第一章 極限與連續性

1.1 直觀極限: 取雙邊接近值

$\lim_{x\to 2} x = 2$

x	1.9	1.99	1.999	$\circ$	2.001	2.01	2.1
$f(x)$	1.9	1.99	1.999	$\circ$	2.001	2.01	2.1

$\lim_{x\to 2} x^2 = 4$

x	1.9	1.99	1.999	$\circ$	2.001	2.01	2.1
$f(x)$	3.61	3.9601	3.996	$\circ$	4.004	4.040	4.41

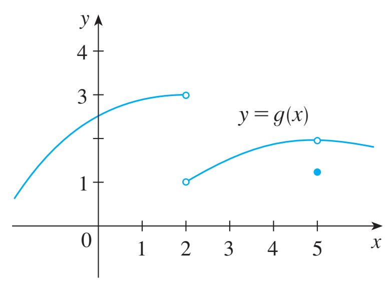
$\lim_{x\to 2} \frac{x-2}{x^2+x-6} = 0.2$

x	1.9	1.99	1.999	$\circ$	2.001	2.01	2.1
$f(x)$	0.20408	0.20040	0.20004	$\circ$	0.19996	0.19960	0.19608

1.2 單側極限, 無限遠極限, 無窮極限

單側極限 (One-Sided Limits)

$$
\begin{aligned}
&\lim_{x\to 2-} g(x) = 3, \qquad &&\lim_{x\to 5-} g(x) = 2\\
&\lim_{x\to 2+} g(x) = 1, \qquad &&\lim_{x\to 5+} g(x) = 2\\
&\lim_{x\to 2} g(x) = \text{DNE}, \qquad &&\lim_{x\to 5} g(x) = 2
\end{aligned}
$$



例. $g(x) = \begin{cases} \sqrt{x-4} & 若 x > 4 \\ 8-2x & 若 x < 4 \end{cases}$, $\lim_{x\to 4} g(x) = 0$.

例. $f(x) = \sqrt{4-x^2}$, $\lim_{x\to(-2)+} f(x) = 0$, $\lim_{x\to 2+} f(x) = \text{DNE}$, $\lim_{x\to 2-} f(x) = 0$.

例.
- $\lim_{x\to 0} |x| = 0$
- $\lim_{x\to 0} \frac{|x|}{x} = \text{DNE}$
- $\lim_{x\to 3+} \lfloor x \rfloor = 3$, $\lim_{x\to 3-} \lfloor x \rfloor = 2$, $\lim_{x\to \pi} \lfloor x \rfloor = 3$.

定理. 若 $F \in \mathbb{R}$, $\lim_{x\to a} f(x) = F \iff \lim_{x\to a-} f(x) = \lim_{x\to a+} f(x) = F$.

無限遠極限 (Limits at Infinity)

例.
- $\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x^\alpha} = 0$, $\alpha > 0$; $\lim_{x\to -\infty} \frac{1}{x^N} = 0$, $\forall\, N \in \mathbb{N}$
- $\lim_{x\to\infty} a^x = \infty$, $\lim_{x\to -\infty} a^x = 0$, $\lim_{x\to 0-} a^{\frac{1}{x}} = 0$, $\forall\, a > 1$.
- $\lim_{x\to\infty} \tan^{-1} x = \frac{\pi}{2}$, $\lim_{x\to -\infty} \tan^{-1} x = -\frac{\pi}{2}$

無窮極限 (Infinite Limits)

例.

- $\displaystyle\lim_{x\to 0+}\frac{1}{x}=\infty$
- $\displaystyle\lim_{x\to 0-}\frac{1}{x}=-\infty$
- $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}=\text{DNE}$
- $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2}=\infty$
- $\displaystyle\lim_{x\to\frac{\pi}{2}-}\tan x=\infty$

1.3 極限運算

性質. 若函數 f 為多項式, 指數, 對數, 三角, 或反三角函數, 則 $\lim_{x\to a} f(x)=f(a)$, $\forall\, a\in\operatorname{dom} f$.

例.

