EC435
บทที่ 5 แบบจำลอง Multiple Time Series

เฉลิมพงษ์ คงเจริญ ©2556

คณะเศรษฐศาสตร์ มหาวิทยาลัยธรรมศาสตร์

November 1, 2019

บทนำ

Return SET ← ตลาดหุ้นอื่นๆ Return

การเปลี่ยนแปลง — MM ↑&↓

การเปลี่ยนแปลงที่เกิดขึ้นในตลาดการเงินหนึ่งสามารถส่งผ่านต่อไปยังตลาดอื่นได้ง่าย ดังนั้น บางครั้งเราจำเป็นต้องพิจารณาการเปลี่ยนแปลงของอนุกรมเวลาทางเงินไปพร้อมๆกัน

หลายตัวแปร → เป้าหมาย พยากรณ์ตัวแปรที่เราสนใจได้ดีขึ้น

โดยเราเรียกแบบจำลองที่พิจารณาอนุกรมเวลาหลายๆอนุกรมพร้อมกันว่าแบบจำลองอนุกรมเวลาเชิงพหุตัวแปร(multivariate time series) โดยเราสามารถเขียนอนุกรมเวลาในรูปของเวกเตอร์

ตัวแปรหลายตัว

vector

$y_{1t}, y_{2t}, \dots, y_{nt}$

return SET, return DowJone

เดิม y_t ← ตัวแปร

แนวคิดจากแบบจำลองที่เราเรียนมาในหัวข้อก่อน ($y_{t-1}, \dots, \varepsilon_{t-1}, \dots$)

AR, MA, ARMA

$$\boldsymbol{Y}_t = \begin{bmatrix} y_{1t} \\ y_{2t} \\ \vdots \\ y_{nt} \end{bmatrix}$$

ตัวแปรที่เราสนใจ.

$y_{t-1}, \dots, \varepsilon_{t-1}, \dots$

Vector AR [y_t อธิบาย $y_{t-1}, \dots$]

~~Vector MA~~

~~Vecto ARMA~~

ยุ่งยาก ในการประมาณค่า

โดยที่ y_{it} แทนอนุกรมเวลา i และ n คือจำนวนอนุกรมเวลาที่เราพิจารณาร่วมกันเช่น $y_{1t}, y_{2t}, \dots y_{nt}$ แทนผลได้ตอบแทนในรูปล็อกของหุ้นในตลาดหลักทรัพย์แห่งประเทศไทย

แบบจำลองเวกเตอร์ออโตรีเกรสซีฟ (Vector Autoregressive Model) — VAR(p) Y_t ถูกอธิบาย $y_{t-1}, \dots, y_{t-p}$

แบบจำลองเวกเตอร์ออโตรีเกรสซีฟที่มีค่าล่าเท่ากับ p, $VAR(p)$, สามารถเขียนในรูป

$$\underbrace{\begin{bmatrix} y_{1t} \\ y_{2t} \\ \vdots \\ y_{nt} \end{bmatrix}}_{n\times 1} = \boldsymbol{Y}_t = \overset{\text{ค่าคงที่}}{\underbrace{\boldsymbol{c}}_{\begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix}}} + \underbrace{\Phi_1}_{n\times n} \underbrace{\boldsymbol{Y}_{t-1}}_{n\times 1} + \ldots + \Phi_p \boldsymbol{Y}_{t-p} + \varepsilon_t, \quad t = 1, 2, \ldots, T \qquad (5.1)$$

$$\boldsymbol{Y}_{t-1} = \begin{bmatrix} y_{1,t-1} \\ y_{2,t-1} \\ \vdots \\ y_{n,t-1} \end{bmatrix}, \quad \varepsilon_t = \begin{bmatrix} \varepsilon_{1t} \\ \varepsilon_{2t} \\ \vdots \\ \varepsilon_{nt} \end{bmatrix}, \quad n \times 1$$

โดยที่ Φ_i เป็นเมทริกซ์สัมประสิทธิ์ที่มีขนาด $n \times n$ และ ε_t เป็นเวคเตอร์ของกระบวนการไวทนอยซ์ที่มีค่าเฉลี่ยเท่ากับศูนย์ และมีเมตริกซ์ความแปรปรวนร่วมที่ไม่แปรผันตามเวลา $\boldsymbol{\Sigma}$

แบบจำลองเวกเตอร์ออโตรีเกรสซีฟ (Vector Autoregressive Model)

แบบจำลองเวกเตอร์ออโตรีเกรสซีฟที่มีค่าล่าเท่ากับ p, $VAR(p)$, สามารถเขียนในรูป

$\begin{pmatrix} y_{1t} \\ \vdots \\ y_{Nt} \end{pmatrix}$

เวคเตอร์

$$\boxed{\boldsymbol{Y}_t} = \boldsymbol{c} + \Phi_1 \boldsymbol{Y}_{t-1} + \ldots + \Phi_p \boldsymbol{Y}_{t-p} + \varepsilon_t, \qquad t = 1, 2, \ldots, T \qquad (5.1)$$

โดยที่ Φ_i เป็นเมทริกซ์สัมประสิทธิ์ที่มีขนาด $n \times n$ และ ε_t เป็นเวคเตอร์ของกระบวนการไวทนอซที่มีค่าเฉลี่ยเท่ากับศูนย์ และมีเมตริกซ์ความแปรปรวนร่วมที่ไม่แปรผันตามเวลา $\boldsymbol{\Sigma}$

ตัวอย่างเช่น หากเราสนใจแบบจำลอง $VAR(1)$ ของตัวแปร 2 ตัว.

VAR(1)

Vector

$$Y_t = C + \Phi^1 \; \Phi_1 \; Y_{t-1} + \varepsilon_t$$

$$\begin{pmatrix} y_{1t} \\ y_{2t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \phi^1_{11} & \phi^1_{12} \\ \phi^1_{21} & \phi^1_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_{1t-1} \\ y_{2t-1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \varepsilon_{1t} \\ \varepsilon_{2t} \end{pmatrix} \qquad (5.2)$$

2×2

ตำแหน่ง

$$\begin{pmatrix} y_{1t} \\ y_{2t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \phi^1_{11} y_{1t-1} + \phi^1_{12} y_{2t-1} \\ \phi^1_{21} y_{1t-1} + \phi^1_{22} y_{2t-1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \varepsilon_{1t} \\ \varepsilon_{2t} \end{pmatrix}$$

VAR

— ต่อจาก Univariate TS (AR)

หรือเขียนเป็นรูปสมการของแต่ละตัวแปรที่เราสนใจ

แรงกระตุ้น $y_{2,t-1}$ มีอิทธิพลในทางอ้อม y_{1t}

ตัวแปรตัวอื่นในระบบสมการ

0 : ช่วยอธิบาย y_{1t}

สมการ

Dynamic relationship $\neq 0$

SET

$$y_{1t} = c_1 + \phi^1_{11} y_{1t-1} + \phi^1_{12} y_{2t-1} + \varepsilon_{1t}$$

DJ

$$y_{2t} = c_2 + \phi^1_{21} y_{1t-1} + \phi^1_{22} y_{2t-1} + \varepsilon_{2t}$$

— พยากรณ์ y_{1t} ได้ดีขึ้น

ความสัมพันธ์ระหว่าง y_{1t} กับ y_{2t}

$\neq 0$ แรงกระตุ้น y_{1t-1} มีอิทธิพลในทางอ้อม y_{2t}

โดยที่ $Cov(\varepsilon_{1t}, \varepsilon_{2s}) = \sigma_{12}$ ถ้า $s = t$ และ $Cov(\varepsilon_{1t}, \varepsilon_{2s}) = 0$ ถ้า $s \neq t$

