積分技巧：積分號下取微分法

Leibniz 積分法則 — 積分號下取微分

若 $f(x, \alpha)$ 連續且偏導數 $\frac{\partial f}{\partial \alpha}$ 連續，則在適當條件下：

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\alpha} \int_a^b f(x, \alpha)\, \mathrm{d}x = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial \alpha}(x, \alpha)\, \mathrm{d}x$$

更一般地，若積分上下限也依賴於 α：

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\alpha} \int_{a(\alpha)}^{b(\alpha)} f(x, \alpha)\, \mathrm{d}x = f(b(\alpha), \alpha) \cdot b'(\alpha) - f(a(\alpha), \alpha) \cdot a'(\alpha) + \int_{a(\alpha)}^{b(\alpha)} \frac{\partial f}{\partial \alpha}\, \mathrm{d}x$$

1 敘述與證明

1.1 有限區間的 Leibniz 積分法則

定理 1.1 (Leibniz 積分法則)**.** 設 $f(x, \alpha)$ 定義於 $[a, b] \times [\alpha_0, \alpha_1]$。若

(i) $f(x, \alpha)$ 在 $[a, b] \times [\alpha_0, \alpha_1]$ 連續，

(ii) $\frac{\partial f}{\partial \alpha}(x, \alpha)$ 存在且在 $[a, b] \times [\alpha_0, \alpha_1]$ 連續，

則

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\alpha} \int_a^b f(x, \alpha)\, \mathrm{d}x = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial \alpha}(x, \alpha)\, \mathrm{d}x.$$

證. 定義 $F(\alpha) = \int_a^b f(x, \alpha)\, \mathrm{d}x$。我們需證明

$$\lim_{h \to 0} \frac{F(\alpha + h) - F(\alpha)}{h} = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial \alpha}(x, \alpha)\, \mathrm{d}x$$

步驟 **1:** 建立差商。

$$\frac{F(\alpha + h) - F(\alpha)}{h} = \frac{1}{h} \int_a^b \big[f(x, \alpha + h) - f(x, \alpha)\big]\, \mathrm{d}x = \int_a^b \frac{f(x, \alpha + h) - f(x, \alpha)}{h}\, \mathrm{d}x$$

步驟 **2:** 應用均值定理。

對於每個固定的 x，函數 $\alpha \mapsto f(x, \alpha)$ 可微。由均值定理，存在 $\theta_x \in (0, 1)$ (依賴於 x 和 h) 使得

$$\frac{f(x, \alpha + h) - f(x, \alpha)}{h} = \frac{\partial f}{\partial \alpha}(x, \alpha + \theta_x h)$$

因此

$$\frac{F(\alpha + h) - F(\alpha)}{h} = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial \alpha}(x, \alpha + \theta_x h)\, \mathrm{d}x$$

步驟 **3:** 利用均勻連續性。

由於 $\frac{\partial f}{\partial\alpha}$ 在緊集 $[a,b]\times[\alpha_0,\alpha_1]$ 上連續，它是均勻連續的。即對於任意 $\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$ 使得對所有 $x\in[a,b]$ 及所有 $\alpha',\alpha''\in[\alpha_0,\alpha_1]$，

$$|\alpha'-\alpha''|<\delta \implies \left|\frac{\partial f}{\partial\alpha}(x,\alpha')-\frac{\partial f}{\partial\alpha}(x,\alpha'')\right|<\varepsilon$$

步驟 **4:** 估計誤差。

對於 $|h|<\delta$，我們有 $|\theta_x h|\leqslant|h|<\delta$，故

$$\left|\frac{\partial f}{\partial\alpha}(x,\alpha+\theta_x h)-\frac{\partial f}{\partial\alpha}(x,\alpha)\right|<\varepsilon \quad \text{對所有} x\in[a,b]$$

因此

$$\begin{aligned}\left|\frac{F(\alpha+h)-F(\alpha)}{h}-\int_a^b\frac{\partial f}{\partial\alpha}(x,\alpha)\,\mathrm{d}x\right| &= \left|\int_a^b\left[\frac{\partial f}{\partial\alpha}(x,\alpha+\theta_x h)-\frac{\partial f}{\partial\alpha}(x,\alpha)\right]\mathrm{d}x\right| \\ &\leqslant \int_a^b\left|\frac{\partial f}{\partial\alpha}(x,\alpha+\theta_x h)-\frac{\partial f}{\partial\alpha}(x,\alpha)\right|\mathrm{d}x \\ &< \int_a^b\varepsilon\,\mathrm{d}x=\varepsilon(b-a)\end{aligned}$$

步驟 **5:** 結論。

由於 $\varepsilon>0$ 是任意的，我們有

$$\lim_{h\to0}\frac{F(\alpha+h)-F(\alpha)}{h}=\int_a^b\frac{\partial f}{\partial\alpha}(x,\alpha)\,\mathrm{d}x$$

因此 F 可微且 $F'(\alpha)=\int_a^b\frac{\partial f}{\partial\alpha}(x,\alpha)\,\mathrm{d}x$。

1.2 透過控制收斂定理處理瑕積分的 Leibniz 法則

對於瑕積分，我們需要更強的條件。最簡潔的方法是使用 Lebesgue 控制收斂定理。

定理 1.2 (控制收斂定理)**.** 設 (X,μ) 為測度空間，$\{f_n\}$ 為可測函數序列，滿足

(i) 當 $n\to\infty$ 時，$f_n(x)\to f(x)$ 逐點收斂

(ii) 存在可積函數 g 使得對所有 n 及幾乎所有 x，$|f_n(x)|\leqslant g(x)$

則 f 可積且

$$\lim_{n\to\infty}\int_X f_n\,\mathrm{d}\mu=\int_X f\,\mathrm{d}\mu$$

定理 1.3 (瑕積分下的微分)**.** 設 $f(x,\alpha)$ 定義於 $[a,\infty)\times(\alpha_0,\alpha_1)$。假設

(i) 對每個 $\alpha\in(\alpha_0,\alpha_1)$，函數 $x\mapsto f(x,\alpha)$ 在 $[a,\infty)$ 上可積

(ii) 對每個 $x\in[a,\infty)$，偏導數 $\frac{\partial f}{\partial\alpha}(x,\alpha)$ 對所有 $\alpha\in(\alpha_0,\alpha_1)$ 存在

(iii) 存在可積函數 $g:[a,\infty)\to[0,\infty)$ 使得

$$\left|\frac{\partial f}{\partial\alpha}(x,\alpha)\right|\leqslant g(x) \quad \text{對所有} x\in[a,\infty) \text{ 及} \alpha\in(\alpha_0,\alpha_1)$$

則

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\alpha}\int_a^\infty f(x,\alpha)\,\mathrm{d}x = \int_a^\infty \frac{\partial f}{\partial \alpha}(x,\alpha)\,\mathrm{d}x$$

證. 定義 $F(\alpha) = \int_a^\infty f(x,\alpha)\,\mathrm{d}x$。

步驟 **1:** 建立差商。

對於充分小的 $h \neq 0$（使得 $\alpha + h \in (\alpha_0, \alpha_1)$）

$$\frac{F(\alpha+h)-F(\alpha)}{h} = \int_a^\infty \frac{f(x,\alpha+h)-f(x,\alpha)}{h}\,\mathrm{d}x$$

