เศรษฐมิติทางการเงินเบื้องต้น

INTRODUCTION TO FINANCIAL ECONOMETRICS

เฉลิมพงษ์ คงเจริญ

PUBLISHER

Art. No xxxxx
ISBN xxx–xx–xxxx–xx–x
Edition 0.0

Cover design by Cover Designer

Published by Publisher
Printed in Bangkok

คำนำ

วัตถุประสงค์หลักของตำรานี้คือต้องการให้ผู้อ่านมีความรู้เบื้องต้นในการวิเคราะห์ข้อมูลอนุกรมเวลาทางการเงิน เช่น ความเบ้ ความโด่ง ตลอดจนอัตสหสัมพันธ์(autocorrelation)ของตัวแปรผลได้ตอบแทน นอกจากนี้ยังนำเสนอแบบเครื่องมือทางสถิติและแบบจำลองเศรษฐมิติที่เป็นประโยชน์ในการวิเคราะห์ข้อมูลอนุกรมเวลา และคาดหวังให้ผู้อ่านมีความรู้ความเข้าใจในแบบจำลองเศรษฐมิติทางการเงิน ตลอดจนสามารถนำเครื่องมือดังกล่าวไปประยุกต์ใช้ในการวิเคราะห์ข้อมูลอนุกรมเวลาทางการเงิน

เพื่อให้ผู้อ่านสามารถประยุกต์ใช้เครื่องมือทางเศรษฐมิติทางการเงินได้ ผู้เขียนได้เผยแพร่ข้อมูลตลอดจน jupyter notebook สำหรับทุกบทไว้ที่ `https://github.com/chaleampong/EC435`

สารบัญ

1. บทนำ

ในการทำงานด้านเศรษฐศาสตร์และการเงินปัจจุบัน เราจำเป็นต้องใช้ข้อมูลทางการเงินในการตัดสินใจตลอดจนสร้างความเข้าใจต่อความสัมพันธ์ของตัวแปรต่าง ๆ เช่น ตลาดหลักทรัพย์ อัตราดอกเบี้ย ราคาอสังหาริมทรัพย์ และอัตราแลกเปลี่ยน อีกทั้งในภาคการเงิน นักลงทุนยังสนใจต่อกการทำนายการเปลี่ยนแปลงของราคาหลักทรัพย์และผลประกอบการของบริษัทต่าง ๆ ในตำรานี้ ผู้เขียนพยายามที่จะนำเสนอเครื่องมือทางสถิติในการตอบปัญหาทางการเงิน หรือการใช้เศรษฐมิติทางการเงิน (financial econometrics) ในการตอบปัญหาทางการเงิน เช่น การทดสอบทฤษฎีทางการเงิน การกำหนดราคาของสินทรัพย์และผลตอบแทน การทดสอบความสัมพันธ์ระหว่างตัวแปรทางการเงินด้วยกัน ความสัมพันธ์ระหว่างตลาดการเงินและตัวแปรเศรษฐกิจมหภาค และการทำนายค่าในอนาคตของตัวแปรทางการเงิน เป็นต้น

เครื่องมือพื้นฐานที่เราใช้ในวิชาเศรษฐมิติทางการเงินจะเหมือนกับในวิชาเศรษฐมิติโดยทั่วไป อย่างไรก็ตาม ข้อมูลนตลาดการเงินที่เรานำมาพิจารณาจะมีความแตกต่างในแง่ของ **ความถี่ ความถูกต้อง ฤดูกาล** กับข้อมูลที่เราพบในวิชาเศรษฐมิติทั่วไป ในวิชาเศรษฐศาสตร์เรามักพบปัญหาที่ข้อมูลไม่เพียงพอและสนใจปัญหาที่เกิดจากข้อมูลจำนวนน้อย

ในตลาดการเงินข้อมูลที่เราพบจะมีรูปแบบที่ค่อนข้างต่างกัน แต่โดยทั่วไปที่เราสนใจคือข้อมูลของราคา ณ ระดับที่มีการซื้อขาย ดังนั้นจะมีความถี่ที่สูงกว่าข้อมูลเศรษฐกิจมหภาค ราคาของสินทรัพย์ใดๆมักมีตั้งแต่ รายนาที ชั่วโมงหรือวัน ดังนั้นกลุ่มตัวอย่างในกรณีข้อมูลการเงินมักจะเป็นขนาดใหญ่

ประเภทของข้อมูล

ข้อมูลภาคตัดขวาง (cross sectional data) เป็นข้อมูลที่มีการจัดเก็บ ณ เวลาใดๆ เช่น ราคาหลักทรัพย์ของทั้งตลาด ณ ปีใดปีหนึ่ง, กำไรสุทธิของบริษัทในตลาดหลักทรัพย์ ณ ปีใดปีหนึ่ง ปัญหาที่สามารถใช้ข้อมูลภาคตัดขวางในการศึกษา ตัวอย่างเช่น ความสัมพันธ์ระหว่างขนาดของบริษัทกับผลตอบแทนในการลงทุนในหุ้นนั้นๆ, ความสัมพันธ์ระหว่างระดับของ GDP ของประเทศกับโอกาสในการผิดนัดชำระหนี้ของประเทศใดๆ ในปีใดปีหนึ่ง

ข้อมูลอนุกรมเวลา (time series) เป็นข้อมูลที่มีการจัดเก็บตามเวลา โดยจะมีความสัมพันธ์กับความถี่

ในการจัดเก็บ อย่างไรก็ตามข้อมูลทางการเงินบางส่วนมีการบันทึกตามธุรกรรมที่เกิด เช่นการซื้อขายหุ้น แบบจำลองเดียวกันจำเป็นที่จะต้องมีความถี่ที่เหมือนกัน ตารางที่ 1.1 เป็นตัวอย่างของข้อมูลอนุกรมเวลา

ตารางที่ 1.1: ตัวอย่างข้อมูลอนุกรมเวลา

สัปดาห์	ปริมาณซื้อขาย	ราคาปิด
7/16/2012	6301500	191.63
7/23/2012	3759100	195.56
7/30/2012	2988800	197.68
8/6/2012	2475200	199.29
8/13/2012	2474700	201.22
8/20/2012	2828000	197.77
8/27/2012	2622700	194.85

ปัญหาที่สามารถใช้ข้อมูลอนุกรมเวลาในการศึกษา ตัวอย่างเช่น ดัชนีราคาหลักทรัพย์แปรผันกับตัวแปรทางเศรษฐกิจของประเทศอย่างไร, มูลค่าของหลักทรัพย์แปรผันตามการประกาศเงินปันผลอย่างไร, อัตราแลกเปลี่ยนมีผลต่อการขาดดุลการค้าอย่างไร

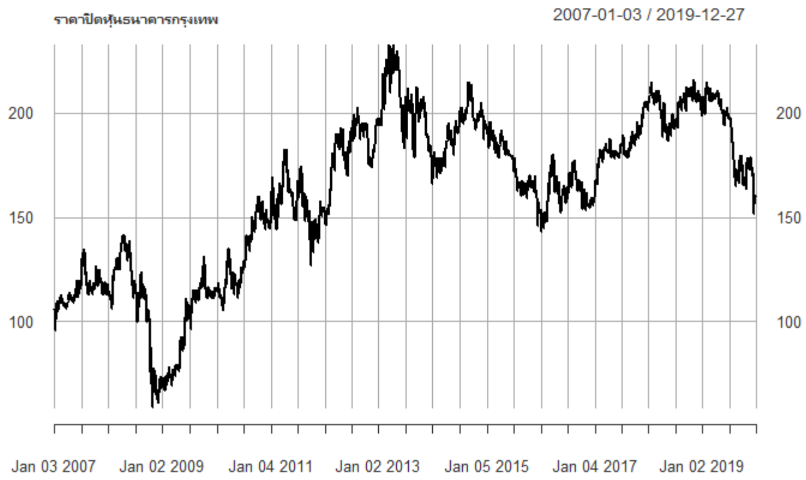
ข้อมูลแพนอล (panel) เป็นข้อมูลที่มีทั้งอนุกรมเวลาและภาคตัดขวางเช่น ราคารายวันของหุ้นใน SET50 ตลอดระยะเวลาสองปี

ในตำราเล่มนี้เราจะเน้นการเนื้อหาไปยังการศึกษาโดยใช้ข้อมูลอนุกรมเวลา**ข้อมูลอนุกรมเวลา**

1.1 ตัวอย่างอนุกรมเวลาทางการเงิน

ข้อมูลอนุกรมทางการเงินหนึ่งที่เรามักสนใจกันคือราคาของหลักทรัพย์ ซึ่งแหล่งข้อมูลมีหลากหลายซึ่งแหล่งข้อมูลฟรีแหล่งหนึ่งที่เราสามารถใช้ได้คือ Yahoo Finance ซึ่งเราสามารถเข้าถึงแหล่งข้อมูลจากเบราเซอร์ หรืออาจจะใช้ package ในโปรแกรม R ชื่อ `quantmod` เพื่อโหลดข้อมูลเมื่อเราทราบ Ticker ของหลักทรัพย์ที่เราต้องการข้อมูล เช่นในกรณีนี้ หากเราสนใจราคาหลักทรัพย์ของธนาคารกรุงเทพ เราสามารถค้นหา Ticker ได้จาก `https://finance.yahoo.com/lookup` ซึ่งกรณีนี้คือ `BBL.BK` และสามารถโหลดข้อมูลพิจารณาข้อมูล และสร้างกราฟได้จากคำสั่งต่อไปนี้

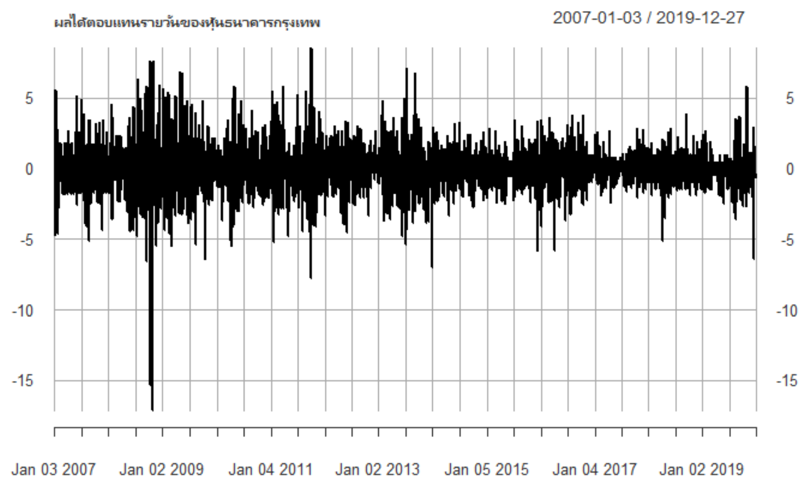
```
> library(quantmod)
> getSymbols("BBL.BK", src="yahoo", from="2007-01-01", to="2019-12-30")
> plot(BBL.BK$BBL.BK.Close, main="ราคาปิดหุ้นธนาคารกรุงเทพ")
```



รูปที่ 1.1: ราคาปิดของหุ้นธนาคารกรุงเทพระหว่างปี 2007 ถึง 2019

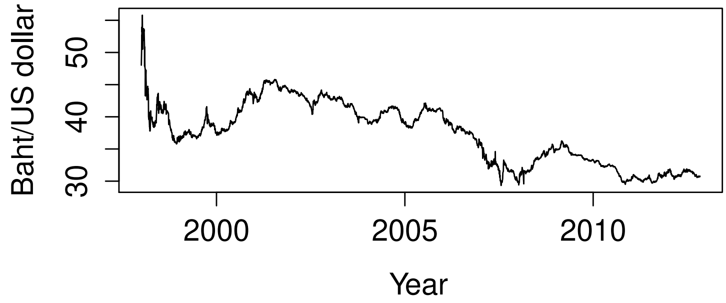
นอกจากนี้เราสามารถคำนวณผลได้ตอบแทนรายวัน และวาดกราฟได้ด้วยคำสั่งต่อไปนี้ (รายละเอียดและคุณสมบัติของผลได้ตอบแทนจะอธิบายในบทที่ 2)

```
> p<-(BBL.BK$BBL.BK.Close)
> ret<-diff(log(p))*100
> plot(ret, main="ผลได้ตอบแทนรายวันของหุ้นธนาคารกรุงเทพ")
```

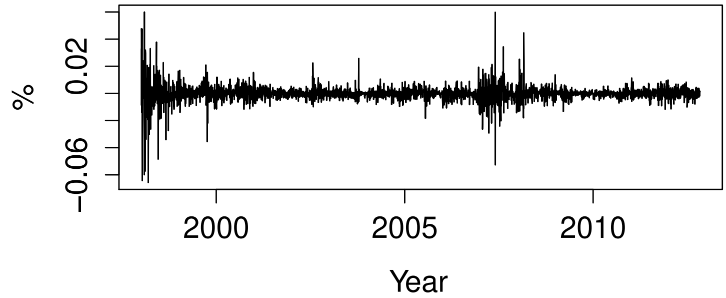


รูปที่ 1.2: ผลได้ตอบแทนรายวันของหุ้นธนาคารกรุงเทพระหว่างปี 2007 ถึง 2019

ในบทที่ 3 จะอธิบายถึงแบบจำลองที่ใช้อธิบายและพยากรณ์อนุกรมเวลาตัวแปรเดียว

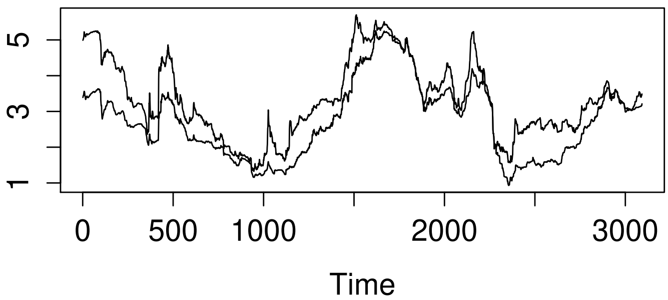


รูปที่ 1.3: อัตราแลกเปลี่ยนบาทต่อดอลลาร์สหรัฐรายวัน



รูปที่ 1.4: อัตราแลกเปลี่ยนบาทต่อดอลลาร์สหรัฐรายวัน

รูปที่ 1.3 แสดงอัตราแลกเปลี่ยนเงินบาทและดอลลาร์สหรัฐรายวันระหว่างปี 1997 ถึง 2011 เมื่อพิจารณาผลได้ตอบแทนในรูปที่ 1.4 จะเห็นได้ว่าช่วงหลังวิกฤติการณ์เงินตราปี 1997 และช่วงวิกฤติแฮมเบอร์เกอร์ ผลได้ตอบแทนมีความผันผวนมากกว่าช่วงอื่นๆ โดยที่แบบจำลองอธิบายความผันผวนจะถูกพิจารณาในบทที่ 5



รูปที่ 1.5: อัตราดอกเบี้ยพันธบัตรรัฐบาล

รูปที่ 1.5 แสดงอัตราดอกเบี้ยพันธบัตรรัฐบาลอายุไถ่ถอน 1 ปีและ 3 ปี พบว่าข้อมูลทั้งสองมีความเคลื่อนไหวไปในทิศทางเดียวกัน ซึ่งความสัมพันธ์ระหว่างอนุกรมเวลามากกว่า 1 อนุกรมเวลาจะถูกพิจารณาใน

บทที่ 6 และ 7

2. อนุกรมเวลาทางการเงินและคุณลักษณะ

ในบทนี้ เราจะพิจารณาคุณลักษณะทางสถิติของอนุกรมเวลาทางการเงิน โดยเฉพาะผลได้ตอบแทน ซึ่งเป็นอนุกรมเวลาที่เราสนใจมากที่สุดในการศึกษาเศรษฐมิติทางการเงิน หัวข้อ 2.1 กล่าวถึงการคำนวณผลได้ตอบแทนจากราคาของสินทรัพย์ทางการเงิน หัวข้อ 2.2 กล่าวถึงคุณลักษณะทางสถิติของอนุกรมเวลาทางการเงิน ตลอดจนการทดสอบสมมุติฐานเกี่ยวกับคุณลักษณะของอนุกรมเวลา

2.1 การคำนวณผลได้ตอบแทน

การศึกษาปริมาณทางการเงินส่วนใหญ่เรามักจะสนใจผลได้ตอบแทน (return) ของทรัพย์สินมากกว่าราคา (price) เนื่องจากตลาดการเงินมีลักษณะที่ใกล้เคียงกับตลาดแข่งขันสมบูรณ์ ขนาดของการลงทุนไม่ส่งผลต่อการเปลี่ยนแปลงของราคา ดังนั้น ผลได้ตอบแทนของทรัพย์สินเป็นข้อมูลที่มีความสมบูรณ์ และปราศจากผลของหน่วยวัดของโอกาสในการลงทุน (John Y. Campbell and MacKinlay 1997) คุณสมบัติดังกล่าวใช้ในการประเมินโอกาสในการลงทุน เช่นการระบุว่าสินทรัพย์ที่เราถืออยู่ราคาเพิ่มขึ้น 10 บาทมิได้แสดงให้เห็นว่าผลได้ตอบแทนนั้นดีหรือไม่ จำเป็นต้องระบุในรูปของผลได้ตอบแทนเป็นร้อยละ นอกจากนี้อนุกรม (series) ของผลได้ตอบแทนมีคุณสมบัติทางสถิติที่ดีกว่าอนุกรมของราคาในการดำเนินการทางสถิติซึ่งเราจะได้พิจารณาในเนื้อหาบทต่อไป

2.1.1 นิยามของผลได้ตอบแทนของทรัพย์สิน

สมมุติให้การซื้อสินทรัพย์ เช่นหุ้น พันธบัตร หรือกองทุนรวม ณ เวลา t_0 ด้วยราคา P_{t_0} บาทและขายสินทรัพย์ ณ เวลา t_1 ด้วยราคา P_{t_1} บาท การเปลี่ยนแปลงของราคาสินทรัพย์ในรูปร้อยละสามารถคำนวณได้โดย

$$R(t_0, t_1) = \frac{P_{t_1} - P_{t_0}}{P_{t_0}} \tag{2.1}$$

เราเรียกระยะเวลาระหว่าง t_0 และ t_1 ว่า*ระยะเวลาการถือสินทรัพย์ (holding period)* และสมการ

(2.1) ว่า*ผลตอบแทนจากระยะเวลาการถือสินทรัพย์* โดยทั่วไปเราอาจจะกำหนดระยะเวลาการถือสินทรัพย์เป็นระยะเวลาใดๆก็ได้ เช่น ราย 15 นาที รายครึ่งเดือน อย่างไรในตำรานี้เราจะสมมุติให้ระยะเวลาการถือมีลักษณะเพิ่มขึ้นเช่นเดียวกับปฏิทิน เช่น รายนาที รายวัน รายเดือน หรือรายปี และในหัวข้อนี้เราจะสมมุติระยะเวลาการพิจารณาเป็นรายเดือน

กำหนดให้ P_t เป็นราคาของสินทรัพย์ ณ เวลาสิ้นเดือน t และไม่มีการจ่ายเงินปันผล และกำหนดให้ P_{t-1} เป็นราคาของสินทรัพย์ ณ เวลาสิ้นเดือน $t-1$ แล้ว **ผลได้ตอบแทนรวมอย่างง่ายหนึ่งเดือน (one-month simple gross return)** สามารถคำนวณได้ดังนี้

$$1 + R_t = \frac{P_t}{P_{t-1}} \tag{2.2}$$

และ**ผลได้ตอบแทนสุทธิอย่างง่ายหนึ่งเดือน (one-month simple net return)** หรือเรามักจะเรียกสั้น ๆ ว่า ผลได้ตอบแทนอย่างง่ายหนึ่งเดือน (one-month simple return)

$$R_t = \frac{P_t}{P_{t-1}} - 1 = \frac{P_t - P_{t-1}}{P_{t-1}} \tag{2.3}$$

โดยที่ผลได้ตอบแทนอย่างง่ายหนึ่งเดือนอธิบายว่าหากเราลงทุนด้วยเงิน 1 บาทในเดือนที่ $t-1$ เราจะได้รับเงินคืนมาทั้งหมดเท่าไหร่ ซึ่งรวมเงินต้นด้วย หรืออาจมองในแง่ของมูลค่าอนาคตของเงิน 1 บาท นอกจากนี้เราจะสังเกตเห็นได้ว่าราคาของสินทรัพย์ใด ๆ จะต้องเป็นค่าที่ไม่เป็นลบดังนั้น ค่าต่ำสุดของ R_t คือ -1 หรือขาดทุน 100%

ตัวอย่างที่ 2.1 การคำนวณผลได้ตอบแทนอย่างง่าย

สมมุติว่าเราพิจารณาผลตอบแทนจากการลงทุนในหลักทรัพย์ธนาคารเอโดยที่เราซื้อหุ้นเมื่อเดือน $t-1$ ด้วยราคา $P_{t-1} = 190$ บาทและขายไปในเดือนต่อไปด้วยราคา $P_t = 200$ บาทและไม่มีการจ่ายเงินปันผลในระหว่างที่ถือหุ้น ดังนั้นผลได้ตอบแทนสุทธิเท่ากับ

$$R_t = \frac{200-190}{190} = \frac{200}{190} - 1 = 1.0526 - 1 = 0.0526$$

และผลได้ตอบแทนอย่างง่ายรวมหนึ่งเดือนจะเท่ากับ

$$1 + R_t = \frac{200}{190} = 1.0526$$

ผลได้ตอบแทนสุทธิหนึ่งเดือนจะเท่ากับ 5.25 % ต่อเดือน หรือการลงทุนในหลักทรัพย์ธนาคารเอ 1 บาทจะได้เงินคืนพร้อมเงินต้น 1.0525 บาท

ผลได้ตอบแทนหลายเดือน

ผลได้ตอบแทนจากการลงทุนสองเดือนสามารถคำนวณได้จากการเปลี่ยนแปลงของราคา ณ เดือน P_t และ P_{t-2} หรือผลได้ตอบแทนอย่างง่ายสองเดือน, $R_t(2)$, จะเท่ากับ

$$\begin{aligned} R_t(2) &= \frac{P_t - P_{t-2}}{P_{t-2}} = \frac{P_t}{P_{t-2}} - \frac{P_{t-2}}{P_{t-2}} \\ &= \frac{P_t}{P_{t-2}} - 1 \\ &= \frac{P_t}{P_{t-1}} \frac{P_{t-1}}{P_{t-2}} - 1 \\ &= (1 + R_t)(1 + R_{t-1}) - 1 \end{aligned} \tag{2.4}$$

และผลได้ตอบแทนรวมอย่างง่ายสองเดือนจะเท่ากับ

$$1 + R_t(2) = (1 + R_t)(1 + R_{t-1}) = 1 + R_t + R_{t-1} + R_t R_{t-1} \tag{2.5}$$

ซึ่งคือผลรวมเรขาคณิต (geometric sum) ของผลได้ตอบแทนรวมอย่างง่ายหนึ่งเดือนของเดือน t และ $t-1$ ดังนั้นจะเห็นได้ว่า $R_t(2)$ จะไม่เท่ากับผลรวมของ R_t และ R_{t-1}

ตัวอย่างที่ 2.2 การคำนวณผลได้ตอบแทนอย่างง่ายสองเดือน
พิจารณาต่อเนื่องจากตัวอย่าง 2.1 สมมุติให้เราซื้อหลักทรัพย์ ณ เดือนที่ $t-2$ ด้วยราคา $P_{t-2} = 180$ บาทและไม่มีการจ่ายเงินปันผล ผลได้ตอบแทนสุทธิสองเดือนจะเท่ากับ

$$R_t(2) = \frac{200 - 180}{180} = \frac{200}{180} - 1 = 0.1111$$

หรือ 11.11 % โดยที่ผลได้ตอบแทนหนึ่งเดือนของแต่ละเดือนจะเท่ากับ

$$\begin{aligned} 1 + R_{t-1} &= \frac{190 - 180}{180} = 1.0556 - 1 = 0.0556 \\ 1 + R_t &= \frac{200 - 190}{190} = 1.0526 - 1 = 0.0526 \end{aligned}$$

และผลได้ตอบแทนรวมสองเดือนจะเท่ากับ

$$1 + R_t(2) = 1.0556 \times 1.0526 = 1.1111$$

เราสามารถเขียนผลได้ตอบแทนในรูปทั่วไปได้ดังนี้ ผลได้ตอบแทนรวมอย่างง่าย k เดือน (k-month simple gross return) จะเท่ากับ

$$
\begin{aligned}
1+R_t(k) = \frac{P_t}{P_{t-k}} &= \frac{P_t}{P_{t-1}} \times \frac{P_{t-1}}{P_{t-2}} \times \cdots \times \frac{P_{t-k+1}}{P_{t-k}} \\
&= (1+R_t)(1+R_{t-1})\cdots(1+R_{t-k+1})
\end{aligned}
\tag{2.6}
$$

ซึ่งคือผลรวมเรขาคณิตของผลได้ตอบแทนรวมอย่างง่ายรายเดือนของเดือนที่ t ถึงเดือนที่ $t-k+1$

ผลได้ตอบแทนของกลุ่มสินทรัพย์ลงทุน (Portfolio)

หากเราลงทุนด้วยเงินจำนวน V บาทในสินทรัพย์สองตัวคือ A และ B โดยสัดส่วนการลงทุนในสินทรัพย์ทั้งสองคือ x_A และ x_B แล้วมูลค่าการลงทุนในสินทรัพย์แต่ละชนิดจะเท่ากับ Vx_A และ Vx_B โดยเราสมมุติให้ $x_A + x_B = 1$ หากกำหนดให้ผลได้ตอบแทนอย่างง่ายหนึ่งเดือนของ A และ B คือ $R_{A,t}$ และ $R_{B,t}$ แล้ว มูลค่าของกลุ่มสินทรัพย์ลงทุนเมื่อสิ้นเดือนจะเท่ากับ

$$
V \times [x_A(1+R_{A,t}) + x_B(1+R_{B,t})]
$$

โดย $x_A(1+R_{A,t})+x_B(1+R_{B,t})$ คือผลได้ตอบแทนรวมของกลุ่มสินทรัพย์ลงทุน และอัตราผลตอบแทนจากการลงทุนจะเท่ากับ $x_AR_{A,t} + x_BR_{B,t}$

การปรับกรณีเงินปันผล

ถ้าสินทรัพย์มีการจ่ายเงินปันผลเท่ากับ D_t ในช่วงเวลาระหว่างเดือน t และ $t-1$ แล้วการคำนวณผลได้ตอบแทนสุทธิทั้งหมด (total net return) สามารถคำนวณได้ด้วยสมการต่อไปนี้

$$
R_t^{total} = \frac{P_t + D_t - P_{t-1}}{P_{t-1}} = \frac{P_t - P_{t-1}}{P_{t-1}} + \frac{D_t}{P_{t-1}} \tag{2.7}
$$

โดยที่ส่วนแรกเป็นกำไรส่วนเกินทุน (capital gain) และส่วนที่สองคืออัตราผลตอบแทนเงินปันผล (dividend yield)

การแปลงผลได้ตอบแทนเป็นผลได้ตอบแทนรายปี

โดยทั่วไปเรามักจะรายงานผลได้ตอบแทนเป็นรายปีเพื่อใช้ในการตัดสินใจลงทุน ดังนั้นเราจำเป็นต้องมีการแปลงผลได้ตอบแทนที่มีความถี่อื่นๆเป็นรายปี สมมุติว่าเราต้องการหาผลได้ตอบแทนหนึ่งปี $(1+R_A)$ จากข้อมูลผลได้ตอบแทนรายเดือน $(R_t, R_{t-1}, ..., R_{t-11})$ เราสามารถคำนวณได้โดย

$$
\begin{aligned}
1+R_A = 1+R_t(12) = \frac{P_t}{P_{t-12}} &= \frac{P_t}{P_{t-1}} \cdot \frac{P_{t-1}}{P_{t-2}} \cdots \frac{P_{t-11}}{P_{t-12}} \\
&= (1+R_t)(1+R_{t-1})\cdots(1+R_{t-11})
\end{aligned}
\tag{2.8}
$$

นอกจากนี้หากเราทราบผลได้ตอบแทนรายหนึ่งเดือน และต้องการประมาณการผลได้ตอบแทนรายปีภายใต้ข้อสมมุติว่าผลได้ตอบแทนคงที่ทุกเดือนเท่ากับ R เราจะได้ผลได้ตอบแทนรายหนึ่งปีเท่ากับ

$$1 + R_A = 1 + R_t(12) = (1 + R)^{12}$$

ซึ่งก็คือผลได้ตอบแทนทบต้น 12 เดือนนั่นเอง

2.1.2 ผลได้ตอบแทนทบต้นอย่างต่อเนื่อง

ในหัวข้อนี้เราจะพิจารณาผลของการคิดผลตอบแทนทบต้น(compounding) สมมุติว่าธนาคารจ่ายดอกเบี้ยเงินฝากในอัตรา 10 % ต่อไปี และมีเงินต้นเท่ากับ 100 บาท หากธนาคารจ่ายดอกเบี้ยหนึ่งครั้งเมื่อสิ้นปี มูลค่าสุทธิของเงินฝากดังกล่าวตอนปลายปีจะเท่ากับ $100(1 + 0.1) = 110$ บาท หากธนาคารแบ่งการจ่ายดอกเบี้ยออกเป็นสองครั้งครั้งละ 5 % ทุกครึ่งปี จะพบว่ามูลค่าสุทธิจะเท่ากับ $100(1 + 0.1/2)^2 = 110.25$ บาทหลังจากสิ้นปี จากการพิจารณารูปแบบข้างต้น หากธนาคารจ่ายดอกเบี้ย m ครั้ง มูลค่าสุทธิ ณ สิ้นปีที่หนึ่งจะมีค่า $100(1 + 0.1/m)^m$ และถ้าธนาคารจ่ายดอกเบี้ยทบต้นอย่างต่อเนื่อง (continuous compounding) มูลค่าสุทธิ ณ สิ้นปีที่หนึ่งจะเท่ากับ $100(\exp(0.1)) = 100.517$

ผลได้ตอบแทนหนึ่งเดือน

กำหนดให้ R_t เป็นผลได้ตอบแทนอย่างง่ายรายเดือนของการลงทุน เนื่องจากมูลค่าในอนาคตจะเท่ากับมูลค่าปัจจุบันคูณกับตัวคูณทบต้น ($P_t = P_{t-1}\exp(r_t)$) เราสามารถคำนวณผลได้ตอบแทนทบต้นต่อเนื่องหนึ่งเดือน (one-month continuously compounding return) หรือผลได้ตอบแทนในรูปลอการิทึม(one-month log return) ซึ่งใช้สัญลักษณ์แทน r_t ได้โดย

$$r_t = \ln\left(\frac{P_t}{P_{t-1}}\right) = \ln(P_t) - \ln(P_{t-1}) = p_t - p_{t-1} \tag{2.9}$$

โดยที่ $p_t = \ln(P_t)$

ตัวอย่างที่ 2.3 การคำนวณผลได้ตอบแทนในรูปล็อก
ใช้ข้อมูลจากตัวอย่างที่ 2.1 ผลได้ตอบแทนทบต้นอย่างต่อเนื่องหนึ่งเดือนหรือผลได้ตอบแทนในรูปลอการิทึมหนึ่งเดือนจะเท่ากับ

$$r_t = \ln(1.0526) = 0.0513$$

$$r_t = \ln(200) - \ln(190) = 5.2983 - 5.2470 = 0.0513$$

เนื่องจาก $1 + R_t = \frac{P_t}{P_{t-1}}$ เราสามารถเขียนความสัมพันธ์ระหว่างผลได้ตอบแทนอย่างง่ายและผลได้ตอบแทนในรูปลอการิทึมได้เป็น

$$r_t = \ln(1 + R_t)$$

และเราสามารถคำนวณผลตอบแทนอย่างง่ายสุทธิได้จากผลได้ตอบแทนในรูปลอการิทึมโดย

$$R_t = \exp(r_t) - 1 \tag{2.10}$$

ตัวอย่างที่ 2.4 ความสัมพันธ์ระหว่างผลได้ตอบแทน
ใช้ข้อมูลจากตัวอย่าง 2.3 ผลได้ตอบแทนในรูปลอการิทึมหนึ่งเดือนเท่ากับ 5.13 % ดังนั้น

$$R_t = \exp(0.0513) - 1 = 0.0526$$

หากผลได้ตอบแทนมีค่าต่ำ เช่น ผลได้ตอบแทนรายชั่วโมงหรือรายวัน ผลได้ตอบแทนในรูปลอการิทึมและผลได้ตอบแทนอย่างง่ายจะมีค่าใกล้เคียงกัน อย่างไรก็ตาม การคำนวณผลได้ตอบแทนทั้งสองวิธีมีคุณสมบัติที่แตกต่างกัน ดังนี้ หากราคาของสินทรัพย์ลดลงเหลือศูนย์ผลได้ตอบแทนอย่างง่ายจะเท่ากับ -1 ซึ่งเป็นขอบเขตต่ำสุดของผลได้ตอบแทนอย่างง่าย ในขณะที่ขอบเขตล่างของผลได้ตอบแทนในรูปลอการิทึมจะเท่ากับ $-\infty$ ($r_t = \ln(1 + R_t) = \ln(1 - 1) = \ln(0)$) ดังนั้นหากเราคำนวณผลได้ตอบแทนในรูปลอการิทึมมีค่าติดลบมากๆ จึงไม่ได้หมายความว่าเราสูญเสียเงินมากกว่าเงินต้น หากเราต้องการทราบอัตราผลขาดทุนเราจำเป็นต้องใช้สมการ (2.10) ในการคำนวณกลับไปเป็นผลได้ตอบแทนอย่างง่าย

เนื่องจากผลได้ตอบแทนในรูปลอการิทึมมีคุณสมบัติในการรวมกันที่ง่ายกว่าผลได้ตอบแทนอย่างง่าย ดังนั้นการวิเคราะห์เชิงสถิติหรือการสร้างแบบจำลองเรามักจะใช้ผลได้ตอบแทนในรูปลอการิทึม

ผลได้ตอบแทนหลายเดือน

หากเราพิจารณาผลได้ตอบแทนในรูปลอการิทึมสองเดือนจะเท่ากับ

$$r_t(2) = \ln(1 + R_t(2)) = \ln\left(\frac{P_t}{P_{t-2}}\right) = p_t - p_{t-2}$$

นอกจากนี้เราสามารถหาความสัมพันธ์ระหว่างผลได้ตอบแทนในรูปลอการิทึมสองเดือนกับผลได้ตอบแทนในรูปลอการิทึมหนึ่งเดือนได้โดย

$$\begin{aligned} r_t(2) &= \ln\left(\frac{P_t}{P_{t-2}}\right) \\ &= \ln\left(\frac{P_t}{P_{t-1}}\frac{P_{t-1}}{P_{t-2}}\right) \\ &= \ln\left(\frac{P_t}{P_{t-1}}\right) + \ln\left(\frac{P_{t-1}}{P_{t-2}}\right) \\ &= r_t + r_{t-1} \end{aligned}$$

ดังนั้นผลได้ตอบแทนในรูปลอการิทึมสองเดือนก็จะคือผลรวมของผลได้ตอบแทนในรูปลอการิทึมรายเดือนของสองเดือนมารวมกันนั่นเอง ซึ่งแตกต่างจากในกรณีของผลได้ตอบแทนอย่างง่ายที่ต้องใช้ผลรวมเรขาคณิต

ตัวอย่างที่ 2.5 การคำนวณผลได้ตอบแทนหลายเดือน
จากข้อมูลในตัวอย่างที่ 2.2 เราสามารถคำนวณผลได้ตอบแทนในรูปลอการิทึมสองเดือนได้สองวิธีคือ

$$r_t(2) = \ln(200) - \ln(180) = 5.2983 - 5.1930 = 0.1053$$

หรือรวมผลได้ตอบแทนในรูปลอการิทึมหนึ่งเดือนของแต่ละเดือนเข้าด้วยกัน โดย $r_t = \ln(200) - \ln(190) = 0.0513$ และ $r_{t-1} = \ln(190) - \ln(180) = 0.0540$ ดังนั้น

$$r_t(2) = 0.0513 + 0.0540 = 0.1053$$

ในกรณีทั่วไป ผลได้ตอบแทนในรูปลอการิทึม k เดือนสามารถคำนวณได้จาก

$$\begin{aligned} r_t(k) &= \ln(1 + R_t(k)) = \ln\left(\frac{P_t}{P_{t-k}}\right) = p_t - p_{t-k} \\ &= \sum_{j=0}^{k-1} r_{t-j} \end{aligned}$$

ในขณะที่ผลได้ตอบแทนในรูปลอการิทึมของกลุ่มหลักทรัพย์จะเท่ากับ

$$r_{p,t} = \ln(1 + R_{p,t}) = \ln\left(1 + \sum_{i=1}^{n} x_i R_{i,t}\right) \neq \sum_{i=1}^{n} x_i r_{i,t} \tag{2.11}$$

โดยผลได้ตอบแทนในรูปลอการิทึมของกลุ่มหลักทรัพย์จะไม่เท่ากับค่าเฉลี่ยถ่วงน้ำหนักของผลได้ตอบแทนในรูปลอการิทึมของสินทรัพย์

ตัวอย่างที่ 2.6 การคำนวณผลได้ตอบแทนด้วยโปรแกรม R ในตัวอย่างนี้เราจะคำนวณผลได้ตอบแทนของหลักทรัพย์ ปตท. รายวัน ระหว่างเดือนมกราคม 2002 ถึงเดือนธันวาคม 2019 โดยที่เราสามารถดาวน์โหลดข้อมูลดังกล่าวได้จากเวปไซต์ Yahoo Finance โดยที่ในช่องของหลักทรัพย์เราค้นหาด้วย PTT ซึ่งชื่อของข้อมูลคือ PTT.BK ในที่นี้ราคาที่ใช้คือราคาปิด (ตัวแปร Price ในไฟล์ `ptt_d_02_19.csv`) เราสามารถนำเข้าข้อมูลโดยใช้คำสั่ง `read.csv` และเก็บข้อมูลไว้ในชื่อ `ptt` ดังคำสั่งข้างล่าง นอกจากนี้เราใช้คำสั่ง `head` ในการดูข้อมูลช่วงต้น และ `nrow` ในการหาจำนวนตัวอย่าง (T)

```
> ptt <- read.csv("G:/My Drive/teaching/ec435/book_project/data/ptt_d_
  02_19.csv")
> head(ptt)
       Date Price
1  1/2/2002 3.425
2  1/4/2002 3.500
3  1/7/2002 3.475
4  1/8/2002 3.500
```

```
5  1/9/2002 3.475
6 1/10/2002 3.500
> n<-nrow(ptt)
```

คำนวณผลได้ตอบแทนอย่างง่ายสุทธิโดยการกำหนดเวกเตอร์ P_t และ P_{t-1} แล้วคำนวณตามสมการ 2.3 โดยที่เราใช้เรียกข้อมูลราคา ณ เวลาที่ t ด้วยการกำหนด `ptt$Price[2:n]` และข้อมูลในช่วงเวลา t ด้วยการกำหนด `ptt$Price[1:n-1]` ชุดข้อมูลผลได้ตอบแทนอย่างง่ายสุทธิจะถูกเก็บไว้ในชื่อ `ptt.ret` ซึ่งเป็นเวกเตอร์

```
> ptt.ret<-((ptt$Price[2:n]-ptt$Price[1:n-1])*100)/ptt$Price[1:n-1]
> head(ptt.ret)
[1]  2.18978 -0.71429  0.71942 -0.71429  0.71942  0.00000
> (3.5-3.425)/3.425
[1] 0.021898
```

คำนวณผลได้ตอบแทนในรูปลอการิทึมจากสมการ 2.9 โดยเราสามารถใช้ฟังก์ชัน `diff` ในการหาค่าแตกต่างระหว่าง $ln(P_t)$ และ $ln(P_{t-1})$ ชุดข้อมูลผลได้ตอบแทนในรูปลอการิทึมจะถูกเก็บไว้ในชื่อ `ptt.lret` ซึ่งเป็นเวกเตอร์

```
> ptt.lret<-diff(log(ptt$Price))*100
> head(ptt.lret)
[1]  2.16615 -0.71685  0.71685 -0.71685  0.71685  0.00000
> log(3.5/3.425)
[1] 0.021661
```

2.2 คุณลักษณะทางสถิติของข้อมูลอนุกรมเวลา

เป้าหมายหลักของการวิเคราะห์ข้อมูลอนุกรมเวลาคือการสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์เพื่ออธิบายคุณลักษณะของข้อมูลตัวอย่าง เช่น ข้อมูลผลได้ตอบแทนของหุ้น เพื่อที่จะให้เราสามารถสร้างแบบจำลองที่จะอธิบายข้อมูลได้ เราจะสมมุติว่าอนุกรมเวลาสามารถนิยามเป็นตัวแปรสุ่ม (random variables) ที่มีการจัดลำดับตามเวลา เช่นลำดับของข้อมูล $y_1, y_2, y_3 ....$ โดยที่ y_1 เป็นค่าของอนุกรมที่คาบเวลาที่ 1, y_2 เป็นค่าของอนุกรมที่คาบเวลาที่ 2 ตามลำดับ โดยทั่วไป เราจะเรียกกลุ่มของตัวแปรสุ่มที่มีการจัดลำดับตามเวลา $Y_t = \{y_t, t = 0, \pm 1, \pm 2, ...\}$ ว่ากระบวนการสโตแคสติก (Stochastic process) ในวิชานี้เราจะเน้นการวิเคราะห์ข้อมูลอนุกรมเวลาด้วยแบบจำลองเชิงเส้นตรง (Linear model) หมายถึง Y_t มีความสัมพันธ์ขึ้นอยู่กับค่าในอดีตในลักษณะเป็นเส้นตรง

2.2.1 การแจกแจงของอนุกรมเวลา (Distribution of time series)

ตัวแปรสุ่ม Y_t คือฟังก์ชันที่ใช้อธิบายค่าของเหตุการณ์ที่จะเกิดขึ้นในอนาคตโดยที่เรารู้ค่าทั้งหมดที่จะเป็นไปได้แต่ไม่รู้ว่าจะเกิดอะไรขึ้นแน่นอน เช่น ราคาของหลักทรัพย์(P) เราไม่ทราบว่าราคาในเดือนหน้าจะเป็นเท่าไหร่แน่นอน แต่เราคิดว่าราคาจะต้องเป็นบวกและไม่สูงมากนั้น ดังนั้น P จึงเป็นตัวแปรสุ่มมีค่าระหว่าง $[0, M]$

โดยที่ M เป็นค่าที่ไม่สูงมากนัก คำถามอีกคำถามหนึ่งคือตัวแปรสุ่มจะมีการแจกแจงอย่างไร โดยที่หนึ่งในทางเลือกคือการแจกแจงแบบ log-normal

นอกจากนี้เราอาจจะสนใจว่าการลงทุนของเราในหนึ่งเดือนข้างหน้าจะมีผลได้ตอบแทน(R_t)เป็นอย่างไร ดังนั้น R_t ก็จะเป็นตัวแปรสุ่มเนื่องจากเราไม่ทราบว่าผลได้ตอบแทนในคาบข้างหน้าจะเป็นอย่างไร ทราบเพียงว่าค่าดังกล่าวเป็นได้ทั้งบวกและลบ โดยที่ลบ(ขาดทุน)ได้อย่างมากไม่เกิน 100% การแจกแจงที่ใช้ประมาณค่าสำหรับผลได้ตอบแทนอย่างง่ายรายเดือนที่ดีคือการแจกแจงแบบปกติ

บางครั้งนักลงทุนอาจจะสนใจว่าราคาจะเปลี่ยนแปลงอย่างไร โดยอาจจะสนใจกรณีที่ราคาปรับตัวขึ้นแทนด้วย 0 และกรณีที่ราคาคงที่หรือลดลงแทนด้วย 1 ในกรณีนี้ปริภูมิตัวอย่าง (sample space) ของตัวแปรสุ่มวิยุต (discrete random variable)

บทนิยาม 2.1 ตัวแปรสุ่มวิยุต Y คือตัวแปรสุ่มที่มีปริภูมิตัวอย่างเซตที่มีค่าจำกัด $S_Y = \{y_1, y_2, ..., y_n\}$ หรือมีค่าเป็นอนันต์ที่นับได้ $S_Y = \{y_1, y_2, ...\}$

ฟังก์ชันความหนาแน่นของความน่าจะเป็น (probability density function: pdf) ของตัวแปรสุ่มวิยุตสามารถเขียนแทนด้วย $p(y)$ จะเป็นฟังก์ชัน $p(y) = Pr(Y = y)$ ความน่าจะเป็นที่ตัวแปรสุ่ม Y เท่ากับค่า y โดย pdf จะต้องมีคุณสมบัติคือ (1) $p(y) \geq 0$ สำหรับทุกค่า $y \in S_y$ (2) $p(y) = 0$ สำหรับทุกค่า $y \notin S_y$ และ (3) $\sum_{y \in S_y} p(y) = 1$

ตัวอย่างที่ 2.7 การแจกแจงความน่าจะเป็น สมมุติว่าผลได้ตอบแทนจากหุ้น A มีค่าที่เป็นไปได้และความน่าจะเป็นดังนี้ ตัวอย่างดังกล่าวพิจารณาค่าน่าจะเป็นไปได้ 5 ค่าของผลได้ตอบแทนของหุ้น A เราสามารถทำนายค่าที่เป็นไปได้ของแต่ละเหตุการณ์ได้

ตัวอย่างของการแจกแจงแบบ discrete อื่นๆ ได้แก่ Bernoulli และ Binomial

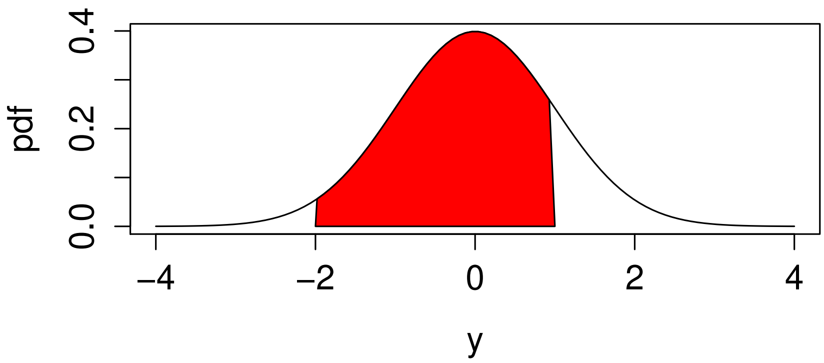
บทนิยาม 2.2 ตัวแปรสุ่มแบบต่อเนื่อง Y จะมีค่าเป็นเท่าใดก็ได้บนเส้นจำนวนจริง ดังนั้น $S_Y = \{y : y \in \mathbb{R}\}$

ฟังก์ชันความหนาแน่นของความน่าจะเป็น pdf ของตัวแปรสุ่มต่อเนื่อง Y จะเป็นฟังก์ชันที่ไม่เป็นค่าลบ f นิยามบนเส้นจำนวนจริงโดยที่สำหรับช่วง A ใดๆ

$$Pr(Y \in A) = \int_A f(y)dy$$

ดังนั้น $Pr(Y \in A)$ คือพื้นที่ใต้กราฟความน่าจะเป็นตลอดช่วง A โดยที่ pdf $f(y)$ จะมีคุณสมบัติดังนี้ (1) $f(y) \geq 0$ และ (2) $\int_{-\infty}^{\infty} f(y)dy = 1$ ตัวอย่างเช่นกราฟรูประฆังรูปที่ 2.1 เป็น pdf ฟังก์ชันโดยที่พื้นที่ใต้กราฟระหว่าง $y = -2$ ถึง $y = 1$ จะแสดงถึง $Pr(-2 \leq Y < 1)$

รูปที่ 2.1: ฟังก์ชัน pdf ของการแจกแจงต่อเนื่อง



ตัวอย่างของการแจกแจงความน่าจะเป็นของตัวแปรสุ่มแบบต่อเนื่องคือการแจกแจงปกติมาตรฐาน (standard normal distribution)

บทนิยาม 2.3 ฟังก์ชันการแจกแจงสะสม (cumulative distribution function: cdf) ของตัวแปรสุ่ม Y (ไม่ว่าจะเป็นตัวแปรสุ่มวิยุตหรือต่อเนื่อง) จะมีสัญลักษณ์เป็น F_Y ซึ่งแสดงค่าความน่าจะเป็นที่ Y ใดๆ จะมีค่าน้อยกว่าหรือเท่ากับ y

$$F_Y(y) = P(Y \leq y), \quad -\infty \leq y \leq \infty$$

ฟังก์ชันการแจกแจงสะสม (cdf) จะมีคุณสมบัติดังนี้

1. ถ้า $y_1 < y_2$ แล้ว $F_Y(y_1) \leq F_Y(y_2)$

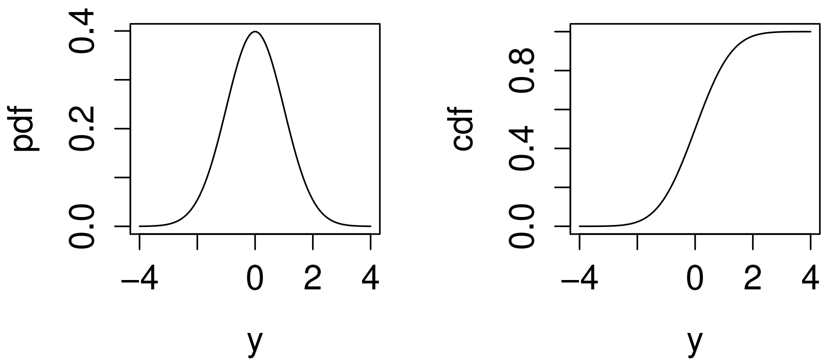
2. $F_Y(-\infty) = 0$ และ $F_Y(\infty) = 1$

3. $Pr(Y > y) = 1 - F_Y(y)$

4. $Pr(y_1 < X \leq y_2) = F_Y(y_2) - F_Y(y_1)$

5. $\frac{\partial F_Y(y)}{\partial y} = f_Y(y)$ ถ้า Y เป็นตัวแปรสุ่มต่อเนื่องและ $F_Y(y)$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องและหาอนุพันธ์ได้

รูปที่ 2.2: ฟังก์ชันความหนาแน่นของความน่าจะเป็นและการแจกแจงสะสมของการแจกแจงปกติมาตรฐาน



ควอนไทล์ของการแจกแจงความน่าจะเป็นของตัวแปรสุ่ม

หากเราพิจารณาตัวแปรสุ่ม Y ที่มีฟังก์ชันการแจกแจงสะสม $F_Y(y)$ หากค่า $0 \leq \alpha \leq 1$ แล้วค่าควอนไทล์ที่ $100\alpha\%$ ของการแจกแจง Y คือค่า q_α ที่ตรงกับเงื่อนไข

$$F_Y(q_\alpha) = Pr(Y \leq q_\alpha) = \alpha$$

ตัวอย่างเช่น ควอนไทล์ที่ 5% ของ Y เขียนแทนด้วย $q_{0.05}$ จะเท่ากับค่าที่ทำให้ $F_Y(q_{0.05}) = Pr(Y \leq q_{0.05}) = 0.05$ และถ้า F_Y สามารถหาฟังก์ชันผกผันได้ ดังนั้น $q_\alpha = F_Y^{-1}(\alpha)$

ตัวอย่างที่ 2.8 การหาความน่าจะเป็นจากฟังก์ชันแจกแจงความถี่ กำหนดให้ $Y \sim N(0,1)$ ค่าควอนไทล์ของการแจกแจงแบบปกติมาตรฐานจะเท่ากับ

$$q_\alpha = \Phi^{-1}(\alpha) \tag{2.12}$$

โดยที่ Φ^{-1} คือฟังก์ชันผกผันของฟังก์ชันการแจกแจงสะสม Φ ซึ่งค่าควอนไทล์จะเป็นค่าที่แสดงในตารางสถิติในหนังสือเกือบทุกเล่ม โดยค่าดังกล่าว

$$q_{0.005} = \Phi^{-1}(0.005) = -2.58, q_{0.01} = \Phi^{-1}(0.01) = -2.33,$$

$$q_{0.025} = \Phi^{-1}(0.025) = -1.96, q_{0.05} = \Phi^{-1}(0.05) = -1.645$$

โดยทั่วไปค่าควอนไทล์ของการแจกแจงปกติมาตรฐานมักจะแทนด้วย Z_α อย่างไรก็ตามหนังสือบางเล่มอาจจะเขียนสัญลักษณ์ดังกล่าวแทนค่าควอนไทล์นับจากด้านบน (upper quantile) โดยที่ค่าควอนไทล์นับจากด้านบน 5% จะเท่ากับค่าควอนไทล์ 95 % เป็นต้น
ในโปรแกรม R เราสามารถคำนวณพื้นที่ใต้กราฟ pdf หรือ $Pr(Y < z)$ ด้วยคำสั่ง `pnorm(z)` โดยที่

$Pr(Y < -2)$ คำนวณได้โดย `pnorm(-2)` นอกจากนี้เราสามารถหาค่าควอนไทล์ที่ $100\alpha\%$ ได้ด้วยคำสั่ง `qnorm(`α`)` เช่น `qnorm(0.01)=-2.326`

2.2.2 คุณลักษณะเรื่องรูปร่างของการแจกแจงความน่าจะเป็น

ในการพิจารณาข้อมูลทางการเงิน เราสนใจเกี่ยวกับรูปร่างของการแจกแจงความน่าจะเป็นของตัวแปรสุ่มที่เราสนใจ เช่น เราต้องการที่จะทราบว่าค่ากลางของการแจกแจงอยู่ที่ตรงไหน หรือการแจกแจงมีการแผ่ขยายไปข้างๆอย่างไร นอกจากนี้เรายังสนใจว่าการแจกแจงมีความเป็นสมมาตรหรือไม่ มีรูปร่างที่เบ้ไปทางซ้ายหรือทางขวา หรือความน่าจะเป็นที่จะเกิดเหตุการณ์ที่ห่างจากค่ากลางมากๆ (extreme value) โดยเฉพาะค่าที่ติดลบมากๆ จากสิ่งที่เราสนใจที่ได้กล่าวมาแล้วคุณลักษณะด้านรูปร่างของการแจกแจงความน่าจะเป็นใดๆจะวัดได้ด้วยคุณลักษณะ 4 ประการ

1. ค่าคาดหมาย (expected value) หรือค่าเฉลี่ยเป็นการวัดค่ากลางของการแจกแจง
2. ความแปรปรวนและค่าเบี่ยงเบนมาตรฐานวัดการแผ่จากค่ากลาง
3. ความเบ้ (skewness) วัดความสมมาตรรอบๆค่ากลาง
4. ค่าความโด่ง (kurtosis) วัดความอ้วนของหาง

บทนิยาม 2.4 **ฟังก์ชันค่าคาดหมาย (mean function)**ของตัวแปรสุ่ม Y ใดๆ ใช้สัญลักษณ์ $E(Y)$ สามารถคำนวณได้ดังนี้ ในกรณีที่ Y เป็นตัวแปรสุ่มวิยุต ค่าคาดหมายจะเท่ากับ

$$\mu_Y = E(Y) = \sum_{y \in S_Y} y \times P(Y = y) \tag{2.13}$$

หรือในกรณีตัวแปรสุ่มต่อเนื่อง ค่าคาดหมายจะเท่ากับ

$$\mu_Y = E(Y) = \int_{-\infty}^{\infty} y f(y) dy \tag{2.14}$$

โดยที่ E คือสัญลักษณ์แทนค่าคาดหมาย (Expected value)

ค่าคาดหมายของฟังก์ชันของตัวแปรสุ่ม

ลักษณะเฉพาะอื่นด้านรูปร่างของการแจกแจงของตัวแปรสุ่ม Y มีพื้นฐานจากค่าคาดหมายของฟังก์ชันของ Y เช่นสมมุติให้ $g(Y)$ เป็นฟังก์ชันของ Y ถ้า Y เป็นตัวแปรสุ่มแบบ discrete แล้ว

$$E[g(Y)] = \sum_{y \in S_Y} g(y) P(Y = y)$$

และถ้า Y เป็นตัวแปรสุ่มแบบต่อเนื่องด้วย pdf $f(y)$ แล้ว

$$E[g(Y)] = \int_{-\infty}^{\infty} g(y)f(y)dy$$

ค่าความแปรปรวนและค่าเบี่ยงเบนมาตรฐาน

ค่าแปรปรวนของตัวแปรสุ่ม Y เขียนแทนด้วย $Var(Y)$ หรือ σ_Y^2 วัดการแผ่ของการแจกแจงจากค่าเฉลี่ย โดยที่ค่าแปรปรวนสามารถนิยามได้โดย

$$\sigma_Y^2 = Var(Y) = E\left[(Y-\mu_Y)^2\right] \tag{2.15}$$

นอกจากนี้มีอีกสูตรหนึ่งที่เรามักใช้บ่อยในการคำนวณค่าความแปรปรวน

$$\sigma_Y^2 = Var(Y) = E\left[Y^2\right] - \mu_Y^2 \tag{2.16}$$

เนื่องจากหน่วยวัดของค่าความแปรปรวนมีหน่วยที่แตกต่างจากตัวแปรสุ่ม Y ดังนั้น เรามักจะพิจารณาค่าเบี่ยงเบนมาตรฐานเขียนแทนด้วย $sd(Y)$ หรือ σ_Y ซึ่งเท่ากับค่ารากที่สองของค่าความแปรปรวน ($\sqrt{\sigma_Y^2}$)

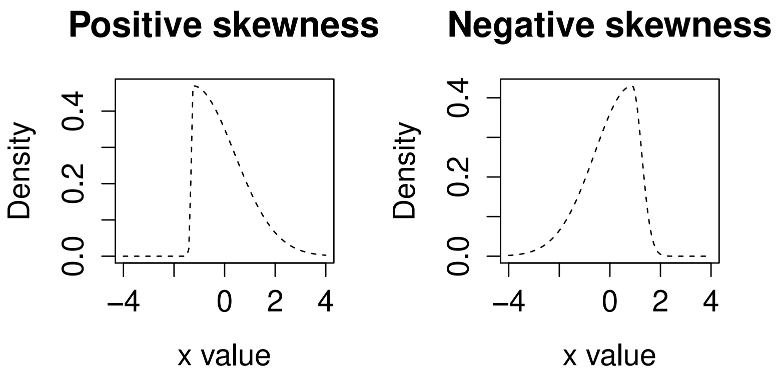
ค่าความเบ้

ค่าความเบ้ซึ่งสามารถเขียนแทนด้วย ($S(Y)$) วัดความสมมาตรรอบๆค่ากลาง สามารถทำได้โดย

$$S(Y) = \frac{E[(Y-\mu_Y)^3]}{\sigma_Y^3} \tag{2.17}$$

โดยที่หากค่าความเบ้เป็นศูนย์แสดงว่าการแจกแจงมีความสมมาตร ถ้าค่าความเบ้เป็นบวกแสดงว่าข้อมูลถูกดึงไปด้านขวาของการแจกแจง(หางไปทางขวา) แต่หากค่าความเบ้เป็นลบแสดงว่าข้อมูลถูกดึงไปทางซ้าย(หางไปทางซ้าย)ในแง่ของการลงทุนหากผลได้ตอบแทนถูกดึงไปด้านซ้าย แสดงว่ามีโอกาสที่เราจะได้ผลลัพธ์ที่สุดโต่งค่อนข้างมาก แต่ถ้าหางไปทางขวาโอกาสที่จะเกิดเหตุการณ์ร้ายที่รุนแรงค่อนข้างน้อย ตัวแปรสุ่มที่มีการแจกแจงแบบปกติจะมีค่าความเบ้เป็นศูนย์ เนื่องจากมีการแจกแจงที่เป็นสมมาตร

รูปที่ 2.3: ฟังก์ชันความถี่ความน่าจะเป็นที่ไม่สมมาตร



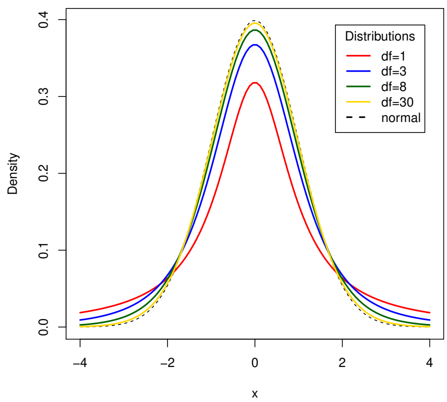
ค่าความโด่ง

ค่าความโด่งใช้วัดความหนาของหางของการแจกแจงซึ่งสามารถเขียนแทนได้ด้วย $K(Y)$ และสามารถคำนวณได้จาก

$$K(Y) = \frac{E[(Y-\mu_Y)^4]}{\sigma_Y^4} \tag{2.18}$$

เนื่องจากค่าความโด่งเป็นการหาความแตกต่างจากค่ากลางโดยการยกกำลัง 4 ดังนั้นค่าที่ห่างจากจุดศูนย์กลางมากๆจะทำให้ค่าถ่วงน้ำหนักสูงขึ้น และค่าความโด่งสูง ในทางตรงข้ามหากค่าความโด่งต่ำแสดงว่าข้อมูลกระจุกตัวอยู่ตรงกลางและมีโอกาสน้อยที่จะพบข้อมูลที่มีค่าสุดโต่ง ค่าความโด่งของตัวแปรสุ่มที่มีการแจกแจงปกติเท่ากับ 3 โดยเรามักใช้ค่าความโด่งดังกล่าวเป็นมาตรฐานความหนาของหาง หากการแจกแจงใดมีค่าความโด่งมากกว่า 3 แสดงว่าการแจกแจงนั้นมีหางที่อ้วนกว่า (thicker tail)การแจกแจงแบบปกติ แต่ถ้าการแจกแจงมีความความโด่งน้อยกว่า 3 แสดงว่าการแจกแจงมีหางที่ผอมกว่าการแจกแจงปกติ

รูปที่ 2.4: การแจกแจงแบบที



บางครั้งเราแสดงค่าความโด่งในรูปความโด่งเปรียบเทียบกับการแจกแจงปกติ โดยค่าดังกล่าวเรียกว่าความโด่งส่วนเกิน (excess kurtosis) โดย excess $K(Y) = K(Y) - 3$ ถ้าค่าความโด่งส่วนเกินเท่ากับศูนย์แสดงว่าตัวแปรสุ่มมีค่าความโด่งเท่ากับการแจกแจงปกติ ถ้าค่าความโด่งส่วนเกินเป็นบวกแสดงว่าการแจกแจงนั้นมีหางที่อ้วนกว่าการแจกแจงแบบปกติ

ค่าความโด่งของการแจกแจงปกติเป็นเกณฑ์มาตรฐานสำหรับความหนาของหางของการแจกแจงที่เป็นสมมาตร ตัวอย่างการแจกแจงอื่นที่มีลักษณะสมมาตรและมีหางที่อ้วนกว่าการแจกแจงแบบปกติคือ **การแจกแจงแบบที (Student's t)** โดยที่ถ้า Y มีการแจกแจกแบบทีด้วยองศาเสรี (degree of freedom) v จะมีค่าเฉลี่ยเท่ากับ 0, ค่าความแปรปรวนเท่ากับ $v/v-2$ โดยที่ $v > 2$, ค่าความเบ้เท่ากับ 0, และค่าความโด่งเท่ากับ $\frac{6}{(v-4)} - 4$ โดยที่ $v > 4$ เราจะเห็นได้ว่าองศาเสรี v เป็นตัวกำหนดการแผ่และความหนาของหางของการแจกแจง ถ้าค่าองศาเสรี v เข้าใกล้ 4 การแจกแจงจะมีหางที่อ้วนมาก แต่ถ้าค่าองศาเสรี v มีค่าเข้าใกล้อนันต์ ฟังก์ชันการแจกแจง(pdf)ของการแจกแจงทีจะมีลักษณะเข้าใกล้ฟังก์ชันการแจกแจง(pdf)ของการแจกแจงปกติ การแจกแจงความน่าจะเป็นแบบทีสำหรับค่าองศาเสรีที่ต่างกันสามารถดูไปจากรูปที่ 2.4

ตัวประมาณค่า(estimator) ของค่าคุณลักษณะของการแจกแจง

ในการประยุกต์เราสามารถประมาณค่าเฉลี่ย ค่าความแปรปรวน ค่าความเบ้และค่าความโด่งได้ด้วยข้อมูลจากกลุ่มตัวอย่าง สมมุติให้เราสุ่มตัวอย่าง $y_1,...,y_T$ ซึ่งมีขนาดเท่ากับ T ค่าเฉลี่ยของตัวอย่าง (sample mean) สามารถคำนวณได้โดย

$$\hat{\mu}_Y = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} y_t \tag{2.19}$$

ค่าความแปรปรวนของตัวอย่างสามารถคำนวณได้โดย

$$\hat{\sigma}_Y^2 = \frac{1}{T-1}\sum_{t=1}^{T}(y_t - \hat{\mu}_Y)^2 \tag{2.20}$$

ค่าความเบ้ของตัวอย่าง (sample skewness) สามารถคำนวณได้โดย

$$\hat{S}(Y) = \frac{1}{(T-1)\hat{\sigma}_Y^3}\sum_{t=1}^{T}(y_t - \hat{\mu}_Y)^3 \tag{2.21}$$

และค่าความโด่งของตัวอย่าง (sample kurtosis) สามารถคำนวณได้โดย

$$\hat{K}(Y) = \frac{1}{(T-1)\hat{\sigma}_Y^4}\sum_{t=1}^{T}(y_t - \hat{\mu}_Y)^4 \tag{2.22}$$

การทดสอบสมมุติฐาน

ภายใต้ข้อสมมุติที่ว่า Y_t มีการแจกแจงแบบปกติ $N(0,\sigma^2)$ ค่าเฉลี่ยของตัวอย่างจะมีการแจกแจงแบบปกติ $N(0,\frac{\sigma^2}{T})$ ดังนั้นในการทดสอบสมมุติฐานที่ว่าค่าเฉลี่ยของประชากรมีค่าเท่ากับศูนย์หรือไม่ เราสามารถทำได้โดยใช้ค่าสถิติสัดส่วน t (t-ratio)

$$t = \frac{\hat{\mu}_Y}{\hat{\sigma}_Y/\sqrt{T}}$$

โดยเราจะปฏิเสธสมมุติฐานหลักด้วยระดับนัยสำคัญ(significant level) α หรือความเชื่อมั่น $(1-\alpha/2)100\%$ ถ้า $|t| > Z_{1-\alpha/2}$ โดยที่ $Z_{1-\alpha/2}$ คือค่าควอนไทล์ที่ $100(1-\alpha/2)\%$ ของการแจกแจงปกติมาตรฐาน (standard normal)

ค่าความเบ้ของตัวอย่าง $(\hat{S}(Y))$ จะมีการแจกแจงเมื่อกลุ่มตัวอย่างใหญ่เข้าใกล้การแจกแจงปกติโดยมีค่าเฉลี่ยเท่ากับศูนย์และค่าความแปรปรวนเท่ากับ $6/T$ ส่วนค่าความโด่งส่วนเกินของตัวอย่าง $(\hat{K}(Y)-3)$ จะมีการแจกแจงเมื่อกลุ่มตัวอย่างใหญ่เข้าใกล้การแจกแจงปกติโดยมีค่าเฉลี่ยเท่ากับศูนย์และค่าความแปรปรวนเท่ากับ $24/T$ ซึ่งคุณสมบัติทั้งสองนำมาใช้ในการทดสอบว่าตัวแปรสุ่ม Y_t มีการแจกแจงแบบปกติหรือไม่ โดยหากตัวแปรสุ่มมีการแจกแจงแบบปกติค่าความเบ้และค่าความโด่งส่วนเกินจะต้องเท่ากับศูนย์

กำหนดให้เรามีข้อมูลผลได้ตอบแทน $y_1,...,y_T$ และต้องการทดสอบความเบ้ว่าเท่ากับศูนย์หรือไม่ เราจะตั้ง

สมมุติฐานหลักว่า $H_0 : S(Y) = 0$ และสมมุติฐานทางเลือกว่า $H_1 : S(Y) \neq 0$ โดยมีตัวสถิติสัดส่วน t (t-ratio)

$$t = \frac{\hat{S}(Y)}{\sqrt{6/T}}$$

โดยเราจะปฏิเสธสมมุติฐานหลักที่ระดับนัยสำคัญ α ถ้า $|t| > Z_{1-\alpha/2}$ โดยที่ $Z_{1-\alpha/2}$ คือค่าควอนไทล์ที่ $100(1-\alpha/2)\%$ ของการแจกแจงปกติมาตรฐาน หรือเราอาจจะใช้การคำนวณค่าพี (p-value)

เราสามารถทดสอบค่าความโด่งส่วนเกินได้ด้วยการตั้งสมมุติฐานว่า $H_0 : \hat{K}(Y) - 3 = 0$ และ $H_1 : \hat{K}(Y) - 3 \neq 0$ และมีตัวสถิติคือ

$$t = \frac{\hat{K}(Y) - 3}{\sqrt{24/T}}$$

โดยเราจะปฏิเสธสมมุติฐานหลักที่ระดับนัยสำคัญ α ถ้า $|t| > Z_{100-\alpha/2}$ โดยที่ $Z_{100-\alpha/2}$ คือค่าควอนไทล์ที่ $100(1-\alpha/2)$ ของการแจกแจงปกติมาตรฐาน

Jarque and Bera (1987) ได้รวมการทดสอบของค่าสถิติทั้งสอบเข้าด้วยกันและเสนอตัวสถิติ

$$JB = \frac{\hat{S}^2(Y)}{6/T} + \frac{[\hat{K}(Y) - 3]^2}{24/T}$$

ซึ่งมีการแจกแจงเมื่อกลุ่มตัวอย่างใหญ่เข้าใกล้ไคกำลังสอง(χ^2)ที่มีองศาอิสระเท่ากับ 2 โดยเราจะปฏิเสธสมมุติฐานหลักที่ระดับนัยสำคัญ α ถ้า $JB > \chi^2_{(1-\alpha),df=2}$ โดยที่ $\chi^2_{(1-\alpha),df=2}$ คือค่าควอนไทล์ที่ $100(1-\alpha)\%$ ของการแจกแจงไคกำลังสองที่มีองศาอิสระเท่ากับ 2

นอกจากนี้เรายังมีวิธีการที่เป็นที่นิยมอันหนึ่งคือการวาดแผนภาพ Normal quantile-quantile หรือเรียกย่อๆว่า QQ plot โดยเป็นการวาดจุด (scatterplot) ค่าที่เรียงจากต่ำ (quantile) ของอนุกรมเวลา y_t กับค่าที่เรียงจากต่ำของตัวแปรสุ่มที่มีการแจกแจงแบบปกติ ดังนั้นถ้าจุดดังกล่าวอยู่ใกล้กับเส้น 45 องศาแสดงว่ากระบวนการ y_t มีการแจกแจงแบบปกติ

ตัวอย่างที่ 2.9 การคำนวณคุณลักษณะทางสถิติและการทดสอบสำหรับผลได้ตอบแทนของหลักทรัพย์ ปตท. ตัวอย่างนี้ใช้ข้อมูลผลได้ตอบแทนในรูปลอการิทึมจากตัวอย่าง 2.6) ในหัวข้อนี้เราจะคำนวณค่าสถิติเบื้องต้นของ `ptt$lret` โดยใช้ชุดคำสั่ง fBasics ซึ่งฟังก์ชัน `basicStats` จะคำนวณสถิติเบื้องต้นที่เราสนใจ ดังคำสั่งข้างล่าง

```
> library(fBasics)
> basicStats(ptt.lret)
> basicStats(ptt.lret)
                ptt.lret
nobs          4444.00000
NAs              0.00000
Minimum       -235.54443
Maximum        231.03634
1. Quartile     -0.95695
3. Quartile      1.02085
Mean             0.05745
Median           0.00000
Sum            255.30882
```

```
SE Mean          0.49201
LCL Mean        -0.90714
UCL Mean         1.02205
Variance      1075.79844
Stdev           32.79937
Skewness         0.01196
Kurtosis        46.02838
```

จะเห็นได้ว่าค่าเฉลี่ยของผลได้ตอบแทนในรูปล็อกมีค่าเท่ากับ 0.057 % ต่อวัน ค่าเบี่ยงเบนมาตรฐานเท่ากับ 32.799 ค่าความเบ้ของตัวอย่าง (sample skewness) เท่ากับ 0.012 และค่าความโด่งส่วนเกินของตัวอย่าง (sample excess kurtosis) เท่ากับ 46.028 [`Kurtosis` ที่รายงานใน R เป็นค่าความโด่งส่วนเกินของตัวอย่าง]

การทดสอบค่าเฉลี่ย

หากต้องการทราบว่าค่าเฉลี่ยของผลได้ตอบแทนมีค่าต่างจากศูนย์หรือไม่ก็สามารถทำได้โดยการคำนวณตัวสถิติ t โดยที่จำนวนตัวอย่างเท่ากับ `nobs-NA` (จำนวนตัวอย่าง-จำนวนข้อมูลที่ไม่มี) = 4444-0=4444 ดังนั้นค่าสถิติ t จะเท่ากับ

$$t = \frac{0.057}{32.799/\sqrt{4444}} = 0.1159$$

เมื่อเปรียบเทียบกับค่า $Z_{1-0.05/2} = 1.96$ ค่าดังกล่าวสามารถคำนวณได้โดย `qnorm(0.975)` เราพบว่าค่า $|t| < 1.96$ ดังนั้นเราไม่สามารถปฏิเสธสมมุติฐานหลักว่า "ค่าเฉลี่ยของผลได้ตอบแทนมีค่าเท่ากับศูนย์" นอกจากนี้เราสามารถทดสอบค่าเฉลี่ยเท่ากับศูนย์ได้ด้วยฟังก์ชัน `t.test`

```
> t.test(ptt.lret)

        One Sample t-test

data:  ptt.lret
t = 0.12, df = 4443, p-value = 0.9
alternative hypothesis: true mean is not equal to 0
95 percent confidence interval:
 -0.9071  1.0220
sample estimates:
mean of x
  0.05745
```

จะเห็นได้ว่าฟังก์ชันดังกล่าวคำนวณค่า $t = 0.12$ และค่าพี (p-value) เท่ากับ 0.9 ซึ่งเราไม่สามารถปฏิเสธสมมุติฐานหลักที่นัยสำคัญเท่ากับ 0.05

การทดสอบความเป็นสมมาตร

จากค่าความเบ้ของตัวอย่าง เราสามารถคำนวณค่าสถิติ t ที่ใช้ทดสอบ H_0 ว่าข้อมูลมีความสมมาตร ($S(Y) = 0$) ได้เท่ากับ

$$t = \frac{0.012}{\sqrt{6/4444}} = 0.3266$$

เมื่อเปรียบเทียบกับค่า $|t|$ กับ $Z_{1-0.05/2} = Z_{0.975} = 1.96$ เราจะได้ $|t| < Z_{0.975} = 1.96$ เราจึงไม่สามารถปฏิเสธ H_0 ที่ว่าผลได้ตอบแทนในรูปล็อกมีลักษณะสมมาตร ที่ระดับความเชื่อมั่น 95 %

การทดสอบความหนาของหาง

$$t = \frac{46.028}{\sqrt{24/4444}} = 626.3$$

เมื่อเปรียบเทียบกับค่า $|t|$ กับ $Z_{1-0.05/2} = Z_{0.975} = 1.96$ เราจะได้ $|t| > Z_{0.975} = 1.96$ เราจึงปฏิเสธสมมุติฐานหลัก H_0 ที่ว่าผลได้ตอบแทนในรูปล็อกมีความหนาของหางเท่ากับการแจกแจงแบบปกติ และจากค่าความโด่งของตัวอย่างเราสามารถอนุมานได้ว่าการแจกแจงมีลักษณะเป็นหางอ้วน (ความโด่งส่วนเกินมากกว่าศูนย์)

การทดสอบการแจกแจงปกติ

$$JB = \frac{0.012^2}{6/4444} + \frac{46.028^2}{24/4444} = 392290$$

เมื่อเปรียบเทียบกับค่า $JB > 5.99 (= \chi^2_{0.95,df=2})$ ค่าดังกล่าวสามารถคำนวณโดยใช้ฟังก์ชัน `qchisq(1-0.05,2)` เราจึงปฏิเสธสมมุติฐานหลัก H_0 ที่ว่าผลได้ตอบแทนในรูปล็อกมีการแจกแจงเป็นแบบปกติ โดยการทดสอบข้างต้นสามารถใช้คำสั่ง `normalTest` ใน package fBasics โดยที่ระบุ argument คือ ตัวแปรที่ต้องการทดสอบ `ptt.lret` และวิธีการทดสอบ `method="jb"` สำหรับการทดสอบ Jarque-Bera ซึ่งคำสั่งและผลสามารถแสดงได้ดังนี้

```
> normalTest(ptt.lret, method="jb")

Title:
 Jarque - Bera Normalality Test

Test Results:
  STATISTIC:
    X-squared: 392672.7583
  P VALUE:
    Asymptotic p Value: < 2.2e-16
```

การทดสอบดังกล่าวได้ค่าต่างจากการคำนวณด้วยมือเล็กน้อยเนื่องจากการปัดเศษ นอกจากนี้ในการทดสอบโปรแกรมจะคำนวณค่าพีซึ่งมีค่าน้อยมาก ($< 2.2 \times 10^{-16}$) ดังนั้นเราจึงปฏิเสธสมมุติฐานหลักด้วยนัยสำคัญใดๆมากกว่า 2.2×10^{-16} %

การแจกแจงของผลได้ตอบแทน

โดยทั่วไปแล้ว เรามักจะสมมุติให้พิจารณาผลได้ตอบแทนในรูปของล็อกและมักจะสมมุติให้มีการแจกแจงแบบปกติ นักศึกษาบางคนอาจจะสงสัยว่าทำไมไม่ใช้ผลได้ตอบแทนอย่างง่าย โดยเราสามารถตอบคำถามดังกล่าวได้โดยการสมมุติให้ ผลได้ตอบแทนอย่างง่ายมีการแจกแจงแบบปกติ $R_t \sim N(0.05, (0.5)^2)$ ซึ่งเราทราบว่าราคาสินทรัพย์ใดๆจะมีค่าติดลบไม่ได้ดังนั้น R_t จะต้องมีค่ามากกว่า -1 ซึ่งหากพิจารณาจากข้อสมมุติการแจกแจงปกติจะเห็นได้ว่า $Pr(R_t < -1) = Pr(\frac{R_t - 0.05}{0.5} < \frac{-1-0.5}{0.5}) = Pr(Z < -2.1) = 0.018$ หรือมีโอกาส 1.8 % ที่ราคาหุ้นจะติดลบ ซึ่งเป็นไปไม่ได้ ดังนั้นหารเราสมมุติให้ผลได้ตอบแทนในรูปลอการิทึมมีการแจกแจงแบบปกติจะเหมาะสมกว่า เช่น $\ln(1+R_t) = r_t \sim N(0.05, (0.5)^2)$ โดยในกรณีผลได้ตอบแทนในรูปล็อกสามารถจะมีค่าน้อยกว่า -1 ได้ ยกตัวอย่าง หาก $r_t = -2$ จะสัมพันธ์กับผลได้ตอบแทนอย่างง่าย $R_t = \exp(-2) - 1 = -0.865$ ซึ่งมีโอกาสที่จะเกิดขึ้นเท่ากับ $Pr(r_t \le -2) = Pr(\frac{r_t - 0.05}{0.5} < \frac{-2-0.05}{0.5} Pr(Z < -4.1) = 0.00002$ ดังนั้นในแบบจำลองในหัวข้อต่อๆไปเวลาเราพูดถึงผลได้ตอบแทนเรามักจะใช้ผลได้ตอบแทนในรูปล็อก (log return)

ฟังก์ชันเส้นตรงของตัวแปรสุ่ม

หากกำหนดให้ X เป็นตัวแปรสุ่มที่มี $E[X] = \mu_X$ และ $Var(X) = \sigma_X^2$ และ a และ b เป็นค่าคงที่ หากเรากำหนดตัวแปรสุ่มใหม่ Y เป็นฟังก์ชันเส้นตรงกับตัวแปรสุ่ม X โดยที่ $Y = a + bX$ แล้ว

- $\mu_Y = E(Y) = a + bE(X) = a + b\mu_X$
- $\sigma_Y^2 = Var(Y) = b^2 Var(X) = b^2 \sigma_X^2$

ฟังก์ฟันค่าแปรปรวนร่วมในตัว (Autocovariance function)

ฟังก์ชันที่ใช้ในการสรุปความสัมพันธ์ขึ้นอยู่ต่อกันตามเวลา (temporal dependence) ในข้อมูลอนุกรมเวลาคือฟังก์ฟันค่าแปรปรวนร่วมในตัวซึ่งสามารถคำนวณได้โดย

$$\begin{aligned} \gamma_{k,t} &= Cov(Y_t, Y_{t-k}) = E\left((y_t - E(Y_t))(y_{t-k} - E(Y_{t-k}))\right) \\ &= E(y_t y_{t-k}) - E(Y_t)E(Y_{t-k}) \quad \text{for} \quad k = 0, 1, 2, \ldots \end{aligned} \tag{2.23}$$

โดยสมการดังกล่าวสอดคล้องกับค่าแปรปรวนร่วม (covariance) ระหว่างตัวแปรสุ่มสองตัวใดๆ

บทนิยาม 2.5 **อนุกรมเวลาคงที่อย่างเข้ม (Strict stationary)** อนุกรมเวลา Y_t ใดๆจะถูกเรียกว่าอนุกรมเวลาคงที่อย่างเข้ม (strictly stationary) ถ้าการแจกแจงร่วม (joint distribution) ของ $(y_{t_1}, \ldots, y_{t_k})$ เหมือนกันกับการแจกแจงร่วมของตัวแปรที่ห่างออกไป t คาบ $(y_{t_1+t}, \ldots, y_{t_k+t})$ สำหรับทุกค่าของ t

บทนิยาม 2.6 **อนุกรมเวลาคงที่อย่างอ่อน (weakly stationary) หรืออนุกรมเวลาคงที่ค่าความแปรปรวน (covariance stationary)** ข้อมูลอนุกรมเวลา Y_t ใดๆ จะเรียกว่าเป็นอนุกรมเวลาคงที่อย่างอ่อน (Weakly stationary) หรืออนุกรมเวลาคงที่ (stationary) ถ้ามีคุณสมบัติดังนี้

1. $E(Y_t) = \mu$
2. $Var(Y_t) = \sigma^2 < \infty$
3. $\gamma_{k,t} = \gamma_k = Cov(Y_t, Y_{t-k})$ for all k and t

โดยสรุปแล้วอนุกรมจะมีค่าเฉลี่ยคงที่, ค่าแปรปรวนคงที่และจำกัด (finite) และฟังก์ฟันค่าแปรปรวนร่วมในตัวเป็นฟังก์ชันที่ขึ้นกับค่าล่าเท่านั้นและเป็นอิสระกับเวลา