$\boxed{\text{shock}}$ — ข้อสมมุติ

1) $E(\varepsilon_t) = 0 \rightarrow E(\varepsilon_{1t}) = 0$, $E(\varepsilon_{2t}) = 0$ ค่าเฉลี่ย = 0

$$\varepsilon_t = \begin{pmatrix} \varepsilon_{1t} \\ \varepsilon_{2t} \end{pmatrix}$$

2) $Var(\varepsilon_t) = E[\varepsilon_t \varepsilon_t'] = E\left[\underset{2\times 1}{\begin{pmatrix} \varepsilon_{1t} \\ \varepsilon_{2t} \end{pmatrix}} \underset{1\times 2}{\begin{pmatrix} \varepsilon_{1t} & \varepsilon_{2t} \end{pmatrix}}\right]$

ความสัมพันธ์ของ shock ตามแต่ละช่วงเวลา มีค่า = 0

คงที่ ณ ทุกค่า t

var-cov matrix ของ ε_t $= \begin{bmatrix} E(\varepsilon_{1t}^2) & E(\varepsilon_{1t}\varepsilon_{2t}) \\ E(\varepsilon_{2t}\varepsilon_{1t}) & E(\varepsilon_{2t}^2) \end{bmatrix} = \Sigma$ ซิกม่า

$\sigma_1^2 = var(\varepsilon_{1t})$

$\sigma_{12} = cov(\varepsilon_{1t}\varepsilon_{2t})$

$\sigma_2^2 = var(\varepsilon_{2t})$

3) $E[\varepsilon_t \varepsilon_s'] = 0 \quad t \neq s$ ($t-1$)

$$= \begin{bmatrix} E(\varepsilon_{1t}\varepsilon_{1s}) = 0 & E(\varepsilon_{1t}\varepsilon_{2s}) = 0 \\ E(\varepsilon_{2t}\varepsilon_{1s}) = 0 & E(\varepsilon_{2t}\varepsilon_{2s}) = 0 \end{bmatrix}$$

VAR < รูปเวกเตอร์ / สมการ

Reduced Form VAR – ข้อด้อย ไม่ได้บอกความสัมพันธ์ใน period เดียวกันชัดเจน

หรือเขียนเป็นรูปสมการของแต่ละตัวแปรที่เราสนใจ

VAR(1)

$$
\begin{aligned}
y_{1t} &= c_1 + \phi_{11}^1 y_{1t-1} + \phi_{12}^1 y_{2t-1} + \boxed{\varepsilon_{1t}} \\
y_{2t} &= c_2 + \phi_{21}^1 y_{1t-1} + \phi_{22}^1 y_{2t-1} + \boxed{\varepsilon_{2t}}
\end{aligned}
$$

var-cov matrix

$$
\Sigma = \begin{bmatrix} Var(\varepsilon_{1t}) & Cov(\varepsilon_{1t},\varepsilon_{2t}) \\ Cov(\varepsilon_{1t},\varepsilon_{2t}) & Var(\varepsilon_{2t}) \end{bmatrix}
$$

σ_{12}

โดยที่ $Cov(\varepsilon_{1t}, \varepsilon_{2s}) = \sigma_{12}$ ถ้า $s = t$ และ $Cov(\varepsilon_{1t}, \varepsilon_{2s}) = 0$ ถ้า $s \neq t$

ค่าสัมประสิทธิ์แต่ละตัวจะเป็นค่าที่บอกความสัมพันธ์ระหว่างตัวแปรที่ต่างเวลากัน

ช่วงเวลา แตกต่างกัน (Dynamic Relationship)

- ϕ_{12}^1 — y_{1t} จะ ปป. อย่างไร กับ $y_{2,t-1}$ เปลี่ยนแปลง 1 หน่วย.
- ϕ_{21}^1 — y_{2t} จะ ปป. อย่างไร กับ $y_{1,t-1}$ เปลี่ยนแปลง 1 หน่วย

ค่าสัมประสิทธิ์ในสมการ (5.2) อธิบายพลวัตของอนุกรมเวลาที่เราสนใจ (lead-lag) แต่มิได้อธิบาย concurrent หรือ contemporaneous ไว้อย่างชัดเจน

ใน period เดียวกัน — y_{1t} กับ y_{2t}

เราสามารถดูความสัมพันธ์ดังกล่าวได้ในเมทริกซ์ความแปรปรวนของช็อก Σ

เราเรียกแบบจำลองเวกเตอร์ออโตรีเกรสซีฟในรูป (5.2) ว่า**สมการในรูปลดรูป (reduced form)**

VAR

เราสามารถเขียนความสัมพันธ์ระหว่างอนุกรมเวลาในช่วงเดียวกันได้อย่างชัดเจน โดยใช้การแปลงรูปสมการที่ (5.2) ได้ดังนี้

เนื่องจาก $\boldsymbol{\Sigma}$ เป็นเมตริกซ์ positive definite ดังนั้นเราสามารถสร้างเมทริกซ์ lower triangular

Var-cov(ε)

ซึ่งแยกส่วนประกอบของ Σ

$$\boldsymbol{L} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ l_{21} & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ l_{n1} & l_{n2} & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

$$\underset{n \times n}{G} = \begin{pmatrix} g_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & g_2 & 0 \cdot & 0 \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & 0 & \cdots & g_n \end{pmatrix}$$

และเมตริกซ์แทยงมุม $\boldsymbol{G}$ ที่ทำให้ $\boxed{\boldsymbol{\Sigma} = \boldsymbol{LGL}'}$ เราเรียกการแยกส่วนประกอบนี้ว่า Cholesky decomposition

คูณ L^{-1} คือ Reduced form VAR(1)

ซึ่งจะเป็น lower triangular matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ l_{21} & 1 & & \\ l_{31} & l_{32} & 1 & \\ l_{n1} & l_{n2} & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

$$L^{-1} Y_t = L^{-1} C + L^{-1} \Phi_1 Y_{t-1} + \underbrace{L^{-1} \varepsilon_t}_{\eta_t}$$

$$\begin{pmatrix} \eta_{1t} \\ \vdots \\ \eta_{nt} \end{pmatrix}$$

VAR รูปแบบ Structural Form VAR

Shock ในระบบ

VAR

เราสามารถเขียนความสัมพันธ์ระหว่างอนุกรมเวลาในช่วงเดียวกันได้อย่างชัดเจน โดยใช้การแปลงรูปสมการที่ (5.2) ได้ดังนี้

เนื่องจาก $\boldsymbol{\Sigma}$ เป็นเมตริกซ์ positive definite ดังนั้นเราสามารถสร้างเมทริกซ์ lower triangular

$\operatorname{var}(\eta_{1t})$ ของ

$\operatorname{cov}(\eta_{it}\eta_{jt}) = 0 \;\forall\; i \neq j$ [Structural (form) shock ∴ ไม่มีความสัมพันธ์ระหว่างกัน]

$$G = \begin{pmatrix} g_1 & & 0 \\ & g_2 & \\ 0 & & \ddots \quad g_n \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{L} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ l_{21} & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ l_{n1} & l_{n2} & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

$\operatorname{var}(\eta_{nt})$

และเมตริกซ์แทยงมุม $\boldsymbol{G}$ ที่ทำให้ $\boldsymbol{\Sigma} = \boldsymbol{LGL}'$ เราเรียกการแยกส่วนประกอบนี้ว่า Cholesky decomposition

