

# Optimización

Formulario · Primavera 2021

Carlos Lezama MAT - 22211

ITAM

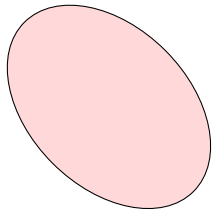
# 1. Optimización estática

## 1.1. Análisis convexo

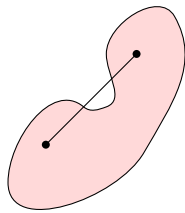
**Definición 1.1** (Conjunto convexo). Sea  $X \subseteq \mathbb{R}^n$ , decimos que  $X$  es **convexo** si, para cualesquiera  $x, y \in X$  y para toda  $\lambda \in (0, 1)$ , se cumple:

$$\lambda x + (1 - \lambda)y \in X.$$

Equivalentemente, decimos que  $X$  es **convexo** si, para todas  $a \in \partial X$  y  $b \in X$ , existe  $\ell$  tal que  $\langle b - a, \ell \rangle \leq 0$ ; donde  $\partial X$  es la frontera de  $X$  y  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  denota el producto punto.



Conjunto convexo



Conjunto no convexo

### Proposición 1.1

Sean  $A$  y  $B$  dos subconjuntos convexos de  $\mathbb{R}^n$ , entonces:

- (i)  $A \cap B$  es convexo.
- (ii)  $A + B = \{a + b : a \in A, b \in B\}$  es convexo.
- (iii) Para todo  $k \in \mathbb{R}$ ,  $kA = \{ka : a \in A\}$  es convexo.

**Definición 1.2** (Función convexa). Sea  $X \subseteq \mathbb{R}^n$  un conjunto convexo,  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  es una **función convexa** si, para toda  $x_1 \neq x_2 \in X$  y toda  $\lambda \in (0, 1)$ , se tiene:

$$f(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) \leq \lambda f(x_1) + (1 - \lambda)f(x_2).$$

Si la desigualdad es estricta, se dice que la función es **estrictamente convexa**.

**Definición 1.3** (Función cóncava). Sea  $X \subseteq \mathbb{R}^n$  un conjunto convexo,  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  es una **función cóncava** si, para toda  $x_1 \neq x_2 \in X$  y toda  $\lambda \in (0, 1)$ , se tiene:

$$f(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) \geq \lambda f(x_1) + (1 - \lambda)f(x_2).$$

Si la desigualdad es estricta, se dice que la función es **estrictamente cóncava**.

### Proposición 1.2

Sean  $X \subseteq \mathbb{R}^n$  un conjunto convexo,  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  y  $g : X \rightarrow \mathbb{R}$  dos funciones cóncavas, y  $\alpha \in \mathbb{R}$ , entonces:

- (i)  $f$  es cóncava si  $\alpha > 0$ .
- (ii)  $f$  es convexa si  $\alpha < 0$ .
- (iii)  $f + g$  es cóncava.

### Proposición 1.3

Sean  $X \subseteq \mathbb{R}^n$  un conjunto convexo,  $g : X \rightarrow \mathbb{R}$  una función cóncava, y  $h : Y \rightarrow \mathbb{R}$  una función cóncava y creciente tal que  $g(X) \subseteq Y \subseteq \mathbb{R}$ ; entonces,  $h \circ g$  es cóncava.

**Definición 1.4** (Vector gradiente). Sea  $f \in C^1(X)$ , el **vector gradiente** de  $f$  está dado por:

$$\nabla f(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n} \end{pmatrix}.$$

**Definición 1.5** (Matriz hessiana). Sea  $f \in C^2(X)$ , se define la **matriz hessiana** de  $f$  como  $H_f(x)$ , donde:

$$H_f(x)_{i,j} = \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_i \partial x_j}.$$

**Definición 1.6** (Serie de Taylor).

$$T(x) = \sum_{|\alpha| \geq 0} \frac{(x - a)^\alpha}{\alpha!} (\partial^\alpha f)(a).$$

