Autoregressive Moving Average; $ARMA(p, q)$)

แบบจำลองที่มีทั้งส่วนประกอบของ AR และ MA ซึ่งหาก y_t เป็นกระบวนการที่เรียกว่าแบบจำลองออโตรีเกรสซีฟมูววิ่งเอเวอเรจอันดับ (p, q) หรือเรียกย่อๆว่า อารมา $ARMA(p, q)$ ถ้า y_t มีค่าเฉลี่ยไม่เท่ากับศูนย์ เราจะสามารถอธิบาย y_t ได้ด้วย

ไม่มีจุดตัด

(อธิบายด้วย y_t ในอดีต) AR part

(อธิบายด้วย ε_t ในอดีต) MA part

(1)
$$y_t = \underbrace{\phi_1 y_{t-1} + ... + \phi_p y_{t-p}}_{} + \varepsilon_t + \underbrace{\theta_1 \varepsilon_{t-1} + ... + \theta_q \varepsilon_{t-q}}_{} \qquad (2.53)$$

หากเรากำหนดให้ $\alpha = \mu(1 - \phi_1 - ... - \phi_p)$ และสามารถเขียนแบบจำลองสำหรับ y_t ได้เป็น

(2) มีจุดตัด

$$y_t = \underline{\alpha} + \phi_1 y_{t-1} + ... + \phi_p y_{t-p} + \varepsilon_t + \theta_1 \varepsilon_{t-1} + ... + \theta_q \varepsilon_{t-q} \qquad (2.54)$$

เราสมมุติให้ $\varepsilon_t \sim WN(0, \sigma_\varepsilon^2)$

คุณลักษณะของ ARMA(p,q)?

Autoregressive Moving Average; $ARMA(p,q)$)

เราสามารถเขียนสมการอารมาได้ในรูป AR และ MA polynomials ได้ดังนี้

$$\phi(L)y_t = \theta(L)\varepsilon_t$$

$(y_t - \mu) = \phi(y_{t-1} - \mu) + \varepsilon_t + \theta\varepsilon_{t-1}$

โดยที่ $\phi(L) = 1 - \phi_1 L - ... - \phi_p L^p$ และ $\theta(L) = 1 + \theta_1 L + ... + \theta_q L^q$

พิจารณาคุณสมบัติของแบบจำลองอารมาได้ด้วยการพิจารณา $ARMA(1,1)$

$$y_t = \underbrace{\phi y_{t-1}}_{AR(1)} + \varepsilon_t + \underbrace{\theta\varepsilon_{t-1}}_{MA(1)} \qquad (2.55)$$

$y_t = \alpha + \phi y_{t-1} + \varepsilon_t + \theta\varepsilon_{t-1}$

$E(y_t) = \frac{\alpha}{1-\phi} = \mu$

โดยที่ $\varepsilon_t \sim iidN(0, \sigma^2)$

คุณสมบัติ

1) $E(y_t)$
2) $var(y_t)$
3) $Corr(y_t, y_{t-k})$

$E(y_t) = E(\phi y_{t-1} + \varepsilon_t + \theta\varepsilon_{t-1})$

$= \phi \underbrace{E(y_{t-1})}_{\text{สมมุติ stationary } E(y_t)} + \underbrace{\cancel{E(\varepsilon_t)}}_{=0} + \theta \underbrace{\cancel{E(\varepsilon_{t-1})}}_{=0}$

$(1-\phi)E(y_t) = 0$

1 $E(y_t) = 0$

คุณสมบัติ ARMA(1,1) $\Rightarrow \boxed{y_t = \phi y_{t-1} + \varepsilon_t + \theta \varepsilon_{t-1}}$

$(1-\phi L)y_t = (1+\theta L)\varepsilon_t$

$\boxed{MA(\infty)}$ $y_t = \frac{(1+\theta L)}{1-\phi L}\varepsilon_t$

เราใช้ความสัมพันธ์ต่อไปนี้

$E(\varepsilon_t y_t) = E[\varepsilon_t(\phi y_{t-1} + \varepsilon_t + \theta \varepsilon_{t-1})]$

$= \phi \underbrace{E(\varepsilon_t y_{t-1})}_{0} + \underbrace{E(\varepsilon_t^2)}_{Var(\varepsilon_t)=\sigma_\varepsilon^2} + \theta \underbrace{E(\varepsilon_t \varepsilon_{t-1})}_{Cov(\varepsilon_t,\varepsilon_{t-1})=0}$

$\varepsilon_{t-1}, \varepsilon_{t-2}, \ldots$

$\boxed{E(\varepsilon_t y_t) = \sigma_\varepsilon^2}$

$E(\varepsilon_{t-1} y_t) = E(\varepsilon_{t-1}(\phi y_{t-1} + \varepsilon_t + \theta \varepsilon_{t-1}))]$

$= \phi \underbrace{E(\varepsilon_{t-1} y_{t-1})}_{\sigma_\varepsilon^2} + \underbrace{E(\varepsilon_{t-1}\varepsilon_t)}_{Cov(\varepsilon_t,\varepsilon_{t-1})=0} + \theta \underbrace{E[\varepsilon_{t-1}^2]}_{Var(\varepsilon_t)=\sigma_\varepsilon^2}$

~~$E(y_t) =$~~

$E(\varepsilon_{t-1} y_t) = [\phi + \theta]\sigma_\varepsilon^2$

คุณสมบัติ ARMA(1,1)

คุณสมบัติของ $ARMA(1,1)$ จะได้

$Var(Y_t) = \gamma_0 = E(Y_t - \cancel{E(Y_t)})^2 = E(Y_t^2) = E(Y_t \cdot Y_t)$

$= E(Y_t(\phi Y_{t-1} + \varepsilon_t + \theta\varepsilon_{t-1}))$

$\gamma_0 = \phi \underbrace{E(Y_t Y_{t-1})}_{=\gamma_1} + \underbrace{E(Y_t \varepsilon_t)}_{=\sigma_\varepsilon^2} + \theta \underbrace{E(Y_t \varepsilon_{t-1})}_{=[\phi+\theta]\sigma_\varepsilon^2} = \phi\gamma_1 + \sigma_\varepsilon^2 + \theta[\phi+\theta]\sigma_\varepsilon^2$ — ①

$\gamma_1 = E[(Y_t - \cancel{E(Y_t)})(Y_{t-1} - \cancel{E(Y_{t-1})})] = E[Y_t \cdot Y_{t-1}]$

$= E[(\phi Y_{t-1} + \varepsilon_t + \theta\varepsilon_{t-1})Y_{t-1}]$

$\gamma_1 = \phi \underbrace{E(Y_{t-1}^2)}_{\gamma_0} + \underbrace{E(\varepsilon_t Y_{t-1})}_{=0} + \theta \underbrace{E[\varepsilon_{t-1} Y_{t-1}]}_{\sigma_\varepsilon^2} = \phi\gamma_0 + \theta\sigma_\varepsilon^2$ — ②

$\cancel{\gamma_j =}$

จาก ① & ②

$\gamma_2 = E[Y_t Y_{t-2}] = E[(\phi Y_{t-1} + \varepsilon_t + \theta\varepsilon_{t-1})Y_{t-2}]$

