y_t ← สร้างแบบจำลองอธิบาย (ตัวเองในอดีต+shock)
ค่าของตัวแปรอื่น ($x_{1t}, \dots, x_{kt}$)

EC435

บทที่ 4 สมการถดถอยสำหรับข้อมูลอนุกรมเวลา

เฉลิมพงษ์ คงเจริญ ©2556-2563

คณะเศรษฐศาสตร์ มหาวิทยาลัยธรรมศาสตร์

October 7, 2020

บทนำ

วิธีการประมาณสมการถดถอยสำหรับข้อมูลอนุกรมเวลาถูกนำมาใช้แพร่หลายในการวิเคราะห์ข้อมูลทางการเงิน ↓ Y_t

- แบบจำลองราคาสินทรัพย์และผลได้ตอบแทนของสินทรัพย์เช่นแบบจำลองการประเมินราคาของหลักทรัพย์ (Capital Asset Pricing Model) หรือแคฟเอ็ม (CAPM)
- Y_t แบบจำลองการกำหนดราคาจากการทำกำไรที่ผิดปกติ (Arbitrage Price Model) หรือเอพีที่ (APT)
- ↓ Y_t ศึกษาความสัมพันธ์ระหว่างผลได้ตอบแทนของทรัพย์สินกับสัดส่วนทางการเงิน
- วิธีการถดถอยยังใช้ในการทดสอบทฤษฎีประสิทธิภาพของตลาด (Efficient Market)

Regression

$$y_t = \beta_0 + \beta_1 x_{1t} + \dots + \beta_k x_{kt} + \varepsilon_t$$

อนุกรมเวลา

บทนำ

ข้อสมมุติ

ละเมิด

→ OLS

อธิบาย β population parameter

ข้อมูลส่วนใหญ่ที่ใช้เป็นข้อมูลอนุกรมเวลา ซึ่งจะส่งผลต่อคุณสมบัติของการประมาณค่าถดถอยบางประการ อันส่งผลต่อการอธิบายผลและทดสอบผล

$\hat{\beta}$, $Var(\hat{\beta})$, $t(\hat{\beta})$

ราคาของสินทรัพย์มักจะมีลักษณะที่ไม่นิ่ง การศึกษาด้วยสมการถดถอยกับตัวแปรดังกล่าวอาจจะไม่เหมาะสม ซึ่งจะเป็นประเด็นที่เราพิจารณาในบทที่ 7

ในขณะที่บทนี้เราจะพิจารณากรณีที่ตัวแปรเป็นตัวแปรนิ่ง (stationary)

ข้อสมมุติที่สำคัญ ของ Regression กับ ข้อมูล time series คือ

$Y_t, X_{1t}, \ldots, X_{kt}$ เป็น stationary → เก็บไว้พูดถึงใน บทที่ 7

แบบจำลองถดถอยข้อมูลอนุกรมเวลา

พิจารณาแบบจำลองถอถอยข้อมูลอนุกรมเวลาซึ่งอธิบายด้วยสมการต่อไปนี้

Reg. population parameter สนใจ → ประมาณค่า β ด้วย OLS

$$y_t = \beta_0 + \beta_1 x_{1t} + \dots + \beta_k x_{kt} + \varepsilon_t = \boldsymbol{x}_t' \boldsymbol{\beta} + \varepsilon_t, \qquad t = 1, \dots, T \qquad (4.1)$$

โดยที่ $x_{1t}, \dots, x_{kt}$ คือตัวแปรอธิบาย และ ε_t เป็น error term และสามารถเขียนในรูปเมตริกซ์ได้

$$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{X\beta} + \boldsymbol{\varepsilon} \qquad (4.2)$$

ตัวแปรอธิบาย $X_{1t}, \dots, X_{kt}$ เป็นตัวแปรในช่วงเวลาเดียวกัน

[static model] ความสัมพันธ์ใน period

$(X_{1t} \longrightarrow Y_t)$

$\Downarrow$

β_1

แบบจำลองถดถอยข้อมูลอนุกรมเวลา

ข้อสมมุติมาตรฐานสำหรับแบบจำลองถดถอยเชิงเส้นในกรณีข้อมูลอนุกรมเวลาคือ

- แบบจำลองในสมการ (4.1) เป็นแบบจำลองที่ระบุถูกต้อง correct specification (มีตัวแปรครบ ถูกรูปแบบ)
- $y_t, \boldsymbol{x}_t$ เป็นอนุกรมนิ่ง (stationary) และ ergodic
- ตัวแปรต้น $\boldsymbol{x}_t$ ถูกกำหนดไว้ก่อน (predetermined): $E(x_{is}\varepsilon_t) = 0$ สำหรับทุกค่าที่ $s \leq t$
- $E(\boldsymbol{x}_t\boldsymbol{x}_t')$ เป็น full rank → หาตัวประมาณ ของ $\hat{\beta}$
- $\boldsymbol{x}_t\varepsilon_t$ เป็นกระบวนการที่ไม่มีสหสัมพันธ์กันในระยะจำกัด ε_t & ε_{t-1}