Structural form error term (shock) $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

structural form shock ซึ่งมีค่าเฉลี่ย = 0

กำหนดให้ $\boldsymbol{\eta}_t = \boldsymbol{L}^{-1}\varepsilon_t$ เราจะได้ว่า

$E(\boldsymbol{\eta}_t) = E(L^{-1}\varepsilon_t) = L^{-1}E(\varepsilon_t) = L^{-1}0 = 0$

$G = Var(\boldsymbol{\eta}_t) = Var(L^{-1}\varepsilon_t) = L^{-1}\,\underbrace{var(\varepsilon_t)}_{\Sigma}(L^{-1})' = L^{-1}\Sigma(L^{-1})' = \underbrace{L^{-1}L}_{I}G\underbrace{L'(L^{-1})'}_{I}$

ค่าคงที่

VAR

หากเราคูณข้างหน้าสมการ (5.1) ด้วย L^{-1} จะได้ $\,/\!/\; \eta_t$

$$L^{-1}Y_t = L^{-1}C + L^{-1}\Phi_1 Y_{t-1} + \underbrace{L^{-1}\varepsilon_t}$$

$$\underset{2\times2}{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ l^{21} & 1 \end{pmatrix}} \underset{2\times1}{\begin{pmatrix} y_{1t} \\ y_{2t} \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ l^{21} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} + \underset{2\times2}{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ l^{21} & 1 \end{pmatrix}} \underset{2\times2}{\begin{pmatrix} \phi_{11} & \phi_{12} \\ \phi_{21} & \phi_{22} \end{pmatrix}} \begin{pmatrix} y_{1t-1} \\ y_{2t-1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \eta_{1t} \\ \eta_{2t} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} y_{1t} \\ l^{21}y_{1t} + y_{2t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \\ \underbrace{c_1 l^{21} + c_2}_{c_2^*} \end{pmatrix} + \underset{2\times2}{\begin{bmatrix} \phi_{11}^* & \phi_{12}^* \\ \phi_{21}^* & \phi_{22}^* \end{bmatrix}} \begin{pmatrix} y_{1t-1} \\ y_{2t-1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \eta_{1t} \\ \eta_{2t} \end{pmatrix}$$

Structural form VAR

$\Downarrow$

y_{1t} กับ y_{2t} ถูกอธิบายด้วยซึ่งกันและกัน

$$l^{21}y_{1t} + y_{2t} = c_2^* + \phi_{21}^* y_{1t-1} + \phi_{22}^* y_{2t-1} + \eta_{2t}$$

$$y_{2t} = c_2^* - \boxed{l^{21}}\, y_{1t} + \underbrace{\phi_{21}^* y_{1t-1} + \phi_{22}^* y_{2t-1}} + \eta_{2t}$$

Dynamic Relationship (lead-lag)

ความสัมพันธ์ใน period เดียวกัน

เช่น $l^{21} < 0 \Rightarrow y_{2t}$ กับ y_{1t} มีความสัมพันธ์ในทิศทางตรงข้ามกัน

Contemporanous relationship.

VAR

หากเราคูณข้างหน้าสมการ (5.1) ด้วย $\boldsymbol{L}^{-1}$ จะได้

$\boldsymbol{L}^{-1}\boldsymbol{Y}_t =$

$\boldsymbol{L}^{-1}$ จะแสดงความสัมพันธ์ระหว่างอนุกรมเวลาในคาบเดียวกัน

เราเรียกแบบจำลองเวกเตอร์ออโตรีเกรสซีฟในรูปนี้ว่า**สมการในรูปโครงสร้าง (structural equation)**

ตัวอย่างที่ 5.1 ดูใน lecture note.

กำหนด Bivariate VAR(1)) สามารถแสดงในรูปลดรูปได้ดังนี้

$$\begin{pmatrix} y_{1t} \\ y_{2t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.2 \\ 0.4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0.2 & 0.3 \\ -0.6 & 1.1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_{1,t-1} \\ y_{2,t-1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \varepsilon_{1t} \\ \varepsilon_{2t} \end{pmatrix}$$

โดยที่ $\Sigma = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow L G L'$

VAR ⇒ 2 รูปแบบ < Reduced form VAR ⇒ Y_t ขึ้นกับ $Y_{t-1}, \ldots$
Structural form VAR ⇒ ความสัมพันธ์ Y_t อย่างชัดเจน

Reduced form

- เราจะเห็นได้ว่าเราสามารถแปลงแบบจำลองเวกเตอร์ออโตรีเกรสซีฟในรูปลดรูปไปเป็นรูปโครงสร้าง (Structural) ได้ด้วย Cholesky decomposition แยก $\Sigma = L G L'$
- อย่างไรก็ตามในการวิเคราะห์อนุกรมเวลาเรามักจะใช้สมการในรูป Reduced form เนื่องจากเป็นรูปที่ง่ายในการประมาณค่า
- เรามักจะเน้นผลในการพยากรณ์ของแบบจำลองซึ่งเราไม่สามารถใช้แบบจำลองในรูปโครงสร้างพยากรณ์ข้อมูลได้เนื่องจากเราไม่ทราบข้อมูลของอนุกรมเวลาอื่นๆในคาบเดียวกัน

เพราะใช้ Reduced form VAR ในการพยากรณ์

(มีข้อมูลจาก period ก่อน)

เงื่อนไขการเป็นอนุกรมเวลานิ่ง (Stationary)

แบบจำลอง $VAR(p)$ สามารถเขียนในรูปเครื่องหมายขยับไปข้างหลัง (lag operator) ได้ดังนี้

$$\boldsymbol{\Phi}(L)\boldsymbol{Y}_t = \boldsymbol{c} + \boldsymbol{\varepsilon}_t$$

โดยที่ $\boldsymbol{\Phi}(L) = \boldsymbol{I}_n - \boldsymbol{\Phi}_1 L - \ldots - \boldsymbol{\Phi}_p L^p$ แบบจำลอง $VAR(p)$ จะมีเสถียรภาพถ้าราก ของ

$$\det(\boldsymbol{I}_n - \boldsymbol{\Phi}_1 z - \ldots - \boldsymbol{\Phi}_p z^p) = 0$$

มีค่ามากกว่าหนึ่ง (หรือโมดูลัสมากกว่าหนึ่งในกรณีจำนวนเชิงซ้อน) ถ้าสมมุติให้กระบวนการดังกล่าวมีค่าในอดีตที่เป็นอนันต์ แล้วกระบวนการ $VAR(p)$ ที่มีเสถียรภาพจะเป็นกระบวนการนิ่งและ ergodic โดยมีค่าเฉลี่ย ค่าความแปรปรวนและค่าความแปรปรวนร่วมในตัวเองที่ไม่ขึ้นกับเวลา

การประมาณค่า → Reduced form

VAR(1)

$$y_{1t} = c_1 + \phi_{11} y_{1t-1} + \phi_{12} y_{2,t-1} + \varepsilon_{1t}$$

สมการ

$$y_{2t} = c_2 + \phi_{21} y_{1t-1} + \phi_{22} y_{2,t-1} + \varepsilon_{2t}$$

การเราพิจารณาสมการ (5.1) แต่ละสมการจะมีตัวแปรที่เหมือนกัน เราสามารถพิจารณาสมการสำหรับแต่ละตัวแปรออกเป็น

เราสามารถใช้ OLS ประมาณ ทีละ: สมการ

$$\boldsymbol{y}_i = \boldsymbol{Z}\boldsymbol{\phi}_i + \boldsymbol{e}_i, \qquad i = 1, \ldots, n$$

