

# Fundamentos de econometría

Formulario · Primavera 2021

Carlos Lezama EST - 21104

ITAM

## 1. Fundamentos estadísticos de econometría

**Definición 1.1** (Error cuadrático medio). *Definimos el **error cuadrático medio** como sigue:*

$$\text{ECM}(\hat{\theta}) = \mathbb{E}_{\theta} \left[ \left( \hat{\theta} - \theta \right)^2 \right] = \text{Var}(\hat{\theta}) + \text{Bias}^2(\hat{\theta}, \theta).$$

*Este mide la diferencia en media cuadrada entre nuestros valores estimados y el real. Asimismo, podemos definir el **error cuadrático medio** de una variable  $X$  respecto a alguna constante  $c$  como sigue:*

$$\mathbb{E}[(X - c)^2] = \sigma_x^2 + (c - \mu_x)^2.$$

### Teorema 1.1: Error cuadrático mínimo

El valor que minimiza  $\mathbb{E}[(X - c)^2]$  es  $\mu_x$ .

### Corolario 1.1: Desigualdad de Markov I

Sean  $\varphi$  una función monótona creciente y no negativa para los reales no negativos,  $X$  una variable aleatoria,  $a \geq 0$  y  $\varphi(a) > 0$ , entonces:

$$\mathbb{P}(|X| \geq a) \leq \frac{\mathbb{E}[\varphi(|X|)]}{\varphi(a)}.$$

### Corolario 1.2: Desigualdad de Markov II

Sea  $X$  una variable aleatoria y  $a > 0$ , entonces:

$$\mathbb{P}(|X| \geq a) \leq \frac{\mathbb{E}[|X|^r]}{a^r}.$$

### Teorema 1.2: Desigualdad de Chebyshev

Sean  $X$  una variable aleatoria con  $\mathbb{E}(X) = \mu$  y  $\text{Var}(X) = \sigma^2$ , y  $k > 0$ , entonces:

$$\mathbb{P}(\|X - \mu\|_{\alpha} \geq k\sigma) \leq \frac{1}{k^2},$$

o bien,

$$\mathbb{P}(\|X - \mu\|_{\alpha} \geq k) \leq \frac{\sigma^2}{k^2};$$

donde  $\|\cdot\|_{\alpha}$  es la norma  $\alpha$ .

### Observación 1.1

Sean  $X_1, X_2, \dots, X_n$  una colección de  $n \in \mathbb{N}$  variables aleatorias, podemos expresar las funciones de densidad conjunta en términos de densidades condicionales de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, \dots, x_n) &= f(x_1 | x_2, x_3, \dots, x_n) \cdot f(x_2, x_3, \dots, x_n) \\ &= f(x_1 | x_2, \dots, x_n) \cdot f(x_2 | x_3, \dots, x_n) \cdots f(x_{n-1} | x_n) \cdot f(x_n). \end{aligned}$$

### Teorema 1.3: Ley de esperanzas iteradas

Sean  $X$  y  $Y$  dos variables aleatorias tales que  $\mathbb{E}[X]$  está definida y ambas están en el mismo espacio de probabilidad, entonces:

$$\mathbb{E}[X] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[X | Y]].$$

### Proposición 1.1

Por la ley de esperanzas iteradas, tenemos:

$$\text{Var}(X) = \mathbb{E}[\text{Var}(X | Y)] + \text{Var}(\mathbb{E}[Y | X]).$$

### Proposición 1.2

$$\mathbb{E}[XY] = \mathbb{E}[X\mathbb{E}[Y | X]].$$

### Proposición 1.3

Sea  $\varepsilon = Y - \mathbb{E}[Y | X]$ , entonces:

- (i)  $\mathbb{E}[\varepsilon | X] = 0$ .
- (ii)  $\text{Var}(\varepsilon | X) = \sigma_{y|x}^2$ .
- (iii)  $\mathbb{E}[\varepsilon] = 0$ .
- (iv)  $\text{Var}(\varepsilon) = 0$ .
- (v)  $\text{Cov}(h(X), \varepsilon) = 0$ .

### Proposición 1.4

$$\arg \min_{h(X)} \mathbb{E}[(Y - h(X))^2] = \mathbb{E}[Y | X].$$

**Definición 1.2** (Mejor predictor lineal). *Dado que  $\mathbb{E}[Y | X]$  puede ser una función no lineal bastante complicada — excepto en el caso normal bivariado, consideramos  $\mathbb{E}^*[Y | X]$  el **mejor predictor lineal** (BLP, por sus siglas en inglés) y lo definimos como sigue:*

$$\mathbb{E}^*[Y | X] = \alpha + \beta X,$$

tal que

$$\alpha = \mu_y - \beta \mu_x \quad \beta = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x^2}.$$

### Teorema 1.4

Si la esperanza condicional es lineal, esta coincide con el mejor predictor lineal.

**Definición 1.3** (Independencia en distribución). *Decimos que, en un conjunto finito de  $n$  variables aleatorias  $\{X_1, \dots, X_n\}$ ,  $X_1, \dots, X_n$  son **mutuamente independientes** si:*

$$F_{x_1, \dots, x_n}(x_1, \dots, x_n) = \prod_{k=1}^n F_{x_k}(x_k), \quad \forall x_1, \dots, x_n.$$

**Definición 1.4** (Independencia en media). *Decimos que una variable aleatoria  $Y$  es **independiente en media** respecto a otra  $X$  si:*

$$\mathbb{E}[Y | X] = \mathbb{E}[Y].$$

**Definición 1.5** (Independencia en covarianza). *Decimos que dos variables aleatorias  $X$  y  $Y$  son **independientes en covarianza** si*

$$\text{Cov}(X, Y) = 0.$$

### Teorema 1.5

Independencia en distribución implica independencia en medias, y esta, a su vez, implica independencia en covarianzas; pero no en el orden inverso.

### Proposición 1.5

Si  $Y$  es independiente en media respecto a  $X$ , entonces:

$$\mathbb{E}[X^r Y] = \mathbb{E}[X^r] \mathbb{E}[Y], \quad \forall r \in \mathbb{R}.$$

### Proposición 1.6

Si  $Y$  es independiente en distribución respecto a  $X$ , entonces:

$$\mathbb{E}[h(X)Y^s] = \mathbb{E}[h(X)]\mathbb{E}[Y^s]$$

y, por lo tanto, también se cumple

$$\mathbb{E}[X^r Y^s] = \mathbb{E}[X^r] \mathbb{E}[Y^s]$$

para cualquier función  $h(X)$  y todo  $r$  y  $s$ .



### 3. Modelo de regresión lineal simple

#### 4. Análisis de los supuestos del modelo

## 5. Modelo de regresión lineal múltiple

## 6. Otros temas sobre el modelo de regresión lineal