ภายใต้ข้อสมมุติข้างต้นตัวประมาณค่า OLS $\hat{\beta}$ จะ consistent $\hat{\beta} \xrightarrow{p} \beta \ (T \to \infty)$ และ asymptotically normally distributed และตัวประมาณค่าของค่าความแปรปรวน

$\hat{\beta} \sim N$ เมื่อ $T \to \infty$

หมายถึง ข้อสมมุติ homoskedasticity & ไม่มี autocorrelation

$$\widehat{Avar(\hat{\beta})} = \hat{\sigma}^2(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-1} \Rightarrow se(\hat{\beta})$$

↓ var-cov$(\hat{\beta})$

⇓

คำนวณ $se(\hat{\beta})$ ซึ่งแสดงว่า ข้อสมมุติถูกต้อง (จริง)

การวิเคราะห์เรซิดิว

$Var(\varepsilon_t)$ คงที่

ข้อสมมุติสองประการสำคัญ คือ (1) ตัวรบกวนมีค่าความแปรปรวนคงที่หรือไม่มีเฮเทอโรสกีดาสติสิตี (heteroskedasticity) และ (2) ตัวรบกวนไม่มีสหสัมพันธ์ระหว่างกันหรือออโตครีเรชัน (autocorrelation)

ε_t , ε_{t-1} เป็นอิสระ

$\hat{\beta}$? ตัวเป็น unbiased , consistent

แต่ $var(\hat{\beta})$ จาก OLS ไม่ได้เป็น min variance

และเราใช้ $se(\hat{\beta})$ จาก สูตร OLS ปกติ ไม่เหมาะสม

$var(\hat{\beta}_{กรณี}) \neq \sigma^2(XX')^{-1}$

ข้อสมมุติไม่เป็นจริง

$var(\hat{\beta})$ ข้อสมมุติ OLS เป็นจริง

$\downarrow$

$t(\hat{\beta}_{OLS})$ ไม่เหมาะสม

(F test)

การวิเคราะห์เรซิดิว

ข้อสมมุติสองประการสำคัญ คือ (1) ตัวรบกวนมีค่าความแปรปรวนคงที่หรือไม่มีเฮเทอโรสกีดาสติสิตี (heteroskedasticity) และ (2) ตัวรบกวนไม่มีสหสัมพันธ์ระหว่างกันหรือออโตครีเรชัน (autocorrelation)

หากข้อมูลที่เราศึกษาไม่เป็นไปตามข้อสมมุติ ค่าความแปรปรวนของพารามิเตอร์ที่เราประมาณค่าด้วยโอแอลเอส ซึ่งจะไม่ถูกต้องและส่งผลต่อการทดสอบสมมุติฐานด้วยตัวสถิติทีและเอฟ

การวิเคราะห์เรซิดิว

ข้อสมมุติสองประการสำคัญ คือ (1) ตัวรบกวนมีค่าความแปรปรวนคงที่หรือไม่มีเฮเทอโรสกีดาสติสิตี (heteroskedasticity) และ (2) ตัวรบกวนไม่มีสหสัมพันธ์ระหว่างกันหรือออโตครีเรชัน (autocorrelation)

หากข้อมูลที่เราศึกษาไม่เป็นไปตามข้อสมมุติ ค่าความแปรปรวนของพารามิเตอร์ที่เราประมาณค่าด้วยโอแอลเอส ซึ่งจะไม่ถูกต้องและส่งผลต่อการทดสอบสมมุติฐานด้วยตัวสถิติทีและเอฟ

หาตัวประมาณค่าใหม่ (จะใช้ข้อสมมุติที่ยกเว้น 2 ข้อ)

วิธีการแก้ไขปัญหาหนึ่งคือ (1) การประมาณค่าด้วยวิธีการกำลังสองน้อยที่สุดทั่วไป (Generalized Least Squared) (2) วิธีการประมาณค่าด้วยโอแอลเอสปกติ แล้วปรับสแตนดาร์ดแอรเรอให้เหมาะสม

Robust SE

GLS เราต้องทราบรูปแบบของ hetero และ autocorr

เช่น hetero

$$\boxed{Var(\varepsilon_t) = \sigma^2 \cdot X_{1t}}$$

ไม่ปรับสมการทำให้ error ใหม่มี var คงที่.

→ ตัวประมาณค่าใหม่

→ Weighted LS / Generalized LS

autocorr

$$\boxed{\varepsilon_t = \rho\, \varepsilon_{t-1} + v_t}$$

→ ใส่สมการ

→ GLS

เนื่องจาก Robust SE ใช้เฉพาะที่แย่กว่าใน กรณีที่ ข้อสมมุติ เป็นจริง => ทดสอบ ว่าเป็นปัญหา

การทดสอบเฮเทอโรสกีดาติสิตี

ค่าความแปรปรวนของตัวรบกวนจะไม่คงที่ หรือข้อสมมุติ

สมมุติฐานหลัก: ไม่มี Heretoskedasticity

$$H_0 : Var(\varepsilon|x_1, ..., x_k) = \sigma^2$$

คงที่

ไม่เป็นจริง

สมมุติให้ $E(\varepsilon_t) = 0$

$Var(\varepsilon_t) = E(\varepsilon_t - 0)^2 = E(\varepsilon_t^2)$

อาจจะแตกต่าง ตาม t

การทดสอบเฮเทอโรสกีดาติสิตี

ค่าความแปรปรวนของตัวรบกวนจะไม่คงที่ หรือข้อสมมุติ

$$H_0 : Var(\varepsilon | x_1, ..., x_k) = \sigma^2$$

ไม่เป็นจริง

ข้อสมมุติค่าความแปรปรวนของตัวรบกวนคงที่สามารถเขียนเป็นเงื่อนไข

$$H_0 : E(\varepsilon_t^2 | x_1, ..., x_k) = \sigma^2$$ คงที่.