แต่ละสมการสามารถประมาณค่าได้ด้วย ordinary least squares (OLS) แยกแต่ละสมการ และจะได้ $\hat{\boldsymbol{\Phi}} = \left[\hat{\phi}_1, \ldots, \hat{\phi}_n\right]$ เป็นเมตริกซ์ $(k \times n)$ ของค่าสัมประสิทธิ์จากการประมาณค่าด้วย OLS

ภายใต้ข้อสมมุติที่แบบจำลองเป็นแบบกระบวนการนิ่งและ ergodic เราจะได้ $vec(\hat{\Phi})$ มีคุณสมบัติ consistent และมีการแจกแจงแบบปกติเมื่อกลุ่มตัวอย่างใหญ่โดยมีเมตริกซ์ค่าความแปรปรวนเท่ากับ

$$\widehat{aver}(vec(\hat{\Phi})) = \hat{\boldsymbol{\Sigma}} \otimes (\boldsymbol{Z}'\boldsymbol{Z})^{-1}$$

โดยที่ $\hat{\Sigma} = \frac{1}{T-k}\sum_{t=1}^{T} \hat{\varepsilon}_t \hat{\varepsilon}_t'$ และ $\hat{\varepsilon}_t = \boldsymbol{Y}_t - \hat{\boldsymbol{\Phi}}' \boldsymbol{Z}_t$ เป็น residuals จากการประมาณค่า

การเลือกจำนวนความล่าที่เหมาะสม

order

VAR(p) ⇒ Information Criteria

AIC
BIC

การหาความล่าที่เหมาะสมของแบบจำลองเวคเตอร์ออโตรีเกรสซีฟอาจจะทำได้โดยการใช้สูตรการเลือกความล่า โดยการประมาณค่าแบบจำลองเวคเตอร์ออโตรีเกรสซีฟที่มีความล่าเท่ากับ $0, 1, \ldots, p_{max}$ แล้วเลือกค่า p ที่ทำให้ค่าที่ใช้เลือกมีค่าต่ำที่สุด โดยจะมีสูตรดังนี้

AIC, BIC

มักจะให้ p สูงกว่า BIC

$$IC(p) = \ln|\tilde{\Sigma}(p)| + c_T(n,p)$$

โดยที่ $\tilde{\Sigma}(p) = T^{-1}\sum_{t=1}^{T}\hat{\varepsilon}_t\hat{\varepsilon}_t'$ คือ residual covariance matrix จาก $VAR(p)$, c_T คือลำดับที่ขึ้นกับจำนวนตัวอย่าง

$$AIC(p) = \ln|\tilde{\Sigma}(p)| + \frac{2}{T}(pn^2)$$

$$BIC(p) = \ln|\tilde{\Sigma}(p)| + \frac{\ln T}{T}(pn^2)$$

$$HQIC(p) = \ln|\tilde{\Sigma}(p)| + \frac{2\ln(\ln T)}{T}(pn^2)$$

ตัวอย่าง 5.2

daily log return

ในตัวอย่างนี้เราจะพิจารณาความสัมพันธ์ระหว่างผลได้ตอบแทนรายวันจากการลงทุนในตลาดหลักทรัพย์แห่งประเทศไทย (lret_set) และตลาดหุ้นดาวโจนส์ (lret_dowjones) ข้อมูลอยู่ในไฟล์ set_dj.csv)

เราจะได้ข้อมูลสองชุดคือ lret_set และ lret_dowjones เราจะเขียนข้อมูลทั้งสองในรูปของเมตริกซ์ที่นำเวกเตอร์ทั้งสองมาต่อกันโดยใช้คำสั่ง cbind column

$$lret = \begin{bmatrix} lret\_set & lret\_dowjones \\ & \end{bmatrix}$$

```
> lret<-cbind(lret_set, lret_dowjones)
```

เราสามารถพิจารณาค่าสถิติเบื้องต้นได้จากคำสั่ง basicStats และ acf เหมือนกับที่เราเคยใช้ในหัวข้อก่อนได้

$$VAR(p) \quad \text{ของ} \quad Y_t = \begin{bmatrix} lret\_set_t \\ lret\_DowJones_t \end{bmatrix}$$

ตัวอย่าง

หากเราต้องการประมาณค่า VAR(p) เราจะใช้ `library(vars)` โดยที่เราอาจจะเริ่มจากการหาค่า p ที่เหมาะสมโดยการใช้คำสั่ง `VAR` พร้อมระบุเมตริกซ์ของข้อมูล `lret` จำนวนค่าล่าสูงสุด `lag.max` และ เกณฑ์ในการเลือกค่าล่า `ic=c("AIC")` โดยที่ `"SC"` จะแทน Schwarz-Bayesian (BIC) และ `"HQ"` Hannan-Quinn (HQIC)

ข้อมูล $P_{max}=10$ Info Criteria

```
> library(vars)
> msel=VAR(lret, lag.max=10, ic=c("AIC"))
> msel

VAR Estimation Results:
=======================

Estimated coefficients for equation lret_set:
=============================================
<Omitted>

     lret_set.l1 lret_dowjones.l1       lret_set.l2 lret_dowjones.l2
      0.05556382       0.22898590       -0.33541086       0.32270310
     lret_set.l3 lret_dowjones.l3       lret_set.l4 lret_dowjones.l4
      0.01244410       0.21790099       -0.13694929       0.17900004
     lret_set.l5 lret_dowjones.l5       lret_set.l6 lret_dowjones.l6
     -0.01107252       0.04790222       -0.06473588       0.12631799
     lret_set.l7 lret_dowjones.l7       lret_set.l8 lret_dowjones.l8
      0.01517100       0.05964304       -0.02897568       0.02785310
     lret_set.l9 lret_dowjones.l9             const
      0.03837222       0.08783703       -0.00332124
```

AIC เลือก ที่ VAR(9)

$lret\_set_{t-1}$ $lret\_Dowjones_{t-1}$

$lret\_dowjones_{t-9}$

ตัวอย่าง 5.2

ลองใช้ "SC" [BIC] มักจะให้ order น้อยกว่า AIC(<9)

p=4

$Y = \begin{pmatrix} lret\_set \\ lret\_Dowjones \end{pmatrix}$

ข้อมูล

```
> model1=VAR(lret, p=4)
> summary(model1)

VAR Estimation Results:
=========================
Endogenous variables: lret_set, lret_dowjones
Deterministic variables: const
Sample size: 3803
Log Likelihood: -15650.859
Roots of the characteristic polynomial:
 0.62  0.62 0.5867 0.5867 0.3557 0.3557 0.2886 0.2886
Call:
VAR(y = lret, p = 4)


Estimation results for equation lret_set:
=========================================
lret_set = lret_set.l1 + lret_dowjones.l1 + lret_set.l2 + lret_dowjones.l2 +
     lret_set.l3 + lret_dowjones.l3 + lret_set.l4 + lret_dowjones.l4 + const

                  Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
lret_set.l1       0.059621   0.016288   3.660 0.000255 ***
lret_dowjones.l1  0.222804   0.032471   6.862 7.91e-12 ***
lret_set.l2      -0.320847   0.016256 -19.738  < 2e-16 ***
lret_dowjones.l2  0.313004   0.032696   9.573  < 2e-16 ***
lret_set.l3       0.023840   0.016122   1.479 0.139313
lret_dowjones.l3  0.205041   0.032958   6.221 5.47e-10 ***
lret_set.l4      -0.103471   0.016011  -6.462 1.16e-10 ***
lret_dowjones.l4  0.151876   0.032994   4.603 4.30e-06 ***
const             0.002529   0.043532   0.058 0.953684
---
Signif. codes:  0 ‘***’ 0.001 ‘**’ 0.01 ‘*’ 0.05 ‘’. 0.1 ‘’  1


Residual standard error: 2.683 on 3794 degrees of freedom
Multiple R-Squared: 0.1409,^^IAdjusted R-squared: 0.1391
F-statistic: 77.78 on 8 and 3794 DF,  p-value: < 2.2e-16
```

