Economía 3

Formulario · Otoño 2020

Carlos Lezama ECO - 21103

ITAM

Método Kuhn–Tucker

Consideramos un problema de **maximización** o **minimización** de una función $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^q \to \mathbb{R}$ que depende de n variables de decisión y q parámetros, y está sujeta a:

- k restricciones de igualdad $h_i : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^q \to \mathbb{R}$, y
- m restricciones de desigualdad $g_j : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^q \to \mathbb{R}$

Maximización

$$\begin{aligned} \max_{\{x_1,\dots,x_n\}} \quad & f(x_1,\dots,x_n;p_1,\dots,p_q) \\ \text{sujeto a} \quad & h_i(x_1,\dots,x_n;p_1,\dots,p_q) = 0, \\ & \qquad \forall i = 1,\dots,k; \\ & g_j(x_1,\dots,x_n;p_1,\dots,p_q) \geq 0, \\ & \qquad \forall j = 1,\dots,m. \end{aligned}$$

Lagrangeano del problema:

$$\mathcal{L}(x_1,\dots,x_n;p_1,\dots,p_q;\lambda_1,\dots,\lambda_k;\mu_1,\dots,\mu_m) =$$
$$f(x_1,\dots,p_q) + \sum_{i=1}^{k} \lambda_i h_i(x_1,\dots,p_q) + \sum_{j=1}^{m} \mu_j g_j(x_1,\dots,p_q)$$

Minimización

$$\begin{aligned} \min_{\{x_1,\dots,x_n\}} \quad & f(x_1,\dots,x_n;p_1,\dots,p_q) \\ \text{sujeto a} \quad & h_i(x_1,\dots,x_n;p_1,\dots,p_q) = 0, \\ & \qquad \forall i = 1,\dots,k, \\ & g_j(x_1,\dots,x_n;p_1,\dots,p_q) \geq 0, \\ & \qquad \forall j = 1,\dots,m. \end{aligned}$$

Lagrangeano del problema:

$$\mathcal{L}(x_1,\dots,x_n;p_1,\dots,p_q;\lambda_1,\dots,\lambda_k;\mu_1,\dots,\mu_m) =$$
$$f(x_1,\dots,p_q) - \sum_{i=1}^{k} \lambda_i h_i(x_1,\dots,p_q) - \sum_{j=1}^{m} \mu_j g_j(x_1,\dots,p_q)$$

Condiciones de primer orden

- $\dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_l}(x_1^*,\dots,x_n^*;p_1,\dots,p_q;\lambda_1^*,\dots,\mu_m^*) = 0.$
- $\dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda_i}(x_1^*,\dots,x_n^*;p_1,\dots,p_q;\lambda_1^*,\dots,\mu_m^*) = 0.$

Condiciones de Holgura

- Maximización:
  $\dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mu_j}(x_1^*,\dots,x_n^*;p_1,\dots,p_q;\lambda_1^*,\dots,\mu_m^*) \geq 0;$
  $\mu_j^* \geq 0;$
  $\mu_j^* h_j(x_1^*,\dots,x_n^*;p_1,\dots,p_q;\lambda_1^*,\dots,\mu_m^*) = 0.$
- Minimización:
  $\dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mu_j}(x_1^*,\dots,x_n^*;p_1,\dots,p_q;\lambda_1^*,\dots,\mu_m^*) \leq 0;$
  $\mu_j^* \geq 0;$
  $\mu_j^* h_j(x_1^*,\dots,x_n^*;p_1,\dots,p_q;\lambda_1^*,\dots,\mu_m^*) = 0.$

> **Teorema 0.1: Teorema de la Envolvente**
>
> Sean V y $\mathcal{L}$ continuamente diferenciables y (x^*,λ^*,μ^*) la solución de algún problema de optimización con parámetros $(p_1,\dots,p_q)$, entonces:
>
> $$\frac{\partial V}{\partial p_i}(p_1,\dots,p_q) = \frac{\partial \mathcal{L}^*}{\partial p_i}.$$

1. Función de utilidad

Definición 1.1 (Completitud)**.** *Sean cualesquiera $a, b \in A$, decimos que el consumidor tiene preferencias **completas** si es capaz de decir si prefiere a sobre b, b sobre a, o es indiferente.*

Definición 1.2 (Transitividad)**.** *Sea $\mathcal{R}$ una relación homogénea sobre el conjunto X, decimos que el consumidor tiene preferencias **transitivas** si para cualesquiera $a, b, c \in X$ tales que $a\mathcal{R}b$ y $b\mathcal{R}c$, entonces $a\mathcal{R}c$.*

Definición 1.3 (Racionalidad)**.** *Decimos que las preferencias del consumidor son **racionales** si son* completas *y* transitivas.

Definición 1.4 (Canasta)**.** *Una **canasta** es un vector $(a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n_+$ que representa el consumo de los bienes $x_1, \ldots, x_n$.*

Definición 1.5 (Función de utilidad)**.** *Sea una función $u : \mathbb{R}^n_+ \to \mathbb{R}$, esta representa la utilidad de un consumidor si, para para cualquier par de alternativas $(x_1, \ldots, x_n), (x'_1, \ldots, x'_n) \in \mathbb{R}^n_+$, se tiene $u(x_1, \ldots, x_n) < u(x'_1, \ldots, x'_n)$ si y solo si el consumidor prefiere la canasta $(x'_1, \ldots, x'_n)$ sobre la canasta $(x_1, \ldots, x_n)$.*

Definición 1.6 (Curvas de indiferencia)**.** *Dada una función de utilidad $u : H \to \mathbb{R}$ y $k \in \mathbb{R}$, el conjunto de nivel k se define como:*

$$C_k = \{x \in H \mid u(x) = k\}.$$

*Si $H = \mathbb{R}^2$, a dicho conjunto de nivel se le conoce, en economía, como **curvas de indiferencia**.*

Definición 1.7 (Utilidad marginal)**.** *La **utilidad marginal** de un bien mide el cambio en la utilidad del consumidor ante un cambio marginal en dicho bien.*

Teorema 1.1: Diferencial total

Dada una función de utilidad $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, el diferencial de u evaluado en el punto (x_0, y_0) es:

$$\Delta u(x_0, y_0) = \Delta x \frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) + \Delta y \frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0),$$

donde $\Delta x = x_1 - x_0$ y $\Delta y = y_1 - y_0$.