步驟 **2:** 應用均值定理。

對於每個固定的 x 對 $\alpha \mapsto f(x,\alpha)$ 應用均值定理，存在 $\theta_x \in (0,1)$ 使得

$$\frac{f(x,\alpha+h)-f(x,\alpha)}{h} = \frac{\partial f}{\partial \alpha}(x,\alpha+\theta_x h)$$

定義

$$\phi_h(x) = \frac{f(x,\alpha+h)-f(x,\alpha)}{h}$$

步驟 **3:** 建立逐點收斂。

當 $h \to 0$ 時

$$\phi_h(x) = \frac{f(x,\alpha+h)-f(x,\alpha)}{h} \to \frac{\partial f}{\partial \alpha}(x,\alpha) \quad \text{對每個} x$$

這由偏導數的定義而得。

步驟 **4:** 找出控制函數。

由均值定理的結果及條件 (iii)

$$|\phi_h(x)| = \left|\frac{\partial f}{\partial \alpha}(x,\alpha+\theta_x h)\right| \leqslant g(x)$$

對所有 $x \in [a,\infty)$ 及所有充分小的 h 成立。

步驟 **5:** 應用控制收斂定理。

我們有

- 當 $h \to 0$ 時，$\phi_h(x) \to \frac{\partial f}{\partial \alpha}(x,\alpha)$ 逐點收斂
- $|\phi_h(x)| \leqslant g(x)$ 其中 $\int_a^\infty g(x)\,\mathrm{d}x < \infty$

由控制收斂定理

$$\lim_{h\to 0}\int_a^\infty \phi_h(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^\infty \lim_{h\to 0}\phi_h(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^\infty \frac{\partial f}{\partial \alpha}(x,\alpha)\,\mathrm{d}x$$

步驟 **6:** 結論。

$$F'(\alpha) = \lim_{h\to 0}\frac{F(\alpha+h)-F(\alpha)}{h} = \lim_{h\to 0}\int_a^\infty \phi_h(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^\infty \frac{\partial f}{\partial \alpha}(x,\alpha)\,\mathrm{d}x$$

2 Gauss 積分及其衍生

Gauss 函數 e^{-x^2} 是數學中最重要的函數之一。它出現在機率論、量子力學、統計力學、熱傳導與信號處理中。

2.1 基本 Gauss 積分

Euler–Poisson 積分

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,\mathrm{d}x = \sqrt{\pi}, \qquad \int_0^{\infty} e^{-x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

證. 令 $I = \int_0^\infty e^{-x^2}\,\mathrm{d}x$。我們將證明 $I = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$。

步驟 1: 引入輔助函數。

對於 $t \geqslant 0$，定義

$$F(t) = \int_0^\infty \frac{e^{-t^2(1+x^2)}}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$$

步驟 2: 計算 $F(0)$ 和 $\lim_{t\to\infty} F(t)$。

當 $t = 0$ 時，

$$F(0) = \int_0^\infty \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \left[\tan^{-1} x\right]_0^\infty = \frac{\pi}{2}$$

當 $t \to \infty$ 時，被積函數 $\frac{e^{-t^2(1+x^2)}}{1+x^2} \leqslant e^{-t^2} \to 0$ 均勻收斂，故 $F(t) \to 0$。

步驟 3: 對 $F(t)$ 微分。

我們應用定理 1.3。令 $f(x,t) = \frac{e^{-t^2(1+x^2)}}{1+x^2}$，其偏導數為

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{-2t(1+x^2)e^{-t^2(1+x^2)}}{1+x^2} = -2t\,e^{-t^2(1+x^2)}$$

對於 $t \in [0,T]$，我們有 $\left|\frac{\partial f}{\partial t}\right| \leqslant 2Te^{-t^2} \leqslant 2T$，但更有用的是，對於 $t \geqslant \varepsilon > 0$，

$$\left|\frac{\partial f}{\partial t}\right| = 2t\,e^{-t^2(1+x^2)} \leqslant 2t\,e^{-\varepsilon^2(1+x^2)}$$

在 x 上可積。因此

$$F'(t) = \int_0^\infty \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{e^{-t^2(1+x^2)}}{1+x^2}\right)\mathrm{d}x = -2t\int_0^\infty e^{-t^2(1+x^2)}\,\mathrm{d}x = -2t\,e^{-t^2}\int_0^\infty e^{-t^2x^2}\,\mathrm{d}x$$

代入 $u = tx$ (故 $\mathrm{d}x = \mathrm{d}u/t$):

$$F'(t) = -2t\,e^{-t^2}\cdot\frac{1}{t}\int_0^\infty e^{-u^2}\,\mathrm{d}u = -2\,e^{-t^2}\cdot I$$

步驟 4: 將 $F'(t)$ 從 0 積分到 ∞。

$$F(\infty) - F(0) = \int_0^\infty F'(t)\,\mathrm{d}t = -2I \int_0^\infty e^{-t^2}\,\mathrm{d}t = -2I \cdot I = -2I^2$$

因此

$$0 - \frac{\pi}{2} = -2I^2 \implies I^2 = \frac{\pi}{4} \implies I = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

(我們取正根，因為 $I > 0$。)

應用 — 機率論：常態分佈

均值為 μ、變異數為 σ^2 的常態分佈之機率密度函數為：

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)$$

正規化條件 $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = 1$ 來自：

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x-\mu)^2/(2\sigma^2)}\,\mathrm{d}x = \sigma\sqrt{2\pi}$$

這可由 Gauss 積分透過代換 $u = (x-\mu)/(\sigma\sqrt{2})$ 得到。

2.2 縮放的 Gauss 積分

縮放的 Gauss 積分

對於 $a > 0$：

$$\int_0^\infty e^{-ax^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a}}$$

證. 代入 $u = \sqrt{a}\,x$，故 $\mathrm{d}u = \sqrt{a}\,\mathrm{d}x$：

$$\int_0^\infty e^{-ax^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\sqrt{a}} \int_0^\infty e^{-u^2}\,\mathrm{d}u = \frac{1}{\sqrt{a}} \cdot \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

2.3 Gauss 分佈的動差：積分號下微分法

Gauss 動差

對於 $a > 0$ 及 $n \in \mathbb{N}$：

$$\int_0^\infty x^{2n} e^{-ax^2}\,\mathrm{d}x = \frac{(2n-1)!!}{2^{n+1}}\sqrt{\frac{\pi}{a^{2n+1}}} = \frac{(2n)!}{n!\,4^n}\sqrt{\frac{\pi}{a^{2n+1}}}$$

其中 $(2n-1)!! = 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)$ 是雙階乘。

證. 令 $I(a) = \int_0^\infty e^{-ax^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\sqrt{\pi/a}$。

微分合理性：我們應用定理 1.3，其中 $f(x,a) = e^{-ax^2}$。對於 $a \in [a_0, a_1]$ $(0 < a_0 < a_1)$：

- $\frac{\partial f}{\partial a} = -x^2 e^{-ax^2}$ 對所有 $x \geqslant 0$ 及 $a > 0$ 存在。

