EC435
บทที่ 4 แบบจำลอง GARCH

เฉลิมพงษ์ คงเจริญ ©2556-61

คณะเศรษฐศาสตร์ มหาวิทยาลัยธรรมศาสตร์

October 17, 2019

Notes

แบบจำลอง GARCH: บทนำ

เป้าหมายที่สำคัญประการหนึ่งของการศึกษาเศรษฐมิติทางการเงินคือการศึกษาความผันผวน (volatility) ของผลได้ตอบแทนของสินทรัพย์

ความผันผวนจะหมายถึงความเบี่ยงเบนมาตรฐานที่มีเงื่อนไข (conditional standard deviation) ของผลได้ตอบแทนของสินทรัพย์

ความผันผวนที่คำนวณได้ถูกนำไปใช้ประยุกต์ในการคำนวณ Value-at-Risk(VaR) ของการจัดการความเสี่ยง, การจัดสรรการลงทุนภายใต้วิธีการ mean-variance และการเพิ่มประสิทธิภาพในการทำนาย

Notes

ความผันผวน (volatility)

เราไม่สามารถสังเกตความผันผวนของสินทรัพย์เช่นหลักทรัพย์ได้เหมือนกับการสังเกตเห็นราคาทรัพย์สินหรือการคำนวณผลตอบแทนได้จากราคาทรัพย์สิน

ตัวอย่างการคำนวณความผันผวนในอดีต กำหนดให้ P_t เป็นราคาหลักทรัพย์ และ $y_t = \Delta \ln(P_t)$ เป็นผลได้ตอบแทน $y_t^2, |y_t|, |y_t|^\delta$ มีสหสัมพันธ์ค่อนข้างสูง และเรามักใช้ค่าดังกล่าวเป็นตัวแทนของความผันผวน

ในปัจจุบันมีการคำนวณความผันผวนด้วยวิธีการอื่นๆเช่น Realized volatility และ Implied volatility ด้วย Black-Scholes

Notes

การทดสอบ ARCH effect

กำหนดให้ $\varepsilon_t = y_t - \mu_t$ เป็น residuals ของ mean equation อาจจะเป็นแบบจำลอง $AR(p)$ หรือ $ARIMA(p,d,q)$

เราจะทดสอบว่าข้อมูลของเรามีลักษณะ conditional heteroskedasticity หรือไม่ (**การทดสอบ ARCH effect**)

วิธีแรก การทดสอบ Ljung-Box $Q(m)$ ค่ายกกำลังสองของ residuals (ε_t^2) โดยเราใช้ ε_t^2 เป็นตัวแทน conditional heteroskedasticity ดังนั้นหากค่าความแปรปรวนขึ้นอยู่ต่อกันจะต้องมีสหสัมพันธ์ระหว่างกัน

เราจะตั้งสมมุติฐานหลักที่ว่าค่าล่า m คาบของค่ายกกำลังสองของ residuals ไม่มีสหสัมพันธ์ระหว่างกัน แสดงว่า ค่ายกกำลังสองของ residuals ไม่มี ARCH effect

Notes

การทดสอบ ARCH effect

วิธีสอง การทดสอบ Lagrange Multiplier (LM) โดยเราใช้ ε_t^2 เป็นตัวแทนของค่าความแปรปรวน ซึ่งหากเราต้องการทดสอบว่าค่าแปรปรวนขึ้นกับค่าแปรปรวนในอดีตหรือไม่ สามารถประมาณค่าสมการ

$$\varepsilon_t^2 = a_0 + a_1\varepsilon_{t-1}^2 + \ldots + a_m\varepsilon_{t-m}^2 + e_t \qquad (4.1)$$

และพิจารณาว่าค่าสัมประสิทธิ์มีนัยสำคัญเชิงสถิติต่างจากศูนย์หรือไม่ โดยสมมุติฐานหลักคือ $a_1 = a_2 = \ldots = a_m = 0$ หรือไม่มี ARCH effect

เราสามารถทำการทดสอบได้โดยการประมาณค่าสมการ (4.1) จะได้ค่า R^2 แล้วไปคำนวณค่า $LM = TR^2$ โดยที่ T คือจำนวนตัวอย่าง และ $LM \sim \chi^2_{df=m}$ เราจะปฏิเสธสมมุติฐานหลักถ้า $LM > \chi^2_{df=m}(1-\alpha)$

Notes

ตัวอย่าง 4.1

ในหัวข้อนี้เราจะพิจารณาผลได้ตอบแทนรายเดือนในรูปล็อกของการลงทุนใน SET ซึ่งอยู่ในไฟล์ `mset.csv`

```
> mset <-read.csv("mset.csv",header=F)
> head(mset)
> lret_mset<-diff(log(mset$V1))
> library(forecast)
> auto.arima(lret_mset)
Series: lret_mset
ARIMA(2,0,2) with zero mean

Coefficients:
         ar1      ar2      ma1     ma2
      1.1154  -0.9020  -1.0542  0.9141
s.e.  0.0511   0.0754   0.0646  0.0740

sigma^2 estimated as 0.006689:  log likelihood=489.01
AIC=-968.03   AICc=-967.89   BIC=-947.47
> model1<-arima(lret_mset, order=c(2,0,2))
```


Notes

ตัวอย่าง 4.1

แต่หากเราพิจารณา Ljung-Box test ของค่ากำลังของ residuals กำลังสอง หรือทดสอบ LM ARCH effect จะเห็นได้ว่ายังมีผลของ ARCH เหลืออยู่ใน residuals โดยในการทดสอบ LM ARCH effect จะต้องใช้คำสั่ง `ArchTest(series, q)` จาก `library(FinTS)` โดยต้องระบุ series ที่ต้องการทดสอบและค่าล่า (q)

```
> acf(model1$residuals^2)
> Box.test(model1$residuals^2,lag=12, type="Ljung")

^^IBox-Ljung test

data:  model1$residuals^2
X-squared = 64.5086, df = 12, p-value = 3.36e-09
> library(FinTS)
> ArchTest(model1$residuals)

^^IARCH LM-test; Null hypothesis: no ARCH effects

data:  model1$residuals
Chi-squared = 32.4235, df = 12, p-value = 0.00119
```


Notes

แบบจำลอง ARCH

แบบจำลองอนุกรมเวลาที่เราสร้างขึ้นมาในบทที่ผ่านมา เราพยายามที่จะอธิบาย conditional mean

ตัวอย่างเช่น กำหนดให้ y_t อนุกรมเวลานิ่ง เช่น ผลได้ตอบแทน แล้วกำหนดให้ y_t สามารถอธิบายได้ด้วยแบบจำลอง

$$y_t = \mu_t + \varepsilon_t \qquad (4.2)$$

โดยที่ μ_t เป็นส่วนอธิบายค่าเฉลี่ย (mean equation) และ ε_t เป็น iid ที่มีค่าเฉลี่ยเท่ากับศูนย์

เราจะสมมุติให้ความแปรปรวนที่ขึ้นอยู่กับข้อมูล ณ คาบที่ $t-1$ $Var_{t-1} = \sigma_t^2$ เขียนเป็นสมการต่อไปนี้

$$\sigma_t^2 = \omega + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2 + ... + \alpha_p \varepsilon_{t-p}^2 \qquad (4.3)$$

Notes

แบบจำลอง ARCH

เนื่องจาก ε_t มีค่าเฉลี่ยเท่ากับศูนย์ $Var_{t-1}(\varepsilon_t) = E_{t-1}(\varepsilon_t^2) = \sigma_t^2$ ดังนั้นเรา สามารถเขียนสมการ (4.3) ได้เป็น

$$\varepsilon_t^2 = \omega + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2 + ... + \alpha_p \varepsilon_{t-p}^2 + u_t \qquad (4.4)$$

โดยที่ $u_t = \varepsilon_t^2 - E_{t-1}(\varepsilon_t^2)$ ซึ่งเป็นกระบวนการไวท์นอซที่มีค่าเฉลี่ยเท่ากับศูนย์ สมการ (4.2)-(4.4) รวมกันเรียกว่า autoregressive conditional heteroskedasticity (ARCH) หรือ แบบจำลอง $ARCH(p)$

รูปแบบของ $ARCH(p)$ อีกแบบจำลองสามารถแสดงได้ดังนี้

$$y_t = \mu_t + \varepsilon_t$$
$$\varepsilon_t = z_t \sigma_t$$
$$\sigma_t^2 = \omega + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2 + ... + \alpha_p \varepsilon_{t-p}^2 \qquad (4.5)$$

โดยที่ z_t เป็นตัวแปรสุ่ม iid (0,1) ตัวอย่างเช่น N(0,1)

Notes

คุณสมบัติของ ARCH(1)

สมมุติว่าเราพิจารณาแบบจำลอง $ARCH(1)$ โดยที่

$$y_t = \varepsilon_t \qquad (4.6)$$
$$\varepsilon_t = z_t \sigma_t \qquad (4.7)$$
$$\sigma_t^2 = \omega + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2 \qquad (4.8)$$

Notes

คุณสมบัติของ ARCH(1)

unconditional mean ของ ε_t คำนวณได้ดังนี้

$E(\varepsilon_t) =$

unconditional variance ของ ε_t คำนวณได้โดย

$Var(\varepsilon_t) =$

Notes

คุณสมบัติของ ARCH(1)

หากต้องการให้ ε_t เป็นกระบวนการนิ่ง $Var(\varepsilon_t) = E(\varepsilon_t^2) = E(\varepsilon_{t-1}^2)$ ดังนั้น $Var(\varepsilon_t) = \frac{\omega}{1-\alpha_1}$ และเงื่อนไขที่จะทำให้ค่าความแปรปรวนเป็นบวกคือ $0 \leq \alpha_1 < 1$

โมเมนต์ที่สี่เท่ากับ $E(\varepsilon^4) = 3\frac{\omega(1+\alpha_1)}{(1-\alpha_1)(1-3\alpha_1^2)}$

ดังนั้นเงื่อนไขที่ทำให้โมเมนต์ที่สี่มีค่าจำกัดคือ $0 \leq \alpha_1 < 1/3$ และค่าความโด่งเท่ากับ

$$\kappa = \frac{E(\varepsilon_t^4)}{[Var(\varepsilon_t)]^2} = 3\frac{\omega(1+\alpha_1)}{(1-\alpha_1)(1-3\alpha_1^2)} \times \frac{(1-\alpha_1)^2}{\omega^2} = 3\frac{1-\alpha_1^2}{1-3\alpha_1^2}$$

Notes

การประมาณค่าแบบจำลอง $ARCH(1)$

การประมาณค่าพารามิเตอร์ในแบบจำลอง $ARCH(1)$ สามารถดำเนินการได้ด้วย conditional maximum likelihood หากสมมุติให้ z_t มีการแจกแจงแบบปกติมาตรฐาน จากสมการ (4.7) เราจะได้ $\varepsilon_t \sim N(0, \sigma_t^2)$ และ

$$\ln L(\omega, \alpha_1; \boldsymbol{y}) = -\frac{1}{2}\sum_{t=1}^{T}\ln(2\pi) - \frac{1}{2}\sum_{t=1}^{T}\ln(\sigma_t^2) - \sum_{t=1}^{T}\left(\frac{y_t^2}{2\sigma_t^2}\right)$$

โดยที่ค่า ε_0 และ σ_0^2 เท่ากับค่าเฉลี่ย อย่างไรก็ตามเราสามารถกำหนดการแจกแจงรูปแบบอื่นที่มีค่าเฉลี่ยเท่ากับศูนย์และค่าความแปรปรวนเท่ากับหนึ่ง เช่น standardized student's t distribution

Notes

แบบจำลอง GARCH

ถ้าเราทดสอบ ARCH effect แล้วพบว่าอนุกรมเวลามีผลของ ARCH เราสามารถใช้แบบจำลอง $ARCH(p)$ เพื่อประมาณค่าความผันผวนที่เปลี่ยนแปลงตามเวลา

