ข้อมูลอนุกรมเวลา $\boxed{Y_t}$ ← สร้างแบบจำลองอธิบาย

univariate

(ด้วยตัวแปร $Y_{t-1}, Y_{t-2}, \ldots$)

EC435

บทที่ 2 แบบจำลองอนุกรมเวลาเชิงเส้นตรง

1) Y_t กับ Y_{t-k} มีความสัมพันธ์กันหรือไม่

↓

ทดสอบ ACF/LB-Q test

เฉลิมพงษ์ คงเจริญ ©2556-61

คณะเศรษฐศาสตร์ มหาวิทยาลัยธรรมศาสตร์

September 4, 2019

(1) Y_t และ Y_{t-k} มีความสัมพันธ์ → สร้างแบบจำลองอธิบาย Y_t

(2) Y_t และ Y_{t-k} ไม่มีความสัมพันธ์ ⇒ ไม่สามารถสร้างแบบจำลอง

อธิบาย dist

กระบวนการไวท์นอยซ์ (white noise)

ข้อมูลอนุกรมเวลาที่ง่ายที่สุดคือกระบวนการไวท์นอยซ์ (white noise) โดยที่เรามักจะเขียนแทนด้วย random variable ε_t

นิยาม 2.1

epsilon

ตัวแปร ε_t จะเรียกว่ากระบวนการไวท์นอยซ์ถ้ามีค่าเฉลี่ยเท่ากับศูนย์,มีค่าความแปรปรวนคงที่เท่ากับ σ^2 และไม่มีสหสัมพันธ์ข้ามเวลา (serially uncorrelated) หรือเขียนเป็นเงื่อนไขได้ดังนี้

1. $E(\varepsilon_t) = 0$ ค่าเฉลี่ย = 0
2. $Var(\varepsilon_t) = \sigma^2_\varepsilon$ var คงที่ = σ^2_ε
3. $\gamma_k = Cov(\varepsilon_t, \varepsilon_{t-k}) = 0$ for $k \neq 0$ → Autocov = 0 ทุก lag ($\neq 0$)

$\Downarrow$

ε_t ไม่สัมพันธ์กับ ε_{t-k}

White noise process
- เป็นตัวอย่างของ Stationary

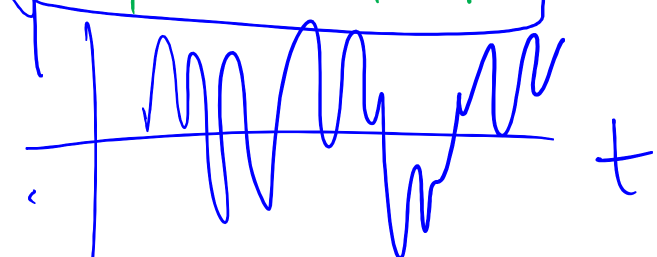
กระบวนการเส้นตรง (Linear process) → อธิบาย y_t ได้ด้วย ε_t . . .

Wold's decomposition theorem ระบุว่าอนุกรมเวลานิ่ง y_t สามารถเขียนในรูปกระบวนการเส้นตรงหรือตัวแทนรูปแบบค่าเฉลี่ยเคลื่อนที่ที่มีอันดับเป็นอนันต์ (infinite moving average) และถ้าสามารถเขียน y_t ในรูป

$$y_t = \mu + \sum_{i=0}^{\infty} \psi_i \varepsilon_{t-i} \tag{1}$$

โดยที่ μ คือค่าเฉลี่ย, $\psi_0 = 1$, และ ε_t คือ (iid) โดยที่เราสามารถพิจารณา ε_t ในฐานะเป็นข้อมูลใหม่ที่เข้ามาในช่วงเวลา t หรือเป็น innovation หรือ shock ณ เวลา t และ $\sum_{i=1}^{\infty} \psi_i^2 < \infty$

→ y_t และ y_{t-k} มีความสัมพันธ์ ⇒ สร้างแบบจำลอง เส้นตรง



→ แบบจำลอง ?

แบบจำลองออโตรีเกรสซีฟ (Autoregressive Model)

แนวคิดพื้นฐานของแบบจำลองออโตรีเกรสซีฟ (autoregressive) คือข้อมูลในเวลาปัจจุบัน (y_t) สามารถอธิบายได้ด้วยตัวแปรนั้นในอดีตย้อนหลังไป 1 ถึง p ช่วงเวลา ($y_{t-1}, ..., y_{t-p}$)

แบบจำลองออโตรีเกรสซีฟที่มีอันดับ (order) เท่ากับ p (เขียนแทนด้วย $AR(p)$) สามารถเขียนได้เป็น

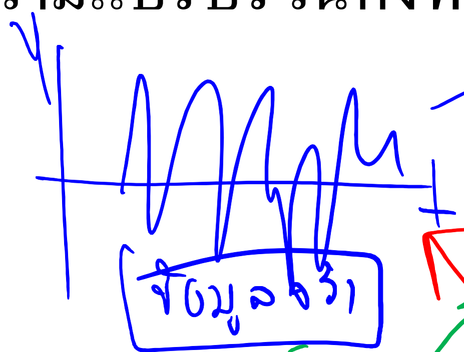
phi - coefficient

shock

$$y_t = \phi_1 y_{t-1} + \phi_2 y_{t-2} + ... + \phi_p y_{t-p} + \varepsilon_t, \qquad (2.3)$$

โดยที่ y_t เป็นข้อมูลที่นิ่ง (stationary) และ ε_t เป็นไวท์นอยซ์ที่มีค่าเฉลี่ยเท่ากับศูนย์และค่าความแปรปรวนคงที่เท่ากับ σ^2_ε

สมมุติว่าเป็น W.N. $(0, \sigma^2_\varepsilon)$ ค่าคงที่



→ ทดสอบ Y_t กับ Y_{t-k} สัมพันธ์กัน

เราควรใช้แบบจำลองไหน AR(P?)

AR(1)

$Y_t = \phi Y_{t-1} + \varepsilon_t$

$E(Y_t)$, $Var(Y_t)$, γ_k, ρ_k

คุณลักษณะ

จะต้องอธิบาย Y_t (เส้นแบบ)

คุณลักษณะ: $E(Y_t)$, $Var(Y_t)$, γ_k, ρ_k

แบบจำลองออโตรีเกรสซีฟ:ค่าเฉลี่ย

AR(p) - ไม่มีจุดตัด

$y_t = \phi_1 y_{t-1} + \phi_2 y_{t-2} + \dots + \phi_p y_{t-p} + \varepsilon_t$

ถ้า y_t เป็นไปตาม AR(p)

ค่าเฉลี่ยของ y_t เท่ากับ

$E(y_t) = E(\phi_1 y_{t-1} + \phi_2 y_{t-2} + \dots + \phi_p y_{t-p} + \varepsilon_t)$

AR กระจาย E( ) ทีละพจน์

$= E(\phi_1 y_{t-1}) + E(\phi_2 y_{t-2}) + \dots + E(\phi_p y_{t-p}) + E(\varepsilon_t)$

ค่าคงที่ ตัวแปร

$= \phi_1 E(y_{t-1}) + \phi_2 E(y_{t-2}) + \dots + \phi_p E(y_{t-p}) + E(\varepsilon_t)$

หากเราเขียน $AR(p)$ ในรูป

Stationary $E(y_t) = E(y_{t-1}) = \dots = E(y_{t-p})$

$(1-\phi_1-\phi_2-\dots-\phi_p)E(y_t) = \cancel{E(\varepsilon_t)} = 0$

$$(y_t - \mu) = \phi_1(y_{t-1} - \mu) + \phi_2(y_{t-2} - \mu) + \dots + \phi_p(y_{t-p} - \mu) + \varepsilon_t, \quad (2.4)$$

สมมติ $\varepsilon_t \sim WN(0, \sigma_\varepsilon^2)$

$E(y_t) = \frac{0}{1-\phi_1-\dots-\phi_p} = 0$

ค่าเฉลี่ย = 0

AR(p) ในรูปที่มีจุดตัด

หรือ $y_t = \phi_0 + \phi_1 y_{t-1} + \phi_2 y_{t-2} + \dots + \phi_p y_{t-p} + \varepsilon_t, \quad (2.5)$

$E(y_t) = \frac{\phi_0}{1-\phi_1-\dots-\phi_p} = \mu$

กำหนด

- $\phi_0 = 0$ หรือไม่ ขึ้นอยู่กับว่า $E(y_t) = 0$ หรือไม่

การเขียน AR(p) ในรูป backshift operator [lag operator]

นอกจากนี้เราสามารถเขียนสมการ (2.3) ได้ด้วยเครื่องมือ backshift operator เป็นสมการดังนี้

นิยาม

$L \cdot y_t = y_{t-1}$

$\underbrace{L(y_{t-1})}_{L^2 y_t} = y_{t-2}$

$L^2 y_t = y_{t-2}$

AR(p)

$y_t = \phi_1 \underbrace{y_{t-1}}_{L y_t} + \phi_2 \underbrace{y_{t-2}}_{L^2 y_t} + \dots + \phi_p \underbrace{y_{t-p}}_{L^p y_t} + \varepsilon_t$

$$(1 - \phi_1 L - \phi_2 L^2 - ... - \phi_p L^p) y_t = \varepsilon_t, \qquad (2.5)$$

แทน ||

AR(p)

$$\boxed{\phi(L) y_t = \varepsilon_t}$$

โดยที่

โดยที่เราเรียก $\phi(L) = 1 - \phi_1 L - \phi_2 L^2 - ... - \phi_p L^p$ ว่าพหุนามออโตรีเกรสซีฟ (autoregressive polynomial)

AR(1) model

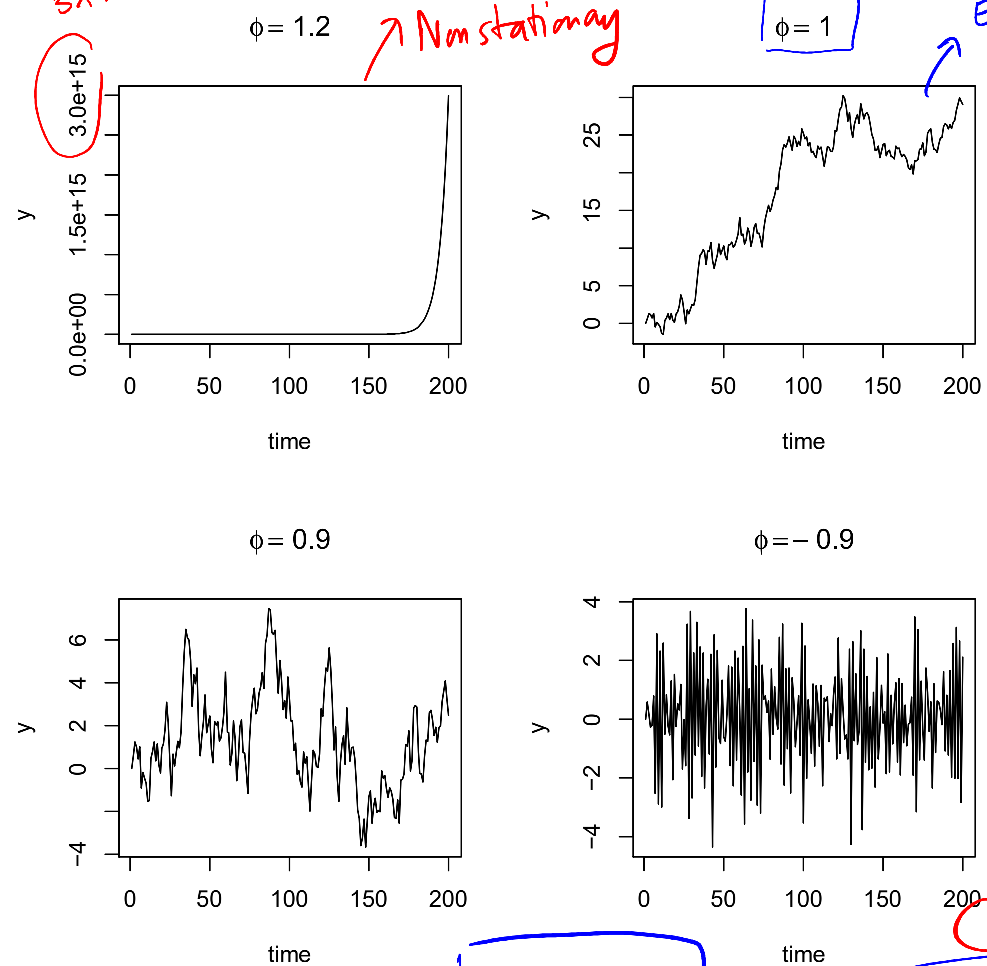
เราจะพิจารณาคุณสมบัติของแบบจำลอง $AR(1)$ ซึ่งมีค่าเฉลี่ยเท่ากับศูนย์ สามารถแสดงได้โดย

$$y_t = \phi y_{t-1} + \varepsilon_t, \qquad (2.8)$$

จากสมการข้างต้นหากเราเริ่มพิจารณากรณีที่ $y_0 = 0$ และให้ ε_t มีการแจกแจงแบบ $N(0, 1)$ เราจะได้การเดินทางตามเวลา (time path) ของ y_t สำหรับค่าสัมประสิทธิ์(ϕ)ที่ต่างกันดังที่แสดงในรูปต่อไปนี้

AR(1) model

Figure: การจำลองกระบวนการ $AR(1)$ ที่ค่าสัมประสิทธิ์(ϕ)ที่ต่างกัน



3×10^{15}

ตพ. Nonstationary

$E(Y_t)$ ไม่คงที่ → ต.ข. Nonstationary

$Y_t = 1\cdot Y_{t-1} + \varepsilon_t$

Y_t เป็น Stationary

เลือกแบบจำลอง
แบบเดียว
คุณลักษณะ:

AR(1) $Y_t = \phi Y_{t-1} + \varepsilon_t$

$E(Y_t) = \phi E(Y_{t-1}) + E(\varepsilon_t) \rightarrow 0$

$\boxed{E(Y_t)=0}$

② $Var(Y_t)$

จากสมการ (2.8) เราสามารถแทนค่า y_t ในอดีตไปเรื่อยๆแบบเวียนเกิด (recursive) k ครั้งดังนี้

ตัวแปร Y ถูกอธิบายด้วยสมการ $Y_t, Y_{t-1}, \ldots$

AR(1) $\boxed{Y_t = \phi Y_{t-1} + \varepsilon_t}$

Y_t ในรูป AR(1) $Y_t = \phi(\phi Y_{t-2} + \varepsilon_{t-1}) + \varepsilon_t = \phi^2 Y_{t-2} + \phi\varepsilon_{t-1} + \varepsilon_t$

$\phi Y_{t-3} + \varepsilon_{t-2}$

$= \phi^3 Y_{t-3} + \phi^2\varepsilon_{t-2} + \phi\varepsilon_{t-1} + \varepsilon_t$

แปลง

$\boxed{Y_t = \lim_{k\to\infty}\phi^k Y_{t-k} + \varepsilon_t + \phi\varepsilon_{t-1} + \phi^2\varepsilon_{t-2} + \phi^3\varepsilon_{t-3} + \ldots}$

linear combination ของ shock

ด้วยวิธีดังกล่าวข้างต้นและค่า $|\phi| < 1$ แล้ว $\lim_{k\to\infty} \phi^k y_{t-k} = 0$ จะทำให้เราสามารถเขียนแบบจำลอง $AR(1)$ ในรูปต่อไปนี้

Y_t stationary

$$y_t = \varepsilon_t + \phi\varepsilon_{t-1} + \phi^2\varepsilon_{t-2} + \ldots = \sum_{j=0}^{\infty} \phi^j \varepsilon_{t-j}, \qquad (2.9)$$

AR(1)

order

เราเรียกรูปดังกล่าวว่าการแสดงแบบจำลอง $AR(1)$ ด้วย infinite moving average representation

$0 = E(Y_t) = E(\varepsilon_t + \phi\varepsilon_{t-1} + \phi^2\varepsilon_{t-2} + \ldots) = E(\varepsilon_t) + \phi E(\varepsilon_{t-1}) + \ldots$

ค่าความแปรปรวนของ y_t → AR(1)

$y_t = \phi y_{t-1} + \varepsilon_t$

$y_t = \varepsilon_t + \phi\varepsilon_{t-1} + \phi^2\varepsilon_{t-2} + \dots$

เนื่องจาก $E(y_t) = 0$ ค่าความแปรปรวน $Var(y_t) = E\left[y_t - E(y_t)\right]^2$ จะเท่ากับ $Var(y_t) = E(y_t^2)$ หากเราแทนค่า y_t จากสมการ (2.9) ลงในสูตรดังกล่าว และใช้คุณสมบัติของ ε_t ที่ว่า $Var(\varepsilon_t) = E(\varepsilon_t^2) = \sigma^2_\varepsilon$ และ $E(\varepsilon_j, \varepsilon_k) = 0$ สำหรับ $k \neq j$ เราจะได้

$$E(y_t^2) = E(y_t \cdot y_t)$$

$$= E\left[(\varepsilon_t + \phi\varepsilon_{t-1} + \phi^2\varepsilon_{t-2} + \dots)(\varepsilon_t + \phi\varepsilon_{t-1} + \phi^2\varepsilon_{t-2} + \dots)\right]$$

$$= E\left[\varepsilon_t^2 + \varepsilon_t\phi\varepsilon_{t-1} + \varepsilon_t\phi^2\varepsilon_{t-2} + \phi\varepsilon_{t-1}\varepsilon_t + \phi^2\varepsilon_{t-1}^2 + \phi\varepsilon_{t-1}\phi\varepsilon_{t-2} + \dots\right.$$

$$= \underbrace{E(\varepsilon_t^2)}_{=\sigma_\varepsilon^2} + \phi\underbrace{E(\varepsilon_t\varepsilon_{t-1})}_{Cov(\varepsilon_t,\varepsilon_{t-1})=0} + \dots \quad E(\varepsilon_t\varepsilon_{t-2}) = 0 \quad E(\varepsilon_{t-1}\varepsilon_t) = 0 \quad \phi^2\underbrace{E(\varepsilon_{t-1}^2)}_{\sigma_\varepsilon^2} \quad E(\varepsilon_{t-1}\varepsilon_{t-2}) = 0$$

$$= \sigma_\varepsilon^2 + 0 + 0 + 0 + \phi^2\sigma_\varepsilon^2 + 0 + \phi^4\sigma_\varepsilon^2$$

$$= \sigma_\varepsilon^2 + \phi^2\sigma_\varepsilon^2 + \phi^4\sigma_\varepsilon^2 + \phi^6\sigma_\varepsilon^2 + \dots$$

$$= \sigma_\varepsilon^2(1 + \phi^2 + \phi^4 + \phi^6 + \dots) = \sigma_\varepsilon^2(1 + \phi^2 + (\phi^2)^2 + (\phi^2)^3 + \dots$$

ค่าความแปรปรวนร่วม

② $\boxed{Var(Y_t) = E(Y_t^2) = \frac{\sigma_\varepsilon^2}{1-\phi^2}}$ $|\phi|<1$ (Stationary)

หากนำค่า y_t และ y_{t-l} ที่เขียนในรูปสมการ (2.9) และค่าเฉลี่ยเท่ากับศูนย์ $E(y_t) = 0$ แทนค่าในสูตรค่าความแปรปรวนร่วมได้ฟังก์ชันค่าความแปรปรวนร่วมจะเท่ากับ

$$\gamma_l = E[(Y_t - \cancel{E(Y_t)}^{0})(Y_{t-l} - \cancel{E(Y_{t-l})}^{0})] = E[Y_t \cdot Y_{t-l}]$$

$$= E[(\varepsilon_t + \phi\varepsilon_{t-1} + \phi^2\varepsilon_{t-2} + \ldots)(\varepsilon_{t-l} + \phi\varepsilon_{t-l-1} + \phi^2\varepsilon_{t-l-2} + \ldots)]$$

$$= E[\underline{\phi^l \varepsilon_{t-l}\varepsilon_{t-l}} + \underset{=}{\phi^{l+1}} \varepsilon_{\underset{t-(l+1)}{t-l-1}} \cdot \underset{=}{\phi}\varepsilon_{t-l-1} + \phi^{l+2}\varepsilon_{t-l-2} \cdot \phi^2\varepsilon_{t-l-2} + \ldots$$

$+$ cross term

$$= \phi^l \underbrace{E(\varepsilon_{t-l}^2)}_{=\sigma_\varepsilon^2} + \phi^{l+2}\underbrace{E(\varepsilon_{t-l-1}^2)}_{\sigma_\varepsilon^2} + \phi^{l+4}\underbrace{E(\varepsilon_{t-l-2}^2)}_{\sigma_\varepsilon^2} + \ldots + \cancel{E(\text{cross term})}^{0}$$

$$= \sigma_\varepsilon^2(\phi^l + \underset{\phi^l\phi^2}{\phi^{l+2}} + \phi^{l+4} + \phi^{l+6} + \ldots)$$

ฟังก์ชันสหสัมพันธ์ร่วมในตัวเอง (ACF)

ฟังก์ชันสหสัมพันธ์ร่วมในตัวเอง (ACF) เท่ากับ $\rho_l = \frac{\gamma_l}{\gamma_0} = \frac{\frac{\phi^l \sigma_\varepsilon^2}{(1-\phi^2)}}{\frac{\sigma_\varepsilon^2}{(1-\phi^2)}} = \phi^l$

หากลองแทนค่า ϕ ด้วยค่าเท่ากับ $0.9, -0.9, 0.5, -0.5$ จะได้ฟังก์ชันสหสัมพันธ์ร่วมในตัวเองดังตารางต่อไปนี้

Table: Autocorrelation ของ $AR(1)$ ที่ค่าสัมประสิทธิ์(ϕ)ที่ต่างกัน

$\phi \setminus l$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0.9	0.900	0.810	0.729	0.656	0.590	0.531	0.478	0.430	0.387	0.349
-0.9	-0.900	0.810	-0.729	0.656	-0.590	0.531	-0.478	0.430	-0.387	0.349
0.5	0.500	0.250	0.125	0.063	0.031	0.016	0.008	0.004	0.002	0.001
-0.5	-0.500	0.250	-0.125	0.063	-0.031	0.016	-0.008	0.004	-0.002	0.001

ฟังก์ชันสหสัมพันธ์ร่วมในตัวเอง (ACF)

ACF ของ AR(1)

1. ค่าสัมบูรณ์ของ ACF จะมีขนาดที่ลดลงเรื่อยๆ (กราฟ down ลู่ลงใกล้ 0)

2. กรณี $|\phi|$ ใกล้ 1 ACF จะลู่ลงช้ากว่า กรณี $|\phi|$ ใกล้ 0

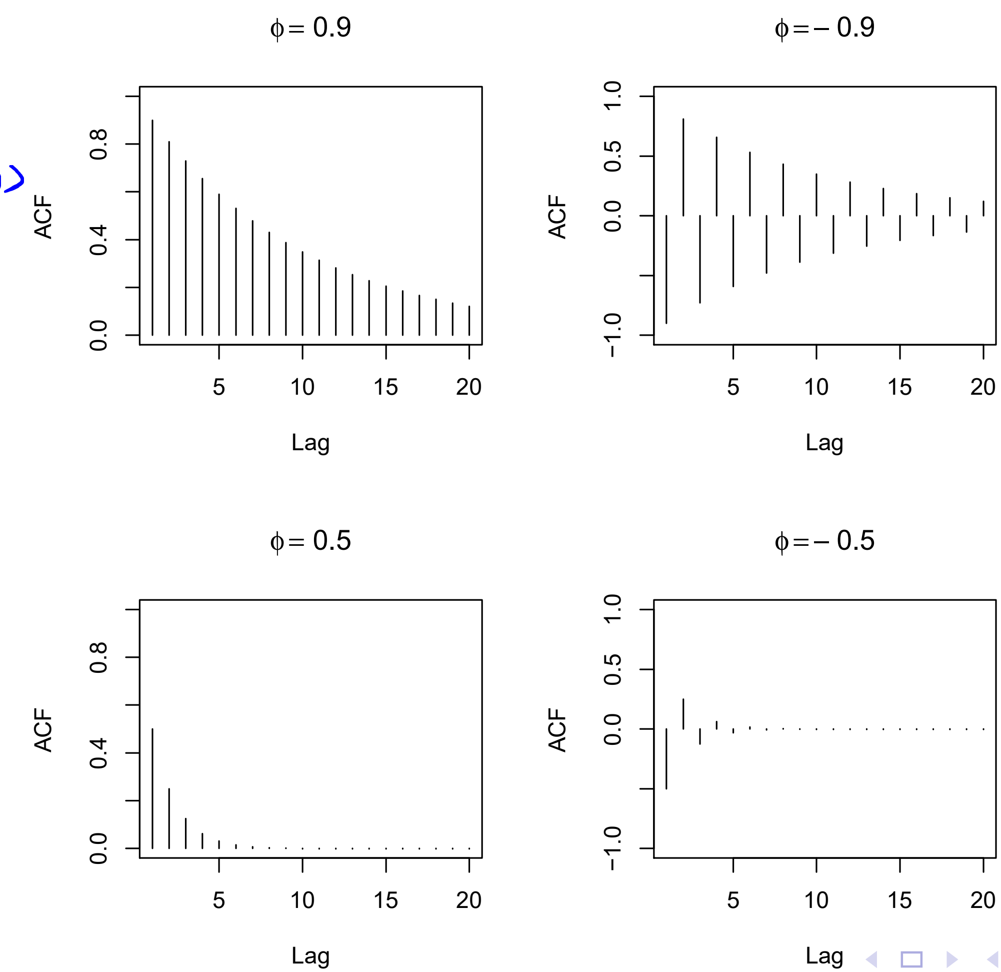


Figure: ค่าสหสัมพันธ์ร่วมในตัวเองของกระบวนการ $AR(1)$ ที่ค่าสัมประสิทธิ์(ϕ)ที่ต่างกัน

เงื่อนไขความเป็นอนุกรมนิ่ง (Stationary)

AR(1) จะเป็น Stationary ขึ้นอยู่กับ $|\phi| < 1$

เราสามารถเขียนกระบวนการ $AR(1)$ ในรูปของพหุนามออโตรีเกรสซีฟได้เป็น

$y_t = \phi y_{t-1} + \varepsilon_t$

$$y_t - \phi \overbrace{y_{t-1}}^{L \cdot y_t} = \varepsilon_t$$

Autoregressive Polynomial

$$(1-\phi L)y_t = \varepsilon_t \qquad (2.13)$$

operator

โดยที่เราสามารถเขียน auxiliary equation (สมการช่วย) ได้เป็น

แทน L ด้วย ตัวแปร m

$$(1-\phi m) = 0$$

ค่าตอบของสมการ

Root of Polynomial $\rightarrow |m| = \left|\frac{1}{\phi}\right|$

$\boxed{|m| > 1}$

ทราบ AR(1) เป็น

(1) stationary $\boxed{|\phi| < 1}$

Stationary | (2) ค่าสัมบูรณ์ของ Root of Polynomial มีค่ามากกว่า 1

Example 1

จงพิจารณาว่ากระบวนการต่อไปนี้เป็นกระบวนการนิ่งหรือไม่

- $y_t - 0.9y_{t-1} = \varepsilon_t$ $[Y_t = 0.9Y_{t-1} + \varepsilon_t]$

  $|\phi| < 1$

- $y_t - y_{t-1} = \varepsilon_t$ $\phi = 1$

  $|\phi| = 1$ ไม่เป็น stationary

- $y_t + 1.2y_{t-1} = \varepsilon_t$

  $|\phi| = 1.2 > 1$ ไม่เป็น stationary

แบบจำลอง AR(1) ที่มีค่าเฉลี่ย $\neq 0$

① $y_t = c + \phi y_{t-1} + \varepsilon_t$

เราสามารถเขียน AR(1) ในรูปทั่วไปเช่น $y_t - \mu = \phi(y_{t-1} - \mu) + \varepsilon_t$ ถ้าเราต้องการหา $E(y_t)$

②

1) $E(y_t) = \frac{c}{1-\phi}$

2) $var(y_t)$

3) γ_ℓ, ρ_ℓ

กรณีสมการ $y_t = \phi_0 + \phi_1 y_{t-1} + \varepsilon_t$ ถ้าเราต้องการหา $E(y_t)$

แบบจำลอง $AR(2)$

คุณสมบัติ ← $E(Y_t)$ ✓, $Var(Y_t)$ ✗, γ_ℓ, ρ_ℓ (*)

ACF ของ AR(2)

แบบจำลอง $AR(2)$ สามารถเขียนอธิบายได้ด้วยสมการ

เงื่อนไขการพิจารณา stationary ได้จาก ϕ_1, ϕ_2 โดยตรง

$$y_t = \phi_1 y_{t-1} + \phi_2 y_{t-2} + \varepsilon_t$$

เราสามารถพิจารณาความเป็นกระบวนการนิ่งได้โดยการหารากของพหุนามออโตรีเกรสซีฟซึ่ง $(1 - \phi_1 L - \phi_2 L^2) y_t = \varepsilon_t$ สามารถเขียนได้เป็น

สมการช่วย เปลี่ยน $L \to m$ (operator) (ตัวแปร)

$$\phi(m) = 1 - \phi_1 m - \phi_2 m^2 = 0$$

หาค่าสมการหาค่าคำตอบ (roots) ของสมการ $\to (m_1, m_2)$

$\phi(m) = 1 - \phi_1 m - \phi_2 m^2 = 0$ โดยที่รากของสมการพหุนามออโตรีเกรสซีฟที่อยู่ในรูปสมการกำลังสอง (quadratic) จะมีด้วยกันสองจำนวน(m_1, m_2)เท่ากับ $\frac{\phi_1 \pm \sqrt{\phi_1^2 + 4\phi_2}}{-2\phi_2}$ โดยที่เงื่อนไขที่คือ รากของสมการพหุนามออโตรีเกรสซีฟจะต้องมากกว่าหนึ่ง (หรือมอดุลัส (modulus) มากกว่าหนึ่งในกรณีจำนวนเชิงซ้อน) ซึ่งจะเกิดขึ้นเมื่อ

ค่าสัมบูรณ์ ของ Root

$\boxed{|m_1| > 1, \; |m_2| > 1}$ → Y_t เป็น stationary

$$\phi_1 + \phi_2 < 1, \qquad \phi_2 - \phi_1 < 1, \qquad |\phi_2| < 1$$

คุณลักษณะของกระบวนการ $AR(2)$

$Y_t = \phi_1 Y_{t-1} + \phi_2 Y_{t-2} + \varepsilon_t$

ฟังก์ชันความแปรปรวนร่วมเราสามารถพิจารณาได้โดยคูณสมการ (2.16) ทั้งสองข้างด้วย y_{t-k} แล้ว take expectation เราจะได้

$k>0$

$$\gamma_k = E(y_t y_{t-k}) = E[(\phi_1 Y_{t-1} + \phi_2 Y_{t-2} + \varepsilon_t) Y_{t-k}]$$

$$= E[\phi_1 Y_{t-1} Y_{t-k}] + E[\phi_2 Y_{t-2} Y_{t-k}] + E[\varepsilon_t Y_{t-k}]$$

$$= \phi_1 E[Y_{t-1} Y_{t-k}] + \phi_2 E[Y_{t-2} Y_{t-k}] + \underbrace{E[\varepsilon_t Y_{t-k}]}_{=0}$$

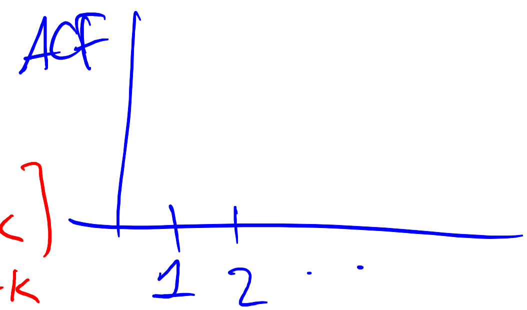
$$\boxed{\gamma_k = \phi_1 \gamma_{k-1} + \phi_2 \gamma_{k-2}}$$

และหากหารด้วย γ_0 จะได้

theorethetical Autocorrelation ที่ lag k ของ AR(2) $\Rightarrow$

$$\boxed{\rho_k = \phi_1 \rho_{k-1} + \phi_2 \rho_{k-2}}$$

$k = 1, 2, \ldots$



เราเรียกสมการทั้งสองว่าสมการ Yule-Walker

$[\gamma_k = \gamma_{-k}]$

$\rho_k = \rho_{-k}$

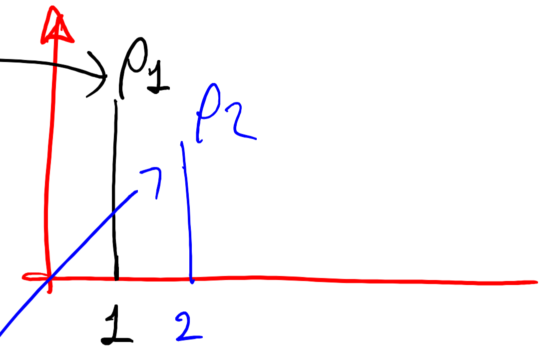
$\rho_1 = ?$

แทนค่า $k=1 \rightarrow \rho_1 = \phi_1 \underbrace{\rho_0}_{=1} + \phi_2 \underbrace{\rho_{-1}}_{=\rho_1}$

คุณลักษณะของกระบวนการ $AR(2)$

หากเราพิจารณากรณีที่ $k = 1$, $\rho_1 = \rho_{-1}$ และ $\rho_0 = 1$ เราจะได้

$$\boxed{\rho_1 = \frac{\phi_1}{1-\phi_2}}$$



และกรณีที่ $k = 2$ เราจะได้

$$\rho_2 = \phi_1 \rho_1 + \phi_2 \rho_0, \quad \rho_0 = 1$$

$$\boxed{\rho_2 = \frac{\phi_2(1-\phi_2) + \phi_1^2}{1-\phi_2}}$$

$$\rho_3 = \phi_1 \rho_2 + \phi_2 \rho_1$$

$\vdots$

และเราสามารถแทนค่าแบบเวียนเกิด(recursive)เพื่อให้ได้ ρ_k กรณี $k > 2$

ให้ไปอ่านเนื้อหาสำหรับแบบจำลอง AR(p)

ACF ของ AR(2)
ก็จะมีลักษณะลู่เข้าหาศูนย์
เช่นเดียวกับ ACF AR(1)

แบบจำลอง $AR(p)$

1) $E(Y_t)$
2) $var(Y_t)$
3) ρ_K

$y_t = \phi_1 Y_{t-1} + \dots + \phi_p Y_{t-p} + \varepsilon_t$

$\rho_K = E(Y_t Y_{t-K})$

กรณีที่ $AR(p)$ เป็นอนุกรมนิ่ง ค่าคงที่ในรูปแบบถดถอยในตัวเอง(c)จะเท่ากับ $\mu(1 - \phi_1 - ... - \phi_p)$ ในทางกลับกัน $\mu = c/(1 - \phi_1 - ... - \phi_p)$

หากเราสมมุติให้ค่าเฉลี่ย(μ)เท่าศูนย์และกระบวนการนิ่ง เราจะได้

$$\rho_k = \phi_1 \rho_{k-1} + \phi_2 \rho_{k-2} + ... + \phi_p \rho_{k-p},$$

สำหรับทุกค่า $k \geq 1$ หากเราพิจารณากรณีที่ $k = 1, 2, ..., p$ และใช้ความสัมพันธ์ที่ $\rho_0 = 1$ และ $\rho_j = \rho_{-j}$ เราจะได้สมการ Yule-Walker

(แสดงความสัมพันธ์ระหว่าง ρ_K)

แก้สมการ หาค่า $\rho_1, \dots, \rho_p$

$k=1 \rightarrow$

$$\rho_1 = \phi_1 + \phi_2 \rho_1 + \phi_3 \rho_2 + ... + \phi_p \rho_{p-1}$$

$K=2 \rightarrow$

$$\rho_2 = \phi_1 \rho_1 + \phi_2 + \phi_3 + ... + \phi_p \rho_{p-2}$$

$$\vdots$$

$K=P \rightarrow$

$$\rho_p = \phi_1 \rho_{p-1} + \phi_2 \rho_{p-2} + \phi_3 \rho_{p-3} + ... + \phi_p \tag{2}$$

P สมการ

$\underbrace{\rho_1, \dots, \rho_p}_{\text{P ตัวแปร}}$

ACF ของ AR(p) โดยทั่วไปจะมีลักษณะที่ลู่เข้าหาศูนย์

แบบจำลอง $AR(p)$

ซึ่งหากเราทราบว่า $\phi_1, \phi_2, ..., \phi_p$ เราสามารถหาค่า $\rho_1, \rho_2, ..., \rho_3$ ได้ นอกจากนี้

$$E(\varepsilon_t y_t) = E[\varepsilon_t(\phi_1 y_{t-1} + ... + \phi_p y_{t-p} + \varepsilon_t)] = E(\varepsilon_t^2) = \sigma^2$$

และหากเราคูณสมการ (2.20) ด้วย y_t และใส่ค่าคาดหมาย เราจะได้

$$\gamma_0 = \phi_1\gamma_1 + \phi_2\gamma_2 + ... + \phi_p\gamma_p + \sigma^2 \tag{3}$$

และหากใช้ความสัมพันธ์ว่า $\rho_k = \gamma_k/\gamma_0$ จะได้

$$\gamma_0 = \frac{\sigma^2}{1 - \phi_1\rho_1 - \phi_2\rho_2 - ... - \phi_p\rho_p}$$

Partial Autocorrelation Function

AR(1) $Y_t = \phi_1 Y_{t-1} + \varepsilon_t$

$Y_t \to$ รัน regression Y_t กับ Y_{t-1}

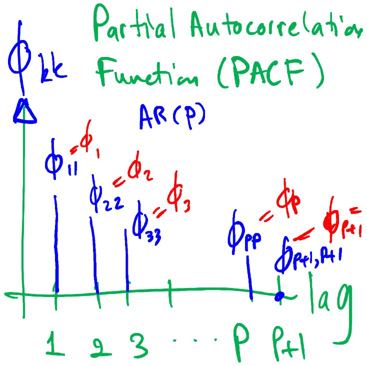
$\hat{\phi}_1 \to \phi_1$

PACF เป็นเครื่องมือที่เป็นประโยชน์ในการระบุแบบจำลอง $AR(p)$

AR(p) $z_t = \phi_1 z_{t-1} + \phi_2 z_{t-2} + \dots + \phi_p z_{t-p} + \varepsilon_t$

$\hat{Y}_t = \hat{\phi}_1 Y_{t-1}$

$Y_t = \phi_1 Y_{t-1} + \phi_2 Y_{t-2} + \varepsilon_t$



$$z_t = \boxed{\phi_{11}} z_{t-1} + \varepsilon_{1t} \to \hat{\phi}_{11} \to \phi_1 \neq 0$$

$$z_t = \phi_{21} z_{t-1} + \boxed{\phi_{22}} z_{t-2} + \varepsilon_{2t} \to \hat{\phi}_{21}, \hat{\phi}_{22} \to \phi_1, \phi_2 \neq 0$$

$$\vdots$$

$$z_t = \phi_{p1} z_{t-1} + \phi_{p2} z_{t-2} + \dots + \boxed{\phi_{pp}} z_{t-p} + \varepsilon_{pt} \to \hat{\phi}_{pp} \to \phi_p = 0$$

$+ \phi_{p+1,p+1} z_{t-p-1}$, $\phi_{p+1,p+1} = 0$

OLS $\hat{\phi}_1, \hat{\phi}_2$ ทดสอบ $H_0: \phi_2 = 0$

โดยที่ $z_t = y_t - \mu$ คือข้อมูลที่ได้กำจัดค่าเฉลี่ยแล้ว (demeaned) เราเรียกค่าสัมประสิทธิ์ ϕ_{jj} สำหรับ $j = 1, 2, ..., p$ (ค่าสัมประสิทธิ์สุดท้ายของแต่ละสมการ) ว่า*ค่าสัมประสิทธิ์สหสัมพันธ์ในตัวเองบางส่วน*

PACF

ในกรณีที่เราพิจารณาแบบจำลอง $AR(1)$ ค่าสัมประสิทธิ์สหสัมพันธ์ในตัวเองบางส่วนตัวแรก ϕ_{11} จะไม่เท่ากับศูนย์ ส่วนสัมประสิทธิ์ที่เหลือจะเท่ากับศูนย์

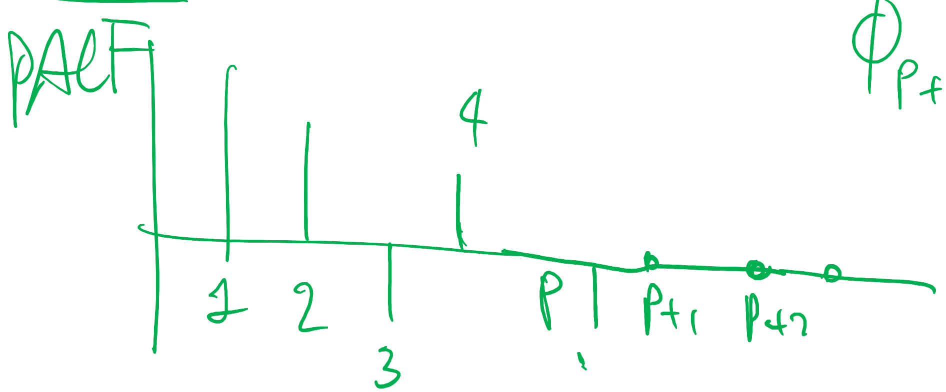
หากเราพิจารณาแบบจำลอง $AR(2)$ ค่าสัมประสิทธิ์สหสัมพันธ์ในตัวเองบางส่วนตัวแรกและตัวที่สอง (ϕ_{11} และ ϕ_{22}) จะไม่เท่ากับศูนย์ ส่วนสัมประสิทธิ์ที่เหลือ (ϕ_{jj} สำหรับ $j > 2$) จะเท่ากับศูนย์

PACF

โดยสรุปแล้ว สำหรับแบบจำลอง $AR(p)$ ใดๆ ค่าสัมประสิทธิ์สหสัมพันธ์ในตัวเองบางส่วน p ตัวแรกจะไม่เท่ากับศูนย์ และสัมประสิทธิ์ที่เหลือจะเท่ากับศูนย์

$\phi_{p+1,p+1}, \ldots = 0$

AR(P)



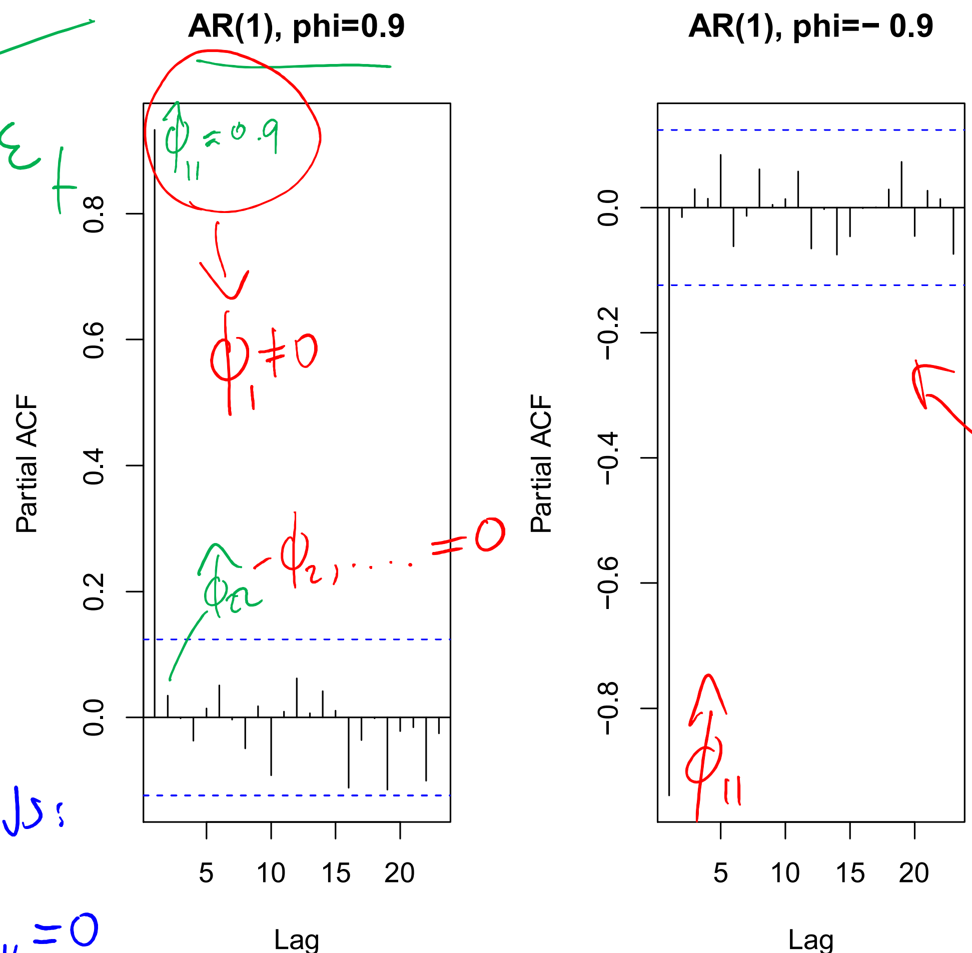
สามารถคำนวณได้โดยใช้ฟังก์ชัน pacf ใน R

Figure: ฟังก์ชันสหสัมพันธ์ในตัวเองบางส่วนของข้อมูลจำลอง $AR(1)$

$y_t = 0.9 y_{t-1} + \varepsilon_t$

||

sample pacf



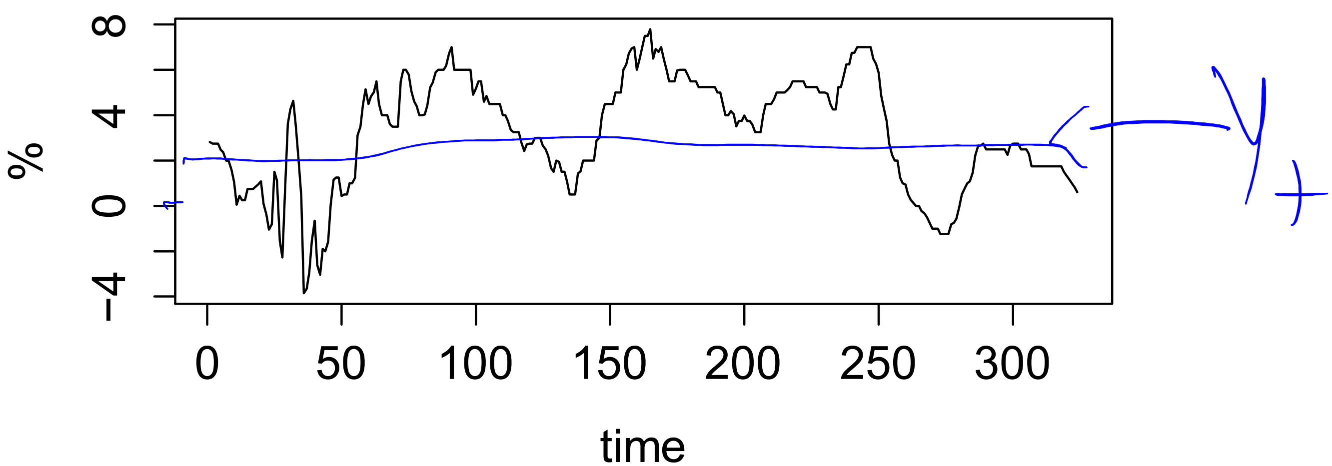
$y_t = 0.9 y_{t-1} + \varepsilon_t$

เปรียบเทียบ $\hat{\phi}_{kk}$ กับ
เส้นประ
ถ้า $\hat{\phi}_{kk}$ เกินจากเส้นประ
เราจะปฏิเสธ $H_0: \phi_k = 0$
vs $H_1: \phi_k \neq 0$

ตัวอย่าง 2.3

```
> int<-read.csv(file="mlr.csv", header=T)
> head(int)
> plot(int$diff_th_us,type="l", ylab="%", xlab="time")
```

Figure: ความแตกต่างระหว่างอัตราดอกเบี้ยของไทยและสหรัฐอเมริกา



ตัวอย่างที่ 2.3: PACF

```
> par(mfrow=c(1,2))
> library(TSA)
> Acf(int$diff_th_us)
> pacf(int$diff_th_us)
```

Figure: ACF และ PACF ของความแตกต่างระหว่างอัตราดอกเบี้ยของไทยและสหรัฐอเมริกา

① จากรูป ACF

พบว่า $\rho_j \neq 0$ (j=1,2,...)

อย่างมีนัยสำคัญ

[เส้นเลยเส้นประ]

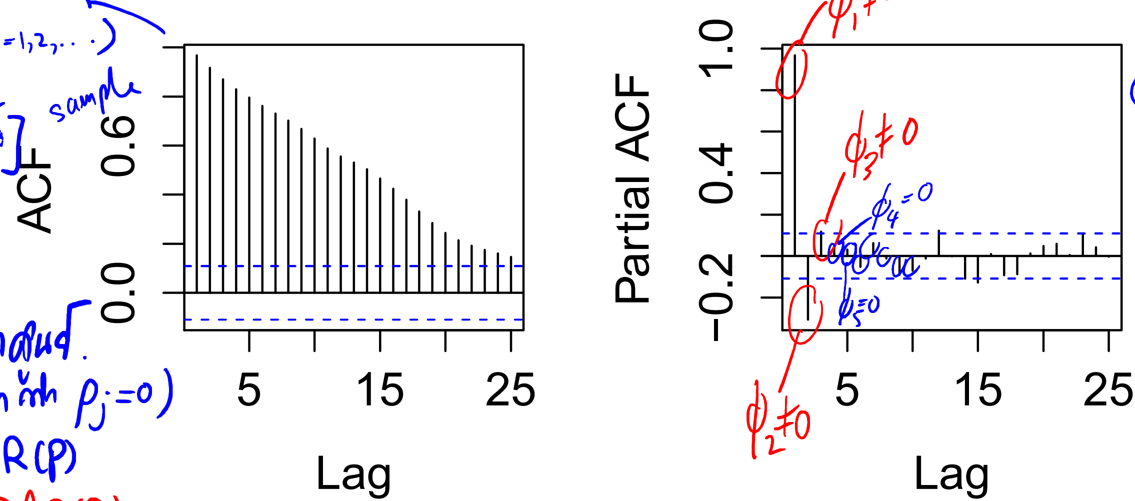
sample

เราสามารถสร้างแบบจำลองอธิบาย y_t

② ACF มีค่าลู่เข้าหาศูนย์ (แต่ใช้เวลานานมากกว่าจะ $\rho_j=0$)

คล้ายกับ ACF ของ AR(P)

แบบจำลองที่น่าจะเหมาะสม AR(P)



③ จากรูป PACF

$\phi_1, \phi_2, \phi_3 \neq 0$ นอกนั้น

นั่น $\phi_4, \phi_5 \dots = 0$

⇓

แบบจำลองที่เหมาะสม

น่าจะเป็น AR(3)

(2) Maximum Likelihood Estimation $y_t = c + \phi_1 y_{t-1} + \phi_2 y_{t-2} + \phi_3 y_{t-3} + \varepsilon_t$

MLE estimation

→ ประมาณค่าด้วย (1) OLS

หากเราสนใจที่จะประมาณค่าแบบจำลอง $AR(1)$ ซึ่งอยู่ในรูปดังต่อไปนี้

สมมุติการแจกแจง Normal

$$y_t = \mu + \phi(y_{t-1} - \mu) + \varepsilon_t$$

โดยที่ $\varepsilon_t \sim iidN(0, \sigma^2)$ เนื่องจากข้อมูลอนุกรมเวลาเป็นข้อมูลที่ขึ้นอยู่ต่อกัน (dependent) ดังนั้น หากเราเก็บข้อมูล $y_1, ..., y_T$ แล้วฟังก์ชันค่าความควรจะเป็นสามารถเขียนได้ดังนี้

Likelihood Function

$$L(\mu, \phi, \sigma^2) = f(y_1)f(y_2|y_1)f(y_3|y_2)\cdots f(y_T|y_{T-1}) \tag{4}$$

เนื่องจาก $y_t|y_{t-1} \sim N(\mu + \phi(y_{t-1} - \mu), \sigma^2)$ และฟังก์ชันการแจกแจงจะเป็นแบบปกติที่เหมือนกับช็อก

$$f(y_t|y_{t-1}) = f_\varepsilon[(y_t - \mu) - \phi(y_{t-1} - \mu)]$$

MLE — คือ Maximize L โดยหาค่า $\hat{\phi}, \hat{\sigma}^2$

MLE estimation

$$L(\mu, \phi, \sigma^2) = \exp\left(\frac{\sum_{t=2}^{T}[(y_t - \mu) - \phi(y_{t-1} - \mu)]}{2\sigma^2}\right) \tag{2.30}$$

การหาประมาณค่าโดยหาค่าพารามิเตอร์ที่ทำให้ log ของสมการ (2.30) สูงที่สุด เรียกว่า การประมาณค่าความควรจะเป็นสูงสุดแบบแม่นตรง (exact maximum likelihood estimation)

กรณีนี้เราไม่สามารถหาค่าสูงสุดได้ด้วยการวิเคราะห์หาเงื่อนไขจำเป็น เราต้องใช้กระบวนการด้วยเครื่องคอมพิวเตอร์ในการหาค่าสูงสุด

OLS, MLE $\rightarrow$ $\hat{y}_t = \hat{c} + \hat{\phi}_1 y_{t-1} + \hat{\phi}_2 y_{t-2} + \hat{\phi}_3 y_{t-3}$

AR(3) เหมาะสมแล้วหรือไม่ ?

Model Checking (ทดสอบแบบจำลอง)

ได้ค่า $\hat{y}_t$ (AR(3)) ใช้อธิบาย y_t

หลังจากที่เราได้ตัวประมาณค่าสำหรับพารามิเตอร์แล้ว ขั้นต่อไปเราก็จะหาค่า fitted ของตัวแปรที่เราศึกษา ($\hat{y}_t$)

y_t (ค่าจริง) $-$ $\hat{y}_t$ (ประมาณ) $= \hat{\varepsilon}_t$

แล้วก็จะตรวจสอบแบบจำลองโดยการวิเคราะห์ค่าส่วนเกิน (residuals) โดยในที่นี้ค่าส่วนเกินสามารถคำนวณได้จาก $\hat{\varepsilon}_t = y_t - \hat{y}_t$ โดยเราจะประเมินค่าส่วนเกินดังต่อไปนี้

ค่า แบบจำลองเหมาะสม (เพียงพอ) $\Leftarrow$ ไม่เหลือความสัมพันธ์ $\hat{\varepsilon}_t$ กับ $\hat{\varepsilon}_{t-k}$

- ACF ของ $\hat{\varepsilon}_t$
- LB test

ทดสอบว่า $\hat{\varepsilon}_t$ เป็น White Noise

1) ACF ของ $\hat{\varepsilon}_t$ → ทดสอบทีละ lag ⇒ ρ_j ทุก lag มีค่าเท่ากับศูนย์ แสดงว่าแบบจำลองเพียงพอ

2) LB Q test กับ $\hat{\varepsilon}_t$

lag ที่สนใจ

$Q(m) \sim \chi^2_{df=m-g}$

g = จำนวน order ~~lag~~ ของ AR

Model Checking

หลังจากที่เราได้ตัวประมาณค่าสำหรับพารามิเตอร์แล้ว ขั้นต่อไปเราก็จะหาค่า fitted ของตัวแปรที่เราศึกษา ($\hat{y}_t$)

แล้วก็จะตรวจสอบแบบจำลองโดยการวิเคราะห์ค่าส่วนเกิน (residuals) โดยในที่นี้ค่าส่วนเกินสามารถคำนวณได้จาก $\hat{\varepsilon}_t = y_t - \hat{y}_t$ โดยเราจะประเมินค่าส่วนเกินดังต่อไปนี้

เราอาจจะเริ่มจากการวาดแผนภาพ ACF งของ $\hat{\varepsilon}_t$ เพื่อดูว่าอนุกรมดังกล่าวยังมีความขึ้นอยู่ต่อกันหรือไม่

Model Checking

หลังจากที่เราได้ตัวประมาณค่าสำหรับพารามิเตอร์แล้ว ขั้นต่อไปเราก็จะหาค่า fitted ของตัวแปรที่เราศึกษา ($\hat{y}_t$)

แล้วก็จะตรวจสอบแบบจำลองโดยการวิเคราะห์ค่าส่วนเกิน (residuals) โดยในที่นี้ค่าส่วนเกินสามารถคำนวณได้จาก $\hat{\varepsilon}_t = y_t - \hat{y}_t$ โดยเราจะประเมินค่าส่วนเกินดังต่อไปนี้

1 เราอาจจะเริ่มจากการวาดแผนภาพ ACF ของ $\hat{\varepsilon}_t$ เพื่อดูว่าอนุกรมดังกล่าวยังมีความขึ้นอยู่ต่อกันหรือไม่

2 นอกจากนี้เราสามารถทดสอบโดยใช้ค่าสถิติ $Q(m) = T(T+2)\sum_{k=1}^{m}\frac{\hat{\rho}_{\varepsilon_k}^2}{T-k}$ โดยที่ $Q(m) \sim \chi^2_{m-g}$ โดยที่ g คือจำนวนของอันดับในแบบจำลองซึ่งในแบบจำลอง $AR(p)$ ค่า $g = p$ และ m คือจำนวนค่าล่าของความสัมพันธ์ที่พิจารณา

ตัวอย่าง 2.3 ต่อ

เก็บผลไว้ คำสั่ง ข้อมูล y จาก ACF เราพบว่า AR(3) order ของ AR(p)

```
> m1<-arima(int$diff_th_us, order=c(3,0,0))
> m1
Call:
arima(x = int$diff_th_us, order = c(3, 0, 0))
Coefficients:
         ar1      ar2     ar3   intercept
      1.3294  -0.4986  0.1334      3.0553
s.e   0.0549   0.0878  0.0549      0.8102
sigma^2 estimated as 0.3054:  log likelihood = -269.11,  aic = 548.21
```

$\hat{\phi}_1 = 1.3294$, $\hat{\phi}_2 = -0.4986$, $\hat{\phi}_3 = 0.1334$, $3.0553 = \hat{\mu} = \frac{\phi_0}{1-\phi_1-\phi_2-\phi_3}$

se($\hat{\phi}_1$) ทดสอบ $H_0: \phi_1 = 0$ vs $H_1: \phi_1 \neq 0$ $\rightarrow t = \frac{1.32}{0.05}$ | $\phi_1, \phi_2, \phi_3 \neq 0$ (population)

โดยที่ค่าสัมประสิทธิ์

$\hat{\phi}_1 = 1.3294, \hat{\phi}_2 = -0.4986, \hat{\phi}_3 = 0.1334, \hat{\mu}(= intercept) = 3.0553$ และมีค่า standard errors อยู่ในบรรทัด s.e.

ตัวอย่าง 2.3 ต่อ

ในโปรแกรม R ค่า `intercept` ที่ได้คือ μ มิใช่จุดตัดแกนในสมการที่ ?? ดังนั้นถ้าต้องการหากเราต้องการค่า $c = \mu(1 - \phi_1 - \phi_2 - \phi_3) = 0.10937$

เราสามารถเขียนผลการประมาณค่าได้โดย

$$(1 - \underset{(0.0549)}{1.3294}\,L + \underset{(0.0878)}{0.4986}\,L^2 - \underset{(0.0549)}{0.1334}\,L^3)(y_t - \underset{(0.8102)}{3.0553}) = \varepsilon_t$$

โดยที่ค่าในวงเล็บคือ standard errors และ $\widehat{\sigma}^2 = 0.3054$

ตัวอย่าง 2.3 ต่อ

MLE

```
> m2<-arima(int$diff_th_us, order=c(3,0,0),method=c("ML"))
> m2
Coefficients:
          ar1      ar2     ar3  intercept
       1.3295  -0.4987  0.1334      3.056
s.e.   0.0549   0.0878  0.0549      0.810
```

OLS

```
sigma^2 estimated as 0.3054:  log likelihood = -269.11,  aic = 548.21
> m3<-arima(int$diff_th_us, order=c(3,0,0),method=c("CSS"))

Coefficients:
          ar1      ar2     ar3  intercept
       1.3334  -0.5016  0.1346     3.0793
s.e.   0.0551   0.0880  0.0552     0.9195
sigma^2 estimated as 0.3082:  part log likelihood = -269.05
```

ตัวอย่าง 2.3 ต่อ

AR(3) เพียงพอ ?

หลังจากที่เราได้ตัวประมาณค่าของพารามิเตอร์ทั้งหมดแล้วเราจะพิจารณาว่าค่า residuals นั้นยังมีความสัมพันธ์ระหว่างช่วงเวลาหลงเหลืออยู่หรือไม่ หรือแบบจำลองเพียงพอหรือไม่ โดยการทดสอบ L-B test สำหรับ m2$residuals ด้วยคำสั่งข้างล่าง

① Plot ACF ของ $\hat{\varepsilon}_t$ [m1$residuals] → acf(m1$residuals)

②

```
> Box.test(m2$residuals,lag=12,type="Ljung")
^^IBox-Ljung test
data:  m2$residuals
X-squared = 14.0085, df = 12, p-value = 0.3002
> pv=1-pchisq(14.0085,9)
> pv
[1] 0.1220232
```

order AR

$$LB\ Q(12) = 14.0085 \sim \chi^2_{df=12-3=9} < CV_{df=9,\ \alpha=0.05} = 16.9$$

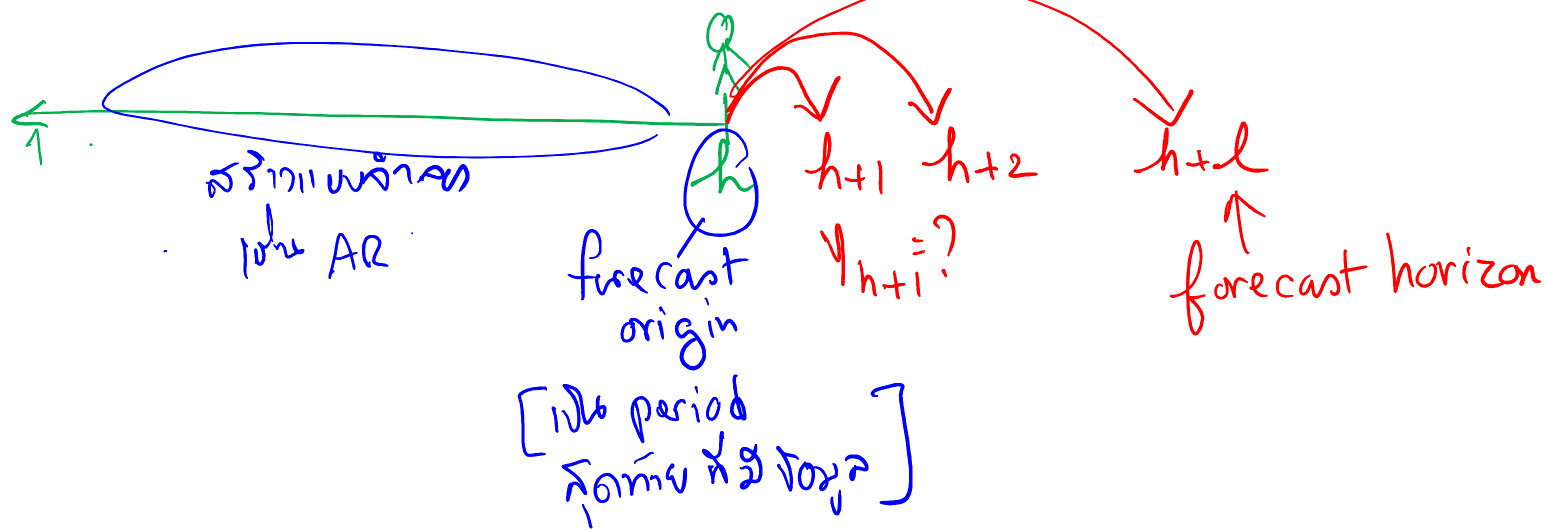
เนื่องจาก Q(12) < CV เราไม่สามารถปฏิเสธ H_0 : $\hat{\varepsilon}_t$ เป็น WN

แสดงว่าแบบจำลอง AR(3) เพียงพอที่จะอธิบาย y_t (diff_th_us)

→ เป็นแบบหลักของแบบอนุกรมเวลา ⇒ พยากรณ์

การพยากรณ์ด้วยแบบจำลอง $AR(p)$

สมมุติให้เรากำลังอยู่ ณ ช่วงเวลาที่ h แต่ต้องการที่จะพยากรณ์ไปข้างหน้า l คาบเวลา หรือสนใจค่าของ y_{h+l} โดยที่ $l \geq 1$ เราเรียก h ว่าจุดเริ่มต้นการพยากรณ์ (forecast origin) และ l ว่าขอบเขตการพยากรณ์ (forecast horizon)



การพยากรณ์ด้วยแบบจำลอง $AR(p)$

สมมุติให้เรากำลังอยู่ ณ ช่วงเวลาที่ h แต่ต้องการที่จะพยากรณ์ไปข้างหน้า l คาบเวลา หรือสนใจค่าของ y_{h+l} โดยที่ $l \geq 1$ เราเรียก h ว่าจุดเริ่มต้นการพยากรณ์ (forecast origin) และ l ว่าขอบเขตการพยากรณ์ (forecast horizon)

กำหนดให้ $\hat{y}_h(l)$ เป็นค่าพยากรณ์ของ y_{h+l} โดยการพยากรณ์ดังกล่าวจะทำให้ฟังก์ชันสูญเสียที่เกิดจากการค่าผิดพลาดกำลังสอง (squared errors) น้อยที่สุด

พยากรณ์ พยากรณ์ต่อไป l period

$$E\left[(y_{h+l} - \hat{y}_h(l))^2 | F_h\right] \leq \min_g E\left[(y_{h+l} - g)^2 | F_h\right]$$

ค่าจริง จุดเริ่มต้น

โดยที่ F_h เป็นข้อมูลที่มีทั้งหมดในคาบที่ h และเราเรียก $\hat{y}_h(l)$ ว่าค่าพยากรณ์ของ y_t ไปข้างหน้า l คาบเมื่อเริ่มต้นการพยากรณ์อยู่ที่ h

ค่าพยากรณ์ไปข้างหน้า 1 คาบจาก $AR(p)$

$\rightarrow y_t$ สามารถอธิบายได้ด้วย $AR(p)$

$$y_t = \phi_0 + \phi_1 y_{t-1} + \phi_2 y_{t-2} + \dots + \phi_p y_{t-p} + \varepsilon_t$$

h $h+1$

เราพบว่าค่า $y_{h+1} = \phi_0 + \phi_1 y_{(h+1)-1} + \dots + \phi_p y_{(h+1)-p} + \varepsilon_{h+1}$ ตัวพยากรณ์ที่จะทำให้ค่าฟังก์ชันสูญเสียน้อยที่สุดคือค่าคาดการณ์แบบมีเงื่อนไข (conditional expectation)

given (โดยที่)

$$\hat{y}_h(1) = E(y_{h+1} \mid F_h)$$

ค่าพยากรณ์

ข้อมูลจนถึง h

$1, 2, \dots, h$

กระจาย $E(\ )$

$$= E(\phi_0 + \phi_1 y_h + \phi_2 y_{h-1} + \dots + \phi_p y_{h+1-p} + \varepsilon_{h+1} \mid F_h)$$

$$= E(\phi_0 \mid F_h) + E(\phi_1 y_h \mid F_h) + E(\phi_2 y_{h-1} \mid F_h) + \dots + E(\phi_p y_{h+1-p} \mid F_h) + E(\varepsilon_{h+1} \mid F_h)$$

$$= \phi_0 + \phi_1 E(y_h \mid F_h) + \phi_2 \underbrace{E(y_{h-1} \mid F_h)}_{= y_{h-1}} + \dots + \phi_p \underbrace{E(y_{h+1-p} \mid F_h)}_{= y_{h+1-p}} + \cancel{E(\varepsilon_{h+1} \mid F_h)}^{0}$$

ค่าพข้อมูลถึง h เราทราบค่า y_h

ไม่ทราบ แทนด้วย $E(\varepsilon_t) = 0$

ค่าพยากรณ์ไปข้างหน้า 1 period

$$\hat{y}_h(1) = \phi_0 + \phi_1 y_h + \phi_2 y_{h-1} + \dots + \phi_p y_{h+1-p}$$

ค่าพยากรณ์ไปข้างหน้า 1 คาบจาก $AR(p)$

เราพบว่าค่า $y_{h+1} = \phi_0 + \phi_1 y_{h+1-1} + \ldots + \phi_p y_{h+1-p} + \varepsilon_{h+1}$ ตัวพยากรณ์ที่จะทำให้ค่าฟังก์ชันสูญเสียน้อยที่สุดคือค่าคาดการณ์แบบมีเงื่อนไข (conditional expectation)

$\hat{y}_h(1) =$

forecast error จากการพยากรณ์ ณ 1 period

ค่าจริง − ค่าพยากรณ์

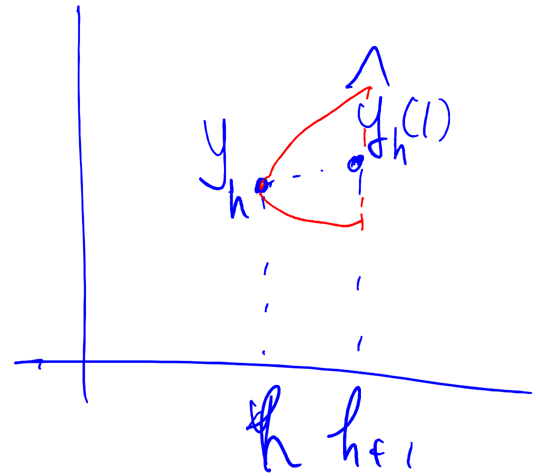
และค่าผิดพลาดจากการพยากรณ์เท่ากับ $e_h(1) = y_{h+1} - \hat{y}_h(1)$

$= \varepsilon_{h+1}$

ค่าพยากรณ์ไปข้างหน้า 1 คาบจาก $AR(p)$

เราพบว่าค่า $y_{h+1} = \phi_0 + \phi_1 y_{h+1-1} + \ldots + \phi_p y_{h+1-p} + \varepsilon_{h+1}$ ตัวพยากรณ์ที่จะทำให้ค่าฟังก์ชันสูญเสียน้อยที่สุดคือค่าคาดการณ์แบบมีเงื่อนไข (conditional expectation)

$\hat{y}_h(1) =$



และค่าผิดพลาดจากการพยากรณ์เท่ากับ $e_h(1) =$

Var vs forecast error.

และค่าแปรปรวนจากการพยากรณ์ไปข้างหน้าหนึ่งคาบเท่ากับ

$Var(e_h(1)) =$ $Var(\varepsilon_{h+1}) = \sigma^2_\varepsilon$

$\sqrt{var(e_h(1))} = sd(e_h(1))$

95% Forecast Interval vs $y_{h+1} = \hat{y}_h(1) \pm Z_{\alpha=0.05} \cdot sd(e_h(1))$

(1.96)

ค่าพยากรณ์ไปข้างหน้า 1 คาบจาก $AR(p)$

$AR(p)$

① ค่าจริง

เราพบว่าค่า $y_{h+1} = \phi_0 + \phi_1 y_{h+1-1} + \ldots + \phi_p y_{h+1-p} + \varepsilon_{h+1}$ ตัวพยากรณ์ที่จะทำให้ค่าฟังก์ชันสูญเสียน้อยที่สุดคือค่าคาดการณ์แบบมีเงื่อนไข (conditional expectation)

$\hat{y}_h(1) =$ $E(y_{h+1}|F_h) = \phi_0 + \phi_1 y_h + \phi_2 y_{h-1} + \ldots + \phi_p y_{h+1-p}$

forecast

ค่าจริง ค่าพยากรณ์

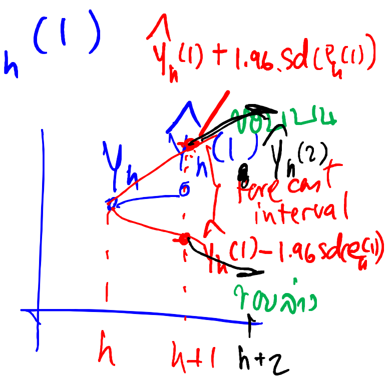
และค่าผิดพลาดจากการพยากรณ์เท่ากับ $e_h(1) =$ $y_{h+1} - \hat{y}_h(1)$

$= \varepsilon_{h+1}$

variance

และค่าแปรปรวนจากการพยากรณ์ไปข้างหน้าหนึ่งคาบเท่ากับ

$Var(e_h(1)) =$ $Var(\varepsilon_{h+1}) = \sigma^2_\varepsilon$ สมมุติ



เราสามารถสร้างช่วงความเชื่อมั่น 95 % ของการพยากรณ์ไปข้างหน้า 1 คาบได้โดยช่วงดังกล่าวจะเท่ากับ $\hat{y}_h(1) \pm 1.96 sd(e_h(1))$

$Z_{\alpha=0.05}$

95% forecast interval =

Note: $Var(\hat{y}_h(1)) = Var(e_h(1))$

$sd(\hat{y}_h(1)) = sd(e_h(1))$

ค่าพยากรณ์ไปข้างหน้า 2 คาบจาก $AR(p)$

ค่าจริง

เราพบว่าค่า $y_{h+2} = \phi_0 + \phi_1 y_{(h+2)-1} + \ldots + \phi_p y_{(h+2)-p} + \varepsilon_{h+2}$ ตัวพยากรณ์ที่จะทำให้ค่าฟังก์ชันสูญเสียน้อยที่สุดคือค่าคาดการณ์แบบมีเงื่อนไข (conditional expectation)

พยากรณ์ออกไป 2 คาบ

Info ถึง period h

ทราบ

$\hat{y}_h(2) = E(Y_{h+2} | F_h)$

ข้อมูลถึง h

$= E(\phi_0 + \phi_1 Y_{h+1} + \phi_2 Y_h + \phi_3 Y_{h-1} + \ldots + \phi_p Y_{h+2-p} + \varepsilon_{h+2} | F_h)$

ค่าพยากรณ์

$= \phi_0 + \phi_1 \underbrace{E(Y_{h+1} | F_h)}_{= \hat{Y}_h(1)} + \phi_2 \underbrace{E(Y_h | F_h)}_{= Y_h} + \ldots + \phi_p \underbrace{E(Y_{h+2-p} | F_h)}_{= Y_{h+2-p}} + \cancel{\underbrace{E(\varepsilon_{h+2} | F_h)}_{= E(\varepsilon_{h+2})}}$

สมมุติ = 0

$\boxed{\hat{Y}_h(2)} = \phi_0 + \phi_1 \hat{Y}_h(1) + \phi_2 Y_h + \ldots + \phi Y_{h+2-p}$

ค่าพยากรณ์ไปข้างหน้า 2 คาบจาก $AR(p)$

เราพบว่าค่า $y_{h+2} = \phi_0 + \phi_1 y_{h+2-1} + ... + \phi_p y_{h+2-p} + \varepsilon_{h+2}$ ตัวพยากรณ์ที่จะทำให้ค่าฟังก์ชันสูญเสียน้อยที่สุดคือค่าคาดการณ์แบบมีเงื่อนไข (conditional expectation)

$\hat{y}_h(2) =$

forecast error

ข้างหน้า 2 คาบ

และค่าผิดพลาดจากการพยากรณ์เท่ากับ

$e_h(2) = \underset{\text{ค่าจริง}}{Y_{h+2}} - \hat{Y}_h(2)$

$= 0 + \phi_1 (\underbrace{Y_{h+1} - \hat{Y}_h(1)}_{e_h(1) = \varepsilon_{h+1}}) + 0 + \ldots + 0 + \varepsilon_{h+2}$

$e_h(2) = \phi_1 \varepsilon_{h+1} + \varepsilon_{h+2}$

ค่าพยากรณ์ไปข้างหน้า 2 คาบจาก $AR(p)$

เราพบว่าค่า $y_{h+2} = \phi_0 + \phi_1 y_{h+2-1} + ... + \phi_p y_{h+2-p} + \varepsilon_{h+2}$ ตัวพยากรณ์ที่จะทำให้ค่าฟังก์ชันสูญเสียน้อยที่สุดคือค่าคาดการณ์แบบมีเงื่อนไข (conditional expectation)

$\hat{y}_h(2) =$

และค่าผิดพลาดจากการพยากรณ์เท่ากับ

$e_h(2) =$

และค่าแปรปรวนจากการพยากรณ์ไปข้างหน้าหนึ่งคาบเท่ากับ

$Var(e_h(2)) =$ $Var(\phi_1 \varepsilon_{h+1} + \varepsilon_{h+2}) \overset{ind.}{=} Var(\phi_1 \varepsilon_{h+1}) + Var(\varepsilon_{h+2})$

independent

$= \phi_1^2 \underbrace{Var(\varepsilon_{h+1})}_{=\sigma_\varepsilon^2} + \underbrace{Var(\varepsilon_{h+2})}_{=\sigma_\varepsilon^2}$

$= \sigma_\varepsilon^2(\phi_1^2+1)$

เราจะสังเกตได้ว่า $Var(e_h(2)) \geq Var(e_h(1))$

$\hat{Y}_h(2) \pm 1.96 \cdot sd(e_h(2))$

ตัวอย่าง 2.3 ผลการพยากรณ์

$y = r_{th} - r_{us} \rightarrow AR(3)$

ข้อมูล 324 เดือน

① 1–312 ใช้ประมาณค่า (in-sample)

② 313–324 (12 เดือน)

ชื่อ m4

$h = 312$

$\hat{y}_h(1) = \hat{\phi}_0 + \hat{\phi}_1 y_h + \hat{\phi}_2 y_{h-1} + \hat{\phi}_3 y_{h-2}$

$\hat{\phi}_1, \hat{\phi}_2, \hat{\phi}_3$

```
> m4.pred=predict(m4,n.ahead=12)
> m4.pred
$pred
Time Series:
Start = 313
End = 324
Frequency = 1
 [1] 1.803828 1.875260 1.943271 2.005150 2.062937 2.117888 2.170297 2.220198
 [9] 2.267658 2.312788 2.355708 2.396527
$se
Time Series:
Start = 313
End = 324
Frequency = 1
 [1] 0.5622779 0.9342948 1.1737163 1.3399272 1.4696143 1.5777365 1.6700163
 [8] 1.7494732 1.8183586 1.8784737 1.9312318 1.9777417
```

คำสั่ง — แบบจำลอง — พยากรณ์ไปล่วงหน้า 12

$\hat{y}_h(\cdot)$, $\hat{y}_h(1)$, $\hat{y}_h(2)$, $\hat{y}_h(12)$

$se(\hat{y}_h(\cdot)) = se(e_h(\cdot))$

$se(e_h(1))$, $se(e_h(2))$, $se(e_h(12))$

$se(e_h(1)) = \hat{\sigma}^2_\varepsilon$

sd ที่แทนค่า σ^2 ด้วย $\hat{\sigma}^2$

95% forecast interval ของ y_{h+1} $= \hat{y}_h(1) \pm 1.96 \cdot \cancel{sd}\ se(e_h(1))$

$= 1.804 \pm 1.96 \cdot (0.562)$

แบบจำลองมูววิ่งเอเวอเรจ (Moving Average; $MA(q)$)

แบบจำลองนี้มีพื้นฐานมากจากแนวคิดที่ว่าอนุกรมเวลาเส้นตรงนิ่ง (stationary) สามารถเขียนให้อยู่ในรูป infinite MA (linear combination ของ ε_t)

theta

แทนพจ: ไม่มีอิทธิพล

น้อย

$$y_t = \mu + \varepsilon_t + \theta_1\varepsilon_{t-1} + \theta_2\varepsilon_{t-2} + \dots + \theta_q\varepsilon_{t-q} + \theta_{q+1}\varepsilon_{t-q-1} + \dots + \infty$$

น้อยมากๆ

แบบจำลองมูววิ่งเอเวอเรจอันดับ q และเขียนแทนด้วย $MA(q)$ และแสดงได้ด้วยสมการ

อันดับ order q

$L \cdot \varepsilon_t$ $\quad$ $L^q \cdot \varepsilon_t$

$$y_t = \mu + \varepsilon_t + \theta_1\varepsilon_{t-1} + \dots + \theta_q\varepsilon_{t-q}$$

$$y_t - \mu = \sum_{j=0}^{q}\theta_j\varepsilon_{t-j} = \theta(L)\varepsilon_t \qquad (2.37)$$

$$= \underbrace{(1 + \theta_1 L + \dots + \theta_q L^q)}_{\theta(L)}\varepsilon_t$$

Moving Average Polynomial

โดยที่ $\theta_0 = 1$

แบบจำลอง MA(1)

$Cov(\varepsilon_t, \varepsilon_{t-j}) = 0$

$\varepsilon_t \sim^{WN} (0, \sigma_\varepsilon^2)$

สมมุติให้ y_t เป็นอนุกรม $MA(1)$ โดยที่ ε_t มีคุณสมบัติเป็นไวท์นอซ

$$y_t = \mu + \varepsilon_t + \theta_1 \varepsilon_{t-1} \qquad (2.38)$$

ค่าคาดหมายของ y_t, $E(y_t)$, เท่ากับ

1 $E(y_t) = E(\mu + \varepsilon_t + \theta_1 \varepsilon_{t-1}) = E(\mu) + E(\varepsilon_t) + \theta_1 E(\varepsilon_{t-1})$

$= \mu + 0 + \theta_1 \cdot 0 = \mu.$

ค่าความแปรปรวนของ y_t (γ_0)

2 $\gamma_0 = Var(y_t) = E(y_t - E(y_t))^2 = E((\cancel{\mu} + \varepsilon_t + \theta_1 \varepsilon_{t-1}) - \cancel{\mu})^2$

$= E[(\varepsilon_t + \theta_1 \varepsilon_{t-1})^2]$

$= E[\varepsilon_t^2 + 2\varepsilon_t \theta_1 \varepsilon_{t-1} + \theta_1^2 \varepsilon_{t-1}^2]$

$= \underbrace{E(\varepsilon_t^2)}_{= Var(\varepsilon_t)} + 2\theta_1 \underbrace{E(\varepsilon_t \varepsilon_{t-1})}_{Cov(\varepsilon_t \varepsilon_{t-1}) = 0 \text{ [WN]}} + \theta_1^2 \underbrace{E(\varepsilon_{t-1}^2)}_{= Var(\varepsilon_t)}$

Note:

$Var(\varepsilon_t) = E[\varepsilon_t - \cancel{E(\varepsilon_t)}^{\,0}]^2$

$= E(\varepsilon_t^2)$

$$\boxed{Var(y_t) = \sigma_\varepsilon^2 (1 + \theta_1^2)}$$

แบบจำลอง MA(1)

MA(1) $\boxed{y_t = \mu + \varepsilon_t + \theta_1 \varepsilon_{t-1}}$

one-lag autocovariance

$$\gamma_1 = Cov(y_t, y_{t-1}) = E\big((y_t - \underbrace{E(y_t)}_{\mu})(y_{t-1} - \underbrace{E(y_{t-1})}_{\mu})\big)$$

$$= E\big[(\cancel{\mu} + \varepsilon_t + \theta_1 \varepsilon_{t-1} - \cancel{\mu})(\cancel{\mu} + \varepsilon_{t-1} + \theta_1 \varepsilon_{t-2} - \cancel{\mu})\big]$$

$$= E\big[\varepsilon_t \varepsilon_{t-1} + \varepsilon_t \theta_1 \varepsilon_{t-2} + \theta_1 \varepsilon_{t-1}^2 + \theta_1^2 \varepsilon_{t-1} \varepsilon_{t-2}\big]$$

$$= \underbrace{E(\varepsilon_t \varepsilon_{t-1})}_{Cov(\varepsilon_t, \varepsilon_{t-1}) = 0} + \theta_1 \underbrace{E(\varepsilon_t \varepsilon_{t-2})}_{Cov(\varepsilon_t, \varepsilon_{t-2}) = 0} + \theta_1 \underbrace{E(\varepsilon_{t-1}^2)}_{\sigma_\varepsilon^2} + \theta_1^2 \underbrace{E(\varepsilon_{t-1} \varepsilon_{t-2})}_{Cov(\varepsilon_{t-1}, \varepsilon_{t-2}) = 0}$$

$$\boxed{\gamma_1 = \theta_1 \sigma_\varepsilon^2} \Rightarrow \rho_1 = \frac{\gamma_1}{\gamma_0} = \frac{\theta_1 \cancel{\sigma_\varepsilon^2}}{(1+\theta_1^2)\cancel{\sigma_\varepsilon^2}}$$

two-lag autocovariance

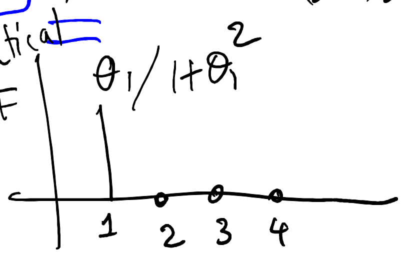
$\boxed{\text{H.W.}}$

$$\gamma_2 = Cov(y_t, y_{t-2}) = E\big[(y_t - E(y_t))(y_{t-2} - E(y_{t-2}))\big]$$

$$= E\big[(\cancel{\mu} + \varepsilon_t + \theta_1 \varepsilon_{t-1} - \cancel{\mu})(\cancel{\mu} + \varepsilon_{t-2} + \theta_1 \varepsilon_{t-3} - \cancel{\mu})\big]$$

$$= 0$$

Theoritical ACF



$$\rho_2 = \frac{\gamma_2}{\gamma_0} = \frac{0}{(1+\theta_1^2)\sigma_\varepsilon^2} = 0$$

$\gamma_3 = 0$, $\gamma_4 = 0$, ...

$\rho_3 = 0$, $\rho_4 = 0$, ...

แบบจำลอง MA(1)

จากสมการข้างต้นจะเห็นได้ว่า $Cov(y_t, y_{t-k}) = 0$ สำหรับ $k \geq 2$ ในกรณีที่ y_t เป็น $MA(1)$

k-lag autocorrelation เท่ากับ

$Corr(Y_t, Y_{t-k})$

$$\rho_k = \begin{cases} \frac{\theta_1}{1+\theta_1^2} & , k = 1 \\ 0 & , k > 1 \end{cases}$$

จะเห็นได้ว่า y_t มีสหสัมพันธ์กับ y_{t-1} แต่ไม่สัมพันธ์กับ $y_{t-2}, \ldots$ ซึ่งแตกต่างจาก $AR(1)$

เราจะเห็นได้ว่าอนุกรมเวลา y_t ที่เป็นกระบวนการมูวิ่งเอเวเรจจะเป็นอนุกรมเวลานิ่ง (stationary) เสมอ

MA(1) จะเป็น stationary เสมอ ไม่ว่า θ_1 จะมีค่าเท่าใด

1) ค่าเฉลี่ยคงที่ → MA(1) − ค่าเฉลี่ย = μ

2) Var คงที่ → MA(1) → Var = $\sigma_\varepsilon^2(1+\theta^2)$ คงที่ ไม่ว่า θ_1 จะมีค่าเท่าใด

3) $Cov(Y_t, Y_{t-k})$ คงที่ → MA(1) → γ_j คงที่

ตัวอย่างข้อมูลที่เป็น MA(1)

PACF ของ MA(1) y_t ∈ ในรูปของ AR แล้วใช้ ค่าสัมประสิทธิ์หน้า y_{t-j}

MA(1)

$$y_t = \varepsilon_t + \theta_1 \varepsilon_{t-1} \Rightarrow AR$$

เขียนในรูป polynomial $y_t = \boxed{(1+\theta_1 L)}\varepsilon_t$

$1+\theta_1 L$

Note $1+z+z^2+z^3+\dots = \frac{1}{1-z}$

Figure: การจำลองข้อมูลกระบวนการ $MA(1)$ ที่มีค่าสัมประสิทธิ์ $\theta = 0.5$

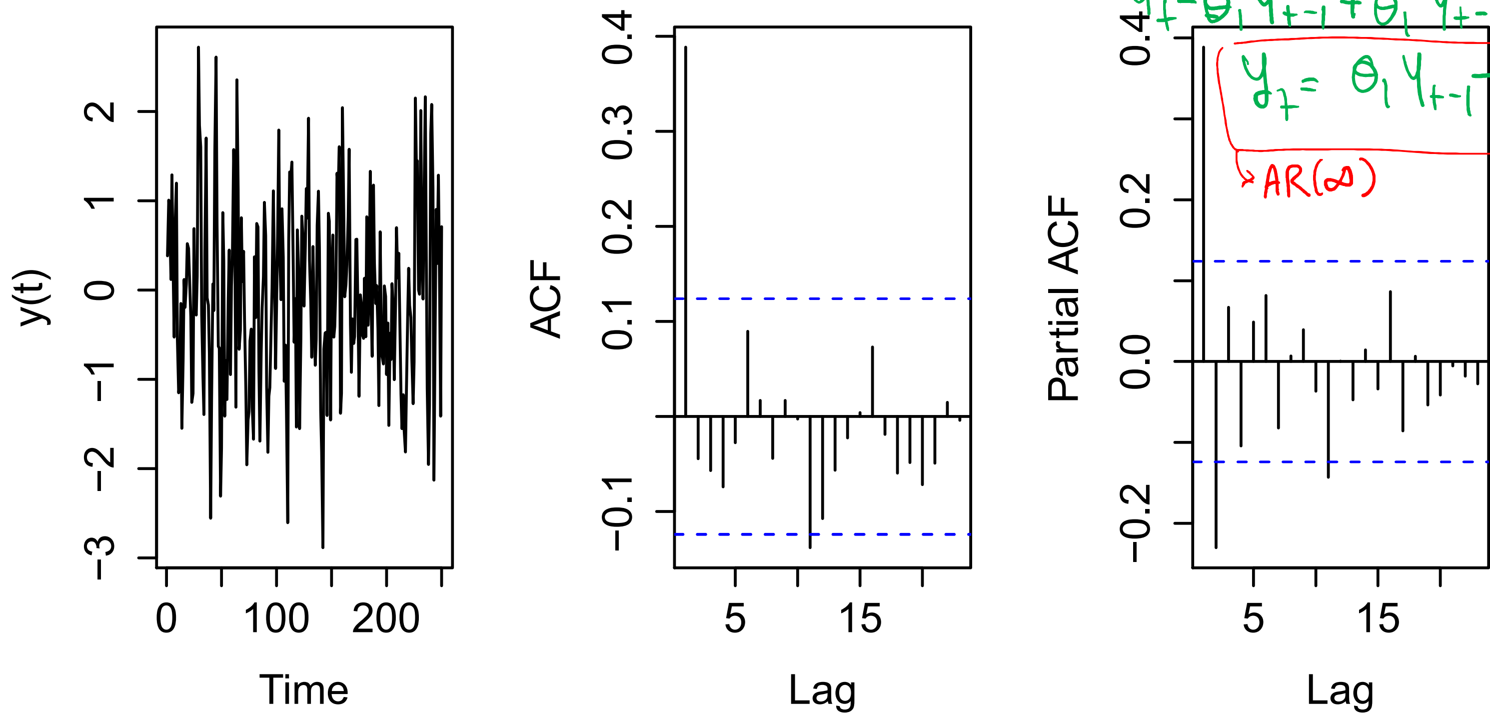
$$\frac{1}{1+\theta_1 L} = \frac{1}{1-(\underbrace{-\theta_1 L}_{z})} = 1+(-\theta_1 L)+(-\theta_1 L)^2+(-\theta_1 L)^3+\dots$$

$$y_t(1-\theta_1 L+\theta_1^2 L^2-\theta_1^3 L^3+\dots) = \varepsilon_t$$

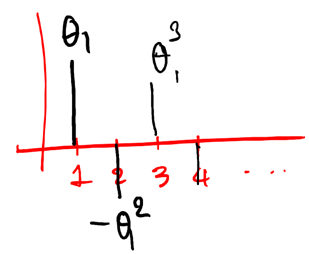
$$y_t-\theta_1 y_{t-1}+\theta_1^2 y_{t-2}-\theta_1^3 y_{t-3}+\dots = \varepsilon_t$$

$$y_t = \theta_1 y_{t-1}-\theta_1^2 y_{t-2}+\theta_1^3 y_{t-3}+\dots+\varepsilon_t$$

→ AR(∞)



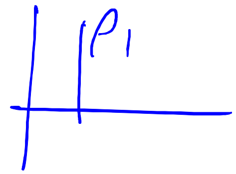
Theoretical PACF



PACF ของ MA(1) จะมีขนาดลดลงเรื่อยๆ (ลู่เข้าสู่ 0)

Invertible process

$$\boxed{\rho_1 = \frac{\theta_1}{1+\theta_1^2}}$$



ฟังก์ชันสหสัมพันธ์ร่วมในตัวเองของกระบวนการ $MA(1)$ สองกระบวนการต่อไปนี้จะมีลักษณะที่เหมือนกัน

$$\rho_1 = \frac{1/5}{1+(1/5)^2}$$

$$MA(1) \quad x_t = \underset{\text{shock}}{w_t} + \overset{\theta_1}{\frac{1}{5}} w_t, \qquad w_t \sim iidN(0, 25)$$

และ

$$\rho_1 = \frac{5}{1+(5)^2}$$

$$MA(1) \quad y_t = v_t + \overset{\theta_1}{5} v_t, \qquad v_t \sim iidN(0, 1)$$

แล้วเราจะเลือก แบบจำลองไหน

เราต้องเลือกว่าจะใช้แบบจำลองไหน ซึ่งเราจะเลือกแบบจำลองที่สามารถเขียนแบบจำลองในรูปของ infinite AR representation ($AR(\infty)$) โดยที่อนุกรมที่มีลักษณะดังกล่าวเราจะเรียกว่ากระบวนการที่หาตัวผกผันได้(invertible process)

เงื่อนไขที่ $MA(1)$ จะเป็นกระบวนการที่หาตัวผกผันได้ คือ $|\theta_1| < 1$

แบบจำลอง $MA(2)$

กำหนดให้ y_t เป็นกระบวนการ $MA(2)$ ซึ่งสามารถแสดงได้ด้วยสมการ

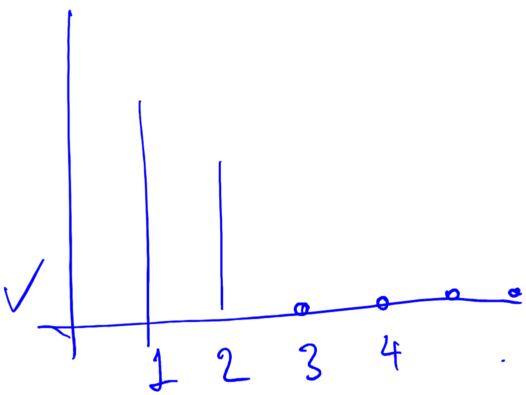
$$y_t - \mu = \varepsilon_t + \theta_1 \varepsilon_{t-1} + \theta_2 \varepsilon_{t-2}$$

$E(Y_t) = \mu$

$Var(Y_t) = \sigma_\varepsilon^2(1+\theta_1^2+\theta_2^2)$

เมื่อพิจารณาค่าสหสัมพันธ์ในตัวเองของ $MA(2)$ จะได้

ACF ของ MA(2)



order MA ?

$$\rho_0 = \frac{\gamma_0}{\gamma_0} = 1$$

$$\rho_1 = \frac{\gamma_1}{\gamma_0} = \frac{(\theta_1 + \theta_2\theta_1)}{(1+\theta_1^2+\theta_2^2)}$$

$$\rho_2 = \frac{\gamma_2}{\gamma_0} = \frac{\theta_2}{(1+\theta_1^2+\theta_2^2)}$$

$$\rho_3 = \frac{\gamma_3}{\gamma_0} = 0$$

$$\rho_j = \frac{\gamma_j}{\gamma_0} = 0$$

PACF ของ MA(2)

แบบจำลอง $MA(q)$

แบบจำลอง $MA(q)$ สามารถเขียนในรูปสมการดังนี้

$$y_t = \mu + \varepsilon_t + \theta_1 \varepsilon_{t-1} + ... + \theta_q \varepsilon_{t-q}, \qquad \varepsilon_t \sim WN(0, \sigma^2)$$

แบบจำลอง $MA(q)$ นิ่งและ ergodic ถ้าค่า $\theta_1, ..., \theta_q$ มีค่าจำกัด และสามารถหาตัวผกผันได้ถ้าค่าราก (roots) ของพหุนาม MA $\theta(m) = 1 + \theta_1 m + ... + \theta_q m^{t-q} = 0$ มีค่าสัมบูรณ์(หรือค่าโมดุลัส)ของรากของพหุนามมากกว่า 1

แบบจำลอง $MA(q)$

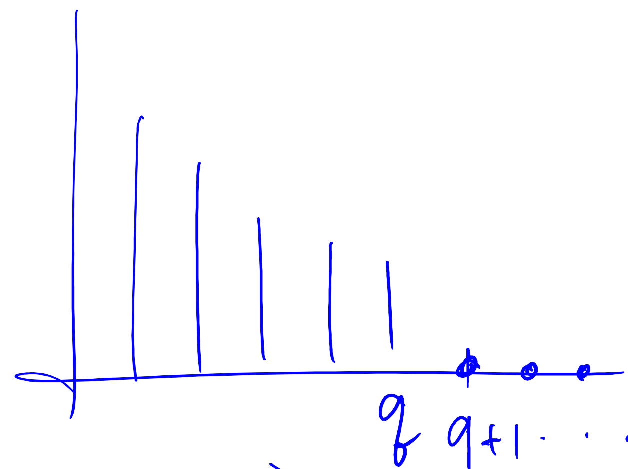
โมเมนต์ของกระบวนการ $MA(q)$ ได้ดังนี้

$E(y_t) = \gamma_0 = \gamma_j =$

และค่าสหสัมพันธ์ในตัวเองจะเท่ากับ

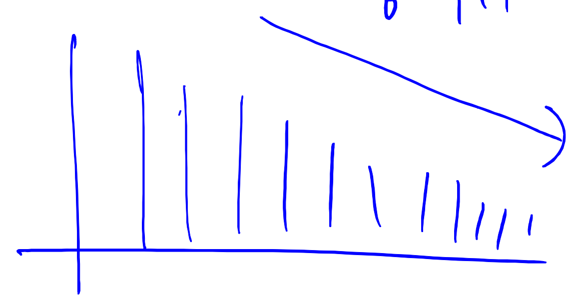
$\rho_j = \frac{\gamma_j}{\gamma_0} =$

ACF
MA(q)



ในขณะที่ PACF จะมีค่อยลดลงไป

PACF
ของ MA(q)



การประมาณค่าแบบจำลอง $MA(q)$

การประมาณค่า MLE เป็นวิธีการทั่วไปที่ใช้ในการประมาณค่าแบบจำลอง $MA(q)$

ประมาณค่าแบบจำลอง $MA(1)$ ซึ่งสามารถเขียนได้ดังนี้

$$y_t = \mu + \varepsilon_t + \theta\varepsilon_{t-1}$$

โดยที่ $\varepsilon_t \sim iidN(0, \sigma_\varepsilon^2)$ ในกรณีที่ conditional MLE เราจะสมมุติให้ $\varepsilon_0 = 0$ ดังนั้น $y_1 = \mu + \varepsilon_1$

$$y_1|\varepsilon_0 = 0 \sim N(\mu, \sigma_\varepsilon^2)$$

จากข้อมูลในคาบที่ 1 จะได้ว่า $y_2|y_1 = \mu + \varepsilon_2 + \theta\varepsilon_1$ และได้ฟังก์ชันความน่าจะเป็น

$$f_{y_2|y_1} = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_\varepsilon^2}} \exp\left[\frac{-(y_2 - \mu - \theta\varepsilon_1)^2}{2\sigma_\varepsilon^2}\right]$$

การประมาณค่าแบบจำลอง $MA(q)$

หากใช้กระบวนการเดียวกันไปเรื่อย เราจะสามารถหาค่า $\varepsilon_t = y_t - \mu - \theta\varepsilon_{t-1}$ และสร้าง conditional likelihood function ได้

$$L(\mu, \theta, \sigma_\varepsilon^2) = \Pi_{t=2}^{T} f_{y_t|y_{t-1}}$$

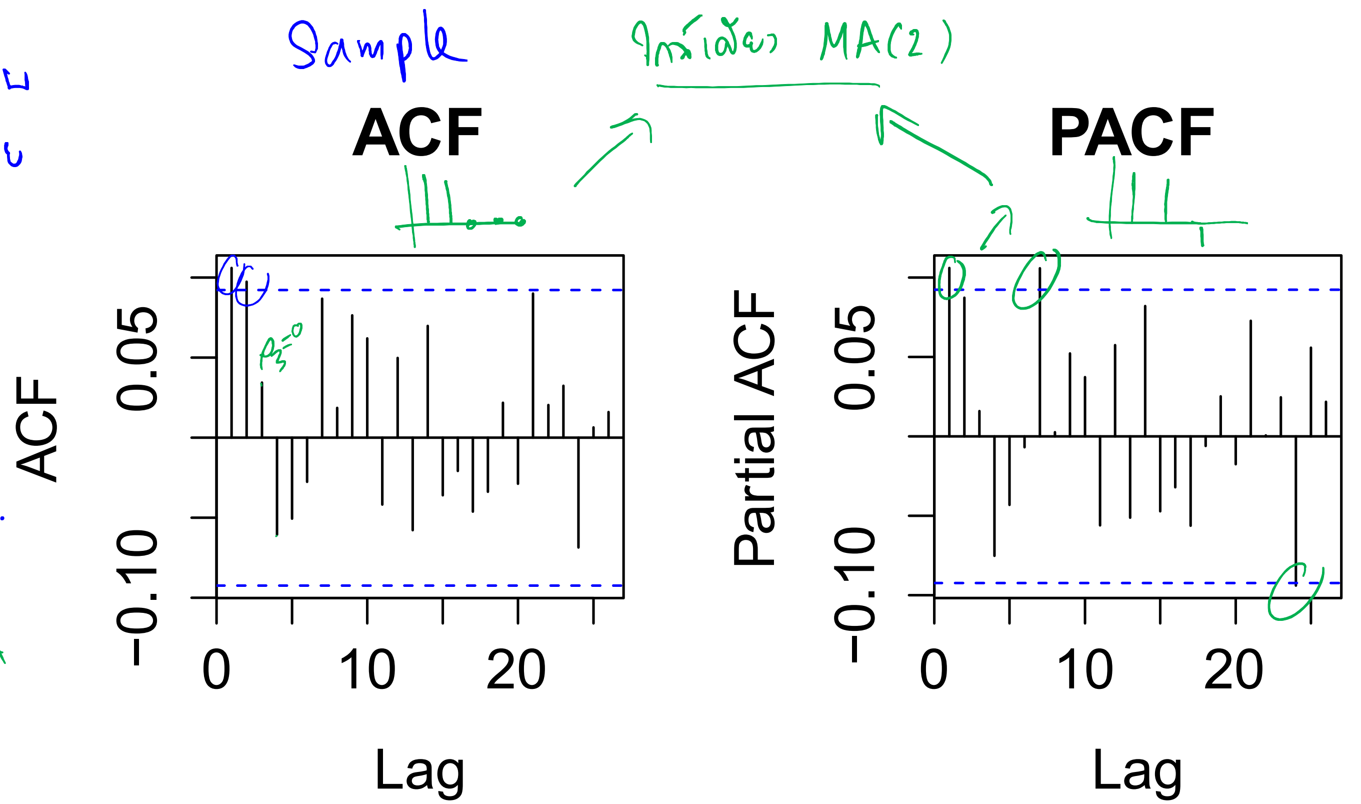
$$= (2\pi\sigma_\varepsilon^2)^{-(T-2)/2} \exp\left[\frac{\sum_{t=2}^{T} - \overbrace{(y_t - \mu - \theta\varepsilon_{t-1})^2}^{\varepsilon_t^2}}{2\sigma_\varepsilon^2}\right] \tag{2.50}$$

สมการ (2.50) เราไม่สามารถหาตัวประมาณค่าได้ด้วยการวิเคราะห์อนุพันธ์เช่นในกรณี AR ในกรณีนี้เราจำเป็นต้องใช้วิธีการทางตัวเลขด้วยคอมพิวเตอร์เพื่อหาค่า $\hat{\theta}$ ที่ทำให้ $L(\mu, \theta, \sigma_\varepsilon^2)$ มีค่าสูงที่สุด

ตัวอย่างที่ 2.6

ในตัวอย่างนี้เราจะพิจารณาผลได้ตอบแทนรายเดือนของการลงทุนในตลาดหลักทรัพย์แห่งประเทศไทย โดยใช้ข้อมูลราคาปิดรายเดือนตั้งแต่ เมษายน 2518 ถึงเดือนพฤศจิกายน 2555

Figure: ACF และ PACF ของผลได้ตอบแทนรายเดือนจาก SET



① เทสว่าแบบจำลองอนุกรม ใช้ไหม?

จาก ACF ที่ lag 1,2 มีค่าไม่เท่ากับ 0

→ สร้างแบบจำลอง

AR MA

ตัวอย่างที่ 2.6

แบบจำลองที่เหมาะสมน่าจะเป็น $MA(2)$ ซึ่งประมาณค่าได้ด้วยคำสั่ง `arima` โดยกำหนดอันดับเป็น `c(0,0,2)`

ข้อมูล p ของ AR q ของ MA

```
> m1<-arima(ret, order=c(0,0,2))
> m1
Call:
arima(x = ret, order = c(0, 0, 2))

Coefficients:
         ma1     ma2   intercept
      0.0886  0.1001      0.0057
s.e.  0.0469  0.0487      0.0046

sigma^2 estimated as 0.006795:  log likelihood = 485.64,  aic = -963.28
```

$\hat{\theta}_1$ $\hat{\theta}_2$ $\hat{\mu}$

ตัวอย่างที่ 2.6

เราสามารถพิจารณาความพอเพียงของแบบจำลอง m1 ได้ด้วยการทดสอบ L-B สำหรับ residuals ดังคำสั่งต่อไปนี้

```
> Box.test(m1$residuals, lag=12, type="Ljung")
^^IBox-Ljung test
data:  m1$residuals
X-squared = 13.6075, df = 12, p-value = 0.3265
> pv=1-pchisq(13.6075,12-2)
> pv
[1] 0.1916591
```

$\chi^2 = 13.6075$ เทียบกับ cv $\chi^2_{df=m-q=12-2=10}$

พบว่า $\chi^2 <$ cv. χ^2 ไม่สามารถปฏิเสธ $H_0: \varepsilon_t$ เป็น WN

แสดงว่า MA(2) เพียงพอที่จะอธิบาย ret.

$$y_t = \mu + \varepsilon_t + \theta_1 \varepsilon_{t-1} + \theta_2 \varepsilon_{t-2}$$

$h \rightarrow h+1$

การพยากรณ์ไปข้างหน้า 1 คาบ

ค่าจริง

พิจารณาแบบจำลอง $MA(1)$: $y_{h+1} = \mu + \varepsilon_{h+1} + \theta_1 \varepsilon_h$ ตัวพยากรณ์ที่จะทำให้ค่าฟังก์ชันสูญเสียน้อยที่สุดคือค่าคาดการณ์แบบมีเงื่อนไข (conditional expectation)

$E(\varepsilon_{h+1}) = 0$

$\hat{y}_h(1) = E(Y_{h+1} | F_h) = E(\mu + \varepsilon_{h+1} + \theta_1 \varepsilon_h | F_h) = \mu + \cancel{E(\varepsilon_{h+1} | F_h)} + \theta_1 \varepsilon_h$

ค่าจริง - ค่าพยากรณ์

และค่าผิดพลาดจากการพยากรณ์เท่ากับ $e_h(1) = y_{h+1} - \hat{y}_h(1)$

$= 0 + \varepsilon_{h+1} + 0 = \varepsilon_{h+1}$

และค่าแปรปรวนจากการพยากรณ์ไปข้างหน้าหนึ่งคาบเท่ากับ
$Var(e_h(1)) = Var(\varepsilon_{h+1}) = \sigma^2_{\varepsilon}$

ในทางปฏิบัติค่า $\boxed{\varepsilon_h}$ จะสามารถคำนวณได้สองวิธีคือ

- สมมุติให้ $\varepsilon_0 = 0$

$y_1 = \mu + \varepsilon_1 + \theta_1 \cancel{\varepsilon_0} \Rightarrow \varepsilon_1 = y_1 - \mu$

$y_2 = \mu + \varepsilon_2 + \theta_1 \varepsilon_1 \qquad \varepsilon_2 =$

- หรือใช้ค่า $\hat{\varepsilon}_h$ ที่เป็นค่า residual จากการประมาณค่า $MA(1)$

95 % C.I. $\hat{y}_h(1) \pm 1.96 \, sd(e_h(1))$

การพยากรณ์ไปข้างหน้า 2 คาบ

พิจารณา $y_{h+2} = \mu + \varepsilon_{h+2} + \theta_1 \varepsilon_{h+1}$ ตัวพยากรณ์ที่จะทำให้ค่าฟังก์ชันสูญเสียน้อยที่สุดคือค่าคาดการณ์แบบมีเงื่อนไข

$\hat{y}_h(2) =$

และค่าผิดพลาดจากการพยากรณ์เท่ากับ $e_h(2) =$

และค่าแปรปรวนจากการพยากรณ์ไปข้างหน้าสองคาบเท่ากับ

$Var(e_h(2)) =$