กำหนดให้ VAR(4) ระยะ

$lret\_set_t =$

t-1

t-4

ส่วนใหญ่ แตกต่างจาก 0 อย่างมีนัยสำคัญ แสดงว่า set, dowjones ในอดีต มีผลกระทบต่อ set

$lret\_Dowjones =$

ตัวอย่าง 5.2

$$\hat{\Sigma}_t = \begin{bmatrix} \widehat{var}(lret\_set_t) & \widehat{cov}(lret\_set_t, lret\_DJ_t) \\ \widehat{cov}(\quad) & \widehat{var}(lret\_set_t) \end{bmatrix}$$

```
Estimation results for equation lret_dowjones:
==============================================
<omitted>

Covariance matrix of residuals:
              lret_set  lret_dowjones
lret_set         7.199         -0.556
lret_dowjones   -0.556          1.839

Correlation matrix of residuals:
              lret_set  lret_dowjones
lret_set        1.0000        -0.1528
lret_dowjones  -0.1528         1.0000
```

$\widehat{var}(lret\_set_t)$

$\widehat{var}(lret\_DJ_t)$

$\Rightarrow lret\_set_t,\ lret\_DJ_t$

$\widehat{cov}(\varepsilon_{set}, \varepsilon_{DJ}) = -0.556$ ความสัมพันธ์ จุดทิศทาง ตรงข้าม

- $var(lret\_set)$ สูงกว่า $var(lret\_DJ)$ ⇒ ความผันผวน

→ ผลจาก Reduced form VAR ไม่แสดงความสัมพันธ์ $lret\_set_t$ กับ $lret\_DJ_t$ อย่างชัดเจน

$lret\_set_t = 0.059\ lret\_set_{t-1} + \ldots$

$lret\_DJ_t = \ldots$

การใช้ประโยชน์จาก VAR(p)

1) พยากรณ์ ตัวแปร Y_t $\quad h \rightarrow h+1$

2) อธิบายความสัมพันธ์ระหว่างตัวแปร ในแบบจำลอง VAR(p) / Dynamic

การพยากรณ์จากแบบจำลอง *VAR*

[แนวคิด AR(p)] $h \rightarrow h+1$

แบบจำลอง VAR(1) $Y_t = \Phi Y_{t-1} + \varepsilon_t$

(1) หากเราพิจารณาแบบจำลอง $VAR(p)$ โดยที่เราทราบค่าพารามิเตอร์ $\boldsymbol{\Phi}$ ค่าพยากรณ์ไปข้างหน้าหนึ่งคาบ $\boldsymbol{Y}_{h+1}$ ด้วยข้อมูลที่มี ณ คาบที่ h ได้ด้วยการเขียนสมการแสดงค่า $\boldsymbol{Y}_{h+1} = \Phi Y_h + \varepsilon_{h+1}$

(2) แล้วหา conditional expectation ด้วยข้อมูล ณ h เราจะได้ค่าพยากรณ์เท่ากับ

ตัวแปร Y1

$$\widehat{\boldsymbol{Y}}_h(1) = E(Y_{h+1} \mid F_h) = E(\Phi Y_h + \varepsilon_{h+1} \mid F_h) = \Phi Y_h + \underbrace{E(\varepsilon_{h+1} \mid F_h)}_{=0} = \Phi Y_h = \begin{pmatrix} \phi_{11} & \phi_{12} \\ \phi_{21} & \phi_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Y_{1h} \\ Y_{2h} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \hat{Y}_{1h}(1) \\ \hat{Y}_{2h}(1) \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \phi_{11} Y_{1h} + \phi_{12} Y_{2h} \\ \phi_{21} Y_{1h} + \phi_{22} Y_{2h} \end{bmatrix}$$

ใช้ Y_{1h}, Y_{2h} ในการพยากรณ์ ⇓ พยากรณ์ได้เลย

โดยที่ค่าความผิดพลาดจากการพยากรณ์ (forecast error) เท่ากับ

ค่าจริง ค่าพยากรณ์

$$\begin{pmatrix} e_1(1) \\ e_2(1) \end{pmatrix} = \boldsymbol{e}(1) = \boldsymbol{Y}_{h+1} - \widehat{\boldsymbol{Y}}_h(1) = (\cancel{\Phi Y_h} + \varepsilon_{h+1}) - (\cancel{\Phi Y_h}) = \varepsilon_{h+1} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{1,h+1} \\ \varepsilon_{2,h+1} \end{pmatrix}$$

ตัวแปร Y2

ค่าพยากรณ์ไปข้างหน้าสองคาบ $\boldsymbol{Y}_{h+2}$ ด้วยข้อมูลที่มี ณ คาบที่ h จะเท่ากับ

$$\widehat{\boldsymbol{Y}}_h(2) = E(Y_{h+2} \mid F_h) = E[\Phi Y_{h+1} + \varepsilon_{h+2} \mid F_h] = \Phi E(Y_{h+1} \mid F_h) + \underbrace{E(\varepsilon_{h+2} \mid F_h)}_{=0}$$

$$= \Phi \hat{Y}_h(1) = \Phi(\Phi Y_h) = \Phi^2 Y_h$$

โดยที่ค่าความผิดพลาดจากการพยากรณ์ (forecast error) เท่ากับ

$$\boldsymbol{e}(2) = \boldsymbol{Y}_{h+2} - \widehat{\boldsymbol{Y}}_h(2) = (\Phi Y_{h+1} + \varepsilon_{h+2}) - \Phi^2 Y_h$$

$$\Phi(\Phi Y_h + \varepsilon_{h+1})$$

$$= (\cancel{\Phi^2 Y_h} + \Phi \varepsilon_{h+1} + \varepsilon_{h+2}) - \cancel{\Phi^2 Y_h}$$

$$\boxed{e(2) = \Phi \varepsilon_{h+1} + \varepsilon_{h+2}}$$

[สร้างค่าพยากรณ์ได้ง่าย]

$$\hat{Y}_h(\ell) = \Phi^{\ell} Y_h$$

การพยากรณ์จากแบบจำลอง *VAR*

forecast error ของ $\widehat{Y}_h(2)$

$$\begin{pmatrix} e_1(2) \\ e_2(2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \phi_{11}\varepsilon_{1,h+1} + \phi_{12}\varepsilon_{2,h+1} + \varepsilon_{1,h+2} \\ \phi_{21}\varepsilon_{1,h+1} + \phi_{22}\varepsilon_{2,h+1} + \varepsilon_{2,h+2} \end{pmatrix}$$

forecast error ของตัวแปรใดก็ได้ อธิบายด้วย shock จากทุกตัวแปร

หากแทนค่าด้วยวิธีการ recursive จะได้ค่าพยากรณ์ไปข้างหน้า l คาบ $\boldsymbol{Y}_{h+l}$ ด้วยข้อมูลที่มี ณ คาบที่ h เท่ากับ

$$\widehat{\boldsymbol{Y}}_h(l) = \boldsymbol{c} + \boldsymbol{\Phi}_1\widehat{\boldsymbol{Y}}_h(l-1) + \ldots + \boldsymbol{\Phi}_p\widehat{\boldsymbol{Y}}_h(l-p)$$

