quântica de Campos.

**Relatividade geral.** Propomos que na etapa seguinte o estudante concentre-se no estudo de teorias clássicas de campos com ênfase na Teoria da Relatividade Geral, para o qual o conhecimento de noções de Geometria Riemanniana é fundamental. Como referências de estudo propomos os textos [10], [11] e, em especial, o de Wald [12]. A parte específica referente à Geometria Diferencial poderá ser estudada, por exemplo, em [13], [3] ou [4], se tal for necessário. Como tratam-se de textos bastante extensos, será necessária uma certa seleção do material a ser estudado, o que se fará em função da necessidade formativa e da inclinação do estudante.

**Mecânica Quântica e Teoria Quântica de Campos.** Em uma etapa posterior, a ser iniciada após um estudo introdutório de Mecânica Quântica, o estudante continuará seu projeto estudando os três primeiros capítulos de [7]. Ainda que se trate de uma referência um tanto antiga, não é de forma alguma antiquada e cremos tratar-se de um texto com diversas virtudes pedagógicas. O primeiro capítulo é uma introdução relativamente extensa à Teoria Clássica de Campos, aos formalismos Lagrangiano e Hamiltoniano no contexto de campos escalares, de Dirac e do Eletromagnetismo clássico. Temas importantes, como o Teorema de Noether e a relação entre princípios de simetria e leis de conservação são lá abordadas. O segundo capítulo consiste de uma introdução à teoria dos campos livres quantizados, relações canônicas de comutação nos casos bosônico e fermiônico e aos problemas de quantização do Eletromagnetismo. Ao final, é feita uma introdução à teoria de perturbações, são abordados temas como o Teorema de Wick e o problema básicos por trás da necessidade de introduzir-se procedimentos de regularização em teoria de perturbação. O capítulo terceiro desenvolve com mais detalhes a teoria de perturbações sendo desenvolvida a teoria geral da matriz $S$ e, o que é de grande importância, mesmo em desenvolvimentos modernos, a teoria ma matriz $S$ de Bogoliubov, $S(g)$, e seu uso na construção de produtos de tempo cronológicos. Algumas aplicações a processos de espalhamento simples (efeito Compton, aniquilação elétron-pósitron) são ao final discutidas.

O texto [7] continua a partir daí na direção de métodos de renormalização e da teoria do grupo de renormalização. Neste ponto, porém, cremos ser mais útil ao estudante atrelar sua leitura a um texto mais recente e mais voltado à aplicações na física de partículas elementares. Temos em mente especificamente [8] e, em menor grau [9]. Em [8] seguiremos os capítulos 3 (formulação Lagrangiana de teorias de calibre), 5 (integrais de trajetória na Mecânica Quântica), 4 (integrais de trajetória na Teoria de Campos e regras de Feynman) e 8 (introdução ao Modelo de Weinberg-Salam). Em [9] achamos importante a leitura do capítulo dedicado à clássica Teoria de Wigner de classificação de representações irredutíveis de dimensão finita do grupo de Poincaré, um tema conceitualmente importante que que eventualmente pode ser o início da presente proposta de estudo.

**Projeto de trabalho.** Na extensa literatura a respeito dos fundamentos da Teoria da Relatividade Restrita, diversas apresentações são encontradas para justificar as transformações de Lorentz como aquelas adequadas à descrição de transformações entre sistemas de coordenadas (Cartesianas) de sistemas de referência inerciais. Essas apresentações diferem basicamente quanto às hipóteses *a priori* assumidas sobre a natureza das transformações. Pouco conhecido, porém, é o fato de que as transformações de Lorentz podem ser justificadas com um número mínimo de hipóteses e de natureza exclusivamente física, a saber: se $T$ é uma aplicação bijetora do espaço-tempo de Minkowski $n$ dimensional em si mesmo (com $n \geq 3$) e $T$ mapeia cones de luz em cones de luz (e preserva a orientação temporal), então $T$ é, a menos de transformações de escala, uma transformação de Lorentz inomogênea. Como se percebe desse enunciado é, por exemplo, dispensável supor que $T$ seja uma transformação linear ou mesmo contínua (!). O único requisito relevante é que $T$ preserve a estrutura causal. O resultado acima descrito foi obtido pela primeira vez por A. D. Alexandrov em 1950 ([15] e [16]) e redescoberto por E. C. Zeeman [17] em 1964. Uma demonstração muito mais simples foi apresentada por H. J. Borchers e G. C. Hegerfeldt em 1972 (vide [18]).

Uma versão mais recente, no contexto de variedades Lorentzianas (fortemente causais), pode ser encontrada em [19], onde demonstrou-se que bijeções de um espaço-tempo fortemente causal que preservam as geodésicas nulas são transformações conformes.

O projeto de trabalho proposto envolve estudar detalhadamente as referências acima, em especial as referências [18] e [19]. O objetivo é produzir uma pequena monografia contendo aqueles resultados que possa ser apreciada por um público geral. A preparação requerida a execução dessa tarefa será importante para a formação do bolsista e sua execução lhe trará uma visão mais profunda dos fundamentos da Teoria da Relatividade e de sua estrutura matemática.

**Plano de trabalho e cronograma.** O projeto de trabalho está descrito acima e deverá ser iniciado a partir do momento em que o estudante tiver adquirido a formação matemática necessária, o que se dará em aproximadamente seis meses. A parte formativa do projeto será desenvolvida aproximadamente na sequência acima delineada. Como se trata de um projeto de natureza teórica é impossível uma maior precisão do cronograma a ser seguido, mas o mesmo é perfeitamente factível no período estipulado.

**Materiais e métodos.** Novamente, trata-se de um projeto de natureza teórica, sem uso de laboratórios e restrito ao estudo da literatura pertinente, a qual é amplamente disponibilizada.

**Forma de avaliação dos resultados.** Os progressos do estudante serão continuamente avaliados em contactos semanais com o orientador. O estudante será levado também a apresentar seminários sobre temas específicos no grupo de trabalho onde irá inserir-se.

São Paulo, 1 de outubro de 2014

João Carlos Alves Barata
Depto. de Física Matemática
Instituto de Física
Universidade de São Paulo
Caixa Postal 66 318
05315 970 São Paulo. SP. Brasil
Email: jbarata@if.usp.br

# Referências

[1] L. Landau e E. Lifchitz. *Curso de Física. Mecânica*. Editora Mir.

[2] V. I. Arnold. *Mathematical Methods of Classical Mechanics*. Springer Verlag.

[3] Manfredo Perdigão do Carmo. *Geometria Riemanniana*. Coleção Projeto Euclides, IMPA, Instituto de Matematica Pura e Aplicada, CNPq (1979).

[4] Barrett O'Neill. *Semi-Riemannian Geometry With Applications to Relativity*. Academic Press (1983).

[5] David J. Griffiths. *Mecânica Quântica*. Pearson Prentice Hall. São Paulo (2011).

[6] P. A. M. Dirac *The Principles of Quantum Mechanics*. Oxford University Press, USA, 4a edição (1982).

[7] N. N. Bogoliubov and D. V. Shirkov. *Introduction to the Teory of Quantized Fields*. Interscience Publishers, Inc. New York (1959).

[8] Lewis H. Ryder. *Quantum Field Theory*. Second Edition. Cambridge University Press (2006).

[9] S. Weinberg. *The Quantum Theory of Fields. Vol. I. Foundations*. Cambridge Univ. Press. (1995).

[10] L. Landau e E. Lifchitz. *Curso de Física. Teoria Clássica de Campos*. Editora Mir.

[11] S. Weinberg. *Cosmology and Gravitation*. John Wiley Inc.

[12] Robert M. Wald. *General Relativity*. The University of Chicago Press.

[13] M. Nakahara. *Geometry, Topology and Physics*. Institute of Physics Publishing.

[14] Essas Notas podem ser encontradas em

`http://denebola.if.usp.br/~jbarata/Notas_de_aula/notas_de_aula.html`

[15] A. D. Alexandrov, Usp. Mat. Nauk **37**, 187 (1950).

[16] A. D. Alexandrov, Can. J. Math. **19**, 1119–1128 (1967).

[17] E. C. Zeeman, "Causality Implies the Lorentz Group", J. Math. Phys., **5**, 490–493 (1964).

[18] H. J. Borchers and G. C. Hegerfeldt, "The Structure of Space-Time Transformations", Commun. Math. Phys. **28**, 259–266 (1972).

[19] Wen-ling Huang, "Transformations of strongly causal space-times preserving null geodesics", J. Math. Phys., **39**, 1637–1641 (1998).