Optimización

Formulario · Primavera 2021

Carlos Lezama MAT - 22211

ITAM

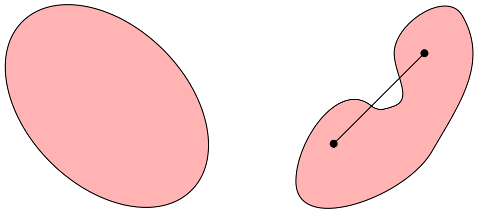
1. Optimización estática

1.1. Análisis convexo

Definición 1.1 (Conjunto convexo)**.** *Sea $X \subseteq \mathbb{R}^n$, decimos que X es* ***convexo*** *si, para cualesquiera $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in X$ y para toda $\lambda \in (0,1)$, se cumple:*

$$\lambda \mathbf{x} + (1-\lambda)\mathbf{y} \in X.$$

Equivalentemente, decimos que X es ***convexo*** *si, para todas $a \in \partial X$ y $b \in X$, existe ℓ tal que $\langle b-a, \ell\rangle \leq 0$; donde ∂X es la* frontera *de X y $\langle \cdot, \cdot \rangle$ denota el producto punto.*



Conjunto convexo Conjunto no convexo

Proposición 1.1

Sean A y B dos subconjuntos convexos de $\mathbb{R}^n$, entonces:

(I) $A \cap B$ es convexo.
(II) $A + B = \{a + b : a \in A,\ b \in B\}$ es convexo.
(III) Para todo $k \in \mathbb{R}$, $kA = \{ka : a \in A\}$ es convexo.

Definición 1.2 (Función convexa)**.** *Sea $X \subseteq R^n$ un conjunto convexo, $f : X \to \mathbb{R}$ es una* ***función convexa*** *si, para toda $\mathbf{x}_1 \neq \mathbf{x}_2 \in X$ y toda $\lambda \in (0,1)$, se tiene:*

$$f(\lambda \mathbf{x}_1 + (1-\lambda)\mathbf{x}_2) \leq \lambda f(\mathbf{x}_1) + (1-\lambda) f(\mathbf{x}_2).$$

Si la desigualdad es estricta, se dice que la función es ***estrictamente convexa****.*

Definición 1.3 (Función cóncava)**.** *Sea $X \subseteq R^n$ un conjunto convexo, $f : X \to \mathbb{R}$ es una* ***función cóncava*** *si, para toda $\mathbf{x}_1 \neq \mathbf{x}_2 \in X$ y toda $\lambda \in (0,1)$, se tiene:*

$$f(\lambda \mathbf{x}_1 + (1-\lambda)\mathbf{x}_2) \geq \lambda f(\mathbf{x}_1) + (1-\lambda) f(\mathbf{x}_2).$$

Si la desigualdad es estricta, se dice que la función es ***estrictamente cóncava****.*

Proposición 1.2

Sean $X \subseteq \mathbb{R}^n$ un conjunto convexo, $f : X \to \mathbb{R}$ y $g : X \to \mathbb{R}$ dos funciones cóncavas, y $\alpha \in \mathbb{R}$, entonces:

(I) f es cóncava si $\alpha > 0$.
(II) f es convexa si $\alpha < 0$.
(III) $f + g$ es cóncava.

Proposición 1.3

Sean $X \subseteq \mathbb{R}^n$ un conjunto convexo, $g : X \to \mathbb{R}$ una función cóncava, y $h : Y \to \mathbb{R}$ una función cóncava y creciente tal que $g(X) \subseteq Y \subseteq \mathbb{R}$; entonces, $h \circ g$ es cóncava.

Definición 1.4 (Vector gradiente)**.** *Sea $f \in \mathcal{C}^1(X)$, el* ***vector gradiente*** *de f está dado por:*

$$\nabla f(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \dfrac{\partial f}{\partial x_n} \end{pmatrix}.$$

Definición 1.5 (Matriz hessiana)**.** *Sea $f \in \mathcal{C}^2(X)$, se define la* ***matriz hessiana*** *de f como $H_f(\mathbf{x})$, donde:*

$$H_f(\mathbf{x})_{i,j} = \frac{\partial^2 f(\mathbf{x})}{\partial x_i \partial x_j}.$$

