

Fundamentos de econometría

Formulario · Primavera 2021

Carlos Lezama EST - 21104

ITAM

1. Fundamentos estadísticos de econometría

Definición 1.1 (Error cuadrático medio). *Definimos el error cuadrático medio como sigue:*

$$\text{ECM}(\hat{\theta}) = \mathbb{E}_{\theta} \left[\left(\hat{\theta} - \theta \right)^2 \right] = \text{Var}(\hat{\theta}) + \text{Bias}^2(\hat{\theta}, \theta).$$

Este mide la diferencia en media cuadrada entre nuestros valores estimados y el real. Asimismo, podemos definir el error cuadrático medio de una variable X respecto a alguna constante c como sigue:

$$\mathbb{E}[(X - c)^2] = \sigma_x^2 + (c - \mu_x)^2.$$

Teorema 1.1: Error cuadrático mínimo

El valor que minimiza $\mathbb{E}[(X - c)^2]$ es μ_x .

Corolario 1.1: Desigualdad de Markov I

Sean φ una función monótona creciente y no negativa para los reales no negativos, X una variable aleatoria, $a \geq 0$ y $\varphi(a) > 0$, entonces:

$$\mathbb{P}(|X| \geq a) \leq \frac{\mathbb{E}[\varphi(|X|)]}{\varphi(a)}.$$

Corolario 1.2: Desigualdad de Markov II

Sea X una variable aleatoria y $a > 0$, entonces:

$$\mathbb{P}(|X| \geq a) \leq \frac{\mathbb{E}[|X|^r]}{a^r}.$$

Teorema 1.2: Desigualdad de Chebyshev

Sean X una variable aleatoria con $\mathbb{E}(X) = \mu$ y $\text{Var}(X) = \sigma^2$, y $k > 0$, entonces:

$$\mathbb{P}(\|X - \mu\|_{\alpha} \geq k\sigma) \leq \frac{1}{k^2},$$

o bien,

$$\mathbb{P}(\|X - \mu\|_{\alpha} \geq k) \leq \frac{\sigma^2}{k^2};$$

donde $\|\cdot\|_{\alpha}$ es la norma α .

Observación 1.1

Sean X_1, X_2, \dots, X_n una colección de $n \in \mathbb{N}$ variables aleatorias, podemos expresar las funciones de densidad conjunta en términos de densidades condicionales de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, \dots, x_n) &= f(x_1 | x_2, x_3, \dots, x_n) \cdot f(x_2, x_3, \dots, x_n) \\ &= f(x_1 | x_2, \dots, x_n) \cdot f(x_2 | x_3, \dots, x_n) \cdots f(x_{n-1} | x_n) \cdot f(x_n). \end{aligned}$$

Teorema 1.3: Ley de esperanzas iteradas

Sean X y Y dos variables aleatorias tales que $\mathbb{E}[X]$ está definida y ambas están en el mismo espacio de probabilidad, entonces:

$$\mathbb{E}[X] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[X | Y]].$$

Proposición 1.1

Por la ley de esperanzas iteradas, tenemos:

$$\text{Var}(X) = \mathbb{E}[\text{Var}(X | Y)] + \text{Var}(\mathbb{E}[Y | X]).$$

Proposición 1.2

$$\mathbb{E}[XY] = \mathbb{E}[X\mathbb{E}[Y | X]].$$

Proposición 1.3

Sea $\varepsilon = Y - \mathbb{E}[Y | X]$, entonces:

- (i) $\mathbb{E}[\varepsilon | X] = 0$.
- (ii) $\text{Var}(\varepsilon | X) = \sigma_{y|x}^2$.
- (iii) $\mathbb{E}[\varepsilon] = 0$.
- (iv) $\text{Var}(\varepsilon) = 0$.
- (v) $\text{Cov}(h(X), \varepsilon) = 0$.

Proposición 1.4

$$\arg \min_{h(X)} \mathbb{E}[(Y - h(X))^2] = \mathbb{E}[Y | X].$$

Definición 1.2 (Mejor predictor lineal). *Dado que $\mathbb{E}[Y | X]$ puede ser una función no lineal bastante complicada — excepto en el caso normal bivariado, consideramos $\mathbb{E}^*[Y | X]$ el mejor predictor lineal (BLP, por sus siglas en inglés) y lo definimos como sigue:*

$$\mathbb{E}^*[Y | X] = \alpha + \beta X,$$

tal que

$$\alpha = \mu_y - \beta \mu_x \quad \beta = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x^2}.$$

Teorema 1.4

Si la esperanza condicional es lineal, esta coincide con el mejor predictor lineal.

Definición 1.3 (Independencia en distribución). *Decimos que, en un conjunto finito de n variables aleatorias $\{X_1, \dots, X_n\}$, X_1, \dots, X_n son mutuamente independientes si:*

$$F_{x_1, \dots, x_n}(x_1, \dots, x_n) = \prod_{k=1}^n F_{x_k}(x_k), \quad \forall x_1, \dots, x_n.$$

Definición 1.4 (Independencia en media). *Decimos que una variable aleatoria Y es independiente en media respecto a otra X si:*

$$\mathbb{E}[Y | X] = \mathbb{E}[Y].$$

Definición 1.5 (Independencia en covarianza). *Decimos que dos variables aleatorias X y Y son independientes en covarianza si*

$$\text{Cov}(X, Y) = 0.$$

Teorema 1.5

Independencia en distribución implica independencia en medias, y esta, a su vez, implica independencia en covarianzas; pero no en el orden inverso.

Proposición 1.5

Si Y es independiente en media respecto a X , entonces:

$$\mathbb{E}[X^r Y] = \mathbb{E}[X^r] \mathbb{E}[Y], \quad \forall r \in \mathbb{R}.$$

Proposición 1.6

Si Y es independiente en distribución respecto a X , entonces:

$$\mathbb{E}[h(X)Y^s] = \mathbb{E}[h(X)]\mathbb{E}[Y^s]$$

y, por lo tanto, también se cumple

$$\mathbb{E}[X^r Y^s] = \mathbb{E}[X^r] \mathbb{E}[Y^s]$$

para cualquier función $h(X)$ y todo r y s .

2. Econometría, modelos y datos

3. Modelo de regresión lineal simple

4. Análisis de los supuestos del modelo

5. Modelo de regresión lineal múltiple

6. Otros temas sobre el modelo de regresión lineal