### Teorema 1.1: de Taylor

Sea  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $f \in C^k(a)$ . Entonces, existe  $h_\alpha : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  tal que:

$$f(x) = \sum_{|\alpha| \leq k} \frac{\partial^\alpha f(a)}{\alpha!} (x - a)^\alpha + \sum_{|\alpha| = k} h_\alpha(x) (x - a)^\alpha,$$

y

$$\lim_{x \rightarrow a} h_\alpha(x) = 0.$$

**Definición 1.7** (Matriz simétrica). Decimos que una matriz  $A \in \mathcal{M}_{n \times n}$  es **simétrica** si y solo si:

$$A = A^T.$$

**Definición 1.8** (Matriz diagonalizable). Decimos que una matriz  $A \in \mathcal{M}_{n \times n}$  es **diagonalizable** si y solo si existe una matriz  $P \in \mathcal{M}_{n \times n}$  invertible tal que  $P^{-1}AP$  es diagonal.

**Definición 1.9** (Matriz ortogonalmente diagonalizable). Decimos que una matriz  $A \in \mathcal{M}_{n \times n}$  es **ortogonalmente diagonalizable** si y solo si existe una matriz  $T \in \mathcal{M}_{n \times n}$  invertible tal que  $T^{-1}AT$  es diagonal y  $T^{-1} = T^T$ .

### Teorema 1.2

Si  $A \in \mathcal{M}_{n \times n}$  es simétrica, sus valores propios son reales.

### Teorema 1.3

Una matriz simétrica  $A$  de tamaño  $n \times n$  puede determinar la forma cuadrática  $q_A$  de  $n$  variables como sigue:

$$q_A(x) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} x_i x_j = x^T A x.$$

### Corolario 1.1: Clasificación de formas cuadráticas

La matriz asociada a la forma cuadrática  $q_A$  es:

- (i) definida positiva si  $q_A(x) > 0, \forall x \neq 0$ .
- (ii) definida negativa si  $q_A(x) < 0, \forall x \neq 0$ .
- (iii) semidefinida positiva si  $q_A(x) \geq 0, \forall x \neq 0$ .
- (iv) semidefinida negativa si  $q_A(x) \leq 0, \forall x \neq 0$ .
- (v) indefinida si  $q_A(x)$  toma tanto valores positivos como negativos.

**Definición 1.10** (Menores principales). Sea  $A$  una matriz simétrica, los **menores principales** de esta matriz son los determinantes de todas las submatrices superiores izquierdas, es decir:

$$\begin{aligned} |A_1| &= |(a_{11})|, \\ |A_2| &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \\ |A_3| &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \dots \end{aligned}$$

### Teorema 1.4: Criterio de menores principales

Sea  $A$  una matriz simétrica asociada a la forma cuadrática  $q_A(x)$ , entonces:

- (i)  $q_A$  es definida positiva si y solo si los menores principales de  $A$  son todos positivos.
- (ii)  $q_A$  es definida negativa si y solo si los menores principales de  $A$  alternan signos de la forma:

$$|A_1| < 0, |A_2| > 0, |A_3| < 0, \dots$$

- (iii)  $q_A$  es indefinida si  $|A| \neq 0$ , pero no se cumplen (i) ni (ii).

### Teorema 1.5: Criterio de valores propios

Sea  $A$  una matriz simétrica asociada a la forma cuadrática  $q_A(x)$ , entonces:

- (i)  $q_A$  es definida positiva si y solo si todos los valores propios de  $A$  son positivos.
- (ii)  $q_A$  es definida negativa si y solo si todos los valores propios de  $A$  son negativos.
- (iii)  $q_A$  es semidefinida positiva si y solo si todos los valores propios de  $A$  son no negativos.
- (iv)  $q_A$  es semidefinida negativa si y solo si todos los valores propios de  $A$  son no positivos.
- (v)  $q_A$  es indefinida si y solo si la matriz  $A$  tiene valores propios positivos y negativos.

