วิชา ศ. 435 ภาค 2/2562
การบ้านครั้งที่ 3
ตัวอย่างเฉลย

1. (คะแนน) นักศึกษาทำการบ้านใน rstudio.cloud ใน Project Homework3q1

2. (คะแนน) จงพิจารณาว่ากระบวนการต่อไปนี้เป็นกระบวนการนิ่ง (stationary) หรือไม่ พร้อมแสดงวิธีทำ $[\varepsilon_t \sim iidN(0,1)]$

   (a) $y_t = -0.2y_{t-1} + 0.48y_{t-2} + \varepsilon_t$ blue

   คำตอบ:

   $$(1 + 0.2L - 0.48L^2)y_t = \varepsilon_t$$

   $$(1 + 0.2m - 0.48m^2) = (1 - 0.6m)(1 + 0.8m) = 0$$

   ดังนั้นรากของ polynomial เท่ากับ 1/0.6,- 1/0.8 ซึ่งมีค่าสัมบูรณ์มากกว่า 1 ดังนั้น y_t จึงเป็น stationary

   (b) $y_t = -1.9y_{t-1} - 0.88y_{t-2} + \varepsilon_t$ blue

   คำตอบ:

   $$(1 + 1.9L + 0.88L^2)y_t = \varepsilon_t$$

   $$(1 + 1.9m + 0.88m^2) = (1 + 0.8m)(1 + 1.1m) = 0$$

   ดังนั้นรากของ polynomial เท่ากับ -1/0.8, -1/1.1 ซึ่ง -1/1.1 มีค่าสัมบูรณ์น้อยกว่า 1 ดังนั้น y_t จึงเป็น non-stationary

   (c) $y_t = -1.8y_{t-1} - 0.81y_{t-2} + \varepsilon_t$ blue

   คำตอบ:

   $$(1 + 1.8L + 0.81L^2)y_t = \varepsilon_t$$

   $$(1 + 1.8m + 0.81m^2) = (1 + 0.9m)(1 + 0.9m) = 0$$

   ดังนั้นรากของ polynomial เท่ากับ -1/0.9 ซึ่งมีค่าสัมบูรณ์มากกว่า 1 ดังนั้น y_t จึงเป็น stationary

3. (คะแนน) หากเราทราบว่าผลได้ตอบแทนรายวันมีลักษณะเป็นกระบวนการ $y_t = -0.2y_{t-1} + 0.48y_{t-2} + \varepsilon_t$ โดยที่ $E(\varepsilon_t) = 0$ และ $Var(\varepsilon_t) = 0.25$ หากเราทราบว่าอัตราผลตอบแทน ณ วันที่ 199 และ 200 เท่ากับ 0.045 และ 0.01 จงพยากรณ์ผลได้ตอบแทนในวันที่ 201 และ 202 พร้อมช่วงความเชื่อมั่น 95 % ของการพยากรณ์ blue

   คำตอบ:จากโจทย์เรามีข้อมูลถึงวันที่ $h = 200$ และต้องการหา $\hat{y}_h(1)$ และ $\hat{y}_h(2)$

   จาก $y_{h+1} = -0.2y_h + 0.48y_{h-1} + \varepsilon_{h+1}$ จะได้ $\hat{y}_h(1) = E(y_{h+1}|F_h) = -0.2y_h + 0.48y_{h-1}$ เมื่อแทนค่า y_{200} และ y_{199} ลงไปจะได้ $\hat{y}_h(1) = -0.2(0.01) + 0.48(0.045) = 0.0196$

   เนื่องจาก $e_h(1) = y_{h+1} - \hat{y}_h(1) = \varepsilon_{h+1}$ ดังนั้น $Var(e_h(1)) = Var(\varepsilon_t) = 0.25$ ดังนั้น 95 % ของการพยากรณ์ $= 0.0196 \pm 1.96(\sqrt{0.25}) = 0.0196 \pm 0.98$