Definición 1.8 (Tasa marginal de sustitución)**.** *La **tasa marginal de sustitución** $\mathrm{TMS}(x, y)$ mide el número de unidades del bien Y que el consumidor está dispuesto a sacrificar con tal de obtener una unidad adicional del bien X y mantener su utilidad constante y se definie como:*

$$\mathrm{TMS}(x, y) = \frac{\mathrm{umg}_x(x, y)}{\mathrm{umg}_y(x, y)}.$$

Definición 1.9 (Transformación monótona)**.** *Una función w es una **transformación mónotona** de u si y solo si existe una función $g(\cdot)$* estrictamente creciente *tal que:*

$$w(X) = g(u(X)).$$

1.1. Propiedades de la función de utilidad

Monotonía

Definición 1.10 (Monotonía débil)**.** *Una función de utilidad $u : \mathbb{R}^n_+ \to \mathbb{R}$ es **débilmente monótona** si para cualesquiera $X \neq Y \in \mathbb{R}^n_+$, tales que $x_i < y_i$, $\forall i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, se tiene $u(X) < u(Y)$.*

Definición 1.11 (Monotonía estricta)**.** *Una función de utilidad $u : \mathbb{R}^n_+ \to \mathbb{R}$ es **estrictamente monótona** si para cualesquiera $X \neq Y \in \mathbb{R}^n_+$, tales que $x_i \leq y_i$, $\forall i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, se tiene $u(X) < u(Y)$.*

Cuasiconcavidad

Definición 1.12 (Cuasiconcavidad débil)**.** *Una función de utilidad $u : \mathbb{R}^n_+ \to \mathbb{R}$ es **débilmente cuasicóncava** si para cualesquiera $X \neq Y \in \mathbb{R}^n_+$, tales que $u(X) = u(Y)$, se tiene:*

$$u(\alpha X + (1 - \alpha)Y) \geq u(X),$$

para toda $\alpha \in (0, 1)$.

Definición 1.13 (Cuasiconcavidad estricta)**.** *Una función de utilidad $u : \mathbb{R}^n_+ \to \mathbb{R}$ es **estrictamente cuasicóncava** si para cualesquiera $X \neq Y \in \mathbb{R}^n_+$, tales que $u(X) = u(Y)$, se tiene:*

$$u(\alpha X + (1 - \alpha)Y) > u(X),$$

para toda $\alpha \in (0, 1)$.

Homoteticidad

Definición 1.14 (Homoteticidad)**.** *Una función de utilidad $u : \mathbb{R}^n_+ \to \mathbb{R}$ es **homotética** si para cualesquiera $X, Y \in \mathbb{R}^n_+$, tales que $u(X) < u(Y)$, se tiene:*

$$u(\lambda X) < u(\lambda Y),$$

para toda $\lambda > 0$.

Teorema 1.2

Dada una función de utilidad diferenciable con preferencias monótonas y homotéticas, se cumple:

$$\mathrm{TMS}(\lambda x_i, \lambda x_j) = \mathrm{TMS}(x_i, x_j),$$

para toda $x \in \mathbb{R}^n_+$, $i \neq j$ y $\lambda > 0$.

2. Demanda marshaliana

$$\begin{aligned} \max_{\{x_1,\ldots,x_n\}} \quad & u(x_1,\ldots,x_n) \\ \text{sujeto a} \quad & \sum_{i=1}^{n} p_i x_i \leq I, \\ & 0 \leq x_1, \\ & \vdots \\ & 0 \leq x_n. \end{aligned}$$

Soluciones del modelo

Dada una función de utilidad $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ y al suponer que, en el óptimo, $p_x x^* + p_y y^* = I$, entonces:

- Si $x^*, y^* > 0$, en el óptimo: $\text{TMS}(x^*, y^*) = \dfrac{p_x}{p_y}$.
- Si $x^* = 0$, en el óptimo: $\text{TMS}\left(0, \dfrac{I}{p_y}\right) \leq \dfrac{p_x}{p_y}$.
- Si $y^* = 0$, en el óptimo: $\text{TMS}\left(\dfrac{I}{p_x}, 0\right) \geq \dfrac{p_x}{p_y}$.

Definición 2.1 (Demandas marshalianas)**.** *A la solución óptima del problema marshaliano (X^*) se les conoce como* ***demandas marshalianas*** *y usualmente se denotan:*

$$x_i^* = X_i^M(P, I).$$

Definición 2.2 (Función de utilidad indirecta)**.** *La* ***función de utilidad indirecta****, denotada $V(P, I)$, es la función valor del problema marshaliano:*

$$V(P, I) = u(X_1^M(P, I), \ldots, X_n^M(P, I)).$$

Teorema 2.1: Ley de Walrás

Sea $u : \mathbb{R}_+^n \to \mathbb{R}$ una función de utilidad monótona, entonces, en la solución óptima (X^*), se cumple:

$$\sum_{i=1}^{p} p_i x_i^* = I.$$

Teorema 2.2: Condiciones de Inada

Sea $u : \mathbb{R}_+^2 \to \mathbb{R}$ una función de utilidad monótona y diferenciable.

(I) $\lim_{x \to 0} \text{TMS}(x, y) = \infty \implies x^* > 0$,

(II) $\lim_{y \to 0} \text{TMS}(x, y) = 0 \implies y^* > 0$.

Teorema 2.3: Teorema de unicidad

Sea $u : \mathbb{R}_+^2 \to \mathbb{R}$ una función estrictamente cuasicóncava, entonces la solución al problema marshaliano es única.

Lema 2.1: Identidades de Roy

Sea $V(P, I)$ diferenciable, entonces:

$$X_i^M = -\frac{\dfrac{\partial V}{\partial p_i}}{\dfrac{\partial V}{\partial I}}, \quad \forall i = 1, \ldots, n.$$

2.1. Propiedades de la función de utilidad indirecta

(I) Homogénea de grado cero en precios e ingreso, i.e. $V(\lambda P, \lambda I) = V(P, I)$.

(II) No-creciente ante aumentos en precios, i.e. $\dfrac{\partial V}{\partial p_i}(P, I) \leq 0$.

(III) No-decreciente ante aumentos en ingreso, i.e. $\dfrac{\partial V}{\partial I}(P, I) \geq 0$.

2.2. Propiedades de las demandas marshalianas

(I) Homogéneas de grado cero en precios e ingreso, i.e. $X^M(\lambda P, \lambda I) = X^M(P, I)$.

(II) Se cumplen las **identidades de Roy**.

2.3. Estática comparativa

Definición 2.3 (Elasticidad)**.** *Dado un parámetro $P \in \{p_1, \ldots, p_n, I\}$, la* ***elasticidad*** *del bien X respecto al parámetro P se define como:*

$$\mathcal{E}_{X,P}(p_1, \ldots, p_n, I) = \frac{\partial X^M}{\partial P} \cdot \frac{P}{X^M}.$$

Elasticidad precio propio

Se dice que el bien X es:

(I) **ordinario** si $\mathcal{E}_{X_i,p_i} < 0$.

