EC435
หัวข้อ 2: อนุกรมเวลาทางการเงินและคุณลักษณะ

เฉลิมพงษ์ คงเจริญ ©2556-2563

คณะเศรษฐศาสตร์ มหาวิทยาลัยธรรมศาสตร์

วันที่ 14 สิงหาคม 2563

การคำนวณผลตอบแทน (return)

- ในการศึกษาทางการเงินส่วนมากเรามักจะสนใจผลได้ตอบแทน(return)ของทรัพย์สินมากกว่าราคา (price)
- ผลได้ตอบแทนของทรัพย์สินมีความสมบูรณ์ (complete) และปราศจากผลของหน่วยวัดเพื่อที่จะใช้ในการประเมินโอกาสในการลงทุน เช่นการระบุว่าราคาเพิ่มขึ้น 10 บาทไม่ได้บอกว่าผลได้ตอบแทนนั้นดีหรือไม่ จำเป็นต้องระบุในรูปของผลได้ตอบแทนเป็นเปอร์เซนต์
- อนุกรม (series) ของผลได้ตอบแทนมีคุณสมบัติทางสถิติที่ดีกว่าอนุกรมของราคาในการดำเนินการทางสถิติ

นิยามของผลได้ตอบแทนของทรัพย์สิน

สมมุติให้การซื้อสินทรัพย์ เช่นหุ้น พันธบัตร หรือกองทุนรวม ณ เวลา t_0 ด้วยราคา P_{t_0} บาทและขายสินทรัพย์ ณ เวลา t_1 ด้วยราคา P_{t_1} บาท ร้อยละของการเปลี่ยนแปลงของราคา

$$R(t_0, t_1) = \frac{P_{t_1} - P_{t_0}}{P_{t_0}} \tag{1}$$

เราจะเรียกระยะเวลาระหว่าง t_0 และ t_1 ว่าระยะเวลาการถือสินทรัพย์ (holding period)

เราจะสมมุติให้ระยะเวลาการถือมีลักษณะเพิ่มขึ้นเช่นเดียวกับปฏิทิน เช่น รายนาที รายวัน รายเดือน หรือรายปี

One-month simple return

กำหนดให้ P_t เป็นราคาของสินทรัพย์ ณ เวลาสิ้นเดือน t และไม่มีการจ่ายเงินปันผล และกำหนดให้ P_{t-1} เป็นราคาของสินทรัพย์ ณ เวลาสิ้นเดือน $t-1$

- **ผลได้ตอบแทนรวมอย่างง่ายหนึ่งเดือน (one-month simple gross return)** สามารถคำนวณได้ดังนี้

$$1 + R_t = \frac{P_t}{P_{t-1}} \tag{2}$$

- **ผลได้ตอบแทนสุทธิอย่างง่ายหนึ่งเดือน (one-month simple net return)** หรือผลได้ตอบแทนอย่างง่ายหนึ่งเดือน (one-month simple return)

$$R_t = \frac{P_t}{P_{t-1}} - 1 = \frac{P_t - P_{t-1}}{P_{t-1}} \tag{3}$$

ตัวอย่างที่ 2.1

สมมุติว่าเราพิจารณาการลงทุนในหุ้น APPLE โดยที่เราซื้อหุ้นเมื่อเดือน $t-1$ ด้วยราคา $P_{t-1} = 190$ ดอลลาร์และขายไปในเดือนต่อไปด้วยราคา $P_t = 200$ ดอลลาร์และไม่มีการจ่ายเงินปันผลในระหว่างที่เราถือหุ้น ดังนั้นผลได้ตอบแทนสุทธิและผลได้ตอบแทนอย่างง่ายรวมหนึ่งเดือนจะเท่ากับ

ผลได้ตอบแทนหลายเดือน

ผลได้ตอบแทนจากการลงทุนสองเดือนสามารถคำนวณได้จากการหาการเปลี่ยนแปลงของราคา ณ เดือน P_t และ P_{t-2} หรือผลได้ตอบแทนอย่างง่ายสองเดือนจะเท่ากับ

$$R_t(2) = \frac{P_t - P_{t-2}}{P_{t-2}}$$

ผลได้ตอบแทนหลายเดือน

ผลได้ตอบแทนรวมอย่างง่ายสองเดือนจะเท่ากับ

$$1 + R_t(2) = (1 + R_t)(1 + R_{t-1}) = 1 + R_t + R_{t-1} + R_t R_{t-1} \tag{4}$$

