# Optimización

Formulario  $\cdot$  Primavera 2021

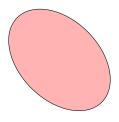
## 1. Optimización estática

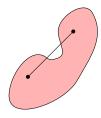
## 1.1. Análisis convexo

**Definición 1.1** (Conjunto convexo). Sea  $X \subseteq \mathbb{R}^n$ , decimos que X es convexo si, para cualesquiera  $x, y \in X$  y para toda  $\lambda \in (0, 1)$ , se cumple:

$$\lambda x + (1 - \lambda)y \in X$$
.

Equivalentemente, decimos que X es **convexo** si, para todas  $a \in \partial X$  y  $b \in X$ , existe  $\ell$  tal que  $\langle b - a, \ell \rangle \leq 0$ ; donde  $\partial X$  es la frontera de X  $y \langle \cdot, \cdot \rangle$  denota el producto punto.





Conjunto convexo

Conjunto no convexo

## Proposición 1.1

Sean A y B dos subconjuntos convexos de  $\mathbb{R}^n$ , entonces:

- (i)  $A \cap B$  es convexo.
- (II)  $A+B=\{a+b:a\in A,\ b\in B\}$  es convexo.
- (III) Para todo  $k \in \mathbb{R}$ ,  $kA = \{ka : a \in A\}$  es convexo.

**Definición 1.2** (Función convexa). Sea  $X \subseteq R^n$  un conjunto convexo,  $f: X \to \mathbb{R}$  es una función convexa si, para toda  $x_1 \neq x_2 \in X$  y toda  $\lambda \in (0,1)$ , se tiene:

$$f(\lambda \mathbf{x}_1 + (1 - \lambda)\mathbf{x}_2) \le \lambda f(\mathbf{x}_1) + (1 - \lambda)f(\mathbf{x}_2).$$

Si la desigualdad es estricta, se dice que la función es estrictamente convexa.

**Definición 1.3** (Función cóncava). Sea  $X \subseteq R^n$  un conjunto convexo,  $f: X \to \mathbb{R}$  es una función cóncava si, para toda  $x_1 \neq x_2 \in X$  y toda  $\lambda \in (0,1)$ , se tiene:

$$f(\lambda \mathbf{x}_1 + (1 - \lambda)\mathbf{x}_2) \ge \lambda f(\mathbf{x}_1) + (1 - \lambda)f(\mathbf{x}_2).$$

Si la desigualdad es estricta, se dice que la función es estrictamente cóncava.

## Proposición 1.2

Sean  $X\subseteq\mathbb{R}^n$  un conjunto convexo,  $f:X\to\mathbb{R}$  y  $g:X\to\mathbb{R}$  dos funciones cóncavas, y  $\alpha\in\mathbb{R}$ , entonces:

- (I) f es cóncava si  $\alpha > 0$ .
- (II) f es convexa si  $\alpha < 0$ .
- (III) f+g es cóncava.

## Proposición 1.3

Sean  $X\subseteq\mathbb{R}^n$  un conjunto convexo,  $g:X\to\mathbb{R}$  una función cóncava, y  $h:Y\to\mathbb{R}$  una función cóncava y creciente tal que  $g(X)\subseteq Y\subseteq\mathbb{R}$ ; entonces,  $h\circ g$  es cóncava.

**Definición 1.4** (Vector gradiente). Sea  $f \in C^1(X)$ , el vector gradiente de f está dado por:

$$\nabla f(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n} \end{pmatrix}.$$

Definición 1.5 (Matriz hessiana). Sea  $f \in C^2(X)$ , se define la matriz hessiana de f como  $H_f(x)$ , donde:

$$H_f(\mathbf{x})_{i,j} = \frac{\partial^2 f(\mathbf{x})}{\partial x_i \partial x_j}.$$

Definición 1.6 (Serie de Taylor).

$$T(\mathbf{x}) = \sum_{|\alpha| > 0} \frac{(\mathbf{x} - \mathbf{a})^{\alpha}}{\alpha!} (\partial^{\alpha} f) (\mathbf{a}).$$

