

EC435

หัวข้อ 1: อนุกรรมเวลาทางการเงินและคุณลักษณะ

เฉลิมพงษ์ คงเจริญ ©2556-2562

คณะศรีราชาศาสตร์ มหาวิทยาลัยธรรมศาสตร์

วันที่ 16 สิงหาคม 2562



การคำนวณผลตอบแทน (return)

- ในการศึกษาทางการเงินส่วนมากเรามักจะสนใจผล ได้ตอบแทน (return) ของทรัพย์สินมากกว่าราคา (price)



การคำนวณผลตอบแทน (return)

- ในการศึกษาทางการเงินส่วนมากเรามักจะสนใจผลได้ตอบแทน(return)ของทรัพย์สินมากกว่าราคา (price)
- ผลได้ตอบแทนของทรัพย์สินมีความสมบูรณ์ (complete) และปราศจากผลของหน่วยวัดเพื่อที่จะใช้ในการประเมินโอกาสในการลงทุน เช่นการระบุว่าราคาเพิ่มขึ้น 10 บาทไม่ได้บอกว่าผลได้ตอบแทนนั้นดีหรือไม่ จำเป็นต้องระบุในรูปของผลได้ตอบแทนเป็นเปอร์เซนต์

การคำนวณผลตอบแทน (return)

- ในการศึกษาทางการเงินส่วนมากเรามักจะสนใจผลได้ตอบแทน(return)ของทรัพย์สินมากกว่าราคา (price)
- ผลได้ตอบแทนของทรัพย์สินมีความสมบูรณ์ (complete) และปราศจากผลของหน่วยวัดเพื่อที่จะใช้ในการประเมินโอกาสในการลงทุน เช่นการระบุว่าราคาเพิ่มขึ้น 10 บาทไม่ได้บอกว่าผลได้ตอบแทนนั้นดีหรือไม่ จำเป็นต้องระบุในรูปของผลได้ตอบแทนเป็นเปอร์เซนต์
- **อนุกรม (series)** ของผลได้ตอบแทนมีคุณสมบัติทางสถิติที่ดีกว่าอนุกรมของราคาในการดำเนินการทางสถิติ

นิยามของผลได้ตอบแทนของทรัพย์สิน

สมมุติให้การซื้อสินทรัพย์ เช่น หุ้น พันธบัตร หรือกองทุนรวม ในเวลา t_0 ด้วยราคา P_{t_0} บาทและขายสินทรัพย์ในเวลา t_1 ด้วยราคา P_{t_1} บาท ร้อยละของการเปลี่ยนแปลงของราคา

$$R(t_0, t_1) = \frac{P_{t_1} - P_{t_0}}{P_{t_0}} \quad (1)$$

เราจะเรียกระยะเวลาระหว่าง t_0 และ t_1 ว่าระยะเวลาการถือสินทรัพย์ (holding period)

เราจะสมมุติให้ระยะเวลาการถือมีลักษณะเพิ่มขึ้นเช่นเดียวกับปัจจุบัน เช่น รายนาที รายวัน รายเดือน หรือรายปี



One-month simple return $\frac{P_t - P_{t-1}}{P_{t-1}}$

กำหนดให้ P_t เป็นราคาของสินทรัพย์ ณ เวลาสิ้นเดือน t และไม่มีการจ่ายเงินปันผล และกำหนดให้ P_{t-1} เป็นราคาของสินทรัพย์ ณ เวลาสิ้นเดือน $t-1$

■ ผลได้ตอบแทนรวมอย่างง่ายหนึ่งเดือน (one-month simple gross return)

สามารถคำนวณได้ดังนี้

$$1 + R_t = \frac{P_t}{P_{t-1}} \quad (2)$$



One-month simple return

กำหนดให้ P_t เป็นราคาของสินทรัพย์ ณ เวลาสิ้นเดือน t และไม่มีการจ่ายเงินปันผล และกำหนดให้ P_{t-1} เป็นราคาของสินทรัพย์ ณ เวลาสิ้นเดือน $t-1$

■ ผลได้ตอบแทนรวมอย่างง่ายหนึ่งเดือน (one-month simple gross return)

สามารถคำนวณได้ดังนี้

$$1 + R_t = \frac{P_t}{P_{t-1}} \quad (2)$$

■ ผลได้ตอบแทนสุทธิอย่างง่ายหนึ่งเดือน (one-month simple net return) หรือ ผลได้ตอบแทนอย่างง่ายหนึ่งเดือน (one-month simple return)

$$R_t = \frac{P_t}{P_{t-1}} - 1 = \boxed{\frac{P_t - P_{t-1}}{P_{t-1}}} \quad (3)$$



ตัวอย่างที่ 1.1

สมมุติว่าเราพิจารณาการลงทุนในหุ้น APPLE โดยที่เราซื้อหุ้นเมื่อเดือน $t-1$ ด้วยราคา $P_{t-1} = 190$ ดอลลาร์และขายไปในเดือนต่อไปด้วยราคา $P_t = 200$ ดอลลาร์และไม่มีการจ่ายเงินปันผลในระหว่างที่เราถือหุ้น ดังนั้นผลได้ตอบแทนสุทธิและผลได้ตอบแทนอย่างง่ายรวมหนึ่งเดือนจะเท่ากับ

ເຄືອຂາຍ
one-month

Simple

Gross return

$$\frac{1+R_t}{P_t} = \frac{P_t}{P_{t-1}} = \frac{200}{190} \approx 1.0526$$

one-month

Simple (net)

return

$$R_+ = \frac{200 - 190}{190} \approx 0.0526$$

ผลได้ตอบแทนหลายเดือน

ผลได้ตอบแทนจากการลงทุนสองเดือนสามารถคำนวณได้จากการหาการเปลี่ยนแปลงของราคา ณ เดือน P_t และ P_{t-2} หรือผลได้ตอบแทนอย่างง่ายสองเดือน จะเท่ากับ

$$R_t(2) = \frac{P_t - P_{t-2}}{P_{t-2}}$$

$$R_t(2) = \frac{P_t}{P_{t-2}} - \left(\frac{P_{t-2}}{P_{t-2}} \right)$$

$$\underline{1+R_t(2)} = \frac{P_t}{P_{t-2}} = \frac{P_t}{P_{t-1}} \cdot \frac{P_{t-1}}{P_{t-2}}$$

$$\boxed{1+R_t(2)} = (1+R_t(1)) (1+R_{t-1}(1))$$

two-month simple gross return = *ผลตอบแทนสองเดือนโดยใช้ one-month simple gross return ที่รักษาตัวเดือน*

ผลได้ต่อบทแทนหลายเดือน

ผลได้ตอบแทนรวมอย่างง่ายสองเดือนจะเท่ากับ

$$1 + R_t(2) = (1 + R_t)(1 + R_{t-1}) = 1 + \cancel{R_t + R_{t-1}} + \cancel{R_t R_{t-1}} \quad (4)$$

ซึ่งคือการรวมเรขาคณิต (geometric sum) ของผลได้ตอบแทนรวมอย่างง่ายหนึ่งเดือน ของเดือน t และ $t-1$ ดังนั้นจะเห็นได้ว่า $R_t(2)$ จะไม่เท่ากับผลรวมของ R_t และ R_{t-1}

simple net return \downarrow forms the basis of the model (2)

\neq was \rightarrow simple net return
10% / 10%

ตัวอย่างที่ 1.2

พิจารณาต่อเนื่องจากตัวอย่าง 1.1 สมมุติให้เราซื้อหุ้น ณ เดือนที่ $t - 2$ ด้วยราคา $P_{t-2} = 180$ ดอลลาร์ และไม่มีการจ่ายเงินปันผล ผลได้ตอบแทนสุทธิสองเดือนจะเท่ากับ $\frac{P_t - P_{t-2}}{P_{t-2}} \times t$

$$\text{Simple net return} \quad R_t = \frac{P_t - P_{t-2}}{P_{t-2}} = \frac{200 - 180}{180} \approx 0.1111 \quad (11.11\%)$$

Simple Gross return. $1 + R_f(2) = 1.111$

ตัวอย่างที่ 1.2

โดยที่ผลได้ตوبแทนหนึ่งเดือนของแต่ละเดือนจะเท่ากับ

$$t-2 \rightarrow t-1 \quad 1 + \underline{R_{t-1}} = \frac{190}{180} = 1.0556$$

$$t-1 \rightarrow t \quad 1 + \frac{R_t}{\underline{R}} = \frac{200}{190} = 1.0526$$

และผลได้ต้องแทนรวมสองเดือนจะเท่ากับ

$$1 + R_t(2) = (1 + R_{t-1})(1 + R_t) = (1.0556)(1.0526) = 1.1111$$

$$R_+ + R_{+-} = 0.0526 + 0.0556$$

$$= 0.1082 \neq 0.1111 = R_+^{(2)}$$

ผลได้ตอบแทนของกลุ่มสินทรัพย์ลงทุน (Portfolio)

- ลงทุนด้วยเงินจำนวน V บาทในสินทรัพย์สองตัวคือ A และ B
- สัดส่วนการลงทุนในสินทรัพย์ทั้งสองตัวคือ x_A และ x_B $x_A + x_B = 1$
- ผลได้ตอบแทนอย่างง่ายหนึ่งเดือนของ A และ B คือ $R_{A,t}$ และ $R_{B,t}$
- ผลค่าของกลุ่มสินทรัพย์ลงทุนเมื่อสิ้นเดือนจะเท่ากับ

$$V \times [x_A(1 + R_{A,t}) + x_B(1 + R_{B,t})]$$

- ผลได้ตอบแทนรวมของกลุ่มสินทรัพย์ลงทุน และอัตราผลตอบแทนจากการลงทุนจะเท่ากับ

$$x_A R_{A,t} + x_B R_{B,t}$$

การปรับกรณีเงินปั่นผล

- ถ้าสินทรัพย์มีการจ่ายเงินปั่นผลเท่ากับ D_t ในช่วงเวลาระหว่างเดือน t และ $t - 1$



การปรับกรณีเงินปันผล

- ถ้าสินทรัพย์มีการจ่ายเงินปันผลเท่ากับ D_t ในช่วงเวลาระหว่างเดือน t และ $t - 1$
- การคำนวณผลได้ตอบแทนสุทธิทั้งหมด (total net return) สามารถทำได้โดย

$$R_t^{total} = \frac{(P_t + D_t) - P_{t-1}}{P_{t-1}} = \frac{P_t - P_{t-1}}{P_{t-1}} + \frac{D_t}{P_{t-1}} \quad (5)$$



การปรับกรณีเงินปันผล

- ถ้าสินทรัพย์มีการจ่ายเงินปันผลเท่ากับ D_t ในช่วงเวลาระหว่างเดือน t และ $t - 1$
- การคำนวณผลได้ตอบแทนสุทธิทั้งหมด (total net return) สามารถทำได้โดย

$$R_t^{total} = \frac{P_t + D_t - P_{t-1}}{P_{t-1}} = \frac{P_t - P_{t-1}}{P_{t-1}} + \frac{D_t}{P_{t-1}} \quad (5)$$

- โดยที่ส่วนแรกเป็น กำไรส่วนเกินทุน (capital gain) และส่วนที่สองคืออัตราผลตอบแทนเงินปันผล (dividend yield)

ปั้น 1-year simple return 6%
 ↓
1 ปีแล้ว ?