(II) **inelástico** si $\mathcal{E}_{X_i,p_i} = 0$.

(III) **de Giffen** si $\mathcal{E}_{X_i,p_i} > 0$.

Elasticidad precio cruzado

Se dice que el bien X_i es:

(I) **complemento** de X_j si $\mathcal{E}_{X_i,p_j} < 0$.

(II) **independiente** de X_j si $\mathcal{E}_{X_i,p_j} = 0$.

(III) **sustituto** de X_j si $\mathcal{E}_{X_i,p_j} > 0$.

Elasticidad ingreso

Se dice que el bien X es:

(I) **inferior** si $\mathcal{E}_{X,I} < 0$.

(II) **neutro** si $\mathcal{E}_{X,I} = 0$.

(III) **normal** si $\mathcal{E}_{X,I} > 0$.

2.4. Agregaciones del problema marshaliano

Definición 2.4 (Gasto del consumidor)**.** *Sea $u : \mathbb{R}_+^n \to \mathbb{R}$ una función monótona, el* ***gasto*** *de un consumidor en el bien X se define como:*

$$S_i = \frac{p_i X_i^M}{I}.$$

Teorema 2.4: Agregación de Engel

Sea $u : \mathbb{R}_+^n \to \mathbb{R}$ una función de utilidad monótona, entonces:

$$\sum_{i=1}^{n} S_i \mathcal{E}_{x_i,I} = 1.$$

Teorema 2.5: Agregación de Cournot

Sea $u : \mathbb{R}_+^n \to \mathbb{R}$ una función de utilidad monótona, entonces:

$$\sum_{i=1}^{n} S_i \mathcal{E}_{x_i,p_1} = -S_1.$$

Teorema 2.6: Agregación de Euler

Sea $u : \mathbb{R}_+^n \to \mathbb{R}$ una función de utilidad, se cumple:

$$\mathcal{E}_{x_1,I} + \sum_{i=1}^{n} \mathcal{E}_{x_1,p_i} = 0.$$

3. Demanda compensada

$$\min_{\{x_1,\ldots,x_n\}} \sum_{i=1}^{n} p_i x_i$$
$$\begin{aligned} \text{sujeto a} \quad & \bar{u} \leq u(x_1,\ldots,x_n), \\ & 0 \leq x_1, \\ & \vdots \\ & 0 \leq x_n. \end{aligned}$$

Definición 3.1 (Curvas de isogasto)**.** *Una* ***curva de isogasto*** *nivel k se define como aquellas canastas que, con precios dados, representan el mismo gasto.*

$$\mathrm{IG}_k = \{(x_1,\ldots,x_n) \mid p_1x_1 + \cdots + p_nx_n = k\}.$$

Soluciones del modelo

Dada una función de utilidad $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ y al suponer que, en el óptimo, $u(x,y) = \bar{u}$, entonces:

- Si $x^*, y^* > 0$, en el óptimo: $\mathrm{TMS}(x^*,y^*) = \dfrac{p_x}{p_y}$.
- Si $x^* = 0$, en el óptimo: $\mathrm{TMS}\,(0,y^*) \leq \dfrac{p_x}{p_y}$.
- Si $y^* = 0$, en el óptimo: $\mathrm{TMS}\,(x^*,0) \geq \dfrac{p_x}{p_y}$.

Definición 3.2 (Demandas compensadas)**.** *A la solución óptima del problema compensado (X^*) se les conoce como* ***demandas compensadas*** *o* ***demandas hicksianas*** *y usualmente se denotan:*
$$x_i^* = X_i^C(P,\bar{u}).$$

Definición 3.3 (Función de gasto mínimo)**.** *La* ***función de gasto mínimo****, denotada $E(P,\bar{u})$, es la función valor del problema compensado:*

$$E(P,\bar{u}) = \sum_{i=1}^{n} p_i X_i^C.$$

Teorema 3.1: Ley de la demanda compensada

Cualquier demanda compensada es no-creciente en su propio precio y no-decreciente en el precio cruzado.

$$\text{i.e.} \quad \frac{\partial X_i^C}{\partial p_i} \leq 0; \ \frac{\partial X_i^C}{\partial p_j} \geq 0, \quad \forall i \neq j.$$

Lema 3.1: Lema de Shephard

$$X_i^C = \frac{\partial E}{\partial p_i}, \quad \forall i = 1,\ldots,n.$$

3.1. Propiedades de la función de gasto mínimo

(I) Homogénea de grado uno en precios, i.e. $E(\lambda P,\bar{u}) = \lambda E(P,\bar{u})$.

(II) No-decreciente ante aumentos en utilidad, i.e. $\dfrac{\partial E}{\partial \bar{u}}(P,\bar{u}) \geq 0$.

(III) No-decreciente ante aumentos en precios, i.e. $\dfrac{\partial E}{\partial p_i}(P,\bar{u}) \geq 0$.

(IV) Cóncava en precios, i.e. $\dfrac{\partial^2 E}{\partial p_i^2}(P,\bar{u}) \leq 0$.

3.2. Propiedades de las demandas compensadas

(I) Homogéneas de grado cero en precios, i.e. $X^C(\lambda P,\bar{u}) = X^C(P,\bar{u})$.

(II) Se cumple, por obvias razones, la **Ley de la demanda compensada**.

(III) Se cumple el **Lema de Shephard**.

(IV) Existe simetría en efectos cruzados, i.e. $\dfrac{\partial X_i^C}{\partial p_j} = \dfrac{\partial X_j^C}{\partial p_i}$.

3.3. Dualidad

A las relaciones entre los modelos marshaliano y compensado se les conoce como **relaciones de dualidad**.

(I) $E(P,\ V(P,I)) = I$.

(II) $X_i^C(P,\ V(P,I)) = X_i^M(P,I)$.

(III) $V(P,\ E(P,\bar{u})) = \bar{u}$.

(IV) $X_i^M(P,\ E(P,\bar{u})) = X_i^C(P,\bar{u})$.

(V) $\mu_R^M = \left(\mu_R^C\right)^{-1}$.

Proposición 3.1

Sea $u(X)$ una función de utilidad homotética y monótona, entonces $x_1,\ldots,x_n \in X$ son bienes normales.