บทนิยาม 2.7 **Ergodic** อนุกรมเวลาใดๆ จะเป็นอนุกรมเวลาเออร์โกดิก (ergodic) ถ้าค่าโมเมนต์ของตัวอย่างมีค่าลู่เข้าในความน่าจะเป็น (converge in probability) ไปสู่ค่าโมเมนต์ของประชากร ตัวอย่างเช่น

$$\bar{y} \xrightarrow{p} \mu$$
$$\widehat{\gamma}_j \xrightarrow{p} \gamma_j$$
$$\widehat{\rho}_j \xrightarrow{p} \rho_j$$

ฟังก์ชันสหสัมพันธ์ในตัวหรือเอซีเอฟ (Autocorrelation function; ACF)

ในการวิเคราะห์สถิติทั่วไปเรามักจะสนใจสัมประสิทธิ์สหสัมพันธ์ (correlation coefficient) มากกว่าค่าแปรปรวนร่วม(covariance)เนื่องจากปราศจากผลของหน่วยของข้อมูล ดังนั้น **ฟังก์ชันสหสัมพันธ์ในตัวที่ช้ากว่ากัน k คาบเวลา** สำหรับอนุกรมที่เป็นอนุกรมเวลาคงที่จะคำนวณได้จาก

$$\rho_k = \frac{Cov(Y_t, Y_{t-k})}{[Var(Y_t)Var(Y_{t-k})]^{1/2}}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots \tag{2.24}$$

โดยที่ $\rho_0 = 1$ และ $|\rho_k| \leq 1$ สำหรับทุกค่า k. สำหรับข้อมูลที่เป็นอนุกรมเวลาคงที่ ค่าความแปรปรวนจะมีค่าเท่ากับทุกช่วงเวลา หรือ $Var(Y_t) = Var(Y_{t-k}) = \gamma_0$ ดังนั้น

$$\rho_k = \frac{\gamma_k}{\gamma_0}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots \tag{2.25}$$

เนื่องจากฟังก์ชันฟังก์ฟันค่าแปรปรวนร่วมในตนเองมีความเป็นสมมาตรดังนั้น $\gamma_k = \gamma_{-k}$ และ $\rho_k = \rho_{-k}$ นอกจากนี้กราฟที่แสดงค่าฟังก์ชันสหสัมพันธ์ในตัวในแกนตั้งและค่าล่า k ในแกนนอนเราจะเรียกว่า*โครีโลแกรม (Correlogram)* โดยสรุปแล้วการพิจารณาว่าอนุกรมเวลาคงที่หรือไม่ก็จะพิจารณาจากค่าเฉลี่ย, ค่าความแปรปรวนและฟังก์ชันสหสัมพันธ์ในตัว

นอกจากนี้เรายังมีคุณสมบัติที่น่าสนใจว่าฟังก์ชันของอนุกรมเวลาคงที่ก็จะเป็นอนุกรมเวลาคงที่ด้วย เช่นถ้า Y_t เป็นอนุกรมเวลาคงที่แล้ว $Z_t = g(Y_t)$ ก็จะเป็นอนุกรมเวลาคงที่ด้วย

เราสามารถคำนวณค่าแปรปรวนร่วมในตัวที่ช้ากว่ากัน k คาบเวลาของตัวอย่าง (lag k^{th} sample autocovariance) และสหสัมพันธ์ในตัวที่ช้ากว่ากัน k คาบเวลาของตัวอย่าง (lag k^{th} sample autocorrelation) ได้

จากสูตรดังต่อไปนี้

$$\hat{\gamma}_k = \frac{1}{T}\sum_{t=k+1}^{T}(y_t - \bar{Y})(y_{t-k} - \bar{Y}) \tag{2.26}$$

และ

$$\hat{\rho}_k = \frac{\hat{\gamma}_k}{\hat{\gamma}_0} \tag{2.27}$$

โดยที่ $\bar{Y} = \frac{1}{T}\sum_t^T y_t$ คือค่าเฉลี่ยของตัวอย่าง โดยที่ฟังก์ชันสหสัมพันธ์ร่วมในตนเองของตัวอย่าง (sample ACF) จะวาด $\hat{\rho}_k$ กับ k

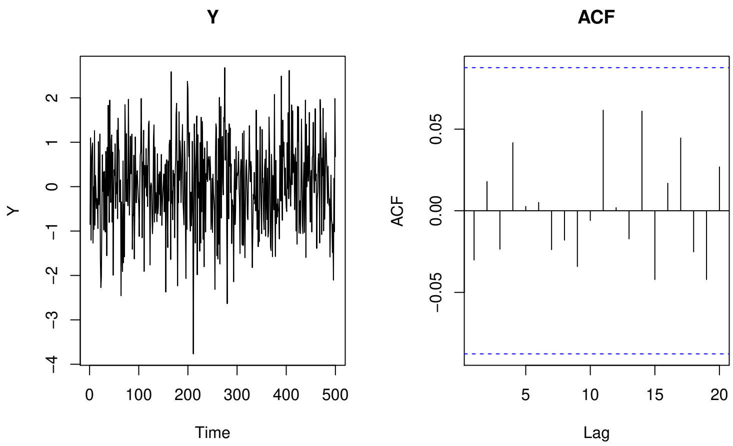
ตัวอย่างหนึ่งของอนุกรมเวลานิ่งคือ กระบวนการเกาซเซียนไวทนอซที่เป็นอิสระต่อกัน (independent Gaussian white noise process) โดยที่เกาซเซียนหมายถึงการแจกแจงเป็นปกตินั่นเอง ถ้ากระบวนการ y_t มีการแจกแจงแบบเกาซเซียนไวทนอซที่เป็นอิสระต่อกันโดยมีค่าเฉลี่ยเท่ากับ 0 และค่าความแปรปรวนเท่ากับ σ^2 กระบวนการ y_t จะมีค่าเฉลี่ยเท่ากับ 0 นอกจากนี้ค่าความแปรปรวนร่วมในตัวเองและสหสัมพันธ์ในตัวเองก็จะเท่ากับ 0

เราสามารถสร้างข้อมูลที่เป็นเกาซเซียนไวทนอซที่มีจำนวนตัวอย่างเท่ากับ 500 ได้ด้วยคำสั่ง rnorm ใน R

```
> set.seed(123456)
> y=rnorm(500,0,1)
> library(TSA)
> par(mfrow=c(1,2))
> plot.ts(y,ylab="Y",main="Y")
> acf(y,lag.max=20,main="ACF")
```

จะได้แผนภาพดังนี้

รูปที่ 2.5: ข้อมูลเกาซเซียนไวทนอซและฟังก์ชันสหสัมพันธ์ในตัว



ในโปรแกรม R แผนภาพสำหรับฟังก์ชันสหสัมพันธ์ในตัวจะมีเส้นประแสดงความเชื่อมั่น 95% จาก 0 ให้เสมอ โดยที่เส้นประดังกล่าวมีพื้นฐานจากการที่ $y_t \sim iidN(0,\sigma^2)$ ดังนั้น

$$\hat{\rho}_k \overset{a}{\sim} N(0, \frac{1}{T}), \quad \text{for} \quad k > 0$$

หมายความว่าการแจกแจงของ $\hat{\rho}_k$ มีประมาณใกล้เคียงกับการแจกแจงแบบปกติที่มีค่าเฉลี่ยเท่ากับ 0 และค่า

แปรปรวนเท่ากับ $\frac{1}{T}$ และเมื่อใช้ผลจาก central limit theorem เราจะได้ว่า $\sqrt{T}\hat{\rho}_k \xrightarrow{d} N(0,1)$ และเส้นประที่แสดงค่าขอบเขตความเชื่อมั่น 95% ที่ค่าสหสัมพันธ์ในตัวเท่ากับศูนย์จะเท่ากับ $\pm\frac{1.96}{\sqrt{T}}$ ดังนั้นหากค่าสหสัมพันธ์ในตัวของตัวอย่าง ณ คาบล่าช้า k ใดๆอยู่เกินจากขอบเขตดังกล่าวแสดงว่าค่าสหสัมพันธ์ในตัวมีค่าแตกต่างจากศูนย์อย่างมีนัยสำคัญด้วยความเชื่อมัน 95%

ในกรณีที่ $y_t = \mu + \sum_{i=1}^{q} \psi_i \varepsilon_{t-i}$ โดยที่ $\varepsilon_i \sim iid(0,\sigma^2)$ การแจกแจงจะเปลี่ยนไปเป็น

$$\hat{\rho}_k \overset{a}{\sim} N(0, \frac{(1+2\sum_{i=1}^{k-1}\rho_i^2)}{T}), \quad \text{for} \quad k>0$$

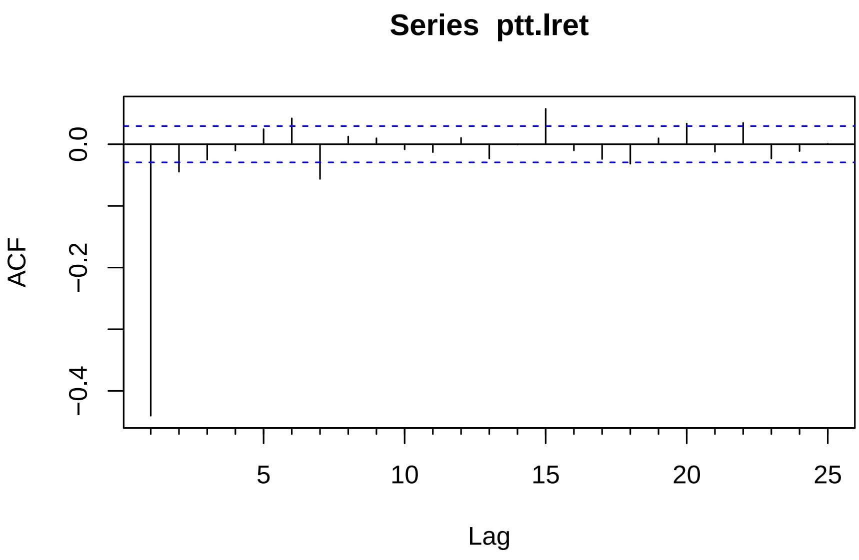
และทำให้ตัวสถิติที่ใช้ในการทดสอบ $H_0 : \rho_k = 0$ กับ $H_1 : \rho_k \neq 0$ เปลี่ยนไปเป็น $\frac{\hat{\rho}_k}{\sqrt{(1+2\sum_{i=1}^{k-1}\rho_i^2)/T}}$ แต่อย่างไรก็ตามโปรแกรมสำเร็จรูปส่วนมากยังใช้ $\sqrt{T}\hat{\rho}$ ในการทดสอบอยู่

ตัวอย่างการคำนวณฟังก์ชันสหสัมพันธ์ในตัว (หรือเอซีเอฟ) ของผลได้ตอบแทนในรูปล็อกของ PTT

เราพิจารณาผลได้ตอบแทนในรูปล็อกของหุ้น PTT ต่อจากตัวอย่างที่แล้ว โดยเราสามารถคำนวณค่าสหสัมพันธ์ในตัวได้ด้วยฟังก์ชัน `acf` โดยเรากำหนดให้ argument `lag.max` คือจำนวนคาบย้อนหลังสูงสุดที่เราพิจารณา โดยเราจะได้โครีโลแกรมของผลได้ตอบแทนในรูปล็อก แต่แผนภาพดังกล่าวจะรวม ฟังก์ชันสหสัมพันธ์ในตัวที่ค่าความล่าเท่ากับศูนย์ (ρ_0) ซึ่งเท่ากับ 1 ไว้เสมอ ซึ่งทำให้เราอ่านค่าอื่นๆได้ยาก ดังนั้นเราสามารถเรียกใช้ฟังก์ชัน `Acf` หลังจากเรียกชุดคำสั่ง FORECAST ซึ่งผลปรากฏในรูปด้านขวา โดยที่ lag ที่ 1,2,6,7, 15 มีความสูงเกินจากเส้นประ ($\pm 2/\sqrt{T}$) แสดงว่าค่าสหสัมพันธ์ในตัว ณ ค่าล่าข้างต้นมีความแตกต่างจากศูนย์อย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่นัยสำคัญเท่ากับ 5 %

```
> acf(lret, lag.max=25)
> library(forecast)
> Acf(lret, lag.max=25)
```

รูปที่ 2.6: ฟังก์ชันสหสัมพันธ์ในตัวของผลได้ตอบแทนในรูปล็อกของ PTT



2.2.3 การทดสอบพอรทแมนโท (Portmanteau test) สำหรับสหสัมพันธ์ในตัว

ในการวิเคราะห์ข้อมูลทางการเงิน เรามักจะเริ่มต้นด้วยการทดสอบว่าข้อมูลมีสหสัมพันธ์ในตัวหลาย ๆ คาบ (k) ว่าเท่ากับ 0 พร้อมๆกันหรือไม่ Box and Pierce (1970) ได้เสนอตัวสถิติพอรทแมนโทที่คำนวณดังสูตรต่อไปนี้

$$Q^*(m) = T\sum_{k=1}^{m}\hat{\rho}_k^2 \tag{2.28}$$

ในการทดสอบสมมุติฐานหลัก $H_0 : \rho_1 = ... = \rho_m = 0$ กับสมมุติฐานทางเลือก $H_1 : \rho_i \neq 0$ สำหรับค่าสหสัมพันธ์ในตัวเองบางคาบย้อนหลังใน $i \in 1, 2, ..., m$ โดยภายใต้ข้อสมมุติว่า Y_t เป็นลำดับที่แจกแจงเป็นอิสระและเหมือนกัน (identical independent distribution: iid) แล้ว $Q^*(m)$ จะมีการแจกแจงเชิงเส้นกำกับ (asymptotically) เป็นไคกำลังสอง (chi-square)ที่มีองศาเสรีเท่ากับ m หรือเขียนเป็นสัญลักษณ์ χ^2_m

Ljung and Box (1978) ได้ปรับปรุงตัวสถิติ $Q^*(m)$ โดยการเพิ่มพลัง(power)ในการทดสอบเมื่อมีตัวอย่างจำกัดโดยเสนอตัวสถิติ

$$Q(m) = T(T+2)\sum_{k=1}^{m}\frac{\hat{\rho}_k^2}{T-k} \tag{2.29}$$

โดยเราจะตัดสินใจปฏิเสธสมมุติฐานหลัก $H_0 : \rho_1 = ... = \rho_m = 0$ ถ้า $Q(m) > \chi^2_{1-\alpha,m}$ โดยที่ $\chi^2_{1-\alpha,m}$ แสดงถึงควอนไทล์ที่ $100(1-\alpha)$ ของการแจกแจงไคกำลังสองที่มีองศาเสรี m หรือโปรแกรมสำเร็จรูปส่วนมากก็รายงานค่าพี (p-value) เราก็จะปฏิเสธ H_0 ถ้าค่าพีน้อยกว่าระดับนัยสำคัญ α

ในทางปฏิบัติการเลือกค่า m จะส่งผลต่อความสามารถในการทดสอบ ดังนั้นงานศึกษาเชิงประจักษ์ส่วนใหญ่มักจะรายงานค่า Ljung-Box $Q(m)$ หลายๆค่าเช่น $m = 5, 10, 20$ หรืองานวิจัยบางงานพบว่าค่า $m = \ln(T)$ ให้ผลการทดสอบที่ดี

ตัวอย่างการทดสอบพอรทแมนโทของผลได้ตอบแทนของ PTT

ฟังก์ชันที่ใช้ในการทดสอบพอรทแมนโทคือ `Box.test` โดยเราต้องกำหนด argument คือ ข้อมูลที่ใช้ทดสอบ, จำนวนคาบที่รวมมาทดสอบ (m) และชนิดของการทดสอบ (`type="Ljung"`) สำหรับ Ljung and Box (1978)

```
> Box.test(ptt.lret, lag=5, type="Ljung")

        Box-Ljung test

data:  ptt.lret
X-squared = 877, df = 5, p-value <2e-16
```

จากการทดสอบจะเห็นได้ว่า $Q(5) = 877$ และค่าพีน้อยกว่า 2×10^{16} ซึ่งเราสามารถปฏิเสธ H_0 ที่ว่าฟังก์ชันสหสัมพันธ์ในตัวเองจากคาบ 1 ถึง $m(= 5)$ มีค่าเท่าศูนย์ แสดงว่า Y_t มีความสัมพันธ์กับตัวเองในคาบใดคาบหนึ่งย้อนหลังไป 1 ถึง 5 คาบ

2.2.4 ตัวดำเนินการขยับไปข้างหลัง

บทนิยาม 2.8 เรานิยาม **ตัวดำเนินการขยับไปข้างหลัง (backshift operator)** โดย

$$LY_t = Y_{t-1}$$

และสามารถขยายค่ายกกำลังเป็น $L^2Y_t = L(LY_t) = LY_{t-1} = Y_{t-2}$ ดังนั้น

$$L^kY_t = Y_{t-k}$$

นอกจากจากนี้การหาผลต่าง (differencing) มีบทบาทสำคัญในการวิเคราะห์อนุกรมเวลา ดังนั้นเรามีเครื่องหมายสำหรับการหาผลต่าง โดยการหาผลต่างอันดับที่หนึ่ง (first difference) สามารถเขียนได้โดย

$$\Delta Y_t = Y_t - Y_{t-1} = (1-L)Y_t \tag{2.30}$$

โดยที่เราสามารถขยายการหาผลต่างต่อไป เช่นการหาผลต่างอันดับที่สอง (second difference) เท่ากับ

$$\Delta^2 Y_t = (1-L)^2 Y_t = (1-2L+L^2)Y_t$$

บทนิยาม 2.9 **การหาผลต่างอันดับ d (differences of order d** สามารถคำนวณได้โดย

$$\Delta^d = (1-L)^d \tag{2.31}$$

2.3 แบบฝึกฝน

แบบฝึกฝน 2.1 ดาวน์โหลดข้อมูลราคาของหุ้น GM โดยใช้ package *quantmod* และคำสั่ง

```
getSymbols('GM',src='yahoo', return.class='timeSeries', from="2008-01-01", to="2018
```

จะได้ data.frame ชื่อ GM โดยที่ราคาที่ใช้คือ GM.Adjusted
พิจารณาข้อมูลผลตอบแทนรายวันของหุ้น GM หนึ่งหน่วยแล้วตอบคำถามต่อไปนี้

1. จงวาดกราฟเส้นแสดงดัชนีราคารายวัน
2. จงคำนวณผลได้ตอบแทนอย่างง่าย(สุทธิ) (simple net return) ในรูปของเปอร์เซนต์แล้วคำนวณหา sample mean, standard deviation, skewness, excess kurtosis, minimum, และ maximum ของผลได้ตอบแทนอย่างง่ายของหุ้น GM
3. จงแปลงค่าผลได้ตอบแทนอย่างง่ายเป็นผลได้ตอบแทนในรูปล็อก แล้วคำนวณหา sample

mean, standard deviation, skewness, excess kurtosis, minimum, และ maximum ของผลได้ตอบแทนในรูปล็อกของหุ้น GM

4. จงทดสอบสมมุติฐานหลักที่ว่าค่าเฉลี่ยของผลได้ตอบแทนในรูปล็อกของหุ้น GM มีค่าเป็นศูนย์หรือไม่

5. จงใช้ข้อมูลผลได้ตอบแทนอย่างง่ายเป็นผลได้ตอบแทนในรูปล็อกของหุ้น GM ในข้อ 1 มาทดสอบสมมุติฐานหลักที่ว่าตัววัดความเบ้(skewness) ของผลได้ตอบแทนในรูปล็อกของหุ้น GM เท่ากับศูนย์หรือไม่

6. ทดสอบสมมุติฐานหลักที่ว่าตัววัด excess kurtosis ของผลได้ตอบแทนในรูปล็อกของหุ้น GM เท่ากับศูนย์หรือไม่

7. ทดสอบสมมุติฐานหลักที่ว่าตัววัดการแจกแจงของผลได้ตอบแทนในรูปล็อกของหุ้น GM เป็นแบบปกติหรือไม่

3. แบบจำลองอนุกรมเวลาเชิงเส้นตรง

จากบทที่ผ่านมาเราพบว่าหากข้อมูลมีสหสัมพันธ์ในตัว เราสามารถที่จะสร้างแบบจำลองเพื่ออธิบายตัวแปรแทนที่จะอธิบายเพียงคุณลักษณะของตัวแปรนั้น ๆ ในบทนี้ ผู้เขียนจะแนะนำให้รู้จักกับแบบจำลองอนุกรมเวลาเชิงเส้นตรงในรูปแบบที่ง่ายและเป็นที่นิยมมากที่สุด โดยที่ในการสร้างแบบจำลองอนุกรมเวลาสำหรับข้อมูลใด ๆ เรามีเป้าหมายเพื่อเข้าใจพฤติกรรมของข้อมูล และพยายามที่จะใช้แบบจำลองดังกล่าวในการพยากรณ์ไปยังช่วงเวลาที่ยังไม่มาถึง ในหัวข้อ 3.1 เราจะพิจารณาแบบจำลองออโตรีเกรซซีฟซึ่งมีลักษณะใกล้เคียงกับแบบจำลองถดถอยในเศรษฐมิติเบื้องต้น หัวข้อ 3.2 อธิบายแบบจำลองมูฟวิ่งเอเวอเรจ หัวข้อ 3.3 อธิบายแบบจำลองออโตรีเกรสซีฟมูฟวิ่งเอเวอเรจ เราจะพิจารณากรณีที่ข้อมูลไม่เป็นอนุกรมเวลาคงที่ในหัวข้อ 3.4 และอธิบายแบบจำลองอินทิเกรตออโตรีเกรสซีฟมูฟวิ่งเอเวอเรจในหัวข้อ 3.5

ในส่วนแรกก่อนที่จะอธิบายแบบจำลองเชิงเส้นตรง แบบจำลองที่จะพูดถึงในบทนี้จะประกอบด้วยส่วนประกอบที่สำคัญคือ กระบวนการไวท์นอยซ์ (white noise) ซึ่งเรามักจะใช้สัญลักษณ์แทนกระบวนการไวท์นอยซ์ด้วย ตัวแปรสุ่ม (random variable) ε_t นอกจากนี้เราอาจจะเรียกกระบวนการไวท์นอยซ์ว่าอินโนเวชัน (innovation), ช็อก (shock) หรือตัวรบกวน (disturbance term) ของข้อมูลอนุกรมเวลา

บทนิยาม 3.1 (กระบวนการไวท์นอยซ์) กระบวนการ ε_t จะเป็นกระบวนการไวท์นอยซ์ถ้าค่าเฉลี่ยของ ε_t เท่ากับศูนย์, ค่าความแปรปรวนคงที่และเท่ากับ σ^2 และไม่มีสหสัมพันธ์กับช่วงเวลาอื่น (serially uncorrelated) หรือเขียนเป็นเงื่อนไขได้ดังนี้

1. $E(\varepsilon_t) = 0$
2. $Var(\varepsilon_t) = \sigma_\varepsilon^2$
3. $\gamma_k = Cov(\varepsilon_t, \varepsilon_{t-k}) = 0$ for $k \neq 0$

ทฤษฎีบทการแยกส่วนประกอบของโวลด์ (Wold's decomposition theorem) ฟูลเลอร์ (Fuller 1996) ระบุว่าอนุกรมเวลาคงที่ y_t ใด ๆ จะเป็นกระบวนการเส้นตรง (linear process) ถ้าเราสามารถเขียนกระบวนการดังกล่าวในรูปแบบมูฟวิ่งเอเวอเรจที่มีอันดับเป็นอนันต์ (infinite moving average) หรือสามารถ

เขียน y_t ในรูปต่อไปนี้

$$y_t = \mu + \sum_{i=0}^{\infty} \psi_i \varepsilon_{t-i} \tag{3.1}$$

โดยที่ μ คือค่าเฉลี่ย, $\psi_0 = 1$, และ ε_t คือ อันดับของอนุกรมเวลาที่เป็นอิสระและเหมือนกัน (independently identically distributed หรือ ไอไอดี) โดยที่เราสามารถพิจารณา ε_t ในฐานะเป็นข้อมูลใหม่ที่เข้ามาในช่วงเวลา t อันเป็นที่มาของชื่ออินโนเวชัน หรือช็อก ณ เวลา t นอกจากนี้เราสมมุติให้ผลรวมของสัมประสิทธิ์ยกกำลังสองมีค่าจำกัด ($\sum_{i=1}^{\infty} \psi_i^2 < \infty$)

ถ้า y_t เป็นข้อมูลที่เป็นอนุกรมคงที่ (stationary) แล้ว y_t จะต้องมีค่าเฉลี่ยคงที่ $E(y_t) = \mu$ และ $Var(y_t) = \sigma_\varepsilon^2 \sum_{i=1}^{\infty} \psi_i^2$ จะต้องเป็นจำนวนที่จำกัด (finite) ซึ่งจะเกิดขึ้นถ้า $\sum_{i=1}^{\infty} \psi_i^2$ เข้าลู่เข้าหา (converge) ค่าใดค่าหนึ่ง นอกจากนี้ค่าความแปรปรวนร่วม (covariance)

$$\gamma_l = Cov(y_t, y_{t-l}) = \sigma_\varepsilon^2 \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j \psi_{j+l}$$

$$\rho_l = \frac{\sum_{j=0}^{\infty} \psi_j \psi_{j+l}}{\sum_{i=1}^{\infty} \psi_i^2}$$

ดังนั้นรูปแบบของสหสัมพันธ์ในตัวเองของอนุกรมเวลาคงที่ใด ๆ จะถูกกำหนดด้วยตัวถ่วงน้ำหนักค่าเฉลี่ยเคลื่อนที่ (moving average weights; ψ_i) นอกจากนี้เราเรียกตัวถ่วงน้ำหนักค่าเฉลี่ยเคลื่อนที่อีกอย่างว่า**การตอบสนองแรงกระตุ้น (impulse responses)**

$$\frac{\partial y_{t+s}}{\partial \varepsilon_t} = \psi_s, \quad s = 1, 2, 3, \ldots \tag{3.2}$$

ในกรณีที่อนุกรมเวลาเป็นอนุกรมคงที่และเออะโกดิก $\lim_{s\to\infty} \psi_s = 0$ และการตอบสนองแรงกระตุ้นในระยะยาว (long-run cumulative impulse responses)มีค่าจำกัด $[\sum_{s=0}^{\infty} \psi_s < \infty]$ นอกจากนี้แผนภาพที่วาด ψ_s กับ s เรียกว่าฟังก์ชันการตอบสนองแรงกระตุ้น (impulse response function (IRF))

3.1 แบบจำลองออโตรีเกรสซีฟ

แนวคิดพื้นฐานของแบบจำลองออโตรีเกรสซีฟ (autoregressive) คือข้อมูลในเวลาปัจจุบัน (y_t) สามารถอธิบายได้ด้วยตัวแปรนั้นในอดีตย้อนหลังไป 1 ถึง p คาบ ($y_{t-1}, \ldots, y_{t-p}$) เราสามารถพิจารณาแบบจำลองดังกล่าวเหมือนกับสมการถดถอย หรือรีเกรสชันที่มีตัวแปร y_t เป็นตัวแปรที่เราต้องการอธิบาย และตัวแปร y_t ในอดีตเป็นตัวแปรอธิบาย ดังนั้น แบบจำลองออโตรีเกรสซีฟที่มีอันดับ (order) เท่ากับ p (เขียนแทนด้วย $AR(p)$) สามารถเขียนได้เป็นสมการได้ดังนี้

$$y_t = \phi_1 y_{t-1} + \phi_2 y_{t-2} + \ldots + \phi_p y_{t-p} + \varepsilon_t \tag{3.3}$$

โดยที่ y_t เป็นอนุกรมเวลาคงที่และ ε_t เป็นไวท์นอซส์ที่มีค่าเฉลี่ยเท่ากับศูนย์และค่าความแปรปรวนคงที่เท่ากับ σ_ε^2 ในที่นี้ค่าเฉลี่ยของ y_t เท่ากับศูนย์ ในกรณีดังกล่าว สมการออโตรีเกรสซีฟไม่มีพจน์จุดตัด จากสมการข้างต้น เราสนใจคุณลักษณะของตัวแปร y_t ซึ่งอธิบายด้วยสมการ 3.3 โดยที่คุณลักษณะแรกคือค่าคาดหมายของ y_t ($E(y_t)$) ซึ่งเรากำหนดให้เท่ากับ μ และเท่ากับในทุกช่วงเวลา เมื่อพิจารณาค่าคาดหมายของ y_t จากสมการ 3.3 จะได้

$$\underbrace{E(y_t)}_{=\mu} = \phi_1 \underbrace{E(y_{t-1})}_{=\mu} + \phi_2 \underbrace{E(y_{t-2})}_{=\mu} + \ldots + \phi_p \underbrace{E(y_{t-p})}_{=\mu} + \underbrace{E(\varepsilon_t)}_{=0}$$

$$\mu = 0/(1 - \phi_1 - \phi_2 - \ldots - \phi_p)$$

ในกรณีที่ไม่มีจุดตัด เราจะพบว่าค่าคาดหมายหรือค่าเฉลี่ยของ y_t จะเท่ากับศูนย์ นอกจากนี้เราสามารถพิจารณาตัวแปร y_t ในกรณีที่ค่าเฉลี่ยมีค่าเท่ากับค่าคงที่ μ ใด ๆ ดังสมการต่อไปนี้

$$(y_t - \mu) = \phi_1(y_{t-1} - \mu) + \phi_2(y_{t-2} - \mu) + \ldots + \phi_p(y_{t-p} - \mu) + \varepsilon_t \tag{3.4}$$

หรือเราอาจจะเขียนสมการ $AR(p)$ ในรูปของ

$$y_t = \phi_0 + \phi_1 y_{t-1} + \phi_2 y_{t-2} + \ldots + \phi_p y_{t-p} + \varepsilon_t \tag{3.5}$$

โดยที่ $\phi_0 = \mu(1 - \phi_1 - \phi_2 - \ldots - \phi_p)$ ซึ่งเราสามารถแสดงได้ว่า $E(y_t) = \mu = \frac{\phi_0}{(1-\phi_1-\phi_2-\ldots-\phi_p)}$

นอกจากนี้เราสามารถเขียนสมการ (3.3) ได้ด้วยเครื่องหมายค่าล่า (lag operator) เป็นสมการดังนี้

$$\begin{aligned} y_t - \phi_1 L y_t - \phi_2 L^2 L y_t - \ldots - \phi_p L^p y_t &= \varepsilon_t \\ (1 - \phi_1 L - \phi_2 L^2 - \ldots - \phi_p L^p) y_t &= \varepsilon_t \end{aligned} \tag{3.6}$$

หากกำหนดให้ $\phi(L) = 1 - \phi_1 L - \phi_2 L^2 - \ldots - \phi_p L^p$ ซึ่งเราเรียกว่าพหุนามออโตรีเกรสซีฟ (autoregressive polynomial)

$$\phi(L) y_t = \varepsilon_t \tag{3.7}$$

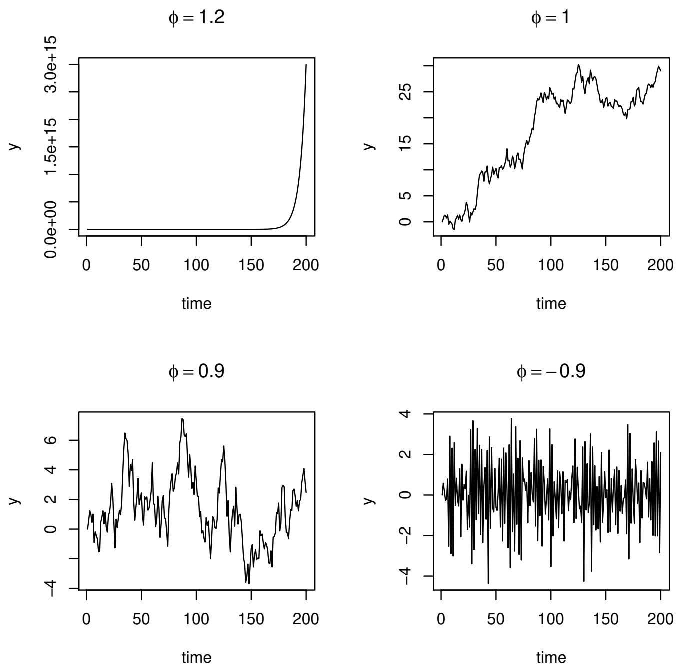
จะได้แบบจำลองออโตรีเกรสซีฟในรูปของพหุนาม ในการสร้างแบบจำลองโดยใช้รูปแบบออโตรีเกรสซีฟหรือรูปแบบอื่น ๆ ที่เราจะกล่าวถึงในบทนี้ เราจำเป็นต้องเข้าใจคุณลักษณะของอนุกรมเวลาซึ่งถูกอธิบายด้วยรูปแบบดังกล่าว ซึ่งคุณลักษณะที่สำคัญได้แก่ ค่าคาดหมาย ค่าความแปรปรวน และค่าสหสัมพันธ์ในตัว (autocorrelation) ซึ่งในกรณีของแบบจำลองออโตรีเกรสซีฟ เราจะเริ่มจากการพิจารณาแบบจำลองอย่างง่ายคือออโตรีเกรฟซีฟอันดับหนึ่งแล้วค่อยขยายไปยังออโตรีเกรสซีฟอันดับพี

3.1.1 แบบจำลองออโตรีเกรสซีฟอันดับหนึ่ง

ในหัวข้อย่อยนี้ เราจะพิจารณาคุณสมบัติของแบบจำลองออโตรีเกรสซีฟอันดับหนึ่ง $AR(1)$ ซึ่งมีค่าเฉลี่ยเท่ากับศูนย์สามารถแสดงได้ด้วยสมการ

$$y_t = \phi y_{t-1} + \varepsilon_t \tag{3.8}$$

จากสมการข้างต้นหากเราเริ่มพิจารณากรณีที่ $y_0 = 0$ และให้ ε_t มีการแจกแจงแบบปกติมาตรฐาน $N(0,1)$ เราจะได้การเดินทางตามเวลา (time path) ของ y_t สำหรับค่าสัมประสิทธิ์(ϕ)ที่ต่างกันดังที่แสดงในรูป 3.1



รูปที่ 3.1: การจำลองกระบวนการ $AR(1)$ ที่ค่าสัมประสิทธิ์(ϕ)ที่ต่างกัน

จากรูป 3.1 มุมบนซ้ายซึ่งค่า $|\phi| > 1$ ในกรณีดังกล่าว y_t จะเพิ่มขึ้นอย่างต่อเนื่องในอัตราที่รุนแรง(explosive)โดยที่คาบที่ $t = 200$ ค่า $y_t > 10^{15}$ ในขณะที่มุมบนขวาซึ่งค่า $|\phi| = 1$ ค่า y_t จะขยับไปจุดหนึ่งๆและคงค้างอยู่บริเวณนั้นสักพักแล้วก็ไม่เดินทางกลับมาที่จุดเริ่มต้น จะเห็นได้ว่าค่าเฉลี่ยของแต่ละช่วงมีค่าที่แตกต่างกันและค่าความแปรปรวนมีแนวโน้มเพิ่มขึ้นเรื่อย ในกรณีนี้เราจะเรียกกระบวนการนี้ว่า “แรนดอมวอล์ก” (random walk) รูปข้างบนทั้งสองเป็นตัวอย่างของกระบวนการออโตรีเกรสซีฟอันดับหนึ่ง $AR(1)$ ที่ไม่คงที่ (non-stationary) ในขณะที่รูปล่างทั้งสองรูป $|\phi| < 1$ ค่า y_t จะขยับอยู่รอบ ๆ ค่าศูนย์แสดงถึงการเป็นกระบวนการคงที่

จากสมการ 3.8 เราสามารถแทนค่า y_t ในอดีตไปเรื่อย ๆ แบบเวียนเกิด (recursive) k ครั้งดังนี้

$$\begin{aligned} y_t &= \phi y_{t-1} + \varepsilon_t = \phi(\phi y_{y-2} + \varepsilon_{t-1}) + \varepsilon_t \\ &= \phi^2 y_{t-2} + \phi\varepsilon_{t-1} + \varepsilon_t \\ &\vdots \\ &= \phi^k y_{t-k} + \sum_{j=0}^{k-1} \phi^j \varepsilon_{t-j} \end{aligned}$$

ด้วยวิธีดังกล่าวข้างต้นและค่า $|\phi| < 1$ แล้ว $\lim_{k\to\infty} \phi^k y_{t-k} = 0$ จะทำให้เราสามารถเขียนแบบจำลอง $AR(1)$ ในรูปต่อไปนี้

$$y_t = \varepsilon_t + \phi\varepsilon_{t-1} + \phi^2\varepsilon_{t-2} + ... = \sum_{j=0}^{\infty} \phi^j \varepsilon_{t-j} \tag{3.9}$$

เราเรียกรูปดังกล่าวว่าการแสดงแบบจำลองออโตรีเกรสซีฟอันดับหนึ่ง $AR(1)$ ด้วยรูปแบบมูฟวิ่งเอเวเรจที่มีอันดับเป็นอนันต์ (infinite moving average representation)

ค่าคาดหมายหรือค่าเฉลี่ยของ y_t

หากใส่ค่าคาดหมายทั้งสองข้างของสมการ 3.9 จะได้ข้อสรุปว่ากระบวนการออโตรีเกรสซีฟอันดับหนึ่ง $AR(1)$ ดังที่ได้แสดงในสมการ 3.8 มีค่าเฉลี่ยเท่ากับศูนย์

$$E(y_t) = E\left[\varepsilon_t + \phi\varepsilon_{t-1} + \phi^2\varepsilon_{t-2} + ...\right]$$

เนื่องจาก $\varepsilon_t, \varepsilon_{t-1}, ...$ เป็นอิสระต่อกัน [ทวนความจำ: หาก X และ Z เป็นตัวแปรสุ่มที่เป็นอิสระต่อกัน $E(X + Z) = E(X) + E(Z)$] ดังนั้น

$$\begin{aligned} E(y_t) &= E(\varepsilon_t) + E(\phi\varepsilon_{t-1}) + E(\phi^2\varepsilon_{t-2}) + ... \\ &= \underbrace{E(\varepsilon_t)}_{=0} + \phi\underbrace{E(\varepsilon_{t-1})}_{=0} + \phi^2\underbrace{E(\varepsilon_{t-2})}_{=0} + ... = 0 \end{aligned}$$

จะเห็นได้ว่าค่าเฉลี่ยของ y_t เท่ากับศูนย์

ค่าความแปรปรวนของ y_t

เนื่องจาก $E(y_t) = 0$ ค่าความแปรปรวน $Var(y_t) = E[y_t - E(y_t)]^2$ จะเท่ากับ $Var(y_t) = E(y_t^2)$ หากเราแทนค่า y_t จากสมการ 3.9 ลงในสูตรดังกล่าว และใช้คุณสมบัติของ ε_t ที่ว่า $Var(\varepsilon_t) = E(\varepsilon_t^2) = \sigma_t^2$ และ $E(\varepsilon_j, \varepsilon_k) = 0$

สำหรับ $k \neq j$ เราจะได้

$$
\begin{aligned}
E(y_t^2) &= E[(\varepsilon_t + \phi\varepsilon_{t-1} + \phi^2\varepsilon_{t-2} + ...)(\varepsilon_t + \phi\varepsilon_{t-1} + \phi^2\varepsilon_{t-2} + ...)] \\
&= E[\varepsilon_t\varepsilon_t + \varepsilon_t\phi\varepsilon_{t-1} + \varepsilon_t\phi^2\varepsilon_{t-2} + ... + \phi\varepsilon_{t-1}\varepsilon_t + \phi\varepsilon_{t-1}\phi\varepsilon_{t-1} + \phi\varepsilon_{t-1}\phi^2\varepsilon_{t-2} + ... \\
&\quad \phi^2\varepsilon_{t-2}\varepsilon_t + \phi^2\varepsilon_{t-2}\phi\varepsilon_{t-1} + \phi^2\varepsilon_{t-2}\phi^2\varepsilon_{t-2} + ...] \\
&= E[\varepsilon_t^2 + \phi\varepsilon_t\varepsilon_{t-1} + \phi^2\varepsilon_t\varepsilon_{t-2} + ... + \phi\varepsilon_{t-1}\varepsilon_t + \phi^2\varepsilon_{t-1}^2 + \phi^3\varepsilon_{t-1}\varepsilon_{t-2} + ... \\
&\quad + \phi^2\varepsilon_{t-2}\varepsilon_t + \phi^3\varepsilon_{t-2}\varepsilon_{t-1} + \phi^4\varepsilon_{t-2}^2 + ...] \\
&= \underbrace{E(\varepsilon_t^2)}_{=\sigma_\varepsilon^2} + \phi^2\underbrace{E(\varepsilon_{t-1}^2)}_{=\sigma_\varepsilon^2} + \phi^4\underbrace{E(\varepsilon_{t-2}^2)}_{=\sigma_\varepsilon^2} + ... + \phi\underbrace{E(\varepsilon_t\varepsilon_{t-1})}_{=0} + \phi^2\underbrace{E(\varepsilon_t\varepsilon_{t-2})}_{=0} + \phi\underbrace{E(\varepsilon_{t-1}\varepsilon_t)}_{=0} + ... \\
E(y_t^2) &= (1 + \phi^2 + \phi^4 + ...)\sigma_\varepsilon^2 = \frac{\sigma_\varepsilon^2}{(1-\phi^2)} \equiv \gamma_0
\end{aligned} \tag{3.10}
$$

จากบรรทัดที่ 6 จะเห็นได้ว่าค่าคาดหมายของพจน์ที่คูณกันที่มีตัวห้อยต่างกัน (cross terms) จะเท่ากับศูนย์ นอกจากนี้เราจะใช้สัญลักษณ์ γ_0 แทนค่าความแปรปรวน

ค่าความแปรปรวนร่วมในตัวและฟังก์ชันสหสัมพันธ์ในตัว

หากนำค่า y_t และ y_{t-l} ที่เขียนในรูปสมการ 3.9 และค่าเฉลี่ยเท่ากับศูนย์ $E(y_t) = 0$ แทนค่าในสูตรค่าความแปรปรวนร่วมได้ฟังก์ชันค่าความแปรปรวนร่วมในตัวที่อันดับแอลจะเท่ากับ

$$
\begin{aligned}
\gamma_l = Cov(y_t, y_{t-l}) &= E[(y_t - E(y_t))(y_{t-l} - E(y_{t-l}))] = E(y_t y_{t-l}) \\
&= E[(\varepsilon_t + ... + \phi^l\varepsilon_{t-l} + \phi^{l+1}\varepsilon_{t-l-1} + \phi^{l+2}\varepsilon_{t-l-2} + ...)(\varepsilon_{t-l} + \phi\varepsilon_{t-l-1} + \phi^2\varepsilon_{t-l-2} + ...)] \\
&= E[\text{cross terms} + ... + \phi^l\varepsilon_{t-l}\varepsilon_{t-l} + \phi^l\varepsilon_{t-l}\phi\varepsilon_{t-l-1} + \phi^l\varepsilon_{t-l}\phi^2\varepsilon_{t-l-2} + ... \\
&\quad + \phi^{l+1}\varepsilon_{t-l-1}\varepsilon_{t-l} + \phi^{l+1}\varepsilon_{t-l-1}\phi\varepsilon_{t-l-1} + \phi^{l+1}\varepsilon_{t-l-1}\phi^2\varepsilon_{t-l-2} + ... \\
&\quad + \phi^{l+2}\varepsilon_{t-l-2}\varepsilon_{t-l} + \phi^{l+2}\varepsilon_{t-l-2}\phi\varepsilon_{t-l-1} + \phi^{l+2}\varepsilon_{t-l-2}\phi^2\varepsilon_{t-l-2} + ... + \text{cross terms}] \\
&= E\left[\phi^l\varepsilon_{t-l}\varepsilon_{t-l} + \phi^{l+1}\varepsilon_{t-l-1}\phi\varepsilon_{t-l-1} + \phi^{l+2}\varepsilon_{t-l-2}\phi^2\varepsilon_{t-l-2} + ... + \text{cross terms}\right] \\
&= \phi^l\underbrace{E(\varepsilon_{t-l}^2)}_{=\sigma_\varepsilon^2} + \phi^{l+2}\underbrace{E(\varepsilon_{t-l-1}^2)}_{=\sigma_\varepsilon^2} + \phi^{l+4}\underbrace{E(\varepsilon_{t-l-2}^2)}_{=\sigma_\varepsilon^2} + ... + \underbrace{E(\text{cross terms})}_{=0} \\
\gamma_l &= \phi^l(1 + \phi^2 + \phi^4 + ...)\sigma_\varepsilon^2 = \frac{\phi^l\sigma_\varepsilon^2}{(1-\phi^2)}
\end{aligned} \tag{3.11}
$$

และสหสัมพันธ์ในตัวอันดับที่แอลจะเท่ากับ

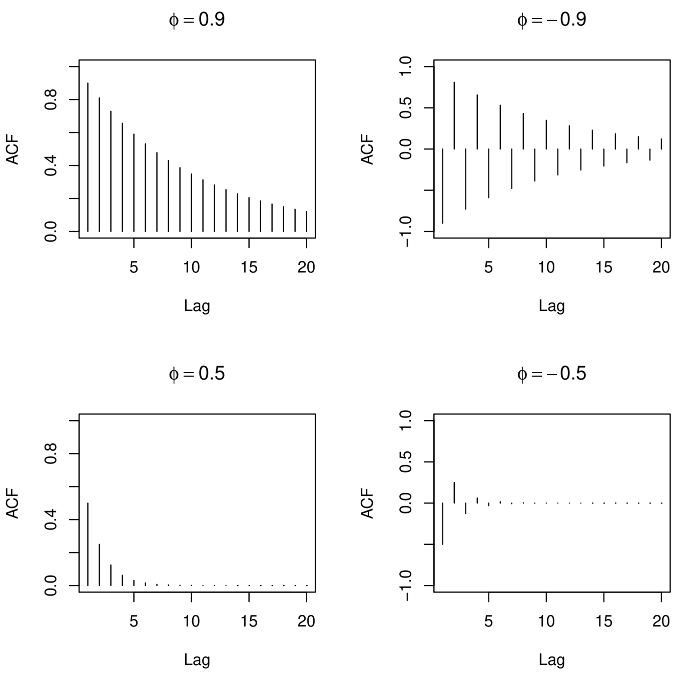
$$
\rho_l = \frac{\gamma_l}{\gamma_0} = \frac{\frac{\phi^l\sigma_\varepsilon^2}{(1-\phi^2)}}{\frac{\sigma_\varepsilon^2}{(1-\phi^2)}} = \phi^l \tag{3.12}
$$

หากเขียนฟังก์ชันระหว่างค่าล่าแอลกับค่าสัมพันธ์ในตัวอันดับที่แอล เราจะเรียกฟังก์ชันดังกล่าวว่าฟังก์ชันสหสัมพันธ์ในตัวหรือเอซีเอฟ ซึ่งหากลองแทนค่า ϕ ด้วยค่าเท่ากับ $0.9, -0.9, 0.5, -0.5$ จะได้ฟังก์ชันสหสัมพันธ์ในตัวดังตารางต่อไปนี้

ตารางที่ 3.1: ฟังก์ชันสหสัมพันธ์ในตัวของกระบวนการ $AR(1)$ ที่ค่าสัมประสิทธิ์(ϕ)ที่ต่างกัน

ϕ , l	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0.9	0.900	0.810	0.729	0.656	0.590	0.531	0.478	0.430	0.387	0.349
-0.9	-0.900	0.810	-0.729	0.656	-0.590	0.531	-0.478	0.430	-0.387	0.349
0.5	0.500	0.250	0.125	0.063	0.031	0.016	0.008	0.004	0.002	0.001
-0.5	-0.500	0.250	-0.125	0.063	-0.031	0.016	-0.008	0.004	-0.002	0.001

จะเห็นได้ว่าค่าสหสัมพันธ์ในตัวของกระบวนการ $AR(1)$ ในรูปค่าสมบูรณ์มีค่าลดลงเรื่อยๆ โดยที่หากค่า ϕ เป็นลบ เอซีเอฟจะมีลักษณะสวิงไปทางบวกและลบสลับกัน นอกจากนี้ค่า $|\phi|$ ที่เข้าใกล้หนึ่งจะมีเอซีเอฟที่ลดลงช้ากว่ากรณีที่ $|\phi|$ ที่เข้าใกล้ศูนย์ โดยสามารถดูได้จากรูป 3.2



รูปที่ 3.2: ค่าสหสัมพันธ์ร่วมในตัวเองของกระบวนการ $AR(1)$ ที่ค่าสัมประสิทธิ์(ϕ)ที่ต่างกัน

การพิจารณาเงื่อนไขความเป็นอนุกรมเวลาคงที่จากพหุนามออโตรีเกรสซีฟ

เราสามารถเขียนกระบวนการ $AR(1)$ ในรูปของพหุนามออโตรีเนกรสซีฟได้เป็น

$$y_t - \phi y_{t-1} = \varepsilon_t$$
$$(1 - \phi L) y_t = \varepsilon_t \tag{3.13}$$

โดยที่เราสามารถเขียนสมการช่วย (auxiliary equation) สำหรับสมการ 3.13 ได้เป็น

$$(1-\phi m) = 0 \tag{3.14}$$

โดยที่รากของพหุนามออโตรีเกรสซีฟจะเท่ากับ $m = 1/\phi$ โดยที่เราทราบว่าเงื่อนไขที่กระบวนการ $AR(1)$ จะเป็นกระบวนการคงที่ $|\phi|$ จะต้องมีค่าน้อยกว่าหนึ่ง ดังนั้น**ค่าสัมบูรณ์ของรากของพหุนามออโตรีเกรสซีฟจะต้องมีค่ามากกว่าหนึ่ง** $[|m| = |1/\phi| > 1]$

ในขณะเดียวกันเราสามารถเขียนสมการลักษณะเฉพาะ(characteristic equation)สำหรับกระบวนการ $AR(1)$ จาก $z^{-1}(z-\phi)y_t = \varepsilon_t$ ได้เป็น

$$(z-\phi) = 0 \tag{3.15}$$

จะเห็นได้ว่ารากของสมการลักษณะเฉพาะจะเท่ากับ ϕ $[z = \phi]$ ดังนั้นเราจะได้เงื่อนไขกระบวนการนิ่งว่า **ค่าสัมบูรณ์ของรากของสมการลักษณะเฉพาะจะต้องมีค่าน้อยหนึ่ง** $[|z| = |\phi| < 1]$

ตัวอย่างที่ 3.1 (กระบวณการคงที่) จงพิจารณาว่ากระบวนการต่อไปนี้เป็นกระบวนการคงที่หรือไม่

- $y_t - 0.9y_{t-1} = \varepsilon_t$
- $y_t - y_{t-1} = \varepsilon_t$
- $y_t + 1.2y_{t-1} = \varepsilon_t$

เราสามารถเขียนออโตรีเกรสซีฟอันดับหนึ่ง AR(1) ในรูปทั่วไปเช่นสมการที่ 3.4 หรือ 3.5 โดยที่ในกรณีสมการ 3.4

$$y_t - \mu = \phi(y_{t-1} - \mu) + \varepsilon_t$$

ถ้าเราต้องการหาค่าเฉลี่ยของออโตรีเกรสซีฟกรณีมีค่าเฉลี่ยเท่ากับ μ เราสามารถทำได้โดยการใส่ค่าคาดหมายทั้งสองข้างของสมการข้างต้นและใช้ข้อสมมุติที่ว่า y_t เป็นอนุกรมเวลานิ่ง ส่งผลให้ค่าเฉลี่ย ณ เวลาใด ๆ มีค่าคงที่และเท่ากับมิว ($\mu = E(y_t) = E(y_{t-1})$) จะได้

$$E(y_t) - \mu = \phi \underbrace{E(y_{t-1})}_{=E(y_t)} - \phi\mu + \underbrace{E(\varepsilon_t)}_{=0}$$

$$E(y_t) - \mu = \phi E(y_t) - \phi\mu$$

$$E(y_t) = \frac{1-\phi}{1-\phi}\mu = \mu$$

ในกรณีสมการที่ 3.5

$$y_t = \phi_0 + \phi_1 y_{t-1} + \varepsilon_t$$

ถ้าเราต้องการหา $E(y_t)$ เราสามารถทำได้โดยการใส่ค่าคาดหมายทั้งสองข้างและใช้ข้อสมมุติที่ว่า y_t เป็น stationary ($E(y_t) = E(y_{t-1})$) จะได้

$$
\begin{aligned}
E(y_t) &= \phi_0 + \phi_1 \underbrace{E(y_{t-1})}_{=E(y_t)} + \underbrace{E(\varepsilon_t)}_{=0} \\
(1-\phi_1)E(y_t) &= \phi_0 \\
E(y_t) &= \frac{\phi_0}{1-\phi_1}
\end{aligned}
$$

ดังนั้นเราจะได้ว่า $\mu = \frac{\phi_0}{1-\phi_1}$ เราสามารถขยายการวิเคราะห์ดังกล่าวไปยัง $AR(p)$

3.1.2 แบบจำลองออโตรีเกรสซีฟอันดับสอง

แบบจำลองออโตรีเกรสซีฟอันดับที่สอง ($AR(2)$) สามารถเขียนอธิบายได้ด้วยสมการ

$$y_t = \phi_1 y_{t-1} + \phi_2 y_{t-2} + \varepsilon_t \tag{3.16}$$

เงื่อนไขการเป็นกระบวนการนิ่ง

เราสามารถพิจารณาความเป็นกระบวนการคงที่ได้โดยการหารากของพหุนามออโตรีเกรสซีฟซึ่งอยู่ในรูป $(1 - \phi_1 L - \phi_2 L^2)y_t = \varepsilon_t$ สามารถเขียนได้เป็น

$$\phi(m) = 1 - \phi_1 m - \phi_2 m^2$$

โดยแทนค่าเครื่องหมายล่าด้วยตัวแปร m และพิจารณาสมการช่วย

$$\phi(m) = 1 - \phi_1 m - \phi_2 m^2 = 0 \tag{3.17}$$

โดยที่รากของสมการพหุนามออโตรีเกรสซีฟที่อยู่ในรูปสมการกำลังสอง (quadratic) จะมีด้วยกันสองจำนวน(m_1, m_2)เท่ากับ $\frac{\phi_1 \pm \sqrt{\phi_1^2 + 4\phi_2}}{-2\phi_2}$ ซึ่งรากดังกล่าวสามารถเป็นจำนวนเชิงซ้อนได้ เงื่อนไขที่กระบวนการออโตรีเกรสซีฟอันดับที่สอง $AR(2)$ จะเป็นกระบวนการคงที่คือ รากของสมการพหุนามออโตรีเกรสซีฟจะต้องมากกว่าหนึ่ง (หรือมอดุลัส (modulus) มากกว่าหนึ่งในกรณีจำนวนเชิงซ้อน) ซึ่งจะเกิดขึ้นเมื่อ

$$\phi_1 + \phi_2 < 1, \quad \phi_2 - \phi_1 < 1, \quad |\phi_2| < 1$$

ตัวอย่างที่ 3.2 (เงื่อนไขอนุกรมเวลานิ่งกรณีออโตรีเกรสซีฟ) กำหนดให้ $y_t = 0.5y_{t-1} - 0.8y_{t-2} + \varepsilon_t$ เราสามารถพิจารณาสมการพหุนามออโตรีเกรสซีฟ

$$(1 - 0.5m + 0.8m^2) = 0$$

จะเห็นได้ว่า $\phi_1 = 0.5$ และ $\phi_2 = -0.8$ เป็นไปตามเงื่อนไข $\phi_1 + \phi_2 < 1, \quad \phi_2 - \phi_1 < 1, \quad |\phi_2| < 1$ ดังนั้นกระบวนการ y_t เป็นกระบวนการนิ่ง นอกจากนี้เราสามารถพิจารณารากของสมการพหุนามออโตรีเกรสซีฟ โดยเราจะเห็นได้ว่า

$$
\begin{aligned}
m_1, m_2 = \frac{\phi_1 \pm \sqrt{\phi_1^2 + 4\phi_2}}{-2\phi_2} &= \frac{0.5 \pm \sqrt{0.5^2 + 4(-0.8)}}{-2(-0.8)} \\
&= \frac{0.5}{1.6} \pm \frac{\sqrt{-2.95}}{1.6} = \frac{0.5}{1.6} \pm \frac{\sqrt{2.95}\sqrt{-1}}{1.6} \\
&= 0.3125 \pm 1.073473i
\end{aligned}
$$

โดยที่รากดังกล่าวสามารถคำนวณด้วย R โดยใช้คำสั่ง `polyroot(c(1,-0.5,0.8))` ค่ามอดุลัสของจำนวนเชิงซ้อน $m_1 = a + bi$ จะเท่ากับ $\sqrt{a^2 + b^2}$ ซึ่งในกรณีนี้เท่ากับ `1.118034` ซึ่งมีค่ามากกว่าหนึ่ง เราสามารถคำนวณมอดุลัสได้โดยใช้คำสั่ง `Mod(arg)` โดยที่ `arg` คือจำนวนเชิงซ้อน

คุณลักษณะของกระบวนการออโตรีเกรสซีฟอันดับสอง $AR(2)$

เราสามารถพิจารณาค่าเฉลี่ยของกระบวนการในสมการ 3.16 และพบว่ามีค่าเฉลี่ยเท่ากับศูนย์ สำหรับฟังก์ชันความแปรปรวนร่วมเราสามารถพิจารณาได้โดยคูณสมการ 3.16 ทั้งสองข้างด้วย y_{t-k} แล้วใส่ค่าคาดหมายทั้งสองข้างของสมการจะได้

$$
\begin{aligned}
E(y_t y_{t-k}) &= \phi_1 E(y_{t-1} y_{t-k}) + \phi_2 E(y_{t-2} y_{t-k}) + \underbrace{E(\varepsilon_t y_{t-1})}_{=0} \\
\gamma_k &= \phi_1 \gamma_{k-1} + \phi_2 \gamma_{k-2} \qquad (3.18)
\end{aligned}
$$

เนื่องจากหากเราเขียน y_t ในรูปของมูฟวิ่งเอเวอเรจที่อันดับอนันต์จะได้ $E(\varepsilon_t y_{t-1}) = E(\varepsilon_t \varepsilon_{t-1} + \varepsilon_t \psi_1 \varepsilon_{t-2} + \ldots) = 0$ และหากหารสมการ (3.18) ด้วย γ_0 จะได้

$$
\rho_k = \phi_1 \rho_{k-1} + \phi_2 \rho_{k-2} \qquad (3.19)
$$

เราเรียกสมการ 3.18 และ 3.19 ว่าสมการยูลวอล์กเกอร์ (Yule-Walker) จากสมการที่ 3.19 หากเราพิจารณากรณีที่ $k = 1$, $\rho_1 = \rho_{-1}$ และ $\rho_0 = 1$ เราจะได้

$$
\rho_1 = \frac{\phi_1}{1 - \phi_2}
$$

และกรณีที่ $k = 2$ เราจะได้

$$
\rho_2 = \frac{\phi_2(1 - \phi_2) + \phi_1^2}{1 - \phi_2}
$$

และกรณี $k > 2$ เราสามารถแทนค่าแบบเวียนเกิด(recursive)เพื่อให้ได้ $\rho_k = \phi_1\rho_{k-1} + \phi_2\rho_{k-2}$ ยกตัวอย่างเช่น กรณีที่ $\phi_1 = 0.3, \phi_2 = 04$ เราจะได้

$$\rho_0 = 1, \rho_1 = 0.5, \rho_2 = 0.55, \rho_3 = 0.365, \rho_4 = 0.329, \rho_5 = 0.24485....$$

ซึ่งจะเห็นได้ว่าหลังจากค่าล่าที่ 3 ค่าสหสัมพันธ์ในตัวมีค่าลดลงเรื่อย ๆ

3.1.3 แบบจำลองออโตรีเกรสซีพที่อันดับพี $AR(p)$

แบบจำลอง $AR(p)$ ที่ได้มีปรับเอาค่าเฉลี่ยออกสามารถเขียนในรูป

$$y_t - \mu = \phi_1(y_{t-1} - \mu) + \phi_2(y_{t-2} - \mu) + ... + \phi_p(y_{t-p} - \mu) + \varepsilon_t \quad (3.20)$$

หรือเขียนในรูปตัวดำเนินการขยับไปข้างหลัง

$$\phi(L)(y_t - \mu) = \varepsilon_t \quad (3.21)$$

โดยที่ $\phi(L) = 1 - \phi_1 L - ... - \phi_p L^p$ หรือในรูปสมการถดถอยในตัวเอง

$$\phi(L)y_t = c + \varepsilon_t \quad (3.22)$$

โดยที่เราสามารถแสดงเงื่อนไขที่ $AR(p)$ จะเป็นอนุกรมคงที่และอะโกดิกได้ด้วยการพิจารณารากของสมการพหุนามออโตรีเกรสซีฟ

$$\phi(m) = 1 - \phi_1 m - \phi_2 m^2 - ... - \phi_p m^p = 0$$

หากค่าสัมบูรณ์ของรากทุกตัวของสมการพหุนามออโตรีเกรสซีฟมีค่ามากกว่าหนึ่ง (หรือมอดุลัสมากกว่าหนึ่งในกรณีจำนวนเชิงซ้อน) อนุกรมเวลา y_t จะเป็นอนุกรมเวลาคงที่

นอกจากนี้ในกรณีที่ $AR(p)$ เป็นอนุกรมนิ่ง ค่าคงที่ในรูปแบบถดถอยในตัวเอง(c)จะเท่ากับ $\mu(1 - \phi_1 - ... - \phi_p)$ ในทางกลับกัน $\mu = c/(1 - \phi_1 - ... - \phi_p)$

หากเราสมมุติให้ค่าเฉลี่ย(μ)เท่าศูนย์และกระบวนการนิ่ง หากเราคูณสมการ 3.20 ด้วย y_{t-k} แล้วใส่ค่าคาดหมายทั้งสองข้างของสมการและหารด้วยค่าความแปรปรวนในตัวเอง (γ_0) เราจะได้สมการแสดงความสัมพันธ์แบบเวียนเกิด

$$\rho_k = \phi_1\rho_{k-1} + \phi_2\rho_{k-2} + ... + \phi_p\rho_{k-p}, \quad (3.23)$$

สำหรับทุกค่า $k \geq 1$ หากเราพิจารณากรณีที่ $k = 1, 2, ..., p$ และใช้ความสัมพันธ์ที่ $\rho_0 = 1$ และ $\rho_j = \rho_{-j}$ เราจะ

ได้สมการยูลวอล์กเกอร์ ดังนี้

$$\begin{aligned}
\rho_1 &= \phi_1 + \phi_2\rho_1 + \phi_3\rho_2 + ... + \phi_p\rho_{p-1} \\
\rho_2 &= \phi_1\rho_1 + \phi_2 + \phi_3 + ... + \phi_p\rho_{p-2} \\
&\vdots \\
\rho_p &= \phi_1\rho_{p-1} + \phi_2\rho_{p-2} + \phi_3\rho_{p-3} + ... + \phi_p
\end{aligned} \tag{3.24}$$

ซึ่งหากเราทราบว่า $\phi_1, \phi_2, ..., \phi_p$ เราสามารถหาค่า $\rho_1, \rho_2, ..., \rho_3$ ได้ นอกจากนี้

$$E(\varepsilon_t y_t) = E[\varepsilon_t(\phi_1 y_{t-1} + ... + \phi_p y_{t-p} + \varepsilon_t)] = E(\varepsilon_t^2) = \sigma^2$$

และหากเราคูณสมการ 3.20 ด้วย y_t และใส่ค่าคาดหมาย เราจะได้

$$\gamma_0 = \phi_1\gamma_1 + \phi_2\gamma_2 + ... + \phi_p\gamma_p + \sigma^2 \tag{3.25}$$

และหากใช้ความสัมพันธ์ว่า $\rho_k = \gamma_k/\gamma_0$ หรือ $\gamma_k = \rho_k\gamma_0$ จะได้

$$\gamma_0 = \frac{\sigma^2}{1 - \phi_1\rho_1 - \phi_2\rho_2 - ... - \phi_p\rho_p}$$

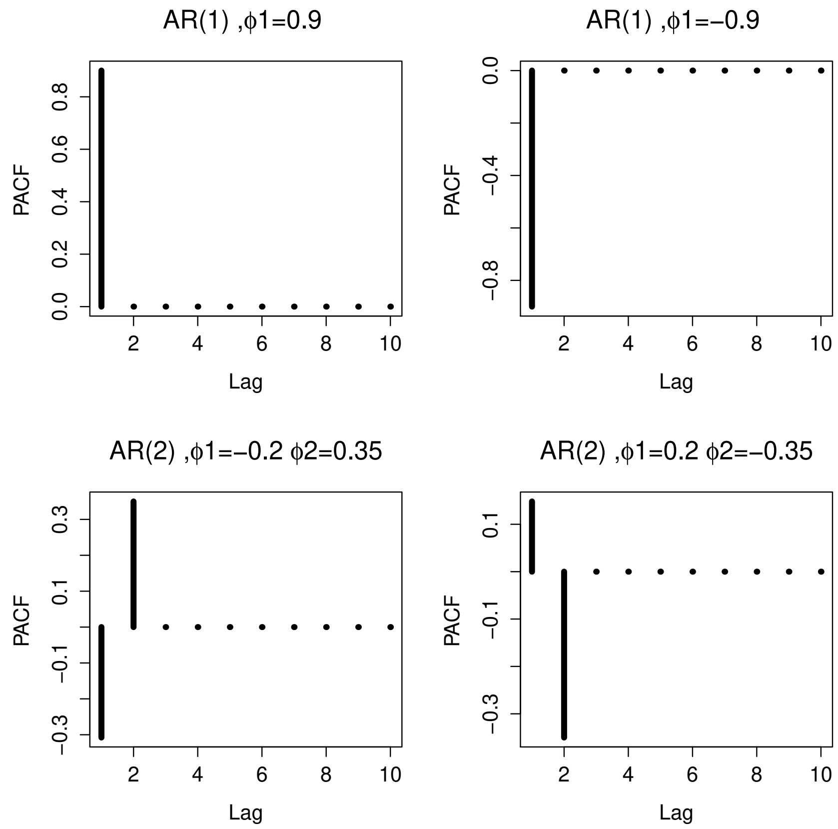
เราสามารถแสดงให้เห็นว่าฟังก์ชันสหสัมพันธ์ในตัวของอนุกรมเวลาออโตรีเกรสซีฟมีลักษณะที่ลดลงเรื่อย ๆ คุณลักษณะดังกล่าวช่วยเราในการระบุว่าแบบจำลองที่เหมาะสมกับข้อมูล อย่างไรก็ตาม เราไม่สามารถระบุอันดับที่เหมาะสมจากฟังก์ชันสหสัมพันธ์ในตัวได้

3.1.4 ฟังก์ชันสหสัมพันธ์ในตัวบางส่วนหรือพีเอซีเอฟ

ฟังก์ชันสหสัมพันธ์ในตัวบางส่วน (Partial Autocorrelation Function: PACF) เป็นเครื่องมือที่ช่วยในการระบุอันดับของแบบจำลองออโตรีเกรสซีฟ $AR(p)$ โดยที่ฟังก์ชันสหสัมพันธ์ในตัวบางส่วนมีพื้นฐานจากการประมาณค่าแบบจำลอง AR กรณีที่กระบวนการที่กำหนดตัวแปรเป็นออโตรีเกรสซีฟที่อันดับพี หาก $z_t = y_t - \mu$ เป็นออโตรีเกรสซีฟที่อันดับพี ค่าสัมประสิทธิ์ $\phi_1, .., \phi_p$ มีค่าไม่เท่ากับศูนย์ ในขณะที่ ค่าสัมประสิทธิ์ $\phi_{p+1}, ...$ มีค่าเท่ากับศูนย์ ดังนั้น เราสามารถประมาณค่าสมการออโตรีเกรสซีฟโดยการเพิ่มตัวแปรอธิบายเป็นลำดับดังนี้

$$\begin{aligned}
z_t &= \phi_{11}z_{t-1} + \varepsilon_{1t} \\
z_t &= \phi_{21}z_{t-1} + \phi_{22}z_{t-1} + \varepsilon_{2t} \\
&\vdots \\
z_t &= \phi_{p1}z_{t-1} + \phi_{p2}z_{t-1} + ... + \phi_{pp}z_{t-p} + \varepsilon_{pt}
\end{aligned}$$

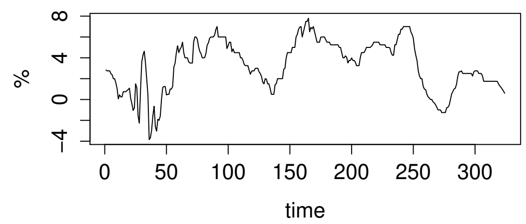
โดยที่ $z_t = y_t - \mu$ คือข้อมูลที่ได้กำจัดค่าเฉลี่ยแล้ว (demeaned) เราเรียกค่าสัมประสิทธิ์ ϕ_{jj} สำหรับ $j = 1, 2, ..., p$ (ค่าสัมประสิทธิ์สุดท้ายของแต่ละสมการ) ว่า*ค่าสัมประสิทธิ์สหสัมพันธ์ในตัวบางส่วน* ในกรณีที่เราพิจารณาแบบจำลอง $AR(1)$ ค่าสัมประสิทธิ์สหสัมพันธ์ในตัวบางส่วนตัวแรก ϕ_{11} จะไม่เท่ากับศูนย์ ส่วนสัมประสิทธิ์ที่เหลือจะเท่ากับศูนย์ เช่นเดียวกันหากเราพิจารณาแบบจำลอง $AR(2)$ ค่าสัมประสิทธิ์สหสัมพันธ์ในตัวบางส่วนตัวแรกและตัวที่สอง (ϕ_{11} และ ϕ_{22}) จะไม่เท่ากับศูนย์ ส่วนสัมประสิทธิ์ที่เหลือ (ϕ_{jj} สำหรับ $j > 2$) จะเท่ากับศุนย์ โดยสรุปแล้ว สำหรับแบบจำลอง $AR(p)$ ใดๆ ค่าสัมประสิทธิ์สหสัมพันธ์ในตัวบางส่วน p ตัวแรกจะไม่เท่ากับศูนย์ และสัมประสิทธิ์ที่เหลือจะเท่ากับศูนย์ โดยจากตัวอย่างใด ๆ เราสามารถประมาณค่าสัมประสิทธิ์สหสัมพันธ์ในตัวบางส่วนจากตัวอย่าง (sample PACF) ด้วยวิธีการกำลังสองน้อยที่สุดทีละสมการ และเก็บค่าประมาณสัมประสิทธิ์ $\hat{\phi}_{jj}$ เมื่อนำค่า $\hat{\phi}_{jj}$ มาวาดกราฟกับ j เราจะได้ฟังก์ชันสัมประสิทธิ์สหสัมพันธ์ในตัวเองบางส่วนจากตัวอย่าง (sample PACF) ซึ่งสามารถคำนวณได้โดยใช้ฟังก์ชัน `pacf` ใน R



รูปที่ 3.3: ฟังก์ชันสหสัมพันธ์ในตัวเองบางส่วนของข้อมูลจำลอง $AR(1)$ และ $AR(2)$

ตัวอย่างที่ 3.3 (การสร้างแบบจำลองสำหรับความแตกต่างระหว่างอัตราดอกเบี้ยด้วยแบบจำองออโตรีเกรสซีฟ AR(p)) ในตัวอย่างนี้เราจะพิจารณาความแตกต่างระหว่างอัตราดอกเบี้ย MLR ของไทย[a] และอัตราดอกเบี้ยลูกค้าชั้นดีของสหรัฐอเมริกา[b] รายเดือนระหว่างเดือนมกราคม 1978 ถึงธันวาคม 2004 ซึ่งอยู่ในไฟล์ `mlr.csv` โดยที่คอลัมน์ที่หนึ่งเป็นเดือน คอลัมน์ที่สองเป็นอัตราดอกเบี้ยของไทย คอลัมน์ที่สามเป็นอัตราดอกเบี้ยของสหรัฐอเมริกา และคอลัมน์สี่เป็นส่วนต่าง `diff_th_us` เราจะนำเข้าข้อมูลวาดกราฟ(รูปที่ 3.4)

```
> int<-read.csv("https://raw.githubusercontent.com/chaleampong/EC435/
   master/mlr.csv", header = TRUE)
> head(int)
> ts.plot(int$diff_th_us, ylab ="%", xlab="time")
```

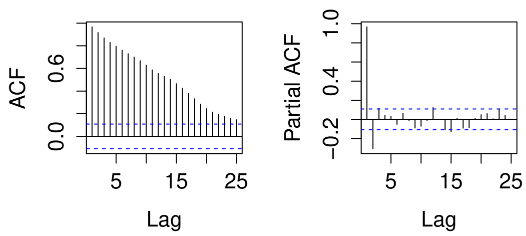


รูปที่ 3.4: ความแตกต่างระหว่างอัตราดอกเบี้ยของไทยและสหรัฐอเมริกา

หากเราพิจารณา ACF และ PACF ด้วยคำสั่งดังต่อไปนี้

```
> acf(int$diff_th_us)
> pacf(int$diff_th_us)
```

จะได้ผลดังรูป



รูปที่ 3.5: ACF และ PACF ของความแตกต่างระหว่างอัตราดอกเบี้ยของไทยและสหรัฐอเมริกา

จากรูปที่ 3.3 เมื่อพิจารณาจากรูป ACF จะเห็นได้ว่าผลต่างของอัตราดอกเบี้ย (y_t) มีความสัมพันธ์กับตัวเองในอดีตอย่างมีนัยสำคัญ จากรูป ACF จะพอที่จะเดาได้ว่า y_t น่าจะมีลักษณะคล้ายกับกระบวนการ $AR(p)$ ซึ่งเราสามารถพิจารณาได้ด้วยกราฟ PACF ในด้านขวาจะเห็นได้ PACF ต่างจากศูนย์อย่างมีนัยสำคัญจนกระทั่งถึงค่าล่าที่ 3 ดังนั้นเราน่าจะใช้แบบจำลอง $AR(3)$ ในการประมาณค่าผลต่างของอัตราดอกเบี้ย

[a] ข้อมูลจากธนาคารแห่งประเทศไทย
[b] ข้อมูลจากธนาคารกลางแห่งสหรัฐอเมริกา

3.1.5 การประมาณค่าและตรวจสอบแบบจำลอง

การประมาณค่าพารามิเตอร์ของแบบจำลอง $AR(p)$: สามารถดำเนินการได้โดยใช้วิธีการกำลังสองน้อยที่สุด เนื่องจากเราสามารถสังเกตตัวแปรทั้งหมดที่ใช้ในการประมาณค่าได้ เนื่องจากตัวแปรอิสระคือตัวแปร y_t ที่ค่า

ล่า $1, 2, ..., p$ นอกจากนี้ตัวประมาณค่า $\hat{\sigma}^2 = \frac{\sum_{t=p+1}^{T} \hat{\varepsilon}_t^2}{T-2p-1}$ อย่างไรก็ตาม ในแบบจำลองอื่นที่จะนำเสนอในบทนี้ ไม่สามารถที่จะประมาณค่าได้ด้วยวิธีการกำลังสองน้อยที่สุด วิธีการที่เราใช้ในการประมาณค่าคือวิธีการภาวะน่าจะเป็นสูงสุดหรือเอ็มแอลอี (Maximum Likelihood Estimation หรือ MLE) ซึ่งวิธีการดังกล่าวเริ่มจากการสร้างฟังก์ชันภาวะน่าจะเป็น (likelihood function) แล้วหาตัวประมาณค่าที่ทำให้ภาวะน่าจะเป็นมีค่าสูงที่สุด

การประมาณค่าภาวะน่าจะเป็นสูงที่สุด

หากเราต้องการประมาณค่าแบบจำลองออโตรีเกรสซีฟอันดับหนึ่ง $AR(1)$ ซึ่งอยู่ในรูปดังต่อไปนี้

$$y_t = \mu + \phi(y_{t-1} - \mu) + \varepsilon_t$$

โดยที่ $\varepsilon_t \sim iidN(0, \sigma^2)$ เนื่องจากข้อมูลอนุกรมเวลาเป็นข้อมูลที่ขึ้นอยู่ต่อกัน (dependent) ดังนั้น หากเราเก็บข้อมูล $y_1, ..., y_T$ แล้วฟังก์ชันภาวะน่าจะเป็นสามารถเขียนได้ดังนี้

$$L(\mu, \phi, \sigma^2) = f(y_1) f(y_2|y_1) f(y_3|y_2) \cdots f(y_T|y_{T-1}) \tag{3.26}$$

เนื่องจาก $y_t|y_{t-1} \sim N(\mu + \phi(y_{t-1} - \mu), \sigma^2)$ และฟังก์ชันการแจกแจงจะเป็นแบบปกติที่เหมือนกับช็อก

$$f(y_t|y_{t-1}) = f_\varepsilon[(y_t - \mu) - \phi(y_{t-1} - \mu)]$$

และสามารถเขียนฟังก์ชันค่าความควรจะเป็นได้เป็น

$$L(\mu, \phi, \sigma^2) = f(y_1) \Pi_{t=2}^{T} f_\varepsilon[(y_t - \mu) - \phi(y_{t-1} - \mu)] \tag{3.27}$$

โดยที่เราจำเป็นต้องหาการแจกแจงของ $f(y_1)$ เราทราบว่าเราสามารถเขียน y_1 ใดๆในรูปของมูฟวิ่งเอเวอเรฟที่มีอันดับเป็นอนันต์ $y_1 = \mu + \sum_{j=0}^{\infty} \phi^j \varepsilon_{1-j}$ ซึ่งจะเห็นได้ว่ามีการแจกแจงเป็นแบบปกติที่มีค่าเฉลี่ย μ และค่าความแปรปรวนเท่ากับ $\sigma^2/(1-\phi^2)$ ดังนั้นฟังก์ชันภาวะน่าจะเป็นจะเท่ากับ

$$\begin{aligned} L(\mu, \phi, \sigma^2) = (2\pi\sigma^2)^{-1/2}(1-\phi^2)^{-1/2} \exp\left(\frac{-(y_1-\mu)^2}{2\sigma^2/(1-\phi^2)} + (2\pi\sigma^2)^{-(T-1)/2}\right) \times \\ \exp\left(\frac{\sum_{t=2}^{T}[(y_t - \mu) - \phi(y_{t-1} - \mu)]}{2\sigma^2}\right) \end{aligned} \tag{3.28}$$

การหาประมาณค่าโดยหาค่าพารามิเตอร์ที่ทำให้ลอการิทึมของสมการ (3.28) สูงที่สุดเรียกว่า การประมาณค่าภาวะน่าจะเป็นสูงสุดแบบแม่นตรง (exact maximum likelihood estimation) โดยที่ในกรณีนี้เราไม่สามารถหาค่าสูงสุดได้ด้วยการวิเคราะห์หาเงื่อนไขจำเป็น เราต้องใช้กระบวนการด้วยเครื่องคอมพิวเตอร์ในการหาค่าสูงสุด

ในกรณีแบบจำลองออโตรีเกรสซีฟ เราสามารถละเลยค่าเริ่มต้นซึ่งก่อนให้เกิดความไม่เป็นเส้นตรงได้ โดยภายใต้เงื่อนไขสมมุติให้ค่าเริ่มต้นเท่ากับศูนย์ เราจะได้ค่าภาวะน่าจะเป็นแบบมีเงื่อนไข (conditional likelihood)

$$L(\mu,\phi,\sigma^2) = \Pi_{t=2}^{T} f_\varepsilon[(y_t-\mu)-\phi(y_{t-1}-\mu)] \quad (3.29)$$

$$= (2\pi\sigma^2)^{-(T-1)/2}\exp\left(-\frac{\sum_{t=2}^{T}[(y_t-\mu)-\phi(y_{t-1}-\mu)]^2}{2\sigma^2}\right) \quad (3.30)$$

ตัวประมาณค่าที่ได้จากการแสวงหาค่าสูงสุดของสมการ (3.30) เรียกว่าการประมาณค่าภาวะน่าจะเป็นสูงสุดแบบมีเงื่อนไข (conditional MLE) หรือเราสามารถเขียนฟังก์ชันในสมการ (3.30) ใหม่เป็น

$$L(\mu,\phi,\sigma^2) = (2\pi\sigma^2)^{-(T-1)/2}\exp\left(-\frac{\sum_{t=2}^{T}\varepsilon_t^2}{2\sigma^2}\right) \quad (3.31)$$

หรือเราสามารถพิจารณาฟังก์ชันลอการิทึมของฟังก์ชันภาวะน่าจะเป็น

$$\ln L(\mu,\phi,\sigma^2) = \frac{-(T-1)}{2}\ln(2\pi) - \frac{(T-1)}{2}\ln(\sigma^2) - \frac{\sum_{t=2}^{T}\varepsilon_t^2}{2\sigma^2} \quad (3.32)$$

โดยที่ค่าพารามิเตอร์ที่ให้ค่าสูงสุดของ $\ln L$ จะให้ค่าต่ำสุดของ $S(\mu,\theta) = \frac{\sum_{t=2}^{T}\varepsilon_t^2}{2\sigma^2}$ ซึ่งเราเรียกว่าผลรวมของค่าผิดพลาดกำลังสองแบบมีเงื่อนไข (conditional sum of squares) ดังเราจะเรียกการประมาณค่าด้วยวิธี ภาวะน่าจะเป็นสูงสุดแบบมีเงื่อนไขว่า การประมาณค่าด้วยผลรวมของค่าผิดพลาดกำลังสองแบบมีเงื่อนไข

ในกรณีที่เราประมาณค่าด้วยการหาค่าสูงสุดของสมการ 3.32 เราสามารถตัวประมาณค่าได้ด้วยการหาเงื่อนไขอันดับหนึ่งสำหรับค่าสูงสุด (first order condition)

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \phi} = -\frac{1}{2\sigma^2}2\sum_{t=2}^{T}\varepsilon_t(-\phi(y_{t-1}-\mu)) \quad (3.33)$$

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \sigma^2} = \frac{-(T-1)}{2}\frac{1}{\sigma^2} + \frac{\sum_{t=2}^{T}\varepsilon_t^2}{2\sigma^2} \quad (3.34)$$

จากเงื่อนไขแรก

$$\sum_{t=2}^{T}\varepsilon_t(\hat{\phi}(y_{t-1}-\mu)) = 0$$

$$\sum_{t=2}^{T}[(y_t-\mu)-\hat{\phi}(y_{t-1}-\mu)](\hat{\phi}(y_{t-1}-\mu)) = 0$$

