การพิจารณาความสัมพันธ์

ระหว่าง Y_t กับ X_t

time series

EC435

บทที่ 7 โคอินทิเกรชัน (Cointegration)

$$Y_t = \beta_0 + \beta_1 X_t + \varepsilon_t$$

→ OLS

ข้อสมมุติ Y_t, X_t

stationary

↳ $\hat{\beta}_1$ เป็นตัวประมาณค่าที่ดี

เฉลิมพงษ์ คงเจริญ ©2556-2563

คณะเศรษฐศาสตร์ มหาวิทยาลัยธรรมศาสตร์

November 13, 2020

ต.ย. Consumption / GDP

$$C_t = f(Y_t)$$

$$C_t = \alpha + \beta Y_t$$

Agg Consumption, GDP

มักจะไม่เป็น stationary (unit root)

⇒ จะต้องเป็น stationary

ถ้า Run Regression โดยที่ตัวแปรเป็น Non stationary $\Rightarrow$?

spurious regression

กรณีที่ตัวแปรทั้งหมดเป็น $I(1)$ และไม่ได้เป็น cointegrated ตัวทดสอบที่ได้จากแบบจำลองจะไม่เหมาะสม เราจะพบความสัมพันธ์ระหว่างตัวแปรทั้งๆที่จริงๆแล้วตัวแปรทั้งหลายไม่มีความสัมพันธ์กัน (spurious regression)

สมมุติข้อมูล

แยกกัน

Y_t เป็น unit root (Random walk) $\boxed{Y_t = Y_{t-1} + \varepsilon_t}$

X_t เป็น R.W.

Regression $Y_t = \beta_0 + \beta_1 X_t + \varepsilon_t$

$\beta_1 = 0$ เนื่องจาก Y_t กับ X_t ไม่สัมพันธ์กัน

ด้วย OLS

$\hat{\beta}_1 \neq 0$ พบว่า $\Rightarrow \left| t_{\hat{\beta}_1} = \frac{\hat{\beta}_1}{se(\hat{\beta}_1)} \right| > c.v.$

สรุป $\beta_1 \neq 0$

spurious regression $\Leftarrow$ ข้อสรุปจากเครื่องมือทางสถิติ แตกต่างจากจริง $\beta_1 = 0$

spurious regression

กรณีที่ตัวแปรทั้งหมดเป็น $I(1)$ และไม่ได้เป็น cointegrated ตัวทดสอบที่ได้จากแบบจำลองจะไม่เหมาะสม เราจะพบความสัมพันธ์ระหว่างตัวแปรทั้งๆที่จริงๆแล้วตัวแปรทั้งหลายไม่มีความสัมพันธ์กัน (spurious regression)

หากเราพิจารณาอนุกรมเวลาสองกระบวนการที่เป็น $I(1)$ และเป็นอิสระต่อกัน เราสามารถแสดงความสัมพันธ์ของแต่ละตัวแปรได้ดังนี้

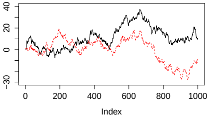
RW - $$y_{1t} = y_{1,t-1} + \varepsilon_{1t} \quad \varepsilon_{1t} \sim WN(0,1)$$

RW - $$y_{2t} = y_{2,t-1} + \varepsilon_{2t} \quad \varepsilon_{2t} \sim WN(0,1)$$

โดยที่ $Cov(\varepsilon_{1t}, \varepsilon_{2t}) = 0$ ซึ่งแสดงว่าทั้งสองอนุกรมเวลาเป็นอิสระต่อกัน

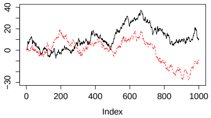
Spurious regression

Figure: การจำลองกระบวนการ $I(1)$ สองอนุกรมเวลา



Spurious regression

Figure: การจำลองกระบวนการ $I(1)$ สองอนุกรมเวลา



พิจารณาความสัมพันธ์เชิงถดถอย $y_{1t} = \alpha + \beta y_{2t} + u_t$

```
> summary(lm(y1~y2))
Call:
lm(formula = y1 ~ y2)

Coefficients:
             Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
(Intercept) 11.43603    0.31329  36.503  < 2e-16 ***
y2           0.16237    0.02885   5.628 2.36e-08 ***
---
Signif. codes:  0 ‘***’ 0.001 ‘**’ 0.01 ‘*’ 0.05 ‘’. 0.1 ‘’  1

Residual standard error: 9.905 on 998 degrees of freedom
Multiple R-squared: 0.03077,^^IAdjusted R-squared: 0.02979
F-statistic: 31.68 on 1 and 998 DF,  p-value: 2.363e-08
```

$\hat{\beta} = 0.16$

→ สรุปได้ $\beta \neq 0$

} spurious regression

ในทางปฏิบัติ → ข้อมูลจริง เป็น nonstationary

Reg ⇒ $\hat{\beta} \neq 0$, $|t| > c.v.$

⇒ ผลลัพธ์ที่ได้ เราไม่แน่ใจว่า จะเป็น spurious reg

- พิจารณาข้อมูล stationary

Spurious regression

$y_{1t} \sim RW \to \Delta y_{1t} \sim$ stationary

$y_{2t} \sim RW \to \Delta y_{2t} \sim$ stationary

Reg

หากเราพิจารณาสมการ $\Delta y_{1t} = \beta \Delta y_{2t} + v_t$ → โดยที่ไม่ต้องกังวล spurious reg.

```
> summary(lm(diff(y1)~diff(y2)-1))

Call:
lm(formula = diff(y1) ~ diff(y2) - 1)

Coefficients:
          Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
diff(y2)  0.003455   0.030827   0.112    0.911

Residual standard error: 0.9921 on 998 degrees of freedom
Multiple R-squared: 1.258e-05,^^IAdjusted R-squared: -0.0009894
F-statistic: 0.01256 on 1 and 998 DF,  p-value: 0.9108
```

$\hat\beta \neq 0$ แต่ p-value > α → สรุปว่า $\beta \neq 0$

→ ความสัมพันธ์ ระหว่าง Δy_{1t} กับ Δy_{2t}

ดูที่ level ⇔ $C_t = \alpha + \beta Y_t + \varepsilon_t$ → Reg ⇒ Spurious Reg ?

C_t: I(1), Y_t: I(1)

พิจารณาสมการ

1st diff. $\Delta C_t = \beta_0 + \beta_1 \Delta Y_t + \varepsilon_t$ ⇒ ไม่มีปัญหา spurious reg.

ΔC_t: I(0), ΔY_t: I(0)

log(GDP) log(C)

$\boxed{\hat\beta_1}$ → ถ้า ΔY_t เปลี่ยน 1 หน่วย ΔC_t ปป. β_1 หน่วย

แตกต่างจาก β = MPC (Y ปป 1 หน่วย C ปป. β หน่วย)

ความสัมพันธ์ของ growth ของตัวแปรทั้ง 2 ตัว

Spurious regression

หากเราพิจารณาสมการ $\Delta y_{1_t} = \beta \Delta y_{2_t} + v_t$

```
> summary(lm(diff(y1)~diff(y2)-1))

Call:
lm(formula = diff(y1) ~ diff(y2) - 1)

Coefficients:
         Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
diff(y2) 0.003455   0.030827   0.112    0.911

Residual standard error: 0.9921 on 998 degrees of freedom
Multiple R-squared: 1.258e-05,^^IAdjusted R-squared: -0.0009894
F-statistic: 0.01256 on 1 and 998 DF,  p-value: 0.9108
```

จากตัวอย่างข้างต้นเราจำเป็นต้องระมัดระวังในการพิจารณาความสัมพันธ์ระหว่างอนุกรมเวลาในกรณีที่ตัวแปรที่เราสนใจมีลักษณะเป็น $I(1)$ ซึ่งในกรณีทั่วไปเราจำเป็นต้องปรับให้ตัวแปรดังกล่าวเป็น $I(0)$

Spurious regression

หากเราพิจารณาสมการ $\Delta y_{1_t} = \beta \Delta y_{2_t} + v_t$

```
> summary(lm(diff(y1)~diff(y2)-1))

Call:
lm(formula = diff(y1) ~ diff(y2) - 1)

Coefficients:
         Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
diff(y2) 0.003455   0.030827   0.112    0.911

Residual standard error: 0.9921 on 998 degrees of freedom
Multiple R-squared: 1.258e-05,^^IAdjusted R-squared: -0.0009894
F-statistic: 0.01256 on 1 and 998 DF,  p-value: 0.9108
```

จากตัวอย่างข้างต้นเราจำเป็นต้องระมัดระวังในการพิจารณาความสัมพันธ์ระหว่างอนุกรมเวลาในกรณีที่ตัวแปรที่เราสนใจมีลักษณะเป็น $I(1)$ ซึ่งในกรณีทั่วไปเราจำเป็นต้องปรับให้ตัวแปรดังกล่าวเป็น $I(0)$

ในบางกรณีที่เราอาจจะสามารถศึกษาความสัมพันธ์ระหว่างตัวแปรที่เป็น $I(1)$ ก็ได้ซึ่งในกรณีดังกล่าวคือกรณีที่ตัวแปรเป็น cointegration

บทนำ

$\Rightarrow$ การพยายามศึกษาตัวแปรที่เป็น Nonstationary

$\boxed{\text{ความสัมพันธ์}}$ — y_t กับ X_t $\Rightarrow$ $y_t = \beta_0 + \beta_1 X_t + u_t$

หากเราพิจารณาสมการถดถอยของตัวแปรทั้งสอง อาจจะมีเหตุการณ์เกิดขึ้นได้ 4 เหตุการณ์

กรณีที่ 1: ทั้ง y และ x เป็น stationary เราสามารถใช้ OLS ปกติในการวิเคราะห์

$\hat{\beta}$ เป็นตัว- ประมาณที่ดี

บทนำ

หากเราพิจารณาสมการถดถอยของตัวแปรทั้งสอง อาจจะมีเหตุการณ์เกิดขึ้นได้ 4 เหตุการณ์

กรณีที่ 1: ทั้ง y และ x เป็น stationary เราสามารถใช้ OLS ปกติในการวิเคราะห์

กรณีที่ 2: y และ x เป็น non-stationary แต่ integrated ที่อันดับต่างกัน เราไม่สามารถใช้ OLS ศึกษาความสัมพันธ์ของทั้งสอง

เช่น $y_t \sim I(2)$

$x_t \sim I(1)$

แปลงทั้งคู่ให้เป็น stationary $\underline{\Delta^2 y_t} = \alpha_0 + \alpha_1 \underline{\Delta x_t} + u_t$

บทนำ

หากเราพิจารณาสมการถดถอยของตัวแปรทั้งสอง อาจจะมีเหตุการณ์เกิดขึ้นได้ 4 เหตุการณ์

กรณีที่ 1: ทั้ง y และ x เป็น stationary เราสามารถใช้ OLS ปกติในการวิเคราะห์

กรณีที่ 2: y และ x เป็น non-stationary แต่ integrated ที่อันดับต่างกัน เราไม่สามารถใช้ OLS ศึกษาความสัมพันธ์ของทั้งสอง

กรณีที่ 3: y และ x เป็น non-stationary และ integrated ที่อันดับเดียวกัน แต่ ϵ เป็น *random walk* เราไม่สามารถใช้ OLS วิเคราะห์ แต่เราอาจจะพิจารณาสมการที่เรา difference ทั้งสองข้าง

เช่น $X_t, Y_t \sim I(1)$

$$\underset{I(1)}{Y_t} = \beta_0 + \beta_1 \underset{I(1)}{X_t} + \varepsilon_t \rightarrow$$

Stationary? / Random walk (Non stationary)

Case 4

Case 3

เราสามารถ Run reg โดยไม่มีปัญหา spurious ← X_t และ Y_t cointegrated

แล้วจะดี

แปลว่า $Y_t, X_t \rightarrow \Delta X_t, \Delta Y_t$

ไม่มีปัญหา spurious

$$\Delta Y_t = \alpha_0 + \alpha_1 \Delta X_t + \varepsilon_t$$

- อธิบาย ΔX_t กับ ΔY_t

บทนำ

หากเราพิจารณาสมการถดถอยของตัวแปรทั้งสอง อาจจะมีเหตุการณ์เกิดขึ้นได้ 4 เหตุการณ์

กรณีที่ 1: ทั้ง y และ x เป็น stationary เราสามารถใช้ OLS ปกติในการวิเคราะห์

กรณีที่ 2: y และ x เป็น non-stationary แต่ integrated ที่อันดับต่างกัน เราไม่สามารถใช้ OLS ศึกษาความสัมพันธ์ของทั้งสอง

กรณีที่ 3: y และ x เป็น non-stationary และ integrated ที่อันดับเดียวกัน แต่ ϵ เป็น random walk เราไม่สามารถใช้ OLS วิเคราะห์ แต่เราอาจจะพิจารณาสมการที่เรา difference ทั้งสองข้าง

กรณีที่ 4: y และ x เป็น non-stationary โดยมีอันดับ integrated ที่เหมือนกัน และ error term เป็น stationary. เราเรียกว่า y และ x เป็น **cointegrated.**

Cointegration

นิยาม

$Y_t = \begin{pmatrix} y_{1t} \sim I(1) \\ y_{2t} \sim I(1) \\ \vdots \\ y_{nt} \sim I(1) \end{pmatrix}$ ตัวแปร n ตัว

กำหนดให้ $\boldsymbol{Y}_t = (y_{1t}, y_{2t}, \ldots, y_{nt})'$ แทนเวกเตอร์ $(n \times 1)$ ของอนุกรมเวลาที่เป็น $I(1)$ แล้ว $\boldsymbol{Y}_t$ จะเป็น cointegrated ถ้ามีเวกเตอร์ $\boldsymbol{\beta} = (\beta_1, \ldots, \beta_n)'$ ที่ทำให้

linear combination

$$\boldsymbol{\beta}' \boldsymbol{Y}_t = \beta_1 y_{1t} + \ldots + \beta_n y_{nt} \sim I(0) \qquad (7.1)$$

[การนำตัวแปร คูณกับค่าสัมประสิทธิ์ (coeff) $1 \times n \; n \times 1$

เป็น stationary แล้ว $y_{1t}, \ldots, y_{nt}$ คือ cointegrated

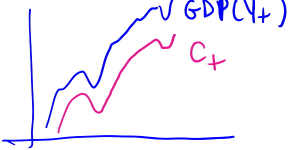
ซึ่งหมายความว่าผลรวมเชิงเส้น (linear combination) ของตัวแปรที่เป็น $I(1)$ มีลักษณะเป็น $I(0)$

ผลรวมเชิงเส้นมักจะได้มาจากทฤษฎีทางเศรษฐศาสตร์ และเรียกสมการดังกล่าวว่าเป็นความสัมพันธ์ในดุลยภาพระยะยาว **(long-run equilibrium)**

ทฤษฎี $C_t = \beta_0 + \beta_1 Y_t + u_t$ - เพราะว่า C_t กับ Y_t cointegrate กัน เราสามารถพิจารณาสมการในรูป level

อธิบายดุลยภาพระยะยาว → linear combination

ตัวแปรทั้งสองจะขยับไปด้วยกัน



Cointegration

cointegrating vector ที่ทำให้ $\beta y_t \sim I(0)$
มีได้หลาย vector

เวกเตอร์ β ไม่ได้มีลักษณะเป็นรูปแบบอย่างเดียว (unique) เนื่องจากเวกเตอร์ที่เป็นจำนวนเท่าของ $c\beta'$

$$y_t = \begin{pmatrix} y_{1t} \\ \vdots \\ y_{nt} \end{pmatrix}$$

หา $\underset{1\times n}{\beta} y_t \sim I(0) \rightarrow y_t$ เป็น cointegration

series ใหม่ เป็น stationary แล้ว

$c\beta y_t \sim I(0)$

β'

Cointegration

เวกเตอร์ β ไม่ได้มีลักษณะเป็นรูปแบบอย่างเดียว (unique) เนื่องจากเวกเตอร์ที่เป็นจำนวนเท่าของ $c\beta'$

เรามักจะสนใจในรูปแบบที่ normalized ซึ่งเขียนเป็นความสัมพันธ์ cointegration ได้เป็น

$$\beta' Y_t = \boxed{y_{1t} - \beta_2 y_{2t} - \ldots - \beta_n y_{nt}} \sim I(0)$$

$$*\beta' = [1 \;\; -\beta_2 \;\; -\beta_3 \; \ldots \; -\beta_n]$$

หรือเป็นสมการ

Reg.

$$y_{1t} = \underbrace{\beta_2 y_{2t} + \ldots + \beta_n y_{nt}} + u_t \quad (7.2)$$

error term

โดยที่ $u_t \sim I(0)$ และเราเรียกพจน์ u_t ว่า disequilibrium error หรือ cointegrating residuals

จากสมการ Reg.

$$\underbrace{y_{1t} - \beta_2 y_{2t} - \ldots - \beta_n y_{nt}}_{\text{linear comb ของ } Y_t} = u_t$$

$\boxed{u_t}$ กลายเป็นตัวแทนของ linear combination $\sim I(0)$

$(I(0))$?

นิยาม cointegration

Cointegration

เวกเตอร์ $\boldsymbol{\beta}$ ไม่ได้มีลักษณะเป็นรูปแบบอย่างเดียว (unique) เนื่องจากเวกเตอร์ที่เป็นจำนวนเท่าของ $c\boldsymbol{\beta}'$

เรามักจะสนใจในรูปแบบที่ normalized ซึ่งเขียนเป็นความสัมพันธ์ cointegration ได้เป็น

$$\boldsymbol{\beta}' \boldsymbol{Y}_t = \overset{1}{\downarrow} y_{1t} - \beta_2 y_{2t} - \ldots - \beta_n y_{nt} \sim I(0)$$

หรือเป็นสมการ

$$y_{1t} = \beta_2 y_{2t} + \ldots + \beta_n y_{nt} + u_t \quad (7.2)$$

→ อธิบายความผันผวน ระยะยาว

โดยที่ $u_t \sim I(0)$ และเราเรียกพจน์ u_t ว่า disequilibrium error หรือ cointegrating residuals

สมมติให้

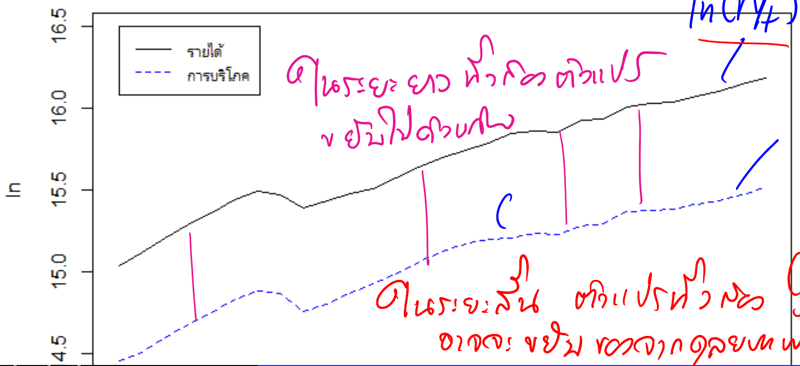
ในดุลยภาพระยะยาวค่า disequilibrium error จะเท่ากับศูนย์ และความสัมพันธ์ระยะยาวจะเท่ากับ $\boxed{y_{1t} = \beta_2 y_{2t} + \ldots + \beta_n y_{nt}}$ → y_{2t} ขึ้น 1 หน่วย ⇒ y_{1t} ขึ้น β_2 หน่วย

$u_t = 0$ [ในภาวะ LR equilibrium]

ทฤษฎีการบริโภครายได้ถาวรเสนอว่าความสัมพันธ์ระยะยาวระหว่างการบริโภคในรูปลอการิทึมกับรายได้ในรูปลอการิทึมสามารถเขียนเป็นสมการ

$$\ln(rc_t) = \beta_0 + \beta_1 \ln(ry_t) + u_t$$

โดยที่ ε_t คือพจน์ตัวรบกวน จากรูป 2 จะเห็นได้ว่าแม้ว่าการบริโภคและรายได้ประชาชาติจะเป็นตัวแปรไม่นิ่งแต่ตัวแปรทั้งสองขยับไปด้วยกันในระยะยาว แม้ว่าจะมีบางช่วงที่ตัวแปรทั้งสองจะขยับออกจากกันเนื่องจากการเปลี่ยนแปลงในวัฏจักรธุรกิจ



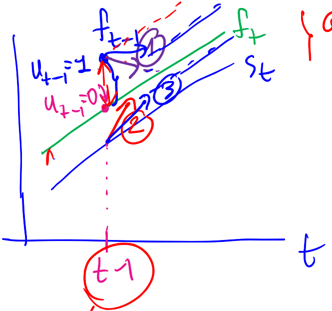
Error Correction Models

$\boxed{u_t \neq 0}$

f_t future price, S_t spot price

$f_t = S_t + \underline{cost}$ [cost of carrying]

หากเกิดภาวะที่ในระยะสั้นตัวแปรขยับออกจากดุลยภาพในระยะยาว จะมีกลไกในการปรับตัวเข้าสู่ดุลยภาพระยะยาวอย่างไร ซึ่งสามารถอธิบายผ่านแบบจำลอง Error Correction Model (ECM)



เกิด disequilibrium

แต่เราทราบว่าใน LR ทั้งคู่กลับมาอยู่ห่างกัน cost

{ ในระยะยาว ตัวแปรทั้งสองจะขยับไปด้วย

$f_t = S_t + cost + u_t$ ใน LR $\underline{u_t = 0}$

ถ้าเกิดใน t-1, $\underline{u_{t-1} > 0}$ เช่น $u_{t-1} = 1$

$\underline{f_{t-1}} = S_{t-1} + cost + u_{t-1}$

<u>การปรับตัว</u>

1. $f_t \downarrow$ กลับเข้าสู่เส้นแนวโน้มเดิม ($\alpha_1 < 0$, $\alpha_2 = 0$)

2. $S_t \uparrow$ ไปสู่เส้นแนวโน้มใหม่ ($\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 > 0$)

3. ทั้ง $f_t \downarrow$ และ $S_t \uparrow$ เข้าสู่แนวโน้มใหม่ (LR) ($\alpha_1 < 0$, $\alpha_2 > 0$)

$\underline{\Delta f_t} = f_t - f_{t-1} = \alpha_1 u_{t-1}$

$\underline{\Delta S_t} = S_t - S_{t-1} = \alpha_2 u_{t-1}$

Error Correction Models

→ อธิบายการปรับตัวจาก diseqm เข้าสู่ดุลยภาพใหม่

หากเกิดภาวะที่ในระยะสั้นตัวแปรขยับออกจากดุลยภาพในระยะยาว จะมีกลไกในการปรับตัวเข้าสู่ดุลยภาพระยะยาวอย่างไร ซึ่งสามารถอธิบายผ่านแบบจำลอง Error Correction Model (ECM)

หากเราพิจารณา cointegration ที่มีตัวแปรสองตัวแปรที่มีลักษณะ $I(1)$ คือ y_{1t} และ y_{2t} โดยมีความสัมพันธ์ cointegration เขียนได้เป็น $y_{1t} - \beta_2 y_{2t} \sim I(0)$ Engle and Granger (1987) แสดงให้เห็นว่ามีแบบจำลอง error correction model (ECM) ที่สามารถแสดงได้ในรูป

อธิบายการปรับตัวระยะสั้นจาก diseqm

$y_{1t} - y_{1,t-1}$ $\quad u_{t-1}$ (+)

$$\Delta y_{1t} = c_1 + \alpha_1 \underbrace{(y_{1,t-1} - \beta_2 y_{2,t-1})}_{u_{t-1}} + \sum_{j=1}^{p} \psi_{11}^j \Delta y_{1,t-j} + \sum_{j=1}^{p} \psi_{12}^j \Delta y_{2,t-j} + \varepsilon_{1t}$$

u_{t-1} (+)

$$\Delta y_{2t} = c_2 + \alpha_2 \underbrace{(y_{1,t-1} - \beta_2 y_{2,t-1})}_{u_{t-1}} + \sum_{j=1}^{p} \psi_{21}^j \Delta y_{1,t-j} + \sum_{j=1}^{p} \psi_{22}^j \Delta y_{2,t-j} + \varepsilon_{2t}$$

$y_{2t} - y_{2,t-1}$ constant

1) ทิศทางการปรับ

2) ขนาดของการปรับตัว (speed ของการปรับ)

ค่ามาก ๆ |abs| ใช้เวลาน้อยในการเข้าหาดุลยภาพ

การตอบสนองของ Δy_{1t} กับ Δy_{2t} ต่อ u_{t-1} (diseqm)

ผลของการปรับตัวในอดีต ต่อการปรับตัวใน t

Error Correction Models

หากเกิดภาวะที่ในระยะสั้นตัวแปรขยับออกจากดุลยภาพในระยะยาว จะมีกลไกในการปรับตัวเข้าสู่ดุลยภาพระยะยาวอย่างไร ซึ่งสามารถอธิบายผ่านแบบจำลอง Error Correction Model (ECM)

หากเราพิจารณา cointegration ที่มีตัวแปรสองตัวแปรที่มีลักษณะ $I(1)$ คือ y_{1_t} และ y_{2_t} โดยมีความสัมพันธ์ cointegration เขียนได้เป็น $y_{1_t} - \beta_2 y_{2_t} \sim I(0)$ Engle and Granger (1987) แสดงให้เห็นว่ามีแบบจำลอง error correction model (ECM) ที่สามารถแสดงได้ในรูป

$$\Delta y_{1_t} = c_1 + \alpha_1(y_{1,t-1} - \beta_2 y_{2,t-1}) + \sum_{j=1}^{p} \psi_{11}^{j} \Delta y_{1,t-j} + \sum_{j=1}^{p} \psi_{12}^{j} \Delta y_{2,t-j} + \varepsilon_{1t}$$

$$\Delta y_{2_t} = c_2 + \alpha_2(y_{1,t-1} - \beta_2 y_{2,t-1}) + \sum_{j=1}^{p} \psi_{21}^{j} \Delta y_{1,t-j} + \sum_{j=1}^{p} \psi_{22}^{j} \Delta y_{2,t-j} + \varepsilon_{2t}$$

สมการข้างต้นแสดงพฤติกรรมเชิงพลวัตรของ y_{1_t} และ y_{2_t} โดยแสดงการปรับตัวระยะสั้นเมื่อตัวแปรตัวใดตัวหนึ่งเคลื่อนตัวออกไปจากดุลยภาพ ซึ่งแบบจำลอง ECM ส่งผลให้เกิดประโยชน์ในการวิเคราะห์ข้อมูลการเงิน

ตัวอย่างที่ ~~7.2~~ 7.4

S_t — $I(1)$ $\qquad$ D_t — $I(1)$

→ Cointegration ทฤษฎีในระยะยาว D_t ตามที่ S_t

$\boxed{\ln(D_t/S_t) \sim I(0)}$

ตัวอย่าง ECM สำหรับราคาหุ้นและเงินปันผล

กำหนดให้ล็อกของราคาหุ้น (s_t) และล็อกของเงินปันผล (d_t) เป็น $I(1)$ ถ้าล็อกของสัดส่วนเงินปันผลต่อราคา ($\log(D_t/S_t)$) เป็น $I(0)$ ดังนั้น $d_t - s_t \sim I(0)$ หรือเขียนเป็นสมการความสัมพันธ์ระยะยาวได้เป็น

$\ln(D_t) - \ln(S_t) \sim I(0)$

$$\Leftarrow \quad d_t = s_t + \mu + u_t \qquad (7.5)$$

ค่าคงที่ $\quad$ disequm error / cointegration res.