Definición 1.6 (Serie de Taylor)**.**

$$T(\mathbf{x}) = \sum_{|\alpha| \geq 0} \frac{(\mathbf{x}-\mathbf{a})^\alpha}{\alpha!} \left(\partial^\alpha f\right)(\mathbf{a}).$$

Teorema 1.1: de Taylor

Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ tal que $f \in \mathcal{C}^k(\mathbf{a})$. Entonces, existe $h_\alpha : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ tal que:

$$f(\mathbf{x}) = \sum_{|\alpha| \leq k} \frac{\partial^\alpha f(\mathbf{a})}{\alpha!}(\mathbf{x}-\mathbf{a})^\alpha + \sum_{|\alpha| = k} h_\alpha(\mathbf{x})(\mathbf{x}-\mathbf{a})^\alpha,$$

y

$$\lim_{\mathbf{x} \to \mathbf{a}} h_\alpha(\mathbf{x}) = 0.$$

Definición 1.7 (Matriz simétrica)**.** *Decimos que una matriz $A \in \mathcal{M}_{n\times n}$ es* ***simétrica*** *si y solo si:*

$$A = A^T.$$

Definición 1.8 (Matriz diagonalizable)**.** *Decimos que una matriz $A \in \mathcal{M}_{n\times n}$ es* ***diagonalizable*** *si y solo si existe una matriz $P \in \mathcal{M}_{n\times n}$ invertible tal que $P^{-1}AP$ es diagonal.*

Definición 1.9 (Matriz ortogonalmente diagonalizable)**.** *Decimos que una matriz $A \in \mathcal{M}_{n\times n}$ es* ***ortogonalmente diagonalizable*** *si y solo si existe una matriz $T \in \mathcal{M}_{n\times n}$ invertible tal que $T^{-1}AT$ es diagonal y $T^{-1} = T^T$.*

Teorema 1.2

Si $A \in \mathcal{M}_{n\times n}$ es simétrica, sus valores propios son reales.

Teorema 1.3

Una matriz simétrica A de tamaño $n \times n$ puede determinar la forma cuadrática q_A de n variables como sigue:

$$q_A(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} x_i x_j = \mathbf{x}^T A \mathbf{x}.$$

Corolario 1.1: Clasificación de formas cuadráticas

La matriz asociada a la forma cuadrática q_A es:

(I) definida positiva si $q_A(\mathbf{x}) > 0,\ \forall \mathbf{x} \neq 0$.
(II) definida negativa si $q_A(\mathbf{x}) < 0,\ \forall \mathbf{x} \neq 0$.
(III) semidefinida positiva si $q_A(\mathbf{x}) \geq 0,\ \forall \mathbf{x} \neq 0$.
(IV) semidefinida negativa si $q_A(\mathbf{x}) \leq 0,\ \forall \mathbf{x} \neq 0$.
(V) indefinida si $q_A(\mathbf{x})$ toma tanto valores positivos como negativos.

Definición 1.10 (Menores principales)**.** *Sea A una matriz simétrica, los* ***menores principales*** *de esta matriz son los determinantes de todas las submatrices superiores izquierdas, es decir:*

$$|A_1| = |(a_{11})|,$$
$$|A_2| = \left|\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}\right|,$$
$$|A_3| = \left|\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}\right|, \ \cdots$$

Teorema 1.4: Criterio de menores principales

Sea A una matriz simétrica asociada a la forma cuadrática $q_A(\mathbf{x})$, entonces:

(I) q_A es definida positiva si y solo si los menores principales de A son todos positivos.

(II) q_A es definida negativa si y solo si los menores principales de A alternan signos de la forma:

$$|A_1| < 0, |A_2| > 0, |A_3| < 0, \ldots.$$

(III) q_A es indefinida si $|A| \neq 0$, pero no se cumplen (I) ni (II).

Teorema 1.5: Criterio de valores propios

Sea A uns matriz simétrica asociada a la forma cuadrática $q_A(\mathbf{x})$, entonces:

(I) q_A es definida positiva si y solo si todos los valores propios de A son positivos.

(II) q_A es definida negativa si y solo si todos los valores propios de A son negativos.

(III) q_A es semidefinida positiva si y solo si todos los valores propios de A son no negativos.

(IV) q_A es semidefinida negativa si y solo si todos los valores propios de A son no positivos.

(V) q_A es indefinida si y solo si la matriz A tiene valores propios positivos y negativos.

