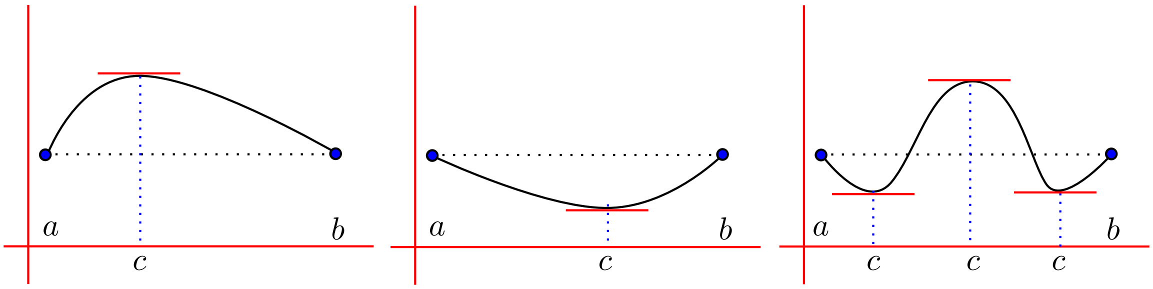
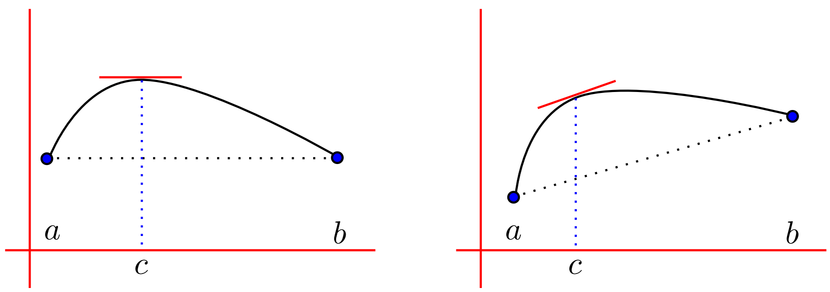
第三章　微分應用

3.1 均值定理

定理 (Rolle)**.** 若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 連續, 在 (a,b) 可微, 且 $f(a)=f(b)$, 則存在 $c\in(a,b)$ 使 $f'(c)=0$.



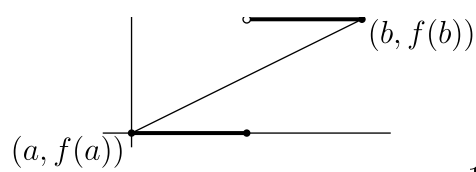
定理 (均值定理 (mean-value theorem, MVT))**.** 若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 連續, 在 (a,b) 可微, 則存在 $c\in(a,b)$ 使 $f'(c)=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$.



註. 不滿足『$f(x)$ 在 $[a,b]$ 連續, 在 (a,b) 可微』時的反例.

- 令 $a=0$, $b=2$, 且

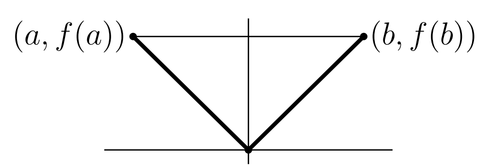
$$f(x)=\begin{cases}0 & \text{若 } x\leqslant 1\\ 1 & \text{若 } x>1\end{cases}$$



  當 $x\neq 1$ 時 $f'(x)=0$, 但連接 $(a,\ f(a))=(0,\ 0)$ 與 $(b,\ f(b))=(2,\ 1)$ 之割線斜率為 $\dfrac{1}{2}$.

- 令 $a=-1$, $b=1$, $f(x)=|x|$.

$$f'(x)=\begin{cases}-1 & \text{若 } x<0\\ \text{DNE} & \text{若 } x=0\\ 1 & \text{若 } x>0\end{cases}$$



  當 $x\neq 0$ 時 $f'(x)=\pm 1$, 但連接 $(a,\ f(a))=(-1,\ 1)$ 與 $(b,\ f(b))=(1,\ 1)$ 之割線斜率為 0.

性質. $f(x)$ 在 $[a,b]$ 連續, 在 (a,b) 可微. 若 $\forall x\in(a,b)$

1. $f'(x)>0 \iff f$ 在 $[a,b]$ 嚴格遞增.
2. $f'(x)<0 \iff f$ 在 $[a,b]$ 嚴格遞減.
3. $f'(x)\geqslant 0 \iff f$ 在 $[a,b]$ 遞增.
4. $f'(x)\leqslant 0 \iff f$ 在 $[a,b]$ 遞減.

證. 令 $x,\ y\in[a,b]$, $x<y$. 由 MVT $\exists c\in(x,y)\subseteq(a,b)$ 使 $f(y)-f(x)=f'(c)\,(y-x)$. 又 $y-x>0$, $f(y)-f(x)$ 與 $f'(c)$ 同號.

結論. 若 $f(x)$, $g(x)$ 在 $[a,b]$ 連續, 在 (a,b) 可微, 且 $f'(x)=g'(x)\ \forall\, x\in(a,b)$, 則存在 $C\in\mathbb{R}$ 使 $f(x)=g(x)+C,\ \forall\, x\in[a,b]$.

例. 證明 $2x-1=\sin x$ 僅有唯一解.

解. 令 $f(x)=2x-1-\sin x$, 則 $\forall\, x\ (f'(x)=2-\cos x>0)$, $f(0)=-1<0$, $f(1)=1-\sin 1>0$, 故由 Bolzano 定理, 存在 $c\in(0,1)$ 使 $f(c)=0$. 若存在另一 $c_0\neq c$ 使 $f(c_0)=0$, 則由 Rolle 定理, 存在 c_1 介於 c, c_0 間使 $f'(c_1)=0$, 與 $\forall\, x\ (f'(x)=2-\cos x>0)$ 矛盾; 得證.

