EC435
บทที่ 5 แบบจำลอง Multiple Time Series

เฉลิมพงษ์ คงเจริญ ©2556

คณะเศรษฐศาสตร์ มหาวิทยาลัยธรรมศาสตร์

October 31, 2019

บทนำ

การเปลี่ยนแปลงที่เกิดขึ้นในตลาดการเงินหนึ่งสามารถส่งผ่านต่อไปยังตลาดอื่นได้ง่าย ดังนั้น บางครั้งเราจำเป็นต้องพิจารณาการเปลี่ยนแปลงของอนุกรมเวลาทางเงินไปพร้อมๆกัน

โดยเราเรียกแบบจำลองที่พิจารณาอนุกรมเวลาหลายๆอนุกรมพร้อมกันว่าแบบจำลองอนุกรมเวลาเชิงพหุตัวแปร(multivariate time series) โดยเราสามารถเขียนอนุกรมเวลาในรูปของเวกเตอร์

$$\boldsymbol{Y}_t = \begin{bmatrix} y_{1t} \\ y_{2t} \\ \vdots \\ y_{nt} \end{bmatrix}$$

โดยที่ y_{it} แทนอนุกรมเวลา i และ n คือจำนวนอนุกรมเวลาที่เราพิจารณาร่วมกันเช่น $y_{1t}, y_{2t}, \ldots y_{nt}$ แทนผลได้ตอบแทนในรูปล็อกของหุ้นในตลาดหลักทรัพย์แห่งประเทศไทย

แบบจำลองเวกเตอร์ออโตรีเกรสซีฟ (Vector Autoregressive Model)

แบบจำลองเวกเตอร์ออโตรีเกรสซีฟที่มีค่าล่าเท่ากับ p, $VAR(p)$, สามารถเขียนในรูป

$$\boldsymbol{Y}_t = \boldsymbol{c} + \Phi_1 \boldsymbol{Y}_{t-1} + ... + \Phi_p \boldsymbol{Y}_{t-p} + \boldsymbol{\varepsilon}_t, \qquad t = 1, 2, ..., T \qquad (5.1)$$

โดยที่ Φ_i เป็นเมทริกซ์สัมประสิทธิ์ที่มีขนาด $n \times n$ และ $\boldsymbol{\varepsilon}_t$ เป็นเวคเตอร์ของกระบวนการไวทนอซที่มีค่าเฉลี่ยเท่ากับศูนย์ และมีเมตริกซ์ความแปรปรวนร่วมที่ไม่แปรผันตามเวลา $\boldsymbol{\Sigma}$

ตัวอย่างเช่น หากเราสนใจแบบจำลอง $VAR(1)$

$$\begin{pmatrix} y_{1t} \\ y_{2t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \phi_{11}^1 & \phi_{12}^1 \\ \phi_{21}^1 & \phi_{22}^1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_{1t-1} \\ y_{2t-1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \varepsilon_{1t} \\ \varepsilon_{2t} \end{pmatrix} \qquad (5.2)$$

VAR

หรือเขียนเป็นรูปสมการของแต่ละตัวแปรที่เราสนใจ

$$
\begin{aligned}
y_{1t} &= c_1 + \phi_{11}^1 y_{1t-1} + \phi_{12}^1 y_{2t-1} + \varepsilon_{1t} \\
y_{2t} &= c_2 + \phi_{21}^1 y_{1t-1} + \phi_{22}^1 y_{2t-1} + \varepsilon_{2t}
\end{aligned}
$$

โดยที่ $Cov(\varepsilon_{1t}, \varepsilon_{2s}) = \sigma_{12}$ ถ้า $s = t$ และ $Cov(\varepsilon_{1t}, \varepsilon_{2s}) = 0$ ถ้า $s \neq t$

ค่าสัมประสิทธิ์แต่ละตัวจะเป็นค่าที่บอกความสัมพันธ์ระหว่างตัวแปรที่ต่างเวลากัน

- ϕ_{12}^1
- ϕ_{21}^1

ค่าสัมประสิทธิ์ในสมการ (5.2) อธิบายพลวัตของอนุกรมเวลาที่เราสนใจ (lead-lag) แต่มิได้อธิบาย concurrent หรือ contemporaneous ไว้อย่างชัดเจน