- $\left|\frac{\partial f}{\partial a}\right| = x^2 e^{-ax^2} \leqslant x^2 e^{-a_0 x^2}$，且 $\int_0^\infty x^2 e^{-a_0 x^2}\,\mathrm{d}x < \infty$。

因此積分號下微分是合理的：

$$I'(a) = -\int_0^\infty x^2 e^{-ax^2}\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{2}\sqrt{\pi}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)a^{-3/2} = \frac{\sqrt{\pi}}{4a^{3/2}}.$$

故 $\int_0^\infty x^2 e^{-ax^2}\,\mathrm{d}x = \frac{\sqrt{\pi}}{4a^{3/2}}$。

對於更高階導數，同樣的論證適用，控制函數為 $x^{2n}e^{-a_0 x^2}$：

$$I''(a) = \int_0^\infty x^4 e^{-ax^2}\,\mathrm{d}x = \frac{3\sqrt{\pi}}{8a^{5/2}}.$$

一般而言，每次微分乘以 (-1) 並引入 x^2：

$$(-1)^n I^{(n)}(a) = \int_0^\infty x^{2n} e^{-ax^2}\,\mathrm{d}x$$

由於 $\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}a^n}\left(a^{-1/2}\right) = (-1)^n \frac{(2n-1)!!}{2^n} a^{-(2n+1)/2}$，公式得證。

應用 — 統計力學：Maxwell–Boltzmann 分佈

在溫度為 T 的氣體中，分子速率 v 的機率分佈為：

$$f(v) = 4\pi n\left(\frac{m}{2\pi k_B T}\right)^{3/2} v^2 \exp\left(-\frac{mv^2}{2k_B T}\right)$$

均方速率為：

$$\langle v^2\rangle = \frac{\int_0^\infty v^4 e^{-mv^2/(2k_B T)}\,\mathrm{d}v}{\int_0^\infty v^2 e^{-mv^2/(2k_B T)}\,\mathrm{d}v} = \frac{3k_B T}{m}$$

這給出能量均分定理：$\langle \frac{1}{2}mv^2\rangle = \frac{3}{2}k_B T$。

應用 — 量子力學：諧振子

量子諧振子的基態波函數為：

$$\psi_0(x) = \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/4}\exp\left(-\frac{m\omega x^2}{2\hbar}\right)$$

位置不確定性為：

$$\langle x^2\rangle = \int_{-\infty}^\infty x^2|\psi_0(x)|^2\,\mathrm{d}x = \sqrt{\frac{m\omega}{\pi\hbar}}\int_{-\infty}^\infty x^2 e^{-m\omega x^2/\hbar}\,\mathrm{d}x = \frac{\hbar}{2m\omega}$$

結合 $\langle p^2\rangle = \frac{m\omega\hbar}{2}$，這給出不確定性乘積 $\Delta x\cdot\Delta p = \frac{\hbar}{2}$。

2.4 Gauss Fourier 變換

Gauss Fourier 變換

對於 $a > 0$:

$$\int_0^\infty e^{-ax^2} \cos(bx)\, \mathrm{d}x = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a}}\, e^{-b^2/(4a)}$$

證. 定義 $I(b) = \int_0^\infty e^{-ax^2} \cos(bx)\, \mathrm{d}x$,其中 $I(0) = \frac{1}{2}\sqrt{\pi/a}$。

微分合理性:我們應用定理 1.3,其中 $f(x,b) = e^{-ax^2}\cos(bx)$。偏導數為 $\frac{\partial f}{\partial b} = -xe^{-ax^2}\sin(bx)$。對所有 $b \in \mathbb{R}$:

$$\left|\frac{\partial f}{\partial b}\right| = |x|e^{-ax^2}|\sin(bx)| \leqslant xe^{-ax^2}$$

且 $\int_0^\infty xe^{-ax^2}\, \mathrm{d}x = \frac{1}{2a} < \infty$。因此微分是合理的。

微分:

$$I'(b) = -\int_0^\infty x\, e^{-ax^2} \sin(bx)\, \mathrm{d}x.$$

使用分部積分,令 $u = \sin(bx)$,$\mathrm{d}v = -xe^{-ax^2}\, \mathrm{d}x$,故 $v = \frac{1}{2a}e^{-ax^2}$:

$$I'(b) = \left[\frac{\sin(bx)}{2a}e^{-ax^2}\right]_0^\infty - \frac{b}{2a}\int_0^\infty e^{-ax^2}\cos(bx)\, \mathrm{d}x = 0 - \frac{b}{2a}I(b).$$

此常微分方程 $I'(b) = -\frac{b}{2a}I(b)$ 的解為 $I(b) = I(0)e^{-b^2/(4a)}$。

應用 — 信號處理:Gauss 脈衝傳播

時域中的 Gauss 脈衝 $f(t) = e^{-at^2}$ 的 Fourier 變換為:

$$\hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^\infty e^{-at^2} e^{-i\omega t}\, \mathrm{d}t = \sqrt{\frac{\pi}{a}}e^{-\omega^2/(4a)}$$

變換也是 Gauss 函數。時間-頻寬乘積滿足:

$$\Delta t \cdot \Delta\omega = \frac{1}{2\sqrt{a}} \cdot \sqrt{a} = \frac{1}{2}$$

這是最小不確定性,使 Gauss 脈衝成為通訊系統的最佳選擇。

2.5 Glasser 積分

Glasser 主定理的應用

對於 $a > 0$:

$$\int_0^\infty e^{-x^2 - a^2/x^2}\, \mathrm{d}x = \frac{\sqrt{\pi}}{2}e^{-2a}$$

證. 令 $I(a) = \int_0^\infty e^{-x^2-a^2/x^2}\, \mathrm{d}x$。

微分合理性：我們應用定理 1.3，其中 $f(x,a) = e^{-x^2-a^2/x^2}$。偏導數為：

$$\frac{\partial f}{\partial a} = -\frac{2a}{x^2} e^{-x^2-a^2/x^2}$$

對於 $a \in [0, A]$ 及 $x > 0$，我們需要控制函數。注意 $e^{-x^2-a^2/x^2} \leqslant e^{-x^2}$ 且 $\frac{2a}{x^2} \leqslant \frac{2A}{x^2}$。對於 $x \geqslant 1$：$\left|\frac{\partial f}{\partial a}\right| \leqslant 2Ae^{-x^2}$。對於 $x \in (0,1)$：$\left|\frac{\partial f}{\partial a}\right| \leqslant \frac{2A}{x^2} e^{-a^2/x^2}$，積分收斂。因此微分是合理的。

微分：

$$I'(a) = -2a \int_0^\infty \frac{e^{-x^2-a^2/x^2}}{x^2}\,\mathrm{d}x.$$

代入 $u = a/x$（故 $x = a/u$，$\mathrm{d}x = -a\,\mathrm{d}u/u^2$）：

$$\int_0^\infty \frac{e^{-x^2-a^2/x^2}}{x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{a} \int_0^\infty e^{-a^2/u^2-u^2}\,\mathrm{d}u = \frac{I(a)}{a}.$$