Teorema 3.2: Ecuación de Slutsky

Sea u una función de utilidad monótona, entonces:

$$\overbrace{\frac{\partial X_i^M}{\partial p_i}(P,I)}^{\text{Efecto total}} = \overbrace{\frac{\partial X_i^C}{\partial p_i}(P,\bar{u})}^{\text{Efecto sustitución}} \underbrace{- \frac{\partial X_i^M}{\partial I}(P,I)\ X_i^M(P,I)}_{\text{Efecto ingreso}},$$

y

$$\overbrace{\frac{\partial X_i^M}{\partial p_j}(P,I)}^{\text{Efecto total}} = \overbrace{\frac{\partial X_i^C}{\partial p_j}(P,\bar{u})}^{\text{Efecto sustitución}} \underbrace{- \frac{\partial X_i^M}{\partial I}(P,I)\ X_j^M(P,I)}_{\text{Efecto ingreso}}$$

para toda $i \neq j$. En términos de elasticidades:

(I) $\varepsilon_{X_i^M,p_i} = \varepsilon_{X_i^C,p_i} - S_i(\varepsilon_{X_i^M,I})$ (efecto directo);

(II) $\varepsilon_{X_i^M,p_j} = \varepsilon_{X_i^C,p_j} - S_j(\varepsilon_{X_i^M,I})$ (efecto cruzado).

Definición 3.4 (Efecto sustitución)**.** *Dado algún cambio en los precios (i.e. $P \neq \hat{P}$), el* ***efecto sustitución*** *se puede calcular, de forma algebraica, como sigue:*

$$\mathrm{ES} = X^C(\hat{P},\ V(P,I)) - X^M(P,I).$$

Definición 3.5 (Efecto ingreso)**.** *Dado algún cambio en los precios (i.e. $P \neq \hat{P}$), el* ***efecto ingreso*** *se puede calcular, de forma algebraica, como sigue:*

$$\mathrm{EI} = X^M(\hat{P},I) - X^C(\hat{P},\ V(P,I)).$$

Teorema 3.3

Entre las demandas marshaliana y compensada se mantiene la siguiente relación:

$$\frac{\partial X^C}{\partial \bar{u}}(P,\bar{u}) = \frac{\partial X^M}{\partial I}(P,I)\mu_R.$$

4. Medidas de bienestar

Definición 4.1 (Variación compensatoria)**.** *La **variación compensatoria** mide el cambio en el ingreso que un consumidor debería recibir ante un cambio en precios para que, con los precios finales, sea capaz de alcanzar el mismo nivel de utilidad inicial.*

$$\text{i.e.} \quad \mathrm{VC}(P, \hat{P}, I) = E(\hat{P}, V(P, I)) - I.$$

Definición 4.2 (Variación equivalente)**.** *La **variación equivalente** mide el cambio en el ingreso que un consumidor debería recibir ante un cambio en precios para que, con los precios iniciales, sea capaz de alcanzar el nivel de utilidad final.*

$$\text{i.e.} \quad \mathrm{VE}(P, \hat{P}, I) = E(P, V(\hat{P}, I)) - I.$$

Teorema 4.1: Teorema de Hicks

$$\mathrm{VC} = \int_{p_i^{(0)}}^{p_i^{(1)}} X_i^C(P, u_0) dp_i$$

$$\mathrm{VE} = \int_{p_i^{(1)}}^{p_i^{(0)}} X_i^C(P, u_1) dp_i$$

donde $u_i = V(p_i, I)$.

Definición 4.3 (Excendente del consumidor)**.** *El **excedente del consumidor** es la diferencia entre el precio que pagan los consumidores y el precio que están dispuestos a pagar.*

$$\text{i.e.} \quad \mathrm{EC}(P, I) = \int_{p_i}^{\infty} X_i^M(P, I) dp_i.$$

Asimismo, podemos definir el cambio en excendente del consumidor como sigue:

$$\Delta\mathrm{EC} = \int_{p_i^{(0)}}^{p_i^{(1)}} X_i^M(P, I) dp_i.$$

5. Demanda walrasiana

$$\begin{aligned}
\max_{\{x_1,\ldots,x_n\}} \quad & u(x_1,\ldots,x_n) \\
\text{sujeto a} \quad & \sum_{i=1}^{n} p_i x_i \leq \sum_{i=1}^{n} p_i \bar{x}_i, \\
& 0 \leq x_1, \\
& \vdots \\
& 0 \leq x_n.
\end{aligned}$$

Definición 5.1 (Ingreso walrasiano). *Definimos el **ingreso walrasiano** como sigue:*

$$I^W = \langle P, \bar{X} \rangle = \sum_{i=1}^{n} p_i \bar{x}_i.$$

Soluciones del modelo

Dada una función de utilidad $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ y al suponer que, en el óptimo, $p_x x^* + p_y y^* = p_x \bar{x} + p_y \bar{y}$, entonces:

- Si $x^*, y^* > 0$, en el óptimo: $\text{TMS}(x^*, y^*) = \dfrac{p_x}{p_y}$.
- Si $x^* = 0$, en el óptimo: $\text{TMS}\left(0, \dfrac{I^W}{p_y}\right) \leq \dfrac{p_x}{p_y}$.
- Si $y^* = 0$, en el óptimo: $\text{TMS}\left(\dfrac{I^W}{p_x}, 0\right) \geq \dfrac{p_x}{p_y}$.

Definición 5.2 (Demandas walrasianas). *A la solución óptima del problema walrasiano (X^*) se les conoce como **demandas walrasianas** y usualmente se denotan:*

$$x_i^* = X_i^W(P, \bar{X}).$$

Definición 5.3 (Función de utilidad indirecta walrasiana). *La **función de utilidad indirecta walrasiana**, denotada $V(P, \bar{X})$, es la función valor del problema walrasiano:*

$$V(P, \bar{X}) = u(X_1^W(P, \bar{X}), \ldots, X_n^W(P, \bar{X})).$$

Definición 5.4 (Demandas netas). *Las **demandas netas** se definen como:*

$$X_i^N(P, \bar{X}) = X_i^W(P, \bar{X}) - \bar{x}_i.$$

5.1. Propiedades de la función de utilidad indirecta walrasiana

(I) Homogénea de grado cero en precios,
i.e. $V^W(\lambda P, \bar{X}) = V^W(P, \bar{X})$.

(II) No-decreciente ante aumentos en la dotación,
i.e. $\dfrac{\partial V^W}{\partial \bar{x}_i} \geq 0$.

(III) El signo de impacto en precios de la utilidad indirecta depende del signo de la demanda neta,
i.e. $\dfrac{\partial V}{\partial p_i} = -\mu_R^W X_i^N(P, \bar{X})$.