อย่างไรก็ตามในทางปฏิบัติ ค่าล่า p ที่เหมาะสมสำหรับแบบจำลอง $ARCH(p)$ ค่อนข้างที่จะยาว

Bollerslev (1986) ได้เสนอรูปแบบของสมการความแปรปรวน

$$\sigma_t^2 = \omega + \sum_{i=1}^{p}\alpha_i\varepsilon_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^{q}\beta_j\sigma_{t-j}^2 \qquad (4.12)$$

โดยที่มีเงื่อนไข α_i $(i = 1, ..., p)$ และ β_j $(j = 1, ..., q)$ มีค่าเป็นบวก สมการที่ (4.2) และ (4.12) รวมกันเรียกว่าแบบจำลอง Generalized ARCH หรือ $GARCH(p, q)$

Notes

ARMA representation of GARCH

แบบจำลอง *GARCH* สามารถเขียนให้อยู่ในรูปของแบบจำลอง *ARMA* ของค่า residuals ยกกำลังสอง ตัวอย่างเช่นในแบบจำลอง *GARCH*(1, 1)

$$\sigma_t^2 = \omega + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2 + \beta_1 \sigma_{t-1}^2 \qquad (4.13)$$

- *GARCH*(1, 1) จะเป็นอนุกรมนิ่งถ้า $\alpha_1 + \beta_1 < 1$

Notes

ARMA representation of GARCH

- หากเราสมมุติให้แบบจำลองเป็นอนุกรมนิ่ง unconditional variance)ของ ε_t จะเท่ากับ

Notes

ARMA representation of GARCH

ในกรณี $GARCH(p, q)$

- เราสามารถเขียนแบบจำลองดังกล่าวให้อยู่ในรูป $ARMA(\max(p, q), q)$ ของ residuals ยกกำลังสอง
- แบบจำลองจะเป็นอนุกรมนิ่งถ้า $\sum_{i=1}^{p} \alpha_i + \sum_{j=1}^{q} \beta_j < 1$
- ความแปรปรวนที่ไม่มีเงื่อนไข (unconditional variance)ของ ε_t จะเท่ากับ

$$Var(\varepsilon_t) = \frac{\omega}{1 - \left(\sum_{i=1}^{p} \alpha_i + \sum_{j=1}^{q} \beta_j\right)}$$

Notes

คุณลักษณะเฉพาะของแบบจำลอง GARCH

ในงานเชิงประจักษ์นักวิจัยได้พบคุณลักษณะหลายประการของความผันผวนของข้อมูลทางการเงิน

1. volatility clustering ในแบบจำลอง $GARCH(1, 1)$ ค่าที่ประมาณได้จากข้อมูลรายสัปดาห์และรายวันของ β_1 จะมีค่าประมาณ 0.9
2. หางอ้วน(fat tails) Bollerslev แสดงให้เห็นว่าภายใต้เงื่อนไขบางประการเขาสามารถแสดงให้เห็นว่า $GARCH(1, 1)$ จะให้ค่าเคอร์โทซิสที่มากกว่า 3
3. ความผันผวนย้อนกลับมาที่ดุลยภาพ(volatility mean reversion) แม้ว่าความผันผวนจะสูงขึ้นในบางช่วงแต่สุดท้ายแล้วจะย้อนกลับไปยังดุลยภาพระยะยาว

Notes

การประมาณค่าแบบจำลอง GARCH

แบบจำลอง $GARCH(p,q)$ สามารถเขียนในรูปแบบ

$$y_t = \mu_t + \varepsilon_t \qquad (4.15)$$

$$\sigma_t^2 = \omega + \sum_{i=1}^{p} \alpha_i \varepsilon_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^{q} \beta_j \sigma_{t-j}^2 \qquad (4.16)$$