ซึ่งคือการรวมเรขาคณิต (geometric sum) ของผลได้ตอบแทนรวมอย่างง่ายหนึ่งเดือนของเดือน t และ $t-1$ ดังนั้นจะเห็นได้ว่า $R_t(2)$ จะไม่เท่ากับผลรวมของ R_t และ R_{t-1}

ตัวอย่างที่ 1.2

พิจารณาต่อเนื่องจากตัวอย่าง 1.1 สมมุติให้เราซื้อหุ้น ณ เดือนที่ $t-2$ ด้วยราคา $P_{t-2} = 180$ ดอลลาร์และไม่มีการจ่ายเงินปันผล ผลได้ตอบแทนสุทธิสองเดือนจะเท่ากับ

ตัวอย่างที่ 2.2

โดยที่ผลได้ตอบแทนหนึ่งเดือนของแต่ละเดือนจะเท่ากับ

$$1 + R_{t-1} = \frac{190}{180} = 1.0556$$
$$1 + R_t = \frac{200}{190} = 1.0526$$

และผลได้ตอบแทนรวมสองเดือนจะเท่ากับ

$$1 + R_t(2) =$$

ผลได้ตอบแทนของกลุ่มสินทรัพย์ลงทุน (Portfolio)

- ลงทุนด้วยเงินจำนวน V บาทในสินทรัพย์สองตัวคือ A และ B
- สัดส่วนการลงทุนในสินทรัพย์ทั้งสองคือ x_A และ x_B
- ผลได้ตอบแทนอย่างง่ายหนึ่งเดือนของ A และ B คือ $R_{A,t}$ และ $R_{B,t}$
- มูลค่าของกลุ่มสินทรัพย์ลงทุนเมื่อสิ้นเดือนจะเท่ากับ

$$V \times \left[x_A(1+R_{A,t}) + x_B(1+R_{B,t})\right]$$

- ผลได้ตอบแทนรวมของกลุ่มสินทรัพย์ลงทุน และอัตราผลตอบแทนจากการลงทุนจะเท่ากับ

$$x_A R_{A,t} + x_B R_{B,t}$$

การปรับกรณีเงินปันผล

- ถ้าสินทรัพย์มีการจ่ายเงินปันผลเท่ากับ D_t ในช่วงเวลาระหว่างเดือน t และ $t-1$
- การคำนวณผลได้ตอบแทนสุทธิทั้งหมด (total net return) สามารถทำได้โดย

$$R_t^{total} = \frac{P_t + D_t - P_{t-1}}{P_{t-1}} = \frac{P_t - P_{t-1}}{P_{t-1}} + \frac{D_t}{P_{t-1}} \tag{5}$$

- โดยที่ส่วนแรกเป็นกำไรส่วนเกินทุน (capital gain) และส่วนที่สองคืออัตราผลตอบแทนเงินปันผล (dividend yield)

การแปลงผลได้ตอบแทนเป็นผลได้ตอบแทนรายปี

- การแปลงผลได้ตอบแทนที่มีความถี่อื่นๆเป็นรายปี สมมุติว่าเราต้องการหาผลได้ตอบแทนหนึ่งปี $(1 + R_A)$ จากข้อมูลผลได้ตอบแทนรายเดือน เราสามารถคำนวณได้โดย

$$\begin{aligned}
1 + R_A = 1 + R_t(12) &= \frac{P_t}{P_{t-12}} = \frac{P_t}{P_{t-1}} \frac{P_{t-1}}{P_{t-2}} \cdots \frac{P_{t-11}}{P_{t-12}} \\
&= (1 + R_t)(1 + R_{t-1}) \cdots (1 + R_{t-11}) \\
R_A &= R_t(12)
\end{aligned}$$

- การคำนวณผลได้ตอบแทนรายเดือนภายใต้ข้อสมมุติว่าผลได้ตอบแทนคงที่ทุกเดือนเท่ากับ R เราจะได้ผลได้ตอบแทนรายหนึ่งปีเท่ากับ

$$1 + R_A = 1 + R_t(12) = (1 + R)^{12}$$

ซึ่งก็คือผลได้ตอบแทนทบต้น 12 เดือนนั่นเอง

ผลได้ตอบแทนทบต้นอย่างต่อเนื่อง

การคิดผลตอบแทนทบต้น(compounding) สมมุติว่าธนาคารจ่ายดอกเบี้ยเงินฝากในอัตรา 10 % ต่อปี และมีเงินต้นเท่ากับ 100 บาท

- จ่ายดอกเบี้ยหนึ่งครั้งเมื่อสิ้นปี มูลค่าสุทธิของเงินฝากเท่ากับ $100(1+0.1)=110$ บาท
- จ่ายดอกเบี้ยออกเป็นสองครั้งครั้งละ 5 % ทุกครึ่งปี มูลค่าสุทธิจะเท่ากับ $100(1+0.1/2)^2=110.25$ บาท
- จ่ายดอกเบี้ย m ครั้ง มูลค่าสุทธิ ณ สิ้นปีที่หนึ่งจะมีค่า $100(1+0.1/m)^m$
- จ่ายดอกเบี้ยทบต้นอย่างต่อเนื่อง (continuous compounding) มูลค่าสุทธิ ณ สิ้นปีจะเท่ากับ $100(\exp(0.1))=110.517$
  Note:$\exp(x)=\lim_{n\to\infty}(1+x/n)^n$

กำหนดให้ R_t เป็นผลได้ตอบแทนอย่างง่ายรายเดือนของการลงทุน เนื่องจากมูลค่าในอนาคตจะเท่ากับมูลค่าปัจจุบันคูณกับตัวคูณทบต้น ($P_t = P_{t-1}\exp(r_t)$) เราสามารถคำนวณผลได้ตอบแทนทบต้นต่อเนื่องหนึ่งเดือน (one-month continuously compounding return) หรือผลได้ตอบแทนในรูปลอการิทึม(one-month log return) ได้โดย

$$\begin{aligned} r_t &= \ln(1+R_t) = \ln\left(\frac{P_t}{P_{t-1}}\right) \\ &= \ln(P_t) - \ln(P_{t-1}) = p_t - p_{t-1} \end{aligned} \tag{6}$$

โดยที่ $p_t = \ln(P_t)$

ตัวอย่างที่ 2.3

ใช้ข้อมูลจากตัวอย่างที่ 2.1 ผลได้ตอบแทนทบต้นอย่างต่อเนื่องหนึ่งเดือนหรือผลได้ตอบแทนในรูปลอการิทึมหนึ่งเดือนจะเท่ากับ

$$r_t = \ln(1.0526) = 0.0513$$

$$r_t = \ln(200) - \ln(190) = 5.2983 - 5.2470 = 0.0513$$

ความสัมพันธ์ระหว่าง simple return กับ log return

- เราสามารถคำนวณผลตอบแทนอย่างง่ายสุทธิได้จากผลได้ตอบแทนในรูปลอการิทึมโดย

$$R_t = \exp(r_t) - 1$$

- หากผลได้ตอบแทนมีค่าต่ำ(ในกรณีเราพิจารณาผลได้ตอบแทนรายวันหรือรายเดือน) ผลได้ตอบแทนในรูปลอการิทึมและผลได้ตอบแทนอย่างง่ายจะมีค่าใกล้เคียงกัน
- ค่าต่ำสุดที่จะเป็นไปได้ของผลได้ตอบแทนอย่างง่ายคือ -1 ดังนั้นขอบเขตล่างของผลได้ตอบแทนในรูปลอการิทึมจะเท่ากับ $-\infty$
- การวิเคราะห์เชิงสถิติหรือการสร้างแบบจำลองเรามักจะใช้ผลได้ตอบแทนในรูปลอการิทึม

การแจกแจงของอนุกรมเวลา

- ตัวแปรสุ่ม Y_t คือฟังก์ชันที่ใช้อธิบายค่าของเหตุการณ์ที่จะเกิดขึ้นในอนาคต โดยที่เรารู้ค่าทั้งหมดที่จะเป็นไปได้แต่ไม่รู้ว่าจะเกิดอะไรขึ้นแน่นอน เช่น ราคาของหลักทรัพย์(P)
- ตัวแปรสุ่มจะมีการแจกแจงอย่างไร โดยที่หนึ่งในทางเลือกคือการแจกแจงแบบ log-normal
- การลงทุนของเราในหนึ่งเดือนข้างหน้าจะมีผลได้ตอบแทน(R_t)เป็นอย่างไร ดังนั้น R_t ก็จะเป็นตัวแปรสุ่ม
- การแจกแจงที่ใช้ประมาณค่าสำหรับผลได้ตอบแทนอย่างง่ายรายเดือนที่ดีคือการแจกแจงแบบปกติ

การแจกแจงของอนุกรมเวลา

- ราคาจะเปลี่ยนแปลงอย่างไร โดยอาจจะสนใจกรณีที่ราคาปรับตัวขึ้นแทนด้วย 0 และกรณีที่ราคาคงที่หรือลดลงแทนด้วย 1 ในกรณีนี้ sample space ของ discrete random variable
- ฟังก์ชันความหนาแน่นของความน่าจะเป็น (probability density function: *pdf*) ของตัวแปรสุ่มวิยุตสามารถเขียนแทนด้วย $p(y)$ จะเป็นฟังก์ชัน
  $p(y) = Pr(Y = y)$
- *pdf* จะต้องมีคุณสมบัติคือ (1) $p(y) \geq 0$ สำหรับทุกค่า $y \in S_y$ (2) $p(y) = 0$ สำหรับทุกค่า $y \notin S_y$ และ (3) $\sum_{y \in S_y} p(y) = 1$

การแจกแจงของอนุกรมเวลา

- ตัวแปรสุ่มแบบต่อเนื่อง Y จะมีค่าเป็นเท่าใดก็ได้บนเส้นจำนวนจริง ดังนั้น $S_Y = \{y : y \in \mathbb{R}\}$
- ฟังก์ชันความหนาแน่นของความน่าจะเป็น *pdf* ของตัวแปรสุ่มต่อเนื่อง Y จะเป็นฟังก์ชันที่ไม่เป็นค่าลบ f นิยามบนเส้นจำนวนจริงโดยที่สำหรับช่วง A ใดๆ

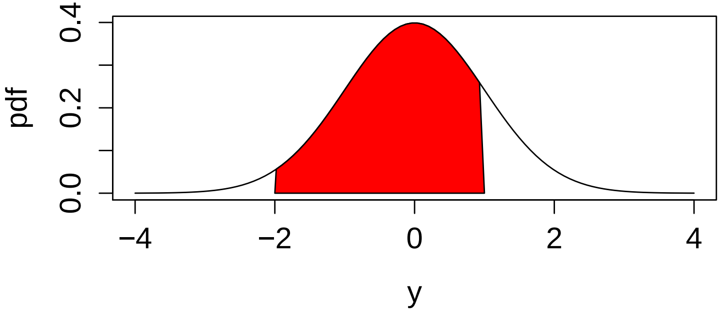
$$Pr(Y \in A) = \int_A f(y)dy$$

- $Pr(Y \in A)$ คือพื้นที่ใต้กราฟความน่าจะเป็นตลอดช่วง A โดยที่ *pdf* $f(y)$ จะมีคุณสมบัติดังนี้ (1) $f(y) \geq 0$ และ (2) $\int_{-\infty}^{\infty} f(y)dy = 1$

การแจกแจงของอนุกรมเวลา:การแจกแจงต่อเนื่อง

ตัวอย่างเช่นกราฟรูประฆังรูปที่ 1 เป็น pdf ฟังก์ชันโดยที่พื้นที่ใต้กราฟระหว่าง $y = -2$ ถึง $y = 1$ จะแสดงถึง $Pr(-2 \leq Y < 1)$

Figure: ฟังก์ชัน pdf ของการแจกแจงต่อเนื่อง



การแจกแจงของอนุกรมเวลา:การแจกแจงต่อเนื่อง

ฟังก์ชันการแจกแจงสะสม (*cdf*) จะมีคุณสมบัติดังนี้

1. ถ้า $y_1 < y_2$ แล้ว $F_Y(y_1) \leq F_Y(y_2)$
2. $F_Y(-\infty) = 0$ และ $F_Y(\infty) = 1$
3. $Pr(Y > y) = 1 - F_Y(y)$
4. $Pr(y_1 < X \leq y_2) = F_Y(y_2) - F_Y(y_1)$
5. $\frac{\partial F_Y(y)}{\partial y} = f_Y(y)$ ถ้า Y เป็นตัวแปรสุ่มต่อเนื่องและ $F_Y(y)$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องและหาอนุพันธ์ได้

ควอนไทล์ของการแจกแจงความน่าจะเป็น

- หากเราพิจารณาตัวแปรสุ่ม Y ที่มีฟังก์ชันการแจกแจงสะสม $F_Y(y)$ หากค่า $0 \leq \alpha \leq 1$ แล้วค่าควอนไทล์ที่ $100\alpha\%$ ของการแจกแจง Y คือค่า q_α ที่ตรงกับเงื่อนไข

$$F_Y(q_\alpha) = Pr(Y \leq q_\alpha) = \alpha$$

- กำหนดให้ $Y \sim N(0,1)$ ค่าควอนไทล์ของการแจกแจงแบบปกติมาตรฐานจะเท่ากับ

$$q_\alpha = \Phi^{-1}(\alpha) \tag{7}$$

คุณลักษณะเรื่องรูปร่างของการแจกแจงความน่าจะเป็น

คุณลักษณะด้านรูปร่างของการแจกแจงความน่าจะเป็นใดๆจะวัดได้ด้วยคุณลักษณะ 4 ประการ

1. ค่าคาดหมาย (expected value) หรือค่าเฉลี่ยเป็นการวัดค่ากลางของการแจกแจง
2. ความแปรปรวนและค่าเบี่ยงเบนมาตรฐานวัดการแผ่จากค่ากลาง
3. ความเบ้ (skewness) วัดความสมมาตรรอบๆค่ากลาง
4. ค่าความโด่ง (kurtosis) วัดความอ้วนของหาง