5.2. Propiedades de las demandas walrasianas

(I) Homogéneas de grado cero en precios,
i.e. $X^W(\lambda P, \bar{X}) = X^W(P, \bar{X})$.

(II) Se cumplen las **identidades de Roy**,
i.e. $X_i^N = \dfrac{\frac{\partial V^W}{\partial p_i}}{\frac{\partial V^W}{\partial \bar{x}_i}} P_i, \quad \forall i = 1, \ldots, n.$

5.3. Dualidad

A las relaciones entre los modelos marshaliano y walrasiano se les conoce como **relaciones de dualidad**.

(I) $I^W = I$.

(II) $X_i^W(P, \bar{X}) = X_i^M(P, I)$.

(III) $V^W(P, \bar{X}) = V(P, I)$.

Teorema 5.1: Ecuación de Slutsky

Sea u una función de utilidad monótona, entonces:

$$\begin{aligned}
\overbrace{\frac{\partial X_i^W}{\partial p_i}(P, \bar{X})}^{\text{Efecto total}} &= \overbrace{\frac{\partial X_i^C}{\partial p_i}(P, \bar{u})}^{\text{Efecto sustitución}} \\
&\underbrace{- \frac{\partial X_i^M}{\partial I}(P, I)\; X_i^N(P, \bar{X})}_{\text{Efecto ingreso neto}},
\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}
\overbrace{\frac{\partial X_i^W}{\partial p_j}(P, \bar{X})}^{\text{Efecto total}} &= \overbrace{\frac{\partial X_i^C}{\partial p_j}(P, \bar{u})}^{\text{Efecto sustitución}} \\
&\underbrace{- \frac{\partial X_i^M}{\partial I}(P, I)\; X_j^N(P, \bar{X})}_{\text{Efecto ingreso neto}}
\end{aligned}$$

para toda $i \neq j$.

5.4. Parámetros de decisión

Demandas netas

(I) Si $X_i^N < 0$, entonces el consumidor vende x_i.

(II) Si $X_i^N = 0$, entonces el consumidor consume su dotación de x_i.

(III) Si $X_i^N > 0$, entonces el consumidor compra x_i.

Dotaciones

(I) Si $\text{TMS}(\bar{x}_i, \bar{x}_j) < {}^{p_i}/_{p_j}$, entonces el consumidor vende x_i y compra x_j.

(II) Si $\text{TMS}(\bar{x}_i, \bar{x}_j) > {}^{p_i}/_{p_j}$, entonces el consumidor compra x_i y vende x_j.

Cambios en utilidad

(I) Si $\dfrac{\partial V}{\partial p_i} < 0$, entonces el consumidor vende x_i.

(II) Si $\dfrac{\partial V}{\partial p_i} > 0$, entonces el consumidor compra x_i.

6. Modelo ocio-consumo

$$
\begin{aligned}
\max_{\{h,c\}} \quad & u(h,c) \\
\text{sujeto a} \quad & c \le I^{\mathrm{NL}} + w(T-h), \\
& h \le T, \\
& 0 \le h, c.
\end{aligned}
$$

h	Tiempo dedicado al ocio
c	Consumo
T	Tiempo total
w	Salario
I^{NL}	Ingreso no-laboral

Solución al modelo

Dada la función de utilidad $u(h,c)$ y al suponer que, en el óptimo, $c = I^{\mathrm{NL}} - hw$, entonces:

- Si $h^*, c* > 0$, en el óptimo: $\mathrm{TMS}(h^*, c^*) = w$.

Definición 6.1 (Demanda de consumo)**.** *La **demanda de consumo** es una de las soluciones al modelo ocio-consumo y se denota:*

$$c^W(w, I^{\mathrm{NL}}).$$

Definición 6.2 (Demanda de ocio)**.** *La **demanda de ocio** es una de las soluciones al modelo ocio-consumo y se denota:*

$$h^W(w, I^{NL}).$$

Definición 6.3 (Oferta laboral)**.** *La **oferta laboral** del consumidor está determinada por:*

$$l(w, I^{NL}) = T - h^W(w, I^{NL}).$$

Definición 6.4 (Salario de reserva)**.** *El **salario de reserva** del consumidor está dado por:*

$$w^R = \mathrm{TMS}(T, I^{\mathrm{NL}}).$$

6.1. Dualidad

En el modelo ocio-consumo se cumplen las siguientes **relación de dualidad**:

(I) $h^W(w, I^{\mathrm{NL}}) = h^M(w, I^{\mathrm{NL}} + wT)$,

(II) $c^W(w, I^{\mathrm{NL}}) = c^M(w, I^{\mathrm{NL}} + wT)$.

Teorema 6.1: Ecuación de Slutsky

Sea $u(h,c)$ una función de utilidad monótona, entonces:

$$
\begin{aligned}
\overbrace{\frac{\partial h^W}{\partial w}(w, I^{\mathrm{NL}})}^{\text{Efecto total}} &= \overbrace{\frac{\partial h^C}{\partial w}(w, \bar{u})}^{\text{Efecto sustitución}} \\
&\underbrace{+ \quad \frac{\partial h^M}{\partial l}(w, I^{\mathrm{NL}} + wT)\; l(w, I^{\mathrm{NL}}),}_{\text{Efecto ingreso neto}}
\end{aligned}
$$

y

$$
\begin{aligned}
\overbrace{\frac{\partial c^W}{\partial w}(w, I^{\mathrm{NL}})}^{\text{Efecto total}} &= \overbrace{\frac{\partial c^C}{\partial w}(w, \bar{u})}^{\text{Efecto sustitución}} \\
&\underbrace{+ \quad \frac{\partial c^M}{\partial l}(w, I^{\mathrm{NL}} + wT)\; l(w, I^{\mathrm{NL}})}_{\text{Efecto ingreso neto}}.
\end{aligned}
$$

6.2. Parámetros de decisión

Salario de reserva

(I) Si $w^R < w$, entonces el consumidor decidirá trabajar.

(II) Si $w^R > w$, entonces el consumidor demandará T horas al ocio.

Cambios en utilidad

(I) Si $\dfrac{\partial V}{\partial w} = \mu_R l < 0$, entonces el consumidor tendrá mayor afinidad al trabajo.

(II) Si $\dfrac{\partial V}{\partial w} = \mu_R l > 0$, entonces el consumidor tendrá mayor afinidad al ocio.

