第六章 無窮數列與級數

6.1 無窮數列

定義. 定義域為 $\mathbb{N}$ 的函數 f, 給定 $n \in \mathbb{N}$ 之 $f(n)$ 常記作 a_n, 而數列 (sequence) 即為 $\operatorname{ran} f$, 記作 $\{a_1, a_2, a_3, ...\}$, $\{a_n\}$ 或 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$.

註. 數列範例:

- $a_n = \sqrt{n}$, $a_n = \{1, \sqrt{2}, \sqrt{3}, ...\}$
- $b_n = \dfrac{n-1}{n}$, $b_n = \left\{0, \dfrac{1}{2}, \dfrac{2}{3}, \dfrac{3}{4}, ...\right\}$
- $c_n = (-1)^{n+1}$, $c_n = \{1, -1, 1, -1, ...\}$
- $d_n = (-1)^{n+1}\dfrac{1}{n}$, $d_n = \left\{1, -\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{3}, -\dfrac{1}{4}, ...\right\}$

亦無須從 $n = 0$ 開始:

- $a_n = \sqrt{n-3}$, $\{a_n\}_{n=3}^{\infty}$
- $b_n = \cos\dfrac{n\pi}{6}$, $\{b_n\}_{n=0}^{\infty}$

定義 (數列極限)**.** 給定數列 $\{a_n\}$,

- 若 $\forall\, \varepsilon > 0, \exists\, N \in \mathbb{N}$, 使若 $n > N$ 則 $|a_n - L| < \varepsilon$, 稱 $\{a_n\}$ 之極限為 L, 可記作 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = L$ 或「當 $n \to \infty, a_n \to L$」.
- 若 $\forall\, M, \exists\, N \in \mathbb{N}$, 使若 $n > N$ 則 $a_n > M$, 稱 $\{a_n\}$ 發散至無限大, 可記作 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$ 或「當 $n \to \infty, a_n \to \infty$」.
- 若 $\forall\, M, \exists\, N \in \mathbb{N}$, 使若 $n > N$ 則 $a_n < M$, 稱 $\{a_n\}$ 發散至負無限大, 可記作 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty$ 或「當 $n \to \infty, a_n \to -\infty$」.

定理 (收斂數列四則運算)**.** 若 $\{a_n\}, \{b_n\}$ 為收斂數列, $c \in \mathbb{R}$, 則

1. $\lim\limits_{n\to\infty} c\, a_n = c \lim\limits_{n\to\infty} a_n$
2. $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n \pm b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n \pm \lim\limits_{n\to\infty} b_n$
3. $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n \cdot b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n \cdot \lim\limits_{n\to\infty} b_n$
4. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = \dfrac{\lim_{n\to\infty} a_n}{\lim_{n\to\infty} b_n}$, 若 $\lim\limits_{n\to\infty} b_n \neq 0$
5. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n^{\alpha} = \left(\lim\limits_{n\to\infty} a_n\right)^{\alpha}$, 若 $\alpha \in \mathbb{R} \wedge a_n > 0$
   (若 $\alpha < 0$, 則必須 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \neq 0$)

定理 (夾擠定理)**.** 令實數列 $\{a_n\}, \{b_n\}, \{c_n\}$. 若 $\exists\, N \in \mathbb{N}$ 使

1. $a_n \leqslant b_n, \forall\, n > N$, 則 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \leqslant \lim\limits_{n\to\infty} b_n$.
2. $c_n \leqslant a_n \leqslant b_n, \forall\, n > N$, 且 $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n = L \in \mathbb{R}$, 則 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = L$.

例.

1. $\lim\limits_{n\to\infty} |a_n| = 0 \iff \lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.
2. 若 $|b_n| \leqslant c_n$ 且 $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = 0$, 則 $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$.
3. 若 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ 且 $\{b_n\}$ 有界, 則 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n b_n = 0$.

解.

1. $(\Longrightarrow)$ 由 $-|a_n| \leqslant a_n \leqslant |a_n|\ \forall\, n \in \mathbb{N}$, $\lim\limits_{n\to\infty} |a_n| = 0$ 與夾擠定理, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$. $(\Longleftarrow)$ 由 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, $\forall\, \varepsilon > 0\, \exists\, N \in \mathbb{N}\, \forall\, n > N\ (|a_n| < \varepsilon)$; 又 $||a_n|| < \varepsilon \iff |a_n| < \varepsilon$, $\lim\limits_{n\to\infty} |a_n| = 0$.
2. 由 $-c_n \leqslant b_n \leqslant c_n\ \forall\, n \in \mathbb{N}$, $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = 0$ 與夾擠定理, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$.
3. 由 $\{b_n\}$ 有界, $\exists\, M > 0$ 使 $0 \leqslant |b_n| \leqslant M$. 故 $0 \leqslant |a_n b_n| \leqslant M|a_n|$; 由 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0 \implies \lim\limits_{n\to\infty} |a_n| = 0$ 與夾擠定理, $\lim\limits_{n\to\infty} |a_n b_n| = 0 \implies \lim\limits_{n\to\infty} a_n b_n = 0$.

定理. 若函數 $f : [n_0, \infty) \to \mathbb{R}$, 且 $\{a_n\}$ 滿足 $a_n = f(n), \forall\, n \geqslant n_0$, 則 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = L \implies \lim\limits_{n\to\infty} a_n = L$.

註. 此定理逆敘述不成立: $\lim\limits_{n\to\infty} \sin n\pi = 0$, 但 $\lim\limits_{x\to\infty} \sin x\pi = \mathrm{DNE}$.

例. 求以下數列極限 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

1. $a_n = \dfrac{\ln n}{n}$
2. $a_n = \left(1 + \dfrac{a}{n}\right)^n$
3. $a_n = \left(\dfrac{n-1}{n+1}\right)^n$
4. $a_n = a^{\frac{1}{n}},\ a > 0$
5. $a_n = n^{\frac{1}{n}}$
6. $a_n = n^{\frac{2}{n}}$
7. $a_n = \dfrac{\tan^{-1} n}{n}$
8. $a_n = n \sin \dfrac{1}{n}$
9. $a_n = \dfrac{n!}{n^n}$
10. $a_n = \dfrac{a^n}{n!}$
11. $a_n = \dfrac{\ln n}{\ln 2n}$
12. $a_n = \ln(n+1) - \ln n$

解.

1. $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$
2. $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \left(1 + \frac{a}{x}\right)^x = \lim_{x\to\infty} \exp\left\{x \ln\left(1 + \frac{a}{x}\right)\right\} = \exp\left\{\lim_{x\to\infty} x \ln\left(1 + \frac{a}{x}\right)\right\} = \exp\left\{\lim_{x\to\infty} \frac{\ln(1+\frac{a}{x})}{\frac{1}{x}}\right\} = \exp\left\{\lim_{x\to\infty} \frac{\frac{-\frac{a}{x^2}}{1+\frac{a}{x}}}{-\frac{1}{x^2}}\right\} = e^a$
3. $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \left(\frac{x-1}{x+1}\right)^x = \lim_{x\to\infty} \left(1 - \frac{2}{x+1}\right)^{x+1} \cdot \left(1 - \frac{2}{x+1}\right)^{-1} = \lim_{x\to\infty} \left(1 - \frac{2}{x+1}\right)^{x+1} \cdot \lim_{x\to\infty} \left(1 - \frac{2}{x+1}\right)^{-1} = e^{-2} \cdot 1 = e^{-2}$
4. $\displaystyle\lim_{x\to\infty} a^{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to\infty} \exp\left\{\frac{1}{x} \ln a\right\} = e^0 = 1$
5. $\displaystyle\lim_{x\to\infty} x^{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to\infty} \exp\left\{\frac{1}{x} \ln x\right\} = \exp\left\{\lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x}\right\} = e^0 = 1$
6. $\displaystyle\lim_{x\to\infty} x^{\frac{2}{x}} = \lim_{x\to\infty} \exp\left\{\frac{2}{x} \ln x\right\} = \exp\left\{2 \lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x}\right\} = e^0 = 1$
7. $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{\tan^{-1} x}{x} = 0$
8. $\displaystyle\lim_{x\to\infty} x \sin \frac{1}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\sin \frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} = 1$
9. $\displaystyle 0 < \frac{n!}{n^n} = \frac{1 \cdot 2 \cdot \cdots n}{n \cdot n \cdot \cdots \cdot n} < \frac{1}{n}$
10. 取 $N = \lfloor |a| \rfloor + 1$, 則 $\forall\, n > N$, $\displaystyle 0 < \frac{|a|^n}{n!} = \frac{|a|^N}{N!} \frac{|a|^{n-N}}{(N+1)(N+2)\cdots n} < \frac{|a|^N}{N!} \cdot \left(\frac{|a|}{N}\right)^{n-N}$; 由夾擠定理與 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \left(\frac{|a|}{N}\right)^{n-N} = 0 \implies \lim_{n\to\infty} \frac{|a|^n}{n!} = 0 \implies \lim_{n\to\infty} \frac{a^n}{n!} = 0$
11. $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{\ln x + \ln 2} = 0$
12. $\displaystyle\lim_{x\to\infty} (\ln(x+1) - \ln x) = \lim_{x\to\infty} \ln \frac{x+1}{x} = 0$

定義 (升降性)**.** 給定數列 $\{a_n\}$, 若

- $a_n < a_{n+1}\ \forall\, n$, $\{a_n\}$ 為嚴格上升 (strictly increasing)
- $a_n \leqslant a_{n+1}\ \forall\, n$, $\{a_n\}$ 為上升 (increasing) $\nearrow$
- $a_n > a_{n+1}\ \forall\, n$, $\{a_n\}$ 為嚴格下降 (strictly decreasing)
- $a_n \geqslant a_{n+1}\ \forall\, n$, $\{a_n\}$ 為下降 (decreasing) $\searrow$

上升與下降數列通稱為單調 (monotone) 數列.

定義 (有界性)**.** 給定數列 $\{a_n\}$, 若

- $\exists M,\ a_n \leqslant M\ \forall n$, $\{a_n\}$ 有上界 (bounded above), M 為上界 (upper bound)
- $\exists M,\ a_n \geqslant M\ \forall n$, $\{a_n\}$ 有下界 (bounded below), M 為下界 (lower bound)
- 若 M 為上界, 且沒有其他比 M 小之數為 $\{a_n\}$ 之上界, 則 M 為最小上界 (least upper bound)
- 若 M 為下界, 且沒有其他比 M 大之數為 $\{a_n\}$ 之下界, 則 M 為最大下界 (greatest lower bound)

有上界且有下界之數列通稱為有界 (bounded) 數列.

性質 (實數完備性公理 (Completeness Axiom))**.** 若 $\emptyset \neq S \subseteq \mathbb{R}$ 有上界, 則 S 有最小上界.

定理. 給定單調數列 $\{a_n\}$; $\{a_n\}$ 收斂 $\iff$ $\{a_n\}$ 有界.

證. 若 $\{a_n\} \nearrow$, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \sup\{a_n \,|\, n = 1, 2, \dots\}$; 若 $\{a_n\} \searrow$, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \inf\{a_n \,|\, n = 1, 2, \dots\}$.

例. 若 $a_1 = 1$, $a_{n+1} = 3 - \dfrac{1}{a_n}\ \forall n$, 證明 $\{a_n\}$ 收斂並求 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

解.

- 由歸納法證明 $\dfrac{1}{2} < a_n < 3$: $\dfrac{1}{2} < 1 = a_1 < 3$; 假設 $\dfrac{1}{2} < a_n < 3$, 則 $\dfrac{1}{3} < \dfrac{1}{a_n} < 2$; 由 $a_{n+1} = 3 - \dfrac{1}{a_n}$, $3 - 2 < a_{n+1} < 3 - \dfrac{1}{3} \implies \dfrac{1}{2} < a_{n+1} < 3$.
- 由歸納法證明 $a_{n+1} > a_n$: $a_2 = 2 > 1 = a_1$; 假設 $a_{n+1} > a_n$, 且由上 $a_n > 0$, 則 $a_{n+2} = 3 - \dfrac{1}{a_{n+1}} > 3 - \dfrac{1}{a_n} = a_{n+1}$.

則 $\{a_n\} \nearrow$ 且有上界, 故 $\{a_n\}$ 收斂. 令 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = L$, 則 $\lim\limits_{n\to\infty} a_{n+1} = 3 - \dfrac{1}{\lim_{n\to\infty} a_n} \implies L = 3 - \dfrac{1}{L} \implies L = \dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$ (負不合).

例. 若 $a_1 = 2$, $a_{n+1} = \dfrac{1}{2}(a_n + 6)$, 證明 $\{a_n\}$ 收斂並求 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

解.

- 由歸納法證明 $0 < a_n < 6$: $0 < 2 = a_1 < 6$; 假設 $0 < a_n < 6$, 則 $0 < \dfrac{1}{2}(a_n + 6) < 6$, 亦即 $0 < a_{n+1} < 6$.
- 由歸納法證明 $a_{n+1} > a_n$: $a_2 = \dfrac{1}{2}(2+6) = 4 > 2 = a_1$; 假設 $a_{n+1} > a_n$, 則 $a_{n+2} = \dfrac{1}{2}(a_{n+1} + 6) > \dfrac{1}{2}(a_n + 6) = a_{n+1}$.

則 $\{a_n\} \nearrow$ 且有上界, 故 $\{a_n\}$ 收斂. 令 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = L$, 則 $\lim\limits_{n\to\infty} a_{n+1} = \dfrac{1}{2}(\lim\limits_{n\to\infty} a_n + 6) \implies L = \dfrac{1}{2}(L+6) \implies L = 6$.

6.2 無窮級數

定義.

- 給定 $\{a_n\}$, 則 $a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots$ 稱為 (無窮) 級數 (infinite series), a_n 為此級數之第 n 項.
- $s_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k$, $\{s_n\}$ 為部份和數列 (sequence of partial sums), s_n 為此級數之第 n 部份和.

- 若 $\{s_n\}$ 收斂至 s, 則稱此級數收斂至 s, 記為 $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k = s$. 若 $\{s_n\}$ 發散, 此級數發散.

註.

- 將一級數加入或除去有限項, 可能改變其收斂值, 但不影響其斂散性.
- 保持級數項順序下, 級數項足標改變不影響其斂散性.

例 (幾何級數 (geometric series))**.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a\, r^{n-1}$ 中, 若 $|r| < 1$, 則此級數收斂至 $\dfrac{a}{1-r}$; 若 $|r| \geqslant 1$, 則此級數發散.

例. 解 $\sum\limits_{n=2}^{\infty} (1+x)^{-n} = 2$.

解. $\dfrac{\frac{1}{(1+x)^2}}{1-\frac{1}{1+x}} = 2 \implies x = \dfrac{-1 \pm \sqrt{3}}{2}$.

性質 (瞭望法 (telescoping))**.** 若 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ 滿足 $a_n = b_{n+1} - b_n \ \forall\, n$, 則 $\sum a_n$ 收斂 $\iff$ $\{b_n\}$ 收斂, 且 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n - b_1$.

例. 求下列各級數之和.

1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^2+n}$
2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{3n^2+3n+1}{(n^2+n)^3}$
3. $\sum\limits_{n=3}^{\infty} \dfrac{1}{n^5-5n^3+4n}$

解.

1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^2+n} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n(n+1)} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+1}\right) = 1$
2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{3n^2+3n+1}{(n^2+n)^3} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\left(\dfrac{1}{n}\right)^3 - \left(\dfrac{1}{n+1}\right)^3\right) = 1$
3. $\sum\limits_{n=3}^{\infty} \dfrac{1}{n^5-5n^3+4n} = \sum\limits_{n=3}^{\infty} \dfrac{1}{n(n^2-1)(n^2-4)} = \sum\limits_{n=3}^{\infty} \dfrac{1}{n(n-1)(n+1)(n-2)(n+2)}$
$= \dfrac{1}{4} \sum\limits_{n=3}^{\infty} \left(\dfrac{1}{(n-2)(n-1)n(n+1)} - \dfrac{1}{(n-1)n(n+1)(n+2)}\right) = \dfrac{1}{4}\, \dfrac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} = \dfrac{1}{96}$

例. 給定 a_1, a_2 之值且 $a_n = \dfrac{1}{2}\,(a_{n-1} + a_{n-2})$, 求 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

解. $a_n = \dfrac{1}{2}\,(a_{n-1} + a_{n-2}) \implies (a_n - a_{n-1}) = -\dfrac{1}{2}\,(a_{n-1} - a_{n-2})$, 故 $a_n - a_{n-1} = \left(\dfrac{-1}{2}\right)^{n-2} (a_2 - a_1)$, $a_{n-1} - a_{n-2} = \left(\dfrac{-1}{2}\right)^{n-3} (a_2 - a_1)$, ..., $a_2 - a_1 = \left(\dfrac{-1}{2}\right)^{0} (a_2 - a_1)$; 前述等式相加得 $a_n - a_1 = \sum\limits_{k=0}^{n-2} \left(\dfrac{-1}{2}\right)^{k} (a_2 - a_1) = \dfrac{1\cdot\left(1-\left(\frac{-1}{2}\right)^{n-1}\right)}{1-\left(\frac{-1}{2}\right)}\,(a_2 - a_1)$, 故 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n - a_1 = \dfrac{2}{3}\,(a_2 - a_1) \implies \lim\limits_{n\to\infty} a_n = a_1 + \dfrac{2}{3}\,(a_2 - a_1) = \dfrac{a_1 + 2a_2}{3}$.

例. 求 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{2^n} \tan \dfrac{x}{2^n}$.

解. 首先證明 $\tan\frac{x}{2} = \cot\frac{x}{2} - 2\cot x$: $\cot\frac{x}{2} - 2\cot x = \frac{\cos\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2}} - 2\frac{\cos x}{\sin x} = \frac{\cos\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2}} - \frac{\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}} = \frac{\cos^2\frac{x}{2}-\cos^2\frac{x}{2}+\sin^2\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}} = \frac{\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}} = \tan\frac{x}{2}$. 故 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}\tan\frac{x}{2^n} = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2^n}\cot\frac{x}{2^n} - \frac{1}{2^{n-1}}\cot\frac{x}{2^{n-1}}\right)$ $= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{2^n}\cot\frac{x}{2^n} - \cot x = \frac{1}{x} - \cot x$, 由 $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2^n}\cot\frac{x}{2^n} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{2^n}\frac{\cos\frac{x}{2^n}}{\sin\frac{x}{2^n}} = \lim_{n\to\infty}\frac{\cos\frac{x}{2^n}}{\frac{\sin\frac{x}{2^n}}{\frac{1}{2^n}}} = \lim_{n\to\infty}\frac{\cos\frac{x}{2^n}}{\frac{x\sin\frac{x}{2^n}}{\frac{x}{2^n}}} = \frac{1}{x}$.

例. 求 $\sum_{n=0}^{\infty}\cot^{-1}(n^2+n+1)$.

解. 首先證明 $\cot^{-1}x - \cot^{-1}y = \cot^{-1}\frac{1+xy}{y-x}$: 令 $\alpha = \cot^{-1}x,\ \beta = \cot^{-1}y \implies x = \cot\alpha,\ y = \cot\beta$, $\cot(\alpha-\beta) = \frac{1}{\tan(\alpha-\beta)} = \frac{1+\tan\alpha\tan\beta}{\tan\alpha-\tan\beta} = \frac{1+\cot\alpha\cot\beta}{\cot\beta-\cot\alpha} = \frac{1+xy}{y-x}$, 等式兩邊同取 $\cot^{-1}$ 得 $\alpha-\beta = \cot^{-1}x-\cot^{-1}y = \cot^{-1}\frac{1+xy}{y-x}$; $\sum_{n=0}^{\infty}\cot^{-1}(n^2+n+1) = \sum_{n=0}^{\infty}\cot^{-1}(1+n(n+1)) = \sum_{n=0}^{\infty}\cot^{-1}\frac{1+n(n+1)}{(n+1)-n} = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\cot^{-1}n - \cot^{-1}(n+1)\right) = \cot^{-1}0 - \lim_{n\to\infty}\cot^{-1}(n+1) = \frac{\pi}{2} - 0 = \frac{\pi}{2}$.

例. 證明調和數列 (harmonic series) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 發散.

解. 由

$$\begin{aligned}
&1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}\right)+\left(\frac{1}{9}+\frac{1}{10}+\frac{1}{11}+\frac{1}{12}+\frac{1}{13}+\frac{1}{14}+\frac{1}{15}+\frac{1}{16}\right)+\cdots\\
&>1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}\right)+\left(\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}\right)+\cdots\\
&=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\cdots
\end{aligned}$$

可得 $\sum_{n=1}^{2^k}\frac{1}{n} > 1+\frac{k}{2}$, $\forall\, k\in\mathbb{N}$, 故 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 發散.

例. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$ 收斂 $\iff p>1$.

解. 定義 $s_k = \sum_{n=1}^{k}\frac{1}{n^p}$, 則 $s_{2k+1} = \sum_{n=1}^{2k+1}\frac{1}{n^p} = 1+\sum_{j=1}^{k}\left(\frac{1}{(2j)^p}+\frac{1}{(2j+1)^p}\right) < 1+\sum_{j=1}^{k}\frac{2}{(2j)^p} = 1+2^{1-p}s_k < 1+2^{1-p}s_{2k+1} \implies s_{2k+1} < \frac{1}{1-2^{1-p}}$; 當 $p>1$ 時 $\{s_n\}\nearrow$ 且有上界, 故收斂. 若 $p\leqslant 1$, 則 $s_n<1$, 不合。

6.3 審斂法

定義. 若 $a_n \geqslant 0,\ n\in\mathbb{N}$, $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 稱為正項級數 (positive series).

定理.

1. 若 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 收斂, 則 $\lim_{n\to\infty}a_n = 0$.

2. 若 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \neq 0$ 或 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \text{DNE}$, 則 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 發散.

3. 給定正項級數 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$; $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收斂 $\iff$ 部份和數列 $\{s_n\}$ 有上界.

定理 (積分法 (integral test))**.** 給定正項級數 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, 令 $f : [N, \infty) \to \mathbb{R}$ 為正值, 連續, 遞減函數, $a_n = f(n)$, $\forall\, n \geqslant N$, 則 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 與 $\int_N^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ 同斂散.

例. 判斷以下級數之斂散.

1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^2+1}$
2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\ln n}{n}$

解. 由積分法,

1. 定義 $f(x) = \dfrac{1}{x^2+1}$, $f : [1, \infty) \to \mathbb{R}^+$ 為正值, 連續, 遞減函數, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^2+1}$ 與 $\int_1^{\infty} \dfrac{1}{x^2+1}\,\mathrm{d}x = \tan^{-1} x\,\Big|_1^{\infty} = \dfrac{\pi}{4}$ 同斂散, 故為收斂.

2. 定義 $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$, $f : [3, \infty) \to \mathbb{R}^+$ 為正值, 連續, 遞減函數 $\left(f'(x) = \dfrac{1-\ln x}{x^2} < 0,\ \forall x \geqslant 3\right)$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\ln n}{n}$ 與 $\int_3^{\infty} \dfrac{\ln x}{x}\,\mathrm{d}x = \dfrac{(\ln x)^2}{2}\Big|_3^{\infty} = \infty$ 同斂散, 故為發散.

例. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^p}$ 收斂 $\iff$ $p > 1$.

解. 定義 $f(x) = \dfrac{1}{x^p}$, $f : [1, \infty) \to \mathbb{R}^+$ 為正值, 連續, 遞減函數 $(f'(x) = -p\,x^{-(p+1)} < 0)$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^p}$ 與 $\int_1^{\infty} \dfrac{1}{x^p}\,\mathrm{d}x = \dfrac{x^{1-p}}{1-p}\Big|_1^{\infty}$ 同斂散.

例. 求令以下各級數收斂之 p 值.

1. $\sum\limits_{n=3}^{\infty} \dfrac{1}{n\ln n(\ln\ln n)^p}$
2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} p^{\ln n}$
3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\dfrac{p}{n} - \dfrac{1}{n+1}\right)$

解.

1. $\sum\limits_{n=3}^{\infty} \dfrac{1}{n\ln n(\ln\ln n)^p}$ 與 $\int_3^{\infty} \dfrac{1}{x\ln x(\ln\ln x)^p}\,\mathrm{d}x = \int_{\ln\ln 3}^{\infty} \dfrac{1}{w^p}\,\mathrm{d}w$ 同斂散, 若收斂則 $p > 1$.

2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} p^{\ln n} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} (e^{\ln p})^{\ln n} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} (e^{\ln n})^{\ln p} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} n^{\ln p}$, 若收斂則 $\ln p < -1 \implies 0 < p < e^{-1}$.

3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\dfrac{p}{n} - \dfrac{1}{n+1}\right) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(p-1)n+p}{n(n+1)}$, 若收斂則 $p = 1$.

例. 證明 $a_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k} - \ln n$ 收斂.

解. 由 $\ln(n+1) = \int_1^{n+1} \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x < 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}$, $a_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln n > \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n+1) > 0$, $\{a_n\}$ 有下界 0; 由 $\ln(n+1) - \ln n = \int_n^{n+1} \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x > \frac{1}{n+1}$, $a_n - a_{n+1} = \ln(n+1) - \ln n - \frac{1}{n+1} > 0 \implies \{a_n\}$ 遞減, 故 $\{a_n\}$ 收斂.

定理 (比較法 (comparison test))**.** 給定正項級數 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

1. 若存在收斂 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 與 $N \in \mathbb{N}$ 使 $a_n \leqslant b_n$, $\forall\, n \geqslant N$, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收斂.
2. 若存在發散 $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ 與 $N \in \mathbb{N}$ 使 $a_n \geqslant c_n$, $\forall\, n \geqslant N$, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 發散.

例. 判斷以下級數之斂散.

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5}{5n-1}$
2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n}$
3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n^2+4n+3}$
4. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}$

解.

1. 發散: $a_n = \frac{5}{5n-1} > \frac{1}{n} = c_n$
2. 發散: $a_n = \frac{\ln n}{n} > \frac{1}{n} = c_n$
3. 收斂: $a_n = \frac{1}{2n^2+4n+3} < \frac{1}{2n^2} = b_n$
4. 收斂: $a_n = \frac{1}{n!} < \frac{1}{n^2} = b_n$, $n \geqslant N = 4$

定理 (極限比較法 (limit comparison test))**.** 給定正項級數 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 且 $a_n > 0$, $b_n > 0$.

1. 若 $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = c > 0$, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 與 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 同斂散.
2. 若 $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 0$ 且 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 收斂, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收斂.
3. 若 $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \infty$ 且 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 發散, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 發散.

例. 判斷以下級數之斂散.

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n^2+2n+1}$
2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n^2+3n}{\sqrt{5+n^5}}$
3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n^{\frac{3}{2}}}$
4. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+n\ln n}{n^2+5}$

解. 由極限比較法,

1. 發散: 取 $b_n = \frac{1}{n}$, $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2n^2+n}{n^2+2n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{2+\frac{1}{n}}{1+\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}} = 2$
2. 發散: 取 $b_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$, $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(2n^2+3n)\sqrt{n}}{\sqrt{5+n^5}} = \lim_{n\to\infty} \frac{2+\frac{3}{n}}{\sqrt{\frac{5}{n^5}+1}} = 2$
3. 收斂: 取 $b_n = \frac{1}{n^{\frac{5}{4}}}$, $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\ln n}{n^{\frac{1}{4}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{4}n^{-\frac{3}{4}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{4}{n^{\frac{1}{4}}} = 0$

4. 發散: 取 $b_n = \dfrac{1}{n}$, $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{n+n^2\ln n}{n^2+5} = \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n}+\ln n}{1+\frac{5}{n^2}} = \infty$

例. 若正項級數 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 收斂, 證明以下級數均收斂.

1. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\ln(1+a_n)$
2. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\sin a_n$
3. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}a_n b_n$

解. 由極限比較法,

1. 與 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 做比較: $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{\ln(1+a_n)}{a_n} = \lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x} = 0$, 故收斂.
2. 與 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 做比較: $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{\sin a_n}{a_n} = \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$, 故收斂.
3. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ 收斂, 則 $\exists N\in\mathbb{N}$, $b_n \leqslant 1\ \forall\, n \geqslant N \implies 0 < a_n b_n < a_n\ \forall\, n \geqslant N$, $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}a_n b_n$ 收斂.

定理 (比值法 (ratio test))**.** 給定 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}a_n$, 令 $\rho = \displaystyle\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$.

1. 若 $\rho < 1$, $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 收斂.
2. 若 $\rho > 1$ 或 ρ 為無限大, $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 發散.
3. 若 $\rho = 1$, $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 斂散性未定.

例. 判斷以下級數之斂散.

1. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n^3+3n-1}}{n^2+5}$
2. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\pi^n+5}{e^n}$
3. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n!)^2}{(2n)!}$
4. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{n^n}$
5. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^4+3n^3+2n^2+4n+5}{3^n}$
6. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln n\,(n^{52}-2024n^{24}+100n-90)}{n^{\frac{3}{2}}}$

解.

1. $\rho = \displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{\sqrt{(n+1)^3+3(n+1)-1}}{(n+1)^2+5}}{\frac{\sqrt{n^3+3n-1}}{n^2+5}} = \lim_{n\to\infty}\frac{n^2+5}{(n+1)^2+5}\sqrt{\frac{(n+1)^3+3(n+1)-1}{n^3+3n-1}}$
$= \displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{5}{n^2}}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^2+\frac{5}{n^2}}\sqrt{\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^3+3\left(\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^3}\right)-\frac{1}{n^3}}{1+3\frac{1}{n^2}-\frac{1}{n^3}}} = 1$, 但由極限比較法與 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}$ 比較, $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} =$
$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n}\sqrt{n^3+3n-1}}{n^2+5} = \lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^4+3n^2-n}}{n^2+5} = \lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{1+\frac{3}{n^2}-\frac{1}{n^3}}}{1+\frac{5}{n^2}} = 1$, 故發散.
2. $\rho = \displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{\pi^{n+1}+5}{e^{n+1}}}{\frac{\pi^n+5}{e^n}} = \lim_{n\to\infty}\frac{e^n}{e^{n+1}}\cdot\frac{\pi^{n+1}+5}{\pi^n+5} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{e}\cdot\frac{\pi+\frac{5}{\pi^n}}{1+\frac{5}{\pi^n}} = \frac{\pi}{e} > 1$, 發散.
3. $\rho = \displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{((n+1)!)^2}{(2(n+1))!}}{\frac{(n!)^2}{(2n)!}} = \lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)(n+1)}{(2n+2)(2n+1)} = \frac{1}{4}$, 收斂.

4. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\frac{(n+1)!}{(n+1)^{(n+1)}}}{\frac{n!}{n^n}} = \lim\limits_{n\to\infty} \left(1-\dfrac{1}{n}\right)^n = e^{-1} < 1$, 收斂.

5. $\rho = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\frac{(n+1)^4+3(n+1)^3+2(n+1)^2+4(n+1)+5}{3^{n+1}}}{\frac{n^4+3n^3+2n^2+4n+5}{3^n}} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(n+1)^4}{n^4} \cdot \dfrac{1+\frac{3}{n+1}+\frac{2}{(n+1)^2}+\frac{4}{(n+1)^3}+\frac{5}{(n+1)^4}}{1+\frac{3}{n}+\frac{2}{n^2}+\frac{4}{n^3}+\frac{5}{n^4}} \cdot \dfrac{1}{3} = \dfrac{1}{3}$, 收斂.

6. $\dfrac{\ln n\,(n^{52}-2024n^{24}+100n-90)}{n^{\frac{3}{2}}} \to \infty$, 發散.

定理 (根式法 (root test))**.** 給定 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, 令 $\rho = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$.

1. 若 $\rho < 1$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收斂.
2. 若 $\rho > 1$ 或 ρ 為無限大, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 發散.
3. 若 $\rho = 1$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 斂散性未定.

例. 判斷以下級數之斂散.

1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\dfrac{1}{n+1}\right)^n$
2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\dfrac{2n+3}{3n+2}\right)^n$
3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n^2}{2^n}$

解.

1. $\rho = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n} = 0$, 收斂.
2. $\rho = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2n+3}{3n+2} = \dfrac{2}{3}$, 收斂.
3. $\rho = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^{\frac{2}{n}}}{2} = \dfrac{1}{2}$, 收斂.

6.4 條件與絕對收斂

定義. 給定 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$.

1. 若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$ 收斂, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 為絕對收斂 (absolutely convergent).
2. 若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$ 發散但 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收斂, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 為條件收斂 (conditionally convergent).

定理. 若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$ 收斂, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收斂.

證. 由 $|s_n - s_m| = |a_n + a_{n-1} + \cdots + a_{m+1}| \leqslant |a_n| + |a_{n-1}| + \cdots + |a_{m+1}|$, $\forall\, n > m$ 與 Cauchy 準則, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收斂.

性質 (Abel 公式)**.** 給定 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$, 令 $A_n = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k$ 且 $A_0 = 0$, 則 $\sum\limits_{k=1}^{n} a_k b_k = A_n b_{n+1} - \sum\limits_{k=1}^{n} A_k (b_{k+1} - b_k)$.

證. $\sum_{k=1}^{n} a_k b_k = \sum_{k=1}^{n}(A_k - A_{k-1})b_k = \sum_{k=1}^{n} A_k b_k - \sum_{k=1}^{n} A_{k-1} b_k = \sum_{k=1}^{n} A_k b_k - \sum_{k=1}^{n} A_k b_{k+1} + A_n b_{n+1} = A_n b_{n+1} - \sum_{k=1}^{n} A_k (b_{k+1} - b_k)$.

定理 (Dirichlet 判定法)**.** 若 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 部份和數列有界, $b_n \searrow$ 且 $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$, 則 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ 收斂.

證. 由 Abel 公式 $\sum_{k=1}^{n} a_k b_k = A_n b_{n+1} - \sum_{k=1}^{n} A_k (b_{k+1} - b_k)$. 因 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 之部份和數列有界, $\exists M\ |A_n| \leqslant M$, 又 $\lim_{n\to\infty} b_n = 0 \implies \lim_{n\to\infty} A_n b_{n+1} = 0$; 由 $\sum_{k=1}^{n} \Big|A_k (b_{k+1} - b_k)\Big| \leqslant M \sum_{k=1}^{n} (b_k - b_{k+1})$ 與 $b_n \searrow$, $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$, $\sum_{k=1}^{n} A_k (b_{k+1} - b_k)$ 絕對收斂 $\implies \sum_{k=1}^{n} A_k (b_{k+1} - b_k)$ 收斂; 故 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ 收斂.

例. 證明 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n}$ 收斂, $\forall\, x \in \mathbb{R}$.

解. 由於 $\sin nx$ 為週期 2π 之函數, 且 $x = 0$ 時 $\sin nx = 0$, 只需考慮 $x \in (0,\, 2\pi)$. 令 $A_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \sin kx$, $2 \sin \frac{x}{2} \cdot A_n(x) = \sum_{k=1}^{n} 2 \sin \frac{x}{2} \cdot \sin kx = \sum_{k=1}^{n} \left(\cos\Big(k - \frac{1}{2}\Big)x - \cos\Big(k + \frac{1}{2}\Big)x \right) = \cos \frac{x}{2} - \cos\Big(n + \frac{1}{2}\Big)x \implies |A_n(x)| = \left| \frac{\cos \frac{x}{2} - \cos\,(n + \frac{1}{2})x}{2 \sin \frac{x}{2}} \right| \leqslant \frac{1}{\sin \frac{x}{2}}$, $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \searrow 0$, 由 Dirichlet 判定法 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n}$ 收斂, $\forall\, x \in (0,\, 2\pi)$.

定義 (交錯級數)**.** 給定正項級數 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ 稱為交錯級數 (alternating series).

定理. 若正項級數 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 中 $a_n \searrow$ 且 $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, 交錯級數 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ 收斂.

證. $\{(-1)^n\}$ 部份和數列有界, $a_n \searrow$ 且 $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$; 由 Dirichlet 判定法 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ 收斂.

例. 若 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 條件收斂,

1. $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 a_n$ 發散.
2. $\sum_{n=1}^{\infty} n a_n$ 不為絕對收斂.

解.

1. 若 $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 a_n$ 收斂, 則 $\lim_{n\to\infty} n^2 a_n = 0 \implies \exists N \in \mathbb{N},\ n^2 |a_n| < 1\ \forall\, n \geqslant N \implies |a_n| < \frac{1}{n^2}\ \forall\, n \geqslant N \implies \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ 收斂, 矛盾.
2. 令 $a_n = (-1)^n \frac{1}{n}$, 則 $\sum_{n=1}^{\infty} n a_n$ 發散; 令 $a_n = (-1)^n \frac{1}{n \ln n}$, 則 $\sum_{n=1}^{\infty} n a_n$ 條件收斂. 若 $\sum_{n=1}^{\infty} n a_n$ 絕對收斂, 由 $|a_n| \leqslant |n a_n|\ \forall\, n \geqslant 1 \implies \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 絕對收斂, 矛盾.

6.5 冪級數

定義. $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ 之無窮級數稱為 $x-x_0$ 的冪級數 (power series), $\{a_n\}$ 為其係數 (coefficient).

定理. 令 $\alpha = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$, $R = \begin{cases} \frac{1}{\alpha} & 0<\alpha<\infty \\ \infty & \alpha = 0 \\ 0 & \alpha = \infty \end{cases}$, 則 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ 為 $\begin{cases} \text{絕對收斂} & \forall\, |x-x_0|<R \\ \text{發散} & \forall\, |x-x_0|>R \end{cases}$.

證. 由根式法, 令 $\rho = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n(x-x_0)^n|} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}\cdot|x-x_0| = \frac{|x-x_0|}{R}$; 若 $\rho<1 \implies \frac{|x-x_0|}{R} < 1 \implies |x-x_0|<R$ 冪級數絕對收斂, $\rho>1 \implies \frac{|x-x_0|}{R}>1 \implies |x-x_0|>R$ 冪級數發散.

註.

1. R 稱為 $x-x_0$ 的冪級數 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ 之收斂半徑 (radius of convergence). 若 $0<R<\infty$, 稱 $|x-x_0|=R$ 為其收斂圓 (circle of convergence). 若 $\forall\, x\in I$ 使 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ 收斂, 則 I 稱為其收斂區間 (interval of convergence).
2. R 之計算可不依根式法 — 使用比值法於冪級數 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^n}{n!}z^n$, $\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!}|z|^{n+1}}{\frac{n^n}{n!}|z|^n} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n|z| = e\,|z|<1$ 為絕對收斂, $e\,|z|>1$ 發散 $\implies R=\frac{1}{e}$.
3. 不同冪級數 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ 在其收斂圓上有不同收斂特性: $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ 於 $|x|=1$ 發散, $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n(n+1)}$ 於 $|x|=1$ 絕對收斂, $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n}$ 於 $x=1$ 發散, $x=-1$ 條件收斂.
4. $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ 在 $x\in(c-R,c+R)$ (亦即 $|x-x_0|<R$) 定義函數 f, 寫作 $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$, $|x-x_0|<R$; $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$, $|x-x_0|<R$ 為 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 之冪級數表示式.

例. 求以下 x 的冪級數之收斂區間.

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$
2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}$
3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$
4. $\sum_{n=1}^{\infty} n!x^n$
5. $\sum_{n=1}^{\infty} nx^n$
6. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{\ln(n+1)}$

解.

1. $\lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = 1$; $x=1$ 時發散, $x=-1$ 時條件收斂, 故收斂區間為 $-1\leqslant x<1$.
2. $\lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{(n+1)^2} = 1$; $x=\pm1$ 時均收斂, 故收斂區間為 $-1\leqslant x\leqslant 1$.
3. $\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{(n+1)!} = 0$; 故收斂區間為 $x\in\mathbb{R}$.

4. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+1)!}{n!}=\infty$, 故只在 $x=0$ 收斂.

5. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n+1}{n}=1$; $x=\pm1$ 時均發散, 故收斂區間為 $-1<x<1$.

6. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\ln(n+2)}{\ln(n+1)}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\ln(n+2)-\ln(n+1)+\ln(n+1)}{\ln(n+1)}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\ln\frac{n+2}{n+1}}{\ln(n+1)}+1=1$; $x=1$ 時發散, $x=-1$ 時條件收斂, 故收斂區間為 $-1\leqslant x<1$.

定理 (冪級數運算)**.**

- 兩冪級數 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^n,\ |x-x_0|<R$, $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\tilde{a}_n(x-\tilde{c})^n,\ |x-\tilde{c}|<\widetilde{R}$ 之線性組合仍為函數, 其定義域為 $(c-R,c+R)\cap(\tilde{c}-\widetilde{R},\tilde{c}+\widetilde{R})$.
- 冪級數在收斂半徑內可逐項微分與積分: 若 $f(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^n,\ |x-x_0|<R$, 則 $f'(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}na_n(x-x_0)^{n-1},\ |x-x_0|<R$, $\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x=\sum_{n=0}^{\infty}a_n\frac{(x-x_0)^{n+1}}{n+1},\ |x-x_0|<R$.

例. 求 $\dfrac{1}{(1-x)^2}$ 在 $x=0$ 之冪級數表示式.

解. 逐項微分 $\dfrac{1}{1-x}=1+x+x^2+x^3+x^4+\cdots$, $|x|<1\implies\dfrac{1}{(1-x)^2}=1+2x+3x^2+4x^3+\cdots=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n$, $|x|<1$.

例. 求 $\ln(1+x)$ 在 $x=0$ 之冪級數表示式.

解. 逐項積分 $\dfrac{1}{1+x}=1-x+x^2-x^3+x^4+\cdots$, $|x|<1\implies\ln(1+x)=x-\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^3}{3}-\dfrac{x^4}{4}+\dfrac{x^5}{5}-+\cdots=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^nx^{n+1}}{n+1}$, $|x|<1$.

例. 證明 $\tan^{-1}x=x-\dfrac{x^3}{3}+\dfrac{x^5}{5}-\dfrac{x^7}{7}+-\cdots=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n\,x^{2n+1}}{2n+1}$, $|x|<1$.

解. 逐項積分 $\dfrac{1}{1+x^2}=1-x^2+x^4-x^6+-\cdots$, $|x|<1$, 又 $\tan^{-1}0=0$, 故 $\tan^{-1}x=x-\dfrac{x^3}{3}+\dfrac{x^5}{5}-\dfrac{x^7}{7}+-\cdots=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n\,x^{2n+1}}{2n+1}$, $|x|<1$.

例. 若 $k>1$, 求 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n}{k^n}=\dfrac{1}{k}+\dfrac{2}{k^2}+\dfrac{3}{k^3}+\dfrac{4}{k^4}+\cdots$.

解. 由 $\dfrac{1}{(1-x)^2}=1+2x+3x^2+4x^3+\cdots=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n$, $|x|<1$, $\dfrac{x}{(1-x)^2}=x+2x^2+3x^3+4x^4+\cdots=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(n+1)x^{n+1}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}nx^n$, $|x|<1$; 代入 $x=\dfrac{1}{k}$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n}{k^n}=\dfrac{1}{k}+\dfrac{2}{k^2}+\dfrac{3}{k^3}+\dfrac{4}{k^4}+\cdots=\dfrac{\frac{1}{k}}{\left(1-\frac{1}{k}\right)^2}=\dfrac{k}{(k-1)^2}$.

6.6 Taylor 級數

定義.

- 給定 $f \in C^{\infty}(a,b)$, $x_0 \in (a,b)$, $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$ 稱為 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 之 Tayler 級數 / 展開式; 若 $x_0 = 0$ 稱為 $f(x)$ 之 MacLaurin 級數 / 展開式.
- 給定 $f \in C^{N}(a,b)$, $x_0 \in (a,b)$, $0 \leqslant n \leqslant N$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^n$ 稱為 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 之 n 階 Tayler 多項式; 若 $x_0 = 0$ 稱為 $f(x)$ 之 n 階 MacLaurin 多項式.

定理. 若 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 有冪級數表示式 $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n,\ |x-x_0| < R$, 則 $a_n = \dfrac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$.

證. 在 $|x-x_0| < R$ 可逐項微分得 $f'(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n\, a_n (x-x_0)^{n-1},\ f''(x) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)\, a_n (x-x_0)^{n-2},\ \ldots,$ $f^{(k)}(x) = \displaystyle\sum_{n=k}^{\infty} n(n-1)\cdots(n-(k-1)) \cdot a_n (x-x_0)^{n-k}$; 代入 $x = x_0 \implies f^{(k)}(x_0) = k(k-1)\cdots 1 \cdot a_k = k!\, a_k \implies a_k = \dfrac{f^{(k)}(x_0)}{k!}$.

例. 常用 Maclaurin 級數.

1. $e^x = 1 + x + \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^4}{4!} + \dfrac{x^5}{5!} + \dfrac{x^6}{6!} + \dfrac{x^7}{7!} + \cdots = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$
2. $\sin x = x - \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^5}{5!} - \dfrac{x^7}{7!} + - \cdots = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n\, x^{2n+1}}{(2n+1)!}$
3. $\cos x = 1 - \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^4}{4!} - \dfrac{x^6}{6!} + - \cdots = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n\, x^{2n}}{(2n)!}$
4. $\ln(1+x) = x - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3} - \dfrac{x^4}{4} + \dfrac{x^5}{5} - \dfrac{x^6}{6} + - \cdots = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{n+1}}{n+1}$

定理 (Taylor)**.** 若 $f(x) \in C^k(a,b)$, $f^{(k-1)}(x)$ 在 $[a,b]$ 連續, $1 \leqslant k \leqslant N$, $x_0 \in (a,b)$. 則 $\exists x_1$ 介於 x 與 x_0 間使 $f(x) = f(x_0) + \displaystyle\sum_{k=1}^{N-1} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + \frac{f^{(N)}(x_1)}{N!}(x-x_0)^N$.

例. 估計以 3 階 MacLaurin 多項式作為 $e^{\frac{1}{2}}$ 近似之誤差.

解. 由 $e^x = 1 + x + \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^3}{3!} + \cdots$, $e^{\frac{1}{2}} = 1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2!}\Big(\dfrac{1}{2}\Big)^2 + \dfrac{1}{3!}\Big(\dfrac{1}{2}\Big)^3 \approx 1.64583$. 代入 Taylor 定理: $x = \dfrac{1}{2}$, $x_0 = 0,\ f(x) = e^x,\ f^{(k)}(x) = e^x,\ \forall\, k \in \mathbb{N}$, 故 $\exists x_1 \in \Big(0, \dfrac{1}{2}\Big)$ 使 $e^x = 1 + x + \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^4}{4!}\, e^{x_1}$, 則誤差為 $\dfrac{1}{4!}\Big(\dfrac{1}{2}\Big)^4 e^{x_1} \leqslant \dfrac{1}{4!}\Big(\dfrac{1}{2}\Big)^4 2 = \dfrac{1}{192} \approx 0.0052$.

例. 應使用幾階 MacLaurin 多項式作為 e^1 之近似使誤差 < 0.005?

解. 由 $f(x) = e^x$, $f^{(k)}(x) = e^x\ \forall\, k \in \mathbb{N}$ 與 Taylor 定理, $\exists x_1 \in (0,1)$ 使 $e = 1 + \displaystyle\sum_{k=1}^{N-1} \frac{1}{k!} + \frac{e^{x_1}}{N!}$. 又 $e^{x_1} < 3$, 誤差項 $\dfrac{e^{x_1}}{N!} < \dfrac{3}{N!} < 0.005 \implies N! > \dfrac{3}{0.005} = 600 \implies N = 6$, 故使用 $N-1 = 5$ 階 MacLaurin 多項式作為 e^1 之近似: $e^1 \approx 1 + 1 + \dfrac{1}{2!} + \dfrac{1}{3!} + \dfrac{1}{4!} + \dfrac{1}{5!} = \dfrac{326}{120} \approx 2.72$.

例. $f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$, 求 $f(x)$ 的 MacLaurin 級數.

解. 由數學歸納法可得 $f^{(n)}(x) = e^{-\frac{1}{x^2}} \dfrac{P_{2n-2}(x)}{x^{3n}}$, $n \in \mathbb{N}$, 其中 $P_{2n-2}(x)$ 為 x 的 $2n-2$ 次多項式. 令 $g\left(\dfrac{1}{x}\right) = \dfrac{P_{2n-2}(x)}{x^{3n}}$, 則 $g(y)$ 為 y 的多項式 (變數變換 $y = \dfrac{1}{x}$), $f^{(n)}(0) = \lim\limits_{x \to 0} e^{-\frac{1}{x^2}} \dfrac{P_{2n-2}(x)}{x^{3n}} = \lim\limits_{y \to \pm\infty} e^{-y^2} g(y) = 0$. 故 $f(x)$ 的 MacLaurin 級數為 0.

定理 (Abel)**.** 若 $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, $|x| < R$, 且 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n R^n$ 收斂, 則 $\lim\limits_{x \to R-} f(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n R^n$.

例.

- $\ln(1+x) = x - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3} - \dfrac{x^4}{4} + \dfrac{x^5}{5} - \dfrac{x^6}{6} + - \cdots = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^n x^{n+1}}{n+1}$, $|x| < 1$. 因 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{n+1}$ 收斂, $1 - \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{5} - \dfrac{1}{6} + - \cdots = \lim\limits_{x \to 1-} \ln(1+x) = \ln 2$.
- $\tan^{-1} x = x - \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{x^5}{5} - \dfrac{x^7}{7} + \dfrac{x^9}{9} - \dfrac{x^{11}}{11} + - \cdots = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}$, $|x| < 1$. 因 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{2n+1}$ 收斂, $1 - \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{5} - \dfrac{1}{7} + \dfrac{x^9}{9} - \dfrac{x^{11}}{11} + - \cdots = \lim\limits_{x \to 1-} \tan^{-1} x = \tan^{-1} 1 = \dfrac{\pi}{4}$.

例. 1. 若 $f(x) = \tan^{-1} x$, 求 $f^{(99)}(0)$. 2. 若 $f(x) = e^{-x^2}$, 求 $f^{(100)}(0)$.

解.

1. $\tan^{-1} x = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{f^{(n)}(0)\, x^n}{n!}$, $|x| < 1$. 故 $\dfrac{f^{(99)}(0)}{99!} = \dfrac{(-1)^{49}}{2 \cdot 49 + 1} \implies f^{(99)}(0) = -(98!)$.
2. $e^{-x^2} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^n x^{2n}}{n!} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{f^{(n)}(0)\, x^n}{n!}$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$. 故 $\dfrac{f^{(100)}(0)}{100!} = \dfrac{(-1)^{50}}{50!} \implies f^{(100)}(0) = \dfrac{100!}{50!}$.