การแปลงผลได้ตอบแทนเป็นผลได้ตอบแทนรายปี

- การแปลงผลได้ตอบแทนที่มีความถี่อื่นๆเป็นรายปี สมมุติว่าเราต้องการหาผลได้ตอบแทนหนึ่งปี $(1 + R_A)$ จากข้อมูลผลได้ตอบแทนรายเดือน เราสามารถคำนวณได้โดย

$$1 + R_A = 1 + R_t(12) = \frac{P_t}{P_{t-12}} = \frac{P_t}{P_{t-1}} \frac{P_{t-1}}{P_{t-2}} \cdots \frac{P_{t-11}}{P_{t-12}}$$

$$= (1 + R_t)(1 + R_{t-1}) \cdots (1 + R_{t-11})$$

$$R_A = R_t(12)$$

การแปลงผลได้ตอบแทนเป็นผลได้ตอบแทนรายปี

- การแปลงผลได้ตอบแทนที่มีความถี่อื่นๆ เป็นรายปี สมมุติว่าเราต้องการหาผลได้ตอบแทนหนึ่งปี ($1 + R_A$) จากข้อมูลผลได้ตอบแทนรายเดือน เราสามารถคำนวณได้โดย

$$\begin{aligned} 1 + R_A &= 1 + R_t(12) = \frac{P_t}{P_{t-12}} = \frac{P_t}{P_{t-1}} \frac{P_{t-1}}{P_{t-2}} \cdots \frac{P_{t-11}}{P_{t-12}} \\ &= (1 + R_t) \underbrace{(1 + R_{t-1})}_{\textcolor{red}{R}} \cdots \underbrace{(1 + R_{t-11})}_{\textcolor{red}{R}} \underbrace{(1 + R_{t-12})}_{\textcolor{red}{R}} \\ R_A &= R_t(12) \end{aligned}$$

- การคำนวณผลได้ตอบแทนรายเดือนภายในให้ข้อสมมุติว่าผลได้ตอบแทนคงที่ทุกเดือนเท่ากับ R เราจะได้ผลได้ตอบแทนรายหนึ่งปีเท่ากับ $R_A = 6\%$

$$\begin{aligned} 1 + R_A &= 1 + R_t(12) = (1 + R)^{12} \\ \underbrace{1 + R_A}_{\text{ซึ่งก็คือผลได้ตอบแทนทบทวน 12 เดือนนั่นเอง}} &= \underbrace{(1 + R)^{12}}_{\text{หาตัว}} \Rightarrow 1 + R = (1 + R_A)^{\frac{1}{12}} \\ 1 + R &= (1 + 0.06)^{\frac{1}{12}} \end{aligned}$$

ผลได้ตอบแทนทบทั้งอย่างต่อเนื่อง

การคิดผลตอบแทนทบทั้ง (compounding) สมมุติว่าธนาคารจ่ายดอกเบี้ยเงินฝากในอัตรา 10 % ต่อปี และมีเงินต้นเท่ากับ 100 บาท

- จ่ายดอกเบี้ยหนึ่งครั้งเมื่อสิ้นปี มูลค่าสุทธิของเงินฝากเท่ากับ $100(1 + 0.1) = 110$ บาท



ผลได้ต้องแทนบทต้นอย่างต่อเนื่อง

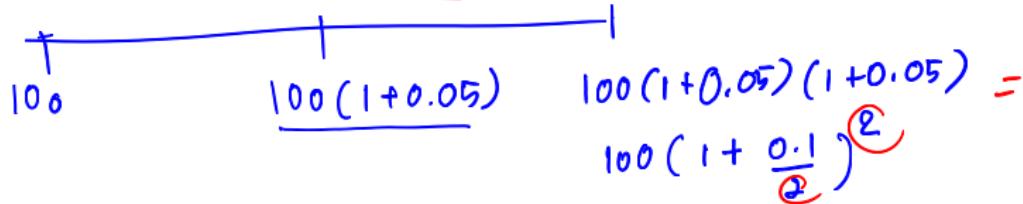
การคิดผลตอบแทนทบตื้น(compounding) สมมุติว่าธนาคารจ่ายดอกเบี้ยเงินฝากในอัตรา 10 % ต่อปี และมีเงินต้นเท่ากับ 100 บาท

- จ่ายดอกเบี้ยหนึ่งครั้งเมื่อสิ้นปี มูลค่าสุทธิของเงินฝากเท่ากับ

$$100(1 + 0.1) = 110 \text{ บาท}$$

- จ่ายดอกเบี้ยออกเป็นสองครึ่งครึ่งละ 5 % ทุกครึ่งปี นกล่าสุทธิจะเท่ากัน

$$100(1 + 0.1/2)^2 = \underline{110.25} \text{ ун}$$



ผลได้ต้องแทนบทตื้นอย่างต่อเนื่อง

การคิดผลตอบแทนทบตื้น(compounding) สมมุติว่าธนาคารจ่ายดอกเบี้ยเงินฝากในอัตรา 10 % ต่อปี และมีเงินต้นเท่ากับ 100 บาท

- จ่ายดอกเบี้ยหนึ่งครั้งเมื่อสิ้นปี มูลค่าสุทธิของเงินฝากเท่ากับ $100(1 + 0.1) = 110$ บาท

$$100(1 + 0.1) = 110 \text{ บาท}$$

- จ่ายดอกเบี้ยออกเป็นสองครึ่งครึ่งละ 5 % ทุกครึ่งปี มูลค่าสุทธิจะเท่ากับ $100(1 + 0.1/2)^2 = 110.25$ บาท

$$100(1 + 0.1/2)^2 = 110.25 \text{ บาท}$$

- จ่ายดอกเบี้ย m ครั้ง มูลค่าสุทธิ ณ สิ้นปีที่หนึ่งจะมีค่า $100(1 + 0.1/m)^m$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} 100 \left(1 + \frac{0.1}{m}\right)^m = 100 \boxed{\lim_{m \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{0.1}{m}\right)^m}$$

$$\text{平均销售量} = 100 \cdot \exp(0.1)$$

ผลได้ตอบแทนทบทั้งอย่างต่อเนื่อง

การคิดผลตอบแทนทบทั้ง (compounding) สมมุติว่าธนาคารจ่ายดอกเบี้ยเงินฝากในอัตรา 10 % ต่อปี และมีเงินต้นเท่ากับ 100 บาท

- จ่ายดอกเบี้ยหนึ่งครั้งเมื่อสิ้นปี มูลค่าสุทธิของเงินฝากเท่ากับ $100(1 + 0.1) = 110$ บาท

- จ่ายดอกเบี้ยออกเป็นสองครั้งครึ่งละ 5 % ทุกครึ่งปี มูลค่าสุทธิจะเท่ากับ $100(1 + 0.1/2)^2 = 110.25$ บาท

- จ่ายดอกเบี้ย m ครั้ง มูลค่าสุทธิ ณ สิ้นปีที่หนึ่งจะมีค่า $100(1 + 0.1/m)^m$

- จ่ายดอกเบี้ยทบทั้งอย่างต่อเนื่อง (continuous compounding) มูลค่าสุทธิ ณ สิ้นปี จะเท่ากับ $100(\exp(0.1)) = 110.517$

$$\text{Note: } \exp(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} (1 + x/n)^n$$

เงินเดือน

$$P_{t-1}$$

เงินเดือน

$$P_t$$

r_t แบบ continuous compounding return

$$P_{t-1} (\exp(r_t)) = P_t$$

$$\ln(\exp(r_t)) = \ln\left(\frac{P_t}{P_{t-1}}\right) \Leftrightarrow \exp(r_t) = \frac{P_t}{P_{t-1}}$$



กำหนดให้ R_t เป็นผลได้ต้องแทนอย่างง่ายรายเดือนของการลงทุน เนื่องจาก มูลค่าในอนาคตจะเท่ากับมูลค่าปัจจุบันคูณกับตัวคูณทบทั้ง ($P_t = P_{t-1} \exp(r_t)$) เรา สามารถคำนวณผลได้ต้องแทนทบทั้งต่อเนื่องหนึ่งเดือน (one-month continuously compounding return) หรือผลได้ต้องแทนในรูปลอการิทึม (one-month log return) ได้ โดย

$$\text{log return} \rightarrow r_t = \ln\left(\frac{P_t}{P_{t-1}}\right) = \ln(1+R_t) \quad \text{simple (net) return.}$$

$$r_t = \ln(1 + R_t) \stackrel{\textcircled{1}}{=} \ln\left(\frac{P_t}{P_{t-1}}\right)$$

$$\stackrel{\textcircled{2}}{=} \ln(P_t) - \ln(P_{t-1}) = p_t - p_{t-1} \quad (6)$$

โดยที่ $p_t = \ln(P_t)$

ตัวอย่างที่ 1.3

$$P_t = 200$$

$$P_{t-1} = 190$$

ใช้ข้อมูลจากตัวอย่างที่ 1.1 ผลได้ตอบแทนทบทั้งอย่างต่อเนื่องหนึ่งเดือนหรือผลได้ตอบแทนในรูปของการทีมหนึ่งเดือนจะเท่ากับ

$$\textcircled{1} r_t = \ln(1.0526) = 0.0513 \quad (5.13\%)$$

$$\textcircled{2} r_t = \ln(200) - \ln(190) = 5.2983 - 5.2470 = 0.0513 \quad (5.13\%)$$

$$r_t = \ln\left(\frac{200}{190}\right)$$

simple return 0.0526

ทางนักพนัง รายห้าม R_t และ r_t

$$\frac{R_t}{r_t} = \ln\left(\frac{P_t}{P_{t-1}}\right) = \ln(1+R_t)$$

$$\exp(r_t) = \exp(\ln(1+R_t))$$

$$\exp(r_t) = 1+R_t$$

$$\boxed{\exp(r_t) - 1 = R_t}$$



ความสัมพันธ์ระหว่าง simple return กับ log return

$$R_t = \exp(r_t) - 1$$

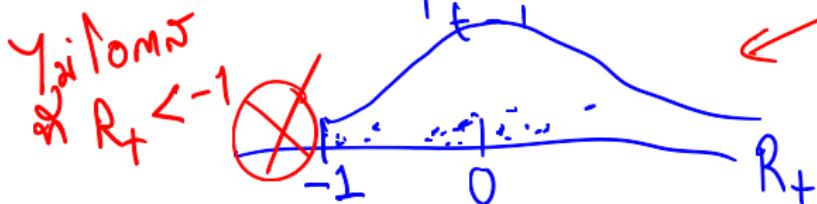
$$P_{t-1} = 100$$

$$P_t = 0$$

$$R_t = \frac{P_t - P_{t-1}}{P_{t-1}} = -1 \quad (-100\%)$$

กำหนดมูลค่า $(-\infty, \infty)$

Firm D: In Normal distribution model



ความสัมพันธ์ระหว่าง simple return กับ log return

- เราสามารถคำนวณผลตอบแทนอย่างง่ายสุดๆ ได้จากผลได้ตอบแทนในรูปลอการิทึมโดย

$$R_t = \exp(r_t) - 1$$

- หากผลได้ตอบแทนมีค่าต่ำ (ในการณีเรารู้ว่าผลได้ตอบแทนรายวันหรือรายเดือน) ผลได้ตอบแทนในรูปลอการิทึมและผลได้ตอบแทนอย่างง่ายจะมีค่าใกล้เคียงกัน



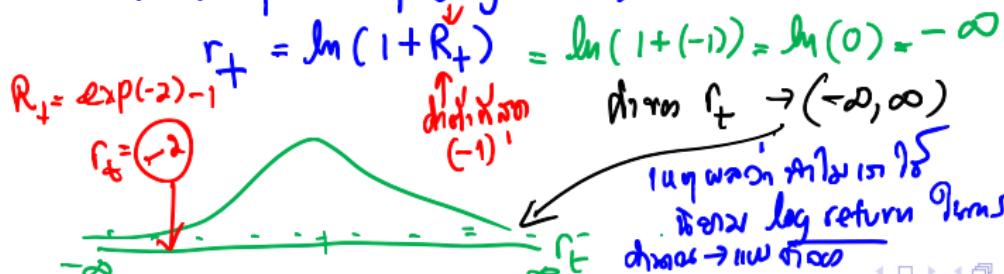
ความสัมพันธ์ระหว่าง simple return กับ log return

- เราสามารถคำนวณผลตอบแทนอย่างง่ายสุดๆ ได้จากผลได้ตอบแทนในรูปลอการิทึมโดย

$$R_t = \exp(r_t) - 1$$

- หากผลได้ตอบแทนมีค่าต่ำ (ในการนี้เราพิจารณาผลได้ตอบแทนรายวันหรือรายเดือน) ผลได้ตอบแทนในรูปลอการิทึมและผลได้ตอบแทนอย่างง่ายจะมีค่าใกล้เคียงกัน
- ค่าต่ำสุดที่จะเป็นไปได้ของผลได้ตอบแทนอย่างง่ายคือ -1 ดังนั้นขอบเขตล่างของผลได้ตอบแทนในรูปลอการิทึมจะเท่ากับ $-\infty$

ตัวตั้งต้องห้าม R_t (log return)



ความสัมพันธ์ระหว่าง simple return กับ log return

- เราสามารถคำนวณผลตอบแทนอย่างง่ายสุดๆ ได้จากผลได้ตอบแทนในรูปลอการิทึมโดย

$$R_t = \exp(r_t) - 1$$

- หากผลได้ตอบแทนมีค่าต่ำ (ในการณีเรารู้ว่าผลได้ตอบแทนรายวันหรือรายเดือน) ผลได้ตอบแทนในรูปลอการิทึมและผลได้ตอบแทนอย่างง่ายจะมีค่าใกล้เคียงกัน
- ค่าต่ำสุดที่จะเป็นไปได้ของผลได้ตอบแทนอย่างง่ายคือ -1 ดังนั้นขอบเขตล่างของผลได้ตอบแทนในรูปลอการิทึมจะเท่ากับ $-\infty$
- การวิเคราะห์เชิงสถิติหรือการสร้างแบบจำลองเรามักจะใช้ผล ได้ตอบแทนในรูปลอการิทึม

log - return

การแจกแจงของอนุกรมเวลา

- ตัวแปรสุ่ม Y_t คือฟังก์ชันที่ใช้อธิบายค่าของเหตุการณ์ที่จะเกิดขึ้นในอนาคต โดยที่เรารู้ค่าทั้งหมดที่จะเป็นไปได้แต่ไม่รู้ว่าจะเกิดอะไรขึ้นแน่นอน เช่น ราคาของหลักทรัพย์(P)

การแจกแจงของอนุกรมเวลา

- ตัวแปรสุ่ม Y_t คือฟังก์ชันที่ใช้อธิบายค่าของเหตุการณ์ที่จะเกิดขึ้นในอนาคต โดยที่เรารู้ค่าทั้งหมดที่จะเป็นไปได้แต่ไม่รู้ว่าจะเกิดอะไรขึ้นแน่นอน เช่น ราคาของหลักทรัพย์(P)
- ตัวแปรสุ่มจะมีการแจกแจงอย่างไร โดยที่หนึ่งในการเลือกคือการแจกแจงแบบ log-normal

การแจกแจงของอนุกรมเวลา

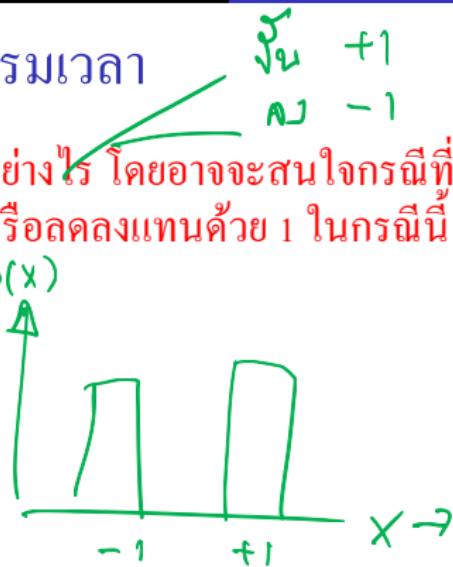
- ตัวแปรสุ่ม Y_t คือฟังก์ชันที่ใช้อธิบายค่าของเหตุการณ์ที่จะเกิดขึ้นในอนาคต โดยที่เรารู้ค่าทั้งหมดที่จะเป็นไปได้แต่ไม่รู้ว่าจะเกิดอะไรขึ้นแน่นอน เช่น ราคาของหลักทรัพย์(P)
- ตัวแปรสุ่มจะมีการแจกแจงอย่างไร โดยที่หนึ่งในทางเลือกคือการแจกแจงแบบ log-normal
- การลงทุนของเราในหนึ่งเดือนข้างหน้าจะมีผลได้ตอบแทน(R_t)เป็นอย่างไร ดังนั้น R_t ก็จะเป็นตัวแปรสุ่ม

การแจกแจงของอนุกรมเวลา

- ตัวแปรสุ่ม Y_t คือฟังก์ชันที่ใช้อธิบายค่าของเหตุการณ์ที่จะเกิดขึ้นในอนาคต โดยที่เรารู้ค่าทั้งหมดที่จะเป็นไปได้แต่ไม่รู้ว่าจะเกิดอะไรขึ้นแน่นอน เช่น ราคาของหลักทรัพย์(P)
- ตัวแปรสุ่มจะมีการแจกแจงอย่างไร โดยที่หนึ่งในทางเลือกคือการแจกแจงแบบ log-normal
- การลงทุนของเราในหนึ่งเดือนข้างหน้าจะมีผลได้ตอบแทน(R_t)เป็นอย่างไร ดังนั้น R_t ก็จะเป็นตัวแปรสุ่ม
- การแจกแจงที่ใช้ประมาณค่าสำหรับผลได้ตอบแทนอย่างง่ายรายเดือนที่ดีคือการแจกแจงแบบปกติ

การแยกแจงของอนุกรรมเวลา

- ราคากำไรเปลี่ยนแปลงอย่างไร โดยอาจจะสนใจกรณีที่ราคากลับตัวขึ้นแทนด้วย 0 และกรณีที่ราคากองท์หรือลดลงแทนด้วย 1 ในกรณีนี้ sample space ของ discrete random variable $\varphi(x)$



$$P(X) = \begin{cases} 0.5 & n = -1 \\ 0.5 & n = +1 \end{cases}$$

การแจกแจงของอนุกรมเวลา

- ราคากำเปลี่ยนแปลงอย่างไร โดยอาจจะสนใจกรณีที่ราคาปรับตัวขึ้นแทนด้วย 0 และกรณีที่ราคาคงที่หรือลดลงแทนด้วย 1 ในกรณีนี้ sample space ของ discrete random variable
- พึงก์ชันความหนาแน่นของความน่าจะเป็น (probability density function: *pdf*) ของตัวแปรสุ่มวิญญาณารถเขียนแทนด้วย $p(y)$ จะเป็นพึงก์ชัน
$$p(y) = Pr(Y = y)$$

การแจกแจงของอนุกรมเวลา

- ราคากำลังเปลี่ยนแปลงอย่างไร โดยอาจจะสนใจกรณีที่ราคาปรับตัวขึ้นแทนด้วย 0 และกรณีที่ราคาคงที่หรือลดลงแทนด้วย 1 ในกรณีนี้ sample space ของ discrete random variable
- พิสูจน์ความหนาแน่นของความน่าจะเป็น (probability density function: *pdf*) ของตัวแปรสุ่มวิญญาณารถเขียนแทนด้วย $p(y)$ จะเป็นพิสูจน์ $p(y) = Pr(Y = y)$
- *pdf* จะต้องมีคุณสมบัติคือ (1) $p(y) \geq 0$ สำหรับทุกค่า $y \in S_y$ (2) $p(y) = 0$ สำหรับทุกค่า $y \notin S_y$ และ (3) $\sum_{y \in S_y} p(y) = 1$

การแจกแจงของอนุกรมเวลา

- ตัวแปรสุ่มแบบต่อเนื่อง Y จะมีค่าเป็นเท่าใดก็ได้บนเส้นจำนวนจริง ดังนั้น

$$S_Y = \{y : y \in \mathbb{R}\}$$



$$t \in (-\infty, \infty)$$



การแจกแจงของอนุกรมเวลา

- ตัวแปรสุ่มแบบต่อเนื่อง Y จะมีค่าเป็นเท่าใดก็ได้บนเส้นจำนวนจริง ดังนี้
 $S_Y = \{y : y \in \mathbb{R}\}$
- พึงชั้นความหนาแน่นของความน่าจะเป็น pdf ของตัวแปรสุ่มต่อเนื่อง Y จะเป็นพึงชั้นที่ไม่เป็นค่าลบ f นิยามบนเส้นจำนวนจริง โดยที่สำหรับช่วง A ได้

$$\begin{aligned} P(-\zeta r_t < 0) \\ &= \int_0^\infty f(r_t) dr_t \end{aligned}$$

$$Pr(Y \in A) = \int_A f(y) dy$$

หมายเหตุ: ให้ y เป็นตัวแปรสุ่ม
 $y \in A$
 เท่ากับ พื้นที่ใต้ f function
 (pdf)