- $\displaystyle\lim_{x\to\pi}\frac{1}{x^2}=\frac{1}{\pi^2}$
- $\displaystyle\lim_{x\to -3}\left(\frac{1}{3}\right)^x=27$
- $\displaystyle\lim_{x\to 1}\tan^{-1}x=\frac{\pi}{4}$
- $\displaystyle\lim_{x\to\pi}x^\pi=\pi^\pi$
- $\displaystyle\lim_{x\to -5}\cos x=\cos(-5)=\cos 5$
- $\displaystyle\lim_{x\to 5}\log_2 x=\log_2 5$

定理 (極限四則運算)**.** 若 $\lim_{x\to a}f(x)=F$, $\lim_{x\to a}g(x)=G$, 則

1. $\displaystyle\lim_{x\to a}c=c$, $\displaystyle\lim_{x\to a}x=a$
2. $\displaystyle\lim_{x\to a}k\,f(x)=k\,F$
3. $\displaystyle\lim_{x\to a}\big(f(x)\pm g(x)\big)=F\pm G$
4. $\displaystyle\lim_{x\to a}\big(f(x)\cdot g(x)\big)=F\cdot G$
5. $\displaystyle\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{F}{G}$, 若 $G\neq 0$
6. $\displaystyle\lim_{x\to a}\big(f(x)\big)^\alpha=F^\alpha$, 若 $\alpha\in\mathbb{Q}\wedge F>0$

當 F, G 存在 (非為無窮) , 此定理敘述對「單側極限」及「無限遠極限」均成立.

例.

- $\displaystyle\lim_{t\to -1}\frac{t-2}{t+3}=\frac{\lim_{t\to -1}t-2}{\lim_{t\to -1}t+3}=\frac{-3}{2}$
- $\displaystyle\lim_{t\to -3}\frac{1-t}{\cos t}=\frac{\lim_{t\to -3}1-t}{\lim_{t\to -3}\cos t}=\frac{4}{\cos 3}$

例.

- $\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{(2+h)^2-4}{2h}=\lim_{h\to 0}\frac{h^2+4h+4-4}{2h}=\lim_{h\to 0}\frac{h^2+4h}{2h}=\lim_{h\to 0}\frac{h+4}{2}=2$
- $\displaystyle\lim_{x\to 4}\frac{x^2-4x}{x^2-16}=\lim_{x\to 4}\frac{x(x-4)}{(x-4)(x+4)}=\lim_{x\to 4}\frac{x}{x+4}=\frac{1}{2}$
- $\displaystyle\lim_{x\to 2}\frac{x-2}{x^2+x-6}=\lim_{x\to 2}\frac{x-2}{(x-2)(x+3)}=\lim_{x\to 2}\frac{1}{x+3}=\frac{1}{5}$

例.

1. $\displaystyle\lim_{x\to -1}\frac{\sqrt{x^2+8}-3}{x+1}$.
2. $\displaystyle\lim_{x\to 3}\frac{\sqrt{x-2}-\sqrt{4-x}}{x-3}$.

解.

1. $$\lim_{x\to -1}\frac{\sqrt{x^2+8}-3}{x+1}=\lim_{x\to -1}\frac{1}{x+1}\frac{(x^2+8)-3^2}{\sqrt{x^2+8}+3}=\lim_{x\to -1}\frac{1}{x+1}\frac{x^2-1}{\sqrt{x^2+8}+3}$$
$$=\lim_{x\to -1}\frac{1}{x+1}\frac{(x+1)(x-1)}{\sqrt{x^2+8}+3}=\lim_{x\to -1}\frac{x-1}{\sqrt{x^2+8}+3}=\frac{-2}{\sqrt{1+8}+3}=-\frac{1}{3}.$$
2. $$\lim_{x\to 3}\frac{\sqrt{x-2}-\sqrt{4-x}}{x-3}=\lim_{x\to 3}\frac{1}{x-3}\frac{(x-2)-(4-x)}{\sqrt{x-2}+\sqrt{4-x}}=\lim_{x\to 3}\frac{1}{x-3}\frac{2x-6}{\sqrt{x-2}+\sqrt{4-x}}$$
$$=\lim_{x\to 3}2\frac{1}{\sqrt{x-2}+\sqrt{4-x}}=\frac{2}{\sqrt{1}+\sqrt{1}}=1.$$

例. $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{5x^2+8x-3}{3x^2+2}=\lim_{x\to\infty}\frac{5+\frac{8}{x}-\frac{3}{x^2}}{3+\frac{2}{x^2}}=\frac{5+0+0}{3+0}=\frac{5}{3}=\lim_{x\to-\infty}\frac{5x^2+8x-3}{3x^2+2}$.

例. 求 $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\big(\sqrt{x^2+5x}-\sqrt{x^2-x}\big)$.

解. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+5x}-\sqrt{x^2-x}\right)=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(x^2+5x)-(x^2-x)}{\sqrt{x^2+5x}+\sqrt{x^2-x}}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{6x}{\sqrt{x^2+5x}+\sqrt{x^2-x}}$
$=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{6x}{\sqrt{x^2(1+\frac{5}{x})}+\sqrt{x^2(1-\frac{1}{x})}}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{6x}{|x|\sqrt{1+\frac{5}{x}}+|x|\sqrt{1-\frac{1}{x}}}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{6x}{x\sqrt{1+\frac{5}{x}}+x\sqrt{1-\frac{1}{x}}}$
$=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{6}{\sqrt{1+\frac{5}{x}}+\sqrt{1-\frac{1}{x}}}=\dfrac{6}{\sqrt{1+0}+\sqrt{1-0}}=3$

例. 求 $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{3x}{\sqrt{4x^2+x}-2x}$.

解.

- $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{3x}{\sqrt{4x^2+x}-2x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{3x}{\sqrt{x^2(4+\frac{1}{x})}-2x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{3x}{|x|\sqrt{4+\frac{1}{x}}-2x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{3x}{-x\sqrt{4+\frac{1}{x}}-2x}=$
  $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{3}{-\sqrt{4+\frac{1}{x}}-2}=-\dfrac{3}{4}$.
- 另解: 變數變換 $y=-x\implies x=-y$: $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{3x}{\sqrt{4x^2+x}-2x}=\lim\limits_{y\to\infty}\dfrac{-3y}{\sqrt{4y^2-y}+2y}$
  $=\lim\limits_{y\to\infty}\dfrac{-3y}{\sqrt{y^2(4-\frac{1}{y})}+2y}=\lim\limits_{y\to\infty}\dfrac{-3y}{|y|\sqrt{4-\frac{1}{y}}+2y}=\lim\limits_{y\to\infty}\dfrac{-3y}{y\sqrt{4-\frac{1}{y}}+2y}=\lim\limits_{y\to\infty}\dfrac{-3}{\sqrt{4-\frac{1}{y}}+2}=-\dfrac{3}{4}$.

定理 (夾擠 (squeeze) 定理; 三明治定理)**.** 若 $g(x)\leqslant f(x)\leqslant h(x)\ \forall\, x\in[a,b]$, $c\in[a,b]$ 且 $\lim\limits_{x\to c}g(x)=\lim\limits_{x\to c}h(x)=L$, 則 $\lim\limits_{x\to c}f(x)=L$.

例. 求 $\lim\limits_{x\to 0}x\sin^2\dfrac{1}{x}$.

解. 若 $x\neq 0$, $0\leqslant\sin^2\dfrac{1}{x}\leqslant 1$, 則 $-|x|\leqslant x\sin^2\dfrac{1}{x}\leqslant|x|$. 又 $\lim\limits_{x\to 0}(-|x|)=\lim\limits_{x\to 0}|x|=0$, 由夾擠定理 $\lim\limits_{x\to 0}x\sin^2\dfrac{1}{x}=0$.

1.4 連續性

定義. 給定 f, $a\in\operatorname{dom}f$.

- 若 $\lim\limits_{x\to a}f(x)$ 存在且 $f(a)=\lim\limits_{x\to a}f(x)$, 則稱 f 在 a *連續*.
- 若 $\lim\limits_{x\to a+}f(x)$ 存在且 $f(a)=\lim\limits_{x\to a+}f(x)$, 則稱 f 在 a *左連續*.
- 若 $\lim\limits_{x\to a-}f(x)$ 存在且 $f(a)=\lim\limits_{x\to a-}f(x)$, 則稱 f 在 a *右連續*.

$f(x)$ 在 a 連續 $\iff\lim\limits_{x\to a}f(x)=f(\lim\limits_{x\to a}x)=f(a)$, 亦即 (極限值) = (函數值).

定義 (端點連續性)**.** 給定 f, $\operatorname{dom}f=[a,b]$.

- 若 f 在 b 左連續, 則稱 f 在 b 連續.
- 若 f 在 a 右連續, 則稱 f 在 a 連續.

定義 (連續函數)**.**

- 若 f 在區間 I 之每一點均連續, 則稱 f 在 I 連續.
- 若 f 在 $\operatorname{dom}f$ 之每一點均連續, 則稱 f 為*連續函數*.

定理 (五則運算仍連續)**.**

- 若 f, g 在 a 連續, 則 $f \pm g$, $f \cdot g$, kf, f^{α}, $\dfrac{f}{g}$ (若 $g(a) \neq 0$) 均在 a 連續.
- 若 f 在 a 連續, 且 g 在 $f(a)$ 連續, 則 $g \circ f$ 在 a 連續.

性質. 多項式, 指數, 對數, 三角, 反三角函數及其五則運算在其定義域內均為連續函數.

例. 若 $f(x) = \begin{cases} x+2 & \text{當 } x < a \\ x^2 & \text{當 } x \geqslant a \end{cases}$ 為連續函數, 求 a.