7. Modelo de consumo intertemporal

$$
\begin{aligned}
\max_{\{c_0,\ldots,c_n\}} \quad & u(c_0,\ldots,c_n) \\
\text{sujeto a} \quad & c_n \leq \left(\sum_{t=0}^{n-1}(1+r_t)(I_t-c_t)\right)+I_n, \\
& 0 \leq c_0, \\
& \vdots \\
& 0 \leq c_n.
\end{aligned}
$$

c_t	Consumo en el período t
I_t	Ingreso en el período t
r_t	Tasa de interés en el período t

Solución al modelo

Dada la función de utilidad $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ y al suponer que, en el óptimo, $c_1 = I_1 + (1+r_0)(I_0 - c_0)$, entonces:

- Si $c_0^*, c_1* > 0$, en el óptimo: $\text{TMS}(c_0^*, c_1^*) = 1 + r_0$.

Definición 7.1 (Demanda de consumo en período t)**.** *Las **demandas de consumo** son las soluciones al modelo de consumo intertemporal y se denotan:*

$$c_t(r_0,\ldots,r_{n-1}; I_0,\ldots,I_n).$$

Definición 7.2 (Ahorro)**.** *El **ahorro** del consumidor en período t está determinado por:*

$$s_t = I_t - c_t.$$

Definición 7.3. *Definimos $\tilde{r}_t$ como la **tasa de interés** tal que el consumidor no quiere ahorrar ni pedir prestado en el período t:*

$$\tilde{r}_t = \text{TMS}(I_t, I_{t+1}).$$

Teorema 7.1: Ecuación de Slutsky

Sea u una función de utilidad monótona, entonces:

$$
\begin{aligned}
\overbrace{\frac{\partial c_t}{\partial r_t}(R,I)}^{\text{Efecto total}} &= \overbrace{\frac{\partial c_t^C}{\partial r_t}(R,\bar{u})}^{\text{Efecto sustitución}} \\
&\quad \underbrace{+ \frac{\partial c_t^M}{\partial r_t}(R,I)\ s_t(R,I)}_{\text{Efecto ingreso neto}},
\end{aligned}
$$

y

$$
\begin{aligned}
\overbrace{\frac{\partial c_{t+1}}{\partial r_t}(R,I)}^{\text{Efecto total}} &= \overbrace{\frac{\partial c_{t+1}^C}{\partial r_t}(R,\bar{u})}^{\text{Efecto sustitución}} \\
&\quad \underbrace{+ \frac{\partial c_{t+1}^M}{\partial r_t}(R,I)\ s_t(R,I)}_{\text{Efecto ingreso neto}}.
\end{aligned}
$$

7.1. Parámetros de decisión

Ahorro

(I) Si $s_t < 0$, entonces el consumidor es deudor en período t.

(II) Si $s_t = 0$, entonces el consumidor no ahorra ni pide prestado.

(III) Si $s_t > 0$, entonces el consumidor es ahorrador en período t.

Tasa de interés

(I) Si $\tilde{r} < r$, entonces el consumidor decidirá endeudarse en período t.

(II) Si $\tilde{r} > r$, entonces el consumidor decidirá ahorrar en período t.

Cambios en utilidad

(I) Si $\dfrac{\partial V}{\partial r_t} = \mu_R s_t < 0$, entonces el consumidor tendrá mayor afinidad a endeudarse.

(II) Si $\dfrac{\partial V}{\partial r_t} = \mu_R s_t > 0$, entonces el consumidor tendrá mayor afinidad a ahorrar.

8. Decisiones de la empresa

Definición 8.1 (Función de producción). *La **función de producción** describe la relación entre la producción de bienes y la cantidad de insumos (capital y trabajo) requeridos para la misma, en este caso:*

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \quad \textit{dada por alguna} \quad f(l, k).$$

Definición 8.2 (Isocuanta). *Una **curva isocuanta** nivel k se define como aquellas canastas que, con precios dados, producen la misma cantidad $\bar{q}$.*

$$\mathrm{IC}_k = \{(l, k) \in \mathbb{R}^2_{++} \mid f(l, k) = \bar{q}\}.$$

Definición 8.3 (Producto marginal). *La **productividad marginal** de un insumo mide el cambio en la producción de la empresa ante un cambio marginal en dicho insumo.*

$$\text{i.e. } \mathrm{PMg}_L = \frac{\partial f}{\partial l}(l, k) \ \textit{y} \ \mathrm{PMg}_K = \frac{\partial f}{\partial k}(l, k).$$

Definición 8.4 (Tasa marginal de sustitución técnica). *La **tasa marginal de sustitución técnica** $\mathrm{TMST}(l, k)$ mide el número de unidades de capital que se está dispuesto a sacrificar por una unidad adicional de trabajo manteniendo la producción constante.*

$$\text{i.e. } \mathrm{TMST}(l, k) = \frac{\mathrm{PMg}_L(l, k)}{\mathrm{PMg}_K(l, k)}.$$

Definición 8.5 (Producto medio). *La **productividad media** de un insumo mide la cantidad promedio que produce cada unidad de dicho insumo.*

$$\text{i.e. } \mathrm{PMe}_L = \frac{f(l, k)}{l} \ \textit{y} \ \mathrm{PMe}_K = \frac{f(l, k)}{k}.$$

Teorema 8.1: Rendimientos decrecientes

Decimos que $f(l, k)$ tiene rendimientos decrecientes a escala si $f(\lambda l, \lambda k) < \lambda f(l, k),\ \forall l, k \geq 0$ y $\forall \lambda > 1$.

Teorema 8.2: Rendimientos constantes

Decimos que $f(l, k)$ tiene rendimientos constantes a escala si $f(\lambda l, \lambda k) = \lambda f(l, k),\ \forall l, k \geq 0$ y $\forall \lambda > 1$.

Teorema 8.3: Rendimientos crecientes

Decimos que $f(l, k)$ tiene rendimientos crecientes a escala si $f(\lambda l, \lambda k) > \lambda f(l, k),\ \forall l, k \geq 0$ y $\forall \lambda > 1$.

Proposición 8.1

Decimos que $f(l, k)$ tiene rendimientos decrecientes a escala si y solo si la productividad media de los insumos es decreciente.

Proposición 8.2

Decimos que $f(l, k)$ tiene rendimientos constantes a escala si y solo si la productividad media de los insumos es constante.

Proposición 8.3

Decimos que $f(l, k)$ tiene rendimientos crecientes a escala si y solo si la productividad media de los insumos es creciente.