การแจกแจงของอนุกรมเวลา

- ตัวแปรสุ่มแบบต่อเนื่อง Y จะมีค่าเป็นเท่าใดก็ได้บนเส้นจำนวนจริง ดังนั้น $S_Y = \{y : y \in \mathbb{R}\}$
- พิنج์ชันความหนาแน่นของความน่าจะเป็น pdf ของตัวแปรสุ่มต่อเนื่อง Y จะเป็นพิنج์ชันที่ไม่เป็นค่าลบ f นิยามบนเส้นจำนวนจริง โดยที่สำหรับช่วง A ได้

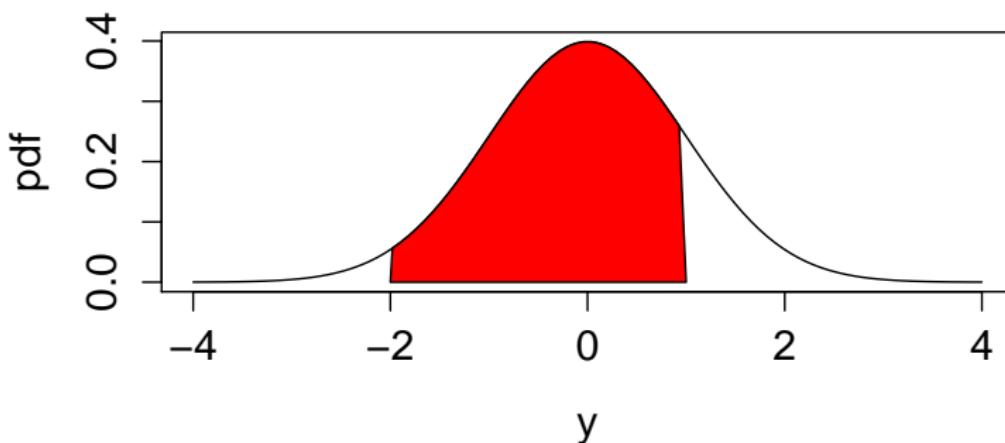
$$Pr(Y \in A) = \int_A f(y) dy$$

- $Pr(Y \in A)$ คือพื้นที่ใต้กราฟความน่าจะเป็นตลอดช่วง A โดยที่ $pdf(y)$ จะมีคุณสมบัติดังนี้ (1) $f(y) \geq 0$ และ (2) $\int_{-\infty}^{\infty} f(y) dy = 1$

การแจกแจงของอนุกรมเวลา: การแจกแจงต่อเนื่อง

ตัวอย่างเช่น กราฟรูประฆังรูปที่ 1 เป็น pdf ฟังก์ชัน โดยที่พื้นที่ใต้กราฟระหว่าง $y = -2$ ถึง $y = 1$ จะแสดงถึง $Pr(-2 \leq Y < 1)$

Figure: ฟังก์ชัน pdf ของการแจกแจงต่อเนื่อง



การแจกแจงของอนุกรมเวลา: การแจกแจงต่อเนื่อง

ฟังก์ชันการแจกแจงสะสม (cdf) จะมีคุณสมบัติดังนี้

- ① ถ้า $y_1 < y_2$ และ $F_Y(y_1) \leq F_Y(y_2)$
- ② $F_Y(-\infty) = 0$ และ $F_Y(\infty) = 1$
- ③ $Pr(Y > y) = 1 - F_Y(y)$
- ④ $Pr(y_1 < Y \leq y_2) = F_Y(y_2) - F_Y(y_1)$
- ⑤ $\frac{\partial F_Y(y)}{\partial y} = f_Y(y)$ ถ้า Y เป็นตัวแปรสุ่มต่อเนื่องและ $F_Y(y)$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องและหาอนุพันธ์ได้

ค่อนไกล์ของการแจกแจงความน่าจะเป็น

- หากเราพิจารณาตัวแปรสุ่ม Y ที่มีฟังก์ชันการแจกแจงสะสม $F_Y(y)$ หากค่า $0 \leq \alpha \leq 1$ แล้วค่าค่อนไกล์ที่ $100\alpha\%$ ของการแจกแจง Y คือค่า q_α ที่ตรงกับเงื่อนไข

$$F_Y(q_\alpha) = Pr(Y \leq q_\alpha) = \alpha$$

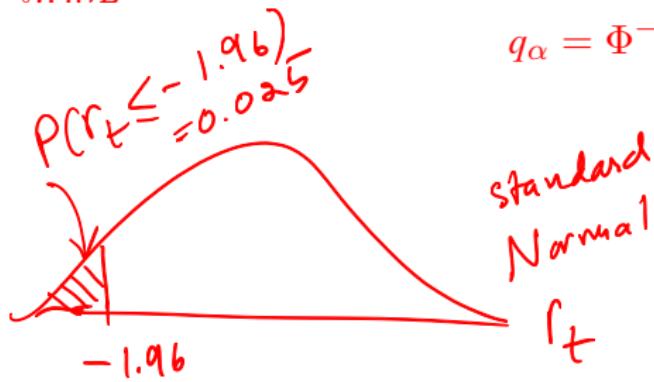


ค่อนไหล์ของการแจกแจงความน่าจะเป็น

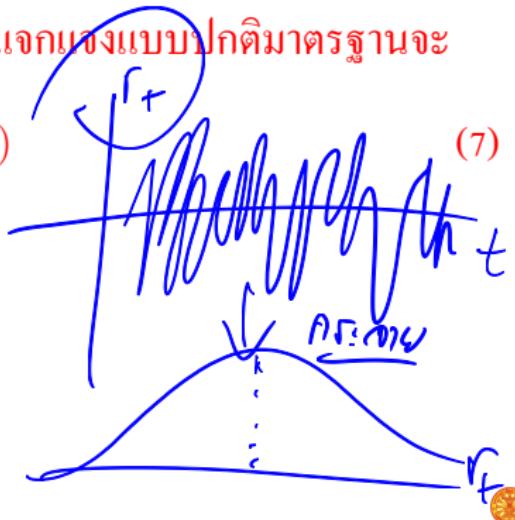
- หากเราพิจารณาตัวแปรสุ่ม Y ที่มีฟังก์ชันการแจกแจงสะสม $F_Y(y)$ หากค่า $0 \leq \alpha \leq 1$ แล้วค่าค่อนไหล์ที่ $100\alpha\%$ ของการแจกแจง Y คือค่า q_α ที่ตรงกับเงื่อนไข

$$F_Y(q_\alpha) = Pr(Y \leq q_\alpha) = \alpha$$

- กำหนดให้ $Y \sim N(0, 1)$ ค่าค่อนไหล์ของการแจกแจงแบบปกติมาตรฐานจะเท่ากับ



$$q_\alpha = \Phi^{-1}(\alpha)$$



คุณลักษณะเรื่องรูปว่างของการ แจกแจงความน่าจะเป็น

คุณลักษณะด้านรูปว่างของการแจกแจงความน่าจะเป็นได้ๆ จะวัดได้ด้วย
คุณลักษณะ 4 ประการ

- ➊ ค่าคาดหมาย (expected value) หรือค่าเฉลี่ย เป็นการวัดค่ากลางของการแจกแจง



คุณลักษณะเรื่องรูปว่างของการแจกแจงความน่าจะเป็น

คุณลักษณะด้านรูปว่างของการแจกแจงความน่าจะเป็นได้ๆ จะวัดได้ด้วย
คุณลักษณะ 4 ประการ

- ① ค่าคาดหมาย (expected value) หรือค่าเฉลี่ยเป็นการวัดค่ากลางของการแจกแจง
- ② ความแปรปรวนและค่าเบี่ยงเบนมาตรฐานวัดการแผ่จากค่ากลาง

คุณลักษณะเรื่องรูปร่างของการแจกแจงความน่าจะเป็น

คุณลักษณะด้านรูปร่างของการแจกแจงความน่าจะเป็นได้ๆ จะวัดได้ด้วย
คุณลักษณะ 4 ประการ

- ① ค่าคาดหมาย (expected value) หรือค่าเฉลี่ย เป็นการวัดค่ากลางของการแจกแจง
- ② ความแปรปรวนและค่าเบี่ยงเบนมาตรฐานวัดการแผ่จากค่ากลาง
- ③ ความเเปลี่ยน (skewness) วัดความสมมาตรรอบๆ ค่ากลาง

คุณลักษณะเรื่องรูปว่างของการแจกแจงความน่าจะเป็น

คุณลักษณะด้านรูปว่างของการแจกแจงความน่าจะเป็นได้ๆ จะวัดได้ด้วย
คุณลักษณะ 4 ประการ

- ① ค่าคาดหมาย (expected value) หรือค่าเฉลี่ย เป็นการวัดค่ากลางของการแจกแจง
- ② ความแปรปรวนและค่าเบี่ยงเบนมาตรฐานวัดการแผ่จากค่ากลาง
- ③ ความเปี้ยว (skewness) วัดความสมมาตรรอบๆ ค่ากลาง
- ④ ค่าความโถ่ (kurtosis) วัดความอ้วนของหาง

ค่าคาดหมาย

ฟังก์ชันค่าคาดหมาย (mean function) ของตัวแปรสุ่ม Y ได้ฯ ใช้สัญลักษณ์ $E(Y)$ สามารถคำนวณได้ดังนี้ ในกรณีที่ Y เป็น discrete r.v. ค่าคาดหมายจะเท่ากับ

$$\mu_Y = E(Y) = \sum_{y \in S_Y} y \times P(Y = y) \quad (8)$$

หรือในกรณี continuous r.v. ค่าคาดหมายจะเท่ากับ

$$\mu_Y = E(Y) = \int_{-\infty}^{\infty} yf(y)dy \quad (9)$$

โดยที่ E คือสัญลักษณ์แทนค่าคาดหมาย (Expected value)



ค่าความแปรปรวนและค่าเบี่ยงเบนมาตรฐาน

ค่าแปรปรวนของตัวแปรสุ่ม Y เปียนแทนด้วย $Var(Y)$ หรือ σ_Y^2 วัดการแผ่ของการแจกแจงจากค่าเฉลี่ย โดยที่ค่าแปรปรวนสามารถนิยามได้โดย

$$\sigma_Y^2 = Var(Y) = E[(Y - \mu_Y)^2] \quad (10)$$

หรือ

$$\sigma_Y^2 = Var(Y) = E[Y^2] - \mu_Y^2 \quad (11)$$

เนื่องจากหน่วยวัดของค่าความแปรปรวนมีหน่วยที่แตกต่างจากตัวแปรสุ่ม Y ดังนั้น เรามักจะพิจารณาค่าเบี่ยงเบนมาตรฐานเปียนแทนด้วย $sd(Y)$ หรือ σ_Y ซึ่งเท่ากับค่ารากที่สองของค่าความแปรปรวน ($\sqrt{\sigma_Y^2}$)