#### Teorema 1.1: de Taylor

Sea  $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$  tal que  $f \in \mathcal{C}^k(\mathbf{a})$ . Entonces, existe  $h_\alpha: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$  tal que:

$$f(\mathbf{x}) = \sum_{|\alpha| \le k} \frac{\partial^{\alpha} f(\mathbf{a})}{\alpha!} (\mathbf{x} - \mathbf{a})^{\alpha} + \sum_{|\alpha| = k} h_{\alpha}(\mathbf{x}) (\mathbf{x} - \mathbf{a})^{\alpha},$$

У

$$\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} h_{\alpha}(\mathbf{x}) = 0.$$

**Definición 1.7** (Matriz simétrica). Decimos que una matriz  $A \in \mathcal{M}_{n \times n}$  es simétrica si y solo si:

$$A = A^T$$
.

**Definición 1.8** (Matriz diagonalizable). Decimos que una matriz  $A \in \mathcal{M}_{n \times n}$  es diagonalizable si y solo si existe una matriz  $P \in \mathcal{M}_{n \times n}$  invertible tal que  $P^{-1}AP$  es diagonal.

**Definición 1.9** (Matriz ortogonalmente diagonalizable). *Decimos que una matriz*  $A \in \mathcal{M}_{n \times n}$  *es ortogonalmente diagonalizable si y solo si existe una matriz*  $T \in \mathcal{M}_{n \times n}$  *invertible tal que*  $T^{-1}AT$  *es diagonal y*  $T^{-1} = T^T$ .

## Teorema 1.2

Si  $A \in \mathcal{M}_{n \times n}$  es simétrica, sus valores propios son reales.

#### Teorema 1.3

Una matriz simétrica A de tamaño  $n \times n$  puede determinar la forma cuadrática  $q_A$  de n variables como sigue:

$$q_A(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j = \mathbf{x}^T A \mathbf{x}.$$

#### Corolario 1.1: Clasificación de formas cuadráticas

La matriz asociada a la forma cuadrática  $q_A$  es:

- (i) definida positiva si  $q_A(x) > 0$ ,  $\forall x \neq 0$ .
- (II) definida negativa si  $a_A(x) < 0$ ,  $\forall x \neq 0$ .
- (III) semidefinida positiva si  $q_A(x) \ge 0, \ \forall x \ne 0.$
- (iv) semidefinida negativa si  $q_A(x) \le 0, \ \forall x \ne 0.$
- (v) indefinida si  $q_A(x)$  toma tanto valores positivos como negativos.

Definición 1.10 (Menores principales). Sea A una matriz simétrica, los menores principales de esta matriz son los determinantes de todas las submatrices superiores izquierdas, es decir:

$$|A_1| = |(a_{11})|,$$

$$|A_2| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix},$$

$$|A_3| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \dots$$

## Teorema 1.4: Criterio de menores principales

Sea A una matriz simétrica asociada a la forma cuadrática  $q_A(\mathbf{x})$ , entonces:

- q<sub>A</sub> es definida positiva si y solo si los menores principales de A son todos positivos.
- (II) q<sub>A</sub> es definida negativa si y solo si los menores principales de A alternan signos de la forma:

$$|A_1| < 0, |A_2| > 0, |A_3| < 0, \dots$$

(III)  $q_A$  es indefinida si  $|A| \neq 0$ , pero no se cumplen (I) ni (II).

## Teorema 1.5: Criterio de valores propios

Sea Auns matriz simétrica asociada a la forma cuadrática  $q_A(\mathbf{x}),$  entonces:

- (1)  $q_A$  es definida positiva si y solo si todos los valores propios de A son positivos.
- (II)  $q_A$  es definida negativa si y solo si todos los valores propios de A son negativos.
- (III)  $q_A$  es semidefinida positiva si y solo si todos los valores propios de A son no negativos.
- (IV)  $q_A$  es semidefinida negativa si y solo si todos los valores propios de A son no positivos.
- (v)  $q_A$  es indefinida si y solo si la matriz A tiene valores propios positivos y negativos.