หลังจากที่จัดรูปใหม่จะได้

$$\hat{\phi} = \frac{\sum_{t=2}^{T}(y_t-\hat{\mu})(y_{t-1}-\hat{\mu})}{\sum_{t=2}^{T}(y_t-\hat{\mu})^2}$$

โดยที่ค่า $\hat{\mu} = \frac{\sum_{t=2}^{T}y_t}{(T-1)}$ และ จากเงื่อนไขที่สอง $\hat{\sigma}^2 = \frac{\sum_{t=2}^{T}\hat{\varepsilon}_t}{T-2}$ จะเห็นได้ว่าตัวประมาณค่าที่ได้จากผลรวมของค่าผิดพลาดกำลังสองแบบมีเงื่อนไขเป็นตัวประมาณค่าของวิธีการกำลังสองน้อยที่สุดด้วย

การประเมินความเหมาะสมของแบบจำลอง

หลังจากที่เราได้ตัวประมาณค่าสำหรับพารามิเตอร์แล้ว เราต้องการทราบว่าแบบจำลองที่ประมาณค่าเหมาะสมในการอธิบายตัวแปร y_t ที่เราสนใจหรือไม่ โดยที่แนวคิดของการทดสอบคือหากแบบจำลองที่สร้างขึ้นสามารถอธิบาย y_t ได้อย่างเหมาะสม ค่าส่วนเกินที่เหลือจากแบบจำลองจะต้องไม่มีรูปแบบใด ๆ เหลือ การอธิบายตัวแปร y_t ด้วยแบบจำลองสามารถคำนวณได้ด้วย ค่าจากสมการประมาณ (fitted value) ของตัวแปรที่เราศึกษา ($\hat{y}_t = \hat{\phi}_1 y_{t-1} + ... + \hat{\phi}_p y_{t-p}$) ในขณะที่ส่วนที่แบบจำลองไม่สามารถอธิบายได้คือค่าส่วนเกิน (residuals) โดยในที่นี้ค่าส่วนเกินสามารถคำนวณได้จาก $\hat{\varepsilon}_t = y_t - \hat{y}_t$ โดยเราจะพิจารณาค่าส่วนเกินว่าเป็นอนุกรมเวลาที่ไม่มีสหสัมพันธ์ในตัวหรือไวซ์นอยซ์หรือไม่

เราอาจจะเริ่มจากการวาดแผนภาพ $\hat{\varepsilon}_t$ และฟังก์ชันสหสัมพันธ์ในตัวเองของ $\hat{\varepsilon}_t$ เพื่อดูว่าอนุกรมดังกล่าวยังมีความขึ้นอยู่ต่อกันหรือไม่ โดยที่ภายใต้สมมุติฐานหลักที่ว่า $\varepsilon_t \sim N(0,1)$ เราสามารถสรุปได้ว่าสหสัมพันธ์ในตัวเองจะมีการแจกแจงเป็น $N(0,1/T)$ และค่าที่ใช้ในการทดสอบคือ $\pm 2/\sqrt{T}$

นอกจากนี้เราสามารถทดสอบโดยใช้ค่าสถิติ $Q(m) = T(T+2)\sum_{k=1}^{m} \frac{\hat{\rho}_{\hat{\varepsilon}k}^2}{T-k}$ โดยที่ $Q(m) \sim \chi^2_{m-g}$ และเราจะปฏิเสธสมมุติฐานหลักถ้า $Q(m)$ มีค่ามากกว่าควอนไทล์ที่ $(1-\alpha)$ ของ χ^2_{m-g} โดยที่ g คือจำนวนของอันดับในแบบจำลองซึ่งในแบบจำลอง $AR(p)$ ค่า $g = p$ และ m คือจำนวนค่าล่าของความสัมพันธ์ที่พิจารณา

ตัวอย่างที่ 3.4 การประมาณค่าและตรวจสอบความเหมาะสมของแบบจำลองออโตรีเกรสซีฟ

ต่อเนื่องจากตัวอย่างข้างต้น เราต้องการประมาณค่าแบบจำลอง $AR(3)$ เราสามารถประมาณค่าได้โดยใช้คำสั่ง `arima` โดยที่ arg ที่เราต้องใส่คือ (1) ชื่ออนุกรมเวลาซึ่งในที่นี้คือ `int$diff_th_us` (2) อันดับของอนุกรม `order=c(p,d,q)` โดยที่ p คืออันดับของออโตรีเกรสซีฟ ส่วน d และ q คืออันดับของ integration และ moving average ซึ่งเราจะพูดถึงในหัวข้อต่อไป ในหัวข้อนี้เราจะกำหนดให้ $d = 0, q = 0$ โดยที่เราจะเก็บแบบจำลองไว้ใน object ชื่อว่า $m1$

```
> m1<-arima(int$diff_th_us, order=c(3,0,0))
> m1
Call:
arima(x = int$diff_th_us, order = c(3, 0, 0))
Coefficients:
         ar1      ar2     ar3  intercept
      1.3294  -0.4986  0.1334     3.0553
s.e.  0.0549   0.0878  0.0549     0.8102
sigma^2 estimated as 0.3054:  log likelihood = -269.11,  aic = 548.21
```

โดยที่ค่าสัมประสิทธิ์ $\hat{\phi}_1 = 1.3294, \hat{\phi}_2 = -0.4986, \hat{\phi}_3 = 0.1334, \hat{\mu}(= intercept) = 3.0553$ และมีค่า standard errors อยู่ในบรรทัด `s.e.` ในโปรแกรม R ค่า `intercept` ที่ได้คือ μ มิใช่จุดตัดแกนในสมการที่ 3.5 ดังนั้นถ้าต้องการหากเราต้องการค่า $\hat{c} = \hat{\mu}(1-\hat{\phi}_1-\hat{\phi}_2-\hat{\phi}_3) = 0.10937$ หรือเราสามารถเขียนผลการประมาณค่าได้โดย

$$(1 - \underset{(0.0549)}{1.3294}L + \underset{(0.0878)}{0.4986}L^2 - \underset{(0.0549)}{0.1334}L^3)(y_t - \underset{(0.8102)}{3.0553}) = \varepsilon_t$$

โดยที่ค่าในวงเล็บคือสแตนดาร์ดแอเรอ และ $\widehat{\sigma}^2 = 0.3054$

ในการประมาณค่าข้างต้น R จะเลือกใช้การประมาณค่าด้วย CSS ก่อนเพื่อหาจุดเริ่มต้นสำหรับ MLE นอกจากนี้เราสามารถเลือกวิธีการประมาณค่าได้โดยการเพิ่ม argument `method=c("ML")` และ `method=c("CSS")` สำหรับการประมาณค่าด้วย MLE และ CSS ตามลำดับ โดยที่ผลการประมาณค่าจะมีค่าแตกต่างกันเล็กน้อยดังที่ได้แสดงไว้ข้างล่าง

```
> m2<-arima(int$diff_th_us, order=c(3,0,0),method=c("ML"))
> m2
Call:
arima(x = int$diff_th_us, order = c(3, 0, 0), method = "ML")
Coefficients:
         ar1      ar2     ar3   intercept
      1.3295  -0.4987  0.1334      3.056
s.e.  0.0549   0.0878  0.0549      0.810

sigma^2 estimated as 0.3054:  log likelihood = -269.11,   aic = 548.21
> m3<-arima(int$diff_th_us, order=c(3,0,0),method=c("CSS"))
> m3
Call:
arima(x = int$diff_th_us, order = c(3, 0, 0), method = "CSS")
Coefficients:
         ar1      ar2     ar3   intercept
      1.3334  -0.5016  0.1346     3.0793
s.e.  0.0551   0.0880  0.0552     0.9195
sigma^2 estimated as 0.3082:  part log likelihood = -269.05
```

ถ้าในการประมาณค่าแบบจำลองออโตรีเกรสซีฟ แล้วเราทดสอบค่าเฉลี่ยด้วยการทดสอบที่ว่าไม่มีความแตกต่างจากศูนย์อย่างมีนัยสำคัญ เราอาจจะปรับรูปแบบสมการเป็นสมการที่ค่าเฉลี่ยเท่ากับศูนย์ และประมาณค่าโดยการเพิ่ม argument `include.mean=FALSE` ในคำสั่ง `arima` นอกจากนี้เราสามารถหาค่ารากของสมการพหุนามออโตรีเกรสซีฟได้ตามคำสั่งข้างล่าง

```
> p1<-m1$coef
> p1
       ar1         ar2         ar3   intercept
 1.3294074 -0.4985723   0.1333653   3.0553267
> roots=polyroot(p1)
> roots
[1]  0.4008889+0.5949388i -0.8454280-0.0000000i  0.4008889-0.5949388i
> Mod(roots)
[1] 0.7174009 0.8454280 0.7174009
```

จะเห็นได้ว่าค่ารากของสมการพหุนามเป็นจำนวนเชิงเส้นที่มีมอดุลัสน้อยกว่าหนึ่งแสดงว่าอนุกรมที่เราประมาณค่าได้เป็นอนุกรมไม่นิ่ง (ซึ่งเราจะกลับมาพิจารณาอนุกรมนี้ในหัวข้อต่อไป)
หลังจากที่เราได้ตัวประมาณค่าของพารามิเตอร์ทั้งหมดแล้วเราจะพิจารณาว่าเรซิดิวนั้นยังมีความสัมพันธ์ระหว่างช่วงเวลาหลงเหลืออยู่หรือไม่ หรือแบบจำลองเพียงพอหรือไม่ โดยการทดสอบ L-B test สำหรับ `m2$residuals` ด้วยคำสั่งข้างล่าง

```
> adqtest<-Box.test(m1$residuals, lag=12, type="Ljung")
> adqtest
        Box-Ljung test
```

```
data:  m1$residuals
X-squared = 14.009, df = 12, p-value = 0.3002
> #calculate p-value with df=12-3
> pv<-1-pchisq(adqtest$statistic, 9)
> pv
X-squared
0.1220215
```

เราทดสอบว่าเรซิดิวของแบบจำลอง m1 เป็นไวท์นอยซ์หรือไม่ โดยใช้คำสั่ง `Box.test` กับ `m1$residuals` โดยเก็บผลไว้ที่ `adqtest`

จากค่า LB statistics =14.009 เราสามารถนำไปเปรียบเทียบกับวิกฤติจากการแจกแจงไคสแคว (df=12-3, α = 0.05)=16.92 เนื่องจาก LB statistics น้อยกว่าค่าวิกฤติ ดังนั้นเราไม่สามารถปฏิเสธสมมุติฐานหลักว่าเรซิดิวเป็นไวท์นอยซ์แสดงว่าแบบจำลอง AR(3) เพียงพอในการอธิบาย `diff_th_us`

นอกจากนี้เราสามารถคำนวณค่าพีโดยใช้คำสั่ง `pchisq(value, df)` สำหรับคำนวณหา CDF ไปยังจุดที่ไคสแควเท่ากับ 14.009 และสามารถคำนวณพื้นที่ปลายหางด้วย 1-CDF ก็จะเป็นค่าพีสำหรับการทดสอบเรซิดิว

ในกรณีนี้ค่าพีเท่ากับ 0.12 ซึ่งมากกว่า α (=0.05) เราไม่สามารถปฏิเสธสมมุติฐานหลักที่ว่าเรซิดิวเป็นไวท์นอยซ์ แสดงว่าแบบจำลอง $AR(3)$ เพียงพอที่จะใช้อธิบายความแตกต่างของอัตราดอกเบี้ย

3.1.6 การพยากรณ์ด้วยแบบจำลองออโตรีเกรสซีฟ $AR(p)$

การใช้ประโยชน์จากแบบจำลองอนุกรมเวลาที่สำคัญประการหนึ่งคือการพยากรณ์(forecasting) หากสมมุติให้เรากำลังอยู่ ณ ช่วงเวลาที่ h แต่ต้องการที่จะพยากรณ์ไปข้างหน้า l คาบเวลา หรือสนใจค่าของ y_{h+l} โดยที่ $l \geq 1$ เราเรียก h ว่าจุดเริ่มต้นการพยากรณ์ (forecast origin) และ l ว่าขอบเขตการพยากรณ์ (forecast horizon)

กำหนดให้ $\hat{y}_h(l)$ เป็นค่าพยากรณ์ของ y_{h+l} โดยใช้ข้อมูล ณ เวลาที่ h การพยากรณ์ดังกล่าวจะทำให้ฟังก์ชันสูญเสียที่เกิดจากการค่าผิดพลาดกำลังสอง (squared errors) น้อยที่สุด

$$E\left[(y_{h+l}-\hat{y}_h(l))^2|F_h\right] \leq \min_g E\left[(y_{h+l}-g)^2|F_h\right]$$

โดยที่ F_h เป็นข้อมูลที่มีทั้งหมดในคาบที่ h และเราเรียก $\hat{y}_h(l)$ ว่าค่าพยากรณ์ของ y_t ไปข้างหน้า l คาบเมื่อจุดเริ่มต้นการพยากรณ์อยู่ที่ h (l-step ahead forecast)

ค่าพยากรณ์ไปข้างหน้า 1 คาบจากแบบจำลอง $AR(p)$

เราพบว่าค่า $y_{h+1} = \phi_0 + \phi_1 y_{h+1-1} + ... + \phi_p y_{h+1-p} + \varepsilon_{h+1}$ ตัวพยากรณ์ที่จะทำให้ค่าฟังก์ชันสูญเสียน้อยที่สุดคือค่าคาดการณ์แบบมีเงื่อนไข (conditional expectation)

$$\begin{aligned}
\hat{y}_h(1) &= E(y_{h+1}|F_h) \\
&= E(\phi_0 + \phi_1 y_h + ... + \phi_p y_{h+1-p}|F_h) + \underbrace{E(\varepsilon_{h+1}|F_h)}_{=0} \\
&= \phi_0 + \phi_1 y_h + ... + \phi_p y_{h+1-p} = \phi_0 + \sum_{i=1}^{p} \phi_i y_{h+1-i} \qquad (3.35)
\end{aligned}$$

และค่าผิดพลาดจากการพยากรณ์เท่ากับ

$$\begin{aligned}
e_h(1) &= y_{t+1} - \hat{y}_h(1) \\
&= (\phi_0 + \phi_1 y_h + ... + \phi_p y_{h+1-p} + \varepsilon_{h+1}) - (\phi_0 + \phi_1 y_h + ... + \phi_p y_{h+1-p}) = \varepsilon_{h+1}
\end{aligned}$$

และค่าแปรปรวนจากการพยากรณ์ไปข้างหน้าหนึ่งคาบเท่ากับ

$$Var(e_h(1)) = Var(\varepsilon_{h+1}) = \sigma^2$$

เราสามารถสร้างช่วงความเชื่อมั่น 95 % ของการพยากรณ์ไปข้างหน้า 1 คาบได้โดยช่วงดังกล่าวจะเท่ากับ

$$\hat{y}_h(1) \pm 1.96 sd(e_h(1))$$

โดยที่ $sd(e_h(1)) = \sqrt{Var(e_h(1)} = \sqrt{\sigma^2}$ หากแทนค่า σ^2 ด้วยตัวประมาณค่า($\widehat{\sigma^2}$)เราจะเรียกค่าดังกล่าวว่าค่าคาดเคลื่อนมาตรฐาน (standard error)

ค่าพยากรณ์ไปข้างหน้า 2 คาบจากแบบจำลอง $AR(p)$

เราพบว่าค่า $y_{h+2} = \phi_0 + \phi_1 y_{h+2-1} + ... + \phi_p y_{h+2-p} + \varepsilon_{h+2}$ ตัวพยากรณ์ที่จะทำให้ค่าฟังก์ชันสูญเสียน้อยที่สุดคือค่าคาดการณ์แบบมีเงื่อนไข

$$\begin{aligned}
\hat{y}_h(2) &= E(y_{h+2}|F_h) \\
&= E(\phi_0 + \phi_1 y_{h+1} + \phi_2 y_h + ... + \phi_p y_{h+2-p}|F_h) + \underbrace{E(\varepsilon_{h+2}|F_h)}_{=0} \\
&= \phi_0 + \phi_1 \underbrace{E(y_{h+1}|F_h)}_{=\hat{y}_h(1)} + \phi_2 y_h + ... + \phi_p y_{h+2-p} \\
&= \phi_0 + \phi_1 \hat{y}_h(1) + \phi_2 y_{h+2-2} + ... + \phi_p y_{h+2-p} \qquad (3.36)
\end{aligned}$$

และค่าผิดพลาดจากการพยากรณ์เท่ากับ

$$\begin{aligned} e_h(2) &= y_{h+2} - \hat{y}_h(2) \\ &= (\phi_0 + \phi_1 y_{h+1} + \ldots + \phi_p y_{h+2-p} + \varepsilon_{h+2}) - (\phi_0 + \phi_1 \hat{y}_h(1) + \phi_2 y_{h+2-2} + \ldots + \phi_p y_{h+2-p}) \\ &= \varepsilon_{h+2} + \phi_1 (y_{h+1} - \hat{y}_h(1)) = \varepsilon_{h+2} + \phi_1 \varepsilon_{h+1} \end{aligned}$$

และค่าแปรปรวนจากการพยากรณ์ไปข้างหน้าหนึ่งคาบเท่ากับ

$$Var(e_h(2)) = Var(\varepsilon_{h+2} + \phi_1 \varepsilon_{h+1}) = (1 + \phi_1^2)\sigma^2$$

เราจะสังเกตได้ว่า $Var(e_h(2)) \geq Var(e_h(1))$ ดังนั้นช่วงความเชื่อมั่น 95% ของการพยากรณ์จะมีขนาดที่กว้างขึ้นเรื่อยๆ ซึ่งสะท้อนความแม่นยำของแบบจำลองอนุกรมเวลาเมื่อเราพยากรณ์ไปในอนาคตที่ไกลขึ้น

ตัวอย่างที่ 3.5 การพยากรณ์ การเปรียบเทียบผลการพยากรณ์กับข้อมูลจริง (in-sample evaluation) ต่อเนื่องจากตัวอย่างที่ผ่านมา เราจะพยากรณ์ไปข้างหน้าโดยใช้ตัวอย่างความแตกต่างของอัตราดอกเบี้ย จำนวนข้อมูลที่เรามีอยู่คือ 324 เดือน เพื่อแสดงให้เห็นความแตกต่างระหว่างค่าจริงและค่าพยากรณ์ เราจะประมาณค่าโดยใช้ข้อมูลเดือนมกราคม 1978 ถึงธันวาคม 2003 เป็นข้อมูลจำนวน 312 โดยเรียกว่าตัวแปร `intdiff.in` ดังคำสั่งในบรรทัดที่ 3 และประมาณค่าด้วยแบบจำลอง $AR(3)$ และเก็บค่าประมาณไว้ใน Object m_4

```
1 > length(int$diff_th_us)
2 [1] 324
3 > intdiff.in<-int$diff_th_us[1:312]
4 > m4=arima(intdiff.in,order=c(3,0,0))
```

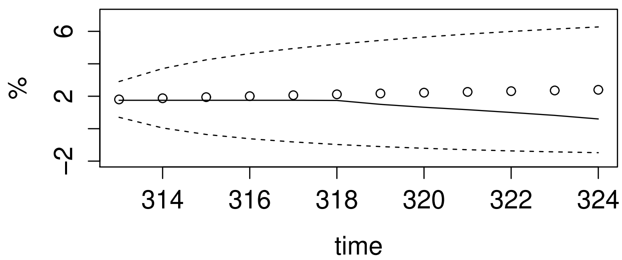
เราสามารถพยากรณ์ไปข้างหน้าโดยใช้คำสั่ง `predict` โดยคำสั่งดังกล่าวจะต้องระบุแบบจำลอง (m_4) และจำนวนคาบไปข้างหน้า (`n.ahead`) จะเก็บค่าดังกล่าวไว้ใน object `m4.pred` โดยใน Object ดังกล่าวจะประกอบด้วย

- `$pred` คือค่าพยากรณ์ไปข้างหน้า 1 ถึง 12 คาบซึ่งแสดงค่าในบรรทัดที่ 8-9 ตัวอย่างเช่น $\hat{y}_{312}(1) = 1.803$ และ $\hat{y}_{312}(12) = 2.397$
- `$se` คือค่าคาดเคลื่อนมาตรฐานของค่าพยากรณ์ไปข้างหน้า 1 ถึง 12 คาบซึ่งแสดงค่าในบรรทัดที่ 15-16 ตัวอย่างเช่น $se(e_{312}(1)) = 0.562$ และ $se(e_{312}(12)) = 1.977$

และสามารถวาดรูปเปรียบเทียบค่าจริง (จากเดือนที่ 313 ถึง 324) และค่าพยากรณ์ (`m4.pred$pred`) พร้อมช่วงความเชื่อมั่น 95 % [ดูคำสั่งในบรรทัด 17 ถึง 20] โดยกราฟดังกล่าวแสดงไว้ที่รูป 3.6

```
1 > m4.pred=predict(m4,n.ahead=12)
2 > m4.pred
3 $pred
4 Time Series:
```

```
Start = 313
End = 324
Frequency = 1
 [1] 1.803828 1.875260 1.943271 2.005150 2.062937 2.117888 2.170297
   2.220198
 [9] 2.267658 2.312788 2.355708 2.396527
$se
Time Series:
Start = 313
End = 324
Frequency = 1
 [1] 0.5622779 0.9342948 1.1737163 1.3399272 1.4696143 1.5777365
   1.6700163
 [8] 1.7494732 1.8183586 1.8784737 1.9312318 1.9777417
> plot(seq(313,324),int$diff_th_us[313:324],type="l", ylim=c(-2,7),
   ylab="%", xlab="time")
> points(seq(313,324), m4.pred$pred)
> lines(seq(313,324), m4.pred$pred+1.96*m4.pred$se,lty=2)
> lines(seq(313,324), m4.pred$pred-1.96*m4.pred$se,lty=2)
```



รูปที่ 3.6: การพยากรณ์ความแตกต่างระหว่างอัตราดอกเบี้ยของไทยและสหรัฐอเมริกาจาก $AR(3)$

3.2 แบบจำลองมูฟวิ่งเอเวอเรจ

แบบจำลองมูฟวิ่งเอเวอเรจหรือค่าเฉลี่ยเคลื่อนที่ (Moving Average หรือ MA) มีพื้นฐานจากแนวคิดที่ว่าอนุกรมเวลาเส้นตรงคงที่ใด ๆ สามารถเขียนให้อยู่ในรูปมูฟวิ่งเอเวอเรจอันดับเป็นอนันต์ และค่าสัมประสิทธิ์ที่ค่าล่าที่ห่างจากช่วงเวลาที่ t มีขนาดที่เล็กมากจนกระทั่งเราสามารถละเลยค่าดังกล่าว และสามารถลดจำนวนความล่าของค่าแอเรอให้เหลือจำนวน q พจน์ที่อยู่ใกล้ t $(\varepsilon_{t-1},...,\varepsilon_{t-q})$ เรียกว่าแบบจำลองมูฟวิ่งเอเวอเรจที่อันดับ q ซึ่งเขียนแทนด้วย $MA(q)$ และแสดงได้ด้วยสมการ

$$y_t = \mu + \varepsilon_t + \theta_1\varepsilon_{t-1} + ... + \theta_q\varepsilon_{t-q} = \sum_{j=0}^{q}\theta_j\varepsilon_{t-j} = \theta(L)\varepsilon_t \tag{3.37}$$

โดยที่ $\theta_0 = 1$ เช่นเดียวกับในกรณีของแบบจำลองออโตรีเกรซซีฟ เราต้องการทราบคุณลักษณะของตัวแปร y_t หากตัวแปรดังกล่าวถูกอธิบายด้วยรูปแบบมูฟวิ่งเอเวอเรจ โดยที่เราจะเริ่มจากในกรณีที่ง่ายที่สุดคือกรณีแบบจำลองมูฟวิ่งเอเวอเรจอันดับหนึ่ง แล้วพิจารณาไปยังแบบจำลองในรูปทั่วไปที่มีอันดับเท่ากับ q

3.2.1 แบบจำลองมูฟวิ่งเอเวอเรจที่อันดับหนึ่ง (MA(1))

สมมุติให้ y_t เป็นอนุกรมเวลาในรูปแบบของมูฟวิ่งเอเวอเรจที่อันดับหนึ่ง ($MA(1)$)

$$y_t = \mu + \varepsilon_t + \theta_1 \varepsilon_{t-1} \tag{3.38}$$

โดยที่ ε_t มีคุณสมบัติเป็นไวท์นอยซ์ ($E(\varepsilon_t) = 0, Var(\varepsilon_t) = \sigma^2, E(\varepsilon_t, \varepsilon_{t-j}) = 0, \forall j \neq 0$)

เราเริ่มต้นด้วยการหาค่าคาดหมายของ y_t โดยการใส่ค่าคาดหมาย (take expectation) ทั้งสองข้างของสมการ (3.38) จะได้

$$E(y_t) = \mu + \underbrace{E(\varepsilon_t)}_{=0} + \theta_1 \underbrace{E(\varepsilon_{t-1})}_{=0} = \mu$$

ต่อไปเราจะพิจารณาค่าความแปรปรวนของ y_t (γ_0)

$$\begin{aligned}
\gamma_0 = Var(y_t) &= E(y_t - E(y_t))^2 \\
&= E(\varepsilon_t + \theta_1 \varepsilon_{t-1})^2 \\
&= E(\varepsilon_t^2 + \theta_1 \varepsilon_t \varepsilon_{t-1} + \theta_1^2 \varepsilon_{t-1}^2) \\
&= \underbrace{E(\varepsilon_t^2)}_{=\sigma_\varepsilon^2} + \theta_1 \underbrace{E(\varepsilon_t \varepsilon_{t-1})}_{=0} + \theta_1^2 \underbrace{E(\varepsilon_{t-1}^2)}_{=\sigma_\varepsilon^2} \\
\gamma_0 &= (1 + \theta_1^2)\sigma_\varepsilon^2
\end{aligned} \tag{3.39}$$

ต่อไปเราจะพิจารณาค่าความแปรปรวนร่วมในตัวเองย้อนไปหนึ่งคาบ (one-lag autocovariance)

$$\begin{aligned}
\gamma_1 &= Cov(y_t, y_{t-1}) = E\left[(y_t - E(y_t))(y_{t-1} - E(y_{t-1}))\right] \\
&= E\left[(\varepsilon_t + \theta_1 \varepsilon_{t-1})(\varepsilon_{t-1} + \theta_1 \varepsilon_{t-2})\right] \\
&= E\left[\varepsilon_t \varepsilon_{t-1} + \theta_1 \varepsilon_{t-1}^2 + \theta_1 \varepsilon_t \varepsilon_{t-2} + \theta_1^2 \varepsilon_{t-1} \varepsilon_{t-2}\right] \\
&= \underbrace{E(\varepsilon_t \varepsilon_{t-1})}_{=0} + \theta_1 \underbrace{E(\varepsilon_{t-1}^2)}_{\sigma_\varepsilon^2} + \theta_1 \underbrace{E(\varepsilon_t \varepsilon_{t-2})}_{=0} + \theta_1^2 \underbrace{E(\varepsilon_{t-1} \varepsilon_{t-2})}_{=0} \\
\gamma_1 &= \theta_1 \sigma_\varepsilon^2
\end{aligned} \tag{3.40}$$

พิจารณาค่าความแปรปรวนร่วมในตัวเองย้อนไปที่ห่างกันสองช่วงเวลา

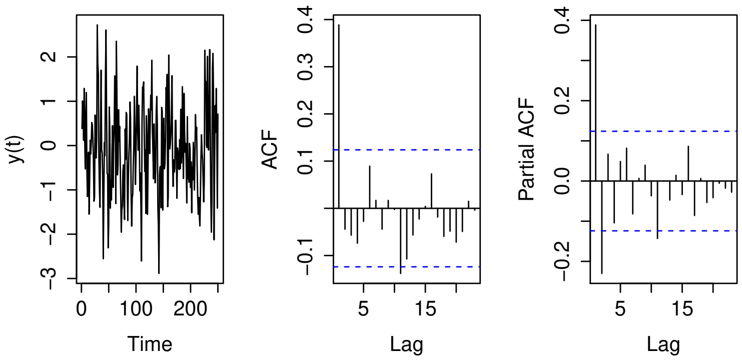
$$\begin{aligned}
\gamma_2 = Cov(y_t, y_{t-2}) &= E\left[(y_t - E(y_t))(y_{t-2} - E(y_{t-2}))\right] \\
&= E\left[(\varepsilon_t + \theta_1\varepsilon_{t-1})(\varepsilon_{t-2} + \theta_1\varepsilon_{t-3})\right] \\
&= E\left[\varepsilon_t\varepsilon_{t-2} + \theta_1\varepsilon_{t-1}\varepsilon_{t-2} + \theta_1\varepsilon_t\varepsilon_{t-3} + \theta_1^2\varepsilon_{t-1}\varepsilon_{t-3}\right]
\end{aligned}$$

$$\gamma_2 = \underbrace{E(\varepsilon_t\varepsilon_{t-2})}_{=0} + \theta_1\underbrace{E(\varepsilon_{t-1}\varepsilon_{t-2})}_{=0} + \theta_1\underbrace{E(\varepsilon_t\varepsilon_{t-3})}_{=0} + \theta_1^2\underbrace{E(\varepsilon_{t-1}\varepsilon_{t-3})}_{=0} = 0 \tag{3.41}$$

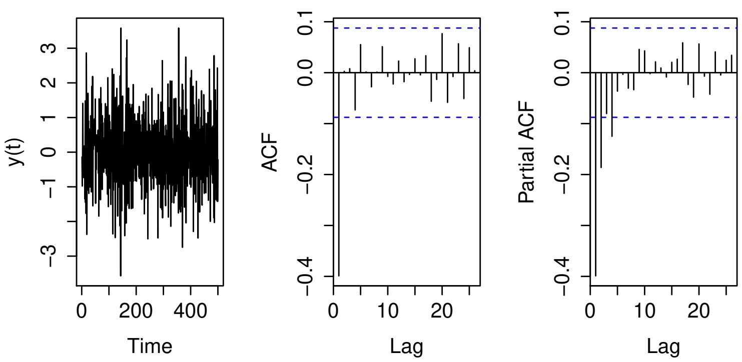
จากสมการข้างต้นจะเห็นได้ว่า $Cov(y_t, y_{t-k}) = 0$ สำหรับ $k \geq 2$ ในกรณีที่ y_t เป็น $MA(1)$ และฟังก์ชันสหสัมพันธ์ร่วมในตนเองเท่ากับ

$$\rho_k = \begin{cases} \frac{\theta_1}{1+\theta_1^2} & ,k = 1 \\ 0 & ,k > 1 \end{cases} \tag{3.42}$$

จะเห็นได้ว่า y_t มีสหสัมพันธ์กับ y_{t-1} แต่ไม่สัมพันธ์กับ $y_{t-2}, \ldots$ ซึ่งแตกต่างจาก $AR(1)$ รูปที่ 3.7 และ 3.8 แสดงอนุกรมเวลา y_t และ ACF กรณีที่ $\theta = 0.5$ และ $\theta = -0.5$ ตามลำดับ



รูปที่ 3.7: การจำลองข้อมูลกระบวนการ $MA(1)$ ที่มีค่าสัมประสิทธิ์ $\theta = 0.5$ และกลุ่มตัวอย่าง 500 หน่วย



รูปที่ 3.8: การจำลองข้อมูลกระบวนการ $MA(1)$ ที่มีค่าสัมประสิทธิ์ $\theta = -0.5$ และกลุ่มตัวอย่าง 500 หน่วย

เราจะเห็นได้ว่าอนุกรมเวลา y_t ที่เป็นกระบวนการมูฟวิ่งเอเวเรจจะเป็นอนุกรมเวลาคงที่เสมอ เนื่องจาก

กระบวนการดังกล่าวเป็นการรวมเชิงเส้นตรง (linear combination) ของอนุกรมเวลาไวท์นอยซ์เข้าด้วยกัน ซึ่งอนุกรมเวลาไวท์นอยซ์จะมีค่าโมเมนต์ที่หนึ่งและสองที่ไม่ขึ้นกับเวลา

กระบวนการที่หาค่าผกผันได้

นอกจากนี้หากพิจารณาค่าสัมประสิทธิ์ของ $MA(1)$ จะเห็นได้ว่าค่าความแปรปรวนร่วมในตัวของกระบวนการ $MA(1)$ ที่มีค่า $\theta_1 = 5$ และ $\theta_1 = 1/5$ จะมีค่าเท่ากัน นอกจากนี้ฟังก์ชันสหสัมพันธ์ในตัวของกระบวนการ $MA(1)$ สองกระบวนการต่อไปนี้จะมีลักษณะที่เหมือนกัน

$$x_t = w_t + \frac{1}{5}w_{t-1}, \quad w_t \sim iidN(0, 25)$$

และ

$$y_t = v_t + 5v_{t-1}, \quad v_t \sim iidN(0, 1)$$

เมื่อเราสังเกตเห็นเพียงแต่คุณลักษณะของอนุกรมเวลา x_t หรือ y_t โดยที่ไม่ทราบอนุกรมของช็อก w_t หรือ v_t เราต้องเลือกว่าจะใช้แบบจำลองไหน ซึ่งเราจะเลือกแบบจำลองที่สามารถเขียนแบบจำลองในรูปของออโตรีเกรซซีฟที่อันดับอนันต์ (infinite AR representation) โดยที่อนุกรมที่มีลักษณะดังกล่าวเราจะเรียกว่ากระบวนการที่หาตัวผกผันได้ (invertible) ยกตัวอย่างเช่น $y_t = (1 + \theta_1 L)\varepsilon_t$ เราสามารถเขียนแบบจำลองดังกล่าวในรูปต่อไปนี้

$$\begin{aligned}
(1 + \theta_1 L)^{-1} y_t &= \varepsilon_t \\
(1 + (-\theta_1 L) + (-\theta_1 L)^2 + (-\theta_1 L)^3 + ...)y_t &= \varepsilon_t \\
y_t - \theta_1 y_{t-1} + \theta_1^2 y_{t-2} - \theta_1^3 y_{t-3} + ... &= \varepsilon_t
\end{aligned}$$

$$y_t = \varepsilon_t + \theta_1 y_{t-1} - \theta_1^2 y_{t-2} + \theta_1^3 y_{t-3} + ... \tag{3.43}$$

ซึ่งสมการ 3.43 คือรูปแบบออโตรีเกรซซีฟที่มีอันดับเป็นอนันต์ของ $y_t \sim MA(1)$ ซึ่งจะเป็นอนุกรมคงที่หาก $|\theta_1| < 1$ ดังนั้น เงื่อนไขที่กระบวนการ $MA(1)$ จะเป็นกระบวนการที่หาตัวผกผันได้ คือ $|\theta_1| < 1$

เราสามารถเขียนเงื่อนไขของกระบวนการที่หาตัวผกผันได้ด้วยการเขียนกระบวนการ $MA(1)$ ในรูปสมการพหุนาม

$$y_t - \mu = (1 + \theta_1 L)\varepsilon_t$$

โดยที่สมการช่วยคือ $(1 + \theta_1 m) = 0$ ดังนั้นรากของสมการพหุนามมูฟวิ่งเอเวเรจคือ $m = \frac{-1}{\theta_1}$ เมื่อพิจารณารากของสมการพหุนาม $|m| = |\frac{-1}{\theta_1}| = \frac{1}{\underbrace{|\theta_1|}_{<1}} > 1$ จะได้ว่าค่าสัมบูรณ์ของรากของสมการพหุนามมูฟวิ่งเอเวเรจจะต้องมีค่ามากกว่า 1

3.2.2 แบบจำลองมูฟวิ่งเอเวอเรจที่อันดับสอง ($MA(2)$)

กำหนดให้ y_t เป็นกระบวนการมูฟวิ่งเอเวอเรจที่อันดับสอง $MA(2)$ ซึ่งสามารถแสดงได้ด้วยสมการ

$$y_t - \mu = \varepsilon_t + \theta_1 \varepsilon_{t-1} + \theta_2 \varepsilon_{t-2} \tag{3.44}$$

ซึ่งรูปแบบดังกล่าวจะมีค่าเฉลี่ยเท่ากับ μ

$$\begin{aligned} E(y_t) - \mu &= \underbrace{E(\varepsilon_1)}_{=0} + \theta_1 \underbrace{E(\varepsilon_{t-1})}_{=0} + \theta_2 \underbrace{E(\varepsilon_{t-2})}_{=0} \\ E(y_t) &= \mu \end{aligned}$$

ค่าความแปรปรวนของ y_t สามารถหาได้โดย

$$\begin{aligned} Var(y_t) = E(y_t - \mu)^2 &= E\left[(\varepsilon_t + \theta_1 \varepsilon_{t-1} + \theta_2 \varepsilon_{t-2})(\varepsilon_t + \theta_1 \varepsilon_{t-1} + \theta_2 \varepsilon_{t-2})\right] \\ &= E\left[\varepsilon_t^2 + \theta_1^2 \varepsilon_{t-1}^2 + \theta_2^2 \varepsilon_{t-2}^2 + \text{cross term}\right] \\ &= \underbrace{E(\varepsilon_t^2)}_{=\sigma_\varepsilon^2} + \theta_1^2 \underbrace{E(\varepsilon_{t-1}^2)}_{=\sigma_\varepsilon^2} + \theta_2^2 \underbrace{E(\varepsilon_{t-2}^2)}_{=\sigma_\varepsilon^2} + \underbrace{E(\text{cross term})}_{=0} \\ &= (1 + \theta_1^2 + \theta_2^2)\sigma_\varepsilon^2 \equiv \gamma_0 \end{aligned} \tag{3.45}$$

ต่อไปเราจะพิจารณาค่าความแปรปรวนร่วมในตัวย้อนไปหนึ่งคาบ

$$\begin{aligned} \gamma_1 = Cov(y_t, y_{t-1}) &= E\left[(y_t - \mu)(y_{t-1} - \mu)\right] \\ &= E\left[(\varepsilon_t + \theta_1 \varepsilon_{t-1} + \theta_2 \varepsilon_{t-2})(\varepsilon_{t-1} + \theta_1 \varepsilon_{t-2} + \theta_2 \varepsilon_{t-3})\right] \\ &= E\left[\theta_1 \varepsilon_{t-1}^2 + \theta_2 \theta_1 \varepsilon_{t-2}^2 + \text{cross term}\right] \\ &= \theta_1 \underbrace{E(\varepsilon_{t-1}^2)}_{=\sigma_\varepsilon^2} + \theta_2 \theta_1 \underbrace{E(\varepsilon_{t-2}^2)}_{=\sigma_\varepsilon^2} + \underbrace{E(\text{cross term})}_{=0} \\ &= (\theta_1 + \theta_2 \theta_1)\sigma_\varepsilon^2 \end{aligned} \tag{3.46}$$

ค่าความแปรปรวนร่วมในตัวย้อนไปสองคาบ

$$\begin{aligned}\gamma_2 = Cov(y_t, y_{t-2}) &= E\left[(y_t-\mu)(y_{t-2}-\mu)\right]\\ &= E\left[(\varepsilon_t+\theta_1\varepsilon_{t-1}+\theta_2\varepsilon_{t-2})(\varepsilon_{t-2}+\theta_1\varepsilon_{t-3}+\theta_2\varepsilon_{t-4})\right]\\ &= E\left[\theta_2\varepsilon_{t-2}^2+\text{cross term}\right]\\ &= \theta_2\underbrace{E(\varepsilon_{t-2}^2)}_{=\sigma_\varepsilon^2}+\underbrace{E(\text{cross term})}_{=0}\\ &= \theta_2\sigma_\varepsilon^2 \qquad (3.47)\end{aligned}$$

และค่าความแปรปรวนร่วมในตัวย้อนไปสามคาบ

$$\begin{aligned}\gamma_3 = Cov(y_t, y_{t-2}) &= E\left[(y_t-\mu)(y_{t-3}-\mu)\right]\\ &= E\left[(\varepsilon_t+\theta_1\varepsilon_{t-1}+\theta_2\varepsilon_{t-2})(\varepsilon_{t-3}+\theta_1\varepsilon_{t-4}+\theta_2\varepsilon_{t-5})\right]\\ &= E\left[\text{cross term}\right]=0 \qquad (3.48)\end{aligned}$$

เมื่อพิจารณาค่าสหสัมพันธ์ในตัวของอนุกรมเวลา $MA(2)$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned}\rho_0 &= \frac{\gamma_0}{\gamma_0}=1\\ \rho_1 &= \frac{\gamma_1}{\gamma_0}=\frac{(\theta_1+\theta_2\theta_1)}{(1+\theta_1^2+\theta_2^2)}\\ \rho_2 &= \frac{\gamma_2}{\gamma_0}=\frac{\theta_2}{(1+\theta_1^2+\theta_2^2)}\\ \rho_3 &= \frac{\gamma_3}{\gamma_0}=0\\ \rho_j &= \frac{\gamma_j}{\gamma_0}=0\end{aligned}$$

กรณีที่ $j > 2$ จากสมการข้างบนจะเห็นได้ว่าเอซีเอฟของ $MA(2)$ จะมีค่ามากกว่าศูนย์ในกรณีที่ $j = 1$ และ $j = 2$ และจะลดลงเท่ากับศูนย์ในกรณีที่ $j > 2$

3.2.3 แบบจำลองมูฟวิ่งเอเวอเรจที่อันดับ q ($MA(q)$)

แบบจำลองมูฟวิ่งเอเวอเรจที่อันดับ q ($MA(q)$) สามารถเขียนในรูปสมการดังนี้

$$y_t = \mu+\varepsilon_t+\theta_1\varepsilon_{t-1}+\ldots+\theta_q\varepsilon_{t-q}, \quad \varepsilon_t \sim WN(0,\sigma^2) \qquad (3.49)$$

อนุกรมเวลามูฟวิ่งเอเวอเรจที่อันดับ q เป็นอนุกรมเวลาคงที่และเออร์กอดิก[1] ถ้าค่า $\theta_1, ..., \theta_q$ มีค่าจำกัด และแบบจำลองสามารถหาตัวผกผันได้ถ้าค่ารากของพหุนามมูฟวิ่งเอเวอเรจต่อไปนี้

$$\theta(m) = 1 + \theta_1 m + ... + \theta_q m^{t-q} = 0 \tag{3.50}$$

มีค่าสัมบูรณ์(หรือค่าโมดุลัส)ของรากของพหุนามมากกว่า 1 และเราสามารถสรุปโมเมนต์ของกระบวนการ $MA(q)$ ได้ดังนี้

$$E(y_t) = \mu$$

$$\gamma_0 = \sigma_\varepsilon^2(1 + \theta_1^2 + ... + \theta_q^2)$$

$$\gamma_j = \begin{cases} (\theta_j + \theta_{j+1}\theta_1 + \theta_{t+2}\theta_2 + ... + \theta_q\theta_{q-j})\sigma_\varepsilon^2, & , \quad j = 1, 2, ..., q \\ 0 & , \quad j > q \end{cases}$$

และค่าสหสัมพันธ์ในตัวจะเท่ากับ

$$\rho_j = \frac{\gamma_j}{\gamma_0} = \frac{(\theta_j + \theta_{j+1}\theta_1 + \theta_{t+2}\theta_2 + ... + \theta_q\theta_{q-j})}{(1 + \theta_1^2 + ... + \theta_q^2)}$$

กรณีที่ $j = 1, 2, ..., q$ และ $\rho_j = 0$ กรณีที่ $j > q$ จะเห็นได้ว่าเอซีเอฟของ $MA(q)$ จะมีค่าไม่เท่ากับศูนย์จะกระทั่งช่วงล่า q และจะเท่ากับศูนย์หลังจากนั้น ในขณะที่พีเอซีเอฟจะมีค่อยลดดลงไป

3.2.4 การประมาณค่าแบบจำลองมูฟวิ่งเอเวอเรจ

การประมาณค่าภาวะน่าจะเป็นสูงสุดหรือเอ็มแอลอี เป็นวิธีการทั่วไปที่ใช้ในการประมาณค่าแบบจำลอง $MA(q)$ เนื่องจากเราไม่สามารถสังเกตค่าช็อกในแต่ละคาบได้

วิธีการประมาณค่าภาวะน่าจะเป็นแบบมีเงื่อนไขสูงสุด

ในหัวข้อนี้จะนำเสนอวิธีการประมาณค่าพารามิเตอร์ในแบบจำลอง $MA(1)$ ซึ่งสามารถเขียนได้ดังนี้

$$y_t = \mu + \varepsilon_t + \theta\varepsilon_{t-1}$$

โดยที่ $\varepsilon_t \sim iidN(0, \sigma_\varepsilon^2)$ ในกรณีที่เราประมาณค่าด้วยค่าภาวะน่าจะเป็นแบบมีเงื่อนไขสูงสุด เราจะสมมุติให้ $\varepsilon_0 = 0$ ดังนั้น $y_1 = \mu + \varepsilon_1$

$$y_1 | \varepsilon_0 = 0 \sim N(\mu, \sigma_\varepsilon^2)$$

[1]เนื่องจากแนวคิดเกี่ยวกับอนุกรมเวลาคงที่มิได้อธิบายความความสัมพันธ์ระหว่างข้อมูลในช่วงเวลาที่แตกต่างกัน อนุกรมเวลาจะมีคุณสมบัติเป็นเออร์กอดิ ถ้าช่วงของข้อมูลสองช่วงเวลายิ่งมีความสัมพันธ์ระหว่างกันที่ลดลงเมื่อช่วงเวลาทั้งสองอยู่ห่างกันมากขึ้น

และเมื่อสามารถสังเกตค่า y_1 เราก็สามารถหาค่า $\varepsilon_1 = y_1 - \mu$ และจากข้อมูลในคาบที่ 1 จะได้ว่า

$$y_2|y_1 = \mu + \varepsilon_2 + \theta\varepsilon_1$$

และเราสามารถหาค่า $\varepsilon_2 = y_2 - \mu - \theta\varepsilon_1$ และได้ฟังก์ชันความน่าจะเป็น

$$f_{y_2|y_1} = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_\varepsilon^2}} \exp\left[\frac{-(y_2 - \mu - \theta\varepsilon_1)^2}{2\sigma_\varepsilon^2}\right]$$

และหากใช้กระบวนการเดียวกันไปเรื่อย เราจะสามารถหาค่า $\varepsilon_t = y_t - \mu - \theta\varepsilon_{t-1}$ และสร้างฟังก์ชันภาวะน่าจะเป็นแบบมีเงื่อนไข (conditional likelihood function) ได้

$$\begin{aligned} L(\mu,\theta,\sigma_\varepsilon^2) &= \Pi_{t=2}^T f_{y_t|y_{t-1}} \\ &= (2\pi\sigma_\varepsilon^2)^{-(T-2)/2} \exp\left[\frac{\sum_{t=2}^T - \overbrace{(y_t - \mu - \theta\varepsilon_{t-1})^2}^{\varepsilon_t^2}}{2\sigma_\varepsilon^2}\right] \end{aligned} \tag{3.51}$$

สมการ 3.51 เราไม่สามารถหาตัวประมาณค่าเป็นสูตรที่ชัดเจนได้ด้วยการวิเคราะห์อนุพันธ์เช่นในกรณีแบบจำลองออโตรีเกรซซีฟ ในกรณีนี้เราจำเป็นต้องใช้วิธีการทางตัวเลขด้วยคอมพิวเตอร์เพื่อหาค่า $\hat{\theta}$ ที่ทำให้ $L(\mu,\theta,\sigma_\varepsilon^2)$ มีค่าสูงที่สุด

วิธีการประมาณค่าความควรจะเป็นแบบแม่นตรงสูงสุด

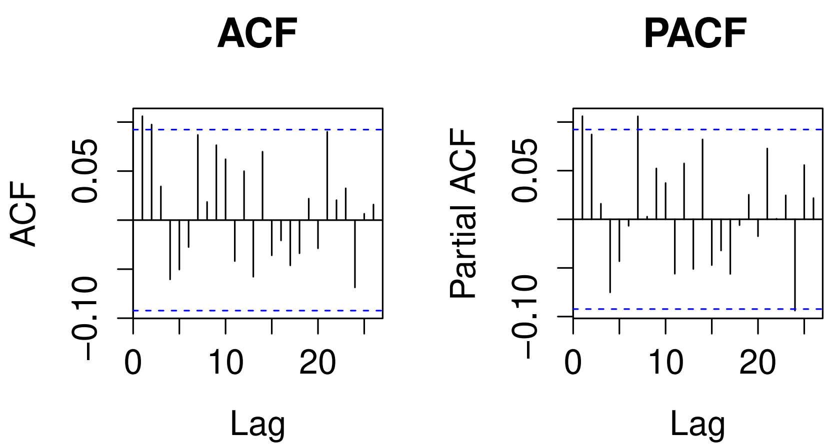
โดยทั่วไปแล้วเราใช้วิธีการสองวิธีการในการคำนวณฟังก์ชันค่าความควรจะเป็นแบบแม่นตรง (Exact likelihood function) สำหรับ $MA(1)$ คือ Kalman filter และการใช้ triangular factorization ของ var-cov matrix ซึ่งผู้ที่สนใจสามารถหาอ่านได้จาก Hamilton 1994

ตัวอย่างที่ 3.6 (การสร้างแบบจำลองสำหรับผลได้ตอบแทนรายเดือนจาก SET โดย MA(q)) ในตัวอย่างนี้เราจะพิจารณาผลได้ตอบแทนรายเดือนของการลงทุนในตลาดหลักทรัพย์แห่งประเทศไทย โดยใช้ข้อมูลราคาปิดรายเดือนตั้งแต่ เมษายน 2518 ถึงเดือนพฤศจิกายน 2555 (ข้อมูลจาก `www.set.or.th/th/market/market_statistics.html`) ซึ่งอยู่ในไฟล์ `mset.csv` โดยเป็นข้อมูลคอลัมน์เดียว เราสามารถนำเข้าข้อมูลและคำนวณผลได้ตอบแทนได้ด้วยคำสั่งต่อไปนี้

```
> mset <- read.csv("https://raw.githubusercontent.com/chaleampong/EC435
    /master/mset.csv", header = FALSE)
> head(mset)
> ret<-diff(log(mset$V1))
> ts.plot(ret)
```

หลังจากนั้นเราจะพิจารณาแบบจำลองที่เหมาะสมโดยการพิจารณาเอซีเอฟและพีเอซีเอฟจากตัวอย่าง

```
> acf(ret)
> pacf(ret)
```



รูปที่ 3.9: เอซีเอฟและพีเอซีเอฟของผลได้ตอบแทนรายเดือนจาก SET

จากรูป 3.9 จะเห็นได้ว่าเอซีเอฟมีค่าลดลงจนมีค่าไม่แตกต่างจากศูนย์ที่ค่าล่าเท่ากับ 3 ดังนั้นแบบจำลองที่เหมาะสมน่าจะเป็น $MA(2)$ ซึ่งประมาณค่าได้ด้วยคำสั่ง `arima` โดยกำหนดอันดับเป็น `c(0,0,2)`

```
> m1<-arima(ret, order=c(0,0,2))
> m1
Call:
arima(x = ret, order = c(0, 0, 2))

Coefficients:
         ma1     ma2  intercept
      0.0886  0.1001     0.0057
s.e.  0.0469  0.0487     0.0046

sigma^2 estimated as 0.006795:  log likelihood = 485.64,  aic = -963.28
```

จากผลการประมาณค่าเราได้ค่าสัมประสิทธิ์ดังนี้ $\theta_1 = 0.0886, \theta_2 = 0.1001$ และ $\mu = 0.0057$ และมีค่าความคาดเคลื่อนมาตรฐาน (s.e.) อยู่ในบรรทัด `s.e.`

เราสามารถพิจารณาความเหมาะสมของแบบจำลอง `m1` ได้ด้วยการทดสอบ L-B สำหรับเรซิดิวดังคำสั่งต่อไปนี้

```
> Box.test(m1$residuals, lag=12, type="Ljung")
        Box-Ljung test
data:  m1$residuals
X-squared = 13.6075, df = 12, p-value = 0.3265
> pv=1-pchisq(13.6075,12-2)
> pv
[1] 0.1916591
```

เราได้ค่า $Q(12)$ เท่ากับ 13.6075 ซึ่งสามารถหาค่าพีที่มีองศาอิสระเท่ากับ $(m-g) = 12-2$ โดยที่ g คือจำนวนอันดับของ MA จะได้ค่าพีเท่ากับ 0.192 แสดงว่าเรซิดิวไม่มีความสัมพันธ์ระหว่างกัน สรุป

ว่าแบบจำลองของเราเพียงพอที่ใช้อธิบายผลได้ตอบแทนรายเดือนของการลงทุนในตลาดหลักทรัพย์แห่งประเทศไทย

3.2.5 การพยากรณ์จากแบบจำลองมูฟวิ่งเอเวอเรจ

ในแบบจำลอง $MA(q)$ ความจำของข้อมูลค่อนข้างจำกัดซึ่งเราสามารถสังเกตเห็นได้จากค่าพยากรณ์ ตัวอย่างเช่นหากเราพิจารณาแบบจำลอง $MA(1)$: $y_t = \mu + \varepsilon_t + \theta_1 \varepsilon_{t-1}$ โดยเราอยู่ ณ คาบเวลา h

การพยากรณ์ไปข้างหน้า 1 คาบ

ในกรณีนี้เราพิจารณา $y_{h+1} = \mu + \varepsilon_{h+1} + \theta_1 \varepsilon_h$ ตัวพยากรณ์ที่จะทำให้ค่าฟังก์ชันสูญเสียน้อยที่สุดคือค่าคาดการณ์แบบมีเงื่อนไข (conditional expectation)

$$\hat{y}_h(1) = E(y_{h+1}|F_h) = \mu + \underbrace{E(\varepsilon_{h+1}|F_h)}_{=0} + \theta_1 \varepsilon_h = \mu + \theta_1 \varepsilon_h \tag{3.52}$$

และค่าผิดพลาดจากการพยากรณ์เท่ากับ

$$e_h(1) = y_{h+1} - \hat{y}_h(1) = \varepsilon_{h+1}$$

และค่าแปรปรวนจากการพยากรณ์ไปข้างหน้าหนึ่งคาบเท่ากับ

$$Var(e_h(1)) = Var(\varepsilon_{h+1}) = \sigma^2$$

ในการพยากรณ์จากแบบจำลอง $MA(1)$ เราต้องใช้ค่าช็อกซึ่งเราไม่สามารถสังเกตได้ ในทางปฏิบัติเราสามารถคำนวณค่า ε_h ได้สองวิธีคือ

- สมมุติให้ $\varepsilon_0 = 0$ แล้วแทนค่าใน $\varepsilon_1 = y_1 - \mu$ และ $\varepsilon_t = y_t - \mu - \theta_1 \varepsilon_{t-1}$ สำหรับ $2 \le t \le h$
- หรือใช้ค่า $\hat{\varepsilon}_h$ ที่เป็นค่าเรซิดิวจากการประมาณค่า $MA(1)$

การพยากรณ์ไปข้างหน้า 2 คาบ

พิจารณา $y_{h+2} = \mu + \varepsilon_{h+2} + \theta_1 \varepsilon_{h+1}$ ตัวพยากรณ์ที่จะทำให้ค่าฟังก์ชันสูญเสียน้อยที่สุดคือค่าคาดการณ์แบบมีเงื่อนไข

$$\hat{y}_h(2) = E(y_{h+2}|F_h) = \mu + \underbrace{E(\varepsilon_{h+2}|F_h)}_{=0} + \theta_1 \underbrace{\varepsilon_{h+1}}_{=0} = \mu \tag{3.53}$$

ซึ่งเท่ากับค่าเฉลี่ยของอนุกรม และค่าผิดพลาดจากการพยากรณ์เท่ากับ

$$e_h(2) = y_{h+2} - \hat{y}_h(2) = \varepsilon_{h+2} + \theta_1 \varepsilon_{h+1}$$

และค่าแปรปรวนจากการพยากรณ์ไปข้างหน้าสองคาบเท่ากับ

$$Var(e_h(2)) = Var(\varepsilon_{h+2} + \theta_1 \varepsilon_{h+1}) = (1 + \theta_1^2)\sigma^2$$

ซึ่งเราสามารถเขียนสรุปค่าพยากรณ์สำหรับแบบจำลอง $MA(1)$ ได้ดังนี้

$$\hat{y}_h(k) = \begin{cases} \mu + \theta_1 \varepsilon_k, & k = 1 \\ \mu, & k > 1 \end{cases}$$

คุณสมบัติดังกล่าวสามารถขยายผลไปยัง $MA(q)$ ใด ๆ ว่าค่าพยากรณ์ไปข้างหน้า k คาบจะเท่ากับค่าเฉลี่ย หากคาบที่พยากรณ์ไปข้างหน้ามีค่าสูงกว่าอันดับของ MA $(k > q)$

3.3 แบบจำลองออโตรีเกรซซีฟมูฟวิ่งเอเวอเรจ

จากแบบจำลองออโตรีเกรซซีฟที่ตัวแปร y_t ขึ้นอยู่กับตัวเองในอดีต กับแบบจำลองมูฟวิ่งเอเวเรจที่ตัวแปรขึ้นอยู่กับช็อก เราสามารถผนวกแบบจำลองที่มีทั้งส่วนประกอบของออโตรีเกรซซีฟและมูฟวิ่งเอเวอเรจ ซึ่งหาก y_t เป็นกระบวนการที่เรียกว่าแบบจำลองออโตรีเกรสซซีฟมูฟวิ่งเอเวอเรจอันดับ (p,q) (Autoregressive Moving Average (p,q)) หรือเรียกย่อ ๆ ว่า อารมาที่อันดับพีและคิว ($ARMA(p,q)$) ถ้า y_t มีค่าเฉลี่ยไม่เท่ากับศูนย์ เราสามารถอธิบาย y_t ได้ด้วย

$$y_t = \phi_1 y_{t-1} + ... + \phi_p y_{t-p} + \varepsilon_t + \theta_1 \varepsilon_{t-1} + ... + \theta_q \varepsilon_{t-q} \tag{3.54}$$

หากเรากำหนดให้ $\alpha = \mu(1 - \phi_1 - ... - \phi_p)$ และสามารถเขียนแบบจำลองสำหรับ y_t ได้เป็น

$$y_t = \alpha + \phi_1 y_{t-1} + ... + \phi_p y_{t-p} + \varepsilon_t + \theta_1 \varepsilon_{t-1} + ... + \theta_q \varepsilon_{t-q} \tag{3.55}$$

บทนิยาม 3.2 เราสามารถเขียนแบบจำลองอารมาพีและคิวได้ในรูปพหุนามออโตรีเกรซซีฟ และมูฟวิ่งเอเวอเรจได้ดังนี้

$$\phi(L)y_t = \theta(L)\varepsilon_t$$

โดยที่ $\phi(L) = 1 - \phi_1 L - ... - \phi_p L^p$ และ $\theta(L) = 1 + \theta_1 L + ... + \theta_q L^q$

ในขั้นตอนต่อไป เราต้องการทราบคุณลักษณะของอนุกรมเวลาที่เป็นไปตามอารมา และเพื่อความง่ายเรา

พิจารณาคุณสมบัติของแบบจำลองอารมา (1,1) เพื่อให้เราเข้าใจความแตกต่างระหว่างแบบจำลองทั้งสาม $ARMA(1,1)$

3.3.1 แบบจำลองอารมาที่อันดับ (1,1) ($ARMA(1,1)$)

กำหนดให้ y_t เป็นกระบวนการ $ARMA(1,1)$ ซึ่งสามารถอธิบายได้ด้วยสมการข้างล่าง

$$y_t = \phi y_{t-1} + \varepsilon_t + \theta\varepsilon_{t-1} \tag{3.56}$$

โดยที่ $\varepsilon_t \sim iidN(0,\sigma^2)$ เพื่อสร้างสมการ Yule-Walker เราใช้ความสัมพันธ์ต่อไปนี้

$$\begin{aligned} E(\varepsilon_t y_t) &= E\left[\varepsilon_t(\phi y_{t-1} + \varepsilon_t + \theta\varepsilon_{t-1})\right] \\ &= \phi \underbrace{E(\varepsilon_t y_{t-1})}_{=0} + \underbrace{E(\varepsilon_t^2)}_{=\sigma^2} + \theta \underbrace{E(\varepsilon_t\varepsilon_{t-1})}_{=0} = \sigma^2 \end{aligned}$$

และ

$$\begin{aligned} E(\varepsilon_{t-1} y_t) &= E\left[\varepsilon_{t-1}(\phi y_{t-1} + \varepsilon_t + \theta\varepsilon_{t-1})\right] \\ &= \phi \underbrace{E(\varepsilon_{t-1} y_{t-1})}_{=\sigma^2} + \underbrace{E(\varepsilon_{t-1}\varepsilon_t)}_{=0} + \theta \underbrace{E(\varepsilon_{t-1}^2)}_{=\sigma^2} \\ &= \phi\sigma^2 + \theta\sigma^2 = (\phi+\theta)\sigma^2 \end{aligned}$$

หากเราคูณสมการ 3.56 ทั้งสองข้างด้วย y_{t-k} กรณีที่ $k = 0,1,...,j,...$ และใส่ค่าคาดหวัง (take expectation) จะได้

$$\begin{aligned} \gamma_0 = E(y_t y_t) &= E((\phi y_{t-1} + \varepsilon_t + \theta\varepsilon_{t-1})y_t) \\ &= \phi \underbrace{E(y_t y_{t-1})}_{=\gamma_1} + \underbrace{E(y_t\varepsilon_t)}_{=\sigma^2} + \theta \underbrace{E(y_t\varepsilon_{t-1})}_{=(\phi+\theta)\sigma^2} \\ &= \phi\gamma_1 + \left[1 + \theta(\phi+\theta)\right]\sigma^2 \end{aligned} \tag{3.57}$$

$$\begin{aligned} \gamma_1 = E(y_t y_{t-1}) &= E((\phi y_{t-1} + \varepsilon_t + \theta\varepsilon_{t-1})y_{t-1}) \\ &= \phi \underbrace{E(y_{t-1} y_{t-1})}_{=\gamma_0} + \underbrace{E(y_{t-1}\varepsilon_t)}_{=0} + \theta \underbrace{E(y_{t-1}\varepsilon_{t-1})}_{=\sigma^2} \\ &= \phi\gamma_0 + \theta\sigma^2 \end{aligned} \tag{3.58}$$

$$\gamma_j = E(y_t y_{t-j}) = E((\phi y_{t-1} + \varepsilon_t + \theta \varepsilon_{t-1}) y_{t-j})$$

$$= \phi \underbrace{E(y_{t-1} y_{t-j})}_{=\gamma_{j-1}} + \underbrace{E(\varepsilon_t y_{t-j})}_{=0} + \theta \underbrace{E(\varepsilon_{t-1} y_{t-j})}_{=0} \quad (3.59)$$

$$= \phi \gamma_{j-1} \quad (3.60)$$

กรณีที่ $j \geq 2$ จากสมการ 3.57 และ 3.58 เราจะได้

$$Var(y_t) = \gamma_0 = \frac{(1 + 2\phi\theta + \theta^2)}{1 - \phi^2} \sigma^2$$

และจากสมการ 3.60 เราสามารถสามารถหาค่าสหสัมพันธ์ในตัวเอง ณ ค่าล่า j ใดๆที่ $j \geq 2$ ได้

$$\rho_j = \phi \rho_{j-1}$$

กรณีที่ $j \geq 2$ จะเห็นได้ว่าเอซีเอฟมีค่าที่ลดลงเรื่อย ๆ แบบฟังก์ชันเลขชี้กำลัง(exponential) นอกจากนี้เราสามารถเขียนแบบจำลอง $ARMA(1,1)$ ในรูปของมูฟวิ่งเอเวอเรจที่มีอันดับเป็นอนันต์ได้ดังนี้

$$y_t = \varepsilon_t + (\phi - \theta) \sum_{j=1}^{\infty} \phi^{j-1} \varepsilon_{t-j} \quad (3.61)$$

หรือ $\psi_j = (\phi - \theta)\phi^{j-1}$ จะเห็นได้ว่าเงื่อนไขที่จะทำให้กระบวนการนี้เป็นกระบวนการคงที่คือ $|\phi| < 1$

กระบวนการ $ARMA(p,q)$ จะคงที่และเออร์กอดิก ถ้าค่าสัมบูรณ์ของค่ารากของพหุนามออโตรีเกรซซีฟ $\phi(m) = 0$ มีค่ามากกว่าหนึ่ง (หรือมอดุลัสมีค่ามากกว่าหนึ่งในกรณีจำนวนเชิงซ้อน) และสามารถหาค่าผกผันได้ถ้ารากของพหุนามมูฟวิ่งเอเวอเรจ $\theta(m) = 0$ มีค่ามากกว่าหนึ่ง (หรือมอดุลัสมีค่ามากกว่าหนึ่งในกรณีจำนวนเชิงซ้อน) และพหุนามออโตรีเกรซซีฟและมูฟวิ่งเอเวอเรจไม่มีตัวประกอบร่วม กระบวนการ $ARMA(p,q)$ ที่คงที่จะมีค่าเฉลี่ยเท่ากับ

$$\mu = \frac{c}{1 - \phi_1 - ... - \phi_p}$$

และค่าความแปรปรวนร่วมในตัว ค่าสหสัมพันธ์ในตัวและตัวถ่วงน้ำหนักการตอบสนองแรงกระตุ้นสามารถเขียนในลักษณะเวียนเกิดได้ดังนี้

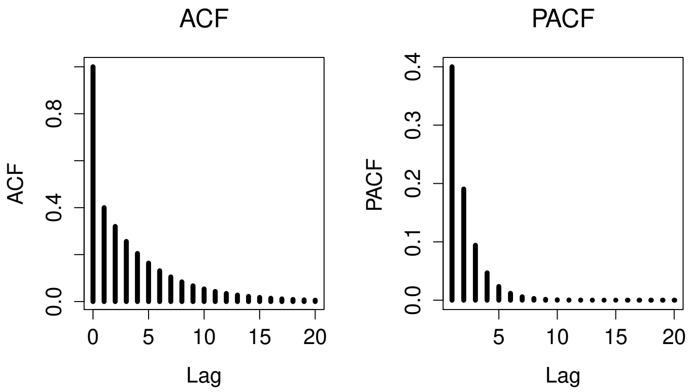
$$\gamma_j = \phi_1 \gamma_{j-1} + \phi_2 \gamma_{j-2} + ... + \phi_p \gamma_{j-p}$$

$$\rho_j = \phi_1 \rho_{j-1} + \phi_2 \rho_{j-2} + ... + \phi_p \rho_{j-p}$$

$$\psi_j = \phi_1 \psi_{j-1} + \phi_2 \psi_{j-2} + ... + \phi_p \psi_{j-p}$$

โดยที่รูปทั่วไปของเอซีเอฟของกระบวนการ $ARMA(p,q)$ ค่อนข้างยุ่งยาก โดยสรุปแล้วทั้งเอซีเอฟและพีเอซี

รูปที่ 3.10: ACF และ PACF ของอนุกรมเวลา ARMA(1,1)



เอฟจะค่อยๆลดลงเรื่อยแบบฟังก์ชันเลขชี้กำลัง (exponential) ดังตัวอย่างในรูปต่อไปนี้

ตัวอย่าง ความฟุ่มเฟือยของพารามิเตอร์ สมมุติว่าเรากำลังพิจารณากระบวนการไวท์นอยซ์ $y_t = \varepsilon_t$ แล้วเราคูณทั้งสองและขยับไปข้างหลังหนึ่งคาบ $0.5y_{t-1} = 0.5\varepsilon_{t-1}$ หลังจากนั้น เรานำสมการดังกล่าวไปลบจากสมการดั้งเดิมจะได้

$$y_t - 0.5y_{t-1} = \varepsilon_t - 0.5\varepsilon_{t-1} \qquad (3.62)$$

จะมีลักษณะเหมือนกับแบบจำลอง $ARMA(1,1)$ แต่ y_t ก็ยังเป็นไวท์นอยซ์ การใช้พารามิเตอร์อย่างฟุ่มเฟือยหรือใส่พารามิเตอร์มากเกินไป จะทำให้เราเข้าใจผิดว่ากระบวนการมีความสัมพันธ์ระหว่างกัน อย่างไรก็ตาม ปัญหานี้สามารถหลีกเลี่ยงได้ด้วยการพิจารณาสมการในรูปแบบพหุนามและตัวคูณร่วมของพหุนาม ตัวอย่างเช่นสมการ (3.62) สามารถเขียนได้เป็น

$$(1 - 0.5L)y_t = (1 - 0.5L)\varepsilon_t$$

ซึ่งสามารถเปลี่ยนกลับไปเป็นกระบวนการไวท์นอยซ์ด้วยการคูณทั้งสองข้างด้วย $(1 - 0.5L)^{-1}$

3.3.2 การประมาณค่าสมการแบบจำลองอารมา

เราสามารถประมาณค่าแบบจำลอง $ARMA(p,q)$ ได้ด้วยวิธีการภาวะน่าจะเป็นสูงที่สุดหรือเอ็มแอลอี ซึ่งเราสามารถใช้รูปแบบ state-space ในการสร้างฟังก์ชันล็อกของภาวะน่าจะเป็น อย่างไรก็ตามฟังก์ชันดังกล่าวที่แน่นอน (exact log-likelihood) นั้นมีรูปแบบที่ค่อนข้างซับซ้อน นอกจากนี้จุดเริ่มต้นของข้อมูลในกรณี exact likelihood จะใช้คุณสมบัติของการแจกแจงที่นิ่งเพื่อสร้างฟังก์ชันค่าควรจะเป็นของค่า y_t p ค่าแรก และ ε_t q ค่าแรก ในขณะที่ conditional likelihood จะสมมุติให้ y_t p ค่าแรก และ ε_t q ค่าแรกเท่ากับศูนย์ ตัวประมาณค่า Exact MLE จะเกิดจากการหาค่าสูงสุดจาก exact log-likelihood และ Conditional MLE จะเกิดจากการหาค่าสูงสุดจาก conditional log-likelihood โดยในกรณีที่จำนวนตัวอย่างมีจำนวนเข้าใกล้อนันต์จะมีค่าใกล้เคียงกัน แต่ค่าประมาณทั้งสองวิธีจะแตกต่างกันในกรณีตัวอย่างมีจำนวนน้อย

หลักจากที่เราได้ค่าประมาณแล้วเราสามารถทดสอบความเพียงพอของแบบจำลองได้เช่นเดียวกับในกรณีของแบบจำลอง AR และ MA โดยที่ตัวสถิติ $Q(m) \sim \chi^2_{m-p-q}$ และเราจะปฏิเสธสมมุติฐานหลักถ้า $Q(m)$ มีค่ามากกว่าควอนไทล์ที่ $(1-\alpha)$ ของ χ^2_{m-p-q}

3.3.3 เกณฑ์การเลือกแบบจำลอง

ก่อนที่เราจะประมาณค่าแบบจำลอง $ARMA(p,q)$ สำหรับอนุกรมเวลา y_t ใดๆ เราจะเป็นต้องระบุลำดับของออโตรีเกรซซีฟ (p) และมูฟวิ่งเอเวอเรจ (q) เสียก่อน โดยที่เราสามารถใช้การสังเกตฟังก์ชันเอซีเอฟของตัวอย่าง ในกรณีของแบบจำลองมูฟวิ่งเอเวอเรจหรือพีเอซีเอฟของตัวอย่าง ในกรณีของแบบจำลองออโตรีเกรซซีฟ นอกจากนี้ เราสามารถจะใช้เกณฑ์การเลือกแบบจำลอง (model selection) ในการเลือกแบบจำลองที่

ตารางที่ 3.2: สรุปลักษณะของเอซีเอฟและพีเอซีเอฟสำหรับแบบจำลองอารมา

	$AR(p)$	$MA(q)$	$ARMA(p,q)$
เอซีเอฟ	ค่อยๆลดลง	ค่าเท่ากับศูนย์หลังจากช่วงล่าที่ q	ค่อยๆลดลง
พีเอซีเอฟ	เท่ากับศูนย์หลังจากช่วงล่าที่ p	ค่อยๆลดลง	ค่อยๆลดลง

เหมาะสม ขั้นตอนในการเลือกแบบจำลอง ได้แก่การประมาณค่าแบบจำลองอารมา ($ARMA(p,q)$) สำหรับค่าอันดับ p และ q ต่าง ๆ โดยที่เราอาจจะกำหนดอันดับสูงสุดที่เราจะพิจารณาเช่น p_{max} และ q_{max} สุดท้าย เราจะเลือกค่า p และ q ที่ทำให้ค่าเกณฑ์การเลือกต่ำที่สุด โดยที่เกณฑ์การเลือกจะอยู่ในรูปผลรวมของสองส่วนประกอบ

$$MSC(p,q) = \ln(\tilde{\sigma}^2(p,q)) + c_T\varphi(p,q) \tag{3.63}$$

ส่วนแรกคือ $\tilde{\sigma}^2(p,q)$ ตัวประมาณค่าภาวะน่าจะเป็นสูงสุดของตัวแปรปรวนของช็อก ซึ่งค่าดังกล่าวจะลดลงเมื่อจำนวนพารามิเตอร์มากขึ้น ส่งผลให้แบบจำลองที่มีพารามิเตอร์มากมีค่าดังกล่าวน้อย ในขณะที่ส่วนที่สองจะเป็นส่วนที่ลงโทษแบบจำลองที่มีพารามิเตอร์มาก ซึ่งคำนวณจกาผลคูณของค่า c_T ลำดับที่ขึ้นกับจำนวนตัวอย่าง และ $\varphi(p,q)$ คือฟังก์ชันเบี้ยปรับ (penalty function) อะกะอิเกะ (Akaike) ได้นำเสนอเกณฑ์สารสนเทศ (information criteria) โดยระบุให้ $c_T = 2/T$ และเรียกว่าเกณฑ์สารสนเทศของอะกะอิเกะ (Akaike Information Criteria) หรือเอไอซี (AIC) ในขณะที่เกณฑ์สารสนเทศที่เป็นที่นิยมอีกสองเกณฑ์คือเกณฑ์สารสนเทศของเบย (Bayesian Information Criteria) หรือบีไอซี (BIC) และเกณฑ์สารสนเทศของฮานันและคิวนน์ (Hannan-Quinn Information Criteria) หรือเฮชคิวไอซี (HQIC) ซึ่งแสดงได้ด้วยสมการดังนี้

$$\begin{aligned}
AIC(p,q) &= \ln(\tilde{\sigma}^2(p,q)) + \frac{2}{T}(p+q)\\
BIC(p,q) &= \ln(\tilde{\sigma}^2(p,q)) + \frac{\ln T}{T}(p+q)\\
HQIC(p,q) &= \ln(\tilde{\sigma}^2(p,q)) + \frac{2\ln(\ln T)}{T}(p+q)
\end{aligned}$$

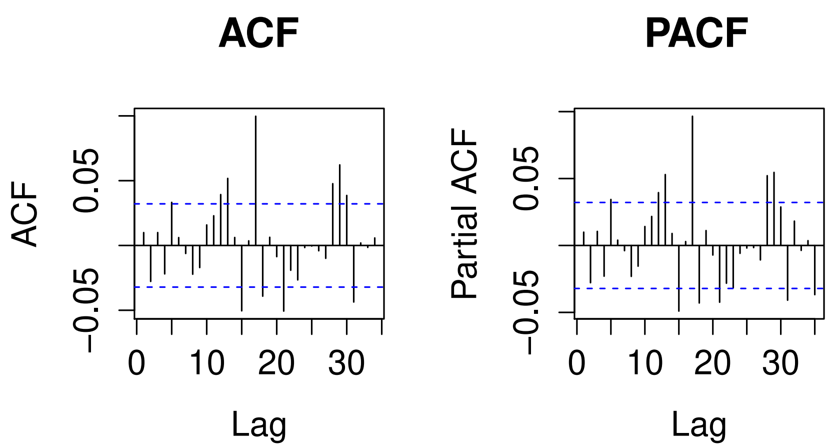
ในทางทฤษฎีเราสามารถพิสูจน์ได้ว่าบีไอซีและเฮชคิวไอซีมีคุณสมบัติคล้องจอง (consisten) หรือเลือกลำดับที่ใกล้เคียงกับค่าจริงเมื่อกลุ่มตัวอย่างใหญ่ ในขณะที่เอไอซีจะเลือกอันดับที่มากกว่าที่ควรจะเป็น อย่างไรก็ตาม ในตัวอย่างขนาดเล็กเกณฑ์สารสนเทศทั้งสามจะให้ค่าที่ไม่แตกต่างกันนัก

ตัวอย่างที่ 3.7 การสร้างแบบจำลองสำหรับผลได้ตอบแทนของการซื้อขายเงินตราต่างประเทศโดย ARMA(p,q)

ตัวอย่างนี้เราพิจารณาผลได้ตอบแทนของการซื้อขายเงินตราต่างประเทศโดยคำนวณจากอัตราแลกเปลี่ยนบาทต่อดอลลาร์สหรัฐระหว่างปี 1998 ถึง 2012 ซึ่งอยู่ในไฟล์ `thbusd.csv` เราสามารถนำเข้าข้อมูลและคำนวณผลได้ตอบแทนได้ดังนี้

```
> exc<- read.csv("https://raw.githubusercontent.com/chaleampong/EC435/
  master/thbusd.csv", header = TRUE)
> head(exc)
  Jul.Day YYYY.MM.DD Wdy THB.USD
1 2450816   1/2/1998 Fri  48.023
2 2450819   1/5/1998 Mon  50.366
3 2450820   1/6/1998 Tue  52.665
4 2450821   1/7/1998 Wed  52.203
5 2450822   1/8/1998 Thu  53.957
6 2450823   1/9/1998 Fri  53.204
> excret <- diff(log(exc$THB.USD))
> ts.plot(excret, main = "Exchange rate return")
```

รูปที่ 3.11: เอซีเอฟและพีเอซีเอฟของผลได้ตอบแทนรายวันจากการซื้อขายเงินดอลลาร์สหรัฐ



เมื่อพิจารณาเอซีเอฟและพีเอซีเอฟจากรูป 3.11 จะพบว่าแบบจำลองที่เหมาะสมน่าจะเป็น $ARMA(p,q)$ เนื่องจากฟังก์ชันทั้งสองมิได้ลดลงอย่างมีรูปแบบ ดังนั้นเราจำเป็นต้องเลือกอันดับ p และ q ที่เหมาะสมโดยที่เราสามารถเปลี่ยนค่า p และ q ในคำสั่ง `arima` ไปเรื่อยๆ $(0,0),(1,0),(2,0),(0,1),(0,2),(1,1),(2,2),\ldots$ และบันทึกค่าเอไอซีหรือบีไอซีที่ได้แล้วเลือกแบบจำลองที่มีค่าเอไอซี หรือบีไอซีน้อยที่สุด

อย่างไรก็ตามชุดคำสั่ง FORECAST มีคำสั่ง `auto.arima(series, arguments)` ที่จะทำการทดลองสร้างแบบจำลองตามค่า p และ q สูงสุดที่เรากำหนด แล้วเลือกแบบจำลองตาม

เกณฑ์สารสนเทศที่เราใส่ทางเลือก (arguments) ต่อไปนี้ ค่า $d = 0$, $D = 0$, `max.p=6`, `max.q=6`, `max.order=[max.p+max.q]`, `ic=c("aic")` โดยที่เราสามารถเปลี่ยนเป็น `bic`, `stepwise=FALSE` แปลว่าให้ทดลองทุกค่าของ p และ q ที่น้อยกว่า max.p และ max.q และ `trace=TRUE` แปลว่าให้แสดงค่าเกณฑ์สารสนเทศจากทุกการทดลอง

```
> library(forecast)
> auto.arima(ret,d=0,D=0,max.p=6,max.q=6,ic=c("aic"),stepwise=FALSE,
   trace=TRUE)

 ARIMA(0,0,0) with zero mean     : -27687.05
 ARIMA(0,0,0) with non-zero mean : -27686.59
[omitted]
 ARIMA(5,0,0) with zero mean     : -27850.55
 ARIMA(5,0,0) with non-zero mean : -27851.11

Series: ret
ARIMA(4,0,1) with non-zero mean

Coefficients:
          ar1      ar2      ar3      ar4
      -0.5876  -0.0238  -0.0066  -0.0227
s.e.   0.2641   0.0196   0.0208   0.0199
          ma1  intercept
       0.5981     -1e-04
s.e.   0.2636      1e-04

sigma^2 estimated as 3.432e-05:  log likelihood=13849.44
AIC=-27684.88   AICc=-27684.85   BIC=-27641.33
```

แบบจำลองที่เราเลือกจากค่าเอไอซีน้อยที่สุดคือแบบจำลอง $ARMA(4,1)$ ผู้อ่านอาจจะลองใช้เกณฑ์บีไอซีแล้วเปรียบเทียบว่าแบบจำลองที่แนะนำต่างกันหรือไม่

3.3.4 การเขียนกระบวนการอารมา(ARMA)ในสามรูปแบบ

จากแบบจำลองที่เราอธิบาย y_t ด้วยแบบจำลอง $ARMA$ ในรูปแบบพหุนาม

$$\phi(L)y_t = \theta(L)\varepsilon_t$$

โดยที่ $\phi(L) = 1 - \sum_{i=1}^{p} \phi_i L^i$ และ $\theta(L) = 1 + \sum_{i=1}^{q} \theta_i L^i$ เราสามารถแสดง y_t ในรูปมูฟวิ่งเอเวอเรจที่อันดับอนันต์

$$y_t = \psi(L)\varepsilon_t \tag{3.64}$$

โดยที่ $\frac{\theta(L)}{\phi(L)} = 1 + \psi_1 L + \psi_2 L + ... = \psi(L)$ และ y_t ในรูปออโตรีเกรซซีฟที่อันดับอนันต์

$$\pi(L)y_t = \varepsilon_t \tag{3.65}$$

โดยที่ $\frac{\phi(L)}{\theta(L)} = 1 - \pi_1 L - \pi_2 L - ... = \pi(L)$

ตัวอย่างที่ 3.8 ตัวอย่างการเขียนแบบจำลอง $ARMA(1,1)$ ในรูปมูฟวิ่งเอเวอเรจ
กำหนดให้ y_t อธิบายด้วยแบบจำลอง $ARMA(1,1)$ ซึ่งแสดงได้ด้วยสมการต่อไปนี้

$$(1-\phi L)y_t = (1+\theta L)\varepsilon_t$$

เมื่อหารทั้งสองข้างของสมการด้วย $(1-\phi L)$ จะได้

$$\begin{aligned} y_t &= \frac{(1+\theta L)}{(1-\phi L)}\varepsilon_t \\ &= (1+\theta L)(1+\phi L + (\phi L)^2 + (\phi L)^3 + ...)\varepsilon_t \\ &= (1+\theta L) + (1+\theta L)\phi L + (1+\theta L)(\phi^2 L^2) + ... \\ &= 1 + \underbrace{(\phi+\theta)}_{\psi_1} L + \underbrace{(\phi\theta+\phi^2)}_{\psi_2} L^2 + ... \end{aligned}$$

