

Economía 5

Formulario · Primavera 2021

Carlos Lezama

ECO · 22105
ITAM

Parte I

Producción y consumo

1. El modelo estático de producción y consumo

1.1. El problema de la firma

$$\max_{\{l\}} \quad pf_j(l) - wl$$

$f_j(\cdot)$	Función de producción
l	Nivel de empleo
p	Precio del bien final
w	Precio del trabajo (salario)

Definición 1.1 (Función de producción). La **función de producción** f_j describe la relación entre la producción de bienes y la cantidad de trabajo requerido en la j -ésima empresa competitiva, y se denota:

$y_j = f_j(l)$ tal que $j \in J$.

Propiedades de la función de producción

- (i) Creciente, i.e. el trabajo es siempre productivo.
- (ii) Cóncava, i.e. está sujeta a la ley de rendimientos marginales decrecientes.

Definición 1.2 (Ganancias óptimas). Definimos las **ganancias óptimas** de la firma j como sigue:

$\pi_j(w, p) = pf_j(l_j(w, p)) - wl_j(w, p)$.

Definición 1.3 (Demanda laboral). La solución l_j de la condición de optimalidad del problema de la firma se conoce como **demanda laboral** de la firma j .

Definición 1.4 (Oferta de bienes). A la función $y_j(w, p)$ se le conoce como **oferta de bienes** de la empresa j .

Proposición 1.1

Las funciones de **demanda laboral** y **oferta de bienes** son homogéneas de grado 0.

Proposición 1.2

La función de **ganancias óptimas** es homogénea de grado 1.

Definición 1.5 (Productividad total de los factores). Definimos la **productividad total de los factores** (A) como la parte del crecimiento de la producción que no se explica por el crecimiento de los insumos medidos tradicionalmente.

1.2. El problema de los consumidores

$$\max_{\{h, c\}} \quad u_i(h, c)$$

sueto a $\frac{h + n = H_i}{\text{Restricción de tiempo}},$

$$pc = \underbrace{\frac{\text{Ingreso laboral}}{w} \cdot n}_{\text{Restricción presupuestaria}} + \underbrace{\sum_{j \in J} \theta_{ij} \pi_j(w, p)}_{\text{Ingreso no laboral}}.$$

O bien,

$$\max_{\{h, c\}} \quad u_i(h, c)$$

sueto a $\underbrace{wh + pc}_{\text{Valor de mercado de la canasta de consumo}} = \underbrace{wH_i + \sum_{j \in J} \theta_{ij} \pi_j(w, p)}_{\text{Riqueza}}.$

θ_{ij}	Acciones de la firma j
c	Consumo del bien final
$u(\cdot)$	Función de utilidad
$\pi_j(\cdot)$	Ganancias de la firma j
h	Tiempo dedicado al ocio
n	Tiempo dedicado al trabajo
H_i	Unidades de tiempo disponibles

Definición 1.6 (Función de utilidad). Sea una función $u_i(h, c)$, esta representa la utilidad del i -ésimo consumidor por ocio y consumo si, para cualquier par de alternativas $(h_0, c_0), (h_1, c_1) \in \mathbb{R}^2$, se tiene $u_i(h_0, c_0) < u_i(h_1, c_1)$ si y solo si el consumidor en cuestión prefiere la canasta (h_1, c_1) sobre la canasta (h_0, c_0) .

Propiedades de la función de utilidad

- (i) Continuamente diferenciable.
- (ii) Creciente.
- (iii) Monótona.
- (iv) Cuasicóncava.

Definición 1.7 (Demanda de ocio). La **demanda de ocio** es una de las soluciones al problema de los consumidores y se denota:

$h^* = h_i(w, p)$.

Definición 1.8 (Demanda de consumo). La **demanda de consumo** es una de las soluciones al problema de los consumidores y se denota:

$c^* = c_i(w, p)$.