$= \phi \underbrace{E[Y_{t-1} Y_{t-2}]}_{\gamma_1} + \underbrace{E[\varepsilon_t Y_{t-2}]}_{=0} + \theta \underbrace{E[\varepsilon_{t-1} Y_{t-2}]}_{=0}$

$\varepsilon_{t-2}, \ldots$

$\gamma_2 = \phi\gamma_1$

$\gamma_3 = E[Y_t Y_{t-3}] = \phi\gamma_2$

$\gamma_j = \phi\gamma_{j-1}$ สำหรับ $j \geq 2$

คุณสมบัติ ARMA(1,1)

กรณีที่ $j \geq 2$ จากสมการที่ (2.56) และ (2.57) เราจะได้

$$Var(y_t) = \gamma_0 = \frac{[1+2\phi\theta+\theta^2]\sigma_\varepsilon^2}{1-\phi^2}$$

แทนค่าใน สมการ ② จะได้ $\underline{\gamma_1}$

$$\boxed{\rho_1 = \frac{\gamma_1}{\gamma_0}}$$

เพื่อตอบ $\gamma_2 = \phi\gamma_1$; $\frac{\gamma_2}{\gamma_0} = \phi\frac{\gamma_1}{\gamma_0}$

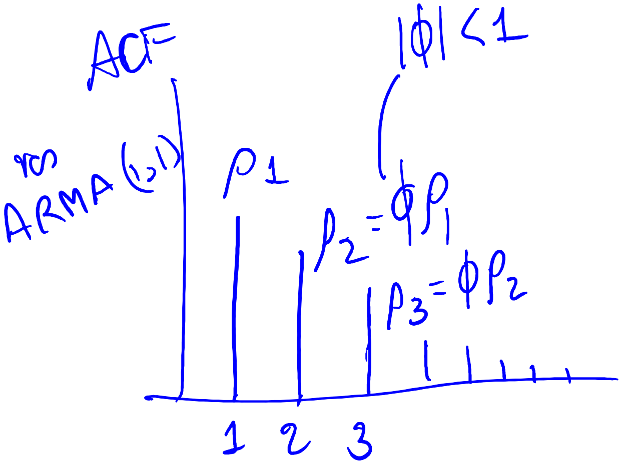
$\rho_2 = \phi\rho_1$

$\gamma_j = \phi\gamma_{j-1}$; $\rho_j = \phi\rho_{j-1}$

ACF ณ ค่าล่า j ใดๆที่ $j \geq 2$ ได้

$$\rho_j = \phi\rho_{j-1}$$

กรณีที่ $j \geq 2$ จะเห็นได้ว่า ACF มีค่าที่ลดลงเรื่อยๆด้วยอัตราแบบ exponential)

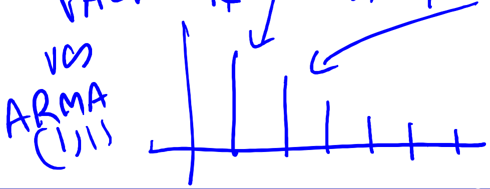


PACF

$(1-\phi L)y_t = (1+\theta L)\varepsilon_t$

AR(∞) $\boxed{\frac{(1-\phi L)}{1+\theta L}} y_t = \varepsilon_t$ (ไม่มีจุดสิ้นสุด แน่นอน)

PACF $y_t + \square\, y_{t-1} + \square\, y_{t-2} + \dots = \varepsilon_t$



ทั้ง ACF และ PACF ใช้เวลา เทนค่า จะมีค่า เข้าใกล้ ศูนย์

คุณสมบัติ ARMA(1,1) → Stationary ดูได้ที่ตัวไหน?

แบบจำลอง $ARMA(1,1)$ ในรูปของมูวิ่งเอเวอเรจที่มีอันดับเป็นอนันต์ (infinite MA) ได้เป็น

$$y_t = \varepsilon_t + (\phi - \theta)\sum_{j=1}^{\infty} \phi^{j-1}\varepsilon_{t-j}$$

หรือ $\psi_j = (\phi - \theta)\phi^{j-1}$ จะเห็นได้ว่าเงื่อนไขที่จะทำให้กระบวนการนี้เป็นกระบวนการนิ่งคือ $|\phi| < 1$

Stationary

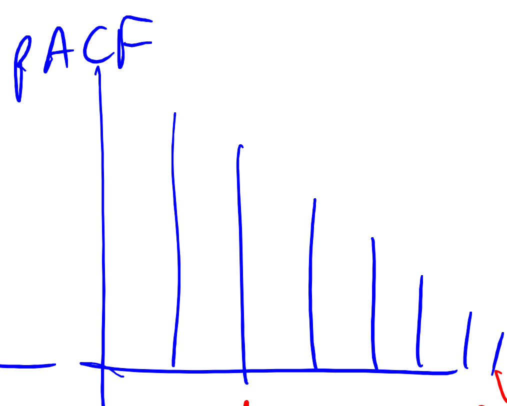
AR(1)

สรุปคุณสมบัติของ *ARMA* (p, q)

พิจารณาเฉพาะ: AR part
$\phi(L)y_t = \theta(L)\varepsilon_t$

- กระบวนการ *ARMA* (p, q) จะ stationary และ ergodic ถ้าค่าสัมบูรณ์ของค่ารากของพหุนามออโตรีเกรสซีฟ $\phi(m) = 0$ มีค่ามากกว่าหนึ่ง
- และสามารถหาค่าผกผันได้ถ้ารากของพหุนามมูวิ่งเอเวอเรจ $\theta(m) = 0$ มีค่ามากกว่าหนึ่ง
- พหุนาม AR และ MA ไม่มีตัวประกอบร่วม

รูปทั่วไปของ ACF ของกระบวนการ *ARMA* (p, q) ค่อนข้างยุ่งยาก โดยสรุปแล้วทั้ง ACF และ PACF จะค่อยๆลดลงเรื่อยแบบเลขชี้กำลัง (exponential)



ARMA (2,1)

$(1-0.2L-0.15L^2)y_t = (1-0.5L)\varepsilon_t$

$(1-\cancel{0.5L})(1+0.3L)\,y_t = (1-\cancel{0.5L})\,\varepsilon_t$

AR(1) — $(1+0.3L)\,y_t = \varepsilon_t$

เลือกรูปแบบที่ง่ายที่สุด (สัมประสิทธิ์น้อยที่สุด)

การประมาณค่าสมการแบบจำลอง ARMA

เราสามารถประมาณค่าแบบจำลอง $ARMA(p, q)$ ได้ด้วยวิธีการค่าความควรจะเป็นสูงที่สุด (MLE)

- ฟังก์ชันที่แน่นอน (exact log-likelihood) นั้นมีรูปแบบที่ค่อนข้างซับซ้อน นอกจากนี้จุดเริ่มต้นของข้อมูลในกรณี exact likelihood จะใช้คุณสมบัติของการแจกแจงที่นิ่งเพื่อสร้างฟังก์ชันค่าควรจะเป็นของค่า y_t p ค่าแรก และ ε_t q ค่าแรก
- conditional likelihood จะสมมุติให้ y_t p ค่าแรก และ ε_t q ค่าแรกเท่ากับศูนย์

