ตัวแปรอธิบาย Y_t ← ตัวแปรอธิบาย $(Y_{t-1}, Y_{t-2}, \dots)$

มีความสัมพันธ์?

EC435

บทที่ 3 แบบจำลองอนุกรมเวลาเชิงเส้นตรง

ถ้า Y_t กับ Y_{t-j}, $j = 1, 2, \dots$ ใดๆ → ทราบได้อย่างไร?

ใช้ข้อมูลในอดีต Y_{t-j} ในการอธิบาย Y_t

สร้างแบบจำลองอธิบาย Y_t

เฉลิมพงษ์ คงเจริญ ©2556-2563

คณะเศรษฐศาสตร์ มหาวิทยาลัยธรรมศาสตร์

August 26, 2020

1) ACF ($H_0: \rho_j = 0$ vs $H_1: \rho_j \neq 0$)

2) LB Q test ($H_0: \rho_1 = \dots = \rho_m = 0$ vs $H_1: \rho_j \neq 0 \ \exists j$)

พบว่า $\rho_j \neq 0$ ⇓ สร้างแบบจำลอง

$\forall \rho_j = 0$ ⇓ Y_t เป็น WN. ไม่สามารถสร้างแบบจำลอง

กระบวนการไวท์นอยซ์ (white noise)

ข้อมูลอนุกรมเวลาที่ง่ายที่สุดคือกระบวนการไวท์นอยซ์ (white noise) โดยที่เรามักจะเขียนแทนด้วย random variable ε_t – epsilon$_t$

นิยาม 2.1

ตัวแปร ε_t จะเรียกว่ากระบวนการไวท์นอยซ์ถ้ามีค่าเฉลี่ยเท่ากับศูนย์,มีค่าความแปรปรวนคงที่เท่ากับ σ^2 และไม่มีสหสัมพันธ์ข้ามเวลา (serially uncorrelated) หรือเขียนเป็นเงื่อนไขได้ดังนี้

1. $E(\varepsilon_t) = 0$ [ค่าเฉลี่ย ของ $\varepsilon_t = 0$]
2. $Var(\varepsilon_t) = \sigma^2_\varepsilon$ [ค่าแปรปรวนของ ε_t คงที่ และเท่ากับ σ^2_ε]
3. $\gamma_k = Cov(\varepsilon_t, \varepsilon_{t-k}) = 0$ for $k \neq 0$ [ε_t กับ ε_{t-k} $\forall k \neq 0$ จะไม่สัมพันธ์กัน (อิสระต่อกัน)]

W.N. process – เป็นตัวอย่างหนึ่งของ stationary

กระบวนการเส้นตรง (Linear process)

Wold's decomposition theorem ระบุว่าอนุกรมเวลานิ่ง y_t สามารถเขียนในรูปกระบวนการเส้นตรงหรือตัวแทนรูปแบบค่าเฉลี่ยเคลื่อนที่ที่มีอันดับเป็นอนันต์ (infinite moving average) และถ้าสามารถเขียน y_t ในรูป

ผลรวมเชิงเส้นตรงของ ε_{t-i} ได้

$$y_t = \mu + \sum_{i=0}^{\infty} \psi_i \varepsilon_{t-i} \tag{1}$$

cov = 0

white noise

independent identically dist.

โดยที่ μ คือค่าเฉลี่ย, $\psi_0 = 1$, และ ε_t คือ (iid) โดยที่เราสามารถพิจารณา ε_t ในฐานะเป็นข้อมูลใหม่ที่เข้ามาในช่วงเวลา t หรือเป็น innovation หรือ shock ณ เวลา t และ $\sum_{i=1}^{\infty} \psi_i^2 < \infty$

ใน y_{t-1}

ข้อมูลในอดีต

$y_t \Rightarrow y_{t+1} = ?$ พยากรณ์

เป้าหมาย สร้างแบบจำลองอธิบาย

แบบจำลองออโตรีเกรสซีฟ

$Y_t \leftarrow Y_{t-1}, \dots, Y_{t-p}$

Regression $Y_t = Y_{t-1} \dots Y_{t-p}$.

แนวคิดพื้นฐานของแบบจำลองออโตรีเกรสซีฟ (autoregressive) คือข้อมูลในเวลาปัจจุบัน (y_t) สามารถอธิบายได้ด้วยตัวแปรนั้นในอดีตย้อนหลังไป 1 ถึง p ช่วงเวลา ($y_{t-1}, \dots, y_{t-p}$)

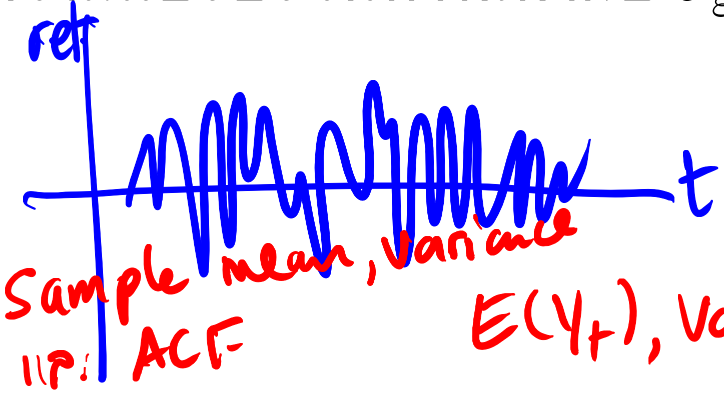
แบบจำลองออโตรีเกรสซีฟที่มีอันดับ (order) เท่ากับ p (เขียนแทนด้วย $AR(p)$) สามารถเขียนได้เป็น

shock สมมุติ WN

phi

$$AR(p) \leftarrow y_t = \phi_1 y_{t-1} + \phi_2 y_{t-2} + \dots + \phi_p y_{t-p} + \varepsilon_t, \qquad (2.3)$$

โดยที่ y_t เป็นข้อมูลที่นิ่งและ ε_t เป็นไวท์นอยส์ที่มีค่าเฉลี่ยเท่ากับศูนย์และค่าความแปรปรวนคงที่เท่ากับ σ_ε^2



ทดสอบ Y_t กับ Y_{t-j} มีความสัมพันธ์

แบบจำลอง เพื่ออธิบาย ret_t.

เพราะ: เลือก แบบจำลองใด?

$E(Y_t)$, $Var(Y_t)$, ACF

พิจารณาที่ แบบจำลอง มีคุณสมบัติ

แบบจำลองออโตรีเกรสซีฟ:ค่าเฉลี่ย

$y_t = \phi_1 y_{t-1} + \dots + \phi_p y_{t-p} + \varepsilon_t$

Reg ไม่มีค่าคงที่ – AR(p) ค่าเฉลี่ยของ $y_t = 0$ / W.N

ค่าคงที่ ก.บ.

ค่าเฉลี่ยของ y_t เท่ากับ

$E(y_t) =$ $E(\phi_1 y_{t-1} + \phi_2 y_{t-2} + \dots + \phi_p y_{t-p} + \varepsilon_t)$

กระจาย E ไปในพจน์ผลบวก

$= E(\phi_1 y_{t-1}) + E(\phi_2 y_{t-2}) + \dots + E(\phi_p y_{t-p}) + E(\varepsilon_t)$ // 0

$= \phi_1 E(y_{t-1}) + \phi_2 E(y_{t-2}) + \dots + \phi_p E(y_{t-p}) + \boxed{E(\varepsilon_t)}$

สมมติว่า y_t เป็น stationary "$E(y_{t-1}) = E(y_t)$" $E(y_t)$

$(1 - \phi_1 - \phi_2 - \dots - \phi_p) E(y_t) = 0$

$\boxed{E(y_t) = 0}$

หากเราเขียน $AR(p)$ ในรูป

$$(y_t - \mu) = \phi_1(y_{t-1} - \mu) + \phi_2(y_{t-2} - \mu) + \dots + \phi_p(y_{t-p} - \mu) + \varepsilon_t, \quad (3.4)$$

หรือ

$$\boxed{y_t = \phi_0 + \phi_1 y_{t-1} + \phi_2 y_{t-2} + \dots + \phi_p y_{t-p} + \varepsilon_t} \quad (3.5)$$

$E(y_t) = \dfrac{\phi_0}{1 - \phi_1 - \dots - \phi_p} \equiv \mu$

นิยาม

กรณี: เลือกควรใส่ ϕ_0 หรือไม่ – ขึ้นอยู่กับข้อมูล ⇒ ค่าเฉลี่ย = 0 ?

การเขียน AR(p) ในรูป backshift operator (lag operator)

นอกจากนี้เราสามารถเขียนสมการ (2.3) ได้ด้วยเครื่องมือ backshift operator เป็นสมการดังนี้

นิยาม L – lag operator

$L \cdot y_t = y_{t-1}$

ใช้ lag operator 2 ครั้ง

$L^2 y_t = L \cdot y_{t-1} = y_{t-2}$

operator

AR(p)

$y_t = \phi_1 y_{t-1} + \dots + \phi_p y_{t-p} + \varepsilon_t$

$L \cdot y_t$ $\quad$ $L^p y_t$

$$(1 - \phi_1 L - \phi_2 L^2 - \dots - \phi_p L^p) y_t = \varepsilon_t, \tag{2.5}$$

AR(p) ในรูป polynomial

$$\boxed{\phi(L) y_t = \varepsilon_t}$$

โดยที่เราเรียก $\phi(L) = 1 - \phi_1 L - \phi_2 L^2 - \dots - \phi_p L^p$ ว่าพหุนามออโตรีเกรสซีฟ (autoregressive polynomial)

AR(1) model

$y_t = \phi_{1} y_{t-1} + \varepsilon_t$

เราจะพิจารณาคุณสมบัติของแบบจำลอง $AR(1)$ ซึ่งมีค่าเฉลี่ยเท่ากับศูนย์ สามารถแสดงได้โดย

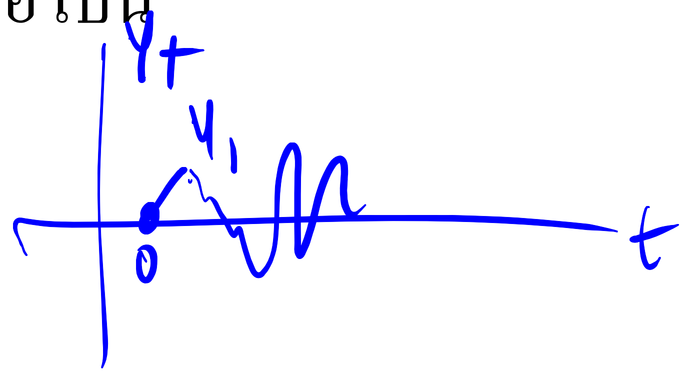
$\varepsilon_t \sim WN(0, \sigma^2)$, $\sigma^2 = 1$

$$\boxed{y_t = \phi y_{t-1} + \varepsilon_t,} \tag{2.8}$$

จากสมการข้างต้นหากเราเริ่มพิจารณากรณีที่ $y_0 = 0$ และให้ ε_t มีการแจกแจงแบบ $N(0, 1)$ เราจะได้การเดินทางตามเวลา (time path) ของ y_t สำหรับค่าสัมประสิทธิ์(ϕ)ที่ต่างกันดังที่แสดงในรูปต่อไปนี้

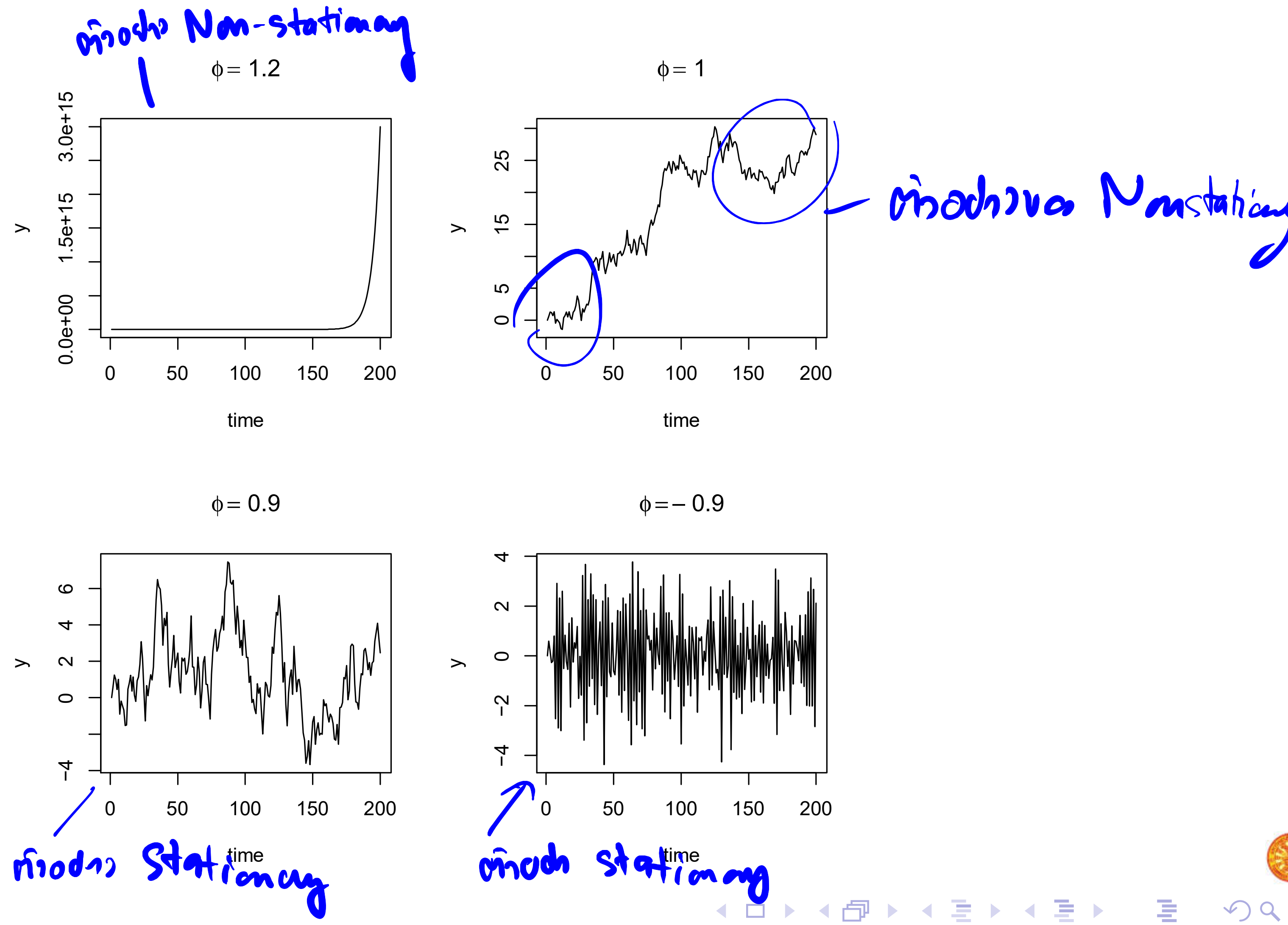
$y_1 = \phi \underbrace{y_0}_{=0} + \varepsilon_1$

$y_2 = \phi y_1 + \varepsilon_2$



AR(1) model

Figure: การจำลองกระบวนการ $AR(1)$ ที่ค่าสัมประสิทธิ์(ϕ)ที่ต่างกัน



② $Var(Y_t)$ กรณี Y_t - $AR(1)$

จากสมการ (2.8) เราสามารถแทนค่า y_t ในอดีตไปเรื่อยๆแบบเวียนเกิด (recursive) k ครั้งดังนี้

$$Y_t = \phi Y_{t-1} + \varepsilon_t$$
$$= \phi(\phi Y_{t-2} + \varepsilon_{t-1}) + \varepsilon_t$$
$$= \phi[\phi(\phi Y_{t-3} + \varepsilon_{t-2}) + \varepsilon_{t-1}] + \varepsilon_t$$

$$Y_t = \underbrace{\cancel{\lim_{k\to\infty} \phi^k Y_{t-k}}}_{0} + \varepsilon_t + \phi\varepsilon_{t-1} + \phi^2\varepsilon_{t-2} + \phi^3\varepsilon_{t-3} + \ldots$$

ด้วยวิธีดังกล่าวข้างต้นและค่า $|\phi| < 1$ แล้ว $\lim_{k\to\infty} \phi^k y_{t-k} = 0$ จะทำให้เราสามารถเขียนแบบจำลอง $AR(1)$ ในรูปต่อไปนี้

$Y_t = \phi Y_{t-1} + \varepsilon_t$

$$y_t = \underbrace{\varepsilon_t + \phi\varepsilon_{t-1} + \phi^2\varepsilon_{t-2} + \ldots}_{\text{Moving Average }(\infty)} = \sum_{j=0}^{\infty} \phi^j \varepsilon_{t-j}, \qquad (3.9)$$

เขียน $AR(1)$ ในรูปของ $MA(\infty)$

เราเรียกรูปดังกล่าวว่าการแสดงแบบจำลอง $AR(1)$ ด้วย infinite moving average representation

หาคุณสมบัติ ของ Y_t จากสมการ 3.9

$E(Y_t) = \ldots = 0$

$\rightarrow Var(Y_t)$

2

ค่าความแปรปรวนของ y_t

$Var(y_t) = ?$

AR(1) $y_t = \phi y_{t-1} + \varepsilon_t \Rightarrow$ MA(∞) $y_t = \varepsilon_t + \phi\varepsilon_{t-1} + \phi^2\varepsilon_{t-2} + \dots$

เนื่องจาก $E(y_t) = 0$ ค่าความแปรปรวน $Var(y_t) = E\left[y_t - E(y_t)\right]^2$ จะเท่ากับ $\boxed{Var(y_t) = E(y_t^2)}$ หากเราแทนค่า y_t จากสมการ (2.9) ลงในสูตรดังกล่าว และใช้คุณสมบัติของ ε_t ที่ว่า $Var(\varepsilon_t) = E(\varepsilon_t^2) = \sigma_t^2$ และ $E(\varepsilon_j, \varepsilon_k) = 0$ สำหรับ $k \neq j$ เราจะได้

$$E(y_t^2) = E\left[(\varepsilon_t + \boxed{\phi\varepsilon_{t-1}} + \boxed{\phi^2\varepsilon_{t-2}} + \dots)(\varepsilon_t + \phi\varepsilon_{t-1} + \phi^2\varepsilon_{t-2} + \dots)\right]$$

$$= E\left[\varepsilon_t\varepsilon_t + \varepsilon_t\phi\varepsilon_{t-1} + \varepsilon_t\phi^2\varepsilon_{t-2} + \dots + \phi\varepsilon_{t-1}\varepsilon_t + \phi^2\varepsilon_{t-1}^2 + \phi\varepsilon_{t-1}\phi^2\varepsilon_{t-2} + \dots + \phi^2\varepsilon_{t-2}\varepsilon_t + \phi^2\varepsilon_{t-2}\phi\varepsilon_{t-1} + \phi^4\varepsilon_{t-2}^2 + \dots\right]$$

$$= E(\varepsilon_t^2) + \phi E(\varepsilon_t\varepsilon_{t-1}) + \phi^2 E(\varepsilon_t\varepsilon_{t-2}) + \dots + \phi E(\varepsilon_{t-1}\varepsilon_t) + \phi^2 E(\varepsilon_{t-1}^2) + \phi^3 E(\varepsilon_{t-1}\varepsilon_{t-2}) + \dots + \phi^2 E(\varepsilon_{t-2}\varepsilon_t) + \phi^3 E(\varepsilon_{t-2}\varepsilon_{t-1}) + \phi^4 E(\varepsilon_{t-2}^2) + \dots$$

$$= E(\varepsilon_t^2) + \phi^2 \underbrace{E(\varepsilon_{t-1}^2)}_{Var(\varepsilon_{t-1}) = \sigma^2} + \phi^4 \underbrace{E(\varepsilon_{t-2}^2)}_{Var(\varepsilon_{t-2}) = \sigma^2} + \dots + 0 + 0 + 0$$

$$= \sigma^2(1 + \phi^2 + \phi^4 + \dots) = \sigma^2 / (1 - \phi^2)$$

$E(\text{Cross Term}) = 0$

$= Cov(\varepsilon_{t-1}\varepsilon_{t-2}) = 0$ (ε_t เป็น WN)

$\sigma^2 = var(\varepsilon_t) = E(\varepsilon_t - E(\varepsilon_t))^2$

③ ค่าความแปรปรวนร่วม

จากคุณสมบัติอนุกรม $1+\phi^2+\phi^4+\dots = \frac{1}{1-\phi^2}$ เมื่อ $|\phi^2|<1$

$[1+k+k^2+k^3+\dots = \frac{1}{1-k}]$

หากนำค่า y_t และ y_{t-l} ที่เขียนในรูปสมการ (2.9) และค่าเฉลี่ยเท่ากับศูนย์ $E(y_t) = 0$ แทนค่าในสูตรค่าความแปรปรวนร่วมได้ฟังก์ชันค่าความแปรปรวนร่วมจะเท่ากับ

$$\gamma_l = E\big((y_t - \underbrace{E(y_t)}_{0})(y_{t-l} - \underbrace{E(y_{t-l})}_{0})\big)$$

$$\gamma_l = E(y_t \cdot y_{t-l})$$

y_t ในรูปของ MA(∞)

$$= E[(\varepsilon_t + \phi\varepsilon_{t-1} + \phi^2\varepsilon_{t-2} + \dots)(\varepsilon_{t-l} + \phi\varepsilon_{t-l-1} + \phi^2\varepsilon_{t-l-2} + \dots)]$$

$\phi^l\varepsilon_{t-l} + \phi^{l+1}\varepsilon_{t-l-1}$

$$= E[\dots + \phi^l\varepsilon_{t-l}^2 + \text{cross term} + \dots + \text{Cross Term} + \phi^{l+2}\varepsilon_{t-l-1}^2 + \dots + \phi^{l+4}\varepsilon_{t-l-2}^2 + \dots]$$

$$= \phi^l \underbrace{E(\varepsilon_{t-l}^2)}_{\sigma^2} + \phi^{l+2}\underbrace{E(\varepsilon_{t-l-1}^2)}_{\sigma^2} + \phi^{l+4}\underbrace{E(\varepsilon_{t-l-2}^2)}_{\sigma^2} + \dots$$

$$\gamma_l = \sigma^2\phi^l(1+\phi^2+\phi^4+\dots) = \frac{\sigma^2\phi^l}{1-\phi^2}$$

← l th Autocov ของ $y_t \sim AR(1)$

ฟังก์ชันสหสัมพันธ์ร่วมในตัวเอง (ACF) → ρ_l – lag l autocorr vs $Y_t \sim AR(1)$

$\boxed{Y_t = \phi Y_{t-1} + \varepsilon_t} \rightarrow \rho_l = \phi^l$

ฟังก์ชันสหสัมพันธ์ร่วมในตัวเอง (ACF) เท่ากับ $\overset{\text{rho}}{\rho_l} = \dfrac{\gamma_l}{\underbrace{\gamma_0}_{var(Y_t)}} = \dfrac{\dfrac{\phi^l \cancel{\sigma_\varepsilon^2}}{\cancel{(1-\phi^2)}}}{\dfrac{\cancel{\sigma_\varepsilon^2}}{\cancel{(1-\phi^2)}}} = \phi^l$

หากลองแทนค่า ϕ ด้วยค่าเท่ากับ $0.9, -0.9, 0.5, -0.5$ จะได้ฟังก์ชันสหสัมพันธ์ร่วมในตัวเองดังตารางต่อไปนี้

$\rho_1 = \phi^1 = \phi$

$\rho_2 = \phi^2$

Theoretical ACF

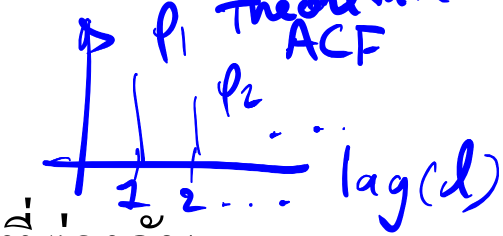


Table: Autocorrelation ของ $AR(1)$ ที่ค่าสัมประสิทธิ์(ϕ)ที่ต่างกัน

$\phi \backslash l$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0.9	0.900	$0.9^2=$ 0.810	$0.9^3=$ 0.729	0.656	0.590	0.531	0.478	0.430	0.387	0.349
-0.9	-0.900	0.810	-0.729	0.656	-0.590	0.531	-0.478	0.430	-0.387	0.349
0.5	0.500	0.250	0.125	0.063	0.031	0.016	0.008	0.004	0.002	0.001
-0.5	-0.500	0.250	-0.125	0.063	-0.031	0.016	-0.008	0.004	-0.002	0.001

ฟังก์ชันสหสัมพันธ์ร่วมในตัวเอง (ACF)

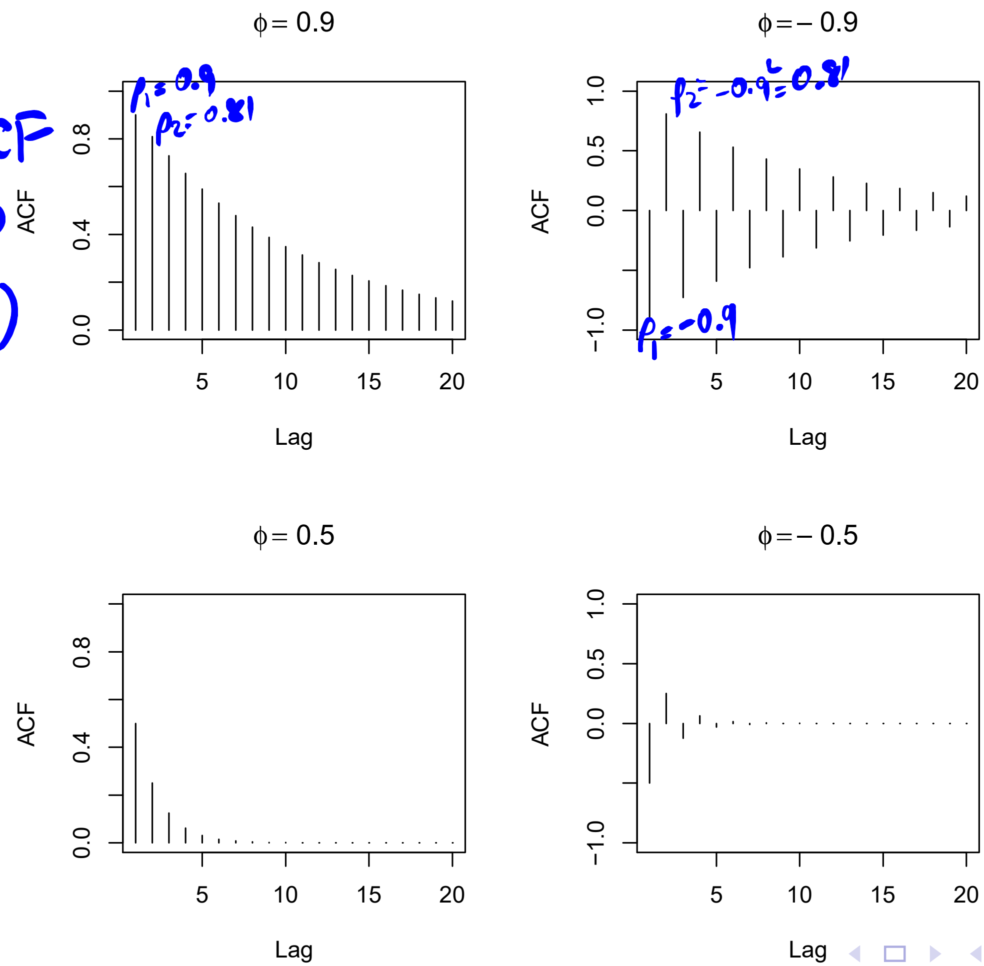
Figure: ค่าสหสัมพันธ์ร่วมในตัวเองของกระบวนการ $AR(1)$ ที่ค่าสัมประสิทธิ์(ϕ)ที่ต่างกัน

✓ $Y_t = \phi Y_{t-1} + \varepsilon_t$

Theoretical ACF
ของ AR(1)

1. ค่าสัมบูรณ์ของ ACF ของ AR(1) มีค่าลดลงเรื่อยๆ (ลู่เข้าใกล้ 0)

2. กรณี $|\phi|$ ใกล้ 1 ACF จะลู่ลงช้าๆ
กรณี $|\phi|$ ใกล้ 0



เงื่อนไขความเป็นอนุกรมนิ่ง (Stationary)

$Y_t \sim AR(1)$

$E(Y_t) = 0$, $Var = \frac{\sigma^2}{1-\phi^2}$

เราสามารถเขียนกระบวนการ $AR(1)$ ในรูปของพหุนามออโตรีเกรสซีฟได้เป็น

เงื่อนไข ที่ เพราะ หาค่า $Var(Y_t)$ ⇒ $|\phi|<1$
(คงที่)

$Var(Y_t)$ → ไม่ exist

$\phi = 1, -1$

$|\phi| > 1$ → Var เป็นลบ

$Y_t = \phi Y_{t-1} + \varepsilon_t$

Polynomial

$$y_t - \phi y_{t-1} = \varepsilon_t$$

$$(1-\phi L)y_t = \varepsilon_t \qquad (2.13)$$

โดยที่เราสามารถเขียน auxiliary equation ได้เป็น

เปลี่ยน L (operator) ⇒ m (variable)

สมการช่วย

$$(1-\phi m) = 0$$

แก้สมการ

$|m| = \frac{1}{|\phi|} > 1$

$|\phi| < 1$

คำตอบของสมการ
(Root of Polynomial)

เงื่อนไข Y_t เป็น stationary - ค่าสัมบูรณ์ของ root of polynomial มีค่ามากกว่า 1.

Example 1

จงพิจารณาว่ากระบวนการต่อไปนี้เป็นกระบวนการนิ่งหรือไม่

- $y_t - 0.9y_{t-1} = \varepsilon_t$

  $|\phi = 0.9| < 1$ stationary

  $\rightarrow \left| m = \frac{1}{0.9} \right| > 1$

- $y_t - y_{t-1} = \varepsilon_t$

  $\phi = 1$ ไม่เป็น stationary

- $y_t + 1.2y_{t-1} = \varepsilon_t$

  $\phi = 1.2$ ไม่เป็น stationary.

แบบจำลอง AR(1) ที่มีค่าเฉลี่ย

$y_t = \phi y_{t-1} + \varepsilon_t \rightarrow E(y_t)=0$

$y_t = \phi_0 + \phi_1 y_{t-1} + \varepsilon_t$

เราสามารถเขียน AR(1) ในรูปทั่วไปเช่น $y_t - \mu = \phi(y_{t-1} - \mu) + \varepsilon_t$ ถ้าเราต้องการหา $E(y_t)$

$(y_t - \mu) = \phi(y_{t-1} - \mu) + \varepsilon_t$

$E(y_t) = \mu$

- $Var(y_t)$
- $Cov(y_t, y_{t-l})$

มีค่าเหมือนเดิม

AR(1) - มีค่าเฉลี่ย $\neq 0$

$E(y_t)=0$

ACF จะเหมือนเดิม

กรณีสมการ $y_t = \phi_0 + \phi_1 y_{t-1} + \varepsilon_t$ ถ้าเราต้องการหา $E(y_t)$

$E(y_t) = E(\phi_0 + \phi_1 y_{t-1} + \varepsilon_t)$ (ε_t เป็น WN)

$= \phi_0 + \phi_1 E(y_{t-1}) + \cancel{E(\varepsilon_t)} \rightarrow 0$

$E(y_t) = \frac{\phi_0}{1-\phi_1} = \mu$

$E(y_t)$ สมมุติ stationary ($|\phi_1| < 1$)

แบบจำลอง $AR(2)$

แบบจำลอง $AR(2)$ สามารถเขียนอธิบายได้ด้วยสมการ

$$y_t = \phi_1 y_{t-1} + \phi_2 y_{t-2} + \varepsilon_t \rightarrow y_t - \phi_1 y_{t-1} - \phi_2 y_{t-2} = \varepsilon_t$$

Ly_t L^2y_t

stationary

เราสามารถพิจารณาความเป็นกระบวนการนิ่งได้โดยการหารากของพหุนามออโตรีเกรสซีฟซึ่ง $(1 - \phi_1 L - \phi_2 L^2)y_t = \varepsilon_t$ สามารถเขียนได้เป็น

$$\phi(m) = 1 - \phi_1 m - \phi_2 m^2 = 0 \rightarrow |m_1|, |m_2| > 1$$

แยก factor

$\phi(m) = 1 - \phi_1 m - \phi_2 m^2 = 0$ โดยที่รากของสมการพหุนามออโตรีเกรสซีฟที่อยู่ในรูปสมการกำลังสอง (quadratic) จะมีด้วยกันสองจำนวน(m_1, m_2)เท่ากับ $\left|\frac{\phi_1 \pm \sqrt{\phi_1^2 + 4\phi_2}}{-2\phi_2}\right| > 1$ โดยที่เงื่อนไขที่คือ รากของสมการพหุนามออโตรีเกรสซีฟจะต้องมากกว่าหนึ่ง (หรือมอดุลัส (modulus) มากกว่าหนึ่งในกรณีจำนวนเชิงซ้อน) ซึ่งจะเกิดขึ้นเมื่อ $|m_1|, |m_2| > 1$ เมื่อ

$$\rightarrow 1)\ \phi_1 + \phi_2 < 1, \quad 2)\ \phi_2 - \phi_1 < 1, \quad 3)\ |\phi_2| < 1$$

AR(2) เป็น stationary

คุณลักษณะของกระบวนการ $AR(2)$

1) $E(Y_t) = 0$
2) $Var(Y_t) = Cov(Y_t, Y_t)$
3) $Cov(Y_t, Y_{t-\ell}) = \gamma_\ell$

ฟังก์ชันความแปรปรวนร่วมเราสามารถพิจารณาได้โดยคูณสมการ (2.16) ทั้งสองข้างด้วย y_{t-k} แล้ว take expectation เราจะได้

$$\gamma_k = E(y_t y_{t-k}) = E[(\phi_1 Y_{t-1} + \phi_2 Y_{t-2} + \varepsilon_t) Y_{t-k}]$$

$$= \phi_1 \underbrace{E(Y_{t-1} Y_{t-k})}_{} + \phi_2 \underbrace{E(Y_{t-2} Y_{t-k})}_{} + \cancel{E(\varepsilon_t Y_{t-k})}$$

E(cross term) = 0

Autocov $k = 0, 1, 2, \ldots$

$$\boxed{\gamma_k = \phi_1 \gamma_{k-1} + \phi_2 \gamma_{k-2}}$$

AR(2) เขียนในรูป MA(∞)

$\varepsilon_{t-k}, \varepsilon_{t-k-1}, \ldots$

$k > 0$

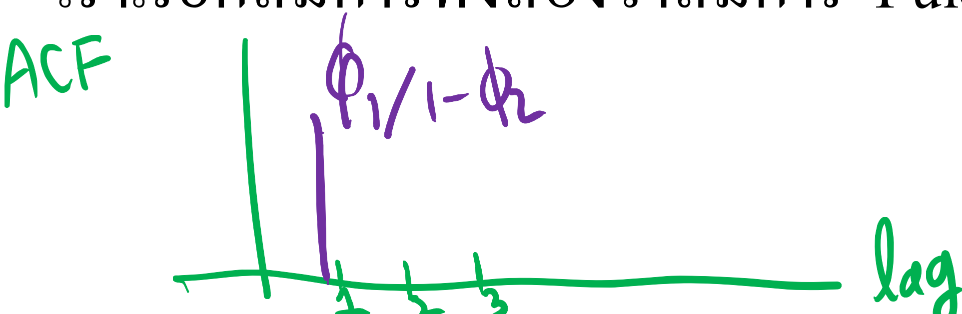
และหากหารด้วย γ_0 จะได้

$$\frac{\gamma_k}{\gamma_0} = \phi_1 \frac{\gamma_{k-1}}{\gamma_0} + \phi_2 \cdot \frac{\gamma_{k-2}}{\gamma_0}$$

$$\boxed{\rho_k = \phi_1 \rho_{k-1} + \phi_2 \rho_{k-2}} \quad (*)$$

Autocorr ของ AR(2)

เราเรียกสมการทั้งสองว่าสมการ Yule-Walker



คุณลักษณะของกระบวนการ $AR(2)$

y_t, y_{t+1} ๖๐/๘๐

$y_t y_{t-1}$

หากเราพิจารณากรณีที่ $k = 1$, $\boxed{\rho_1 = \rho_{-1}}$ และ $\rho_0 = 1$ เราจะได้

$k=1$ ใน (*) $\quad \rho_1 = \phi_1 \rho_0 + \phi_2 \rho_{-1} = \rho_1$

$$\boxed{\rho_1 = \frac{\phi_1}{1-\phi_2}}$$

และกรณีที่ $k = 2$ เราจะได้

$\rho_2 = \phi_1 \rho_1 + \phi_2 \rho_0$

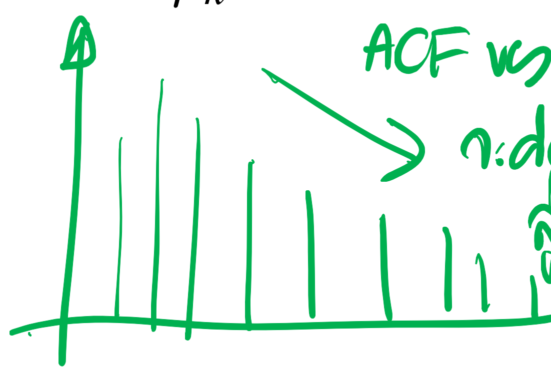
$$\boxed{\rho_2 = \frac{\phi_2(1-\phi_2)+\phi_1^2}{1-\phi_2}}$$

$\rho_3 = \phi_1 \rho_2 + \phi_2 \rho_1$

$\vdots$

และเราสามารถแทนค่าแบบเวียนเกิด(recursive)เพื่อให้ได้ ρ_k กรณี $k > 2$

ให้ไปอ่านเนื้อหาสำหรับแบบจำลอง AR(p)



ACF ของ AR(2) จะค่อยๆ ลดลงใกล้ศูนย์

แบบจำลอง $AR(p)$

กรณีที่ $AR(p)$ เป็นอนุกรมนิ่ง ค่าคงที่ในรูปแบบถดถอยในตัวเอง(c)จะเท่ากับ $\mu(1-\phi_1-...-\phi_p)$ ในทางกลับกัน $\mu = c/(1-\phi_1-...-\phi_p)$

หากเราสมมุติให้ค่าเฉลี่ย(μ)เท่าศูนย์และกระบวนการนิ่ง เราจะได้

$$\rho_k = \phi_1\rho_{k-1} + \phi_2\rho_{k-2} + ... + \phi_p\rho_{k-p},$$

สำหรับทุกค่า $k \geq 1$ หากเราพิจารณากรณีที่ $k = 1, 2, ..., p$ และใช้ความสัมพันธ์ที่ $\rho_0 = 1$ และ $\rho_j = \rho_{-j}$ เราจะได้สมการ Yule-Walker

$$\begin{aligned}
\rho_1 &= \phi_1 + \phi_2\rho_1 + \phi_3\rho_2 + ... + \phi_p\rho_{p-1} \\
\rho_2 &= \phi_1\rho_1 + \phi_2 + \phi_3 + ... + \phi_p\rho_{p-2} \\
&\vdots \\
\rho_p &= \phi_1\rho_{p-1} + \phi_2\rho_{p-2} + \phi_3\rho_{p-3} + ... + \phi_p
\end{aligned} \tag{2}$$

แบบจำลอง $AR(p)$ → ACF จากทฤษฎี (หมายถึง $Y_t \sim AR(p)$) จะค่อยๆ ลู่เข้าหาศูนย์.

ซึ่งหากเราทราบว่า $\phi_1, \phi_2, ..., \phi_p$ เราสามารถหาค่า $\rho_1, \rho_2, ..., \rho_3$ ได้ นอกจากนี้

$$E(\varepsilon_t y_t) = E[\varepsilon_t(\phi_1 y_{t-1} + ... + \phi_p y_{t-p} + \varepsilon_t)] = E(\varepsilon_t^2) = \sigma^2$$

และหากเราคูณสมการ (2.20) ด้วย y_t และใส่ค่าคาดหมาย เราจะได้

$$\gamma_0 = \phi_1\gamma_1 + \phi_2\gamma_2 + ... + \phi_p\gamma_p + \sigma^2 \tag{3}$$

และหากใช้ความสัมพันธ์ว่า $\rho_k = \gamma_k/\gamma_0$ จะได้

$$\gamma_0 = \frac{\sigma^2}{1 - \phi_1\rho_1 - \phi_2\rho_2 - ... - \phi_p\rho_p}$$

ข้อมูล → Plot Sample ACF — เปรียบเทียบ คุณลักษณะที่[illegible]

ACF ของ Return → AR

Partial Autocorrelation Function

AR(1) $Y_t = \phi_1 Y_{t-1} + \varepsilon_t$

Run reg ① $Y_t = \phi_{11} Y_{t-1} + \varepsilon_{1t}$

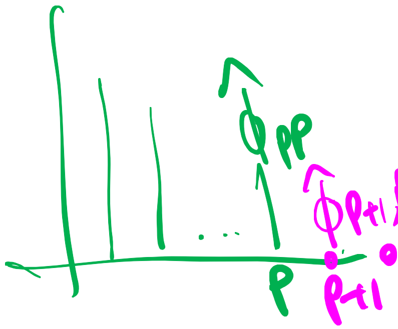
$\hat{\phi}_{11} \to \phi_1$

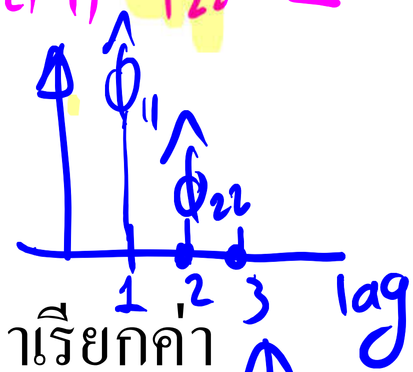
PACF ปีนเครื่องมือที่เป็นประโยชน์ในการระบุแบบจำลอง $AR(p)$

② $Y_t = \phi_{21} Y_{t-1} + \phi_{22} Y_{t-2} + \varepsilon_{2t}$

$\hat{\phi}_{21} \to \phi_1$, $\hat{\phi}_{22} \to 0$

$$
\begin{aligned}
z_t &= \phi_{11} z_{t-1} + \varepsilon_{1t} \\
z_t &= \phi_{21} z_{t-1} + \phi_{22} z_{t-2} + \varepsilon_{2t} \\
&\vdots \\
z_t &= \phi_{p1} z_{t-1} + \phi_{p2} z_{t-2} + \ldots + \phi_{pp} z_{t-p} + \varepsilon_{pt}
\end{aligned}
$$





โดยที่ $z_t = y_t - \mu$ คือข้อมูลที่ได้กำจัดค่าเฉลี่ยแล้ว (demeaned) เราเรียกค่าสัมประสิทธิ์ ϕ_{jj} สำหรับ $j = 1, 2, ..., p$ (ค่าสัมประสิทธิ์สุดท้ายของแต่ละสมการ) ว่าค่าสัมประสิทธิ์สหสัมพันธ์ในตัวเองบางส่วน

Partial ACF

PACF

ในกรณีที่เราพิจารณาแบบจำลอง $AR(1)$ ค่าสัมประสิทธิ์สหสัมพันธ์ในตัวเองบางส่วนตัวแรก ϕ_{11} จะไม่เท่ากับศูนย์ ส่วนสัมประสิทธิ์ที่เหลือจะเท่ากับศูนย์

หากเราพิจารณาแบบจำลอง $AR(2)$ ค่าสัมประสิทธิ์สหสัมพันธ์ในตัวเองบางส่วนตัวแรกและตัวที่สอง (ϕ_{11} และ ϕ_{22}) จะไม่เท่ากับศูนย์ ส่วนสัมประสิทธิ์ที่เหลือ (ϕ_{jj} สำหรับ $j > 2$) จะเท่ากับศูนย์

โดยสรุปแล้ว สำหรับแบบจำลอง $AR(p)$ ใดๆ ค่าสัมประสิทธิ์สหสัมพันธ์ในตัวเองบางส่วน p ตัวแรกจะไม่เท่ากับศูนย์ และสัมประสิทธิ์ที่เหลือจะเท่ากับศูนย์

สามารถคำนวณได้โดยใช้ฟังก์ชัน pacf ใน R

pacf
คำนวณ
Sample PACF

$H_0: \phi_1 = 0$ vs $H_1: \phi_1 \neq 0$

$t = \dfrac{\hat{\phi}_{11}}{se(\hat{\phi}_{11})} > c.v$

ถ้า PACF เกินจากเส้น ประมาณสามารถสรุปได้ว่า $\phi_K \neq 0$

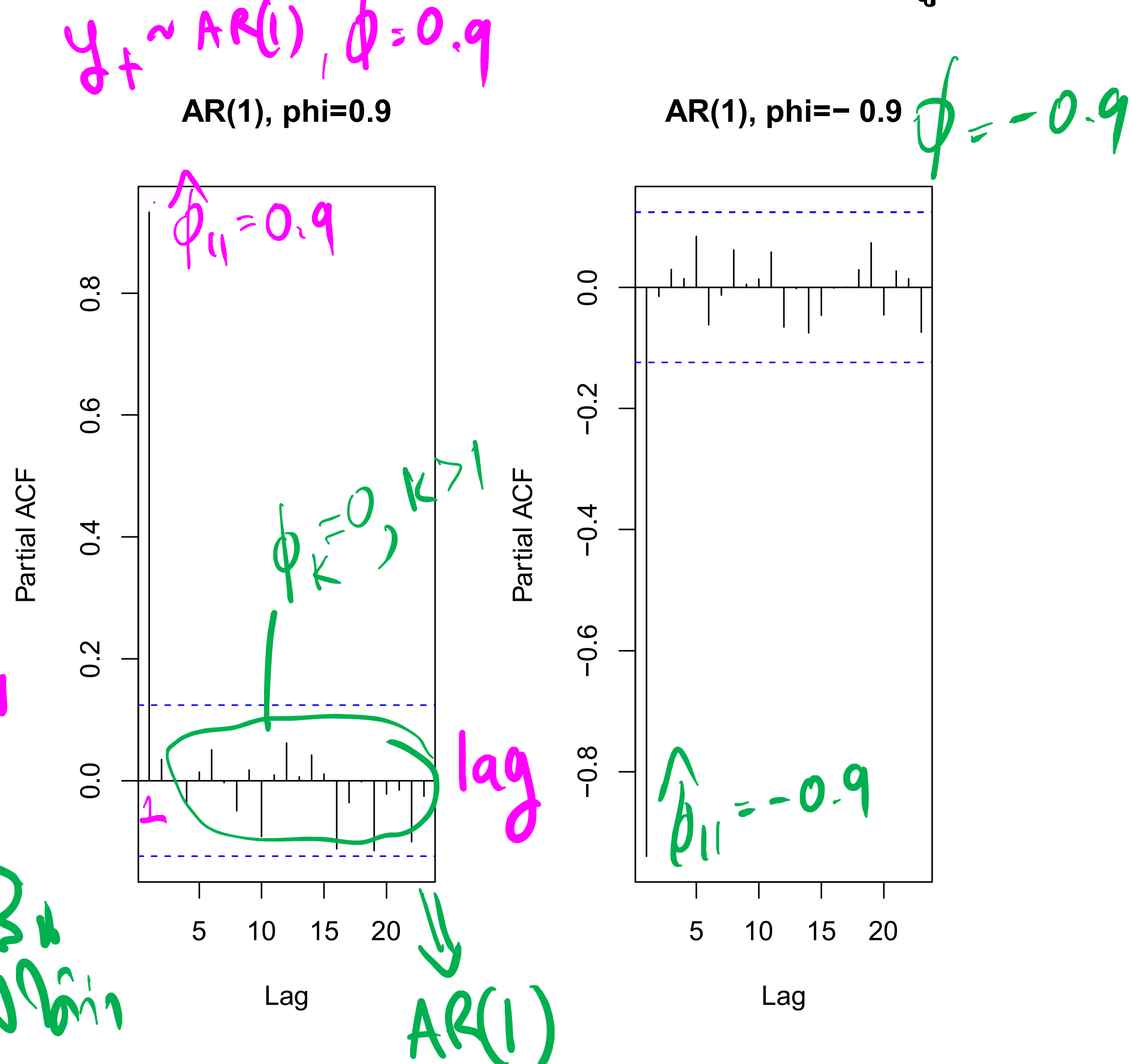


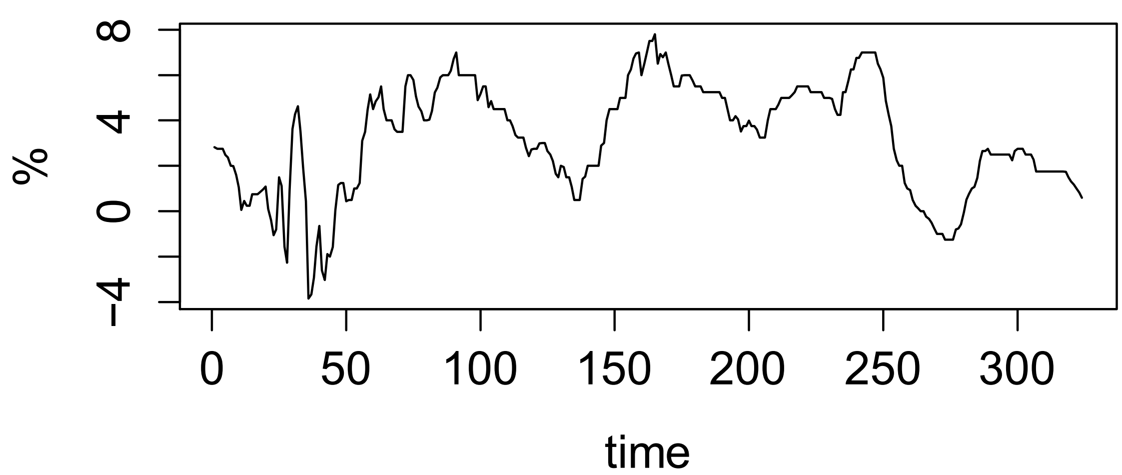
Figure: ฟังก์ชันสหสัมพันธ์ในตัวเองบางส่วนของข้อมูลจำลอง $AR(1)$

ตัวอย่าง 3.3

$r_{Th} - r_{us}$

```
> int<-read.csv(file="mlr.csv", header=T)
> head(int)
> plot(int$diff_th_us,type="l", ylab="%", xlab="time")
```

Figure: ความแตกต่างระหว่างอัตราดอกเบี้ยของไทยและสหรัฐอเมริกา



ตัวอย่างที่ 3.3: PACF

```
> par(mfrow=c(1,2))
> library(TSA) forecast
> Acf(int$diff_th_us) → ตัด ρ0 = 1
> pacf(int$diff_th_us)
```

y

$Y_t = \phi_0 + \phi_1 Y_{t-1} + \phi_2 Y_{t-2} + \phi_3 Y_{t-3} + \varepsilon_t$

1) จากรูป ACF เราพบว่า $\hat{\rho}_j$ เกินจาก เส้นประ ⇒ $\rho_j \neq 0$

เราสามารถสรุปแบบจำลองอธิบาย Y_t $(r_{TH} - r_{US})$

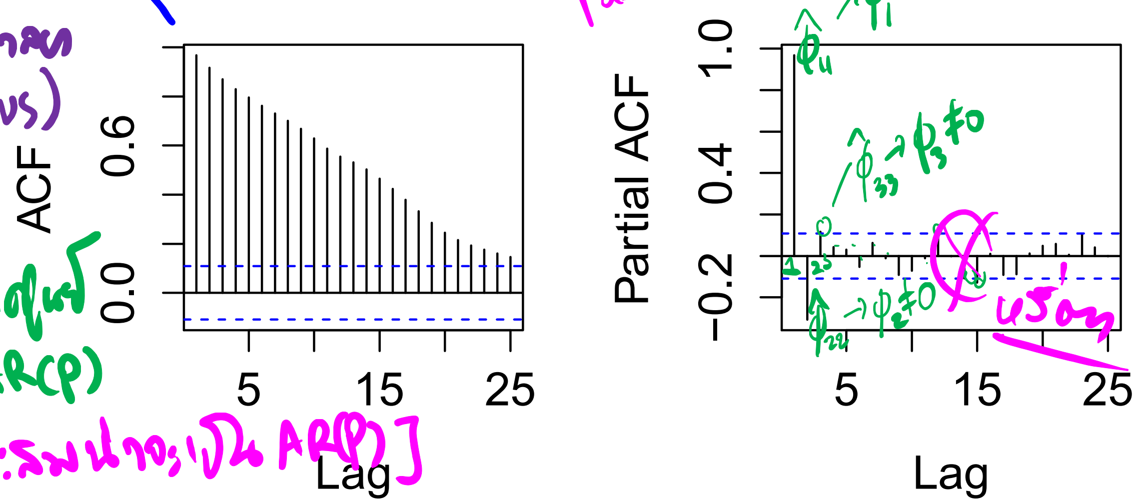
2) Sample ACF ลดลงค่อยๆสู่ศูนย์ คล้ายกับ ACF ของ AR(p)

[แบบจำลองที่เหมาะสมน่าจะเป็น AR(p)]

Sample Partial ACF

③ จาก PACF แบบจำลองที่เหมาะสม คือ AR(3)

PACF



lag

PACF ของ AR(3)

Figure: ACF และ PACF ของความแตกต่างระหว่างอัตราดอกเบี้ยของไทยและสหรัฐอเมริกา

ประมาณค่า AR(P)

① OLS ในการประมาณค่า ϕ

② MLE estimation

Maximum Likelihood Est. → สร้าง likelihood function (สร้างจากการแจกแจงของ ε_t)

หากเราสนใจที่จะประมาณค่าแบบจำลอง $AR(1)$ ซึ่งอยู่ในรูปดังต่อไปนี้

$$y_t = \mu + \phi(y_{t-1} - \mu) + \varepsilon_t$$

โดยที่ $\varepsilon_t \sim iidN(0, \sigma^2)$ เนื่องจากข้อมูลอนุกรมเวลาเป็นข้อมูลที่ขึ้นอยู่ต่อกัน (dependent) ดังนั้น หากเราเก็บข้อมูล $y_1, ..., y_T$ แล้วฟังก์ชันค่าความควรจะเป็นสามารถเขียนได้ดังนี้

$\hat{\phi}$ ที่ Max → MLE

$$L(\mu, \phi, \sigma^2) = f(y_1)f(y_2|y_1)f(y_3|y_2)\cdots f(y_T|y_{T-1}) \tag{4}$$

เนื่องจาก $y_t|y_{t-1} \sim N(\mu + \phi(y_{t-1} - \mu), \sigma^2)$ และฟังก์ชันการแจกแจงจะเป็นแบบปกติที่เหมือนกับช็อก

$$f(y_t|y_{t-1}) = f_\varepsilon[(y_t - \mu) - \phi(y_{t-1} - \mu)]$$

MLE estimation

$$L(\mu, \phi, \sigma^2) = \exp\left(\frac{\sum_{t=2}^{T}[(y_t - \mu) - \phi(y_{t-1} - \mu)]}{2\sigma^2}\right) \qquad (2.30)$$

การหาประมาณค่าโดยหาค่าพารามิเตอร์ที่ทำให้ log ของสมการ (2.30) สูงที่สุด เรียกว่า การประมาณค่าความควรจะเป็นสูงสุดแบบแม่นตรง (exact maximum likelihood estimation)

กรณีนี้เราไม่สามารถหาค่าสูงสุดได้ด้วยการวิเคราะห์หาเงื่อนไขจำเป็น เราต้องใช้กระบวนการด้วยเครื่องคอมพิวเตอร์ในการหาค่าสูงสุด

Model Checking

(ตรวจสอบแบบจำลองว่าเพียงพอในการอธิบาย y_t)

AR(3) เพียงพอในการอธิบาย

หลังจากที่เราได้ตัวประมาณค่าสำหรับพารามิเตอร์แล้ว ขั้นต่อไปเราก็จะหาค่า fitted ของตัวแปรที่เราศึกษา ($\hat{y}_t$)

แล้วก็จะตรวจสอบแบบจำลองโดยการวิเคราะห์ค่าส่วนเกิน (residuals) โดยในที่นี้ค่าส่วนเกินสามารถคำนวณได้จาก $\hat{\varepsilon}_t = y_t - \hat{y}_t$ โดยเราจะประเมินค่าส่วนเกินดังต่อไปนี้

ส่วนที่แบบจำลองอธิบาย $\hat{y}_t = \hat{\phi}_1 y_{t-1} + \hat{\phi}_2 y_{t-2} + \hat{\phi}_3 y_{t-3}$

ส่วนที่แบบจำลองอธิบายไม่ได้ (residuals) $y_t - \hat{y}_t = \hat{\varepsilon}_t$ → ถ้า AR(3) เพียงพอแล้ว

[$\hat{\varepsilon}_t$ กับ $\hat{\varepsilon}_{t-j}$ ไม่มีความสัมพันธ์กัน

ทดสอบ White Noise ของ $\hat{\varepsilon}_t$

1) ACF ของ $\hat{\varepsilon}_t$

2) ทดสอบ LB Q test กับ $\hat{\varepsilon}_t$ → df.

Model Checking

หลังจากที่เราได้ตัวประมาณค่าสำหรับพารามิเตอร์แล้ว ขั้นต่อไปเราก็จะหาค่า fitted ของตัวแปรที่เราศึกษา ($\hat{y}_t$)

แล้วก็จะตรวจสอบแบบจำลองโดยการวิเคราะห์ค่าส่วนเกิน (residuals) โดยในที่นี้ค่าส่วนเกินสามารถคำนวณได้จาก $\hat{\varepsilon}_t = y_t - \hat{y}_t$ โดยเราจะประเมินค่าส่วนเกินดังต่อไปนี้

1 เราอาจจะเริ่มจากการวาดแผนภาพ ACF งของ $\hat{\varepsilon}_t$ เพื่อดูว่าอนุกรมดังกล่าวยังมีความขึ้นอยู่ต่อกันหรือไม่

Model Checking

หลังจากที่เราได้ตัวประมาณค่าสำหรับพารามิเตอร์แล้ว ขั้นต่อไปเราก็จะหาค่า fitted ของตัวแปรที่เราศึกษา ($\hat{y}_t$)

แล้วก็จะตรวจสอบแบบจำลองโดยการวิเคราะห์ค่าส่วนเกิน (residuals) โดยในที่นี้ค่าส่วนเกินสามารถคำนวณได้จาก $\hat{\varepsilon}_t = y_t - \hat{y}_t$ โดยเราจะประเมินค่าส่วนเกินดังต่อไปนี้

1 เราอาจจะเริ่มจากการวาดแผนภาพ ACF งของ $\hat{\varepsilon}_t$ เพื่อดูว่าอนุกรมดังกล่าวยังมีความขึ้นอยู่ต่อกันหรือไม่

ρ ของ ε_t

กับ $\hat{\varepsilon}_t$

2 นอกจากนี้เราสามารถทดสอบโดยใช้ค่าสถิติ $Q(m) = T(T+2)\sum_{k=1}^{m}\frac{\hat{\rho}^2_{\varepsilon_k}}{T-k}$ โดยที่ $Q(m) \sim \chi^2_{m-g}$ โดยที่ g คือจำนวนของอันดับในแบบจำลองซึ่งในแบบจำลอง $AR(p)$ ค่า $g = p$ และ m คือจำนวนค่าล่าของความสัมพันธ์ที่พิจารณา

df* แตกต่างจากกรณีทดสอบ y_t

จำนวน parameter (ϕ)

ตัวอย่าง 3.3 ต่อ

จาก PACF → $Y_t \sim AR(3)$

เก็บ คำสั่งที่ใช้ประมาณค่า arima

ข้อมูล

ระบุ AR, I, MA

```
> m1<-arima(int$diff_th_us, order=c(3,0,0))
> m1
Call:
arima(x = int$diff_th_us, order = c(3, 0, 0))
Coefficients:
         ar1      ar2     ar3  intercept
      1.3294  -0.4986  0.1334     3.0553
s.e.  0.0549   0.0878  0.0549     0.8102
sigma^2 estimated as 0.3054:  log likelihood = -269.11,  aic = 548.21
```

→ MLE

$\hat{\phi}_1 \quad \phi_1 \quad \phi_2 \quad \phi_3$

$\hat{\mu} = \dfrac{\hat{\phi}_0}{1-\hat{\phi}_1-\hat{\phi}_2-\hat{\phi}_3}$

$\hat{\sigma}^2$

$se(\hat{\phi}_1)$ → ทดสอบ $H_0: \phi_1 = 0$ vs $H_1: \phi_1 \neq 0$

$t = \dfrac{\hat{\phi}}{se(\hat{\phi})}$

โดยที่ค่าสัมประสิทธิ์

$\phi_1 = 1.3294, \phi_2 = -0.4986, \phi_3 = 0.1334, \mu(= \mathit{intercept}) = 3.0553$ และมีค่า standard errors อยู่ในบรรทัด `s.e.`

ตัวอย่าง 3.3 ต่อ

ในโปรแกรม R ค่า `intercept` ที่ได้คือ μ มิใช่จุดตัดแกนในสมการที่ ?? ดังนั้นถ้าต้องการหากเราต้องการค่า $\phi_0 = \mu(1-\phi_1-\phi_2-\phi_3) = 0.10937$
เราสามารถเขียนผลการประมาณค่าได้โดย

$$(1 - \underset{(0.0549)}{1.3294}\, L + \underset{(0.0878)}{0.4986}\, L^2 - \underset{(0.0549)}{0.1334}\, L^3)(y_t - \underset{(0.8102)}{3.0553}) = \varepsilon_t$$

โดยที่ค่าในวงเล็บคือ standard errors และ $\widehat{\sigma}^2 = 0.3054$

ตัวอย่าง 3.3 ต่อ

```
> m2<-arima(int$diff_th_us, order=c(3,0,0),method=c("ML"))
> m2
Coefficients:
         ar1      ar2     ar3  intercept
      1.3295  -0.4987  0.1334      3.056
s.e.  0.0549   0.0878  0.0549      0.810

sigma^2 estimated as 0.3054:  log likelihood = -269.11,  aic = 548.21
> m3<-arima(int$diff_th_us, order=c(3,0,0),method=c("CSS"))

Coefficients:
         ar1      ar2     ar3  intercept
      1.3334  -0.5016  0.1346     3.0793
s.e.  0.0551   0.0880  0.0552     0.9195
sigma^2 estimated as 0.3082:  part log likelihood = -269.05
```

OLS

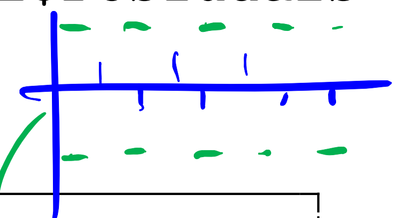
ตัวอย่าง 3.3 ต่อ

AR(3) เพียงพอในการอธิบาย

หลังจากที่เราได้ตัวประมาณค่าของพารามิเตอร์ทั้งหมดแล้วเราจะพิจารณาว่าค่า residuals นั้นยังมีความสัมพันธ์ระหว่างช่วงเวลาหลงเหลืออยู่หรือไม่ หรือแบบจำลองเพียงพอหรือไม่ โดยการทดสอบ L-B test สำหรับ m2$residuals ด้วยคำสั่งข้างล่าง

① plot ACF ของ residuals

Acf(m1$residuals)



เพียงพออธิบาย

② LB-Q test กับ $\hat{\varepsilon}_t$

```
> Box.test(m2$residuals,lag=12,type="Ljung")
^^IBox-Ljung test
data:  m2$residuals
X-squared = 14.0085, df = 12, p-value = 0.3002
> pv=1-pchisq(14.0085,9)
> pv
[1] 0.1220232
```

m LB

เปิด df=9

$$Q(12) = 14.0085 \sim \chi^2_{df = m - p} = 9 < C.V. = 16.9$$

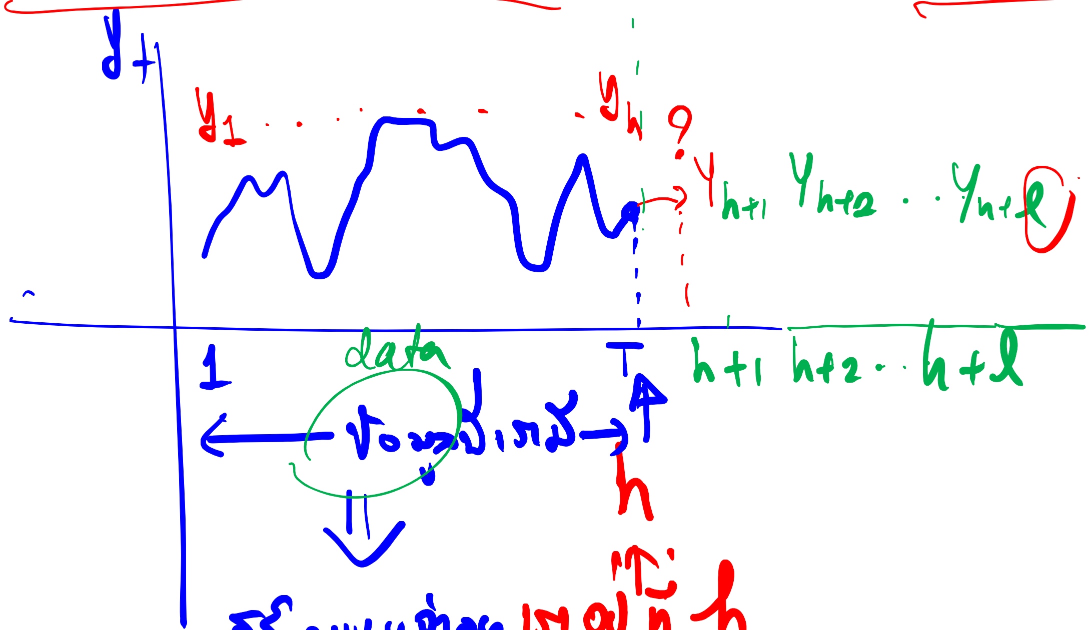
$m = 12$, $p = 3$; $df=9, \alpha=0.05$

$Q(12) < cv \rightarrow$ แสดงว่า $[H_0: \rho_1 = \dots = \rho_m = 0]$ ของ $\hat{\varepsilon}_t$

แบบจำลอง AR(3) เพียงพอ ในการอธิบาย Y_t ← $\hat{\varepsilon}_t$ เป็น WN. (ไม่มีความสัมพันธ์)

การพยากรณ์ด้วยแบบจำลอง $AR(p)$

สมมุติให้เรากำลังอยู่ ณ ช่วงเวลาที่ h แต่ต้องการที่จะพยากรณ์ไปข้างหน้า l คาบเวลา หรือสนใจค่าของ y_{h+l} โดยที่ $l \geq 1$ เราเรียก h ว่าจุดเริ่มต้นการพยากรณ์ (forecast origin) และ l ว่าขอบเขตการพยากรณ์ (forecast horizon)



สร้างแบบจำลอง เราอยู่ที่ h

เช่น AR(p) → ค่าพยากรณ์?

$\hat{y}_{h+1|h}$ โดยใช้ข้อมูลถึง h (1, ..., h) Information $[y_1, \ldots, y_h]$ $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_h$

ค่าจริง y_{h+1} ต่าง ⇒ forecast error^2

การพยากรณ์ด้วยแบบจำลอง $AR(p)$

สมมุติให้เรากำลังอยู่ ณ ช่วงเวลาที่ h แต่ต้องการที่จะพยากรณ์ไปข้างหน้า l คาบเวลา หรือสนใจค่าของ y_{h+l} โดยที่ $l \geq 1$ เราเรียก h ว่าจุดเริ่มต้นการพยากรณ์ (forecast origin) และ l ว่าขอบเขตการพยากรณ์ (forecast horizon)

กำหนดให้ $\hat{y}_h(l)$ เป็นค่าพยากรณ์ของ y_{h+l} โดยการพยากรณ์ดังกล่าวจะทำให้ฟังก์ชันสูญเสียที่เกิดจากการค่าผิดพลาดกำลังสอง (squared errors) น้อยที่สุด

Mean Squared Errors (MSE)

$$E\left[(y_{h+l} - \hat{y}_h(l))^2 | F_h\right] \leq \min_g E\left[(y_{h+l} - g)^2 | F_h\right]$$

ค่าพยากรณ์ค่าที่ดีที่สุด

โดยที่ F_h เป็นข้อมูลที่มีทั้งหมดในคาบที่ h และเราเรียก $\hat{y}_h(l)$ ว่าค่าพยากรณ์ของ y_t ไปข้างหน้า l คาบเมื่อเริ่มต้นการพยากรณ์อยู่ที่ h

เขียนว่า

Conditional Expected Value ของ Y_{h+l} เมื่อ Info ถึง h

$$\boxed{\hat{y}_h(l) = E(Y_{h+l} \mid \underbrace{\text{Info ถึง } h}_{F_h})}$$

$= \hat{y}_{h+l|h}$

สัญลักษณ์

วิธีการในการคาดเดา

ค่าพยากรณ์ไปข้างหน้า 1 คาบจาก $AR(p)$

$Y_t = \phi_0 + \phi_1 Y_{t-1} + \dots + \phi_p Y_{t-p} + \varepsilon_t$

เราอยู่ที่ $h \rightarrow h+1 \Rightarrow$ ขั้นตอน 1 $Y_{(h+1)} = \phi_0 + \phi_1 Y_{(h+1)-1} + \phi_2 Y_{(h+1)-2} + \dots + \phi_p Y_{h+1-p} + \varepsilon_{h+1}$

เราพบว่าค่า $y_{h+1} = \phi_0 + \phi_1 y_{h+1-1} + \ldots + \phi_p y_{h+1-p} + \varepsilon_{h+1}$ ตัวพยากรณ์ที่จะทำให้ค่าฟังก์ชันสูญเสียน้อยที่สุดคือค่าคาดการณ์แบบมีเงื่อนไข (conditional expectation) ขั้นตอน 2 หาค่าพยากรณ์ $E(Y_{h+1}|F_h)$

$\hat{y}_h(1) = E(Y_{h+1}|F_h)$ เขียนสูตร

แทนค่า Y_{h+1} $= E(\phi_0 + \phi_1 Y_h + \phi_2 Y_{h-1} + \dots + \phi_p Y_{h+1-p} + \varepsilon_{h+1} | F_h)$

กระจาย $= E(\phi_0|F_h) + E(\phi_1 Y_h|F_h) + \dots + E(\phi_p Y_{h+1-p}|F_h) + E(\varepsilon_{h+1}|F_h)$

$= \phi_0 + \phi_1 E(Y_h|F_h) + \phi_p Y_{h+1-p}$

กำหนดถึง h $= Y_h$

ไม่ทราบค่า $= E(\varepsilon_{h+1}) = 0$ (W.N.)

$\hat{y}_h(1) = \phi_0 + \phi_1 Y_h + \dots + \phi_p Y_{h+1-p}$ ← ค่าพยากรณ์หาได้จากข้อมูลมีถึง h.

ค่าพยากรณ์ไปข้างหน้า 1 คาบจาก $AR(p)$

ค่าจริง

เราพบว่าค่า $y_{h+1} = \phi_0 + \phi_1 y_{h+1-1} + \ldots + \phi_p y_{h+1-p} + \varepsilon_{h+1}$ ตัวพยากรณ์ที่จะทำให้ค่าฟังก์ชันสูญเสียน้อยที่สุดคือค่าคาดการณ์แบบมีเงื่อนไข (conditional expectation)

$\hat{y}_h(1) =$

forecast error   1 คาบ   ค่าจริง − ค่าพยากรณ์

และค่าผิดพลาดจากการพยากรณ์เท่ากับ $e_h(1) = Y_{h+1} - \hat{Y}_h(1)$

$= (\cancel{\phi_0} + \phi_1 \cancel{Y_h} + \cdots + \phi_p \cancel{Y_{h+1-p}} + \varepsilon_{h+1}) - (\cancel{\phi_0} + \phi_1 \cancel{Y_h} + \cdots + \phi_p \cancel{Y_{h+1-p}})$

$e_h(1) = \varepsilon_{h+1}$ [ความผิดพลาดจากการพยากรณ์ขึ้นกับ ε_{h+1}]

ค่าพยากรณ์ไปข้างหน้า 1 คาบจาก $AR(p)$

เราพบว่าค่า $y_{h+1} = \phi_0 + \phi_1 y_{h+1-1} + \ldots + \phi_p y_{h+1-p} + \varepsilon_{h+1}$ ตัวพยากรณ์ที่จะทำให้ค่าฟังก์ชันสูญเสียน้อยที่สุดคือค่าคาดการณ์แบบมีเงื่อนไข (conditional expectation)

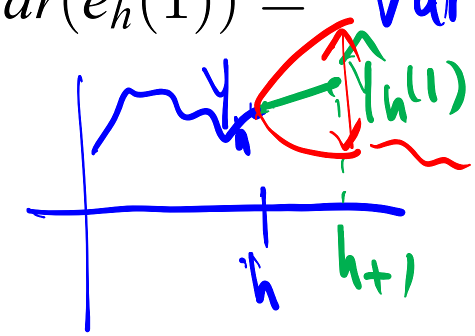
$\hat{y}_h(1) =$

และค่าผิดพลาดจากการพยากรณ์เท่ากับ $e_h(1) =$ ε_{h+1}

variance ของ forecast error

และค่าแปรปรวนจากการพยากรณ์ไปข้างหน้าหนึ่งคาบเท่ากับ

$Var(e_h(1)) =$ $Var(\varepsilon_{h+1}) \underset{\text{w.n.}}{=} \sigma^2$



forecast Interval

ค่าพยากรณ์ไปข้างหน้า 1 คาบจาก $AR(p)$

เราพบว่าค่า $y_{h+1} = \phi_0 + \phi_1 y_{h+1-1} + ... + \phi_p y_{h+1-p} + \varepsilon_{h+1}$ ตัวพยากรณ์ที่จะทำให้ค่าฟังก์ชันสูญเสียน้อยที่สุดคือค่าคาดการณ์แบบมีเงื่อนไข (conditional expectation)

$\hat{y}_h(1) =$

และค่าผิดพลาดจากการพยากรณ์เท่ากับ $e_h(1) =$

และค่าแปรปรวนจากการพยากรณ์ไปข้างหน้าหนึ่งคาบเท่ากับ

$Var(e_h(1)) =$

95% forecast Interval

เราสามารถสร้างช่วงความเชื่อมั่น 95 % ของการพยากรณ์ไปข้างหน้า 1 คาบได้โดยช่วงดังกล่าวจะเท่ากับ $\hat{y}_h(1) \pm 1.96 sd(e_h(1))$

$sd(e_h(1)) = \sqrt{var(e_h)}$

$Z_{\alpha=0.05}$

ค่าพยากรณ์ไปข้างหน้า 2 คาบจาก $AR(p)$

$h \longrightarrow h+2$ ①

เราพบว่าค่า $y_{h+2} = \phi_0 + \phi_1 y_{h+2-1} + \ldots + \phi_p y_{h+2-p} + \varepsilon_{h+2}$ ตัวพยากรณ์ที่จะทำให้ค่าฟังก์ชันสูญเสียน้อยที่สุดคือค่าคาดการณ์แบบมีเงื่อนไข (conditional expectation)

② $\hat{y}_h(2) = E(Y_{h+2} | F_h)$

ไม่ทราบ

$$= \phi_0 + \phi_1 \underbrace{E(Y_{h+1} | F_h)}_{\hat{Y}_h(1)} + \phi_2 \underbrace{E(Y_h | F_h)}_{= Y_h} + \ldots + \phi_p \underbrace{E(Y_{h+2-p} | F_h)}_{= Y_{h+2-p}} + \underbrace{E(\varepsilon_{h+2} | F_h)}_{= E(\varepsilon_{h+2}) = 0 \text{ (WN)}}$$

$$\hat{Y}_h(2) = \phi_0 + \phi_1 \hat{Y}_h(1) + \phi_2 Y_h + \ldots + \phi_p Y_{h+2-p}$$

$$\phi_0 + \phi_1 Y_h + \ldots + \phi_p Y_{h+1-p}$$

ค่าพยากรณ์ไปข้างหน้า 2 คาบจาก $AR(p)$

เราพบว่าค่า $y_{h+2} = \phi_0 + \phi_1 y_{h+2-1} + \ldots + \phi_p y_{h+2-p} + \varepsilon_{h+2}$ ตัวพยากรณ์ที่จะทำให้ค่าฟังก์ชันสูญเสียน้อยที่สุดคือค่าคาดการณ์แบบมีเงื่อนไข (conditional expectation)

$\hat{y}_h(2) =$

และค่าผิดพลาดจากการพยากรณ์เท่ากับ = ค่าจริง - ค่าพยากรณ์

$e_h(2) = y_{h+2} - \hat{y}_h(2)$

$= (\cancel{\phi_0} + \phi_1 y_{h+1} + \phi_2 \cancel{y_h} + \ldots + \phi_p \cancel{y_{h+2-p}} + \varepsilon_{h+2}) - (\cancel{\phi_0} + \phi_1 \hat{y}_h(1) + \cancel{\phi_2 y_h} + \ldots + \cancel{\phi_p y_{h+2-p}})$

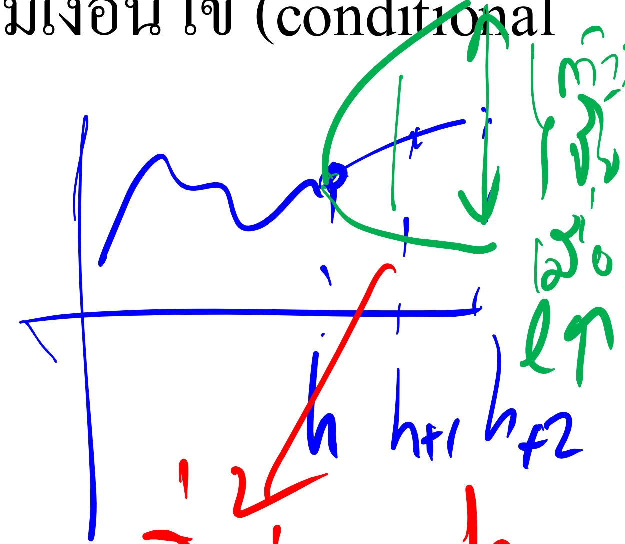
$= \phi_1 (\underbrace{y_{h+1} - \hat{y}_h(1)}_{= e_h(1) = \varepsilon_{h+1}}) + \varepsilon_{h+2}$

$= \phi_1 \varepsilon_{h+1} + \varepsilon_{h+2}$ (เกิดจาก $\varepsilon_{h+1}, \varepsilon_{h+2}$)

ค่าพยากรณ์ไปข้างหน้า 2 คาบจาก $AR(p)$

เราพบว่าค่า $y_{h+2} = \phi_0 + \phi_1 y_{h+2-1} + \ldots + \phi_p y_{h+2-p} + \varepsilon_{h+2}$ ตัวพยากรณ์ที่จะทำให้ค่าฟังก์ชันสูญเสียน้อยที่สุดคือค่าคาดการณ์แบบมีเงื่อนไข (conditional expectation)

$\hat{y}_h(2) =$



ยิ่งห่างจาก h ยิ่งมีค่าผิดพลาดมากขึ้น

และค่าผิดพลาดจากการพยากรณ์เท่ากับ

$e_h(2) =$

และค่าแปรปรวนจากการพยากรณ์ไปข้างหน้าหนึ่งคาบเท่ากับ

$Var(e_h(2)) =$ $Var(\phi_1 \varepsilon_{h+1} + \varepsilon_{h+2}) \overset{ind.}{=} Var(\phi_1 \varepsilon_{h+1}) + Var(\varepsilon_{h+2})$

$= \phi_1^2 \underbrace{Var(\varepsilon_{h+1})}_{\sigma^2} + \underbrace{Var(\varepsilon_{h+2})}_{\sigma^2}$

$= \sigma^2(1+\phi_1^2)$

เราจะสังเกตได้ว่า $Var(e_h(2)) \geq Var(e_h(1))$

ตัวอย่าง 3.3 ผลการพยากรณ์

$y_t = r_{TH} - r_{US} \Rightarrow AR(3)$

m4 ใช้ในการ → พยากรณ์

[1:312] ⇒ arima (AR(3)) 1

ประมาณค่า 312 T=324 12, $\hat{y}$

AR(3) sample ← out of sample →

```
> m4.pred=predict(m4,n.ahead=12)
> m4.pred
$pred
Time Series:
Start = 313
End = 324
Frequency = 1
 [1] 1.803828 1.875260 1.943271 2.005150 2.062937 2.117888 2.170297 2.220198
 [9] 2.267658 2.312788 2.355708 2.396527
$se
Time Series:
Start = 313
End = 324
Frequency = 1
 [1] 0.5622779 0.9342948 1.1737163 1.3399272 1.4696143 1.5777365 1.6700163
 [8] 1.7494732 1.8183586 1.8784737 1.9312318 1.9777417
```

ค่าพยากรณ์ ($\hat{y}$) แบบจำลอง

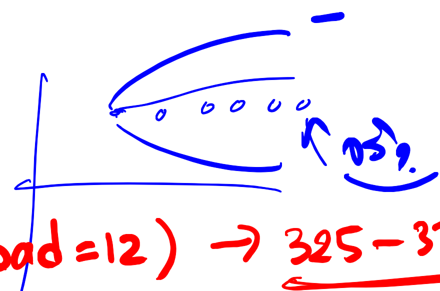
se vs forecast error. ($se(e_h)$)

m4.pred$pred ↓ vector ค่าพยากรณ์

int_th_us[313:324] ค่าจริง

$\hat{y} \pm 1.96 \cdot se$ ⇒ ขอบบน ⇒ ขอบล่าง

m4.pred$pred + 1.96* m4.pred$se



แบบจำลอง พยากรณ์ ดี/ไม่

ค่าจริง

ใช้จริง ประมาณ 1-324 (m_1)

predict (m_1, n.ahead=12) → 325-336 !