Fundamentos de econometría

Formulario · Primavera 2021

Carlos Lezama EST - 21104

ITAM

1. Fundamentos estadísticos de econometría

Definición 1.1 (Error cuadrático medio). *Definimos el **error cuadrático medio** como sigue:*

$$\mathrm{ECM}(\hat{\theta}) = \mathbb{E}_\theta\left[\left(\hat{\theta}-\theta\right)^2\right] = \mathrm{Var}(\hat{\theta}) + \mathrm{Bias}^2(\hat{\theta},\theta).$$

*Este mide la diferencia en media cuadrada entre nuestros valores estimados y el real. Asimismo, podemos definir el **error cuadrático medio** de una variable X respecto a alguna constante c como sigue:*

$$\mathbb{E}\left[(X-c)^2\right] = \sigma_{\mathrm{x}}^2 + (c-\mu_{\mathrm{x}})^2.$$

Teorema 1.1: Error cuadrático mínimo

El valor que minimiza $\mathbb{E}\left[(X-c)^2\right]$ es μ_{x}.

Corolario 1.1: Desigualdad de Markov I

Sean φ una función monótona creciente y no negativa para los reales no negativos, X una variable aleatoria, $a \geq 0$ y $\varphi(a) > 0$, entonces:

$$\mathbb{P}\left(|X| \geq a\right) \leq \frac{\mathbb{E}\left[\varphi\left(|X|\right)\right]}{\varphi(a)}.$$

Corolario 1.2: Desigualdad de Markov II

Sea X una variable aleatoria y $a > 0$, entonces:

$$\mathbb{P}\left(|X| \geq a\right) \leq \frac{\mathbb{E}\left[|X|^r\right]}{a^r}.$$

Teorema 1.2: Desigualdad de Chebyshev

Sean X una variable aleatoria con $\mathbb{E}(X) = \mu$ y $\mathrm{Var}(X) = \sigma^2$, y $k > 0$, entonces:

$$\mathbb{P}\left(\|X-\mu\|_\alpha \geq k\sigma\right) \leq \frac{1}{k^2},$$

o bien,

$$\mathbb{P}\left(\|X-\mu\|_\alpha \geq k\right) \leq \frac{\sigma^2}{k^2};$$

donde $\|\cdot\|_\alpha$ es la norma α.

Observación 1.1

Sean $X_1, X_2, \ldots, X_n$ una colección de $n \in \mathbb{N}$ variables aleatorias, podemos expresar las funciones de densidad conjunta en términos de densidades condicionales de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, \ldots, x_n) &= f(x_1 \mid x_2, x_3, \ldots, x_n) \cdot f(x_2, x_3, \ldots, x_n) \\ &= f(x_1 \mid x_2, \ldots, x_n) \cdot f(x_2 \mid x_3, \ldots, x_n) \cdot \cdots \cdot f(x_{n-1} \mid x_n) \cdot f(x_n). \end{aligned}$$

Teorema 1.3: Ley de esperanzas iteradas

Sean X y Y dos variables aleatorias tales que $\mathbb{E}\left[X\right]$ está definida y ambas están en el mismo espacio de probabilidad, entonces:

$$\mathbb{E}\left[X\right] = \mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[X \mid Y\right]\right].$$

Proposición 1.1

Por la **ley de esperanzas iteradas**, tenemos:

$$\mathrm{Var}(X) = \mathbb{E}\left[\mathrm{Var}(X \mid Y)\right] + \mathrm{Var}\left(\mathbb{E}[Y \mid X]\right).$$

Proposición 1.2

$$\mathbb{E}[XY] = \mathbb{E}\left[X\mathbb{E}[Y \mid X]\right].$$

Proposición 1.3

Sea $\varepsilon = Y - \mathbb{E}[Y \mid X]$, entonces:

(I) $\mathbb{E}[\varepsilon \mid X] = 0$.
(II) $\mathrm{Var}(\varepsilon \mid X) = \sigma_{\mathrm{y}|\mathrm{x}}^2$.
(III) $\mathbb{E}[\varepsilon] = 0$.
(IV) $\mathrm{Var}(\varepsilon) = 0$.
(V) $\mathrm{Cov}(h(X), \varepsilon) = 0$.

Proposición 1.4

$$\arg\min_{h(X)} \mathbb{E}\left[\left(Y - h(X)\right)^2\right] = \mathbb{E}\left[Y \mid X\right].$$

Definición 1.2 (Mejor predictor lineal). *Dado que $\mathbb{E}[Y \mid X]$ puede ser una función no lineal bastante complicada—excepto en el caso normal bivariado—, consideramos $\mathbb{E}^*[Y \mid X]$ el **mejor predictor lineal** (BLP, por sus siglas en inglés) y lo definimos como sigue:*

$$\mathbb{E}^*\left[Y \mid X\right] = \alpha + \beta X,$$

tal que

$$\alpha = \mu_{\mathrm{y}} - \beta\mu_{\mathrm{x}} \qquad \beta = \frac{\sigma_{\mathrm{xy}}}{\sigma_x^2}.$$

Teorema 1.4

Si la esperanza condicional es lineal, esta coincide con el mejor predictor lineal.

Definición 1.3 (Independencia en distribución). *Decimos que, en un conjunto finito de n variables aleatorias $\{X_1, \ldots, X_n\}$, $X_1, \ldots, X_n$ son **mutuamente independientes** si:*

$$F_{\mathrm{x}_1,\ldots,\mathrm{x}_n}(x_1, \ldots, x_n) = \prod_{k=1}^n F_{\mathrm{x}_k}(x_k), \quad \forall x_1, \ldots, x_n.$$

Definición 1.4 (Independencia en media). *Decimos que una variable aleatoria Y es **independiente en media** respecto a otra X si:*

$$\mathbb{E}[Y \mid X] = \mathbb{E}[Y].$$

Definición 1.5 (Independencia en covarianza). *Decimos que dos variables aleatorias X y Y son **independientes en covarianza** si*

$$\mathrm{Cov}(X, Y) = 0.$$

Teorema 1.5

Independencia en distribución implica independencia en medias, y esta, a su vez, implica independencia en covarianzas; pero no en el orden inverso.

Proposición 1.5

Si Y es independiente en media respecto a X, entonces:

$$\mathbb{E}[X^rY] = \mathbb{E}[X^r]\mathbb{E}[Y], \quad \forall r \in \mathbb{R}.$$

Proposición 1.6

Si Y es independiente en distribución respecto a X, entonces:

$$\mathbb{E}[h(X)Y^s] = \mathbb{E}[h(X)]\mathbb{E}[Y^s]$$

y, por lo tanto, también se cumple

$$\mathbb{E}[X^rY^s] = \mathbb{E}[X^r]\mathbb{E}[Y^s]$$

para cualquier función $h(X)$ y todo r y s.

2. Econometría, modelos y datos

3. Modelo de regresión lineal simple

4. Análisis de los supuestos del modelo

5. Modelo de regresión lineal múltiple

6. Otros temas sobre el modelo de regresión lineal