ผู้อ่านสามารถใช้วิธีการเดียวกันในการแสดงค่าสัมประสิทธิ์ออโตรีเกรซซีฟที่อันดับอนันต์ของสมการข้างต้น

3.3.5 การพยากรณ์ (forecasting)

จากรูปแบบของแบบจำลอง $ARMA$ ในหัวข้อที่ผ่านมา เราสามารถแสดงแบบจำลอง $ARMA(p,q)$ ได้สามรูปแบบคือ รูปแบบที่หนึ่งคือรูปแบบ $ARMA(p,q)$

$$\phi(L)y_t = \theta(L)\varepsilon_t$$

รูปแบบที่สองคือการแสดงในรูปมูฟวิ่งเอเวอเรจที่อันดับอนันต์

$$y_t = \frac{\theta(L)}{\phi(L)}\varepsilon_t = \psi(L)\varepsilon_t$$

และรูปแบบที่สามคือการแสดงในรูปออโตรีเกรซซีฟที่อันดับอนันต์

$$\frac{\phi(L)}{\theta(L)}y_t = \pi(L)y_t = \varepsilon_t$$

โดยที่ $\psi(L) = 1 + \psi_1 L + \psi_2 L^2 + ...$ และ $\pi(L) = 1 - \pi_1 - \pi_2 - ...$ ดังนั้นเราสามารถพยากรณ์ตัวแปร y_{h+l} ด้วยสมการใดสมการหนึ่งในสามรูปแบบนี้ได้ โดยใช้คุณสมบัติที่ว่า ณ เวลาที่เราอยู่ h เราทราบข้อมูล y_t และ ε_t ในช่วงเวลาก่อนจนกระทั่งเวลาที่ h และใช้ขั้นตอนในการหาค่าพยากรณ์เช่นเดียวกับในหัวข้อที่ผ่านมาคือเขียน

ตัวแปร y_t ณ เวลาที่เราต้องการพยากรณ์เช่น y_{h+l} แล้วในข้อมูลถึงช่วงเวลาที่ h ในการพยากรณ์ กรณีใช้รูปแบบ $ARMA$ การพยากรณ์ไปข้างหน้าหนึ่งคาบ ณ ข้อมูลที่คาบ h, $\hat{y}_h(1)$ จะเท่ากับ

$$\begin{aligned}\hat{y}_h(1) &= E(\phi_1 y_h + ...\phi_p y_{h-p} + \varepsilon_{h+1} + \theta_1\varepsilon_h + ... + \theta_q\varepsilon_{h+1-q}|F_h)\\ &= \phi_1 y_h + ...\phi_p y_{h-p} + \theta_1\varepsilon_h + ... + \theta_q\varepsilon_{h+1-q}\end{aligned} \quad (3.66)$$

กรณีใช้รูปแบบออโตรีเกรสซีฟอนันต์ การพยากรณ์ไปข้างหน้าหนึ่งคาบ ณ ข้อมูลที่คาบ h, $\hat{y}_h(1)$ จะเท่ากับ

$$\begin{aligned}\hat{y}_h(1) &= E(\pi_1 y_h + \pi_2 y_{h-1} + ...|F_h)\\ &= \pi_1 y_h + \pi_2 y_{h-1} + ...\end{aligned} \quad (3.67)$$

ค่าพยากรณ์ในกรณีขึ้นอยู่กับตัวแปร y เพียงเท่านั้น เราไม่จำเป็นต้องใช้ตัวแทนของช็อก กรณีการแสดงในรูปมูฟวิ่งเอเวอเรจอนันต์ การพยากรณ์ไปข้างหน้าหนึ่งคาบ ณ ข้อมูลที่คาบ h, $\hat{y}_h(1)$ จะเท่ากับ

$$\begin{aligned}\hat{y}_h(1) &= E(\varepsilon_{h+1} + \psi_1\varepsilon_h + \pi_2\varepsilon_{h-1} + ...|F_h)\\ &= \psi_1\varepsilon_h + \pi_2\varepsilon_{h-1} + ...\end{aligned} \quad (3.68)$$

กรณีที่สามจะช่วยเราในการคำนวณหาค่าความแปรปรวนของค่าผิดพลาดของการพยากรณ์ ซึ่งในกรณีการพยากรณ์ไปข้างหน้าหนึ่งคาบ ค่าผิดพลาดจะเท่ากับ

$$e_h(1) = y_{h+1} - \hat{y}_h(1) = \varepsilon_{h+1}$$

และค่าความแปรปรวนของค่าผิดพลาดของการพยากรณ์เท่ากับ $Var(e_h(1)) = \sigma^2$

3.4 อนุกรมเวลาไม่คงที่

อนุกรมเวลาทางเศรษฐกิจและการเงินจำนวนมากมีพฤติกรรมที่มีแนวโน้ม(trend) ซึ่งสะท้อนว่าค่าเฉลี่ยของมีค่าไม่คงที่ส่งผลตัวแปรดังกล่าวเป็นอนุกรมเวลาที่ไม่คงที่ (non-stationary) ตัวอย่างเช่น ราคาสินทรัพย์ อัตราแลกเปลี่ยน หรือตัวแปรเศรษฐกิจมหภาคเช่น ผลิตภัณฑ์มวลรวมภายในประเทศ (GDP) ในขณะที่แบบจำลองที่ผ่านมา เราสมมุติว่าตัวแปร y_t ที่เราอธิบายมีลักษณะที่เป็นอนุกรมเวลาคงที่ ดังนั้นในการสร้างแบบจำลองอนุกรมเวลาเชิงเส้นตรงเราจำเป็นต้องแปลงตัวแปรให้เป็นอนุกรมเวลาคงที่ ในอดีต นักเศรษฐศาสตร์จะจัดการกับข้อมูลมีเส้นแนวโน้มโดยการกำจัดเส้นแนวโน้มออก (detrend) โดยการประมาณค่าตัวแปรกับตัวแปรเวลาจะได้ค่าสัมประสิทธิ์ของเส้นแนวโน้ม และนำค่าประมาณของเส้นแนวโน้มไปหักออกจากตัวแปร อย่างไรก็ตามในช่วงทศวรรษที่ 1970 นักเศรษฐศาสตร์พบว่าข้อมูลทางเศรษฐกิจและการเงินบางตัวอาจจะมีเส้นแนวโน้มซึ่งเกิดจากคุณลักษณะของตัวแปรที่เป็นกระบวนการแนวเดินแบบสุ่ม หรือแรนดอมวอร์ก (random walk)

ดังนั้นในการวิเคราะห์อนุกรมเวลาเราพิจารณาลักษณะของรูปแบบแนวโน้มของข้อมูลว่าเกิดจากการที่

ข้อมูลมีเส้นแนวโน้มที่ระบุได้ชัดเจน (deterministic trend) หรือ เกิดจากการเป็นกระบวนการแรนดอมวอร์ก เนื่องจากคุณลักษณะดังกล่าวจะส่งผลกระทบต่อการนำข้อมูลไปใช้ เช่นในการสร้างแบบจำลอง $ARMA$ เราจำเป็นต้องทำการแปลงข้อมูลให้เป็นอนุกรมเวลาคงที่เสียก่อน ในขณะที่ถ้าข้อมูลมีแนวโน้มเราจำเป็นต้องขจัดแนวโน้มเสียก่อน โดยสรุปแล้ว กระบวนการที่มีลักษณะแนวโน้มอาจจะแบ่งได้เป็นสองกรณีคือกระบวนการแรนดอมวอร์กแบบมีแนวโน้มด้วย (random walk with drift) และกระบวนการที่มีเส้นแนวโน้มที่ระบุได้ชัดเจน

กรณีแรก คือกรณีที่ y_t เป็นกระบวนการแนวเดินแบบสุ่มแบบมีแนวโน้มด้วย จะสามารถเขียนสมการอธิบาย y_t ได้ดังนี้

$$y_t = \mu + y_{t-1} + \varepsilon_t \tag{3.69}$$

โดย $\varepsilon_t \sim WN(0,\sigma^2)$ และเราเรียก μ ว่าตัวสร้างแนวโน้ม (drift) หากเราสมมุติให้ $y_0 = 0$ และแทนค่าแบบเวียนเกิด เราจะสามารถเขียนสมการ (3.69) ได้เป็น

$$y_t = \mu t + \sum_{j=1}^{t} \varepsilon_j \tag{3.70}$$

จากสมการที่ (3.70) กระบวนการแนวเดินแบบสุ่มแบบมีแนวโน้มจะมีค่าคาดหมาย ($E(y_t)$) เท่ากับ μt และค่าความแปรปรวน ($Var(y_t)$) เท่ากับ $\sigma^2 t$ จะเห็นได้ว่าค่าทั้งสองขึ้นอยู่กับเวลา t ดังนั้น y_t จากสมการ (3.69) จะเป็นกระบวนการที่ไม่คงที่ ซึ่งกระบวนการดังกล่าวสามารถแปลงให้เป็นอนุกรมเวลาคงที่ได้โดยการทำการหาผลต่างอันดับหนึ่ง (first difference) จะได้

$$\Delta y_t = y_t - y_{t-1} = \mu + \varepsilon_t$$

จะเห็นได้ว่า Δy_t เป็นผลรวมของค่าคงที่กับอนุกรมไวท์นอยซ์ซึ่งเป็นอนุกรมเวลาคงที่ ดังนั้น Δy_t จะเป็นอนุกรมเวลาคงที่ด้วย (ทำไม?) เนื่องจาก y_t จะเป็นอนุกรมเวลาคงที่หลังจากทำการหาผลต่างอันดับหนึ่ง เราจะเรียก y_t ว่าเป็นอนุกรมเวลาคงที่หลังจากหาผลต่าง (difference-stationary)

กรณีสอง คือกรณีที่ z_t กระบวนการที่มีเส้นแนวโน้มที่กำหนดไว้ชัดเจน เช่น เราสามารถเขียนสมการอธิบาย z_t ได้ด้วย

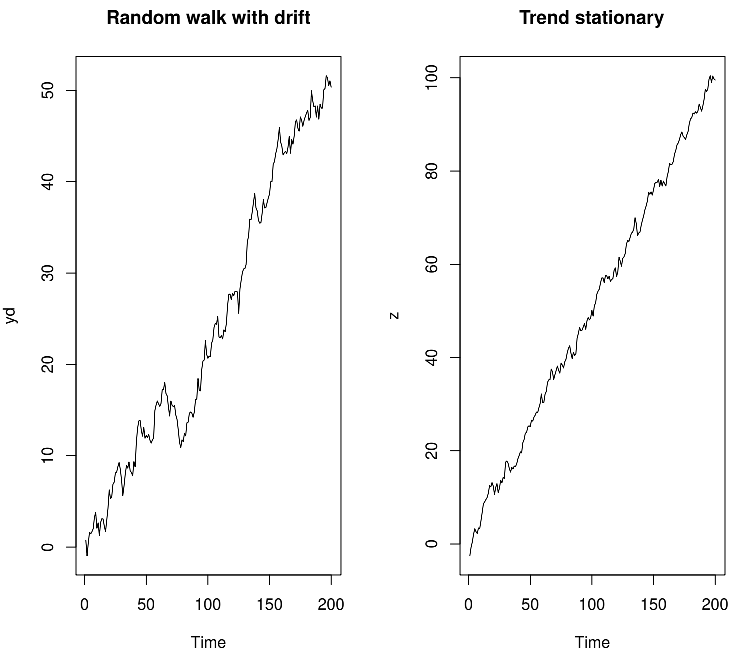
$$z_t = \beta_0 + \beta_1 t + v_t \tag{3.71}$$

โดยที่ v_t เป็นอนุกรมนิ่งใดๆเช่น กระบวนการไวท์น๊อซหรือ $AR(1)$ ที่มีค่าสัมบูรณ์ของสัมประสิทธิ์น้อยกว่า 1 จากสมการที่ (3.71) เราสามารถพิสูจน์ได้ว่าค่าคาดหมายของ ($E(z_t)$) จะเท่ากับ $\beta_0 + \beta_1 t$ ซึ่งเป็นฟังก์ชันเส้นตรงกับเวลา ดังนั้น z_t จึงเป็นกระบวนการไม่คงที่ โดยที่ z_t จะแกว่งตัวอยู่รอบๆเส้นแนวโน้ม ในขณะที่ค่าความแปรปรวน ($Var(z_t)$) จะเท่ากับ $Var(v_t)$ ซึ่งจำกัดและไม่แปรผันตามเวลา (เนื่องจากเราสมมุติให้ v_t เป็นอนุกรมนิ่ง) เนื่องจาก z_t จะเป็นอนุกรมเวลาคงที่หลังจากกำจัดแนวโน้ม เราจะเรียกอนุกรมเวลาดังกล่าวว่ากระบวนการที่คงที่หลังจากกำจัดแนวโน้ม (trend-stationary)

ตัวอย่างของกราฟข้อมูลกระบวนการไม่คงที่จากที่มาทั้งสองได้แก่ อนุกรมเวลาคงที่หลังจากดำเนินการผล

ต่าง และกระบวนการคงที่หลังจากกำจัดแนวโน้ม ถูกแสดงไว้ในรูปที่ 3.12 โดยมองดูเผินๆจะเห็นได้ว่าภาพทั้งสองมีลักษณะที่คล้ายคลึงกัน

รูปที่ 3.12: ข้อมูลจำลองของกระบวนการแนวเดินแบบสุ่มแบบมีแนวโน้มและกระบวนการที่นิ่งหลังจากขจัดแนวโน้ม



กระบวนการทั้งสองที่ได้ยกตัวอย่างมา เป็นกระบวนการที่ไม่คงที่ แต่มีคุณลักษณะที่แตกต่างกันดังนั้น วิธีการที่ใช้ในแปลงให้เป็นอนุกรมคงที่จึงแตกต่างกัน โดยวิธีการที่ใช้ทำให้อนุกรมคงที่มีอยู่สองวิธีคือ การดำเนินการผลต่าง (differencing) และการประมาณค่าถดถอยเพื่อกำจัดแนวโน้ม (detrended series)

วิธีการดำเนินการผลต่าง คือการนำข้อมูลที่คาบ t ลบออกด้วยข้อมูลที่คาบ $t-1$ หรือเขียนเป็นสัญลักษณ์ได้โดย $\Delta y_t = y_t - y_{t-1}$ ซึ่งเราเรียกกรณีนี้ว่าการดำเนินการผลต่างครั้งที่หนึ่ง (first difference) หากเรานำอนุกรมที่ได้จากการดำเนินการผลต่างครั้งที่หนึ่งไปดำเนินการผลต่างอีกครั้ง $\Delta^2 y_t = \Delta y_t - \Delta y_{t-1}$ เราจะเรียกว่า การดำเนินการผลต่างครั้งที่สอง (second difference)วิธีการดำเนินการผลต่างจะเหมาะกับอนุกรมเวลาที่เป็นกระบวนการนิ่งหลังจากดำเนินการผลต่าง โดยที่หากอนุกรมเวลา y_t เป็นอนุกรมที่นิ่งหลังจากการดำเนินการผลต่างครั้งที่หนึ่ง เราจะเรียกอนุกรมเวลา y_t ว่าอนุกรมเวลาที่มีอันดับอินทิเกรตเท่ากับหนึ่ง (Integrated of order 1 หรือ $I(1)$) หากอนุกรมเวลา y_t เป็นอนุกรมที่นิ่งหลังจากการดำเนินการผลต่างครั้งที่สอง เราจะเรียกอนุกรมเวลา y_t ว่าอนุกรมเวลาที่มีอันดับอินทิเกรตเท่ากับสอง (Integrated of order 2 หรือ $I(2)$) ในขณะที่อนุกรมเวลานิ่งจะคือ $I(0)$

วิธีการที่สองเหมาะกับอนุกรมที่เป็นกระบวนการนิ่งหลังจากกำจัดแนวโน้ม โดยเราจะประมาณค่าสมการ 3.71 ด้วยโอแอลเอส เมื่อได้ค่า $\widehat{\beta_0}$ และ $\widehat{\beta_1}$ เราสามารถสร้างอนุกรมเวลาที่ขจัดแนวโน้มออกไปได้โดยการคำนวณ $z_t - \widehat{\beta_0} - \widehat{\beta_1} t$ หรือพจน์ดังกล่าวคือเรซิดิวของสมการ เครื่องมือสำคัญที่ใช้ในการระบุว่าตัวแปรที่เราพิจารณาควรจะใช้วิธีการใดในการแปลงให้เป็นอนุกรมเวลาคงที่คือ การทดสอบยูนิทรูท (unit root test)

เพื่อให้เราเข้าใจแนวคิดพื้นฐานในการทดสอบยูนิทรูท เราพิจารณาอนุกรม y_t ซึ่งสามารถแยกได้เป็นส่วน

ของแนวโน้มและวัฏจักรโดยที่

$$y_t = TD_t + z_t$$
$$TD_t = \alpha + \delta t$$
$$z_t = \phi z_{t-1} + \varepsilon_t, \quad \varepsilon_t \sim WN(0, \sigma^2)$$

โดยที่ TD_t เป็นแนวโน้มเส้นตรงเชิงกำหนด (deterministic linear trend) และ z_t คือกระบวนการ $AR(1)$ ถ้า $|\phi| < 1$ แล้ว y_t จะเป็นอนุกรมนิ่ง (I(0)) รอบๆแนวโน้มเชิงกำหนด TD_t แต่ถ้า $\phi = 1$ แล้วอนุกรม $z_t = z_{t-1} + \varepsilon_t = z_0 + \sum_{j=1}^{t} \varepsilon_j$ จะกลายเป็นแนวโน้มสโทแคสติก และ y_t เป็น I(1) ที่มีค่าคงที่ (drift)

การทดสอบยูนิทรูทในรูปของแบบออโตรีเกรซซีฟมีพื้นฐานจากการทดสอบสมมุติฐานหลักว่า $\phi = 1$ (อนุกรมคงที่หลักจากใช้วิธีการผลต่าง) กับสมมุติฐานทางเลือก $\phi < 1$ (อนุกรมนิ่งหลังจากขจัดแนวโน้ม) โดยที่เราเรียกการทดสอบนี้ว่ายูนิทรูท เนื่องจากภายใต้สมมุติฐานหลักรากของพุหนาม $\phi(z) = (1 - \phi z) = 0$ มีค่าเท่ากับหนึ่ง

3.4.1 การทดสอบยูนิทรูทในรูปออโตรีเกรซซีฟ

สมมุติว่าเราพิจารณาแบบจำลองออโตรีเกรซซีฟอันดับหนึ่ง ($AR(1)$) ซึ่งเขียนได้ดังนี้

$$y_t = \phi y_{1-t} + \varepsilon_t, \quad \varepsilon_t \sim WN(0, \sigma^2) \tag{3.72}$$

สมมุติฐานที่เราต้องการทดสอบคือ

$$H_0 : \phi = 1 \qquad (y_t \sim I(1))$$
$$H_1 : |\phi| < 1 \qquad (y_t \sim I(0))$$

เราสามารถประมาณค่าสมการ 3.72 ด้วยโอแอลเอสและใช้ตัวสถิติที่เรียกว่าตัวสถิติดิกกี-ฟูลเลอร์ที่ (Dickey-Fuller t statistics) ซึ่งคำนวณได้โดย

$$t_{\phi=1} = \frac{\hat{\phi} - 1}{se(\hat{\phi})}$$

โดยที่ $\hat{\phi}$ คือค่าประมาณจากวิธีการกำลังสองน้อยที่สุดและ $se(\hat{\phi})$ คือค่าผิดพลาดมาตรฐาน การทดสอบนี้เป็นการทดสอบหางเดียวทางซ้าย คือเราจะปฏิเสธสมมุติฐานหลักถ้าค่าตัวสถิติน้อยกว่าค่าวิกฤติ และสรุปว่าอนุกรมเวลาเป็นอนุกรมเวลาคงที่ หากเราไม่สามารถปฏิเสธสมมุติฐานหลักได้ แสดงว่าอนุกรมดังกล่าวเป็นยูนิทรูท นอกจากนี้เราสามารถใช้ตัวสถิติ normalized bias ซึ่งคำนวณได้ด้วย $T(\hat{\phi} - 1)$ ในการทดสอบยูนิทรูทเช่นเดียวกัน

สมการ 3.72 ที่เราใช้ในการทดสอบยูนิทรูทยังสามารถเขียนในรูป

$$\Delta y_t = \pi y_{1-t} + \varepsilon_t, \tag{3.73}$$

โดยที่ $\pi = (\phi - 1)$ ซึ่งในที่นี้การทดสอบยูนิทรูทจะเป็นการทดสอบ $H_0 : \pi = 0$ และ $H_1 : \pi < 0$

ตัวสถิติที่ใช้ในการทดสอบยูนิทรูทจะมีการแจกแจงที่ไม่เป็นมาตรฐานและไม่เป็นการแจกแจงแบบปกติเมื่อข้อมูลขนาดใหญ่เหมือนในกรณีทดสอบอื่นๆที่เราเคยพบมา Phillips (1987) ได้พิสูจน์ว่าหาก y_t เป็นยูนิทรูท การแจกแจงของตัวสถิติทั้งสองที่ใช้ทดสอบยูนิทรูทจะมีการแจกแจงดังนี้

$$t_{\phi=1} \xrightarrow{d} \frac{\int_0^1 W(r)dW(r)}{\left(\int_0^1 W(r)^2 dr\right)^{1/2}} \tag{3.74}$$

$$T(\hat{\phi} - 1) \xrightarrow{d} \frac{\int_0^1 W(r)dW(r)}{\int_0^1 W(r)^2 dr} \tag{3.75}$$

โดยที่ $W(r)$ คือการเคลื่อนที่แบบบราวเนียน (Brownian motion) จากสมการข้างต้น ตัวประมาณค่าและตัวสถิติจะไม่มีการแจกแจงเข้าสู่การแจกแจงปกติ เราจะเรียกการแจกแจงของ $t_{\phi=1}$ ว่า การแจกแจงทีของดิกกี-ฟูลเลอร์ (Dickey-Fuller t distribution) และการแจกแจงของ $T(\hat{\phi}-1)$ ว่าการแจกแจงค่าอคติที่แปลงเป็นแบบปกติของดิกกี-ฟูลเลอร์ (Dickey-Fuller normalized bias)

ตารางสำหรับการแจกแจงดิกกี-ฟูลเลอร์ สามารถใช้คำสั่ง `adfTable` ใน ชุดคำสั่ง fUnitRoots โดยระบุรูปแบบของสมการที่ใช้ในการทดสอบ เช่น `trend=c("nc")` กรณีที่สมการทดสอบไม่มีพจน์ค่าคงที่อยู่ (no constant)เช่นในสมการ 3.73 (ในหัวข้อย่อยต่อไปจะพิจารณากรณีมีพจน์ค่าคงที่ และจุดตัด) และแสดงการแจงแจงของ t โดยระบุ `statistics=c("t")` ส่วนการแจกแจงการแจกแจงค่าอคติที่แปลงเป็นแบบปกติของดิกกี-ฟูลเลอร์ จะต้องระบุว่า `statistics=c("n")`

```
> library(fUnitRoots)
> adfTable(trend=c("nc"), statistic=c("t"))
$x
[1]  25  50 100 250 500 Inf

$y
[1] 0.010 0.025 0.050 0.100 0.900 0.950 0.975 0.990

$z
    0.010 0.025 0.050 0.100 0.900 0.950 0.975 0.990
 25 -2.66 -2.26 -1.95 -1.60  0.92  1.33  1.70  2.16
 50 -2.62 -2.25 -1.95 -1.61  0.91  1.31  1.66  2.08
100 -2.60 -2.24 -1.95 -1.61  0.90  1.29  1.64  2.03
250 -2.58 -2.23 -1.95 -1.62  0.89  1.29  1.63  2.01
500 -2.58 -2.23 -1.95 -1.62  0.89  1.28  1.62  2.00
Inf -2.58 -2.23 -1.95 -1.62  0.89  1.28  1.62  2.00

attr(,"class")
[1] "gridData"
attr(,"control")
    table     trend statistic
    "adf"      "nc"       "t"
```

โดยที่ x เป็นจำนวนตัวอย่างและ y เป็นความถี่สะสม และค่า critical value จะอยู่ในส่วน z ตัวอย่างเช่น

กลุ่มตัวอย่าง 100 ตัวอย่างที่ค่า ADF เท่ากับ -1.95 จะมีความถี่สะสมเท่ากับ 0.05 หรือพื้นที่ใต้กราฟการแจกแจงทีของดิกกี-ฟูลเลอร์ทางซ้ายของ -1.95 จะเท่ากับ 5 %

ตารางที่ 3.3: ค่าวิกฤตของการแจกแจงการแจกแจงทีของดิกกี-ฟูลเลอร์กรณีไม่มีค่าคงที่

จำนวน	ความถี่สะสม							
ตัวอย่าง	0.01	0.025	0.05	0.1	0.9	0.95	0.975	0.99
25	-2.66	-2.26	-1.95	-1.60	0.92	1.33	1.70	2.16
50	-2.62	-2.25	-1.95	-1.61	0.91	1.31	1.66	2.08
100	-2.60	-2.24	-1.95	-1.61	0.90	1.29	1.64	2.03
250	-2.58	-2.23	-1.95	-1.62	0.89	1.29	1.63	2.01
500	-2.58	-2.23	-1.95	-1.62	0.89	1.28	1.62	2.00
∞	-2.58	-2.23	-1.95	-1.62	0.89	1.28	1.62	2.00

กรณีอนุกรมเวลามีค่าคงที่และแนวโน้ม

สิ่งสำคัญในการทดสอบยูนิทรูทคือการระบุว่าสมมุติฐานหลักและสมมุติฐานทางเลือกมีความเหมาะสมกับข้อมูลหรือ โดยเฉพาะแนวโน้ม โดยกรณีที่เราพบบ่อยมีสองกรณีคือกรณีมีค่าคงที่อย่างเดียว และกรณีมีค่าคงที่และแนวโน้ม

ในกรณีค่าคงที่อย่างเดียว สมการที่ใช้ในการประมาณค่าตัวสถิติทดสอบคือ

$$y_t = c + \phi y_{t-1} + \varepsilon_t \tag{3.76}$$

และสมมุติฐานที่เกี่ยวเนื่องคือ

$$H_0 : \phi = 1 \qquad (y_t \sim I(1) \text{without drift})$$

$$H_1 : |\phi| < 1 \qquad (y_t \sim I(0) \text{with non-zero mean})$$

ในกรณีที่มีค่าคงที่และแนวโน้ม สมการที่ใช้ในการประมาณค่า

$$y_t = c + \delta t + \phi y_{t-1} + \varepsilon_t \tag{3.77}$$

และสมมุติฐานที่เกี่ยวเนื่องกันคือ

$$H_0 : \phi = 1 \qquad (y_t \sim I(1) \text{with drift})$$

$$H_1 : |\phi| < 1 \qquad (y_t \sim I(0) \text{with deterministic time trend})$$

โดยที่รูปแบบของสมการที่ใช้ในการทดสอบมักจะเป็นในรูป

$$\Delta y_t = c + \pi y_{t-1} + \varepsilon_t$$

และ

$$\Delta y_t = c + \delta t + \pi y_{t-1} + \varepsilon_t$$

สำหรับสมการที่มีค่าคงที่และมีค่าคงที่และแนวโน้มตามลำดับ ดังนั้นการตัดสินใจว่าจะใช้สมการรูปแบบไหนสามารถทำได้โดยการพิจารณากราฟเส้นของ Δy_t มีค่าเฉลี่ยต่างจากศูนย์หรือมีเส้นแนวโน้มหรือไม่ โดยที่ตารางสำหรับการแจกแจงทีของดิกกี-ฟูลเลอร์ของแต่ละรูปแบบของสมการจะมีค่าที่แตกต่างกัน โดยที่กรณีมีค่าคงที่จะใช้ตัวเลือก `trend=c("c")` และกรณีมีค่าคงที่และเส้นแนวโน้มจะใช้ `trend=c("ct")` ในคำสั่ง

```
> adfTable(trend=c("c"), statistic=c("t"))
> adfTable(trend=c("ct"), statistic=c("t"))
```

แล้วจะได้ตารางดังนี้

ตารางที่ 3.4: ค่าวิกฤตของการแจกแจงทีของดิกกี-ฟูลเลอร์กรณีมีค่าคงที่

จำนวน	ความถี่สะสม							
ตัวอย่าง	0.01	0.025	0.05	0.1	0.9	0.95	0.975	0.99
25	-3.75	-3.33	-3.00	-2.63	-0.37	0.00	0.34	0.72
50	-3.58	-3.22	-2.93	-2.60	-0.40	-0.03	0.29	0.66
100	-3.51	-3.17	-2.89	-2.58	-0.42	-0.05	0.26	0.63
250	-3.46	-3.14	-2.88	-2.57	-0.42	-0.06	0.24	0.62
500	-3.44	-3.13	-2.87	-2.57	-0.43	-0.07	0.24	0.61
∞	-3.43	-3.12	-2.86	-2.57	-0.44	-0.07	0.23	0.60

ตารางที่ 3.5: ค่าวิกฤตของการแจกแจงทีของดิกกี-ฟูลเลอร์ กรณีมีค่าคงที่และแนวโน้ม

จำนวน	ความถี่สะสม							
ตัวอย่าง	0.01	0.025	0.05	0.1	0.9	0.95	0.975	0.99
25	-4.38	-3.95	-3.60	-3.24	-1.14	-0.80	-0.50	-0.15
50	-4.15	-3.80	-3.50	-3.18	-1.19	-0.87	-0.58	-0.24
100	-4.04	-3.73	-3.45	-3.15	-1.22	-0.90	-0.62	-0.28
250	-3.99	-3.69	-3.43	-3.13	-1.23	-0.92	-0.64	-0.31
500	-3.98	-3.68	-3.42	-3.13	-1.24	-0.93	-0.65	-0.32
∞	-3.96	-3.66	-3.41	-3.12	-1.25	-0.94	-0.66	-0.33

การทดสอบยูนิทรูทดิกกี ฟูลเลอร์กรณีมีค่าล่าของตัวแปรตาม

การทดสอบยูนิทรูทที่ได้กล่าวไว้ข้างต้นนั้นจะถูกต้องถ้าอนุกรมเวลาเป็น $AR(1)$ ที่มีช็อกเป็นไวท์นอยย์ Said and Dickey (1984) ได้เพิ่มตัวแปรในการทดสอบยูนิทรูทด้วยค่าล่าของตัวแปรตามโดยมีพื้นฐานจากแบบจำลอง $ARMA(p,q)$ แล้วเรียกว่า การทดสอบยูนิทรูทดิกกีฟูลเลอร์แบบแต่งเติม (Augmented Dickey-Fuller) หรือเอดีเอฟ (ADF) ซึ่งตัวทดสอบสามารถประมาณค่าได้จากสมการ

$$y_t = \beta^{'}(D_t) + \phi y_{t-1} + \sum_{j=1}^{p} \psi_j \Delta y_{t-j} + \varepsilon_t \tag{3.78}$$

หรือเราสามารถประมาณค่าสมการนี้

$$\Delta y_t = \beta^{'} D_t + \pi y_{t-1} + \sum_{j=1}^{p} \psi_j \Delta y_{t-j} + \varepsilon_t \tag{3.79}$$

โดยที่ $\pi = \phi - 1$ ซึ่งภายใต้สมมุติฐานหลัก Δy_t จะเป็น $I(0)$ และอนุมานได้ว่า $\pi = 0$ ดังนั้น ตัวสถิติ t สำหรับยูนิทรูทด้วยดิกกี ฟูลเลอร์แบบแต่งเติม จะเป็นค่าทีของสัมประสิทธิ์หน้า y_t

ตัวอย่างที่ 3.9 การทดสอบยูนิทรูทด้วยการทดสอบเอดีเอฟ ตัวอย่างนี้เราต้องการทดสอบยูนิทรูทของ SET index รายวัน จากข้อมูลในไฟล์ `setindex.txt` ซึ่งมีตัวอย่างเท่ากับ 3642 ตัวอย่าง โดยที่ในโปรแกรมอาร์มีชุดคำสั่งหลายชุดคำสั่งที่สามารถทำการทดสอบ ADF ได้เช่น URCA, STATS, TSERIES แต่ในที่นี้เราจะใช้ชุดคำสั่ง URCA โดยเบื้องต้นเราจะพิจารณาเอซีเอฟของอนุกรมเวลาและอนุกรมเวลาที่ได้ปรับผลต่างอันดับหนึ่ง จากเอซีเอฟของอนุกรมเวลา `setd$index` เราพบว่าน่าจะมีปัญหายูนิทรูทเนื่องจากค่าเอซีเอฟลดลงช้ามาก

```
> setd <- read.csv("https://raw.githubusercontent.com/chaleampong/EC435
    /master/setdaily.csv", header = TRUE)
> head(setd)
  X      date  index
1 1  1/5/1998 366.18
2 2  1/6/1998 370.27
3 3  1/7/1998 370.31
4 4  1/8/1998 360.17
5 5  1/9/1998 349.67
6 6 1/12/1998 339.17
> ts.plot(setd$index)
> acf(setd$index)
```

เราสามารถทดสอบยูนิทรูทด้วยคำสั่ง `ur.df` จากชุดคำสั่ง URCA ซึ่งเป็นการทดสอบยูนิทรูทด้วยเอดีเอฟ โดยเรากำหนดตัวแปรที่ต้องการทดสอบ `setd$index` แล้วเลือกรูปแบบของสมการที่เราใช้ทดสอบซึ่งสามารถเลือกได้ เป็นสมการที่ไม่มีค่าคงที่ (none) มีค่าคงที่ (drift) และมีเส้นแนวโน้ม (trend) ด้วยการระบุใน type เช่น `'type=c("trend"')` แล้วเลือกว่าจะมี lag ของตัวแปรตามเท่ากับเท่าใด ซึ่งมีทางเลือกในการระบุจำนวนเลย เช่น `lags=1` หรือใช้เกณฑ์คัดเลือกแบบจำลองเช่น `selectlags = c("AIC")`

ในกรณีแรกที่ระบุ `lag=1` เราเก็บผลไว้ในชื่อ `setd.df` ค่าสถิติที่ได้คือ -1.863 ซึ่งมากกว่าค่าวิกฤติที่ $\alpha = 0.05$ เท่ากับ -3.41 ดังนั้น เราไม่สามารถปฏิเสธสมมุติฐานที่ว่า setd เป็นยูนิทรูท

```
> library(urca)
> setd.df<-ur.df(setd$index, type=c("trend"), lags=1 )
> summary(setd.df)
###############################################
# Augmented Dickey-Fuller Test Unit Root Test #
###############################################
Test regression trend
Call:
lm(formula = z.diff ~ z.lag.1 + 1 + tt + z.diff.lag)
```

```
Residuals:
     Min       1Q   Median       3Q      Max
-108.380   -4.745   -0.105    4.837   74.125
Coefficients:
              Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
(Intercept)  0.4325591  0.4122648   1.049  0.29414
z.lag.1     -0.0021279  0.0011419  -1.864  0.06247 .
tt           0.0006223  0.0002840   2.191  0.02851 *
z.diff.lag   0.0478816  0.0165720   2.889  0.00388 **
---
Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1

Residual standard error: 9.355 on 3636 degrees of freedom
Multiple R-squared:  0.003526,  Adjusted R-squared:  0.002704
F-statistic: 4.289 on 3 and 3636 DF,  p-value: 0.004982

Value of test-statistic is: -1.8635 2.3752 2.4005

Critical values for test statistics:
      1pct  5pct 10pct
tau3 -3.96 -3.41 -3.12
phi2  6.09  4.68  4.03
phi3  8.27  6.25  5.34
```

ในกรณีแรกที่ระบุ `selectlags = c("AIC")` เราเก็บผลไว้ในชื่อ `setd.df2` ค่าสถิติที่ได้คือ -1.864 ซึ่งมากกว่าค่าวิกฤติที่ $\alpha = 0.05$ เท่ากับ -3.41 ดังนั้น เราไม่สามารถปฏิเสธสมมุติฐานที่ว่า setd เป็นยูนิทรูท

```
> setd.df2<-ur.df(setd$index, type = c("trend"), selectlags = c("AIC"))
> summary(setd.df2)
###############################################
# Augmented Dickey-Fuller Test Unit Root Test #
###############################################
Test regression trend
Call:
lm(formula = z.diff ~ z.lag.1 + 1 + tt + z.diff.lag)
Residuals:
     Min       1Q   Median       3Q      Max
-108.380   -4.745   -0.105    4.837   74.125
Coefficients:
              Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
(Intercept)  0.4325591  0.4122648   1.049  0.29414
z.lag.1     -0.0021279  0.0011419  -1.864  0.06247 .
tt           0.0006223  0.0002840   2.191  0.02851 *
z.diff.lag   0.0478816  0.0165720   2.889  0.00388 **
---
Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1
Residual standard error: 9.355 on 3636 degrees of freedom
Multiple R-squared:  0.003526,  Adjusted R-squared:  0.002704
F-statistic: 4.289 on 3 and 3636 DF,  p-value: 0.004982

Value of test-statistic is: -1.8635 2.3752 2.4005
```

```

Critical values for test statistics:
      1pct  5pct 10pct
tau3 -3.96 -3.41 -3.12
phi2  6.09  4.68  4.03
phi3  8.27  6.25  5.34
```

เราได้ค่าสถิติที่จากเอดีเอฟเท่ากับ -0.68 เมื่อเปรียบเทียบกับค่าวิกฤตจากตาราง 3.4 ที่นัยสำคัญ 5 % และ $N = \infty$ มีค่าเท่ากับ -2.86 จะเห็นได้ว่าสถิติทีจากเอดีเอฟมีค่ามากกว่าค่าวิกฤต ดังนั้นเราไม่สามารถปฏิเสธสมมุติฐานที่ว่า set index เป็นยูนิทรูท และเราสามารถพิจารณาค่าพีซึ่งมีค่าเท่ากับ 0.95 ซึ่งไม่สามารถปฏิเสธว่า set index เป็นยูนิทรูท

ตัวทดสอบยูนิทรูทของฟิลิปส์ เปอรรอง

Phillips and Perron 1988 ได้พัฒนาการทดสอบยูนิทซึ่งเป็นการทดสอบอีกวิธีหนึ่งที่เป็นที่นิยม โดยการทดสอบฟิลิปส์-เปอรรอง มีความแตกต่างจากการทดสอบยูนิทรูทดิกกี ฟูลเลอร์แบบแต่งเติมที่สำคัญค่อการดำเนินการที่เกี่ยวข้องกับปัญหาออโตคอรีเรชันและเฮเทอโรสกีดาสติสิตีในช็อก โดยที่ในกรณีของการทดสอบเอดีเอฟจะใช้โครงสร้างที่มีรูปแบบอารมาในการประมาณตัวแปรช็อก ในขณะที่การทดสอบด้วยวิธีการฟิลิปส์-เปอรรองไม่ได้แก้ไขรูปแบบสมการเพื่อแก้ปัญหาออโตคอรีเรชัน และใช้สมการต่อไปนี้ในการประมาณค่า

$$\Delta y_t = \beta^{'} \boldsymbol{D}_t + \pi y_{t-1} + u_t \tag{3.80}$$

โดยที่ u_t เป็น $I(0)$ และอาจจะมีปัญหาเฮเทอโรสกีดาสติซิตี แต่การทดสอบฟิลิปส์-เปอรรองจะแก้ไขปัญหา ออโตคอรีเรชันและเฮเทอโรสกีดาสติสิตีในตัวแปรช็อก u_t โดยการปรับตัวสถิติทดสอบ $t_{\pi=0}$ และ $T\hat{\pi}$ โดยตัวสถิติที่ปรับจะอยู่ในรูปดังต่อไปนี้

$$Z_t = \left(\frac{\hat{\sigma}^2}{\hat{\lambda}^2}\right)^{1/2} \times t_{\pi=0} - \frac{1}{2}\left(\frac{\hat{\lambda}^2 - \hat{\sigma}^2}{\hat{\lambda}^2}\right) \times \left(\frac{T \times se(\hat{\pi})}{\hat{\sigma}^2}\right)$$

$$Z_\pi = T\hat{\pi} - \frac{1}{2}\frac{T^2 \times se(\hat{\pi})}{\hat{\sigma}^2}(\hat{\lambda}^2 - \hat{\sigma}^2)$$

โดยที่ $\hat{\sigma}^2$ และ $\hat{\lambda}^2$ เป็นตัวประมาณค่าที่ consistent ของพารามิเตอร์ค่าความแปรปรวน

$$\sigma^2 = \lim_{T\to\infty} T^{-1} \sum_{t=1}^{T} E[u_t^2]$$

$$\lambda^2 = \lim_{T\to\infty} \sum_{t=1}^{T} E[T^{-1} S_t^2]$$

โดยที่ $S_T = \sum_{t=1}^{T} u_t$

ภายใต้สมมุติฐานหลักที่ว่า $\pi = 0$ ตัวสถิติ Z_t และ Z_π ของการทดสอบฟิลิปส์-เปอรรอง มีการแจกแจงที่ลู่เข้าหาการแจกแจงแบบทีของดิกกีฟูลเลอร์ และสถิติที่มีอคติและได้ปรับให้เป็นปกติแล้วเมื่อขนาดตัวอย่างใหญ่ ข้อได้เปรียบของฟิลิปส์เปอรรองต่อเอดีเอฟ คือ ฟิลิปส์เปอรรองพิจารณาความน่าจะเป็นที่จะเกิดเฮเทอโรสกีดาสติสิตีของช็อก นอกจากนี้ผู้ใช้ไม่จำเป็นต้องกำหนดอันดับของตัวแปร y_t เหมือนกับในกรณีของเอดีเอฟ

ตัวอย่างที่ 3.10 การทดสอบยูนิทรูทด้วยวิธีการฟิลิปส์เปอรรอง

```
> setd.pp<-ur.pp(setd$index, type="Z-tau", model="trend")
> summary(setd.pp)

##################################
# Phillips-Perron Unit Root Test #
##################################

Test regression with intercept and trend


Call:
lm(formula = y ~ y.l1 + trend)

Residuals:
     Min       1Q   Median       3Q      Max
-108.674   -4.712   -0.062    4.765   68.930

Coefficients:
             Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
(Intercept) 1.4901935  0.7300869   2.041   0.0413 *
y.l1        0.9980139  0.0011418 874.061   <2e-16 ***
trend       0.0005988  0.0002841   2.108   0.0351 *
---
Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1

Residual standard error: 9.363 on 3638 degrees of freedom
Multiple R-squared:  0.9987,    Adjusted R-squared:  0.9987
F-statistic: 1.42e+06 on 2 and 3638 DF,  p-value: < 2.2e-16


Value of test-statistic, type: Z-tau  is: -1.8587

           aux. Z statistics
Z-tau-mu              1.7473
Z-tau-beta            2.1804

Critical values for Z statistics:
                    1pct      5pct     10pct
critical values -3.966098 -3.413711 -3.128565

```

ค่าสถิติฟิลิปส์เปอรรองมีค่าเท่ากับ -1.8587 มากกว่าค่าวิกฤติ แสดงว่าเราไม่สามารถปฏิเสธสมมุติฐานว่า `setd$index` เป็นยูนิทรูท

3.5 แบบจำลองอินทิเกรเต็ดอาร์มา หรืออะริมา

บทนิยาม 3.3 เราจะเรียกกระบวนการ y_t ว่าอินทิเกรตเต็ดอาร์มา (Integrage ARMA) หรืออะริมาที่อันดับ (p,d,q) $(ARIMA(p,d,q))$ ถ้าตัวแปร y ที่หาผลต่าง d ครั้ง ($\Delta^d y_t = (1-L)^d y_t$) เป็นกระบวนการ $ARMA(p,q)$ หรือเราสามารถเขียนในรูปทั่วไปเป็น

$$\phi(L)(1-L)^d y_t = \theta(L)\varepsilon_t \tag{3.81}$$

และถ้าหาก $E(\Delta^d y_t) = \mu$ เราสามารถเขียนแบบจำลองได้เป็น

$$\phi(L)(1-L)^d y_t = \delta + \theta(L)\varepsilon_t$$

โดยที่ $\delta = \mu(1-\phi_1 - ... - \phi_p)$

ในที่นี้เราอาจจะนึกถึงแบบจำลอง $ARIMA(p,d,q)$ ว่าเป็นแบบจำลอง ARMA(p,q) ของอนุกรมเวลาที่ได้ดำเนินการผลต่างไปแล้ว d ครั้ง โดยที่ $z_t = \Delta^d$ และ $\phi(L)z_t = \theta(L)\varepsilon_t$ โดยทั่วไปแล้ว d จะมีค่าไม่เกิน 3

ในทางปฏิบัติ เราสามารถแบ่งแยกขั้นตอนในการสร้างแบบจำลอง $ARIMA(p,d,q)$ ได้ดังนี้

1. พิจารณา ACF ของข้อมูลว่ามีข้อบ่งชี้ว่ามีปัญหาข้อมูลไม่นิ่ง (nonstationary) หรือไม่
2. ทดสอบยูนิทรูทว่ามีอินทิเกรตที่อันดับเท่าใด หรือหาค่า d นั่นเอง
3. หลังจากนั้นเราจะพิจารณาอนุกรม $z_t = \Delta^d y_t$ ซึ่งเป็นอนุกรมเวลาที่นิ่งแล้วหลังจากได้ดำเนินการผลต่างไปแล้ว d ครั้ง ว่าแบบจำลองที่เหมาะสมในการอธิบาย z_t ควรจะมีอันดับของ p และ q เท่าใด โดยที่เราอาจจะพิจารณาเอซีเอฟและพีเอซีเอฟของ z_t หรือใช้เกณฑ์สารสนเทศก็ได้

หลังจากที่เราได้ค่า d, p และ q แล้วเราก็จะได้แบบจำลอง $ARIMA(p,d,q)$

ตัวอย่างที่ 3.11 การสร้างแบบจำลองอาริมา

ต่อจากตัวอย่างที่ผ่านมา เราพิจารณาว่าดัชนีหลักทรัพย์ของไทย เป็นอินทิเกรตที่อันดับเท่าไหร่ โดยการดำเนินการหาผลต่างอันดับหนึ่ง(first differenced) แล้วทดสอบยูนิทรูท พบว่าอนุกรมเวลาที่ดำเนินการหาผลต่างอันดับหนึ่งไม่เป็นยูนิทรูท ดังนั้น set index เป็นอินทิเกรตที่อันดับหนึ่ง (I(1)) และในแบบจำลองอะริมา เราจะกำหนดให้ $d = 1$ ซึ่งเราจะใส่ค่าดังกล่าวในคำสั่ง `auto.arima` เพื่อหา p และ q ที่เหมาะสมต่อไป

ขั้นตอนแรกของการสร้างแบบจำลองคือการหาลำดับของอินทิเกรชัน (order of integration) หรือค่า d

จากตัวอย่างที่ผ่านมาเราทราบว่า `setd$index` เป็นยูนิทรูท ดังนั้น เราแปลงข้อมูลด้วยการหาผลต่างอันดับหนึ่ง ($\Delta setd_t = setd_t - setd_{t-1}$) แล้วทดสอบยูนิทรูท

```
> setd.df.diff<-ur.df(diff(setd$index), type = c("trend"), selectlags =
    c("AIC"))
```

```
> summary(setd.df.diff)
<Omitted>
Value of test-statistic is: -39.9724 532.5983 798.8972

Critical values for test statistics:
      1pct  5pct 10pct
tau3 -3.96 -3.41 -3.12
phi2  6.09  4.68  4.03
phi3  8.27  6.25  5.34
```

จากการทดสอบยูนิทรูทกับตัวแปรในรูปผลต่างอันดับหนึ่ง ค่าสถิติทีของเอดีเอฟเท่ากับ -39.97 ซึ่งน้อยกว่าค่าวิกฤติ (-3.41) ดังนั้นเราสามารถปฏิเสธสมมุติฐานหลักที่ว่า diff(setd) เป็นยูนิทรูทแสดงว่า diff(setd) เป็นอนุกรมเวลาคงที่และเราสามารถสรุปได้ว่า setd เป็นอินทิเกรตที่อันดับหนึ่ง I(1) หมายความว่าต้องหาผลต่างอันดับหนึ่งกับข้อมูลก่อนจึงจะเป็นอนุกรมเวลาคงที่

แบบจำลองที่เหมาะสมกับ setd คือแบบจำลองที่ d=1 ดังนั้นเรากำหนดค่าดังกล่าวในคำสั่ง `auto.arima` และให้คำสั่งทดลองหา p, q ที่เหมาะสม

```
> library(forecast)
> setd_mod<-auto.arima(setd$index, d=1, max.p=6, max.q=6 , ic= c("bic")
    , stepwise = FALSE, trace = TRUE)
<Omitted>
 Best model: ARIMA(0,1,0)

> setd_mod
Series: setd$index
ARIMA(0,1,0)

sigma^2 estimated as 87.77:  log likelihood=-13312.56
AIC=26627.12   AICc=26627.12   BIC=26633.32

```

ซึ่งจากการใช้บีไอซี พบว่าอันดับที่เหมาะสมคือ $p = 0$ และ $q = 0$ ดังนั้นแบบจำลองที่เหมาะสมที่ใช้ประมาณค่าดัชนีหลักทรัพย์แห่งประเทศไทยรายวันคือ `ARIMA(0,1,0)` หรือแบบจำลองแรนดอมวอล์กนั่นเอง

3.6 แบบฝึกฝน

แบบฝึกฝน 3.1 ดาวน์โหลดไฟล์ `hw2_60s2.csv` จาก `www.gg.gg/ec435data` ซึ่งเป็นข้อมูลตัวแปร y จำนวน 400 วัน จงตอบคำถามต่อไปนี้

1. จงวาดกราฟของ y_t และตรวจสอบว่าเราสามารถสร้างแบบจำลองเพื่ออธิบาย y_t หรือไม่
2. จงสร้างแบบจำลอง โดยใช้ข้อมูลจาก ACF และ PACF พร้อมรายงานค่าประมาณจากแบบจำลอง และตรวจสอบแบบจำลองว่าเพียงพอหรือไม่ (โดยใช้ $Q(10)$)

3. จงทำนายค่า y_t ไปข้างหน้า 1-คาบ (1-step forecast) ถึง 3-คาบ (3-step forecast) พร้อมทั้งระบุช่วงความเชื่อมั่น 95 %

แบบฝึกฝน 3.2 จงพิจารณาว่ากระบวนการต่อไปนี้เป็นกระบวนการนิ่ง (stationary) หรือไม่ พร้อมแสดงวิธีทำ [$\varepsilon_t \sim iidN(0,1)$]

1. $y_t = -0.2y_{t-1} + 0.48y_{t-2} + \varepsilon_t$
2. $y_t = -1.9y_{t-1} - 0.88y_{t-2} + \varepsilon_t$
3. $y_t = -1.8y_{t-1} - 0.81y_{t-2} + \varepsilon_t$

แบบฝึกฝน 3.3 หากเราทราบว่าผลได้ตอบแทนรายวันมีลักษณะเป็นกระบวนการ $y_t = -0.2y_{t-1} + 0.48y_{t-2} + \varepsilon_t$ โดยที่ $E(\varepsilon_t) = 0$ และ $Var(\varepsilon_t) = 0.25$ หากเราทราบว่าอัตราผลตอบแทน ณ วันที่ 199 และ 200 เท่ากับ 0.045 และ 0.01 จงพยากรณ์ผลได้ตอบแทนในวันที่ 201 และ 202 พร้อมช่วงความเชื่อมั่น 95 % ของการพยากรณ์

4. สมการถดถอยสำหรับข้อมูลอนุกรมเวลา

วิธีการประมาณสมการถดถอยสำหรับข้อมูลอนุกรมเวลาถูกนำมาใช้แพร่หลายในการวิเคราะห์ข้อมูลทางการเงิน และใช้ในการประมาณค่าและทดสอบแบบจำลองเช่น แบบจำลองราคาสินทรัพย์และผลได้ตอบแทนของสินทรัพย์เช่นแบบจำลองการประเมินราคาของหลักทรัพย์ (Capital Asset Pricing Model) หรือแคฟเอ็ม (CAPM) หรือแบบจำลองการกำหนดราคาจากการทำกำไรที่ผิดปกติ (Arbitrage Price Model) หรือเอพีที (APT) นอกจากนี้ยังใช้ศึกษาความสัมพันธ์ระหว่างผลได้ตอบแทนของทรัพย์สินกับสัดส่วนทางการเงิน เพื่อใช้ในการทำนายการเปลี่ยนแปลงของผลได้ตอบแทน วิธีการถดถอยยังใช้ในการทดสอบทฤษฎีประสิทธิภาพของตลาด (Efficient Market)

การศึกษาความสัมพันธ์ทางการเงินที่ใช้ข้อมูลอนุกรมเวลาและวิธีการถดถอยจำเป็นต้องใช้ความระมัดระวัง เนื่องจากข้อมูลส่วนใหญ่ที่ใช้เป็นข้อมูลอนุกรมเวลา ซึ่งจะส่งผลต่อคุณสมบัติของการประมาณค่าถดถอยบางประการ อันส่งผลต่อการอธิบายผลและทดสอบผล โดยทั่วไปข้อมูลที่เราจะนำมาใช้ในการศึกษามักจะเป็นตัวแปรนิ่ง เช่น ผลได้ตอบแทนของทรัพย์สินซึ่งมักจะมีคุณสมบัติที่เป็นตัวแปรนิ่ง การศึกษาสมการถดถอยมักจะพยายามที่จะอธิบายผลได้ตอบแทน ในทางตรงกันข้าม ราคาของสินทรัพย์มักจะมีลักษณะที่ไม่นิ่ง การศึกษาด้วยสมการถดถอยกับตัวแปรดังกล่าวอาจจะไม่เหมาะสม ซึ่งจะเป็นประเด็นที่เราพิจารณาในบทที่ 7 ในขณะที่บทนี้เราจะพิจารณากรณีที่ตัวแปรเป็นตัวแปรนิ่ง

4.1 แบบจำลองถดถอยข้อมูลอนุกรมเวลา

พิจารณาแบบจำลองถอถอยข้อมูลอนุกรมเวลาซึ่งอธิบายด้วยสมการต่อไปนี้

$$y_t = \beta_0 + \beta_1 x_{1t} + \ldots + \beta_k x_{kt} + \varepsilon_t = \boldsymbol{x}_t' \boldsymbol{\beta} + \varepsilon_t, \quad t = 1, \ldots, T \tag{4.1}$$

โดยที่ $x_{1t}, \ldots, x_{kt}$ คือตัวแปรอธิบาย และ ε_t เป็น error term และสามารถเขียนในรูปเมตริกซ์ได้

$$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{X}\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\varepsilon} \tag{4.2}$$

ข้อสมมุติมาตรฐานสำหรับแบบจำลองถดถอยเชิงเส้นในกรณีข้อมูลอนุกรมเวลาคือ

- แบบจำลองในสมการ (4.1.2) เป็นแบบจำลองที่ระบุถูกต้อง
- $y_t, \boldsymbol{x}_t$ เป็นอนุกรมนิ่งและ ergodic
- ตัวแปรต้น $\boldsymbol{x}_t$ ถูกกำหนดไว้ก่อน (predetermined): $E(x_{is}\varepsilon_t) = 0$ สำหรับทกค่าที่ $s \leq t$
- $E(\boldsymbol{x}_t\boldsymbol{x}_t^{'})$ เป็น full rank
- $\boldsymbol{x}_t\varepsilon_t$ เป็นกระบวนการที่ไม่มีสหสัมพันธ์กันในระยะจำกัด

4.1.1 การประมาณค่าวิธีกำลังสองน้อยที่สุด

วิธีการประมาณค่ากำลังสองน้อยที่สุดทั่วไป (Ordinary Least Square:OLS) เป็นการประมาณค่าโดยหาตัวประมาณค่าของพารามิเตอร์ที่ทำให้

$$SSR(\boldsymbol{\beta}) = \sum_{t=1}^{T}(y_t - \boldsymbol{x}_t^{'}\boldsymbol{\beta})^2 = \sum_{t=1}^{T}\varepsilon_t^2 \tag{4.3}$$

และได้แบบจำลอง fitted

$$y_t = \boldsymbol{x}_t^{'}\hat{\boldsymbol{\beta}} + \hat{\varepsilon}_t, \quad t = 1, ..., T$$

โดยที่ $\hat{\boldsymbol{\beta}} = (\boldsymbol{X}^{'}\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{X}^{'}\boldsymbol{y}$ และ $\hat{\varepsilon}_t = y_t - \hat{y}_t = y_t - \boldsymbol{x}_t^{'}\hat{\boldsymbol{\beta}}$ โดยมีค่าประมาณ error variance เท่ากับ $\hat{\sigma}^2 = \hat{\varepsilon}^{'}\hat{\varepsilon}/(T-k-1)$ และภายใต้ข้อสมมุติข้างต้นตัวประมาณค่า OLS จะ consistent และ asymptotically normally distributed และตัวประมาณค่าของค่าความแปรปรวน

$$\widehat{Aver(\hat{\boldsymbol{\beta}})} = \hat{\sigma}^2(\boldsymbol{X}^{'}\boldsymbol{X})^{-1}$$

และสแตนดาร์ดแอรเรอของแต่ละตัวประมาณค่า β_j คือค่ารากที่สองของสมาชิกลำดับที่ j ในแนวทแยงมุม

4.1.2 การวิเคราะห์เรซิดิว

ข้อสมมุติสองประการสำคัญของการประมาณค่าด้วยโอแอลเอสคือตัวรบกวนมีค่าความแปรปรวนคงที่หรือไม่มีเฮเทอโรสกีดาสติสิตี (heteroskedasticity) และตัวรบกวนไม่มีสหสัมพันธ์ระหว่างกันหรือออโตคริเรชัน (autocorrelation) หากข้อมูลที่เราศึกษาไม่เป็นไปตามข้อสมมุติดังกล่าวจะส่งผลต่อค่าความแปรปรวนของพารามิเตอร์ที่เราประมาณค่าด้วยโอแอลเอส ซึ่งจะไม่ถูกต้องและส่งผลต่อการทดสอบสมมุติฐานด้วยตัวสถิติทีและเอฟซึ่งคำนวณจากค่าความแปรปรวนดังกล่าว[1] หากเราพบว่าข้อมูลที่เราศึกษานั้นเผชิญกับเหตุการณ์ที่ไม่เป็นไปตามข้อสมมุติ วิธีการแก้ไขปัญหาหนึ่งคือการปรับการประมาณค่าโดยการผนวกรูปแบบของเฮเทอโรสกีดาสติสิตีหรือออโตคอรีเรชันเข้าไปในการประมาณค่าด้วยการปรับตัวรบกวนให้เป็นไปตามข้อสมมุติ เช่น

[1] ผู้อ่านสามารถทบทวนเนื้อหาเชิงทฤษฎีจากหนังสือเศรษฐมิติเบื้องต้น เช่น Wooldridge

การประมาณค่าด้วยวิธีการกำลังสองน้อยที่สุดทั่วไป (Generalized Least Squared) อย่างไรก็ตาม การปรับวิธีการในการประมาณค่าจำเป็นต้องทราบรูปแบบของเฮเทอโรสกีดาสติสิตีหรือออโตคอรีเรชันซึ่งมักจะเป็นสิ่งที่เราไม่ทราบ งานศึกษาสมัยใหม่จึงใช้วิธีการประมาณค่าด้วยโอแอลเอสปกติ แล้วปรับสแตนดาร์ดแอรเรอให้เหมาะสม ซึ่งจะกล่าวถึงในหัวข้อถัดไป อย่างไรก็ตาม ตัวประมาณค่าสแตนดาร์ดแอรเรอจากวิธีการดังกล่าวจะมีประสิทธิภาพที่ด้วยกว่าสแตนดาร์ดแอรเรอจากวิธีการโอแอลเอสดั้งเดิม ดังนั้นเราจำเป็นต้องตรวจสอบว่าเราเผชิญกับปัญหาเฮเทอโรสกีดาสติสิตีหรือออโตคอรีเรชันหรือไม่

การทดสอบเฮเทอโรสกีดาสติสิตี

หากเราพิจารณาสมการถดถอยอนุกรมเวลา และพิจารณาความเป็นไปได้ที่ค่าความแปรปรวนของตัวรบกวนจะไม่คงที่ หรือข้อสมมุติ

$$H_0 : Var(\varepsilon|x_1, ..., x_k) = \sigma^2$$

ไม่เป็นจริง เนื่องจากเราสมมุติให้ $E(\varepsilon|x_1, ..., x_k) = 0$ ข้อสมมุติค่าความแปรปรวนของตัวรบกวนคงที่สามารถเขียนเป็นเงื่อนไข

$$H_0 : E(\varepsilon^2|x_1, ..., x_k) = \sigma^2$$

จากเงื่อนไขดังกล่าว เราสามารถทดสอบข้อสมมุติค่าความแปรปรวนของตัวรบกวนว่าคงที่หรือไม่โดยการพิจารณาความสัมพันธ์ระหว่างตัวรบกวนยกกำลังสองกับตัวแปรอธิบาย ซึ่งสามารถเขียนเป็นสมการได้ดังนี้

$$\varepsilon_t^2 = \delta_0 + \delta_1 x_{1t} + ... + \delta_k x_{kt} + v_t \tag{4.4}$$

โดยที่ v_t เป็นตัวรบกวนที่มีค่าเฉลี่ยเท่ากับศูนย์และไม่สัมพันธ์กับตัวแปรอธิบาย เราสามารถทดสอบข้อสมมุติค่าความแปรปรวนของตัวรบกวนไม่คงที่ด้วยสมมุติฐานหลักคือ

$$H_0 : \delta_1 = \delta_2 = ... = \delta_k = 0$$

ซึ่งสามารถทดสอบได้ด้วยการทดสอบนัยสำคัญรวม (overall significance) ของสมการถดถอยระหว่างตัวรบกวนกำลังสองกับตัวแปรอธิบาย ซึ่งในทางปฏิบัติเราจะใช้ค่าเรซิดิวจากการประมาณโอแอลเอสของสมการดั้งเดิมแทนค่าตัวรบกวน

$$\hat{\varepsilon}_t^2 = \delta_0 + \delta_1 x_{1t} + ... + \delta_k x_{kt} + v_t \tag{4.5}$$

แล้วคำนวณสถิติเอฟหรือสถิติแอลเอ็ม (LM) สำหรับการทดสอบ หากกำหนดให้ $R^2_{\hat{\varepsilon}^2}$ เป็นค่า R^2 จากสมการถดถอย 4.5

$$F = \frac{R^2_{\hat{\varepsilon}^2}/k}{(1 - R^2_{\hat{\varepsilon}^2})/(T - k - 1)}$$

ซึ่งมีการแจกแจงแบบเอฟและมีองศาเสรีเท่ากับ $k, T-k-1$ และ

$$LM = TR^2_{\hat{\varepsilon}^2}$$

ซึ่งมีการแจกแจงแบบไคสแคว์และมีองศาเสรีเท่ากับ k เราจะปฏิเสธสมมุติฐานหลักที่ว่าตัวรบกวนมีค่าความแปรปรวนคงที่ถ้าค่าสถิติเอฟหรือแอลเอ็มมีค่าสูงกว่าค่าวิกฤติ เราเรียกตัวทดสอบที่ใช้สถิติแอลเอ็มว่าการทดสอบ Breusch-Pagan

การทดสอบออโตคอรีเรชัน

ในกรณีอนุกรมเวลา ตัวรบกวนในช่วงเวลาที่ใกล้เคียงกันอาจจะมีความสัมพันธ์ระหว่างกันได้ โดยที่ความสัมพันธ์ที่เรามักจะพบคือช่วงเวลาที่ติดกันหรืออยู่ในรูปแบบออโตรีเกรซซีฟที่อันดับหนึ่ง (AR(1)) ดังแสดงในสมการต่อไปนี้

$$\varepsilon_t = \rho\varepsilon_{t-1} + u_t \tag{4.6}$$

โดยที่ $|\rho| < 1$ ซึ่งหากเราทราบค่าของตัวรบกวน เราสามารถทดสอบว่าตัวรบกวนมีความสัมพันธ์ระหว่างกันหรือไม่โดยการประมาณค่าสมการถดถอยแล้วทดสอบนัยสำคัญหรือทดสอบที ซึ่งเราจะปฏิเสธสมมุติฐานหลักที่ว่า $\rho = 0$ หากค่าสัมบูรณ์ของทีสูงกว่าค่าวิกฤติ อย่างไรก็ตาม ในทางปฏิบัติเราไม่ทราบว่าตัวรบกวนมีค่าเท่าใด เราจะใช้เรซิดิวของสมการถดถอยอนุกรมเวลา เป็นตัวแทน นอกจากนี้การทดสอบโดยใช้รูปแบบออโตรีเกรซซีฟอันดับหนึ่งยังสามารถค้นพบความสัมพันธ์ที่อยู่ห่างกันมากกว่าหนึ่งคาบได้ด้วยเช่นกัน ในกรณีที่ตัวรบกวนสัมพันธ์กับตัวแปรอธิบายในสมการอนุกรมเวลา การทดสอบออโตโครีเรชันจะต้องคำนึงถึงตัวแปรดังกล่าว และในการประมาณค่าสมการเพื่อทดสอบจะใช้สมการต่อไปนี้

$$\varepsilon_t = \rho\varepsilon_{t-1} + \delta_1 x_{1t} + ... + \delta_k x_{kt} + u_t \tag{4.7}$$

แล้วทดสอบนัยสำคัญของค่าสัมประสิทธิ์ ρ เราสามารถขยายการทดสอบไปยังกรณีที่ความสัมพันธ์ระหว่างตัวรบกวนมีรูปแบบที่อันดับสูงขึ้น เช่น หากตัวรบกวนมีความสัมพันธ์ในรูปแบบออโตรีเกรซซีฟอันดับ q สมการที่เราพิจารณาจะเป็นดังนี้

$$\varepsilon_t = \rho_1\varepsilon_{t-1} + ... + \rho_q\varepsilon_{t-q} + \delta_1 x_{1t} + ... + \delta_k x_{kt} + u_t \tag{4.8}$$

โดยที่สมมุติฐานหลักที่ว่าตัวรบกวนไม่มีออโตคอรีเรชันสามารถเขียนได้ดังนี้

$$H_0 : \rho_1 = ... = \rho_q = 0$$

ซึ่งเราสามารถทดสอบนัยสำคัญเป็นกลุ่มโดยใช้ตัวสถิติเอฟ หรือการทดสอบแอลเอ็ม โดยที่การทดสอบแอลเอ็มจะมีชื่อเรียกว่าการทดสอบ Breusch-Godfrey

ตัวอย่างที่ 4.1 การประมาณค่าและทดสอบ Capital Assest Pricing Model
แบบจำลองแคพเอ็ม ซึ่งถูกนำเสนอโดย Sharp, Litner และ Mosen เป็นแบบจำลองซึ่งใช้อธิบายผลตอบแทนส่วนเกิน (Excess return) ของหลักทรัพย์ด้วยผลตอบแทนส่วนเกินของตลาดซึ่งสามารถเขียนเป็นสมการ

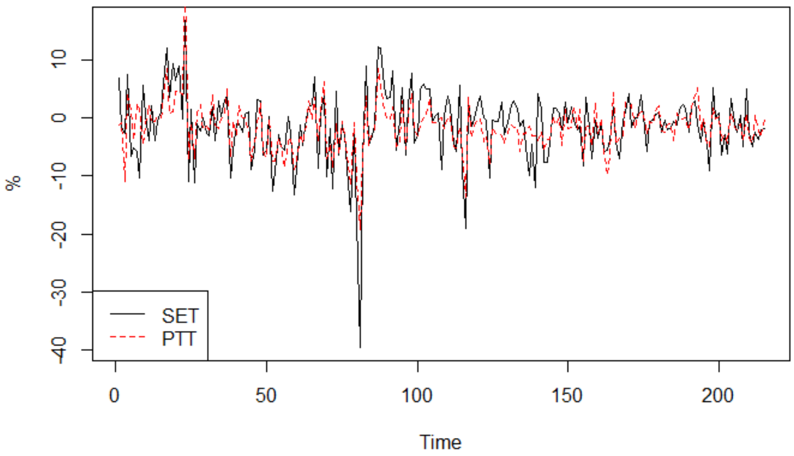
$$r_{it} - r_{ft} = \alpha_i + \beta_i(r_{mt} - r_{ft}) + \varepsilon_{it}, \quad i = 1,...,N; t = 1,...,T \tag{4.9}$$

โดยที่ r_{it} คืออัตราผลตอบแทนของสินทรัพย์ $i(i = 1,...,N)$ ระหว่างเวลาที่ $t-1$ ถึง t , r_{mt} คืออัตราผลตอบแทนของตลาดระหว่างเวลาที่ $t-1$ ถึง t และ r_{ft} คืออัตราผลตอบแทนของสินทรัพย์ที่ไม่มีความเสี่ยงระหว่างเวลาที่ $t-1$ ถึง t สมมติให้ ε_t มีการแจกแจงแบบปกติ $N(0,\sigma_i^2$ โดยทั่วไปผลตอบแทนของตลาดจะใช้ตะกร้าการลงทุนที่เลียนแบบดัชนีของตลาดเช่นดัชนี SET และผลตอบแทนของสินทรัพย์ที่ไม่มีความเสี่ยงจะเป็นอัตราผลตอบแทนของพันธบัตรรัฐบาล ที่ดุลยภาพ

$$E(r_{it}) - r_{ft} = \beta_i\left(E(r_{mt}) - r_{ft}\right)$$

สมการแสดงว่า*ค่าชดเชยความเสี่ยง (risk premium)* ของหลักทรัพย์ i จะเท่ากับ β_i นอกจากนี้แคพเอ็มยังอนุมานต่อไปว่า $\alpha_i = 0$
เราต้องการประมาณค่าสมการแคพเอ็ม 4.9 สำหรับหุ้นพีพีที (PPT) โดยพิจารณาผลตอบแทนส่วนเกินรายเดือนระหว่างเดือนกุมภาพันธ์ 2002 ถึงเมษายน 2020 และใช้ดัชนีตลาดหลักทรัพย์แห่งประเทศไทยในการคำนวณผลตอบแทนของตลาด และอัตราดอกเบี้ยตราสารหนี้ 30 วันของรัฐบาลเป็นอัตราดอกเบี้ยที่ไม่มีความเสี่ยง ตัวแปร ppt และ set เป็นอัตราผลตอบแทนส่วนเกินของหุ้นพีพีทีและตลาด และจัดเก็บในไฟล์ capm เราสามารถพิจารณาข้อมูลเบื้องต้นได้จากคำสั่งต่อไปนี้

```
> data<-read.csv("https://raw.githubusercontent.com/chaleampong/EC435/
    master/capm.csv")
> plot.ts(data$set, ylab="%")
> lines(data$ptt, col=2, lty=2)
> legend("bottomleft", legend= c("SET", "PTT"), col = 1:2, lty = 1:2)
```



รูปที่ 4.1: ผลตอบแทนส่วนเกินของหุ้นพีทีทีและตลาด

จากรูปจะเห็นได้ว่าผลตอบแทนส่วนเกินมีลักษณะเป็นอนุกรมนิ่ง และมีทิศทางไปในทางเดียวกัน การประมาณค่าสมการแคพเอ็มด้วย OLS จะใช้คำสั่งต่อไปนี้

```
> capm_ptt<-lm(ptt~set, data=data)
> summary(capm_ptt)

Call:
lm(formula = ptt ~ set, data = data)

Residuals:
   Min     1Q Median     3Q    Max
-8.763 -1.405 -0.286  1.120 14.405

Coefficients:
            Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
(Intercept)  -0.8319     0.1777   -4.68  5.1e-06 ***
set           0.5472     0.0292   18.72  < 2e-16 ***
---
Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1

Residual standard error: 2.54 on 213 degrees of freedom
Multiple R-squared:  0.622,     Adjusted R-squared:  0.62
F-statistic:  351 on 1 and 213 DF,  p-value: <2e-16
```

ค่าประมาณของ β สำหรับหุ้นพีทีที เท่ากับ 0.55 แสดงว่าหุ้นพีทีทีมีความเสี่ยงน้อยกว่าตลาด ในกรณีของหุ้นพีทีที ค่าประมาณของ α อนุมานได้ว่าค่า α มีค่าไม่เท่ากับศูนย์

เราสามารถทดสอบข้อสมมุติของการประมาณค่าโอแอลเอส โดยใช้คำสั่ง `bptest` สำหรับการทดสอบเฮเทอโรสกีดาสติสิตีและ `bgtest` สำหรับการทดสอบออโตคอรีเรชันในชุดคำสั่ง LMTEST

```
> bptest(capm_ptt)

        studentized Breusch-Pagan test

data:  capm_ptt
```

```
BP = 3.9157, df = 1, p-value = 0.04784

> bgtest(capm_ptt, order=1)

        Breusch-Godfrey test for serial correlation of order up to 1

data:  capm_ptt
LM test = 2.5031, df = 1, p-value = 0.1136
```

สำหรับการทดสอบเฮเทอโรสกีดาสติสิตี ค่าพีมีค่าเท่ากับ 0.048 < 0.05 (ระดับนัยสำคัญ 5 %) เราสามารถปฏิเสธสมมุติฐานหลักที่ว่าตัวรบกวนมีค่าความแปรปรวนคงที่ และสรุปว่าเราเผชิญกับปัญหาเฮเทอโรสกีดาสติสิตี ในส่วนของการทดสอบออโตคอรีเรชัน เรากำหนดค่าล่าที่พิจารณาเท่ากับหนึ่ง และได้ค่าพีเท่ากับ 0.114 ซึ่งมากกว่า 0.05 เราไม่สามารถปฏิเสธสมมุติฐานหลักที่ว่าตัวรบกวนไม่มีสหสัมพันธ์ระหว่างกัน อย่างไรก็ตาม ที่ระดับนัยสำคัญที่สูงกว่าเล็กน้อย เช่น 0.15 เราจะพบว่าตัวรบกวนมีออโตคอรีเรชัน และหากประมาณค่าเรซิดิวด้วยรูปแบบ AR(1) จะพบว่าค่าสัมประสิทธิ์ ρ ประมาณ 0.11

```
> library(dynlm)
> eps<-ts(eps, start=c(2002,3), frequency = 12)
> dynlm(eps~L(eps)-1)

Time series regression with "ts" data:
Start = 2002(4), End = 2020(1)

Call:
dynlm(formula = eps ~ L(eps) - 1)

Coefficients:
L(eps)
0.1076
```

4.2 สมการถดถอยแบบพลวัต

ในกรณีที่เราพิจารณาความสัมพันธ์ของตัวแปรด้วยข้อมูลอนุกรมเวลา เราสามารถผนวกค่าล่าของตัวแปรตามและตัวแปรอธิบายเพื่อพิจารณาความสัมพันธ์ในลักษณะพลวัตระหว่างตัวแปรที่เราสนใจ เรียกว่าแบบจำลอง Autoregressive Distributed Lag (ARDL) ซึ่งแสดงได้ดังสมการ

$$y_t = \alpha + \sum_{j=1}^{p} \phi_j y_{t-j} + \sum_{j=1}^{q_1} \beta_{1j} x_{1t-j} + \ldots + \sum_{j=1}^{q_k} \beta_{kj} x_{kt-j} + \epsilon_t \tag{4.10}$$

เพื่อความเข้าใจแบบจำลองดังกล่าว เราจะพิจารณาแบบจำลองสองตัวแปรซึ่งมีค่าล่าย้อนไปแค่ช่วงเวลาเดียว

$$y_t = \alpha + \phi y_{t-1} + \beta_0 x_t + \beta_1 x_{t-1} + \epsilon_t \tag{4.11}$$

โดยที่ x_t เป็นตัวแปรนิ่ง และ $\epsilon_t \approx WN(0,\sigma^2)$ ซึ่งเราเรียกสมการดังกล่าวว่า ARDL(1,1)

เราสามารถเขียนแบบจำลอง ARDL(1,1) ในรูปของ AR(1)

$$y_t = \alpha + \phi y_{t-1} + w_t$$

โดยที่ $w_t = \beta_0 + \beta_1 + \epsilon_t$ เป็นตัวรบกวนผสม (composite error) จะเห็นได้ว่า y_t ซึ่งเป็น $ARDL(1,1)$ จะเป็นตัวแปรนิ่งก็ต่อเมื่อ $|\phi| < 1$ ซึ่งหากตัวแปร y_t เป็นตัวแปรนิ่ง เราสามารถเขียน ARDL(1,1) ในรูปต่อไปนี้

$$y_t = \mu + \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j w_{t-j} \tag{4.12}$$

โดยที่ $\mu = \frac{1}{1-\phi}$ และ $\psi_j = \phi^j$ และเมื่อแทนค่า w_{t-j} ลงในสมการ (4.12) จะได้

$$y_t = \mu + \beta_0 x_t + (\beta_1 + \phi\beta_0)x_{t-1} + \phi(\beta_1 + \phi\beta_0)x_{t-2} + ... \tag{4.13}$$

จากสมการ (4.13) เราสามารถพิจารณาผลของตัวแปรอธิบายต่อตัวแปรตามในแต่ละช่วงเวลาได้ โดยที่ผลของ x_t ต่อ y_t ในช่วงเวลาเดียวกันเราเรียกว่า*ตัวทวีคูณผลกระทบทันที (immediate impact multiplier* และคำนวณได้ด้วย

$$\frac{\partial y_t}{\partial x_t} = \beta_0$$

ในขณะที่ตัวทวีคูณล่า (lag multiplier) หนึ่งช่วงเวลา คำนวณได้จาก

$$\frac{\partial y_t}{\partial x_{t-1}} = \beta_1 + \phi\beta_0$$

และเขียนเป็นรูปทั่วไปสำหรับตัวทวีคูณล่า k ช่วงเวลา คำนวณได้จาก

$$\frac{\partial y_t}{\partial x_{t-k}} = \phi^{k-1}(\beta_1 + \phi\beta_0)$$

เมื่อเรารวมตัวทวีคูณล่าในหลายช่วงเวลาเราจะเรียกว่าเป็นตัวทวีคูณระยะปานกลาง (intermediate multiplier) และถ้าหากเรารวมตัวทวีคูณค่าล่าทุกช่วงเวลาเข้าด้วยกันจะได้*ผลกระทบระยะยาว* (long-run effect) ซึ่งคำนวณได้ดังนี้

$$\texttt{long run effect} = \frac{\partial y_t}{\partial x_{t-1}} + \frac{\partial y_t}{\partial x_{t-2}} + \frac{\partial y_t}{\partial x_{t-3}} + ... = \sum_{k=0}^{\infty} \phi^k(\beta_1 + \phi\beta_0) = \frac{\beta_1 + \phi\beta_0}{1-\phi}$$

การประยุกต์ใช้สมการ (4.11) เราอาจจะพิจารณาผลกระทบของการเปลี่ยนแปลงปริมาณเงิน (x_t) กับอัตราเงินเฟ้อ (y_t) ซึ่งส่งผลทั้งระยะสั้นและระยะยาว ซึ่งมีตัวทวีคูณที่แตกต่างกัน

ตัวอย่างที่ 4.2 การประยุกต์สมการถดถอยแบบพลวัตกับแคพเอ็ม

เราใช้ข้อมูลต่อเนื่องจากตัวอย่างที่ผ่านมา เพื่อความสะดวกในการสร้างตัวแปรที่เป็นค่าล่า เราจะใช้ชุดคำสั่ง DYNLM ในการประมาณค่าสมการถดถอย โดยเราสามารถระบุว่าตัวแปรที่เราใช้เป็นข้อมูลอนุกรมเวลาโดยการใช้คำสั่ง `ts` แล้วระบุตัวแปรที่ต้องการกำหนดเช่น `data$ptt` จุดเริ่มต้นของข้อมูล ในที่นี้คือ เดือน 2 ปี 2002 โดยการระบุ `start=c(2002,2)` และความถี่ `freqency=12` เราสามารถประมาณค่าสมการ ARDL(1,1) สำหรับผลได้ตอบแทนของหุ้น ปตท. ได้จากสมการ

$$r_t - r_{ft} = \alpha + \phi_1(r_{t-1} - r_{f,t-1}) + \beta_0(r_{mt} - r_{ft}) + \beta_1(r_{m,t-1} - r_{f,t-1}) + \varepsilon_t$$

ด้วยคำสั่ง `dynlm` โดยการระบุค่าล่าด้วย `L( )`

```
> library(dynlm)
> head(data)
> ptt<-ts(data$ptt, start=c(2002,2), frequency = 12)
> set<-ts(data$set, start=c(2002,2), frequency = 12)
> m2<-dynlm(ptt~L(ptt)+set+L(set))
> summary(m2)

Time series regression with "ts" data:
Start = 2002(3), End = 2019(12)

Call:
dynlm(formula = ptt ~ L(ptt) + set + L(set))

Residuals:
   Min      1Q Median      3Q     Max
-8.873 -1.439 -0.244  1.141 13.829

Coefficients:
            Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
(Intercept)  -0.6632     0.1891   -3.51  0.00056 ***
L(ptt)        0.1074     0.0681    1.58  0.11614
set           0.5457     0.0299   18.28  < 2e-16 ***
L(set)       -0.0150     0.0480   -0.31  0.75569
---
Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1

Residual standard error: 2.51 on 210 degrees of freedom
Multiple R-squared:  0.635,     Adjusted R-squared:  0.63
F-statistic:  122 on 3 and 210 DF,  p-value: <2e-16
```

จากผลการประมาณค่าพบว่าค่าเบต้าในระยะสั้นของหุ้น ปตท. (β_0) มีค่าเท่ากับ 0.55 และเบต้าในระยะยาวจะเท่ากับ $\frac{\hat{\beta}_0+\hat{\beta}_1}{(1-\hat{\phi})} = \frac{0.53}{1-0.11} \approx 0.56$ อย่างไรก็ตามจะเห็นได้ว่าจากการทดสอบสมมุติฐานของตัวแปรล่าของทั้งสองตัวแปร (ϕ และ β_1) มีค่าไม่แตกต่างจากศูนย์อย่างมีนัยสำคัญ แสดงว่าข้อมูลไม่ได้สนับสนุนแบบจำลองแคพเอ็มที่เป็นพลวัตร