Definición 1.9 (Oferta laboral). Dadas nuestras unidades de tiempo disponibles, H_i , y nuestra demanda de consumo $h_i(w, p)$, definimos la **oferta laboral** como sigue:

$n_i(w, p) = H_i - h_i(w, p)$.

Proposición 1.3

Las **demandas de ocio** y **consumo** y la **oferta laboral** son funciones homogéneas de grado cero.

1.3. Equilibrio competitivo

Definición 1.10 (Equilibrio competitivo). Definimos el **equilibrio competitivo** como un vector de precios (w^*, p^*) y una asignación $\left(\left\{l_j^*, y_j^*\right\}_{j \in J},\left\{h_i^*, c_i^*\right\}_{i \in I}\right)$ tales que:

- (i) Todas las cantidades son óptimas a los precios (w^*, p^*) .

i.e. $l_j^* = l_j(w^*, p^*),$
 $y_j^* = y_j(w^*, p^*),$
 $h_i^* = h_i(w^*, p^*),$
 $c_i^* = c_i(w^*, p^*).$

- (ii) Las cantidades individuales vacían el mercado de bienes y el mercado laboral.

i.e. $\sum_{j \in J} y_i(w^*, p^*) = \sum_{i \in I} c_i(w^*, p^*),$ y
 $\sum_{j \in J} l_j(w^*, p^*) = \sum_{i \in I} [H_i - h_i(w^*, p^*)].$

1.4. Maximización del bienestar social o problema del planificador central

$$\max_{\{h, c, l\}} \quad u(h, c)$$

sueto a $h + l = H,$
 $c = f(l).$

O bien,

$\max_{\{l\}} \quad u(H - l, f(l)).$

Definición 1.11 (Función φ). Definimos la **función** φ como aquella que representa todas las combinaciones de ocio y consumo que satisfacen la condición de eficiencia.

$$\text{i.e. } c \stackrel{\text{def}}{=} \varphi(l).$$

Propiedades de la función φ

- (i) Decreciente.
- (ii) Convexa.

Definición 1.12 (Demanda de consumo agregada). Definimos la **demanda de consumo agregada** como sigue:

$$C(w) = \sum_{i \in I} c_i(w).$$

Definición 1.13 (Demanda laboral agregada). Definimos la **demanda laboral agregada** como sigue:

$$L(w) = \sum_{j \in J} l_j(w).$$

Definición 1.14 (Ganancias agregadas). Definimos las **ganancias agregadas** como sigue:

$$\Pi(w) = \sum_{j \in J} \pi_j(w).$$

Definición 1.15 (Oferta laboral agregada). Definimos la **oferta laboral agregada** como sigue:

$$N(w) = \sum_{i \in I} n_i(w).$$

Definición 1.16 (Producción agregada). Definimos la **producción agregada** como sigue:

$$Y(w) = \sum_{j \in J} y_j(w).$$

Nota: en caso de encontrarnos con agentes heterogéneos, recordemos que cada subgrupo de consumidores, o empresas, con ciertas características obtendrá demandas, u ofertas, agregadas representativas tales que la demanda, u oferta, agregada de todos los agentes será la suma de los agregados representativos.

2. Política fiscal en el modelo estático

Observación 2.1

El gobierno financia el gasto público y las transferencias gubernamentales con la recaudación de impuestos.

$$\text{i.e. } \underbrace{T = G + \Omega}_{\text{Restricción presupuestaria del gobierno}}.$$

2.1. Impuestos distorsivos

Proposición 2.1

Sean t_i y ω_i los impuestos y transferencias que el individuo i paga y recibe, respectivamente. Para satisfacer la restricción presupuestaria del gobierno:

$$\sum_{i \in I} \omega_i = \Omega = T = \sum_{i \in I} t_i.$$

Proposición 2.2

Cada individuo recibe una proporción fija $\varepsilon_i \geq 0$ de la recaudación.

$$\text{i.e. } \omega_i = \varepsilon_i \Omega = \varepsilon_i T.$$

2.1.1. Impuesto al ingreso

El monto de los impuestos que el individuo i paga es:

$$t_i = \tau_y \left(wn_i + \sum_{j \in J} \theta_{ij} \pi_j(w) \right).$$

Definición 2.1 (Impuesto proporcional). Un **impuesto proporcional** o **tasa impositiva única sobre la renta** es un sistema de impuestos en el que el tipo de gravamen siempre será el mismo, independientemente del nivel de renta.

Definición 2.2 (Impuesto progresivo). Un **impuesto progresivo** es un sistema de impuestos en el cual se establece que a mayor nivel de renta, mayor será el porcentaje de impuestos a pagar sobre la base imponible.

Proposición 2.3

Cuando la tasa impositiva es única, la recaudación total de la economía es:

$$T = \tau_y Y.$$

Observación 2.2

Dado que la incidencia legal de los impuestos recae en los hogares, el problema de las empresas no se modifica y los consumidores se enfrentan a una nueva restricción:

$$c = (1 - \tau_y) \left(wn_i + \sum_{j \in J} \theta_{ij} \pi_j(w) \right) + \varepsilon_i \Omega.$$

Y, el planificador central, a una nueva restricción:

$$c = (1 - \tau_y) f(l) + \Omega.$$

2.1.2. Impuesto al consumo

El monto de los impuestos que el individuo i paga es:

$$t_i = \tau_c c_i.$$

Proposición 2.4

La recaudación total de la economía es:

$$T = \tau_c \sum_{i \in I} c_i.$$

Observación 2.3

Dado que la incidencia legal de los impuestos recae en los hogares, el problema de las empresas no se modifica y los consumidores se enfrentan a una nueva restricción:

$$(1 + \tau_c) c_i = wn_i + \sum_{j \in J} \theta_{ij} \pi_j(w) + \varepsilon_i \Omega.$$

Y, el planificador central, a una nueva restricción:

$$(1 + \tau_c) c = f(l) + \Omega.$$

Proposición 2.5

Si $1 + \tau_c = \frac{1}{1 - \tau_y}$, $\tau_y < \tau_c$ y, por lo tanto, $T_y < T_c$.

Observación 2.4

En esta simplificación, dado que la recaudación se reintegra a los consumidores vía transferencias *lump sum*, esta no genera efecto riqueza alguno. El único efecto de los impuestos se da a través de la distorsión en el precio relativo de los bienes.

2.2. Gasto público

Observación 2.5

En este subtítulo supondremos que la restricción presupuestaria del gobierno está dada por:

$$G = T.$$

Es decir, $\Omega = 0$.

2.2.1. Contratación de empleo público

Proposición 2.6: Empleo público

Asumiendo que el gobierno no adquiere ningún tipo de bien o servicio mas que la contratación de L^G horas de empleo público, el gasto público está dado por:

$$G = T = wL^G = Y^G.$$

Observación 2.6

El problema de las empresas no se modifica y los consumidores se enfrentan a una nueva restricción presupuestaria:

$$c = wn + \pi(w) - T.$$

Proposición 2.7

El salario de equilibrio w^* debe satisfacer la ecuación:

$$n(w^*) = l(w^*) + L^G.$$

Observación 2.7

En el equilibrio, se debe cumplir:

$$c^* = y_e^*,$$

donde y_e denota la producción privada.

Esto es así porque, aunque el gobierno paga el salario de mercado por las horas trabajadas, se extraen los recursos necesarios de los propios hogares vía impuestos.

Observación 2.8

En este modelo:

$$Y = y_e^* + Y^G.$$

Observación 2.9

El valor social de lo que produce el gobierno no es w^*L^G , como lo reflejan las cuentas nacionales, sino cero, ya que la sociedad no valora estos servicios improductivos.

