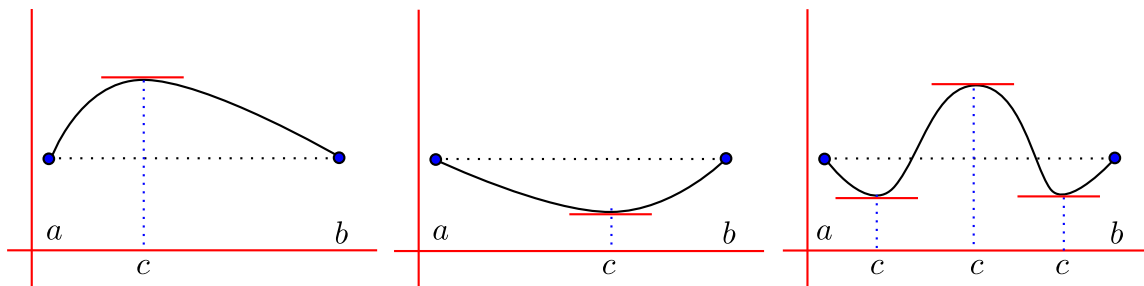


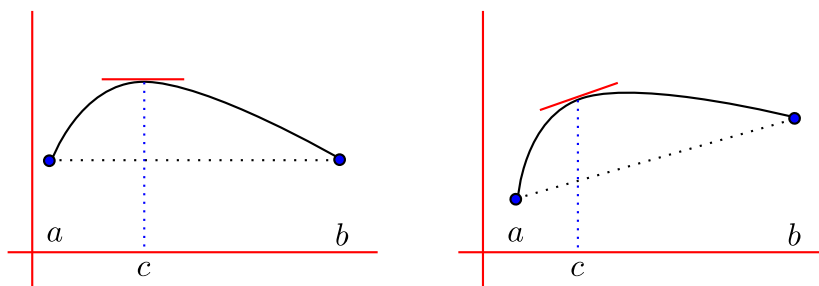
# 第三章 微分應用

## 3.1 均値定理

**定理 (Rolle).** 若  $f(x)$  在  $[a, b]$  連續, 在  $(a, b)$  可微, 且  $f(a) = f(b)$ , 則存在  $c \in (a, b)$  使  $f'(c) = 0$ .



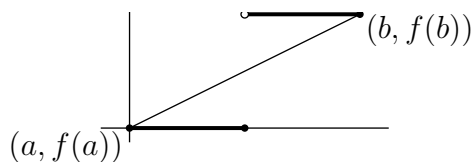
**定理 (均値定理 (mean-value theorem, MVT)).** 若  $f(x)$  在  $[a, b]$  連續, 在  $(a, b)$  可微, 則存在  $c \in (a, b)$  使  $f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$ .



**註.** 不滿足『 $f(x)$  在  $[a, b]$  連續, 在  $(a, b)$  可微』時的反例.

- 令  $a = 0, b = 2$ , 且

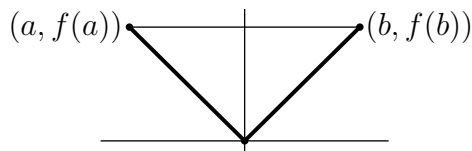
$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{若 } x \leq 1 \\ 1 & \text{若 } x > 1 \end{cases}$$



當  $x \neq 1$  時  $f'(x) = 0$ , 但連接  $(a, f(a)) = (0, 0)$  與  $(b, f(b)) = (2, 1)$  之割線斜率為  $\frac{1}{2}$ .

- 令  $a = -1, b = 1, f(x) = |x|$ .

$$f'(x) = \begin{cases} -1 & \text{若 } x < 0 \\ \text{DNE} & \text{若 } x = 0 \\ 1 & \text{若 } x > 0 \end{cases}$$



當  $x \neq 0$  時  $f'(x) = \pm 1$ , 但連接  $(a, f(a)) = (-1, 1)$  與  $(b, f(b)) = (1, 1)$  之割線斜率為 0.

**性質.**  $f(x)$  在  $[a, b]$  連續, 在  $(a, b)$  可微. 若  $\forall x \in (a, b)$

- $f'(x) > 0 \implies f$  在  $[a, b]$  嚴格遞增.
- $f'(x) < 0 \implies f$  在  $[a, b]$  嚴格遞減.
- $f'(x) \geq 0 \implies f$  在  $[a, b]$  遞增.
- $f'(x) \leq 0 \implies f$  在  $[a, b]$  遞減.

**證.** 令  $x, y \in [a, b], x < y$ . 由 MVT  $\exists c \in (x, y) \subseteq (a, b)$  使  $f(y) - f(x) = f'(c)(y - x)$ . 又  $y - x > 0$ ,  $f(y) - f(x)$  與  $f'(c)$  同號.

**結論.** 若  $f(x), g(x)$  在  $[a, b]$  連續, 在  $(a, b)$  可微, 且  $f'(x) = g'(x) \forall x \in (a, b)$ , 則存在  $C \in \mathbb{R}$  使  $f(x) = g(x) + C, \forall x \in [a, b]$ .