因此 $I'(a) = -2I(a)$，得 $I(a) = I(0)e^{-2a} = \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{-2a}$。

應用 — 量子場論：路徑積分

在量子力學的路徑積分表述中，自由粒子的傳播子涉及：

$$K(x_f, t_f; x_i, t_i) = \sqrt{\frac{m}{2\pi i\hbar(t_f - t_i)}} \exp\left(\frac{im(x_f - x_i)^2}{2\hbar(t_f - t_i)}\right)$$

當計算具有特定函數形式的動能和位能貢獻的系統傳播子時，會出現 Glasser 型積分。

3 Dirichlet 積分與信號處理

3.1 Sinc 函數

函數 $\operatorname{sinc}(x) = \frac{\sin x}{x}$（其中 $\operatorname{sinc}(0) = 1$）在信號處理中是基本的。

Dirichlet 積分

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}$$

證. 引入收斂因子 e^{-ax}：

$$I(a) = \int_0^\infty \frac{\sin x}{x} e^{-ax}\,\mathrm{d}x, \quad a > 0.$$

微分合理性：我們應用定理 1.3，其中 $f(x,a) = \frac{\sin x}{x} e^{-ax}$。偏導數為 $\frac{\partial f}{\partial a} = -\sin x \cdot e^{-ax}$。對於 $a \geqslant a_0 > 0$：

$$\left|\frac{\partial f}{\partial a}\right| = |\sin x| e^{-ax} \leqslant e^{-a_0 x}$$

且 $\int_0^\infty e^{-a_0 x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{a_0} < \infty$。因此微分是合理的。

微分：

$$I'(a) = -\int_0^\infty \sin x \cdot e^{-ax}\,\mathrm{d}x.$$

計算 $\int_0^\infty e^{-ax}\sin x\,\mathrm{d}x$：

分部積分兩次。令 $J=\int_0^\infty e^{-ax}\sin x\,\mathrm{d}x$。

第一次：$u=\sin x$，$\mathrm{d}v=e^{-ax}\,\mathrm{d}x$，得 $v=-\frac{1}{a}e^{-ax}$：

$$J=\left[-\frac{\sin x}{a}e^{-ax}\right]_0^\infty+\frac{1}{a}\int_0^\infty e^{-ax}\cos x\,\mathrm{d}x=\frac{1}{a}\int_0^\infty e^{-ax}\cos x\,\mathrm{d}x.$$

第二次：$u=\cos x$，$\mathrm{d}v=e^{-ax}\,\mathrm{d}x$：

$$J=\frac{1}{a}\left(\left[-\frac{\cos x}{a}e^{-ax}\right]_0^\infty-\frac{1}{a}\int_0^\infty e^{-ax}\sin x\,\mathrm{d}x\right)=\frac{1}{a}\left(\frac{1}{a}-\frac{J}{a}\right).$$

因此 $J=\frac{1}{a^2}-\frac{J}{a^2}$，得 $J\left(1+\frac{1}{a^2}\right)=\frac{1}{a^2}$，故：

$$J=\frac{1}{a^2+1}.$$

因此 $I'(a)=-\frac{1}{1+a^2}$。

積分：$I(a)=-\tan^{-1}a+C$。

當 $a\to\infty$ 時，$I(a)\to 0$（被積函數被 e^{-ax}/x 控制而趨於零），故 $C=\frac{\pi}{2}$。因此 $I(a)=\frac{\pi}{2}-\tan^{-1}a$。

取 $a\to 0^+$：

$$\int_0^\infty\frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}.$$

應用 — 信號處理：理想低通濾波器

截止頻率為 ω_c 的理想低通濾波器具有頻率響應：

$$H(\omega)=\begin{cases}1 & |\omega|\leqslant\omega_c\\ 0 & |\omega|>\omega_c\end{cases}$$

其脈衝響應（逆 Fourier 變換）為：

$$h(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\omega_c}^{\omega_c}e^{i\omega t}\,\mathrm{d}\omega=\frac{\omega_c}{\pi}\cdot\frac{\sin(\omega_c t)}{\omega_c t}=\frac{\omega_c}{\pi}\mathrm{sinc}(\omega_c t)$$

$h(t)$ 下的總面積等於 $H(0)=1$：

$$\int_{-\infty}^\infty h(t)\,\mathrm{d}t=\frac{2\omega_c}{\pi}\int_0^\infty\frac{\sin(\omega_c t)}{\omega_c t}\,\mathrm{d}t=\frac{2}{\pi}\cdot\frac{\pi}{2}=1$$

3.2 廣義 Sinc 積分

衰減的 Sinc

對於 $a > 0$:

$$\int_0^\infty e^{-ax} \frac{\sin(bx)}{x} \, \mathrm{d}x = \tan^{-1} \frac{b}{a}$$

證. 令 $I(b) = \int_0^\infty e^{-ax} \frac{\sin(bx)}{x} \, \mathrm{d}x$，其中 $I(0) = 0$。

微分合理性：我們應用定理 1.3。偏導數為 $\frac{\partial}{\partial b} \left(e^{-ax} \frac{\sin(bx)}{x} \right) = e^{-ax} \cos(bx)$。對所有 b:

$$\left| e^{-ax} \cos(bx) \right| \leqslant e^{-ax}$$

且 $\int_0^\infty e^{-ax} \, \mathrm{d}x = \frac{1}{a} < \infty$。因此微分是合理的。

則 $I'(b) = \int_0^\infty e^{-ax} \cos(bx) \, \mathrm{d}x$。

使用與上面相同的分部積分技巧（或認出這是 $\mathrm{Re} \int_0^\infty e^{-(a-ib)x} \, \mathrm{d}x$）:

$$I'(b) = \frac{a}{a^2 + b^2}.$$

積分：$I(b) = \tan^{-1}(b/a)$。

Sinc 平方

對於 $a > 0$:

$$\int_0^\infty \frac{\sin^2(ax)}{x^2} \, \mathrm{d}x = \frac{\pi a}{2}$$

證. 令 $I(a) = \int_0^\infty \frac{\sin^2(ax)}{x^2} \, \mathrm{d}x$，其中 $I(0) = 0$。

微分合理性：我們在 $[0, R]$ 上應用定理 1.1，然後取 $R \to \infty$。或者，注意 $\frac{\partial}{\partial a} \frac{\sin^2(ax)}{x^2} = \frac{2\sin(ax)\cos(ax) \cdot x}{x^2} = \frac{\sin(2ax)}{x}$。對於任意 $a \in [0, A]$，當 $x \geqslant 1$ 時 $\left| \frac{\sin(2ax)}{x} \right| \leqslant \frac{1}{x}$，在 0 附近有界。積分的收斂由 Dirichlet 積分理論保證。

使用 $\frac{\partial}{\partial a} \sin^2(ax) = 2\sin(ax)\cos(ax) \cdot x = x \sin(2ax)$ 微分:

$$I'(a) = \int_0^\infty \frac{\sin(2ax)}{x} \, \mathrm{d}x.$$

代入 $u = 2ax$:

$$I'(a) = \int_0^\infty \frac{\sin u}{u} \, \mathrm{d}u = \frac{\pi}{2}.$$

因此 $I(a) = \frac{\pi a}{2}$。

應用 — 光學：單狹縫 Fraunhofer 繞射

對於寬度為 b 的狹縫，被波長為 λ 的單色光照射，在角度 θ 處的強度圖案為:

$$I(\theta) = I_0 \left(\frac{\sin \beta}{\beta} \right)^2, \quad \text{其中} \beta = \frac{\pi b \sin \theta}{\lambda}$$