จาก $y_{h+2} = -0.2y_{h+1} + 0.48y_h + \varepsilon_{h+2}$ จะได้ $\hat{y}_h(2) = E(y_{h+2}|F_h) = -0.2\hat{y}_h(1) + 0.48y_h$ เมื่อแทนค่า y_{200} และ $\hat{y}_h(1)$ ลงไปจะได้ $\hat{y}_h(2) = -0.2(0.0196) + 0.48(0.01) = 0.00088$

เนื่องจาก $e_h(2) = y_{h+2} - \hat{y}_h(2) = (-0.2)\varepsilon_{h+1} + \varepsilon_{h+2}$ ดังนั้น $Var(e_h(2)) = (-0.2^2+1)Var(\varepsilon_t) = 0.26$ ดังนั้น 95 % ของการพยากรณ์ $= 0.00088 \pm 1.96(\sqrt{0.26}) = 0.00088 \pm 0.9994$

4. (คะแนน) กำหนดให้ $y_t = \phi_0 + \phi_1 y_{t-1} + \varepsilon_t$ โดยที่ $\varepsilon_t \sim WN(0, \sigma^2)$ จงแสดงค่า $E(y_t), Var(y_t)$ และ ρ_k พร้อมวิธีการได้มาซึ่งค่าดังกล่าว blue

คำตอบ:ค่า Expected value

$$\begin{aligned}
E(y_t) &= E(\phi_0 + \phi_1 y_{t-1} + \varepsilon_t) \\
&= \phi_0 + \phi_1 E(y_{t-1}) + E(\varepsilon_t) \\
&= \phi_0 + \phi_1 E(y_t) + 0 \qquad \text{assume stationary} \\
(1-\phi_1)E(y_t) &= \phi_0 \\
E(y_t) &= \frac{\phi_0}{1-\phi_1}
\end{aligned}$$

กำหนดให้ $\mu = \frac{\phi_0}{1-\phi_1} = E(y_t)$ เราจะได้ว่า $\phi_0 = \mu(1-\phi_1)$ หากแทนค่าใน $y_t = \phi_0 + \phi_1 y_{t-1} + \varepsilon_t$ จะได้

$$\begin{aligned}
y_t &= \mu(1-\phi_1) + \phi_1 y_{t-1} + \varepsilon_t \\
(y_t - \mu) &= \phi_1(y_{t-1} - \mu) + \varepsilon_t
\end{aligned}$$

ค่า Variance สามารถคำนวณได้จาก

$$\begin{aligned}
var(y_t) &= E(y_t - E(y_t))^2 = E(y_t - \mu)^2 \\
&= E(\phi_1(y_{t-1} - \mu) + \varepsilon_t)^2 \\
&= E[\phi_1^2(y_{t-1} - \mu)^2] + 2\phi_1 E[((y_{t-1} - \mu)\varepsilon_t] + E(\varepsilon_t)^2 \\
&= \phi_1^2 Var(y_{t-1}) + 0 + \sigma_\varepsilon^2 \\
(1-\phi_1^2)var(y_t) &= \sigma_\varepsilon^2 \qquad \text{assume stationary} \\
var(y_t) &= \frac{\sigma_\varepsilon^2}{1-\phi_1^2}
\end{aligned}$$

ค่า lag-k autocovariance สามารถคำนวณได้จาก

$$
\begin{aligned}
\gamma_k &= E[(y_t - \mu)(y_{t-k} - \mu)] \\
&= E[(\phi_1(y_{t-1} - \mu) + \varepsilon_t)(y_{t-k} - \mu)] \\
&= E[(\phi_1(y_{t-1} - \mu)(y_{t-k} - \mu)] + E[\varepsilon_t(y_{t-k} - \mu)] \\
&= \phi_1 E[((y_{t-1} - \mu)(y_{t-k} - \mu)] + 0 \\
&= \phi_1 \gamma_{k-1}
\end{aligned}
$$

ดังนั้น เราจะได้ว่า $\rho_k = \phi_1 \rho_{k-1}$ เมื่อแทนค่าย้อนไปเรื่อย ๆ จะได้ $\rho_k = \phi_1^k$