ค่าคาดเคลื่อนของการพยากรณ์ (forecast errors) จะเขียนในรูป $\widehat{\boldsymbol{Y}}_h(l) - \boldsymbol{Y}_{h+l} = \sum_{s=0}^{l-1}\boldsymbol{\Psi}_s\boldsymbol{\varepsilon}_{h+l-s}$

โดยที่เมตริกซ์ $\boldsymbol{\Psi}_s$ สามารถคำนวณได้โดย $\boldsymbol{\Psi}_s = \sum_{j=1}^{p-1}\boldsymbol{\Psi}_{s-j}\boldsymbol{\Phi}_j$

ในขณะที่ MSE ของ $\widehat{\boldsymbol{Y}}_h(l)$ จะเท่ากับ

$$\boldsymbol{\Sigma}(l) = MSE(Y_{h+l} - \widehat{\boldsymbol{Y}}_h(l)) = \sum_{s=0}^{l-1}\boldsymbol{\Psi}_s\boldsymbol{\Sigma}\boldsymbol{\Psi}_s'$$

- Var ของ forecast Error ของพยากรณ์ 1 period

$$Var(e(1)) = E(e(1)e(1)') = E(\varepsilon_{h+1}\varepsilon_{h+1}') = Var(\varepsilon_{h+1}) = \Sigma$$

- Var ของ forecast error ของ 2 period

$$Var(e(2)) = E(e(2)e(2)')$$
$$= E[(\Phi\varepsilon_{h+1}+\varepsilon_{h+2})(\Phi\varepsilon_{h+1}+\varepsilon_{h+2})']$$
$$= E[(\Phi\varepsilon_{h+1}+\varepsilon_{h+2})(\varepsilon_{h+1}'\Phi'+\varepsilon_{h+2}')]$$
$$= \Phi\underbrace{E(\varepsilon_{h+1}\varepsilon_{h+1}')}_{\Sigma}\Phi' + \underbrace{E[\varepsilon_{h+2}\varepsilon_{h+2}']}_{\Sigma} + 0$$

Var ของ forecast error เมื่อห่างจาก h

$$Var(e(2)) = \underline{\underset{2\times 2}{\Phi\Sigma\Phi'} + \underset{2\times 2}{\Sigma}}$$

ตัวอย่าง 5.3

ต่อเนื่องจากตัวอย่าง 5.2 เราสามารถทำนายผลได้ตอบแทนไปข้างหน้าของทั้งสองตลาดที่เราสนใจได้ด้วยคำสั่ง `predict` โดยระบุแบบจำลองที่ใช้และคาบที่ทำนายไปข้างหน้า

VAR(4)   พยากรณ์ออกไป 5 period

```
> model1.predict=predict(model1, n.ahead=5)
> model1.predict
$lret_set
            fcst       lower    upper       CI
[1,]  0.23354446 -5.025286 5.492375 5.258830
[2,] -0.01504318 -5.311043 5.280957 5.296000
[3,]  0.08053962 -5.572718 5.733797 5.653258
[4,] -0.02118987 -5.682718 5.640339 5.661528
[5,] -0.04475454 -5.707153 5.617644 5.662399

$lret_dowjones
             fcst      lower    upper       CI
[1,] -0.046835523 -2.705029 2.611358 2.658193
[2,]  0.023569365 -2.639844 2.686983 2.663413
[3,]  0.005536266 -2.686514 2.697586 2.692050
[4,]  0.021958580 -2.670142 2.714059 2.692101
[5,]  0.031192947 -2.661288 2.723674 2.692481
```

$\hat{y}_h(\ell)$ $\hat{y}_h(1) - 1.96 \cdot se(\hat{y}_h(1))$ $se(e(1))$ $\hat{y}_{1h}(1) + 1.96\, se(\hat{y}_{1h}(1))$

1 period   5 period

เราไม่สามารถพิจารณาความสัมพันธ์ของตัวแปรใน VAR ได้จากเมทริกซ์สัมประสิทธิ์ (Φ) ได้โดยตรง – อ่านค่าจาก Φ บอกได้เลย (lag และทิศทาง เชื่อมโยง)

เครื่องมือช่วยในการอธิบาย VAR
1) Granger Causality 2) Impulse Response Function 3) Variance Decomposition

(1) เหมือน Y_t / ตามเป็นเหตุเป็นผล

Regression สัมพันธ์จากทฤษฎี $X \rightarrow Y$

ร่วมกัน Causality ของตัวแปร

P Cause Q^d

Sim Demand

Granger Causality

ในกรณี VAR ลักษณะไม่ได้ตั้งอยู่บนทฤษฎี (Atheoretical)

โครงสร้างของแบบจำลอง VAR ช่วยให้ข้อมูลกับเราว่าตัวแปรหรือกลุ่มของตัวแปรมีความสามารถในการทำนายตัวแปรอื่นหรือไม่

Granger (1969) เสนอว่า → $y_{2t} = \phi_{22} y_{2t-1} + \phi_{21} y_{1,t-1} + \varepsilon_{2t}$

- ถ้าตัวแปร y_1 ช่วยในการทำนายตัวแปรอื่น y_2 เราจะเรียกว่า y_1 แกรงเจอรคอส (Granger-cause) y_2 [เราไม่สามารถบอกได้ว่า Y_1 เปลี่ยนทำให้ Y_2 เปลี่ยน] Cause
- ถ้า y_1 ไม่ช่วยในการทำนายตัวแปร y_2 เราจะพูดว่า y_1 ไม่แกรงเจอรคอส (does not Granger-cause) y_2

เราจะต้องระลึกไว้อยู่เสมอว่าแกรงเจอรคอสเป็นการอนุมานไปยังความสามารถในการพยากรณ์เท่านั้น ไม่ได้เป็นความเป็นเหตุเป็นผลจริงๆของตัวแปร

Economic Causality (ต้องมาจากทฤษฎี)

VAR(1)

เราทดสอบ Granger Causality (ช่วยในการพยากรณ์)

H_0: ไม่ช่วยในการพยากรณ์ (Y_1 ไม่ G.C. Y_2) $\phi_{21} = 0$

H_1: Y_1 ช่วยในการพยากรณ์ Y_2 (Y_1 G.C. Y_2) $\phi_{21} \neq 0$

t-test ในการทดสอบ

Granger Causality

ในหัวข้อนี้เราพิจารณาแบบจำลอง $VAR(2)$ ที่มีตัวแปรสองตัว ซึ่งสามารถเขียนเป็นสมการได้ดังนี้

Y_{2t} G.C. Y_{1t} หรือไม่ [Y_{2t} G.C. Y_{1t}]

$H_0: \phi^1_{12} = \phi^2_{12} = 0$ vs H_1: มีตัวใดตัวหนึ่ง $\phi^1_{12}, \phi^2_{12} \neq 0$

[Y_{2t} ไม่ G.C. Y_{1t}] ⇒ ใช้ F-test, Wald

$$\begin{pmatrix} y_{1t} \\ y_{2t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \phi^1_{11} & \phi^1_{12} \\ \phi^1_{21} & \phi^1_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_{1t-1} \\ y_{2t-1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \phi^2_{11} & \phi^2_{12} \\ \phi^2_{21} & \phi^2_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_{1t-2} \\ y_{2t-2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \varepsilon_{1t} \\ \varepsilon_{2t} \end{pmatrix} \tag{5.13}$$

