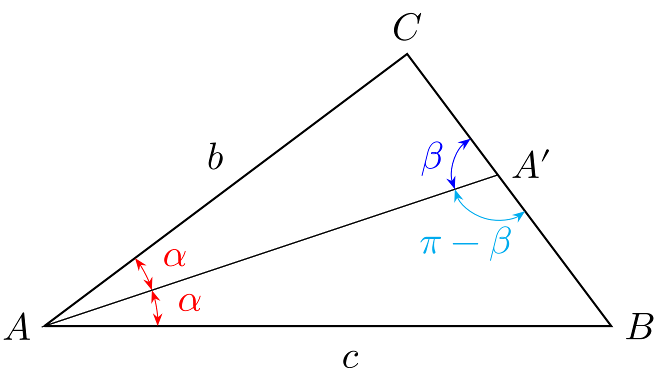
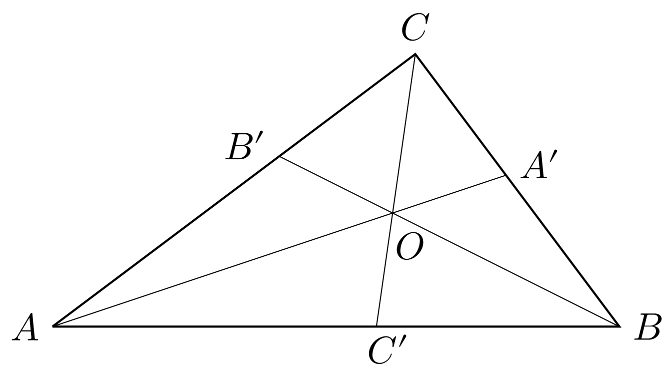
內心座標公式

定理 (內心座標公式)**.** 如圖，ΔABC 中 $\overline{BC}=a$，$\overline{AC}=b$，$\overline{AB}=c$，點 A'、B'、C' 分別位在 $\overline{BC}$、$\overline{AC}$、$\overline{AB}$ 上且 $\overline{AA'}$、$\overline{BB'}$、$\overline{CC'}$ 分別為角 A、B、C 的平分線並相交於 O。若座標 $A=(x_1,y_1)$、$B=(x_2,y_2)$、$C=(x_3,y_3)$，則內心 O 座標為

$$O=\frac{a}{a+b+c}A+\frac{b}{a+b+c}B+\frac{c}{a+b+c}C=\left(\frac{a\,x_1+b\,x_2+c\,x_3}{a+b+c},\ \frac{a\,y_1+b\,y_2+c\,y_3}{a+b+c}\right)$$





證.

- 如上圖左，首先證明若 $\overline{AA'}$ 為角 A 平分線，A' 在 $\overline{BC}$ 上，則

$$\overline{AB}:\overline{AC}=\overline{A'B}:\overline{A'C}$$

  由正弦定理，在 $\Delta AA'B$ 中 $\dfrac{\overline{A'B}}{\sin\alpha}=\dfrac{\overline{AB}}{\sin(\pi-\beta)}=\dfrac{\overline{AB}}{\sin\beta}$，在 $\Delta AA'C$ 中 $\dfrac{\overline{A'C}}{\sin\alpha}=\dfrac{\overline{AC}}{\sin\beta}$；由此二式得 $\overline{AB}:\overline{AC}=\overline{A'B}:\overline{A'C}$。

- 反覆應用上述角平分線定理於上圖右：$\overline{C'A}:\overline{C'B}=b:a$，$\overline{AB}=c$，故 $\overline{C'A}=\dfrac{b\,c}{a+b}$，又 $\overline{OC'}:\overline{OC}=\overline{C'A}:\overline{CA}=\dfrac{b\,c}{a+b}:b=c:(a+b)$。

- 應用共線向量性質：若 A、C'、B 依序共線且 $\overline{C'A}:\overline{C'B}=b:a$，則

$$C'=\frac{a}{a+b}A+\frac{b}{b+c}B$$

  又 C'、O'、C 依序共線且 $\overline{OC'}:\overline{OC}=c:(a+b)$，則

$$\begin{aligned}O&=\frac{a+b}{a+b+c}C'+\frac{c}{a+b+c}C\\&=\frac{a+b}{a+b+c}\left(\frac{a}{a+b}A+\frac{b}{b+c}B\right)+\frac{c}{a+b+c}C\\&=\frac{a}{a+b+c}A+\frac{b}{a+b+c}B+\frac{c}{a+b+c}C\end{aligned}$$