**例.** 證明  $2x - 1 = \sin x$  僅有唯一解.

**解.** 令  $f(x) = 2x - 1 - \sin x$ , 則  $\forall x (f'(x) = 2 - \cos x > 0)$ ,  $f(0) = -1 < 0$ ,  $f(1) = 1 - \sin 1 > 0$ , 故由 Bolzano 定理, 存在  $c \in (0, 1)$  使  $f(c) = 0$ . 若存在另一  $c_0 \neq c$  使  $f(c_0) = 0$ , 則由 Rolle 定理, 存在  $c_1$  介於  $c, c_0$  間使  $f'(c_1) = 0$ , 與  $\forall x (f'(x) = 2 - \cos x > 0)$  矛盾; 得證.

**例.** 證明  $x^3 + e^x = 0$  僅有唯一解.

**解.** 令  $f(x) = x^3 + e^x$ , 則  $\forall x (f'(x) = 3x^2 + e^x > 0)$ ,  $f(-1) = -1 + e^{-1} < 0$ ,  $f(0) = 1 > 0$ , 故由 Bolzano 定理, 存在  $c \in (-1, 0)$  使  $f(c) = 0$ . 若存在另一  $c_0 \neq c$  使  $f(c_0) = 0$ , 則由 Rolle 定理, 存在  $c_1$  介於  $c, c_0$  間使  $f'(c_1) = 0$ , 與  $\forall x (f'(x) = 3x^2 + e^x > 0)$  矛盾; 得證.

**例.** 證明  $\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) > \frac{1}{1+x}, \forall x > 0$ .

**解.** 考慮  $\ln t$  在  $[x, x+1], x > 0$ . 由 MVT  $\exists c \in (x, x+1) \ln(x+1) - \ln x = \frac{1}{c} > \frac{1}{x+1}$ .

**例.** 證明  $\tan x > x, \forall x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ .

**解.**  $\forall x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ ,  $\tan$  在  $[0, x]$  連續, 在  $(0, x)$  可微, 故由 MVT  $\exists c \in (0, x) \tan x - \tan 0 = \sec^2 c \cdot x > x$ .

**例.** 證明  $\frac{2}{\pi} < \frac{\sin x}{x} < 1, \forall x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ .

**解.** 令  $f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x} & \text{若 } x \neq 0 \\ 1 & \text{若 } x = 0 \end{cases}$ , 則  $f$  為連續, 且  $\forall x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right) f'(x) = \frac{x \cos x - \sin x}{x^2} = \frac{\cos x}{x^2}(x - \tan x) < 0$   
 $\Rightarrow f$  在  $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$  為嚴格遞減函數  $\Rightarrow \frac{2}{\pi} = f\left(\frac{\pi}{2}\right) < f(x) = \frac{\sin x}{x} < f(0) = 1$

**例.** 證明  $\sqrt{1+x} < 1 + \frac{1}{2}x, \forall x > 0$ .

**解.** 考慮  $\sqrt{1+t}$  在  $[0, x], x > 0$ . 由 MVT  $\exists c \in (0, x) \sqrt{1+x} - \sqrt{1} = \frac{1}{2\sqrt{1+c}}x < \frac{1}{2}x \Rightarrow \sqrt{1+x} < 1 + \frac{1}{2}x$ .

**例.** 證明  $\sin^{-1} x + \cos^{-1} x = \frac{\pi}{2}, \forall x \in [-1, 1]$ .

**解.** 令  $f(x) = \sin^{-1} x + \cos^{-1} x. \forall x \in (-1, 1), f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} = 0 \Rightarrow f(x)$  為常數  $\Rightarrow f(x) = f(0) = \frac{\pi}{2}$ ; 由  $f(x)$  之連續性或代入  $x = \pm 1$  均可得  $f(\pm 1) = \frac{\pi}{2}$ .

**例.** 證明  $2\sin^{-1} x = \cos^{-1}(1 - 2x^2), \forall x \in [0, 1]$ .

**解.** 令  $f(x) = 2\sin^{-1} x - \cos^{-1}(1 - 2x^2). \forall x \in (0, 1), f'(x) = \frac{2}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{4x}{\sqrt{1-(1-2x^2)^2}} = \frac{2}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{4x}{\sqrt{(2-2x^2)2x^2}} = \frac{2}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{4x}{2x\sqrt{1-x^2}} = 0 \Rightarrow f(x)$  為常數  $\Rightarrow f(x) = f\left(\frac{1}{2}\right) = 2 \cdot \frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{3} = 0$ ; 由  $f(x)$  之連續性或代入  $x = 0, 1$  均可得  $f(0) = 0 = f(1)$ .

**例.** 證明  $\sin^{-1} \frac{x-1}{x+1} = 2 \tan^{-1} \sqrt{x} - \frac{\pi}{2}, \forall x \geq 0$ .

**解.** 令  $f(x) = \sin^{-1} \frac{x-1}{x+1} - 2 \tan^{-1} \sqrt{x} + \frac{\pi}{2}. \forall x > 0, f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^2}} \cdot \frac{(x+1) - (x-1)}{(x+1)^2} - 2 \frac{1}{(\sqrt{x})^2 + 1} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{(x+1)^2 - (x-1)^2}{(x+1)^2}}} \cdot \frac{2}{(x+1)^2} - \frac{1}{(x+1)\sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{x}\sqrt{(x+1)^2}} - \frac{1}{(x+1)\sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{x}|x+1|} - \frac{1}{(x+1)\sqrt{x}} = 0$   
 $\Rightarrow f(x)$  為常數  $\Rightarrow f(x) = f(1) = -2 \cdot \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2} = 0$ ; 由  $f(x)$  之連續性或代入  $x = 0$  均可得  $f(0) = 0$ .