- หาก y_{2t} ไม่แกรงเจอรคอส y_{1t} ค่าสัมประสิทธิ์ ϕ^1_{12} และ ϕ^2_{12} จะมีค่าเท่ากับศูนย์
- ถ้า y_{1t} ไม่แกรงเจอรคอส y_{2t} ค่าสัมประสิทธิ์ ϕ^1_{21} และ ϕ^2_{21} จะมีค่าเท่ากับศูนย์

ดังนั้นในการทดสอบว่า y_{2t} แกรงเจอร์คอส y_{1t} หรือไม่ เราจะตั้งสมมุติฐานหลักว่า $H_0 : \phi^1_{12} = \phi^2_{12} = 0$ และสมมุติฐานทางเลือกคือมีสัมประสิทธิ์ ϕ^1_{12} หรือ ϕ^2_{12} ตัวใดตัวหนึ่งมีค่าไม่เท่ากับศูนย์ ซึ่งการทดสอบดังกล่าวคือการทดสอบ F นั่นเอง (Wald)

ตัวอย่าง 5.4

lret_Dowjones $\xrightarrow{G.C.}$ lret_set หลังจากประมาณค่า VAR

ต่อเนื่องจากตัวอย่าง 5.3 เราต้องการทดสอบว่า `lret_dowjones` แกรงเจอร์คอส `lret_set` หรือไม่ (

เราสามารถทดสอบโดยใช้คำสั่ง `causality` โดยที่เราจะต้องระบุแบบจำลองที่ใช้และตัวแปรที่เป็นสาเหตุ (cause) ซึ่งในที่นี้คือ `lret_dowjones`

แบบจำลอง VAR(4)

$$lret\_set_t = \hat{\phi}_1 lret\_set_{t-1} + \dots + \hat{\phi}_4 lret\_set_{t-4} + \hat{\phi}_5 lret\_dowjone_{t-1} + \dots + \hat{\phi}_8 lret\_dowjone_{t-4}$$

```
> causality(model1, cause="lret_dowjones")
$Granger
^^IGranger causality H0: lret_dowjones do not Granger-cause lret_set
data:  VAR object model1
F-Test = 43.5947, df1 = 4, df2 = 7588, p-value < 2.2e-16

$Instant
^^IH0: No instantaneous causality between: lret_dowjones and lret_set
data:  VAR object model1
Chi-squared = 86.7677, df = 1, p-value < 2.2e-16
```

$H_0: \phi_5 = \phi_6 = \phi_7 = \phi_8 = 0$

[lret_dowjone ไม่ G.C. lret_set]

$H_1: \phi_5, \phi_6, \phi_7, \phi_8$ อย่างน้อย 1 ตัว $\neq 0$

F-stat = 43.59 > critical F

หรือ p-value < 0.05

เราปฏิเสธ Ho และยอมรับว่า lret_Dowjone G.C. lret_set

[ทราบว่า lret_dowjone ช่วยในการพยากรณ์ lret_set]

จุดอ่อน G.C. → เราไม่ทราบทิศทาง + ขนาดของความสัมพันธ์

→ ทราบแค่ Dynamic relationship

2

Impulse Response Function

ทิศทาง และ ขนาด ของ ความสัมพันธ์

พิจารณา ตัวแปรเป็นคู่ => ตัวแปรตัวหนึ่งเปลี่ยนแปลง (Impulse) กระตุ้น

ส่งผล ตัวแปรอีกตัวหนึ่ง (Response) ตอบสนอง

หรือการทดสอบแกรงเจอร์คอสช่วยระบุว่าตัวแปรใดๆมีผลกระทบอย่างมีนัยสำคัญต่อตัวแปรอื่นหรือไม่ อย่างไรก็ตาม การทดสอบดังกล่าวไม่ได้บอกทิศทางของความสัมพันธ์และระยะเวลาที่การเปลี่ยนแปลงของตัวแปรหนึ่งจะส่งผลต่ออีกตัวแปรว่าจะมีผลยาวนานแค่ไหน

impulse response function ซึ่งหมายถึง การตอบสนองของตัวแปรตาม(response)อันเนื่องมาจากการเปลี่ยนแปลงของตัวแปรอีกตัวหนึ่ง (impulse) โดยที่หากเกิดการเปลี่ยนแปลงในช็อกหนึ่งหน่วย (Impulse) จะส่งผลอย่างไรต่อแต่ละตัวแปรในคาบที่ต่อจากการเปลี่ยนแปลงนั้นๆ(เราอาจจะใช้การเปลี่ยนแปลงหนึ่ง s.d.)

shock ในตัวแปรอื่น และ คาบอื่นๆ มีค่าเท่ากับศูนย์

ตัวอย่างเช่น หากเราพิจารณาแบบจำลอง $VAR(1)$ ที่มีตัวแปรสองตัวแปร ซึ่งสามารถแสดงได้ด้วยสมการ

$$\begin{pmatrix} y_{1t} \\ y_{2t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.5 & 0.3 \\ 0.0 & 0.2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_{1t-1} \\ y_{2t-1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \varepsilon_{1t} \\ \varepsilon_{2t} \end{pmatrix} \qquad (5.14)$$

ค่า Y_1 ป.ป. 1 หน่วย → ส่งผลต่อ Y_2
(Impulse) (เกิดขึ้นใน period 0) (Response)

$Y_t = \begin{pmatrix} 0.5 & 0.3 \\ 0 & 0.2 \end{pmatrix} Y_{t-1} + \varepsilon_t$

$Y_0 = \begin{pmatrix} y_{10} \\ y_{20} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.5 & 0.3 \\ 0 & 0.2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cancel{y_{1,-1}} \\ \cancel{y_{2,-1}} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \varepsilon_{10} \\ \varepsilon_{20} \end{pmatrix}$ 0 สมมุติ

Impulse Response Function

สมมุติว่าเราพิจารณาว่าในปีที่ 0 เกิดช็อกในตัวแปร y_{1t} หนึ่งหน่วย ($\varepsilon_{10} = 1$) และช็อกในตัวแปร y_{2t} เท่ากับศูนย์ และช็อกในปีอื่นๆเท่ากับศูนย์ สมมุติให้ y_{1t} และ y_{2t} เท่ากับศูนย์ในปีก่อนหน้าปี 0 จะได้ว่า

$\varepsilon_{20} = 0$

$\varepsilon_{1,t} = 0, \ \varepsilon_{2,t} = 0 \quad \forall t = 1, 2, 3, \ldots$

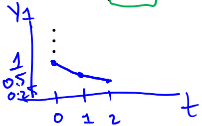
$y_{1,-1} = 0, \ y_{2,-1} = 0$ ง่าย

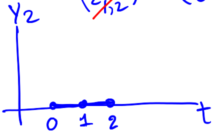
สมมุติ ไม่ shock ใน period อื่นๆ ≠ 0

$$\begin{pmatrix} y_{10} \\ y_{20} \end{pmatrix} = \boldsymbol{Y}_0 = \begin{pmatrix} \varepsilon_{10} \\ \varepsilon_{20} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{Y}_1 = \begin{pmatrix} 0.5 & 0.3 \\ 0.0 & 0.2 \end{pmatrix} \boldsymbol{Y}_0 + \begin{pmatrix} \cancel{\varepsilon_{11}} \\ \cancel{\varepsilon_{21}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.5 & 0.3 \\ 0 & 0.2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.5 + 0 \\ 0 + 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.5 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{Y}_2 = \begin{pmatrix} 0.5 & 0.3 \\ \boxed{0.0} & 0.2 \end{pmatrix} \boldsymbol{Y}_1 + \begin{pmatrix} \cancel{\varepsilon_{1,2}} \\ \cancel{\varepsilon_{2,2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.5 & 0.3 \\ 0 & 0.2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.5 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.25 \\ 0 \end{pmatrix}$$





การเปลี่ยนแปลงของ Y_1 ไม่ส่งผลต่อ Y_2

Impulse Response fn

Impulse - Y_1, Response - Y_2

Impulse Response Function

y_2 - impulse ($\varepsilon_{20}=1$) $\Rightarrow$ Response Y_1

$$\begin{pmatrix} y_{10} \\ y_{20} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.5 & 0.3 \\ 0 & 0.2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} y_{11} \\ y_{21} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.5 & 0.3 \\ 0 & 0.2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.3 \\ 0.2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} y_{12} \\ y_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.5 & 0.3 \\ 0 & 0.2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0.3 \\ 0.2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.21 \\ 0.04 \end{pmatrix}$$

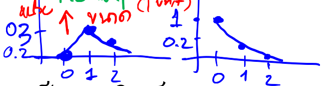
ในกรณี $VAR(p)$ ที่เป็นกระบวนการนิ่งใดๆ

ใน IRF เราสมมุติให้ shock ตัวใดตัวหนึ่ง = 1 และ ตัวอื่น = 0
เงื่อนไข คือ $Cov(\varepsilon_{1t}, \varepsilon_{2t}) = 0$
ในกรณีของ Reduced Form VAR มักจะมี $cov(\varepsilon_{1t}, \varepsilon_{2t}) \neq 0$

$$\boldsymbol{Y}_t = \boldsymbol{\mu} + \boldsymbol{\varepsilon}_t + \boldsymbol{\Psi}_1 \boldsymbol{\varepsilon}_{t-1} + \boldsymbol{\Psi}_2 \boldsymbol{\varepsilon}_{t-2} + \ldots$$

$$\frac{\partial y_{i,t+s}}{\partial \varepsilon_{j,t}} = \frac{\partial y_{i,t}}{\partial \varepsilon_{j,t-s}} = \psi_{i,j}^{s}$$

Y_1 Response ของ Y_1 ต่อ Impulse Y_2 ขนาด (1 unit)



อย่างไรก็ตามคำอธิบายข้างต้นจะเป็นจริงหาก $var(\varepsilon) = \boldsymbol{\Sigma}$ เป็นเมทริกซ์แทยงมุม ดังนั้นเรามักจะพิจารณา VAR ในรูป structural ซึ่ง เงื่อนไข $\boxed{Cov(\eta_{1t}, \eta_{2t}) = 0}$

$$\boldsymbol{B}\boldsymbol{Y}_t = \boldsymbol{c} + \boldsymbol{\Gamma}_1 \boldsymbol{Y}_{t-1} + \ldots + \boldsymbol{\Gamma}_p \boldsymbol{Y}_{t-p} + \boldsymbol{\eta}_t \qquad (5.17)$$

ข้อมูลเป็นอิสระต่อกัน.

โดยที่ Orthogonal error ($\boldsymbol{\eta}_t$) → การสมมุติให้ $\eta_{10} = 1$ และ $\eta_{20} = 0$ สมเหตุสมผล

โครงสร้างแบบจำลองโครงสร้าง (structural model) จะกำหนดให้ความสัมพันธ์ของตัวแปรมีลำดับคือ y_1 เป็นตัวกำหนด y_2 และ y_2 เป็นตัวกำหนด y_3 เป็นลำดับไป เรื่อยๆ ซึ่งใช้ทฤษฎีเป็นตัวกำหนด

ตัวอย่างที่ 5.5

เราจะสร้าง Impulse response function ด้วยคำสั่ง `irf` โดยที่ default ในคำสั่งนี้คือการสร้าง orthogonal impulse response function (`ortho=TRUE`)

การเรียงตัวแปรใน `lret` ที่เรียง `lret_set` ก่อน `lret_dowjones`

VAR

Period

```
> model1.irf=irf(model1, n.ahead=10)
> model1.irf
Impulse response coefficients
$lret_set
         lret_set  lret_dowjones
[1,]   2.6831259181 -0.2072364167
[2,]   0.1137971489  0.0030468719
[3,]  -0.9182763350  0.1667746830
<omitted>
[11,]  0.0030760182 -0.0002311969
$lret_dowjones
         lret_set  lret_dowjones
[1,]   0.0000000000  1.3403194745
[2,]   0.2986284632 -0.0849824924
[3,]   0.4183950540 -0.1100409438
<omitted>
[11,]  0.0006173344 -0.0002757296
```

Impulse

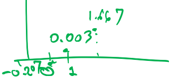
1 S.D.

Structural form VAR

t=0

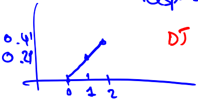
Response ของ Dowjones ต่อ SET

lret_DJ



Response ของ SET ต่อ DJ

DJ ↑ → SET ↑



VAR เครื่องมือ อธิบายความสัมพันธ์

1) Granger Causality

2) Impulse Response Function

(3) Variance Decomposition

Forecast Error Variance Decomposition จากข้อมูล ณ คาบที่ h เราต้องการตอบคำถามว่าช็อกโครงสร้าง η_j เป็นที่มาของความแปรปรวนของค่าผิดพลาดจากการพยากรณ์ $y_{i,h+l}$ ในสัดส่วนเท่าใด

หากเราพิจารณาเพียงตัวแปรเดียวเช่น $y_{i,h+l}$ เนื่องจากเมทริกซ์ค่าความแปรปรวนของช็อกโครงสร้างเป็นเมทริกซ์แทยงมุม

$$var(y_{i,h+l} - \widehat{y}_h(l)) = \sigma^2_{\eta_1} \sum_{s=0}^{l-1} (\theta^s_{i1})^2 + .. + \sigma^2_{\eta_n} \sum_{s=0}^{l-1} (\theta^s_{in})^2$$

สัดส่วนของ $var(y_{i,h+l} - \widehat{y}_h(l))$ อันมีสาเหตุมาจากช็อก η_j เท่ากับ

$$VD_{ij}(l) = \frac{\sigma^2_{\eta_j} \sum_{s=0}^{l-1} \left(\theta^s_{ij}\right)^2}{\sigma^2_{\eta_1} \sum_{s=0}^{l-1} \left(\theta^s_{i1}\right)^2 + .. + \sigma^2_{\eta_n} \sum_{s=0}^{l-1} \left(\theta^s_{in}\right)^2}, \qquad i,j = 1, ..., n \qquad (5.21)$$

ตัวอย่าง 5.6

เราสามารถแยกความแปรปรวนของค่าผิดพลาดจากการพยากรณ์ได้ด้วยคำสั่ง fevd

Stock Market Spillover

```
> fevd(model1, n.ahead = 5)
$lret_set
       lret_set  lret_dowjones
[1,] 1.0000000 0.00000000
[2,] 0.9877859 0.01221413
[3,] 0.9682396 0.03176043
[4,] 0.9655329 0.03446710
[5,] 0.9654222 0.03457779

$lret_dowjones
       lret_set  lret_dowjones
[1,] 0.02334830   0.9766517
[2,] 0.02326189   0.9767381
[3,] 0.03751278   0.9624872
[4,] 0.03751192   0.9624881
[5,] 0.03750568   0.9624943
```