8.1. Minimización de costos

$$\begin{aligned} \min_{\{l,k\}} \quad & wl + rk \\ \text{sujeto a} \quad & 0 \leq l, \\ & 0 \leq k, \\ & \bar{q} \leq f(l,k). \end{aligned}$$

$f(l,k)$	Función de producción
k	Capital
l	Trabajo
$\bar{q}$	Oferta mínima
r	Tasa de interés (precio del capital)
w	Salario (precio del trabajo)

Soluciones del modelo

Dada una función de producción $f(l,k)$ y al suponer que, en el óptimo, $f(l^*,k^*) = \bar{q}$, entonces:

- Si $l^*, k^* > 0$, en el óptimo: $\text{TMST}(l^*,k^*) = \frac{w}{r}$.
- Si $l^* = 0$, en el óptimo: $\text{TMST}\,(0,k^*) < \frac{w}{r}$.
- Si $k^* = 0$, en el óptimo: $\text{TMST}\,(l^*,0) > \frac{w}{r}$.

Definición 8.6 (Demandas contingentes)**.** *A la solución óptima del problema de minimización de costos (l^*,k^*) se les conoce como* ***demandas contingentes de insumos*** *y usualmente se denotan:*

$$l^* = l^c(w,r,\bar{q}) \qquad k^* = k^c(w,r,\bar{q})$$

Definición 8.7 (Función de costo mínimo)**.** *La* ***función de costo mínimo****, denotada $C(w,r,\bar{q})$, es la función valor del problema minimización de costos:*

$$C(w,r,\bar{q}) = wl^c(w,r,\bar{q}) + rk^c(w,r,\bar{q}).$$

Teorema 8.4: Ley de la demanda contingente

Sean $l^c(w,r,\bar{q})$ y $k^c(w,r,\bar{q})$, entonces cada insumo es no-creciente ante cambios en su propio precio y no-decreciente ante cambios en el precio cruzado.

$$\text{i.e.} \quad \frac{\partial l^c}{\partial w} \leq 0, \; \frac{\partial k^c}{\partial r} \leq 0; \; \frac{\partial l^c}{\partial r} \geq 0, \; \frac{\partial k^c}{\partial w} \geq 0.$$

Lema 8.1: Lema de Shephard

$$l^c(w,r,\bar{q}) = \frac{\partial C(w,r,\bar{q})}{\partial w} \qquad k^c(w,r,\bar{q}) = \frac{\partial C(w,r,\bar{q})}{\partial r}$$

8.1.1. Propiedades de la función de costo mínimo

(I) Homogénea de grado uno en precios, i.e. $C(\lambda w, \lambda r, \bar{q}) = \lambda C(w,r,\bar{q})$.

(II) Creciente ante aumentos en cantidad, i.e. $\frac{\partial C}{\partial \bar{q}} > 0$.

(III) No-decreciente ante aumentos en precios, i.e. $\frac{\partial C}{\partial w} \geq 0$ y $\frac{\partial C}{\partial r} \geq 0$.

(IV) Cóncava en precios, i.e. $\frac{\partial^2 C}{\partial w^2} \leq 0$ y $\frac{\partial^2 C}{\partial r^2} \leq 0$.

8.1.2. Propiedades de las demandas contingentes de insumos

(I) Homogéneas de grado cero en precios, i.e. $l^c(\lambda w, \lambda r, \bar{q}) = l^c(w,r,\bar{q})$ y $k^c(\lambda w, \lambda r, \bar{q}) = k^c(w,r,\bar{q})$.

(II) Se cumple la **ley de la demanda contingente**.

(III) Se cumple el **lema de Shephard**.

(IV) Existe simetría en efectos cruzados, i.e. $\frac{\partial l^c}{\partial r} = \frac{\partial k^c}{\partial w}$.

Definición 8.8 (Costo marginal)**.** *El* ***costo marginal*** *mide el cambio en los costos ante un cambio marginal en la producción.*

$$\text{i.e. } \text{CMg}(w,r,\bar{q}) = \frac{\partial C(w,r,\bar{q})}{\partial \bar{q}}.$$

Definición 8.9 (Costo medio)**.** *El* ***costo medio*** *mide los costos promedio de producir cada unidad.*

$$\text{i.e. } \text{CMe}(w,r,\bar{q}) = \frac{C(w,r,\bar{q})}{\bar{q}}.$$

Proposición 8.4

Decimos que $f(l,k)$ tiene rendimientos decrecientes a escala si y solo si el costo medio es creciente.

Proposición 8.5

Decimos que $f(l,k)$ tiene rendimientos constantes a escala si y solo si el costo medio es constante.

Proposición 8.6

Decimos que $f(l,k)$ tiene rendimientos crecientes a escala si y solo si el costo medio es decreciente.

Relación entre el costo marginal y el costo medio

(I) Si CMg $<$ CMe, entonces $\frac{\partial \text{CMe}}{\partial \bar{q}}(w,r,\bar{q}) < 0$.

(II) Si CMg $=$ CMe, entonces $\frac{\partial \text{CMe}}{\partial \bar{q}}(w,r,\bar{q}) = 0$.

(III) Si CMg $>$ CMe, entonces $\frac{\partial \text{CMe}}{\partial \bar{q}}(w,r,\bar{q}) > 0$.

Corolario 8.1

Sea f una función de producción y $\bar{q} = f(l,k)$, entonces:

$$\text{CMe}(w,r,\bar{q}) = \frac{w}{\text{PMe}_L(l^c,k^c)} + \frac{r}{\text{PMe}_K(l^c,k^c)}.$$

8.2. Maximización de beneficios

$$\begin{aligned} &\max_{\{q\}} pq - C(w,r,\bar{q}) \\ &\text{sujeto a} \quad 0 \le q. \end{aligned}$$

$C(w,r,\bar{q})$	Función de costo mínimo
p	Precio de mercado
q	Oferta

Solución del modelo

Dada una función de costo mínimo $C(w,r,\bar{q})$, entonces:

- Si $q^* = 0$, en el óptimo: $p \le \mathrm{CMg}(w,r,0)$.
- Si $q^* > 0$, en el óptimo: $p = \mathrm{CMg}(w,r,q^*)$.

Definición 8.10 (Oferta)**.** *A la solución óptima del problema de maximización de beneficios (q^*) se le conoce como **oferta** y se denota:*

$$q^* = q(w,r,p).$$

Definición 8.11 (Función de beneficios máximos)**.** *La **función de beneficios máximos**, denotada $\pi(w,r,p)$, es la función valor del problema de maximización de beneficios:*

$$\pi(w,r,p) = pq(w,r,p) - C(w,r,q(w,r,p)).$$

Parámetros de decisión

Para que q^* produzca un máximo, se debe cumplir que $\dfrac{\partial \mathrm{CMg}(w,r,q)}{\partial q} \ge 0$. Es decir, que el óptimo (q^*) se encuentre donde el costo marginal es creciente. Adicionalmente:

(I) Si $p < \mathrm{CMeV}(w,r,q^*)$, entonces los beneficios de NO producir son mayores que los de producir.