กรณีที่จำนวนตัวอย่างมีจำนวนเข้าใกล้อนันต์ค่าประมาณจากสองวิธีจะมีค่าใกล้เคียงกัน แต่จะแตกต่างกันในกรณีตัวอย่างมีจำนวนน้อย

การประมาณค่าสมการแบบจำลอง ARMA

ทดสอบความเพียงพอของแบบจำลองได้เช่นเดียวกับในกรณีของแบบจำลอง AR และ MA โดยที่ตัวสถิติ $Q(m) \sim \chi^2_{m-p-q}$ และเราจะปฏิเสธสมมุติฐานหลักถ้า $Q(m)$ มีค่ามากกว่าควอนไทล์ที่ $(1-\alpha)$ ของ χ^2_{m-p-q}

ก่อนที่เราจะประมาณค่าแบบจำลอง $ARMA(p, q)$ สำหรับอนุกรมเวลา y_t ใดๆ เราจะเป็นต้องระบุลำดับของ AR (p) และ MA (q) เสียก่อน

เกณฑ์การเลือกแบบจำลอง (Model Selection Criteria)

เราสามารถใช้การสังเกต ACF ของตัวอย่าง ในกรณีของ MA หรือ PACF ของตัวอย่าง ในกรณีของ AR

Table: สรุปลักษณะของ ACF และ PACF สำหรับแบบจำลอง ARMA

? ?

	$AR(p)$	$MA(q)$	$ARMA(p,q)$.
ACF	ค่อยๆลดลง	ค่าเท่ากับศูนย์หลังจากช่วงล่าที่ q	ค่อยๆลดลง
PACF	เท่ากับศูนย์หลังจากช่วงล่าที่ p	ค่อยๆลดลง	ค่อยๆลดลง

?

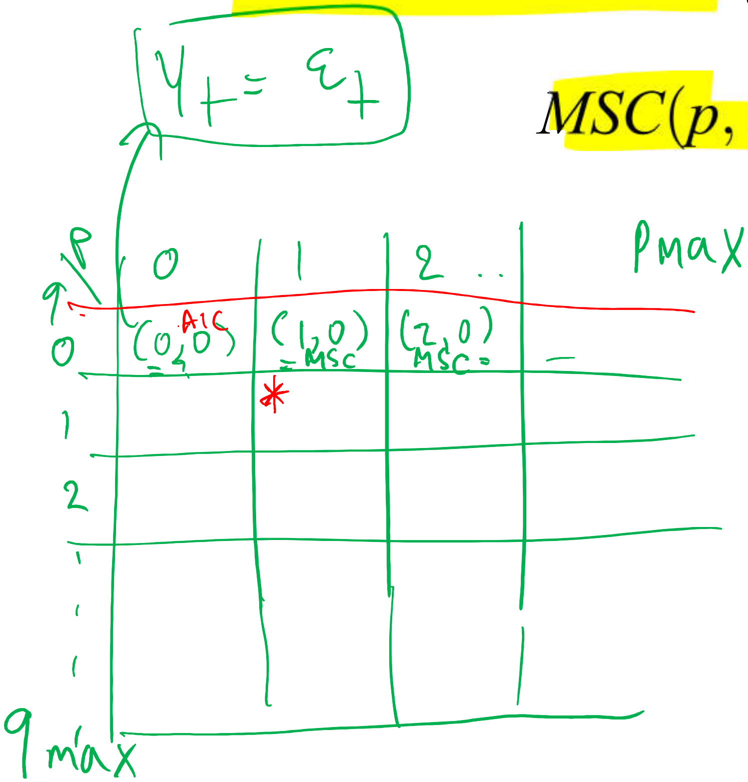
เราไม่

ตัวช่วย
บอก order
AR, MA

สามารถใช้
sample ACF
+ PACF

เกณฑ์การเลือกแบบจำลอง (Model Selection Criteria)

อีกทางเลือกหนึ่งเราสามารถจะใช้เกณฑ์การเลือกแบบจำลอง แนวคิดคือการประมาณค่าแบบจำลอง $ARMA(p, q)$ สำหรับค่าอันดับ p และ q ต่างๆที่น้อยกว่าค่าหนึ่งที่เรากำหนดไว้ p_{max} และ q_{max} และเลือกค่า p และ q ที่ทำให้ค่าเกณฑ์การเลือกต่ำที่สุด โดยที่เกณฑ์การเลือกจะอยู่ในรูป



$$MSC(p, q) = \ln(\tilde{\sigma}^2(p, q)) + c_T\varphi(p, q)$$

error

Panelty

เกณฑ์การเลือกแบบจำลอง (Model Selection Criteria)

Information criteria

โดยที่แบบเกณฑ์ที่เป็นที่นิยมสามเกณฑ์ได้แก่ Akaike (AIC) Schwarz-Bayesian (BIC) (Bayesian) และ Hannan-Quinn (HQIC)

$$✓\ AIC(p,q) = \ln(\tilde{\sigma}^2(p,q)) + \boxed{\frac{2}{T}(p+q)}$$

$$✓\ BIC(p,q) = \ln(\tilde{\sigma}^2(p,q)) + \boxed{\frac{\ln T}{T}(p+q)}$$

$$HQIC(p,q) = \ln(\tilde{\sigma}^2(p,q)) + \boxed{\frac{2\ln(\ln T)}{T}(p+q)}$$

เลือกแบบที่ลด AIC/BIC ต่ำที่สุด

กรณี T ใหญ่ เกณฑ์ AIC จะเลือกอันดับที่ (p,q) มากกว่าที่ควรจะเป็น ในขณะที่เกณฑ์ BIC และ HQIC เลือกค่าที่ consistent p เลือก → p จริง , q เลือก → q จริง

อย่างไรก็ตามใน T ขนาดเล็กเกณฑ์ทั้งสามจะให้ค่าที่ไม่แตกต่าง

→ มักจะเลือก p,q แบบที่เกิน

ตัวอย่างที่ 2.7

log return on forex B/$ ปี 1998 ถึง 2012

Figure: ACF และ PACF ของผลได้ตอบแทนรายวันจากการซื้อขายเงินดอลลาร์สหรัฐ

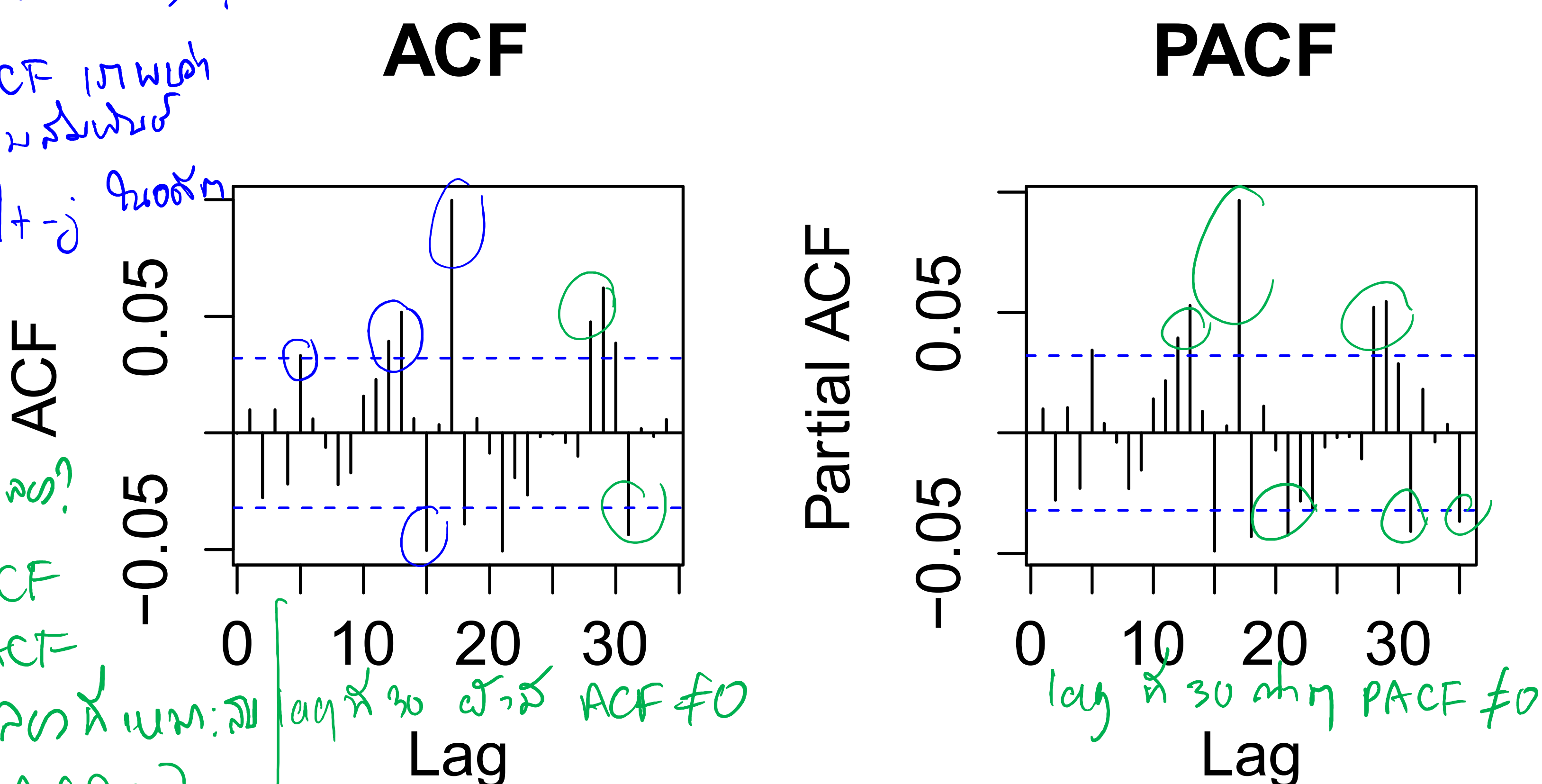
① สร้างแบบจำลอง ?

จาก ACF เราพบว่า y_t มีความสัมพันธ์ กับ y_{t-j} ในอดีต

สร้างแบบจำลอง

② แบบจำลอง?

จาก ACF และ PACF แบบจำลองที่เหมาะสม ARMA(p,q)



ตัวอย่างที่ 2.7

อย่างไรก็ตาม package "forecast" มีคำสั่ง auto.arima(series, arguments) เลือก optimal p & q

Install

ใช้ model selection criteria (aic/bic) เลือกแบบจำลอง.

ข้อมูล

difference (ดูจากหน่วยก่อน N)

ระบุ Max p,q

เลือก IC ได้
- AIC
- BIC

ตัด แบบจำลองบางอันออก (ไม่ได้พิจารณาทั้งหมด)

ร่องรอย Log likelihood

แสดงผล ของทุกแบบจำลอง

```
> library(forecast)
> auto.arima(ret,d=0,D=0,max.p=6,max.q=6,ic=c("aic"),stepwise=FALSE,trace=TRUE)

 ARIMA(0,0,0) with zero mean     : -27687.05
 ARIMA(0,0,0) with non-zero mean : -27686.59
[omitted]
 ARIMA(5,0,0) with zero mean     : -27850.55
 ARIMA(5,0,0) with non-zero mean : -27851.11

Series: ret
ARIMA(4,0,1) with non-zero mean

Coefficients:
          ar1      ar2      ar3      ar4
      -0.5876  -0.0238  -0.0066  -0.0227
s.e.   0.2641   0.0196   0.0208   0.0199
          ma1  intercept
       0.5981     -1e-04
s.e.   0.2636      1e-04

sigma^2 estimated as 3.432e-05:  log likelihood=13849.44
AIC=-27684.88   AICc=-27684.85   BIC=-27641.33
```

พิจารณาทุกแบบจำลองที่เป็นไปได้ (0,0)... (6,6)

แบบจำลองที่ AIC มีค่าต่ำที่สุด

ARMA(4,1)

ϕ_1 ϕ_2 ϕ_3 ϕ_4 θ_1

m1 ← arima( )

เสร็จหรือ? เช็คว่า m1$residuals เป็น WN?

✓ ไปพยากรณ์ => forecast

การเขียนกระบวนการอารมา(ARMA)ในสามรูปแบบ

จากแบบจำลองที่เราอธิบาย y_t ด้วยแบบจำลอง *ARMA* ในรูปแบบพหุนาม

1

$$\phi(L)y_t = \theta(L)\varepsilon_t$$

โดยที่ $\phi(L) = 1 - \sum_{i=1}^{p} \phi_i L^i$ และ $\theta(L) = 1 + \sum_{i=1}^{q} \theta_i L^i$ เราสามารถแสดง y_t โดยใช้

2

MA(∞)

$$\frac{\theta(L)}{\phi(L)} = 1 + \psi_1 L + \psi_2 L + \ldots = \psi(L) \qquad (2.63)$$

และ

3

$$\frac{\phi(L)}{\theta(L)} = 1 - \pi_1 L - \pi_2 L - \ldots = \pi(L) \qquad (2.64)$$

AR(∞)

การพยากรณ์ (forecasting)

เราสามารถแสดงแบบจำลอง $ARMA(p,q)$ ได้สามรูปแบบ ซึ่งเราสามารถใช้รูปแบบใดรูปแบบหนึ่งในการสร้างการพยากรณ์

กรณีใช้รูปแบบ *ARMA*   ARMA(1,1)

$$y_t = \phi y_{t-1} + \varepsilon_t + \theta \varepsilon_{t-1}$$

$$\boxed{h \to 1} \qquad y_{h+1} = \phi y_h + \varepsilon_{h+1} + \theta \varepsilon_h$$

$$\hat{y}_h(1) = E(y_{h+1} | F_h) = E(\phi y_h + \varepsilon_{h+1} + \theta \varepsilon_h | F_h)$$

$$= \phi y_h + \theta \varepsilon_h$$

การพยากรณ์ (forecasting)

กรณีใช้รูปแบบออโตรีเกรสซีฟอนันต์

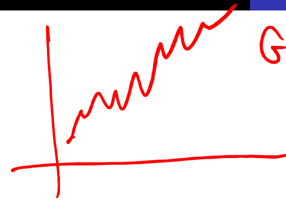
$\hat{y}_h(1)$

การพยากรณ์ (forecasting)

กรณีรูปแบบมูวิ่งเอเวอเรจอนันต์

$$\hat{y}_h(1)$$

Nonstationary series



GDP → X stationary

อนุกรมเวลาทางเศรษฐกิจจำนวนมากมีพฤติกรรมที่มีแนวโน้ม(trend)หรือมีลักษณะไม่นิ่ง (non-stationary) ตัวอย่างเช่น ราคาสินทรัพย์ อัตราแลกเปลี่ยน GDP

trend สาเหตุ ① Nonstationary (Random walk) ② เส้น trend ที่สามารถ แน่นอน

รูปแบบแนวโน้มของข้อมูลว่าเกิดจากความไม่นิ่งหรือเป็นแนวโน้ม

การสร้างแบบจำลอง *ARMA* เราจำเป็นต้องทำการแปลงข้อมูลในนิ่งเสียก่อน ในขณะที่ถ้าข้อมูลมีแนวโน้มเราจำเป็นต้องขจัดแนวโน้มเสียก่อน

แล้วสร้างข้อมูลที่หาค่าอยู่รอบๆ

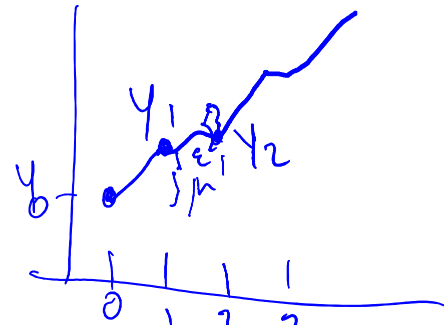
โดยที่กระบวนการที่มีลักษณะแนวโน้มอาจจะแบ่งได้เป็น (1) random walk with drift (2) trend stationary

ปรับข้อมูลให้เป็น stationary

รูปแบบ 1 Random walk with drift

Difference-stationary

Random walk
$y_t = y_{t-1} + \varepsilon_t$



กำหนดให้ y_t เป็น random walk with drift

drift

$$\boxed{y_t = \mu + y_{t-1} + \varepsilon_t} \quad (2.68)$$

โดย $\varepsilon_t \sim WN(0,\sigma^2)$ และเราเรียก μ ว่าตัวสร้างแนวโน้ม (drift) หากเราสมมุติให้ $y_0 = 0$ จะได้

$y_1 = \mu + \cancel{y_0} + \varepsilon_1$

$y_2 = \mu + y_1 + \varepsilon_2 = \mu + (\mu + \cancel{y_0} + \varepsilon_1) + \varepsilon_2$

$= 2\mu + \varepsilon_1 + \varepsilon_2$

⋮

$$\boxed{y_t = t\mu + \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \dots + \varepsilon_t}$$

Random walk with drift เป็น Nonstationary

กระบวนการแนวเดินแบบสุ่มแบบมีแนวโน้มจะมีค่าคาดหมาย ($E(y_t)$) เท่ากับ

$E(y_t) = E(t\mu + \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \dots + \varepsilon_t) = t\mu + \cancel{E(\varepsilon_1)} + \dots + \cancel{E(\varepsilon_t)}$

ค่าความแปรปรวน ($Var(y_t)$) เท่ากับ

$Var(y_t) = Var(\mu t + \varepsilon_1 + \dots + \varepsilon_t)$

$= t \cdot \sigma_\varepsilon^2$ — ไม่คงที่

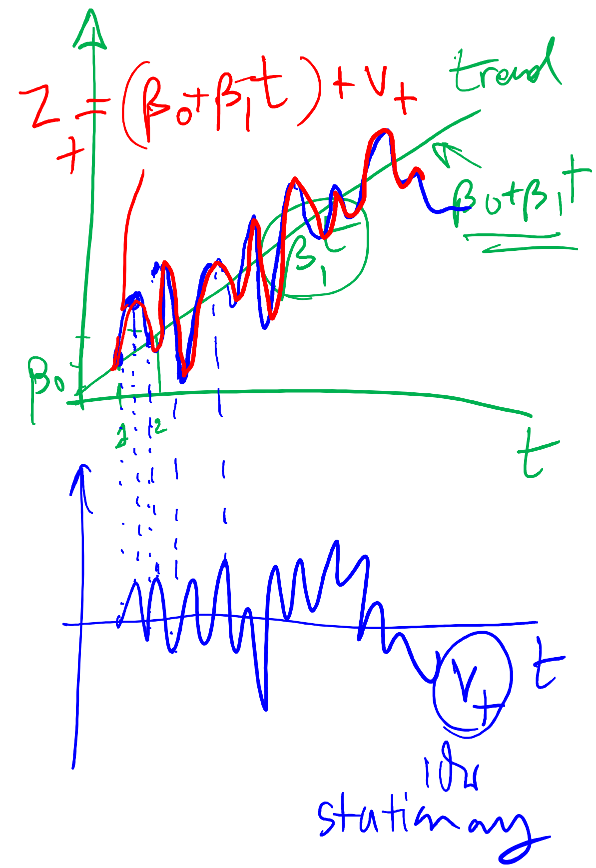
ไม่เป็น Stationary { ค่าเฉลี่ยของ y_t ไม่คงที่ (ขึ้นอยู่กับ t)

รูปแบบ 2 มีเส้นแนวโน้มที่ตายตัว (Deterministic Trend)

Trend- stationary

กำหนดให้ z_t เป็น trend-stationary

$$\boxed{z_t = \beta_0 + \beta_1 t + v_t} \quad (2.70)$$



โดยที่ v_t เป็นอนุกรมนิ่งใดๆเช่น AR(1)

ค่าคาดหมายของ $(E(z_t))$ จะเท่ากับ

ค่าความแปรปรวน $(Var(z_t))$ จะเท่ากับ

คงที่

$$E(z_t) = E(\beta_0+\beta_1 t + v_t) = \underbrace{\beta_0+\beta_1 t}_{\text{ไม่คงที่}} + \boxed{E(v_t)}$$

z_t เป็น Non stationary

เราจำเป็นต้องแปลงข้อมูลที่เป็น Nonstationary → Stationary

สร้างแบบจำลอง AR/MA ARMA

Difference- and Trend- stationary

Figure: ข้อมูลจำลองของกระบวนการแนวเดินแบบสุ่มแบบมีแนวโน้มและกระบวนการที่นิ่งหลังจากขจัดแนวโน้ม

วิธีการในการกำจัด trend (detrend)