2.2.2. Compras del gobierno

Observación 2.10

En este modelo se cumple lo siguiente:

$$Y = y_e^*; \quad c^* + G = y_e^*.$$

Proposición 2.8

Dado un *gasto público exógeno* G , las condiciones de eficiencia y factibilidad conducen a un equilibrio explícitamente dado por:

$$c^* = \varphi(l^*) = f(l^*) - G.$$

Proposición 2.9

Dado un *gravamen al ingreso* a tasa τ tal que $T = \tau Y$, las condiciones de eficiencia y factibilidad conducen a un equilibrio explícitamente dado por:

$$c^* = (1 - \tau)\varphi(l^*) = f(l^*) - G.$$

Proposición 2.10

Dado un *gasto público proporcional al PIB* tal que $G = gY$, las condiciones de eficiencia y factibilidad conducen a un equilibrio explícitamente dado por:

$$c^* = \varphi(l^*) = (1 - g)f(l^*).$$

Proposición 2.11

Dados un *gravamen al ingreso* a tasa τ y un *gasto público proporcional al PIB* tales que $T = \tau Y$ y $G = gY$, respectivamente; las condiciones de eficiencia y factibilidad conducen a un equilibrio explícitamente dado por:

$$c^* = (1 - \tau)\varphi(l^*) = (1 - g)f(l^*).$$

Nótese que, por definición, $\tau = g$.

2.2.3. Gasto público en infraestructura

Observación 2.11

La identidad de cuentas nacionales es la misma que la condición de equilibrio en mercado del bien privado.

$$\text{i.e. } c + G = y.$$

Definición 2.3 (Productividad total de los factores). *Para modelar el impacto de la infraestructura pública sobre la economía, definimos la **productividad total de los factores** como una función creciente del gasto público tal que:*

$$y = A(g)f(l),$$

donde $g = G/Y$.

Parte II

Consumo en el tiempo

3. Modelo de intercambio intertemporal

3.1. El problema de los consumidores

Dados n períodos de consumo tales que $T = \{1, \dots, n\} \subset \mathbb{N}$ y $b, c \in \mathbb{R}^n$.

$$\begin{aligned} & \max_{\{c; b\}} \sum_{t \in T} \beta^{t-1} u(c_t) \\ \text{sueto a} \quad & c_t + b_t = y_t + (1 + r_{t-1})b_{t-1}, \quad \forall t \in T, \\ & b_n \geq 0. \end{aligned}$$

O bien, al eliminar el ahorro del último período como variable de decisión:

$$\begin{aligned} & \max_{\{c; b\}} \sum_{t \in T} \beta^{t-1} u(c_t) \\ \text{sueto a} \quad & c_t + b_t = y_t + (1 + r_{t-1})b_{t-1}, \quad \forall t \in T, \end{aligned}$$

donde $b_0 = b_n = 0$.
O bien, al utilizar bonos de descuento a precio q_t :

$$\begin{aligned} & \max_{\{c; b\}} \sum_{t \in T} \beta^{t-1} u(c_t) \\ \text{sueto a} \quad & c_t + q_t \tilde{b}_t = y_t + \tilde{b}_{t-1}, \quad \forall t \in T, \end{aligned}$$

donde $q_t = \frac{1}{1 + r_t}$ y $\tilde{b}_t = (1 + r_t)b_t$.
O bien, a partir de la definición de precios en valor presente:

$$\begin{aligned} & \max_{\{c; b\}} \sum_{t \in T} \beta^{t-1} u(c_t) \\ \text{sueto a} \quad & \sum_{t \in T} p_t c_t = \sum_{t \in T} p_t y_t, \end{aligned}$$

donde $p_1 = 1$ y $p_t = \frac{1}{(1 + r_1) \cdots (1 + r_{t-1})}$, $\forall t = 2, 3, \dots, n$.

b_t	Bonos en el período t
c_t	Consumo en el período t
β	Factor de descuento
$u(\cdot)$	Función de utilidad
y_t	Ingreso en el período t
q_t	Precio del bono en el período t
p_t	Precio de consumo en el período t
r_t	Tasa de interés en el período t
\tilde{b}_t	Unidades adquiridas del bono en el período t

Definición 3.1 (Ecuación de Euler). *Dado el problema de los consumidores en el modelo de intercambio intertemporal, la **ecuación de Euler** representa las condiciones de eficiencia y la definimos como sigue:*

$$u'(c_t^*) = \beta(1 + r_t)u'(c_{t+1}^*).$$

Definición 3.2 (Factor de descuento). *Considerando que los consumidores valoran más el consumo presente tal que se presenta cierto grado de impaciencia, definimos el **factor de descuento** β como sigue:*

$$\beta \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{1 + \rho},$$

donde ρ representa la tasa de descuento.

Definición 3.3 (Tasa de interés promedio). *La **tasa de interés promedio** entre el período 1 y período $t - 1$ se define como:*

$$1 + \bar{r}_{1,t-1} \stackrel{\text{def}}{=} \left(\prod_{i=1}^{t-1} (1 + r_i) \right)^{1/(t-1)}.$$

Definición 3.4 (Equilibrio competitivo). *Definimos el **equilibrio competitivo** como un vector de tasas de interés $(r_1^*, r_2^*, \dots, r_{n-1}^*)$ y una asignación de consumo $c_{i,t}^*$ con $i \in I$ y $t \in T$ tales que:*

- (i) Cada c_t^* es óptimo para todas las tasas de interés.
i.e. $c_t^* = c_t(r_1^*, r_2^*, \dots, r_{n-1}^*)$.
- (ii) Todos los mercados de bienes se vacían.

$$\text{i.e.} \quad \sum_{i \in I} c_{i,t} = \sum_{i \in I} y_{i,t}, \quad \forall t \in T.$$

Definición 3.5 (Tasa de crecimiento porcentual). *La **tasa de crecimiento porcentual** de una variable en el tiempo se define como:*

$$\hat{x}_{t+1} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{x_{t+1} - x_t}{x_t}.$$

Proposición 3.1

En el equilibrio del caso de una función de utilidad Cobb-Douglas, el valor presente a lo largo de toda la vida está dado exclusivamente por el valor de la dotación inicial multiplicado por la suma de los factores de descuento.

$$\text{i.e.} \quad \sum_{t \in T} p_t^* y_t = \sum_{t \in T} \frac{y_1}{(1 + \rho)^{t-1}}.$$

Proposición 3.2

En el caso de múltiples maduraciones, un bono $b_{t,m}$ adquirido en el período t con m períodos restantes para su vencimiento tiene un rendimiento promedio no mayor al promedio de los rendimientos de los bonos de un período.

$$\text{i.e.} \quad 1 + \bar{r}_{t,m} = \left(\prod_{i=0}^{m-1} (1 + r_{t+i}) \right)^{1/m}.$$

Observación 3.1: Suma geométrica

$$\sum_{k=0}^n ar^k = a \left(\frac{1 - r^{n+1}}{1 - r} \right), \quad r \neq 1.$$
$$\sum_{k=0}^{\infty} ar^k = \frac{a}{1 - r}, \quad |r| < 1.$$

4. Horizonte de planeación infinito

Observación 4.1: Esquema de Ponzi

El plan de consumo y financiamiento del *esquema de Ponzi* está dado por los siguientes vectores:

$$\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \\ \vdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 + 1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ \vdots \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \\ \vdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ -(1+r_1) \\ -(1+r_1)(1+r_2) \\ -(1+r_1)(1+r_2)(1+r_3) \\ \vdots \end{bmatrix}$$

Es decir, en el período inicial, el individuo contrata deuda que nunca paga.

