反三角函數

定義. 在以下定義域上之三角函數為嵌射:

$$\sin x : [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \to [-1, 1] \qquad \csc x : (0, \frac{\pi}{2}] \cup (\pi, \frac{3\pi}{2}] \to (-\infty, -1] \cup [1, \infty)$$

$$\cos x : [0, \pi] \to [-1, 1] \qquad \sec x : [0, \frac{\pi}{2}) \cup [\pi, \frac{3\pi}{2}) \to (-\infty, -1] \cup [1, \infty)$$

$$\tan x : (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \to (-\infty, \infty) \qquad \cot x : (0, \pi) \to (-\infty, \infty)$$

故存在反三角函數:

$$\sin^{-1} x : [-1, 1] \to [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \qquad \csc^{-1} x : (-\infty, -1] \cup [1, \infty) \to (0, \frac{\pi}{2}] \cup (\pi, \frac{3\pi}{2}]$$

$$\cos^{-1} x : [-1, 1] \to [0, \pi] \qquad \sec^{-1} x : (-\infty, -1] \cup [1, \infty) \to [0, \frac{\pi}{2}) \cup [\pi, \frac{3\pi}{2})$$

$$\tan^{-1} x : (-\infty, \infty) \to (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \qquad \cot x : (-\infty, \infty) \to (0, \pi)$$

性質.

- 當 $-\frac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}$，$\sin^{-1}(\sin x) = x$；當 $0 \leqslant x \leqslant \pi$，$\cos^{-1}(\cos x) = x$。
- 當 $-1 \leqslant x \leqslant 1$，$\sin(\sin^{-1} x) = x$，$\cos(\cos^{-1} x) = x$。
- $\sin^{-1}(-x) = -\sin^{-1} x$；$\cos^{-1}(-x) = \pi - \cos^{-1} x$。

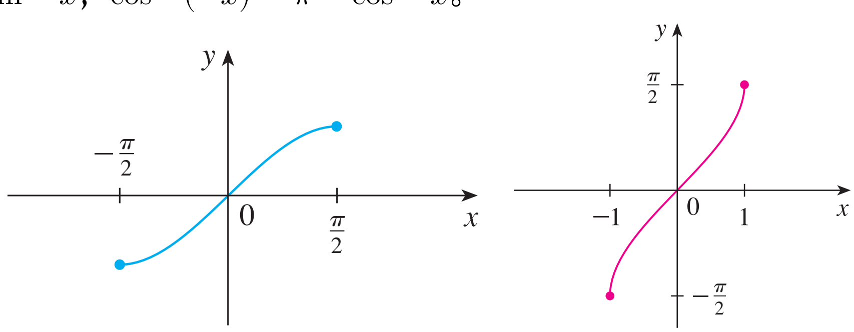

圖 1: $y = \sin x$，$y = \sin^{-1} x$

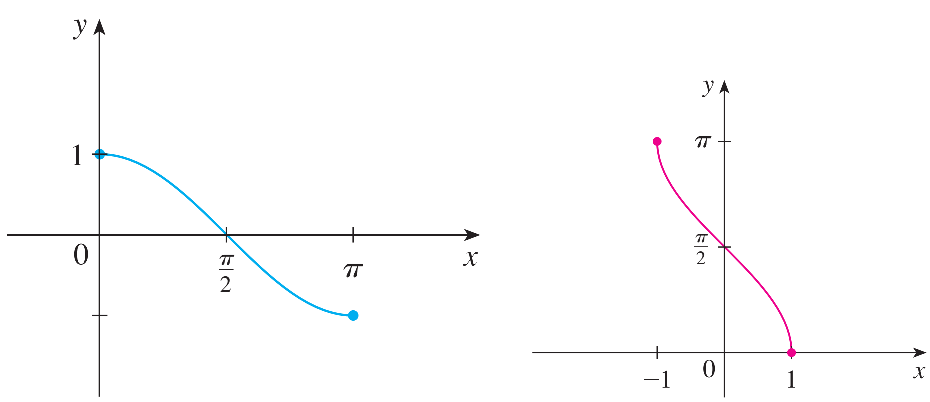

圖 2: $y = \cos x$，$y = \cos^{-1} x$

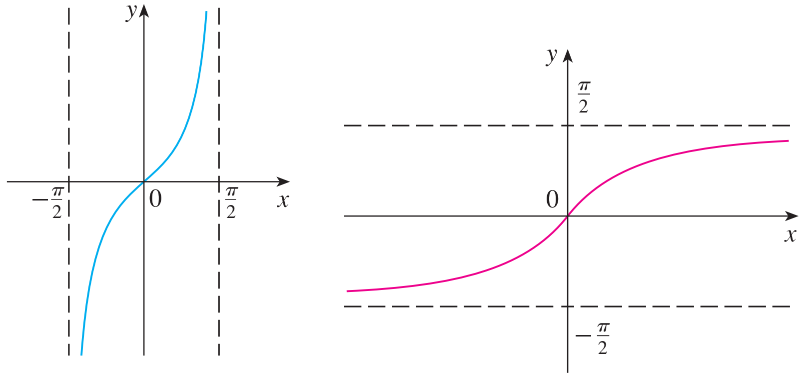

圖 3: $y=\tan x$, $y=\tan^{-1}x$

例.

$$\sin^{-1}\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\pi}{3} \qquad \cos^{-1}\frac{-1}{2}=\frac{2\pi}{3}\quad ([0,\pi]\text{ 對稱})$$

$$\tan^{-1}1=\frac{\pi}{4} \qquad \cos\big(\sin^{-1}\frac{3}{5}\big)=\frac{4}{5}$$

例. 若 $\alpha=\sin^{-1}\dfrac{2}{3}$，求 $\cos\alpha$，$\tan\alpha$，$\cot\alpha$，$\sec\alpha$，$\csc\alpha$。

解. $\cos\alpha=\dfrac{\sqrt{5}}{3}$，$\tan\alpha=\dfrac{2}{\sqrt{5}}$，$\cot\alpha=\dfrac{\sqrt{5}}{2}$，$\sec\alpha=\dfrac{3}{\sqrt{5}}$，$\csc\alpha=\dfrac{3}{2}$。

例. 將 $\sin(\cos^{-1}x)$ 與 $\tan(\cos^{-1}x)$ 化簡為 x 的 (不含三角函數之) 表示式，其中 $-1\leqslant x\leqslant 1$。

解. 令 $u=\cos^{-1}x$，則 $0\leqslant u\leqslant\pi$，$\cos u=x$，$\sin u=+\sqrt{1-x^2}$，$\tan u=\dfrac{\sqrt{1-x^2}}{x}$。

例. $\cos(\sin^{-1}x)=\sqrt{1-x^2}$, $\quad\sin(\tan^{-1}x)=\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$, $\quad\sin(2\tan^{-1}x)=\dfrac{2x}{1+x^2}$。

例. 將 $\sin(\cos^{-1}x+\tan^{-1}y)$ 化簡為 x，y 的 (不含三角函數之) 表示式，其中 $-1\leqslant x\leqslant 1$，$y\in\mathbb{R}$。

解. 令 $u=\cos^{-1}x$，$v=\tan^{-1}y$，則 $\cos u=x$，$\tan v=y$，由此 $\sin u=\sqrt{1-x^2}$，$\cos v=\dfrac{1}{\sqrt{1+y^2}}$，$\sin v=\dfrac{y}{\sqrt{1+y^2}}$；原式為 $\sin(\cos^{-1}x+\tan^{-1}y)=\sin(u+v)=\sin u\cos v+\cos u\sin v=\sqrt{1-x^2}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{1+y^2}}+x\cdot\dfrac{y}{\sqrt{1+y^2}}$。

例. 證明 $\cos^{-1}(1-2x^2)=2\sin^{-1}x$，$0\leqslant x\leqslant 1$。

解. 令 $u=\sin^{-1}x$，則 $\cos^{-1}(1-2x^2)=\cos^{-1}(1-2\sin^2u)=\cos^{-1}(\cos 2u)=2u=2\sin^{-1}x$。

例. 解 $2\sin^{-1}x+\cos^{-1}x=\pi$。

解. 令 $\sin^{-1}x=u$，$\cos^{-1}x=v$，則 $\sin u=\cos v=x$，$\cos u=\sin v=\sqrt{1-x^2}$。方程式兩邊取 cos $\Longrightarrow$ $\cos(2u+v)=-1$ $\Longrightarrow$ $\cos 2u\cos v-\sin 2u\sin v=(1-2\sin^2u)\cos v-2\sin u\cos u\sin v=-1$ $\Longrightarrow$ $(1-2x^2)x-2x(1-x^2)=-1\Longrightarrow x=1$。