ค่าความเบี้ยว (skewness)

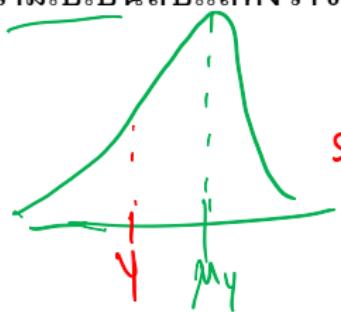
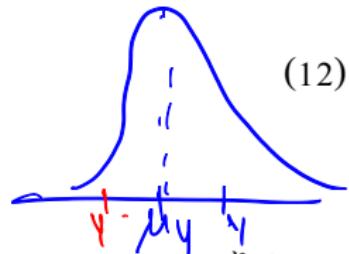


ค่าความเบี้ยวสามารถคำนวณด้วย ($S(Y)$) วัดความสมมาตรรอบๆ ค่ากลาง สามารถทำได้โดย

$$S(Y) = \frac{E[(Y - \mu_Y)^3]}{\sigma_Y^3} \quad (12)$$

$$S(Y)=0$$

- ค่าความเบี้ยวนี้เป็นศูนย์แสดงว่าการแจกแจงมีความสมมาตร
- ค่าความเบี้ยวนี้เป็นบวกแสดงว่าข้อมูลลูกคึ่งไปทางขวา $S(Y) > 0$ Positive skewness [↑ หรือ positive skewness]
- ค่าความเบี้ยวนี้เป็นลบแสดงว่าข้อมูลลูกคึ่งไปทางซ้าย(ทางไปทางซ้าย) $S(Y) < 0$ Negative skewness [↓ หรือ negative skewness]



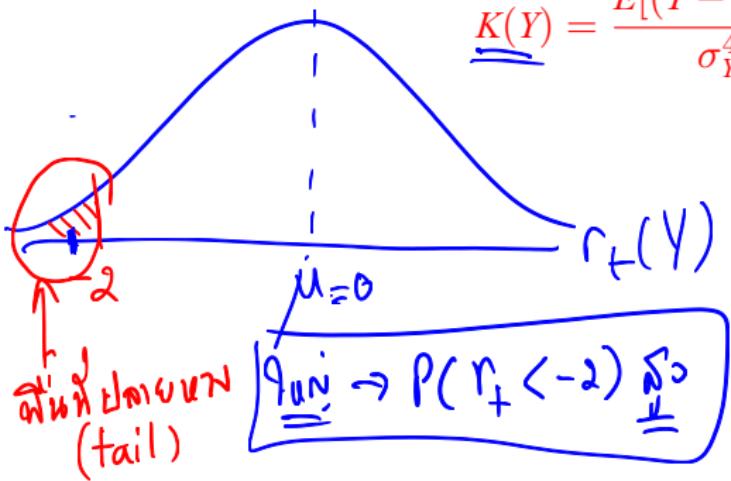
$$S(Y) < 0 \text{ Negative skewness}$$

$$[\text{หมายถึง } \mu < \mu_Y \text{ และ } Y > \mu_Y]$$

จึงแสดงว่า
การต่อท้าย

ค่าความໂດ່ງ(kurtosis)

- ค่าความโด่งดีวัดความหนาของทางของการแยกแข่งซึ่งสามารถเปลี่ยนแปลงได้ด้วย $K(Y)$ และสามารถคำนวณได้จาก

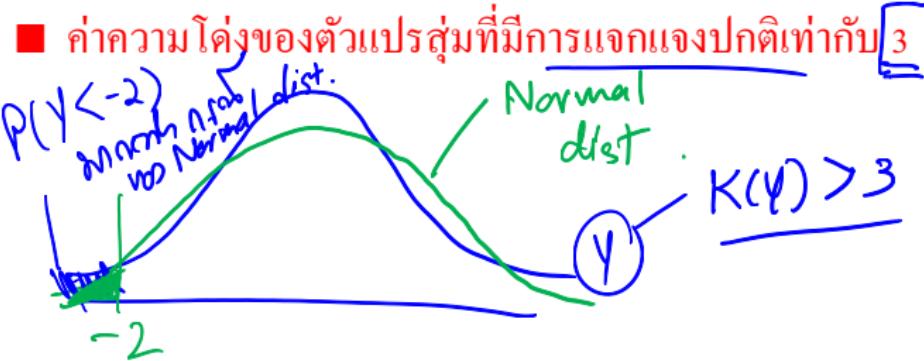


ค่าความโถ่(kurtosis)

- ค่าความโถ่ใช้วัดความหนาของหางของการแจกแจงซึ่งสามารถเปลี่ยนແທນได้ด้วย $K(Y)$ และสามารถคำนวณได้จาก

$$K(Y) = \frac{E[(Y - \mu_Y)^4]}{\sigma_Y^4}$$

(13)



$K(Y) > 3$
ตัวแปลง Y มีหางที่ตื้น
nh Normal dist.

ค่าความโถ่(kurtosis)

- ค่าความโถ่ใช้วัดความหนาของหางของการแจกแจงซึ่งสามารถเปลี่ยนแทนได้ด้วย $K(Y)$ และสามารถคำนวณได้จาก

$$K(Y) = \frac{E[(Y - \mu_Y)^4]}{\sigma_Y^4} \quad (13)$$

- ค่าความโถ่ของตัวแปรสุ่มที่มีการแจกแจงปกติเท่ากับ 3
- เราใช้ค่าความโถ่ดังกล่าวเป็นมาตรฐานความหนาของหาง

ค่าความโถ่ (kurtosis)

- ค่าความโถ่ใช้วัดความหนาของหางของการแจกแจงซึ่งสามารถเปลี่ยนแทนได้ด้วย $K(Y)$ และสามารถคำนวณได้จาก

$$K(Y) = \frac{E[(Y - \mu_Y)^4]}{\sigma_Y^4} \quad (13)$$

- ค่าความโถ่ของตัวแปรสุ่มที่มีการแจกแจงปกติเท่ากับ 3
- เราใช้ค่าความโถ่ดังกล่าวเป็นมาตรฐานความหนาของหาง
- ความโถ่ส่วนเกิน (excess kurtosis) โดย $\text{excess } K(Y) = K(Y) - 3$

Normal dist

$E(Y)$
$\text{var}(Y)$
$S(Y) = 0$
$K(Y) = 3$

Population Parameters
ทั่วไป dist \rightarrow parameters.

การแจกแจงแบบที่

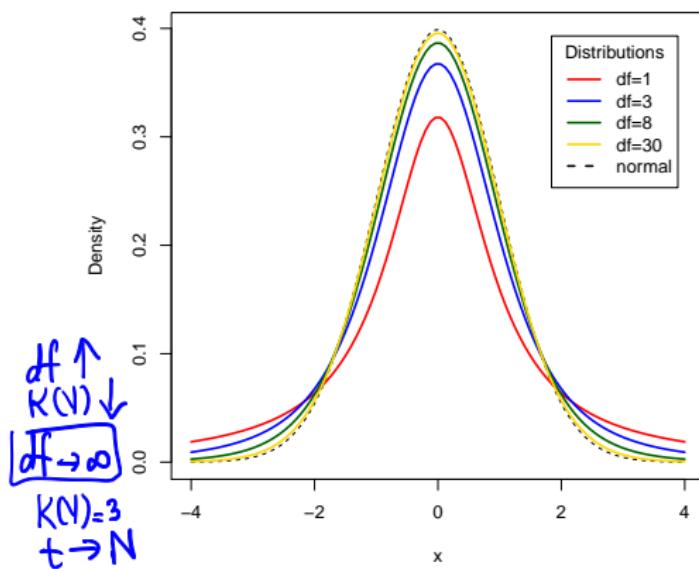
- การแจกแจงอื่นที่มีลักษณะสมมาตรและมีทางที่อ่อนกว่าการแจกแจงแบบปกติ
คือ การแจกแจงแบบที่ (Student's t)

การแจกแจงแบบที่

- การแจกแจงอื่นที่มีลักษณะสมมาตรและมีทางที่อ้วนกว่าการแจกแจงแบบปกติ
คือ การแจกแจงแบบที่ (Student's t)
- ถ้า Y มีการแจกแจงแบบที่ด้วยองศาเสรี (degree of freedom) v จะมีค่าเฉลี่ยเท่ากับ 0, ค่าความแปรปรวนเท่ากับ $v/v - 2$ โดยที่ $v > 2$, ค่าความเบี้ยวเท่ากับ 0, และค่าความโถงเท่ากับ $\frac{6}{(v-4)} - 4$ โดยที่ $v > 4$

การแจกแจงแบบที่

Figure: การแจกแจงแบบที่



ตัวประมาณค่า

สมมุติให้เราสุ่มตัวอย่าง y_1, \dots, y_T ซึ่งมีขนาดเท่ากับ T

■ ค่าเฉลี่ยของตัวอย่าง (sample mean) $\hat{\mu}_Y = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T y_t$

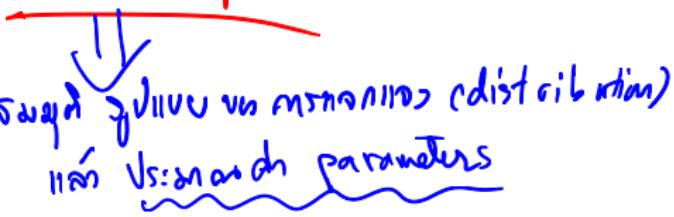
$$\bar{r}_t = 0.001 \rightarrow \begin{array}{l} \mu(r_t) = 0 \\ \text{population mean} \end{array}$$

Sample

ตัวอย่างในตัวอย่าง



ในกรอบที่ distribution + parameters
ของประชากร (population)



ตัวประมาณค่า

\bar{X}
(Sample)
ตัวอย่าง
(ทดสอบสมมุติฐาน)
 μ

y_1
 y_2
⋮
 y_T

สมมุติให้เราสุ่มตัวอย่าง y_1, \dots, y_T ซึ่งมีขนาดเท่ากับ T

■ ค่าเฉลี่ยของตัวอย่าง (sample mean) $\hat{\mu}_Y = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T y_t$