เราสามารถดูความสัมพันธ์ดังกล่าวได้ในเมทริกซ์ความแปรปรวนของช็อก

เราเรียกแบบจำลองเวกเตอร์ออโตรีเกรสซีฟในรูป (5.2) ว่า**สมการในรูปลดรูป (reduced form)**

VAR

เราสามารถเขียนความสัมพันธ์ระหว่างอนุกรมเวลาในช่วงเดียวกันได้อย่างชัดเจน โดยใช้การแปลงรูปสมการที่ (5.2) ได้ดังนี้

เนื่องจาก $\boldsymbol{\Sigma}$ เป็นเมตริกซ์ positive definite ดังนั้นเราสามารถสร้างเมทริกซ์ lower triangular

$$\boldsymbol{L} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ l_{21} & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ l_{n1} & l_{n2} & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

และเมตริกซ์แทยงมุม $\boldsymbol{G}$ ที่ทำให้ $\boldsymbol{\Sigma} = \boldsymbol{LGL}'$ เราเรียกการแยกส่วนประกอบนี้ว่า Cholesky decomposition

กำหนดให้ $\boldsymbol{\eta}_t = \boldsymbol{L}^{-1}\boldsymbol{\varepsilon}_t$ เราจะได้ว่า

$E(\boldsymbol{\eta}_t) =$

$Var(\boldsymbol{\eta}_t) =$

VAR

หากเราคูณข้างหน้าสมการ (5.1) ด้วย $\boldsymbol{L}^{-1}$ จะได้
$\boldsymbol{L}^{-1}\boldsymbol{Y}_t =$

$\boldsymbol{L}^{-1}$ จะแสดงความสัมพันธ์ระหว่างอนุกรมเวลาในคาบเดียวกัน

เราเรียกแบบจำลองเวกเตอร์ออโตรีเกรสซีฟในรูปนี้ว่า**สมการในรูปโครงสร้าง (structural equation)**

ตัวอย่างที่ 5.1

กำหนด Bivariate VAR(1)) สามารถแสดงในรูปลดรูปได้ดังนี้

$$\begin{pmatrix} y_{1t} \\ y_{2t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.2 \\ 0.4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0.2 & 0.3 \\ -0.6 & 1.1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_{1,t-1} \\ y_{2,t-1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \varepsilon_{1t} \\ \varepsilon_{2t} \end{pmatrix}$$

โดยที่ $\Sigma = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

VAR

- เราจะเห็นได้ว่าเราสามารถแปลงแบบจำลองเวกเตอร์ออโตรีเกรสซีฟในรูปลดรูปไปเป็นรูปโครงสร้างได้ด้วย Cholesky decomposition
- อย่างไรก็ตามในการวิเคราะห์อนุกรมเวลาเรามักจะใช้สมการในรูป Reduced form เนื่องจากเป็นรูปที่ง่ายในการประมาณค่า
- เรามักจะเน้นผลในการพยากรณ์ของแบบจำลองซึ่งเราไม่สามารถใช้แบบจำลองในรูปโครงสร้างพยากรณ์ข้อมูลได้เนื่องจากเราไม่ทราบข้อมูลของอนุกรมเวลาอื่นๆในคาบเดียวกัน

เงื่อนไขการเป็นอนุกรมเวลานิ่ง

แบบจำลอง $VAR(p)$ สามารถเขียนในรูปเครื่องหมายขยับไปข้างหลัง (lag operator) ได้ดังนี้

$$\boldsymbol{\Phi}(L)\boldsymbol{Y}_t = \boldsymbol{c} + \boldsymbol{\varepsilon}_t$$

โดยที่ $\boldsymbol{\Phi}(L) = \boldsymbol{I}_n - \boldsymbol{\Phi}_1 L - \ldots - \boldsymbol{\Phi}_p L^p$ แบบจำลอง $VAR(p)$ จะมีเสถียรภาพถ้าราก ของ

$$\det(\boldsymbol{I}_n - \boldsymbol{\Phi}_1 z - \ldots - \boldsymbol{\Phi}_p z^p) = 0$$

มีค่ามากกว่าหนึ่ง (หรือโมดูลัสมากกว่าหนึ่งในกรณีจำนวนเชิงซ้อน) ถ้าสมมุติให้กระบวนการดังกล่าวมีค่าในอดีตที่เป็นอนันต์ แล้วกระบวนการ $VAR(p)$ ที่มีเสถียรภาพจะเป็นกระบวนการนิ่งและ ergodic โดยมีค่าเฉลี่ย ค่าความแปรปรวนและค่าความแปรปรวนร่วมในตัวเองที่ไม่ขึ้นกับเวลา

การประมาณค่า

การเราพิจารณาสมการ (5.1) แต่ละสมการจะมีตัวแปรที่เหมือนกัน เราสามารถพิจารณาสมการสำหรับแต่ละตัวแปรออกเป็น

$$\boldsymbol{y}_i = \boldsymbol{Z}\phi_i + \boldsymbol{e}_i, \qquad i = 1, ..., n$$

แต่ละสมการสามารถประมาณค่าได้ด้วย ordinary least squares (OLS) แยกแต่ละสมการ และจะได้ $\hat{\boldsymbol{\Phi}} = \left[\hat{\phi}_1, ..., \hat{\phi}_n\right]$ เป็นเมตริกซ์ $(k \times n)$ ของค่าสัมประสิทธิ์จากการประมาณค่าด้วย OLS

ภายใต้ข้อสมมุติที่แบบจำลองเป็นแบบกระบวนการนิ่งและ ergodic เราจะได้ $vec(\hat{\Phi})$ มีคุณสมบัติ consistent และมีการแจกแจงแบบปกติเมื่อกลุ่มตัวอย่างใหญ่โดยมีเมตริกซ์ค่าความแปรปรวนเท่ากับ

$$\widehat{aver}(vec(\hat{\Phi})) = \hat{\boldsymbol{\Sigma}} \otimes (\boldsymbol{Z}'\boldsymbol{Z})^{-1}$$

โดยที่ $\hat{\Sigma} = \frac{1}{T-k}\sum_{t=1}^{T} \hat{\varepsilon}_t\hat{\varepsilon}_t'$ และ $\hat{\varepsilon}_t = \boldsymbol{Y}_t - \hat{\boldsymbol{\Phi}}'\boldsymbol{Z}_t$ เป็น residuals จากการประมาณค่า

การเลือกจำนวนความล่าที่เหมาะสม

การหาความล่าที่เหมาะสมของแบบจำลองเวคเตอร์ออโตรีเกรสซีฟอาจจะทำได้โดยการใช้สูตรการเลือกความล่า โดยการประมาณค่าแบบจำลองเวคเตอร์ออโตรีเกรสซีฟที่มีความล่าเท่ากับ $0, 1, ..., p_{max}$ แล้วเลือกค่า p ที่ทำให้ค่าที่ใช้เลือกมีค่าต่ำที่สุด โดยจะมีสูตรดังนี้

$$IC(p) = \ln|\tilde{\mathbf{\Sigma}}(p)| + c_T(n,p)$$

โดยที่ $\tilde{\mathbf{\Sigma}}(p) = T^{-1}\sum_{t=1}^{T}\hat{\varepsilon}_t\hat{\varepsilon}_t'$ คือ residual covariance matrix จาก $VAR(p)$, c_T คือลำดับที่ขึ้นกับจำนวนตัวอย่าง

$$AIC(p) = \ln|\tilde{\mathbf{\Sigma}}(p)| + \frac{2}{T}(pn^2)$$

$$BIC(p) = \ln|\tilde{\mathbf{\Sigma}}(p)| + \frac{\ln T}{T}(pn^2)$$

$$HQIC(p) = \ln|\tilde{\mathbf{\Sigma}}(p)| + \frac{2\ln(\ln T)}{T}(pn^2)$$

ตัวอย่าง 5.2

ในตัวอย่างนี้เราจะพิจารณาความสัมพันธ์ระหว่างผลได้ตอบแทนรายวันจากการลงทุนในตลาดหลักทรัพย์แห่งประเทศไทย (lret_set) และตลาดหุ้นดาวโจนส์ (lret_dowjones) ข้อมูลอยู่ในไฟล์ set_dj.csv)

เราจะได้ข้อมูลสองชุดคือ lret_set และ lret_dowjones เราจะเขียนข้อมูลทั้งสองในรูปของเมตริกซ์ที่นำเวกเตอร์ทั้งสองมาต่อกันโดยใช้คำสั่ง cbind

```
> lret<-cbind(lret_set, lret_dowjones)
```

เราสามารถพิจารณาค่าสถิติเบื้องต้นได้จากคำสั่ง basicStats และ acf เหมือนกับที่เราเคยใช้ในหัวข้อก่อนได้

ตัวอย่าง

หากเราต้องการประมาณค่า VAR(p) เราจะใช้ `library(vars)` โดยที่เราอาจจะเริ่มจากการหาค่า p ที่เหมาะสมโดยการใช้คำสั่ง `VAR` พร้อมระบุเมตริกซ์ของข้อมูล `lret` จำนวนค่าล่าสูงสุด `lag.max` และ เกณฑ์ในการเลือกค่าล่า `ic=c("AIC")` โดยที่ `"SC"` จะแทน Schwarz-Bayesian (BIC) และ `"HQ"` Hannan-Quinn (HQIC)

```
> library(vars)
> msel=VAR(lret, lag.max=10, ic=c("AIC"))
> msel

VAR Estimation Results:
=======================

Estimated coefficients for equation lret_set:
=============================================
<Omitted>

    lret_set.l1 lret_dowjones.l1      lret_set.l2 lret_dowjones.l2
     0.05556382       0.22898590      -0.33541086       0.32270310
    lret_set.l3 lret_dowjones.l3      lret_set.l4 lret_dowjones.l4
     0.01244410       0.21790099      -0.13694929       0.17900004
    lret_set.l5 lret_dowjones.l5      lret_set.l6 lret_dowjones.l6
    -0.01107252       0.04790222      -0.06473588       0.12631799
    lret_set.l7 lret_dowjones.l7      lret_set.l8 lret_dowjones.l8
     0.01517100       0.05964304      -0.02897568       0.02785310
    lret_set.l9 lret_dowjones.l9            const
     0.03837222       0.08783703      -0.00332124
```

ตัวอย่าง 5.2

```
> model1=VAR(lret, p=4)
> summary(model1)

VAR Estimation Results:
=========================
Endogenous variables: lret_set, lret_dowjones
Deterministic variables: const
Sample size: 3803
Log Likelihood: -15650.859
Roots of the characteristic polynomial:
 0.62  0.62 0.5867 0.5867 0.3557 0.3557 0.2886 0.2886
Call:
VAR(y = lret, p = 4)


Estimation results for equation lret_set:
=========================================
lret_set = lret_set.l1 + lret_dowjones.l1 + lret_set.l2 + lret_dowjones.l2 +
     lret_set.l3 + lret_dowjones.l3 + lret_set.l4 + lret_dowjones.l4 + const

                  Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
lret_set.l1       0.059621   0.016288   3.660 0.000255 ***
lret_dowjones.l1  0.222804   0.032471   6.862 7.91e-12 ***
lret_set.l2      -0.320847   0.016256 -19.738  < 2e-16 ***
lret_dowjones.l2  0.313004   0.032696   9.573  < 2e-16 ***
lret_set.l3       0.023840   0.016122   1.479 0.139313
lret_dowjones.l3  0.205041   0.032958   6.221 5.47e-10 ***
lret_set.l4      -0.103471   0.016011  -6.462 1.16e-10 ***
lret_dowjones.l4  0.151876   0.032994   4.603 4.30e-06 ***
const             0.002529   0.043532   0.058 0.953684
---
Signif. codes:  0 ‘***’ 0.001 ‘**’ 0.01 ‘*’ 0.05 ‘’. 0.1 ‘’  1


Residual standard error: 2.683 on 3794 degrees of freedom
Multiple R-Squared: 0.1409,^^IAdjusted R-squared: 0.1391
F-statistic: 77.78 on 8 and 3794 DF,  p-value: < 2.2e-16
```

ตัวอย่าง 5.2

```
Estimation results for equation lret_dowjones:
=============================================
<omitted>

Covariance matrix of residuals:
              lret_set lret_dowjones
lret_set         7.199        -0.556
lret_dowjones   -0.556         1.839

Correlation matrix of residuals:
              lret_set lret_dowjones
lret_set        1.0000       -0.1528
lret_dowjones  -0.1528        1.0000
```

การพยากรณ์จากแบบจำลอง *VAR*

หากเราพิจารณาแบบจำลอง $VAR(p)$ โดยที่เราทราบค่าพารามิเตอร์ $\mathbf{\Phi}$ ค่าพยากรณ์ไปข้างหน้าหนึ่งคาบ $\boldsymbol{Y}_{h+1}$ ด้วยข้อมูลที่มี ณ คาบที่ h ได้ด้วยการเขียนสมการแสดงค่า $\boldsymbol{Y}_{h+1}$

แล้วหา conditional expectation ด้วยข้อมูล ณ h เราจะได้ค่าพยากรณ์เท่ากับ

$\widehat{\boldsymbol{Y}}_h(1) =$

โดยที่ค่าความผิดพลาดจากการพยากรณ์ (forecast error) เท่ากับ

$\boldsymbol{e}(1) = \boldsymbol{Y}_{h+1} - \widehat{\boldsymbol{Y}}_h(1) =$

ค่าพยากรณ์ไปข้างหน้าสองคาบ $\boldsymbol{Y}_{h+2}$ ด้วยข้อมูลที่มี ณ คาบที่ h จะเท่ากับ

$\widehat{\boldsymbol{Y}}_h(2) =$

โดยที่ค่าความผิดพลาดจากการพยากรณ์ (forecast error) เท่ากับ

$\boldsymbol{e}(2) = \boldsymbol{Y}_{h+2} - \widehat{\boldsymbol{Y}}_h(2) =$

การพยากรณ์จากแบบจำลอง *VAR*

หากแทนค่าด้วยวิธีการ recursive จะได้ค่าพยากรณ์ไปข้างหน้า l คาบ $\boldsymbol{Y}_{h+l}$ ด้วยข้อมูลที่มี ณ คาบที่ h เท่ากับ

$$\widehat{\boldsymbol{Y}}_h(l) = \boldsymbol{c} + \boldsymbol{\Phi}_1 \widehat{\boldsymbol{Y}}_h(l-1) + \ldots + \boldsymbol{\Phi}_p \widehat{\boldsymbol{Y}}_h(l-p)$$

ค่าคาดเคลื่อนของการพยากรณ์ (forecast errors) จะเขียนในรูป $\widehat{\boldsymbol{Y}}_h(l) - \boldsymbol{Y}_{h+l} = \sum_{s=0}^{l-1} \boldsymbol{\Psi}_s \boldsymbol{\varepsilon}_{h+l-s}$

โดยที่เมตริกซ์ $\boldsymbol{\Psi}_s$ สามารถคำนวณได้โดย $\boldsymbol{\Psi}_s = \sum_{j=1}^{p-1} \boldsymbol{\Psi}_{s-j} \boldsymbol{\Phi}_j$

ในขณะที่ MSE ของ $\widehat{\boldsymbol{Y}}_h(l)$ จะเท่ากับ

$$\boldsymbol{\Sigma}(l) = MSE(Y_{h+l} - \widehat{\boldsymbol{Y}}_h(l)) = \sum_{s=0}^{l-1} \boldsymbol{\Psi}_s \boldsymbol{\Sigma} \boldsymbol{\Psi}_s'$$

ตัวอย่าง 5.3

ต่อเนื่องจากตัวอย่าง 5.2 เราสามารถทำนายผลได้ตอบแทนไปข้างหน้าของทั้งสองตลาดที่เราสนใจได้ด้วยคำสั่ง `predict` โดยระบุแบบจำลองที่ใช้และคาบที่ทำนายไปข้างหน้า

```
> model1.predict=predict(model1, n.ahead=5)
> model1.predict
$lret_set
            fcst     lower    upper       CI
[1,]  0.23354446 -5.025286 5.492375 5.258830
[2,] -0.01504318 -5.311043 5.280957 5.296000
[3,]  0.08053962 -5.572718 5.733797 5.653258
[4,] -0.02118987 -5.682718 5.640339 5.661528
[5,] -0.04475454 -5.707153 5.617644 5.662399

$lret_dowjones
             fcst     lower    upper       CI
[1,] -0.046835523 -2.705029 2.611358 2.658193
[2,]  0.023569365 -2.639844 2.686983 2.663413
[3,]  0.005536266 -2.686514 2.697586 2.692050
[4,]  0.021958580 -2.670142 2.714059 2.692101
[5,]  0.031192947 -2.661288 2.723674 2.692481
```

Granger Causality

โครงสร้างของแบบจำลอง VAR ช่วยให้ข้อมูลกับเราว่าตัวแปรหรือกลุ่มของตัวแปรมีความสามารถในการทำนายตัวแปรอื่นหรือไม่

Granger (1969) เสนอว่า

- ถ้าตัวแปร y_1 ช่วยในการทำนายตัวแปรอื่น y_2 เราจะเรียกว่า y_1 แกรงเจอรคอส (Granger-cause) y_2
- ถ้า y_1 ไม่ช่วยในการทำนายตัวแปร y_2 เราจะพูดว่า y_1 ไม่แกรงเจอรคอส (does not Granger-cause) y_2

เราจะต้องระลึกไว้อยู่เสมอว่าแกรงเจอรคอสเป็นการอนุมานไปยังความสามารถในการพยากรณ์เท่านั้น ไม่ได้เป็นความเป็นเหตุเป็นผลจริงๆของตัวแปร

Granger Causality

ในหัวข้อนี้เราพิจารณาแบบจำลอง $VAR(2)$ ที่มีตัวแปรสองตัว ซึ่งสามารถเขียนเป็นสมการได้ดังนี้

$$\begin{pmatrix} y_{1t} \\ y_{2t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \phi_{11}^1 & \phi_{12}^1 \\ \phi_{21}^1 & \phi_{22}^1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_{1t-1} \\ y_{2t-1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \phi_{11}^2 & \phi_{12}^2 \\ \phi_{21}^2 & \phi_{22}^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_{1t-2} \\ y_{2t-2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \varepsilon_{1t} \\ \varepsilon_{2t} \end{pmatrix} \quad (5.13)$$

- หาก y_{2t} ไม่แกรงเจอรคอส y_{1t} ค่าสัมประสิทธิ์ ϕ_{12}^1 และ ϕ_{12}^2 จะมีค่าเท่ากับศูนย์
- ถ้า y_{1t} ไม่แกรงเจอรคอส y_{2t} ค่าสัมประสิทธิ์ ϕ_{21}^1 และ ϕ_{21}^2 จะมีค่าเท่ากับศูนย์

ดังนั้นในการทดสอบว่า y_{2t} แกรงเจอร์คอส y_{1t} หรือไม่ เราจะตั้งสมมุติฐานหลักว่า $H_0 : \phi_{12}^1 = \phi_{12}^2 = 0$ และสมมุติฐานทางเลือกคือมีสัมประสิทธิ์ ϕ_{12}^1 หรือ ϕ_{12}^2 ตัวใดตัวหนึ่งมีค่าไม่เท่ากับศูนย์ ซึ่งการทดสอบดังกล่าวคือการทดสอบ F นั่นเอง (Wald)

ตัวอย่าง 5.4

ต่อเนื่องจากตัวอย่าง 5.3 เราต้องการทดสอบว่า `lret_dowjones` แกรงเจอร์คอส `lret_set` หรือไม่ (

เราสามารถทดสอบโดยใช้คำสั่ง `causality` โดยที่เราจะต้องระบุแบบจำลองที่ใช้และตัวแปรที่เป็นสาเหตุ (cause) ซึ่งในที่นี้คือ `lret_dowjones`

```
> causality(model1, cause="lret_dowjones")
$Granger
^^IGranger causality H0: lret_dowjones do not Granger-cause lret_set
data:  VAR object model1
F-Test = 43.5947, df1 = 4, df2 = 7588, p-value < 2.2e-16

$Instant
^^IH0: No instantaneous causality between: lret_dowjones and lret_set
data:  VAR object model1
Chi-squared = 86.7677, df = 1, p-value < 2.2e-16
```

Impulse Response Function

หรือการทดสอบแกรงเจอร์คอสช่วยระบุว่าตัวแปรใดๆมีผลกระทบอย่างมีนัยสำคัญต่อตัวแปรอื่นหรือไม่ อย่างไรก็ตาม การทดสอบดังกล่าวไม่ได้บอกทิศทางของความสัมพันธ์และระยะเวลาที่การเปลี่ยนแปลงของตัวแปรหนึ่งจะส่งผลต่ออีกตัวแปรว่าจะมีผลยาวนานแค่ไหน

impulse response function ซึ่งหมายถึง การตอบสนองของตัวแปรตาม(response)อันเนื่องมาจากการเปลี่ยนแปลงของตัวแปรอีกตัวหนึ่ง (impulse) โดยที่หากเกิดการเปลี่ยนแปลงในช็อกหนึ่งหน่วยจะส่งผลอย่างไรต่อแต่ละตัวแปรในคาบที่ต่อจากการเปลี่ยนแปลงนั้นๆ(เราอาจจะใช้การเปลี่ยนแปลงหนึ่ง s.d.)

ตัวอย่างเช่น หากเราพิจารณาแบบจำลอง $VAR(1)$ ที่มีตัวแปรสองตัวแปร ซึ่งสามารถแสดงได้ด้วยสมการ

$$\begin{pmatrix} y_{1t} \\ y_{2t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.5 & 0.3 \\ 0.0 & 0.2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_{1t-1} \\ y_{2t-1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \varepsilon_{1t} \\ \varepsilon_{2t} \end{pmatrix} \qquad (5.14)$$

Impulse Response Function

สมมุติว่าเราพิจารณาว่าในปีที่ 0 เกิดช็อกในตัวแปร y_{1t} หนึ่งหน่วย ($\varepsilon_{10} = 1$) และช็อกในตัวแปร y_{2t} เท่ากับศูนย์ และช็อกในปีอื่นๆเท่ากับศูนย์ สมมุติให้ y_{1t} และ y_{2t} เท่ากับศูนย์ในปีก่อนหน้าปี 0 จะได้ว่า

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{Y}_0 &= \begin{pmatrix} \varepsilon_{10} \\ \varepsilon_{20} \end{pmatrix} = \\
\boldsymbol{Y}_1 &= \begin{pmatrix} 0.5 & 0.3 \\ 0.0 & 0.2 \end{pmatrix} \boldsymbol{Y}_0 = \\
\boldsymbol{Y}_2 &= \begin{pmatrix} 0.5 & 0.3 \\ 0.0 & 0.2 \end{pmatrix} \boldsymbol{Y}_1 = \\
&\vdots
\end{aligned}
$$

Impulse Response Function

ในกรณี $VAR(p)$ ที่เป็นกระบวนการนิ่งใดๆ

$$\boldsymbol{Y}_t = \boldsymbol{\mu} + \boldsymbol{\varepsilon}_t + \boldsymbol{\Psi}_1\boldsymbol{\varepsilon}_{t-1} + \boldsymbol{\Psi}_2\boldsymbol{\varepsilon}_{t-2} + \ldots$$

$$\frac{\partial y_{i,t+s}}{\partial \varepsilon_{j,t}} = \frac{\partial y_{i,t}}{\partial \varepsilon_{j,t-s}} = \psi^s_{i,j}$$

อย่างไรก็ตามคำอธิบายข้างต้นจะเป็นจริงหาก $var(\boldsymbol{\varepsilon}) = \boldsymbol{\Sigma}$ เป็นเมทริกซ์แทยงมุม
ดังนั้นเรามักจะพิจารณา VAR ในรูป structural ซึ่ง

$$\boldsymbol{B}\boldsymbol{Y}_t = \boldsymbol{c} + \boldsymbol{\Gamma}_1\boldsymbol{Y}_{t-1} + \ldots + \boldsymbol{\Gamma}_p\boldsymbol{Y}_{t-p} + \boldsymbol{\eta}_t \qquad (5.17)$$

โดยที่ Orthogonal error ($\boldsymbol{\eta}_t$)

โครงสร้างแบบจำลองโครงสร้าง (structural model) จะกำหนดให้ความสัมพันธ์ของตัวแปรมีลำดับคือ y_1 เป็นตัวกำหนด y_2 และ y_2 เป็นตัวกำหนด y_3 เป็นลำดับไปเรื่อยๆ ซึ่งใช้ทฤษฎีเป็นตัวกำหนด

ตัวอย่างที่ 5.5

เราจะสร้าง Impulse response function ด้วยคำสั่ง `irf` โดยที่ default ในคำสั่งนี้คือการสร้าง orthogonal impulse response function (`ortho=TRUE`)

การเรียงตัวแปรใน `lret` ที่เรียง `lret_set` ก่อน `lret_dowjones`

```
> model1.irf=irf(model1, n.ahead=10)
> model1.irf
Impulse response coefficients
$lret_set
           lret_set  lret_dowjones
 [1,]  2.6831259181 -0.2072364167
 [2,]  0.1137971489  0.0030468719
 [3,] -0.9182763350  0.1667746830
<omitted>
[11,]  0.0030760182 -0.0002311969
$lret_dowjones
           lret_set  lret_dowjones
 [1,]  0.0000000000  1.3403194745
 [2,]  0.2986284632 -0.0849824924
 [3,]  0.4183950540 -0.1100409438
<omitted>
[11,]  0.0006173344 -0.0002757296
```

Variance Decomposition

Forecast Error Variance Decomposition จากข้อมูล ณ คาบที่ h เราต้องการตอบคำถามว่าช็อกโครงสร้าง η_j เป็นที่มาของความแปรปรวนของค่าผิดพลาดจากการพยากรณ์ $y_{i,h+l}$ ในสัดส่วนเท่าใด

หากเราพิจารณาเพียงตัวแปรเดียวเช่น $y_{i,h+l}$ เนื่องจากเมทริกซ์ค่าความแปรปรวนของช็อกโครงสร้างเป็นเมทริกซ์แทยงมุม

$$var(y_{i,h+l} - \widehat{y}_h(l)) = \sigma^2_{\eta_1} \sum_{s=0}^{l-1} (\theta^s_{i1})^2 + .. + \sigma^2_{\eta_n} \sum_{s=0}^{l-1} (\theta^s_{in})^2$$

สัดส่วนของ $var(y_{i,h+l} - \widehat{y}_h(l))$ อันมีสาเหตุมาจากช็อก η_j เท่ากับ

$$VD_{ij}(l) = \frac{\sigma^2_{\eta_j} \sum_{s=0}^{l-1} \left(\theta^s_{ij}\right)^2}{\sigma^2_{\eta_1} \sum_{s=0}^{l-1} \left(\theta^s_{i1}\right)^2 + .. + \sigma^2_{\eta_n} \sum_{s=0}^{l-1} \left(\theta^s_{in}\right)^2}, \qquad i,j = 1, ..., n \qquad (5.21)$$

ตัวอย่าง 5.6

เราสามารถแยกความแปรปรวนของค่าผิดพลาดจากการพยากรณ์ได้ด้วยคำสั่ง fevd

```
> fevd(model1, n.ahead = 5)
$lret_set
      lret_set lret_dowjones
[1,] 1.0000000    0.00000000
[2,] 0.9877859    0.01221413
[3,] 0.9682396    0.03176043
[4,] 0.9655329    0.03446710
[5,] 0.9654222    0.03457779

$lret_dowjones
       lret_set lret_dowjones
[1,] 0.02334830     0.9766517
[2,] 0.02326189     0.9767381
[3,] 0.03751278     0.9624872
[4,] 0.03751192     0.9624881
[5,] 0.03750568     0.9624943
```