(II) Si $p = \mathrm{CMeV}(w,r,q^*)$, entonces a la empresa le da lo mismo producir o no.

(III) Si $p > \mathrm{CMeV}(w,r,q^*)$, entonces los beneficios de producir son mayores que los de no producir.

Nota: $\mathrm{CMeV} = \dfrac{C(w,r,q^*) - C(w,r,0)}{q^*}$.

Proposición 8.7

Sea q^s la escala de producción eficiente tal que $0 < q^* < q^s$, donde q^* es una solución del problema de maximización. Entonces, q^* no es óptimo.

Proposición 8.8

Si la función de producción tiene rendimientos crecientes a escala, entonces $q^* = 0$ ó $q^* \to \infty$.

Teorema 8.5: Ley de la oferta

Sea $q(w,r,p)$ derivable, entonces la oferta es no-decreciente en el precio de venta.

$$\text{i.e.} \quad \frac{\partial q}{\partial p}(w,r,p) \ge 0.$$

8.2.1. Propiedades de la función de beneficios máximos

(I) Homogénea de grado uno en precios, i.e. $\pi(\lambda w, \lambda r, \lambda p) = \lambda \pi(w,r,p)$.

(II) No-decreciente en el precio de venta, i.e. $\dfrac{\partial \pi}{\partial p} \ge 0$.

(III) No-creciente en los precios de insumos, i.e. $\dfrac{\partial \pi}{\partial w} \le 0$ y $\dfrac{\partial \pi}{\partial r} \le 0$.

8.2.2. Propiedades de la oferta

(I) Homogénea de grado cero en precios, i.e. $q(\lambda w, \lambda r, \lambda p) = q(w,r,p)$.

(II) Se cumple, por obvias razones, la **Ley de la oferta**.

(III) El signo de impacto en precios de insumos depende de las demandas contingentesde la siguiente forma:

$$\frac{\partial q}{\partial w} = -\frac{\partial l^c}{\partial q}\frac{\partial q}{\partial p} \qquad \text{y} \qquad \frac{\partial q}{\partial r} = -\frac{\partial k^c}{\partial q}\frac{\partial q}{\partial p}.$$

Definición 8.12 (Demandas inducidas)**.** *Las **demandas inducidas de insumos** determinan la cantidad de capital y trabajo que demanda la empresa para cada nivel de w, r y p. Se denotan:*

$$\begin{aligned} l(w,r,p) &= l^c(w,r,q(w,r,p)); \\ k(w,r,p) &= k^c(w,r,q(w,r,p)). \end{aligned}$$

8.2.3. Propiedades de las demandas inducidas de insumos

(I) Homogéneas de grado cero en precios, i.e. $l(\lambda w, \lambda r, \lambda p) = l(w,r,p)$, y $k(\lambda w, \lambda r, \lambda p) = k(w,r,p)$.

(II) No-crecientes ante cambios en los precios de insumos, i.e. $\dfrac{\partial l}{\partial w} \le 0$ y $\dfrac{\partial k}{\partial r} \le 0$.

(III) El signo de impacto en el precio de venta depende de las demandas contingentesde la siguiente forma:

$$\frac{\partial l}{\partial p} = \frac{\partial l^c}{\partial q}\frac{\partial q}{\partial p} \qquad \text{y} \qquad \frac{\partial k}{\partial p} = \frac{\partial k^c}{\partial q}\frac{\partial q}{\partial p}.$$

Lema 8.2: Lema de Hotelling

$$\frac{\partial \pi}{\partial p} = q^* \ge 0.$$

Corolario 8.2

$$\frac{\partial \pi}{\partial w} = -l(w,r,p) \qquad \frac{\partial \pi}{\partial r} = -k(w,r,p)$$

Definición 8.13 (Excedente del productor)**.** *El **excedente del productor** representa la diferencia entre el precio al que el productor vende y su disposición para vender una determinada cantidad y la definimos como sigue:*

$$\begin{aligned} \mathrm{EP} = \pi(w_1,r_1,p_1) - \pi(w_1,r_1,p_0) &= \int_{p_0}^{p_1} q(w,r,p)dp \\ = \pi(w_1,r_1,p_1) - \pi(w_0,r_1,p_1) &= -\int_{w_0}^{w_1} l(w,r,p)dw \\ = \pi(w_1,r_1,p_1) - \pi(w_1,r_0,p_1) &= -\int_{r_0}^{r_1} k(w,r,p)dr \end{aligned}$$

Teorema 8.6: Ecuación de Slutsky

Sea u una función de utilidad monótona, entonces:

$$\begin{aligned}\overbrace{\frac{\partial l}{\partial w}(w,r,p)}^{\text{Efecto total}} &= \overbrace{\frac{\partial l^c}{\partial w}(w,r,q)}^{\text{Efecto sustitución}} \\ &\underbrace{- \quad \left(\frac{\partial l^c}{\partial q}(w,r,q)\right)^2 \frac{\partial q}{\partial p}(w,r,p),}_{\text{Efecto producto}}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\overbrace{\frac{\partial k}{\partial r}(w,r,p)}^{\text{Efecto total}} &= \overbrace{\frac{\partial k^c}{\partial r}(w,r,q)}^{\text{Efecto sustitución}} \\ &\underbrace{- \quad \left(\frac{\partial k^c}{\partial q}(w,r,q)\right)^2 \frac{\partial q}{\partial p}(w,r,p),}_{\text{Efecto producto}}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\overbrace{\frac{\partial l}{\partial r}(w,r,p)}^{\text{Efecto total}} &= \overbrace{\frac{\partial l^c}{\partial r}(w,r,q)}^{\text{Efecto sustitución}} \\ &\underbrace{- \quad \frac{\partial l^c}{\partial q}(w,r,q)\frac{\partial k^c}{\partial q}(w,r,q)\frac{\partial q}{\partial p}(w,r,p)}_{\text{Efecto producto}}\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}\overbrace{\frac{\partial k}{\partial w}(w,r,p)}^{\text{Efecto total}} &= \overbrace{\frac{\partial k^c}{\partial w}(w,r,q)}^{\text{Efecto sustitución}} \\ &\underbrace{- \quad \frac{\partial k^c}{\partial q}(w,r,q)\frac{\partial l^c}{\partial q}(w,r,q)\frac{\partial q}{\partial p}(w,r,p)}_{\text{Efecto producto}}\end{aligned}$$