

第一章 極限與連續性

1.1 直觀極限：取雙邊接近值

$$\lim_{x \rightarrow 2} x = 2$$

x	1.9	1.99	1.999	◦	2.001	2.01	2.1
$f(x)$	1.9	1.99	1.999	◦	2.001	2.01	2.1

$$\lim_{x \rightarrow 2} x^2 = 4$$

x	1.9	1.99	1.999	◦	2.001	2.01	2.1
$f(x)$	3.61	3.9601	3.996	◦	4.004	4.040	4.41

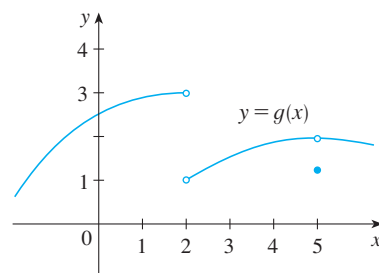
$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-2}{x^2+x-6} = 0.2$$

x	1.9	1.99	1.999	◦	2.001	2.01	2.1
$f(x)$	0.20408	0.20040	0.20004	◦	0.19996	0.19960	0.19608

1.2 單側極限，無限遠極限，無窮極限

單側極限 (One-Sided Limits)

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2^-} g(x) &= 3, & \lim_{x \rightarrow 5^-} g(x) &= 2 \\ \lim_{x \rightarrow 2^+} g(x) &= 1, & \lim_{x \rightarrow 5^+} g(x) &= 2 \\ \lim_{x \rightarrow 2} g(x) &= \text{DNE}, & \lim_{x \rightarrow 5} g(x) &= 2 \end{aligned}$$



例. $g(x) = \begin{cases} \sqrt{x-4} & \text{若 } x > 4 \\ 8-2x & \text{若 } x < 4 \end{cases}, \lim_{x \rightarrow 4} g(x) = 0.$

例. $f(x) = \sqrt{4-x^2}, \lim_{x \rightarrow (-2)^+} f(x) = 0, \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \text{DNE}, \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = 0.$

例. $\bullet \lim_{x \rightarrow 0} |x| = 0 \quad \bullet \lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x|}{x} = \text{DNE} \quad \bullet \lim_{x \rightarrow 3^+} [x] = 3, \lim_{x \rightarrow 3^-} [x] = 2, \lim_{x \rightarrow \pi} [x] = 3.$

定理. 若 $F \in \mathbb{R}, \lim_{x \rightarrow a} f(x) = F \iff \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = F.$

無限遠極限 (Limits at Infinity)

例. $\bullet \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^\alpha} = 0, \alpha > 0; \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^N} = 0, \forall N \in \mathbb{N}$ $\bullet \lim_{x \rightarrow \infty} a^x = \infty, \lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = 0, \lim_{x \rightarrow 0^-} a^{\frac{1}{x}} = 0, \forall a > 1.$

$\bullet \lim_{x \rightarrow \infty} \tan^{-1} x = \frac{\pi}{2}, \lim_{x \rightarrow -\infty} \tan^{-1} x = -\frac{\pi}{2}$

無窮極限 (Infinite Limits)

例.

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = \infty \quad \bullet \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} = -\infty \quad \bullet \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} = \text{DNE} \quad \bullet \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} = \infty \quad \bullet \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \tan x = \infty$$

1.3 極限運算

性質. 若函數 f 為多項式, 指數, 對數, 三角, 或反三角函數, 則 $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$, $\forall a \in \text{dom } f$.

例. $\bullet \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{1}{x^2} = \frac{1}{\pi^2} \quad \bullet \lim_{x \rightarrow -3} \left(\frac{1}{3}\right)^x = 27 \quad \bullet \lim_{x \rightarrow 1} \tan^{-1} x = \frac{\pi}{4}$
 $\bullet \lim_{x \rightarrow \pi} x^\pi = \pi^\pi \quad \bullet \lim_{x \rightarrow -5} \cos x = \cos(-5) = \cos 5 \quad \bullet \lim_{x \rightarrow 5} \log_2 x = \log_2 5$

定理 (極限四則運算). 若 $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = F$, $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = G$, 則

- $\lim_{x \rightarrow a} c = c$, $\lim_{x \rightarrow a} x = a$
- $\lim_{x \rightarrow a} k f(x) = k F$
- $\lim_{x \rightarrow a} (f(x) \pm g(x)) = F \pm G$
- $\lim_{x \rightarrow a} (f(x) \cdot g(x)) = F \cdot G$
- $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{F}{G}$, 若 $G \neq 0$
- $\lim_{x \rightarrow a} (f(x))^\alpha = F^\alpha$, 若 $\alpha \in \mathbb{Q} \wedge F > 0$

當 F, G 存在 (非為無窮), 此定理敘述對「單側極限」及「無限遠極限」均成立.

例. $\bullet \lim_{t \rightarrow -1} \frac{t-2}{t+3} = \frac{\lim_{t \rightarrow -1} t - 2}{\lim_{t \rightarrow -1} t + 3} = \frac{-3}{2} \quad \bullet \lim_{t \rightarrow -3} \frac{1-t}{\cos t} = \frac{\lim_{t \rightarrow -3} 1-t}{\lim_{t \rightarrow -3} \cos t} = \frac{4}{\cos 3}$

例. $\bullet \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(2+h)^2 - 4}{2h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^2 + 4h + 4 - 4}{2h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^2 + 4h}{2h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h+4}{2} = 2$
 $\bullet \lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2 - 4x}{x^2 - 16} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{x(x-4)}{(x-4)(x+4)} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{x}{x+4} = \frac{1}{2}$
 $\bullet \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-2}{x^2 + x - 6} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-2}{(x-2)(x+3)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{x+3} = \frac{1}{5}$

例. 1. $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt{x^2+8}-3}{x+1}$. 2. $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x-2}-\sqrt{4-x}}{x-3}$.

解. 1. $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt{x^2+8}-3}{x+1} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{1}{x+1} \frac{(x^2+8)-3^2}{\sqrt{x^2+8}+3} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{1}{x+1} \frac{x^2-1}{\sqrt{x^2+8}+3}$
 $= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{1}{x+1} \frac{(x+1)(x-1)}{\sqrt{x^2+8}+3} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x-1}{\sqrt{x^2+8}+3} = \frac{-2}{\sqrt{1+8}+3} = -\frac{1}{3}$.
2. $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x-2}-\sqrt{4-x}}{x-3} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{1}{x-3} \frac{(x-2)-(4-x)}{\sqrt{x-2}+\sqrt{4-x}} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{1}{x-3} \frac{2x-6}{\sqrt{x-2}+\sqrt{4-x}}$
 $= \lim_{x \rightarrow 3} 2 \frac{1}{\sqrt{x-2}+\sqrt{4-x}} = \frac{2}{\sqrt{1}+\sqrt{1}} = 1$.

例. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^2+8x-3}{3x^2+2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5+\frac{8}{x}-\frac{3}{x^2}}{3+\frac{2}{x^2}} = \frac{5+0+0}{3+0} = \frac{5}{3} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{5x^2+8x-3}{3x^2+2}$.

例. 求 $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2+5x}-\sqrt{x^2-x})$.

$$\begin{aligned}
 \text{解. } \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + 5x} - \sqrt{x^2 - x}) &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x^2 + 5x) - (x^2 - x)}{\sqrt{x^2 + 5x} + \sqrt{x^2 - x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{6x}{\sqrt{x^2 + 5x} + \sqrt{x^2 - x}} \\
 &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{6x}{\sqrt{x^2(1 + \frac{5}{x})} + \sqrt{x^2(1 - \frac{1}{x})}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{6x}{|x|\sqrt{1 + \frac{5}{x}} + |x|\sqrt{1 - \frac{1}{x}}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{6x}{x\sqrt{1 + \frac{5}{x}} + x\sqrt{1 - \frac{1}{x}}} \\
 &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{6}{\sqrt{1 + \frac{5}{x}} + \sqrt{1 - \frac{1}{x}}} = \frac{6}{\sqrt{1 + 0} + \sqrt{1 - 0}} = 3
 \end{aligned}$$

例. 求 $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x}{\sqrt{4x^2 + x} - 2x}$.

解.

$$\begin{aligned}
 \bullet \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x}{\sqrt{4x^2 + x} - 2x} &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x}{\sqrt{x^2(4 + \frac{1}{x})} - 2x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x}{|x|\sqrt{4 + \frac{1}{x}} - 2x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x}{-x\sqrt{4 + \frac{1}{x}} - 2x} = \\
 \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3}{-\sqrt{4 + \frac{1}{x}} - 2} &= -\frac{3}{4}. \\
 \bullet \text{另解: 變數變換 } y = -x \Rightarrow x = -y: &\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x}{\sqrt{4x^2 + x} - 2x} = \lim_{y \rightarrow \infty} \frac{-3y}{\sqrt{4y^2 - y} + 2y} \\
 &= \lim_{y \rightarrow \infty} \frac{-3y}{\sqrt{y^2(4 - \frac{1}{y})} + 2y} = \lim_{y \rightarrow \infty} \frac{-3y}{|y|\sqrt{4 - \frac{1}{y}} + 2y} = \lim_{y \rightarrow \infty} \frac{-3y}{y\sqrt{4 - \frac{1}{y}} + 2y} = \lim_{y \rightarrow \infty} \frac{-3}{\sqrt{4 - \frac{1}{y}} + 2} = -\frac{3}{4}.
 \end{aligned}$$

定理 (夾擠 (squeeze) 定理; 三明治定理). 若 $g(x) \leq f(x) \leq h(x) \quad \forall x \in [a, b]$, $c \in [a, b]$ 且 $\lim_{x \rightarrow c} g(x) = \lim_{x \rightarrow c} h(x) = L$, 則 $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = L$.

例. 求 $\lim_{x \rightarrow 0} x \sin^2 \frac{1}{x}$.

解. 若 $x \neq 0$, $0 \leq \sin^2 \frac{1}{x} \leq 1$, 則 $-|x| \leq x \sin^2 \frac{1}{x} \leq |x|$. 又 $\lim_{x \rightarrow 0} (-|x|) = \lim_{x \rightarrow 0} |x| = 0$, 由夾擠定理

$$\lim_{x \rightarrow 0} x \sin^2 \frac{1}{x} = 0.$$

1.4 連續性

定義. 給定 f , $a \in \text{dom } f$.

- 若 $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ 存在且 $f(a) = \lim_{x \rightarrow a} f(x)$, 則稱 f 在 a 連續.
- 若 $\lim_{x \rightarrow a+} f(x)$ 存在且 $f(a) = \lim_{x \rightarrow a+} f(x)$, 則稱 f 在 a 左連續.
- 若 $\lim_{x \rightarrow a-} f(x)$ 存在且 $f(a) = \lim_{x \rightarrow a-} f(x)$, 則稱 f 在 a 右連續.

$f(x)$ 在 a 連續 $\iff \lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(\lim_{x \rightarrow a} x) = f(a)$, 亦即 (極限值) = (函數值).

定義 (端點連續性). 給定 f , $\text{dom } f = [a, b]$.

- 若 f 在 b 左連續, 則稱 f 在 b 連續.
- 若 f 在 a 右連續, 則稱 f 在 a 連續.

定義 (連續函數).

- 若 f 在區間 I 之每一點均連續, 則稱 f 在 I 連續.
- 若 f 在 $\text{dom } f$ 之每一點均連續, 則稱 f 為連續函數.

定理 (五則運算仍連續).

- 若 f, g 在 a 連續, 則 $f \pm g, f \cdot g, kf, f^\alpha, \frac{f}{g}$ (若 $g(a) \neq 0$) 均在 a 連續.
- 若 f 在 a 連續, 且 g 在 $f(a)$ 連續, 則 $g \circ f$ 在 a 連續.

性質. 多項式, 指數, 對數, 三角, 反三角函數及其五則運算在其定義域內均為連續函數.

例. 若 $f(x) = \begin{cases} x+2 & \text{當 } x < a \\ x^2 & \text{當 } x \geq a \end{cases}$ 為連續函數, 求 a .

解. 若 f 為連續函數, 則 f 在 a 連續 $\Rightarrow \lim_{x \rightarrow a-} f(x) = \lim_{x \rightarrow a+} f(x) \Rightarrow a+2 = a^2 \Rightarrow a = -1 \vee a = 2$.