Teorema 4.1: Restricción de no Ponzi

Con el fin de evitar que el flujo de consumo, en valor presente, exceda el valor presente de las dotaciones a lo largo de toda la vida; es decir:

$$\sum_{t=1}^{\infty} \frac{c_t}{(1+r_1) \cdots (1+r_{t-1})} \leq \sum_{t=1}^{\infty} \frac{y_t}{(1+r_1) \cdots (1+r_{t-1})},$$

imponemos la **restricción de no Ponzi**, descrita por:

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{b_T}{(1+r_1) \cdots (1+r_{T-1})} \geq 0, \quad \text{para alguna } T \in \mathbb{N} \text{ arbitraria.}$$

4.1. El problema de los consumidores

$$\begin{aligned} & \max_{\{c; b\}} \sum_{t=1}^{\infty} \beta^{t-1} u(c_t) \\ & \text{sujeto a } c_t + b_t = y_t + (1+r_{t-1})b_{t-1}, \quad \forall t \in \mathbb{N}, \\ & \quad \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{b_T}{(1+r_1) \cdots (1+r_{T-1})} \geq 0, \end{aligned}$$

donde $b_0 = 0$.

Alternativamente,

$$\begin{aligned} & \max_{\{c; b\}} \sum_{t=1}^{\infty} \beta^{t-1} u(c_t) \\ & \text{sujeto a } \sum_{t=1}^{\infty} p_t c_t \leq \sum_{t=1}^{\infty} p_t y_t, \end{aligned}$$

$$\text{donde } p_1 = 1 \text{ y } p_t = \frac{1}{(1+r_1) \cdots (1+r_{t-1})}, \quad \forall t \in \mathbb{N} \setminus \{1\}.$$

b_t	Bonos en el período t
c_t	Consumo en el período t
β	Factor de descuento
$u(\cdot)$	Función de utilidad
y_t	Ingreso en el período t
p_t	Precio de consumo en el período t
r_t	Tasa de interés en el período t

Proposición 4.1

Dada una función de utilidad con preferencias monótonas, en el óptimo se satisface:

$$\sum_{t=1}^{\infty} p_t c_t^* = \sum_{t=1}^{\infty} p_t y_t.$$

Definición 4.1 (Equilibrio competitivo). Definimos el **equilibrio competitivo** como una senda infinita de tasas de interés (r_1^*, r_2^*, \dots) tales que para toda $t \in \mathbb{N}$:

$$\sum_{i \in I} c_{i,t}^* = \sum_{i \in I} y_{i,t} \stackrel{\text{def}}{=} Y_t,$$

donde $c_{i,t}^*$ es función de todo el perfil de tasas de interés.

Observación 4.2

El individuo, al elegir sendas de consumo y de tenencias de activos óptimas, toma todas sus decisiones en $t = 1$. Es decir, a medida que el tiempo transcurre, el individuo sólo implementa el plan que diseñó con anterioridad.

4.2. Consistencia intertemporal

$$\begin{aligned} & \max_{\{c\}} \sum_{t=n}^{\infty} \beta^{t-n} u(c_t) \\ & \text{sujeto a } \sum_{t=n}^{\infty} \tilde{p}_t c_t = \sum_{t=n}^{\infty} \tilde{p}_t y_t + (1+r_{n-1})b_n^*, \end{aligned}$$

donde $p_t \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\tilde{p}_t}{1+r_{n-1}}$ para toda $t \geq n$.

Asimismo, disponemos de la igualdad de la restricción con el fin de garantizar la condición de transversalidad.

Observación 4.3

Se habla de consistencia intertemporal porque la solución c'_n coincide con el consumo óptimo c_n^* del problema original.

Nota: esta propiedad indica que el individuo no tiene incentivos a alterar su decisión óptima de consumo a lo largo de su vida. Dada la característica determinista del modelo, resulta muy intuitivo que, si la situación económica no cambia, el individuo se adhiera a su plan inicial ya que su utilidad cumple con independencia intertemporal, lo cual implica que las decisiones futuras no están condicionadas por las decisiones pasadas y, además, posee un completo conocimiento sobre la situación de la economía en el futuro (Alejandro Hernández, 2020).

Parte V

Inversión y capital