通過狹縫傳輸的總功率正比於:

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} I(\theta)\cos\theta\,\mathrm{d}\theta \approx I_0 \int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{sinc}^2\left(\frac{\pi b\theta}{\lambda}\right)\mathrm{d}\theta = I_0 \cdot \frac{\lambda}{b}$$

(使用小角度近似 $\sin\theta \approx \theta$)。

3.3 餘弦差積分

對於 $a, b > 0$:

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos(ax) - \cos(bx)}{x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi(b-a)}{2}$$

證. 定義 $J(a) = \int_0^{\infty} \frac{1-\cos(ax)}{x^2}\,\mathrm{d}x$，其中 $J(0) = 0$。

微分合理性: 被積函數 $\frac{1-\cos(ax)}{x^2}$ 在 $x = 0$ 附近表現為 $\frac{a^2}{2}$, 對於大 x 表現為 $\frac{1}{x^2}$。偏導數 $\frac{\partial}{\partial a}\frac{1-\cos(ax)}{x^2} = \frac{\sin(ax)}{x}$。由 Dirichlet 積分收斂性，微分是合理的。

則 $J'(a) = \int_0^{\infty} \frac{\sin(ax)}{x}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}$。

故 $J(a) = \frac{\pi a}{2}$，結果由 $J(b) - J(a)$ 得到。

4 Frullani 積分

Frullani 定理

若 f 在 $(0, \infty)$ 上連續，且 $f(0^+)$ 和 $f(\infty) = \lim_{x\to\infty} f(x)$ 都存在且有限，則對於 $a, b > 0$:

$$\int_0^{\infty} \frac{f(ax) - f(bx)}{x}\,\mathrm{d}x = \big(f(0^+) - f(\infty)\big)\ln\frac{b}{a}$$

證. 定義 $I(a) = \int_0^{\infty} \frac{f(ax)-f(bx)}{x}\,\mathrm{d}x$。注意 $I(b) = 0$。

微分合理性：我們使用極限論證。當 f 可微時，導數 $\frac{\partial}{\partial a}\frac{f(ax)-f(bx)}{x} = f'(ax)$。對於足夠正則的 f，控制收斂定理適用。

微分:

$$I'(a) = \int_0^{\infty} f'(ax)\,\mathrm{d}x.$$

代入 $u = ax$:

$$I'(a) = \frac{1}{a}\int_0^{\infty} f'(u)\,\mathrm{d}u = \frac{1}{a}\big[f(\infty) - f(0^+)\big].$$

從 b 積分到 a:

$$I(a) - I(b) = \big(f(\infty) - f(0^+)\big)\ln\frac{a}{b}.$$

由於 $I(b) = 0$:

$$I(a) = \big(f(\infty) - f(0^+)\big)\ln\frac{a}{b} = \big(f(0^+) - f(\infty)\big)\ln\frac{b}{a}.$$

指數 Frullani

$$\int_0^\infty \frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x}\,\mathrm{d}x = \ln\frac{b}{a}$$

這裡 $f(x) = e^{-x}$，其中 $f(0^+) = 1$，$f(\infty) = 0$。

反正切 Frullani

$$\int_0^\infty \frac{\tan^{-1}(ax) - \tan^{-1}(bx)}{x}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}\ln\frac{a}{b}$$

這裡 $f(x) = \tan^{-1}(x)$，其中 $f(0^+) = 0$，$f(\infty) = \pi/2$。

應用 — 量子電動力學：正則化

在量子場論中，經常出現發散積分。Frullani 技巧提供了一種自然的正則化方法：不是計算 $\int_0^\infty \frac{f(ax)}{x}\,\mathrm{d}x$（可能發散），而是計算：

$$\int_0^\infty \frac{f(ax) - f(bx)}{x}\,\mathrm{d}x = \big(f(0^+) - f(\infty)\big)\ln\frac{b}{a}$$

參數 b 充當調節器，在重整化後取 $b \to 0$ 或 $b \to \infty$ 的極限得到物理結果。

5 對數積分

5.1 基本對數積分

對於 $a > -1$：

$$\int_0^1 \frac{x^a - 1}{\ln x}\,\mathrm{d}x = \ln(a+1)$$

證. 令 $I(a) = \int_0^1 \frac{x^a-1}{\ln x}\,\mathrm{d}x$，其中 $I(0) = 0$。

微分合理性：我們應用定理 1.1。被積函數 $f(x,a) = \frac{x^a-1}{\ln x}$ 在 $(0,1]$ 上連續，在 $x = 1$ 有可去奇點（分子和分母都為零）。偏導數為 $\frac{\partial f}{\partial a} = \frac{x^a \ln x}{\ln x} = x^a$。對於 $a \in [a_0, a_1]$（$a_0 > -1$），$|x^a| \leqslant \max(x^{a_0}, x^{a_1})$，在 $[0,1]$ 上可積。因此微分是合理的。

微分：$I'(a) = \int_0^1 \frac{x^a \ln x}{\ln x}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 x^a\,\mathrm{d}x = \frac{1}{a+1}$。

積分：$I(a) = \ln(a+1)$。

廣義形式

對於 $a, b > -1$：

$$\int_0^1 \frac{x^a - x^b}{\ln x}\,\mathrm{d}x = \ln\frac{a+1}{b+1}$$

應用 — 資訊理論：熵計算

連續隨機變數 X 具有密度 $p(x)$ 的微分熵為：

$$H(X) = -\int p(x)\ln p(x)\,\mathrm{d}x$$

對於 $[0,1]$ 上的冪律分佈 $p(x)\propto x^a$，熵涉及：

$$\int_0^1 x^a \ln x\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{(a+1)^2}$$

這可以透過對 $\int_0^1 x^a\,\mathrm{d}x = \frac{1}{a+1}$ 關於 a 微分得到。

5.2 對數-有理積分

對於 $a>0$：

$$\int_0^\infty \frac{\ln x}{x^2+a^2}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi\ln a}{2a}$$

證. 令 $I(a)=\int_0^\infty \frac{\ln x}{x^2+a^2}\,\mathrm{d}x$。代入 $x=au$：

$$I(a) = \int_0^\infty \frac{\ln(au)}{a^2u^2+a^2}\cdot a\,\mathrm{d}u = \frac{1}{a}\int_0^\infty \frac{\ln a+\ln u}{u^2+1}\,\mathrm{d}u.$$

現在 $\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}u}{u^2+1}=\frac{\pi}{2}$。

對於 $\int_0^\infty \frac{\ln u}{u^2+1}\,\mathrm{d}u$，代入 $u=1/t$：

$$\int_0^\infty \frac{\ln u}{u^2+1}\,\mathrm{d}u = \int_\infty^0 \frac{-\ln t}{1/t^2+1}\cdot\frac{-\mathrm{d}t}{t^2} = \int_0^\infty \frac{-\ln t}{t^2+1}\,\mathrm{d}t.$$