■ ค่าความแปรปรวนของตัวอย่าง $\hat{\sigma}_Y^2 = \frac{1}{T-1} \sum_{t=1}^T (y_t - \hat{\mu}_Y)^2$

$$\text{sample SD} = \sqrt{\hat{\sigma}_Y^2}$$



ตัวประมาณค่า

สมมุติให้เราสุ่มตัวอย่าง y_1, \dots, y_T ซึ่งมีขนาดเท่ากับ T

- ค่าเฉลี่ยของตัวอย่าง (sample mean) $\hat{\mu}_Y = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T y_t$
- ค่าความแปรปรวนของตัวอย่าง $\hat{\sigma}_Y^2 = \frac{1}{T-1} \sum_{t=1}^T (y_t - \hat{\mu}_Y)^2$
- ค่าความเบี้ยวของตัวอย่าง (sample skewness) $\hat{S}(Y) = \frac{1}{(T-1)\hat{\sigma}_Y^3} \sum_{t=1}^T (y_t - \hat{\mu}_Y)^3$



ตัวประมาณค่า \rightarrow สรุป หัวข้อ population parameters

สมมุติให้เราสุ่มตัวอย่าง y_1, \dots, y_T ซึ่งมีขนาดเท่ากับ T

- ค่าเฉลี่ยของตัวอย่าง (sample mean) $\hat{\mu}_Y = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T y_t$
- ค่าความแปรปรวนของตัวอย่าง $\hat{\sigma}_Y^2 = \frac{1}{T-1} \sum_{t=1}^T (y_t - \hat{\mu}_Y)^2$
- ค่าความเบี้ยวของตัวอย่าง (sample skewness) $\hat{S}(Y) = \frac{1}{(T-1)\hat{\sigma}_Y^3} \sum_{t=1}^T (y_t - \hat{\mu}_Y)^3$
- ค่าความโค้งของตัวอย่าง (sample kurtosis) $\hat{K}(Y) = \frac{1}{(T-1)\hat{\sigma}_Y^4} \sum_{t=1}^T (y_t - \hat{\mu}_Y)^4$



การทดสอบสมมุติฐาน: ค่าเฉลี่ย (μ) (population mean).

ภายใต้ข้อสมมุติที่ว่า Y_t มีการแจกแจงแบบปกติ $N(0, \sigma^2)$ และ μ จะมีการแจกแจงแบบปกติ $N(0, \frac{\sigma^2}{T})$

$$H_0 : \mu_y = 0 \quad \text{vs} \quad H_1 : \mu_y \neq 0$$

$$t = \frac{\hat{Y}_T - 0}{\sqrt{\hat{\sigma}^2_T / T}} \sim N(0, 1)$$

Indirect $\Delta\bar{y}_{180} \text{ H}_0$ in $|t| > \text{c.v. } (Z_\alpha)$

inquiry 假設 H_0 の $|t| > \text{c.v.} (Z_\alpha)$

no. 無 PTT 統計值 $2098 = T$, $\hat{n} = 0.00077$
 $\hat{R} = 0.0227$

$$t = \frac{\hat{m} - o}{\hat{s}/\sqrt{n}} = 1.579$$

$$|t| < c\sqrt{1.96}, \alpha = 0.05$$

การทดสอบสมมุติฐาน: ค่าความเบี่ยงเบน(Skewness) $\Rightarrow S(\psi) = 0$

เมื่อกลุ่มตัวอย่างใหญ่ ค่าความเบี่ยงเบนมาตรฐาน $S(Y) \sim N(0, 6/T)$

$$H_0: S(y) = 0 \quad \text{vs} \quad H_1: S(y) \neq 0$$

$$\text{ตัวอย่าง } t = \frac{\hat{s}(Y) - 0}{\sqrt{B/T}} \sim N(0, 1)$$

invers $\Sigma_j \zeta_j^j H_0$ in $|t| > C.V. (Z_\alpha)$

$$\underline{\text{N.O.}} \quad \hat{s} = -0.0689$$

$$t = \frac{-0.0689}{\sqrt{6/2088}} = -1.2846$$

$$|t| < 1.96 \text{ (C.V. at } \alpha = 0.05 \text{)} \quad \text{in this case}$$

假設 H_0 成立 skewness = 0.



การทดสอบสมมุติฐาน: ค่าความโด่ง (kurtosis)

Normal

$$H_0: K=3 \text{ vs } H_1: K \neq 3$$



$$H_0: K-3=0 \text{ vs } H_1: K-3 \neq 0$$

Excess kurtosis

เมื่อกลุ่มตัวอย่างใหญ่ ค่าความโด่งส่วนเกินของตัวอย่าง
 $\hat{K}(Y) - 3 \sim N(0, 24/T)$

sample

excess kurtosis

$$t = \frac{\hat{K}(Y) - 3}{\sqrt{24/T}} \sim N(0, 1)$$

หาก $|t| > C.V.$ จะทดสอบ H_0

$$\text{ทบ. } \hat{K}(Y)-3 = 6.2285$$

$$t = \frac{(\hat{K}-3)}{\sqrt{24/T}} = \frac{6.2285}{\sqrt{24/2083}} = 58.0959$$

ดังนั้น $|t| > C.V. (1.96)$ ($\alpha=0.05$) ทางทักษะที่ปัจจุบัน H_0 ไม่ยอมรับ $K \neq 3$

พารามิเตอร์ t vs PTT
 ถ้า t มากกว่า $C.V.$ ให้ยอมรับ H_0
 ถ้า t น้อยกว่า $C.V.$ ให้ปฏิเสธ H_0
 [กรณี t มากกว่า $C.V.$ ให้ยอมรับ H_0
 $P(\text{พบตัวอย่าง} \text{ ที่} \text{ ไม่ใช่} \text{ ตามสมมุติฐาน})$]

Probability

เมื่อ t น้อยกว่าNormal
(ถ้า t มากกว่า $C.V.$ ให้ปฏิเสธ H_0)

การทดสอบสมมุติฐาน: การแจกแจงแบบปกติ $S(Y) = 0$ $K(Y) - 3 = 0$

- การทดสอบว่าตัวแปรสุ่ม Y_t มีการแจกแจงแบบปกติหรือไม่ โดยหากตัวแปรสุ่ม มีการแจกแจงแบบปกติค่าความเบี่ยงเบนมาตรฐานจะต้องเท่ากับศูนย์
- Jarque and Bera (1987) ได้รวมการทดสอบของค่าสถิติทั้งสองเข้าด้วยกันและเสนอตัวสถิติ

$$\left(\frac{t = \frac{\hat{S}}{\sqrt{6/T}}}{\sqrt{6/T}} \right)^2 \xrightarrow{JB} \frac{\hat{S}^2(Y)}{6/T} + \frac{[\hat{K}(Y) - 3]^2}{24/T} \sim \chi^2_{df=2}$$

ซึ่งมีการแจกแจงเมื่อกลุ่มตัวอย่างใหญ่เข้าใกล้ $\chi^2_{df=2}$

การทดสอบสมมุติฐาน: การแจกแจงแบบปกติ

- การทดสอบว่าตัวแปรสุ่ม Y_t มีการแจกแจงแบบปกติหรือไม่ โดยหากตัวแปรสุ่ม มีการแจกแจงแบบปกติค่าความเบี่ยงเบนมาตรฐานจะต้องเท่ากับศูนย์
- Jarque and Bera (1987) ได้รวมการทดสอบของค่าสถิติทั้งสองเข้าด้วยกันและเสนอตัวสถิติ

$$JB = \frac{\hat{S}^2(Y)}{6/T} + \frac{[\hat{K}(Y) - 3]^2}{24/T}$$

$$S=0 \\ K-\gamma=0$$

ซึ่งมีการแจกแจงเมื่อกลุ่มตัวอย่างใหญ่เข้าใกล้ $\chi^2_{df=2}$

$$H_0: Y \sim \text{Normal dist}$$

- ปฏิเสธสมมุติฐานหลักที่ระดับนัยสำคัญ α ถ้า $JB > \chi^2_{(1-\alpha), df=2}$

c.v.

$$H_1: Y \not\sim \text{Normal dist}$$

c.v. $JB = \left(\frac{-0.0689}{\sqrt{6/2088}} \right)^2 + \left(\frac{6.2285}{\sqrt{24/2088}} \right)^2 = 33.6 >$

$$\chi^2_{df=2, \alpha=0.05} = 5.99$$

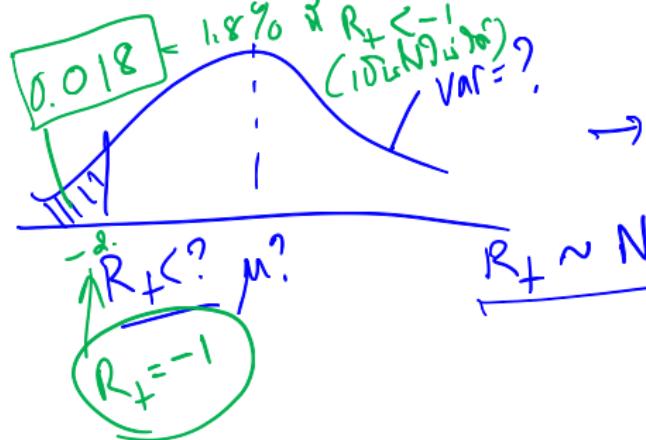
$JB > c.v$ เหตุผลปฎิรอด H_0 หรือว่า t_f ไม่ PTT
ไม่เป็น Normal distribution



การแจกแจงของผลได้ต่อวนเทน

- เรามักจะพิจารณาผลได้ต่อวนเทนในรูปของล็อกและมักจะสมมุติให้มีการแจกแจงแบบปกติ
- ปัญหาในกรณีผลได้ต่อวนเทนอย่างง่ายมีการแจกแจงแบบปกติ

$R_t \sim N(0.05, (0.05)^2)$ ซึ่งเราทราบว่าราคาสินทรัพย์ใดๆจะมีค่าติดลบไม่ได้ดังนั้น R_t จะต้องมีค่ามากกว่า -1



$$\begin{aligned}
 P(R_+ < -1) &= P\left(\frac{R_+ - 0.05}{0.05} < \frac{-1 - 0.05}{0.05}\right) \\
 &= P(Z < \frac{-1.05}{0.05}) \\
 &= P(Z < -2) = 0.018
 \end{aligned}$$

dist. ปั้น $N(0, 1)$

การแจกแจงของผลได้ต่อไปนี้

- ▶ หมายเหตุ สมมุติให้ผลได้ตอบแทนในรูปล็อกมีการแจกแจงแบบปกติ $\ln(1 + R_t) = r_t \sim N(0.05, (0.5)^2)$ โดยในกรณีผลได้ตอบแทนในรูปล็อกสามารถจะมีค่าน้อยกว่า -1 ได้ เช่น หาก $r_t = -2$

$$P(R_+ < -2) = ? \quad | \quad (\text{Normal} \quad N(0, 1))$$

$$P\left(\frac{r_t - 0.05}{0.5} < \frac{-2 - 0.05}{0.5}\right)$$

$$P(I < -\frac{q \cdot 0.5}{0.5})$$

i) $(\cup_{n=1}^{\infty} N(0, 1))$

$$2) P(R_+ < -2) = P(R_+ < -0.88)$$

$$R_f'' = \frac{\exp(r_f)}{1 - \exp(r_f)}$$

$$-0.865 = \exp(-2)^{-1}$$

ฟังก์ชันเส้นตรงของตัวแปรสุ่ม

distribution

Variance

หากกำหนดให้ X เป็นตัวแปรสุ่มที่มี $E[X] = \mu_X$ และ $Var(X) = \sigma_X^2$ และ a และ b เป็นค่าคงที่ หากเรากำหนดตัวแปรสุ่มใหม่ Y เป็นฟังก์ชันเส้นตรงกับตัวแปรสุ่ม X โดยที่ $\boxed{Y = a + bX}$ แล้ว $E(a+bX) = E(a) + E(bX) = a + bE(X)$

- $\mu_Y = E(Y) = a + bE(X) = a + b\mu_X$
- $\sigma_Y^2 = Var(Y) = b^2 Var(X) = b^2 \sigma_X^2$

$$\begin{aligned}
 Var(Y) &= E((Y - E(Y))^2) \\
 &= E(\cancel{a+bX} - (\cancel{a+b}\mu_X))^2 \\
 &= E[b(X - \mu_X)]^2 \\
 &= \cancel{b^2} E[\cancel{(X - \mu_X)^2}] \\
 &= b^2 \underbrace{E[(X - \mu_X)^2]}_{Var(X)}
 \end{aligned}$$



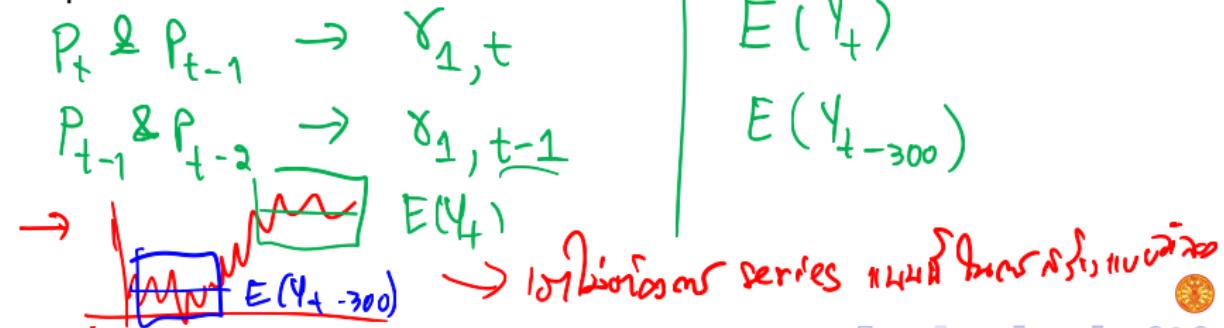
Autocovariance function

ฟังก์ชันที่ใช้ในการสรุปความสัมพันธ์ขึ้นอยู่ต่อกันตามเวลา (temporal dependence) ในข้อมูลอนุกรมเวลาคือ ฟังก์ฟันค่าแปรปรวนร่วมในตอนเดียว (autocovariance) ซึ่งสามารถคำนวณได้โดย

$$\text{lag } k \quad \text{gamma} \quad \gamma_{k,t} = \text{Cov}(Y_t, Y_{t-k}) = E((y_t - E(Y_t))(y_{t-k} - E(Y_{t-k}))) \quad \text{for } k = 0, 1, 2, \dots \quad (14)$$

for Autocovariance

โดยสมการดังกล่าวแสดงถึงความแปรปรวนร่วม (covariance) ระหว่างตัวแปรสุ่มสองตัวใดๆ



Stationary

อนุกรมเวลา
นิยม

Definition 1 (Strict stationary)

อนุกรมเวลา Y_t ใดๆ จะถูกเรียกว่า **strictly stationary** ถ้าการแจกแจงร่วม (joint distribution) ของ $(y_{t_1}, \dots, y_{t_k})$ เหมือนกันกับการแจกแจงร่วมของ $(y_{t_1+t}, \dots, y_{t_k+t})$ สำหรับทุกค่าของ t

* เหตุ: กรณี

Definition 2 (weakly) stationary หรือ covariance stationary)

ข้อมูลอนุกรมเวลา Y_t ใดๆ จะเรียกว่าเป็น **Weakly stationary** ถ้ามีคุณสมบัติดังนี้

- ① $E(Y_t) = \mu$ ค่าเฉลี่ยคงที่ $E(Y_t) = E(Y_{t-1}) = E(Y_{t-300}) = \mu$
- ② $Var(Y_t) = \sigma^2 < \infty$ ถ้า Variance คงที่ $Var(Y_t) = Var(Y_{t-1}) = Var(Y_{t-300})$
- ③ $\gamma_{k,t} = \gamma_k = Cov(Y_t, Y_{t-k})$ for all k and t

Autocovariance \neq lag แต่คุณสมบัติคงที่ $[\gamma_{1,t} = \gamma_{1,t-1}]$

- หมาย γ_1, γ_2 คุณสมบัติคงที่

Autocorrelation function; ACF

ฟังก์ชันสหสัมพันธ์ในตัวเองที่ช้ากว่ากัน k ความเวลา สำหรับอนุกรมที่เป็น weakly stationary จะคำนวณได้จาก

$$\text{lag } k \text{ rho} \quad \rho_k = \frac{\text{Cov}(Y_t, Y_{t-k})}{[\text{Var}(Y_t)\text{Var}(Y_{t-k})]^{1/2}}, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (15)$$

from AutoCorrelation

โดยที่ $\rho_0 = 1$ และ $|\rho_k| \leq 1$ สำหรับทุกค่า k . สำหรับข้อมูลที่เป็น weakly stationary

$$\underline{Var(Y_t) = Var(Y_{t-k}) = \gamma_0} \text{ คงนิ้น} \quad \text{Autocov at lag } k \quad \text{บ่งบอก } k$$

$\rho_k = \frac{\gamma_k}{\gamma_0}, \quad k = 0, 1, 2, \dots$

φ

Cov(Y_t, Y_{t-k}) (16)
Cov($Y_t, Y_{t-1}, \dots, Y_{t-k}$)

เนื่องจากพึงชี้ Autocovariance เป็นสมมาตรดังนั้น $\gamma_k = \gamma_{-k}$ และ $\rho_k = \rho_{-k}$

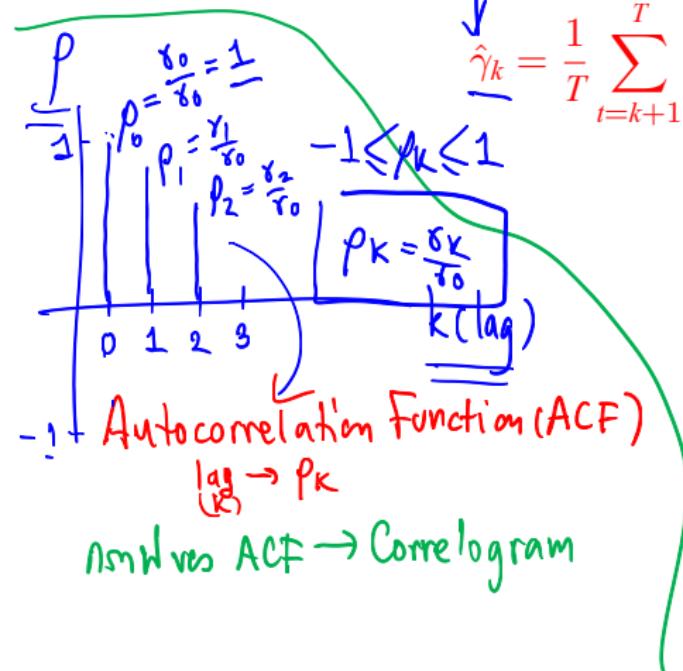
กราฟที่แสดงค่า ACF ในแกนตั้งและค่าล่า k ในแกนนอนเรียกว่า โคริโลแกร์ม (Correlogram)

sample autocovariance และ autocorrelation

- ค่าแปรปรวนร่วมในตอน弄ที่ชักกว่ากัน k ความเวลาของตัวอย่าง (lag k^{th} sample autocovariance)

sample estimator.

$$\hat{\gamma}_k = \frac{1}{T} \sum_{t=k+1}^T (y_t - \bar{Y})(y_{t-k} - \bar{Y}) \quad (17)$$



sample autocovariance และ autocorrelation

- ค่าแปรปรวนร่วมในตอนเองที่ช้ากว่ากัน k คาบเวลาของตัวอย่าง (lag k^{th} sample autocovariance)

$$\hat{\gamma}_k = \frac{1}{T} \sum_{t=k+1}^T (y_t - \bar{Y})(y_{t-k} - \bar{Y}) \quad (17)$$

- สหสัมพันธ์ร่วมในตอนเองที่ช้ากว่ากัน k คาบเวลาของตัวอย่าง (lag k^{th} sample autocorrelation) ได้จากสูตรดังต่อไปนี้

$\hat{\rho}_k = \frac{\hat{\gamma}_k}{\hat{\gamma}_0}$

 Sample
 P_t & P_{t-1}
 สองตัวอย่าง
 ก่อน-หลัง

 $\frac{P_t \& P_{t-1}}{\text{สองตัวอย่าง}} \quad (18)$

โดยที่ $\bar{Y} = \frac{1}{T} \sum_t^T y_t$ คือค่าเฉลี่ยของตัวอย่าง

สำหรับ k แรก $\hat{\rho}_k \sim N(0, \frac{1}{T})$

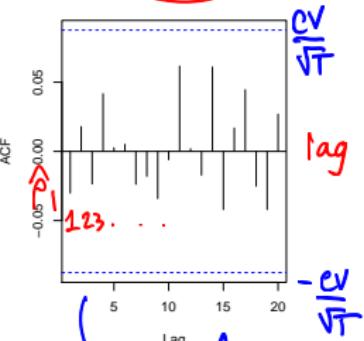
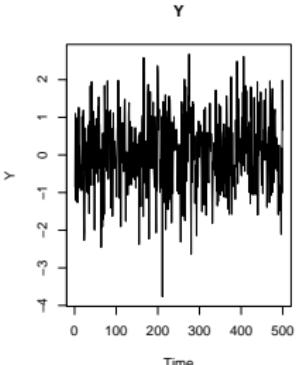
$$t = \hat{\rho}_k / \sqrt{\frac{1}{T}} \sim N(0, 1)$$