$\Rightarrow \underline{E(\varepsilon_t^2)}$ เป็นตัวแทน ของ $Var(\varepsilon_t)$

ถ้า $Var(\varepsilon_t)$ ไม่คงที่ $\Rightarrow$ อาจจะ สัมพันธ์กับ ตัวแปรอธิบาย $(x_1, \dots, x_k)$

การทดสอบเฮเทอโรสกีดาติสิตี

ค่าความแปรปรวนของตัวรบกวนจะไม่คงที่ หรือข้อสมมุติ

$$H_0 : Var(\varepsilon | x_1, ..., x_k) = \sigma^2$$

ไม่เป็นจริง

ข้อสมมุติค่าความแปรปรวนของตัวรบกวนคงที่สามารถเขียนเป็นเงื่อนไข

$$H_0 : E(\varepsilon^2 | x_1, ..., x_k) = \sigma^2$$

ทดสอบข้อสมมุติค่าความแปรปรวนของตัวรบกวนว่าคงที่หรือไม่โดยการพิจารณาความสัมพันธ์ระหว่างตัวรบกวนยกกำลังสองกับตัวแปรอธิบาย ซึ่งสามารถเขียนเป็นสมการได้ดังนี้

ใช้ Residual จาก (4.1)

ทดสอบ 1) ประมาณค่า

$$\hat{\varepsilon}_t^2 = \delta_0 + \delta_1 x_{1t} + ... + \delta_k x_{kt} + v_t \quad (4.5)$$

$E(v_t)=0$, $var(v_t)$ คงที่

Breauch-Pagan test

$$Var(\varepsilon_t) = E(\varepsilon_t^2) = \delta_0 + \delta_1 X_{1t} + ... + \delta_k X_{kt} + \cancel{E(v_t)} \rightarrow 0$$

2) ทดสอบ $H_0: \delta_1 = \delta_2 = \cdots = \delta_k = 0 \Rightarrow Var(\varepsilon_t) = \delta_0$

(overall sig) - F test > C.V.

การทดสอบออโตคอรีเรชัน

ε_t & ε_{t-j} สัมพันธ์ (ส่วนใหญ่ ε_t กับ ε_{t-1})

ตัวรบกวนในช่วงเวลาที่ใกล้เคียงกันอาจจะมีความสัมพันธ์ระหว่างกันได้ โดยที่ความสัมพันธ์ที่เรามักจะพบคือช่วงเวลาที่ติดกันหรืออยู่ในรูปแบบออโตรีเกรซซีฟที่อันดับหนึ่ง (AR(1)) ดังแสดงในสมการต่อไปนี้

Auto Regressive (AR(1)) อ่าน ε_t "rho"

$$\underline{\underline{\varepsilon_t}} = \underline{\underline{\rho}}\varepsilon_{t-1} + u_t \qquad (4.6)$$

โดยที่ $|\rho| < 1$ (ε_t เป็น stationary)

ทดสอบ Autocorrelation

ใช้สมการ 4.6 Reg สมการ (4.6) แล้วทดสอบ

$H_0: \rho = 0$ [ไม่มี autocor]

$H_1: \rho \neq 0$ [มี autocor]

t-test

ในทางปฏิบัติ เราจะใช้ $\hat{\varepsilon}_t$ (ในสมการ 4.6)

Breusch-Godfrey test สมการ (4.6) ขยายได้โดย 1) เพิ่ม $X_{1t}, \dots, X_{kt}$ 2) $\varepsilon_{t-2}, \dots, \varepsilon_{t-p}$

F-test

LM test

ตัวอย่าง 4.1 การประมาณค่าและทดสอบ Capital Asse~~s~~t Pricing Model (CAPM)

แบบจำลองแคพเอ็ม ซึ่งถูกนำเสนอโดย Sharp, Litner และ Mosen เป็นแบบจำลองซึ่งใช้อธิบายผลตอบแทนส่วนเกิน (Excess return) ของหลักทรัพย์ด้วยผลตอบแทนส่วนเกินของตลาดซึ่งสามารถเขียนเป็นสมการ

risk free

$$\underbrace{r_{it} - r_{ft}}_{\text{excess return}} = \alpha_i + \beta_i \underbrace{(r_{mt} - r_{ft})}_{\text{excess return ของ ตลาด.}} + \varepsilon_{it}, \qquad i = 1, ..., N; t = 1, ..., T \qquad (4.9)$$

โดยที่ r_{it} คืออัตราผลตอบแทนของสินทรัพย์ $i(i = 1, ..., N)$ ระหว่างเวลาที่ $t-1$ ถึง t , r_{mt} คืออัตราผลตอบแทนของตลาดระหว่างเวลาที่ $t-1$ ถึง t และ r_{ft} คืออัตราผลตอบแทนของสินทรัพย์ที่ไม่มีความเสี่ยงระหว่างเวลาที่ $t-1$ ถึง t สมมติให้ ε_t มีการแจกแจงแบบปกติ $N(0, \sigma_i^2$

สมการแสดงว่า*ค่าชดเชยความเสี่ยง (risk premium)* ของหลักทรัพย์ i จะเท่ากับ β_i นอกจากนี้แคพเอ็มยังอนุมานต่อไปว่า $\alpha_i = 0$

ตัวอย่าง 4.1 การประมาณค่าและทดสอบ Capital Assest Pricing Model

ผลตอบแทนส่วนเกินรายเดือนระหว่างเดือนกุมภาพันธ์ 2002 ถึงเมษายน 2020 ตัวแปร *ppt* และ *set* เป็นอัตราผลตอบแทนส่วนเกินของหุ้นพีพีทีและตลาด และจัดเก็บในไฟล์ capm

จะใช้โปรแกรม R – การประมาณค่าด้วย OLS ใช้คำสั่ง lm (linear model)

ข้อมูลชื่อ "data"   ptt | set   data$ptt , data$set

dep   explanatory var   ชื่อของ data frame

$$\underbrace{r_{ptt} - r_f}_{ptt} = \alpha + \beta\underbrace{(r_{set} - r_f)}_{set} + u$$

อัตราดอกเบี้ยพันธบัตร

```
> capm_ptt<-lm(ptt~set, data=data)
> summary(capm_ptt)

Call:
lm(formula = ptt ~ set, data = data)

Residuals:
    Min      1Q  Median      3Q     Max
-8.763 -1.405 -0.286  1.120 14.405

Coefficients:
            Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
(Intercept)  -0.8319     0.1777   -4.68  5.1e-06 ***
set           0.5472     0.0292   18.72  < 2e-16 ***
---
Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 ''. 0.1 ''  1

Residual standard error: 2.54 on 213 degrees of freedom
Multiple R-squared:  0.622,^^IAdjusted R-squared:  0.62
F-statistic:  351 on 1 and 213 DF,  p-value: <2e-16
```

Y   X   dataframe   SE   t stat   p-value $\hat{\alpha} =$ $\hat{\beta} =$

$\hat{\beta}$ ของ ptt = 0.55 < 1

เมื่อ ptt, set เป็น time series → ทดสอบ Autocorr + Hetero

ตัวอย่าง 4.1 การประมาณค่าและทดสอบ Capital Assest Pricing Model

ใช้คำสั่ง bptest สำหรับการทดสอบเฮเทอโรสกีดาสติสิตีและ bgtest สำหรับการทดสอบออโตคอรีเรชันในชุดคำสั่ง lmtest (package)

Breusch-Godfrey (ระบุรูปแบบ AR(p) ใน ε_t)

library(lmtest)

reg → ใช้ residuals [capm_ptt$residuals]

```
> bptest(capm_ptt)

^^Istudentized Breusch-Pagan test

data:  capm_ptt
BP = 3.9157, df = 1, p-value = 0.04784

> bgtest(capm_ptt, order=1)

^^IBreusch-Godfrey test for serial correlation of order up to 1

data:  capm_ptt
LM test = 2.5031, df = 1, p-value = 0.1136
```

LM stat $\sim \chi^2$

AR(1)

$< \alpha (= 0.05)$ ปฏิเสธ Ho: ไม่มี hetero แสดงว่า สมการ Capm เผชิญกับ hetero

$> \alpha (= 0.05)$ ไม่สามารถปฏิเสธ

$\sim \chi^2$ df= order ของ AR

Ho: ไม่มี autocorrelation

$\alpha = 0.15$ p-value (.11) $< \alpha$ ⇒ สามารถปฏิเสธ Ho: ไม่มี autocorr

ด้วยนัยสำคัญ 15% เราพบว่ามีปัญหา autocorrelation

→ se ที่รายงานใน capm-ptt ไม่เหมาะสม ⇒ ปรับ se.

ตัวอย่าง 4.1 การประมาณค่าและทดสอบ Capital Assest Pricing Model

vector ของ residuals

การประมาณค่าสมการ AR(1) ของ residuals

$\hat{\varepsilon}_t$ (eps) ← capm-ptt$residuals สร้าง vector

$$\boxed{\hat{\varepsilon}_t = \rho\hat{\varepsilon}_{t-1} + v_t}$$

lag (เป็น vector)

eps[2:N] , eps[1:N-1]

อาจจะใช้ คำสั่ง dynlm

จาก package "dynlm"

→ สร้าง lag ของ ts ได้ง่าย

มี เดือน monthly

```
> library(dynlm)
> eps<-ts(eps, start=c(2002,3), frequency = 12)
> dynlm(eps~L(eps)-1)

Time series regression with "ts" data:
Start = 2002(4), End = 2020(1)

Call:
dynlm(formula = eps ~ L(eps) - 1)

Coefficients:
L(eps)
0.1076
```

$\hat{\varepsilon}_t$ $\hat{\varepsilon}_{t-1}$ → ไม่ใส่ค่าคงที่ (ถูกตัด)

0.1076 $= \hat{\rho}$

L(__) ↑ ts

plot(eps, type="l")

2002/3 . . .

→ summary(__)

สมการถดถอยแบบพลวัต

(dynamic regression)

$y_t = \beta_0 + \beta_1 X_t + \beta_2 X_{t-1} + \beta_3 X_{t-2} + u_t$

$y_t = \beta_0 + \phi_1 y_{t-1} + \dots + \beta_1 X_t + \beta_2 X_{t-1} + \dots$

แบบจำลอง Autoregressive Distributed Lag (ARDL) ซึ่งแสดงได้ดังสมการ

ARDL$(p, q_1, \dots, q_k)$

$$y_t = \alpha + \sum_{j=1}^{p} \phi_j y_{t-j} + \sum_{j=1}^{q1} \beta_{1j} x_{1t-j} + \dots + \sum_{j=1}^{q_k} \beta_{kj} x_{kt-j} + \epsilon_t \qquad (4.10)$$

y_t, x_t

พิจารณาแบบจำลองสองตัวแปรซึ่งมีค่าล่าย้อนไปแค่ช่วงเวลาเดียว

ARDL(1,1)

$$y_t = \alpha + \phi y_{t-1} + \beta_0 x_t + \beta_1 x_{t-1} + \epsilon_t \qquad (4.11)$$

w_t = composite error

$p = 1$, $q_1 = 1$

โดยที่ x_t เป็นตัวแปรนิ่ง และ $\epsilon_t \approx WN(0, \sigma^2)$ ซึ่งเราเรียกสมการดังกล่าวว่า ARDL(1,1)

เราสามารถเขียนแบบจำลอง ARDL(1,1) ในรูปของ AR(1)

AR(1)

$$y_t = \alpha + \phi y_{t-1} + w_t$$

$|\phi| < 1$ เป็น stationary

MA(∞)

$(1-\phi L) y_t = \alpha + w_t$

$y_t = \frac{\alpha}{1-\phi L} + \frac{w_t}{1-\phi L}$

μ

สมการถดถอยแบบพลวัต

$y_t = \mu + (1+\phi L + (\phi L)^2 + (\phi L)^3 + \dots) w_t$

$= \mu + w_t + \phi w_{t-1} + \phi^2 w_{t-2} + \dots$

$\beta_0 x_t + \beta_1 x_{t-1} + \varepsilon_t \qquad \beta_0 x_{t-1} + \beta_1 x_{t-2} + \varepsilon_{t-1} \qquad \beta_0 x_{t-2} + \beta_1 x_{t-3} + \varepsilon_{t-2}$

$$y_t = \mu + \beta_0 x_t + (\beta_1 + \phi\beta_0)x_{t-1} + \phi(\beta_1 + \phi\beta_0)x_{t-2} + \dots \quad (4.13)$$

ผลของ x_t ต่อ y_t ในช่วงเวลาเดียวกันเราเรียกว่า*ตัวทวีคูณผลกระทบทันที (immediate impact multiplier* และคำนวณได้ด้วย

$$\boxed{\frac{\partial y_t}{\partial x_t} = \beta_0}$$

X_t ประมาณ

ในขณะที่ตัวทวีคูณล่า (lag multiplier) หนึ่งช่วงเวลา คำนวณได้จาก

$X_{t-1} \rightarrow Y_t$?

$$\boxed{\frac{\partial y_t}{\partial x_{t-1}} = \beta_1 + \phi\beta_0}$$

$X_{t-2} \rightarrow Y_t$

$$\frac{\partial Y_t}{\partial X_{t-2}} = \phi(\beta_1 + \phi\beta_0)$$

สมการถดถอยแบบพลวัต

ตัวทวีคูณล่า k ช่วงเวลา คำนวณได้จาก

$$\frac{\partial y_t}{\partial x_{t-k}} = \phi^{k-1}(\beta_1 + \phi\beta_0)$$

เมื่อเรารวมตัวทวีคูณล่าในหลายช่วงเวลาเราจะเรียกว่าเป็นตัวทวีคูณระยะปานกลาง (intermediate multiplier) และถ้าหากเรารวมตัวทวีคูณค่าล่าทุกช่วงเวลาเข้าด้วยกันจะได้*ผลกระทบระยะยาว* (long-run effect) ซึ่งคำนวณได้ดังนี้

$(\beta_1+\phi\beta_0)$ $\phi(\beta_1+\phi\beta_0)$ $\phi^2(\beta_1+\phi\beta_0)$

$$\texttt{long run effect} = \frac{\partial y_t}{\partial x_{t-1}} + \frac{\partial y_t}{\partial x_{t-2}} + \frac{\partial y_t}{\partial x_{t-3}} + \ldots$$

$(1+\phi+\phi^2+\ldots)(\beta_1+\phi\beta_0)$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \phi^k(\beta_1 + \phi\beta_0) = \frac{\beta_1 + \phi\beta_0}{1-\phi}$$