因此 $\int_0^\infty \frac{\ln u}{u^2+1}\,\mathrm{d}u = -\int_0^\infty \frac{\ln u}{u^2+1}\,\mathrm{d}u$，故此積分等於 0。

因此 $I(a)=\frac{\ln a}{a}\cdot\frac{\pi}{2}=\frac{\pi\ln a}{2a}$。

應用 — 靜電學：二維 Green 函數

在二維中，線電荷產生的靜電位滿足：

$$\nabla^2\phi = -\frac{\lambda}{\varepsilon_0}\delta^{(2)}(\mathbf{r})$$

Green 函數為 $G(\mathbf{r},\mathbf{r}')=-\frac{1}{2\pi}\ln|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|$。計算電荷分佈的電位涉及如下積分：

$$\phi(\mathbf{r}) = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\int \ln|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|\,\mathrm{d}\ell'$$

對數-有理積分公式有助於計算特定幾何的電位。

5.3 三角-對數積分

對於 $a, b > 0$:

$$\int_0^{\pi/2} \ln\left(a^2\cos^2\theta + b^2\sin^2\theta\right) \mathrm{d}\theta = \pi \ln \frac{a+b}{2}$$

證. 令 $I(a,b) = \int_0^{\pi/2} \ln\left(a^2\cos^2\theta + b^2\sin^2\theta\right) \mathrm{d}\theta$。

步驟 **1:** 計算 $\frac{\partial I}{\partial a}$。

由定理 1.1，因為被積函數及其偏導數在 $[0, \pi/2]$ 上對於 $a, b > 0$ 連續:

$$\frac{\partial I}{\partial a} = \int_0^{\pi/2} \frac{2a\cos^2\theta}{a^2\cos^2\theta + b^2\sin^2\theta} \mathrm{d}\theta$$

代入 $t = \tan\theta$，故 $\cos^2\theta = \frac{1}{1+t^2}$，$\sin^2\theta = \frac{t^2}{1+t^2}$，$\mathrm{d}\theta = \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2}$:

$$\frac{\partial I}{\partial a} = \int_0^{\infty} \frac{2a/(1+t^2)}{(a^2+b^2t^2)/(1+t^2)} \cdot \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2} = \int_0^{\infty} \frac{2a}{(a^2+b^2t^2)(1+t^2)} \mathrm{d}t$$

步驟 **2:** 部分分式。

對於 $a \neq b$:

$$\frac{1}{(a^2+b^2t^2)(1+t^2)} = \frac{1}{a^2-b^2}\left(\frac{1}{1+t^2} - \frac{b^2}{a^2+b^2t^2}\right)$$

因此:

$$\begin{aligned} \frac{\partial I}{\partial a} &= \frac{2a}{a^2-b^2}\left(\int_0^{\infty} \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2} - b^2\int_0^{\infty} \frac{\mathrm{d}t}{a^2+b^2t^2}\right) \\ &= \frac{2a}{a^2-b^2}\left(\frac{\pi}{2} - b^2 \cdot \frac{1}{ab} \cdot \frac{\pi}{2}\right) = \frac{2a}{a^2-b^2} \cdot \frac{\pi}{2} \cdot \frac{a-b}{a} = \frac{\pi}{a+b} \end{aligned}$$

由對稱性，$\frac{\partial I}{\partial b} = \frac{\pi}{a+b}$。

步驟 **3:** 積分偏導數。

兩個偏導數都等於 $\frac{\pi}{a+b}$，這與以下一致:

$$I(a,b) = \pi\ln(a+b) + C$$

步驟 **4:** 確定 C。

令 $a = b$:

$$I(a,a) = \int_0^{\pi/2} \ln\left(a^2\right) \mathrm{d}\theta = \pi \ln a$$

但從我們的公式: $\pi\ln(2a) + C = \pi\ln a$，故 $C = -\pi\ln 2$。

因此:

$$I(a,b) = \pi\ln(a+b) - \pi\ln 2 = \pi\ln\frac{a+b}{2}$$

對數-正弦和對數-餘弦

$$\int_0^{\pi/2} \ln(\sin\theta)\,\mathrm{d}\theta = \int_0^{\pi/2} \ln(\cos\theta)\,\mathrm{d}\theta = -\frac{\pi}{2}\ln 2$$

證. 令 $I = \int_0^{\pi/2} \ln(\sin\theta)\,\mathrm{d}\theta$。代入 $\phi = \frac{\pi}{2} - \theta$:

$$I = \int_0^{\pi/2} \ln(\cos\phi)\,\mathrm{d}\phi.$$

故兩個積分相等。

現在計算 $2I = \int_0^{\pi/2} \ln(\sin\theta\cos\theta)\,\mathrm{d}\theta = \int_0^{\pi/2} \ln\frac{\sin 2\theta}{2}\,\mathrm{d}\theta$。

$$2I = \int_0^{\pi/2} \ln(\sin 2\theta)\,\mathrm{d}\theta - \frac{\pi}{2}\ln 2.$$

代入 $u = 2\theta$:

$$\int_0^{\pi/2} \ln(\sin 2\theta)\,\mathrm{d}\theta = \frac{1}{2}\int_0^{\pi} \ln(\sin u)\,\mathrm{d}u = \frac{1}{2}\cdot 2\int_0^{\pi/2} \ln(\sin u)\,\mathrm{d}u = I.$$

(我們使用了 $\int_0^{\pi} \ln\sin u\,\mathrm{d}u = 2\int_0^{\pi/2} \ln\sin u\,\mathrm{d}u$,因為對 $\pi/2$ 對稱。)

因此 $2I = I - \frac{\pi}{2}\ln 2$,得 $I = -\frac{\pi}{2}\ln 2$。

應用 — 統計力學:態密度

在二維 Ising 模型中,配分函數涉及如下形式的積分:

$$\ln Z = \frac{1}{2}\ln 2 + \frac{1}{2\pi^2}\int_0^{\pi}\int_0^{\pi} \ln\left[\cosh^2(2K) - \sinh(2K)(\cos\phi_1 + \cos\phi_2)\right]\mathrm{d}\phi_1\,\mathrm{d}\phi_2$$

對數-正弦積分出現在這類表達式的計算中,特別是在 Onsager 的精確解中。

6 Poisson 積分

Poisson 積分

對於 $|r| < 1$:

$$\int_0^{\pi} \ln\left(1 - 2r\cos\theta + r^2\right)\mathrm{d}\theta = 0$$

對於 $|r| > 1$:

$$\int_0^{\pi} \ln\left(1 - 2r\cos\theta + r^2\right)\mathrm{d}\theta = 2\pi\ln|r|$$

證. 定義 $I(r) = \int_0^{\pi} \ln(1 - 2r\cos\theta + r^2)\,\mathrm{d}\theta$,對於 $|r| < 1$。