โดยที่ $u_t \sim I(0)$

สมมติ $u_t = 0$ $\boxed{\text{ในระยะยาว}}$

สมการที่อธิบาย

$$d_t = s_t + \mu \rightarrow$$

$(\ln D_t)$ $\qquad$ $(\ln S_t)$

ถ้าราคาหุ้น ↑ 1% เงินปันผล ↑ 1%

ถ้า $d_{t-1} > s_{t-1} + \mu \Rightarrow$ disequm $(u_{t-1} > 0)$ → การปรับตัวของ d_t, s_t

ECM

$$\Delta s_t = c_s + \alpha_s \overset{>0}{u_{t-1}} + \cancel{\psi_{11}\Delta s_{t-1} + \psi_{12}\Delta d_{t-1}} + \varepsilon_{st}$$

เพื่อความง่าย

$$\Delta d_t = c_d + \alpha_d u_{t-1} + \varepsilon_{dt}$$

ตัวอย่างที่ 7.2

ตัวอย่าง ECM สำหรับราคาหุ้นและเงินปันผล

กำหนดให้ล็อกของราคาหุ้น (s_t) และล็อกของเงินปันผล (d_t) เป็น $I(1)$ ถ้าล็อกของสัดส่วนเงินปันผลต่อราคา ($\log(D_t/S_t)$) เป็น $I(0)$ ดังนั้น $d_t - s_t \sim I(0)$ หรือเขียนเป็นสมการความสัมพันธ์ระยะยาวได้เป็น

$$d_t = s_t + \mu + u_t \qquad (7.5)$$

โดยที่ $u_t \sim I(0)$ และสามารถเขียน ECM ได้ดังนี้

ECM

$$\Delta s_t = c_s + \alpha_s \overbrace{(d_{t-1} - s_{t-1} - \mu)}^{u_{t-1}} + \varepsilon_{st} \qquad (7.6) \checkmark$$

$$\Delta d_t = c_d + \alpha_d (d_{t-1} - s_{t-1} - \mu) + \varepsilon_{dt} \qquad (7.7) \checkmark$$

α_s, α_d ทิศทาง + ขนาดของการปรับตัว $\begin{cases} s_t \\ d_t \end{cases}$

ตัวอย่างที่ 6.2

สมมุติให้ $\alpha_s = 0.5$ และ $\alpha_d = 0$ จะได้

ECM ($\alpha_s = 0.5, \alpha_d = 0$)

$$\Delta s_t = c_s + 0.5(d_{t-1} - s_{t-1} - \mu) + \varepsilon_{st}$$

$$\Delta d_t = c_d + \varepsilon_{dt}$$

$\alpha_d = 0$

ดังนั้นมีเพียงราคาหุ้นที่ตอบสนองต่อ disequilibrium error โดยที่ค่าเฉลี่ยของการเปลี่ยนแปลงของตัวแปรทั้งสองจะขึ้นอยู่กับข้อมูลในอดีต

$1 = u_{t-1} > 0$

$$E(\Delta s_t | F_{t-1}) = c_s + 0.5\overbrace{(d_{t-1} - s_{t-1} - \mu)}^{u_{t-1}}$$

$$E(\Delta d_t | F_{t-1}) = c_d$$

$u_{t-1} > 0 \; [d_{t-1} > s_{t-1} + \mu]$

ECM ของ s_t

$\alpha_s = 0.5 \Rightarrow \Delta s_t = 0.5 \cdot u_{t-1} + c_s$

$(s_t - s_{t-1})$ s_t ขยับขึ้นไป $\Rightarrow$ s_t กับ $d_t + \mu \Rightarrow s_{t+1}$

ลองดู
1)
2) $\alpha_s = 0, \alpha_d = -0.5$
3) $\alpha_s = 0.5, \alpha_d = -0.5$

ดุลยภาพ: $s_{t+j} = d_{t+j} + \mu$

ECM ของ d_t $\alpha_d = 0$

d_t ไม่ได้ปรับตัว ... diseqm

multiple cointegrating relationship

$\begin{pmatrix} Y_{1t} \\ Y_{2t} \\ Y_{3t} \end{pmatrix} \rightsquigarrow$ linear combination $\sim I(0)$

เวกเตอร์ของอนุกรมเวลา $\boldsymbol{Y}_t = (\overset{I(1)}{y_{1t}}, \ldots, \overset{I(1)}{y_{nt}})'$ ซึ่งเป็นอนุกรมเวลาที่ cointegrated กัน อาจจะมีความสัมพันธ์ระยะยาวได้ r รูปแบบ ซึ่ง $o < r < n$ เช่นกรณีที่ $\boldsymbol{Y}_t = (y_{1t}, y_{2t}, y_{3t})'$ อาจจะมีความสัมพันธ์ในรูป $\beta_{11}y_{1t} + \beta_{12}y_{2t} + \beta_{13}y_{3t} \sim I(0)$ และ $\beta_{21}y_{1t} + \beta_{22}y_{2t} + \beta_{23}y_{3t} \sim I(0)$ และเราเรียกเวกเตอร์ $(\beta_{11} \quad \beta_{12} \quad \beta_{13})'$ และ $(\beta_{21} \quad \beta_{22} \quad \beta_{23})'$ ว่า cointegrating vector

จำนวนของ linear combination ซึ่งเป็นอิสระต่อกัน สามารถมีได้ $\boxed{1, \ldots, n-1}$

(r)

$r=1$, $r=2$ $\leftarrow$ $n=3$ $\leftarrow$ $\frac{\beta_1}{2} Y_{1t} + \frac{\beta_2}{2} Y_{2t} + \frac{\beta_3}{2} Y_{3t} \sim I(0)$

$\left[\frac{\beta_1}{2} \quad \frac{\beta_2}{2} \quad \frac{\beta_3}{2}\right] \quad \frac{1}{2}\left[\beta_1 \quad \beta_2 \quad \beta_3\right]$

อัตราดอกเบี้ย อายุไถ่ถอน 1,5,10

ตย $r1_t, r5_t, r10_t$

กรณี 1 (r=1): $\beta_1 Y_{1t} + \beta_2 Y_{2t} + \beta_3 Y_{3t} \sim I(0)$

$r1_t \quad r5_t \quad r10_t$

กรณี 2 (r=2):

$\beta_{11} Y_{1t} + \beta_{12} Y_{2t} + \beta_{13} Y_{3t} \sim I(0)$

$\beta_{21} Y_{1t} + \beta_{22} Y_{2t} + \beta_{23} Y_{3t} \sim I(0)$

(1) $\beta_{13} r10_t = -\beta_{11} r1_t - \beta_{12} r5_t$

(2) $\beta_{22} r5_t = -\beta_{21} r1_t - \beta_{23} r10_t$

การทดสอบ cointegration

$\begin{pmatrix} y_{1t} \\ y_{2t} \\ \vdots \\ y_{nt} \end{pmatrix}$ $r = 1, 2, \ldots, n-1$ →

หากเรากำหนดให้ $\boldsymbol{Y}_t$ เป็นเวกเตอร์ $n \times 1$ ของอนุกรมเวลา $I(1)$ ซึ่งมี r $(0 < r < n)$ cointegrating vectors ซึ่งแสดงเป็นสัญลักษณ์ได้ดังนี้

$$\begin{pmatrix} \beta_1' \boldsymbol{Y}_t \\ \vdots \\ \beta_r' \boldsymbol{Y}_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{1t} \\ \vdots \\ u_{rt} \end{pmatrix} \sim I(0) \quad (6.7)$$

การทดสอบ cointegration

หากเรากำหนดให้ $\boldsymbol{Y}_t$ เป็นเวกเตอร์ $n \times 1$ ของอนุกรมเวลา $I(1)$ ซึ่งมี r $(0 < r < n)$ cointegrating vectors ซึ่งแสดงเป็นสัญลักษณ์ได้ดังนี้

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{\beta}_1' \boldsymbol{Y}_t \\ \vdots \\ \boldsymbol{\beta}_r' \boldsymbol{Y}_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{1t} \\ \vdots \\ u_{rt} \end{pmatrix} \sim I(0) \qquad (6.7)$$

r=0

r>0

การทดสอบ cointegration อาจจะแบ่งได้เป็นสองกรณีคือ

1. การทดสอบว่ามีความสัมพันธ์ cointegrating อย่างน้อยหนึ่งรูปแบบหรือไม่ (Engle and Granger(1986))
2. การทดสอบว่ามี cointegrating vector $0 \leq r < n$ หรือไม่ (Johansen (1988))

$y_{1t}, \dots, y_{nt}$

$r = 1, \dots, n-1$ ⇒ ?

$y_{1t}, \ldots, y_{nt} \sim I(1)$

การทดสอบ cointegration

โดยใช้แนวคิดของ Engle กับ Granger

พื้นฐานแนวคิด Cointegration ⇒ linear comb เป็น $I(0)$

$y_{1t} - \beta_2 y_{2t} - \beta_3 y_{3t} - \ldots - \beta_n y_{nt} \sim I(0)$

$y_{1t}, \ldots, y_{nt}$ ก็เป็น cointegrate

การทดสอบในประเด็นแรกได้ถูกนำเสนอโดย Engle and Granger (1986) ซึ่งเสนอการทดสอบสองขั้นตอน (two-step cointegration test)ซึ่งประกอบด้วย

สมการ Reg

$y_{1t} = \beta_2 y_{2t} + \ldots + \beta_n y_{nt} + u_t \sim I(0)$

linear comb

1. สร้าง cointegrating residuals โดยที่ $u_t = y_{1t} - \beta_2 y_{2t} - \ldots - \beta_n y_{nt}$ $\sim I(0)$
2. ทดสอบ unit root ของ u_t เพื่อแสดงว่า u_t เป็น $I(0)$ หรือไม่ โดยสมมุติฐานหลักของการทดสอบนี้คือไม่มี cointegration ซึ่งสมมุติฐานดังกล่าวสอดคล้องกับ u_t เป็น $I(1)$

$H_0: u_t \sim I(1)$ vs $H_1: u_t \sim I(0)$

(ไม่เป็น cointegration) (เป็น cointegration).

$u_t = \ldots - \beta = ?$ → ทราบ

→ ไม่ทราบ

การทดสอบ cointegration

การทดสอบในประเด็นแรกได้ถูกนำเสนอโดย Engle and Granger (1986) ซึ่งเสนอการทดสอบสองขั้นตอน (two-step cointegration test)ซึ่งประกอบด้วย

1. สร้าง cointegrating residuals โดยที่ $u_t = y_{1t} - \beta_2 y_{2t} - \ldots - \beta_n y_{nt}$
2. ทดสอบ unit root ของ u_t เพื่อแสดงว่า u_t เป็น $I(0)$ หรือไม่ โดยสมมุติฐานหลักของการทดสอบนี้คือไม่มี cointegration ซึ่งสมมุติฐานดังกล่าวสอดคล้องกับ u_t เป็น $I(1)$

การทดสอบ cointegration ตามวิธีการของ Engle and Granger สามารถแบ่งออกได้เป็นสองกรณีคือ

กรณีที่หนึ่ง เราทราบความสัมพันธ์ของอนุกรมเวลาที่เราสนใจ ทราบ β (ทฤษฎี)

กรณีที่สอง เราจำเป็นต้องประมาณค่าสำหรับ cointegrating vector และสร้าง cointegrating vector จาก $\hat{u}_t = \hat{\boldsymbol{\beta}}' \boldsymbol{Y}_t$

ทฤษฎี $f_t = s_t + cost$

สมการ Reg. $f_t = c + \overset{1}{\beta} s_t + u_t$

$u_t = f_t - c - 1 \cdot s_t$

เก็บข้อมูล

$y_{1t} = \overset{?}{\beta_2} y_{2t} + \ldots + \overset{?}{\beta_n} y_{nt} + u_t$

$(\hat{\beta}$

$\hat{u}_t \sim I(0)$?

กรณี 1 ทราบค่า β

การทดสอบกรณีทราบ cointegration vector

กำหนดให้ $\boldsymbol{Y}_t$ เป็นเวกเตอร์ $n \times 1$ ของ $I(1)$ และ cointegrated กันโดยที่มีความสัมพันธ์สามารถแสดงได้ด้วย cointegrating vector $\boldsymbol{\beta}$ ซึ่ง $u_t = \boldsymbol{\beta}'\boldsymbol{Y}_t$ เราต้องการทดสอบสมมุติฐานหลัก $H_0 : u_t = \boldsymbol{\beta}'\boldsymbol{Y}_t \sim I(1)$ (หรือไม่มี cointegration) กับสมมุติฐานรอง $H_1 : u_t = \boldsymbol{\beta}'\boldsymbol{Y}_t \sim I(0)$ (หรือมี cointegration)

vs

เราสามารถทดสอบสมมุติฐานข้างต้นได้ด้วยการทดสอบยูนิทรูทเช่น $\boxed{\text{ADF}}$ หรือ PP กับตัวแปร u_t ซึ่งเราจะสรุปว่า $\boldsymbol{Y}_t$ เป็น cointegrated ถ้าเราปฏิเสธสมมุติฐานหลัก

ถ้าเราปฏิเสธ $H_0 : u_t \sim I(1)$ ⟹ สรุปได้ว่า $y_{1t}, \dots, y_{nt}$ เป็น cointegrated

ตัวอย่างที่ 7.5 (กรณีทราบค่า β)

ข้อมูล spot, future ของ SET50 รายเดือน

ความสัมพันธ์ระหว่างราคาปัจจุบัน (spot price: S_t) และราคาฟิวเจอร์ (future price: F_t) ของอัตราแลกเปลี่ยนโดยที่ตัวแปรทั้งสองมีความสัมพันธ์ตามแบบจำลอง cost of carry model ซึ่งล็อกของราคาปัจจุบัน (s_t) จะเท่ากับล็อกของราคาฟิวเจอร์ (f_t) บวกกับค่าคงที่(ซึ่งสะท้อนต้นทุนในการถือสินทรัพย์)

สมการ Regression

ทฤษฎี $\Rightarrow$
$$f_t = s_t + c$$

$$f_t = c + \beta s_t + u_t$$

$\beta = 1$ ตามทฤษฎี

ดังนั้นในกรณีนี้เราสามารถเขียน $\boxed{u_t = f_t - s_t}$ หรือ $\boldsymbol{\beta} = (1 \quad -1)'$

$c = 0$

เราเริ่มจากทดสอบ unit root และหาอันดับของอินทิเกรต

head(set50) → spot, futures

```
> set50 <- read_csv("G:/My Drive/teaching/ec435/data/set50_m0619.csv")
> lspot<-log(set50$spot)
> lfutures<-log(set50$futures)
> library(urca)
> summary(ur.df(lspot, type="drift", selectlags = "BIC"))
Value of test-statistic is: -1.3894 1.3627
> summary(ur.df(diff(lspot), type="drift", selectlags = "BIC"))
Value of test-statistic is: -8.9508 40.0633
> summary(ur.df(lfutures, type="drift", selectlags = "BIC"))
Value of test-statistic is: -1.4079 1.3667
> summary(ur.df(diff(lfutures), type="drift", selectlags = "BIC"))
Value of test-statistic is: -9.1078 41.4813
```

unit root ของ s_t

$f_t \sim I(1)$

$t = -1.389 > CV.$ → ไม่สามารถปฏิเสธ $H_0: s_t \sim I(1)$

$t = -8.9 < cv$ → สามารถปฏิเสธ $H_0: \Delta s_t \sim I(1) \Rightarrow \Delta s_t$ เป็น $I(0)$

$\{s_t \sim I(1)\}$

ตัวอย่างที่ 7.5 (กรณีทราบค่า β)

ทั้ง $f_t, s_t \sim I(1)$

ขั้นตอน 1 $u_t = f_t - s_t$

ตัวแปรใหม่สร้างจาก $f_t - s_t$

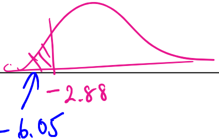
ขั้นตอน 2
ทดสอบ $H_0: u_t \sim I(1)$
vs $H_1: u_t \sim I(0)$

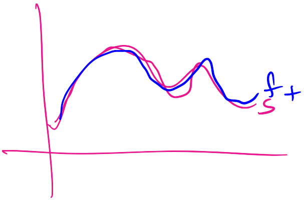
```
> u<-lfutures-lspot
> summary(ur.df(u, type="drift", selectlags = "BIC"))

Value of test-statistic is: -6.0538 18.3258

Critical values for test statistics:
      1pct  5pct 10pct
tau2 -3.46 -2.88 -2.57
phi1  6.52  4.63  3.81
```

$t = -6.0538 < CV(-2.88)$





$t < CV.$ ปฏิเสธ $H_0: u_t \sim I(1)$ และ
สรุปว่า u_t เป็น $I(0)$
แสดงว่า f_t กับ s_t cointegrated
(f_t กับ s_t เคลื่อนไหวไปด้วยกัน ในระยะยาว)

กรณี 2 ไม่ทราบค่า β (ไม่มีทฤษฎีอธิบาย β) ⇒ ประมาณค่า β

การทดสอบกรณีที่เราไม่ทราบค่า cointegrating vector

ในกรณีนี้เราจำเป็นต้องประมาณค่า cointegrating vector ขึ้นมา

ขั้นตอนแรกของการทดสอบเราจำเป็นต้องประมาณค่า β โดยที่เราอาจจะเขียนในรูปบรรทัดฐาน (normalized) ซึ่งเขียนเป็นสมการได้

เราไม่ทราบค่า β ต้องประมาณค่า ด้วย OLS $\hat{\beta}_2, \ldots, \hat{\beta}_n$

เหลือการหาค่าคลาดเคลื่อน $\hat{u}_t$

$$y_{1t} = c + \beta_2 y_{2t} + \ldots + \beta_n y_{nt} + u_t \qquad (7.8)$$

ค่าประมาณค่า u_t

การทดสอบ cointegration จะเป็นการทดสอบ unit root ของ $\hat{u}_t = y_{1t} - \hat{c} - \hat{\beta}_2 y_{2t} - \ldots - \hat{\beta}_n y_{nt}$ โดยที่ $\hat{c}, \hat{\beta}_2, \ldots, \hat{\beta}_n$ เป็นตัวประมาณค่า OLS ของสัมประสิทธิ์

$\boxed{\text{ขั้นตอน 2}}$ ทดสอบ (unit root) $H_0: \hat{u}_t \sim I(1)$ vs. $H_1: \hat{u}_t \sim I(0)$

↳ ADF ⇒ t stat

$\hat{u}_t$ เป็น ผลพลอยได้จาก. การประมาณค่า ($\hat{\beta}$)

t stat จาก ADF ของ $\hat{u}_t$ (residual) ไม่ได้มีแจกแจง DF t dist (รายงานใน R) -2.88

ไม่สามารถใช้ c.v. หรือ p-value จากโปรแกรมได้โดยตรง.

การทดสอบกรณีที่เราไม่ทราบค่า cointegrating vector

ในกรณีนี้เราจำเป็นต้องประมาณค่า cointegrating vector ขึ้นมา

ขั้นตอนแรกของการทดสอบเราจำเป็นต้องประมาณค่า β โดยที่เราอาจจะเขียนในรูปบรรทัดฐาน (normalized) ซึ่งเขียนเป็นสมการได้

$$y_{1t} = c + \beta_2 y_{2t} + \ldots + \beta_n y_{nt} + u_t \qquad (7.8)$$

การทดสอบ cointegration จะเป็นการทดสอบ unit root ของ $\hat{u}_t = y_{1t} - \hat{c} - \hat{\beta}_2 y_{2t} - \ldots - \hat{\beta}_n y_{nt}$ โดยที่ $\hat{c}, \hat{\beta}_2, \ldots, \hat{\beta}_n$ เป็นตัวประมาณค่า OLS ของสัมประสิทธิ์

Phillips and Ouliaris (1990) ได้แสดงให้เห็นว่าตัวทดสอบ ADF และ PP ของ cointegrating residual ในกรณีที่เราต้องประมาณค่าสัมประสิทธิ์ของ cointegrating vector ไม่ได้มีการแจกแจงแบบ ADF distribution แบบปกติ => เสนอ dist. ใหม่ P-O dist.

c.v. ขึ้นอยู่กับ 1) specification ของ สมการระยะยาว – ไม่มีค่าคงที่ ($y_{1t}=\beta_2 y_{2t} \ldots$)

มีค่าคงที่ ($y_{1t}=c+\beta_2 y_{2t}$)

มีค่าคงที่ + แนวโน้ม

2) จำนวนตัวแปร

ตัวอย่างที่ 7.6 (กรณีไม่ทราบค่า β)

$f_t = c + \beta s_t + u_t$ ไม่ทราบ $\beta = ?$

ต่อเนื่องจากตัวอย่างที่ผ่านมา ในกรณีนี้สมมุติว่าเราไม่ทราบค่าของ cointegrating vector ดังนั้น สมมุติให้ $\boldsymbol{\beta} = (1 \quad -\beta_2)'$ ดังนั้นเราสามารถพิจารณาสมการถดถอย ~~$s_t = c + \beta_2 f_t + u_t$~~ $f_t = c + \beta s_t + u_t$ ซึ่งหลังจากที่เราประมาณค่าด้วย OLS เราสามารถที่จะหาค่า $\hat{u}_t = s_t - \hat{c} - \hat{\beta}_2 f_t$ ตามขั้นตอนในคำสั่งข้างล่าง

ขั้นตอน 1 [ประมาณค่า β, $\Rightarrow \hat{u}_t$] ใช้ library (dynlm)

```
> lspot<-ts(lspot, start=c(2006,4), frequency = 12)
> lfutures<-ts(lfutures, start=c(2006,4), frequency = 12)
> library(dynlm)
> m1<-dynlm(lfutures~lspot)
> summary(m1)
Coefficients:
            Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
(Intercept) -0.06423    0.01090  -5.895  2.1e-08 ***
lspot        1.00909    0.00164 615.341  < 2e-16 ***
---
Signif. codes:  0 ‘***’ 0.001 ‘**’ 0.01 ‘*’ 0.05 ‘’. 0.1 ‘’  1

Residual standard error: 0.00747 on 163 degrees of freedom
Multiple R-squared:  0.9996,^^IAdjusted R-squared:  0.9996
F-statistic: 3.786e+05 on 1 and 163 DF,  p-value: < 2.2e-16
```

แปลง vector ให้เป็น ts

เดือน 4 ปี 2006

$\hat{c}$, $\hat{\beta} =$

$f_t = -0.06 + 1.009 s_t$

specification ของ LR
- มีค่าคงที่

สร้าง $\hat{u}_t$

ตัวอย่างที่ 7.6 (กรณีไม่ทราบค่า β)

$\hat{u}_t$

```
> uhat<-ts(m1$residuals, start=c(2006,4), frequency = 12)
> library(urca)
> summary(ur.df(uhat, type="drift", selectlags = "BIC"))
Value of test-statistic is: -6.71 22.5
```

CV. -2.88

ขั้นตอน 2 ทดสอบ $H_0: \hat{u}_t \sim I(1)$ vs $H_1: \hat{u}_t \sim I(0)$

ADF t-stat = $\boxed{-6.71}$ ไม่สามารถเทียบ -2.88

แสดงว่า f_t กับ s_t cointegrated

Table: ค่าวิกฤติสำหรับการทดสอบโคอินทิเกรชันกรณีที่ต้องประมาณค่าสัมประสิทธิ์โคอินทิเกรชัน

P.O. table

t stat = $-6.71 < CV(-3.36)$ ปฏิเสธ $H_0: \hat{u}_t \sim I(1)$

	ไม่มีค่าคงที่			มีค่าคงที่			มีค่าคงที่และแนวโน้ม		
	ระดับนัยสำคัญ			ระดับนัยสำคัญ			ระดับนัยสำคัญ		
n-1	0.1	0.05	0.01	$\alpha=$ 0.1	$\alpha=$0.05	$\alpha=$0.01	0.1	0.05	0.01
1	-2.4505	-2.7619	-3.3865	-3.0657	-3.3654	-3.9618	-3.5184	-3.8	-4.3628
2	-2.9873	-3.2667	-3.8395	-3.4494	-3.7675	-4.3078	-3.8429	-4.1567	-4.6451
3	-3.4446	-3.7371	-4.3038	-3.8329	-4.1121	-4.7325	-4.195	-4.4895	-5.0433
4	-3.8068	-4.1261	-4.672	-4.1565	-4.4542	-5.0728	-4.4625	-4.7423	-5.3576
5	-4.1416	-4.3999	-4.9897	-4.4309	-4.7101	-5.2812	-4.7311	-5.0282	-5.5849

n=2 (s_t, f_t)

ถ้าเกิด $f_{t-1} > s_{t-1} + c$ $[u_{t-1} > 0] \Rightarrow \Delta f_t$, Δs_t

การประมาณค่า ECM ด้วย OLS

$Y_{1t} \sim I(1)$
$Y_{2t} \sim I(1)$

สมมุติว่าเราสนใจตัวแปร $(y_{1t} \quad y_{2t})'$ ซึ่งมีความสัมพันธ์ cointegration แสดงได้ด้วยสมการ $y_{1t} = \beta_2 y_{2t} + u_t$ (หรือ $y_{1t} - \beta_2 y_{2t} = u_t \sim I(0)$) และเรามีตัวประมาณค่า $\hat{\beta}_2$ ที่มีคุณลักษณะเป็น consistent และเราต้องประมาณค่า ECM ในรูปแบบ

u_{t-1} $I(0)$? เพราะ Y_{1t}, Y_{2t} cointegrated

$$\underbrace{\Delta y_{1t}}_{I(0)} = c_1 + \alpha_1 (y_{1,t-1} - \beta_2 y_{2,t-1}) + \sum_{i=1}^{p} \psi_{11}^{j} \underbrace{\Delta y_{1,t-j}}_{I(0)} + \sum_{i=1}^{p} \psi_{12}^{j} \underbrace{\Delta y_{2,t-j}}_{I(0)} + \varepsilon_{1t} \quad (7.9)$$

$$\underbrace{\Delta y_{2t}}_{I(0)} = c_2 + \alpha_2 (y_{1,t-1} - \beta_2 y_{2,t-1}) + \sum_{i=1}^{p} \psi_{21}^{j} \underbrace{\Delta y_{1,t-j}}_{I(0)} + \sum_{i=1}^{p} \psi_{22}^{j} \underbrace{\Delta y_{2,t-j}}_{I(0)} + \varepsilon_{2t} \quad (7.10)$$

f_t g_t ? ? $-c$ $-c$

เราสามารถแทนค่า $\hat{\beta}_2$ ลงในสมการเหมือนเป็นพารามิเตอร์ที่เราทราบค่า

เราสามารถพิจารณา disequilibrium error $(y_{1,t-1} - \beta_2 y_{2,t-1})$ เหมือนเป็นตัวแปรที่ทราบค่า เนื่องจากตัวแปรทุกตัวในสมการ (6.9) และ (6.10) เป็น $I(0)$ เราสามารถประมาณค่าสมการดังกล่าวด้วย OLS

$f_t \stackrel{\wedge}{=} -0.06 + 1.009\, S_t$

$u_t = f_t + 0.06 - 1.09\, S_t > 0$

ตัวอย่างที่ 7.7

7.6

เราต้องการประมาณค่าสมการ ECM สำหรับล็อกของราคาปัจจุบันและล็อกของราคาฟิวเจอร์ ซึ่งเราจำเป็นต้องหาอันดับของค่าล่าของผลต่างที่เหมาะสม ซึ่งอาจจะใช้ AIC, BIC ในการเลือก แต่ในที่นี้เราสมมุติให้แบบจำลองของเป็นดังนี้

$p=1$ $\quad$ $p=?$

$$\Delta s_t = c_1 + \alpha_1 \hat{u}_{t-1} + \psi_{11}\Delta s_{t-1} + \psi_{12}\Delta f_{t-1} + \varepsilon_{ft} \quad (7.11)$$

$$\Delta f_t = c_2 + \alpha_2 \hat{u}_{t-1} + \psi_{21}\Delta s_{t-1} + \psi_{22}\Delta f_{t-1} + \varepsilon_{st} \quad (7.12)$$

ตัวอย่างที่ 7.7

Δf_t $\quad u_{t-1}$ $\quad \Delta s_{t-1}$ $\quad \Delta f_{t-1}$

```
> ecm1<-dynlm(diff(lfutures)~L(uhat)+L(diff(lspot))+L(diff(lfutures)))
> summary(ecm1)
                    Estimate  Std. Error  t value  Pr(>|t|)
(Intercept)          0.00384     0.00483     0.80    0.4277
L(uhat)             -2.15315     0.77455    -2.78    0.0061 **
L(diff(lspot))      -0.50830     0.76794    -0.66    0.5090
L(diff(lfutures))    0.68421     0.73417     0.93    0.3528
Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' '  1

> ecm2<-dynlm(diff(lspot)~L(uhat)+L(diff(lspot))+L(diff(lfutures)))
> summary(ecm2)

                    Estimate  Std. Error  t value  Pr(>|t|)
(Intercept)          0.00390     0.00457     0.85    0.395
L(uhat)             -1.56235     0.73337    -2.13    0.035 *
L(diff(lspot))      -0.55125     0.72711    -0.76    0.449
L(diff(lfutures))    0.71785     0.69514     1.03    0.303
```

$\hat{c}_s$, $\hat{\alpha}_s$, $\hat{\varphi}_1$, $\hat{\theta}_1$, Δs_t

$$\Delta f_t \downarrow = 0.0038 - 2.15\, u_{t-1} + \cdots$$

$$\Delta s_t \downarrow = 0.0039 - 1.56\, u_{t-1} + \cdots$$

$\boxed{t-1}$ $\quad u_{t-1} > 0 \quad [\, f_{t-1} > 1.009 s_{t-1} - 0.06 \,]$

ลดกระทั่ง $\quad f_{t+j} = 1.009 s_{t+j} - 0.06$

VAR models และ cointegration

$Y_t = \begin{pmatrix} y_{1t} \\ \vdots \\ y_{nt} \end{pmatrix}$ $\sim I(1)$ ... $\sim I(1)$ → ใช้แบบจำลอง VAR

อาจจะเป็น Nonstationary

ปกติ $Y_t \sim I(0)$

Johansent(1991) ได้ผนวกความสัมพันธ์ทั้งระยะยาวและการปรับตัวระยะสั้นในรูปแบบของสมการของเวกเตอร์ตัวแปร โดยมีพื้นฐานจากแบบจำลองเวกเตอร์ออโตรีเกรสชัน ซึ่งหากพิจารณาตัวแปร $y_{1t}, \ldots, y_{nt}$ ในรูปเวกเตอร์ $(n \times 1)$ เขียนเป็นสัญลักษณ์ $\boldsymbol{Y}_t$ ในรูปสมการเวกเตอร์ออโตรีเกรสซีฟอันดับพี ($VAR(P)$) ดังต่อไปนี้

$$\boldsymbol{Y}_t = \boldsymbol{\Phi}_1 \boldsymbol{Y}_{t-1} + \ldots + \boldsymbol{\Phi}_p \boldsymbol{Y}_{t-p} + \boldsymbol{\epsilon}_t, t = 1, \ldots, T$$

$(y_{1t}, \ldots, y_{nt})$

Nonstationary

ถ้าตัวแปรบางตัวหรือทุกตัวในแบบจำลองเวกเตอร์ออโตรีเกรสซีฟมีลักษณะเป็นมีคุณสมบัติไม่นิ่ง แบบจำลองดังกล่าวอาจจะเผชิญกับปัญหาความสัมพันธ์เทียม เช่นเดียวกับกรณีสมการเดี่ยว ซึ่งเราต้องพิจารณาต่อไปว่าตัวแปรเหล่านั้นโคอินทิเกรตกันหรือไม่

VAR → อาจจะเกิด spurious regression ⇒ ตัวแปร $y_{1t}, \ldots, y_{nt}$ Cointegrated?

⇓

ทดสอบ

Cointegrated VAR

เพื่อความง่าย

$Y_t \to VAR(1)$

$Y_t = \begin{pmatrix} Y_{1t} \\ \vdots \\ Y_{nt} \end{pmatrix} \sim I(1)$

ECM

$\Delta Y_{1t} = \alpha u_{t-1} + \gamma_i \Delta Y_{1t-i} \cdots$

SR LR

ΔY_t

Johansent(1991) ได้เสนอแบบจำลองเวกเตอร์เอเรอคอเรคชัน (Vector Error Correction Model) หรือเวคเอ็ม (VECM) โดยมีพื้นฐานจากแบบจำลองเวกเตอร์ออโตรีเกรสซีฟของ $\boldsymbol{Y}_t = (Y_{1t}, \ldots, Y_{nt})'$ ซึ่งตัวแปรทั้งหมดอินทิเกรตที่อันดับหนึ่ง เพื่อความง่ายเราจะพิจารณากรณี VAR(1)

$\boxed{VAR(1)}$

$$\boldsymbol{Y}_t = \mu + \Phi_1 \boldsymbol{Y}_{t-1} + \varepsilon_t \quad (7.13)$$

ΔY_t

หากลบทั้งสองข้างของสมการด้วย $\boldsymbol{Y}_{t-1}$ จะได้

$\Phi_1 Y_{t-1} - Y_{t-1}$

$$\boldsymbol{Y}_t - \boldsymbol{Y}_{t-1} = \mu - (I - \Phi_1)\boldsymbol{Y}_{t-1} + \varepsilon_t$$

$$\boxed{VECM(0)} \leftarrow \Delta \boldsymbol{Y}_t = \mu - \boxed{\Phi(1)}\boldsymbol{Y}_{t-1} + \varepsilon_t \quad (7.14)$$

ΔY_{t-i} ไม่มี

ใช้อธิบาย LR equation

และ α อธิบายการปรับตัวของ Y_t.

Cointegrated VAR

Johansent(1991) ได้เสนอแบบจำลองเวกเตอร์เอเรอคอเรคชัน (Vector Error Correction Model) หรือเวคเอ็ม (VECM) โดยมีพื้นฐานจากแบบจำลองเวกเตอร์ออโตรีเกรสซีฟของ $\boldsymbol{Y}_t = (Y_{1t}, \ldots, Y_{nt})'$ ซึ่งตัวแปรทั้งหมดอินทิเกรตที่อันดับหนึ่ง เพื่อความง่ายเราจะพิจารณากรณี VAR(1)

$$\boldsymbol{Y}_t = \mu + \Phi_1 \boldsymbol{Y}_{t-1} + \varepsilon_t \qquad (7.13)$$

หากลบทั้งสองข้างของสมการด้วย $\boldsymbol{Y}_{t-1}$ จะได้

$$\boldsymbol{Y}_t - \boldsymbol{Y}_{t-1} = \mu - (I - \Phi_1)\boldsymbol{Y}_{t-1} + \varepsilon_t$$

$$\Delta \boldsymbol{Y}_t = \mu - \Phi(1)\boldsymbol{Y}_{t-1} + \varepsilon_t \qquad (7.14)$$

Y_{t-1} ไม่ลบทั้งสองข้าง

เราสามารถแปลง $VAR(p)$ เป็น $VECM(p-1)$ เดิม $Y_t \sim I(1)$

$\Delta Y_t \sim I(0)$

I(0) I(0) ? I(0) I(0)

$$\Delta \boldsymbol{Y}_t = \mu - \boxed{\Phi(1)\boldsymbol{Y}_{t-1}} + \underbrace{\Gamma_1 \Delta \boldsymbol{Y}_{t-1} + \ldots + \Gamma_{p-1}\Delta \boldsymbol{Y}_{t-p}}_{p-1 \text{ พจน์}} + \varepsilon_t \qquad (7.16)$$

(p-1)

โดยที่ $\Phi(1) = I_n - \Phi_1 - \ldots - \Phi_p$

Cointegrated VAR

ทดสอบ Cointegration ด้วย VECM. จะขึ้นอยู่กับ
เมทริกซ์ $\underline{\underline{\Phi(1)}}\, Y_{t-1} \sim I(0)$

ทฤษฎีบทการนำเสนอของเกรนเจอร์ (Granger representation theorem) ซึ่งอธิบายความสัมพันธ์ระหว่างสมการโคอินทิเกรชัน และแบบจำลองเวกเตอร์เอเรอคอเรคชันไว้ดังนี้

1. ถ้า $\boldsymbol{\Phi(1)}$ มีค่าอันดับชั้นเต็ม (full rank) คือ $r = n$ (# Y_t) แล้ว $\boldsymbol{Y}_t$ มีคุณลักษณะนิ่ง Stationary

$$\begin{bmatrix} \phi_{11} & \phi_{12} & \cdots & \phi_{1n} \\ \vdots & & & \\ \phi_{n1} & \phi_{n2} & \cdots & \phi_{nn} \end{bmatrix}_{n \times n}$$

ถ้า col ในเมทริกซ์ เป็นอิสระต่อกัน
เรียกว่า full rank.

$r = n$

Cointegrated VAR

ทฤษฎีบทการนำเสนอของเกรนเจอร์ (Granger representation theorem) ซึ่งอธิบายความสัมพันธ์ระหว่างสมการโคอินทิเกรชัน และแบบจำลองเวกเตอร์เอเรอคอเรคชันไว้ดังนี้

1. ถ้า $\boldsymbol{\Phi}(1)$ มีค่าอันดับชั้นเต็ม (full rank) คือ $r = n$ แล้ว $\boldsymbol{Y}_t$ มีคุณลักษณะนิ่ง
2. ถ้า $\boldsymbol{\Phi}(1)$ มีค่าอันดับชั้นลด (reduced rank) เท่ากับ r โดยที่ $0 < r < n$ และ $\boldsymbol{\Phi}(1) = -\boldsymbol{\alpha\beta}'$ ซึ่งทั้ง $\boldsymbol{\alpha}$ และ $\boldsymbol{\beta}$ เป็นเมทริกซ์ขนาด $n \times r$ ที่มี ค่าลำดับชั้นคอลัมน์เต็ม แล้ว $\boldsymbol{Y}_t$ เป็น $I(1)$ และตัวแปรโคอินทิเกรตกัน โดยที่มี r จำนวนความสัมพันธ์ และเวกเตอร์โคอินทิเกรชันคือคอลัมน์ของ $\boldsymbol{\beta}$

การปรับตัว

ความสัมพันธ์ระยะยาว.

$$\begin{bmatrix} \phi_{11} & \phi_{12} & \cdots & \phi_{1n} \\ \vdots & & & \\ \phi_{n1} & \phi_{n2} & \cdots & \phi_{nn} \end{bmatrix}$$

$C_1 \quad C_2 \quad C_n$

$\to C_n = 2C_{n-1}$

ลดรูป column จนกระทั่งไม่เหลือแต่คอลัมน์ที่เป็นอิสระ $\Rightarrow$ Rank ของ matrix $= r$

จำนวนของ cointegration

$r = 3$

$$\begin{bmatrix} C_1 & C_2 & C_3 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Cointegrated VAR

ทฤษฎีบทการนำเสนอของเกรนเจอร์ (Granger representation theorem) ซึ่งอธิบายความสัมพันธ์ระหว่างสมการโคอินทิเกรชัน และแบบจำลองเวกเตอร์เอเรอคอเรคชันไว้ดังนี้

1. ถ้า $\mathbf{\Phi}(1)$ มีค่าอันดับชั้นเต็ม (full rank) คือ $r = n$ แล้ว $\boldsymbol{Y}_t$ มีคุณลักษณะนิ่ง
2. ถ้า $\mathbf{\Phi}(1)$ มีค่าอันดับชั้นลด (reduced rank) เท่ากับ r โดยที่ $0 < r < n$ และ $\mathbf{\Phi}(1) = -\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}'$ ซึ่งทั้ง $\boldsymbol{\alpha}$ และ $\boldsymbol{\beta}$ เป็นเมทริกซ์ขนาด $n \times r$ ที่มี ค่าลำดับชั้นคอลัมน์เต็ม แล้ว $\boldsymbol{Y}_t$ เป็น $I(1)$ และตัวแปรโคอินทิเกรตกัน โดยที่มี r จำนวนความสัมพันธ์ และเวกเตอร์โคอินทิเกรชันคือคอลัมน์ของ $\boldsymbol{\beta}$
3. ถ้า $\mathbf{\Phi}(1)$ มีค่าอันดับชั้นเท่ากับศูนย์ แล้ว $\mathbf{\Phi}(1) = \mathbf{0}$ และ $\boldsymbol{Y}_t$ เป็น $I(1)$ ซึ่งตัวแปรมิได้โคอินทิเกรตกัน และแบบจำลอง $VECM(p-1)$ จะลดลงเหลือแค่ $VAR(p-1)$ ของตัวแปรในรูปผลต่างหนึ่งอันดับ

สมการ VAR(p-1) ของ ΔY_t

$$\Delta Y_t = \mu + \Gamma_1 \Delta Y_{t-1} + \cdots + \Gamma_{p-1} \Delta Y_{t-(p-1)} + \varepsilon_t$$

$\Rightarrow \boxed{\Phi(1)}$ — มีค่าของ Rank = ?

- $n \Rightarrow Y_t \sim I(0)$
- $0 < r < n \Rightarrow Y_t$ เป็น cointegration (# LR = r)
- $r = 0 \Rightarrow Y_t \sim I(1)$ และ ไม่เป็น coint. (ΔY_t)

Cointegrated VAR

ในกรณีที่เราทดสอบแล้วพบว่ามีจำนวนความสัมพันธ์เท่ากับ r เราสามารถพิจารณาเวกเตอร์ $\Phi(1)$ ซึ่งสามารถแยกออกได้เป็นเมทริกซ์ α และ β' ซึ่งมีมิติเท่ากับ $n \times r$ และ $r \times n$ ตามลำดับ

$r = 1, \dots, n-1$

$\boxed{n=4}$ $\boxed{r=1}$

$$\Phi(1) = \underset{n\times 1}{\alpha}\underset{1\times n}{\beta'} \quad Y_{t-1}$$

$\underset{n\times 1}{\beta}$

$$= \underset{4\times 1}{\begin{pmatrix} \alpha_{11} \\ \alpha_{12} \\ \alpha_{13} \\ \alpha_{14} \end{pmatrix}} \underset{1\times 4}{\begin{pmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} & \beta_{13} & \beta_{14} \end{pmatrix}} \underset{4\times 1}{\begin{pmatrix} Y_{1,t-1} \\ Y_{2t-1} \\ Y_{3t-1} \\ Y_{4t-1} \end{pmatrix}}$$

$$\underbrace{\beta_{11}Y_{1t-1} + \beta_{12}Y_{2t-1} + \beta_{13}Y_{3t-1} + \beta_{14}Y_{4t-1}}_{u_{1t-1} \quad LR \quad (1\times 1)}$$

ทำเหมือน

$$\begin{pmatrix} \Delta Y_{1t} \\ \Delta Y_{2t} \\ \Delta Y_{3t} \\ \Delta Y_{4t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_{11} u_{1t-1} \\ \alpha_{12} u_{1t-1} \\ \alpha_{13} u_{1t-1} \\ \alpha_{14} u_{1t-1} \end{pmatrix}$$

Cointegrated VAR

ในกรณีที่เราทดสอบแล้วพบว่ามีจำนวนความสัมพันธ์เท่ากับ r เราสามารถพิจารณาเวกเตอร์ $\mathbf{\Phi}(1)$ ซึ่งสามารถแยกออกได้เป็นเมทริกซ์ $\boldsymbol{\alpha}$ และ $\boldsymbol{\beta}'$ ซึ่งมีมิติเท่ากับ $n \times r$ และ $r \times n$ ตามลำดับ

$$\mathbf{\Phi}(1) = \boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}'$$

สมการ LR eqm.

การปรับตัวเข้าสู่ดุลยภาพ

ตัวอย่างเช่น หากเราพิจารณากรณีที่ตัวแปรเท่ากับ 4 หากเราพบความสัมพันธ์เท่ากับหนึ่ง ($r = 1$)

$$\mathbf{\Phi}(1) = \boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}' = \begin{bmatrix} \alpha_{11} \\ \alpha_{12} \\ \alpha_{13} \\ \alpha_{14} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} & \beta_{13} & \beta_{14} \end{bmatrix}$$

$\boxed{r=2}$

$$\Phi(1) = \underset{4\times 2}{\alpha}\ \underset{2\times 4}{\beta'} = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{21} \\ \alpha_{12} & \alpha_{22} \\ \alpha_{13} & \alpha_{23} \\ \alpha_{14} & \alpha_{24} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} & \beta_{13} & \beta_{14} \\ \beta_{21} & \beta_{22} & \beta_{23} & \beta_{24} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Y_{1t-1} \\ Y_{2t-1} \\ Y_{3t-1} \\ Y_{4t-1} \end{pmatrix}$$

สมการ LR 1

$(\beta_{11} Y_{1t-1} + \dots + \beta_{14} Y_{4t-1}) = U_{1t-1}$

$(\beta_{21} Y_{1t-1} + \dots + \beta_{24} Y_{4t-1}) = U_{2t-1}$

สมการ LR 2

2×1

$$\begin{pmatrix} \Delta Y_{1t} \\ \vdots \\ \Delta Y_{4t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_{11} U_{1t-1} & \alpha_{21} U_{2t-1} \\ \vdots & \vdots \\ \alpha_{14} U_{1t-1} & \alpha_{24} U_{2t-1} \end{pmatrix}$$

/ทดสอบ $\Phi(1)$ ~ ขึ้นอยู่กับรูปแบบของสมการ < LR VECM ↓ (Constant +trend)

Johansen (1995) นำเสนอรูปแบบพจน์เชิงกำหนดแบบจำลองออกเป็น 5 กรณีโดยระบุพจน์ดังกล่าวในส่วนของสมการโคอินทิเกรชัน หรือในส่วนของสมการเวกเตอร์เอเรอคอเรคชัน ซึ่งแต่ละรูปแบบจะแสดงลักษณะของตัวแปร Y_t ที่แตกต่างกัน 1 *กรณีไม่มีค่าคงที่ทั้งสองสมการ (no constant)* LR, VECM

ไม่มี constant

$$
\begin{aligned}
\Delta Y_{1t} &= \alpha_1 (Y_{1,t-1} - \beta_2 Y_{2,t-1}) + v_{1t} \\
\Delta Y_{2t} &= \alpha_2 (Y_{1,t-1} - \beta_2 Y_{2,t-1}) + v_{2t}
\end{aligned}
$$

กระทบต่อ c.v. ที่เลือก

รูปแบบสมการ

ตัวแปรทั้งสองจะอินทิเกรตที่อันดับหนึ่งและไม่มีดริฟท์และสมการโคอินทิเกรชันจะมีค่าเฉลี่ยเท่ากับศูนย์

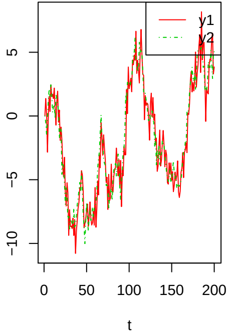
สอดคล้องกับข้อมูล.

Johansen (1995) นำเสนอรูปแบบพจน์เชิงกำหนดแบบจำลองออกเป็น 5 กรณีโดยระบุพจน์ดังกล่าวในส่วนของสมการโคอินทิเกรชัน หรือในส่วนของสมการเวกเตอร์เอเรอคอเรคชัน ซึ่งแต่ละรูปแบบจะแสดงลักษณะของตัวแปร $\boldsymbol{Y}_t$ ที่แตกต่างกัน *กรณีไม่มีค่าคงที่ทั้งสองสมการ (no constant)*

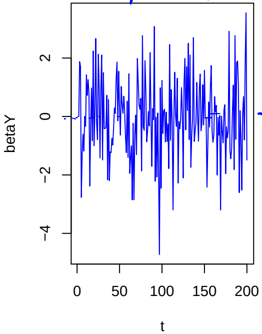
$$\Delta Y_{1t} = \alpha_1(Y_{1,t-1} - \beta_2 Y_{2,t-1}) + v_{1t}$$
$$\Delta Y_{2t} = \alpha_2(Y_{1,t-1} - \beta_2 Y_{2,t-1}) + v_{2t}$$

ตัวแปรทั้งสองจะอินทิเกรตที่อันดับหนึ่งและไม่มีดริฟท์และสมการโคอินทิเกรชันจะมีค่าเฉลี่ยเท่ากับศูนย์

$Y_1, Y_2 \sim I(1)$



βY_{t-1}



$\underline{E(\beta Y_{t-1}) = 0}$

กรณีมีค่าคงที่ในสมการโคอินทิเกรชันเพียงอย่างเดียว (restricted constant)

$$\Delta Y_{1_t} = \alpha_1(Y_{1,t-1} - \beta_2 Y_{2,t-1} - \mu) + v_{1_t}$$
$$\Delta Y_{2_t} = \alpha_2(Y_{1,t-1} - \beta_2 Y_{2,t-1} - \mu) + v_{2_t}$$

ตัวแปรทั้งสองจะอินทิเกรตที่อันดับหนึ่งและไม่มีดริฟท์และสมการโคอินทิเกรชันจะมีค่าเฉลี่ยไม่

เท่ากับศูนย์

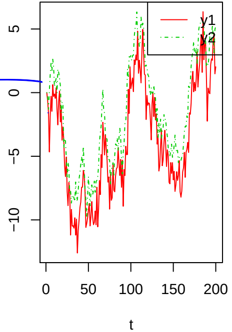
2 *กรณีมีค่าคงที่ในสมการโคอินทิเกรชันเพียงอย่างเดียว (restricted constant)*

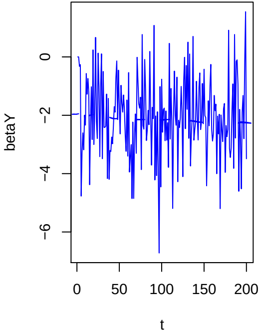
มี constant ใน LR

$$\Delta Y_{1t} = \alpha_1(Y_{1,t-1} - \beta_2 Y_{2,t-1} - \mu) + v_{1t}$$
$$\Delta Y_{2t} = \alpha_2(Y_{1,t-1} - \beta_2 Y_{2,t-1} - \mu) + v_{2t}$$

ตัวแปรทั้งสองจะอินทิเกรตที่อันดับหนึ่งและไม่มีดริฟท์และสมการโคอินทิเกรชันจะมีค่าเฉลี่ยไม่เท่ากับศูนย์

ระยะห่าง





$E(\beta Y_{t-1}) \neq 0$

ค่าคงที่ใน LR

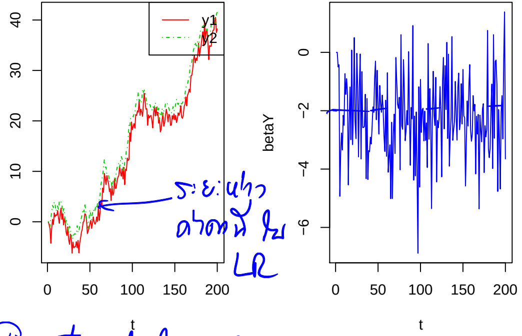
3 กรณีมีค่าคงที่ในสมการโคอินทิเกรชันและสมการเวกเตอร์เอเรอคอเรคชัน *(unrestricted constant)*

$$\Delta Y_{1_t} = \delta_1 + \alpha_1(Y_{1,t-1} - \beta_2 Y_{2,t-1} - \mu) + v_{1_t}$$
$$\Delta Y_{2_t} = \delta_2 + \alpha_2(Y_{1,t-1} - \beta_2 Y_{2,t-1} - \mu) + v_{2_t}$$

กรณีมีค่าคงที่ในสมการโคอินทิเกรชันและสมการเวกเตอร์เอเรอคอเรคชัน (unrestricted constant)

$$\Delta Y_{1t} = \underline{\delta_1} + \alpha_1(Y_{1,t-1} - \beta_2 Y_{2,t-1} - \mu) + v_{1t}$$
$$\Delta Y_{2t} = \overline{\delta_2} + \alpha_2(Y_{1,t-1} - \beta_2 Y_{2,t-1} - \mu) + v_{2t}$$

$E(\beta Y_{t-1}) \neq 0$



(4) trend ใน LR

(5) trend ใน LR, VECM

Johansen ทดสอบ Rank ของ Matrix $\Phi(1)$? $r = 0, \boxed{1, \dots, n-1}, n$

Likelihood Ratio Tests for the Number of Cointegrating Vectors

cointegrated

หากเราใช้ $H(r)$ เป็นสัญลักษณ์แทน unrestricted cointegrated VECM แล้ว แบบจำลอง $I(1)$ ของ $H(r)$ สามารถเขียนเป็นเงื่อนไขของ rank ของ $\cancel{\Pi}$ $\Phi(1)$ มีค่าน้อยกว่าหรือเท่ากับ r เราสามารถสร้าง nested set ของแบบจำลอง

$r=0, r=1, \dots, r=n$

$$H(0) \subset \dots \subset H(r) \subset \dots \subset H(n)$$

โดยที่ $H(0)$ แสดงถึง non-cointegrated VAR model โดยที่ $\cancel{\Pi}$ $\Phi(1)$ $= \mathbf{0}$ และ $H(n)$ แสดงถึง unrestricted stationary VAR(p)

เนื่องจาก rank ของ $\cancel{\Pi}$ $\Phi(1)$ เป็นตัวระบุจำนวน cointegrating relationships ในตัวแปร $\boldsymbol{Y}_t$ ดังนั้น Johansen ได้เสนอตัวทดสอบ LR statistics สำหรับจำนวน cointegrating relationships ซึ่งเป็น LR statistics สำหรับการระบุ rank ของ $\cancel{\Pi}$ $\Phi(1)$.

จำนวน Rank (r) $\Rightarrow$ ระบุจำนวน cointegrating relation

LR eqm ที่ความสัมพันธ์

(จำนวนของ Eigenvalue ที่มีค่าไม่เท่ากับศูนย์

Johansen's Trace Statistics

การทดสอบของ Johensen มีพื้นฐานจากการตัวประมาณค่า eigenvalues $\hat{\lambda}_1 > \hat{\lambda}_2 > \ldots > \hat{\lambda}_n$ ของเมตริกซ์ $\cancel{\Pi}$ $\Phi(1)$ (rank ของเมตริกซ์ มีค่าเท่ากับจำนวนของ eigenvalue ที่มีค่าไม่เท่ากับศูนย์)

$r = 0 \Rightarrow$ ... n

Johansen's Trace Statistic

Johansen's LR statistic ทดสอบสมมุติฐานในลักษณะเป็น nested hypotheses

0, 1, 2, ..., n r_0

$$\rightarrow \quad H_0(r_0) : r = r_0 \quad \text{vs} \quad H_1(r_0) : r > r_0$$

ทดสอบไปเรื่อยๆ จนกระทั่งไม่สามารถปฏิเสธ $H_0 : r = r_0$

โดยที่ LR statistic ถูกเรียกว่า *trace statistic* และคำนวณได้ดังนี้

Likelihood ratio

ที่ $r_0 = 0$

น้อยๆ $= 0$

$$LR_{trace}(r_0) = -T \sum_{i=r_0+1}^{n} \ln(1 - \hat{\lambda}_i)$$

MLE ประมาณค่า VECM $\Phi(1) \Rightarrow \hat{\lambda}_1, \ldots, \hat{\lambda}_n$

น้อยมากๆ

$< C.V.$

ถ้า $rank(\boldsymbol{\Pi}) = r_0$ แล้ว $\hat{\lambda}_{r_0+1}, \ldots, \hat{\lambda}_n$ จะมีค่าเข้าใกล้ศูนย์ และ $LR_{trace}(r_0)$ ควรจะมีค่าน้อย

ไม่สามารถปฏิเสธ H_0

การแจกแจง(เมื่อตัวอย่างใหญ่ asymptotic) ของ $LR_{trace}(r_0)$ เมื่อ H_0 เป็นจริงจะเป็น multivariate distribution ของ Dickey-Fuller unit-root distribution

Sequential Procedure

$\lambda_1 > \lambda_2 > \lambda_3 > \dots > r_n$

$r_0=0$ $r_0=1$ $r_0=2$

Johansen เสนอการทดสอบในลักษณะที่เป็นอันดับ (sequential testing procedure) โดยที่กระบวนการดังกล่าวจะระบุจำนวนของ cointegrating vectors ได้อย่าง consistently

rank=0 (สามารถสัมพันธ์ =0)

- ขั้นตอนแรกเราทดสอบ $H_0(r = 0)$ กับ $H_1(r > 0)$ ถ้าเราไม่สามารถปฏิเสธสมมุติฐานหลัก แสดงว่าไม่มี cointegrating vectors → ไม่เป็น cointegration (ใช้ Δy_t ในการ...)
  ถ้าเราปฏิเสธ $H_0(r = 0)$ เราสามารถสรุปได้ว่า มี cointegrating vector อย่างน้อยหนึ่งค่า และทดสอบในขั้นต่อไป $r>0$
- ทดสอบ $H_0(r = 1)$ กับ $H_1(r > 1)$ ถ้าเราไม่สามารถปฏิเสธสมมุติฐานหลัก เราสรุปว่ามี cointegrating vector เท่ากับหนึ่ง $r>1$
  แต่ถ้า เราปฏิเสธสมมุติฐานหลัก แสดงว่า มี cointegrating vectors อย่างน้อยสองค่า
- กระบวนการที่เป็นอันดับดังกล่าวจะดำเนินไปเรื่อยๆจนกระทั่งสมมุติฐานหลักไม่สามารถปฏิเสธ สรุปว่ามีความสัมพันธ์เท่ากับ r_0

$H_0(r=2)$ vs $H_1(r>2)$ → ไม่สามารถปฏิเสธ $H_0 \Rightarrow r=2$

ปฏิเสธ H_0

$H_0(r=3)$ vs $H_1(r>3)$

ไม่สามารถปฏิเสธ $H_0 \Rightarrow \boxed{r=r_0}$ ยอมรับ H_0

Johansen's Maximum Eigenvalue Statistic

การทดสอบ sequential
$r=0$
1
2
⋮

Johansen ยังได้เสนอการทดสอบ LR statistic สำหรับสมมุติฐานต่อไปนี้

$$H_0(r_0) : r = r_0 \quad \text{vs} \quad H_1(r_0) : r = r_0 + 1$$

โดยเราเรียก LR statistic ว่า *maximum eigenvalue statistic* และคำนวณได้ดังนี้

$$LR_{max}(r_0) = -T \ln(1 - \underbrace{\hat{\lambda}_{r_0+1}}_{\text{มากกว่า } 0}) > cv. \text{ ปฏิเสธ } H_0$$

ทดสอบจนกระทั่ง ไม่สามารถปฏิเสธ H_0 ⇒ $\boxed{r = r_0}$ จึงเป็นคำตอบ

การทดสอบ Cointegration ตามแนวทาง Johansen

1) ประมาณค่า VAR(p) ⇒ p=? AIC, BIC เลือก
2) ประมาณค่า VECM (p−1) ⇒ เมทริกซ์ $\Pi(1)$
3) ทดสอบ Cointegration $\Pi(1)$ ⇒ Rank=? (sequential)
4) r=? ประมาณค่า VECM ด้วย r จาก ③

ตัวอย่างที่ 7.8

ทดสอบเวกเตอร์เอเรอคอเรคชันตามแนวทางของโจแฮนเซนกับราคาปัจจุบันและราคาฟิวเจอร์ของ SET50

เราจะพิจารณาข้อมูลในตัวอย่างที่ (7.6) ด้วยแบบจำลองเวกเตอร์เอเรอคอเรคชันซึ่งประมาณค่าสมการระยะยาวและสมการเวกเตอร์เอเรอคอเรคชันไปพร้อม ๆ กัน รวมถึงการทดสอบโคอินทิเกรชัน

1

VAR(P)

ขั้นตอนแรก คือการหาอันดับที่เหมาะสมสำหรับแบบจำลองเวกเตอร์เอเรคอเรคชัน (VECM(p-1)) โดยจะเป็นอันดับที่น้อยกว่าของเวกเตอร์ออโตรีเกรสซีฟหนึ่งอันดับ (VAR(p)) ซึ่งในที่นี้เราจะใช้ชุดคำสั่ง vars และคำสั่ง VAR ในการประมาณค่าข้อมูล fsprice ซึ่งคือเมทริกซ์ที่ประกอบด้วยข้อมูล lfutures กับ lspot และเลือกใช้ BIC ในการหาอันดับที่เหมาะสม โดยใช้คำสั่งต่อไปนี้

Johansen's Methodology for Modeling Cointegration

ขั้นตอนในการสร้างแบบจำลอง Cointegration ของ Johansen คือ

- ระบุ Order และประมาณค่า VAR(p) สำหรับ $\boldsymbol{Y}_t$
- สร้าง likelihood ratio tests สำหรับการทดสอบ rank of $\boldsymbol{\Pi}$ เพื่อระบุจำนวน cointegrating vectors
- หากจำเป็นเราอาจจะสมมุติ normalization และระบุเงื่อนไขของ cointegrating vectors
- จาก normalized cointegrating vectors ที่ได้ระบุไว้ เราสามารถประมาณค่า cointegrated VECM ด้วย MLE

ช่วงตอน 2

Johansen's Methodology for Modeling Cointegration

การทดสอบโคอินทิเกรชันตามแนวทางของโจแฮนเซนด้วยโปรแกรม R จะใช้ชุดคำสั่ง `urca` และคำสั่ง `ca.jo` โดยที่ในคำสั่งดังกล่าวมีตัวเลือกที่เราต้องระบุดังนี้

ทดสอบตามแนวทาง Johansen

- `spec=c("transitory")` หมายถึงการตอบสนองของตัวแปรเกิดจากการออกนอกดุลยภาพในคาบที่แล้ว (u_{t-1})
- สถิติที่ใช้ในการทดสอบระหว่าง `type=c("trace")` หรือ `type=c("eigen")`
- ระบุอันดับของค่าล่าในสมการเวกเตอร์รีเกรสซีฟ (p) ซึ่งในคำสั่งนี้คือ K อย่างไรก็ตามอันดับขั้นต่ำของ p คือ 2 (VECM(1)) VAR(p) K = ?
- รูปแบบของพจน์เชิงกำหนดในสมการระยะยาวซึ่งมีทางเลือกคือ `"none"`, `"const"`, `"trend"`

มีค่าคงที่

มีทั้งค่าคงที่ + แนวโน้ม

พจน์ ΔY_{t-1} ทางขวามือ (ตัวเลือก BIC - VECM(0) จริงๆ ควรใช้ K=1)

ตัวอย่างที่ 7.8

ในเทอม 1

BIC

```
> fsprice<-cbind(lfutures,lspot)
> library(vars)
> var.mod<-VAR(fsprice, lag.max = 4, ic = c("SC"))
> var.mod
VAR Estimation Results:
=======================
Estimated coefficients for equation lfutures:
=============================================
Call:
lfutures = lfutures.l1 + lspot.l1 + const

lfutures.l1     lspot.l1        const
   -0.47626      1.47463      0.00916

Estimated coefficients for equation lspot:
==========================================
Call:
lspot = lfutures.l1 + lspot.l1 + const

lfutures.l1     lspot.l1        const
     -0.881        1.875        0.042
```

→ $P=1$

VAR(1) เป็นแบบจำลองที่ BIC เลือก

$\Downarrow$

VECM(P-1) = VECM(1-1)

= VECM(0)

ตัวอย่างที่ 7.8

ที่เตน 2

จากผลการประมาณค่า เราจะเห็นได้ว่าค่าล่า p ที่เหมาะสมคือ 1 ซึ่งแสดงด้วยสัญลักษณ์ `.11` แสดงว่าแบบจำลองที่เหมาะสม คือ VAR(1) และ VECM(0) อย่างไรก็ตามเนื่องจากข้อจำกัดของคำสั่ง `ca.jo` เราจะระบุค่า `K=2`

ในการทดสอบโคอินทิเกรชัน เราจะต้องระบุข้อมูล (`sprice`) วิธีในการทดสอบด้วยตัวสถิติเทรซ (`type=c("trace")`) รูปแบบของสมการ (`ecdet=c("const")`) และจำนวนค่าล่าในแบบจำลองเวกเตอร์ออโตรีเกรสซีฟ ซึ่งในที่นี้คือ `K=2` โดยเก็บผลการทดสอบไว้ในชื่อ `fsprice.rc` และเรียกดูผลด้วย `summary(fsprice.rc)`

รูปแบบของสมการระยะยาว

```
> library(urca)
> fsprice.rc <-ca.jo(fsprice, type = c("trace"), ecdet = c("const"), K=2)
```

เก็บผล

ข้อมูล (f_t, s_t)

สถิติที่ใช้ทดสอบ

มี constant

P=2 (ต่ำสุด)
แม้ว่า BIC เลือก
P=1

ตัวอย่างที่ 7.8

สถิติที่ใช้ (รายงาน)

```
> summary(fsprice.rc)

######################
# Johansen-Procedure #
######################

Test type: trace statistic , without linear trend and constant in cointegration

Eigenvalues (lambda):
[1] 2.24e-01 1.72e-02 2.26e-17

Values of teststatistic and critical values of test:

          test 10pct  5pct  1pct
r <= 1 |  2.83  7.52  9.24 13.0
r = 0  | 44.18 17.85 19.96 24.6
```

λ_1 λ_2 λ_3

CV α

↑ sequential Test

① $H_0: r=0$ vs $H_1: r>0$

Trace stat $= 44.18 > CV(\alpha=0.05) = 19.96$

เราสามารถปฏิเสธ $H_0: r=0$ แสดงว่า $r>0$ (มี cointegration)

② $H_0: r=1$ vs $H_1: r>1$

Trace stat $= 2.83 < CV(\alpha=0.05) = 9.24$

เราไม่สามารถปฏิเสธ $H_0: r=1$ แสดงว่า f_t และ s_t cointegrated

และมีความสัมพันธ์ 1 ความสัมพันธ์

ตัวอย่างที่ 7.8

ขั้นตอน 4 ประมาณค่า VECM โดยใช้ $r=1$

เราสามารถสร้างสมการเวกเตอร์เอเรอคอเรกชัน ได้ด้วยคำสั่ง *cajorls* โดยระบุว่าใช้รูปแบบจาก *fsprice.rc* และจำนวนความสัมพันธ์เท่ากับ 1 ($r = 1$)

ผลการประมาณค่า (ใช้รูปแบบที่เราระบุ เช่น const ใน LR, VECM(1))

กำหนดจำนวนความสัมพันธ์จากการทดสอบ

```
> fsprice.vecm <-cajorls(fsprice.rc, r= 1)
> fsprice.vecm
$rlm

Call:
lm(formula = substitute(form1), data = data.mat)

Coefficients:
             lfutures.d  lspot.d
ect1         -2.219      -1.626
lfutures.dl1 -1.525      -0.899
lspot.dl1     1.726       1.087


$beta
              ect1
lfutures.l2  1.0000
lspot.l2    -1.0078
constant     0.0556
```

$rlm — สมการ VECM

① ↓ สมการ 1 ② ↓ สมการ 2

① $\Delta lf_t = -2.219 U_{1t-1} - 1.525 \Delta lf_{t-1} + 1.726 \Delta ls_{t-1}$ (>0)

② $\Delta ls_t = -1.626 U_{1t-1} - 0.899 \Delta lf_{t-1} + 1.087 \Delta ls_{t-1}$ (>0)

$beta — β (Long run eq.)

การปรับตัวเข้าสู่ดุลยภาพ ของ lf_t และ ls_t

ถ้า $U_{1t-1} > 0$ $[lf_{t-1} > 1.008 ls_{t-1} - 0.008]$

$\rightarrow lf_t \downarrow (-2.219)$

$\rightarrow ls_t \downarrow (-1.626)$

$U_{1t-1} = 1 \cdot lf_{t-1} - 1.008 ls_{t-1} + 0.056$

สมมุติให้ $U_{1t-1} = 0$ [LR]

$lf_{t-1} = 1.008 ls_{t-1} - 0.056$

$\hat{\beta} \approx 1$

$ls_{t-1} \uparrow 1\% \Rightarrow lf_{t-1} \uparrow 1.008\%$

(VECM เราประมาณค่า LR กับ VECM พร้อมกัน ค่า สปส. ของ สมการ LR, VECM ต่างจาก 2-step

ตัวอย่างที่ 7.9

การทดสอบและประมาณค่า VECM สมการอัตราผลตอบแทนพันธบัตรรัฐบาล

อัตราดอกเบี้ยจาก t-bond
[ทดสอบ unit root ~ I(1)]
(ไทย)

- Term Structure of Interest
อัตราดอกเบี้ยระยะยาว = sum อัตราดอกเบี้ยระยะสั้น
(ขยับไปด้วยกัน)

```
> tbond
    <-read.csv("https://raw.githubusercontent.com/chaleampong/EC435/master/tbond.csv",
    header = TRUE)
> m1<-tbond$m1
> m3<-tbond$m3
> y5<-tbond$y5
```

3 อัตราดอกเบี้ย

ขั้นตอนแรกของการทดสอบคือการหาอันดับที่เหมาะสมของ VECM โดยการจัดตัวแปรทั้งสามให้อยู่ในรูปเมทริกซ์ ‘rterm‘ ด้วยคำสั่ง ‘cbind‘ หลังจากนั้น ประมาณค่า VAR ด้วย package ‘vars‘ และคำสั่ง ‘VAR‘ โดยระบุข้อมูลที่ประมาณค่าคือ ‘rterm‘ จำนวนอันดับที่สูงที่สุด ‘lag.max=6‘และเลือก model selection คือ AIC ด้วย ‘ic=c(”AIC”)‘ และเพื่อให้พิจารณาค่าสัมประสิทธิ์ได้ง่ายเราอาจจะใช้ `option(digits=2)`

ขั้นตอน 1

```
> library(vars)
> rterm <- cbind(m1, m3, y5)
> var.mod <-VAR(rterm, lag.max=6, ic= c("AIC"))
> options(digits = 2)
> var.mod
Estimated coefficients for equation m1:
=======================================
  m1.l1    m3.l1    y5.l1    m1.l2    m3.l2    y5.l2    m1.l3    m3.l3    y5.l3    const
-0.1482   1.4685   0.0179   0.3192  -0.5652   0.0358  -0.1006   0.0154  -0.0550  -0.0098
[omitted]
```

VAR(3)

ตัวอย่างที่ 7.9

ขั้นตอน 2 ประมาณค่า VECM(2) ⇒ K=3

หากพิจารณาแบบจำลอง VAR ที่เหมาะสมคือ VAR(3) ดังนั้น เราจะประมาณค่าแบบจำลอง VECM(2)

เราทดสอบ Johansen’s test โดยใช้คำสั่ง ‘ca.jo‘ ใน package ‘urca‘ โดยระบุตัวสถิติที่ใช้คือ trace statistic ด้วย ‘type=c(”trace”)‘ และรูปแบบของ cointegration มีค่าคงที่ ‘ecdet=c(”const”)‘ และจำนวนอันดับของ VAR ‘k=3‘ โดยเก็บผลไว้ในชื่อ ‘rterm.rc‘ และเรียกดูผลด้วย ‘summary(rterm.rc)‘

ข้อมูล   สถิติ   รูปแบบ LR มี constant

```
> rterm.rc <-ca.jo(rterm, type=c("trace"), ecdet=c("const"), K=3)
> summary(rterm.rc)
######################
# Johansen-Procedure #
######################

Test type: trace statistic , without linear trend and constant in cointegration

Eigenvalues (lambda):
[1] 0.16 0.10 0.03 0.00

Values of teststatistic and critical values of test:

          test 10pct  5pct 1pct
r <= 2 |  4.3   7.5   9.2   13
r <= 1 | 19.7  17.9  20.0   25
r = 0  | 44.5  32.0  34.9   41
```

อย่างน้อยเพียง 1 ตัว, 3 ตัว, ... cointegrate กัน และมี ความสัมพันธ์ = 2

(3) $H_0: r=2$ vs $H_1: r>2$

trace stat = 4.3 < CV ($\alpha=0.1$)

เราไม่สามารถปฏิเสธ H_0 แสดงว่า $r=2$

(1) $H_0: r=0$ vs $H_1: r>0$

Trace stat 44.5 > cv ($\alpha=0.05$) แสดงว่า $r>0$

(2) $H_0: r=1$ vs $H_1: r>1$

Trace stat = 19.7 < cv ($\alpha=0.05$)

[stat > cv ($\alpha=0.1$)] ปฏิเสธ H_0 แสดงว่า $r>1$

ตัวอย่างที่ 7.9 → IRF สำหรับในครั้งต่อไป

สรุปว่าตัวแปรทั้ง 3 cointegrated กัน และมีความสัมพันธ์ 2 สมการ จากผลการทดสอบเราสามารถประมาณ VECM ด้วยคำสั่ง `cajorls` โดยระบุรูปแบบสมการเช่นเดียวกับ `rterm.rc` และจำนวนความสัมพันธ์ `'r=2` โดยเก็บผลการประมาณค่าไว้ในชื่อ `rterm.vecm`

ผลจากทดสอบ

ผลการทดสอบ 2 ความสัมพันธ์

```
> rterm.vecm <-cajorls(rterm.rc, r=2)
> rterm.vecm
$rlm

Call:
lm(formula = substitute(form1), data = data.mat)

Coefficients:
         m1.d      m3.d      y5.d
ect1    -0.9245   -0.7024   -0.9016
ect2     0.9131    0.6724    0.9210
m1.dl1  -1.1489   -0.7751   -0.9638
m3.dl1   1.4676    1.0658    1.0036
y5.dl1   0.0195    0.0792    0.3112
m1.dl2  -0.8288   -0.3682   -1.3602
m3.dl2   0.9017    0.4301    1.0025
y5.dl2   0.0548    0.0708   -0.1110

$beta
              ect1     ect2
m1.l3     1.0e+00  2.2e-16
m3.l3    -4.4e-16  1.0e+00
y5.l3    -7.8e-01 -7.9e-01
constant  2.0e-01  1.8e-01
```

VECM

ΔY_{t-1} ΔY_{t-2}

$\Delta m1$ $\Delta m3$ $\Delta y5$

LR ① ②

$\Delta m1_t = -0.925\, U_{1t-1} + 0.913\, U_{2t-1} + \Delta Y_{t-1} + \Delta Y_{t-2}$

$\Delta m3_t = -0.702\, U_{1t-1} + 0.67\, U_{2t-1} + \cdots$

$\Delta y5_t = -0.9016\, U_{1t-1} + 0.92\, U_{2,t-1} + \cdots$

น้อยมาก

② $U_{2t-1} = \cancel{2.2\times10^{-16}\, m1_{t-1}} + 1\cdot m_{3,t-1} - 0.79\, y5_{t-1} + 0.18$

$\Rightarrow y5_t = \frac{1}{0.79} m_{3t-1} + \frac{0.18}{0.79}$

น้อยมาก

① $U_{1t-1} = 1\cdot m1_{t-1} - \cancel{4.4\times10^{-16}\, m3_{t-1}} - 0.78\, y5_{t-1} + 0.2$

[ที่ดุลยภาพ $U_{1t-1}=0$]

$0.78\, y5_{t-1} = 1\, m_{1t-1} + 0.2$

$0.78 \qquad 0.78$