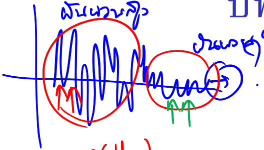
บทที่ 3 เราศึกษา อธิบาย $y_t$ (log return) โดยใช้แบบจำลอง ARMA.
→ พยากรณ์ $y_t$ ⇒ Conditional Expectation $y_t$
หรือ Cond. mean ของ $y_t$

# EC435

# บทที่ 5 แบบจำลอง GARCH

ข้อมูลทางการเงิน




เฉลิมพงษ์ คงเจริญ ©2556-63

var($y_t$) ไม่คงที่ และสลับกันระหว่าง
เกาะกลุ่ม (Clustering)

คณะเศรษฐศาสตร์ มหาวิทยาลัยธรรมศาสตร์

- ช่วงที่ var สูง ก็จะสูงติดๆกัน
- ช่วงที่ var ต่ำ ก็จะต่ำติดๆกัน.

October 14, 2020

↳ ความผันผวน → นิยาม?

- อธิบายความผันผวน ด้วยแบบจำลอง

# แบบจำลอง GARCH: บทนำ

เป้าหมายที่สำคัญประการหนึ่งของการศึกษาเศรษฐมิติทางการเงินคือการศึกษาความผันผวน (volatility) ของผลได้ตอบแทนของสินทรัพย์

ความเสี่ยง ← อธิบาย + พยากรณ์ ⇒ Portfolio ของหลักทรัพย์

# แบบจำลอง GARCH: บทนำ

เป้าหมายที่สำคัญประการหนึ่งของการศึกษาเศรษฐมิติทางการเงินคือการศึกษาความผันผวน (volatility) ของผลได้ตอบแทนของสินทรัพย์

ความผันผวนจะหมายถึงความเบี่ยงเบนมาตรฐานที่มีเงื่อนไข (conditional standard deviation) ของผลได้ตอบแทนของสินทรัพย์

หรือ Conditional Variance

หมายถึงข้อมูลที่เหลืออย่างประมาณ — เช่น Conditional on Info ที่เวลา t

$E(- | F_t)$

ไม่ได้ขึ้นกับ Info ที่ t

$Y_t$ — log return

หาค่าเฉลี่ย

① $E(Y_t)$ — Unconditional mean

② $E(Y_t | F_{t-1})$ — Conditional mean

AR(1)

ถ้า $Y_t = \phi Y_{t-1} + \varepsilon_t$

1) ถ้าเราไม่มีข้อมูลในอดีต $\Rightarrow E(Y_t) = 0$

2) ถ้าเรามีข้อมูลในอดีต $Y_1, \dots, Y_{t-1} \Rightarrow E(Y_t | F_{t-1}) = E(\phi Y_{t-1} + \varepsilon_t | F_{t-1}) = \phi Y_{t-1} + 0$

# แบบจำลอง GARCH: บทนำ

เป้าหมายที่สำคัญประการหนึ่งของการศึกษาเศรษฐมิติทางการเงินคือการศึกษาความผันผวน (volatility) ของผลได้ตอบแทนของสินทรัพย์

ความผันผวนจะหมายถึงความเบี่ยงเบนมาตรฐานที่มีเงื่อนไข (conditional standard deviation) ของผลได้ตอบแทนของสินทรัพย์

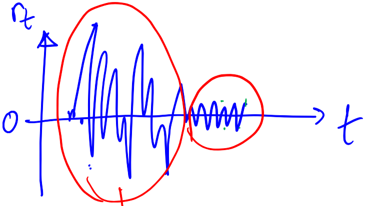
ความผันผวนที่คำนวณได้ถูกนำไปใช้ประยุกต์ในการคำนวณ Value-at-Risk(VaR) ของการจัดการความเสี่ยง, การจัดสรรการลงทุนภายใต้วิธีการ mean-variance และการเพิ่มประสิทธิภาพในการทำนาย

# ความผันผวน (volatility)

เราไม่สามารถสังเกตความผันผวนของสินทรัพย์เช่นหลักทรัพย์ได้เหมือนกับการสังเกตเห็นราคาทรัพย์สินหรือการคำนวณผลตอบแทนได้จากราคาทรัพย์สิน

return $(r_t) = \ln(P_t / P_{t-1})$

สังเกต




ความผันผวน ⇒ เกาะกลุ่ม (ช่วงที่ผันผวนสูง ก็จะผันผวนสูงติดกัน)

ต่ำ ต่ำ

Clustering


สร้างตัวจับ ความผันผวน → $r_t^2$

→ $|r_t|$

# ความผันผวน (volatility)

เราไม่สามารถสังเกตความผันผวนของสินทรัพย์เช่นหลักทรัพย์ได้เหมือนกับการสังเกตเห็นราคาทรัพย์สินหรือการคำนวณผลตอบแทนได้จากราคาทรัพย์สิน

ตัวอย่างการคำนวณความผันผวนในอดีต กำหนดให้ $P_t$ เป็นราคาหลักทรัพย์ และ $y_t = \Delta \ln(P_t)$ เป็นผลได้ตอบแทน $y_t^2, |y_t|, |y_t|^\delta$ มีสหสัมพันธ์ค่อนข้างสูง และเรามักใช้ค่าดังกล่าวเป็นตัวแทนของความผันผวน

จากการดู ความผันผวนเกาะกลุ่ม → ความผันผวนในช่วงเวลาติดกัน ต่างมีความสัมพันธ์

(เปลี่ยนแปลงตามเวลา)

⇒ สร้างแบบจำลองอธิบาย ความผันผวน

→ เป้าหมาย พยากรณ์ความผันผวน

ในหัวข้อ 3 เราพูดถึง แบบจำลองอธิบาย $Y_t$ (mean?)

(variance)

# ความผันผวน (volatility)

เราไม่สามารถสังเกตความผันผวนของสินทรัพย์เช่นหลักทรัพย์ได้เหมือนกับการสังเกตเห็นราคาทรัพย์สินหรือการคำนวณผลตอบแทนได้จากราคาทรัพย์สิน

ตัวอย่างการคำนวณความผันผวนในอดีต กำหนดให้ $P_t$ เป็นราคาหลักทรัพย์ และ $y_t = \Delta \ln(P_t)$ เป็นผลได้ตอบแทน $y_t^2, |y_t|, |y_t|^\delta$ มีสหสัมพันธ์ค่อนข้างสูง และเรามักใช้ค่าดังกล่าวเป็นตัวแทนของความผันผวน

ในปัจจุบันมีการคำนวณความผันผวนด้วยวิธีการอื่นๆเช่น Realized volatility และ Implied volatility ด้วย Black-Scholes

# การทดสอบ ARCH effect

กำหนดให้ $\varepsilon_t = y_t - \mu_t$ เป็น residuals ของ mean equation อาจจะเป็นแบบจำลอง $AR(p)$ หรือ $ARIMA(p,d,q)$

อธิบาย $y_t$ ด้วยแบบจำลอง เช่น ARMA(p,q) ตัวอย่าง อธิบาย $y_t$ ด้วย

AR(1) $y_t = \underbrace{\phi y_{t-1}}_{\text{อธิบายได้ด้วยแบบจำลอง}} + \underbrace{\varepsilon_t}_{\text{แบบจำลองอธิบายไม่ได้.}}$ – อธิบาย $y_t$ โดยเฉลี่ยค่า $y_t = ?$ เรียก mean equation

– ความผันผวน สัมพันธ์ variance $(E(Y_t - E(Y_t))^2)$ $r^2$

– พิจารณา $Y_t$ ใดๆ ตัว proxy (ตัวแทน) ของความผันผวน $Y_t$ - ค่าเฉลี่ย

นิยามของค่าเฉลี่ย ไม่มีเงื่อนไข (เป็นค่าเฉลี่ย E( ) โดยไม่มีข้อมูล Info)

1) Unconditional mean $E(Y_t) = 0$ เมื่อไม่ทราบว่า $Y_{t-i} = ?$ $E(Y_t) = 0$

2) Conditional Mean $E(Y_t | F_{t-1}) = E(\phi Y_{t-1} + \varepsilon_t | F_{t-1}) = \phi Y_{t-1} + 0$ ✓

ที่เวลา $t$ $Y_t = \phi Y_{t-1} + \varepsilon_t$ ✓

# การทดสอบ ARCH effect

proxy ของความผันผวน $(y_t - E(y_t|F_{t-1}))^2 = \varepsilon_t^2$

แทน $E(y_t|F_{t-1})$

กำหนดให้ $\varepsilon_t = y_t - \mu_t$ เป็น residuals ของ mean equation อาจจะเป็นแบบจำลอง $AR(p)$ หรือ $ARIMA(p,d,q)$

เราจะทดสอบว่าข้อมูลของเรามีลักษณะ conditional heteroskedasticity หรือไม่ ( **การทดสอบ ARCH effect**)

$\varepsilon_t^2$ เป็นตัวแทน ความผันผวน ณ. $t$

$\varepsilon_{t-1}^2$ " $t-1$ (period ที่ผ่านมา)

จากรูป ความผันผวน → ความผันผวน สัมพันธ์กัน ⇒ สร้างแบบจำลอง

ทดสอบ

1) มอง $\varepsilon_t^2$ เป็นตัวแปรอนุกรมเวลา ⇒ ACF, LB Q test

ความผันผวน ⇒ สร้างจาก Conditional variance ที่ไม่คงที่ (เปลี่ยนตาม $t$)

heteroskedasticity

⇒ ต้องเกิดความสัมพันธ์ ในรูป AR

# การทดสอบ ARCH effect

กำหนดให้ $\varepsilon_t = y_t - \mu_t$ เป็น residuals ของ mean equation อาจจะเป็นแบบจำลอง $AR(p)$ หรือ $ARIMA(p,d,q)$

เราจะทดสอบว่าข้อมูลของเรามีลักษณะ conditional heteroskedasticity หรือไม่ ( **การทดสอบ ARCH effect**)

**วิธีแรก** การทดสอบ Ljung-Box $Q(m)$ ค่ายกกำลังสองของ residuals ($\varepsilon_t^2$) โดยเราใช้ $\varepsilon_t^2$ เป็นตัวแทน conditional heteroskedasticity ดังนั้นหากค่าความแปรปรวนขึ้นอยู่ต่อกันจะต้องมีสหสัมพันธ์ระหว่างกัน

เราจะตั้งสมมุติฐานหลักที่ว่าค่าล่า $m$ คาบของค่ายกกำลังสองของ residuals ไม่มีสหสัมพันธ์ระหว่างกัน แสดงว่า ค่ายกกำลังสองของ residuals ไม่มี ARCH effect

$H_0: \rho_1 = \rho_2 = \cdots = \rho_m = 0$ [ $\rho_i$ คือ $Corr(\varepsilon_t^2, \varepsilon_{t-i}^2)$ ]

ถ้าข้อสมมุติหลักเป็นจริง แสดงว่าความผันผวนไม่ขึ้นกับความผันผวนในอดีต (ไม่มีลักษณะ ARCH Effect)

$LB\ Q(m) \sim \chi^2_{df=m}$ เกณฑ์ $LB\ Q(m) > CV$ ปฏิเสธ $H_0$ (มี ARCH Effect)

# การทดสอบ ARCH effect

**วิธีสอง** การทดสอบ Lagrange Multiplier (LM) โดยเราใช้ $\varepsilon_t^2$ เป็นตัวแทนของค่าความแปรปรวน ซึ่งหากเราต้องการทดสอบว่าค่าแปรปรวนขึ้นกับค่าแปรปรวนในอดีตหรือไม่ สามารถประมาณค่าสมการ

Reg

$$\varepsilon_t^2 = a_0 + a_1\varepsilon_{t-1}^2 + ... + a_m\varepsilon_{t-m}^2 + e_t \qquad (5.1)$$

และพิจารณาว่าค่าสัมประสิทธิ์มีนัยสำคัญเชิงสถิติต่างจากศูนย์หรือไม่ โดยสมมุติฐานหลักคือ $H_0$: $a_1 = a_2 = ... = a_m = 0$ หรือไม่มี ARCH effect

$H_1$: มี $a_i \neq 0$ สำหรับ $i$ บางตัว $i = 1, \dots, m$

ทดสอบ Overall Significance < F stat / LM stat > c.v. ปฏิเสธ Ho

ในทางปฏิบัติ ในการสร้างแบบจำลองอธิบาย $Y_t$ ด้วยแบบจำลองอธิบาย Cond. mean

ทดสอบแบบจำลอง 1) เพียงพอในการอธิบาย $Y_t$ [LB Q test กับ $\hat{\varepsilon}_t$]

2) $\hat{\varepsilon}_t$ มีความผันผวนที่สัมพันธ์ => สร้างแบบจำลอง [LBQ test กับ $\hat{\varepsilon}_t^2$]

# การทดสอบ ARCH effect

**วิธีสอง** การทดสอบ Lagrange Multiplier (LM) โดยเราใช้ $\varepsilon_t^2$ เป็นตัวแทนของค่าความแปรปรวน ซึ่งหากเราต้องการทดสอบว่าค่าแปรปรวนขึ้นกับค่าแปรปรวนในอดีตหรือไม่ สามารถประมาณค่าสมการ

$$\varepsilon_t^2 = a_0 + a_1\varepsilon_{t-1}^2 + ... + a_m\varepsilon_{t-m}^2 + e_t \qquad (5.1)$$

และพิจารณาว่าค่าสัมประสิทธิ์มีนัยสำคัญเชิงสถิติต่างจากศูนย์หรือไม่ โดยสมมุติฐานหลักคือ $a_1 = a_2 = ... = a_m = 0$ หรือไม่มี ARCH effect

เราสามารถทำการทดสอบได้โดยการประมาณค่าสมการ (5.1) จะได้ค่า $R^2$ แล้วไปคำนวณค่า $LM = TR^2$ โดยที่ $T$ คือจำนวนตัวอย่าง และ $LM \sim \chi^2_{df=m}$ เราจะปฏิเสธสมมุติฐานหลักถ้า $LM > \chi^2_{df=m}(1-\alpha)$

# ตัวอย่าง 5.1

ในหัวข้อนี้เราจะพิจารณาผลได้ตอบแทนรายเดือนในรูปล็อกของการลงทุนใน SET ซึ่งอยู่ในไฟล์ `mset.csv`

```
> mset <-read.csv("mset.csv",header=F)
> head(mset)
> lret_mset<-diff(log(mset$V1))
> library(forecast)
> auto.arima(lret_mset)
Series: lret_mset
ARIMA(2,0,2) with zero mean

Coefficients:
         ar1      ar2      ma1     ma2
      1.1154  -0.9020  -1.0542  0.9141
s.e.  0.0511   0.0754   0.0646  0.0740

sigma^2 estimated as 0.006689:  log likelihood=489.01
AIC=-968.03   AICc=-967.89   BIC=-947.47
> model1<-arima(lret_mset, order=c(2,0,2))
```

monthly

→ log return ของ SET

→ package ที่ใช้หา p,q ใน ARMA(p,q)

ARMA(2,2)

เก็บผล

ARMA(2,2)

$\hat{\varepsilon}_t$ จะเก็บไว้ใน model1$residuals

ทดสอบ 1) ARMA(2,2) เพียงพอในการอธิบาย $y_t$ (LBQ test กับ $\hat{\varepsilon}_t$) → Box.test(model1$residual)

2) เพิ่มส่วนความผันผวน ? (LBQ test กับ $\hat{\varepsilon}_t^2$)

# ตัวอย่าง 5.1

แต่หากเราพิจารณา Ljung-Box test ของค่ากำลังของ residuals กำลังสอง หรือทดสอบ LM ARCH effect จะเห็นได้ว่ายังมีผลของ ARCH เหลืออยู่ใน residuals โดยในการทดสอบ LM ARCH effect จะต้องใช้คำสั่ง `ArchTest(series, q)` จาก `library(FinTS)` โดยต้องระบุ series ที่ต้องการทดสอบและค่าล่า ($q$)

วิธีการแรก

① < ACF ของ $\varepsilon_t^2$

```
> acf(model1$residuals^2)
> Box.test(model1$residuals^2,lag=12, type="Ljung")

^^IBox-Ljung test

data:  model1$residuals^2
X-squared = 64.5086, df = 12, p-value = 3.36e-09
> library(FinTS)
> ArchTest(model1$residuals)

^^IARCH LM-test; Null hypothesis: no ARCH effects

data:  model1$residuals
Chi-squared = 32.4235, df = 12, p-value = 0.00119
```

m=12

P-value < α (0.05)
ปฏิเสธ $H_0 : \rho_1 = \ldots = \rho_{12} = 0$
และสรุปว่ามี ARCH effect

② ทดสอบ ARCH effect ด้วย LM test.

P-value < α (0.05)
ปฏิเสธ $H_0: \alpha_1 = \ldots = \alpha_{12} = 0$
และสรุปว่ามี ARCH effect.

เมื่อตลาดความผันผวน ส่งความเสี่ยงเพิ่มขึ้น ⇒ สร้างแบบจำลอง

# แบบจำลอง ARCH

ความผันผวนใน $t$ ขึ้นอยู่กับ ความผันผวนในอดีต $t-1, \dots,$

แบบจำลองอนุกรมเวลาที่เราสร้างขึ้นมาในบทที่ผ่านมา เราพยายามที่จะอธิบาย conditional mean

Proxy ของความผันผวน $\varepsilon_t^2 = (Y_t - \mu_t)^2$

Cond mean (เช่นจาก ARMA)

เชื่อมโยงกับ variance

ใช้ Conditional variance เป็นตัววัด ความผันผวน

$$E\left((Y_t - \mu_t)^2 \mid F_{t-1}\right) \equiv \sigma_t^2$$

เปลี่ยนแปลงตามเวลา

สร้างแบบจำลอง อธิบาย

Engle (1982) - ใช้แนวคิด AR อธิบาย ความผันผวน

omega

$$\boxed{\sigma_t^2 = \omega + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2 + \dots + \alpha_p \varepsilon_{t-p}^2}$$

⇒ Autoregressive Cond. Hetero. (ARCH(p))

ใช้อธิบาย Conditional variance

# แบบจำลอง ARCH

แบบจำลองอนุกรมเวลาที่เราสร้างขึ้นมาในบทที่ผ่านมา เราพยายามที่จะอธิบาย conditional mean

ตัวอย่างเช่น กำหนดให้ $y_t$ อนุกรมเวลานิ่ง เช่น ผลได้ตอบแทน แล้วกำหนดให้ $y_t$ สามารถอธิบายได้ด้วยแบบจำลอง

$$y_t = \mu_t + \varepsilon_t \qquad (5.2)$$

โดยที่ $\mu_t$ เป็นส่วนอธิบายค่าเฉลี่ย (mean equation) และ $\varepsilon_t$ เป็น iid ที่มีค่าเฉลี่ยเท่ากับศูนย์

# แบบจำลอง ARCH

แบบจำลองอนุกรมเวลาที่เราสร้างขึ้นมาในบทที่ผ่านมา เราพยายามที่จะอธิบาย conditional mean

ตัวอย่างเช่น กำหนดให้ $y_t$ อนุกรมเวลานิ่ง เช่น ผลได้ตอบแทน แล้วกำหนดให้ $y_t$ สามารถอธิบายได้ด้วยแบบจำลอง

cond mean

$$y_t = \mu_t + \underline{\varepsilon_t} \qquad (5.2)$$

โดยที่ $\mu_t$ เป็นส่วนอธิบายค่าเฉลี่ย (mean equation) และ $\varepsilon_t$ เป็น iid ที่มีค่าเฉลี่ยเท่ากับศูนย์

เราจะสมมุติให้ความแปรปรวนที่ขึ้นอยู่กับข้อมูล ณ คาบที่ $t-1$ $Var_{t-1} = \sigma_t^2$ เขียนเป็นสมการต่อไปนี้

Cond var.

$$\underline{\sigma_t^2} = \omega + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2 + ... + \alpha_p \varepsilon_{t-p}^2 \qquad (5.3)$$

# แบบจำลอง ARCH

เนื่องจาก $\varepsilon_t$ มีค่าเฉลี่ยเท่ากับศูนย์ $Var_{t-1}(\varepsilon_t) = E_{t-1}(\varepsilon_t^2) = \sigma_t^2$ ดังนั้นเราสามารถเขียนสมการ (5.3) ได้เป็น

$$\varepsilon_t^2 = \omega + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2 + ... + \alpha_p \varepsilon_{t-p}^2 + u_t \qquad (5.4)$$

โดยที่ $u_t = \varepsilon_t^2 - E_{t-1}(\varepsilon_t^2)$ ซึ่งเป็นกระบวนการไวท์นอซที่มีค่าเฉลี่ยเท่ากับศูนย์ สมการ (5.2)-(5.4) รวมกันเรียกว่า autoregressive conditional heteroskedasticity (ARCH) หรือ แบบจำลอง $ARCH(p)$

# แบบจำลอง ARCH

เนื่องจาก $\varepsilon_t$ มีค่าเฉลี่ยเท่ากับศูนย์ $Var_{t-1}(\varepsilon_t) = E_{t-1}(\varepsilon_t^2) = \sigma_t^2$ ดังนั้นเราสามารถเขียนสมการ (5.3) ได้เป็น

$$\varepsilon_t^2 = \omega + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2 + ... + \alpha_p \varepsilon_{t-p}^2 + u_t \qquad (5.4)$$

โดยที่ $u_t = \varepsilon_t^2 - E_{t-1}(\varepsilon_t^2)$ ซึ่งเป็นกระบวนการไวท์นอซที่มีค่าเฉลี่ยเท่ากับศูนย์ สมการ (5.2)-(5.4) รวมกันเรียกว่า autoregressive conditional heteroskedasticity (ARCH) หรือ แบบจำลอง $ARCH(p)$

รูปแบบของ $ARCH(p)$ อีกแบบจำลองสามารถแสดงได้ดังนี้

ARMA(p,q)

Cond mean $\quad y_t = \mu_t + \varepsilon_t$ [ไม่ได้สมมุติว่า $\varepsilon_t \sim WN(0,\sigma^2)$]

$* \quad \varepsilon_t = z_t \sigma_t$ ?

Cond Variance $\quad \sigma_t^2 = \omega + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2 + ... + \alpha_p \varepsilon_{t-p}^2 \qquad (5.5)$ – ARCH(p)

$y_t$ ถูกอธิบาย ARMA(p,q)+ARCH(p)

WN(0,1)

โดยที่ $z_t$ เป็นตัวแปรสุ่ม iid (0,1) ตัวอย่างเช่น N(0,1)

จาก สมการ (5.5) ⇒ อธิบายตามพฤติกรรม ของ $y_t$

# คุณสมบัติของ ARCH(1)

Charecteristic ของ $y_t$ – $E(y_t)$, $E(y_t|F_{t-1})$, $Var(y_t)$, $Var_t(y_t)$ $= E((y_t - E(y_t|F_{t-1}))^2|F_{t-1})$

สมมุติว่าเราพิจารณาแบบจำลอง $ARCH(1)$ โดยที่

ง่ายที่สุด $\mu_t = 0$

$$\boxed{y_t = \varepsilon_t} \quad (5.6)$$

$$\varepsilon_t = z_t\sigma_t \quad (5.7)$$

สมมุติ $\boxed{z_t \sim WN(0,1)}$

ARCH(1)

$$\sigma_t^2 = \omega + \alpha_1\varepsilon_{t-1}^2 \quad (5.8)$$

เราไม่มีคุณสมบัติ $\cancel{E(X_t y_t) = E(X_t)\cdot E(y_t)}$

1) $E(y_t) = E(\varepsilon_t) \overset{(5.7)}{=} E(z_t \cdot \sigma_t)$

เดิมสมมุติ $= 0$

ตัวแปร

รู้อยู่แล้ว t-1

$\overset{L.I.E}{=} E[E(z_t\sigma_t|F_{t-1})]$

$\sigma_t$: $\omega + \alpha_1\varepsilon_{t-1}^2$ (ทราบที่ ณ. t-1)

$= E[\sigma_t E(z_t|F_{t-1})]$

ไม่ทราบ $z_t$ ? $= E(z_t) = 0$

Uncond mean $= E[\sigma_t \cdot 0] = E(0) = 0$

$E(\varepsilon_t) = 0$ [เพราะฉะนั้น $y_t = \varepsilon_t \Rightarrow E(y_t) = 0$]

เพิ่มเติม Law of Iterated Expectation (L.I.E.)

$X_i$ คือ ส่วนสูง

$E(X_i) =$

ประชากร < ช ⇒ $E(X_i|ช)$; ญ ⇒ $E(X_i|ญ)$ ← Cond Expected value

$E(X_i) = P(ช) \cdot E(X_i|ช) + P(ญ) \cdot E(X_i|ญ)$

Uncond Exp. value ของ $X_i$

Unconditional Expected value

= Unconditional Expected value ของ Conditional Expected value

$E(X) = E[E(X|เพศ)]$

# คุณสมบัติของ ARCH(1)

unconditional mean ของ $\varepsilon_t$ คำนวณได้ดังนี้

$$E(\varepsilon_t) = 0$$

$y_t = \varepsilon_t$

Conditional mean ของ $y_t$ $(E(y_t | F_{t-1})) \overset{\Downarrow}{=}$ Cond mean ของ $\varepsilon_t$ $(E(\varepsilon_t | F_{t-1}))$

(2) $E(\varepsilon_t | F_{t-1}) \overset{(5.7)}{=} E(z_t \sigma_t | F_{t-1}) = \sigma_t \underbrace{E(z_t | F_{t-1})}_{= E(z_t) = 0} = \sigma_t \cdot 0 = \underline{\underline{0}}$

$\sigma_t^2 = \omega + \alpha \varepsilon_{t-1}^2$ ทราบแล้ว $t-1$

$z_t \sim WN(0,1)$

$$E(\overset{\varepsilon_t}{y_t} | F_{t-1}) = 0$$

# คุณสมบัติของ ARCH(1)

unconditional mean ของ $\varepsilon_t$ คำนวณได้ดังนี้

$E(\varepsilon_t) =$

unconditional var ของ $y_t = \varepsilon_t$ $(Var(y_t) = Var(\varepsilon_t))$

ไม่ได้สมมุติ $Var(\varepsilon_t)$?

(3) unconditional variance ของ $\varepsilon_t$ คำนวณได้โดย

$Var(\varepsilon_t) = E(\varepsilon_t - E(\varepsilon_t))^2 = E(\varepsilon_t^2) \overset{(5.7)}{=} E(z_t^2 \cdot \sigma_t^2)$

$\overset{LIE}{=} E[E(z_t^2 \sigma_t^2 | F_{t-1})] = E[\sigma_t^2 E(z_t^2 | F_{t-1})]$

$\sigma_t^2 = \omega + \alpha\varepsilon_{t-1}^2$

สมมุติ $E(z_t^2) = var(z_t) = 1$

$= E[\sigma_t^2 \cdot 1] = E[\sigma_t^2]$ $E(z_t)=0$

$E(\varepsilon_t^2) \overset{(5.8)}{=} E[\omega + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2] = \omega + \alpha_1 E(\varepsilon_{t-1}^2)$

สมมุติ $= E(\varepsilon_t^2)$

$= \omega + \alpha_1 E(\varepsilon_t^2)$

uncond var $\varepsilon_t$ $(Var(\varepsilon_t))$ $= var(y_t)$

$var(\varepsilon_t) = var(\varepsilon_{t-1})$

สมมุติ $E(\varepsilon_t^2) = E(\varepsilon_{t-1}^2) \Rightarrow$

$\boxed{E(\varepsilon_t^2) = \frac{\omega}{1-\alpha}}$

# คุณสมบัติของ ARCH(1)

หากต้องการให้ $\varepsilon_t$ เป็นกระบวนการนิ่ง $Var(\varepsilon_t) = E(\varepsilon_t^2) = E(\varepsilon_{t-1}^2)$ ดังนั้น $Var(\varepsilon_t) = \frac{\omega}{1-\alpha_1}$ และเงื่อนไขที่จะทำให้ค่าความแปรปรวนเป็นบวกคือ $0 \le \alpha_1 < 1$

โมเมนต์ที่สี่เท่ากับ $E(\varepsilon^4) = 3\frac{\omega(1+\alpha_1)}{(1-\alpha_1)(1-3\alpha_1^2)}$

④ Conditional variance ของ $Y_t$ $\left(Var(\overset{\varepsilon_t}{Y_t}|F_{t-1}) = Var_{t-1}(Y_t)\right)$

= Conditional variance $\varepsilon_t$

$$Var(\varepsilon_t|F_{t-1}) = E\left[\left(\varepsilon_t - \underbrace{E(\varepsilon_t|F_{t-1})}_{=0}\right)^2 \Big| F_{t-1}\right]$$

②

อธิบายความผันผวนของ $Y_t$

Cond var. ของ $Y_t$ $= \omega + \alpha_1\varepsilon_{t-1}^2$

$$= E[\varepsilon_t^2|F_{t-1}] = E[z_t^2 \cdot \sigma_t^2|F_{t-1}]$$

$$= \sigma_t^2 \cdot \underbrace{E(z_t^2|F_{t-1})}_{=E(z_t^2)=1} = \sigma_t^2$$

สมมุติ

$\| \; Y_t = \varepsilon_t$

④ $\boxed{\text{Cond variance ของ } \varepsilon_t = \sigma_t^2 \overset{ARCH(1)}{=} \omega + \alpha_1\varepsilon_{t-1}^2}$

# คุณสมบัติของ ARCH(1)

สมการ cond mean $y_t = \mu_t + \varepsilon_t$

ไม่ว่า $\mu_t$ จะเป็นอะไรก็ เราสามารถพิสูจน์ได้ว่า Cond var ของ $y_t$ = สมการ ARCH

หากต้องการให้ $\varepsilon_t$ เป็นกระบวนการนิ่ง $Var(\varepsilon_t) = E(\varepsilon_t^2) = E(\varepsilon_{t-1}^2)$ ดังนั้น $Var(\varepsilon_t) = \frac{\omega}{1-\alpha_1}$ และเงื่อนไขที่จะทำให้ค่าความแปรปรวนเป็นบวกคือ $0 \le \alpha_1 < 1$

โมเมนต์ที่สี่เท่ากับ $E(\varepsilon^4) = 3\frac{\omega(1+\alpha_1)}{(1-\alpha_1)(1-3\alpha_1^2)}$

ดังนั้นเงื่อนไขที่ทำให้โมเมนต์ที่สี่มีค่าจำกัดคือ $0 \le \alpha_1 < 1/3$ และค่าความโด่งเท่ากับ

$$\kappa = \frac{E(\varepsilon_t^4)}{[Var(\varepsilon_t)]^2} = 3\frac{\omega(1+\alpha_1)}{(1-\alpha_1)(1-3\alpha_1^2)} \times \frac{(1-\alpha_1)^2}{\omega^2} = 3\frac{1-\alpha_1^2}{1-3\alpha_1^2}$$

Cond var >0

ARCH(1) $\sigma_t^2 = \omega + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2$

ตัวพารามิเตอร์ ของ $\omega$, $0<\alpha_1<1$ (ถ้า $\alpha_1>1$ แล้ว $var(\varepsilon_t)<0$)

$\ge 0$ ($var(\varepsilon_t) \ge 0$)

$\omega \ge 0$, $0<\alpha_1<1$

# การประมาณค่าแบบจำลอง $ARCH(1)$

→ MLE เราต้องมีข้อ
สมมุติ เกี่ยวกับการแจกแจง

การประมาณค่าพารามิเตอร์ในแบบจำลอง $ARCH(1)$ สามารถดำเนินการได้ด้วย conditional maximum likelihood หากสมมุติให้ $z_t$ มีการแจกแจงแบบปกติมาตรฐาน จากสมการ (5.7) เราจะได้ $\varepsilon_t \sim N(0, \sigma_t^2)$ และ

$\varepsilon_t = z_t \cdot \sigma_t$

WN(0,1)

$$\ln L(\omega, \alpha_1; \boldsymbol{y}) = -\frac{1}{2}\sum_{t=1}^{T}\ln(2\pi) - \frac{1}{2}\sum_{t=1}^{T}\ln(\sigma_t^2) - \sum_{t=1}^{T}\left(\frac{y_t^2}{2\sigma_t^2}\right)$$

⇓ รูปแบบ dist.

โดยที่ค่า $\varepsilon_0$ และ $\sigma_0^2$ เท่ากับค่าเฉลี่ย อย่างไรก็ตามเราสามารถกำหนดการแจกแจงรูปแบบอื่นที่มีค่าเฉลี่ยเท่ากับศูนย์และค่าความแปรปรวนเท่ากับหนึ่ง เช่น standardized student's t distribution

เราสามารถสมมุติ dist. อื่น ที่มี ค่าเฉลี่ย=0, var=1
เช่น standardized t แทนค่า Normal.

⇓

หางหนากว่า Normal ⇒ parameter ระบุขนาด ของหาง (d.f.)