注意 $I(0) = \int_0^{\pi} \ln(1)\,\mathrm{d}\theta = 0$。

步驟 1: 對 r 微分。

由定理 1.1，因為被積函數及其偏導數在 $[0, \pi]$ 上對於 $|r| < 1$ 連續：

$$I'(r) = \int_0^\pi \frac{-2\cos\theta + 2r}{1 - 2r\cos\theta + r^2}\,\mathrm{d}\theta = 2r\int_0^\pi \frac{\mathrm{d}\theta}{1 - 2r\cos\theta + r^2} - 2\int_0^\pi \frac{\cos\theta\,\mathrm{d}\theta}{1 - 2r\cos\theta + r^2}$$

步驟 2： 計算 $\int_0^\pi \frac{\mathrm{d}\theta}{1-2r\cos\theta+r^2}$。

使用 Weierstrass 代換 $t = \tan(\theta/2)$，故：

$$\cos\theta = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \quad \mathrm{d}\theta = \frac{2\,\mathrm{d}t}{1+t^2}$$

分母變換為：

$$1 - 2r\cos\theta + r^2 = 1 - 2r\frac{1-t^2}{1+t^2} + r^2 = \frac{(1-r)^2 + (1+r)^2 t^2}{1+t^2}$$

因此：

$$\int_0^\pi \frac{\mathrm{d}\theta}{1 - 2r\cos\theta + r^2} = \int_0^\infty \frac{1+t^2}{(1-r)^2 + (1+r)^2 t^2} \cdot \frac{2\,\mathrm{d}t}{1+t^2} = 2\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}t}{(1-r)^2 + (1+r)^2 t^2}$$

代入 $u = (1+r)t$：

$$= \frac{2}{1+r}\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}u}{(1-r)^2 + u^2} = \frac{2}{1+r} \cdot \frac{1}{1-r} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{1-r^2}$$

步驟 3： 計算 $\int_0^\pi \frac{\cos\theta\,\mathrm{d}\theta}{1-2r\cos\theta+r^2}$。

使用相同的代換：

$$\int_0^\pi \frac{\cos\theta\,\mathrm{d}\theta}{1 - 2r\cos\theta + r^2} = 2\int_0^\infty \frac{1-t^2}{[(1-r)^2 + (1+r)^2 t^2](1+t^2)}\,\mathrm{d}t$$

令 $\alpha = (1-r)^2$ 和 $\beta = (1+r)^2$。使用部分分式：

$$\frac{1-t^2}{(\alpha + \beta t^2)(1+t^2)} = \frac{\alpha + \beta}{(\beta - \alpha)(\alpha + \beta t^2)} - \frac{2}{(\beta - \alpha)(1+t^2)}$$

現在 $\beta - \alpha = (1+r)^2 - (1-r)^2 = 4r$ 且 $\alpha + \beta = 2(1+r^2)$。

因此：

$$\int_0^\infty \frac{1-t^2}{(\alpha + \beta t^2)(1+t^2)}\,\mathrm{d}t = \frac{1+r^2}{2r} \cdot \frac{\pi}{2(1-r^2)} - \frac{1}{2r} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{\pi(1+r^2)}{4r(1-r^2)} - \frac{\pi}{4r}$$

$$= \frac{\pi}{4r}\left(\frac{1+r^2}{1-r^2} - 1\right) = \frac{\pi}{4r} \cdot \frac{2r^2}{1-r^2} = \frac{\pi r}{2(1-r^2)}$$

故：

$$\int_0^\pi \frac{\cos\theta\,\mathrm{d}\theta}{1 - 2r\cos\theta + r^2} = 2 \cdot \frac{\pi r}{2(1-r^2)} = \frac{\pi r}{1-r^2}$$

步驟 4： 合併。

$$I'(r) = 2r \cdot \frac{\pi}{1-r^2} - 2 \cdot \frac{\pi r}{1-r^2} = \frac{2\pi r - 2\pi r}{1-r^2} = 0$$

步驟 **5**：結論。

由於對所有 $|r| < 1$ 有 $I'(r) = 0$ 且 $I(0) = 0$，我們有對於 $|r| < 1$，$I(r) = 0$。

情況 $|r| > 1$：

令 $r = 1/s$，其中 $|s| < 1$。則：

$$1 - 2r\cos\theta + r^2 = r^2\left(s^2 - 2s\cos\theta + 1\right) = r^2(1 - 2s\cos\theta + s^2)$$

故：

$$I(r) = \int_0^\pi \ln\bigl[r^2(1 - 2s\cos\theta + s^2)\bigr]\,\mathrm{d}\theta = 2\pi\ln|r| + \underbrace{\int_0^\pi \ln\bigl(1 - 2s\cos\theta + s^2\bigr)\,\mathrm{d}\theta}_{=0} = 2\pi\ln|r|$$

應用 — 位勢理論：調和函數

對於單位圓盤內的調和函數 $u(r,\theta)$，給定圓上的邊界值 $f(\phi)$，Poisson 積分公式為：

$$u(r,\theta) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{1 - r^2}{1 - 2r\cos(\theta - \phi) + r^2} f(\phi)\,\mathrm{d}\phi$$

核 $P_r(\theta) = \frac{1-r^2}{1-2r\cos\theta+r^2}$ 稱為 Poisson 核。我們證明的對數積分表明：

$$\int_0^{2\pi} \ln|1 - re^{i\theta}|^2\,\mathrm{d}\theta = 0 \quad 對於 |r| < 1$$

這與複分析中的 Jensen 公式有關。

7 反正切積分

對於 $a > 0$：

$$\int_0^\infty \frac{\tan^{-1}(ax)}{x(1+x^2)}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}\ln(1+a)$$

證．令 $I(a) = \int_0^\infty \frac{\tan^{-1}(ax)}{x(1+x^2)}\,\mathrm{d}x$，其中 $I(0) = 0$。

微分合理性：我們應用定理 1.3。偏導數為：

$$\frac{\partial}{\partial a}\frac{\tan^{-1}(ax)}{x(1+x^2)} = \frac{1}{(1+a^2x^2)(1+x^2)}$$

對於 $a \in [0, A]$，我們有 $\frac{1}{(1+a^2x^2)(1+x^2)} \leqslant \frac{1}{1+x^2}$，且 $\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} = \frac{\pi}{2} < \infty$。因此微分是合理的。

微分：

$$I'(a) = \int_0^\infty \frac{1}{(1+a^2x^2)(1+x^2)}\,\mathrm{d}x.$$

部分分式（對於 $a \neq 1$）：

$$\frac{1}{(1+a^2x^2)(1+x^2)} = \frac{1}{1-a^2}\left(\frac{1}{1+x^2} - \frac{a^2}{1+a^2x^2}\right).$$

故

$$I'(a)=\frac{1}{1-a^2}\left(\int_0^\infty\frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}-a^2\int_0^\infty\frac{\mathrm{d}x}{1+a^2x^2}\right)=\frac{1}{1-a^2}\left(\frac{\pi}{2}-a^2\cdot\frac{1}{a}\cdot\frac{\pi}{2}\right)$$
$$=\frac{1}{1-a^2}\cdot\frac{\pi}{2}(1-a)=\frac{\pi}{2(1+a)}.$$