ค่าคาดหมาย

ฟังก์ชันค่าคาดหมาย (mean function)ของตัวแปรสุ่ม Y ใดๆ ใช้สัญลักษณ์ $E(Y)$ สามารถคำนวณได้ดังนี้ ในกรณีที่ Y เป็น discrete r.v. ค่าคาดหมายจะเท่ากับ

$$\mu_Y = E(Y) = \sum_{y \in S_Y} y \times P(Y = y) \tag{8}$$

หรือในกรณี continuous r.v. ค่าคาดหมายจะเท่ากับ

$$\mu_Y = E(Y) = \int_{-\infty}^{\infty} yf(y)dy \tag{9}$$

โดยที่ E คือสัญลักษณ์แทนค่าคาดหมาย (Expected value)

ค่าความแปรปรวนและค่าเบี่ยงเบนมาตรฐาน

ค่าแปรปรวนของตัวแปรสุ่ม Y เขียนแทนด้วย $Var(Y)$ หรือ σ_Y^2 วัดการแผ่ของการแจกแจงจากค่าเฉลี่ย โดยที่ค่าแปรปรวนสามารถนิยามได้โดย

$$\sigma_Y^2 = Var(Y) = E\left[(Y - \mu_Y)^2\right] \tag{10}$$

หรือ

$$\sigma_Y^2 = Var(Y) = E\left[Y^2\right] - \mu_Y^2 \tag{11}$$

เนื่องจากหน่วยวัดของค่าความแปรปรวนมีหน่วยที่แตกต่างจากตัวแปรสุ่ม Y ดังนั้น เรามักจะพิจารณาค่าเบี่ยงเบนมาตรฐานเขียนแทนด้วย $sd(Y)$ หรือ σ_Y ซึ่งเท่ากับค่ารากที่สองของค่าความแปรปรวน ($\sqrt{\sigma_Y^2}$)

ค่าความเบ้(skewness)

ค่าความเบ้ซึ่งสามารถเขียนแทนด้วย ($S(Y)$) วัดความสมมาตรรอบๆค่ากลาง สามารถทำได้โดย

$$S(Y) = \frac{E[(Y - \mu_Y)^3]}{\sigma_Y^3} \tag{12}$$

- ค่าความเบ้เป็นศูนย์แสดงว่าการแจกแจงมีความสมมาตร
- ค่าความเบ้เป็นบวกแสดงว่าข้อมูลถูกดึงไปด้านขวาของการแจกแจง(หางไปทางขวา)
- ค่าความเบ้เป็นลบแสดงว่าข้อมูลถูกดึงไปทางซ้าย(หางไปทางซ้าย)

ค่าความโด่ง(kurtosis)

- ค่าความโด่งใช้วัดความหนาของหางของการแจกแจงซึ่งสามารถเขียนแทนได้ด้วย $K(Y)$ และสามารถคำนวณได้จาก

$$K(Y) = \frac{E[(Y - \mu_Y)^4]}{\sigma_Y^4} \tag{13}$$

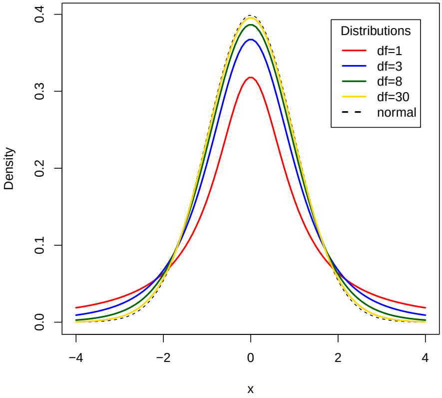
- ค่าความโด่งของตัวแปรสุ่มที่มีการแจกแจงปกติเท่ากับ 3
- เราใช้ค่าความโด่งดังกล่าวเป็นมาตรฐานความหนาของหาง
- ความโด่งส่วนเกิน (excess kurtosis) โดย excess $K(Y) = K(Y) - 3$