ARDL → ทันที
→ ของแต่ละ: period
→ long-run effect

ตัวอย่างที่ 4.2: การประยุกต์สมการถดถอยแบบพลวัตกับแคพเอ็ม

ต่อจาก 4.1 ใช้ package (dynlm)

$$\underbrace{(r_{ptt,t} - r_{f,t})}_{Y_t} = \alpha + \beta_0 \cdot \underbrace{(r_{SET,t} - r_{f,t})}_{X_t} \leftarrow \text{static}$$

$$+ \phi Y_{t-1} + \beta_1 X_{t-1}$$

```
> library(dynlm)
> head(data)
> ptt<-ts(data$ptt, start=c(2002,2), frequency = 12)
> set<-ts(data$set, start=c(2002,2), frequency = 12)
> m2<-dynlm(ptt~L(ptt)+set+L(set))
> summary(m2)

Time series regression with "ts" data:
Start = 2002(3), End = 2019(12)

Call:
dynlm(formula = ptt ~ L(ptt) + set + L(set))

Residuals:
    Min      1Q  Median      3Q     Max
-8.873 -1.439 -0.244  1.141 13.829

Coefficients:
             Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
(Intercept)  -0.6632     0.1891   -3.51  0.00056 ***
L(ptt)        0.1074     0.0681    1.58  0.11614
set           0.5457     0.0299   18.28  < 2e-16 ***
L(set)       -0.0150     0.0480   -0.31  0.75569
---
Signif. codes:  0 ‘***’ 0.001 ‘**’ 0.01 ‘*’ 0.05 ‘’. 0.1 ‘’  1

Residual standard error: 2.51 on 210 degrees of freedom
Multiple R-squared:  0.635,^^IAdjusted R-squared:  0.63
F-statistic:  122 on 3 and 210 DF,  p-value: <2e-16
```

ประมาณค่าตัวแปรจะต้องเป็น ts (ปี, เดือน, รายเดือน)

แก้

dep, Y_{t-1}, X_t, X_{t-1}

$\leftarrow m_2$: Y_t, Y_{t-1}, X_t, X_{t-1}

$\hat\alpha$, $\hat\phi$, $\hat\beta_0$, $\hat\beta_1$

จาก data.frame data
- data$ptt
- data$set

vector => ts

→ ผลกระทบทันที $\frac{\partial Y_t}{\partial X_t}$

long run effect $= \frac{\hat\beta_1 + \hat\phi\hat\beta_0}{1-\hat\phi}$

$\frac{\partial Y_t}{\partial X_{t-1}}$

dynamic regression ARDL(1,1)

การปรับค่าสแตนดาร์ดแอเรอให้ถูกต้อง

⇒ ดูในการประมาณค่า OLS เราสมมุติ homoskedastic + ไม่มี auto corr

→ ทดสอบ ⇒ พยากรณ์ปัญหา – ใช้การปรับ

Σ se

กรณีผม $var(\hat{\beta}_1)$

$$\rightarrow \; y_t = \beta_0 + \beta_1 x_t + \varepsilon_t \qquad (4.14)$$

ตัวประมาณค่าของ β_1 สามารถคำนวณได้ด้วย

ค่าจาก OLS (EC325)

$$\hat{\beta}_1 = \frac{\sum_{t=1}^{T}(x_t - \bar{x})(y_t - \bar{y})}{\sum_{t=1}^{T}(x_t - \bar{x})^2} \qquad (4.15)$$

เรา แทนค่า $y_t - \bar{y}$ ลงไป จะได้ $\hat{\beta}_1 = \beta_1 + (x_t - \bar{x})\varepsilon_t$

ซึ่งสามารถเขียนได้เป็น

$$Var(\hat{\beta}_1|\boldsymbol{X}) = Var(\beta_1 + \frac{\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}(x_t - \bar{x})\varepsilon_t|X)}{\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}(x_t - \bar{x})2} = Var(\quad)$$

$$= \frac{Var(\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}(x_t - \bar{x})\varepsilon_t|X))}{\left(\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}(x_t - \bar{x})^2\right)^2} \qquad (4.17)$$

เดิมในกรณีข้อสมมุติเป็นจริง $var(\hat{\beta}_1) = \frac{\sigma^2}{\Sigma(x_t - \bar{x})^2}$

การปรับค่าสแตนดาร์ดแอเรอให้ถูกต้อง

โดยที่ตัวเศษของสมการ (4.17) สามารถเขียนในรูปต่อไปนี้

$$Var\left(\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}(x_t-\bar{x})\varepsilon_t|X)\right) = \frac{1}{T^2}Var\left(\sum_{t=1}^{T}(x_t-\bar{x})\varepsilon_t|X\right)$$

$$= \frac{1}{T^2}\sum_{t=1}^{T}Var\left((x_t-\bar{x})\varepsilon_t|X\right)+\frac{1}{T^2}\sum_{t=1}^{T}\sum_{s=t+1}^{T}Cov\left((x_t-\bar{x})\varepsilon_t,(x_s-\bar{x})\varepsilon_s|X\right) \quad (4.18)$$

ในกรณีที่เราสมมุติให้ค่าผิดพลาดไม่มีปัญหา heteroskedasticity และ autocorrelation $Var(\hat{\beta}_1) = \frac{\sigma^2}{\sum_{t=1}^{T}(x_t-\bar{x})^2}$ ซึ่งนำไปคำนวณค่าสแตนดาร์ดแอรเรอของกรณี OLS ปกติ

การปรับสแตนดาร์ดแอรเรอกรณีมีเฮเทอโรสกีดาสติซิตี (สมมติ ไม่มี autocorr)

หากสมมุติให้เราเผชิญเฉพาะปัญหาเฮเทอโรสกีดาสติซิตี (ค่าผิดพลาดไม่มีออโตคอรีเรชัน) หรือพจน์ที่สองในสมการ (4.18) จะยังคงมีค่าเท่ากับศูนย์แต่ค่าความแปรปรวนของ $\hat{\beta}_1$ จะเท่ากับ

กรณี Hetero

ตัวนี้ไม่คงที่ ไม่สามารถดึงออกนอก Σ ได้

$$Var(\hat{\beta}_1|\boldsymbol{X}) = \frac{\sum_{t=1}^{T}(x_t-\bar{x})^2 Var(\varepsilon_t|X))}{\left(\sum_{t=1}^{T}(x_t-\bar{x})^2\right)^2} \quad (4.19)$$

$\neq Var(\hat{\beta}_{1,OLS})$ $\left[= \frac{\sigma^2}{\Sigma(x_t-\bar{x})^2}\right] \Leftarrow$ SE ปกติ $= \sqrt{Var(\hat{\beta}_{1,OLS})}$

จากสูตรดังกล่าวจะเห็นได้ว่าค่าความแปรปรวนของ $\hat{\beta}_1$ ก็แตกต่างจากกรณีที่เป็นไปตามข้อสมมุติของ OLS

residual

White (1980) เสนอให้ใช้ $\hat{\varepsilon}_t$ แทนค่าในตัวประมาณค่าของค่าความแปรปรวนของ $\hat{\beta}_1$

$Var(\varepsilon_t) = E(\varepsilon_t - E(\varepsilon_t))^2 = E(\varepsilon_t^2)$

$$\widehat{Var(\hat{\beta}_1|\boldsymbol{X})} = \frac{\left(\sum_{t=1}^{T}(x_t-\bar{x})^2\hat{\varepsilon}_t^2\right)}{\left(\sum_{t=1}^{T}(x_t-\bar{x})^2\right)^2} \quad (4.20)$$

$\rightarrow \hat{\varepsilon}_t^2$ เป็น proxy ของ $var(\varepsilon_t)$

Heteroskedasticity-robust standard error หรือ Robust standard error

White's Robust S.E.

การปรับสแตนดาร์ดแอรเรอกรณีมีออโตคอรีเรชัน

Wooldridge (1989) เสนอสมการในการพิจารณาการวิเคราะห์ถดถอยอนุกรมเวลาตามสมการ (4.1) หากเราสนใจการพิจารณาค่าความแปรปรวนของตัวประมาณค่า $\hat{\beta}_1$ เราสามารถสร้างสมการช่วย

ค่าสัมประสิทธิ์ ของ x_1

$$x_{1t} = \delta_0 + \delta_2 x_{2t} + \ldots + \delta_k x_{kt} + r_t \quad (4.21)$$

โดยที่พจน์ค่าผิดพลาด r_t มีค่าเฉลี่ยเท่ากับศูนย์และไม่มีสหสัมพันธ์กับตัวแปร $x_{2t}, \ldots, x_{kt}$ (Wooldridge (2010)) แสดงให้เห็นว่าค่าความแปรปรวนของ $\hat{\beta}_1$ มีค่าเท่ากับ

$$var(\hat{\beta}_1) = \left(\sum_{t=1}^{T} E(r_t^2) \right)^{-2} var \left(\sum_{t=1}^{T} r_t \varepsilon_t \right)$$

พจน์ $a_t = r_t \varepsilon_t$

การปรับสแตนดาร์ดแอรเรอกรณีมีออโตคอรีเรชัน

Newey and West (1987) และ Wooldridge (1989) ค่าสแตนดาร์ดแอรเรอที่ได้ปรับออโตคอรีเรชัน (autocorrelation-robust standard error)

OLS ปกติ

Newey-West S.E.

$$se(\hat{\beta}_1) = \left[\frac{\text{``}se(\hat{\beta}_1)\text{''}}{\hat{\sigma}}\right]\sqrt{\hat{v}} \quad (4.22)$$

Hetero-Autocorrelation Consistent (HAC)

ปรับทั้งตัว hetero + autocorr

โดยที่ "$se(\hat{\beta}_1)$" คือค่าสแตนดาร์ดแอรเรอกรณีเป็นไปตามข้อสมมุติของ Gauss-Markov, $\hat{\sigma}$ คือค่าประมาณของสแตนดาร์ดแอรเรอของสมการถดถอย และ $\hat{v}$ คำนวณจากสูตร

$$\hat{v} = \sum_{t=1}^{T} \hat{a}_t^2 + 2\sum_{h=1}^{g}[1 - h/(g+1)]\left(\sum_{t=h+1}^{T} \hat{a}_t\hat{a}_{t-h}\right)$$

hetero

auto corr

$\hat{r}$ คือเรซิดิวของสมการถดถอยระหว่าง x_{1t} และตัวแปรอธิบายที่เหลือ

$$\boxed{a_t = r_t \cdot \varepsilon_t}$$

การปรับสแตนดาร์ดแอรเรอกรณีมีออโตคอรีเรชัน

เพื่อให้เข้าใจว่า $\hat{v}_t$ ได้พิจารณาความสัมพันธ์ระหว่างเรซิดิวอย่างไร เราสามารถกำหนดให้ $g = 1$ จะได้

$$\hat{v} = \sum_{t=1}^{T} \hat{a}_t^2 + \sum_{t=2}^{T} \hat{a}_t \hat{a}_{t-1}$$

Newey-West

เราสามารถพิจารณาต่อไปได้ว่ายิ่งค่า g มีขนาดใหญ่ขึ้น เราจะมีพจน์ที่เราใช้ในการปรับออโตคอรีเรชันมากขึ้น ค่าสแตนดาร์ดแอรเรอจากสมการ 4.22

สแตนดาร์ดแอรเรอที่ได้มีการปรับเฮเทอโรสกีดาสติสิตีและออโตคอรีเรชัน (heteroskedasticity and autocorrelation consistent (HAC) standard error)

ประเด็นที่เราสนใจคือเราจะกำหนดค่า g เท่ากับเท่าใด โดยทางทฤษฎีแล้ว ค่า g จะแปรผันตามจำนวนตัวอย่าง ซึ่งเมื่อจำนวนตัวอย่างใหญ่ขึ้นเราควรที่จะกำหนดรูปแบบให้คล่องตัวขึ้นโดยการเพิ่มค่า g (Wooldridge,2010)

ขึ้นอยู่กับ
ข้อมูล
- รายปี $g=1,2$
- ไตรมาส $g=4,8$
- รายเดือน $g=12,24$

ตัวอย่างที่ 4.3: การปรับค่าสแตนดาร์ดแอรเรอจากความไม่เหมาะสมของข้อสมมุติ

เราสามารถปรับค่าสแตนดาร์ดแอรเรอโดยใช้ชุดคำสั่ง sandwich และใช้คำสั่ง `coeftest` ในชุดคำสั่ง lmtest ในการแสดงสแตนดาร์ดแอรเรอที่ได้ปรับจากข้อสมมุติเฮเทอโรสกีดาสติสิตีและออโตคอรีเรชั่น

หลังจากที่เราประมาณค่าด้วยคำสั่ง `lm` และเก็บผลการประมาณค่าไว้ในชื่อ `capm_ptt` ← static

เราสามารถแสดงผลสแตนดาร์ดแอรเรอที่ได้ปรับเฮเทอโรสกีดาสติสิตี โดยการระบุ `vcov = vcovHC(capm_ptt, type = "HC0")` โดยที่ HC0 ถึง HC4 เป็นการปรับเฮเทอโรสกีดาสติสิตีที่ใช้ตัวหารที่แตกต่างกัน

ตัวอย่างที่ 4.3: การปรับค่าสแตนดาร์ดแอรเรอจากความไม่เหมาะสมของข้อสมมุติ

capm_ptt <- lm(ptt ~ set, data= data)

Hetero Robust SE

```
> library(sandwich)
> library(lmtest)
> coeftest(capm_ptt, df = Inf, vcov = vcovHC(capm_ptt, type = "HC0"))

z test of coefficients:

             Estimate Std. Error z value Pr(>|z|)
(Intercept)  -0.8319     0.1970   -4.22  2.4e-05 ***
set           0.5472     0.0455   12.02  < 2e-16 ***
---
Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' '  1

> coeftest(capm_ptt, df = Inf, vcov = vcovHC(capm_ptt, type = "HC3"))

z test of coefficients:

             Estimate Std. Error z value Pr(>|z|)
(Intercept)  -0.8319     0.2017   -4.12  3.7e-05 ***
set           0.5472     0.0487   11.25  < 2e-16 ***
---
Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' '  1
```

Robust SE

ตัวอย่างที่ 4.3: การปรับค่าสแตนดาร์ดแอรเรอจากความไม่เหมาะสมของข้อสมมุติ

ในกรณีของการปรับออโตคอรีเรชัน เราจะระบุ `vcov = NeweyWest(capm_ptt, lag=4)` จะเห็นได้ว่าค่าสแตนดาร์ดแอรเรอมีค่าที่สูงขึ้นกว่ากรณีที่ไม่ได้คำนึงถึงผลของออโตคอรีเรชัน

var-cov ของ $\hat{\beta}$

g=4 , หรือ 12

```
> coeftest(capm_ptt, df = Inf, vcov = NeweyWest(capm_ptt, lag=4))

z test of coefficients:

             Estimate Std. Error z value  Pr(>|z|)
(Intercept)   -0.8319     0.2195   -3.79   0.00015 ***
set            0.5472     0.0502   10.91   < 2e-16 ***
---
Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1
```

Newey-West SE (ปรับทั้ง Hetero + Autocorr)

$< 2 \times 10^{-16}$ (น้อยมากๆ)

Robust t.

ดูผลการ OLS ปกติ t สูงกว่า กรณีที่ยังไม่ปรับ (มีแนวโน้มปฏิเสธ Ho มากกว่า)