例. 若 $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-4}{x-2} & \text{當 } x < 2 \\ ax^2 - bx + 3 & \text{當 } 2 \leq x < 3 \\ 2x - a + b & \text{當 } x \geq 3 \end{cases}$ 為連續函數, 求 a, b .

解. 若 f 為連續函數, 則 f 在 2, 3 均連續 $\Rightarrow (\lim_{x \rightarrow 2-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2+} f(x)) \wedge (\lim_{x \rightarrow 3-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3+} f(x)) \Rightarrow (4 = 4a - 2b + 3) \wedge (9a - 3b + 3 = 6 - a + b) \Rightarrow a = \frac{1}{2}, b = \frac{1}{2}$.

定理 (Bolzano 定理; 勘根定理). 若 f 在 $[a, b]$ 連續且 $f(a) \cdot f(b) < 0$, 則存在 $c \in (a, b)$ 使得 $f(c) = 0$.

定理 (中間值定理). 若 f 在 $[a, b]$ 連續, 則對任意介於 $f(a)$ 與 $f(b)$ 之間的數 d , 存在 $c \in [a, b]$ 使得 $f(c) = d$.

註.

- 中間值定理不適用於不連續函數: 取 $f(x) = \begin{cases} x+2 & -1 < x \leq 1 \\ x & -2 \leq x \leq -1 \end{cases}$, 則 $f(-2) < 0, f(1) > 0$, 但 $f(x) = 0$ 無解.
- $f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$, 則存在無限多 $x \in [-\frac{2}{3\pi}, \frac{2}{\pi}]$ 使 $f(x) = 0$.

例. 證明 $4x^3 - 6x^2 + 3x - 2 = 0$ 在 1, 2 間有實根.

解. 令 $f(x) = 4x^3 - 6x^2 + 3x - 2$. f 為連續函數且 $f(1) < 0, f(2) > 0$, 由 Bolzano 定理知存在 $c \in (1, 2)$ 使得 $f(c) = 0$, 亦即 $4x^3 - 6x^2 + 3x - 2 = 0$ 在 1, 2 間有實根.

例. 證明 $\sqrt{\cos \pi x} = \sin 2\pi x + \frac{1}{2}$ 至少有一實根.

解. 令 $f(x) = \sqrt{\cos \pi x} - (\sin 2\pi x + \frac{1}{2})$. f 在 $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ 連續, 顯然在 $[0, \frac{1}{2}]$ 連續且 $f(0) = \frac{1}{2} > 0, f(\frac{1}{2}) = -\frac{1}{2} < 0$, 由 Bolzano 定理知存在 $c \in (0, \frac{1}{2})$ 使得 $f(c) = 0$, 亦即 $\sqrt{\cos \pi x} = \sin 2\pi x + \frac{1}{2}$ 在 $0, \frac{1}{2}$ 間有一實根.

例. 證明: 奇數次多項式方程式必有實根.

解. 令奇數次多項式 $f(x)$ 為 $f(x) = a_{2n+1}x^{2n+1} + a_{2n}x^{2n} + \cdots + a_1x + a_0$; 不失一般性令 $a_{2n+1} > 0$. 由 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$ 與 f 之連續性, $\exists \alpha (f(\alpha) > 0)$. 又由 $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ 與 f 之連續性, $\exists \beta (f(\beta) < 0)$. 故由 Bolzano 定理知存在 c 介於 α, β 之間使得 $f(c) = 0$.

例 (不動點定理). 令 $f: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ 在 $[0, 1]$ 連續. 證明: 存在 $c \in [0, 1]$ 使得 $f(c) = c$.

解. 令 $g(x) = f(x) - x$. 則 g 在 $[0, 1]$ 連續, 且 $g(0) = f(0) \geq 0, g(1) = f(1) - 1 \leq 0, 0$ 介於 $g(0), g(1)$ 之間. 故由中間值定理, 存在 $c \in [0, 1]$ 使得 $g(c) = 0 \Rightarrow f(c) - c = 0 \Rightarrow f(c) = c$.