例. 證明 $x^3+e^x=0$ 僅有唯一解.

解. 令 $f(x)=x^3+e^x$, 則 $\forall\, x\ (f'(x)=3x^2+e^x>0)$, $f(-1)=-1+e^{-1}<0$, $f(0)=1>0$, 故由 Bolzano 定理, 存在 $c\in(-1,0)$ 使 $f(c)=0$. 若存在另一 $c_0\neq c$ 使 $f(c_0)=0$, 則由 Rolle 定理, 存在 c_1 介於 c, c_0 間使 $f'(c_1)=0$, 與 $\forall\, x\ (f'(x)=3x^2+e^x>0)$ 矛盾; 得證.

例. 證明 $\ln\Big(1+\dfrac{1}{x}\Big)>\dfrac{1}{1+x},\ \forall\, x>0$.

解. 考慮 $\ln t$ 在 $[x,x+1]$, $x>0$. 由 MVT $\exists\, c\in(x,x+1)\ \ln(x+1)-\ln x=\dfrac{1}{c}>\dfrac{1}{x+1}$.

例. 證明 $\tan x>x,\ \forall\, x\in\Big(0,\dfrac{\pi}{2}\Big)$.

解. $\forall\, x\in\Big(0,\dfrac{\pi}{2}\Big)$, $\tan$ 在 $[0,x]$ 連續, 在 $(0,x)$ 可微, 故由 MVT $\exists\, c\in(0,x)\ \tan x-\tan 0=\sec^2 c\cdot x>x$.

例. 證明 $\dfrac{2}{\pi}<\dfrac{\sin x}{x}<1,\ \forall\, x\in\Big(0,\dfrac{\pi}{2}\Big)$.

解. 令 $g(x)=\begin{cases}\frac{\sin x}{x} & 若\ x\neq 0\\ 1 & 若\ x=0\end{cases}$, 則 g 為連續, 且 $\forall\, x\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)\quad g'(x)=\dfrac{x\cos x-\sin x}{x^2}=\dfrac{\cos x}{x^2}(x-\tan x)<0$ $\implies$ g 在 $\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$ 為嚴格遞減函數 $\implies\ \dfrac{2}{\pi}=g\left(\dfrac{\pi}{2}\right)<g(x)=\dfrac{\sin x}{x}<g(0)=1$

例. 證明 $\sqrt{1+x}<1+\dfrac{1}{2}x,\ \forall\, x>0$.

解. 考慮 $\sqrt{1+t}$ 在 $[0,x]$, $x>0$. 由 MVT $\exists\, c\in(0,x)\ \sqrt{1+x}-\sqrt{1}=\dfrac{1}{2\sqrt{1+c}}x<\dfrac{1}{2}x\implies\sqrt{1+x}<1+\dfrac{1}{2}x$.

例. 證明 $\sin^{-1}x+\cos^{-1}x=\dfrac{\pi}{2},\ \forall\, x\in[-1,1]$.

解. 令 $f(x)=\sin^{-1}x+\cos^{-1}x$. $\forall\, x\in(-1,1)$, $f'(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}+\dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}}=0\implies f(x)$ 為常數 $\implies f(x)=f(0)=\dfrac{\pi}{2}$; 由 $f(x)$ 之連續性或代入 $x=\pm1$ 均可得 $f(\pm1)=\dfrac{\pi}{2}$.

例. 證明 $2\sin^{-1}x=\cos^{-1}(1-2x^2),\ \forall\, x\in[0,1]$.

解. 令 $f(x)=2\sin^{-1}x-\cos^{-1}(1-2x^2)$. $\forall\, x\in(0,1)$, $f'(x)=\dfrac{2}{\sqrt{1-x^2}}-\dfrac{4x}{\sqrt{1-(1-2x^2)^2}}=\dfrac{2}{\sqrt{1-x^2}}-\dfrac{4x}{\sqrt{(2-2x^2)2x^2}}=\dfrac{2}{\sqrt{1-x^2}}-\dfrac{4x}{2x\sqrt{(1-x^2)}}=0\implies f(x)$ 為常數 $\implies f(x)=f\Big(\dfrac{1}{2}\Big)=2\cdot\dfrac{\pi}{6}-\dfrac{\pi}{3}=0$; 由 $f(x)$ 之連續性或代入 $x=0,\ 1$ 均可得 $f(0)=0=f(1)$.

例. 證明 $\sin^{-1}\dfrac{x-1}{x+1}=2\ \tan^{-1}\sqrt{x}-\dfrac{\pi}{2},\ \forall\, x\geqslant 0$.

解. 令 $f(x)=\sin^{-1}\dfrac{x-1}{x+1}-2\ \tan^{-1}\sqrt{x}+\dfrac{\pi}{2}$. $\forall\, x>0$, $f'(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1-(\frac{x-1}{x+1})^2}}\cdot\dfrac{(x+1)-(x-1)}{(x+1)^2}-2\,\dfrac{1}{(\sqrt{x})^2+1}\cdot\dfrac{1}{2\sqrt{x}}=\dfrac{1}{\sqrt{\frac{(x+1)^2-(x-1)^2}{(x+1)^2}}}\cdot\dfrac{2}{(x+1)^2}-\dfrac{1}{(x+1)\sqrt{x}}=\dfrac{1}{\sqrt{x}\sqrt{(x+1)^2}}-\dfrac{1}{(x+1)\sqrt{x}}=\dfrac{1}{\sqrt{x}|x+1|}-\dfrac{1}{(x+1)\sqrt{x}}=0$ $\implies f(x)$ 為常數 $\implies f(x)=f(1)=-2\cdot\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{\pi}{2}=0$; 由 $f(x)$ 之連續性或代入 $x=0$ 均可得 $f(0)=0$.

3.2 L'Hôpital 法則

定理 (L'Hôpital 法則 (LHR))**.** 若 f 與 g 為實可微函數, 且在 (a,b) 上 $g'(x) \neq 0$ $(a,\, b \in \overline{\mathbb{R}})$. 假設

$$\lim_{x\to a+} f(x) = \lim_{x\to a+} g(x) = 0 \quad \left(\frac{0}{0}\text{ 型}\right) \qquad \text{或} \qquad \lim_{x\to a+} g(x) = \infty \quad \left(\frac{\infty}{\infty}\text{ 型}\right)$$

若 $\displaystyle\lim_{x\to a+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L \in \overline{\mathbb{R}}$, 則 $\displaystyle\lim_{x\to a+} \frac{f(x)}{g(x)} = L$.

不定型	$\frac{0}{0}$	$\frac{\infty}{\infty}$	$0\cdot\infty$	$\infty-\infty$	0^0	∞^0	1^∞
範例	$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{1-\sin x}{1+\cos 2x}$	$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{e^x}$	$\lim_{x\to 0+} x\ln\frac{1}{x}$	$\lim_{x\to 1+}\left(\frac{x}{x-1}-\frac{1}{\ln x}\right)$	$\lim_{x\to 0+} x^x$	$\lim_{x\to\infty} x^{\frac{1}{x}}$	$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{a}{x}\right)^{bx}$

例 $(\frac{0}{0})$**.** 求 $\displaystyle\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{1-\sin x}{1+\cos 2x}$.

解. $\displaystyle\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{1-\sin x}{1+\cos 2x} = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{-\cos x}{-2\sin 2x} = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{-1}{-4\sin x} = \frac{1}{4}$.

例 $(\frac{\infty}{\infty})$**.** 求 $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{e^x}$.

解. $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{e^x} = \lim_{x\to\infty} \frac{2x}{e^x} = \lim_{x\to\infty} \frac{2}{e^x} = 0$.

例 $(0\cdot\infty)$**.** 求 $\displaystyle\lim_{x\to 0+} x\ln\frac{1}{x}$.

解. $\displaystyle\lim_{x\to 0+} x\ln\frac{1}{x} = \lim_{x\to 0+} \frac{\ln\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0+} \frac{-\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to 0+} x = 0$.

例 $(\infty-\infty)$**.** 求 $\displaystyle\lim_{x\to 1+}\left(\frac{x}{x-1}-\frac{1}{\ln x}\right)$.

解. $\displaystyle\lim_{x\to 1+}\left(\frac{x}{x-1}-\frac{1}{\ln x}\right) = \lim_{x\to 1+} \frac{x\ln x-(x-1)}{(x-1)\ln x} = \lim_{x\to 1+} \frac{1+\ln x-1}{(x-1)\frac{1}{x}+\ln x} = \lim_{x\to 1+} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x}} = \frac{1}{2}$.

例 (0^0)**.** 求 $\displaystyle\lim_{x\to 0+} x^x$.

解. 求 $\displaystyle\lim_{x\to 0+} x^x = \lim_{x\to 0+} \exp\{x\ln x\} = \exp\left\{\lim_{x\to 0+} x\ln x\right\} = \exp\left\{-\lim_{x\to 0+} x\ln\frac{1}{x}\right\} = e^0 = 1$.

例 (∞^0)**.** 求 $\displaystyle\lim_{x\to\infty} x^{\frac{1}{x}}$.

解. $\displaystyle\lim_{x\to\infty} x^{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to\infty} \exp\left\{\ln x^{\frac{1}{x}}\right\} = \lim_{x\to\infty} \exp\left\{\frac{1}{x}\ln x\right\} = \exp\left\{\lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x}\right\} = \exp\left\{\lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x}}{1}\right\} = e^0 = 1$.

例 (1^∞)**.** 求 $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{a}{x}\right)^{bx}$, $a,\ b\in\mathbb{R}$.

解. $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{a}{x}\right)^{bx}=\lim_{x\to\infty}\exp\left\{\ln\left(1+\frac{a}{x}\right)^{bx}\right\}=\lim_{x\to\infty}\exp\left\{bx\ln\left(1+\frac{a}{x}\right)\right\}=\exp\left\{\lim_{x\to\infty}bx\ln\left(1+\frac{a}{x}\right)\right\}=\exp\left\{b\lim_{x\to\infty}\frac{\ln(1+\frac{a}{x})}{\frac{1}{x}}\right\}=\exp\left\{b\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{1+\frac{a}{x}}\cdot\frac{-a}{x^2}}{\frac{-1}{x^2}}\right\}=\exp\left\{b\lim_{x\to\infty}\frac{a}{1+\frac{a}{x}}\right\}=e^{ba}.$

例 (循環形). 求 $\lim_{x\to\infty}\frac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}}$.

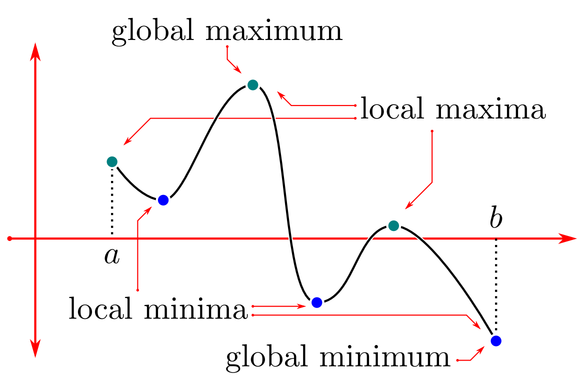
解. $\lim_{x\to\infty}\frac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}}$ 為 $\frac{\infty}{\infty}$ 型, 理應可使用 LHR, 但 $\lim_{x\to\infty}\frac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}}=\ldots$, 無限循環; $\lim_{x\to\infty}\frac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{e^x\left(1+e^{-2x}\right)}{e^x\left(1-e^{-2x}\right)}=\lim_{x\to\infty}\frac{1+e^{-2x}}{1-e^{-2x}}=1.$

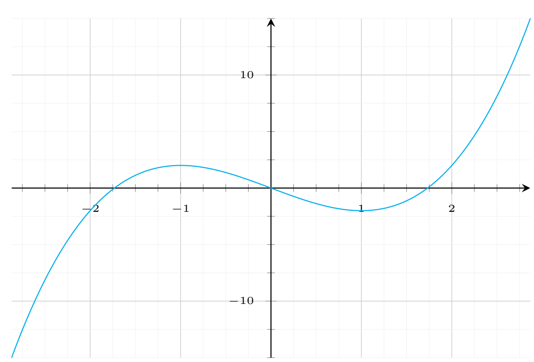
例 (LHR 與 DNE). 若 $\lim_{x\to a}f(x)=0$, $\lim_{x\to a}g(x)=0$ 與 $\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}=\text{DNE}$, $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$ 仍可能存在: 取 $f(x)=x^2\sin\frac{1}{x}$, $g(x)=x$ 與 $a=0$, 則 $\lim_{x\to0}f(x)=0$ 且 $\lim_{x\to0}g(x)=0$, $\lim_{x\to0}\frac{f'(x)}{g'(x)}=\lim_{x\to0}\left(2x\sin\frac{1}{x}-\cos\frac{1}{x}\right)=\text{DNE}$, 但 $\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to0}\frac{x^2\sin\frac{1}{x}}{x}=\lim_{x\to0}x\sin\frac{1}{x}=0.$

3.3 極值問題

定義. 給定 $f:I\to\mathbb{R}$, $B(x,h)\equiv\{y\mid|y-x|<h\}$.

- f 在 $x_{\mathrm{M}}\in I$ 有最大值 (global maximum) $f(x_{\mathrm{M}})$: $f(x_{\mathrm{M}})\geqslant f(x)$, $\forall x\in I$.
- f 在 $x_{\mathrm{m}}\in I$ 有最小值 (global minimum) $f(x_{\mathrm{m}})$: $f(x_{\mathrm{m}})\leqslant f(x)$, $\forall x\in I$.
- f 在 $x_0\in I$ 有極大值 (local maximum) $f(x_0)$: $\exists h_0>0$ 使 $f(x_0)\geqslant f(x)$, $\forall x\in B(x_0,h_0)\cap I$.
- f 在 $x_1\in I$ 有極小值 (local minimum) $f(x_1)$: $\exists h_1>0$ 使 $f(x_1)\leqslant f(x)$, $\forall x\in B(x_1,h_1)\cap I$.





例.

- $f(x)=\sin x$ 在 $I=\mathbb{R}$ 有最大值 1, 最小值 -1.
- $f(x)=\frac{1}{x}$ 在 $I=\mathbb{R}$ 沒有最大值, 最小值.
- $f(x)=x$ 在 $I=(0,1)$ 沒有最大值, 最小值.
- $f(x)=x$ 在 $I=[0,1]$ 有最大值 1, 最小值 0.
- 若 $I=[-3,3]$, $f(x)=x^3-3x$ 在 $x=3$ 有最大值 18, 在 $x=-3$ 有最小值 -18, 在 $x=-1$ 有極大值 2, 在 $x=1$ 有極小值 -2.

定理. 若函數在定義域為有限閉區間, 或有限閉區間的有限聯集連續, 則函數在定義域上有最大值及最小值.

定理. 若 $f(x)$ 在 (a,b) 連續, 且 $\lim_{x\to a+} f(x) = L$, $\lim_{x\to b-} f(x) = M$.

1. 若 $\exists u \in (a,b)$ 使 $f(u) > L$ 且 $f(u) > M$, 則 f 在 (a,b) 有最大值.
2. 若 $\exists u \in (a,b)$ 使 $f(u) < L$ 且 $f(u) < M$, 則 f 在 (a,b) 有最小值.

a 可為 $-\infty$, b 可為 ∞, L, M 可為 $\pm\infty$.

證.

1.
   - 由 $\lim_{x\to a+} f(x) = L$, 給定 $\varepsilon > 0$, $\exists\,\delta_1 > 0$ 使得當 $a < x < a+\delta_1$, $f(x) < L+\varepsilon$.
   - 取 $\varepsilon = f(u) - L$, 則
   $$\exists\,x_1 \in (a,u) \text{ 使得當 } a < x < x_1,\ f(x) < L + (f(u) - L) = f(u). \tag{1}$$
   - 由 $\lim_{x\to b-} f(x) = M$, 給定 $\varepsilon > 0$, $\exists\,\delta_2 > 0$ 使得當 $b-\delta_2 < x < b$, $f(x) < M+\varepsilon$.
   - 取 $\varepsilon = f(u) - M$, 則
   $$\exists\,x_2 \in (u,b) \text{ 使得當 } x_2 < x < b,\ f(x) < M + (f(u) - M) = f(u). \tag{2}$$
   - 因 f 在 $[x_1,x_2]$ 連續, f 在 $w \in [x_1,x_2]$ 有最大值. 但 $u \in [x_1,x_2] \implies f(w) \geqslant f(u)$; 由 (1), (2), f 在 $w \in (a,b)$ 有最大值.
2.
   - 由 $\lim_{x\to a+} f(x) = L$, 給定 $\varepsilon > 0$, $\exists\,\delta_1 > 0$ 使得當 $a < x < a+\delta_1$, $f(x) > L-\varepsilon$.
   - 取 $\varepsilon = L - f(u)$, 則
   $$\exists\,x_1 \in (a,u) \text{ 使得當 } a < x < x_1,\ f(x) > L - (L - f(u)) = f(u). \tag{3}$$
   - 由 $\lim_{x\to b-} f(x) = M$, 給定 $\varepsilon > 0$, $\exists\,\delta_2 > 0$ 使得當 $b-\delta_2 < x < b$, $f(x) > M-\varepsilon$.
   - 取 $\varepsilon = M - f(u)$, 則
   $$\exists\,x_2 \in (u,b) \text{ 使得當 } x_2 < x < b,\ f(x) > M - (M - f(u)) = f(u). \tag{4}$$
   - 因 f 在 $[x_1,x_2]$ 連續, f 在 $w \in [x_1,x_2]$ 有最小值. 但 $u \in [x_1,x_2] \implies f(w) \leqslant f(u)$; 由 (3), (4), f 在 $w \in (a,b)$ 有最小值.

定理. 若 f 在 $c \in \operatorname{dom} f$ 有極值, 且 $f'(c)$ 存在, 則 $f'(c) = 0$.

證.

- 若 f 在 c 有極大值, 則 $\exists\,h_0 > 0$ 使 $f(c) \geqslant f(x)$, $\forall x \in B(c,h_0) \cap \operatorname{dom} f$.
  - 取 $x \in B(c,h_0) \cap \operatorname{dom} f$ 且 $x < c$, $\dfrac{f(x)-f(c)}{x-c} \geqslant 0 \implies f'(c) = \lim_{x\to c-} \dfrac{f(x)-f(c)}{x-c} \geqslant 0$
  - 取 $x \in B(c,h_0) \cap \operatorname{dom} f$ 且 $x > c$, $\dfrac{f(x)-f(c)}{x-c} \leqslant 0 \implies f'(c) = \lim_{x\to c+} \dfrac{f(x)-f(c)}{x-c} \leqslant 0$

  故 $f'(c) = 0$.
- 若 f 在 c 有極小值, 則 $\exists\,h_1 > 0$ 使 $f(c) \leqslant f(x)$, $\forall x \in B(c,h_1) \cap \operatorname{dom} f$.
  - 取 $x \in B(c,h_1) \cap \operatorname{dom} f$ 且 $x < c$, $\dfrac{f(x)-f(c)}{x-c} \leqslant 0 \implies f'(c) = \lim_{x\to c-} \dfrac{f(x)-f(c)}{x-c} \leqslant 0$
  - 取 $x \in B(c,h_1) \cap \operatorname{dom} f$ 且 $x > c$, $\dfrac{f(x)-f(c)}{x-c} \geqslant 0 \implies f'(c) = \lim_{x\to c+} \dfrac{f(x)-f(c)}{x-c} \geqslant 0$

  故 $f'(c) = 0$.

結論. 設 $f : I \to \mathbb{R}$ 在 $x_0 \in I$ 有極值, 則 x_0 為以下三情形之一:

- 臨界點 (critical point)：$f'(x_0) = 0$.
- 奇異點 (singular point)：f 在 x_0 不可微.
- I 的邊界點 (boundary).

例. 求 $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 2$ 在 $[-2,\, 2]$ 的最大值與最小值.

解.

- f 在有限閉區間 $[-2,\, 2]$ 連續, 故在 $[-2,\, 2]$ 有最大值, 最小值.
-
  - $f'(x) = 3x^2 - 6x - 9 = 3(x+1)(x-3)$, 在 $[-2,\, 2]$ 之臨界點為 -1: $f(-1) = 7$.
  - f 在 $[-2,\, 2]$ 可微, 故無奇異點.
  - $[-2,\, 2]$ 的邊界點為 -2 與 2; $f(-2) = 0$, $f(2) = -20$.

  故最大值: $f(-1) = 7$, 最小值: $f(2) = -20$.

例. 證明 $f(x) = x + \dfrac{4}{x}$ 在 $(0, \infty)$ 有最小值, 並求其值.

解.

- 由 $\lim\limits_{x\to 0+} f(x) = \infty$, $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty$, $f(1) = 5 < \infty$, f 在 $(0, \infty)$ 有最小值.
-
  - $f'(x) = 1 - \dfrac{4}{x^2} = \dfrac{(x+2)(x-2)}{x^2}$, 臨界點為 2: $f(2) = 4$.
  - f 在 $(0, \infty)$ 可微, 無奇異點.
  - $(0, \infty)$ 無邊界點.

  故 f 在 $(0, \infty)$ 之最小值為 $f(2) = 4$.

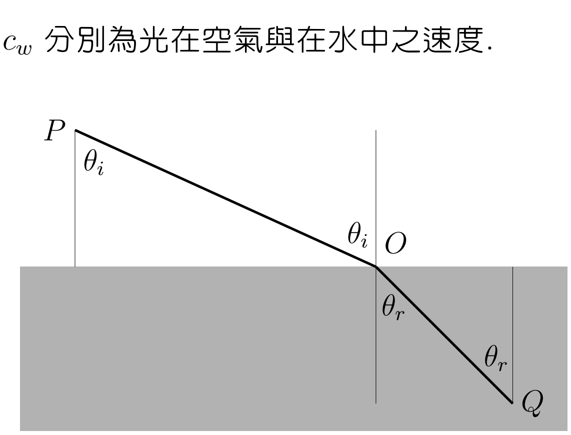
例. 求點 $(2,\, 0)$ 到 $y^2 = x^2 + 1$ 之最短距離.

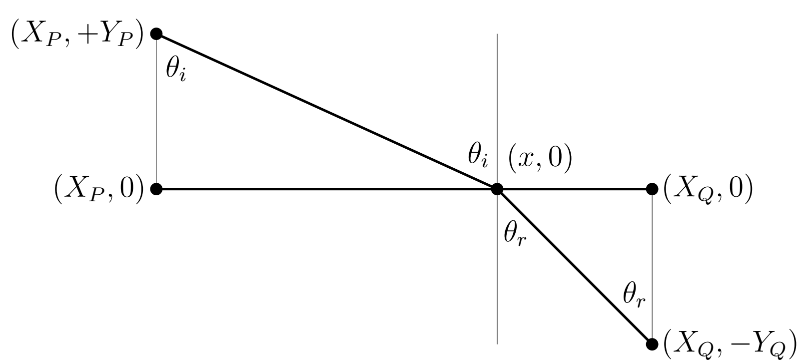
解.

- 最小化距離平方 $\equiv$ 最小化距離.
- 令 ℓ 為 $(2, 0)$ 至 $y^2 = x^2 + 1$ 之距離: $\ell^2 = (x-2)^2 + y^2 = (x-2)^2 + (x^2+1)$.
- 由 $\ell^2(\pm\infty) = \infty$, $\ell^2(0) = 5 < \infty$, ℓ^2 在 $(-\infty, \infty)$ 有最小值.
-
  - $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\ell^2(x) = 2(x-2) + 2x = 4(x-1)$, 臨界點為 1; $\ell^2(1) = (1-2)^2 + (1+1) = 3 \implies \ell(1) = \sqrt{3}$.
  - ℓ^2 在 $(-\infty,\, \infty)$ 可微, 無奇異點.
  - $(-\infty,\, \infty)$ 無邊界點.

  故最短距離為 $\ell(1) = \sqrt{3}$.

例. Fermat 原理: 光的行進走需時最短路徑. 如下圖, 試由 Fermat 原理推導 Snell 法則: $\dfrac{\sin\theta_i}{\sin\theta_r} = \dfrac{c_a}{c_w}$, 其中 c_a, c_w 分別為光在空氣與在水中之速度.



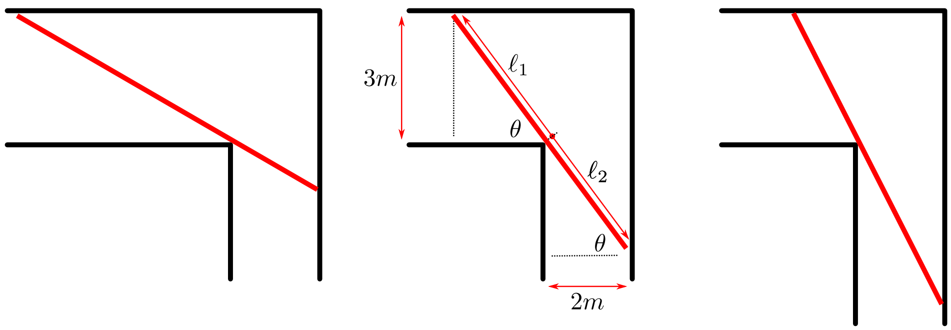


解.

- 令光從點 P 至 Q 需時為 T, 則 $T(x) = \dfrac{1}{c_a}\sqrt{(X_P - x)^2 + Y_P^2} + \dfrac{1}{c_w}\sqrt{(X_Q - x)^2 + Y_Q^2}$ $\left(\text{時間} \equiv \dfrac{\text{距離}}{\text{速度}}\right)$
- $T(\pm\infty) = \infty$, $T(0) = \dfrac{1}{c_a}\sqrt{X_P^2 + Y_P^2} + \dfrac{1}{c_w}\sqrt{X_Q^2 + Y_Q^2} < \infty$, 故 T 在 $(-\infty, \infty)$ 有最小值.
- T 在 $(-\infty, \infty)$ 可微, 無奇異點, $(-\infty, \infty)$ 無邊界點; T 在 $(-\infty, \infty)$ 之最小值出現於臨界點.
- 解 $T'(x^\star) = 0$; 在臨界點 $x^\star$ 時

$$0 = \frac{1}{c_a}\frac{X_P - x^\star}{\sqrt{(X_P - x^\star)^2 + Y_P^2}} + \frac{1}{c_w}\frac{X_Q - x^\star}{\sqrt{(X_Q - x^\star)^2 + Y_Q^2}} = \frac{-\sin\theta_i}{c_a} + \frac{\sin\theta_r}{c_w} \implies \frac{\sin\theta_i}{\sin\theta_r} = \frac{c_a}{c_w}$$

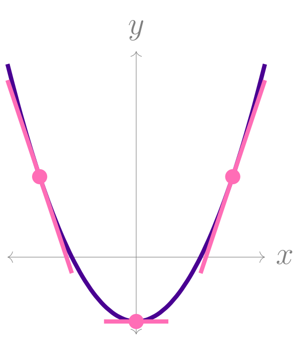
例. 如圖, 若桿子可在 3m 寬水平走廊移動, 且無彎折通過 2m 寬垂直走廊, 求最大桿長.



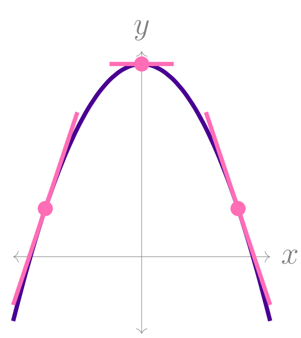
解.

- 如圖, 令桿與 3m 寬走廊内沿夾角為 θ, 則總桿長為 $\ell(\theta) = \ell_1(\theta) + \ell_2(\theta) = \dfrac{3}{\sin\theta} + \dfrac{2}{\cos\theta}$, $0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}$.
- $\ell(\theta)$ 最小值 $\equiv$ 最大桿長
- $\displaystyle\lim_{\theta\to 0+} \ell(\theta) = \infty$, $\displaystyle\lim_{\theta\to\frac{\pi}{2}-} \ell(\theta) = \infty$, $\ell\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = \dfrac{5}{\sqrt{2}} < \infty$, 故 $\ell(\theta)$ 在 $\left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$ 有最小值.
- $\left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$ 無邊界點, $\ell(\theta)$ 在 $\left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$ 可微, 無奇異點.
- 求臨界點, 亦即 $\ell'(\theta) = 0$ 之根 $\theta^\star$: $\ell'(\theta) = -\dfrac{3\cos\theta}{\sin^2\theta} + \dfrac{2\sin\theta}{\cos^2\theta} = \dfrac{-3\cos^3\theta + 2\sin^3\theta}{\sin^2\theta\cos^2\theta} = 0 \implies \tan\theta^\star = \sqrt[3]{\dfrac{3}{2}}$. 則最大桿長為 $\ell(\theta^\star) = \dfrac{3}{\sin\theta^\star} + \dfrac{2}{\cos\theta^\star} = \dfrac{3}{\frac{\sqrt[3]{3}}{\sqrt{2^{\frac{2}{3}}+3^{\frac{2}{3}}}}} + \dfrac{2}{\frac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt{2^{\frac{2}{3}}+3^{\frac{2}{3}}}}} = \left(2^{\frac{2}{3}} + 3^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}}$ (≈ 7.02m)

3.4 作圖



- 切線斜率遞增
- $f''(x) > 0$
- 凹向上
- 切線在圖形下方



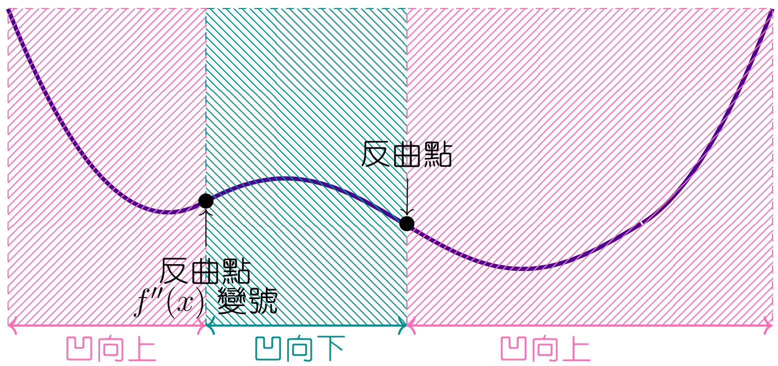
- 切線斜率遞減
- $f''(x) < 0$
- 凹向下
- 切線在圖形上方

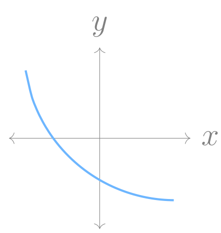
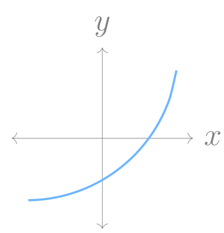
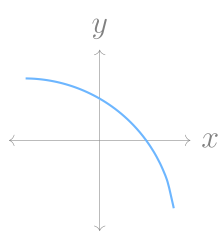
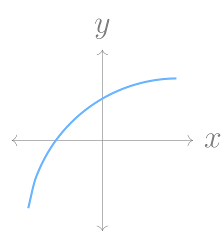
定義 (反曲點 (inflection point)). x_0 為 $y = f(x)$ 的反曲點, 若

- $y = f(x)$ 在 $x = x_0$ 有切線.
- f 的凹向在 x_0 的左右兩邊恰相反.

性質. 令 $f : I \to \mathbb{R}$ 為可微.

- 若 f' 在 I 嚴格遞增 ($f'' > 0$ 在 I) , f 在 I 凹向上 (上凹) .
- 若 f' 在 I 嚴格遞減 ($f'' < 0$ 在 I) , f 在 I 凹向下 (下凹) .
- 若 $f''(x_0) = 0$, 則 $x_0 \in I$ 為 f 的反曲點.



	嚴格遞減 $(-)$	嚴格遞增 $(+)$
凹向上 $(+)$		
凹向下 $(-)$		

性質 (漸近線 (asymptote))**.**

- 若 $\lim_{x\to a-} f(x) = \pm\infty$ 或 $\lim_{x\to a+} f(x) = \pm\infty$, f 在 a 有垂直漸近線.
- 若 $\lim_{x\to -\infty} f(x) = L$ 或 $\lim_{x\to\infty} f(x) = L$, f 有水平漸近線 $y = L$.
- 若 $\lim_{x\to -\infty}(f(x) - (mx+n)) = 0$ 或 $\lim_{x\to\infty}(f(x) - (mx+n)) = 0$, $m \neq 0$, 則 f 有斜漸近線 $y = mx + n$:
  斜漸近線 $y = mx + n$ 由極限 $m = \lim_{x\to\pm\infty} \dfrac{f(x)}{x}$ 與 $n = \lim_{x\to\pm\infty}(f(x) - mx)$ 之存在性決定.

結論 (作圖步驟)**.**

- 觀察定義域, 對稱性, 週期性.
- 決定漸近線.
- 解 $f'(x) = 0$, $f''(x) = 0$ 並決定 f', f'' 之正負區間; 製表.

- 依表判斷 f 之升降, 凹向, 臨界點, 奇異點, 反曲點; 作圖.

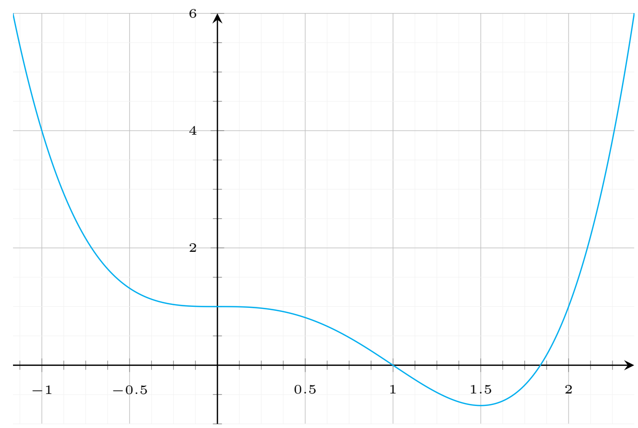
例. 決定 $f(x) = x^4 - 2x^3 + 1$ 的升降, 凹向, 臨界點, 奇異點, 反曲點並作圖.

解.

- $f'(x) = 4x^3 - 6x^2 = 4x^2\Big(x - \dfrac{3}{2}\Big)$; $f''(x) = 12x^2 - 12x = 12x(x-1)$.
- 製表:

$-$		$-$		$-$		$+$	f'
$+$	0	$-$	1	$+$	$\frac{3}{2}$	$+$	f''

- 臨界點 $(f' = 0)$: $x = 0$ 與 $x = \dfrac{3}{2}$
- 嚴格遞增區間 $(f' > 0)$: $\Big(\dfrac{3}{2}, \infty\Big)$
- 嚴格遞減區間 $(f' < 0)$: $\Big(-\infty, \dfrac{3}{2}\Big)$
- 反曲點 ($f'' = 0$ 且前後 f'' 異號處) : $x = 0$ 與 $x = 1$
- 作圖:



例. 決定 $f(x) = \dfrac{x}{x^2+3}$ 之升降, 凹向, 臨界點, 奇異點, 反曲點並作圖.

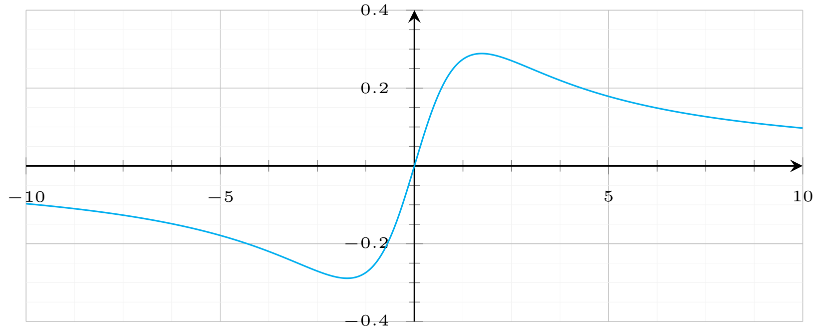
解.

- $f'(x) = \dfrac{3 - x^2}{(x^2+3)^2} = \dfrac{(\sqrt{3}-x)(\sqrt{3}+x)}{(x^2+3)^2}$; $f''(x) = \dfrac{2x(x+3)(x-3)}{(x^2+3)^3}$.
- 製表:

$-$		$-$		$+$		$+$		$-$		$-$	f'
$-$	-3	$+$	$-\sqrt{3}$	$+$	0	$-$	$\sqrt{3}$	$-$	3	$+$	f''

- 水平漸近線: $y = 0$, 因 $\displaystyle\lim_{x\to\pm\infty} \frac{x}{x^2+3} = 0$
- 嚴格遞增區間 $(f' > 0)$: $(-\sqrt{3}, \sqrt{3})$
- 嚴格遞減區間 $(f' < 0)$: $(-\infty, -\sqrt{3})$ 與 $(\sqrt{3}, \infty)$
- 臨界點 $(f' = 0)$: $x = \pm\sqrt{3}$

- 反曲點 ($f''=0$ 且前後 f'' 異號處)：$x=-3$ 與 $x=0$ 與 $x=3$
- 作圖:



例. 決定 $f(x)=\dfrac{x^3}{x^2-1}$ 的升降, 凹向, 臨界點, 奇異點, 反曲點並作圖.

解.

- $f'(x)=\dfrac{x^2(x^2-3)}{(x^2-1)^2}=\dfrac{x^2(x-\sqrt{3})(x+\sqrt{3})}{(x^2-1)^2}$; $f''(x)=\dfrac{2x(x^2+3)}{(x^2-1)^3}$
- 製表:

$+$		$-$		$-$		$-$		$-$		$+$	f'
$-$	$-\sqrt{3}$	$-$	-1	$+$	0	$-$	1	$+$	$\sqrt{3}$	$+$	f''

- 奇異點: $x^2-1=0 \implies x=\pm1$, 故垂直漸近線: $x=\pm1$
- 斜漸近線: $y=x$, 因 $\displaystyle\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{x^3}{x^2-1}-x\right)=0$
- 嚴格遞增區間 ($f'>0$)：$(-\infty,-\sqrt{3})$ 與 $(\sqrt{3},\infty)$
- 嚴格遞減區間 ($f'<0$)：$(-\sqrt{3},\sqrt{3})$
- 臨界點 ($f'=0$)：$x=0$ 與 $x=\pm\sqrt{3}$
- 反曲點 ($f''=0$ 且前後 f'' 異號處)：$x=0$
- 作圖: