

# Optimización

Formulario · Primavera 2021

Carlos Lezama MAT - 22211

ITAM

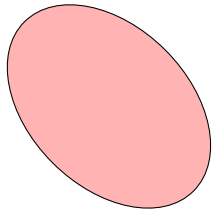
# 1. Optimización estática

## 1.1. Análisis convexo

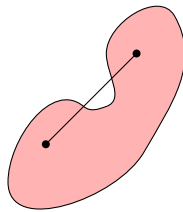
**Definición 1.1** (Conjunto convexo). Sea  $X \subseteq \mathbb{R}^n$ , decimos que  $X$  es **convexo** si, para cualesquiera  $x, y \in X$  y para toda  $\lambda \in (0, 1)$ , se cumple:

$$\lambda x + (1 - \lambda)y \in X.$$

Equivalentemente, decimos que  $X$  es **convexo** si, para todas  $a \in \partial X$  y  $b \in X$ , existe  $\ell$  tal que  $\langle b - a, \ell \rangle \leq 0$ ; donde  $\partial X$  es la frontera de  $X$  y  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  denota el producto punto.



Conjunto convexo



Conjunto no convexo

### Proposición 1.1

Sean  $A$  y  $B$  dos subconjuntos convexos de  $\mathbb{R}^n$ , entonces:

- (I)  $A \cap B$  es convexo.
- (II)  $A + B = \{a + b : a \in A, b \in B\}$  es convexo.
- (III) Para todo  $k \in \mathbb{R}$ ,  $kA = \{ka : a \in A\}$  es convexo.

**Definición 1.2** (Función convexa). Sea  $X \subseteq \mathbb{R}^n$  un conjunto convexo,  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  es una **función convexa** si, para toda  $x_1 \neq x_2 \in X$  y toda  $\lambda \in (0, 1)$ , se tiene:

$$f(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) \leq \lambda f(x_1) + (1 - \lambda)f(x_2).$$

Si la desigualdad es estricta, se dice que la función es **estrictamente convexa**.

**Definición 1.3** (Función cóncava). Sea  $X \subseteq \mathbb{R}^n$  un conjunto convexo,  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  es una **función cóncava** si, para toda  $x_1 \neq x_2 \in X$  y toda  $\lambda \in (0, 1)$ , se tiene:

$$f(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) \geq \lambda f(x_1) + (1 - \lambda)f(x_2).$$

Si la desigualdad es estricta, se dice que la función es **estrictamente cóncava**.

**Definición 1.4.** Sea  $X \subseteq \mathbb{R}^n$  y  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  una función, definimos:

- la **gráfica** de  $f$  como  $G_f = \{(x, r) \in X \times \mathbb{R} : f(x) = r\}$ .
- el **epígrafo** de  $f$  como  $E_f = \{(x, r) \in X \times \mathbb{R} : f(x) \leq r\}$ .
- el **hipógrafo** de  $f$  como  $H_f = \{(x, r) \in X \times \mathbb{R} : f(x) \geq r\}$ .

### Teorema 1.1

Sea  $X \subseteq \mathbb{R}^n$  un conjunto convexo,

- (I) una función  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  es convexa si y solo si  $E_f$  es un conjunto convexo de  $\mathbb{R}^{n+1}$ .
- (II) una función  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  es cóncava si y solo si  $H_f$  es un conjunto convexo de  $\mathbb{R}^{n+1}$ .

### Proposición 1.2

Sean  $X \subseteq \mathbb{R}^n$  un conjunto convexo,  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  y  $g : X \rightarrow \mathbb{R}$  dos funciones cóncavas, y  $\alpha \in \mathbb{R}$ , entonces:

- (I)  $f$  es cóncava si  $\alpha > 0$ .
- (II)  $f$  es convexa si  $\alpha < 0$ .
- (III)  $f + g$  es cóncava.

### Proposición 1.3

Sean  $X \subseteq \mathbb{R}^n$  un conjunto convexo,  $g : X \rightarrow \mathbb{R}$  una función cóncava, y  $h : Y \rightarrow \mathbb{R}$  una función cóncava y creciente tal que  $g(X) \subseteq Y \subseteq \mathbb{R}$ ; entonces,  $h \circ g$  es cóncava.

2. Cálculo de variaciones

### 3. Teoría de control óptimo

#### 4. Elementos de programación dinámica