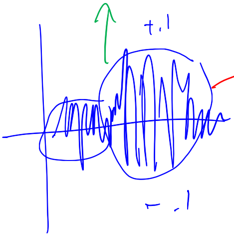
$y_t \to$ log return หัวข้อ 2 อธิบาย $y_t \to$ Conditional Mean (พยากรณ์ Y_t)

EC435

บทที่ 4 แบบจำลอง GARCH



clustering (เกาะกลุ่ม) ⇒ สร้างแพทช์ ลักษณะ ความแปรปรวน → conditional hetero

แปรผันตาม (ความแปรปรวน $t-1$ → ความแปรปรวน t)

AR

เฉลิมพงษ์ คงเจริญ ©2556-61

คณะเศรษฐศาสตร์ มหาวิทยาลัยธรรมศาสตร์

October 17, 2019

Volatility (ความแปรปรวน) ? – วัดอย่างไร

แบบจำลอง GARCH: บทนำ

เป้าหมายที่สำคัญประการหนึ่งของการศึกษาเศรษฐมิติทางการเงินคือการศึกษาความผันผวน (volatility) ของผลได้ตอบแทนของสินทรัพย์

แบบจำลอง GARCH: บทนำ

เป้าหมายที่สำคัญประการหนึ่งของการศึกษาเศรษฐมิติทางการเงินคือการศึกษาความผันผวน (volatility) ของผลได้ตอบแทนของสินทรัพย์

ความผันผวนจะหมายถึงความเบี่ยงเบนมาตรฐานที่มีเงื่อนไข (conditional standard deviation) ของผลได้ตอบแทนของสินทรัพย์

Variance

ใช้ข้อมูลส่วนอดีต
ที่เราทราบ

Conditional on F_t

Info.

แบบจำลอง GARCH: บทนำ

เป้าหมายที่สำคัญประการหนึ่งของการศึกษาเศรษฐมิติทางการเงินคือการศึกษาความผันผวน (volatility) ของผลได้ตอบแทนของสินทรัพย์

ความผันผวนจะหมายถึงความเบี่ยงเบนมาตรฐานที่มีเงื่อนไข (conditional standard deviation) ของผลได้ตอบแทนของสินทรัพย์

ความผันผวนที่คำนวณได้ถูกนำไปใช้ประยุกต์ในการคำนวณ Value-at-Risk(VaR) ของการจัดการความเสี่ยง, การจัดสรรการลงทุนภายใต้วิธีการ mean-variance และการเพิ่มประสิทธิภาพในการทำนาย

y_t

ความผันผวน (volatility) — เรวัดความผันผวน

เราไม่สามารถสังเกตความผันผวนของสินทรัพย์เช่นหลักทรัพย์ได้เหมือนกับการสังเกตเห็นราคาทรัพย์สินหรือการคำนวณผลตอบแทนได้จากราคาทรัพย์สิน

ความผันผวน (volatility)

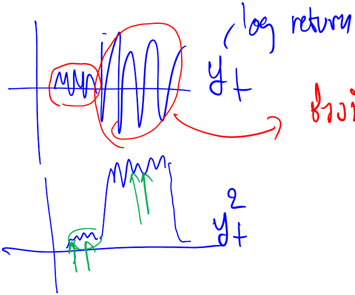
เราไม่สามารถสังเกตความผันผวนของสินทรัพย์เช่นหลักทรัพย์ได้เหมือนกับการสังเกตเห็นราคาทรัพย์สินหรือการคำนวณผลตอบแทนได้จากราคาทรัพย์สิน

ตัวอย่างการคำนวณความผันผวนในอดีต กำหนดให้ P_t เป็นราคาหลักทรัพย์ และ $y_t = \Delta \ln(P_t)$ เป็นผลได้ตอบแทน $y_t^2, |y_t|, |y_t|^\delta$ มีสหสัมพันธ์ค่อนข้างสูงและเรามักใช้ค่าดังกล่าวเป็นตัวแทนของความผันผวน

log return

1, 2, ...

ทำการสร้างแพทเทิร์น อธิบาย ผันผวน



ช่วงที่ ผันผวนต่ำ ก็จะต่ำติดๆ กัน , ผันผวนสูงก็จะสูง ติดๆ กัน

Volatility Clustering

เกาะกลุ่ม

ความผันผวน (volatility)

เราไม่สามารถสังเกตความผันผวนของสินทรัพย์เช่นหลักทรัพย์ได้เหมือนกับการสังเกตเห็นราคาทรัพย์สินหรือการคำนวณผลตอบแทนได้จากราคาทรัพย์สิน

ตัวอย่างการคำนวณความผันผวนในอดีต กำหนดให้ P_t เป็นราคาหลักทรัพย์ และ $y_t = \Delta \ln(P_t)$ เป็นผลได้ตอบแทน $y_t^2, |y_t|, |y_t|^\delta$ มีสหสัมพันธ์ค่อนข้างสูง และเรามักใช้ค่าดังกล่าวเป็นตัวแทนของความผันผวน

ในปัจจุบันมีการคำนวณความผันผวนด้วยวิธีการอื่นๆเช่น Realized volatility และ Implied volatility ด้วย Black-Scholes

ผันผวนรายวัน ← รายวินาที

variance

สร้างแบบจำลอง อธิบายความผันผวน

อดีต

กำลังสอง 2

สร้าง ⇒ ความผันผวน$_t$ กับ ความผันผวน$_{t-1}$ จะต้องสัมพันธ์กัน

การทดสอบ ARCH effect

กำหนดให้ $\varepsilon_t = y_t - \mu_t$ เป็น residuals ของ mean equation อาจจะเป็นแบบจำลอง $AR(p)$ หรือ $ARIMA(p,d,q)$

เป็น log return

เราอยากจะพิจารณาความผันผวน เป็นส่วนหนึ่งของแบบจำลองที่อธิบาย y_t

เช่น y_t – อธิบายได้ด้วย AR(1)

$$y_t = \underbrace{\phi y_{t-1}}_{\text{อธิบายได้ด้วยแบบจำลอง}} + \underbrace{\varepsilon_t}_{\text{แบบจำลองอธิบายไม่ได้}}$$

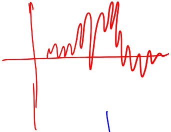
— mean equation อธิบาย, ค่าเฉลี่ย

- $\boxed{\varepsilon_t}$ เพราะฯ ไม่ สังเกต

$(y_t - \phi y_{t-1})$

$E(y_t | F_{t-1})$

Conditional mean ของ y_t



⇒ สร้างความผันผวนของ ε_t

$\hat{=}\ \varepsilon_t^2 = (y_t - E(y_t|F_{t-1}))^2$

ความผันผวนของ y_t

เราสร้างแบบจำลองอธิบายความผันผวนของ y_t

⇒ พิจารณาว่า ε_t^2 กับ ε_{t-1}^2 สัมพันธ์? ε_t^2 กับ ε_{t-j}^2

ACF ของ ε_t^2

การทดสอบ ARCH effect

การทดสอบว่าความผันผวน มีความ สัมพันธ์กัน?

กำหนดให้ $\varepsilon_t = y_t - \mu_t$ เป็น residuals ของ mean equation อาจจะเป็นแบบจำลอง $AR(p)$ หรือ $ARIMA(p,d,q)$

AR

Var ไม่คงที่

เราจะทดสอบว่าข้อมูลของเรามีลักษณะ conditional heteroskedasticity หรือไม่ (**การทดสอบ ARCH effect**)

ความผันผวน

ขึ้นอยู่กับ ข้อมูล $t-1, \ldots$

ARCH

ตัววัดความผันผวน เช่น $r_t \Rightarrow r_t^2$ ใช้วัดความผันผวน

(variance) − y_t

$E(y_t - E(y_t))^2$

$t-1, t$ สัมพันธ์

$E(r)=0$

แทนด้วย $E(y_t)$ [unconditional mean]

พยากรณ์ด้วย Conditional Mean $E(y_t \mid F_{t-1})$

ถ้าเรามี y_t → วัดความผันผวน

$(y_t - \text{ค่าเฉลี่ย})^2$

μ_t แบบจำลอง เช่น AR, MA, ARMA เช่น $y_t = \phi_0 + \phi_1 y_{t-1} + \varepsilon_t$

การทดสอบ ARCH effect

$E(y_t | \underbrace{y_{t-1}}_{F_{t-1}}) = \phi_0 + \phi_1 y_{t-1} + \cancel{E(\varepsilon_t | F_{t-1})}_{=0}$

$= \phi_0 + \phi_1 y_{t-1}$

ตามแบบจำลอง

กำหนดให้ $\varepsilon_t = y_t - \mu_t$ เป็น residuals ของ mean equation อาจจะเป็นแบบจำลอง $AR(p)$ หรือ $ARIMA(p,d,q)$

เราจะทดสอบว่าข้อมูลของเรามีลักษณะ conditional heteroskedasticity หรือไม่ (**การทดสอบ ARCH effect**)

วิธีแรก การทดสอบ Ljung-Box $Q(m)$ ค่ายกกำลังสองของ residuals (ε_t^2) โดยเราใช้ ε_t^2 เป็นตัวแทน conditional heteroskedasticity ดังนั้นหากค่าความแปรปรวนขึ้นอยู่ต่อกันจะต้องมีสหสัมพันธ์ระหว่างกัน $\Rightarrow \varepsilon_t^2, \varepsilon_{t-1}^2, \varepsilon_{t-2}^2 \Rightarrow$ ACF

ผันผวน

เราจะตั้งสมมุติฐานหลักที่ว่าค่าล่า m คาบของค่ายกกำลังสองของ residuals ไม่มีสหสัมพันธ์ระหว่างกัน แสดงว่า ค่ายกกำลังสองของ residuals ไม่มี ARCH effect

$Corr(\varepsilon_t^2, \varepsilon_{t-1}^2)$ $Corr(\varepsilon_t^2, \varepsilon_{t-m}^2)$

$H_0: \rho_1 = \dots = \rho_m = 0$

$LB\ Q(m) \sim \chi^2_{df=m}$

ถ้า $Q(m) > C.V.$ เราปฏิเสธ H_0

ความผันผวนมีความสัมพันธ์ (มี ARCH Effect)

การทดสอบ ARCH effect

วิธีสอง การทดสอบ Lagrange Multiplier (LM) โดยเราใช้ ε_t^2 เป็นตัวแทนของค่าความแปรปรวน ซึ่งหากเราต้องการทดสอบว่าค่าแปรปรวนขึ้นกับค่าแปรปรวนในอดีตหรือไม่ สามารถประมาณค่าสมการ

$$\varepsilon_t^2 = a_0 + a_1\varepsilon_{t-1}^2 + \ldots + a_m\varepsilon_{t-m}^2 + e_t \qquad (4.1)$$

และพิจารณาว่าค่าสัมประสิทธิ์มีนัยสำคัญเชิงสถิติต่างจากศูนย์หรือไม่ โดยสมมุติฐานหลักคือ $a_1 = a_2 = \ldots = a_m = 0$ หรือไม่มี ARCH effect

$H_0: a_1 = a_2 = \ldots a_m = 0$ [ARCH effect]

$H_1: \exists\ a_i \neq 0 \quad i = 1, \ldots, m$

$\Rightarrow$ overall significance [F-test]

[LM test]

การทดสอบ ARCH effect

วิธีสอง การทดสอบ Lagrange Multiplier (LM) โดยเราใช้ ε_t^2 เป็นตัวแทนของค่าความแปรปรวน ซึ่งหากเราต้องการทดสอบว่าค่าแปรปรวนขึ้นกับค่าแปรปรวนในอดีตหรือไม่ สามารถประมาณค่าสมการ

$$\varepsilon_t^2 = a_0 + a_1\varepsilon_{t-1}^2 + ... + a_m\varepsilon_{t-m}^2 + e_t \qquad (4.1)$$

และพิจารณาว่าค่าสัมประสิทธิ์มีนัยสำคัญเชิงสถิติต่างจากศูนย์หรือไม่ โดยสมมุติฐานหลักคือ $a_1 = a_2 = ... = a_m = 0$ หรือไม่มี ARCH effect

เราสามารถทำการทดสอบได้โดยการประมาณค่าสมการ (4.1) จะได้ค่า R^2 แล้วไปคำนวณค่า $LM = TR^2$ โดยที่ T คือจำนวนตัวอย่าง และ $LM \sim \chi^2_{df=m}$ เราจะปฏิเสธสมมุติฐานหลักถ้า $LM > \chi^2_{df=m}(1-\alpha)$ [CV] ⇒ ARCH effect

ในทางปฏิบัติ พิจารณา Y_t ⇒ สร้างแบบจำลองอธิบาย Cond. Mean

ตรวจว่าแบบจำลอง

1) เพียงพอในการอธิบาย Y_t [ใช้ LB Q test กับ $\hat{\varepsilon}_t$]
2) $\hat{\varepsilon}_t$ มีความผันผวน ⇒ ARCH effect [LB Q test กับ $\hat{\varepsilon}_t^2$]

ตัวอย่าง 4.1

Monthly lret vs SET

ในหัวข้อนี้เราจะพิจารณาผลได้ตอบแทนรายเดือนในรูปล็อกของการลงทุนใน SET ซึ่งอยู่ในไฟล์ mset.csv

```
> mset <-read.csv("mset.csv",header=F)
> head(mset)
> lret_mset<-diff(log(mset$V1))
> library(forecast)
> auto.arima(lret_mset)
Series: lret_mset
ARIMA(2,0,2) with zero mean

Coefficients:
         ar1      ar2      ma1     ma2
      1.1154  -0.9020  -1.0542  0.9141
s.e.  0.0511   0.0754   0.0646  0.0740

sigma^2 estimated as 0.006689:  log likelihood=489.01
AIC=-968.03   AICc=-967.89   BIC=-947.47
> model1<-arima(lret_mset, order=c(2,0,2))
```

— log return

→ Model Selection

⇒ ARMA(2,2)

ARMA(2,2)

เก็บไว้

ซึ่ง $\hat{\varepsilon}_t$ → model1$residuals

1) เพียงพอ อธิบาย cond mean Box.test(model1$residuals)

2) ทดสอบ ARCH Effect.

ตัวอย่าง 4.1

แต่หากเราพิจารณา Ljung-Box test ของค่ากำลังของ residuals กำลังสอง หรือทดสอบ LM ARCH effect จะเห็นได้ว่ายังมีผลของ ARCH เหลืออยู่ใน residuals โดยในการทดสอบ LM ARCH effect จะต้องใช้คำสั่ง `ArchTest(series, q)` จาก `library(FinTS)` โดยต้องระบุ series ที่ต้องการทดสอบและค่าล่า (q)

LB Q test กับ $\hat{\varepsilon}_t^2$

(1) m=12

```
> acf(model1$residuals^2)
> Box.test(model1$residuals^2,lag=12, type="Ljung")

^^IBox-Ljung test

data:  model1$residuals^2
X-squared = 64.5086, df = 12, p-value = 3.36e-09
> library(FinTS)
> ArchTest(model1$residuals)

^^IARCH LM-test; Null hypothesis: no ARCH effects

data:  model1$residuals
Chi-squared = 32.4235, df = 12, p-value = 0.00119
```

(2) LM test $\hat{\varepsilon}_t$

$\hat{\varepsilon}_t^2$

$Corr(\hat{\varepsilon}_t^2, \hat{\varepsilon}_{t-1}^2)$

$3.36 \times 10^{-0.9}$ < 0.05 (α)

เราปฏิเสธ $H_0: \rho_1 = \cdots = \rho_{12} = 0$

แสดงว่า ความผันผวนมีความสัมพันธ์ระหว่างกัน หรือมี ARCH Effect

< α(0.05)

ปฏิเสธ H_0 : $a_1 = \cdots = a_{12} = 0$

แสดงว่า ความผันผวนมีความสัมพันธ์ (ARCH Effect)

log return ของ SET มีความผันผวนที่มีความสัมพันธ์

สร้างแบบจำลองอธิบายความผันผวน

แบบจำลอง ARCH

ประโยชน์ ของ แบบจำลอง
1) พยากรณ์ ความผันผวน
2) ช่วยให้เราพยากรณ์ช่วงความเชื่อมั่น ของ Y ได้แม่นยำขึ้น.

แบบจำลองอนุกรมเวลาที่เราสร้างขึ้นมาในบทที่ผ่านมา เราพยายามที่จะอธิบาย conditional mean $E(Y_t | F_{t-1})$

แบบจำลอง ARCH

แบบจำลองอนุกรมเวลาที่เราสร้างขึ้นมาในบทที่ผ่านมา เราพยายามที่จะอธิบาย conditional mean

ตัวอย่างเช่น กำหนดให้ y_t อนุกรมเวลานิ่ง เช่น ผลได้ตอบแทน แล้วกำหนดให้ y_t สามารถอธิบายได้ด้วยแบบจำลอง

AR, MA, ARMA

shock

$$y_t = \mu_t + \boxed{\varepsilon_t} \tag{4.2}$$

Cond. mean

โดยที่ μ_t เป็นส่วนอธิบายค่าเฉลี่ย (mean equation) และ ε_t เป็น iid ที่มีค่าเฉลี่ยเท่ากับศูนย์

เพราะเพิ่มเติม ส่วนที่อธิบาย ความผันผวน ⇒ Conditional Variance

แบบจำลอง ARCH

แบบจำลองอนุกรมเวลาที่เราสร้างขึ้นมาในบทที่ผ่านมา เราพยายามที่จะอธิบาย conditional mean

ตัวอย่างเช่น กำหนดให้ y_t อนุกรมเวลานิ่ง เช่น ผลได้ตอบแทน แล้วกำหนดให้ y_t สามารถอธิบายได้ด้วยแบบจำลอง

$$y_t = \mu_t + \varepsilon_t \qquad (4.2)$$

โดยที่ μ_t เป็นส่วนอธิบายค่าเฉลี่ย (mean equation) และ ε_t เป็น iid ที่มีค่าเฉลี่ยเท่ากับศูนย์

เราจะสมมุติให้ความแปรปรวนที่ขึ้นอยู่กับข้อมูล ณ คาบที่ $t-1$

Cond. var.

$Var_{t-1} = \sigma_t^2$ เขียนเป็นสมการต่อไปนี้ AR ⇐ จากแนวคิด ความแปรปรวน$_t$ ขึ้นกับ ความแปรปรวน$_{t-1}$ ...

เป็นสัญลักษณ์

ขึ้นอยู่กับ Info ถึง t-1

$$\sigma_t^2 = \omega + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2 + \ldots + \alpha_p \varepsilon_{t-p}^2 \qquad (4.3)$$

Regression

แบบจำลอง ARCH

$E[\varepsilon_t - E(\varepsilon_t) | F_{t-1}]^2$

เนื่องจาก ε_t มีค่าเฉลี่ยเท่ากับศูนย์ $Var_{t-1}(\varepsilon_t) = E_{t-1}(\varepsilon_t^2) = \sigma_t^2$ ดังนั้นเรา สามารถเขียนสมการ (4.3) ได้เป็น

$E(\varepsilon_t^2 | F_{t-1})$

$$\varepsilon_t^2 = \omega + \alpha_1\varepsilon_{t-1}^2 + \ldots + \alpha_p\varepsilon_{t-p}^2 + u_t \qquad (4.4)$$

โดยที่ $u_t = \varepsilon_t^2 - \overbrace{E_{t-1}(\varepsilon_t^2)}^{\sigma_t^2}$ ซึ่งเป็นกระบวนการไวท์นอซที่มีค่าเฉลี่ยเท่ากับศูนย์ สมการ (4.2)-(4.4) รวมกันเรียกว่า autoregressive conditional heteroskedasticity (ARCH) หรือ แบบจำลอง $ARCH(p)$

แบบจำลอง ARCH

เนื่องจาก ε_t มีค่าเฉลี่ยเท่ากับศูนย์ $Var_{t-1}(\varepsilon_t) = E_{t-1}(\varepsilon_t^2) = \sigma_t^2$ ดังนั้นเราสามารถเขียนสมการ (4.3) ได้เป็น

$$\varepsilon_t^2 = \omega + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2 + ... + \alpha_p \varepsilon_{t-p}^2 + u_t \qquad (4.4)$$

โดยที่ $u_t = \varepsilon_t^2 - E_{t-1}(\varepsilon_t^2)$ ซึ่งเป็นกระบวนการไวท์นอซที่มีค่าเฉลี่ยเท่ากับศูนย์ สมการ (4.2)-(4.4) รวมกันเรียกว่า autoregressive conditional heteroskedasticity (ARCH) หรือ แบบจำลอง $ARCH(p)$

รูปแบบของ $ARCH(p)$ อีกแบบจำลองสามารถแสดงได้ดังนี้

เช่น log return

AR, MA, ARMA

Cond. mean — $y_t = \mu_t + \varepsilon_t$

$$\boxed{\varepsilon_t = z_t \sigma_t}$$

เชื่อมระหว่าง cond mean กับ cond var.

Cond variance — $\sigma_t^2 = \omega + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2 + ... + \alpha_p \varepsilon_{t-p}^2 \qquad (4.5)$

เป็นอิสระและเหมือนกัน (independent & indentically) dist.

โดยที่ z_t เป็นตัวแปรสุ่ม iid (0,1) ตัวอย่างเช่น N(0,1)

ค่าเฉลี่ย - var

คุณสมบัติของ ARCH(1)

สมมุติว่าเราพิจารณาแบบจำลอง $ARCH(1)$ โดยที่

ง่าย

ไม่มี conditional mean

$$\boxed{y_t = \varepsilon_t} \qquad (4.6) \rightarrow \mu_t = 0$$

$$\varepsilon_t = z_t \sigma_t \qquad (4.7)$$

ARCH(1) — $$\sigma_t^2 = \omega + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2 \qquad (4.8)$$

omega

เดิม

$\varepsilon_t \sim WN(0, \sigma_\varepsilon^2)$

ใหม่ เขาไม่ได้ ตาม

สมมุติ ε_t เป็น WN

แต่

$\varepsilon_t = z_t \cdot \sigma_t$

$z_t \sim iid(0,1)$

$E(\varepsilon_t)$ — unconditional mean

$Var(\varepsilon_t)$ — unconditional variance.

คุณสมบัติของ ARCH(1)

$$\varepsilon_t = Z_t \cdot \sigma_t$$
$$\sigma_t^2 = \omega + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2$$

unconditional mean ของ ε_t คำนวณได้ดังนี้

$t \mid t-1$

$$E(\varepsilon_t) = E(Z_t \sigma_t) \neq E(Z_t)E(\sigma_t)$$

$$= E\left[E(Z_t \sigma_t \mid F_{t-1})\right]$$

unconditional mean (ε_t) = unconditional mean ของ conditional mean

$\omega + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2$ ทราบค่าใน $t-1$

$$= E\left[\sigma_t \underbrace{E(Z_t \mid F_{t-1})}_{=0}\right]$$

0 เพราะจาก $Z_t \sim iid(0,1)$

$$E(\varepsilon_t) = E\left[\sigma_t \cdot 0\right] = E(0) = \boxed{0 = E(\varepsilon_t)}$$

เพราะใช้ Law of Iterated Expectation (L.I.E)

X ส่วนสูง < ชาย, หญิง

$X_1, \ldots, X_N$

$E(X) = \text{สัดส่วน}_{ช} E(X \mid ช) + \text{สัดส่วน}_{ญ} E(X \mid ญ)$

$E(X) = \underbrace{E\left[\underbrace{E(X \mid \text{เพศ})}_{\text{cond mean}}\right]}_{\text{uncond mean}}$

คุณสมบัติของ ARCH(1)

unconditional mean ของ ε_t คำนวณได้ดังนี้

$$E(\varepsilon_t) =$$

unconditional variance ของ ε_t คำนวณได้โดย

$$Var(\varepsilon_t) = E[\varepsilon_t - \underbrace{E(\varepsilon_t)}_{0}]^2 = E[\varepsilon_t^2] = E[z_t^2\sigma_t^2]$$

$$\overset{LIE}{=} E[E(z_t^2\boxed{\sigma_t^2}|F_{t-1})]$$

$$\sigma_t^2 = \omega + \alpha_1\varepsilon_{t-1}^2$$

$$E(\varepsilon_t^2) = E[\sigma_t^2 \underbrace{E(z_t^2|F_{t-1})}_{E(z_t^2)=Var(z_t)=1}] = E[\sigma_t^2 \cdot 1] = E[\omega + \alpha_1\varepsilon_{t-1}^2]$$

$$= \omega + \alpha_1 E(\varepsilon_{t-1}^2)$$

สมมุติ $E(\varepsilon_t^2) = E(\varepsilon_{t-1}^2)$ [stationary]

คุณสมบัติของ ARCH(1)

$(1-\alpha_1) E(\varepsilon_t^2) = \omega$

unconditional variance ของ ε_t $\boxed{E(\varepsilon_t^2) = \frac{\omega}{1-\alpha_1}}$

หากต้องการให้ ε_t เป็นกระบวนการนิ่ง $Var(\varepsilon_t) = E(\varepsilon_t^2) = E(\varepsilon_{t-1}^2)$ ดังนั้น $Var(\varepsilon_t) = \frac{\omega}{1-\alpha_1}$ และเงื่อนไขที่จะทำให้ค่าความแปรปรวนเป็นบวกคือ $0 \leq \alpha_1 < 1$

~~โมเมนต์ที่สี่เท่ากับ~~ $\cancel{E(\varepsilon^4) = 3\frac{\omega(1+\alpha_1)}{(1-\alpha_1)(1-3\alpha_1^2)}}$

Conditional mean ของ $\varepsilon_t \Rightarrow E(\varepsilon_t | F_{t-1}) = 0$

Conditional variance ของ $\varepsilon_t \Rightarrow E(\varepsilon_t^2 | F_{t-1}) = \sigma_t^2 = \omega + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2$

Conditional variance ของ $y_t = \sigma_t^2 = \omega + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2$

คุณสมบัติของ ARCH(1)

หากต้องการให้ ε_t เป็นกระบวนการนิ่ง $Var(\varepsilon_t) = E(\varepsilon_t^2) = E(\varepsilon_{t-1}^2)$ ดังนั้น $Var(\varepsilon_t) = \frac{\omega}{1-\alpha_1}$ และเงื่อนไขที่จะทำให้ค่าความแปรปรวนเป็นบวกคือ $0 \leq \alpha_1 < 1$

โมเมนต์ที่สี่เท่ากับ $E(\varepsilon^4) = 3\frac{\omega(1+\alpha_1)}{(1-\alpha_1)(1-3\alpha_1^2)}$

ดังนั้นเงื่อนไขที่ทำให้โมเมนต์ที่สี่มีค่าจำกัดคือ $0 \leq \alpha_1 < 1/3$ และค่าความโด่งเท่ากับ

$$\kappa = \frac{E(\varepsilon_t^4)}{[Var(\varepsilon_t)]^2} = 3\frac{\omega(1+\alpha_1)}{(1-\alpha_1)(1-3\alpha_1^2)} \times \frac{(1-\alpha_1)^2}{\omega^2} = 3\frac{1-\alpha_1^2}{1-3\alpha_1^2}$$

การประมาณค่าแบบจำลอง $ARCH(1)$ ⇒ Maximum Likelihood Est. (MLE)

การประมาณค่าพารามิเตอร์ในแบบจำลอง $ARCH(1)$ สามารถดำเนินการได้ด้วย conditional maximum likelihood หากสมมุติให้ z_t มีการแจกแจงแบบปกติมาตรฐาน จากสมการ (4.7) เราจะได้ $\varepsilon_t \sim N(0, \sigma_t^2)$ และ

กำหนดรูปแบบ การแจกแจง

$$\ln L(\omega, \alpha_1; \mathbf{y}) = -\frac{1}{2}\sum_{t=1}^{T}\ln(2\pi) - \frac{1}{2}\sum_{t=1}^{T}\ln(\sigma_t^2) - \sum_{t=1}^{T}\left(\frac{y_t^2}{2\sigma_t^2}\right)$$

$z_t \sim iid(0,1)$

⇓

$\varepsilon_t \sim iid(0,\sigma_t^2)$

$= z_t \sigma_t$

โดยที่ค่า ε_0 และ σ_0^2 เท่ากับค่าเฉลี่ย อย่างไรก็ตามเราสามารถกำหนดการแจกแจงรูปแบบอื่นที่มีค่าเฉลี่ยเท่ากับศูนย์และค่าความแปรปรวนเท่ากับหนึ่ง เช่น standardized student's t distribution

ARCH ถูกนำไป apply กับ ข้อมูลการเงิน

ARCH(q)

⇑ สูง

กำหนด dist.

1) Normal dist $z_t \sim N(0,1)$

[สมมติหาง K=3]

→ 2) t-distribution

[หางอ้วนกว่า Normal - fat tail]

แบบจำลอง GARCH

Engle (1982)

ถ้าเราทดสอบ ARCH effect แล้วพบว่าอนุกรมเวลามีผลของ ARCH เราสามารถใช้แบบจำลอง $ARCH(p)$ เพื่อประมาณค่าความผันผวนที่เปลี่ยนแปลงตามเวลา

อย่างไรก็ตามในทางปฏิบัติ ค่าล่า p ที่เหมาะสมสำหรับแบบจำลอง $ARCH(p)$ ค่อนข้างที่จะยาว

$\Downarrow$ order

AIC, BIC ในการเลือก

$\Rightarrow$ ค่าพารามิเตอร์ $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p)$ จำนวนมาก $\Rightarrow$ กระทบ se ของ α_1

เราต้องการแบบจำลองที่ตัวพารามิเตอร์น้อย

แบบจำลอง GARCH

ถ้าเราทดสอบ ARCH effect แล้วพบว่าอนุกรมเวลามีผลของ ARCH เราสามารถใช้แบบจำลอง $ARCH(p)$ เพื่อประมาณค่าความผันผวนที่เปลี่ยนแปลงตามเวลา

อย่างไรก็ตามในทางปฏิบัติ ค่าล่า p ที่เหมาะสมสำหรับแบบจำลอง $ARCH(p)$ ค่อนข้างที่จะยาว ใช้แนวคิด ARMA

Bollerslev (1986) ได้เสนอรูปแบบของสมการความแปรปรวน

Conditional var.

$$\sigma_t^2 = \omega + \underbrace{\sum_{i=1}^{p} \alpha_i \varepsilon_{t-i}^2}_{ARCH(p)} + \sum_{j=1}^{\boxed{q}} \beta_j \sigma_{t-j}^2 \qquad (4.12)$$

lag ของ σ_t^2

$\omega > 0$

โดยที่มีเงื่อนไข α_i $(i = 1, ..., p)$ และ β_j $(j = 1, ..., q)$ มีค่าเป็นบวก สมการที่ (4.2) และ (4.12) รวมกันเรียกว่าแบบจำลอง Generalized ARCH หรือ $GARCH(p, q)$

order ของ ε_t^2 order ของ σ_t^2

ARMA representation of GARCH

แบบจำลอง *GARCH* สามารถเขียนให้อยู่ในรูปของแบบจำลอง *ARMA* ของค่า residuals ยกกำลังสอง ตัวอย่างเช่นในแบบจำลอง $\boxed{GARCH(1,1)}$

GARCH(1,1) $\rightarrow$
$$\underline{\sigma_t^2 = \omega + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2 + \beta_1 \sigma_{t-1}^2} \qquad (4.13)$$

$\varepsilon_t = z_t \sigma_t$, $z_t \sim iid(0,1)$

Conditional mean $y_t = \varepsilon_t$

Unconditional mean ของ $\varepsilon_t = 0$

Conditional mean ของ $\varepsilon_t = 0$

Conditional variance ของ $\varepsilon_t = \sigma_t^2 = \omega + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2 + \beta_1 \sigma_{t-1}^2$

Unconditional variance ของ $\varepsilon_t = \underbrace{Var(\varepsilon_t)}_{>0} = \dfrac{\omega^{>0}}{\boxed{1-\alpha_1-\beta_1}} > 0$

$1-\alpha_1-\beta_1 > 0$

$\boxed{\alpha_1 + \beta_1 < 1}$

- *GARCH*(1, 1) จะเป็น<u>อนุกรมนิ่ง</u>ถ้า $\alpha_1 + \beta_1 < 1$

ARMA representation of GARCH

- หากเราสมมุติให้แบบจำลองเป็นอนุกรมนิ่ง unconditional variance)ของ ε_t จะเท่ากับ

ARMA representation of GARCH

ในกรณี $GARCH(p, q)$

- เราสามารถเขียนแบบจำลองดังกล่าวให้อยู่ในรูป $ARMA(\max(p, q), q)$ ของ residuals ยกกำลังสอง
- แบบจำลองจะเป็นอนุกรมนิ่งถ้า $\boxed{\sum_{i=1}^{p} \alpha_i + \sum_{j=1}^{q} \beta_j < 1}$
- ความแปรปรวนที่ไม่มีเงื่อนไข (unconditional variance)ของ ε_t จะเท่ากับ

$$Var(\varepsilon_t) = \frac{\omega}{1 - \left(\sum_{i=1}^{p} \alpha_i + \sum_{j=1}^{q} \beta_j\right)}$$

คุณลักษณะเฉพาะของแบบจำลอง GARCH (p, q)

ในงานศึกษาส่วนใหญ่ พบว่า GARCH(1,1) มีค่า: เพียงพอ

ในงานเชิงประจักษ์นักวิจัยได้พบคุณลักษณะหลายประการของความผันผวนของข้อมูลทางการเงิน

$\sigma_t^2 = \omega + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2 + \beta_1 \sigma_{t-1}^2$

เลือก AIC, BIC

1. volatility clustering ในแบบจำลอง *GARCH*(1, 1) ค่าที่ประมาณได้จากข้อมูลรายสัปดาห์และรายวันของ β_1 จะมีค่าประมาณ 0.9
2. หางอ้วน(fat tails) Bollerslev แสดงให้เห็นว่าภายใต้เงื่อนไขบางประการเขาสามารถแสดงให้เห็นว่า *GARCH*(1, 1) จะให้ค่าเคอร์โทซิสที่มากกว่า 3

   สมมติจากแจกแจงที่ไม่ใช่ Normal
3. ความผันผวนย้อนกลับมาที่ดุลยภาพ(volatility mean reversion) แม้ว่าความผันผวนจะสูงขึ้นในบางช่วงแต่สุดท้ายแล้วจะย้อนกลับไปยังดุลยภาพระยะยาว

   unconditional variance เช่น AR(1) - $\boxed{var(y_t) = \frac{\sigma^2}{1-\phi_1^2}}$

การประมาณค่าแบบจำลอง GARCH ⇒ MLE

ARMA(p,q) → AIC, BIC

แบบจำลอง $GARCH(p,q)$ สามารถเขียนในรูปแบบ

ARMA(p,q)

Conditional mean

$$y_t = \mu_t + \varepsilon_t \qquad (4.15)$$

Cond. var

$$\sigma_t^2 = \omega + \sum_{i=1}^{p} \alpha_i \varepsilon_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^{q} \beta_j \sigma_{t-j}^2 \qquad (4.16)$$

$\varepsilon_t = z_t \sigma_t$

กำหนดรูปแบบการแจกแจงของ z_t เช่น Normal, t-dist.

⇒ $\hat{\omega}, \hat{\alpha}, \hat{\beta}, \hat{\phi}, \hat{\theta}$

หากเราสมมุติให้ $\varepsilon_t \sim N$ เราสามารถเขียน log-likelihood function ของแบบจำลอง $GARCH(p,q)$ ได้

$$\log L = -\frac{1}{2}\sum_{t=1}^{T} \ln(2\pi) - \frac{1}{2}\sum_{t=1}^{T} \ln(\sigma_t^2) - \sum_{t=1}^{T}\left(\frac{y_t^2}{2\sigma_t^2}\right) \qquad (4.17)$$

โดยที่หลังจากที่เราประมาณค่าพารามิเตอร์ดังกล่าวแล้ว เราจะได้ค่า σ_t สำหรับ $t = 1, \ldots, T$

การตรวจสอบหลังจากการประมาณค่า GARCH

ARMA(p,q)

เพียงพอ?
- Cond mean
- Cond variance

① เพียงพอ < Condi mean ⇒ z_t เป็น W.N. (cond mean เพียงพอ)
cond variance ⇒ z_t^2 เป็น WN (เพียงพอ→ไม่มี ARCH effect เหลือ)

GARCH(P,Q)

- ถ้าแบบจำลองที่เราสร้างขึ้นสามารถอธิบายความสัมพันธ์ระหว่างอนุกรมกับตัวเองในอดีตด้วย conditional mean และ conditional variance ดังนั้นจะต้องไม่เหลือค่าสหสัมพันธ์ในตัวเองของ standardized residuals และ squared standardized residuals (L-B test)
- เราสามารถทดสอบ LM ARCH ของ residuals เพื่อดู ARCH effect ก็ได้

② การแจกแจง $Z_t \sim N(0,1)$

- ในแบบจำลอง *GARCH* เราสมมุติให้ค่าคาดเคลื่อนมีการแจกแจงแบบปกติดังนั้นหากแบบจำลองถูกกำหนดอย่างถูกต้อง standardized residuals จะต้องมีการแจกแจกแบบปกติ โดยในที่นี้เราจะทำการทดสอบการแจกแจงปกติ

เช่น JB test

เดิม กรณีไม่ GARCH
เราสมมุติ $\varepsilon_t \sim WN(0,\sigma^2)$
ทดสอบ $\hat{\varepsilon}_t$

กรณี GARCH $Z_t \sim WN(0,1)$ (i.i.d) Normal

$$\varepsilon_t = z_t\sigma_t \Rightarrow z_t = \boxed{\frac{\varepsilon_t}{\sigma_t}} \sim WN(0,1)$$

ทดสอบ $\hat{z}_t = \dfrac{\hat{\varepsilon}_t}{\hat{\sigma}_t}$ ⇒ standardized residuals

ตัวอย่างที่ 4.2

log return SET รายเดือน

พบว่ามี ARCH effect

ต่อจากตัวอย่าง (4.1) เราจะประมาณค่าสมการค่าเฉลี่ยด้วย $ARMA(2,2)$ และสมการค่าความแปรปรวนที่มีเงื่อนไขด้วย $GARCH(1,1)$ เราจะใช้คำสั่ง ugarchfit ใน package library(rugarch)

เพิ่มสมการ cond. var.

ต.ประมาณค่า ARMA(2,2)-GARCH(1,1)

P Q

```
> library(rugarch)
> spec.garch11 <- ugarchspec(variance.model=list(model="sGARCH", garchOrder=c(1,1)),
+mean.model=list(armaOrder=c(2,2), include.mean=TRUE),distribution.model="norm")
> fit.garch11<-ugarchfit(spec=spec.garch11, data = ret)
```

เก็บผลการประมาณค่า.

ระบุรูปแบบ

กำหนดไว้

ชื่อตัวแปรในข้อมูล

Normal

ตัวอย่างที่ 4.2

```
> fit.garch11<-ugarchfit(spec=spec.garch11, data = ret)
> show(fit.garch11)
-----------------------------------
         Estimate  Std. Error  t value Pr(>|t|)
mu       0.005168    0.003323   1.5552 0.119893
ar1      0.929774    0.105519   8.8114 0.000000
ar2     -0.741403    0.131759  -5.6270 0.000000
ma1     -0.885132    0.079630 -11.1155 0.000000
ma2      0.813870    0.126564   6.4305 0.000000
omega    0.000194    0.000084   2.3165 0.020528
alpha1   0.221012    0.045507   4.8567 0.000001
beta1    0.777524    0.038916  19.9795 0.000000
```

Cond mean

Cond var

ลองตัด μ

$$(1-0.93L+0.74L^2)(y_t-0.005)=\varepsilon_t-0.88\varepsilon_{t-1}+0.81\varepsilon_{t-2}$$

$$\sigma_t^2 = 0.0002+0.22\varepsilon_{t-1}^2+0.78\sigma_{t-1}^2$$

ตัวอย่างที่ 4.2

ค่าสถิติที่เราสามารถตรวจสอบแบบจำลอง

cond mean ทดสอบ เพียงพอ ในการอธิบาย

$\hat{\varepsilon}_t / \hat{\sigma}_t$

```
Weighted Ljung-Box Test on Standardized Residuals
------------------------------------
                        statistic   p-value
Lag[1]                      3.351 6.717e-02
Lag[2*(p+q)+(p+q)-1][11]    9.220 1.777e-06
Lag[4*(p+q)+(p+q)-1][19]   13.350 8.841e-02
d.o.f=4
H0 : No serial correlation

Weighted Ljung-Box Test on Standardized Squared Residuals
------------------------------------
                        statistic p-value
Lag[1]                     0.0957  0.7571
Lag[2*(p+q)+(p+q)-1][5]    1.8392  0.6569
Lag[4*(p+q)+(p+q)-1][9]    3.0164  0.7563
d.o.f=2
```

$(\hat{z}_t)$ → cond mean

< 0.05 ปฏิเสธ $H_0 : \hat{z}_t \sim WN$

ARMA(2,2) ไม่เพียงพอ ที่จะอธิบาย Y_t

0.088 > 0.05 ~ 0.1

เราไม่สามารถปฏิเสธ H_0 แต่ถ้าขยับ $\alpha = 0.1$ เราปฏิเสธ H_0

ปรับ ARMA(p,q)

cond variance

$(\hat{z}_t^2)$ → cond var

> 0.05 ไม่สามารถปฏิเสธ $H_0 : \hat{z}_t^2 \sim WN$

(ไม่มี ARCH effect เหลือ)

⇒ GARCH(1,1) เพียงพออธิบาย cond var ของ Y_t

→ ทดสอบ Normal dist ของ residuals

ถ้าไม่ได้ แจกแจงแบบปกติ ⇒ ปรับ การแจกแจง

การแจกแจงที่ไม่ใช่การแจกแจงแบบปกติ

ข้อมูลทางการเงินอาจจะมี $\boxed{\text{ลักษณะหางอ้วน (fat tail)}}$ ดังนั้น ข้อสมมุติว่า ε_t มีการแจกแจงอื่นที่มีหางอ้วนน่าจะเหมาะสมกว่า

การแจกแจงแบบ Student's t (t-distribution) → หางที่จะอ้วน degree of freedom

ถ้า ε_t มีการแจกแจงแบบ t ที่มีองศาอิสระเท่ากับ ν และมีค่า $Var_{t-1}(\varepsilon_t) = \sigma_t^2$ แล้วพารามิเตอร์ s_t จะถูกเลือกเพื่อให้ $s_t = \frac{\sigma_t^2(\nu-2)}{\nu}$

ไม่ต้องประมาณค่า

standard t dist.

เงื่อนไขเพิ่มเติมในคำสั่ง ugarch คือ distribution.model="std"

จะได้ ตัวประมาณค่า

spec

Generalized Error Distribution Nelson (1991) ได้เสนอให้ใช้การแจกแจง generalized error distribution (GED) โดยที่ ν เป็นค่าพารามิเตอร์ที่ d.f. เป็นบวกที่บอกความหนาของหาง

เงื่อนไขเพิ่มเติมในคำสั่ง ugarch คือ distribution.model="ged"

การพยากรณ์ด้วยแบบจำลอง *GARCH*

① ผันผวน

เป้าหมายของการสร้างแบบจำลอง GARCH คือ conditional volatility

② ค่าพยากรณ์ของอนุกรมเวลา y_t สามารถใช้การพยากรณ์ของ *ARMA* ได้อย่างปกติ แบบจำลอง *GARCH* จะทำให้เราได้ค่าผันผวนในอนาคตที่แม่นยำขึ้นโดยเฉพาะการพยากรณ์ในระยะสั้น ในที่นี้เราจะยกตัวอย่างแบบจำลอง $GARCH(1,1)$ ซึ่งสมการความผันผวนสามารถแสดงได้โดย

GARCH(1,1) $\rightarrow$

$$\sigma_t^2 = \omega + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2 + \beta_1 \sigma_{t-1}^2$$

h h+1

พยากรณ์ ณ คาบที่ h และใช้ conditional expectation

1 period

1) $h+1$ $\quad \sigma_{h+1}^2 = \omega + \alpha_1 \varepsilon_h^2 + \beta_1 \sigma_h^2$

2) $\hat{\sigma}^2_{h+1|h} = E(\sigma^2_{h+1} | F_h) = E(\omega + \alpha_1 \varepsilon_h^2 + \beta_1 \sigma_h^2 | F_h)$

$= \omega + \alpha_1 \varepsilon_h^2 + \beta_1 \sigma_h^2$

2 period

$h+2$ $\quad \sigma_{h+2}^2 = \omega + \alpha_1 \varepsilon_{h+1}^2 + \beta_1 \sigma_{h+1}^2$

$E[\sigma_{h+2}^2 | F_h] = \omega + \alpha_1 E[\varepsilon_{h+1}^2 | F_h] + \beta_1 E[\sigma_{h+1}^2 | F_h]$

ตัวอย่างที่ 4.4

$= \omega + (\alpha_1 + \beta_1)\hat{\sigma}^2_{h+1|h}$

เราได้ประมาณค่าแบบจำลอง ARMA(2,2)-GARCH(1,1) ซึ่งเราสามารถคำนวณค่า predicted conditional standard deviation ได้จากคำสั่ง |sigma|

แบบจำลอง ARMA(2,2)-GARCH(1,1)

col. 1

รายเดือน

```
sig.garch11<-sigma(fit.garch11)
volatility<-ts(data=sig.garch11[,1], frequency=12, start=c(1975,5), end=c(2013,11))
plot.ts(volatility, type="l")
```

นอกจากนี้ เราสามารถใช้ GARCH ในการสร้าง series ความผันผวน

ไม่สามารถสังเกต
กรณี Return

$$\sigma_t^2 = \omega + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2 + \beta_1 \sigma_{t-1}^2$$

Predicted value ของ σ_t^2 → วัดความผันผวน $\left[\hat{\sigma}_t = \sqrt{\hat{\sigma}_t^2}\right]$

$$\hat{\sigma}_t^2 = \hat{\omega} + \hat{\alpha}_1 \varepsilon_{t-1}^2 + \hat{\beta}_1 \sigma_{t-1}^2$$

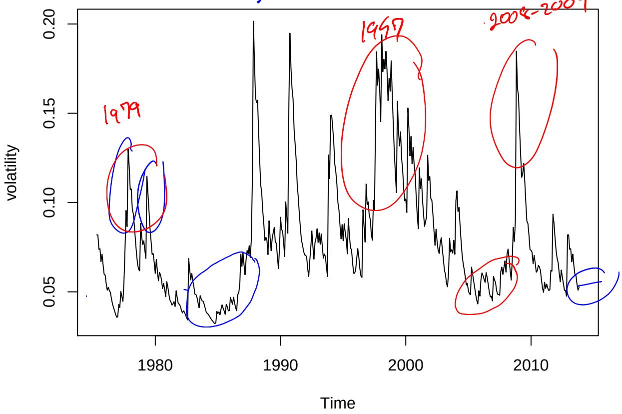
conditional standard deviation

ตัวอย่างที่ 4.4

~~Figure: ACF ของ residuals~~

Conditional standard deviation ของ log return ของ SET

$\hat{\sigma}_t$

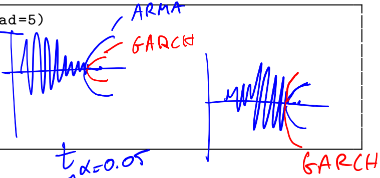


ตัวอย่างที่ 4.5

เราสามารถใช้คำสั่ง `ugarchforecast` และระบุแบบจำลอง |fit.garch11| และจำนวนคาบที่จะพยากรณ์ไปข้างหน้า `n.ahead=5` และได้ผลดังต่อไปนี้

เก็บไว้ model

```
> garch11.fcst=ugarchforecast(fit.garch11, n.ahead=5)
> garch11.fcst
0-roll forecast [T0=1971-03-28 07:00:00]:
      Series    Sigma
T+1  0.0008783 0.04438
T+2 -0.0026793 0.04648
T+3  0.0010525 0.04849
T+4  0.0071598 0.05041
T+5  0.0100715 0.05226
```



$\cancel{y_{h+l}}$ $\hat{\sigma}_{h+l/h}$ $t_{\alpha=0.05}$

95% ช่วงความเชื่อมั่นของค่าพยากรณ์ $\hat{y}_{h+l} \pm 1.96 \cdot \cancel{se(\hat{y}_{h+l})}$ $\cdot\, \hat{\sigma}_{h+l}$ ← GARCH

เช่น $\boxed{h+1}$ $0.00087 \pm 1.96 \cdot (0.04438)$

ช่วงยาวในช่วงความเชื่อมั่นของ $\hat{y}_{h+l}$ มีความแม่นยำขึ้น