解. 若 f 為連續函數, 則 f 在 a 連續 $\implies \lim\limits_{x \to a-} f(x) = \lim\limits_{x \to a+} f(x) \implies a + 2 = a^2 \implies a = -1 \vee a = 2$.

例. 若 $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-4}{x-2} & \text{當 } x < 2 \\ ax^2 - bx + 3 & \text{當 } 2 \leqslant x < 3 \\ 2x - a + b & \text{當 } x \geqslant 3 \end{cases}$ 為連續函數, 求 a, b.

解. 若 f 為連續函數, 則 f 在 2, 3 均連續 $\implies \left(\lim\limits_{x \to 2-} f(x) = \lim\limits_{x \to 2+} f(x)\right) \wedge \left(\lim\limits_{x \to 3-} f(x) = \lim\limits_{x \to 3+} f(x)\right) \implies (4 = 4a - 2b + 3) \wedge (9a - 3b + 3 = 6 - a + b) \implies a = \dfrac{1}{2},\ b = \dfrac{1}{2}$.

定理 (Bolzano 定理; 勘根定理)**.** 若 f 在 $[a, b]$ 連續且 $f(a) \cdot f(b) < 0$, 則存在 $c \in (a, b)$ 使得 $f(c) = 0$.

定理 (中間值定理)**.** 若 f 在 $[a, b]$ 連續, 則對任意介於 $f(a)$ 與 $f(b)$ 之間的數 d, 存在 $c \in [a, b]$ 使得 $f(c) = d$.

註.

- 中間值定理不適用於不連續函數: 取 $f(x) = \begin{cases} x+2 & -1 < x \leqslant 1 \\ x & -2 \leqslant x \leqslant -1 \end{cases}$, 則 $f(-2) < 0$, $f(1) > 0$, 但 $f(x) = 0$ 無解.
- $f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$, 則存在無限多 $x \in [-\frac{2}{3\pi}, \frac{2}{\pi}]$ 使 $f(x) = 0$.

例. 證明 $4x^3 - 6x^2 + 3x - 2 = 0$ 在 1, 2 間有實根.

解. 令 $f(x) = 4x^3 - 6x^2 + 3x - 2$. f 為連續函數且 $f(1) < 0$, $f(2) > 0$, 由 Bolzano 定理知存在 $c \in (1, 2)$ 使得 $f(c) = 0$, 亦即 $4x^3 - 6x^2 + 3x - 2 = 0$ 在 1, 2 間有實根.

例. 證明 $\sqrt{\cos \pi x} = \sin 2\pi x + \frac{1}{2}$ 至少有一實根.

解. 令 $f(x) = \sqrt{\cos \pi x} - (\sin 2\pi x + \frac{1}{2})$. f 在 $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ 連續, 顯然在 $[0, \frac{1}{2}]$ 連續且 $f(0) = \frac{1}{2} > 0$, $f(\frac{1}{2}) = -\frac{1}{2} < 0$, 由 Bolzano 定理知存在 $c \in (0, \frac{1}{2})$ 使得 $f(c) = 0$, 亦即 $\sqrt{\cos \pi x} = \sin 2\pi x + \frac{1}{2}$ 在 0, $\frac{1}{2}$ 間有一實根.

例. 證明: 奇數次實係數多項式方程式必有實根.

解. 令奇數次實係數多項式 $f(x)$ 為 $f(x) = a_{2n+1}x^{2n+1} + a_{2n}x^{2n} + \cdots + a_1 x + a_0$, $a_k \in \mathbb{R}$, $k = 0, 1, 2, \ldots, 2n+1$; 不失一般性令 $a_{2n+1} > 0$. 由 $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \infty$ 與 f 之連續性, $\exists \alpha\, (f(\alpha) > 0)$. 又由 $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$ 與 f 之連續性, $\exists \beta\, (f(\beta) < 0)$. 故由 Bolzano 定理知存在 c 介於 α, β 之間使得 $f(c) = 0$.

例 (不動點定理)**.** 令 $f : [0, 1] \to [0, 1]$ 在 $[0, 1]$ 連續. 證明: 存在 $c \in [0, 1]$ 使得 $f(c) = c$.

解. 令 $g(x) = f(x) - x$. 則 g 在 $[0, 1]$ 連續, 且 $g(0) = f(0) \geqslant 0$, $g(1) = f(1) - 1 \leqslant 0$, 0 介於 $g(0)$, $g(1)$ 之間. 故由中間值定理, 存在 $c \in [0, 1]$ 使得 $g(c) = 0 \implies f(c) - c = 0 \implies f(c) = c$.