แบบจำลองมูวิ่งเอเวอเรจ (Moving Average; $MA(q)$)

แบบจำลองนี้มีพื้นฐานมากจากแนวคิดที่ว่าอนุกรมเวลาเส้นตรงนิ่ง (stationary) สามารถเขียนให้อยู่ในรูป infinite MA

$t-q-1, \dots, \infty$ shock

(linear comb.)

$$y_t = \varepsilon_t + \alpha_1 \varepsilon_{t-1} + \alpha_2 \varepsilon_{t-2} + \dots$$

y_t เป็นผลรวมของ shock $t, t-1, \dots$

$t-q$

coeff → weight

แบบจำลองมูวิ่งเอเวอเรจอันดับ q และเขียนแทนด้วย $MA(q)$ และแสดงได้ด้วยสมการ

Intercept

Moving Average order q ($MA(q)$)

$L \cdot \varepsilon_t$ $\quad$ $L^q \varepsilon_t$

$$y_t = \mu + \varepsilon_t + \theta_1 \varepsilon_{t-1} + \dots + \theta_q \varepsilon_{t-q} = \mu + \underbrace{(1 + \theta_1 L + \dots + \theta_q L^q)}_{\theta(L)} \varepsilon_t$$

$$= \mu + \sum_{j=0}^{q} \theta_j \varepsilon_{t-j} = \mu + \theta(L)\varepsilon_t \qquad (2.37)$$

MA polynomial

โดยที่ $\theta_0 = 1$

$MA(q) \rightarrow$ คุณลักษณะทางทฤษฎี

แบบจำลอง MA(1)

1) $E(\varepsilon_t)=0$
2) $Var(\varepsilon_t)=\sigma^2$ คงที่
3) $Cov(\varepsilon_t,\varepsilon_{t-j})=0 \quad j\neq 0$

สมมุติให้ y_t เป็นอนุกรม $MA(1)$ โดยที่ ε_t มีคุณสมบัติเป็นไวท์นอซ

$$y_t = \mu + \varepsilon_t + \theta_1\varepsilon_{t-1} \qquad (2.38)$$

ค่าคาดหมายของ y_t, $E(y_t)$, เท่ากับ

$$E(y_t) = E(\mu+\varepsilon_t+\theta_1\varepsilon_{t-1}) = \underbrace{E(\mu)}_{\mu}+\underbrace{E(\varepsilon_t)}_{=0}+\theta\underbrace{E(\varepsilon_{t-1})}_{=0}$$

$$\boxed{E(y_t)=\mu}$$

ค่าความแปรปรวนของ y_t (γ_0)

$$\gamma_0 = Var(y_t) = E(y_t - E(y_t))^2$$

$$= E[(\cancel{\mu}+\varepsilon_t+\theta_1\varepsilon_{t-1})-(\cancel{\mu})]^2$$

$$= E[(\varepsilon_t+\theta_1\varepsilon_{t-1})^2]$$

$$= E[\varepsilon_t^2+2\varepsilon_t\theta_1\varepsilon_{t-1}+\theta_1^2\varepsilon_{t-1}^2]$$

$$= \underbrace{E(\varepsilon_t^2)}_{\sigma^2}+2\theta_1\underbrace{E(\varepsilon_t\varepsilon_{t-1})}_{Cov(\varepsilon_t,\varepsilon_{t-1})=0}+\theta_1^2\underbrace{E(\varepsilon_{t-1}^2)}_{\sigma^2}$$

θ theta

$$\gamma_0 = \sigma^2[1+\theta_1^2]$$

แบบจำลอง MA(1)

one-lag autocovariance

$\gamma_1 = Cov(y_t, y_{t-1}) = E\big((y_t - E(y_t))(y_{t-1} - E(y_{t-1}))\big)$

$= E\big[[(\cancel{\mu} + \varepsilon_t + \theta_1\varepsilon_{t-1}) - \cancel{\mu}][(\cancel{\mu} + \varepsilon_{t-1} + \theta_1\varepsilon_{t-2}) - \cancel{\mu}]\big]$

$= \underbrace{E(\varepsilon_t\varepsilon_{t-1})}_{Cov(\varepsilon_t,\varepsilon_{t-1}) = 0} + \theta_1 \underbrace{E[\varepsilon_t\varepsilon_{t-2}]}_{=0} + \theta_1 \underbrace{E(\varepsilon_{t-1}^2)}_{\sigma^2} + \theta_1^2 \underbrace{E(\varepsilon_{t-1}\varepsilon_{t-2})}_{=0}$

$\boxed{\gamma_1 = \theta_1 \cdot \sigma^2}$

two-lag autocovariance

$\gamma_2 = Cov(y_t, y_{t-2}) = E\big((y_t - E(y_t))(y_{t-2} - E(y_{t-2}))\big]$

$= E[(\varepsilon_t + \theta_1\varepsilon_{t-1})(\varepsilon_{t-2} + \theta_1\varepsilon_{t-3})]$

$= E(\text{cross}) = 0$

$\gamma_3 = 0$

$\vdots \quad \gamma_j = 0 \; ; j > 1$ สำหรับ $y_t \sim MA(1)$

แบบจำลอง MA(1)

$\rho_1 = \frac{\gamma_1}{\gamma_0} = \frac{\theta_1 \cdot \cancel{\sigma^2}}{(1+\theta_1^2)\cancel{\sigma^2}}$ $\rho_j = 0; j > 1$

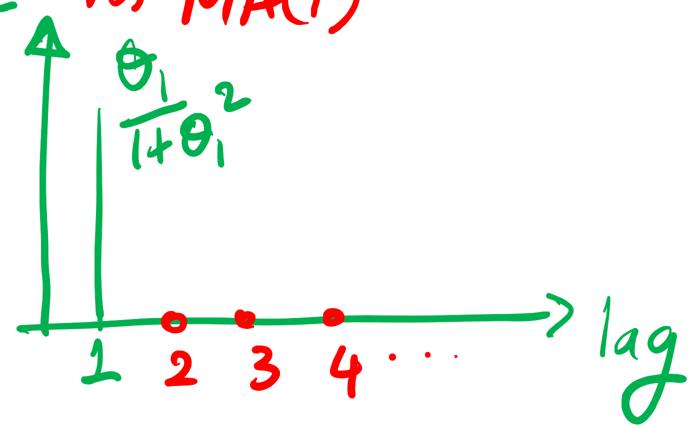
$\rho_2 = \frac{\gamma_2}{\gamma_0} = 0$

จากสมการข้างต้นจะเห็นได้ว่า $Cov(y_t, y_{t-k}) = 0$ สำหรับ $k \geq 2$ ในกรณีที่ y_t เป็น $MA(1)$

Theoretical ACF ของ MA(1)

k-lag autocorrelation เท่ากับ

$$\rho_k = \begin{cases} \frac{\theta_1}{1+\theta_1^2} & , k = 1 \\ 0 & , k > 1 \end{cases}$$



จะเห็นได้ว่า y_t มีสหสัมพันธ์กับ y_{t-1} แต่ไม่สัมพันธ์กับ $y_{t-2}, \ldots$ ซึ่งแตกต่างจาก $AR(1)$

เราจะเห็นได้ว่าอนุกรมเวลา y_t ที่เป็นกระบวนการมูววิ่งเอเวเรจจะเป็นอนุกรมเวลานิ่ง (stationary) เสมอ

MA(1) เป็น stationary ไม่ว่า θ_1 จะมีค่าใดๆ

1) $E(Y_t)$ คงที่ (μ) ✓

2) $Var(Y_t)$ คงที่ $\sigma^2(1+\theta_1^2)$ ✓

3) $Cov(Y_t)$ ไม่ขึ้นกับเวลา ✓

$\gamma_1 = \sigma^2\theta_1$ ✓ $\gamma_2 = 0$ ✓

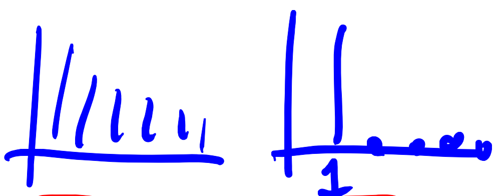
ตัวอย่างข้อมูลที่เป็น MA(1)

drop μ ก่อน

Figure: การจำลองข้อมูลกระบวนการ $MA(1)$ ที่มีค่าสัมประสิทธิ์ $\theta = 0.5$

ACF

AR(1) MA(1)



$$\boxed{AR(1) \Rightarrow MA(\infty)}$$

$$\boxed{MA(1) \Rightarrow AR(\infty)}$$

แทนค่าได้

$AR(\infty)$

เงื่อนไข $|\theta_1| < 1$

$$y_t = \varepsilon_t + \theta_1 \varepsilon_{t-1}$$

MA(1) $\Rightarrow$ AR

MA(1) polynomial

$$y_t = (1+\theta_1 L)\varepsilon_t$$

Note $1 + z + z^2 + \dots = \frac{1}{1-z}$ ถ้า $|z| < 1$

$$\frac{y_t}{(1+\theta_1 L)} = \varepsilon_t$$

$$\frac{1}{1+\theta_1 L} = \frac{1}{1-\underbrace{(-\theta_1 L)}_{z}}$$

$$= 1 + (-\theta_1 L) + (-\theta_1 L)^2 + (-\theta_1 L)^3 + \dots$$

$$= 1 - \theta_1 L + \theta_1^2 L^2 - \theta_1^3 L^3 + \dots$$

$$y_t(1 - \theta_1 L + \theta_1^2 L^2 - \theta_1^3 L^3 + \dots) = \varepsilon_t$$

$$y_t - \theta_1 y_{t-1} + \theta_1^2 y_{t-2} - \theta_1^3 y_{t-3} + \dots = \varepsilon_t$$

Invertible process

→ y_t เป็นอนุกรมเวลาที่เราสามารถ Invert เป็น AR ได้

ฟังก์ชันสหสัมพันธ์ร่วมในตัวเองของกระบวนการ $MA(1)$ สองกระบวนการต่อไปนี้จะมีลักษณะที่เหมือนกัน

$\rho_1 = \frac{\theta_1}{1+\theta_1^2}$

$$x_t = w_t + \frac{1}{5}w_t, \qquad w_t \sim iidN(0,25)$$

→ $\rho_1 = \frac{5}{26}$

[MA(1) จะสามารถแปลงเป็น AR(∞)]

และ

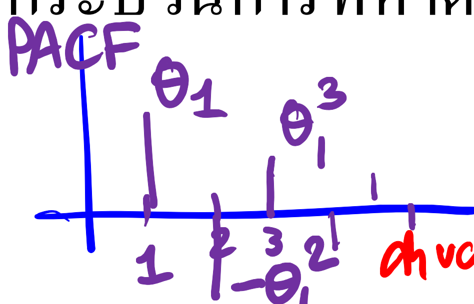
$$y_t = v_t + 5v_t, \qquad v_t \sim iidN(0,1)$$

เราต้องเลือกว่าจะใช้แบบจำลองไหน ซึ่งเราจะเลือกแบบจำลองที่สามารถเขียนแบบจำลองในรูปของ infinite AR representation โดยที่อนุกรมที่มีลักษณะดังกล่าวเราจะเรียกว่ากระบวนการที่หาตัวผกผันได้(invertible process)

เงื่อนไขที่ $MA(1)$ จะเป็นกระบวนการที่หาตัวผกผันได้ คือ $\boxed{|\theta_1| < 1}$

Partial ACF ของ MA(1)

↳ สัมประสิทธิ์ของ y_{t-j} ใน AR



จาก slide ที่แล้ว

$y_t = \theta_1 y_{t-1} - \theta_1^2 y_{t-2} + \theta_1^3 y_{t-3}$

ดังนั้น PACF จะมีค่าบวกลบสลับกันไปเรื่อยๆ

แบบจำลอง $MA(2)$

$y_t = \mu + \varepsilon_t + \theta_1\varepsilon_{t-1} + \theta_2\varepsilon_{t-2} \rightarrow$ 1) $E(y_t) = \mu$

กำหนดให้ y_t เป็นกระบวนการ $MA(2)$ ซึ่งสามารถแสดงได้ด้วยสมการ

$$\underline{y_t - \mu} = \varepsilon_t + \theta_1\varepsilon_{t-1} + \theta_2\varepsilon_{t-2}$$

2) $Var(y_t) = E(y_t - \mu)^2$

$= E(\varepsilon_t + \theta_1\varepsilon_{t-1} + \theta_2\varepsilon_{t-2})^2$

$= \sigma^2 + \theta_1^2\sigma^2 + \theta_2^2\sigma^2 + E(\text{cross term})$

$$\boxed{\gamma_0 = \sigma^2(1 + \theta_1^2 + \theta_2^2)}$$

เมื่อพิจารณาค่าสหสัมพันธ์ในตัวเองของ $MA(2)$ จะได้

3) $\gamma_1 = E[(y_t - \mu)(y_{t-1} - \mu)]$

$E[(\varepsilon_t + \theta_1\varepsilon_{t-1} + \theta_2\varepsilon_{t-2})(\varepsilon_{t-1} + \theta_1\varepsilon_{t-2} + \theta_2\varepsilon_{t-3})]$

$\gamma_2 =$

$\gamma_3 = 0$

$\gamma_4 = 0$

$$\rho_0 = \frac{\gamma_0}{\gamma_0} = 1$$

$$\rho_1 = \frac{\gamma_1}{\gamma_0} = \frac{(\theta_1 + \theta_2\theta_1)}{(1 + \theta_1^2 + \theta_2^2)}$$

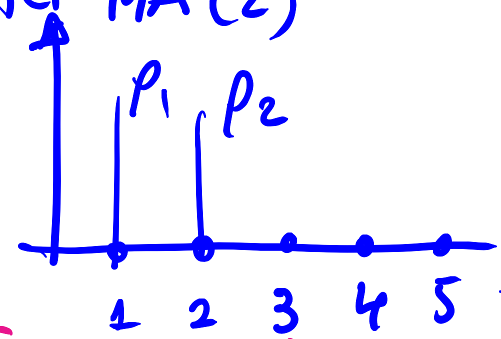
$$\rho_2 = \frac{\gamma_2}{\gamma_0} = \frac{\theta_2}{(1 + \theta_1^2 + \theta_2^2)}$$

$$\rho_3 = \frac{\gamma_3}{\gamma_0} = 0$$

$$\rho_j = \frac{\gamma_j}{\gamma_0} = 0 \quad ; j > 2$$

$MA(q)$ $\rho_j = 0$ $j > q$

ACF MA(2)



PACF ของ MA(2)

$y_t = \varepsilon_t + \theta_1\varepsilon_{t-1} + \theta_2\varepsilon_{t-2}$

$= (1 + \theta_1 L + \theta_2 L^2)\varepsilon_t$

แบบจำลอง $MA(q)$

$MA(2) \Rightarrow AR(\infty)$

PACF ของ MA(2) ค่อยๆ ลู่เข้า ศูนย์.

$$\frac{y_t}{(1+\theta_1 L+\theta_2 L^2)} = \varepsilon_t$$

$$(1+\theta_1 L+\theta_2 L^2) = (1+a_1L)(1+a_2L)$$

$$\frac{1}{(1+a_1L)} = (1+(-a_1L)+(-a_1L)^2+\dots), \quad \frac{1}{(1+a_2L)} = (1+(-a_2L)+(-a_2L)^2+\dots)$$

แบบจำลอง $MA(q)$ สามารถเขียนในรูปสมการดังนี้

$$y_t = \mu + \varepsilon_t + \theta_1\varepsilon_{t-1} + \ldots + \theta_q\varepsilon_{t-q}, \qquad \varepsilon_t \sim WN(0, \sigma^2)$$

แบบจำลอง $MA(q)$ นิ่งและ ergodic ถ้าค่า $\theta_1, \ldots, \theta_q$ มีค่าจำกัด และสามารถหาตัวผกผันได้ถ้าค่าราก (roots) ของพหุนาม MA $\theta(m) = 1 + \theta_1 m + \ldots + \theta_q m^{t-q} = 0$ มีค่าสัมบูรณ์(หรือค่าโมดุลัส)ของรากของพหุนามมากกว่า 1

แบบจำลอง $MA(q)$

$$y_t = \mu + \varepsilon_t + \theta_1 \varepsilon_{t-1} + \dots + \theta_q \varepsilon_{t-q}$$

โมเมนต์ของกระบวนการ $MA(q)$ ได้ดังนี้

$E(y_t) = \cancel{\gamma_0 = \gamma_j =}\ \mu$

$\gamma_0 = Var(y_t) = \sigma^2 (1 + \theta_1^2 + \theta_2^2 + \dots + \theta_q^2)$

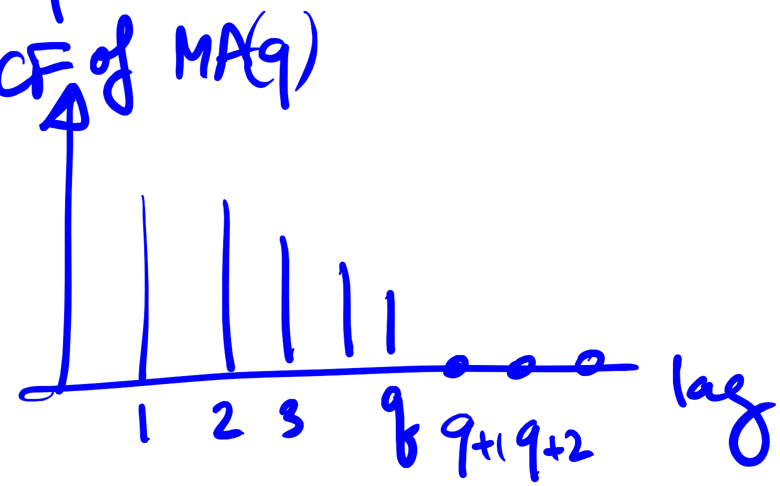
$\gamma_1 =$

$\gamma_2 =$

$\vdots$

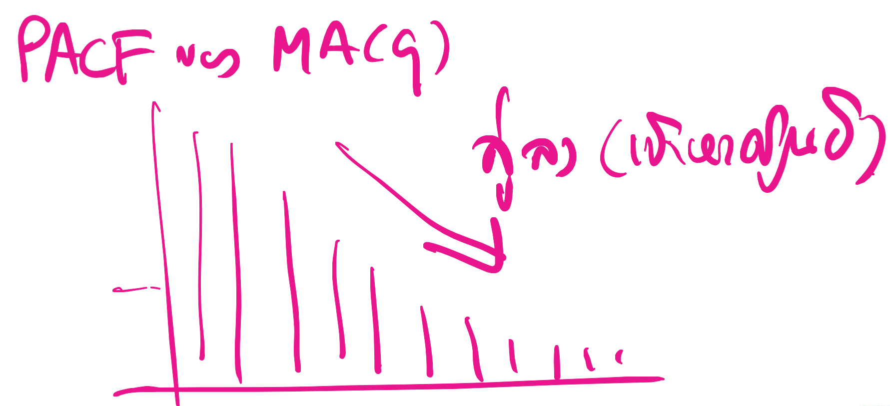
$\gamma_q =$

$\gamma_{q+1} = 0, \dots$



และค่าสหสัมพันธ์ในตัวเองจะเท่ากับ

$\rho_j = \frac{\gamma_j}{\gamma_0} =$



ในขณะที่ PACF จะมีค่อยลดลงไป

การประมาณค่าแบบจำลอง $MA(q)$ → Maximum Likelihood Est.

การประมาณค่า MLE เป็นวิธีการทั่วไปที่ใช้ในการประมาณค่าแบบจำลอง $MA(q)$

ประมาณค่าแบบจำลอง $MA(1)$ ซึ่งสามารถเขียนได้ดังนี้

Likelihood function → Joint pdf ของ y_t $t=1,\dots,T$

ข้อมูล Parameter

$$y_t = \mu + \varepsilon_t + \theta\varepsilon_{t-1}$$

โดยที่ $\varepsilon_t \sim iidN(0, \sigma_\varepsilon^2)$ ในกรณีที่ conditional MLE เราจะสมมุติให้ $\varepsilon_0 = 0$ ดังนั้น $y_1 = \mu + \varepsilon_1$

$$y_1|\varepsilon_0 = 0 \sim N(\mu, \sigma_\varepsilon^2)$$

จากข้อมูลในคาบที่ 1 จะได้ว่า $y_2|y_1 = \mu + \varepsilon_2 + \theta\varepsilon_1$ และได้ฟังก์ชันความน่าจะเป็น

$$f_{y_2|y_1} = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_\varepsilon^2}} \exp\left[\frac{-(y_2 - \mu - \theta\varepsilon_1)^2}{2\sigma_\varepsilon^2}\right]$$

การประมาณค่าแบบจำลอง $MA(q)$

หากใช้กระบวนการเดียวกันไปเรื่อย เราจะสามารถหาค่า $\varepsilon_t = y_t - \mu - \theta\varepsilon_{t-1}$ และสร้าง conditional likelihood function ได้

Max

$$L(\mu, \theta, \sigma_\varepsilon^2) = \Pi_{t=2}^{T} f_{y_t|y_{t-1}}$$

$$= (2\pi\sigma_\varepsilon^2)^{-(T-2)/2} \exp\left[\frac{\sum_{t=2}^{T} - \overbrace{(y_t - \mu - \theta\varepsilon_{t-1})^2}^{\varepsilon_t^2}}{2\sigma_\varepsilon^2}\right] \quad (2.50)$$

$\hat{\mu}, \hat{\theta}, \hat{\sigma}^2$ MLE

สมการ (2.50) เราไม่สามารถหาตัวประมาณค่าได้ด้วยการวิเคราะห์อนุพันธ์เช่นในกรณี AR ในกรณีนี้เราจำเป็นต้องใช้วิธีการทางตัวเลขด้วยคอมพิวเตอร์เพื่อหาค่า $\hat{\theta}$ ที่ทำให้ $L(\mu, \theta, \sigma_\varepsilon^2)$ มีค่าสูงที่สุด

ตัวอย่างที่ 3.6

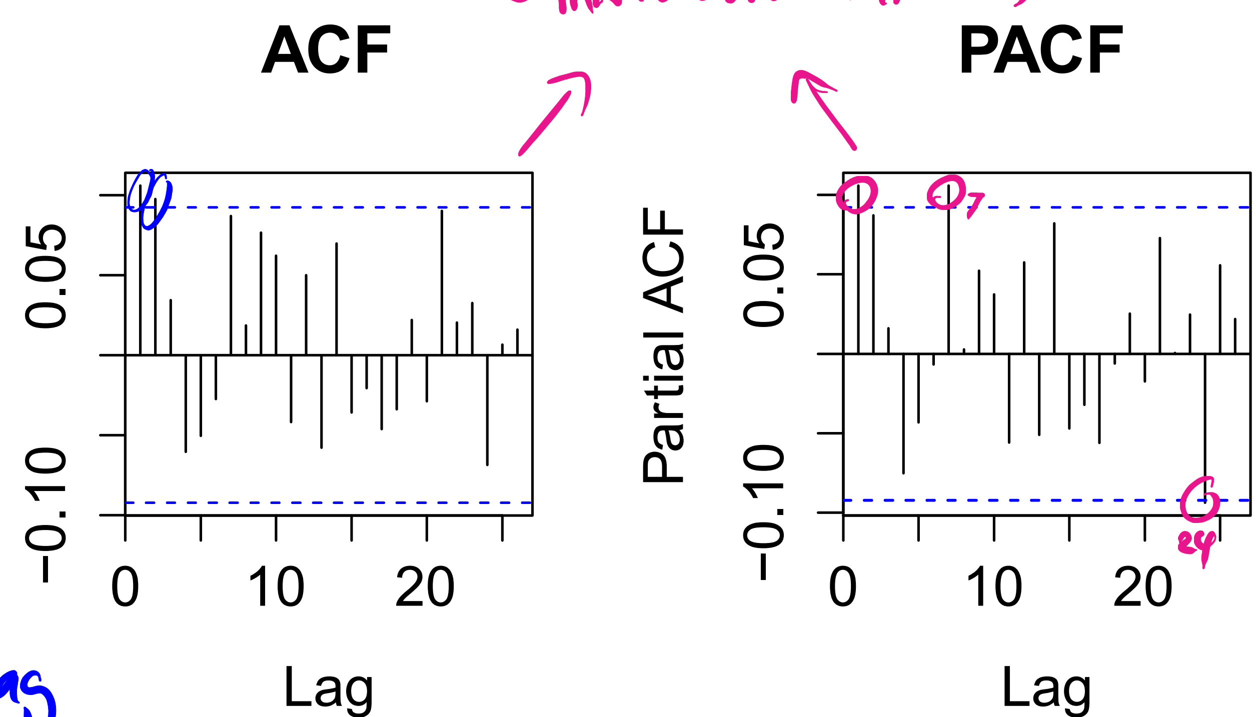
y_t

ในตัวอย่างนี้เราจะพิจารณาผลได้ตอบแทนรายเดือนของการลงทุนในตลาดหลักทรัพย์แห่งประเทศไทย โดยใช้ข้อมูลราคาปิดรายเดือนตั้งแต่ เมษายน 2518 ถึงเดือนพฤศจิกายน 2555

Figure: ACF และ PACF ของผลได้ตอบแทนรายเดือนจาก SET

1. เราสร้างแบบจำลองอธิบาย y_t?

ใกล้เคียงกับ MA(2)



- ACF
มี lag 1,2
ρ_1 และ ρ_2 มีค่าไม่เท่ากับศูนย์
$\rho_j = 0$ $j = 3, \ldots$

Sample ACF

lag

1 2 3 ...

→ PACF
ใช้เวลานานกว่าจะเข้าสู่ศูนย์

ตัวอย่างที่ 3.6

แบบจำลองที่เหมาะสมน่าจะเป็น $MA(2)$ ซึ่งประมาณค่าได้ด้วยคำสั่ง `arima` โดยกำหนดอันดับเป็น `c(0,0,2)`

ข้อมูล AR I MA(2)

```
> m1<-arima(ret, order=c(0,0,2))
> m1
Call:
arima(x = ret, order = c(0, 0, 2))

Coefficients:
         ma1     ma2  intercept
      0.0886  0.1001     0.0057
s.e.  0.0469  0.0487     0.0046

sigma^2 estimated as 0.006795:  log likelihood = 485.64,  aic = -963.28
```

$$(Y_t - \underset{(se)}{0.0057}) = \varepsilon_t + \underset{(se)}{0.0886}\,\varepsilon_{t-1} + \underset{(se)}{0.1001}\,\varepsilon_{t-2}$$

ทดสอบว่า แบบจำลอง MA(2) เพียงพอหรือไม่

H_0: $\hat{\varepsilon}_t$ เป็น WN.

ใช้ LB $Q(m)$ กับ $\hat{\varepsilon}_t$

ตัวอย่างที่ 3.6

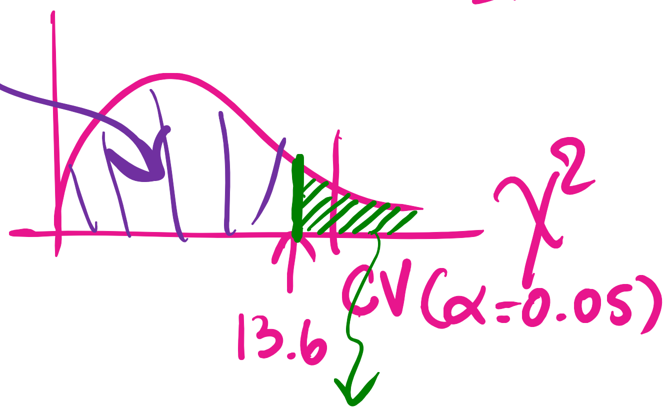
เราสามารถพิจารณาความพอเพียงของแบบจำลอง m1 ได้ด้วยการทดสอบ L-B สำหรับ residuals ดังคำสั่งต่อไปนี้

$\hat{\varepsilon}_t$ m

```
> Box.test(m1$residuals, lag=12, type="Ljung")
^^IBox-Ljung test
data:  m1$residuals
X-squared = 13.6075, df = 12, p-value = 0.3265
> pv=1-pchisq(13.6075,12-2)
> pv
[1] 0.1916591
```

df=10 คำนวณ P.

LB Q(12) ของ $\hat{\varepsilon}_t = 13.6075 \sim \chi^2_{df=m-q=12-2}$



เพราะไม่สามารถปฏิเสธ $H_0: \hat{\varepsilon}_t$ เป็น WN => แบบจำลองเพียงพอ ในการอธิบาย Y_t

$Y_t = \varepsilon_t + \theta_1 \varepsilon_{t-1} + \theta_2 \varepsilon_{t-2}$ => พยากรณ์?

การพยากรณ์ไปข้างหน้า 1 คาบ

MA(1) $Y_t = \mu + \varepsilon_t + \theta_1 \varepsilon_{t-1}$

$h \to h+1$ ① $Y_{h+1} = \mu + \varepsilon_{h+1} + \theta_1 \varepsilon_{h+1-1}$

พิจารณาแบบจำลอง $MA(1)$: $y_{h+1} = \mu + \varepsilon_{h+1} + \theta_1 \varepsilon_h$ ตัวพยากรณ์ที่จะทำให้ค่าฟังก์ชันสูญเสียน้อยที่สุดคือค่าคาดการณ์แบบมีเงื่อนไข (conditional expectation) ②

$\hat{y}_h(1) \equiv E(Y_{h+1}|F_h) = E(\mu + \varepsilon_{h+1} + \theta_1 \varepsilon_h | F_h) = \mu + \underbrace{E(\varepsilon_{h+1}|F_h)}_{E(\varepsilon_{h+1}) = 0} + \underbrace{\theta_1 E(\varepsilon_h|F_h)}_{\text{ทราบ } \theta_1 \cdot \varepsilon_h}$

ไม่ทราบ

$\boxed{\hat{y}_h(1) = \mu + \theta_1 \varepsilon_h}$

และค่าผิดพลาดจากการพยากรณ์เท่ากับ $e_h(1) =$

forecast error พยากรณ์ 1 คาบ = ค่าจริง − ค่าพยากรณ์

$e_h(1) = (\cancel{\mu} + \varepsilon_{h+1} + \cancel{\theta_1 \varepsilon_h}) - (\cancel{\mu} + \cancel{\theta_1 \varepsilon_h}) = \varepsilon_{h+1}$

และค่าแปรปรวนจากการพยากรณ์ไปข้างหน้าหนึ่งคาบเท่ากับ

$Var(e_h(1)) = Var(\varepsilon_{h+1}) = \sigma^2$

ในทางปฏิบัติค่า ε_h จะสามารถคำนวณได้สองวิธีคือ

MA(1) $Y_t = \mu + \varepsilon_t + \theta_1 \varepsilon_{t-1}$

$\varepsilon_t = Y_t - \mu - \theta_1 \varepsilon_{t-1}$

1) ■ สมมุติให้ $\varepsilon_0 = 0$ แทนค่า

$\varepsilon_1 = Y_1 - \mu - \theta_1(0)$

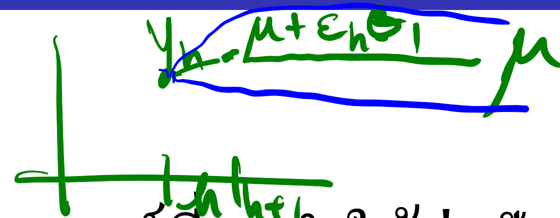
$\varepsilon_2 = Y_2 - \mu - \theta_1 \varepsilon_1$

$\varepsilon_h = Y_h - \mu - \theta_1 \varepsilon_{h-1}$

2) ■ หรือใช้ค่า $\hat{\varepsilon}_h$ ที่เป็นค่า residual จากการประมาณค่า $MA(1)$

$\hat{\varepsilon}_h = Y_t - \mu - \theta_1 \hat{\varepsilon}_{h-1}$

การพยากรณ์ไปข้างหน้า 2 คาบ



พิจารณา $y_{h+2} = \mu + \varepsilon_{h+2} + \theta_1 \varepsilon_{h+1}$ ตัวพยากรณ์ที่จะทำให้ค่าฟังก์ชันสูญเสียน้อยที่สุดคือค่าคาดการณ์แบบมีเงื่อนไข

$\hat{y}_h(2) = E(y_{h+2} | F_h) = \mu$

และค่าผิดพลาดจากการพยากรณ์เท่ากับ $e_h(2) =$ ค่าจริง - ค่าพยากรณ์

$\varepsilon_{h+2} + \theta_1 \varepsilon_{h+1}$

และค่าแปรปรวนจากการพยากรณ์ไปข้างหน้าสองคาบเท่ากับ

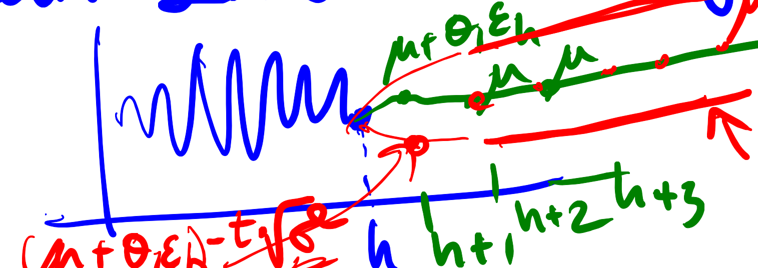
$Var(e_h(2)) = var(\varepsilon_{h+2} + \theta_1 \varepsilon_{h+1})$

$\overset{ind}{=} var(\varepsilon_{h+2}) + \theta_1^2 var(\varepsilon_{h+1}) = (1+\theta_1^2)\sigma^2$

Forecast Interval $= \hat{y} \pm \overset{1.96}{t} \cdot \sqrt{var(e_h(2))}$

$\mu + t \cdot \sqrt{(1+\theta_1^2)\sigma^2}$

$\mu - t \sqrt{(1+\theta_1^2)\sigma^2}$



Autoregressive Moving Average; $ARMA(p, q)$)

แบบจำลองที่มีทั้งส่วนประกอบของ AR และ MA ซึ่งหาก y_t เป็นกระบวนการที่เรียกว่าแบบจำลองออโตรีเกรสซีฟมูวิ่งเอเวอเรจอันดับ (p, q) หรือเรียกย่อๆว่า อารมา $ARMA(p, q)$ ถ้า y_t มีค่าเฉลี่ยไม่เท่ากับศูนย์ เราจะสามารถอธิบาย y_t ได้ด้วย

y_t ถูกอธิบายด้วยตัวเองในอดีต AR part

y_t อธิบายด้วย MA part

lin comb ของ ε_t ในอดีต

(1)

$$y_t = \underbrace{\phi_1 y_{t-1} + ... + \phi_p y_{t-p}} + \varepsilon_t + \underbrace{\theta_1 \varepsilon_{t-1} + ... + \theta_q \varepsilon_{t-q}} \qquad (2.53)$$

ไม่มีจุดตัด

หากเรากำหนดให้ $\alpha = \mu(1 - \phi_1 - ... - \phi_p)$ และสามารถเขียนแบบจำลองสำหรับ y_t ได้เป็น

(2)

$$y_t = \underline{\alpha} + \phi_1 y_{t-1} + ... + \phi_p y_{t-p} + \varepsilon_t + \theta_1 \varepsilon_{t-1} + ... + \theta_q \varepsilon_{t-q} \qquad (2.54)$$

มีจุดตัด

$\varepsilon_t \sim WN(0, \sigma^2)$

Autoregressive Moving Average; $ARMA(p, q)$)

เราสามารถเขียนสมการอารมาได้ในรูป AR และ MA polynomials ได้ดังนี้

(3)

$$\phi(L)y_t = \theta(L)\varepsilon_t$$

โดยที่ $\phi(L) = 1 - \phi_1 L - ... - \phi_p L^p$ และ $\theta(L) = 1 + \theta_1 L + ... + \theta_q L^q$

พิจารณาคุณสมบัติของแบบจำลองอารมาได้ด้วยการพิจารณา $ARMA(1, 1)$

คุณสมบัติของ ARMA(p,q)

เริ่มจาก ARMA(1,1)

$$y_t = \phi y_{t-1} + \varepsilon_t + \theta\varepsilon_{t-1} \qquad (2.55)$$

โดยที่ $\varepsilon_t \sim iidN(0, \sigma^2)$

1) $E(Y_t) = E(\phi Y_{t-1} + \varepsilon_t + \theta\varepsilon_{t-1})$

$= \phi \underbrace{E(Y_{t-1})}_{\text{สมมุติ stationary} = E(Y_t)} + \underbrace{E(\varepsilon_t)}_{0} + \theta \underbrace{E(\varepsilon_{t-1})}_{0}$

$E(Y_t) = 0$

alpha

$Y_t = \alpha + \phi Y_{t-1} + \varepsilon_t + \theta\varepsilon_{t-1}$

$E(Y_t) = \dfrac{\alpha}{1-\phi} = \mu$

$(Y_t - \mu) = \phi(Y_{t-1} - \mu) + \varepsilon_t + \theta\varepsilon_{t-1}$

คุณสมบัติ ARMA(1,1)

$$y_t = \phi y_{t-1} + \varepsilon_t + \theta\varepsilon_{t-1}$$

$\rightarrow$ 2) $$Var(y_t) = E(y_t^2)$$

$$E(\varepsilon_t y_{t-j}) = 0, \quad j>0$$

$$= E((\phi y_{t-1} + \varepsilon_t + \theta\varepsilon_{t-1})y_t)$$

$$= \underbrace{\phi E(y_{t-1}y_t)}_{\gamma_1} + \underbrace{E(\varepsilon_t y_t)}_{?} + \theta \underbrace{E(\varepsilon_{t-1} y_t)}_{?}$$

เราใช้ความสัมพันธ์ต่อไปนี้

$$E(\varepsilon_t y_t) = E[\varepsilon_t(\phi y_{t-1} + \varepsilon_t + \theta\varepsilon_{t-1})]$$

~~$E(\varepsilon_{t-1}y_t) =$~~

$$= \phi \underbrace{E(\varepsilon_t y_{t-1})}_{0} + \underbrace{E(\varepsilon_t^2)}_{\sigma^2} + \theta \underbrace{E(\varepsilon_t \varepsilon_{t-1})}_{cov=0}$$

$\varepsilon_{t-1}, \varepsilon_{t-2}, \ldots$

$$\boxed{E(\varepsilon_t y_t) = \sigma^2} \quad (*)$$

~~$E(y_t) =$~~

$$E(\varepsilon_{t-1} y_t) \; (**) = E[\varepsilon_{t-1}(\phi y_{t-1} + \varepsilon_t + \theta\varepsilon_{t-1})]$$

$$= \phi \underbrace{E(\varepsilon_{t-1} y_{t-1})}_{=\sigma^2} + \underbrace{E(\varepsilon_{t-1}\varepsilon_t)}_{cov=0} + \theta \underbrace{E(\varepsilon_{t-1}^2)}_{\sigma^2}$$

$$\boxed{E(\varepsilon_{t-1} y_t) = \sigma^2(\phi + \theta)}$$

คุณสมบัติ ARMA(1,1)

คุณสมบัติของ $ARMA(1,1)$ จะได้

$$\gamma_0 = \phi \underbrace{E(Y_t Y_{t-1})}_{\gamma_1} + \underbrace{E(Y_t \varepsilon_t)}_{*\ \sigma^2} + \theta \underbrace{E(Y_t \varepsilon_{t-1})}_{**\ \sigma^2(\phi+\theta)}$$

(1) $\gamma_0 = \phi\gamma_1 + \sigma^2(1 + \theta(\phi+\theta))$

$$\gamma_1 = E(Y_t \cdot Y_{t-1}) = E[(\phi Y_{t-1} + \varepsilon_t + \theta\varepsilon_{t-1}) Y_{t-1}]$$

$$= \phi \underbrace{E(Y_{t-1}^2)}_{=\gamma_0} + \underbrace{E(\varepsilon_t Y_{t-1})}_{=0} + \theta \underbrace{E(\varepsilon_{t-1} Y_{t-1})}_{\sigma^2}$$

$\cancel{\gamma_2} =$

(2) $\gamma_1 = \phi\gamma_0 + \theta\sigma^2$

$\rightarrow$ $\gamma_0 = \ldots$

$\gamma_1 =$

(1) & (2) $\Rightarrow$ แก้สมการหา γ_0, γ_1

$$\gamma_2 = E[Y_t Y_{t-2}] = E[(\phi Y_{t-1} + \varepsilon_t + \theta\varepsilon_{t-1}) Y_{t-2}]$$

$$= \phi E\underbrace{(Y_{t-1} Y_{t-2})}_{\gamma_1}$$

$$\boxed{\gamma_2 = \phi\gamma_1}$$

คุณสมบัติ ARMA(1,1)

กรณีที่ $j \geq 2$ จากสมการที่ (2.56) และ (2.57) เราจะได้

$Var(y_t) = \gamma_0 =$

$\rho_1 = \gamma_1/\gamma_0$

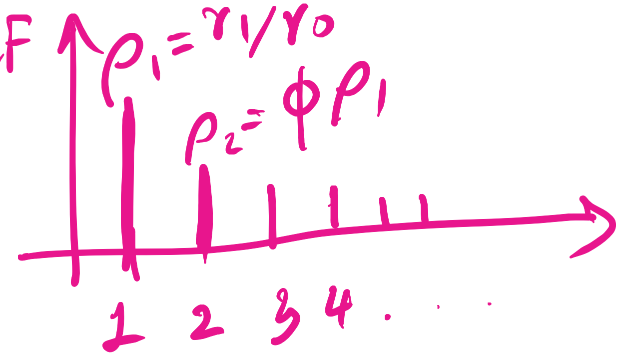
$\rho_2 = \phi\rho_1$

$\rho_3 = \phi\rho_2$

$\left[\frac{\gamma_2}{\gamma_0} = \phi \frac{\gamma_1}{\gamma_0} \Rightarrow \rho_2 = \phi\rho_1 \right]$

ACF ณ ค่าล่า j ใดๆที่ $j \geq 2$ ได้ –

$$\boxed{\rho_j = \phi\rho_{j-1}}$$



กรณีที่ $j \geq 2$ จะเห็นได้ว่า ACF มีค่าที่ลดลงเรื่อยๆด้วยอัตราแบบ exponential)

PACF (สัมประสิทธิ์แห่ง AR(∞))

$(1-\phi L)y_t = (1+\theta L)\varepsilon_t$

$\frac{(1-\phi L)}{(1+\theta L)} y_t = \varepsilon_t$

$\frac{1}{1-(-\theta L)} = 1 + (-\theta L) + (-\theta L)^2 + (-\theta L)^3 + \dots$

[ARMA(1,1) $\rightarrow$ AR(∞)]

$(1-\phi L)(1-\theta L+\theta^2 L^2-\theta^3 L^3+\dots)y_t = \varepsilon_t$

$(1-\theta L+\theta^2 L^2-\theta^3 L^3+\dots-\phi L+\phi\theta L^2-\phi\theta^2 L^3+\phi\theta^3 L^4+\dots)y_t = \varepsilon_t$

$(1-(\theta+\phi)L+(\theta^2+\phi\theta)L^2-(\theta^3+\phi\theta^2)L^3+\dots)y_t = \varepsilon_t$

$\theta(\theta+\phi)$ $\quad$ $\theta^2(\theta+\phi)$

$|\theta|<1$

$|\theta|<1$ ค่าสัมประสิทธิ์ของ AR(∞) ในรูป Absolute
→ PACF ของ ARMA(1,1) จะมีค่าลู่เข้าหาศูนย์

คุณสมบัติ ARMA(1,1)

แบบจำลอง $ARMA(1,1)$ ในรูปของมูวิ่งเอเวอเรจที่มีอันดับเป็นอนันต์ (infinite MA) ได้เป็น

$$y_t = \varepsilon_t + (\phi-\theta)\sum_{j=1}^{\infty}\phi^{j-1}\varepsilon_{t-j}$$

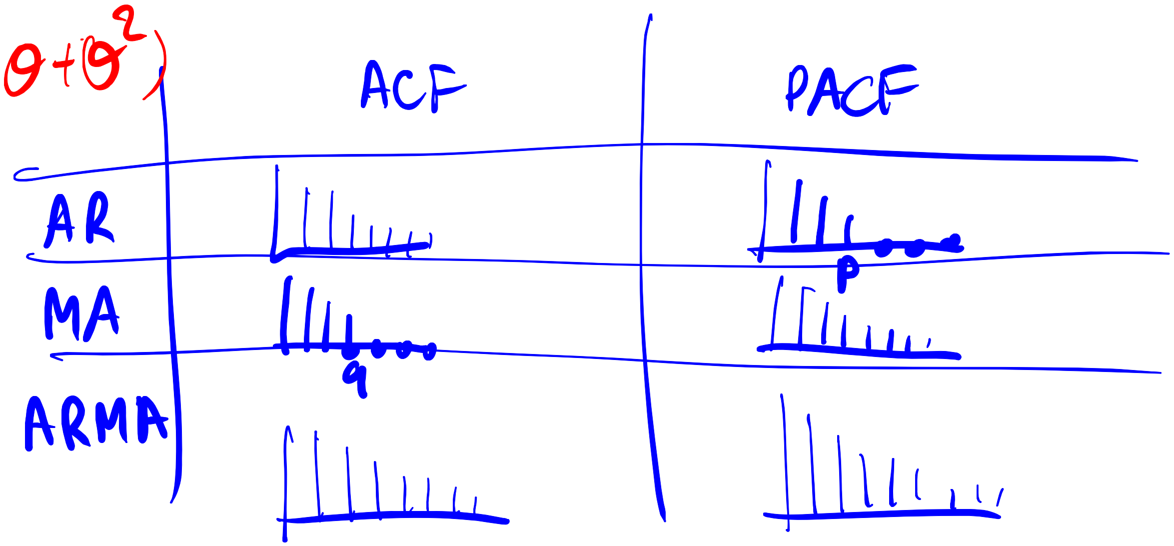
หรือ $\psi_j = (\phi-\theta)\phi^{j-1}$ จะเห็นได้ว่าเงื่อนไขที่จะทำให้กระบวนการนี้เป็นกระบวนการนิ่งคือ $|\phi|<1$

Var ARMA(1,1) = $\dfrac{\sigma^2(1+2\phi\theta+\theta^2)}{1-\phi^2}$

จะหาค่าได้ ถ้า

$|\phi|<1$

เงื่อนไข ของ stationary
สำหรับ ARMA(1,1)



สรุปคุณสมบัติของ $ARMA(p,q)$

พิจารณา AR(P) part $(1-\phi_1 L - \dots - \phi_p L^p)$

$(1-\phi_1 m - \phi_2 m^2 - \dots \phi_p m^p) = 0$

- กระบวนการ $ARMA(p,q)$ จะ stationary และ ergodic ถ้าค่าสัมบูรณ์ของค่ารากของพหุนามออโตรีเกรสซีฟ $\phi(m) = 0$ มีค่ามากกว่าหนึ่ง

  root ของ polynomial $|m_i| > 1$

- และสามารถหาค่าผกผันได้ถ้ารากของพหุนามมูวิ่งเอเวอเรจ $\theta(m) = 0$ มีค่ามากกว่าหนึ่ง

  Invert จาก ARMA → AR(∞)

  $(1+\theta_1 L + \dots + \theta_q L^q)$

  $(1+\theta_1 m + \dots + \theta_q m^q) = 0$

  $|m_i| > 1$

- พหุนาม AR และ MA ไม่มีตัวประกอบร่วม

รูปทั่วไปของ ACF ของกระบวนการ $ARMA(p,q)$ ค่อนข้างยุ่งยาก โดยสรุปแล้วทั้ง ACF และ PACF จะค่อยๆลดลงเรื่อยแบบเลขชี้กำลัง (exponential)

ARMA สมการที่มี parameter น้อยที่สุดที่จะเป็นไปได้

$AR(1) \equiv ARMA(1,0)$

AR(1) $(1-0.5L)Y_t = \varepsilon_t$

$(1-0.5L)\cancel{(1+0.7L)}Y_t = \cancel{(1+0.7L)}\varepsilon_t$

ARMA(2,1) $(1+0.2L-0.35L^2)Y_t = (1+0.7L)\varepsilon_t$

การประมาณค่าสมการแบบจำลอง ARMA

เราสามารถประมาณค่าแบบจำลอง $ARMA(p, q)$ ได้ด้วยวิธีการค่าความควรจะเป็นสูงที่สุด (MLE)

- ฟังก์ชันที่แน่นอน (exact log-likelihood) นั้นมีรูปแบบที่ค่อนข้างซับซ้อน นอกจากนี้จุดเริ่มต้นของข้อมูลในกรณี exact likelihood จะใช้คุณสมบัติของการแจกแจงที่นิ่งเพื่อสร้างฟังก์ชันค่าควรจะเป็นของค่า y_t p ค่าแรก และ ε_t q ค่าแรก
- conditional likelihood จะสมมุติให้ y_t p ค่าแรก และ ε_t q ค่าแรกเท่ากับศูนย์

กรณีที่จำนวนตัวอย่างมีจำนวนเข้าใกล้อนันต์ค่าประมาณจากสองวิธีจะมีค่าใกล้เคียงกัน แต่จะแตกต่างกันในกรณีตัวอย่างมีจำนวนน้อย

การประมาณค่าสมการแบบจำลอง ARMA

ทดสอบ residuals เช่น LB Q test

ทดสอบความเพียงพอของแบบจำลองได้เช่นเดียวกับในกรณีของแบบจำลอง AR และ MA โดยที่ตัวสถิติ $Q(m) \sim \chi^2_{m-p-q}$ และเราจะปฏิเสธสมมุติฐานหลักถ้า $Q(m)$ มีค่ามากกว่าควอนไทล์ที่ $(1-\alpha)$ ของ χ^2_{m-p-q}

ก่อนที่เราจะประมาณค่าแบบจำลอง $ARMA(p, q)$ สำหรับอนุกรมเวลา y_t ใดๆ เราจะเป็นต้องระบุลำดับของ AR (p) และ MA (q) เสียก่อน

เกณฑ์การเลือกแบบจำลอง (Model Selection Criteria)

เราสามารถใช้การสังเกต ACF ของตัวอย่าง ในกรณีของ MA หรือ PACF ของตัวอย่าง ในกรณีของ AR

Table: สรุปลักษณะของ ACF และ PACF สำหรับแบบจำลอง ARMA

	$AR(p)$	$MA(q)$	$ARMA(p,q)$
ACF	ค่อยๆลดลง	ค่าเท่ากับศูนย์ หลังจากช่วงล่าที่ q	ค่อยๆลดลง
PACF	เท่ากับศูนย์ หลังจากช่วงล่าที่ p	ค่อยๆลดลง	ค่อยๆลดลง

var vs Error จากแบบจำลอง

เกณฑ์การเลือกแบบจำลอง (Model Selection Criteria)

325/425 → เลือกแบบจำลอง SSE ต่ำ (R^2 สูง)

อีกทางเลือกหนึ่งเราสามารถจะใช้เกณฑ์การเลือกแบบจำลอง Akaike

แนวคิดคือการประมาณค่าแบบจำลอง $ARMA(p, q)$ สำหรับค่าอันดับ p และ q ต่างๆที่น้อยกว่าค่าหนึ่งที่เรากำหนดไว้ p_{max} และ q_{max} และเลือกค่า p และ q ที่ทำให้ค่าเกณฑ์การเลือกต่ำที่สุด โดยที่เกณฑ์การเลือกจะอยู่ในรูป

ARMA(1,0)
ARMA(1,1)
ARMA(0,1)

⇓ เมื่อ p,q ↑ ⇑ เมื่อ p,q ↑

$$MSC(p, q) = \underbrace{\ln(\tilde{\sigma}^2(p, q))}_{\text{var vs error จากแบบจำลอง}} + \underbrace{c_T\varphi(p, q)}_{\text{Penalty (ลงโทษ)}}$$

⇒ Information Criteria

p,q ↑ var vs error จากแบบจำลอง ⇓

เกณฑ์การเลือกแบบจำลอง (Model Selection Criteria)

โดยที่แบบเกณฑ์ที่เป็นที่นิยมสามเกณฑ์ได้แก่ Akaike (AIC) Schwarz-Bayesian (BIC) และ Hannan-Quinn (HQIC)

T – # ตัวอย่าง.

$$AIC(p,q) = \ln(\tilde{\sigma}^2(p,q)) + \frac{2}{T}(p+q)$$

Baysian

$$BIC(p,q) = \ln(\tilde{\sigma}^2(p,q)) + \frac{\boxed{\ln T}}{T}(p+q)$$

ln T > 2

$$HQIC(p,q) = \ln(\tilde{\sigma}^2(p,q)) + \frac{\boxed{2\ln(\ln T)}}{T}(p+q)$$

กรณี T ใหญ่ เกณฑ์ AIC จะเลือกอันดับที่มากกว่าที่ควรจะเป็น ในขณะที่เกณฑ์ BIC และ HQIC เลือกค่าที่ consistent

[T → ∞ ค่า p,q เลือกจะเข้าใกล้ ค่าจริง]

อย่างไรก็ตามใน T ขนาดเล็กเกณฑ์ทั้งสามจะให้ค่าที่ไม่แตกต่าง

- เวลาสอบ: เลือกใช้ BIC/HQIC เพื่อตอบ คุณสมบัติ Consistent
- BIC ให้น้ำหนัก penalty สูงกว่า AIC ⇒ BIC มักจะเลือก order ต่ำกว่า AIC

ตัวอย่างที่ 3.7

log return on forex B/\$ ปี 1998 ถึง 2012

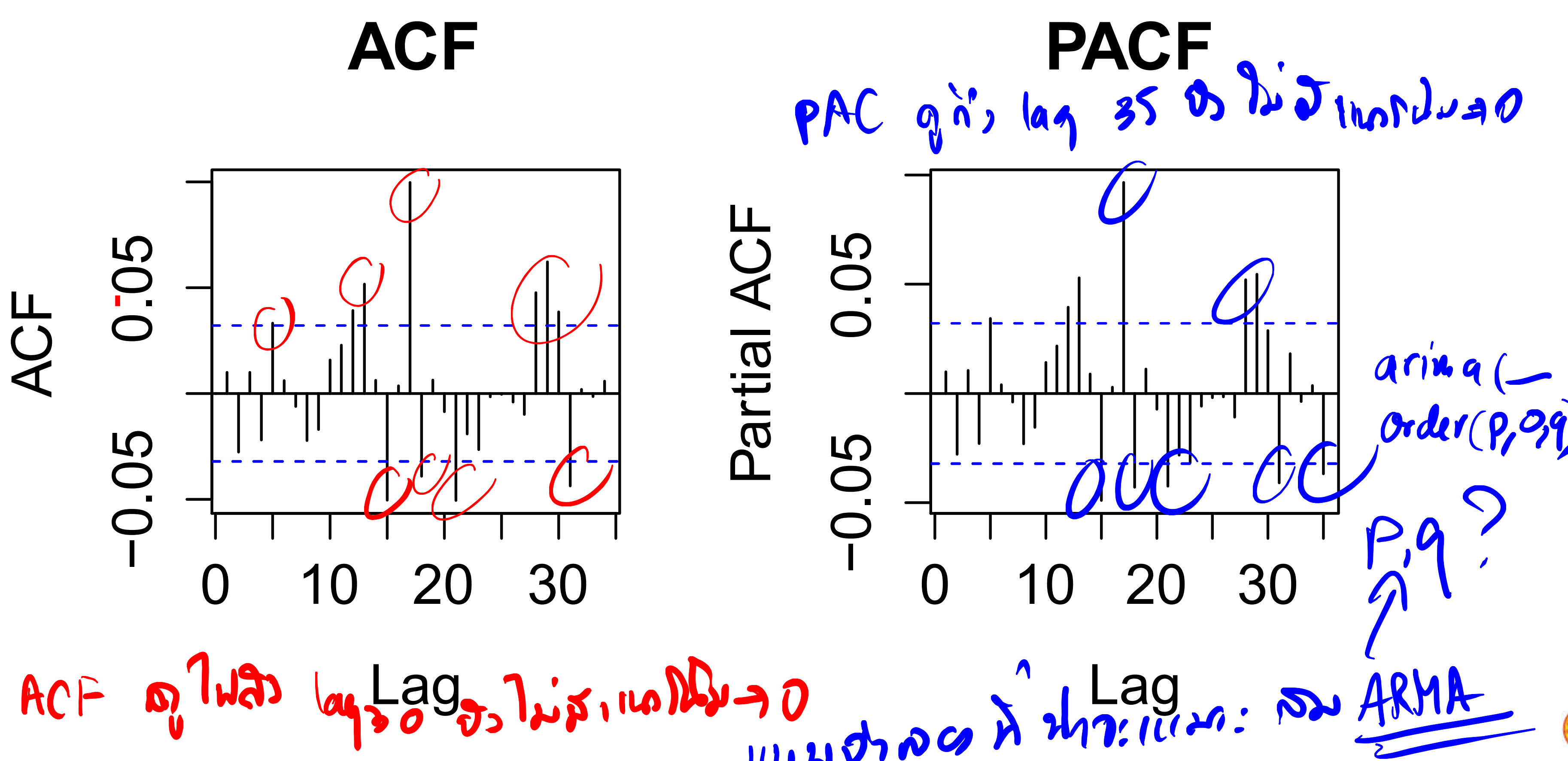


Figure: ACF และ PACF ของผลได้ตอบแทนรายวันจากการซื้อขายเงินดอลลาร์สหรัฐ

ตัวอย่างที่ 3.7

อย่างไรก็ตาม package "forecast" มีคำสั่ง auto.arima(series, arguments) เลือก optimal p & q

TRUE ไม่ได้ทดลองทุกกรณี

```
> library(forecast)
> auto.arima(ret,d=0,D=0,max.p=6,max.q=6,ic=c("aic"),stepwise=FALSE,trace=TRUE)

 ARIMA(0,0,0) with zero mean     : -27687.05
 ARIMA(0,0,0) with non-zero mean : -27686.59
[omitted]
 ARIMA(5,0,0) with zero mean     : -27850.55
 ARIMA(5,0,0) with non-zero mean : -27851.11

Series: ret
ARIMA(4,0,1) with non-zero mean

Coefficients:
          ar1      ar2      ar3      ar4
      -0.5876  -0.0238  -0.0066  -0.0227
s.e.   0.2641   0.0196   0.0208   0.0199
         ma1  intercept
      0.5981     -1e-04
s.e.  0.2636      1e-04

sigma^2 estimated as 3.432e-05:  log likelihood=13849.44
AIC=-27684.88   AICc=-27684.85   BIC=-27641.33
```

bic

ARMA(4,1)

p 0—6
q 0—0

AIC/BIC ทุกกรณี