หากเราสมมุติให้ $\varepsilon_t \sim N$ เราสามารถเขียน log-likelihood function ของแบบจำลอง $GARCH(p,q)$ ได้

$$\log L = -\frac{1}{2}\sum_{t=1}^{T} \ln(2\pi) - \frac{1}{2}\sum_{t=1}^{T} \ln(\sigma_t^2) - \sum_{t=1}^{T}\left(\frac{y_t^2}{2\sigma_t^2}\right) \qquad (4.17)$$

โดยที่หลังจากที่เราประมาณค่าพารามิเตอร์ดังกล่าวแล้ว เราจะได้ค่า σ_t สำหรับ $t = 1, ..., T$

Notes

การตรวจสอบหลังจากการประมาณค่า GARCH

- ถ้าแบบจำลองที่เราสร้างขึ้นสามารถอธิบายความสัมพันธ์ระหว่างอนุกรมกับตัวเองในอดีตด้วย conditional mean และ conditional variance ดังนั้นจะต้องไม่เหลือค่าสหสัมพันธ์ในตัวเองของ standardized residuals และ squared standardized residuals (L-B test)
- เราสามารถทดสอบ LM ARCH ของ residuals เพื่อดู ARCH effect ก็ได้
- ในแบบจำลอง *GARCH* เราสมมุติให้ค่าคาดเคลื่อนมีการแจกแจงแบบปกติดังนั้นหากแบบจำลองถูกกำหนดอย่างถูกต้อง standardized residuals จะต้องมีการแจกแจกแบบปกติ โดยในที่นี้เราจะทำการทดสอบการแจกแจงปกติ

Notes

ตัวอย่างที่ 4.2

ต่อจากตัวอย่าง (4.1) เราจะประมาณค่าสมการค่าเฉลี่ยด้วย $ARMA(2,2)$ และสมการค่าความแปรปรวนที่มีเงื่อนไขด้วย $GARCH(1,1)$

เราจะใช้คำสั่ง `ugarchfit` ใน package `library(rugarch)`

```
> library(rugarch)
> spec.garch11 <- ugarchspec(variance.model=list(model="sGARCH", garchOrder=c(1,1)),
+ mean.model=list(armaOrder=c(2,2), include.mean=TRUE), distribution.model="norm")
> fit.garch11<-ugarchfit(spec=spec.garch11, data = ret)
```


Notes

ตัวอย่างที่ 4.2

```
> fit.garch11<-ugarchfit(spec=spec.garch11, data = ret)
> show(fit.garch11)
-----------------------------------
          Estimate  Std. Error  t value Pr(>|t|)
mu        0.005168    0.003323   1.5552 0.119893
ar1       0.929774    0.105519   8.8114 0.000000
ar2      -0.741403    0.131759  -5.6270 0.000000
ma1      -0.885132    0.079630 -11.1155 0.000000
ma2       0.813870    0.126564   6.4305 0.000000
omega     0.000194    0.000084   2.3165 0.020528
alpha1    0.221012    0.045507   4.8567 0.000001
beta1     0.777524    0.038916  19.9795 0.000000
```


Notes

ตัวอย่างที่ 4.2

ค่าสถิติที่เราสามารถตรวจสอบแบบจำลอง

```
Weighted Ljung-Box Test on Standardized Residuals
------------------------------------
                          statistic   p-value
Lag[1]                        3.351 6.717e-02
Lag[2*(p+q)+(p+q)-1][11]      9.220 1.777e-06
Lag[4*(p+q)+(p+q)-1][19]     13.350 8.841e-02
d.o.f=4
H0 : No serial correlation

Weighted Ljung-Box Test on Standardized Squared Residuals
------------------------------------
                         statistic p-value
Lag[1]                      0.0957  0.7571
Lag[2*(p+q)+(p+q)-1][5]     1.8392  0.6569
Lag[4*(p+q)+(p+q)-1][9]     3.0164  0.7563
d.o.f=2
```


Notes

การแจกแจงที่ไม่ใช่การแจกแจงแบบปกติ

ข้อมูลทางการเงินอาจจะมีลักษณะหางอ้วน (fat tail) ดังนั้น ข้อสมมุติว่า ε_t มีการแจกแจงอื่นที่มีหางอ้วนน่าจะเหมาะสมกว่า