Teorema 1.6: Criterio del primer orden

Sea $X \subseteq \mathbb{R}^n$ un conjunto convexo y $f : X \to \mathbb{R}$ tal que $f \in \mathcal{C}^1(X)$, entonces:

(I) f es convexa si y solo si, $\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in X$, se tiene:

$$f(\mathbf{y}) \geq f(\mathbf{x}) + \nabla f(\mathbf{x})(\mathbf{y} - \mathbf{x}).$$

(II) f es cóncava si y solo si, $\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in X$, se tiene:

$$f(\mathbf{y}) \leq f(\mathbf{x}) + \nabla f(\mathbf{x})(\mathbf{y} - \mathbf{x}).$$

Teorema 1.7: Criterio de segundo orden

Sea $X \subseteq \mathbb{R}^n$ un conjunto convexo y $f : X \to \mathbb{R}$ tal que $f \in \mathcal{C}^2(X)$, entonces:

(I) f es convexa en X si y solo si la forma cuadrática asociada a la matriz hessiana es semidefinida positiva.

(II) f es estrictamente convexa en X si y solo si la forma cuadrática asociada a la matriz hessiana es definida positiva.

(III) f es cóncava en X si y solo si la forma cuadrática asociada a la matriz hessiana es semidefinida negativa.

(IV) f es estrictamente cóncava en X si y solo si la forma cuadrática asociada a la matriz hessiana es definida negativa.

Definición 1.11. *Sean $X \subseteq \mathbb{R}^n$ un conjunto convexo y $f : X \to \mathbb{R}$, definimos:*

- *la **gráfica** de f como*

$$G_f = \{(\mathbf{x}, r) \in X \times \mathbb{R} : f(\mathbf{x}) = r\}.$$

- *el **epígrafo** de f como*

$$E_f = \{(\mathbf{x}, r) \in X \times \mathbb{R} : f(\mathbf{x}) \leq r\}.$$

- *el **hipógrafo** de f como*

$$H_f = \{(\mathbf{x}, r) \in X \times \mathbb{R} : f(\mathbf{x}) \geq r\}.$$

Teorema 1.8

Sea $X \subseteq \mathbb{R}^n$ un conjunto convexo,

(I) una función $f : X \to \mathbb{R}$ es convexa si y solo si E_f es un conjunto convexo de $\mathbb{R}^{n+1}$.

(II) una función $f : X \to \mathbb{R}$ es cóncava si y solo si H_f es un conjunto convexo de $\mathbb{R}^{n+1}$.

Definición 1.12. *Sean $X \subseteq \mathbb{R}^n$ un conjunto convexo y $f : X \to \mathbb{R}$, definimos:*

- *el **contorno** de f en k como*

$$C_f(k) = \{\mathbf{x} \in X : f(\mathbf{x}) = k\}.$$

- *el **contorno superior** de f en k como*

$$CS_f(k) = \{\mathbf{x} \in X : f(\mathbf{x}) \geq k\}.$$

- *el **contorno inferior** de f en k como*

$$CI_f(k) = \{\mathbf{x} \in X : f(\mathbf{x}) \leq k\}.$$

Teorema 1.9

(I) Si $f : X \to \mathbb{R}$ es cóncava en A, $CS_f(k)$ es convexo para toda k en la imagen de f.

(II) Si $f : X \to \mathbb{R}$ es convexa en A, $CI_f(k)$ es convexo para toda k en la imagen de f.

Teorema 1.10

Sean $X \subseteq \mathbb{R}^n$ un conjunto convexo y $f : X \to \mathbb{R}$, entonces:

(I) f es cuasicóncava en A si $CI_f(k)$ es convexo para toda k en la imagen de f.

(II) f es cuasiconvexa en A si $CS_f(k)$ es convexo para toda k en la imagen de f.

Teorema 1.11

Sean $X \subseteq \mathbb{R}^n$ un conjunto convexo y $f : X \to \mathbb{R}$, entonces:

(I) f es cuasicóncava si f es cóncava.

(II) f es cuasiconvexa si f es convexa.

Teorema 1.12

Cualquier transformación monótona creciente de una función cuasiconvexa es cuasiconvexa. Asimismo, cualesquier transformación monótona creciente de una función cuasicóncava es cuasicóncava.

2. Cálculo de variaciones

3. Teoría de control óptimo

4. Elementos de programación dinámica