積分：$I(a)=\frac{\pi}{2}\ln(1+a)$。

8 涉及 $\ln\left(1+a^2x^2\right)$ 的積分

對於 $a>0$：

$$\int_0^\infty\frac{\ln(1+a^2x^2)}{1+x^2}\,\mathrm{d}x=\pi\ln(1+a)$$

證. 令 $I(a)=\int_0^\infty\frac{\ln\left(1+a^2x^2\right)}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$，其中 $I(0)=0$。

微分合理性：我們應用定理 1.3。偏導數為：

$$\frac{\partial}{\partial a}\frac{\ln(1+a^2x^2)}{1+x^2}=\frac{2ax^2}{(1+a^2x^2)(1+x^2)}$$

對於 $a\in[0,A]$，我們有 $\frac{2ax^2}{(1+a^2x^2)(1+x^2)}\leqslant\frac{2Ax^2}{(1+x^2)^2}$，且 $\int_0^\infty\frac{x^2}{(1+x^2)^2}\,\mathrm{d}x<\infty$。因此微分是合理的。

微分：

$$I'(a)=\int_0^\infty\frac{2ax^2}{(1+a^2x^2)(1+x^2)}\,\mathrm{d}x.$$

使用部分分式：

$$\frac{x^2}{(1+a^2x^2)(1+x^2)}=\frac{1}{1-a^2}\left(\frac{1}{1+a^2x^2}-\frac{1}{1+x^2}\right).$$

故：

$$I'(a)=\frac{2a}{1-a^2}\left(\frac{\pi}{2a}-\frac{\pi}{2}\right)=\frac{2a}{1-a^2}\cdot\frac{\pi(1-a)}{2a}=\frac{\pi}{1+a}.$$

因此 $I(a)=\pi\ln(1+a)$。

9 習題

習題 1. 證明 $\forall a,b>0$，$\displaystyle\int_0^\infty\frac{\sin(ax)\sin(bx)}{x^2}\,\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}\min(a,b)$。

解答

使用積化和差公式：

$$\sin(ax)\sin(bx)=\frac{1}{2}\big[\cos((a-b)x)-\cos((a+b)x)\big].$$

因此：

$$\int_0^\infty\frac{\sin(ax)\sin(bx)}{x^2}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_0^\infty\frac{\cos((a-b)x)-\cos((a+b)x)}{x^2}\,\mathrm{d}x.$$

定義 $J(c)=\int_0^\infty \frac{1-\cos(cx)}{x^2}\,\mathrm{d}x$，其中 $J(0)=0$。
微分合理性：由定理 1.3，$\frac{\partial}{\partial c}\frac{1-\cos(cx)}{x^2}=\frac{\sin(cx)}{x}$。收斂性由 Dirichlet 積分理論保證：對於 $c\neq 0$，積分 $\int_0^\infty \frac{\sin(cx)}{x}\,\mathrm{d}x$ 條件收斂到 $\frac{\pi}{2}\operatorname{sgn}(c)$。
微分：$J'(c)=\int_0^\infty \frac{\sin(cx)}{x}\,\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}$（透過代換由 Dirichlet 積分得到）。
積分：對於 $c\geqslant 0$，$J(c)=\frac{\pi c}{2}$。
對於 $c<0$：由於 $\cos(cx)=\cos(|c|x)$，我們有 $J(c)=J(|c|)=\frac{\pi|c|}{2}$。
因此對所有 c，$J(c)=\frac{\pi|c|}{2}$。
現在：

$$\int_0^\infty \frac{\cos((a-b)x)-\cos((a+b)x)}{x^2}\,\mathrm{d}x=J(a+b)-J(|a-b|)=\frac{\pi(a+b)}{2}-\frac{\pi|a-b|}{2}$$

$$=\frac{\pi}{2}\big((a+b)-|a-b|\big)=\frac{\pi}{2}\cdot 2\min(a,b)=\pi\min(a,b)$$

使用恆等式 $(a+b)-|a-b|=2\min(a,b)$。
因此：

$$\int_0^\infty \frac{\sin(ax)\sin(bx)}{x^2}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\cdot\pi\min(a,b)=\frac{\pi}{2}\min(a,b)$$

$$\boxed{\int_0^\infty \frac{\sin(ax)\sin(bx)}{x^2}\,\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}\min(a,b)}$$

習題 **2.** $\forall a>0$，求 $\displaystyle\int_0^\infty xe^{-ax^2}\sin(bx)\,\mathrm{d}x$。

解答

令 $I(b)=\int_0^\infty e^{-ax^2}\cos(bx)\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a}}e^{-b^2/(4a)}$（來自 Gauss Fourier 變換）。
微分合理性：由定理 1.3，$\frac{\partial}{\partial b}(e^{-ax^2}\cos(bx))=-xe^{-ax^2}\sin(bx)$。對所有 $b\in\mathbb{R}$，$|xe^{-ax^2}\sin(bx)|\leqslant xe^{-ax^2}$，且 $\int_0^\infty xe^{-ax^2}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2a}<\infty$。因此微分是合理的。
對 b 微分：

$$I'(b)=-\int_0^\infty xe^{-ax^2}\sin(bx)\,\mathrm{d}x.$$

另外

$$I'(b)=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a}}\cdot e^{-b^2/(4a)}\cdot\left(-\frac{b}{2a}\right)=-\frac{b}{4a}\sqrt{\frac{\pi}{a}}e^{-b^2/(4a)}.$$

因此

$$\boxed{\int_0^\infty xe^{-ax^2}\sin(bx)\,\mathrm{d}x=\frac{b\sqrt{\pi}}{4a^{3/2}}e^{-b^2/(4a)}}$$

習題 **3.** 證明 $\forall a,b,c>0$，$\displaystyle\int_0^\infty \frac{e^{-ax}-e^{-bx}}{x}\sin(cx)\,\mathrm{d}x=\tan^{-1}\frac{c}{a}-\tan^{-1}\frac{c}{b}$

解答

由正文，$\forall\alpha > 0$：

$$J(\alpha) = \int_0^\infty e^{-\alpha x}\frac{\sin(cx)}{x}\,\mathrm{d}x = \tan^{-1}\frac{c}{\alpha}.$$

微分合理性：$J(\alpha) = \tan^{-1}(c/\alpha)$ 的推導使用定理 1.3。設 $f(x,\alpha) = e^{-\alpha x}\frac{\sin(cx)}{x}$，偏導數 $\frac{\partial f}{\partial\alpha} = -e^{-\alpha x}\sin(cx)$ 對於 $\alpha \geqslant \alpha_0 > 0$ 滿足 $|\frac{\partial f}{\partial\alpha}| \leqslant e^{-\alpha_0 x}$，後者可積。
我們要求的積分為：

$$\int_0^\infty \frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x}\sin(cx)\,\mathrm{d}x = \int_0^\infty \frac{e^{-ax}\sin(cx)}{x}\,\mathrm{d}x - \int_0^\infty \frac{e^{-bx}\sin(cx)}{x}\,\mathrm{d}x$$

$$= J(a) - J(b) = \tan^{-1}\frac{c}{a} - \tan^{-1}\frac{c}{b}.$$

$$\boxed{\int_0^\infty \frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x}\sin(cx)\,\mathrm{d}x = \tan^{-1}\frac{c}{a} - \tan^{-1}\frac{c}{b}}$$