### Teorema 1.6: Criterio del primer orden

Sea  $X \subseteq \mathbb{R}^n$  un conjunto convexo y  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $f \in \mathcal{C}^1(X)$ , entonces:

- (i)  $f$  es convexa si y solo si,  $\forall x, y \in X$ , se tiene:

$$f(y) \geq f(x) + \nabla f(x)(y - x).$$

- (ii)  $f$  es cóncava si y solo si,  $\forall x, y \in X$ , se tiene:

$$f(y) \leq f(x) + \nabla f(x)(y - x).$$

### Teorema 1.7: Criterio de segundo orden

Sea  $X \subseteq \mathbb{R}^n$  un conjunto convexo y  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $f \in \mathcal{C}^2(X)$ , entonces:

- (i)  $f$  es convexa en  $X$  si y solo si la forma cuadrática asociada a la matriz hessiana es semidefinida positiva.
- (ii)  $f$  es estrictamente convexa en  $X$  si y solo si la forma cuadrática asociada a la matriz hessiana es definida positiva.
- (iii)  $f$  es cóncava en  $X$  si y solo si la forma cuadrática asociada a la matriz hessiana es semidefinida negativa.
- (iv)  $f$  es estrictamente cóncava en  $X$  si y solo si la forma cuadrática asociada a la matriz hessiana es definida negativa.

**Definición 1.11.** Sean  $X \subseteq \mathbb{R}^n$  un conjunto convexo y  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ , definimos:

· la **gráfica** de  $f$  como

$$G_f = \{(x, r) \in X \times \mathbb{R} : f(x) = r\}.$$

· el **epígrafo** de  $f$  como

$$E_f = \{(x, r) \in X \times \mathbb{R} : f(x) \leq r\}.$$

· el **hipógrafo** de  $f$  como

$$H_f = \{(x, r) \in X \times \mathbb{R} : f(x) \geq r\}.$$

### Teorema 1.8

Sea  $X \subseteq \mathbb{R}^n$  un conjunto convexo,

- (i) una función  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  es convexa si y solo si  $E_f$  es un conjunto convexo de  $\mathbb{R}^{n+1}$ .
- (ii) una función  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  es cóncava si y solo si  $H_f$  es un conjunto convexo de  $\mathbb{R}^{n+1}$ .

**Definición 1.12.** Sean  $X \subseteq \mathbb{R}^n$  un conjunto convexo y  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ , definimos:

· el **contorno** de  $f$  en  $k$  como

$$C_f(k) = \{x \in X : f(x) = k\}.$$

· el **contorno superior** de  $f$  en  $k$  como

$$CS_f(k) = \{x \in X : f(x) \geq k\}.$$

· el **contorno inferior** de  $f$  en  $k$  como

$$CI_f(k) = \{x \in X : f(x) \leq k\}.$$

### Teorema 1.9

- (i) Si  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  es cóncava en  $A$ ,  $CS_f(k)$  es convexo para toda  $k$  en la imagen de  $f$ .
- (ii) Si  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  es convexa en  $A$ ,  $CI_f(k)$  es convexo para toda  $k$  en la imagen de  $f$ .

### Teorema 1.10

Sean  $X \subseteq \mathbb{R}^n$  un conjunto convexo y  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ , entonces:

- (i)  $f$  es cuasicóncava en  $A$  si  $CS_f(k)$  es convexo para toda  $k$  en la imagen de  $f$ .
- (ii)  $f$  es cuasiconvexa en  $A$  si  $CI_f(k)$  es convexo para toda  $k$  en la imagen de  $f$ .

### Teorema 1.11

Sean  $X \subseteq \mathbb{R}^n$  un conjunto convexo y  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ , entonces:

- (i)  $f$  es cuasicóncava si  $f$  es cóncava.
- (ii)  $f$  es cuasiconvexa si  $f$  es convexa.

### Teorema 1.12

Cualquier transformación monótona creciente de una función cuasiconvexa es cuasiconvexa. Asimismo, cualquier transformación monótona creciente de una función cuasicóncava es cuasicóncava.

## 1.2. Optimización estática

### Teorema 1.13: Minkowski

Sean  $A$  y  $B$  dos conjuntos de  $\mathbb{R}^n$  tales que  $A \cap B = \emptyset$ ; entonces, existe un hiperplano que los separa.

*Nota:* este resultado es la base para desarrollar la *Teoría de Dualidad* en programación lineal.

### Teorema 1.14: Punto fijo de Brouwer

Sean  $A \subset \mathbb{R}^n$  un conjunto compacto y convexo, y  $f : A \rightarrow A$  una función continua; entonces,  $f$  tiene un punto fijo.

$$\text{i.e. } \exists x \in A \text{ tal que } f(x) = x.$$

2. Cálculo de variaciones

### 3. Teoría de control óptimo

#### 4. Elementos de programación dinámica