$H_0: \rho_1 = 0 \text{ vs } H_1: \rho_1 \neq 0$
 population parameter
 $H_0: \rho_k = 0 \text{ vs } H_1: \rho_k \neq 0$

$$\text{มูล H}_0 \text{ ให้ } |t| = \left| \frac{\hat{\rho}_k}{\sqrt{T}} \right| = \left| \sqrt{T} \hat{\rho}_k \right| > \text{C.V. กัน N} (\alpha=0.05, 1.96) \quad 1.96$$

Figure: ข้อมูลเก่าเชิงไวนทอนอูและฟังก์ชันสหสัมพันธ์ในตัวเอง

$$\sqrt{T} |\hat{\rho}_k| > \text{C.V.} \Rightarrow |\hat{\rho}_k| > \frac{\text{C.V.}}{\sqrt{T}}$$



$$\begin{cases} \hat{\rho}_k > \frac{\text{C.V.}}{\sqrt{T}} \text{ ถ้า} \\ \hat{\rho}_k < -\frac{\text{C.V.}}{\sqrt{T}} \end{cases}$$

ถ้า $\hat{\rho}_k$ อยู่นอกกรอบ เนื่องจาก:

ในโปรแกรม R แผนภาพสำหรับฟังก์ชันสหสัมพันธ์ในตัวเองจะมีเส้นประแสดงความเชื่อมั่น 95% จาก 0 ให้เสมอ โดยที่เส้นประดังกล่าวมีพื้นฐานจากการที่ $H_0(\rho_k^{\infty})$

$y_t \sim iidN(0, \sigma^2)$ ดังนี้

$$\hat{\rho}_k \xrightarrow{a} N\left(0, \frac{1}{T}\right), \quad \text{for } k > 0$$

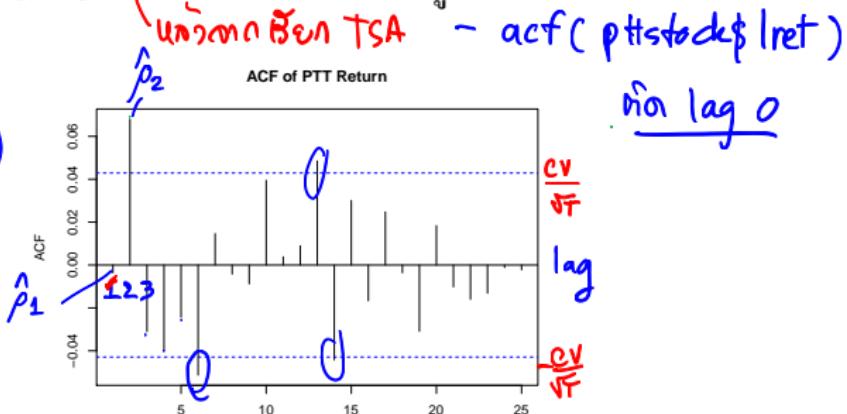
หาก $\hat{\rho}_k \neq 0$
 $\frac{|\hat{\rho}_k|}{\sqrt{T}}$ น่าจะ $\hat{\rho}_{k-T}$ น่าจะเป็น 0

ตัวอย่างการคำนวณ ACF

ปัจจุบันคือไปหาหนังสือเรียน
นี่ๆ กัน \Rightarrow ต้องไป γ_t ห้องสมุดหนังสือเรียน γ_{t-k}

พิจารณาผลได้ต่อแบบในรูปเลือกของหุ้น PTT เราสามารถเรียกใช้ฟังก์ชัน acf
หลังจากเรียก package library (TSA)

Figure: ACF ของผลได้ต่อแบบในรูปเลือกของ PTT



ตัวอย่าง
 $\text{acf}(\text{pttstock\$lret})$

↓ หมายความ $\hat{\rho}_0 = 1$

$\begin{array}{c|cccccc} & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ \hline t & - & - & - & - & - \end{array}$

r_t (log return) ของหุ้น PTT มีความสัมพันธ์ r_{t-1} ?

$r_t \sim r_{t-2}$ $H_0: \rho_2 = 0$ vs $H_1: \rho_2 \neq 0$
 $\rho_2 > \frac{CV}{ST}$ มากกว่า $H_0 \rightarrow H_0 \neq 0$

$H_0: \rho_1 = 0$ vs $H_1: \rho_1 \neq 0$
 ρ_1 อยู่ในช่วง $\pm \frac{CV}{RT}$
 ในช่วงนี้ไม่สามารถปฏิเสธ H_0



การทดสอบพอร์ตแมนโท (Portmanteau test)

- การทดสอบว่าข้อมูลมีสหสัมพันธ์ในตัวเองในหลายๆ คาน (k) ว่าเท่ากับ 0 พร้อมๆ กันหรือไม่ Box and Pierce (1970) ได้เสนอตัวสถิติพอร์ตแมนโทที่คำนวณดังสูตรต่อไปนี้

$$H_0: \rho_1 = \rho_2 = \dots = \rho_m = 0$$

$$H_1: \rho_j \neq 0$$

$$Q^*(m) = T \sum_{k=1}^m \hat{\rho}_k^2 \sim \chi^2_{df=m} \quad (19)$$



การทดสอบพอร์ตแมนโท (Portmanteau test)

- การทดสอบว่าข้อมูลมีสหสัมพันธ์ในตัวเองในหลายๆ ค่า (k) ว่าเท่ากับ 0 พร้อมๆ กันหรือไม่ Box and Pierce (1970) ได้เสนอตัวสถิติพอร์ตแมนโทที่คำนวณดังสูตรต่อไปนี้

$$Q^*(m) = T \sum_{k=1}^m \hat{\rho}_k^2 \quad (19)$$

- ในการทดสอบสมมุติฐานหลัก $H_0 : \rho_1 = \dots = \rho_m = 0$ กับสมมุติฐานทางเลือก $H_1 : \rho_i \neq 0$ สำหรับบางค่า i อนหลังใน $i \in 1, 2, \dots, m$

การทดสอบพอร์ตแมนโท (Portmanteau test)

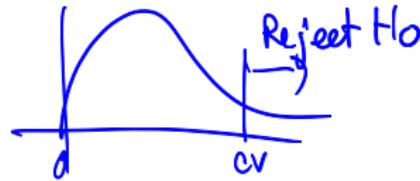
- การทดสอบว่าข้อมูลมีสหสัมพันธ์ในตัวเองในหลายๆ ค่า (k) ว่าเท่ากับ 0 พร้อมๆ กันหรือไม่ Box and Pierce (1970) ได้เสนอตัวสถิติพอร์ตแมนโทที่คำนวณดังสูตรต่อไปนี้

$$Q^*(m) = T \sum_{k=1}^m \hat{\rho}_k^2 \quad (19)$$

- ในการทดสอบสมมุติฐานหลัก $H_0 : \rho_1 = \dots = \rho_m = 0$ กับสมมุติฐานทางเลือก $H_1 : \rho_i \neq 0$ สำหรับบางค่า i อนหลังใน $i \in 1, 2, \dots, m$
- ภายใต้ข้อสมมุติว่า Y_t เป็นลำดับที่แยกແຈกແຈเป็นอิสระและเหมือนกัน

$$Q^*(m) \sim \chi_m^2$$

กฎเกณฑ์: $Q(m) > C.V. \chi^2$



การทดสอบพอร์ตแมนโท (Portmanteau test)

- Ljung and Box (1978) ได้ปรับปรุงตัวสถิติ $Q^*(m)$ โดยการเพิ่มพลัง(power)ในการทดสอบเมื่อมีตัวอย่างจำกัด โดยเสนอตัวสถิติ equation $Q(m)=T(T+2)\sum_{k=1}^m \frac{\hat{\rho}_k^2}{T-k}$ equation



การทดสอบพอร์ตแมนโท (Portmanteau test)

- Ljung and Box (1978) ได้ปรับปรุงตัวสถิติ $Q^*(m)$ โดยการเพิ่มพลัง(power)ในการทดสอบเมื่อมีตัวอย่างจำกัด โดยเสนอตัวสถิติ equation $Q(m)=T(T+2)\sum_{k=1}^m \frac{\hat{\rho}_k^2}{T-k}$ equation
- ตัดสินใจปฏิเสธสมมุติฐานหลัก $H_0 : \rho_1 = \dots = \rho_m = 0$ ถ้า $Q(m) > \chi^2_{1-\alpha,m}$ โดยที่ $\chi^2_{1-\alpha,m}$ แสดงถึงค่าอนไทล์ที่ $100(1 - \alpha)$ ของ χ^2_m

การทดสอบพอร์ตแมนโท (Portmanteau test)

- Ljung and Box (1978) ได้ปรับปรุงตัวสถิติ $Q^*(m)$ โดยการเพิ่มพลัง(power)ในการทดสอบเมื่อมีตัวอย่างจำกัด โดยเสนอตัวสถิติ equation $Q(m)=T(T+2)\sum_{k=1}^m \frac{\hat{\rho}_k^2}{T-k}$ equation
- ตัดสินใจปฏิเสธสมมุติฐานหลัก $H_0 : \rho_1 = \dots = \rho_m = 0$ ถ้า $Q(m) > \chi^2_{1-\alpha,m}$ โดยที่ $\chi^2_{1-\alpha,m}$ แสดงถึงค่าอนุที่ 100(1 - α) ของ χ^2_m
- ในทางปฏิบัติการเลือกค่า m จะส่งผลต่อความสามารถในการทดสอบ ดังนี้งานศึกษาเชิงประจักษ์ส่วนใหญ่มักจะรายงานค่า Ljung-Box $Q(m)$ หลายค่า เช่น $m = 5, 10, 20$ หรืองานวิจัยบางงานพบว่าค่า $m = \ln(T)$ ให้ผลการทดสอบที่ดี

ตัวอย่างการทดสอบพอร์ทแมนโทของผลได้ต่อแบบของ PTT

ฟังก์ชันที่ใช้ในการทดสอบพอร์ทแมนโทคือ `Box.test` โดยเราต้องกำหนด argument คือ

- ข้อมูลที่ใช้ทดสอบ - `lret`
- จำนวนค่าที่รวมมาทดสอบ (`m`)
- ชนิดของการทดสอบ (`type="Ljung"`) สำหรับ Ljung and Box (1978)

```

1 > Box.test(lret, lag=5, type="Ljung")
2 ^ IBox-Ljung test
3 data: lret
4 X-squared = 16.2609, df = 5, p-value = 0.006137

```

$$Q(m=5) = Q(5) = 16.26 \quad H_0: \rho_1 = \rho_2 = \rho_3 = \rho_4 = \rho_5 = 0$$

$$CV(df = 5, \alpha = 0.05) = 11$$

$Q(m=5) > CV$. ปฏิเสธ H_0 ผลทดสอบ $\rho_j (j=1, \dots, 5)$ ที่ได้ค่า $\hat{\rho}_j \neq 0$

สรุป ผลทดสอบ $P\text{-value} = 0.006 < \alpha(0.05)$