การแจกแจงแบบที

- การแจกแจงอื่นที่มีลักษณะสมมาตรและมีหางที่อ้วนกว่าการแจกแจงแบบปกติ คือ **การแจกแจงแบบที (Student's t)**
- ถ้า Y มีการแจกแจกแบบทีด้วยองศาเสรี (degree of freedom) v จะมีค่าเฉลี่ยเท่ากับ 0, ค่าความแปรปรวนเท่ากับ $v/v-2$ โดยที่ $v>2$, ค่าความเบ้เท่ากับ 0, และค่าความโด่งเท่ากับ $\frac{6}{(v-4)}-4$ โดยที่ $v>4$

การแจกแจงแบบที

Figure: การแจกแจงแบบที



ตัวประมาณค่า

สมมุติให้เราสุ่มตัวอย่าง $y_1, \ldots, y_T$ ซึ่งมีขนาดเท่ากับ T

- ค่าเฉลี่ยของตัวอย่าง (sample mean) $\hat{\mu}_Y = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} y_t$
- ค่าความแปรปรวนของตัวอย่าง $\hat{\sigma}_Y^2 = \frac{1}{T-1}\sum_{t=1}^{T}(y_t - \hat{\mu}_Y)^2$
- ค่าความเบ้ของตัวอย่าง (sample skewness) $\hat{S}(Y) = \frac{1}{(T-1)\hat{\sigma}_Y^3}\sum_{t=1}^{T}(y_t - \hat{\mu}_Y)^3$
- ค่าความโด่งของตัวอย่าง (sample kurtosis) $\hat{K}(Y) = \frac{1}{(T-1)\hat{\sigma}_Y^4}\sum_{t=1}^{T}(y_t - \hat{\mu}_Y)^4$

การทดสอบสมมุติฐาน: ค่าเฉลี่ย

ภายใต้ข้อสมมุติที่ว่า Y_t มีการแจกแจงแบบปกติ $N(0, \sigma^2)$ แล้ว $\bar{\mu}$ จะมีการแจกแจงแบบปกติ $N(0, \frac{\sigma^2}{T})$

การทดสอบสมมุติฐาน:ค่าความเบ้(skewness)

เมื่อกลุ่มตัวอย่างใหญ่ ค่าความเบ้ของตัวอย่าง $\hat{S}(Y) \sim N(0, 6/T)$

การทดสอบสมมุติฐาน:ค่าความโด่ง(kurtosis)

เมื่อกลุ่มตัวอย่างใหญ่ ค่าความโด่งส่วนเกินของตัวอย่าง $\hat{K}(Y) - 3 \sim N(0, 24/T)$

การทดสอบสมมุติฐาน:การแจกแจงแบบปกติ

- การทดสอบว่าตัวแปรสุ่ม Y_t มีการแจกแจงแบบปกติหรือไม่ โดยหากตัวแปรสุ่มมีการแจกแจงแบบปกติค่าความเบ้และค่าความโด่งส่วนเกินจะต้องเท่ากับศูนย์
- Jarque and Bera (1987) ได้รวมการทดสอบของค่าสถิติทั้งสอบเข้าด้วยกันและเสนอตัวสถิติ

$$JB = \frac{\hat{S}^2(Y)}{6/T} + \frac{[\hat{K}(Y) - 3]^2}{24/T}$$

ซึ่งมีการแจกแจงเมื่อกลุ่มตัวอย่างใหญ่เข้าใกล้ $\chi^2_{df=2}$

- ปฏิเสธสมมุติฐานหลักที่ระดับนัยสำคัญ α ถ้า $JB > \chi^2_{(1-\alpha),df=2}$

การแจกแจงของผลได้ตอบแทน

- เรามักจะพิจารณาผลได้ตอบแทนในรูปของล็อกและมักจะสมมุติให้มีการแจกแจงแบบปกติ
- ปัญหาในกรณีผลได้ตอบแทนอย่างง่ายมีการแจกแจงแบบปกติ $R_t \sim N(0.05, (0.05)^2)$ ซึ่งเราทราบว่าราคาสินทรัพย์ใดๆจะมีค่าติดลบไม่ได้ดังนั้น R_t จะต้องมีค่ามากกว่า -1

การแจกแจงของผลได้ตอบแทน

- เหมาะสมมากกว่าหากสมมุติให้ผลได้ตอบแทนในรูปล็อกมีการแจกแจงแบบปกติ $\ln(1+R_t) = r_t \sim N(0.05, (0.5)^2)$ โดยในกรณีผลได้ตอบแทนในรูปล็อกสามารถจะมีค่าน้อยกว่า -1 ได้ เช่น หาก $r_t = -2$

ฟังก์ชันเส้นตรงของตัวแปรสุ่ม

หากกำหนดให้ X เป็นตัวแปรสุ่มที่มี $E[X] = \mu_X$ และ $Var(X) = \sigma_X^2$ และ a และ b เป็นค่าคงที่ หากเรากำหนดตัวแปรสุ่มใหม่ Y เป็นฟังก์ชันเส้นตรงกับตัวแปรสุ่ม X โดยที่ $Y = a + bX$ แล้ว

- $\mu_Y = E(Y) = a + bE(X) = a + b\mu_X$
- $\sigma_Y^2 = Var(Y) = b^2 Var(X) = b^2\sigma_X^2$

Autocovariance function

ฟังก์ชันที่ใช้ในการสรุปความสัมพันธ์ขึ้นอยู่ต่อกันตามเวลา (temporal dependence) ในข้อมูลอนุกรมเวลาคือ ฟังก์ฟันค่าแปรปรวนร่วมในตนเอง(autocovariance) ซึ่งสามารถคำนวณได้โดย

$$\begin{aligned}\gamma_{k,t} &= Cov(Y_t, Y_{t-k}) = E\left((y_t - E(Y_t))(y_{t-k} - E(Y_{t-k}))\right) \\ &= E(y_t y_{t-k}) - E(Y_t)E(Y_{t-k}) \qquad \text{for} \qquad k = 0, 1, 2, \ldots \end{aligned} \tag{14}$$

โดยสมการดังกล่าวสอดคล้องกับค่าแปรปรวนร่วม (covariance) ระหว่างตัวแปรสุ่มสองตัวใดๆ

Stationary

Definition 1 (Strict stationary)

อนุกรมเวลา Y_t ใดๆจะถูกเรียกว่า **strictly stationary** ถ้าการแจกแจงร่วม (joint distribution) ของ $(y_{t_1}, ..., y_{t_k})$ เหมือนกันกับการแจกแจงร่วมของ $(y_{t_1+t}, ..., y_{t_k+t})$ สำหรับทุกค่าของ t

Definition 2 (weakly stationary หรือ covariance stationary)

ข้อมูลอนุกรมเวลา Y_t ใดๆ จะเรียกว่าเป็น **Weakly stationary** ถ้ามีคุณสมบัติดังนี้

1. $E(Y_t) = \mu$
2. $Var(Y_t) = \sigma^2 < \infty$
3. $\gamma_{k,t} = \gamma_k = Cov(Y_t, Y_{t-k})$ for all k and t

Autocorrelation function; ACF

ฟังก์ชันสหสัมพันธ์ในตัวเองที่ช้ากว่ากัน k คาบเวลา สำหรับอนุกรมที่เป็น weakly stationary จะคำนวณได้จาก

$$\rho_k = \frac{Cov(Y_t, Y_{t-k})}{[Var(Y_t)Var(Y_{t-k})]^{1/2}}, \qquad k = 0, 1, 2, \ldots \tag{15}$$

โดยที่ $\rho_0 = 1$ และ $|\rho_k| \leq 1$ สำหรับทุกค่า k. สำหรับข้อมูลที่เป็น weakly stationary $Var(Y_t) = Var(Y_{t-k}) = \gamma_0$ ดังนั้น

$$\rho_k = \frac{\gamma_k}{\gamma_0}, \qquad k = 0, 1, 2, \ldots \tag{16}$$

เนื่องจากฟังก์ชัน Autocovariance เป็นสมมาตรดังนั้น $\gamma_k = \gamma_{-k}$ และ $\rho_k = \rho_{-k}$

กราฟที่แสดงค่า ACF ในแกนตั้งและค่าล่า k ในแกนนอนเราจะเรียกว่า *โครีโลแกรม (Correlogram)*

sample autocovariance และ autocorrelation

- ค่าแปรปรวนร่วมในตนเองที่ช้ากว่ากัน k คาบเวลาของตัวอย่าง (lag k^{th} sample autocovariance)

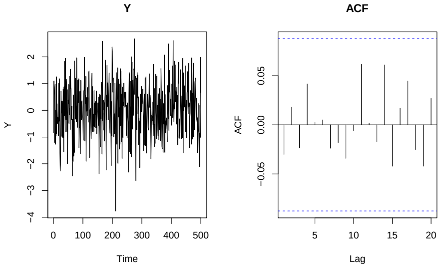
$$\hat{\gamma}_k = \frac{1}{T}\sum_{t=k+1}^{T}(y_t - \bar{Y})(y_{t-k} - \bar{Y}) \tag{17}$$

- สหสัมพันธ์ร่วมในตนเองที่ช้ากว่ากัน k คาบเวลาของตัวอย่าง (lag k^{th} sample autocorrelation) ได้จากสูตรดังต่อไปนี้

$$\hat{\rho}_k = \frac{\hat{\gamma}_k}{\hat{\gamma}_0} \tag{18}$$

โดยที่ $\bar{Y} = \frac{1}{T}\sum_t^T y_t$ คือค่าเฉลี่ยของตัวอย่าง

Figure: ข้อมูลเกาซเซียนไวทนอซและฟังก์ชันสหสัมพันธ์ในตัวเอง



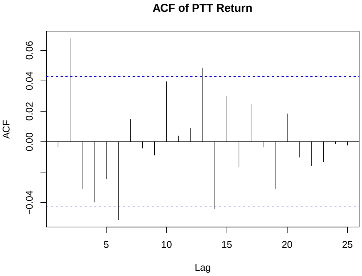
ในโปรแกรม R แผนภาพสำหรับฟังก์ชันสหสัมพันธ์ในตัวเองจะมีเส้นประแสดงความเชื่อมั่น 95% จาก 0 ให้เสมอ โดยที่เส้นประดังกล่าวมีพื้นฐานจากการที่ $y_t \sim iidN(0, \sigma^2)$ ดังนั้น

$$\hat{\rho}_k \overset{a}{\sim} N(0, \frac{1}{T}), \qquad \text{for} \qquad k > 0$$

ตัวอย่างการคำนวณ ACF

พิจารณาผลได้ตอบแทนในรูปล็อกของหุ้น PTT เราสามารถเรียกใช้ฟังก์ชัน `acf` หลังจากเรียก package `library(TSA)`

Figure: ACF ของผลได้ตอบแทนในรูปล็อกของ PTT



การทดสอบพอรทแมนโท (Portmanteau test)

- การทดสอบว่าข้อมูลมีสหสัมพันธ์ในตัวเองในหลายๆคาบ (k) ว่าเท่ากับ 0 พร้อมๆกันหรือไม่ Box and Pierce (1970) ได้เสนอตัวสถิติพอรทแมนโทที่คำนวณดังสูตรต่อไปนี้

$$Q^*(m) = T \sum_{k=1}^{m} \hat{\rho}_k^2 \tag{19}$$

- ในการทดสอบสมมุติฐานหลัก $H_0 : \rho_1 = ... = \rho_m = 0$ กับสมมุติฐานทางเลือก $H_1 : \rho_i \neq 0$ สำหรับบางคาบย้อนหลังใน $i \in 1, 2, ..., m$
- ภายใต้ข้อสมมุติว่า Y_t เป็นลำดับที่แจกแจงเป็นอิสระและเหมือนกัน $Q^*(m) \sim \chi^2_m$

การทดสอบพอรทแมนโท (Portmanteau test)

- Ljung and Box (1978) ได้ปรับปรุงตัวสถิติ $Q^*(m)$ โดยการเพิ่มพลัง(power)ใน การทดสอบเมื่อมีตัวอย่างจำกัดโดยเสนอตัวสถิติ equation Q(m)=T(T+2) $\sum_{k=1}^{m} \frac{\hat{\rho}_k^2}{T-k}$equation
- ตัดสินใจปฏิเสธสมมุติฐานหลัก $H_0 : \rho_1 = ... = \rho_m = 0$ ถ้า $Q(m) > \chi^2_{1-\alpha,m}$ โดยที่ $\chi^2_{1-\alpha,m}$ แสดงถึงควอนไทล์ที่ $100(1-\alpha)$ ของ χ^2_m
- ในทางปฏิบัติการเลือกค่า m จะส่งผลต่อความสามารถในการทดสอบ ดังนั้นงานศึกษาเชิงประจักษ์ส่วนใหญ่มักจะรายงานค่า Ljung-Box $Q(m)$ หลายๆค่าเช่น $m = 5, 10, 20$ หรืองานวิจัยบางงานพบว่าค่า $m = \ln(T)$ ให้ผลการทดสอบที่ดี

ตัวอย่างการทดสอบพอรทแมนโทของผลได้ตอบแทนของ PTT

ฟังก์ชันที่ใช้ในการทดสอบพอรทแมนโทคือ `Box.test` โดยเราต้องกำหนด argument คือ

- ข้อมูลที่ใช้ทดสอบ - *lret*
- จำนวนคาบที่รวมมาทดสอบ (m)
- ชนิดของการทดสอบ (`type="Ljung"`) สำหรับ Ljung and Box (1978)

```
> Box.test(lret, lag=5, type="Ljung")
^^IBox-Ljung test
data:  lret
X-squared = 16.2609, df = 5, p-value = 0.006137
```