4.3 การอ้างอิงทางสถิติกรณีที่เรซิดิวไม่เป็นไปตามข้อสมมติ

ในการประยุกต์ ส่วนมากเรามักจะพบว่าเรซิดิว ε_t มักจะไม่เป็นไปตามข้อสมมุติที่ว่าค่าความแปรปรวนคงที่และเป็นอิสระจากเรซิดิวในช่วงเวลาอื่น หากเรายังคงรักษาข้อสมมุติที่ว่าเรซิดิวเป็นอิสระจากตัวแปรอธิบาย $\boldsymbol{x}_t$ ตัวประมาณค่า $\widehat{\beta}$ ยังคงเป็นตัวประมาณค่าที่คล้องจอง (consistent) อย่างไรก็ตามค่าความแปรปรวนของ $\widehat{\beta}$ ไม่ได้ต่ำที่สุดในบรรดาตัวประมาณค่าเชิงเส้นตรงอื่น (inefficient) และค่าความแปรปรวนของ $\widehat{\beta}$ จากสูตร $\hat{\sigma}^2(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-1}$ ไม่ถูกต้อง หากนำค่าดังกล่าวไปใช้ในการอ้างอิงทางสถิติจะได้ผลสรุปที่ผิดพลาด ถ้าหากเราทราบว่ารูปแบบของเฮเทอโรสกีดาสติสิตี (heteroskedasticity) และออโตคอรีเรชัน (autocorrelation) เราสามารถแก้ไขปัญหาค่าความแปรปรวน และได้ตัวประมาณค่าที่มีประสิทธิภาพ (efficient) จากการประมาณค่าด้วยวิธีการ Generalized Least Squares (GLS) โดยทั่วไปเราไม่ทราบว่ารูปแบบของเรซิดิวเป็นอย่างไร ทั้งเฮเทอโรสกีดาสิตีและออโตคอรีเรชัน เรามักจะใช้วิธีการในการปรับค่าสแตนดาร์ดแอเรอให้ถูกต้อง โดยมีวิธีการดังนี้ เพื่อความง่ายเราจะพิจารณากรณีที่มีตัวแปรอธิบายตัวแปรเดียวดังสมการต่อไปนี้

$$y_t = \beta_0 + \beta_1 x_t + \varepsilon_t \tag{4.14}$$

ตัวประมาณค่าของ β_1 สามารถคำนวณได้ด้วย

$$\hat{\beta}_1 = \frac{\sum_{t=1}^{T}(x_t-\bar{x})(y_t-\bar{y})}{\sum_{t=1}^{T}(x_t-\bar{x})^2} \tag{4.15}$$

ซึ่งสามารถเขียนได้เป็น

$$\hat{\beta}_1 = \beta_1 + \frac{\sum_{t=1}^{T}(x_t-\bar{x})\varepsilon_t}{\sum_{t=1}^{T}(x_t-\bar{x})^2} \tag{4.16}$$

และสามารถหาค่าความแปรปรวนของ $\hat{\beta}_1$ ได้จากสมการต่อไปนี้

$$\begin{aligned} Var(\hat{\beta}_1|\boldsymbol{X}) &= Var(\beta_1 + \frac{\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}(x_t-\bar{x})\varepsilon_t|X)}{\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}(x_t-\bar{x})2} \\ &= \frac{Var(\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}(x_t-\bar{x})\varepsilon_t|X))}{\left(\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}(x_t-\bar{x})^2\right)^2} \end{aligned} \tag{4.17}$$

โดยที่ตัวเศษของสมการ 4.17 สามารถเขียนในรูปต่อไปนี้

$$\begin{aligned} Var(\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}(x_t-\bar{x})\varepsilon_t|X)) &= \frac{1}{T^2}Var(\sum_{t=1}^{T}(x_t-\bar{x})\varepsilon_t|X) \\ &= \frac{1}{T^2}\sum_{t=1}^{T}Var((x_t-\bar{x})\varepsilon_t|X) + \frac{1}{T^2}\sum_{t=1}^{T}\sum_{s=t+1}^{T}Cov((x_t-\bar{x})\varepsilon_t,(x_s-\bar{x})\varepsilon_s|X) \end{aligned} \tag{4.18}$$

ในกรณีที่เราสมมุติให้ค่าผิดพลาดไม่มีปัญหา heteroskedasticity และ autocorrelation

$$\frac{1}{T^2}\underbrace{\sum_{t=1}^{T} Var((x_t-\bar{x})\varepsilon_t|X)}_{=\sigma^2\sum_{t=1}^{T}(x_t-\bar{x})^2}+\frac{1}{T^2}\sum_{t=1}^{T}\sum_{s=t+1}^{T}\underbrace{Cov((x_t-\bar{x})\varepsilon_t,(x_s-\bar{x})\varepsilon_s|X)}_{=0}$$

ดังนั้น $Var(\hat{\beta}_1)=\frac{\sigma^2}{\sum_{t=1}^{T}(x_t-\bar{x})^2}$ ซึ่งนำไปคำนวณค่าสแตนดาร์ดแอเรอของกรณี OLS ปกติ

4.3.1 การปรับสแตนดาร์ดแอเรอกรณีมีเฮเทอโรสกีดาสติซิตี

หากสมมุติให้เราเผชิญเฉพาะปัญหาเฮเทอโรสกีดาสติซิตี และสมมุติให้ค่าผิดพลาดไม่มีออโตคอรีเรชัน หรือพจน์ที่สองในสมการ 4.18 จะยังคงมีค่าเท่ากับศูนย์แต่ค่าความแปรปรวนของ $\hat{\beta}_1$ จะเท่ากับ

$$Var(\hat{\beta}_1|\mathbf{X})=\frac{\sum_{t=1}^{T}(x_t-\bar{x})^2 Var(\varepsilon_t|X))}{\left(\sum_{t=1}^{T}(x_t-\bar{x})^2\right)^2} \tag{4.19}$$

จากสูตรดังกล่าวจะเห็นได้ว่าค่าความแปรปรวนของ $\hat{\beta}_1$ กรณีมีเฮเทอโรสกีดาสติสิตีจะแตกต่างจากกรณีที่เป็นไปตามข้อสมมุติของ OLS ดังนั้นเราจำเป็นต้องปรับค่าสแตนดาร์ดแอเรอให้ถูกต้อง White 1980 เสนอให้ใช้ $\hat{\varepsilon}_t$ ซึ่งเป็นเรซิดิวจากการประมาณค่าสมการตั้งต้น แล้วแทนค่าเพื่อให้ได้ตัวประมาณค่าของค่าความแปรปรวนของ $\hat{\beta}_1$ ดังสมการ

$$\widehat{Var(\hat{\beta}_1|\mathbf{X})}=\frac{\sum_{t=1}^{T}(x_t-\bar{x})^2\hat{\varepsilon}_t)}{\left(\sum_{t=1}^{T}(x_t-\bar{x})^2\right)^2} \tag{4.20}$$

ค่ารากที่สองของตัวประมาณค่าดังกล่าวเราเรียกว่า Heteroskedasticity-robust standard error หรือ Robust standard error

4.3.2 การปรับสแตนดาร์ดแอเรอกรณีมีออโตคอรีเรชัน

Wooldridge 1989 ได้นำเสนอรูปแบบสมการในการพิจารณาการวิเคราะห์ถดถอยอนุกรมเวลาตามสมการ 4.1.2 หากเราสนใจการพิจารณาค่าความแปรปรวนของตัวประมาณค่า $\hat{\beta}_1$ เราสามารถสร้างสมการช่วย

$$x_{1t}=\delta_0+\delta_2 x_{2t}+\ldots+\delta_k x_{kt}+r_t \tag{4.21}$$

โดยที่พจน์ค่าผิดพลาด r_t มีค่าเฉลี่ยเท่ากับศูนย์และไม่มีสหสัมพันธ์กับตัวแปร $x_{2t},\ldots,x_{kt}$ Wooldridge แสดงให้เห็นว่าค่าความแปรปรวนของ $\hat{\beta}_1$ มีค่าเท่ากับ

$$var(\hat{\beta}_1)=\left(\sum_{t=1}^{T}E(r_t^2)\right)^{-2} var\left(\sum_{t=1}^{T}r_t\varepsilon_t\right)$$

พจน์ $a_t = r_t\varepsilon_t$ จะขึ้นอยู่กับคุณลักษณะของค่าผิดพลาดว่ามีลักษณะเป็นออโตคอรีเรชันหรือไม่ Newey and West 1987 และ Wooldridge 1989 แสดงให้เห็นว่าค่าสแตนดาร์ดแอรเรอที่ได้ปรับออโตคอรีเรชัน (autocorrelation-robust standard error) สามารถคำนวณได้จากสูตรต่อไปนี้

$$se(\hat{\beta}_1) = \left[\frac{\text{“}se(\hat{\beta}_1)\text{”}}{\hat{\sigma}}\right]\sqrt{\hat{v}} \tag{4.22}$$

โดยที่ “$se(\hat{\beta}_1)$” คือค่าสแตนดาร์ดแอรเรอกรณีเป็นไปตามข้อสมมุติของ Gauss-Markov, $\hat{\sigma}$ คือค่าประมาณของสแตนดาร์ดแอรเรอของสมการถดถอย และ $\hat{v}$ คำนวณจากสูตร

$$\hat{v} = \sum_{t=1}^{T}\hat{a}_t^2 + 2\sum_{h=1}^{g}[1-h/(g+1)]\left(\sum_{t=h+1}^{T}\hat{a}_t\hat{a}_{t-h}\right)$$

$\hat{r}$ คือเรซิดิวของสมการถดถอยระหว่าง x_{1t} และตัวแปรอธิบายที่เหลือ เพื่อให้เข้าใจว่า $\hat{v}_t$ ได้พิจารณาความสัมพันธ์ระหว่างเรซิดิวอย่างไร เราสามารถกำหนดให้ $g = 1$ จะได้

$$\hat{v} = \sum_{t=1}^{T}\hat{a}_t^2 + \sum_{t=2}^{T}\hat{a}_t\hat{a}_{t-1}$$

เราสามารถพิจารณาต่อไปได้ว่ายิ่งค่า g มีขนาดใหญ่ขึ้น เราจะมีพจน์ที่เราใช้ในการปรับออโตคอรีเรชันมากขึ้น ค่าสแตนดาร์ดแอรเรอจากสมการ 4.22 ยังช่วยในการปรับกรณีที่มีปัญหาเฮเทอโรสกีดาสติสิตี ดังนั้นในงานวิจัยที่ใช้ข้อมูลอนุกรมเวลา ค่าสแตนดาร์ดแอรเรอดังกล่าวจะถูกเรียกว่า สแตนดาร์ดแอรเรอที่ได้มีการปรับเฮเทอโรสกีดาสติสิตีและออโตคอรีเรชัน (heteroskedasticity and autocorrelation consistent (HAC) standard error) ในทางปฏิบัติประเด็นที่เราสนใจคือเราจะกำหนดค่า g เท่ากับเท่าใด โดยทางทฤษฎีแล้ว ค่า g จะแปรผันตามจำนวนตัวอย่าง ซึ่งเมื่อจำนวนตัวอย่างใหญ่ขึ้นเราควรที่จะกำหนดรูปแบบให้คล่องตัวขึ้นโดยการเพิ่มค่า g อย่างไรก็ตาม Wooldridge เสนอให้ใช้ g เท่ากับ 1 หรือ 2 สำหรับข้อมูลรายปี g เท่ากับ 4 หรือ 8 สำหรับข้อมูลรายไตรมาส และ g เท่ากับ 12 หรือ 24 สำหรับข้อมูลรายเดือน ในขณะที่ Newey and West 1987 เสนอให้ใช้ $g = 4(T/100)^{2/9}$

ตัวอย่างที่ 4.3 การปรับค่าสแตนดาร์ดแอรเรอจากความไม่เหมาะสมของข้อสมมุติ

เราสามารถปรับค่าสแตนดาร์ดแอรเรอโดยใช้ชุดคำสั่ง SANDWICH[a] และใช้คำสั่ง `coeftest` ในชุดคำสั่ง LMTEST ในการแสดงสแตนดาร์ดแอรเรอที่ได้ปรับจากข้อสมมุติเฮเทอโรสกีดาสติสิตีและออโตคอรีเรชั่น

หลังจากที่เราประมาณค่าด้วยคำสั่ง `lm` และเก็บผลการประมาณค่าไว้ในชื่อ `capm_ptt` เราสามารถแสดงผลสแตนดาร์ดแอรเรอที่ได้ปรับเฮเทอโรสกีดาสติสิตี โดยการระบุ `vcov = vcovHC(capm_ptt, type = "HC0")` โดยที่ `HC0` ถึง `HC4` เป็นการปรับเฮเทอโรสกีดาสติสิตีที่ใช้ตัวหารที่แตกต่างกัน โดยที่ `HC3` ให้ผลดีที่สุดในกรณีที่ตัวอย่างไม่มากนัก จากผลข้างล่างจะเห็นได้ว่าค่าสแตนดาร์ดแอรเรอมีค่าที่แตกต่างจากกรณีที่เป็นไปตามข้อสมมุติ อย่างไร

ก็ตามผลตอบแทนส่วนเกินของตลาดยังคงมีนัยสำคัญในการอธิบายผลตอบแทนส่วนเกินของหุ้น ปตท.

```
> library(sandwich)
> library(lmtest)
> coeftest(capm_ptt, df = Inf, vcov = vcovHC(capm_ptt, type = "HC0"))

z test of coefficients:

             Estimate Std. Error z value Pr(>|z|)
(Intercept)  -0.8319     0.1970   -4.22  2.4e-05 ***
set           0.5472     0.0455   12.02  < 2e-16 ***
---
Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1

> coeftest(capm_ptt, df = Inf, vcov = vcovHC(capm_ptt, type = "HC3"))

z test of coefficients:

             Estimate Std. Error z value Pr(>|z|)
(Intercept)  -0.8319     0.2017   -4.12  3.7e-05 ***
set           0.5472     0.0487   11.25  < 2e-16 ***
---
Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1
```

ในกรณีของการปรับออโตคอรีเรชัน เราจะระบุ `vcov = NeweyWest(capm_ptt, lag=4)` จะเห็นได้ว่าค่าสแตนดาร์ดแอรเรอมีค่าที่สูงขึ้นกว่ากรณีที่ไม่ได้คำนึงถึงผลของออโตคอรีเรชัน

```
> coeftest(capm_ptt, df = Inf, vcov = NeweyWest(capm_ptt, lag=4))

z test of coefficients:

             Estimate Std. Error z value Pr(>|z|)
(Intercept)  -0.8319     0.2195   -3.79  0.00015 ***
set           0.5472     0.0502   10.91  < 2e-16 ***
---
Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1
```

[a] ล้อกับชื่อเรียกเมตริกซ์ค่าสแตนดาร์ดแอรเรอ

5. แบบจำลองความผันผวน

เป้าหมายที่สำคัญประการหนึ่งของการศึกษาเศรษฐมิติทางการเงินคือการศึกษาความผันผวน (volatility) ของผลได้ตอบแทนของสินทรัพย์ โดยที่ความผันผวนจะหมายถึงความเบี่ยงเบนมาตรฐานที่มีเงื่อนไข (conditional standard deviation) ของผลได้ตอบแทนของสินทรัพย์ ความผันผวนที่คำนวณได้ถูกนำไปใช้ประยุกต์ในการคำนวณมูลค่าความเสี่ยง (Value-at-Risk; VaR) ของการจัดการความเสี่ยง, การจัดสรรการลงทุนภายใต้วิธีการค่าเฉลี่ยค่าความแปรปรวใ (mean-variance) และการเพิ่มประสิทธิภาพในการทำนาย

หัวข้อ 5.1 จะอธิบายแนวคิดเกี่ยวกับความผันผวน และเครื่องมือในการทดสอบข้อมูลว่าควรจะผนวกประเด็นความผันผวนเข้าไปในแบบจำลองหรือไม่ เราจะอธิบายแบบจำองที่เป็นที่นิยมในการอธิบายความผันผวนได้แก่แบบจำลองอาร์ช ($ARCH$) และการ์ช ($GARCH$) ในหัวข้อที่ 5.2 และ 5.3 ตามลำดับ หัวข้อที่ 5.4 และ 5.5 จะนำเสนอการประมาณค่าและการพยากรณ์จากแบบจำลองดังกล่าว

5.1 ความผันผวนของสินทรัพย์

5.1.1 คุณลักษณะของความผันผวน

ปัญหาเบื้องต้นของการศึกษาความผันผวนคือเราไม่สามารถสังเกตความผันผวนของสินทรัพย์เช่นหลักทรัพย์ได้เหมือนกับการสังเกตเห็นราคาทรัพย์สินหรือการคำนวณผลตอบแทนได้จากราคาทรัพย์สิน ในอดีตนักวิชาการได้นำเสนอตัวแทนของความผันผวนเช่น หากกำหนดให้ P_t เป็นราคาหลักทรัพย์ และกำหนดให้ $y_t = \Delta \ln(P_t)$ เป็นผลได้ตอบแทน เราพบว่าอนุกรมของผลได้ตอบแทนมักจะไม่มีสหสัมพันธ์ระหว่างกันผลได้ตอบแทนในอดีต แต่ผลได้ตอบแทนกำลังสอง (y_t^2) , ค่าสัมบูรณ์ของผลได้ตอบแทน ($|y_t|$), หรือค่ายกกำลังของค่าสัมบูรณ์ของผลได้ตอบแทน ($|y_t|^\delta$) มีสหสัมพันธ์ค่อนข้างสูง ดังนั้นในอดีตเรามักใช้ค่าดังกล่าวเป็นตัวแทนของความผันผวน อย่างไรก็ตามในปัจจุบันมีการคำนวณความผันผวนด้วยวิธีการอื่นๆเช่น ความผันผวนที่เกิดขึ้นจริง (Realized volatility) ซึ่งคำนวณจากข้อมูลที่มีความถี่สูง และความผันผวนเป็นนัย (Implied volatility) จากทฤษฎีของแบล็ค-โชลส์ (Black-Scholes)

5.1.2 การทดสอบลักษณะอาร์ช

ในบทที่ 3 เราสร้างแบบจำลองเส้นตรงเพื่ออธิบายผลได้ตอบแทน (y_t) โดยใช้แบบจำลองเช่นออโตรีเกรซซีฟหรือแบบจำลองอารมาในการอธิบายผลได้ตอบแทน ซึ่งเป้าหมายหลักคือการพยากรณ์ในอนาคตของ y_t โดยใช้สมการที่อธิบายค่าเฉลี่ยจากข้อมูลในอดีต (conditional mean) อย่างไรก็ตาม เราพบว่ายังมีส่วนที่แบบจำลองไม่สามารถอธิบายได้ ซึ่งเรานิยาม $\varepsilon_t = y_t - \mu_t$ เป็นเรซิดิวของแบบจำลองที่ใช้อธิบายค่าเฉลี่ยซึ่งใช้ข้อมูลถึงช่วงเวลาที่ t (conditional mean equation) ของผลได้ตอบแทน เราแทนค่าค่าเฉลี่ยมีเงื่อนไข (conditional mean) ด้วยสัญลักษณ์ μ_t ในบทที่ผ่านมาเราจะทดสอบว่าแบบจำลองเพียงพอที่จะอธิบายค่าเฉลี่ยหรือไม่โดยพิจารณาสหสัมพันธ์ในตัวของเรซิดิว ซึ่งหากไม่หลงเหลือความสัมพันธ์แล้วแสดงว่าแบบจำลองเพียงพอในการอธิบาย y_t อย่างไรก็ตามจากการพิจารณาข้อมูลอนุกรมเวลาเราในอดีต เราพบว่าเรซิดิวของข้อมูลทางการเงินอาจจะมีความผันผวนซึ่งวัดด้วยค่ายกกำลังสองหรือค่าสัมบูรณ์ที่เปลี่ยนแปลงตามเวลา ซึ่งค่าความผันผวนในช่วงเวลาที่ติดกันมักจะมีความสัมพันธ์กันเช่น หากช่วงเวลาที่ $t-1$ มีความผันผวนสูง เรามักจะพบว่าช่วงเวลา t ก็จะมีความผันผวนที่สูงด้วยเช่นเดียวกัน ซึ่งหากข้อมูลใด ๆ มีลักษณะดังกล่าว เราสามารถที่จะนำลักษณะดังกล่าวมาสร้างข้อมูล เพื่อใช้ในการพยากรณ์ความผันผวน ตลอดจนเพิ่มความแม่นยำในการพยากรณ์ค่าเฉลี่ยของตัวแปรที่เราสนใจ จากคุณสมบัติที่กล่าวถึง เราต้องการทดสอบว่าข้อมูลของเรามีความผันผวนที่มีความสัมพันธ์ระหว่างกันหรือไม่ ซึ่งในบทนี้เราจะนิยามว่าความผันผวนซึ่งไม่สามารถสังเกตได้นั้น สามารถคำนวณได้จากค่าความแปรปรวนมีเงื่อนไข (conditional variance) ซึ่งจะมีค่าที่ไม่คงที่ (ต่างจากบทที่ผ่านมาที่เราสมมุติให้ค่าแปรปรวนของช็อกมีค่าคงที่) ดังนั้น เราต้องการทดสอบว่าค่าความแปรปรวนเปลี่ยนแปลงตามเวลาและมีความสัมพันธ์ระหว่างกันหรือไม่ ซึ่งความสัมพันธ์ระหว่างกันที่เรามักจะพบคือความแปรปรวนมีเงื่อนไขในช่วงเวลาติดกันมีความสัมพันธ์กันหรือมีความสัมพันธ์ในลักษณะออโตรีเกรซซีฟ การทดสอบที่เราพิจารณาจึงมีชื่อเรียกว่า**ความแปรปรวนที่ไม่คงที่เปลี่ยนแปลงตามเวลาและมีความสัมพันธ์แบบออโตรีเกรซซีฟ (Autoregressive Conditional Heteroskedasticity)** หรือเราเรียกสั้น ๆ ว่า**อาร์ช(ARCH)** การทดสอบคุณลักษณะดังกล่าวคือการทดสอบว่ามีลักษณะอาร์ชหรือไม่ (ARCH effect test) ซึ่งจากแนวคิดที่ใช้ค่ายกกำลังสองของเรซิดิวเป็นตัววัดความผันผวน เราจะเชื่อว่าข้อมูลอนุกรมเวลาที่เราพิจารณามีลักษณะอาร์ชถ้าค่ากำลังสองของอนุกรมเวลานั้น ๆ หรือเรซิดิวมีความสัมพันธ์กัน จากแนวคิดดังกล่าวมีการทดสอบสองวิธีที่เป็นที่นิยมใช้ ได้แก่ (1) การใช้การทดสอบยุง-บ๊อกซ์ (Ljung-Box) เพื่อทดสอบอนุกรมเวลา ε_t^2 (McLeod and Li 1983) และ (2) การทดสอบด้วยตัวคูณลากรองซ์ (Lagrange Multiplier: LM) (Engle 1982)

วิธีแรกเป็นการทดสอบยุง-บ๊อกซ์คิว (Ljung-Box $Q(m)$) สำหรับค่ายกกำลังสองของเรซิดิว (ε_t^2) โดยเราใช้ ε_t^2 เป็นตัวแทนค่าแปรปรวนที่เปลี่ยนแปลงตามเวลา ดังนั้นหากค่าความแปรปรวนขึ้นอยู่ต่อกันจะต้องมีสหสัมพันธ์ระหว่างกัน ดังนั้นเราจะตั้งสมมุติฐานหลักค่ายกกำลังสองของเรซิดิวไม่มีสหสัมพันธ์ระหว่างกันย้อนไปถึงคาบที่ m หากสมมุติฐานหลักเป็นจริงแสดงว่าเรซิดิวไม่มีลักษณะอาร์ช

วิธีสองเป็นการทดสอบโดยใช้ตัวคูณลากรองซ์ โดยเราใช้ ε_t^2 เป็นตัวแทนของค่าความแปรปรวน ณ เวลาที่ t ซึ่งหากเราต้องการทดสอบว่าค่าแปรปรวนขึ้นกับค่าแปรปรวนในอดีตหรือไม่ สามารถประมาณค่าสมการ

$$\varepsilon_t^2 = a_0 + a_1 \varepsilon_{t-1}^2 + \ldots + a_m \varepsilon_{t-m}^2 + e_t \tag{5.1}$$

และพิจารณาค่าสัมประสิทธิ์ว่าต่างจากศูนย์อย่างมีนัยสำคัญเชิงสถิติหรือไม่ โดยสมมุติฐานหลักของการทดสอบคือ $a_1 = a_2 = ... = a_m = 0$ ซึ่งสอดคล้องกับการที่เรซิดิวไม่มีลักษณะอาร์ช เราสามารถทดสอบได้ด้วยการประมาณค่าสมการ 5.1 จะได้ค่า R^2 แล้วไปคำนวณค่าสถิติ $LM = TR^2$ โดยที่ T คือจำนวนตัวอย่าง ซึ่งค่าสถิติจากมีการแจกแจงแบบไคสแควร์ที่องศาเสรีเท่ากับเอ็ม ($LM \sim \chi^2_{df=m}$) เราจะปฏิเสธสมมุติฐานหลักถ้าค่าสถิติสูงกว่าค่าวิกฤติ $LM > \chi^2_{df=m}(1-\alpha)$

ตัวอย่างที่ 5.1 การทดสอบลักษณะอาร์ชของผลได้ตอบแทนรายเดือนจากการลงทุนในตลาดหลักทรัพย์แห่งประเทศไทย

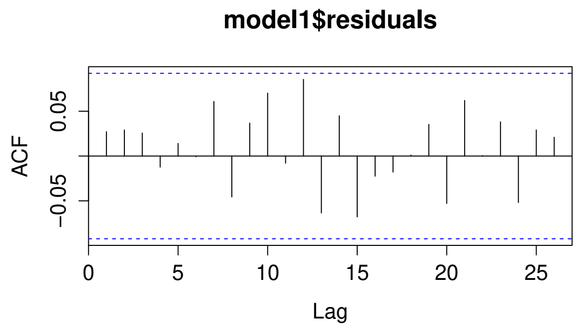
เราจะพิจารณาผลได้ตอบแทนรายเดือนในรูปล็อกของการลงทุนในตลาดหลักทรัพย์แห่งประเทศไทย โดยใช้ข้อมูลราคาปิดรายเดือนตั้งแต่ เมษายน 2518 ถึงเดือนพฤศจิกายน 2555 ซึ่งอยู่ในไฟล์ `mset.csv` เราสามารถสร้างอนุกรมเวลาผลได้ตอบแทนในรูปล็อกและหารูปแบบจำลองที่เหมาะสมได้ด้วยคำสั่ง `auto.arima` ได้แบบจำลอง $ARMA(2,2)$ ตามที่แสดงในคำสั่งข้างล่าง

```
> mset <- read.csv("https://raw.githubusercontent.com/chaleampong/EC435
    /master/mset.csv", header = FALSE)
> head(mset)
> ret<-diff(log(mset$V1))
> library(forecast)
> auto.arima(ret, max.p=6, max.q=6, ic=c("aic"))
Series: ret
ARIMA(2,0,2) with zero mean

Coefficients:
         ar1      ar2      ma1     ma2
      1.1154  -0.9020  -1.0542  0.9141
s.e.  0.0511   0.0754   0.0646  0.0740

sigma^2 estimated as 0.006749:  log likelihood=489.01
AIC=-968.03   AICc=-967.89   BIC=-947.47
```

หลังจากนั้นเราประมาณค่าแบบจำลอง $ARMA(2,2)$ และให้ชื่อว่า `m` เราสามารถพิจารณาเหมาะสมของแบบจำลองได้ด้วยเอซีเอฟของเรซิดิวหรือทดสอบยุง-บ๊อกซ์กับเรซิดิว

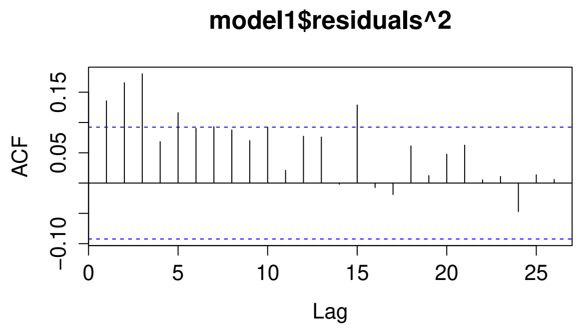
```
> m <- arima(ret, order=c(2,0,2))
> acf(m$residuals, lag.max=20)
> Box.test(m$residuals, lag=12, type="Ljung")

        Box-Ljung test

data:  m$residuals
X-squared = 10.191, df = 12, p-value = 0.5992
```

จะได้



รูปที่ 5.1: ACF ของ residuals

จากรูป 5.1 และค่าสถิติยุง-บ๊อกซ์มีค่าเท่ากับ 10 ซึ่งน้อยกว่าค่าวิกฤติ จะเห็นได้ว่าแบบจำลองดังกล่าวเพียงพอในการอธิบายค่าเฉลี่ยของผลได้ตอบแทน และไม่มีสหสัมพันธ์ระหว่างผลได้ตอบแทนเหลืออยู่



รูปที่ 5.2: ACF ของ residuals ยกกำลังสอง

แต่หากเราพิจารณาเอซีเอฟของค่ากำลังสองของเรซิดิว หรือทดสอบยุง-บ๊อกซ์กับของค่าของเรซิดิวยกกำลังสอง หรือทดสอบลักษณะอาร์ชในรูปของสถิติแอลเอ็มจะเห็นได้ว่ายังมีลักษณะอาร์ชเหลืออยู่ในเรซิดิว ซึ่งการทดสอบลักษณะของอาร์ชด้วยสถิติแอลเอ็ม จะใช้คำสั่ง `ArchTest(series, q)` จากชุดคำสั่ง FinTS โดยต้องระบุ series ที่ต้องการทดสอบและค่าล่า (q)

```
1 > acf(m$residuals^2, lag.max = 20)
2 > Box.test(m$residuals^2, lag=12, type="Ljung")
3         Box-Ljung test
4 data:  m$residuals^2
5 X-squared = 64.509, df = 12, p-value = 3.36e-09
6 > library(FinTS)
7 > ArchTest(ret)
8         ARCH LM-test; Null hypothesis: no ARCH effects
9 data:  ret
10 Chi-squared = 35.547, df = 12, p-value = 0.000383
```

กรณีการทดสอบยุง-บ๊อกซ์ของค่าเรซิดิวยกกำลังสอง (บรรทัด 2-7) ค่าพี < 0.0001 เราปฏิเสธสมมุติฐานที่ว่าค่ากำลังสองของเรซิดิวไม่มีสหสัมพันธ์กัน *กรณีการทดสอบลักษณะอาร์ชด้วยสถิติแอลเอ็ม* (บรรทัด 9-14) ค่าพี < 0.002 เราปฏิเสธสมมุติฐานหลัก $a_1 = a_2 = ... = a_m = 0$ สรุปว่า เราพบว่าเรซิดิวของแบบจำลอง $ARMA(2,2)$ มีลักษณะอาร์ช

5.2 แบบจำลองอาร์ช

เพื่อให้ผู้อ่านเข้าใจแรงจูงใจในการสร้างแบบจำลองอาร์ช (ARCH) ผู้เขียนขอเน้นอีกครั้งว่าแบบจำลองอนุกรมเวลาที่เราสร้างขึ้นมาในบทที่ผ่านมา เราพยายามที่จะอธิบายค่าในอนาคตของตัวแปรสุ่มที่เราสนใจโดยที่ค่าเฉลี่ยที่เราพยากรณ์อาจจะอยู่ในรูปค่าเฉลี่ยมีเงื่อนไข (conditional mean) หรือค่าเฉลี่ยไม่มีเงื่อนไข (unconditional mean) เช่นในกรณีแบบจำลอง $AR(1)$ ซึ่งสามารถแสดงได้ด้วย $y_t = \phi y_{t-1} + \varepsilon_t$ ซึ่งจากบทที่ผ่านมาเราทราบว่าค่าเฉลี่ย (ที่ไม่มีเงื่อนไข) $E(y_t) = 0$ และค่าความแปรปรวน $Var(y_t) = \sigma^2/(1-\phi^2)$ ซึ่งหากใช้ค่าเฉลี่ยดังกล่าวสำหรับการทำนายไปข้างหน้าจะได้ค่าคาดการณ์ของ y เท่ากับศูนย์ แต่วิธีการพยากรณ์ที่จะทำให้ค่า MSE ต่ำที่สุดควรจะใช้ค่าเฉลี่ยมีเงื่อนไขจากแบบจำลอง $AR(1)$ ซึ่งเท่ากับ

$$y_h(1) = E(y_{h+1}|F_h) = \phi y_h$$

และมีค่าความแปรปรวนที่มีเงื่อนไขเท่ากับ

$$Var_h(y_{h+1}) = E_h(y_{h+1} - E_h(y_{h+1}))^2 = E_h(\phi y_h + \varepsilon_{h+1} - \phi y_h)^2 = E_h(\varepsilon_{h+1}^2) = \sigma_{h+1}^2$$

โดยที่ $E_h() = E(|F_h)$ และในบทที่ผ่านมาเราสมมุติให้ σ_{h+1}^2 มีค่าคงที่

Engle 1982 ได้วิเคราะห์โมเมนต์ที่สองที่มีเงื่อนไข โดยที่สร้างแบบจำลองที่ค่าความแปรปรวนสามารถเปลี่ยนแปลงได้ตามเวลา

5.2.1 รูปแบบ ของแบบจำลองอาร์ชที่อันดับ q ARCH(q)

ค่าสหสัมพันธ์ในตัวของผลได้ตอบแทนกำลังสองหรือค่าความแปรปรวนมีเงื่อนไข อธิบายได้ด้วยแบบจำลอง AR ของเรซิดิวกำลังสอง ตัวอย่างเช่น กำหนดให้ y_t อนุกรมเวลานิ่ง เช่น ผลได้ตอบแทน แล้วกำหนดให้ y_t สามารถอธิบายได้ด้วยแบบจำลอง

$$y_t = \mu_t + \varepsilon_t \tag{5.2}$$

โดยที่ μ_t เป็นส่วนอธิบายค่าเฉลี่ย ซึ่งอาจจะเป็นค่าคงที่ c หรือ แบบจำลอง $ARMA(p,q)$ และ ε_t เป็นเรซิดิวที่มีค่าเฉลี่ยเท่ากับศูนย์ เพื่อที่จะให้แบบจำลองดังกล่าวมีความผันผวนเป็นกลุ่ม (volatility clustering) หรือค่าแปรปรวนมีเงื่อนไขเปลี่ยนแปลงตามเวลา เราจะสมมุติให้ความแปรปรวนมีเงื่อนขึ้นอยู่กับข้อมูล ณ คาบที่ $t-1$ $Var_{t-1} = \sigma_t^2$ เขียนเป็นสมการต่อไปนี้

$$\sigma_t^2 = \omega + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2 + \ldots + \alpha_q \varepsilon_{t-q}^2 \tag{5.3}$$

เนื่องจาก ε_t มีค่าเฉลี่ยเท่ากับศูนย์ $Var_{t-1}(\varepsilon_t) = E_{t-1}(\varepsilon_t^2) = \sigma_t^2$ ดังนั้นเราสามารถเขียนสมการ (5.3) ได้เป็น

$$\varepsilon_t^2 = \omega + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2 + \ldots + \alpha_q \varepsilon_{t-q}^2 + u_t \tag{5.4}$$

โดยที่ $u_t = \varepsilon_t^2 - E_{t-1}(\varepsilon_t^2)$ ซึ่งเป็นกระบวนการไวท์นอซที่มีค่าเฉลี่ยเท่ากับศูนย์ สมการ (5.2),(5.3) และ (5.4) รวมกันเรียกว่าความแปรปรวนที่ไม่คงที่เปลี่ยนแปลงตามเวลาและมีความสัมพันธ์แบบออโตรีเกรสซีฟ (Autoregressive Conditional Heteroskedasticity) หรือ แบบจำลองอาร์ชที่อันดับ q ($ARCH(q)$)

รูปแบบของ $ARCH(q)$ อีกแบบจำลองสามารถแสดงได้ดังนี้

$$
\begin{aligned}
y_t &= \mu_t + \varepsilon_t \\
\varepsilon_t &= z_t \sigma_t \\
\sigma_t^2 &= \omega + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2 + \ldots + \alpha_q \varepsilon_{t-q}^2
\end{aligned} \tag{5.5}
$$

โดยที่ z_t เป็นตัวแปรสุ่มเป็นอิสระและเหมือนกันที่มีค่าเฉลี่ยเท่ากับศูนย์และค่าความแปรปรวนเท่ากับหนึ่ง, $iid(0,1)$ ตัวอย่างเช่น การแจกแจงปกติมาตรฐาน

5.2.2 คุณลักษณะของอาร์ชที่อันดับหนึ่ง

เพื่อให้ผู้อ่านเข้าใจแบบจำลองอาร์ช เราจะมาพิจารณาคุณสมบัติของแบบอาร์ชที่อันดับหนึ่ง $(ARCH(1))$ สมมุติว่าให้ y_t มีคุณลักษณะตามแบบจำลอง $ARCH(1)$ โดยที่

$$y_t = \varepsilon_t \tag{5.6}$$

$$\varepsilon_t = z_t \sigma_t \tag{5.7}$$

และ

$$\sigma_t^2 = \omega + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2 \tag{5.8}$$

หากเรายกกำลังสองทั้งสองข้างของ (5.7) แล้วสลับข้างสมการ (5.8) แล้วนำมาลบจะได้

$$
\begin{aligned}
\varepsilon_t^2 - \omega - \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2 &= (z_t^2 - 1)\sigma_t^2 \\
\varepsilon_t^2 &= \omega + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2 + (z_t^2 - 1)\sigma_t^2
\end{aligned}
$$

ซึ่งเป็นแบบจำลองของ ε_t^2 ในรูปออโตรีเกรสซีฟ โดยที่ $u_t = (z_t^2 - 1)\sigma_t^2$ และจากความสัมพันธ์ที่ $y_t^2 = \varepsilon_t^2$ เราสามารถสรุปได้ว่า $ARCH(1)$ สามารถเขียนในรูปกำลังสองของ y_t ได้

ค่าเฉลี่ยที่ไม่มีเงื่อนไขของ ε_t เท่ากับศูนย์ ซึ่งการคำนวณสามารถแสดงได้ดังนี้

$$
\begin{aligned}
E(\varepsilon_t) = E(E(\varepsilon_t|F_{t-1})) &= E(E(z_t\sigma_t|F_{t-1})) \\
&= E(\sigma_t \underbrace{E(z_t|F_{t-1})}_{=0}) = 0
\end{aligned}
$$

โดยสมการแรกใช้กฏของค่าคาดหมายซ้ำ (Law of Iterated Expectation)

ค่าความแปรปรวนไม่มีเงื่อนไขของ ε_t สามารถคำนวณได้โดย

$$
\begin{aligned}
Var(\varepsilon_t) = E(\varepsilon_t^2) &= E(E(\varepsilon_t^2|F_{t-1})) \\
&= E(E(z_t^2\sigma_t^2|F_{t-1})) \\
&= E(\sigma_t^2 \underbrace{E(z_t^2|F_{t-1})}_{=1}) \\
&= E(\omega + \alpha_1\varepsilon_{t-1}^2) = \omega + \alpha_1 E(\varepsilon_{t-1}^2)
\end{aligned}
$$

หากต้องการให้ ε_t เป็นกระบวนการคงที่ $Var(\varepsilon_t) = E(\varepsilon_t^2) = E(\varepsilon_{t-1}^2)$ ดังนั้น $Var(\varepsilon_t) = \frac{\omega}{1-\alpha_1}$ และเงื่อนไขที่จะทำให้ค่าความแปรปรวนไม่มีเงื่อนไขเป็นบวกคือ $0 \le \alpha_1 < 1$

ในทางปฏิบัติ เราต้องการทราบว่าค่าโมเมนต์ที่สูงกว่าโมเมนต์ที่สองเป็นอย่างไร ภายหลังจากการดำเนินการบางอย่างเราพบว่า โมเมนต์ที่สี่เท่ากับ

$$
E(\varepsilon^4) = 3\frac{\omega(1+\alpha_1)}{(1-\alpha_1)(1-3\alpha_1^2)} \tag{5.9}
$$

ดังนั้นเงื่อนไขที่ทำให้โมเมนต์ที่สี่มีค่าจำกัดคือ $0 \le \alpha_1 < 1/3$ และค่าความโด่งเท่ากับ

$$
\kappa = \frac{E(\varepsilon_t^4)}{[Var(\varepsilon_t)]^2} = 3\frac{\omega(1+\alpha_1)}{(1-\alpha_1)(1-3\alpha_1^2)} \times \frac{(1-\alpha_1)^2}{\omega^2} = 3\frac{1-\alpha_1^2}{1-3\alpha_1^2} \tag{5.10}
$$

ซึ่งค่าความโด่งจะมากกว่าสามเสมอ แสดงว่าการแจกแจงของช็อกในแบบจำลองอาร์ชจะมีหางที่อ้วนกว่าปกติ

5.2.3 การประมาณค่าแบบจำลองอาร์ชอันดับหนึ่ง

การประมาณค่าพารามิเตอร์ในแบบจำลองอาร์ชอันดับหนึ่ง $ARCH(1)$ สามารถดำเนินการได้ด้วยวิธีการหาค่าสูงสุดของภาวะความน่าจะเป็นสูงสุดแบบมีเงื่อนไข หากสมมุติให้ z_t มีการแจกแจงแบบปกติมาตรฐาน จากสมการ (5.7) เราจะได้ $\varepsilon_t \sim N(0,\sigma_t^2)$ และฟังก์ชันภาวะความน่าจะเป็นในรูปล็อกจะเท่ากับ

$$
\begin{aligned}
\ln L(\omega,\alpha_1;\boldsymbol{y}) &= \sum_{t=1}^{T} \ln f(\varepsilon_t|\varepsilon_{t-1}) \\
&= -\frac{1}{2}\sum_{t=1}^{T}\ln(2\pi) - \frac{1}{2}\sum_{t=1}^{T}\ln(\sigma_t^2) - \sum_{t=1}^{T}\left(\frac{y_t^2}{2\sigma_t^2}\right)
\end{aligned} \tag{5.11}
$$

โดยที่ค่า ε_0 และ σ_0^2 เท่ากับค่าเฉลี่ย เราสามารถหาตัวประมาณค่าพารามิเตอร์ได้จากการหาค่าสูงสุดของสมการ (5.11) อย่างไรก็ตามเราสามารถกำหนดการแจกแจงรูปแบบอื่นที่มีค่าเฉลี่ยเท่ากับศูนย์และค่าความแปรปรวนเท่ากับหนึ่ง เช่นการแจกแจงแบบทีมาตรฐาน (standardized student’s t distribution)

5.3 แบบจำลองการ์ชที่อันดับ p,q

ถ้าเราทดสอบลักษณะอาร์ชด้วยตัวทดสอบ เช่นตัวทดสอบแอลเอ็ม แล้วพบว่าอนุกรมเวลามีลักษณะอาร์ช เราสามารถใช้แบบจำลองอาร์ชที่อันดับ q ใด ๆ $ARCH(q)$ เพื่อประมาณค่าความผันผวนที่เปลี่ยนแปลงตามเวลา (time varying volatility: σ_t^2) ซึ่งขึ้นอยู่กับข้อมูลในอดีต อย่างไรก็ตามในทางปฏิบัติ ค่าล่า q ที่เหมาะสมสำหรับแบบจำลอง $ARCH(q)$ ค่อนข้างที่จะยาว ส่งผลต่อจำนวนพารามิเตอร์ที่ต้องประมาณค่าและความเหมาะสมของแบบจำลอง ดังนั้น Bollerslev 1986 ได้เสนอรูปแบบของสมการความแปรปรวนเป็น

$$\sigma_t^2 = \omega + \sum_{i=1}^{q} \alpha_i \varepsilon_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^{p} \beta_j \sigma_{t-j}^2 \tag{5.12}$$

โดยที่มีเงื่อนไขค่าสัมประสิทธิ์ α_i $(i = 1,...,q)$ และ β_j $(j = 1,...,p)$ มีค่าเป็นบวกเพื่อให้ค่าแปรปรวนเป็นบวก โดยที่สมการที่ (5.2) และ (5.12) รวมกันเรียกว่าแบบจำลองเจเนอรัลไลซ์อาร์ช (Generalized ARCH) หรือการ์ชที่อันดับ p,q ($GARCH(p,q)$) และหากค่า $p = 0$ แบบจำลองดังกล่าวจะลดรูปเหลือแค่ $ARCH(q)$

ในแบบจำลอง $GARCH(p,q)$ ค่าความแปรปรวนที่มีเงื่อนไข จะขึ้นอยู่กับค่ากำลังสองของค่าส่วนเกิน (squared residuals) ในช่วง q คาบก่อน และ ค่าความแปรปรวนที่มีเงื่อนไขในช่วง p คาบก่อน อย่างไรก็ดี โดยปกติแล้ว แบบจำลอง $GARCH(1,1)$ ก็เพียงพอที่จะใช้อธิบายอนุกรมเวลาทางการเงิน

5.3.1 การเขียนแบบจำลองการ์ชในรูปอาร์มา

ในขณะที่แบบจำลองอาร์ชที่สามารถเขียนให้อยู่ในรูปของแบบจำลองออโตรีเกรซซีฟของค่าเรซิดิวยกกำลังสอง แบบจำลองการ์ชสามารถเขียนให้อยู่ในรูปของแบบจำลองอาร์มาของเรซิดิวยกกำลังสอง ตัวอย่างเช่นในแบบจำลองการ์ชอันดับ (1,1) ($GARCH(1,1)$) ซึ่งอยู่ในรูปสมการต่อไปนี้

$$\sigma_t^2 = \omega + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2 + \beta_1 \sigma_{t-1}^2 \tag{5.13}$$

เนื่องจาก $E_{t-1}(\varepsilon_t^2) = \sigma_t^2$ ดังนั้นสมการ 5.13 สามารถเขียนใหม่ได้เป็น

$$\varepsilon_t^2 = \omega + (\alpha_1 + \beta_1)\varepsilon_{t-1}^2 + u_t - \beta_1 u_{t-1} \tag{5.14}$$

ซึ่งเป็นแบบจำลอง $ARMA(1,1)$ โดยที่ $u_t = \varepsilon_t^2 - E_{t-1}(\varepsilon_t^2)$ เป็นตัวแปรช็อกไวท์นอยซ์

แบบจำลองการ์ชในรูปแบบของอาร์มาการ์ชได้ง่ายตัวอย่างเช่นการ์ชที่อันดับ (1,1) จะเป็นอนุกรมคงที่ถ้า $\alpha_1 + \beta_1 < 1$ เนื่องจาก ε_t^2 อยู่ในรูป $AR(1)$ และ $\alpha_1 + \beta_1$ คือสัมประสิทธิ์ของ ε_{t-1}^2 ซึ่งจะต้องมีค่าน้อยกว่าหนึ่ง (อย่าลืมว่า α_1 และ β_1 จะต้องมีค่ามากกว่าศูนย์)

หากเราสมมุติให้แบบจำลองเป็นอนุกรมนิ่ง เราสามารถหาความแปรปรวนที่ไม่มีเงื่อนไขของ ε_t จะเท่ากับ

$Var(\varepsilon_t) = E(\varepsilon_t^2) = \omega/(1-\alpha_1-\beta_1)$ เนื่องจาก

$$E(\varepsilon_t^2) = \omega + (\alpha_1+\beta_1)\underbrace{E(\varepsilon_{t-1}^2)}_{=E(\varepsilon_t^2)}$$

$$E(\varepsilon_t^2) = \omega + (\alpha_1+\beta_1)E(\varepsilon_t^2)$$

ในกรณี $GARCH(p,q)$ เราสามารถแสดงให้เห็นว่าเราสามารถเขียนแบบจำลองดังกล่าวให้อยู่ในรูป $ARMA(\max(p,q),p)$ ของเรซิดิวยกกำลังสอง และแบบจำลองจะเป็นอนุกรมนิ่งถ้า $\sum_{i=1}^{q}\alpha_i + \sum_{j=1}^{p}\beta_j < 1$ และความแปรปรวนที่ไม่มีเงื่อนไขของ ε_t จะเท่ากับ

$$Var(\varepsilon_t) = \frac{\omega}{1-\left(\sum_{i=1}^{q}\alpha_i + \sum_{j=1}^{p}\beta_j\right)}$$

5.3.2 คุณลักษณะของแบบจำลองการ์ช

ในทางปฏิบัตินักวิจัยได้พบคุณลักษณะหลายประการของความผันผวนของข้อมูลทางการเงิน โดยที่เราสามารถใช้รูปแบบ $ARMA$ ของ $GARCH$ ในการแสดงคุณลักษณะต่างๆ โดยคุณลักษณะที่สำคัญสามประการ คือ ความผันผวนเป็นกลุ่ม (volatility clustering), หางอ้วน (fat tails) และความผันผวนย้อนกลับมาที่ดุลยภาพ (volatility mean reversion)

ความผันผวนเป็นกลุ่ม (volatility clustering)

ในแบบจำลอง $GARCH(1,1)$ ที่แสดงในสมการที่ 5.13 ค่าที่ประมาณได้จากข้อมูลรายสัปดาห์และรายวันของ β_1 จะมีค่าประมาณ 0.9 แสดงว่าหากค่า σ_{t-1}^2 มีขนาดใหญ่จะทำให้ σ_t^2 มีขนาดใหญ่ด้วยเช่นเดียวกัน แต่ถ้า σ_{t-1}^2 มีขนาดเล็กจะทำให้ σ_t^2 มีขนาดเล็ก ดังนั้นความผันผวนจะมีลักษณะที่เป็นกลุ่ม คือความผันผวนขนาดใหญ่จะอยู่ใกล้ๆกัน

หางอ้วน(fat tails)

ข้อมูลทางการเงินที่มีความถี่สูงจะมีหางที่อ้วนมากกว่าการแจกแจงแบบปกติ คือมีความน่าจะเป็นที่จะเกิดการเปลี่ยนแปลงขนาดใหญ่(ที่ปลายหางของการแจกแจง)มากกว่ากรณีการแจกแจงแบบปกติ Bollerslev แสดงให้เห็นว่าภายใต้เงื่อนไขบางประการ เขาสามารถแสดงให้เห็นว่า $GARCH(1,1)$ จะให้ค่าเคอร์โทซิสที่มากกว่า 3 ซึ่งคือค่าเคอร์โทซิสของการแจกแจงแบบปกติ ดังนั้นแบบจำลองการ์ชสามารถเลียนแบบพฤติกรรมหางอ้วนในข้อมูลจริง

ความผันผวนย้อนกลับมาที่ดุลยภาพ(volatility mean reversion)

แม้ว่าความผันผวนจะสูงขึ้นในบางช่วงแต่สุดท้ายแล้วจะย้อนกลับไปยังดุลยภาพระยะยาว โดยที่ค่าความแปรปรวนของ $GARCH(1,1)$ จะเท่ากับ $\omega/(1-\alpha_1-\beta_1)$ และถ้า $\alpha_1+\beta_1<1$ กระบวนการ $GARCH(1,1)$

จะเป็นกระบวนการนิ่ง และค่าความแปรปรวนจะกลับเข้าสู่ดุลยภาพในระยะยาว $\omega/(1-\alpha_1-\beta_1)$ หรือเรียกว่า "mean reverts" กลับไปสู่ดุลยภาพระยะยาว แต่ถ้า $\alpha_1+\beta_1 \geq 1$ กระบวนการ $GARCH(1,1)$ จะเป็นกระบวนการไม่นิ่ง (nonstationary)

5.4 การประมาณค่าแบบจำลองการ์ช

ในหัวข้อนี้เราจะพิจารณาการประมาณค่าแบบจำลอง $GARCH(p,q)$ โดยที่แบบจำลองสามารถเขียนในรูปแบบ

$$y_t = \mu_t + \varepsilon_t \tag{5.15}$$

$$\sigma_t^2 = \omega + \sum_{i=1}^{q} \alpha_i \varepsilon_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^{p} \beta_j \sigma_{t-j}^2 \tag{5.16}$$

สำหรับ $t = 1, 2, ..., T$ โดยที่ $\sigma_t^2 = Var_{t-1}(\varepsilon_t)$ และ μ_t แทนแบบจำลองค่าเฉลี่ยเช่น อาจจะกำหนดให้เท่ากับค่าคงที่ c หรือแบบจำลอง $ARMA(p,q)$ หากเราสมมุติให้ ε_t มีการแจกแจงแบบปกติภายใต้ข้อมูลในอดีตเราสามารถเขียนฟังก์ชันภาวะน่าจะเป็นในรูปล็อกของแบบจำลอง $GARCH(p,q)$ ได้

$$\log L = -\frac{1}{2}\sum_{t=1}^{T} \ln(2\pi) - \frac{1}{2}\sum_{t=1}^{T} \ln(\sigma_t^2) - \sum_{t=1}^{T}\left(\frac{y_t^2}{2\sigma_t^2}\right) \tag{5.17}$$

หากสมมุติให้ $\mu_t = c$ ค่าพารามิเตอร์ที่ต้องประมาณค่าคือ $c, \alpha_i (i = 1, ..., q), \beta_j (j = 1, ..., p)$ โดยที่หลังจากที่เราประมาณค่าพารามิเตอร์ดังกล่าวแล้ว เราจะได้ค่า σ_t สำหรับ $t = 1, ..., T$

5.4.1 การตรวจสอบหลังจากการประมาณค่าการ์ช

หลังจากที่เราประมาณค่าแบบจำลองการ์ชแล้วเราจำเป็นต้องตรวจสอบว่าแบบจำลองดังกล่าวเพียงพอต่อการอธิบายค่าเฉลี่ยที่มีเงื่อนไข และค่าความแปรปรวนที่มีเงื่อนไขหรือไม่ โดยมีพื้นฐานจากข้อสมมุติที่ว่า $z_t = \frac{\varepsilon_t}{\sigma_t} \sim iidN(0,1)$ ดังนั้นเราจำเป็นต้องทดสอบ z_t ว่ามีคุณสมบัติเป็นอิสระต่อกัน และมีการแจกแจงแบบปกติหรือไม่ โดยที่ตัวแทนของ z_t คือเรซิดิวที่ปรับให้เป็นการแจกแจงปกติมาตรฐาน (standardized residuals) ($\hat{z}_t = \frac{\hat{\varepsilon}_t}{\hat{\sigma}_t}$) โดยเราจะทดสอบดังต่อไปนี้

ประการแรก เราจะทดสอบว่าแบบจำลองเพียงพอต่อการอธิบายค่าเฉลี่ยที่มีเงื่อนไขหรือไม่ โดยการทดสอบว่าเรซิดิวที่ปรับให้เป็นการแจกแจงปกติมาตรฐาน เป็นอิสระต่อกันหรือไม่ โดยการทดสอบยุง-บ๊อกซ์ ซึ่งสมมุติฐานหลักคือเรซิดิวที่ปรับให้เป็นการแจกแจงปกติมาตรฐานเป็นอิสระต่อกัน หากเราไม่สามารถปฏิเสธสมมุติฐานหลักได้แสดงว่าแบบจำลองนั้นเพียงพอต่อการอธิบายค่าเฉลี่ยที่มีเงื่อนไข

ประการที่สอง เราจะทดสอบว่าแบบจำลองเพียงพอต่อการอธิบายความแปรปรวนแบบที่มีเงื่อนไขหรือไม่ หากแบบจำลองไม่เพียงพอต่อการอธิบายความแปรปรวนแบบมีเงื่อนไข ค่ายกกำลังสองของเรซิดิวที่ปรับให้เป็นการแจกแจงปกติมาตรฐานจะต้องมีความสัมพันธ์ระหว่างกัน ซึ่งเราสามารถทดสอบ ยุง-บ๊อกซ์กับค่า

ยกกำลังสองของเรซิดิวที่ปรับให้เป็นการแจกแจงปกติมาตรฐานหรืออาจจะทดสอบลักษณะอาร์ชของเรซิดิวที่ปรับให้เป็นการแจกแจงปกติมาตรฐาน หากเราไม่สามารถปฏิเสธสมมุติฐานหลักแสดงว่าแบบจำลองเพียงพอต่อการอธิบายความแปรปรวนที่มีเงื่อนไข

ประการที่สาม เราสามารถทดสอบว่าข้อสมมุติเกี่ยวกับการแจกแจงของเรซิดิวที่ปรับให้เป็นการแจกแจงปกติมาตรฐาน ที่เราสมมุติว่ามีการแจกแจงแบบปกติมีความสมเหตุสมผลหรือไม่ โดยตั้งสมมุติหลักว่าเรซิดิวที่ปรับให้เป็นการแจกแจงปกติมาตรฐานมีการแจกแจงแบบปกติ หากเราปฏิเสธสมมุติฐานหลัก เราสามารถที่จะปรับปรุงแบบจำลองโดยการสมมุติการแจกแจงอื่นที่มีความคล่องตัวมากกว่าการแจกแจงแบบปกติ ซึ่งจะนำเสนอตัวอย่างในหัวข้อต่อไป

ตัวอย่างที่ 5.2 การสร้างแบบจำลอง GARCH ต่อจากตัวอย่างที่ผ่านมา เราประมาณค่าสมการค่าเฉลี่ยด้วย $ARMA(2,2)$ และสมการค่าความแปรปรวนที่มีเงื่อนไขด้วย $GARCH(1,1)$ หรือใช้สัญลักษณ์ว่า $ARMA(2,2)-GARCH(1,1)$ โดยเราจะใช้คำสั่ง `ugarchfit` จากชุดคำสั่ง RUGARCH ในการประมาณค่าแบบจำลอง การ์ชซึ่งเป็นส่วนที่ประมาณค่าความแปรปรวนมีเงื่อนไขเพิ่มขึ้นจากแบบจำลองที่อธิบาย ค่าเฉลี่ยมีเงื่อนไข เช่น ARMA(2,2)
ในการสร้างแบบจำลองเราจะต้องระบุรูปแบบของแบบจำลอง `ugarchspec` โดยที่ `ugarchspec` คือการระบุรูปแบบของสมการการ์ช ซึ่งประกอบด้วยส่วนหลัก ๆ สามส่วนได้แก่

- `variance.model=list(model="sGARCH", garchOrder=c(1,1))` ส่วนนี้ระบุรูปแบบของค่าความแปรปรวนแบบมีเงื่อนไขเป็น standard GARCH (sGARCH) และอันดับ c(1,1) คือ GARCH(1,1)
- `mean.model=list(armaOrder=c(2,2), include.mean=TRUE` ส่วนนี้ระบุรูปแบบของค่าเฉลี่ยมีเงื่อนไขเป็น ARMA(2,2) และมีส่วนของค่าคงที่ (include.mean = TRUE)
- `distribution.model = "norm"` ส่วนนี้ระบุการแจกแจงเป็นแบบปกติ

จะได้ผลดังนี้

```
> library(rugarch)
> spec.garch11 <- ugarchspec(variance.model=list(model="sGARCH",
   garchOrder=c(1,1)),
+ mean.model=list(armaOrder=c(2,2), include.mean=TRUE), distribution.
   model="norm")
> fit.garch11<-ugarchfit(spec=spec.garch11, data = ret)
> show(fit.garch11)

*---------------------------------*
*          GARCH Model Fit        *
*---------------------------------*

Conditional Variance Dynamics
-----------------------------------
GARCH Model      : sGARCH(1,1)
Mean Model       : ARFIMA(2,0,2)
Distribution     : norm
```

```

Optimal Parameters
------------------------------------
        Estimate  Std. Error  t value Pr(>|t|)
mu       0.005168    0.003323   1.5552 0.119893
ar1      0.929774    0.105519   8.8114 0.000000
ar2     -0.741403    0.131759  -5.6270 0.000000
ma1     -0.885132    0.079630 -11.1155 0.000000
ma2      0.813870    0.126564   6.4305 0.000000
omega    0.000194    0.000084   2.3165 0.020528
alpha1   0.221012    0.045507   4.8567 0.000001
beta1    0.777524    0.038916  19.9795 0.000000

Robust Standard Errors:
        Estimate  Std. Error  t value Pr(>|t|)
mu       0.005168    0.004069   1.2701 0.204050
ar1      0.929774    0.134138   6.9315 0.000000
ar2     -0.741403    0.245777  -3.0166 0.002557
ma1     -0.885132    0.082263 -10.7597 0.000000
ma2      0.813870    0.253515   3.2103 0.001326
omega    0.000194    0.000120   1.6161 0.106077
alpha1   0.221012    0.063004   3.5079 0.000452
beta1    0.777524    0.051986  14.9564 0.000000

LogLikelihood : 542.9161
```

เราสามารถแสดงผลการประมาณค่าได้โดย

$$
\begin{aligned}
y_t &= 0.93y_{t-1} - 0.74y_{t-2} + \varepsilon_t - 0.89\varepsilon_{t-1} + 0.81\varepsilon_{t-2} \\
\sigma_t^2 &= 0.000194 + 0.22\varepsilon_{t-1}^2 + 0.78\sigma_{t-1}^2
\end{aligned}
$$

นอกจากนี้ ผลการประมาณค่ายังแสดงผลเกณฑ์คัดเลือกแบบจำลอง สำหรับการเปรียบเทียบรูปแบบแบบจำลอง

```
Information Criteria
------------------------------------

Akaike       -2.3721
Bayes        -2.2992
Shibata      -2.3727
Hannan-Quinn -2.3434
```

นอกจากนี้ คำสั่งดังกล่าวยังแสดงผลการทดสอบเรซิดิวที่ปรับให้เป็นการแจกแจงปกติมาตรฐานดังนี้ สำหรับกรณีของเรซิดิวที่ปรับให้เป็นการแจกแจงปกติมาตรฐาน หากพิจารณาที่ค่าล่าที่ 1, 11,19 พบว่าค่าพีน้อยกว่าระดับนัยสำคัญที่เราเลือก แสดงว่าแบบจำลองในส่วนของสมการค่าเฉลี่ยมีเงื่อนไขไม่สามารถอธิบายตัวแปรที่เราสนใจได้ (เราจำเป็นต้องปรับแบบจำลองในส่วนของ ARMA(p,q))
ในขณะที่กรณีของเรซิดิวที่ปรับให้เป็นการแจกแจงปกติมาตรฐานยกกำลังสอง หากพิจารณาที่ค่าล่าที่ 1, 5, 9 พบว่าค่าพีมากกว่าระดับนัยสำคัญที่เลือก เช่น 0.05 แสดงว่าแบบจำลองในส่วนของสมการค่า

แปรปรวนมีเงื่อนไข สามารถอธิบายตัวแปรได้

```
Weighted Ljung-Box Test on Standardized Residuals
------------------------------------
                         statistic   p-value
Lag[1]                       3.351 6.717e-02
Lag[2*(p+q)+(p+q)-1][11]     9.220 1.777e-06
Lag[4*(p+q)+(p+q)-1][19]    13.350 8.841e-02
d.o.f=4
H0 : No serial correlation

Weighted Ljung-Box Test on Standardized Squared Residuals
------------------------------------
                        statistic p-value
Lag[1]                     0.0957  0.7571
Lag[2*(p+q)+(p+q)-1][5]    1.8392  0.6569
Lag[4*(p+q)+(p+q)-1][9]    3.0164  0.7563
d.o.f=2

Weighted ARCH LM Tests
------------------------------------
            Statistic Shape Scale P-Value
ARCH Lag[3]     1.876 0.500 2.000  0.1708
ARCH Lag[5]     3.360 1.440 1.667  0.2417
ARCH Lag[7]     3.586 2.315 1.543  0.4103
```

5.4.2 การแจกแจงที่ไม่ใช่การแจกแจงแบบปกติ

ในหัวข้อที่ผ่านมาเราสมมุติให้ ε_t^2 มีการแจกแจงแบบปกติมาตรฐานซึ่งข้อมูลทางการเงินบางข้อมูลอาจจะมีลักษณะหางอ้วน ดังนั้น ข้อสมมุติว่า ε_t^2 มีการแจกแจงอื่นที่มีหางอ้วนน่าจะเหมาะสมกว่า เช่นการแจกแจงแบบที และการแจกแจงค่าผิดพลาดทั่วไป (generalized error distribution (GED))

การแจกแจงแบบที

ถ้าตัวแปรสุ่ม u_t มีการแจกแจงแบบทีด้วยองศาเสรีเท่ากับ ν "นิว" และตัวแปรสเกล s_t จะมีฟังก์ชันความถี่ความน่าจะเป็นเท่ากับ

$$f(u_t) = \frac{\Gamma[(\nu+1)/2]}{(\pi\nu)^{1/2}\Gamma(\nu/2)} \frac{s_t^{-1/2}}{[1+u_t^2/(s_t\nu)]^{(\nu+1)/2}}$$

โดยที่ $\Gamma()$ เป็นฟังก์ชันแกมมา และค่าความแปรปรวนของ u_t เท่ากับ

$$Var(u_t) = \frac{s_t\nu}{\nu-2}, \quad \nu > 2$$

ถ้าค่าช็อก ε_t ในแบบจำลองการ์ชมีการแจกแจงแบบทีที่มีองศาอิสระเท่ากับ ν และมีค่า $Var_{t-1}(\varepsilon_t) = \sigma_t^2$ แล้วพารามิเตอร์ s_t จะถูกเลือกเพื่อให้ $s_t = \frac{\sigma_t^2(\nu-2)}{\nu}$

เงื่อนไขเพิ่มเติมในคำสั่ง `garchFit` คือ `cond.dist=c("std")` สำหรับการแจกแจงแบบที

การแจกแจงค่าผิดพลาดทั่วไป

Nelson (1991) ได้เสนอให้ใช้การแจกแจงการแจกแจงค่าผิดพลาดทั่วไป ในการผนวกคุณลักษณะหางอ้วนในแบบจำลอง ถ้า u_t มีการแจกแจงแบบ GED ที่มีค่าเฉลี่ยเท่ากับศูนย์และค่าความแปรปรวนเท่ากับหนึ่ง ฟังก์ชันความถี่ความน่าจะเป็น (pdf) เท่ากับ

$$f(u_t) = \frac{\nu \exp[-(1/2)|u_t/\lambda|^{\nu}}{\lambda 2^{(\nu+1)/\nu}\Gamma(1/\nu)}$$

โดยที่

$$\lambda = \left[\frac{2^{-2/\nu}\Gamma(1/\nu)}{\Gamma(3/\nu)}\right]^{1/2}$$

โดยที่ nu เป็นค่าพารามิเตอร์ที่เป็นบวกที่บอกความหนาของหาง ถ้า $\nu = 2$ pdf จะลดลงเหลือ pdf ของการแจกแจงปกติมาตรฐาน และถ้า $\nu < 2$ ความถี่ที่หางจะหนากว่าการแจกแจงแบบปกติ

เงื่อนไขเพิ่มเติมในคำสั่ง `garchFit` คือ `cond.dist=c("ged")` สำหรับ generalized error distribution

ตัวอย่างที่ 5.3 การสร้างแบบจำลองการ์ชด้วยข้อสมมุติการแจกแจงแบบที

ตัวอย่างนี้ใช้ข้อมูลต่อจากตัวอย่าง ที่ผ่านมา เนื่องจากในตัวอย่างที่ผ่านมาเราพบว่าเรซิดิวไม่ได้มีการแจกแจงแบบปกติ ดังนั้นเราอาจจะใช้การแจกแจงอื่นที่มีหางอ้วนกว่าเช่นการแจกแจงแบบทีและประมาณค่าแบบจำลอง `fit.garch11.t` โดยที่เปลี่ยน `distribution.model="std"`

```
> spec.garch11.t <- ugarchspec(variance.model=list(model="sGARCH",
    garchOrder=c(1,1)),
+ mean.model=list(armaOrder=c(2,2), include.mean=TRUE), distribution.
    model="std")
> fit.garch11.t<-ugarchfit(spec=spec.garch11.t, data = ret)
> show(fit.garch11.t)

*---------------------------------*
*          GARCH Model Fit        *
*---------------------------------*

Conditional Variance Dynamics
-----------------------------------
GARCH Model     : sGARCH(1,1)
Mean Model      : ARFIMA(2,0,2)
Distribution    : std

Optimal Parameters
------------------------------------
        Estimate  Std. Error  t value Pr(>|t|)
mu      0.005531    0.003261   1.6962 0.089852
ar1     0.977050    0.175427   5.5695 0.000000
```

```
ar2    -0.602677    0.150885  -3.9943 0.000065
ma1    -0.880078    0.155925  -5.6443 0.000000
ma2     0.648087    0.154766   4.1875 0.000028
omega   0.000156    0.000104   1.4966 0.134492
alpha1  0.184988    0.056949   3.2483 0.001161
beta1   0.814012    0.051417  15.8317 0.000000
shape   4.918851    1.144499   4.2978 0.000017
<Omitted>
Information Criteria
------------------------------------

Akaike       -2.4373
Bayes        -2.3552
Shibata      -2.4381
Hannan-Quinn -2.4050
```

ในการประมาณค่าด้วยการแจกแจงแบบ student's t เราจะได้ค่า estimated shape คือตัวประมาณค่าองศาเสรี (degree of freedom) ในที่นี้คือ `shape` เท่ากับ 4.92

5.4.3 การเลือกแบบจำลองที่เหมาะสม (Model selection)

จากหัวข้อที่ผ่านมาเราจะเห็นได้ว่าเราสามารถประมาณค่าแบบจำลองการ์ชได้หลายรูปแบบ ดังนั้นการเลือกแบบจำลองที่เหมาะสมกับข้อมูลของเราเป็นขั้นตอนที่สำคัญ เนื่องจากเราสามารถเขียนแบบจำลองในรูปของอารมา สำหรับ ε_t^2 ได้ เราจึงสามารถใช้เกณฑ์ในการเลือกแบบจำลองที่เราได้เสนอไว้แล้วในบทที่แล้วเช่นเอไอซีหรือบีไอซีในการเลือกแบบจำลอง

ตัวอย่างที่ 5.4 การเปรียบเทียบแบบจำลองด้วยเกณฑ์การคัดเลือก
จาก ตัวอย่างที่ 5.2 และ 5.3 เราสามารถนำค่าเอไอซีและบีไอซีมาเปรียบเทียบกันตามตาราง

ตารางที่ 5.1: การเปรียบเทียบแบบจำลอง $GARCH$

เกณฑ์	$ARMA(2,2)-GARCH(1,1)$ `fit.garch11`	$ARMA(2,2)-GARCH(1,1)$ t-dist `fit.garch11.t`
AIC	-2.372	-2.437
BIC	-2.299	-2.355

จะเห็นได้ว่าค่าเอไอซีและบีไอซีของการ์ชที่มีการแจกแจงแบบทีมีค่าน้อยกว่าเอไอซีและบีไอซีของการ์ชที่มีการแจกแจงแบบปกติ แสดงให้เห็นว่าแบบจำลองที่มีการแจกแจงแบบทีน่าจะอธิบายข้อมูลได้ดีกว่า

5.4.4 การขยายแบบจำลองการ์ช

แบบจำลอง $GARCH$ สามารถปรับปรุงเพื่อให้สามารถอธิบายความผันผวนของข้อมูลจริงได้ดีขึ้น

Integrated $GARCH$

จากตัวอย่างการประมาณค่า $GARCH(1,1)$ สำหรับผลตอบแทนของหลักทรัพย์มักจะให้ค่าประมาณ $\hat{\alpha}_1 + \hat{\beta}_1 \approx 1$ ตัวอย่างเช่นการประมาณค่าในตัวอย่างที่ 4.2 $\hat{\alpha}_1 + \hat{\beta}_1 = 0.22 + 0.777 = 0.997$

จากสมการที่ xxx เราพบว่าอนุกรมเวลาความผันผวนมีลักษณะใกล้เคียงกับ unit root หากเขาขยายแบบจำลอง GARCH ให้มีลักษณะยูนิทรูท เราเรียกแบบจำลองดังกล่าวว่า Integrated GARCH (IGARCH) โดยที่เราสามารถผนวกเงื่อนไขที่ว่าความผันผวนเป็นยูนิทรูทได้โดยการกำหนดให้ $\alpha_1 + \beta_1 = 1$ หรือแทนค่า $\beta_1 = 1 - \alpha_1$ ในสมการ (5.13) ส่งผลให้สมการความแปรปรวนมีเงื่อนไขอยู่ในรูปต่อไปนี้

$$\sigma_t^2 = \omega + \alpha_1 \epsilon_{t-1}^2 + (1 - \alpha_1)\sigma_{t-1}^2 \tag{5.18}$$

จะเห็นได้ว่าจำนวนพารามิเตอร์ในแบบจำลองดังกล่าวเหลือเพียงแค่ 2 ตัวได้แก่ ω กับ α_1

การเพิ่มตัวแปรในแบบจำลอง GARCH

แนวทางหนึ่งในการขยายแบบจำลองการ์ช คือการเพิ่มตัวแปรในสมการค่าเฉลี่ยและสมการค่าความแปรปรวน เช่นในกรณีของแบบจำลอง $GARCH(1,1)$ สามารถขยายแบบจำลองได้ดังสมการต่อไปนี้

$$y_t = \mu_t + \gamma_1 x_t + \epsilon_t$$
$$\sigma_t^2 = \omega + \alpha_1 \epsilon_{t-1}^2 + \beta_1 \sigma_{t-1}^2 + \lambda w_t$$

โดยที่ x_t และ w_t คือตัวแปรอธิบายเพิ่มเติมสำหรับสมการค่าเฉลี่ยและสมการค่าความแปรปรวนตามลำดับ ตัวอย่างเช่นค่าความแปรปรวนอาจจะอธิบายได้ด้วยปริมาณการซื้อขาย การประกาศนโยบายของทางการ วันในสัปดาห์ และผลของวันหยุด

การเปลี่ยนแปลงที่ไม่สมมาตร

ในแบบจำลอง $GARCH$ เราพิจารณาตัวกำหนดความผันผวนด้วย ε_{t-1}^2 โดยที่ไม่ได้สนใจว่าช็อกที่เกิดขึ้นเป็นช็อกทางบวกหรือทางลบ ทั้งๆที่ช็อกทางลบ(ในขนาดที่เท่ากัน)น่าจะทำให้เกิดความผันผวนมากกว่าช็อกทางบวก ดังนั้นแนวทางการขยายแบบจำลอง $GARCH$ อีกทางหนึ่งคือการปรับแบบจำลองให้ผลของช็อกในทางบวกและทางลบมีค่าที่แตกต่างกัน โดยที่แบบจำลองในตลาดหลักทรัพย์เรามักจะพบว่าการปรับตัวลดลงของราคาหลักทรัพย์ส่งผลให้เกิดความผันผวนมากกว่าการปรับตัวขึ้นของราคา แบบจำลองที่ขยายขึ้นมานี้เราเรียกว่าเป็นแบบจำลองที่มีผลไม่สมมาตร

วิธีการแรกในการสร้างแบบจำลองที่มีผลไม่สมมาตรคือ threshold GARCH ($TGARCH$) ซึ่งสมการค่าความแปรปรวนสามารถอธิบายได้ดังนี้

$$\sigma_t^2 = \omega + \sum_{i=1}^{q} \alpha_i \epsilon_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^{p} \beta_j \sigma_{t-j}^2 + \phi d_{t-1} \epsilon_{t-1}^2 \tag{5.19}$$

โดยที่ d_{t-1} เป็นตัวแปรดัมมีที่นิยามได้ดังนี้

$$d_{t-1} = \begin{cases} 1: & \epsilon_{t-1} < 0 \\ 0: & \epsilon_{t-1} \geq 0 \end{cases}$$

เพื่อให้ค่าความแปรปรวนเป็นบวก เรากำหนดให้ $\phi > 0$ ดังนั้นหากเกิดข่าวดี ($\epsilon_{t-1} \geq 0$) จะส่งผลต่อความผันผวนเท่ากับ α_1 ในทางตรงข้ามหากเกิดข่าวร้าย ($\epsilon_{t-1} < 0$) จะส่งผลต่อความผันผวนเท่ากับ $\alpha_1 + \phi$ จะเห็นได้ว่าช็อกทางลบส่งผลต่อความผันผวนมากกว่าช็อกทางบวก

อีกวิธีในการสร้างแบบจำลองที่มีผลไม่สมมาตรคือแบบจำลอง Exponential GARCH ($EGARCH$) ซึ่งสามารถแสดงได้ด้วยสมการต่อไปนี้

$$\ln \sigma_t^2 = \omega + \alpha_1 \frac{\epsilon_{t-1}}{\sigma_{t-1}} + \phi \| \frac{\epsilon_{t-1}}{\sigma_{t-1}} \| + \beta_1 \ln \sigma_{t-1}^2 \quad (5.20)$$

การพิจารณาค่าความเสี่ยงในสมการค่าเฉลี่ย

ในทางการเงินความเสี่ยงที่สูงจะนำมาสู่ผลตอบแทนที่สูงด้วย หรือเราเรียกว่า "เบี้ยความเสี่ยง (risk premium)" Engle, Lilien, and Robins (1987) เสนอให้ขยาย $GARCH$ เพื่อให้พิจารณาเบี้ยความเสี่ยงเป็นปัจจัยหนึ่งในการกำหนดผลตอบแทนในสมการค่าเฉลี่ย หรือสามารถอธิบายได้ด้วยสมการ

$$y_t = c + \alpha g(\sigma_t) + \varepsilon_t$$

และเราเรียกแบบจำลองนี้ว่า GARCH-in-the-mean ($GARCH - M$)

5.5 การพยากรณ์ด้วยแบบจำลองการ์ช

เป้าหมายสำคัญของการสร้างแบบจำลองสำหรับความผันผวนที่เปลี่ยนแปลงตามเวลา คือการสร้างการคาดการณ์ที่แม่นยำขึ้นสำหรับการทำนายค่าอนุกรมเวลาที่เราสนใจในอนาคตและการพยากรณ์ค่าความแปรปรวนมีเงื่อนไข

เนื่องจากในสมการค่าเฉลี่ยเราสมมุติให้อนุกรมเวลาถูกอธิบายด้วยแบบจำลองอารมาดังนั้นค่าพยากรณ์ของอนุกรมเวลา y_t สามารถใช้การพยากรณ์ของ อารมาได้อย่างปกติ อย่างไรก็ตามการที่เรายกเว้นข้อสมมุติความแปรปรวนคงที่ และให้ความผันผวนสามารถเปลี่ยนแปลงได้ตามเวลา เช่นแบบจำลอง การ์ชจะทำให้เราได้ค่าผันผวนในอนาคตที่แม่นยำขึ้นโดยเฉพาะการพยากรณ์ในระยะสั้น ในที่นี้เราจะยกตัวอย่างแบบจำลอง $GARCH(1,1)$ ซึ่งสมการความผันผวนสามารถแสดงได้โดย

$$\sigma_t^2 = \omega + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2 + \beta_1 \sigma_{t-1}^2$$

หากเราพิจารณาข้อมูลจนถึงคาบที่ h และการพยากรณ์ไปข้างหน้าหนึ่งคาบสามารถคำนวณได้โดยใช้ค่าคาด

การณ์มีเงื่อนไข

$$E_h(\sigma^2_{h+1}) = \omega + \alpha_1 E_h(\varepsilon^2_h) + \beta E_h(\sigma^2_h)$$
$$= \omega + \alpha_1 \varepsilon^2_h + \beta_1 \sigma^2_h$$

เนื่องจากเราทราบว่า ε^2_h และ σ^2_h จากการประมาณค่าแล้ว ต่อไปพิจารณาคาบที่ $h+2$

$$E_h(\sigma^2_{h+2}) = \omega + \alpha_1 E_h(\varepsilon^2_{h+1}) + \beta E_h(\sigma^2_{h+1})$$
$$= \omega + (\alpha_1 + \beta_1) E_h(\sigma^2_{h+1})$$

เนื่องจาก $E_h(\varepsilon^2_{h+1}) = E_h(\sigma^2_{h+1})$ จากวิธีการข้างต้นเราสามารถสร้างสมการสำหรับการพยากรณ์ ณ คาบ k ใดๆ ได้เป็น

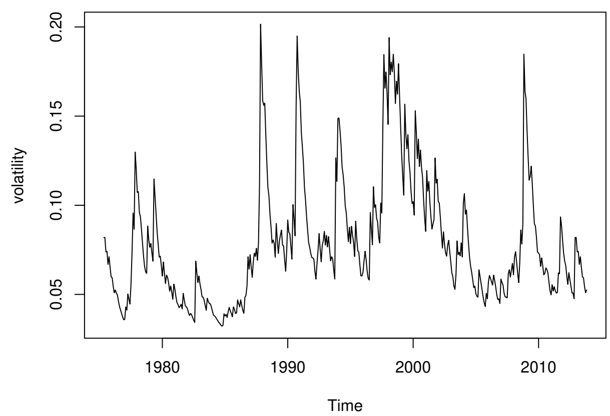
$$E_h(\sigma^2_{h+k}) = \omega \sum_{i=1}^{k-2} (\alpha_1 + \beta_1)^i + (\alpha_1 + \beta_1)^{k-1} E_h(\sigma^2_{h+1}) \tag{5.21}$$

สำหรับ $k \geq 2$ และจะเห็นได้ว่าถ้า $k \to \infty$ และ $GARCH$ เป็นอนุกรมนิ่ง $(\alpha_1 + \beta_1 < 1)$ การพยากรณ์ค่าความผันผวนจะเข้าใกล้ค่าความแปรปรวนไม่มีเงื่อนไข $\omega/(1 - \alpha_1 - \beta_1)$

ตัวอย่างที่ 5.5 การคำนวณค่าพยากรณ์ความแปรปรวนแบบมีเงื่อนไข

จากแบบจำลอง GARCH เราสามารถคำนวณค่า predicted conditional variance หรือ standard deviation กับข้อมูลภายในกลุ่มตัวอย่าง (in-sample) เพื่อใช้เป็นตัวแทนของความผันผวน (volatility) สำหรับแบบจำลองทางการเงินต่าง ๆ ในตัวอย่างที่ 5.2 เราได้ประมาณค่าแบบจำลอง ARMA(2,2)-GARCH(1,1) ซึ่งเราสามารถคำนวณค่า predicted conditional standard deviation ได้จากคำสั่ง `sigma`

```
sig.garch11<-sigma(fit.garch11)
volatility<-ts(data=sig.garch11[,1], frequency=12, start=c(1975,5), end
    =c(2013,11))
plot.ts(volatility, type="l")
```



รูปที่ 5.3: Predicted Conditional Variance

จากรูป 5.3 จะเห็นได้ว่าช่วงที่ตลาดหุ้นไทยผันผวนค่อนข้างสูงและยาวนานคือหลังวิกฤติ 1997 นอกจากนี้ เราสามารถพยากรณ์ออกไปนอกช่วงข้อมูล (out-of sample) ซึ่งเราสามารถพยากรณ์ค่าเฉลี่ยและค่าความแปรปรวน เราสามารถใช้คำสั่ง `ugarchforecast` และระบุแบบจำลอง `fit.garch11` และจำนวนคาบที่จะพยากรณ์ไปข้างหน้า `n.ahead=5` และได้ผลดังต่อไปนี้

```
> garch11.fcst=ugarchforecast(fit.garch11, n.ahead=5)
> garch11.fcst

*------------------------------------*
*       GARCH Model Forecast         *
*------------------------------------*
Model: sGARCH
Horizon: 5
Roll Steps: 0
Out of Sample: 0

0-roll forecast [T0=1971-03-28 07:00:00]:
        Series   Sigma
T+1  0.0008783 0.04438
T+2 -0.0026793 0.04648
T+3  0.0010525 0.04849
T+4  0.0071598 0.05041
T+5  0.0100715 0.05226
```

หรือสามารถเขียนสรุปได้เป็น

ตารางที่ 5.2: การพยากรณ์จากแบบจำลองการ์ช

horizon	1	2	3	4	5
log return	0.0009	-0.0027	0.0011	0.0072	0.0101
volatility (σ_t)	0.0444	0.0465	0.0485	0.0504	0.0523

5.6 แบบฝึกฝน

แบบฝึกฝน 5.1 พิจารณาผลได้ตอบแทนรายวันของ exchange trade fund ระหว่างวันที่ 4 กันยายน 2001 ถึง 30 กันยายน 2011 โดยข้อมูลดังกล่าวอยู่ในไฟล์ `dspy_0111.csv` โดยที่ rtn เป็น simple return จงแปลงข้อมูลเป็น log return แล้วตอบคำถามต่อไปนี้

1. จงประมาณค่าแบบจำลองสำหรับ log return โดยเลือกแบบจำลอง ARMA(p,q) ที่เหมาะสมโดยให้ค่า p และ q สูงสุดเท่ากับ 5 พร้อมอธิบายว่าแบบจำลองเพียงพอหรือไม่ในการอธิบาย log return หรือไม่

2. จงอธิบายผลการทดสอบ ARCH effect ของแบบจำลองในข้อ (1)
3. จงเขียนผลการประมาณค่าแบบจำลองที่ เพิ่มการอธิบาย conditional variance ด้วย GARCH(1,1) โดยที่สมมุติให้ error term มีการแจกแจงแบบปกติ
4. จงตรวจสอบแบบจำลองในข้อ (3) และแนวทางที่สามารถปรับปรุงได้
5. จงเขียนผลการทำนาย log return และ conditional variance ไปอีก 2 period ข้างหน้าจากแบบจำลองในข้อ (2)

แบบฝึกฝน 5.2 สมมุติให้แบบจำลอง ARCH(1): $r_t - \mu = \varepsilon_t, \quad \varepsilon_t = z_t\sigma_t \ , \quad \sigma_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1\varepsilon_{t-1}^2$ จงแสดงวิธีหาค่า unconditional variance ($Var(\varepsilon_t)$) โดยที่ r_t คืออัตราผลตอบแทน μ คือค่าเฉลี่ย และ ε_t คือ residuals ของสมการค่าเฉลี่ย

แบบฝึกฝน 5.3 สมมุติให้แบบจำลองที่อธิบายผลตอบแทน(r_t)สามารถแสดงได้ด้วย ARMA(0,0)-GARCH(1,1)

$$
\begin{aligned}
r_t &= 0.03 + \varepsilon_t, \quad \varepsilon_t = z_t\sigma_t, \quad z_t \sim N(0,1) \\
\sigma_t^2 &= 0.144 + 0.07\varepsilon_{t-1}^2 + 0.83\sigma_{t-1}^2
\end{aligned}
$$

และค่า $\sigma_{100}^2 = 0.6$ และ $\varepsilon_{100} = -0.1$ จงทำนายค่า r_{101} พร้อม 95% confidence interval โดยมีจุดเริ่มต้นที่ 100

6. แบบจำลองอนุกรมเวลาเชิงพหุ

เนื่องจากตลาดการเงินของโลกมีความเชื่อมโยงกันมากขึ้น การเปลี่ยนแปลงที่เกิดขึ้นในตลาดการเงินหนึ่งสามารถส่งผ่านต่อไปยังตลาดอื่นได้ง่าย ดังนั้น บางครั้งเราจำเป็นต้องพิจารณาการเปลี่ยนแปลงของอนุกรมเวลาทางเงินไปพร้อมๆกัน โดยเราเรียกแบบจำลองที่พิจารณาอนุกรมเวลาหลายๆอนุกรมพร้อมกันว่าแบบจำลองอนุกรมเวลาเชิงพหุ(multivariate time series) โดยเราสามารถเขียนอนุกรมเวลาในรูปของเวกเตอร์ $\mathbf{Y}_t = (y_{1t}, y_{2t}, ..., y_{nt})'$ โดยที่ y_{it} แทนอนุกรมเวลา i และ n คือจำนวนอนุกรมเวลาที่เราพิจารณาร่วมกัน[1] เช่น $y_{1t}, y_{2t}, ... y_{nt}$ แทนผลได้ตอบแทนในรูปล็อกของหุ้นในตลาดหลักทรัพย์แห่งประเทศไทย

6.1 ความนิ่งของอนุกรมเวลาและเมตริกซ์สหสัมพันธ์ระหว่างกัน

$\mathbf{Y}_t = (y_{1t}, y_{2t}, ..., y_{nt})'$ จะเป็นอนุกรมเวลานิ่ง (stationary) ถ้าโมเมนต์ที่หนึ่งและสองไม่ขึ้นอยู่กับเวลา (time-invariant) ซึ่งในที่นี้เราจะต้องพิจารณาเวกเตอร์ของค่าเฉลี่ย (mean vector) $\boldsymbol{\mu} = E(\mathbf{Y}_t)$ โดยที่ $\boldsymbol{\mu} = (\mu_1, ..., \mu_n)'$

เมตริกซ์ของความแปรปรวนร่วม (covariance matrix) ใช้สัญลักษณ์ Γ_0 สามารถคำนวณได้โดย

$$
\begin{aligned}
\Gamma_0 &= E[(\mathbf{Y}_t - \boldsymbol{\mu})(\mathbf{Y}_t - \boldsymbol{\mu})'] \\
&= \begin{pmatrix} E(y_{1t}-\mu_1)^2 & E(y_{1t}-\mu_1)(y_{2t}-\mu_2) & \dots & E(y_{1t}-\mu_1)(y_{nt}-\mu_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ E(y_{nt}-\mu_n)(y_{1t}-\mu_1) & E(y_{nt}-\mu_n)(y_{2t}-\mu_2) & \dots & E(y_{nt}-\mu_n)^2 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} Var(y_{1t}) & Cov(y_{1t}, y_{2t}) & \dots & Cov(y_{1t}, y_{nt}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ Cov(y_{nt}, y_{1t}) & Cov(y_{nt}, y_{2t}) & \dots & Var(y_{nt}) \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

จะเห็นได้ว่าพจน์ในแนวแทยงมุมจะเป็นค่าความแปรปรวนของแต่ละอนุกรมเวลา ในขณะที่พจน์ที่ (i, j)

[1] สัญลักษณ์ $'$ แทน transpose ของเมทริกซ์

จะเป็นสหสัมพันธ์ระหว่าง y_{it} และ y_{jt} ในคาบเวลาเดียวกัน

6.1.1 cross-correltaion matrics

กำหนดให้ $\boldsymbol{D}$ เป็นเมทริกซ์ $n \times n$ ที่ประกอบด้วยค่าเบี่ยงเบนมาตรฐาน (standard deviation) ของ y_{it} ในพจน์แทยงมุม โดยที่ $\Gamma_{ii}(0)$ เป็นสัญลักษณ์แทนค่าความแปรปรวนของ y_{it} ดังนั้นเราสามารถเขียนเมทริกซ์ $\boldsymbol{D}$ ได้ดังนี้

$$\boldsymbol{D} = \begin{pmatrix} \sqrt{\Gamma_{11}(0)} & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \sqrt{\Gamma_{nn}(0)} \end{pmatrix}$$

เราสามารถนิยามเมทริกซ์สหสัมพันธ์ข้ามตัวแปร (cross-correlation) ที่คาบเวลาเดียวกัน (concurrent) ได้ด้วย

$$\boldsymbol{\rho}_0 = [\rho_{ij}(0)] = \boldsymbol{D}^{-1}\boldsymbol{\Gamma}_0\boldsymbol{D}^{-1}$$

โดยที่ $\rho_{ij}(0) = \frac{\Gamma_{ij}(0)}{\sqrt{\Gamma_{ii}(0)\Gamma_{jj}(0)}} = \frac{Cov(y_{it}, y_{jt})}{std(y_{it})std(y_{jt})}$ ซึ่งคือสหสัมพันธ์ระหว่าง y_{it} และ y_{jt} โดยที่ในการวิเคราะห์อนุกรมเวลาเราจะเรียกสหสัมพันธ์ดังกล่าวว่าเป็นสหสัมพันธ์ในคาบเดียวกัน (concurrent หรือ contemporaneous)

นอกจากนี้ การวิเคราะห์อนุกรมเวลาเชิงพหุ เราสนใจความสัมพันธ์ในเชิงตัวแปรที่นำหรือตาม (lead-lag relationship) ระหว่างตัวแปรที่เราสนใจ ดังนั้นเราต้องการหาเมทริกซ์สหสัมพันธ์ข้ามตัวแปรที่ใช้วัดความสัมพันธ์ระหว่างช่วงเวลาเช่น เมทริกซ์ความแปรปรวนร่วมข้ามตัวแปรที่มีค่าล่าเท่ากับหนึ่งใช้สัญลักษณ์ Γ_1 ดังที่ได้แสดงในสมการต่อไปนี้

$$\begin{aligned}
\Gamma_1 &= E[(\boldsymbol{Y_t} - \boldsymbol{\mu})(\boldsymbol{Y_{t-1}} - \boldsymbol{\mu})'] \\
&= \begin{pmatrix} E(y_{1t}-\mu_1)(y_{1,t-1}-\mu_1) & E(y_{1t}-\mu_1)(y_{2,t-1}-\mu_2) & \dots & E(y_{1t}-\mu_1)(y_{n,t-1}-\mu_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ E(y_{nt}-\mu_n)(y_{1,t-1}-\mu_1) & E(y_{nt}-\mu_n)(y_{2,t-1}-\mu_2) & \dots & E(y_{nt}-\mu_n)(y_{n,t-1}-\mu_n) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} Cov(y_{1t}, y_{1,t-1}) & Cov(y_{1t}, y_{2,t-1}) & \dots & Cov(y_{1t}, y_{n,t-1}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ Cov(y_{nt}, y_{1,t-1}) & Cov(y_{nt}, y_{2,t-1}) & \dots & Cov(y_{nt}, y_{n,t-1}) \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

เราสามารถคำนวณเมทริกซ์สหสัมพันธ์ข้ามตัวแปร (cross-correlation) ที่มีค่าล่าเท่ากับหนึ่ง ได้ด้วย

$$\boldsymbol{\rho}_1 = [\rho_{ij}(1)] = \boldsymbol{D}^{-1}\boldsymbol{\Gamma}_1\boldsymbol{D}^{-1}$$

โดยที่ $\rho_{ij}(1) = \frac{\Gamma_{ij}(1)}{\sqrt{\Gamma_{ii}(0)\Gamma_{jj}(0)}} = \frac{Cov(y_{it}, y_{j,t-1})}{std(y_{it})std(y_{jt})}$ ซึ่งคือสหสัมพันธ์ระหว่าง y_{it} และ $y_{j,t-1}$ หากค่า $\rho_{ij}(1) \neq 0$ แสดงว่าการเปลี่ยนแปลงของ y_{jt} ในคาบที่ผ่านมาส่งผลต่อการเปลี่ยนแปลงของ y_{it} ในคาบปัจจุบัน ดังนั้น y_{jt} เป็นตัวแปรนำ (lead) y_{it}

ความสัมพันธ์ดังกล่าวสามารถขยายไปยังกรณี $\Gamma_l, l = ..., -2, -1, 0, 1, 2, ...$ ถ้าหากค่า $\rho_{ij}(l) \neq 0$ กรณีที่ $l > 0$ แสดงว่า y_{jt} เป็นตัวแปรนำ (lead) y_{it} แต่ถ้า $\rho_{ij}(l) \neq 0$ กรณีที่ $l < 0$ แสดงว่า y_{it} เป็นตัวแปรนำ (lead) y_{jt}

6.1.2 ตัวประมาณค่าสหสัมพันธ์ไขว้

กำหนดให้ $\boldsymbol{Y}_t$ เป็นเวกเตอร์ของตัวอย่างจากเวลาที่ $t = 1, ..., T$ เราสามารถคำนวณหาตัวประมาณค่าของเวกเตอร์ค่าเฉลี่ยและเมตริกซ์ตัวแปรปรวนร่วมไขว้ (cross-covariance) ได้จากสมการต่อไปนี้

$$\widehat{\boldsymbol{\mu}}_Y = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}\boldsymbol{Y}_t \tag{6.1}$$

$$\widehat{\boldsymbol{\Gamma}}_0 = \frac{1}{T-1}\sum_{t=1}^{T}(\boldsymbol{Y}_t - \widehat{\boldsymbol{\mu}}_Y)((\boldsymbol{Y}_t - \widehat{\boldsymbol{\mu}}_Y))'$$

ในขณะที่ตัวประมาณค่าเมตริกซ์ตัวแปรปรวนร่วมไขว้ที่ค่าล่าที่ l คำนวณได้จากสมการ

$$\widehat{\boldsymbol{\Gamma}}_l = \frac{1}{T-1}\sum_{t=l+1}^{T}(\boldsymbol{Y}_{t-l} - \widehat{\boldsymbol{\mu}}_Y)((\boldsymbol{Y}_t - \widehat{\boldsymbol{\mu}}_Y))'$$

จากตัวประมาณค่าข้างต้น ตัวประมาณค่าเมตริกซ์สหสัมพันธ์ไขว้ที่ค่าล่าที่ l สามารถคำนวณได้จาก

$$\widehat{\boldsymbol{\rho}}_l = \widehat{\boldsymbol{D}}^{-1}\widehat{\boldsymbol{\Gamma}}_l\widehat{\boldsymbol{D}}^{-1}$$

โดยที่ $\widehat{\boldsymbol{D}}^{-1}$ คือเมตริกซ์ทแยงมุมที่ตำแหน่งที่ (i,i) คือค่ารากที่สองของสมาชิกตำแหน่งที่ (i,i) ในเมตริกซ์ $\widehat{\boldsymbol{\Gamma}}_0$ ภายใต้ข้อสมมุติว่า $\boldsymbol{Y}_t$ เป็นตัวแปรนิ่งและโมเมนต์ที่สี่เป็นพจน์จำกัด (finite) เราสามารถแสดงได้ว่า $\widehat{\boldsymbol{\rho}}_l$ เป็นตัวประมาณค่าคล้องจองของ $\boldsymbol{\rho}_l$

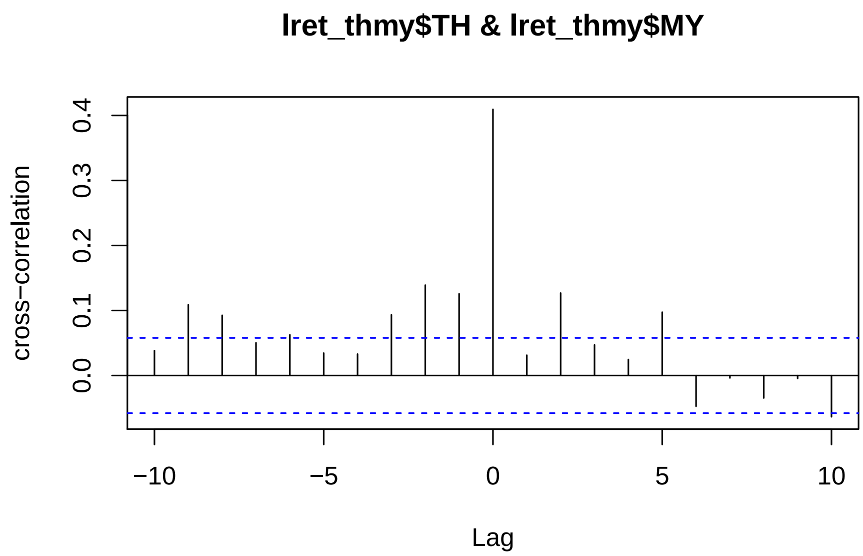
ในการวิเคราะห์ข้อมูลเบื้องต้น เรามักจะใช้ตัวประมาณค่าสหสัมพันธ์ไขว้ในการอธิบายความสัมพันธ์เชิงพลวัตของตัวแปรที่เราสนใจ นอกจากนี้เราสามารถใช้ตัวประมาณค่าสหสัมพันธ์เปรียบเทียบกับค่าวิกฤต $(t/\sqrt{T})$ เช่นกรณีกำหนดระดับนัยสำคัญ 0.05 หากค่า $\widehat{\rho}_{l,ij}$ สูงกว่า $2/\sqrt{T}$ แสดงว่ามีสหสัมพันธ์เป็นบวก ในทางตรงข้ามหาก ค่า $\widehat{\rho}_{l,ij}$ ต่ำกว่า $2/\sqrt{T}$ แสดงว่ามีสหสัมพันธ์เป็นลบ ซึ่งเราสามารถพิจารณาจากกราฟสหสัมพันธ์ไขว้

ตัวอย่างที่ 6.1 ตัวอย่างสหสัมพันธ์ไขว้ของอัตราผลตอบแทนรายสัปดาห์ของตลาดหลักทรัพย์ไทยและมาเลเซีย

เราใช้คำสั่ง `ccf` ในการคำนวณสหสัมพันธ์ไขว้ โดยกำหนดตัวแปรตัวที่หนึ่งและสอง และเลือกเงื่อนไข `type=c("correlation")` และ `plot=FALSE` จะได้ผลการคำนวณดังนี้ ที่ค่าล่าศูนย์ แสดงสหสัมพันธ์ระหว่างผลได้ตอบแทนของสองตลาดซึ่งมีค่าเท่ากับ 0.409 ในขณะที่ค่าล่าเท่ากับลบหนึ่ง หมายถึงสหสัมพันธ์ระหว่าง $r_{th,t}$ กับ $r_{my,t-1}$ ซึ่งมีค่าเท่ากับ 0.126 แสดงว่าตัวแปรทั้งสองห่างกันหนึ่งคาบมีความสัมพันธ์ทางบวกหากผลตอบแทนในมาเลเซียเพิ่มขึ้นในคาบที่ผ่านมา ผลตอบแทนในไทยจะปรับตัวเพิ่มขึ้นในคาบปัจจุบัน ในขณะที่ค่าล่าเท่ากับหนึ่ง หมายถึงสหสัมพันธ์ระหว่าง $r_{th,t}$

กับ $r_{my,t+1}$ ซึ่งเท่ากับสหสัมพันธ์ระหว่าง $r_{th,t-1}$ กับ $r_{my,t}$ ซึ่งมีค่าเท่ากับ 0.031 แสดงว่าตัวแปรทั้งสองห่างกันหนึ่งคาบมีความสัมพันธ์ทางบวกหากผลตอบแทนในไทยเพิ่มขึ้นในคาบที่ผ่านมา ผลตอบแทนในมาเลเซียจะปรับตัวเพิ่มขึ้นในคาบปัจจุบัน นอกจากนี้เราสามารถพิจารณากราฟสหสัมพันธ์ โดยใช้เงื่อนไข `plot=TRUE` หรือไม่ต้องกำหนดเนื่องจากเป็นค่าโดยปริยาย

```
> head(lret_thmy)
                  TH          MY
1998-01-02  4.264711   1.941946
1998-01-09 -6.375712 -15.140368
1998-01-16  9.107125   9.384820
1998-01-23  9.900370   3.386636
1998-01-30 15.795750   1.939640
1998-02-06  7.907455  24.578566
> ccf(lret_thmy$TH, lret_thmy$MY, type=c("correlation"), lag.max = 10,
    plot=FALSE)

Autocorrelations of series ''X, by lag

   -10     -9     -8     -7     -6     -5     -4     -3     -2     -1
     0      1      2      3      4
 0.038  0.109  0.093  0.050  0.063  0.035  0.033  0.094  0.139  0.126
   0.409  0.031  0.127  0.047  0.025
     5      6      7      8      9     10
 0.097 -0.047 -0.004 -0.035 -0.005 -0.064
> ccf(lret_thmy$TH, lret_thmy$MY, type=c("correlation"), lag.max = 10,
    ylab="cross-correlation")
```



6.1.3 การทดสอบสหสัมพันธ์ไขว้

ขั้นตอนแรกก่อนที่เราจะสร้างแบบจำลองเพื่ออธิบายความสัมพันธ์เชิงพลวัตระหว่างตัวแปรพหุคือการทดสอบว่าข้อมูลของตัวแปรเหล่านั้นมีความสัมพันธ์เชิงพลวัตกัน หรือทดสอบสมมุติฐานหลักว่าเมื่อพิจารณาย้อนไป m คาบเราไม่พบสหสัมพันธ์หรือเขียนเป็นสัญลักษณ์ $H_0 : \boldsymbol{\rho}_1 = \boldsymbol{\rho}_2 = \ldots = \boldsymbol{\rho}_m$ ในขณะที่สมมุติฐานทางเลือกคือมีสหสัมพันธ์ไขว้ ณ ค่าล่าใดค่าหนึ่งมีค่าไม่เท่ากับศูนย์ หรือเขียนเป็นสัญลักษณ์ $H_1 : \boldsymbol{\rho}_i \neq \mathbf{0}$ สำหรับค่าใดค่าหนึ่งของ $i = 1, .., m$ Li and McLeod (1981) ได้เสนอการทดสอบพอรทแมนโทซึ่งได้ขยายการทดสอบจากตัวแปรเดียวเป็นตัวแปรพหุ ซึ่งค่าสถิติลุงบ๊อกซ์กรณีพหุตัวแปร (multivariate Ljung-Box test statistics) สามารถเขียนได้ดังนี้

$$Q_n(m) = T^2 \sum_{l=1}^{m} \frac{1}{T-l} tr(\widehat{\boldsymbol{\Gamma}}_l' \widehat{\boldsymbol{\Gamma}}_0^{-1} \widehat{\boldsymbol{\Gamma}}_l \widehat{\boldsymbol{\Gamma}}_0^{-1})$$

โดยที่ $tr(A)$ คือเทรซของเมทริกซ์ A และ T คือจำนวนตัวอย่าง ภายใต้สมมุติฐานหลักที่ถูกต้องค่าสถิติ $Q_n(m)$ จะมีการแจกแจงลู่เข้าสู่การแจกแจงแบบไคสแควร์ที่มีองศาเสรีเท่ากับ mn^2 $(\chi^2_{mn^2})$ ดังนั้นหากค่าสถิติลุงบ๊อกซ์มากกว่าค่าวิกฤตเราจะปฏิเสธสมมุติฐาน และยอมรับว่าตัวแปรมีสหสัมพันธ์ไขว้ที่ค่าล่าค่าใดค่าหนึ่ง

ตัวอย่างที่ 6.2 เราทดสอบพอรทแมนโทกับผลตอบแทนรายสัปดาห์จากตลาดหลักทรัพย์ไทยและมาเลเซียด้วยคำสั่ง `mq` จากชุดคำสั่ง MTS ซึ่งในที่นี้เราจะเลือกค่า $m = 10$ โดยการระบุ `lag=10` ส่วน `adj` เป็นการปรับค่าองศาเสรีซึ่งในกรณีข้อมูลเดิมเราไม่จำเป็นต้องปรับ (หากเป็นค่าเรซิดิวเราจะต้องระบุพารามิเตอร์ซึ่งประมาณค่า ซึ่งจะกล่าวถึงในหัวข้อถัดไป จากผลการทดสอบที่ $m = 10$ ค่าสถิติเท่ากับ 176.5 และมีค่าพีเข้าใกล้ศูนย์ แสดงว่าเราสามารถปฏิเสธสมมติฐานหลักที่ว่าตัวแปรทั้งสองเป็นอิสระจากกันในทุกคาบเวลาไขว้

```
> mq(lret_thmy, lag=10, adj=0)
Ljung-Box Statistics:
         m       Q(m)      df     p-value
 [1,]   1.0      20.4     4.0          0
 [2,]   2.0      65.4     8.0          0
 [3,]   3.0      79.2    12.0          0
 [4,]   4.0     102.2    16.0          0
 [5,]   5.0     114.6    20.0          0
 [6,]   6.0     125.6    24.0          0
 [7,]   7.0     135.5    28.0          0
 [8,]   8.0     151.6    32.0          0
 [9,]   9.0     168.3    36.0          0
[10,]  10.0     176.5    40.0          0
```

6.2 แบบจำลองเวกเตอร์ออโตรีเกรสซีฟ (Vector Autoregressive Model)

กำหนดให้ $\boldsymbol{Y}_t = (y_{1t}, y_{2t}, ..., y_{nt})'$ แทน $(n \times 1)$ เวกเตอร์ของตัวแปรอนุกรมเวลาจำนวน n ตัวแปร แล้วแบบจำลองเวกเตอร์ออโตรีเกรสซีฟที่มีค่าล่าเท่ากับ p ซึ่งใช้สัญลักษณ์ $VAR(p)$ สามารถเขียนในรูป

$$\boldsymbol{Y}_t = \boldsymbol{c} + \Phi_1 \boldsymbol{Y}_{t-1} + ... + \Phi_p \boldsymbol{Y}_{t-p} + \boldsymbol{\varepsilon}_t, \quad t = 1, 2, ..., T \tag{6.2}$$

โดยที่ Φ_i เป็นเมทริกซ์สัมประสิทธิ์ที่มีขนาด $n \times n$ และ $\boldsymbol{\varepsilon}_t$ เป็นเวคเตอร์ของกระบวนการไวทนอซที่มีค่าเฉลี่ยเท่ากับศูนย์ และมีเมตริกซ์ความแปรปรวนร่วมที่ไม่แปรผันตามเวลา $\boldsymbol{\Sigma}$ ตัวอย่างเช่น หากเราสนใจแบบจำลอง VAR ที่มีตัวแปรที่เราสนใจสองตัวและมีค่าล่าเท่ากับ 1 เราสามารถเขียนในรูปเมตริกซ์ได้เป็น

$$\begin{pmatrix} y_{1t} \\ y_{2t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \phi_{11}^1 & \phi_{12}^1 \\ \phi_{21}^1 & \phi_{22}^1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_{1t-1} \\ y_{2t-1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \varepsilon_{1t} \\ \varepsilon_{2t} \end{pmatrix} \tag{6.3}$$

หรือเขียนเป็นรูปสมการของแต่ละตัวแปรที่เราสนใจ

$$y_{1t} = c_1 + \phi_{11}^1 y_{1t-1} + \phi_{12}^1 y_{2t-1} + \varepsilon_{1t}$$
$$y_{2t} = c_2 + \phi_{21}^1 y_{1t-1} + \phi_{22}^1 y_{2t-1} + \varepsilon_{2t}$$

โดยที่ $Cov(\varepsilon_{1t}, \varepsilon_{2s}) = \sigma_{12}$ ถ้า $s = t$ และ $Cov(\varepsilon_{1t}, \varepsilon_{2s}) = 0$ ถ้า $s \neq t$ (คือไม่มีสหสัมพันธ์ข้ามเวลาระหว่างช็อกของตัวแปรที่ต่างกัน) จากแบบจำลองข้างต้นจะเป็นได้ว่าตัวแปร y_{1t} ถูกอธิบายด้วย ค่าในอดีตของตัวเอง y_{1t-1}และตัวแปรอื่น y_{2t-1}

ค่าสัมประสิทธิ์แต่ละตัวจะเป็นค่าที่บอกความสัมพันธ์ระหว่างตัวแปรที่ต่างเวลากัน ตัวอย่างเช่น ϕ_{12}^1 จะแสดงความสัมพันธ์ระหว่าง y_{1t} และ y_{2t-2} ซึ่งถ้า $\phi_{12}^1 = 0$ แล้ว y_{1t} จะไม่ขึ้นกับค่า y_{2t-1} และขึ้นอยู่กับค่าในอดีตของ y_{1t} เท่านั้น เช่นเดียวกับค่า ϕ_{21}^1 จะแสดงความสัมพันธ์ระหว่าง y_{2t} และ y_{1t-1} ซึ่งจะเห็นได้ว่าค่าสัมประสิทธิ์ในสมการ 6.3 อธิบายพลวัตของอนุกรมเวลาที่เราสนใจ (lead-lag) แต่มิได้อธิบายความสัมพันธ์ระหว่างอนุกรมเวลาในช่วงเวลาเดียวกัน (concurrent หรือ contemporaneous) ไว้อย่างชัดเจน เราสามารถดูความสัมพันธ์ดังกล่าวได้ในเมทริกซ์ความแปรปรวนของช็อก หรือพูดให้ชัดเจนคือการพิจารณาค่า $Cov(\varepsilon_{1t}, \varepsilon_{2t})$ นั่นเอง เราเรียกแบบจำลองเวกเตอร์ออโตรีเกรสซีฟในรูป 6.3 ว่า**สมการในรูปลดรูป (reduced form)**

เราสามารถเขียนความสัมพันธ์ระหว่างอนุกรมเวลาในช่วงเดียวกันได้อย่างชัดเจนโดยใช้การแปลงรูปสมการที่ 6.3 ได้ดังนี้ เนื่องจาก $\boldsymbol{\Sigma}$ เป็นเมตริกซ์ที่มีคุณลักษณะเป็น positive definite ดังนั้นเราสามารถสร้างเม

ทริกซ์ lower triangular

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ l_{21} & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ l_{n1} & l_{n2} & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

และเมตริกซ์แทยงมุม $\boldsymbol{G}$ ที่ทำให้ $\Sigma = \boldsymbol{LGL}'$ เราเรียกการแยกส่วนประกอบนี้ว่า Cholesky decomposition

กำหนดให้ $\boldsymbol{\eta}_t = \boldsymbol{L}^{-1}\boldsymbol{\varepsilon}_t$ เราจะได้ว่า

$$E(\boldsymbol{\eta}_t) = \boldsymbol{L}^{-1}E(\boldsymbol{\varepsilon}_t) = \boldsymbol{0}$$

$$Var(\boldsymbol{\eta}_t) = \boldsymbol{L}^{-1}Var(\boldsymbol{\varepsilon}_t)(\boldsymbol{L}^{-1})' = \boldsymbol{L}^{-1}\Sigma(\boldsymbol{L}')^{-1} = \boldsymbol{L}^{-1}\boldsymbol{LGL}'(\boldsymbol{L}')^{-1} = \boldsymbol{G}$$

เนื่องจาก $\boldsymbol{G}$ เป็นเมตริกซ์แทยงมุม ดังนั้นส่วนประกอบของ $\boldsymbol{\eta}_t$ จะไม่มีความสัมพันธ์ระหว่างกัน

หากเราคูณข้างหน้าสมการ 6.2 ด้วย $\boldsymbol{L}^{-1}$ จะได้

$$\begin{aligned} \boldsymbol{L}^{-1}\boldsymbol{Y}_t &= \boldsymbol{L}^{-1}\boldsymbol{c} + \boldsymbol{L}^{-1}\Phi_1\boldsymbol{Y}_{t-1} + \dots + \boldsymbol{L}^{-1}\Phi_p\boldsymbol{Y}_{t-p} + \boldsymbol{L}^{-1}\boldsymbol{\varepsilon}_t, \quad t = 1, 2, \dots, T \\ \boldsymbol{L}^{-1}\boldsymbol{Y}_t &= \boldsymbol{c}^* + \Phi_1^*\boldsymbol{Y}_{t-1} + \dots + \Phi_p^*\boldsymbol{Y}_{t-p} + \boldsymbol{\eta}_t \end{aligned} \tag{6.4}$$

โดยที่เมตริกซ์ $\boldsymbol{L}^{-1}$ จะแสดงความสัมพันธ์ระหว่างอนุกรมเวลาในคาบเดียวกัน และเราเรียกแบบจำลองเวกเตอร์ออโตรีเกรสซีฟในรูป 6.4 ว่า**สมการในรูปโครงสร้าง (structural equation)**

ตัวอย่างที่ 6.3 การแปลงสมการในรูปลดรูปไปเป็นรูปโครงสร้าง

กำหนดให้แบบจำลองเวกเตอร์ออโตรีเกรสซีฟที่มีสองตัวแปรและมีอันดับเท่ากับหนึ่ง (หรือเรียกย่อๆ ว่า Bivariate VAR(1)) สามารถแสดงในรูปลดรูปได้ดังนี้

$$\begin{pmatrix} y_{1t} \\ y_{2t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.2 & 0.3 \\ -0.6 & 1.1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_{1,t-1} \\ y_{2,t-1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \varepsilon_{1t} \\ \varepsilon_{2t} \end{pmatrix} \tag{6.5}$$

โดยที่ $\Sigma = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ โดยที่เราสามารถใช้ Cholesky decomposition หาเมทริกซ์ $\boldsymbol{L}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -0.5 & 1 \end{pmatrix}$

หากเราคูณสมการ 6.5 ด้วย $\boldsymbol{L}^{-1}$ จะได้

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -0.5 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_{1t} \\ y_{2t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.2 & 0.3 \\ -0.7 & 0.95 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_{1,t-1} \\ y_{2,t-1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \eta_{1t} \\ \eta_{2t} \end{pmatrix} \tag{6.6}$$

โดยที่ $\boldsymbol{G} = Var(\eta_t) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0.5 \end{pmatrix}$ จากสมการที่สองของ 6.6 เราสามารถเขียนความสัมพันธ์ได้เป็น

$$y_{2t} = 0.5y_{1t} - 0.7y_{1,t-1} + 0.95y_{2,t-1} + \eta_{2t}$$

ซึ่งแสดงความสัมพันธ์ระหว่าง y_{1t} และ y_{2t} ในช่วงเวลาเดียวกันไว้อย่างชัดเจน

เราจะเห็นได้ว่าเราสามารถแปลงแบบจำลองเวกเตอร์ออโตรีเกรสซีฟในรูปลดรูปไปเป็นรูปโครงสร้างได้ด้วย Cholesky decomposition อย่างไรก็ตามในการวิเคราะห์อนุกรมเวลาเรามักจะใช้สมการในรูปลดรูป เนื่องจากเป็นรูปที่ง่ายในการประมาณค่า และเรามักจะเน้นผลในการพยากรณ์ของแบบจำลองซึ่งเราไม่สามารถใช้แบบจำลองในรูปโครงสร้างพยากรณ์ข้อมูลได้เนื่องจากเราไม่ทราบข้อมูลของอนุกรมเวลาอื่นๆในคาบเดียวกัน

6.2.1 เงื่อนไขการเป็นอนุกรมเวลานิ่ง

แบบจำลอง $VAR(p)$ สามารถเขียนในรูปเครื่องหมายขยับไปข้างหลัง (lag operator) ได้ดังนี้

$$\mathbf{\Phi}(L)\boldsymbol{Y}_t = \boldsymbol{c} + \varepsilon_t \tag{6.7}$$

โดยที่ $\mathbf{\Phi}(L) = \boldsymbol{I}_n - \mathbf{\Phi}_1 L - \ldots - \mathbf{\Phi}_p L^p$ แบบจำลอง $VAR(p)$ จะมีเสถียรภาพถ้ารากของ

$$\det(\boldsymbol{I}_n - \mathbf{\Phi}_1 z - \ldots - \mathbf{\Phi}_p z^p) = 0$$

มีค่ามากกว่าหนึ่ง (หรือโมดูลัสมากกว่าหนึ่งในกรณีจำนวนเชิงซ้อน) ถ้าสมมุติให้กระบวนการดังกล่าวมีค่าในอดีตที่เป็นอนันต์ แล้วกระบวนการ $VAR(p)$ ที่มีเสถียรภาพจะเป็นกระบวนการนิ่งและ ergodic โดยมีค่าเฉลี่ยค่าความแปรปรวนและค่าความแปรปรวนร่วมในตัวเองที่ไม่ขึ้นกับเวลา

ตัวอย่างที่ 6.4 การพิจารณา stability ของ VAR สมมุติว่าเราพิจารณาแบบจำลอง $VAR(1)$ ของสองตัวแปรดังมีเมทริกซ์สัมประสิทธิ์ดังตัวอย่างที่ 5.1 เราสามารถเขียนแบบจำลอง VAR ในรูปของ polynomial matrix ได้ดังนี้

$$\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0.2 & 0.3 \\ -0.6 & 1.1 \end{bmatrix} L\right)\begin{bmatrix} y_{1t} \\ y_{2t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{1t} \\ \varepsilon_{2t} \end{bmatrix}$$

โดยที่ polynomial matrix สามารถจัดรูปได้เป็น

$$\mathbf{\Phi}(L) = \begin{bmatrix} 1 - 0.2L & -0.3L \\ 0.6L & 1 - 1.1L \end{bmatrix}$$

ซึ่งดีเทอร์มิแนนต์เท่ากับ $|\mathbf{\Phi}(L)| = (1-0.2L)(1-1.1L) + (0.6)(0.3)L^2 = 1 - 1.3L + 0.4L^2$ เราสามารถหาคำตอบของสมการพหุนามได้เท่ากับ 2 และ 1.25 ซึ่งต่างมีค่าสัมบูรณ์มากกว่าหนึ่ง เราสามารถสรุปได้ว่าตัวแปรในแบบจำลอง VAR ที่มีเมทริกซ์สัมประสิทธ์ดังกล่าวเป็นตัวแปรนิ่ง (stationary) ด้วยกันทั้งคู่

6.3 การประมาณค่าและการเลือกค่าล่า

6.3.1 การประมาณค่า

การเราพิจารณาสมการ 6.2 แต่ละสมการจะมีตัวแปรที่เหมือนกัน เราสามารถพิจารณาสมการสำหรับแต่ละตัวแปรออกเป็น

$$\boldsymbol{y}_i = \boldsymbol{Z}\boldsymbol{\phi}_i + \boldsymbol{e}_i, \quad i = 1, \ldots, n$$

โดยที่ $\boldsymbol{y}_i$ คือ เวกเตอร์ $(T \times 1)$ ของตัวแปรตามในสมการที่ i ในขณะที่ $\boldsymbol{Z}$ คือเมตริกซ์ $(T \times k)$ ที่แถว t แทนด้วย $\boldsymbol{Z}_t' = (1, \boldsymbol{Y}_{t-1}', \ldots, \boldsymbol{Y}_{t-p}')$, $k = np + 1$ และ $\boldsymbol{\phi}_i$ คือ $(k \times 1)$ เวกเตอร์ของพารามิเตอร์ และ $\boldsymbol{e}_i$ คือ error term ที่มีเวกเตอร์ค่าความแปรปรวนร่วม $\sigma_i^2 \boldsymbol{I}_T$ จะเห็นได้ว่าแต่ละสมการสามารถประมาณค่าได้ด้วย ordinary least squares (OLS) แยกแต่ละสมการ และจะได้ $\hat{\boldsymbol{\Phi}} = \left[\hat{\phi}_1, \ldots, \hat{\phi}_n\right]$ เป็นเมตริกซ์ $(k \times n)$ ของค่าสัมประสิทธิ์จากการประมาณค่าด้วย OLS หากกำหนดให้เครื่องหมาย vec แทนการนำเมตริกซ์มาเรียงต่อกัน เราจะได้

$$vec(\hat{\Phi}) = \begin{pmatrix} \hat{\phi}_1 \\ \vdots \\ \hat{\phi}_n \end{pmatrix}$$

ภายใต้ข้อสมมุติที่แบบจำลองเป็นแบบกระบวนการนิ่งและ ergodic เราจะได้ $vec(\hat{\Phi})$ มีคุณสมบัติ consistent และมีการแจกแจงแบบปกติเมื่อกลุ่มตัวอย่างใหญ่โดยมีเมตริกซ์ค่าความแปรปรวนเท่ากับ

$$\widehat{aver}(vec(\hat{\Phi})) = \hat{\Sigma} \otimes (\boldsymbol{Z}'\boldsymbol{Z})^{-1}$$

โดยที่ $\hat{\Sigma} = \frac{1}{T-k} \sum_{t=1}^{T} \hat{\varepsilon}_t \hat{\varepsilon}_t'$ และ $\hat{\varepsilon}_t = \boldsymbol{Y}_t - \hat{\boldsymbol{\Phi}}' \boldsymbol{Z}_t$ เป็น residuals จากการประมาณค่า

6.3.2 การเลือกจำนวนความล่าที่เหมาะสม

การหาความล่าที่เหมาะสมของแบบจำลองเวคเตอร์ออโตรีเกรสซีฟอาจจะทำได้โดยการใช้สูตรการเลือกความล่า โดยการประมาณค่าแบบจำลองเวคเตอร์ออโตรีเกรสซีฟที่มีความล่าเท่ากับ $0, 1, \ldots, p_{max}$ แล้วเลือกค่า p ที่ทำให้ค่าที่ใช้เลือกมีค่าต่ำที่สุด โดยจะมีสูตรดังนี้

$$IC(p) = \ln|\tilde{\Sigma}(p)| + c_T(n, p) \tag{6.8}$$

โดยที่ $\tilde{\Sigma}(p) = T^{-1} \sum_{t=1}^{T} \hat{\varepsilon}_t \hat{\varepsilon}_t'$ คือ residual covariance matrix จาก $VAR(p)$, c_T คือลำดับที่ขึ้นกับจำนวนตัวอย่าง และ $c_T(n, p)$ คือฟังก์ชันเบี้ยปรับ (penalty function) กรณีที่เราเลือก n และ p มากๆ โดยที่แบบเกณฑ์ที่เป็นที่นิยมสามเกณฑ์ได้แก่ Akaike (AIC) Schwarz-Bayesian (BIC) และ Hannan-Quinn (HQIC)

ซึ่งแสดงได้ด้วยสมการดังนี้

$$AIC(p) = \ln|\tilde{\Sigma}(p)| + \frac{2}{T}(pn^2)$$
$$BIC(p) = \ln|\tilde{\Sigma}(p)| + \frac{\ln T}{T}(pn^2)$$
$$HQIC(p) = \ln|\tilde{\Sigma}(p)| + \frac{2\ln(\ln T)}{T}(pn^2)$$

ตัวอย่างที่ 6.5 แบบจำลอง VAR สำหรับผลตอบแทนรายสัปดาห์ของตลาดหลักทรัพย์ไทย (SET) และมาเลเซีย (KLSE)

ในตัวอย่างนี้เราจะพิจารณาความสัมพันธ์ระหว่างผลได้ตอบแทนรายสัปดาห์จากการลงทุนในตลาดหลักทรัพย์แห่งประเทศไทย (`lret_thmy$TH`) และตลาดหุ้นมาเลเซีย (`lret_thmy$MY`) โดยใช้ข้อมูลรายสัปดาห์ระหว่างวันที่ 2 มกราคม 2541 ถึง 31 ธันวาคม 2562 (ข้อมูลจากธนาคารแห่งประเทศไทย โดยข้อมูลที่ตลาดใดตลาดหนึ่งปิดจะถูกแทนที่ด้วยวันก่อนหน้า และข้อมูลผลได้ตอบแทนอยู่ในไฟล์ `lret_3countries_w9819.txt`) เราจะเขียนข้อมูลทั้งสองในรูปของเมตริกซ์ที่นำเวกเตอร์ทั้งสองมาต่อกันโดยใช้คำสั่ง `cbind`

```
> lret3 <- read.csv("~/lret_3countries_w9819.txt")
> lret_thmy<-cbind(lret3$SET, lret3$KLSE)
> colnames(lret_thmy)<-c("TH", "MY")
> rownames(lret_thmy)<-lret3$Index
```

หากเราต้องการประมาณค่าด้วยแบบจำลองเวกเตอร์ออโตรีเกรสซีฟ เราจะใช้ชุดคำสั่ง VARS เราอาจจะเริ่มจากการหาค่า p ที่เหมาะสมโดยการใช้คำสั่ง `VAR` พร้อมระบุเมตริกซ์ของข้อมูล `lret_thmy` จำนวนค่าล่าสูงสุด `lag.max` เท่ากับ 5 และ เกณฑ์ในการเลือกค่าล่า `ic=c("AIC")` โดยที่ `"SC"` จะแทน Schwarz-Bayesian (BIC) และ `"HQ"` Hannan-Quinn (HQIC)

```
> library(vars)
> msel_aic<-VAR(lret_thmy, lag.max=5, ic=c("AIC"))
> msel_aic

VAR Estimation Results:
=======================

Estimated coefficients for equation TH:
=======================================
Call:
TH = TH.l1 + MY.l1 + TH.l2 + MY.l2 + TH.l3 + MY.l3 + TH.l4 + MY.l4 +
    const

   TH.l1     MY.l1     TH.l2     MY.l2     TH.l3     MY.l3     TH.l4     MY.l4
      const
 0.01524   0.00904   0.13483   0.12268   0.04040   0.04239  -0.13186   0.05922
    0.08477


Estimated coefficients for equation MY:
```

```
========================================
Call:
MY = TH.l1 + MY.l1 + TH.l2 + MY.l2 + TH.l3 + MY.l3 + TH.l4 + MY.l4 +
    const

  TH.l1   MY.l1   TH.l2   MY.l2   TH.l3   MY.l3   TH.l4   MY.l4   const
 0.1003 -0.0248  0.0823  0.0847  0.0372  0.0354  0.0161 -0.0721  0.0583
```

จากเกณฑ์ AIC จะเห็นได้ว่าค่าล่าที่เหมาะสมคือ $p = 4$ ถ้าลองใช้เกณฑ์ SIC จะได้ค่าล่าที่เหมาะสมเท่ากับ $p = 2$ ดังนั้นเราจะเลือกใช้ $p = 2$ ในการสร้างแบบจำลอง model1

```
> msel_bic<-VAR(lret_thmy, lag.max=5, ic=c("SC"))
> msel_bic

VAR Estimation Results:
=======================

Estimated coefficients for equation TH:
========================================
Call:
TH = TH.l1 + MY.l1 + TH.l2 + MY.l2 + const

 TH.l1  MY.l1  TH.l2  MY.l2  const
0.0247 0.0051 0.1273 0.0950 0.1027


Estimated coefficients for equation MY:
========================================
Call:
MY = TH.l1 + MY.l1 + TH.l2 + MY.l2 + const

  TH.l1   MY.l1   TH.l2   MY.l2   const
 0.1102 -0.0361  0.0833  0.0786  0.0737

> model1<-VAR(lret_thmy, p=2)
> summary(model1)

VAR Estimation Results:
=========================
Endogenous variables: TH, MY
Deterministic variables: const
Sample size: 1147
Log Likelihood: -5497.069
Roots of the characteristic polynomial:
0.47 0.408 0.148 0.0737
Call:
VAR(y = lret_thmy, p = 2)


Estimation results for equation TH:
===================================
TH = TH.l1 + MY.l1 + TH.l2 + MY.l2 + const

```

```
      Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
TH.l1   0.0248     0.0319    0.78    0.438
MY.l1   0.0051     0.0413    0.12    0.902
TH.l2   0.1273     0.0321    3.96  7.9e-05 ***
MY.l2   0.0950     0.0410    2.32    0.021 *
const   0.1027     0.0941    1.09    0.275
---
Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 ''. 0.1 ' ' 1

Residual standard error: 3.18 on 1142 degrees of freedom
Multiple R-Squared: 0.0307,     Adjusted R-squared: 0.0273
F-statistic: 9.03 on 4 and 1142 DF,  p-value: 3.51e-07

Estimation results for equation MY:
===================================
MY = TH.l1 + MY.l1 + TH.l2 + MY.l2 + const

      Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
TH.l1   0.1102     0.0243    4.54  6.3e-06 ***
MY.l1  -0.0361     0.0315   -1.15  0.25179
TH.l2   0.0833     0.0245    3.41  0.00068 ***
MY.l2   0.0786     0.0312    2.52  0.01196 *
const   0.0737     0.0716    1.03  0.30389
---
Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 ''. 0.1 ' ' 1

Residual standard error: 2.42 on 1142 degrees of freedom
Multiple R-Squared: 0.0436,     Adjusted R-squared: 0.0403
F-statistic:   13 on 4 and 1142 DF,  p-value: 2.27e-10

Covariance matrix of residuals:
     TH   MY
TH 10.1 3.00
MY  3.0 5.86

Correlation matrix of residuals:
      TH    MY
TH 1.000 0.389
MY 0.389 1.000
```

จากผลการประมาณค่าจะเห็นได้ว่าสัมประสิทธิ์ส่วนใหญ่มีนัยสำคัญทางสถิติ และเราสามารถเขียนสมการแสดงผลการประมาณค่าสำหรับสมการของ log return ของตลาดหุ้นไทย ($r_{th,t}$) และมาเลเซีย ($r_{my,t}$) ได้ดังนี้

$$r_{th,t} = 0.1027 + 0.0248 r_{th,t-1} + 0.0051 r_{my,t-1} + 0.1273 r_{th,t-2} + 0.095 r_{my,t-2}$$

$$r_{my,t} = 0.0737 + 0.1102 r_{th,t-1} - 0.0361 r_{my,t-1} + 0.0833 r_{th,t-2} + 0.0786 r_{my,t-2}$$

6.4 การพยากรณ์จากแบบจำลองเวคเตอร์ออโตรีเกรสซีฟ

เป้าหมายหลักประการหนึ่งของการพัฒนาแบบจำลองเวคเตอร์ออโตรีเกรสซีฟ $(VAR(p))$ คือการพยากรณ์จากแบบจำลองดังกล่าวเช่นเดียวกับแบบจำลองออโตรีเกรสซีฟ $(AR(p))$ หากเราพิจารณาแบบจำลองเวคเตอร์ออโตรีเกรสซีฟอันดับหนึ่ง $(VAR(1))$ ซึ่งแสดงได้ด้วยสมการต่อไปนี้

$$\boldsymbol{Y}_t = \boldsymbol{\Phi}\boldsymbol{Y}_{t-1} + \varepsilon_t$$

เราต้องการพยากรณ์ไปข้างหน้าหนึ่งคาบด้วยข้อมูลที่มี ณ เวลาที่ h หรือพยากรณ์ค่า

$$\boldsymbol{Y}_{h+1} = \boldsymbol{\Phi}\boldsymbol{Y}_h + \varepsilon_{h+1} \tag{6.9}$$

เราหาค่าพยากรณ์โดยการคำนวณค่าคาดการณ์อย่างมีเงื่อนไข (conditional expectation) ด้วยข้อมูล h, $E_h(Y_{h+1})$, เราจะได้ค่าพยากรณ์เท่ากับ

$$\widehat{\boldsymbol{Y}}_h(1) = E_h(\boldsymbol{Y}_{h+1}) = \boldsymbol{\Phi}\boldsymbol{Y}_h + \underbrace{E_h(\varepsilon_{h+1})}_{=\boldsymbol{0}} = \boldsymbol{\Phi}\boldsymbol{Y}_h \tag{6.10}$$

และค่าคาดเคลื่อนของการพยากรณ์ (forecast error) ของการพยากรณ์ไปข้างหน้าหนึ่งคาบ, $\boldsymbol{e}(1)$, จะเท่ากับ

$$\boldsymbol{e}(1) = \boldsymbol{Y}_{h+1} - E_h(\boldsymbol{Y}_{h+1}) = \varepsilon_{h+1} \tag{6.11}$$

หากพิจารณากรณีตัวแปรสองตัวแปร $\boldsymbol{Y}_t = [Y_{1t} \quad Y_{2t}]'$ เราจะพบว่า

$$\begin{aligned}
\widehat{Y}_{1,h}(1) &= \phi_{11}Y_{1,h} + \phi_{12}Y_{2,h} \\
\widehat{Y}_{2,h}(1) &= \phi_{21}Y_{1,h} + \phi_{22}Y_{2,h} \\
e_1(1) &= \varepsilon_{1,h+1} \\
e_2(1) &= \varepsilon_{2,h+1}
\end{aligned}$$

ซึ่งแสดงให้เห็นว่าค่าพยากรณ์ของ Y_{1t} และ Y_{2t} ขึ้นอยู่กับตัวแปรทั้งสองในอดีต

สำหรับค่าพยากรณ์สองคาบข้างหน้า เมื่อเราพิจารณาค่าจริง ณ เวลาที่ $h+2$, Y_{h+2}, จะเท่ากับ

$$\boldsymbol{Y}_{h+2} = \boldsymbol{\Phi}\boldsymbol{Y}_{h+1} + \varepsilon_{h+2} = \boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{\Phi}Y_h + \varepsilon_{h+1}) + \varepsilon_{h+2} = \boldsymbol{\Phi}^2Y_h + \boldsymbol{\Phi}\varepsilon_{h+1} + \varepsilon_{h+2} \tag{6.12}$$

เราหาค่าพยากรณ์โดยการคำนวณค่าคาดหมายอย่างมีเงื่อนไขด้วยข้อมูล h เท่ากับ

$$\widehat{\boldsymbol{Y}}_h(2) = E_h(\boldsymbol{Y}_{h+2}) = \boldsymbol{\Phi}^2\boldsymbol{Y}_h + \boldsymbol{\Phi}\underbrace{E_h(\varepsilon_{h+1})}_{=\mathbf{0}} + \underbrace{E_h(\varepsilon_{h+2})}_{=\mathbf{0}} = \boldsymbol{\Phi}^2\boldsymbol{Y}_h \tag{6.13}$$

และค่าคาดเคลื่อนของการพยากรณ์ (forecast error) ของการพยากรณ์ไปข้างหน้าสองคาบ, $\boldsymbol{e}(2)$ จะเท่ากับ

$$\boldsymbol{e}(2) = \boldsymbol{Y}_{h+2} - E_h(\boldsymbol{Y}_{h+2}) = \boldsymbol{\Phi}\varepsilon_{h+1} + \varepsilon_{h+2} \tag{6.14}$$

เมื่อเราพิจารณากรณีของตัวแปรสองตัวแปร เราจะเห็นได้ว่าค่าคาดเคลื่อนของการพยากรณ์ไปข้างหน้าสองคาบของแต่ละตัวแปรจะขึ้นอยู่กับช๊อคของตัวแปรทุกตัวในแบบจำลองดังที่แสดงในสมการต่อไปนี้

$$e_1(2) = \phi_{11}\varepsilon_{1,h+1} + \phi_{12}\varepsilon_{2,h+1} + \varepsilon_{1,h+2} \tag{6.15}$$

$$e_2(2) = \phi_{21}\varepsilon_{1,h+1} + \phi_{22}\varepsilon_{2,h+1} + \varepsilon_{2,h+2} \tag{6.16}$$

ค่าพยากรณ์ไปข้างหน้าสองคาบ $\boldsymbol{Y}_{h+2}$ ด้วยข้อมูลที่มี ณ คาบที่ h จะเท่ากับ

$$\widehat{\boldsymbol{Y}}_h(2) = \boldsymbol{c} + \boldsymbol{\Phi}_1\widehat{\boldsymbol{Y}}_h(1) + ... + \boldsymbol{\Phi}_p\boldsymbol{Y}_{h+2-p} \tag{6.17}$$

โดยที่ค่าความผิดพลาดจากการพยากรณ์ (forecast error) เท่ากับ $\boldsymbol{e}(2) = \boldsymbol{Y}_{h+2} - \widehat{\boldsymbol{Y}}_h(2) = \varepsilon_{h+2} + \boldsymbol{\Phi}_1[\widehat{\boldsymbol{Y}}_h(1) - \boldsymbol{Y}_{h+1}] = \varepsilon_{h+2} + \boldsymbol{\Phi}_1\varepsilon_{h+1}$ หากเราดำเนินการด้วยวิธีการเดิมไปเรื่อยๆ จะได้ค่าพยากรณ์ไปข้างหน้า l คาบ $(\boldsymbol{Y}_{h+l})$ ด้วยข้อมูลที่มี ณ คาบที่ h เท่ากับ

$$\widehat{\boldsymbol{Y}}_h(l) = E_h(\boldsymbol{Y}_{h+l}) = \boldsymbol{\Phi}^l\boldsymbol{Y}_h \tag{6.18}$$

ในขณะที่ค่าคลาดเคลื่อนของการพยากรณ์ไปข้างหน้า l คาบจะเท่ากับ

$$\boldsymbol{e}(l) = \boldsymbol{\Phi}^{l-1}\varepsilon_{h+1} + \boldsymbol{\Phi}^{l-2}\varepsilon_{h+2} + \boldsymbol{\Phi}^{l-3}\varepsilon_{h+3} + ... + \varepsilon_{h+l} \tag{6.19}$$

จากสมการ (6.18 เราจะเห็นได้ว่าแบบจำลอง VAR สามารถนำมาใช้ในการสร้างค่าพยากรณ์ตัวแปรต่างๆได้ง่าย และใช้เพียงแค่ตัวแปร ณ เวลาที่ h หรือก่อนหน้า h

นอกจากนี้หากเราต้องพยากรณ์แบบช่วง เราสามารถแสดงช่วงความเชื่อมั่น $(1-\alpha)$% ของการพยากรณ์ได้ด้วย

$$\widehat{Y_i}, h(l) \pm z_{\alpha/2}\sqrt{Var(e_i(l))}$$

โดยที่ z คือค่าวิกฤตจากการแจกแจงแบบปกติ และ $e_i(l)$ คือค่าคลาดเคลื่อนการพยากรณ์ของตัวแปร i

ในกรณีของแบบจำลองเวคเตอร์ออโตรีเกรสซีฟในรูปแบบโครงสร้าง (structural form VAR) เราสามารถสร้างค่าพยากรณ์ได้ด้วยวิธีการเดียวกัน ยกตัวอย่างเช่น แบบจำลองเวคเตอร์ออโตรีเกรสซีฟในรูปแบบ

โครงสร้างอันดับหนึ่งที่มีตัวแปรสองตัวแปร และอธิบายความสัมพันธ์ด้วยสมการดังต่อไปนี้

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ l_{21} & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} Y_{1t} \\ Y_{2t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi^*_{11} & \phi^*_{12} \\ \phi^*_{21} & \phi^*_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} Y_{1,t-1} \\ Y_{2,t-1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \eta_{1t} \\ \eta_{2t} \end{bmatrix} \tag{6.20}$$

ค่าพยากรณ์ Y_{1t} ไปข้างหน้าหนึ่งคาบเท่ากับ

$$E_h(Y_{1,h+1}) = \phi^*_{11} Y_{1,h} + \phi^*_{12} Y_{2,h}$$

และค่าคลาดเคลื่อนของการพยากรณ์ Y_{1t} ไปข้างหน้าหนึ่งคาบ, $e_1(1)$, เท่ากับ

$$e_1(1) = Y_{1,h+1} - E_h(Y_{1,h+1}) = \eta_{1,h+1}$$

ในขณะที่ค่าพยากรณ์ Y_{2t} ไปข้างหน้าหนึ่งคาบเท่ากับ

$$E_h(Y_{2,h+1}) = -l_{21} E_h(Y_{1,h+1}) + \phi^*_{21} Y_{1,h} + \phi^*_{22} Y_{2,h}$$

และค่าคลาดเคลื่อนของการพยากรณ์ Y_{2t} ไปข้างหน้าหนึ่งคาบ, $e_2(1)$,เท่ากับ

$$\begin{aligned} e_2(1) = Y_{2,h+1} - E_h(Y_{2,h+1}) &= -l_{21}(Y_{1,h+1} - E_h(Y_{1,h+1})) + \eta_{2,h+1} \\ &= -l_{21}\eta_{1,h+1} + \eta_{2,h+1} \end{aligned} \tag{6.21}$$

ตัวอย่างที่ 6.6 การพยากรณ์จากแบบจำลอง VAR เราสามารถทำนายผลได้ตอบแทนไปข้างหน้าของทั้งสองตลาดที่เราสนใจได้ด้วยคำสั่ง `predict` โดยระบุแบบจำลองที่ใช้และคาบที่ทำนายไปข้างหน้า

```
> model1.predict<-predict(model1, n.ahead=5)
> model1.predict
$TH
          fcst lower upper   CI
[1,]  0.14364 -6.09  6.38 6.23
[2,] -0.00965 -6.24  6.23 6.24
[3,]  0.13630 -6.19  6.46 6.32
[4,]  0.10392 -6.22  6.43 6.33
[5,]  0.13238 -6.20  6.46 6.33

$MY
         fcst lower upper   CI
[1,]  0.1644 -4.58  4.91 4.75
[2,] -0.0153 -4.80  4.77 4.79
[3,]  0.0980 -4.75  4.94 4.85
[4,]  0.0832 -4.77  4.93 4.85
[5,]  0.1012 -4.75  4.95 4.85
```

เราจะได้ผลการพยากรณ์ดังแสดงได้ด้วยตารางดังต่อไปนี้

ตารางที่ 6.1: การพยากรณ์ผลได้ตอบแทนรายสัปดาห์ของตลาดหลักทรัพย์ไทยและมาเลเซียจากแบบจำลอง $VAR(2)$

คาบไปข้างหน้า	1	2	3	4	5
log return ของตลาดหุ้นไทย	0.144	-0.010	0.136	0.104	0.132
log return ของตลาดหุ้นมาเลเซีย	0.164	-0.015	0.098	0.083	0.101

6.5 การวิเคราะห์หลังจากการประมาณค่าแบบจำลองเวคเตอร์ออโตรีเกรสซีฟ

แบบจำลองเวคเตอร์ออโตรีเกรสซีฟโดยทั่วไปแล้วจะมีพารามิเตอร์จำนวนมากและอาจจะมีความยุ่งยากในการพิจารณาเนื่องจากความขึ้นอยู่ต่อกันอันจะส่งผลไปมาระหว่างตัวแปร ดังนั้นในการอธิบายความสัมพันธ์ระหว่างตัวแปรจะต้องมีการวิเคราะห์เพิ่มเติมไม่สามารถดูความสัมพันธ์ได้จากแบบจำลองเลยเช่นเดียวกับแบบจำลองอนุกรมเวลาอย่างง่าย

6.5.1 Granger Causality

โครงสร้างของแบบจำลอง VAR ช่วยให้ข้อมูลกับเราว่าตัวแปรหรือกลุ่มของตัวแปรมีความสามารถในการทำนายตัวแปรอื่นหรือไม่ โดยแนวคิดเกี่ยวกับความสามารถในการทำนายถูกนำเสนอโดย Granger (1969) ว่า ถ้าตัวแปร y_1 ช่วยในการทำนายตัวแปรอื่น y_2 เราจะเรียกว่า y_1 แกรงเจอรคอส (Granger-cause) y_2 แต่ถ้า y_1 ไม่ช่วยในการทำนายตัวแปร y_2 เราจะพูดว่า y_1 ไม่แกรงเจอรคอส (does not Granger-cause) y_2

นิยามอย่างเป็นทางการคือ หาก y_1 ไม่แกรงเจอรคอส (does not Granger-cause) y_2 แสดงว่าทุกค่าของ $s > 0$ ค่า MSE ของการพยากรณ์ $y_{2,t+s}$ ด้วยข้อมูลจาก $(y_{2,t}, y_{2,t-1}, ...)$ ไม่มีความแตกต่างจาก ค่า MSE ของการพยากรณ์ $y_{2,t+s}$ ด้วยข้อมูลจาก $(y_{2,t}, y_{2,t-1}, ...)$ และ $(y_{1,t}, y_{1,t-1}, ...)$ เราจะต้องระลึกไว้อยู่เสมอว่าแกรงเจอรคอสเป็นการอนุมานไปยังความสามารถในการพยากรณ์เท่านั้น ไม่ได้เป็นความเป็นเหตุเป็นผลจริงๆ ของตัวแปร

ตัวอย่างกรณีตัวแปรสองตัว

ในหัวข้อนี้เราพิจารณาแบบจำลอง $VAR(2)$ ที่มีตัวแปรสองตัว ซึ่งสามารถเขียนเป็นสมการได้ดังนี้

$$\begin{pmatrix} y_{1t} \\ y_{2t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \phi_{11}^1 & \phi_{12}^1 \\ \phi_{21}^1 & \phi_{22}^1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_{1t-1} \\ y_{2t-1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \phi_{11}^2 & \phi_{12}^2 \\ \phi_{21}^2 & \phi_{22}^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_{1t-2} \\ y_{2t-2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \varepsilon_{1t} \\ \varepsilon_{2t} \end{pmatrix} \tag{6.22}$$

ในสมการที่ (6.22) หาก y_{2t} ไม่แกรงเจอรคอส y_{1t} ค่าสัมประสิทธิ์ ϕ_{12}^1 และ ϕ_{12}^2 จะมีค่าเท่ากับศูนย์ ในทางตรงข้าม ถ้า y_{1t} ไม่แกรงเจอรคอส y_{2t} ค่าสัมประสิทธิ์ ϕ_{21}^1 และ ϕ_{21}^2 จะมีค่าเท่ากับศูนย์

ดังนั้นในการทดสอบว่า y_{2t} แกรงเจอร์คอส y_{1t} หรือไม่ เราจะตั้งสมมุติฐานหลักว่า $H_0 : \phi_{12}^1 = \phi_{12}^2 = 0$ และสมมุติฐานทางเลือกคือมีสัมประสิทธิ์ ϕ_{12}^1 หรือ ϕ_{12}^2 ตัวใดตัวหนึ่งมีค่าไม่เท่ากับศูนย์ ซึ่งการทดสอบดังกล่าวคือการทดสอบหลายเงื่อนไขหรือการทดสอบเอฟ(F-test) นั่นเอง

ตัวอย่างที่ 6.7 การทดสอบ Granger Causality จากแบบจำลอง VAR ต่อเนื่องจากตัวอย่าง 5.3 เราต้องการทดสอบว่า `lret_thmy$TH` แกรงเจอร์คอส `lret_thmy$MY` หรือไม่ (สมมุติฐานหลักคือ `lret_thmy$TH` ไม่แกรงเจอร์คอส `lret_thmy$MY`) เราสามารถทดสอบโดยใช้คำสั่ง `causality` โดยที่เราจะต้องระบุแบบจำลองที่ใช้และตัวแปรที่เป็นสาเหตุ (cause) ซึ่งในที่นี้คือ `lret_thmy$TH`

```
1  > causality(model1, cause="TH")
2  $Granger
3  
4          Granger causality H0: TH do not Granger-cause MY
5  
6  data:  VAR object model1
7  F-Test = 16, df1 = 2, df2 = 2284, p-value = 2e-07
8  
9  $Instant
10 
11         H0: No instantaneous causality between: TH and MY
12 
13 data:  VAR object model1
14 Chi-squared = 151, df = 1, p-value <2e-16
```

จากบรรทัดที่ 2-5 เป็นผลการทดสอบแกรงเจอร์คอส โดยที่ค่าสถิติ F ที่ได้คือ 16 หรือมีค่าพีเท่ากับ 2×10^{-7} ดังนั้นเราสามารถปฏิเสธสมมุติฐานหลักได้ด้วยระดับนัยสำคัญ 5 % เราสรุปได้ว่า `lret_thmy$TH` แกรงเจอร์คอส `lret_thmy$MY` หรือการทราบผลตอบแทนของตลาดหุ้นไทยช่วยในการพยากรณ์ผลตอบแทนในตลาดหุ้นมาเลเซีย

นอกจากนี้บรรทัดที่ 7-10 ได้ทดสอบความสัมพันธ์ในระหว่างช่วงเวลาเดียวกัน (instantaneous causality)

6.5.2 ฟังก์ชันตอบสนองแรงกระตุ้น

การทดสอบสมมุติฐานสำหรับกลุ่มสัมประสิทธิ์(การทดสอบด้วยตัวสถิติ F)หรือการทดสอบแกรงเจอร์คอสช่วยระบุว่าตัวแปรใดๆมีผลกระทบอย่างมีนัยสำคัญต่อตัวแปรอื่นหรือไม่ อย่างไรก็ตาม การทดสอบดังกล่าวไม่ได้บอกทิศทางของความสัมพันธ์และระยะเวลาที่การเปลี่ยนแปลงของตัวแปรหนึ่งจะส่งผลต่ออีกตัวแปรว่าจะมีผลยาวนานแค่ไหน โดยที่เครื่องมือที่จะใช้ศึกษาความสัมพันธ์ดังกล่าวคือฟังก์ชันตอบสนองแรงกระตุ้น (impulse response function) โดยที่นิยามคือ การตอบสนองของตัวแปรตามอันเนื่องมาจากการเปลี่ยนแปลงของตัวแปรอีกตัวหนึ่ง โดยที่หากเกิดการเปลี่ยนแปลงในช็อกหนึ่งหน่วยจะส่งผลอย่างไรต่อแต่ละตัวแปรในคาบที่ต่อจากการเปลี่ยนแปลงนั้นๆ(เนื่องจากบางกรณีขนาดของตัวแปรที่เราสนใจอาจจะมีหน่วยที่ต่างกันมาก เราอาจจะใช้การเปลี่ยนแปลงหนึ่ง s.d.)

ตัวอย่างเช่น หากเราพิจารณาแบบจำลอง $VAR(1)$ ที่มีตัวแปรสองตัวแปร ซึ่งสามารถแสดงได้ด้วยสมการ

$$\begin{pmatrix} y_{1t} \\ y_{2t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.5 & 0.3 \\ 0.0 & 0.2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_{1t-1} \\ y_{2t-1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \varepsilon_{1t} \\ \varepsilon_{2t} \end{pmatrix} \tag{6.23}$$

สมมุติว่าเราพิจารณาว่าในปีที่ 0 เกิดช็อกในตัวแปร y_{1t} หนึ่งหน่วย ($\varepsilon_{10} = 1$) และช็อกในตัวแปร y_{2t} เท่ากับศูนย์ และช็อกในปีอื่นๆเท่ากับศูนย์ สมมุติให้ y_{1t} และ y_{2t} เท่ากับศูนย์ในปีก่อนหน้าปี 0 จะได้ว่า

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{Y}_0 &= \begin{pmatrix} \varepsilon_{10} \\ \varepsilon_{20} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\
\boldsymbol{Y}_1 &= \begin{pmatrix} 0.5 & 0.3 \\ 0.0 & 0.2 \end{pmatrix} \boldsymbol{Y}_0 = \begin{pmatrix} 0.5 & 0.3 \\ 0.0 & 0.2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.5 \\ 0 \end{pmatrix} \\
\boldsymbol{Y}_2 &= \begin{pmatrix} 0.5 & 0.3 \\ 0.0 & 0.2 \end{pmatrix} \boldsymbol{Y}_1 = \begin{pmatrix} 0.5 & 0.3 \\ 0.0 & 0.2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.25 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.25 \\ 0 \end{pmatrix} \\
&\vdots
\end{aligned}$$

หรือในหากเราพิจารณา เกิดช็อกในตัวแปร y_{2t} หนึ่งหน่วย ($\varepsilon_{20} = 1$) และช็อกในตัวแปร y_{1t} เท่ากับศูนย์ และช็อกในปีอื่นๆเท่ากับศูนย์ สมมุติให้ y_{1t} และ y_{2t} เท่ากับศูนย์ในปีก่อนหน้าปี 0 จะได้ว่า

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{Y}_0 &= \begin{pmatrix} \varepsilon_{10} \\ \varepsilon_{20} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\
\boldsymbol{Y}_1 &= \begin{pmatrix} 0.5 & 0.3 \\ 0.0 & 0.2 \end{pmatrix} \boldsymbol{Y}_0 = \begin{pmatrix} 0.5 & 0.3 \\ 0.0 & 0.2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.3 \\ 0.2 \end{pmatrix} \\
&\vdots
\end{aligned}$$

ฟังก์ชันตอบสนองแรงกระตุ้นในกรณีทั่วไป

ในกรณี $VAR(p)$ ที่เป็นกระบวนการนิ่งใดๆ จะสามารถแสดงในรูป Wold ดังนี้

$$\boldsymbol{Y}_t = \boldsymbol{\mu} + \boldsymbol{\varepsilon}_t + \boldsymbol{\Psi}_1 \boldsymbol{\varepsilon}_{t-1} + \boldsymbol{\Psi}_2 \boldsymbol{\varepsilon}_{t-2} + \ldots \tag{6.24}$$

โดยที่ $\boldsymbol{\Psi}_i$ คือ $n \times n$ เมทริกซ์ของสัมประสิทธิ์ moving average โดยที่ค่าสัมประสิทธิ์ดังกล่าวสามารถคำนวณได้จาก

$$(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{\Phi}_1 L - \ldots - \boldsymbol{\Phi}_p L^p)(\boldsymbol{I} + \boldsymbol{\Psi}_1 L + \boldsymbol{\Psi}_2 L^2 + \ldots) = \boldsymbol{I}$$

จากสมการ (6.24) เราอาจต้องการที่จะอธิบาย ϕ^s_{ij} ว่าเป็นการเปลี่ยนแปลงของ

$$\frac{\partial y_{i,t+s}}{\partial \varepsilon_{j,t}} = \frac{\partial y_{i,t}}{\partial \varepsilon_{j,t-s}} = \psi^s_{i,j}$$

อย่างไรก็ตามคำอธิบายข้างต้นจะเป็นจริงหากเมตริกซ์ความแปรปรวนและความแปรปรวนร่วม $var(\varepsilon) = \Sigma$ เป็นเมทริกซ์แทยงมุม หรือไม่มีความสัมพันธ์ $\boldsymbol{\varepsilon}_t$ ในคาบเดียวกัน

Sims (1980) เสนอให้ประมาณค่าด้วยแบบจำลอง triangular structural $VAR(p)$

$$\begin{aligned}
y_{1t} &= c_1 + \boldsymbol{\gamma}'_{11}\mathbf{Y}_{t-1} + ... + \boldsymbol{\gamma}'_{1p}\mathbf{Y}_{t-p} + \eta_{1t} \\
y_{2t} &= c_2 + \beta_{21}y_{1t} + \boldsymbol{\gamma}'_{21}\mathbf{Y}_{t-1} + ... + \boldsymbol{\gamma}'_{2p}\mathbf{Y}_{t-p} + \eta_{2t} \\
y_{3t} &= c_3 + \beta_{31}y_{1t} + \beta_{32}y_{2t} + \boldsymbol{\gamma}'_{31}\mathbf{Y}_{t-1} + ... + \boldsymbol{\gamma}'_{3p}\mathbf{Y}_{t-p} + \eta_{3t} \\
&\vdots \\
y_{nt} &= c_n + \beta_{n1}y_{nt} + ... + \beta_{n,n-1}y_{n-1,t} + \boldsymbol{\gamma}'_{n1}\mathbf{Y}_{t-1} + ... + \boldsymbol{\gamma}'_{np}\mathbf{Y}_{t-p} + \eta_{nt}
\end{aligned} \tag{6.25}$$

เราสามารถเขียนความสัมพันธ์ดังกล่าวในรูปของเมทริกซ์ดังนี้

$$\boldsymbol{B}\boldsymbol{Y}_t = \boldsymbol{c} + \boldsymbol{\Gamma}_1\boldsymbol{Y}_{t-1} + ... + \boldsymbol{\Gamma}_p\boldsymbol{Y}_{t-p} + \boldsymbol{\eta}_t \tag{6.26}$$

โดยที่

$$\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -\beta_{21} & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\beta_{n1} & -\beta_{n2} & -\beta_{n3} & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

โดยที่ Orthogonal error ($\boldsymbol{\eta}_t$) หรือ error ที่ไม่มีความสัมพันธ์ระหว่างกัน ซึ่งก็คือ structural errors

โครงสร้างแบบจำลองโครงสร้าง (structural model)อย่างในสมการ (6.25) จะกำหนดให้ความสัมพันธ์ของตัวแปรมีลำดับคือ y_1 เป็นตัวกำหด y_2 และ y_2 เป็นตัวกำหนด y_3 เป็นลำดับไปเรื่อยๆ

$$y_1 \longrightarrow y_2 \longrightarrow y_3 \longrightarrow ... \longrightarrow y_n$$

แสดงว่าค่าของตัวแปรด้านซ้ายจะกระทบตัวแปรด้านขวาในคาบเดียวกัน (contemporaneous) แต่ตัวแปรด้านขวาจะต้องใช้เวลาหนึ่งคาบถึงจะกระทบกลับมายังตัวแปรด้านซ้าย โดยที่ผลกระทบในคาบเดียวกันจะสะท้อนผ่านตัวแปร β_{ij} โดยที่ลำดับของการเรียงตัวแปรในแบบจำลอง $VAR(p)$ ตามสมการที่ (6.25)จะขึ้นอยู่กับทฤษฎีเป็นตัวกำหนด

หลังจากที่เราได้จัดเรียงตัวแปรแล้ว Wold representation ของ $\boldsymbol{Y}_t$ จากค่าช็อกเชิงตั้งฉาก (orthogonal errors) ได้เป็น

$$\boldsymbol{Y}_t = \boldsymbol{\mu} + \boldsymbol{\Theta}_0 \boldsymbol{\eta}_t + \boldsymbol{\Theta}_1 \boldsymbol{\eta}_{t-1} + \boldsymbol{\Theta}_2 \boldsymbol{\eta}_{t-2} + \ldots \tag{6.27}$$

โดยที่ $\boldsymbol{\Theta}_0 = \boldsymbol{B}^{-1}$ และการตอบสนองแรงกระตุ้นจากช็อกเชิงตั้งฉาก η_{jt} จะเท่ากับ

$$\frac{\partial y_{i,t+s}}{\partial \eta_{j,t}} = \frac{\partial y_{i,t}}{\partial \eta_{j,t-s}} = \theta^s_{ij}, \quad i,j = 1,\ldots,n; s > 0 \tag{6.28}$$

โดยที่ θ^s_{ij} คือ ตำแหน่ง (i,j) ของเมทริกซ์ $\boldsymbol{\Theta}_s$ เราเรียกแผนภาพที่วาด θ^s_{ij} ในแกนตั้งและ s ในแกนนอนว่า ฟังก์ชันตอบสนองแรงกระตุ้นเชิงตั้งฉาก (orthogonal impulse response function) ของ y_i จากช็อก η_j

ในทางปฏิบัติเราสามารถคำนวณ ฟังก์ชันตอบสนองแรงกระตุ้นเชิงตั้งฉากจากผลการประมาณค่า reduced VAR ในสมการ 6.2 ได้ด้วยการแยกส่วนประกอบ(decompose)ของ เมทริกซ์ค่าความแปรปรวนร่วมของ residuals Σ ด้วย Cholesky decomposition ดังนี้ $\Sigma = \boldsymbol{L}\boldsymbol{G}\boldsymbol{L}'$ และ $\boldsymbol{\eta}_t = \boldsymbol{L}^{-1}\boldsymbol{\varepsilon}_t$ จากความสัมพันธ์ดังกล่าวเราสามารถเขียน Wold representation ในสมการ 6.24 ใหม่ได้เป็น

$$\begin{aligned} \boldsymbol{Y}_t &= \boldsymbol{\mu} + \boldsymbol{L}\boldsymbol{L}^{-1}\boldsymbol{\varepsilon}_t + \boldsymbol{\Psi}_1\boldsymbol{L}\boldsymbol{L}^{-1}\boldsymbol{\varepsilon}_{t-1} + \boldsymbol{\Psi}_2\boldsymbol{L}\boldsymbol{L}^{-1}\boldsymbol{Y}_{t-2} + \ldots \\ &= \boldsymbol{\mu} + \boldsymbol{\Theta}_0\boldsymbol{\eta}_t + \boldsymbol{\Theta}_1\boldsymbol{\eta}_{t-1} + \boldsymbol{\Theta}_2\boldsymbol{\eta}_{t-2} + \ldots \end{aligned} \tag{6.29}$$

โดยที่ $\boldsymbol{\Theta}_j = \boldsymbol{\Psi}_j\boldsymbol{L}$ โดยที่เมทริกซ์ $\boldsymbol{B}$ ในสมการ 6.26 คือ $\boldsymbol{L}^{-1}$ นั่นเอง

ตัวอย่างที่ 6.8 การสร้าง Impulse Response Function จากแบบจำลอง VAR ต่อเนื่องจากตัวอย่าง โดยเราจะสร้าง Impulse response function ด้วยคำสั่ง `irf` โดยที่ default ในคำสั่งนี้คือการสร้าง orthogonal impulse response function (`ortho=TRUE`) โดยในคำสั่งนี้เราจะระบุแบบจำลองที่ใช้และคาบที่เราดูผลหลังจากที่เรา shock 1 s.d. โดยที่การเรียงตัวแปรใน `lret` ที่เรียง `lret_thmy$TH` ก่อน `lret_thmy$MY` หมายความว่าเราสมมุติให้ structural shock ของ `lret_thmy$MY` ไม่มีผลทันที(contemporaneous)ต่อ `lret_thmy$TH` แต่ structural shock ของ `lret_thmy$TH` มีผลทันทีต่อ `lret_thmy$MY`

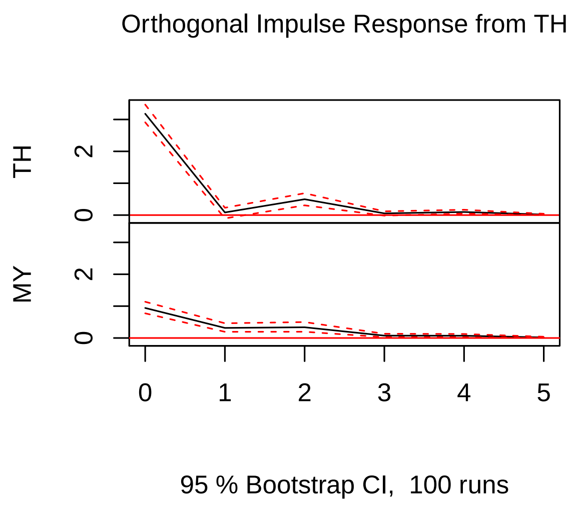
```
> model1.irf<-irf(model1, n.ahead=5)
> model1.irf

Impulse response coefficients
$TH
        TH    MY
[1,] 3.180 0.942
[2,] 0.084 0.316
[3,] 0.498 0.337
[4,] 0.055 0.075
[5,] 0.097 0.071
[6,] 0.017 0.019

$MY
           TH       MY
```

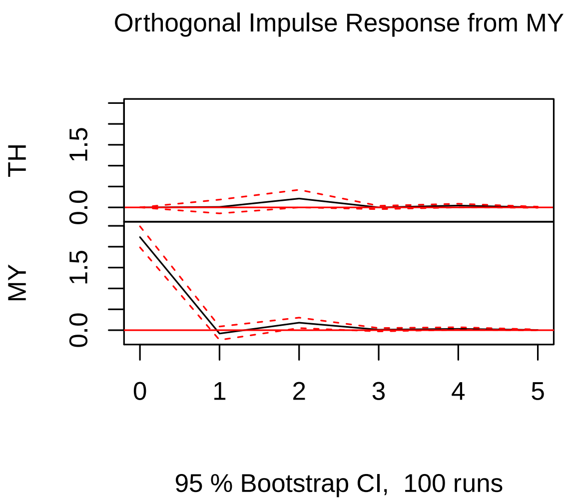
```
[1,]  0.0e+00  2.2303
[2,]  1.1e-02 -0.0805
[3,]  2.1e-01  0.1795
[4,] -4.3e-05  0.0115
[5,]  4.4e-02  0.0313
[6,]  2.3e-03  0.0046
> plot(model1.irf)
```

ส่วนแรก `$TH` เป็นผลจากการเปลี่ยนแปลงใน structural shock ของ `lret_thmy$TH` หนึ่ง s.d. (=3.18) ในคาบที่ศูนย์ (ในที่นี้แทนด้วยบรรทัดที่ [,1]) ทำให้ `lret_thmy$MY` เปลี่ยนแปลงทันที 0.942 และส่งผลต่อ `lret_thmy$TH` และ `lret_thmy$MY` ในคาบที่ 1 (หลังจาก shock) เท่ากับ 0.084 และ 0.316 ตามลำดับ (ในที่นี้แทนด้วยบรรทัดที่ [,2])

ส่วนสอง เป็นผลจากการเปลี่ยนแปลงใน structural shock ของ `lret_thmy$MY` หนึ่ง s.d.(=2.23) ในคาบที่ศูนย์ (ในที่นี้แทนด้วยบรรทัดที่ [,1]) ไม่ทำให้ `lret_thmy$TH` เปลี่ยนแปลงในคาบที่เกิดช็อก แต่ส่งผลในคาบต่อๆไป

นอกจากนี้คำสั่งดังกล่าวยังให้ช่วงความเชื่อมั่น 95% และเราสามารถสร้างกราฟ IRF ได้ด้วยคำสั่ง `plot(model1.irf)` จะได้รูปต่อไปนี้





6.5.3 การแยกความแปรปรวนของค่าคลาดเคลื่อนการพยากรณ์

จากหัวข้อการพยากรณ์จากแบบจำลองเวคเตอร์ออโตรีเกรสซีฟ เราจะเห็นได้ว่าค่าพยากรณ์ของตัวแปรแต่ละตัวแปรนั้นขึ้นอยู่กับทั้งตัวแปรนั้นๆ และตัวแปรอื่นๆในแบบจำลอง ดังนั้น แนวทางอีกประการในการอธิบายผลจากแบบจำลองเวคเตอร์ออโตรีเกรสซีฟ คือการแยกส่วนประกอบของค่าคาดเคลื่อนของการพยากรณ์ (Forecast Error Variance Decomposition) ว่ามีที่มาจากตัวแปรแต่ละตัวมากน้อยแค่ไหน

ยกตัวอย่าง แบบจำลอง $VAR(1)$ ที่มีตัวแปรสองตัว เราพบว่าการพยากรณ์ Y_{1t} ไปข้างหน้าหนึ่งคาบมีค่าคาดเคลื่อนจากการพยากรณ์ (forecast error) ตามสมการที่ (6.11) เท่ากับ

$$e_1(1) = \varepsilon_{1,h+1}$$

ซึ่งค่าคาดเคลื่อนเกิดจากช๊อคในตัวแปร Y_{1t} เพียงอย่างเดียว และมีค่าความแปรปรวนของค่าความคาดเคลื่อนจากการพยากรณ์ไปข้างหน้าหนึ่งคาบ (one-period forecast error variance) เท่ากับ

$$Var(e_1(1)) = Var(\varepsilon_{1,h+1}) = \sigma_1^2$$

ในขณะที่การพยากรณ์ Y_{1t} ไปข้างหน้าสองคาบมีค่าคาดเคลื่อนจากการพยากรณ์ตามสมการที่ 6.15 เท่ากับ

$$e_1(2) = \phi_{11}\varepsilon_{1,h+1} + \phi_{12}\varepsilon_{2,h+1} + \varepsilon_{1,h+2}$$

ซึ่งค่าคาดเคลื่อนเกิดจากช๊อคของตัวแปร Y_{1t} และตัวแปร Y_{2t} เราสามารถคำนวณหาค่าความแปรปรวนของค่า

ความคลาดเคลื่อนจากการพยากรณ์ไปข้างหน้าสองคาบได้ดังสมการต่อไปนี้

$$
\begin{aligned}
Var(e_1(2)) &= Var(\phi_{11}\varepsilon_{1,h+1}) + Var(\phi_{12}\varepsilon_{2,h+1}) + Var(\varepsilon_{1,h+2}) \\
&= \phi_{11}^2\sigma_1^2 + \phi_{12}^2\sigma_2^2 + \sigma_1^2 \qquad (6.30)\\
&= (1+\phi_{11}^2)\sigma_1^2 + \phi_{12}^2\sigma_2^2 \qquad (6.31)
\end{aligned}
$$

และสามารถแยกส่วนประกอบของค่าความแปรปรวนของค่าความคลาดเคลื่อนจากการพยากรณ์ไปข้างหน้าสองคาบว่ามาจาก Y_{1t} เท่ากับ

$$\frac{(1+\phi_{11}^2)\sigma_1^2}{(1+\phi_{11}^2)\sigma_1^2 + \phi_{12}^2\sigma_2^2}$$

และมาจาก Y_{2t} เท่ากับ

$$\frac{\sigma_2^2}{(1+\phi_{11}^2)\sigma_1^2 + \phi_{12}^2\sigma_2^2}$$

เราสามารถอธิบายได้ว่าตัวแปรแต่ละตัวมีอิทธิพลต่อค่าความแปรปรวนการพยากรณ์ตัวแปรที่เราสนใจมากน้อยแค่ไหน

ตัวอย่างที่ 6.9 การหา Variance Decomposition

ต่อเนื่องจากตัวอย่าง 5.3 เราสามารถแยกความแปรปรวนของค่าผิดพลาดจากการพยากรณ์ได้ด้วยคำสั่ง `fevd`

```
> fevd(model1, n.ahead=5)
$TH
     TH      MY
[1,]  1 0.0e+00
[2,]  1 1.3e-05
[3,]  1 4.3e-03
[4,]  1 4.3e-03
[5,]  1 4.5e-03

$MY
       TH   MY
[1,] 0.15 0.85
[2,] 0.17 0.83
[3,] 0.18 0.82
[4,] 0.18 0.82
[5,] 0.18 0.82
```

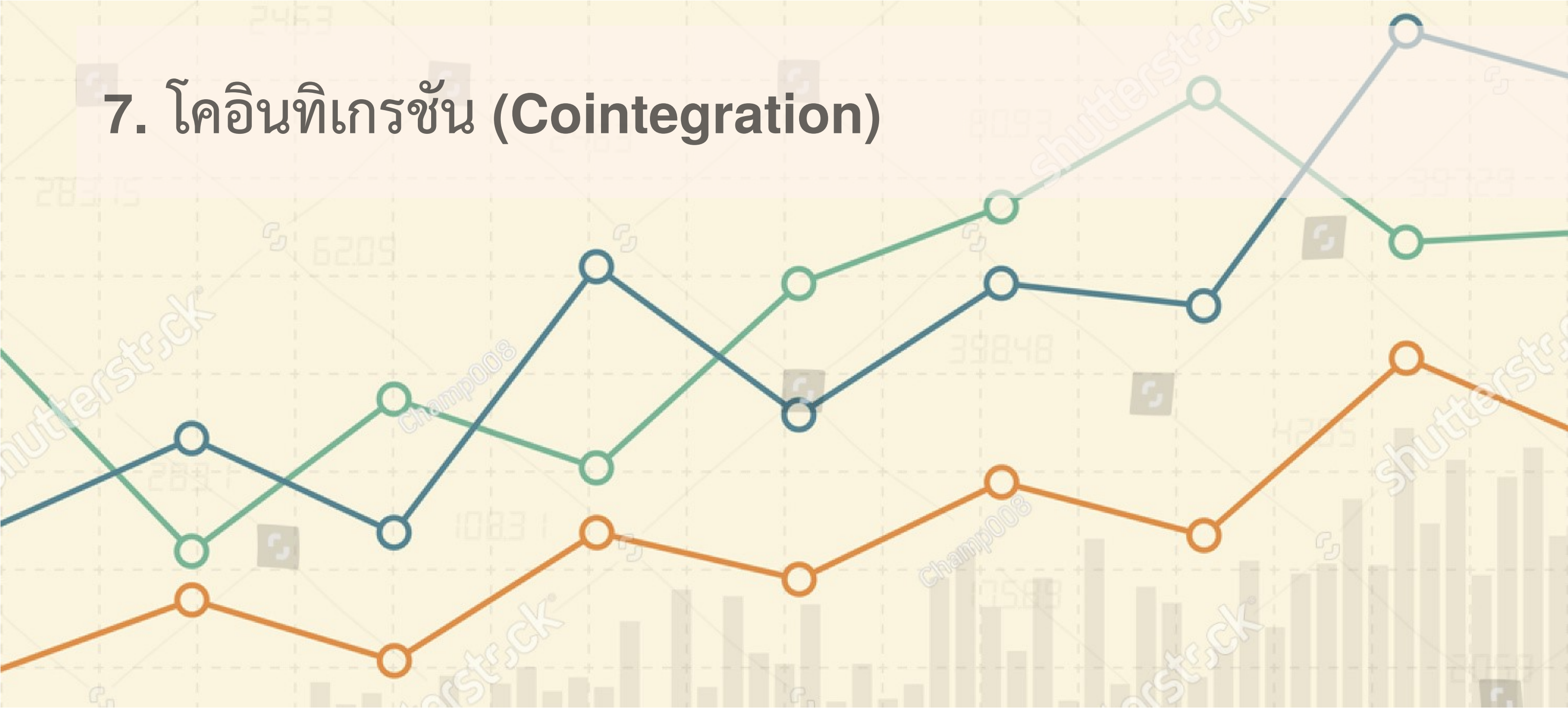
ส่วนที่สอง `$MY` แสดงการแยกความแปรปรวนของค่าคลาดเคลื่อนของการพยากรณ์ `lret_thmy$MY` ไป 1 ถึง 5 คาบ ยกตัวอย่างเช่น การพยากรณ์ไปข้างหน้า 5 คาบ ความแปรปรวนของค่าพยากรณ์เกิดจาก `lret_thmy$MY` เอง 82 % และเกิดจาก `lret_thmy$TH` 18 %

6.6 แบบฝึกฝน

ตัวอย่างที่ 6.10 นักลงทุนต้องการศึกษาความสัมพันธ์ของผลตอบแทนจากตลาดหุ้นสองตลาดได้แก่ ไทย (`R_TH`)และ สิงค์โปร์ (`R_SG`) โดยใช้แบบจำลอง vector Autoregressive โดยใช้ข้อมูลจาก `mkt_th_sg.xls`

1. จงประมาณค่าแบบจำลอง VAR โดยเลือกอันดับที่เหมาะสมโดย BIC(SIC) แล้วเขียนผลการประมาณค่า
2. จงทดสอบสมมุติฐานว่า “`R_TH` ไม่ได้ Granger causes `R_SG`” และ“`R_SG` ไม่ได้ Granger causes `R_TH`”
3. หากเกิดช็อกทางบวก 1 s.d. เกิดขึ้นกับ `R_SG` (impulse) จะส่งผลอย่างไรต่อ `R_TH` ในช่วง 5 period ข้างหน้า (นักศึกษาสามารถทดลองใช้คำสั่ง plot ในการสร้างกราฟ IRF)
4. จงพิจารณา forecast error variance decomposition ของ `R_TH`
5. จงพยากรณ์ผลตอบของดัชนีหลักทรัพย์ของตลาดทั้งสองในอีก 5 วันข้างหน้า

7. โคอินทิเกรชัน (Cointegration)



ในการวิเคราะห์ถดถอยเชิงเส้นสำหรับอนุกรมเวลาและแบบจำลองเวกเตอร์ออโตรีเกรสซีฟตัวแปรจะต้องเป็นข้อมูลที่นิ่งหรืออินทิเกรตที่อันดับศูนย์ เช่นอัตราผลได้ตอบแทนของสินทรัพย์หรืออัตราการเติบโตของตัวแปรเศรษฐกิจมหภาค ในขณะที่ ในการพิจารณาความสัมพันธ์ระหว่างตัวแปรตามทฤษฎีเศรษฐศาสตร์บางตัวแปรเราพบว่าอาจจะมีกรณีที่ตัวแปรไม่นิ่งหรืออินทิเกรตที่อันดับมากกว่าศูนย์ แต่ผู้ศึกษาต้องการพิจารณาตัวแปรดังกล่าว ซึ่งในบางกรณีผลรวมเชิงเส้นตรงของตัวแปรเหล่านั้น อาจจะมีลักษณะเป็นอนุกรมนิ่ง และเราเรียกตัวแปรเหล่านั้นว่าโคอินทิเกรตกัน ซึ่งแนวคิดดังกล่าวถูกนำเสนอโดย Engle and Granger 1987

7.1 สมการความสัมพันธ์เทียม (spurious regression)

ในการวิเคราะห์ถดถอยสำหรับข้อมูลอนุกรมเวลา ตัวแปรที่เราใช้ในการวิเคราะห์จำเป็นจะต้องเป็น $I(0)$ เพื่อที่จะทำให้การทดสอบเชิงสถิติมีความเหมาะสม หากตัวแปรในแบบจำลองบางตัวหรือทั้งหมดเป็น $I(1)$ การทดสอบสถิติอาจจะไม่ถูกต้อง ตัวอย่างเช่นในกรณีที่ตัวแปรทั้งหมดเป็น $I(1)$ และไม่ได้โคอินทิเกรตกัน ตัวทดสอบที่ได้จากแบบจำลองจะไม่เหมาะสม เราจะพบความสัมพันธ์ระหว่างตัวแปรทั้งๆที่จริงๆแล้วตัวแปรทั้งหลายไม่มีความสัมพันธ์กัน หรือเราเรียกสมการความสัมพันธ์เทียม (spurious regression)

ตัวอย่างที่ 7.1 ตัวแปรที่มีอันดับอินทิเกรตเท่ากับหนึ่งและมีความสัมพันธ์เทียม

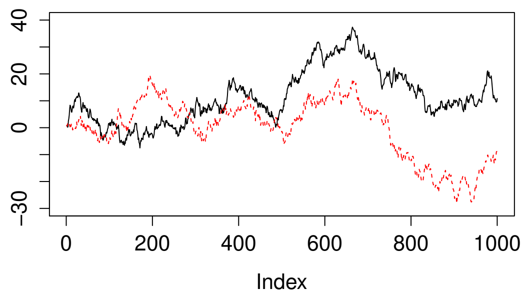
หากเราพิจารณาอนุกรมเวลาสองกระบวนการที่เป็น $I(1)$ และเป็นอิสระต่อกัน เราสามารถแสดงความสัมพันธ์ของแต่ละตัวแปรได้ดังนี้

$$y_{1t} = y_{1,t-1} + \varepsilon_{1t} \quad \varepsilon_{1t} \sim WN(0,1)$$

$$y_{2t} = y_{2,t-1} + \varepsilon_{2t} \quad \varepsilon_{2t} \sim WN(0,1)$$

โดยที่ $Cov(\varepsilon_{1t}, \varepsilon_{2t}) = 0$ ซึ่งแสดงว่าทั้งสองอนุกรมเวลาเป็นอิสระต่อกัน เราสามารถใช้โปรแกรม R สร้างตัวแปรทั้งสองด้วยคำสั่งต่อไปนี้

```
> set.seed(123456)
> e1<-rnorm(1000)
> e2<-rnorm(1000)
> y1<-cumsum(e1)
> y2<-cumsum(e2)
```



รูปที่ 7.1: การจำลองกระบวนการ $I(1)$ สองอนุกรมเวลา

แผนภาพของอนุกรมเวลาทั้งสองสามารถแสดงได้ดังรูปที่ 7.1
เมื่อนำอนุกรมเวลาทั้งสองมาพิจารณาความสัมพันธ์เชิงถดถอย $y_{1t} = \alpha + \beta y_{2t} + u_t$ จะพบว่า $\hat{\beta}$ มีค่าเท่ากับ 0.16 และแตกต่างจากศูนย์อย่างมีนัยสำคัญ ($t_{\hat{\beta}} = 5.6$)

```
> summary(lm(y1~y2))
Call:
lm(formula = y1 ~ y2)

Coefficients:
             Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
(Intercept) 11.43603    0.31329  36.503  < 2e-16 ***
y2           0.16237    0.02885   5.628 2.36e-08 ***
---
Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1

Residual standard error: 9.905 on 998 degrees of freedom
Multiple R-squared: 0.03077,    Adjusted R-squared: 0.02979
F-statistic: 31.68 on 1 and 998 DF,  p-value: 2.363e-08
```

หากเราพิจารณาสมการ $\Delta y_{1t} = \beta \Delta y_{2t} + v_t$ จะพบว่า $\hat{\beta}$ มีค่าเท่ากับ 0.0034 และไม่แตกต่างจากศูนย์อย่างมีนัยสำคัญ

```
> summary(lm(diff(y1)~diff(y2)-1))

Call:
lm(formula = diff(y1) ~ diff(y2) - 1)

Coefficients:
         Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
diff(y2) 0.003455   0.030827   0.112    0.911

Residual standard error: 0.9921 on 998 degrees of freedom
```

```
Multiple R-squared: 1.258e-05,  Adjusted R-squared: -0.0009894
F-statistic: 0.01256 on 1 and 998 DF,  p-value: 0.9108
```

จากตัวอย่างข้างต้นเราจำเป็นต้องระมัดระวังในการพิจารณาความสัมพันธ์ระหว่างอนุกรมเวลาในกรณีที่ตัวแปรที่เราสนใจมีลักษณะเป็น $I(1)$ ซึ่งในกรณีทั่วไปเราจำเป็นต้องปรับให้ตัวแปรดังกล่าวเป็น $I(0)$ ก่อนที่จะพิจารณาความสัมพันธ์ด้วยสมการเช่น $\Delta y_t = \beta \Delta x_t + v_t$ โดยค่าสัมประสิทธิ์ β ก็จะอธิบายการเปลี่ยนแปลงของ Δx_t ต่อการเปลี่ยนแปลงของ Δy_t อย่างไรก็ตามในบางกรณีที่เราอาจจะสามารถศึกษาความสัมพันธ์ระหว่างตัวแปรที่เป็น $I(1)$ ก็ได้ซึ่งในกรณีดังกล่าวคือกรณีที่ตัวแปรเป็น cointegration

7.2 นิยามของโคอินทิเกรชัน

กำหนดให้ $\mathbf{Y}_t = (y_{1t}, y_{2t}, ..., y_{nt})'$ แทนเวกเตอร์ $(n \times 1)$ ของอนุกรมเวลาที่เป็น $I(1)$ แล้ว ตัวแปรใน $\mathbf{Y}_t$ จะโคอินทิเกรตกัน ถ้ามีเวกเตอร์ $\boldsymbol{\beta} = (\beta_1, ..., \beta_n)'$ ที่ทำให้

$$\boldsymbol{\beta}' \mathbf{Y}_t = \beta_1 y_{1t} + ... + \beta_n y_{nt} \sim I(0) \tag{7.1}$$

ซึ่งหมายความว่าผลรวมเชิงเส้น (linear combination) ของตัวแปรที่เป็น $I(1)$ มีลักษณะเป็น $I(0)$ โดยที่ผลรวมเชิงเส้นมักจะได้มาจากทฤษฎีทางเศรษฐศาสตร์ และเรียกสมการดังกล่าวว่าเป็นความสัมพันธ์ใน**ดุลยภาพระยะยาว (long-run equilibrium)** ซึ่งสะท้อนการที่อนุกรมเวลา $I(1)$ มีความสัมพันธ์ในดุลยภาพระยะยาวด้วยกันอยู่ดังนั้นตัวแปรดังกล่าวจะไม่แยกห่างจากกันที่ดุลยภาพ โดยจะมีแรงปรับให้ตัวแปรเข้าสู่ดุลยภาพ

เวกเตอร์ $\boldsymbol{\beta}$ ไม่ได้มีลักษณะเป็นรูปแบบอย่างเดียว (unique) เนื่องจากเวกเตอร์ที่เป็นจำนวนเท่าของ $c\boldsymbol{\beta}'$ ก็สามารถสอดคล้องกับเงื่อนไขในคำนิยามข้างต้นได้ ดังนั้น เรามักจะสนใจในรูปแบบที่ปรับเป็นบรรทัดฐาน (normalized)ซึ่งเขียนสมการโคอินทิเกรชันได้ดังนี้

$$\boldsymbol{\beta}' \mathbf{Y}_t = y_{1t} - \beta_2 y_{2t} - ... - \beta_n y_{nt} \sim I(0)$$

หรือเป็นสมการ

$$y_{1t} = \beta_2 y_{2t} + ... + \beta_n y_{nt} + u_t \tag{7.2}$$

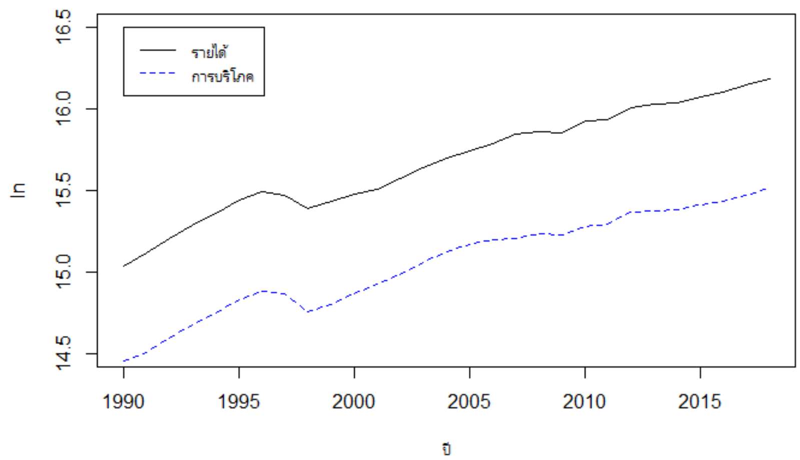
โดยที่ $u_t \sim I(0)$ และเราเรียกพจน์ u_t ว่าค่าคลาดเคลื่อนจากดุลยภาพ (disequilibrium error) หรือ cointegrating residuals ซึ่งหากเราอยู่ในดุลยภาพระยะยาวค่าคลาดเคลื่อนจากดุลยภาพจะมีค่าเท่ากับศูนย์ เราจะได้ความสัมพันธ์ระยะยาวจะเท่ากับ $y_{1t} = \beta_2 y_{2t} + ... + \beta_n y_{nt}$

เพื่อให้ผู้อ่านเข้าใจความสัมพันธ์ระยะยาวระหว่างตัวแปรทางเศรษฐกิจ ตัวอย่างต่อไปนี้จะนำเสนอตัวแปรทางเศรษฐกิจที่เรามักจะพบว่าเป็นตัวแปรที่ไม่นิ่ง และผลรวมเชิงเส้นมีลักษณะเป็นตัวแปรนิ่ง

ตัวอย่างที่ 7.2 ทฤษฎีการบริโภครายได้ถาวร ทฤษฎีการบริโภครายได้ถาวรเสนอว่าความสัมพันธ์ระยะยาวระหว่างการบริโภคในรูปลอการิทึมกับรายได้ในรูปลอการิทึมสามารถเขียนเป็นสมการ

$$\ln(rc_t) = \beta_0 + \beta_1 \ln(ry_t) + u_t$$

โดยที่ ε_t คือพจน์ตัวรบกวน จากรูป 7.2 จะเห็นได้ว่าแม้ว่าการบริโภคและรายได้ประชาชาติจะเป็นตัวแปรไม่นิ่งแต่ตัวแปรทั้งสองขยับไปด้วยกันในระยะยาว แม้ว่าจะมีบางช่วงที่ตัวแปรทั้งสองจะขยับออกจากกันเนื่องจากการเปลี่ยนแปลงในวัฏจักรธุรกิจ

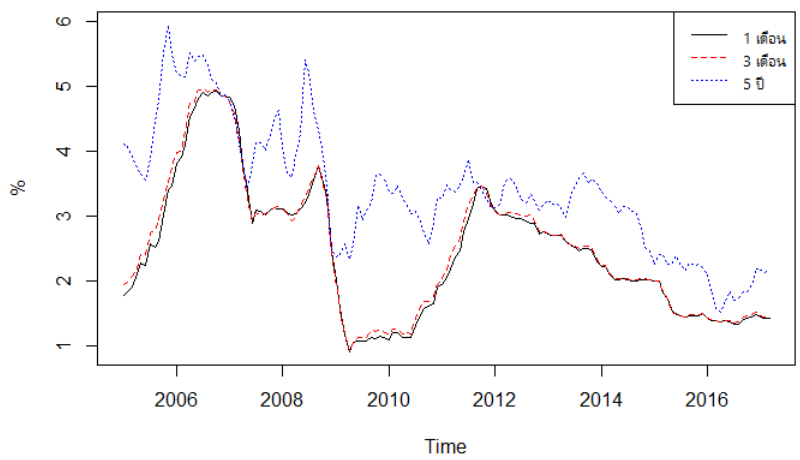


รูปที่ 7.2: การบริโภคภาคเอกชนและรายได้ประชาชาติของไทย ณ ราคาคงที่ระหว่างปี 1990 ถึง 2018

ตัวอย่างที่ 7.3 ทฤษฎีโครงสร้างอัตราดอกเบี้ยตามระยะเวลาไถ่ถอน โครงสร้างอัตราดอกเบี้ยตามระยะเวลาไถ่ถอน (term structure of interest rate) อธิบายความสัมพันธ์ระหว่างอัตราดอกเบี้ยพันธบัตรที่มีช่วงเวลาไถ่ถอนที่แตกต่างกัน สำหรับพันธบัตรที่มีความเสี่ยงเท่ากันอัตราผลตอบแทนในระยะยาวจะเท่ากับผลรวมของอัตราผลตอบแทนระยะสั้นตลอดช่วงเวลาดังกล่าว ดังนั้นผลตอบแทนระยะยาวจะสูงกว่าผลตอบแทนระยะสั้น และจะมีการเปลี่ยนแปลงไปในทิศทางเดียวกัน ดังรูป 7.3 อัตราดอกเบี้ยทั้งสามระยะเวลาไถ่ถอนเป็นตัวแปรไม่นิ่ง แต่ตัวแปรทั้งสามมีความสัมพันธ์ระยะยาวซึ่งสามารถแสดงได้ด้วยสมการ

$$\begin{aligned} r_{3m,t} &= \beta_{0,1} + \beta_{1,1} r_{1m,t} + u_{1t} \\ r_{5y,t} &= \beta_{0,2} + \beta_{1,2} r_{1m,t} + u_{2t} \end{aligned}$$

โดยที่ r_{1m}, r_{3m}, r_{5y} คืออัตราดอกเบี้ยของตราสารหนี้และพันธบัตรที่อายุไถ่ถอน 1 เดือน 3 เดือนและ 5 ปีตามลำดับ โดยที่ ε_{1t} และ ε_{2t} เป็นตัวรบกวนซึ่งเป็นตัวแปรนิ่ง



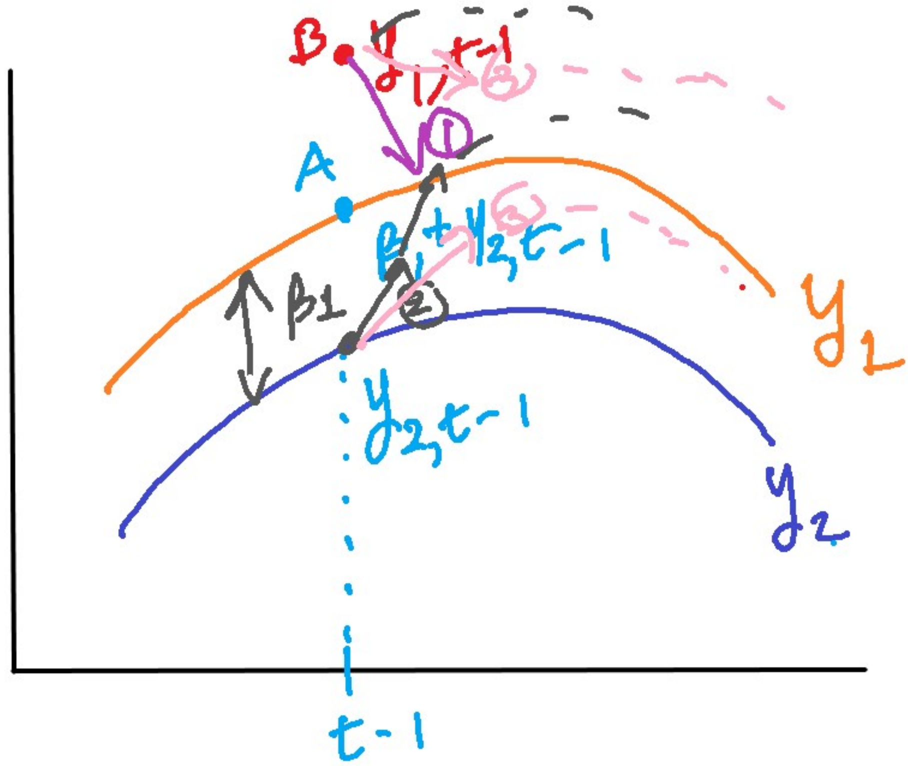
รูปที่ 7.3: อัตราดอกเบี้ยตราสารหนี้และพันธบัตรรัฐบาลรายเดือนระหว่างเดือนมกราคม 2005 ถึง มีนาคม 2017

7.2.1 โคอินทิเกรชันและแบบจำลองเอเรอคอเรคชัน

จากหัวข้อที่ผ่านมาเราพบว่าหากตัวแปรมีคุณลักษณะเป็นโครอินทิเกรชัน เราสามารถอธิบายความสัมพันธ์ระยะยาวระหว่างตัวแปรยาวระหว่างความตัวแปรว่ามีความสัมพันธ์อย่างไรในระยะยาว เช่นหากตัวแปรมีความสัมพันธ์ในทางบวกการเปลี่ยนแปลงของตัวแปรหนึ่งย่อมส่งผลให้ตัวแปรอีกตัวหนึ่งเปลี่ยนแปลงไปในทิศทางเดียวกัน ดังเช่นตัวอย่างการบริโภคตามรายได้ถาวรซึ่งสามารถเขียนเป็นสมการในรูปทั่วไปสำหรับกรณีตัวแปรสองตัวแปร (y_{1t} และ y_{2t}) ซึ่งเป็นตัวแปรที่อินทิเกรตที่อันดับที่หนึ่งดังนี้

$$y_{1t} = \beta_1 + \beta_2 y_{2t} + u_t \tag{7.3}$$

ในระยะยาวตัวแปรทั้งสองจะเคลื่อนไหวไปด้วยกันตามความสัมพันธ์ $y_{1t} = \beta_1 + \beta_2 y_{2t}$ และมีพจน์ที่แสดงการเบี่ยงเบนจากดุลยภาพ (disequilibrium: u_t) ซึ่งพจน์ดังกล่าวเป็นตัวแปรนิ่ง สิ่งที่เราสนใจต่อไปคือหากเกิดภาวะที่ในระยะสั้นตัวแปรขยับออกจากดุลยภาพในระยะยาว จะมีกลไกในการปรับตัวเข้าสู่ดุลยภาพระยะยาวอย่างไร ตัวอย่างเช่นหากสมมุติให้ตัวแปรในสมการ 7.3 มีความสัมพันธ์ในเชิงบวก $\beta_2 = 1$ และ β_1 มีค่าเป็นบวก ตัวแปรทั้งสองจะขยับไปด้วยกันในระยะยาวดังเส้นทึบในรูป 7.4



รูปที่ 7.4: การปรับตัวของตัวแปรในระยะสั้น

หากในคาบที่ $t-1$ ตัวแปรขยับจากดุลยภาพเช่น $u_{t-1} > 0$ ซึ่งเกิดจาก $y_{1,t-1} > \beta_1 + \beta_2 y_{2,t-1}$ ซึ่งแสดงด้วยจุด B ในระยะยาวตัวแปรทั้งสองจะต้องขยับไปในทิศทางเดียวกันด้วยระยะห่าง β_1 อีกครั้ง ซึ่งการปรับตัวอาจจะเกิดจาก

1. การปรับตัวโดย y_{1t} เพียงตัวแปรเดียว ในกรณีดังกล่าวตัวแปร y_{1t} จะปรับตัวลดลงมาเพื่อกลับเข้าสู่เส้นทางเดิม ในขณะที่ y_{2t} ไม่เปลี่ยนแปลงไปจากเส้นทางเดิม ซึ่งการปรับตัวสามารถอธิบายได้ด้วย

$$y_{1t} = y_{1,t-1} + \alpha_1 u_{t-1} + v_{1,t}$$

   โดยที่ $\alpha_1 < 0$ และ $v_{1,t}$ เป็นตัวรบกวนของการปรับตัว

2. การปรับตัวโดย $y_{2,t}$ เพียงตัวแปรเดียว ในกรณีนี้ ตัวแปร y_{1t} จะเดินทางบนเส้นทางใหม่ที่ขยับสูงไปกว่าเดิม ดังนั้นเพื่อให้เข้าสู่ดุลยภาพอีกครั้ง y_{2t} จะต้องปรับตัวสูงขึ้น ซึ่งสามารถอธิบายได้ด้วยสมการ

$$y_{2t} = y_{2,t-1} + \alpha_2 u_{t-1} + v_{2,t}$$

   โดยที่ $\alpha_2 > 0$ และ $v_{2,t}$ เป็นตัวรบกวนของการปรับตัว

3. กรณีที่ตัวแปรทั้งสองปรับตัวเข้าสู่เส้นทางใหม่ซึ่งทั้งสองตัวแปรห่างกัน β_1 โดยในกรณีนี้การปรับตัวจะขึ้นอยู่กับขนาดของ α_1 และ α_2

การปรับตัวดังกล่าวสามารถอธิบายได้ด้วยแบบจำลองเอเรอคอเรคชัน หรือ อีซีเอ็ม (Error Correction Model: ECM) ซึ่งถูกนำเสนอโดย Engle and Granger 1987 แสดงให้เห็นว่าการปรับตัวในระยะสั้นสามารถแสดงได้ในรูป

$$\begin{aligned}\Delta y_{1t} &= c_1 + \alpha_1(y_{1,t-1} - \beta_1 - \beta_2 y_{2,t-1}) + \textstyle\sum_{j=1}^{p} \psi_{11}^{j} \Delta y_{1,t-j} + \sum_{j=1}^{p} \psi_{12}^{j} \Delta y_{2,t-j} + \varepsilon_{1t} \\ \Delta y_{2t} &= c_2 + \alpha_2(y_{1,t-1} - \beta_1 - \beta_2 y_{2,t-1}) + \textstyle\sum_{j=1}^{p} \psi_{21}^{j} \Delta y_{1,t-j} + \sum_{j=1}^{p} \psi_{22}^{j} \Delta y_{2,t-j} + \varepsilon_{2t}\end{aligned} \tag{7.4}$$

สมการข้างต้นแสดงพฤติกรรมเชิงพลวัตรของ y_{1t} และ y_{2t} โดยแสดงการปรับตัวระยะสั้นเมื่อตัวแปรตัวใดตัวหนึ่งเคลื่อนตัวออกไปจากดุลยภาพ ซึ่งแบบจำลองเอเรอคอเรคชันถูกนำไปใช้ในการอธิบายการปรับตัวระยะสั้นของตัวแปรทางการเงินทั้งหลายที่ส่วนใหญ่มักจะมีลักษณะเป็นอินทิเกรตที่อันดับหนึ่ง

ตัวอย่างที่ 7.4 แบบจำลองเอเรอคอเรคชันสำหรับราคาหุ้นและเงินปันผล กำหนดให้ล็อกของราคาหุ้น (s_t) และล็อกของเงินปันผล (d_t) เป็น $I(1)$ ถ้าล็อกของสัดส่วนเงินปันผลต่อราคา ($\log(D_t/S_t)$) เป็น $I(0)$ ดังนั้น $d_t - s_t \sim I(0)$ หรือเขียนเป็นสมการความสัมพันธ์ระยะยาวได้เป็น

$$d_t = s_t + \mu + u_t \tag{7.5}$$

โดยที่ $u_t \sim I(0)$ และสามารถเขียน ECM ได้ดังนี้

$$\Delta s_t = c_s + \alpha_s(d_{t-1} - s_{t-1} - \mu) + \varepsilon_{st} \tag{7.6}$$

$$\Delta d_t = c_d + \alpha_d(d_{t-1} - s_{t-1} - \mu) + \varepsilon_{dt} \tag{7.7}$$

โดยที่สมการ 7.6 แสดงความสัมพันธ์ระหว่างอัตราการเปลี่ยนแปลงของราคาหุ้นกับ disequilibrium error ($d_{t-1} - s_{t-1} - \mu$) ในขณะที่สมการ 7.7 แสดงความสัมพันธ์ระหว่างอัตราการเปลี่ยนแปลงของเงินปันผลกับ disequilibrium error โดยมีการตอบสนองของราคาหุ้นและเงินปันผลขึ้นอยู่กับค่าสัมประสิทธิ์การปรับตัว (adjustment coefficient) α_s และ α_d
สมมุติให้ $\alpha_s = 0.5$ และ $\alpha_d = 0$ จะได้

$$\begin{aligned}\Delta s_t &= c_s + 0.5(d_{t-1} - s_{t-1} - \mu) + \varepsilon_{st} \\ \Delta d_t &= c_d + \varepsilon_{dt}\end{aligned}$$

ดังนั้นมีเพียงราคาหุ้นที่ตอบสนองต่อ disequilibrium error โดยที่ค่าเฉลี่ยของการเปลี่ยนแปลงของตัวแปรทั้งสองจะขึ้นอยู่กับข้อมูลในอดีต

$$\begin{aligned}E(\Delta s_t|F_{t-1}) &= c_s + 0.5(d_{t-1} - s_{t-1} - \mu) \\ E(\Delta d_t|F_{t-1}) &= c_d\end{aligned}$$

ซึ่งเราสามารถพิจารณาการเปลี่ยนแปลงได้ดังนี้

1. หาก $d_{t-1} - s_{t-1} - \mu = 0$ ดังนั้น $E(\Delta s_t|F_{t-1}) = c_s$ และ $E(\Delta d_t|F_{t-1}) = c_d$ หากไม่มีการเปลี่ยนแปลงออกจากดุลยภาพระยะยาวในคาบที่ผ่านมา อัตราการเปลี่ยนแปลงของทั้งสองตัวแปรจะเท่ากับค่าเฉลี่ยของการเปลี่ยนแปลง

2. หาก $d_{t-1} - s_{t-1} - \mu > 0$ ดังนั้น $E(\Delta s_t|F_{t-1}) = c_s + 0.5(d_{t-1} - s_{t-1} - \mu) > c_s$ เนื่องจากเงินปันผลสูงกว่าราคาหุ้นที่จะรักษาดุลยภาพระยะยาว ดังนั้น ECM พยากรณ์ว่า s_t จะเปลี่ยนแปลงที่อัตราสูงกว่าอัตราที่ดุลยภาพในระยะยาว ($> c_s$) เพื่อรักษาสัดส่วนราคาหุ้นต่อเงินปันผล โดยที่ความเร็วในการปรับตัว (speed of adjustment) แสดงได้ด้วยพารามิเตอร์ $\alpha_s = 0.5$

7.2.2 ความสัมพันธ์โคอินทิเกรชันกรณีหลายตัวแปร

กรณีที่มีตัวแปรที่เราพิจารณามากกว่าสองตัวแปรเช่น กรณีที่เราสนใจเวกเตอร์ของอนุกรมเวลาของตัวแปร n ตัวแปร $\boldsymbol{Y}_t = (y_{1t}, \ldots, y_{nt})'$ ซึ่งเป็นอนุกรมเวลาที่โคอินทิเกรตกัน ความสัมพันธ์ระหว่างหว่างตัวแปรทั้ง n ตัวแปรนั้นอาจจะเท่ากับ r รูปแบบ ซึ่ง $0 < r < n$ ตัวอย่างเช่นกรณีที่เราพิจารณาตัวแปร 3 ตัวแปร ได้แก่ y_{1t}, y_{2t}, y_{3t} ซึ่งสามารถเขียนเป็นเวกเตอร์ ได้ดังนี้ $\boldsymbol{Y}_t = (y_{1t}, y_{2t}, y_{3t})'$ ซึ่งตัวแปรทั้งสามอาจจะมีผลรวมเชิงเส้นสองสมการซึ่งเป็นตัวแปรนิ่ง ได้แก่

$$\beta_{11}y_{1t} + \beta_{12}y_{2t} + \beta_{13}y_{3t} \sim I(0)$$

และ

$$\beta_{21}y_{1t} + \beta_{22}y_{2t} + \beta_{23}y_{3t} \sim I(0)$$

และเราเรียกเวกเตอร์ของค่าสัมประสิทธิ์ $(\beta_{11} \quad \beta_{12} \quad \beta_{13})'$ และ $(\beta_{21} \quad \beta_{22} \quad \beta_{23})'$ ว่าเวกเตอร์สัมประสิทธิ์โคอินทิเกรต (cointegrating vector)

จากนิยามโคอินทิเกรชัน และความสัมพันธ์ระยะยาวของตัวแปรที่พิจารณา ในการประยุกต์กับข้อมูลทางการเงินหรือเศรษฐกิจ เราต้องการที่จะทราบว่าตัวแปรไม่นิ่งที่เราพิจารณาอยู่นั้นมีความสัมพันธ์ในลักษณะโคอินทิเกรชันหรือไม่ ในหัวข้อ 7.3 ผู้เขียนจะอธิบายการทดสอบว่าตัวแปรมีลักษณะโคอินทิเกรชันหรือไม่ โดยใช้แนวทางของ Engle and Granger 1987 ซึ่งต้องการทดสอบว่าตัวแปรโคอินทิเกรตกันเมื่อพิจารณาสมการเพียงสมการเดียว ในขณะที่หัวข้อที่ 7.5 จะทดสอบโคอินทิเกรชันและหาจำนวนของความสัมพันธ์ระยะยาวตามแนวทางของ Johansen (Johansen 1988)

7.3 การทดสอบโคอินทิเกรชันด้วยวิธีการทดสอบเรซิดิวตามแนวทางของเองเกิลและเกรนเจอร์

เองเกิล (Engle) และเกรนเจอร์ (Granger) ได้นำเสนอวิธีการในการทดสอบโคอินทิเกรชันในบทความ Engle and Granger 1987 โดยใช้แนวคิดจากนิยามของโคอินทิเกรชันซึ่งหากตัวแปรที่พิจารณาโคอินทิเกรตกัน ผลรวมเชิงเส้นตรงของตัวแปรจะเป็นตัวแปรนิ่ง นอกจากนี้เราสามารถเขียนสมการถดถอยของตัวแปรที่พิจารณาและเทียบเทียบเรซิดิว (residual) กับผลรวมเชิงเส้นตรงได้ ผลรวมเชิงเส้นตรงเป็นตัวแปรนิ่งก็ต่อเมื่อเรซิดิวเป็นตัวแปรนิ่งด้วย ดังนั้น Engle และ Granger ได้นำเสนอการทดสอบโคอินทิเกรชันโดยใช้วิธีการสองขั้นตอนดังนั้น

1. สร้างเรซิดิวของสมการโคอินทิเกรชัน (cointegrating residuals) โดยที่ $u_t = \beta_1 y_{1t} + ... + \beta_n y_{nt}$

2. ทดสอบว่าเรซิดิวเป็นตัวแปรนิ่งหรือไม่ ด้วยการทดสอบยูนิทรูท หาก u_t เป็นตัวแปรนิ่งหรืออินทิเกรตที่อันดับศูนย์ ($I(0)$) แสดงว่าตัวแปร $y_{1t},...,y_{nt}$ โคอินทิเกรตกัน อนึ่งการทดสอบดังกล่าวมีสมมุติฐานหลักว่า u_t อินทิเกรตที่อันดับหนึ่ง หรือตัวแปร $y_{1t},...,y_{nt}$ ไม่โคอินทิเกรตกันนั่นเอง

อย่างไรก็ตามการทดสอบโคอินทิเกรชันตามแนวทางของ Engle และ Granger ขึ้นอยู่กับการสร้างเรซิดิวซึ่งต้องใช้ค่าสัมประสิทธิ์โคอินทิเกรชัน ซึ่งในทางปฏิบัติเราอาจจะแบ่งออกได้เป็นสองกรณีคือ *กรณีที่หนึ่ง* เราทราบความสัมพันธ์ของอนุกรมเวลาที่เราสนใจ เช่น จากทฤษฎีเราทราบความสัมพันธ์ระหว่างล็อกของราคาหุ้น (s_t) และล็อกของเงินปันผล (d_t) ว่าสามารถแสดงเป็นสมการ $s_t - d_t = u_t$ หรือเวกเตอร์โคอินทิเกรชันสามารถแสดงได้โดย $\beta = (1 - 1)'$ ดังนั้นเราสามารถคำนวนเรซิดิวของสมการโคอินทิเกรชัน ได้ทันที *กรณีที่สอง* กรณีที่เราไม่ทราบความสัมพันธ์ระหว่างตัวแปร ในกรณีนี้ เราจำเป็นต้องประมาณค่าสัมประสิทธิ์โคอินทิเกรชัน $(\hat{\beta})$ และสร้างตัวประมาณค่าของเรซิดิวจาก $\hat{u}_t = \hat{\beta}' \mathbf{Y}_t$

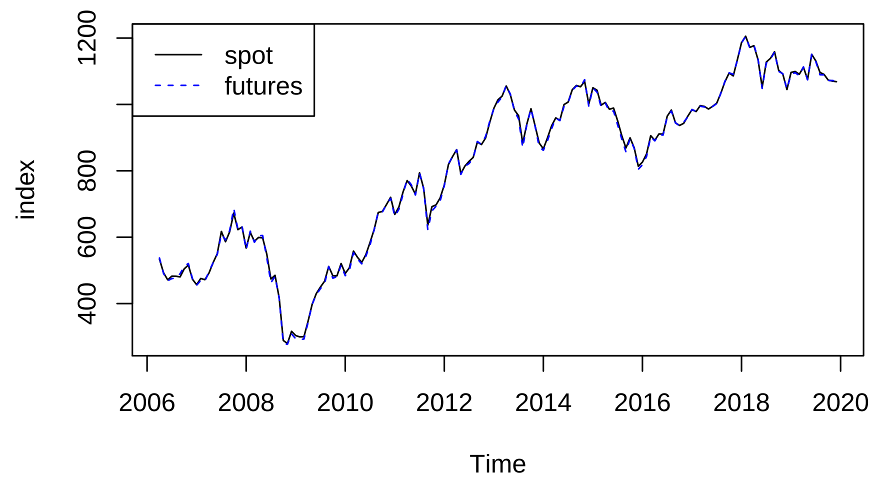
7.3.1 การทดสอบกรณีทราบค่าสัมประสิทธิ์โคอินทิเกรชัน

ในการศึกษาความสัมพันธ์ระหว่างตัวแปร เรามักจะมีทฤษฎีที่อธิบายความสัมพันธ์ของตัวแปรที่เราสนใจ ในกรณีดังกล่าวเราสามารถสร้างเรซิดิวโคอินทิเกรชันจากค่าสัมประสิทธิ์จากทฤษฎี เช่นกำหนดให้ $\mathbf{Y}_t$ เป็นเวกเตอร์ $n \times 1$ ตัวแปรซึ่งอินทิเกรตที่อันดับหนึ่ง ($I(1)$) และโคอินทิเกรตกันด้วยสมการความสัมพันธ์สามารถแสดงได้ด้วยเวกเตอร์โคอินทิเกรชัน $\boldsymbol{\beta}$ เราสามารถคำนวณเรซิดิวได้จากสมการ $u_t = \boldsymbol{\beta}' \mathbf{Y}_t$ หลังจากนั้นเราจะทดสอบเรซิดิวภายใต้สมมุติฐานหลักที่ว่า เรซิดิวมีลักษณะเป็นอินทิเกรตที่อันดับหนึ่ง $H_0 : u_t = \boldsymbol{\beta}' \mathbf{Y}_t \sim I(1)$ หรือไม่ ซึ่งสมมุติฐานหลักสะท้อนว่าตัวแปรที่เราพิจารณาไม่มีโคอินทิเกรต ในขณะที่สมมติฐานทางเลือกคือเรซิดิวมีลักษณะอินทิเกรตที่อันดับศูนย์ หรือตัวแปรที่พิจารณาโคอินทิเกรตกัน $H_1 : u_t = \boldsymbol{\beta}' \mathbf{Y}_t \sim I(0)$

เราจะเห็นได้ว่าเรซิดิวที่สร้างขึ้นเป็นการผนวกเอาตัวแปรที่พิจารณาเข้าด้วยกัน ดังนั้นเราสามารถทดสอบยูนิทรูทของเรซิดิวด้วยตัวทดสอบที่เราได้กล่าวถึงแล้วในบทที่ผ่านมาเช่น Augmented Dickey Fuller หรือ Phillip-Perron กับตัวแปร u_t ซึ่งหากเราปฏิเสธสมมุติฐานหลัก เราจะสรุปว่า $\mathbf{Y}_t$ โคอินทิเกรตกัน

ตัวอย่างที่ 7.5 การพิจารณาความสัมพันธ์ระหว่างราคาปัจจุบันและราคาฟิวเจอร์ของดัชนีหลักทรัพย์ SET50

เราพิจารณาความสัมพันธ์ระหว่างราคาปัจจุบัน (spot price: S_t) และราคาฟิวเจอร์ (future price: F_t) ของดัชนีราคาหลักทรัพย์ SET50 ระหว่างเมษายน 2006 ถึงกันยายน 2016 ซึ่งรูปแสดงราคาทั้งสอง



รูปที่ 7.5: ราคาปัจจุบันและราคาฟิวเจอร์ของดัชนีหลักทรัพย์ SET50

ตัวแปรทั้งสองมีความสัมพันธ์ตามแบบจำลองต้นทุนการถือทรัพย์ (cost of carry model) ซึ่งอธิบายว่าราคาฟิวเจอร์จะเท่ากับราคาปัจจุบันบวกด้วยต้นทุนของการถือทรัพย์นั้น หรือล็อกของราคาปัจจุบัน (s_t) จะเท่ากับล็อกของราคาฟิวเจอร์ (f_t) บวกกับค่าคงที่(ซึ่งสะท้อนต้นทุนในการถือสินทรัพย์)

$$f_t = s_t + c$$

ก่อนการทดสอบโคอินทิเกรชัน เราจะพิจารณาอันดับของอินเกรชันของตัวแปรทั้งสอง โดยการทดสอบยูนิทรูทด้วยวิธีการ Augmented Dickey Fuller ด้วยคำสั่ง `ur.df` จากชุดคำสั่ง urca โดยใช้คำสั่งดังต่อไปนี้

```
> set50 <- read_csv("G:/My Drive/teaching/ec435/data/set50_m0619.csv")
> lspot<-log(set50$spot)
> lfutures<-log(set50$futures)
> library(urca)
> summary(ur.df(lspot, type="drift", selectlags = "BIC"))
Value of test-statistic is: -1.3894 1.3627

Critical values for test statistics:
      1pct  5pct 10pct
tau2 -3.46 -2.88 -2.57
phi1  6.52  4.63  3.81

```

```
> summary(ur.df(diff(lspot), type="drift", selectlags = "BIC"))

Value of test-statistic is: -8.9508 40.0633

Critical values for test statistics:
      1pct  5pct 10pct
tau2 -3.46 -2.88 -2.57
phi1  6.52  4.63  3.81

> summary(ur.df(lfutures, type="drift", selectlags = "BIC"))

Value of test-statistic is: -1.4079 1.3667

Critical values for test statistics:
      1pct  5pct 10pct
tau2 -3.46 -2.88 -2.57
phi1  6.52  4.63  3.81

> summary(ur.df(diff(lfutures), type="drift", selectlags = "BIC"))

Value of test-statistic is: -9.1078 41.4813

Critical values for test statistics:
      1pct  5pct 10pct
tau2 -3.46 -2.88 -2.57
phi1  6.52  4.63  3.81
```

กรณีของ lspot พบว่าค่าสถิติทีเท่ากับ -1.389 มากกว่าค่าวิกฤตที่นัยสำคัญ 0.05 (-2.88) เราไม่สามารถปฏิเสธสมมุติฐานได้ แสดงว่า lspot เป็นยูนิรูท หากเราแปลงตัวแปรดังกล่าวด้วยการหาผลต่างอันดับที่หนึ่ง หรือพิจารณา diff(lspot) พบว่าค่าสถิติทีเท่ากับ -8.591 น้อยกว่าค่าวิกฤติแสดงว่า diff(lspot) เป็นตัวแปรนิ่ง และ lspot เป็นอินทิเกรตที่อันดับหนึ่ง

เมื่อเราพิจารณา lfuture เราก็ได้ข้อสรุปเช่นเดียวกัน คือ lfuture เป็นอินทิเกรตที่อันดับหนึ่ง ดังนั้น เราไม่สามารถประมาณค่าความสัมพันธ์ระหว่างตัวแปรทั้งสองด้วยวิธีการกำลังสองน้อยที่สุดได้ ยกเว้นกรณีที่ตัวแปรทั้งสองโคอินทิเกรตกัน

ขั้นตอนถัดไป เราทดสอบโคอินทิเกรชัน โดยที่เราทราบตัวแปรทั้งสองมีความสัมพันธ์ตามทฤษฎีต้นทุนการถือทรัพย์ จากความสัมพันธ์ระหว่างตัวแปรทั้งสองข้างต้น เราสามารถเขียนสมการความสัมพันธ์ระยะยาวได้เป็น

$$f_t = s_t + c + u_t$$

กรณีนี้สินทรัพย์ที่ถือเป็นสินทรัพย์ทางการเงิน เราอาจจะสมมติให้ต้นทุน (c) มีค่าเท่ากับศูนย์และเราสามารถเขียนเรซิดิวโคอินทิเกรชันได้ด้วยสมการ $u_t = f_t - s_t$ หรือเวกเตอร์สัมประสิทธิ์โคอินทิเกรชันสามารถแทนได้ด้วยเวกเตอร์ $\beta = (1 \quad -1)'$ เมื่อเราคำนวณเรซิดิวแล้วสามารถทดสอบยูนิทรูทได้ด้วยตัวทดสอบเช่น Augmented Dickey Fuller ด้วยคำสั่งต่อไปนี้

```
> u<-lfutures-lspot
> summary(ur.df(u, type="drift", selectlags = "BIC"))
```

```

Value of test-statistic is: -6.0538 18.3258

Critical values for test statistics:
      1pct  5pct 10pct
tau2 -3.46 -2.88 -2.57
phi1  6.52  4.63  3.81
```

จากการทดสอบยูนิทรูทกับตัวแปร u_t พบว่าค่าสถิติทีเท่ากับ -6.054 ซึ่งน้อยกว่าค่าวิกฤติที่ระดับนัยสำคัญ 0.05 (-2.88) เราสามารถปปฏิเสธสมมุติฐานว่า u_t เป็นยูนิทรูทหรือเรซิดิวมีลักษณะเป็นตัวแปรนิ่ง แสดงว่าตัวแปรทั้้งสองโคอินทิเกรตกันกัน

7.3.2 การทดสอบกรณีไม่ทราบค่าสัมประสิทธิ์โคอินทิเกรชัน

ในการศึกษาความสัมพันธ์ระหว่างตัวแปรอนุกรมเวลา บางครั้งเราไม่ทราบสัมประสิทธิ์ความสัมพันธ์ของตัวแปรเราจำเป็นต้องประมาณค่าเวกเตอร์สัมประสิทธิ์โคอินเกรชันขึ้นมา ขั้นตอนแรกของการทดสอบโคอินทิเกรชันเราจำเป็นต้องประมาณค่าสัมประสิทธิ์โคอินทิเกรชัน β โดยที่เรากำหนดให้ค่าสัมประสิทธิ์ของตัวแปรตัวใดตัวหนึ่ง ในกรณีนี้คือ y_{1t} มีค่าเท่ากับหนึ่ง และสัมประสิทธิ์ของตัวแปรตัวอื่นมีค่าเท่ากับ $\beta_2, ..., \beta_n$ เราเรียกสมการดังกล่าวว่าเป็นการเขียนในรูปบรรทัดฐาน (normalized) และแสดงในรูปสมการต่อไปนี้

$$y_{1t} = \beta_1 + \beta_2 y_{2t} + ... + \beta_n y_{nt} + u_t \tag{7.8}$$

โดยที่สมการดังกล่าวอาจจะมีค่าคงที่หรือไม่มีก็ได้ หรืออาจจะมีพจน์ที่แสดงแนวโน้มเพิ่มเข้ามาก็ได้ หลังจากที่เราประมาณค่าสมการดังกล่าวด้วยวิธีการกำลังสองน้อยที่สุด จะได้ค่าประมาณของสัมประสิทธิ์ และสามารถคำนวณค่าประมาณของเรซิดิวได้ด้วยสมการ $\hat{u}_t = y_{1t} - \hat{\beta}_1 - \hat{\beta}_2 y_{2t} - ... - \hat{\beta}_n y_{nt}$ โดยที่ $\hat{\beta}_1, \hat{\beta}_2, ..., \hat{\beta}_n$ เป็นตัวประมาณค่าจากวิธีการกำลังสองน้อยที่สุด เราจะทดสอบยูนิทรูทกับตัวประมาณค่าของเรซิดิว ซึ่งหากตัวประมาณค่าของเรซิดิวเป็นตัวแปรนิ่ง แสดงว่าตัวแปร $y_{1t}, ..., y_{nt}$ โคอินทิเกรตกัน

เนื่องจากตัวประมาณค่าของเรซิดิวคำนวณจากตัวประมาณค่าของสัมประสิทธิ์ และอาจจะเผชิญกับปัญหาความสัมพันธ์เทียม Phillips and Ouliaris 1990 แสดงให้เห็นว่าค่าสถิติทีที่คำนวณจากการทดสอบด้วย Augmented Dickey Fuller หรือ Phillips-Perron ไม่ได้มีการแจกแจงแบบ Dickey-Fuller ดังนั้น เราไม่สามารถเปรียบเทียบสถิติทีกับตารางค่าวิกฤติของการแจกแจง Dickey-Fuller ปกติได้ Phillips and Ouliaris 1990 ได้คำนวณค่าวิกฤติสำหรับการทดสอบโคอินทิเกรชันกรณีที่ต้องประมาณค่าสัมประสิทธิ์โคอินทิเกรต ซึ่งค่าวิกฤติขึ้นอยู่กับรูปแบบของสมการโคอินทิเกรชันที่ประมาณ ได้แก่สมการที่ไม่มีค่าคงที่ สมการที่มีค่าคงที่และสมการที่มีค่าคงที่และแนวโน้ม และจำนวนของตัวแปรในสมการ โดยค่าวิกฤติแสดงอยู่ในตาราง 7.1

ตารางที่ 7.1: ค่าวิกฤติสำหรับการทดสอบโคอินทิเกรชันกรณีที่ต้องประมาณค่าสัมประสิทธิ์โคอินทิเกรชัน

	ไม่มีค่าคงที่			มีค่าคงที่			มีค่าคงที่และแนวโน้ม		
	ระดับนัยสำคัญ			ระดับนัยสำคัญ			ระดับนัยสำคัญ		
n-1	0.1	0.05	0.01	0.1	0.05	0.01	0.1	0.05	0.01
1	-2.4505	-2.7619	-3.3865	-3.0657	-3.3654	-3.9618	-3.5184	-3.8	-4.3628
2	-2.9873	-3.2667	-3.8395	-3.4494	-3.7675	-4.3078	-3.8429	-4.1567	-4.6451
3	-3.4446	-3.7371	-4.3038	-3.8329	-4.1121	-4.7325	-4.195	-4.4895	-5.0433
4	-3.8068	-4.1261	-4.672	-4.1565	-4.4542	-5.0728	-4.4625	-4.7423	-5.3576
5	-4.1416	-4.3999	-4.9897	-4.4309	-4.7101	-5.2812	-4.7311	-5.0282	-5.5849

ที่มา: Phillips and Ouliaris 1990), n คือจำนวนตัวแปรในสมการโคอินทิเกรชัน

ตัวอย่างที่ 7.6 การทดสอบความสัมพันธ์ระหว่างราคาปัจจุบันและราคาฟิวเจอร์กรณีไม่ทราบค่าสัมประสิทธิ์

เพื่อความต่อเนื่องของตัวอย่าง เราจะสมมุติว่าเราไม่ทราบค่าสัมประสิทธิ์ความสัมพันธ์ระหว่างราคาฟิวเจอร์และราคาปัจจุบัน และสมมุติให้ความสัมพันธ์ระหว่างตัวแปรทั้งสองแสดงได้ด้วยสมการถดถอย $f_t = \beta_1 + \beta_2 s_t + u_t$ ซึ่งหลังจากที่เราประมาณค่าด้วยวิธีการกำลังสองน้อยที่สุดด้วยคำสั่ง `lm` ในชุดคำสั่งหลัก หรือในกรณีนี้เราจะใช้คำสั่ง `dynlm` จากชุดคำสั่ง dynlm เนื่องจากในตัวอย่างถัดไปเราจะใช้ค่าล่าและค่าต่างสำหรับตัวแปรที่พิจารณา หลังจากได้ค่าประมาณเราสามารถคำนวณค่า $\hat{u}_t = f_t - \hat{\beta}_1 - \hat{\beta}_2 s_t$ ตามขั้นตอนในคำสั่งข้างล่าง

อนึ่งในขั้นตอนแรกของการใช้ชุดคำสั่ง `dynlm` เราจะต้องระบบว่าตัวแปรที่เราพิจารณาเป็นตัวแปรอนุกรมเวลา โดยใช้คำสั่ง `ts` ระบุจุดเริ่มต้นและความถี่ของข้อมูล ตามคำสั่งต่อไปนี้

```
> lspot<-ts(lspot, start=c(2006,4), frequency = 12)
> lfutures<-ts(lfutures, start=c(2006,4), frequency = 12)
> library(dynlm)
> m1<-dynlm(lfutures~lspot)
> summary(m1)

Time series regression with "ts" data:
Start = 2006(4), End = 2019(12)

Call:
dynlm(formula = lfutures ~ lspot)

Residuals:
       Min         1Q     Median         3Q        Max
-0.0198129 -0.0038723 -0.0000842  0.0025807  0.0281109

Coefficients:
            Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
(Intercept) -0.06423    0.01090  -5.895  2.1e-08 ***
lspot        1.00909    0.00164 615.341  < 2e-16 ***
---
Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1

```

```
Residual standard error: 0.00747 on 163 degrees of freedom
Multiple R-squared:  0.9996,    Adjusted R-squared:  0.9996
F-statistic: 3.786e+05 on 1 and 163 DF,  p-value: < 2.2e-16
```

ค่าสัมประสิทธิ์ β_2 เท่ากับ 1.006 ซึ่งใกล้เคียงกับ 1 หลังจากนั้นเราก็จะทดสอบยูนิทรูทของค่าประมาณเรซิดิวด้วยการทดสอบ Dickey Fuller

```
> uhat<-ts(m1$residuals, start=c(2006,4), frequency = 12)
> library(urca)
> summary(ur.df(uhat, type="drift", selectlags = "BIC"))

Value of test-statistic is: -6.71 22.5

Critical values for test statistics:
      1pct  5pct 10pct
tau2 -3.46 -2.88 -2.57
phi1  6.52  4.63  3.81
```

ค่าสถิติทีเท่ากับ -6.71 เมื่อนำไปเปรียบเทียบกับค่าวิกฤติในตาราง Phillips-Orliaris 7.1 กรณีที่สมการโคอินทิเกรชันมีค่าคงที่ และจำนวนตัวอย่างลบหนึ่ง เท่ากับ 1 (เนื่องจากในกรณีนี้เรามีตัวแปรในสมการโคอินทิเกรชันสองตัวแปร) ที่นัยสำคัญ 0.05 มีค่าเท่ากับ -3.3656 พบว่าค่าสถิติทีมีค่าต่ำกว่าค่าวิกฤติ (สังเกตว่าค่าวิกฤตจากตาราง Dickey Fuller มีค่า -2.88) ดังนั้นเราสามารถปฏิเสธหลักที่ว่าเรซิดิวเป็นตัวแปรนิ่ง และสรุปได้ว่าตัวแปรทั้งสองโคอินทิเกรตกัน

7.4 การประมาณค่าแบบจำลองเอเรอคอเรคชันด้วยวิธีการกำลังสองน้อยที่สุด

สมมุติว่าเราสนใจตัวแปร $(y_{1t} \quad y_{2t})'$ ซึ่งมีความสัมพันธ์โคอินทิเกรชันแสดงได้ด้วยสมการ $y_{1t} = \beta_2 y_{2t} + u_t$ (หรือ $y_{1t} - \beta_2 y_{2t} = u_t \sim I(0)$) หากเรามีตัวประมาณค่า $\hat{\beta}_2$ ที่มีคุณลักษณะเป็นค่าประมาณที่คล้องจอง (consistent) และเราต้องประมาณค่าแบบจำลองเอเรอคอเรคชันตามสมการต่อไปนี้

$$\Delta y_{1t} = c_1 + \alpha_1(y_{1,t-1} - \beta_2 y_{2,t-1}) + \sum_{i=1}^{p} \psi_{11}^j \Delta y_{1,t-j} + \sum_{i=1}^{p} \psi_{12}^j \Delta y_{2,t-j} + \varepsilon_{1t} \tag{7.9}$$

$$\Delta y_{2t} = c_2 + \alpha_2(y_{1,t-1} - \beta_2 y_{2,t-1}) + \sum_{i=1}^{p} \psi_{21}^j \Delta y_{1,t-j} + \sum_{i=1}^{p} \psi_{22}^j \Delta y_{2,t-j} + \varepsilon_{2t} \tag{7.10}$$

เราสามารถแทนค่า $\hat{\beta}_2$ ลงในสมการเหมือนเป็นพารามิเตอร์ที่เราทราบค่า หรือพิจารณาพจน์โคอินทิเกรชันเรซิดิว $(y_{1,t-1} - \beta_2 y_{2,t-1})$ เหมือนเป็นตัวแปรที่ทราบค่า เนื่องจากตัวแปรทุกตัวในสมการ 7.9 และ 7.10 เป็นตัวแปรนิ่ง เราสามารถประมาณค่าสมการดังกล่าวด้วยวิธีการกำลังสองน้อยที่สุด นอกจากนี้ในแบบจำลองข้างต้นสามารถเลือกค่าล่าที่เหมาะสมสำหรับการเปลี่ยนแปลงของตัวแปรทั้งสองในอดีต (p) ด้วยตัวเลือกแบบจำลอง AIC หรือ BIC

ตัวอย่างที่ 7.7 การประมาณค่าแบบจำลองเอเรอคอเรคชันสำหรับสมการราคาปัจจุบันและราคาฟิวเจอร์ของ SET50

เราประมาณค่าแบบจำลองเอเรอคอเรคชันสำหรับล็อกของราคาปัจจุบันและล็อกของราคาฟิวเจอร์ต่อเนื่องจากตัวอย่างที่ผ่านมา ในที่นี้เราสมมุติให้แบบจำลองของเป็นดังนี้

$$\Delta f_t = c_1 + \alpha_1 \hat{u}_{t-1} + \psi_{11}\Delta s_{t-1} + \psi_{12}\Delta f_{t-1} + \varepsilon_{ft} \tag{7.11}$$

$$\Delta s_t = c_2 + \alpha_2 \hat{u}_{t-1} + \psi_{21}\Delta s_{t-1} + \psi_{22}\Delta f_{t-1} + \varepsilon_{st} \tag{7.12}$$

ในการประมาณค่าแบบจำลองพลวัตรดังกล่าว สามารถใช้ชุดคำสั่ง **dynlm** และคำสั่ง `dynlm` ในการประมาณค่า โดยที่ `diff(X)` แทน ΔX_t และ `L(diff(X))` แทน ΔX_{t-1} และประมาณค่าแบบจำลองด้วยคำสั่งต่อไปนี้

```
> ecm1<-dynlm(diff(lfutures)~L(uhat)+L(diff(lspot))+L(diff(lfutures)))
> summary(ecm1)
                   Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
 (Intercept)         0.00384    0.00483    0.80   0.4277
L(uhat)            -2.15315    0.77455   -2.78   0.0061 **
L(diff(lspot))     -0.50830    0.76794   -0.66   0.5090
L(diff(lfutures))   0.68421    0.73417    0.93   0.3528
Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1

> ecm2<-dynlm(diff(lspot)~L(uhat)+L(diff(lspot))+L(diff(lfutures)))
> summary(ecm2)

                   Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
 (Intercept)         0.00390    0.00457    0.85    0.395
L(uhat)            -1.56235    0.73337   -2.13    0.035 *
L(diff(lspot))     -0.55125    0.72711   -0.76    0.449
L(diff(lfutures))   0.71785    0.69514    1.03    0.303
```

เขียนเป็นผลการประมาณค่าได้ดังนี้

$$\Delta f_t = 0.004 - 2.153\hat{u}_{t-1} - 0.508\Delta s_{t-1} + 0.684\Delta f_{t-1} + \varepsilon_{st}$$

$$\Delta s_t = 0.004 - 1.562\hat{u}_{t-1} - 0.551\Delta s_{t-1} + 0.718\Delta f_{t-1} + \varepsilon_{ft}$$

หากพิจารณาจากตัวอย่าง 7.6 ถ้า $f_{t-1} > \hat{\beta}_1 + \hat{\beta}_2 s_{t-1}$ จะส่งผลให้ $\hat{u}_{t-1}$ มากกว่าศูนย์ จากค่าสัมประสิทธิ์ของเรซิดิวในสมการอีซีเอ็มของราคาฟิวเจอร์ ($\hat{\alpha}_1$) มีค่าเท่ากับ -2.153 แสดงว่าอัตราการเปลี่ยนแปลงของราคาฟิวเจอร์มีค่าเป็นลบ ราคาฟิวเจอร์ในคาบที่ t จะลดลงมาเพื่อปรับเข้าสู่ดุลยภาพ ในขณะที่สมการอีซีเอ็มของราคาปัจจุบัน ค่าสัมประสิทธิ์ของเรซิดิวเท่ากับ -1.562 แสดงว่าราคาปัจจุบันในคาบที่ 1 ก็จะปรับตัวลงด้วย แต่ด้วยขนาดที่น้อยกว่าราคาฟิวเจอร์ ($f_t \downarrow\downarrow > \hat{\beta}_1 + \hat{\beta}_2 s_t \downarrow$) การปรับตัวจะดำเนินจนกระทั่งราคาทั้งสองปรับเข้าสู่ดุลยภาพระยะยาวอีกครั้ง

7.5 แบบจำลองเวกเตอร์เอเรอคอเรคชัน

Engle และ Granger นำเสนอแบบจำลองโคอินทิเกรตที่อธิบายความสัมพันธ์ระยะยาว และแบบจำลองเอเรอคอเรคชันซึ่งนำเสนอการปรับตัวระยะสั้น ซึ่งการประมาณค่าแบบจำลองเอเรอคอเรคชันเป็นการประมาณค่าสองขั้นตอน ซึ่งตัวประมาณค่าไม่มีประสิทธิภาพ (inefficient) เนื่องจากการประมาณค่าในขั้นตอนแรกอาจจะเผชิญกับปัญหาความสัมพันธ์เทียม Johansen 1991 ได้ผนวกความสัมพันธ์ทั้งระยะยาวและการปรับตัวระยะสั้นในรูปแบบของสมการของเวกเตอร์ตัวแปร โดยมีพื้นฐานจากแบบจำลองเวกเตอร์ออโตรีเกรสชัน ซึ่งหากพิจารณาตัวแปร $y_{1t},...,y_{nt}$ ในรูปเวกเตอร์ $(n\times 1)$ เขียนเป็นสัญลักษณ์ $\boldsymbol{Y}_t$ ในรูปสมการเวกเตอร์ออโตรีเกรสซีฟอันดับพี ($VAR(P)$) ดังต่อไปนี้

$$\boldsymbol{Y}_t = \boldsymbol{\Pi}_1\boldsymbol{Y}_{t-1} + ... + \boldsymbol{\Pi}_p\boldsymbol{Y}_{t-p} + \boldsymbol{\epsilon}_t, t = 1,...,T$$

ถ้าตัวแปรบางตัวหรือทุกตัวในแบบจำลองเวกเตอร์ออโตรีเกรสซีฟมีลักษณะเป็นมีคุณสมบัติไม่นิ่ง แบบจำลองดังกล่าวอาจจะเผชิญกับปัญหาความสัมพันธ์เทียม เช่นเดียวกับกรณีสมการเดี่ยว ซึ่งเราต้องพิจารณาต่อไปว่าตัวแปรเหล่านั้นโคอินทิเกรตกันหรือไม่

7.5.1 รูปแบบของสมการเวกเตอร์เอเรอคอเรคชัน

Johansen 1991 ได้เสนอแบบจำลองเวกเตอร์เอเรอคอเรคชัน (Vector Error Correction Model) หรือเวคเอ็ม (VECM) โดยมีพื้นฐานจากแบบจำลองเวกเตอร์ออโตรีเกรสซีฟของ $\boldsymbol{Y}_t = (Y_{1t},...,Y_{nt})'$ ซึ่งตัวแปรทั้งหมดอินทิเกรตที่อันดับหนึ่ง เพื่อความง่ายเราจะพิจารณากรณีเวกเตอร์ออโตรีเกรสซีฟอันดับหนึ่ง เขียนเป็นสมการได้ดังนี้

$$\boldsymbol{Y}_t = \mu + \Phi_1\boldsymbol{Y}_{t-1} + \varepsilon_t \tag{7.13}$$

หากลบทั้งสองข้างของสมการด้วย $\boldsymbol{Y}_{t-1}$ จะได้

$$\boldsymbol{Y}_t - \boldsymbol{Y}_{t-1} = \mu - (I - \Phi_1)\boldsymbol{Y}_{t-1} + \varepsilon_t$$
$$\Delta\boldsymbol{Y}_t = \mu - \Phi(1)\boldsymbol{Y}_{t-1} + \varepsilon_t \tag{7.14}$$

ด้วยวิธีการเดียวกัน เราสามารถแสดงได้ว่า เราสามารถแปลงเวกเตอร์ออโตรีเกรสซีฟอันดับพี ($VAR(p)$)

$$\boldsymbol{Y}_t = \mu + \Phi_1\boldsymbol{Y}_{t-1} + ... + \Phi_p\boldsymbol{Y}_{t-p} + \varepsilon_t \tag{7.15}$$

เป็นแบบจำลองเวกเตอร์เอเรอคอเรคชันอันดับพีลบหนึ่ง ($VECM(p-1)$)

$$\Delta\boldsymbol{Y}_t = \mu - \Phi(1)\boldsymbol{Y}_{t-1}\Gamma_1\Delta\boldsymbol{Y}_{t-1} + ... + \Gamma_{p-1}\Delta\boldsymbol{Y}_{t-p} + \varepsilon_t \tag{7.16}$$

โดยที่ $\Phi(1) = I_n - \Phi_1 - ... - \Phi_p$ จะเห็นได้ว่าสมการ 7.16 คือแบบจำลอง $VAR(p-1)$ ของ $\Delta\boldsymbol{Y}_t$ โดยที่เมตริกซ์ $\boldsymbol{\Phi(1)}$ คือเมทริกซ์สัมประสิทธิ์ที่แสดงความสัมพันธ์ระยะยาว และ $\boldsymbol{\Gamma}_k$ คือเมทริกซ์สัมประสิทธิ์ที่อธิบายผลของการปรับตัวระยะสั้นในคาบที่ผ่านมา หากพิจารณาแบบจำลองเวกเตอร์เอเรอคอเรคชันในสมการ 7.16 เราพบว่า $\Delta\boldsymbol{Y}_t$ และค่าล่าของ $\Delta\boldsymbol{Y}_t$ มีคุณลักษณะนิ่งหรืออินทิเกรตที่อันดับศูนย์ ($I(0)$) จะเห็นได้ว่า เหลือเพียงพจน์ $\boldsymbol{\Phi(1)Y}_{t-1}$ ที่มีโอกาสเป็นอินทิเกรตที่อันดับหนึ่ง ($I(1)$) หาก $\boldsymbol{\Phi(1)Y}_{t-1}$ เป็น $I(0)$ จะส่งผลให้ $\Delta\boldsymbol{Y}_t$ จะเป็น $I(0)$ ด้วย ดังนั้นพจน์ $\boldsymbol{\Phi(1)Y}_{t-1}$ จะเป็นเมตริกซ์ที่ระบุความสัมพันธ์ระยะยาวหากตัวแปรโคอินทิเกรตกัน เนื่องจาก $\boldsymbol{Y}_{t-1}$ เป็นตัวแปรที่ไม่นิ่ง เราจะพิจารณาเมตริกซ์ $\Phi(1)$ ว่าจะส่งผลให้พจน์ดังกล่าวมีคุณลักษณะนิ่งหรือไม่ อนุกรมเวลา $\boldsymbol{Y}_t$ จะโคอินทิเกรตกันถ้ามีเมทริกซ์ $\boldsymbol{\beta}$ ที่มีค่าลำดับชั้นคอลัมน์เต็ม (full column rank)[1]ขนาด $n \times r$ โดยที่ $1 \leq r < n$ ซึ่งสามารถสร้างผลรวมเชิงเส้น r ความสัมพันธ์ดังสมการต่อไปนี้

$$\boldsymbol{\beta}'\boldsymbol{Y}_t = \boldsymbol{u}_t$$

แล้วมีคุณลักษณะนิ่ง เราเรียก r ว่าค่าลำดับชั้นโคอินทิเกรชัน (cointegrating rank) และคอลัมน์ของสัมประสิทธิ์เมตริกซ์ $\boldsymbol{\beta}$ ว่าเวกเตอร์โคอินทิเกรชัน (cointegrating vector) ระบบสมการที่แสดงความสัมพันธ์ระยะยาวเป็นดังนี้

$$\begin{bmatrix} \beta_{1,1} & \beta_{1,2} & \cdots & \beta_{1,r} \\ \beta_{2,1} & \beta_{2,2} & \cdots & \beta_{2,r} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \beta_{n,1} & \beta_{n,2} & \cdots & \beta_{n,r} \end{bmatrix}' \begin{bmatrix} Y_{1t} \\ Y_{2t} \\ \vdots \\ Y_{nt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_{1t} \\ u_{2t} \\ \vdots \\ u_{rt} \end{bmatrix}$$

หากตัวแปร n ตัวแปรมีจำนวนความสัมพันธ์ระยะยาวเท่ากับ r แสดงว่าตัวแปรดังกล่าวถูกผลักดันด้วยแนวโน้มร่วม (common trend) ซึ่งเป็นอินทิเกรตที่อันดับหนึ่งจำนวน $n - r$ ส่วนประกอบ เช่น กรณีของอัตราดอกเบี้ยพันธบัตรที่มีอายุไถ่ถอน 3 ระยะ ($n = 3$) หากเราพบว่ามีสมการความสัมพันธ์ระยะยาวเท่ากับสอง ($r = 2$) แสดงว่าอัตราดอกเบี้ยทั้งสามถูกผลักดันด้วยแนวโน้มร่วมเพียงเส้นเดียว Engle and Granger 1987 นำเสนอทฤษฎีบทการนำเสนอของเกรนเจอร์ (Granger representation theorem) ซึ่งอธิบายความสัมพันธ์ระหว่างสมการโคอินทิเกรชัน และแบบจำลองเวกเตอร์เอเรอคอเรคชันไว้ดังนี้

1. ถ้า $\boldsymbol{\Phi(1)}$ มีค่าอันดับชั้นเต็ม (full rank) คือ $r = n$ แล้ว $\boldsymbol{Y}_t$ มีคุณลักษณะนิ่ง

2. ถ้า $\boldsymbol{\Phi(1)}$ มีค่าอันดับชั้นลด (reduced rank) เท่ากับ r โดยที่ $0 < r < n$ และ $\boldsymbol{\Phi(1)} = -\boldsymbol{\alpha\beta}'$ ซึ่งทั้ง $\boldsymbol{\alpha}$ และ $\boldsymbol{\beta}$ เป็นเมทริกซ์ขนาด $n \times r$ ที่มี ค่าลำดับชั้นคอลัมน์เต็ม แล้ว $\boldsymbol{Y}_t$ เป็น $I(1)$ และตัวแปรโคอินทิเกรตกัน โดยที่มี r จำนวนความสัมพันธ์ และเวกเตอร์โคอินทิเกรชันคือคอลัมน์ของ $\boldsymbol{\beta}$

3. ถ้า $\boldsymbol{\Phi(1)}$ มีค่าอันดับชั้นเท่ากับศูนย์ แล้ว $\boldsymbol{\Phi(1)} = \boldsymbol{0}$ และ $\boldsymbol{Y}_t$ เป็น $I(1)$ ซึ่งตัวแปรมิได้โคอินทิเกรตกัน และแบบจำลอง $VECM(p-1)$ จะลดลงเหลือแค่ $VAR(p-1)$ ของตัวแปรในรูปผลต่างหนึ่งอันดับ

จากคุณสมบัติข้างต้น การทดสอบโคอินทิเกรชันตามวิธีของ Johansen จะพิจารณา $\boldsymbol{\Phi(1)}$

[1]ค่าลำดับชั้น (rank) ของเมตริกซ์ A ใด ๆ คือจำนวนของแถวทีมีสมาชิกไม่เป็นศูนย์ของเมทริกซ์ขั้นบันไดตามแถว (row-echelon matrix) ที่สมมูล (equivalent) กับเมทริกซ์ A

ในกรณีที่เราทดสอบแล้วพบว่ามีจำนวนความสัมพันธ์เท่ากับ r เราสามารถพิจารณาเวกเตอร์ $\mathbf{\Phi(1)}$ซึ่งสามารถแยกออกได้เป็นเมทริกซ์ $\boldsymbol{\alpha}$ และ $\boldsymbol{\beta}'$ ซึ่งมีมิติเท่ากับ $n \times r$ และ $r \times n$ ตามลำดับ

$$\mathbf{\Phi(1)} = \boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}'$$

ตัวอย่างเช่น หากเราพิจารณากรณีที่ตัวแปรเท่ากับ 4 หากเราพบความสัมพันธ์เท่ากับหนึ่ง ($r = 1$)

$$\mathbf{\Phi(1)} = \boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}' = \begin{bmatrix} \alpha_{11} \\ \alpha_{12} \\ \alpha_{13} \\ \alpha_{14} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} & \beta_{13} & \beta_{14} \end{bmatrix}$$

หากเราพบความสัมพันธ์เท่ากับสอง (r=2)

$$\mathbf{\Phi(1)} = \boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}' = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{21} \\ \alpha_{12} & \alpha_{22} \\ \alpha_{13} & \alpha_{23} \\ \alpha_{14} & \alpha_{24} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} & \beta_{13} & \beta_{14} \\ \beta_{21} & \beta_{22} & \beta_{23} & \beta_{24} \end{bmatrix}$$

ในกรณีของความสัมพันธ์เท่ากับหนึ่ง เราสามารถเขียนส่วนของ $\mathbf{\Phi(1)}\boldsymbol{Y}_{t-1}$ ได้เป็น

$$\mathbf{\Phi(1)}\boldsymbol{Y}_{t-1} = \begin{bmatrix} \alpha_{11} \\ \alpha_{12} \\ \alpha_{13} \\ \alpha_{14} \end{bmatrix} (\beta_{11}y_{1,t-1} + \beta_{12}y_{2,t-1} + \beta_{13}y_{3,t-1} + \beta_{14}y_{4,t-1})$$

ซึ่งเราสามารถนำไปเขียนสมการเอเรอคอเรคชันสำหรับแต่ละตัวแปรได้ เช่น

$$\Delta Y_{1t} = \alpha_{11}(\beta_{11}y_{1,t-1} + \beta_{12}y_{2,t-1} + \beta_{13}y_{3,t-1} + \beta_{14}y_{4,t-1}) + \ldots$$

นอกจากนี้เราสามารถปรับค่าสัมประสิทธิ์ของตัวแปรตัวใดตัวหนึ่งมีค่าเท่ากับหนึ่งได้ (normalized) ในการทดสอบโคอินทิเกรชันและการประมาณค่าแบบจำลองเวกเตอร์เอเรอคอเรคชันขึ้นอยู่กับรูปแบบของพจน์เชิงกำหนด (deterministic term) ในสมการที่ประมาณค่า Johansen 1995 นำเสนอรูปแบบพจน์เชิงกำหนดแบบจำลองออกเป็น 5 กรณีโดยระบุพจน์ดังกล่าวในส่วนของสมการโคอินทิเกรชัน หรือในส่วนของสมการเวกเตอร์เอเรอคอเรคชัน ซึ่งแต่ละรูปแบบจะแสดงลักษณะของตัวแปร $\boldsymbol{Y}_t$ ที่แตกต่างกัน เพื่อให้เห็นรูปแบบจำลองเราจะพิจารณากรณีที่มีตัวแปรเพียงสองตัวแปรและละพจน์การปรับตัวในคาบก่อนจากแบบจำลอง

1. กรณีไม่มีค่าคงที่ทั้งสองสมการ (no constant)

$$\Delta Y_{1t} = \alpha_1 (Y_{1,t-1} - \beta_2 Y_{2,t-1}) + v_{1t}$$
$$\Delta Y_{2t} = \alpha_2 (Y_{1,t-1} - \beta_2 Y_{2,t-1}) + v_{2t}$$

ตัวแปรทั้งสองจะอินทิเกรตที่อันดับหนึ่งและไม่มีดริฟท์และสมการโคอินทิเกรชันจะมีค่าเฉลี่ยเท่ากับศูนย์

2. กรณีมีค่าคงที่ในสมการโคอินทิเกรชันเพียงอย่างเดียว (restricted constant)

$$\Delta Y_{1t} = \alpha_1 (Y_{1,t-1} - \beta_2 Y_{2,t-1} - \mu) + v_{1t}$$
$$\Delta Y_{2t} = \alpha_2 (Y_{1,t-1} - \beta_2 Y_{2,t-1} - \mu) + v_{2t}$$

ตัวแปรทั้งสองจะอินทิเกรตที่อันดับหนึ่งและไม่มีดริฟท์และสมการโคอินทิเกรชันจะมีค่าเฉลี่ยไม่เท่ากับศูนย์

3. กรณีมีค่าคงที่ในสมการโคอินทิเกรชันและสมการเวกเตอร์เอเรอคอเรคชัน (unrestricted constant)

$$\Delta Y_{1t} = \delta_1 + \alpha_1 (Y_{1,t-1} - \beta_2 Y_{2,t-1} - \mu) + v_{1t}$$
$$\Delta Y_{2t} = \delta_2 + \alpha_2 (Y_{1,t-1} - \beta_2 Y_{2,t-1} - \mu) + v_{2t}$$

ตัวแปรทั้งสองจะอินทิเกรตที่อันดับหนึ่งและมีดริฟท์เท่ากับ δ_1 และ δ_2 ส่วนสมการโคอินทิเกรชันจะมีค่าเฉลี่ยไม่เท่ากับศูนย์

4. กรณีมีทั้งค่าคงที่และแนวโน้มในสมการโคอินทิเกรชัน และมีค่าคงที่ในสมการเวกเตอร์เอเรอคอเรคชัน (restricted trend)

$$\Delta Y_{1t} = \delta_1 + \alpha_1 (Y_{1,t-1} - \beta_2 Y_{2,t-1} - \mu - \rho T) + v_{1t}$$
$$\Delta Y_{2t} = \delta_2 + \alpha_2 (Y_{1,t-1} - \beta_2 Y_{2,t-1} - \mu - \rho T) + v_{2t}$$

ตัวแปรทั้งสองจะอินทิเกรตที่อันดับหนึ่งและมีดริฟท์เท่ากับ δ_1 และ δ_2 ส่วนสมการโคอินทิเกรชันจะมีเส้นแนวโน้ม

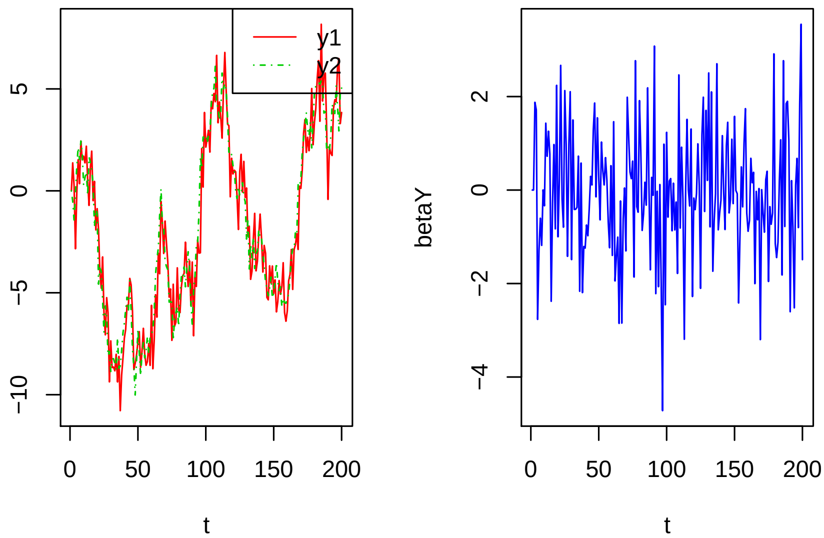
5. กรณีมีทั้งค่าคงที่และแนวโน้มทั้งสองสมการ (unrestricted trend)

$$\Delta Y_{1t} = \delta_1 + \theta_1 T + \alpha_1 (Y_{1,t-1} - \beta_2 Y_{2,t-1} - \mu - \rho T) + v_{1t}$$
$$\Delta Y_{2t} = \delta_2 + \theta_2 T + \alpha_2 (Y_{1,t-1} - \beta_2 Y_{2,t-1} - \mu - \rho T) + v_{2t}$$

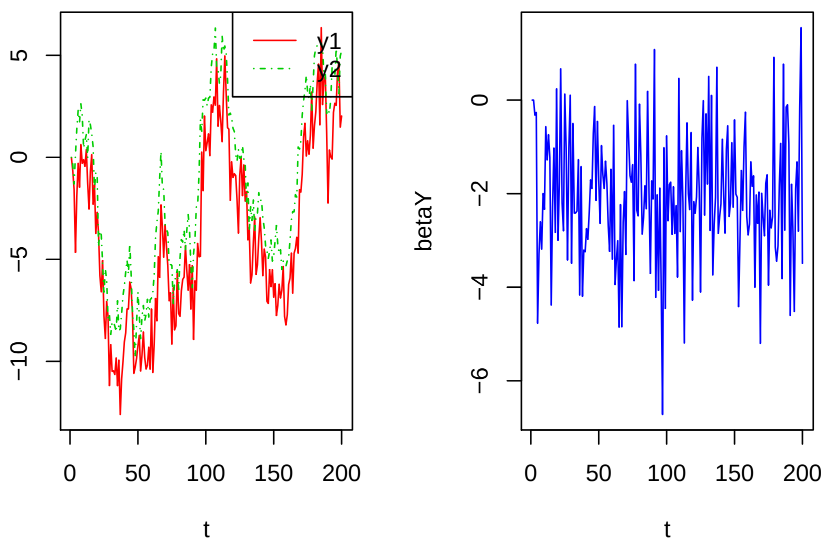
ตัวแปรทั้งสองจะอินทิเกรตที่อันดับหนึ่งและมีเส้นแนวโน้มเป็นเส้นตรง ตัวแปรทั้งสองจะมีลักษณะเป็น

เส้นแนวโน้ม ส่วนสมการโคอินทิเกรชันจะมีเส้นแนวโน้มแบบโค้ง (quadratic trend)

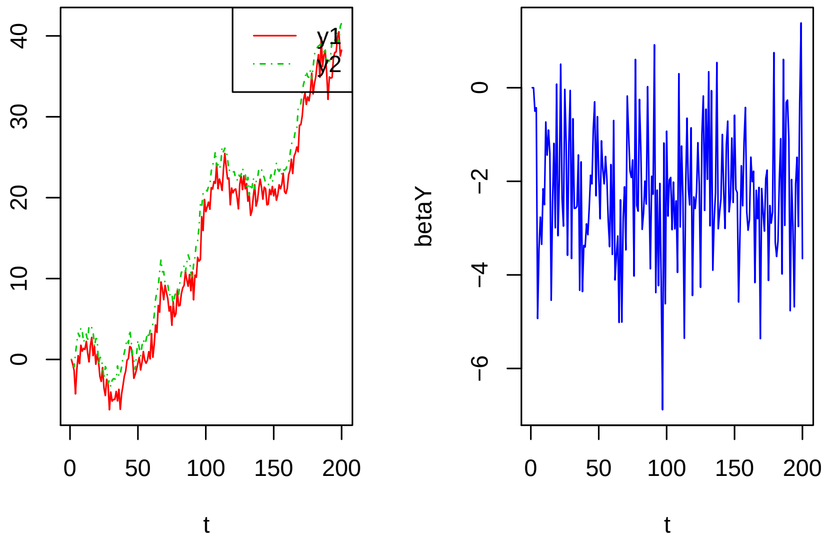
รูปที่ 7.6: No constant



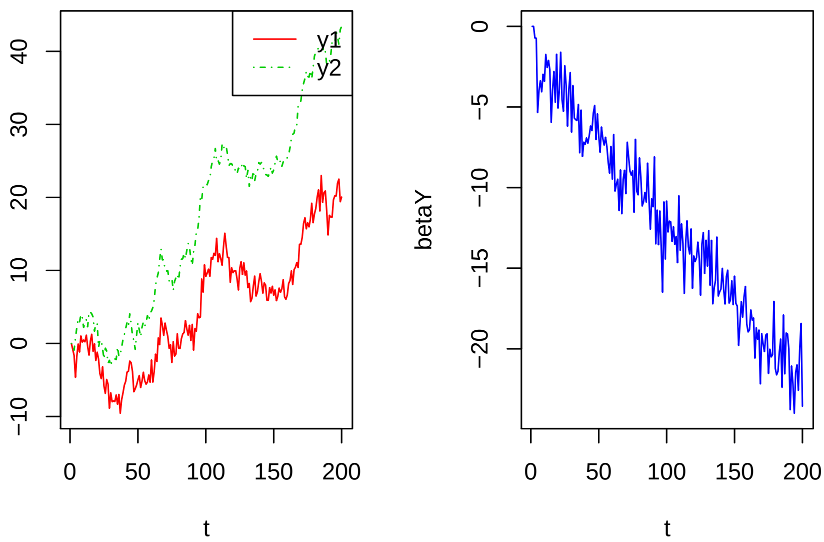
รูปที่ 7.7: restricted constant



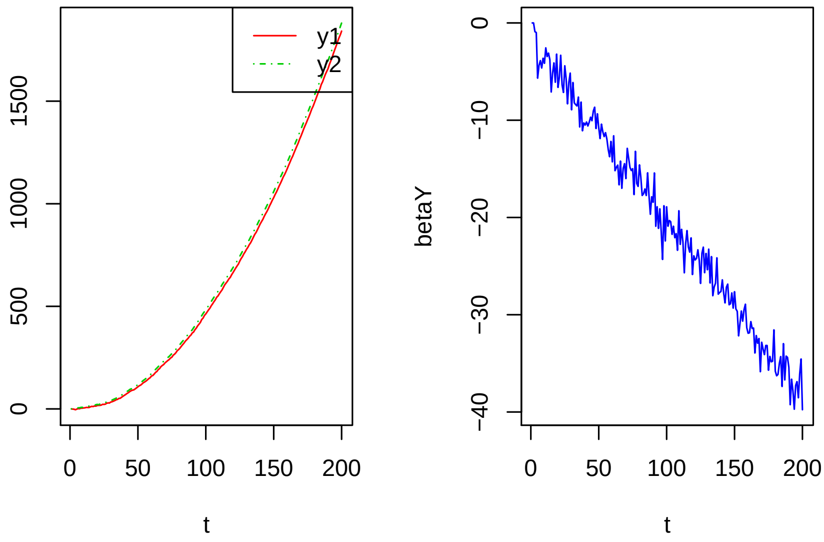
รูปที่ 7.8: unrestricted constant



รูปที่ 7.9: restricted trend



รูปที่ 7.10: unrestricted trend



กรณีที่ 1 มักจะไม่เกิดขึ้นจริงในการประยุกต์กับข้อมูลจริง ในขณะที่กรณีที่ 2 มักใช้กับข้อมูลที่อินทิเกรตที่อันดับหนึ่งและไม่มีแนวโน้มเช่นอัตราดอกเบี้ยหรืออัตราแลกเปลี่ยน ส่วนกรณีที่ 3 เหมาะกับข้อมูลเช่นราคาทรัพย์สินหรือข้อมูลเศรษฐกิจมหภาคมวลรวมเช่น GDP การบริโภคหรือการจ้างงาน กรณีที่ 4 สามารถใช้กับข้อมูลที่มีแนวโน้ม แต่สมการความสัมพันธ์ระยะยาวมีลักษณะที่เป็นเส้นแนวโน้มด้วย ในขณะที่กรณีที่ 5 ควรใช้กับกรณีที่ข้อมูลมีแนวโน้มเส้นโคง เช่นการประยุกต์กับข้อมูลที่เป็นตัวเงินหรืออัตราเงินเฟ้อสูงผิดปกติ (extreme inflation)

7.5.2 การทดสอบโคอินทิเกรชันด้วยจำนวนค่าลำดับชั้นตามวิธีของโจแฮนเซน

จากทฤษฎีบทของเกรนเจอร์ เราทราบว่าจำนวนของความสัมพันธ์ระยะยาวจะเท่ากับจำนวนค่าลำดับชั้น (rank) ของเมทริกซ์ $\mathbf{\Phi(1)}$ ดังนั้น โจแฮนเซนนำเสนอว่าการทดสอบโคอินทิเกรชันสามารถทำได้โดยการทดสอบว่าเมทริกซ์ $\mathbf{\Phi(1)}$ เป็นเมตริกซ์ที่มีค่าลำดับชั้นลดรูปเท่ากับ r หรือไม่ จากพีชคณิตเชิงเส้น เราทราบว่าจำนวนของค่าลำดับชั้นของเมตริกซ์จะเท่ากับจำนวนของค่าเฉพาะ (eigenvalue) ซึ่งไม่เท่ากับศูนย์[2] ค่าเฉพาะ λ_i จะถูกจัดเรียงตามขนาด $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \ldots \geq \lambda_n$ และค่าเฉพาะมีคุณสมบัติ $|\lambda_i| < 1$ และ $\lambda_i \geq 0$ ค่าเฉพาะตัวแรก (λ_1) จะมีค่ามากที่สุด และค่าเฉพาะตัวสุดท้าย (λ_n) จะมีค่าน้อยที่สุดและใกล้ศูนย์ ถ้าตัวแปรทั้งหมดไม่โคอินทิเกรตกัน ค่าเฉพาะทุกตัวจะมีค่าไม่แตกต่างจากศูนย์อย่างมีนัยสำคัญ ตัวสถิติที่ใช้ทดสอบจะถูกคำนวณจาก $\ln(1-\lambda_i)$ ซึ่งมีค่าเท่ากับศูนย์เมื่อค่าเฉพาะ λ_i มีค่าเท่ากับศูนย์ ถ้าค่าเฉพาะมีค่าไม่เท่ากับศูนย์แล้ว $\ln(1-\lambda_i) < 0$ ตัวอย่างเช่น ถ้าค่าลำดับชั้น $\mathbf{\Phi(1)} = 1$ แล้ว $\ln(1-\lambda_1) < 0$ และ $\ln(1-\lambda_i) = 0$ สำหรับ $i > 1$

[2]ค่าเฉพาะของเมทริกซ์ $\boldsymbol{A}$ เขียนแทนด้วย $\boldsymbol{\lambda}$ คือจำนวนจริงที่เป็นคำตอบของระบบสมการเชิงเส้น $\boldsymbol{Ax} = \lambda\boldsymbol{x}$ และเราเรียกผลเฉลยนี้ว่าเวกเตอร์เฉพาะ (eigenvector) ทั้งนี้ค่าเฉพาะสามารถหาได้จากการแก้สมการ $(\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{I})\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ ซึ่งจะมีคำตอบเมื่อ $det(\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{I}) = 0$ ตัวอย่างเช่น $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}$ เราต้องการหาคำตอบของ $|\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{I}| = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -2 & -3-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 3\lambda + 2 = 0$ จะได้ $\lambda_1 = -1, \lambda_2 = -2$ คือค่าเฉพาะของเมตริกซ์ $\boldsymbol{A}$ นอกจากนี้เราสามารถหาเวกเตอร์เฉพาะ $(\boldsymbol{x}_1\ )$ ที่สัมพันธ์กับ $\lambda_1 = -1$ จากสมการ $\boldsymbol{Ax}_1 = \lambda_1\boldsymbol{x}_1$ ซึ่งได้แก่ $\boldsymbol{x}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

ถ้าตัวแปรใน $\boldsymbol{Y}_t$ ไม่ได้โคอินทิเกรตกัน ค่าลำดับของ $\boldsymbol{\Pi}$ จะไม่แตกต่างจากศูนย์อย่างมีนัยสำคัญ ดังนั้น $\lambda_i \approx 0$ สำหรับทุกค่าของ i อย่างไรก็ตาม ในการทดสอบเราจะพิจารณา $\ln(1-\lambda_i)$ ซึ่งหาก $\lambda_i = 0$ แล้ว $\ln(1-\lambda_i) = 0$

โจแฮนเซนเสนอการทดสอบสองวิธีที่มีพื้นฐานจากการหาค่าเฉพาะของเมทริกซ์ $\boldsymbol{\Phi}(1)$ ได้แก่การทดสอบ Maximal eigenvalue และการทดสอบ Trace

Johansen's Trace Statistic

Johansen's Trace statistic ทดสอบสมมุติฐานต่อไปนี้

$$H_0(r_0): r = r_0 \quad \text{vs} \quad H_1(r_0): r > r_0$$

โดยที่ LR Trace statistics และคำนวณได้ดังนี้

$$LR_{trace}(r_0) = -T \sum_{i=r_0+1}^{n} \ln(1-\hat{\lambda}_i)$$

โดยที่ r_0 คือจำนวนความสัมพันธ์ในสมมุติฐานหลัก และ $\hat{\lambda}_i$ คือค่าประมาณของค่าลักษณะเฉพาะอันดับที่ i ซึ่งหาก $rank(\boldsymbol{\Pi}) = r_0$ แล้ว $\hat{\lambda}_{r_0+1}, ..., \hat{\lambda}_n$ จะมีค่าเข้าใกล้ศูนย์ และ $LR_{trace}(r_0)$ ควรจะมีค่าน้อย

Johansen's Maximum Eigenvalue Statistic

Johansen ยังได้เสนอการทดสอบ LR Maximum Eigenvalue statistic สำหรับสมมุติฐานต่อไปนี้

$$H_0(r_0): r = r_0 \quad \text{vs} \quad H_1(r_0): r = r_0 + 1$$

โดยเราเรียก LR statistic ว่า *maximum eigenvalue statistic* และคำนวณได้ดังนี้

$$LR_{max}(r_0) = -T \ln(1-\hat{\lambda}_{r_0+1})$$

Johansen and Juselius 1990 เสนอว่าค่าวิกฤตที่ใช้ทดสอบสำหรับตัวสถิติทั้งสองมีการแจกแจงขึ้นอยู่กับรูปแบบของสมการ ซึ่งหากค่าสถิติสูงกว่าค่าวิกฤตที่ Johansen เสนอ เราจะปฏิเสธสมมุติฐานหลักที่ว่าตัวแปรมีความสัมพันธ์ r_0 สมการ และยอมรับว่ามีความสัมพันธ์มากกว่า r_0 สำหรับการทดสอบ Trace statistics ในขณะที่หากเราใช้การทดสอบ Max Eigenvalue statistic เราจะยอมรับว่ามีความสัมพันธ์เท่ากับ $r_0 + 1$ ความสัมพันธ์

Johansen เสนอการทดสอบในลักษณะที่เป็นอันดับ (sequential testing procedure) โดยที่กระบวนการดังกล่าวจะระบุจำนวนของความสัมพันธ์ได้อย่างคงเส้นคงว่า โดยที่กระบวนการเป็นดังนี้

- ขั้นตอนแรกเราทดสอบ $H_0(r_0 = 0)$ กับ $H_1(r_0 > 0)$ ถ้าเราไม่สามารถปฏิเสธสมมุติฐานหลัก ตัวแปรไม่โคอินทิเกรตกัน

  ถ้าเราปฏิเสธ $H_0(r_0 = 0)$ เราสามารถสรุปได้ว่า มีจำนวนความสัมพันธ์อย่างน้อยหนึ่งความสัมพันธ์อย่างน้อยหนึ่งความสัมพันธ์และทดสอบในขั้นต่อไป

- ทดสอบ $H_0(r_0 = 1)$ กับ $H_1(r_0 > 1)$ ถ้าเราไม่สามารถปฏิเสธสมมุติฐานหลัก เราสรุปว่ามีมีจำนวนความสัมพันธ์เท่ากับหนึ่ง

  แต่ถ้า เราปฏิเสธสมมุติฐาน แสดงว่า มีมีจำนวนความสัมพันธ์อย่างน้อยสองสมการ
- กระบวนการที่เป็นอันดับดังกล่าวจะดำเนินไปเรื่อยๆจนกระทั่งสมมุติฐานหลักถูกปฏิเสธ

7.5.3 ขั้นตอนในการทดสอบโคอินทิเกรชันและสร้างแบบจำลองเวคเตอร์เอเรอคอเรคชัน

ขั้นตอนในการสร้างแบบจำลอง Cointegration ของ Johansen คือ

- ระบุ Order และประมาณค่า VAR(p) สำหรับ $\boldsymbol{Y}_t$
- สร้าง likelihood ratio tests สำหรับการทดสอบ rank of $\boldsymbol{\Pi}$ เพื่อระบุจำนวน cointegrating vectors
- หากจำเป็นเราอาจจะสมมุติ normalization และระบุเงื่อนไขของ cointegrating vectors
- จาก normalized cointegrating vectors ที่ได้ระบุไว้ เราสามารถประมาณค่า cointegrated VECM ด้วย MLE

การทดสอบตามแนวทางของโจแฮนเซนขึ้นอยู่กับรูปแบบของสมการและจำนวนของค่าล่าสำหรับการปรับตัวของตัวแปรในอดีต $(p - 1)$ สำหรับการทดสอบโคอินทิเกรชันตามแนวทางของโจแฮนเซนด้วยโปรแกรม R จะใช้ชุดคำสั่ง urca และคำสั่ง `ca.jo` โดยที่ในคำสั่งดังกล่าวมีตัวเลือกที่เราต้องระบุดังนี้

- `spec=c("transitory")` หมายถึงการตอบสนองของตัวแปรเกิดจากการออกนอกดุลยภาพในคาบที่แล้ว (u_{t-1})
- สถิติที่ใช้ในการทดสอบระหว่าง `type=c("trace")` หรือ `type=c("eigen")`
- ระบุอันดับของค่าล่าในสมการเวกเตอร์รีเกรสซีฟ (p) ซึ่งในคำสั่งนี้คือ `K` อย่างไรก็ตามอันดับขั้นต่ำของ p คือ 2
- รูปแบบของพจน์เชิงกำหนดในสมการระยะยาวซึ่งมีทางเลือกคือ `"none", "const", "trend"`

ตัวอย่างที่ 7.8 ทดสอบเวกเตอร์เอเรอคอเรคชันตามแนวทางของโจแฮนเซนกับราคาปัจจุบันและราคาฟิวเจอร์ของ SET50
เราจะพิจารณาข้อมูลในตัวอย่างที่ 7.6 ด้วยแบบจำลองเวกเตอร์เอเรอคอเรคชันซึ่งประมาณค่าสมการระยะยาวและสมการเวกเตอร์เอเรอคอเรคชันไปพร้อม ๆ กัน รวมถึงการทดสอบโคอินทิเกรชัน
ขั้นตอนแรก คือการหาอันดับที่เหมาะสมสำหรับแบบจำลองเวกเตอร์เอเรคอเรคชัน (VECM(p-1)) โดยจะเป็นอันดับที่น้อยกว่าของเวกเตอร์ออโตรีเกรสซีฟหนึ่งอันดับ (VAR(p)) ซึ่งในที่นี้เราจะใช้ชุดคำสั่ง vars และคำสั่ง `VAR` ในการประมาณค่าข้อมูล fsprice ซึ่งคือเมทริกซ์ที่ประกอบด้วยข้อมูล lfutures กับ lspot และเลือกใช้ BIC ในการหาอันดับที่เหมาะสม โดยใช้คำสั่งต่อไปนี้

```
> fsprice<-cbind(lfutures,lspot)
> library(vars)
> var.mod<-VAR(fsprice, lag.max = 4, ic = c("SC"))
> var.mod
VAR Estimation Results:
=======================
Estimated coefficients for equation lfutures:
=============================================
Call:
lfutures = lfutures.l1 + lspot.l1 + const

lfutures.l1    lspot.l1       const
   -0.47626     1.47463     0.00916

Estimated coefficients for equation lspot:
==========================================
Call:
lspot = lfutures.l1 + lspot.l1 + const

lfutures.l1    lspot.l1       const
     -0.881       1.875       0.042
```

จากผลการประมาณค่า เราจะเห็นได้ว่าค่าล่า p ที่เหมาะสมคือ 1 ซึ่งแสดงด้วยสัญลักษณ์ `.l1` แสดงว่าแบบจำลองที่เหมาะสม คือ VAR(1) และ VECM(0) อย่างไรก็ตามเนื่องจากข้อจำกัดของคำสั่ง `ca.jo` เราจะระบุค่า `K=2`

ในการทดสอบโคอินทิเกรชัน เราจะต้องระบุข้อมูล (`sprice`) วิธีในการทดสอบด้วยตัวสถิติเทรซ (`type=c("trace")`) รูปแบบของสมการ (`ecdet=c("const")`) และจำนวนค่าล่าในแบบจำลองเวกเตอร์ออโตรีเกรสซีฟ ซึ่งในที่นี้คือ `K=2` โดยเก็บผลการทดสอบไว้ในชื่อ `fsprice.rc` และเรียกดูผลด้วย `summary(fsprice.rc)`

```
> library(urca)
> fsprice.rc <-ca.jo(fsprice, type = c("trace"), ecdet = c("const"), K
   =2)
> summary(fsprice.rc)

######################
# Johansen-Procedure #
######################

Test type: trace statistic , without linear trend and constant in
   cointegration

Eigenvalues (lambda):
[1] 2.24e-01 1.72e-02 2.26e-17

Values of teststatistic and critical values of test:

          test 10pct  5pct 1pct
r <= 1 |  2.83  7.52  9.24 13.0
r = 0  | 44.18 17.85 19.96 24.6
```

จะได้ค่าสถิติซึ่งมีการทดสอบแบบเป็นลำดับ

- $H_0 : r = 0$ vs $H_1 : r > 0$ ค่าสถิติ 44.18 มากกว่าค่า c.v.19.96 กรณี significance level = 0.05 เราสามารถปฏิเสธสมมุติฐานหลัก และสรุปว่า $r > 0$
- $H_0 : r = 1$ vs $H_1 : r > 1$ ค่าสถิติ 2.83 น้อยกว่าค่า c.v. 9.24 กรณี significance level = 0.05 เราไม่สามารถปฏิเสธสมมุติฐานหลัก และยอมรับว่า $r = 1$ หรือ $lfutures$ และ $lspot$ โคอินทิเกรตด้วยความสัมพันธ์ 1 ความสัมพันธ์

เราสามารถสร้างสมการเวกเตอร์เอเรอคอเรกชัน ได้ด้วยคำสั่ง $cajorls$ โดยระบุว่าใช้รูปแบบจาก $fsprice.rc$ และจำนวนความสัมพันธ์เท่ากับ 1 ($r = 1$)

```
> fsprice.vecm <-cajorls(fsprice.rc, r= 1)
> fsprice.vecm
$rlm

Call:
lm(formula = substitute(form1), data = data.mat)

Coefficients:
              lfutures.d  lspot.d
ect1          -2.219      -1.626
lfutures.dl1  -1.525      -0.899
lspot.dl1      1.726       1.087


$beta
               ect1
lfutures.l2  1.0000
lspot.l2    -1.0078
constant     0.0556
```

จากคำสั่งดังกล่าว เราสามารถเขียนสมการเวกเตอร์เอเรอคอเรคชันซึ่งอยู่ในส่วน `$rlm` และแต่ละสมการเรียงตามแต่ละคอลัมน์ได้ดังนี้

$$\Delta f_t = -2.219u_{t-1} - 1.525\Delta f_{t-1} + 1.726\Delta s_{t-1}$$

$$\Delta s_t = -1.626u_{t-1} - 0.899\Delta f_{t-1} + 1.087\Delta s_{t-1}$$

โดยที่สมการความสัมพันธ์ระยะยาวอยู่ในส่วน `$beta` ได้แก่

$$u_t = f_t - 1.008s_t + 0.056$$

จะเห็นได้ว่าค่าสัมประสิทธิ์ที่ได้แตกต่างจากการประมาณค่าสองขั้นตอนของเองเจลและแกรงเจอร์

ตัวอย่างที่ 7.9 การทดสอบและประมาณค่า VECM สมการอัตราผลตอบแทนพันธบัตรรัฐบาล

```
> tbond <-read.csv("https://raw.githubusercontent.com/chaleampong/EC435/master/tbond.csv", header = TRUE)
> head(tbond)
> m1<-tbond$m1
> m3<-tbond$m3
> y5<-tbond$y5
```

ขั้นตอนแรกของการทดสอบคือการหาอันดับที่เหมาะสมของ VECM โดยการจัดตัวแปรทั้งสามให้อยู่ในรูปเมทริกซ์ 'rterm' ด้วยคำสั่ง 'cbind' หลังจากนั้น ประมาณค่า VAR ด้วย package 'vars' และคำสั่ง 'VAR' โดยระบุข้อมูลที่ประมาณค่าคือ 'rterm' จำนวนอันดับที่สูงที่สุด 'lag.max=6'และเลือก model selection คือ AIC ด้วย 'ic=c("AIC")' และเพื่อให้พิจารณาค่าสัมประสิทธิ์ได้ง่ายเราอาจจะใช้ `option(digits=2)`

```
> library(vars)
> rterm <- cbind(m1, m3, y5)
> var.mod <-VAR(rterm, lag.max=6, ic= c("AIC"))
> options(digits = 2)
> var.mod

VAR Estimation Results:
=======================

Estimated coefficients for equation m1:
=======================================
Call:
m1 = m1.l1 + m3.l1 + y5.l1 + m1.l2 + m3.l2 + y5.l2 + m1.l3 + m3.l3 + y5.l3 + const

  m1.l1   m3.l1   y5.l1   m1.l2   m3.l2   y5.l2   m1.l3   m3.l3   y5.l3   const
-0.1482  1.4685  0.0179  0.3192 -0.5652  0.0358 -0.1006  0.0154 -0.0550 -0.0098


Estimated coefficients for equation m3:
=======================================
Call:
m3 = m1.l1 + m3.l1 + y5.l1 + m1.l2 + m3.l2 + y5.l2 + m1.l3 + m3.l3 + y5.l3 + const

  m1.l1   m3.l1   y5.l1   m1.l2   m3.l2   y5.l2   m1.l3   m3.l3   y5.l3   const
-0.7726  2.0692  0.0735  0.4037 -0.6330 -0.0066 -0.3514  0.2566 -0.0572  0.0035


Estimated coefficients for equation y5:
=======================================
Call:
```

```
y5 = m1.l1 + m3.l1 + y5.l1 + m1.l2 + m3.l2 + y5.l2 + m1.l3 + m3.l3 + y5
    .l3 + const

 m1.l1  m3.l1  y5.l1  m1.l2  m3.l2  y5.l2  m1.l3  m3.l3  y5.l3  const
-0.947  1.027  1.272 -0.419  0.018 -0.410  0.340  0.017  0.060  0.120
```

หากพิจารณาแบบจำลอง VAR ที่เหมาะสมคือ VAR(3) ดังนั้น เราจะประมาณค่าแบบจำลอง VECM(2)

เราทดสอบ Johansen's test โดยใช้คำสั่ง 'ca.jo' ใน package 'urca' โดยระบุตัวสถิติที่ใช้คือ trace statistic ด้วย 'type=c("trace")' และรูปแบบของ cointegration มีค่าคงที่ 'ecdet=c("const")' และจำนวนอันดับของ VAR 'k=3'โดยเก็บผลไว้ในชื่อ 'rterm.rc' และเรียกดูผลด้วย 'summary(rterm.rc)'

```
> rterm.rc <-ca.jo(rterm, type=c("trace"), ecdet=c("const"), K=3)
> summary(rterm.rc)
######################
# Johansen-Procedure #
######################

Test type: trace statistic , without linear trend and constant in
    cointegration

Eigenvalues (lambda):
[1] 0.16 0.10 0.03 0.00

Values of teststatistic and critical values of test:

          test 10pct 5pct 1pct
r <= 2 |   4.3   7.5  9.2   13
r <= 1 | 19.7  17.9 20.0   25
r = 0  | 44.5  32.0 34.9   41

Eigenvectors, normalised to first column:
(These are the cointegration relations)

           m1.l3 m3.l3 y5.l3 constant
m1.l3      1.000  1.00  1.00      1.0
m3.l3     -1.018 -1.83 -1.14     -1.4
y5.l3      0.023  0.67  0.44      1.0
constant   0.011 -0.14 -1.05     -4.8

Weights W:
(This is the loading matrix)

     m1.l3   m3.l3  y5.l3 constant
m1.d -0.96  0.0343 -0.005  2.7e-16
m3.d -0.75  0.0524 -0.018  2.2e-16
y5.d -0.90 -0.0043 -0.124  3.5e-16
```

จากค่าสถิติซึ่งมีการทดสอบแบบเป็นลำดับ (ในกรณีนี้ใช้ significance level เท่ากับ 0.1)

- $H_0 : r = 0$ vs $H_1 : r > 0$ ค่าสถิติเท่ากับ 44.49 > Critical value (=32) เราสามารถปฏิเสธ

สมมุติฐานหลักที่ว่า $r = 0$ และยอมรับว่า $r > 0$

- $H_0 : r = 1$ vs $H_1 : r > 1$ ค่าสถิติเท่ากับ 19.69 > Critical value (=17.85) เราสามารถปฏิเสธสมมุติฐานหลักที่ว่า $r = 1$ และยอมรับว่า $r > 1$
- $H_0 : r = 2$ vs $H_1 : r > 2$ ค่าสถิติเท่ากับ 4.31 < Critical value (=7.52) เราไม่สามารถปฏิเสธสมมุติฐานหลักที่ว่า $r = 2$

สรุปว่าตัวแปรทั้ง 3 cointegrated กัน และมีความสัมพันธ์ 2 สมการ จากผลการทดสอบเราสามารถประมาณ VECM ด้วยคำสั่ง `cajorls` โดยระบุรูปแบบสมการเช่นเดียวกับ `rterm.rc` และจำนวนความสัมพันธ์ '`r=2` โดยเก็บผลการประมาณค่าไว้ในชื่อ `rterm.vecm`

```
> rterm.vecm <-cajorls(rterm.rc, r=2)
> rterm.vecm
$rlm

Call:
lm(formula = substitute(form1), data = data.mat)

Coefficients:
        m1.d     m3.d     y5.d
ect1    -0.9245  -0.7024  -0.9016
ect2     0.9131   0.6724   0.9210
m1.dl1  -1.1489  -0.7751  -0.9638
m3.dl1   1.4676   1.0658   1.0036
y5.dl1   0.0195   0.0792   0.3112
m1.dl2  -0.8288  -0.3682  -1.3602
m3.dl2   0.9017   0.4301   1.0025
y5.dl2   0.0548   0.0708  -0.1110


$beta
              ect1     ect2
m1.l3      1.0e+00  2.2e-16
m3.l3     -4.4e-16  1.0e+00
y5.l3     -7.8e-01 -7.9e-01
constant   2.0e-01  1.8e-01
```

ซึ่งเมื่อเรียกผลออกมา จะสามารถแบ่งออกเป็นสองส่วน

ส่วนแรกในบริเวณ `$beta` จะระบุความสัมพันธ์ระยะยาว หรือสมการ cointegration ตามคอลัมน์ โดยที่ที่และคอมันน์จะระบุด้วยชื่อ $ect1$ และ $ect2$ ซึ่งสามารถเขียนเป็นสมการได้ดังนี้

$ect1_{t-1} = 1m1_t - (-4.44x10^{-16})m3_t - 0.78y5_t + 0.195$ ซึ่งเราค่าสัมประสิทธิ์หน้า m3 มีค่าน้อยมาก เราสามารถตัดออก และเขียนสมการใหม่ได้เป็น $m1_t = 0.78y5_t - 0.195 + ect1_{t-1}$

$ect2_{t-1} = (2.22x10^{-16})m1_t + 1m3_t - 0.794y5 - t + 0.181$ ซึ่งเราค่าสัมประสิทธิ์หน้า m1 มีค่าน้อยมาก เราสามารถตัดออก และเขียนสมการใหม่ได้เป็น $1m3_t = 0.794y5 - t - 0.181 + ect2_{t-1}$

ส่วนสองในบริเวณ `$rlm` จะระบุการปรับตัวในระยะสั้น หรือ VECM โดยแต่ละคอลัมน์จะแทนแต่ละสมการ ได้แก่ m1.d ($\Delta m1_t$) m3.d ($\Delta m3_t$) และ y5.d ($\Delta y5_t$) ยกตัวอย่างเช่น สมการ m1.d สามารถ

เขียนได้ดังนี้

$\Delta m1_t = -0.92ect1_{t-1} + 0.91ect2_{t-1} - 1.14\Delta m1_{t-1} + 1.46\Delta m3_{t-1} + 0.02\Delta y5_{t-1} - 0.82\Delta m1_{t-2} + 0.90\Delta m3_{t-2} + 0.05\Delta y5_{t-2}$

7.6 แบบฝึกฝน

แบบฝึกฝน 7.1 หากเราต้องการศึกษาความสัมพันธ์ระหว่างดัชนีตลาดหลักทรัพย์ไทย (SET) และมาเลเซีย (KLSE) ว่ามีความสัมพันธ์กันหรือไม่ จงตอบคำถามต่อไปนี้ โดยใช้ข้อมูลจาก `ps5_2.txt` [คอลัมน์แรกคือดัชนีราคา SET และ คอลัมน์ที่สองคือดัชนีราคา KLSE]

1. จงทดสอบ unit root ในดัชนีราคา SET และ KLSE
2. จงทดสอบ cointegration ของดัชนีราคา SET และ KLSE โดยใช้วิธี Engle-Granger พร้อมอธิบายผลการทดสอบอย่างละเอียด
3. จงประมาณค่าแบบจำลอง Error Correction Model พร้อมเขียนผลการประมาณค่า
4. จงทดสอบ cointegration โดยใช้วิธีของ Johansen พร้อมเขียนผลการประมาณค่าจาก VECM

แบบฝึกฝน 7.2 ทฤษฎี purchasing power parity (PPP) เสนอว่าในระยะยาวอัตราแลกเปลี่ยนที่เป็นตัวเงินจะปรับตัวตามความแตกต่างระหว่างราคาในประเทศกับต่างประเทศ

$$S = \frac{P}{F}$$

เราสามารถเขียนเป็นความสัมพันธ์ระยะยาวได้ดังนี้

$$s_t = \beta_1 + \beta_2 p_t + \beta_3 f_t + u_t$$

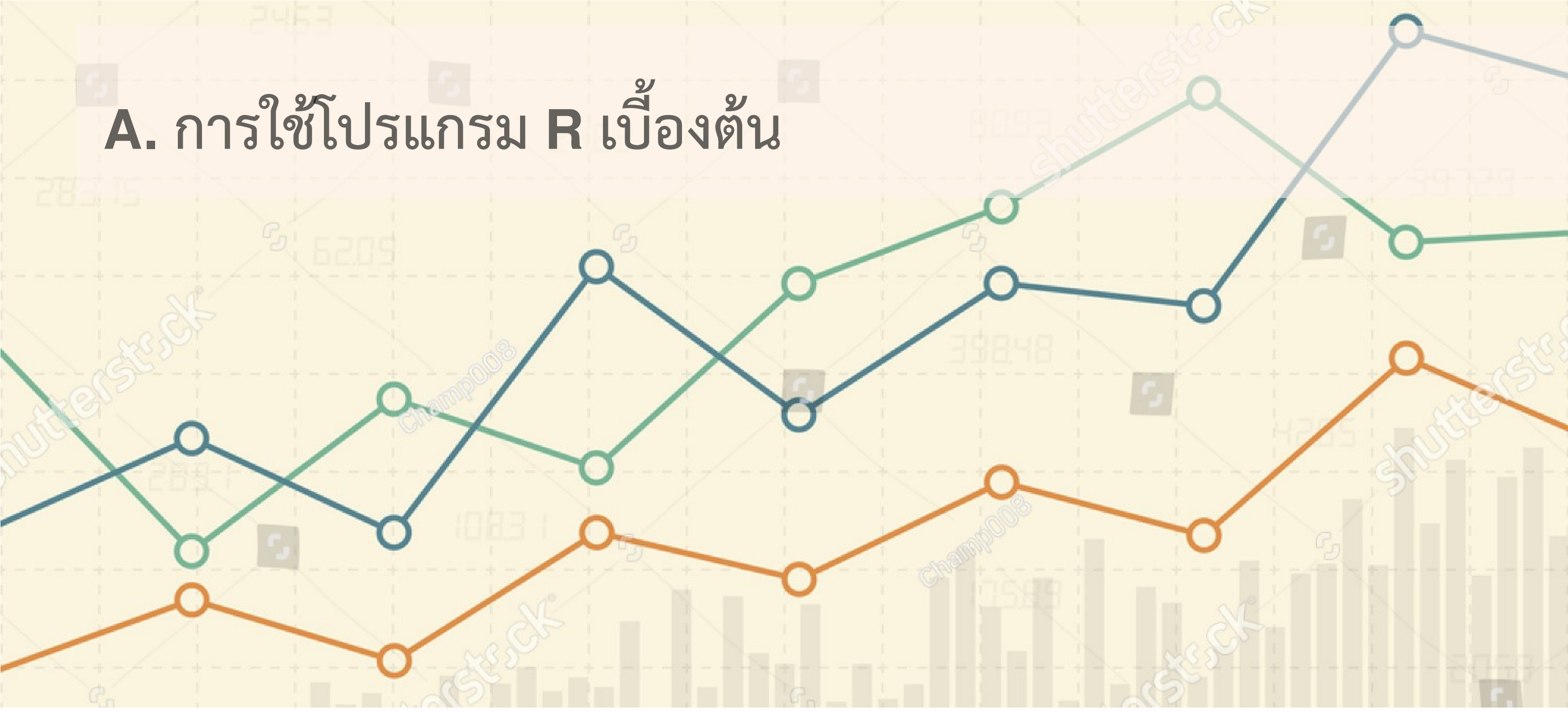
โดยที่ s_t, p_t, f_t เป็นอัตราแลกเปลี่ยน ราคาในประเทศ และราคาต่างประเทศในรูปลอการิทึมตามลำดับ

แบบฝึกฝน 7.3 สมมุติฐานของฟิชเชอร์ (Fisher Hypothesis) เสนอว่าในระยะยาวอัตราดอกเบี้ยที่เบี้ยที่เป็นตัวเงินจะสะท้อนอัตราเงินเฟ้อ ซึ่งแสดงได้ด้วยสมการ

$$i_t = \beta_1 + \beta_2 \pi_t + u_t$$

โดยที่ $\beta_2 = 1$

A. การใช้โปรแกรม R เบื้องต้น



โปรแกรม R เป็นโปรแกรมภาษาคอมพิวเตอร์ขั้นสูงที่ถูกออกแบบมาสำหรับการคำนวณทางสถิติ และใช้กันอย่างแพร่หลายในแวดวงสถิติและการเงิน โปรแกรม R เป็นโปรแกรมที่ให้ผู้ใช้สามารถใช้ได้**ฟรี** และมีคู่มือมากมายที่อธิบายวิธีการใช้ สำหรับการสอนในวิชานี้เราจะใช้โปรแกรมต่อประสาน (interface) ชื่อว่า RStudio สำหรับการทำงานร่วมกับโปรแกรม R เนื่องจากมีหน้าต่างของคำสั่งที่ได้ใช้ตลอดจนผลการวาดกราฟในหน้าต่างย่อย นอกจากนี้เนื่องจากนักศึกษาจำนวนมากอาจจะคุ้นเคยการใช้โปรแกรมผ่าน Graphic User Interface ในวิชานี้ เราจะใช้ Rstudio ช่วยในการนำเข้าข้อมูล

A.1 การติดตั้ง R

เพื่อที่จะติดตั้งโปรแกรม R เราสามารถดาวน์โหลดได้ที่ `http://www.cran.r-project.org` โดยที่เราสามารถเลือกระบบปฏิบัติการที่สอดคล้องกับเครื่องคอมพิวเตอร์ของเราได้ไม่ว่าเป็น Microsoft Windows, Linux หรือ Mac OS X ซึ่งในการติดตั้งนี้จะอธิบายในกรณีของระบบปฏิบัติการ Windows

- คลิก `CRAN` ตรงเมนูด้านซ้ายมือ
- เลือก Operation ซึ่งในที่นี้ผมเลือก `R for Windows`
- เลือก `Base`
- คลิก `Download R x.x.x for Windows` และเลือก default ทุกคำถามที่ถาม

A.2 การติดตั้ง RStudio

หลังจากที่เราได้ติดตั้งโปรแกรม R แล้วเราจะมี Icon R อยู่บน Desktop เมื่อคลิกที่ไอคอนดังกล่าวจะมี Interface ในการทำงานขึ้นมา อย่างไรก็ตามในวิชานี้เราจะใช้ RStudio Interface ในการทำงาน โดยเราสามารถ

ดาวน์โหลด RStudio ได้ที่ `http://www.rstudio.com/ide/download/` ซึ่งสามารถเลือกระบบปฏิบัติการที่สอดคล้องกับเครื่องที่ใช้อยู่ได้

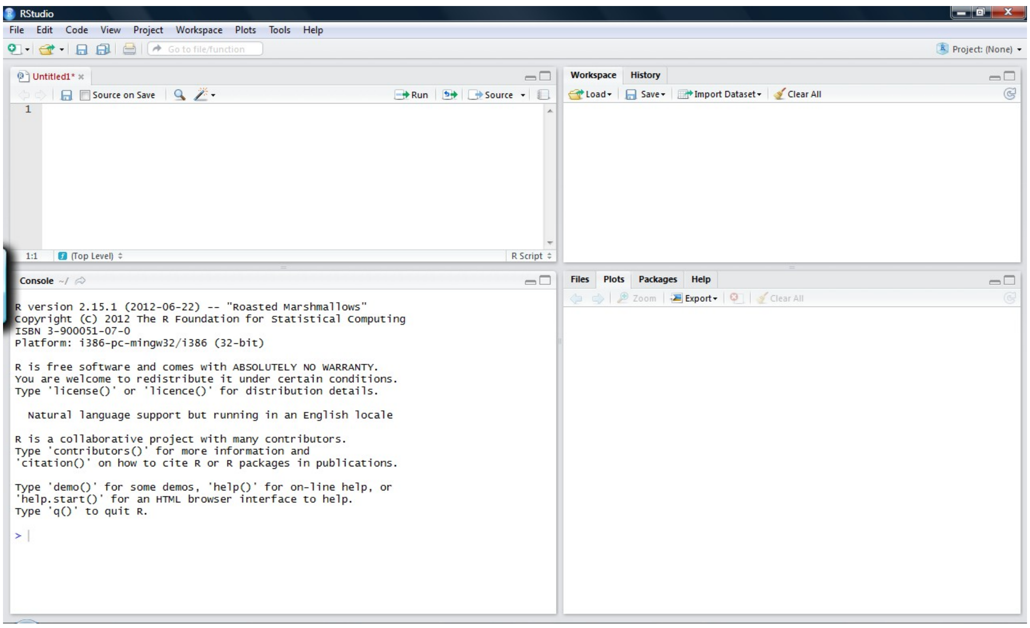
- คลิก `Download RStudio Desktop` เพื่อดาวน์โหลด
- คลิกไฟล์ที่อยู่ใต้หัวข้อ `Recommended For Your System`
- `Save File` และรันโปรแกรม

เนื่องจากโปรแกรม R จำเป็นต้องมีการติดตั้งโปรแกรมสำเร็จรูปย่อย (package) ดังนั้น เราจะประมวลผลโปรแกรม R จาก Flashdrive หรือ External harddisk หรือ Drive D: ในห้องคอมพิวเตอร์ที่เรามีสิทธิที่จะแก้ไขเปลี่ยนแปลงข้อมูลได้ โดยการคัดลอกโฟลเดอร์ `R/R-x.x.x` และ `RStudio` จากโฟล์เดอร์ Program Files แล้ววางใน Flashdrive และเรียกโปรแกรมมาใช้โดยการคลิก `rstudio.exe` ในโฟลเดอร์ `RStudio/bin` โดยในครั้งแรกอาจจะมีการถามถึงโฟลเดอร์ที่มีโปรแกรม R อยู่ใน Flashdrive

A.3 ผังของโปรแกรม RStudio

ผังของโปรแกรม RStudio จะประกอบด้วยหน้าต่างดังที่แสดงในรูป A.1

รูปที่ A.1: ผังโปรแกรม RStudio



หน้าต่างล่างซ้ายเรียกว่า **Console window** หรือ **Command window** ในหน้าต่างดังกล่าวจะมี ">" prompt ซึ่งเราจะใส่คำสั่งหลังเครื่องหมายนั้นเพื่อให้โปรแกรม R ดำเนินการ

หน้าต่างบนซ้ายเรียกว่า **Editor window** หรือ **Script window** เป็นหน้าต่างที่ใช้เก็บชุดคำสั่งเพื่อที่จะเก็บและสามารถเรียกมาใช้ในภายหลังได้

หน้าต่างบนขวาเป็นหน้าต่าง **Workspace/ History window** เป็นหน้าต่างเราสามารถดูข้อมูลหรือค่าต่างๆที่เรากำลังเรียกมาอยู่ในหน่วยความจำ และคำสั่งเก่าๆที่ได้ดำเนินการไปแล้ว

หน้าต่างล่างขวาเป็นหน้าต่าง **Files/Plots/Packages/Help window** เป็นหน้าต่างที่เราสามารถเรียกข้อมูลขึ้นมา ดูกราฟ และติดตั้งหรือเรียกชุดคำสั่ง (packages)

A.4 ชุดคำสั่ง (package) หรือห้องสมุด (library)

โปรแกรม R สามารถวิเคราะห์ข้อมูลและสถิติได้อย่างหลากหลาย โดยชุดคำสั่งที่ใช้ร่วมกันจะถูกเก็บใน *packages* หรือ *libraries* โดยในการติดตั้งทั่วไปจะมีการติดตั้ง packages ที่ใช้บ่อยๆอยู่แล้ว โดยที่เราสามารถเรียกดู packages ที่ติดตั้งไว้แล้วในหน้าต่า packages หรือพิมพ์คำสั่ง `library()` หากกล่องหน้า packages มีเครื่องหมายถูกแสดงว่า packages นั้นได้ถูกโหลดมาไว้ในหน่วยความจำและสามารถใช้งานได้ทันที

ในขณะที่ packages ที่ยังไม่ได้ติดตั้งหรือยังไม่ได้โหลดเข้ามาในหน่วยความจสามารถดำเนินการได้โดยำใน RStudio ตัวอย่างเช่น หากเราต้องการติดตั้ง package ที่ชื่อว่า `RCmdr`

- การติดตั้ง package (install package): คลิก `install package` ใน package window แล้วพิมพ์ชื่อ package ที่ต้องการเช่น `Rcmdr` แล้วคลิก Install หรือพิมพ์ `install.packages("Rcmdr")` ในหน้าต่างคำสั่ง

- การใช้งาน package: เลือกกล่องเพื่อให้มีเครื่องหมายถูกหน้า package ที่เราต้องการเช่น `Rcmdr` หรือพิมพ์ `library("Rcmdr")` ในหน้าต่างคำสั่ง

A.5 การทำงานบน Working directory

Working directory เป็นโฟลเดอร์ที่เราจะทำงาน โดยโปรแกรม R จะหาข้อมูลตลอดจนโปรแกรมที่เราเขียนไว้จากโฟลเดอร์ดังกล่าว ตลอดจนข้อมูลและรูปภาพที่เราบันทึกไว้จะอยู่ในโฟลเดอร์นั้น ดังนั้นก่อนการเริ่มงานบน R เราควรกำหนดโฟลเดอร์ดังกล่าวด้วยคำสั่งใน command window `setwd("directoryname")` เช่น

```
> setwd("D:/Teaching/EC435/R")
```

หรือบน RStudio เมนูเลือก `Tools` → `Set Working Directory` → `Choose Directory`

A.6 การใช้งานเบื้องต้น

A.6.1 เครื่องคิดเลข

โปรแกรม RStudio เราสามารถคำนวณกระบวนการทางคณิตศาสตร์ได้ด้วยเครื่องหมายดังต่อไปนี้ โดยพิมพ์คำสั่งดังกล่าวในหน้าต่าง Console แล้ว Enter

```
> 2+3 # Addition
> 2-3 # Subtraction
> 2*3 # Multiplication
> 2/3 # Division
```

```
> 2^3 # 2 to the power of 3
> sqrt(3)  # Square roots
> log(3)  # Logarithms (to the base e)
```

A.6.2 พื้นที่ทำงาน (workspace)

เราสามารถเก็บผลการคำนวณไว้ในตัวแปรใดๆได้โดยใช้ “assignment operator” `<-` , หรือ `=` เช่น

```
> a <- 2 * 3
> 2 * a
[1] 12
```

A.6.3 สเกลาร์ เวกเตอร์ และเมทริกซ์

ข้อมูลตัวเลขใน R จะถูกบันทึกในรูปสเกลาร์ เวกเตอร์ หรือเมทริกซ์ เช่นในตัวอย่างที่ผ่านมา `a` คือสเกลาร์ที่มีค่าเท่ากับ 6 หรือเราสามารถสร้างเวกเตอร์ได้โดย ใช้ฟังก์ชัน `c` ดังนี้ เช่นเวกเตอร์ `b` ประกอบด้วยสมาชิกคือ 2,3,4

```
> b=c(2,3,4)
> b
[1] 2 3 4
```

A.6.4 ฟังก์ชัน

บางครั้งเราต้องการคำนวณค่าบางค่าที่ต้องใช้คำสั่งหลายบรรทัด บางครั้งเราสามารถใช้ฟังก์ชันที่มีอยู่แล้วในโปรแกรมหลักของ R หรือใน package ต่างๆ เช่น การหาค่าเฉลี่ยสามารถใช้ฟังก์ชัน `mean()` เช่นเราต้องการหาค่าเฉลี่ยของ 5,9,13,4 เราต้องรวมค่าทั้งหมดไว้ในเวกเตอร์และหาค่าเฉลี่ยดังนี้

```
> x=c(5,9,13,4)
> mean(x)
[1] 7.75
```

โดยที่ค่าหรือตัวเลือกที่ต้องกำหนดในวงเล็บเรียกว่า *arguments* ตัวอย่างของฟังก์ชันอีกอันของฟังก์ชันคือฟังก์ชัน `rnorm` ที่ใช้ในการสร้างค่าทดลอง (generate) ค่าจากการแจกแจงแบบปกติ

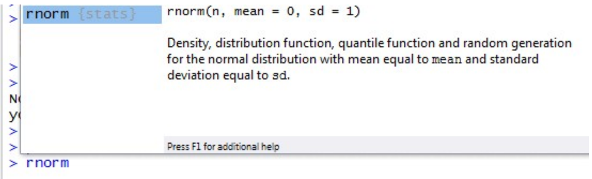
```
> rnorm(10)
 [1]  0.60299 -0.75383  0.97095  1.06657  0.26545 -0.51994 -0.89247 -0.01616
 [9]  1.11192 -0.31573
```

RStudio มีส่วนประกอบที่ช่วยเหลือเกี่ยวกับ arguments ที่เราจะต้องใส่สำหรับแต่ละฟังก์ชันเราสามารถเขียนฟังก์ชันใน command window แล้วกดปุ่ม `Tab` จะมีตัวอย่างของ arguments ขึ้นมาให้เช่นรูป A.2

A.6.5 การวาดแผนภาพ

```
> x=rnorm(100)
> plot(x)
```

รูปที่ A.2: Tab ช่วยเหลือใน RStudio



A.7 การช่วยเหลือและเอกสารประกอบฟังก์ชัน

เมื่อพิมพ์ฟังก์ชัน `help` จะมีเอกสารช่วยเหลือในหน้าต่าง help

```
> help(rnorm)
```

หรือเราสามารถใช้ฟังก์ชัน `example` เพื่อดูตัวอย่างคำสั่งและผลของฟังก์ชัน

```
> example(rnorm)
```

A.8 Scripts

นอกจากการพิมพ์คำสั่งใน command window แล้วเราสามารถประมวลผลโปรแกรมจาก script ซึ่งมีนามสกุล `.R` โดยการเลือกเปิดไฟล์จาก `File` → `Open File` แล้วเลือก Script ขึ้นมาแล้วคลิก `run` ในเมนู editor window

A.9 โครงสร้างข้อมูล

A.9.1 เวกเตอร์

เราสามารถสร้างเวกเตอร์ได้ด้วยฟังก์ชัน `c` เช่นคำสั่งในบรรทัดที่ 1 นอกจากนี้เราสามารถเรียกดูข้อมูลในตำแหน่งที่ i ด้วยคำสั่ง `vectorname[i]` เช่นบรรทัดที่ 4 นอกจากนี้เราสามารถสร้างเวกเตอร์ที่มีระยะเท่ากันด้วยฟังก์ชัน `seq` ดังเช่นในบรรทัดที่ 9

```
1  > vec1=c(2,4,6,8,10)
2  > vec1
3  [1]  2  4  6  8 10
4  > vec1[5]
5  [1] 10
6  > vec1[3]=12
7  > vec1
8  [1]  2  4 12  8 10
9  > vec2=seq(from=0,to=1,length=5)
10 > vec2
11 [1] 0.00 0.25 0.50 0.75 1.00
12 > vec1+vec2
13 [1]  2.00  4.25 12.50  8.75 11.00
```

A.9.2 เมตริกซ์

เราสามารถสร้างเมตริกซ์โดยการระบุข้อมูลและขนาดของเมตริกซ์ด้วย argument `nrow` หรือ `ncol` ซึ่งระบุจำนวนแถวหรือคอลัมน์ของเมตริกซ์

```
> m=matrix(data=c(1,2,3,4,5,6),ncol=3)
> m
     [,1] [,2] [,3]
[1,]    1    3    5
[2,]    2    4    6
```

arguments `data` ในฟังก์ชัน `matrix` กำหนดข้อมูลที่จะใส่ในเมตริกซ์โดยที่ `ncol` เป็นตัวกำหนดจำนวนคอลัมน์ของเมตริกซ์ โดยที่เราอาจเลือกกำหนด `nrow` ก็ได้

การเรียกข้อมูลแต่ละตำแหน่งสามารถทำได้โดยใช้ `[row,column]`

```
> m[1,2]
[1] 3
> m[1,]
[1] 1 3 5
> m[,2]
[1] 3 4
```

A.9.3 data frame

ข้อมูลอนุกรมเวลามักถูกจัดเก็บในรูปของ data frame โดยที่หัวคอลัมน์เป็นชื่อของคอลัมน์ ดังนั้นเราสามารถเรียกคอลัมน์นั้นๆมาใช้โดยไม่ต้องทราบตำแหน่งของข้อมูลเช่น

```
> t=data.frame(x=c(1,2,3),y=c(10,20,30),z=c(100,200,300))
> t
  x  y   z
1 1 10 100
2 2 20 200
3 3 30 300
> mean(t$y)
[1] 20
> mean(t[["z"]])
[1] 200
```

A.9.4 list

โครงสร้างของข้อมูลอีกแบบคือ list โดยที่ข้อมูลจะถูกเก็บเป็นคอลัมน์ซึ่งไม่ได้เรียงลำดับและไม่จำเป็นต้องมีความยาวเท่ากัน โดยที่ฟังก์ในการสร้าง list ก็คือ `list` นั่นเอง โดยที่ใน argument เราจะใส่ตัวแปรต่างๆลงไป โดยในที่ตัวแปร `one` เป็นตัวแปรสเกลาร์ที่มีค่าเท่ากับ 1 ตัวแปร `two` เป็นตัวแปรเวกเตอร์ และตัวแปร `five` เป็นเวกเตอร์ที่มีสมาชิกห้าตัว

```
> L=list(one=1, two=c(1,2), five=seq(1,4,length=5))
> L
$one
```

```
[1] 1
$two
[1] 1 2
$five
[1] 1.00 1.75 2.50 3.25 4.00
> L$five+10
[1] 11.00 11.75 12.50 13.25 14.00
```

A.10 Graphic

คำสั่งในการสร้างรูปภาพคือ `plot` โดยที่ argument ตัวแรกคือ ข้อมูลที่เราจะ plot ในที่นี้คือข้อมูลสุ่มที่สร้างขึ้นจากการแจกแจงแบบปกติจำนวน 100 ตัวอย่าง `rnorm(100)` สำหรับ argument ที่เหลือเป็นการกำหนดรูปและส่วนประกอบได้แก่ `type` คือประเภทของกราฟในที่นี้ “l” แทนกราฟเส้น `col` คือสีของกราฟ `ylab` คือชื่อแกน Y `xlab` คือชื่อแกน X และ `main` คือชื่อกราฟ

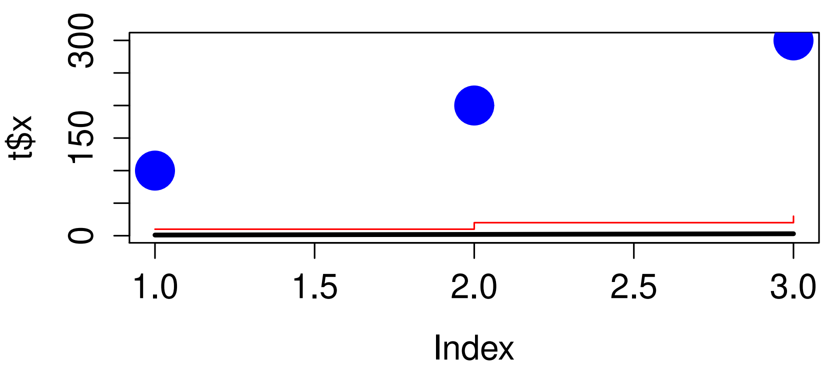
```
> plot(rnorm(100),type="l",col="blue",ylab="values",xlab="observations",main=
    "Generated Data of N(0,1)")
```

หรือหากเราจะสร้างเส้นหลายเส้นสามารถทำได้โดยการเพิ่มเส้นทีละเส้น โดยในคำสั่งแรกจะต้องกำหนดระยะแกน Y ให้ครอบคลุมทั้งสามเส้นด้วยคำสั่ง `ylim`

```
> plot(t$x,type="l",ylim=range(t),lwd=3)
> lines(t$y,type="s",col="red")
> points(t$z,pch=20,cex=5,col="blue")
```

และจะได้รูปที่ A.3

รูปที่ A.3: ตัวอย่างการสร้างกราฟฟิก



A.11 การจัดเก็บข้อมูลและนำเข้าข้อมูล

A.11.1 การจัดเก็บข้อมูลในรูปไฟล์ text

เราสามารถนำเข้าข้อมูลโดยการสร้าง data frame และจัดเก็บในรูปไฟล์ text (นามสกุล .txt) โดยใช้คำสั่ง `write.table` ใน argument ประกอบด้วย ชื่อ data frame, ชื่อไฟล์ที่จัดเก็บ และชื่อของตัวแปร ซึ่งในที่นี้ได้กำหนดไว้แล้วใน data frame

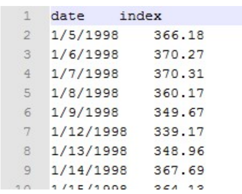
```
> d=data.frame(a=c(3,4,5),b=c(12,13,15))
> d
  a  b
1 3 12
2 4 13
3 5 15
> write.table(d,file="ts0.txt",row.names=FALSE)
```

A.11.2 การเรียกข้อมูลในรูปไฟล์ text

เราสามารถเรียกข้อมูลที่จัดเก็บในรูปไฟล์ text ด้วยฟังก์ชัน `write.table` โดย argument คือชื่อไฟล์และการระบุว่าไฟล์ดังกล่าวมีชื่อตัวแปรหรือไม่ซึ่งในที่นี้คือมีชื่อตัวแปร `header=TRUE`

```
> d2=read.table(file="ts0.txt",header=TRUE)
> d2
  a  b
1 3 12
2 4 13
3 5 15
```

ผู้อ่านสามารถทดลองนำเข้าข้อมูลไฟล์ text ชื่อว่า setindex.txt[1] เมื่อเปิดไฟล์ดังกล่าวด้วยโปรแกรมเช่น Notepad จะเห็นได้ว่าข้อมูลมีการแบ่งด้วยช่องว่าง เราสามารถนำเข้าข้อมูลด้วย R Commander โดยขั้นตอน

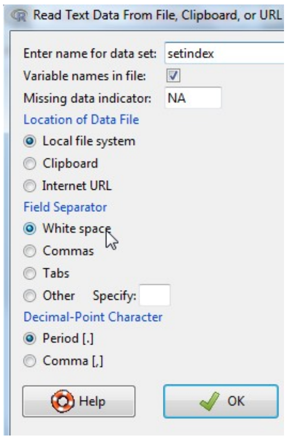


```
date      index
1/5/1998    366.18
1/6/1998    370.27
1/7/1998    370.31
1/8/1998    360.17
1/9/1998    349.67
1/12/1998   339.17
1/13/1998   348.96
1/14/1998   367.69
```

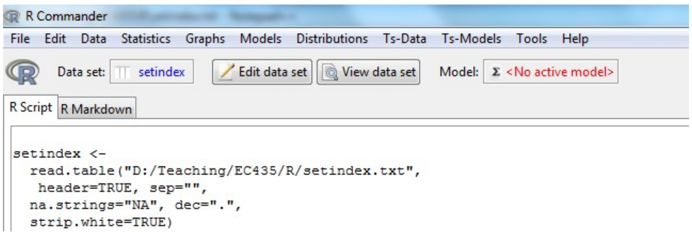
ต่อไปนี้

1. เลือก `Data/Import Data/From text file, clipboard, or URL` แล้วคลิก
2. จะได้กล่องให้ใส่เงื่อนไขต่างๆ ใส่ชื่อ Data set เป็น setindex และดูว่า มีการแบ่งข้อมูล(Field separator) เป็น white space ตามรูป
3. จะได้กล่องให้เราระบุตำแหน่งของไฟล์ เลือก Folder และ ไฟล์ที่เราต้องการ (ในที่นี้คือ setindex.txt) แล้ว Open

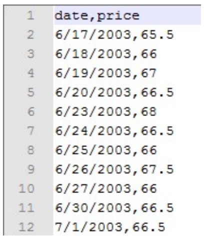
[1] download จาก Moodle ไปยัง workspace directory



4. จะเห็นได้ว่าในพื้นที่ใต้เมนู จะมีชื่อ Dataset เป็น setindex ที่เรานำเข้ามา และเราสามารถเรียกดูข้อมูลได้โดยคลิก view data



ไฟล์ text อีกประเภทหนึ่งที่เรามักจะเจอเวลาเราดาวน์โหลดข้อมูลคือ `.csv` โดยเราสามารถนำเข้าข้อมูลได้โดยใช้คำสั่ง `read.csv` เช่นในที่นี้ชื่อไฟล์ `pttstock.csv` เมื่อเปิดไฟล์ดังกล่าวด้วยโปรแกรมเช่น Notepad จะเห็นได้ว่าข้อมูลมีการแบ่งด้วย Comma


```
date,price
6/17/2003,65.5
6/18/2003,66
6/19/2003,67
6/20/2003,66.5
6/23/2003,68
6/24/2003,66.5
6/25/2003,66
6/26/2003,67.5
6/27/2003,66
6/30/2003,66.5
7/1/2003,66.5
```

เราสามารถนำเข้าข้อมูลด้วย R Commander โดยขั้นตอนต่อไปนี้

1. เลือก `Data/Import Data/From text file, clipboard, or URL` แล้วคลิก

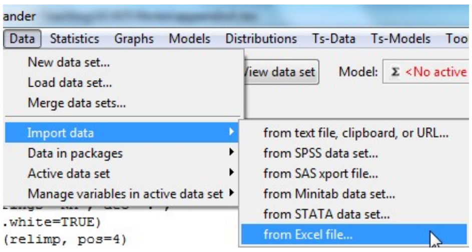
2. จะได้กล่องให้ใส่เงื่อนไขต่างๆ ใส่ชื่อ Data set เป็น `ptt` และดูว่า มีการแบ่งข้อมูล(Field separator) เป็น comma

3. จะได้กล่องให้เราระบุตำแหน่งของไฟล์ เลือก Folder และ ไฟล์ที่เราต้องการ (ในที่นี้คือ pttstock.csv) แล้ว Open

4. จะเห็นได้ว่าในพื้นที่ใต้เมนู จะมีชื่อ Dataset เป็น ptt ที่เรานำเข้ามา

A.11.3 การนำเข้าไฟล์ประเภทอื่นๆ

เราสามารถนำเข้าไฟล์ได้หลายประเภทเช่น SPSS, STATA และ Excel ได้ด้วยการเลือก Data/Import Data แล้วเลือกประเภทของไฟล์ที่ต้องการนำเข้าตามรูป



A.11.4 การบันทึกข้อมูล

เราสามารถบันทึกข้อมูลที่เรานำเข้าและสร้างตัวแปรใหม่ได้โดยการเลือก `Data/Active data set/Save active data set...` แล้วเลือก Folder ที่เราต้องการบันทึก และกำหนดชื่อ (ชนิดไฟล์ Rdata) แล้ว Save

ในการเปิดไฟล์ที่เราบันทึกครั้งต่อไปเราสามารถเลือก `Data/Load data set`

นอกจากนี้เราสามารถ Export ข้อมูลในรูปไฟล์ชนิดอื่นเช่น .txt หรือ .csv สำหรับนำเข้าในโปรแกรมอื่นได้ด้วยการเลือก `Data/Active data set/Export active data set...` เลือกวิธีการแบ่งคอลัมน์แล้วคลิก OK หลังจากนั้นกำหนดชื่อไฟล์และชนิดไฟล์ที่ต้องการ

A.12 การคำนวณผลได้ตอบแทนจากตัวอย่างหุ้น PTT

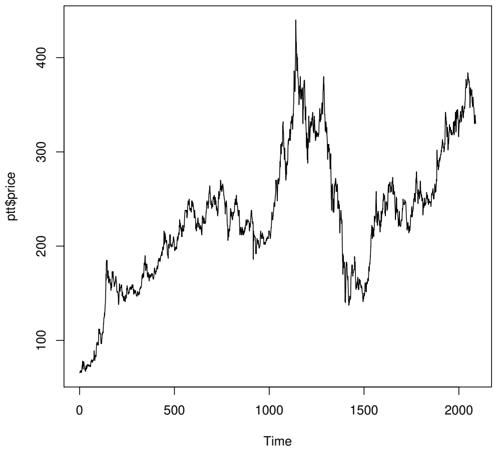
A.12.1 การวาดกราฟ

จากข้อมูล `ptt` เราสามารถวาดกราฟได้โดย เปลี่ยน active data set เป็น ptt โดยคลิกที่ Data set แล้วเลือก ptt

เราสามารถสร้างกราฟได้โดยการเลือก `Graphs` ในที่นี้ข้อมูลของเราเป็นอนุกรมเวลา เราจะเลือก `Graphs/epack- time series plots` จะได้รูปดังต่อไปนี้ เราสามารถบันทึกรูปไว้โดยเลือก `File/Save as` แล้วเลือกประเภทไฟล์ที่ต้องการ หรือหากต้องการนำไปวางในโปรแกรมเอกสารเช่น Word เราสามารถเลือก `File/Copy to the clipboard`

เนื่องจาก data frame ที่เรานำเข้ามายังไม่ได้ระบุตัวแปรเวลาสำหรับการเรียงข้อมูล เราจะใช้ package `zoo` ในการจัดการข้อมูลให้เรียงตามเวลาที่ระบุใน data frame ดังต่อไปนี้ โดยที่ตัวแปรใหม่จะถูกจัดเก็บใน data set `ptt` โดยการใส่ชื่อ `ptt.z` ต่อท้าย `ptt$`

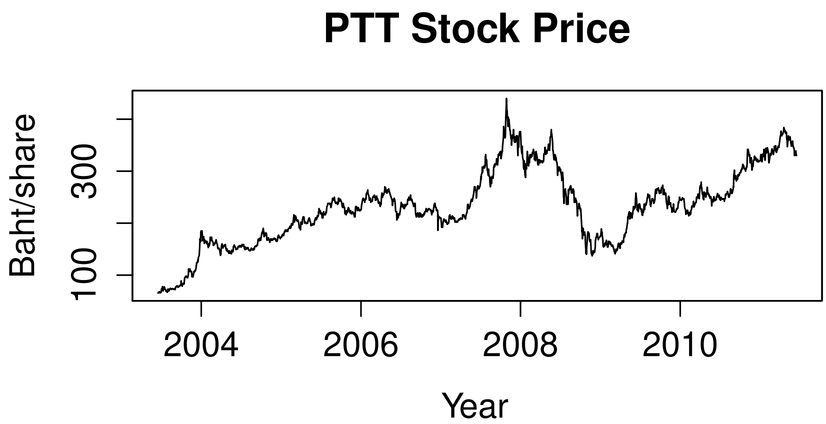
```
> library(zoo)
> ptt$ptt.z<-zoo(x=ptt$price, order.by=as.Date(ptt$date,"%m/%d/%Y"))
> head(ptt$ptt.z)
2003-06-17 2003-06-18 2003-06-19 2003-06-20 2003-06-23 2003-06-24
```




```
      65.5        66.0        67.0        66.5        68.0        66.5
> plot(ptt$ptt.z,xlab="Year",ylab="Baht/share", main="PTT Stock Price")
```

แล้วเราจะได้รูป A.4

รูปที่ A.4: ราคาหุ้น PTT



A.12.2 การคำนวณผลได้ตอบแทน

การคำนวนผลได้ตอบแทนด้วยคำสั่งหลักใน R

เราสามารถคำนวณผลตอบแทนอย่างง่ายได้โดยนำราคาในตำแหน่งที่ i ลบด้วยตำแหน่งที่ i-1 แล้วหารด้วย i-1 โดยการเขียนคำสั่งในบรรทัดที่ 1 อย่างไรก็ตามผลลัพธ์ที่ได้จะมีจำนวนหายไปหนึ่งตำแหน่ง หากเราจะนำข้อมูลไปรวมใน data frame จะต้องมีการสมมุติให้ตำแหน่งแรกเป็นศูนย์ตามบรรทัดที่ 2

```
1 > n=length(ptt$price)
2 > sret=(ptt$price[2:n]-ptt$price[1:n-1])/(ptt$price[1:n-1])
```

หากเราต้องการรวมตัวแปรใน data frame เราต้องเพิ่มตัวอย่างแรกในตัวแปร `sret` เพื่อให้ความยาวเท่ากัน

```
> head(sret)
[1]  0.007634  0.015152 -0.007463  0.022556 -0.022059 -0.007519
> ptt$sret=c(NA,sret)
> head(ptt)
        date  price      sret
1 6/17/2003 65.5         NA
2 6/18/2003 66.0  0.007634
```

หรือสามารถคำนวณผลได้ตอบแทนในรูปของล็อกได้ด้วยคำสั่งในบรรทัดที่ 1 หรือบรรทัดที่สอง หรือแปลงค่าจากผลได้ตอบแทนอย่างง่าย

```
1 > lret=log(ptt$price[2:n])-log(ptt$price[1:n-1])
2 > lret2=diff(log(ptt$price))
3 > lret3=log(1+sret)
4 > head(lret)
5 [1]  0.007605  0.015038 -0.007491  0.022306 -0.022306 -0.007547
6 > ptt$lret=c(NA,lret)
7 > head(ptt)
8         date  price      sret      lret
9 1 6/17/2003 65.5         NA        NA
10 2 6/18/2003 66.0  0.007634  0.007605
11 3 6/19/2003 67.0  0.015152  0.015038
12 4 6/20/2003 66.5 -0.007463 -0.007491
13 5 6/23/2003 68.0  0.022556  0.022306
14 6 6/24/2003 66.5 -0.022059 -0.022306
```

เราสามารถบันทึก data frame `ptt` เป็นไฟล์ csv ด้วยคำสั่ง

```
> write.csv(ptt, file="pttreturn.csv", row.names=FALSE)
```

R package สำหรับคำนวณผลได้ตอบแทน

เราสามารถคำนวณผลได้ตอบแทนได้ด้วย package `PerformanceAnalytics` โดยที่ตัวแปรนั้นต้องอยู่ในรูป zoo ซึ่งในที่นี้คือ `ptt$pptz` คำสั่งที่ใช้ในการคำนวณ คือ Return.calculate(price, method) โดยที่ discrete คือ simple return

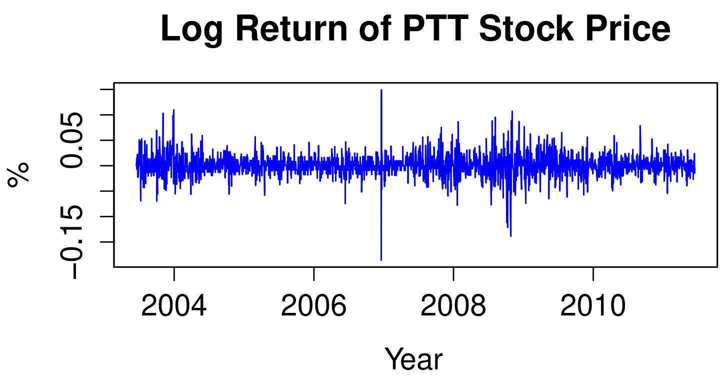
```
> ptt$sret2=Return.calculate(ptt$ptt.z, method = "discrete")
> ptt$lret2=Return.calculate(ptt$ptt.z, method = "log")
> head(ptt)
        date price ptt.z         sret         lret        sret2        lret2
1 6/17/2003   65.5  65.5           NA           NA           NA           NA
2 6/18/2003   66.0  66.0  0.007633588  0.007604599  0.007633588  0.007604599
3 6/19/2003   67.0  67.0  0.015151515  0.015037877  0.015151515  0.015037877
4 6/20/2003   66.5  66.5 -0.007462687 -0.007490672 -0.007462687 -0.007490672
5 6/23/2003   68.0  68.0  0.022556391  0.022305758  0.022556391  0.022305758
6 6/24/2003   66.5  66.5 -0.022058824 -0.022305758 -0.022058824 -0.022305758
```

เนื่องจากข้อมูลในแถวแรกเป็น NA เราอาจจะลบข้อมูลในแถวแรก

แล้วสามารถวาดแผนภาพของผลได้ตอบแทนได้ในรูปล็อกได้ตามรูปที่ A.5

```
> plot(ptt$lret2,xlab="Year",ylab="%", main="Log Return of PTT Stock Price",
  col="blue")
```

รูปที่ A.5: ผลได้ตอบแทนจากราคาหุ้น PTT



Bibliography

Bollerslev, Tim. 1986. “Generalized autoregressive conditional heteroskedasticity”. *Journal of Econometrics* 31, no. 3 (): 307–327.

Engle, Robert F. 1982. “Autoregressive Conditional Heteroscedasticity with Estimates of the Variance of United Kingdom Inflation”. *Econometrica* 50 (4): 987–1007.

Engle, Robert F., and C. W. J. Granger. 1987. “Co-Integration and Error Correction: Representation, Estimation, and Testing”. *Econometrica* 55 (2): 251–276.

Fuller, Wayne A. 1996. *Introduction to Statistical Time Series*. Wiley.

Hamilton, James D. 1994. *Time Series Analysis*. Princeton University Press.

Johansen, Soren. 1991. “Estimation and Hypothesis Testing of Cointegration Vectors in Gaussian Vector Autoregressive Models”. *Econometrica* 59 (6): 1551–1580.

— . 1995. *Likelihood-Based Inference in Cointegrated Vector Autoregressive Models*. Oxford University Press.

— . 1988. “Statistical analysis of cointegration vectors”. *Journal of Economic Dynamics and Control* 12 (2-3): 231–254.

Johansen, Soren, and Katarina Juselius. 1990. “Maximum Likelihood Estimation and Inference on Cointegration with Applications to the Demand for Money”. *Oxford Bulletin of Economics and Statistics* 52 (2): 169–210.

John Y. Campbell, Andrew W. Lo, and A.Craig MacKinlay. 1997. *The Econometrics of Financial Markets*. Princeton University Press.

McLeod, A. I., and W. K. Li. 1983. “DIAGNOSTIC CHECKING ARMA TIME SERIES MODELS USING SQUARED-RESIDUAL AUTOCORRELATIONS”. *Journal of Time Series Analysis* 4 (4): 269–273.

Newey, Whitney K., and Kenneth D. West. 1987. “A Simple, Positive Semi-Definite, Heteroskedasticity and Autocorrelation Consistent Covariance Matrix”. *Econometrica* 55 (3): 703–708.

Phillips, P. C. B., and S. Ouliaris. 1990. “Asymptotic Properties of Residual Based Tests for Cointegration”. *Econometrica* 58 (1): 165–193.

Phillips, P.C.B., and P. Perron. 1988. “Testing for a unit root in time series regression”. *Biometrika* 75, no. 2 (): 335–346.

White, Halbert. 1980. “A Heteroskedasticity-Consistent Covariance Matrix Estimator and a Direct Test for Heteroskedasticity”. *Econometrica* 48 (4): 817–838.

Wooldridge, Jeffrey M. 1989. “A computationally simple heteroskedasticity and serial correlation robust standard error for the linear regression model”. *Economics Letters* 31, no. 3 (): 239–243.

— . *Introductory Econometrics: A Modern Approach*.