## 3.2 L'Hôpital 法則

定理 (L'Hôpital 法則 (LHR)). 若  $f$  與  $g$  為實可微函數, 且在  $(a, b)$  上  $g'(x) \neq 0$  ( $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$ ). 假設

$$\lim_{x \rightarrow a+} f(x) = \lim_{x \rightarrow a+} g(x) = 0 \quad \left( \frac{0}{0} \text{ 型} \right) \quad \text{或} \quad \lim_{x \rightarrow a+} g(x) = \infty \quad \left( \frac{\infty}{\infty} \text{ 型} \right)$$

若  $\lim_{x \rightarrow a+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L \in \overline{\mathbb{R}}$ , 則  $\lim_{x \rightarrow a+} \frac{f(x)}{g(x)} = L$ .

不定型	$\frac{0}{0}$	$\frac{\infty}{\infty}$	$0 \cdot \infty$	$\infty - \infty$	$0^0$	$\infty^0$	$1^\infty$
範例	$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{1 - \sin x}{1 + \cos 2x}$	$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{e^x}$	$\lim_{x \rightarrow 0+} x \ln \frac{1}{x}$	$\lim_{x \rightarrow 1+} \left( \frac{x}{x-1} - \frac{1}{\ln x} \right)$	$\lim_{x \rightarrow 0+} x^x$	$\lim_{x \rightarrow \infty} x^{\frac{1}{x}}$	$\lim_{x \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{a}{x} \right)^{bx}$

例  $\left( \frac{0}{0} \right)$ . 求  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{1 - \sin x}{1 + \cos 2x}$ .

解.  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{1 - \sin x}{1 + \cos 2x} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{-\cos x}{-2 \sin 2x} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{-1}{-4 \sin x} = \frac{1}{4}$ .

例  $\left( \frac{\infty}{\infty} \right)$ . 求  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{e^x}$ .

解.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{e^x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x}{e^x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2}{e^x} = 0$ .

例  $(0 \cdot \infty)$ . 求  $\lim_{x \rightarrow 0+} x \ln \frac{1}{x}$ .

解.  $\lim_{x \rightarrow 0+} x \ln \frac{1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{\ln \frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{-\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0+} x = 0$ .

例  $(\infty - \infty)$ . 求  $\lim_{x \rightarrow 1+} \left( \frac{x}{x-1} - \frac{1}{\ln x} \right)$ .

解.  $\lim_{x \rightarrow 1+} \left( \frac{x}{x-1} - \frac{1}{\ln x} \right) = \lim_{x \rightarrow 1+} \frac{x \ln x - (x-1)}{(x-1) \ln x} = \lim_{x \rightarrow 1+} \frac{1 + \ln x - 1}{(x-1)^{\frac{1}{x}} + \ln x} = \lim_{x \rightarrow 1+} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x}} = \frac{1}{2}$ .

例  $(0^0)$ . 求  $\lim_{x \rightarrow 0+} x^x$ .

解. 求  $\lim_{x \rightarrow 0+} x^x = \lim_{x \rightarrow 0+} \exp\{x \ln x\} = \exp\left\{ \lim_{x \rightarrow 0+} x \ln x \right\} = \exp\left\{ -\lim_{x \rightarrow 0+} x \ln \frac{1}{x} \right\} = e^0 = 1$ .

例  $(\infty^0)$ . 求  $\lim_{x \rightarrow \infty} x^{\frac{1}{x}}$ .

解.  $\lim_{x \rightarrow \infty} x^{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \exp\left\{ \ln x^{\frac{1}{x}} \right\} = \lim_{x \rightarrow \infty} \exp\left\{ \frac{1}{x} \ln x \right\} = \exp\left\{ \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{x} \right\} = \exp\left\{ \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{x}}{1} \right\} = e^0 = 1$ .

例  $(1^\infty)$ . 求  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{a}{x} \right)^{bx}$ ,  $a, b \in \mathbb{R}$ .

解.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{a}{x}\right)^{bx} = \lim_{x \rightarrow \infty} \exp \left\{ \ln \left(1 + \frac{a}{x}\right)^{bx} \right\} = \lim_{x \rightarrow \infty} \exp \left\{ bx \ln \left(1 + \frac{a}{x}\right) \right\} = \exp \left\{ \lim_{x \rightarrow \infty} bx \ln \left(1 + \frac{a}{x}\right) \right\} =$   
 $\exp \left\{ b \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(1 + \frac{a}{x})}{\frac{1}{x}} \right\} = \exp \left\{ b \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{1+\frac{a}{x}} \cdot \frac{-a}{x^2}}{\frac{-1}{x^2}} \right\} = \exp \left\{ b \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a}{1 + \frac{a}{x}} \right\} = e^{ba}.$

例 (循環形). 求  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$ .

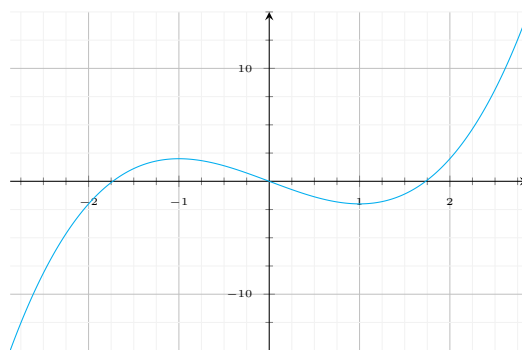
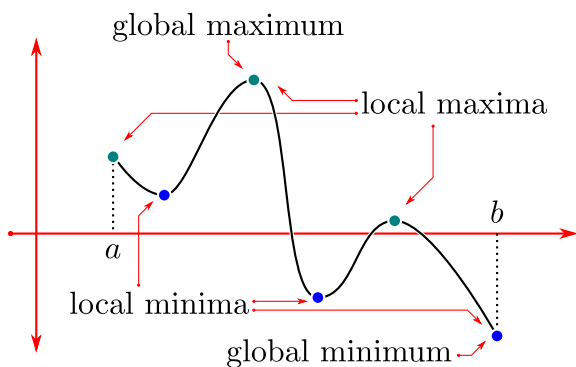
解.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$  為  $\frac{\infty}{\infty}$  型, 理應可使用 LHR, 但  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}} = \dots$ , 無限循環;  
 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x(1 + e^{-2x})}{e^x(1 - e^{-2x})} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 + e^{-2x}}{1 - e^{-2x}} = 1.$

例 (LHR 與 DNE). 若  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$ ,  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$  與  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \text{DNE}$ ,  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$  仍可能存在: 取  $f(x) = x^2 \sin \frac{1}{x}$ ,  $g(x) = x$  與  $a = 0$ , 則  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$  且  $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 0$ ,  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}\right) = \text{DNE}$ , 但  
 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \sin \frac{1}{x}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} x \sin \frac{1}{x} = 0.$

### 3.3 極值問題

定義. 給定  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $B(x, h) \equiv \{y \mid |y - x| < h\}$ .

- $f$  在  $x_M \in I$  有最大值 (global maximum)  $f(x_M)$ :  $f(x_M) \geq f(x)$ ,  $\forall x \in I$ .
- $f$  在  $x_m \in I$  有最小值 (global minimum)  $f(x_m)$ :  $f(x_m) \leq f(x)$ ,  $\forall x \in I$ .
- $f$  在  $x_0 \in I$  有極大值 (local maximum)  $f(x_0)$ :  $\exists h_0 > 0$  使  $f(x_0) \geq f(x)$ ,  $\forall x \in B(x_0, h_0) \cap I$ .
- $f$  在  $x_1 \in I$  有極小值 (local minimum)  $f(x_1)$ :  $\exists h_1 > 0$  使  $f(x_1) \leq f(x)$ ,  $\forall x \in B(x_1, h_1) \cap I$ .



例.

- $f(x) = \sin x$  在  $I = \mathbb{R}$  有最大值 1, 最小值 -1.
- $f(x) = \frac{1}{x}$  在  $I = \mathbb{R}$  沒有最大值, 最小值.
- $f(x) = x$  在  $I = (0, 1)$  沒有最大值, 最小值.
- $f(x) = x$  在  $I = [0, 1]$  有最大值 1, 最小值 0.
- 若  $I = [-3, 3]$ ,  $f(x) = x^3 - 3x$  在  $x = 3$  有最大值 18, 在  $x = -3$  有最小值 -18, 在  $x = -1$  有極大值 2, 在  $x = 1$  有極小值 -2.

**定理.** 若函數在定義域為有限閉區間, 或有限閉區間的有限聯集連續, 則函數在定義域上有最大值及最小值.

**定理.** 若  $f(x)$  在  $(a, b)$  連續, 且  $\lim_{x \rightarrow a+} f(x) = L$ ,  $\lim_{x \rightarrow b-} f(x) = M$ .

1. 若  $\exists u \in (a, b)$  使  $f(u) > L$  且  $f(u) > M$ , 則  $f$  在  $(a, b)$  有最大值.
2. 若  $\exists u \in (a, b)$  使  $f(u) < L$  且  $f(u) < M$ , 則  $f$  在  $(a, b)$  有最小值.

$a$  可為  $-\infty$ ,  $b$  可為  $\infty$ ,  $L, M$  可為  $\pm\infty$ .

**證.**

1. • 由  $\lim_{x \rightarrow a+} f(x) = L$ , 給定  $\varepsilon > 0$ ,  $\exists \delta_1 > 0$  使得當  $a < x < a + \delta_1$ ,  $f(x) < L + \varepsilon$ .
- 取  $\varepsilon = f(u) - L$ , 則

$$\exists x_1 \in (a, u) \text{ 使得當 } a < x < x_1, f(x) < L + (f(u) - L) = f(u). \quad (1)$$

- 由  $\lim_{x \rightarrow b-} f(x) = M$ , 給定  $\varepsilon > 0$ ,  $\exists \delta_2 > 0$  使得當  $b - \delta_2 < x < b$ ,  $f(x) < M + \varepsilon$ .
- 取  $\varepsilon = f(u) - M$ , 則

$$\exists x_2 \in (u, b) \text{ 使得當 } x_2 < x < b, f(x) < M + (f(u) - M) = f(u). \quad (2)$$

- 因  $f$  在  $[x_1, x_2]$  連續,  $f$  在  $w \in [x_1, x_2]$  有最大值. 但  $u \in [x_1, x_2] \implies f(w) \geq f(u)$ ; 由 (1), (2),  $f$  在  $w \in (a, b)$  有最大值.

2. • 由  $\lim_{x \rightarrow a+} f(x) = L$ , 給定  $\varepsilon > 0$ ,  $\exists \delta_1 > 0$  使得當  $a < x < a + \delta_1$ ,  $f(x) > L - \varepsilon$ .
- 取  $\varepsilon = L - f(u)$ , 則

$$\exists x_1 \in (a, u) \text{ 使得當 } a < x < x_1, f(x) > L - (L - f(u)) = f(u). \quad (3)$$

- 由  $\lim_{x \rightarrow b-} f(x) = M$ , 給定  $\varepsilon > 0$ ,  $\exists \delta_2 > 0$  使得當  $b - \delta_2 < x < b$ ,  $f(x) > M - \varepsilon$ .
- 取  $\varepsilon = M - f(u)$ , 則

$$\exists x_2 \in (u, b) \text{ 使得當 } x_2 < x < b, f(x) > M - (M - f(u)) = f(u). \quad (4)$$

- 因  $f$  在  $[x_1, x_2]$  連續,  $f$  在  $w \in [x_1, x_2]$  有最小值. 但  $u \in [x_1, x_2] \implies f(w) \leq f(u)$ ; 由 (3), (4),  $f$  在  $w \in (a, b)$  有最小值.

**定理.** 若  $f$  在  $c \in \text{dom } f$  有極值, 且  $f'(c)$  存在, 則  $f'(c) = 0$ .

**證.**

- 若  $f$  在  $c$  有極大值, 則  $\exists h_0 > 0$  使  $f(c) \geq f(x)$ ,  $\forall x \in B(c, h_0) \cap \text{dom } f$ .

$$\text{— 取 } x \in B(c, h_0) \cap \text{dom } f \text{ 且 } x < c, \text{ 則 } \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \geq 0 \implies f'(c) = \lim_{x \rightarrow c-} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \geq 0$$

$$\text{— 取 } x \in B(c, h_0) \cap \text{dom } f \text{ 且 } x > c, \text{ 則 } \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \leq 0 \implies f'(c) = \lim_{x \rightarrow c+} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \leq 0$$

故  $f'(c) = 0$ .

- 若  $f$  在  $c$  有極小值, 則  $\exists h_1 > 0$  使  $f(c) \leq f(x)$ ,  $\forall x \in B(c, h_1) \cap \text{dom } f$ .

$$\text{— 取 } x \in B(c, h_1) \cap \text{dom } f \text{ 且 } x < c, \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \leq 0 \implies f'(c) = \lim_{x \rightarrow c-} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \leq 0$$

$$\text{— 取 } x \in B(c, h_1) \cap \text{dom } f \text{ 且 } x > c, \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \geq 0 \implies f'(c) = \lim_{x \rightarrow c+} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \geq 0$$

故  $f'(c) = 0$ .

**結論.** 設  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  在  $x_0 \in I$  有極值, 則  $x_0$  為以下三情形之一:

- 臨界點 (critical point) :  $f'(x_0) = 0$ .
- $I$  的邊界點 (boundary).
- 奇異點 (singular point) :  $f$  在  $x_0$  不可微.

例. 求  $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 2$  在  $[-2, 2]$  的最大值與最小值.

解.

- $f$  在有限閉區間  $[-2, 2]$  連續, 故在  $[-2, 2]$  有最大值, 最小值.
  - $f'(x) = 3x^2 - 6x - 9 = 3(x+1)(x-3)$ , 在  $[-2, 2]$  之臨界點為  $-1$ :  $f(-1) = 7$ .
  - $f$  在  $[-2, 2]$  可微, 故無奇異點.
  - $[-2, 2]$  的邊界點為  $-2$  與  $2$ ;  $f(-2) = 0$ ,  $f(2) = -20$ .
- 故最大值:  $f(-1) = 7$ , 最小值:  $f(2) = -20$ .

例. 證明  $f(x) = x + \frac{4}{x}$  在  $(0, \infty)$  有最小值, 並求其值.

解.

- 由  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \infty$ ,  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$ ,  $f(1) = 5 < \infty$ ,  $f$  在  $(0, \infty)$  有最小值.
- $f'(x) = 1 - \frac{4}{x^2} = \frac{(x+2)(x-2)}{x^2}$ , 臨界點為  $2$ :  $f(2) = 4$ .
- $f$  在  $(0, \infty)$  可微, 無奇異點.
- $(0, \infty)$  無邊界點.

故  $f$  在  $(0, \infty)$  之最小值為  $f(2) = 4$ .

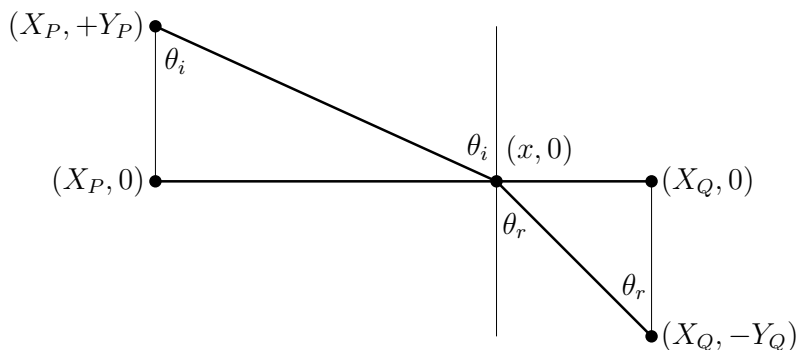
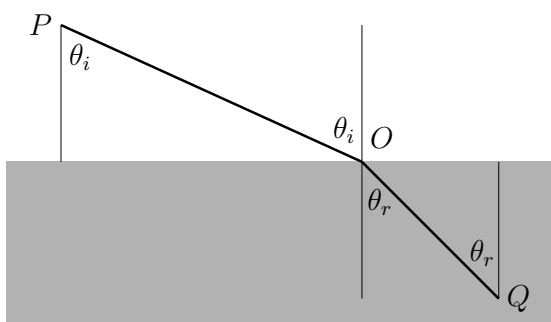
例. 求點  $(2, 0)$  到  $y^2 = x^2 + 1$  之最短距離.

解.

- 最小化距離平方  $\equiv$  最小化距離.
- 令  $\ell$  為  $(2, 0)$  至  $y^2 = x^2 + 1$  之距離, 則距離平方  $\ell^2 = (x-2)^2 + y^2 = (x-2)^2 + (x^2 + 1) \equiv f(x)$ .
- 由  $f(\pm\infty) = \infty$ ,  $f(0) = 5 < \infty$ ,  $f(x)$  在  $(-\infty, \infty)$  有最小值.
- $f'(x) = 2(x-2) + 2x = 4(x-1)$ , 臨界點為  $1$ ;  $f(1) = (1-2)^2 + (1+1) = 3$ .
- $f$  在  $(-\infty, \infty)$  可微, 無奇異點.
- $(-\infty, \infty)$  無邊界點.

故最短距離平方為  $3$ , 最短距離為  $\sqrt{3}$ .

例. Fermat 原理: 光的行進走需時最短路徑. 如下圖, 試由 Fermat 原理推導 Snell 法則:  $\frac{\sin \theta_i}{\sin \theta_r} = \frac{c_a}{c_w}$ , 其中  $c_a, c_w$  分別為光在空氣與在水中之速度.

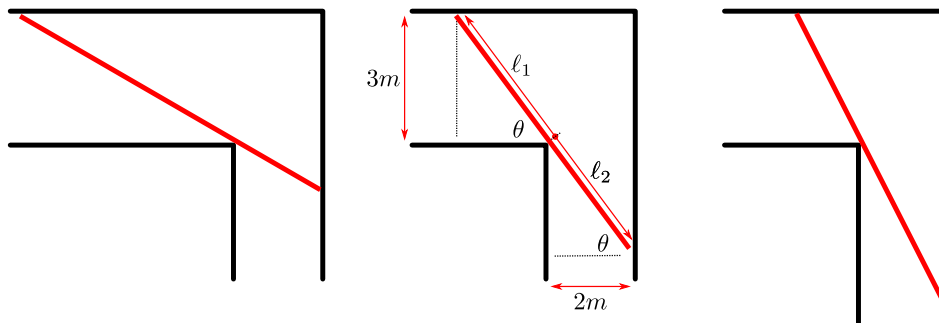


解.

- 令光從點  $P$  至  $Q$  需時為  $T$ , 則  $T(x) = \frac{1}{c_a} \sqrt{(X_P - x)^2 + Y_P^2} + \frac{1}{c_w} \sqrt{(X_Q - x)^2 + Y_Q^2}$  (時間  $\equiv \frac{\text{距離}}{\text{速度}}$ )
- $T(\pm\infty) = \infty$ ,  $T(0) = \frac{1}{c_a} \sqrt{X_P^2 + Y_P^2} + \frac{1}{c_w} \sqrt{X_Q^2 + Y_Q^2} < \infty$ , 故  $T$  在  $(-\infty, \infty)$  有最小值.
- $T$  在  $(-\infty, \infty)$  可微, 無奇異點,  $(-\infty, \infty)$  無邊界點;  $T$  在  $(-\infty, \infty)$  之最小值出現於臨界點.
- 解  $T'(x^*) = 0$ ; 在臨界點  $x^*$  時

$$0 = \frac{1}{c_a} \frac{X_P - x^*}{\sqrt{(X_P - x^*)^2 + Y_P^2}} + \frac{1}{c_w} \frac{X_Q - x^*}{\sqrt{(X_Q - x^*)^2 + Y_Q^2}} = \frac{-\sin \theta_i}{c_a} + \frac{\sin \theta_r}{c_w} \implies \frac{\sin \theta_i}{\sin \theta_r} = \frac{c_a}{c_w}$$

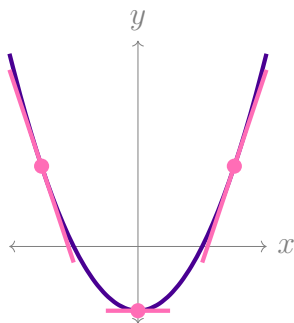
例. 如圖, 若桿子可在 3m 寬水平走廊移動, 且無彎折通過 2m 寬垂直走廊, 求最大桿長.



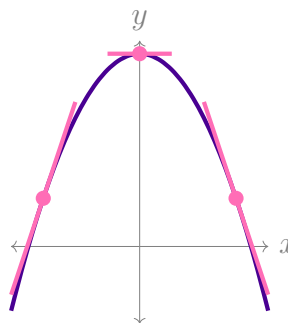
解.

- 如圖, 令桿與 3m 寬走廊內沿夾角為  $\theta$ , 則總桿長為  $\ell(\theta) = \ell_1(\theta) + \ell_2(\theta) = \frac{3}{\sin \theta} + \frac{2}{\cos \theta}$ ,  $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ .
- $\ell(\theta)$  最小值  $\equiv$  最大桿長
- $\lim_{\theta \rightarrow 0^+} \ell(\theta) = \infty$ ,  $\lim_{\theta \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \ell(\theta) = \infty$ ,  $\ell(\frac{\pi}{4}) = \frac{5}{\sqrt{2}} < \infty$ , 故  $\ell(\theta)$  在  $(0, \frac{\pi}{2})$  有最小值.
- $(0, \frac{\pi}{2})$  無邊界點,  $\ell(\theta)$  在  $(0, \frac{\pi}{2})$  可微, 無奇異點.
- 求臨界點, 亦即  $\ell'(\theta) = 0$  之根  $\theta^*$ :  $\ell'(\theta) = -\frac{3 \cos \theta}{\sin^2 \theta} + \frac{2 \sin \theta}{\cos^2 \theta} = \frac{-3 \cos^3 \theta + 2 \sin^3 \theta}{\sin^2 \theta \cos^2 \theta} = 0 \implies \tan \theta^* = \sqrt[3]{\frac{3}{2}}$ . 則最大桿長為  $\ell(\theta^*) = \frac{3}{\sin \theta^*} + \frac{2}{\cos \theta^*} = \frac{3}{\frac{\sqrt[3]{3}}{\sqrt{2^{\frac{2}{3}}+3^{\frac{2}{3}}}}} + \frac{2}{\frac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt{2^{\frac{2}{3}}+3^{\frac{2}{3}}}}} = (2^{\frac{2}{3}} + 3^{\frac{2}{3}})^{\frac{3}{2}} (\approx 7.02\text{m})$

### 3.4 作圖



- 切線斜率遞增
- $f''(x) > 0$
- 凹向上
- 切線在圖形下方



- 切線斜率遞減
- $f''(x) < 0$
- 凹向下
- 切線在圖形上方

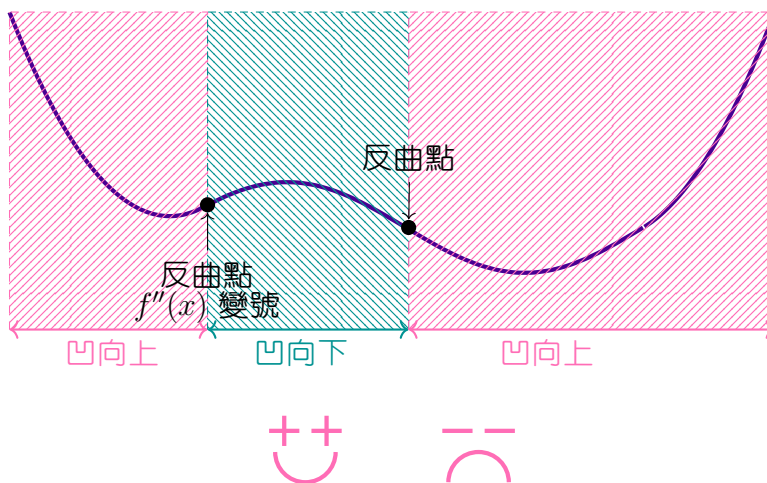
定義 (反曲點 (inflection point)).  $x_0$  為  $y = f(x)$  的反曲點, 若

•  $y = f(x)$  在  $x = x_0$  有切線.

•  $f$  的凹向在  $x_0$  的左右兩邊恰相反.

**性質.** 令  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  為可微.

- 若  $f'$  在  $I$  嚴格遞增 ( $f'' > 0$  在  $I$ ) ,  $f$  在  $I$  凹向上 (上凹) .
- 若  $f'$  在  $I$  嚴格遞減 ( $f'' < 0$  在  $I$ ) ,  $f$  在  $I$  凹向下 (下凹) .
- 若  $f''(x_0) = 0$ , 則  $x_0 \in I$  為  $f$  的反曲點.



	嚴格遞減 (-)	嚴格遞增 (+)
凹向上 (+)		
凹向下 (-)		

**性質** (漸近線 (asymptote) ).

- 若  $\lim_{x \rightarrow a-} f(x) = \pm\infty$  或  $\lim_{x \rightarrow a+} f(x) = \pm\infty$ ,  $f$  在  $a$  有垂直漸近線.
- 若  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = L$  或  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = L$ ,  $f$  有水平漸近線  $y = L$ .
- 若  $\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - (mx + n)) = 0$  或  $\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - (mx + n)) = 0$ ,  $m \neq 0$ , 則  $f$  有斜漸近線  $y = mx + n$ :

斜漸近線  $y = mx + n$  由極限  $m = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x}$  與  $n = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x) - mx)$  之存在性決定.

**結論** (作圖步驟).

- 觀察定義域, 對稱性, 週期性.
- 決定漸近線.
- 解  $f'(x) = 0$ ,  $f''(x) = 0$  並決定  $f'$ ,  $f''$  之正負區間; 製表.



- 依表判斷  $f$  之升降, 凹向, 臨界點, 奇異點, 反曲點; 作圖.

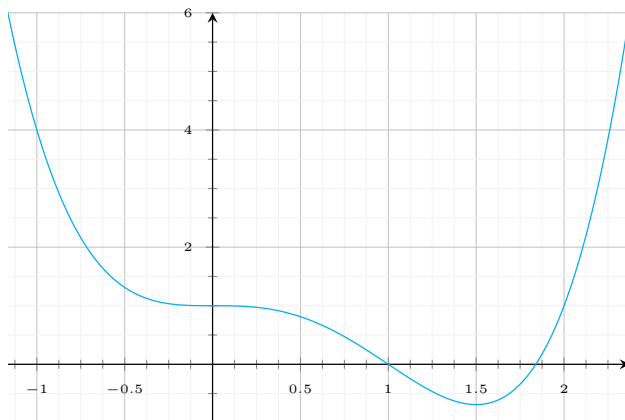
例. 決定  $f(x) = x^4 - 2x^3 + 1$  的升降, 凹向, 臨界點, 奇異點, 反曲點並作圖.

解.

- $f'(x) = 4x^3 - 6x^2 = 4x^2\left(x - \frac{3}{2}\right)$ ;  $f''(x) = 12x^2 - 12x = 12x(x - 1)$ .
- 製表:

-		-		-		+	$f'$
+	0	-	1	+	$\frac{3}{2}$	+	$f''$

- 臨界點 ( $f' = 0$ ):  $x = 0$  與  $x = \frac{3}{2}$
- 嚴格遞增區間 ( $f' > 0$ ):  $\left(\frac{3}{2}, \infty\right)$
- 嚴格遞減區間 ( $f' < 0$ ):  $\left(-\infty, \frac{3}{2}\right)$
- 反曲點 ( $f'' = 0$  且前後  $f''$  異號處):  $x = 0$  與  $x = 1$
- 作圖:



例. 決定  $f(x) = \frac{x}{x^2 + 3}$  之升降, 凹向, 臨界點, 奇異點, 反曲點並作圖.

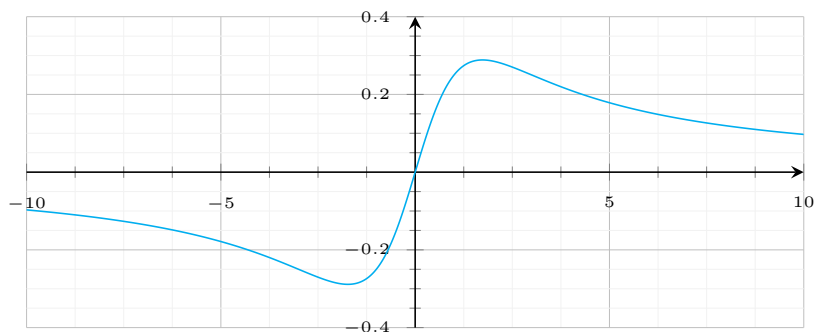
解.

- $f'(x) = \frac{3 - x^2}{(x^2 + 3)^2} = \frac{(\sqrt{3} - x)(\sqrt{3} + x)}{(x^2 + 3)^2}$ ;  $f''(x) = \frac{2x(x + 3)(x - 3)}{(x^2 + 3)^3}$ .
- 製表:

-		-		+		+		-		-	$f'$
-	-3	+	$-\sqrt{3}$	+	0	-	$\sqrt{3}$	-	3	+	$f''$

- 水平漸近線:  $y = 0$ , 因  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x}{x^2 + 3} = 0$
- 嚴格遞增區間 ( $f' > 0$ ):  $(-\sqrt{3}, \sqrt{3})$
- 嚴格遞減區間 ( $f' < 0$ ):  $(-\infty, -\sqrt{3})$  與  $(\sqrt{3}, \infty)$
- 臨界點 ( $f' = 0$ ):  $x = \pm\sqrt{3}$

- 反曲點 ( $f'' = 0$  且前後  $f''$  異號處) :  $x = -3$  與  $x = 0$  與  $x = 3$
- 作圖:



例. 決定  $f(x) = \frac{x^3}{x^2 - 1}$  的升降, 凹向, 臨界點, 奇異點, 反曲點並作圖.

解.

$$f'(x) = \frac{x^2(x^2 - 3)}{(x^2 - 1)^2} = \frac{x^2(x - \sqrt{3})(x + \sqrt{3})}{(x^2 - 1)^2}; f''(x) = \frac{2x(x^2 + 3)}{(x^2 - 1)^3}$$

- 製表:

+		-		-		-		-		+	$f'$
-	$-\sqrt{3}$	-	-1	+	0	-	1	+	$\sqrt{3}$	+	$f''$

- 奇異點:  $x^2 - 1 = 0 \implies x = \pm 1$ , 故垂直漸近線:  $x = \pm 1$
- 斜漸近線:  $y = x$ , 因  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left( \frac{x^3}{x^2 - 1} - x \right) = 0$
- 嚴格遞增區間 ( $f' > 0$ ) :  $(-\infty, -\sqrt{3})$  與  $(\sqrt{3}, \infty)$
- 嚴格遞減區間 ( $f' < 0$ ) :  $(-\sqrt{3}, \sqrt{3})$
- 臨界點 ( $f' = 0$ ) :  $x = 0$  與  $x = \pm\sqrt{3}$
- 反曲點 ( $f'' = 0$  且前後  $f''$  異號處) :  $x = 0$
- 作圖:

