y_t ← return ของตลาด SET

จริงๆ มี return ของตลาดอื่น → ช่วยในการอธิบาย SET

EC435
บทที่ 6 แบบจำลองอนุกรมเวลาเชิงพหุ

Multivariate Time Series

เฉลิมพงษ์ คงเจริญ ©2556-2563

คณะเศรษฐศาสตร์ มหาวิทยาลัยธรรมศาสตร์

October 28, 2020

บทนำ

การเปลี่ยนแปลงที่เกิดขึ้นในตลาดการเงินหนึ่งสามารถส่งผ่านต่อไปยังตลาดอื่นได้ง่าย ดังนั้น บางครั้งเราจำเป็นต้องพิจารณาการเปลี่ยนแปลงของอนุกรมเวลาทางเงินไปพร้อมๆ กัน

โดยเราเรียกแบบจำลองที่พิจารณาอนุกรมเวลาหลายๆอนุกรมพร้อมกันว่าแบบจำลองอนุกรมเวลาเชิงพหุตัวแปร(multivariate time series) โดยเราสามารถเขียนอนุกรมเวลาในรูปของเวกเตอร์

$$\underbrace{\boldsymbol{Y}_t}_{\substack{n\times 1 \\ \text{vector} \\ \text{ของตัวแปร}}} = \left.\begin{bmatrix} y_{1t} \\ y_{2t} \\ \vdots \\ y_{nt} \end{bmatrix}\right\} \text{ตัวแปร } n \text{ ตัวแปร}$$

โดยที่ y_{it} แทนอนุกรมเวลา i และ n คืออจำนวนอนุกรมเวลาที่เราพิจารณาร่วมกันเช่น $y_{1t}, y_{2t}, \ldots y_{nt}$ แทนผลได้ตอบแทนในรูปล็อกของหุ้นในตลาดหลักทรัพย์แห่งประเทศไทย

→ สร้างแบบจำลอง อธิบาย

$$Y_t = \left.\begin{pmatrix} Y_{1t} \\ \vdots \\ Y_{nt} \end{pmatrix}\right\} \Rightarrow \text{พยากรณ์}$$

? ตัวแปรเหล่านี้มีความสัมพันธ์กัน < ตัวแปร, ช่วงเวลา

เมตริกซ์ความแปรปรวนระหว่างกัน

y_{1t} — $y_{1,t-1}, y_{1,t-2}, \ldots$
$y_{2,t}, y_{2,t-1}, y_{2,t-2}, \ldots$

$Y_t = (y_{1t}, y_{2t}, \ldots, y_{nt})'$ จะเป็นอนุกรมเวลานิ่ง (stationary) ถ้าโมเมนต์ที่หนึ่งและสองไม่ขึ้นอยู่กับเวลา (time-invariant) ซึ่งในที่นี้เราจะต้องพิจารณา (1) เวกเตอร์ของค่าเฉลี่ย (mean vector) $\mu = E(Y_t)$ โดยที่ $\mu = (\mu_1, \ldots, \mu_n)'$

ไม่ขึ้นกับเวลา

(2) เมตริกซ์ของความแปรปรวนร่วม (covariance matrix) ใช้สัญลักษณ์ Γ_0 สามารถคำนวณได้โดย

$$\begin{bmatrix} (y_{1t}-\mu_1) \\ \vdots \\ (y_{nt}-\mu_n) \end{bmatrix} \qquad E(Y_t) = \begin{bmatrix} E(y_{1t}) \\ E(y_{2t}) \\ \vdots \\ E(y_{nt}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \vdots \\ \mu_n \end{bmatrix} = \mu$$

gamma

ใน period เดียวกัน lag=0

$$\Gamma_0 = E[(\underset{n\times 1}{Y_t} - \mu)(\underset{n\times 1}{Y_t} - \mu)']$$

var(y_{1t}) cov(y_{1t}, y_{2t}) cov(y_{1t}, y_{nt})

$$= \begin{pmatrix} \boxed{E(y_{1t}-\mu_1)^2} & \boxed{E(y_{1t}-\mu_1)(y_{2t}-\mu_2)} & \cdots & \boxed{E(y_{1t}-\mu_1)(y_{nt}-\mu_n)} \\ \vdots & \boxed{E(y_{2t}-\mu_2)^2 = var(y_{2t})} & \ddots & \vdots \\ E(y_{nt}-\mu_n)(y_{1t}-\mu_1) & E(y_{nt}-\mu_n)(y_{2t}-\mu_2) & \cdots & \boxed{E(y_{nt}-\mu_n)^2} \end{pmatrix}$$

var(y_{nt})

$$= \begin{pmatrix} Var(y_{1t}) & Cov(y_{1t}, y_{2t}) & \cdots & Cov(y_{1t}, y_{nt}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ Cov(y_{nt}, y_{1t}) & Cov(y_{nt}, y_{2t}) & \cdots & Var(y_{nt}) \end{pmatrix}$$

Covariance matrix

cross-correltaion matrics

กำหนดให้ $\boldsymbol{D}$ เป็นเมทริกซ์ $n \times n$ ที่ประกอบด้วยค่าเบี่ยงเบนมาตรฐาน (standard deviation) ของ y_{it} ในพจน์แทยงมุม โดยที่ $\Gamma_{ii}(0)$ เป็นสัญลักษณ์แทนค่าความแปรปรวนของ y_{it} ดังนั้นเราสามารถเขียนเมทริกซ์ $\boldsymbol{D}$ ได้ดังนี้

Γ_0 ตำแหน่งที่ 1,1 = var(y_{1t})

$$D^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{\Gamma_{11}(0)}} & & \\ & \ddots & \\ & & \frac{1}{\sqrt{\Gamma_{nn}(0)}} \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{D} = \begin{pmatrix} \sqrt{\Gamma_{11}(0)} & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \sqrt{\Gamma_{nn}(0)} \end{pmatrix}$$

S.D.(y_{nt})

เราสามารถนิยามเมทริกซ์สหสัมพันธ์ข้ามตัวแปร (cross-correlation) ที่คาบเวลาเดียวกัน (concurrent) ได้ด้วย

covariance

$$\boxed{\boldsymbol{\rho}_0 = [\rho_{ij}(0)] = \boldsymbol{D}^{-1}\boldsymbol{\Gamma}_0\boldsymbol{D}^{-1}}$$

โดยที่ $\rho_{ij}(0) = \frac{\Gamma_{ij}(0)}{\sqrt{\Gamma_{ii}(0)\Gamma_{jj}(0)}} = \frac{Cov(y_{it}, y_{jt})}{std(y_{it})std(y_{jt})}$ ซึ่งคือสหสัมพันธ์ระหว่าง y_{it} และ y_{jt} โดยที่ในการวิเคราะห์อนุกรมเวลาเราจะเรียกสหสัมพันธ์ดังกล่าวว่าเป็นสหสัมพันธ์ในคาบเดียวกัน (concurrent หรือ contemporaneous)

cross correlation matrics

ความสัมพันธ์ในเชิงตัวแปรที่นำหรือตาม (lead-lag relationship) เมทริกซ์ความแปรปรวนร่วมข้ามตัวแปรที่มีค่าล่าเท่ากับหนึ่งใช้สัญลักษณ์ Γ_1 ดังที่ได้แสดงในสมการต่อไปนี้

$$\begin{bmatrix} y_{1t}-\mu_1 \\ \vdots \\ y_{nt}-\mu_n \end{bmatrix} \quad [(y_{1t-1}-\mu_1) \ \dots \ (y_{nt-1}-\mu_n)]$$

$Cov(y_{1t}, y_{2,t-1})$

ความสัมพันธ์ระหว่าง $y_{1t}, y_{2,t-1}$

lag-1 autocov ของ y_1

$Cov(y_{1t}, y_{1,t-1})$

$Cov(y_{2t}, y_{2,t-1})$

$$\Gamma_1 = E[(\boldsymbol{Y}_t - \boldsymbol{\mu})(\boldsymbol{Y}_{t-1} - \boldsymbol{\mu})']$$

$$= \begin{pmatrix} \boxed{E(y_{1t}-\mu_1)(y_{1,t-1}-\mu_1)} & \boxed{E(y_{1t}-\mu_1)(y_{2,t-1}-\mu_2)} & \dots & E(y_{1t}-\mu_1)(y_n \\ \vdots & \ddots & & \vdots \\ E(y_{nt}-\mu_n)(y_{1,t-1}-\mu_1) & E(y_{nt}-\mu_n)(y_{2,t-1}-\mu_2) & \dots & E(y_{nt}-\mu_n)(y_n \end{pmatrix}$$

$E(y_{2t}-\mu_2)(y_{2,t-1}-\mu_2)$

$$= \begin{pmatrix} Cov(y_{1t}, y_{1,t-1}) & Cov(y_{1t}, y_{2,t-1}) & \dots & Cov(y_{1t}, y_{n,t-1}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ Cov(y_{nt}, y_{1,t-1}) & Cov(y_{nt}, y_{2,t-1}) & \dots & Cov(y_{nt}, y_{n,t-1}) \end{pmatrix}$$

1-lag Cross-covariance matrix

$$\boxed{\rho_1 = D^{-1} \Gamma_1 D^{-1}}$$

ตัวประมาณค่าสหสัมพันธ์ไขว้

ตัวประมาณค่าของเวกเตอร์ค่าเฉลี่ยและเมตริกซ์ตัวแปรปรวนร่วมไขว้ (cross-covariance) ได้จากสมการต่อไปนี้

$\Gamma_l = E[(Y_t - \mu)(Y_{t-l} - \mu)']$

Sample mean vector

$$\widehat{\boldsymbol{\mu}}_Y = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} \boldsymbol{Y}_t \tag{1}$$

sample cross-cov

$$\widehat{\boldsymbol{\Gamma}}_0 = \frac{1}{T-1}\sum_{t=1}^{T} (\boldsymbol{Y}_t - \widehat{\boldsymbol{\mu}}_Y)((\boldsymbol{Y}_t - \widehat{\boldsymbol{\mu}}_Y))'$$

$$\widehat{\boldsymbol{\Gamma}}_l = \frac{1}{T-1}\sum_{t=l+1}^{T} (\boldsymbol{Y}_{t-l} - \widehat{\boldsymbol{\mu}}_Y)((\boldsymbol{Y}_t - \widehat{\boldsymbol{\mu}}_Y))'$$

จากตัวประมาณค่าข้างต้น ตัวประมาณค่าเมตริกซ์สหสัมพันธ์ไขว้ที่ค่าล่าที่ l สามารถคำนวณได้จาก

$$\boxed{\widehat{\boldsymbol{\rho}}_l = \widehat{\boldsymbol{D}}^{-1}\widehat{\boldsymbol{\Gamma}}_l\widehat{\boldsymbol{D}}^{-1}}$$

ตัวอย่างที่ 6.1 สหสัมพันธ์ไขว้

log return ของ ตลาดหุ้น TH & MY

Cross-correlation function.

เราใช้คำสั่ง ccf ในการคำนวณสหสัมพันธ์ไขว้ โดยกำหนดตัวแปรตัวที่หนึ่งและสอง และเลือกเงื่อนไข type=c("correlation") และ plot=FALSE

default ⇒ TRUE plot graph

Y_1 Y_2 $\ell = 0, 1, 2, \ldots, 10$ $\ell = -1, -2, \ldots$

ถอยไป 1

```
> ccf(lret_thmy$TH, lret_thmy$MY, type=c("correlation"), lag.max = 10, plot=FALSE)

Autocorrelations of series ‘’X, by lag

  -10     -9     -8     -7     -6     -5     -4     -3     -2     -1      0      1
0.038  0.109  0.093  0.050  0.063  0.035  0.033  0.094  0.139  0.126  0.409  0.031
    2      3      4
0.127  0.047  0.025
    5      6      7      8      9     10
0.097 -0.047 -0.004 -0.035 -0.005 -0.064
> ccf(lret_thmy$TH, lret_thmy$MY, type=c("correlation"), lag.max = 10,
     ylab="cross-correlation")
```

ℓ → corr →

Contemporaneous

$\mathrm{Corr}(Y_{1t}, Y_{2t}) = 0.409$ → log return ของ 2 ตลาด มีความสัมพันธ์เชิงบวกใน เวลาเดียวกัน

lead-lag

$\mathrm{Corr}(Y_{1t}, Y_{2,t-1}) = 0.126$ → log return MY ใน t-1 สัมพันธ์เชิงบวก กับ log return TH ใน t

$\mathrm{corr}(Y_{1t}, Y_{2,t+1}) = 0.031$ → log return MY ใน t+1 สัมพันธ์เชิงบวก กับ log return TH ใน t

dynamic → ต้องดูที่เวลา! สร้างแบบจำลอง

$\rho_\ell = 0$? (ค่า = 0 แสดงว่าไม่มีความสัมพันธ์)

การทดสอบสหสัมพันธ์ไขว้

แสดงค่าไม่มีความสัมพันธ์เชิงพลวัต

อการทดสอบว่าข้อมูลของตัวแปรเหล่านั้นมีความสัมพันธ์เชิงพลวัตกัน หรือทดสอบสมมุติฐานหลักว่าเมื่อพิจารณาย้อนไป m คาบเราไม่พบสหสัมพันธ์หรือเขียนเป็นสัญลักษณ์ $H_0 : \boldsymbol{\rho}_1 = \boldsymbol{\rho}_2 = \ldots = \boldsymbol{\rho}_m = \mathbf{0}$ ในขณะที่สมมุติฐานทางเลือกคือมีสหสัมพันธ์ไขว้ ณ ค่าล่าใดค่าหนึ่งมีค่าไม่เท่ากับศูนย์ หรือเขียนเป็นสัญลักษณ์ $H_1 : \boldsymbol{\rho}_i \neq \mathbf{0}$ สำหรับค่าใดค่าหนึ่งของ $i = 1, .., m$ Li and McLeod (1981) ได้เสนอการทดสอบพอรทแมนโทซึ่งได้ขยายการทดสอบจากตัวแปรเดียวเป็นตัวแปรพหุ ซึ่งค่าสถิติลุงบ๊อกซ์กรณีพหุตัวแปร (multivariate Ljung-Box test statistics) สามารถเขียนได้ดังนี้

lag ที่ m?

$$Q_n(m) = T^2 \sum_{l=1}^{m} \frac{1}{T-l} tr(\widehat{\boldsymbol{\Gamma}}_l' \widehat{\boldsymbol{\Gamma}}_0^{-1} \widehat{\boldsymbol{\Gamma}}_l \widehat{\boldsymbol{\Gamma}}_0^{-1}) \sim \chi^2_{df=m \cdot n^2}$$

ตัวแปร n

ปฏิเสธ Ho $Q_n(m) >$ critical value $\chi^2_{df=mn^2}$

โดยที่ $tr(A)$ คือเทรซของเมทริกซ์ A และ T คือจำนวนตัวอย่าง ภายใต้สมมุติฐานหลักที่ถูกต้องค่าสถิติ $Q_n(m)$ จะมีการแจกแจงลู่เข้าสู่การแจกแจงแบบไคสแควที่มีองศาเสรีเท่ากับ mn^2 $(\chi^2_{mn^2})$

ตัวอย่างที่ 6.2

lret_thmy $TH | $MY

เราทดสอบพอรทแมนโทกับผลตอบแทนรายสัปดาห์จากตลาดหลักทรัพย์ไทยและมาเลเซียด้วยคำสั่ง mq จากชุดคำสั่ง MTS ซึ่งในที่นี้เราจะเลือกค่า $m = 10$ โดยการระบุ `lag=10` ส่วน `adj` เป็นการปรับค่าองศาเสรีซึ่งในกรณีข้อมูลเดิมเราไม่จำเป็นต้องปรับ (หากเป็นค่าเรซิดิวเราจะต้องระบุพารามิเตอร์ซึ่งประมาณค่า

library(MTS)   m=10   ข้อมูลที่เราเก็บ

```
> mq(lret_thmy, lag=10, adj=0)
Ljung-Box Statistics:
         m        Q(m)      df     p-value
 [1,]    1.0       20.4     4.0          0
 [2,]    2.0       65.4     8.0          0
 [3,]    3.0       79.2    12.0          0
 [4,]    4.0      102.2    16.0          0
 [5,]    5.0      114.6    20.0          0
 [6,]    6.0      125.6    24.0          0
 [7,]    7.0      135.5    28.0          0
 [8,]    8.0      151.6    32.0          0
 [9,]    9.0      168.3    36.0          0
[10,]   10.0      176.5    40.0          0
```

→ P-value < α (0.05) เราสามารถปฏิเสธ Ho

$Q(10) = 176.5 > \chi^2_{df=40\ (=2^2\cdot 10)}$

แสดงว่ามี correlation ที่ไม่เท่ากับศูนย์

⇓

เราสามารถสร้างแบบจำลอง dynamic ของ Y_{1t}, Y_{2t}

$Y_t = \begin{bmatrix} Y_{1t} \\ Y_{2t} \end{bmatrix}$ อธิบาย

แบบจำลอง? AR, MA, ARMA ? ตัวแปรเดียว

คล้าย AR

Vector AR $\boxed{\underset{2\times1}{Y_t} = \underset{2\times2}{\Phi}\ \underset{2\times1}{Y_{t-1}} + \underset{2\times1}{\varepsilon_t}}$ *

Vector ARMA $Y_t = \Phi Y_{t-1} + \varepsilon_t + \Theta\varepsilon_{t-1}$

① ยุ่งยากในการประมาณค่า

② VARMA → VAR(P) ด้วย P มากขึ้น

เวลา: ใช้ Vector AR (VAR) จำลอง Y_t

แบบจำลองเวกเตอร์ออโตรีเกรสซีฟ (Vector Autoregressive Model)

แบบจำลองเวกเตอร์ออโตรีเกรสซีฟที่มีค่าล่าเท่ากับ p, $VAR(p)$, สามารถเขียนในรูป

$$\begin{pmatrix} y_{1t} \\ \vdots \\ y_{nt} \end{pmatrix} = \boldsymbol{Y}_t = \underbrace{\boldsymbol{c}}_{\begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}} + \underbrace{\Phi_1}_{n \times n} \overbrace{\boldsymbol{Y}_{t-1}}^{\begin{pmatrix} y_{1t-1} \\ \vdots \\ y_{nt-1} \end{pmatrix}} + \ldots + \Phi_p \boldsymbol{Y}_{t-p} + \overbrace{\varepsilon_t}^{\begin{pmatrix} \varepsilon_{1t} \\ \vdots \\ \varepsilon_{nt} \end{pmatrix}} \quad t = 1, 2, \ldots, T \qquad (6.1)$$

โดยที่ Φ_i เป็นเมทริกซ์สัมประสิทธิ์ที่มีขนาด $n \times n$ และ ε_t เป็นเวคเตอร์ของกระบวนการไวทนอซที่มีค่าเฉลี่ยเท่ากับศูนย์ และมีเมตริกซ์ความแปรปรวนร่วมที่ไม่แปรผันตามเวลา $\boldsymbol{\Sigma}$

ε_t เป็น (Multivariate) W.N. — 1) $E(\varepsilon_t) = \underline{0}$ $\begin{bmatrix} E(\varepsilon_{1t}) = 0 \\ E(\varepsilon_{2t}) = 0 \\ \vdots \\ E(\varepsilon_{nt}) = 0 \end{bmatrix}$

2) $Var(\varepsilon_t) = E[\varepsilon_t \varepsilon_t']$ ไม่เปลี่ยนแปลงตามเวลา

แบบจำลองเวกเตอร์ออโตรีเกรสซีฟ (Vector Autoregressive Model)

แบบจำลองเวกเตอร์ออโตรีเกรสซีฟที่มีค่าล่าเท่ากับ p, $VAR(p)$, สามารถเขียนในรูป

$$\boldsymbol{Y}_t = \boldsymbol{c} + \Phi_1 \boldsymbol{Y}_{t-1} + \dots + \Phi_p \boldsymbol{Y}_{t-p} + \varepsilon_t, \qquad t = 1, 2, \dots, T \qquad (6.1)$$

โดยที่ Φ_i เป็นเมทริกซ์สัมประสิทธิ์ที่มีขนาด $n \times n$ และ ε_t เป็นเวคเตอร์ของกระบวนการไวทนอยซ์ที่มีค่าเฉลี่ยเท่ากับศูนย์ และมีเมตริกซ์ความแปรปรวนร่วมที่ไม่แปรผันตามเวลา Σ

เพื่อความง่าย $n=2$ $\quad Y_t = \begin{pmatrix} y_{1t} \\ y_{2t} \end{pmatrix}$, $p=1$

ตัวอย่างเช่น หากเราสนใจแบบจำลอง $VAR(1)$

รูปเวกเตอร์

ลำดับ Φ_1 $\quad \Phi_1 \quad Y_{t-1} \quad$ shock ของ y_{1t}

$$\begin{pmatrix} y_{1t} \\ y_{2t} \end{pmatrix} = \underset{2\times1}{\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}} + \underset{2\times2}{\begin{pmatrix} \phi^1_{11} & \phi^1_{12} \\ \phi^1_{21} & \phi^1_{22} \end{pmatrix}} \underset{2\times1}{\begin{pmatrix} y_{1t-1} \\ y_{2t-1} \end{pmatrix}} + \begin{pmatrix} \varepsilon_{1t} \\ \varepsilon_{2t} \end{pmatrix} \qquad (6.2)$$

แถว 2 คอลัมน์ 1 $\quad$ shock ของ y_{2t}

สมการย่อย แต่ละตัวแปร

$$\begin{pmatrix} y_{1t} \\ y_{2t} \end{pmatrix} \begin{matrix} = \\ = \end{matrix} \begin{pmatrix} c_1 + \phi^1_{11} y_{1t-1} + \boxed{\phi^1_{12} y_{2,t-1}} + \varepsilon_{1t} \\ c_2 + \boxed{\phi^1_{21} y_{1t-1}} + \phi^1_{22} y_{2,t-1} + \varepsilon_{2t} \end{pmatrix}$$

ตัวแปรอื่นนอกจากตัวเรา

VAR

หรือเขียนเป็นรูปสมการของแต่ละตัวแปรที่เราสนใจ

$$y_{1t} = c_1 + \phi^1_{11} y_{1t-1} + \boxed{\phi^1_{12} y_{2t-1}} + \varepsilon_{1t}$$
$$y_{2t} = c_2 + \boxed{\phi^1_{21} y_{1t-1}} + \phi^1_{22} y_{2t-1} + \varepsilon_{2t}$$

$\neq 0$ $\neq 0$

เพิ่มตัวแปร y_{2t-1} มาช่วยอธิบาย
→ พยากรณ์ y_{1t} ได้ดีขึ้น
→ ความสัมพันธ์เชิงพลวัตของ y_{1t} กับ $y_{2,t-1}$

โดยที่ $Cov(\varepsilon_{1t}, \varepsilon_{2s}) = \sigma_{12}$ ถ้า $s = t$ และ $Cov(\varepsilon_{1t}, \varepsilon_{2s}) = 0$ ถ้า $s \neq t$ ($t \neq s$)

เงื่อนไขที่ว่า $\varepsilon_t = \begin{pmatrix} \varepsilon_{1t} \\ \varepsilon_{2t} \end{pmatrix}$ เป็น WN.

1) $E(\varepsilon_t) = \underline{0}$

2) $Var(\varepsilon_t) = E\left[(\varepsilon_t - \underline{0})(\varepsilon_t - \underline{0})'\right]$

$= E\left[\begin{pmatrix} \varepsilon_{1t} \\ \varepsilon_{2t} \end{pmatrix}_{2\times1} (\varepsilon_{1t} \ \ \varepsilon_{2t})_{1\times2}\right]$

$= \begin{bmatrix} E(\varepsilon_{1t}^2) & E(\varepsilon_{1t}\varepsilon_{2t}) \\ E(\varepsilon_{2t}\varepsilon_{1t}) & E(\varepsilon_{2t}^2) \end{bmatrix}$

$var(\varepsilon_{1t})$ $cov(\varepsilon_{1t}, \varepsilon_{2t}) = \sigma_{12}$? $var(\varepsilon_{2t})$

$= \Sigma$ (sigma) ← Var cov ของ $\varepsilon_t = \begin{pmatrix} \varepsilon_{1t} \\ \varepsilon_{2t} \end{pmatrix}$ ใน period เดียวกัน

3) $E(\varepsilon_t \cdot \varepsilon_s') = E\left[\begin{pmatrix} \varepsilon_{1t} \\ \varepsilon_{2t} \end{pmatrix} (\varepsilon_{1s} \ \ \varepsilon_{2s})\right]$

$cov(\varepsilon_{1t}\varepsilon_{2t})$ $cov(\varepsilon_{1t}, \varepsilon_{2s})$

คิด $s = t-1$

$= \begin{bmatrix} E(\varepsilon_{1t}\varepsilon_{1s}) & E(\varepsilon_{1t}\varepsilon_{2s}) \\ E(\varepsilon_{2t}\varepsilon_{1s}) & E(\varepsilon_{2t}\varepsilon_{2s}) \end{bmatrix}$

สมมุติ $= \underline{0}$

(shock ต่าง period จะไม่สัมพันธ์กัน)

VAR

หรือเขียนเป็นรูปสมการของแต่ละตัวแปรที่เราสนใจ

Reduced form VAR

$$
\begin{cases}
y_{1t} = c_1 + \phi^1_{11} y_{1t-1} + \phi^1_{12} y_{2t-1} + \varepsilon_{1t} \\
y_{2t} = c_2 + \phi^1_{21} y_{1t-1} + \phi^1_{22} y_{2t-1} + \varepsilon_{2t}
\end{cases}
$$

ไม่ได้บอก (เฉพาะเจาะจง) ความสัมพันธ์ของ สมมติ y_{1t} กับ y_{2t} ผ่านความสัมพันธ์ของ shock

โดยที่ $Cov(\varepsilon_{1t}, \varepsilon_{2s}) = \sigma_{12}$ ถ้า $s = t$ และ $Cov(\varepsilon_{1t}, \varepsilon_{2s}) = 0$ ถ้า $s \neq t$

$Cov(\varepsilon_{1t}, \varepsilon_{2t}) = \sigma_{12}$ เช่น σ_{12} +

ค่าสัมประสิทธิ์แต่ละตัวจะเป็นค่าที่บอกความสัมพันธ์ระหว่างตัวแปรที่ต่างเวลากัน

- ϕ^1_{12} ⇒ y_{2t-1} ปป. 1 หน่วย y_{1t} จะเปลี่ยนแปลง ϕ'_{12}
- ϕ^1_{21} ⇒ y_{1t-1} ปป. 1 หน่วย y_{2t} จะเปลี่ยนแปลง ϕ'_{21}

dynamic

ค่าสัมประสิทธิ์ในสมการ (6.2) อธิบายพลวัตของอนุกรมเวลาที่เราสนใจ (lead-lag) แต่มิได้อธิบาย concurrent หรือ contemporaneous ไว้อย่างชัดเจน (y_{1t} กับ y_{2t})

เราสามารถดูความสัมพันธ์ดังกล่าวได้ในเมทริกซ์ความแปรปรวนของช็อก

เราเรียกแบบจำลองเวกเตอร์ออโตรีเกรสซีฟในรูป (6.2) ว่า**สมการในรูปลดรูป (reduced form)**

VAR

ใน Reduced form VAR เราไม่สามารถ แยกผลกระทบ ความสัมพันธ์ของ y_{1t} กับ y_{2t} (ผ่าน σ_{12}) $\Rightarrow$ ไม่ทราบขนาดชัดเจน (ไม่สามารถประสิทธิ์)

เราสามารถเขียนความสัมพันธ์ระหว่างอนุกรมเวลาในช่วงเดียวกันได้อย่างชัดเจนโดยใช้การแปลงรูปสมการที่ (6.2) ได้ดังนี้

var-cov var(ε_t)

เนื่องจาก $\boldsymbol{\Sigma}$ เป็นเมตริกซ์ positive definite ดังนั้นเราสามารถสร้างเมทริกซ์ lower triangular

เราสามารถแยกเมทริกซ์ (decomposition)

$$\boldsymbol{L} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ l_{21} & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ l_{n1} & l_{n2} & \dots & 1 \end{pmatrix} \qquad G = \begin{pmatrix} g_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & g_2 & & \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & \dots & & g_n \end{pmatrix}$$

และเมตริกซ์แทยงมุม $\boldsymbol{G}$ ที่ทำให้ $\boxed{\boldsymbol{\Sigma} = \boldsymbol{LGL}'}$ เราเรียกการแยกส่วนประกอบนี้ว่า Cholesky decomposition

ใช้ เมทริกซ์ L^{-1} = ยังคงเป็น lower triangular

$$L^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ l^{21} & 1 & 0 & 0 \\ l^{31} & l^{32} & 1 & 0 \\ l^{n1} & l^{n2} & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

ค่าไม่เท่ากับ l_{21}

คูณด้วย Reduced form VAR(1)

$$\boxed{L^{-1} y_t = L^{-1} c + \underbrace{L^{-1}\Phi_1}_{\Phi_1^*} Y_{t-1} + \underbrace{L^{-1}\varepsilon_t}_{\eta_t}}$$

ค่าคงที่

เรียก η_t

Structural form VAR

VAR

เราสามารถเขียนความสัมพันธ์ระหว่างอนุกรมเวลาในช่วงเดียวกันได้อย่างชัดเจนโดยใช้การแปลงรูปสมการที่ (6.2) ได้ดังนี้

เนื่องจาก $\boldsymbol{\Sigma}$ เป็นเมตริกซ์ positive definite ดังนั้นเราสามารถสร้างเมทริกซ์ lower triangular

$$\boldsymbol{L} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ l_{21} & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ l_{n1} & l_{n2} & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

และเมตริกซ์แทยงมุม $\boldsymbol{G}$ ที่ทำให้ $\boldsymbol{\Sigma} = \boldsymbol{L}\boldsymbol{G}\boldsymbol{L}'$ เราเรียกการแยกส่วนประกอบนี้ว่า Cholesky decomposition

shock vs structural shock on Reduced VAR

กำหนดให้ $\boxed{\boldsymbol{\eta}_t = \boldsymbol{L}^{-1}\varepsilon_t}$ เราจะได้ว่า

η_t มีค่าเฉลี่ย = 0

$E(\boldsymbol{\eta}_t) = E(L^{-1}\varepsilon_t) = L^{-1}E(\varepsilon_t) = L^{-1}0 = 0$

$Var(\boldsymbol{\eta}_t) = Var(L^{-1}\varepsilon_t) = L^{-1}Var(\varepsilon_t)(L^{-1})' = L^{-1}(LGL')(L')^{-1} = G$

G เป็น diagonal matrix → η_t แต่ละตัวไม่มีความสัมพันธ์กัน

VAR

η_t แต่ละคู่ไม่มีความสัมพันธ์ระหว่างกัน (อิสระ)

$Cov(\eta_{1t}, \eta_{2t}) = 0$

หากเราคูณข้างหน้าสมการ (6.1) ด้วย $\boldsymbol{L}^{-1}$ จะได้

$$\boldsymbol{L}^{-1}\boldsymbol{Y}_t = L^{-1}c + L^{-1}\Phi_1 Y_{t-1} + L^{-1}\varepsilon_t$$

η_t

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \ell^{21} & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_{1t} \\ y_{2t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \ell^{21} & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \ell^{21} & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \phi_{11} & \phi_{12} \\ \phi_{21} & \phi_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_{1t-1} \\ y_{2t-1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \ell^{21} & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \varepsilon_{1t} \\ \varepsilon_{2t} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} y_{1t} \\ \ell^{21}y_{1t} + y_{2t} \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} c_1 \\ \ell^{21}c_1 + c_2 \end{pmatrix}}_{\equiv\, c^*} + \underbrace{\begin{pmatrix} \phi_{11} & \phi_{12} \\ \ell^{21}\phi_{11}+\phi_{21} & \ell^{21}\phi_{12}+\phi_{22} \end{pmatrix}}_{\equiv\, \Phi_1^*}\begin{pmatrix} y_{1t-1} \\ y_{2t-1} \end{pmatrix} + \underbrace{\begin{pmatrix} \varepsilon_{1t} \\ \ell^{21}\varepsilon_{1t} + \varepsilon_{2t} \end{pmatrix}}_{\equiv\, \eta_t}$$

$\eta_t = \begin{pmatrix} \eta_{1t} \\ \eta_{2t} \end{pmatrix}$

dynamic

$y_{1t} \sim y_{1,t-1}, y_{2,t-1}$

$y_{2t} \sim y_{1,t-1}, y_{2,t-1}$

บรรทัด 2

$y_{2t} = -\ell^{21} y_{1t}$ + constant + dynamic + shock.

Contemporaneous relationship

(period เดียวกัน)

VAR

หากเราคูณข้างหน้าสมการ (6.1) ด้วย $\boldsymbol{L}^{-1}$ จะได้

$\boldsymbol{L}^{-1}\boldsymbol{Y}_t =$

$\boldsymbol{L}^{-1}$ จะแสดงความสัมพันธ์ระหว่างอนุกรมเวลาในคาบเดียวกัน

เราเรียกแบบจำลองเวกเตอร์ออโตรีเกรสซีฟในรูปนี้ว่า**สมการในรูปโครงสร้าง (structural equation)**

ตัวอย่างที่ 6.3 ดูใน Lecture

กำหนด Bivariate VAR(1)) สามารถแสดงในรูปลดรูปได้ดังนี้

$$\begin{pmatrix} y_{1t} \\ y_{2t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.2 \\ 0.4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0.2 & 0.3 \\ -0.6 & 1.1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_{1,t-1} \\ y_{2,t-1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \varepsilon_{1t} \\ \varepsilon_{2t} \end{pmatrix}$$

โดยที่ $\Sigma = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow LGL' \rightarrow L = ?$

$\searrow L^{-1} = ?$

VAR

- เราจะเห็นได้ว่าเราสามารถแปลงแบบจำลองเวกเตอร์ออโตรีเกรสซีฟในรูปลดรูปไปเป็นรูปโครงสร้างได้ด้วย Cholesky decomposition
- อย่างไรก็ตามในการวิเคราะห์อนุกรมเวลาเรามักจะใช้สมการในรูป Reduced form เนื่องจากเป็นรูปที่ง่ายในการประมาณค่า
- เรามักจะเน้นผลในการพยากรณ์ของแบบจำลองซึ่งเราไม่สามารถใช้แบบจำลองในรูปโครงสร้างพยากรณ์ข้อมูลได้เนื่องจากเราไม่ทราบข้อมูลของอนุกรมเวลาอื่นๆในคาบเดียวกัน

เงื่อนไขการเป็นอนุกรมเวลานิ่ง

แบบจำลอง $VAR(p)$ สามารถเขียนในรูปเครื่องหมายขยับไปข้างหลัง (lag operator) ได้ดังนี้

$$\boldsymbol{\Phi}(L)\boldsymbol{Y}_t = \boldsymbol{c} + \boldsymbol{\varepsilon}_t$$

โดยที่ $\boldsymbol{\Phi}(L) = \boldsymbol{I}_n - \boldsymbol{\Phi}_1 L - \ldots - \boldsymbol{\Phi}_p L^p$ แบบจำลอง $VAR(p)$ จะมีเสถียรภาพถ้ารากของ

$$\det(\boldsymbol{I}_n - \boldsymbol{\Phi}_1 z - \ldots - \boldsymbol{\Phi}_p z^p) = 0$$

มีค่ามากกว่าหนึ่ง (หรือโมดูลัสมากกว่าหนึ่งในกรณีจำนวนเชิงซ้อน) ถ้าสมมุติให้กระบวนการดังกล่าวมีค่าในอดีตที่เป็นอนันต์ แล้วกระบวนการ $VAR(p)$ ที่มีเสถียรภาพจะเป็นกระบวนการนิ่งและ ergodic โดยมีค่าเฉลี่ย ค่าความแปรปรวนและค่าความแปรปรวนร่วมในตัวเองที่ไม่ขึ้นกับเวลา

การประมาณค่า

VAR − Reduced form → พยากรณ์ จาก Reduced form (structural form)
→ แปลงไปเป็น structural form VAR

*ประมาณค่าได้ง่ายด้วย OLS ⇒ จุดเด่น

การเราพิจารณาสมการ (6.2) แต่ละสมการจะมีตัวแปรที่เหมือนกัน เราสามารถพิจารณาสมการสำหรับแต่ละตัวแปรออกเป็น

$y_t = \Phi y_{t-1} + \varepsilon_t$

สมการ $y_{1t} = \phi_{11} y_{1t-1} + \phi_{12} y_{2t-1} + \dots$

$y_{2t} = \dots$

OLS

$$\boldsymbol{y}_i = \boldsymbol{Z}\boldsymbol{\phi}_i + \boldsymbol{e}_i, \qquad i = 1, \dots, n$$

แต่ละสมการสามารถประมาณค่าได้ด้วย ordinary least squares (OLS) แยกแต่ละสมการ และจะได้ $\hat{\boldsymbol{\Phi}} = \left[\hat{\phi}_1, \dots, \hat{\phi}_n\right]$ เป็นเมตริกซ์ $(k \times n)$ ของค่าสัมประสิทธิ์จากการประมาณค่าด้วย OLS

ภายใต้ข้อสมมุติที่แบบจำลองเป็นแบบกระบวนการนิ่งและ ergodic เราจะได้ $vec(\hat{\Phi})$ มีคุณสมบัติ consistent และมีการแจกแจงแบบปกติเมื่อกลุ่มตัวอย่างใหญ่โดยมีเมตริกซ์ค่าความแปรปรวนเท่ากับ

$$\widehat{aver}(vec(\hat{\Phi})) = \hat{\boldsymbol{\Sigma}} \otimes (\boldsymbol{Z}'\boldsymbol{Z})^{-1}$$

โดยที่ $\hat{\Sigma} = \frac{1}{T-k}\sum_{t=1}^{T} \hat{\varepsilon}_t \hat{\varepsilon}_t'$ และ $\hat{\varepsilon}_t = \boldsymbol{Y}_t - \hat{\boldsymbol{\Phi}}'\boldsymbol{Z}_t$ เป็น residuals จากการประมาณค่า

การเลือกจำนวนความล่าที่เหมาะสม

P? ⇒ AIC/BIC

การหาความล่าที่เหมาะสมของแบบจำลองเวคเตอร์ออโตรีเกรสซีฟอาจจะทำได้โดยการใช้สูตรการเลือกความล่า โดยการประมาณค่าแบบจำลองเวคเตอร์ออโตรีเกรสซีฟที่มีความล่าเท่ากับ $0, 1, \ldots, p_{max}$ แล้วเลือกค่า p ที่ทำให้ค่าที่ใช้เลือกมีค่าต่ำที่สุด โดยจะมีสูตรดังนี้

$$IC(p) = \ln|\tilde{\boldsymbol{\Sigma}}(p)| + c_T(n,p)$$

โดยที่ $\tilde{\boldsymbol{\Sigma}}(p) = T^{-1}\sum_{t=1}^{T}\hat{\varepsilon}_t\hat{\varepsilon}_t'$ คือ residual covariance matrix จาก $VAR(p)$, c_T คือลำดับที่ขึ้นกับจำนวนตัวอย่าง

✓ BIC – consistent
(P เลือก → P จริง)
เมื่อ T มากๆ
– เลือก p น้อยกว่า AIC

$$AIC(p) = \ln|\tilde{\boldsymbol{\Sigma}}(p)| + \frac{2}{T}(pn^2)$$

$$BIC(p) = \ln|\tilde{\boldsymbol{\Sigma}}(p)| + \frac{\ln T}{T}(pn^2)$$

$$HQIC(p) = \ln|\tilde{\boldsymbol{\Sigma}}(p)| + \frac{2\ln(\ln T)}{T}(pn^2)$$

ตัวอย่าง 6.5

จาก Cross Correlation เราพบว่ามีความสัมพันธ์กัน => VAR

พิจารณาความสัมพันธ์ระหว่างผลได้ตอบแทนรายสัปดาห์จากการลงทุนในตลาดหลักทรัพย์แห่งประเทศไทย (`lret_thmy$TH`) และตลาดหุ้นมาเลเซีย (`lret_thmy$MY`) โดยใช้ข้อมูลรายสัปดาห์ระหว่างวันที่ 2 มกราคม 2541 ถึง 31 ธันวาคม 2562 ข้อมูลอยู่ในไฟล์ `lret_3countries_w9819.txt`)

data from

```
> lret3 <- read.csv("~/lret_3countries_w9819.txt")
> lret_thmy<-cbind(lret3$SET, lret3$KLSE)
> colnames(lret_thmy)<-c("TH", "MY")
> rownames(lret_thmy)<-lret3$Index
```

- ตั้งชื่อ col/row

เราสามารถพิจารณาค่าสถิติเบื้องต้นได้จากคำสั่ง `basicStats` และ `acf` เหมือนกับที่เราเคยใช้ในหัวข้อก่อนได้

lret_thmy

ตัวอย่าง 6.5

$$\begin{bmatrix} y_{1t} \\ y_{2t} \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} y_{TH,t} \\ y_{MY,t} \end{bmatrix} - \text{VAR}(p) \quad p\ ?$$

หากเราต้องการประมาณค่า VAR(p) เราจะใช้ `library(vars)` โดยที่เราอาจจะเริ่มจากการหาค่า p ที่เหมาะสมโดยการใช้คำสั่ง `VAR` พร้อมระบุเมตริกซ์ของข้อมูล `lret` จำนวนค่าล่าสูงสุด `lag.max` และ เกณฑ์ในการเลือกค่าล่า `ic=c("AIC")` โดยที่ `"SC"` จะแทน Schwarz-Bayesian (BIC) และ `"HQ"` Hannan-Quinn (HQIC)

data อยู่ในรูป y_{1t} y_{2t}

```
\begin{lstlisting}
> library(vars)
> msel_aic<-VAR(lret_thmy, lag.max=5, ic=c("AIC"))
> msel_aic

VAR Estimation Results:
=======================

Estimated coefficients for equation TH:
=======================================
Call:
TH = TH.l1 + MY.l1 + TH.l2 + MY.l2 + TH.l3 + MY.l3 + TH.l4 + MY.l4 + const

   TH.l1    MY.l1    TH.l2    MY.l2    TH.l3    MY.l3    TH.l4    MY.l4    const
 0.01524  0.00904  0.13483  0.12268  0.04040  0.04239 -0.13186  0.05922  0.08477
```

$P = 0, 1, 2, \ldots, 5$

สมการ 1

แสดงแบบจำลอง VAR ที่ AIC $\Rightarrow P = 4$

ค่าสัมประสิทธิ์

y_{1t-1} $y_{2,t-1}$ $t-4$

MY ← สมการ

msel_bic <- VAR(. . . . , "SC") → P=2 VAR(2)

BIC

ตัวอย่าง 6.5

กำหนด p

```
> model1<-VAR(lret_thmy, p=2)
> summary(model1)

VAR Estimation Results:
=========================
Endogenous variables: TH, MY
Deterministic variables: const
Sample size: 1147
Log Likelihood: -5497.069
Roots of the characteristic polynomial:
0.47 0.408 0.148 0.0737
Call:
VAR(y = lret_thmy, p = 2)


Estimation results for equation TH:
===================================
TH = TH.l1 + MY.l1 + TH.l2 + MY.l2 + const

      Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
TH.l1   0.0248     0.0319    0.78    0.438
MY.l1   0.0051     0.0413    0.12    0.902
TH.l2   0.1273     0.0321    3.96  7.9e-05 ***
MY.l2   0.0950     0.0410    2.32    0.021 *
const   0.1027     0.0941    1.09    0.275
---
Signif. codes:  0 ‘***’ 0.001 ‘**’ 0.01 ‘*’ 0.05 ‘’. 0.1 ‘’  1

Residual standard error: 3.18 on 1142 degrees of freedom
Multiple R-Squared: 0.0307,^^IAdjusted R-squared: 0.0273
F-statistic: 9.03 on 4 and 1142 DF,  p-value: 3.51e-07
```

VAR(2)

$y_{TH,t}$ — (1)

ϕ SE t-stat p-value → H_0: พารามิเตอร์ = 0

$$\hat{y}_{TH,t} = 0.0248\, y_{TH,t-1} + 0.0051\, y_{MY,t-1} + \cdots$$

ตัวอย่าง 6.5

$\hat{y}_{MY,t} = 0.11\, y_{TH,t-1} - 0.036\, y_{MY,t-1} + \dots$

```
Estimation results for equation MY:
===================================
MY = TH.l1 + MY.l1 + TH.l2 + MY.l2 + const

      Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
TH.l1   0.1102     0.0243    4.54  6.3e-06 ***
MY.l1  -0.0361     0.0315   -1.15  0.25179
TH.l2   0.0833     0.0245    3.41  0.00068 ***
MY.l2   0.0786     0.0312    2.52  0.01196 *
const   0.0737     0.0716    1.03  0.30389
---
Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' '  1

Residual standard error: 2.42 on 1142 degrees of freedom
Multiple R-Squared: 0.0436,^^IAdjusted R-squared: 0.0403
F-statistic:    13 on 4 and 1142 DF,  p-value: 2.27e-10

Covariance matrix of residuals:
     TH   MY
TH 10.1 3.00
MY  3.0 5.86

Correlation matrix of residuals:
      TH    MY
TH 1.000 0.389
MY 0.389 1.000
```

(2)

พิจารณาทีละ parameter

$var(\varepsilon_{1t})$

$cov(\varepsilon_{1t}, \varepsilon_{2t})$

$var(\varepsilon_{2t})$

$$\hat{\Sigma} = \begin{bmatrix} \widehat{var}(\varepsilon_{1t}) & \widehat{Cov}(\varepsilon_{1t},\varepsilon_{2t}) \\ \widehat{Cov}(\varepsilon_{1t},\varepsilon_{2t}) & \widehat{var}(\varepsilon_{2t}) \end{bmatrix}$$

ความสัมพันธ์ของ 2 ตัวแปร ไม่เท่ากับ 0
(ไม่เป็นอิสระต่อกัน)

อ้างอิงต่อได้ว่า y_{1t} กับ y_{2t} มีความสัมพันธ์
ที่เวลาเดียวกัน

$Corr(\varepsilon_{1t}, \varepsilon_{2t}) = 0.4$

อธิบาย $\begin{pmatrix} y_{1t} \\ y_{2t} \end{pmatrix} = Y_t = c + \Phi_1 Y_{t-1} + \Phi_2 Y_{t-2} + \varepsilon_t$

⇒ เพื่อจะใช้ประโยชน์
1) พยากรณ์
2) อธิบายความสัมพันธ์ของตัวแปร

การพยากรณ์จากแบบจำลอง *VAR* (1)

ง่าย / ไม่มี c

$\begin{pmatrix}Y_{1t}\\ Y_{2t}\end{pmatrix} \equiv Y_t = \Phi Y_{t-1} + \varepsilon_t$

วิธีการหาเหมือนเดิมกับ AR(p) ⇒ $h \to h+1$

1) $Y_{h+1} = \Phi Y_{(h+1)-1} + \varepsilon_{h+1}$

หากเราพิจารณาแบบจำลอง $VAR(p)$ โดยที่เราทราบค่าพารามิเตอร์ $\boldsymbol{\Phi}$ ค่าพยากรณ์ไปข้างหน้าหนึ่งคาบ $\boldsymbol{Y}_{h+1}$ ด้วยข้อมูลที่มี ณ คาบที่ h ได้ด้วยการเขียนสมการแสดงค่า $\boldsymbol{Y}_{h+1}$ แล้วหา conditional expectation ด้วยข้อมูล ณ h เราจะได้ค่าพยากรณ์เท่ากับ

2) $\widehat{\boldsymbol{Y}}_h(1) = E(Y_{h+1}|F_h) = E(\Phi Y_h + \varepsilon_{h+1}|F_h) = \Phi Y_h + E(\varepsilon_{h+1}|F_h) = \Phi Y_h = \begin{pmatrix}\phi_{11} & \phi_{12}\\ \phi_{21} & \phi_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}Y_{1h}\\ Y_{2h}\end{pmatrix}$

$E(\varepsilon_{h+1}) = 0$ สมมุติ

โดยที่ค่าความผิดพลาดจากการพยากรณ์ (forecast error) เท่ากับ

$\begin{pmatrix}e_1(1)\\ e_2(1)\end{pmatrix}$ 2x1

จริง / พยากรณ์

$\boldsymbol{e}(1) = \boldsymbol{Y}_{h+1} - \widehat{\boldsymbol{Y}}_h(1) = [\Phi Y_h + \varepsilon_{h+1}] - \Phi Y_h = \begin{pmatrix}\varepsilon_{1,h+1}\\ \varepsilon_{2,h+1}\end{pmatrix}$ → forecast error ของ Y_1. ของการพยากรณ์ 1 คาบ $= \varepsilon_{1,h+1}$

ค่าพยากรณ์ไปข้างหน้าสองคาบ $\boldsymbol{Y}_{h+2}$ ด้วยข้อมูลที่มี ณ คาบที่ h จะเท่ากับ

$\widehat{\boldsymbol{Y}}_h(2) = E(Y_{h+2}|F_h) = E(\Phi Y_{h+1} + \varepsilon_{h+2}|F_h) = \Phi E(Y_{h+1}|F_h) + E(\varepsilon_{h+2}|F_h) = \Phi^2 Y_h$

$E(\varepsilon_{h+2}|F_h) = 0$, $\hat{Y}_h(1) = \Phi(Y_h)$

โดยที่ค่าความผิดพลาดจากการพยากรณ์ (forecast error) เท่ากับ

$\begin{pmatrix}e_1(2)\\ e_2(2)\end{pmatrix}$

$\boldsymbol{e}(2) = \boldsymbol{Y}_{h+2} - \widehat{\boldsymbol{Y}}_h(2) = [\Phi Y_{h+1} + \varepsilon_{h+2}] - \Phi^2 Y_h = [\Phi^2 Y_h + \Phi\varepsilon_{h+1} + \varepsilon_{h+2}] - \Phi^2 Y_h$

$Y_{h+1} = \Phi Y_h + \varepsilon_{h+1}$

$\hat{Y}_h(1) = \begin{pmatrix}\hat{Y}_{1,h}(1)\\ \hat{Y}_{2,h}(1)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\phi_{11} & \phi_{12}\\ \phi_{21} & \phi_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}Y_{1,h}\\ Y_{2,h}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\phi_{11}Y_{1,h} + \phi_{12}Y_{2,h}\\ \phi_{21}Y_{1,h} + \phi_{22}Y_{1,h}\end{pmatrix}$

→ $\hat{Y}_{1,h}(1) = \phi_{11}Y_{1,h} + \phi_{12}Y_{2h}$

→ $\hat{Y}_{2,h}(1) = \phi_{21}Y_{1,h} + \phi_{22}Y_{2h}$

หา var. ① ได้ matrix

$Var(e(1)) = E(e(1)e(1)') = E(\varepsilon_{h+1}\varepsilon_{h+1}') = Var(\varepsilon_{h+1}) = \Sigma$

$E\begin{bmatrix} e(1)^2 & e(1)e(2)\\ e(1)e(2) & e(2)^2\end{bmatrix}$

var ของ forecast error $Y_1 = \sigma_1^2$

var ของ f.e. $Y_2 = \sigma_2^2$

การพยากรณ์จากแบบจำลอง *VAR*

② $e_1(1) = \varepsilon_{1,h+1} \rightarrow var(e_1(1)) = Var(\varepsilon_{1,h+1}) = \sigma_1^2$

$e_2(1) = \varepsilon_{2,h+1} \rightarrow var(e_2(1)) = Var(\varepsilon_{2,h+1}) = \sigma_2^2$

หากแทนค่าด้วยวิธีการ recursive จะได้ค่าพยากรณ์ไปข้างหน้า l คาบ $\boldsymbol{Y}_{h+l}$ ด้วยข้อมูลที่มี ณ คาบที่ h เท่ากับ $Y_{h+l} = \ldots$

VAR(p)

$$\widehat{\boldsymbol{Y}}_h(l) = \boldsymbol{c} + \boldsymbol{\Phi}_1 \widehat{\boldsymbol{Y}}_h(l-1) + \ldots + \boldsymbol{\Phi}_p \widehat{\boldsymbol{Y}}_h(l-p)$$

* การพยากรณ์ด้วยแบบจำลอง VAR ทำได้ง่าย

ค่าคาดเคลื่อนของการพยากรณ์ (forecast errors) จะเขียนในรูป

$\widehat{\boldsymbol{Y}}_h(l) - \boldsymbol{Y}_{h+l} = \sum_{s=0}^{l-1} \boldsymbol{\Psi}_s \boldsymbol{\varepsilon}_{h+l-s}$

โดยที่เมตริกซ์ $\boldsymbol{\Psi}_s$ สามารถคำนวณได้โดย $\boldsymbol{\Psi}_s = \sum_{j=1}^{p-1} \boldsymbol{\Psi}_{s-j} \boldsymbol{\Phi}_j$

ในขณะที่ MSE ของ $\widehat{\boldsymbol{Y}}_h(l)$ จะเท่ากับ

$$\boldsymbol{\Sigma}(l) = MSE(Y_{h+l} - \widehat{\boldsymbol{Y}}_h(l)) = \sum_{s=0}^{l-1} \boldsymbol{\Psi}_s \boldsymbol{\Sigma} \boldsymbol{\Psi}_s'$$

forecast error ของ Y_1 ข้างหน้า 2 คาบ

$$\begin{pmatrix} e_1(2) \\ e_2(2) \end{pmatrix} = e(2) = \Phi \varepsilon_{h+1} + \varepsilon_{h+2} = \begin{pmatrix} \phi_{11} & \phi_{12} \\ \phi_{21} & \phi_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_{1,h+1} \\ \varepsilon_{2,h+1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \varepsilon_{1,h+2} \\ \varepsilon_{2,h+2} \end{pmatrix}$$

$var(e_1(2))$

$$e_1(2) = \begin{pmatrix} \phi_{11}\varepsilon_{1,h+1} + \phi_{12}\varepsilon_{2,h+1} \\ \phi_{21}\varepsilon_{1,h+1} + \phi_{22}\varepsilon_{2,h+1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \varepsilon_{1,h+2} \\ \varepsilon_{2,h+2} \end{pmatrix}$$

fe ของ Y_1 พยากรณ์ไปข้างหน้า 2 คาบ ขึ้นกับ ε_2 ด้วย

ตัวอย่าง 6.6

$\begin{bmatrix} Y_{TH} \\ Y_{MY} \end{bmatrix}$

ต่อเนื่องจากตัวอย่าง 6.5 เราสามารถทำนายผลได้ตอบแทนไปข้างหน้าของทั้งสองตลาดที่เราสนใจได้ด้วยคำสั่ง `predict` โดยระบุแบบจำลองที่ใช้และคาบที่ทำนายไปข้างหน้า

VAR(2) $l=5$

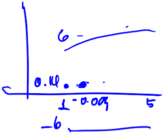
```
> model1.predict<-predict(model1, n.ahead=5)
> model1.predict
$TH
        fcst   lower  upper   CI
[1,]  0.14364 -6.09   6.38  6.23
[2,] -0.00965 -6.24   6.23  6.24
[3,]  0.13630 -6.19   6.46  6.32
[4,]  0.10392 -6.22   6.43  6.33
[5,]  0.13238 -6.20   6.46  6.33

$MY
       fcst  lower  upper   CI
[1,]  0.1644 -4.58   4.91  4.75
[2,] -0.0153 -4.80   4.77  4.79
[3,]  0.0980 -4.75   4.94  4.85
[4,]  0.0832 -4.77   4.93  4.85
[5,]  0.1012 -4.75   4.95  4.85
```

$l=1$ $l=5$

$\hat{Y}_h(l) \pm \underset{1.96}{t_{\alpha=0.05}} \times \sqrt{\text{var(forecast error)}}$

lower $\hat{Y}_h(l) - \underbrace{t_{\alpha=0.5} \times \sqrt{\text{var(fe)}}}_{C.I.}$

$\hat{Y}_h(l)$



อธิบายความสัมพันธ์ของตัวแปร Y_{1t}, Y_{2t}

ใน VAR เราไม่สามารถอธิบายความสัมพันธ์ได้โดยตรงจากการพิจารณาค่าพารามิเตอร์

เครื่องมือช่วย

① Granger Causality ② Impulse Response Function ③ variance decomposition

① เสนอโดย Cause เหตุและผล → ทฤษฎี $X \to Y$ cause causality

Granger Causality

ตัวแปรใน VAR อาจจะ: ไม่มีทฤษฎีรองรับ (Atheoretical)

โครงสร้างของแบบจำลอง VAR ช่วยให้ข้อมูลกับเราว่าตัวแปรหรือกลุ่มของตัวแปรมีความสามารถในการทำนายตัวแปรอื่นหรือไม่

$\neq 0$ ... y_2

Granger (1969) เสนอว่า VAR(1)

$$y_{2,t} = \phi_{21} y_{1,t-1} + \phi_{22} y_{2,t-1} + \varepsilon_t$$

นิยาม

- ถ้าตัวแปร y_1 ช่วยในการทำนายตัวแปรอื่น y_2 เราจะเรียกว่า y_1 แกรงเจอรคอส (Granger-cause) y_2
- ถ้า y_1 ไม่ช่วยในการทำนายตัวแปร y_2 เราจะพูดว่า y_1 ไม่แกรงเจอรคอส (does not Granger-cause) y_2 $\boxed{\phi_{21}=0}$

เราจะต้องระลึกไว้อยู่เสมอว่าแกรงเจอรคอสเป็นการอนุมานไปยังความสามารถในการพยากรณ์เท่านั้น ไม่ได้เป็นความเป็นเหตุเป็นผลจริงๆของตัวแปร

$H_0: \phi_{21} = 0$ vs $H_1: \phi_{21} \neq 0$

($y_{1,t}$ ไม่ G.C. $y_{2,t}$) ($y_{1,t}$ G.C. $y_{2,t}$)

ทดสอบด้วย $t\text{-stat} = \dfrac{\hat{\phi}_{21}}{se(\hat{\phi}_{21})} >$ c.v. ปฏิเสธ H_0

Granger Causality

ในหัวข้อนี้เราพิจารณาแบบจำลอง $VAR(2)$ ที่มีตัวแปรสองตัว ซึ่งสามารถเขียนเป็นสมการได้ดังนี้

y_{2t} G.C. y_{1t} ? ไม่ G.C. ต้องการให้ค่าสัมประสิทธิ์ของ $y_{2t-1,t-2}$ ใน $y_{1t} = 0$

VAR(2)

$$\begin{pmatrix} y_{1t} \\ y_{2t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \phi_{11}^1 & \boxed{\phi_{12}^1} \\ \boxed{\phi_{21}^1} & \phi_{22}^1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_{1t-1} \\ y_{2t-1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \phi_{11}^2 & \boxed{\phi_{12}^2} \\ \boxed{\phi_{21}^2} & \phi_{22}^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_{1t-2} \\ y_{2t-2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \varepsilon_{1t} \\ \varepsilon_{2t} \end{pmatrix} \quad (6.22$$

$H_0: \phi_{12}^1 = \phi_{12}^2 = 0$

- หาก y_{2t} ไม่แกรงเจอรคอส y_{1t} ค่าสัมประสิทธิ์ ϕ_{12}^1 และ ϕ_{12}^2 จะมีค่าเท่ากับศูนย์
- ถ้า y_{1t} ไม่แกรงเจอรคอส y_{2t} ค่าสัมประสิทธิ์ ϕ_{21}^1 และ ϕ_{21}^2 จะมีค่าเท่ากับศูนย์

$H_0: \phi_{21}^1 = \phi_{21}^2 = 0$

ดังนั้นในการทดสอบว่า y_{2t} แกรงเจอร์คอส y_{1t} หรือไม่ เราจะตั้งสมมุติฐานหลักว่า $H_0 : \phi_{12}^1 = \phi_{12}^2 = 0$ และสมมุติฐานทางเลือกคือมีสัมประสิทธิ์ ϕ_{12}^1 หรือ ϕ_{12}^2 ตัวใดตัวหนึ่งมีค่าไม่เท่ากับศูนย์ ซึ่งการทดสอบดังกล่าวคือการทดสอบ F นั่นเอง (Wald)

ตัวอย่าง 6.7

ต่อเนื่องจากตัวอย่าง 6.5 เราต้องการทดสอบว่า `lret_thmy$TH` แกรงเจอร์คอส `lret_thmy$MY` หรือไม่

เราสามารถทดสอบโดยใช้คำสั่ง `causality` โดยที่เราจะต้องระบุแบบจำลองที่ใช้ และตัวแปรที่เป็นสาเหตุ (cause) ซึ่งในที่นี้คือ `lret_thmy$TH`

lret_TH G.C. lret_MY ?

```
> causality(model1, cause="TH")
$Granger

^^IGranger causality H0: TH do not Granger-cause MY

data:  VAR object model1
F-Test = 16, df1 = 2, df2 = 2284, p-value = 2e-07

$Instant

^^IH0: No instantaneous causality between: TH and MY

data:  VAR object model1
Chi-squared = 151, df = 1, p-value <2e-16
```

แบบจำลอง VAR(2)

$= 2\times10^{-7} < \alpha(0.05)$

ปฏิเสธ H_0 ที่ว่า TH ไม่ G.C MY

สรุปว่า TH G.C. MY

[สอดคล้องกับ t-stat]

lret_TH อธิบายการพยากรณ์ MY

Contemporaneous

$\Rightarrow$ $lret_{TH}$ G.C. $lret_{MY}$ $\Rightarrow$ ตลาดมีความเชื่อมโยง

ทิศทาง ?

2

Impulse Response Function

→ ทิศทาง และ ขนาดของความสัมพันธ์ กระทุ้น
→ เลือกตัวแปรที่เป็นจุดเริ่มต้น การเปลี่ยนแปลง (Impulse)
แล้วส่งผลต่อไปที่ตัวแปรอื่น (Response)

หรือการทดสอบแกรงเจอร์คอสช่วยระบุว่าตัวแปรใดๆมีผลกระทบอย่างมีนัยสำคัญต่อตัวแปรอื่นหรือไม่ อย่างไรก็ตาม การทดสอบดังกล่าวไม่ได้บอกทิศทางของความสัมพันธ์และระยะเวลาที่การเปลี่ยนแปลงของตัวแปรหนึ่งจะส่งผลต่ออีกตัวแปรว่าจะมีผลยาวนานแค่ไหน

↑1 หน่วย $y_{1t} = \dots + \boxed{\varepsilon_{1t}}$ 1 ↑ หน่วย

impulse response function ซึ่งหมายถึง การตอบสนองของตัวแปรตาม(response)อันเนื่องมาจากการเปลี่ยนแปลงของตัวแปรอีกตัวหนึ่ง (impulse) โดยที่หากเกิดการเปลี่ยนแปลงในช็อกหนึ่งหน่วยจะส่งผลอย่างไรต่อแต่ละตัวแปรในคาบที่ต่อจากการเปลี่ยนแปลงนั้นๆ(เราอาจจะใช้การเปลี่ยนแปลงหนึ่ง s.d.) → เทียบว่า 1sd ตัวแปร $Y_{1t}, \dots, Y_{NT}$ → ส่งผลต่อตัวแปรอื่นๆ

ตัวอย่างเช่น หากเราพิจารณาแบบจำลอง $VAR(1)$ ที่มีตัวแปรสองตัวแปร ซึ่งสามารถแสดงได้ด้วยสมการ

$Y_t = \Phi Y_{t-1} + \varepsilon_t$

$$\begin{pmatrix} y_{1t} \\ y_{2t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.5 & 0.3 \\ 0.0 & 0.2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_{1t-1} \\ y_{2t-1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \varepsilon_{1t} \\ \varepsilon_{2t} \end{pmatrix} \qquad (6.23)$$

ในทางโปรแกรม ปีที่ 1 คือจุดเริ่มต้น

Impulse (Y_{1t}) → ส่งผลต่อ Y_{2t} (Response)

การเปลี่ยนแปลง 1 ครั้งในตอนต้น

Impulse Response Function

คือเริ่มต้น

สมมุติว่าเราพิจารณาว่าใน $\boxed{\text{ปีที่ 0}}$ เกิดช็อกในตัวแปร y_{1t} หนึ่งหน่วย ($\varepsilon_{10} = 1$) และช็อกในตัวแปร y_{2t} ($\varepsilon_{20}=0$) เท่ากับศูนย์ และช็อกในปีอื่นๆเท่ากับศูนย์ สมมุติให้ y_{1t} และ y_{2t} เท่ากับศูนย์ในปีก่อนหน้าปี 0 จะได้ว่า

($t=-1$) เราสมมุติ $Y_{1,-1}=0,\ Y_{2,-1}=0$ (การเกิดการ Y_t เป็นผลจาก ε_{10} เพียงเท่านั้น)

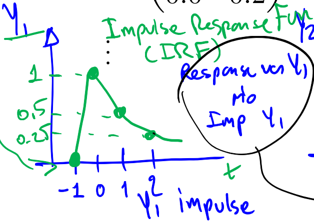
$$Y_{-1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

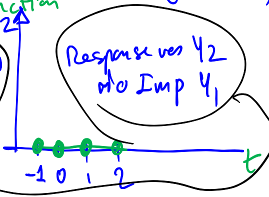
$$Y_0 = \cancel{\begin{pmatrix} \varepsilon_{10} \\ \varepsilon_{20} \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} 0.5 & 0.3 \\ 0 & 0.2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \varepsilon_{10} \\ \varepsilon_{20} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \varepsilon_{10} \\ \varepsilon_{20} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{10} \\ \varepsilon_{20} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$Y_1 = \begin{pmatrix} 0.5 & 0.3 \\ \boxed{0.0} & 0.2 \end{pmatrix} Y_0 + \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} = 0 \\ \varepsilon_{21} = 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.5 & 0.3 \\ 0 & 0.2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.5 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$Y_2 = \begin{pmatrix} 0.5 & 0.3 \\ 0.0 & 0.2 \end{pmatrix} Y_1 + \begin{pmatrix} \varepsilon_{12} = 0 \\ \varepsilon_{22} = 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.5 & 0.3 \\ 0 & 0.2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0.5 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.25 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Impulse Response Function (IRF)





Imp Y_1 ทำให้ Y_1 เพิ่มขึ้นทันทีใน $t=0$ แล้วค่อยๆ ลดลง.

Imp Y_1 ไม่ส่งผลต่อ Y_2 ($\phi_{21}=0$)

Impulse Response Function

Imp Y_2 $(\varepsilon_{20}=1)$

$$Y_0 = \begin{pmatrix}0.5 & 0.3\\ 0 & 0.2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$$

$$Y_1 = \begin{pmatrix}0.5 & 0.3\\ 0 & 0.2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0.3\\0.2\end{pmatrix}$$

ในกรณี $VAR(p)$ ที่เป็นกระบวนการนิ่งใดๆ

Reduced form VAR

IRF

$\varepsilon_t \to Var(\varepsilon_t)=\Sigma$

$$Y_t = \mu + \varepsilon_t + \Psi_1\varepsilon_{t-1} + \Psi_2\varepsilon_{t-2} + \dots$$

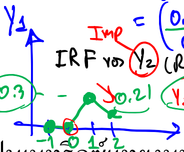
$$Y_2 = \begin{pmatrix}0.5 & 0.3\\ 0 & 0.2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0.3\\0.2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0.21\\0.04\end{pmatrix}$$

$Cov(\varepsilon_{1t},\varepsilon_{2t}) \neq 0$

$\varepsilon_{10}=1$ และ $\varepsilon_{20}=0$

$Cov(\varepsilon_{1t},\varepsilon_{2t})=0$

$$\frac{\partial y_{i,t+s}}{\partial \varepsilon_{j,t}} = \frac{\partial y_{i,t}}{\partial \varepsilon_{j,t-s}} = \psi^{s}_{i,j}$$



อย่างไรก็ตามคำอธิบายข้างต้นจะเป็นจริงหาก $var(\varepsilon) = \Sigma$ เป็นเมทริกซ์แทยงมุม

$Y_1 \uparrow (0.3)$ ใน $t=1$

ดังนั้นเรามักจะพิจารณา VAR ในรูป structural ซึ่ง

สรุป IRF จาก

$Cov(\eta_{1t},\eta_{2t})=0$

$$BY_t = c + \Gamma_1 Y_{t-1} + \dots + \Gamma_p Y_{t-p} + \eta_t \qquad (6.25)$$

$Cov(\eta_{it},\eta_{jt})=0$ → shock

$= B\varepsilon_t$

โดยที่ Orthogonal error (η_t)

$\eta_{10}=1$ และ $\eta_{20}=0$

โครงสร้างแบบจำลองโครงสร้าง (structural model) จะกำหนดให้ความสัมพันธ์ของตัวแปรมีลำดับคือ y_1 เป็นตัวกำหนด y_2 และ y_2 เป็นตัวกำหนด y_3 เป็นลำดับไปเรื่อยๆ ซึ่งใช้ทฤษฎีเป็นตัวกำหนด

ตัวอย่างที่ 6.8

IRF จาก Structural VAR ⇒ Orthogonal IRF

สมมุติ B เป็น triangular matrix ⇒ ใน period เดียวกัน y_1 มีผล → y_2 → y_3 → ...

เราจะสร้าง Impulse response function ด้วยคำสั่ง `irf` โดยที่ default ในคำสั่งนี้คือการสร้าง orthogonal impulse response function (`ortho=TRUE`)

การเรียงตัวแปรใน `lret` ที่เรียง `lret_thmy$TH` ก่อน `lret_thmy$MY`

VAR(2) ผลกระทบ period

IRF period 0 ที่ $\eta_{10}=1 \rightarrow y_{10} \rightarrow y_{20}$

การเรียงลำดับตัวแปรมีผลกระทบ

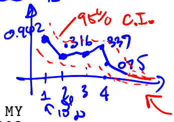
```
> model1.irf<-irf(model1, n.ahead=5)
> model1.irf

Impulse response coefficients
$TH
         TH     MY
[1,] 3.180 0.942
[2,] 0.084 0.316
[3,] 0.498 0.337
[4,] 0.055 0.075
[5,] 0.097 0.071
[6,] 0.017 0.019

$MY
          TH      MY
[1,]  0.0e+00  2.2303
[2,]  1.1e-02 -0.0805
[3,]  2.1e-01  0.1795
[4,] -4.3e-05  0.0115
[5,]  4.4e-02  0.0313
[6,]  2.3e-03  0.0046
> plot(model1.irf)
```

Impulse คือ lret TH

Response

y_{10} = y_{20} y_2

Impulse lretmy



ortho = TRUE
- ทำ IRF ที่คำนวณมาจาก structural VAR
- shock = 1 s.d.

Imp จาก lret$_{TH}$ ส่งผลให้ lret$_{MY}$ ↑ แล้วค่อยๆ ปรับตัว ลดลง

Imp จาก lret$_{my}$ ไม่ค่อยส่งผลต่อ lret$_{TH}$

จะมีค่า CI และ Confidence interval ของ IRF โดยจาก ที่ 0 แสดงว่า ต่างจากศูนย์

ไม่ได้แตกต่างจากศูนย์อย่างมีนัยสำคัญ

3

Variance Decomposition

จาก Forecast ด้วย VAR(1)

$$\begin{pmatrix} y_{1t} \\ y_{2t} \end{pmatrix} = \Phi_{11} \begin{pmatrix} y_{1t-1} \\ y_{2t-1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \varepsilon_{1t} \\ \varepsilon_{2t} \end{pmatrix} \Rightarrow \hat{y}_h(1) = \Phi Y_h$$

Forecast Error Variance Decomposition จากข้อมูล ณ คาบที่ h เราต้องการตอบคำถามว่าช็อกโครงสร้าง η_j เป็นที่มาของความแปรปรวนของค่าผิดพลาดจากการพยากรณ์ $y_{i,h+l}$ ในสัดส่วนเท่าใด

แบบจำลอง $VAR(1)$ ที่มีตัวแปรสองตัว เราพบว่าการพยากรณ์ Y_{1t} ไปข้างหน้าหนึ่งคาบ มีค่าคาดเคลื่อนจากการพยากรณ์ (forecast error) ตามสมการที่ (??) เท่ากับ

$e(1) = \varepsilon_{h+1}$

fe. ของ y_{1t}

$$e_1(1) = \varepsilon_{1,h+1}$$

ซึ่งค่าคาดเคลื่อนเกิดจากช๊อคในตัวแปร Y_{1t} เพียงอย่างเดียว และมีค่าความแปรปรวนของค่าความคาดเคลื่อนจากการพยากรณ์ไปข้างหน้าหนึ่งคาบ (one-period forecast error variance) เท่ากับ

$$Var(e_1(1)) = Var(\varepsilon_{1,h+1}) = \sigma_1^2$$

variance ของ FE ของ y_1 ใน 1 คาบ เกิดจาก ตัวเอง ทั้งหมด 100%

Variance Decomposition

$\hat{Y}_h(2) = \Phi^2 Y_h \Rightarrow \underline{e(2) = \Phi\varepsilon_{h+1} + \varepsilon_{h+2}}$

ในขณะที่การพยากรณ์ Y_{1t} ไปข้างหน้าสองคาบมีค่าคาดเคลื่อนจากการพยากรณ์ตามสมการที่ ?? เท่ากับ

FE ของ Y_1 ล่วง 2 คาบ

ตัว Y_1 เอง

Y_2

$$\underline{e_1(2)} = \phi_{11}\varepsilon_{1,h+1} + \phi_{12}\varepsilon_{2,h+1} + \varepsilon_{1,h+2}$$

ซึ่งค่าคาดเคลื่อนเกิดจากช๊อคของตัวแปร Y_{1t} และตัวแปร Y_{2t} เราสามารถคำนวณหาค่าความแปรปรวนของค่าความคลาดเคลื่อนจากการพยากรณ์ไปข้างหน้าสองคาบได้ดังสมการต่อไปนี้

สมมุติ ε เป็นอิสระต่อกัน

$$\begin{aligned} Var(e_1(2)) &= Var(\phi_{11}\varepsilon_{1,h+1}) + Var(\phi_{12}\varepsilon_{2,h+1}) + Var(\varepsilon_{1,h+2}) \\ &= \boxed{\phi_{11}^2\sigma_1^2} + \phi_{12}^2\sigma_2^2 + \boxed{\sigma_1^2} \qquad (2) \\ &= (1+\phi_{11}^2)\sigma_1^2 + \phi_{12}^2\sigma_2^2 \qquad (3) \end{aligned}$$

Y_1

$\frac{\phi_{11}^2\sigma_1^2+\sigma_1^2}{Var(e_1(2))} = ?\%$

Y_2

$\frac{\sigma_{12}^2\sigma_2^2}{Var(e_1(2))} = ?\%$

แยกส่วนประกอบของ FE variance

Spillover

ตัวแปร Y_2 มีอิทธิพลต่อการพยากรณ์ Y_1

Variance Decomposition

สามารถแยกส่วนประกอบของค่าความแปรปรวนของค่าความคลาดเคลื่อนจากการพยากรณ์ไปข้างหน้าสองคาบว่ามาจาก Y_{1t} เท่ากับ

$$\frac{(1+\phi_{11}^2)\sigma_1^2}{(1+\phi_{11}^2)\sigma_1^2+\phi_{12}^2\sigma_2^2}$$

และมาจาก Y_{2t} เท่ากับ

$$\frac{\sigma_2^2}{(1+\phi_{11}^2)\sigma_1^2+\phi_{12}^2\sigma_2^2},$$

ตัวอย่าง 6.9

เราสามารถแยกความแปรปรวนของค่าผิดพลาดจากการพยากรณ์ได้ด้วยคำสั่ง `fevd`

พยากรณ์ lret TH

```
> fevd(model1, n.ahead=5)
$TH
        TH       MY
[1,]   1 0.0e+00
[2,]   1 1.3e-05
[3,]   1 4.3e-03
[4,]   1 4.3e-03
[5,]   1 4.5e-03

$MY
       TH    MY
[1,] 0.15 0.85
[2,] 0.17 0.83
[3,] 0.18 0.82
[4,] 0.18 0.82
[5,] 0.18 0.82
```

พยากรณ์ lret MY

→ 85% ของ FE variance เกิดจาก MY, 15% เกิดจาก TH

→ 18% เกิดจาก TH