#### Teorema 1.6: Criterio del primer orden

Sea  $X\subseteq \mathbb{R}^n$  un conjunto convexo y  $f:X\to \mathbb{R}$  tal que  $f\in \mathcal{C}^1(X)$ , entonces:

(i) f es convexa si y solo si,  $\forall x, y \in X$ , se tiene:

$$f(y) \ge f(x) + \nabla f(x)(y - x).$$

(II) f es cóncava si y solo si,  $\forall x, y \in X$ , se tiene:

$$f(y) \le f(x) + \nabla f(x)(y - x).$$

## Teorema 1.7: Criterio de segundo orden

Sea  $X\subseteq \mathbb{R}^n$  un conjunto convexo y  $f:X\to \mathbb{R}$  tal que  $f\in \mathcal{C}^2(X)$ , entonces:

- f es convexa en X si y solo si la forma cuadrática asociada a la matriz hessiana es semidefinida positiva.
- f es estrictamente convexa en X si y solo si la forma cuadrática asociada a la matriz hessiana es definida positiva.
- (III) f es cóncava en X si y solo si la forma cuadrática asociada a la matriz hessiana es semidefinida negativa.
- (iv) f es estrictamente cóncava en X si y solo si la forma cuadrática asociada a la matriz hessiana es definida negativa.

**Definición 1.11.** Sean  $X \subseteq \mathbb{R}^n$  un conjunto convexo  $y f: X \to \mathbb{R}$ , definimos:

· la **gráfica** de f como

$$G_f = \{(\mathbf{x}, r) \in X \times \mathbb{R} : f(\mathbf{x}) = r\}.$$

· el **epígrafo** de f como

$$E_f = \{(\mathbf{x}, r) \in X \times \mathbb{R} : f(\mathbf{x}) \le r\}.$$

· el hipógrafo de f como

$$H_f = \{(\mathbf{x}, r) \in X \times \mathbb{R} : f(\mathbf{x}) \ge r\}.$$

## Teorema 1.8

Sea  $X \subseteq \mathbb{R}^n$  un conjunto convexo,

- (i) una función  $f:X\to\mathbb{R}$  es convexa si y solo si  $E_f$  es un conjunto convexo de  $\mathbb{R}^{n+1}$ .
- (II) una función  $f:X\to\mathbb{R}$  es cóncava si y solo si  $H_f$  es un conjunto convexo de  $\mathbb{R}^{n+1}$  .

**Definición 1.12.** Sean  $X \subseteq \mathbb{R}^n$  un conjunto convexo  $y f: X \to \mathbb{R}$ , definimos:

 $\cdot$  el **contorno** de f en k como

$$C_f(k) = \{ x \in X : f(x) = k \}.$$

· el contorno superior de f en k como

$$CS_f(k) = \{ \mathbf{x} \in X : f(\mathbf{x}) \ge k \}.$$

· el contorno inferior de f en k como

$$CI_f(k) = \{ \mathbf{x} \in X : f(\mathbf{x}) \le k \}.$$

#### Teorema 1.9

- (1) Si  $f:X\to\mathbb{R}$  es cóncava en  $A,CS_f(k)$  es convexo para toda k en la imagen de f .
- (II) Si  $f:X\to\mathbb{R}$  es convexa en A,  $CI_f(k)$  es convexo para toda k en la imagen de f.

#### Teorema 1.10

Sean  $X \subseteq \mathbb{R}^n$  un conjunto convexo y  $f: X \to \mathbb{R}$ , entonces:

- (1) f es cuasicóncava en A si  $CS_f(k)$  es convexo para toda k en la imagen de f.
- (II) f es cuasiconvexa en A si  $CI_f(k)$  es convexo para toda k en la imagen de f.

#### Teorema 1.11

Sean  $X \subseteq \mathbb{R}^n$  un conjunto convexo y  $f: X \to \mathbb{R}$ , entonces:

- (i) f es cuasicóncava si f es cóncava.
- (II) f es cuasiconvexa si f es convexa.

## Teorema 1.12

Cualquier transformación monótona creciente de una función cuasiconvexa es cuasiconvexa. Asimismo, cualesquier transformación monótona creciente de una función cuasicóncava es cuasicóncava.

| ^    | $\alpha$ 1 1 |       |             |
|------|--------------|-------|-------------|
| 2. ( | Cálcul       | lo de | variaciones |

| 3. | Teoría   | de | control | óptimo |  |
|----|----------|----|---------|--------|--|
| •  | 1 COI IA | uc | COMMO   | opunio |  |

Carlos Lezama  $Optimizaci\'on\cdot Formulario$ Página 5

4. Elementos de programación dinámica