Optimización

Formulario · Primavera 2021

Carlos Lezama MAT - 22211

ITAM

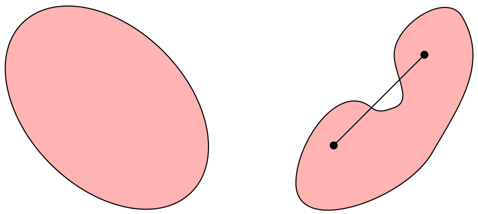
1. Optimización estática

1.1. Análisis convexo

Definición 1.1 (Conjunto convexo)**.** *Sea $X \subseteq \mathbb{R}^n$, decimos que X es* ***convexo*** *si, para cualesquiera $x; \in X$ y para toda $\lambda \in (0,1)$, se cumple:*

$$\lambda x + (1-\lambda)y \in X.$$

Equivalentemente, decimos que X es ***convexo*** *si, para todas $a \in \partial X$ y $b \in X$, existe ℓ tal que $\langle b-a, \ell \rangle \leq 0$; donde ∂X es la* frontera *de X y $\langle \cdot, \cdot \rangle$ denota el producto punto.*



Conjunto convexo Conjunto no convexo

Proposición 1.1

Sean A y B dos subconjuntos convexos de $\mathbb{R}^n$, entonces:

(I) $A \cap B$ es convexo.
(II) $A + B = \{a + b : a \in A,\ b \in B\}$ es convexo.
(III) Para todo $k \in \mathbb{R}$, $kA = \{ka : a \in A\}$ es convexo.

Definición 1.2 (Función convexa)**.** *Sea $X \subseteq R^n$ un conjunto convexo, $f : X \to \mathbb{R}$ es una* ***función convexa*** *si, para toda $x_1 \neq x_2 \in X$ y toda $\lambda \in (0,1)$, se tiene:*

$$f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \leq \lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2).$$

Si la desigualdad es estricta, se dice que la función es ***estrictamente convexa****.*

Definición 1.3 (Función cóncava)**.** *Sea $X \subseteq R^n$ un conjunto convexo, $f : X \to \mathbb{R}$ es una* ***función cóncava*** *si, para toda $x_1 \neq x_2 \in X$ y toda $\lambda \in (0,1)$, se tiene:*

$$f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \geq \lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2).$$

Si la desigualdad es estricta, se dice que la función es ***estrictamente cóncava****.*

Definición 1.4. *Sea $X \subseteq \mathbb{R}^n$ y $f : X \to \mathbb{R}$ una función, definimos:*

· *la* ***gráfica*** *de f como $G_f = \{(x,r) \in X \times \mathbb{R} : f(x) = r\}$.*
· *el* ***epígrafo*** *de f como $E_f = \{(x,r) \in X \times \mathbb{R} : f(x) \leq r\}$.*
· *el* ***hipógrafo*** *de f como $H_f = \{(x,r) \in X \times \mathbb{R} : f(x) \geq r\}$.*

Teorema 1.1

Sea $X \subseteq \mathbb{R}^n$ un conjunto convexo,

(I) una función $f : X \to \mathbb{R}$ es convexa si y solo si E_f es un conjunto convexo de $\mathbb{R}^{n+1}$.
(II) una función $f : X \to \mathbb{R}$ es cóncava si y solo si H_f es un conjunto convexo de $\mathbb{R}^{n+1}$.

Proposición 1.2

Sean $X \subseteq \mathbb{R}^n$ un conjunto convexo, $f : X \to \mathbb{R}$ y $g : X \to \mathbb{R}$ dos funciones cóncavas, y $\alpha \in \mathbb{R}$, entonces:

(I) f es cóncava si $\alpha > 0$.
(II) f es convexa si $\alpha < 0$.
(III) $f + g$ es cóncava.

Proposición 1.3

Sean $X \subseteq \mathbb{R}^n$ un conjunto convexo, $g : X \to \mathbb{R}$ una función cóncava, y $h : Y \to \mathbb{R}$ una función cóncava y creciente tal que $g(X) \subseteq Y \subseteq \mathbb{R}$; entonces, $h \circ g$ es cóncava.

2. Cálculo de variaciones

3. Teoría de control óptimo

4. Elementos de programación dinámica