1. ประมาณ $y_t = \beta_0 + \beta_1 t + v_t$

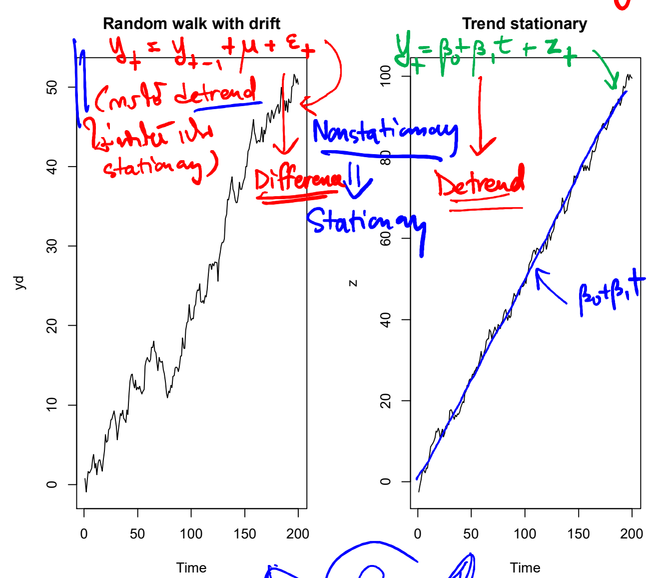
   $\boxed{\hat{y}_t = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 t} \rightarrow$ Trend

2. $y_t - \hat{y}_t$ สมการที่เรา detrend

ถ้าข้อมูลจริง → เราต้องทำการปรับให้เป็น stationary → ใช้วิธีการที่แตกต่างกัน

$y_t = y_{t-1} + \varepsilon_t$

$\underbrace{y_t - y_{t-1}}_{\Delta y_t} = \varepsilon_t$ first difference



1970s พบว่า GDP ไม่ได้เป็น deterministic trend ⇒ Random walk

การ detrend R.W. ไม่ได้ทำให้ series กลายเป็น stationary

เราต้องปรับข้อมูลโดยการ difference

กระบวนการทั้งสองที่ได้ยกตัวอย่างมา เป็นกระบวนการที่ไม่นิ่ง (non-stationary) แต่มีคุณลักษณะที่แตกต่างกันดังนั้น วิธีการที่ใช้ในทำให้อนุกรมนิ่งจึงแตกต่างกัน

Difference-stationary

$y_t = \mu + y_{t-1} + \varepsilon_t$

$y_t - y_{t-1} = \mu + \varepsilon_t$

$\boxed{\Delta y_t = \mu + \varepsilon_t}$

$E(\Delta y_t) = \mu$

$Var(\Delta y_t) = \sigma^2_\varepsilon$

วิธีการการทำ first difference $\Delta y_t = y_t - y_{t-1}$
$\Delta^2 y_t = \Delta y_t - \Delta y_{t-1}$ เราจะเรียกว่า second difference

วิธีการดำเนินการผลต่างจะเหมาะกับอนุกรมเวลาที่เป็นกระบวนการนิ่งหลังจากดำเนินการผลต่าง โดยที่หากอนุกรมเวลา y_t (Nonstationary) เป็น stationary หลังจากการทำ first difference (แล้ว Δy_t เป็น stationary) เราจะเรียกอนุกรมเวลา y_t Integrated of order 1 หรือ $I(1)$

ในขณะที่อนุกรมเวลานิ่งจะคือ $I(0)$

วิธีการที่สองเหมาะกับอนุกรมที่เป็นกระบวนการนิ่งหลังจากกำจัดแนวโน้ม

- $y_t \sim I(1)$ แสดงว่า Δy_t เป็น stationary
- ถ้า Δy_t ยังเป็น Nonstationary $\Rightarrow \Delta(\Delta y_t) = \Delta^2 y_t$ เป็น stationary
  เราจะเรียกว่า $y_t \sim I(2)$
- ถ้า y_t เป็น stationary อยู่แล้ว $I(0)$

การทดสอบยูนิทรูทในรูป AR(1)

Random walk [$y_t = y_{t-1} + \varepsilon_t$]

AR(1)

เครื่องมือสำคัญที่ใช้ในการระบุว่าควรจะใช้วิธีการใดในการกำจัดแนวโน้มคือการทดสอบยูนิทรูท (unit root test)

AR(1)

$y_t = \phi y_{t-1} + \varepsilon_t$

$\phi = 1$

สมมุติว่าเราพิจารณาแบบจำลอง $AR(1)$ ซึ่งเขียนได้ดังนี้

R.W. เป็น

AR(1) ⇒ $\phi = 1$

$$y_t = \phi y_{1-t} + \varepsilon_t, \qquad \varepsilon_t \sim WN(0, \sigma^2) \qquad (2.71)$$

$(1-\phi L) y_t = \varepsilon_t$

$1 - \phi z = 0$

$z = 1/\phi = 1$

OLS $\hat{\phi}$ = 1 → R.W. (Unit root)

การทดสอบยูนิทรูทมีพื้นฐานจากการทดสอบสมมุติฐานหลักว่าหาก $\phi = 1$ แล้ว y_t จะเป็น unit root และมีลักษณะเป็น random walk

Z (Root of Polynomial)

ดังนั้นสมมุติฐานที่เราต้องการทดสอบคือ

$\boxed{Z=1}$ ⇒ Unit root

$\phi > 1$ y_t Nonstationary

Nonstationary

$$H_0 : \phi = 1 \qquad (y_t \text{ เป็น R.W.}) \qquad (y_t \sim I(1))$$

$$H_1 : \phi < 1 \qquad (y_t \text{ ไม่เป็น R.W.}) \qquad (y_t \sim I(0))$$

$\phi < 1$ y_t stationary

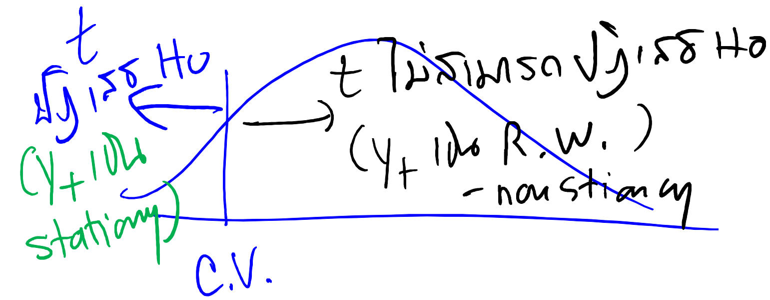
Stationary.

$t = \dfrac{\hat{\phi} - 1}{se(\hat{\phi})}$

การทดสอบยูนิทรูทในรูป AR(1)

เราสามารถประมาณค่าสมการ (2.71) ด้วย OLS และใช้ตัวสถิติที่เรียกว่าตัวสถิติ Dickey-Fuller t ซึ่งคำนวณได้โดย

$$t_{\phi=1} = \frac{\hat{\phi} - 1}{se(\hat{\phi})}$$



การทดสอบนี้เป็นการทดสอบหางเดียวทางซ้าย คือเราจะปฏิเสธสมมุติฐานหลักถ้าค่าตัวสถิติน้อยกว่าค่าวิกฤติ และสรุปว่าอนุกรมเวลาเป็นอนุกรมนิ่ง หากเราไม่สามารถปฏิเสธสมมุติฐานหลักได้ แสดงว่าอนุกรมดังกล่าวเป็นยูนิทรูท

- Dickey-Fuller พบว่า ตัวสถิติ t จากสมการข้างบน ไม่ได้ dist เป็น t (ไม่สามารถเปิดตาราง t ปกติ)

⇒ เสนอค่า c.v. ใหม่ [Dickey-Fuller t distribution]

$y_t = \phi y_{t-1} + a_t \Rightarrow H_0: \phi = 1 \rightarrow$ ค่าสัมประสิทธิ์ $= 0$?

ลบ y_{t-1} ทั้งสองข้าง

$y_t - y_{t-1} = (\phi - 1) y_{t-1} + \varepsilon_t$

การทดสอบยูนิทรูทในรูป AR(1)

สมการ (2.71) ที่เราใช้ในการทดสอบยูนิทรูทยังสามารถเขียนในรูป

$\boxed{\text{Reg}} \longrightarrow$

$$\Delta y_t = \overset{(\phi-1)}{\pi} y_{1-t} + \varepsilon_t, \qquad (2.72)$$

$H_0: \phi = 1$

โดยที่ $\pi = (\phi - 1)$ ซึ่งในที่นี้การทดสอบยูนิทรูทจะเป็นการทดสอบ $H_0 : \pi = 0$ และ $H_1 : \pi < 0$ $\Leftarrow [H_1 : \phi < 1]$

ตัวสถิติที่ใช้ในการทดสอบยูนิทรูทจะมีการแจกแจงที่ไม่เป็นมาตรฐานและไม่เป็นการแจกแจงแบบปกติเมื่อข้อมูลขนาดใหญ่เหมือนในกรณีทดสอบอื่นๆที่เราเคยพบมา Phillips (1987) ได้พิสูจน์ว่าหาก y_t เป็นยูนิทรูท $t_{\phi=1}$ และ $T(\hat{\phi} - 1)$ จะมีการแจกแจงแบบ $\boxed{\text{Dickey-Fuller t}}$ และ Dickey-Fuller normalized bias

DF $\quad t = \dfrac{\hat{\pi} - 0}{se(\hat{\pi})}$ $\sim$ DF t distribution (ไม่ใช่ t dist ปกติ)

การแจกแจง Dickey-Fuller

ขึ้นอยู่กับรูปแบบของสมการ
1) ไม่มีค่าคงที่ (No constant)
2) ค่าคงที่ (Constant)
3) Trend

DF t dist

ตารางสำหรับการแจกแจง Dickey-Fuller สามารถใช้คำสั่ง `adfTable` ใน `library(fUnitRoots)` โดยสมการทดสอบมีได้ 3 รูปแบบ

`trend=c("nc")` - no constant เช่นในสมการ (2.72) (ในหัวข้อย่อยต่อไปจะพิจารณากรณีมีพจน์ค่าคงที่ และจุดตัด) และแสดงการแจงแจงของ t โดยระบุ `statistics=c("t")` ส่วนการแจกแจง Dickey-Fuller normalized bias จะต้องระบุว่า `statistics=c("n")`

Normalized bias

No constant

t-statistics $\left(\frac{\hat{\phi}-1}{se(\hat{\phi})}, \frac{\hat{\pi}-0}{se(\hat{\pi})}\right)$

```
> library(fUnitRoots)
> adfTable(trend=c("nc"), statistic=c("t"))
$x
[1]   25   50  100  250  500  Inf

$y
[1] 0.010 0.025 0.050 0.100 0.900 0.950 0.975 0.990

$z
     0.010  0.025  0.050  0.100  0.900  0.950  0.975  0.990
25   -2.66  -2.26  -1.95  -1.60   0.92   1.33   1.70   2.16
50   -2.62  -2.25  -1.95  -1.61   0.91   1.31   1.66   2.08
100  -2.60  -2.24  -1.95  -1.61   0.90   1.29   1.64   2.03
250  -2.58  -2.23  -1.95  -1.62   0.89   1.29   1.63   2.01
500  -2.58  -2.23  -1.95  -1.62   0.89   1.28   1.62   2.00
Inf  -2.58  -2.23  -1.95  -1.62   0.89   1.28   1.62   2.00
```

$\alpha = 0.05$ ← α ; T ; $T=\infty$

การทดสอบ unit root

สิ่งสำคัญในการทดสอบยูนิทรูทคือการระบุว่าสมมุติฐานหลักและสมมุติฐานทางเลือกมีความเหมาะสมกับข้อมูลหรือ โดยเฉพาะแนวโน้ม โดยกรณีที่เราพบบ่อยมีสองกรณีคือกรณีมีค่าคงที่อย่างเดียว และกรณีมีค่าคงที่และแนวโน้ม

ในกรณีค่าคงที่อย่างเดียว สมการที่ใช้ในการประมาณค่าตัวสถิติทดสอบคือ

2 $\boxed{\text{มี Constant}}$

$$y_t = c + \phi y_{t-1} + \varepsilon_t \tag{5}$$

และสมมุติฐานที่เกี่ยวเนื่องคือ

$$H_0 : \phi = 1 \qquad (y_t \sim I(1) \text{without drift})$$
$$H_1 : \phi < 1 \qquad (y_t \sim I(0) \text{with non-zero mean})$$

การทดสอบ unit root

ในกรณีที่มีค่าคงที่และแนวโน้ม สมการที่ใช้ในการประมาณค่า

3 Trend

Trend

$$y_t = c + \delta t + \phi y_{t-1} + \varepsilon_t \tag{6}$$

และสมมุติฐานที่เกี่ยวเนื่องกันคือ

$$H_0 : \phi = 1 \qquad (y_t \sim I(1) \text{with drift})$$
$$H_1 : \phi < 1 \qquad (y_t \sim I(0) \text{with deterministic time trend})$$

โดยที่รูปแบบของสมการที่ใช้ในการทดสอบมักจะเป็นในรูป

$$\Delta y_t = c + \pi y_{t-1} + \varepsilon_t$$

และ

$$\Delta y_t = c + \delta t + \pi y_{t-1} + \varepsilon_t$$

ปัญหา Autocorrelation?

$y_t = \phi y_{t-1} + \varepsilon_t$

เขาเรียกการทดสอบ Dickey Fuller Unit Root Test

Augmented DF test

– เวลาเกิดปัญหา Autocorrelation
ใส่ตัวแปรเพิ่ม lag ของ dependent var

การทดสอบยูนิทรูทด้วยพจน์ที่เพิ่มเข้าไปโดยมีพื้นฐานจากแบบจำลอง $ARMA(p,q)$ แล้วเรียกว่า Augmented Dickey-Fuller ซึ่งตัวทดสอบสามารถประมาณค่าได้จากสมการ

$$y_t = \beta'(D_t) + \phi y_{t-1} + \sum_{j=1}^{p} \psi_j \Delta y_{t-j} + \varepsilon_t$$

หรือเราสามารถประมาณค่าสมการนี้

Augmented Dickey Fuller Unit Root test (ADF unit root test)

ไม่มีจุดตัด
จุดตัด
จุดตัด+Trend

$$\Delta y_t = \beta' D_t + \pi y_{t-1} + \sum_{j=1}^{p} \psi_j \Delta y_{t-j} + \varepsilon_t$$

lag ΔY_t $(\Delta Y_{t-1}, \Delta Y_{t-2}) \cdots$ ΔY_{t-p}

Model Selection ? (AIC BIC)

โดยที่ $\pi = \phi - 1$ ซึ่งภายใต้สมมุติฐานหลัก Δy_t จะเป็น $I(0)$ และอนุมานได้ว่า $\pi = 0$

$H_0: \pi = 0$ หรือ $H_1: \pi < 0$

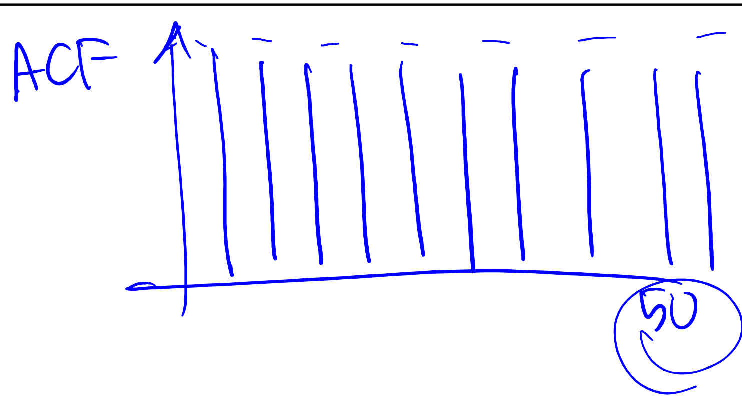
ตัวอย่าง 2.8

Price

Y_t เป็น R.W.
ACF จะมีค่าใกล้ 1 ไม่ค่อยลด
ลงเลย

ทดสอบยูนิทรูทของ SET index รายวัน จากข้อมูลในไฟล์ setindex.txt แต่ในที่นี้เราจะใช้ชุดคำสั่ง fUnitRoots โดยเบื้องต้นเราจะพิจารณา ACF ของอนุกรมเวลาและอนุกรมเวลาที่ได้ปรับผลต่างอันดับหนึ่ง (first-differenced) จาก ACF ของอนุกรมเวลา set$index เราพบว่าน่าจะมีปัญหายูนิทรูทเนื่องจากค่า ACF ลดลงช้ามาก

```
> set=read.table(file="setindex.txt", header=TRUE)
> library(fUnitRoots)
> acf(set$index)
> acf(diff(set$index))
> plot(diff(set$index),type="l")
```



→ สงสัยได้เลยว่า Y_t เป็น unit root ?

⇒ ทดสอบ ADF Unit Root test

เราจะทดสอบยูนิทรูทโดยใช้ Augmented Dickey-Fuller test โดยคำสั่งที่ใช้ในที่นี้ค่า `adfTest` โดยเราต้องระบุค่าล่าของ y_t ที่เราจะรวมในสมการ โดยในที่นี้จะเลือก `lags=10` และรูปแบบของสมการ `type` (ไม่มีค่าคงที่ (`nc`), มีค่าคงที่ (`c`) และมีค่าคงที่และเส้นแนวโน้ม (`ct`)) จากกราฟ Δy_t เราพบว่ามีค่าจุดตัดต่างจากศูนย์แต่ไม่มีแนวโน้มดังนั้นเราจะเลือก `type=c("c")`

```
> adfTest(set$index, lags=10, type=c("c"))

Title:
 Augmented Dickey-Fuller Test

Test Results:
  PARAMETER:
    Lag Order: 10
  STATISTIC:
    Dickey-Fuller: -0.0682
  P VALUE:
    0.9501
```

SET INDEX → unit root

(Y_t) → 1st diff แล้วเป็น stationary $\Rightarrow Y_t \sim I(1)$

$I(?)$

→ ΔY_t (stationary) ⇒ นำแบบจำลอง ARMA(p,q)

ARIMA

Integrated ARMA

อธิบาย Nonstationary

I(d) { จำนวนครั้งที่ทำ Diff แล้ว $\Delta^d y_t$ เป็น stationary

Definition 2

เราจะเรียกกระบวนการ y_t ว่า $ARIMA(p, d, q)$ ถ้า $\Delta^d y_t = (1-L)^d y_t$ เป็นกระบวนการ $ARMA(p, \cancel{d}, q)$ หรือเราสามารถเขียนในรูปทั่วไปเป็น

$$\underbrace{\phi(L)}_{AR}\underbrace{\boxed{(1-L)^d y_t}}_{\Delta^d y_t} = \underbrace{\theta(L)}_{MA}\varepsilon_t \tag{7}$$

และถ้าหาก $E(\Delta^d y_t) = \mu$ เราสามารถเขียนแบบจำลองได้เป็น

$$\phi(L)(1-L)^d y_t = \delta + \theta(L)\varepsilon_t$$

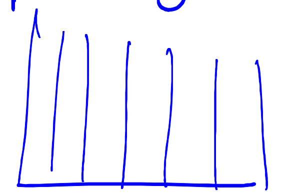
โดยที่ $\delta = \mu(1 - \phi_1 - \ldots - \phi_p)$

ARIMA

ในทางปฏิบัติ เราสามารถแบ่งแยกขั้นตอนในการสร้างแบบจำลอง $ARIMA(p, d, q)$ ได้ดังนี้

Nonstationary

ACF



1. พิจารณา ACF ของข้อมูลว่ามีข้อบ่งชี้ว่ามีปัญหาข้อมูลไม่นิ่ง (nonstationary) หรือไม่ → Unit Root ทดสอบ
2. ทดสอบยูนิทรูทว่ามีอินทิเกรตที่อันดับเท่าใด หรือหาค่า d นั่นเอง I(d)?
3. หลังจากนั้นเราจะพิจารณาอนุกรม $z_t = \Delta^d y_t$ ว่าแบบจำลองที่เหมาะสมในการอธิบาย z_t ควรจะมีอันดับของ p และ q เท่าใด

ARMA(p,q)

หลังจากที่เราได้ค่า d, p และ q แล้วเราก็จะได้แบบจำลอง $ARIMA(p, d, q)$

MU. 2,4 SET INDEX I(1)

$$Z_t = y_t - y_{t-1}$$

↓

ARMA(p,q)

Z ← diff(y)

↓

ARMA(p,q)

ตัวอย่างที่ 2.9

ต่อจากตัวอย่างที่ 2.8 เราพิจารณาว่า set index

```
> adfTest(diff(set$index), lags=10, type=c("c"))
Title:
 Augmented Dickey-Fuller Test
Test Results:
  PARAMETER:
    Lag Order: 10
  STATISTIC:
    Dickey-Fuller: -16.7697
  P VALUE:
    0.01
> library(forecast)
> auto.arima(set$index
     ,d=1,D=0,max.p=12,max.q=12,ic=c("bic"),stepwise=FALSE,trace=FALSE)
Series: set$index
ARIMA(0,1,0)
sigma^2 estimated as 87.77:  log likelihood=-13312.56
AIC=26627.12   AICc=26627.12   BIC=26633.32
```

- หา p, q
- y
- $\rightarrow p=0,\ q=0$
- AR(0) MA(0)
- $\boxed{\Delta y_t = \varepsilon_t}$
- $y_t - y_{t-1} = \varepsilon_t$
- $y_t = y_{t-1} + \varepsilon_t$
- Random walk

ซึ่งจากการใช้ BIC พบว่าอันดับที่เหมาะสมคือ $p = 0$ และ $q = 0$ ดังนั้น แบบจำลองที่เหมาะสมที่ใช้ประมาณค่า set index รายวันคือ `ARIMA(0,1,0)` หรือแบบจำลอง random walk นั่นเอง