# แบบจำลอง GARCH

จาก ARCH(p) → ต้อง p=? AIC/BIC เลือก #parameter ↑ มาก

สร้างแบบจำลองมีพารามิเตอร์น้อยๆ ในทางปฏิบัติ ARCH(p) ที่เลือก มักจะมี order ยาว (p สูง)

ถ้าเราทดสอบ ARCH effect แล้วพบว่าอนุกรมเวลามีผลของ ARCH เราสามารถใช้แบบจำลอง $ARCH(p)$ เพื่อประมาณค่าความผันผวนที่เปลี่ยนแปลงตามเวลา

อย่างไรก็ตามในทางปฏิบัติ ค่าล่า $p$ ที่เหมาะสมสำหรับแบบจำลอง $ARCH(p)$ ค่อนข้างที่จะยาว

↳ Engle & Bollerslev (1986) เสนอแบบจำลองใช้แนวคิดจาก ARMA

lag ของ $\sigma_t^2$

ARCH

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2 + \dots + \alpha_p \varepsilon_{t-p}^2 + \beta_1 \sigma_{t-1}^2 + \dots + \beta_q \sigma_{t-q}^2$$

⇓

Generalized ARCH: GARCH$(\overset{\varepsilon_t^2}{p}, \overset{\sigma_t^2}{q})$ ⇒ GARCH(p,q) ที่ order ต่ำๆ สามารถใช้อธิบาย ARCH(p สูงๆ)

[ARMA(1,1) → AR(∞)]

# แบบจำลอง GARCH

ถ้าเราทดสอบ ARCH effect แล้วพบว่าอนุกรมเวลามีผลของ ARCH เราสามารถใช้แบบจำลอง $ARCH(p)$ เพื่อประมาณค่าความผันผวนที่เปลี่ยนแปลงตามเวลา

อย่างไรก็ตามในทางปฏิบัติ ค่าล่า $p$ ที่เหมาะสมสำหรับแบบจำลอง $ARCH(p)$ ค่อนข้างที่จะยาว

Bollerslev (1986) ได้เสนอรูปแบบของสมการความแปรปรวน

Cond Var

GARCH(p,q)

$$\sigma_t^2 = \omega + \sum_{i=1}^{p} \alpha_i \varepsilon_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^{q} \beta_j \sigma_{t-j}^2 \qquad (5.12)$$

โดยที่มีเงื่อนไข $\alpha_i$ $(i = 1, ..., p)$ และ $\beta_j$ $(j = 1, ..., q)$ มีค่าเป็นบวก สมการที่ (5.2) และ (5.12) รวมกันเรียกว่าแบบจำลอง Generalized ARCH หรือ $GARCH(p, q)$

# ARMA representation of GARCH

Cond mean $Y_t = \mu_t + \varepsilon_t$ — 1

$\varepsilon_t = Z_t \cdot \sigma_t$ — 2

แบบจำลอง *GARCH* สามารถเขียนให้อยู่ในรูปของแบบจำลอง *ARMA* ของค่า residuals ยกกำลังสอง ตัวอย่างเช่นในแบบจำลอง *GARCH*(1, 1)

Cond var GARCH (1,1) —

$$\sigma_t^2 = \omega + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2 + \beta_1 \sigma_{t-1}^2 \qquad (5.13)$$ — 3

เราสามารถหาคุณลักษณะของ $\varepsilon_t$

1) $E(\varepsilon_t) = 0$

2) $E(\varepsilon_t \mid F_t) = 0$

uncond var

3) $Var(\varepsilon_t) = E(\varepsilon_t^2) = \dfrac{\omega}{1-\alpha_1-\beta_1}$

Cond var

4) $Var_{t-1}(\varepsilon_{t-1}) = \sigma_t^2 = \omega + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2 + \beta_1 \sigma_{t-1}^2$ ⇒ Cond var ของ $Y_t$

ค่าพารามิเตอร์ ภายใต้เงื่อนไข $\omega \geq 0, \alpha_1 \geq 0, \beta_1 \geq 0$, $\alpha_1 + \beta_1 < 1$

- *GARCH*(1, 1) จะเป็นอนุกรมนิ่งถ้า $\alpha_1 + \beta_1 < 1$

# ARMA representation of GARCH

- หากเราสมมุติให้แบบจำลองเป็นอนุกรมนิ่ง unconditional variance)ของ $\varepsilon_t$ จะเท่ากับ

# ARMA representation of GARCH

ในกรณี $GARCH(p,q)$

- เราสามารถเขียนแบบจำลองดังกล่าวให้อยู่ในรูป $ARMA(\max(p,q),q)$ ของ residuals ยกกำลังสอง
- แบบจำลองจะเป็นอนุกรมนิ่งถ้า $\sum_{i=1}^{p}\alpha_i + \sum_{j=1}^{q}\beta_j < 1$
- ความแปรปรวนที่ไม่มีเงื่อนไข (unconditional variance)ของ $\varepsilon_t$ จะเท่ากับ

$$Var(\varepsilon_t) = \frac{\omega}{1 - \underbrace{\left(\sum_{i=1}^{p}\alpha_i + \sum_{j=1}^{q}\beta_j\right)}_{<1}}$$

GARCH(p,q) => order p,q ? ใช้ AIC/BIC

→ ในทางปฏิบัติ : ข้อมูลทางการเงิน ส่วนมาก สามารถอธิบายได้ด้วย

* GARCH(1,1) * → cond var

# คุณลักษณะเฉพาะของแบบจำลอง GARCH

GARCH(1,1) $\sigma_t^2 = \omega + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2 + \beta_1 \sigma_{t-1}^2$

ในงานเชิงประจักษ์นักวิจัยได้พบคุณลักษณะหลายประการของความผันผวนของข้อมูลทางการเงิน

ผันผวน t-1 สูง → ผันผวน t สูง

1. volatility clustering ในแบบจำลอง $GARCH(1,1)$ ค่าที่ประมาณได้จากข้อมูลรายสัปดาห์และรายวันของ $\beta_1$ จะมีค่าประมาณ 0.9

   ข้อสมมุติว่า $z_t \sim N$ ไม่ค่อยเหมาะสม

2. หางอ้วน(fat tails) Bollerslev แสดงให้เห็นว่าภายใต้เงื่อนไขบางประการเขาสามารถแสดงให้เห็นว่า $GARCH(1,1)$ จะให้ค่าเคอร์โทซิสที่มากกว่า 3
3. ความผันผวนย้อนกลับมาที่ดุลยภาพ(volatility mean reversion) แม้ว่าความผันผวนจะสูงขึ้นในบางช่วงแต่สุดท้ายแล้วจะย้อนกลับไปยังดุลยภาพระยะยาว

# การประมาณค่าแบบจำลอง GARCH → MLE

แบบจำลอง $GARCH(p,q)$ สามารถเขียนในรูปแบบ

ARMA(p,q)

Cond mean $$y_t = \mu_t + \varepsilon_t \qquad (5.15)$$ — หรือเขียน $\varepsilon_t = z_t \sigma_t$

$z$

Cond var — $$\sigma_t^2 = \omega + \sum_{i=1}^{p} \alpha_i \varepsilon_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^{q} \beta_j \sigma_{t-j}^2 \qquad (5.16)$$

default

หากเราสมมุติให้ $\varepsilon_t \sim N$ เราสามารถเขียน log-likelihood function ของแบบจำลอง $GARCH(p,q)$ ได้

$$\log L = -\frac{1}{2}\sum_{t=1}^{T}\ln(2\pi) - \frac{1}{2}\sum_{t=1}^{T}\ln(\sigma_t^2) - \sum_{t=1}^{T}\left(\frac{y_t^2}{2\sigma_t^2}\right) \qquad (5.17)$$

โดยที่หลังจากที่เราประมาณค่าพารามิเตอร์ดังกล่าวแล้ว เราจะได้ค่า $\sigma_t$ สำหรับ $t = 1, \ldots, T$

# การตรวจสอบหลังจากการประมาณค่า GARCH

1) แบบจำลองเพียงพอในการอธิบาย $y_t$ GARCH (p,q)

- ถ้าแบบจำลองที่เราสร้างขึ้นสามารถอธิบายความสัมพันธ์ระหว่างอนุกรมกับตัวเองในอดีตด้วย (1.1) conditional mean และ (1.2) conditional variance ดังนั้นจะต้องไม่เหลือค่าสหสัมพันธ์ในตัวเองของ standardized residuals และ squared standardized residuals (L-B test)
- เราสามารถทดสอบ LM ARCH ของ residuals เพื่อดู ARCH effect ก็ได้

② สมมุติ $Z_t \sim N$ แบบจะสอง ?

- ในแบบจำลอง *GARCH* เราสมมุติให้ค่าคาดเคลื่อนมีการแจกแจงแบบปกติดังนั้นหากแบบจำลองถูกกำหนดอย่างถูกต้อง standardized residuals จะต้องมีการแจกแจกแบบปกติ โดยในที่นี้เราจะทำการทดสอบการแจกแจงปกติ

(1.1) พิจารณา residuals (เดิม $\varepsilon_t \sim WN$) แต่กรณี GARCH เราสมมุติ $Z_t \sim WN$

โดยที่ $Z_t = \dfrac{\varepsilon_t}{\sigma_t} \sim WN(0,1)$ ⇒ ในการทดสอบ $H_0: Z_t \sim WN$

ทดสอบ $\hat{Z}_t = \dfrac{\hat{\varepsilon}_t}{\hat{\sigma}_t}$ ← residual, ← predicted cond S.D. เป็น WN.

standardized residuals

ถ้า $\hat{Z}_t$ เป็น WN แสดงว่าไม่มีความสัมพันธ์เหลือใน cond mean eq ⇒ ARMA เพียงพอ

# ตัวอย่างที่ 5.2

(1.2) พิจารณา $\hat{z}_t^2$ → ถ้า $\hat{z}_t^2$ ไม่มีความสัมพันธ์เหรือ ⇒ cond var เพียงพอแล้ว.

1.1 และ 1.2 เราจะใช้ LB Q test

พบ ARCH Effect

ต่อจากตัวอย่าง (5.1) เราจะประมาณค่าสมการค่าเฉลี่ยด้วย $ARMA(2,2)$ และสมการค่าความแปรปรวนที่มีเงื่อนไขด้วย $GARCH(1,1)$ เราจะใช้คำสั่ง ugarchfit ใน package library(rugarch)

เกิด cond var

ระบุรูปแบบของสมการ - cond mean - cond var

Standard GARCH

ระบุ order GARCH(1,1)

```
> library(rugarch)
> spec.garch11 <- ugarchspec(variance.model=list(model="sGARCH", garchOrder=c(1,1)),
+ mean.model=list(armaOrder=c(2,2), include.mean=TRUE), distribution.model="norm")
> fit.garch11<-ugarchfit(spec=spec.garch11, data = ret)
```

Save ไว้

ประมาณค่า

รูปแบบ

ระบุมาจากข้างบน

ข้อมูล

การแจกแจงของ $z_t \sim N$

# ตัวอย่างที่ 5.2

ARMA(2,2) - GARCH(1,1)

```
> fit.garch11<-ugarchfit(spec=spec.garch11, data = ret)
> show(fit.garch11)
-----------------------------------
         Estimate  Std. Error  t value Pr(>|t|)
mu       0.005168    0.003323   1.5552 0.119893
ar1      0.929774    0.105519   8.8114 0.000000
ar2     -0.741403    0.131759  -5.6270 0.000000
ma1     -0.885132    0.079630 -11.1155 0.000000
ma2      0.813870    0.126564   6.4305 0.000000
omega    0.000194    0.000084   2.3165 0.020528
alpha1   0.221012    0.045507   4.8567 0.000001
beta1    0.777524    0.038916  19.9795 0.000000
```

cond mean: $\phi_1$, $\phi_2$, $\theta_1$, $\theta_2$

cond var: $\omega$, $\alpha_1$, $\beta_1$

$$\hat{\sigma}_t^2 = 0.0001 + 0.221\,\varepsilon_{t-1}^2 + 0.7766\,\sigma_{t-1}^2$$

$\beta_1 \approx 0.8$ [ข้อมูลรายเดือน $\beta$ ไม่ค่อยสูง - รายวัน/สัปดาห์]

- เพียงพอ?
  - cond mean (ARMA(2,2))
  - cond var (GARCH(1,1))
- dist ของ $z_t$

# ตัวอย่างที่ 5.2

## ค่าสถิติที่เราสามารถตรวจสอบแบบจำลอง

ผลจาก ugarchfit → ตรวจสอบ

(1.1) $\hat{z}_t$ LB Q(m)

```
Weighted Ljung-Box Test on Standardized Residuals
------------------------------------
                          statistic   p-value
Lag[1]                        3.351 6.717e-02
Lag[2*(p+q)+(p+q)-1][11]      9.220 1.777e-06
Lag[4*(p+q)+(p+q)-1][19]     13.350 8.841e-02
d.o.f=4
H0 : No serial correlation

Weighted Ljung-Box Test on Standardized Squared Residuals
------------------------------------
                        statistic p-value
Lag[1]                     0.0957  0.7571
Lag[2*(p+q)+(p+q)-1][5]    1.8392  0.6569
Lag[4*(p+q)+(p+q)-1][9]    3.0164  0.7563
d.o.f=2
```

(1.2)

→ 0.088 $(8.8\times10^{-2})$ > α(0.05) เราไม่สามารถปฏิเสธ $H_0: \hat{z}_t \sim WN$ แสดงว่า ARMA(2,2) เพียงพอในการอธิบาย cond mean

$\hat{z}_t^2$

p-value > α (0.05) ไม่สามารถปฏิเสธ $H_0: \hat{z}_t^2 \sim WN$ (ไม่มีความสัมพันธ์กันเอง)

แสดงว่า GARCH(1,1) เพียงพอในการอธิบาย cond var.

(2) ⇒ ทดสอบ Normal test ✓

ถ้า $Z_t \nsim N$ → สมมติ $Z_t$ เป็นการแจกแจงอื่น

# การแจกแจงที่ไม่ใช่การแจกแจงแบบปกติ

ข้อมูลทางการเงินอาจจะมีลักษณะหางอ้วน (fat tail) ดังนั้น ข้อสมมุติว่า $\varepsilon_t$ มีการแจกแจงอื่นที่มีหางอ้วนน่าจะเหมาะสมกว่า

=B Normal

**การแจกแจงแบบ Student's** $t$

ถ้า $\varepsilon_t$ มีการแจกแจงแบบ $t$ ที่มีองศาอิสระเท่ากับ $\nu$ และมีค่า $Var_{t-1}(\varepsilon_t) = \sigma_t^2$ แล้วพารามิเตอร์ $s_t$ จะถูกเลือกเพื่อให้ $s_t = \frac{\sigma_t^2(\nu-2)}{\nu}$

พารามิเตอร์ที่อธิบายหาง

เงื่อนไขเพิ่มเติมในคำสั่ง ugarch คือ `distribution.model="std"`

**Generalized Error Distribution** Nelson (1991) ได้เสนอให้ใช้การแจกแจง generalized error distribution (GED) โดยที่ $nu$ เป็นค่าพารามิเตอร์ที่เป็นบวกที่บอกความหนาของหาง

เงื่อนไขเพิ่มเติมในคำสั่ง ugarch คือ `distribution.model="ged"`

เหตุใดใช้ประโยชน์จาก GARCH ? ① อธิบาย cond var

② สร้างช่วงความเชื่อมั่นพยากรณ์ $Y_t$

# การพยากรณ์ด้วยแบบจำลอง *GARCH*

1. เป้าหมายของการสร้างแบบจำลอง GARCH คือ conditional volatility
2. ค่าพยากรณ์ของอนุกรมเวลา $y_t$ สามารถใช้การพยากรณ์ของ *ARMA* ได้อย่างปกติ แบบจำลอง *GARCH* จะทำให้เราได้ค่าผันผวนในอนาคตที่แม่นยำขึ้นโดยเฉพาะการพยากรณ์ในระยะสั้น ในที่นี้เราจะยกตัวอย่างแบบจำลอง *GARCH*(1, 1) ซึ่งสมการความผันผวนสามารถแสดงได้โดย

$$\sigma_t^2 = \omega + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2 + \beta_1 \sigma_{t-1}^2$$

พยากรณ์ ณ คาบที่ $h$ และใช้ conditional expectation

$\boxed{h} \curvearrowright \boxed{h+1}$ $\quad \sigma_{h+1}^2 = \omega + \alpha_1 \varepsilon_h^2 + \beta_1 \sigma_h^2$

พยากรณ์ $h$ $\rightarrow$ $\underbrace{E(\sigma_{h+1}^2 | F_h)}_{\text{แทน } \hat{\sigma}^2_{h+1|h}} = E(\omega + \alpha_1 \varepsilon_h^2 + \beta_1 \sigma_h^2 | F_h) = \omega + \alpha_1 \varepsilon_h^2 + \beta_1 \sigma_h^2$

ทั่วไป

เราสามารถคำนวณ cond var ในช่วงเวลาใดๆ $\Rightarrow$ ความผันผวน $\boxed{\hat{\sigma}_t^2 = \hat{\omega} + \hat{\alpha}_1 \hat{\varepsilon}_{t-1}^2 + \hat{\beta}_1 \hat{\sigma}_{t-1}^2}$

# ตัวอย่างที่ 5.4

เราได้ประมาณค่าแบบจำลอง ARMA(2,2)-GARCH(1,1) ซึ่งเราสามารถคำนวณค่า predicted conditional standard deviation ได้จากคำสั่ง `sigma`

$\hat{\sigma}_t = \sqrt{\hat{\sigma}_t^2}$

```
sig.garch11<-sigma(fit.garch11)
volatility<-ts(data=sig.garch11[,1], frequency=12, start=c(1975,5), end=c(2013,11))
plot.ts(volatility, type="l")
```

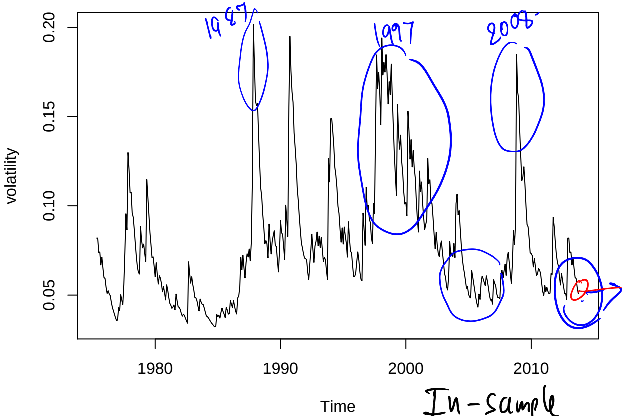
plot กราฟ + ใส่แกน โดยแปลง ตัวแปร sig.garch[,1] = cond S.D.

# ตัวอย่างที่ 5.4

~~Figure: ACF ของ residuals~~

จาก GARCH(1,1)

Cond S.D. → ผันผวน SET รายเดือน




In-sample

# ตัวอย่างที่ 5.5

เราสามารถใช้คำสั่ง `ugarchforecast` และระบุแบบจำลอง `fit.garch11` และจำนวนคาบที่จะพยากรณ์ไปข้างหน้า `n.ahead=5` และได้ผลดังต่อไปนี้

save ชื่อ    ① Model ARMA(2,2)-GARCH(1,1)

```
> garch11.fcst=ugarchforecast(fit.garch11, n.ahead=5)
> garch11.fcst
0-roll forecast [T0=1971-03-28 07:00:00]:
      Series   Sigma
T+1  0.0008783 0.04438
T+2 -0.0026793 0.04648
T+3  0.0010525 0.04849
T+4  0.0071598 0.05041
T+5  0.0100715 0.05226
```

② พยากรณ์ 5 เดือน

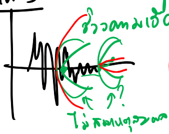
cond mean $y_t$ มาจาก ARMA(2,2)

cond S.D. $\hat{\sigma}_{h+1} = 0.044$ จาก GARCH(1,1)

ที่มา $(\hat{\sigma}_h, \hat{\varepsilon}_h)$

เช่น ค่าพยากรณ์ $y_t$ ใน 1 เดือน ข้างหน้า = 0.00087

บทที่ 3




Forecast Interval $\hat{y}_{h+1|h} \pm t_{\alpha/2} \times \hat{\sigma}_{h+1|h}$ ($t_{\alpha/2}$ = 1.96; $\hat{\sigma}_{h+1|h}$ = cond S.D.)