Optimización

Formulario · Primavera 2021

Carlos Lezama MAT - 22211

ITAM

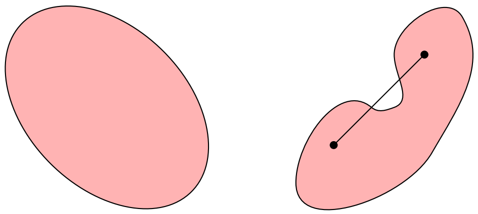
1. Optimización estática

1.1. Análisis convexo

Definición 1.1 (Conjunto convexo)**.** *Sea $X \subseteq \mathbb{R}^n$, decimos que X es **convexo** si, para cualesquiera $x, y \in X$ y para toda $\lambda \in (0,1)$, se cumple:*

$$\lambda x + (1-\lambda)y \in X.$$

*Equivalentemente, decimos que X es **convexo** si, para todas $a \in \partial X$ y $b \in X$, existe ℓ tal que $\langle b-a, \ell\rangle \le 0$; donde ∂X es la* frontera *de X y $\langle \cdot\,, \cdot \rangle$ denota el producto punto.*



Conjunto convexo Conjunto no convexo

Proposición 1.1

Sean A y B dos subconjuntos convexos de $\mathbb{R}^n$, entonces:

(I) $A \cap B$ es convexo.
(II) $A + B = \{a + b : a \in A,\ b \in B\}$ es convexo.
(III) Para todo $k \in \mathbb{R}$, $kA = \{ka : a \in A\}$ es convexo.

Definición 1.2 (Función convexa)**.** *Sea $X \subseteq R^n$ un conjunto convexo, $f : X \to \mathbb{R}$ es una **función convexa** si, para toda $x_1 \neq x_2 \in X$ y toda $\lambda \in (0,1)$, se tiene:*

$$f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \le \lambda f(x_1) + (1-\lambda)f(x_2).$$

*Si la desigualdad es estricta, se dice que la función es **estrictamente convexa**.*

Definición 1.3 (Función cóncava)**.** *Sea $X \subseteq R^n$ un conjunto convexo, $f : X \to \mathbb{R}$ es una **función cóncava** si, para toda $x_1 \neq x_2 \in X$ y toda $\lambda \in (0,1)$, se tiene:*

$$f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \ge \lambda f(x_1) + (1-\lambda)f(x_2).$$

*Si la desigualdad es estricta, se dice que la función es **estrictamente cóncava**.*

Definición 1.4. *Sea $X \subseteq \mathbb{R}^n$ y $f : X \to \mathbb{R}$ una función, definimos:*

- *la **gráfica** de f como $G_f = \{(x,r) \in X \times \mathbb{R} : f(x) = r\}$.*
- *el **epígrafo** de f como $E_f = \{(x,r) \in X \times \mathbb{R} : f(x) \le r\}$.*
- *el **hipógrafo** de f como $H_f = \{(x,r) \in X \times \mathbb{R} : f(x) \ge r\}$.*

Teorema 1.1

Sea $X \subseteq \mathbb{R}^n$ un conjunto convexo,

(I) una función $f : X \to \mathbb{R}$ es convexa si y solo si E_f es un conjunto convexo de $\mathbb{R}^{n+1}$.
(II) una función $f : X \to \mathbb{R}$ es cóncava si y solo si H_f es un conjunto convexo de $\mathbb{R}^{n+1}$.

Proposición 1.2

Sean $X \subseteq \mathbb{R}^n$ un conjunto convexo, $f : X \to \mathbb{R}$ y $g : X \to \mathbb{R}$ dos funciones cóncavas, y $\alpha \in \mathbb{R}$, entonces:

(I) f es cóncava si $\alpha > 0$.
(II) f es convexa si $\alpha < 0$.
(III) $f + g$ es cóncava.

Proposición 1.3

Sean $X \subseteq \mathbb{R}^n$ un conjunto convexo, $g : X \to \mathbb{R}$ una función cóncava, y $h : Y \to \mathbb{R}$ una función cóncava y creciente tal que $g(X) \subseteq Y \subseteq \mathbb{R}$; entonces, $h \circ g$ es cóncava.

2. Cálculo de variaciones

3. Teoría de control óptimo

4. Elementos de programación dinámica