การแจกแจงแบบ Student's t

ถ้า ε_t มีการแจกแจงแบบ t ที่มีองศาอิสระเท่ากับ ν และมีค่า $Var_{t-1}(\varepsilon_t) = \sigma_t^2$ แล้วพารามิเตอร์ s_t จะถูกเลือกเพื่อให้ $s_t = \frac{\sigma_t^2(\nu-2)}{\nu}$

เงื่อนไขเพิ่มเติมในคำสั่ง `ugarch` คือ `distribution.model="std"`

Generalized Error Distribution Nelson (1991) ได้เสนอให้ใช้การแจกแจง generalized error distribution (GED) โดยที่ nu เป็นค่าพารามิเตอร์ที่เป็นบวกที่บอกความหนาของหาง

เงื่อนไขเพิ่มเติมในคำสั่ง `ugarch` คือ `distribution.model="ged"`

Notes

การพยากรณ์ด้วยแบบจำลอง *GARCH*

เป้าหมายของการสร้างแบบจำลอง GARCH คือ conditional volatility

ค่าพยากรณ์ของอนุกรมเวลา y_t สามารถใช้การพยากรณ์ของ *ARMA* ได้อย่างปกติ แบบจำลอง *GARCH* จะทำให้เราได้ค่าผันผวนในอนาคตที่แม่นยำขึ้นโดยเฉพาะการพยากรณ์ในระยะสั้น ในที่นี้เราจะยกตัวอย่างแบบจำลอง $GARCH(1,1)$ ซึ่งสมการความผันผวนสามารถแสดงได้โดย

$$\sigma_t^2 = \omega + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2 + \beta_1 \sigma_{t-1}^2$$

พยากรณ์ ณ คาบที่ h และใช้ conditional expectation

Notes

ตัวอย่างที่ 4.4

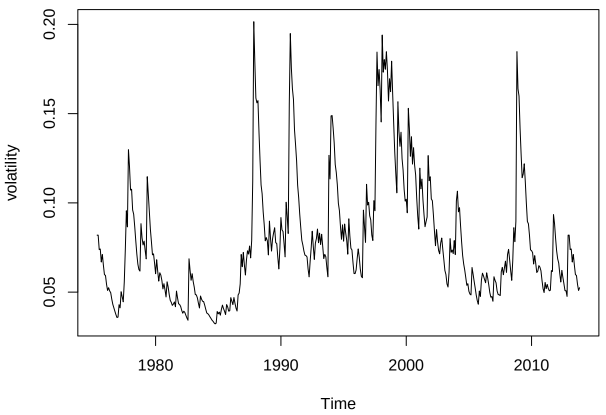
เราได้ประมาณค่าแบบจำลอง ARMA(2,2)-GARCH(1,1) ซึ่งเราสามารถคำนวณค่า predicted conditional standard deviation ได้จากคำสั่ง |sigma|

```
sig.garch11<-sigma(fit.garch11)
volatility<-ts(data=sig.garch11[,1], frequency=12, start=c(1975,5), end=c(2013,11))
plot.ts(volatility, type="l")
```


Notes

ตัวอย่างที่ 4.4

Figure: ACF ของ residuals



Notes

ตัวอย่างที่ 4.5

เราสามารถใช้คำสั่ง `ugarchforecast` และระบุแบบจำลอง |fit.garch11| และจำนวนคาบที่จะพยากรณ์ไปข้างหน้า `n.ahead=5` และได้ผลดังต่อไปนี้

```
> garch11.fcst=ugarchforecast(fit.garch11, n.ahead=5)
> garch11.fcst
0-roll forecast [T0=1971-03-28 07:00:00]:
         Series   Sigma
T+1   0.0008783 0.04438
T+2  -0.0026793 0.04648
T+3   0.0010525 0.04849
T+4   0.0071598 0.05041
T+5   0.0100715 0.05226
```


Notes